参考答案

专题一　相交线与平行线

第1讲　相交线的概念与计算

例一　解：(1) ∵直线 AB 和 CD 相交于点 O，

∴ $\angle AOC=\angle BOD=65^\circ$.

∵ $\angle AOE:\angle COE=2:3$，

$\angle AOE+\angle COE=\angle AOC=65^\circ$，

∴ $\angle AOE=\frac{2}{2+3}\angle AOC=\frac{2}{5}\times 65^\circ=26^\circ$.

∴ $\angle BOE=180^\circ-\angle AOE=180^\circ-26^\circ=154^\circ$.

(2) ∵ $\angle AOE:\angle COE=2:3$，

∴设 $\angle AOE=2x$，则 $\angle COE=3x$.

∵ $\angle AOE=\frac{1}{2}\angle BOF-10^\circ$，

即 $2x=\frac{1}{2}\angle BOF-10^\circ$，

解得 $\angle BOF=4x+20^\circ$.

∴ $\angle BOE=2\angle BOF=8x+40^\circ$.

∵ $\angle AOE$ 与 $\angle BOE$ 互为邻补角，

∴ $\angle AOE+\angle BOE=180^\circ$，

即 $2x+8x+40^\circ=180^\circ$.

解得 $x=14^\circ$.

∴ $\angle COE=3x=42^\circ$.

【点拨】 本题求解的技巧是运用数形结合的方法，如在(1)中，先由形定数：观察图形可知 $\angle AOE$ 与 $\angle BOE$ 互为邻补角，由此把求 $\angle BOE$ 的问题转化为求 $\angle AOE$；然后由形求数：根据 $\angle AOC$ 与 $\angle BOD$ 是对顶角以及 $\angle AOE:\angle COE=2:3$，即可顺利求得 $\angle AOE$；在(2)中由形求数，因为 $\angle AOE$ 与 $\angle BOE$ 互为邻补角，所以只要根据已知条件把 $\angle AOE$、$\angle COE$、$\angle BOF$ 均用关于 x 的代数式表示，即可得到关于 x 的方程，求 $\angle COE$ 的问题则迎刃而解.

变式训练一

1. 解：∵ $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是对顶角，

∴ $\angle 1=\angle 2=52^\circ$.

∵ $\angle 1=\angle 3+12^\circ=52^\circ$，

解得 $\angle 3=40^\circ$.

∵ $\angle 3$ 与 $\angle 4$ 是邻补角，

∴ $\angle 4=180^\circ-\angle 3=180^\circ-40^\circ=140^\circ$.

2. 解：∵ $\angle BOC:\angle AOC=1:5$，

∴设 $\angle BOC=x$，则 $\angle AOC=5x$.

∵ $\angle AOC$ 与 $\angle BOC$ 互为邻补角，

∴ $\angle AOC+\angle BOC=180^\circ$，

即 $5x+x=180^\circ$，

解得 $x=30^\circ$.

∴ $\angle BOC=30^\circ$.

∵ OE 是 $\angle BOC$ 的平分线，

∴ $\angle BOE=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\times 30^\circ=15^\circ$.

例二　36°　**【解析】** ∵ $\angle COE$ 是直角，∴ $\angle COE=90^\circ$. ∵ $\angle COF=27^\circ$，

∴ $\angle EOF=\angle COE-\angle COF=90^\circ-27^\circ=63^\circ$. ∵ OF 平分 $\angle AOE$, ∴ $\angle AOF=\angle EOF=63^\circ$. ∴ $\angle AOC=\angle AOF-\angle COF=63^\circ-27^\circ=36^\circ$.

∴ $\angle BOD=\angle AOC=36^\circ$.

【点拨】本题考查了对顶角相等的性质，角平分线的定义，属于基础题. 熟记概念与性质并准确识图，厘清图中各角度之间的关系是解题的关键.

变式训练二

1. 解：(1) ∵ OE 平分 $\angle BOC$, $\angle BOE=65^\circ$,

∴ $\angle EOC=\angle BOE=65^\circ$.

∴ $\angle DOE=180^\circ-\angle EOC=180^\circ-65^\circ=115^\circ$.

(2) ∵ OE 平分 $\angle BOC$,

∴ $\angle EOC=\angle BOE$.

∵ $\angle BOD:\angle BOE=2:3$,

设 $\angle BOD=x$,

∴ $\angle EOC=\angle BOE=\frac{3}{2}x$.

∵ $\angle EOC+\angle BOE+\angle BOD=180^\circ$,

∴ $\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x+x=180^\circ$.

∴ $x=45^\circ$.

∵ $\angle AOC=\angle BOD$,

∴ $\angle AOC=\angle BOD=45^\circ$.

∵ $OF\perp CD$,

∴ $\angle COF=90^\circ$.

∴ $\angle AOF=\angle COF-\angle AOC=90^\circ-45^\circ=45^\circ$.

2. 解：(1) ∵ $OM\perp AB$, $\angle 1=\angle 2$,

∴ $\angle 1+\angle AOC=\angle 2+\angle AOC=90^\circ$,

即 $\angle CON=90^\circ$.

又 $\angle CON+\angle NOD=180^\circ$,

∴ $\angle NOD=90^\circ$.

(2) ∵ $OM\perp AB$, $\angle 1=\frac{1}{4}\angle BOC$,

∴ $\angle 1=\frac{1}{4}(\angle 1+90^\circ)$.

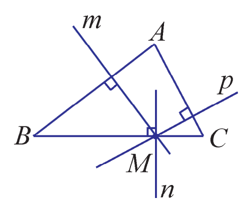
∴ $\angle 1=30^\circ$.

∴ $\angle AOC=90^\circ-\angle 1=60^\circ$.

∴ $\angle BOD=\angle AOC=60^\circ$.

∴ $\angle MOD=\angle MOB+\angle BOD=90^\circ+60^\circ=150^\circ$.

例三　解：画出的直线 m，n，p 如下图所示.



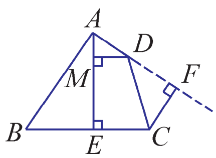
【点拨】过某个点画已知直线的垂线的技巧是运用数形结合的方法，其求解过程有两个关键环节，一是由数定形：即根据两条直线垂直时所成的角是 90° 进行“定点（确定过哪一个点画垂线，这是画垂线时必须经过的点）”和“定线（确定画哪条直线的垂线，这是画垂线时垂足的落脚点）”；二是由数得形，沿直角三角板的直角边画直线，则得到符合题意的垂线.

变式训练三

1. 3　【解析】在图 1 中，BE 不垂直于 AC，错误；在图 2 中，所作的 AC 的

垂线没有经过点 B，错误；在图 3 中，过点 B 所作的垂线与 AC 不垂直，错误. 故错误的个数为 3.

2. **解**：(1)(2)(3) 画出的图形如下图所示.



例四 D 【解析】当 $CD\perp AB$ 时，点 C 到点 D 的距离最短. ∵ $AC\perp BC$，$AC=6$，$BC=8$，$AB=10$，∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot CD\cdot AB$，即 $\frac{1}{2}\times 6\times 8=\frac{1}{2}\times CD\times 10$. 解得 $CD=\frac{24}{5}$. 故选 D.

【点拨】本题考查了垂线段最短及三角形的面积. 解题的关键是掌握直角三角形面积的两种算法.

变式训练四

A 【解析】实际生活中，测量跳远成绩都是量离起跳线最近的落地点，过该点作起跳线的垂线，垂线段的长度即为跳远成绩. 故 DB 的长度是丁同学的跳远成绩，即 4.15 m.

培优精练

1. D 【解析】∵ $AD\perp BD$，$BC\perp CD$，$AB=5$，$BC=3$，∴ $BC<BD<AB$，即 $3<BD<5$. 故选 D.

2. **解**：∵直线 AB，CD，EF 相交于点 O，$\angle AOE=70°$，

∴ $\angle BOF=\angle AOE=70°$.

∵ OG 平分 $\angle BOF$，

∴ $\angle FOG=\frac{1}{2}\angle BOF=35°$.

∵ $CD\perp EF$，

∴ $\angle DOF=90°$.

∴ $\angle DOG=\angle DOF-\angle FOG=90°-35°=55°$.

3. **解**：设 $\angle AOC=4x$，则 $\angle AOD=5x$.

∵ $\angle AOC+\angle AOD=180°$，

∴ $4x+5x=180°$.

解得 $x=20°$.

∴ $\angle AOC=4x=80°$.

∴ $\angle BOD=\angle AOC=80°$.

∵ $OE\perp AB$，

∴ $\angle BOE=90°$.

∴ $\angle DOE=\angle BOE-\angle BOD=90°-80°=10°$.

又∵ OF 平分 $\angle DOB$，

∴ $\angle DOF=\frac{1}{2}\angle BOD=40°$.

∴ $\angle EOF=\angle DOE+\angle DOF=10°+40°=50°$.

名卷压轴题

解：(1) ∵ OD 平分 $\angle AOC$，

∴ $\angle AOD=\angle DOC$.

∵ AB 是直线，

∴ $\angle AOB=180°$.

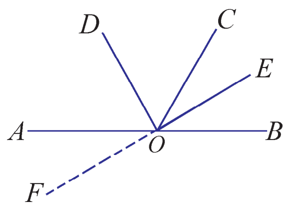
∴ $\angle AOD+\angle DOB=180°$.

∵ $\angle AOD+\angle DOC+\angle DOE+\angle DOB=330°$，$\angle DOE=90°$，

∴ $\angle DOC=330°-(\angle AOD+\angle DOB)-\angle DOE=330°-180°-$

$90^\circ=60^\circ$.

(2) 补全图形如下图所示.



∵ $\angle DOE=90^\circ$,

∴ $DO\perp EF$.

∴ $\angle AOD+\angle AOF=90^\circ$.

∴ $\angle AOD$ 与 $\angle AOF$ 互余.

∵ $\angle AOF$ 与 $\angle EOB$ 为对顶角,

∴ $\angle AOF=\angle EOB$.

∴ $\angle AOD+\angle EOB=90^\circ$.

∴ $\angle AOD$ 与 $\angle EOB$ 互余.

∵ OD 平分 $\angle AOC$,

∴ $\angle AOD=\angle DOC$.

∵ $\angle DOE=90^\circ$,

∴ $\angle COD+\angle COE=90^\circ$.

∴ $\angle AOD+\angle COE=90^\circ$.

∴ $\angle AOD$ 与 $\angle COE$ 互余.

∴与 $\angle AOD$ 互余的所有角为 $\angle AOF$, $\angle EOB$, $\angle COE$.

∵ E, O, F 三点在同一直线上,

∴ $\angle COE+\angle COF=180^\circ$.

∴ $\angle COE$ 与 $\angle COF$ 互补.

∵ $\angle AOD+\angle EOB=90^\circ$, $\angle AOD+\angle COE=90^\circ$, $\angle AOD+\angle AOF=90^\circ$,

∴ $\angle EOB=\angle COE=\angle AOF$.

∴ $\angle COF=\angle AOC+\angle AOF=\angle AOC+\angle COE=\angle AOE$.

∴ $\angle COE+\angle AOE=180^\circ$.

∴ $\angle COE$ 与 $\angle AOE$ 互补.

∵ $\angle BOF$ 与 $\angle EOA$ 为对顶角,

∴ $\angle BOF=\angle EOA$.

∴ $\angle COE+\angle BOF=180^\circ$.

∴ $\angle COE$ 与 $\angle BOF$ 互补.

∴与 $\angle COE$ 互补的所有角为 $\angle COF$, $\angle AOE$, $\angle BOF$.

第 2 讲　平行线的判定

例一　解: (1) $\angle 1$ 和 $\angle 5$, $\angle 2$ 和 $\angle 3$, $\angle 3$ 和 $\angle 7$, $\angle 4$ 和 $\angle 6$, $\angle 4$ 和 $\angle 9$, 共有 5 对.

(2) ∵ $\angle 4$ 和 $\angle 5$ 位于直线 c, d 之间, 直线 b 的同一旁,

∴ $\angle 4$ 和 $\angle 5$ 是同旁内角.

∵ $\angle 5$ 和 $\angle 8$ 都位于直线 a, b 之间且在直线 d 的两侧,

∴ $\angle 5$ 和 $\angle 8$ 是内错角.

故 $\angle 5$ 和 $\angle 8$ 之间的位置关系与 $\angle 4$ 和 $\angle 5$ 之间的位置关系不同.

【点拨】 在一个比较复杂的图形中识别同位角、内错角、同旁内角时, 要注意运用数形结合的方法, 可分为三步(以 $\angle 4$ 和 $\angle 5$ 为例): ①由数得形: 先找到 $\angle 4$ 和 $\angle 5$, 然后利用"分离"的方法从图形中分离出"两条直线被第三条直线所截"的基本图形; ②由数定形: 在分离出的图形中, 先找 $\angle 4$ 和 $\angle 5$ 的公共边, 其公共边所在的直线即为截线, 以此为线索找那两条与截线

相交的直线，其目的是分析$\angle 4$和$\angle 5$之间的位置关系；③由形得数：根据$\angle 4$和$\angle 5$的位置关系与“三线八角”的定义，即可得到答案.

实际上，“三线八角”都是根据其位置特征命名的，如：同位角中两角都位于截线的同侧且在两条直线的同一方向，呈“F”型分布；内错角中两角都在两条直线的内部，且分别位于截线的两侧，呈“Z”型分布；同旁内角中两角都在两条直线的内部，且都位于截线的同侧，呈“U”型分布.

变式训练一

①③④⑥ **【解析】**∵$\angle 2$和$\angle 7$，$\angle 6$和$\angle 7$没有公共边，∴它们不是由两条直线被第三条直线所截而形成的角. 故②⑤不正确.

例二 D **【解析】**∵$\angle C=\angle D=40^\circ$，∴$AC\parallel DE$. 故A选项错误. 当$\angle A=40^\circ$时，不能判断图中任意两条直线平行，故B选项错误. ∵$\angle D+\angle E=40^\circ+120^\circ=160^\circ\neq 180^\circ$，∴$CD$不平行于$EF$. 故C选项错误. ∵$\angle DOF=\angle BOC=140^\circ$，∴$\angle DOF+\angle D=140^\circ+40^\circ=180^\circ$. ∴$BF\parallel DE$. 故D选项正确.

【点拨】本题主要考查了两条直线平行的判定方法. 熟练掌握判断两条直线平行所需要的条件是解决本题的关键.

变式训练二

1. D **【解析】**∵$\angle 1=\angle 2$，且$\angle 1$与$\angle 2$是直线AB，CD被直线AC所截形成的同位角，∴$AB\parallel CD$（同位角相等，两直线平行）.

2. **解**：（方法一）如下图所示.

∵$\angle APB=90^\circ$，

∴$\angle 2+\angle 5=90^\circ$.

∵$\angle 1+\angle 2=90^\circ$，

∴$\angle 1=\angle 5$.

∴$a\parallel b$（同位角相等，两直线平行）.

（方法二）如下图所示.

∵$\angle 1+\angle 2=90^\circ$，$\angle 1=\angle 4$，

∴$\angle 4+\angle 2=90^\circ$.

∵$\angle APB=90^\circ$，

∴$\angle 2+\angle 5=90^\circ$.

∴$\angle 4=\angle 5$.

∴$a\parallel b$（内错角相等，两直线平行）.

（方法三）如下图所示.

∵$\angle APB=90^\circ$，

∴$\angle 2+\angle 5=90^\circ$.

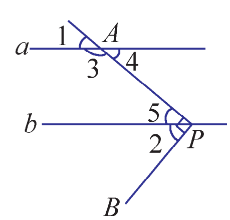
∵$\angle 1+\angle 3=180^\circ$，

∴$\angle 1+\angle 3+\angle 2+\angle 5=180^\circ+90^\circ=270^\circ$.

∵$\angle 1+\angle 2=90^\circ$，

∴$\angle 3+\angle 5=270^\circ-(\angle 1+\angle 2)=270^\circ-90^\circ=180^\circ$.

∴$a\parallel b$（同旁内角互补，两直线平行）.



例三　C　【解析】对于 A，由 $\angle 2=90^\circ$ 不能判定两条铁轨平行，不符合题意. 对于 B，由 $\angle 3=90^\circ=\angle 1$，只能判定两枕木平行，不符合题意. 对于 C，$\because \angle 1=90^\circ$，$\angle 4=90^\circ$，$\therefore \angle 1=\angle 4$. $\therefore$两条铁轨平行，符合题意. 对于 D，由 $\angle 5=90^\circ$不能判定两条铁轨平行，不符合题意.

【点拨】本题主要考查了平行线的判定. 熟练掌握平行线的判定是解答本题的关键.

变式训练三

解：$AB/\!/CD$. 理由如下：

$\because$点 E，B，F 在同一条直线上，

$\therefore \angle 3+\angle EBC=180^\circ$.

$\because$点 G，C，H 在同一条直线上，

$\therefore \angle 4+\angle BCH=180^\circ$.

$\because \angle 3=\angle 4$，

$\therefore \angle EBC=\angle BCH$.

又 $\angle 1=\angle 2$，

$\therefore \angle 1+\angle EBC=\angle 2+\angle BCH$，

即 $\angle ABC=\angle BCD$.

$\therefore AB/\!/CD$.

培优精练

1. C　【解析】根据平行线的判定方法，内错角相等，两直线平行. 由 $\angle 2=\angle 3$，得到 $AD/\!/BC$. 由 $\angle 1=\angle 4$，得到 $AB/\!/CD$. 故选 C.

2. ①③④　【解析】①$\because \angle B+\angle BCD=180^\circ$，$\therefore AB/\!/CD$；②$\because \angle 1=\angle 2$，$\therefore AD/\!/BC$；③$\because \angle 3=\angle 4$，$\therefore AB/\!/CD$；④$\because \angle B=\angle 5$，$\therefore AB/\!/CD$. 故能判定 $AB/\!/CD$ 的条件有①③④.

3. 解：$AB/\!/CD$，$AC/\!/BD$. 理由如下：

$\because \angle 1=55^\circ$，$\angle 2=55^\circ$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

$\therefore AB/\!/CD$（同位角相等，两直线平行）.

$\because \angle 3=125^\circ$，

$\therefore \angle 4=180^\circ-\angle 3=180^\circ-125^\circ=55^\circ$.

$\therefore \angle 1=\angle 4$.

$\therefore AC/\!/BD$（同位角相等，两直线平行）.

名卷压轴题

解：当 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互余时，$AB/\!/CD$. 理由如下：

$\because EG$ 平分 $\angle BEF$，

$\therefore \angle BEF=2\angle 1$.

$\because FH$ 平分 $\angle DFE$，

$\therefore \angle DFE=2\angle 2$.

又$\because \angle 1+\angle 2=90^\circ$，

$\therefore \angle BEF+\angle DFE=2\angle 1+2\angle 2=2(\angle 1+\angle 2)=2\times 90^\circ=180^\circ$.

$\therefore AB/\!/CD$（同旁内角互补，两直线平行）.

第 3 讲　根据平行线的性质计算

例一　C　【解析】$\because DE/\!/AC$，$\therefore$根据两直线平行，内错角相等可得，$\angle 3=\angle 4$. 故选 C.

【点拨】本题考查了平行线的性质：

“两直线平行，内错角相等”．属于基础题型．

变式训练一

1. A 【解析】∵ FG 平分 $\angle EFD$，$\angle EFD=70°$，∴ $\angle GFD=\frac{1}{2}\angle EFD=\frac{1}{2}\times70°=35°$．∵ $AB\parallel CD$，∴ $\angle EGF=\angle GFD=35°$．

2. **解**：∵扶手 AB 与底座 CD 都平行于地面，

∴$AB\parallel CD$．

∴ $\angle BOD=\angle ODC=30°$．

又∵ $\angle EOF=90°$，

∴ $\angle AOE=180°-30°-90°=60°$．

∵$DM\parallel OE$，

∴ $\angle AND=\angle AOE=60°$．

例二 **证明**：∵$AD\parallel BC$，

∴ $\angle DAC+\angle ACB=180°$．

∵ $\angle DAC=120°$，

∴ $\angle ACB=180°-\angle DAC=180°-120°=60°$．

又∵ $\angle ACF=20°$，

∴ $\angle BCF=\angle ACB-\angle ACF=60°-20°=40°$．

∴ $\angle BCF+\angle EFC=40°+140°=180°$．

∴$EF\parallel BC$．

∵$AD\parallel BC$，

∴$EF\parallel AD$．

【点拨】本题求解的关键是明确解题思路，其技巧是运用数形结合的方法，可分为两个环节：一是由形求数：即由已知条件 $AD\parallel BC$ 得到 $\angle DAC$ 与 $\angle ACB$ 互补；二是由数求形：即在上述求解过程的基础上，设法得到 $\angle BCF$ 与 $\angle EFC$ 互补，由此得到 $EF\parallel BC$，再结合平行线的传递性，问题则顺利解决．

变式训练二

1. (1) **解**：∵$AD\parallel BC$，

∴ $\angle B+\angle BAD=180°$．

∵ $\angle B=80°$，

∴ $\angle BAD=180°-\angle B=180°-80°=100°$．

(2) **证明**：∵AE 平分 $\angle BAD$，

∴ $\angle DAE=\frac{1}{2}\angle BAD=\frac{1}{2}\times100°=50°$．

∵$AD\parallel BC$，

∴ $\angle AEB=\angle DAE=50°$．

∵ $\angle BCD=50°$，

∴ $\angle AEB=\angle BCD$．

∴$AE\parallel CD$．

2. **解**：(1) $DF\parallel AC$．理由如下：

∵ $\angle DEB=100°$，

∴ $\angle AEF=\angle DEB=100°$．

∵ $\angle BAC=80°$，

∴ $\angle AEF+\angle BAC=180°$．

∴$DF\parallel AC$．

(2) ∵$DF\parallel AC$，

∴ $\angle BFD=\angle ACB$．

∵ $\angle ADF=\angle ACB$，

∴ $\angle BFD=\angle ADF$．

∴$AD\parallel BC$．

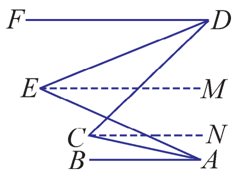
∴$\angle B=\angle BAD$.

∵$\angle DAC=120^\circ$，$\angle BAC=80^\circ$，

∴$\angle BAD=\angle DAC-\angle BAC=120^\circ-80^\circ=40^\circ$.

∴$\angle B=40^\circ$.

例三　解：如下图，过点 C 作 $CN \parallel AB$，过点 E 作 $EM \parallel AB$.



∵$FD \parallel AB$，$CN \parallel AB$，$EM \parallel AB$，

∴$AB \parallel CN \parallel EM \parallel FD$.

∴$\angle BAC=\angle NCA$，

$\angle NCD=\angle FDC$，

$\angle FDE=\angle DEM$，

$\angle MEA=\angle EAB$.

∵$\angle DEA=\angle DEM+\angle AEM$，

$\angle ACD=\angle ACN+\angle NCD$，

∴$\angle DEA=\angle FDE+\angle EAB$，

$\angle ACD=\angle BAC+\angle FDC$.

∵ DE 和 AC 分别平分 $\angle CDF$ 和$\angle BAE$，

∴$\angle FDC=2\angle FDE=2\angle EDC$，

$\angle BAE=2\angle BAC=2\angle EAC$.

∴$46^\circ=\angle FDE+2\angle BAC$，　①

$56^\circ=\angle BAC+2\angle FDE$.　②

由①+②，得

$3(\angle BAC+\angle FDE)=102^\circ$.

∴$\angle BAC+\angle FDE=34^\circ$.　③

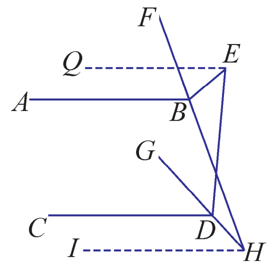
由②-③，得$\angle FDE=22^\circ$.

∴$\angle CDF=2\angle FDE=44^\circ$.

【点拨】此题主要考查平行线与角平分线的性质.

变式训练三

1. B　【解析】过点 E 作 $EQ \parallel AB$，过点 H 作 $HI \parallel AB$，如下图.



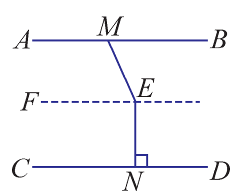
∵$AB \parallel CD$，∴$EQ \parallel AB \parallel CD \parallel HI$.

∵ $\angle EBF=\angle FBA$，$\angle EDG=\angle GDC$，$\angle BED=45^\circ$，$\angle QEB+\angle BED+\angle CDE=180^\circ$，∴ $180^\circ-2\angle FBA+\angle BED+2\angle GDC=180^\circ$，即 $2\angle FBA-2\angle GDC=\angle BED=45^\circ$.

∵ $\angle FBA=\angle IHB=\angle IHG+\angle BHG$，$\angle IHG=\angle GDC$，∴ $\angle FBA-\angle GDC=\angle BHG$.

∴$2\angle BHG=45^\circ$. ∴$\angle BHG=22.5^\circ$.

2. 解：过点 E 作 $EF \parallel AB$，如下图所示.



∵$EF \parallel AB$，

∴$\angle BME=\angle MEF$.

∵$AB \parallel CD$，

∴$EF \parallel CD$.

∵$EN \perp CD$，

$\therefore EN\perp EF$.

$\therefore \angle NEF=90°$.

$\because \angle MEN=156°$，

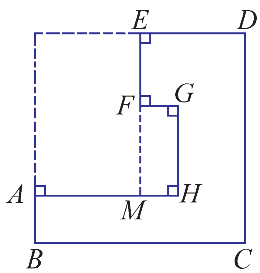
$\therefore \angle MEF=\angle MEN-\angle NEF=156°-90°=66°$.

$\therefore \angle BME=66°$.

例四 **解：** 延长 EF 交 AH 于点 M，如下图所示.

根据平移方法，得 $AM+ED=BC$，$EF+GH+AB=CD$，$FG=MH$.

$\therefore$ 这块垫片的周长 $=2BC+2CD+2FG=2\times50+2\times50+2\times9=218$ (cm).



【点拨】 此题主要考查了生活中的平移，属于基础题型. 关键是利用平移的方法表示出垫片的周长.

变式训练四

(1) **解：** 由平移的性质知，$DE\parallel D'E'$.

$\therefore \angle CPD'=\angle CED=60°$.

(2) **证明：** 由平移的性质知，$CE\parallel C'E'$，$\angle C'E'D'=\angle CED=60°$，

$\therefore \angle BE'C'=\angle BAC=30°$.

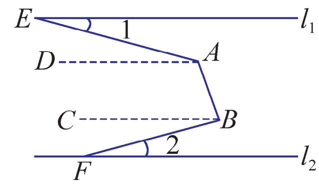
$\therefore \angle BE'D'=\angle BE'C'+\angle C'E'D'=30°+60°=90°$.

$\therefore AB\perp E'D'$.

培优精练

1. C **【解析】** $\because$ 将 $\triangle ABC$ 沿 BC 方向平移 1 cm 得到对应的 $\triangle A'B'C'$，$\therefore BB'=CC'=1$ cm. $\because B'C=2$ cm，$\therefore BC'=BB'+B'C+CC'=1+2+1=4$ (cm).

2. A **【解析】** 分别过点 A，B 作直线 $AD\parallel l_1$，$BC\parallel l_1$，如下图所示.



则 $AD\parallel BC$. $\because l_1\parallel l_2$，$\therefore l_2\parallel BC$. $\therefore \angle CBF=\angle2$. $\because l_1\parallel AD$，$\therefore \angle EAD=\angle1=15°$. $\therefore \angle DAB=\angle EAB-\angle EAD=125°-15°=110°$. $\because AD\parallel BC$，$\therefore \angle DAB+\angle ABC=180°$. $\therefore \angle ABC=180°-\angle DAB=180°-110°=70°$. $\therefore \angle CBF=\angle ABF-\angle ABC=85°-70°=15°$. $\therefore \angle2=15°$.

3. **证明：** $\because EF\perp AC$，$DM\perp AC$，

$\therefore \angle CFE=\angle CMD=90°$.

$\therefore EF\parallel DM$.

$\therefore \angle3=\angle CDM$.

$\because \angle3=\angle2$，

$\therefore \angle2=\angle CDM$.

$\therefore MN\parallel CD$.

$\therefore \angle AMN=\angle C$.

$\because \angle1=\angle C$，

$\therefore \angle1=\angle AMN$.

$\therefore AB\parallel MN$.

名卷压轴题

（1）证明：$\because \angle 1+\angle DFE=180^\circ$，

$\angle 1+\angle 2=180^\circ$，

$\therefore \angle 2=\angle DFE$.

$\therefore AB\parallel EF$.

$\therefore \angle 3=\angle ADE$.

$\because DE\parallel BC$，

$\therefore \angle ADE=\angle B$.

$\therefore \angle 3=\angle B$.

（2）解：$\because DE$ 平分 $\angle ADC$，

$\therefore \angle ADE=\angle CDE$.

$\because DE\parallel BC$，

$\therefore \angle ADE=\angle CDE=\angle B$.

$\because \angle 2=3\angle B$，

$\angle 2+\angle ADE+\angle CDE=180^\circ$，

$\therefore 5\angle B=180^\circ$.

$\therefore \angle B=36^\circ$.

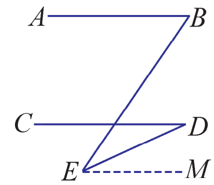
$\because EF\parallel AB$，

$\therefore \angle 1=\angle ADC=2\angle B=72^\circ$.

◎相交线与平行线　新题型探究

例题　解：（1）$\angle B=\angle BED+\angle D$. 理由如下：

在图 1 中，过点 E 作 $EM\parallel AB$，如下图所示.



$\therefore \angle B=\angle BEM$.

$\because AB\parallel CD$，

$\therefore EM\parallel CD$.

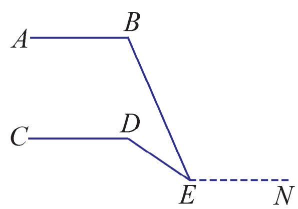
$\therefore \angle D=\angle DEM$.

$\because \angle BEM=\angle BED+\angle DEM$，

$\therefore \angle B=\angle BED+\angle D$.

（2）$\angle CDE=\angle BED+\angle B$. 理由如下：

在图 2 中，过点 E 作 $EN\parallel AB$，如下图所示.



$\therefore \angle B=\angle BEN$.

$\because AB\parallel CD$，

$\therefore EN\parallel CD$.

$\therefore \angle CDE=\angle DEN$.

$\because \angle DEN=\angle BED+\angle BEN$，

$\therefore \angle CDE=\angle BED+\angle B$.

【点拨】 本题两问的求解思路基本相同，求解的技巧都是运用数形结合的方法，可分为两步：一是由数构形：观察图形并根据各角的位置，可知仅利用题目中的线段或射线，难以找到各角之间的数量关系，为此作辅助线 EM 或 EN，由此构造出满足平行线性质的基本图形，本题的求解则顺利展开；二是由形求数：利用平行线的传递性与平行线的性质进行角的和差运算，由此可得答案.

变式训练

（1）①两直线平行，内错角相等　60°

②$30^\circ$

③$60^\circ$

(2) **解**：$\because AB /\!/ CD$，

$\therefore \angle B+\angle BCE=180^\circ$.

$\because \angle B=40^\circ$，

$\therefore \angle BCE=180^\circ-\angle B=180^\circ-40^\circ=140^\circ$.

又$\because CN$平分$\angle BCE$，

$\therefore \angle BCN=\frac{1}{2}\angle BCE=70^\circ$.

$\because CN\perp CM$，

$\therefore \angle MCN=90^\circ$.

$\therefore \angle BCM=\angle MCN-\angle BCN=90^\circ-70^\circ=20^\circ$.

培优精练

(1) **证明**：$\because AB /\!/ CD$，

$\therefore \angle A+\angle C=180^\circ$.

$\because \angle A=\angle D$，

$\therefore \angle D+\angle C=180^\circ$.

$\therefore AC /\!/ BD$.

(2) **解**：$\because \angle D+\angle ACD=180^\circ$，$\angle D=100^\circ$，

$\therefore \angle ACD=180^\circ-\angle D=180^\circ-100^\circ=80^\circ$.

$\because CE$平分$\angle ACF$，

$\therefore \angle ACE=\angle ECF$.

$\because \angle FCB=\angle DCB$，

$\therefore \angle ECB=\angle ECF+\angle BCF=\frac{1}{2}(\angle ACF+\angle FCD)=\frac{1}{2}\angle ACD=40^\circ$.

(3) $\angle CBA : \angle CFA$的值不会发生变化. 理由如下：

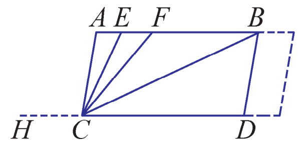
$\because AB /\!/ CD$，

$\therefore \angle CBF=\angle DCB$.

$\because \angle BCF=\angle DCB$，

$\therefore \angle BCF=\angle CBF$.

在图3中，设H是线段DC延长线上的点，如下图所示.



则$\angle CFB=\angle FCH$，$\angle CBF=\angle BCD$.

$\because \angle FCH+\angle BCF+\angle BCD=180^\circ$，

$\therefore \angle BCF+\angle CBF+\angle CFB=180^\circ$.

$\because \angle CFA+\angle CFB=180^\circ$，

$\therefore \angle CFA=\angle BCF+\angle CBF=2\angle CBA$.

$\therefore \angle CBA : \angle CFA=1:2$.

专题二　实数

例一　**解**：(1) $\because AB=2$，

$\therefore m-(-\sqrt{2})=2$.

解得$m=2-\sqrt{2}$.

$\therefore |m+1|+|m-1|$

$=|2-\sqrt{2}+1|+|2-\sqrt{2}-1|$

$=|3-\sqrt{2}|+|1-\sqrt{2}|$

$=3-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1=2$.

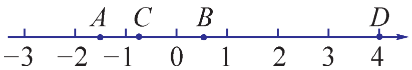
(2) $\because |2c+\sqrt{3}|$与$\sqrt{d-4}$互为相反数，且$|2c+\sqrt{3}|\geqslant 0$，$\sqrt{d-4}\geqslant 0$，

$\therefore |2c+\sqrt{3}|=\sqrt{d-4}=0$.

$\therefore 2c+\sqrt{3}=0$，$d-4=0$.

解得 $c=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$d=4$.

∴点 C，D 在数轴上的大致位置如下图所示.



$\therefore 2c+\sqrt{3}d=2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt{3}\times 4$

$=-\sqrt{3}+4\sqrt{3}$

$=3\sqrt{3}$.

【点拨】本题求解的技巧主要体现为两点：一是数形结合的思想，如在（1）中由形求数：根据数轴上的点与实数的对应关系，得到“数轴上两点之间的距离＝两点所表示的数的差的绝对值或右边的点所表示的数－左边的点表示的数”，由此即可求出 m 的值；在（2）中由数求形：即根据 c，d 的值得到它们在数轴上的对应点，由于 $\sqrt{3}$ 是无理数，所以可取其近似值；二是在（2）中熟练运用算术平方根的“双重非负性”：即算术平方根是非负数，其被开方数也是非负数，由此求得 c，d 的值，使后续解题顺利展开.

变式训练一

1. 解： ∵ $-\pi$ 与 $\sqrt{8}$ 是无理数，

且 $-\pi<\sqrt{8}$，

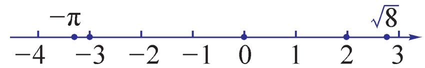
∴数轴上两个点中，左边的点表示数 $-\pi$，右边的点表示数 $\sqrt{8}$.

∵ $4<8<9$，

∴ $2<\sqrt{8}<3$，

即 $\sqrt{8}$ 在数轴上的对应点位于 2，3 的对应点之间且靠近 3 的对应点.

∴实数 0，$-\pi$，-3，$\sqrt{8}$，2 在数轴上的对应点如下图所示.



∵数轴上右边的点表示的数大于左边的点表示的数，

∴ $-\pi<-3<0<2<\sqrt{8}$.

2. （1）2π 【解析】∵圆的半径为 1 个单位长度，∴其周长为 2π. ∵该圆从原点沿数轴向右滚动一周，∴点 O' 对应的数是 2π.

（2）**解：** ①∵ $4<5<9$，

∴ $2<\sqrt{5}<3$.

∴ $\sqrt{5}-1>1$.

∴ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}>\frac{1}{2}$.

②∵ $(x-2)^2=9$，

∴ $x-2=\pm\sqrt{9}$.

∴ $x-2=3$ 或 $x-2=-3$.

解得 $x_1=5$，$x_2=-1$.

例二 解：（1）根据题意，设长方形的长为 $3x$ cm，则宽为 x cm.

∵ $3x\cdot x=75$，即 $x^2=25$.

∵ $x>0$，

∴ $x=5$.

则 $3x=15$.

故长方形的长为 15 cm，宽为 5 cm.

（2）正确. 理由如下：

设围成的正方形的边长为 y cm，

根据题意，得 $y^2=75$.

$\because y>0$，

$\therefore y=\sqrt{75}$.

$\because$原来长方形的宽为 5 cm，

$64<75<81$，

$\therefore 8<\sqrt{75}<9$.

$\therefore 8-5<\sqrt{75}-5<9-5$，

即 $3<\sqrt{75}-5<4$.

$\therefore$她的说法正确.

【点拨】本题求解的技巧有两个，一是数形结合的方法，先是以形求数：如利用长方形的面积公式求长和宽，利用长方形与正方形面积相等求正方形的边长等；然后由数求形：即通过实数的运算，得到正方形的边长与长方形的宽之差；二是在（2）小问中利用"夹挤"的方法确定无理数的取值范围：先找到与 75 相邻的两个完全平方数，得到 $\sqrt{75}$ 夹在 8 和 9 两个整数之间，进而可得 $\sqrt{75}-5$ 的取值范围.

变式训练二

解：（1）设每块草坪的长为 $10x$ m，

则宽为 $9x$ m.

根据题意，得 $10x\cdot 9x=\dfrac{1}{4}\times 90$，

即 $90x^2=\dfrac{90}{4}$.

$\because x>0$，

$\therefore x=0.5$.

$\therefore 10x=5$.

故每块草坪的长为 5 m.

（2）设纵向通道的宽为 y m，

则横向通道的宽为 $3y$ m.

根据题意，得 $3y+9\times 0.5\times 2=y+5\times 2$.

解得 $y=0.5$.

故纵向通道的宽为 0.5 m.

例三 **解：**$\because$长方形 $ABCD$ 的长与宽之比为 $4:3$，

$\therefore$设长方形的长为 $4x$ cm，

则宽为 $3x$ cm.

根据题意，得 $4x\cdot 3x=612$，

即 $12x^2=612$.

$\because x>0$，

$\therefore x=\sqrt{51}$.

$\therefore 4x=4\sqrt{51}$，$3x=3\sqrt{51}$.

设圆的半径为 r，

根据题意，得 $\pi r^2=16\pi$，即 $r^2=16$.

$\because r>0$，

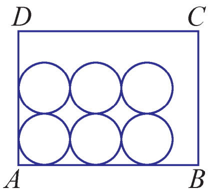
$\therefore r=4$.

$\therefore$圆的直径 $2r=8$ cm.

$\because 4\sqrt{51}\div 8=\dfrac{\sqrt{51}}{2}$，$3\sqrt{51}\div 8=\dfrac{3\sqrt{51}}{8}$，且 $7<\sqrt{51}<8$，

$\therefore \dfrac{7}{2}<\dfrac{\sqrt{51}}{2}<4$，$\dfrac{21}{8}<\dfrac{3\sqrt{51}}{8}<3$.

$\therefore$在此长方形内沿着 AB 边最多能裁出 3 个面积为 $16\pi\ cm^2$ 的圆，沿着 AD 边最多能裁出 2 个面积为 $16\pi\ cm^2$ 的圆，即一共能裁出 $2\times 3=6$ 个面积为 $16\pi\ cm^2$ 的圆，如图所示.



【点拨】本题求解的技巧是运用数形结合的方法，先由形求数：即根据长方形的特点与面积求出长方形的长和宽，根据圆的面积求圆的半径并得到圆的直径；然后由数求形：利用实数的运算，求出沿长方形的长与宽分别能否裁出圆以及能裁出几个圆，由此即可画出图形并得到正确答案.

变式训练三

解：不能. 理由如下：

∵大正方形纸片的面积为 $(\sqrt{18})^2+(\sqrt{18})^2=36$ (cm^2)，$\sqrt{36}=6$，

∴大正方形的边长为 6 cm.

设裁出的长方形的宽为 a cm，

则长为 $2a$ cm.

根据题意，得 $2a\cdot a=30$，

即 $2a^2=30$.

∵$a>0$，

∴$a=\sqrt{15}$.

∵$15>9$，

∴$\sqrt{15}>3$.

则 $2\sqrt{15}>6$.

∴$2a>6$.

∴不能使裁得的长方形纸片的长是宽的 2 倍，且面积为 30 cm^2.

培优精练

1. D 【解析】∵点 O 表示的数是 -2，$OA=\sqrt{21}$，∴当 OA 与数轴重合时，点 A 表示的数为 $\sqrt{21}-2$.

2. (1) 解：∵$\left(\pm\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}=2\frac{7}{9}$，

$(\pm13)^2=(-13)^2$，$(-3)^3=-27$，$(\sqrt{2})^2=2$，

∴$\pm\frac{5}{3}$ 是 $2\frac{7}{9}$ 的平方根，±13 是 $(-13)^2$ 的平方根，-27 的立方根是 -3，2 的算术平方根是 $\sqrt{2}$，

∴$a=\pm\frac{5}{3}$，$b=\pm13$，$c=-27$，$d=2$.

(2) 段② 【解析】∵2 的平方根是 $\pm\sqrt{2}$，且 $-2<-\sqrt{2}<-1$，∴d 的另外一个平方根落在图中的“段②”.

3. 解：这样的计划不能实现. 理由如下：

设围成的长方形场地的长为 $5x$ m，

则宽为 $2x$ m.

根据题意，得 $5x\cdot 2x=50$，

即 $10x^2=50$.

∵$x>0$，

∴$x=\sqrt{5}$.

∵$4<5<9$，

∴$2<\sqrt{5}<3$.

则 $10<5\sqrt{5}<15$.

∵墙长为 10 m，

∴这样的计划不能实现.

名卷压轴题

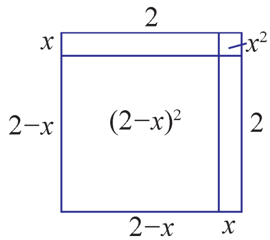
(1) 1.5 【解析】∵$\sqrt{2}=1+x$，

$x=0.5$，

$\therefore\sqrt{2}\approx1.5$.

（2）**解**：设$\sqrt{3}=2-x$，

则 $(2-x)^2=3$，画出示意图如下.



由面积公式，得 $2^2-2x-2x+x^2=3$.

$\therefore 4-4x+x^2=3$.

略去 x^2，得方程 $4-4x=3$.

$\therefore x=0.25$.

$\therefore\sqrt{3}\approx2-0.25=1.75$.

◎实数　新题型探究

例题　**解**：$(2+2\sqrt{3})\oplus(2-2\sqrt{3})$

$=(2+2\sqrt{3})\times(2+2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3})-1$

$=(2+2\sqrt{3})\times4-1$

$=8+8\sqrt{3}-1$

$=7+8\sqrt{3}$.

【点拨】本题求解的技巧是深刻理解新定义的运算法则及示例，再按照新定义的运算公式进行解答.

变式训练

（1）1　2　$\pi-3$　**【解析】**$\because 1<3<4$，$\therefore 1<\sqrt{3}<2$. $\therefore[\sqrt{3}]=1$. $\because 4<7<9$，$\therefore 2<\sqrt{7}<3$. $\therefore[\sqrt{7}]=2$. $\because[\pi]=3$，$\therefore\pi$ 的小数部分是 $\pi-[\pi]=\pi-3$.

（2）**解**：$\because 1<\sqrt{3}<2$，

$\therefore 11<10+\sqrt{3}<12$.

$\therefore x=11$，$y=10+\sqrt{3}-11=\sqrt{3}-1$.

$\therefore x-y$ 的相反数 $y-x=\sqrt{3}-1-11=\sqrt{3}-12$.

培优精练

解：（1）当 $a\geqslant0$，$b\geqslant0$ 时，

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$.

例如：令 $a=4$，$b=9$，

则$\sqrt{4\times9}=6$，$\sqrt{4}\times\sqrt{9}=6$，

$\therefore\sqrt{4\times9}=\sqrt{4}\times\sqrt{9}$.

（2）①$\sqrt{16\times36}$

$=\sqrt{16}\times\sqrt{36}$

$=4\times6=24$.

②$\sqrt{49\times121}$

$=\sqrt{49}\times\sqrt{121}$

$=7\times11=77$.

（3）$\because$长方形的长为$\sqrt{100}$，宽为$\sqrt{49}$，

$\therefore S_{长方形}=\sqrt{100}\times\sqrt{49}=70$.

故这个长方形的面积为 70.

专题三　平面直角坐标系

第 1 讲　平面内的点与实数的关系

例一　**解**：（1）$A(4,2)$，$B(2,4)$，$C(-3,3)$，$D(-3,-3)$，$E(5,-3)$，$F(2,-4)$，$G(0,-2)$.

（2）根据（1）小问的求解结果，可知

横坐标相等的点有两组，分别是点 B 与点 F，点 C 与点 D.

（3）到 x 轴的距离为 3 的点有 3 个，分别是点 C，点 D，点 E.

【点拨】 本题求解的关键是深刻理解点的坐标的意义，求解的技巧是运用数形结合的方法，先由数构形：过已知点作两坐标轴的垂线；然后由形求数：根据两垂足在坐标轴上分别对应的数，确定点的坐标，得到答案. 上述方法可概括为“作垂线、看垂足、定坐标”.

变式训练一

C　**【解析】** ∵ $A\ (2\sqrt{2},\ 0)$，$AB=3\sqrt{2}$，∴ $OA=2\sqrt{2}$，$AC=AB=3\sqrt{2}$.

∴ $OC=AC-OA=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

∵点 C 在 x 轴的负半轴上，∴点 C 的坐标为 $(-\sqrt{2},\ 0)$.

例二　**解**：（1）∵点 M 在 x 轴上，

∴ $a+6=0$.

解得 $a=-6$.

∴ $3a-2=-18-2=-20$.

∴点 M 的坐标为 $(-20,\ 0)$.

（2）∵直线 $MN\,/\!/\,x$ 轴，

∴ $a+6=5$.

解得 $a=-1$.

∴ $3a-2=3\times(-1)-2=-5$.

∴点 M 的坐标为 $(-5,\ 5)$.

（3）∵点 M 到 x 轴，y 轴的距离相等，

∴ $3a-2=a+6$ 或 $3a-2+a+6=0$.

解得 $a=4$ 或 $a=-1$.

当 $a=4$ 时，$3a-2=3\times4-2=10$，$a+6=4+6=10$；

当 $a=-1$ 时，$3a-2=3\times(-1)-2=-5$，$a+6=-1+6=5$.

综上所述，点 M 的坐标为 $(10,\ 10)$ 或 $(-5,\ 5)$.

【点拨】 本题求解的技巧是运用数形结合的方法，其思路如下表：

设点 $P(x,y)$，$Q(m,n)$

“形”		“数”
点 P 在 x 轴上 点 P 在 y 轴上	$\rightleftharpoons$	$y=0$ $x=0$
$PQ\parallel x$ 轴 $PQ\parallel y$ 轴	$\rightleftharpoons$	$y=n$ 且 $x\neq m$ $x=m$ 且 $y\neq n$
点 P 到 x 轴，y 轴的距离相等	$\rightleftharpoons$	$\lvert x\rvert=\lvert y\rvert$

变式训练二

1. B　**【解析】** ∵ $m^2+1>0$，$-1-2m^2<0$，即点 $(-1-2m^2,\ m^2+1)$ 的横坐标小于 0，纵坐标大于 0，∴该点一定在第二象限.

2. **解**：（1）∵点 A 在第一、三象限的角平分线上，

∴ $2a-1=1$.

解得 $a=1$.

（2）∵点 B 到 x 轴的距离是到 y 轴的距离的 2 倍，

∴ $\lvert a-3\rvert=2\lvert -a\rvert$.

解得 $a=1$ 或 $a=-3$.

当 $a=1$ 时，

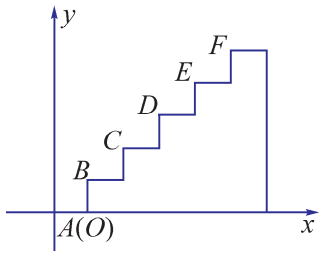
$-a=-1$，$a-3=1-3=-2$；

当 $a=-3$ 时，

$-a=3$，$a-3=-3-3=-6$.

综上所述，点 B 的坐标为（-1，-2）或（3，-6）.

例三 **解**：以点 A 为坐标原点，过点 A 的水平直线为 x 轴建立平面直角坐标系，如下图所示.



∴点 A（0，0）.

∵点 B 到 y 轴的距离为 $20\times1=20$（cm），到 x 轴的距离为 $18\times1=18$（cm），

∴点 B 的坐标为（2，1.8）.

∵点 C 到 y 轴的距离为 $20\times2=40$（cm），到 x 轴的距离为 $18\times2=36$（cm），

∴点 C 的坐标为（4，3.6）.

∵点 D 到 y 轴的距离为 $20\times3=60$（cm），到 x 轴的距离为 $18\times3=54$（cm），

∴点 D 的坐标为（6，5.4）.

∵点 E 到 y 轴的距离为 $20\times4=80$（cm），到 x 轴的距离为 $18\times4=72$（cm），

∴点 E 的坐标为（8，7.2）.

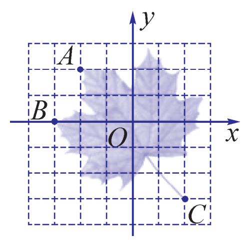
∵点 F 到 y 轴的距离为 $20\times5=100$（cm），到 x 轴的距离为 $18\times5=90$（cm），

∴点 F 的坐标为（10，9）.

【点拨】 本题求解的技巧主要体现为两点：一是建立适当的平面直角坐标系，应注意两个“尽量”：即尽量使较多的点在第一象限，因为第一象限的点的横、纵坐标都是正数；尽量使较多的点落在坐标轴上，因为坐标轴上的点一定有一个坐标为0；二是运用数形结合的方法，先由形定数：因为除点 A 外各点都在第一象限，所以求点的坐标则转化为求各点到坐标轴的距离；然后由形求数：根据“各级台阶的高度均为18 cm，宽度均为20 cm”，即可求得答案.

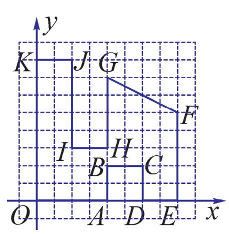
变式训练三

1. B **【解析】** ∵A，B 两点的坐标分别为（-2，2），（-3，0），∴平面直角坐标系的位置如下图所示. 由图可得，点 C 的坐标为（2，-3）.



2. **解**：贝贝的方法如下：

（1）以配件平面图中左下角的顶点为原点，过该点的水平直线为 x 轴建立平面直角坐标系，如下图所示.



(2) 按照图示，在配件的各顶点处标注字母，则各点的坐标依次为 O (0，0)，A (4，0)，B (4，2)，C (6，2)，D (6，0)，E (8，0)，F (8，5)，G (4，7)，H (4，3)，I (2，3)，J (2，8)，K (0，8).

(3) 告诉对方，以 1 cm 为长度单位建立平面直角坐标系，在平面直角坐标系中分别描出 O (0，0)，A (4，0)，B (4，2)，C (6，2)，D (6，0)，E (8，0)，F (8，5)，G (4，7)，H (4，3)，I (2，3)，J (2，8)，K (0，8)，顺次连接各点，则得到该配件的平面图.

例四 B **【解析】** 由图可知，E (4，2)，B (4，-2)，C (-4，-2)，D (-4，2)，长方形的长 $DE=4-(-4)=8$，宽 $BE=2-(-2)=4$.

∵第 1 次相遇时，物体甲与物体乙运动的时间为 $(2+4+4+2)\div(4+2)=2$ (s)，

∴第 1 次相遇点的坐标是 (-2，2)；

∵从第 1 次相遇到第 2 次相遇时，物体甲与物体乙运动的时间为 $(8\times2+4\times2)\div(4+2)=4$ (s)，

∴第 2 次相遇点的坐标是 (4，0)；

同理，第 3 次相遇点的坐标是 (-2，-2)；

第 4 次相遇点的坐标是 (-2，2)；

…

则每相遇 3 次，为一个循环，

∵$2\,022\div3=674$，

∴甲，乙两个物体运动后的第 2 022 次相遇点与第 3 次相遇点相同，则甲，乙两个物体第 2 022 次相遇点的坐标为 (-2，-2).

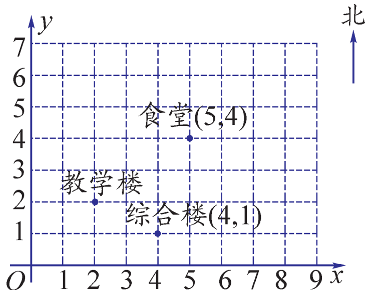
【点拨】 本题求解的关键是熟练运用速度、路程、时间之间的关系. 其技巧是运用数形结合的方法，主要体现为两点：一是由形求数，即根据长方形与坐标轴平行求得各顶点的坐标；然后由数求形：根据甲、乙的运动方向和速度求得每次相遇点的坐标，由此即可得到坐标的变化规律.

变式训练四

D **【解析】** 由题意，得半圆周的周长是 π. ∵点 P 的运动速度为 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度/秒，∴1 s 时，点 P 的坐标为 (1，1)；2 s 时，点 P 的坐标为 (2，0)；3 s 时，点 P 的坐标为 (3，-1)；4 s 时，点 P 的坐标为 (4，0)；5 s 时，点 P 的坐标为 (5，1)，…，由此可知：当秒数为偶数时，点 P 落在 x 轴上，其横坐标和秒数相同，纵坐标是 0，故第 2 022 s 时，点 P 的坐标是 (2 022，0).

培优精练

1. D **【解析】** 根据综合楼和食堂的坐标，建立如图所示的平面直角坐标系，∴教学楼的坐标是 (2，2)，故选 D.



2. 一　**【解析】**∵点 P（a，b）在第三象限，∴$a<0$，$b<0$. ∴$-a>0$，$-b>0$. 则 $1-a>0$，$5-b>0$. ∴点 Q（$1-a$，$5-b$）在第一象限.

3. 解：设棋盘上每个小正方形的边长均为1，以棋盘左下角顶点为原点，最下面的一条边所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系，如图所示.

根据所建立的直角坐标系，可知点 P 的坐标为（4，2），则“象飞田”的规则分三种情况解释：

当“象”前进的方向没有棋子遮挡时，如图1所示，“象”下一步可以到达 P_1（2，0），P_2（6，0），P_3（2，4），P_4（6，4）中的任意一点.

当“象”前进的方向有棋子且棋子与“象”位于同一个小正方形相对的两个顶点上（俗称“挡象眼”）时，则“象”不能前进. 例如：点 M 处有一个棋子，则“象”不能到达 P_3（2，4）的位置，如图2所示.

当“象”按照“象飞田”的规则前进，但落点处是本方棋子时，则“象”不能前进；当落点处是对方棋子时，则“象”能前进且把对方棋子吃掉. 例如：点 N 处是本方棋子，则“象”不能到达 P_2（6，0）的位置，如图3所示.

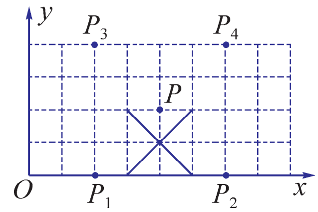


图 1

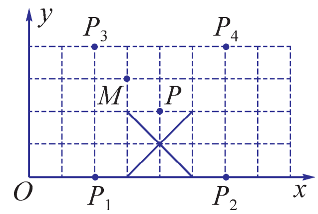


图 2

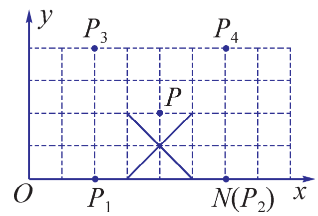


图 3

名卷压轴题

解：（1）观察图形，得

A_1（0，1），A_2（1，1），A_3（1，0），A_4（2，0），A_5（2，1），A_6（3，1），A_7（3，0），A_8（4，0）.

（2）由（1）可知，A_4（2，0），A_8（4，0），…，

∴A_{4n}的坐标为（$2n$，0）.

（3）∵$2\,022\div4=505\cdots\cdots2$，

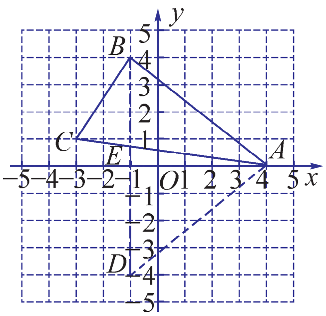
∴蚂蚁从点 $A_{2\,022}$ 到点 $A_{2\,023}$ 的移动方向与从点 A_2 到点 A_3 的移动方向相同，即向下移动.

第 2 讲　平面内的图形面积与图形的平移

例一　**解：**（1）∵点 B（-1，4），点 D 与点 B 的横坐标相等，纵坐标互为相反数，

∴点 D（-1，-4）.

过点（-1，0）作 x 轴的垂线，过点（0，-4）作 y 轴的垂线，两条垂线的交点即为点 D，如下图所示.



（2）连接 AD，BD，得到△ABD，如上图所示.

∵点 B 与点 D 的横坐标相等，且点 B（-1，4），点 D（-1，-4），

∴$BD=4-(-4)=8$.

设线段 BD 与 x 轴交于点 E，

则 E（-1，0）.

∴$AE=4-(-1)=5$.

∴$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}BD\cdot AE=\frac{1}{2}\times8\times5=20$.

【点拨】 本题求解的技巧是运用数形结合的方法，如在（1）中由数求形：根据点 D 与点 B 坐标之间的关系得到点 D 的坐标，进而利用画图的方法即可确定点 D；在（2）中数形结合：根据点 B 与点 D 位于同一条与 y 轴平行的直线上，则两点纵坐标之差的绝对值即为线段 BD 的长度，同理求得 AE 的长度，然后根据三角形的面积公式即可得到答案.

变式训练一

1. **解：**画出的各点如图所示.

根据题意，得 $BD=4-(-2)=6$.

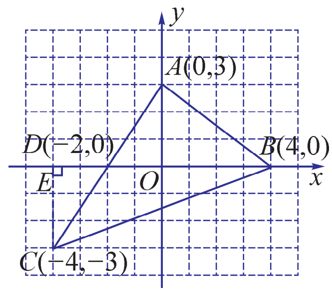
如下图，过点 C 作 $CE\perp x$ 轴于点 E，则 $CE=3$.

则 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}$

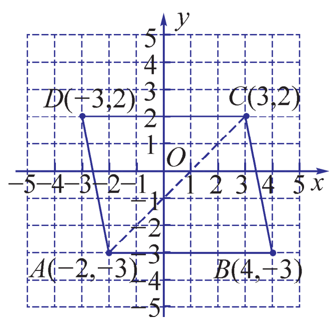
$$=\frac{1}{2}BD\cdot OA+\frac{1}{2}BD\cdot CE$$

$$=\frac{1}{2}\times6\times3+\frac{1}{2}\times6\times3$$

$$=18.$$



2. **解：**（1）描出 A，B，C，D 四点，如下图所示.



（2）连接 AC，如上图所示.

∵点 A，B 的纵坐标相等，

且 A（-2，-3），B（4，-3），

∴$AB=4-(-2)=6$.

∵点 C（3，2），

∴点 C 到直线 AB 的距离为 $2-(-3)=5$.

∵点 C，D 的纵坐标相等，

且 C（3，2），D（−3，2），

∴$CD=3-(-3)=6$.

∵点 A（−2，−3），

∴点 A 到直线 CD 的距离为 $2-(-3)=5$.

∴$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times6\times5+\frac{1}{2}\times6\times5=30$.

例二 C 【解析】∵点 M（$m-2$，$m+5$）向左平移 2 个单位长度后恰好落在 y 轴上，∴$m-2-2=0$. 解得 $m=4$. ∴$m-2=4-2=2$，$m+5=4+5=9$. ∴点 M 的坐标为（2，9）. 故选 C.

【点拨】本题求解的技巧是运用数形结合的方法，即先由形求数：根据点 M 的平移方法求出点 M 平移后的坐标；然后由数解形：根据 y 轴上点的坐标特征，得到关于 m 的方程，后续解题即可顺利展开.

变式训练二

1. A 【解析】点 M（2，4）先向左平移 3 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度得到的点的坐标是（$2-3$，$4+2$），即（−1，6）.

2. 10 【解析】∵点 A（1，2）的对应点为 C（3，a），点 B（4，7）的对应点为 D（b，9），∴各对应点之间的关系是横坐标加 2，纵坐标加 2. ∴$a=2+2=4$，$b=4+2=6$. ∴$a+b=4+6=10$.

例三 解：（1）A（1，3），A'（−3，1）.

（2）∵$\triangle ABC$ 向左平移 4 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度得到 $\triangle A'B'C'$，

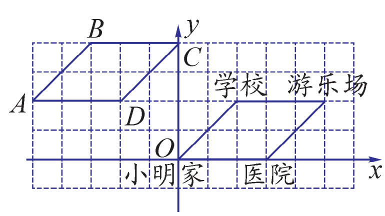
∴P（x，y）的对应点 P' 的坐标为（$x-4$，$y-2$）.

【点拨】本题求解的技巧是运用数形结合的方法，如在（1）中由形求数：通过观察点 A，A' 的位置，即可求得点 A，A' 的坐标；在（2）中由形解数：通过$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$的位置关系得到$\triangle ABC$ 到$\triangle A'B'C'$平移的方向与距离，进而求出点 P'的坐标.

变式训练三

1. 解：（1）以小明家所在的位置为坐标原点，建立如下图所示的平面直角坐标系. 由图可得，小明家、学校的坐标分别为（0，0），（2，2）.

（2）如下图，四边形 $ABCD$ 即为所求. 由以小明家、学校、游乐场、医院原所在地为顶点的四边形向左平移 5 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度得到四边形 $ABCD$.



2. 解：(1) 画出$\triangle A'B'C'$如下图所示.

点C'的坐标为(5，−2).

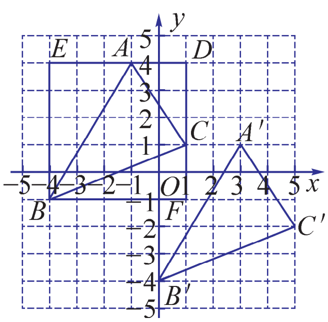
(2) 点P'的坐标为$(a+4，b-3)$.

(3) 过$\triangle ABC$的三个顶点画一个长方形，使长方形的一组对边与x轴平行，另一组对边与y轴平行，如下图所示.

则长方形的长与宽均为5，

即该长方形为边长为5的正方形.

$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{正方形BFDE}-S_{\triangle AEB}-S_{\triangle ADC}-S_{\triangle BFC}=5\times5-\frac{1}{2}\times3\times5-\frac{1}{2}\times2\times3-\frac{1}{2}\times5\times2=25-7.5-3-5=9.5$.



培优精练

1. D 【解析】由题意可知，A_1 $(0+1，-8+3)$，A_2 $(0+1\times2，-8+3\times2)$，A_3 $(0+1\times3，-8+3\times3)$，……，A_{29} $(0+1\times29，-8+3\times29)$，∴小七第29天走到的点的坐标是(29，79).

2. 2 【解析】∵A(−1，0)的对应点为$A'$$(2，a)$，点$B$(0，2)的对应点为$B'$$(b，1)$，∴线段$AB$向右平移3个单位长度，再向下平移1个单位长度得到线段$A'B'$，∴$a=-1$，$b=3$. ∴$a+b=2$.

3. (1) −1 3 【解析】∵$|a+1|+(b-3)^2=0$，∴$a+1=0$且$b-3=0$. 解得$a=-1$，$b=3$.

(2) **解**：过点M作$MN\perp x$轴于点N，如图1.

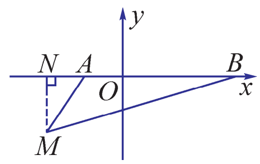


图1

∵A(−1，0)，B(3，0)，

∴$AB=3-(-1)=4$.

又∵点$M$$(-2，m)$在第三象限，

∴$MN=|m|=-m$.

$\therefore S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}AB\cdot MN=\frac{1}{2}\times4\times(-m)=-2m$.

(3) **解**：当$m=-\frac{3}{2}$时，$M\left(-2，-\frac{3}{2}\right)$.

$\therefore S_{\triangle ABM}=-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)=3$.

点P的位置分两种情况讨论：

①当点P在y轴正半轴上时，如图2.

设点$P(0，k)$，$k>0$.

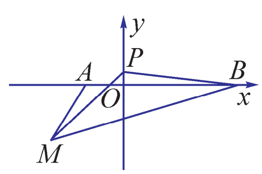


图2

则 $S_{\triangle BMP}=5\times\left(\frac{3}{2}+k\right)-\frac{1}{2}\times2\times$

$\left(\frac{3}{2}+k\right)-\frac{1}{2}\times5\times\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\times3\times k=\frac{5}{2}k+\frac{9}{4}$,

$\because S_{\triangle BMP}=S_{\triangle ABM}$,

$\therefore\frac{5}{2}k+\frac{9}{4}=3$.

解得 $k=0.3$.

∴点 P 的坐标为（0，0.3）.

②当点 P 在 y 轴负半轴上时，如图 3.

设点 P（0，n），$n<0$.

则 $S_{\triangle BMP}=-5n-\frac{1}{2}\times2\times\left(-n-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}\times5\times\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\times3\times(-n)=-\frac{5}{2}n-\frac{9}{4}$,

$\because S_{\triangle BMP}=S_{\triangle ABM}$,

$\therefore-\frac{5}{2}n-\frac{9}{4}=3$.

解得 $n=-2.1$.

∴点 P 的坐标为（0，-2.1）.

综上所述，点 P 的坐标为（0，0.3）或（0，-2.1）.

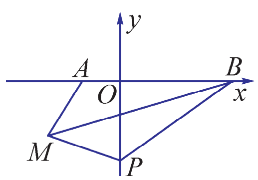


图 3

名卷压轴题

（1）②5　$|m-n|$

（2）**解：**①如图，$\triangle DEF$ 即为所求.

$S_{\triangle ABC}=5\times6-\frac{1}{2}\times6\times3-\frac{1}{2}\times1\times2-\frac{1}{2}\times5\times5=7.5$.

②存在．理由如下：设 N（0，m），

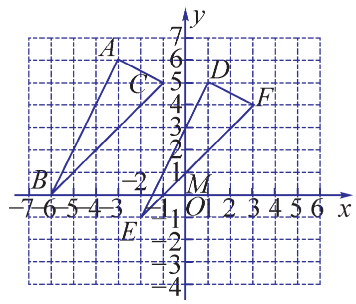
则 $S_{\triangle EFN}=\frac{1}{2}|m-1|\times5=\frac{5}{2}|m-1|$.

又 $\because S_{\triangle EFN}=S_{\triangle ABC}$,

$\therefore\frac{1}{2}\times|m-1|\times5=7.5$.

解得 $m=4$ 或 $m=-2$.

∴点 N 的坐标为（0，4）或（0，-2）.



◎平面直角坐标系　新题型探究

例题　解：（1）①将 A（-1，2）进行“1 型平移”后的对应点 A' 的坐标为（$-1+1$，$2-1$），即 A'（0，1）.

将 B（2，3）进行“1 型平移”后的对应点 B' 的坐标为（$2+1$，$3-1$），即 B'（3，2）.

画出线段 $A'B'$ 如图 1 所示.

②连接 AA'，BB'，得到的四边形 $ABB'A'$ 如图 1 所示，连接 AB'.

$\therefore S_{四边形ABB'A'}=S_{\triangle ABB'}+S_{\triangle AB'A'}=\frac{1}{2}\times4\times1+\frac{1}{2}\times4\times1=4$.

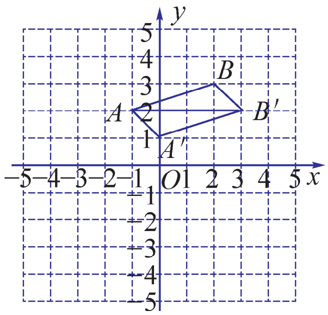


图 1

(2) 将 A $(2-a, a+1)$ 进行"2 型平移"后得到 A' $(4-a, a-1)$，将 B $(a+1, a+2)$ 进行"2 型平移"后得到 B' $(a+3, a)$.

过四边形 $ABB'A'$ 的顶点画一个长方形，使长方形的一组对边与 x 轴平行，另一组对边与 y 轴平行，如图 2 所示.

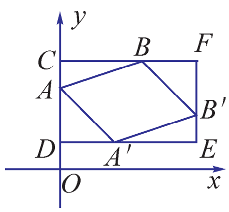


图 2

则长方形的长，宽分别为 $2a+1$，3.

∴ $BC=2a-1$，$AC=1$，$BF=2$，$B'F=2$，$AD=2$，$A'D=2$，$A'E=2a-1$，$B'E=1$，

∴ $S_{四边形ABB'A'}=3\times(2a+1)-\frac{1}{2}\times(2a-1)\times1\times2-\frac{1}{2}\times2\times2\times2=4a$.

∵四边形 $ABB'A'$ 的面积为 8，

∴ $4a=8$.

解得 $a=2$.

【点拨】 本题的解题技巧有两点：一是转化的思想，即根据新定义与示例，把"某型平移"问题转化为我们所熟悉的图形平移问题；二是数形结合的方法，如在第 (1) 问第②小问、第 (2) 问中由数求形，根据坐标的变化得到平移后的图形；然后由形求数，通过把四边形分割，从而把求四边形的面积转化为一个长方形与几个三角形的面积的和或差，问题则顺利解决，体现了数形结合的方法在解题中的优越性.

变式训练

(1) B_2 和 B_3

(2) **解**：①当点 B 在 x 轴上时，

设 B $(t, 0)$，

根据题意，得 $t-(-2)=0-4$.

解得 $t=-6$.

∴ B $(-6, 0)$.

②当点 B 在 y 轴上时，设 B $(0, b)$，

根据题意，得 $0-(-2)=b-4$.

解得 $b=6$.

∴ B $(0, 6)$.

综上所述，点 B 的坐标为 $(-6, 0)$ 或 $(0, 6)$.

(3) **解**：根据题意，得

$m-3=n-(-1)$.

∴ $m=n+4$.

∵点 B 在第四象限，且点 B 到两坐标轴的距离相等，

∴ $m=-n$，即 $n+4=-n$.

解得 $n=-2$.

∴ $n+4=-2+4=2$.

∴点 B 的坐标为（2，-2）.

培优精练

（1）5

（2）**解**：由题意可知，

$|-2m+1|=3$.

解得 $m=-1$ 或 $m=2$.

（3）**解**：由题意可知，$|k+3|=4$ 或 $|k+3|=|4k-3|$.

解得 $k=1$ 或 $k=-7$（不合题意，舍去）或 $k=2$ 或 $k=0$（不合题意，舍去）.

∴$k=1$ 或 $k=2$.

专题四　二元一次方程组

第 1 讲　利用二元一次方程组解决图形问题

例一　**解**：设 $\angle COM=x$，$\angle BON=y$.

根据题意，得$\begin{cases}2x+y=90^\circ,\\y-x=36^\circ.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=18^\circ,\\y=54^\circ.\end{cases}$

故 $\angle COM=18^\circ$，$\angle BON=54^\circ$.

【点拨】在求两个角的度数时，可将要求的角分别设为未知数，再从题干已知条件与图中隐含的条件中找出等量关系，从而建立方程并求解.

变式训练一

1. 55°　**【解析】**设 $\angle 1=x$，$\angle 2=y$.

根据题意，得$\begin{cases}x+2y=180^\circ,\\x-y=75^\circ.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=110^\circ,\\y=35^\circ.\end{cases}$ ∵$\angle EOF=90^\circ$，

∴$\angle COF=90^\circ-\angle 2=55^\circ$.

2. 83°　14°　**【解析】**设 $\angle BOC=\angle MOC=x$，$\angle DON=y$. ∵$\angle AOB$ 为直角，∴$\angle AOB=90^\circ$. ∴$\angle AOM=\angle AOB-\angle BOM=90^\circ-2x$. ∵$OD$ 平分 $\angle CON$，∴$\angle CON=2y$. 根据题意，得$\begin{cases}x+2y=180^\circ,\\y-(90^\circ-2x)=21^\circ.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=14^\circ,\\y=83^\circ.\end{cases}$

∴$\angle DON=83^\circ$，$\angle BOC=14^\circ$.

例二　**解**：∵D 是边 BC 的中点，

∴$BD=CD$.

∵$AC=2BC$，

∴设 $BD=CD=x$ cm，$AB=y$ cm，

则 $AC=4x$ cm.

根据题意，得$\begin{cases}4x+x=60,\\x+y=40.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=12,\\y=28.\end{cases}$

∴$AC=4x=48$ cm，$AB=28$ cm，

$BC=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times48=24$（cm）.

∴$\triangle ABC$ 各边的长度为 $AC=48$ cm，$AB=28$ cm，$BC=24$ cm.

【点拨】本题考查了三角形的中线，熟练掌握三角形中线与周长的定义是解决本题的关键.

变式训练二

1. D　**【解析】**设较长的一根铁棒长

x cm，另一根铁棒长 y cm，根据题意，得 $\begin{cases}x+y=55,\\ \left(1-\frac{1}{3}\right)x=\left(1-\frac{1}{5}\right)y.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=30,\\ y=25.\end{cases}$ ∴$30\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=20$，即木桶中水的深度是 20 cm.

2. **解**：根据题意，得 $\begin{cases}a+b+c=24,\\ 4a=3b,\\ b+c=2a.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=8,\\ b=\frac{32}{3},\\ c=\frac{16}{3}.\end{cases}$

∴这三条线段的长度分别为 $a=8$ cm，$b=\frac{32}{3}$ cm，$c=\frac{16}{3}$ cm.

例三 **解**：设每个矩形纸片的长为 x，宽为 y.

根据题意，得 $\begin{cases}x-y=4,\\ x-2y=3.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=5,\\ y=1.\end{cases}$

由图 3 可知，图 3 中阴影部分是一个正方形，其边长为 $x-3y=5-3\times1=2$.

∴图 3 中阴影部分的面积是 $2\times2=4$.

【点拨】本题求解的技巧有两个，一是设间接未知数解决问题，即先根据图 1、图 2 列二元一次方程组求得每个矩形纸片的长与宽，再由此求图 3 中的阴影面积；二是数形结合的方法，即通过观察图 1、图 2，得到矩形纸片的长与宽之间的关系，为列二元一次方程组提供了必需的等量关系.

变式训练三

1. A **【解析】**设一个小长方形的长为 x cm，宽为 y cm.

根据题意，得 $\begin{cases}x=3y,\\ x+2y=60.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=36,\\ y=12.\end{cases}$

∴大长方形的长为 $2x=72$.

∴大长方形的面积为 $72\times60=4\,320$（cm^2）. 故选 A.

2. D **【解析】**设每块长方形地砖的长为 x cm，宽为 y cm.

根据题意，得 $\begin{cases}4y=60,\\ x+y=60.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=45,\\ y=15.\end{cases}$ 故每块长方形地砖的面积为 $xy=45\times15=675$（cm^2）.

培优精练

1. 75° 15° **【解析】**设 $\angle COE=x$，$\angle COD=y$. 根据题意，得 $\begin{cases}2x+2y=180°,\\ x-y=60°.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=75°,\\ y=15°.\end{cases}$ 故 $\angle COE=75°$，$\angle COD=15°$.

2. 1 200 **【解析】**设小长方形的长为 x cm，宽为 y cm.

依题意，得 $\begin{cases}x+y=30,\\ 3y=30.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=20,\\y=10.\end{cases}$

∴这个矩形的长为 $2x=40$.

则这个矩形的面积是 $30\times40=1\ 200$ (cm^2).

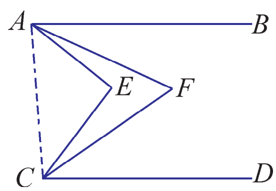
3. **解**：根据题意，得$\begin{cases}x-y=3,\\3(x+y)=21.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=5,\\y=2.\end{cases}$

故大正方形的边长为 5 cm，小正方形的边长为 2 cm.

名卷压轴题

解：连接 AC，如下图所示.



设$\angle EAF=x$，$\angle ECF=y$，

则$\angle EAB=3x$，$\angle ECD=3y$.

∵$AB\parallel CD$，

∴$\angle BAC+\angle ACD=180°$.

∴$\angle CAE+3x+\angle ACE+3y=180°$.

∴$\angle CAE+\angle ACE=180°-(3x+3y)$.

∴$\angle FAC+\angle FCA=180°-(2x+2y)$.

∴ $\angle AEC=180°-(\angle CAE+\angle ACE)=180°-[180°-(3x+3y)]=3x+3y=3(x+y)$.

∵$AE\perp CE$，

∴$\angle AEC=90°=3(x+y)$.

∴$x+y=30°$.

∴ $\angle AFC=180°-(\angle FAC+\angle FCA)=180°-[180°-(2x+2y)]=2x+2y=2(x+y)=2\times30°=60°$.

第 2 讲　列二元一次方程组解决实际问题

例一　**解**：设每头大牛 1 天需饲料 x kg，每头小牛 1 天需饲料 y kg，根据题意列出如下表格.

	大牛 1 天需要饲料/kg	小牛 1 天需要饲料/kg	1 天共需要饲料/kg
原来	$30x$	$15y$	675
购进后	$(30+12)x$	$(15+5)y$	940

根据题意，得$\begin{cases}30x+15y=675,\\42x+20y=940.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=20,\\y=5.\end{cases}$

∴$x+y=25$.

故养一头大牛和一头小牛一天共需 25 kg 饲料.

【点拨】本题属于“鸡兔同笼”类问题，即题干中出现至少 6 个量，且相互之间都有一定关系，处理这类问题时可借助表格清晰地表示出各个量之间的关系，找出等量关系，从而列方程组并求解.

变式训练一

1. D　【解析】根据题意列出如下表格.

	大盒装口罩数/个	小盒装口罩数/个	共装口罩数/个
情况一	$2x$	$4y$	88
情况二	$3x$	$2y$	84

根据题意，得$\begin{cases}2x+4y=88, \\ 3x+2y=84.\end{cases}$

故选 D.

2. $\begin{cases}5x+2y=10, \\ 2x+5y=8\end{cases}$

【解析】根据题意列出如下表格.

	牛值金/两	羊值金/两	共值金/两
第一种	$5x$	$2y$	10
第二种	$2x$	$5y$	8

根据题意，得$\begin{cases}5x+2y=10, \\ 2x+5y=8.\end{cases}$

例二　**解：**（1）设足球的单价为 x 元，跳绳的单价为 y 元，

根据题意，得$\begin{cases}12x+10y=1\ 400, \\ 10x+12y=1\ 240.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=100, \\ y=20.\end{cases}$

故足球的单价为 100 元，跳绳的单价为 20 元.

（2）根据题意，得 $80a+15b=1\ 800$.

$\therefore b=120-\frac{16}{3}a$.

又$\because a$，b 均为自然数，且 $a>15$，

$\therefore 15<a<23$，且 a 为 3 的倍数.

$\therefore \begin{cases}a=18, \\ b=24\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=21, \\ b=8.\end{cases}$

∴有 2 种购进方案.

方案 1：购进 18 个足球，24 根跳绳；

方案 2：购进 21 个足球，8 根跳绳.

【点拨】本题求解的技巧有两个：一是数形结合的思想，即根据图文信息获取正确的等量关系，由此列出二元一次方程组；二是深刻挖掘题目中蕴含的限制条件求二元一次方程的特殊解，如在（2）中，因为二元一次方程的整数解有无数组，为此必须缩小 a，b 的取值范围，如：根据“自然数”与“$a>15$”得到 $15<a<23$，进而根据“a 为 3 的倍数”得到 a 的值，随之确定 b 的值.

变式训练二

1. **解：**设小明家去年种植菠萝投资 x 元，收入 y 元. 根据题意列出如下表格.

	投资/元	收入/元	利润/元
去年	x	y	8 000
今年	$(1+10\%)x$	$(1+35\%)y$	11 800

根据题意，得

$\begin{cases}y-x=8\ 000, \\ (1+35\%)y-(1+10\%)x=11\ 800.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=4\ 000, \\ y=12\ 000.\end{cases}$

$\therefore (1+10\%)x=4\ 400$，

$(1+35\%)y=16\ 200$.

故小明家今年种植菠萝的投资为4 400元，收入为16 200元.

2. 解： 设去年两块农田的产量分别是x kg和y kg，

根据题意，得

$$\begin{cases}x+y=470,\\(1-80\%)x+(1-90\%)y=57.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=100,\\y=370.\end{cases}$

∴ $(1-80\%)x=0.2\times100=20$（kg），

$(1-90\%)y=0.1\times370=37$（kg）.

故该农户今年两块农田的产量分别是20 kg和37 kg.

例三 **解：**（1）设掷中A区，B区一次各得x分，y分，

根据题意，得$\begin{cases}5x+3y=90,\\3x+5y=86.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=12,\\y=10.\end{cases}$

故掷中A区，B区一次各得12分，10分.

（2）由（1）可知，$\begin{cases}x=12,\\y=10.\end{cases}$

∴$4x+4y=88$.

故小明的得分为88分.

【点拨】 本题（1）问求解的技巧是运用数形结合的方法，先由形定数：根据题图得到小华、小芳投掷的结果及所得总分；然后由形求数：由投掷结果确定等量关系并列出二元一次方程组，解方程组则得到答案.

变式训练三

解： 设第五节的容积为x L，每一节与前一节的容积之差为y L，

根据题意，得

$$\begin{cases}(x-4y)+(x-3y)+(x-2y)=9,\\(x+2y)+(x+3y)+(x+4y)=45.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=9,\\y=2.\end{cases}$

故第五节的容积为9 L，每一节与前一节的容积之差为2 L.

例四 **解：**（1）依题意，得

$$\begin{cases}3a+b+10=200,\\a+3b+30=200.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}a=50,\\b=40.\end{cases}$

所以图1中的$a=50$ cm，$b=40$ cm.

（2）将25张标准板材按裁法一裁剪可得A型木板$3\times25=75$（张），B型木板25张. 将5张标准板材按裁法二裁剪可得A型木板5张，B型木板$3\times5=15$（张）.

故A型木板共有$75+5=80$（张），

B型木板共有$25+15=40$（张）.

设可以做竖式无盖礼品盒x个，横式无盖礼品盒y个.

依题意，得

$$\begin{cases}4x+3y=80,\\x+2y=40.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=8,\\y=16.\end{cases}$

故可以做竖式无盖礼品盒 8 个，横式无盖礼品盒 16 个.

【点拨】解决此类问题的关键是厘清每一类盒子分别需要两种规格的木板的个数，再通过等量关系，建立方程组并求解.

变式训练四

解：设做成的 A 款盒子有 x 个，B 款盒子有 y 个.

根据题意，得$\begin{cases}x+2y=140,\\4x+4y=360.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=40,\\y=50.\end{cases}$

故做成的 A 款盒子有 40 个，B 款盒子有 50 个.

培优精练

1. D　【解析】根据题意列出如下表格.

	马	牛	共价
第一种	$4x$	$6y$	48
第二种	$3x$	$5y$	38

根据题意，得

$\begin{cases}4x+6y=48,\\3x+5y=38.\end{cases}$故选 D.

2. B　【解析】设 1 艘大船可满载游客 x 人，1 艘小船可满载游客 y 人，依题意，得$\begin{cases}x+2y=32,&①\\2x+y=46.&②\end{cases}$ ①＋②，得 $3x+3y=78$. ∴$x+y=26$，即 1 艘大船与 1 艘小船一次共可以满载游客的人数为 26.

3. **解**：（1）①第二次记录错误. 理由如下：

设做成 x 个竖式纸盒，y 个横式纸盒.

则需要正方形纸板（$x+2y$）张，

需要长方形纸板（$4x+3y$）张.

∵$x+2y+4x+3y=5(x+y)$，

∴领取的正方形纸板和长方形纸板张数之和应该是 5 的倍数.

∵420＋1 002＝1 422，1 422 不是 5 的倍数，

∴第二次记录错误.

②根据题意，得$\begin{cases}x+2y=560,\\4x+3y=940.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=40,\\y=260.\end{cases}$

故记录正确的那一次，利用领取的纸板做了 40 个竖式纸盒，260 个横式纸盒.

（2）根据题意，得$\dfrac{x+2y}{4x+3y}=\dfrac{1}{3}$.

解得 $x=3y$.

∴$\dfrac{x}{y}=3$.

则竖式纸盒与横式纸盒个数的比值为 3.

名卷压轴题

解：设从小明家到学校，上坡路是 x km，平路是 y km，下坡路是 z km.

根据题意，得$\begin{cases}x+y+z=3.3,\\\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=1,\\\dfrac{z}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{x}{5}=\dfrac{44}{60}.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=2.25,\\y=0.8,\\z=0.25.\end{cases}$

故从小明家到学校，上坡路是 2.25 km，平路是 0.8 km，下坡路是 0.25 km.

◎二元一次方程组　新题型探究

例题　**解**：(1) 当 $a=3$，$b=4$ 时，

$1※(-2)$

$=3\times1+4\times(-2)$

$=3+(-8)$

$=-5.$

(2) ∵$5※3=16$，$2※(-3)=-2$，

∴$\begin{cases}5a+3b=16,\\2a-3b=-2.\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=2,\\b=2.\end{cases}$

【点拨】本题求解的技巧是运用转化的思想，即在深刻理解新定义的基础上，把新定义问题转化为解二元一次方程组的问题.

变式训练

解：(1) 根据题意，得

$3\oplus(-6)=2\times3+(-6)=6-6=0.$

(2) 根据题意，得

$\begin{cases}2x-y=2\,018, & ①\\4y+x=-2\,019. & ②\end{cases}$

①+②，得 $3x+3y=-1.$

∴$x+y=-\frac{1}{3}.$

培优精练

解：(1) ∵点 P $(-5,1)$ 的“-3 级牵挂点”为 P_1，设 P_1 (x,y)，

∴$x=-5\times(-3)+1=16$，

$y=-5-(-3)\times1=-2$，

即 P_1 的坐标为 $(16,-2)$.

∴点 P_1 到 x 轴的距离为 2.

(2) ∵点 Q 的“4 级牵挂点”为 Q_1 $(5,-3)$，

设点 Q 的坐标为 (x,y)，

根据题意，得$\begin{cases}4x+y=5,\\x-4y=-3.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

∴点 Q 的坐标为 $(1,1)$，且点 Q 在第一象限.

专题五　不等式与不等式组

第 1 讲　数轴与不等式

例一　B　**【解析】**由图可知，$-2<a<-1$，$2<b<3$. ∴$b-2>0$，$a-2<0$，$a+2>0$. 则 $a\cdot|b-2|<0$，$b\cdot|a-2|>0$，$|b-2|(a+2)>0$，$(2-a)(2-b)<0$. 故①③成立. 故选 B.

【点拨】本题求解的技巧是运用数形结合的方法，即根据 A，B 两点的位置，确定 a，b 的取值范围，进而得到各式中两个因式的符号，然后根据有理数的乘法法则“同号得正、异号得负”

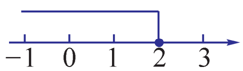
得出答案．本题也可以用特殊数值法求解，即在 -1 和 -2 之间取一个 a 值，在 2 和 3 之间取一个 b 值，然后验证各选项，即可得出答案．

变式训练一

1. C　**【解析】** 由数轴可得，$-1<a<0<1<b<2$，$|a|<|b|$．$\therefore ab<0$，$-b<-1<0<-a<1$．$\therefore$C 正确．

2. ①③④　**【解析】** 观察数轴可知 $m>0$，$n<0$，$|m|<|n|$，$\therefore$①③④正确．

例二　B　**【解析】** $\because 2x-4\leqslant 0$，$\therefore 2x\leqslant 4$．$\therefore x\leqslant 2$．$\therefore$不等式 $2x-4\leqslant 0$ 的解集为 $x\leqslant 2$．在数轴上表示如下．



故选 B.

【点拨】 此题考查一元一次不等式问题，注意空心和实心的不同表示．不等式的解集在数轴上表示的方法："$>$"为空心圆点向右画折线，"$\geqslant$"为实心圆点向右画折线，"$<$"为空心圆点向左画折线，"$\leqslant$"为实心圆点向左画折线．

变式训练二

1. C　**【解析】** 由题意可知，该不等式的解集为 $x\leqslant 2$ 或 $x<3$，故选 C.

2. B　**【解析】** 去分母，得

$2(3x+2)\leqslant 3(x+5)-6$.

去括号，得

$6x+4\leqslant 3x+15-6$.

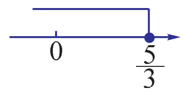
移项，合并同类项，得

$3x\leqslant 5$.

系数化为 1，得

$x\leqslant \frac{5}{3}$.

$\therefore$这个不等式的解集在数轴上的表示如下．

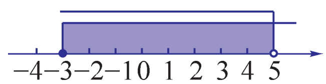


例三　**解：** $\begin{cases}2x-9<1, & ①\\ 3x-2\leqslant 5x+4. & ②\end{cases}$

解不等式①，得 $x<5$.

解不等式②，得 $x\geqslant -3$.

故原不等式组的解集是 $-3\leqslant x<5$．在数轴上的表示如下图所示．



【点拨】 此题主要考查一元一次不等式组的解法，解此类题目常常要结合数轴来判断．要注意端点是否取，若取，则该点是实心的，反之，该点是空心的．

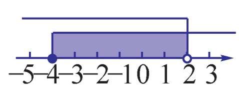
变式训练三

1. A　**【解析】** $\begin{cases}x-1<1, & ①\\ 2x-4\leqslant 4x+4. & ②\end{cases}$

解不等式①，得 $x<2$.

解不等式②，得 $x\geqslant -4$.

在数轴上表示如下图．

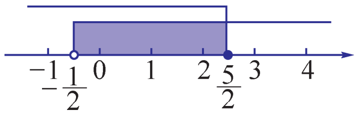


2. **解：** $\because$解不等式①，得 $x>-\frac{1}{2}$.

解不等式②，得 $x\leqslant \frac{5}{2}$.

$\therefore$不等式组的解集为 $-\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{5}{2}$.

在数轴上的表示如下图.



例四 **解**：解 $2x-1\leqslant 11$，

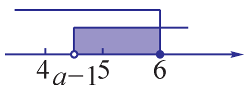
得 $x\leqslant 6$.

解 $x+1>a$，得 $x>a-1$.

故不等式组的解集为 $a-1<x\leqslant 6$.

$\because$关于 x 的不等式组

$\begin{cases}2x-1\leqslant 11,\\ x+1>a\end{cases}$ 恰好只有两个整数解，将不等式组的解集在数轴上表示如下图.



$\therefore$这两个整数解为 5，6.

$\therefore 4\leqslant a-1<5$.

解得 $5\leqslant a<6$.

【点拨】本题主要考查已知一元一次不等式组的整数解的情况，求参数的取值范围. 解题步骤如下：①把已知或能算出的解表示在数轴上；②让带字母的解在数轴上移动，观察与整数解的关系；③注意临界点是否可取，可以代入原不等式组的解集，验证是否符合题意.

变式训练四

1. 解：$\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{x+1}{3}>0, & ①\\ x+\frac{5a+4}{3}>\frac{4}{3}(x+1)+a, & ②\end{cases}$

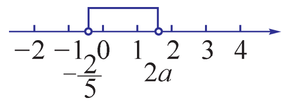
解①，得 $x>-\frac{2}{5}$.

解②，得 $x<2a$.

$\therefore$不等式组的解集为 $-\frac{2}{5}<x<2a$.

$\because$关于 x 的一元一次不等式组恰有 2 个整数解，

$\therefore$将不等式组的解集表示在数轴上如下图.

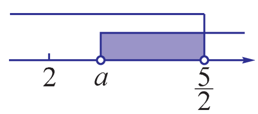


$\therefore$整数解为 0 和 1.

$\therefore 1<2a\leqslant 2$. 解得 $\frac{1}{2}<a\leqslant 1$.

2. 解：解不等式组，得 $\begin{cases}x<\frac{5}{2},\\ x>a.\end{cases}$

$\therefore$不等式组的解集是 $a<x<\frac{5}{2}$ 或当 $a\geqslant\frac{5}{2}$ 时，不等式组无解. ①当 $a\geqslant\frac{5}{2}$ 时，不等式组无解. 则不等式组无整数解满足题意；②当不等式组的解集是 $a<x<\frac{5}{2}$ 时，在数轴上的表示如下图.



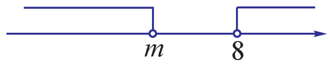
$\because$不等式组无整数解，

$\therefore a\geqslant 2$.

综上，a 的取值范围为 $a\geqslant 2$.

例五 A **【解析】**解不等式$\frac{x+1}{3}<\frac{x}{2}-1$，得 $x>8$.

$\because$不等式组无解，在数轴上的表示如图所示.



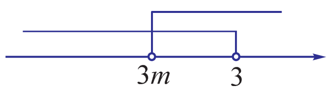
$\therefore m\leqslant 8$. 故选 A.

【点拨】 本题主要考查已知一元一次不等式组无解，求参数的取值范围．解题步骤如下：①把已知或能算出的解表示在数轴上；②让带字母的解在数轴上移动，找出满足题目要求的大范围；③注意临界点是否可取，可以代入原不等式组的解集，验证是否符合题意.

变式训练五

1. B　**【解析】** 解不等式组，得$\begin{cases}x<3,\\x>3m.\end{cases}$

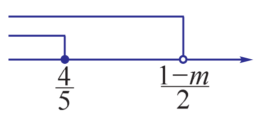
$\because$不等式组有解，在数轴上表示如下图.



$\therefore 3m<3$. 解得 $m<1$，故选 B.

2. A　**【解析】** 解不等式 $\frac{2x+5}{3}-1\leqslant 2-x$，得 $x\leqslant\frac{4}{5}$. 解不等式 $2x+m<1$，得 $x<\frac{1-m}{2}$. $\because$不等式 $\frac{2x+5}{3}-1\leqslant 2-x$ 的解都能使关于 x 的不等式 $2x+m<1$ 成立，$\therefore \frac{1-m}{2}$在$\frac{4}{5}$的右边.

在数轴上表示出两个不等式的解集，如下图.

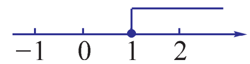


$\therefore \frac{1-m}{2}>\frac{4}{5}$.

解得 $m<-\frac{3}{5}$. 故选 A.

培优精练

1. D　**【解析】** 解不等式 $3x-1\geqslant 2x$，得 $x\geqslant 1$. 在数轴上的表示如下图.



2. 解： 解不等式①，

去分母，得 $12-4x>4-x-1$.

解得 $x<3$.

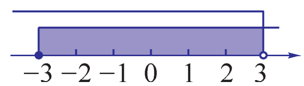
解不等式②，

去括号，得 $7x+1\geqslant 5x-5$.

解得 $x\geqslant -3$.

$\therefore$原不等式组的解集为 $-3\leqslant x<3$，

在数轴上的表示如下图.

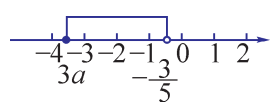


3. 解： 解不等式 $4x-3(x+a)\geqslant 0$，得 $x\geqslant 3a$.

解不等式 $\frac{3x+1}{2}-\frac{1}{4}(x-1)<0$，得 $x<-\frac{3}{5}$.

$\therefore$不等式组的解集为 $3a\leqslant x<-\frac{3}{5}$，

在数轴上的表示如下图.



$\because$不等式组有 3 个整数解，

$\therefore$不等式组的 3 个整数解为 -3，-2，-1.

$\therefore -4<3a\leqslant -3$.

$\therefore -\frac{4}{3}<a\leqslant -1$.

$\therefore a$ 的取值范围为 $-\frac{4}{3}<a\leqslant-1$.

名卷压轴题

根据题意，可知不等式组 $\begin{cases}x+1\geqslant a-2, & ①\\5a-15+2x\leqslant x & ②\end{cases}$ 无解.

解不等式①，得 $x\geqslant a-3$.

解不等式②，得 $x\leqslant15-5a$.

$\because$ 不等式组无解，

$\therefore a-3>15-5a$.

解得 $a>3$.

当 $a>3$ 时，

$|a+1|-|3-a|=a+1-(a-3)=4$.

第 2 讲　一元一次不等式（组）的应用

例一　(1) 31　**【解析】** 当 $x=3$ 时，

第一次：$3\times3+1=10<30$，继续计算；第二次：$3\times10+1=31>30$，

$\therefore$ 输出的结果为 31.

(2) 3　**【解析】** $\because$ 最后输出的结果是 40，

$\therefore 3x+1=40$，解得 $x=13$.

由 $3x+1=13$，解得 $x=4$.

由 $3x+1=4$，解得 $x=1$.

$\because$ 1 是最小的正整数，

$\therefore$ 满足条件的 x 的值有 1，4，13，共 3 个.

(3) **解：** 第 1 次运算，计算结果是 $3x+1$；

第 2 次运算，计算结果是 $3\times(3x+1)+1=9x+4$；

第 3 次运算，计算结果是 $3\times(9x+4)+1=27x+13$.

根据题意，得 $\begin{cases}9x+4\leqslant30,\\27x+13>30.\end{cases}$

解得 $\frac{17}{27}<x\leqslant\frac{26}{9}$.

【点拨】 本题主要考查程序图的认识与一元一次不等式组的解法. 抓住程序需要进行第二次运算的条件是解本题的关键.

变式训练一

1. **解：** (1) 根据题意，得 $3x-2>10$.

解得 $x>4$.

(2) 根据题意，得

$\begin{cases}3x-2\leqslant10,\\3(3x-2)-2>10.\end{cases}$

解得 $2<x\leqslant4$.

2. (1) 52　62　**【解析】** 当 $x=10$ 时，$5\times10+2=52>37$，$\therefore$ 输出的值为 52.

当 $x=2$ 时，$5\times2+2=12<37$，把 $x=12$ 代入，得 $5\times12+2=62>37$，

$\therefore$ 输出的值为 62.

(2) **解：** 根据题意，得

$\begin{cases}5x+2<37,\\5(5x+2)+2\geqslant37.\end{cases}$

解得 $1\leqslant x<7$.

故 x 的取值范围是 $1\leqslant x<7$.

例二　**解：** (1) 设 A 型设备的单价是 x 万元，B 型设备的单价是 y 万元，根据题意列出表格如下：

	A 型设备资金	B 型设备资金	共需资金
情况一	x	$3y$	230
情况二	$3x$	$2y$	340

依题意，得$\begin{cases}x+3y=230,\\3x+2y=340.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=80,\\y=50.\end{cases}$

故 A 型设备的单价是 80 万元，B 型设备的单价是 50 万元.

(2) 设购买 A 型设备 m 套，根据题意可列表格如下：

	A 型	B 型	合计
套数	m	$50-m$	50
金额	$80m$	$50(50-m)$	$80m+50(50-m)$

依题意，得 $80m+50(50-m)\leqslant 3\,000$.

解得 $m\leqslant\frac{50}{3}$.

$\because m$ 为整数，

$\therefore m$ 的最大值为 16.

故最多可购买 A 型设备 16 套.

【点拨】 本题考查了二元一次方程组的应用以及一元一次不等式的应用. 解题的关键是：(1) 找准等量关系，正确列出二元一次方程组；(2) 根据各数量之间的关系，正确列出一元一次不等式.

变式训练二

解： (1) 设该超市打折促销前购买一个甲种物品需 x 元，一个乙种物品需 y 元，根据题意可列表格如下：

	甲种物品费用	乙种物品费用	费用情况
情况一	$15x$	$20y$	共 250
情况二	x	y	甲比乙多 5

依题意，得$\begin{cases}15x+20y=250,\\x-y=5.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=10,\\y=5.\end{cases}$

故该超市打折促销前购买一个甲种物品需 10 元，一个乙种物品需 5 元.

(2) 设购买 m 个甲种物品，根据题意可列表格如下：

	甲种物品	乙种物品
数量	m	$35-m$
单价	$10-2$	$5\times80\%$
总费用	$(10-2)m$	$5\times80\%\times(35-m)$

依题意，得 $(10-2)m+5\times80\%\times(35-m)\leqslant 225$.

解得 $m\leqslant 21\frac{1}{4}$.

$\because m$ 为正整数，

$\therefore m$ 的最大值为 21.

故至多购买 21 个甲种物品.

例三 **解：** (1) 设改造 1 个甲种型号大棚需要 x 万元，改造 1 个乙种型号大棚需要 y 万元，根据题意可列表格

如下：

	甲种型号	乙种型号	数量关系
情况一	$2x$	y	甲比乙多 6
情况二	x	$2y$	甲，乙共 48

依题意，得$\begin{cases}2x-y=6,\\x+2y=48.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=12,\\y=18.\end{cases}$

故改造 1 个甲种型号大棚需要 12 万元，改造 1 个乙种型号大棚需要 18 万元.

(2) 设改造 m 个甲种型号大棚，则改造（$8-m$）个乙种型号大棚，根据题意可列表格如下：

	甲种型号	乙种型号	合计
改造时间	$5m$	$3(8-m)$	$5m+3(8-m)$
改造资金	$12m$	$18(8-m)$	$12m+18(8-m)$

依题意，得

$\begin{cases}5m+3(8-m)\leqslant 35,\\12m+18(8-m)\leqslant 128.\end{cases}$

解得$\frac{8}{3}\leqslant m\leqslant\frac{11}{2}$.

$\because m$ 为整数，

$\therefore m$ 的取值可以为 3 或 4 或 5.

故共有 3 种改造方案.

方案一：改造 3 个甲种型号大棚，5 个乙种型号大棚；

方案二：改造 4 个甲种型号大棚，4 个乙种型号大棚；

方案三：改造 5 个甲种型号大棚，3 个乙种型号大棚.

方案一所需费用为 $12\times3+18\times5=126$（万元）.

方案二所需费用为 $12\times4+18\times4=120$（万元）.

方案三所需费用为 $12\times5+18\times3=114$（万元）.

$\because 114<120<126$，

$\therefore$方案三改造 5 个甲种型号大棚，3 个乙种型号大棚投入资金最少，最少投入资金是 114 万元.

【点拨】 本题考查了二元一次方程组的应用以及一元一次不等式组的应用. 解题的关键是：(1) 找准等量关系，正确列出二元一次方程组；(2) 根据各数量之间的关系，正确列出一元一次不等式组.

变式训练三

解： (1) 设参加此次研学活动的老师有 x 人，学生有 y 人，根据题意可列表如下：

	老师带学生数	实际学生数	数量关系
情况一	$14x$	y	余 10 名学生
情况二	$15x$	y	差 6 名学生

依题意，得$\begin{cases}14x+10=y,\\15x-6=y.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=16,\\y=234.\end{cases}$

故参加此次研学活动的老师有 16 人，学生有 234 人.

(2) ∵ (234 + 16) ÷ 35 = 7 (辆) ……5 (人)，16÷2=8 (辆)，

∴租车总辆数为 8 辆.

(3) 设租 35 座客车 m 辆，则需租 30 座客车 $(8-m)$ 辆，根据题意可列表如下：

	甲型客车	乙型客车	合计
载客数	$35m$	$30(8-m)$	$35m+30(8-m)$
租金	$400m$	$320(8-m)$	$400m+320(8-m)$

依题意，得

$\begin{cases}35m+30(8-m)\geqslant 234+16,\\400m+320(8-m)\leqslant 3\,000.\end{cases}$

解得 $2\leqslant m\leqslant 5\dfrac{1}{2}$.

∵m 为正整数，

∴m 的值可以为 2 或 3 或 4 或 5.

∴共有 4 种租车方案.

设租车总费用为 w 元，则 $w=400m+320(8-m)=80m+2\,560$.

当 $m=2$ 时，$w=2\,720$；

当 $m=3$ 时，$w=2\,800$；

当 $m=4$ 时，$w=2\,880$；

当 $m=5$ 时，$w=2\,960$.

∴当 $m=2$ 时，w 取得最小值，最小值为 2 720.

∴学校共有 4 种租车方案，最少租车费用是 2 720 元.

培优精练

1. $12\leqslant b\leqslant 16$　【解析】∵$18\leqslant a\leqslant 26$，$a=50-2b$，∴$\begin{cases}50-2b\geqslant 18,\\50-2b\leqslant 26.\end{cases}$解得 $12\leqslant b\leqslant 16$，即 b 的取值范围为 $12\leqslant b\leqslant 16$.

2. $7<x\leqslant 19$　【解析】第一次操作：$3x-2$；

第二次操作：$3(3x-2)-2=9x-8$；

第三次操作：$3(9x-8)-2=27x-26$；

第四次操作：$3(27x-26)-2=81x-80$.

∵操作进行第四次才停止，

∴$\begin{cases}27x-26\leqslant 487,\\81x-80>487.\end{cases}$

解得 $7<x\leqslant 19$.

故 x 的取值范围为 $7<x\leqslant 19$.

3. **解**：(1) 设该社区种植甲种花卉 1 m^2 需 x 元，种植乙种花卉 1 m^2 需 y 元，根据题意可列表格如下：

	甲种花卉	乙种花卉	合计
情况一	$2x$	$3y$	430
情况二	x	$2y$	260

依题意，得$\begin{cases}2x+3y=430,\\x+2y=260.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=80,\\y=90.\end{cases}$

故该社区种植甲种花卉 1 m^2 需 80 元，种植乙种花卉 1 m^2 需 90 元.

(2) 设该社区种植乙种花卉 m m^2，根据题意可列表格如下：

	甲种花卉	乙种花卉	合计
花卉面积	$75-m$	m	75
所需资金	$80(75-m)$	$90m$	$80(75-m)+90m$

依题意，得 $80(75-m)+90m\leqslant 6\,300$.

解得 $m\leqslant 30$.

故该社区最多能种植乙种花卉 30 m^2.

名卷压轴题

解：(1) 设甲种轮胎生产 x 个，乙种轮胎生产 y 个，

根据题意，得

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{4}\times 252=168,\right.\\0.4x+0.3y+0.1\times 252=111.2.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=170,\\y=60.\end{cases}$

故甲种轮胎每周生产 170 个，乙种轮胎每周生产 60 个.

(2) 设该商店购进甲种轮胎 m 个，则购进乙种轮胎 $(50-m)$ 个，

根据题意，得 $24.96\leqslant 0.48m+0.36(50-m)+0.12\times 50\leqslant 25.2$.

解得 $8\leqslant m\leqslant 10$.

$\because m$ 为正整数，

$\therefore m=8$ 或 9 或 10.

$\therefore$有三种购进方案.

方案一：购进甲种轮胎 8 个，乙种轮胎 42 个，丙种轮胎 50 个.

方案二：购进甲种轮胎 9 个，乙种轮胎 41 个，丙种轮胎 50 个.

方案三：购进甲种轮胎 10 个，乙种轮胎 40 个，丙种轮胎 50 个.

(3) 方案一：$8\times 200+42\times 150+50\times 100=12\,900$ (元)；

方案二：$9\times 200+41\times 150+50\times 100=12\,950$ (元)；

方案三：$10\times 200+40\times 150+50\times 100=13\,000$ (元).

$\because 12\,900<12\,950<13\,000$，

$\therefore$方案三获利最多，按这种方案可获利 13 000 元.

◎不等式与不等式组　新题型探究

例题　**解：**①当$\begin{cases}2k+1>-k+3,\\2k+1\leqslant 3\end{cases}$时，

解得$\dfrac{2}{3}<k\leqslant 1$. 如图 1.

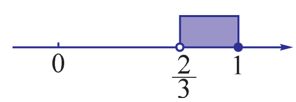


图 1

②当$\begin{cases}2k+1\leqslant -k+3,\\-k+3\leqslant 3\end{cases}$时，

解得 $0\leqslant k\leqslant\dfrac{2}{3}$. 如图 2.

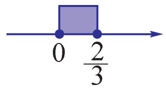


图 2

$\therefore \dfrac{2}{3}<k\leqslant 1$ 或 $0\leqslant k\leqslant \dfrac{2}{3}$.

$\because k$ 为正整数，

$\therefore k=1$.

当 $k=1$ 时，关于 x 的方程为 $\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{1-x}{6}=1$. 解得 $x=\dfrac{9}{5}$.

【点拨】 本题主要考查对新定义的理解及解一元一次不等式的能力. 读懂新定义能进行分类讨论是前提，根据题意列出不等式组是关键.

变式训练

（1）$-2\ 022$　**【解析】** $\because -2\ 020>-2\ 021>-2\ 022$，

$\therefore \min\{-2\ 020, -2\ 021, -2\ 022\}=-2\ 022$.

（2）**解：** $\because \max\{2, x+1, 2x\}=2x$，

$\therefore \begin{cases}2x\geqslant 2,\\ 2x\geqslant x+1.\end{cases}$

解得 $x\geqslant 1$.

（3）**解：** ①当 $\min\{4, 2x+4, 4-2x\}=4$ 时，

则 $\begin{cases}2x+4>4,\\ 4-2x>4.\end{cases}$ 此种情况不成立.

②当 $\min\{4, 2x+4, 4-2x\}=2x+4$ 时，

则 $\begin{cases}4\geqslant 2x+4,\\ 4-2x\geqslant 2x+4.\end{cases}$ 解得 $x\leqslant 0$.

此时 $x+1\leqslant 1<2$，$2x\leqslant 0<2$，

则 $\max\{2, x+1, 2x\}=2$.

$\therefore 2x+4=2$. 解得 $x=-1$.

③当 $\min\{4, 2x+4, 4-2x\}=4-2x$ 时，

则 $\begin{cases}4>4-2x,\\ 2x+4>4-2x.\end{cases}$ 解得 $x>0$.

此时 $x+1>1$，$2x>0$.

i 当 $\max\{2, x+1, 2x\}=2$ 时，

$\begin{cases}x+1\leqslant 2,\\ 2x\leqslant 2.\end{cases}$ 解得 $x\leqslant 1$.

$\therefore 4-2x=2$. $\therefore x=1$.

ii 当 $\max\{2, x+1, 2x\}=x+1$ 时，

则 $\begin{cases}2<x+1,\\ 2x<x+1.\end{cases}$ 此种情况不成立.

iii 当 $\max\{2, x+1, 2x\}=2x$ 时，

$\begin{cases}2<2x,\\ x+1<2x.\end{cases}$ 解得 $x>1$.

$\therefore 4-2x=2x$. 解得 $x=1$.

此种情况不成立.

综上所述，x 的值为 -1 或 1.

培优精练

（1）是　**【解析】** $\because$ 不等式 $x\geqslant 2$ 和不等式 $x\leqslant 2$ 有公共整数解 2，$\therefore$ 不等式 $x\geqslant 2$ 是 $x\leqslant 2$ 的“云不等式”.

（2）**解：** 解不等式 $x+2m\geqslant 0$，

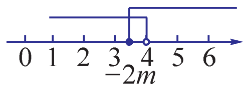
得 $x\geqslant -2m$.

解不等式 $2x-3<x+1$，

得 $x<4$.

$\because$ 关于 x 的不等式 $x+2m\geqslant 0$ 不是 $2x-3<x+1$ 的“云不等式”，两个不

等式的解集在数轴上表示如下.



$\therefore -2m>3$. 解得 $m<-\dfrac{3}{2}$.

故 m 的取值范围是 $m<-\dfrac{3}{2}$.

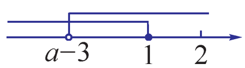
(3) 解：当 $a>-1$，即 $a+1>0$ 时，解不等式 $x+3>a$，得 $x>a-3$.

解不等式 $ax-1\leqslant a-x$，

得 $x\leqslant 1$.

$\because$这两个不等式互为“云不等式”，

$\therefore$这两个不等式的解集在数轴上表示如下图.



$\therefore a-3<1$.

$\therefore -1<a<4$.

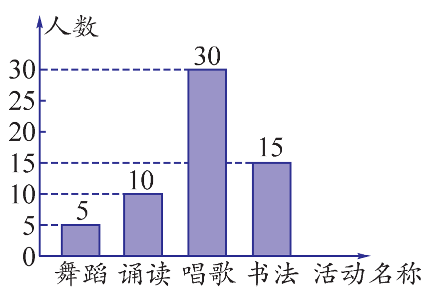
专题六　数据的收集、整理与描述

例一　解：(1) $\because 15\div 25\%=60$ (名)，

故参加抽样调查的学生共有 60 名.

(2) 由题意，得选择参加诵读活动的人数为 $60-(5+15+30)=10$.

补全条形统计图如下图所示.



(3) $3\,300\times\dfrac{5}{60}=275$ (名).

故估计该校学生参加舞蹈活动的有 275 名.

【点拨】本题考查的是条形统计图的综合运用，读懂统计图并从中得到必要的信息是解决问题的关键.

变式训练一

C　**【解析】**共有 3 人得 6 分，$\therefore$①错误；得 5 分和 7 分的人数一样多，都是 4 人，$\therefore$②正确；得 9 分的有 3 人，得 10 分的有 5 人，则有 8 名选手的成绩高于 8 分，$\therefore$③正确；④$4+3+4+6+3+5=25$，则有 25 名选手参赛，$\therefore$④正确.

例二　(1) 10　40　90°　**【解析】**$\because$样本人数为 $4\div 10\%=40$，$\therefore a=40-24-4-2=10$，$b=40$. 表示 A 等级的扇形的圆心角的度数为 $360^\circ\times\dfrac{10}{40}=90^\circ$.

(2) 解：$\because 240\times\dfrac{24}{40}=144$ (名)，

故估计该校“仰卧起坐”项目的成绩获得 B 等级的女生约有 144 名.

【点拨】本题主要考查统计表和扇形统计图. 从统计表和统计图中获得正确的信息是解本题的关键.

变式训练二

D　**【解析】**被调查的学生人数为 $60\div 15\%=400$，$\therefore$A 正确；

$\because$“乒乓球”部分扇形的圆心角为 $\dfrac{100}{400}\times 360^\circ=90^\circ$，“网球”部分扇形的圆心角为 $\dfrac{40}{400}\times 360^\circ=36^\circ$，又 $360^\circ\times$

$(17.5\%+15\%+12.5\%)=162°$，∴“羽毛球”部分扇形的圆心角为 $360°-162°-90°-36°=72°$，∴B 正确；

∵ $400\times\frac{72}{360}=80$（人），$400\times17.5\%=70$（人），∴C 正确；

∵最喜欢“网球”的占 $\frac{36}{360}=10\%$，最喜欢“羽毛球”的占 $\frac{72}{360}=20\%$，最喜欢“乒乓球”的占 $\frac{90}{360}=25\%$，且 $25\%>20\%>17.5\%>15\%>12.5\%>10\%$，∴最喜欢网球的人数最少. ∴D 错误.

例三 4 **【解析】** 由折线统计图可知，4 月份出售该种水果每千克赚的钱最多.

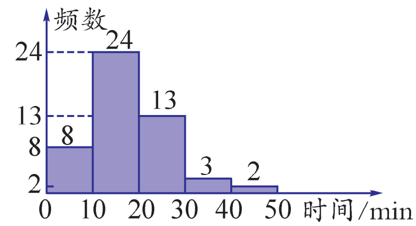
【点拨】 本题考查的目的是理解并掌握折线统计图的特点及作用，并且能够根据统计图提供的信息解决有关的实际问题.

变式训练三

①③ **【解析】** 由纵坐标看出 1 月份的增长率是 10%，2 月份的增长率是 5%，3 月份的增长率是 8%，故①说法正确；2 月份比 1 月份增长 5%，故②说法错误；1 月份的增长率是 10%，2 月份的增长率是 5%，3 月份的增长率是 8%，故③说法正确. 故答案为①③.

例四 解：（1）花费时间在 $30\leqslant t<40$ 范围内的频数为 $50-8-24-13-2=3$.

补全频数分布直方图如下图所示.



（2）花费时间在 $10\leqslant t<20$ 范围内的人数最多.

（3）该班学生上学路上花费的时间在 30 min 以上（含 30 min）的人数占全班总人数的百分比是 $\frac{3+2}{50}\times100\%=10\%$.

【点拨】 由于频数分布直方图是特殊的条形统计图，所以本题的求解方法与解决条形统计图的方法有很多类似之处，但由于频数分布直方图的特殊性，从频数分布直方图中获取信息时某些方面也具有特殊性.

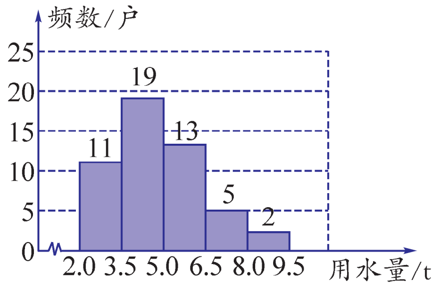
变式训练四

解：（1）补全频数统计表和频数分布直方图如下：

频数统计表

用水量分组	划记	频数
$2.0<x\leqslant3.5$	正正一	11
$3.5<x\leqslant5.0$	正正正𠂇	19
$5.0<x\leqslant6.5$	正正下	13
$6.5<x\leqslant8.0$	正	5
$8.0<x\leqslant9.5$	丅	2
合计		50

频数分布直方图



(2) 根据频数分布直方图可知，用水量在 $3.5<x\leqslant5.0$ 的户数最多，10% 的家庭的月均用水量在 $6.5<x\leqslant8.0$.

(3) 要使 60% 的家庭水费不受影响，家庭月均用水量的标准应该定为 5 t.

∵样本中月均用水量小于等于 5 t 的户数占调查总户数的 60%.

例五 (1) 2　50　【解析】观察条形统计图可知，B 组的频数为 10，∵在频数分布直方图中 A，B 两组小长方形的高度之比为 1∶5，

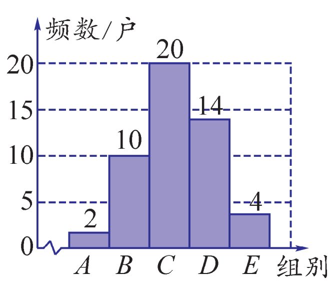
∴A 组的频数为 2.

本次调查的样本容量为 $(2+10)\div(1-8\%-28\%-40\%)=50$.

(2) **解**：由题意，得 C 组频数为 $50\times40\%=20$，D 组频数为 $50\times28\%=14$，E 组频数为 $50\times8\%=4$.

补全频数分布直方图如下：

频数分布直方图



(3) **解**：$20+14+4=38$（户），$40\%+28\%+8\%=76\%$，

故所抽取的家庭中每月用于“信息消费”的金额不少于 200 元的有 38 户，占所抽取家庭的 76%.

【点拨】 本题求解的技巧是运用数形结合的思想，综合利用频数分布直方图与扇形统计图中的信息.

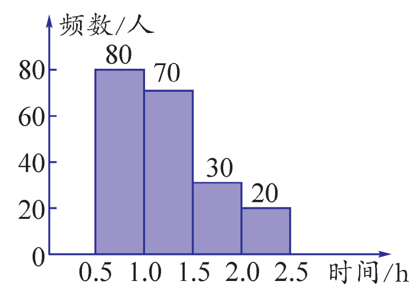
变式训练五

解：(1) 参加抽样调查的学生有 $80\div40\%=200$（人），

$m=\frac{20}{200}\times100\%=10\%$.

(2) B 组的学生人数为 $200\times35\%=70$（人），C 组的学生人数为 $200\times15\%=30$（人），补全频数分布直方图如下图所示.

参加户外体育活动时间频数分布直方图



(3) $9\,000\times10\%=900$（人），

故该区 9 000 名学生参加户外体育活动时间达标的约有 900 人.

培优精练

1. D　【解析】A，第五组的频数占总人数的百分比为 $1-4\%-12\%-40\%-28\%=16\%$，结论正确，不符合题意；

B，该班参赛的学生有 $8\div(1-4\%-12\%-40\%-28\%)=50$（名），结论正确，不符合题意；

C，由频数分布直方图可知，成绩在 70～80 分的人数最多，结论正确，不符合题意；

D，80 分以上的学生有 $50\times28\%+8=22$（名），结论不正确，符合题意．故选 D.

2. 5 【解析】组距为 $\dfrac{69.5-39.5}{6}=5$（kg）.

3. (1) 12 0.37 100 【解析】由频数分布直方图可知，$a=12$．样本人数为 $12\div0.12=100$，$\therefore c=100$，$b=37\div100=0.37$.

(2) **解：** 样本中平均每周劳动时间在 $3\leqslant t<5$ 范围内的学生所占的百分比为 $0.37+0.35=0.72$.

$\therefore 1\,000\times0.72=720$（名）.

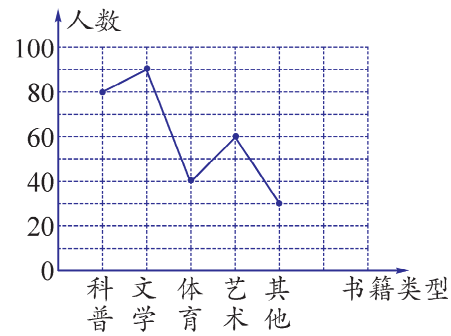
故该校 1 000 名学生中平均每周劳动时间在 $3\leqslant t<5$ 范围内的大约有 720 名.

名卷压轴题

(1) 300 【解析】调查的学生人数为 $90\div30\%=300$（名）.

(2) **解：** 最喜爱艺术类型的人数为 $300\times20\%=60$，最喜爱其他类型的人数为 $300\times10\%=30$.

补全折线统计图如下图所示.



(3) **解：** 最喜爱体育书籍的学生人数为 40.

∴体育部分所对应的扇形圆心角的度数为 $\dfrac{40}{300}\times360^\circ=48^\circ$.

(4) **解：** 根据题意，得

$1\,200\times\dfrac{80}{300}=320$（名），

故这所中学的 1 200 名学生中最喜爱科普类书籍的学生人数约有 320 名.

◎数据的收集、整理与描述 新题型探究

例题 **解：** (1) 从统计意义的角度考虑，方案②比较合适，因为此时每箱橘子被抽到的可能性相同，选取的样本具有代表性，属于简单随机抽样.

(2) $(5.96+5.8+4.96)\div(10\times20)\times100\%=8.36\%$，

即估计这批橘子的损耗率为 8.36%.

(3) 设这批橘子的销售价格为 x 元/千克，

根据题意，得 $10\,000\times(1-8.36\%)x-2\times10\,000\geqslant5\,000$.

解得 $x\geqslant2.73$.

故该公司这批橘子的销售价格最少为

2.73 元/千克时，才能达到该公司的盈利目标.

【点拨】本题求解的技巧有两个，一是深刻理解抽查的意义：在抽取样本时，要使每个个体被抽到的机会相等，从而使抽取的样本具有较好的代表性；二是利用不等式确定销售价格.

变式训练

解：（1）估计 B 小区的常住居民中达到“非常了解”的居民人数有 $400\times24\%=96$.

（2）估计 A 小区的常住居民中普及到位的居民人数有 $500\times\frac{15+10}{50}=250$.

（3）∵A 小区的常住居民中“不了解”生活垃圾分类知识的人数百分比约为 $\frac{5+20}{50}\times100\%=50\%$，

B 小区的常住居民中“不了解”生活垃圾分类知识的人数百分比约为 44%.

∵$44\%<50\%$，

∴B 小区垃圾分类的普及工作更出色.

培优精练

解：（1）设剪去的小正方形的边长为 x cm，则长方体的长为 $(10-2x)$ cm，宽为 $(10-2x)$ cm，高为 x cm. ∴制作成的无盖长方体盒子的容积为 $x(10-2x)^2$ cm³.

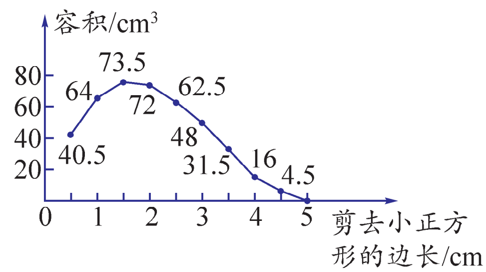
则当 $x=1.5$ 时，$x(10-2x)^2=1.5\times(10-3)^2=73.5$；

当 $x=3$ 时，$x(10-2x)^2=3\times(10-6)^2=48$.

填表如下：

剪去小正方形的边长/cm	0.5	1	1.5	2	2.5
容积/cm³	40.5	64	73.5	72	62.5
剪去小正方形的边长/cm	3	3.5	4	4.5	5
容积/cm³	48	31.5	16	4.5	0

以剪去的小正方形的边长为横轴，容积为纵轴绘制折线统计图如下图所示.



（2）由表中数据和统计图可知，随着剪去的小正方形的边长的增大，所制成的无盖长方体盒子的容积先增大后减小.

（3）根据统计图和统计表中的数据可知，当 $x=1.5$ 时，此时无盖长方体盒子的容积最大为 73.5 cm³.