第一章　集合与常用逻辑用语

1.1　集合的概念

第 1 课时　集合的概念

知识点 1　元素与集合的含义

一般地,我们把研究对象统称为元素,把一些元素组成的总体叫做集合(简称为集).

· 说明

(1)集合是一个原始的、不定义的概念.像初中学过的点、直线一样,只作描述性说明.

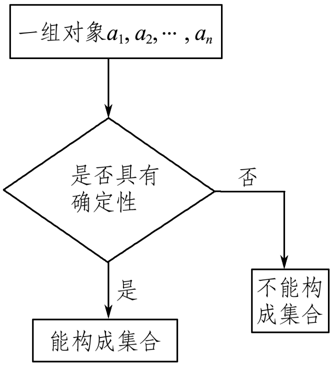
(2)集合中的"对象"所指的范围非常广泛,如数、点、图形、多项式、方程、人、物等.

(3)集合是一个整体,暗含"所有""全部""全体"的含义.因此,一些对象一旦组成集合,那么这个集合就是这些对象的全体,而非个别对象.

「名师指津」

判定一组对象能否构成集合的方法

一般地,判定一组对象能否构成集合,其理论依据是集合中的元素是否具有确定性.具体过程如图所示:



知识点 2　元素与集合的关系

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于集合 A,记作 $a\in A$;如果 a 不是集合 A 中的元素,就说 a 不属于集合 A,记作 $a\notin A$.

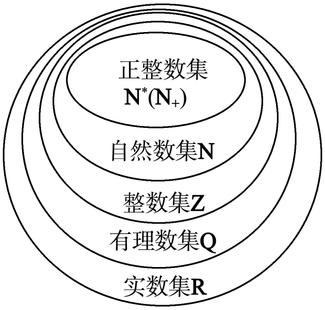
· 说明

(1)元素与集合关系的确定:$a\in A$ 与 $a\notin A$ 取决于 a 是不是集合 A 中的元素,根据集合中元素的确定性,可知对于任何 a 与 A,$a\in A$ 或 $a\notin A$ 这两种情况,有且只有一种成立.

(2)符号使用范围:符号"$\in$"与"$\notin$"只能用来表示元素与集合之间的关系.

(3)元素与集合是相对的,如 a 与 $\{a\}$ 的区别,$\{a\}$表示的是一个集合,a 是集合$\{a\}$中的一个元素.

(4)常用数集间的关系



知识点 3　集合中元素的特性

(1)确定性:是指给定一个集合,那么一个元素在或不在这个集合中就确定了.

(2)互异性:是指对于一个给定的集合,它的任意两个元素都是不同的.

(3)无序性:集合中的元素是没有先后顺序的.

「名师指津」

1. 确定性的主要作用是判断一组对象能否构成集合,只有特征清楚才能确定一个对象在不在集合中,特征模糊的对象不能构成集合,如"小河流""难题"等.

2. 互异性的主要作用是警示我们解决集合问题要进行检验,特别是题中含有参数(即字母)时,一定要检验求出的参数是否满足集合中元素的互异性.

第 2 课时　集合的表示

知识点 1　列举法表示集合

把集合的所有元素一一列举出来，并用花括号“{　}”括起来表示集合的方法叫做列举法.

· 说明

(1)花括号“{　}”表示“所有”“整体”的含义，如 **N**，**Z**，**Q**，**R** 等本身就表示集合，使用时不能再加“{　}”.将实数集 **R** 写成{实数集}、{全体实数}、{**R**}都是不正确的.

(2)用列举法表示集合时应注意：

①集合中的元素要列举全面，元素之间用“,”隔开；

②集合中的元素必须是明确的；

③一个集合中的元素的书写一般不考虑顺序.

「名师指津」

1.用列举法表示集合时常出现的易错点

(1)列举出来的元素不全，漏掉一部分.

(2)集合中的元素不明确.

(3)集合中列举的元素有重复.

2.适合用列举法表示的集合

(1)含有有限个元素且个数较少的集合.

(2)元素较多，元素的排列又呈现一定的规律，在不致于发生误解的情况下，也可列出几个元素作代表，其他元素用省略号表示，如 **N** 可表示为$\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

(3)当集合所含元素属性特征不易表述时，用列举法表示更方便.如集合$\{x^2,x^2+y^2,x^3\}$.

知识点 2　描述法表示集合

一般地，设 A 是一个集合，我们把集合 A 中所有具有共同特征 $P(x)$ 的元素 x 所组成的集合表示为$\{x\in A\mid P(x)\}$，这种表示集合的方法称为描述法.

· 说明

有时也用冒号或分号代替竖线，写成$\{x\in A:P(x)\}$或$\{x\in A;P(x)\}$.

(1)用描述法表示集合时竖线前写清代表元素的符号.如$\{x\mid y=\sqrt{x-1}\}$，$\{y\mid y=\sqrt{x-1}\}$，$\{(x,y)\mid y=\sqrt{x-1}\}$分别是三个不同的集合.

(2)竖线后用简明、准确的语言描述元素的共同特征，如元素满足的方程、不等式、几何图形等.

(3)不能出现未被说明的字母，如$\{x\mid x=2k\}$中未说明 k 的取值情况，故集合中元素不确定.

(4)所有描述内容都要写在花括号内.如写法$\{x\mid x=2k+1\}$，$k\in\mathbf{Z}$ 不符合要求，应写为$\{x\mid x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$.

(5)同一个集合可以有不同的表述形式.如$\{x\mid x\geqslant 0\}$，$\{y\mid y\geqslant 0\}$，$\{y\mid y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$表示的是同一个集合.

(6)元素的取值范围，从上下文关系看若是明确的，则可省略不写.如$\{x\in\mathbf{R}\mid x>1\}$常写为$\{x\mid x>1\}$.

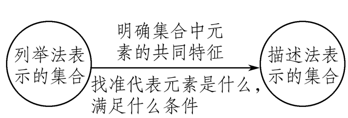
(7)多层描述时，应准确使用“且”“或”等表示元素关系的词语.如$\{x\mid x<-1$ 或 $x>2\}$.

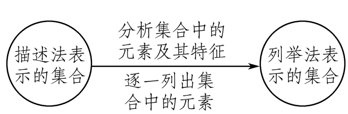
「名师指津」

1.适合用描述法的类型

描述法可以归纳集合元素的共同特征，一般含较多元素或无数多个元素(无限集)且排列无明显规律的集合，或者元素不能一一列举的集合，宜用描述法.

2.列举法与描述法的转化





1.2　集合间的基本关系

知识点 1　子集、真子集

(1)子集:一般地,对于两个集合 A,B,如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素,就称集合 A 为集合 B 的子集,记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$),读作"A 包含于 B"(或"B 包含 A").

(2)真子集:如果集合 $A\subseteq B$,但存在元素 $x\in B$,且 $x\notin A$,就称集合 A 是集合 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$),读作"A 真包含于 B"(或"B 真包含 A").

· 说明

1.对子集的理解

(1)若 $A\subseteq B$,则任意 $x\in A$,均有 $x\in B$.但对任意 $x\in B$,$x\in A$ 可能成立,也可能不成立.

(2)当集合 A 中存在不属于集合 B 的元素时,我们就说集合 A 不是集合 B 的子集,记作"$A\nsubseteq B$"(或 $B\nsupseteq A$),读作"A 不包含于 B"(或"B 不包含 A").

2.对真子集的理解

(1)理解真子集概念时,需明确 $A\subsetneqq B$,首先要满足 $A\subseteq B$,其次要满足至少有一个元素 $x\in B$ 且 $x\notin A$,即 B 中元素要比 A 中元素"多".

(2)注意符号"$\subseteq$"与"$\subsetneqq$"的区别:$A\subseteq B$ 包括 $A=B$ 和 $A\subsetneqq B$ 两种情况,$A\subsetneqq B$ 时必有 $A\subseteq B$,但 $A\subseteq B$ 时不一定有 $A\subsetneqq B$.

(3)任何集合都有子集,但不一定有真子集.

3.子集、真子集的性质

(1)任何一个集合是它本身的子集,即 $A\subseteq A$;

(2)对于集合 A,B,C,如果 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq C$,那么 $A\subseteq C$;

(3)如果 $A\subsetneqq B$,且 $B\subsetneqq C$,那么 $A\subsetneqq C$;

(4)如果 $A\subseteq B$,且 $B\subsetneqq C$,那么 $A\subsetneqq C$;

(5)如果 $A\subsetneqq B$,且 $B\subseteq C$,那么 $A\subsetneqq C$.

「**名师指津**」

判断集合间关系的常用方法

列举观察法 ⇨ 当集合中元素较少时,可列出集合中的全部元素,通过定义得出集合之间的关系

↓

集合元素特征法 ⇨ 首先确定集合的代表元素是什么,弄清集合中元素的特征,再利用集合中元素的特征判断关系

↓

数形结合法 ⇨ 数轴或 Venn 图适合判断不等式解集之间的关系

知识点 2　集合相等、空集

(1)集合相等:一般地,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素,那么集合 A 与集合 B 相等,记作 $A=B$.

也就是说,若 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$,则 $A=B$.

(2)空集:一般地,我们把不含任何元素的集合叫做空集,记为$\varnothing$,并规定:空集是任何集合的子集.

· 说明

对空集的理解

(1)空集是子集中元素最少的集合.

(2)空集是任何非空集合的真子集.

(3)空集自身没有真子集.

「名师指津」

1.集合相等的证明与判定方法

(1)若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则 $A=B$,这就给出了证明两个集合相等的方法,即欲证 $A=B$,只需证 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 均成立.

(2)判定两个集合相等,只要判定两个集合中的元素完全相同.

①对于用列举法表示的两个集合可以直观地判定.

②对于用描述法表示的集合,要抓住元素的特征或性质进行判定,代表元素的形式要一致,但代表元素的符号可以不同.

2.$\varnothing$,0,$\{0\}$与$\{\varnothing\}$之间的区别与联系

	$\varnothing$与0	$\varnothing$与$\{0\}$	$\varnothing$与$\{\varnothing\}$
相同点	都表示无的意思	都是集合	都是集合
不同点	$\varnothing$是集合;0是实数	$\varnothing$不含任何元素;$\{0\}$含一个元素0	$\varnothing$不含任何元素;$\{\varnothing\}$含一个元素,该元素是$\varnothing$
关系	$0\notin\varnothing$	$\varnothing\subsetneqq\{0\}$	$\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$且$\varnothing\in\{\varnothing\}$

1.3 集合的基本运算

知识点1 并集

(1)并集的概念

一般地,由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合,称为集合 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$(读作“A 并 B”),即 $A\cup B=\{x|x\in A,或 x\in B\}$.

· **说明**

(1)$A\cup B$ 不是由 A 的所有元素和 B 的所有元素简单拼凑而成,相同元素,即 A 与 B 的公共元素在并集中只能出现一次.

(2)“$x\in A$ 或 $x\in B$”包含三种情形:

①$x\in A$,但 $x\notin B$;

②$x\in B$,但 $x\notin A$;

③$x\in A$ 且 $x\in B$.

(2)并集的性质

①常见性质

性质	说明
$A\cup A=A$	任何集合与其本身的并集等于这个集合本身
$A\cup\varnothing=A$	任何集合与空集的并集等于这个集合本身

②常见结论

$A\subseteq(A\cup B)$,$B\subseteq(A\cup B)$,$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$.

· **说明**

并集满足的运算律:

(1)交换律:$A\cup B=B\cup A$;

(2)结合律:$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

「名师指津」

给定集合求它的并集的方法

(1)若集合 A,B 是用列举法表示离散的元素的集合,直接把 A,B 中的元素合并为一个集合,注意 A,B 中的公共元素只写一次.

(2)若集合 A,B 是用描述法表示的连续的实数集,求集合 $A\cup B$ 时常借助数轴表示,$A\cup B$ 对应的图形为 A,B 在数轴上相应图形所覆盖的全部范围.

知识点2 交集

(1)交集的概念

一般地,由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合,称为集合 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$(读作“A 交 B”),即 $A\cap B=\{x|x\in A,且 x\in B\}$.

· **说明**

(1)交集概念中的“且”与生活用语中的“且”的含义相同,均表示“同时”,即“$x\in A$,且 $x\in B$”表示元素 x 属于集合 A,同时属于集合 B.

(2)集合 A 与 B 没有公共元素,不能说两个

集合没有交集，而是 $A\cap B=\varnothing$.

(2)交集的性质

①常见性质

性质	说明
$A\cap A=A$	任何集合与其本身的交集等于这个集合本身
$A\cap\varnothing=\varnothing$	任何集合与空集的交集都为空集

②常见结论

$(A\cap B)\subseteq A$，$(A\cap B)\subseteq B$，$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$.

·说明

交集满足的运算律：

(1)交换律：$A\cap B=B\cap A$；

(2)结合律：$A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3)分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；

(4)分配律：$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

知识点3　补集

(1)全集：一般地，如果一个集合含有所研究问题中涉及的所有元素，那么就称这个集合为全集，通常记作 U.

(2)补集：对于一个集合 A，由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集，简称为集合 A 的补集，记作 $\complement_U A$，即 $\complement_U A=\{x\mid x\in U$，且 $x\notin A\}$.

·说明

(1)全集的理解

全集不是固定不变的，是相对于研究的问题而言的.如在整数范围内研究问题，**Z** 是全集；在实数范围内研究问题，**R** 是全集.在具体题目中，全集一般是给定的，当然也可以根据研究的需要自行设定.

(2)补集的理解

①补集是相对于全集而言的，一方面，若没有定义全集，则不存在补集的说法；另一方面，补集是全集的子集.

②补集既是集合之间的一种关系，也是集合之间的一种运算，在给定全集 U 的情况下，求集合 A 的补集的前提是 A 为全集 U 的子集，随着所选全集的不同，得到的补集也是不同的.

③对任意 $x\in U$，$x\in A$ 与 $x\in\complement_U A$ 有且只有一个成立.

(3)补集的性质：

性质	说明
$A\cup(\complement_U A)=U$	集合 A 与 A 的补集的并集是全集
$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$	集合 A 与 A 的补集的交集是空集
$\complement_U(\complement_U A)=A$	集合的补集的补集是集合本身
$\complement_U U=\varnothing$，$\complement_U\varnothing=U$	全集的补集是空集，空集的补集是全集

·说明

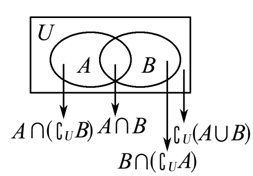
(1)补集性质的拓展

设集合 U 为全集，A，B 为 U 的子集，则有

① $\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$，简记为“交之补等于补之并”；

② $\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$，简记为“并之补等于补之交”.

(2)关于交、并、补运算的几个结论



①$A\cap(\complement_U B)=\{x\mid x\in A$，且 $x\notin B\}$；

②$B\cap(\complement_U A)=\{x\mid x\notin A$，且 $x\in B\}$；

③$A\cap B=\{x\mid x\in A$，且 $x\in B\}$；

④ $\complement_U(A\cup B)=\{x\mid x\notin A$，且 $x\notin B\}$；

⑤$[A\cap(\complement_U B)]\cup(A\cap B)=A$.

「名师指津」

1.求集合补集的方法

(1)如果所给集合是有限集，可先把集合

中的元素列举出来，然后结合补集的定义来求解，另外，也可借助 Venn 图来求解，这样相对来说比较直观、形象，且解答时不易出错.

(2)如果所给集合是不等式的解集，那么在解答有关集合补集的问题时，常借助数轴.

2.补集思想的应用

当从正面考虑情况较多，问题较复杂时，往往考虑运用补集思想.其解题步骤：

(1)否定已知条件，考虑反面问题；

(2)求解反面问题对应的参数范围；

(3)取反面问题对应的参数范围的补集.

1.4 充分条件与必要条件

1.4.1 充分条件与必要条件

知识点 1 充分条件与必要条件

一般地，“若 p，则 q”为真命题，是指由 p 通过推理可以得出 q.这时，我们就说，由 p 可以推出 q，记作 $p \Rightarrow q$，并且说，p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

· 说明

(1)充分条件、必要条件的判断讨论的是“若 p，则 q”形式的命题.若不是，则首先将命题改写成“若 p，则 q”的形式.

(2)如果“若 p，则 q”为假命题，那么由条件 p 不能推出结论 q，记作 $p \nRightarrow q$，此时，我们就说 p 不是 q 的充分条件，q 也不是 p 的必要条件.

「名师指津」

1.充分条件的判断方法

(1)如果命题“若 p，则 q”是真命题，则 p 是 q 的充分条件；

(2)如果命题“若 p，则 q”是假命题，则 p 不是 q 的充分条件.

2.必要条件的判断方法

(1)如果命题“若 p，则 q”是真命题，则 q 是 p 的必要条件；

(2)如果命题“若 p，则 q”是假命题，则 q 不是 p 的必要条件.

知识点 2 充分条件、必要条件与集合间的关系

设 $A=\{x \mid x$ 满足条件 $p\}$，$B=\{x \mid x$ 满足条件 $q\}$.

$A \subseteq B$	p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件
$B \subseteq A$	q 是 p 的充分条件，p 是 q 的必要条件

「名师指津」

利用必要条件与充分条件求参数的取值范围

(1)化简 p 与 q；

(2)把 p 与 q 之间的关系转化为相应集合之间的关系；

(3)利用集合之间的关系建立不等式；

(4)解不等式求参数的取值范围.

1.4.2　充要条件

知识点 1　充要条件

(1)如果"若 p,则 q"和它的逆命题"若 q,则 p"均是真命题,即既有 $p\Rightarrow q$,又有 $q\Rightarrow p$,就记作 $p\Leftrightarrow q$.此时,p 既是 q 的充分条件,也是 q 的必要条件,我们说 p 是 q 的充分必要条件,简称为充要条件.

(2)如果 p 是 q 的充要条件,那么 q 也是 p 的充要条件.

即:如果 $p\Leftrightarrow q$,那么 p 与 q 互为充要条件.

·说明

(1)p 与 q 互为充要条件时,也称"p 等价于 q""q 当且仅当 p"等.

(2)根据充要条件的定义可知,若原命题"若 p,则 q"及逆命题"若 q,则 p"都是真命题,则 p 与 q 互为充要条件.

「**名师指津**」

充分条件、必要条件、充要条件的判断方法

1.定义法,判断的步骤如下:

(1)分清命题的条件和结论;(2)找推式:判断"$p\Rightarrow q$"及"$q\Rightarrow p$"的真假;(3)根据推式及条件得出结论.

2.集合法,写出集合 $A=\{x\mid p(x)\}$及 $B=\{x\mid q(x)\}$,利用集合间的包含关系进行判断,简记为"小范围$\Rightarrow$大范围".

3.传递法,若问题中出现若干个条件和结论,应根据条件画出相应的推式图,由图中推式的传递性进行判断.

4.特殊值法,对于选择题,可以取一些特殊值或特殊情况来说明由条件(结论)不能推出结论(条件),但是这种方法不适用于证明题.

知识点 2　充要条件的探求与证明

1.探求一个命题成立的充要条件一般有两种处理方法:

(1)先由结论寻找使之成立的必要条件,再验证它也是使结论成立的充分条件,即保证充分性和必要性成立.

(2)变结论为等价命题,使每一步都可逆,直接得到使命题成立的充要条件.

2.证明 p 是 q 的充要条件,一要证明充分性:即证 $p\Rightarrow q$;二要证明必要性:即证 $q\Rightarrow p$.

1.5 全称量词与存在量词

1.5.1 全称量词与存在量词

知识点1 全称量词与全称量词命题

短语“所有的”“任意一个”在逻辑中通常叫做全称量词，并用符号“$\forall$”表示.含有全称量词的命题，叫做全称量词命题.

全称量词命题“对M中任意一个x，$p(x)$成立”可用符号简记为$\forall x\in M,p(x)$.

·说明

(1)常见的全称量词还有“一切”“每一个”“任给”等.

(2)从集合观点看，全称量词命题是陈述某集合中所有元素都具有某种性质的命题.全称量词表示的数量可能是有限的，也可能是无限的.

(3)全称量词命题含有全称量词，有些全称量词命题中的全称量词是省略的，理解时需要把它补充出来.

知识点2 存在量词与存在量词命题

短语“存在一个”“至少有一个”在逻辑中通常叫做存在量词，并用符号“$\exists$”表示.含有存在量词的命题，叫做存在量词命题.存在量词命题“存在M中的元素x，$p(x)$成立”可用符号简记为$\exists x\in M,p(x)$.

·说明

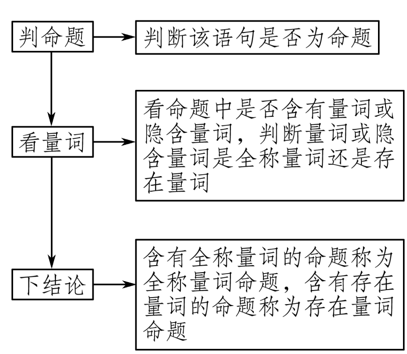
(1)从集合观点看，存在量词命题是陈述某集合中有(存在)一些元素具有某种性质的命题.

(2)常见的存在量词还有“有些”“有一个”“对某些”“有的”等.

(3)含有存在量词“存在”“有一个”等的命题，或虽然没有写出存在量词，但其意义具备“存在”“有一个”等特征的命题都是存在量词命题.

「名师指津」

判断一个语句是全称量词命题还是存在量词命题的步骤



1.5.2　全称量词命题和存在量词命题的否定

知识点 1　全称量词命题的否定

p	$\neg p$	结论
全称量词命题：$\forall x\in M,p(x)$	$\exists x\in M,\neg p(x)$	全称量词命题的否定是存在量词命题

·说明

(1)改变量词：把全称量词换为存在量词.

即：全称量词($\forall$)$\xrightarrow{\text{改为}}$存在量词($\exists$).

(2)否定结论：原命题中的“是”“成立”等改为“不是”“不成立”等.

(3)若全称量词命题为真命题，其命题的否定就是假命题；若全称量词命题为假命题，其命题的否定就是真命题.

(4)常见词语的否定

词语	词语的否定
等于	不等于
大于	不大于(即小于或等于)
小于	不小于(即大于或等于)
是	不是
都是	不都是

知识点 2　存在量词命题的否定

p	$\neg p$	结论
存在量词命题：$\exists x\in M,p(x)$	$\forall x\in M,\neg p(x)$	存在量词命题的否定是全称量词命题

·说明

(1)改变量词：把存在量词换为恰当的全称量词.

即：存在量词($\exists$)$\xrightarrow{\text{改为}}$全称量词($\forall$).

(2)否定结论：原命题中的“有”“存在”等改为“没有”“不存在”等.

(3)由于命题与命题的否定一真一假，所以如果判断一个命题的真假困难时，那么可以转化为判断命题的否定的真假从而进行判断.

「名师指津」

存在量词命题否定的方法及关注点

(1)方法：与全称量词命题的否定的写法类似，要写出存在量词命题的否定，先确定它的存在量词，再确定结论，然后把存在量词改写为全称量词，对结论作出否定就得到存在量词命题的否定.

(2)关注点：注意对不同的存在量词的否定的写法，例如，“存在”的否定是“任意的”，“有一个”的否定是“所有的”或“任意一个”等.

第二章 一元二次函数、方程和不等式

2.1 等式性质与不等式性质

知识点1 相等关系与不等关系

1. 我们用数学符号“≠”“>”“<”“≥”“≤”连接两个数或代数式，以表示它们之间的不等关系.含有这些不等号的式子，叫做不等式.

2. 不等式中文字语言与数学符号之间的转换

大于	小于	大于等于	小于等于	至多	至少	不少于	不多于
$>$	$<$	$\geqslant$	$\leqslant$	$\leqslant$	$\geqslant$	$\geqslant$	$\leqslant$

·说明

不等关系强调的是关系，可用符号“>”“<”“≠”“≥”“≤”表示，而不等式则表示的是两者的不等关系，可用“$a>b$”“$a<b$”“$a\neq b$”“$a\geqslant b$”“$a\leqslant b$”等式子表示.

「名师指津」

用不等式表示不等关系的步骤

(1)认真审题，设出所求量，并确认所求量满足的不等关系.

(2)找出体现不等关系的关键词，比如“至少”“至多”“不少于”“不多于”“超过”“不超过”等，用代数式表示相应各量，并用不等号连接.特别需要考虑“≤”“≥”中的“=”能否取到.

知识点2 实数 a,b 的大小比较

(1)画数轴比较法

设 a,b 是两个实数，它们在数轴上所对应的点分别是 A,B.那么，当点 A 在点 B 的左边时，$a<b$；当点 A 在点 B 的右边时，$a>b$.

(2)作差比较法

如果 $a-b$ 是正数，那么 $a>b$；如果 $a-b$ 等于0，那么 $a=b$；如果 $a-b$ 是负数，那么 $a<b$.反过来也对.

这个基本事实可以表示为

$$a>b\Leftrightarrow a-b>0;$$
$$a=b\Leftrightarrow a-b=0;$$
$$a<b\Leftrightarrow a-b<0.$$

·说明

(1)比较两个实数 a,b 的大小一般用作差法，其实质是判定 $a-b$ 的值与0的大小关系.作差法是证明不等式的基本方法，0是正数与负数的分界点，它为实数比较大小提供了“标准”.

(2)对同号的两数比较大小可用作商法，其实质是判定 $\frac{a}{b}$ 的值与1的大小关系.

知识点3 重要不等式

一般地，$\forall a,b\in\mathbf{R}$，有 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

·说明

(1) a,b 具有任意性，它们可以是具体数、字母，也可以是代数式.

(2)完全平方公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

知识点 4　不等式的性质

性质	具体名称	性质内容	注意
1	对称性	$a>b \Leftrightarrow b<a$	$\Leftrightarrow$
2	传递性	$a>b,b>c \Rightarrow a>c$	$\Rightarrow$
3	可加性	$a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$	$\Leftrightarrow$
4	可乘性	$\left.\begin{matrix}a>b\\c>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow ac>bc$ $\left.\begin{matrix}a>b\\c<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow ac<bc$	c 的符号
5	同向可加性	$\left.\begin{matrix}a>b\\c>d\end{matrix}\right\}\Rightarrow a+c>b+d$	$\Rightarrow$
6	同向同正可乘性	$\left.\begin{matrix}a>b>0\\c>d>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow ac>bd$	$\Rightarrow$
7	可乘方性	$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N},n\geqslant 2)$	同正
8	可开方性	$a>b>0\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in\mathbf{N},n\geqslant 2)$	同正
9	取倒数	$\left.\begin{matrix}a>b\\ab>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$	a,b 同号

·说明

(1)不等式与等式一样,移项要变号.

(2)同向不等式的可加性可以推广到任意有限个同向不等式两边分别相加.

(3)同向同正不等式相乘也可以推广到有限个同向不等式两边分别相乘.

「名师指津」

1.关于不等式的命题真假的两种方法

(1)直接运用不等式的性质,把要判断的命题和不等式的性质联系起来考虑,找到与命题相近的性质,然后进行推理判断.

(2)特殊值验证法,给要判断的几个式子中涉及的变量取一些特殊值,然后进行比较、判断.

2.利用不等式的性质证明不等式的注意事项

(1)注意在理解等式的性质的基础上,记准、记熟不等式的性质,并在解题时灵活准确地加以应用.

(2)注意紧扣不等式的性质成立的条件,且不可省略条件或跳步推导,更不能随意构造性质与法则.

2.2　基本不等式

知识点 1　基本不等式

1.基本不等式:$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$

(1)基本不等式成立的条件:$a>0,b>0$.

(2)等号成立的条件:当且仅当 $a=b$ 时取等号.

(3)其中,$\frac{a+b}{2}$称为正数 a,b 的算术平均数,$\sqrt{ab}$称为正数 a,b 的几何平均数.

·说明

“当且仅当”的含义:仅当 $a=b$ 时,$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$的等号成立,即 $a=b\Rightarrow\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$;仅当 $a=b$ 时,$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 的等号成立,即 $\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}\Rightarrow a=b$.

2.两个重要的不等式

(1)$a^2+b^2\geqslant 2ab(a,b\in\mathbf{R})$,当且仅当 $a=b$ 时取等号.

(2)$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(a,b\in\mathbf{R})$,当且仅当 $a=b$ 时取等号.

·说明

几个常见的变形不等式

(1)$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2(ab>0)$,当且仅当 $a=b$ 时取等号.

(2)$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}(a,b\in\mathbf{R})$.

(3)$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(a,b\in\mathbf{R})$，当且仅当 $a=b$ 时取等号.

(4)$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}(a>0,b>0)$，当且仅当 $a=b$ 时取等号.

「名师指津」

利用基本不等式证明不等式(比较大小)的思路

(1)观察题中要证明的不等式的结构特征，若不能直接使用基本不等式证明，则考虑对代数式进行拆项、变形、配凑等，使之转化为能使用基本不等式的形式；

(2)时刻注意等号能否取到.

知识点2 利用基本不等式求最值

利用基本不等式求最值

已知 $x\geqslant0,y\geqslant0$，

(1)如果积 xy 等于定值 P，那么当 $x=y$ 时，和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{P}$(简记：积定和最小).

(2)如果和 $x+y$ 等于定值 S，那么当 $x=y$ 时，积 xy 有最大值 $\frac{S^2}{4}$(简记：和定积最大).

· 说明

(1)利用基本不等式求最值问题要牢记三个关键词：一正、二定、三相等.

①一正：各项必须为正；

②二定：各项之和或各项之积为定值；

③三相等：必须验证取等号的条件是否具备.

(2)连续使用基本不等式求最值要求每次等号成立的条件一致.

2.3 二次函数与一元二次方程、不等式

知识点1 一元二次不等式、一元二次函数的零点

1.一元二次不等式

定义	一般地，我们把只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的不等式，称为一元二次不等式
一般形式	$ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$，其中 a,b,c 均为常数，$a\neq0$

2.二次函数的零点

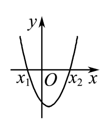
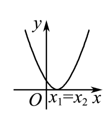
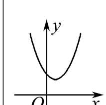
一般地，对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$，我们把使 $ax^2+bx+c=0$ 的实数 x 叫做二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的零点.

· 说明

(1)零点不是点，而是函数的图象与 x 轴交点的横坐标，是一个实数.

(2)求二次函数的零点可以通过求方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的实数根或将方程与函数的图象联系起来，利用函数的性质找出零点.

知识点2 三个“二次”的关系

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$y=ax^2+bx+c(a>0)$的图象			
$ax^2+bx+c=0(a>0)$的根	有两个不相等的实数根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$	有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2+bx+c>0(a>0)$的解集	$\{x\mid x>x_2$，或 $x<x_1\}$	$\left\{x\middle\vert x\neq-\frac{b}{2a}\right\}$	$\mathbf{R}$
$ax^2+bx+c<0(a>0)$的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

「名师指津」

给出了一元二次不等式的解集，则可知 a 的符号和 $ax^2+bx+c=0$ 的两实根，由根与系数的关系可知 a,b,c 之间的关系.

(1)若不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x|d<x<e\}$，则说明 $a<0$，$x_1=d$，$x_2=e$ 分别为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根，即 $d+e=-\frac{b}{a}$，$d\cdot e=\frac{c}{a}$；若解集为 $\{x|x<d$，或 $x>e\}$，则说明 $a>0$，$x_1=d$，$x_2=e$ 分别为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根，即 $d+e=-\frac{b}{a}$，$d\cdot e=\frac{c}{a}$.

(2)若不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $\{x|d<x<e\}$，则说明 $a>0$，$x_1=d$，$x_2=e$ 分别为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根，即 $d+e=-\frac{b}{a}$，$d\cdot e=\frac{c}{a}$；若解集为 $\{x|x<d$，或 $x>e\}$，则说明 $a<0$，$x_1=d$，$x_2=e$ 分别为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根，即 $d+e=-\frac{b}{a}$，$d\cdot e=\frac{c}{a}$.

知识点 3　$(x-a)(x-b)>0$ 或 $(x-a)\cdot(x-b)<0$ 型不等式的解集

不等式	解集		
	$a<b$	$a=b$	$a>b$
$(x-a)\cdot(x-b)>0$	$\{x\mid x<a$，或 $x>b\}$	$\{x\mid x\neq a\}$	$\{x\mid x<b$，或 $x>a\}$
$(x-a)\cdot(x-b)<0$	$\{x\mid a<x<b\}$	$\varnothing$	$\{x\mid b<x<a\}$

· 说明

(1)解不等式 $ax^2+bx+c>0(<0)$ 时不要忘记 $a=0$ 时的情形.

(2)不等式 $ax^2+bx+c>0(<0)$ 恒成立的条件要结合其对应的函数图象决定.

①不等式 $ax^2+bx+c>0$ 对任意实数 x 恒成立 $\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=0,\\c>0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a>0,\\\Delta<0.\end{cases}$

②不等式 $ax^2+bx+c<0$ 对任意实数 x 恒成立 $\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=0,\\c<0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0,\\\Delta<0.\end{cases}$

「名师指津」

解一元二次不等式的步骤

(1)对不等式变形，使不等号一端二次项系数大于 0，另一端为 0，即化为 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 或 $ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的形式.

(2)计算相应一元二次方程的根的判别式.

(3)当 $\Delta\geqslant0$ 时，求出相应的一元二次方程的根.

(4)根据对应的二次函数的图象，写出不等式的解集.

第三章 函数的概念与性质

3.1 函数的概念及其表示

3.1.1 函数的概念

知识点 1 函数的概念

1.函数的概念

定义	一般地,设 A,B 是非空的实数集,如果对于集合 A 中的任意一个数 x,按照某种确定的对应关系 f,在集合 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应,那么就称 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数
记法	$y=f(x),x\in A$
定义域	x 叫做自变量,x 的取值范围 A 叫做函数的定义域
值域	与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值,函数值的集合 $\{f(x)\mid x\in A\}$ 叫做函数的值域

2.函数的三要素与同一个函数

(1)一个函数的构成要素为:定义域、对应关系和值域.

(2)同一个函数:如果两个函数的定义域相同,并且对应关系完全一致,即相同的自变量对应的函数值也相同,那么这两个函数是同一个函数.

· 说明

函数概念的三个关注点

(1)函数三要素:由函数的定义可知,定义域、值域以及对应法则 f 为构成函数的三要素.

(2)同一个函数:因为值域是由定义域和对应关系决定的.因此,如果两个函数的定义域相同,并且对应关系完全一致,我们就称这两个函数是同一个函数.

(3)函数的表示:$y=f(x)$表示"y 是 x 的函数",不表示"y 等于 f 与 x 的乘积".在研究函数时,除用 $f(x)$外,还常用 $g(x)$,$h(x)$,$F(x)$,$G(x)$等表示.

「名师指津」

1.判断所给对应关系是否为函数的方法

(1)先观察两个数集 A,B 是否非空;

(2)验证在对应关系下,集合 A 中 x 的任意性,集合 B 中 y 的唯一性.

2.根据图形判断对应关系是否为函数的步骤

(1)任取一条垂直于 x 轴的直线 l;

(2)在定义域内平行移动直线 l;

(3)若 l 与图形有且只有一个交点,则是函数;若在定义域内没有交点或有两个及两个以上的交点,则不是函数.

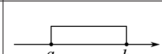
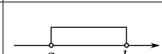
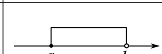
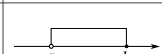
3.判断是否为同一个函数的方法

(1)先看定义域,若定义域不同,则不是同一个函数;

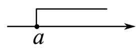
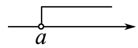
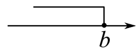
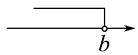
(2)若定义域相同,再化简函数的解析式,看对应关系是否相同.

知识点 2 区间及有关概念

1.设 a,b 是两个实数,而且 $a<b$,规定如下:

定义	名称	符号	数轴表示
$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	闭区间	$[a,b]$	
$\{x\mid a<x<b\}$	开区间	(a,b)	
$\{x\mid a\leqslant x<b\}$	半开半闭区间	$[a,b)$	
$\{x\mid a<x\leqslant b\}$	半开半闭区间	$(a,b]$	

2. 实数集 **R** 可以用区间表示为 $(-\infty,+\infty)$，“∞”读作“无穷大”，“$-\infty$”读作“负无穷大”，“$+\infty$”读作“正无穷大”

定义	区间	数轴表示
$\{x\mid x\geqslant a\}$	$[a,+\infty)$	
$\{x\mid x>a\}$	$(a,+\infty)$	
$\{x\mid x\leqslant b\}$	$(-\infty,b]$	
$\{x\mid x<b\}$	$(-\infty,b)$	

·说明

(1)区间实质上是一类特殊数集的另一种表示.并不是所有的数的集合都能用区间表示.

(2)区间的左端点必须小于右端点.

(3)“∞”是一个符号，不是一个数，用“$-\infty$”或“$+\infty$”作为端点时，需用开区间符号.

知识点 3　抽象函数的定义域问题

所谓抽象函数，是指用 $f(x)$，$g(x)$等表示，而没有具体解析式的函数类型，抽象函数的定义域的求法规律：

(1)已知 $f(x)$的定义域为$[a,b]$，则$f(g(x))$的定义域是指满足不等式 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 的 x 的取值范围.

(2)已知 $f(g(x))$的定义域为$[a,b]$，则$f(x)$的定义域是由不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 得到的$g(x)$的取值范围.

(3)已知 $f(g(x))$的定义域为$[a,b]$，求$f(h(x))$的定义域是先由 $f(g(x))$的定义域得到$f(x)$的定义域，再由$f(x)$的定义域得到 $f(h(x))$的定义域.

(4)含有多个抽象函数的，先求出各个函数的定义域，再求交集.

3.1.2　函数的表示法

知识点 1　函数的表示法

函数的表示法

(1)列表法

①定义：用列表来表示两个变量之间对应关系的方法.

②优点：不必通过计算就可以知道自变量取某个值时，相应的函数值是多少.

(2)解析法

①定义：用数学表达式来表示两个变量之间对应关系的方法.

②优点：便于用解析式研究函数的性质.

(3)图象法

①定义：用图象来表示两个变量之间对应关系的方法.

②优点：直观而形象地表示出函数的变化情况，有利于通过图象研究函数的某些性质.

·说明

(1)函数三种表示法的优缺点

续表

	优点	缺点
解析法	一是简明、全面地概括了变量间的关系；二是通过解析式可以求出任意一个自变量对应的函数值	不够形象、直观、具体，而且并不是所有的函数都能用解析式表示出来
列表法	不需要计算就可以直接看出与自变量的值相对应的函数值	只能表示自变量取较少的有限个值的对应关系
图象法	能形象、直观地表示出函数的变化情况	只能近似地求出自变量的值所对应的函数值，而且有时误差较大

(2)函数表示方法的三个关注点

①解析法：应注明函数的定义域，但在定义域很明确时可以省略.

②图象法：函数图象既可以是连续的曲线，也可以是直线、折线、离散的点等.

③列表法：选取的自变量要有代表性，能反映定义域的特征.

「名师指津」

作函数图象时应注意以下几点

(1)在定义域内作图；

(2)图象是实线或实点，定义域外的部分有时可用虚线来衬托整个图象；

(3)要标出某些关键点，例如图象的顶点、端点与坐标轴的交点等.要分清这些关键点是实心点还是空心点.

知识点 2 分段函数

(1)定义:在定义域内不同部分上,有不同的解析表达式,像这样的函数通常叫做分段函数.

(2)分段函数定义域是各段定义域的并集,其值域是各段值域的并集.

(3)分段函数的图象:画分段函数的图象,应在各自定义域之下画出定义域所对应的解析式的图象.

· 说明

分段函数问题的三个关注点

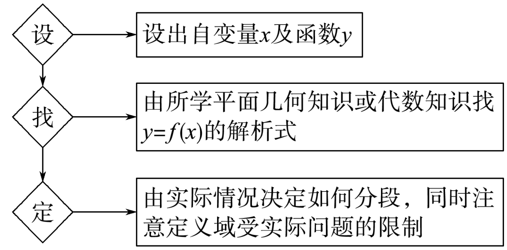
(1)图象:因为分段函数是一个函数,所以作分段函数图象时应注意只能在同一坐标系中作出各段函数的图象,而不能将各段函数分别作在不同的坐标系中.

(2)求值:求函数值应注意自变量所在范围及其相应的函数关系式.求分段函数的函数值的关键是根据自变量的取值范围确定相应的函数值.

(3)分段讨论:求函数值所对应自变量的取值(范围)时应分段讨论.

「名师指津」

求分段函数的解析式的一般步骤



3.2 函数的基本性质

3.2.1 单调性与最大(小)值

第 1 课时 函数的单调性

知识点 1 函数的单调性

1.增函数、减函数的概念

一般地,设函数 $f(x)$ 的定义域为 I,区间 $D\subseteq I$:如果 $\forall x_1,x_2\in D$,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)<f(x_2)$,那么就称函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增.特别地,当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递增时,我们就称它是增函数.

如果 $\forall x_1,x_2\in D$,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)>f(x_2)$,那么就称函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递减.特别地,当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递减时,我们就称它是减函数.

· 说明

(1)属于定义域 I 内某个区间上;

(2)任意两个自变量 x_1,x_2 且 $x_1<x_2$;

(3)都有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$);

(4)图象特征:在单调区间上,增函数的图象从左向右是上升的,减函数的图象从左向右是下降的.

2.单调性与单调区间

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上单调递增或单调递减,那么就说函数 $y=f(x)$ 在这一区间具有(严格的)单调性,区间 D 叫做函数 $f(x)$ 的单调区间.函数的单调性是函数在定义域内某个区间上的性质.

· 说明

(1)单调区间与定义域的关系——单调区间可以是整个定义域,也可以是定义域的真子集;

(2)单调性是通过函数值变化与自变量的变化方向是否一致来描述函数性质的;

(3)不能随意合并两个单调区间;

(4)有的函数不具有单调性.

「名师指津」

求函数单调区间的两种方法

(1)图象法:作出函数的图象;上升图象对应单调递增区间,下降图象对应单调递减

区间.

(2)定义法：求出函数的定义域；利用定义作差、因式分解并判断各因式符号；若符号确定，则函数在整个定义域上具有单调性；若符号不确定，则需确定分界点以确定单调区间.

知识点2 基本初等函数的单调性

1.正比例函数 $y=kx(k\neq0)$

当 $k>0$ 时，函数 $y=kx$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 内是增函数；当 $k<0$ 时，函数 $y=kx$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 内是减函数.

2.一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$

当 $k>0$ 时，函数 $y=kx+b$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 内是增函数；当 $k<0$ 时，函数 $y=kx+b$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 内是减函数.

3.反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq0)$

当 $k>0$ 时，函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的单调递减区间是 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$，不存在单调递增区间；

当 $k<0$ 时，函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的单调递增区间是 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$，不存在单调递减区间.

4.二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$

若 $a>0$，函数在区间 $\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right]$ 上单调递减；在区间 $\left[-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$ 上单调递增；

若 $a<0$，函数在区间 $\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right]$ 上单调递增；在区间 $\left[-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$ 上单调递减.

知识点3 复合函数的单调性

1.复合函数的概念

如果函数 $y=f(u)$ 的定义域为 I，函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D，值域为 C，且 $C\subseteq I$，称函数 $y=f(g(x))$ 为 f 与 g 在 D 上的复合函数，其中 u 叫做中间变量，$u=g(x)$ 是内层函数，$y=f(u)$ 是外层函数.

2.复合函数的单调性

复合函数 $y=f(g(x))$ 的单调性：若 $u=g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的单调性与 $y=f(u)$ 在 $[g(a),g(b)]$（或 $[g(b),g(a)]$）上的单调性相同，则复合函数 $y=f(g(x))$ 在 $[a,b]$ 上单调递增，否则单调递减，可简记为"同增异减"，见下表：

$u=g(x)$	$y=f(u)$	$y=f(g(x))$
增	增	增
增	减	减
减	增	减
减	减	增

知识点4 一些常见结论

(1)若 $f(x)$ 是增函数，则 $-f(x)$ 为减函数；若 $f(x)$ 是减函数，则 $-f(x)$ 为增函数.

(2)若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为增(或减)函数，则在 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公共定义域上 $f(x)+g(x)$ 为增(或减)函数.

(3)若 $f(x)>0$ 且 $f(x)$ 为增函数，则函数 $\sqrt{f(x)}$ 为增函数，$\dfrac{1}{f(x)}$ 为减函数；若 $f(x)>0$ 且 $f(x)$ 为减函数，则函数 $\sqrt{f(x)}$ 为减函数，$\dfrac{1}{f(x)}$ 为增函数.

第 2 课时　函数的最大(小)值

知识点 1　函数的最大(小)值

(1)最大值：一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I，如果存在实数 M 满足：(1) $\forall x\in I$，都有 $f(x)\leqslant M$；(2) $\exists x_0\in I$，使得 $f(x_0)=M$. 那么，我们称 M 是函数 $y=f(x)$ 的最大值.

(2)最小值：一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I，如果存在实数 M 满足：(1) $\forall x\in I$，都有 $f(x)\geqslant M$；(2) $\exists x_0\in I$，使得 $f(x_0)=M$. 那么，我们称 M 是函数 $y=f(x)$ 的最小值.

· 说明

(1)最值首先是一个函数值，即存在一个自变量 x_0，使 $f(x_0)$ 等于最值，如 $f(x)=-x^2(x\in\mathbf{R})$ 的最大值为 0，有 $f(0)=0$.

(2)对于定义域内的任意元素 x，都有 $f(x)\leqslant f(x_0)$（或 $f(x)\geqslant f(x_0)$），“任意”两字不可省.

(3)使函数 $f(x)$ 取得最大(小)值的自变量的值有时可能不止一个.

(4)函数 $f(x)$ 在其定义域(或某个区间)内的最大值的几何意义是其图象上最高点的纵坐标；最小值的几何意义是其图象上最低点的纵坐标.

「名师指津」

求函数最大(小)值的常用方法：

(1)配方法：主要适用于二次函数或可化为二次函数的函数，要特别注意自变量的取值范围.

(2)判别式法：主要适用于可化为关于 x 的二次方程 $a(y)x^2+b(y)x+c(y)=0$ 的函数 $y=f(x)$，在由 $\Delta\geqslant 0$，且 $a(y)\neq 0$ 求出 y 值后，要检验这个最值在函数的定义域内是否有相应的 x 的值.

(3)换元法：用换元法时一定要注意新元的取值范围.

(4)数形结合法：对于图形较容易画出的函数的最值问题，可借助图象直观求出.

(5)利用函数的单调性：要注意函数的单调性对函数最值的影响，特别是闭区间上函数的最值.

注意：求函数的最值问题实质上是求函数的值域问题，因此求函数最值的方法，也是求函数的值域的方法，只是出题的方式有所差异.

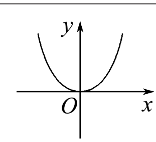
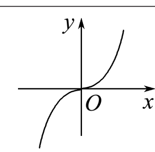
3.2.2　奇偶性

知识点 1　奇偶性的概念

奇偶性的概念

	偶函数	奇函数
定义	一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 I，如果 $\forall x\in I$，都有 $-x\in I$，且 $f(-x)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做偶函数	一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 I，如果 $\forall x\in I$，都有 $-x\in I$，且 $f(-x)=-f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做奇函数
定义域	关于原点对称	

续表

	偶函数	奇函数
图象特征	 关于 y 轴对称	 关于原点对称
单调性	在对称区间上，单调性相反	在对称区间上，单调性相同

· 说明

理解函数的奇偶性要注意以下五点：

(1)函数的单调性是函数的“局部”性质，而奇偶性是函数的“整体”性质，只有对其定义域

内的每一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$（或 $f(-x)=f(x)$），才能说是奇(或偶)函数.

(2)函数 $y=f(x)$ 是奇函数或偶函数的一个必不可少的条件：定义域关于原点对称.换言之，若所给函数的定义域不关于原点对称，则这个函数一定不具有奇偶性.例如，函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上是偶函数，但在区间$[-1,2]$上是无奇偶性可言的.

(3)若奇函数在原点处有定义，则必有 $f(0)=0$.

(4)若 $f(-x)=-f(x)$，且 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数，既奇又偶的函数有且只有一类，即 $f(x)=0$，$x\in D$，D 是关于原点对称的非空实数集.

(5)奇偶性是函数在定义域上的对称性，是相对于函数的整个定义域来说的，这一点与函数的单调性不同.

知识点 2　奇偶函数的图象特征

奇偶函数的图象特征

(1)奇函数的图象是以坐标原点为对称中心的中心对称图形；反之，若一个函数的图象是以坐标原点为对称中心的中心对称图形，则这个函数是奇函数.

(2)偶函数的图象是以 y 轴为对称轴的轴对称图形；反之，若一个函数的图象是以 y 轴为对称轴的轴对称图形，则这个函数是偶函数.

· 说明

(1)如果知道一个函数是奇函数或偶函数，那么只要把它的定义域分成关于原点对称的两部分，得出函数在一部分上的性质和图象，就可以推出这个函数在另一部分上的性质和图象.

(2)如果 $f(x)$ 为奇函数，点$(x,f(x))$在其图象上，那么点$(-x,f(-x))$，即点$(-x,-f(x))$也在 $f(x)$ 的图象上.

(3)如果 $f(x)$ 为偶函数，点$(x,f(x))$在其图象上，那么点$(-x,f(-x))$，即点$(-x,f(x))$也在 $f(x)$ 的图象上.

知识点 3　奇偶函数的判断

判断函数 $f(x)$ 的奇偶性主要分三步进行：

(1)判断函数 $f(x)$ 的定义域是否关于原点对称，若关于原点对称，则进行下一步.

(2)化简函数 $f(x)$ 的解析式(注意定义域).

(3)求出 $f(-x)$，根据 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 之间的关系，判断函数 $f(x)$ 的奇偶性：

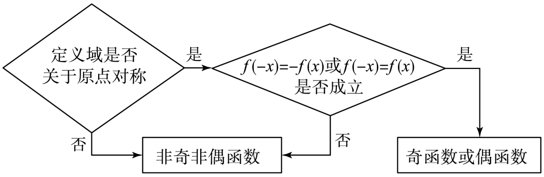
①由 $f(-x)+f(x)=0$ 或 $\dfrac{f(-x)}{f(x)}=-1$ $(f(x)\neq 0)$，得 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 是奇函数；

②由 $f(-x)-f(x)=0$ 或 $\dfrac{f(-x)}{f(x)}=1$ $(f(x)\neq 0)$，得 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 是偶函数.

「名师指津」

判断函数奇偶性的方法

(1)定义法：



(2)图象法：即若函数的图象关于原点对称，则函数为奇函数；若函数的图象关于 y 轴对称，则函数为偶函数.此法在解答选择题、填空题时使用较多.

3.3　幂函数

知识点 1　幂函数的概念

1.幂函数的概念

一般地，$y=x^{\alpha}$ 叫做幂函数，其中 x 是自变量，α 是常数.

2.幂函数的特征

①x^{α} 的系数为 1；

②x^{α} 的底数是自变量；

③x^{α} 的指数为常数.对于形如 $y=(2x)^{\alpha}$，$y=2x^{5}$，$y=x^{\alpha}+6$ 等的函数都不是幂函数.

· 说明

常见的五个幂函数：$y=x$，$y=x^{2}$，$y=x^{3}$，$y=x^{\frac{1}{2}}$，$y=x^{-1}$，除此之外，还有必须熟悉另外五个幂函数，它们是：$y=x^{0}$，$y=x^{-2}$，$y=x^{-\frac{1}{2}}$，$y=x^{\frac{1}{3}}$，$y=x^{\frac{2}{3}}$.

「名师指津」

1.判断一个函数是否为幂函数的方法

判断一个函数是否为幂函数的依据，是该函数是否为 $y=x^{\alpha}$（α 为常数）的形式，即函数的解析式为一个幂的形式，且需满足：(1)指数为常数；(2)底数为自变量；(3)系数为 1.

2.幂函数解析式的确定

(1)借助幂函数的定义，设幂函数或确定函数中相应量的值.

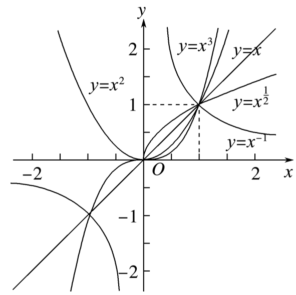
(2)结合幂函数的性质，分析幂函数中指数的特征.

(3)如函数 $f(x)=k\cdot x^{\alpha}$ 是幂函数，求 $f(x)$ 的表达式，就应由定义知必有 $k=1$，即 $f(x)=x^{\alpha}$.

知识点 2　幂函数的图象

幂函数的图象

在同一平面直角坐标系中，作出幂函数 $y=x$，$y=x^{2}$，$y=x^{3}$，$y=x^{\frac{1}{2}}$，$y=x^{-1}$ 的图象如图所示.



· 说明

幂函数 $y=x^{\alpha}$ 在第一象限的图象特征：

(1)当 $\alpha>1$ 时，图象过点(1,1)，下凸递增，如 $y=x^{3}$.

(2)当 $0<\alpha<1$ 时，图象过点(1,1)，上凸递增，如 $y=x^{\frac{1}{2}}$.

(3)当 $\alpha<0$ 时，图象过点(1,1)，下凸递减，且向两坐标轴无限逼近，如 $y=x^{-1}$.

「名师指津」

作幂函数图象的步骤如下：

(1)先作出第一象限内的图象.

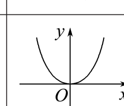
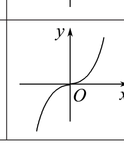
(2)若幂函数的定义域为$(0,+\infty)$或$[0,+\infty)$，作图已完成.

若在$(-\infty,0)$或$(-\infty,0]$上也有意义，则应先判断函数的奇偶性：

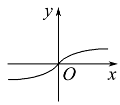
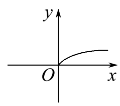
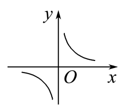
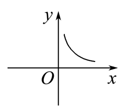
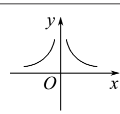
如果为偶函数，则根据 y 轴对称作出第二象限的图象；

如果为奇函数，则根据原点对称作出第三象限的图象.

知识点 3　幂函数的性质

函数 $y=x^{\alpha}$		定义域	值域	图象
$\alpha>1$	$y=x^{2}$	**R**	$[0,+\infty)$	
	$y=x^{3}$	**R**	**R**	

续表

函数 $y=x^{\alpha}$		定义域	值域	图象
$0<\alpha<1$	$y=x^{\frac{1}{3}}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	
$\alpha<0$	$y=x^{-1}$	$\{x\mid x\neq0\}$	$\{x\mid y\neq0\}$	
	$y=x^{-\frac{1}{2}}$	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	
	$y=x^{-2}$	$\{x\mid x\neq0\}$	$(0,+\infty)$	

· **说明**

1. 幂函数的单调性

在区间$(0,+\infty)$上，当$\alpha>0$时，$y=x^{\alpha}$是增函数；当$\alpha<0$时，$y=x^{\alpha}$是减函数.

2. 幂函数的奇偶性

令$\alpha=\dfrac{q}{p}$(其中p,q互质，$p,q\in\mathbf{N}^{*}$，$p>1$).

(1)若p为奇数，则$y=x^{\frac{q}{p}}$的奇偶性取决于q是奇数还是偶数.当q是奇数时，$y=x^{\frac{q}{p}}$是奇函数；当q是偶数时，$y=x^{\frac{q}{p}}$是偶函数.

(2)若p为偶数，则q必是奇数，此时$y=x^{\frac{q}{p}}$既不是奇函数，也不是偶函数.

3.4　函数的应用(一)

知识点　函数的应用

常见的函数模型

常用函数模型	一次函数模型	$y=kx+b$(k,b为常数，$k\neq0$)
	二次函数模型	$y=ax^2+bx+c$(a,b,c为常数，$a\neq0$)
	幂函数模型	$y=ax^n+b$(a,b为常数，$a\neq0$)
	分段函数	$y=\begin{cases}ax+b(x<m),\\cx+d(x\geqslant m)\end{cases}$

· **说明**

(1)解二次函数模型应用题时的注意事项

①要注意函数的定义域，一旦忽视定义域，可能会改变函数的原意.

②要注意配方法的应用及结合图象求出最值.

③要注意对二次项的系数为正、为负或为零的情况的讨论.

(2)应用分段函数时的三个注意点

①分段函数的“段”一定要分得合理，不重不漏(关键词：“段”).

②分段函数的定义域为对应每一段自变量取值范围的并集(关键词：定义域).

③分段函数的值域求法为：逐段求函数值的范围，最后再下结论(关键词：值域).

「名师指津」

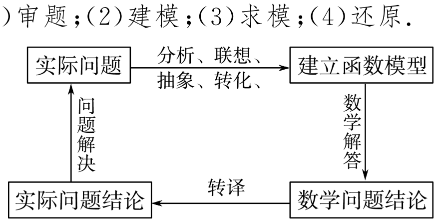
1.建立分段函数模型的关键

建立分段函数模型的关键是确定分段的各部分的界点，即明确自变量的取值区间，对每一区间进行分类讨论，从而写出函数的解析式.

2.解决函数应用问题的步骤

利用函数知识和函数观点解决实际问题时，一般按以下几个步骤进行：

(1)审题；(2)建模；(3)求模；(4)还原.



第四章 指数函数与对数函数

4.1 指数

4.1.1 n 次方根与分数指数幂

知识点 1 根式

1.n 次方根的概念

(1)定义:一般地,如果 $x^n=a$,那么 x 叫做 a 的 n 次方根,其中 $n>1$,且 $n\in\mathbf{N}^*$.

(2)a 的 n 次方根的表示

n 是奇数	$a>0$	$x>0$	x 仅有一个值,记为$\sqrt[n]{a}$
	$a<0$	$x<0$	
n 是偶数	$a>0$	x 有两个值,且互为相反数,记为$\pm\sqrt[n]{a}$	
	$a<0$	x 不存在	

· **说明**

(1)n 次方根实际就是平方根与立方根的推广;

(2)n 次方根的概念表明,乘方与开方是互逆运算.

2.根式的概念

(1)定义:式子$\sqrt[n]{a}$叫做根式,这里 n 叫做根指数,a 叫做被开方数.

(2)性质:①当 n 为奇数时,$\sqrt[n]{a^n}=a$;

②当 n 为偶数时,$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a,a\geqslant0,\\-a,a<0.\end{cases}$

「名师指津」

根式化简与求值的思路及注意点

(1)思路:首先要分清根式为奇次根式还是偶次根式,然后运用根式的性质进行化简.

(2)注意点:①正确区分$(\sqrt[n]{a})^n$ 与 $\sqrt[n]{a^n}$两式;②运算时注意变式、整体代换,以及平方差、立方差、完全平方公式的运用,必要时要进行讨论.

知识点 2 分数指数幂

1.分数指数幂

分数指数幂的意义

①正数的正分数指数幂的意义:$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$($a>0$,$m$,$n\in\mathbf{N}^*$,且 $n>1$).

②正数的负分数指数幂的意义:$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$($a>0$,$m$,$n\in\mathbf{N}^*$,且 $n>1$).

③0 的正分数指数幂等于 0,0 的负分数指数幂没有意义.

· **说明**

(1)分数指数幂是指数概念的推广,分数指数幂 $a^{\frac{m}{n}}$ 是根式的一种新写法,不可理解为 $\dfrac{m}{n}$个 a 相乘.

(2)正数的负分数指数幂在有意义的前提下,总表示正数,而不是负数.

(3)把根式$\sqrt[n]{a^m}$化为分数指数幂的形式时,不要轻易对$\dfrac{m}{n}$约分.

(4)在保证相应的根式有意义的前提下,负数也存在指数幂,如$(-2)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(-2)^2}$有意义.

「名师指津」

根式与分数指数幂互化的规律

(1)根指数化为分数指数的分母,被开方数(式)的指数化为分数指数的分子.

(2)当根式为多重根式时,要清楚哪个是被开方数,一般由里向外用分数指数幂依次写出.

2.有理数指数幂的运算性质

(1)$a^ra^s=a^{r+s}(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$;

(2)$\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$;

(3)$(a^r)^s=a^{rs}(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$;

(4)$(ab)^r=a^rb^r(a>0,b>0,r\in\mathbf{Q})$.

·说明

(1)在有理数指数幂运算性质中,规定 $a>0$ 的原因:

①若 $a=0$,因为 0 的负数指数幂无意义,所以当 $r<0$ 时 $(ab)^r=a^rb^r$ 不成立,所以 $a\neq0$.

②若 $a<0$,则 $(a^r)^s=a^{rs}$ 也不一定成立,如 $[(-2)^2]^{\frac{1}{4}}\neq(-2)^{\frac{1}{2}}$,所以当 $a<0$ 时不成立,因此规定 $a>0$.

(2)指数幂的几个结论:

①当 $a>0$ 时,$a^b>0$;

②当 $a\neq0$,$a^0=1$,而当 $a=0$ 时,a^0 无意义;

③若 $a^r=a^s(a>0$,且 $a\neq1)$,则 $r=s$.

(3)分数指数幂与根式相互转化运算的过程中,一定要注意偶次算术根非负的特点,否则很容易出现差错.

「名师指津」

根式化简的步骤

(1)将根式化成分数指数幂的形式.

(2)利用分数指数幂的运算性质求解.

4.1.2　无理数指数幂及其运算性质

知识点　无理数指数幂及实数指数幂的运算性质

一般地,无理数指数幂 $a^\alpha(a>0,\alpha$ 为无理数)是一个确定的实数.整数指数幂的运算性质也适用于实数指数幂,即对于任意实数 r,s,均有下面的运算性质.

(1)$a^ra^s=a^{r+s}(a>0,r,s\in\mathbf{R})$;

(2)$(a^r)^s=a^{rs}(a>0,r,s\in\mathbf{R})$;

(3)$(ab)^r=a^rb^r(a>0,b>0,r\in\mathbf{R})$.

·说明

(1)无理数可以作为指数;

(2)无理数指数幂的近似值可以利用逼近的方式得到.

「名师指津」

化简指数幂的几个常用技巧

(1)$\left(\frac{b}{a}\right)^{-p}=\left(\frac{a}{b}\right)^p(ab\neq0)$;

(2)$a=(a^{\frac{1}{m}})^m$,$a^{\frac{n}{m}}=(a^{\frac{1}{m}})^n$($a$ 使式子有意义);

(3)1 的代换,如 $1=a^{-1}\cdot a$,$1=a^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}$($a$ 使式子有意义)等;

(4)乘法公式的常见变形,如 $(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})=a-b$,$(a^{\frac{1}{2}}\pm b^{\frac{1}{2}})^2=a\pm2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b$,$(a^{\frac{1}{3}}\pm b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}\mp a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})=a\pm b$($a,b$ 均使式子有意义).

4.2 指数函数

4.2.1 指数函数的概念

知识点 指数函数的概念

定义：一般地，函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$ 叫做指数函数，其中指数 x 是自变量，定义域是 **R**.

· 说明

1.指数函数解析式的 3 个特征

(1)底数 a 为大于 0 且不等于 1 的常数.

(2)自变量 x 的位置在指数上，且 x 的系数是 1.

(3)a^x 的系数是 1.

2.指数函数中规定 a 大于 0 且不等于 1 的理由

(1)如果 $a=0$，当 $x>0$ 时，a^x 恒等于 0；当 $x\leqslant0$ 时，a^x 无意义.

(2)如果 $a<0$，如 $y=(-2)^x$，对于 $x=\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots$时在实数范围内函数值不存在.

(3)如果 $a=1$，$y=1^x$ 是一个常量，对它无研究价值.为了避免上述各种情况，所以规定 $a>0$ 且 $a\neq1$.

「名师指津」

已知某函数是指数函数求参数值的方法

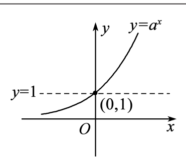
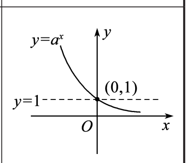
(1)依据指数函数形式列方程：令底数大于 0 且不等于 1，系数等于 1 列出不等式与方程.

(2)求参数值：解不等式与方程求出参数的值，并代入检验.

4.2.2 指数函数的图象和性质

知识点 1 指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的图象和性质

指数函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象和性质

		$a>1$	$0<a<1$
图象		 	
定义域		**R**	
值域		$(0,+\infty)$	
性质	定点	过定点 $(0,1)$，即 $x=0$ 时，$y=1$	
	函数值的变化	当 $x>0$ 时，$y>1$； 当 $x<0$ 时，$0<y<1$	当 $x>0$ 时，$0<y<1$； 当 $x<0$ 时，$y>1$
	单调性	增函数	减函数

· 说明

1.指数函数图象的关注点

(1)定点：所有函数图象均过点 $(0,1)$.

(2)趋势：当 $a>1$ 时，自左向右图象是上升趋势；当 $0<a<1$ 时，自左向右图象是下降趋势.

2.指数函数图象和性质的巧记

(1)指数函数图象的巧记方法：一定二近三单调，两类单调正相反.

(2)指数函数性质的巧记方法：非奇非偶是单调，性质不同因为 a，分清是 $(0,1)$，还是 $(1,+\infty)$，依靠图象记性质.

「名师指津」

函数图象问题的处理技巧

(1)抓住图象上的特殊点，如指数函数的图象过定点.

(2)利用图象变换，如函数图象的平移变换(左右平移、上下平移)、对称变换.

(3)利用函数的奇偶性与单调性，奇偶性确定函数的对称情况，单调性决定函数图象的走势.

知识点 2 指数函数的定义域与值域

1.定义域

(1)指数函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$ 的定义域为 **R**.

(2)$y=a^{f(x)}(a>0$，且 $a\neq1)$ 的定义域与 $y=f(x)$ 的定义域相同.

(3)$y=f(a^x)$的定义域与函数 $y=f(x)$的定义域不一定相同.

2.值域

(1)指数函数的值域为$(0,+\infty)$.

(2)求形如 $y=a^{f(x)}$的值域时,先求 $f(x)$的值域,然后结合函数 $y=a^x(a>0$,且 $a\neq1)$的性质确定 $y=a^{f(x)}$的值域.

(3)求形如 $y=f(a^x)$的值域,可化为求 $t=a^x\in(0,+\infty)$,$y=f(t)$的值域.

「名师指津」

函数 $y=a^{f(x)}$的值域的求解方法

(1)换元,令 $t=f(x)$;

(2)求 $t=f(x)$的定义域 D;

(3)求 $t=f(x)$的值域 M;

(4)利用 $y=a^t$ 的单调性求 $y=a^t$,$t\in M$ 的值域.

知识点 3　指数函数的单调性及应用

复合函数的单调性

令 $u=f(x)$,$x\in[m,n]$,如果复合的两个函数 $y=a^u$ 与 $u=f(x)$的单调性相同,那么复合后的函数 $y=a^{f(x)}$在$[m,n]$上是增函数;如果两者的单调性相反(即一增一减),那么复合函数 $y=a^{f(x)}$在$[m,n]$上是减函数.

4.3　对数

4.3.1　对数的概念

知识点 1　对数的概念

1.对数的定义

一般地,如果 $a^x=N(a>0$,且 $a\neq1)$,那么数 x 叫做以 a 为底 N 的对数,记作 $x=\log_a N$,其中 a 叫做对数的底数,N 叫做真数.

2.两种常见的对数

常用对数 → 底数:10；记法:$\log_{10}N$ 或 $\lg N$

自然对数 → 底数:e；记法:$\log_e N$ 或 $\ln N$

· **说明**

(1)底数的取值:底数 $a>0$,$a\neq1$.

(2)真数的取值:真数大于零.

(3)两个常见对数:常用对数、自然对数.

(4)对数符号:"log"同"+""−""×""÷""$\sqrt{\ }$"的符号一样,表示一种运算,只不过对数运算的符号写在数的前面.

(5)对数的书写:在写某一个数的对数时,一定要注意书写形式的规范.底数在书写的时候要靠下一些,小一点和真数区分开.如果真数或底数是表达式的形式,则需要在表达式的外面加上小括号.

知识点 2　指数式与对数式的互化

(1)条件:$a>0$,且 $a\neq1$,$N>0$.

(2)互化公式:$a^x=N\Leftrightarrow x=\log_a N$.

· **说明**

1.指数式 $a^x=N$ 与对数式 $x=\log_a N$ 互化的关注点

(1)它们有共底数 a.

(2)互化后要注意 x,a,N 位置的变化,特别是名称的改变.

(3)对数式书写的规范性.

(4)对数的实质.

2.$a^x=N\Leftrightarrow x=\log_a N$ 的作用

(1)可将已知对数式转化成指数式.

(2)可将已知指数式转化成对数式.

「名师指津」

指数式与对数式互化的方法

(1)将指数式化为对数式,只需要将幂作为真数,指数当成对数值,底数不变,写出对数式.

(2)将对数式化为指数式,只需将真数作为幂,对数作为指数,底数不变,写出指数式.

知识点 3　对数的性质

(1)负数和 0 没有对数,即 $\log_a N$ 中 N 必须大于零.

(2)1 的对数为 0,即 $\log_a 1=0$.

(3)底数的对数为 1,即 $\log_a a=1$.

(4)对数恒等式是 $a^{\log_a N}=N(a>0$,且 $a\neq1)$.

4.3.2 对数的运算

知识点1 对数的运算性质

如果 $a>0$,且 $a\neq1$,$M>0$,$N>0$,那么

(1)$\log_a(MN)=\log_aM+\log_aN$;

(2)$\log_a\dfrac{M}{N}=\log_aM-\log_aN$;

(3)$\log_aM^n=n\log_aM(n\in\mathbf{R})$.

·说明

(1)逆向应用对数运算性质,可以将几个对数式化为一个对数式,有利于化简.

(2)对于每条性质,都要注意只有当式子中所有的对数都有意义时,等式才成立.

(3)对数的运算性质(1)可推广到若干个正因数积的对数,即 $\log_a(M_1\cdot M_2\cdot M_3\cdots M_k)=\log_aM_1+\log_aM_2+\log_aM_3+\cdots+\log_aM_k$,$a>0$,且 $a\neq1$,$M_k>0$,$k\in\mathbf{N}^*$.

(4)对数运算性质的几个推广式

①$\log_a\sqrt[n]{m}=\dfrac{1}{n}\log_am(m>0,n\in\mathbf{N}^*,n>1,a>0,a\neq1)$;

②$\log_a\dfrac{1}{m}=-\log_am(m>0,a>0,a\neq1)$;

③$\log_a\sqrt[p]{m^n}=\dfrac{n}{p}\log_am(m>0,n,p\in\mathbf{N}^*,a>0,a\neq1)$.

「名师指津」

利用对数运算性质化简与求值的原则和方法

(1)基本原则:

①正用或逆用公式,对真数进行处理;

②选哪种策略化简,取决于问题的实际情况,一般本着便于化简的原则进行.

(2)两种常用的方法:

①"收",将同底的两对数的和(差)收成积(商)的对数;

②"拆",将积(商)的对数拆成同底的两对数的和(差).

知识点2 换底公式

$\log_ab=\dfrac{\log_cb}{\log_ca}(a>0$,且 $a\neq1$;$b>0$;$c>0$,且 $c\neq1)$.

特别地,$\log_ab\cdot\log_ba=1$.

·说明

(1)对数换底公式成立的条件:公式中的每一个对数式都有意义.

(2)对数换底公式的意义就在于把对数式的底数改变,把不同底数问题转化为同底数问题后求解.

(3)对数换底公式在具体应用中换成以什么为底数的对数式,要由已知条件来确定.

(4)公式的逆用:$\dfrac{\log_cb}{\log_ca}=\log_ab$,将两个同底对数的商化为一个对数.

4.4　对数函数

4.4.1　对数函数的概念

知识点　对数函数的概念

对数函数的定义

(1)解析式：$y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$.

(2)自变量：x.

(3)定义域：$(0,+\infty)$.

· 说明

1.对数函数的解析式具有以下三个特征

(1)底数位置是大于 0 且不等于 1 的常数，底数中不含变量 x；

(2)真数位置是自变量 x，且其系数等于 1；

(3)$\log_a x$ 的系数等于 1.

2.对数函数定义的两个关注点

(1)形式：定义中所说的形如 $y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$的形式一般来说是不可改变的，如果不注意这一点极易造成解题失误.

(2)范围：通过对数函数的定义，在规定了底数 a 的范围以后，对于任何的 $x\in(0,+\infty)$，$\log_a x$ 都有意义，且$\log_a x$ 可取任意实数，从而对数函数的定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 **R**.

3.求对数函数的定义域应注意

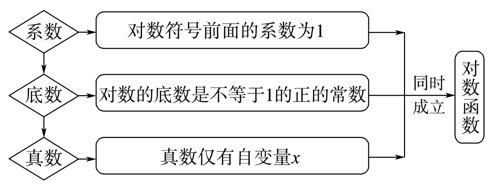
(1)对数的真数大于零，对数函数的底数大于 0 且不等于 1；

(2)使式子符合实际背景；

(3)对底数含有字母的对数式要注意分类讨论.

「名师指津」

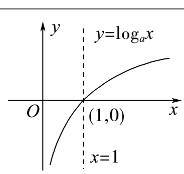
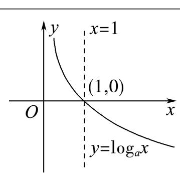
判断一个函数是否为对数函数的方法



4.4.2　对数函数的图象和性质

知识点 1　对数函数 $y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$的图象和性质

对数函数 $y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$的图象和性质

定义	$y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$	
底数	$a>1$	$0<a<1$
图象		
值域	**R**	
定义域	$(0,+\infty)$	
单调性	增函数	减函数
共点性	过定点$(1,0)$，即 $x=1$ 时，$y=0$	

续表

定义	$y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$	
函数值的特点	$x\in(0,1)$时，$y\in(-\infty,0)$；$x\in[1,+\infty)$时，$y\in[0,+\infty)$	$x\in(0,1)$时，$y\in(0,+\infty)$；$x\in[1,+\infty)$时，$y\in(-\infty,0]$

· 说明

1.对数函数图象的关注点

(1)定点：所有函数图象均过点$(1,0)$.

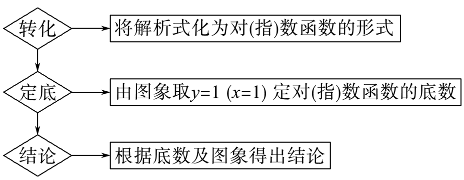
(2)趋势：对数函数图象是无限延展的，且无限接近于 y 轴.当 $a>1$ 时，x 的值越小，图象越接近于 y 轴的负半轴；当 $0<a<1$ 时，x 的值越小，图象越接近于 y 轴的正半轴.

2.对数函数图象和性质的巧记

对数增减有思路,函数图象看底数,底数只能大于0,等于1来也不行,底数若是大于1,图象从下往上增,底数0到1之间,图象从上往下减,无论函数增和减,图象都过点(1,0).

「名师指津」

1.判断同一直角坐标系中对(指)数函数图象的方法.



2.对数函数过定点问题的处理办法

求对数函数图象所过的定点时,只需令真数为1,求出相应的x与y的值,即得函数图象所过的定点.

3.有关对数型函数图象问题的应用技巧

(1)求函数$y=m+\log_a f(x)$($a>0$,且$a\neq1$)的图象过定点时,只需令$f(x)=1$求出x,即得定点为(x,m).

(2)根据对数函数图象判断底数大小的方法:作直线$y=1$与所给图象相交,交点的横坐标即为各个底数.根据在第一象限内,自左向右,图象对应的对数函数的底数逐渐变大,可比较底数的大小.

(3)注意图象变换的技巧应用.

知识点2 反函数

一般地,指数函数$y=a^x$($a>0$,且$a\neq1$)与对数函数$y=\log_a x$($a>0$,且$a\neq1$)互为反函数,它们的定义域与值域正好互换.

·说明

(1)互为反函数的两个函数图象关于直线$y=x$对称.

(2)若函数$y=f(x)$的图象上有一点(a,b),则(b,a)必在其反函数图象上.

(3)反函数的定义域是原函数的值域,反函数的值域是原函数的定义域.

(4)单调函数的反函数与原函数有相同的单调性.

(5)若一个奇函数存在反函数,则它的反函数也是奇函数.

知识点3 对数函数的单调性及应用

函数$f(x)=\log_a u(x)$的单调性

函数$f(x)=\log_a u(x)$看作是由函数$y=\log_a t$与$t=u(x)$复合而成的.在函数$f(x)=\log_a u(x)$的定义域内,分别考查函数$y=\log_a t$与$t=u(x)$的单调性,若这两个函数在定义域的某一子区间上同为增函数或同为减函数,则函数$f(x)=\log_a u(x)$在该区间上为增函数;若这两个函数在定义域的某一子区间上,一个为增函数而另一个为减函数,则函数$f(x)=\log_a u(x)$在该区间上为减函数.

·说明

(1)已知对数型函数的单调性求参数的取值范围,要结合复合函数的单调性规律,注意函数的定义域.

(2)若是分段函数,则需注意每段函数最值的大小关系.

「名师指津」

常见的对数不等式的三种类型

(1)形如$\log_a x>\log_a b$的不等式,借助$y=\log_a x$的单调性求解,如果a的范围不确定,需分$a>1$与$0<a<1$进行讨论.

(2)形如$\log_a x>b$的不等式,应将b化为以a为底数的对数,再借助$y=\log_a x$的单调性求解.

(3)形如$\log_a x>\log_b x$的不等式,可利用图象求解.

(4)注意加上使对数式有意义的约束条件.

4.4.3　不同函数增长的差异

知识点　三种常见函数模型的增长差异

	指数函数	对数函数	一元一次函数
解析式	$y=a^x(a>1)$	$y=\log_a x(a>1)$	$y=kx(k>0)$
单调性	在$(0,+\infty)$上单调递增		
图象（随x的增大）	逐渐与y轴平行	逐渐与x轴平行	直线逐渐上升
增长速度（随x的增大）	y的增长速度越来越快	y的增长速度越来越慢	y的增长速度不变
增长关系	存在一个x_0，当$x>x_0$时，$a^x>kx>\log_a x$		

·说明

(1)函数模型增长的比较

①对于幂函数$y=x^n$，当$x>0$，$n>0$时，$y=x^n$才是增函数，当n越大时，增长速度越快.

②指数函数与对数函数单调递增的前提是$a>1$，又它们的图象关于$y=x$对称，从而可知，当a越大，$y=a^x$增长越快；当a越小，$y=\log_a x$增长越快，一般来说，$a^x>\log_a x(x>0,a>1)$.

③指数函数与幂函数，当$x>0$，$n>0$，$a>1$时，可能开始时有$x^n>a^x$，但因指数函数是爆炸型函数，当x大于某一个确定值x_0后，就一定有$a^x>x^n$.

(2)不同函数模型的选取标准

①线性函数增长模型适合描述增长速度不变的变化规律.

②指数函数增长模型适合描述增长速度急剧的变化规律.

③对数函数增长模型适合描述增长速度平缓的变化规律.

④幂函数增长模型适合描述增长速度一般的变化规律.

「名师指津」

常见的函数增长特点

(1)一次函数

一次函数$y=kx+b(k>0)$的增长特点是直线上升，其增长速度不变.

(2)指数函数

指数函数$y=a^x(a>1)$的增长特点是随着自变量的增大，函数值增大的速度越来越快，即增长速度急剧，形象地称为“指数爆炸”.

(3)对数函数

对数函数$y=\log_a x(a>1)$的增长特点是随着自变量的增大，函数值增大的速度越来越慢，即增长速度平缓.

(4)幂函数

幂函数$y=x^n(n>0)$的增长速度介于指数函数和对数函数之间.

4.5 函数的应用(二)

4.5.1 函数的零点与方程的解

知识点 1 函数的零点

1.函数的零点

对于一般函数 $y=f(x)$,我们把使 $f(x)=0$ 的实数 x 叫做函数 $y=f(x)$的零点.

2.方程、函数、函数图象之间的关系

方程 $f(x)=0$ 有实数解$\Leftrightarrow$函数 $y=f(x)$有零点$\Leftrightarrow$函数 $y=f(x)$的图象与 x 轴有公共点.

·说明

(1)函数的零点不是点,是实数.

(2)函数的零点的求法

①代数法:求方程 $f(x)=0$ 的实数根.要注意根必须在函数 $f(x)$的定义域内.

②几何法:对于不能用求根公式的方程 $f(x)=0$,可以将它与函数 $y=f(x)$的图象联系起来.图象与 x 轴的交点的横坐标即为函数的零点.

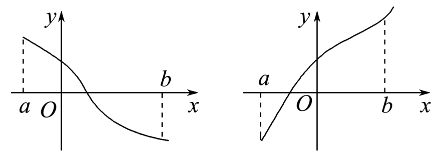
「名师指津」

判断函数零点个数的主要方法

(1)直接求出函数的零点进行判断.

(2)画出函数 $y=f(x)$的图象,判断它与 x 轴的交点个数,从而判断零点的个数.

(3)借助零点存在性定理判断.若函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的图象是一条连续不断的曲线,且在区间(a,b)上单调,满足 $f(a)f(b)<0$,则函数 $f(x)$在区间(a,b)上有且仅有一个零点,如图所示.



(4)转化成两个函数图象的交点问题.方程 $f(x)=g(x)$的根是函数 $f(x)$与 $g(x)$的图象交点的横坐标,也是函数 $y=f(x)-g(x)$的图象与 x 轴交点的横坐标.

知识点 2 函数零点存在性定理

如果函数 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上的图象是一条连续不断的曲线,且有$f(a)f(b)<0$,那么,函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内至少有一个零点,即存在 $c\in(a,b)$,使得 $f(c)=0$,这个 c 也就是方程 $f(x)=0$ 的解.

·说明

理解函数零点存在性定理需要注意的问题

(1)①函数 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上的图象是一个连续不断的曲线;

②$f(a)f(b)<0$.这两个条件缺一不可,否则结论不一定成立.

(2)满足上述两个条件,则方程 $f(x)=0$ 在区间(a,b)内至少有一个实根 c,但不确定有几个.

(3)该定理是一个充分不必要条件,反过来,若在(a,b)上有零点,则不一定有$f(a)f(b)<0$成立.

(4)若 $f(a)f(b)>0$,$f(x)$在(a,b)上不一定没有零点,零点个数不确定.

(5)若 $f(x)$在(a,b)上有零点,可能$f(a)f(b)>0$,也可能 $f(a)f(b)<0$.

(6)如果 $f(x)$在$[a,b]$上是单调函数,且$f(a)f(b)<0$,则 $f(x)$在(a,b)上只有一个零点,若 $f(a)f(b)>0$,则 $f(x)$在(a,b)上没有零点.

4.5.2　用二分法求方程的近似解

知识点 1　二分法的概念

对于在区间$[a,b]$上图象连续不断且$f(a)\cdot f(b)<0$的函数$y=f(x)$，通过不断地把它的零点所在区间一分为二，使所得区间的两个端点逐步逼近零点，进而得到零点近似值的方法叫做二分法.

· 说明

(1)二分法的依据是零点存在性定理，仅适用于函数的变号零点.(函数图象通过零点时函数值的符号变号)

(2)二分法采用逐步逼近的思想，使函数零点所在的范围逐步缩小.根据函数的性质尽可能地找到含有零点的更小的区间，当区间的长度小到一定程度时，就得到近似值.

「名师指津」

运用二分法求函数的零点应具备的条件

(1)函数图象在零点附近连续不断.

(2)在该零点左右函数值异号.

只有满足上述两个条件，才可用二分法求函数的零点.

知识点 2　用二分法求函数零点近似值的步骤

给定精确度ε，用二分法求函数$y=f(x)$零点x_0的近似值的一般步骤如下：

(1)确定零点x_0的初始区间$[a,b]$，验证$f(a)\cdot f(b)<0$.

(2)求区间(a,b)的中点c.

(3)计算$f(c)$，并进一步确定零点所在的区间：

①若$f(c)=0$(此时$x_0=c$)，则c就是函数的零点；

②若$f(a)f(c)<0$(此时$x_0\in(a,c)$)，则令$b=c$；

③若$f(c)f(b)<0$(此时零点$x_0\in(c,b)$)，则令$a=c$.

(4)判断是否达到精确度ε：若$|a-b|<\varepsilon$，则得到零点近似值a(或b)；否则重复步骤(2)～(4).

· 说明

(1)二分法一次只能求一个零点.

(2)在(a,b)内有零点时，$f(a)\cdot f(b)<0$未必成立，而这样的零点不能用二分法求解.

(3)二分法计算量较大，常要借助计算器完成.

4.5.3 函数模型的应用

知识点 1 函数模型

常见的几类函数模型

函数模型	函数解析式
一次函数模型	$f(x)=ax+b$(a,b 为常数,$a\neq0$)
二次函数模型	$f(x)=ax^2+bx+c$(a,b,c 为常数,$a\neq0$)
指数型函数模型	$f(x)=ba^x+c$(a,b,c 为常数,$b\neq0,a>0$ 且 $a\neq1$)
对数型函数模型	$f(x)=b\log_a x+c$(a,b,c 为常数,$b\neq0,a>0$ 且 $a\neq1$)
幂型函数模型	$f(x)=ax^n+b$(a,b 为常数,$a\neq0$)
“对勾”函数模型	$y=x+\dfrac{a}{x}(a>0)$

· **说明**

1.根据图表建立数学模型的注意问题

(1)画图:首先应根据给定的数据,画出图形.

(2)选模:根据点的分布特征选取适当的函数模型.

(3)解模:利用待定系数法求函数的模型.

2.建立函数模型解决实际问题的关注点

(1)要注意自变量的取值范围.

(2)要检验所得的结果,必要时要运用估算和近似计算,以使所得结果符合实际问题的要求.

「名师指津」

通过收集数据直接解决问题的一般过程

(1)收集数据.

(2)根据收集到的数据在平面直角坐标系内描点.

(3)根据点的分布特征,选择一个能刻画其特征的函数模型.

(4)选择其中的几组数据求出函数模型.

(5)将已知数据代入所求出的函数模型进行检验,看其是否符合实际.若不符合实际,则重复步骤(3)(4)(5);若符合实际,则进入下一步.

(6)用求得的函数模型去解决实际问题.

第五章　三角函数

5.1　任意角和弧度制

5.1.1　任意角

知识点 1　角的概念及正角、负角和零角

1.角的概念

一条射线 OA 绕着它的端点 O 按一定方向旋转到另一位置 OB，就形成了角 α，其中射线 OA 叫角 α 的始边，射线 OB 叫角 α 的终边，O 叫角 α 的顶点.

2.正角、负角和零角

正角：按逆时针方向旋转形成的角叫正角.

负角：按顺时针方向旋转形成的角叫负角.

零角：如果一条射线没有做任何旋转，就称它形成了一个零角.

· **说明**

(1)角的加法：设 α，β 是任意两个角.我们规定，把角 α 的终边逆时针旋转角 β，这时终边所对应的角是 $\alpha+\beta$.

(2)角的减法：$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$.这样，角的减法可以转化为角的加法.

「名师指津」

确定任意角的方法

(1)定方向：明确该角是由顺时针方向还是逆时针方向旋转而形成的.由逆时针方向旋转形成的角为正角，顺时针方向旋转形成的角是负角.

(2)定大小：根据旋转角度的绝对量确定角的大小.

知识点 2　象限角

在直角坐标系中研究角时，当角的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合.

(1)角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限角；

(2)角的终边在坐标轴上，就认为这个角不属于任何一个象限.

· **说明**

(1)终边落在坐标轴上的角叫象限界角；

(2)终边落在 x 轴、y 轴各半轴上的角

角 α 终边所在的位置	角 α 的集合
x 轴正半轴	$\{\alpha \mid \alpha=k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$
x 轴负半轴	$\{\alpha \mid \alpha=k\cdot 360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$
y 轴正半轴	$\{\alpha \mid \alpha=k\cdot 360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$
y 轴负半轴	$\{\alpha \mid \alpha=k\cdot 360°+270°,k\in\mathbf{Z}\}$

(3)终边落在各个象限的角的集合

角 α 终边所在的象限	角 α 的集合
第一象限	$\{\alpha \mid k\cdot 360°<\alpha<k\cdot 360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$
第二象限	$\{\alpha \mid k\cdot 360°+90°<\alpha<k\cdot 360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$
第三象限	$\{\alpha \mid k\cdot 360°+180°<\alpha<k\cdot 360°+270°,k\in\mathbf{Z}\}$
第四象限	$\{\alpha \mid k\cdot 360°+270°<\alpha<(k+1)\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$

「名师指津」

1.判断 α 是第几象限角的步骤

第一步：将 α 写成 $\alpha=k\cdot 360°+\beta(k\in\mathbf{Z},0°\leqslant\beta<360°)$ 的形式.

第二步：判断 β 的终边所在的象限.

第三步：根据 β 的终边所在的象限，即可确定 α 的终边所在的象限.

2.确定 $k\alpha,\frac{\alpha}{k}(k\in\mathbf{N}^*)$ 的终边位置的步骤：

(1)用终边相同的角的形式表示出角 α 的范围.

(2)写出 $k\alpha$ 或 $\frac{\alpha}{k}$ 的范围.

(3)根据 k 的可能取值确定 $k\alpha$ 或 $\frac{\alpha}{k}$ 的终边所在的位置.

知识点 3 终边相同的角

所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合 $S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$，即任一与角 α 终边相同的角，都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

· 说明

(1)$k\in\mathbf{Z}$；

(2)α 是任一角；

(3)终边相同的角不一定相等，但相等的角终边一定相同.终边相同的角有无限个，它们相差360°的整数倍；终边在一条直线上的角之间相差180°的整数倍；终边在互相垂直的两条直线上的角之间相差90°的整数倍.

(4)对于探求角的取值范围的问题，可以先确定终边落在“边界”上的角的集合，然后再加以合并.另外，要注意边界是虚线和实线的区别.

5.1.2 弧度制

知识点 1 度量角的单位制

1.角度制

用度作为单位来度量角的单位制叫做角度制，规定1度的角等于周角的 $\frac{1}{360}$.

2.弧度制

(1)弧度制的定义

长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做1弧度的角，用符号 rad 表示，读作弧度.以弧度作为单位来度量角的单位制叫做弧度制.

(2)任意角的弧度数与实数的对应关系

一般地，正角的弧度数是一个正数，负角的弧度数是一个负数，零角的弧度数是0.

(3)角的弧度数的计算

如果半径为 r 的圆的圆心角 α 所对弧的长为 l，那么，角 α 的弧度数的绝对值是 $|\alpha|=\frac{l}{r}$.

· 说明

用弧度表示区域角、终边相同的角等，要注意单位统一，角度数与弧度数不能混用.

知识点 2 角度制与弧度制的换算

角度与弧度互化：

角度化弧度	弧度化角度
$360°=2\pi$ rad	2π rad$=360°$
$180°=\pi$ rad	π rad$=180°$
$1°=\frac{\pi}{180}$ rad$\approx0.017\ 45$ rad	1 rad$=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ\approx57.30°$

· 说明

(1)一些特殊角与弧度制的对应关系

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

(2)将角度转化为弧度时，把带有分、秒的部分化为度之后，牢记 π rad$=180°$ 即可求解.把弧度转化为角度时，直接用弧度数乘以 $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ 即可.

「名师指津」

角度制与弧度制互化的关键与方法

(1)关键：抓住互化公式 π rad$=180°$是关键.

(2)方法：度数$\times\frac{\pi}{180}=$弧度数；弧度数$\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ=$度数.

(3)角度化弧度时，应先将分、秒化成度，再化成弧度.

知识点 3　扇形的弧长及面积公式

设扇形的半径为 R,弧长为 l,$\alpha(0<\alpha<2\pi)$为其圆心角,则

度量单位类别	α 为角度制	α 为弧度制
扇形的弧长	$l=\dfrac{\alpha\pi R}{180}$	$l=\alpha\cdot R$
扇形的面积	$S=\dfrac{\alpha\pi R^2}{360}$	$S=\dfrac{1}{2}l\cdot R=\dfrac{1}{2}\alpha\cdot R^2$

· **说明**

(1)在应用扇形的面积公式 $S=\dfrac{1}{2}\alpha\cdot R^2$ 时,要注意 α 的单位是“弧度”.

(2)在弧度制下的扇形面积公式 $S=\dfrac{1}{2}l\cdot R$ 与三角形面积公式 $S=\dfrac{1}{2}a\cdot h$(其中 h 为三角形底边上的高)的形式相似,可类比记忆.

(3)由 α,R,l,S 中任意的两个量可以求出另外的两个量.

「名师指津」

应用弧度制解决问题的方法

(1)利用扇形的弧长和面积公式解题时,要注意角的单位必须是弧度.

(2)求扇形面积最大值的问题时,常转化为二次函数的最值问题.

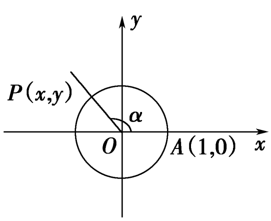
(3)在解决弧长问题和扇形面积问题时,要合理地利用圆心角所在的三角形.

5.2　三角函数的概念

5.2.1　三角函数的概念

知识点 1　任意角的三角函数定义

设 α 是一个任意角,$\alpha\in\mathbf{R}$,它的终边 OP 与单位圆相交于点 $P(x,y)$.



(1)把点 P 的纵坐标 y 叫做 α 的正弦函数,记作 $\sin\alpha$,即 $y=\sin\alpha$;

(2)把点 P 的横坐标 x 叫做 α 的余弦函数,记作 $\cos\alpha$,即 $x=\cos\alpha$;

(3)把点 P 的纵坐标与横坐标的比值 $\dfrac{y}{x}$ 叫做 α 的正切,记作 $\tan\alpha$,即 $\dfrac{y}{x}=\tan\alpha(x\neq0)$.

$\dfrac{y}{x}=\tan\alpha$ 也是以角为自变量,以单位圆上点的纵坐标与横坐标的比值为函数值的函数,称为正切函数.

我们将正弦函数、余弦函数和正切函数统称为三角函数.

· **说明**

(1)在三角函数的定义中 α 是任意角,其范围是使函数有意义的实数集.

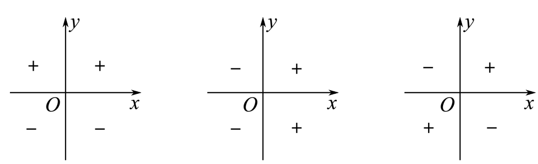
(2)要明确 $\sin\alpha$ 是一个整体,不是 $\sin$ 与 α 的乘积,它是“正弦函数”的一个记号.

(3)由于角的集合与实数集之间建立了一一对应关系,所以三角函数可以看成是自变量为实数的函数.

(4)若取点 $P(x,y)$ 是角 α 终边上异于顶点的任一点,设点 P 到原点 O 的距离为 r,则 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$,$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$,$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}(x\neq0)$.

知识点 2　正弦、余弦、正切函数值在各象限的符号

根据三角函数的定义以及单位圆上点的位置,可得正弦函数、余弦函数、正切函数的值在各个象限内的符号:



sin α　　cos α　　tan α

·说明

三角函数值符号的记忆：一全正、二正弦、三正切、四余弦.其意思为：第一象限中各种三角函数值都为正数；第二象限中正弦值为正数；第三象限中正切值为正数；第四象限中余弦值为正数.

知识点3 诱导公式(一)

终边相同的角的同一三角函数的值相等：

$\sin(\alpha+k\cdot 2\pi)=\sin\alpha$，

$\cos(\alpha+k\cdot 2\pi)=\cos\alpha$，

$\tan(\alpha+k\cdot 2\pi)=\tan\alpha$，其中 $k\in\mathbf{Z}$.

·说明

(1)角 α 是任意角，k 是任意整数；

(2)等号两边为同一种三角函数；

(3)公式左边为 $\alpha+k\cdot 2\pi(k\in\mathbf{Z})$，右边为 α

(4)其作用是将求任意角的三角函数值转化为求 $0\sim 2\pi$ 角的三角函数值.

5.2.2 同角三角函数的基本关系

知识点1 同角三角函数的基本关系

1.同角三角函数的基本关系式

(1)平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

(2)商数关系：$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}，k\in\mathbf{Z}\right)$.

2.同角三角函数基本关系式的变形

(1)$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 的变形公式：

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$；$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$.

(2)$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$的变形公式：

$\sin\alpha=\cos\alpha\tan\alpha$；$\cos\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$.

·说明

(1)基本关系成立的前提是“同角”，它揭示了同角而不同名的三角函数关系.

(2)在同角三角函数基本关系中，只要知道正弦、余弦、正切中任意一个值，就可以求出其余两个.

(3)在应用平方关系时，一定要先确定角 α 的终边位置是否给出，若没有给出，应分情况讨论开方结果的正负.

(4)应用正切公式时，还要看 $\tan\alpha$ 是否有意义.

「名师指津」

1.三角式化简中常用的方法

(1)化切为弦，即把非正弦、余弦的函数都化为正弦、余弦函数，从而减少函数名称，达到化简的目的.

(2)对于含有根号的，常把根号下化成完全平方式，然后去根号达到化简的目的.

(3)化简含高次的三角函数式，往往借助于因式分解，或构造 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，以降低函数次数，达到化简的目的.

2.利用同角三角函数基本关系式求值的有关技巧

(1)关于 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 的齐次式，可以通过分子、分母同除以 $\cos\alpha$ 或 $\cos^2\alpha$ 转化为关于 $\tan\alpha$ 的式子后再求值.

(2)注意式中不含分母，可以视分母为 1，灵活地进行“1”的代换，由 $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ 代换后，再同除以 $\cos^2\alpha$，构造出关于 $\tan\alpha$ 的代数式.

(3)$\sin\alpha+\cos\alpha$，$\sin\alpha-\cos\alpha$，$\sin\alpha\cos\alpha$ 三个式子中，已知其中一个，可以求其他两个，即“知一求二”，它们之间的关系是 $(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.求 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 或 $\sin\alpha-\cos\alpha$ 的值，要注意根据角的终边位置判断它们的符号.

5.3　诱导公式

知识点1　诱导公式二～六

(1)公式二：$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$，$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$，$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$.

(2)公式三：$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$，$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$，$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$.

(3)公式四：$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$，$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$，$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$.

(4)公式五：$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$；

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$.

(5)公式六：$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$；

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$.

·说明

(1)$\alpha+2k\pi$，$-\alpha$，$(\pi\pm\alpha)$的三角函数值，在绝对值上等于α的同名函数值，正负取决于把α看成锐角时原函数值的符号.即“函数名不变，符号看象限.”

(2)对于正弦函数与余弦函数的诱导公式，α可以为任意角；对于正切函数的诱导公式，α的终边不能落在y轴上，即$\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

(3)公式一的作用是将任意角转化为$0\sim2\pi$的角求值；

公式二的作用是将$0\sim2\pi$的角转化为$0\sim\pi$的角求值；

公式三的作用是将负角转化为正角求值；

公式四的作用是将$\frac{\pi}{2}\sim\pi$的角转化为$0\sim\frac{\pi}{2}$的角求值；

「名师指津」

利用诱导公式求任意角的三角函数值的步骤

(1)“负化正”：用公式一或三来转化.

(2)“大化小”：用公式一将角化为0°到360°间的角.

(3)“角化锐”：用公式二或四将大于90°的角转化为锐角.

(4)“锐求值”：得到锐角的三角函数后再求值.

(5)常见的互余关系有：$\frac{\pi}{3}-\alpha$与$\frac{\pi}{6}+\alpha$；$\frac{\pi}{3}+\alpha$与$\frac{\pi}{6}-\alpha$；$\frac{\pi}{4}+\alpha$与$\frac{\pi}{4}-\alpha$等.

(6)常见的互补关系有：$\frac{\pi}{3}+\theta$与$\frac{2\pi}{3}-\theta$；$\frac{\pi}{4}+\theta$与$\frac{3\pi}{4}-\theta$等.

(7)$\triangle ABC$中常用的一些关系：$\sin(A+B)=\sin C$，$\cos(A+B)=-\cos C$，$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$，$\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$.

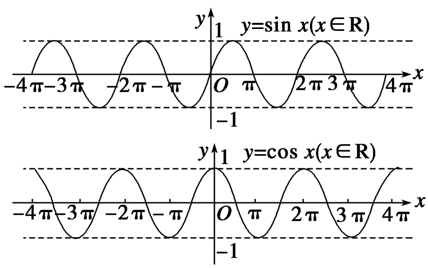
5.4 三角函数的图象与性质

5.4.1 正弦函数、余弦函数的图象

知识点 1 正弦曲线、余弦曲线

正弦曲线、余弦曲线：

正弦函数 $y=\sin x(x\in\mathbf{R})$ 和余弦函数 $y=\cos x(x\in\mathbf{R})$ 的图象分别叫正弦曲线和余弦曲线.



·说明

余弦曲线与正弦曲线形状相同，但在同一坐标系下的位置不同. 由 $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 可知，由 $y=\cos x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度可得 $y=\sin x$ 的图象. 并且平移的方法不唯一，如也可向左平移 $\frac{3\pi}{2}$ 个单位长度，得到 $y=\sin x$ 的图象.

知识点 2 正弦函数、余弦函数的图象画法

1.正弦函数图象的画法

(1)单位圆法：

①利用单位圆画出 $y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$ 的图象；

②将图象向左、右平行移动(每次 2π 个单位长度).

(2)五点法：

①画出正弦曲线在 $[0,2\pi]$ 上的图象的五个关键点：$(0,0)$，$\left(\frac{\pi}{2},1\right)$，$(\pi,0)$，$\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$，$(2\pi,0)$，用光滑的曲线连接；

②将所得图象向左、向右平行移动(每次 2π 个单位长度).

2.余弦函数图象的画法

(1)要得到 $y=\cos x$ 的图象，只需把 $y=\sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度即可，这是由于 $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

(2)“五点法”画余弦曲线 $y=\cos x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图象时，所取的五个关键点分别为 $(0,1)$，$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$，$(\pi,-1)$，$\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$，$(2\pi,1)$，再用光滑的曲线连接.

·说明

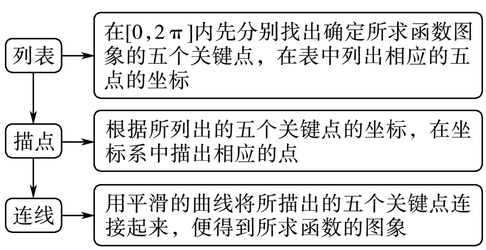
(1)作正弦函数、余弦函数的图象时，函数的自变量要用弧度制，以保证自变量与函数值都为实数.

(2)在精确度要求不高的前提下，采用“五点法”是一种实用、高效的作图方法，需要注意这五点要用平滑的曲线连接，而不能用线段连接.

(3)五个关键点是五点作图法作图的关键，要熟记并区分正弦函数、余弦函数图象中的五个关键点.

「名师指津」

作形如 $y=a\sin x+b$(或 $y=a\cos x+b$)，$x\in[0,2\pi]$ 的图象的三个步骤.



5.4.2　正弦函数、余弦函数的性质

知识点 1　周期性

1.函数的周期性

(1)一般地,设函数 $f(x)$的定义域为 D,如果存在一个非零常数 T,使得对每一个 $x\in D$,都有 $x+T\in D$,且 $f(x+T)=f(x)$,那么函数 $f(x)$就叫做周期函数,非零常数 T 叫做这个函数的周期.

(2)如果在周期函数 $f(x)$的所有周期中存在一个最小的正数,那么这个最小正数就叫做$f(x)$的最小正周期.

2.正弦函数、余弦函数的周期性

由 $\sin(x+2k\pi)=\sin x$,$\cos(x+2k\pi)=\cos x(k\in\mathbf{Z})$知,$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 都是周期函数,$2k\pi(k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq0)$都是它们的周期,且它们的最小正周期都是 2π.

·说明

(1)定义中 x 取定义域中每一个值,若只对某些 x 有 $f(x+T)=f(x)$,则 T 不是 $f(x)$的周期.

(2)周期函数的周期不唯一,若 T 是函数 $f(x)$的最小正周期,则 $kT(k\in\mathbf{Z},k\neq0)$.

(3)并不是所有的周期函数都存在最小正周期,如常数函数 $f(x)=c(c$ 是常数),所有的非零实数 T 都是它的周期,而最小正数是不存在的,所以常数函数没有最小正周期.

(4)函数周期的若干形式:

①若 $f(x+t)=f(x)$,则函数周期为 t;

②若 $f(x+t)=-f(x)$,则函数周期为 $2t$;

③若 $f(x+t)=\dfrac{1}{f(x)}$,则函数周期为 $2t$.

「名师指津」

求三角函数的周期的两种方法

(1)利用周期函数的定义求三角函数的周期,关键是抓住变量“x”增加到“$x+T$”时函数值重复出现,则可得 T 是函数的一个周期.

(2)常见三角函数周期的求法:

①求形如函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$,$\omega\neq0$(或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$,$\omega\neq0$)的周期,通常利用公式 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

②形如 $y=|A\sin\omega x|$(或 $y=|A\cos\omega x|$)的周期,常结合图象法来求解.

知识点 2　正弦函数、余弦函数的奇偶性

正弦函数、余弦函数的奇偶性

(1)对于 $y=\sin x$,$x\in\mathbf{R}$,恒有 $\sin(-x)=-\sin x$,所以正弦函数 $y=\sin x$ 是奇函数,正弦曲线关于原点对称.

(2)对于 $y=\cos x$,$x\in\mathbf{R}$,恒有 $\cos(-x)=\cos x$,所以余弦函数 $y=\cos x$ 是偶函数,余弦曲线关于 y 轴对称.

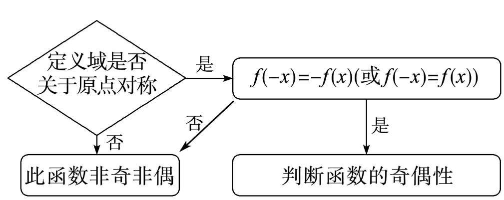
·说明

(1)判断函数奇偶性的前提是定义域关于原点对称.

(2)函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A\neq0,\omega\neq0)$是奇函数的充要条件是 $\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,是偶函数的充要条件是 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

「名师指津」

判断函数奇偶性的方法



知识点 3　单调性

1.正弦函数的单调性

在 $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$上单调

递增；在$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$上单调递减.

2.余弦函数的单调性

在$[-\pi+2k\pi,2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上单调递增；在$[2k\pi,\pi+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上单调递减.

·说明

(1)k取$\mathbf{Z}$内的每一个值都对应着一个增区间或减区间，这些区间是断开的.

(2)正弦函数、余弦函数不是定义域内的单调函数.

「名师指津」

求解与正弦函数、余弦函数有关的单调区间的技巧

(1)数形结合：结合正弦、余弦函数的图象，熟记它们的单调区间.

(2)整体代换：确定函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\omega>0)$的单调区间的方法，采用"换元法"整体代换.将$\omega x+\varphi$看作一个整体，可令"$z=\omega x+\varphi$"，即通过求$y=A\sin z$的单调区间而求出函数的单调区间.若$\omega<0$，则可利用诱导公式将x的系数转化为正数.需将最终结果写成区间形式.

(3)在求三角函数的单调区间时，一定要注意复合函数的有关知识，忽略复合函数的条件，是在解题中常犯的错误.

知识点4 正弦函数、余弦函数的最值

1.正弦函数的最值

当$x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，$y_{\min}=-1$；

当$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，$y_{\max}=1$.

2.余弦函数的最值

当$x=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$时，$y_{\min}=-1$；

当$x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，$y_{\max}=1$.

「名师指津」

常见的三角函数求值域或最值的类型

(1)形如$y=\sin(\omega x+\varphi)$的三角函数，令$t=\omega x+\varphi$.根据题目中x的取值范围，求出t的取值范围，再利用三角函数的单调性、有界性求出$y=\sin t$的最值(值域).

(2)形如$y=a\sin^2x+b\sin x+c(a\neq0)$的三角函数，可先设$t=\sin x$.将函数$y=a\sin^2x+b\sin x+c(a\neq0)$化为关于$t$的二次函数$y=at^2+bt+c(a\neq0)$.根据二次函数的单调性求值域(最值).

(3)对于形如$y=a\sin x$(或$y=a\cos x$)的函数的最值还要注意对a的讨论.

知识点5 正弦函数、余弦函数的对称性

1.正弦函数的对称性

(1)对称轴：$x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$；

(2)对称中心：$(k\pi,0),k\in\mathbf{Z}$.

2.余弦函数的对称性

(1)对称轴：$x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$；

(2)对称中心：$\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,0\right),k\in\mathbf{Z}$.

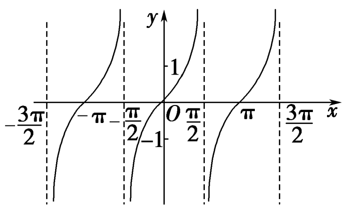
·说明

(1)正弦函数、余弦函数的图象都是中心对称图形，对称中心有无数个，它们是图象与x轴的交点.

(2)正弦函数、余弦函数的图象都是轴对称图形，对称轴有无数条，它们分别是过图象最高点或最低点且垂直于x轴的直线.

5.4.3　正切函数的性质与图象

知识点　正切函数 $y=\tan x$ 的图象和性质

图象	
定义域	$\left\{x\,\middle\vert\, x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$
值域	$(-\infty,+\infty)$
奇偶性	奇函数
单调性	在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$ 上单调递增
周期性	最小正周期为 $T=\pi$
对称性	对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2},0\right)(k\in\mathbf{Z})$

·说明

(1)正切曲线在 x 轴上方的部分下凸，在 x 轴下方的部分上凸，画图时要注意曲线的光滑性和凸凹性.

(2)正切曲线被相互平行的直线 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 分割成无穷多支曲线，这些平行线称为正切曲线的渐近线.

(3)正切函数在定义域上不单调，但在每一个开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$ 内单调递增.

(4)正切函数无单调递减区间，在每一个区间内都是递增的，并且每一个单调区间均为开区间.

「名师指津」

正切型函数定义域、值域的求解：

(1)求正切型函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)(A\neq 0,\omega>0)$ 的定义域时，要将“$\omega x+\varphi$”视为一个“整体”.令 $\omega x+\varphi\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 x.

(2)对于 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$，可以把 $\omega x+\varphi$ 看成整体，结合图象，利用单调性求值域.

(3)与 $y=\tan x$ 相关的二次函数，可以把 $\tan x$ 看成整体，利用配方法求值域

5.5. 三角恒等变换

5.5.1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式

知识点 1 两角和与差的正弦、余弦、正切公式

(1)$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$.

(2)$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$.

(3)$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$.

·说明

(1)两角和与差的正弦、余弦、正切公式的结构特征和符号特点及关系：$C_{(\alpha\pm\beta)}$同名相乘，符号反；$S_{(\alpha\pm\beta)}$异名相乘，符号同；$T_{(\alpha\pm\beta)}$分子同，分母反.

(2)几组公式间的关系

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{matrix}S_{(\alpha+\beta)}\\C_{(\alpha+\beta)}\end{matrix}} \arrow[r, "以-\beta代替\beta"] \arrow[d, "相除"] & \boxed{\begin{matrix}S_{(\alpha-\beta)}\\C_{(\alpha-\beta)}\end{matrix}} \arrow[d, "相除"] \\
\boxed{T_{(\alpha+\beta)}} \arrow[r, "以-\beta代替\beta"] & \boxed{T_{(\alpha-\beta)}}
\end{tikzcd}$$

「名师指津」

应用三角恒等变换公式化简求值的策略

(1)首先要记住公式的结构特征和符号变化规律.例如两角差的余弦公式可简记为："同名相乘，符号反".

(2)注意与同角三角函数基本关系、诱导公式的综合应用.

(3)注意配方法、因式分解和整体代换思想的应用.

知识点 2 二倍角的正弦、余弦、正切公式

(1)$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

(2)$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$.

(3)$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

·说明

(1)二倍角是相对的，例如，$\dfrac{\alpha}{2}$是$\dfrac{\alpha}{4}$的二倍角，3α是$\dfrac{3\alpha}{2}$的二倍角

(2)常用公式

①降幂扩角公式：$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$，$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

②升幂公式：$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$，$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$.

③公式变形：$\tan\alpha\pm\tan\beta=\tan(\alpha\pm\beta)(1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta)$.

④辅助角公式：$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\varphi)$，

其中$\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

⑤万能公式：$\sin 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$；$\cos 2\alpha=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$.

(3)常见的配角技巧

$2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$，$\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$，$\beta=\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\dfrac{\alpha-\beta}{2}$，$\alpha=\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\alpha-\beta}{2}$，$\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)-\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)$，$\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)+\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\alpha}{2}=2\times\dfrac{\alpha}{4}$等.

「名师指津」

已知三角函数值求角的解题步骤

(1)根据条件确定所求角的范围；

(2)确定待求角的某种三角函数值，为防止增解，最好选取在上述范围内单调的三角函数；

(3)结合三角函数值及角的范围求角.

5.5.2　简单的三角恒等变换

知识点1　降幂公式

(1)$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$.

(2)$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$.

(3)$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

·说明

(1)降幂公式其实是二倍角公式的变形形式,是将二倍角公式中的α换为$\frac{\alpha}{2}$.

(2)公式(1)(2)中的角为任意角,公式(3)中的角是使$\tan^2\frac{\alpha}{2}$有意义的角α.

知识点2　半角公式

$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$,

$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$,

$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$.

·说明

(1)半角公式中的正弦、余弦公式实际上是由二倍角的余弦公式变形得到的.

(2)半角公式中出现了求$\frac{\alpha}{2}$的正弦、余弦、正切的另一种方式,即只需知道$\cos\alpha$的值及相应的α的条件,$\sin\frac{\alpha}{2}$,$\cos\frac{\alpha}{2}$,$\tan\frac{\alpha}{2}$便可求出.

(3)半角公式根号前符号的确定规律如下:

①当给出的角是某一象限的角时,可根据下表确定半角的函数值的符号

α	$\frac{\alpha}{2}$	$\sin\frac{\alpha}{2}$	$\cos\frac{\alpha}{2}$	$\tan\frac{\alpha}{2}$
第一象限	第一、三象限	+,−	+,−	+
第二象限	第一、三象限	+,−	+,−	+
第三象限	第二、四象限	+,−	−,+	−
第四象限	第二、四象限	+,−	−,+	−

②当给出α的范围,可先求出$\frac{\alpha}{2}$的范围,再根据$\frac{\alpha}{2}$的范围来确定各三角函数值的符号.

③若没有给出确定符号的条件,则在根号前保留正、负两个符号.

「名师指津」

1.利用半角公式求值的思路

(1)看角:若已知三角函数式中的角是待求三角函数式中角的两倍,则常常借助半角公式求解.

(2)明范围:由于半角公式求值常涉及符号问题,因此求解时务必依据角的范围,求出相应半角的范围.

(3)选公式:涉及半角公式的正切值时,常用$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$;涉及半角公式的正弦、余弦值时,常先利用$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$,$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$计算.

(4)下结论:结合(2)求值.

2.三角函数式化简的要求、思路和方法

(1)化简的要求:①能求出值的应求出值;②尽量使三角函数种数最少;③尽量使项数最少;④尽量使分母不含三角函数;⑤尽量使被开方数不含三角函数.

(2)化简的思路:对于和式,基本思路是降次、消项和逆用公式;对于三角分式,基本思路是分子与分母约分或逆用公式;对于二次根式,注意二倍角公式的逆用.另外,还可以用切化弦、变量代换、角度归一等方法.

5.6 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$

知识点1 A,ω,φ 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的影响

(1)φ 对函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 图象的影响：

$y=\sin x$ 的图象 → $\varphi>0$ 时向左 / $\varphi<0$ 时向右 → 平移 $|\varphi|$ 个单位长度 → $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象

(2)ω 对函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的影响：

$y=\sin(x+\varphi)$ 的图象上所有点的横坐标 → $\omega>1$ 时缩短到 / $0<\omega<1$ 时伸长到 → 原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍 → $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象

(3)A 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的影响：

$y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象上所有点的纵坐标 → $A>1$ 时伸长到 / $0<A<1$ 时缩短到 → 原来的 A 倍 → $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象

· 说明

(1)确定函数 $y=\sin x$ 经过平移变换后图象对应的解析式，关键是明确左右平移的方向，即按“左加右减”的原则进行.

(2)已知两个函数解析式判断其图象间的平移关系时，首先要将解析式化为同名三角函数形式，然后再确定平移方向和单位.

(3)对于函数 $y=\sin x$ 的图象，若横坐标扩大到原来的 $\omega(\omega>1)$ 倍，则得到函数 $y=\sin\frac{x}{\omega}$ 的图象；若纵坐标伸长到原来的 $A(A>1)$ 倍，则得到函数 $y=A\sin x$ 的图象. 两者可理解为横向伸缩是反比例伸缩变换，纵向伸缩是正比例伸缩变换.

知识点2 由正弦曲线 $y=\sin x$ 到函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的图象的变换过程

由函数 $y=\sin x$ 的图象通过变换得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的图象的两种方法：

方法一

步骤1：画出 $y=\sin x$ 的图象

向左($\varphi>0$)或向右($\varphi<0$) 平移 $|\varphi|$ 个单位长度

步骤2：得到 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象

横坐标变为 原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍

步骤3：得到 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象

纵坐标变为 原来的 A 倍

步骤4：得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象

方法二

步骤1：画出 $y=\sin x$ 的图象

横坐标变为 原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍

步骤2：得到 $y=\sin\omega x$ 的图象

向左($\varphi>0$)或向右($\varphi<0$) 平移 $\frac{|\varphi|}{\omega}$ 个单位长度

步骤3：得到 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象

纵坐标变为 原来的 A 倍

步骤4：得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象

· 说明

先平移变换(左右平移)再周期变换(伸缩变换)，左右平移的量是 $|\varphi|$ 个单位长度，而先周期变换(伸缩变换)再平移变换(左右平移)，左右平移的量是 $\frac{|\varphi|}{\omega}$ 个单位长度.

知识点3 用“五点法”作 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的图象

用“五点法”作 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的图象的步骤：

第一步：列表.

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{\pi}{2\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{\pi}{\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{3\pi}{2\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$
y	0	A	0	$-A$	0

第二步：在同一坐标系中描出各点.

第三步：用光滑曲线连接这些点，形成图象.

「名师指津」

由图象确定函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B(A>0,\omega>0)$ 的解析式的步骤

(1)求 A,B，确定函数的最大值 M 和最小值 m，则 $A=\frac{M-m}{2}$，$B=\frac{M+m}{2}$.

(2)求 ω，确定函数的周期 T，则 $\omega=\frac{2\pi}{T}$.

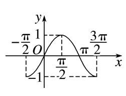
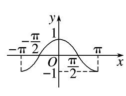
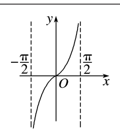
(3)求 φ,常用方法有:

①代入法:把图象上的一个已知点的坐标代入(此时要注意该点在递增区间上还是在递减区间上)或把图象的最高点(最低点)的坐标代入.

②五点法:确定 φ 值时,往往以寻找“五点法”中的特殊点作为突破口.

知识点 4　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的性质

正弦函数、余弦函数、正切函数的图象与性质(下表中 $k\in\mathbf{Z}$)

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
图象			
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\left\{x\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbf{R}$
周期性	2π	2π	π
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
单调递增区间	$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$	$[2k\pi-\pi,2k\pi]$	$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$
单调递减区间	$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$	$[2k\pi,2k\pi+\pi]$	
对称中心	$(k\pi,0)$	$\left(k\pi+\frac{\pi}{2},0\right)$	$\left(\frac{k\pi}{2},0\right)$
对称轴方程	$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$	$x=k\pi$	

·说明

(1)函数的周期与图象的对称性之间的关系:

①正弦曲线或余弦曲线相邻两对称中心、相邻两对称轴之间的距离是$\frac{1}{2}$周期,相邻的对称中心与对称轴之间的距离是$\frac{1}{4}$周期.

②正切曲线相邻两对称中心之间的距离是$\frac{1}{2}$周期.

(2)对称轴(对称中心)与函数值的关系:

设 $y=f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$,$g(x)=A\cos(\omega x+\varphi)$,$x=x_0$ 是对称轴方程$\Leftrightarrow f(x_0)=\pm A$,$g(x_0)=\pm A$;$(x_0,0)$是对称中心$\Leftrightarrow f(x_0)=0$,$g(x_0)=0$.

「名师指津」

1.(1)三角函数周期的一般求法:

①公式法;

②不能用公式求周期的函数时,可考虑用图象法或定义法求周期.

(2)对于可化为 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$(或 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)$)形式的函数,如果求 $f(x)$的对称轴,只需令 $\omega x+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$(或令 $\omega x+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$),求 x 即可;如果求 $f(x)$的对称中心的横坐标,只需令 $\omega x+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $\left(\text{或令 }\omega x+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})\right)$,求 x 即可.

(3)对于可化为 $f(x)=A\tan(\omega x+\varphi)$形式的函数,如果求 $f(x)$的对称中心的横坐标,只需令 $\omega x+\varphi=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,求 x 即可.

2.已知三角函数解析式求单调区间

求形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$(其中 $\omega>0$)的单调区间时,要视“$\omega x+\varphi$”为一个整体,通过解不等式求解.如果 $\omega<0$,可借助诱导公式将 ω 化为正数,再进行求解.

5.7 三角函数的应用

知识点1 $y=A\sin(\omega x+\varphi),x\in[0,+\infty)$ $(A>0,\omega>0)$中各物理量的意义

物理学中,当 $y=A\sin(\omega x+\varphi),x\in[0,+\infty)(A>0,\omega>0)$表示一个简谐运动时,各量就有了物理意义:

(1)A 是简谐运动的振幅,它是做简谐运动的物体离开平衡位置的最大距离;

(2)$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$是简谐运动的周期,它是做简谐运动的物体往复运动一次所需要的时间;

(3)$f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega}{2\pi}$是简谐运动的频率,它是做简谐运动的物体在单位时间内往复运动的次数;

(4)$\omega x+\varphi$ 称为相位;

(5)$x=0$ 时的相位 φ 称为初相.

知识点2 利用三角函数模型解决实际问题的一般步骤

第一步:阅读理解,审清题意.

读题要做到逐字逐句,读懂题中的文字,理解题目所反映的实际背景,在此基础上分析出已知什么、求什么,从中提炼出相应的数学问题.

第二步:收集、整理数据,建立数学模型.

根据收集到的数据找出变化规律,运用已掌握的三角函数知识、物理知识及相关知识建立关系式,将实际问题转化为一个与三角函数有关的数学问题,即建立三角函数模型,从而实现实际问题的数学化.

第三步:利用所学的三角函数知识对得到的三角函数模型予以解答.

第四步:将所得结论转译成实际问题的答案.

·说明

三角函数模型在实际中的三种应用:

(1)三角函数在物体简谐运动、电流强度问题中的应用:物体的简谐运动是一种常见运动,它的特点是周而复始.电流强度随时间的变化具有一定的周期性,因此可以用三角函数来模拟这种运动状态.

(2)三角函数在圆周运动问题中的应用:物体的旋转显然具有周期性,因此可以用三角函数来模拟这种运动状态.

(3)三角函数在生活中周期性变化问题中的应用:海水的潮汐现象、日常生活中温度的变化、季节的更替等也具有周期性,因此可以用三角函数来模拟.

知识点3 函数拟合获得模型的方法

(1)根据原始数据绘出散点图;

(2)通过观察散点图,画出与其“最贴近”的直线或曲线或拟合线;

(3)根据所学函数知识,求出拟合直线或拟合曲线的函数解析式;

(4)利用函数解析式,根据条件对所求问题进行预测和控制,以便为决策或管理提供依据.

「名师指津」

三角函数模型的建立程序