参考答案

专题一　反比例函数

第 1 讲　反比例函数的图象和性质

例一　B　【解析】∵反比例函数的图象分布在第二、四象限，∴$k<0$．易知一次函数 $y=kx+2$ 的图象与 y 轴交于正半轴，则一次函数 $y=kx+2$ 的图象经过第一、二、四象限．故选 B.

【点拨】本题的求解运用了数形结合的思想，主要体现为两个方面：一是由"形"定"数"，即根据反比例函数的图象确定 k 的符号；二是由"数"定"形"，即根据 k 的符号确定一次函数的图象的分布情况.

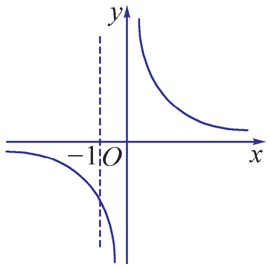
变式训练一

1. A　【解析】∵在双曲线 $y=-\frac{6}{x}$ 中，$k=-6<0$，∴双曲线 $y=-\frac{6}{x}$ 的两支分别在第二、四象限，可排除③④．由图可知，①经过（-3，2），且 $2=-\frac{6}{-3}$，满足双曲线 $y=-\frac{6}{x}$ 的解析式．故①为双曲线 $y=-\frac{6}{x}$ 的一支.

2. 解：由图可知，反比例函数 $y=\frac{m+2}{x}$（$x<0$）的图象在第二象限.
∴$m+2<0$.
解得 $m<-2$.
即实数 m 的取值范围为 $m<-2$.

例二　解：（1）∵$k>0$，
∴$-k<0$.
当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时，y_1 随 x 的增大而减小，y_2 随 x 的增大而增大.
∴当 $x=2$ 时，y_1 的最大值为 $\frac{k}{2}=a$．①
当 $x=2$ 时，y_2 的最小值为 $-\frac{k}{2}=a-4$．②
由①②，解得 $a=2$，$k=4$.
（2）圆圆的说法不正确．理由如下：
（方法一）当 $x=m$ 时，$p=y_1=\frac{k}{m}$.
当 $x=m+1$ 时，$q=y_1=\frac{k}{m+1}$.
∴$p-q=\frac{k}{m}-\frac{k}{m+1}=\frac{k}{m(m+1)}$.
当 $m<-1$ 时，$m+1<0$，
则 $p-q=\frac{k}{m(m+1)}>0$.
∴$p>q$.
当 $-1<m<0$ 时，$m+1>0$，
则 $p-q=\frac{k}{m(m+1)}<0$.
∴$p<q$.
当 $m>0$ 时，$m+1>0$，
则 $p-q=\frac{k}{m(m+1)}>0$，
∴$p>q$.
综上所述，圆圆的说法不正确.

（方法二）结合 $y_1=\frac{k}{x}$ 的图象，如下图所示.



当 $m<-1$ 时，$m+1<0$，

此时点（m，p），（$m+1$，q）均在第三象限内的图象上.

$\because y_1=\frac{k}{x}$ 在第三象限内随 x 增大而减小，

$\therefore p>q$.

当 $-1<m<0$ 时，$m+1>0$，

此时点（m，p）在第三象限内的图象上，（$m+1$，q）在第一象限内的图象上.

$\therefore p<0$，$q>0$.

$\therefore p<q$.

当 $m>0$ 时，$m+1>0$，

此时点（m，p），（$m+1$，q）均在第一象限内的图象上.

$\because y_1=\frac{k}{x}$ 在第一象限内随 x 增大而减小，

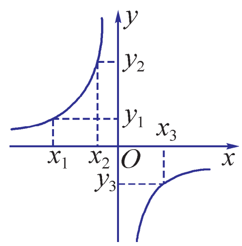
$\therefore p>q$.

综上所述，圆圆的说法不正确.

【点拨】本题求解的关键是熟练运用反比例函数的性质. 在（2）的方法二中，先确定函数值 p，q 所在的象限，再根据函数图象所在的象限与走势进行大小比较，与方法一相比，减少了运算量，体现了数形结合的优越性.

变式训练二

1. D　**【解析】**$\because k=-a^2-1=-(a^2+1)<0$，$\therefore$反比例函数的图象在第二、四象限. 画出函数 $y=\frac{-a^2-1}{x}$ 的大致图象，如下图所示. $\because x_1<x_2<0<x_3$，由图象易知，$y_3<y_1<y_2$.



2. **解：**（1）设反比例函数的解析式为 $y=\frac{k}{x}$，

$\because$双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 经过点 A（-4，-3），

$\therefore k=-4\times(-3)=12$.

$\therefore$反比例函数的解析式为 $y=\frac{12}{x}$.

$\because$双曲线 $y=\frac{12}{x}$ 经过点 B（$2m$，y_1），C（$6m$，y_2），

$\therefore y_1=\frac{12}{2m}=\frac{6}{m}$，

$y_2=\frac{12}{6m}=\frac{2}{m}$.

$\because y_1-y_2=4$，

$\therefore \frac{6}{m}-\frac{2}{m}=4$.

解得 $m=1$.

(2) 由 (1) 可知 $m=1$.

∴点 B (2, 6), C (6, 2).

∴D (2, 2), E (2, 0),

$BD=6-2=4$.

∵$\triangle PBD$ 的面积是 8,

∴$\frac{1}{2}BD\cdot PE=8$,

即$\frac{1}{2}\times4\cdot PE=8$.

解得 $PE=4$.

设点 P 的坐标为 $(x, 0)$,

∴$|x-2|=4$.

解得 $x_1=-2$ 或 $x_2=6$.

∴点 P 的坐标为 $(-2, 0)$或 $(6, 0)$.

例三 **解:** (1) ∵反比例函数的图象关于原点对称,

∴该函数图象的另一支在第三象限.

∴$m-7>0$.

解得 $m>7$.

(2) ∵点 B 与点 A 关于 x 轴对称,且 $\triangle OAB$ 的面积为 6,

∴$\triangle OAC$ 的面积为$\frac{1}{2}\times6=3$.

设 $A\left(x_A, \frac{m-7}{x_A}\right)$,

则$\frac{1}{2}x_A\cdot\frac{m-7}{x_A}=3$.

解得 $m=13$.

【点拨】本题 (1) 根据反比例函数图象的对称性确定另一支图象所在的象限,再确定 m 的取值范围. (2) 根据点的对称性得到$\triangle OAC$ 的面积,再结合 k 的几何意义列出关于 m 的方程进行求解.

变式训练三

1. $\frac{9}{2}\pi$ **【解析】**∵双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与 $y=-\frac{1}{x}$的图象关于坐标轴对称,根据圆的对称性,把第二象限和第四象限的阴影部分分别拼到第一象限和第三象限的空白部分中,可以得到阴影部分就是两个扇形,并且这两个扇形的圆心角都为 $90°$,半径为 3.

∴$S_{阴影}=2\times\frac{1}{4}\pi\times3^2=\frac{9}{2}\pi$.

2. **解:** 把 $P(2a, a)$ 代入 $y=\frac{2}{x}$,得 $a=\frac{2}{2a}$.

解得 $a=1$ 或 $a=-1$.

∵点 P 在第一象限,

∴$a=1$.

∴点 P 的坐标为 (2, 1).

∴正方形的边长为 $2-(-2)=4$.

∴$S_{正方形}=4\times4=16$.

∴由反比例函数的对称性,得 $S_{阴影}=\frac{1}{4}S_{正方形}=4$.

例四 (1) **证明:** ∵点 A, O, B 在$\odot P$ 上,且$\angle AOB=90°$,

∴线段 AB 为$\odot P$ 直径.

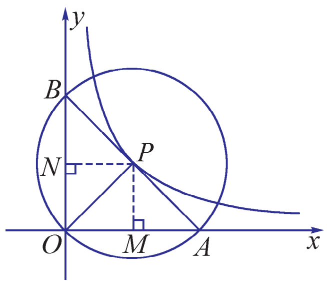
∵点 P 为$\odot P$ 的圆心,

∴点 P 为线段 AB 的中点.

(2) **解:** ∵点 P 为 $y=\frac{12}{x}$ $(x>0)$ 上任意一点,

设点 $P(m, n)$，则 $mn=12$.

过点 P 作 $PM\perp x$ 轴于点 M，$PN\perp y$ 轴于点 N，如下图所示.



∴点 $M(m, 0)$，点 $N(0, n)$，且 $OM=m$，$ON=n$.

∵$OP=AP$，

∴M 为 OA 中点，$OA=2m$.

∵$OP=BP$，

∴N 为 OB 中点，$OB=2n$.

∴$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=2mn=2\times12=24$.

【点拨】本题属于反比例函数与圆的综合运用，求解过程运用了数形结合的思想，主要体现为两方面：一是由"形"求"数"，即根据 P 为双曲线上的点，得到 $mn=12$，为利用整体思想求△AOB 的面积提供了条件．二是由"数"构"形"，即利用同圆的半径相等作辅助线 PM，PN，构造出满足等腰三角形"三线合一"的数学模型，从而得到线段 OA 与 OB 的长.

变式训练四

解：∵△ABC 是直角三角形，

∴当反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 经过点 A 时，k 最小；经过点 C 时，k 最大.

∴$k_{\min}=1\times2=2$，

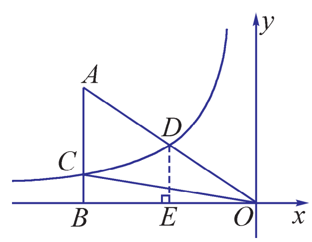
$k_{\max}=4\times4=16$.

∴$2\leqslant k\leqslant16$.

培优精练

1. $k_1<k_2<k_3$　**【解析】**由图可知，反比例函数 $y_1=\frac{k_1}{x}$（$x<0$）的图象在第二象限，则 $k_1<0$．反比例函数 $y_2=\frac{k_2}{x}$（$x>0$），$y_3=\frac{k_3}{x}$（$x>0$）的图象在第一象限，则 $k_2>0$，$k_3>0$．又 $y_3=\frac{k_3}{x}$ 的图象距原点较远，则 $0<k_2<k_3$．综上所述，$k_1<k_2<k_3$.

2. **解：**过点 D 作 x 轴的垂线，垂足为 E，如下图所示.



因为点 $A(-6, 4)$，点 D 为 OA 的中点，

所以点 $D(-3, 2)$.

根据反比例函数中 k 的几何意义，可知 $S_{\triangle BOC}=S_{\triangle DOE}=\frac{1}{2}\times|-3|\times2=3$.

因为 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times|-6|\times4=12$，

所以 $S_{\triangle AOC}=S_{\triangle AOB}-S_{\triangle BOC}=12-3=9$.

3. **解：**设⊙O 的半径为 r，

根据圆的对称性及反比例函数图象的

对称性，得$\frac{1}{4}\pi r^2=10\pi$.

解得 $r=2\sqrt{10}$.

∵点 P（$3a$，a）是反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k>0$）的图象与⊙O的一个交点，

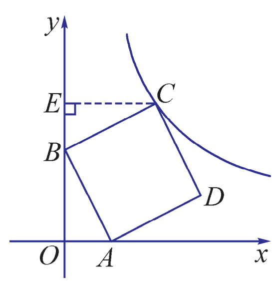
∴$3a^2=k$，$\sqrt{(3a)^2+a^2}=2\sqrt{10}$.

∴$k=12$.

∴反比例函数的解析式为$y=\frac{12}{x}$.

名卷压轴题

解：（1）过点 C 作 $CE\perp y$ 轴于点 E，如下图所示.



∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AB=BC$，$\angle ABC=90°$.

∴$\angle ABO+\angle CBE=90°$.

∵$\angle ABO+\angle BAO=90°$，

∴$\angle BAO=\angle CBE$.

在△AOB 和△BEC 中，

$$\begin{cases}\angle BAO=\angle CBE,\\ \angle AOB=\angle BEC=90°,\\ AB=BC,\end{cases}$$

∴△AOB≌△BEC（AAS）.

∴$BE=AO=OA=2$，

$CE=BO=OB=4$.

∴$OE=OB+BE=4+2=6$.

∴C（4，6）.

∵反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$x>0$）的图象经过点 C，

∴$k=4\times6=24$.

∴反比例函数的解析式为 $y=\frac{24}{x}$.

（2）点 B 在该反比例函数的图象上.

理由如下：

与（1）同理可得点 D（6，2）.

∵正方形 $ABCD$ 沿 x 轴向右平移得到正方形 $A'B'C'D'$，点 D'恰好落在反比例函数的图象上，

∴$y_{D'}=y_D=2$.

∵当 $y=2$ 时，$x=\frac{24}{2}=12$，

∴向右平移的距离为 $12-6=6$.

∴点 B（0，4）向右平移 6 个单位长度后得到 B'（6，4）.

∵在 $y=\frac{24}{x}$上，当 $x=6$ 时，$y=4$，

∴点 B'在该反比例函数的图象上.

第 2 讲　反比例函数与一次函数的综合应用

例一　B　**【解析】**∵$ab<0$，∴分两种情况：①当 $a>0$，$b<0$ 时，正比例函数 $y=ax$ 的图象过原点、第一、三象限；反比例函数 $y=\frac{b}{x}$的图象在第二、四象限，没有符合要求的选项．②当 $a<0$，$b>0$ 时，正比例函数 $y=ax$ 的图象过原点、第二、四象限；反比例函数 $y=\frac{b}{x}$的图象在第一、三象限．故

B选项正确.

【点拨】 本题求解的技巧是运用数形结合的方法，由于正比例函数图象的位置与 a 的符号有关，反比例函数图象的位置与 b 的符号有关，因此需要确定 a，b 的符号，即以“数”定“形”，分别得到两个函数图象的位置，对照各选项，则得到正确答案.

变式训练一

A　**【解析】** ①当 $k>0$ 时，一次函数 $y=-kx+k$ 的图象经过第一、二、四象限，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象在第一、三象限，故A选项的图象符合要求；②当 $k<0$ 时，一次函数 $y=-kx+k$ 的图象经过第一、三、四象限，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象在第二、四象限，没有符合要求的选项. 故选A.

例二　**解：**（1）∵点 A（1，2）在 $y=\frac{k_2}{x}$ 上，

∴$\frac{k_2}{1}=2$.

解得 $k_2=2$.

∵AD 垂直平分 OB，

∴B（2，0）.

∵点 A（1，2），B（2，0）在 $y=k_1x+b$ 上，

∴$\begin{cases}k_1+b=2,\\2k_1+b=0.\end{cases}$

解得$\begin{cases}k_1=-2,\\b=4.\end{cases}$

故直线的解析式为 $y=-2x+4$，

双曲线的解析式为 $y=\frac{2}{x}$.

（2）由题图易知，当 $x>0$ 且 $x\neq1$ 时，$\frac{k_2}{x}>k_1x+b$.

【点拨】 本题求解的技巧是运用数形结合的思想：一方面由“形”求“数”，即根据两函数图象相交于点 A，可知点 A 既在双曲线上又在直线上，则点 A 的坐标同时满足两个函数的解析式，由此利用待定系数法即可求得两个函数的解析式. 另一方面由“数”求“形”，即根据不等式“$\frac{k_2}{x}>k_1x+b$”得到“双曲线 $y=\frac{k_2}{x}$ 位于直线 $y=k_1x+b$ 的上方”，由此问题转化为分析函数图象的高低.

变式训练二

解：（1）由 $y=\frac{1}{2}x+1$，得

当 $x=0$ 时，$y=1$；

当 $y=0$ 时，$x=-2$.

∴点 A 的坐标为（-2，0），

点 C 的坐标为（0，1）.

∵点 P 在直线 $y=\frac{1}{2}x+1$ 上，

∴可设点 P 为$\left(m,\ \frac{1}{2}m+1\right)$.

∵$S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}AB\cdot PB=4$，

$\therefore \frac{1}{2}(2+m)\left(\frac{1}{2}m+1\right)=4$，

即 $m^2+4m-12=0$.

$\therefore m_1=-6$，$m_2=2$.

又$\because$点 P 在第一象限，

$\therefore m=2$.

$\therefore$点 P 的坐标为（2，2）.

（2）$\because$点 P 在双曲线 $y=\frac{k}{x}$上，

$\therefore k=xy=2\times2=4$.

$\therefore$双曲线的解析式为 $y=\frac{4}{x}$.

联立$\begin{cases} y=\frac{4}{x}, \\ y=\frac{1}{2}x+1, \end{cases}$

解得$\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=2, \end{cases}$或$\begin{cases} x_2=-4, \\ y_2=-1. \end{cases}$

$\therefore$直线与双曲线另一个交点 Q 的坐标为（-4，-1）.

例三　解：（1）将点 A（2，-4），B（-4，m）两点代入 $y=\frac{k}{x}$中，得

$k=2\times(-4)=-8$，

$m=\frac{-8}{-4}=2$.

$\therefore$反比例函数的解析式为 $y=-\frac{8}{x}$.

$\because m=2$，

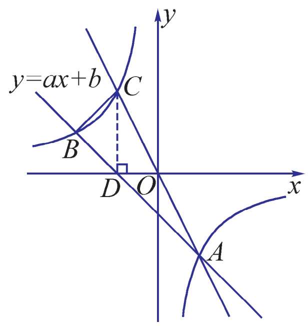
$\therefore B$（-4，2）.

将 A（2，-4）和 B（-4，2）代入 $y=ax+b$，得$\begin{cases} 2a+b=-4, \\ -4a+b=2. \end{cases}$

解得$\begin{cases} a=-1, \\ b=-2. \end{cases}$

$\therefore$一次函数的解析式为 $y=-x-2$.

（2）设 AB 与 x 轴交于点 D，连接 CD，如下图所示.



根据题意，点 A 与点 C 关于原点对称，得 C（-2，4）.

在 $y=-x-2$ 中，令 $x=-2$，得$y=0$.

$\therefore D$（-2，0）.

$\therefore CD\perp x$ 轴于点 D.

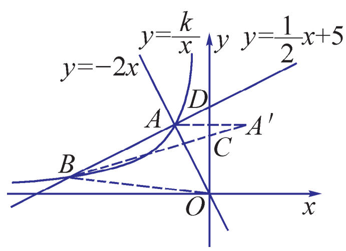
$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADC}+S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times4\times(2+2)+\frac{1}{2}\times4\times(4-2)=8+4=12$.

【点拨】本题求解的技巧运用了数形结合的思想，主要表现为两点：一是以“形”助“数”，在（2）中，根据直线 OA 与双曲线交于点 A，C，得到点 A，C 关于原点对称，由此得到点 C 的坐标. 二是以“数”解“形”，在（2）中求得点 D 后，根据点 C，D 的横坐标相等，得到 $CD\perp x$ 轴，进而利用“割补法”求$\triangle ABC$的面积.

变式训练三

1. B　**【解析】**联立$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+5, \\ y=-2x, \end{cases}$解得$\begin{cases} x=-2, \\ y=4. \end{cases}$$\therefore A$（$-2$，4）. $\because$反比例函

数的图象经过点 A，$\therefore k=-2\times 4=-8$，①正确．联立$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+5,\\ y=-\frac{8}{x},\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-2,\\ y=4,\end{cases}$或$\begin{cases}x=-8,\\ y=1,\end{cases}$$\therefore B(-8,1)$，②错误．连接 OB，设直线 $y=\frac{1}{2}x+5$ 与 y 轴交于点 D，如下图．令 $x=0$，则 $y=5$，$\therefore D(0,5)$，得 $OD=5$．$\therefore S_{\triangle AOB}=S_{\triangle BOD}-S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}\times 5\times|-8|-\frac{1}{2}\times 5\times|-2|=15$，③正确．作点 A 关于 y 轴的对称点 A'，连接 $A'B$，交 y 轴于点 C，如下图．此时 $\triangle ABC$ 的周长最小．$\because A(-2,4)$，$\therefore A'(2,4)$，设直线 $A'B$ 的解析式为 $y=ax+b$，把点 A'，B 代入，得直线 $A'B$ 的解析式为 $y=\frac{3}{10}x+\frac{17}{5}$．令 $x=0$，则 $y=\frac{17}{5}$，$\therefore$ 点 $C\left(0,\frac{17}{5}\right)$，④错误．综上所述，正确的个数为 2．故选 B.



2．解：(1) 将点 $A(1,3)$ 代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $k=xy=1\times 3=3$．

将点 $A(1,3)$ 代入 $y_2=\frac{3}{4}x+b$，得 $b=3-\frac{3}{4}\times 1=\frac{9}{4}$．

(2) 观察函数图象，得当 $x>0$ 时，不等式$\frac{3}{4}x+b\geqslant\frac{k}{x}$的解集为 $x\geqslant 1$．

(3) 由 (1) 可知 $y_2=\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}$．

令 $y_2=0$，得$\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}=0$．

解得 $x=-3$．

$\therefore$点 $C(-3,0)$．

令 $y_1=0$，得 $-x+4=0$．

解得 $x=4$．

$\therefore$点 $B(4,0)$．

$\therefore BC=4-(-3)=7$．

$\because$点 P 在 x 轴上，且 AP 把 $\triangle ABC$ 的面积分成 $1:2$ 两部分，

$\therefore$点 P 把线段 BC 分成 $1:2$ 两部分，

即 $BP=\frac{1}{3}BC$ 或 $BP=\frac{2}{3}BC$．

$\therefore BP=\frac{7}{3}$或 $BP=\frac{14}{3}$．

设点 P 的横坐标为 x，

则 $4-x=\frac{7}{3}$或 $4-x=\frac{14}{3}$．

解得 $x=\frac{5}{3}$或 $x=-\frac{2}{3}$．

故点 P 的坐标为$\left(\frac{5}{3},0\right)$或$\left(-\frac{2}{3},0\right)$．

例四　解：(1) $\because$直线 $y=x+5$ 过点 $C(1,n)$，

$\therefore n=1+5=6$．

$\therefore C(1,6)$．

把点 C 代入 $y_2=\frac{k}{x}$ $(x>0)$，

得 $k=1\times6=6$.

(2) $\because DE\parallel x$ 轴，

$\therefore$点 D，E 的纵坐标相同，设其纵坐标为 m.

$\because D$ 为线段 AB 上任意一点，$DE\parallel x$ 轴，且交反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ $(x<0)$ 于点 E，

$\therefore D$ $(m-5,\ m)$，$E\left(-\frac{2}{m},\ m\right)$.

$\because DE=2$，

$\therefore -\frac{2}{m}-(m-5)=2$.

整理，得 $m^2-3m+2=0$.

解得 $m=1$ 或 $m=2$.

$\therefore -\frac{2}{m}=-\frac{2}{1}=-2$ 或 $-\frac{2}{m}=-\frac{2}{2}=-1$.

$\therefore$点 E 的坐标为 $(-2,\ 1)$或 $(-1,\ 2)$.

【点拨】 本题的图形比较复杂，有两个双曲线（各一支）和一条直线，解题时需要把图形关系转化为数量关系，主要体现为两处：一是在（1）中，根据点 C 在直线 $y=x+5$ 上，求出 n 的值，得到点 C 的坐标. 同理，求出 k 值. 二是在（2）中，根据 $DE\parallel x$ 轴及点 D，E 所在的图形，分别用 m 表示出 D，E 的坐标，再根据 $DE=2$ 建立关于 m 的方程，即可解决问题.

变式训练四

解：（1）$\because$一次函数 $y=x+b$ 与反比例函数 $y=\frac{4}{x}$ $(x>0)$ 的图象交于 A $(1,\ n)$，

$\therefore n=\frac{4}{1}=4$.

$\therefore$点 A $(1,\ 4)$.

把 A $(1,\ 4)$ 代入 $y=x+b$，

得 $b=4-1=3$.

$\therefore$一次函数的解析式为 $y=x+3$.

把 B $(m,\ 5)$ 代入 $y=x+3$ 中，

得 $m=5-3=2$.

把 B $(2,\ 5)$ 代入 $y=\frac{k}{x}$ $(x>0)$ 中，

得 $k=2\times5=10$.

$\therefore$反比例函数的解析式为 $y=\frac{10}{x}$.

(2) $\frac{4}{x}<x+b<\frac{k}{x}$成立的 x 的取值范围为 $1<x<2$.

(3) 设直线 $y=x+3$ 与 y 轴交于点 C.

$\because$当 $x=0$ 时，$y=3$，

$\therefore C$ $(3,\ 0)$，即 $OC=3$.

$\therefore S_{\triangle AOB}=S_{\triangle BOC}-S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\times3\times2-\frac{1}{2}\times3\times1=\frac{3}{2}$.

例五 **解：**（1）$\because$反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$过点 M $(2,\ 8)$，

$\therefore k_2=2\times8=16$.

$\therefore$反比例函数的解析式为 $y=\frac{16}{x}$.

设 $N\left(m,\ \frac{16}{m}\right)$，$\because M$ $(2,\ 8)$，

$\therefore S_{\triangle OMB}=\frac{1}{2}\times2\times8=8.$

$\because S_{四边形OANM}=38,$

$\therefore S_{四边形ABMN}=S_{四边形OANM}-S_{\triangle OMB}=38-8=30.$

$\therefore \frac{1}{2}\times\left(8+\frac{16}{m}\right)\times(m-2)=30.$

解得 $m_1=8$，$m_2=-\frac{1}{2}$（舍去）.

$\therefore N$（8，2）.

$\because$一次函数 $y=k_1x+b$ 的图象经过点 M，N，

$\therefore \begin{cases}2k_1+b=8,\\8k_1+b=2.\end{cases}$

解得$\begin{cases}k_1=-1,\\b=10.\end{cases}$

$\therefore$一次函数的解析式为 $y=-x+10$.

（2）过第三象限作一条直线 l 与直线 MN 平行且在第三象限内与反比例函数 $y=\frac{16}{x}$的图象有且仅有唯一公共点，该点即为点 P，此时$\triangle PMN$ 的面积最小，如图所示.

设直线 l 的解析式为 $y=-x+n$，$n<0$，

则方程$-x+n=\frac{16}{x}$（$x<0$）有且仅有唯一解，即 $x^2-nx+16=0$（$x<0$）有两个相等的实数根.

$\therefore \Delta=n^2-4\times1\times16=0.$

解得 $n_1=-8$，$n_2=8$（舍去）.

$\therefore$直线 l 的解析式为 $y=-x-8$.

$\therefore -x-8=\frac{16}{x}$（$x<0$）.

解得 $x=-4$.

经检验，$x=-4$ 是原方程的解.

当 $x=-4$ 时，$y=\frac{16}{-4}=-4$.

$\therefore$点 P 的坐标为（-4，-4）.

过点 P 作 AN 的垂线，交 NA 的延长线于点 Q，交 y 轴于点 D，延长 MB 交 PQ 于点 C，如下图所示.

根据题意，得 $PD=4$，$DQ=8$，

$CD=2$，$MC=8+4=12$，

$NQ=2+4=6$，

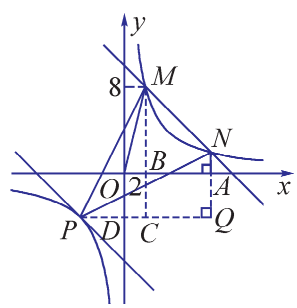
$PC=PD+CD=4+2=6$，

$CD=PQ-CD=8-2=6$，

$PQ=PD+DQ=4+8=12$.

$\therefore S_{\triangle PMN}=S_{\triangle MPC}+S_{梯形MCQN}-S_{\triangle PNQ}=\frac{1}{2}\times PC\times MC+\frac{1}{2}\times(MC+NQ)\times CQ-\frac{1}{2}\times NQ\times PQ=\frac{1}{2}\times6\times12+\frac{1}{2}\times(12+6)\times6-\frac{1}{2}\times6\times12=36+54-36=54.$

$\therefore$点 P 的坐标为（-4，-4），$\triangle PMN$ 面积的最小值为 54.



【点拨】本题（2）属于动点问题，解决动点问题的关键是“化动为静”，即抓住动点的某一特殊位置或运动过程

中的某一特殊时刻，把运动的图形转化为我们所熟悉的静止的图形.

变式训练五

解：(1) ∵点 A 的坐标为 $(-2, 4)$，

∴$k'=-2\times4=-8$.

∴反比例函数的解析式为$y=-\frac{8}{x}$.

(2) 当 $x=-4$ 时，$y=-\frac{8}{-4}=2$.

∴点 B 的坐标为 $(-4, 2)$.

把点 $A(-2, 4)$ 和 $B(-4, 2)$ 代入 $y=kx+b$，得$\begin{cases}-2k+b=4,\\-4k+b=2.\end{cases}$

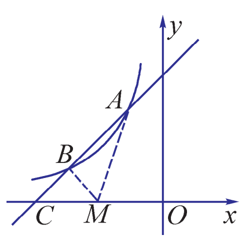
解得$\begin{cases}k=1,\\b=6.\end{cases}$

∴$y=x+6$.

令 $y=0$，得 $x=-6$.

∴点 C 的坐标为 $(-6, 0)$.

(3) 如下图，设点 M 的坐标为 $(x, 0)$，连接 MA，MB.



∵$C(-6, 0)$，$B(-4, 2)$，$A(-2, 4)$，

∴$S_{\triangle AMB}=S_{\triangle ACM}-S_{\triangle BCM}=\frac{1}{2}\times(x+6)\times4-\frac{1}{2}\times(x+6)\times2=3$.

解得 $x=-3$.

∴点 M 的坐标为 $(-3, 0)$.

培优精练

1. D 【解析】设点 $P\left(a, \frac{8}{a}\right)$，$Q\left(a, \frac{k}{a}\right)$，$a>0$，则 $OM=a$，$PM=\frac{8}{a}$，$MQ=-\frac{k}{a}$. ∴$PQ=PM+MQ=\frac{8}{a}-\frac{k}{a}$. ∵$S_{\triangle POQ}=15$，∴$\frac{1}{2}PQ\cdot OM=15$，即$\frac{1}{2}a\left(\frac{8}{a}-\frac{k}{a}\right)=15$. 解得 $k=-22$.

2. $\frac{45}{2}$ 【解析】根据题意，得点 D 的纵坐标为 4. 把 $y=4$ 代入 $y=\frac{4}{3}x$，得 $x=3$，即点 D 的坐标为 $(3, 4)$. 把点 $D(3, 4)$ 代入 $y_1=\frac{k}{x}$，得 $k=3\times4=12$，即反比例函数的解析式为 $y=\frac{12}{x}$. ∵$AD=4$，矩形 $ABCD$ 的面积是 36，∴$AB=\frac{36}{4}=9$，∴$OB=OA+AB=3+9=12$. ∴点 E 的横坐标为 12. 把点 E 的横坐标代入 $y=\frac{12}{x}$，得 $y=1$. ∴点 E 的坐标为 $(12, 1)$. ∴四边形 $ABED$ 的面积为$\frac{1}{2}(AD+BE)\cdot AB=\frac{1}{2}\times(4+1)\times9=\frac{45}{2}$.

3. **解**：(1) ∵$B(2, -3)$ 在 $y=\frac{m}{x}$上，

∴$m=2\times(-3)=-6$.

∴反比例函数的解析式为$y=-\frac{6}{x}$.

∵点 A（-3，n）在 $y=-\dfrac{6}{x}$上，

∴$n=-\dfrac{6}{-3}=2$.

∴A（-3，2）.

∵$y=kx+b$ 经过点 A（-3，2），B（2，-3），

∴$\begin{cases}-3k+b=2,\\2k+b=-3.\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=-1,\\b=-1.\end{cases}$

∴一次函数的解析式为 $y=-x-1$.

（2）∵点 C 是直线 AB 与 x 轴的交点，

∴令 $y=0$，得 $x=-1$.

∴点 C 的坐标为（-1，0）.

∴$OC=1$.

∴$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle ACO}+S_{\triangle BCO}=\dfrac{1}{2}\times1\times2+\dfrac{1}{2}\times1\times3=\dfrac{5}{2}$.

（3）$-3<x<0$ 或 $x>2$.

名卷压轴题

（1）$\dfrac{1}{2}$　8　**【解析】**把点 A（8，1）分别代入 $y=kx-3$ 和 $y=\dfrac{m}{x}$中，得 $1=8k-3$，$1=\dfrac{m}{8}$. 解得 $k=\dfrac{1}{2}$，$m=8$.

（2）**解：**∵点 C 在线段 AB 上，

∴设点 C 的坐标为$\left(a，\dfrac{1}{2}a-3\right)$（$0<a<8$）.

∴点 D 的坐标为$\left(a，\dfrac{8}{a}\right)$.

∴$CD=\dfrac{8}{a}-\dfrac{1}{2}a+3$.

∵$S_{四边形OCAD}=24$，

∴$S_{\triangle OCD}+S_{\triangle ACD}=24$.

∴$\dfrac{1}{2}\cdot CD\cdot x_A=24$，

即$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8}{a}-\dfrac{1}{2}a+3\right)\times8=24$.

∴$a^2+6a-16=0$.

解得 $a_1=-8$，$a_2=2$.

经检验 $a_1=-8$，$a_2=2$ 是原方程的解.

又∵$0<a<8$，

∴$a=2$.

∴点 C 的坐标为（2，-2）.

（3）由平移可知，$OO'\,/\!/\,BA$，

∴直线 OO'的解析式为 $y=\dfrac{1}{2}x$.

联立$\begin{cases}y=\dfrac{1}{2}x,\\y=\dfrac{8}{x}.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x_1=4,\\y_1=2\end{cases}$或$\begin{cases}x_2=-4,\\y_2=-2\end{cases}$（舍去）.

∴点 O'的坐标为（4，2）.

∴把点 O 向右平移 4 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度得到点 O'.

∴将点 D 向右平移 4 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度得到点 D'.

又∵D（2，4），

∴点 D'的坐标为（6，6）.

第 3 讲　实际问题与反比例函数

例一　**解：**（1）设 $y=\dfrac{k}{x}$，

由图可知，点（24，50）在图象上.

把（24，50）代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $50=\frac{k}{24}$.

解得 $k=1\,200$.

$\therefore y=\frac{1\,200}{x}$.

（2）$\because$ 该工程队有 2 台挖掘机，每台挖掘机每天能够开挖水渠 30 m，

$\therefore$ 该工程队每天能挖水渠 60 m.

将 $x=60$ 代入 $y=\frac{1\,200}{x}$，

得 $y=\frac{1\,200}{60}=20$（天）.

$\therefore$ 该工程队需要 20 天才能完成此项工程.

（3）由函数解析式可知，需要开挖水渠的总长度为 1 200 m.

施工 5 天后还剩 $1\,200-60\times5=900$（m）.

$\because 900\div5-60=120$（m），

$120\div30=4$（台），

$\therefore$ 至少还需要增加 4 台同样的挖掘机.

【点拨】 本题考查了反比例函数的应用，用待定系数法求反比例函数的解析式，解决实际问题等. 根据反比例函数的图象，求出反比例函数解析式是解本题的关键. 在第（2）小问，根据（1）中求出的解析式，得出需要开挖水渠的总长度是解题的突破口.

变式训练一

解：（1）由图象可设函数的解析式为 $P=\frac{F}{S}$，

$\because P=60$ Pa 时，$S=10$ m^2，

$\therefore F=PS=60\times10=600$（N）.

$\therefore 600\div10=60$（kg）.

$\therefore$ 函数的解析式为 $P=\frac{600}{S}$，这个人的体重为 60 kg.

（2）人双脚站立时，与地面的接触面积为 $300\times2=600$（cm^2）.

$\because 600\text{ cm}^2=600\times10^{-4}\text{ m}^2$，

$\therefore$ 对地面的压强 $P=\frac{600}{600\times10^{-4}}=1\times10^4$（Pa）.

即此人双脚站立时对地面的压强为 1×10^4 Pa.

（3）由题意得 $\frac{600}{S}\leqslant300$.

解得 $S\geqslant2$.

即木板的面积至少为 2 m^2.

例二 **解：**（1）设线段 AC 的函数表达式为 $y=kx+b$.

把点 A（0，12），C（3，4.5）代入，

得 $\begin{cases}b=12,\\3k+b=4.5.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-2.5,\\b=12.\end{cases}$

$\therefore$ 线段 AC 的函数表达式为 $y=-2.5x+12$（$0\leqslant x\leqslant3$）.

（2）根据数值表可知，$3\times4.5=5\times2.7=6\times2.25=9\times1.5=\cdots=13.5$.

$\therefore y$ 是 x 的反比例函数，

且 $y=\frac{13.5}{x}$（$x\geqslant3$）.

（3）$\because 15>3$，

∴当 $x=15$ 时，$y=\frac{13.5}{x}=\frac{13.5}{15}=0.9$.

∵$13.5>0$,

∴y 随 x 的增大而减小.

∵$0.9<1$,

∴该企业所排污水中硫化物的浓度可以在 15 天以内下降到不超过最高允许的 1.0 mg/L.

【点拨】本题属于综合运用反比例函数与一次函数的知识解决实际问题，求解过程运用了数形结合的思想，在(1)中由“形”求“数”，根据图象上的点 A，C 的坐标，同待定系数法求得线段 AC 的函数表达式. 在(3)中由“形”定“数”，即在求得 $y=0.9$ 后，再根据函数图象的变化趋势判断是否满足达标要求.

变式训练二

解：(1) 当 $0\leqslant x\leqslant 15$ 时，

设 $y=ax$ $(a\neq 0)$；

当 $x\geqslant 15$ 时，设 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$.

将 (15，20) 代入 $y=ax$，得 $20=15a$.

解得 $a=\frac{4}{3}$.

∴$y=\frac{4}{3}x$ $(0\leqslant x\leqslant 15)$.

将 (15，20) 代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $20=\frac{k}{15}$.

解得 $k=300$.

∴$y=\frac{300}{x}$ $(x\geqslant 15)$.

(2) 当 $y=\frac{4}{3}x=8$ 时，$x=6$.

当 $y=\frac{300}{x}=8$ 时，$x=37.5$.

∴有效消毒时间是 $37.5-6=31.5$(min).

例三　**解：**(1) 根据题意，甲的舒适指数 $w_{甲}$ 与空调启动时间 x $(x\geqslant 1)$ 成反比例关系，且 $w_{甲}$ 的图象过点 A $(1,m+4)$，B $(m+1,m)$.

由反比例函数的性质，得 $1\times(m+4)=m(m+1)$.

解得 $m=2$ 或 $m=-2$(舍去).

∴$m=2$，$m+1=3$.

∴点 A (1，6)，点 B (3，2).

∵$1\times 6=6$,

∴$w_{甲}=\frac{6}{x}$.

由图可知 $w_{乙}=-x^2+bx+c$ 在 3 h 时，乙的舒适指数最大，且过点 A (1，6)，

∴$\begin{cases}-\frac{b}{2\times(-1)}=3,\\ -1+b+c=6.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}b=6,\\ c=1.\end{cases}$

∴$w_{乙}=-x^2+6x+1$.

当 $x=3$ 时，$y=-3^2+6\times 3+1=10$.

∴乙的舒适指数的最大值为 10.

(2) 由 (1) 得，$w_{甲}=\frac{6}{x}$,

$w_{乙}=-x^2+6x+1=-(x-3)^2+10$.

当 $w_{乙}=9$，即 $-(x-3)^2+10=9$ 时，

解得 $x_1=2$，$x_2=4$.

当 $x_1=2$ 时，$w_甲=\frac{6}{2}=3$.

此时 $w_乙-w_甲=9-3=6$.

当 $x_2=4$ 时，$w_甲=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$.

此时 $w_乙-w_甲=9-\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$.

$\because \frac{15}{2}>6>\frac{3}{2}$，

$\therefore$ 当 $w_乙=9$ 时，$w_乙-w_甲$ 的较大值为 $\frac{15}{2}$.

【点拨】 本题属于综合运用反比例函数与二次函数的知识解决实际问题，求解过程中运用了数形结合的思想，主要体现为：①利用点 A，B 的坐标，得到关于 m 的方程，解方程则求得 m，进而求得 $w_甲$ 的函数关系式. ②由图可知点 C 是 $w_乙$ 的顶点，且 $w_乙$ 的图象经过点 A，由此求得 $w_乙$ 的解析式. ③可利用图形验证答案是否正确. 设 $w_乙$ 上点 M（2，m）在 $w_甲$ 上的对应点为 M'（2，m'），$w_乙$ 上点 N（4，n）在 $w_甲$ 上的对应点为 N'（4，n'），在函数图象上描出这四个点的位置，观察 MM' 与 NN' 的大小关系是否与答案相符.

变式训练三

解：（1）由题意，得点 A（1，18），

代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $k=18\times1=18$.

$\because h$ 与 t 的平方成正比，

则可设 $h=at^2$.

当 $t=1$ 时，$h=5$，

$\therefore a=5$.

$\therefore h=5t^2$.

（2）$\because v=5$，$AB=1$，

$\therefore x=5t+1$.

$\because h=5t^2$，$OB=18$，

$\therefore y=-5t^2+18$.

由 $x=5t+1$，得 $t=\frac{1}{5}$（$x-1$）.

$\therefore y=-\frac{1}{5}(x-1)^2+18$.

令 $y=13$，则 $-\frac{1}{5}(x-1)^2+18=13$.

解得 $x=6$ 或 $x=-4$.

$\because x\geqslant1$，$\therefore x=-4$（舍去）.

$\therefore x=6$.

把 $x=6$ 代入 $y=\frac{18}{x}$，

解得 $y=3$.

$\therefore$ 滑雪者与正下方滑道的竖直距离为 $13-3=10$（m）.

（3）把 $y=1.8$ 代入 $y=-5t^2+18$，

得 $t^2=\frac{81}{25}$.

解得 $t=\frac{9}{5}$ 或 $t=-\frac{9}{5}$（舍去）.

$\therefore t=\frac{9}{5}$.

$\therefore x=5\times\frac{9}{5}+1=10$.

$\therefore$ 甲所在点的坐标为（10，1.8），此时恰好落在滑道 $y=\frac{18}{x}$ 上.

$\because$ 甲，乙是同时飞出的，

$\therefore$ 甲，乙的竖直落下的距离是一样的，

即纵坐标相同.

∴此时乙所在点的坐标为$\left(1+\frac{9}{5}v_{乙}, 1.8\right)$.

根据题意，得$1+\frac{9}{5}v_{乙}-10>4.5$.

解得$v_{乙}>7.5$.

培优精练

1. A　【解析】∵经过闭合电路的电流I（单位：A）与电路的电阻R（单位：Ω）成反比例函数关系，∴$40a=80b$. ∴$a=2b$. ∴$a>b$.

2. 5　【解析】∵每步台阶的高和宽分别是1和2，∴$T_1(-16, 1)$，$T_2(-14, 2)$，$T_3(-12, 3)$，$T_4(-10, 4)$，$T_5(-8, 5)$，$T_6(-6, 6)$，$T_7(-4, 7)$，$T_8(-2, 8)$. ∵曲线L过点T_4，∴$k=-10\times4=-40$. ∴反比例函数的解析式为$y=-\frac{40}{x}$. 当$x=-8$时，$y=5$. ∴T_5也在反比例函数的图象上. ∴$m=5$.

3. **解：**(1) 设线段AB的表达式为$y=kx+b$，

代入(0，10)，(5，20)，得

$$\begin{cases}b=10,\\5k+b=20.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}k=2,\\b=10.\end{cases}$

∴$y=2x+10$ $(0\leqslant x\leqslant5)$.

设双曲线CD的解析式为$y=\frac{k}{x}$，

∵$C(10, 20)$，

∴$k=10\times20=200$.

∴双曲线CD的解析式为$y=\frac{200}{x}$ $(10\leqslant x\leqslant24)$.

(2) 把$y=16$代入$y=\frac{200}{x}$，

得$x=\frac{200}{16}=\frac{25}{2}$.

把$y=16$代入$y=2x+10$，

得$x=\frac{16-10}{2}=3$.

∴$\frac{25}{2}-3=\frac{19}{2}$ (min).

即对该原材料进行特殊处理的时间为$\frac{19}{2}$ min.

名卷压轴题

(1) **解：**当$0<x\leqslant8$时，设$T=\frac{m}{x+4}$ $(m\neq0)$，

根据表格中的数据，当$x=8$时，$T=10$.

∴$10=\frac{m}{8+4}$.

解得$m=120$.

当$8<x\leqslant24$时，设$T-2=nx$ $(n\neq0)$，

根据表格中的数据，当$x=24$时，$T=26$，

∴$26-2=24n$.

解得$n=1$.

∴$T-2=x$，即$T=x+2$.

综上所述，T与x的函数关系式为

$T=\begin{cases}\dfrac{120}{x+4}, & 0<x\leqslant 8,\\ x+2, & 8<x\leqslant 24.\end{cases}$

(2) $K=-x+44$ 【解析】当 $12\leqslant x\leqslant 24$ 时，设 K 与 x 的函数关系式为 $K=kx+b$，将 $x=12$，$K=32$；$x=24$，$K=20$ 代入，得 $\begin{cases}12k+b=32,\\ 24k+b=20.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\ b=44.\end{cases}$ ∴当 $12\leqslant x\leqslant 24$ 时，K 与 x 的函数关系式为 $K=-x+44$.

(3) ①存在. 周利润总额不变的值为 240.

由函数图象，得当 $0<x\leqslant 12$ 时，设 K 与 x 的函数关系式为 $K=k_1x+b_1$.

将 $x=0$，$K=8$；$x=12$，$K=32$ 代入，得

$\begin{cases}b_1=8,\\ 12k_1+b_1=32.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k_1=2,\\ b_1=8.\end{cases}$

∴当 $0<x\leqslant 12$ 时，K 与 x 的函数关系式为 $K=2x+8$.

∴当 $0<x\leqslant 8$ 时，$y=KT=(2x+8)\cdot\dfrac{120}{x+4}=240$.

当 $8<x\leqslant 12$ 时，$y=KT=(2x+8)\cdot(x+2)=2x^2+12x+16$.

当 $12<x\leqslant 24$ 时，$y=KT=(x+2)\cdot(-x+44)=-x^2+42x+88$.

综上所述，在这 24 周的销售时间内，存在所获周利润总额不变的情况，这个不变的值为 240 千元.

② (i) 当 $8<x\leqslant 12$ 时，$y=2x^2+12x+16=2(x+3)^2-2$，抛物线的对称轴为 $x=-3$.

当 $8<x\leqslant 12$ 时，在对称轴右侧 y 随 x 的增大而增大.

令 $2(x+3)^2-2=286$，

解得 $x_1=9$，$x_2=-15$（舍去）.

当 $x=12$ 时，y 取最大值，最大值为 $2\times(12+3)^2-2=448$，满足 $286\leqslant y\leqslant 504$.

当 $x=9$ 时，周销售量 T 取最小值 $9+2=11$（千套）.

当 $x=12$ 时，周销售量 T 取最大值 $12+2=14$（千套）.

(ii) 当 $12<x\leqslant 24$ 时，$y=-x^2+42x+88=-(x-21)^2+529$，抛物线的对称轴为 $x=21$.

当 $12<x\leqslant 24$ 时，对称轴在此范围上.

当 $x=12$ 时，y 取最小值，最小值为 448，满足 $286\leqslant y\leqslant 504$.

令 $-(x-21)^2+529=504$ 时，

解得 $x_1=16$，$x_2=26$（舍去）.

当 $x=12$ 时，周销售量 T 取最小值为 $12+2=14$（千套）.

当 $x=16$ 时，周销售量 T 取最大值为 $16+2=18$（千套）.

综上所述，当周利润总额的范围是 $286\leqslant y\leqslant 504$ 时，对应周销售量 T 的最小值是 11 千套，最大值是 18 千套.

◎反比例函数　新题型探究

例题　**解**：(1) 将 $A(m, y_1)$，$B(m+1, y_2)$，$C(m+3, y_3)$ 分别代入反比例函数 $y=\frac{4}{x}$ 中，得

$y_1=\frac{4}{m}$，$y_2=\frac{4}{m+1}$，$y_3=\frac{4}{m+3}$.

$\therefore \frac{1}{y_1}=\frac{m}{4}$，

$\frac{1}{y_2}=\frac{m+1}{4}$，

$\frac{1}{y_3}=\frac{m+3}{4}$.

①当$\frac{1}{y_1}=\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}$时，得

$\frac{m}{4}=\frac{m+1}{4}+\frac{m+3}{4}$.

$\therefore m=m+1+m+3$.

解得 $m=-4$.

②当$\frac{1}{y_2}=\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_3}$时，得

$\frac{m+1}{4}=\frac{m}{4}+\frac{m+3}{4}$.

$\therefore m+1=m+m+3$.

解得 $m=-2$.

②当$\frac{1}{y_3}=\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}$时，得

$\frac{m+3}{4}=\frac{m}{4}+\frac{m+1}{4}$.

$\therefore m+3=m+m+1$.

解得 $m=2$.

综上所述，m 的值为 -4 或 -2 或 2.

(2) $\because a>b>c>0$，

$\therefore 0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<\frac{1}{c}$.

$\because a$，b，c 构成“和谐三数组”，

$\therefore \frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$，

即 $c=\frac{ab}{a+b}$.

根据题意，得

$$OP=\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{b}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{c^2\cdot(a^2+b^2)}{a^2b^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2\cdot(a^2+b^2)}{a^2b^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}}.$$

$\because a>b>c>0$，

$\therefore a^2+b^2<(a+b)^2<2(a^2+b^2)$.

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}<OP<1$.

【点拨】本题的解题技巧有三点：一是深刻理解“和谐三数组”的定义；二是在（1）中，因为题目中没有说明 y_1，y_2，y_3 的大小，所以需要分类讨论求解；三是把代数式进行灵活变形，在（2）中，由于 OP 的形式非常复杂，因此先利用分式的运算与乘法公式进行化简与变形，再求 OP 的取值范围.

变式训练

(1) $\frac{1}{10}$　**【解析】**将 $x=10$ 代入 $f(x)=\frac{1}{x}$ $(x>0)$，得 $f(10)=\frac{1}{10}$.

(2) 减

证明：任取 $0<x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)$

$=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}$

$=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}$.

$\because 0<x_1<x_2$,

$\therefore x_2-x_1>0$，$x_1x_2>0$.

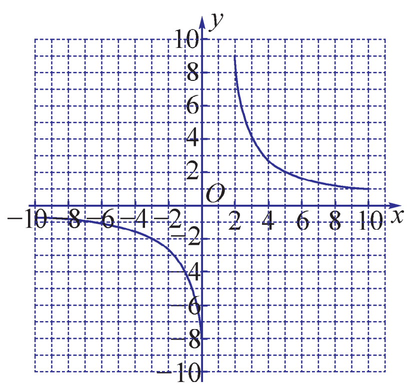
$\therefore \frac{x_2-x_1}{x_1x_2}>0$，

即 $f(x_1)-f(x_2)>0$.

$\therefore$函数 $f(x)=\frac{1}{x}$（$x>0$）是减函数.

培优精练

1.（1）**解：**如下图所示.



（2）①右　1　**【解析】**对比函数 $y=\frac{8}{x}$的图象，可知函数 $y=\frac{8}{x-1}$的图象是由函数 $y=\frac{8}{x}$的图象向右平移 1 个单位长度得到的.

②**解：**观察图象可得，当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而减小；

当 $x<1$ 时，y 随 x 的增大而减小.

2.（1）$(-2,-2)$　$(0,0)$或$(4,4)$　**【解析】**在 $y=2x+2$ 中，令 $x=2x+2$，解得 $x=-2$. $\therefore$函数 $y=2x+2$ 的图象的“等值点”坐标是$(-2,-2)$. 在 $y=x^2-3x$ 中，令 $x^2-3x=x$. 解得 $x_1=0$，$x_2=4$. $\therefore$函数 $y=x^2-3x$ 的图象上有两个“等值点”：$(0,0)$ 或 $(4,4)$.

（2）**解：**在函数 $y=\frac{4}{x}$（$x>0$）中，

令 $x=\frac{4}{x}$，解得 $x=2$.

$\therefore A(2,2)$.

在函数 $y=-x+b$ 中，令 $x=-x+b$，

解得 $x=\frac{1}{2}b$.

$\therefore B\left(\frac{1}{2}b,\ \frac{1}{2}b\right)$.

$\because BC\perp x$ 轴，垂足为 C，

$\therefore C\left(\frac{1}{2}b,\ 0\right)$.

$\therefore BC=\frac{1}{2}|b|$.

$\because \triangle ABC$ 的面积为 4，

$\therefore \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}|b|\times\left|2-\frac{1}{2}b\right|=4$.

①当 $b<0$ 时，得 $b^2-4b-32=0$.

解得 $b=-4$.

②当 $0\leqslant b<4$ 时，得 $b^2-4b+32=0$.

$\because \Delta=(-4)^2-4\times1\times32=-112<0$，

$\therefore$该方程没有实数根.

③当 $b\geqslant4$ 时，得 $b^2-4b-32=0$.

解得 $b=8$.

综上所述，b 的值为 -4 或 8.

专题二　相　似

第 1 讲　线段的比

例一　解：(1) 在 Rt△APD 中，$AP=3$，$AD=6$，

$\therefore PD=\sqrt{AD^2+AP^2}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$.

$\therefore AM=AF=PF-AP=PD-AP=3\sqrt{5}-3$，

$DM=AD-AM=9-3\sqrt{5}$.

(2) 点 M 是线段 AD 的黄金分割点.

理由如下：

$\because \dfrac{AM}{AD}=\dfrac{3\sqrt{5}-3}{6}=\dfrac{3(\sqrt{5}-1)}{6}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，

$\therefore$点 M 是线段 AD 的黄金分割点.

【点拨】本题 (2) 求解的关键是熟练掌握黄金分割的概念，为此可运用数形结合的方法，根据"点 M 是 AD 的黄金分割点吗?"找到线段 AD、较长的线段 AM、较短的线段 DM，由此即可由形求数，把黄金分割的问题转化为计算$\dfrac{AM}{AD}$的值是否等于$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

变式训练一

A　【解析】$\because$雕像的腰部以下 a 与全身 b 的高度比值接近 0.618，$\therefore \dfrac{a}{b}\approx 0.618$. 得 $a=0.618b\approx 1.24$ (m).

例二　解：$\because a /\!/ b /\!/ c$，

$\therefore \dfrac{EF}{DE}=\dfrac{BC}{AB}$.

$\therefore EF=\dfrac{BC}{AB}\cdot DE=\dfrac{7}{4}\times 3=\dfrac{21}{4}$，

即 $q=\dfrac{21}{4}$.

$\therefore \dfrac{3m+2n}{p-4q}=\dfrac{3\times 4+2\times 7}{3-4\times\dfrac{21}{4}}=-\dfrac{13}{9}$.

【点拨】利用平行线分线段成比例，只要知道其中任意三条线段，即可求得第四条线段的长，在这个过程中，容易出现的错误是不能正确写出比例式，为此可运用数形结合的方法写出解题所需要的比例式，减小出错的风险.

变式训练二

1. B　【解析】$\because l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，$DE=15$，$\therefore \dfrac{DE}{EF}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{5}{3}$，即 $\dfrac{15}{EF}=\dfrac{5}{3}$. 解得 $EF=9$.

2. 3.6　【解析】$\because a /\!/ b /\!/ c$，$\therefore \dfrac{DE}{EF}=\dfrac{AB}{BC}$，即$\dfrac{DE}{4.8}=\dfrac{3}{4}$. 解得 $DE=3.6$.

例三　解：$\because DE /\!/ AB$，

$\therefore \angle ADE=\angle BAD$.

$\because AD$ 为△ABC 的角平分线，

$\therefore \angle BAD=\angle EAD$.

$\therefore \angle EAD=\angle ADE$.

$\therefore AE=DE$，即△ADE 是等腰三角形.

$\because \dfrac{AE}{CE}=\dfrac{3}{5}$，

$\therefore \dfrac{CE}{DE}=\dfrac{5}{3}$.

$\because DE /\!/ AB$，

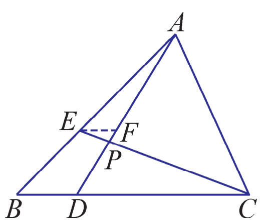
$\therefore \dfrac{AC}{CE}=\dfrac{AB}{DE}$，即$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CE}{DE}=\dfrac{5}{3}$.

$\therefore AC=AB\cdot\frac{5}{3}=18\times\frac{5}{3}=30.$

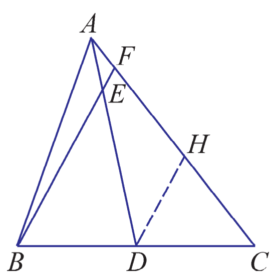
【点拨】 本题求解的关键是寻找线段 AC 与 $\frac{AE}{CE}$，AB 之间的联系，可运用数形结合的方法发挥 $AE=DE$ 与 $\frac{AC}{CE}=\frac{AB}{DE}$ 的桥梁作用，通过进行比的转换，即可求得 AC 的长.

变式训练三

1. 1∶3 **【解析】** 过点 E 作 $EF\,/\!/\,BC$，交 AD 于点 F，如下图所示. $\because AE:EB=3:2$，$CP:CE=5:6$，$\therefore EF:BD=3:(3+2)=3:5$，$EF:CD=(6-5):5=1:5=3:15$. $\therefore DB:CD=5:15=1:3$.



2. **解**：过 D 作 $DH\,/\!/\,BF$ 交 AC 于点 H，如下图所示.



$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线，

$\therefore BD=CD.$

$\because DH\,/\!/\,BF$，

$\therefore FH=CH.$

$\because AE:AD=1:4$，

$\therefore AE:DE=1:3.$

$\because DH\,/\!/\,BF$，

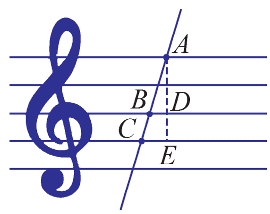
$\therefore \frac{AF}{FH}=\frac{AE}{DE}=\frac{1}{3}.$

$\therefore \frac{AF}{CF}=\frac{AF}{2FH}=\frac{1}{6}$，

即 $AF:CF=1:6.$

培优精练

1. C **【解析】** 过点 A 作平行横线的垂线，交点 B 所在的横线于点 D，交点 C 所在的横线于点 E，如下图所示，则 $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DE}$，即 $\frac{3}{BC}=\frac{2}{1}$. 解得 $BC=\frac{3}{2}$.



2. $\frac{24}{5}$ **【解析】** $\because AB\,/\!/\,CD\,/\!/\,EF$，$\therefore \frac{CE}{BE}=\frac{DF}{AF}$. $\because BC=4$，$CE=6$，$AF=8$，$\therefore BE=BC+CE=4+6=10$. 则 $\frac{6}{10}=\frac{DF}{8}$. 解得 $DF=\frac{24}{5}$.

3. **解**：（1）设 $BD=x$，则 $CD=2x$，$AD=3x$，$BC=BD+CD=3x$.

$\because AQ\,/\!/\,BC$，E 是 AD 的中点，

$\therefore \frac{AQ}{CD}=\frac{AE}{DE}=1.$

$\therefore AQ=CD=2x.$

$\therefore \frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{BC}=\frac{2}{3}.$

（2）$\because BD=5$，

$BD:CD:AD=1:2:3$，

$\therefore CD=10$，$AD=15$.

$\because E$ 是 AD 的中点，

$\therefore DE=\frac{1}{2}AD=\frac{15}{2}$.

在 Rt$\triangle DCE$ 中，根据勾股定理，得 $CE=\sqrt{CD^2+DE^2}=\sqrt{10^2+\left(\frac{15}{2}\right)^2}=\frac{25}{2}$.

$\because AQ\parallel BC$，E 是 AD 的中点，

$\therefore \frac{QE}{CE}=\frac{AE}{DE}=1$.

$\therefore QE=CE$.

$\therefore CQ=2CE=25$.

名卷压轴题

解：（1）$\because MP\parallel OA$，M 为 OD 的中点，

$\therefore P$ 为 AD 的中点，即 $DP=AP$.

$\because$ 在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$，

$\therefore \angle EAP=\angle ABC=\angle QDP$.

在 $\triangle APE$ 与 $\triangle DPQ$ 中，

$$\begin{cases}\angle EAP=\angle QDP,\\ AP=DP,\\ \angle APE=\angle DPQ,\end{cases}$$

$\therefore \triangle APE\cong\triangle DPQ$(ASA).

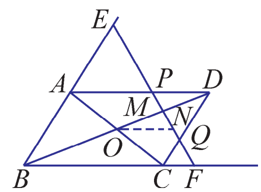
$\therefore PE=PQ$.

同理可证 $FQ=PQ$.

$\therefore PE+FQ=PQ+PQ=2PQ$.

(2) 若 EF 与 AC 不平行，则（1）中的结论仍然成立．理由如下：

如图，过点 O 作 $ON\parallel AD$ 交 EF 于点 N.



$\because AP\parallel CF$，AC 与 PF 不平行，

$\therefore$ 四边形 $ACFP$ 为梯形.

$\because O$ 为 AC 的中点，$ON\parallel AP$，

$\therefore ON$ 为梯形 $ACFP$ 的中位线，

$\therefore AP+CF=2ON$.

在 $\triangle OMN$ 和 $\triangle DMP$ 中，

$$\begin{cases}\angle NOM=\angle PDM,\\ OM=DM,\\ \angle OMN=\angle DMP,\end{cases}$$

$\therefore \triangle OMN\cong\triangle DMP$（ASA）.

$\therefore ON=DP$.

$\therefore AP+CF=2DP$.

$\because CF\parallel PD$，

$\therefore \frac{FQ}{PQ}=\frac{CF}{DP}$.

$\because DQ\parallel AE$，

$\therefore \frac{EP}{PQ}=\frac{AP}{DP}$.

$\therefore \frac{FQ}{PQ}+\frac{EP}{PQ}=\frac{CF}{DP}+\frac{AP}{DP}$，

即 $\frac{FQ+EP}{PQ}=\frac{CF+AP}{DP}=\frac{2DP}{DP}=2$.

$\therefore QF+PE=2PQ$.

第 2 讲　相似三角形的判定

例一　（1）**证明：**$\because CD\perp AB$，

$\therefore \angle ADC=\angle ACB=90°$.

又 $\angle A=\angle A$，

$\therefore \triangle ADC \backsim \triangle ACB$.

（2）**解：**$\because \angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$，

$\therefore \angle ACB=\angle CDB$.

又$\angle B=\angle B$，

$\therefore \triangle CDB \backsim \triangle ACB$.

$\therefore \dfrac{BC}{AB}=\dfrac{BD}{BC}$.

$\therefore BC^2=BD\cdot AB$.

$\because BC=13$，$BD=12$，

$\therefore AB=\dfrac{13^2}{12}=\dfrac{169}{12}$.

【点拨】此题属于相似三角形中的“子母型”．通过此题，把直角三角形的射影定理推广到一般三角形，从而得到“子母型”相似的基本图形，其特点是：①一线段是两个三角形的公共边；②另两条线段在同一直线上．射影定理：直角三角形中，斜边上的高是两直角边在斜边上射影的比例中项．每一条直角边是这条直角边在斜边上的射影和斜边的比例中项．

变式训练一

（1）**证明：**$\because AB=AC$，

$\therefore \angle B=\angle C$.

$\because \angle ADE+\angle BDE=\angle ADB=\angle C+\angle CAD$，$\angle ADE=\angle C$，

$\therefore \angle BDE=\angle CAD$.

又$\angle B=\angle C$，

$\therefore \triangle BDE \backsim \triangle CAD$.

（2）**解：**由（1）得$\dfrac{DB}{AC}=\dfrac{BE}{CD}$.

$\because AB=AC=5$，$BC=8$，$CD=2$，

$\therefore DB=BC-CD=6$.

$\therefore BE=\dfrac{DB\times CD}{AC}=\dfrac{6\times 2}{5}=\dfrac{12}{5}$.

例二　（1）**证明：**$\because$等腰Rt$\triangle ABC$和等腰Rt$\triangle ADE$，$\angle ABC=\angle AED=90^\circ$，

$\therefore AC=\sqrt{2}AB$，$AD=\sqrt{2}AE$，

$\angle BAC=\angle EAD=45^\circ$.

$\therefore \dfrac{AC}{AB}=\sqrt{2}$，$\dfrac{AD}{AE}=\sqrt{2}$.

$\therefore \dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AD}{AE}$.

$\because \angle BAC=\angle EAD$，

$\therefore \angle BAC+\angle CAE=\angle EAD+\angle CAE$，

即$\angle BAE=\angle CAD$.

$\therefore \triangle BAE \backsim \triangle CAD$.

（2）**解：**由（1）可知$\triangle BAE \backsim \triangle CAD$.

$\therefore \angle BEA=\angle CDA$.

$\because \angle PME=\angle AMD$，

$\therefore \triangle PME \backsim \triangle AMD$.

$\therefore \dfrac{PM}{AM}=\dfrac{EM}{DM}$.

$\therefore \dfrac{PM}{EM}=\dfrac{AM}{DM}$.

$\because \angle PMA=\angle EMD$，

$\therefore \triangle PMA \backsim \triangle EMD$.

$\therefore \angle APM=\angle DEM=90^\circ$.

$\because \angle CAM=180^\circ-\angle BAC-\angle EAD=90^\circ$，

$\angle CPA=180^\circ-\angle APM=90^\circ$，

$\angle ACP=\angle MCA$，

$\therefore \triangle CAP \backsim \triangle CMA$.

$\therefore \dfrac{AC}{MC}=\dfrac{CP}{CA}$，即$\dfrac{AC}{CP}=\dfrac{CM}{AC}$.

$\therefore AC^2=CP\cdot MC.$

$\because AC^2=BC^2+BA^2=2BC^2$，

$\therefore 2BC^2=CP\cdot MC$，

即 $2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2=\frac{3}{2}\cdot MC.$

解得 $MC=2.$

$\therefore PM=CM-CP=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}.$

【点拨】 本题（2）的难度较大，求解的技巧主要体现为两点：一是转化的方法，在（2）中把求 PM，转化为求 MC，通过连续证明相似三角形，得到 MC 与已知线段 BC，CP 之间的关系；二是灵活运用线段的代换，在（2）中得到 $AC^2=CP\cdot MC$ 后，用线段 BC 代换 AC.

变式训练二

1. D **【解析】** 对于 A，$\because \angle ABD=\angle ACB$，$\angle A=\angle A$，$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle ADB$，不合题意；对于 B，$\because \angle ADB=\angle ABC$，$\angle A=\angle A$，$\therefore \triangle ADB\backsim\triangle ABC$，不合题意；对于 C，$\because AB^2=AD\cdot AC$，$\therefore \frac{AC}{AB}=\frac{AB}{AD}$，$\angle A=\angle A$，$\triangle ABC\backsim\triangle ADB$，不合题意；对于 D，$\frac{AD}{AC}=\frac{BD}{BC}$不能判定$\triangle ADB\backsim\triangle ABC$，符合题意.

2. **证明：** $\because AB=6$，$BD=2$，

$\therefore AD=4.$

$\because AC=8$，$CE=5$，

$\therefore AE=3.$

$\therefore \frac{AE}{AB}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，

$\frac{AD}{AC}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$

$\therefore \frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}.$

又 $\angle EAD=\angle BAC$，

$\therefore \triangle AED\backsim\triangle ABC.$

例三 **解：** 与①相似的三角形有：③④⑤. 理由如下：

设网格中每个小正方形的边长均为 1.

根据题意，得 $AB=1$，$AC=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$CD=1$，$BD=2\sqrt{2}$，$DE=2$，$BF=EF=\sqrt{5}$，$BE=2\sqrt{5}$，$FH=2$，$EK=HG=\sqrt{2}$，$GF=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，$BG=5.$

在$\triangle CDB$与$\triangle ABC$中，

$\because \frac{CD}{AB}=\frac{1}{1}$，$\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$，$\frac{BD}{BC}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$，

$\therefore \frac{CD}{AB}\neq\frac{BC}{AC}\neq\frac{BD}{BC}.$

$\therefore \triangle CDB$与$\triangle ABC$不相似.

在$\triangle DEB$与$\triangle ABC$中，

$\because \frac{DE}{AB}=\frac{2}{1}$，$\frac{BD}{AC}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2}{1}$，$\frac{BE}{BC}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{2}{1}$，

$\therefore \frac{DE}{AB}=\frac{BD}{AC}=\frac{BE}{BC}.$

$\therefore \triangle DEB\backsim\triangle ABC.$

在$\triangle FBG$与$\triangle ABC$中，

$\because \frac{FB}{AB}=\frac{\sqrt{5}}{1}$，$\frac{FG}{AC}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}}{1}$，

$\dfrac{BG}{BC}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{1}$，

$\therefore \dfrac{FB}{AB}=\dfrac{FG}{AC}=\dfrac{BG}{BC}$.

$\therefore \triangle FBG \backsim \triangle ABC$.

在$\triangle HGF$与$\triangle ABC$中，

$\because \dfrac{HG}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{1}$，$\dfrac{HF}{AC}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{1}$，$\dfrac{GF}{BC}=\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}}{1}$，

$\therefore \dfrac{HG}{AB}=\dfrac{HF}{AC}=\dfrac{GF}{BC}$.

$\therefore \triangle HGF \backsim \triangle ABC$.

在$\triangle EKF$与$\triangle ABC$中，

$\because \dfrac{EK}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{1}$，$\dfrac{EF}{AC}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{FK}{BC}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$，

$\therefore \dfrac{EK}{AB}\neq\dfrac{EF}{AC}\neq\dfrac{FK}{BC}$.

$\therefore \triangle EKF$与$\triangle ABC$不相似.

【点拨】 本题根据三角形的形状，把各边按长短排序，其目的是找到对应边，减小解题的盲目性．如果三边对应成比例，则两三角形相似，否则不相似.

变式训练三

1. C **【解析】** 虽然$\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{BC}{EF}$，但是没有说哪一个角是直角．则有可能相似，也有可能不相似.

2. 解：（1）$\triangle ABC$和$\triangle DEF$相似．证明如下：

设每个小方格的边长均为1，

根据勾股定理，得$AB=\sqrt{17}$，$AC=\sqrt{13}$，$BC=\sqrt{10}$，

$DE=\sqrt{34}$，$EF=\sqrt{20}$，$DF=\sqrt{26}$.

$\therefore \dfrac{DE}{AB}=\dfrac{\sqrt{34}}{\sqrt{17}}=\sqrt{2}$，

$\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{10}}=\sqrt{2}$，

$\dfrac{DF}{AC}=\dfrac{\sqrt{26}}{\sqrt{13}}=\sqrt{2}$，

$\therefore \dfrac{DE}{AB}=\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{DF}{AC}$.

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle DEF$.

（2）$\because AB=7$ cm，

$\therefore \dfrac{DE}{AB}=\dfrac{DE}{7}=\sqrt{2}$.

$\therefore DE=7\sqrt{2}$ cm.

培优精练

1. C **【解析】** 由题意易证$\triangle AMN \backsim \triangle ACB$，$\therefore AN : AM=AB : AC=5 : 4$. $\because AM=3$，$\therefore AN=\dfrac{5\times3}{4}=\dfrac{15}{4}$. $\because AM^2+MN^2=AN^2$，$\therefore MN=\sqrt{AN^2-AM^2}=\sqrt{\left(\dfrac{15}{4}\right)^2-3^2}=\dfrac{9}{4}$.

2. （1）**证明：** $\because AD /\!/ BC$，$AB\perp BC$，

$\therefore AB\perp AD$，$\angle A=\angle B=90°$.

$\therefore \angle ADE+\angle AED=90°$.

$\because \angle DEC=90°$，

$\therefore \angle AED+\angle BEC=90°$.

$\therefore \angle ADE=\angle BEC$.

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle BEC$.

（2）**解：** $\because \triangle ADE \backsim \triangle BEC$，

$AD=1$，$BC=3$，$AE=2$，

$\therefore \dfrac{AD}{BE}=\dfrac{AE}{BC}$，即$\dfrac{1}{BE}=\dfrac{2}{3}$.

$\therefore BE=\frac{3}{2}$.

3. 解：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$. 理由如下：

$\because \frac{AB}{A'B'}=\frac{BD}{B'D'}=\frac{AD}{A'D'}$，

$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle A'B'D'$.

$\therefore \angle B=\angle B'$.

$\because AD$，$A'D'$分别是$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的中线，

$\therefore BD=\frac{1}{2}BC$，$B'D'=\frac{1}{2}B'C'$.

$\therefore \frac{AB}{A'B'}=\frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}B'C'}=\frac{BC}{B'C'}$.

又$\because \angle B=\angle B'$，

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

名卷压轴题

解：（1）根据题意，得 $OE=3t$，$OD=t$，$BF=2t$.

$\because BA\perp x$ 轴，$BC\perp y$ 轴，$\angle AOC=90^\circ$，

$\therefore \angle AOC=\angle BAO=\angle BCO=90^\circ$.

$\therefore$四边形 $OABC$ 是矩形.

$\therefore AB=OC$，$BC=OA$.

$\because B$（12，10），

$\therefore BC=OA=12$，$AB=OC=10$.

$\therefore AF=10-2t$，$AE=12-3t$.

$\therefore$点 E 的坐标为（$3t$，0），

点 F 的坐标为（12，$10-2t$）.

（2）$\angle EOD=\angle FAE=90^\circ$，分两种情况：

①当$\triangle ODE\backsim\triangle AEF$时，则

$\frac{OD}{AE}=\frac{OE}{AF}$，

即$\frac{t}{12-3t}=\frac{3t}{10-2t}$.

解得 $t_1=0$，$t_2=\frac{26}{7}$.

$\because 0<t\leqslant 4$，

$\therefore t=0$ 不符合题意，舍去.

$\therefore t=\frac{26}{7}$（s）.

②当$\triangle ODE\backsim\triangle AFE$时，则

$\frac{OD}{AF}=\frac{OE}{AE}$，

即$\frac{t}{10-2t}=\frac{3t}{12-3t}$.

解得 $t_1=0$，$t_2=6$.

$\because 0<t\leqslant 4$，

$\therefore t=0$ 和 $t=6$ 均不符合题意.

综上所述，当 $t=\frac{26}{7}$ s 时，$\triangle ODE$ 与以点 A，E，F 为顶点的三角形相似.

第 3 讲　相似三角形的性质

例一　（1）**解**：设正方形 $DEFG$ 的边长为 x cm，

则 $DG=DE=x$ cm，

$AP=(10-x)$cm.

又 $DG\parallel BC$，

$\therefore \triangle ADG\backsim\triangle ABC$.

$\therefore \frac{AP}{AH}=\frac{DG}{BC}$，

即$\frac{10-x}{10}=\frac{x}{15}$，解得 $x=6$.

$\therefore$正方形 $DEFG$ 的边长为 6 cm.

(2) $\frac{4}{3}$ 【解析】 设 $DE=y$ cm，则 $DG=2y$ cm. 同理 $\frac{10-y}{10}=\frac{2y}{15}$. 解得 $y=\frac{30}{7}$. $\therefore 2y=\frac{60}{7}$. $\because \frac{AD}{AB}=\frac{DG}{BC}=\frac{\frac{60}{7}}{15}=\frac{4}{7}$，$\therefore \frac{AD}{BD}=\frac{4}{3}$.

【点拨】本题求解的关键是熟练利用相似三角形的性质，运用数形结合的方法，根据题意找到图中相似三角形的对应边与对应高，再根据相似三角形对应高之比等于相似比列出关于正方形边长的比例式，即可求得正方形的边长.

变式训练一

1. D 【解析】 由相似三角形的性质，得 $\frac{AD}{A'D'}=\frac{BE}{B'E'}$. $\because AD=4$，$A'D'=3$，$BE=6$，$\therefore \frac{4}{3}=\frac{6}{B'E'}$. 解得 $B'E'=\frac{9}{2}$.

2. 解：$\because \triangle ADE\backsim\triangle ACB$，

$\therefore \angle ADE=\angle ACB$，$\frac{AD}{AC}=\frac{2}{3}$.

$\because AF$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，

$\therefore \angle BAF=\angle CAF$.

$\therefore \triangle AGD\backsim\triangle AFC$.

$\therefore \frac{AG}{AF}=\frac{AD}{AC}=\frac{2}{3}$.

$\therefore AG:GF=2:1$.

例二 解：$\because$四边形 $ABCD$ 是梯形，

$\therefore AB\parallel CD$.

$\therefore \triangle ABO\backsim\triangle CDO$.

$\therefore \frac{OB}{DO}=\frac{OA}{CO}=\sqrt{\frac{p^2}{q^2}}=\frac{p}{q}$.

$\therefore \frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle DOC}}=\frac{AO}{CO}=\frac{p}{q}$.

$\therefore S_{\triangle AOD}=\frac{p}{q}\cdot q^2=pq$.

同理 $S_{\triangle BOC}=pq$.

$\therefore S_{梯形ABCD}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle DOC}+S_{\triangle AOD}+S_{\triangle BOC}=p^2+q^2+pq+pq=(p+q)^2$.

【点拨】本题 $\triangle AOB$ 与 $\triangle COD$ 之间的面积关系和 $\triangle DOC$ 与 $\triangle AOD$ 之间的面积关系是不同的，前者是两个相似三角形之间的面积关系，后者是两个同高三角形之间的面积关系. 根据相似三角形的面积之比等于相似比的平方得到 $\frac{AO}{CO}$ 的值，根据同高三角形的面积之比等于底之比求得 $\triangle AOD$ 的面积. 同理可求得 $\triangle BOC$ 的面积.

变式训练二

1. C 【解析】 $\because$点 D，E 是 AB 的三等分点，$\therefore \frac{AD}{AE}=\frac{1}{2}$，$\frac{AD}{AB}=\frac{1}{3}$. $\because DF\parallel EG\parallel BC$，$\therefore \triangle ADF\backsim\triangle AEG$，$\triangle ADF\backsim\triangle ABC$. $\therefore \frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle AEG}}=\left(\frac{AD}{AE}\right)^2=\frac{1}{4}$，$\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{AD}{AB}\right)^2=\frac{1}{9}$. $\therefore S_1:S_2:S_3=1:3:5$.

2. (1) **证明：** ∵四边形 $ABCD$ 为正方形，

∴$AD // BE$.

∴$\angle DAF=\angle AEB$.

∵$\angle AFD=\angle B=90°$，

∴$\triangle ABE \backsim \triangle DFA$.

(2) **解：** 在 $Rt\triangle ABE$ 中，$AE=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

∵$\triangle ABE \backsim \triangle DFA$，

∴$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle DFA}}=\left(\frac{AE}{AD}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$.

∵$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$，

∴$S_{\triangle DFA}=\frac{4}{5}S_{\triangle ABE}=\frac{4}{5}$.

∴$S_{四边形CDFE}=S_{正方形ABCD}-S_{\triangle ABE}-S_{\triangle DFA}=4-1-\frac{4}{5}=\frac{11}{5}$.

例三　(1) **证明：** ∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$\angle C+\angle B=180°$，

$\angle ADF=\angle DEC$.

又$\angle AFD+\angle AFE=180°$，

$\angle AFE=\angle B$，

∴$\angle AFD=\angle C$.

∴$\triangle ADF \backsim \triangle DEC$.

(2) **解：** ∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$CD=AB=8$.

∵$\triangle ADF \backsim \triangle DEC$，

∴$\frac{AD}{DE}=\frac{AF}{DC}$.

∴$DE=\frac{AD\cdot CD}{AF}=\frac{6\sqrt{3}\times 8}{4\sqrt{3}}=12$.

【点拨】 以平行四边形为背景，实际上是为我们提供了相等的边与角的关系，有了这样的关系，证明相似就有了充分的条件.

变式训练三

1. A　**【解析】** ∵$\triangle ABE \backsim \triangle DEF$，

∴$\frac{AB}{DE}=\frac{AE}{DF}$. ∵$AB=6$，$AE=9$，$DE=2$，∴$DF=\frac{9\times 2}{6}=3$. ∴$EF=\sqrt{DE^2+DF^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$.

2. (1) **证明：** ∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$\angle DAG=90°$.

由折叠性质，得 $DG\perp EF$.

∴$\angle DAG=\angle EOD=90°$.

∵$\angle GDA=\angle EDO$，

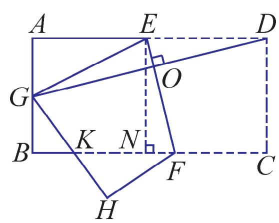
∴$\triangle ADG \backsim \triangle ODE$.

∴$\frac{DA}{DO}=\frac{DG}{DE}$.

∴$DE\cdot DA=DO\cdot DG$.

(2) **解：** $BC=2AB$，理由如下：

过点 E 作 $EN\perp BC$ 于点 N，如下图.



由折叠性质，得 $DG\perp EF$.

∴$\angle EOG=\angle ENF=\angle DAG=90°$.

∴$\angle FEN+\angle DEO=90°$，

$\angle ODE+\angle DEO=90°$.

$\therefore \angle FEN=\angle ODE$.

$\therefore \triangle DGA\backsim\triangle EFN$.

$\therefore \dfrac{DA}{EN}=\dfrac{DG}{EF}=\dfrac{2EF}{EF}=2$.

$\because EN=AB$，$AD=BC$，

$\therefore \dfrac{BC}{AB}=2$，

即 $BC=2AB$.

培优精练

1. B **【解析】** $\because \triangle ABC\backsim\triangle PBD$，则 $\angle BAC=\angle BPD$ 为钝角. 由相似三角形的性质可知，$BA:AC=BP:PD$. 又 $BA=2$，$AC=2\sqrt{2}$，$\therefore BA:AC=BP:PD=1:\sqrt{2}$. 只有 P_2 符合这样的要求，故点 P 应该在 P_2 处.

2. (1) **证明：** $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

$\therefore \angle ACD=\angle ACB$.

$\because \angle ACD=\angle ABE$，

$\therefore \angle ACB=\angle ABE$.

$\because \angle BAC=\angle BAE$，

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle AEB$.

(2) **解：** 由 (1) 得 $\triangle ABC\backsim\triangle AEB$.

$\therefore \dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AC}{AB}$.

$\because AB=6$，$AC=4$，

$\therefore \dfrac{6}{AE}=\dfrac{4}{6}$.

解得 $AE=\dfrac{36}{4}=9$.

3. **解：** (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle ACE=\angle ADB=\angle CAD=45°$，

$AC=\sqrt{2}AD$.

$\because \angle EAF=45°$，

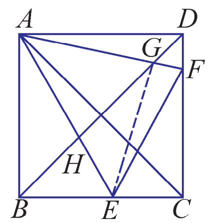
$\therefore \angle EAF-\angle CAF=\angle CAD-\angle CAF$.

$\therefore \angle EAC=\angle GAD$.

$\therefore \triangle EAC\backsim\triangle GAD$.

$\therefore \dfrac{CE}{DG}=\dfrac{AC}{AD}=\sqrt{2}$.

(2) 如下图，连接 EG，



$\because \triangle AEC\backsim\triangle AGD$，

$\therefore \dfrac{AE}{AG}=\dfrac{AC}{AD}$，

$\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AG}{AD}$.

$\because \angle EAG=\angle CAD=45°$，

$\therefore \triangle EAG\backsim\triangle CAD$.

$\therefore \triangle EAG$ 为等腰直角三角形，$\angle AGE=\angle CDA=90°$.

$\therefore AE=\sqrt{2}AG=\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=4$.

名卷压轴题

解： $\because \triangle ABC\backsim\triangle ADE$，

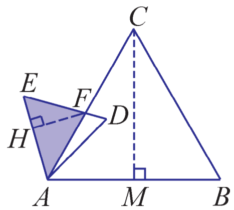
$AB=2AD$，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{AD^2}{AB^2}=\dfrac{1}{4}$.

$\because S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle ADE}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

如图，在 $\triangle EAF$ 中，过点 F 作 $FH\perp AE$ 交 AE 于点 H，



$\because \angle EAF=\angle BAD=45^\circ$，

$\angle AEF=60^\circ$，

$\therefore \angle AFH=45^\circ$，$\angle EFH=30^\circ$.

$\therefore AH=HF$.

设 $AH=HF=x$，则 $EH=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$.

过点 C 作 $CM\perp AB$ 交 AB 于点 M，

$\because \triangle ABC$ 是面积为$\sqrt{3}$的等边三角形，

$\therefore \dfrac{1}{2}\times AB\times CM=\sqrt{3}$，

$\angle BCM=30^\circ$.

设 $AB=2k$，则 $BM=k$，$CM=\sqrt{3}k$.

$\therefore \dfrac{1}{2}\cdot 2k\cdot\sqrt{3}k=\sqrt{3}$.

$\therefore k=1$，$AB=2$.

$\therefore AE=\dfrac{1}{2}AB=1$.

$\therefore x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}x=1$.

解得 $x=\dfrac{3}{3+\sqrt{3}}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore S_{\triangle AEF}=\dfrac{1}{2}AE\cdot HF=\dfrac{1}{2}\times 1\times\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$.

第 4 讲　相似三角形的实际应用

例一　**解：**$\because AD\parallel EG$，

$\therefore \angle ADO=\angle EGF$.

$\because \angle AOD=\angle EFG=90^\circ$，

$\therefore \triangle AOD\backsim\triangle EFG$.

$\therefore \dfrac{AO}{EF}=\dfrac{OD}{FG}$，即$\dfrac{AO}{1.8}=\dfrac{20}{2.4}$.

解得 $AO=15$.

同理可证$\triangle BOC\backsim\triangle AOD$.

$\therefore \dfrac{BO}{AO}=\dfrac{OC}{OD}$，即$\dfrac{BO}{15}=\dfrac{16}{20}$.

解得 $BO=12$.

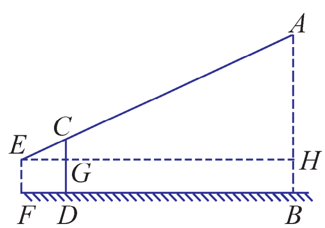
$\therefore AB=AO-BO=15-12=3(\mathrm{m})$.

即杆 AB 的高度是 3 m.

【点拨】本题图中有三个直角三角形，即 Rt$\triangle EFG$，Rt$\triangle AOD$ 和 Rt$\triangle BOC$. 通过已知条件分别证明$\triangle AOD\backsim\triangle EFG$，$\triangle BOC\backsim\triangle AOD$，再根据相似三角形的性质分别列出关于 AO，BO 的比例式，问题的求解则可顺利完成.

变式训练一

解：连接 EF，AB，过点 E 作 $EH\perp AB$ 交 CD，AB 分别于点 G，H，如下图.



$\because$小明、竹竿、古塔均与地面垂直，$EH\perp AB$，

$\therefore BH=DG=EF=1.5$ m，

$EG=DF=2$ m，

$GH=DB=10$ m.

$\because CD=2.4$ m，

$\therefore CG=CD-DG=2.4-1.5=0.9$(m).

$\because CG /\!/ AH$,

$\therefore \triangle EGC \backsim \triangle EHA$.

$\therefore \frac{EG}{EH}=\frac{CG}{AH}$,

即$\frac{2}{10+2}=\frac{0.9}{AH}$.

解得 $AH=5.4$(m).

$\therefore AB=AH+BH=5.4+1.5=6.9$(m),

即古塔的高度是 6.9 m.

例二 **解**：设 $NB=x$ m，

则 $BM=NB+DN+MD=x+1.1+(2.8-1.5)=(x+2.4)$m.

根据题意，得 $EF=CD=1.6$ m，

$\angle CND=\angle ANB$，

$\angle CDN=\angle ABN=90°$.

$\therefore \triangle CND \backsim \triangle ANB$.

$\therefore \frac{CD}{AB}=\frac{ND}{NB}$.

$\therefore \frac{1.6}{AB}=\frac{1.1}{x}$. ①

同理可证$\triangle EMF \backsim \triangle AMB$.

$\therefore \frac{EF}{AB}=\frac{FM}{BM}$.

$\therefore \frac{1.6}{AB}=\frac{1.5}{x+2.4}$. ②

解①②组成的方程组，得 $AB=9.6$.

即大树 AB 的高度为 9.6 m.

【点拨】本题求解的技巧主要体现为两点：一是建立数学模型的思想，即根据题意得到两对相似三角形，把实际问题转化为相似三角形问题．二是数形结合的思想，利用两组角对应相等的三角形相似得到$\triangle CND \backsim \triangle ANB$与$\triangle EMF \backsim \triangle AMB$，再得到关于 AB，x 的二元一次方程组，即可求出大树 AB 的高度.

变式训练二

1. 解：由反射角等于入射角可知 $\angle CPE=\angle APE$，

$\therefore \angle APB=\angle CPD$.

$\because \angle ABP=\angle CDP=90°$，

$\therefore \triangle ABP \backsim \triangle CDP$.

$\therefore \frac{AB}{CD}=\frac{BP}{PD}$，

即$\frac{1.2}{CD}=\frac{1.5}{12}$.

解得 $CD=9.6$(m).

即该古城墙的高度是 9.6 m.

2. 解：连接 AC，BD，

$\because CA \perp AB$，$DB \perp AB$，

$\therefore \angle CAO=\angle DBO=90°$.

又$\angle COA=\angle DOB$，

$\therefore \triangle AOC \backsim \triangle BOD$.

$\therefore \frac{AC}{DB}=\frac{AO}{BO}$.

$\because BD=2$ cm，$OA=16$ cm，$OB=4$ cm，

$\therefore \frac{AC}{2}=\frac{16}{4}$.

解得 $AC=8$(cm).

即火焰 AC 的长度为 8 cm.

培优精练

1. A **【解析】**$\because$直线 BD，CE 均与直线 AC 垂直，$\therefore BD /\!/ CE$.

$\therefore \triangle ABD \backsim \triangle ACE$. $\therefore \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CE}$.

$\because AB$ 的长为 x，$\therefore AC=AB+BC=x+BC$. $\therefore \frac{x}{x+BC}=\frac{BD}{CE}$. 故选 A.

2. 解： $\because \angle DEF=\angle DCB=90^\circ$，

$\angle D=\angle D$，

$\therefore \triangle DEF \backsim \triangle DCB$.

$\therefore \frac{DE}{DC}=\frac{EF}{CB}$.

$\because DE=\frac{\sqrt{3}}{5}$ m，$EF=\frac{1}{5}$ m，

$CD=8$ m，

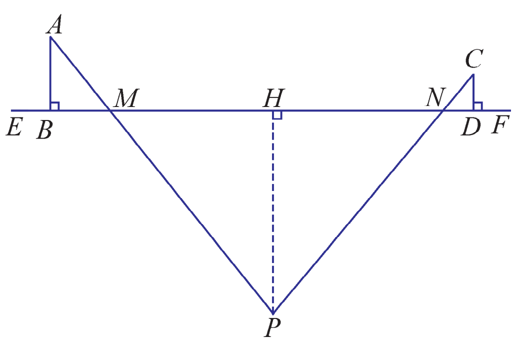
$\therefore \frac{\frac{\sqrt{3}}{5}}{8}=\frac{\frac{1}{5}}{BC}$.

$\therefore CB=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore AB=AC+BC=\frac{3}{2}+\frac{8\sqrt{3}}{3}=\frac{9+16\sqrt{3}}{6}$(m)，

即树高 AB 的值为$\frac{9+16\sqrt{3}}{6}$米.

3. 解： 过点 P 作 $PH \perp EF$，垂足为 H，如下图.



$\because AB \perp EF$，$PH \perp EF$，$CD \perp EF$，

$\therefore AB /\!/ HP$，$CD /\!/ HP$.

$\therefore \triangle ABM \backsim \triangle PHM$，

$\triangle CDN \backsim \triangle PHN$.

$\therefore \frac{PH}{AB}=\frac{HM}{BM}$，$\frac{PH}{CD}=\frac{HN}{DN}$.

$\therefore PH=\frac{HM}{BM}\cdot AB$，

$PH=\frac{HN}{DN}\cdot CD$.

$\therefore \frac{HM}{BM}\cdot AB=\frac{HN}{DN}\cdot CD$.

$\because AB=2$ m，$BM=1.6$ m，$CD=1$ m，$DN=0.8$ m，$MN=8.8$ m，

$\therefore$ 设 $HM=x$ m，

则 $HN=(8.8-x)$m.

$\therefore \frac{2x}{1.6}=\frac{1\times(8.8-x)}{0.8}$.

解得 $x=4.4$.

$\therefore PH=\frac{2x}{1.6}=\frac{4.4}{0.8}=5.5$(m).

$\therefore$ 深坑深度为 5.5 米.

名卷压轴题

解：（1）设正方形的边长为 x cm，

$\because$ 四边形 $EFGH$ 是正方形，

$\therefore EH /\!/ BC$，$EF=EH=x$ cm.

又 $\because AD \perp BC$，

$\therefore \angle AEH=\angle ABC$，$\angle AHE=\angle ACB$，$AD \perp EH$，$DK=EF=x$ cm.

$\therefore \triangle AEH \backsim \triangle ABC$.

$\therefore \frac{AK}{AD}=\frac{EH}{BC}$.

$\because BC=120$ cm，$AD=120$ cm，

$\therefore \frac{120-x}{120}=\frac{x}{120}$.

解得 $x=60$.

即正方形的边长为 60 cm.

(2) 设正方体的棱长为 a cm，

由题意知 $MN // BC$，$AP \perp MN$，$MN=a$，$PD=4a$.

$\therefore \triangle AMN \backsim \triangle ABC$，

$\therefore \dfrac{AP}{AD}=\dfrac{MN}{BC}$，

即$\dfrac{120-4a}{120}=\dfrac{a}{120}$.

解得 $a=24$.

$\therefore$正方体的表面积为

$6\times 24^2=3\ 456$ (cm^2).

◎相　似　新题型探究

例题　(1) C　**【解析】**根据作图方法，得 $\angle QAB=\angle PBA=\angle MBA=\angle NAB$. $\therefore AC=BC$，$AD=BD$. (等角对等边)

(2) **解：**点 E 是 AB 的中点. 理由如下：

$\because CE // AD$，

$\therefore \dfrac{AE}{BE}=\dfrac{DC}{BC}$.

$\because BC=DC$，

$\therefore AE=BE$.

$\therefore$点 E 是 AB 的中点.

(3) **解：**$\because AD=BD=BC=AC=12$，

$\therefore$四边形 $ADBC$ 是菱形.

①当点 F 均不与点 B，A 重合时，

$\because \angle CBD=60^\circ$，

$\therefore \angle CBF=\angle FAG=30^\circ$，

$\because \angle CFG=30^\circ$，

$\therefore \angle BFC=180^\circ-\angle CFG-\angle AFG=150^\circ-\angle AFG$，

$\angle AGF=180^\circ-\angle FAG-\angle AFG=150^\circ-\angle AFG$.

$\therefore \angle BFC=\angle AGF$.

$\therefore \triangle CBF \backsim \triangle FAG$.

$\therefore \dfrac{BC}{AF}=\dfrac{BF}{AG}$.

易得 $AB=2BE=2\times 6\sqrt{3}=12\sqrt{3}$.

设 $BF=x$，则 $AF=12\sqrt{3}-x$，$0<x<12\sqrt{3}$.

$\therefore \dfrac{12}{12\sqrt{3}-x}=\dfrac{x}{AG}$.

$\therefore AG=\dfrac{1}{12}x(12\sqrt{3}-x)=-\dfrac{1}{12}x^2+\sqrt{3}x=-\dfrac{1}{12}(x-6\sqrt{3})^2+9$.

$\therefore$当 $BF=x=6\sqrt{3}$ 时，AG 取得最大值 9.

②当点 F 与点 B 重合时，点 G 与点 A 重合，此时 $AG=0$，

③当点 F 与点 A 重合时，$\angle CFG=0^\circ$，不符合题意.

综上所述，AG 的最大值为 9.

【点拨】本题综合考查了等腰三角形，平行线分线段成比例，线段的垂直平分线，二次函数的最值等知识，综合性较强，难度较大. 解题的关键是熟记相关定理灵活运用.

变式训练

A　**【解析】**$\because AB=10$ cm，$BP=x$ cm，$\therefore AP=(10-x)$cm. $\because P$ 为 AB

的黄金分割点($AP>PB$)，$\therefore \dfrac{AP}{AB}=\dfrac{BP}{AP}$. $\therefore AP^2=BP\cdot AB$，即$(10-x)^2=10x$.

培优精练

(1) **证明：** $\because \angle A=40^\circ$，$\angle B=60^\circ$，

$\therefore \angle ACB=180^\circ-\angle A-\angle B=80^\circ$.

$\because \angle A\neq\angle B\neq\angle ACB$，

$\therefore \triangle ABC$不是等腰三角形.

$\because CD$平分$\angle ACB$，

$\therefore \angle ACD=\angle BCD=\dfrac{1}{2}\angle ACB=40^\circ$.

$\because \angle ACD=\angle A=40^\circ$.

$\therefore \triangle ACD$为等腰三角形.

$\because \angle DCB=\angle A=40^\circ$，

$\angle CBD=\angle ABC=60^\circ$，

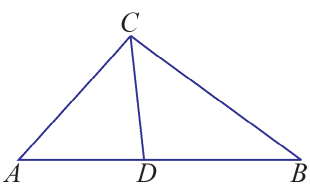
$\therefore \triangle BCD\backsim\triangle BAC$.

$\therefore CD$是$\triangle ABC$的“完美分割线”.

(2) **解：** $\because CD$为$\triangle ABC$的“完美分割线”，$\triangle ACD$为等腰三角形，

$\therefore \triangle BCD$与$\triangle ABC$相似.

①当$AD=CD$时，如下图.



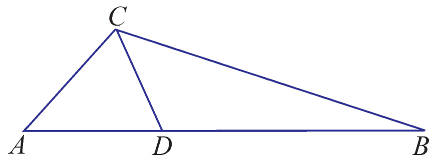
$\therefore \angle ACD=\angle A=48^\circ$.

根据“完美分割线”的定义，得$\triangle BDC\backsim\triangle BCA$.

$\therefore \angle BCD=\angle A=48^\circ$.

则$\angle ACB=\angle ACD+\angle BCD=96^\circ$.

②当$AD=AC$时，如图.



$\therefore \angle ACD=\angle ADC=\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle A)=\dfrac{1}{2}(180^\circ-48^\circ)=66^\circ$.

根据“完美分割线”的定义，可得$\triangle BDC\backsim\triangle BCA$.

$\therefore \angle BCD=\angle A=48^\circ$.

则$\angle ACB=\angle ACD+\angle BCD=114^\circ$.

③当$AC=CD$时，$\angle ADC=\angle A=48^\circ$.

根据“完美分割线”的定义，可得$\triangle BDC\backsim\triangle BCA$.

$\therefore \angle BCD=\angle A=48^\circ$.

$\because \angle ADC=\angle BCD+\angle B$，

$\therefore 48^\circ=48^\circ+\angle B$.

$\therefore \angle B=0^\circ$，即这种情况不存在.

综上所述，$\angle ACB$的度数为96°或114°.

专题三 锐角三角函数

第1讲 锐角三角函数

例一 C 【解析】$\because BC=2AC$，$\therefore$设$AC=a$，则$BC=2a$. 根据勾股定理，得$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{a^2+(2a)^2}=\sqrt{5}a$. $\therefore \sin B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{a}{\sqrt{5}a}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

【点拨】本题考查了锐角三角函数的定义. 解题关键是利用勾股定理得出AC与AB的数量关系.

变式训练一

1. 解：$\because \angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$，

$\therefore \angle BDC=\angle ACB=90^\circ$.

$\because \angle B+\angle BCD=90^\circ$，

$\angle B+\angle A=90^\circ$，

$\therefore \angle BCD=\angle A$.

$\because AB=10$，$AC=8$，

$\therefore \cos A=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$.

$\therefore \cos\angle BCD=\cos A=\dfrac{4}{5}$.

2. 解：在 $Rt\triangle BCD$ 中，$\because CD=3$，$BD=5$，

$\therefore BC=\sqrt{BD^2-CD^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

又$\because AC=AD+CD=8$.

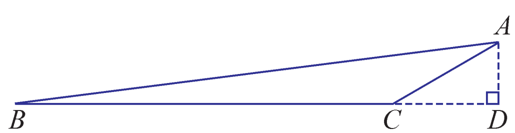
$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$.

$\therefore \sin A=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{4}{4\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

$\cos A=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{8}{4\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\tan A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$.

例二 **解：**(1) 过 A 作 $AD\perp BC$，交 BC 的延长线于点 D，如下图.



$\because \angle ACB=150^\circ$，

$\therefore \angle ACD=180^\circ-\angle ACB=30^\circ$.

$\because$在 $Rt\triangle ADC$ 中，$AC=4$，

$\therefore AD=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}\times 4=2$.

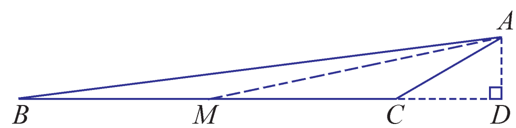
$CD=AC\cdot\cos 30^\circ=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

在 $Rt\triangle ABD$ 中，$\tan B=\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{2}{BD}=\dfrac{1}{8}$.

$\therefore BD=16$.

$\therefore BC=BD-CD=16-2\sqrt{3}$.

(2) 在边 BC 上取一点 M，使得 $CM=AC$，连接 AM，如下图.



$\because \angle ACB=150^\circ$，

$\therefore \angle AMC=\angle MAC=\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle ACB)=15^\circ$.

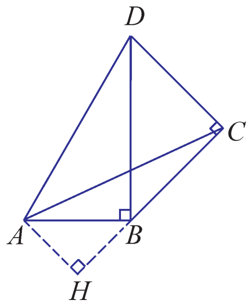
$\because DM=CM+CD=AC+CD=4+2\sqrt{3}$，

$\therefore$ 在 $Rt\triangle AMD$ 中，$\tan 15^\circ=\tan\angle AMD=\dfrac{AD}{DM}=\dfrac{2}{4+2\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}\approx 0.3$.

【点拨】本题求解的关键是构造直角三角形．根据已知条件与图形的特点，作 $AD\perp BC$，构造出含有 30°角的直角三角形，作辅助线 AM，根据等腰三角形的性质，构造出含有 15°角的直角三角形，进而根据锐角三角函数的定义进行求解.

变式训练二

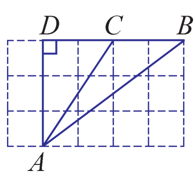
1. B **【解析】**如图，作 $AH\perp CB$ 交 CB 的延长线于点 H.



$\because \angle ABD=90^\circ$，$\angle DBC=45^\circ$，$\therefore \angle ABH=180^\circ-\angle ABD-\angle DBC=45^\circ$.

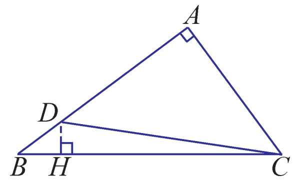
$\because \angle AHB=90^\circ$，$\therefore \triangle ABH$ 是等腰直角三角形. $\therefore AH=BH$. 设 $AH=BH=a$，则 $AB=\sqrt{2}a$，$AD=2\sqrt{2}a$，$BD=\sqrt{6}a$，$BC=CD=\sqrt{3}a$，$CH=BH+BC=a+\sqrt{3}a$. $\because \angle AHB=\angle DCB=90^\circ$，$\therefore AH\parallel CD$. $\therefore \angle ACD=\angle CAH$. $\therefore \tan\angle ACD=\tan\angle CAH=\dfrac{CH}{AH}=\sqrt{3}+1$.

2. $\dfrac{3}{5}$ **【解析】** 作 $AD\perp BC$，交 BC 的延长线于点 D，如下图.



$\because \triangle ABD$ 是直角三角形，$AD=3$，$BD=4$，$\therefore$ 根据勾股定理，得 $AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=5$. $\therefore \sin\angle ABC=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{3}{5}$.

例三 **解**：如图，作 $DH\perp BC$ 于点 H.



$\because \angle A=90^\circ$，$\sin B=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{3}{5}$，

$\therefore$ 可设 $AC=3k$，$BC=5k$.

根据勾股定理，得 $AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=\sqrt{(5k)^2-(3k)^2}=4k$.

$\because AC=AD=3k$，

$\therefore BD=AB-AD=4k-3k=k$.

$\because \angle B=\angle B$，$\angle DHB=\angle A=90^\circ$，

$\therefore \triangle BHD\backsim\triangle BAC$.

$\therefore \dfrac{BD}{BC}=\dfrac{DH}{CA}=\dfrac{BH}{BA}$，

即 $\dfrac{k}{5k}=\dfrac{DH}{3k}=\dfrac{BH}{4k}$.

则 $DH=\dfrac{3}{5}k$，$BH=\dfrac{4}{5}k$.

$\because CH=BC-BH=5k-\dfrac{4}{5}k=\dfrac{21}{5}k$，

$\therefore \tan\angle BCD=\dfrac{DH}{CH}=\dfrac{\frac{3}{5}k}{\frac{21}{5}k}=\dfrac{1}{7}$.

【点拨】 本题考查了直角三角形的性质，相似三角形的性质，正切三角函数值的求法等. 解题的关键是作出恰当的辅助线，构造出相似三角形和直角三角形.

变式训练三

解：$\because \angle C=90^\circ$，$MN\perp AB$，

$\therefore \angle C=\angle ANM=90^\circ$.

又 $\because \angle A=\angle A$，

$\therefore \triangle AMN \backsim \triangle ABC$，

$\therefore \dfrac{AN}{AC}=\dfrac{AM}{AB}$.

$\therefore \dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AN}{AM}=\dfrac{3}{4}$.

设 $AC=3x$，则 $AB=4x$，

由勾股定理，得 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{7}x$.

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\cos B=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{\sqrt{7}x}{4x}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

例四　**解**：设 $AE=x$，

$\because$正方形 $ABCD$，$BE=3AE$，

则 $BE=3x$，

$CD=BC=AE+BE=4x$.

$\because M$ 是 AD 的中点，

$\therefore AM=2x$.

根据勾股定理，得 $CE=\sqrt{BC^2+BE^2}=\sqrt{(4x)^2+(3x)^2}=5x$，

$EM=\sqrt{AE^2+AM^2}=\sqrt{x^2+(2x)^2}=\sqrt{5}x$.

$CM=\sqrt{CD^2+DM^2}=\sqrt{(4x)^2+(2x)^2}=2\sqrt{5}x$.

$\because EM^2+CM^2=(\sqrt{5}x)^2+(2\sqrt{5}x)^2=25x^2$，

$CE^2=(5x)^2=25x^2$，

$\therefore EM^2+CM^2=CE^2$，

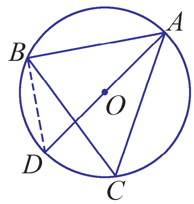
即$\triangle CEM$ 是直角三角形，且 $\angle CME$ 是直角.

$\therefore \sin\angle ECM=\dfrac{EM}{CE}=\dfrac{\sqrt{5}x}{5x}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

【点拨】本题求解的技巧是运用数形结合的思想，观察图形可知，$\angle ECM$ 在$\triangle CEM$ 中，根据勾股定理的逆定理判定$\triangle CEM$ 是直角三角形，然后利用三角函数的定义求得答案.

变式训练四

解：如下图，连接 BD.



$\because \angle ADB=\angle ACB$，

$\therefore \sin\angle ADB=\sin C=\dfrac{4}{5}$.

$\because AD$ 是$\triangle ABC$ 的外接圆的直径，

$\therefore \angle ABD=90^\circ$.

在 Rt$\triangle ABD$ 中，

$\because \sin\angle ADB=\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{4}{5}$，

设 $AB=4k$，则 $AD=5k$.

$\therefore BD=\sqrt{AD^2-AB^2}=3k$.

$\therefore \tan\angle BAD=\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{3k}{4k}=\dfrac{3}{4}$.

培优精练

1. C　**【解析】**在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AB=13$，$BC=12$，由勾股定理，得 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$. $\therefore \sin B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{5}{13}$，$\cos A=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{5}{13}$，$\tan B=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{5}{12}$，$\cos B=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{12}{13}$. 故选 C.

2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】∵$CA=AB$，$\angle CAD=\angle ABE=60^\circ$，$AD=BE$，∴$\triangle CAD\cong\triangle ABE$（SAS）．∴$\angle ACD=\angle BAE$．∵$\angle BAE+\angle CAE=60^\circ$，∴$\angle ACD+\angle CAE=60^\circ$．∴$\angle AFG=\angle ACD+\angle CAE=60^\circ$．在 Rt$\triangle AFG$ 中，$\sin\angle AFG=\frac{AG}{AF}=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

3. 解：∵$AD/\!/BC$，$\angle DAB=90^\circ$，

∴$\angle ABC=180^\circ-\angle DAB=90^\circ$，

$\angle BAC+\angle EAD=90^\circ$．

∵$AC\perp BD$，

∴$\angle AED=90^\circ$．

∴$\angle ADB+\angle EAD=90^\circ$．

∴$\angle BAC=\angle ADB$．

∴$\triangle ABC\backsim\triangle DAB$．

∴$\frac{AB}{DA}=\frac{BC}{AB}$．

∵$BC=\frac{1}{2}AD$，

∴$AD=2BC$．

∴$AB^2=BC\times 2BC=2BC^2$．

∴$AB=\sqrt{2}BC$．

在 Rt$\triangle ABC$ 中，

$\tan\angle BAC=\frac{BC}{AB}=\frac{BC}{\sqrt{2}BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

名卷压轴题

（1）$\frac{1}{2}$　$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　【解析】根据材料中的定义：当 $\alpha=150^\circ$时，在 α 的终边 OB 上取一点 P（$-\sqrt{3}$，1），$x=-\sqrt{3}$，$y=1$，$r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$．所以 $\sin 150^\circ=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}$，$\cos 150^\circ=\frac{x}{r}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan 150^\circ=\frac{y}{x}=\frac{1}{-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$．

（2）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　-1　【解析】同（1），当 $\alpha=135^\circ$时，在 α 的终边 OB 上取一点 P（-1，1），则 $x=-1$，$y=1$，$r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$．所以 $\sin 135^\circ=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos 135^\circ=\frac{x}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan 135^\circ=\frac{y}{x}=-1$．

（3）$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$　$\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$　$\tan(180^\circ-\alpha)=-\tan\alpha$
【解析】易知（$180^\circ-\alpha$）的终边与 α 的终边关于 y 轴对称，故其终边上的点的坐标：横坐标互为相反数，纵坐标相等．所以可得其关系为 $\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$，$\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$，$\tan(180^\circ-\alpha)=-\tan\alpha$．

第 2 讲　解直角三角形

例一　解：在 Rt$\triangle ABD$ 中，∵$AB=AC=15$，$\cos A=\frac{AD}{AB}$，

∴$AD=AB\cdot\cos A=15\times\frac{4}{5}=12$．

在 Rt$\triangle ABD$ 中，根据勾股定理，得 $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{15^2-12^2}=9$．

$\therefore CD=AC-AD=15-12=3.$

在 Rt$\triangle CBD$ 中，根据勾股定理，得

$BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{9^2+3^2}=3\sqrt{10}.$

【点拨】 本题求解的技巧是运用数形结合的方法，先由数定形，即根据 BC 的位置确定 BC 所在的直角三角形，然后由形求数，即利用已知条件先求得 BD，CD，最后在 Rt$\triangle CBD$ 中利用勾股定理求 BC.

变式训练一

1. C　**【解析】** $\because BD=2CD=6$，$\therefore CD=3$. $\because \tan C=\dfrac{AD}{CD}=2$，$\therefore AD=6$. $\because AD=BD=6$，$\therefore \triangle ABD$ 是等腰直角三角形. $\therefore AB=\sqrt{2}AD=6\sqrt{2}$.

2. 解： $\because \angle C=90^\circ$，$\angle BDC=45^\circ$，

$\therefore \angle CBD=45^\circ.$

$\because CD=6$，

$\therefore BC=CD=6.$

$\because \sin A=\dfrac{3}{5}=\dfrac{BC}{AB}$，

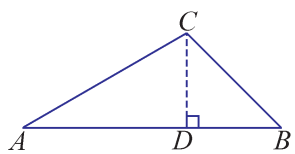
$\therefore AB=\dfrac{5}{3}\times BC=10.$

在 Rt$\triangle ABC$ 中，根据勾股定理，得

$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8.$

$\therefore AD=AC-CD=8-6=2.$

例二　解：（1）在题图 1 中过 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D，如下图.



在 Rt$\triangle ACD$ 中，$\because AC=4$，$\angle A=30^\circ$，

$\therefore CD=\dfrac{1}{2}AC=2$，

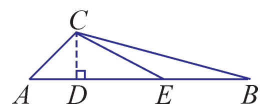
$AD=AC\cdot\cos A=4\times\cos 30^\circ=2\sqrt{3}.$

在 Rt$\triangle BCD$ 中，$\because \angle B=45^\circ$，

$\therefore BD=\dfrac{CD}{\tan B}=\dfrac{2}{\tan 45^\circ}=2.$

$\therefore AB=AD+BD=2\sqrt{3}+2.$

（2）在题图 2 中过 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D，在 BD 上取点 E，使 $CE=BE$，如下图.



$\therefore \angle BCE=\angle B=15^\circ.$

$\therefore \angle CED=\angle BCE+\angle B=30^\circ.$

在 Rt$\triangle ACD$ 中，$\angle A=45^\circ$，$AC=1$，

$\therefore AD=CD=AC\cdot\sin A=1\times\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

在 Rt$\triangle CDE$ 中，$\because \angle CED=30^\circ$，

$\therefore DE=\dfrac{CD}{\tan\angle CED}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\tan 30^\circ}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

$CE=2CD=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$

$\therefore BE=CE=\sqrt{2}.$

$\therefore AB=AD+DE+BE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\sqrt{2}=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}.$

【点拨】 本题求解的关键是作辅助线构造直角三角形与类比的思想的运用. 由于（1）中作 $CD\perp AB$ 后，可得两个

锐角为特殊角的直角三角形，而（2）中只得到一个锐角为特殊角的直角三角形，为此还需作辅助线，构造出含30°的直角三角形，即Rt△CDE，然后由“形”求“数”得到BE，最后由线段的加减求得AB.

变式训练二

（1）**证明：**∵ $\angle BAC=90°$，D是边BC的中点，

∴$AD=BD=\frac{1}{2}BC$.

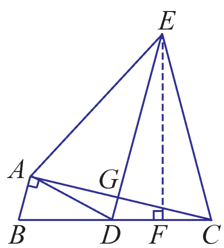
∴ $\angle B=\angle DAB$.

∵ $\angle ADE=\angle B$，

∴ $\angle ADE=\angle BAD$.

∴$DE\parallel AB$.

（2）**解：**过E作$EF\perp CD$，垂足为F，设DE与AC交于点G，如下图.



∵ $\angle BAC=90°$，D是边BC的中点，

∴$AD=CD=\frac{1}{2}BC$.

∵$DE\parallel AB$，

∴ $\angle BAC=\angle DGC=90°$，

$\angle B=\angle EDC$.

∴DG是AC的垂直平分线.

∴$AE=CE$.

∵$AE=DE$，

∴$DE=CE$.

∴ $\angle EDC=\angle ECD$.

∵$EF\perp CD$，

∴$CF=\frac{1}{2}CD$.

∴ $\angle DCE=\angle B$.

∴$\cos\angle DCE=\cos B=\frac{1}{4}$.

在Rt△EFC中，∵ $\cos\angle DCE=\frac{CF}{CE}=\frac{\frac{1}{2}CD}{CE}=\frac{1}{4}$，

∴$CE=2CD$.

∴$CE=2AD$.

培优精练

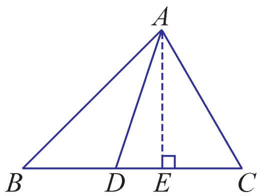
1. B　**【解析】**∵ $\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，∴ $\angle ACD+\angle BCD=\angle BCD+\angle B=90°$. ∴ $\angle B=\angle ACD$. ∵ $\tan\angle ACD=\frac{3}{4}$，∴$\tan\angle B=\frac{AC}{BC}=\frac{3}{4}$. 设$AC=3x$，$BC=4x$，∵ $AC^2+BC^2=AB^2$，∴ $(3x)^2+(4x)^2=5^2$. 解得$x=1$. ∴ $AC=3$，$BC=4$. ∵$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}AC\cdot BC$，

∴$CD=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{12}{5}$.

2. 4　**【解析】**∵ $\tan B=\frac{AD}{BD}=\cos\angle DAC=\frac{AD}{AC}$，∴ $BD=AC$. ∵ $\sin C=\frac{AD}{AC}=\frac{12}{13}$，∴设$AD=12x$. 则$AC=13x$. 根据勾股定理，得$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=5x$. 则$BC=BD+$

$CD=18x$. ∵$BC=6$，∴$18x=6$. 解得 $x=\frac{1}{3}$. 故 $AD=12x=4$.

3. 解：（1）过 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E，如下图.



在 Rt△ACE 中，∵$\angle C=60°$，

∴$\angle CAE=90°-\angle C=30°$.

∴$CE=\frac{1}{2}AC=10$，

$AE=AC\cdot\cos\angle CAE=20\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$.

在 Rt△ABE 中，∵$\angle B=45°$，

∴$\angle BAE=45°$.

∴$BE=AE=10\sqrt{3}$.

∴$BC=BE+CE=10\sqrt{3}+10$.

（2）∵$\angle BAC=180°-\angle B-\angle C=75°$，

$\angle ADC=75°$，

∴$\angle ADC=\angle BAC$.

又∵$\angle ACD=\angle BCA$，

∴△CDA∽△CAB.

∴$\frac{DC}{AC}=\frac{AC}{BC}$，即$\frac{DC}{20}=\frac{20}{10+10\sqrt{3}}$.

解得 $CD=20\sqrt{3}-20$.

名卷压轴题

（1）6　$2\sqrt{10}$　**【解析】**∵$CD\perp AB$，∴$\angle ADC=\angle BDC=90°$. ∵$AC=AB=10$，$\sin A=\frac{3}{5}$，∴$\frac{CD}{AC}=\frac{CD}{AB}=\frac{3}{5}$. 解得 $CD=6$. 在 Rt△ADC 中，$AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$. ∴$BD=AB-AD=10-8=2$. 在 Rt△$BCD$ 中，∴$BC=\sqrt{CD^2+BD^2}=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$.

（2）**解：**设点 P 运动的时间为 t s（$0<t\leqslant 2$），

则 $AP=5t$，$BQ=\sqrt{10}t$.

∴$PC=10-5t$，$CQ=2\sqrt{10}-\sqrt{10}t$.

∴$\frac{CQ}{PC}=\frac{\sqrt{10}}{5}=\frac{BC}{AC}$，

∴$\frac{CQ}{BC}=\frac{PC}{AC}$.

∵$\angle PCQ=\angle ACB$，

∴△ABC∽△PQC.

∴$\angle PQC=\angle B=\angle ACB$.

∴$PQ=PC=10-5t$.

∵$\cos\angle PQE=\cos A=\frac{AD}{AC}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$，

∴$QE=PQ\cos\angle PQE=\frac{4}{5}(10-5t)=8-4t$.

（3）由（2）可知$\angle CPQ=\angle A$.

∵$\angle PQE=\angle A$，

∴$\angle CPQ=\angle PQE$.

∴$AC\parallel EQ$.

若 $DE\parallel AC$，则点 D 落在 EQ 上.

易知四边形 $ADQP$ 是平行四边形.

∴$DQ\parallel AC$.

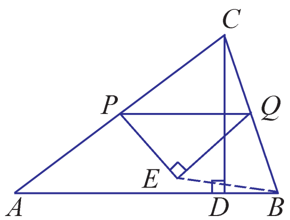
$\therefore \triangle BDQ \backsim \triangle BAC$.

$\therefore \dfrac{BD}{BA}=\dfrac{BQ}{BC}$,

即$\dfrac{2}{10}=\dfrac{\sqrt{10}t}{2\sqrt{10}}$.

$\therefore t=\dfrac{2}{5}$.

（4）连接 BE，如下图.



在 Rt $\triangle ACD$ 中，$\angle ACD$ 的余角是$\angle A$.

①当$\angle EQB+\angle ACD=90°$时，

$\angle EQB=\angle A$.

由（3）可知 $AC /\!/ EQ$.

$\therefore \angle EQB=\angle ACB\neq\angle A$.

∴此种情况不成立.

②当$\angle EBQ+\angle ACD=90°$时，

$\angle EBQ=\angle A$.

$\because \angle EQB=\angle ACB$，

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle BEQ$.

则$\dfrac{EQ}{BC}=\dfrac{BQ}{AC}$.

$\because EQ=8-4t$，$BQ=\sqrt{10}t$，

$BC=2\sqrt{10}$，$AC=10$，

$\therefore \dfrac{8-4t}{2\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}t}{10}$.

解得 $t=\dfrac{4}{3}$.

检验，符合题意.

③当$\angle BEQ+\angle ACD=90°$，

$\angle BEQ=\angle A$.

$\because \angle EQB=\angle ACB$，

$\therefore \triangle ACB \backsim \triangle EQB$.

则$\dfrac{EQ}{AC}=\dfrac{BQ}{BC}$.

$\because EQ=8-4t$，$BQ=\sqrt{10}t$，$AC=10$，

$BC=2\sqrt{10}$，

$\therefore \dfrac{8-4t}{10}=\dfrac{\sqrt{10}t}{2\sqrt{10}}$.

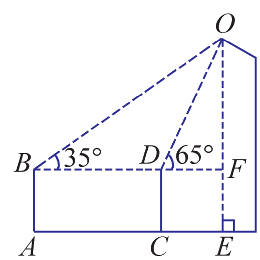
解得 $t=\dfrac{8}{9}$.

检验，符合题意.

综上所述，t 的值为$\dfrac{4}{3}$或$\dfrac{8}{9}$.

第 3 讲　解直角三角形的实际应用

例一　C　**【解析】**过点 O 作 $OE\perp AC$ 于点 E，延长 BD 交 OE 于点 F，如下图.



设 $DF=x$ m，则 $BF=(3+x)$ m.

$\because \tan 65°=\dfrac{OF}{DF}$，$\therefore OF=x\tan 65°\approx 2.1x$ m. $\because \tan 35°=\dfrac{OF}{BF}$，$\therefore OF=(3+x)\cdot \tan 35°\approx 0.7(3+x)$ m. $\therefore 2.1x=0.7(3+x)$. $\therefore x=1.5$. $\therefore OF=2.1\times 1.5=$

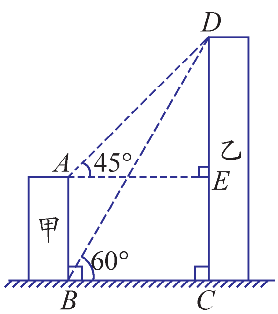
3.15(m). $\therefore OE=OF+EF=3.15+1.55=4.7$(m). 故选 C.

【点拨】本题主要考查解直角三角形的应用. 熟练运用锐角三角函数的定义是解题的关键.

变式训练一

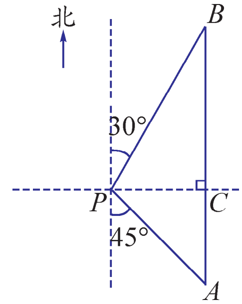
1. D 【解析】$\because BC\perp AB$, $\therefore \angle ABC=90°$. $\because \angle CAB=53°$, $AB=20$ m, $\therefore \tan\angle CAB=\frac{BC}{AB}$, 即 $\tan 53°=\frac{BC}{20}$. $\therefore BC\approx 20\times 1.327=26.54$ (m). $\because \angle DAB=58°$, $\therefore \tan\angle DAB=\frac{BD}{AB}$, 即 $\tan 58°=\frac{BD}{20}$. $\therefore BD\approx 20\times 1.600=32$ (m). $\therefore CD=BD-BC=32-26.54=5.46\approx 5.5$ (m).

2. B 【解析】过点 A 作 $AE\perp CD$ 于点 E, 如下图.



$\because AB\perp BC$, $DC\perp BC$, $\therefore \angle AED=\angle AEC=\angle ABC=\angle BCD=90°$. $\therefore$ 四边形 $ABCE$ 为矩形. $\therefore BC=AE$, $EC=AB=40$ m. $\because \angle DAE=45°$, $\therefore \angle ADE=45°$. $\therefore AE=DE$. 设 $DE=x$ m, 则 $BC=x$ m, $DC=(40+x)$ m. 在 Rt$\triangle BCD$ 中, $\tan\angle DBC=\frac{DC}{BC}$, 即 $\tan 60°=\frac{x+40}{x}$, 解得 $x=20(\sqrt{3}+1)$. $\therefore DC=40+x=(60+20\sqrt{3})$m.

例二 $(30\sqrt{2}+30\sqrt{6})$ 【解析】过点 P 作 $PC\perp AB$ 于点 C, 如下图.



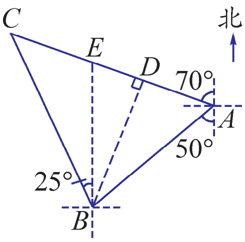
$\because$实验楼 A 位于学校主教学楼 P 南偏东 45°方向, A 到 B 的方向为正北. $\therefore \angle A=45°$. $\therefore \angle CPA=90°-\angle A=45°$. $\therefore PC=AC$. $\because PA=60$ m, $\therefore AC=PC=PA\cdot\cos 45°=60\times\frac{\sqrt{2}}{2}=30\sqrt{2}$ m. $\because$综合楼 B 在主教学楼北偏东 30°方向, $\therefore \angle B=30°$. $\therefore PB=2PC=60\sqrt{2}$ m. 在 Rt$\triangle BCP$ 中, $BC=PB\cdot\cos 30°=60\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=30\sqrt{6}$ m.

$\therefore AB=AC+BC=(30\sqrt{2}+30\sqrt{6})$m.

【点拨】本题主要考查解直角三角形的应用. 掌握方位角, 三角函数的定义, 以及三边之间的关系是解题的关键.

变式训练二

1. $10\sqrt{6}$ n mile 【解析】过点 B 作 $BD\perp AC$ 于点 D, 如下图.



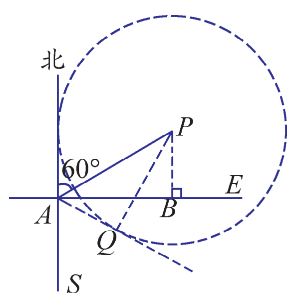
由题意可知，$AB=20$ n mile，$\angle DAB=180^\circ-70^\circ-50^\circ=60^\circ$. ∵ $\angle BED=70^\circ$，∴ $\angle C=70^\circ-25^\circ=45^\circ$. ∵ 在 Rt $\triangle ABD$ 中，$\sin\angle DAB=\dfrac{BD}{AB}$，∴ $\sin 60^\circ=\dfrac{BD}{20}$.

∴ $BD=10\sqrt{3}$ n mile. ∵ 在 Rt$\triangle BCD$ 中，$\sin C=\dfrac{BD}{BC}$，∴ $\sin 45^\circ=\dfrac{10\sqrt{3}}{BC}$.

∴ $BC=10\sqrt{6}$ n mile. ∴ 灯塔 C 与码头 B 的距离为 $10\sqrt{6}$ n mile.

2. 解：轮船有触礁危险．理由如下：

过点 P 作 $PB\perp AE$ 于点 B，如下图.



由题意，得 $\angle PAB=90^\circ-60^\circ=30^\circ$.

在 Rt $\triangle PBA$ 中，$\angle PBA=90^\circ$，$AP=32$ n mile，

∴ $PB=\dfrac{1}{2}AP=16$ n mile.

∵ $16<16\sqrt{3}$，

∴若轮船继续向正东方向航行，则有触礁危险.

作以点 P 为圆心，$16\sqrt{3}$ n mile 为半径的⊙P，

过点 A 作⊙P 的切线 AQ，切点为 Q，连接 PQ，如图所示.

∵ AQ 切⊙P 于点 Q，

∴ $\angle AQP=90^\circ$.

∵ $PQ=16\sqrt{3}$ n mile，

$AP=32$ n mile，

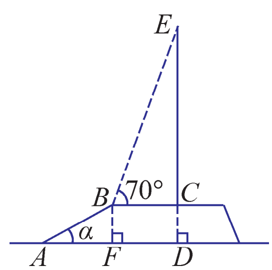
∴ $\sin\angle PAQ=\dfrac{PQ}{AP}=\dfrac{16\sqrt{3}}{32}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

∴ $\angle PAQ=60^\circ$.

∴ $\angle SAQ=180^\circ-60^\circ-60^\circ=60^\circ$.

∴轮船自 A 处开始沿南偏东最多 60° 方向航行才能安全通过这一海域.

例三　解：(1) 如下图，过 B 作 $BF\perp AD$ 于点 F.



∵ $i=\tan\angle BAF=\dfrac{BF}{AF}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

∴ $\angle BAF=30^\circ$，即 $\alpha=30^\circ$.

故斜坡 AB 的坡角 α 的度数是 30°.

(2) ∵ $\angle BAF=30^\circ$，$AB=6$ m，

∴ $CD=BF=\dfrac{1}{2}AB=3$ m.

在 Rt$\triangle BCE$ 中，

∵ $\angle EBC=70^\circ$，$BC=5$ m，

∴ $EC=BC\cdot\tan\angle EBC=5\times\tan 70^\circ\approx 5\times 2.75=13.75$(m).

$\therefore ED=EC+CD=13.75+3\approx 17$(m).

故大树顶端 E 到 D 的距离为 17 m.

【点拨】本题考查的是解直角三角形的应用之仰角、俯角问题和坡度、坡角问题. 解决这类题目的关键就是掌握仰角、俯角的概念和坡度、坡角的概念、熟记锐角三角函数的定义.

变式训练三

解：(1) 过 B 作 $BE\perp AD$ 于点 E，如图所示.

在 Rt△AEB 中，$\sin\alpha=\dfrac{BE}{AB}$，

即 $\dfrac{BE}{65}=\dfrac{4}{13}$.

解得 $BE=20$ (m).

故小明从点 A 到点 B 上升的竖直高度是 20 米.

(2) 过点 B 作 $BF\perp CD$ 于点 F，如图所示.

由题意，得四边形 $BEDF$ 为矩形.

$\therefore DF=BE=20$ m.

设 $CF=x$ m，

在 Rt△CBF 中，

BC 的坡度 $i=1:3$，

$\therefore BF=3x$ m.

由勾股定理，得

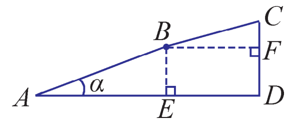
$BF^2+CF^2=BC^2$，

即 $(3x)^2+x^2=50^2$.

解得 $x=5\sqrt{10}$.

$\therefore CD=CF+FD=(5\sqrt{10}+20)$m.

故小明从点 A 到点 C 上升的高度 CD 是 $(5\sqrt{10}+20)$m.

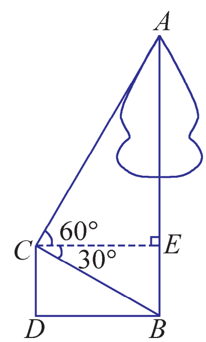


培优精练

1. A **【解析】**设 $AD=x$ m，$\therefore BD=AB-AD=(16-x)$m. 在 Rt△$ADC$ 中，$CD=AD=x$ m. 在 Rt△CDB 中，$\angle B=60°$，$\therefore \tan 60°=\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{x}{16-x}=\sqrt{3}$. 解得 $x=24-8\sqrt{3}$. $\therefore$这棵树 CD 的高度是 $(24-8\sqrt{3})$m.

2. 40 **【解析】**$\because OA$ 是东北方向，OB 是东南方向，$\therefore \angle AOB=90°$. 在 Rt△$AOB$ 中，$OA=32$ m，$OB=24$ m，$\therefore AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{32^2+24^2}=40$ (m). $\therefore$水管的长为 40 m.

3. **解：**过 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E，如下图.



由题意可知，四边形 $BDCE$ 为矩形，则 $CE=BD=3$ m.

在 Rt△ACE 中，$CE=3$ m，$\angle ACE=60°$，$\tan\angle ACE=\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{AE}{3}=\sqrt{3}$.

解得 $AE=3\sqrt{3}$ m.

在 Rt $\triangle CBE$ 中，$CE=3$ m，$\angle BCE=30^\circ$，$\tan\angle BCE=\frac{BE}{CE}=\frac{BE}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解得 $BE=\sqrt{3}$ m.

$\therefore AB=AE+BE=3\sqrt{3}+\sqrt{3}=4\sqrt{3}\approx 6.92$(m).

$\because 6.92<8$，

$\therefore$距离点 B 8 m 处的古建筑不在危险区内.

名卷压轴题

解：(1) $\because AB\perp BD$，

$\therefore \angle B=90^\circ$.

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AB=4$ m，$\angle ACB=45^\circ$，

$\therefore BC=AB=4$ (m).

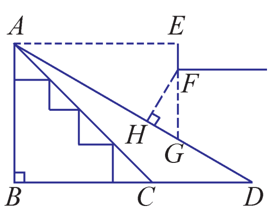
在 Rt$\triangle ABD$ 中，$\angle ADB=30^\circ$，

$\therefore BD=\frac{AB}{\tan 30^\circ}=\frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=4\sqrt{3}$ (m).

$\therefore CD=BD-BC=(4\sqrt{3}-4)$m.

$\therefore$斜坡底部增加的长度 CD 为 $(4\sqrt{3}-4)$m.

(2) 延长 EF 交 AD 于点 G，过点 F 作 $FH\perp AD$，垂足为 H，如下图.



由题意，得 $\angle FHG=\angle AEG=90^\circ$，$AE\parallel BD$.

$\therefore \angle EAD=\angle ADB=30^\circ$.

$\therefore \angle AGF=90^\circ-\angle EAD=60^\circ$.

在 Rt$\triangle AEG$ 中，$AE=6$ m，

$\therefore EG=AE\cdot\tan 30^\circ=6\times\frac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$ (m).

$\because EF=1.3$ m，

$\therefore FG=EG-EF=(2\sqrt{3}-1.3)$m.

在 Rt$\triangle FHG$ 中，$FH=FG\cdot\sin 60^\circ=(2\sqrt{3}-1.3)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3-1.3\times\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 1.9$ (m).

$\therefore$限制高度为 1.9 米.

◎锐角三角函数　新题型探究

例题　(1) B　**【解析】**根据项角的“正对”定义，当顶角为 60°时，等腰三角形底角为 60°. 此时等腰三角形为等边三角形，$\therefore \text{sad } 60^\circ=\frac{1}{1}=1$.

(2) $0<\text{sad } A<2$　**【解析】**当$\angle A$接近 0°时，sad A 接近于 0. 当$\angle A$接近 180°时，等腰三角形的底接近于腰的 2 倍，故 sad A 接近于 2. $\therefore$ sad A 的取值范围是 $0<\text{sad } A<2$.

(3) **解：**如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，$\sin A=\frac{3}{5}$.

在 AB 上取点 D，使 $AD=AC$，作 $DH\perp AC$，H 为垂足.

令 $BC=3k$，则 $AB=5k$.

$\therefore AD=AC=\sqrt{(5k)^2-(3k)^2}=4k$.

又$\because$在$\triangle ADH$中，$\angle AHD=90°$，

$\sin A=\frac{3}{5}$.

$\therefore DH=AD\cdot\sin A=4k\times\frac{3}{5}=\frac{12}{5}k$，

$AH=\sqrt{AD^2-DH^2}=$

$\sqrt{(4k)^2-\left(\frac{12}{5}k\right)^2}=\frac{16}{5}k$.

$\therefore$在$\triangle CDH$中，$CH=AC-AH=\frac{4}{5}k$，

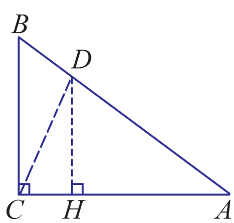
$CD=\sqrt{CH^2+DH^2}=$

$\sqrt{\left(\frac{4}{5}k\right)^2+\left(\frac{12}{5}k\right)^2}=\frac{4\sqrt{10}}{5}k$.

$\therefore$在$\triangle ACD$中，$AD=AC=4k$，$CD=\frac{4\sqrt{10}}{5}k$.

在等腰$\triangle ACD$中，由顶角的“正对”定义，得 $\text{sad}\,A=\frac{CD}{AD}=\frac{\frac{4\sqrt{10}}{5}k}{4k}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，

即 $\text{sad}\,\alpha=\frac{\sqrt{10}}{5}$.



【点拨】本题的解题技巧有两点：一是运用转化的方法，即在理解“正对”的定义的基础上，类比正弦的计算方法进行计算；二是利用数形结合的方法，通过作辅助线 CD 构造等腰三角形，为“正对”计算提供条件.

变式训练

(1) $\cos\alpha$ 　**【解析】**$\because 270°<\alpha<360°$，

$\therefore x>0$，$y<0$. $\therefore \sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$中，取正值的是 $\cos\alpha$.

(2) **解：**$\because$角 α 的终边与直线 $y=2x$ 重合，分两种情况：

①当 $x>0$ 时，在直线 $y=2x$ 上取点 P (1，2)，则 $r=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

$\therefore \sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

②当 $x<0$ 时，同理可得 $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{5}}{5}=-\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

综上所述，$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{5}$或 $\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

(3) **解：**$\because \cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{2}}{4}x$，

$\therefore r=2\sqrt{2}$.

$\because$角 α 是钝角，$\therefore x<0$.

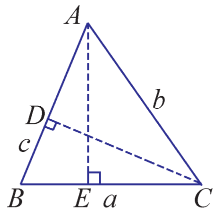
$\therefore x=-\sqrt{r^2-y^2}=-\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}=-\sqrt{3}$.

$\therefore \tan\alpha=\frac{y}{x}=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{15}}{3}$.

培优精练

解：拓展探究：

作 $CD\perp AB$ 于点 D，$AE\perp BC$ 于点 E，如下图.



在 Rt△ABE 中，$\sin B=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AE}{c}$.

在 Rt△BCD 中，$\sin B=\dfrac{CD}{BC}=\dfrac{CD}{a}$.

在 Rt△ADC 中，$\sin\angle BAC=\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{CD}{b}$，

在 Rt△AEC 中，$\sin\angle ACB=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AE}{b}$.

∴$AE=c\sin B$，$AE=b\sin\angle ACB$，

$CD=a\sin B$，$CD=b\sin\angle BAC$.

∴$c\sin B=b\sin\angle ACB$，

$a\sin B=b\sin\angle BAC$，

即 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin\angle ACB}$，

$\dfrac{a}{\sin\angle BAC}=\dfrac{b}{\sin B}$.

∴$\dfrac{a}{\sin\angle BAC}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin\angle ACB}$，

即在锐角△ABC 中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别为 a，b，c，

则 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{C}{\sin C}$.

解决问题：

在△ABC 中，$\angle ABC=180^\circ-\angle A-\angle C=180^\circ-75^\circ-60^\circ=45^\circ$.

∵$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}$，

∴$\dfrac{AB}{\sin 60^\circ}=\dfrac{60}{\sin 45^\circ}$.

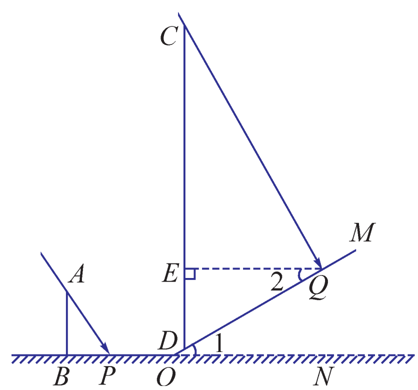
∴$AB=\dfrac{60}{\sin 45^\circ}\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{60}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=30\sqrt{6}$（m）.

∴点 A 到点 B 的距离为 $30\sqrt{6}$ m.

专题四　投影与视图

第 1 节　利用投影的性质计算

例一　**解：**过 Q 作 $QE\perp CD$ 于点 E，如下图所示.



∵$EQ\parallel NO$，

∴$\angle 1=\angle 2=30^\circ$.

∵$DQ=5$ m，

∴$DE=\dfrac{1}{2}QD=\dfrac{5}{2}$ m，

$EQ=DQ\cdot\cos 30^\circ=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ m.

根据题意，$CD\parallel AB$，$CQ\parallel AP$，

$\therefore \angle BAP=\angle DCQ$.

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABP \backsim \mathrm{Rt}\triangle CEQ$.

则$\dfrac{AB}{CE}=\dfrac{BP}{EQ}$,

即$\dfrac{1.7}{CE}=\dfrac{1.2}{\frac{5\sqrt{3}}{2}}$.

解得 $CE=\dfrac{85\sqrt{3}}{24}$.

$\therefore CD=CE+DE=\dfrac{85\sqrt{3}}{24}+\dfrac{5}{2}=\dfrac{60+85\sqrt{3}}{24}\approx 8.6(\mathrm{m})$.

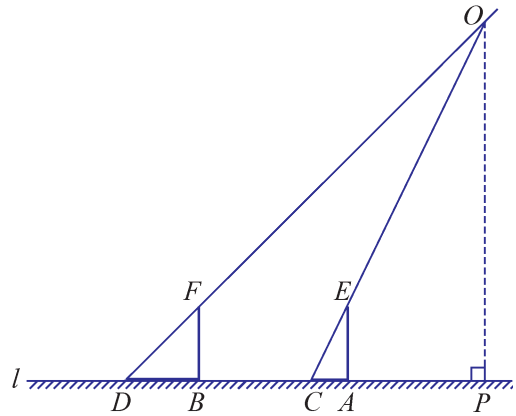
即大树的高度约为 8.6 m.

【点拨】 本题求解的关键是作辅助线 QE 构造相似三角形. 由于太阳光线都是平行的，且 AB 与 CD 平行，所以作 $QE\perp CD$，则构造出相似三角形 ($\mathrm{Rt}\triangle ABP\backsim\mathrm{Rt}\triangle CEQ$)，把求大树高度的问题转化为利用相似三角形的性质求线段的长度问题.

变式训练一

8 **【解析】** 设小明站在阳光下，此时刻在水平地面上形成的影长为 x m. 根据题意，得$\dfrac{x}{1.5}=\dfrac{10}{7.5}$. 解得 $x=2$，即小明站在阳光下，此时刻在水平地面上形成的影长为 2 m. 因为 $10-2=8$ (m)，所以他最多离树干 8 m 可以不被阳光晒到.

例二 **解：**（1）连接 DF，CE，并延长 DF，CE，则 DF 与 CE 延长线的交点即为路灯 O. 如下图.



（2）设 $AP=x$ m，$OP=y$ m，

$\because BF=BD=2$ m，

$\therefore \triangle BDF$ 是等腰直角三角形，

$\angle D=45°$.

$\therefore DP=OP$，

即得 $2+4+x=y$. ①

$\because AE\perp CP$，$OP\perp CP$，

$\therefore AE\,/\!/\,OP$.

$\therefore \triangle CEA\backsim\triangle COP$.

则$\dfrac{AC}{PC}=\dfrac{EA}{OP}$.

$\therefore \dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2}{y}$. ②

解①②组成的方程组，得 $y=10$.

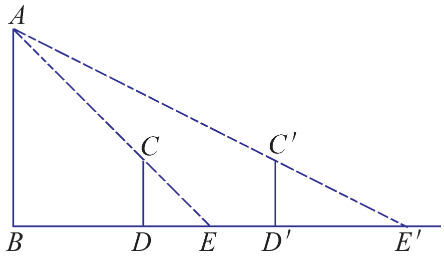
即路灯 O 的高度为 10 m.

【点拨】 本题主要考查了中心投影的性质. 根据同一根竹竿在不同位置时的影长确定路灯的位置是解题关键. 利用相似三角形列出比例式，即可求解.

变式训练二

解：（1）连接 AC 并延长交 BD 的延长线于点 E，连接 AC'并延长交 BD 的延长线于点 E'，则 DE，$D'E'$分别为小

明站在点 D，D' 处的影子．如下图．



(2) $\because AB\perp BD$，$CD\perp BD$，

$\therefore \angle B=\angle CDE=90°$.

$\because \angle AEB=\angle CED$，

$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle CDE$.

$\therefore \dfrac{AB}{CD}=\dfrac{BE}{DE}$.

同理可得，$\dfrac{AB}{C'D'}=\dfrac{BE'}{D'E'}$.

$\because CD=C'D'$，

$\therefore \dfrac{BE}{DE}=\dfrac{BE'}{D'E'}$.

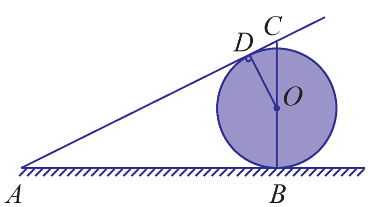
$\therefore \dfrac{BD+1.5}{1.5}=\dfrac{BD+3+3}{3}$.

解得 $BD=3(\text{m})$

$\therefore AB=BE=BD+DE=3+1.5=4.5(\text{m})$

即路灯的高度为 4.5 m.

例三　**解**：如下图，设圆的圆心为 O，半径为 r，得到最长影长的那条太阳光线为 CA，过点 O 作 $OD\perp CA$，垂足为 D，则 CA 与圆相切于点 D.



$\because$ 竖直立在地面上长为 1 m 的竹竿的影子长为 2 m，

$\therefore \tan A=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore BC=AB\cdot\tan A=10\times\dfrac{1}{2}=5$ m.

$\because \triangle ABC\backsim\triangle ODC$，

$\therefore \angle COD=\angle A$.

$\therefore \tan\angle COD=\dfrac{CD}{OD}=\tan A=\dfrac{1}{2}$.

设 $CD=k$，则 $OD=2k$.

$\therefore OC=\sqrt{CD^2+OD^2}=\sqrt{k^2+(2k)^2}=\sqrt{5}k$.

$\therefore \cos\angle COD=\dfrac{OD}{OC}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore OC=\dfrac{OD}{\cos\angle COD}=\dfrac{\sqrt{5}r}{2}$.

又 $OC+OB=BC=5$，

$\therefore \dfrac{\sqrt{5}r}{2}+r=5$.

解得 $r=10\sqrt{5}-20$.

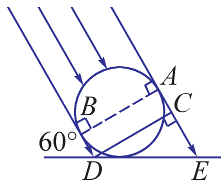
$\therefore$ 这个圆的半径是$(10\sqrt{5}-20)$m.

【点拨】 本题求解的关键是熟练运用相似三角形的性质与切线的性质，其技巧是运用数形结合的方法，根据题意画出光线 CA，并根据切线的性质构造相似三角形，列出比例式，通过解方程进行求解.

变式训练三

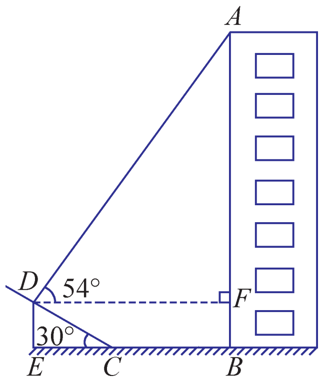
B　**【解析】** 如图，当太阳光线与皮球相切时，则两个切点 A，B 之间的线段长度即为皮球的直径，作 $CD\,//\,AB$，则线段 $CD=AB$. $\because DE=10\sqrt{3}$，$\angle CED=60°$，$\therefore CD=DE\cdot$

$\sin\angle CED=10\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ=15$（cm）.



培优精练

1. 解： 过 D 作 $DF\perp AB$，垂足为 F，如下图.



在 Rt $\triangle ECD$ 中，$CD=6$ m，$\angle ECD=30^\circ$，

$\therefore DE=FB=\frac{1}{2}CD=3$ m，

$EC=CD\cdot\cos 30^\circ=3\sqrt{3}$ m.

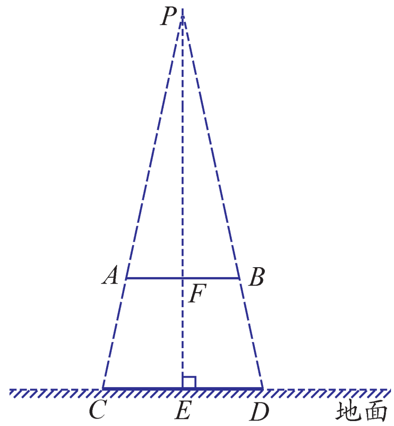
$\therefore DF=EB=EC+CB=(3\sqrt{3}+8)$（m）.

在 Rt $\triangle ADF$ 中，$AF=DF\cdot\tan\angle ADF=DF\cdot\tan 54^\circ=(3\sqrt{3}+8)\times 1.38\approx 18.2$（m）.

$\therefore AB=AF+FB=18.2+3=21.2$（m）.

即楼层的高度为 21.2 m.

2. 解：（1）连接 CA 和 DB，并延长相交，则交点即为路灯 P，如图.



（2）如图，过 P 作 $PE\perp CD$ 于点 E，交 AB 于点 F.

$\because AB\parallel CD$，

$\therefore\angle PAB=\angle PCD$，

$\angle PBA=\angle PDC$.

$\therefore\triangle PAB\backsim\triangle PCD$.

$\therefore\frac{AB}{CD}=\frac{PF}{PE}$.

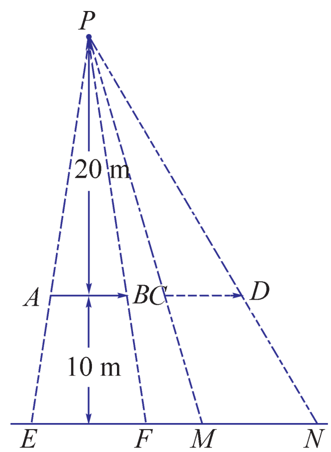
$\because AB=1$，$EF=1$，$CD=1.4$，

$\therefore\frac{1}{1.4}=\frac{PE-1}{PE}$.

解得 $PE=3.5$.

即路灯 P 到地面的距离为 3.5 m.

3. 解：（1）汽车与墙之间形成的盲区为梯形 $AEFB$，如下图.



$\because AB\parallel EF$，

$\therefore \triangle PAB \backsim \triangle PEF$.

$\therefore \dfrac{AB}{EF}=\dfrac{20}{20+10}$.

$\because AB=6$ m，

$\therefore EF=9$ m.

$\therefore$ 盲区的面积为 $(6+9)\times 10\div 2=75$ (m^2).

(2) 当汽车行驶到 CD 位置时，盲区的面积不会发生变化. 理由如下：

$\because CD /\!/ MN$，

$\therefore \triangle PCD \backsim \triangle PMN$.

$\because$ 它们的高不变，

$\therefore$ 相似比不变.

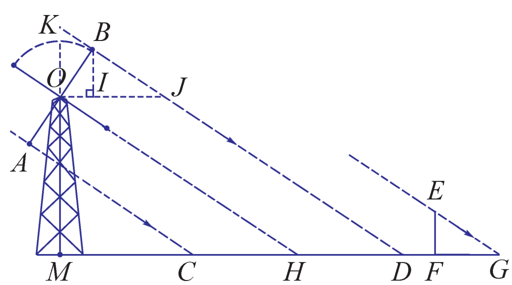
$\because$ 汽车长度不变.

$\therefore MN=EF$.

$\therefore$ 梯形 $CMND$ 的面积不变，即盲区的面积不变.

名卷压轴题

解： (1) 如下图，过点 O 作 AC，BD 的平行线，交 CD 于点 H.



由题意可知，O 是 AB 的中点.

$\because OH /\!/ AC /\!/ BD$，

$\therefore H$ 是 CD 的中点.

$\because CD=13$ m，

$\therefore CH=HD=\dfrac{1}{2}CD=6.5$ m.

$\therefore MH=MC+CH=8.5+6.5=15$ (m).

又 $\because \dfrac{EF}{FG}=\dfrac{OM}{MH}=\dfrac{2}{3}$.

$\therefore \dfrac{OM}{15}=\dfrac{2}{3}$.

解得 $OM=10$.

即点 O，M 之间的距离为 10 m.

(2) 过点 O 作水平线 OJ 交 BD 于点 J，过点 B 作 $BI\perp OJ$，垂足为 I，延长 MO，使得 $OK=OB$.

$\because BI\perp OJ$，

$\therefore \angle BIO=\angle BIJ=90^\circ$.

$\because \angle OBJ=\angle OBI+\angle JBI=90^\circ$.

$\angle BOI+\angle OBI=90^\circ$，

$\therefore \angle BOI=\angle JBI$.

$\therefore \triangle BIO \backsim \triangle JIB$.

$\therefore \dfrac{BI}{JI}=\dfrac{OI}{BI}$.

易知 $\dfrac{BI}{JI}=\dfrac{EF}{FG}=\dfrac{2}{3}$.

$\therefore \dfrac{OI}{BI}=\dfrac{2}{3}$.

$\therefore BI=\dfrac{2}{3}JI$，$OI=\dfrac{2}{3}BI=\dfrac{4}{9}JI$.

$\because OJ /\!/ CD$，$OH /\!/ DJ$，

$\therefore$ 四边形 $OHDJ$ 是平行四边形.

$\therefore OJ=HD=6.5$ m.

$\because OJ=OI+JI=\dfrac{4}{9}JI+JI=6.5$ m，

$\therefore JI=4.5$ m，$BI=3$ m，$OI=2$ m.

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle OBI$ 中，由勾股定理，得 $OB^2=OI^2+BI^2$.

$\therefore OB=\sqrt{OI^2+BI^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ m.

$\therefore OK=OB=\sqrt{13}$ m.

$\therefore MK=OM+OK=(10+\sqrt{13})$ (m).

∴叶片外端离地面的最大高度为 $(10+\sqrt{13})$ m.

第 2 讲　与三视图有关的计算

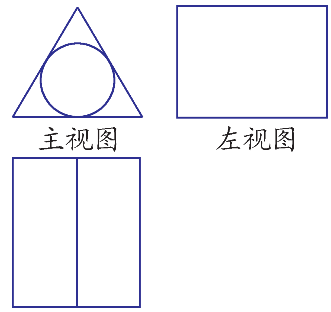
例一　144　**【解析】**∵俯视图为正方形，且根据主视图可得该正方形对角线为 6 cm，∴底面正方形的面积为 $\frac{1}{2}\times6\times6=18(\text{cm}^2)$. ∵根据主视图可知，长方体的高为 8 cm，∴长方体的体积为 $18\times8=144(\text{cm}^3)$.

【点拨】本题求解的关键是根据主视图中的相关数据，得到原长方体长、宽、高的有关数据，然后利用长方体的体积公式计算得到答案. 注意转化思想的运用，在得到正方形的对角线后，根据"正方形的面积等于两条对角线乘积的一半"计算长方体的底面积，由此简化了题目的计算量.

变式训练一

B　**【解析】**由几何体的三视图，得该几何体的表面展开图为三个矩形与两个扇形，其中三个矩形的长均为 3，宽分别为圆的半径、圆的半径、圆的周长的$\frac{3}{4}$，两个扇形的大小相等，圆心角均为 270°，扇形半径与圆的半径相等. 所以该几何体的表面积为：$2\times2\times3+\frac{270}{360}\pi\times2^2\times2+\frac{3}{4}\times2\pi\times2\times3=12+15\pi$，故选 B.

例二　**解：**（1）画出的三视图，如下图所示.



（2）设主视图中圆的半径为 r，三角形的边长为 x cm，高为 y cm，

则 $3\cdot\frac{1}{2}x\cdot r=\frac{1}{2}x\cdot\sin60^\circ x$，

$\therefore 3\times2=\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

解得 $x=4\sqrt{3}$.

$\therefore y=x\cdot\sin60^\circ=6$ (cm).

∴主视图的面积为 $S_主=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times6-\pi\times2^2=(12\sqrt{3}-4\pi)$ (cm²)，

左视图的面积为 $S_左=6\times8=48$ (cm²).

俯视图的面积为 $S_俯=4\sqrt{3}\times8=32\sqrt{3}$ (cm²)，

（3）工件的体积为 $\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times6\times8-\pi\times2^2\times8=(12\sqrt{3}-4\pi)\times8=96\sqrt{3}-32\pi\approx65.8$ (cm³).

【点拨】本题求解的关键是发挥空间想象能力，根据长对正，高齐平，宽相等正确画出三个视图. 虽然俯视图与

左视图都是矩形，但是两个矩形的宽并不相等，俯视图的宽为等边三角形的边长，而左视图的宽为等边三角形的高.

变式训练二

解：根据三视图的知识，主视图以及左视图都为矩形，俯视图是一个圆，故可判断出该几何体为一个圆柱.

（2）由三视图可知圆柱的底面圆的半径为$\frac{20}{2}=10$，

圆柱的高为40.

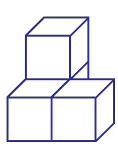
根据圆柱的全面积公式，得$20\pi\times40+2\times\pi\times10^2=1\ 000\pi$.

例三　D　**【解析】**由左视图可知，该组合体分为上、下两层．由俯视图可知，下层共有5个小立方体．由左视图可知，上层最少有1个小立方体，最多有3个小立方体．所以该组合体中小立方体的个数最少有$5+1=6$（个），最多有$5+3=8$（个）．故选D.

【点拨】考查了对三视图的掌握程度以及灵活运用能力，同时也考查了空间想象能力．注意俯视图中正方形的个数即为底层小立方体的个数.

变式训练三

1. B　**【解析】**由三视图可知小正方体搭成的几何体的形状如下图所示，则搭成这个几何体的小正方体的个数是4.



2. **解：**观察可知，该组合体有两层.

底层小正方体最少为3个，第二层小正方体最少为2个.

所以这个几何体最少由5个小正方体组成，即$m=5$，其实物图如图1所示.

由于该组合体的底层小正方体最多为9个，第二层小正方体最多为4个，

所以这个几何体最多由13个小正方体组成，即$n=13$，其实物图如图2所示.

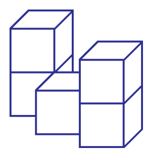


图1

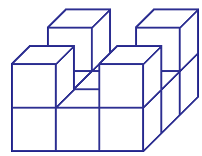


图2

培优精练

1. B　**【解析】**从俯视图可看出底层有5个小正方体，从左视图可看出第2层最多有3个小正方体，所以所需小正方体的个数最多是$5+3=8$（个）.

2. 1.5　**【解析】**由三视图可知$CQ=5$ dm，$BC=AB=4$ dm．$\therefore BQ=\sqrt{CQ^2-BC^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$(dm)．$\therefore$液体的体积为$V_{液}=\frac{1}{2}BC\cdot BQ\cdot AB=\frac{1}{2}\times4\times3\times4=24(\text{dm}^3)$．$\therefore$当正方体平放时，液体的深度是$24\div(4\times4)=1.5(\text{dm})$.

3. **解：**观察可知该几何体由上、下两层组成.

上层的长方体的长为4 mm，宽为

2 mm，高为 4 mm.

下层的长方体的长为 8 mm，宽为 6 mm，高为 2 mm.

∴这个组合体的表面积为 $(4\times4\times2+4\times2\times3)+(8\times2\times2+8\times6\times2+6\times2\times2-4\times2)=200(mm^2)$.

体积为 $4\times4\times2+8\times6\times2=128(mm^3)$.

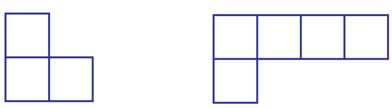
名卷压轴题

(1) ①③④ 【解析】无盖正方体形纸盒应该有 5 个面，但图②中经折叠后有两个面重复，因此图②中的图形折叠后不能围成无盖正方体形纸盒，图①③④均可以经过折叠围成无盖正方体形纸盒.

(2) ① 解：由图 2 可知共有 6 个无盖正方体纸盒.

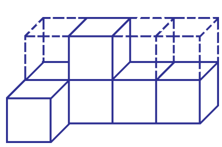
因为无盖正方体纸盒的棱长都为 2 dm，所以这个几何体的体积为 $2\times2\times2\times6=48\ dm^3$.

②3 【解析】由图 2 得左视图和俯视图分别为



左视图 俯视图

故保持从上面看到的形状和从左面看到的形状不变，可放置的正方体纸盒为下图虚线所示的正方体纸盒，共 3 个.



◎投影与视图 新题型探究

例题 73 【解析】前、后面抽出 $(3+2)\times5=25$（个）小正方体，

上、下面抽出（去掉与前、后面重复的）$4\times5-2\times2-3=13$（个）小正方体，

左、右面抽出（去掉与前、后面，上、下面重复的）$5\times5-2-4-3-2=14$（个）个正方体.

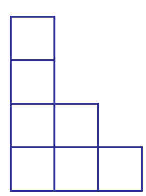
故图中剩下的小正方体有 $125-(25+13+14)=73$（个）

【点拨】本题主要考查了图形的拆拼. 求出重复抽出的小正方体的个数是解本题的关键.

变式训练

(1) 19 【解析】因为王亮所搭几何体恰好可以和张明所搭几何体拼成一个无缝隙的大长方体，所以该大长方体至少需要小长方体的个数为 $4\times3^2=36$. 由题意，得张明搭成的几何体的小长方体的个数为 17，所以王亮至少需要 $36-17=19$ 个小长方体.

(2) 解：张明所搭几何体的左视图如下图所示.



该几何体的左、右面积之和为 $7ab\times2=14ab$，

上、下面积之和为 $9a^2\times2=18a^2$，

前、后面积之和为 $10ab\times2=20ab$.

故该几何体的表面积为 $14ab+20ab+18a^2=34ab+18a^2$.

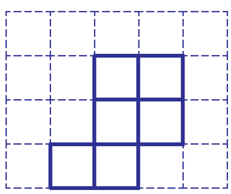
(3) 从前面看大长方体的主视图共 12 个面，王亮搭的几何体需补充 $12-3=9$ 个面；从上面看大长方体的俯视图共 9 个面，王亮搭的几何体需要补充 $9-1=8$ 个面；从右面看大长方体的左视图共 12 个面，王亮搭的几何体需要补充 $12-5=7$ 个面.

故王亮所搭几何体的表面积为 $2\times(9ab+7ab+8a^2)=16a^2+32ab$.

培优精练

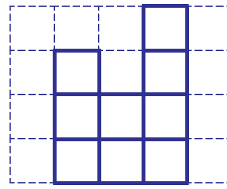
解： (1) 若将小正方体①移走后，新几何体的三视图与原几何体的三视图相比，左视图没有发生改变.

(2) 如图甲所示.



图甲

(3) 如图乙所示.



图乙

(4) 该组合体共有 8 个小正方体，共有两层.

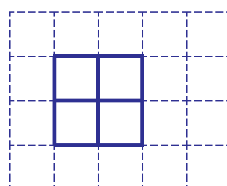
由俯视图可知底层有 5 个小正方体.

则上层有 3 个小正方体.

在俯视图的小正方形上标出该位置上的小正方体的个数如下：

2	2	1
	2	1

所以左视图应该有两层，每层两个小正方形，如图丙所示.



图丙