参考答案

第二十六章　二次函数

第1讲　二次函数的图象与性质

例一　B　【解析】由抛物线可知，$a>0$，$b<0$，$c<0$，∴一次函数 $y=ax+b$ 的图象经过第一、三、四象限，反比例函数 $y=\frac{c}{x}$ 的图象在第二、四象限．故选B.

【点拨】本题考查的是二次函数、一次函数和反比例函数的图象与系数的关系．掌握二次函数、一次函数和反比例函数的性质是解题的关键.

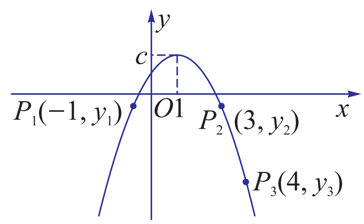
变式训练一

1. D　【解析】∵二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象开口方向向下，∴$a<0$．又对称轴在 y 轴的左边，∴$x=-\frac{b}{2a}<0$．∴$b<0$．∴反比例函数 $y=-\frac{a}{x}$ 的图象在第一、三象限，正比例函数 $y=bx$ 的图象经过第二、四象限．故选D.

2. D　【解析】根据题意，$ab>0$，即 a、b 同号．当 $a>0$ 时，$b>0$，$y=ax^2$ 开口向上，过原点；$y=ax+b$ 经过第一、二、三象限．此时，没有选项符合．当 $a<0$ 时，$b<0$，$y=ax^2$ 开口向下，过原点；$y=ax+b$ 经过第二、三、四象限．此时，D选项符合.

例二　D　【解析】(方法一) 当 $x=-1$ 时，$y_1=-0.6\times(-1-1)^2+c=-2.4+c$；当 $x=3$ 时，$y_2=-0.6\times(3-1)^2+c=-2.4+c$；当 $x=4$ 时，$y_3=-0.6\times(4-1)^2+c=-5.4+c$．∴$y_1=y_2>y_3$.

(方法二) 根据题意，画出二次函数的大致图象如下图所示.



∵点 P_1 与点 P_2 关于抛物线对称轴 $x=1$ 对称，∴$y_1=y_2$．由图可知，$y_2>y_3$，∴$y_1=y_2>y_3$.

【点拨】本类型问题有两种解法．方法一：代数法，通过代值计算进行比较．方法二：几何法，利用图象对称性和增减性进行比较．当开口向下时，抛物线上离对称轴越近的点，其对应的纵坐标越大；开口向上时，则相反.

变式训练二

1. B　【解析】∵$a<0$，对称轴为

$x=1$，∴当$x<1$时，y随x的增大而增大．又$x_1<x_2<1$，∴$y_1<y_2$．

2. $y_3<y_2<y_1$ 【解析】根据$a<-2$可知，函数图象的开口向下．则离对称轴越近的点，其位置越高，对应的函数值越大；反之，函数值越小．∵各点到直线$x=\frac{4a}{2a}=2$的距离分别为$|(4-a)-2|=2-a$、$|(a-1)-2|=3-a$、$|(a-2)-2|=4-a$，又$2-a<3-a<4-a$，∴$y_3<y_2<y_1$．

例三 ②③④ 【解析】由题意可知，$a>0$、$b<0$、$c<0$．∴$abc>0$，故①错误．由图象可知，对称轴$x=-\frac{b}{2a}>0$且对称轴$x=-\frac{b}{2a}<1$，∴$2a+b>0$，故②正确．由图象可知，当$x=-1$时，$y=2$，∴$a-b+c=2$．当$x=1$时，$y=0$，∴$a+b+c=0$．联立，得$\begin{cases}a-b+c=2,\\a+b+c=0.\end{cases}$∴$a+c=1$，故③正确．∵$a+c=1$，移项，得$a=1-c$，又$c<0$，∴$a>1$，故④正确．

【点拨】本题主要考查二次函数$y=ax^2+bx+c$系数符号的确定，以及根据图象上的特定的点确定a、b、c之间的等量关系．

变式训练三

1. ②④⑤ 【解析】由图象可知，抛物线开口向下，则$a<0$．抛物线与y轴相交于y轴正半轴，则$c>0$．抛物线的对称轴为直线$x=-\frac{b}{2a}=-1<0$，即$b=2a<0$，∴$abc>0$．结论①错误．∵抛物线与x轴有两个交点，∴$\Delta=b^2-4ac>0$，即$4ac-b^2<0$．结论②正确．∵抛物线的对称轴为$x=-1$，且$x=0$时，$y>0$，∴由对称性可知，当$x=-2$时，$y=4a-2b+c>0$，即$4a+c>2b$．结论③错误．∵$b=2a$，∴$a=\frac{1}{2}b$．由图象可知，当$x=1$时，$y=a+b+c=\frac{3b}{2}+c<0$，故$3b+2c<0$，结论④正确．由图象可知，当$x=-1$时，y取得最大值，∵$m\neq-1$，∴$am^2+bm+c<a-b+c$，即$am^2+bm+b<a$．∴$m(am+b)+b<a$．结论⑤正确．

2. 3 【解析】由图象可知，抛物线与x轴有两个交点，∴$b^2-4ac>0$．∴①错误．∵顶点为$D(-1,2)$，∴抛物线的对称轴为直线$x=-1$．∵抛物线与x轴的一个交点A在点$(-3,0)$和$(-2,0)$之间，∴由对称性可知，抛物线与x轴的另一个交点在点$(0,0)$和$(1,0)$之间．∴当$x=1$时，$y<0$，∴$a+b+c<0$．∴②正

确. ∵图象过$D(-1,2)$,∴$a-b+c=2$. ∵抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=-1$,∴$b=2a$. ∴$a-2a+c=2$,即 $c-a=2$. ∴③正确. ∵当 $x=-1$ 时,二次函数取最大值为 2,方程 $ax^2+bx+c=2$ 的根可看作是二次函数图象与直线 $y=2$ 相交所得交点的横坐标,∴方程 $ax^2+bx+c-2=0$ 有两个相等的实数根. ∴④正确. 综上所述,共有 3 个正确结论.

例四 C **【解析】**∵抛物线开口向下,与 y 轴的交点位于 y 轴正半轴,∴$a<0$,$c>0$. ∵对称轴为 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{3}$,∴$2a=3b<0$. ∴$abc>0$. 故①⑤正确. ∵当 $x=-1$ 时,$y>0$,∴$a-b+c>0$. 故②错误. 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时,$y>0$,∴$\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b+c>0$,即 $a-2b+4c>0$. 故④正确. ∵$a-b+c>0$,$2a=3b$,∴$\frac{3}{2}b-b+c>0$,即 $b+2c>0$. 故③正确. 综上可知正确的结论有①③④⑤,共 4 个.

【点拨】本题综合考查了二次函数的图象与系数的关系:(1) 二次项系数 a 决定抛物线的开口方向;(2) 一次项系数 b 和二次项系数 a 共同决定对称轴的位置;(3) 常数项 c 决定抛物线与 y 轴交点的位置. 当二次函数与 x 轴的交点不明确的时候,可通过观察交点横坐标附近的特殊点所对应的函数值的符号来判断不等式的正负性.

变式训练四

①③④⑤ **【解析】**∵抛物线开口向上,∴$a>0$. ∵对称轴在 y 轴右侧,∴a、b 异号. ∵抛物线与 y 轴交点在 y 轴负半轴,∴$c<0$. ∴$abc>0$. 故①正确. ∵抛物线与 x 轴的一个交点为$A(-1,0)$,对称轴为直线 $x=1$,∴抛物线与 x 轴的另一个交点为 $(3,0)$. ∴当 $x=2$ 时,$y<0$,即 $4a+2b+c<0$. 故②错误. ∵二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 y 轴的交点在 $(0,-1)$ 的下方,对称轴在 y 轴右侧,∴函数最小值$\frac{4ac-b^2}{4a}<-1$. 又 $a>0$,∴$4ac-b^2<-4a$. ∴③正确. ∵抛物线与 y 轴的交点 B 在 $(0,-2)$ 和 $(0,-1)$ 之间,∴$-2<c<-1$. 又 $-\frac{b}{2a}=1$,即 $b=-2a$;抛物线过点 $(-1,0)$,即 $a-b+c=0$,整理得 $c=-3a$,∴$-2<-3a<-1$. ∴$\frac{1}{3}<a<\frac{2}{3}$. 故④正确. ∵$a>0$,

$\therefore b-c>0$，即 $b>c$．故⑤正确．综上所述，正确的结论有①③④⑤．

培优精练

1. B　【解析】∵函数 $y=ax+b$ 的图象经过一、二、三象限，$\therefore a>0$，$b>0$．当 $a>0$ 时，二次函数 $y=ax^2+bx$ 的图象开口向上，排除 D．当 $a>0$，$b>0$ 时，对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}<0$，排除 A、C．故选 B．

2. $a\leqslant 1$　【解析】由二次函数图象可知，当 $x<1$ 时，y 随 x 的增大而增大，所以 $a\leqslant 1$．

3. 5　【解析】∵图象与 x 轴有两个交点，$\therefore b^2-4ac>0$．故①正确．∵由图可知，当 $x=-1$ 时，$y>0$，即 $a-b+c>0$，$\therefore a+c>b$．故②正确．∵抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点 $A(-3,0)$，对称轴为直线 $x=-1$，∴抛物线与 x 轴另一个交点为 $(1,0)$．$\therefore a+b+c=0$．故③正确．∵抛物线的开口向下，$\therefore a<0$．∵对称轴为 $x=-\dfrac{b}{2a}=-1$，$\therefore b=2a$．∵抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点 $A(-3,0)$，$\therefore 9a-3b+c=0$．将 $b=2a$ 代入，得 $9a-6a+c=0$，$\therefore c=-3a$．$\therefore 8a+c=5a<0$，故④正确．由④可知，$b=2a$，$c=-3a$，$\therefore a:b:c=1:2:(-3)$．故⑤正确，故正确结论的个数是 5．

名卷压轴题

解：(1) 令 $y=0$，得 $-x^2+2x=0$．

解得 $x_1=0$，$x_2=2$．

$\therefore A(2,0)$．

$\because x=-\dfrac{2}{2\times(-1)}=1$，

∴抛物线的对称轴为直线 $x=1$．

(2) 如图 1，连接 BD．

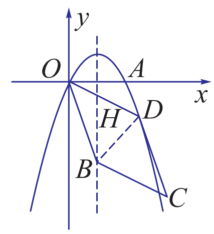


图 1

∵点 B 在抛物线的对称轴上，且点 B 的纵坐标是 -3，

$\therefore B(1,-3)$．

∵点 D 在抛物线上，且点 D 的横坐标是 $\dfrac{5}{2}$，

$\therefore D\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{5}{4}\right)$．

设直线 OD 的解析式为 $y=kx$，代入点 D，则 $-\dfrac{5}{4}=\dfrac{5}{2}k$．

解得 $k=-\dfrac{1}{2}$．

∴直线 OD 的解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}x$．

设抛物线的对称轴交 OD 于点 H，

$\therefore H\left(1,\ -\frac{1}{2}\right)$.

$\therefore BH=-\frac{1}{2}-(-3)=\frac{5}{2}$.

$\therefore S_{平行四边形OBCD}=2S_{\triangle OBD}=2\times\frac{1}{2}\times BH\times|x_D-x_O|=2\times\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}=\frac{25}{4}$.

(3) 设点 B 为 $(1,\ -m)$，点 D 为 $(n,\ -n^2+2n)$.

$\because$ 四边形 $OBCD$ 是平行四边形，

$\therefore OB\parallel DC$，$OB=DC$.

将点 O 向右平移 1 个单位长度，再向下平移 m 个单位长度后得到点 B，将点 D 向右平移 1 个单位长度，再向下平移 m 个单位长度后得到点 C.

$\therefore$ 点 C 为 $(n+1,\ -n^2+2n-m)$.

$\because$ 点 C 在抛物线上，

$\therefore -n^2+2n-m=-(n+1)^2+2(n+1)$.

$\therefore m=2n-1$.

如图 2，连接 OD，BD，OD 与对称轴交于点 E.

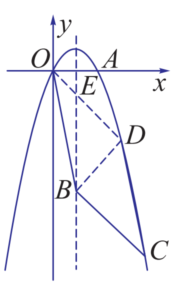


图 2

设直线 OD 的解析式为 $y=k_2x$，将点 D 代入，得 $-n^2+2n=k_2n$.

$\therefore k_2=2-n$.

$\therefore$ 直线 OD 的解析式为 $y=(2-n)x$.

当 $x=1$ 时，$y=2-n$.

$\therefore$ 点 $E(1,\ 2-n)$.

$\therefore EB=2-n-(-m)=n+1$.

$\because$ 平行四边形 $OBCD$ 的面积为 12，

$\therefore S_{\triangle OBD}=6=\frac{1}{2}\times EB\times|x_D-0|=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$.

解得 $n_1=-4$（舍去），$n_2=3$.

此时 $m=2\times3-1=5$，

$n+1=4$，$-n^2+2n-m=-8$.

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(4,\ -8)$.

第 2 讲　求二次函数的表达式

例一　解： (1) 把 $B(-2,\ 6)$、$C(2,\ 2)$ 两点坐标代入抛物线解析式，得

$\begin{cases}4a-2b+2=6,\\4a+2b+2=2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\b=-1.\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2-x+2$.

(2) $\because y=\frac{1}{2}x^2-x+2=\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{3}{2}$，

$\therefore$ 顶点 D 的坐标为 $\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$.

$\therefore \triangle BCD$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times(2+6)\times 4-\frac{1}{2}\times\left(2+\frac{3}{2}\right)\times 1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}+6\right)\times 3=3$.

【点拨】本题考查了二次函数图象上的坐标特征，待定系数法求函数的解析式. 运用割补法求出三角形的面积是解决问题的关键.

变式训练一

1. 解：（1）根据二次函数的图象可知，$A(-1,0)$、$B(0,-3)$、$C(4,5)$.

把 $A(-1,0)$、$B(0,-3)$、$C(4,5)$ 代入 $y=ax^2+bx+c$，得

$$\begin{cases}a-b+c=0,\\ c=-3,\\ 16a+4b+c=5.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=-2,\\ c=-3.\end{cases}$

故二次函数的解析式为 $y=x^2-2x-3$.

（2）$\because y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，

$\therefore$ 此抛物线的顶点坐标为 $(1,-4)$，对称轴为 $x=1$.

2. 解：（1）把 A、B、C 三点的坐标代入函数解析式，得

$$\begin{cases}9a-3b+c=0,\\ 25a+5b+c=0,\\ c=5.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{3},\\ b=\frac{2}{3},\\ c=5.\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+5$.

(2) $\because y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+5=-\frac{1}{3}(x-1)^2+\frac{16}{3}$，

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 $\left(1,\frac{16}{3}\right)$.

$\therefore$ 当抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 向下平移 $\frac{13}{3}$ 个单位长度，再向右平移 $n(n>0)$ 个单位长度后，得到的新抛物线的顶点 M 的坐标为 $(1+n,1)$.

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+m$，把 B、C 两点的坐标代入，

得 $\begin{cases}5k+m=0,\\ m=5.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-1,\\ m=5.\end{cases}$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y=-x+5$.

令 $y=1$，则 $1=-x+5$，

解得 $x=4$.

$\because$ 新抛物线的顶点 M 在 $\triangle ABC$ 内，

$\therefore 1+n<4$，且 $n>0$.

解得 $0<n<3$.

则 n 的取值范围为 $0<n<3$.

例二　解：（1）设二次函数的解析式为 $y=a(x-2)^2-1(a\neq0)$，

将点 $B(3,0)$ 代入，得

$a(3-2)^2-1=0$.

解得 $a=1$.

$\therefore$ 二次函数的解析式为 $y=(x-2)^2-1$，

即 $y=x^2-4x+3$.

（2）①令 $y=0$，则 $x^2-4x+3=0$，

解得 $x_1=1$，$x_2=3$.

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(1,0)$.

$\because$ 顶点 $P(2,-1)$，

$\therefore \angle PAB=45^\circ$.

$\because AQ\perp PA$，

$\therefore \angle BAQ=90^\circ-45^\circ=45^\circ$.

易得直线 AQ 的解析式为 $y=x-1$.

联立 $\begin{cases}y=x^2-4x+3,\\ y=x-1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=0,\end{cases}\begin{cases}x_2=4,\\ y_2=3.\end{cases}$

$\therefore$ 点 Q 的坐标为 $(4,3)$.

由勾股定理，得

$AP=\sqrt{(2-1)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{2}$，

$AQ=\sqrt{(4-1)^2+(3-0)^2}=3\sqrt{2}$，

$\therefore S_{\triangle PAQ}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=3$.

②$\because P(2,-1)$、$Q(4,3)$，

$\therefore S_{\triangle APM}:S_{\triangle AMQ}=1:3$.

$\therefore \frac{MP}{MQ}=\frac{S_{\triangle APM}}{S_{\triangle AMQ}}=\frac{1}{3}$.

【点拨】 本题是二次函数综合题型，主要利用了待定系数法求二次函数的解析式，联立两函数解析式求交点坐标，两点间的距离的求解，等底的三角形的面积的比等于高的比，等高的三角形的面积的比等于底边的比.

变式训练二

1. D　**【解析】** 由题意知抛物线的对称轴为直线 $x=-1$，设二次函数的解析式为 $y=a(x+1)^2+k$，将 $(-3,0)$、$(0,3)$ 代入，得

$\begin{cases}4a+k=0,\\ a+k=3.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\ k=4.\end{cases}$ 则二次函数的解析式为 $y=-(x+1)^2+4=-x^2-2x+3$. 故选 D.

2. 解：（1）设抛物线的解析式是 $y=-(x-1)^2+k$.

把 $A(-1,0)$ 代入，得

$0=-(-1-1)^2+k$.

解得 $k=4$.

则新抛物线的解析式是 $y=-(x-1)^2+4$，

即 $y=-x^2+2x+3$.

（2）在 $y=-x^2+2x+3$ 中，

令 $x=0$，则 $y=3$，

即点 C 的坐标是 $(0,3)$，$OC=3$.

易得点 B 的坐标为 $(3,0)$，

$\therefore OB=3$.

$\therefore OC=OB$.

则$\triangle OBC$是等腰直角三角形.

$\therefore \angle OCB=45°$.

如下图，过点 N 作 $NH\perp y$ 轴，垂足是 H.

$\because \angle NCB=90°$，

$\therefore \angle NCH=45°$.

$\therefore NH=CH$.

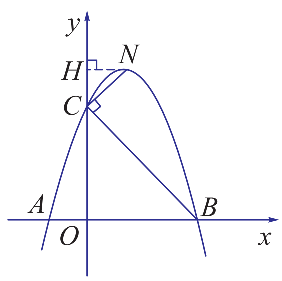
$\therefore HO=OC+CH=3+CH=3+NH$.

设点 N 的坐标是（a，$-a^2+2a+3$）.

$\therefore a+3=-a^2+2a+3$.

解得 $a_1=0$（舍去），$a_2=1$，

$\therefore$点 N 的坐标是（1，4）.



例三　解：（1）$\because$二次函数的图象与 x 轴交于 $A(-3，0)$ 和 $B(1，0)$ 两点，

$\therefore$设二次函数的解析式为 $y=a(x+3)(x-1)$.

把 $C(0，3)$ 代入，得

$3=a(0+3)(0-1)$.

解得 $a=-1$.

$\therefore$二次函数的解析式为 $y=-(x+3)(x-1)$，

即 $y=-x^2-2x+3$.

（2）如下图，$\because y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$，

$\therefore$该函数的对称轴是直线 $x=-1$.

$\because$点 $C(0，3)$，点 C、D 关于直线 $x=-1$ 对称，

$\therefore$点$D(-2，3)$.

设直线 BD 的解析式为 $y=kx+m$，

则$\begin{cases}k+m=0，\\-2k+m=3，\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=-1，\\m=1.\end{cases}$

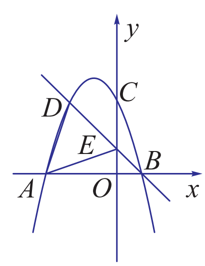
$\therefore$直线 BD 的解析式为 $y=-x+1$.

当 $x=0$ 时，$y=1$，

$\therefore$点 E 的坐标为（0，1）.

$\because S_{\triangle ADE}=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle ABE}$，且 $AB=4$，

$\therefore S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AB(y_D-y_E)=\frac{1}{2}\times4\times(3-1)=4$.



【点拨】本题考查了待定系数法求二次函数解析式. 解答本题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件，利用二次函数的性质解答.

变式训练三

解：∵直线 $y=-\frac{3}{4}x+3$，

当 $x=0$ 时，$y=3$；

当 $y=0$ 时，$x=4$.

∴点 $B(4, 0)$、$C(0, 3)$.

∵抛物线过点 $A(-2, 0)$、$B(4, 0)$，

∴设抛物线的解析式为 $y=a(x+2)(x-4)$.

将点 $C(0, 3)$ 代入，得 $-8a=3$.

解得 $a=-\frac{3}{8}$.

∴抛物线的解析式为 $y=-\frac{3}{8}(x+2)(x-4)=-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{4}x+3$.

∵$x=\dfrac{\frac{3}{4}}{-2\times\left(-\frac{3}{8}\right)}=1$ 时，$y=\frac{27}{8}$，

∴顶点 D 的坐标为$\left(1, \frac{27}{8}\right)$.

例四　解：∵点 O、A 的坐标分别为 $(0, 0)$、$(2, 0)$，

∴$OA=2$.

过点 B 作 $BC\perp OA$ 于点 C，如图.

∵$\triangle AOB$ 是等边三角形，

∴$\angle AOB=60^\circ$，$OB=OA=2$，$OC=AC=1$.

∴$BC=\frac{\sqrt{3}}{2}OB=\sqrt{3}$.

∴点 B 的坐标为$(1, \sqrt{3})$.

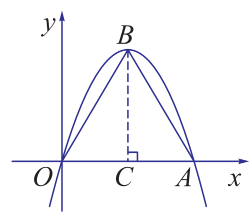
设该抛物线的解析式为 $y=a(x-1)^2+\sqrt{3}$，

代入 $O(0, 0)$，得

$a(0-1)^2+\sqrt{3}=0$，

解得 $a=-\sqrt{3}$.

故该抛物线的解析式为 $y=-\sqrt{3}(x-1)^2+\sqrt{3}=-\sqrt{3}x^2+2\sqrt{3}x$.



【点拨】本题考查了待定系数法求二次函数的解析式，等边三角形的性质．求得顶点 B 的坐标是解题的关键．

变式训练四

1. $y=-\frac{1}{6}x^2+\frac{5}{6}x+4$

【解析】∵$A(-3, 0)$、$C(0, 4)$，∴$OA=3$，$OC=4$．∴$AC=5$．∵AB 平分 $\angle CAO$，∴$\angle BAC=\angle BAO$．∵$BC\parallel x$ 轴，∴$\angle CBA=\angle BAO$．∴$\angle BAC=\angle CBA$．∴$CB=CA=5$．∴$B(5, 4)$．把 $A(-3, 0)$、$C(0, 4)$、$B(5, 4)$ 代入 $y=ax^2+bx+c$，得

$\begin{cases}9a-3b+c=0,\\c=4,\\25a+5b+c=4.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=-\frac{1}{6},\\b=\frac{5}{6},\\c=4.\end{cases}$ ∴抛

物线的解析式为 $y=-\frac{1}{6}x^2+\frac{5}{6}x+4$.

2. **解**：过点 A 作 $AC\perp x$ 轴于点 C，如下图. $\because OB=4$，

$\therefore B(4，0)$.

$\because \angle AOB=120°$，

$\therefore \angle AOC=60°$.

$\therefore \angle OAC=30°$.

$\because OA=OB=4$，

$\therefore OC=2$，$AC=2\sqrt{3}$.

$\therefore A(-2，2\sqrt{3})$.

设抛物线的解析式为 $y=ax(x-4)$，

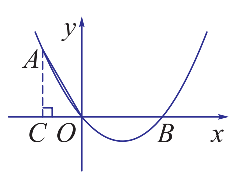
把 $A(-2，2\sqrt{3})$ 代入，得

$a\cdot(-2)(-2-4)=2\sqrt{3}$.

解得 $a=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=\frac{\sqrt{3}}{6}x(x-4)$，

即 $y=\frac{\sqrt{3}}{6}x^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}x$.



培优精练

1. A 【解析】根据图象可知，函数经过点 $(-1，0)$、$(3，0)$、$(0，-1)$，设二次函数的解析式是 $y=a(x+1)(x-3)$. 将 $(0，-1)$ 代入，得 $-3a=-1$. 解得 $a=\frac{1}{3}$.

则二次函数的解析式是 $y=\frac{1}{3}(x+1)(x-3)$，即 $y=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$.

故其顶点坐标为 $\left(1，-\frac{4}{3}\right)$.

2. **解**：(1) $\because$ 二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象经过点 $(3，0)$、$(1，1)$，

$\therefore \begin{cases}9+3b+c=0,\\1+b+c=1.\end{cases}$

解得 $b=-\frac{9}{2}$，$c=\frac{9}{2}$.

$\therefore$ 二次函数的解析式为 $y=x^2-\frac{9}{2}x+\frac{9}{2}$.

(2) $\because y=x^2-\frac{9}{2}x+\frac{9}{2}=\left(x-\frac{9}{4}\right)^2-\frac{9}{16}$，

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 $\left(\frac{9}{4}，-\frac{9}{16}\right)$.

$\because$ 当 $x=0$ 时，$y=\frac{9}{2}$，

$\therefore$ 抛物线与 y 轴的交点坐标为 $\left(0，\frac{9}{2}\right)$.

3. **解**：(1) 设抛物线的解析式为 $y=a(x+1)^2+4$，

把 $B(2，-5)$ 代入，得

$a\cdot 9+4=-5$，

解得 $a=-1$.

∴抛物线的解析式为 $y=-(x+1)^2+4$，

即 $y=-x^2-2x+3$.

(2) 如下图，∵函数的图象与 x 轴相交于点 E、F，

令 $y=0$，即 $-x^2-2x+3=0$，

解得 $x_1=1$，$x_2=-3$.

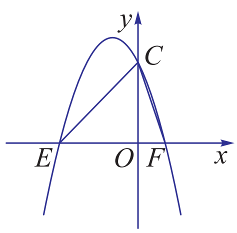
∴$EF=4$.

∵二次函数与 y 轴相交于点 C，

令 $x=0$，则 $y=3$，

∴$C(0, 3)$.

∴ $S_{\triangle EFC}=\frac{1}{2}EF\cdot OC=\frac{1}{2}\times 4\times 3=6$.



4. **解：** ∵$AC=20$，$BC=15$，$\angle ACB=90^\circ$，

∴$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=25$.

∴$20\times 15=25\cdot CO$.

解得 $CO=12$.

∴$C(0, 12)$.

∴$BO=\sqrt{CB^2-CO^2}=9$，

$AO=\sqrt{AC^2-CO^2}=16$.

∴$A(-16, 0)$、$B(9, 0)$.

∴设二次函数的解析式为 $y=a(x+16)(x-9)$.

∵二次函数过点 $C(0, 12)$，

∴$12=a\times 16\times(-9)$.

解得 $a=-\frac{1}{12}$.

∴二次函数的解析式为 $y=-\frac{1}{12}(x+16)(x-9)$，

即 $y=-\frac{1}{12}x^2-\frac{7}{12}x+12$.

名卷压轴题

解： (1) ∵二次函数 $y=ax^2-2x+c$ 经过点 $A(-3, 0)$、$C(0, 3)$，

则$\begin{cases}9a+6+c=0,\\ c=3.\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-1,\\ c=3.\end{cases}$

∴二次函数的解析式为 $y=-x^2-2x+3$.

设点 B 的坐标为 $(m, 0)$，

则 $m\cdot(-3)=-3$.

解得 $m=1$.

∴点 B 的坐标为$(1, 0)$.

把点 $B(1, 0)$ 代入一次函数 $y=kx-\frac{1}{2}$，得

$k-\frac{1}{2}=0$.

解得 $k=\frac{1}{2}$.

∴一次函数的解析式为 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

(2) ∵抛物线的解析式为 $y=$

$-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$,

∴抛物线的对称轴为 $x=-1$.

∵点 $C(0, 3)$ 与点 F 关于对称轴 $x=-1$ 对称,

∴点 F 的坐标为 $(-2, 3)$.

(3) 当直线 BE 向上平移 h $(h>0)$ 个单位长度后，所得的新直线解析式为 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+h$.

①当直线 BE 向上平移后与图象 U 相交于 1 个点，如图 1.

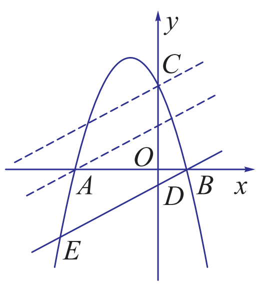


图 1

当新直线经过点 A 时，平移的距离最小.

把点 $A(-3, 0)$ 代入新直线，得 $0=\frac{1}{2}\times(-3)-\frac{1}{2}+h$.

解得 $h=2$.

当新直线经过点 C 时,

把点 $C(0, 3)$ 代入新直线，得 $3=-\frac{1}{2}+h$.

解得 $h=\frac{7}{2}$.

∴h 的取值范围为 $2<h\leqslant\frac{7}{2}$.

②当直线 BE 向上平移与图象 U 相交于 2 个点，再继续向上平移与图象 U 相交于 1 个点，如图 2.

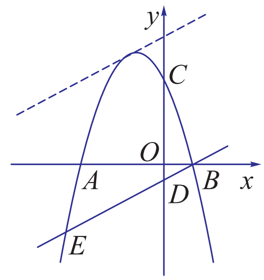


图 2

则一元二次方程 $-x^2-2x+3=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+h$ 有两个相等的实数根.

整理，得 $x^2+\frac{5}{2}x-\frac{7}{2}+h=0$.

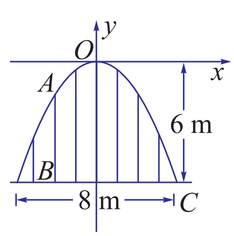
∴$\Delta=\left(\frac{5}{2}\right)^2-4\left(-\frac{7}{2}+h\right)=0$.

解得 $h=\frac{81}{16}$.

综上所述，h 的取值范围为 $2<h\leqslant\frac{7}{2}$ 或 $h=\frac{81}{16}$.

第 3 讲　二次函数的抛物线型问题

例一　解: (1) 以桥孔正上方中心为原点 O，过原点的水平线为 x 轴建立平面直角坐标系，如下图所示.



则点 $C(4, -6)$.

∵二次函数图象的顶点在原点，开口向下，对称轴为 y 轴，

∴设这个二次函数的解析式为 $y=ax^2$.

将点 $C(4,\ -6)$ 代入，得

$-6=16a$.

解得 $a=-\frac{3}{8}$.

∴这个二次函数的解析式为 $y=-\frac{3}{8}x^2$.

（2）根据题意，得点 A 的横坐标为 -2.

把 $x=-2$ 代入 $y=-\frac{3}{8}x^2$，得

$y=-\frac{3}{8}\times(-2)^2=-\frac{3}{2}$.

∴$A\left(-2,\ -\frac{3}{2}\right)$.

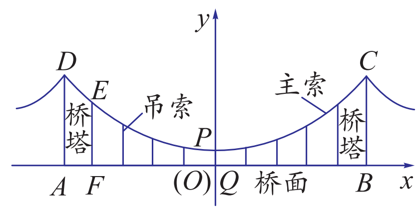
∴$6-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$（m），

即模型中左侧第二根立柱（AB）的高为 $\frac{9}{2}$ m.

【点拨】本题求解的技巧有两点：一是运用数形结合的方法，把桥孔的跨径、拱高等实际问题中的数据转化为抛物线上的点，即把“数”的问题转化为“形”的问题，由此即可利用二次函数的图象和性质解决这个实际问题. 二是建立适当的直角坐标系时，注意“三个尽量”：①尽量使图形上较多的点在坐标轴上，以便于计算；②尽量使图形上较多的点关于 y 轴对称，以便简化抛物线的解析式；③尽量使图形上较多的点在第一象限，以减少因符号带来的错误.

变式训练一

解：（1）以桥面 AB 所在直线为 x 轴，PQ 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系，如下图所示.



根据题意，得点 $P(0,\ 2)$、点 $C(20,\ 12)$.

设主索抛物线的解析式为 $y=ax^2+2$，

将点 C 代入，得 $400a+2=12$.

解得 $a=\frac{1}{40}$.

∴主索抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{40}x^2+2$.

（2）在 $y=\frac{1}{40}x^2+2$ 中，当 $x=-16$ 时，

$y=\frac{1}{40}\times(-16)^2+2=\frac{42}{5}$.

∴吊索 EF 的长度为 $\frac{42}{5}$ m.

例二　解：（1）根据题意，该抛物线

的顶点 $G(7,3.2)$.

设抛物线的表达式为 $y=a(x-7)^2+3.2$,

将点 $C(0,1.8)$ 代入,得

$49a+3.2=1.8$.

解得 $a=-\frac{1}{35}$.

∴y 与 x 的函数关系式为

$y=-\frac{1}{35}(x-7)^2+3.2$.

(2) ∵对方队员离球网 0.5 m,

则 $OF=\frac{18}{2}+0.5=9.5$(m).

当 $x=9.5$ 时,$y=-\frac{1}{35}(9.5-7)^2+3.2\approx3.02$.

∵$3.02<3.1$,即排球经过点 F 正上方时的高度低于该队员起跳后手能达到的最大高度,

∴这次他可以拦网成功.

【点拨】本题求解的关键是从“数”和“形”两个角度理解同一实际问题. 将实际问题转化为数学问题,通过解二次函数这个“数”去解决问题.

变式训练二

解:(1) 根据题意,可知抛物线 C_2:$y=-\frac{1}{8}x^2+bx+c$ 过点 (0,4) 和 (4,8).

$$\therefore\begin{cases}c=4,\\-\frac{1}{8}\times4^2+4b+c=8.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}b=\frac{3}{2},\\c=4.\end{cases}$

∴抛物线 C_2 的函数解析式为 $y=-\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{2}x+4$.

(2) 设运动员运动的水平距离为 t m 时,运动员与小山坡的竖直距离为 1 m,

根据题意,得 $-\frac{1}{8}t^2+\frac{3}{2}t+4-\left(-\frac{1}{12}t^2+\frac{7}{6}t+1\right)=1$.

整理,得 $(t-12)(t+4)=0$.

解得 $t_1=12$,$t_2=-4$ (舍去).

∴运动员运动的水平距离为 12 m 时,运动员与小山坡的竖直距离为 1 m.

例三 解:(1) 根据题意,得

$B(0,4)$、$C\left(3,\frac{17}{2}\right)$,

把 $B(0,4)$、$C\left(3,\frac{17}{2}\right)$代入

$y=-\frac{1}{6}x^2+bx+c$,得

$$\begin{cases}c=4,\\\frac{17}{2}=-\frac{1}{6}\times3^2+3b+c.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}b=2,\\c=4.\end{cases}$

∴该抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{6}x^2+2x+4$.

$\because y=-\frac{1}{6}x^2+2x+4=-\frac{1}{6}(x-6)^2+10$，

$\therefore D(6, 10)$，

即拱顶的最高点 D 到地面 OA 的距离为 10 m.

(2) 根据题意，货运汽车离 OB 一侧的最大距离为 $6-4=2$(m).

当 $x=2$ 时，$y=-\frac{1}{6}\times2^2+2\times2+4=\frac{22}{3}$.

$\because \frac{22}{3}>6$，

$\therefore$这辆货运汽车能安全通过.

【点拨】本题第 (2) 小问的求解关键是能运用数形结合的思想理解符合题目要求的临界点，即从"形"的角度看，货运汽车的最外侧距离墙面 OB 为 2 m 或 10 m 时，此处对应的拱顶的高度如果高于货车的高度，则货车能安全通过；反之，不能通过. 从"数"的角度看，抛物线上横坐标为 2 或 10 的点的纵坐标如果大于 6，则货车能安全通过；反之，不能通过. 因此问题转化为已知抛物线上某点的横坐标求该点的纵坐标，即可解决问题.

变式训练三

解：(1) 根据题意，得

$B(5, -5)$、$A(-5, -5)$.

设抛物线的解析式为 $y=ax^2$，

把点 $A(-5, -5)$ 代入，得

$-5=a\times(-5)^2$，

解得 $a=-\frac{1}{5}$.

$\therefore$抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{5}x^2$.

(2) $\because$货船宽 8 m，

$\therefore$设抛物线上某点的坐标为$(4, h)$，

代入 $y=-\frac{1}{5}x^2$，

得 $h=-\frac{1}{5}\times4^2=-\frac{16}{5}$.

$\because 5-\frac{16}{5}=\frac{9}{5}$，$\frac{9}{5}<2$，

$\therefore$货船不能安全通过此桥.

培优精练

1. B **【解析】**根据题意，得 $h=at^2+bt$ 的对称轴为 $t=\frac{2+6}{2}=4$.

$\therefore$当 $t=4$，h 取得最大值. 结合各选项可知，当 $t=3.9$ 时，h 的值最大.

2. **解：**(1) 易知抛物线 $y=ax^2+bx$ 的顶点为$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}\right)$.

$\because$抛物线的顶点在直线 $y=x$ 上，且抛物线水线最大高度达 3 m，

$\therefore\begin{cases}-\frac{b}{2a}=-\frac{b^2}{4a},\\-\frac{b^2}{4a}=3.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=-\frac{1}{3},\\b=2.\end{cases}$

(2) $\because$喷出的水恰好达到岸边，出水口离岸边 18 m，抛物线的顶

点在直线 $y=x$ 上，

∴此时抛物线的对称轴为 $x=9$.

∴$y=x=9$.

∴此时喷出的抛物线水线最大高度是 9 m.

3. **解：**（1）根据题意，得

顶点 $C(0，11)$.

设抛物线的解析式为 $y=ax^2+11$.

∵$DE=16$ m，$AE=8$ m，

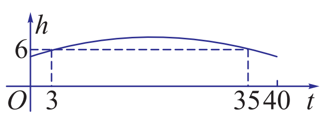
∴抛物线经过点 $A(-8，8)$.

∴$8=64a+11$.

解得 $a=-\frac{3}{64}$.

∴抛物线的解析式为 $y=-\frac{3}{64}x^2+11$.

（2）画出抛物线 $h=-\frac{1}{128}(t-19)^2+8$（$0\leqslant t\leqslant 40$）的图象，如下图所示.



当水面到顶点 C 的距离不大于 5 m 时，即 $h\geqslant 11-5=6(\text{m})$.

令 $-\frac{1}{128}(t-19)^2+8=6$，

解得 $t_1=35$，$t_2=3$.

由图象可得禁止船只通行的时间为 $|t_1-t_2|=35-3=32$（h）.

名卷压轴题

解：（1）设足球开始飞出到第一次落地时，抛物线的解析式为 $y=a(x-h)^2+k$，

根据题意，得 M（6，5）.

代入抛物线的解析式，得

$y=a(x-6)^2+5$.

当 $x=0$ 时，$y=1$，

即 $1=36a+5$.

解得 $a=-\frac{1}{9}$.

∴抛物线的解析式为

$y=-\frac{1}{9}(x-6)^2+5$.

（2）令 $y=0$，得

$-\frac{1}{9}(x-6)^2+5=0$.

解得 $x_1=6+3\sqrt{5}$，$x_2=6-3\sqrt{5}<0$（舍去）.

∴足球第一次落地点 C 距守门员 $(6+3\sqrt{5})$ m.

（3）由（2），得点 C 的坐标为 $(6+3\sqrt{5}，0)$.

设抛物线 CND 的解析式为

$y=-\frac{1}{9}(x-h)^2+\frac{5}{2}(h>6+3\sqrt{5})$，

将点 C 代入，得

$-\frac{1}{9}(6+3\sqrt{5}-h)^2+\frac{5}{2}=0$.

解得 $h_1=6+3\sqrt{5}-\frac{3\sqrt{10}}{2}$（舍去），

$h_2=6+3\sqrt{5}+\frac{3\sqrt{10}}{2}$.

∴抛物线 CND 的解析式为

$y=-\frac{1}{9}\left(x-6-3\sqrt{5}-\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$.

令 $y=0$，得 $-\frac{1}{9}\left(x-6-3\sqrt{5}-\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2+\frac{5}{2}=0$.

解得 $x_1=6+3\sqrt{5}$，

$x_2=6+3\sqrt{5}+3\sqrt{10}$.

∴$D(6+3\sqrt{5}+3\sqrt{10}，0)$.

∴$BD=OD-OB=(6+3\sqrt{5}+3\sqrt{10})-6=(3\sqrt{5}+3\sqrt{10})$ m，

即他应从 B 处再向前跑 $(3\sqrt{5}+3\sqrt{10})$ m.

第 4 讲　二次函数中的最值问题

例一　(1) $x=6$　**【解析】** ∵$B(4，0)$、$C(8，0)$、$D(8，8)$，四边形 $ABCD$ 是矩形，∴$A(4，8)$. ∵抛物线过点 A、D，∴抛物线的对称轴为 $x=\frac{4+8}{2}=6$.

(2) **解：** ①将点 A、C 的坐标代入 $y=ax^2+bx$，得

$$\begin{cases}16a+4b=8,\\64a+8b=0.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\b=4.\end{cases}$

∴抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+4x$.

②设直线 AC 的解析式为 $y=kx+m$，将 A、C 两点的坐标代入，得

$$\begin{cases}4k+m=8,\\8k+m=0.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}k=-2,\\m=16.\end{cases}$

∴直线 AC 的解析式为 $y=-2x+16$.

∵$EF\perp AD$，$AD\parallel x$ 轴，

∴点 E 和点 G 的横坐标相等.

设点 E 的坐标为 $(t，-2t+16)$，

则点 G 的坐标为 $\left(t，-\frac{1}{2}t^2+4t\right)$.

∴$EG=-\frac{1}{2}t^2+4t-(-2t+16)=-\frac{1}{2}t^2+6t-16=-\frac{1}{2}(t-6)^2+2$.

∴当 $t=6$ 时，EG 有最大值，且最大值为 2.

经检验，能取到 $t=6$.

∴点 E 的坐标为 $(6，4)$.

【点拨】 本题在运用数形结合的思想时，主要体现为两点：①在第 (1) 小问中以形助数，由点 A、D 纵坐标相等，则两点关于对称轴对称；②在第 (2) 小问中以数解形，即根据线段 EG 的特点建立二次函数模型，则把求 EG 长度的最大值问题转化为求二次函数的最大值问题.

变式训练一

1. **解：** (1) ∵抛物线经过点 $B(1，0)$、$C(5，0)$，

∴抛物线的对称轴为 $x=\frac{1+5}{2}=3$.

∴设抛物线的解析式为

$y=a(x-3)^2+k$.

把点 $A(0,4)$、$B(1,0)$ 代入，得

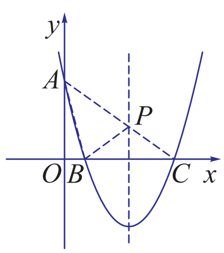
$\begin{cases}9a+k=4,\\4a+k=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=\frac{4}{5},\\k=-\frac{16}{5}.\end{cases}$

∴抛物线的解析式为 $y=\frac{4}{5}(x-3)^2-\frac{16}{5}=\frac{4}{5}x^2-\frac{24}{5}x+4$.

（2）连接 AC 与对称轴的交点即为点 P，此时 $\triangle PAB$ 的周长最小. 理由如下：

如下图，连接 BP、AB.



∵$PB=PC$,

∴$AB+AP+BP=AB+AP+PC\geqslant AB+AC$.

根据两点之间线段最短，得 P 为 AC 与对称轴的交点时，$\triangle PAB$ 的周长最小.

设直线 AC 的解析式为 $y=mx+b$，把 $A(0,4)$、$C(5,0)$ 代入，得

$\begin{cases}b=4,\\5m+b=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m=-\frac{4}{5},\\b=4.\end{cases}$

∴直线 AC 的解析式为

$y=-\frac{4}{5}x+4$.

当 $x=3$ 时，$y=-\frac{4}{5}\times3+4=\frac{8}{5}$.

∴点 P 的坐标为 $\left(3,\frac{8}{5}\right)$.

2. 解：（1）∵抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 过点 $A(-1,0)$、$B(3,0)$，

∴$\begin{cases}-1-b+c=0,\\-9+3b+c=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}b=2,\\c=3.\end{cases}$

∴抛物线的解析式为 $y=-x^2+2x+3$.

∵$y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$,

∴顶点 D 的坐标为 $(1,4)$.

（2）∵$B(3,0)$、$D(1,4)$，

∴中点 H 的坐标为 $(2,2)$.

（3）∵H 的坐标为 $(2,2)$，

∴其关于 y 轴的对称点 H' 的坐标为 $(-2,2)$.

连接 $H'D$ 与 y 轴的交点即为点 P，连接 PH，如图所示.

∵$PH=PH'$,

∴$PD+PH=PD+PH'\geqslant H'D$.

设直线 $H'D$ 的解析式为 $y=mx+n$，将 H'、D 的坐标代入，得

$\begin{cases}4=m+n,\\2=-2m+n.\end{cases}$

$\therefore \begin{cases} m=\dfrac{2}{3}, \\ n=\dfrac{10}{3}. \end{cases}$

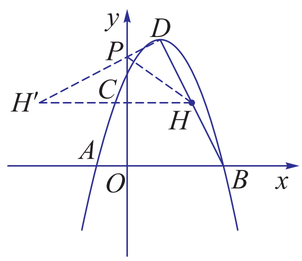
$\therefore$直线 $H'D$ 的解析式为 $y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{10}{3}$.

当 $x=0$ 时，$y=\dfrac{10}{3}$,

$\therefore P\left(0, \dfrac{10}{3}\right)$.

此时，$PD+PH=DH'=\sqrt{(1+2)^2+(4-2)^2}=\sqrt{13}$.

$\therefore$点 P 的坐标为 $\left(0, \dfrac{10}{3}\right)$，$PD+PH$ 的最小值为 $\sqrt{13}$.



例二　解：（1）设二次函数的解析式为 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$，

$\because$二次函数的图象交坐标轴于 $A(-1,0)$、$B(3, 0)$、$C(0, -4)$，

$\therefore x_1=-1$，$x_2=3$.

$\therefore y=a(x+1)(x-3)$.

将 $C(0, -4)$ 代入，得

$-4=a\cdot 1\cdot (-3)$，

解得 $a=\dfrac{4}{3}$.

$\therefore$二次函数的解析式为 $y=\dfrac{4}{3}(x+1)(x-3)=\dfrac{4}{3}x^2-\dfrac{8}{3}x-4$.

(2)（方法一）过点 P 作直线 BC 的平行线 l，交 y 轴于点 Q，连接 BQ，如图 1 所示.

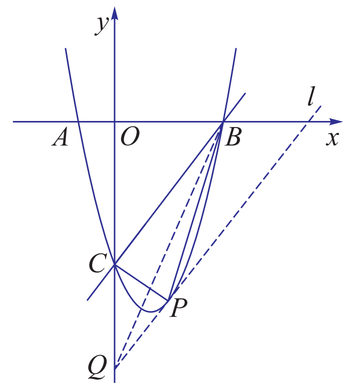


图 1

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+b$，

将 $B(3, 0)$、$C(0, -4)$ 代入，得

$\begin{cases} 0=3k+b, \\ -4=b. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=\dfrac{4}{3}, \\ b=-4. \end{cases}$

$\therefore$直线 BC 的解析式是 $y=\dfrac{4}{3}x-4$.

$\because BC/\!/l$，

$\therefore$设直线 l 为 $y=\dfrac{4}{3}x+t$.

二次函数与直线 l 联立，得

$\begin{cases} y=\dfrac{4}{3}x^2-\dfrac{8}{3}x-4, \\ y=\dfrac{4}{3}x+t. \end{cases}$

整理，得 $\dfrac{4}{3}x^2-4x-4-t=0$.

当抛物线与直线 l 只有一个交点时，$\triangle PBC$ 的面积最大，

令$\Delta=16+\frac{16}{3}(4+t)=0$，

解得 $t=-7$.

∴此时直线 l 的解析式为 $y=\frac{4}{3}x-7$.

∴$\frac{4}{3}x^2-4x+3=0$.

解得 $x=\frac{3}{2}$. 此时点 P 的坐标为 $\left(\frac{3}{2},\ -5\right)$.

∵$BC\parallel l$，

∴$S_{\triangle PBC}=S_{\triangle QBC}$.

∵$Q(0,\ -7)$，

$$\therefore S_{\triangle QBC}=\frac{1}{2}CQ\cdot OB=\frac{1}{2}\times(-4+7)\times3=\frac{9}{2}.$$

∴当点 P 的坐标为 $\left(\frac{3}{2},\ -5\right)$时，$S_{\triangle PBC}$的最大值为$\frac{9}{2}$.

（方法二）如图 2，设直线 BC 的解析式为 $y=kx+b$，将 $B(3,0)$、$C(0,-4)$ 代入，得

$$\begin{cases}0=3k+b,\\-4=b.\end{cases}\text{解得}\begin{cases}k=\frac{4}{3},\\b=-4.\end{cases}$$

∴直线 BC 的解析式是 $y=\frac{4}{3}x-4$.

如图 2，过点 P 作 $PD\parallel y$ 轴，交 BC 于点 D.

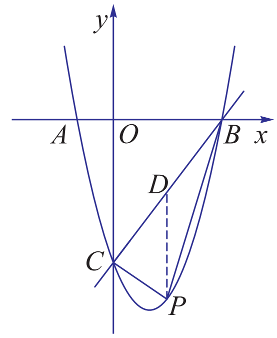


图 2

∵点 $P(m,\ n)$ 是直线 BC 下方抛物线上的一个动点，

∴$0<m<3$，$n=\frac{4}{3}m^2-\frac{8}{3}m-4$，

$D\left(m,\ \frac{4}{3}m-4\right)$.

∴ $PD=\left(\frac{4}{3}m-4\right)-\left(\frac{4}{3}m^2-\frac{8}{3}m-4\right)=-\frac{4}{3}m^2+4m$.

∴$S_{\triangle PBC}=S_{\triangle CDP}+S_{\triangle BDP}=\frac{1}{2}PD\cdot(x_B-x_C)=\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}m^2+4m\right)\cdot(3-0)=-2m^2+6m=-2\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$.

∵$0<\frac{3}{2}<3$，

∴当 $m=\frac{3}{2}$时，$S_{\triangle PBC}$的最大值为$\frac{9}{2}$，

此时 $n=\frac{4}{3}m^2-\frac{8}{3}m-4=\frac{4}{3}\times\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{8}{3}\times\frac{3}{2}-4=-5$.

∴点 P 为 $\left(\frac{3}{2},\ -5\right)$时，$S_{\triangle PBC}$ 的

最大值为$\frac{9}{2}$.

【点拨】二次函数背景下面积的最值问题，一般可采用等积变形（方法一）和铅锤法（方法二）两种方法求解. 事实上，当点 P 的横坐标等于直线 BC 与抛物线两交点横坐标的平均数时，面积达到最大.

变式训练二

1. 解：(1) 将点 $A(4，0)$、$C(0，2)$ 代入 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$，得

$\begin{cases}-8+4b+c=0,\\ c=2.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}b=\frac{3}{2},\\ c=2.\end{cases}$

∴二次函数的解析式为

$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$.

(2)（方法一）如图 1，过点 E 作直线 AC 的平行线 l，交 y 轴于点 H，连接 AH，

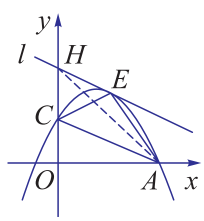


图 1

设直线 AC 的解析式为 $y=kx+m$，将点 $A(4，0)$、$C(0，2)$ 代入，得

$\begin{cases}4k+m=0,\\ m=2.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\ m=2.\end{cases}$

∴直线 AC 的解析式为

$y=-\frac{1}{2}x+2$.

∵$AC/\!/l$，

∴设直线 l 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+t$.

二次函数与直线 l 联立，得

$\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2,\\ y=-\frac{1}{2}x+t.\end{cases}$

∴ $-\frac{1}{2}x^2+2x+2-t=0$.

当抛物线与直线 l 只有一个交点时，$\triangle ACE$ 的面积最大，

即$\Delta=4+2(2-t)=0$.

解得 $t=4$.

∴直线 l 为 $y=-\frac{1}{2}x+4$.

∴ $-\frac{1}{2}x^2+2x-2=0$.

解得 $x=2$.

∴点 E 为 $(2，3)$.

∵$AC/\!/l$，

∴$S_{\triangle ACE}=S_{\triangle ACH}$.

∵$H(0，4)$，

∴$S_{\triangle ACH}=\frac{1}{2}CH\cdot OA=\frac{1}{2}\times(4-2)\times4=4$.

∴当 $S_{\triangle ACE}$取得最大值 4 时，点 E 为 $(2，3)$.

（方法二）如图 2，过点 E 作 $EF/\!/y$ 轴，交 AC 于点 F，

设直线 AC 的解析式为 $y=kx+2$，将点 $A(4，0)$ 代入，得

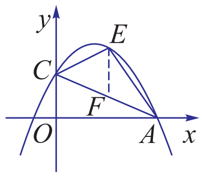


图 2

$4k+2=0$，

解得 $k=-\frac{1}{2}$.

∴直线 AC 的解析式为

$y=-\frac{1}{2}x+2$.

设点 $E\left(x,\ -\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2\right)$，且 $0<x<4$，

则 $F\left(x,\ -\frac{1}{2}x+2\right)$.

∴ $EF=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2-\left(-\frac{1}{2}x+2\right)=-\frac{1}{2}x^2+2x$.

∴$S_{\triangle ACE}=S_{\triangle CEF}+S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}EF\cdot OA=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2+2x\right)\times 4=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$.

∵$0<2<4$，

∴当 $x=2$ 时，$S_{\triangle ACE}$ 取得最大值 4，此时点 E 为（2，3）.

2. 解：（1）∵$A(-1,0)$、$C(0,-3)$ 在抛物线 $y=x^2+bx+c$ 上，

∴$\begin{cases}1-b+c=0,\\c=-3.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}b=-2,\\c=-3.\end{cases}$

∴二次函数的解析式为

$y=x^2-2x-3$.

（2）（方法一）在 $y=x^2-2x-3$ 中，令 $y=0$，可得 $0=x^2-2x-3$，

解得 $x_1=3$，$x_2=-1$.

∴点 B 的坐标为（3，0）.

∴经过 B、C 两点的直线为 $y=x-3$.

∵$S_{\triangle ACB}=\frac{1}{2}AB\cdot OC=\frac{1}{2}\times(3+1)\times 3=6$，

∴$S_{四边形ABPC}=S_{\triangle ACB}+S_{\triangle BCP}=6+S_{\triangle BCP}$，当 $S_{\triangle BCP}$ 最大时，$S_{四边形ABPC}$ 最大.

过点 P 作直线 BC 的平行线 l，直线 l 交 y 轴于点 Q，连接 BQ，如图 1 所示，

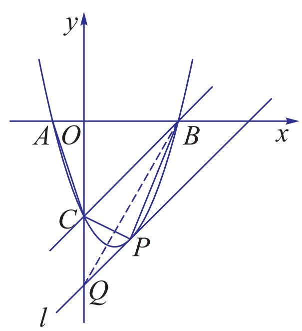


图 1

∵$BC\parallel l$，

∴设直线 l 的解析式为 $y=x+a$.

二次函数与直线 l 联立，得

$\begin{cases}y=x^2-2x-3,\\y=x+a.\end{cases}$

∴$x^2-3x-3-a=0$.

当抛物线与直线 l 只有一个交点时，$S_{\triangle BCP}$ 取最大值，

即$\Delta=9+4(3+a)=0$，

解得 $a=-\frac{21}{4}$.

∴直线 l 为 $y=x-\frac{21}{4}$.

∴$x^2-3x+\frac{9}{4}=0$.

解得 $x=\frac{3}{2}$.

∴点 P 为 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{15}{4}\right)$.

∵$BC \parallel l$,

∴$S_{\triangle BCP}=S_{\triangle QBC}$.

∵$Q\left(0,\ -\frac{21}{4}\right)$,

∴ $S_{\triangle QBC}=\frac{1}{2}CQ \cdot OB=\frac{1}{2}\times\left(\frac{21}{4}-3\right)\times 3=\frac{27}{8}$.

∴$S_{四边形ABPC}=6+S_{\triangle BCP}=6+\frac{27}{8}=\frac{75}{8}$.

∴当点 P 为 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{15}{4}\right)$时，四边形 $ABPC$ 面积的最大值为$\frac{75}{8}$.

（方法二）在 $y=x^2-2x-3$ 中，

令 $y=0$，可得 $0=x^2-2x-3$，

解得 $x_1=3$，$x_2=-1$.

∴$B(3,\ 0)$.

∴经过 B、C 两点的直线为 $y=x-3$.

设点 P 的坐标为 $(x,\ x^2-2x-3)$，且 $0<x<3$，如图 2 所示，过点 P 作 $PD\perp x$ 轴，垂足为 D，与直线 BC 交于点 E，则点 E 的坐标为 $(x,\ x-3)$.

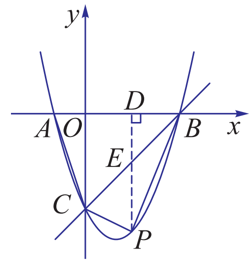


图 2

∵$PE=x-3-(x^2-2x-3)=3x-x^2$,

∴$S_{四边形ABPC}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle BCP}=\frac{1}{2}\times 4\times 3+\frac{1}{2}\times PE\times BO=6+\frac{1}{2}(3x-x^2)\times 3=-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x+6=-\frac{3}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{75}{8}$.

∵$0<\frac{3}{2}<3$,

∴当 $x=\frac{3}{2}$时，四边形 $ABPC$ 的面积最大，

此时点 P 的坐标为$\left(\frac{3}{2},\ -\frac{15}{4}\right)$.

∴四边形 $ABPC$ 面积的最大值为$\frac{75}{8}$.

例三　解：(1) ∵$AB=CD=x$ m,

∴$AD=BC=(50-x)$ m.

∴$x(50-x)=600$.

解得 $x_1=20$，$x_2=30$（舍去）.

则 x 的值为 20.

(2) ∵$AB=CD=x$ m,

∴$AD=BC=(50-x)$ m.

∴矩形保护区的面积 $S=x(50-$

$x)=-x^2+50x=-(x-25)^2+625$.

∵在点 O 处的银杏树与墙 AD、CD 的距离分别是 10 m 和 18 m，且银杏树需围在保护区内，$AB\leqslant AD$，

∴$\begin{cases}50-x\geqslant 18,\\ x\geqslant 10,\\ x\leqslant 50-x.\end{cases}$　解得 $10\leqslant x\leqslant 25$.

∴当 $x=25$ 时，S 有最大值，且最大值为 625 m^2，即围成的矩形保护区的最大面积为 625 m^2.

【点拨】本题主要是根据实际问题建立二次函数模型，把求图形面积的问题转化为求二次函数的最大值问题，其中需要特别注意根据实际确定 x 的取值范围，展现了以数解形的方法.

变式训练三

1. 解：(1) 设 y 关于 x 的函数关系式为 $y=kx+b$，

由图象可知，过 (20，20)、(30，0) 两点，

∴$\begin{cases}20k+b=20,\\ 30k+b=0.\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=-2,\\ b=60.\end{cases}$

∴$y=-2x+60$.

(2) 设每天销售利润为 p 元，

则 $p=(x-10)y$

$=(x-10)(-2x+60)$

$=-2x^2+80x-600$，

∵$a=-2<0$，

∴p 有最大值，

当 $x=-\dfrac{80}{-2\times 2}=20$ 时，

p 取最大值 200.

即当销售价为 20 元/千克时，每天可获得最大利润 200 元.

2. (1) $(32-2x)$　$(30-2x)$

【解析】根据题意，得 $AB+BC+CD=32$，且 $CD=AB=x$ m，

∴$BC=(32-2x)$ m.

∵$MB=BF=CH=CN=1$ m，

∴$PQ=FH=BC-BF-CH=(32-2x)-1-1=(30-2x)$m.

(2) 解：由 (1)，得 $EP=AM=AB-MB=(x-1)$m.

∵矩形 $EPQG$ 的面积为 96 m^2，

∴$PQ\cdot EP=(30-2x)(x-1)=96$.

解得 $x_1=7$，$x_2=9$.

经检验，均符合题意，

∴AB 的长为 7 m 或 9 m.

(3) 解：根据题意，得甲区域的面积为 $2(x-1)\times 1+(30-2x)\times 1=28$ (m^2)，

乙区域的面积为 $(30-2x)(x-1)+2\times 1\times 1=(-2x^2+32x-28)(m^2)$.

设总费用为 y 元，

则 $y=100\times 28+50(-2x^2+32x-28)=-100x^2+1\,600x+1\,400$.

整理，得 $y=-100(x-8)^2+7\,800$.

当 $x=8$ 时，y 有最大值 7 800，经检验，符合题意.

即种植花卉与草坪的总费用的最大值是 7 800 元，此时花圃的宽 AB 是 8 m.

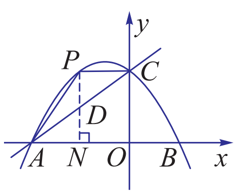
培优精练

1. 解：(1) 将 $A(-4,0)$、$B(2,0)$ 代入 $y=-\frac{3}{8}x^2+bx+c$，得

$\begin{cases}-6-4b+c=0,\\ -\frac{3}{2}+2b+c=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-\frac{3}{4},\\ c=3.\end{cases}$

∴抛物线的解析式为 $y=-\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}x+3$.

(2) 过点 P 作 $PN\perp x$ 轴于点 N，交 AC 于点 D，如下图所示.



由(1)易知，点 C 的坐标为 $(0,3)$.

设直线 AC 的解析式为 $y=kx+3$，

把点 $A(-4,0)$ 代入，得

$-4k+3=0$.

解得 $k=\frac{3}{4}$.

∴直线 AC 的解析式为 $y=\frac{3}{4}x+3$.

设点 $P\left(t,\ -\frac{3}{8}t^2-\frac{3}{4}t+3\right)$，$-4<t<0$.

则点 $D\left(t,\ \frac{3}{4}t+3\right)$.

∴$PD=-\frac{3}{8}t^2-\frac{3}{4}t+3-\frac{3}{4}t-3=-\frac{3}{8}t^2-\frac{3}{2}t=-\frac{3}{8}(t+2)^2+\frac{3}{2}$.

∵ $-4<t<0$，

∴当 $t=-2$ 时，PD 取最大值.

$PD_{最大值}=\frac{3}{2}$.

∵$S_{\triangle APC}=\frac{1}{2}\times PD\times|x_C-x_A|=\frac{1}{2}\times 4\times PD=2PD$，

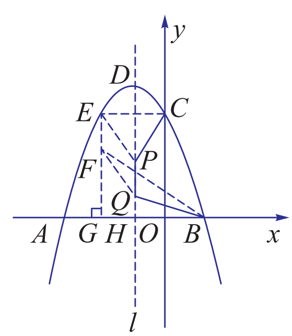
∴$S_{\triangle APC}$ 的最大值为 $2\times\frac{3}{2}=3$.

2. 解：(1) 把 $A(-3,0)$、$B(1,0)$、$C(0,3)$ 代入抛物线 $y=ax^2+bx+c$，得

$\begin{cases}a+b+c=0,\\ 9a-3b+c=0,\\ c=3.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=-2,\\ c=3.\end{cases}$

∴抛物线的解析式为 $y=-x^2-2x+3$.

(2) 作点 C 关于直线 l 的对称点 E，连接 PE，过点 E 作 $EG\perp AB$ 于点 G，过点 Q 作 $QF/\!/PE$，交 EG 于点 F，连接 FB，如下图所示.



由题意，得 $PC=PE$，$EF/\!/PQ$.

∵$QF/\!/PE$，

∴四边形 $EFQP$ 是平行四边形.

∴$EF=PQ=1$，$EP=FQ$.

∴$PC=FQ$.

∴$PC+QB=FQ+QB$.

根据两点之间线段最短可得，当 F、Q、B 三点共线时，$FQ+QB$ 取最小值为 FB.

∵抛物线 $y=-x^2-2x+3$ 的对称轴为 $x=-1$、$C(0,3)$，

∴点 E 的坐标为（-2，3）.

∴点 F 的坐标为（-2，2）.

在 Rt△FGB 中，

$FG=2$，$GB=1-(-2)=3$，

根据勾股定理可得，

$FB=\sqrt{FG^2+GB^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$.

∴$PC+QB$ 的最小值为 $\sqrt{13}$.

3. 解：（1）设 $y=kx+b$，

∵图象过（40，20）与（50，10），

∴$\begin{cases}40k+b=20,\\50k+b=10.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=60.\end{cases}$

∴$y=-x+60$.

（2）设销售利润为 W 元，根据题意，得 $W=(x-30)\cdot y=(x-30)(-x+60)=-x^2+90x-1\,800=-(x-45)^2+225$.

∵45 元没有高于 45，

∴可以获政府补贴.

∴当 $x=45$ 时，W 有最大值，最大值为 225 元.

∵当 $x=45$ 时，销售量 $y=-45+60=15$（件），

∴补贴总额为 $15\times5=75$（元）.

∴共获利为 $225+75=300$（元）.

∴当这种消毒液的销售单价定为 45 元/件时，商店每天的销售利润既最大，又能获得政府补贴，商店每天共获利 300 元.

名卷压轴题

解：（1）∵点 $B(4,m)$ 在直线 $y=x+2$ 上，

∴$m=4+2=6$.

∴$B(4,6)$.

∵抛物线 $y=ax^2+bx+6$（$a\neq0$）过 $A\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$ 和 $B(4,6)$，

∴$\begin{cases}\frac{5}{2}=a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}b+6,\\6=a\cdot4^2+4b+6.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=2,\\b=-8.\end{cases}$

∴抛物线的解析式为 $y=2x^2-8x+6$.

（2）设点 P 的坐标为（n，$n+2$），$\frac{1}{2}<n<4$.

则点 C 的坐标为（n，$2n^2-8n+6$）.

∴$PC=(n+2)-(2n^2-8n+6)=-2n^2+9n-4=-2\left(n-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{49}{8}$.

∵$\frac{1}{2}<n<4$，

∴当 $n=\frac{9}{4}$ 时，线段 PC 取最大值为 $\frac{49}{8}$.

∵ $\frac{9}{4}+2=\frac{17}{4}$，

∴点 P 的坐标为 $\left(\frac{9}{4}，\frac{17}{4}\right)$，即存在点 $P\left(\frac{9}{4}，\frac{17}{4}\right)$ 使线段 PC 的长有最大值 $\frac{49}{8}$.

（3）∵ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle PCA}+S_{\triangle PCB}=\frac{1}{2}\times PC\times|x_B-x_A|=\frac{1}{2}\times PC\times\left(4-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}PC$，

∴当 PC 取最大时，$\triangle ABC$ 的面积最大.

由（2）可知，PC 有最大值 $\frac{49}{8}$，

∴ $S_{\triangle ABC}$ 有最大值，且最大值为 $\frac{7}{4}\times\frac{49}{8}=\frac{343}{32}$.

第 5 讲　探索二次函数中的存在性问题

例一　解：（1）对于 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$，

当 $y=0$ 时，得 $x=-3$，

当 $x=0$ 时，得 $y=\sqrt{3}$.

∴ $A(-3，0)$、$C(0，\sqrt{3})$.

∵二次函数 $y=ax^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+c$ 经过 A、C 两点，

∴ $\begin{cases}9a+2\sqrt{3}+c=0,\\ c=\sqrt{3}.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{\sqrt{3}}{3},\\ c=\sqrt{3}.\end{cases}$

∴二次函数的解析式为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$.

（2）存在．分两种情况：

①当点 M 在 x 轴上方的抛物线上时，过点 C 作 x 轴的平行线，与抛物线的另一交点，即为点 M，则点 M 的纵坐标为 $\sqrt{3}$，连接 BM，过点 M 作 $ME\perp x$ 轴于点 E，如图 1.

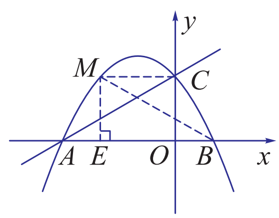


图 1

令 $-\frac{\sqrt{3}}{3}x^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

得 $x_1=0$，$x_2=-2$.

∴ $M(-2，\sqrt{3})$.

令 $-\frac{\sqrt{3}}{3}x^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}=0$.

解得 $x_1=-3$，$x_2=1$.

∴ $B(1，0)$.

∴ $BE=1-(-2)=3$.

∵ $AO=3$，

∴ $BE=AO$.

又∵ $\angle BEM=\angle AOC=90°$，

$EM=OC$，

$\therefore \triangle BEM \cong \triangle AOC$(SAS).

$\therefore \angle EBM=\angle OAC$，

即$\angle ABM=\angle BAC$.

$\therefore$在 x 轴上方的抛物线上存在点 M，使$\angle ABM=\angle BAC$，此时点 M 的坐标为（-2，$\sqrt{3}$）.

②当点 M 在 x 轴下方的抛物线上时，

$\because \angle ABM=\angle BAC$，

$\therefore BM /\!/ AC$，如图 2.

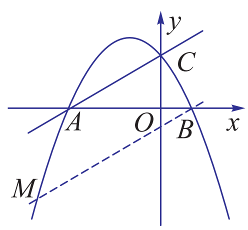


图 2

设直线 BM 对应的函数解析式为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+n$.

把点 $B(1,0)$ 代入，得$\frac{\sqrt{3}}{3}+n=0$.

解得 $n=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$直线 BM 对应的函数解析式为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

联立$\begin{cases} y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}, \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$

解得$\begin{cases} x_1=-4, \\ y_1=-\frac{5\sqrt{3}}{3} \end{cases}$或$\begin{cases} x_2=1, \\ y_2=0. \end{cases}$

$\therefore M\left(-4, -\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$.

综上所述，点 M 的坐标为（-2，$\sqrt{3}$）或$\left(-4, -\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$.

【点拨】本题第（2）小问求解的技巧是利用数形结合的方法，特别是当点 M 位于 x 轴下方时，从“形”的角度看，点 M 是直线与抛物线的交点；从“数”的角度看，是直线与抛物线的解析式组成的方程组的解．因此求点 M 的坐标转化为解方程组.

变式训练一

解：(1) $\because$抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于 $A(-1,0)$、$B(2,0)$，与 y 轴交于点 $C(0,-2)$，

$\therefore \begin{cases} a-b+c=0, \\ 4a+2b+c=0, \\ c=-2. \end{cases}$解得$\begin{cases} a=1, \\ b=-1, \\ c=-2. \end{cases}$

$\therefore$抛物线的解析式为 $y=x^2-x-2$.

(2) $\because$点 P 在 x 轴正半轴上，

$\therefore$设点 P（m，0）（$m>0$）.

$\therefore PA=m-(-1)=m+1$，

$PC=\sqrt{OP^2+OC^2}=\sqrt{m^2+2^2}$.

$\because PA=PC$，

$\therefore m+1=\sqrt{m^2+2^2}$.

解得 $m=\frac{3}{2}$.

$\therefore OP=m=\frac{3}{2}$.

(3) 存在．理由如下：

∵点 M 在线段 OB 上，

∴设 M（n，0），$0<n<2$.

∵ MN // y 轴，且点 N 在抛物线上，

∴点 N（n，n^2-n-2）.

易知 $OA=1$，$OC=2$，$OM=n$，

$BM=2-n$，

$MN=|n^2-n-2|=-(n^2-n-2)=-n^2+n+2$.

∴ $S_{四边形ACNB}=S_{\triangle ACO}+S_{梯形OCNM}+S_{\triangle BMN}=\frac{1}{2}OA\cdot OC+\frac{1}{2}(OC+MN)\cdot OM+\frac{1}{2}BM\cdot MN=\frac{1}{2}\times 1\times 2+\frac{1}{2}[2+(-n^2+n+2)]n+\frac{1}{2}(2-n)\cdot(-n^2+n+2)=-n^2+2n+3=-(n-1)^2+4$.

∵ $0<n<2$，

∴当 $n=1$ 时，$S_{四边形ACNB}$ 最大，且最大值为 4．此时点 M 的坐标为（1，0）.

例二　解： 存在.

∵ $A(4,0)$，$OA=OC=4OB$，

∴ $B(-1,0)$、$C(0,4)$.

∵抛物线过 A、B、C 三点，

∴设抛物线的解析式为 $y=a(x+1)(x-4)$.

将 C（0，4）代入解析式，得 $-4a=4$，解得 $a=-1$.

∴抛物线的解析式为 $y=-x^2+3x+4$.

（方法一）①当以 C 为直角顶点时，过点 C 作 $CP_1\perp AC$，交抛物线于点 P_1．过点 P_1 作 y 轴的垂线，垂足为 M，如图 1.

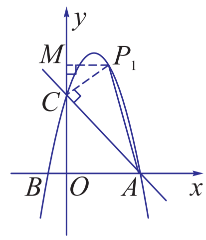


图 1

∵ $\angle ACP_1=90°$，

∴ $\angle MCP_1+\angle ACO=90°$.

∵ $\angle ACO+\angle OAC=90°$，

∴ $\angle MCP_1=\angle OAC$.

∵ $OA=OC$，

∴ $\angle MCP_1=\angle OAC=45°$.

∴ $\angle MCP_1=\angle MP_1C=45°$.

∴ $MC=MP_1$.

设 P_1（m，$-m^2+3m+4$），$m>0$，

则 $-m^2+3m+4-4=m$，

解得 $m_1=0$（舍去），$m_2=2$.

∴ $-m^2+3m+4=6$，

即点 P_1 为（2，6）.

②当点 A 为直角顶点时，过点 A 作 $AP_2\perp AC$，交抛物线于点 P_2，过点 P_2 作 y 轴的垂线，垂足为 N，AP_2 交 y 轴于点 F，如图 2.

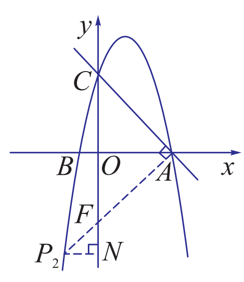


图 2

$\therefore P_2N /\!/ x$ 轴.

$\because \angle CAO=45°$,

$\therefore \angle OAP_2=90°-\angle CAO=45°$.

$\therefore \angle FP_2N=45°$.

$\therefore \angle OFA=\angle P_2FN=45°$.

$\therefore OF=AO=4$, $P_2N=NF$.

设 $P_2(n, -n^2+3n+4)$, $n<0$,

则 $n=(-n^2+3n+4)+4$,

解得 $n_1=-2$, $n_2=4$ (舍去),

$\therefore -n^2+3n+4=-6$.

$\therefore$ 点 P_2 的坐标是 $(-2, -6)$.

综上所述,点 P 的坐标是 $(2, 6)$ 或 $(-2, -6)$.

(方法二)

①当点 C 为直角顶点时,过点 C 作 $CP_1\perp AC$,交抛物线于点 P_1,如图 1.

$\because A(4, 0)$、$C(0, 4)$,

$\therefore k_{AC}=-1$.

$\because CP_1\perp AC$,

$\therefore k_{CP_1}\times k_{AC}=-1$.

$\therefore k_{CP_1}=1$.

$\therefore$ 直线 CP_1 为 $y=x+4$.

二次函数与直线联立,得

$\begin{cases} y=x+4, \\ y=-x^2+3x+4. \end{cases}$

整理,得 $x^2-2x=0$.

解得 $x_1=0$ (舍去), $x_2=2$.

$\therefore$ 点 P_1 为 $(2, 6)$.

②当点 A 为直角顶点时,过点 A 作 $AP_2\perp AC$ 交抛物线于点 P_2,如图 2.

$\because AP_2\perp AC$,

$\therefore k_{AP_2}\times k_{AC}=-1$.

$\therefore k_{AP_2}=1$.

$\therefore$ 直线 AP_2 为 $y=x-4$.

二次函数与直线联立,得

$\begin{cases} y=x-4, \\ y=-x^2+3x+4. \end{cases}$

整理,得 $x^2-2x-8=0$.

解得 $x_1=4$ (舍去), $x_2=-2$.

$\therefore$ 点 P_2 为 $(-2, -6)$.

综上所述,点 P 的坐标是 $(2, 6)$ 或 $(-2, -6)$.

(方法三)

设点 P 的坐标为 $(m, -m^2+3m+4)$.

由题意,得 $AC^2=4^2+4^2=32$.

$AP^2=(m-4)^2+(-m^2+3m+4)^2$, $PC^2=m^2+(3m-m^2)^2$,

由勾股定理知:

①当以点 C 为直角顶点时,

$AC^2+PC^2=AP^2$,

代入解方程可得点 P 为 $(2, 6)$.

②当以点 A 为直角顶点时,

$AC^2+AP^2=PC^2$,

代入解方程可得点 P 为 $(-2, -6)$.

综上所述,点 P 的坐标是 $(2, 6)$ 或 $(-2, -6)$.

【点拨】本题主要考查在二次函数背景下的直角三角形存在问题,以 AC 为直角边并不能确定哪个角

是直角，需分情况讨论.

变式训练二

1. 解：存在.

∵抛物线 $y=x^2-2x$ 与直线 $y=-x+2$ 相交于 B、C 两点，

抛物线与直线联立，得

$\begin{cases} y=x^2-2x, \\ y=-x+2. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x_1=-1, \\ y_1=3. \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=2, \\ y_2=0. \end{cases}$

∴$B(2, 0)$、$C(-1, 3)$.

∵抛物线 $y=x^2-2x$ 的对称轴为直线 $x=1$，

∴设点 G 的坐标为 $(1, p)$.

根据勾股定理，得 $BC^2=(2+1)^2+3^2=18$，

$CG^2=[1-(-1)]^2+(p-3)^2=p^2-6p+13$.

要使△BCG 是以 BG 为底边的等腰三角形，

则 $BC=CG$，即 $BC^2=CG^2$，

∴$18=p^2-6p+13$.

解得 $p_1=3-\sqrt{14}$，$p_2=3+\sqrt{14}$.

∴点 G 的坐标为 $(1, 3-\sqrt{14})$ 或 $(1, 3+\sqrt{14})$.

2. 解：(1) ∵抛物线的解析式为 $y=-x^2+2x+3$，

令 $x=0$，则 $y=3$，即 $C(0, 3)$.

令 $y=0$，得 $x_1=3$，$x_2=-1$.

则点 A 的坐标为 $(-1, 0)$.

设直线 AC 的解析式为 $y=px+q$，

把 $A(-1, 0)$、$C(0, 3)$ 代入，得

$\begin{cases} -p+q=0, \\ q=3. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} p=3, \\ q=3. \end{cases}$

∴直线 AC 的解析式为 $y=3x+3$.

(2) 存在.

①当以点 C 为直角顶点时，

过点 C 作 AC 的垂线，交抛物线于点 P_1，如图 1.

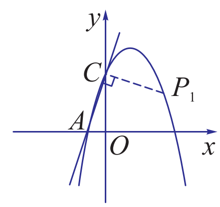


图 1

∵直线 AC 的解析式为 $y=3x+3$，

∴直线 P_1C 的解析式为 $y=-\frac{1}{3}x+3$.

二次函数与直线联立，得

$\begin{cases} y=-x^2+2x+3, \\ y=-\frac{1}{3}x+3. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=0, \\ y=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\frac{7}{3}, \\ y=\frac{20}{9}. \end{cases}$

∴点 P_1 的坐标为 $\left(\frac{7}{3}, \frac{20}{9}\right)$.

②当以点 A 为直角顶点时，

过点 A 作 AC 的垂线，交抛物线

于点 P_2，如图 2.

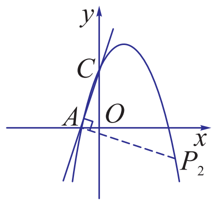


图 2

直线 AP_2 的解析式可设为 $y=-\frac{1}{3}x+b$，

把 $A(-1,0)$ 代入，得 $\frac{1}{3}+b=0$.

解得 $b=-\frac{1}{3}$.

∴直线 AP_2 的解析式为

$y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$.

二次函数与直线联立，得

$$\begin{cases} y=-x^2+2x+3, \\ y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=-1, \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\frac{10}{3}, \\ y=-\frac{13}{9}. \end{cases}$

∴点 P_2 的坐标为 $\left(\frac{10}{3},\ -\frac{13}{9}\right)$.

综上所述，符合条件的点 P 的坐标为 $\left(\frac{7}{3},\ \frac{20}{9}\right)$ 或 $\left(\frac{10}{3},\ -\frac{13}{9}\right)$.

例三　解：（1）∵四边形 $OABC$ 为矩形，$OC=8$，

∴点 C 的坐标为（8，0）.

∵抛物线 $y=-\frac{2}{3}x^2+bx+c$ 过点 $C(8,0)$、$O(0,0)$，

$$\therefore \begin{cases} -\frac{128}{3}+8b+c=0, \\ c=0. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} b=\frac{16}{3}, \\ c=0. \end{cases}$

∴抛物线的解析式为

$y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{16}{3}x$.

（2）由翻折，得 $EC=BC=10$，

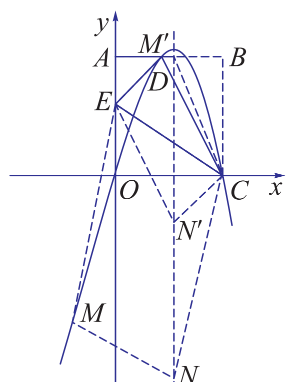
∵$OC=8$，

∴$OE=\sqrt{EC^2-OC^2}=6$.

∴点 E 的坐标为（0，6）.

设点 M 的坐标为 $\left(m,\ -\frac{2}{3}m^2+\frac{16}{3}m\right)$，

①当 EC 是平行四边形的一条边，点 M 在对称轴左侧时，如下图所示，四边形 $ECNM$ 为平行四边形，



点 E 向下平移 6 个单位长度，再向右平移 8 个单位长度得到点 C，则点 $M\left(m,\ -\frac{2}{3}m^2+\frac{16}{3}m\right)$ 向下平移 6 个单位长度、再向右平移

8个单位长度得到点 $N\left(m+8,-\frac{2}{3}m^2+\frac{16}{3}m-6\right)$,

∵点 N 在抛物线的对称轴 $x=4$ 上,则其横坐标为4,

∴$m+8=4$,则 $m=-4$.

∴ $-\frac{2}{3}m^2+\frac{16}{3}m=-32$.

∴点 M 的坐标为(-4,-32).

当 EC 是平行四边形的一条边,点 M 在对称轴右侧时,

同理点 M 的坐标为(12,-32).

②当 EC 是平行四边形的对角线时,如上图所示,四边形 $EN'CM'$ 为平行四边形,

则 EC 的中点坐标为(4,3),

∵该中点也是 $M'N'$ 的中点,

设 N'(4,n),

则 $4=\frac{m+4}{2}$,解得 $m=4$.

∴ $-\frac{2}{3}m^2+\frac{16}{3}m=\frac{32}{3}$.

∴点 M' 的坐标为 $\left(4,\frac{32}{3}\right)$.

综上所述,点 M 的坐标为(-4,-32)或(12,-32)或 $\left(4,\frac{32}{3}\right)$.

【点拨】本题考查的是二次函数综合运用,涉及矩形、平行四边形的基本知识,其中利用中点公式和点的平移,是解决此类问题的基本方法.

变式训练三

(1)(0,4) **【解析】**设点 A 的坐标为(0,y)($y>0$),∵$AB=BC$,

∴ $(0+3)^2+y^2=(2+3)^2$. 解得 $y=4$. ∴点 A 的坐标为(0,4).

(2)**解:**∵直线 OD 将△AOC 分成面积相等的两部分,

∴D 是 AC 边的中点.

∴点 D 的坐标为(1,2).

设直线 OD 的解析式为 $y=kx$,

将点 D 的坐标代入,得

$2=k\times1$,解得 $k=2$.

∴直线 OD 的解析式为 $y=2x$.

(3)**解:**存在.

∵点 P 在直线 OD 上,

故设点 P(m,$2m$),点 M(x,0),

①当 AB 是平行四边形的边时,

则点 B 向右平移3个单位长度,再向上平移4个单位长度得到点 A. 同理,点 P(M)向右平移3个单位长度,再向上平移4个单位长度得到点 M(P),

则 $\begin{cases}m+3=x,\\2m+4=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m-3=x,\\2m-4=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m=-2,\\x=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=2,\\x=-1.\end{cases}$

∴点 M 的坐标为(1,0)或(-1,0).

②当 AB 是平行四边形的对角线时,

由中点公式，得

$$\begin{cases}\frac{1}{2}(0-3)=\frac{1}{2}(m+x),\\ \frac{1}{2}(4+0)=\frac{1}{2}(0+2m).\end{cases}$$

解得$\begin{cases}m=2,\\ x=-5.\end{cases}$

∴点 M 的坐标为（-5，0）.

综上所述，点 M 的坐标为（1，0）或（-1，0）或（-5，0）.

培优精练

1. **解**：存在.

由题意，得 $A(-2，0)$、$C(0，3)$.

作线段 CA 的垂直平分线，交 y 轴于点 M，交 AC 于点 N，连接 AM，如下图所示.

则△AMC 是以 AC 为底边的等腰三角形.

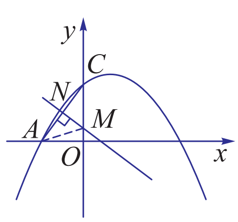
直线 AC 的解析式为 $y=\frac{3}{2}x+3$.

∵$N\left(-1，\frac{3}{2}\right)$，$MN\perp AC$，

∴直线 MN 的解析式为 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{6}$.

令 $x=0$，则 $y=\frac{5}{6}$.

∴点 M 的坐标是$\left(0，\frac{5}{6}\right)$.



2. **解**：存在.

∵直线 $y=-\frac{3}{4}x+3$ 经过 B、C 两点，

令 $x=0$，得 $y=3$，即 $C(0，3)$.

令 $y=0$，得 $x=4$，即 $B(4，0)$.

将 $B(4，0)$、$C(0，3)$ 代入 $y=\frac{3}{4}x^2+bx+c$，得$\begin{cases}12+4b+c=0,\\ c=3.\end{cases}$

解得$\begin{cases}b=-\frac{15}{4},\\ c=3.\end{cases}$

∴抛物线的解析式为 $y=\frac{3}{4}x^2-\frac{15}{4}x+3$.

∴其对称轴为 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-\frac{15}{4}}{2\times\frac{3}{4}}=\frac{5}{2}$.

∵△BCP 是以点 C 为直角顶点的直角三角形，

∴$PC\perp CB$.

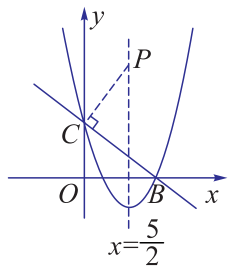
过点 C 作 $PC\perp BC$ 与 $x=\frac{5}{2}$ 相交于点 P，如图所示.

∵直线 BC 的解析式为 $y=-\frac{3}{4}x+3$，

易得直线 PC 的解析式为 $y=\frac{4}{3}x+3$.

直线与抛物线的对称轴方程联立，得$\begin{cases}y=\dfrac{4}{3}x+3,\\x=\dfrac{5}{2}.\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\dfrac{5}{2},\\y=\dfrac{19}{3}.\end{cases}$

则点 P 为$\left(\dfrac{5}{2}，\dfrac{19}{3}\right)$.



3. 解：（1）由题意，设抛物线的解析式为 $y=a(x-2)(x-8)$，

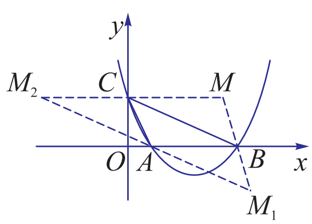
把 $C(0，4)$ 代入，得

$a(0-2)(0-8)=4$. 解得 $a=\dfrac{1}{4}$.

$\therefore y=\dfrac{1}{4}(x-2)(x-8)$，

即 $y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{5}{2}x+4$.

（2）（方法一）过 A、B、C 三点分别作对边的平行线，两两平行线的交点即为 M，如下图所示，由平移可知，M（6，4）或 M（-6，4）或 M（10，-4）.



（方法二）①当 BC 为平行四边形的一边时，设 M（m，n），

$\because$点 C 向右平移 8 个单位长度，再向下平移 4 个单位长度到点 B，

同理，点 $A(M)$ 向右平移 8 个单位长度，再向下平移 4 个单位长度到点M（A），

$\therefore\begin{cases}2+8=m,\\0-4=n\end{cases}$或$\begin{cases}m+8=2,\\n-4=0.\end{cases}$

解得$\begin{cases}m=10,\\n=-4\end{cases}$或$\begin{cases}m=-6,\\n=4.\end{cases}$

$\therefore$点 M 的坐标为（10，-4）或（-6，4）.

②当 BC 为平行四边形的一条对角线时，

设 M（m，n），

$\because BC$ 的中点为（4，2），

$\therefore\begin{cases}\dfrac{m+2}{2}=4,\\\dfrac{n+0}{2}=2.\end{cases}$解得$\begin{cases}m=6,\\n=4.\end{cases}$

$\therefore$点 M 的坐标为（6，4）.

综上所述，点 M 的坐标为（10，-4）或（-6，4）或（6，4）.

名卷压轴题

解：（1）$\because$抛物线 $y=ax^2+bx+3$（$a\neq0$）与 x 轴相交于 $A(-1，0)$、$B(3，0)$ 两点，

$\therefore\begin{cases}a-b+3=0,\\9a+3b+3=0.\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-1,\\b=2.\end{cases}$

$\therefore$抛物线的解析式为 $y=-x^2+$

$2x+3$.

(2) 存在.

$\because$点 $D(2,m)$ 在第一象限的抛物线上,

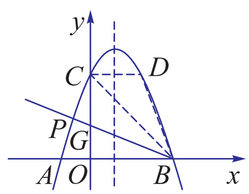
$\therefore m=-2^2+2\times2+3=3$.

$\therefore$点 D 的坐标为 $(2,3)$.

$\because C(0,3)$、$B(3,0)$,

$\therefore OC=OB$.

连接 CD、BC、BD,如下图所示.



$\therefore \angle OBC=\angle OCB=45°$.

易知 $CD/\!/x$ 轴,

$\therefore \angle DCB=\angle OBC=45°$.

$\therefore \angle DCB=\angle OCB$.

在 y 轴上取点 G,使 $CG=CD=2$,

连接 BG 并延长交抛物线于点 P,

在 $\triangle DCB$ 和 $\triangle GCB$ 中,

$$\begin{cases}CB=CB,\\ \angle DCB=\angle OCB,\\ CD=CG.\end{cases}$$

$\therefore \triangle DCB\cong\triangle GCB(\text{SAS})$.

$\therefore \angle DBC=\angle GBC$,

即 $\angle PBC=\angle DBC$.

设直线 BP 的解析式为 $y=kx+b(k\neq0)$,

$\because CG=2$,

$\therefore OG=OC-CG=3-2=1$.

则点 G 的坐标为 $(0,1)$.

把 $G(0,1)$、$B(3,0)$ 代入 $y=kx+b$,得

$$\begin{cases}b=1,\\ 3k+b=0.\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}k=-\dfrac{1}{3},\\ b=1.\end{cases}$$

$\therefore$直线 BP 的解析式为 $y=-\dfrac{1}{3}x+1$.

联立,得 $\begin{cases}y=-\dfrac{1}{3}x+1,\\ y=-x^2+2x+3.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_2=-\dfrac{2}{3},\\ y_2=\dfrac{11}{9}.\end{cases}$

$\because$点 P 在抛物线对称轴 $x=1$ 的左侧,

$\therefore x<1$.

$\therefore$点 P 的坐标为 $\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{11}{9}\right)$.

(3) $\because$抛物线的对称轴为 $x=1$,

$\therefore$可设点 N 的坐标为 $(1,n)$.

①当 BC 为平行四边形的一条对角线时,

由 BC、MN 互相平分,得

$$\begin{cases}\dfrac{3}{2}=\dfrac{1+x_M}{2},\\ \dfrac{3}{2}=\dfrac{n+y_M}{2}.\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}x_M=2,\\ y_M=3-n.\end{cases}$$

$\therefore$点 M 的坐标为 $(2,3-n)$.

将 $M(2,3-n)$ 代入 $y=-x^2+2x+3$,得

$3-n=-4+4+3$.

解得 $n=0$.

$\therefore 3-n=3$.

$\therefore$点 M 的坐标为 $(2, 3)$.

②当 NC 为平行四边形的一条对角线时，

由 BM、NC 互相平分，

同理可得 $M(-2, 3+n)$，

将 $M(-2, 3+n)$ 代入 $y=-x^2+2x+3$，得

$3+n=-4-4+3$.

解得 $n=-8$. $\therefore 3+n=-5$.

$\therefore$点 M 的坐标为 $(-2, -5)$.

③当 BN 为平行四边形的一条对角线时，

由 MC、BN 互相平分，同理可得 $M(4, n-3)$，

将 $M(4, n-3)$ 代入 $y=-x^2+2x+3$，得

$n-3=-16+8+3$.

解得 $n=-2$.

$\therefore n-3=-5$.

$\therefore$点 M 的坐标为 $(4, -5)$.

综上所述，点 M 的坐标为 $(2, 3)$ 或 $(-2, -5)$ 或 $(4, -5)$.

第 6 讲　二次函数与一元二次方程（不等式）

例一　B　**【解析】**（方法一）由图可知，二次函数的对称轴为 $x=1$，二次函数与 x 轴的一个交点的横坐标为 3，由对称性知，另一个交点的横坐标为 -1，$\therefore x_2=-1$.

（方法二）$\because$一元二次方程 $-x^2+2x+k=0$ 的一个解 $x_1=3$，将 $x_1=3$ 代入方程可得 $-9+6+k=0$，解得 $k=3$. $\therefore$一元二次方程为 $-x^2+2x+3=0$，解得 $x_1=3$，$x_2=-1$.

【点拨】本题直接考查了二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 和一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 的关系. 二次函数图象与 x 轴有两个交点时，一元二次方程有两个不同的解；二次函数图象与 x 轴有一个交点时，一元二次方程有两个相同的解；二次函数图象与 x 轴没有交点时，一元二次方程无解.

变式训练一

1. D　**【解析】**$\because$二次函数 $y=ax^2-bx+3$ 图象的对称轴为直线 $x=1$，与 x 轴交于 A、B 两点，且点 B 的坐标为 $(3, 0)$，利用对称性可知，点 A 的坐标为 $(-1, 0)$，$\therefore$方程 $ax^2=bx-3$ 的根是 $x_1=-1$，$x_2=3$.

2. D　**【解析】**$\because$图象上有两点分别为 $A(2.18, -0.51)$、$B(2.68, 0.54)$，$\therefore$当 $x=2.18$ 时，$y=-0.51$，当 $x=2.68$ 时，$y=0.54$. $\therefore$当 $y=0$ 时，$2.18<x<2.68$. 只有选项 D 符合. 故选 D.

例二　A　**【解析】**$\because$二次函数的顶

点的纵坐标为4，开口向下，∴二次函数的最大值为 4. ∴直线 $y=4$ 与抛物线只有一个交点. ∴方程 $ax^2+bx+c-4=0$ 有两个相等的实数根.

【点拨】此题主要考查了方程 $ax^2+bx+c-4=0$ 的根的情况，可以转化成二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与直线 $y=4$ 交点的情况.

变式训练二

1. B 【解析】把 $y=1$代入抛物线 $y=x^2-2x$，得 $x^2-2x=1$，即 $x^2-2x-1=0$ 的解为 M、N 两点的横坐标.

2. 3 【解析】∵一元二次方程 $ax^2+bx+m=0$ 有实数根，∴二次函数 $y=ax^2+bx$ 的图象与直线 $y=-m$ 有交点. 由图象，得 $-m\geqslant-3$，解得 $m\leqslant3$，∴m 的最大值为 3.

例三 $x_1=-2$，$x_2=4$ 【解析】整理方程 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$，得 $ax^2+bx+c=mx+n$，∵抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=mx+n$ 交于$A(-2,p)$、$B(4,q)$ 两点，∴方程 $ax^2+bx+c=mx+n$ 的解为 $x_1=-2$，$x_2=4$，即 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$ 的解为 $x_1=-2$，$x_2=4$.

【点拨】本题参数较多，无法直接求解，故不是考查解方程. 此类题目应借助图象，结合数形结合思想求解.

变式训练三

1. $x_1=-\frac{15}{2}$，$x_2=1$ 【解析】∵抛物线 $y=ax^2+bx$ 与直线 $y=mx+n$ 相交于点 $A\left(-\frac{15}{2},6\right)$、$B(1,3)$，∴关于 x 的方程 $ax^2+bx=mx+n$ 的解为 $x_1=-\frac{15}{2}$，$x_2=1$.

2. $\begin{cases}x=-2,\\y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=3,\\y=4\end{cases}$ 【解析】∵关于 x、y 的方程组 $\begin{cases}ax^2+bx+c=y,\\mx-y+n=0\end{cases}$ 的解即为抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=mx+n$ 的交点的坐标，且抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=mx+n$ 相交于点 $A(-2,1)$、$B(3,4)$，∴关于 x、y 的方程组的解为$\begin{cases}x=-2,\\y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=3,\\y=4.\end{cases}$

例四 $-2<x<3$ 【解析】∵抛物线 $y=ax^2+c$ 与直线 $y=mx+n$ 交于$A(-2,-3)$、$B(3,q)$ 两点，∴当 $-2<x<3$ 时，抛物线 $y=ax^2+c$ 在直线 $y=mx+n$ 的下方，即 $ax^2+c<mx+n$. ∴$ax^2-mx+c<n$ 的解集为$-2<x<3$.

【点拨】解答此题的关键是观察抛物线与直线两交点的左、右两侧两函数图象的位置关系，得到自

变量 x 的范围，旨在考查数形结合的思想方法.

变式训练四

1. C 【解析】∵直线 $y_1=mx+n$ 和抛物线 $y_2=ax^2+bx+c$ 交于 $A(-3,1)$ 和 $B(1,2)$ 两点，

∴由图象可知，直线 $y_1=mx+n$ 在抛物线 $y_2=ax^2+bx+c$ 上方时，自变量 x 的取值范围为 $-3<x<1$.

∴使得 $y_1>y_2$ 的 x 的取值范围是 $-3<x<1$.

2. 解：(1) 把 $A(-1,0)$ 代入 $y_1=-x+m$，得

$0=-(-1)+m$.

解得 $m=-1$.

把 $A(-1,0)$、$B(2,-3)$ 两点代入 $y_2=ax^2+bx-3$，得

$$\begin{cases}a-b-3=0,\\4a+2b-3=-3.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-2.\end{cases}$

∴$y_2=x^2-2x-3$.

(2) $x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant2$.

培优精练

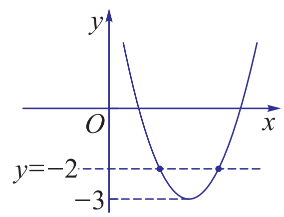
1. A 【解析】∵抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的一个交点是 $A(1,0)$，对称轴为直线 $x=-1$，

∴抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的另一个交点是 $(-3,0)$.

∴一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解是 $x_1=-3$，$x_2=1$.

2. A 【解析】∵方程 $ax^2+bx+c+2=0$ 的根是函数 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=-2$ 交点的横坐标，画出大致图象如下图所示. 由图可知，抛物线与直线 $y=-2$ 有两个不同的交点，且横坐标为正数，

∴方程 $ax^2+bx+c+2=0$ 有两个同号不相等的实数根.



3. D 【解析】联立 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=kx+h$，得 $ax^2+(b-k)x+c-h=0$，由函数图象知，上述方程的解为 $x_1=2$，$x_2=4$，而 $ax^2+(b-k)x+c>h$ 表示抛物线在直线上方，此时 $x<2$ 或 $x>4$，故选 D.

4. 解：(1) ∵抛物线 $y=(x+2)^2+m$ 经过点 $A(-1,0)$，

∴$0=1+m$.

∴$m=-1$.

∴二次函数的解析式为 $y=(x+2)^2-1$.

(2) 把 $x=0$ 代入 $y=(x+2)^2-1$，得 $y=3$.

∴点 C 的坐标为 $(0,3)$.

∵B、C 关于对称轴 $x=-2$ 对称，

∴点 B 的坐标为（-4，3）.

由图象可知，满足 $(x+2)^2+m\geqslant kx+b$ 的 x 的取值范围为 $x\leqslant-4$ 或 $x\geqslant-1$.

名卷压轴题

解：（1）∵抛物线 $y=-x^2+mx$ 的对称轴为直线 $x=2$，

∴ $-\dfrac{m}{2\times(-1)}=2$，解得 $m=4$.

∴抛物线的解析式为 $y=-x^2+4x$.

（2）∵ $y=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$，

∴抛物线的顶点坐标为（2，4）.

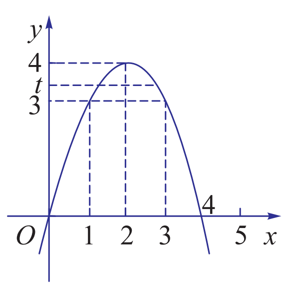
当 $x=1$ 时，$y=-1^2+4\times1=3$；

当 $x=3$ 时，$y=-3^2+4\times3=3$.

∵关于 x 的一元二次方程 $-x^2+mx-t=0$（t 为实数）在 $1<x<3$ 的范围内有解，

∴抛物线 $y=-x^2+4x$ 与直线 $y=t$ 在 $1<x<3$ 的范围内有公共点.

如下图所示.



∴ $3<t\leqslant4$.

◎二次函数　新题型探究

例题　（1）①＜　②不是

【解析】①∵ $1\leqslant x\leqslant2$，∴当 $x=1$ 时，$y=x^2$ 取最小值，则 $m=1^2=1$；当 $x=2$ 时，$y=x^2$ 取最大值，则 $n=2^2=4$. ∴ $2m<n$.

②当 $x=1$ 时，$y=1^2=1$；当 $x=1.1$ 时，$y=1.1^2=1.21$；当 $x=2$ 时，$y=2^2=4$. ∵ $1.21+1<4$，∴函数 $y=x^2$ 不是 $1\leqslant x\leqslant2$ 上的“仿三角形函数”.

（2）**解：**对于二次函数 $y=ax^2-2ax+3=a(x-1)^2+3-a$，对称轴 $x=1$.

①当 $a>0$ 时，在 $1\leqslant x\leqslant2$ 上，y 随 x 的增大而增大.

则 $y_{\min}=a\times1^2-2a\times1+3=3-a$，

$y_{\max}=a\times2^2-2a\times2+3=3$.

∵ $y=ax^2-2ax+3$ 是 $1\leqslant x\leqslant2$ 上的“仿三角形函数”，

∴ $\begin{cases}3-a>0,\\2(3-a)\geqslant3.\end{cases}$

解得 $0<a\leqslant\dfrac{3}{2}$.

②当 $a<0$ 时，在 $1\leqslant x\leqslant2$ 上，y 随 x 的增大而减小.

则 $y_{\min}=a\times2^2-2a\times2+3=3$，

$y_{\max}=a\times1^2-2a\times1+3=3-a$.

∵ $y=ax^2-2ax+3$ 是 $1\leqslant x\leqslant2$ 上的“仿三角形函数”，

∴ $2\times3\geqslant3-a$.

解得 $-3\leqslant a<0$.

综上所述，a 的取值范围为 $0<$

$a\leqslant\frac{3}{2}$或$-3\leqslant a<0$.

【点拨】本题求解的关键有两个：一是理解“仿三角形函数”的定义，并根据该定义把新定义问题转化为普通的二次函数问题；二是运用数形结合的方法，即在利用“仿三角形函数”的定义时要结合抛物线的开口方向确定函数的增减性.

变式训练

(1) **解：**当$m=0$时，令$y=0$，则$x^2-6=0$.

解得$x=\pm\sqrt{6}$.

∴当$m=0$时，该函数的零点为$\pm\sqrt{6}$.

(2) **证明：**令$y=0$，则$x^2-2mx-2(m+3)=0$.

$\Delta=b^2-4ac=(-2m)^2+4\times1\times2(m+3)=4m^2+8m+24=4(m+1)^2+20$,

∵无论m为何值时，$4(m+1)^2\geqslant0$,

∴$\Delta=4(m+1)^2+20>0$.

∴关于x的方程总有两个不相等的实数根，即无论m取何值，该函数总有两个零点.

培优精练

1. A **【解析】**∵抛物线三角形系数为$[-1,b,0]$，∴抛物线的解析式为$y=-x^2+bx=-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{b^2}{4}$，其顶点坐标为$\left(\frac{b}{2},\frac{b^2}{4}\right)$. 令$y=0$，则$-x^2+bx=0$，解得$x_1=0$，$x_2=b$. ∴与$x$轴的交点为$(0,0)$、$(b,0)$. ∵“抛物线三角形”是等腰直角三角形，∴$\frac{b^2}{4}=\frac{1}{2}|b|$，即$b^2=2b$或$b^2=-2b$. ∵当$b=0$时，抛物线与$x$轴只有一个交点$(0,0)$，∴$b\neq0$. ∴$b=2$或$b=-2$.

2. C **【解析】**由特征数的定义，得特征数为$[m,1-m,2-m]$的二次函数的解析式为$y=mx^2+(1-m)x+2-m$.

∵此抛物线的对称轴为$x=-\frac{1-m}{2m}=\frac{m-1}{2m}$，∴当$m=1$时，对称轴为$x=0$，即$y$轴，故①正确；

∵当$m=2$时，此二次函数解析式为$y=2x^2-x$，令$x=0$，则$y=0$，

∴函数图象过原点，故②正确；

∵当$m>0$时，二次函数图象开口向上，函数有最小值，故③正确；

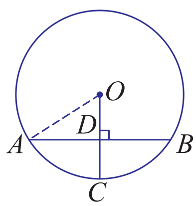
∵$m<0$，∴对称轴$x=-\frac{1-m}{2m}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}$，抛物线开口向下. ∴在对称轴的右侧，$y$随$x$的增大而减小，即$x>\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}$时，$y$随$x$的增

大而减小，而 $\frac{1}{2}<\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}$，故④错误.

第二十七章　圆

第1讲　圆的认识

例一　$\sqrt{13}$　【解析】连接 OA，如下图所示. ∵半径 OC 垂直于弦 AB，$AB=6$，∴$AD=BD=\frac{1}{2}AB=3$. 又∵$OD=2$，∴在 Rt△OAD 中，$OA=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，即⊙$O$ 的半径的长为 $\sqrt{13}$.



【点拨】本题主要考查垂径定理和勾股定理. 熟练掌握垂径定理和勾股定理是解题的关键.

变式训练一

1. $4\sqrt{3}$　【解析】∵$CE=2$，$DE=6$，∴$CD=CE+DE=8$.

∴$OD=OB=OC=\frac{1}{2}CD=4$.

∴$OE=OC-CE=4-2=2$.

∵$CD\perp AB$，∴$AE=BE$.

在 Rt△OEB 中，由勾股定理，得 $BE=\sqrt{OB^2-OE^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$. ∴$AB=2BE=4\sqrt{3}$.

2. 3　【解析】∵$CD\perp AB$，∴$CE=DE=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}\times8=4$(cm). 在 Rt△$OCE$ 中，$OE=\sqrt{5^2-4^2}=3$(cm).

例二　60°　【解析】∵$\angle BAC=30°$，∴$\angle DOE=2\angle BAC=60°$.

【点拨】本题考查圆周角定理，解题的关键是要灵活运用所学知识解决问题. 圆周角定理是中考常考的知识点.

变式训练二

1. 22°　【解析】∵CD 是直径，$EG=GF$，∴$CD\perp EF$. ∴$\angle EOD=\angle DOF$，$\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{DF}$. ∴$\angle DCF=\frac{1}{2}\angle EOD$. ∵$\angle OGE=90°$，$\angle GEO=46°$，∴$\angle EOD=90°-\angle GEO=44°$. ∴$\angle DCF=\frac{1}{2}\times44°=22°$.

2. 证明：(1) ∵$CH\perp AB$，

∴$\angle BFH+\angle FBH=90°$.

∵$BE\perp AC$，

∴$\angle A+\angle ABE=90°$.

∴$\angle BFH=\angle A$.

又∵$\angle A=\angle D$，

∴$\angle BFH=\angle D$.

∴$BF=BD$.

又∵$BH\perp FD$，

$\therefore HD=HF$.

(2) 连接 OD、OB，如下图.

$\because \angle BCD+\angle CBH=90^\circ$，

$\therefore \angle BCD=90^\circ-\angle CBH=90^\circ-60^\circ=30^\circ$.

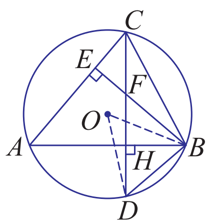
$\therefore \angle BOD=2\angle BCD=60^\circ$.

又 $\because OB=OD$，

$\therefore \triangle OBD$ 为等边三角形.

$\therefore BD=OB$，

即 BD 等于$\odot O$的半径.



例三　证明：(1) $\because AC=BD$，

$\therefore \overset{\frown}{ABC}=\overset{\frown}{BCD}$，

即 $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}$.

$\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.

$\therefore \angle ADB=\angle CAD$.

$\therefore AE=DE$.

(2) 延长 CO 交$\odot O$于点 F，连接 DF，如图所示.

$\because AC\perp BD$，

$\therefore \angle AED=90^\circ$.

$\therefore \angle ADE+\angle CAD=90^\circ$.

$\because \angle ACB=\angle ADE$，

$\angle F=\angle CAD$，

$\therefore \angle ACB+\angle F=90^\circ$.

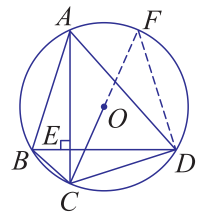
$\because CF$ 为直径，

$\therefore \angle CDF=90^\circ$.

$\therefore \angle F+\angle FCD=90^\circ$.

$\therefore \angle FCD=\angle ACB$，

即 $\angle OCD=\angle ACB$.



【点拨】本题主要考查圆周角定理. 第 (2) 问解题的关键是添加常见的辅助线，构造直角三角形.

变式训练三

1. 40°　**【解析】**由 $\angle A:\angle ABC:\angle BCD=3:5:6$，可设 $\angle A=3k$，$\angle ABC=5k$，$\angle BCD=6k$，$\because \angle A+\angle BCD=180^\circ$，即 $3k+6k=180^\circ$，$\therefore k=20^\circ$. $\therefore \angle A=60^\circ$，$\angle ABC=100^\circ$. $\because \angle ABC+\angle D=180^\circ$，$\therefore \angle D=80^\circ$. $\therefore$ 在 $\triangle APD$ 中，$\angle P=180^\circ-\angle A-\angle D=40^\circ$.

2. 40°　**【解析】**$\because \angle DCE=\angle F+\angle B$，$\angle DCE=85^\circ$，$\angle F=30^\circ$，$\therefore \angle B=\angle DCE-\angle F=85^\circ-30^\circ=55^\circ$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是$\odot O$的内接四边形，$\therefore \angle EDC=\angle B=55^\circ$. $\therefore$ 在 $\triangle EDC$ 中，$\angle E=180^\circ-\angle DCE-\angle EDC=180^\circ-85^\circ-55^\circ=40^\circ$.

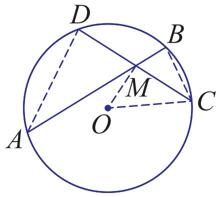
例四　(1) **证明：**连接 AD、BC，如下图所示.

$\because \angle A=\angle DCB$，$\angle ADC=\angle ABC$，

$\therefore \triangle ADM \backsim \triangle CBM$.

$\therefore \dfrac{AM}{CM}=\dfrac{DM}{BM}$，

即 $AM \cdot MB=CM \cdot MD$.



（2）**解：** 连接 OM、OC，如上图.

$\because M$ 为 CD 的中点，

$\therefore DM=CM$，$OM \perp CD$.

在 $Rt\triangle OMC$ 中，

$\because OC=3$，$OM=2$，

$\therefore CM=\sqrt{OC^2-OM^2}$

$=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$.

由（1）知，$AM \cdot MB=CM \cdot MD$.

$\therefore AM \cdot MB=\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}=5$.

【点拨】 本题主要考查相似三角形的判定和性质、勾股定理、圆周角定理及垂径定理，是综合性较强的题目. 利用相似、圆周角定理得到相交弦定理——圆内的两条相交弦，被交点分成的两条线段长的积相等.

变式训练四

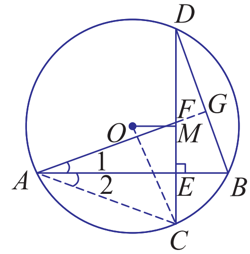
（1）**证明：** 连接 AC，如图所示.

$\because \angle ACD=\angle B$，$\angle BAC=\angle D$，

$\therefore \triangle ACE \backsim \triangle DBE$.

$\therefore \dfrac{AE}{DE}=\dfrac{CE}{BE}$.

$\therefore AE \cdot BE=CE \cdot DE$.



（2）**解：** 如上图，连接 OC.

$\because M$ 是 CD 的中点，

$\therefore OM \perp CD$.

$\because CD=12$，

$\therefore MC=6$.

在 $Rt\triangle OMC$ 中，

$\therefore OM=\sqrt{OC^2-MC^2}$

$=\sqrt{(3\sqrt{5})^2-6^2}=3$.

（3）**证明：** 如上图，延长 AF 交 BD 于点 G，

$\because CE=EF$，$AE \perp FC$，

$\therefore AF=AC$，$\angle 1=\angle 2$.

$\because \angle 2$、$\angle D$ 为 $\overset{\frown}{BC}$ 所对的圆周角，

$\therefore \angle 2=\angle D$.

$\therefore \angle 1=\angle D$.

$\because$ 在 $Rt\triangle BED$ 中，$\angle D+\angle B=90°$，

$\therefore \angle 1+\angle B=90°$.

$\therefore \angle AGB=90°$.

$\therefore AF \perp BD$.

培优精练

1. D **【解析】** $\because AB=10$，$\therefore OB=OD=5$. $\because OC:OB=3:5$，$\therefore OC=3$. 在 $Rt\triangle OCD$ 中，$CD=\sqrt{OD^2-OC^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$. $\because DE \perp$

AB，$\therefore DE=2CD=8$.

2. 7 【解析】$\because BC=CD$，

$\therefore \angle BAC=\angle DAC$.

$\because \angle DBC=\angle DAC$，

$\therefore \angle BAC=\angle DBC$.

又$\angle BCE=\angle ACB$，

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle BEC$.

$\therefore \frac{BC}{EC}=\frac{AC}{BC}$，即$BC^2=EC\cdot AC$.

$\because BC=CD=4$，$AE=6$，

$\therefore AC=6+EC$.

$\therefore 4^2=EC\cdot(6+EC)$.

$\therefore EC=2$.

由相交弦定理，得$BE\cdot DE=AE\cdot EC$，

即$BE\cdot DE=12$.

又线段BE、DE的长都为正整数，

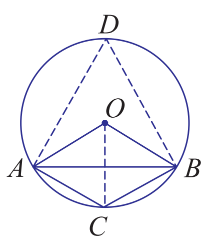
且在$\triangle BCD$中，$BC+CD>BE+DE$，

即$BE+DE<8$.

$\therefore \begin{cases}BE=3,\\DE=4\end{cases}$或$\begin{cases}BE=4,\\DE=3.\end{cases}$

$\therefore BD=BE+DE=7$.

3. （1）**解**：如下图，在优弧$\overset{\frown}{AB}$上取一点D，连接AD、BD.



则$\angle D=\frac{1}{2}\angle AOB=60^\circ$.

$\because$四边形$ACBD$内接于$\odot O$，

$\therefore \angle ACB=180^\circ-\angle D=180^\circ-60^\circ=120^\circ$.

（2）**证明**：连接OC，如图所示.

$\because C$是劣弧$\overset{\frown}{AB}$的中点，

$\angle AOB=120^\circ$，

$\therefore \angle AOC=\angle BOC=60^\circ$.

$\because OA=OC=OB$，

$\therefore \triangle OAC$和$\triangle OBC$都是等边三角形.

$\therefore AC=OA=OB=BC$.

$\therefore$四边形$OACB$是菱形.

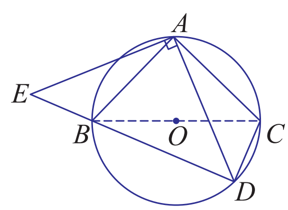
4. **证明**：（1）$\because$四边形$ABDC$是$\odot O$的内接四边形，

$\therefore \angle ABD+\angle ACD=180^\circ$.

$\because \angle ABE+\angle ABD=180^\circ$，

$\therefore \angle ABE=\angle ACD$.

（2）连接BC，如下图.



$\because BC$为$\odot O$的直径，

$\therefore \angle BAC=90^\circ$.

$\because AE\perp AD$，

$\therefore \angle EAD=90^\circ$.

$\therefore \angle EAB+\angle BAD=\angle CAD+\angle BAD=90^\circ$.

$\therefore \angle EAB=\angle CAD$.

在$\triangle ABE$与$\triangle ACD$中，

$$\begin{cases}\angle EAB=\angle CAD,\\ AB=AC,\\ \angle ABE=\angle ACD.\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle ACD$(ASA).

名卷压轴题

(1) **证明**：连接 AC，如下图所示.

$\because OD\perp BC$，

$\therefore E$ 是 BC 的中点.

$\because$ 点 O 是 AB 的中点，

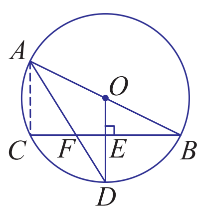
$\therefore OE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线.

$\therefore AC=2OE$，$OE\parallel AC$.

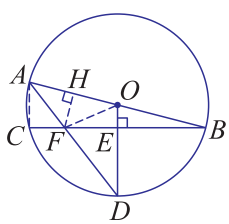
易证 $\triangle ACF\backsim\triangle DEF$.

$\therefore \dfrac{AF}{DF}=\dfrac{AC}{DE}$.

$\therefore \dfrac{AF}{DF}=\dfrac{2OE}{DE}$.



(2) **解**：连接 OF，过点 F 作 $FH\perp AB$，垂足为 H，如下图所示.



$\because AF\cdot AD=AO^2$，

$\therefore \dfrac{AF}{AO}=\dfrac{AO}{AD}$.

$\because \angle OAF=\angle DAO$，

$\therefore \triangle AOF\backsim\triangle ADO$.

$\therefore \angle AOF=\angle D$.

$\because OA=OD$，

$\therefore \angle FAO=\angle D$.

$\therefore \angle FAO=\angle FOA$.

$\therefore FA=FO$.

$\therefore AH=\dfrac{1}{2}AO$.

$\because OD\parallel AC$，

$\therefore \angle CAF=\angle D$.

$\therefore \angle CAF=\angle OAF$.

又 $\because \angle ACF=\angle AHF=90^\circ$，

$\therefore \triangle ACF\cong\triangle AHF$.

$\therefore AC=AH=\dfrac{1}{2}AO$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\sin\angle ABC=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\frac{1}{2}AO}{2AO}=\dfrac{1}{4}$.

(3) **解**：$\because AC\parallel OD$，

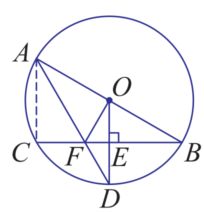
$\therefore \dfrac{FE}{FC}=\dfrac{DE}{AC}=\dfrac{DF}{FA}$.

$\therefore \dfrac{S_{\triangle OFE}}{S_{\triangle OFB}}=\dfrac{FE}{FB}$，$\dfrac{S_{\triangle OFB}}{S_{\triangle AFB}}=\dfrac{OB}{AB}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle OFE}}{S_{\triangle AFB}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{FE}{FB}$.

由题意可知 $\angle FAO\neq 90^\circ$，

①当 $\angle AOF=90^\circ$ 时，如下图.



可得 $\angle B=\angle FAO$.

$\because \angle OAD=\angle D$，

$\therefore \angle B=\angle D$.

$\because OE \perp FB$，

$\therefore \angle FOE=\angle B$.

$\therefore \angle D=\angle FOE$.

$\therefore OF=FD$.

$\therefore DE=OE$.

$\therefore \frac{FE}{FC}=\frac{DE}{AC}=\frac{DE}{2OE}=\frac{1}{2}$.

$\therefore \frac{FE}{BE}=\frac{FE}{EC}=\frac{1}{3}$.

$\therefore \frac{FE}{FB}=\frac{1}{4}$.

$\therefore \frac{S_{\triangle OFE}}{S_{\triangle AFB}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$.

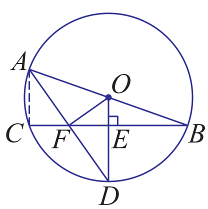
②当$\angle AFO=90°$时，如下图.

可得 $DF=FA$，$\frac{FE}{FC}=\frac{DF}{FA}=1$，

$\therefore \frac{FE}{BE}=\frac{FE}{EC}=\frac{1}{2}$.

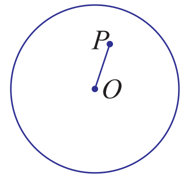
$\therefore \frac{FE}{FB}=\frac{1}{3}$.

$\therefore \frac{S_{\triangle OFE}}{S_{\triangle AFB}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.



第 2 讲　与圆有关的位置关系（一）

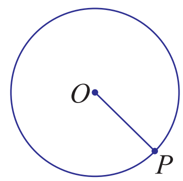
例一　A　【解析】如图，$\because$点 P 在$\odot O$内，$\therefore OP<r$，即 $OP<6$ cm.



【点拨】本题考查点与圆的位置关系. 熟练掌握点与圆位置关系的判断方法是解决本题的关键.

变式训练一

1. B　【解析】如下图所示，设$\odot O$的半径为 r，$\because \odot O$的面积为 25π，即 $\pi r^2=25\pi$，$\therefore r=5$. $\because$点 P 在$\odot O$上，$\therefore PO=5$.



2. C　【解析】设$\odot O$的半径为 r.

①如图 1，当点 P 在$\odot O$上时，$a=2r$，$b=0$. 不符合题意.

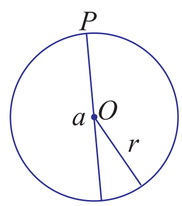


图 1

②如图 2，当点 P 在$\odot O$内时，$\odot O$的直径为 $a+b$，半径 $r=\frac{a+b}{2}$.

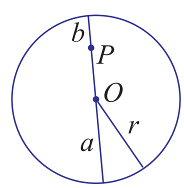


图 2

③如图3，当点 P 在⊙O 外时，⊙O 的直径是 $a-b$，则半径 $r=\frac{a-b}{2}$.

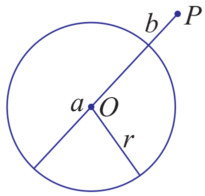


图3

综上所述，⊙O 的半径为 $\frac{a+b}{2}$ 或 $\frac{a-b}{2}$.

例二 **解：**（1）连接 AC，如下图所示.

∵$AB=3$ cm，$AD=BC=4$ cm，

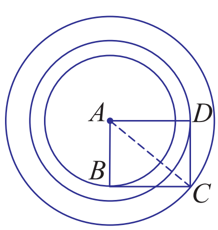
∴$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5$(cm).

∵$r=4$ cm，

∴$AB<r$，$AD=r$，$AC>r$.

∴点 B 在⊙A 内，点 D 在⊙A 上，点 C 在⊙A 外.

（2）由（1）知，$AC=5$ cm，以 A 为圆心，3 cm、4 cm、5 cm 分别为半径作圆. 如下图所示. 当以点 A 为圆心作⊙A，使 B、C、D 三点中至少有一个点在圆内，且至少有一个点在圆外时，

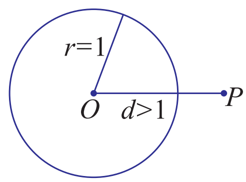


由图，得⊙A 的半径 r 的取值范围是 3 cm$<r<$5 cm.

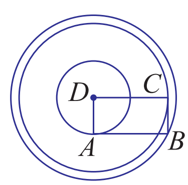
【点拨】此题主要考查点与圆的位置关系. 解决本题需要借助数形结合，通过画图观察，即可得出答案.

变式训练二

1. 外 **【解析】**∵方程 $x^2-2x+d=0$ 无实数根，∴$\Delta=(-2)^2-4d<0$. ∴$d>1$. ∵⊙O 的半径为1，∴$d>r$. 画出图形如下，由图可得，点 P 在⊙O 外.

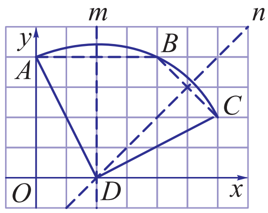


2. $2<r<\sqrt{5}$ **【解析】**在直角△ABD 中，$AB=2$，$AD=1$，则 $BD=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$. 以 D 为圆心，分别以1、2、$\sqrt{5}$ 为半径作圆，如下图所示. 由图可知，满足题意的 r 的取值范围为 $2<r<\sqrt{5}$.



例三 （1）**解：**如图，连接 AB、BC，分别作 AB、BC 的垂直平分线 m、n. 则直线 m、n 的交点即

为圆心 D. ∴点 D 为 (2，0).



(2) ① $2\sqrt{5}$ 【解析】$CD=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.

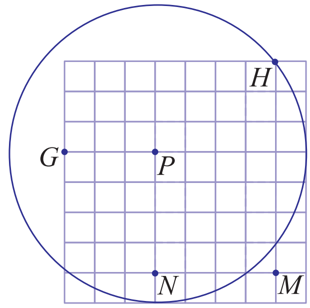
②内 【解析】(−2，0) 到点 $D(2,0)$的距离为 $2-(-2)=4$，∵$4<2\sqrt{5}=r$，∴点 (−2，0) 在⊙D 内.

③90° 【解析】∵$A(0,4)$、$C(6,2)$，∴$AC=\sqrt{(6-0)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{10}$. 又 $AD=CD=2\sqrt{5}$，∴$AD^2+CD^2=AC^2$. ∴$\angle ADC=90°$. ∴$\overset{\frown}{AC}$的度数为 90°.

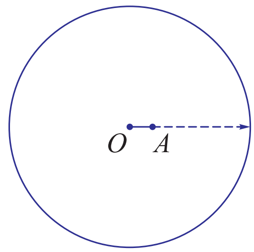
【点拨】本题考查了点与圆的位置关系、勾股定理、线段的垂直平分线的性质等知识. 由垂径定理的推论可知，弦 AB、弦 BC 的垂直平分线的交点即为圆心，从而解决后续问题.

变式训练三

1. B 【解析】以点 P 为圆心，5 km 为半径作圆，如图所示. 由图可知，能被雷达监测到的最远点为点 H.



2. 解：(1) 如下图.



沿虚线方向跑才能最快到达安全区域.

(2) 点导火索的工程人员是安全的. 理由如下：

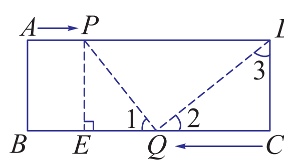
导火索燃烧的时间为 $18\div 0.9=20$ (s)，

导火索刚好燃烧完时，工程人员跑的路程为 $6.5\times 20=130$ (m).

∵$130>120$，

∴当工程人员跑的速度是6.5 m/s 时，他是安全的.

例四 解：(1) 如下图，连接 PQ、DQ，过点 P 作 $PE\perp BC$ 于点 E. 则$\angle PQD=90°$.



∴$\angle 1+\angle 2=90°$，$\angle PEQ=90°$.

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，$AB=$

3 cm，$BC=8$ cm，

∴四边形 $ABEP$ 是矩形，$\angle C=90^\circ$，$CD=AB=3$ cm.

∴ $PE=AB=3$ cm，$AP=BE$，$\angle 2+\angle 3=90^\circ$.

∴ $\angle 1=\angle 3$.

在$\triangle PEQ$与$\triangle QCD$中，

$$\begin{cases}\angle 1=\angle 3,\\ \angle PEQ=\angle C=90^\circ,\end{cases}$$

∴$\triangle PEQ\backsim\triangle QCD$.

∴$\dfrac{PE}{QC}=\dfrac{EQ}{CD}$.

由题意，得 $BE=AP=t$ cm，$CQ=2t$ cm，$0\leqslant t\leqslant 4$.

∴ $EQ=BC-BE-CQ=(8-3t)$cm.

∴$\dfrac{3}{2t}=\dfrac{8-3t}{3}$.

解得 $t_1=\dfrac{8+\sqrt{10}}{6}$，$t_2=\dfrac{8-\sqrt{10}}{6}$.

经检验 $t_1=\dfrac{8+\sqrt{10}}{6}$，$t_2=\dfrac{8-\sqrt{10}}{6}$ 均符合题意.

故所有满足条件的 t 的值为 $\dfrac{8+\sqrt{10}}{6}$或$\dfrac{8-\sqrt{10}}{6}$.

(2) **解：** 点 Q 在$\odot P$ 外.

理由如下：

如图，过点 P 作 $PF\perp BC$ 于点 F，

由 (1) 可知，$BF=AP=t$ cm，$CQ=2t$ cm，$PF=AB=3$ cm，$FQ=(8-3t)$cm.

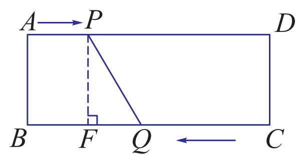
∴$PQ^2=PF^2+FQ^2=3^2+(8-3t)^2=9t^2-48t+73$，$PA^2=t^2$，

∴$PQ^2-PA^2=9t^2-48t+73-t^2=8(t-3)^2+1>0$.

∴$PQ^2>PA^2$.

∴$PQ>PA$.

则点 Q 在$\odot P$ 外.



【点拨】本题考查了矩形的判定与性质、勾股定理、圆周角定理、相似三角形的判定与性质、点与圆的位置关系等知识. 熟练掌握圆周角定理和相似三角形的判定与性质是解本题的关键.

变式训练四

解： (1) 设运动 a s 后，$\triangle DPQ$ 的面积等于 28 cm²，

由题意，得 $AP=a$ cm，$BQ=2a$ cm，$CQ=BC-BQ=(12-2a)$ cm，

∵ $S_{\triangle DPQ}=S_{矩形ABCD}-S_{\triangle ADP}-S_{\triangle PBQ}-S_{\triangle DQC}$，

$S_{矩形ABCD}=AB\cdot BC=6\times 12=72(\text{cm}^2)$，

$S_{\triangle ADP}=\dfrac{1}{2}AP\cdot AD=\dfrac{1}{2}\times a\times 12=6a(\text{cm}^2)$，

$S_{\triangle PBQ}=\dfrac{1}{2}PB\cdot BQ=\dfrac{1}{2}(6-a)\ \cdot$

$2a=(6a-a^2)\ cm^2$，

$S_{\triangle DQC}=\frac{1}{2}QC\cdot CD=\frac{1}{2}(12-2a)\times 6=(36-6a)\ cm^2$，

$\therefore 28=72-6a-(6a-a^2)-(36-6a)$.

整理，得 $a^2-6a+8=0$.

解得 $a_1=2$，$a_2=4$.

∴运动 2 s 或 4 s 后，$\triangle DPQ$ 的面积等于 28 cm^2.

（2）存在. 理由如下：假设运动开始后第 x s 时，点 D 恰好落在以点 Q 为圆心，PQ 为半径的圆上，则 $QP=QD$.

$\because QP^2=PB^2+BQ^2=(6-x)^2+(2x)^2$，

$QD^2=QC^2+CD^2=(12-2x)^2+6^2$，

$\therefore (12-2x)^2+6^2=(6-x)^2+(2x)^2$.

整理，得 $x^2+36x-144=0$.

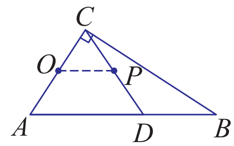
解得 $x=-18\pm 6\sqrt{13}$.

$\because 0<6\sqrt{13}-18<6$，

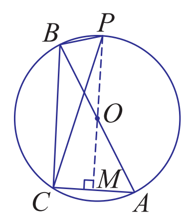
∴运动开始后第$(6\sqrt{13}-18)$s 时，点 D 恰好落在以点 Q 为圆心，PQ 为半径的圆上.

培优精练

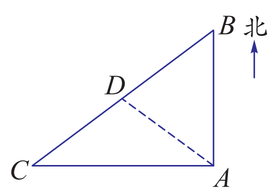
1. C 【解析】如图，连接 OP，∵以 AC 为直径作⊙O，线段 CD 的中点为 P，∴OP 是$\triangle CAD$ 的中位线. $\therefore OP=\frac{1}{2}AD=2.5$. $\because AO=CO=\frac{1}{2}AC=2$，$2.5>2$，∴点 P 在⊙O 外. 故选 C.



2. $6+3\sqrt{3}$ 【解析】如下图，过点 O 作 $OM\perp AC$ 于点 M，延长 MO 交⊙O 于点 P，则此时，点 P 到 AC 的距离最大，且点 P 到 AC 距离的最大值为 PM. $\because OM\perp AC$，$\angle A=\angle BPC=60^\circ$，⊙$O$ 的半径为 6，$\therefore OP=OA=6$. $\therefore OM=\frac{\sqrt{3}}{2}OA=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=3\sqrt{3}$. $\therefore PM=OP+OM=6+3\sqrt{3}$. ∴点 P 到 AC 距离的最大值是 $6+3\sqrt{3}$.



3. **解**：连接 AD，如下图所示.



$\because AB=60$ m，$AC=80$ m，

$\therefore BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{3\ 600+6\ 400}=100$(m).

$\because D$ 是 BC 的中点，

$\therefore AD=\frac{1}{2}BC=50(\text{m})$.

为使民房、变电设施、古建筑都不遭到破坏，爆破影响面的半径应比 AB、AC、AD 都小.

$\therefore$ 爆破影响面的半径应控制在 50 m内.

4. (1) **证明：**$\because AD$ 是直径，$AD\perp BC$，

$\therefore \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$.

$\therefore BD=CD$.

(2) **解：**B、E、C 三点在以 D 为圆心，以 DB 为半径的圆上.

理由如下：

由 (1) 知，$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$，

$\therefore \angle BAD=\angle CBD$.

又 $\because BE$ 平分 $\angle ABC$，

$\therefore \angle CBE=\angle ABE$.

$\because \angle DBE=\angle CBD+\angle CBE$，$\angle DEB=\angle BAD+\angle ABE$，

$\therefore \angle DBE=\angle DEB$.

$\therefore DB=DE$.

由 (1) 知，$BD=CD$，

$\therefore DB=DE=DC$.

$\therefore B$、E、C 三点在以 D 为圆心，以 DB 为半径的圆上.

名卷压轴题

解：(1) 如图，连接 BD，

$\because AD$ 是 $\odot M$ 的直径，

$\therefore \angle ABD=90°$.

$\therefore \triangle AOB\backsim\triangle ABD$.

$\therefore \frac{AO}{AB}=\frac{AB}{AD}$.

在 Rt$\triangle AOB$ 中，$AO=1$，$BO=2$，

根据勾股定理，得 $AB=\sqrt{5}$.

$\therefore \frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{AD}$.

$\therefore AD=5$.

$\therefore DO=AD-AO=5-1=4$.

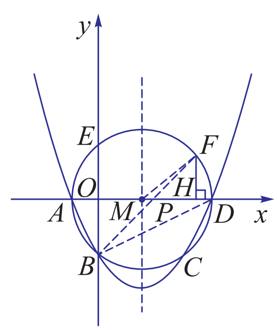
$\therefore D(4,0)$.

把 $A(-1,0)$、$B(0,-2)$、$D(4,0)$ 代入 $y=ax^2+bx+c$，得

$$\begin{cases}c=-2,\\16a+4b+c=0,\\a-b+c=0.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\b=-\frac{3}{2},\\c=-2.\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2$.



(2) 如上图，连接 FM，在 Rt$\triangle FHM$中，$FM=\frac{5}{2}$，$FH=\frac{3}{2}$，

$\therefore MH=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=2$，

$OM=AM-OA=\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$.

$\therefore OH=OM+MH=\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2}$.

$\therefore F\left(\frac{7}{2},\ \frac{3}{2}\right)$.

设直线 BF 的解析式为 $y=kx+m$，

则$\begin{cases}\frac{7}{2}k+m=\frac{3}{2},\\ m=-2.\end{cases}$解得$\begin{cases}k=1,\\ m=-2.\end{cases}$

$\therefore$直线 BF 的解析式为 $y=x-2$.

连接 BF 交 x 轴于点 P，

$\because$点 E 与点 B 关于 x 轴对称，

$\therefore$点 P 即为所求.

当 $y=0$ 时，$x=2$，

$\therefore P$（2，0）.

$\therefore BF=\sqrt{\left(\frac{7}{2}-0\right)^2+\left(\frac{3}{2}+2\right)^2}$

$=\frac{7\sqrt{2}}{2}$，

$EF=\sqrt{\left(\frac{7}{2}-0\right)^2+\left(\frac{3}{2}-2\right)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore$此时 $\triangle PEF$ 周长的最小值为

$BF+EF=\frac{7\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$.

第 3 讲　与圆有关的位置关系（二）

例一　解：$\because PA:OA=2:3$，

$\therefore$可设 $PA=2x$ cm，

则 $OA=3x$ cm.

$\because PA\perp OM$，$OP=2\sqrt{13}$ cm，

$\therefore$在 Rt$\triangle AOP$ 中，$OA^2+PA^2=OP^2$，

即 $(3x)^2+(2x)^2=(2\sqrt{13})^2$.

解得 $x=2$.

$\therefore PA=4$ cm.

（1）分两种情况：

①当射线 OM 与⊙P 相切时，如图 1 所示.

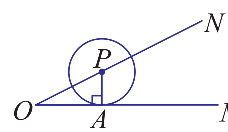


图 1

则 $r=PA=4$ cm.

②当射线 OM 与⊙P 相交且点 O 在⊙P 内时，如图 2 所示.

则$\begin{cases}r>PA=4,\\ r>OP=2\sqrt{13}.\end{cases}$

$\therefore r>2\sqrt{13}$ cm.

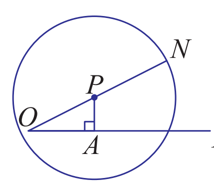


图 2

综上所述，当射线 OM 与⊙P 只有一个公共点时，r 的取值范围为 $r=4$ cm 或 $r>2\sqrt{13}$ cm.

（2）分两种情况：

①当射线 OM 与⊙P 相交且点 O 在⊙P 外时，如图 3 所示.

则$\begin{cases} r>PA=4, \\ r<OP=2\sqrt{13}. \end{cases}$

∴$4\text{ cm}<r<2\sqrt{13}\text{ cm}$.

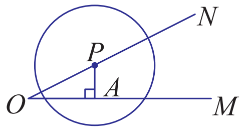


图 3

②当射线 OM 与⊙P 相交且点 O 在⊙P 上时，如图 4 所示.

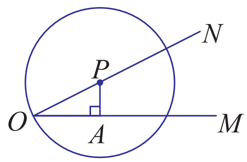


图 4

则$\begin{cases} r>PA=4, \\ r=OP=2\sqrt{13}. \end{cases}$

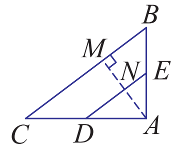
∴$r=2\sqrt{13}\text{ cm}$.

综上所述，当射线 OM 与⊙P 有两个公共点时，r 的取值范围为 $4\text{ cm}<r\leqslant 2\sqrt{13}\text{ cm}$.

【点拨】本题的求解运用了分类讨论和数形结合的方法，分类讨论的基础是深刻理解直线与射线的关系，厘清直线与圆的位置关系和射线与圆的位置关系的异同点，数形结合把射线与圆的公共点这个“形”的问题，转化为比较 d 与 r 的大小关系这个“数”的问题，根据图形得到关于 r 的不等式组，解之即可得到答案.

变式训练一

1. B　**【解析】**过点 A 作 $AM\perp BC$ 于点 M，交 DE 于点 N，如下图所示.



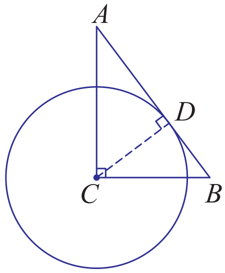
∵$AB=6$，$AC=8$，$BC=10$，∴$AB^2+AC^2=BC^2$. ∴$\angle BAC=90°$. ∴$AM\times BC=AC\times AB$. ∴$AM=\dfrac{6\times 8}{10}=4.8$. ∵点 D、E 分别是 AC、AB 的中点，∴$DE\parallel BC$，$DE=\dfrac{1}{2}BC=5$. ∴$AN=MN=\dfrac{1}{2}AM=2.4$. ∵以 DE 为直径的圆的半径为 2.5，∴$r=2.5>2.4$. ∴以 DE 为直径的圆与 BC 的位置关系是相交.

2. （1）2.4　**【解析】**过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D，如图所示.

∵$AC=4$，$BC=3$，∴$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=5$.

∵⊙C 与边 AB 相切，∴$CD=r$.

∵$CD\times AB=AC\times BC$，∴$CD=r=\dfrac{4\times 3}{5}=2.4$.

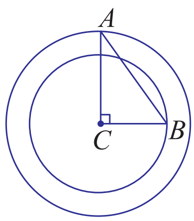


(2) $3<r\leqslant4$ 或 $r=2.4$

【解析】①当直线 AB 与⊙C 相切时，即 $d=r=2.4$，⊙C 与斜边 AB 只有一个公共点.

②以 C 为圆心，分别以 3、4 为半径作圆如下图所示.

由图，得⊙C 与边 AB 只有一个交点时，$3<r\leqslant4$.



例二　解：∵AB 与⊙O 相切于点 C，

∴$OC\perp AB$.

∵⊙O 的直径为 4，

∴$OC=2$.

∵$OA=OB$，$AB=8$，

∴$AC=BC=\frac{1}{2}AB=4$.

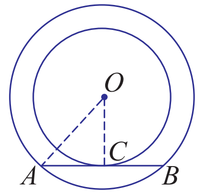
在 Rt△BOC 中，

$OB=\sqrt{OC^2+BC^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.

【点拨】本题主要考查切线的性质：圆的切线垂直于经过切点的半径. 确定$\angle OCB=90°$是解决本题的关键.

变式训练二

1. 6　【解析】如图，设切点为 C，连接 OC、AO.



∵大圆的一条弦 AB 与小圆相切，

∴$OC\perp AB$. ∴$AC=BC=\frac{1}{2}AB$.

∵$OA=5$ cm，$OC=4$ cm，

在 Rt△AOC 中，$AC=\sqrt{OA^2-OC^2}=3$ cm. ∴$AB=2AC=6$ cm.

2. 解：(1) ∵$OA=OC$，

∴$\angle CAO=\angle ACO$.

∴$\angle COD=\angle CAO+\angle ACO=2\angle CAD$.

∵$\angle D=2\angle CAD$，

∴$\angle D=\angle COD$.

∵PD 切⊙O 于点 C，

∴$\angle OCD=90°$.

∴$\angle D=\angle COD=45°$.

(2) ∵$\angle D=\angle COD$，$CD=2$，

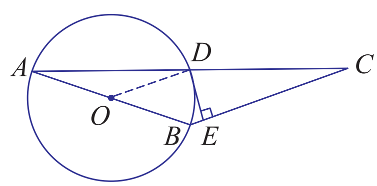
∴$OB=OC=CD=2$.

在 Rt△OCD 中，

$OD=\sqrt{OC^2+CD^2}=2\sqrt{2}$.

∴$BD=OD-OB=2\sqrt{2}-2$.

例三　证明：(1) 连接 OD，如下图.



$\because OA=OD$，

$\therefore \angle A=\angle ADO$.

$\because AB=BC$，

$\therefore \angle A=\angle C$.

$\therefore \angle C=\angle ADO$.

$\therefore OD /\!/ BC$.

$\therefore \angle ODE=\angle DEC=90^\circ$.

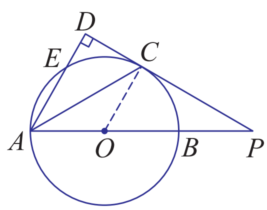
又$\because OD$是$\odot O$的半径，

$\therefore DE$是$\odot O$的切线.

【点拨】一般而言，当直线与圆有交点时，通常“连半径，证垂直”. 切线的判定定理，其本质为证明圆心到直线的距离d等于半径r. 连半径，则说明线段OD为r，而后只需证明$OD\perp DE$即可.

变式训练三

1. 证明：连接OC，如下图.



$\because AC$是$\angle EAB$的平分线，

$\therefore \angle EAC=\angle OAC$.

$\because OA=OC$，

$\therefore \angle ACO=\angle OAC$.

$\therefore \angle ACO=\angle DAC$.

$\therefore OC /\!/ AD$.

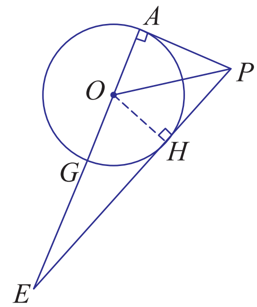
$\because CD\perp AE$，

$\therefore OC\perp CD$.

又$\because OC$是$\odot O$的半径，

$\therefore DP$是$\odot O$的切线.

2. (1) 证明：如下图，作$OH\perp PE$于点H.



$\because \angle PAE=90^\circ$，

PO是$\angle APE$的平分线，

$\therefore OH=OA$.

又$\because OH\perp PE$，

$\therefore PE$是$\odot O$的切线.

(2) 解：$\because \angle PAO=90^\circ$，

$\therefore PA$切$\odot O$于点A.

$\because PE$与$\odot O$相切于点H，

$\therefore PA=PH$.

设$AP=x$，则$PE=3x$.

在$\mathrm{Rt}\triangle AEP$中，

$x^2+3^2=9x^2$.

解得$x=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

$\therefore PH=AP=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，$PE=\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$.

$\therefore EH=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

设$\odot O$的半径为r，

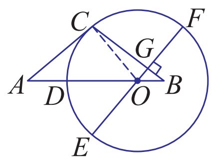
则在$\mathrm{Rt}\triangle OHE$中，

$r^2+\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=(3-r)^2$.

解得$r=\dfrac{3}{4}$，

即$\odot O$的半径是$\frac{3}{4}$.

例四　证明：（1）连接 OC，如下图所示.



$\because EF\perp BC$，

$\therefore \angle B+\angle BOF=90^\circ$.

$\because AC=BC$，

$\therefore \angle A=\angle B$.

$\therefore \angle A+\angle BOF=90^\circ$.

$\because D$ 是$\overset{\frown}{CE}$的中点，

$\therefore \overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$.

$\therefore \angle COD=\angle DOE=\angle BOF$.

$\therefore \angle A+\angle COD=90^\circ$.

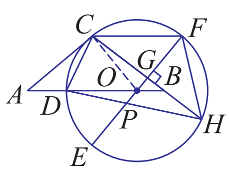
$\therefore \angle ACO=180^\circ-(\angle A+\angle COD)=90^\circ$，

即 $OC\perp AC$.

$\because OC$ 是半径，

$\therefore AC$ 是$\odot O$的切线.

（2）连接 OC，如下图所示.



$\because EF\perp BC$，即 $EF\perp HC$，且 EF 是直径，

$\therefore CG=GH$.

$\therefore EF$ 垂直平分 HC.

$\therefore CF=FH$.

$\because \angle CFP=\frac{1}{2}\angle COE$，

$\angle COD=\angle DOE$，

$\therefore \angle CFP=\angle COD$.

$\because \angle CHP=\angle CHD=\frac{1}{2}\angle COD$，

$\therefore \angle CHP=\frac{1}{2}\angle CFP$.

易证点 C、P、H 均在以 F 为圆心，CF 为半径的圆上.

$\therefore CF=PF=HF$.

$\because PF=OF+OP=OD+OP$，

即 $CF=OD+OP$.

【点拨】本题的难点是运用数形结合的方法得到点 C、P、H 均在以 F 为圆心，FC 为半径的圆上. $\because \angle CHP$ 与 $\angle CFP$ 所对的弧相同，且 $\angle CHP=\frac{1}{2}\angle CFP$，$\therefore$ 可把 $\angle CHP$ 与 $\angle CFP$ 分别看作同弧所对的圆周角和圆心角，则点 C、P、H 均在以 F 为圆心，FC 为半径的圆上.

变式训练四

解：（1）$\because AB$ 是$\odot O$的直径，BD 为$\odot O$的切线，切点为 B，

$\therefore BD\perp AB$，即 $\angle ABD=90^\circ$.

$\because DC$ 为$\odot O$的切线，切点为 C，

$\therefore CD=BD$.

$\because CD\parallel AB$，

$\therefore \angle D+\angle ABD=180^\circ$.

$\therefore \angle D=90^\circ$.

$\therefore \angle BCD=\angle CBD=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle D)=45^\circ$.

(2) $\because AB$ 是$\odot O$的直径，BD为$\odot O$的切线，切点为B，

$\therefore BD\perp AB$.

$\therefore \angle ABD=90^\circ$.

$\because CD/\!/AB$，

$\therefore \angle D+\angle ABD=180^\circ$.

$\therefore \angle D=180^\circ-\angle ABD=90^\circ$.

$\because \angle DBE=30^\circ$，

$\therefore \angle BED=90^\circ-\angle DBE=60^\circ$.

$\therefore \angle ABE=\angle BED=60^\circ$.

$\therefore \angle ACE=180^\circ-\angle ABE=120^\circ$.

$\because AB$是$\odot O$的直径，

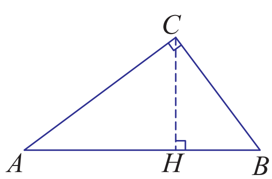
$\therefore \angle ACB=90^\circ$.

$\therefore \angle BCD=\angle ACE-\angle ACB=30^\circ$.

$\therefore \angle CBD=90^\circ-\angle BCD=60^\circ$.

培优精练

1. 解：(1) 如下图，过点C作$CH\perp AB$于点H.



$\because \angle ACB=90^\circ$，$AC=4$ cm，$BC=3$ cm，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$(cm).

$\because AC\cdot BC=AB\cdot CH$，

$\therefore CH=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{4\times 3}{5}=\frac{12}{5}$(cm).

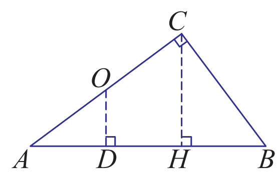
$\because 2<\frac{12}{5}$，

$\therefore \odot C$与直线AB相离.

(2) $\because \odot C$与直线AB相切，

$\therefore r=CH=\frac{12}{5}$ cm.

(3) 如下图，取AC的中点O，过点O作$OD\perp AB$于点D.



$\because AC=4$ cm，

$\therefore$以AC为直径的$\odot O$的半径为2 cm.

$\because OD\perp AB$，$CH\perp AB$，

$\therefore OD/\!/CH$.

$\because O$为AC的中点，

$\therefore OD=\frac{1}{2}CH=\frac{6}{5}$ cm.

$\because \frac{6}{5}<2$，

$\therefore$以AC为直径的$\odot O$与直线AB相交.

$\because OC\perp BC$，$OC=\frac{1}{2}AC=2$ cm，2 cm$=r$，

$\therefore$以AC为直径的$\odot O$与直线BC相切.

2. (1) 证明：$\because CD$是$\odot O$的切线，

$\therefore OC\perp DE$.

又$\because BE\perp DE$，

$\therefore OC\parallel BE$.

$\therefore \angle OCB=\angle CBE$.

$\because OB=OC$，

$\therefore \angle OCB=\angle OBC$.

$\therefore \angle OBC=\angle CBE$.

$\therefore BC$ 平分$\angle ABE$.

（2）**解：**$\because AB$ 为$\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ACB=90°$.

$\because \angle A=60°$，$OA=OC$，

$\therefore \triangle OAC$ 为等边三角形.

$\therefore AC=OA=4$.

$\because AB=2OA=8$，

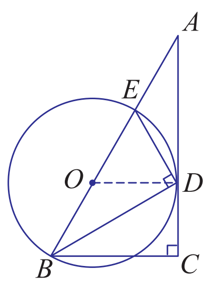
$\therefore BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=4\sqrt{3}$.

$\because \angle CBE=\angle OBC=90°-\angle A=30°$，

$\therefore$在 Rt$\triangle CBE$ 中，

$CE=\frac{1}{2}BC=2\sqrt{3}$.

3. （1）**证明：**连接 OD，如下图所示.



$\because \odot O$ 是$\triangle BDE$ 的外接圆，

$\therefore OB=OD$.

$\therefore \angle OBD=\angle ODB$.

$\because BD$ 为$\angle ABC$ 的平分线，

$\therefore \angle ABD=\angle CBD$.

$\therefore \angle ODB=\angle CBD$.

$\therefore OD\parallel BC$.

$\because \angle C=90°$，

$\therefore BC\perp AC$.

$\therefore OD\perp AC$.

又$\because OD$ 为$\odot O$ 的半径，

$\therefore AC$ 是$\odot O$ 的切线.

（2）**解：**$BD^2=2BO\cdot BC$.

理由如下：$\because \angle EBD=\angle DBC$，

$\angle EDB=\angle DCB=90°$，

$\therefore \triangle EBD\backsim\triangle DBC$.

$\therefore \frac{EB}{DB}=\frac{BD}{BC}$，

即 $BD^2=EB\cdot BC$.

$\because \odot O$ 是$\triangle BDE$ 的外接圆，$\angle BDE=90°$，

$\therefore BE$ 为$\odot O$ 的直径.

$\therefore EB=2BO$.

$\therefore BD^2=2BO\cdot BC$.

（3）**解：**在 Rt$\triangle BDC$ 中，

$BC=4$，$DC=2$，

由勾股定理，得

$BD=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

$\therefore$由 $BD^2=2BO\cdot BC$，得

$BO=\frac{BD^2}{2BC}=\frac{5}{2}$.

$\therefore OD=OB=\frac{5}{2}$.

$\because \angle ADO=\angle ACB=90°$，

$\therefore OD\parallel BC$.

$\therefore \frac{OD}{BC}=\frac{AD}{AC}=\frac{AD}{AD+DC}$，

即$\dfrac{\frac{5}{2}}{4}=\dfrac{AD}{AD+2}$.

解得 $AD=\dfrac{10}{3}$.

名卷压轴题

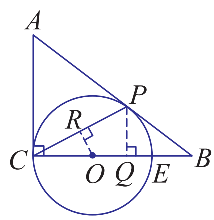
（1）**解**：∵在 Rt $\triangle ACB$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=3$，$BC=4$，

∴$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

由题意可得，圆心在 BC 上，$AP=AC=3$，

∴$PB=2$.

过点 P 作 $PQ\perp BC$ 于点 Q，过点 O 作 $OR\perp PC$ 于点 R，如下图所示.



∵$PQ\parallel AC$，

∴$\dfrac{PQ}{PB}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{3}{5}$.

∴$PQ=\dfrac{6}{5}$，$BQ=\dfrac{8}{5}$.

∴$CQ=BC-BQ=\dfrac{12}{5}$.

∴$PC=PQ^2+CQ^2=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

∵点 O 是 CE 的中点，

∴$CR=\dfrac{1}{2}PC=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

∴$\triangle COR\backsim\triangle CPQ$.

∴$\dfrac{OC}{CR}=\dfrac{PC}{CQ}$，

即$\dfrac{r}{\frac{3\sqrt{5}}{5}}=\dfrac{\frac{6\sqrt{5}}{5}}{\frac{12}{5}}$.

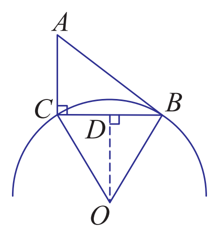
解得 $r=\dfrac{3}{2}$.

（2）**解**：∵PC 的最小值为 AB 边上的高，即 $PC=\dfrac{3\times4}{5}=\dfrac{12}{5}$，

最大值 $PC=BC=4$，

∴$\dfrac{12}{5}\leqslant PC\leqslant4$.

（3）**解**：如下图，当 P 与 B 重合时，圆最大，O 在 BC 的垂直平分线上，过 O 作 $OD\perp BC$ 于点 D.



由 $BD=\dfrac{1}{2}BC=2$，

∵AB 是切线，

∴$\angle ABO=90°$.

∴$\angle ABD+\angle OBD=\angle BOD+\angle OBD=90°$.

∴$\angle ABD=\angle BOD$.

∴$\dfrac{BD}{OB}=\sin\angle BOD=\sin\angle ABC=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{3}{5}$.

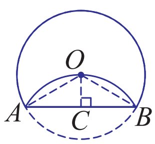
∴$OB=\dfrac{10}{3}$，即半径最大值为$\dfrac{10}{3}$.

第 4 讲　圆中的计算问题、正多边形和圆

例一　C　【解析】如下图,连接 OA、OB,作 $OC\perp AB$ 于点 C,由题意,得 $OC=\frac{1}{2}OA$,∴ $\angle OAC=30°$. ∵ $OA=OB$,∴ $\angle OBA=\angle OAC=30°$. ∴ $\angle AOB=120°$.

∴劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长 $=\frac{120\pi\times 3}{180}=2\pi$.

故选 C.

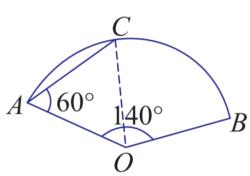


【点拨】本题考查的是弧长的计算、直角三角形的性质、翻转变换的性质. 掌握弧长公式是解题的关键.

变式训练一

1. B　【解析】如下图,连接 OC,

∵ $OA=OC$,$\angle CAO=60°$,∴ $\triangle AOC$ 为等边三角形. ∴ $\angle AOC=60°$. ∴ $\angle BOC=\angle AOB-\angle AOC=140°-60°=80°$. 则 $\overset{\frown}{BC}$ 的长 $=\frac{80\pi\times 6}{180}=\frac{8\pi}{3}$. 故选 B.



2. (1) 解:∵ $\angle ABC$ 与 $\angle D$ 都是劣弧 $\overset{\frown}{AC}$ 所对的圆周角,$\angle D=60°$,

∴ $\angle ABC=\angle D=60°$.

(2) 证明:∵ AB 是⊙O 的直径,

∴ $\angle ACB=90°$.

∴ $\angle BAC=90°-\angle ABC=30°$.

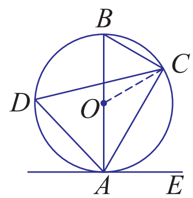
∴ $\angle BAE=\angle BAC+\angle EAC=30°+60°=90°$,

即 $BA\perp AE$,得 $OA\perp AE$.

又∵ OA 是⊙O 的半径,

∴ AE 是⊙O 的切线.

(3) 解:如下图,连接 OC,



∵ $\angle ABC=60°$,$OB=OC$,

∴ $\triangle BOC$ 是等边三角形.

∴ $\angle BOC=60°$,⊙O 的半径 $R=OB=BC=4$.

∴ $\angle AOC=180°-\angle BOC=120°$.

∴ 劣弧 $\overset{\frown}{AC}$ 的长 $=\frac{120\pi R}{180}=\frac{120\pi\cdot 4}{180}=\frac{8\pi}{3}$.

例二　解:(1) 连接 OC,如图所示.

∵以 O 为圆心的圆与 $\triangle AOB$ 的边 AB 相切于点 C,

∴ $CO\perp AB$.

∵ $\sin A=\frac{2}{5}=\frac{CO}{AO}$,

∵ $AC=\sqrt{21}$,

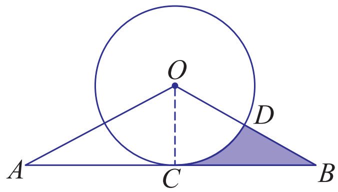
设 $CO=2x$,$AO=5x$,

则 $4x^2+21=25x^2$.

解得 $x=1$.

$\therefore CO=2$.

$\therefore \odot O$ 的半径为 2.



(2) $\because \odot O$ 的半径为 2,

$\therefore DO=2$.

$\because DO=DB$,

$\therefore BO=4$.

$\therefore BC=2\sqrt{3}$.

$\because 2CO=BO$, $OC\perp BC$,

$\therefore \angle CBO=30°$.

$\therefore \angle COD=60°$.

则图中阴影部分的面积为 $S_{\triangle OCB}-S_{扇形COD}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2-\frac{60\pi\times 2^2}{360}=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$.

【点拨】此题主要考查了扇形面积的求法以及切线的性质和勾股定理的应用等知识. 得出图中阴影部分的面积为 $S_{\triangle OCB}-S_{扇形COD}$ 是解决本题的关键.

变式训练二

1. $\frac{4\pi}{3}$ **【解析】**过点 O 作 $OD\perp AC$ 于点 D,如图所示.

$\because \triangle ABC$ 为等边三角形,

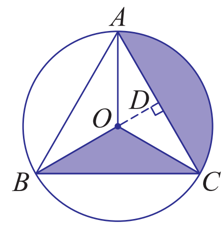
$\therefore \angle AOC=120°$, $AD=CD=\sqrt{3}$.

$\therefore \angle OAC=30°$.

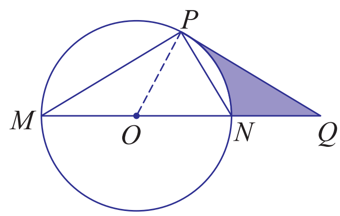
$\therefore OA=\frac{AD}{\cos 30°}=2$.

$\because S_{\triangle COB}=S_{\triangle AOC}$, $\angle AOC=120°$,

$\therefore S_{阴影}=S_{扇形AOC}=\frac{120\pi\cdot 2^2}{360}=\frac{4\pi}{3}$.



2. (1) **证明:** 连接 OP, 如下图所示.



$\because PM=PQ$, $\angle Q=30°$,

$\therefore \angle M=\angle Q=30°$.

又 $\because OM=OP$,

$\therefore \angle MPO=\angle M=30°$.

$\therefore \angle PON=\angle MPO+\angle M=30°+30°=60°$.

$\therefore \angle POQ+\angle Q=90°$.

$\therefore \angle OPQ=90°$,

即 $PO\perp PQ$.

又 $\because OP$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore$ 直线 PQ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) **解:** $\because MN$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle MPN=90°$.

在 Rt $\triangle MPN$ 中，$\angle M=30°$，$MP=4\sqrt{3}$，

$\therefore MN=\dfrac{MP}{\cos 30°}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=8.$

$\therefore OP=4.$

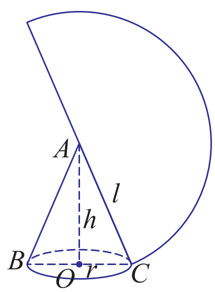
$\because PQ=MP=4\sqrt{3}$，$\angle PON=60°$，

$\therefore S_{阴影}=S_{\triangle OPQ}-S_{扇形OPN}=\dfrac{1}{2}\times 4\times4\sqrt{3}-\dfrac{60\pi\times4^2}{360}=8\sqrt{3}-\dfrac{8\pi}{3}.$

例三　解：（1）如下图，设此圆锥的高为 h，底面半径为 r，母线长 $AC=l$，

$\because 2\pi r=\pi l$，

$\therefore l:r=2:1.$



（2）$\because AO\perp OC$，$\dfrac{l}{r}=2$，

$\therefore$圆锥高与母线的夹角为 $30°$.

则$\angle BAC=60°$.

（3）$\because l^2=h^2+r^2$，$h=3\sqrt{3}$ cm，

$\therefore (2r)^2=(3\sqrt{3})^2+r^2$，

即 $4r^2=27+r^2$.

解得 $r=3$.

$\therefore l=2r=6$ cm.

$\therefore$圆锥的侧面积为$\dfrac{\pi l^2}{2}=18\pi(\text{cm}^2)$.

【点拨】本题主要考查圆锥的特点和圆锥侧面面积的计算.

变式训练三

1. $120°$　**【解析】**$\because$底面圆的半径为 10 cm，$\therefore$圆锥的底面圆的周长 $=2\pi\cdot10=20\pi$. $\therefore 20\pi=\dfrac{\alpha\pi\cdot30}{180}$.

$\therefore \alpha=120°$.

2. **解：**（1）$\because \angle BAC=90°$，

$\therefore BC$ 为$\odot O$ 的直径，

即 $BC=\sqrt{2}$ m.

$\therefore AB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BC=1$ m.

（2）$S_{阴影}=S_{圆}-S_{扇形}=\pi\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\dfrac{90\pi\times1^2}{360}=\dfrac{\pi}{4}$.

（3）设所得圆锥的底面圆的半径为 r，

根据题意，得 $2\pi r=\dfrac{90\pi\times1}{180}$.

解得 $r=\dfrac{1}{4}$.

例四　（1）**证明：**如图，连接 AE、AD、AC，

$\because$六边形 $ABCDEF$ 是$\odot O$ 的内接正六边形，

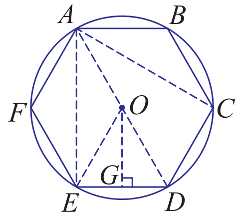
$\therefore EF=ED=CD=BC$.

$\therefore \overset{\frown}{FE}=\overset{\frown}{ED}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BC}$.

$\therefore \angle FAE=\angle EAD=\angle DAC=\angle CAB$.

$\therefore$过顶点 A 的三条对角线四等

分$\angle BAF$.



（2）**解**：如上图，过 O 作 $OG\perp DE$ 于点G，连接OE，

设$\odot O$的半径为r，

$\because \angle DOE=\dfrac{360^\circ}{6}=60^\circ$，$OD=OE=r$，

$\therefore \triangle ODE$是等边三角形.

$\therefore DE=OD=r$，$\angle OED=60^\circ$.

$\therefore \angle EOG=30^\circ$.

$\therefore EG=\dfrac{1}{2}r$.

$\therefore OG=\sqrt{OE^2-EG^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r$.

$\therefore$正六边形$ABCDEF$的面积$S_2=6\times\dfrac{1}{2}\times r\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}r=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}r^2$.

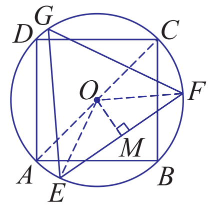
又$\odot O$的面积$S_1=\pi r^2$，

$\therefore \dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\pi r^2}{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}r^2}=\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{9}$.

【点拨】本题考查了正多边形与圆，正六边形的性质、勾股定理. 正确作出辅助线是解本题的关键.

变式训练四

1. $\sqrt{6}$ **【解析】**连接AC、OE、OF，作$OM\perp EF$于点M，如图所示.



$\because$四边形$ABCD$是正方形，$\therefore AB=BC=2$，$\angle ABC=90^\circ$. $\therefore AC$是$\odot O$的直径，$AC=2\sqrt{2}$. $\therefore OE=OF=\sqrt{2}$. $\because OM\perp EF$，$\therefore EM=MF$. $\because \triangle EFG$是等边三角形，$\therefore \angle GEF=60^\circ$. 在$\mathrm{Rt}\triangle OME$中，$\because OE=\sqrt{2}$，$\angle OEM=\dfrac{1}{2}\angle GEF=30^\circ$，$\therefore OM=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$EM=\sqrt{3}OM=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

$\therefore EF=\sqrt{6}$.

2. **解**：（1）设正六边形的边长为a，

则$\triangle OEF$的边EF上的高为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

则正六边形$ABCDEF$的面积为$6\times\dfrac{1}{2}\times a\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2$，

又$\because$正方形$EFGH$的面积为$a\times a=a^2$，

$\therefore$正六边形$ABCDEF$与正方形$EFGH$的面积之比为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2:a^2=3\sqrt{3}:2$.

（2）$\because OF=EF=FG$，

$\therefore \triangle OFG$为等腰三角形.

$\therefore \angle OGF=\dfrac{1}{2}(180^\circ-60^\circ-90^\circ)=15^\circ$.

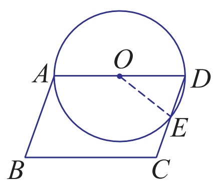
培优精练

1. B 【解析】树叶形图案的面积为 $2S_{扇形ABC}-S_{正方形ABCD}=2\times\frac{90\pi\times a^2}{360}-a^2=\frac{1}{2}\pi a^2-a^2$. 故选 B.

2. A 【解析】在正五边形 $ABCDE$ 中，$\angle B=\angle BCD=\frac{1}{5}\times(5-2)\times 180^\circ=108^\circ$，$AB=BC$，$\therefore\angle BCA=\angle BAC=\frac{1}{2}\times(180^\circ-108^\circ)=36^\circ$.

$\therefore\angle ACD=\angle BCD-\angle ACB=108^\circ-36^\circ=72^\circ$. 故选 A.

3. 解：连接 OE，如下图.



$\because$四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD=BC=6$，$\angle D=\angle B=70^\circ$.

$\because OD=OE$，

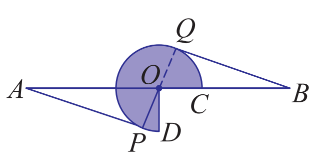
$\therefore\angle OED=\angle D=70^\circ$.

$\therefore\angle DOE=40^\circ$.

$\therefore\overset{\frown}{DE}=\frac{40\pi\times 3}{180}=\frac{2}{3}\pi$.

名卷压轴题

（1）证明：连接 OQ，如下图所示.



$\because AP$、BQ 均是$\odot O$ 的切线，

$\therefore OP\perp AP$、$OQ\perp BQ$.

$\therefore\angle APO=\angle BQO=90^\circ$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle APO$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BQO$ 中，

$\begin{cases}OA=OB,\\OP=OQ,\end{cases}$

$\therefore\mathrm{Rt}\triangle APO\cong\mathrm{Rt}\triangle BQO$（HL）.

$\therefore AP=BQ$.

（2）解：由（1）可知，$\angle AOP=\angle BOQ$.

$\therefore P$、O、Q 三点共线.

$\because OB=\frac{1}{2}AB=8$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle BOQ$ 中，

$OQ=\sqrt{OB^2-BQ^2}=4$，

$\therefore\angle B=30^\circ$，$\angle BOQ=90^\circ-\angle B=60^\circ$.

$\because\angle COD=360^\circ-270^\circ=90^\circ$，

$\therefore\angle QOD=90^\circ+60^\circ=150^\circ$.

$\therefore$优弧$\overset{\frown}{QD}$的长为

$\frac{(360-150)\times\pi\times 4}{180}=\frac{14\pi}{3}$.

（3）解：$\because\triangle APO$ 是直角三角形，

$\therefore\triangle APO$ 的外心是线段 OA 的中点.

设$\triangle APO$ 的外心为点 M，

则 $OM=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}OB=4$.

$\because$点 M 在扇形 COD 的内部，

$\therefore OM<OC<OA$，

即 $4<OC<8$.

◎圆　新题型探究

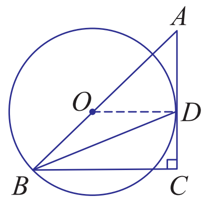
例题　(1) **解**：$\because\triangle ABC$ 是“近直角三角形”，$\angle B>90^\circ$，$\angle C=50^\circ$，

$\therefore\angle C+2\angle A=90^\circ$.

$\therefore 2\angle A=90^\circ-50^\circ=40^\circ$.

解得 $\angle A=20^\circ$.

(2) **证明**：连接 OD，如下图所示.



$\because AC$ 与 $\odot O$ 相切于点 D，

$\therefore\angle ODA=90^\circ$.

$\therefore\angle A+\angle AOD=90^\circ$.

$\because\angle AOD=2\angle ABD$，

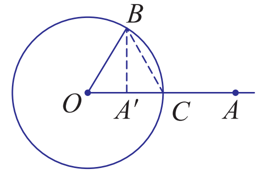
$\therefore\angle A+2\angle ABD=90^\circ$，

即 $\triangle ABD$ 是“近直角三角形”.

【点拨】本题运用了转化的方法和数形结合的方法．(1) 中运用了转化的方法，即在深刻理解新定义的基础上，把新定义运算转化为我们所熟悉的角的和差运算．(2) 中运用了数形结合的方法，通过作辅助线 OD，构造出与圆的切线有关的图形，把与切线有关的这个“形”的问题转化为 90° 角这个“数”的问题.

变式训练

解：设 OA 交 $\odot O$ 于点 C，连接 BC，如下图所示.



$\therefore OB=OC=4$.

$\because$ 点 A' 是点 A 关于 $\odot O$ 的“反演点”，

$\therefore OA'\cdot OA=OC^2$，即 $OA'\cdot 8=4^2$.

解得 $OA'=2$.

$\because$ 点 B' 是点 B 关于 $\odot O$ 的“反演点”，

$\therefore OB'\cdot OB=OB^2$，即 $OB'\cdot 4=4^2$.

解得 $OB'=4$，即点 B 和 B' 重合.

$\because\angle BOA=60^\circ$，$OB=OC$，

$\therefore\triangle OBC$ 为等边三角形.

$\because OA'=2$，

$\therefore$ 点 A' 是 OC 的中点.

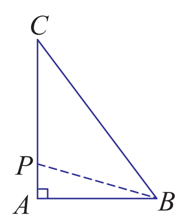
$\therefore A'B\perp OC$.

$\therefore A'B'=A'B=\sqrt{OB^2-OA'^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.

培优精练

1. D　**【解析】**在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，根据勾股定理，得 $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=8$.

若 $PB=PC$，连接 PB，如下图所示.



设 $PA=x$，则 $PB=PC=8-x$.

在 Rt△PAB 中，∵ $PB^2=PA^2+AB^2$，

即 $(8-x)^2=x^2+6^2$. 解得 $x=\frac{7}{4}$.

若 $PA=PC$，则 $PA=4$.

若 $PA=PB$，观察图形可知这种情况不存在.

综上所述，PA 的长为$\frac{7}{4}$或 4.

2. 3 【解析】∵ $\angle ACB=\angle ACD=90°$，∴Rt△$ABC$ 和 Rt△ACD 的外心分别是 AB、AD 的中点. ∴两三角形的外心距为△ABD 的中位线，即为$\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times(3+3)=3$.

第二十八章　样本与总体

例一　解：（1）这名同学采用的是全面调查方式.

（2）从表中数据可以看出，该校的图书馆使用率不高.

（3）建议学校举办读书节活动或学校多购买一些学生喜欢的图书.（答案不唯一）

【点拨】此题考查的是全面调查. 掌握其特点是解决此题的关键.

变式训练一

1. C 【解析】A，对某市地下水水质情况的调查无法普查，故 A 不符合题意；B，对一个社区每天丢弃塑料袋数量的调查，调查范围广适合抽样调查，故 B 不符合题意；C，对乘坐飞机的旅客是否携带违禁物品的调查是事关重大的调查，适合普查，故 C 符合题意；D，对某电视台某节目收视率的调查，调查范围广适合抽样调查，故 D 不符合题意. 故选 C.

2. 解：（1）不能说明.

（2）消息来源于抽样调查. ∵这种品牌的节能灯太多，很难实现普查.

（3）$\frac{76}{95\%}=80$（个）.

（4）同意. ∵是随机抽样，具有代表性.（答案不唯一）

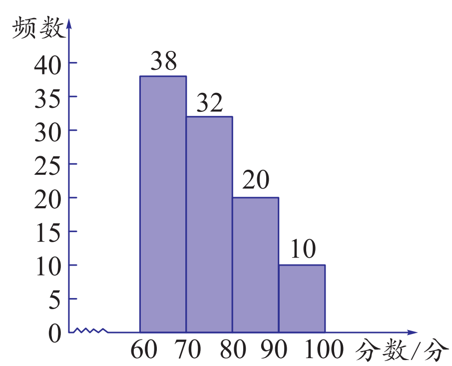
例二　（1）52　0.2　【解析】∵ $10\div0.1=100$，∴ $a+b=100-(38+10)=52$.

$c=1-0.38-0.32-0.1=0.2$.

（2）解：$a=100\times0.32=32$，

$b=100\times0.2=20$，

补全征文比赛成绩频数分布直方图如下：



（3）**解：**$1\,000\times(0.2+0.1)=300$（篇），

故估计全市获得一等奖征文的篇数为 300 篇.

【点拨】本题考查了频数分布直方图和频数分布表，以及利用统计图表获取信息的能力. 利用统计图表获取信息时，必须认真观察、分析统计图表，才能作出正确的判断.

变式训练二

1. C　**【解析】**∵选出的20 名同学家的平均一个月节约用水量 $=\frac{1}{20}\times(1\times6+2\times2+3\times8+4\times4)=2.5$（t），

∴估计这 100 名同学的家庭一个月节约用水的总量大约是 $2.5\times100=250$（t），故选 C.

2. （1）39　21　**【解析】**∵喜欢篮球的有33 人，占 22%，

∴样本容量为 $33\div22\%=150$.

∴$a=150\times26\%=39$，$b=150-39-42-15-33=21$.

（2）**解：**估计上述 1 200 名学生中最喜欢乒乓球运动的人数为 $1\,200\times\frac{42}{150}=336$.

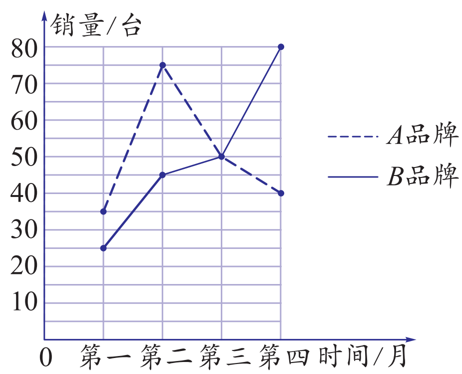
例三　（1）30%　**【解析】**由扇形统计图可得，第四个月销量占总销量的百分比为 $1-(15\%+30\%+25\%)=30\%$.

（2）**解：**B 品牌电视机第三个月销量为 $400\times25\%-50=50$（台），

B 品牌电视机第四个月销量为 $400\times30\%-40=80$（台），

补全折线统计图，如下图所示.

电视机月销量折线统计图



（3）**解：**由于月销量的平均水平相同，从折线的走势看，A 品牌的月销量呈下降趋势，而 B 品牌的月销量呈上升趋势，故该专卖店应经销 B 品牌电视机.

【点拨】本题考查扇形统计图、折线统计图及相关计算. 在扇形统计图中，每部分占总量的百分比等于该部分所对应的扇形圆心角的度数与 360 的比.

变式训练三

（1）400　**【解析】**由题意可得，本次调查的学生有 $140\div35\%=400$（名）.

（2）80　120　**【解析】**$n=400\times$

$30\%=120$，$m=400-140-120-60=80$.

（3）**解：**建议如下：①学校购买课外读物时，文学类的书多采购一些，科普类的书多采购一些；②艺术类和其他类少采购一些.（答案不唯一）

例四　解：（1）该班的人数有 $10+15+20+8+5+2=60$（人）.

（2）正确. 理由如下：∵该班 165 cm 以下的人数有 $10+15+20=45$（人），

所占的比例是$\frac{45}{60}=\frac{3}{4}$，

∴张亮的说法正确.

（3）第一组和第三组人数有错误.（答案不唯一）

【点拨】本题考查的是频数分布直方图，要求学生具有读频数分布直方图的能力和利用统计图获取信息的能力.

变式训练四

1. D　**【解析】**甲校中七年级学生人数占全校的35%，八年级学生人数也占全校的35%，由于甲校的总人数是一定的，因此甲校中七年级学生和八年级学生人数一样多是正确的；

乙校中七年级学生人数占45%，而其他两个年级分别占25%、30%，因此B是正确的；

乙校中八年级学生人数占25%，九年级学生人数占30%，由于乙校的总人数是一定的，所以C是正确的；

甲、乙两个学校九年级学生人数的占比都是30%，若两个学校的总人数不同，它们也不相等，故D是错误的. 故选D.

2. 甲　**【解析】**从折线统计图中可以看出甲公司2017年的销售量为180辆，2021年的销售量为520辆，则从2017～2021年甲公司增长了 $520-180=340$（辆）；

乙公司2017年的销售量为150辆，2021年的销售量为400辆，则从2017～2021年，乙公司的销售量增长了 $400-150=250$（辆）.

则甲公司销售量增长最多.

培优精练

1. D　**【解析】**该调查方式是抽样调查，$a=50-6-10-6-4=24$，故选D.

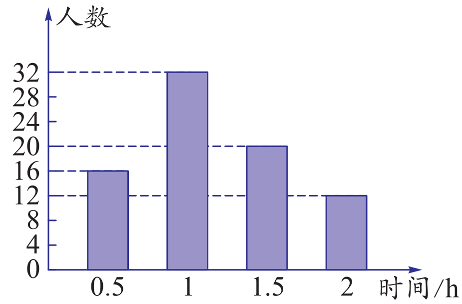
2. 2 000　**【解析】**估算该市10 000名九年级学生中“综合素质”评价结果为“A”的学生约为 $10\ 000\times\frac{2}{2+3+3+1+1}=2\ 000$（人）.

3. **解：**（1）$32\div40\%=80$（人）.

（2）户外活动时间为0.5 h的人数 $=80\times20\%=16$（人）.

补全频数分布直方图如下图所示.

学生参加户外活动时间条形统计图



（3）户外活动时间为 2 h 的扇形圆心角的度数为$\frac{12}{80}\times360^\circ=54^\circ$.

4. 解：（1）∵样本中有 50 名居民，

∴A 小区的中位数落在第四组.

由信息二中的表可知，A 小区 50 名居民成绩的中位数为 75.

（2）由 A 小区平均数为 75.1 结果信息可知，50 人中有 24 人超过平均数，

∴$500\times\frac{24}{50}=240$（人），

故估计 A 小区 500 名居民中成绩超过平均数的有 240 人.

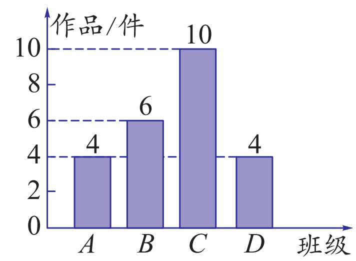
（3）从平均数看，两个小区居民对垃圾分类知识掌握情况的平均水平相同；从方差看，B 小区居民对垃圾分类知识掌握的情况比 A 小区稳定；从中位数看，B 小区至少有一半的居民成绩高于平均数.

名卷压轴题

（1）抽样调查　24　【解析】王老师采取的调查方式是抽样调查.

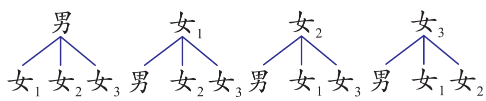
∵$4\div\frac{60}{360}=24$，∴王老师所调查的 4 个班共征集到作品 24 件．则 B 班的作品数为 $24-4-10-4=6$（件），补全条形统计图如下图所示.

征集作品数量条形统计图



（2）150°　【解析】在扇形统计图中，表示 C 班的扇形圆心角 $=360^\circ\times\frac{10}{24}=150^\circ$.

（3）解：由题意，画出树状图如下.



共有 12 种等可能的结果，

其中恰好抽中一男一女的结果数为 6，

∴恰好抽中一男一女的概率为 $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

◎样本与总体　新题型探究

例题　解：（1）∵该样本数据中车速是 52 的有 8 辆，最多，

∴该样本数据的众数为 52.

∵样本容量为 $2+5+8+6+4+2=27$，按照车速从小到大的顺序

排列，第 14 辆车的车速是 52，

∴中位数为 52.

（2）这些车的平均速度为 $\frac{50\times2+51\times5+52\times8+53\times6+54\times4+55\times2}{2+2+4+5+6+8}\approx$ 52.4（km/h）.

（3）不能. 理由如下：

∵由（1）知，样本的中位数为 52，

∴可以估计该路段的车辆大约有一半的车速要快于 52 km/h.

∵该车的速度是 50.5 km/h，小于 52 km/h，

∴不能说该车的速度要比一半以上车的速度快.

【点拨】本题主要考查了平均数、众数、中位数的求法. 掌握平均数、众数、中位数的定义是解本题的关键.

变式训练

解：（1）本题抽取的样本具有代表性，样本的情况近似反映了总体的情况. ∵样本中绿豆所占的百分比近似等于总体中绿豆所占百分比，∴求出的小米总颗数 x 是合理的，因此 $\frac{G}{x}$ 估计每粒小米的质量是合理的.

（2）注意必须将绿豆和小米搅拌均匀.

（3）先称米的质量，然后再放绿豆，再进行后面的步骤.

培优精练

1. 解：（1）$100\div\frac{20}{200}=1\,000$（条）.

（2）∵第一次捞出 100 条，称得质量为 184 kg，又捞出 200 条，称得质量为 416 kg，

∴鱼的平均质量是 $(184+416)\div(100+200)=2$(kg).

∴池塘中的鱼约有 $1\,000\times2=2\,000$(kg).

故估计王叔叔池塘中的鱼的总质量为 2 000 kg.

2. 解：（1）∵样本平均数 $=\frac{1}{10}\times(0.6+3.7+2.2+1.5+2.8+1.7+1.2+2.1+3.2+1.0)=2.0$，

∴估计该县饭店 2020 年消耗一次性木质筷子的数量为 $2\times600\times350=420\,000$（盒）.

（2）设平均每年增长率为 x，

则 $2.0\times(1+x)^2=2.42$.

解得 $x_1=0.1=10\%$，$x_2=-2.1$（舍去）.

∴平均每年的增长率为 10%.

（3）可以生产学生桌椅套数为 $\frac{0.005\times2.42\times100\times600\times350}{0.5\times10^3\times0.07}=$ 7 260（套）.