参考答案

第十六章　分　式

分式及分式方程与应用

例一　D　【解析】根据数轴可知，$-1<a<0$，$0<b<1$，$|a|>|b|$，$\therefore a+1>0$，$a-b<0$，$b-1<0$. ∴原式 $=\frac{a+1}{a+1}-\frac{-a}{a}+\frac{b-a}{-(a-b)}-\frac{1-b}{1-b}=1+1+1-1=2$. 故选 D.

【点拨】本题考查含绝对值的分式的化简. 注意去掉绝对值后，要保证得数是非负数.

变式训练一

1. -1　【解析】根据数轴上实数 a 的位置，得 $1<a<2$. $\therefore a-2<0$，$1-a<0$. ∴原式 $=\frac{-(a-2)}{a-2}-\frac{a-1}{a-1}+\frac{a}{a}=-1-1+1=-1$.

2. 解：∵数轴上点 A、B、C 表示的数分别是 x、2、$\frac{5}{2}$，且点 A 与点 C 关于点 B 对称，

∴点 A 表示的数为 $2\times2-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$，即 $x=\frac{3}{2}$.

∴ $|x-2|+\frac{1}{x-2}=\left|\frac{3}{2}-2\right|+\frac{1}{\frac{3}{2}-2}=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$.

例二　$\frac{4x}{3x+1}$　$\frac{2^n x}{(2^n-1)x+1}$　【解析】∵ $y_1=\frac{2x}{x+1}$，∴ $y_2=\frac{2y_1}{y_1+1}=\frac{2\times\frac{2x}{x+1}}{\frac{2x}{x+1}+1}=\frac{4x}{3x+1}$，$y_3=\frac{2y_2}{y_2+1}=\frac{2\times\frac{4x}{3x+1}}{\frac{4x}{3x+1}+1}=\frac{8x}{7x+1}$，…，$y_n=\frac{2^n x}{(2^n-1)x+1}$.

【点拨】本题主要考查了分式的混合运算，解答本题的关键是明确题意，用含字母 x 和 n 的代数式表示出 y_2 和 y_n.

变式训练二

1. 5　【解析】当 $x=1$ 时，则 $3x^2-3^0=3-1=2<4$；当 $x=2$ 时，则 $x+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=2+3=5>4$. 故输出的数为 5.

2. (1) A、C　【解析】A 的那一步应该是 $\frac{a^2}{a-1}-(a+1)$，C 的那一步

应该是$\frac{a^2-(a-1)^2}{a-1}$，故出现错误的有 A，C.

(2) 解：原分式的值能等于1，此时 $a=2$，理由如下：

$$原式=\frac{a^2}{a-1}-(a+1)$$
$$=\frac{a^2}{a-1}-\frac{a^2-1}{a-1}$$
$$=\frac{1}{a-1}.$$

若$\frac{1}{a-1}=1$，则 $a=2$.

∴原分式的值能等于1，此时 $a=2$.

例三 A 【解析】根据题意，得$\frac{4a}{2a-1}=4$. 去分母，得 $4a=8a-4$. 移项、合并同类项，得 $4a=4$. 解得 $a=1$. 经检验 $a=1$ 是分式方程的解. ∴a 的值为1. 故选 A.

【点拨】此题主要考查解分式方程. 解分式方程的基本思想是转化，把分式方程转化为整式方程求解. 解分式方程一定注意要验根.

变式训练三

1. -1 【解析】根据题意，得$\frac{4x-4}{5x+1}=\frac{|-4|}{2}$. 去分母，得 $4x-4=10x+2$. 移项、合并同类项，得 $6x=-6$. 解得 $x=-1$. 经检验 $x=-1$ 是分式方程的解. ∴$x=-1$.

2. 解：依题意，得

$$1-\frac{1}{x+2}=\frac{3x}{2x+4}-1.$$

整理，得 $2-\frac{1}{x+2}=\frac{3x}{2x+4}$.

去分母，得 $4(x+2)-2=3x$.

去括号，得 $4x+8-2=3x$.

移项，得 $4x-3x=-6$.

解得 $x=-6$.

检验，当 $x=-6$ 时，$2(x+2)\neq 0$，符合题意.

∴x 的值为-6.

例四 解：设骑自行车的速度是 x km/h，

由题意，得$\frac{20}{x}-\frac{20}{2x}=\frac{1}{2}$.

解得 $x=20$.

经检验 $x=20$ 是原分式方程的解.

答：骑自行车的速度是 20 km/h.

【点拨】此题主要考查了分式方程的应用，解题关键是正确理解题意，找出题目中的等量关系，列出方程，注意分式方程要进行检验，这是最容易出错的地方.

变式训练四

1. $\frac{5}{3v}$ 【解析】根据 $t=\frac{s}{v}$，得上坡时间为 $t_1=\frac{1}{v}$ h，下坡时间为 $t_2=\frac{2}{3v}$ h. ∴小丽从甲地到乙地所花费的时间为 $\frac{1}{v}+\frac{2}{3v}=\frac{3}{3v}+\frac{2}{3v}=\frac{5}{3v}$ (h).

2. 解：设乙同学的速度为 x m/s，则甲同学的速度为 $1.2x$ m/s，

根据题意，得 $\left(\frac{60}{1.2x}+6\right)+\frac{60}{x}=50$.

解得 $x=2.5$.

经检验，$x=2.5$ 是原方程的解，且符合题意.

∴甲同学所用的时间为 $\frac{60}{1.2\times 2.5}+6=26$（s），

乙同学所用的时间为 $\frac{60}{2.5}=24$（s）.

∵$26>24$，

∴乙同学获胜.

故乙同学获胜.

培优精练

1. B 【解析】由图易知，甲图中阴影部分的面积为 a^2-b^2，乙图中阴影部分的面积为 $a(a-b)$. 则 $k=\frac{a^2-b^2}{a(a-b)}=\frac{(a-b)(a+b)}{a(a-b)}=\frac{a+b}{a}=1+\frac{b}{a}$. ∵$a>b>0$，∴$0<\frac{b}{a}<1$. ∴$1<\frac{b}{a}+1<2$. ∴$1<k<2$. 故选 B.

2. 解：∵根据数轴可知，$b>a>0$.

∴$a-b<0$.

∴$\frac{a}{a-b}\sqrt{\frac{a^2b-2ab^2+b^3}{a}}$

$=\frac{a}{a-b}\sqrt{\frac{b\left(a^2-2ab+b^2\right)}{a}}$

$=\frac{a}{a-b}\cdot\frac{\sqrt{ab\left(a-b\right)^2}}{a}$

$=\frac{a}{a-b}\cdot\frac{|a-b|}{a}\cdot\sqrt{ab}$

$=\frac{a}{a-b}\cdot\frac{-(a-b)\sqrt{ab}}{a}$

$=-\sqrt{ab}$.

3. 解：（1）根据题意，得 $AB=\frac{1-x}{2-x}-\frac{2}{x-2}=\frac{x-3}{x-2}$.

当 $x=1.5$ 时，$AB=\frac{1.5-3}{1.5-2}=\frac{-1.5}{-0.5}=3$.

（2）根据题意，得 $\left(0-\frac{2}{x-2}\right)-\left(0-\frac{1-x}{2-x}\right)=3$.

去分母，得 $2-x+1=6-3x$.

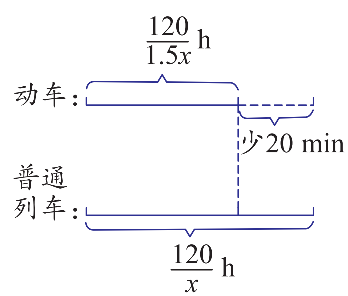
解得 $x=1.5$.

经检验，$x=1.5$ 是原分式方程的解.

4. 解：设该次普通列车的平均速度为 x km/h，

则该次动车的平均速度为 $1.5x$ km/h.

根据题意画出线段图如图所示.



根据题意，得

$\frac{120}{x}=\frac{120}{1.5x}+\frac{20}{60}$.

解得 $x=120$.

经检验，$x=120$ 是原分式方程的解.

故该次普通列车行驶的平均速度为 120 km/h.

名卷压轴题

(1)(a^2-1)　　$(a-1)^2$　**【解析】**丰收 1 号小麦的试验田的面积为 (a^2-1) m^2，丰收 2 号小麦的试验田的面积为 $(a-1)(a-1)$ m^2，即$(a-1)^2$ m^2.

(2) **解**：丰收 1 号小麦的单位面积产量为$\frac{500}{a^2-1}$ kg.

丰收 2 号小麦的单位面积产量为 $\frac{500}{(a-1)^2}$ kg.

$\because \frac{\frac{500}{(a-1)^2}}{\frac{500}{a^2-1}}=\frac{a^2-1}{(a-1)^2}=\frac{a+1}{a-1}$,

∴丰收 2 号小麦的单位面积产量是丰收 1 号小麦单位面积产量的 $\frac{a+1}{a-1}$倍.

◎分式　新题型探究

例题　解：(1) 方程的解为 $x_1=c$，$x_2=\frac{m}{c}$.

验证：当 $x=c$ 时，左边 $=c+\frac{m}{c}$，

右边 $=c+\frac{m}{c}$，

∴左边=右边.

∴$x=c$ 是方程 $x+\frac{m}{x}=c+\frac{m}{c}$ $(m\neq0)$ 的解.

同理可得 $x=\frac{m}{c}$是方程 $x+\frac{m}{x}=c+\frac{m}{c}$ $(m\neq0)$ 的解.

(2) 能. 整理方程，得 $x-1+\frac{2}{x-1}=a-1+\frac{2}{a-1}$.

所以 $x-1=a-1$ 或 $x-1=\frac{2}{a-1}$，

即 $x=a$ 或 $x=\frac{a+1}{a-1}$.

经检验 $x=a$ 与 $x=\frac{a+1}{a-1}$均为原分式方程的解.

(3) 整理方程，得 $(a+1)-\frac{1}{a+1}=(b-1)-\frac{1}{b-1}$.

∴$a+1=b-1$ 或 $a+1=-\frac{1}{b-1}$.

∴$a-b=-2$ 或 $ab=a-b$.

∵$a-b+2\neq0$，

∴$ab=a-b$.

∴$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}=-1$.

【点拨】此题主要考查了解分式方程，利用了转化的思想. 解分式方程注意要检验.

变式训练

解：（1）由分母为 $-x^2+1$，可设 $-x^4-6x^2+8=(-x^2+1)(x^2+a)+b$，

则 $-x^4-6x^2+8=(-x^2+1)(x^2+a)+b=-x^4-ax^2+x^2+a+b=-x^4-(a-1)x^2+(a+b)$.

∵对任意 x，上述等式均成立，

∴$\begin{cases}a-1=6,\\a+b=8.\end{cases}$

解得 $a=7$，$b=1$.

∴$\dfrac{-x^4-6x^2+8}{-x^2+1}$

$=\dfrac{(-x^2+1)(x^2+7)+1}{-x^2+1}$

$=\dfrac{(-x^2+1)(x^2+7)}{-x^2+1}+\dfrac{1}{-x^2+1}$

$=x^2+7+\dfrac{1}{-x^2+1}$.

即分式 $\dfrac{-x^4-6x^2+8}{-x^2+1}$ 被拆分成了一个整式（x^2+7）与一个分式 $\dfrac{1}{-x^2+1}$ 的和.

（2）由（1）可知 $\dfrac{-x^4-6x^2+8}{-x^2+1}=x^2+7+\dfrac{1}{-x^2+1}$.

∵$x^2\geqslant0$，

∴$x^2+7\geqslant7$.

又 $-1<x<1$，

∴当 $x=0$ 时，x^2+7 取得最小值 7.

∵$0\leqslant x^2\leqslant1$，$0<1-x^2\leqslant1$，

∴当 $x=0$ 时，$\dfrac{1}{-x^2+1}$ 取得最小值 1.

∴当 $x=0$ 时，$x^2+7+\dfrac{1}{-x^2+1}$ 最小值为 $7+1=8$，

即 $\dfrac{-x^4-6x^2+8}{-x^2+1}$ 的最小值为 8.

（3）$\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{2x+2-3}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-3}{x+1}=2-\dfrac{3}{x+1}$.

∵$\dfrac{2x-1}{x+1}$ 的值为整数，且 x 为整数，

∴$x+1$ 为 3 的约数.

∴$x+1$ 的值为 1 或 -1 或 3 或 -3.

∴x 的值为 0 或 -2 或 2 或 -4.

培优精练

2 021.5 【解析】原式 $=\dfrac{1}{2\,023}+\dfrac{1}{2\,022}+\cdots+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\cdots+\dfrac{2\,022}{2\,023}=1\times2\,021+\dfrac{1}{2}=2\,021.5$.

第十七章　函数及其图象

第 1 讲　变量与函数、函数的图象

例一　C　【解析】在某个变化过程中，有两个变量 x、y，当 x 每取

一个值，y 就有唯一的值与之相对应，这时我们就称 y 是 x 的函数，且 x 为自变量，y 为因变量．只有选项 C 中的“x 每取一个值，y 有唯一值与之相对应”，其他选项中的都不是“有唯一值与之相对应”，所以选项 C 中的 y 表示 x 的函数，故选 C．

【点拨】本题考查函数的定义，理解“自变量 x 每取一个值，因变量 y 都有唯一值与之相对应”是解题关键．

变式训练一

1. D　【解析】选项 A、B、C，对于自变量 x 的每一个值，y 都有唯一的值和它对应，所以能表示 y 是 x 的函数，故 A、B、C 不符合题意．选项 D，对于自变量 x 的每一个值，y 不满足有唯一的值和它对应，所以不能表示 y 是 x 的函数，故 D 符合题意．故选 D．

2. 解：从图中可以看出，有两个变量，时间 t（单位：min）和路程 s（单位：m）．

能．可以把路程 s 表示成时间 t 的函数．

把时间 t 看作自变量，路程 s 看作因变量，

则 $s=vt$．

因为当 $t=3$ 时，$s=20$，

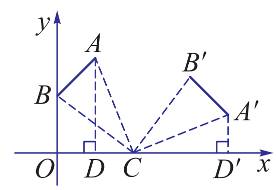
$\therefore 20=3v$．

解得 $v=\frac{20}{3}$．

$\therefore s$ 与 t 之间的函数关系为 $s=\frac{20}{3}t$．

当 $t=12$ min 时，$s=\frac{20}{3}\times 12=80$(m)．

例二　A　【解析】如图，作 $AD\perp x$ 轴于点 D，作 $A'D'\perp x$ 轴于点 D'．易知$\triangle ADC\cong\triangle CD'A'$(AAS)．$\because A$（2，5）、$C$（4，0），$\therefore OD=2$，$AD=5$，$OC=4$．$\therefore CD'=AD=5$，$OD'=OC+CD'=4+5=9$，$A'D'=CD=OC-OD=4-2=2$．$\therefore$点 A'的坐标为（9，2）．故选 A．



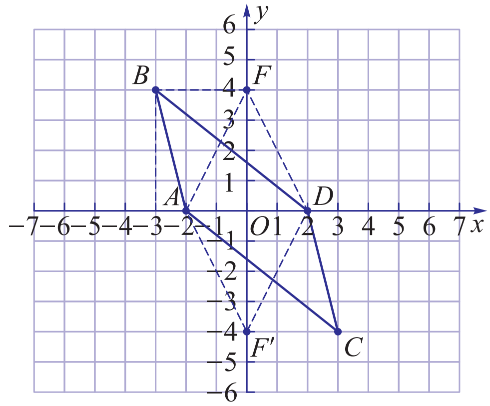
【点拨】本题考查了坐标与图形的旋转变化．解题的关键是明确题意，找出图中隐含的数据信息、等量关系．

变式训练二

1. （−1，1）　【解析】由题意，得矩形的边长为 4 和 2．因为物体乙的速度是物体甲的速度的 2 倍，运动时间相同，所以物体甲的路程与物体乙的路程之比为 1∶2．第 1 次相遇时，物体甲的路程与

物体乙的路程之和为 12×1，其中物体甲的路程为 $12\times\frac{1}{3}=4$，物体乙的路程为 $12\times\frac{2}{3}=8$，在边 AB 上相遇；第 2 次相遇时，物体甲的路程与物体乙的路程之和为 12×2，其中物体甲的路程为 $12\times2\times\frac{1}{3}=8$，物体乙的路程为 $12\times2\times\frac{2}{3}=16$，在边 CD 上相遇；第 3 次相遇时，物体甲的路程与物体乙的路程之和为 12×3，其中物体甲的路程为 $12\times3\times\frac{1}{3}=12$，物体乙的路程为 $12\times3\times\frac{2}{3}=24$，在点 P 相遇，此时物体甲和物体乙均回到原出发点，则每相遇 3 次，物体甲和物体乙均回到出发点. $\because 2\,023\div3=674\cdots\cdots1$，故两个物体运动后的第 2 023 次相遇点是第 1 次相遇点，在边 AB 上相遇，易知此时相遇点的坐标为 $(-1,1)$.

2. (1) $(-3,4)$　**【解析】** 如图所示，过点 B 作 x 轴的垂线，垂足所对应的数为 -3，因此点 B 的横坐标为 -3. 过点 B 作 y 轴的垂线，垂足所对应的数为 4，因此点 B 的纵坐标为 4. 所以点 B 的坐标是 $(-3,4)$.



(2) $(3,-4)$　$(2,0)$　**【解析】** 因为关于原点对称的两个点的横、纵坐标均互为相反数，所以点 $B(-3,4)$ 关于原点对称的点 C 的坐标是 $(3,-4)$. 因为关于 y 轴对称的两个点，其横坐标互为相反数，纵坐标相同，所以点 $A(-2,0)$ 关于 y 轴的对称点 D 的坐标是 $(2,0)$.

(3) 16　**【解析】** 易知四边形 $ABDC$ 为平行四边形. $S_{平行四边形ABDC}=2S_{\triangle ABD}=2\times\frac{1}{2}\times4\times4=16$.

(4) $(0,4)$ 或 $(0,-4)$　**【解析】** 因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}S_{平行四边形ABDC}=\frac{1}{2}\times16=8=S_{\triangle ADF}$，所以 $\frac{1}{2}AD\cdot OF=\frac{1}{2}(2+2)\cdot OF=8$. 所以 $OF=4$. 又点 F 在 y 轴上，则点 $F(0,4)$ 或 $(0,-4)$.

例三　C　【解析】铁块露出水面前排开水的体积不变，受到的浮力不变，故 y 不变；铁块开始露出水面到完全露出水面时，排开水的体积逐渐变小，根据阿基米德原理可知受到的浮力变小，故 y 变大；铁块完全露出水面后一定高度，不再受浮力的作用，弹簧秤的读数为铁块的重力，故 y 不变. 故选 C.

【点拨】本题考查了函数的图象，注意分析 y 随 x 的变化而变化的趋势，而不一定要通过求表达式来求解.

变式训练三

1. A　【解析】选项 A，此函数图象中，s_2 的第 2 段随时间增加其路程一直保持不变，与“为了便于失主尽快找到，兔子焦急地在原地等待，直到钱包被认领”相符，符合题意. 选项 B，此函数图象中，s_2 第 2 段随时间增加其路程一直在增加，不符合题意. 选项 C，此函数图象中，s_2 随时间增加其路程一直在变化，不符合题意. 选项 D，此函数图象中，s_1 先达到最大值，即乌龟先到终点，不符合题意. 故选 A.

2. B　【解析】当动点 P 由点 A 运动到点 B，即 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，$y=\frac{1}{2}\times 2x=x$；当动点 P 由点 B 运动到点 C，即 $2<x\leqslant 4$ 时，$y=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$. 则符合题意的函数关系的图象是 B. 故选 B.

例四　C　【解析】由图象可得，乙车先出发的时间为 0.5 h，此时乙车行驶了 $100-70=30$（km）. 则乙车的行驶速度为 $\frac{30}{0.5}=60$（km/h），故选项 A 正确. 乙车行驶全程所用的时间为 $\frac{100}{60}=1\frac{2}{3}$（h）. 根据图上最后时间为 1.75 h，可得乙车先到达 A 地. 故甲车整个行驶过程所用时间为 $1.75-0.5=1.25$（h），故 B 正确. 甲车的行驶速度为 $\frac{100}{1.25}=80$（km/h）. 因为 $100-30=70$（km），又 $70\div(80+60)=0.5$（h），所以甲车出发 0.5 h 时两车相遇，故 C 不正确. 由以上所求可得，乙车到达 A 地比甲车到达 B 地早：$1.75-1\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$（h），故 D 正确. 故选 C.

【点拨】本题考查了利用函数的图象解决实际问题，解决本题的关

键是挖掘出函数图象中的隐含信息.

变式训练四

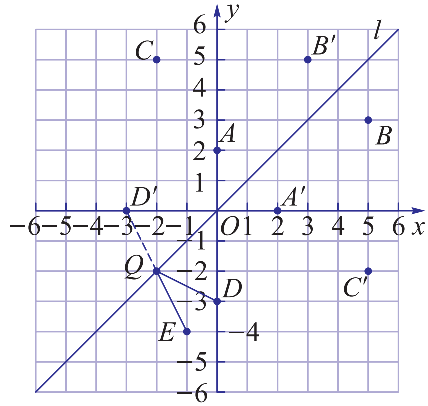
D　【解析】由题图 2，得当 $2<t<5$ 时，小明的速度为 $(680-200)\div(5-2)=160$（m/min）. 设当小明离家 600 m 时，所用的时间是 t min，则 $200+160(t-2)=600$ 或 $80(16-t)=600$. 解得 $t=4.5$ 或 $t=8.5$. 故选 D.

培优精练

1. C　【解析】在一个变化过程中有两个变量 x 与 y，对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一的值与其相对应，则称 y 是 x 的函数，x 是自变量. 选项 A、B、D 都符合函数的定义，而选项 C，当给出一个 x 的值，y 不满足有唯一的值与其对应，故选 C.

2. A　【解析】由题意，甲走了 1 h 到了 B 地，在 B 地休息了半个小时，2 h 时正好走到 C 地. 乙走了 $\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$ h 到了 C 地，由此可知正确的图象是 A. 故选 A.

3. (1)（3，5）（5，－2）　【解析】如图所示，由点关于直线 $y=x$ 对称可知，B'（3，5）、C'（5，－2），它们的位置如图.



(2)（n，m）　【解析】由（1）的结果可知，坐标平面内任一点 P（m,n）关于第一、三象限的角平分线 l 的对称点 P' 的坐标为（n，m）.

(3) 解：由（2），得 D（0，－3）关于直线 l 的对称点 D' 的坐标为（－3，0）.

连接 $D'E$ 交直线 l 于点 Q.

$QD+QE=QD'+QE\geqslant D'E$.

所以 $QD+QE$ 的最小值为 $D'E$.

因为 E（－1，4），

所以 $D'E=\sqrt{(1-3)^2+(4-0)^2}=\sqrt{20}$.

所以 $QD+QE$ 的最小值是 $\sqrt{20}$.

名卷压轴题

(1) 1 280　6　【解析】由图象可知，小明家和图书馆之间的距离是 1 280 m. 小明在广场向行人讲解垃圾分类常识所用的时间是 $14-8=6$（min）.

(2) 解：小欣的速度为 $1\,280\div(20-4)=80$ (m/min).

小明从广场跑去图书馆的速度为 $(1\,280-560)\div(20-14)=120$ (m/min).

(3) 解：当小欣离家 560 m 时，走了 $560\div80=7$ (min)，

因为 $30+4+7=41$，

所以此时是 9 点 41 分.

故小欣在广场看到小明时是 9:41.

(4) 解：根据函数图象可得小明之前的速度为 $560\div8=70$ (m/min).

按此速度去往图书馆需 $1\,280\div70=18\frac{2}{7}$ (min).

则讲解时间最多 $20-18\frac{2}{7}=1\frac{5}{7}$ (min).

因为讲解 1 次垃圾分类常识需要 1 min，

所以最多讲解 1 次.

故小明最多可以讲解 1 次.

第 2 讲　一次函数

例一　B　【解析】∵直线 $y=kx+b$ 经过一、二、四象限，∴ $k<0$，$b>0$. ∴ $-k>0$. ∴ $y=bx-k$ 的图象经过一、二、三象限. 故选项 B 中的图象符合题意.

【点拨】本题考查了一次函数的图象与 k、b 的关系，牢记“$k<0$，$b>0\Leftrightarrow y=kx+b$ 的图象经过一、二、四象限”是解题的关键.

变式训练一

1. B　【解析】对于选项 A，∵ $y=kx+b$ 的图象经过一、三、四象限，∴ $k>0$，$b<0$. ∴ $kb<0$. ∴正比例函数 $y=kbx$ 的图象应该经过二、四象限. 故 A 选项错误. 对于选项 B，∵ $y=kx+b$ 的图象经过一、二、四象限，∴ $k<0$，$b>0$. ∴ $kb<0$. ∴正比例函数 $y=kbx$ 的图象应该经过二、四象限. 故 B 选项正确. 对于选项 C，∵ $y=kx+b$ 的图象经过二、三、四象限，∴ $k<0$，$b<0$. ∴ $kb>0$. ∴正比例函数 $y=kbx$ 的图象应该经过一、三象限. 故 C 选项错误. 对于选项 D，∵ $y=kx+b$ 的图象经过一、二、三象限，∴ $k>0$，$b>0$. ∴ $kb>0$. ∴正比例函数 $y=kbx$ 的图象应该经过一、三象限. 故 D 选项错误.

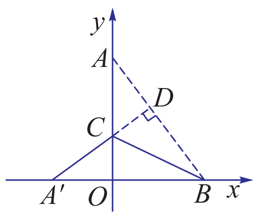
2. C　【解析】对于选项 A，由函数图象可知，$\begin{cases}m>0,\\-(m-3)>0,\end{cases}$ 解得 $0<m<3$；

对于选项 B，由函数图象可知，$\begin{cases}m>0,\\-(m-3)=0,\end{cases}$ 解得 $m=3$；

对于选项 C，由函数图象可知，$\begin{cases}m<0,\\-(m-3)<0,\end{cases}$ 无解；

对于选项 D，由函数图象可知，$\begin{cases}m<0,\\-(m-3)>0,\end{cases}$ 解得 $m<0$. 故选 C.

例二 解：(1) 过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D，如下图所示.



$\because A$ (0，8)、B (6，0)，

$\therefore OA=8$，$OB=6$.

$\because \angle AOB=90°$，

$\therefore AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$.

由折叠，得 $\angle ABC=\angle A'BC$，

$\angle COB=\angle CDB=90°$，

$CB=CB$.

$\therefore \triangle COB\cong\triangle CDB$ (AAS).

$\therefore CO=CD$，$OB=BD=6$.

$\therefore AD=10-6=4$.

设 $CD=OC=n$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，

$AC^2=CD^2+AD^2$，

即 $(8-n)^2=n^2+4^2$，

解得 $n=3$.

$\therefore OC=3$.

$\therefore$ 点 C 的坐标为 (0，3).

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+b$，

把 B (6，0)、C (0，3) 代入，

得 $\begin{cases}6k+b=0,\\b=3.\end{cases}$

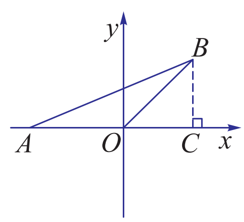
解得 $\begin{cases}k=-\dfrac{1}{2},\\b=3.\end{cases}$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}x+3$.

【点拨】本题考查一次函数图象与勾股定理的性质、用待定系数法求一次函数的解析式. 熟练应用勾股定理，并能进行推理计算是解决问题的关键.

变式训练二

1. **解**：过点 B 作 $BC\perp x$ 轴于点 C，如下图所示.



$\because \angle BOC=45°$，

$\therefore \angle OBC=45°$.

$\therefore BC=OC$.

$\because AO=BO=2$，

$\therefore BC=OC=\sqrt{2}$.

$\therefore A$ $(-2，0)$、B $(\sqrt{2}，\sqrt{2})$.

设直线 AB 的解析式为

$y=kx+b$，

$\therefore\begin{cases}-2k+b=0,\\ \sqrt{2}k+b=\sqrt{2}.\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=\sqrt{2}-1,\\ b=2\sqrt{2}-2.\end{cases}$

∴直线 AB 的解析式为 $y=(\sqrt{2}-1)x+2\sqrt{2}-2$.

设直线 OB 的解析式为 $y=mx$，

$\therefore\sqrt{2}=\sqrt{2}m$.

$\therefore m=1$.

∴直线 OB 的解析式为 $y=x$.

2. 解：∵点 A 的横坐标为 $-\frac{1}{2}$，

$\therefore A\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

把 $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 代入一次函数 $y=kx+b$，得 $-\frac{1}{2}k+b=0$.　①

令 $x=0$，得 $y=b$，即 $B(0,b)$.

令 $x=4$，得 $y=4k+b$，

即 $C(4,4k+b)$.

$\because S_{\text{四边形}OBCD}=\frac{1}{2}(OB+CD)\cdot OD=10$，

即 $\frac{1}{2}\times(-b-4k-b)\times4=10$，

$\therefore 4k+2b=-5$.　②

联立①②，解得 $k=-1$，$b=-\frac{1}{2}$.

∴一次函数的解析式为 $y=-x-\frac{1}{2}$.

例三　解：(1) ∵正比例函数 $y=3x$ 的图象过 $B(-1,a)$，

$\therefore a=3\times(-1)=-3$.

∴点 B 的坐标为 $(-1,-3)$.

∵一次函数 $y=kx+b$ 的图象过点 $A(2,0)$、$B(-1,-3)$，

$\therefore\begin{cases}0=2k+b,\\ -3=-k+b.\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=1,\\ b=-2.\end{cases}$

∴一次函数的表达式为 $y=x-2$.

(2) ∵点 C 在正比例函数 $y=3x$ 的图象上，

∴设 $C(m,3m)(m>0)$.

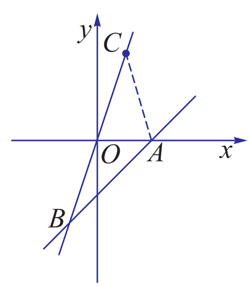
$\because OC=\sqrt{10}$，

$\therefore m^2+(3m)^2=(\sqrt{10})^2$.

解得 $m=1$.

∴点 C 的坐标为 $(1,3)$.

(3) 连接 AC，如下图.



$\because A(2,0)$，

$\therefore S_{\triangle COA}=\frac{1}{2}\times2\times3=3$.

$\because B(-1,-3)$,

$\therefore S_{\triangle BOA}=\frac{1}{2}\times 2\times 3=3$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle COA}+S_{\triangle BOA}=3+3=6$.

【点拨】此题主要考查两直线相交，以及利用待定系数法求函数表达式. 将$\triangle ABC$的面积分割成两个三角形的面积是解第（3）问的关键.

变式训练三

1. 3 **【解析】**$\because$直线$y=-\frac{2}{3}x+3$与y轴交于点A，与直线$y=2x-1$交于点C，令$x=0$，则$y=3$，即$A(0,3)$. 联立$\begin{cases}y=-\frac{2}{3}x+3,\\ y=2x-1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\frac{3}{2},\\ y=2,\end{cases}$ $\therefore$点C的坐标为$\left(\frac{3}{2},2\right)$. $\because$直线$y=2x-1$与y轴交于点B，令$x=0$，则$y=-1$，即$B(0,-1)$. $\therefore S_{\triangle ABC}=[3-(-1)]\times\frac{3}{2}\div 2=3$.

2. 解：$\because l_2\,/\!/\,l_1$，且直线l_1：$y=2x$，

$\therefore$设直线l_2：$y=2x+m$.

令$x=0$，则$y=m$；

令$y=0$，则$x=-\frac{m}{2}$.

$\therefore$直线l_2与x轴的交点坐标为$\left(-\frac{m}{2},0\right)$，与$y$轴的交点坐标为$(0,m)$.

$\therefore\frac{1}{2}\times\left|\frac{m}{2}\right|\times|m|=4$.

解得$m=4$或$m=-4$.

$\therefore$直线l_2的解析式为$y=2x+4$或$y=2x-4$.

例四 解：（1）设直线AB的解析式为$y_1=kx+b$，

将$A(8,0)$、$B(0,8\sqrt{3})$分别代入，得$\begin{cases}8k+b=0,\\ b=8\sqrt{3}.\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=-\sqrt{3},\\ b=8\sqrt{3}.\end{cases}$

$\therefore$直线AB的解析式为

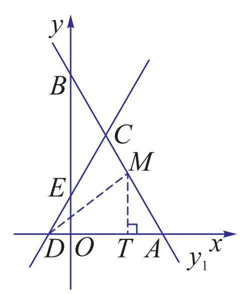
$y_1=-\sqrt{3}x+8\sqrt{3}$.

联立$\begin{cases}y=-\sqrt{3}x+8\sqrt{3},\\ y=\sqrt{3}x+2\sqrt{3},\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=3,\\ y=5\sqrt{3}.\end{cases}$

$\therefore$点C的坐标为$(3,5\sqrt{3})$.

（2）如下图，过点M作$MT\perp x$轴于点T.



则$\angle ATM=\angle AOB=90°$.

由题意，得$AM=t$，$OA=8$，

$OB=8\sqrt{3}$.

$\therefore\ AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{8^2+(8\sqrt{3})^2}=16$.

在 $y_2=\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$ 中，

令 $y=0$，则 $x=-2$.

$\therefore D\ (-2,\ 0)$.

$\therefore AD=8-(-2)=10$.

$\because OA=8=\frac{1}{2}AB$，$\angle AOB=90°$，

$\therefore \angle ABO=30°$，$\angle BAO=60°$.

$\therefore \angle AMT=30°$.

$\therefore AT=\frac{1}{2}MA=\frac{1}{2}t$.

$\therefore MT=\sqrt{MA^2-AT^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}t$.

$\therefore S_{\triangle ADM}=\frac{1}{2}AD\cdot MT=\frac{1}{2}\times10\times\frac{\sqrt{3}}{2}t=\frac{5\sqrt{3}}{2}t$.

$\because$点 M 运动到点 B 时停止运动，

$\therefore 0\leqslant t\leqslant16$.

$\therefore S=\frac{5\sqrt{3}}{2}t\ (0\leqslant t\leqslant16)$.

$\because S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}\times8\times8\sqrt{3}=32\sqrt{3}$，$S=\frac{2}{3}S_{\triangle AOB}$，

$\therefore \frac{5\sqrt{3}}{2}t=\frac{2}{3}\times32\sqrt{3}$.

$\therefore t=\frac{128}{15}$.

【点拨】本题考查待定系数法求函数解析式，利用解方程组求直线交点坐标，三角形面积等相关知识. 解题的关键是结合图形，厘清思路，运用所学知识分析问题，解决问题.

变式训练四

解：(1) $\because \angle AOB=90°$，

$\therefore \angle AOC+\angle BOD=90°$.

$\because \angle BDO=90°$.

$\therefore \angle OBD+\angle BOD=90°$.

$\therefore \angle AOC=\angle OBD$.

$\because OA=OB$，

$\angle ACO=\angle BDO=90°$，

$\therefore \triangle AOC\cong\triangle OBD$ (AAS).

$\therefore AC=OD$，$OC=BD$.

$\because A\ (-3,\ 1)$，

$\therefore AC=OD=1$，$OC=BD=3$.

$\therefore B\ (1,\ 3)$.

设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$，

将 $A\ (-3,\ 1)$、$B\ (1,\ 3)$ 代入，

得$\begin{cases}-3k+b=1,\\k+b=3.\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=\frac{1}{2},\\b=\frac{5}{2}.\end{cases}$

$\therefore$直线 AB 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$.

(2) $\because A\ (-3,\ 1)$、$B\ (1,\ 3)$，M 为 AB 的中点，

$\therefore M\ (-1,\ 2)$.

$\because C(-3, 0)$，

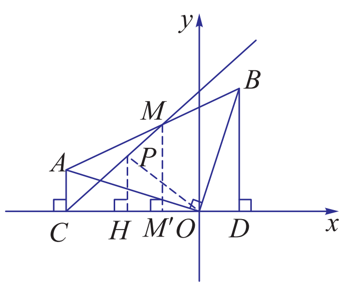
设直线 MC 的解析式为 $y=mx+n$.

将 $M(-1, 2)$、$C(-3, 0)$ 代入，得 $\begin{cases}-m+n=2, \\ -3m+n=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m=1, \\ n=3.\end{cases}$

$\therefore$ 直线 MC 的解析式为 $y=x+3$.

过点 M 作 $MM'\perp x$ 轴于点 M'，过点 P 作 $PH\perp CO$ 于点 H，如下图所示.



$\therefore MM'=2$，

$CM'=-1-(-3)=2$.

$\therefore MM'=CM'$.

$\therefore \angle MCO=45^\circ$.

由题意，得 $OQ=|3-t|$.

又 $PC=\sqrt{2}t$，$\angle PCO=45^\circ$，

$\therefore PH=t$.

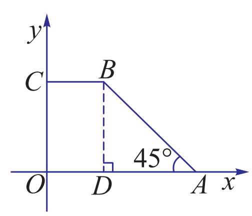
$\therefore S_{\triangle PQO}=\frac{1}{2}OQ\cdot PH=\frac{1}{2}\times(3-t)\times t=-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t$ $(0<t<3)$，

或 $S_{\triangle PQO}=\frac{1}{2}(t-3)t=\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}t$ $(3<t\leqslant 4)$.

培优精练

1. D 【解析】当 $a>0$，$b>0$ 时，一次函数 $y_1=ax+b$ 的图象经过一、二、三象限，$y_2=bx+a$ 的图象经过一、二、三象限，故选项 D 正确；当 $a<0$，$b>0$ 时，一次函数 $y_1=ax+b$ 的图象经过一、二、四象限，$y_2=bx+a$ 的图象经过一、三、四象限，无选项符合题意；当 $a<0$，$b<0$ 时，一次函数 $y_1=ax+b$ 的图象经过二、三、四象限，$y_2=bx+a$ 的图象经过二、三、四象限，无选项符合题意；当 $a>0$，$b<0$ 时，一次函数 $y_1=ax+b$ 的图象经过一、三、四象限，$y_2=bx+a$ 的图象经过一、二、四象限，无选项符合题意.故选 D.

2. 解：(1) 如下图，过点 B 作 $BD\perp OA$ 于点 D.



则四边形 $ODBC$ 是矩形.

$\therefore OD=BC=2$，$BD=OC=3$.

$\because \angle OAB=45^\circ$，

$\therefore \angle ABD=45^\circ$.

$\therefore AD=BD=3$.

$\therefore OA=OD+AD=2+3=5$.

∴A（5，0）、B（2，3）.

（2）设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$，

将 A（5，0）、B（2，3）代入，

得$\begin{cases}5k+b=0,\\2k+b=3.\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=-1,\\b=5.\end{cases}$

∴直线 AB 的解析式为 $y=-x+5$.

3. 解：（1）∵$S_{\triangle DCO}=S_{\triangle ADE}$，

∴ $S_{\triangle DCO}+S_{四边形DOBE}=S_{\triangle ADE}+S_{四边形DOBE}$.

∴$S_{\triangle BCE}=S_{\triangle AOB}$.

∵△AOB 为等腰直角三角形，点 B 坐标为（6，0），点 C 的坐标为（-3，0），

∴点 A（3，3），

$CB=6-(-3)=9$.

∴$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times6\times3=9$.

根据点 A、B 的坐标，可得直线 AB 的函数解析式为 $y=-x+6$.

设 E（x_0，y_0），

∴$S_{\triangle CBE}=\frac{1}{2}\times9\times y_0=4.5y_0$.

∴$4.5y_0=9$.

∴$y_0=2$.

将 $y_0=2$ 代入 $y=-x+6$，可得 $x_0=4$.

∴点 E 的坐标为（4，2）.

（2）设直线 l 的解析式为 $y=kx+b$，

将点 C、E 的坐标代入，可得$\begin{cases}-3k+b=0,\\4k+b=2.\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=\frac{2}{7},\\b=\frac{6}{7}.\end{cases}$

故直线 l 的函数解析式为 $y=\frac{2}{7}x+\frac{6}{7}$.

4. 解：（1）∵直线 l_1：$y=-x+8$ 与两坐标轴分别交于 A、C 两点，

令 $x=0$，则 $y=8$.

∴点 A 的坐标为（0，8）.

∵直线 l_1：$y=-x+8$ 与直线 l_2：$y=\frac{5}{3}x$ 交于点 M，

联立$\begin{cases}y=-x+8,\\y=\frac{5}{3}x,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=3,\\y=5.\end{cases}$

∴点 M 的坐标为（3，5）.

（2）由（1）知，A（0，8）、M（3，5）.

∴$S_{\triangle AOM}=\frac{1}{2}AO\cdot x_M=\frac{1}{2}\times8\times3=12$.

∴$S_{\triangle ADM}=2S_{\triangle AOM}=2\times12=24$.

设点 D 的坐标为$\left(m,\frac{5}{3}m\right)$.

①当点 D 在射线 OM 上时，

$S_{\triangle AOD}=S_{\triangle ADM}+S_{\triangle AOM}=24+12=36.$

$\therefore \frac{1}{2}AO\cdot x_D=\frac{1}{2}\times 8\times m=36.$

$\therefore m=9.$

$\therefore \frac{5}{3}m=\frac{5}{3}\times 9=15.$

∴点 D 的坐标为（9，15）.

②当点 D 在射线 MO 上时，

$S_{\triangle AOD}=S_{\triangle ADM}-S_{\triangle AOM}=24-12=12.$

$\therefore \frac{1}{2}\times OA\times(-m)=\frac{1}{2}\times 8\times(-m)=12.$

解得 $m=-3$.

$\therefore \frac{5}{3}m=\frac{5}{3}\times(-3)=-5.$

∴点 D 的坐标为（-3，-5）.

综上所述，满足条件的点 D 的坐标为（9，15）或（-3，-5）.

(3) ∵点 P 的纵坐标为 n，

$\therefore x_p=\frac{3}{5}n.$

∴点 P 的坐标为$\left(\frac{3}{5}n, n\right)$.

∵$PB\,/\!/\,x$ 轴，

$\therefore y_B=n.$

$\therefore x_B=8-n.$

∴点 B 的坐标为（$8-n$，n）.

$\therefore PB=8-n-\frac{3}{5}n=8-\frac{8}{5}n.$

∵$\triangle PBF$ 是以点 P 为直角顶点的等腰直角三角形，

$\therefore PF=PB=8-\frac{8}{5}n.$

令 $8-\frac{8}{5}n=n$，得 $n=\frac{40}{13}$.

①当 $PF>y_P$，即 $0<n<\frac{40}{13}$ 时，如图 1.

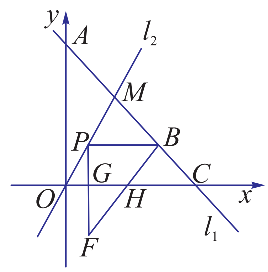


图 1

记 PF 交 x 轴于点 G，BF 交 x 轴于点 H.

$\therefore PG=n.$

$\therefore FG=PF-PG=8-\frac{8}{5}n-n=8-\frac{13}{5}n.$

∵$\triangle PBF$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle F=\angle PBF=45^\circ.$

∵$PB\,/\!/\,x$ 轴，

$\therefore \angle GHF=45^\circ=\angle F.$

$\therefore HG=FG=8-\frac{13}{5}n.$

$$\therefore S=S_{\triangle PBF}-S_{\triangle GHF}=\frac{1}{2}PB^2-\frac{1}{2}FG^2=\frac{1}{2}\left[\left(8-\frac{8}{5}n\right)^2-\left(8-\frac{13}{5}n\right)^2\right]$$

$=-\frac{21}{10}n^2+8n.$

②当 $PF\leqslant y_P$，即 $\frac{40}{13}\leqslant n<5$ 时，如图 2.

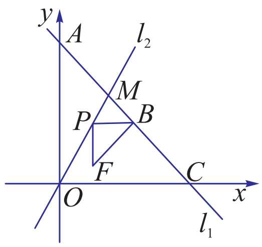


图 2

$S=S_{\triangle PBF}=\frac{1}{2}PB^2=\frac{1}{2}\left(8-\frac{8}{5}n\right)^2=\frac{32}{25}(n-5)^2.$

综上所述，$S=-\frac{21}{10}n^2+8n\left(0<n<\frac{40}{13}\right)$ 或 $S=\frac{32}{25}(n-5)^2\left(\frac{40}{13}\leqslant n<5\right)$.

名卷压轴题

解：(1) ∵一次函数 $y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ 的函数图象与 x 轴、y 轴分别交于点 A、B，

∴A (1，0)、B (0，$\sqrt{3}$).

∴$AB=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$.

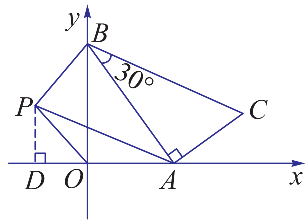
设 $AC=x$，则 $BC=2x$，

由勾股定理，得 $4x^2-x^2=4$.

解得 $x=\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

∴$S_{\triangle ABC}=\frac{2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2) 如下图，过 P 作 $PD\perp x$ 轴，垂足为 D.



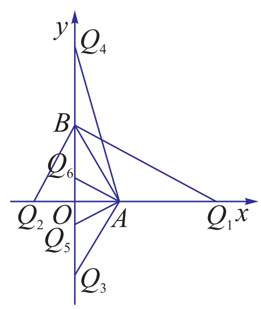
则 $S_{\triangle APB}=S_{梯形ODPB}+S_{\triangle AOB}-S_{\triangle APD}=\frac{-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\right)m}{2}+\frac{\sqrt{3}\times1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}(1-m)=-\frac{\sqrt{3}}{2}m+\frac{\sqrt{3}}{4}$.

∵$S_{\triangle APB}=S_{\triangle ABC}$，

∴$-\frac{\sqrt{3}}{2}m+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

解得 $m=-\frac{5}{6}$.

(3) 如下图，在坐标轴上存在点 Q 使得△QAB 是等腰三角形.



理由如下：

①当 $AQ=AB=2$ 时.

若点 Q 在 x 轴上，

则 $AQ=|x_Q-1|=2$.

解得 $x_Q=3$ 或 $x_Q=-1$.

此时点 Q 的坐标为 (3，0) 或

$(-1, 0)$.

若点 Q 在 y 轴上，

则 $AQ=\sqrt{1^2+y_Q^2}=2$.

解得 $y_Q=-\sqrt{3}$ 或 $y_Q=\sqrt{3}$（舍去）.

此时点 Q 的坐标为 $(0, -\sqrt{3})$.

②当 $BQ=AB=2$ 时.

若点 Q 在 x 轴上，

则 $BQ=\sqrt{x_Q^2+1^2}=2$.

解得 $x_Q=-1$ 或 $x_Q=1$（舍去）.

此时点 Q 的坐标为 $(-1, 0)$.

若点 Q 在 y 轴上，

则 $BQ=|y_Q-\sqrt{3}|=2$.

解得 $y_Q=2+\sqrt{3}$ 或 $y_Q=-2+\sqrt{3}$.

此时点 Q 的坐标为 $(0, 2+\sqrt{3})$ 或 $(0, -2+\sqrt{3})$.

③当 $AQ=BQ$ 时.

若点 Q 在 x 轴上，

则 $AQ=|x_Q-1|$，

$BQ=\sqrt{x_Q^2+3}$.

$\therefore |x_Q-1|=\sqrt{x_Q^2+3}$.

解得 $x_Q=-1$.

此时点 Q 的坐标为 $(-1, 0)$.

若点 Q 在 y 轴上，则 $AQ=\sqrt{1+y_Q^2}$，$BQ=|y_Q-\sqrt{3}|$.

$\therefore \sqrt{1+y_Q^2}=|y_Q-\sqrt{3}|$.

解得 $y_Q=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

此时点 Q 的坐标为 $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

综上所述，点 Q 的所有可能的坐标为 $(3, 0)$、$(-1, 0)$、$(0, -\sqrt{3})$、$(0, 2+\sqrt{3})$、$(0, -2+\sqrt{3})$、$\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

第 3 讲　反比例函数

例一　A　**【解析】**若反比例函数 $y=\frac{a}{x}$ 经过第一、三象限，则 $a>0$. 又因为 $ab<0$，所以 $b<0$. 则一次函数 $y=ax-b$ 的图象应该经过第一、二、三象限. 若反比例函数 $y=\frac{a}{x}$ 经过第二、四象限，则 $a<0$. 又因为 $ab<0$，所以 $b>0$. 则一次函数 $y=ax-b$ 的图象应该经过第二、三、四象限. 故选项 A 正确.

【点拨】本题考查了反比例函数的图象性质和一次函数的图象性质. 解题的关键是从反比例函数的图象上得出 a 的符号，再根据 $ab<0$ 确定出 b 的符号，再结合图象判断一次函数的图象是否正确.

变式训练一

1. C　**【解析】**函数 $y=\frac{1}{x}$ 中，$k=1>0$，故图象过第一、三象限. 函数 $y=x-1$ 的图象过第一、三、四象限. 故选 C.

2. B　【解析】因为 $k>0$，则一次函数图象从左到右逐渐上升，反比例函数图象过第一、三象限，故A、C选项错误. ∵一次函数 $y=kx-1$ 与 y 轴交于负半轴，∴D选项错误，B选项正确. 故选 B.

例二　解：（1）∵点 A（1，2）在 $y=\frac{k_2}{x}$ 上，

∴$\frac{k_2}{1}=2$. 解得 $k_2=2$.

∵AD 垂直平分 OB，

∴B（2，0）.

∵点 A（1，2）、B（2，0）在 $y=k_1x+b$ 上，

∴$\begin{cases}k_1+b=2,\\2k_1+b=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=-2,\\b=4.\end{cases}$

故一次函数的解析式为 $y=-2x+4$，反比例函数的解析式为 $y=\frac{2}{x}$（$x>0$）.

（2）由图易知，当 $x>0$ 且 $x\neq1$ 时，$\frac{k_2}{x}>k_1x+b$.

【点拨】本题是反比例函数与一次函数的综合题——探求函数解析式、取值范围. 主要考查一次函数、反比例函数解析式的确定. 熟练运用待定系数法和方程组法是求解本题的关键.

变式训练二

1. **解：** 设点 B 的坐标为（m，0），则点 C（$m+3$，0），点 A（m，4）. 由中点坐标公式，得

点 $D\left(m+\frac{3}{2}，2\right)$.

（1）当 $OB=2=m$ 时，

点 $D\left(\frac{7}{2}，2\right)$.

又∵点 D 在 $y=\frac{k}{x}$ 上，

∴$k=\frac{7}{2}\times2=7$.

（2）∵$AE=\frac{3}{8}AB$，

∴$EB=\frac{5}{8}AB=\frac{5}{8}\times4=\frac{5}{2}$.

∴点 $E\left(m，\frac{5}{2}\right)$.

∵点 E、D 都在双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上，

∴$k=2\left(m+\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}m$.

解得 $m=6$.

∴点 A、C 的坐标分别为（6，4）、（9，0）.

设直线 AC 的解析式为 $y=kx+b$，

则 $\begin{cases}4=6k+b,\\0=9k+b.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-\frac{4}{3},\\b=12.\end{cases}$

∴直线 AC 的解析式为 $y=-\frac{4}{3}x+12$.

2. **解：**（1）由 $y=\frac{1}{2}x+1$，得

当 $x=0$ 时，$y=1$；

当 $y=0$ 时，$x=-2$.

∴点 A 的坐标为 $(-2,0)$，

点 C 的坐标为 $(0,1)$.

∵点 P 在直线 $y=\frac{1}{2}x+1$ 上，

∴可设点 P 为 $\left(m,\frac{1}{2}m+1\right)$.

∵$S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}AB\cdot PB=4$，

∴$\frac{1}{2}(2+m)\left(\frac{1}{2}m+1\right)=4$，

即 $m^2+4m-12=0$.

∴$m_1=-6$，$m_2=2$.

又∵点 P 在第一象限，

∴$m=2$.

∴点 P 的坐标为 $(2,2)$.

(2) ∵点 P 在双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上，

∴$k=xy=2\times2=4$.

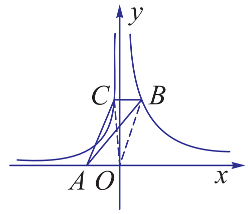
∴双曲线的解析式为 $y=\frac{4}{x}$.

联立$\begin{cases}y=\frac{4}{x},\\y=\frac{1}{2}x+1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x_1=2,\\y_1=2,\end{cases}$或$\begin{cases}x_2=-4,\\y_2=-1.\end{cases}$

∴直线与双曲线另一个交点 Q 的坐标为 $(-4,-1)$.

例三 A 【解析】连接 OC、OB，如图所示.



∵$BC\parallel x$ 轴，∴$S_{\triangle ACB}=S_{\triangle OCB}$.

又 $S_{\triangle OCB}=\frac{1}{2}\times|3|+\frac{1}{2}\cdot|k|$，

∴$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot|k|=2$. ∵$k<0$，

∴$k=-1$. 故选 A.

【点拨】本题考查了反比例函数系数 k 的几何意义：在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 图象上任取一点，过这一点分别向 x 轴和 y 轴作垂线，与坐标轴围成的矩形的面积是定值 $|k|$. 在反比例函数的图象上任取一点向坐标轴作垂线，这一点和垂足以及坐标原点所构成的三角形的面积是 $\frac{1}{2}|k|$.

变式训练三

1. -2 【解析】∵直线 $y=mx$ 与双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 交于 A、B 两点，∴点 A 与点 B 关于原点对称. ∴$OA=OB$. ∴ $S_{\triangle OAM}=S_{\triangle OBM}$. 又 $S_{\triangle ABM}=2$，∴$S_{\triangle OAM}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}\times2=1$. ∴$\frac{1}{2}|k|=1$. ∵反比例函数的图象过第二、四象限，

$\therefore k<0$. $\therefore k=-2$.

2. 解：$\because \triangle ABP$ 的面积为$\frac{1}{2}\cdot BP\cdot AP=4$，

$\therefore BP\cdot AP=8$.

$\because P$ 是 AC 的中点，

$\therefore$点 A 的纵坐标是点 P 纵坐标的 2 倍，即 $y_A=2y_P=2y_B$.

又$\because$点 A、B 都在双曲线 $y=\frac{k}{x}$ $(x>0)$ 上，

$\therefore x_A\cdot y_A=x_B\cdot y_B$，

即 $x_A\cdot 2y_B=x_B\cdot y_B$.

$\therefore x_B=2x_A$，

即点 B 的横坐标是点 A 横坐标的 2 倍.

$\therefore OC=DP=BP$.

$\therefore k=OC\cdot AC=BP\cdot 2AP=16$.

例四　A　【解析】$\because$点 A 是函数 $y=\frac{k}{x}$ $(x>0)$ 在第一象限内图象上的一动点，$\therefore$矩形 $ACOB$ 的面积为 k. $\because$点 E、F 均在函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上，$\therefore S_{\triangle BOE}=S_{\triangle COF}=\frac{1}{2}$.

$\therefore$四边形 $OFAE$ 的面积$=k-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=k-1$. 故四边形 $OFAE$ 的面积不变. 故选 A.

【点拨】本题考查了反比例函数中系数 k 的几何意义. 根据反比例函数系数 k 的几何意义可求出四边形和三角形的面积.

变式训练四

解：$\because$四边形 $OCBA$ 是矩形，

$\therefore AB=OC$，$OA=BC$.

设点 B 的坐标为 (a, b)，

$\because BD=3AD$，

$\therefore D\left(\frac{a}{4}, b\right)$.

$\because$点 D、E 在反比例函数的图象上，

$\therefore \frac{ab}{4}=k$.

$\therefore E\left(a, \frac{k}{a}\right)$.

$\because S_{\triangle ODE}=S_{\text{矩形}OCBA}-S_{\triangle AOD}-S_{\triangle OCE}-S_{\triangle BDE}=ab-\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3a}{4}\cdot\left(b-\frac{k}{a}\right)=9$.

$\therefore ab-\frac{ab}{4}-\frac{3ab}{8}+\frac{3k}{8}=9$.

$\therefore ab+k=24$.

又$\frac{ab}{4}=k$，

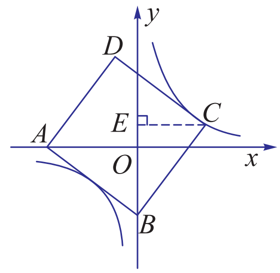
$\therefore k=\frac{24}{5}$.

培优精练

1. D　【解析】对于 A，$\because$反比例函数的图象过二、四象限，$\therefore k<0$. $\therefore -k>0$. $\therefore$一次函数 $y=kx-k$ 的图象应该过一、二、四象限，

故本选项不正确．对于B，∵反比例函数的图象过一、三象限，∴$k>0$．∴$-k<0$．∴一次函数$y=kx-k$的图象应该过一、三、四象限，故本选项不正确．对于C，∵反比例函数的图象过二、四象限，∴$k<0$．∴$-k>0$．∴一次函数$y=kx-k$的图象应该过一、二、四象限．故本选项不正确．对于D，∵反比例函数的图象过一、三象限，∴$k>0$．∴$-k<0$．∴一次函数$y=kx-k$的图象应该过一、三、四象限．故本选项正确．故选D．

2. $y=\frac{3}{x}$ 【解析】如图，过点C作$CE\perp y$轴于E．在正方形$ABCD$中，$AB=BC$，$\angle ABC=90°$，∴$\angle ABO+\angle CBE=90°$．∵$\angle OAB+\angle ABO=90°$，∴$\angle OAB=\angle CBE$．∵点$A$的坐标为$(-4，0)$，∴$OA=4$．∵$AB=5$，∴$OB=\sqrt{5^2-4^2}=3$．在$\triangle ABO$和$\triangle BCE$中，$\begin{cases}\angle OAB=\angle CBE,\\ \angle AOB=\angle BEC,\\ AB=BC,\end{cases}$ ∴$\triangle ABO\cong\triangle BCE$（AAS）．∴$OA=BE=4$，$CE=OB=3$．∴$OE=BE-OB=4-3=1$．∴点$C$的坐标为$(3，1)$．∵反比例函数$y=\frac{k}{x}$（$k\neq0$）的图象过点$C$，∴$k=xy=3\times1=3$．∴反比例函数的表达式为$y=\frac{3}{x}$．



3. 解：（1）根据反比例函数的图象关于原点对称知，该反比例函数图象的另一支在第三象限，且$m-2>0$，则$m>2$．

（2）∵点B与点A关于x轴对称，$\triangle OAB$的面积为6，

若设AB交x轴于点C，

则$\triangle OAC$的面积为$\frac{1}{2}\times6=3$．

设$A\left(x，\frac{m-2}{x}\right)$，$x>0$，

则$\triangle OAC$的面积为$\frac{1}{2}x\cdot\frac{m-2}{x}=3$，

解得$m=8$．

4. 解：（1）∵反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图象经过点$C(5，-3)$，

∴$-3=\frac{k}{5}$．

解得$k=-15$．

∴反比例函数的解析式为$y=-\frac{15}{x}$．

∵一次函数 $y=ax+b$ 的图象经过点 A、C，

∴$\begin{cases}b=2,\\5a+b=-3.\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-1,\\b=2.\end{cases}$

∴一次函数的解析式为 $y=-x+2$.

(2) 设点 P 的坐标为 (x, y)，

∵△OAP 的面积恰好等于△ABC 面积的 2 倍，

∴$\frac{1}{2}\times OA\cdot|x|=\frac{1}{2}\times(2+3)\times5\times2$.

∴$\frac{1}{2}\times2\cdot|x|=25$.

解得 $x=\pm25$.

当 $x=25$ 时，$y=-\frac{15}{25}=-\frac{3}{5}$；

当 $x=-25$ 时，$y=-\frac{15}{-25}=\frac{3}{5}$.

∴点 P 的坐标为 $\left(25, -\frac{3}{5}\right)$ 或 $\left(-25, \frac{3}{5}\right)$.

名卷压轴题

解： (1) 根据反比例函数系数 k 的几何意义可知 $S_1=S_2=k$.

(2) ∵$C_1=2OB+2OA=2OB+2(OC+AC)=2OB+2OC+2AC$，

$C_2=2OC+2OD=2OC+2(OB+BD)=2OC+2OB+2BD$，

∴$C_1-C_2=2(AC-BD)$.

①当 $y_1-y_2=x_2-x_1$，即 $AC=BD$ 时，$C_1=C_2$.

②当 $y_1-y_2<x_2-x_1$，即 $AC<BD$ 时，$C_1<C_2$.

③当 $y_1-y_2>x_2-x_1$，即 $AC>BD$ 时，$C_1>C_2$.

(3) 设点 P 的坐标为 $\left(x, \frac{k}{x}\right)$，$x>0$，

则四边形 $PMON$ 的周长 $=2(OM+ON)=2\left(x+\frac{k}{x}\right)$，$x>0$.

∵面积相等的四边形中正方形的周长最小，

∴$x=\frac{k}{x}$，即 $x^2=k$，

解得 $x=\sqrt{k}$，

故点 P 的坐标为 $(\sqrt{k}, \sqrt{k})$.

∴四边形 $PMON$ 的周长的最小值为 $4\sqrt{k}$.

第 4 讲 一次函数与反比例函数的应用

例一 解： (1) ∵直线 l_1：$y=x+1$ 过点 $P(1, b)$，

∴$b=1+1=2$.

(2) 由 (1) 可知点 $P(1, 2)$.

∴方程组 $\begin{cases}y=x+1,\\y=mx+n\end{cases}$ 的解为$\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$

(3) 令直线 l_1：$y=x+1$ 上 $x=0$，得 $y=1$.

记点 A 的坐标为 (0，1).

∵直线 l_2：$y=mx+n$ 中 $n=3$，

∴$y=mx+3$.

令直线 l_2：$y=mx+3$ 上 $x=0$，得 $y=3$.

记点 B 的坐标为 (0，3).

故 $AB=3-1=2$.

∵点 P (1，b)，

∴直线 l_1、直线 l_2 与 y 轴所围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times AB\times 1=\frac{1}{2}\times 2=1$.

【点拨】此题主要考查了一次函数与二元一次方程组，解题关键是用待定系数法求一次函数的解析式和理解函数图象经过的点必满足函数解析式.

变式训练一

1. $x=2$ **【解析】**∵已知一次函数 $y=kx+3$ 和 $y=-x+b$ 的图象交于点 P (2，4)，∴关于 x 的方程 $kx+3=-x+b$ 的解是 $x=2$.

2. 解：(1) ∵两直线 $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ 和 $y=-x+1$ 分别与 x 轴交于 A、B 两点，

∴令 $0=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$，

解得 $x=-5$，即 A (-5，0).

令 $0=-x+1$，解得 $x=1$，

即 B (1，0).

(2) ∵两条直线交于点 C，

∴联立$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}, \\ y=-x+1. \end{cases}$

解得$\begin{cases} x=-1, \\ y=2. \end{cases}$

∴点 C 的坐标为 (-1，2).

∵$AB=1-(-5)=6$，

∴$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times AB\times 2=\frac{1}{2}\times 6\times 2=6$.

例二 B **【解析】**∵直线 l_1：$y=3x+1$ 和直线 l_2：$y=mx+n$ 交于点 P (a，-8)，∴$3a+1=-8$. 解得 $a=-3$. 观察图象可知关于 x 的不等式 $3x+1<mx+n$ 的解集为 $x<-3$. 故选 B.

【点拨】此题主要考查了一次函数与一元一次不等式的关系，解题关键是求出两条直线的交点坐标，根据图象即可写出不等式的解集.

变式训练二

1. A **【解析】**由图象可知，当 $x>-2$ 时，$y=3x+b$ 的图象在 $y=ax-3$ 的图象上方，∴不等式 $3x+b>ax-3$ 的解集为 $x>-2$.

2. C **【解析】**由图可知，在直线 $y=ax+b$ 中 y 随 x 的增大而减小，∴$a<0$. 故①正确. 由图可

知，直线 $y=x+c$ 与 y 轴交于负半轴，∴$c<0$. 故②错误. 在直线 $y=x+c$ 中，$k=1>0$，∴y 随 x 的增大而增大. ∵$x_A<x_B$，∴$y_A<y_B$. 故③错误. 由图易知，当 $x>1$ 时，$y=x+c$ 的图象在 $y=ax+b$ 的图象上方，∴$x>1$ 是不等式 $ax+b<x+c$ 的解集. 故④正确.

例三　解：（1）∵B（2，−3）在 $y=\frac{m}{x}$ 上，

∴$m=2\times(-3)=-6$.

∴反比例函数的解析式为 $y=-\frac{6}{x}$.

∵点 A（−3，n）在 $y=-\frac{6}{x}$ 上，

∴$n=-\frac{6}{-3}=2$.

∴A（−3，2）.

∵$y=kx+b$ 经过点 A（−3，2）、B（2，−3），

∴$\begin{cases}-3k+b=2,\\2k+b=-3.\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=-1,\\b=-1.\end{cases}$

∴一次函数的解析式为 $y=-x-1$.

（2）∵点 C 是直线 AB 与 x 轴的交点，

∴令 $y=-x-1=0$，得 $x=-1$.

∴点 C 的坐标为（−1，0）.

∴$OC=1$.

∴$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\times1\times2+\frac{1}{2}\times1\times|-3|=\frac{5}{2}$.

（3）不等式的解集为 $-3<x<0$ 或 $x>2$.

【点拨】本题考查了一次函数与反比例函数的交点和待定系数法求函数的解析式. 注意运用数形结合的思想，利用分割法求图形的面积.

变式训练三

解：（1）将 A（4，−2）代入 $y=\frac{k_2}{x}$，得 $k_2=4\times(-2)=-8$.

∴反比例函数的解析式为 $y=-\frac{8}{x}$.

将（−2，n）代入 $y=-\frac{8}{x}$，得 $n=-\frac{8}{-2}=4$.

∴$k_2=-8$，$n=4$.

（2）根据函数图象可知不等式的解集为 $-2<x<0$ 或 $x>4$.

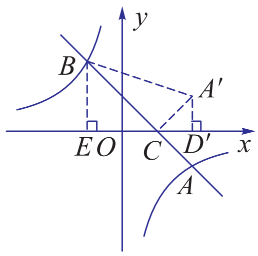
（3）将 A（4，−2）、B（−2，4）代入 $y=k_1x+b$，易得 $k_1=-1$，$b=2$.

易得一次函数 $y=-x+2$ 与 x 轴的交点 C 为（2，0）.

∵点 A（4，−2）沿 x 轴翻折后，

得 A'（4，2），

过点 A' 作 $A'D\perp x$ 轴于点 D，过点 B 作 $BE\perp x$ 轴于点 E，连接 $A'C$，如下图所示.



$\therefore S_{\triangle A'BC}=S_{四边形BEDA'}-S_{\triangle BEC}-S_{\triangle A'CD}=(4+2)\times(4+2)\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times4\times(2+2)-\frac{1}{2}\times(4-2)\times2=8$.

例四　（1）420　60　**【解析】**由题意和图象可得，

A 地离汽车站 C 360 km，

B 地离汽车站 C 60 km.

$\therefore A$、B 两地相距 $360+60=420$ km.

货车的行驶速度 $=60\div2=30$（km/h）.

（2）设 2 h 后，货车离汽车站 C 的距离 y_2 与行驶时间 x 之间的函数关系式为 $y_2=kx+b$，

由（1）可得，货车的行驶速度为 30 km/h.

则点 P 的横坐标为 $2+360\div30=14$.

$\therefore$点 P 的坐标为（14，360）.

$\therefore\begin{cases}2k+b=0,\\14k+b=360.\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=30,\\b=-60.\end{cases}$

即 2 h 后，货车离汽车站 C 的距离 y_2 与行驶时间 x 之间的函数关系式为 $y_2=30x-60$（$2<x\leqslant14$）.

（3）由题意可得，

①相遇前两车相距 30 km 用的时间为 $(420-30)\div(30+360\div6)=\frac{13}{3}$（h）.

②相遇后两车相距 30 km 用的时间为 $\frac{13}{3}+(30\times2)\div(30+360\div6)=5$（h）.

$\therefore$当客车行驶的时间 x 满足 $\frac{13}{3}\leqslant x\leqslant5$ 时，客车、货车相距不大于 30 km.

【点拨】本题考查一次函数的应用，解答本题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件，利用数形结合的思想和函数的思想解答.

变式训练四

解：（1）当 $0\leqslant x\leqslant2$ 时，

设 $y=k_1x$，

把（2，10）代入 $y=k_1x$，得 $k_1=5$.

$\therefore$当 $0\leqslant x\leqslant2$ 时，$y=5x$.

当 $x>2$ 时，设 $y=k_2x+b$，

把（2，10）、（8，6）代入 $y=k_2x+$

b，得$\begin{cases}2k_2+b=10,\\8k_2+b=6.\end{cases}$解得$\begin{cases}k_2=-\dfrac{2}{3},\\b=\dfrac{34}{3}.\end{cases}$

∴当 $x>2$ 时，$y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{34}{3}$.

令 $-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{34}{3}=0$，得 $x=17$.

综上所述，y 与 x 之间的关系式为 $y=5x$（$0\leqslant x\leqslant 2$）或 $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{34}{3}$（$2<x\leqslant 17$）.

（2）把 $y=5$ 代入 $y=5x$，

得 $x_1=1$.

把 $y=5$ 代入 $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{34}{3}$，得 $x_2=\dfrac{19}{2}$.

则 $x_2-x_1=\dfrac{19}{2}-1=\dfrac{17}{2}=8.5$（h）.

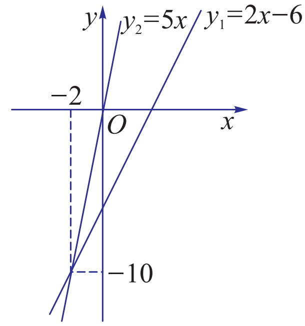
故该药的有效时间是 8.5 h.

培优精练

1. $-2<x<0$　【解析】把A（-2，-5）、B（3，0）代入 $y=ax+b$，得$\begin{cases}-2a+b=-5,\\3a+b=0.\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\b=-3.\end{cases}$

∴$2(ax+b)=2x-6$. 令 $y_1=2x-6$，$y_2=5x$，联立$\begin{cases}y_1=2x-6,\\y_2=5x,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-2,\\y=-10.\end{cases}$则 $y_1=2x-6$ 与 $y_2=5x$ 图象的交点坐标为（-2，-10）.

画出 $y_1=2x-6$，$y_2=5x$ 的图象如下图所示.



由图易知，当 $-2<x<0$ 时，$y_2=5x$ 的图象在 $y_1=2x-6$ 的图象的上方，且 $y_2<0$. 故不等式$2(ax+b)<5x<0$ 的解集是 $-2<x<0$.

2. 解：（1）∵点 A 在直线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 上，且点 A 的横坐标为 6，

∴$y_A=\dfrac{1}{2}\times 6=3$，

即点 A 的坐标是（6，3）.

∵直线 l_1 过点 C（-2，7），点 A（6，3），

∴$\begin{cases}-2k+b=7,\\6k+b=3.\end{cases}$

解得 $k=-\dfrac{1}{2}$，$b=6$.

∴直线 AB 的解析式是 $y=-\dfrac{1}{2}x+6$.

（2）不等式的解集为 $x<6$.

（3）设 D（0，y），

令 $-\dfrac{1}{2}x+6=0$，得 $x=12$，

即 $OB=12$.

∵$S_{\triangle AOD}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle AOB}$，

$\therefore \frac{1}{2}\times 6\times |y|=\frac{1}{3}\times \frac{1}{2}\times 12\times 3=6.$

解得 $y=\pm 2$.

∴点 D 的坐标为（0，2）或（0，-2）.

3. **解：**（1）∵反比例函数 $y=\frac{m}{x}$（$m\neq 0$）的图象经过点（1，4），

$\therefore m=1\times 4=4.$

故反比例函数的解析式为 $y=\frac{4}{x}$.

一次函数 $y=-x+b$ 的图象与反比例函数的图象交于点 Q（-4，n）.

$\therefore \begin{cases} n=\frac{4}{-4}, \\ n=-(-4)+b. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} n=-1, \\ b=-5. \end{cases}$

∴一次函数的表达式 $y=-x-5$.

（2）联立 $\begin{cases} y=\frac{4}{x}, \\ y=-x-5, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=-4, \\ y=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1, \\ y=-4. \end{cases}$

∴点 P 的坐标为（-1，-4）.

在一次函数 $y=-x-5$ 中，令 $y=0$，得 $-x-5=0$. 解得 $x=-5$. 故点 A 的坐标为（-5，0）.

$\therefore OA=5.$

$\therefore S_{\triangle OPQ}=S_{\triangle OPA}-S_{\triangle OAQ}=\frac{1}{2}\times OA\cdot|-5|-\frac{1}{2}\times OA\cdot|-1|=\frac{1}{2}\times 5\times 4-\frac{1}{2}\times 5\times 1=7.5.$

名卷压轴题

解：（1）由图象可知，货车的速度为 $300\div 5=60$（km/h）.

当轿车到达乙地时，货车的行驶时间为 4.5 h.

此时货车与甲地的距离是 $60\times 4.5=270$（km）.

（2）设线段 CD 对应的函数解析式是 $y=kx+b$，

∵点 C（2.5，80），点 D（4.5，300）在线段 CD 上，

$\therefore \begin{cases} 2.5k+b=80, \\ 4.5k+b=300. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k=110, \\ b=-195. \end{cases}$

∴线段 CD 对应的函数解析式是 $y=110x-195$（$2.5\leqslant x\leqslant 4.5$）.

（3）当 $x=2.5$ 时，两车之间的距离为 $60\times 2.5-80=70$（km）.

$\because 70>15$，

∴在轿车行进过程中，两车相距 15 km 的时间是在 2.5 h～4.5 h 之间.

由图象可知，线段 OA 对应的函数解析式为 $y=60x$.

令 $|60x-(110x-195)|=15$，

解得 $x_1=3.6$，$x_2=4.2$.

∵轿车比货车晚出发 1.5 h，

∴3.6－1.5＝2.1（h），

4.2－1.5＝2.7（h）.

∴在轿车行进过程中，轿车行驶 2.1 h 或 2.7 h，两车相距 15 km.

◎函数及其图象 新题型探究

例题 （1）$y=x$ 下 3 【解析】一次函数 $y=x-3$ 的图象可以看作由正比例函数 $y=x$ 的图象向下平移 3 个单位长度而得到.

（2）①$y=-6x-30$ 【解析】在直线 $y=-6x$ 上任意取两点A（0，0）和 B（1，－6），分别将点 A（0，0）和 B（1，－6）向左平移 5 个单位长度得到点 E（－5，0）和 F（－4，－6），连接 EF. 则直线 EF 就是直线 AB 向左平移 5 个单位长度后得到的直线．设直线 EF 的解析式为 $y=k_1x+b_1$（$k_1\neq0$），将 E（－5，0）和 F（－4，－6）代入，得$\begin{cases}-5k_1+b_1=0,\\-4k_1+b_1=-6.\end{cases}$解得$\begin{cases}k_1=-6,\\b_1=-30.\end{cases}$所以直线 EF 的解析式为 $y=-6x-30$.

②$y=-6x-19$ 【解析】在直线 $y=-6x$ 上任意取两点 A（0，0）和 B（1，－6），分别将点 A（0，0）和 B（1，－6）向左平移 4 个单位长度，再向上平移 5 个单位长度得到点 M（－4，5）和 N（－3，－1），连接 MN. 则直线 MN 就是直线 AB 向左平移 4 个单位长度，再向上平移 5 个单位长度后得到的直线．设直线 MN 的解析式为 $y=k_2x+b_2$（$k_2\neq0$），将 M（－4，5）和 N（－3，－1）代入，得$\begin{cases}-4k_2+b_2=5,\\-3k_2+b_2=-1.\end{cases}$解得$\begin{cases}k_2=-6,\\b_2=-19.\end{cases}$所以直线 l 的解析式为 $y=-6x-19$.

（3）解：在直线 l_1：$y=2x+3$ 上任意取两点 P（0，3）和 Q（1，5），

则点 P 和 Q 关于 x 轴的对称点分别为 P'（0，－3）、Q'（1，－5）.

连接 $P'Q'$，

则直线 $P'Q'$就是直线 AB 关于 x 轴对称的直线.

设直线 $P'Q'$的解析式为 $y=k_3x+b_3$（$k_3\neq0$），

将 P'（0，－3）、Q'（1，－5）代入，得$\begin{cases}b_3=-3,\\k_3+b_3=-5.\end{cases}$

解得$\begin{cases}k_3=-2,\\b_3=-3.\end{cases}$

所以直线 l'的解析式为

$y=-2x-3$.

【点拨】本题考查了一次函数图象

的变换，一次函数与二元一次方程（组）的综合运用．解题的关键是理解阅读材料，将阅读材料中的方法和结论迁移到解题过程中．

变式训练

（1）**解：**∵ $(x+4)(y+6)=32$，

∴$y=\frac{32}{x+4}-6$．

∵把 $y=\frac{32}{x+4}-6$ 的图象向右平移 4 个单位长度，再向上平移 6 个单位长度后得到 $y=\frac{32}{x}$的图象，

∴$y=\frac{32}{x+4}-6$ 是“反比例函数 $y=\frac{32}{x}$的平移函数”．

（2）$y=\frac{2x-6}{x-4}$　$y=\frac{2}{x}$　**【解析】**易知点 B（6，3）、E（2，1）．把点 B、E 的坐标代入 $y=\frac{ax+b}{x-4}$，得 $a=2$，$b=-6$．则 $y=\frac{2x-6}{x-4}=\frac{2(x-4)+2}{x-4}$，即 $y=\frac{2}{x-4}+2$．

∵$y=\frac{2}{x-4}+2$ 的图象向左平移 4 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度后得$y=\frac{2}{x}$的图象，∴反比例函数的表达式是 $y=\frac{2}{x}$．

培优精练

解：（1）一次函数 $y=3x+1$ 与 $y=3x-1$ 不互为“交轴一次函数”．理由如下：

∵一次函数 $y=3x+1$ 的图象与 x 轴交于点$\left(-\frac{1}{3}，0\right)$，与 y 轴交于点（0，1），

一次函数 $y=3x-1$ 的图象与 x 轴交于点$\left(\frac{1}{3}，0\right)$，与 y 轴交于点（0，−1），

∴一次函数 $y=3x+1$ 与 $y=3x-1$ 不互为“交轴一次函数”，与一次函数 $y=3x+1$ 互为“交轴一次函数”可以是 $y=2x+1$（答案不唯一）．

（2）∵$y_1=-3x+3$，$y_2=4x+b$，

∴$y_1=-3x+3$ 与 x 轴的交点坐标为（1，0），与 y 轴的交点坐标为（0，3）．

∵$y_1-y_2=(-3x+3)-(4x+b)=-7x+3-b$，

∴$y_1-y_2=-7x+3-b$ 与 x 轴的交点坐标为$\left(\frac{3-b}{7}，0\right)$，与 y 轴的交点坐标为（0，$3-b$）．

∵y_1 与 y_1-y_2 互为“交轴一次函数”，

∴$\frac{3-b}{7}=1$ 或 $3-b=3$．

解得 $b=-4$ 或 $b=0$．

第十八章 平行四边形

第 1 讲 平行四边形的性质

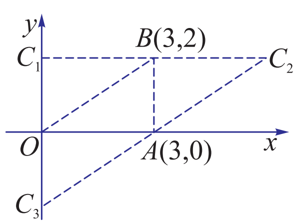
例一 D 【解析】∵在平行四边形 $OABC$ 中，O（0，0）、C（m，0），∴$AB=OC=m$. ∵$BA\parallel CO$，∴点 B 的纵坐标与点 A 的纵坐标相等. ∴B（$2+m$，3）. 故选 D.

【点拨】本题考查平行四边形的性质和坐标. 此题充分利用了“平行四边形的对边平行且相等”的性质.

变式训练一

1. A 【解析】∵平行四边形 $ABCD$ 的对角线的交点是平面直角坐标系的原点，$BC\parallel x$ 轴，$BC=8$，C（5，3），∴B（-3，3）. ∵B 与 D 关于原点 O 对称，∴D（3，-3）. 故选 A.

2. D 【解析】在平面直角坐标系中作出 O、A、B 的坐标，如下图所示.



①当 $OA\parallel BC$ 时，$BC=OA=3$. ∴点 C 的纵坐标为 2，设点 C 的横坐标为 m，则 $|m-3|=3$. 解得 $m=0$ 或 $m=6$. ∴点 C 的坐标为（0，2）或（6，2）.

②当 $AB\parallel OC$ 时，$OC=AB=2$. ∴点 C 的纵坐标为 -2. ∴点 C 的坐标为（0，-2）.

综上所述，点 C 的坐标不可能为（4，2）.

例二 解：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD\parallel BC$，$CD=AB=4$，$AD=BC$.

∴$\angle DFC=\angle FCB$.

∵CF 平分 $\angle BCD$，

∴$\angle DCF=\angle FCB$.

∴$\angle DFC=\angle DCF$.

∴$DF=DC=4$.

∵$AF=1$，

∴$AD=AF+DF=1+4=5$.

∴$BC=5$.

【点拨】本题主要考查平行四边形的性质. 在平行四边形中，当出现角平分线时，一般可利用等腰三角形的性质或判定进行思考.

变式训练二

解：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AD\parallel BC$.

∴$\angle DAE=\angle AEB$.

∵$\angle BAD$ 的平分线 AE 交 BC 于点 E，

$\therefore \angle DAE=\angle BAE=\angle BEA$.

$\therefore AB=BE$.

同理可得 $AB=AF$.

$\therefore AF=BE$.

又$\because AF\parallel BE$，

$\therefore$四边形 $ABEF$ 是平行四边形.

又$\because AB=AF$，

$\therefore$四边形 $ABEF$ 是菱形.

设 AE、BF 相交于点 O.

$\therefore AE\perp BF$，$AO=EO$，$BO=FO$.

$\because AE=16$，

$\therefore AO=8$.

$\because AF=10$，

$\therefore OF=\sqrt{AF^2-AO^2}$

$=\sqrt{10^2-8^2}$

$=6$.

$\therefore BF=2OF=12$.

例三 B 【解析】$\because$对角线 AC 的垂直平分线分别交 AD、BC 于点 E、F，$\therefore AF=CF$. $\because \triangle ABF$ 的周长为 6，$\therefore AB+BF+AF=AB+BF+CF=AB+BC=6$. $\because AD=BC$，$DC=AB$，$\therefore \square ABCD$ 的周长为 $2(AB+BC)=2\times6=12$. 故选 B.

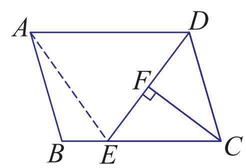
【点拨】此题主要考查了平行四边形的性质和线段垂直平分线的性质，解题关键是掌握垂直平分线上任意一点到线段两端点的距离相等，平行四边形对边相等.

变式训练三

1. D 【解析】$\because \angle EAF=45^\circ$，$AE\perp BC$，$AF\perp CD$，$\therefore \angle C=360^\circ-\angle AEC-\angle AFC-\angle EAF=135^\circ$. $\because$四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore \angle D=180^\circ-\angle C=45^\circ=\angle B$. $\therefore \angle BAE=90^\circ-\angle B=45^\circ=\angle B$，$\angle DAF=90^\circ-\angle D=45^\circ=\angle D$. $\therefore AE=BE$，$AF=DF$. 设 $AE=BE=x$，则 $AF=DF=3-x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，根据勾股定理可得，$AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2}x$，$AD=\sqrt{AF^2+DF^2}=\sqrt{(3-x)^2+(3-x)^2}=\sqrt{2}(3-x)$. 则平行四边形 $ABCD$ 的周长为 $2(AB+AD)=2[\sqrt{2}x+\sqrt{2}(3-x)]=6\sqrt{2}$. 故选 D.

2. C 【解析】四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AO=CO$. $\because OM\perp AC$，$\therefore MA=MC$. $\therefore \triangle CDM$ 的周长$=MD+MC+CD=MD+MA+CD=AD+DC=8$. $\therefore$平行四边形 $ABCD$ 的周长$=2(AD+DC)=2\times8=16$. 故选 C.

例四 解：连接 AE，如下图所示.



∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AD // BC$，$CD=AB=5$，$AD=BC=7$.

∴$\angle ADE=\angle DEC$.

∵$\angle ADE=\angle EDC$，

∴$\angle DEC=\angle EDC$.

∴$CD=CE=5$，

$BE=BC-CE=2$.

∵$CF\perp DE$ 于点 F，

∴$DF=\sqrt{CD^2-CF^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，$DE=2DF=6$.

∴$S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}DE\cdot CF=\frac{1}{2}\times 6\times 4=12$.

∵$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle CDE}}=\frac{AD}{CE}=\frac{7}{5}$，

∴$S_{\triangle ADE}=\frac{7}{5}S_{\triangle CDE}=\frac{84}{5}$.

同理可得 $S_{\triangle ABE}=\frac{2}{5}S_{\triangle CDE}=\frac{24}{5}$.

∴$S_{\square ABCD}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle ADE}+S_{\triangle CDE}$

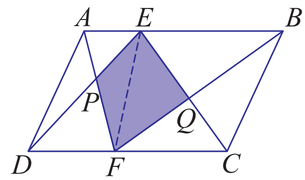
$=\frac{24}{5}+\frac{84}{5}+12$

$=\frac{168}{5}$.

【点拨】本题考查了平行四边形的性质，平行线的性质，等腰三角形的判定与性质，勾股定理，三角形的面积，求出 $S_{\triangle CDE}=12$ 是解题的关键.

变式训练四

A 【解析】连接 EF，如图所示.

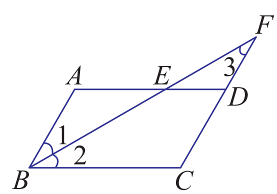


∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴$AB // CD$. ∴$\triangle EFC$ 底边 FC 上的高与$\triangle BCF$ 底边 FC 上的高相等. ∴ $S_{\triangle EFC}=S_{\triangle BCF}$. ∴$S_{\triangle EFC}-S_{\triangle QFC}=S_{\triangle BCF}-S_{\triangle QFC}$，即 $S_{\triangle EFQ}=S_{\triangle BCQ}=4\ \text{cm}^2$. 同理，$S_{\triangle EFD}=S_{\triangle ADF}$. ∴$S_{\triangle EFD}-S_{\triangle PDF}=S_{\triangle ADF}-S_{\triangle PDF}$，即 $S_{\triangle EFP}=S_{\triangle ADP}=2\ \text{cm}^2$. ∴ $S_{阴影}=S_{\triangle EFP}+S_{\triangle EFQ}=2+4=6\ (\text{cm}^2)$.

培优精练

1. (10，6) 【解析】∵四边形 $ABCO$是平行四边形，∴$OA=BC$，$OA // BC$. ∵A (8，0)，∴$BC=OA=8$. ∵C (2，6)，∴B (10，6).

2. 解：标上数字，如下图.



∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴$AB=DC=6$，$AD=BC=10$，$AB // DC$.

∴$\angle 1=\angle 3$，

又∵BF 平分$\angle ABC$，

∴$\angle 1=\angle 2$.

$\therefore \angle 2=\angle 3$.

$\therefore BC=CF=10$.

$\therefore DF=CF-DC=10-6=4$.

3. (1) **证明：**$\because$四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OD=OB$，$DC\parallel AB$.

$\therefore \angle FDO=\angle EBO$，

在$\triangle DFO$和$\triangle BEO$中，

$$\begin{cases}\angle FDO=\angle EBO,\\ OD=OB,\\ \angle FOD=\angle EOB,\end{cases}$$

$\therefore \triangle DFO\cong\triangle BEO$ (ASA).

$\therefore OE=OF$.

(2) **解：**$\because$四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB=CD$，$AD=BC$，$OA=OC$.

$\because EF\perp AC$，

$\therefore AE=CE$.

$\because \triangle BEC$ 的周长是 10，

$\therefore BC+BE+CE=BC+BE+AE=BC+AB=10$，

$\therefore \square ABCD$ 的周长 $=2(BC+AB)=2\times10=20$.

名卷压轴题

解：(1) $\because$四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD\parallel BC$.

$\therefore \angle DPC=\angle BCP$.

$\because \angle BCP=\angle DCP$，

$\therefore \angle DPC=\angle DCP$.

$\therefore CD=PD$.

$\because CD=CP$，

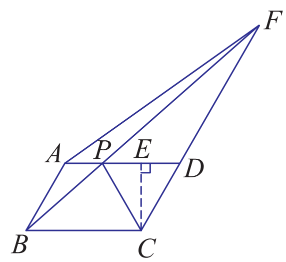
$\therefore CD=PD=CP$.

$\therefore \triangle PDC$ 是等边三角形.

$\therefore \angle D=60°$.

$\therefore \angle B=\angle D=60°$.

(2) 在图 2 中，作 $CE\perp AD$ 于点 E，如下图.



$\because AD\parallel BC$，

$\therefore S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}\times AD\times CE$，

$S_{\square ABCD}=AD\times CE$.

$\therefore S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$.

$\therefore S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PDC}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$.

同理可得，$S_{\triangle FAB}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$.

$\therefore S_{\triangle PAB}+S_{\triangle APF}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PDC}$.

$\therefore S_{\triangle APF}=S_{\triangle PDC}$.

由 (1) 得，$\triangle PDC$ 是等边三角形.

$\therefore PD=CD=AB=8$.

$\therefore DE=\frac{1}{2}PD=\frac{1}{2}\times8=4$.

$\because \angle DEC=90°$，

$\therefore CE=\sqrt{CD^2-DE^2}=\sqrt{8^2-4^2}=$

$4\sqrt{3}$.

$\therefore S_{\triangle APF}=\frac{1}{2}\times 8\times 4\sqrt{3}=16\sqrt{3}$.

第 2 讲　平行四边形的判定

例一　C　【解析】对于选项 A、B，在四边形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，$AD=BC$ 或 $AC=BD$，都不能判定四边形 $ABCD$ 为平行四边形，故 A、B 错误．对于选项 C，$\because AB/\!/CD$，$\therefore \angle B+\angle C=180°$．$\because \angle A=\angle C$，$\therefore \angle A+\angle B=180°$．$\therefore AD/\!/BC$．$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形．故 C 正确．对于选项 D，$AB/\!/CD$，$\angle A=\angle B$，无法判定四边形 $ABCD$ 为平行四边形，故 D 错误．故选 C.

【点拨】本题主要考查了平行四边形的判定，解题的关键是掌握平行四边形的判定方法.

变式训练一

1. C　【解析】对于选项 A，$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AD/\!/BC$，$AD=BC$．$\because BE=DF$，$\therefore AF=CE$．$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形．对于选项 B，$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AD/\!/BC$．$\because AE/\!/CF$，$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形．对于选项 C，$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AD/\!/BC$．又 $AE=FC$，$\therefore$ 不能判定四边形 $AECF$ 是平行四边形．对于选项 D，$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AD/\!/BC$．$\because AF=EC$，$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形．故选 C.

2. B　【解析】对于选项 A，$\because AO=CO$，$BO=DO$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形．对于选项 B，根据 $\angle ABC=\angle BCD$，$AB=CD$，不能得出四边形 $ABCD$ 是平行四边形．对于选项 C，$\because \angle ABC+\angle BCD=180°$，$\therefore AB/\!/CD$．$\because \angle BAD=\angle BCD$，$\therefore \angle ABC+\angle BAD=180°$．$\therefore AD/\!/BC$．$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形．对于选项 D，$\because AB/\!/CD$，$AB=CD$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形．故选 B.

例二　证明：$\because AB/\!/DE$，$AC/\!/DF$，

$\therefore \angle B=\angle DEF$，$\angle ACB=\angle F$.

$\because BE=CF$，

$\therefore BE+CE=CF+CE$，

即 $BC=EF$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle DEF,\\ BC=EF,\\ \angle ACB=\angle F,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DEF$（ASA）.

$\therefore AB=DE$.

又∵$AB\parallel DE$，

∴四边形 $ABED$ 是平行四边形.

【点拨】本题考查了平行线的性质、平行四边形的判定以及全等三角形的判定与性质等知识. 利用全等三角形的性质证出 $AB=DE$ 是解题的关键.

变式训练二

1. 证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AD\parallel BC$.

∴$\angle OAF=\angle OCE$.

在$\triangle AOF$ 和$\triangle COE$ 中，

$$\begin{cases}\angle OAF=\angle OCE,\\ AO=CO,\\ \angle AOF=\angle COE,\end{cases}$$

∴$\triangle AOF\cong\triangle COE$（ASA）.

∴$FO=EO$.

又∵$AO=CO$，

∴四边形 $AECF$ 是平行四边形.

2. 证明：∵$AD\parallel BC$，

∴$\angle DAE=\angle BCF$.

∵$DE\perp AC$，$BF\perp AC$，

∴$\angle AED=\angle CFB=90^\circ$.

在$\triangle AED$ 和$\triangle CFB$ 中，

$$\begin{cases}\angle AED=\angle CFB,\\ \angle DAE=\angle BCF,\\ DE=BF,\end{cases}$$

∴$\triangle AED\cong\triangle CFB$（AAS）.

∴$AD=BC$.

又∵$AD\parallel BC$，

∴四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

例三 （1）证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AB\parallel CD$.

∵$BM\perp AC$，$DN\perp AC$，

∴$BM\parallel DN$.

∴四边形 $BMDN$ 是平行四边形.

（2）解：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AB\parallel CD$，$AB=CD$.

∴$\angle CAB=\angle ACD$.

由（1）可知，四边形 $BMDN$ 是平行四边形.

∴$DM=BN$.

∴$AB-BN=CD-DM$，

即 $AN=CM$.

∵$BM\perp AC$，$DN\perp AC$，

∴$\angle AFN=\angle CEM=90^\circ$.

∴$\triangle AFN\cong\triangle CEM$（AAS）.

∴$FN=EM=5$.

在 Rt$\triangle AFN$ 中，由勾股定理，得 $AN=\sqrt{AF^2+FN^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$.

【点拨】本题考查了平行四边形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、平行线的判定与性质、勾股定理等知识. 证明$\triangle AFN\cong\triangle CEM$ 是解本题的关键.

变式训练三

解：（1）若选①，证明如下：

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AB/\!/DC$.

∴$\angle BAE=\angle DCF$.

在$\triangle BAE$ 和$\triangle DCF$ 中，

$$\begin{cases}AB=DC,\\\angle BAE=\angle DCF,\\AE=CF,\end{cases}$$

∴$\triangle BAE\cong\triangle DCF$（SAS）.

∴$BE=DF$.

若选②，证明如下：

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$OD=OB$.

在$\triangle BOE$ 和$\triangle DOF$ 中，

$$\begin{cases}OB=OD,\\\angle BOE=\angle DOF,\\OE=OF,\end{cases}$$

∴$\triangle BOE\cong\triangle DOF$（SAS）.

∴$BE=DF$.

若选③，证明如下：

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$OD=OB$.

∵$BE/\!/DF$，

∴$\angle BEO=\angle DFO$.

在$\triangle BOE$ 和$\triangle DOF$ 中，

$$\begin{cases}\angle BOE=\angle DOF,\\\angle BEO=\angle BFO,\\OB=OD,\end{cases}$$

∴$\triangle BOE\cong\triangle DOF$（AAS）.

∴$BE=DF$.

（2）∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$BO=DO$.

由（1）可得 $OE=OF$.

∴四边形 $DEBF$ 为平行四边形.

例四 （1）**证明：**∵将▱$ABCD$ 沿过点 A 的直线 l 折叠，点 D 恰好落在边 AB 上的点 D'处，

∴$\angle DAE=\angle D'AE$，$\angle DEA=\angle D'EA$.

∵$DE/\!/AD'$，

∴$\angle DEA=\angle D'AE$.

∴$\angle DAE=\angle D'AE=\angle DEA=\angle D'EA$.

∴$DA/\!/D'E$.

∵$DE/\!/AD'$，

∴四边形 $DAD'E$ 是平行四边形.

∴$DE=AD'$.

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AB=DC$.

∴$AB-AD'=DC-DE$，

即 $BD'=CE$.

∵$BD'/\!/CE$，

∴四边形 $BCED'$是平行四边形.

（2）**解：**∵BE 平分$\angle ABC$，

∴$\angle CBE=\angle EBA$.

∵$AD/\!/BC$，

∴$\angle DAB+\angle CBA=180°$.

∵$\angle DAE=\angle D'AE$，

$\therefore \angle D'AE+\angle EBA=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ$.

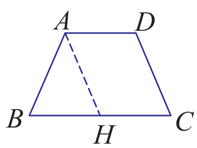
$\therefore \angle AEB=90^\circ$.

$\therefore AB^2=AE^2+BE^2$.

【点拨】此题主要考查了平行四边形的判定与性质以及勾股定理等知识，证出 $DA\parallel D'E$ 是解题关键.

变式训练四

解：（1）在图 1 中，过点 A 作 $AH\parallel DC$，交 BC 于点 H，如下图.



$\because AD\parallel BC$，

$\therefore$ 四边形 $AHCD$ 是平行四边形，$\angle C=\angle AHB$.

$\therefore AH=CD$.

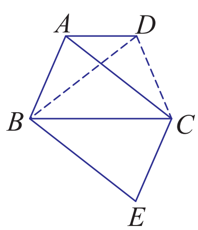
$\therefore \angle ABC=\angle C$.

$\therefore \angle ABC=\angle AHB$.

$\therefore AB=AH$.

$\therefore AB=CD$.

（2）画出图形，如下图所示.



由题可知 $AB=CD=CE$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中，

$$\begin{cases} AB=DC, \\ \angle ABC=\angle DCB, \\ BC=CB, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DCB$（SAS）.

$\therefore AC=BD$.

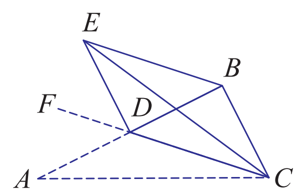
$\because BD=BE$，

$\therefore AC=BE$.

$\therefore$ 四边形 $ABEC$ 是平行四边形.

培优精练

1. 135° **【解析】**延长 CD 到点 F，如下图所示. $\because$ 四边形 $BCDE$ 是平行四边形，$\therefore BC\parallel DE$. $\because \angle ABC=90^\circ$，$\therefore \angle BDE=90^\circ$，$\therefore \angle ADE=90^\circ$. $\because$ 将 $\triangle ACD$ 沿直线 CD 翻折后，点 A 落在点 E 处，$\therefore \angle ADF=\angle EDF=\frac{1}{2}\angle ADE=45^\circ$. $\therefore \angle ADC=180^\circ-\angle ADF=135^\circ$.



2.（1）**证明：**$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB\parallel CD$.

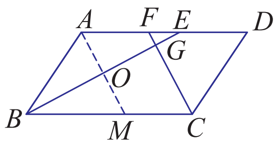
$\therefore \angle ABC+\angle BCD=180^\circ$.

$\because \angle ABC$、$\angle BCD$ 的平分线 BE、CF 分别与 AD 相交于点 E、F.

$\therefore \angle EBC+\angle FCB=\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle DCB=90^\circ$.

$\therefore BE\perp CF$.

（2）**解：** 过 A 作 $AM\parallel CF$，交 BC 于点 M，如下图.



$\because AM\parallel CF$,

$\therefore \angle AOB=\angle FGB$.

$\because BE\perp CF$,

$\therefore \angle FGB=90^\circ$.

$\therefore \angle AOB=90^\circ$.

$\because BE$ 平分 $\angle ABC$，

$\therefore \angle ABE=\angle EBC$.

$\because AD\parallel BC$,

$\therefore \angle AEB=\angle EBC$,

$\therefore \angle ABE=\angle AEB$.

$\therefore AB=AE=3$.

$\therefore AO\perp BE$.

$\therefore BO=EO$.

在$\triangle AOE$ 和$\triangle MOB$ 中

$$\begin{cases}\angle AEO=\angle MBO,\\ BO=EO,\\ \angle AOE=\angle BOM,\end{cases}$$

$\therefore \triangle AOE\cong\triangle MOB$（ASA）.

$\therefore AO=MO$.

$\because AF\parallel CM$，$AM\parallel CF$，

$\therefore$ 四边形 $AMCF$ 是平行四边形.

$\therefore AM=CF=2$.

$\therefore AO=\frac{1}{2}AM=1$.

$\therefore EO=\sqrt{AE^2-AO^2}=2\sqrt{2}$.

$\therefore BE=2EO=4\sqrt{2}$.

3. （1）**证明：** $\because BD$ 垂直平分 AC，

$\therefore AB=BC$，$AD=DC$.

在$\triangle ADB$ 与$\triangle CDB$ 中，

$$\begin{cases}AB=CB,\\ AD=CD,\\ DB=DB,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ADB\cong\triangle CDB$（SSS）.

$\therefore \angle BCD=\angle BAD$.

$\because \angle BCD=\angle ADF$,

$\therefore \angle BAD=\angle ADF$.

$\therefore AB\parallel FD$.

$\because BD\perp AC$，$AF\perp AC$，

$\therefore AF\parallel BD$.

$\therefore$ 四边形 $ABDF$ 是平行四边形.

（2）**解：** $\because$ 四边形 $ABDF$ 是平行四边形，

$\therefore BD=AF=14$，$AB=DF=13$.

设 $BE=x$，则 $DE=14-x$.

由勾股定理，得 $AB^2-BE^2=AD^2-DE^2$，

即 $13^2-x^2=15^2-(14-x)^2$.

解得 $x=5$.

$\therefore BE=5$,

$\therefore AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=12$.

$\therefore AC=2AE=24$.

名卷压轴题

解：（1）四边形 $CDGE$ 是平行四边形．理由如下：

$\because D$、E 移动的速度相同，

$\therefore BD=CE$.

$\because DG/\!/AE$，

$\therefore \angle DGB=\angle ACB$.

$\because AB=AC$，

$\therefore \angle B=\angle ACB$.

$\therefore \angle B=\angle DGB$.

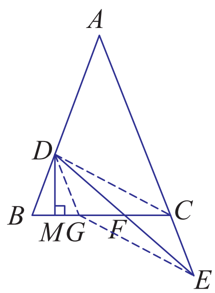
$\therefore BD=DG=CE$.

又$\because DG/\!/CE$，

$\therefore$四边形 $CDGE$ 是平行四边形．

（2）①当点 D 在线段 AB 上时，$BM+CF=MF$．理由如下：

过点 D 作 $DG/\!/AC$ 交 BC 于点 G，连接 DC、GE，如下图．



由（1），得 $BD=DG=CE$.

$\because DM\perp BC$，

$\therefore BM=GM$.

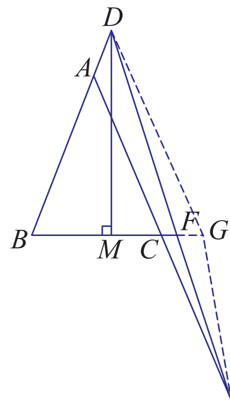
由（1），得四边形 $CDGE$ 为平行四边形．

$\therefore GF=CF$.

$\therefore BM+CF=GM+GF=MF$.

②当 D 在线段 BA 的延长线上时，$BM-CF=MF$．理由如下：

过点 D 作 $DG/\!/AC$ 交 BC 延长线于点 G，连接 EG，如下图所示．



同理可得四边形 $CDGE$ 是平行四边形．

$\therefore CF=FG$.

$\because DG/\!/AE$，

$\therefore \angle DGB=\angle ACB=\angle ABG$.

$\therefore BD=DG$.

$\because DM\perp BC$，

$\therefore BM=MG$.

$\therefore MF=MG-FG$，

即 $BM-CF=MF$.

◎平行四边形　新题型探究

例题　（1）**解：**$\because$四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$AC=6$，

$\therefore OA=OC=\frac{1}{2}AC=3$，$AB/\!/CD$.

$\therefore \angle EAO=\angle FCO$.

$\because \angle AOE=\angle COF$，

$\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF$（ASA）.

$\therefore OE=OF$，$AE=CF$.

∵△AEO 的周长为 10，

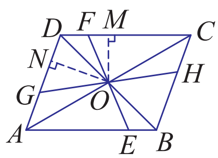
∴$OA+AE+OE=10$.

∴$AE+OE=10-3=7$.

∴$CF+OF=AE+OE=7$.

(2) 12　**【解析】**∵$AD=2DF$，△DOF 的面积为 1，∴$S_{\triangle AOF}=3S_{\triangle DOF}=3$. ∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴$OA=OC$. 同（1），得 △COE ≌ △AOF（ASA）. ∴$OE=OF$. ∵$OA=OC$，∴四边形 $AECF$ 是平行四边形. ∴$S_{\square AECF}=4S_{\triangle AOF}=4\times3=12$.

(3) $\frac{5}{3}$　**【解析】**在图 3 中过点 O 作 $OM\perp DC$ 于点 M，$ON\perp AD$ 于点 N，如下图.



∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴$CD=AB=5$，$OA=OC$. ∵$S_{\triangle COD}=S_{\triangle AOD}=\frac{1}{4}S_{\square ABCD}$，又 $S_{四边形DGOF}=\frac{1}{4}S_{\square ABCD}$，∴$S_{\triangle AOD}=S_{四边形DGOF}$. ∴$S_{\triangle AOG}=S_{\triangle DOF}$. ∵$S_{\triangle AOG}=\frac{1}{2}AG\cdot ON=\frac{1}{2}\times1\times ON=\frac{1}{2}ON$，$S_{\triangle DOF}=\frac{1}{2}DF\cdot OM$，∴$ON=DF\cdot OM$，即 $DF=\frac{ON}{OM}$. ∵$S_{\square ABCD}=AD\cdot2ON=CD\cdot2OM$，∴$3\times2ON=5\times2OM$. ∴$\frac{ON}{OM}=\frac{5}{3}$. ∴$DF=\frac{5}{3}$.

【点拨】本题考查了平行四边形的判定和性质、全等三角形的判定与性质、线段垂直平分线的性质等知识，熟练掌握平行四边形的判定与性质，证明△AOE≌△COF 和△COE≌△AOF 是解题关键.

变式训练

(1) **证明：**∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$OB=OD$，$AD\parallel BC$.

∴$\angle EDO=\angle FBO$.

在△EDO 和△FBO 中，

$$\begin{cases}\angle EDO=\angle FBO,\\ OD=OB,\\ \angle DOE=\angle BOF,\end{cases}$$

∴△EDO≌△FBO（ASA）.

∴$OE=OF$.

(2) **证明：**由（1），知△EDO≌△FBO.

∴$DE=BF$.

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$OA=OC$，$AD\parallel BC$.

∴$\angle EAO=\angle FCO$.

在△AOE 和△COF 中，

$$\begin{cases}\angle EAO=\angle FCO,\\ OA=OC,\\ \angle EOA=\angle FOC,\end{cases}$$

∴△AOE≌△COF（ASA）.

$\therefore AE=CF$.

$\therefore AE+BF=CF+DE$.

$\because$四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB=CD$.

$\therefore AE+BF+AB+EF=CF+DE+CD+EF$.

即四边形 $AEFB$ 与四边形 $DEFC$ 的周长相等.

（3）**解：**直线 EF 将平行四边形 $ABCD$ 的面积分成了二等份. 理由如下：

$\because$四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OD=OB$，$OC=OA$.

在$\triangle DOC$ 和$\triangle BOA$ 中，

$$\begin{cases} OD=OB, \\ \angle DOC=\angle BOA, \\ OC=OA, \end{cases}$$

$\therefore \triangle DOC\cong\triangle BOA$（SAS）.

$\therefore S_{\triangle DOC}=S_{\triangle BOA}$.

由（1）（2），知$\triangle EDO\cong\triangle FBO$，$\triangle AOE\cong\triangle COF$.

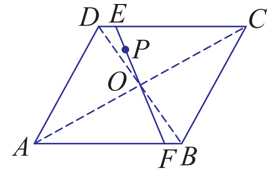
$\therefore S_{\triangle EDO}=S_{\triangle FBO}$，$S_{\triangle AOE}=S_{\triangle COF}$.

$\therefore S_{\triangle DOC}+S_{\triangle EDO}+S_{\triangle COF}=S_{\triangle BOA}+S_{\triangle FBO}+S_{\triangle AOE}$.

即四边形 $AEFB$ 与四边形 $DEFC$ 的面积相等，

则直线 EF 将平行四边形 $ABCD$ 的面积分成二等份.

应用：连接 AC、BD 交于点 O，连接 OP 分别交 CD、AB 于点 E、F，如图所示.



由（2）（3）可知，四边形 $AFED$ 和四边形 $BFEC$ 的周长和面积均相等，

即 EF 把平行四边形的菜园平均分成两块分别种植番茄和茄子，且使两块地共用这口水井进行浇灌.

培优精练

解：（1）$PD+PE+PF=AB$. 理由如下：

$\because$点 P 在边 BC 上，

$\therefore PD=0$.

$\because PE\parallel AC$，$PF\parallel AB$，

$\therefore$四边形 $PEAF$ 是平行四边形.

$\therefore PF=AE$.

$\because PE\parallel AC$，

$\therefore \angle BPE=\angle C$.

$\therefore AB=AC$，

$\therefore \angle B=\angle C=\angle BPE$.

$\therefore PE=BE$.

$\therefore PE+PF=BE+AE=AB$.

$\because PD=0$，

$\therefore PD+PE+PF=AB$.

（2）$PD+PE+PF=AB$. 理由如下：

$\because PE\parallel AC$，$PF\parallel AB$，

$\therefore$四边形 $AEPF$ 是平行四边形.

$\therefore AE=PF$.

$\because MN \parallel BC$，$PE \parallel AC$，

$\therefore \angle EPM=\angle ANM=\angle C$，

$\angle EMP=\angle B$.

$\therefore AB=AC$，

$\therefore \angle B=\angle C$.

$\therefore \angle EMP=\angle EPM$.

$\therefore PE=EM$.

$\therefore PE+PF=EM+AE=AM$.

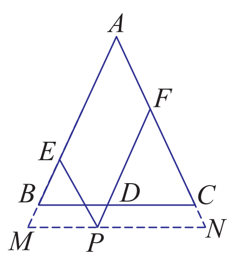
易知四边形 $BDPM$ 是平行四边形.

$\therefore MB=PD$.

$\therefore PD+PE+PF=MB+AM=AB$，

即 $PD+PE+PF=AB$.

(3) 在图 3 中，过点 P 作 $MN \parallel BC$ 分别交 AB、AC 的延长线于 M、N 两点，如下图.



$\because PE \parallel AC$，$PF \parallel AB$，

$\therefore$ 四边形 $PEAF$ 是平行四边形.

$\therefore PF=AE$.

$\because AB=AC$，

$\therefore \angle B=\angle C$.

$\because MN \parallel BC$，

$\therefore \angle ANM=\angle C=\angle B=\angle AMN$.

$\because PE \parallel AC$，

$\therefore \angle EPM=\angle ANM$.

$\therefore \angle AMN=\angle FPM$

即 $\angle EPM=\angle EMP$.

$\therefore PE=ME$.

$\because AE+ME=AM$，

$\therefore PF+PE=AM$.

$\because MN \parallel CB$，$DF \parallel AB$，

$\therefore$ 四边形 $BDPM$ 是平行四边形.

$\therefore MB=PD$.

$\therefore PF+PE-PD=AM-MB=AB$.

$\therefore PF+PE=AB+PD=6+1=7$.

$\therefore \square PEAF$ 的周长为 $2\times 7=14$.

第十九章　矩形、菱形与正方形

第 1 讲　矩　形

例一　解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle BAD=\angle ABC=90^\circ$，

$OB=\frac{1}{2}BD$，$OA=\frac{1}{2}AC$，

$AC=BD$，

$\therefore OA=OB$.

$\because AE$ 平分 $\angle BAD$，

$\therefore \angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAD=45^\circ$.

$\therefore BE=AB=2$，

$\angle OAB=\angle BAE+\angle CAE=45^\circ+15^\circ=60^\circ$.

$\therefore OB=AB=2$，$\triangle OAB$ 是等边三角形.

$\therefore OB=BE=2$，$\angle ABO=60^\circ$.

则 $\angle OBE=90^\circ-\angle ABO=30^\circ$.

$\therefore \angle BOE=\frac{1}{2}(180^\circ-30^\circ)=75^\circ$.

$\because BD=2OB=4$,

$\therefore AD=\sqrt{BD^2-AB^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 的面积 $=AB\cdot AD=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

【点拨】本题考查了矩形的性质、等边三角形的判定与性质、等腰三角形的性质、勾股定理的运用等. 熟练掌握矩形和等边三角形的性质是解决问题的关键.

变式训练一

(1) **证明：**$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB\parallel CD$.

$\therefore \angle OCF=\angle OAE$.

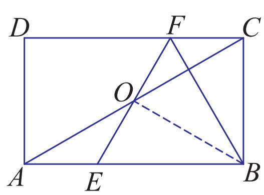
在$\triangle OCF$ 和$\triangle OAE$ 中，

$$\begin{cases}\angle OCF=\angle OAE,\\ \angle COF=\angle AOE,\\ CF=AE,\end{cases}$$

$\therefore \triangle COF\cong\triangle AOE$ (AAS).

$\therefore OE=OF$.

(2) **解：**如下图，连接 OB.



$\because BE=BF$，$OE=OF$，

$\therefore BO\perp EF$.

$\therefore$ 在 Rt$\triangle BEO$ 中，$\angle BEF+\angle ABO=90^\circ$.

由(1)可知 $OC=OA$，即 O 为对角线 AC 的中点.

$\therefore OA=OB=OC$.

$\therefore \angle BAC=\angle ABO$.

又$\because \angle BEF=2\angle BAC$，

$\angle BEF+\angle ABO=90^\circ$，

$\therefore 2\angle BAC+\angle BAC=90^\circ$.

解得$\angle BAC=\angle ABO=30^\circ$.

$\therefore \angle ACB=90^\circ-\angle BAC=60^\circ$.

例二 (1) **证明：**$\because AF\parallel BC$，

$\therefore \angle AFE=\angle DCE$.

$\because E$ 是 AD 的中点，

$\therefore AE=DE$.

在$\triangle AEF$ 和$\triangle DEC$ 中，

$$\begin{cases}\angle AFE=\angle DCE,\\ AE=DE,\\ \angle AEF=\angle DEC,\end{cases}$$

$\therefore \triangle AEF\cong\triangle DEC$ (AAS).

$\therefore AF=DC$.

$\because AF=BD$，

$\therefore BD=DC$.

(2) **解：**$\because$ 过点 A 作 BC 的平行线交 CE 的延长线于点 F，

即 $AF\parallel BD$，$AF=BD$，

$\therefore$ 四边形 $AFBD$ 是平行四边形.

$\because AB=AC$，D 是 BC 的中点，

$\therefore AD\perp BC$.

$\therefore \angle ADB=90^\circ$.

$\therefore$ 四边形 $AFBD$ 是矩形.

【点拨】本题考查了矩形的判定，

全等三角形的判定和性质、等量代换、平行四边形的判定、等腰三角形“三线合一”等知识.

变式训练二

（1）**证明：**$\because AB=AC$，$AD\perp BC$，

$\therefore BD=CD$，$\angle ADC=90°$.

$\because AE=BD$，

$\therefore AE=CD$.

$\because AE\parallel BC$，

$\therefore$四边形 $ADCE$ 是平行四边形.

又$\because \angle ADC=90°$，

$\therefore$平行四边形 $ADCE$ 为矩形.

（2）**解：**由（1），得四边形 $ADCE$ 为矩形.

$\therefore AD=CE=4$，

$\because AE\parallel BC$，

$\therefore \angle AEF=\angle DBF$.

在$\triangle AEF$ 和$\triangle DBF$ 中，

$$\begin{cases}\angle AEF=\angle DBF,\\ \angle AFE=\angle DFB,\\ AE=DB,\end{cases}$$

$\therefore \triangle AEF\cong\triangle DBF$（AAS）.

$\therefore AF=DF=\frac{1}{2}AD=2$.

例三　（1）**证明：**$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB=DC$，$\angle A=\angle C=90°$.

$\because$将$\triangle BAD$ 沿对角线 BD 翻折，点 A 落在点 E 处，DE 与 BC 交于点 F，

$\therefore AB=BE$，$\angle A=\angle E=90°$.

$\therefore BE=DC$，$\angle E=\angle C=90°$.

在$\triangle BEF$ 和$\triangle DCF$ 中，

$$\begin{cases}\angle BFE=\angle DFC,\\ \angle E=\angle C=90°,\\ BE=DC,\end{cases}$$

$\therefore \triangle BEF\cong\triangle DCF$（AAS）.

（2）**解：**由（1），得$\triangle BEF\cong\triangle DCF$，

$\therefore BF=DF$.

$\because BC=9$，$DC=3$，$\angle C=90°$，

$\therefore CF=BC-BF=9-BF=9-DF$.

在 Rt$\triangle DCF$ 中，$DF^2=CF^2+DC^2$，

$\therefore DF^2=(9-DF)^2+3^2$.

$\therefore DF=5$.

【点拨】本题考查了翻折，全等三角形的判定与性质及勾股定理等知识. 解答本题的关键是熟练掌握翻折变换的性质.

变式训练三

$4\sqrt{3}$　**【解析】**$\because$把矩形 $ABCD$ 沿 EF 翻折，点 B 恰好落在边 AD 上的 B' 处，$\therefore \angle EFB=\angle EFB'=60°$，$AB=A'B'$，$\angle A=\angle A'=90°$，$AE=A'E=1$. $\because$四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore AD\parallel BC$. $\therefore \angle DEF=\angle EFB=60°$. $\because A'E\parallel B'F$，$\therefore \angle A'EF+\angle EFB'=180°$. $\therefore \angle A'EF=180°-\angle EFB'=120°$.

$\therefore \angle A'EB' = \angle A'EF - \angle EFB' = 60°$. $\therefore \angle A'B'E = 30°$. 又 $A'E = 1$，$\therefore B'E = 2$，$A'B' = \sqrt{B'E^2 + A'E^2} = \sqrt{3} = AB$. $\because AD = AE + DE = 4$，$\therefore S_{矩形ABCD} = AB \times AD = \sqrt{3} \times 4 = 4\sqrt{3}$.

例四　解：（1）设点 E、F 的运动时间为 t，

由题意，得 $AE = CF = t$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AO = CO$，$BO = DO$.

$\therefore AO - AE = CO - CF$，

即 $EO = FO$.

$\therefore$ 四边形 $DEBF$ 给终是平行四边形.

（2）$\because$ 四边形 $DEBF$ 是矩形，

$\therefore EF = BD = 12$ cm.

①当 B、F 相遇之前，四边形 $DEBF$ 为矩形时，

$\because AE = t \times 1 = t$（cm），

$AO = \frac{1}{2}AC = 8$ cm，

$\therefore EO = AO - AE = 8 - t = \frac{1}{2}EF = 6$ cm.

解得 $t = 2$.

②当 E、F 相遇之后，四边形 $DEBF$ 为矩形时，

$\because AE = t \times 1 = t$（cm），

$\therefore CE = AC - AE = (16 - t)$（cm）.

$\therefore EO = OC - CE = 8 - (16 - t) = t - 8$（cm）.

$\therefore t - 8 = \frac{1}{2}EF = 6$.

解得 $t = 14$.

经检验，$t = 2$（s）和 $t = 14$（s）均符合题意.

$\therefore$ 当 $t = 2$（s）或 $t = 14$（s）时，四边形 $DEBF$ 是矩形.

【点拨】本题考查了平行四边形的判定与性质以及矩形的判定. 第（2）小问要注意分相遇前和相遇后，两种情况进行讨论.

变式训练四

解：（1）$\because$ 顶点 A 的坐标为（0，8），$AC = 24$ cm，$OB = 26$ cm，

$\therefore B$（26，0），C（24，8）.

设直线 BC 的函数表达式是 $y = kx + b$，

则 $\begin{cases} 26k + b = 0, \\ 24k + b = 8, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k = -4, \\ b = 104. \end{cases}$

$\therefore$ 直线 BC 的函数表达式是 $y = -4x + 104$.

（2）根据题意，得

$AP = t \times 1 = t$（cm），

$BQ = 3 \times t = 3t$（cm），

则 $OQ = OB - BQ = (26 - 3t)$（cm）.

$\because$ 四边形 $AOQP$ 是矩形，

$\therefore AP = OQ$，

即 $t = 26 - 3t$.

解得 $t=6.5$.

∴当 t 为 6.5（s）时，四边形 $AOQP$ 是矩形.

培优精练

1. D　【解析】∵在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$AD=8$，∴ $DC=6$，$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=10$. 根据折叠，得 $D'C=DC=6$，$DE=D'E$. 设 $DE=x$，则 $D'E=x$，$AD'=AC-CD'=4$，$AE=AD-DE=8-x$. 在 $\text{Rt}\triangle AED'$ 中，$(AD')^2+(D'E)^2=AE^2$，即 $4^2+x^2=(8-x)^2$. 解得 $x=3$. 故选 D.

2. （1）证明：∵ $AO=CO$，$BO=DO$，

∴四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

∴ $\angle ABC=\angle ADC$.

∵ $\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$，

∴ $\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$.

∴四边形 $ABCD$ 是矩形.

（2）解：∵ $\angle ADC=90^\circ$，$\angle ADF:\angle FDC=3:2$，

∴ $\angle FDC=\frac{2}{5}\times 90^\circ=36^\circ$.

∵ $DF\perp AC$，

∴ $\angle DCO=90^\circ-\angle FDC=90^\circ-36^\circ=54^\circ$.

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $CO=OD$.

∴ $\angle ODC=\angle DCO=54^\circ$.

∴ $\angle BDF=\angle ODC-\angle FDC=54^\circ-36^\circ=18^\circ$.

3. （1）证明：∵ CE 平分 $\angle ACB$，

∴ $\angle ACE=\angle ECB$.

∵ $MN\parallel BC$，

∴ $\angle ECB=\angle OEC$.

∴ $\angle ACE=\angle OEC$.

∴ $OE=OC$，

同理可得 $OC=OF$.

∴ $OE=OF$.

（2）解：∵ CE、CF 分别平分 $\angle ACB$ 和 $\angle ACD$，

∴ $\angle ACE+\angle ACF=\frac{1}{2}\angle BCD=90^\circ$.

∴ $EF=\sqrt{CE^2+CF^2}=\sqrt{12^2+9^2}=15$.

∴ $OC=\frac{1}{2}EF=\frac{15}{2}$.

（3）解：当 O 在边 AC 上运动到 AC 的中点时，四边形 $AECF$ 是矩形. 理由如下：

∵ O 为 AC 的中点，

∴ $OA=OC$，

由（1）可知 $OE=OF$.

∴四边形 $AECF$ 为平行四边形.

由（2）可知 $\angle ECF=\angle ACE+\angle ACF=90^\circ$.

∴四边形 $AECF$ 为矩形.

名卷压轴题

解：（1）∵矩形 $ABCD$，

$\therefore \angle D=90^{\circ}$,

$\because AD=5$,

$\therefore DE=AD-AE=5-AE$.

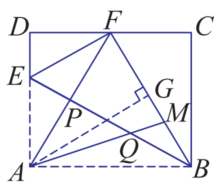
由折叠，得 $EF=AE$.

在 Rt$\triangle DEF$ 中，由勾股定理，得 $DE^2+DF^2=EF^2$,

即 $(5-AE)^2+3^2=AE^2$.

解得 $AE=3.4$.

(2) ①在图 2 中过点 A 作 $AG\perp BF$ 于点 G，如下图所示.



则 $\angle AGF=90^{\circ}$.

$\therefore \angle FAG+\angle AFG=90^{\circ}$.

$\because \angle D=\angle BAE=90^{\circ}$,

$\therefore DF\perp AD$,

由折叠，得 $\angle BFE=\angle BAE=90^{\circ}$，$AE=EF$.

$\therefore \angle AFE+\angle AFG=90^{\circ}$.

$\therefore \angle FAG=\angle AFE=\angle FAD$,

即 AE 平分 $\angle DAG$.

$\therefore FG=FD$,

在 Rt$\triangle ADF$ 与 Rt$\triangle AGF$ 中,

$$\begin{cases} AF=AF, \\ FD=FG, \end{cases}$$

$\therefore$ Rt$\triangle ADF\cong$ Rt$\triangle AGF$ (HL).

$\therefore AG=AD=5$,

即点 A 到 BF 的距离为 5.

②如图 2，$\because$ 矩形 $ABCD$,

$\therefore \angle C=90^{\circ}$，$CD=AB$，$BC=AD=5$.

由折叠，得 $AB=BF$.

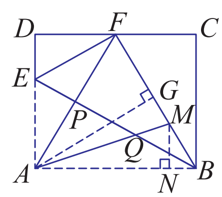
$\therefore CF=CD-DF=BF-3$.

在 Rt$\triangle BCF$ 中，由勾股定理，得 $CF^2+BC^2=BF^2$.

即 $(BF-3)^2+5^2=BF^2$.

解得 $BF=\frac{17}{3}$.

在图 2 中，再过点 M 作 $MN\perp AB$ 于点 N，如下图所示.



由①知 $\angle DAF=\angle GAF$.

$\because \angle DAF+\angle BAM=\angle FAM=\angle GAF+\angle MAG$,

$\therefore \angle BAM=\angle MAG$.

$\because MG\perp AG$，$MN\perp AB$,

$\therefore MG=MN$.

$\therefore BM=BF-FG-GM=BF-DF-MN=\frac{17}{3}-3-MN=\frac{8}{3}-MN$.

在 Rt$\triangle AGM$ 与 Rt$\triangle ANM$ 中,

$$\begin{cases} AM=AM, \\ MG=MN, \end{cases}$$

$\therefore$ Rt$\triangle AGM\cong$ Rt$\triangle ANM$ (HL).

$\therefore AN=AG=5$.

$\therefore BN=AB-AN=BF-AN=\frac{17}{3}-5=\frac{2}{3}$.

在 Rt$\triangle BMN$ 中，由勾股定理，得 $BM^2=MN^2+BN^2$，

即$\left(\frac{8}{3}-MN\right)^2=MN^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2$.

解得 $MN=\frac{5}{4}$.

$\therefore MG=MN=\frac{5}{4}$.

$\therefore FM=FG+GM=3+\frac{5}{4}=\frac{17}{4}$.

第 2 讲　菱　形

例一　(1) **证明：**$\because AE\perp BC$，$AF\perp DC$，

$\therefore \angle AEB=\angle AFD=90^\circ$.

$\because$四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AB=AD$，$\angle B=\angle D$，

在$\triangle ABE$ 和$\triangle ADF$，

$$\begin{cases}\angle AEB=\angle AFD=90^\circ,\\ \angle B=\angle D,\\ AB=AD,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle ADF$.

$\therefore AE=AF$.

(2) $\because AE\perp BC$ 于点 E，$\angle B=70^\circ$，

$\therefore \angle BAE=90^\circ-\angle B=20^\circ$.

由 (1) 知$\triangle ABE\cong\triangle ADF$.

$\therefore \angle BAE=\angle DAF=20^\circ$.

$\therefore \angle EAF=180^\circ-\angle B-\angle BAE-\angle DAF=70^\circ$.

【点拨】本题主要考查了菱形的性质以及全等三角形的判定与性质等知识. 解题的关键是掌握菱形的四边相等，邻角互补.

变式训练一

B　**【解析】**$\because$四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore AB\parallel CD$，$AB=BC$，$\therefore \angle MAO=\angle NCO$，$\angle AMO=\angle CNO$. $\because$ 在$\triangle AMO$ 和$\triangle CNO$ 中，$\begin{cases}\angle MAO=\angle NCO,\\ AM=CN,\\ \angle AMO=\angle CNO,\end{cases}$

$\therefore \triangle AMO\cong\triangle CNO$ (ASA)，$\therefore AO=CO$. $\because AB=BC$，$\therefore BO\perp AC$. $\therefore \angle BOC=90^\circ$. $\because \angle BCA=\angle DAC=36^\circ$，$\therefore \angle OBC=90^\circ-\angle BCA=54^\circ$. 故选 B.

例二　**证明：**(1) 延长 AO 至 E，如图所示.

$\because OA=OB$，

$\therefore \angle ABO=\angle BAO$.

又$\angle BOE=\angle ABO+\angle BAO$，

$\therefore \angle BOE=2\angle BAO$.

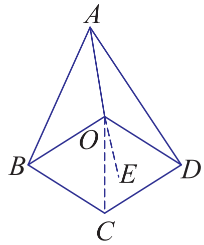
同理可得$\angle DOE=2\angle DAO$.

$\therefore \angle BOE+\angle DOE=2\angle BAO+2\angle DAO=2(\angle BAO+\angle DAO)$，

即$\angle BOD=2\angle BAD$.

又$\angle C=2\angle BAD$，

$\therefore \angle BOD=\angle C$.



(2) 连接 OC，如上图.

在$\triangle OBC$和$\triangle ODC$中，

$$\begin{cases}OB=OD,\\BC=DC,\\OC=OC,\end{cases}$$

$\therefore\triangle OBC\cong\triangle ODC$（SSS）.

$\therefore\angle BOC=\angle DOC$，

$\angle BCO=\angle DCO$.

$\because\angle BOD=\angle BOC+\angle DOC$，

$\angle BCD=\angle BCO+\angle DCO$，

$\therefore\angle BOC=\frac{1}{2}\angle BOD$，

$\angle BCO=\frac{1}{2}\angle BCD$.

又$\angle BOD=\angle BCD$，

$\therefore\angle BOC=\angle BCO$.

$\therefore BO=BC$.

又 $OB=OD$，$BC=CD$，

$\therefore OB=BC=CD=OD$.

$\therefore$四边形 $OBCD$ 是菱形.

【点拨】此题考查菱形的判定，解题的关键是灵活运用全等三角形的判定和性质.

变式训练二

(1) **证明：**$\because AB\parallel DC$，

$\therefore\angle OAB=\angle DCA$.

$\because AC$ 为$\angle DAB$的平分线，

$\therefore\angle OAB=\angle DAC$.

$\therefore\angle DCA=\angle DAC$.

$\therefore CD=AD=AB$.

$\because AB\parallel CD$，

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

$\because AD=AB$，

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是菱形.

(2) **解：**$\because$四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore OA=OC$，$BD\perp AC$.

$\because CE\perp AB$，

$\therefore OE=OA=OC=2$.

$\therefore OB=\sqrt{AB^2-OA^2}=\sqrt{5-4}=1$.

$\therefore BD=2OB=2$.

$\because AC=2OA=4$，

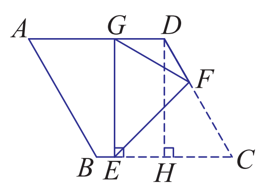
$\therefore S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times4\times2=4$.

例三　解：由折叠，可知 $CE=GE$.

当 $GE\perp BC$ 时，GE 的长取最小值，即 CE 的长取到最小值.

当 CE 的长取最小值时，BE 的长取最大值.

如下图，过点 D 作 $DH\perp BC$ 于点 H.



则 $DH=GE=CE$.

$\because$在 Rt$\triangle CDH$ 中，

$\angle C=180^\circ-\angle ABC=60^\circ$，

$\therefore \angle HDC=90^\circ-\angle C=30^\circ$.

$\therefore CH=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}\times 12=6$ (cm).

$\therefore DH=\sqrt{DC^2-CH^2}=6\sqrt{3}$ (cm)，

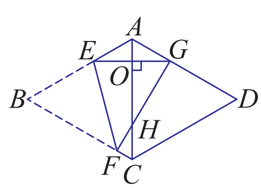
即 CE 的最小值为 $6\sqrt{3}$ (cm).

故 BE 的最大值为 $BC-CE=(12-6\sqrt{3})$(cm).

【点拨】本题考查了翻折变换，菱形的性质，勾股定理等知识，掌握折叠的性质是解题的关键.

变式训练三

$4\sqrt{3}$　**【解析】**如下图，设 AC 与 EG 交于点 O，FG 交 AC 于点 H. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle BAD=120^\circ$，易证 $\triangle ABC$、$\triangle ACD$ 均是等边三角形，$\therefore \angle CAD=\angle B=60^\circ$. $\because EG\perp AC$，$\therefore \angle GOH=90^\circ$. $\because \angle EGF=\angle B=60^\circ$，$\therefore \angle OHG=90^\circ-\angle EGF=30^\circ$. $\therefore \angle AGH=180^\circ-\angle OHG-\angle CAD=90^\circ$，$\therefore FG\perp AD$. $\therefore FG$ 是菱形边 AD 上的高，即等边 $\triangle ACD$ 的高为 $\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$.



例四　(1) 10　5　**【解析】**设 $AB=x$，$\because \angle B=90^\circ$，$\angle C=30^\circ$，$\therefore AC=2AB=2x$. 由勾股定理，得 $(2x)^2-x^2=(5\sqrt{3})^2$. 解得 $x=5$. $\therefore AB=5$，$AC=10$.

(2) **解：**$AE=DF$. 理由如下：

在 $\triangle DFC$ 中，$\angle DFC=90^\circ$，

$\angle C=30^\circ$，$DC=2t$.

则 $DF=\frac{1}{2}CD=t$.

又 $\because AE=t$，

$\therefore AE=DF$.

(3) **解：**四边形 $AEFD$ 能成为菱形. 理由如下：

$\because AB\perp BC$，$DF\perp BC$，

$\therefore AE\parallel DF$.

由 (2) 知 $AE=DF$.

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 为平行四边形.

由 (1) 知 $AC=10$.

$\therefore AD=AC-DC=10-2t$.

若平行四边形 $AEFD$ 为菱形，则 $AE=AD$.

$\therefore t=10-2t$.

解得 $t=\frac{10}{3}$.

$\because \frac{10}{2}=5$，$\frac{5}{1}=5$，$\frac{10}{3}<5$，

$\therefore$ 当 $t=\frac{10}{3}$ 时，四边形 $AEFD$ 为菱形.

【点拨】本题考查了平行四边形、菱形的判定与性质以及直角三角形的有关知识. 掌握有一组邻边相等的平行四边形是菱形是解本题的关键.

变式训练四

解：（1）四边形 $AEPM$ 为菱形.

理由如下：

$\because EF /\!/ AB$，$PM /\!/ AC$，

$\therefore$ 四边形 $AEPM$ 为平行四边形.

$\because AD$ 平分 $\angle CAB$，

$\therefore \angle CAD=\angle BAD$.

$\because EF /\!/ AB$，

$\therefore \angle EPA=\angle BAD$.

$\therefore \angle CAD=\angle EPA$.

$\therefore EA=EP$.

$\therefore$ 四边形 $AEPM$ 为菱形.

（2）点 P 为 EF 的中点时，

$S_{菱形AEPM}=\frac{1}{2}S_{四边形EFBM}$.

理由如下：

$\because$ 四边形 $AEPM$ 为菱形，

$\therefore AD\perp EM$.

$\because AB=AC$，AD 平分 $\angle BAC$，

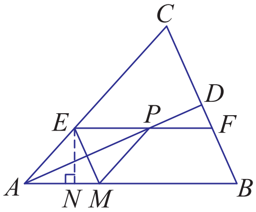
$\therefore AD\perp BC$.

$\therefore EM /\!/ BC$.

$\because EF /\!/ AB$，

$\therefore$ 四边形 $EFBM$ 是平行四边形.

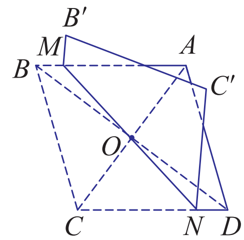
过点 E 作 $EN\perp AB$ 于点 N，如下图所示.



则 $S_{菱形AEPM}=EP\cdot EN=\frac{1}{2}EF\cdot EN=\frac{1}{2}S_{四边形EFBM}$.

培优精练

1. D　【解析】连接 AC、BD，如下图.



$\because$ 点 O 为菱形 $ABCD$ 对角线的交点，$\therefore OC=\frac{1}{2}AC=3$，$OD=\frac{1}{2}BD=4$，$\angle COD=90°$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle COD$ 中，$CD=\sqrt{OC^2+OD^2}=5$. $\because AB /\!/ CD$，$\therefore \angle MBO=\angle NDO$. 在 $\triangle OBM$ 和 $\triangle ODN$ 中，$\begin{cases}\angle MBO=\angle NDO,\\ OB=OD,\\ \angle BOM=\angle DON,\end{cases}$

$\therefore \triangle OBM\cong\triangle ODN$（ASA）. $\therefore DN=BM$. $\because$ 过点 O 折叠菱形 $ABCD$，B，B' 两点重合，MN 是折痕，$\therefore BM=B'M=1$. $\therefore DN=1$. $\therefore CN=CD-DN=5-1=4$.

2.（1）**证明：** $\because AE /\!/ BD$，$ED /\!/ AC$，

$\therefore$ 四边形 $AODE$ 是平行四边形.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

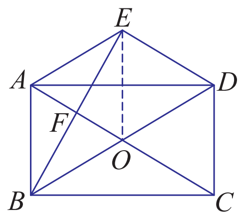
$\therefore OA=OC=\frac{1}{2}AC$，$OB=OD=$

$\frac{1}{2}BD$，$AC=BD$.

∴$OA=OD$.

∴平行四边形 $AODE$ 是菱形.

（2）**解：** 连接 OE，如下图.



由（1），得四边形 $AODE$ 是菱形.

∴$AE=OA=OB$，

∵$AE/\!/BD$，

∴四边形 $AEOB$ 是平行四边形.

∵$BE\perp ED$，$ED/\!/AO$，

∴$BE\perp AO$.

∴四边形 $AEOB$ 是菱形.

∴$AE=AB=OB$.

∴$AB=OB=OA$，

即△AOB 是等边三角形.

∴$\angle AOB=60°$.

∴$\angle AOD=180°-\angle AOB=120°$.

3. （1）**证明：** ∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AB=CD$，$\angle BAE=\angle DCF$.

在△ABE 和△CDF 中，

$$\begin{cases}AB=CD,\\ \angle BAE=\angle DCF,\\ AE=CF,\end{cases}$$

∴△ABE≌△CDF（SAS）.

（2）**解：** 四边形 $BEDF$ 是菱形.

理由如下：

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AD/\!/BC$，$AD=BC$.

∵$AE=CF$，

∴$AD-AE=BC-CF$，

即 $DE=BF$.

∴四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

∴$OB=OD$.

∵$DG=BG$，

∴$EF\perp BD$.

∴四边形 $BEDF$ 是菱形.

名卷压轴题

解： （1）若四边形 $AECF$ 为平行四边形，

∴$AO=OC$，$EO=OF$.

∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴$BO=OD=\frac{1}{2}BD=6$ cm.

∵$BE=1\times t=t$（cm），

$OF=2\times t=2t$（cm），

∴$EO=BO-BE=(6-t)$(cm).

∴$6-t=2t$.

解得 $t=2$.

∴当 t 为 2 s 时，四边形 $AECF$ 是平行四边形.

（2）若四边形 $AECF$ 是菱形，

则 $AC\perp BD$.

∴$AO^2+BO^2=AB^2$.

∴$AB=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$.

∴当 AB 为 $3\sqrt{5}$ 时，▱$AECF$ 是菱形.

(3) 由(1)(2)，知 $BE=2$ cm，$OF=4$ cm，

∴$OE=OF=4$ cm，

$EF=OE+OF=8$ cm.

∵$AC=6$ cm，

∴菱形 $AECF$ 的面积 $=\frac{1}{2}AC\cdot EF=\frac{1}{2}\times6\times8=24$ (cm²).

第 3 讲　正方形

例一 (1) **证明：**∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AB=CB$，$\angle ABC=90°$.

∵$\triangle EBF$ 是等腰直角三角形，其中 $\angle EBF=90°$，

∴$BE=BF$.

∴ $\angle ABC-\angle CBF=\angle EBF-\angle CBF$，

即 $\angle ABF=\angle CBE$.

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle CBE$ 中，

$$\begin{cases}AB=CB,\\ \angle ABF=\angle CBE,\\ BF=BE,\end{cases}$$

∴$\triangle ABF\cong\triangle CBE$ (SAS).

(2) **解：**$\triangle CEF$ 是直角三角形.

理由如下：

∵$\triangle EBF$ 是等腰直角三角形，

∴$\angle BFE=\angle FEB=45°$.

∴$\angle AFB=180°-\angle BFE=135°$.

又∵$\triangle ABF\cong\triangle CBE$，

∴$\angle CEB=\angle AFB=135°$，

∴ $\angle CEF=\angle CEB-\angle FEB=135°-45°=90°$.

∴$\triangle CEF$ 是直角三角形.

【点拨】本题考查了正方形的性质，全等三角形的判定及性质，等腰直角三角形的性质以及角的计算等．解题的关键是：(1) 根据判定定理“SAS”证明 $\triangle ABF\cong\triangle CBE$. (2) 通过角的计算得出 $\angle CEF=90°$.

变式训练一

B　**【解析】**∵四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $\angle BAD=90°$，$AB=AD$，$\angle BAF=45°$. ∵$\triangle ADE$ 是等边三角形，∴ $\angle DAE=60°$，$AD=AE$，∴ $\angle BAE=\angle BAD+\angle DAE=150°$，$AB=AE$. ∴ $\angle ABE=\angle AEB=\frac{1}{2}(180°-\angle BAE)=15°$. ∴ $\angle BFC=\angle BAF+\angle ABE=45°+15°=60°$.

例二　**解：**∵四边形 $ABCD$ 为正方形，O 为对角线的交点，

∴$OB=OC$，

$\angle ABO=\angle BCO=45°$，

$\angle BOC=90°=\angle2+\angle3$.

∵$EG\perp FH$，

∴$\angle1+\angle3=90°$.

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

在$\triangle COH$和$\triangle BOE$中，

$$\begin{cases}\angle 2=\angle 1,\\ \angle HCO=\angle EBO,\\ OC=OB,\end{cases}$$

$\therefore \triangle COH\cong\triangle BOE$（AAS）.

$\therefore OE=OH$.

同理可证，$OE=OF=OG$.

$\therefore OE+OG=OF+OH$，

即 $EG=FH$.

又$\because EG\perp FH$，

$\therefore$四边形 $EFGH$ 为正方形.

【点拨】根据正方形的性质求证三角形全等，得出 $OE=OH=OF=OG$. 则四边形 $EFGH$ 的对角线长相等，再根据对角线互相垂直得出四边形 $EFGH$ 是正方形.

变式训练二

证明：$\because$四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore OA=OB=OC=OD$，$AC\perp BD$.

$\because AE=BF=CG=DH$，

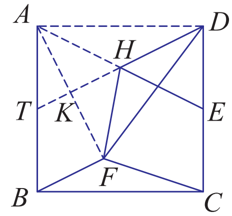
$\therefore OA-AE=OB-BF=OC-CG=OD-DH$，

即 $OE=OF=OG=OH$.

又 $EG\perp FH$，

$\therefore$四边形 $EFGH$ 是正方形.

例三 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$　**【解析】**如图所示，连接 AF，延长 DH 交 AF 于点 K，交 AB 于点 T.



$\because$四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore AD=CD=BC=AB=4$，$\angle ADE=\angle DAT=90^\circ$. $\because DE=EC=2$，$\therefore AE=\sqrt{DE^2+AD^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$. $\because AH=HE$，$\therefore DH=AH=EH=\frac{1}{2}AE=\sqrt{5}$. $\therefore \angle HAD=\angle HDA$. $\because \angle HAT+\angle DAH=90^\circ$，$\angle ATD+\angle HDA=90^\circ$，$\therefore \angle HAT=\angle ATH$. $\therefore HA=HT=\sqrt{5}$，$\therefore DT=DH+HT=2\sqrt{5}$. $\therefore AT=\sqrt{DT^2-AD^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-4^2}=2$. $\therefore AT=TB=2$. $\because \triangle ADH$与$\triangle FDH$关于 DH 对称，$\therefore DT$ 垂直平分线段 AF. $\therefore AK=KF$. $\because S_{\triangle ADT}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AT=\frac{1}{2}\cdot DT\cdot AK$，$\therefore AK=\frac{4\sqrt{5}}{5}$. 又$\because AT=TB$，$AK=KF$，$\therefore TK\parallel BF$. $\therefore BF\perp AF$. $\because AF=2AK=\frac{8\sqrt{5}}{5}$，$\therefore BF=\sqrt{AB^2-AF^2}=\sqrt{4^2-\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

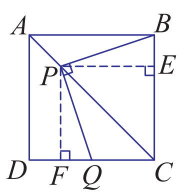
【点拨】本题考查翻折变换，正方形的性质，勾股定理，三角形中位线等知识. 解题的关键是正确添加常用辅助线，构造三角形中位线及直角三角形.

变式训练三

$4\sqrt{3}-6$ **【解析】**∵$ABCD$ 是一张边长为 4 cm 的正方形纸片，E、F 分别为 AB、CD 的中点，∴$AE=DF=2$ cm，$EF=AD=4$ cm. ∵沿过点 D 的折痕 GD 翻折 $\angle A$，使得点 A 落在 EF 上的点 A' 处，∴$AG=A'G$，$AD=A'D=4$ cm. 在 Rt $\triangle DFA'$ 中，$A'F=\sqrt{A'D^2-DF^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$ (cm)，∴$A'E=EF-A'F=(4-2\sqrt{3})$ cm. 在 Rt$\triangle A'EG$ 中，设 $EG=x$，则 $A'G=AG=(2-x)$ cm. ∴$A'G^2=A'E^2+EG^2$，即 $(2-x)^2=x^2+(4-2\sqrt{3})^2$. 解得 $x=4\sqrt{3}-6$. ∴ $EG=(4\sqrt{3}-6)$(cm).

例四 解：(1) $PB=PQ$. 理由如下：

在图 1 中，过点 P 作 $PE\perp BC$，$PF\perp CD$，垂足分别为 E、F，如下图所示.



∵P 为正方形对角线 AC 上的点，

∴CP 平分 $\angle DCB$，$\angle DCB=90°$.

∴$PF=PE$.

∴四边形 $PECF$ 为正方形.

∵ $\angle BPE+\angle QPE=90°$，

$\angle QPE+\angle QPF=90°$，

∴ $\angle BPE=\angle QPF$.

在$\triangle PQF$ 和$\triangle PBE$ 中，

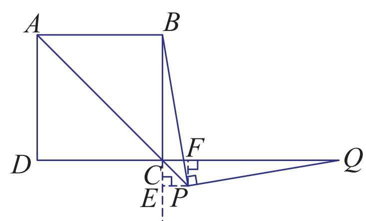
$$\begin{cases}\angle PFQ=\angle PEB,\\ \angle QPF=\angle BPE,\\ PF=PE,\end{cases}$$

∴$\triangle PQF\cong\triangle PBE$ (AAS).

∴$PB=PQ$.

(2) $PB=PQ$. 理由如下：

在图 2 中过点 P 作 $PE\perp BC$，$PF\perp CD$，垂足分别为 E、F，如下图.



∵P 为正方形对角线 AC 上的点，

∴PC 平分 $\angle DCB$，$\angle DCB=90°$，

即 CP 平分 $\angle QCE$，

且 $\angle QCE=90°$.

∴$PF=PE$.

∴四边形 $PECF$ 为正方形.

∵ $\angle BPF+\angle QPF=90°$，

$\angle BPF+\angle BPE=90°$，

∴ $\angle BPE=\angle QPF$.

在$\triangle PQF$和$\triangle PBE$中，

$$\begin{cases}\angle PFQ=\angle PEB,\\ \angle QPF=\angle BPE,\\ PF=PE,\end{cases}$$

$\therefore \triangle PQF\cong\triangle PBE$（AAS）.

$\therefore PB=PQ$.

【点拨】本题考查了正方形的性质、全等三角形的判定和性质、角平分线的性质定理等知识．解题的关键是正确添加常用辅助线，构造全等三角形.

变式训练四

（1）**证明：**$\because$四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore BC=DC$，

$\angle BCP=\angle DCE=90°$.

在$\mathrm{Rt}\triangle BCP$和$\mathrm{Rt}\triangle DCE$中，

$$\begin{cases}BC=DC,\\ BP=DE,\end{cases}$$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BCP\cong\mathrm{Rt}\triangle DCE$（HL）.

$\therefore CP=CE$.

$\because$四边形$PCEF$是矩形，

$\therefore$矩形$PCEF$是正方形.

（2）**解：**当点P是CD的中点时，$AP=DE$．理由如下：

$\because$四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore AD=BC$，

$\angle ADP=\angle BCP=90°$.

当P是CD的中点时，$CP=DP$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ADP$和$\mathrm{Rt}\triangle BCP$中，

$$\begin{cases}AD=BC,\\ DP=CP,\end{cases}$$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ADP\cong\mathrm{Rt}\triangle BCP$（HL）.

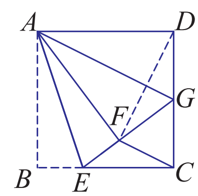
$\therefore AP=BP$.

$\because BP=DE$，

$\therefore AP=DE$.

培优精练

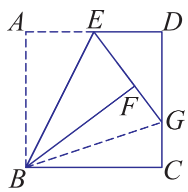
1. B　**【解析】**如下图，连接DF.



$\because$四边形$ABCD$是正方形，$\therefore AB=AD=BC=CD=BE+EC=4+8=12$，$\angle ABE=\angle BAD=\angle ADG=\angle ECG=90°$．由翻折可知$AB=AF$，$\angle ABE=\angle AFE=\angle AFG=90°$，$BE=EF=4$，$\angle BAE=\angle FAE$．$\because \angle AFG=\angle ADG=90°$，$AG=AG$，$AD=AF$，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AGD\cong\mathrm{Rt}\triangle AGF$（HL）．$\therefore DG=FG$，$\angle GAF=\angle GAD$．$\therefore \angle EAG=\angle FAE+\angle GAF=\frac{1}{2}(\angle BAF+\angle DAF)=45°$，故①正确．设$DG=FG=x$，则$EG=EF+FG=4+x$，$CG=DC-DG=12-x$．在$\mathrm{Rt}\triangle ECG$中，$\because EG^2=EC^2+CG^2$，$\therefore (4+x)^2=8^2+(12-x)^2$．解得$x=6$．$\therefore DG=GC=6$.

$\therefore FG=GC$. 易知$\triangle GFC$不是等边三角形，显然$FG\neq FC$，故②错误. $\because GF=GD=GC$，$\therefore \angle DFC=90°$. $\therefore CF\perp DF$. $\because AD=AF$，$DG=FG$，$\therefore AG\perp DF$. $\therefore CF\parallel AG$，故③正确. $\because S_{\triangle ECG}=\frac{1}{2}\times 6\times 8=24$，$FG:FE=6:4=3:2$，$\therefore FG:EG=3:5$. $\therefore S_{\triangle GFC}=\frac{3}{5}\times 24=\frac{72}{5}$，故④错误. 故选 B.

2. $\frac{4}{3}$ 【解析】如下图，连接BG.



$\because$四边形$ABCD$是正方形，$\therefore AB=BC=4$，$\angle A=\angle ABC=\angle C=90°$. 由折叠，得$AB=BF=BC=4$，$AE=EF=\frac{1}{2}AD=2=DE$，$\angle A=\angle BFE=90°=\angle C$，$\because \angle BFE+\angle BFG=180°$，$\therefore \angle C=\angle BFG=90°$. 在$Rt\triangle BFG$和$Rt\triangle BCG$中，$\begin{cases}BF=BC,\\BG=BG,\end{cases}$ $\therefore Rt\triangle BFG\cong Rt\triangle BCG$（HL）. $\therefore FG=CG$. 设$FG=CG=x$，则$DG=4-x$，$EG=2+x$. 在$Rt\triangle DEG$中，$EG^2=DE^2+DG^2$，即$(2+x)^2=2^2+(4-x)^2$. 解得$x=\frac{4}{3}$，即CG的长度是$\frac{4}{3}$.

3. （1）**证明：**$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AO=CO$.

又$\because \triangle ACE$是等边三角形，

$\therefore EO\perp AC$，

即$AC\perp BD$.

$\therefore \square ABCD$是菱形.

（2）**解：**$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AO=CO$.

又$\because \triangle ACE$是等边三角形，

$\therefore EO$平分$\angle AEC$.

$\therefore \angle AED=\frac{1}{2}\angle AEC=\frac{1}{2}\times 60°=30°$.

又$\because \angle AED=2\angle EAD$，

$\therefore \angle EAD=\frac{1}{2}\angle AED=15°$.

$\therefore \angle ADO=\angle EAD+\angle AED=15°+30°=45°$.

$\therefore \angle ADC=2\angle ADO=90°$.

由（1）知$\square ABCD$是菱形.

$\therefore \square ABCD$是正方形.

4. （1）**证明：**$\because$四边形$ABCD$是矩形，

$\therefore AB=DC$，$\angle A=\angle D=90°$.

$\because M$为AD的中点，

∴$AM=DM$，

在△ABM和△DCM，

$\begin{cases} AM=DM, \\ \angle A=\angle D, \\ AB=DC, \end{cases}$

∴△ABM≌△DCM（SAS）.

（2）**解：** 当 $AB:AD=1:2$ 时，四边形 $MENF$ 是正方形．理由如下：

当 $AB:AD=1:2$ 时，

∴$AB=\frac{1}{2}AD$.

∵$AM=\frac{1}{2}AD$，

∴$AM=AB$.

∴$\angle AMB=45°$.

同理可得$\angle DMC=45°$.

∴ $\angle EMF=180°-\angle AMB-\angle DMC=90°$.

∵△ABM≌△DCM.

∴$BM=CM$.

∵M、N 分别是边 AD、BC 的中点，E、F 分别是线段 BM、CM 的中点，

∴$FN\parallel BM$，$EN\parallel CM$，

$ME=MF$.

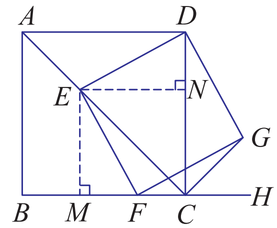
∴四边形 $MENF$ 是菱形.

∵ $\angle EMF=90°$，

∴四边形 $MENF$ 是正方形.

名卷压轴题

（1）**证明：** 如图所示，过点 E 作 $EM\perp BC$ 于点 M，作 $EN\perp CD$ 于点 N.



∵四边形 $ABCD$ 为正方形，

∴$\angle BCD=90°$，$\angle ECN=45°$.

∴ $\angle EMC=\angle ENC=\angle BCD=90°$，且 $NE=NC$.

∴四边形 $EMCN$ 为正方形.

∴$EM=EN$.

∵四边形 $DEFG$ 是矩形，

∴$\angle DEF=90°$.

∴ $\angle DEN+\angle NEF=\angle MEF+\angle NEF=90°$.

∴$\angle DEN=\angle MEF$.

在△DEN和△FEM中，

$\begin{cases} \angle DNE=\angle FME, \\ EN=EM, \\ \angle DEN=\angle FEM, \end{cases}$

∴△DEN≌△FEM（ASA）.

∴$ED=EF$.

∴矩形 $DEFG$ 为正方形.

（2）**解：** $CE+CG=\sqrt{2}BC$．理由如下：

∵矩形 $DEFG$ 为正方形，

∴$DE=DG$，

$\angle EDC+\angle CDG=90°$.

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AD=DC$，

$\angle ADE+\angle EDC=90°$.

$\therefore \angle ADE=\angle CDG$.

在$\triangle ADE$和$\triangle CDG$中，

$$\begin{cases}AD=CD,\\ \angle ADE=\angle CDG,\\ DE=DG,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE\cong\triangle CDG$（SAS）.

$\therefore AE=CG$.

$\because$在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，

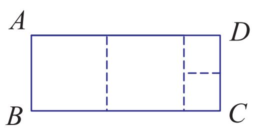
$AC=AE+CE=\sqrt{2}BC$，

$\therefore CE+CG=\sqrt{2}BC$.

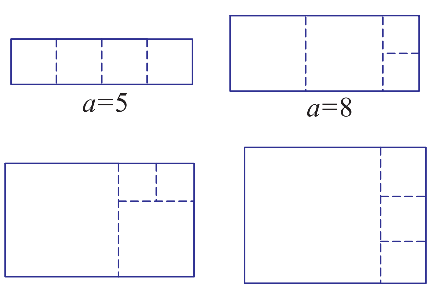
◎矩形、菱形与正方形

新题型探究

例题　（1）**解：** 矩形$ABCD$是“3阶奇异矩形”，裁剪线的示意图如下.



（2）**解：** 裁剪线的示意图如下.



$a=5$　$a=8$

$a=12$　$a=15$

【点拨】 此题主要考查了矩形的性质，正方形的性质及对新定义的理解. 解题的关键是注意根据数据的特点进行分类讨论作图.

变式训练

（1）**证明：** 由矩形的性质可知$\angle BMN=\angle N=90°$.

由折叠可知$\angle MBC=\angle N=90°$，$MN=MB$.

$\therefore \angle BMN=\angle N=\angle MBC=90°$.

$\therefore$四边形$MNCB$是矩形.

又$\because MN=MB$，

$\therefore$矩形$MNCB$是正方形.

（2）**解：** $\because MN=4$，

$\therefore$图3中，$AC=2$.

在$\triangle ABC$中，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.

由折叠可知$AD=AB=2\sqrt{5}$.

$\therefore BE=CD=AD-AC=2\sqrt{5}-2$.

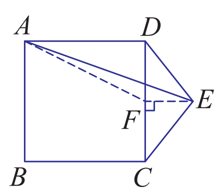
又$\because DE=BC=MN=4$，

$\therefore \dfrac{BE}{BC}=\dfrac{2\sqrt{5}-2}{4}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$\therefore$矩形$BCDE$为“黄金矩形”.

培优精练

（1）**解：** 过点E作$EF\perp CD$于点F，连接AF，如下图.



$\because$四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore AD=CD=4$，$\angle ADC=90°$.

$\because DE=CE$，$EF\perp CD$，

$\therefore DF=CF=\dfrac{1}{2}CD=2$，

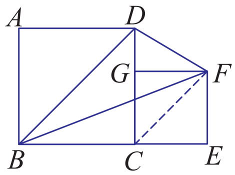
$\angle ADC=\angle EFD=90°$.

$\therefore AD/\!/EF$.

由（1）可知 $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle ADF}$.

$\therefore S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AD\times DF=\frac{1}{2}\times 4\times 2=4$.

（2）在图 3 中，连接 CF，如下图.



$\because$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $CEFG$ 都是正方形，

$\therefore \angle BDC=45°$，$\angle GCF=45°$，$BC=CD=AD=4$.

$\therefore \angle BDC=\angle GCF$.

$\therefore BD/\!/CF$.

由（1）可知 $S_{\triangle BDF}=S_{\triangle BCD}$.

$\therefore S_{\triangle BDF}=\frac{1}{2}BC\times CD=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$.

第二十章　数据的整理与初步处理

例一　33　**【解析】**由扇形统计图，得捐款 100 元的学生有：$50\times 12\%=6$（人），则捐款 10 元的学生有：$50-4-19-11-6=10$（人）. 由条形统计图知该班同学共捐款：$5\times 4+10\times 10+20\times 19+50\times 11+100\times 6=1\ 650$（元），则平均每人捐款 $\frac{1\ 650}{50}=33$（元）.

【点拨】本题考查了从扇形统计图、条形统计图中提取信息的能力. 解答本题的关键是从众多的图上信息中提取出解题需要的信息.

变式训练一

C　**【解析】**由表可知，这 5 天中，平均每件产品 A 的售价为 $\frac{1}{110+100+80+60+50}\times(90\times 110+95\times 100+100\times 80+105\times 60+110\times 50)=98$（元/件）. 故选 C.

例二　（1）80　**【解析】**$(1+1)+(2+1)+(2+2)+(4+3)+(9+11)+(14+13)+(5+7)+(2+1)+(1+1)=2+3+4+7+20+27+12+3+2=80$（人）.

（2）26.4　27　27　**【解析】**这部分男生体育成绩的总得分为 $22+23\times 2+24\times 2+25\times 4+26\times 9+27\times 14+28\times 5+29\times 2+30\times 1=1\ 056$（分），则这部分男生体育成绩的平均数为 $\frac{1\ 056}{40}=26.4$. 男生体育成绩出现次数最多的是 27 分，则众数为 27.

抽取的这部分女生共有 $1+1+2+3+11+13+7+1+1=40$（人），把她们的成绩从低到高排列后，第 20 和第 21 位同学的成绩分别

为 27 分、27 分，则女生体育成绩的中位数为 27.

(3) 解：所抽查的学生中，不低于 27 分的有 (14+13)+(5+7)+(2+1)+(1+1)=44（人）.

所占的百分比为$\frac{44}{80}\times100\%$.

$\because 720\times\frac{44}{80}\times100\%=396$（人），

$\therefore$估计这 720 名考生中成绩为优秀的学生大约有 396 人.

【点拨】本题考查了众数、平均数、中位数的概念以及条形统计图和用样本估计总体.

变式训练二

D 【解析】把这组数据从小到大排列为 10、13、15、15、20，最中间的数是 15，则这组数据的中位数是 15. 由于出现的次数最多的是 15，出现了 2 次，则众数是 15. 故选 D.

例三 (1)

八年级	平均数	中位数	众数
(1) 班	85	85	85
(2) 班	85	80	100

【解析】八年级 (1) 班 5 名同学的分数从小到大排列为 80、85、85、85、90，则中位数是 85，众数是 85. 八年级 (2) 班 5 名同学的成绩分别为 100、70、80、100、75，则平均数是$\frac{1}{5}(100+70+80+100+75)=85$. 出现次数最多的是 100，故众数是 100.

(2) 解：两个班的平均分相同，但八年级 (1) 班的中位数高，所以八年级 (1) 班的成绩较好.

(3) 解：如果两个班各选 2 名同学参加决赛，八年级 (2) 班的实力更强.

虽然两个班的平均分相同，但是八年级 (2) 班前 2 名的成绩较好.

故八年级 (2) 班的实力更强.

【点拨】本题考查的是条形统计图的综合运用，读懂条形统计图，从中得到必要的信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据.

变式训练三

解：(1) $\because$甲厂的平均数为$(7+8+9+9+9+11+13+14+16+17+19)\div11=12$，

$\therefore$甲厂的广告利用了平均数进行广告宣传.

$\because$乙厂数据中 12 出现的次数最多，为 3 次，故众数是 12.

$\therefore$乙厂的广告利用了众数进行广告宣传.

$\because$丙厂数据中的中位数是 12，

$\therefore$丙厂的广告利用了中位数进行

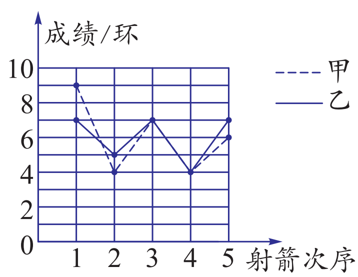
广告宣传.

(2) 选购甲厂的产品. 理由如下：因为甲厂的平均数较真实地反映灯管的使用寿命.

或选用丙厂的产品，因为丙厂有一半以上的灯管使用寿命超过 12 个月.

例四 (1) 4 6 【解析】由题意，得甲的总成绩为 $9+4+7+4+6=30$（环），则 $a=30-7-5-7-7=4$，$\overline{x_乙}=30\div5=6$.

(2) **解**：如下图所示.



(3) ①乙 【解析】观察折线图，可看出乙的成绩比较稳定.

解：由 (1) 知 $\overline{x_乙}=6$.

则 $s_乙^2=\frac{1}{5}[(7-6)^2+(5-6)^2+(7-6)^2+(4-6)^2+(7-6)^2]=1.6$.

因为 $s_乙^2<s_甲^2$，

所以乙成绩比较稳定.

②因为两人成绩的平均数相同，均为 6，

又乙的成绩比甲稳定，

所以乙将被选中.

【点拨】本题考查了折线图的意义、平均数、方差等知识. 根据已知得出 a 的值，进而利用方差的意义比较稳定性，正确记忆方差公式是解题关键.

变式训练四

(1) 86 85 85 【解析】八 (2) 班的平均分 $a=(79+85+92+85+89)\div5=86$.

将八 (1) 班的前 5 名同学的成绩按从小到大的顺序排列为：77、85、85、86、92，第三个数是 85，所以中位数 $b=85$. 因为这 5 名同学的成绩中 85 出现的次数最多，所以众数 $c=85$.

(2) **解**：八 (2) 班的方差 $s_{八(2)班}^2=[(79-86)^2+(85-86)^2+(92-86)^2+(85-86)^2+(89-86)^2]\div5=19.2$.

由 (1) 可知，两个班成绩的中位数相同，众数也相同，但八 (2) 班的平均分更高且方差更小，则八 (2) 班的成绩更稳定，

∴八 (2) 班前 5 名同学的成绩较好.

培优精练

1. B 【解析】共 100 个数，中间的两个数为第 50 个数和第 51 个数，而第 50 个数和第 51 个数都落在第三组，则参加社团活动时间的中位数所在的范围为 6～8. 故选 B.

2. 78.8 【解析】∵甲的综合成绩为 $80\times60\%+76\times40\%=78.4$（分），乙的综合成绩为 $82\times60\%+74\times40\%=78.8$（分），丙的综合成绩为 $78\times60\%+78\times40\%=78$（分），∴被录取的教师为乙，其综合成绩为 78.8 分.

3.（1）320　210　210 【解析】平均数 $=\frac{1}{15}\times(1\ 800+510+250\times3+210\times5+150\times3+120\times2)=320$. 共 15 位营销员，按销售量从低到高排列，第 8 位的销售量为 210 件，故中位数是 210. 销售量中，210 出现的次数最多，故众数为 210.

（2）解：假设销售部把每位营销员的月销售定额定为 320 件，是不合理的. 理由如下：

由表格中的数据可知，15 位营销人员中有 12 位可能达不到要求，故不合理.

可以将 210 件作为销售定额，理由如下：

由表格中的数据可知，有一半以上的营销人员都能达到要求，故可以将 210 元作为销售定额.

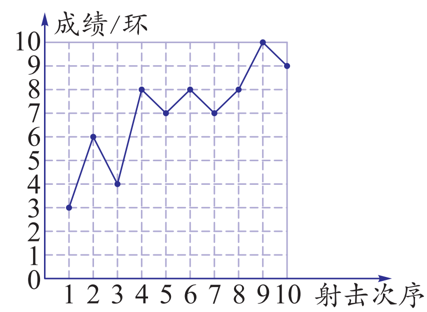
（3）由表格中的数据可知，辞职的可能是销售 1 800 件或销售 510 件这两个销售件数上的员工.

名卷压轴题

（1）7　8 【解析】从条形统计图可知，把甲队员的射击训练成绩按从低到高排列后，第 5 次和第 6 次的射击成绩均为 7 环，则 $a=7$. 从折线统计图可知，乙队员第 6 次的射击成绩为 $7\times10-(3+6+4+8+7+7+8+10+9)=8$（环）. 则乙队员的射击成绩中，8 环出现的次数最多，故众数 $b=8$.

（2）由（1）可知第 6 次的射击成绩为 8 环，补充完整的折线统计图如下图所示.

乙运动员射击训练成绩的折线统计图



（3）从中位数和方差看，甲队员的成绩比较稳定，若保出线选甲队员参赛.

从众数看，乙队员的高分较多，若要争名次，则选乙队员参赛.

◎数据的整理与初步处理

新题型探究

例题 解：∵有 23 名男生是全年订阅的，

∴只订阅了上半年的男生有 25－

23=2（人），

只订阅了下半年的男生有 26－23=3（人）.

则全年一共有男生 23+2+3=28（人）订阅了该学习报，

那么全年一共有女生 56－28=28（人）订阅了该学习报.

设订阅全年的女生有 x 人，

则 $(15-x)+(25-x)+x=28$.

解得 $x=12$.

又 15－12=3（人），

∴只在上半年订阅该学习报的女生有 3 人.

【点拨】此题主要考查了数据处理的方法、一元一次方程在实际问题中的应用. 解题的突破口在于利用有 23 名男生订阅全年，由此分别得到只订上半年的男生人数和只订下半年的男生人数，再列出方程，解决问题.

变式训练

1. **解：**因为所去游览的方式可分为(故宫)，(景山公园)，(北海公园)，(故宫，景山公园)，(故宫，北海公园)，(北海公园，景山公园)，共 6 种，看作 6 个抽屉，而共有 1 987 人. 由抽屉原理可知，必有 $\left[\frac{1\,987}{6}\right]+1=332$（人）游览的方式相同，所以至少有 332 人游览的方式完全相同.

2. **解：**设三项竞赛都参加的有 x 人，

依题意有 $39+49+41-14-13-9+x=100-1$，

解得 $x=6$.

故三项竞赛都参加的有 6 人.

培优精练

1. B　**【解析】**共有 5 个人，A 赛了 4 盘，则 A 与 B、C、D、E 每人赛 1 盘；B 赛了 3 盘，因为 D 赛了 1 盘，则这 3 盘一定是与 A、C、E 的比赛；C 赛了 2 盘，是与 A 和 B 赛的. 则 E 一共赛了 2 盘，是与 A 和 B 赛的. 故选 B.

2. **解：**设 x_A、x_B、x_C 分别表示答对题 A、题 B、题 C 的人数.

则有 $\begin{cases} x_A+x_B=29, & ① \\ x_A+x_C=25, & ② \\ x_B+x_C=20, & ③ \end{cases}$

三式相加，得 $x_A+x_B+x_C=37$. ④

由④－①，得 $x_C=8$.

同理可得 $x_A=17$，$x_B=12$.

∵三道题全答对的有 1 人，答对其中两道题的有 15 人，

∴全班有 $(17+12+8)-(1\times2+15)=20$（人）.

∴此次知识竞赛的平均成绩为 $\frac{17\times20+(12+8)\times25}{20}=42$（分）.

故这个班此次知识竞赛的平均成绩是 42 分.