参考答案

第二十一章　二次根式

例一　**解：** 由 a、b 在数轴上的位置可知，$b<-1<0<a<1$.

则 $a-b>0$，$b-1<0$，$a-1<0$.

则 $\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}+\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(b-1)^2}-\sqrt{(a-1)^2}=|a|+|b|+|a-b|+|b-1|-|a-1|=a-b+a-b+1-b-(1-a)=3a-3b$.

【点拨】 本题属于利用数与形相结合的方法解决二次根式的化简问题. 解决此类问题的关键是先将 $\sqrt{a^2}$ 转化为 $|a|$ 的形式，再根据 a 的正负去掉绝对值符号.

变式训练一

1. C　**【解析】** 由 $|a-2\sqrt{3}|+\sqrt{b-5\sqrt{2}}=0$，可知 $a=2\sqrt{3}$，$b=5\sqrt{2}$. 由三角形的三边关系可知，等腰三角形的三边长分别为 $2\sqrt{3}$、$5\sqrt{2}$、$5\sqrt{2}$. 故此三角形的周长为 $2\sqrt{3}+5\sqrt{2}+5\sqrt{2}=2\sqrt{3}+10\sqrt{2}$. 故选 C.

2. **解：** ∵2、5、m 是三角形的三边的长，

∴$5-2<m<5+2$，

即 $3<m<7$.

∴$\sqrt{(m-3)^2}+\sqrt{(m-7)^2}=|m-3|+|m-7|=m-3+7-m=4$.

例二　**解：** ∵$\alpha=45°$，∴$\angle A=45°$.

在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，

∴$\angle ABC=90°-45°=45°$.

∴$AC=BC=a$.

在 Rt△ABC 中，由勾股定理，得 $AC^2+BC^2=AB^2$，即 $2a^2=c^2$.

又∵$c=4.5\times10^3$ m，

∴$a^2=c^2\div2=(4.5\times10^3)^2\div2=\frac{81}{8}\times10^6$.

∵$a>0$，

则 $a=\sqrt{\frac{81}{8}\times10^6}=\sqrt{\frac{81}{8}}\times\sqrt{10^6}=\frac{9}{2\sqrt{2}}\times10^3=\frac{9\sqrt{2}}{4}\times10^3\approx3\,182$ (m).

故飞机的高度约为 3 182 m.

【点拨】 把实际问题抽象为几何模型，构造几何图形后进行求解，这是利用几何知识解决实际问题的常用思路，体现数学中的数与形的结合思想方法.

变式训练二

解：(1) 由题意，得 $h=200$ m，

∴ $t=\sqrt{\frac{h}{5}}=\sqrt{\frac{200}{5}}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$ (s).

故从 200 m 高空抛物到落地所需

时间为 $2\sqrt{10}$ s.

（2）由题意，得 $t=3$ s.

由 $t=\sqrt{\frac{h}{5}}$，得 $h=5t^2=5\times3^2=45$（m）.

故若从高空抛物经过了 3 s 落地，则该物体下落的高度是 45 m.

例三　2　【解析】设正三角形 ABC 的边长为 a，则 $\frac{1}{2}\times a\times\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=2\sqrt{3}$，解得 $a=2\sqrt{2}$. ∵正方形 $KHGF$ 的面积是 2，∴正方形 $KHGF$ 的边长为 $\sqrt{2}$. 则图中阴影部分的面积为 $2\sqrt{2}\times\sqrt{2}-2=2$.

【点拨】本题主要考查了正方形、正三角形的面积与二次根式的乘、除运算. 解题的关键是根据图中正三角形和正方形的面积求得大矩形的长和宽.

变式训练三

1. A　【解析】∵$a=5$，$b=6$，$c=7$，

∴ $p=\frac{5+6+7}{2}=9$. ∵ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，

∴ $\triangle ABC$ 的面积 $S=\sqrt{9\times(9-5)\times(9-6)\times(9-7)}=6\sqrt{6}$.

故选 A.

2. $\frac{5\sqrt{21}}{3}$　【解析】∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah$，

∴ $h=\frac{2S_{\triangle ABC}}{a}=\frac{2\times5\sqrt{35}}{2\sqrt{15}}=\frac{10\sqrt{35}}{2\sqrt{15}}=\frac{5\sqrt{21}}{3}$.

例四　解：∵大正方形的面积为 48 cm²，

∴大正方形的边长为 $\sqrt{48}=4\sqrt{3}$ cm.

∵小正方形的面积为 3 cm²，

∴小正方形的边长为 $\sqrt{3}$ cm.

∴长方体盒子的底面边长为 $4\sqrt{3}-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$（cm），

体积为 $(2\sqrt{3})^2\times\sqrt{3}=12\sqrt{3}$（cm³）.

【点拨】本题主要考查了正方形的面积与长方体的体积以及二次根式的加、减、乘、除运算的综合问题. 观察图形得到各边之间的关系是解本题的关键.

变式训练四

解：（1）矩形 $ABCD$ 的周长为 $2\times(8\sqrt{3}+\sqrt{98})=2\times(8\sqrt{3}+7\sqrt{2})=(16\sqrt{3}+14\sqrt{2})$（m）.

（2）由题意，得通道的面积＝矩形绿地的面积－矩形花坛的面积＝$(8\sqrt{3}\times\sqrt{98})-(\sqrt{13}+1)(\sqrt{13}-1)=56\sqrt{6}-(13-1)=(56\sqrt{6}-12)$（m²），

故购买地砖需要 $6\times(56\sqrt{6}-12)=(336\sqrt{6}-72)$（元）.

培优精练

1. 24 cm²　【解析】∵两个小正方形

的面积分别为 8 cm^2、18 cm^2，∴两个小正方形的边长分别为 $2\sqrt{2}$ cm、$3\sqrt{2}$ cm. ∴大正方形的边长为 $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$（cm）.

∴大正方形的面积为 $(5\sqrt{2})^2=50$（cm^2）. ∴剩下的阴影部分的面积之和为 $50-8-18=24$（cm^2）.

2. 解：∵ a、b、c 分别为△ABC 的三边，

∴ $a+b+c>0$，$a-b-c<0$，$b-a-c<0$，$c-b-a<0$.

则原式 $=|a+b+c|+|a-b-c|+|b-a-c|-|c-b-a|=a+b+c+b+c-a+a+c-b-a-b+c=4c$.

3. 解：（1）由题意，得 $a-\sqrt{8}=0$，$b-5=0$，$c-\sqrt{18}=0$.

∴ $a=2\sqrt{2}$，$b=5$，$c=3\sqrt{2}$.

（2）能. 理由如下：

∵ $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}>5$，且 $3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}<5$，

∴以 a、b、c 为边能构成三角形.

则三角形的周长为 $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+5=5\sqrt{2}+5$.

名卷压轴题

（1）3 【解析】∵当 $x=2$ 时，$\sqrt{x+1}=\sqrt{3}$，$\sqrt{(5-x)^2}=\sqrt{(5-2)^2}=3$，$4-(\sqrt{4-x})^2=2$，又 $3>2>\sqrt{3}$，∴△ABC 的最长边的长度是 3.

（2）解：由二次根式有意义和实际要求可得，

$$\begin{cases} x+1>0, \\ 5-x\neq 0, \\ 4-x\geqslant 0, \\ 4-(\sqrt{4-x})^2>0. \end{cases}$$

∴ $0<x\leqslant 4$.

则 $\sqrt{(5-x)^2}=|5-x|=5-x$，

$4-(\sqrt{4-x})^2=4-(4-x)=x$.

∴ $C_{\triangle ABC}=\sqrt{x+1}+\sqrt{(5-x)^2}+4-(\sqrt{4-x})^2=\sqrt{x+1}+5-x+x=\sqrt{x+1}+5$.

（3）解：由（2）可得，$C_{\triangle ABC}=\sqrt{x+1}+5$，且 $0<x\leqslant 4$.

∵ x 为整数，

∴ x 可取 1、2、3、4.

又∵要使 $C_{\triangle ABC}$ 取得最大值，

∴ x 的值从大到小依次验证.

当 $x=4$ 时，三条边的长度分别是 $\sqrt{5}$、1、4，但此时 $\sqrt{5}+1<4$，不满足三角形三边关系，∴ $x\neq 4$.

当 $x=3$ 时，三条边的长度分别是 2、2、3，满足三角形三边关系.

故此时 $C_{\triangle ABC}$ 取得最大值，为 $2+2+3=7$，符合题意.

不妨设 $a=2$，$b=2$，$c=3$，

则 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}$

$=\sqrt{\frac{1}{4}\times\left[2^2\times 2^2-\left(\frac{2^2+2^2-3^2}{2}\right)^2\right]}$

$=\sqrt{\frac{1}{4}\times\left(16-\frac{1}{4}\right)}$

$=\frac{3}{4}\sqrt{7}$.

◎二次根式　新题型探究

例题　解：(1) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

$=\frac{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

$=\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

(2) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

(方法不唯一)

【点拨】通过对二次根式阅读材料的学习，让学生体会探究新知识并运用新知识解决相应的问题.

变式训练

1. 解：原式$=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}+\frac{(\sqrt{8}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{8}-\sqrt{3})(\sqrt{8}+\sqrt{3})}=\frac{3-2\sqrt{6}+2}{3-2}+\frac{8+2\sqrt{24}+3}{8-3}=\frac{36}{5}-\frac{6\sqrt{6}}{5}$.

2. 解：原式$=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}+\frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{a+b}{a-b}$.

培优精练

(1) $\sqrt{4+\frac{1}{6}}=5\sqrt{\frac{1}{6}}$（答案不唯一）

(2) $\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$（$n$为正整数）

(3) 证明：∵左边$=\sqrt{\frac{n(n+2)+1}{n+2}}=\sqrt{\frac{n^2+2n+1}{n+2}}=\sqrt{\frac{(n+1)^2}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$，

又∵右边$=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$，

∴左边＝右边，

即$\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$（$n$为正整数）.

(4) ①$2\ 023\sqrt{2}$　【解析】原式$=2\ 023\sqrt{\frac{1}{2\ 024}}\times\sqrt{4\ 048}=2\ 023\sqrt{2}$.

②18　【解析】由上述规律，可得$\begin{cases}a=9-1,\\ b=a+2.\end{cases}$则$\begin{cases}a=8,\\ b=10.\end{cases}$故$a+b=8+10=18$.

第二十二章　一元二次方程

第1讲　一元二次方程及其解法

例一　D　【解析】设切去的正方形的边长为x cm，则盒子底面的长为$(50-2x)$ cm，宽为$(30-2x)$ cm.

根据题意，得$(50-2x)(30-2x)=800$．故选 D.

【点拨】本题将矩形的切割、折叠与一元二次方程建立联系，体现数学中的数形结合思想．解决问题的关键就是读懂题意找出等量关系.

变式训练一

1. B　【解析】根据题意知，小道的宽为 x m，则 6 个小长方形可以合成一个长$(20-2x)$m、宽$(15-x)$m 的大长方形，由题意，得$(20-2x)(15-x)=252$．故选 B.

2. A　【解析】把两条小道分别移到矩形的上边和左边，如下图所示.

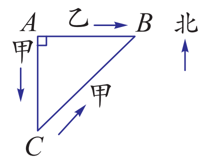
则空白部分矩形的长为$(32-x)$ m，宽为$(20-x)$ m．列出方程为$(32-x)(20-x)=600$．故选 A.

例二　D　【解析】∵竹子原高一丈(1 丈＝10 尺)，折断处离地面的高度为 x 尺，∴竹梢到折断处的长度为$(10-x)$尺．依题意，得$x^2+3^2=(10-x)^2$．故选 D.

【点拨】本题主要考查了勾股定理与一元二次方程的应用．解决此类问题的关键就是利用勾股定理得出等量关系.

变式训练二

1. $(7x-10)^2=10^2+(3x)^2$　【解析】根据题意，画出图形如下图所示．设甲、乙二人出发后在 B 处相遇的时间为 x，则乙行的路程为 $AB=3x$，甲行的路程为 $AC+BC=7x$．∵ $AC=10$，∴ $BC=7x-10$．又∵ $\angle A=90°$，∴$BC^2=AC^2+AB^2$，即$(7x-10)^2=10^2+(3x)^2$.



2. $15^2+x^2=(24-x)^2+9^2$　【解析】∵C、D 两村庄到收购站 P 的距离相等，∴$PC=PD$．∵$DB\perp AB$，$CA\perp AB$，∴$\angle A=\angle B=90°$．设 $AP=x$ km，则 $PB=(24-x)$ km．在 Rt△APC 中，$AC=15$ km，$PC^2=AC^2+PA^2$，则 $PC^2=15^2+x^2$．在 Rt△PBD 中，$DB=9$ km，$PD^2=PB^2+DB^2$，则 $PD^2=(24-x)^2+9^2$．∴$PC^2=PD^2$，即$15^2+x^2=(24-x)^2+9^2$.

例三　解：(1) 设生态园垂直于墙的边长为 x m，

则平行于墙的边长为$(42-3x)$m.

根据题意，得$(42-3x)x=144$.

整理，得 $x^2-14x+48=0$.

解得 $x_1=6$，$x_2=8$.

∵$x_2=8>7$，

∴不符合题意，舍去.

故 $x=6$，即生态园垂直于墙的边长为 6 m.

(2) 不能. 理由如下：

若生态园的面积能达到 150 m^2，

则$(42-3x)x=150$.

整理，得 $x^2-14x+50=0$.

∵$\Delta=(-14)^2-4\times1\times50=-4<0$，

∴该方程无解.

故生态园的面积不能达到 150 m^2.

【点拨】将矩形的面积与一元二次方程以及根的判别式建立联系，体现数与形的结合. 解决本题的关键就是利用矩形的面积公式列出一元二次方程.

变式训练三

1. **解：**设这个茶园的一边 AB 的长为 x m，

则另一边 BC 的长为 $(69+1-2x)$ m.

根据题意，得 $x(69+1-2x)=600$.

整理，得 $x^2-35x+300=0$.

解得 $x_1=15$，$x_2=20$.

当 $x=15$ 时，$70-2x=40>35$，不符合题意，舍去；

当 $x=20$ 时，$70-2x=30<35$，符合题意.

故这个茶园的一边 AB 的长为 20 m.

2. **解：**(1) 设平行于墙的一边 DE 的长为 x m，则另一边 CD 的长为 $\frac{1}{2}(40-x)$m. 由题意，得

$\frac{1}{2}(40-x)x=150$.

解得 $x_1=10$，$x_2=30$.

∵$x=30>15$，不符合题意，舍去.

∴$x=10$.

(2) ∵$DE=x$ m，则 $BF=(x-15)$ m，$EF=\frac{55-2x}{2}$ m.

由题意，得 $x\cdot\frac{55-2x}{2}=150$.

解得 $x_1=20$，$x_2=\frac{15}{2}$.

∵$x=\frac{15}{2}<15$，不符合题意，舍去.

∴$x=20$.

∴$BF=5$ m.

培优精练

1. D　**【解析】**设种花区域的宽度为 x m，则空白部分矩形的宽为 $(20-x)$ m，长为 $(30-2x)$ m. 故可列方程为$(30-2x)(20-x)=\frac{3}{4}\times20\times30$. 故选 D.

2. $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$　**【解析】**根据题意，得 $x^2+x-(2x-1)=5$. 整理，得

$x^2-x-4=0$. ∵$\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-4)=17>0$. 则 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$. ∴$x_1=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$，$x_2=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$. ∵点 A 在数轴的负半轴上，∴$2x-1<0$，即 $x<\frac{1}{2}$. ∴$x=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$. 经检验，满足点 B 在数轴的正半轴上，故 x 的值为$\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

3. (1) $(36-2x)$

(2) **解：** 由题意，得$x(36-2x)=144$.

解得 $x_1=6$，$x_2=12$.

当 $x=6$ 时，$36-2x=24>20$，不符合题意，舍去.

当 $x=12$ 时，$36-2x=12<20$，符合题意.

∴$x=12$.

故当花圃的面积为 144 m^2 时，垂直于墙的一边的长为 12 m.

名卷压轴题

解： (1) 设与墙垂直的一边长为 x m，则平行于墙的一边长为$(26-2x+2)$m.

根据题意，得 $x(28-2x)=80$.

整理，得 $x^2-14x+40=0$.

解得 $x_1=4$，$x_2=10$.

当 $x=4$ 时，$28-2x=20>12$，不符合题意，舍去.

当 $x=10$ 时，$28-2x=8<12$，符合题意.

∴$x=10$，$28-2x=8$.

∴这个车棚的两边分别应为 10 m 和 8 m.

(2) 设小路的宽度为 a m，根据题意，得 $(8-2a)(10-a)=54$.

整理，得 $a^2-14a+13=0$.

解得 $a_1=13>10$（舍去），$a_2=1$.

故小路的宽度是 1 m.

第 2 讲　实践与探索

例一　解：（方法一）过点 D 作 $DF\perp BC$ 于点 F，如图 1.

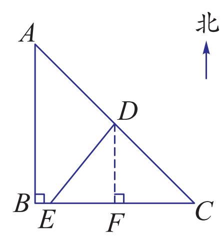


图 1

∵$AB=BC=100$ n mile，$AD=DC$，

∴$CF=DF=50$ n mile.

设 $DE=x$ n mile，$0<x<70.7$，

则 $EF=100\times2-50-2x=(150-2x)$(n mile).

在 Rt$\triangle DEF$ 中，由勾股定理，得 $x^2=50^2+(150-2x)^2$.

解得 $x_1=\frac{300-50\sqrt{6}}{3}\approx59.2$，$x_2=\frac{300+50\sqrt{6}}{3}\approx140.8$（不合题

意，舍去).

∴相遇时补给船大约航行了 59.2 n mile.

（方法二）过点 E 作 $EH\perp AC$ 于点 H，如图 2.

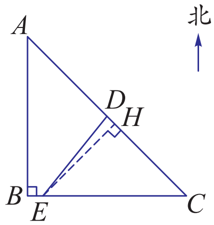


图 2

设 $DE=x$ n mile，$0<x<70.7$，

则 $EC=(200-2x)$ n mile，

$EH=(100\sqrt{2}-\sqrt{2}x)$ n mile，

$CH=(100\sqrt{2}-\sqrt{2}x)$ n mile，

$DH=(\sqrt{2}x-50\sqrt{2})$ n mile.

在 Rt△DHE 中，由勾股定理，得 $(\sqrt{2}x-50\sqrt{2})^2+(100\sqrt{2}-\sqrt{2}x)^2=x^2$.

解得 $x_1=\dfrac{300-50\sqrt{6}}{3}\approx59.2$，

$x_2=\dfrac{300+50\sqrt{6}}{3}\approx140.8$（不合题意，舍去).

∴相遇时补给船大约航行了 59.2 n mile.

【点拨】本题考查了勾股定理的实际应用．在应用勾股定理解决实际问题时，勾股定理与方程的结合是解决实际问题常用的方法，关键是从题中构造直角三角形这一数学模型，画出示意图，领会数形结合的思想.

变式训练一

解：能．理由如下：

在正方形 $ABCD$ 中，

∵$AB=5$ cm，∴$AC=5\sqrt{2}$ cm.

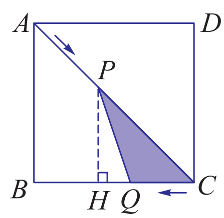
∵动点 P 以 $\sqrt{2}$ cm/s 的速度从点 A 出发，沿 AC 向点 C 移动，同时动点 Q 以 1 cm/s 的速度从点 C 出发，沿 CB 向点 B 移动，

∴$AP=\sqrt{2}t$ cm，$CQ=t$ cm.

∴$PC=(5\sqrt{2}-\sqrt{2}t)$ cm，

$BQ=(5-t)$ cm.

过点 P 作 $PH\perp BC$ 于点 H，如下图所示.



则 $PH=HC=\dfrac{PC}{\sqrt{2}}=(5-t)$ cm.

∴$HQ=|HC-CQ|=|5-2t|$ cm.

在 Rt△PHQ 中，∵$\angle PHQ=90°$，

∴$PH^2+HQ^2=PQ^2$.

∵PQ 的长度等于 $\sqrt{10}$ cm，

∴ $(5-t)^2+(5-2t)^2=10$.

解得 $t_1=2$，$t_2=4$.

经检验，均符合题意.

故在 P、Q 两点移动的过程中，

PQ 的长度能等于 $\sqrt{10}$ cm，此时 t 的值为 2 或 4.

例二 **解**：设 P、Q 两点分别从 A、B 同时出发，经过 t s 时，$\triangle PQB$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 的 $\frac{3}{8}$.

则 $BP=AB-AP=(6-t)$ cm，$BQ=2t$ cm.

$\because$ $\triangle PQB$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 的 $\frac{3}{8}$，

即 $\frac{1}{2}(6-t)2t=\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}\times6\times8$.

整理，得 $(t-3)^2=0$.

解得 $t=3$. 经检验，符合题意.

故经过 3 s 时，$\triangle PQB$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 的 $\frac{3}{8}$.

【点拨】本题将三角形上的动点移动与一元二次方程相结合，主要体现了三角形的面积与一元二次方程的联系，探索中体现了数形结合思想. 解决此类问题的关键就是正确找出等量关系建立方程求解.

变式训练二

解：(1) 设运动 x s 时，$\triangle PBQ$ 的面积等于 8 cm^2，$0<x\leqslant6$，

则 $AP=x$ cm，$QB=2x$ cm.

$\therefore PB=(6-x)$ cm.

$\therefore \frac{1}{2}(6-x)2x=8$.

解得 $x_1=2$，$x_2=4$.

$\therefore$ 运动 2 s 或 4 s 时，$\triangle PBQ$ 的面积等于 8 cm^2.

(2) 设运动 y s 时，$\triangle PDQ$ 的面积等于 28 cm^2，$0<y\leqslant6$，

$\because S_{矩形ABCD}-S_{\triangle APD}-S_{\triangle BPQ}-S_{\triangle CDQ}=S_{\triangle PDQ}$，

$\therefore 12\times6-\frac{1}{2}\times12y-\frac{1}{2}\times2y(6-y)-\frac{1}{2}\times6\times(12-2y)=28$.

化简整理，得 $y^2-6y+8=0$.

解得 $y_1=2$，$y_2=4$.

$\therefore$ 运动 2 s 或 4 s 时，$\triangle PDQ$ 的面积等于 28 cm^2.

(3) 设运动 t s 时，$PQ\perp DQ$，$0<t\leqslant6$，

$\because DP^2=AP^2+AD^2=t^2+12^2$，

$PQ^2=BP^2+BQ^2=(6-t)^2+(2t)^2$，

$DQ^2=CQ^2+CD^2=(12-2t)^2+6^2$，

在 Rt$\triangle PQD$ 中，$PQ^2+DQ^2=DP^2$，

$\therefore (6-t)^2+(2t)^2+(12-2t)^2+6^2=t^2+12^2$.

整理，得 $2t^2-15t+18=0$.

解得 $t_1=6$，$t_2=\frac{3}{2}$.

$\therefore$ 运动 $\frac{3}{2}$ s 或 6 s 时，$PQ\perp DQ$.

例三 **解**：$\because AB=AC=20$ cm，$\angle BAC=90°$，

$\therefore BC=20\sqrt{2}$ cm.

设 EF 为 x cm，

则 $BD=EC=x$ cm，

$DE=(20\sqrt{2}-2x)$ cm.

由题意，得 $x(20\sqrt{2}-2x)=75$.

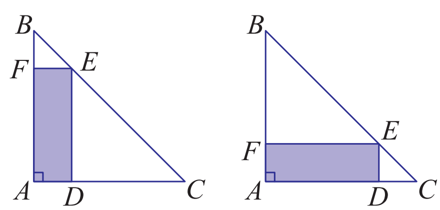
化简，得 $2x^2-20\sqrt{2}x+75=0$.

解得 $x_1=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，$x_2=\frac{15\sqrt{2}}{2}$.

则 $DE=15\sqrt{2}=\frac{3}{4}\times 20\sqrt{2}=\frac{3}{4}BC=\frac{6}{8}BC$ 或 $DE=5\sqrt{2}=\frac{1}{4}\times 20\sqrt{2}=\frac{1}{4}BC=\frac{2}{8}BC$.

因此只要将 BC 边 8 等分，两边各除去 1 等分或 3 等分，留下中间 6 等分或 2 等分就是矩形的一边 DE，再分别过点 D、E 作 BC 的垂线，交 AB、AC 于 H、F 两点，连接 HF，则四边形 $DEFH$ 就是所要裁出的矩形.

本题还有别的裁法，如下图.



设 $AF=x$ cm，

则 $EF=(20-x)$cm.

由题意，得$x(20-x)=75$.

化简，得 $x^2-20x+75=0$.

解得 $x_1=15$，$x_2=5$.

经检验，$x_1=15$，$x_2=5$ 都符合题意.

因此只要在直角边 AB 上截取 $AF=5$ cm 或 $AF=15$ cm，再过点 F 作 $EF\perp AB$ 交 BC 于点 E，过点 E 作 $DE\perp AC$ 交 AC 于点 D，则四边形 $ADEF$ 就是所要裁出的矩形.

【点拨】本题主要考查了一元二次方程与等腰直角三角形结合，锻炼动手实际操作能力，在探索中体现了数形结合思想与方程思想. 解决此类问题的关键就是求出矩形的长与宽.

变式训练三

解：设长方体箱子的底面宽为 x m，则长为$(x+2)$ m.

依题意，得 $x(x+2)\times 1=35$.

整理，得 $x^2+2x-35=0$.

解得 $x_1=-7$（舍去），$x_2=5$.

$\therefore x+2=7$.

则长方体箱子底面的长为 7 m，宽为 5 m.

由长方体展开图可知，所买矩形铁皮的面积为 $(7+2)\times(5+2)=63$ (m^2).

∴小李买这张矩形铁皮共花了 $63\times 30=1\,890$（元）.

培优精练

1. **解：**设银边的宽度为 x cm，

依题意，得$(12+2x)(8+2x)-12\times 8=12\times 8$.

整理，得 $x^2+10x-24=0$.

解得 $x_1=2$，$x_2=-12$.

经检验，$x=-12$ 不合题意，舍去.

$\therefore x=2$.

即银边的宽度应该是 2 cm.

2. **解**：（1）设剪成的一段 $AO=x$ cm，则 $OB=(48-x)$cm.

依题意，得 $\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{48-x}{4}\right)^2=80$.

整理，得 $x^2-48x+512=0$.

解得 $x_1=16$，$x_2=32$.

故剪成的两段绳子的长分别为 16 cm、32 cm.

（2）不能. 理由如下：

设剪成的较短的一段为 m cm，

则较长的一段为 $(48-m)$ cm.

由题意，得 $\left(\frac{m}{4}\right)^2+\left(\frac{48-m}{4}\right)^2=170$.

整理，得 $m^2-48m-208=0$.

解得 $m_1=52>48$，舍去；

$m_2=-4<0$，舍去.

故这两个正方形的面积之和不可能等于 170 cm^2.

3. **解**：（1）设动点 P 从点 A 出发移动 x 个单位长度时，平行四边形 $PQCR$ 的面积等于 7，依题意，得

$\frac{1}{2}\times 8^2-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}(8-x)^2=7$.

解得 $x_1=1$，$x_2=7$.

经检验，均符合题意.

故运动时间是 $\frac{1}{2}$ s 或 $\frac{7}{2}$ s，

即当动点 P 从点 A 出发移动 $\frac{1}{2}$ s 或 $\frac{7}{2}$ s 时，平行四边形 $PQCR$ 的面积等于 7 cm^2.

（2）由题意，得

$\frac{1}{2}\times 8^2-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}(8-x)^2=16$.

解得 $x_1=x_2=4$.

经检验，符合题意.

此时运动时间为 $\frac{4}{2}=2$（s）.

即动点 P 从点 A 出发移动 2 s 时，平行四边形 $PQCR$ 的面积等于 16.

令 $\frac{1}{2}\times 8^2-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}(8-x)^2=20$，

整理，得 $x^2-8x+20=0$.

$\because \Delta=(-8)^2-80=-16<0$，

$\therefore$ 此方程无解.

$\therefore$ 平行四边形 $PQCR$ 的面积不能为 20.

4. **解**：（1）设运动 t s，四边形 $PBCQ$ 的面积是矩形 $ABCD$ 面积的 $\frac{4}{9}$.

则 $BP=(6-2t)$cm，$CQ=t$ cm.

根据题意，得 $\frac{1}{2}(t+6-2t)\times 2=2\times 6\times\frac{4}{9}$.

解得 $t=\frac{2}{3}$.

故运动$\frac{2}{3}$ s 时，四边形 $PBCQ$ 的面积是矩形 $ABCD$ 面积的$\frac{4}{9}$.

（2）存在．理由如下：

设经过 t s 时，点 P、Q 之间的距离为$\sqrt{5}$ cm.

①当 $0<t\leqslant 3$ 时，过点 Q 作 $QE\perp AB$ 于点 E，如图 1、图 2.

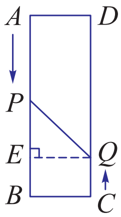


图 1

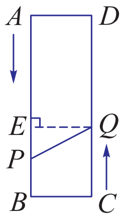


图 2

则 $AP=2t$ cm，$BE=CQ=t$ cm，

$PE=|PB-BE|=|(6-2t)-t|=|6-3t|$ cm.

在 Rt△PEQ 中，

$PE^2+EQ^2=PQ^2$，

即$(6-3t)^2+2^2=(\sqrt{5})^2$.

整理，得 $9t^2-36t+35=0$.

解得 $t_1=\frac{7}{3}$，$t_2=\frac{5}{3}$.

经检验，均符合题意.

②当 $3<t\leqslant 4$ 时，如图 3.

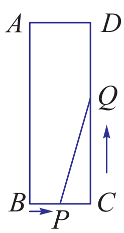


图 3

则 $PC=(8-2t)$ cm，$CQ=t$ cm.

在 Rt△PCQ 中，

$PC^2+CQ^2=PQ^2$，

即$(8-2t)^2+t^2=(\sqrt{5})^2$.

整理，得 $5t^2-32t+59=0$.

$\because \Delta=(-32)^2-4\times 5\times 59=-156<0$，

$\therefore$方程无解.

综上所述，当运动$\frac{7}{3}$ s 或$\frac{5}{3}$ s 时，P、Q 两点之间的距离为$\sqrt{5}$ cm.

名卷压轴题

解：（1）①当 $0<t\leqslant 2$ 时，

如图 1，过点 Q 作 $QE\perp AB$ 于点 E.

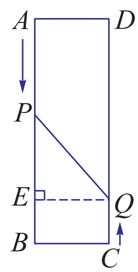


图 1

$\therefore \angle PEQ=90°$.

$\because \angle B=\angle C=90°$，

$\therefore$四边形 $BCQE$ 是矩形.

$\therefore EQ=BC=2$ cm，

$PE=PB-CQ=6-2t-t=(6-3t)$ cm.

在 Rt△PQE 中，由勾股定理，得$(6-3t)^2+2^2=3^2$.

整理，得 $9t^2-36t+31=0$.

解得 $t_1=\dfrac{6+\sqrt{5}}{3}$，$t_2=\dfrac{6-\sqrt{5}}{3}$.

$\because 0<t\leqslant 2$，

$\therefore t=\dfrac{6+\sqrt{5}}{3}$舍去.

$\therefore t=\dfrac{6-\sqrt{5}}{3}$.

②如图 2，当 $2<t\leqslant 3$ 时，过点 P 作 $PE\perp CD$ 于点 E.

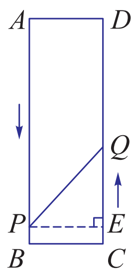


图 2

$\therefore PE=BC=2$ cm，

$QE=QC-PB=(3t-6)$ cm.

在 Rt△PQE 中，由勾股定理，得

$PE^2+QE^2=PQ^2$，

即 $4+(3t-6)^2=9$.

整理，得 $9t^2-36t+31=0$.

解得 $t_1=\dfrac{6+\sqrt{5}}{3}$，$t_2=\dfrac{6-\sqrt{5}}{3}$.

$\because 2<t\leqslant 3$，

$\therefore t=\dfrac{6+\sqrt{5}}{3}$.

综上所述，当 $t=\dfrac{6\pm\sqrt{5}}{3}$时，点 P 和点 Q 的距离是 3 cm.

(2) ①如图 3，当 $PQ=DQ$ 时，过点 Q 作 $QE\perp AB$ 于点 E.

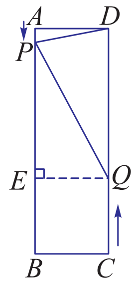


图 3

$\therefore \angle PEQ=90^\circ$.

$\because \angle B=\angle C=90^\circ$，

$\therefore$四边形 $BCQE$ 是矩形.

$\therefore QE=BC=2$ cm，

$BE=CQ=t$ cm.

$\because AP=2t$ cm，

$\therefore PE=6-2t-t=(6-3t)$ cm，

$PQ=DQ=(6-t)$ cm.

在 Rt△PQE 中，由勾股定理，得

$(6-3t)^2+4=(6-t)^2$.

整理，得 $2t^2-6t+1=0$.

解得 $t_1=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$，$t_2=\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}$.

经检验，均符合题意.

②如图 4，当 $PD=PQ$ 时，过点 P 作 $PE\perp DQ$ 于点 E.

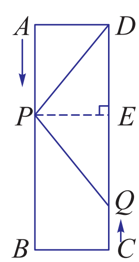


图 4

$\therefore DE=QE=\dfrac{1}{2}DQ$，$\angle PED=90^\circ$.

$\because \angle B=\angle C=90^\circ$，

∴四边形 $BCEP$ 是矩形.

∴$PE=BC=2$ cm.

∵$DQ=(6-t)$ cm，

∴$DE=\frac{6-t}{2}$ cm.

又 $AP=2t$ cm，四边形 $ADEP$ 为矩形，

∴$AP=DE$，

即 $2t=\frac{6-t}{2}$. 解得 $t=\frac{6}{5}$.

经检验，符合题意.

综上所述，当 t 为 $\frac{3\pm\sqrt{7}}{2}$ 或 $\frac{6}{5}$ 时，$\triangle PQD$ 是以 PQ 为腰的等腰三角形.

◎一元二次方程　新题型探究

例题　(1) $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{5}$（答案不唯一）

【解析】根据题意，得能构成“和谐三数组”的实数有 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{5}$.

理由：∵$\frac{1}{2}$的倒数为 2，$\frac{1}{3}$的倒数为 3，$\frac{1}{5}$的倒数为 5，又 $2+3=5$，

∴$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{5}$能构成“和谐三数组”.

(2) **证明**：∵x_1、x_2 是关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$（a、b、c 均不为 0）的两根，

∴$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.

∴$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=-\frac{b}{c}$.

∵x_3 是关于 x 的方程 $bx+c=0$（b、c 均不为 0）的解，

∴$x_3=-\frac{c}{b}$.

∴$\frac{1}{x_3}=-\frac{b}{c}$.

∴$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_3}$.

∴x_1、x_2、x_3 可以构成“和谐三数组”.

【点拨】本题主要考查了新定义“和谐三数组”的理解和运用，一元二次方程根与系数的关系. 正确掌握一元二次方程根与系数的关系是解本题的关键.

变式训练

解：(1) $\begin{vmatrix}5&6\\7&8\end{vmatrix}=5\times8-6\times7=-2$.

(2) 由 $x^2-4x+4=0$，得

$(x-2)^2=0$.

∴$x=2$.

∴$\begin{vmatrix}x+1&2x\\x-1&2x-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&4\\1&1\end{vmatrix}=3\times1-4\times1=-1$.

培优精练

1. A　【解析】∵方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）是“凤凰方程”，∴$a+b+c=0$. ∴$b=-a-c$. 又方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）有两个相

等的实数根，$\therefore \Delta = b^2-4ac=0$. $\therefore (-a-c)^2-4ac=0$. $\therefore (a-c)^2=0$. $\therefore a=c$. 故选 A.

2. ②③ 【解析】研究一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 是"倍根方程"的一般性结论，设其中一个根为 t，则另一个根为 $2t$，$\therefore ax^2+bx+c=a(x-t)(x-2t)=ax^2-3atx+2at^2$. 则 $b=-3at$，$c=2at^2$. $\therefore b^2-\frac{9}{2}ac=(-3at)^2-\frac{9}{2}a(2at^2)=0$. 记 $K=b^2-\frac{9}{2}ac$，即 $K=0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 为"倍根方程".

对于①，$K=b^2-\frac{9}{2}ac=(-1)^2-\frac{9}{2}\times1\times(-2)=10$，故方程 $x^2-x-2=0$ 不是"倍根方程"；

对于②，将 $(x-2)(mx+n)=0$ 整理，得 $mx^2+(n-2m)x-2n=0$. $\because$ 方程 $(x-2)(mx+n)=0$ 是"倍根方程"，$\therefore K=b^2-\frac{9}{2}ac=(n-2m)^2-\frac{9}{2}m(-2n)=0$，即 $4m^2+5mn+n^2=0$. 故②正确；

对于③，由题意，得 $pq=2$. $\because K=b^2-\frac{9}{2}ac=3^2-\frac{9}{2}pq=0$，$\therefore$ 方程 $px^2+3x+q=0$ 是"倍根方程". 故所有正确的说法有②③.

第二十三章　图形的相似

第 1 讲　成比例线段、相似图形

例一　D　【解析】$\because DE\parallel BC$，$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{3EC}{3EC+EC}=\frac{3EC}{4EC}=\frac{3}{4}$. $\therefore AD=\frac{3}{4}AB$. 又 $\because AB=8$，$\therefore AD=\frac{3}{4}\times8=6$. 故选 D.

【点拨】本题主要考查了平行线分线段成比例. 由平行线分线段成比例得出比例式是解本题的关键.

变式训练一

1. $\frac{2}{5}$　【解析】$\because FD\parallel BC$，$\frac{AF}{FB}=\frac{2}{3}$. $\therefore \frac{AF}{FB}=\frac{AD}{DC}=\frac{2}{3}$. $\therefore \frac{AD}{AC}=\frac{2}{5}$. 又 $\because DE\parallel AB$，$\therefore \frac{BE}{BC}=\frac{AD}{AC}=\frac{2}{5}$.

2. $\frac{3}{2}$　【解析】设 $AF=x$，则 $CE=AD=DF+AF=3+x$. $\because FE\parallel AC$，$\therefore \frac{DF}{AF}=\frac{DE}{CE}$，即 $\frac{3}{x}=\frac{5}{3+x}$. 解得 $x=\frac{9}{2}$. $\therefore AF=\frac{9}{2}$. $\because FE\parallel DB$，$\therefore \frac{AE}{EB}=\frac{AF}{DF}=\frac{\frac{9}{2}}{3}=\frac{3}{2}$.

例二　A　【解析】$\because AH=2$，$HB=1$，$\therefore AB=AH+HB=2+1=3$.

$\because l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，$\therefore \dfrac{DE}{EF}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{3}{5}$.

故选 A.

【点拨】本题主要考查了平行线分线段成比例. 利用平行线分线段成比例得出比例式是解本题的关键.

变式训练二

1. B　【解析】$\because DE \parallel FG \parallel BC$，$DB=4FB$，$\therefore \dfrac{EG}{GC}=\dfrac{DF}{FB}=\dfrac{DB-FB}{FB}=\dfrac{3FB}{FB}=\dfrac{3}{1}=3$，即 $EG=3GC$. 故选 B.

2. 解：$\because AD \parallel EB \parallel FC$，

$\therefore \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$.

$\because AB=9$，$BC=6$，$EF=5$，

$\therefore \dfrac{9}{6}=\dfrac{DE}{5}$.

$\therefore DE=\dfrac{15}{2}$.

例三　证明：$\because \angle GEA=\angle EAF=\angle GFA=90^\circ$，

∴四边形 $AFGE$ 为矩形.

∵四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore AC$ 平分 $\angle DAB$.

$\because GE \perp AD$，$GF \perp AB$，

$\therefore GE=GF$.

∴四边形 $AFGE$ 为正方形.

$\therefore \dfrac{AF}{AB}=\dfrac{GF}{BC}=\dfrac{EG}{DC}=\dfrac{AE}{AD}$，

$\angle EAF=\angle DAB$，$\angle AFG=\angle ABC$，$\angle EGF=\angle DCB$，$\angle AEG=\angle ADC$，

∴四边形 $AFGE$ 与四边形 $ABCD$ 相似.

【点拨】判定两个多边形相似，要依据题设给出的条件证明两个多边形对应边成比例，对应角相等，二者缺一不可.

变式训练三

$1+\sqrt{5}$　【解析】∵矩形 $CDFE$ 与矩形 $ABCD$ 相似，$\therefore \dfrac{CD}{AD}=\dfrac{DF}{CD}$. 由翻折的性质，得 $AF=AB=CD=2$. $\therefore \dfrac{2}{AD}=\dfrac{AD-2}{2}$. 整理，得 $AD^2-2AD-4=0$. 解得 $AD=1+\sqrt{5}$（负根已舍去）. 故 AD 的长为 $1+\sqrt{5}$.

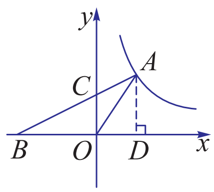
培优精练

1. $\dfrac{1}{4}$　【解析】$\because l_1 \parallel l_2$，$AE=EF=1$，$\therefore \dfrac{CE}{EG}=\dfrac{AE}{EF}=1$. $\therefore CE=EG$. 又 $\because \angle AEC=\angle FEG$，$\therefore \triangle AEC \cong \triangle FEG$（SAS）. $\therefore AC=FG$. $\because l_2 \parallel l_3$，$\therefore \dfrac{EG}{ED}=\dfrac{EF}{EB}=\dfrac{EF}{EF+FB}=\dfrac{1}{1+3}=\dfrac{1}{4}$. $\therefore \dfrac{AC}{BD}=\dfrac{FG}{BD}=\dfrac{EG}{ED}=\dfrac{1}{4}$.

2. 24　【解析】如图，过点 A 作 $AD \perp x$ 轴，垂足为 D. $\because OC \parallel AD$，$\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore \dfrac{OD}{OB}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times 24=12.$

又$\because S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}|k|=12$，$\therefore k=\pm 24$．又$\because k>0$，$\therefore k=24$．



3. 解：$\because a /\!/ b /\!/ c$，

$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}.$

$\because AB=2$，$BC=4$，$DE=3$，

$\therefore \frac{2}{4}=\frac{3}{EF}$．解得 $EF=6$．

故 EF 的长为 6．

4. 解：不相似．理由如下：

$\because$矩形 $ABCD$ 的长 $AD=3\ \text{m}=300\ \text{cm}$，

宽 $AB=1.5\ \text{m}=150\ \text{cm}$，

矩形 $A'B'C'D'$ 的长 $A'D'=300+2\times 7.5=315$（cm），

宽 $A'B'=150+2\times 7.5=165$（cm），

$\frac{AD}{A'D'}=\frac{300}{315}$，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{150}{165}=\frac{300}{330}$，

$\therefore \frac{AD}{A'D'}\neq\frac{AB}{A'B'}.$

故矩形 $ABCD$ 与矩形$A'B'C'D'$不相似．

名卷压轴题

（1）解：$\because \angle DAE=\angle BAC=\alpha$，

$\therefore \angle DAE-\angle BAD=\angle BAC-\angle BAD$，

即$\angle BAE=\angle CAD$．

在$\triangle ABE$ 和$\triangle ACD$ 中，

$$\begin{cases} AB=AC, \\ \angle BAE=\angle CAD, \\ AE=AD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle ACD$（SAS）．

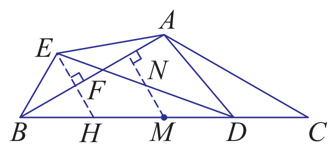
$\therefore BE=CD$．

$\because M$ 为 BC 的中点，

$\therefore BM=CM$．

$\therefore BE+MD=CD+MD=CM=BM$．

（2）证明：如下图，作 $EH\perp AB$ 交 BC 于点 H，交 AB 于点 F，作 $MN\perp AB$ 交 ED 于点 N．



$\because \triangle ABE\cong\triangle ACD$，

$\therefore \angle ABE=\angle ACD$．

$\because AB=AC$，

$\therefore \angle ACD=\angle ABC$．

$\therefore \angle ABE=\angle ABD$．

在$\triangle BEF$ 和$\triangle BHF$ 中，

$$\begin{cases} \angle EBF=\angle HBF, \\ BF=BF, \\ \angle BFE=\angle BFH, \end{cases}$$

$\therefore \triangle BEF\cong\triangle BHF$（ASA）．

$\therefore BE=BH$．

由（1）知，$BE+MD=BM$，

$\therefore MD=BM-BE=BM-BH=$

MH.

$\because MN \perp AB$，$EH \perp AB$，

$\therefore MN \parallel EH$.

$\therefore \frac{EN}{ND}=\frac{HM}{MD}=1$.

$\therefore EN=ND$.

第 2 讲　相似三角形的判定与性质

例一　(1) **证明**：$\because CD$ 是边 AB 上的高，

$\therefore \angle ADC=\angle CDB=90°$.

$\because \frac{AD}{CD}=\frac{CD}{BD}$，

$\therefore \triangle ACD \backsim \triangle CBD$.

(2) **解**：$\because \triangle ACD \backsim \triangle CBD$，

$\therefore \angle A=\angle BCD$.

在 $\triangle ACD$ 中，$\angle ADC=90°$，

$\therefore \angle A+\angle ACD=90°$.

$\therefore \angle BCD+\angle ACD=\angle A+\angle ACD=90°$，

即 $\angle ACB=90°$.

【点拨】 本题主要考查了相似三角形的判定与性质．正确理解相似三角形的判定定理“两边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似”是解本题的关键．

变式训练一

1. **证明**：$\because AB=6$，$BD=2$，

$\therefore AD=4$.

$\because AC=8$，$CE=5$，

$\therefore AE=3$.

$\therefore \frac{AE}{AB}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，$\frac{AD}{AC}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

$\therefore \frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}$.

又 $\angle EAD=\angle BAC$，

$\therefore \triangle AED \backsim \triangle ABC$.

2. (1) **证明**：$\because AB=AC$，

$\therefore \angle B=\angle C$.

$\because \angle ADE+\angle BDE=\angle ADB=\angle C+\angle CAD$，$\angle ADE=\angle C$，

$\therefore \angle BDE=\angle CAD$.

又 $\angle B=\angle C$，

$\therefore \triangle BDE \backsim \triangle CAD$.

(2) **解**：由 (1)，得 $\frac{DB}{AC}=\frac{BE}{CD}$.

$\because AB=AC=5$，$BC=8$，$CD=2$，

$\therefore DB=BC-CD=6$.

$\therefore BE=\frac{DB\times CD}{AC}=\frac{6\times 2}{5}=\frac{12}{5}$.

例二　**解**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore AB \parallel CD$，$AB=CD$，$OB=OD$.

$\therefore \triangle DEF \backsim \triangle BEA$.

$\therefore \frac{DF}{BA}=\frac{DE}{BE}$.

$\because$ 点 E 为 OD 的中点，

$\therefore \frac{DE}{DO}=\frac{1}{2}$.

$\therefore \frac{DE}{BD}=\frac{DE}{2DO}=\frac{1}{4}$.

$\therefore \frac{DF}{BA}=\frac{DE}{BE}=\frac{1}{3}$.

$\therefore \dfrac{DF}{DC}=\dfrac{1}{3}$.

$\therefore \dfrac{DF}{CF}=\dfrac{1}{2}$.

【点拨】本题主要考查了相似三角形的判定和性质．熟练掌握平行四边形的性质是解本题的关键．

变式训练二

解：$\because \triangle ADE \backsim \triangle ACB$，

$\therefore \angle ADE=\angle ACB$，$\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{2}{3}$.

$\because AF$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，

$\therefore \angle BAF=\angle CAF$.

$\therefore \triangle AGD \backsim \triangle AFC$.

$\therefore \dfrac{AG}{AF}=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{2}{3}$.

$\therefore AG:GF=2:1$.

例三　证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD /\!/ BC$，$AB /\!/ CD$.

$\therefore \triangle DFG \backsim \triangle BFC$，

$\triangle DFC \backsim \triangle BFE$.

$\therefore \dfrac{FG}{FC}=\dfrac{DF}{BF}$，$\dfrac{CF}{EF}=\dfrac{DF}{BF}$.

$\therefore \dfrac{FG}{FC}=\dfrac{CF}{EF}$，

即 $CF^2=GF \cdot EF$.

【点拨】本题属于相似三角形中的“X”型．证明比例式或等积式是几何问题中的常见题型，解决它的常用方法是①找相似；②作平行；③变原式．

变式训练三

(1) **证明：**$\because \angle BAC=90^\circ$，

$\angle C=\angle DAC$，

$\therefore \angle BAD+\angle C=90^\circ$.

$\because \angle B+\angle C=90^\circ$，

$\therefore \angle B=\angle BAD$.

$\therefore CD=AD=BD$.

$\because DE \perp BC$，

$\therefore \angle E+\angle C=90^\circ$.

$\because \angle DAB+\angle DAC=90^\circ$，

$\therefore \angle DAF=\angle E$.

$\because \angle ADF=\angle EDA$，

$\therefore \triangle ADF \backsim \triangle EDA$.

$\therefore \dfrac{AD}{DE}=\dfrac{DF}{AD}$.

$\therefore AD^2=DE \cdot DF$.

$\because BD=AD$，

$\therefore BD^2=DF \cdot DE$.

(2) **解：**$\because BD^2=DF \cdot DE$，

$BD=2$，$EF=3$，

$\therefore 2^2=(DE-3) \cdot DE$.

$\therefore DE=4$.

$\therefore DF=1$.

$\therefore BF=\sqrt{BD^2+DF^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

$\because \angle B=\angle E$，$\angle BFD=\angle AFE$，

$\therefore \triangle BDF \backsim \triangle EAF$.

$\therefore \dfrac{BD}{AE}=\dfrac{BF}{EF}$，

即 $\dfrac{2}{AE}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

$\therefore AE=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

例四　(1) **证明：**$\because DF /\!/ AB$，

$DE \parallel BC$,

$\therefore \angle DFC = \angle ABF$,

$\angle AED = \angle ABF$.

$\therefore \angle DFC = \angle AED$.

又$\because \angle DCF = \angle ADE$,

$\therefore \triangle DFC \backsim \triangle AED$.

（2）**解：**$\because CD = \frac{1}{3}AC$,

$\therefore \frac{CD}{DA} = \frac{1}{2}$.

$\because \triangle DFC \backsim \triangle AED$,

$\therefore \triangle DFC$ 和 $\triangle AED$ 的相似比为 $\frac{CD}{DA} = \frac{1}{2}$.

$\therefore \frac{S_{\triangle DFC}}{S_{\triangle AED}} = \left(\frac{CD}{DA}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

【点拨】本题主要考查了相似三角形的判定与性质，运用相似三角形的面积之比等于相似比的平方来解决面积问题.

变式训练四

（1）**证明：**$\because \angle BCE = \angle ACD$,

$\therefore \angle BCE + \angle ACE = \angle ACD + \angle ACE$,

即$\angle ACB = \angle DCE$.

又$\because \angle A = \angle D$,

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle DEC$.

（2）**解：**$\because \triangle ABC \backsim \triangle DEC$,

$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEC}} = \left(\frac{CB}{CE}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

又$\because BC = 6$,

$\therefore \left(\frac{6}{CE}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

$\therefore CE = 9$.

例五　解：由反射角等于入射角可知

$\angle CPE = \angle APE$,

$\therefore \angle APB = \angle CPD$.

$\because \angle ABP = \angle CDP = 90°$,

$\therefore \triangle ABP \backsim \triangle CDP$.

$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{BP}{PD}$，即$\frac{1.2}{CD} = \frac{1.5}{12}$.

解得 $CD = 9.6$（m）.

即该古城墙的高度是 9.6 m.

【点拨】本题考查了相似三角形的判定、性质等，将图形之间的相似关系，转化为线段的比例关系，从而求出线段的长度.

变式训练五

1. **解：**连接 AC、BD,

由题意可知，$AC \parallel BD$,

$\therefore \triangle AOC \backsim \triangle BOD$.

$\therefore \frac{AC}{BD} = \frac{AO}{BO}$.

$\because BD = 2$ cm，$OA = 16$ cm,

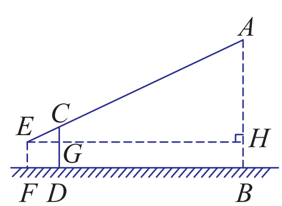
$OB = 4$ cm,

$\therefore \frac{AC}{2} = \frac{16}{4}$.

解得 $AC = 8$（cm）.

即火焰 AC 的长度为 8 cm.

2. **解：**连接 EF、AB，过点 E 作 $EH \perp AB$ 分别交 CD、AB 于点 G、H，如下图.



∵小明、竹竿、古塔均与地面垂直，$EH \perp AB$，

∴$BH=DG=EF=1.5$ m，

$EG=DF=2$ m，

$GH=DB=10$ m.

∵$CD=2.4$ m，

∴$CG=CD-DG=2.4-1.5=0.9$（m）.

∵$CG // AH$，

∴$\triangle EGC \backsim \triangle EHA$.

∴$\frac{EG}{EH}=\frac{CG}{AH}$，

即$\frac{2}{10+2}=\frac{0.9}{AH}$.

解得 $AH=5.4$（m）.

∴$AB=AH+BH=5.4+1.5=6.9$（m），

即古塔的高度是 6.9 m.

培优精练

1. $\frac{4}{3}$ 【解析】∵把$\triangle ABC$沿 AB 边平移到$\triangle A_1B_1C_1$的位置，∴$AC // A_1C_1$. ∴$\angle A=\angle DA_1B$. 又∵$\angle ABC=\angle A_1BD$，∴$\triangle ABC \backsim \triangle A_1BD$. ∵$S_{\triangle A_1BD} : S_{四边形ACDA_1}=4:5$，∴$S_{\triangle A_1BD} : S_{\triangle ABC}=4:9$. ∴$A_1B : AB=2:3$. ∵$AB=4$，∴$A_1B=\frac{8}{3}$. ∴$AA_1=AB-A_1B=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$.

2. (1) 证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$\angle C+\angle B=180°$，

$\angle ADF=\angle DEC$.

又∵$\angle AFD+\angle AFE=180°$，

$\angle AFE=\angle B$，

∴$\angle AFD=\angle C$.

∴$\triangle ADF \backsim \triangle DEC$.

(2) 解：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$CD=AB=8$.

∵$\triangle ADF \backsim \triangle DEC$，

∴$\frac{AD}{DE}=\frac{AF}{DC}$.

∴$DE=\frac{AD \cdot CD}{AF}=\frac{6\sqrt{3}\times 8}{4\sqrt{3}}=12$.

3. 解：∵$\angle DEF=\angle DCB=90°$，$\angle D=\angle D$，

∴$\triangle DEF \backsim \triangle DCB$.

∴$\frac{DE}{DC}=\frac{EF}{CB}$.

∵$DE=\frac{\sqrt{3}}{5}$ m，$EF=\frac{1}{5}$ m，

$CD=8$ m，

∴$\frac{\frac{\sqrt{3}}{5}}{8}=\frac{\frac{1}{5}}{BC}$.

∴$BC=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

∴$AB=AC+BC=\frac{3}{2}+\frac{8\sqrt{3}}{3}=\frac{9+16\sqrt{3}}{6}$（m），

即树高 AB 的值为$\frac{9+16\sqrt{3}}{6}$ m.

4. (1) **解：** 设正方形 $DEFG$ 的边长为 x cm，

则 $DG=DE=x$ cm，

$AP=(10-x)$ cm.

又 $DG\parallel BC$，

$\therefore \triangle ADG\backsim\triangle ABC$.

$\therefore \frac{AP}{AH}=\frac{DG}{BC}$，

即 $\frac{10-x}{10}=\frac{x}{15}$.

解得 $x=6$.

$\therefore$ 正方形 $DEFG$ 的边长为 6 cm.

(2) $\frac{4}{3}$　**【解析】** 设 $DE=y$ cm，则 $DG=2y$ cm. 同理 $\frac{10-y}{10}=\frac{2y}{15}$.

解得 $y=\frac{30}{7}$. $\therefore 2y=\frac{60}{7}$. $\because \frac{AD}{AB}=\frac{DG}{BC}=\frac{\frac{60}{7}}{15}=\frac{4}{7}$，$\therefore \frac{AD}{BD}=\frac{4}{3}$.

名卷压轴题

解： (1) $\because AF^2=CG\cdot CD$，

$\therefore \frac{AF}{CG}=\frac{CD}{AF}$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AB=BC$，$\angle ABD=\angle CBD$.

$\because BF=BF$，

$\therefore \triangle ABF\cong\triangle CBF$ (SAS).

$\therefore AF=CF$.

$\therefore \frac{CF}{CG}=\frac{CD}{CF}$.

又 $\angle FCG=\angle DCF$，

$\therefore \triangle FCG\backsim\triangle DCF$.

$\therefore \angle CFG=\angle CDF$.

$\because AB\parallel CD$，

$\therefore \angle CDF=\angle ABD$.

$\because \angle BAD=120^\circ$，

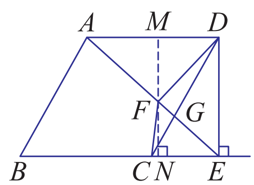
$\therefore \angle ABC=60^\circ$.

$\therefore \angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC=30^\circ$.

$\therefore \angle CFG=\angle CDF=30^\circ$.

$\therefore \angle CFE=30^\circ$.

(2) 如下图，在图 2 中过点 F 作 $MN\perp BC$ 于点 N，交 AD 于点 M.



$\because AD\parallel BC$，

$\therefore MN\perp AD$.

在 Rt$\triangle DCE$ 中，

$\angle DCE=180^\circ-120^\circ=60^\circ$，

$\therefore \angle CDE=90^\circ-\angle DCE=90^\circ-60^\circ=30^\circ$.

$\because CD=2$，

$\therefore CE=1$，$DE=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

在 Rt $\triangle ADE$ 中，$AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$，

$\because \angle ADF=\angle AED$，

$\angle FAD=\angle FAD$，

$\therefore \triangle AFD\backsim\triangle ADE$.

$\therefore \frac{AD}{AE}=\frac{AF}{AD}$，

即$\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{AF}{2}$.

$\therefore AF=\frac{4\sqrt{7}}{7}$.

$\therefore EF=\sqrt{7}-\frac{4\sqrt{7}}{7}=\frac{3\sqrt{7}}{7}$.

$\because AD\parallel BC$,

$\therefore \frac{FM}{FN}=\frac{AF}{EF}=\frac{\frac{4}{7}\sqrt{7}}{\frac{3}{7}\sqrt{7}}=\frac{4}{3}$.

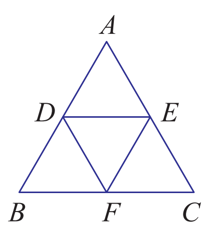
$\because MN=DE=\sqrt{3}$,

$\therefore FN=\frac{3\sqrt{3}}{7}$.

$\therefore S_{\triangle CFE}=\frac{1}{2}CE\cdot FN=\frac{1}{2}\times 1\times \frac{3\sqrt{3}}{7}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

第 3 讲　中位线与位似图形

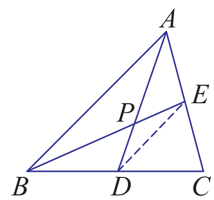
例一　8　**【解析】**由题意，画出图形如下，$\because$ 点 D、E 分别是 AB、AC 的中点，$\therefore DE=\frac{1}{2}BC$. 同理，$DF=\frac{1}{2}AC$，$EF=\frac{1}{2}AB$. $\therefore DE+DF+EF=\frac{1}{2}(BC+AC+AB)=\frac{1}{2}\times 16=8$（cm）. 则三条中位线构成的三角形的周长为 8 cm.



【点拨】本题主要考查了三角形的中位线性质定理. 解决问题的关键就是熟练掌握三角形的中位线性质定理的应用.

变式训练一

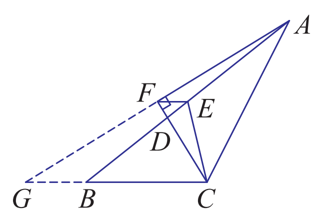
1. B　**【解析】**连接 DE，如下图.



$\because E$ 为边 AC 的中点，D 为边 BC 的中点，$\therefore DE$ 是$\triangle ABC$ 的中位线. $\therefore DE\parallel AB$，且 $DE=\frac{1}{2}AB$.

$\therefore \triangle DEP\backsim\triangle ABP$. $\therefore \frac{PE}{PB}=\frac{DE}{AB}=\frac{1}{2}$.

2. **解：**延长 AF、CB 相交于点 G，如下图.



$\because CD$ 平分$\angle ACB$，

$\therefore \angle ACF=\angle BCF$.

在$\triangle ACF$ 和$\triangle GCF$ 中，

$$\begin{cases}\angle ACF=\angle GCF,\\ CF=CF,\\ \angle AFC=\angle GFC=90^\circ,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ACF\cong\triangle GCF$（ASA）.

$\therefore AC=GC$，$AF=GF$.

$\therefore F$ 是 AG 的中点.

$\because CE$ 是 AB 边上的中线,

$\therefore E$ 是 AB 的中点.

$\therefore EF$ 是 $\triangle ABG$ 的中位线.

$\therefore BG=2EF=2$.

$\therefore CG=BC+BG=4+2=6$.

$\therefore AC=CG=6$.

例二　**解**: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB/\!/CD$ 且 $AB=CD$.

$\because$ 点 E 是 CD 的中点,

$\therefore EC$ 是 $\triangle ABF$ 的中位线.

$\because \angle B=\angle DCF$, $\angle F=\angle F$,

$\therefore \triangle ABF \backsim \triangle ECF$.

$\therefore \dfrac{EC}{AB}=\dfrac{EF}{AF}=\dfrac{CF}{BF}=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore S_{\triangle ABF}:S_{\triangle ECF}=4:1$.

又 $\because \triangle ECF$ 的面积为 1,

$\therefore S_{\triangle ABF}=4$.

$\therefore S_{四边形ABCE}=S_{\triangle ABF}-S_{\triangle ECF}=4-1=3$.

【点拨】本题综合考查了相似三角形的判定与性质、平行四边形的性质. 解决此题的关键是根据平行四边形的性质及点 E 是 CD 的中点得到 CE 是 $\triangle ABF$ 的中位线.

变式训练二

解: $\because E$、G 分别为边 AB、AD 的中点,

$\therefore EG$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线.

$\therefore EG/\!/BD$, 且 $EG=\dfrac{1}{2}BD$.

$\therefore \dfrac{S_{\triangle AEG}}{S_{\triangle ABD}}=\left(\dfrac{EG}{BD}\right)^2=\dfrac{1}{4}$.

$\therefore S_{\triangle AEG}=\dfrac{1}{4}S_{\triangle ABD}$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}S_{\square ABCD}$.

$\therefore S_{\triangle AEG}=\dfrac{1}{8}S_{\square ABCD}$,

即 $\triangle AEG$ 与 $\square ABCD$ 的面积之比为 $1:8$.

例三　C　**【解析】**$\because$ 位似图形的对应边平行, $\therefore AB/\!/A'B'$, 故 A 选项正确; 由位似图形相似, 得 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$, 故 B 选项正确; $\because$ 位似图形对应顶点到位似中心距离的比值等于位似比, $\therefore AO:OA'=1:2$. $\therefore AO:AA'=1:3$, 故 C 选项错误; $\because$ 位似图形对应顶点所在的直线经过位似中心, $\therefore C$、O、C' 三点在同一直线上. 故 D 选项正确. 故选 C.

【点拨】本题主要考查了位似三角形. 熟练掌握位似图形的定义和性质是解决本题的关键.

变式训练三

$\dfrac{2}{5}$　**【解析】**$\because$ 以点 O 为位似中心, 将 $\triangle OAB$ 放大后得到 $\triangle OCD$, $OA=2$, $AC=3$, $\therefore \dfrac{AB}{CD}=\dfrac{OA}{OC}=\dfrac{2}{2+3}=\dfrac{2}{5}$.

培优精练

1. D 【解析】∵$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 位似，$\dfrac{OA}{AD}=\dfrac{1}{3}$，∴$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 位似比为 $1:4$．∴$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 面积之比为 $1:16$．又∵$\triangle ABC$ 的面积为 1，∴$\triangle DEF$ 的面积为 $1\times16=16$．故选 D.

2. 解：(1) $AB/\!/CD$．理由如下：

∵$\triangle OAB$ 位似于 $\triangle ODC$，

∴$\triangle OAB\backsim\triangle ODC$.

∴$\angle A=\angle D$.

∴$AB/\!/CD$.

(2) 由图易得，O 是位似中心，

∴$OA:OD=OB:OC=3:4$，

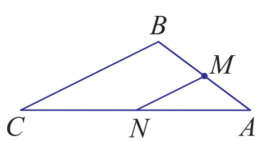
即 $3:4=OA:3.5$.

∴$OA=2.625$.

故 $\triangle OAB$ 与 $\triangle ODC$ 的相似比为 $3:4$，OA 的长为 2.625，

$\triangle OAB$ 与 $\triangle ODC$ 的面积之比为 $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{9}{16}$.

3. 解：(1) ①如下图，过点 M 作 $MN/\!/BC$ 交 AC 于点 N.



则 $\triangle AMN\backsim\triangle ABC$.

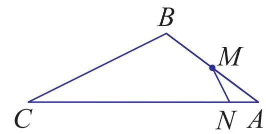
∵M 为 AB 的中点，

∴MN 是 $\triangle ABC$ 的中位线.

∵$BC=6$，

∴$MN=\dfrac{1}{2}BC=3$.

②如下图，过点 M 作 $\angle AMN=\angle ACB$ 交 AC 于点 N.



则 $\triangle AMN\backsim\triangle ACB$.

∴$\dfrac{NM}{BC}=\dfrac{AM}{AC}$.

∵$BC=6$，$AC=4\sqrt{5}$，$AB=2\sqrt{5}$，

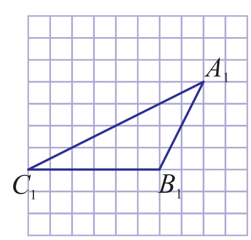
$AM=\dfrac{1}{2}AB=\sqrt{5}$，

∴$\dfrac{NM}{6}=\dfrac{\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}$.

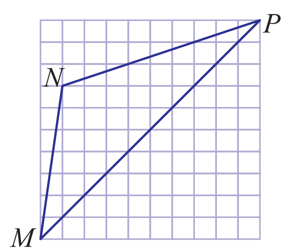
解得 $NM=\dfrac{3}{2}$.

综上所述，线段 NM 的长为 3 或 $\dfrac{3}{2}$.

(2) ① $\triangle A_1B_1C_1$ 如下图所示.(答案不唯一)

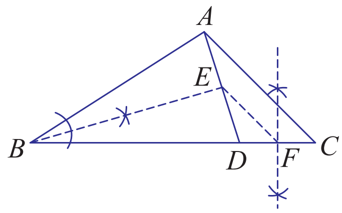


②8 个．画出图形如下图所示.



4. 解：(1) ①如图，BE 即为所求.

②如下图，线段 DC 的垂直平分线交 DC 于点 F.



(2) $EF=\frac{1}{2}AC$，$EF/\!/AC$.

理由如下：

∵$BD=BA$，BE 平分$\angle ABD$，

∴点 E 是 AD 的中点.

∵点 F 是 CD 的中点，

∴EF 是$\triangle ADC$ 的中位线.

∴线段 EF 和 AC 的数量关系为 $EF=\frac{1}{2}AC$，位置关系为 $EF/\!/AC$.

名卷压轴题

解：在矩形 OAA_1B 中，

∵$OA=3$，$AA_1=2$，$\angle A=90°$，

∴ $OA_1=\sqrt{OA^2+A_1A^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

∵$\frac{A_1A_2}{OA_1}=\frac{AA_1}{OA}=\frac{2}{3}$，

∴$\frac{A_1A_2}{AA_1}=\frac{OA_1}{OA}$.

∵$\angle OA_1A_2=\angle A=90°$，

∴$\triangle OA_1A_2\backsim\triangle OAA_1$.

∴$\angle A_1OA_2=\angle AOA_1$.

∵$A_1B/\!/OA$，

∴$\angle CA_1O=\angle AOA_1$.

∴$\angle COA_1=\angle CA_1O$.

∴$OC=CA_1$.

∵ $\angle A_2OA_1+\angle OA_2A_1=90°$，$\angle OA_1C+\angle A_2A_1C=90°$，

∴$\angle CA_2A_1=\angle CA_1A_2$.

∴$CA_1=CA_2=OC$.

同理可证 $OC_1=A_3C_1$，

∴$CC_1/\!/A_2A_3$，$CC_1=\frac{1}{2}A_2A_3$.

∴$S_{\triangle CC_1A_3}=S_{\triangle CC_1A_2}$.

∵$A_1A_2=\frac{2}{3}OA_1=\frac{2\sqrt{13}}{3}$，

∴ $OA_2=\sqrt{OA_1{}^2+A_1A_2{}^2}=\sqrt{(\sqrt{13})^2+\left(\frac{2\sqrt{13}}{3}\right)^2}=\frac{13}{3}$.

∴$A_2A_3=\frac{2}{3}OA_2=\frac{2}{3}\times\frac{13}{3}=\frac{26}{9}$.

∴$CC_1=\frac{1}{2}A_2A_3=\frac{13}{9}$.

∴ $S_{\triangle CC_1A_3}=S_{\triangle CC_1A_2}=\frac{1}{2}\times\frac{13}{9}\times\frac{13}{6}=\frac{169}{108}$.

第 4 讲 图形与坐标

例一 (1) (2，3) **【解析】**将点 A 向右平移 3 个单位长度，得 (2，2)，再向上平移 1 个单位长度，得到点 B，则点 B 的坐标是 (2，3).

(2) (1，-2) **【解析】**∵点 C 与点 A 关于原点 O 对称，∴点 C

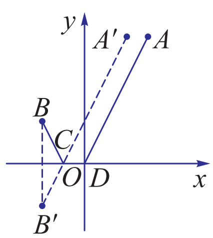
的横坐标与点 A 的横坐标互为相反数，点 C 的纵坐标与点 A 的纵坐标互为相反数，则点 C 的坐标是（1，-2）.

【点拨】本题考查了坐标的平移，以及关于原点对称的点的坐标. 熟练掌握点的平移变换法则是解本题的关键.

变式训练一

（7，0） **【解析】**∵A（3，$\sqrt{3}$），D（6，$\sqrt{3}$），∴点 A 向右平移 3 个单位长度得到点 D. ∵B（4，0），∴点 B 向右平移 3 个单位长度得到点 E（7，0）.

例二 （-1，0） **【解析】**把 A（3，6）向左平移 1 个单位长度得 A'（2，6），作点 B 关于 x 轴的对称点 B'，连接 $B'A'$交 x 轴于点 C，在 x 轴上取点 D（点 C 在点 D 左侧），使 $CD=1$，连接 AD，如下图所示.



此时 $AD+BC$ 的值最小. ∵B（-2，2），∴B'（-2，-2）. 设直线$B'A'$的解析式为 $y=kx+b$（$k\neq0$），∴$\begin{cases}-2k+b=-2,\\2k+b=6.\end{cases}$解得$\begin{cases}k=2,\\b=2.\end{cases}$∴直线 $B'A'$ 的解析式为 $y=2x+2$. 当 $y=0$ 时，$x=-1$，∴C（-1,0）.

【点拨】本题主要考查了点的平移、轴对称——最短路线问题与待定系数法求一次函数的解析式. 由题意正确作出图形是解本题的关键.

变式训练二

解：∵$\angle AOB=90°$，点 A、B 的坐标分别为（0，6）、（8，0），

∴$AB=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

∵$\angle PAQ=\angle OAB$，

∴当$\frac{AP}{AO}=\frac{AQ}{AB}$或$\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AO}$时，

$\triangle APQ$与$\triangle AOB$相似.

①若$\frac{AP}{AO}=\frac{AQ}{AB}$，即$\frac{t}{6}=\frac{10-2t}{10}$，

∴$t=\frac{30}{11}$.

∴$6-\frac{30}{11}=\frac{36}{11}$.

∴点 P 的坐标为$\left(0,\ \frac{36}{11}\right)$.

②若$\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AO}$，即$\frac{t}{10}=\frac{10-2t}{6}$，

∴$t=\frac{50}{13}$.

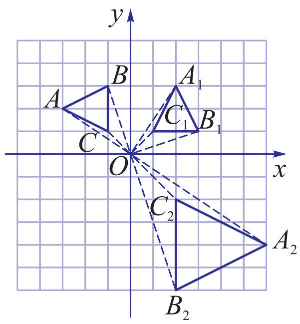
∴$6-\frac{50}{13}=\frac{28}{13}$.

∴点 P 的坐标为$\left(0,\ \frac{28}{13}\right)$.

综上所述，当 t 的值为 $\frac{30}{11}$ 或 $\frac{50}{13}$ 时，$\triangle APQ$ 与 $\triangle AOB$ 相似，点 P 的坐标为 $\left(0,\ \frac{36}{11}\right)$ 或 $\left(0,\ \frac{28}{13}\right)$.

例三　解：（1）$\triangle A_1B_1C_1$ 如下图所示.

（2）$\triangle A_2B_2C_2$ 如下图所示.

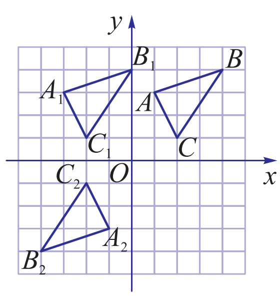


【点拨】本题主要考查了位似图形的性质，旋转的性质. 解题的关键是掌握所学的性质正确地作出图形.

变式训练三

（1）**解：**如下图所示，$\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求.

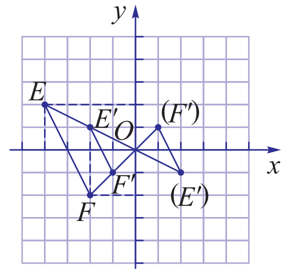
（2）**解：**如下图所示，$\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求.



（3）（-2，0）

培优精练

1. D　**【解析】**根据题意画出图形如下图所示.



由图易得，点 E 的对应点 E' 的坐标是（-2，1）或（2，-1）. 故选 D.

2. （1）3　**【解析】**∵ A（0，-3）、B（-2，0），∴ $OA=3$，$OB=2$.

∴ $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times2\times3=3$.

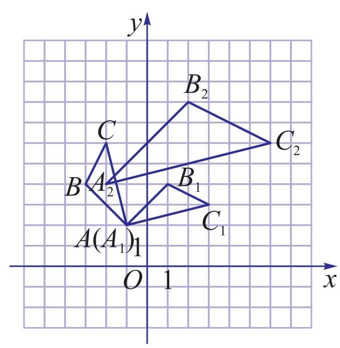
（2）**解：**①由题意，得 A'（5，1）、B'（3，4）.

∴ $S_{\triangle OA'B'}=4\times5-\frac{1}{2}\times3\times4-\frac{1}{2}\times2\times3-\frac{1}{2}\times5\times1=\frac{17}{2}$.

② P（-1，10）.

3. **解：**（1）如下图，$\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求.

（2）如下图，$\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求.



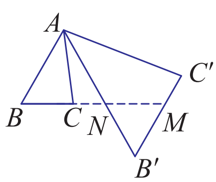
名卷压轴题

（45，43）　**【解析】**由题意，得

动点 P 第 8（$8=2\times4$）s 运动到点（2，0），第 24（$24=4\times6$）s 运动到点（4，0），第 48（$48=6\times8$）s 运动到点（6，0），以此类推，动点 P 第 $2n(2n+2)$ s 运动到点（$2n$，0）. ∵ $2\ 024=44\times46$，∴动点 P 第 2 024 s 运动到点（44，0）. ∵ $2\ 068-2\ 024=44$，∴按照运动路线，点 P 到达点（44，0）后，向右移动 1 个单位长度，然后向上移动 43 个单位长度到达点（45，43）. ∴第 2 068 s 点 P 所在位置的坐标是（45，43）.

◎图形的相似　新题型探究

例题　（1）3　60　**【解析】**延长 BC 分别交 AB'、$B'C'$ 于点 N、M，如下图所示.



根据题意，得 $\triangle ABC\backsim\triangle AB'C'$.

∴ $\dfrac{S_{\triangle AB'C'}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\dfrac{AB'}{AB}\right)^2=(\sqrt{3})^2=3$，$\angle B=\angle B'$. ∵ $\angle ANB=\angle B'NM$，

∴ $\angle BMB'=\angle BAB'=60°$.

（2）**解：**∵四边形 $ABB'C'$ 是矩形，

∴ $\angle BAC'=90°$.

∴ $\theta=\angle CAC'=\angle BAC'-\angle BAC=90°-30°=60°$.

在 Rt$\triangle ABB'$ 中，$\angle ABB'=90°$，$\angle BAB'=60°$，

∴ $\angle AB'B=30°$.

∴ $n=\dfrac{AB'}{AB}=2$.

【点拨】本题主要考查了相似三角形的判定与性质、旋转的性质、矩形的性质，综合性较强，难度较大.

变式训练

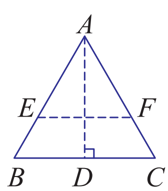
$\sqrt{2}$（答案不唯一）　**【解析】**如下图，过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D，易得 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADC}$，∴ AD 是等边三角形最长的一条“面径”.

∵ $AC=2$，$CD=\dfrac{1}{2}BC=1$，

∴ $AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$. 当 $EF\parallel BC$ 时，EF 为最短的一条“面径”，∵ $S_{\triangle AEF}=S_{四边形EBCF}$，∴ $S_{\triangle AEF}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

∴ $\dfrac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\dfrac{EF}{BC}\right)^2=\dfrac{1}{2}$，即 $\dfrac{EF}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

解得 $EF=\sqrt{2}$. ∴等边三角形的“面径”长可以是 $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{3}$ 或介于 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 之间的任意 1 个实数.



培优精练

解：（1）点 D 是 AB 边上的黄金

分割点．理由如下：

$\because AB=AC$，$\angle A=36^\circ$，

$\therefore \angle ACB=\angle B=72^\circ$．

又$\because CD$平分$\angle ACB$，

$\therefore \angle BCD=\angle ACD=36^\circ$．

$\because \angle A=\angle BCD=\angle ACD$，

$\angle B=\angle B$，

$\therefore \triangle BCD\backsim\triangle BAC$．

$\therefore \dfrac{BC}{BA}=\dfrac{BD}{BC}$．

$\because \angle A=\angle ACD$，

$\therefore AD=CD$．

$\because \angle CDB=\angle A+\angle ACD=36^\circ+36^\circ=72^\circ=\angle B$，

$\therefore CD=BC$．

$\therefore AD=BC$．

$\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{BD}{AD}$．

$\therefore$点D是AB边上的“黄金分割点”．

（2）直线CD是$\triangle ABC$的“黄金分割线”．理由如下：

设$\triangle ABC$中，AB边上的高为h，

则$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot h$，

$S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}AD\cdot h$，

$S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}BD\cdot h$．

$\therefore S_{\triangle ACD}:S_{\triangle ABC}=AD:AB$，

$S_{\triangle BCD}:S_{\triangle ACD}=BD:AD$．

由（1）知，点D是AB边上的“黄金分割点”，$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{BD}{AD}$．

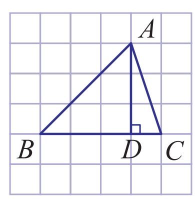
$\therefore S_{\triangle ACD}:S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCD}:S_{\triangle ACD}$．

$\therefore CD$是$\triangle ABC$的“黄金分割线”．

第二十四章　解直角三角形

第1讲　直角三角形的性质、锐角三角函数

例一　B　**【解析】**过点A作$AD\perp BC$于点D，如下图．在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中，$\angle ADB=90^\circ$，$AD=BD=3$，$\therefore AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$．$\therefore \cos\angle ABC=\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{3}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．



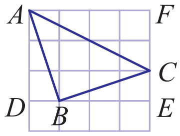
【点拨】本题主要考查了在正方形网格中运用勾股定理与余弦的定义解决问题，探索中体现了数与形的结合．

变式训练一

1.　A　**【解析】**如图，连接BC，标上字母．在$\mathrm{Rt}\triangle ADB$中，$AD=3$，$DB=1$，则$AB^2=AD^2+DB^2=3^2+1^2=10$．同理可知，$BC^2=10$，$AC^2=20$．$\therefore AB=BC$，

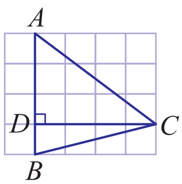
$AB^2+BC^2=AC^2$. ∴△ABC为等腰直角三角形. ∴$\angle BAC=45°$.

∴ $\cos\angle BAC=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



2. D 【解析】如下图，过点C作$CD\perp AB$于点D，则$\angle ADC=90°$，$AD=3$，$CD=4$. ∴$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

∴$\sin\angle BAC=\frac{CD}{AC}=\frac{4}{5}$. 故选 D.



例二 解：在 Rt△DEF 和 Rt△DCB 中，$\begin{cases}\angle D=\angle D,\\ \angle DEF=\angle DCB,\end{cases}$

∴△DEF∽△DCB.

∴$\frac{DE}{DC}=\frac{EF}{CB}$.

∵ $DE=40$ cm，$EF=20$ cm，$CD=8$ m$=800$ cm，

∴$\frac{40}{800}=\frac{20}{BC}$.

解得 $BC=400$ cm$=4$ m.

∵$AC=1.5$ m，

∴ $AB=AC+BC=1.5+4=5.5$（m）.

即树高 5.5 m.

【点拨】利用相似三角形的判定与性质测量主要有两个方面：①测量高度；②测量距离. 掌握测高和测距的方法，在实际测量时，关键就是要构造和实物所在三角形相似的三角形.

变式训练二

解：∵$BC\perp CA$，$MN\perp AN$，

∴$\angle C=\angle MNA=90°$.

由题可知，$\angle BAC=\angle MAN$.

∴△BCA∽△MNA.

∴$\frac{BC}{MN}=\frac{CA}{NA}$.

∵ $BC=1.6$ m，$CA=1.5$ m，$NA=30$ m，

∴$\frac{1.6}{MN}=\frac{1.5}{30}$.

∴$MN=32$ m.

例三 解：在 Rt△ABC 中，

∵ $\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$，

∴$BC=\frac{1}{2}AB$.

∵$AB=8$ cm，

∴$BC=4$ cm.

∵D 为边 AB 的中点，

∴$CD=\frac{1}{2}AB=4$ cm.

∵$DE\perp AC$，

∴ $\angle AED=90°$.

在 Rt△ADE 中，∵ $\angle A=30°$，

∴$DE=\frac{1}{2}AD$.

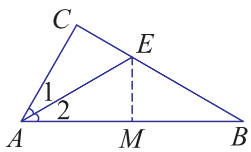
又∵$AD=\frac{1}{2}AB$，

$\therefore DE=\frac{1}{4}AB=2$ cm.

【点拨】本题主要考查了“含 30°角的直角三角形的性质”和“直角三角形斜边上中线的性质”. 解决此类问题的关键就是熟练掌握这两个性质的运用.

变式训练三

1. 证明：取 AB 的中点 M，连接 EM，如下图所示.



$\because AE$ 平分 $\angle CAB$，

$\therefore \angle 1=\angle 2=\frac{1}{2}\angle CAB$.

$\because \angle BAC=2\angle B$，

$\therefore \angle 2=\angle B$.

$\therefore AE=EB$.

$\therefore EM\perp AB$.

$\therefore \angle EMA=90°$.

$\because AB=2AC$，$AB=2AM$，

$\therefore AC=AM$.

在$\triangle ACE$ 和$\triangle AME$ 中，

$\begin{cases}AC=AM,\\ \angle 1=\angle 2,\\ AE=AE,\end{cases}$

$\therefore \triangle ACE\cong\triangle AME$（SAS).

$\therefore \angle C=\angle EMA=90°$.

在 Rt$\triangle ACB$ 中，

$\angle 1+\angle 2+\angle B=90°$，

$\because \angle 1=\angle 2=\angle B$，

$\therefore \angle 1=30°$.

$\therefore CE=\frac{1}{2}AE$，即 $AE=2CE$.

2. 解：（1）$\because DE$ 是 AC 边上的垂直平分线，

$\therefore CD=AD$，$DE\perp AC$.

$\therefore \angle DCA=\angle A=30°$.

$\because \angle ACB=90°$，

$\therefore \angle BCD=\angle ACB-\angle DCA=90°-30°=60°$.

（2）$\because \angle B=90°-\angle A=90°-30°=60°$，

$\therefore \angle BCD=\angle B$.

$\therefore BD=CD$.

$\therefore BD=CD=AD=\frac{1}{2}AB$.

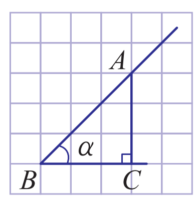
$\because DE=3$，$DE\perp AC$，$\angle A=30°$，

$\therefore AD=2DE=6$.

$\therefore AB=2AD=12$.

培优精练

1. B　【解析】如下图，



$\because AC=3$，$BC=3$，$\therefore$ 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$. $\therefore \sin\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 解：（1）$\because AD$ 是 BC 边上的高，

$\therefore AD\perp BC$.

在 Rt△ABD 中，$\sin B=\dfrac{AD}{AB}$.

∵$AD=12$，$\sin B=\dfrac{4}{5}$，

∴$AB=\dfrac{AD}{\sin B}=12\times\dfrac{5}{4}=15$.

∴$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{15^2-12^2}=9$.

∵$BC=14$，

∴$DC=BC-BD=14-9=5$.

（2）在 Rt△ADC 中，

∵E 为 AC 边的中点，

∴$AE=EC$.

∴$DE=\dfrac{1}{2}AC=EC$.

∴$\angle EDC=\angle C$.

在 Rt△ADC 中，

$\tan C=\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{12}{5}$，

∴$\tan\angle EDC=\tan C=\dfrac{12}{5}$.

3. **解：**∵$AD /\!/ BC$，$\angle DAB=90°$，

∴$\angle ABC=180°-\angle DAB=90°$，$\angle BAC+\angle EAD=90°$.

∵$AC\perp BD$，

∴$\angle AED=90°$.

∴$\angle ADB+\angle EAD=90°$.

∴$\angle BAC=\angle ADB$.

∴$\triangle ABC\backsim\triangle DAB$.

∴$\dfrac{AB}{DA}=\dfrac{BC}{AB}$.

∵$BC=\dfrac{1}{2}AD$，

∴$AD=2BC$.

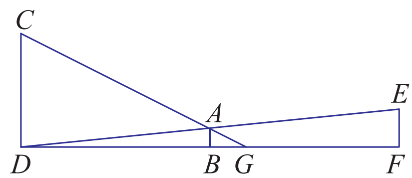
∴$AB^2=BC\times 2BC=2BC^2$.

∴$AB=\sqrt{2}BC$.

在 Rt△ABC 中，

$\tan\angle BAC=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{BC}{\sqrt{2}BC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4. （1）平面图形如下图所示.



（2）由题意可知，$\angle ABG=\angle CDG=90°$.

又∵$\angle AGD$ 为公共角，

∴$\triangle ABG\backsim\triangle CDG$.

∴$\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{BG}{DG}$.

∵$DF=100$ m，

点 B 是 DF 的中点，

∴$BD=BF=50$ m.

∵$AB=5$ m，$BG=10$ m，

∴$\dfrac{5}{CD}=\dfrac{10}{50+10}$.

∴$CD=30$ m.

∵$\angle ABD=\angle EFD=90°$，

$\angle EDF$ 为公共角，

∴$\triangle ADB\backsim\triangle EDF$.

∴$\dfrac{AB}{EF}=\dfrac{DB}{DF}=\dfrac{1}{2}$.

∴$EF=2AB=10$ m.

∴$CD-EF=30-10=20$（m），

即小明、小亮两人的观测点到地面的距离之差为 20 m.

名卷压轴题

解：设 $AB=x$ m，$BC=y$ m.

$\because \angle ABC=\angle EDC=90°$，

$\angle ACB=\angle ECD$，

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle EDC$.

$\therefore \dfrac{AB}{ED}=\dfrac{BC}{DC}$.

$\because ED=1.5$ m，$DC=2$ m，

$\therefore \dfrac{x}{1.5}=\dfrac{y}{2}$.

$\because \angle ABF=\angle GHF=90°$，

$\angle AFB=\angle GFH$，

$\therefore \triangle ABF \backsim \triangle GHF$.

$\therefore \dfrac{AB}{GH}=\dfrac{BF}{HF}$.

$\because GH=ED=1.5$ m，

$BF=BC+CF=(y+10)$ m，

$HF=3$ m，

$\therefore \dfrac{x}{1.5}=\dfrac{y+10}{3}$.

$\therefore \dfrac{y}{2}=\dfrac{y+10}{3}$.

解得 $y=20$.

把 $y=20$ 代入$\dfrac{x}{1.5}=\dfrac{y}{2}$，

得 $x=15$.

$\therefore$树的高度 AB 为 15 m.

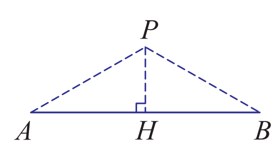
第 2 讲　解直角三角形

例一　D　【解析】由题意可得，四边形 $ABCD$ 是矩形，$BC=15$ m，$AB=1.5$ m，$\therefore AD=BC=15$ m，$CD=AB=1.5$ m. 在 Rt$\triangle ADE$ 中，$\angle EAD=30°$，$AD=15$ m，$\therefore DE=AD\cdot\tan 30°=15\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=5\sqrt{3}$ (m). $\therefore CE=CD+DE=1.5+5\sqrt{3}=\left(\dfrac{3}{2}+5\sqrt{3}\right)$(m). 故选 D.

【点拨】本题主要考查了解直角三角形在实际生活中的应用，含 30° 角的直角三角形等. 熟知锐角三角函数的定义是解决本题的关键.

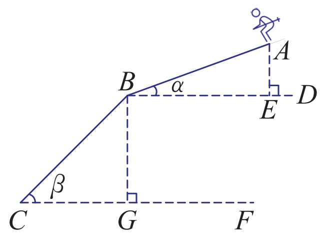
变式训练一

1. C　【解析】如下图，过点 P 作 $PH\perp AB$ 于点 H，$\because \triangle APB$ 是顶角为 120° 的等腰三角形，$AB=6$ cm，$\therefore AH=BH=\dfrac{1}{2}AB=3$ cm，$\angle A=\angle B=30°$. $\therefore AP=BP=2PH$. $\therefore \dfrac{AH}{AP}=\cos A=\cos 30°$. $\therefore AP=\dfrac{AH}{\cos 30°}=\dfrac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$. $\therefore$橡皮筋被拉长了 $2AP-AB=(4\sqrt{3}-6)$ cm. 故选 C.

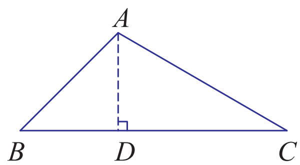


2. 210　【解析】如图，过点 A 作 $AE\perp BD$ 于点 E，过点 B 作 $BG\perp CF$ 于点 G，在 Rt$\triangle ABE$ 中，$\because \sin\alpha=\dfrac{AE}{AB}$，$\therefore AE=200\times$

$\sin 20^\circ \approx 68$（m）．在 $\text{Rt}\triangle BCG$ 中，$\because \sin\beta=\dfrac{BG}{BC}$，$\therefore BG=200\times\sin 45^\circ\approx 142$（m）．$\therefore$他下降的高度为 $AE+BG=68+142=210$（m）．



例二　解： 过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D，如下图所示．



设 $AD=x$．

在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 中，$\tan B=\dfrac{AD}{BD}$，

$\angle B=45^\circ$，

$\therefore BD=AD=x$．

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中，$\tan C=\dfrac{AD}{CD}$，

$\angle C=30^\circ$，

$\therefore CD=\dfrac{AD}{\tan C}=\dfrac{AD}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}x$．

又$\because BD+CD=BC$，$BC=30+30\sqrt{3}$，

$\therefore x+\sqrt{3}x=30+30\sqrt{3}$．

$\therefore x=30$．

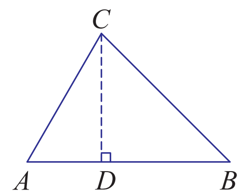
在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中，$\sin B=\dfrac{AD}{AB}$，

$\therefore AB=\dfrac{AD}{\sin B}=\dfrac{30}{\sin 45^\circ}=\dfrac{30}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=30\sqrt{2}$．

【点拨】本题主要考查了将斜三角形转化为直角三角形，同时运用直角三角形边角之间的关系解决问题．

变式训练二

1. 解： 过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D，如下图所示．



在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中，

$\because \angle CDA=90^\circ$，$\angle A=60^\circ$，

$\therefore \dfrac{CD}{DA}=\tan\angle DAC=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$，

即 $DA=\dfrac{\sqrt{3}}{3}CD$．

在 $\text{Rt}\triangle BDC$ 中，$\because \angle B=45^\circ$，

$\therefore \angle BCD=45^\circ$．

$\therefore CD=BD$．

$\therefore AB=DB+DA=CD+\dfrac{\sqrt{3}}{3}CD=8$．

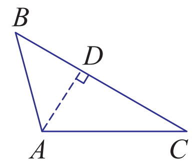
$\therefore CD=12-4\sqrt{3}$．

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\times CD=\dfrac{1}{2}\times 8\times(12-4\sqrt{3})=48-16\sqrt{3}$．

2. 解：∵ $\angle A=105^\circ$，$\angle C=30^\circ$，

∴ $\angle B=180^\circ-105^\circ-30^\circ=45^\circ$.

过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D，如下图所示.



∴ $\angle ADB=\angle ADC=90^\circ$.

在 Rt△ADC 中，

∵ $\angle ADC=90^\circ$，$\angle C=30^\circ$，$AC=4$，

∴ $AD=2$.

∴ $\frac{CD}{AC}=\cos\angle C=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

∴ $CD=\frac{\sqrt{3}}{2}AC=2\sqrt{3}$.

在 Rt△ADB 中，$\angle ADB=90^\circ$，$\angle B=45^\circ$，

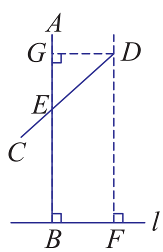
∴ $\angle DAB=\angle B=45^\circ$.

∴ $BD=AD=2$.

∴ $BC=BD+CD=2+2\sqrt{3}$.

例三　解：如下图，过点 D 作 $DG\perp AE$ 于点 G，得矩形 $GBFD$.

∴ $DF=GB$.



在 Rt△GDE 中，$DE=80$ cm，$\angle GED=48^\circ$，

∴ $GE=DE\times\cos 48^\circ\approx 80\times 0.67=53.6$ (cm).

∴ $GB=GE+BE=53.6+110=163.6\approx 164$ (cm).

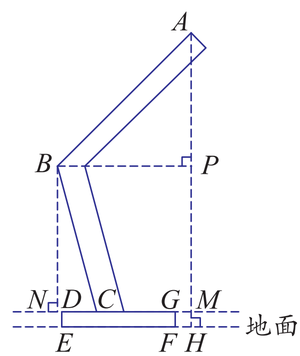
∴ $DF=GB\approx 164$ cm，

即活动杆端点 D 离地面的高度 DF 约为 164 cm.

【点拨】本题主要考查了解直角三角形的应用．解决本题的关键是掌握解直角三角形的方法——构造直角三角形.

变式训练三

解：过点 A 作 $AH\perp EF$ 于点 H，交直线 DG 于点 M，过点 B 作 $BN\perp DG$ 于点 N，$BP\perp AH$ 于点 P，则四边形 $BNMP$ 和四边形 $DEHM$ 均为矩形，如下图所示.



∴ $PM=BN$，$MH=DE=5$ cm.

∵ $BP\parallel DG$，

∴ $\angle CBP=\angle BCD=75^\circ$.

∴ $\angle ABP=\angle ABC-\angle CBP=120^\circ-75^\circ=45^\circ$.

在 Rt△ABP 中，$\angle APB=90^\circ$，$\sin 45^\circ=\frac{AP}{AB}$，

$\therefore AP=AB\cdot\sin 45^\circ=100\times\frac{\sqrt{2}}{2}=50\sqrt{2}$ cm.

在 Rt$\triangle BCN$ 中，$\angle BNC=90^\circ$，

$\sin 75^\circ=\frac{BN}{BC}$，

$\therefore BN=BC\cdot\sin 75^\circ\approx 80\times 0.97=77.6$ cm.

$\therefore PM=BN=77.6$ cm.

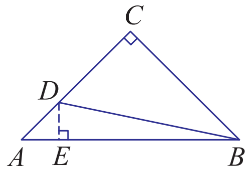
$\therefore AH=AP+PM+MH=50\sqrt{2}+77.6+5\approx 153.1$（cm），

即指示牌最高点 A 到地面 EF 的距离约为 153.1 cm.

培优精练

1. D 【解析】在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$BC=6$ m，$\because \sin\angle BAC=\frac{BC}{AB}=\sin 37^\circ\approx 0.60=\frac{3}{5}$，$\therefore AB\approx\frac{5}{3}BC=\frac{5}{3}\times 6=10$（m）．故选 D.

2. B 【解析】如图，作 $DE\perp AB$ 于点 E．$\because \tan\angle DBA=\frac{1}{5}=\frac{DE}{BE}$，$\therefore BE=5DE$．$\because\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$\therefore\angle A=45^\circ$．$\therefore\angle ADE=45^\circ$．$\therefore AE=DE$．$\therefore BE=5AE$．又 $\because AC=6$，$\therefore AB=\frac{6}{\sin 45^\circ}=6\sqrt{2}$．$\therefore AE+BE=AE+5AE=6\sqrt{2}$．$\therefore AE=\sqrt{2}$．在等腰直角$\triangle ADE$ 中，由勾股定理，得 $AD=\sqrt{2}AE=2$．故选 B.



3. 解：如下图，过点 B、C 分别作 AE 的垂线，垂足分别为 M、N，过点 C 作 $CD\perp BM$，垂足为 D.

在 Rt$\triangle ABM$ 中，

$\because\angle BAE=60^\circ$，$AB=16$ cm，

$\therefore BM=\sin 60^\circ\cdot AB=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 16=8\sqrt{3}$（cm），

$\angle ABM=90^\circ-60^\circ=30^\circ$.

在 Rt$\triangle BCD$ 中，

$\because\angle DBC=\angle ABC-\angle ABM=50^\circ-30^\circ=20^\circ$，

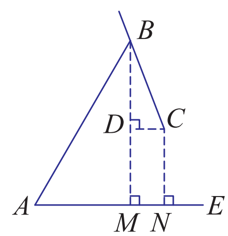
$\therefore\angle BCD=90^\circ-20^\circ=70^\circ$.

又 $\because BC=8$ cm，

$\therefore BD=\sin 70^\circ\times 8\approx 0.94\times 8=7.52$（cm）.

$\therefore CN=DM=BM-BD=8\sqrt{3}-7.52\approx 6.3$（cm），

即点 C 到 AE 的距离约为 6.3 cm.



名卷压轴题

（1）解：$\because AB=4$，点 M 是边

AB 的中点，

$\therefore AE=BE=2.$

$\because AE=2BF,$

$\therefore BF=1.$

由勾股定理，得

$EF^2=BE^2+BF^2=2^2+1^2=5.$

$\therefore$正方形 $EFGH$ 的面积为 5.

（2）**证明：**① 由题意知，$\angle KAE=\angle B=90^\circ$，

$\therefore \angle EFB+\angle FEB=90^\circ.$

$\because$四边形 $EFGH$ 是正方形，

$\therefore \angle HEF=90^\circ.$

$\therefore \angle KEA+\angle FEB=90^\circ.$

$\therefore \angle KEA=\angle EFB.$

$\therefore \triangle KEA\backsim\triangle EFB.$

$\therefore \dfrac{KE}{EF}=\dfrac{EA}{FB}=2.$

$\therefore KE=2EF=2EH.$

②由①，得 $HK=HE=GF.$

$\because \angle KHI=\angle FGJ=90^\circ$，

$\angle KIH=\angle FJG$，

$\therefore \triangle KHI\cong\triangle FGJ$（AAS）.

$\because S_{\triangle FGJ}=S_1$，

$\therefore S_{\triangle KHI}=S_1.$

$\because \angle K=\angle K$，

$\angle KHI=\angle A=90^\circ$，

$\therefore \triangle KHI\backsim\triangle KAE.$

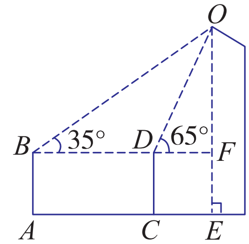
$\because S_{四边形AEHI}=S_2$，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle KAE}}{S_{\triangle KHI}}=\dfrac{S_1+S_2}{S_1}=\left(\dfrac{KA}{KH}\right)^2=\left(\dfrac{KA}{\frac{1}{2}KE}\right)^2=\dfrac{4KA^2}{KE^2}=4\sin^2\alpha.$

$\therefore \dfrac{S_2}{S_1}=4\sin^2\alpha-1.$

第 3 讲　解直角三角形的应用

例一　C　**【解析】**过点 O 作 $OE\perp AC$ 于点 E，延长 BD 交 OE 于点 F，如下图.



设 $DF=x$ m，则 $BF=(3+x)$m.

$\because \tan 65^\circ=\dfrac{OF}{DF}$，$\therefore OF=x\tan 65^\circ\approx 2.1x$ m. $\because \tan 35^\circ=\dfrac{OF}{BF}$，$\therefore OF=(3+x)\tan 35^\circ\approx 0.7(3+x)$ m.

$\therefore 2.1x=0.7(3+x)$. $\therefore x=1.5$.

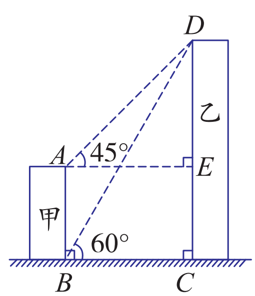
$\therefore OF=2.1\times 1.5=3.15$（m）.

$\therefore OE=OF+EF=3.15+1.55=4.7$（m）. 故选 C.

【点拨】本题主要考查解直角三角形的应用. 熟练运用锐角三角函数的定义是解题的关键.

变式训练一

1. B　**【解析】**过点 A 作 $AE\perp CD$ 于点 E，如下图.



$\because AB \perp BC$，$DC \perp BC$，$\therefore \angle AED = \angle AEC = \angle ABC = \angle BCD = 90°$. $\therefore$四边形 $ABCE$ 为矩形. $\therefore BC = AE$，$EC = AB = 40$ m. $\because \angle DAE = 45°$，$\therefore \angle ADE = 45°$. $\therefore AE = DE$. 设 $DE = x$ m，则 $BC = x$ m，$DC = (40 + x)$ m. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中，$\tan\angle DBC = \dfrac{DC}{BC}$，即 $\tan 60° = \dfrac{x+40}{x}$，解得 $x = 20(\sqrt{3}+1)$. $\therefore DC = 40 + x = (60 + 20\sqrt{3})$ m.

2. **解**：$\because BC \perp AB$，

$\therefore \angle ABC = 90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，

$\because \angle CAB = 53°$，$AB = 20$ m，

$\therefore \tan\angle CAB = \dfrac{BC}{AB}$，

即 $\tan 53° = \dfrac{BC}{20}$.

$\therefore BC \approx 20 \times 1.327 = 26.54$ (m).

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，

$\because \angle DAB = 58°$，

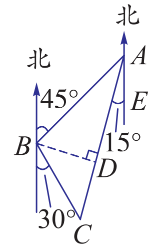
$\therefore \tan\angle DAB = \dfrac{BD}{AB}$，

即 $\tan 58° = \dfrac{BD}{20}$.

$\therefore BD \approx 20 \times 1.600 = 32$ (m).

$\therefore CD = BD - BC = 32 - 26.54 = 5.46 \approx 5.5$ (m).

例二　解：作 $BD \perp AC$ 于点 D，如图所示.



依题意，得 $\angle BAE = 45°$，

$\angle ABC = 180° - 45° - 30° = 105°$，

$\angle CAE = 15°$.

$\therefore \angle BAC = 30°$.

$\therefore \angle ACB = 180° - 105° - 30° = 45°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中，

$\angle BDC = 90°$，$\angle ACB = 45°$，

$\therefore \angle CBD = 45°$.

$\therefore \angle CBD = \angle DCB$.

$\therefore BD = CD$.

设 $BD = x$ km，则 $CD = x$ km.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$\angle BAC = 30°$，

$\therefore AB = 2BD = 2x$ km，

$\tan 30° = \dfrac{BD}{AD}$.

$\therefore \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{x}{AD}$.

$\therefore AD = \sqrt{3}x$ km.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BDC$ 中，$\angle BDC = 90°$，$\angle DCB = 45°$，

$\therefore \sin\angle DCB = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore BC = \sqrt{2}x$.

$\because CD + AD = 30 + 30\sqrt{3}$，

$\therefore x + \sqrt{3}x = 30 + 30\sqrt{3}$.

$\therefore x = 30$.

∴$AB=2x=60$ km，

$BC=\sqrt{2}x=30\sqrt{2}$ km.

∴第一组用时：$60\div40=1.5$（h），

第二组用时：$30\sqrt{2}\div30=\sqrt{2}$（h）.

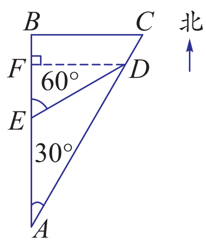
∵$\sqrt{2}<1.5$，

∴第二组先到达目的地.

【点拨】本题主要考查了解直角三角形——方向角的应用．解题的关键是学会添加常用辅助线构造直角三角形解决问题.

变式训练二

1. 解：过点 D 作 $DF\perp BE$ 于点 F，如下图所示.



∵$\angle ADE=\angle DEB-\angle A=60°-30°=30°$，

∴$\angle A=\angle ADE$.

∴$AE=DE$.

∵$\angle B=90°$，$\angle A=30°$，

$BC=40$ n mile，

∴$AC=2BC=80$ n mile，

$AB=\sqrt{3}BC=40\sqrt{3}$ n mile.

∵$BE=30$ n mile，

∴$AE=(40\sqrt{3}-30)$n mile.

∴$DE=(40\sqrt{3}-30)$n mile.

在 Rt$\triangle DEF$ 中，

∵$\angle DEF=60°$，$\angle DFE=90°$，

∴$\angle EDF=30°$.

∴$DF=\frac{\sqrt{3}}{2}DE=(60-15\sqrt{3})$n mile.

∵$\angle A=30°$，

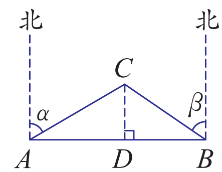
∴$AD=2DF=(120-30\sqrt{3})$n mile.

∴$CD=AC-AD=80-(120-30\sqrt{3})=(30\sqrt{3}-40)$n mile，

即乙船与 C 码头之间的距离为 $(30\sqrt{3}-40)$ n mile.

2. 解：不会．理由如下：

如下图，过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D.



∴$\angle ACD=\alpha$，$\angle BCD=\beta$.

∴$\tan\angle ACD=\tan\alpha=\frac{AD}{CD}$，

$\tan\angle BCD=\tan\beta=\frac{BD}{CD}$.

∴$AD=CD\cdot\tan\alpha$，

$BD=CD\cdot\tan\beta$.

由 $AD+BD=AB$，

得 $CD\cdot\tan\alpha+CD\cdot\tan\beta=100$.

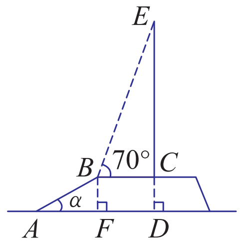
则 $CD=\frac{100}{\tan\alpha+\tan\beta}$

$=\frac{100}{1.776+1.224}$

$=\frac{100}{3}>30$.

∴高速公路不会受到此次地震的影响.

例三　解：（1）如下图，过点 B 作 $BF\perp AD$ 于点 F.



$\because i=\tan\angle BAF=\dfrac{BF}{AF}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore \angle BAF=30°$，即 $\alpha=30°$.

故斜坡 AB 的坡角 α 的度数是 $30°$.

（2）$\because \angle BAF=30°$，$AB=6$ m，

$\therefore CD=BF=\dfrac{1}{2}AB=3$ m.

在 $Rt\triangle BCE$ 中，

$\because \angle EBC=70°$，$BC=5$ m，

$\therefore EC=BC\cdot\tan\angle EBC=5\times\tan 70°\approx5\times2.75=13.75$（m）.

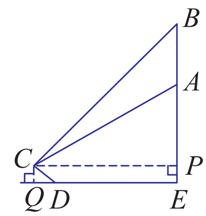
$\therefore ED=EC+CD=13.75+3\approx17$（m）.

故大树顶端 E 到地面 D 的距离约为 17 m.

【点拨】本题考查的是解直角三角形的应用之仰角、俯角问题和坡度、坡角问题．解决这类题目的关键就是掌握仰角、俯角的概念和坡度、坡角的概念、熟记锐角三角函数的定义.

变式训练三

1. **解：**过点 C 作 $CP\perp BE$ 于点 P，作 $CQ\perp DE$ 于点 Q，如图所示.



由题意知，$\angle ACP=30°$，$\angle BCP=45°$.

设 $AP=x$，则 $AC=2x$.

$\therefore CP=\sqrt{AC^2-AP^2}=\sqrt{3}x$.

$\because \angle BCP=45°$，

$\therefore BP=CP=\sqrt{3}x=200+x$.

解得 $x=100(\sqrt{3}+1)$.

$\therefore CP=(300+100\sqrt{3})$m.

又 $DE=400$ m，

$QE=CP=$（$300+100\sqrt{3}$）m，

$\therefore QD=QE-DE=$（$100\sqrt{3}-100$）m.

$\because \dfrac{CQ}{QD}=\dfrac{3}{4}$，

$\therefore$ 可设 $CQ=3k$，$QD=4k$.

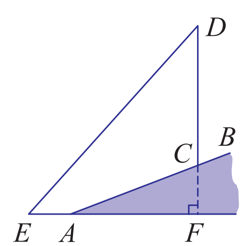
在 $Rt\triangle CQD$ 中，

$CD=\sqrt{CQ^2+DQ^2}=5k$.

$\therefore \dfrac{QD}{CD}=\dfrac{4k}{5k}=\dfrac{4}{5}=\dfrac{100\sqrt{3}-100}{CD}$.

$\therefore CD=125\sqrt{3}-125\approx125\times1.73-125=91.25\approx91.3$（m）.

2. **解：**如下图，延长 DC 与 EA 交于点 F，则 $DF\perp EF$.



$\therefore \frac{CF}{AF}=\frac{1}{2.4}=\frac{5}{12}$.

设 $CF=5k$，则 $AF=12k$，

$\therefore AC=\sqrt{AF^2+CF^2}=13k=13$.

$\therefore k=1$.

$\therefore CF=5$ m，$AF=12$ m.

$\because AE=4$ m，

$\therefore EF=4+12=16$（m）.

在 Rt$\triangle DEF$ 中，

$\because \angle AED=48^\circ$，

$\therefore \tan 48^\circ=\frac{DF}{EF}=\frac{DF}{16}\approx 1.11$.

$\therefore DF\approx 17.76$ m.

$\therefore CD\approx 17.76-5=12.76$（m）.

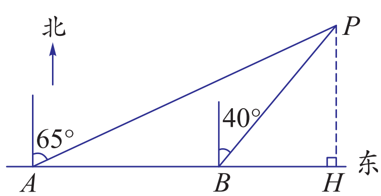
故古树 CD 的高度约为 12.76 m.

例四　解：（1）$\because \angle PAB=90^\circ-65^\circ=25^\circ$，$\angle ABP=90^\circ+40^\circ=130^\circ$，

$\therefore \angle APB=180^\circ-\angle PAB-\angle ABP=25^\circ$.

$\therefore PB=AB=15\times 1=15$ n mile.

（2）过点 P 作 $PH\perp AB$ 于点 H，如下图.



$\because PB=AB=15$ n mile，

在 Rt$\triangle PBH$ 中，

$\angle PBH=90^\circ-40^\circ=50^\circ$，

$\therefore PH=PB\times \sin 50^\circ=15\times \sin 50^\circ$.

$\because 15\times \sin 50^\circ>15\times \sin 45^\circ$，

$15\times \sin 45^\circ=15\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{15\sqrt{2}}{2}$.

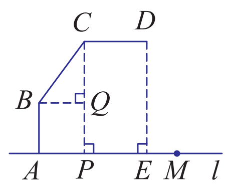
$\therefore PH>\frac{15\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore$这艘船继续向正东方向航行是安全的.

【点拨】本题主要考查解直角三角形的应用．解题的关键是作出恰当辅助线，构建直角三角形，利用三角函数的知识进行计算推理.

变式训练四

解：（1）过点 C 作 $CP\perp AE$ 于点 P，过点 B 作 $BQ\perp CP$ 于点 Q，如下图所示.



$\because \angle ABC=143^\circ$，

$\therefore \angle CBQ=53^\circ$.

在 Rt$\triangle BCQ$ 中，

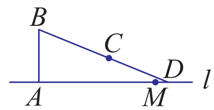
$CQ=BC\cdot \sin 53^\circ\approx 70\times 0.8=56$（cm）.

$\because CD\parallel l$，

$\therefore DE=CP=CQ+PQ=56+50=106$（cm）.

（2）能．理由如下：

当 B、C、D 三点共线时，如图所示.



$\because BD=BC+CD=70+60=130$（cm），$AB=50$ cm，

在 Rt$\triangle ABD$ 中，

$AB^2+AD^2=BD^2$，

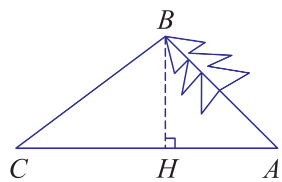
$\therefore AD^2=BD^2-AB^2=130^2-50^2=14\ 400$.

$\therefore AD=120$ cm>110 cm.

$\therefore$手臂端点 D 能碰到点 M.

培优精练

1. 解：如下图，过点 B 作 $BH\perp AC$ 于点 H.



设 $BH=x$ m，

$\because \angle BCA=37^\circ$，$\angle BHC=90^\circ$，

$\therefore CH=\dfrac{BH}{\tan 37^\circ}=\dfrac{x}{0.75}=\dfrac{4x}{3}$ m .

$\because \angle BAC=45^\circ$，

$\therefore \angle ABH=45^\circ$.

$\therefore \angle ABH=\angle BAC$.

$\therefore AH=BH=x$ m.

$\because AC=28$ m，

$\therefore \dfrac{4x}{3}+x=28$.

解得 $x=12$.

$\therefore AH=BH=12$ m.

$\therefore AB=\sqrt{BH^2+AH^2}=\sqrt{12^2+12^2}=12\sqrt{2}\approx16.9$（m）.

2. 解：由题意，得 $\angle PBC=30^\circ$，$\angle MAB=60^\circ$.

$\therefore \angle CBQ=60^\circ$，$\angle BAN=30^\circ$.

$\therefore \angle ABQ=30^\circ$.

$\therefore \angle ABC=\angle CBQ+\angle ABQ=90^\circ$.

$\because AB=BC=10$ km，

$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{10^2+10^2}=10\sqrt{2}\approx14.1$（km）.

故 A、C 两港之间的距离为 14.1 km.

3. 解：如图，过点 B 作 $BH\perp AC$，垂足为 H.

由题意，得 $\angle BAC=60^\circ$，$\angle BCA=40^\circ$，$AC=257$ n mile.

在 Rt$\triangle ABH$ 中，

$\because \tan\angle BAH=\dfrac{BH}{AH}$，

$\cos\angle BAH=\dfrac{AH}{AB}$，

$\therefore BH=AH\cdot\tan 60^\circ=\sqrt{3}AH$，

$AB=\dfrac{AH}{\cos 60^\circ}=2AH$.

在 Rt$\triangle BCH$ 中，

$\because \tan\angle BCH=\dfrac{BH}{CH}$，

$\therefore CH=\dfrac{BH}{\tan 40^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}AH}{\tan 40^\circ}$.

又$\because CA=CH+AH$，

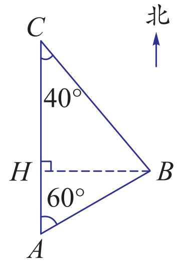
$\therefore 257=\dfrac{\sqrt{3}AH}{\tan 40^\circ}+AH$.

$\therefore AH=\dfrac{257\times\tan 40^\circ}{\tan 40^\circ+\sqrt{3}}$.

$\therefore AB=2AH=\dfrac{2\times257\times\tan 40^\circ}{\tan 40^\circ+\sqrt{3}}\approx$

$\dfrac{2\times257\times0.84}{0.84+1.73}=168$（n mile），

即 AB 的长约为 168 n mile.



4. **解：**（1）过点 B 作 $BE\perp AD$ 于点 E，如图所示.

在 Rt△AEB 中，$\sin\alpha=\dfrac{BE}{AB}$，

即$\dfrac{BE}{65}=\dfrac{4}{13}$.

解得 $BE=20$（m）.

故小明从点 A 到点 B 上升的竖直高度是 20 m.

（2）过点 B 作 $BF\perp CD$ 于点 F，如图所示.

由题意，得四边形 $BEDF$ 为矩形.

$\therefore DF=BE=20$ m.

设 $CF=x$ m，

在 Rt△CBF 中，

BC 的坡度 $i=1:3$，

$\therefore BF=3x$ m.

由勾股定理，得

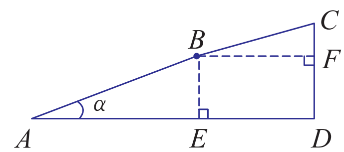
$BF^2+CF^2=BC^2$，

即$(3x)^2+x^2=50^2$.

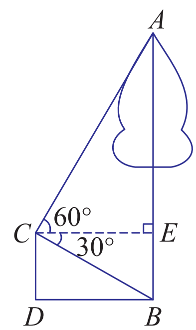
解得 $x=5\sqrt{10}$.

$\therefore CD=CF+FD=(5\sqrt{10}+20)$ m.

故小明从点 A 到点 C 上升的高度 CD 是（$5\sqrt{10}+20$）m.



5. **解：**过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E，如下图.



由题意可知，四边形 $BDCE$ 为矩形，则 $CE=BD=3$ m.

在 Rt △ACE 中，$CE=3$ m，$\angle ACE=60^\circ$，$\tan\angle ACE=\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{AE}{3}=\sqrt{3}$.

解得 $AE=3\sqrt{3}$ m.

在 Rt △CBE 中，$CE=3$ m，$\angle BCE=30^\circ$，$\tan\angle BCE=\dfrac{BE}{CE}=\dfrac{BE}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

解得 $BE=\sqrt{3}$ m.

$\therefore AB=AE+BE=3\sqrt{3}+\sqrt{3}=$

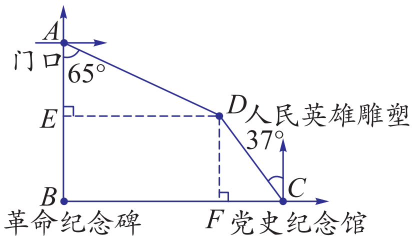
$4\sqrt{3}\approx6.92$（m）.

∵$6.92<8$，

∴距离 B 点 8 m 处的古建筑不在危险区内.

名卷压轴题

解：过点 D 作 $DE\perp AB$ 于点 E，$DF\perp BC$ 于点 F，如下图所示.



由题意，得 $\angle CDF=37°$，

$CD=200$ m.

在 Rt$\triangle CDF$ 中，$\sin\angle CDF=\dfrac{CF}{CD}=\sin 37°\approx0.60$，

$\cos\angle CDF=\dfrac{DF}{CD}=\cos 37°\approx0.80$，

∴$CF\approx200\times0.60=120$（m），

$DF\approx200\times0.80=160$（m）.

∵$AB\perp BC$，$DF\perp BC$，

$DE\perp AB$，

∴$\angle B=\angle DFB=\angle DEB=90°$.

∴四边形 $BFDE$ 是矩形.

∴$BF=DE$，$BE=DF\approx160$ m.

∴$AE=AB-BE\approx300-160=140$（m）.

在 Rt$\triangle ADE$ 中，

$\tan\angle DAE=\dfrac{DE}{AE}=\tan 65°\approx2.14$，

∴$DE\approx AE\times2.14\approx140\times2.14=299.6$（m）.

∴$BF=DE\approx299.6$（m）.

∴$BC=BF+CF\approx299.6+120=419.6\approx420$（m），

即革命纪念碑 B 与党史纪念馆 C 之间的距离约为 420 m.

◎解直角三角形　新题型探究

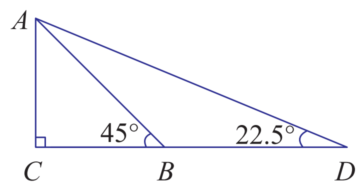
例题　解：（1）由题意，得

$AC=x$，$CD=2x+\sqrt{3}x$，

∴ $\tan 15°=\dfrac{AC}{CD}=\dfrac{x}{2x+\sqrt{3}x}=2-\sqrt{3}$，

即 $\tan 15°$的值是 $2-\sqrt{3}$.

（2）如下图所示.



在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle ABC=45°$，延长 CB 至点 D，使得 $BD=AB$，连接 AD.

易知 $\angle D=22.5°$.

设 $AC=BC=x$，

则 $AB=BD=\sqrt{2}x$，

故 $CD=BC+BD=x+\sqrt{2}x$.

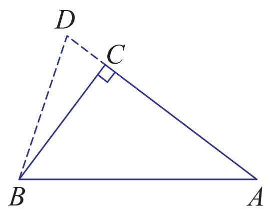
∴ $\tan 22.5°=\dfrac{AC}{CD}=\dfrac{x}{x+\sqrt{2}x}=\sqrt{2}-1$，

即 $\tan 22.5°$的值是$\sqrt{2}-1$.

【点拨】本题主要考查了解直角三角形. 解答本题的关键是明确题意，画出相应的图形，利用数形结合的思想解答.

变式训练

解：如下图，延长 AC 至点 D，使 $AD=AB$.



在 Rt△ACB 中，$\sin A=\frac{3}{5}$，

设 $BC=3$，

则 $AB=5$，$AC=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

$\therefore AD=AB=5$，

$CD=AD-AC=5-4=1$.

在 Rt△BCD 中，$CD=1$，$BC=3$，

$\therefore BD=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.

则 $\text{sad}\,A=\frac{BD}{AB}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

培优精练

(1) $\sqrt{3}$ **【解析】**$\because$在 Rt△ABC 中，$\alpha=30°$，$\therefore BC=\frac{1}{2}AB$.

$\therefore AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{AB^2-\frac{1}{4}AB^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$. $\therefore \cot 30°=\frac{AC}{BC}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}AB}{\frac{1}{2}AB}=\sqrt{3}$.

(2) **解：**$\because \tan A=\frac{3}{4}$，

$\therefore$设 $BC=3a$，则 $AC=4a$.

$\therefore \cot A=\frac{AC}{BC}=\frac{4a}{3a}=\frac{4}{3}$.

第二十五章 随机事件的概率

例一 0.9 4.7 **【解析】**从表格中可以看出，柑橘损坏的频率在常数 0.1 附近摆动，并且随统计量的增加这种规律逐渐明显，$\therefore$柑橘的完好率应是 $1-0.1=0.9$. 设每千克柑橘的销售价为 x 元，根据题意，得 $10\ 000\times0.9x-3\times10\ 000=12\ 000$. 解得 $x=\frac{14}{3}\approx4.7$. $\therefore$去掉损坏的柑橘后，为获得 12 000 元的利润，完好柑橘每千克的售价约为 4.7 元.

【点拨】本题主要考查了用频率估计概率的知识. 得到售价与利润的等量关系是解决本题的关键.

变式训练一

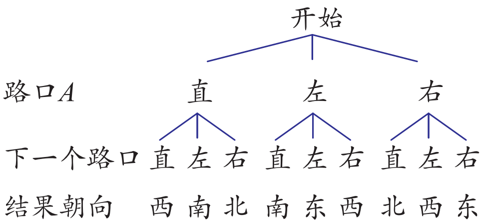
1. 0.9 **【解析】**根据表格数据可知，该种苹果树苗移植成活的频率近似值为 0.9，$\therefore$估计这种苹果树苗移植成活的概率约为 0.9.

2. 20 000 **【解析】**根据表格数据可知，这种树苗移植成活的概率约为 0.9. $\therefore$若要有 18 000 棵树苗成

活，估计需要移植树苗 18 000 ÷ 0.9＝20 000（棵）.

例二　解：（1）嘉淇走到十字路口 A 向北走的概率为$\frac{1}{3}$.

（2）补全树状图如下：



由树状图可知，共有 9 种等可能的结果，嘉淇经过两个十字路口后向西参观的结果有 3 种，向南参观的结果有 2 种，向北参观的结果有 2 种，向东参观的结果有 2 种，

∴向西参观的概率为$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$，

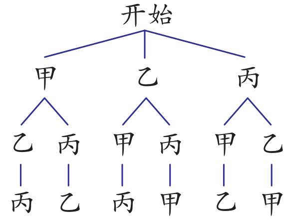
向南参观的概率＝向北参观的概率＝向东参观的概率＝$\frac{2}{9}$.

∴向西参观的概率较大.

【点拨】将概率问题与俯视示意图联系起来，运用画树状图的方法来解决概率问题. 解决问题的关键就是正确画出树状图.

变式训练二

1. $\frac{1}{6}$　**【解析】**由题意，画出树状图如图所示.

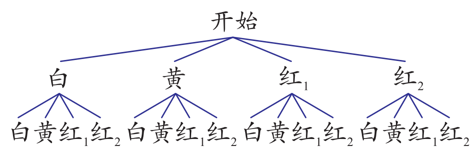


由树状图可知，共有 6 种等可能的结果，其中出场顺序恰好是甲、乙、丙的只有 1 种结果. ∴出场顺序恰好是甲、乙、丙的概率为$\frac{1}{6}$.

2. **解：**（1）∵小亮随机摸球 10 次，其中 6 次摸出的是红球，

∴这 10 次中摸出红球的频率为$\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

（2）由题意画出树状图如下图所示.



由树状图可知，共有 16 种等可能的结果，其中摸出的球中 1 个是白球、1 个是黄球的有 2 种情况，

∴两次摸出的球中 1 个是白球、1 个是黄球的概率为$\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$.

例三　（1）64.8　**【解析】**由题意可知，其他垃圾所占的百分比为$1-20\%-7\%-55\%=18\%$，∴其他垃圾所在扇形的圆心角度数是$360°\times18\%=64.8°$.

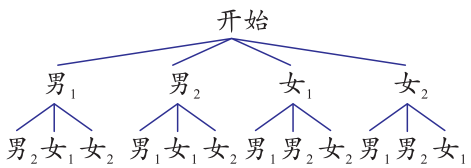
（2）**解：** 由扇形统计图可知，可回收物占生活垃圾总量的 20%.

∴该市这一天生活垃圾中可回收物的总量为 500×20%＝100（t）.

∵100×0.2＝20（万元），

∴估计该市这一天可回收物所创造的经济总价值是 20 万元.

（3）**解：** 由题意可画树状图如下.



由树状图可知，共有 12 种等可能的结果，

其中选取的 2 名学生恰好为 1 男 1 女的结果有 8 种情况，

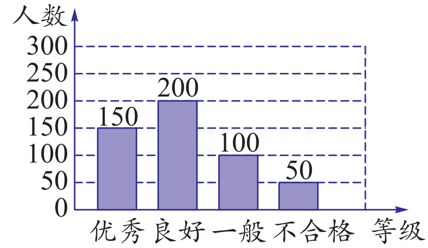
∴$P_{(1男1女)}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

【点拨】 将概率与扇形统计图紧密联系，运用树状图来解决实际问题，体现数与形的结合. 解决问题的关键就是正确理解题意并根据题意画出正确的树状图.

变式训练三

（1）500　108°　**【解析】** 该校九年级共有学生人数为 200÷40%＝500（名）；“优秀”所占圆心角的度数为 $360°\times\frac{150}{500}=108°$.

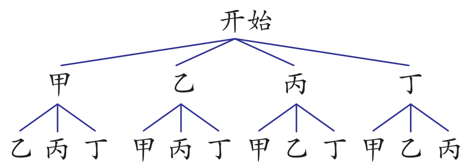
（2）**解：** 成绩为“一般”的人数为 500－150－200－50＝100（名），补全条形统计图如图所示.



（3）**解：** ∵$15\ 000\times\frac{50}{500}=1\ 500$（名），

∴估计该市大约有 1 500 名学生在这次答题中成绩不合格.

（4）**解：** 画树状图如下图所示.



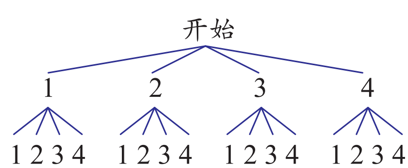
由树状图可知，共有 12 种等可能的结果，其中必有甲同学参加的结果有 6 种，

∴必有甲同学参加的概率为 $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

培优精练

1. 0.8　**【解析】** ∵从表中频率的波动情况可以发现频率稳定在 0.8 附近，∴这名运动员射击 1 次时，射中 9 环以上的概率大约是 0.8.

2. **解：**（1）由题意，画出树状图如下图所示.



共有 16 种等可能的结果，取出的 2 张卡片数字相同的结果有 4 种，

∴取出的 2 张卡片数字相同的概率为$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

(2) 由 (1) 可知，共有 16 种等可能的结果，取出的 2 张卡片中，至少有 1 张卡片的数字为“3”的结果有 7 种，

∴取出的 2 张卡片中，至少有 1 张卡片的数字为“3”的概率为$\frac{7}{16}$.

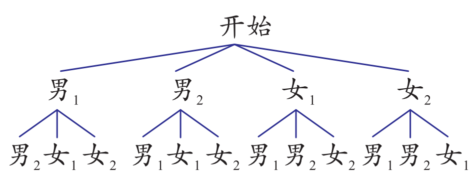
3. (1) 200　108°　**【解析】**这次抽样调查的总人数为 $36\div18\%=200$ (人)，则参加“舞蹈”的学生人数为 $200-36-80-24=60$ (人)，

∴扇形统计图中“舞蹈”对应的圆心角度数为 $360°\times\frac{60}{200}=108°$.

(2) **解：** ∵ $1\ 400\times\frac{80}{200}=560$ (人)，

∴估计该校 1 400 名学生中选择参加书法活动的有 560 人.

(3) **解：** 画树状图如下图所示.



由树状图可知，共有 12 种等可能的结果，

其中恰为 1 男 1 女的结果有 8 种，

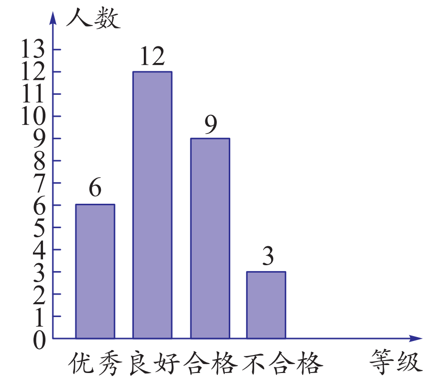
∴P (1 男 1 女) $=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

名卷压轴题

(1) **解：** 由题意，得抽取的学生人数为 $12\div40\%=30$ (人)，

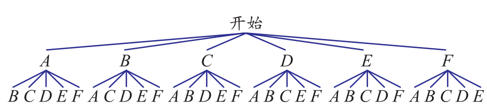
则优秀的学生人数为 $30-12-9-3=6$ (人).

条形统计图补充完整如下：



(2) 30%　36　**【解析】**合格等级所占百分比为 $9\div30\times100\%=30\%$；不合格等级所对应的扇形圆心角为 $360°\times\frac{3}{30}=36°$.

(3) **解：** 由 (1) 知，优秀等级的学生有 6 人，记为 A、B、C、D、E、F，画树状图如下图所示.



由树状图可知，共有 30 种等可能的结果，

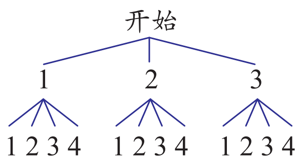
其中恰好抽到 A、B 两位同学的结

果有 2 种，

∴恰好抽到 A、B 两位同学的概率为 $\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$.

◎随机事件的概率　新题型探究

例题　$\frac{3}{4}$　【解析】该三角形的“顺序旋转和”与“逆序旋转和”的差为 $(4x+2z+3y)-(3x+2y+4z)=x+y-2z$. 由题意画出树状图如下图所示.

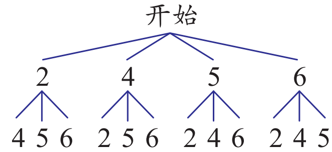


由树状图可知，x、y 的取值共有 12 种等可能的结果，其中对任意正整数 z，此三角形的“顺序旋转和”与“逆序旋转和”的差都小于 4 的结果数为 9，∴对任意正整数 z，此三角形的“顺序旋转和”与“逆序旋转和”的差都小于 4 的概率为 $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$.

【点拨】本题主要考查了新定义三角形的“旋转和”. 解决本题的关键就是理解新定义并正确运用树状图或列表法来求概率.

变式训练

解：由题意画出树状图如图所示.



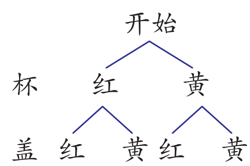
由树状图可知，选出的两数共有 12 种等可能的结果，其中能与 3 组成“V 数”的有 6 种，

∴从 2、4、5、6 中任选两数，能与 3 组成“V 数”的概率为 $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

培优精练

解：(1) 口袋中放入 1 个红球，1 个黄球，2 个球除颜色外，其他完全相同. 红球表示某种颜色的杯或盖，黄球表示另一种颜色的杯或盖，颜色搭配正确，相当于从两个这样的口袋中各随机取出 1 个球，颜色相同.

(2) 由题意画出树状图如下图所示.



由树状图知，共有 4 种等可能的结果，

其中颜色搭配正确的有 2 种.

∴颜色搭配正确的概率为 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.