参考答案

第一章　走进数学世界

例一　A　【解析】观察图案的变化可知，第 1 个图案中涂有阴影的小正方形的个数为 $5=4\times1+1$；第 2 个图案中涂有阴影的小正方形的个数为 $9=4\times2+1$；第 3 个图案中涂有阴影的小正方形的个数为 $13=4\times3+1$. 发现规律：第 n 个图案中涂有阴影的小正方形的个数为 $4n+1$. 所以第 2 022 个图案中涂有阴影的小正方形的个数为 $4\times2\,022+1=8\,089$. 故选 A.

【点拨】本题主要考查了图案的变化规律. 解决本题的关键是根据图案的变化寻找规律，总结规律，运用规律.

变式训练一

1. C　【解析】第 1 个“开”字中的棋子枚数为 $14=6\times2+2$；第 2 个“开”字中的棋子枚数为 $20=6\times3+2$；第 3 个“开”字中的棋子枚数为 $26=6\times4+2$. 发现规律：第 n 个“开”字中的棋子枚数为 $6(n+1)+2=6n+8$. 所以第 7 个“开”字需用到的棋子枚数为 $6\times7+8=50$. 故选 C.

2. C　【解析】由图可知，第 1 个图案中正三角形的个数为 $4=2\times1+2$；第 2 个图案中正三角形的个数为 $4+2=6=2\times2+2$；第 3 个图案中正三角形的个数为 $6+2=8=2\times3+2$. 按照这样的规律，则第 n 个图案中正三角形的个数为 $2n+2$. 故选 C.

例二　4　【解析】根据每行、每列、每条对角线上的三个数之和相等，又 1～9 这 9 个数之和为 $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$，所以每行、每列、每条对角线上的三个数之和为 $45\div3=15$. 所以第一列第三个数为 $15-2-5=8$. 所以 $m=15-8-3=4$.

【点拨】本题主要考查了数的特点. 抓住每行、每列、每条对角线上的三个数之和相等，求出每行、每列、每条对角线上的三个数之和是解题的关键.

变式训练二

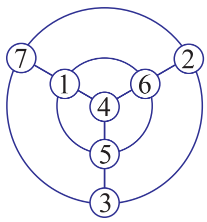
1. 158　【解析】由前三个正方形中的数可知，右上和左下两个数的积减去左上的数等于右下的数，且左上、左下、右上三个数是相邻的偶数. 因此，第 4 个正方形图中阴影部分左下是 12，右上是 14. 则 $m=12\times14-10=158$.

2. 解：由题意，得三条直线的公共小圆圈内应填的数为 $[12\times3-$

$(1+2+3+4+5+6+7)]\div 2=$
$(36-28)\div 2=8\div 2=4$.

则每条直线上的另两个小圆圈所填数字之和为 $12-4=8$.

(答案不唯一）如下图所示.



例三　D　**【解析】**从点 A_1 开始的第 1 次“逆移”到达 A_2：$A_1\to A_2$；第 2 次“逆移”到达 A_4：$A_2\to A_3\to A_4$；第 3 次“逆移”到达 A_4：$A_4\to A_1\to A_2\to A_3\to A_4$；…，第 4 次及第 4 次后都与第 3 次“逆移”的位置相同．所以经过第 2 022 次“逆移”到达 A_4．故选 D.

【点拨】本题主要考查了图形的变化规律．读懂题目信息，根据“逆移”的定义，找出其变化的规律是解题的关键.

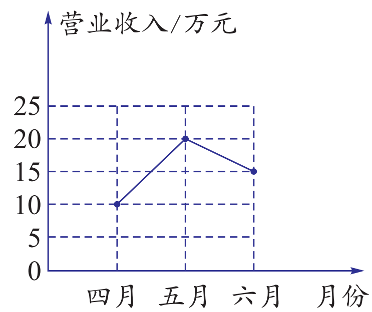
变式训练三

1. B　**【解析】**根据题意，得前 7 次移动后跳棋停留的顶点分别是 B、D、G、D、B、A、A，所以跳棋停留的顶点 7 次一个循环．因为 $2\ 021\div 7=288\cdots\cdots 5$，所以第 2 021 次移动后跳棋停留的顶点是 B．故选 B.

2. C　**【解析】**由图可知，每 4 个数为 1 个循环组，依次循环．因为 2 022 是第 2 023 个数，又 $2\ 023\div 4=505\cdots\cdots 3$，所以 2 022 应位于第 506 个循环组的第 3 个数，在Ⓒ位．故选 C.

例四　**解：**折线图如下图所示.

某超市 2022 年第二季度营业收入统计图



(1) $(10+20+15)\div 3=15$（万元）.

故该超市第二季度平均每月的营业收入是 15 万元.

(2) $(20-10)\div 10\times 100\%=100\%$.

故该超市五月的营业收入比四月的营业收入增长了 100%.

(3) 该超市六月的营业收入比五月的营业收入减少了.

减少了 $(20-15)\div 20\times 100\%=25\%$.

【点拨】本题主要考查了求一个数比另一个数增加或减少了百分之几以及平均数的求法．熟练掌握其计算公式是解题的关键.

变式训练四

解：(1)因为 $(48-25)\div 25=92\%$，所以该超市六月的销售额比三月的销售额增长了 92%.

(2)因为(30＋42＋48)÷3＝40(万元)，

所以该超市第二季度月平均销售额是40万元.

培优精练

1. B　【解析】假设每个小正方形的边长为1，则图1到图4中阴影部分的面积分别为1.5、1、2、1，所以图2与图4中阴影部分的面积相等.

2. 7　【解析】由图可知，6个小长方形的周长之和等于长方形$ABCD$的周长，即（1＋2.5）×2＝7.

3. 4 043　【解析】由图可知，第1层：2×1－1＝1个；第2层：2×2－1＝3个；第3层：2×3－1＝5个；第4层：2×4－1＝7个. 发现规律，第n层：$2\times n-1=(2n-1)$个；所以第2 022层的三角形的个数为2×2 022－1＝4 043.

4. 250　1　【解析】因为2 000÷2＝1 000，所以2 000是第1 000个偶数. 又1 000÷4＝250，所以第1 000个偶数是第250行中最大的一个数. 又偶数行的数从第4列开始向前面排，所以第1 000个偶数在第1列. 故2 000应在第250行第1列.

5. 解：（1）在2×2方格图案中有5个正方形.

（2）在3×3方格图案中有14个正方形.

（3）在4×4方格图案中有30个正方形，在5×5方格图案中有55个正方形.

名卷压轴题

解：由图可得，

第一组有：1块；

第二组有：6块；

第三组有：6×2＝12块；

……

第n组有：$6(n-1)$块（$n>1$）.

因为2 016＝(1＋6＋12＋18＋…＋6×25)＋65，

所以$n-1=25$.

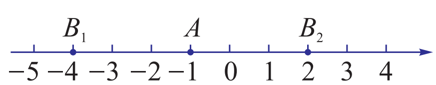
解得$n=26$.

故用现有的2 016块瓷砖最多能完整地铺满26组，此时还剩余65块瓷砖.

第二章　有理数

第1讲　有理数、数轴与相反数

例一　D　【解析】分两种情况，如下图所示.



①当点A沿数轴向左移动3个单位长度到达点B_1时，由图可知，点B_1表示的数是－4.

②当点A沿数轴向右移动3个单位长度到达点B_2时，由图可知，

点 B_2 表示的数是 2.

综上所述，点 B 表示的数是 -4 或 2. 故选 D.

【点拨】本题主要考查了点在数轴上的移动. 注意数形结合，分两种情况讨论是解答本题的关键.

变式训练一

1. D　【解析】因为点 A 在数轴上对应的数为 -3，点 B 对应的数为 2，所以 $AB=2+3=5$. 因为点 P 在数轴上对应的数是整数，点 P 不与点 A、B 重合，且 $PA+PB=5$，所以点 P 在点 A、点 B 之间. 所以满足条件的点 P 对应的整数有 -2、-1、0、1，共 4 个. 故选 D.

2. $-3m$　【解析】因为 $OA=OB$，点 A 表示的数是 m，所以点 B 表示的数是 $-m$，$AB=-2m$. 又因为 $BC=AB$，所以点 C 表示的数是 $-3m$.

例二　解：(1) 因为点 A、B 表示的数互为相反数，则原点 O 是 A、B 的中点，如图 1 所示.

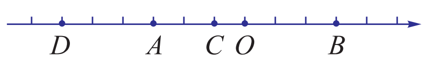


图 1

由图可知，点 C 表示的数是 -1.

(2) 因为点 D、B 表示的数互为相反数，则原点 O 是 D、B 的中点，如图 2 所示.

图 2

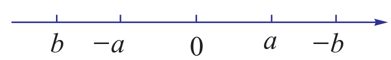
由图可知，点 C 表示的数是 0.5，点 D 表示的数是 -4.5.

【点拨】本题主要考查了相反数、数轴. 熟练掌握相反数的定义并确定出原点的位置是解题的关键.

变式训练二

1. C　【解析】由数轴可得，$1<p<2$，则 $\frac{1}{2}<\frac{p}{2}<1$. 因为 $\frac{1}{2}$ 的相反数是 $-\frac{1}{2}$，1 的相反数是 -1，所以表示数 $-\frac{p}{2}$ 的点在 -1 与 $-\frac{1}{2}$ 之间，即点 C.

2. 解：(1) a、b 的相反数的位置如下图所示.



(2) 因为数 b 与其相反数相距 20 个单位长度，

所以 b 表示的点到原点的距离为 10.

所以数 b 的值是 -10.

(3) 由 (2) 易得，$-b$ 表示的点到原点的距离为 10.

又因为数 a 表示的点与数 b 的相反数表示的点相距 5 个单位长度，

所以数 a 表示的点到原点的距离为 5.

所以数 a 的值是 5.

例三　解：(1) 点 B 向右移动 5 个单位长度后，点 B 表示的数为 1.

由图易得，三个点所表示的数中

最小的数是点 A 表示的数，为 -1.

（2）因为点 D 到 A、C 两点的距离相等，

所以点 D 为 AC 的中点.

由图可得，点 D 表示的数为 0.5.

（3）分两种情况：

①当点 E 在 A、B 之间时，

因为 $EA=2EB$，

由图可得，点 E 表示的数为 -3.

②当点 E 在点 B 的左侧时，

根据题意可知，点 B 是 AE 的中点.

由图可得，点 E 表示的数是 -7.

综上所述，点 E 表示的数为 -3 或 -7.

【点拨】本题主要考查了数轴上点的表示. 找出各点在数轴上的位置是解题的关键.

变式训练三

解：（1）移动后，点 B 表示的数为 -7.

因为点 A 表示的数为 -4，

点 C 表示的数为 2，

又 $-7<-4<2$，

所以移动后点 B 表示的数最小，为 -7.

（2）移动后，点 C 表示的数为 -4.

因为点 B 表示的数为 -2，

所以点 B 表示的数比点 C 表示的数大 2.

（3）有 3 种不同的移动方法.

①点 A 向右移动 2 个单位长度，点 C 向左移动 4 个单位长度；

②点 A 向右移动 6 个单位长度，点 B 向右移动 4 个单位长度；

③点 B 向左移动 2 个单位长度，点 C 向左移动 6 个单位长度.

例四　解：（1）因为 A、B 分别为数轴上的两点，点 A 表示的数为 -20，点 B 表示的数为 100，

由图可知，A、B 两点之间的距离为 120.

因为 M 为 AB 的中点，

所以点 M 到 A、B 两点的距离均为 60.

所以 AB 的中点 M 表示的数为 $100-60=40$.

（2）两只电子蚂蚁的相遇时间是 $120\div(6+4)=12$（s），

则电子蚂蚁 Q 运动的路程为 $12\times4=48$.

即电子蚂蚁 Q 从数 -20 开始向右运动 48 个单位长度到达点 C.

故点 C 表示的数为 $-20+48=28$.

（3）电子蚂蚁 P 追上电子蚂蚁 Q 的时间为 $120\div(6-4)=60$（s），

则电子蚂蚁 Q 运动的路程为 $4\times60=240$.

即电子蚂蚁 Q 从数 -20 开始向左运动 240 个单位长度到达点 D.

故点 D 表示的数为 $-20-240=-260$.

【点拨】本题主要考查了数轴上点的运动. 灵活运用相遇问题与追及问题所涉及的数量关系是解本题的关键.

变式训练四

解：(1) 由图可知，线段 AB 的长的 3 倍是表示 6 的点到表示 18 的点之间的距离.

因为 $(18-6)\div3=4$，

所以线段 AB 的长为 4.

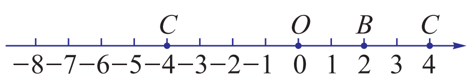
(2) 由 (1) 可知，线段 AB 的长为 4.

因为 $6+4=10$，$18-4=14$，

所以起始点 A 对应的数是 10，起始点 B 对应的数是 14.

培优精练

1. B　【解析】因为点 B 表示的数为 2，所以 $CO=2BO=4$. 如下图所示.



①当点 C 在原点左侧时，点 C 表示的数为 -4，则点 A 所表示的数为 -7；②当点 C 在原点右侧时，点 C 表示的数为 4，则点 A 所表示的数为 1. 因为点 B 在原点右侧，所以点 A 应在原点左侧. 所以点 A 表示的数为 -7. 所以 $a=-7$.

2. B　【解析】由题意可知，点 C 是 AE 的中点，则点 C 对应的数为 $(6+13)\div2=9.5$. 同理，点 B 对应的数是 $(6+9.5)\div2=7.75$. 故最接近 8 的数对应的点是 B.

3. **解**：因为在 -202.5 与 -49.5 之间最小的整数是 -202，最大的整数是 -50，

所以在 $-202.5\sim-49.5$ 之间有 $202-50+1=153$ 个整数.

在 50.5 与 199.5 之间最小的整数是 51，最大的整数是 199，

所以在 $50.5\sim199.5$ 之间有 $199-51+1=149$ 个整数.

因此被墨迹盖住的整数共有 $153+149=302$ 个.

4. **解**：(1) t 秒后，A、B、C 分别表示的数为 $6t-30$、$10+3t$、$18+3t$.

(2) 因为 A、B、C 三个点在数轴上同时向数轴的正方向运动，

①当点 A 运动到点 C 左侧时，

因为线段 AC 的长为 6 个单位长度，

所以 $18+3t-(6t-30)=6$.

解得 $t=14$.

②当点 A 运动到点 C 右侧时，

因为线段 AC 的长为 6 个单位长度，

所以 $6t-30-(18+3t)=6$.

解得 $t=18$.

综上所述，当 t 为 14 秒或 18 秒时，线段 AC 的长为 6 个单位长度.

名卷压轴题

解：（1）设动点 A 的运动速度是 x 个单位长度/秒，则动点 B 的运动速度为 $3x$ 个单位长度/秒.

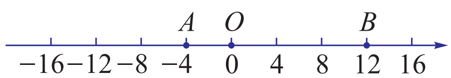
根据题意，得 $2(x+3x)=16$.

解得 $x=2$.

则 $3x=6$.

故动点 A 的运动速度是 2 个单位长度/秒，动点 B 的运动速度是 6 个单位长度/秒.

（2）由（1），得运动 2 秒时点 A 在数轴上表示的数为 -4，点 B 在数轴上表示的数为 12. 在数轴上标出 A、B 点的位置，如下图所示.



（3）设再经过 t 秒，$OB=2OA$.

①当点 B 在原点 O 的右侧时，

根据题意，得 $12-6t=2(4+2t)$.

解得 $t=0.4$.

②当点 B 在原点 O 的左侧时，

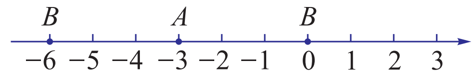
根据题意，得 $6t-12=2(4+2t)$.

解得 $t=10$.

故再经过 0.4 秒或 10 秒时，$OB=2OA$.

第 2 讲　绝对值与有理数的大小比较

例一　-6 或 0　**【解析】**因为点 A 表示的数是 -3，A、B 两点之间的距离为 3，即 $AB=3$，画出数轴如下图所示.

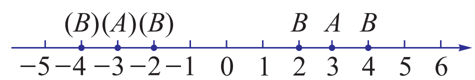


设点 B 表示的数是 x，所以 $|x-(-3)|=3$. 根据绝对值的几何意义，到 -3 这一点的距离为 3 的点应该有两个，分别位于 -3 的左、右两侧，由图易得，这两个点所表示的数分别是 -6 和 0. 即 $x=-6$ 或 $x=0$.

【点拨】本题主要考查了数轴和两点之间的距离. 解决本题的关键是确定到点 A 的距离为 3 的点有 2 个.

变式训练一

1. **解：**根据题意画出数轴，如下图所示.



因为点 A 到原点的距离为 3，

所以点 A 所表示的数为 3 或 -3.

因为 A、B 两点之间的距离为 1，

①当点 A 所表示的数为 3 时，

由图可知，点 B 所表示的数为 2 或 4.

②当点 A 所表示的数为 -3 时，

由图可知，点 B 所表示的数为 -2 或 -4.

综上所述，点 B 所表示的数为 ±2 或 ±4.

2. **解：**因为圆的直径为 1 个单位长度，

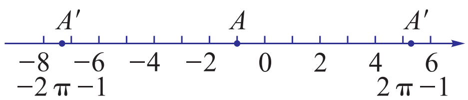
所以此圆的周长为 $\pi\times1=\pi$.

所以当圆滚动 2 周时，点 A'表示的数与 -1 的距离是 2π.

设点 A'表示的数为 x，

则 $|x-(-1)|=2\pi$.

根据绝对值的几何意义，表示到 -1 这一点的距离为 2π 的点有两个，左侧一个是 $-2\pi-1$，右侧一个是 $2\pi-1$. 如下图所示.



即 $x=2\pi-1$ 或 $x=-2\pi-1$.

故点 A' 表示的数是 $2\pi-1$ 或 $-2\pi-1$.

例二　D　**【解析】**因为 $|a|>|b|>|c|$，所以点 A 到原点的距离最大，点 B 其次，点 C 最小. 又因为 $AB=BC$，所以原点 O 在 BC 中点位置的右边.

【点拨】本题主要考查了实数与数轴. 理解绝对值的几何意义是解本题的关键.

变式训练二

1. D　**【解析】**由数轴可得，$|a|<|b|$，故选项 A 不正确；因为 $b<0$，所以 $|a|<-b$，故选项 B 不正确；由数轴可得，$a>b$，故选项 C 不正确；因为 $a<0$，所以 $|b|>-a$，故选项 D 正确. 故选 D.

2. (1) **解：** 由数轴上 a、b、c 的位置可知，$a<b<c$.

(2) $>$　$>$　$=$

(3) $>$　$>$　$>$

例三　(1) 0　**【解析】**因为点 A 与 -4 表示的点重合，由数轴易知，数轴是沿数 1 表示的点折叠，则点 B 与数 0 表示的点重合.

(2) **解：**（方法一）设点 M 表示的数为 x，由点 M 到 A、B 两点距离之和为 8，得

$|x-6|+|x-2|=8$.

①当点 M 在点 A 右侧时，

$x-6+x-2=8$，

解得 $x=8$.

②当点 M 在点 B 左侧时，

$6-x+2-x=8$，

解得 $x=0$.

③当点 M 在点 A 与点 B 之间时，

$6-x+x-2=8$，此方程无解.

综上所述，点 M 表示的数为 8 或 0.

（方法二）因为点 M 到 A、B 两点距离之和为 8，即 $MA+MB=8$.

①当点 M 在 A、B 两点之间时，

$MA+MB=AB=4\neq8$，不满足题意.

②当点 M 在点 A 的右侧时，

$MA+MB=MA+MA+AB=2MA+4=8$，

所以 $MA=2$.

由数轴可知，点 M 所表示的数为 8.

③当点 M 在点 B 的左侧时，

$MA+MB=MB+AB+MB=$

$2MB+AB=2MB+4=8$，

所以 $MB=2$.

由数轴可知，点 M 表示的数为 0.

综上所述，点 M 表示的数为 8 或 0.

【点拨】本题主要考查了数轴上两点之间的距离. 解题的关键是理解题意，掌握数轴上的点的特点及利用两点之间的距离构造含绝对值的方程解决问题.

变式训练三

1. 解：（1）因为点 P 到点 A、B 的距离相等，

所以点 P 为线段 AB 的中点.

由数轴可知，AB 的中点 P 对应的数为 1.

所以 $x=1$.

（2）因为点 P 到点 A、B 的距离之和为 10，

①若点 P 在 AB 之间时，

则 $PA+PB=AB=4\neq10$，不合题意.

②当点 P 在点 A 左侧时，

则 $PA+PB=PA+PA+AB=2PA+AB=2PA+4=10$，

所以 $PA=3$.

由数轴易知，点 P 所表示的数为 -4，

即 $x=-4$.

③当点 P 在点 B 右侧时，

则 $PA+PB=PB+AB+PB=2PB+AB=2PB+4=10$，

所以 $PB=3$.

由数轴易知，点 P 所表示的数为 6，

即 $x=6$.

综上所述，x 的值为 -4 或 6.

2. （1）4　**【解析】**因为表示 1 的点与表示 -1 的点重合，-1 和 1 的中点是 0，所以折叠点对应的数为 0. 则表示 -4 的点与表示 4 的点重合.

（2）因为折叠纸，表示 -1 的点与表示 3 的点重合，-1 与 3 的中点是 1，所以折叠点对应的数为 1.

①-3　**【解析】**因为 1 与 5 之间有 4 个单位长度，所以 1 向左移 4 个单位长度表示的数为 -3，即表示 5 的点与表示 -3 的点重合.

②**解：**因为 $13\div2=6.5$，点 A 在点 B 的左侧，

所以从 1 向左移 6.5 个单位长度到点 A.

所以点 A 表示的数为 -5.5.

从 1 向右移 6.5 个单位长度到 B.

所以点 B 表示的数为 7.5.

（3）**解：**若点 C 向右移动 4 个单位长度，

因为此时点 C 表示的数和 a 互为相反数，

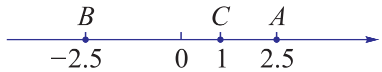
所以数 a 表示的点到原点的距离为 2. 故 $a=-2$.

同理，若点 C 向左移动 4 个单位长度，则 $a=2$.

综上所述，a 的值是 ± 2.

例四 （1）-2.5　1　3.5

【解析】如下图，点 B 为所求点.



（2）$|x-(-1)|$　-4 或 2

【解析】因为 $|DE|=3$，即表示到 -1 的距离为 3，利用数轴可知，在 -1 左侧 3 个单位长度的数是 -4，在 -1 右侧 3 个单位长度的数是 2，所以 x 的值为 -4 或 2.

（3）-1　【解析】因为 $|x+4|$ 与 $|x-2|$ 表示的几何意义分别是某数到 -4 的距离，某数到 2 的距离，要到这两个点的距离相等，这个点应该是 -4 与 2 的中点. 因为 -4 与 2 的中点是 -1，所以当 x 为 -1 时，$|x+4|$ 与 $|x-2|$ 的值相等.

【点拨】本题主要考查了绝对值，由数轴可得，到一点距离相等的点有两个，到两点距离相等的点是这两个点的中点.

变式训练四

（1）3　$|x-3|$　x　-2

（2）①5　②-3 或 4　【解析】由绝对值的几何意义，得 $|x+2|+|x-3|=7$ 的几何意义是数 x 对应的点到 3 和 -2 这两个点的距离之和为 7. 当 x 在 -2 与 3 之间时，x 到这两个点的距离之和为 5. 所以 x 在这两个点所在的线段之外.

(i) 当 x 在 3 的右侧时，由数轴可知，当 $x=4$ 时，x 到 3 的距离为 1，到 -2 的距离为 6，它们的距离之和为 7，满足题意；

(ii) 当 x 在 -2 的左侧时，由数轴可知，当 $x=-3$ 时，x 到 -2 的距离为 1，到 3 的距离为 6，它们的距离之和为 7，满足题意.

综上所述，$x=-3$ 或 4.

培优精练

1. 5 或 -1　【解析】因为点 A 表示的数为 2，由图易知，数轴上距离点 A 为 3 个单位长度的点表示的数是 5 或 -1.

2. 解：由图知，$a<0$，$b>0$，$c>0$，且 $c>b$.

所以 $c+b>0$，$c-b>0$.

所以 $|a|-|b|+2|c+b|+|c-b|=-a-b+2(c+b)+(c-b)=-a-b+2b+2c+c-b=-a+3c$.

3. 解：（1）由图可知，点 A、B 所表示的数分别为 -3 和 2.

将点 A 向左移动 1 个单位长度后到达 -4，再向右移动 9 个单位长度后到达 5，即点 C.

则 B、C 两点间的距离为 $|5-2|=3$.

（2）因为 $AD=3$，

分情况讨论：

①当点 D 在点 A 的右侧时，

因为点 A 表示的数为 -3，

所以点 D 所表示的数为 0.

所以点 B 移动到点 D，即从 2 移动到 0.

所以点 B 移动的距离为 2 个单位长度.

故 $m=2$.

②当点 D 在点 A 的左侧时，

因为点 A 表示的数为 -3，

所以点 D 所表示的数为 -6.

所以点 B 移动到点 D，即从 2 移动到 -6.

所以点 B 移动的距离为 8 个单位长度，

故 $m=8$.

综上所述，m 的值为 2 或 8.

4. (1) 2 **【解析】**因为点 P 是 MN 的中点，所以 $PN=\frac{1}{2}MN=4$.

又点 N 对应的数为 6，由数轴易知，点 P 对应的数为 2，即 $x=2$.

(2) **解：**存在点 P 到点 M、N 的距离之和是 12.

①当点 P 在 MN 之间时，

$PM+PN=MN=8\neq12$，

所以点 P 应在线段 MN 之外.

②当点 P 在点 M 的左侧时，

则 $PN+PM=PM+MN+PM=2PM+8=12$.

解得 $PM=2$.

由数轴易知，$x=-4$.

③当点 P 在点 N 的右侧时，

则 $PN+PM=PN+PN+MN=2PN+8=12$.

解得 $PN=2$.

由数轴易知，$x=8$.

综上所述，数轴上存在点 P，使点 P 到点 M、N 的距离之和是 12，此时 x 的值为 -4 或 8.

名卷压轴题

(1) $c<a<b$

(2) $<$ $<$ **【解析】**因为 $1<a<b<2$，所以 $b-a<1$. 又因为 $-1<c<0$，所以 $c-a<0$.

(3) **解：**由 a、b、c 在数轴上的位置，得 $c-b<0$，$c-a<0$，$a-1>0$.

所以 $|c-b|-|c-a|+|a-1|=b-c+c-a+a-1=b-1$.

(4) ①2 **【解析】**$|x-1|+|x-3|$ 的意义是数轴上表示数 x 的点到表示数 1 的点和表示数 3 的点的距离之和，因此其最小值为 $|3-1|=2$.

②$b-a$ **【解析】**$|x-a|+|x-b|$ 的意义是数轴上表示数 x 的点到表示数 a 的点和表示数 b 的点的距离之和，因此其最小值为 $|a-b|=b-a$.

③a $b-c$ **【解析】**$|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 的意义是数轴上表示数 x 的点到表示数 a 的点，表示数 b 的点，和表示数 c 的点的距离之和. 由数轴易知，当 $x=a$

时，其最小值为数 b 到数 c 的距离，即 $|b-c|=b-c$.

第 3 讲　有理数的计算

例一　B　【解析】由有理数 a、b、c 在数轴上对应点的位置可知，$a<-1$，$0<b<1$，$c>1$，且 $|a|>|c|$. 所以 $abc<0$，因此选项 A 不成立；因为 $a<0$，$b-c<0$，所以 $a(b-c)>0$，因此选项 B 成立；由 $a+b<0$，$c>0$，得 $(a+b)c<0$，因此选项 C 不成立；由 $a-c<0$，$b>0$，得 $(a-c)b<0$，因此选项 D 不成立．故选 B.

【点拨】本题主要考查了数轴与有理数的乘法．理解数轴表示数的意义以及有理数乘法的计算法则是解本题的关键.

变式训练一

1. D　【解析】因为 $a<-4$，所以 A 选项错误；因为 $b<-1$，$d=4$，所以 $bd<0$，故选项 B 错误；因为 $-2<b<-1$，$0<c<1$，所以 $b+c<0$，故选项 C 错误；因为 $a<-4$，$b>-2$，所以 $|a|>|b|$，故选项 D 正确．故选 D.
2. D　【解析】观察数轴可知，$a+b<0$，$a-b>0$，$|b|>a$，$ab<0$，$|b-a|=a-b$，故②③④⑤正确．故选 D.

例二　1　【解析】把 $x=-1$ 代入流程图计算，得 $|-1|\times3-5=3-5=-2<0$，把 $x=-2$ 代入流程图计算，得 $|-2|\times3-5=6-5=1>0$，则输出 y 的值为 1.

【点拨】本题主要考查了有理数的混合运算．厘清流程图中的运算是解本题的关键.

变式训练二

1. 3　【解析】把 10 代入，得 $[(10-6)+(-2)^2]\div(-2)=(4+4)\div(-2)=8\div(-2)=-4<0$，把 -4 代入，得 $[(-4-6)+(-2)^2]\div(-2)=(-10+4)\div(-2)=(-6)\div(-2)=3>0$，故输出的结果为 3.
2. 解：(1) $2+4-(-3)-5=4$.
   (2) $-1+4-(-3)-5=1$，
   $1+4-(-3)-5=3$.
   (3) 当输入 0 时，需要“算两遍”.（答案不唯一，大于 -2 且小于等于 0 的有理数均可）

例三　解：把这 9 个数的绝对值按从小到大的顺序排列，居于中间的数是 5，所以将 -5 放在九个方格的正中间；这九个数的绝对值的和为 $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$，除去正中间的 $|-5|$ 外，其余 8 个数的绝对值的和为 40，分为 4 组，每组之和为 10，就分为 -9 与 -1、$+8$ 与 $+2$、-7 与 -3、$+6$ 与 $+4$ 这 4 组．要使每行、每列、每条对角线的三个数的积为负，则每行、每列、每

条对角线的三个数中的负数是 1 个或 3 个．如下图所示（排列不唯一）．

+4	−3	+8
−9	−5	−1
+2	−7	+6

【点拨】解答本题的关键是要理解题目条件，根据有理数的运算法则找到方格中的数需满足的关系．

变式训练三

1. D　**【解析】**A 选项，行：$1+(-1)+2=2$，列：$3-1+0=2$，正确；选项 B，行：$-1+3+2=4$，列：$1+3+0=4$，正确；选项 C，行：$0+1+2=3$，列：$3+1-1=3$，正确；选项 D，行：$3+0-1=2$，列：$2+0+1=3$，$2\neq 3$，错误．故选 D.

2. -13　**【解析】**一个小正方体的六个面上的数字之和是 $-1+2+3+(-4)+5+(-6)=-1$，六个小正方体的面上的数字之和是 $-1\times 6=-6$，图中看得见的数字之和为 $-1+2+5-6+3+5+2-6+3-4-1+2+3=7$，所以图中所有看不见的面上的数字之和为 $-6-7=-13$.

例四　解：(1) 由图 1，得

$$s_1=\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2};$$

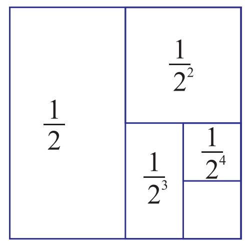
$$s_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}=1-\frac{1}{2^2};$$

$$s_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}=\frac{7}{8}=1-\frac{1}{2^3};$$

…

所以 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$.

(2) 设计图形如下．（答案不唯一）



【点拨】本题主要考查了图形的变化问题．找到图形的变化规律是解本题的关键．

变式训练四

1. C　**【解析】**图 1 中挖去中间的 1 个小三角形，图 2 中挖去中间的 $(1+3)$ 个小三角形，图 3 中挖去中间的 $(1+3+3^2)$ 个小三角形，…则图 6 中挖去中间的 $(1+3+3^2+3^3+3^4+3^5)$ 个小三角形，即图 6 中挖去的三角形个数为 364．故选 C.

2. 1 211　**【解析】**由题意，得 $c+(-5)+1=b+c+(-5)$．解得 $b=1$．由 $b+c+(-5)=a+b+c$，得 $a=-5$．由 $a+b+c=9+a+b$，得 $c=9$．所以这些整数从左到右依次为 9，−5，1，9，−5，1，…因为前三个小格子中的数是

9、-5 和 1，这三个数的和为 $9-5+1=5$，又前 m 个小格子中的数之和是 2 019，$2\,019\div5=403\cdots\cdots4$，$9+(-5)=4$，所以 $m=403\times3+2=1\,211$.

培优精练

1. A　【解析】由数轴可得，$b<c<0<a$，且 $|b|>|c|>|a|$. 所以 $abc>0$，①不正确；$a-b+c>0$，②不正确；$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}=1-1-1=-1$，③不正确；$|a-b|-|b+c|+|a-c|=a-b-[-(b+c)]+a-c=a-b+b+c+a-c=2a$，④正确. 故选 A.

2. (1) 1　2　【解析】由题意，得 $4+(-5)=-1$，$-(-1)=1$，$\frac{1}{1}=1$；$7+(-5)=2$，$|-2|=2$.

(2) 0（答案不唯一）

(3) 2 或 7　【解析】当按照绝对值输出为 2 时，输入的数是 2 或 7；当按照倒数输出为 2 时，输入的数据在小于 10 的正整数范围内不存在.

3. 1 024　【解析】剪第 1 次共有：4 个小正方形；剪第 2 次共有：$4\times4=4^2$ 个小正方形；剪第 3 次共有：$4^2\times4=4^3$ 个小正方形，所以剪第 5 次共有：$4^5=1\,024$ 个小正方形.

4. 解：(1) 因为 $2+3+4=9$，

所以第二行第 1 个数为 $9-6-4=-1$，

第一行第 2 个数为 $9-6-2=1$，

第三行第 3 个数为 $9-2-7=0$，

第三行第 2 个数为 $9-4-0=5$.

如下图所示.

6	1	2
−1	3	7
4	5	0

(2) 因为第三行第 2 个数为 $(-3+1+x)-(4+x)=-6$，

第一行第 3 个数为 $(-6+1+y)-(-3+y)=-2$，

所以每行、每列、每条对角线上的三个数之和为 $-2+1+4=3$.

所以 $x=3-4-(-6)=5$，$y=3-(-3)-(-2)=8$.

所以 $x+y=5+8=13$.

名卷压轴题

(1) 1　$\frac{8}{7}$　$\frac{1}{2\,021}$　【解析】当输入 6 时，$6>4$，所以 $6+(-7)=-1$. $-1<4$，-1 的相反数为 1，1 为正，$\frac{1}{1}=1$，所以输出 1. 当输入 $-\frac{7}{8}$ 时，$-\frac{7}{8}<4$，所以 $-\frac{7}{8}$ 的相反数为 $\frac{7}{8}$，$\frac{7}{8}$ 为正，$\frac{1}{\frac{7}{8}}=\frac{8}{7}$，所以输出 $\frac{8}{7}$. 当输入 $-2\,021$ 时，$-2\,021<4$，所以 $-2\,021$ 的相反数为 2 021，2 021

为正，$\frac{1}{2\,021}$，所以输出$\frac{1}{2\,021}$.

（2）**解：**因为0没有倒数，0的绝对值是0，0的相反数是0，

所以当输入0时，输出的结果为0.

当输入的数大于4，且为7的倍数时，输出的结果为0.

综上所述，当输入0或$7n$（n为正整数）时，输出的结果为0.

（3）**解：**①当$4<n<7$时，$n-7<0$，

则$n-7$的相反数为$7-n$，且$7-n$为正.

因为输出的结果为2，

所以$7-n=\frac{1}{2}$，则$n=\frac{13}{2}$.

②当$-21\leqslant n<0$时，

其相反数为$-n$，且$-n$为正，

因为输出的结果为2，

所以$-n=\frac{1}{2}$，即$n=-\frac{1}{2}$.

③当$0<n\leqslant 4$时，

其相反数为$-n$，且$-n$非正，

所以$-n$的绝对值为n.

因为输出的结果为2，

所以$n=2$.

④当$n=0$或$n=7$时，其输出结果为0，不满足题意.

综上所述，小羽可能输入的是$\frac{13}{2}$或$-\frac{1}{2}$或2.

◎有理数　新题型探究

例题　（1）C_1或C_4　**【解析】**因为点C_1表示的数为$-\frac{2}{3}$，$AC_1=\left|-\frac{2}{3}+2\right|=\frac{4}{3}$，$BC_1=\left|2+\frac{2}{3}\right|=\frac{8}{3}$，所以$BC_1=2AC_1$. 因此$C_1$为$A$、$B$的“至善点”；因为$C_2$表示的数为0，$AC_2=|0+2|=2$，$BC_2=|2-0|=2$，所以$BC_2=AC_2$，因此$C_2$不是$A$、$B$的“至善点”；因为$C_3$表示的数为1，$AC_3=|1+2|=3$，$BC_3=|2-1|=1$，所以$3BC_3=AC_3$，因此$C_3$不是$A$、$B$的“至善点”；因为$C_4$表示的数为6，$AC_4=|6+2|=8$，$BC_4=|6-2|=4$，所以$2BC_4=AC_4$，因此$C_4$是$A$、$B$的“至善点”.

（2）**解：**因为点M在点A的左侧，

则$m<-1$.

因为点M是点A、B的“至善点”，

所以$2MA=MB$.

则$2(-1-m)=3-m$.

解得$m=-5$.

故点M表示的数m的值为-5.

【点拨】本题主要考查了数轴表示数的意义和方法，数轴上两点之

间距离的计算方法以及对“至善点”的理解和应用．掌握数轴上两点之间距离的计算方法和“至善点”的意义是解决本题的关键．

变式训练

解：由题意，得

当 $n=9$ 时，

第 1 次“F 运算”的结果是 32，

第 2 次“F 运算”的结果是 1，

第 3 次“F 运算”的结果是 8，

第 4 次“F 运算”的结果是 1，

第 5 次“F 运算”的结果是 8，

……

由上可得，从第 2 次开始，每两次“F 运算”为一个循环，运算结果依次以 1，8 出现．

因为 $(2\,022-1)\div 2=1\,010\cdots\cdots 1$，故第 2 022 次“$F$ 运算”的结果是 1．

培优精练

(1) $\dfrac{n(1+n)}{2}$

(2) $\dfrac{n-1}{n}$　【解析】$\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)\times n}=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}=1-\dfrac{1}{n}=\dfrac{n-1}{n}$.

(3) **解：**$1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\dfrac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}=1+\dfrac{2}{2\times(1+2)}+\dfrac{2}{3\times(1+3)}+\dfrac{2}{4\times(1+4)}+\cdots+\dfrac{2}{n(1+n)}=1+2\times\left[\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\dfrac{1}{4\times 5}+\cdots+\dfrac{1}{n(1+n)}\right]=1+2\times\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=1+2\times\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{2n}{n+1}$.

第三章　整式的加减

第 1 讲　列代数式与求代数式的值

例一　B　【解析】因为当 $x=-2$，$y=1$ 时，$xy=-2\times 1=-2<0$，所以 $m=x^2-y^2=(-2)^2-1^2=3$. 故选 B.

【点拨】本题主要考查了代数式求值．解答本题的关键是读懂题图给出的计算程序．

变式训练一

1. A　【解析】当 $x=125$ 时，$\dfrac{1}{5}x=\dfrac{1}{5}\times 125=25$；当 $x=25$ 时，$\dfrac{1}{5}x=\dfrac{1}{5}\times 25=5$；当 $x=5$ 时，$\dfrac{1}{5}x=\dfrac{1}{5}\times 5=1$；当 $x=1$ 时，$x+4=$

$1+4=5$；当 $x=5$ 时，$\frac{1}{5}x=\frac{1}{5}\times5=1$；当 $x=1$ 时，$x+4=1+4=5$；当 $x=5$ 时，$\frac{1}{5}x=\frac{1}{5}\times5=1$.

所以从第 2 次开始，输出的结果每 2 个为一个循环组. 因为 $(2\,018-1)\div2=1\,008\cdots\cdots1$，所以输出的结果是 5. 故选 A.

2. 16 【解析】当 $n=2$ 时，$T=1+3=4$，因为 $4<10$，所以重新输入 $n=4$，则 $T=1+3+5+7=16$. 因为 $16>10$，故输出的结果为 16.

例二 470 【解析】观察图形中的数据可知，第 n 行的最后一个数为 $\frac{1}{2}n(n+1)$. 所以第 30 行的最后一个数为 $\frac{1}{2}\times30\times(30+1)=465$. 又 (31，5) 表示第 31 行的第 5 个数，则该数为 $465+5=470$.

【点拨】解决此类问题的关键是找出数与序号（第几行第几个数）的关系.

变式训练二

1. 解：(1) 由题意知，第 n 行最后一个数为 n^2，

则第 8 行的最后一个数是 64.

所以第 9 行的第 7 个数是 $64+7=71$.

(2) 由 (1) 知，第 n 行的最后一个数为 n^2.

则第 n 行的第一个数为 $(n-1)^2+1$.

因为 $44^2=1\,936$，$45^2=2\,025$，

$1\,936<2\,020<2\,025$，

所以 2 020 在第 45 行.

又 $2\,020-1\,936=84$，

所以 2 020 是数阵中第 45 行的第 84 个数.

2. 解：由图可知，$a_1=1\times2$，$a_2=2\times3$，$a_3=3\times4$，…

所以 $a_n=n\times(n+1)$.

故 $\frac{2}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\frac{2}{a_3}+\frac{2}{a_4}+\cdots+\frac{2}{a_{20\,211}}=\frac{2}{1\times2}+\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\cdots+\frac{2}{20\,210\times20\,211}+\frac{2}{20\,211\times20\,212}=2\times\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{20\,210}-\frac{1}{20\,211}+\frac{1}{20\,211}-\frac{1}{20\,212}\right)=2\times\left(1-\frac{1}{20\,212}\right)=2\times\frac{20\,211}{20\,212}=\frac{20\,211}{10\,106}$.

例三 解：因为第 1 个图案中有 6 个正方形和 6 个等边三角形，

所以第 1 个图案中正方形和等边三角形的个数之和为 $6+6=12=9+3$.

因为第 2 个图案中有 11 个正方形和 10 个等边三角形，

所以第 2 个图案中正方形和等边三角形的个数之和为 $11+10=$

$21=9\times2+3$.

因为第 3 个图案中有 16 个正方形和 14 个等边三角形，

所以第 3 个图案中正方形和等边三角形的个数之和为 $16+14=30=9\times3+3$.

……

所以第 n 个图案中正方形和等边三角形的个数之和为 $9n+3=3(3n+1)$.

故第 n 个图案中正方形和等边三角形的个数之和一定是 3 的倍数.

【点拨】本题属于数字的变化类问题. 根据题意找出规律是解决本题的关键.

变式训练三

1. B **【解析】**由题意，得图 1 中有 $3=1^2+2$ 个小正方形，图 2 中有 $6=2^2+2$ 个小正方形，图 3 中有 $11=3^2+2$ 个小正方形，……图 n 中有（n^2+2）个小正方形. 所以图 7 中小正方形的个数是 $7^2+2=51$. 故选 B.

2. **解：**因为第 1 个图案有 $3+1=4$ 个等边三角形，

第 2 个图案有 $3\times2+1=7$ 个等边三角形，

第 3 个图案有 $3\times3+1=10$ 个等边三角形，

……

以此类推，

第 n 个图案有（$3n+1$）个等边三角形.

根据题意，得 $3n+1=2\,020$.

解得 $n=673$.

例四 （1）$4x+20$ **【解析】**设框中的第一个数为 x，则其他三个数分别为 $x+2$、$x+8$、$x+10$. 则框中这四个数的和为 $x+(x+2)+(x+8)+(x+10)=4x+20$.

解：当 $4x+20=200$ 时，得 $x=45$.

故 $x+2=47$，$x+8=53$，$x+10=55$.

故若框出的四个数的和为 200，这四个数分别是 45、47、53、55.

（2）**解：**不存在这样的四个数，使它们的和为 8 096. 理由如下：

令 $4x+20=8\,096$，

解得 $x=2\,019$.

因为（$2\,019+1$）$\div2=1\,010$，

所以 2 019 是第 1 010 个奇数.

因为图中每行有 5 个奇数，

所以第 1 010 个奇数排在第 202 行最后一个位置.

由题意，2 019 不能排在第一和最后一个，与题意矛盾，

所以不存在这样的四个数，使它们的和为 8 096.

【点拨】本题主要考查了数字的规律变化. 解决本题的关键是明确题意，发现数字的变化特点，求

出相应的数字.

变式训练四

1. **解**：由表格可知，上、下相邻的两个数相差 8，左、右相邻的两个数相差 1，
则 $a=c-8$，$b=c-1$，$d=c+1$，$e=c+8$，
所以 $a+b+c+d+e=(c-8)+(c-1)+c+(c+1)+(c+8)=c-8+c-1+c+c+1+c+8=5c$.

2. **解**：(1) 因为 $2\ 020\div 7=288\cdots\cdots 4$，
所以数 2 020 在表中位置是第 289 行第 4 列（从左往右）.
(2) 根据图 2“十”字形中五个数的规律，不妨设“十”字形中最中间的一个数为 x，如下图所示.

	$x-7$	
$x-1$	x	$x+1$
	$x+7$	

则“十”字形中这五个数的和为 $x-1+x+x+1+x-7+x+7=5x$.
①当这五个数的和是 50 时，
即 $5x=50$，解得 $x=10$.
所以这五个数分别是 3、9、10、11、17.
经检验，这五个数符合题意.
②不能.
当这五个数的和是 2 017 时，
即 $5x=2\ 017$，
解得 x 不是正整数，
所以此情况不成立.
③不存在. 理由如下：
如果这五个数的和是 105，
即 $5x=105$，解得 $x=21$，
即 21 在“十”字形中最中间的位置.
而 21 能够被 7 整除，即 21 在表格中最右边（第 7 列）的位置，与“十”字形数字位置特征相矛盾.
所以“这五个数的和是 105”的情况是不可能出现的.

培优精练

1. A 【解析】由题意可得，前 1 行的数字个数总数是 $1=1^2$，前 2 行的数字个数总数是 $4=2^2$，前 3 行的数字个数总数是 $9=3^2$，…，所以前 n 行的数字个数总数是 n^2. 当 $n=2\ 020$ 时，$n^2=2\ 020^2=4\ 080\ 400$，即 a 是第 $4\ 080\ 400+9=4\ 080\ 409$ 个数字. 又因为 $4\ 080\ 409\div 3=1\ 360\ 136\cdots\cdots 1$，所以 $a=1$. 当 $n=4$ 时，$n^2=4^2=16$，即 b 是第 $16+7=23$ 个数字. 又因为 $23\div 3=7\cdots\cdots 2$，所以 $b=2$. 所以 $-a^b=-1^2=-1$. 故选 A.

2. $4n-2$　506　【解析】第 1 次划分后，所有正方形为 2 个，$2=4\times 1-2$；第 2 次划分后，所有正方形为 6 个，$6=4\times 2-2$；第 3 次划

分后，所有正方形为 10 个，$10=4\times3-2$；……；第 n 次划分后，所有正方形为$(4n-2)$个．当正方形的个数为 2 022 时，则 $4n-2=2\ 022$，解得 $n=506$．故划分了 506 次．

3. 解：(1) 由题意知，$CG=GF=6$，$BC=a$，则 $BG=CG-BC=6-a$．

所以 $S_{\triangle BGF}=\frac{1}{2}GF\cdot BG=\frac{1}{2}\times6\times(6-a)=18-3a$．

(2) 阴影部分的面积为 $S_{\triangle BCD}+S_{正方形ECGF}-S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}a^2+36-\frac{1}{2}\times6\times(a+6)=\frac{1}{2}a^2+36-3a-18=\frac{1}{2}a^2-3a+18$．

(3) 当 $a=4$ 时，

$\frac{1}{2}a^2-3a+18=\frac{1}{2}\times4^2-3\times4+18=8-12+18=14$．

4. (1) 12　3　【解析】当输入的 $x=48$ 时，第 1 次输出的结果为 $48\times\frac{1}{2}=24$；当输入的 $x=24$ 时，第 2 次输出的结果为 $24\times\frac{1}{2}=12$；当输入的 $x=12$ 时，第 3 次输出的结果为 $12\times\frac{1}{2}=6$；当输入的 $x=6$ 时，第 4 次输出的结果为 $6\times\frac{1}{2}=3$；当输入的 $x=3$ 时，第 5 次输出的结果为 $3+3=6$；当输入的 $x=6$ 时，第 6 次输出的结果为 $6\times\frac{1}{2}=3$；……；从第 3 次开始，输出的结果每 2 个为一个循环组，又$(2\ 012-2)\div2=1\ 005$，所以第 2 012 次输出的结果为 3．

(2) 解：当 x 是偶数时，$\frac{1}{2}x=-2$，则 $x=-4$；

当 x 是奇数时，$x+3=-2$，

则 $x=-5$．

所以输入的数 x 是 -4 或 -5．

(3) 解：①当 x 是偶数时，则第 1 次输出的结果为 $\frac{1}{2}x$，当 $\frac{1}{2}x$ 为偶数时，第 2 次输出的结果为 $\frac{1}{4}x$，当 $\frac{1}{2}x$ 为奇数时，第 2 次输出的结果为 $\frac{1}{2}x+3$．

故经过 2 次运算输出的结果的和为 $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x=12$ 或 $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x+3=12$．

解得 $x=16$ 或 $x=9$（舍）．

②当 x 是奇数时，则第 1 次输出的结果为 $x+3$，

当 $x+3$ 为偶数时，第 2 次输出的结果为 $\frac{1}{2}(x+3)$，

当 $x+3$ 为奇数时，第 2 次输出的结果为 $x+3+3$．

故经过 2 次运算输出的结果的和为 $x+3+\frac{1}{2}(x+3)=12$ 或 $x+3+x+3+3=12$.

解得 $x=5$ 或 $x=\frac{3}{2}$（舍）.

综上所述，输入的数 x 是 16 或 5.

名卷压轴题

(1) 4 【解析】设第一个数是 x，根据日历中数的位置关系，则其他的三个数分别为 $x+1$、$x+7$、$x+8$. 由题意，得 $x+x+1+x+7+x+8=32$. 解得 $x=4$. 故第一个数是 4.

(2) 7、8、13、14 【解析】设第一个数是 x，则其他的三个数分别为 $x+1$、$x+6$、$x+7$. 则 $x+x+1+x+6+x+7=42$. 解得 $x=7$. 则 $x+1=8$，$x+6=13$，$x+7=14$. 故这四个数分别为 7、8、13、14.

(3) 10 【解析】设中间的数是 x，则其他四个数分别为 $x-7$、$x-1$、$x+1$、$x+7$. 由题意，得 $x+x-7+x-1+x+1+x+7=5x=50$. 解得 $x=10$. 故中间的数是 10.

(4) 29 【解析】设最后一个星期日是 x，则前 4 个星期日分别是 $x-7$、$x-14$、$x-21$、$x-28$. 由题意，得 $x+x-7+x-14+x-21+x-28=75$. 解得 $x=29$. 故这个月中最后一个星期日是 29 号.

(5) ①解：图中方框内的 9 个数的和是中间的数的 9 倍.

②40 【解析】根据规律可知，这 9 个数的和是中间的数的 9 倍. 设中间的数是 x，则 $9x=360$，解得 $x=40$. 故斜框的中间一个数是 40.

③解：设中间的数是 x，

则 $9x=252$，

解得 $x=28$.

故斜框的中间一个数是 28.

第 2 讲 整式与整式的加减

例一 (1) $(x-1)$m $(x-2)$m $\frac{1}{2}(x+1)$m(答案不唯一)

【解析】因为图中最大正方形 B 的边长是 x m，最小的正方形 A 的边长是 1 m，则正方形 F 的边长为 $(x-1)$ m；正方形 E 的边长为 $(x-1)-1=(x-2)$ m；正方形 C 的边长为 $\frac{1}{2}(x+1)$ m.

(2) 解：由 (1) 可得 $MQ=(x-2)+(x-1)=(2x-3)$ m，$NP=x+\frac{1}{2}(x+1)=\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)$ m.

因为 $MQ=NP$，

所以 $2x-3=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$.

解得 $x=7$.

则 $MQ=2\times7-3=11$ m，

$PQ=x+(x-1)=2x-1=2\times7-1=13$（m）.

则长方形 $PQMN$ 的面积为 $MQ\cdot PQ=11\times13=143$（$m^2$）.

故 x 的值为 7，健身广场的面积是 143 m^2.

【点拨】本题主要考查了整式的加减，列代数式. 利用各边长之间的关系列出方程是解本题的关键.

变式训练一

1. D　【解析】设空白部分的面积为 c，根据题意，得 $a+c=2\,008$，①；$b+c=2\,021$，②；②－①，得 $b-a=13$. 故选 D.

2. (1)（$20-2t$）　【解析】因为篱笆长为 20 m，养鸡场的宽为 t m，所以养鸡场的长为（$20-2t$）m.

(2)（$20-2t$）t　【解析】由（1）知，养鸡场的长为（$20-2t$）m. 又养鸡场的宽为 t m，所以养鸡场的面积为（$20-2t$）t m^2.

(3) 解：当 $t=1$ 时，$20-2t=20-2\times1=18>15$，不合题意，舍去；

当 $t=2$ 时，$20-2t=20-2\times2=16>15$，不合题意，舍去；

当 $t=4$ 时，$20-2t=20-2\times4=12<15$，符合题意.

所以当 $t=4$ 时，养鸡场的面积为 $(20-2\times4)\times4=48$（m^2）.

例二　解：(1) 因为小长方形 C 的宽为 4 cm，

所以小长方形 C 的长为（$y-12$）cm.

所以小长方形 C 的周长为 $2\times(y-12+4)=(2y-16)$ cm.

(2) 由图可知，阴影图形 A 的较长边为（$y-12$）cm，较短边为（$x-8$）cm，

阴影图形 B 的较长边为 12 cm，较短边为 $x-(y-12)=(x-y+12)$ cm.

故阴影图形 A 和阴影图形 B 的周长之和为 $2(y-12+x-8)+2(12+x-y+12)=2y-40+2x+48+2x-2y=(4x+8)$ cm. 所以阴影图形 A 与阴影图形 B 的周长之和与 y 的值无关，小明的发现是合理的.

【点拨】本题主要考查了整式的加减. 充分利用图形的特点求得阴影图形 A、B 的长与宽是解本题的关键.

变式训练二

1. D　【解析】由图可知，剩余长方形（空白部分）的长为 b，宽为（$b-a$），所以剩余长方形（空白部分）的周长为 $2b+2(b-a)=4b-2a$. 故选 D.

2. A　【解析】设小长方形的长为 x cm，宽为 y cm（$x>y$），则根据题意，得 $3y+x=7$. 则图 2 中两

块阴影部分的周长之和为$2(6-3y+6-x)+2\times7=12+2(-3y-x)+12+14=38+2\times(-7)=24$（cm）.

例三 （1）$2a-3b$　$\frac{a-3b}{2}$　**【解析】**由图可得，图 3 中拼成的新长方形的长为$(a-b)+(a-2b)=2a-3b$，宽为$\frac{a-3b}{2}$.

（2）**解：**由（1）可知，新长方形的周长为$2\left(2a-3b+\frac{a-3b}{2}\right)=4a-6b+a-3b=5a-9b$.

当$a=8x^2+4x+1$，$b=-x^2+3x-\frac{1}{4}$时，

$5a-9b=5(8x^2+4x+1)-9\left(-x^2+3x-\frac{1}{4}\right)=40x^2+20x+5+9x^2-27x+\frac{9}{4}=49x^2-7x+\frac{29}{4}$.

（3）**解：**当$x=\frac{1}{4}$时，$49x^2-7x+\frac{29}{4}=49\times\frac{1}{16}-7\times\frac{1}{4}+\frac{29}{4}=\frac{137}{16}$.

故图 3 中拼成的新长方形的周长为$\frac{137}{16}$.

【点拨】本题主要考查了整式的混合运算，以及代数式求值. 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

变式训练三

1. B　**【解析】**根据题意，得剪去的两个小长方形的长为$a-b$，宽为$\frac{1}{2}(a-3b)$，则“T”字形的外围周长为$4\left[a-b+\frac{1}{2}(a-3b)\right]-2\times\frac{1}{2}(a-3b)=5a-7b$. 故选 B.

2. （1）$a-b$　$a-3b$　**【解析】**由题意，得剪下的小长方形的长为$a-b$，宽为$\frac{a-3b}{2}$. 故新长方形的长为$a-b$，宽为$2\times\frac{a-3b}{2}=a-3b$.

（2）16　**【解析】**因为$\frac{a-3b}{2}=1$，所以$b=\frac{a-2}{3}=\frac{8-2}{3}=2$. 因为新长方形的周长为$2[(a-b)+(a-3b)]=4a-8b$，又$a=8$，则$4a-8b=4\times8-8\times2=16$.

例四　$-\frac{1}{2}a$　**【解析】**设图 3 中小长方形的长为x，宽为y，大长方形的宽为b，根据题意，得$x+2y=a$，$x=2y$. 则$y=\frac{1}{4}a$. 则图 1 中阴影部分的周长为$2(b-2y+a)=2b-4y+2a$，图 2 中阴影部分的周长为$2b+2(a-x)+2y=2b+6y$. 则图 1 中阴影部分的周长与图 2 中阴影部分的周长的差是$2b-4y+2a-2b-6y=2a-10y=$

$2a-\frac{5}{2}a=-\frac{1}{2}a$.

【点拨】本题主要考查了整式的加减，以及列代数式．熟练掌握运算法则是解本题的关键．

变式训练四

1. B　**【解析】**设标号为③和④的两个小长方形的长为 x、宽为 y，根据题意，标号为①的小长方形的周长为 $2(x+x-y+CD)$，标号为②的小长方形的周长为 $2(CD+y)$．则标号为①和②的小长方形的周长之差为 $2(x+x-y+CD)-2(CD+y)=4x-2y+2CD-2CD-2y=4x-4y=4(x-y)=4BC$．故需要已知线段 BC 的长度．故选 B.

2. 解：(1) 大长方形的周长为 $2(2m+2n+3)=4m+4n+6$，

小长方形的周长为 $2(m+n)=2m+2n$，

则大长方形的周长比小长方形的周长长 $(4m+4n+6)-(2m+2n)=4m+4n+6-2m-2n=2m+2n+6$.

(2) 阴影部分的周长为 $2m+(2n+3-n)+m+n+(2m-m)+(2n+3)=2m+2n+3-n+m+n+2m-m+2n+3=4m+4n+6$.

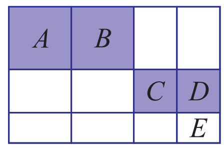
(3) 当 $m=2$，$n=1$ 时，

阴影部分的周长为 $4m+4n+6=4\times2+4\times1+6=8+4+6=18$.

培优精练

1. ①　**【解析】**设①②③④四个正方形的边长分别为 a、b、c、d，阴影部分⑥与阴影部分⑤的周长之差为 l，由题意，得 $2(a+b-d+d)-2(b-a+a)=l$．整理，得 $2a=l$．则已知 l 的值，不需测量就能知道正方形①的周长.

2. 解：如下图所示.



因为标有字母为 A、B、C、D 的 4 个小长方形为正方形，

所以 A 和 B 的周长相等，C 和 D 的周长相等.

设 A 的周长为 $4a$，

则 A、B 的边长为 a.

设 C 的周长为 $4b$，

则 C、D 的边长为 b.

则 E 的一条边长为 b，设 E 的另一条边长为 c，

则 E 的周长为 $2b+2c$.

则大长方形的长和宽分别为 $a+a+b+b=2a+2b$，$a+b+c$.

则大长方形的面积为 $2(a+b)(a+b+c)$.

当 a、b、c 都为已知数时，一定能算出大长方形的面积．故 n 的最小值是 3.

3. (1) $x+1$　$2x+1$（答案不唯一）

（2）**解：** 由题意，得 $AF=AE=3x+1$.

所以 $EK=(3x+1)-1=3x$.

因为 $DM=EK$，

所以 $2x+1=3x$.

解得 $x=1$.

所以 x 的值为 1.

（3）**解：** 因为 $x=1$，

所以 $AD=(3x+1)+3x=6x+1=6\times1+1=7$，

$AB=(3x+1)+x=4x+1=4\times1+1=5$.

所以长方形 $ABCD$ 的面积为 $AB\cdot AD=5\times7=35$.

名卷压轴题

（1）11 cm　23 cm　**【解析】** 观察图形可知，标号为 3 的正方形的边长为 $5+6=11$（cm），标号为 5 的正方形的边长为 $6+11+6=23$（cm）.

（2）**解：** 因为标号为 1、2 的正方形的边长分别为 x、y，

所以标号为 3 的正方形的边长是 $x+y$，

标号为 4 的正方形的边长是 $x+2y$，

标号为 5 的正方形的边长是（$x+2y$）$+y=x+3y$，

标号为 6 的正方形的边长是（$x+3y$）$+(y-x)=4y$，

标号为 7 的正方形的边长是 $4y-x$.

则标号为 10 的正方形的边长是 $(4y-x)-x-(x+y)=3y-3x$.

◎整式的加减　新题型探究

例题　（1）2　24　**【解析】** 根据题意知，公比 $q=6\div3=2$，第 4 项是 $12\times2=24$.

（2）$a_1\cdot q^{n-1}$

（3）**解：** 根据题意知，第 1 项为 $10\div2=5$，第 4 项为 $5\times2^3=40$.

【点拨】 本题主要考查了数字的变化规律. 理解阅读材料中等比数列的定义，观察出项的变化规律是解本题的关键.

变式训练

（1）**证明：** 因为 m 是一个完全平方数，

所以 $m=n^2=n\times n$（n 为正整数）.

因为 $|n-n|=0$，

所以 $n\times n$ 是 m 的最佳分解.

所以对任意一个完全平方数 m，总有 $F(m)=\frac{n}{n}=1$.

（2）**解：** 设交换 t 的个位上的数字与十位上的数字后得到的新数为 t'，

则 $t'=10y+x$.

因为 t 是“吉祥数”，

所以 $t'-t=(10y+x)-(10x+y)=9(y-x)=36$.

所以 $y=x+4$.

因为 $1\leqslant x\leqslant y\leqslant 9$，$x$、$y$ 为自然数，

所以 $x=1$，$y=5$；$x=2$，$y=6$；$x=3$，$y=7$；$x=4$，$y=8$；$x=5$，$y=9$.

所以所有的“吉祥数”为 15、26、37、48、59.

培优精练

证明： 由题意，得 $\overline{cbabc}=10\ 000c+1\ 000b+100a+10b+c=10\ 001c+1\ 010b+100a$.

因为 $a+c=b$，

所以 $\overline{cbabc}=10\ 001c+1\ 010b+100a=11\ 011c+1\ 110a=370\times(4c+3a)+9\ 531c=370\times(4c+3a)+1\ 059c\times 9$.

因为 $4c+3a$ 能被 9 整除，

所以 $370\times(4c+3a)+1\ 059c\times 9$ 也能被 9 整除.

所以任意一个“M 数”都能被 9 整除.

第四章　图形的初步认识

第 1 讲　立体图形

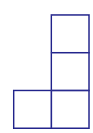
例一　B　**【解析】**由从上面看到的视图易得，该几何体的最底层小立方块的个数为 5，由从正面看到的视图和从左面看到的视图可知，第二层有 2 个小立方块. 所以搭成这个几何体所需的小立方块的个数为 $5+2=7$. 故选 B.

【点拨】本题主要考查了学生对三视图掌握程度和灵活运用能力，同时也体现了对空间想象能力方面的考查.

变式训练一

1. **解：** 由从上面看到的视图易得，最底层有 5 个小正方体.
由从正面和左面看到的视图可得，第二层有 3 个小正方体，
第三层有 1 个小正方体，
那么这个立体图形共由 $5+3+1=9$ 个小正方体搭成.

2. **解：**（1）左视图如下图所示.（答案不唯一）



（2）n 可能的值为 8、9、10、11.

例二　**解：**（1）因为第 1 层小正方体的个数为 1，

第 2 层小正方体的个数为 3，比第 1 层多 2 个；

第 3 层小正方体的个数为 6，比第 2 层多 3 个；

……

所以每一层比上一层小正方体多的个数依次为 2，3，4，5，….

故第 5 层小正方体的个数为 $1+2+3+4+5=15$.

(2) 因为每个小正方体的棱长为 1,

则每个小正方形的面积为 $1\times1=1$.

故该物体的表面积为 $6\times(1+2+3+\cdots+20)\times1=1\,260$.

【点拨】本题主要考查了图形的有关知识和图形的变化规律. 要求通过观察、分析、归纳发现其中的规律.

变式训练二

1. (1) 10

(2) 1　2　3

(3) **解:** 由图可知, 露出的部分一共有 32 个小正方形.

每个小正方形的面积为 $10\times10=100$ (cm^2).

则这个几何体喷漆的面积为 $32\times100=3\,200$ (cm^2).

2. 解: (1) 因为小正方体的棱长为 1 cm,

所以 1 个小正方形的面积为 1 cm^2.

通过三视图可得图 1 的表面积为 $2\times(5+3+5)+2=28$ 个小正方形的面积,

即 $28\times1=28$ (cm^2).

(2) 两个图 1 组合在一起构成图 2, 有 4 个小正方形重叠,

故图 2 的表面积为 $(28+28-4)\times1=52$ (cm^2).

(3) 按 (2) 的组合法, 把 n 个图 1组合在一起, 有 $4(n-1)$ 个小正方形重叠,

故所得新几何体的表面积为 $[28n-4(n-1)]\times1=(24n+4)(\text{cm}^2)$.

例三　B　**【解析】**由题意知, 1 与 6 相对, 4 与 x 相对, 5 与 y 相对. 因为 $1+6=4+x=5+y$, 所以 $x=3$, $y=2$. 则 $-x^y=-3^2=-9$.

【点拨】本题主要考查了正方体的展开图. 注意正方体的空间图形特点, 从相对面入手, 利用方程分析及数形结合思想解答问题.

变式训练三

1. 2　**【解析】**由题意可知, 1 与 a 相对, 5 与 b 相对, 3 与 c 相对, 则 $1+a=5+b=3+c$. 又六个面上的数分别为 1、2、3、4、5、6, 所以 $a=6$, $b=2$, $c=4$.

2. 解: 根据正方体的展开图可知, c 和 25 是对面, 4 和 b 是对面, 8 和 a 是对面.

因为相对的两个面上的两个数之和为 10,

所以 $c+25=10$, $4+b=10$, $8+a=10$.

解得 $a=2$, $b=6$, $c=-15$.

则 $a+b-2c=2+6-2\times(-15)=8+30=38$.

例四 73 【解析】前、后面抽出 $(3+2)\times5=25$（个）小正方体，上、下面抽出（去掉与前、后面重复的）$4\times5-2\times2-3=13$（个）小正方体，左、右面抽出（去掉与前、后面，上、下面重复的）$5\times5-2-4-3-2=14$（个）小正方体. 故图中剩下的小正方体有 $125-(25+13+14)=73$（个）.

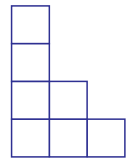
【点拨】本题主要考查了图形的拆拼. 求出重复抽出的小正方体的个数是解本题的关键.

变式训练四

1. 72 【解析】由图可得，周边的六个挖空的正方体每个面增加了 4 个小正方形，减少了 1 个小正方形，则每个面的小正方形的个数为 $9+4-1=12$ 个. 又大正方体的棱长为 3，则每个小正方形的边长为 1. 故所得到的几何体的表面积为 $12\times6\times1\times1=72$.

2. (1) 19 【解析】因为王亮所搭几何体恰好可以和张明所搭几何体拼成一个无缝隙的大长方体，所以该大长方体至少需要小长方体的个数为 $4\times3^2=36$. 由题意，得张明搭成的几何体的小长方体的个数为 17，所以王亮至少需要 $36-17=19$ 个小长方体.

(2) 解：张明所搭几何体的左视图如下图所示.



该几何体的左、右面积之和为 $7ab\times2=14ab$，

上、下面积之和为 $9a^2\times2=18a^2$，

前、后面积之和为 $10ab\times2=20ab$.

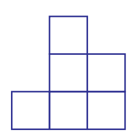
故该几何体的表面积为 $14ab+20ab+18a^2=34ab+18a^2$.

(3) 从前面看大长方体的主视图共 12 个面，王亮搭的几何体需补充 $12-3=9$ 个面；从上面看大长方体的俯视图共 9 个面，王亮搭的几何体需要补充 $9-1=8$ 个面；从右面看大长方体的左视图共 12 个面，王亮搭的几何体需要补充 $12-5=7$ 个面.

故王亮所搭几何体的表面积为 $2\times(9ab+7ab+8a^2)=16a^2+32ab$.

培优精练

1. B 【解析】由该几何体的俯视图及每个小正方形中的数字可得，左视图如下图所示.



故选 B.

2. 解：由俯视图可得，最底层有 5 个小正方体.

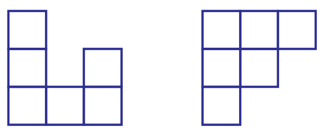
由主视图可得，第二层最少有 2 个小正方体，最多有 4 个小正方体.

那么搭这个几何体最少需要 $5+2=7$ 个小正方体，即 $a=7$.

最多需要 $5+4=9$ 个小正方体，即 $b=9$.

则 $a+b=7+9=16$.

3. 解：（1）该几何体的主视图、俯视图如下图所示.



主视图　　俯视图

（2）由这个几何体的三视图可知，

主视图的面积为 $6\times1\times1=6$，

左视图的面积为 $6\times1\times1=6$，

俯视图的面积为 $6\times1\times1=6$.

故该几何体的表面积为 $(6+6+6)\times2+2=38$.

（3）由正方体表面展开图的特征可知，

"a" 与 "d" 是相对面，

"b" 与 "f" 是相对面，

"c" 与 "e" 是相对面.

因为整数 d 是最大的负整数，正整数 e 的平方等于本身，整数 f 表示五棱柱的总棱数，

所以 $d=-1$，$e=1$，$f=15$.

又因为小正方体相对的面上的数互为相反数，

所以 $a=1$，$b=-15$，$c=-1$.

所以 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}=1-1-1=-1$.

4. 解：第 1 列最多可以搬走 9 个小正方体；

第 2 列最多可以搬走 8 个小正方体；

第 3 列最多可以搬走 3 个小正方体；

第 4 列最多可以搬走 5 个小正方体；

第 5 列最多可以搬走 2 个小正方体.

故最多可以搬走 $9+8+3+5+2=27$ 个小正方体.

5. 解：（1）

棱等分数	4 等分	n 等分
3 个面涂色的正方体个数	8 个	8 个
2 个面涂色的正方体个数	24 个	$12(n-2)$ 个
1 个面涂色的正方体个数	24 个	$6(n-2)^2$ 个
各个面都没有涂色的正方体个数	8 个	$(n-2)^3$ 个

（2）当 $n=7$ 时，

$6(n-2)^2=6\times(7-2)^2=150$，

所以将棱 7 等分时，1 个面涂色的小正方体有 150 个.

名卷压轴题

（1）填表如下.

多面体	顶点数（V）	面数（F）	棱数（E）
四面体	4	4	6
正方体	8	6	12
正八面体	6	8	12
正十二面体	20	12	30

$V+F-E=2$

（2）**解**：由题意，得 $V=F+8$，$E=30$.

因为 $V+F-E=2$，

即 $F+8+F-30=2$，

则 $F=12$.

故这个多面体的面数是 12.

第 2 讲 最基本的图形——点和线

例一 解：因为 $MB:BC:CN=2:3:4$，

所以不妨设 MB 为 $2x$ cm，则 BC 为 $3x$ cm，CN 为 $4x$ cm.

则 MN 为 $9x$ cm.

因为 P 是线段 MN 的中点，

所以 $PN=\frac{1}{2}MN=\frac{9}{2}x$ cm.

则 $PC=PN-CN=\frac{9}{2}x-4x=\frac{1}{2}x$（cm）.

又 $PC=2$ cm，

所以$\frac{1}{2}x=2$. 解得 $x=4$.

所以 $9x=9\times4=36$.

所以 $MN=36$ cm.

【点拨】解决线段单中点问题，通常利用单中点的性质及“见比设参”的方法，将未知变已知，并利用方程思想和数形结合思想进行求解.

变式训练一

1. D **【解析】**因为线段 AB 的中点为 M，$AB=12$ cm，所以 $AM=BM=6$ cm. 设 $MC=x$ cm，则 $CB=2x$ cm. 因为 $MC+CB=BM=6$ cm，所以 $x+2x=6$. 解得 $x=2$，即 $MC=2$ cm. 则 $AC=AM+MC=6+2=8$（cm）. 故选 D.

2. 解：设线段 AB、BC、CD 分别为 $4x$ cm、$5x$ cm、$7x$ cm，

因为 $CD=7x=14$，

所以 $x=2$.

（1）因为 $AB=4x=8$，

$BC=5x=10$，

所以 $AD=AB+BC+CD=8+10+14=32$（cm）.

因为 E 是线段 AD 的中点，

所以 $ED=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\times32=16$（cm）.

所以 $EC=ED-CD=16-14=2$（cm）.

（2）由（1）知，$BC=10$ cm，$EC=2$ cm，

所以 $BE=BC-EC=10-2=8$（cm）.

又因为 $AB=8$ cm，

所以 $AB:BE=8:8=1$.

例二　解：（1）因为 M、N 分别为 AC、BC 的中点，

所以 $MC=\frac{1}{2}AC$，$NC=\frac{1}{2}BC$.

又 $AB=m$，$BC=n$，

所以 $AC=AB-BC=m-n$.

所以 $MC=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}(m-n)$.

因为 $m=8$，$n=2$，

所以 $MC=\frac{1}{2}(m-n)=\frac{1}{2}\times(8-2)=3$，

$NC=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}\times2=1$.

所以 $MN=MC+CN=3+1=4$.

（2）因为 M、N 分别为 AC、BC 的中点，$AB=m$，$BC=n$，$m=3n$，

所以 $MC=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}(AB-BC)=\frac{1}{2}(m-n)=n$，

$CN=\frac{1}{2}BC=\frac{n}{2}$.

所以 $MN=MC+CN=n+\frac{n}{2}=\frac{3}{2}n$.

所以$\frac{CN}{MN}=\frac{\frac{n}{2}}{\frac{3n}{2}}=\frac{1}{3}$.

【点拨】线段双中点问题的处理方法是应用线段中点的性质，利用线段和、差表示出需要的量．设而不求是处理线段中有一定难度题目的常用方法，需要掌握．通过此题可得出双中点模型结论：$MN=MC+CN=\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AB$.

变式训练二

1. B　**【解析】**因为 B 是线段 AC 上一点，M 是线段 AB 的中点，N 是线段 AC 的中点，P 是线段 NA 的中点，Q 是线段 AM 的中点，

所以 $PQ=AP-AQ=\frac{1}{2}AN-\frac{1}{2}AM=\frac{1}{2}(AN-AM)=\frac{1}{2}MN$.

所以 $MN:PQ=MN:\frac{1}{2}MN=2$.

故选 B.

2. 11　**【解析】**设线段 AB 的长为 x cm，线段 CD 的长为 y cm．因为 M 是 AB 的中点，N 是 CD 的中点，所以 $MB=\frac{1}{2}x$ cm，$CN=\frac{1}{2}y$ cm．又 $MN=7$ cm，$BC=$

3 cm，所以$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+3=7$，即$x+y=8$．则 $AD=AB+CD+BC=x+y+3=8+3=11$（cm）．

例三 （1）5 【解析】因为 $AB=10$，C 是 AB 的中点，所以 $AC=BC=5$．又 D、E 分别是线段 AC、BC 的中点，所以 $DC=\frac{1}{2}AC=2.5$，$CE=\frac{1}{2}BC=2.5$．则 $DE=DC+CE=2.5+2.5=5$．

（2）解：当点 C 的位置发生变化时，DE 的长度不发生变化．理由如下：

设 AC 的长为 x，BC 的长为 y，

则 $x+y=10$．

因为 D、E 分别是线段 AC、BC 的中点，

所以 $DC=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}x$，

$CE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}y$．

则 $DE=DC+CE=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}(x+y)=\frac{1}{2}\times10=5$．

【点拨】“化动为静”是处理动点问题的思路，重点在于画出对应线段图．“点 C 为线段 AB 上的一个动点”这一条件如果变成“点 C 为射线 AB 上的一个动点”或“点 C 为直线 AB 上的一个动点”时所对应情况会更加复杂，但解决思路不变．注意巧用设参简化书写，降低错误率．

变式训练三

1. C 【解析】设较长的木条为 $AB=12$ cm，较短的木条为 $BC=10$ cm，记 M、N 分别为 AB、BC 的中点，则 $BM=6$ cm，$BN=5$ cm．①如图 1，当 BC 不与 AB 重合时，$MN=BM+BN=6+5=11$（cm）；②如图 2，当 BC 与 AB 重合时，$MN=BM-BN=6-5=1$（cm）．综上所述，两根木条的中点之间的距离是 1 cm 或 11 cm．

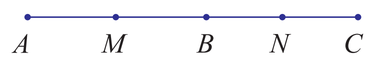


图 1

图 2

2. 6 cm 或$\frac{2}{3}$ cm 【解析】①如图 1，当点 B 在线段 AC 上时，设 $BC=x$ cm，则 $AB=2x$ cm，$AC=3x$ cm．因为 D 为线段 AC 的中点，所以 $AD=CD=\frac{1}{2}AC=1.5x$ cm．所以 $BD=AB-AD=0.5x$（cm）．又因为 $BD=1$ cm，所以 $0.5x=1$．解得 $x=2$．则 $3x=6$．所以 $AC=6$ cm．②如图 2，当点 B 在线段 AC 的延长线上时，设 $BC=x$ cm，则 $AB=$

$2x$ cm，$AC=AB-BC=x$（cm）.
因为点 D 为线段 AC 的中点，所以 $AD=CD=\frac{1}{2}AC=0.5x$ cm．所以 $BD=CD+BC=1.5x$（cm）.
又因为 $BD=1$ cm，所以 $1.5x=1$.
解得 $x=\frac{2}{3}$．则 $AC=\frac{2}{3}$ cm．综上所述，AC 的长为 6 cm 或 $\frac{2}{3}$ cm.

图 1

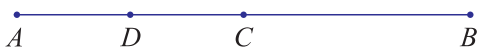


图 2

例四　解：（1）因为 C、D 两点分别从点 P、B 同时出发以 1 cm/s、2 cm/s 的速度沿直线 AB 向左运动，$t=1$ s，
所以 $BD=2$ cm，$PC=1$ cm.
则 $BD=2PC$.
因为 $PD=2AC$，
所以 $BD+PD=2(PC+AC)$，
即 $PB=2AP$.
因为 $AB=12$ cm，$AB=AP+PB$，
所以 $12=3AP$，则 $AP=4$ cm.
（2）因为 C、D 两点分别从点 P、B 同时出发以 1 cm/s、2 cm/s 的速度沿直线 AB 向左运动，
所以 $BD=2PC$.
因为 $PD=2AC$，
所以 $BD+PD=2(PC+AC)$，
即 $PB=2AP$.
所以点 P 在线段 AB 上的 $\frac{1}{3}$ 处（靠近 A 点）.
因为 $AB=12$ cm，
所以 $AP=\frac{1}{3}AB=4$ cm.
（3）①当点 Q 在线段 AB 上时，如图 1.

图 1

因为 $AQ-BQ=PQ$，
所以 $AQ=PQ+BQ$.
又因为 $AQ=AP+PQ$，
所以 $AP=BQ$.
由（2）知，$AP=4$ cm，
所以 $BQ=AP=4$ cm.
所以 $PQ=AB-AP-BQ=4$（cm）.
②当点 Q 在 AB 的延长线上时，如图 2.

图 2

因为 $AQ-AP=PQ$，
$AQ-BQ=PQ$，
所以 $AP=BQ$.
所以 $PQ=PB+BQ=PB+AP=AB=12$ cm.
综上所述，PQ 的长为 4 cm 或 12 cm.
【点拨】本题主要考查了两点间的距离．灵活运用线段的和、差、

倍之间的运算转化线段之间的数量关系是解题的关键.

变式训练四

解：设线段 AB 未运动时点 P 所表示的数为 x，点 B 运动时间为 t，

则此时点 C 表示的数为 $16-2t$，

点 D 表示的数为 $20-2t$，

点 A 表示的数为 $-10+6t$，

点 B 表示的数为 $-8+6t$，

点 P 表示的数为 $x+6t$.

所以 $BD=20-2t-(-8+6t)=28-8t$，

$AP=x+6t-(-10+6t)=10+x$，

$PC=|16-2t-(x+6t)|=|16-8t-x|$，

$PD=20-2t-(x+6t)=20-8t-x=20-(8t+x)$.

因为 $BD-AP=3PC$，

所以 $28-8t-(10+x)=3|16-8t-x|$，

即 $18-8t-x=3|16-8t-x|$.

①当点 C 在点 P 的右侧时，

$18-8t-x=3(16-8t-x)=48-24t-3x$，

则 $x+8t=15$.

所以 $PD=20-(8t+x)=20-15=5$.

②当点 C 在点 P 的左侧时，

$18-8t-x=-3(16-8t-x)=-48+24t+3x$，

所以 $x+8t=16.5$.

所以 $PD=20-(8t+x)=20-16.5=3.5$.

综上所述，PD 的长为 5 或 3.5.

培优精练

1. B　【解析】因为 $MC:CN=5:4$，所以设 $MC=5x$ cm，$CN=4x$ cm. 则 $MN=MC+CN=5x+4x=9x$（cm）. 因为点 P 是 MN 的中点，所以 $PN=\frac{1}{2}MN=\frac{9}{2}x$ cm. 所以 $PC=PN-CN$，即 $2=\frac{9}{2}x-4x$. 解得 $x=4$. 所以 $MN=9\times4=36$（cm），故选 B.

2. 20 或 80　【解析】①当点 C 在 AB 的延长线上时，如图 1 所示.

图 1

因为点 P 是线段 AB 的中点，点 Q 是线段 BC 的中点，$AB=100$，$BC=60$，所以 $PB=\frac{1}{2}AB=50$，$QB=\frac{1}{2}BC=30$. 所以 $PQ=PB+QB=50+30=80$.

②当点 C 在线段 AB 上时，如图 2 所示.

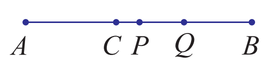


图 2

因为点 P 是线段 AB 的中点，点

Q是线段BC的中点，$AB=100$，$BC=60$，所以 $PB=\frac{1}{2}AB=50$，$QB=\frac{1}{2}BC=30$. 所以 $PQ=PB-QB=50-30=20$. 综上所述，PQ的长为20或80.

3. (1) **证明：** 设 $BC=k$，

因为点B为线段CD的三等分点(靠近点C)，

所以 $BD=2BC=2k$.

因为 $AC=BD$，

所以 $AC=2k$，$AB=CD=3k$.

又点M、N分别为AB、CD的中点，

所以 $BM=\frac{1}{2}AB=\frac{3}{2}k$，

$CN=DN=\frac{1}{2}CD=\frac{3}{2}k$.

所以 $CM=BM-BC=\frac{3}{2}k-k=\frac{1}{2}k$.

又 $DN=\frac{3}{2}k$，

所以 $3CM=DN$.

(2) 由 (1) 知，$MN=CM+CN=\frac{1}{2}k+\frac{3}{2}k=2k$.

因为 $MN=20$，即 $2k=20$，

所以 $k=10$.

又 $DM=BM+BD$，

所以 $DM=\frac{3}{2}k+2k=\frac{7}{2}k=\frac{7}{2}\times10=35$.

4. (1) 10　6 **【解析】** 因为 $(a+6)^2$ 与 $|a-b+10|$ 互为相反数，所以 $(a+6)^2+|a-b+10|=0$. 所以 $a+6=0$，$a-b+10=0$. 所以 $a=-6$，$b=4$. 所以A、B两点表示的有理数分别为-6和4. 所以 $AB=4-(-6)=10$. 设点C的初始位置表示的有理数为x，线段CD的运动速度为v，运动时间为t，则运动时点C表示的有理数为$x+vt$，点D表示的有理数为$x+2+vt$. 因为M、N分别为AC、BD的中点，所以点M表示的数为$\frac{-6+x+vt}{2}$，点N表示的数为$\frac{x+6+vt}{2}$. 所以 $MN=\frac{x+6+vt}{2}-\frac{-6+x+vt}{2}=6$.

(2) **解：** 由 (1) 知，点D表示的数为$x+2+vt$，点M表示的数为$\frac{-6+x+vt}{2}$.

所以 $DM=x+2+vt-\frac{-6+x+vt}{2}=\frac{3}{2}$，即 $x+vt=-7$.

所以点N表示的有理数为 $\frac{x+6+vt}{2}=\frac{6-7}{2}=-\frac{1}{2}$.

名卷压轴题

解： (1) 因为 $|m-2n|=-(6-n)^2$，

所以 $|m-2n|+(6-n)^2=0$.

所以 $m-2n=0$，$6-n=0$.

所以 $n=6$，$m=12$.

所以 $AB=12$，$CD=6$.

(2) ①当点 C 在线段 AB 的延长线上时，如图 1.

图 1

因为 M、N 分别为线段 AC、BD 的中点，

所以 $AM=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}(AB+BC)=\frac{1}{2}\times(12+4)=8$,

$DN=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}(CD+BC)=\frac{1}{2}\times(6+4)=5$.

所以 $MN=AD-AM-DN=12+6+4-8-5=9$.

②当点 C 在线段 AB 上时，如图 2.

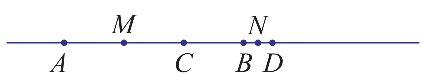


图 2

因为 M、N 分别为线段 AC、BD 的中点，

所以 $AM=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}(AB-BC)=\frac{1}{2}\times(12-4)=4$,

$DN=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}(CD-BC)=\frac{1}{2}\times(6-4)=1$.

所以 $MN=AD-AM-DN=12+6-4-4-1=9$.

综上所述，MN 的长为 9.

(3) ②正确. 理由如下：

如图 3.

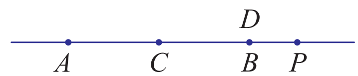


图 3

因为 $\frac{PA+PB}{PC}$

$=\frac{(PC+AC)+(PC-CB)}{PC}$

$=\frac{2PC+AC-CB}{PC}$

$=\frac{2PC+AB-2CD}{PC}$

$=\frac{2PC+12-12}{PC}$

$=\frac{2PC}{PC}$

$=2$,

所以② $\frac{PA+PB}{PC}$ 是定值 2.

第 3 讲 角

例一 9 6 **【解析】**图形中共有 5 条射线，所以共有 $\frac{5\times(5-1)}{2}=10$ 个角. 除去一个平角，所以图中小于平角的角共有 9 个. 其中互余的角有 $\angle COD$ 与 $\angle DOB$，$\angle COE$ 与 $\angle BOE$，$\angle COE$ 与 $\angle DOE$，$\angle COD$ 与 $\angle COE$，$\angle DOE$ 与 $\angle BOD$，$\angle BOE$ 与

$\angle BOD$ 共 6 对.

【点拨】若两个角的和为 $90°$，则这两个角互余，与角的位置无关. 如果图形中共有 n 条射线，那么共有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个角.

变式训练一

1. $405°$ **【解析】**因为观察图形发现正方形 $ABCD$ 关于对角线 BD 所在直线对称，所以 $\angle 1+\angle 9=90°$，$\angle 2+\angle 6=90°$，$\angle 3=\angle 5=\angle 7=45°$，$\angle 4+\angle 8=90°$. 所以 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6+\angle 7+\angle 8+\angle 9=90°\times 3+45°\times 3=405°$.

2. **解：**设 $\angle BOE=x$，则 $\angle EOC=2x$，$\angle BOC=\angle BOE+\angle EOC=3x$.

则 $\angle BOD=\frac{1}{2}(180°-3x)$.

则 $\angle DOE=\angle BOE+\angle BOD=x+\frac{1}{2}(180°-3x)=72°$.

解得 $x=36°$.

故 $\angle EOC=2x=72°$.

例二 C **【解析】**因为 $\angle AOB:\angle BOC=1:4$，所以设 $\angle AOB=x$，则 $\angle BOC=4x$. 因为 OD 平分 $\angle BOC$，所以 $\angle BOD=\frac{1}{2}\angle BOC=2x$. 因为 $\angle AOD=\angle AOB+\angle BOD=60°$，即 $x+2x=60°$，所以 $x=20°$. 则 $4x=80°$. 所以 $\angle AOC=\angle AOB+\angle BOC=20°+80°=100°$. 故选 C.

【点拨】本题主要考查了角的计算以及角平分线的性质. 关键是得出 $\angle BOD=\frac{1}{2}\angle BOC=2x$.

变式训练二

1. $19°$ **【解析】**因为 OD 平分 $\angle AOB$，$\angle AOB=114°$，所以 $\angle AOD=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times 114°=57°$. 因为 $\angle BOC=2\angle AOC$，则 $\angle AOB=\angle AOC+\angle BOC=3\angle AOC$. 所以 $\angle AOC=\frac{1}{3}\angle AOB=\frac{1}{3}\times 114°=38°$. 所以 $\angle COD=\angle AOD-\angle AOC=57°-38°=19°$.

2. **解：**因为 $\angle AOC:\angle COD:\angle DOB=2:3:4$，

不妨设 $\angle AOC=2x$，

则 $\angle COD=3x$，$\angle DOB=4x$，$\angle AOB=9x$.

因为 OM 平分 $\angle AOC$，ON 平分 $\angle DOB$，

所以 $\angle MOC=\frac{1}{2}\angle AOC=x$，

$\angle NOD=\frac{1}{2}\angle DOB=2x$.

所以 $\angle MON=\angle MOC+\angle COD+\angle NOD=x+3x+2x=6x$.

又因为 $\angle MON=90°$，

即 $6x=90°$，

所以 $x=15^\circ$.

所以 $\angle AOB=9\times15^\circ=135^\circ$.

例三 A 【解析】设 $\angle EAD'=\alpha$，$\angle FAB'=\beta$，根据折叠性质可知，$\angle DAF=\angle D'AF$，$\angle BAE=\angle B'AE$. 因为 $\angle B'AD'=10^\circ$，所以 $\angle DAF=10^\circ+\beta$，$\angle BAE=10^\circ+\alpha$. 因为四边形 $ABCD$ 是长方形，所以 $\angle DAB=90^\circ$. 所以 $10^\circ+\beta+\beta+10^\circ+10^\circ+\alpha+\alpha=90^\circ$. 所以 $\alpha+\beta=30^\circ$. 所以 $\angle EAF=\angle B'AD'+\angle EAD'+\angle FAB'=10^\circ+\alpha+\beta=10^\circ+30^\circ=40^\circ$. 则 $\angle EAF$ 的度数为 40°. 故选 A.

【点拨】本题主要考查了角的计算. 解决本题的关键是熟练运用折叠的性质.

变式训练三

1. A 【解析】因为一张长方形纸片沿 BC、BD 折叠，所以 $\angle ABC=\angle A'BC$，$\angle EBD=\angle E'BD$. 又因为 $\angle ABC+\angle A'BC+\angle EBD+\angle E'BD=180^\circ$，所以 $\angle ABC+\angle DBE=90^\circ$. 因为 $\angle ABC=35^\circ$，所以 $\angle DBE=55^\circ$. 故选 A.

2. 58° 【解析】由折叠的性质可得，$\angle EFC'=\angle EFC=119^\circ$. 又因为 $\angle EFB=180^\circ-\angle EFC=180^\circ-119^\circ=61^\circ$，所以 $\angle BFC'=\angle EFC'-\angle EFB=119^\circ-61^\circ=58^\circ$.

例四 解：（1）因为 $\angle AOC=90^\circ$，$\angle BOC=30^\circ$，OM 平分 $\angle AOB$，ON 平分 $\angle BOC$，

所以 $\angle BOM=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle BOC)=\frac{1}{2}\times(90^\circ+30^\circ)=60^\circ$，

$\angle BON=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\times30^\circ=15^\circ$.

所以 $\angle MON=\angle BOM-\angle BON=60^\circ-15^\circ=45^\circ$.

（2）因为 $\angle AOC=90^\circ$，$\angle BOC=\beta$，OM 平分 $\angle AOB$，ON 平分 $\angle BOC$，

所以 $\angle BOM=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle BOC)=\frac{1}{2}\times(90^\circ+\beta)=45^\circ+\frac{1}{2}\beta$，

$\angle BON=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\times\beta=\frac{1}{2}\beta$.

所以 $\angle MON=\angle BOM-\angle BON=45^\circ+\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\beta=45^\circ$.

（3）因为 $\angle AOC=\alpha$，$\angle BOC=20^\circ$，OM 平分 $\angle AOB$，ON 平分 $\angle BOC$，

所以 $\angle BOM=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle BOC)=\frac{1}{2}\times(\alpha+20^\circ)=\frac{1}{2}\alpha+10^\circ$，

$\angle BON=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\times 20^\circ=10^\circ$.

所以 $\angle MON=\angle BOM-\angle BON=\frac{1}{2}\alpha+10^\circ-10^\circ=\frac{1}{2}\alpha$.

（4）由（1）（2）（3）可得，$\angle MON=\frac{1}{2}\angle AOC$.

【点拨】本题主要考查了角平分线的性质和角的计算．关键是根据角平分线的性质得出所求角与已知角的关系．

变式训练四

1. **解：**(1) 因为 $\angle AOB$ 是直角，$\angle BOC=60^\circ$，

所以 $\angle AOC=\angle AOB+\angle BOC=90^\circ+60^\circ=150^\circ$.

因为 OE 平分 $\angle AOC$，OF 平分 $\angle BOC$，

所以 $\angle EOC=\frac{1}{2}\angle AOC=75^\circ$，

$\angle FOC=\frac{1}{2}\angle BOC=30^\circ$.

所以 $\angle EOF=\angle EOC-\angle FOC=75^\circ-30^\circ=45^\circ$.

（2）因为 $\angle AOC=140^\circ$，$\angle BOC=60^\circ$，OE 平分 $\angle AOC$，OF 平分 $\angle BOC$，

所以 $\angle EOC=\frac{1}{2}\angle AOC=70^\circ$，

$\angle FOC=\frac{1}{2}\angle BOC=30^\circ$.

所以 $\angle EOF=\angle EOC-\angle FOC=70^\circ-30^\circ=40^\circ$.

（3）因为 $\angle AOC+\angle EOF=m$，$\angle BOC=n$，OE 平分 $\angle AOC$，OF 平分 $\angle BOC$，

所以 $\angle EOC=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}(m-\angle EOF)$，

$\angle FOC=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}n$.

所以 $\angle EOF=\angle EOC-\angle FOC=\frac{1}{2}\angle AOC-\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}(m-\angle EOF)-\frac{1}{2}n$.

所以 $2\angle EOF=m-\angle EOF-n$，

即 $\angle EOF=\frac{1}{3}(m-n)$.

2. **解：**(1) 因为 $\angle AOC=30^\circ$，

所以 $\angle BOC=180^\circ-\angle AOC=150^\circ$.

又 $\angle COD$ 是直角，OE 平分 $\angle BOC$，

所以 $\angle DOE=\angle COD-\angle COE=\angle COD-\frac{1}{2}\angle BOC=90^\circ-\frac{1}{2}\times 150^\circ=15^\circ$.

(2) $\angle DOE=\frac{1}{2}\alpha$.

(3) ① $\angle AOC=2\angle DOE$.

理由如下：

因为 $\angle COD$ 是直角，OE 平分 $\angle BOC$，

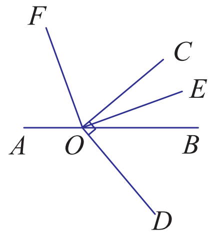
所以 $\angle BOE=\angle COE=90^\circ-\angle DOE$.

所以 $\angle AOC=180^\circ-\angle BOC=180^\circ-2\angle COE=180^\circ-2(90^\circ-\angle DOE)$.

所以 $\angle AOC=2\angle DOE$.

②$4\angle DOE-5\angle AOF=180^\circ$.

理由如下：如下图，



设$\angle DOE=x$，$\angle AOF=y$，

所以 $\angle AOC-4\angle AOF=2\angle DOE-4\angle AOF=2x-4y$，

$2\angle BOE+\angle AOF=2(90^\circ-x)+y=180^\circ-2x+y$.

所以 $2x-4y=180^\circ-2x+y$，

即 $4x-5y=180^\circ$.

所以 $4\angle DOE-5\angle AOF=180^\circ$.

培优精练

1. 20°　**【解析】**设$\angle AOD=x$，则$\angle COD=x+40^\circ$，$\angle AOC=\angle COD+\angle AOD=x+40^\circ+x=2x+40^\circ$. 因为 OB 平分$\angle AOC$，

所以$\angle BOA=\frac{1}{2}\angle AOC=x+20^\circ$.

所以$\angle BOD=\angle BOA-\angle AOD=x+20^\circ-x=20^\circ$.

2. $\frac{2\alpha+2\beta-\gamma}{3}$　**【解析】**因为 OM 平分$\angle AOB$，所以$\angle AOM=\angle MOB$. 因为 ON 平分$\angle COD$，所以$\angle DON=\angle NOC$. 因为$\angle BON=\alpha$，$\angle COM=\beta$，$\angle AOD=\gamma$，所以$\angle BOC=\angle AOD-\angle AOB-\angle COD=\angle AOD-2\angle BOM-2\angle NOC=\angle AOD-2(\angle COM-\angle BOC)-2(\angle BON-\angle BOC)$，即$\angle BOC=\frac{2\angle BON+2\angle COM-\angle AOD}{3}=\frac{2\alpha+2\beta-\gamma}{3}$.

3. (1) 40°　**【解析】**根据折叠的性质可知，OP 平分$\angle A'OA$. 所以$\angle A'OA=2\angle POA=40^\circ$.

(2) 90°　**【解析】**当 $A'O$ 与 $B'O$ 重合时，$\angle AOA'+\angle BOB'=180^\circ$.

由折叠的性质可知，OP、OQ 分别平分$\angle AOA'$、$\angle BOB'$，所以$\angle POQ=\angle POA'+\angle QOB'=\frac{1}{2}(\angle AOA'+\angle BOB')=\frac{1}{2}\times180^\circ=90^\circ$.

(3) **解：**当$\angle B'OA'=30^\circ$时，

$\angle AOA'+\angle BOB'=180^\circ-\angle B'OA'=150^\circ$.

由折叠的性质可知，OP、OQ 分别平分$\angle AOA'$、$\angle BOB'$.

所以$\angle POQ=\angle POA'+\angle QOB'+\angle B'OA'=\frac{1}{2}(\angle AOA'+\angle BOB')+\angle B'OA'=\frac{1}{2}\times150^\circ+30^\circ=105^\circ$.

4. **解：**分情况讨论.

①如图 1，

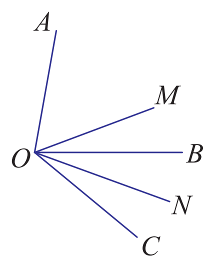


图 1

因为 OM 和 ON 分别平分 $\angle AOC$ 和 $\angle BOC$，

所以 $\angle MOC=\frac{1}{2}\angle AOC$，

$\angle NOC=\frac{1}{2}\angle BOC$.

所以 $\angle MOC-\angle NOC=\frac{1}{2}\angle AOC-\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\angle AOB$，

即 $\angle MON=\frac{1}{2}\angle AOB$.

②如图 2，

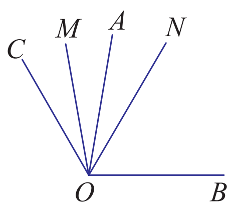


图 2

因为 OM 和 ON 分别平分 $\angle AOC$ 和 $\angle BOC$，

所以 $\angle MOC=\frac{1}{2}\angle AOC$，

$\angle NOC=\frac{1}{2}\angle BOC$.

所以 $\angle NOC-\angle MOC=\frac{1}{2}\angle BOC-\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}\angle AOB$，

即 $\angle MON=\frac{1}{2}\angle AOB$.

③如图 3，

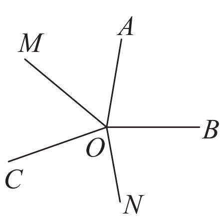


图 3

因为 OM 和 ON 分别平分 $\angle AOC$ 和 $\angle BOC$，

所以 $\angle MOC=\frac{1}{2}\angle AOC$，

$\angle NOC=\frac{1}{2}\angle BOC$.

则 $\angle MOC+\angle NOC=\frac{1}{2}\angle AOC+\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}(360^\circ-\angle AOB)$，

即 $\angle MON=180^\circ-\frac{1}{2}\angle AOB$.

综上所述，$\angle MON=\frac{1}{2}\angle AOB$ 或 $\angle MON+\frac{1}{2}\angle AOB=180^\circ$.

名卷压轴题

解：（1）如图 2，

因为 OM 平分 $\angle BOC$，

所以 $\angle MOC=\angle MOB$.

又因为 $\angle BOC=110^\circ$，

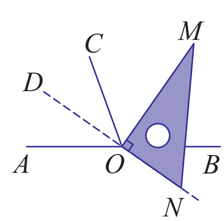
所以 $\angle MOB=55^\circ$.

因为 $\angle MON=90^\circ$，

所以 $\angle BON=\angle MON-\angle MOB=90^\circ-55^\circ=35^\circ$.

（2）分两种情况：

①如下图，



因为 $\angle BOC=110^\circ$，

所以 $\angle AOC=70^\circ$.

当直线 ON 恰好平分锐角 $\angle AOC$ 时，$\angle AOD=\angle COD=35°$.

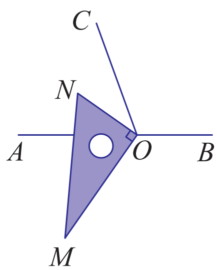
所以 $\angle BON=35°$，$\angle BOM=90°-35°=55°$.

所以三角板绕点 O 逆时针旋转的角度为 $55°$.

由题意，得 $5°t=55°$.

解得 $t=11$.

②如下图，



因为 $\angle BOC=110°$，

所以 $\angle AOC=70°$.

当 ON 平分 $\angle AOC$ 时，

$\angle NOA=35°$.

所以 $\angle AOM=90°-35°=55°$.

所以三角板绕点 O 逆时针旋转的角度为 $180°+55°=235°$.

由题意，得 $5°t=235°$.

解得 $t=47$.

综上所述，t 的值为 11 或 47.

（3）$\angle AOM-\angle NOC=20°$.

理由如下：

因为 $\angle MON=90°$，$\angle AOC=70°$，

所以 $\angle AOM=90°-\angle AON$，$\angle NOC=70°-\angle AON$.

所以 $\angle AOM-\angle NOC=(90°-\angle AON)-(70°-\angle AON)=20°$.

所以 $\angle AOM$ 与 $\angle NOC$ 的数量关系为 $\angle AOM-\angle NOC=20°$.

◎图形的初步认识 新题型探究

例题 **解：**（1）因为 OE 平分 $\angle BOC$，

所以 $\angle COE=\angle BOE=\frac{1}{2}\angle BOC$.

因为 $\angle COE$ 是 $\angle AOC$ 的差余角，

所以 $\angle AOC-\angle COE=\angle AOC-\frac{1}{2}\angle BOC=90°$.

又因为 $\angle AOC+\angle BOC=180°$，

所以 $\angle BOC=60°$.

所以 $\angle BOE=\frac{1}{2}\angle BOC=30°$.

（2）$\angle BOC+\angle BOE=90°$.

理由如下：

因为 $\angle BOC$ 是 $\angle AOE$ 的差余角，

所以 $\angle AOE-\angle BOC=\angle AOC+\angle COE-(\angle COE+\angle BOE)=\angle AOC-\angle BOE=90°$.

又因为 $\angle AOC+\angle BOC=180°$，

所以 $\angle BOC+\angle BOE=90°$.

【点拨】本题主要考查了补角，角的和、差的计算，新定义差余角的阅读理解以及知识的迁移能力．理解并运用“差余角”的定义是解本题的关键.

变式训练

（1）是

（2）**解：**由题意，得 $\angle QPN=10°t$.

因为 $\angle QPN$ 首次等于 180° 时，PQ 停止旋转，

又 $\frac{180^\circ}{10^\circ}=18$，

所以 $0<t\leqslant 18$.

分四种情况讨论：

①当 $\angle QPN=2\angle QPM$ 时，

因为 $\angle QPM=\angle QPN-\angle MPN=10^\circ t-60^\circ$，

所以 $10^\circ t=2(10^\circ t-60^\circ)$.

解得 $t=12$.

②当 $\angle QPN=2\angle MPN$ 时，

则 $10^\circ t=2\times 60^\circ$.

解得 $t=12$.

③当 $\angle MPN=2\angle QPM$ 时，

则 $60^\circ=2(10^\circ t-60^\circ)$.

解得 $t=9$.

④当 $\angle QPM=2\angle MPN$ 时，

则 $10^\circ t-60^\circ=2\times 60^\circ$.

解得 $t=18$.

经检验，均符合题意.

综上所述，当 t 的值为 9、12 或 18 时，射线 PM 是 $\angle QPN$ 的奇妙线.

培优精练

解：因为第 1 次操作标注数字的和为 $0+2\ 010=2\ 010$；

第 2 次操作标注数字的和为 $1\ 005$；

第 3 次操作标注数字的和为 $\frac{0+1\ 005}{2}+\frac{1\ 005+2\ 010}{2}=2\ 010$；

第 4 次操作标注数字的和为 $4\ 020$；

……

所以从第 3 次操作开始，每一次操作标注数字的和都是前一次操作标注数字的和的 2 倍.

所以经过 11 次操作之后，在线段 AB 上所标注的数字的和是 $2\ 010+1\ 005\times(1+2+4+8+16+\cdots+2^9)=2\ 010+1\ 005\times(1+2+4+8+16+\cdots+512)=2\ 010+1\ 005\times 1\ 023=2\ 010+1\ 028\ 115=1\ 030\ 125$.

第五章　相交线与平行线

第 1 讲　相交线

例一　36°　**【解析】**因为 $\angle COE$ 是直角，所以 $\angle COE=90^\circ$. 因为 $\angle COF=27^\circ$，所以 $\angle EOF=\angle COE-\angle COF=90^\circ-27^\circ=63^\circ$. 根据 OF 平分 $\angle AOE$，得 $\angle AOF=\angle EOF=63^\circ$. 所以 $\angle AOC=\angle AOF-\angle COF=63^\circ-27^\circ=36^\circ$. 所以 $\angle BOD=\angle AOC=36^\circ$.

【点拨】本题主要考查了对顶角相等的性质、角平分线的性质，属于基础题. 熟记概念与性质并准确识图，厘清图中各角之间的关系是解本题的关键.

变式训练一

1. 解：因为直线 AB、CD 相交于点 O，

所以 $\angle BOD=\angle AOC=\alpha$.

因为 $\angle DOE=\beta$，

所以 $\angle BOE=\angle BOD-\angle DOE=\alpha-\beta$.

因为 $OE\perp OF$，

所以 $\angle EOF=90^\circ$.

所以 $\angle BOF=\angle EOF-\angle BOE=90^\circ-(\alpha-\beta)=90^\circ-\alpha+\beta$.

2. 解：因为直线 AB、CD、EF 相交于点 O，$\angle AOE=70^\circ$，

所以 $\angle BOF=\angle AOE=70^\circ$.

因为 OG 平分 $\angle BOF$，

所以 $\angle FOG=\frac{1}{2}\angle BOF=35^\circ$.

因为 $CD\perp EF$，

所以 $\angle DOF=90^\circ$.

所以 $\angle DOG=\angle DOF-\angle FOG=90^\circ-35^\circ=55^\circ$.

例二　D　【解析】当 $CD\perp AB$ 时，点 C 到点 D 的距离最短. 因为 $AC\perp BC$，$AC=6$，$BC=8$，$AB=10$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AC\times BC=\frac{1}{2}\times CD\times AB$，即 $\frac{1}{2}\times6\times8=\frac{1}{2}\times CD\times10$. 解得 $CD=\frac{24}{5}$. 故选 D.

【点拨】本题主要考查了垂线段最短及三角形的面积. 解本题的关键是掌握直角三角形面积的两种算法.

变式训练二

1. A　【解析】因为 $PA=4$ cm，$PB=6$ cm，$PC=3$ cm，所以 $PC<PA<PB$. 则点 P 到直线 m 的距离应小于 3 cm，可能是 2 cm. 故选 A.

2. A　【解析】实际生活中，测量跳远成绩都是量离起跳线最近的落地点，过该点作起跳线的垂线，垂线段的长度即为跳远成绩. 故 DB 的长度是丁同学的跳远成绩，即 4.15 m.

例三　解：(1) $CD\perp EF$.

理由如下：

因为 CD 与 EF 相交于点 H，

所以 $\angle CHG+\angle DHG=180^\circ$.

又 $\angle CHG=\angle DHG$，

所以 $\angle CHG=\angle DHG=90^\circ$.

所以 $CD\perp EF$.

(2) 由 (1) 知，$\angle CHG=90^\circ$.

因为 $\angle CHG=\frac{3}{4}\angle AGE$，

所以 $\angle AGE=120^\circ$.

所以 $\angle CHG$ 的同位角 $\angle AGE=120^\circ$，内错角 $\angle BGH=\angle AGE=120^\circ$，同旁内角 $\angle AGF=180^\circ-\angle AGE=180^\circ-120^\circ=60^\circ$.

【点拨】本题主要考查了垂直的定义，邻补角的定义，同位角、内

错角、同旁内角的定义，以及对顶角和邻补角的性质，属于基础知识，比较简单.

变式训练三

1. 解： 因为 $\angle AGE$ 的同位角是 $\angle CHG$，

所以 $\angle CHG=\angle AGE$.

因为 $\angle AGH:\angle BGH=2:7$，

$\angle AGH+\angle BGH=180°$，

所以 $\angle BGH=180°\times\frac{7}{9}=140°$.

所以 $\angle CHG=\angle AGE=\angle BGH=140°$.

所以 $\angle GHD=180°-\angle CHG=40°$.

因为 HP 平分 $\angle GHD$，

所以 $\angle PHD=\frac{1}{2}\angle GHD=20°$.

2. 解：（1）因为 $\angle COM=120°$，

所以 $\angle DOF=120°$.

因为 OG 平分 $\angle DOF$，

所以 $\angle FOG=\frac{1}{2}\angle DOF=60°$.

（2）与 $\angle FOG$ 互为同位角的一个角是 $\angle BMF$.

（3）因为 $\angle COM=120°$，

$\angle COM+\angle COF=180°$，

所以 $\angle COF=60°$.

因为 $\angle EMB=\frac{1}{2}\angle COF$，

所以 $\angle EMB=30°$.

所以 $\angle AMO=\angle EMB=30°$.

例四　解：（1）因为 OE 平分 $\angle BOC$，

$\angle BOE=65°$，

所以 $\angle EOC=\angle BOE=65°$.

所以 $\angle DOE=180°-\angle EOC=180°-65°=115°$.

（2）因为 OE 平分 $\angle BOC$，

所以 $\angle EOC=\angle BOE$.

因为 $\angle BOD:\angle BOE=2:3$，

不妨设 $\angle BOD=x$，

则 $\angle EOC=\angle BOE=\frac{3}{2}x$.

因为 $\angle EOC+\angle BOE+\angle BOD=180°$，

所以 $\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x+x=180°$.

解得 $x=45°$.

因为 $\angle AOC=\angle BOD$，

所以 $\angle AOC=\angle BOD=45°$.

因为 $OF\perp CD$，

所以 $\angle COF=90°$.

所以 $\angle AOF=\angle COF-\angle AOC=90°-45°=45°$.

【点拨】本题主要考查了角平分线的定义、邻补角的定义、对顶角性质、垂直定义、角的计算等. 找出各个角之间的关系是正确计算的关键.

变式训练四

1. 110°　72.5°　**【解析】**因为 OG 为 $\angle COF$ 的平分线，所以 $\angle COG=\angle FOG$. 因为 $\angle AOC:\angle COG=4:7$，所以不妨设 $\angle AOC=4x$，

则$\angle COG=7x$，$\angle FOG=7x$．又因为$EF\perp AB$，所以$\angle AOF=90°$，即$4x+7x+7x=18x=90°$．解得$x=5°$．所以$\angle DOB=\angle AOC=20°$，$\angle COG=\angle FOG=35°$．则$\angle DOF=\angle FOB+\angle DOB=90°+20°=110°$，$\angle DOG=\angle DOB+\angle FOB+\angle FOG=20°+90°+35°=145°$．因为$OH$平分$\angle DOG$，所以$\angle DOH=\frac{1}{2}\angle DOG=72.5°$．

2. 解：(1) 因为$OM\perp AB$，$\angle 1=\angle 2$，所以$\angle 1+\angle AOC=\angle 2+\angle AOC=90°$，即$\angle CON=90°$．

又$\angle CON+\angle NOD=180°$，

所以$\angle NOD=90°$．

(2) 因为$OM\perp AB$，$\angle 1=\frac{1}{4}\angle BOC$，

所以$\angle 1=\frac{1}{4}(\angle 1+90°)$．

所以$\angle 1=30°$．

所以$\angle MOD=180°-\angle 1=180°-30°=150°$．

培优精练

1. A　【解析】因为$\angle 1+\angle 3=180°$，$2\angle 3=3\angle 1$，所以$\angle 1+\frac{3}{2}\angle 1=180°$．解得$\angle 1=72°$．所以$\angle 3=\frac{3}{2}\angle 1=108°$．所以$\angle 4=\angle 1=72°$，$\angle 2=\angle 3=108°$．观察四个选项可知，只有选项A正确．

2. 6　【解析】因为$AD\perp BC$，$BE\perp AC$，所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AC\times BE=\frac{1}{2}\times BC\times AD$，即$AC\times BE=BC\times AD$．又因为$AC=BC=10$，$BE=6$，所以$10\times 6=10\times AD$．所以$AD=6$．

3. 解：(1) 作图如下．

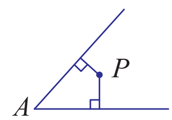


图 1

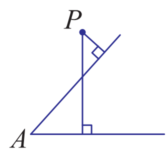


图 2

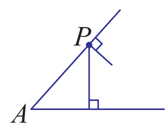


图 3

(2) $180°-\angle A$　$\angle A$　$\angle A$

(3) 理由如下：

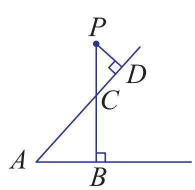
如下图所示，在$\text{Rt}\triangle PDC$中，$\angle DCP+\angle P=90°$，

在$\text{Rt}\triangle ABC$中，$\angle ACB+\angle A=90°$，

所以$\angle DCP+\angle P=\angle ACB+\angle A$．

又因为$\angle DCP=\angle ACB$，

所以$\angle P=\angle A$．



(4) 如果一个角的两边分别与另一个角的两边互相垂直，那么这两个角相等或互补.

4. 解：(1) 因为$\angle 1+\angle 2=180^\circ$，

$\angle 1:\angle 2=5:3$，

所以$\angle 1=\frac{5}{8}\times 180^\circ=112.5^\circ$，

$\angle 2=\frac{3}{8}\times 180^\circ=67.5^\circ$.

因为$\angle 3$是$\angle 2$的内错角，

$\angle 2$与它的内错角相等，

所以$\angle 3=\angle 2=67.5^\circ$.

(2) 因为$\angle 3$与$\angle CHG$互补，

所以$\angle CHG=180^\circ-\angle 3=112.5^\circ$.

因为HP平分$\angle CHG$，

所以$\angle CHP=\frac{1}{2}\angle CHG=56.25^\circ$.

名卷压轴题

(1) 60°　75°　【解析】因为$\angle BOE=90^\circ$，所以$\angle AOE=90^\circ$.

因为$\angle AOC=\alpha=30^\circ$，所以$\angle EOC=\angle AOE-\angle AOC=90^\circ-30^\circ=60^\circ$，$\angle AOD=180^\circ-\angle AOC=180^\circ-30^\circ=150^\circ$.

因为OF平分$\angle AOD$，

所以$\angle FOD=\frac{1}{2}\angle AOD=\frac{1}{2}\times 150^\circ=75^\circ$.

(2) 解：当$\alpha=60^\circ$时，

$\angle AOD=180^\circ-\angle AOC=180^\circ-60^\circ=120^\circ$.

因为OF平分$\angle AOD$，

所以$\angle AOF=\frac{1}{2}\angle AOD=60^\circ$.

$\angle EOF=\angle AOE+\angle AOF=90^\circ+60^\circ=150^\circ$.

设经过t s射线OE'与射线OF'第一次重合.

则$12^\circ t+8^\circ t=150^\circ$.

解得$t=\frac{15}{2}$.

故经过$\frac{15}{2}$ s射线OE'与射线OF'第一次重合.

(3) 解：设射线OE'转动的时间为t s.

分四种情况：

①$\angle E'OF'$第1次为90°，如图1.

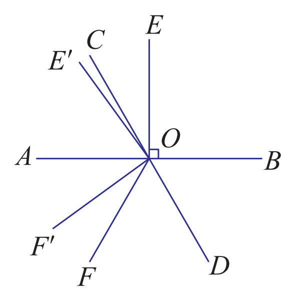


图1

因为$\angle EOE'=12^\circ t$，$\angle FOF'=8^\circ t$，

所以$\angle E'OF'=\angle EOF-\angle EOE'-\angle FOF'$，

即$90^\circ=150^\circ-12^\circ t-8^\circ t$.

解得$t=3$.

②$\angle E'OF'$第2次为90°，如图2.

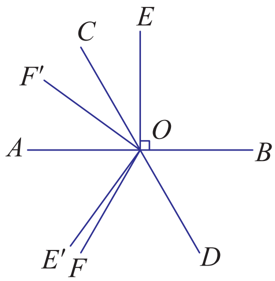


图 2

因为 $\angle EOE'=12^\circ t$，$\angle FOF'=8^\circ t$，

所以 $\angle AOE'=\angle EOE'-\angle AOE=12^\circ t-90^\circ$.

因为 $\angle AOF'=\angle FOF'-\angle AOF=\angle FOF'-\frac{1}{2}\angle AOD$，

$\angle AOD=180^\circ-\angle AOC=180^\circ-60^\circ=120^\circ$，

所以 $\angle AOF'=\angle FOF'-60^\circ=8^\circ t-60^\circ$.

所以 $\angle E'OF'=\angle AOE'+\angle AOF'$，即 $90^\circ=12^\circ t-90^\circ+8^\circ t-60^\circ=90^\circ$.

解得 $t=12$.

③$\angle E'OF'$第 3 次为 90°，如图 3.

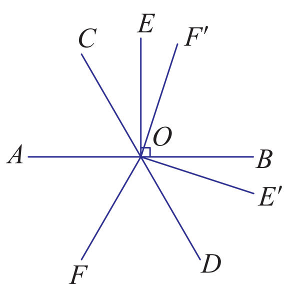


图 3

易知$\angle BOE'=270^\circ-12^\circ t$，

$\angle BOF'=180^\circ+\angle AOF-8^\circ t=180^\circ+60^\circ-8^\circ t=240^\circ-8^\circ t$.

所以 $\angle E'OF'=\angle BOE'+\angle BOF'$，即 $90^\circ=270^\circ-12^\circ t+240^\circ-8^\circ t$.

解得 $t=21$.

④$\angle E'OF'$第 4 次为 90°，如图 4.

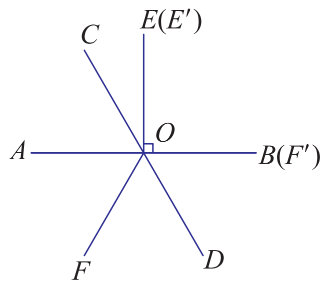


图 4

当 OE'转动回到 OE 时，OF'转动到 OB 的位置. 此时 OE'转过的角度为 360°，OF' 转过的角度为 $60^\circ+180^\circ=240^\circ$.

即 $12^\circ t+8^\circ t=360^\circ+240^\circ$.

解得 $t=30$.

综上所述，射线 OE'转动的时间为 3 s 或 12 s 或 21 s 或 30 s.

第 2 讲　平行线

例一　D　**【解析】**因为$\angle C=\angle D=40^\circ$，所以 $AC\parallel DE$. 故 A 选项错误. 当 $\angle A=40^\circ$时，不能判断图中任意两条直线平行，故 B 选项错误. 因为 $\angle D+\angle E=40^\circ+120^\circ=160^\circ\neq180^\circ$，所以 CD 不平行于 EF. 故 C 选项错误. 因为 $\angle DOF=\angle BOC=140^\circ$，所以

$\angle DOF+\angle D=140^\circ+40^\circ=180^\circ$. 所以 $BF /\!/ DE$. 故D选项正确.

【点拨】本题主要考查了两条直线平行的判定方法. 熟练掌握判断两条直线平行所需要的条件是解决本题的关键.

变式训练一

1. C **【解析】**根据平行线的判定方法，内错角相等，两直线平行. 由 $\angle 2=\angle 3$，得到 $AD /\!/ BC$. 由 $\angle 1=\angle 4$，得到 $AB /\!/ CD$. 故选C.

2. ①③④ **【解析】**①因为 $\angle B+\angle BCD=180^\circ$，所以 $AB /\!/ CD$；②因为 $\angle 1=\angle 2$，所以 $AD /\!/ CB$；③因为 $\angle 3=\angle 4$，所以 $AB /\!/ CD$；④因为 $\angle B=\angle 5$，所以 $AB /\!/ CD$. 故能判定 $AB /\!/ CD$ 的条件有①③④.

例二 **证明：**（1）因为 $\angle 1+\angle 2=180^\circ$，$\angle 2+\angle CDB=180^\circ$，

所以 $\angle CDB=\angle 1$.

所以 $AE /\!/ CF$.

所以 $\angle ADF=\angle A$.

因为 $\angle A=\angle C$，

所以 $\angle ADF=\angle C$.

所以 $AD /\!/ BC$.

（2）因为 DA 平分 $\angle BDF$，

所以 $\angle ADF=\angle ADB$.

因为 $AD /\!/ BC$，

所以 $\angle ADB=\angle CBD$，

$\angle A=\angle CBE$.

由（1）知，$\angle ADF=\angle A$.

所以 $\angle CBD=\angle CBE$.

所以 BC 平分 $\angle DBE$.

【点拨】本题主要考查了平行线的判定及性质. 解答本题的关键是熟记平行线的性质：两直线平行，内错角相等，同位角相等.

变式训练二

1. C **【解析】**因为 $AB /\!/ CD$，所以 $\angle BEM+\angle 1=180^\circ$. 所以 $\angle BEM=180^\circ-125^\circ=55^\circ$. 因为 EM 平分 $\angle BEF$，所以 $\angle BEF=2\angle BEM=110^\circ$. 所以 $\angle 2=180^\circ-\angle BEF=180^\circ-110^\circ=70^\circ$. 故选C.

2. （1）**证明：**因为 $ED /\!/ CF$，

所以 $\angle 1=\angle BCF$.

又因为 $\angle 1=\angle 2$，

所以 $\angle 2=\angle BCF$.

所以 $FG /\!/ BC$.

（2）**解：**因为在 $\triangle AFG$ 中，$\angle A=60^\circ$，$\angle AGF=70^\circ$，

所以 $\angle AFG=180^\circ-\angle A-\angle AGF=180^\circ-60^\circ-70^\circ=50^\circ$.

又由（1）知，$FG /\!/ BC$，

所以 $\angle B=\angle AFG=50^\circ$.

因为 $CF\perp AB$，

所以 $\angle AFC=90^\circ$.

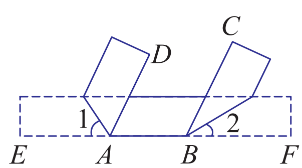
所以 $\angle 2=\angle AFC-\angle AFG=90^\circ-50^\circ=40^\circ$.

例三　$70°$　**【解析】**因为 $\angle C'=\angle C=90°$，$\angle C'MF=\angle B'MD=50°$，所以 $\angle C'FM=40°$．设 $\angle BEF=\alpha$，则 $\angle EFC=180°-\alpha$，$\angle DFE=\angle BEF=\alpha$，$\angle C'FE=40°+\alpha$．由折叠可得，$\angle EFC=\angle C'FE$，所以 $180°-\alpha=40°+\alpha$．所以 $\alpha=70°$．所以 $\angle BEF=70°$．

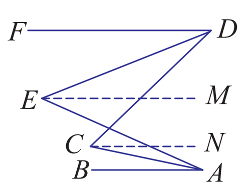
【点拨】本题主要考查了平行线的性质以及折叠问题．解题时注意：两直线平行，内错角相等，同旁内角互补．

变式训练三

B　**【解析】**如下图所示，由翻折可知，$\angle DAE=2\angle 1$，$\angle CBF=2\angle 2$．因为 $AD\parallel BC$，所以 $\angle DAB+\angle CBA=180°$，$\angle DAE=\angle CBA$，$\angle DAB=\angle CBF$．所以 $\angle DAE+\angle CBF=180°$．即 $2\angle 1+2\angle 2=180°$．所以 $\angle 1+\angle 2=90°$．故选 B．



例四　**解：**如下图，过点 C 作 $CN\parallel AB$，过点 E 作 $EM\parallel AB$．



因为 $AB\parallel DF$，$CN\parallel AB$，$EM\parallel AB$，

所以 $AB\parallel CN\parallel EM\parallel DF$．

所以 $\angle BAC=\angle NCA$，

$\angle NCD=\angle FDC$，

$\angle FDE=\angle DEM$，

$\angle MEA=\angle EAB$．

因为 $\angle DEA=\angle DEM+\angle MEA$，

$\angle ACD=\angle NCA+\angle NCD$，

所以 $\angle DEA=\angle FDE+\angle EAB$，

$\angle ACD=\angle BAC+\angle FDC$．

因为 DE 和 AC 分别平分 $\angle CDF$ 和 $\angle BAE$，

所以 $\angle FDC=2\angle FDE=2\angle EDC$，

$\angle EAB=2\angle BAC=2\angle EAC$．

所以 $46°=\angle FDE+2\angle BAC$，

$56°=\angle BAC+2\angle FDE$，

即 $\angle BAC=56°-2\angle FDE$．

所以 $46°=\angle FDE+2(56°-2\angle FDE)$．

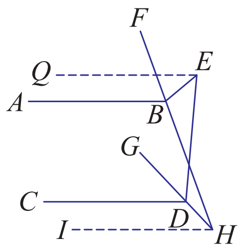
解得 $\angle FDE=22°$．

所以 $\angle CDF=2\angle FDE=44°$．

【点拨】本题主要考查了平行线与角平分线的性质及角的和差关系．根据平行线的性质得到 $\angle DEA=\angle FDE+\angle EAB$，$\angle ACD=\angle BAC+\angle FDC$ 是解本题的关键．

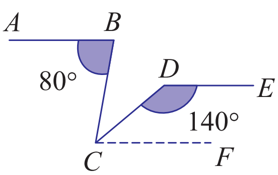
变式训练四

1. B　**【解析】**过点 E 作 $EQ\parallel AB$，过点 H 作 $HI\parallel AB$，如图所示．



因为 $AB // CD$，所以 $EQ // AB // CD // HI$．因为 $\angle EBF = \angle FBA$，$\angle EDG = \angle GDC$，$\angle BED = 45°$，$\angle QEB + \angle BED + \angle CDE = 180°$，所以 $180° - 2\angle FBA + \angle BED + 2\angle GDC = 180°$，即 $2\angle FBA - 2\angle GDC = \angle BED = 45°$．因为 $\angle FBA = \angle IHB = \angle IHG + \angle BHG$，$\angle IHG = \angle GDC$，所以 $\angle FBA - \angle GDC = \angle BHG$．所以 $2\angle BHG = 45°$．所以 $\angle BHG = 22.5°$．

2. **解**：过 C 作 $CF // DE$，如下图．



因为 $CF // DE$，

$AB // DE$，

所以 $AB // DE // CF$．

所以 $\angle BCF = \angle B = 80°$，

$\angle DCF + \angle CDE = 180°$．

又因为 $\angle CDE = 140°$，

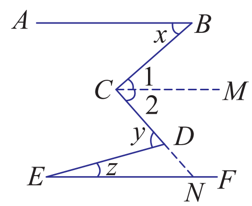
所以 $\angle DCF = 40°$．

因为 $\angle BCD = \angle BCF - \angle DCF$，

所以 $\angle BCD = 80° - 40° = 40°$．

培优精练

1. B　【解析】过 C 作 $CM // AB$，延长 CD 交 EF 于点 N，如下图．因为 $\angle CDE = 180° - \angle EDN$，$\angle EDN + \angle E + \angle CNE = 180°$，所以 $\angle CDE = \angle E + \angle CNE$，即 $\angle CNE = y - z$．因为 $CM // AB$，$AB // EF$，所以 $CM // AB // EF$．所以 $\angle ABC = x = \angle 1$，$\angle 2 = \angle CNE$．因为 $\angle BCD = 90°$，所以 $\angle 1 + \angle 2 = 90°$，即 $x + y - z = 90°$．故选 B.



2. **解**：(1) $DG // BC$.

理由如下：因为 $CD // EF$，

所以 $\angle 2 = \angle BCD$.

又因为 $\angle 1 = \angle 2$，

所以 $\angle 1 = \angle BCD$.

所以 $DG // BC$.

(2) $AB \perp CD$．理由如下：

由（1）知，$DG // BC$.

则 $\angle CDG = \angle DCE$.

因为 $\angle 3 = 85°$，

所以 $\angle BCG = 180° - \angle 3 = 180° - 85° = 95°$.

因为 $\angle DCE : \angle DCG = 9 : 10$，

所以 $\angle DCE=95^\circ\times\frac{9}{19}=45^\circ$.

因为 DG 是 $\angle ADC$ 的平分线，

所以 $\angle ADC=2\angle CDG=2\angle DCE=90^\circ$.

所以 $AB\perp CD$.

3. (1) **证明：** 因为 $\angle 1+\angle DFE=180^\circ$，$\angle 1+\angle 2=180^\circ$，

所以 $\angle 2=\angle DFE$.

所以 $AB/\!/EF$.

所以 $\angle 3=\angle ADE$.

因为 $DE/\!/BC$，

所以 $\angle ADE=\angle B$.

所以 $\angle 3=\angle B$.

(2) **解：** 因为 DE 平分 $\angle ADC$，

所以 $\angle ADE=\angle CDE$.

因为 $DE/\!/BC$，

所以 $\angle ADE=\angle CDE=\angle B$.

因为 $\angle 2=3\angle B$，$\angle 2+\angle ADE+\angle CDE=180^\circ$，

所以 $5\angle B=180^\circ$.

所以 $\angle B=36^\circ$.

由（1）知，$AB/\!/EF$，

所以 $\angle 1=\angle ADC=2\angle B=72^\circ$.

4. **解：** (1) 因为 $\angle BCA=\angle ECD=90^\circ$，$\angle BCD=150^\circ$，

所以 $\angle DCA=\angle BCD-\angle BCA=150^\circ-90^\circ=60^\circ$.

所以 $\angle ACE=\angle ECD-\angle DCA=90^\circ-60^\circ=30^\circ$.

(2) $\angle BCD+\angle ACE=180^\circ$.

理由如下：

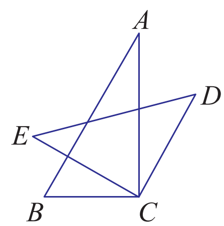
因为 $\angle BCD=\angle ACB+\angle ACD=90^\circ+\angle ACD$，

$\angle ACE=\angle DCE-\angle ACD=90^\circ-\angle ACD$，

所以 $\angle BCD+\angle ACE=180^\circ$.

(3) 当 $\angle BCD$ 为 120° 或 60° 时，$CD/\!/AB$. 理由如下：

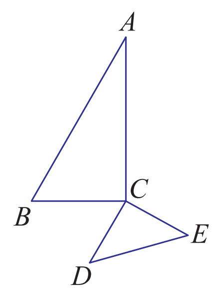
如下图所示，



根据同旁内角互补，两直线平行，

当 $\angle B+\angle BCD=180^\circ$ 时，$CD/\!/AB$，此时 $\angle BCD=180^\circ-\angle B=180^\circ-60^\circ=120^\circ$.

如下图所示，



根据内错角相等，两直线平行，

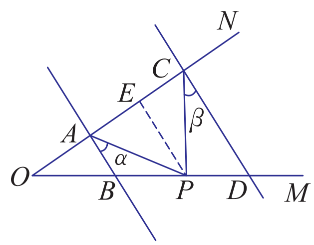
当 $\angle BCD=\angle B=60^\circ$ 时，$CD/\!/AB$.

名卷压轴题

(1) 110° 【解析】过点 P 作 $PE/\!/AB$，因为 $AB/\!/CD$，所以 $PE/\!/AB/\!/CD$. 所以 $\angle A+$

$\angle APE=180°$，$\angle C+\angle CPE=180°$. 因为 $\angle PAB=130°$，$\angle PCD=120°$，所以 $\angle APE=50°$，$\angle CPE=60°$. 所以 $\angle APC=\angle APE+\angle CPE=50°+60°=110°$.

(2) **解：** $\angle APC=\alpha+\beta$. 理由如下：如下图所示，过 P 作 $PE \parallel AB$ 交 AC 于点 E.



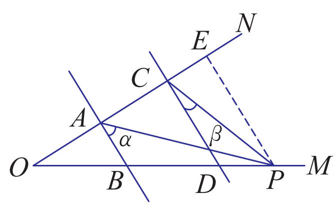
因为 $AB \parallel CD$，

所以 $AB \parallel PE \parallel CD$.

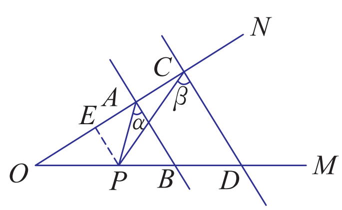
所以 $\alpha=\angle APE$，$\beta=\angle CPE$.

所以 $\angle APC=\angle APE+\angle CPE=\alpha+\beta$.

(3) **解：** 如下图所示，当点 P 在 BD 延长线上时，$\angle APC=\alpha-\beta$.



如下图所示，当点 P 在 DB 延长线上时，$\angle APC=\beta-\alpha$.



◎相交线与平行线　新题型探究

例题　**解：**(1) 因为 2 条直线相交，最多有 1 个交点，

3 条直线相交，最多有 $1+2=3$ 个交点，

4 条直线相交，最多有 $1+2+3=6$ 个交点，

依此类推，

所以 5 条直线相交，最多有 $1+2+3+4=10$ 个交点.

(2) 由 (1) 中所得规律，猜想 n 条直线相交，最多有 $1+2+3+4+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个交点.

(3) 由 (2) 中所得结论，可得 10 条直线相交，最多有 $\dfrac{10\times 9}{2}=45$ 个交点.

【点拨】本题主要考查了平面内相交直线的交点个数问题，属于寻找规律的题型. 找到 n 条直线相交，最多有 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个交点是解本题的关键.

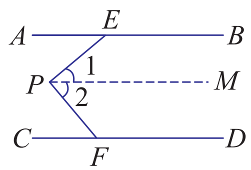
变式训练

4 026 042　**【解析】**2 条直线，可形成 1×2 对对顶角；3 条直线，可形成 2×3 对对顶角；4 条直线，可形成 3×4 对对顶角；……，n 条直线，可形成 $n(n-1)$ 对对顶角，即 n 条直线可产生对顶角

$n(n-1)$对．当 $n=2\,007$时，可形成$2\,007\times(2\,007-1)=4\,026\,042$对对顶角．

培优精练

解：（1）如下图，过点 P 作 $PM/\!/AB$．



所以$\angle 1=\angle AEP$．

又$\angle AEP=40^\circ$，

所以$\angle 1=40^\circ$．

因为 $AB/\!/CD$，

所以 $PM/\!/CD$．

所以$\angle 2+\angle PFD=180^\circ$．

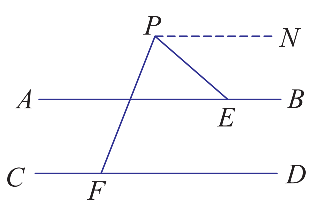
因为$\angle PFD=130^\circ$，

所以$\angle 2=180^\circ-130^\circ=50^\circ$．

所以$\angle EPF=\angle 1+\angle 2=40^\circ+50^\circ=90^\circ$．

（2）$\angle PFC=\angle PEA+\angle EPF$．

理由如下：如下图，过点 P 作 $PN/\!/AB$，



则 $PN/\!/AB/\!/CD$．

所以$\angle PEA=\angle NPE$．

因为$\angle FPN=\angle NPE+\angle EPF$，

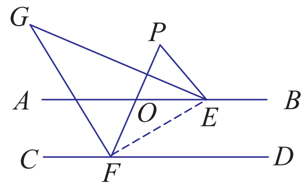
所以$\angle FPN=\angle PEA+\angle EPF$．

因为 $PN/\!/CD$，

所以$\angle FPN=\angle PFC$．

所以$\angle PFC=\angle PEA+\angle EPF$．

（3）如下图，令 AB 与 PF 的交点为 O，连接 EF．



在$\triangle GFE$中，$\angle G=180^\circ-(\angle GEF+\angle GFE)$．

因为$\angle GEF=\angle GEA+\angle OEF=\frac{1}{2}\angle PEA+\angle OEF$，

$\angle GFE=\angle GFP+\angle OFE=\frac{1}{2}\angle PFC+\angle OFE$，

所以$\angle GEF+\angle GFE=\frac{1}{2}\angle PEA+\frac{1}{2}\angle PFC+\angle OEF+\angle OFE$．

因为由（2）知，$\angle PFC=\angle PEA+\angle EPF$，

所以$\angle PEA=\angle PFC-\alpha$．

因为$\angle OEF+\angle OFE=180^\circ-\angle FOE=180^\circ-\angle PFC$，

所以$\angle GEF+\angle GFE=\frac{1}{2}(\angle PFC-\alpha)+\frac{1}{2}\angle PFC+180^\circ-\angle PFC=180^\circ-\frac{1}{2}\alpha$．

所以$\angle G=180^\circ-(\angle GEF+\angle GFE)=180^\circ-180^\circ+\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{2}\alpha$．