参考答案

专题一　二次根式

利用二次根式解决图形问题

例一　解：(1) 根据题意，得 $x-\sqrt{2}\geqslant 0$.

解不等式，得 $x\geqslant\sqrt{2}$.

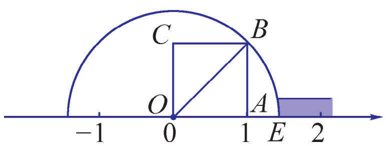
∴x 的取值范围是 $x\geqslant\sqrt{2}$.

(2) 画图方法如下：

①以原点 O 为顶点画边长为 1 的正方形 $OABC$，使 OA 边与数轴的正半轴重合；

②以点 O 为圆心，线段 OB 为半径画弧，交数轴的正半轴于点 E；

③数轴上点 E 的右侧部分（包括点 E），即为 x 的取值范围，如下图阴影所示.



【点拨】 本题 (2) 求解的技巧是运用数形结合的方法，利用边长为 1 的正方形的对角线为 $\sqrt{2}$，得到表示 $\sqrt{2}$ 的线段. 用尺规基本作图"画一条线段等于已知线段"，通过画弧在数轴上得到表示 $\sqrt{2}$ 的点，再在数轴上表示出 x 的取值范围.

变式训练一

1. 解：(1) ∵$a=\sqrt{b-3}+\sqrt{3-b}-1$，

∴$b-3\geqslant 0$ 且 $3-b\geqslant 0$.

解得 $b=3$.

∴$a=0+0-1=-1$.

∴点 $A(-1,0)$，点 $B(3,0)$.

根据点 A，B 的平移，得

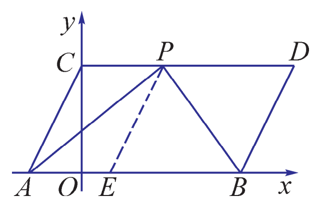
点 C 的坐标为 $(-1+1,0+2)$，即点 $C(0,2)$；

点 D 的坐标为 $(3+1,0+2)$，即 $D(4,2)$.

(2) $\angle APB=\angle PAC+\angle PBD$. 理由如下：

根据平移，得 $AC\parallel BD$.

过点 P 作 $PE\parallel AC$，如下图.



∴$PE\parallel BD$.

∴$\angle PAC=\angle APE$，$\angle PBD=\angle EPB$.

∴$\angle PAC+\angle PBD=\angle APE+\angle EPB=\angle APB$.

2. 解：∵a，b，c 是 $\triangle ABC$ 的三条边，

∴a，b，c 都是正数.

则 $a+b+c>0$.

根据构成三角形的条件，可知

$a-b-c=a-(b+c)<0$，

$b-c-a=b-(c+a)<0$，

$c-a-b=c-(a+b)<0$.

∴$\sqrt{(a+b+c)^2}-\sqrt{(a-b-c)^2}+$

$\sqrt{(b-c-a)^2}-\sqrt{(c-a-b)^2}$

$=(a+b+c)-[-(a-b-c)]+[-(b-c-a)]-[-(c-a-b)]$

$=a+b+c+a-b-c-b+c+a+c-a-b$

$=2a-2b+2c$

$=2(a+c-b)$.

例二　**解：** 设小明在山顶时能看得到的水平距离为 d_1，则 $d_1=8\sqrt{\frac{2n}{5}}$.

设小明在山腰时能看得到的水平距离为 d_2，则 $d_2=8\sqrt{\frac{n}{5}}$.

$\because \frac{d_1}{d_2}=\left(8\sqrt{\frac{2n}{5}}\right)\div\left(8\sqrt{\frac{n}{5}}\right)=\sqrt{\frac{2n}{5}}\div\sqrt{\frac{n}{5}}=\sqrt{\frac{2n}{5}\cdot\frac{5}{n}}=\sqrt{2}$.

$\therefore$小明在山顶能看得到的水平距离是在山腰能看得到的水平距离的$\sqrt{2}$倍.

【点拨】 本题主要考查了二次根式的除法运算，正确理解题意是解题关键.

变式训练二

1. D　**【解析】** 观察可知，长方体的长、宽、高分别为 $2\sqrt{6}$ cm，$2\sqrt{3}$ cm，$3\sqrt{2}$ cm. $\therefore$这个长方体的体积为$2\sqrt{6}\times2\sqrt{3}\times3\sqrt{2}=2\times2\times3\sqrt{6\times3\times2}=72(\text{cm}^3)$.

2. (1) $\sqrt{3}-2$　**【解析】** 点 A 表示的数为$\sqrt{3}$，点 B 距离点 A 2 个单位长度，则点 B 表示的数为$\sqrt{3}-2$.

(2) **解：** $|m|+\sqrt{3}\cdot m$

$=|\sqrt{3}-2|+\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}-2)$

$=2-\sqrt{3}+3-2\sqrt{3}$

$=5-3\sqrt{3}$.

例三　**解：** (1) $(\sqrt{128}+\sqrt{50})\times2$

$=(8\sqrt{2}+5\sqrt{2})\times2$

$=13\sqrt{2}\times2$

$=26\sqrt{2}$ (m).

即长方形 $ABCD$ 的周长为 $26\sqrt{2}$ m.

(2) $\sqrt{128}\times\sqrt{50}-2\times(\sqrt{13}+1)\times(\sqrt{13}-1)=8\sqrt{2}\times5\sqrt{2}-2\times(13-1)=80-24=56(\text{m}^2)$.

$60\times56=3\ 360$(元).

即购买地砖需要花费 3 360 元.

【点拨】 根据图上信息，理解线段 AB，BC 的实际意义，把求通道的面积转化为求大长方形的面积与阴影部分的面积之差是解本题的关键.

变式训练三

解： $\because$两个相邻的正方形羊圈的面积分别为 32 m^2 和 50 m^2，

$\therefore$两个相邻的正方形羊圈的边长分别是$\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ m 和$\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ m.

$\therefore$需要的栅栏的总长度为

$(4\sqrt{2}+5\sqrt{2})\times4-4\sqrt{2}=32\sqrt{2}$ (m).

即栅栏的总长度为 $32\sqrt{2}$ m.

例四　(1) $3\sqrt{2}$　$4\sqrt{2}$　**【解析】** $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ (dm)，$\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ (dm).

(2) **解：** $\because$ 两块正方形木料的边长分别为 $3\sqrt{2}$ dm，$4\sqrt{2}$ dm，

$\therefore$剩余木料的面积$=(3\sqrt{2}+4\sqrt{2})\times 4\sqrt{2}-18-32=7\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}-18-32=56-18-32=6(\mathrm{dm}^2)$.

(3) $\because$剩余木料的长为$3\sqrt{2}$ dm，宽为$4\sqrt{2}-3\sqrt{2}=\sqrt{2}$（dm），

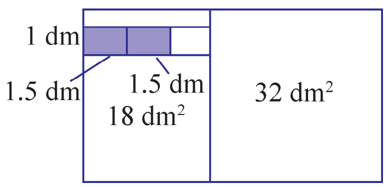
$\because\sqrt{2}\approx 1.4$，$3\sqrt{2}\approx 3\times 1.4=4.2$，

$\therefore 2\times 1.5<3\sqrt{2}<3\times 1.5$.

$\because 1<\sqrt{2}<2$，

$\therefore$最多能截出$2\times 1=2$（块）木条.

截法示意图如下图所示.



【点拨】 本题考查了二次根式的加、减、乘运算，掌握二次根式的性质，常见无理数的估算是解题的关键. 通过观察图形，把求剩余木料的面积转化为大长方形的面积与两个正方形的面积之差.

变式训练四

解： (1) 纸盒的侧面积$=2(3\sqrt{12}+\sqrt{48})\times 10\sqrt{20}=2(6\sqrt{3}+4\sqrt{3})\times 10\sqrt{20}=20\sqrt{3}\times 10\sqrt{20}=200\sqrt{60}=400\sqrt{15}$（$\mathrm{cm}^2$）.

(2) 设正方形的边长为x cm，

$\because S_{长方形}=S_{正方形}$，

$\therefore x^2=3\sqrt{12}\times\sqrt{48}=6\sqrt{3}\times 4\sqrt{3}=72$.

$\therefore x=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$.

$\therefore$正方形的周长$=4\times 6\sqrt{2}=24\sqrt{2}$（cm）.

培优精练

1. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}$ **【解析】** 因为M是线段AB的中点，所以M到A，B两点的距离相等. 设点M表示的数为x，则$x-(-\sqrt{5})=\sqrt{3}-x$. 解得$x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}$.

2. 解： 改后的长方形饲养场的长为$3\sqrt{3}\times 5\sqrt{2}\div 2\sqrt{6}=3\sqrt{3}\times 5\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2\sqrt{6}}=3\times 5\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{\dfrac{3\times 2}{6}}=\dfrac{15}{2}(\mathrm{m})$.

即改后的长方形饲养场的长为$\dfrac{15}{2}$ m.

3. 解： (1) 剩余部分的面积为$ab-4x^2$.

(2) 当$a=12+2\sqrt{3}$，$b=12-2\sqrt{3}$，$x=\sqrt{2}$时，

$ab-4x^2$

$=(12+2\sqrt{3})(12-2\sqrt{3})-4\times(\sqrt{2})^2$

$=12^2-(2\sqrt{3})^2-8$

$=144-12-8$

$=124$.

名卷压轴题

解： (1) $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$（$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$）.

理由如下：

$\because a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$，

$\therefore a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$.

(2) 设对角线的长分别为a cm，b cm，

$\because AC\perp BD$，垂足为O，

$\therefore$四边形$ABCD$的面积$=\dfrac{1}{2}AC\cdot OB+$

$\frac{1}{2}AC \cdot OD=\frac{1}{2}AC \cdot (OB+OD)=\frac{1}{2}AC \cdot BD=\frac{1}{2}ab$.

令$\frac{1}{2}ab=800$，则$ab=1\ 600$.

$\because a+b \geqslant 2\sqrt{ab}=2\times\sqrt{1\ 600}=80$，

$\therefore$用来做对角线的竹条至少需要80 cm.

◎二次根式　新题型探究

例题　解：(1) 原式$=\frac{3}{3\sqrt{3}}=\frac{3\times\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) 原式$=\frac{3(4-\sqrt{13})}{(4+\sqrt{13})(4-\sqrt{13})}=\frac{3(4-\sqrt{13})}{4^2-(\sqrt{13})^2}=4-\sqrt{13}$.

(3) 原式$=\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

(4) 原式$=\frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}+\cdots+\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\cdots+\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5}+\cdots+\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)$.

【点拨】本题求解的技巧主要是运用类比的思想，类比示例按下列三种情况确定分母的有理化因式：当分母形如$m\sqrt{a}$（$a>0$，且a，m都是有理数）时，其有理化因式是$\sqrt{a}$；当分母形如$\sqrt{a}+b$（$a>0$，且a，b都是有理数）时，其有理化因式是$\sqrt{a}-b$；当分母形如$\sqrt{a}+\sqrt{b}$（$a>0$，$b>0$，且a，b都是有理数）时，其有理化因式是$\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

变式训练

解：$\because \sqrt{2\ 022}>\sqrt{2\ 021}$，$\sqrt{2\ 021}>\sqrt{2\ 020}$，

$\therefore m>0$，$n>0$.

$\because \frac{1}{m}=\frac{1}{\sqrt{2\ 022}-\sqrt{2\ 021}}=\frac{\sqrt{2\ 022}+\sqrt{2\ 021}}{(\sqrt{2\ 022}-\sqrt{2\ 021})(\sqrt{2\ 022}+\sqrt{2\ 021})}=\sqrt{2\ 022}+\sqrt{2\ 021}$，

$\frac{1}{n}=\frac{1}{\sqrt{2\ 021}-\sqrt{2\ 020}}=\frac{\sqrt{2\ 021}+\sqrt{2\ 020}}{(\sqrt{2\ 021}-\sqrt{2\ 020})(\sqrt{2\ 021}+\sqrt{2\ 020})}=\sqrt{2\ 021}+\sqrt{2\ 020}$，

$\therefore \frac{1}{m}-\frac{1}{n}=\sqrt{2\ 022}+\sqrt{2\ 021}-(\sqrt{2\ 021}+\sqrt{2\ 020})=\sqrt{2\ 022}+\sqrt{2\ 021}-\sqrt{2\ 021}-\sqrt{2\ 020}=\sqrt{2\ 022}-\sqrt{2\ 020}>0$.

$\therefore \frac{1}{m}>\frac{1}{n}$.

$\therefore m<n$.

培优精练

(1) $\sqrt{3}-1$ 【解析】$\because 3+1=4$，$3\times 1=3$，即 $(\sqrt{3})^2+1^2=4$，$\sqrt{3}\times\sqrt{1}=\sqrt{3}$，

$\therefore \sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{3}-1$.

(2) 解：首先把 $\sqrt{19-4\sqrt{15}}$ 化为 $\sqrt{19-2\sqrt{60}}$，这里 $m=19$，$n=60$.

$\because 15+4=19$，$15\times 4=60$，

即 $(\sqrt{15})^2+(\sqrt{4})^2=19$，

$\sqrt{15}\times\sqrt{4}=\sqrt{60}$，

$\therefore \sqrt{19-4\sqrt{15}}=\sqrt{19-2\sqrt{60}}=\sqrt{(\sqrt{15}-\sqrt{4})^2}=\sqrt{15}-\sqrt{4}=\sqrt{15}-2$.

(3) 解：原式 $=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}=1$.

专题二　勾股定理

第 1 讲　利用勾股定理及其逆定理计算

例一　2　【解析】由勾股定理，得 $BC=\sqrt{3^2+4^2}=5$. $\because S_{\triangle ABC}=4\times 4-\frac{1}{2}\times 1\times 2-\frac{1}{2}\times 2\times 4-\frac{1}{2}\times 4\times 3=5$，

$\therefore \frac{1}{2}BC\cdot AD=5$. $\therefore \frac{5}{2}AD=5$.

$\therefore AD=2$.

【点拨】本题考查勾股定理、三角形的面积等知识. 解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想找到等量关系.

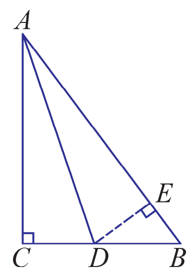
变式训练一

1. $\frac{16}{5}$　【解析】由题图可知，$S_{\triangle ABC}=4\times 4-\frac{1}{2}\times 1\times 4-\frac{1}{2}\times 3\times 4=8$.

$\because AC=\sqrt{4^2+3^2}=5$，$\therefore \frac{1}{2}\times 5\times BD=8$. 解得 $BD=\frac{16}{5}$.

2. 解：在 Rt$\triangle ABC$ 中，由勾股定理，得 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$.

过 D 作 $DE\perp AB$ 于点 E，如下图.



$\because AD$ 为 $\angle CAB$ 的平分线，$DE\perp AB$，$\angle C=90^\circ$，

$\therefore CD=DE$.

设 $CD=DE=x$，

则 $\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AC\cdot CD+\frac{1}{2}AB\cdot DE$，

即 $\frac{1}{2}\times 8\times 6=\frac{1}{2}\times 8x+\frac{1}{2}\times 10x$.

解得 $x=\frac{8}{3}$.

$\therefore CD=\frac{8}{3}$.

在 $Rt\triangle ACD$ 中，由勾股定理，得 $AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{8^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{8\sqrt{10}}{3}$.

例二 解：(1) $\because AC\perp BC$,

$\therefore \angle ACB=90°$.

$\because AB=5$，$BC=3$，

$\therefore AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

(2) $\because AC=4$，$AD=4$，$CD=4\sqrt{2}$，

$\therefore AC^2+AD^2=4^2+4^2=32$，

$CD^2=(4\sqrt{2})^2=32$.

$\therefore AC^2+AD^2=CD^2$.

$\therefore \triangle ACD$ 是直角三角形，且 $\angle CAD=90°$.

$\because AC=AD=4$，

$\therefore \angle ACD=\angle D=45°$.

$\because \angle ACB=90°$，

$\therefore \angle BCD=\angle ACB+\angle ACD=135°$.

(3) 根据题意，得

$$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot BC+\frac{1}{2}AD\cdot AC=\frac{1}{2}\times4\times3+\frac{1}{2}\times4\times4=14.$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积为 14.

【点拨】 本题主要考查了勾股定理的逆定理和勾股定理，解题关键是利用勾股定理的逆定理将数转化为形，从而判断一个三角形是否为直角三角形. 注意割补法在求解图形面积中的运用.

变式训练二

1. 解：(1) $\triangle ABC$ 是直角三角形. 理由如下：

$\because$ 每个小正方形的边长均为 1，

$\therefore AB=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

$BC=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

$AC=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.

$\because (\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2=5^2$，

$\therefore AB^2+AC^2=BC^2$.

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle A=90°$.

(2) 设边 BC 上的高为 h，

则 $\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}BC\cdot h$，

即 $\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times2\sqrt{5}=\frac{1}{2}\times5h$.

解得 $h=2$.

即边 BC 上的高为 2.

2. 解：$\because AC=13$ cm，$CD=1$ cm，

$\therefore AD=AC-CD=13-1=12$ cm.

在 $\triangle ABD$ 中，$\because AB=13$ cm，$AD=12$ cm，$BD=5$ cm，

$\therefore AB^2=13^2=169$，

$AD^2+BD^2=12^2+5^2=144+25=169$.

$\therefore AD^2+BD^2=AB^2$.

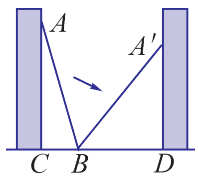
$\therefore \triangle ABD$ 是直角三角形，且 $\angle ADB=90°$.

在 $Rt\triangle BCD$ 中，$\because CD=1$ cm，$BD=5$ cm，

$\therefore BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$ (cm).

例三 C **【解析】** 如下图所示，在 Rt△ACB 中，∵ $\angle ACB=90^\circ$，$BC=0.7$ m，$AC=2.4$ m，∴ $AB^2=0.7^2+2.4^2=6.25$.

在 Rt△$A'BD$ 中，∵ $\angle A'DB=90^\circ$，$A'D=2$ m，$BD^2+A'D^2=A'B^2=AB^2$，∴ $BD^2+2^2=6.25$. ∴ $BD^2=2.25$. ∵ $BD>0$，∴ $BD=1.5$ m. ∴ $CD=BC+BD=0.7+1.5=2.2$(m). 故选 C.

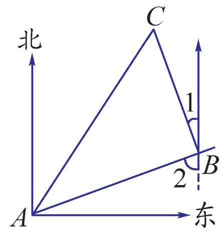


【点拨】 本题考查勾股定理的实际应用. 在应用勾股定理解决实际问题时，勾股定理与方程的结合是常用的方法，关键是从题中抽象出勾股定理这一数学模型，画出示意图.

变式训练三

1. D **【解析】** 设水池的深度为 x dm，由题意，得 $x^2+5^2=(x+1)^2$. 解得 $x=12$. 故这个水池的深度是 12 dm，故选 D.

2. C **【解析】** 如图，∵同学甲沿北偏东 70°方向走了一段时间后到达 B 地，∴ $\angle 2=70^\circ$. ∵沿北偏西 20°方向走了 600 m 恰好到达目的地 C，∴ $\angle 1=20^\circ$. ∴ $\angle ABC=180^\circ-20^\circ-70^\circ=90^\circ$. 在 Rt △$ABC$ 中，∵ $AC=1\ 000$ m，$BC=600$ m，∴ $AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{1\ 000^2-600^2}=800$ (m). 故选 C.

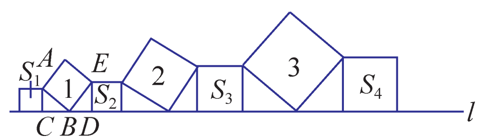


培优精练

1. C **【解析】** 在网格图中，由勾股定理，得 $AC=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$. ∵ $\frac{1}{2}BC\times 2=\frac{1}{2}AC\times BD$，∴ $\frac{1}{2}\times 2\times 2=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times BD$. 解得 $BD=\frac{4\sqrt{5}}{5}$. 故选 C.

2. 直角三角形 **【解析】** ∵ $(a-6)^2\geqslant 0$，$\sqrt{b-8}\geqslant 0$，$|c-10|\geqslant 0$，且 $(a-6)^2+\sqrt{b-8}+|c-10|=0$，∴ $a-6=0$，$b-8=0$，$c-10=0$. 解得 $a=6$，$b=8$，$c=10$. ∵ $6^2+8^2=36+64=100=10^2$，∴该三角形是直角三角形.

3. **解：** 标上字母，如下图所示.



∵ $AB=BE$，$\angle ACB=\angle BDE=90^\circ$，$\angle ABE=90^\circ$，

∴ $\angle ABC+\angle BAC=90^\circ$，$\angle ABC+\angle EBD=90^\circ$.

∴ $\angle BAC=\angle EBD$.

∴ $\triangle ABC\cong\triangle BED$(AAS).

∴ $BC=ED$.

∵ $AB^2=AC^2+BC^2$，

∴ $AB^2=AC^2+ED^2=S_1+S_2$，

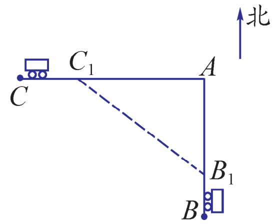
即 $S_1+S_2=1$.

同理可得 $S_3+S_4=3$.

$\therefore S_1+S_2+S_3+S_4=1+3=4$.

名卷压轴题

解：（1）设出发 3 s 时两赛车分别到达点 C_1，B_1，如下图所示.



则 $CC_1=4\times3=12$（m），$BB_1=3\times3=9$（m）.

$\because AC=40$ m，$AB=30$ m，

$\therefore AC_1=AC-CC_1=28$（m），

$AB_1=AB-BB_1=21$（m）.

$\therefore B_1C_1=\sqrt{AC_1^2+AB_1^2}=\sqrt{28^2+21^2}=35$（m）.

$\because 35>25$，

$\therefore$ 出发 3 s 时，遥控信号不会相互干扰.

（2）设出发 t s 时两赛车距点 A 的距离之和为 35 m，

根据题意，得 $40-4t+30-3t=35$.

解得 $t=5$.

设此时两赛车分别到达点 C_2，B_2，

则 $CC_2=4\times5=20$（m），

$BB_2=3\times5=15$（m）.

$\therefore AC_2=AC-CC_2=40-20=20$（m），

$AB_2=AB-BB_2=30-15=15$（m）.

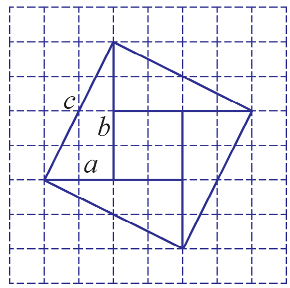
$\therefore AC_2^2+AB_2^2=20^2+15^2=25^2$.

$\therefore B_2C_2=\sqrt{AC_2^2+AB_2^2}=\sqrt{25^2}=25$（m）.

即当两赛车距点 A 的距离之和为 35 m 时，遥控信号将会相互干扰.

第 2 讲　验证勾股定理

例一　（1）**解：**拼接成的大正方形如下图所示.



（2）**证明：**根据（1）中拼成的大正方形，得中间的小正方形的边长为 $b-a$.

$\because S_{大正方形}=4\times S_{三角形}+S_{小正方形}$，

$\therefore c^2=4\times\frac{1}{2}ab+(b-a)^2=2ab+b^2-2ab+a^2=a^2+b^2$.

$\therefore a^2+b^2=c^2$.

【点拨】本题主要考查了作图的运用及设计作图和勾股定理的证明. 大正方形的边长一定是直角三角形的斜边，由此可把分割成的 5 个图形拼成一个大正方形. 根据大正方形面积的两种表示形式建立恒等式，化简后即可证明勾股定理.

变式训练一

1. **解：**设小正方形的边长为 x，如图所示.

$\because a=3$，$b=4$，

$\therefore AB=3+4=7$.

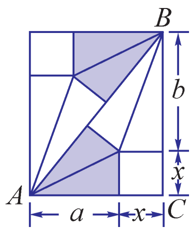
在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AC^2+BC^2=AB^2$，

即$(3+x)^2+(x+4)^2=7^2$.

整理，得 $x^2+7x-12=0$.

$\because$长方形的面积$=(x+3)(x+4)=x^2+7x+12$，

$\therefore$长方形的面积$=12+12=24$.



2. （1）**证明：** 由题意，得 $S_1=(a+b)^2-4\times\frac{1}{2}ab=a^2+2ab+b^2-2ab=a^2+b^2$.

$\because S_1=c^2$，

$\therefore a^2+b^2=c^2$.

（2）**解：** 根据翻折可知，正方形 $A'B'C'D'$的边长为$b-a$.

根据题意，得$\begin{cases}b-a=3,\\a+b=9.\end{cases}$

解得 $a=3$，$b=6$.

例二 （1）$90°$ $\frac{1}{2}$ 【解析】

$\because\triangle ABC\cong\triangle DEF$，$\therefore\angle EDF=\angle BAC$. $\because\angle EDF+\angle ACE=90°$，$\therefore\angle ACE+\angle BAC=90°$. $\therefore\angle AGC=180°-\angle ACE-\angle BAC=90°$. $\therefore\angle AGE=180°-\angle AGC=90°$. $\therefore DE\perp AB$. $\therefore S_{四边形ACBE}=S_{\triangle ACB}+S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}AB\cdot DG+\frac{1}{2}AB\cdot EG=\frac{1}{2}AB\cdot(DG+EG)=\frac{1}{2}AB\cdot DE=\frac{1}{2}c^2$.

（2）**解：** 由（1）得，$S_{四边形ACBE}=\frac{1}{2}c^2$.

又$\because S_{四边形ACBE}=S_{四边形ACFE}+S_{\triangle EFB}$

$=\frac{1}{2}\cdot(AC+EF)\cdot DF+\frac{1}{2}BF\cdot EF$

$=\frac{1}{2}(b+a)\cdot b+\frac{1}{2}(a-b)\cdot a$

$=\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}ab$

$=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2$，

$\therefore\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2$，

即 $a^2+b^2=c^2$.

【点拨】 本题求解的关键是运用两种不同的方法表示四边形 $ACBE$ 的面积，利用图形面积不变与相应的面积公式，即可证明勾股定理.

变式训练二

1. **证明：** 根据题意，得 Rt$\triangle BAE\cong$Rt$\triangle EDC$.

$\therefore\angle ABE=\angle DEC$.

$\because\angle ABE+\angle AEB=90°$，

$\therefore\angle DEC+\angle AEB=90°$.

$\therefore\angle BEC=180°-\angle DEC-\angle AEB=90°$.

$\therefore\triangle BEC$是直角三角形.

$\therefore S_{梯形ABCD}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle BEC}+S_{\triangle DEC}$.

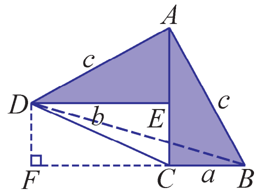
$\therefore\frac{1}{2}(a+b)^2=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}ab$.

$\therefore(a+b)^2=2ab+c^2$.

$\therefore a^2+2ab+b^2=2ab+c^2$.

$\therefore a^2+b^2=c^2$.

2. 证明： 如下图，连接 DB，过点 D 作边 BC 上的高 DF，交 BC 的延长线于点 F.



则 $DF=EC=b-a$.

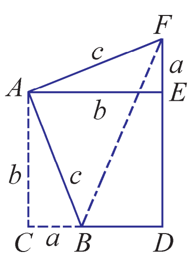
$\because S_{四边形ADCB}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot DE+\frac{1}{2}BC\cdot AC=\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab$,

又 $S_{四边形ADCB}=S_{\triangle ADB}+S_{\triangle DCB}=\frac{1}{2}AD\cdot AB+\frac{1}{2}BC\cdot DF=\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}a(b-a)$,

$\therefore \frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}a(b-a)$.

$\therefore a^2+b^2=c^2$.

例三　证明： 在图 2 中连接 BF，如下图所示.



$\because AC=b$,

$\therefore S_{正方形ACDE}=b^2$.

$\because CD=DE=AC=b$，$BC=a$，$EF=BC=a$,

$\therefore BD=CD-BC=b-a$,

$DF=DE+EF=b+a$.

$\because \angle BAC+\angle BAE=90^\circ$，$\angle BAC=\angle FAE$,

$\therefore \angle FAE+\angle BAE=90^\circ$.

又 $\because AB=AF=c$,

$\therefore \triangle BAF$ 是等腰直角三角形.

$\because S_{四边形ABDF}=S_{\triangle BAF}+S_{\triangle BDF}=\frac{1}{2}AB\cdot AF+\frac{1}{2}BD\cdot DF=\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}(b-a)(b+a)=\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}(b^2-a^2)$,

$S_{正方形ACDE}=S_{四边形ABDF}$,

$\therefore b^2=\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}(b^2-a^2)=\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}a^2$.

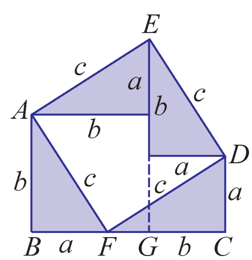
$\therefore \frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2=\frac{1}{2}c^2$.

$\therefore a^2+b^2=c^2$.

【点拨】 本题考查了勾股定理的证明，解题的关键是熟练掌握勾股定理的证明方法，一般利用拼图的方法，再利用面积相等即可完成证明.

变式训练三

1. 证明： 标上字母，如下图所示.



$\because S_{梯形ABGE}+S_{梯形CDEG}=S_{正方形AFDE}+2S_{Rt\triangle ABF}$,

即 $\frac{1}{2}(b+a+b)b+\frac{1}{2}(a+a+b)a=c^2+2\times\frac{1}{2}ab$,

$\therefore \frac{1}{2}ab+b^2+a^2+\frac{1}{2}ab=c^2+ab$，

即 $a^2+b^2=c^2$.

2. 证明： $\because$图 1 由一个边长为 a 的正方形，一个边长为 b 的正方形和三个直角边长分别为 a，b 的直角三角形拼成，

$\therefore S_1=a^2+b^2+3\times\frac{1}{2}ab=a^2+b^2+\frac{3}{2}ab$.

$\because$图 2 由一个边长为 c 的正方形和三个直角边长分别为 a，b 的直角三角形拼成，

$\therefore S_2=c^2+3\times\frac{1}{2}ab=c^2+\frac{3}{2}ab$.

$\because S_1=S_2$，

$\therefore a^2+b^2+\frac{3}{2}ab=c^2+\frac{3}{2}ab$，

$\therefore a^2+b^2=c^2$.

培优精练

1. D **【解析】** 对于选项 A，由 $\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}(a+b)(a+b)$，整理，得 $a^2+b^2=c^2$，即能证明勾股定理.

对于选项 B，由 $4\times\frac{1}{2}ab+c^2=(a+b)^2$，整理，得 $a^2+b^2=c^2$，即能证明勾股定理.

对于选项 C，由 $4\times\frac{1}{2}ab+(b-a)^2=c^2$，整理，得 $a^2+b^2=c^2$，即能证明勾股定理.

对于选项 D，根据图形不能证明勾股定理，故选 D.

2. 证明： $\because$ 四边形 $ABCD$，四边形 $EFGH$，四边形 $MNPQ$ 都是正方形，

$\therefore S_{正方形ABCD}=(a+b)^2$，

$S_{正方形EFGH}=c^2$，

$S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}ab$.

$\because S_{正方形ABCD}=S_{正方形EFGH}+4S_{\triangle BEF}$，

$\therefore (a+b)^2=c^2+4\times\frac{1}{2}ab$.

$\therefore a^2+2ab+b^2=c^2+2ab$.

$\therefore a^2+b^2=c^2$.

3. 解： 在正方形 $ABCD$ 中，$AB=BC=CD=AD$，$\angle BAD=\angle ABC=\angle BCD=\angle ADC=90^\circ$.

$\because AE=CG$，$BF=DH$，

$\therefore BE=DG$，$AH=CF$.

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BEF\cong\mathrm{Rt}\triangle DGH$，

$\mathrm{Rt}\triangle AEH\cong\mathrm{Rt}\triangle CGF$.

由 $\angle BFE=45^\circ$，$AH=3AE$，正方形 $ABCD$ 的边长为 1，可设 $AE=x$，则 $AH=3x$，$DH=BE=x+1$.

$\because AH=AD+DH$，

$\therefore 3x=1+x+1$.

解得 $x=1$.

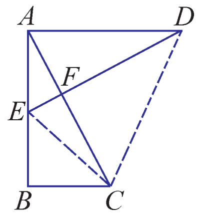
$\therefore AE=1$，$AH=3$.

$\therefore BF=BE=AE+AB=2$.

$\therefore$四边形 $EFGH$ 的面积 $=2S_{\triangle BEF}+2S_{\triangle AEH}+S_{正方形ABCD}=2\times\frac{1}{2}\times2\times2+2\times\frac{1}{2}\times3\times1+1\times1=8$.

名卷压轴题

证明： 连接 EC，CD，如下图所示.



由题意知，$Rt\triangle ABC \cong Rt\triangle DAE$，

$\therefore \angle ACB=\angle AED$.

又 $\because \angle ABC=\angle DAE=90°$，

$\therefore \angle BAC+\angle AED=\angle BAC+\angle ACB=90°$.

$\therefore \angle AFE=90°$.

$\therefore AC\perp DE$.

$\therefore S_{四边形AECD}=\frac{1}{2}AC\cdot DE=\frac{1}{2}c^2$.

$\because S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot AB=\frac{1}{2}(a+b)b=\frac{ab+b^2}{2}$，

$\therefore S_{\triangle BEC}=S_{四边形ABCD}-S_{四边形AECD}=\frac{ab+b^2}{2}-\frac{1}{2}c^2=\frac{ab+b^2-c^2}{2}$.

又 $S_{\triangle BEC}=\frac{1}{2}BC\cdot BE=\frac{1}{2}a(b-a)=\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}a^2$，

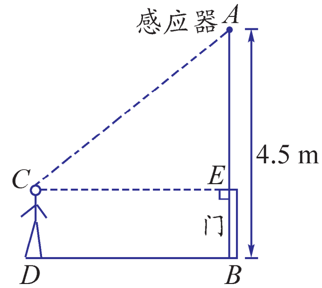
$\therefore \frac{ab+b^2-c^2}{2}=\frac{ab-a^2}{2}$.

$\therefore a^2+b^2=c^2$.

第 3 讲　利用勾股定理解决“最短”问题

例一　解： 根据题意，得 $AC=5$ m.

过 C 作 $CE\perp AB$，垂足为 E，如下图所示.



$\because AB=4.5$ m，

$\therefore AE=AB-BE=4.5-1.5=3$(m).

在 $Rt\triangle ACE$ 中，根据勾股定理，得 $CE^2=AC^2-AE^2=5^2-3^2=16$.

$\therefore CE=4$ m.

即身高 1.5 m 的人走到距离门 4 m 时，该 LED 灯刚好点亮.

【点拨】 本题求解的技巧是运用数形结合的思想，通过作辅助线 CE，把人到门的距离转化为在 $Rt\triangle ACE$ 中根据勾股定理求线段 CE.

变式训练一

解：（1）在 $Rt\triangle MNB$ 中，根据勾股定理，得

$BN=\sqrt{BM^2-MN^2}=\sqrt{75^2-60^2}=45$（m）.

$\therefore AN=AB-BN=125-45=80$（m）.

在 $Rt\triangle AMN$ 中，根据勾股定理，得

$AM=\sqrt{AN^2+MN^2}=\sqrt{80^2+60^2}=100$（m）.

$\therefore$ 供水点 M 到喷泉 A，B 需要铺设的管道总长为 $AM+BM=100+75=175$（m）.

（2）$\because AB=125$ m，$AM=100$ m，

$BM=75$ m，

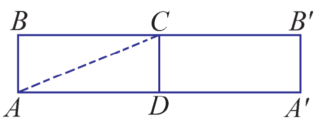
$\therefore AB^2=BM^2+AM^2$.

$\therefore \triangle ABM$ 是直角三角形.

$\therefore BM\perp AC$.

即喷泉 B 到小路 AC 的最短距离是 75 m.

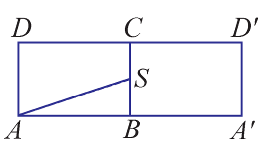
例二 C 【解析】将圆柱侧面沿母线展开，如下图所示．由于圆柱的底面周长为24 cm，则 $AD=24\times\frac{1}{2}=12$(cm)．又 $CD=AB=5$ cm，$\therefore AC=\sqrt{5^2+12^2}=13$(cm)．故蚂蚁从点 A 出发沿着圆柱的侧面爬行到点 C 的最短路程是 13 cm．故选 C.



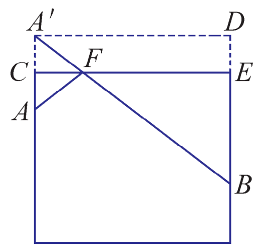
【点拨】此题主要考查平面展开图的最短路线问题．将圆柱的侧面展开，构造出直角三角形是解题的关键.

变式训练二

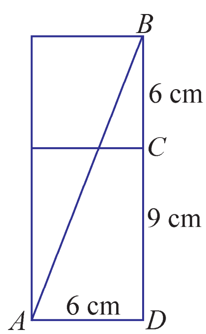
1. A 【解析】将圆柱侧面沿母线展开，如下图所示．则 $AD=BC=8$，$BS=\frac{1}{2}BC=4$．$\because$点 P 移动的最短距离为 28，$\therefore AS=28$．在 $\mathrm{Rt}\triangle ABS$ 中，$AB=\sqrt{AS^2-BS^2}=\sqrt{28^2-4^2}=16\sqrt{3}$．$\therefore$圆柱的底面周长为 $2AB=2\times16\sqrt{3}=32\sqrt{3}$．故选 A.



2. 解：将杯子侧面展开，如下图所示．作点 A 关于直线 EF 的对称点 A'．则 $AC=A'C=DE=3$ cm，$BE=14-5=9$(cm)，$BD=BE+ED=9+3=12$(cm)，$A'D=\frac{1}{2}\times32=16$(cm)．问题转化为在 CE 上找一点，使得点 A'，B 到此点的距离之和最小．连接 $A'B$ 与 CE 交于点 F，则蚂蚁从 A 点爬到 F 点，再从 F 点爬到 B 处的路程最短．最短路程为 $AF+BF=A'F+BF=A'B=\sqrt{A'D^2+BD^2}=\sqrt{16^2+12^2}=20$(cm).



例三 解：①把长方体的前侧面和上底面展开成一个长方形，如下图所示.

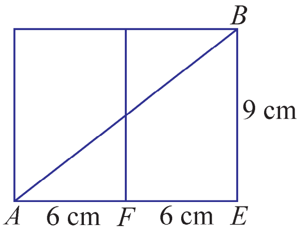


则 $BC=6$ cm，$CD=9$ cm，$AD=6$ cm，$BD=BC+CD=15$ cm.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{6^2+15^2}=3\sqrt{29}$ (cm).

②把长方体的前侧面和右侧面展开成

一个长方形，如下图所示.



则 $BE=9$ cm，$AF=EF=6$ cm，

$AE=AF+EF=12$ cm.

在 Rt$\triangle ABE$ 中，$AB=\sqrt{BE^2+AE^2}=\sqrt{9^2+12^2}=15$(cm).

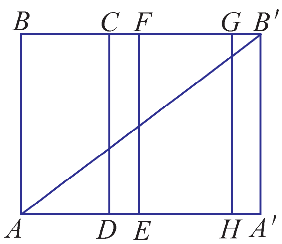
$\because 15<3\sqrt{29}$，

$\therefore$蚂蚁爬行的最短路程为 15 cm.

【点拨】本题主要考查长方体展开图中求最短路线问题. 准确找出展开后在同一平面的长方体的面是解题的关键.

变式训练三

1. 解：将长方体的侧面展开，连接 AB'，如下图所示.



则 $AD=3$ cm，$DE=1$ cm，$EH=3$ cm，$HA'=1$ cm，

$A'B'=AB=6$ cm.

$\therefore AA'=AD+DE+EH+HA'=8$ cm.

在 Rt$\triangle AA'B'$中，根据勾股定理，得

$AB'=\sqrt{AA'^2+A'B'^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$(cm).

$\therefore$所用细线最短为 10 cm.

2. 解：①将长方体的面 $ABCD$ 和面 $BEHC$展开成一个长方形，连接 AM. 如图 1.

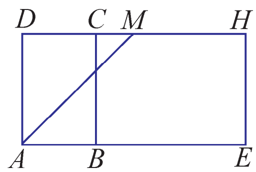


图 1

由题意，得 $DM=DC+CM=10+5=15$(cm)，$AD=15$ cm.

在 Rt$\triangle ADM$ 中，根据勾股定理，得

$AM=\sqrt{AD^2+DM^2}=\sqrt{15^2+15^2}=15\sqrt{2}$ (cm).

②将长方体的面 $ABCD$ 和面 $DCHG$ 展开成一个长方形，连接 AM，如图 2.

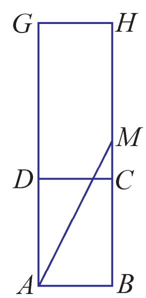


图 2

由题意，得 $BM=BC+MC=15+5=20$(cm)，$AB=10$ cm.

在 Rt$\triangle ABM$ 中，根据勾股定理，得

$AM=\sqrt{AB^2+BM^2}=\sqrt{10^2+20^2}=10\sqrt{5}$ (cm).

③将长方体的面 $AFGD$ 和面 $GDCH$ 展开成一个长方形，连接 AM，如图 3.

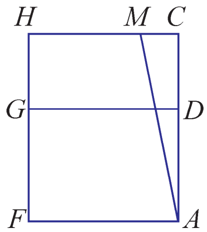


图 3

由题意，得 $AC=AD+CD=15+10=25(\text{cm})$，$MC=5\text{ cm}$.

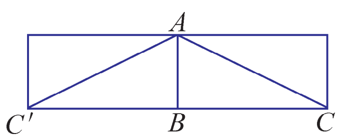
在 Rt$\triangle ACM$ 中，根据勾股定理，得 $AM=\sqrt{AC^2+MC^2}=\sqrt{25^2+5^2}=5\sqrt{26}$（cm）.

$\because 15\sqrt{2}<10\sqrt{5}<5\sqrt{26}$，

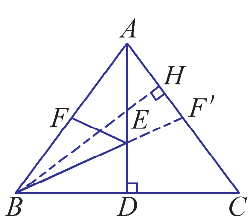
$\therefore$蚂蚁爬行的最短距离是$15\sqrt{2}$ cm.

培优精练

1. D 【解析】把圆柱的侧面展开，得到如下图的长方形，则这圈金属丝的周长最小为 $2AC$. $\because$圆柱底面的周长为 8 dm，高为 2 dm，$\therefore AB=2$ dm，$BC=BC'=4$ dm. $\therefore AC^2=2^2+4^2=4+16=20$. $\therefore AC=2\sqrt{5}$ dm. $\therefore$这圈金属丝的周长最小为 $2AC=4\sqrt{5}$ dm. 故选 D.



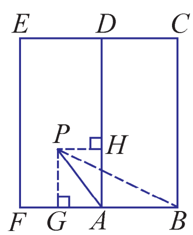
2. $\frac{24}{5}$ 【解析】如下图，作点 F 关于 AD 的对称点 F'，连接 EF'，作 $BH\perp AC$ 于点 H.



$\because AB=AC$，$AD\perp BC$，$\therefore BD=CD=3$，点 F' 在 AC 上. $\therefore BE+EF=BE+EF'$. 根据垂线段最短可知，当 F'与 H 重合，点 E 为 BH 与 AD 的交点时，$BE+EF$ 的值最小，最小值为线段 BH 的长. 根据勾股定理，得 $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$. $\because \frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}AC\cdot BH$，$\therefore 6\times 4=5BH$. 解得 $BH=\frac{24}{5}$.

$\therefore BE+EF$ 的最小值为$\frac{24}{5}$.

3. **解**：把长方形 $ADEF$ 沿 AD 放平到地面上，使长方形 $ADEF$ 与长方形 $ABCD$ 成一个长方形，如下图所示. 过点 P 作 $PG\perp AF$ 于点 G，作 $PH\perp AD$ 于点 H，连接 BP.



$\because$点 P 到 AD 的距离为 30 cm，

$\therefore AG=PH=30$ cm.

又$\because AP=AB=50$ cm，

$\therefore PG=\sqrt{50^2-30^2}=40(\text{cm})$，

$BG=30+50=80(\text{cm})$.

$\therefore PB=\sqrt{40^2+80^2}=40\sqrt{5}$（cm）.

故蚂蚁爬行的最短路程是 $40\sqrt{5}$ cm.

名卷压轴题

（1）$\sqrt{4^2+x^2}$　$\sqrt{(8-x)^2+2^2}$　【解

析】在 Rt$\triangle ADC$ 中，$CD=\sqrt{AD^2+AC^2}=\sqrt{4^2+x^2}$. 在 Rt$\triangle BCE$ 中，$CE=\sqrt{BC^2+BE^2}=\sqrt{(8-x)^2+2^2}$.

(2) **解**：当点 D，C，E 三点共线时，$CD+CE$ 的值最小.

过点 E 作 $EF\parallel AB$ 交 DA 的延长线于点 F，如图 1 所示.

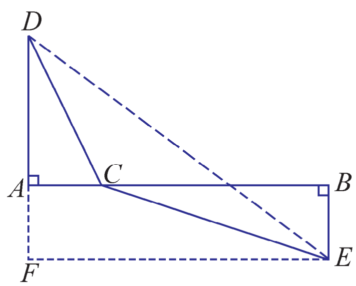


图 1

$\therefore AB=EF=8$，$AF=BE=2$.

$\therefore DF=AD+AF=4+2=6$.

在 Rt$\triangle DFE$ 中，$DE=\sqrt{DF^2+EF^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

$\therefore CD+CE$ 的最小值为 10.

(3) **解**：画一条线段 $AB=12$，分别过 A，B 作 $AD\perp AB$，$BE\perp AB$，$AD=1$，$BE=4$. 在线段 AB 上取一点 C，连接 DC，EC，DE. 如图 2.

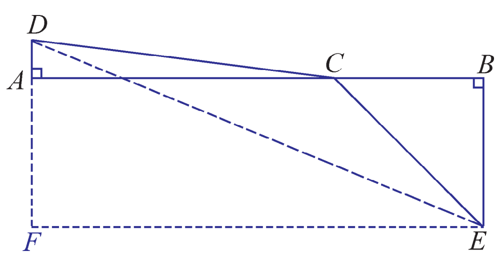


图 2

设 $AC=x$，则 $BC=12-x$.

$\therefore CD+CE=\sqrt{AD^2+AC^2}+\sqrt{BC^2+BE^2}=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{(12-x)^2+4^2}=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(12-x)^2+16}$.

当 D，C，E 三点共线时，$CD+CE$ 的值最小，

即 DE 的长为 $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(12-x)^2+16}$ 的最小值.

过点 E 作 AB 的平行线交 DA 的延长线于点 F.

则 $AF=BE=4$，$EF=AB=12$.

$\therefore DF=AD+AF=1+4=5$.

在 Rt$\triangle DFE$ 中，

$DE=\sqrt{DF^2+EF^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$.

$\therefore \sqrt{x^2+1}+\sqrt{(12-x)^2+16}$ 的最小值为 13.

◎勾股定理　新题型探究

例题　(1) 是　**【解析】** $\because (2\sqrt{5})^2+4^2=36=4\times3^2$，$\therefore \triangle ABC$ 是“常态三角形”.

(2) **解**：$\because$ Rt$\triangle ABC$ 是“常态三角形”，

$\therefore$ 设两直角边长分别为 a，b $(a>b)$，斜边长为 c，

则 $\begin{cases}a^2+b^2=c^2,\\ a^2+c^2=4b^2.\end{cases}$

解得 $2a^2=3b^2$.

$\therefore a:b=\sqrt{3}:\sqrt{2}$.

设 $a=\sqrt{3}x$，$b=\sqrt{2}x$，

则 $c=\sqrt{(\sqrt{3}x)^2+(\sqrt{2}x)^2}=\sqrt{5}x$.

$\therefore$ 此直角三角形的三边长之比为 $\sqrt{2}:$

$\sqrt{3}:\sqrt{5}$.

（3）**解**：在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$BC=4$.

$\because AD=BD=CD$，

$\therefore D$ 为 AB 的中点.

$\because \triangle BCD$ 是“常态三角形”，

①当 $CD^2+BD^2=4BC^2=4\times 4^2$ 时，

解得 $BD=CD=4\sqrt{2}$.

则 $AB=2BD=8\sqrt{2}$.

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{(8\sqrt{2})^2-4^2}=4\sqrt{7}$.

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{7}\times 4=8\sqrt{7}$.

②当 $CD^2+BC^2=CD^2+4^2=4\times BD^2$ 时，

解得 $BD=CD=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

则 $AB=2BD=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2-4^2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\times \frac{4\sqrt{3}}{3}\times 4=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

综上所述，$\triangle ABC$ 的面积为 $8\sqrt{7}$ 或 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

【点拨】 本题的解题技巧是类比思想的应用，在深刻理解“常态三角形”的定义的基础上，类比示例中的求解方法进行解题．注意题目中没有告诉 $\angle A$ 与 $\angle B$ 的大小，因此无法判断 BD 与 BC 的大小，则需要分类讨论，否则将会出现丢解的错误.

变式训练

（1）**解**：直角三角形不是“勾股三角形”．理由如下：

若一个直角三角形的两个锐角分别为 30°，60°，

因为 $30^2+60^2\neq 90^2$，

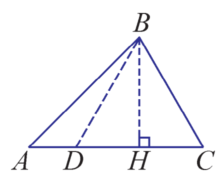
所以直角三角形不是“勾股三角形”.

（2）**解**：根据题意，得

$$\begin{cases}x+y+z=180,\\ xy=2\,160,\\ x^2+y^2=z^2.\end{cases}$$

解得 $x+y=102$.

（3）**证明**：过 B 作 $BH\perp AC$ 于点 H，在线段 AH 上取点 D，使 $DH=CH$，则 $BC=BD$，如下图.



设 $AH=x$，

在 Rt$\triangle ABH$ 中，$BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=\sqrt{6-x^2}$.

$\because HC=AC-AH=1+\sqrt{3}-x$，$BC=2$，

$\therefore$ 在 Rt$\triangle CBH$ 中，$(\sqrt{6-x^2})^2+(1+\sqrt{3}-x)^2=4$.

解得 $x=\sqrt{3}$.

$\therefore AH=BH=\sqrt{3}$.

$\therefore \angle A=\angle ABH=45^\circ$,

$CH=1+\sqrt{3}-\sqrt{3}=1$.

$\therefore CD=2CH=2$.

$\therefore \triangle BCD$ 是等边三角形.

$\therefore \angle BCH=60^\circ$，$\angle CBH=30^\circ$.

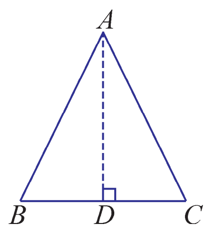
$\therefore \angle ABC=\angle ABH+\angle CBH=75^\circ$.

$\because 45^2+60^2=75^2$,

$\therefore \triangle ABC$ 是“勾股三角形”.

培优精练

（1）**证明：**过 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D，如下图.



$\because AB=AC$，$AD\perp BC$,

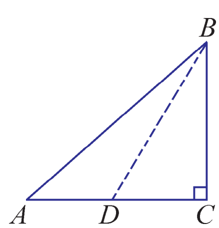
$\therefore BD=\frac{1}{2}BC=2$.

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中，得 $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4$.

$\therefore AD=BC$.

$\therefore \triangle ABC$ 是“奇妙三角形”.

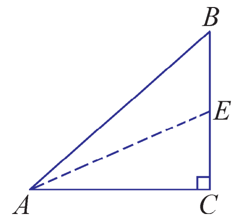
（2）**解：**①当边 AC 上的中线 $BD=AC$ 时，如下图.



$\because CD=\frac{1}{2}AC=\sqrt{3}$，$BD=2\sqrt{3}$,

$\therefore BC=\sqrt{BD^2-CD^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=3$.

②当边 BC 上的中线 $AE=BC$ 时，如下图.



$\because AC^2=AE^2-CE^2$,

即 $BC^2-\left(\frac{1}{2}BC\right)^2=(2\sqrt{3})^2$.

解得 $BC=4$.

③边 AB 上的中线不可能等于 AB.

综上所述，BC 的长是 3 或 4.

专题三　平行四边形

第 1 讲　平行四边形的性质与判定

例一　（1）**解：**$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB=CD=6$.

$\because \triangle ABE$ 是等边三角形，

$\therefore AE=BE=AB=6$.

$\because AF=3$,

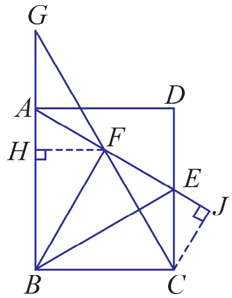
$\therefore AF=EF$.

$\therefore BF\perp AE$，且 $BF=\sqrt{AB^2-AF^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$.

$\therefore S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}AF\cdot BF=\frac{1}{2}\times 3\times 3\sqrt{3}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

（2）**证明：**过 F 作 $FH\perp AB$ 于点 H，

过 C 作 $CJ\perp AE$ 交 AE 的延长线于点 J，如下图所示.



∵△ABE，△FBC 都是等边三角形，

∴$AB=BE$，$BF=BC$，

$\angle ABE=\angle FBC=60°$.

∴$\angle ABE-\angle EBF=\angle FBC-\angle EBF$，

即 $\angle ABF=\angle EBC$.

∴△ABF≌△EBC(SAS).

∴$AF=CE$.

∵$AB/\!/CD$，

∴$\angle CEJ=\angle FAH$.

又∵$\angle FHA=\angle J=90°$，

∴△FHA≌△CJE(AAS).

∴$FH=CJ$，$AH=EJ$.

∵$BF=FG=FC$，$FH=CJ$，

∴Rt△FGH≌Rt△CFJ（HL).

∴$GH=FJ$.

∵$AH=EJ$，

∴$GH-AH=FJ-EJ$，

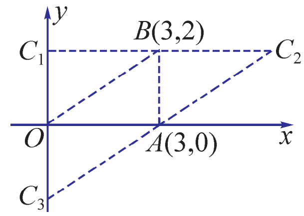
即 $AG=EF$.

∴$BE=AE=AF+EF=CE+AG$.

【点拨】 本题考查了平行四边形的性质，全等三角形的判定和性质，等边三角形的性质等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题.

变式训练一

1. D　**【解析】** 在平面直角坐标系中作出 O，A，B 的坐标，如下图所示.



①当 $OA/\!/BC$ 时，$BC=OA=3$.

∴点 C 的纵坐标为 2，设点 C 的横坐标为 m，则 $|m-3|=3$. 解得 $m=0$ 或 $m=6$. ∴点 C 的坐标为（0，2）或（6，2）.

②当 $AB/\!/OC$ 时，$OC=AB=2$.

∴点 C 的纵坐标为 -2. ∴点 C 的坐标为（0，-2）.

综上所述，点 C 的坐标不可能为（4，2）.

2. **解：** ∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AD/\!/BC$，$CD=AB=4$，

$AD=BC$.

∴$\angle DFC=\angle FCB$.

∵CF 平分 $\angle BCD$，

∴$\angle DCF=\angle FCB$.

∴$\angle DFC=\angle DCF$.

∴$DF=DC=4$.

∵$AF=1$，

∴$AD=AF+DF=1+4=5$.

∴$BC=5$.

例二　(1) **证明：** ∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AB/\!/CD$，$AB=CD$.

$\therefore \angle ABE=\angle CDF$.

$\because AE /\!/ CF$,

$\therefore \angle AEF=\angle CFE$.

$\therefore 180^\circ-\angle AEF=180^\circ-\angle CFE$,

即 $\angle AEB=\angle CFD$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中，

$$\begin{cases}\angle AEB=\angle CFD,\\ \angle ABE=\angle CDF,\\ AB=CD,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle CDF$（AAS）.

$\therefore AE=CF$.

又 $\because AE /\!/ CF$,

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

（2）**解：** $\triangle ABE$，$\triangle CDF$，$\triangle BCE$，$\triangle ADF$.

【点拨】 本题考查了平行四边形的判定与性质、全等三角形的判定与性质以及三角形面积等知识．熟练掌握平行四边形的判定与性质，证明三角形全等是解题的关键.

变式训练二

1. （1）**证明：** $\because \angle A=\angle ABC=90^\circ$,

$\therefore BC /\!/ AD$.

$\therefore \angle CBE=\angle DFE$.

$\because E$ 是边 CD 的中点，

$\therefore CE=DE$.

在 $\triangle BEC$ 与 $\triangle FED$ 中，

$$\begin{cases}\angle CBE=\angle DFE,\\ \angle BEC=\angle FED,\\ CE=DE,\end{cases}$$

$\therefore \triangle BEC\cong\triangle FED$（AAS）.

$\therefore BE=FE$.

又 $\because CE=DE$,

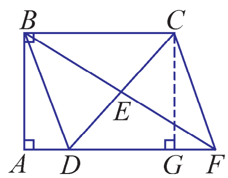
$\therefore$ 四边形 $BDFC$ 是平行四边形.

（2）**解：** ①当 $BD=BC=3$ 时，

由勾股定理，得 $AB=\sqrt{BD^2-AD^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$.

$\therefore S_{\text{四边形}BDFC}=3\times2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$.

②当 $CD=BC=3$ 时，过点 C 作 $CG\perp AF$ 于点 G，如下图所示.



$\therefore AG=BC=3$.

$\therefore DG=AG-AD=3-1=2$.

由勾股定理，得 $CG=\sqrt{CD^2-DG^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$.

$\therefore S_{\text{四边形}BDFC}=3\times\sqrt{5}=3\sqrt{5}$.

③当 $BD=CD$ 时，BC 边上的中线与 BC 垂直，

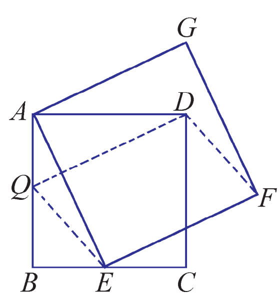
$\therefore BC=2AD=2$.

这与 $BC=3$ 矛盾，此时不成立.

综上所述，四边形 $BDFC$ 的面积是 $6\sqrt{2}$ 或 $3\sqrt{5}$.

2. **解：** 存在．证明如下：

如下图所示，在 AB 上取 $AQ=BE$，连接 QD，QE，DF.



$\because AB=AD$，

易证$\triangle DAQ\cong\triangle ABE$（SAS）.

$\therefore\angle ADQ=\angle BAE$，

$DQ=AE=EF$.

$\because\angle DAG+\angle DAE=90^{\circ}$，

$\angle BAE+\angle DAE=90^{\circ}$，

$\therefore\angle DAG=\angle BAE$.

$\therefore\angle ADQ=\angle DAG$.

$\therefore AG/\!/DQ$.

$\because AG/\!/EF$，$\therefore DQ/\!/EF$.

又$\because DQ=EF$，

$\therefore$四边形$DQEF$是平行四边形.

$\therefore$在AB边上存在点Q，当$AQ=BE$时，四边形$DQEF$是平行四边形.

例三　（1）**证明：**由翻折可知，$\triangle ABC\cong\triangle AEC$.

$\therefore\angle ACB=\angle ACE$，$BC=EC$.

$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AD=BC$，$AD/\!/BC$.

$\therefore EC=AD$，$\angle ACB=\angle CAD$.

$\therefore\angle ACE=\angle CAD$.

$\therefore OA=OC$.

$\therefore EC-OC=AD-OA$，

即$OE=OD$.

$\therefore\angle ODE=\angle OED$.

$\because\angle AOC=\angle DOE$，

$\therefore\angle CAD=\angle ACE=\angle OED=\angle ODE$.

$\therefore AC/\!/DE$.

（2）**解：**$\because$在$\square ABCD$中，$\angle B=90^{\circ}$，

$\therefore\angle CDO=90^{\circ}$，$CD=AB=\sqrt{3}$，$AD=BC=\sqrt{6}$.

由（1）知，$OA=OC$.

设$OA=OC=x$，

则$OD=AD-OA=\sqrt{6}-x$.

在$Rt\triangle OCD$中，

$\because DC^{2}+OD^{2}=OC^{2}$，

$\therefore(\sqrt{3})^{2}+(\sqrt{6}-x)^{2}=x^{2}$.

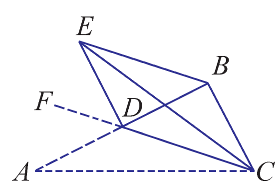
解得$x=\frac{3\sqrt{6}}{4}$. $\therefore OA=\frac{3\sqrt{6}}{4}$.

$\therefore S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}OA\times CD=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{6}}{4}\times\sqrt{3}=\frac{9\sqrt{2}}{8}$.

【点拨】本题是平行四边形综合题目，考查翻折变换的性质、平行四边形的性质、平行线的判定与性质、全等三角形的性质等知识，综合性强. 熟练掌握翻折变换的性质和平行四边形的性质是解题的关键.

变式训练三

135°　**【解析】**延长CD到点F，如下图所示. $\because$四边形$BCDE$是平行四边形，$\therefore BC/\!/DE$. $\because\angle ABC=90^{\circ}$，$\therefore\angle BDE=90^{\circ}$，$\therefore\angle ADE=90^{\circ}$. $\because$将$\triangle ACD$沿直线CD翻折后，点A落在点E处，$\therefore\angle ADF=\angle EDF=\frac{1}{2}\angle ADE=45^{\circ}$. $\therefore\angle ADC=180^{\circ}-\angle ADF=135^{\circ}$.



培优精练

1. 100 【解析】$\because AD \parallel BC$，$\therefore \angle E=\angle DAE$. $\because AE$ 平分 $\angle BAD$，$\therefore \angle BAE=\angle DAE$. $\therefore \angle E=\angle BAE$. $\therefore BE=AB=7$. $\because BC=4$，$\therefore CE=7-4=3$. 同理可得 $BF=3$. $\therefore EF=3+4+3=10$. $\because AB\parallel CD$，$\therefore \angle BAD+\angle ADC=180^\circ$. $\therefore \angle OAD+\angle ODA=90^\circ$. $\therefore \angle AOD=90^\circ=\angle EOF$. $\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle EOF$ 中，$OE^2+OF^2=EF^2=10^2=100$.

2. (1) **证明：**$\because BD$ 垂直平分 AC，

$\therefore AB=BC$，$AD=DC$.

在$\triangle ADB$ 与$\triangle CDB$ 中，

$$\begin{cases} AB=CB, \\ AD=CD, \\ DB=DB, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADB\cong\triangle CDB$ (SSS).

$\therefore \angle BCD=\angle BAD$.

$\because \angle BCD=\angle ADF$，

$\therefore \angle BAD=\angle ADF$.

$\therefore AB\parallel FD$.

$\because BD\perp AC$，$AF\perp AC$，

$\therefore AF\parallel BD$.

$\therefore$ 四边形 $ABDF$ 是平行四边形.

(2) **解：**$\because$ 四边形 $ABDF$ 是平行四边形，

$\therefore BD=AF=14$，$AB=DF=13$.

设 $BE=x$，则 $DE=14-x$.

由勾股定理，得 $AB^2-BE^2=AD^2-DE^2$，

即 $13^2-x^2=15^2-(14-x)^2$.

解得 $x=5$. $\therefore BE=5$，

$\therefore AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=12$.

$\therefore AC=2AE=24$.

3. **解：**$\because AD\parallel BC$，

点 E 在 AD 上，点 F 在 BC 上，

$\therefore AE\parallel MF$.

$\because$ 以 A，M，E，F 为顶点的四边形是平行四边形，

$\therefore AE=MF$.

①当点 F 在线段 BM 上时，

$MF=FC-MC=3t-(BC-BM)=3t-(12-9)=(3t-3)(\mathrm{cm})$.

$\because AE=t$ cm，$\therefore 3t-3=t$.

解得 $t=\frac{3}{2}$. 符合题意.

②当点 F 在线段 MC 上时，

$MF=MC-CF=BC-BM-3t=12-9-3t=(3-3t)(\mathrm{cm})$.

$\because AE=t$ cm，$\therefore 3-3t=t$.

解得 $t=\frac{3}{4}$. 符合题意.

综上所述，t 的值为$\frac{3}{2}$ s 或$\frac{3}{4}$ s.

名卷压轴题

解：(1) 如图 1，设 AD 与 $B'C$ 相交于点 E，过点 A 作 $AG\perp BC$ 于点 G.

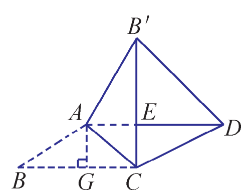


图 1

$\because$ 在 $\square ABCD$ 中，$\angle B=30^\circ$，将

$\triangle ABC$ 沿 AC 翻折，得到$\triangle AB'C$，

$\therefore \angle AB'C=30°$.

$\because \angle AB'D=75°$，$\therefore \angle CB'D=45°$.

$\because AD=BC=B'C$，$AD\parallel BC$，

$\therefore \angle DAC=\angle ACB=\angle B'CA$.

$\therefore AE=EC$，$B'E=ED$.

$\therefore \angle EB'D=\angle EDB'$.

$\therefore \angle EB'D=\dfrac{180°-\angle B'ED}{2}$.

又 $\angle ACE=\dfrac{180°-\angle AEC}{2}$，

$\angle AEC=\angle B'ED$，

$\therefore \angle EB'D=\angle ACE$.

$\therefore B'D\parallel AC$.

$\therefore \angle ACB'=\angle CB'D=45°$.

$\because \angle ACB=\angle ACB'$，

$\therefore \angle ACB=45°$.

$\therefore \angle ACG=\angle CAG=45°$.

$\therefore AG=CG$.

$\because \angle B=30°$，

$\therefore AG=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=CG$.

$\therefore BG=\sqrt{AB^2-AG^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{3}{2}$.

$\therefore BC=BG+CG=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$.

(2) $\because AD=BC$，$BC=B'C$，

$\therefore AD=B'C$.

由（1）可知，$AC\parallel B'D$，

$AD\parallel BC$，BC 与 $B'C$ 相交.

$\therefore AD$ 与 $B'C$ 相交.

$\therefore$ 四边形 $ACDB'$ 是等腰梯形.

$\because \angle B=30°$，

$\therefore \angle AB'C=\angle CDA=30°$.

$\because \triangle AB'D$ 是以 $B'D$ 为斜边的直角三角形，

① 当 $\angle B'AD=90°$，$AB'>AD$，即 $AB>BC$ 时，如图 2.

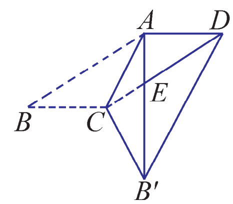


图 2

设 $\angle ADB'=\angle CB'D=y$，

$\therefore \angle AB'D=y-30°$.

$\because \angle AB'D+\angle ADB'=90°$，

$\therefore y-30°+y=90°$.

解得 $y=60°$.

$\therefore \angle AB'D=y-30°=30°$.

$\because AB'=AB=2\sqrt{3}$，

设 $AD=B'C=BC=x$，

则 $B'D=2x$.

$\therefore (2x)^2=x^2+(2\sqrt{3})^2$.

解得 $x=2$. $\therefore BC=2$.

② 当 $\angle B'AD=90°$，$AB'<AD$，即 $AB<BC$ 时，延长 $B'A$ 交 BC 于点 G，如图 3.

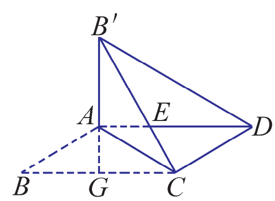


图 3

$\because AD\parallel BC$，$\angle B'AD=90°$，

$\therefore \angle B'GC=90^\circ$.

$\because \angle B=30^\circ$，$AB=2\sqrt{3}$，

$\therefore \angle AB'C=30^\circ$.

$\therefore GC=\frac{1}{2}B'C=\frac{1}{2}BC$，

即 G 是 BC 的中点.

在 $Rt\triangle ABG$ 中，$AG=\frac{1}{2}AB=\sqrt{3}$.

$\therefore BG=\sqrt{AB^2-AG^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=3$.

$\therefore BC=2BG=6$.

综上所述，BC 的长为 2 或 6.

第 2 讲　矩形的性质与判定

例一　(1) **证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore OC=\frac{1}{2}AC$，$OD=\frac{1}{2}BD$，$AC=BD$.

$\therefore OC=OD$.

$\therefore \angle ACD=\angle BDC$.

$\because \angle CDF=\angle BDC$，$\angle DCF=\angle ACD$，

$\therefore \angle CDF=\angle DCF$.

$\therefore DF=CF$.

(2) **解**：由 (1) 可知，$DF=CF$.

$\because \angle CDF=60^\circ$，

$\therefore \triangle CDF$ 是等边三角形.

$\therefore CD=DF=6$.

$\because \angle CDF=\angle BDC=60^\circ$，$OC=OD$，

$\therefore \triangle OCD$ 是等边三角形.

$\therefore OC=OD=6$.

$\therefore BD=2OD=12$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle BCD=90^\circ$.

$\therefore BC=\sqrt{BD^2-CD^2}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$.

$\therefore S_{\text{矩形}ABCD}=BC\cdot CD=6\sqrt{3}\times 6=36\sqrt{3}$.

【点拨】 本题主要考查了矩形的性质，等边三角形的性质与判定，勾股定理等. 熟练掌握矩形的性质是解题的关键.

变式训练一

1. (1) **证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AD\parallel BC$.

$\therefore \angle DAE=\angle AEB$.

$\because DF\perp AE$，

$\therefore \angle AFD=90^\circ=\angle B$.

在 $\triangle DFA$ 和 $\triangle ABE$ 中，

$$\begin{cases}\angle AFD=\angle B,\\ \angle DAE=\angle AEB,\\ AD=AE,\end{cases}$$

$\therefore \triangle DFA\cong\triangle ABE$ (AAS).

$\therefore DF=AB$.

(2) **解**：$\because \angle FDC=30^\circ$，$\angle ADC=90^\circ$，

$\therefore \angle FDA=\angle ADC-\angle FDC=60^\circ$.

$\because \triangle DFA\cong\triangle ABE$，

$\therefore \angle BAE=\angle FDA=60^\circ$.

$\therefore \angle AEB=90^\circ-\angle BAE=30^\circ$.

$\because AB=4$，

$\therefore AE=2AB=8$.

$\therefore AD=AE=8$.

2. (1) **证明**：∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$AB /\!/ CD$.

∴$\angle OCF=\angle OAE$.

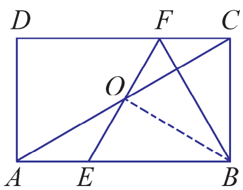
在△COF 和△AOE 中，

$$\begin{cases}\angle COF=\angle AOE,\\ \angle OCF=\angle OAE,\\ CF=AE,\end{cases}$$

∴△COF≌△AOE（AAS）.

∴$OE=OF$.

(2) **解**：如下图，连接 OB.



∵$BE=BF$，$OE=OF$，

∴$BO\perp EF$.

∴ 在 Rt △BEO 中，$\angle BEF+\angle ABO=90°$.

由（1）可知 $OA=OC$，即 O 为 AC 的中点.

∴$OA=OB=OC$.

∴$\angle BAC=\angle ABO$.

又∵$\angle BEF=2\angle BAC$，

∴$2\angle BAC+\angle BAC=90°$.

解得 $\angle BAC=\angle ABO=30°$.

∴$\angle ACB=90°-\angle BAC=60°$.

例二 （1）**证明**：∵DE 是△ABC 的中位线，

∴E 是 AC 的中点，D 是 AB 的中点.

∵AF 是△ABC 的中线，

∴F 是 BC 的中点.

∴EF 是△ABC 的中位线.

∴$EF /\!/ AB$，$EF=\frac{1}{2}AB$.

∵$AD=\frac{1}{2}AB$，

∴$EF=AD$.

∴四边形 $ADFE$ 是平行四边形.

∴AF 与 DE 互相平分.

（2）**解**：当 $AF=\frac{1}{2}BC$ 时，四边形 $ADFE$ 为矩形. 理由如下：

∵线段 DE 为△ABC 的中位线，

∴$DE=\frac{1}{2}BC$，

∵$AF=\frac{1}{2}BC$，

∴$AF=DE$.

由（1），得四边形 $ADFE$ 是平行四边形.

∴四边形 $ADFE$ 为矩形.

【点拨】本题（2）的解答利用了逆推的方法，从结论入手逐步逆推所需要的条件，一直逆推到与已知条件有关的条件，即得 AF 与 BC 满足的数量关系：$AF=\frac{1}{2}BC$. 把逆推的过程倒过来，则证明四边形 $ADFE$ 为矩形.

变式训练二

证明：（1）∵$AF /\!/ BC$，

∴$\angle AFE=\angle DCE$.

∵E 是 AD 的中点，

∴$AE=DE$.

在△AEF 和△DEC 中，

$\begin{cases}\angle AFE=\angle DCE,\\ \angle AEF=\angle DEC,\\ AE=DE,\end{cases}$

$\therefore \triangle AEF\cong\triangle DEC$（AAS）.

$\therefore AF=DC$.

$\because AF=BD$，

$\therefore BD=DC$.

（2）$\because AB=AC$，D 是 BC 的中点，

$\therefore AD\perp BC$.

$\therefore \angle ADB=90^\circ$.

$\because AF=BD$，$AF\parallel BC$，

$\therefore$四边形 $AFBD$ 是平行四边形.

又$\because \angle ADB=90^\circ$，

$\therefore$四边形 $AFBD$ 是矩形.

例三 （1）**证明：**$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB=CD$，

$\angle A=\angle C=90^\circ$.

$\because$将$\triangle BAD$ 沿对角线 BD 翻折，点 A 落在点 E 处，DE 与 BC 交于点 F，

$\therefore AB=BE$，

$\angle A=\angle E=90^\circ$.

$\therefore BE=DC$，

$\angle E=\angle C=90^\circ$.

在$\triangle BEF$ 和$\triangle DCF$ 中，

$\begin{cases}\angle BFE=\angle DFC,\\ \angle E=\angle C=90^\circ,\\ BE=DC,\end{cases}$

$\therefore \triangle BEF\cong\triangle DCF$（AAS）.

（2）**解：**由（1），得$\triangle BEF\cong\triangle DCF$.

$\therefore BF=DF$.

$\because BC=9$，$DC=3$，$\angle C=90^\circ$，

$\therefore CF=BC-BF=9-BF=9-DF$.

在 Rt$\triangle DCF$ 中，$DF^2=CF^2+DC^2$，

$\therefore DF^2=(9-DF)^2+3^2$.

$\therefore DF=5$.

【点拨】 本题考查了翻折变换，全等三角形的判定与性质以及勾股定理等知识．解题的关键是熟练掌握翻折变换的性质，即翻折前后对应边相等、对应角相等.

变式训练三

1. （1）**证明：**根据翻折，得 $\angle AEF=\angle CEF$.

$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB\parallel CD$.

$\therefore \angle CFE=\angle AEF$.

$\therefore \angle CFE=\angle CEF$.

（2）**解：**根据翻折，得 $A'E=AE=3$，$D'F=DF$.

在矩形 $ABCD$ 中，$AB=CD=6$，$AD=BC=4$，$\angle B=90^\circ$，

$\because AE=3$，

$\therefore BE=AB-AE=3$.

$\therefore CE=\sqrt{BC^2+BE^2}=5$.

$\because \angle CFE=\angle CEF$，

$\therefore CF=CE=5$.

$\therefore DF=CD-CF=1$，

即 $DF=1$.

2. （1）**证明：**$\because$将▱$ABCD$ 折叠，点 B 恰好落在边 CD 上的点 E 处，

$\therefore AE=AB=10$ cm.

$\therefore AD^2+DE^2=8^2+6^2=100=AE^2$.

$\therefore \triangle ADE$ 是直角三角形，且 $\angle D=90°$.

又$\because$四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore \square ABCD$ 是矩形.

（2）**解**：设 $BF=x$ cm，

则 $EF=BF=x$ cm.

$\therefore EC=CD-DE=10-6=4$(cm)，

$FC=BC-BF=(8-x)$ cm.

在 Rt$\triangle EFC$ 中，

$EC^2+FC^2=EF^2$，

即 $4^2+(8-x)^2=x^2$，

解得 $x=5$.

故 $BF=5$ cm.

（3）**解**：在 Rt$\triangle ABF$ 中，

$AB^2+BF^2=AF^2$.

$\because AB=10$ cm，$BF=5$ cm，

$\therefore AF=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5}$（cm）.

培优精练

1. C 【**解析**】$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore AD /\!/ BC$，$\angle BAD=\angle ABC=90°$，$AO=OC$，$OD=OB$，$AC=BD$. $\therefore AO=OB=OD$. $\because AB=1$，$AD=\sqrt{3}$，由勾股定理，得 $AC=\sqrt{AB^2+AD^2}=2$. $\therefore \angle ADB=30°$，$\angle ABD=60°$. $\therefore \triangle ABO$ 是等边三角形. $\therefore AB=AO=OB$，$\angle BAO=\angle AOB=60°$. $\because AF$ 平分 $\angle DAB$，$\therefore \angle BAF=\angle DAF=45°$. $\because \angle DAF=\angle AFB$，$\therefore \angle BAF=\angle AFB$. $\therefore BF=AB=OB$. $\therefore$②正确. $\because CE\perp BD$，$\angle DOC=\angle AOB=60°$，$\therefore \angle ECO=90°-\angle DOC=30°$. $\because \angle FAC=\angle BAO-\angle BAF=15°$，$\therefore \angle H=\angle ECA-\angle FAC=15°=\angle FAC$. $\therefore CA=CH$. $\therefore$③正确. $\because CF$ 和 AH 不垂直，$\therefore AF\neq FH$. $\therefore$①错误. $\because \angle CEO=90°$，$\angle ECA=30°$，$\therefore OE=\frac{1}{2}OC=\frac{1}{2}OD=ED$. $BE=3ED$. $\therefore$④正确. 故选 C.

2. （1）**证明**：$\because AO=CO$，$BO=DO$，

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

$\therefore \angle ABC=\angle ADC$.

$\because \angle ABC+\angle ADC=180°$，

$\therefore \angle ABC=\angle ADC=90°$.

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是矩形.

（2）**解**：$\because \angle ADC=90°$，$\angle ADF:\angle FDC=3:2$，

$\therefore \angle FDC=36°$.

$\because DF\perp AC$，

$\therefore \angle DCO=90°-\angle FDC=54°$.

$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore CO=OD$.

$\therefore \angle ODC=\angle DCO=54°$.

$\therefore \angle BDF=\angle ODC-\angle FDC=18°$.

3. （1）**证明**：$\because AE /\!/ BC$，且 $AE=CD$，

$\therefore$四边形 $ADCE$ 是平行四边形.

$\because$在等边$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 的中点，

$\therefore AD\perp BC$.

$\therefore \angle ADC=90°$.

∴平行四边形 $ADCE$ 是矩形.

(2) **解：**∵$\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴$BC=AC=AB=4$.

∵D 是 BC 的中点，

∴$AD\perp BC$，$BD=CD=2$.

在 Rt$\triangle ACD$ 中，由勾股定理，得

$AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.

∵$AE=CD$，

∴$AE=BD$.

由（1）可知，四边形 $ADCE$ 是矩形.

∴$\angle BDF=\angle EAF=90°$.

在$\triangle BDF$ 和$\triangle EAF$ 中，

$$\begin{cases}\angle BFD=\angle EFA,\\ \angle BDF=\angle EAF,\\ BD=AE,\end{cases}$$

∴$\triangle BDF\cong\triangle EAF$（AAS）.

∴$DF=AF=\frac{1}{2}AD=\sqrt{3}$.

∴$CF=\sqrt{CD^2+DF^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$.

名卷压轴题

(1) **证明：**∵CE 平分$\angle ACB$，

∴$\angle ACE=\angle ECB$.

∵$MN\parallel BC$，

∴$\angle ECB=\angle OEC$.

∴$\angle ACE=\angle OEC$.

∴$OE=OC$.

同理可得 $OC=OF$.

∴$OE=OF$.

(2) **解：**∵CE，CF 分别平分$\angle ACB$ 和$\angle ACD$，

∴$\angle ACE+\angle ACF=\frac{1}{2}\angle BCD=90°$.

∴在 Rt$\triangle ECF$ 中，$EF=\sqrt{CE^2+CF^2}=\sqrt{12^2+9^2}=15$.

∴$OC=\frac{1}{2}EF=\frac{15}{2}$.

(3) **解：**当 O 在 AC 的中点时，四边形 $AECF$ 是矩形. 理由如下：

当 O 为 AC 中点时，则有 $OA=OC=OE=OF$.

∴四边形 $AECF$ 为平行四边形.

∵$\angle ECF=\angle ACE+\angle ACF=90°$，

∴四边形 $AECF$ 为矩形.

第 3 讲　菱形、正方形的性质与判定

例一　(1) **证明：**∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴$AB=BC=CD=AD$，$\angle B=\angle D$.

∵$AE\perp BC$，$AF\perp CD$，

∴$\angle AEB=\angle AFD=90°$.

在$\triangle ABE$ 和$\triangle ADF$ 中，

$$\begin{cases}\angle AEB=\angle AFD,\\ \angle B=\angle D,\\ AB=AD,\end{cases}$$

∴$\triangle ABE\cong\triangle ADF$（AAS）.

(2) **解：**设菱形 $ABCD$ 的边长为 x，则 $AB=CD=x$.

∵$CF=2$.

∴$DF=CD-CF=x-2$.

∵$\triangle ABE\cong\triangle ADF$，

∴$BE=DF=x-2$.

在 Rt$\triangle ABE$ 中，根据勾股定理，得

$AE^2+BE^2=AB^2$.

$\therefore 4^2+(x-2)^2=x^2$.

解得 $x=5$.

$\therefore$菱形 $ABCD$ 的边长是 5.

【点拨】 本题主要考查了菱形的性质，解题的关键是熟记菱形的性质并灵活运用．菱形具有平行四边形的所有性质外，还具有：①菱形的四条边都相等；②菱形的两条对角互相垂直平分；③菱形是轴对称图形，它有 2 条对称轴，分别是 2 条对角线所在的直线.

变式训练一

1. C **【解析】** $\because$四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=60°$，$\therefore BO=DO$，$\angle ABO=30°$，$AC\perp BD$，$AB=AD$．$\therefore BO=\frac{1}{2}BD=2\sqrt{3}$．在 Rt$\triangle ABO$ 中，根据勾股定理，得 $AO=2$，$AB=2AO=4$．$\because E$ 为 AD 的中点，O 为 BD 的中点，$\therefore OE=\frac{1}{2}AB=2$.

2. **证明：** $\because$四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AD=CD$.

$\therefore \angle CAD=\angle ACD$.

$\because \angle ADF=\angle CDE$，

$\therefore \angle ADF-\angle EDF=\angle CDE-\angle EDF$，即$\angle ADE=\angle CDF$.

在$\triangle DAE$ 和$\triangle DCF$ 中，

$$\begin{cases}\angle CAD=\angle ACD,\\ AD=CD,\\ \angle ADE=\angle CDF,\end{cases}$$

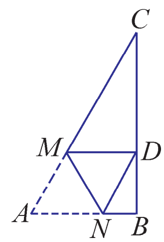
$\therefore \triangle DAE\cong\triangle DCF$（ASA）.

$\therefore AE=CF$.

例三 (1) 菱形 **【解析】** 由翻折可知，$AM=MD$．$\because$四边形 $MAND$ 为平行四边形，$\therefore$平行四边形 $MAND$ 为菱形.

(2) **解：** 分两种情况：

① 如图所示，当 $\angle CDM=90°$ 时，$\triangle CDM$ 是直角三角形.



$\because$在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，$\angle A=60°$，$AC=2\sqrt{3}+4$，

$\therefore \angle C=30°$，$AB=\frac{1}{2}AC=\sqrt{3}+2$.

由折叠可得，$\angle MDN=\angle A=60°$，$AN=ND$.

$\therefore \angle BDN=30°$.

$\therefore BN=\frac{1}{2}DN=\frac{1}{2}AN$.

$\therefore BN=\frac{1}{3}AB=\frac{\sqrt{3}+2}{3}$.

$\therefore AN=2BN=\frac{2\sqrt{3}+4}{3}$.

$\because \angle DNB=60°$，$\angle MND=\angle ANM$，

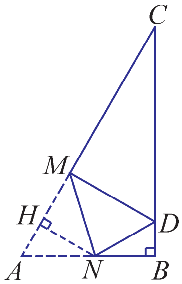
$\therefore \angle ANM=\angle DNM=(180°-60°)\div 2=60°$.

$\therefore \angle AMN=60°$.

$\therefore \triangle AMN$ 为等边三角形.

$\therefore MN=AN=\frac{2\sqrt{3}+4}{3}$.

②如下图，当 $\angle CMD=90^\circ$ 时，$\triangle CDM$ 是直角三角形.



由题意可知，$\angle CDM=60^\circ$，$\angle A=\angle MDN=60^\circ$.

$\therefore \angle BDN=60^\circ$，$\angle BND=30^\circ$.

又 $AN=ND$，

$\therefore BD=\frac{1}{2}DN=\frac{1}{2}AN$.

$\therefore BN=\sqrt{ND^2-BD^2}$

$=\sqrt{(2BD)^2-BD^2}$

$=\sqrt{3}BD$.

$\therefore AN=\frac{2}{2+\sqrt{3}}AB$，

$BN=\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}AB$.

又 $AB=\frac{1}{2}AC=\sqrt{3}+2$，

$\therefore AN=2$，$BN=\sqrt{3}$.

过点 N 作 $NH\perp AM$ 于点 H，如图所示. 则 $\angle ANH=30^\circ$.

$\therefore AH=\frac{1}{2}AN=1$，

$HN=\sqrt{AN^2-AH^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

由折叠可得，$\angle AMN=\angle DMN=\frac{1}{2}\angle AMD=45^\circ$.

$\therefore \triangle MNH$ 是等腰直角三角形.

$\therefore HM=HN=\sqrt{3}$.

$\therefore MN=\sqrt{MH^2+NH^2}=\sqrt{6}$.

【点拨】 本题考查翻折变换——折叠问题，特殊直角三角形的性质. 正确作出图形是解题的关键. 折叠是一种对称变换，它属于轴对称，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等.

变式训练二

1. 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD\parallel BC$.

$\therefore \angle DAE=\angle AEB$.

$\because \angle BAD$ 的平分线 AE 交 BC 于点 E，

$\therefore \angle DAE=\angle BAE=\angle BEA$.

$\therefore AB=BE$.

同理可得 $AB=AF$.

$\therefore AF=BE$.

又 $\because AF\parallel BE$，

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是平行四边形.

又 $\because AB=AF$，

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是菱形.

设 AE，BF 相交于点 O.

$\therefore AE\perp BF$，$AO=EO$，$BO=FO$.

$\because AE=16$，

$\therefore AO=8$.

$\because AF=10$，

$\therefore OF=\sqrt{AF^2-AO^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$.

$\therefore BF=2OF=12$.

2. (1) **证明：** $\because E$ 为 AB 中点，

$\therefore AB=2AE=2BE$.

$\because AB=2CD$,

$\therefore CD=AE$.

又$\because AE\parallel CD$,

$\therefore$四边形 $AECD$ 是平行四边形.

$\because AC$ 平分$\angle DAB$,

$\therefore \angle CAD=\angle CAE$.

$\because AB\parallel CD$,

$\therefore \angle ACD=\angle BAC$.

$\therefore \angle ACD=\angle CAD$.

$\therefore AD=CD$.

$\therefore$平行四边形 $AECD$ 是菱形.

(2) **解**:$\because$ 四边形 $AECD$ 是菱形,$\angle D=120^\circ$,$CD=2$,

$\therefore AD=CD=CE=AE=2$,$\angle D=\angle AEC=120^\circ$.

$\therefore AE=CE=BE$,$\angle BEC=180^\circ-\angle AEC=60^\circ$.

$\therefore \angle CAE=\angle ACE=30^\circ$,$\triangle CEB$ 是等边三角形.

$\therefore BE=BC=CE=2$,$\angle BCE=60^\circ$.

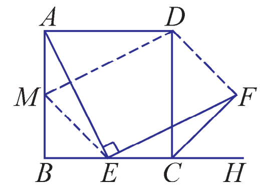
$\therefore \angle ACB=\angle ACE+\angle BCE=90^\circ$.

$\therefore AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{(2BC)^2-BC^2}=\sqrt{3}BC=2\sqrt{3}$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2=2\sqrt{3}$.

例三 **解**:存在.

证明:如下图,作 $DM\perp AE$ 交 AB 于点 M,连接 ME,DF.



$\because \angle ADM+\angle AMD=90^\circ$,$\angle AMD+\angle BAE=90^\circ$,

$\therefore \angle ADM=\angle BAE$.

在$\triangle ADM$ 与$\triangle BAE$ 中,

$$\begin{cases}\angle ADM=\angle BAE,\\ AD=BA,\\ \angle DAM=\angle ABE=90^\circ,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ADM\cong\triangle BAE$(ASA).

$\therefore DM=AE$,$AM=BE$.

$\because E$ 为边 BC 的中点,

$\therefore EC=BE=AM$.

$\because \angle BAE+\angle BEA=90^\circ$,$\angle BEA+\angle CEF=90^\circ$,

$\therefore \angle BAE=\angle CEF$.

$\because AM=BE=\frac{1}{2}AB$,

$\therefore BM=AM=BE$.

$\therefore \angle BME=45^\circ$.

$\therefore \angle AME=180^\circ-45^\circ=135^\circ$.

$\because CF$ 是$\angle DCH$ 的平分线,

$\therefore \angle FCH=45^\circ$.

$\therefore \angle ECF=180^\circ-45^\circ=135^\circ$.

在$\triangle AME$ 和$\triangle ECF$ 中,

$$\begin{cases}\angle MAE=\angle CEF,\\ AM=EC,\\ \angle AME=\angle ECF,\end{cases}$$

$\therefore \triangle AME\cong\triangle ECF$(ASA).

$\therefore AE=EF$.

$\therefore EF=DM$.

$\because DM\perp AE$，$EF\perp AE$，

$\therefore DM/\!/EF$.

$\therefore$四边形 $DMEF$ 为平行四边形.

【点拨】 本题考查正方形的性质及全等三角形判定．解决本题的关键是作出辅助线找到证明平行四边形满足的条件.

变式训练三

1. B　**【解析】** $\because$四边形 $ABCD$ 为正方形，$AB=2$，$\therefore AC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$. $\because O$ 为正方形 $ABCD$ 对角线 AC 的中点，$\triangle ACE$ 为等边三角形，$\therefore \angle AOE=90°$. $\therefore AC=AE=2\sqrt{2}$，$AO=\sqrt{2}$. $\therefore OE=\sqrt{AE^2-AO^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-2}=\sqrt{6}$.

2. (1) **证明：** $\because$四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=AD$，$\angle BAF+\angle DAE=90°$.

$\because DE\perp AG$，

$\therefore \angle DAE+\angle ADE=90°$.

$\therefore \angle ADE=\angle BAF$.

$\because BF/\!/DE$，

$\therefore \angle BFA=\angle DEF=90°$.

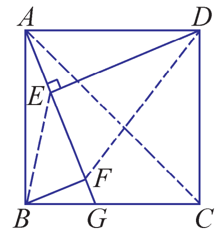
$\therefore \triangle ABF\cong\triangle DAE$(AAS).

$\therefore BF=AE$.

$\therefore AF-BF=AF-AE=EF$.

(2) **解：** 不可能．理由如下：

如下图，连接 BE，DF，AC．假设四边形 $BFDE$ 是平行四边形.



$\because$四边形 $BFDE$ 为平行四边形，

$\therefore DE/\!/BF$，$DE=BF$.

$\because$由（1）知，$DE=AF$，

$\therefore BF=AF$.

$\therefore \angle BAF=45°$.

此时点 G 与点 C 重合，

这与点 G 不与 B 和 C 重合矛盾.

$\therefore$四边形 $BFDE$ 不可能是平行四边形.

例四　**证明：** $\because$四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore OB=OC$，$\angle ABO=\angle BCO=45°$，$\angle BOC=90°=\angle HOC+\angle HOB$.

$\because EG\perp FH$，

$\therefore \angle EOB+\angle HOB=90°$.

$\therefore \angle HOC=\angle EOB$.

在$\triangle OEB$ 和$\triangle OHC$ 中，

$$\begin{cases}OB=OC,\\ \angle EBO=\angle HCO=45°,\\ \angle EOB=\angle HOC,\end{cases}$$

$\therefore \triangle OEB\cong\triangle OHC$（ASA）.

$\therefore OE=OH$.

同理可证 $OE=OF=OG$.

$\therefore OE+OG=OF+OH$，

即 $EG=FH$.

又$\because EG\perp FH$，

$\therefore$四边形 $EFGH$ 为正方形.

【点拨】 根据正方形的性质可证三角形全

等，推出 $OE=OH=OF$. 根据矩形的判定得到四边形是矩形，根据垂直平分得出四边形是正方形是解本题的关键.

变式训练四

1. **证明：** $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore OA=OB=OC=OD$，

$AC\perp BD$.

$\because AE=BF=CG=DH$，

$\therefore OA-AE=OB-BF=OC-OG=OD-DH$，

即 $OE=OF=OG=OH$.

$\because EG\perp FH$，

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是正方形.

2. （1）**证明：** $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle ABC=90^\circ$，

即 $\angle ABP+\angle PBC=90^\circ$.

$\because AP\perp BP$，

$\therefore \angle ABP+\angle PAB=90^\circ$.

$\therefore \angle PBC=\angle PAB$.

$\because CE\perp BP$，

$\therefore \angle APB=\angle BEC=90^\circ$.

$\because BP=CE$，

$\therefore \triangle ABP\cong\triangle BCE$（AAS).

$\therefore AB=BC$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形.

（2）**解：** $\because \triangle ABP\cong\triangle BCE$，

$\therefore AP=BE$.

$\because CF=BE$，

$\therefore AP=CF$.

$\because AP\perp BP$，$FE\perp BP$，

$\therefore AP/\!/CF$.

$\therefore$ 四边形 $ACFP$ 是平行四边形.

$\therefore AC/\!/PF$.

$\therefore \angle ACB=\angle BGP$.

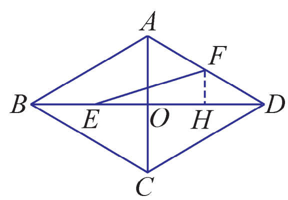
由（1）可知四边形 $ABCD$ 是正方形.

$\therefore \angle BGP=\angle ACB=45^\circ$.

培优精练

1. C 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore AD=BA$，$\angle DAF=\angle ABE=90^\circ$. $\because AF=BE$，$\therefore \triangle DAF\cong\triangle ABE$（SAS). $\therefore \angle ADF=\angle BAE$. $\because AE$ 平分 $\angle BAC$，四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore \angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAC=22.5^\circ$. $\therefore \angle ADF=22.5^\circ$. $\because \angle ADC=90^\circ$. $\therefore \angle CDF=\angle ADC-\angle ADF=90^\circ-22.5^\circ=67.5^\circ$.

2. **解：** 如下图，取 OD 的中点 H，连接 FH.



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=60^\circ$，

$\therefore AB=AD=2$，$\angle ABD=30^\circ$，$AC\perp BD$，$BO=DO$.

$\therefore AO=\frac{1}{2}AB=1$，

$BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{3}=DO$.

$\because H$ 是 OD 的中点，F 是 AD 的中点，

$\therefore FH=\frac{1}{2}AO=\frac{1}{2}$，$FH/\!/AO$.

$\therefore FH\perp BD$.

$\because E$ 是 BO 的中点，H 是 OD 的中点，

$\therefore OE=OH=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore EH=OE+OH=\sqrt{3}$.

$\therefore EF=\sqrt{EH^2+FH^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

3. 证明：（1）$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AO=CO$.

又 $\because \triangle ACE$ 是等边三角形，

$\therefore EO\perp AC$(三线合一)，

即 $AC\perp BD$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

（2）$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AO=CO$.

又 $\because \triangle ACE$ 是等边三角形，

$\therefore EO$ 平分 $\angle AEC$(三线合一).

$\therefore \angle AED=\frac{1}{2}\angle AEC=\frac{1}{2}\times 60^\circ=30^\circ$.

又 $\because \angle AED=2\angle EAD$，

$\therefore \angle EAD=15^\circ$.

$\therefore \angle ADO=\angle EAD+\angle DEA=15^\circ+30^\circ=45^\circ$.

由（1）可知四边形 $ABCD$ 是菱形.

$\therefore \angle ADC=2\angle ADO=90^\circ$.

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是正方形.

名卷压轴题

（1）**证明：**$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle ABE=\angle ADG$，$AD=AB$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADG$ 中，

$$\begin{cases}AB=AD,\\ \angle ABE=\angle ADG,\\ BE=DG,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle ADG$（SAS).

$\therefore \angle BAE=\angle DAG$，$AE=AG$.

$\therefore \angle EAG=\angle EAD+\angle DAG=\angle EAD+\angle BAE=90^\circ$.

$\because \angle EAF=45^\circ$，

$\therefore \angle FAG=\angle EAF=45^\circ$，

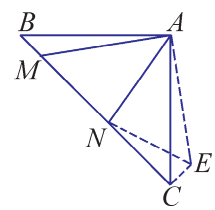
在 $\triangle FAE$ 和 $\triangle FAG$ 中，

$$\begin{cases}AE=AG,\\ \angle EAF=\angle GAF,\\ AF=AF,\end{cases}$$

$\therefore \triangle FAE\cong\triangle FAG$（SAS).

$\therefore EF=FG$.

（2）**解：**如下图，过 C 作 $CE\perp BC$，垂足为点 C，截取 CE，使 $CE=BM$. 连接 AE，EN.



$\because AB=AC$，$\angle BAC=90^\circ$，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB=45^\circ$.

$\because CE\perp BC$，

$\therefore \angle ACE=90^\circ-\angle ACB=45^\circ$.

在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ACE$ 中，

$$\begin{cases}AB=AC,\\ \angle ABM=\angle ACE,\\ BM=CE,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABM\cong\triangle ACE$（SAS).

$\therefore AM=AE$，$\angle BAM=\angle CAE$.

$\because \angle BAC=90°$，$\angle MAN=45°$，

$\therefore \angle BAM+\angle CAN=45°$.

由 $\angle BAM=\angle CAE$，得 $\angle MAN=\angle EAN=45°$.

在$\triangle MAN$和$\triangle EAN$中，

$$\begin{cases} AM=AE, \\ \angle MAN=\angle EAN, \\ AN=AN, \end{cases}$$

$\therefore \triangle MAN \cong \triangle EAN$（SAS）.

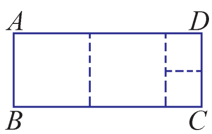
$\therefore MN=EN$.

在$Rt\triangle NEC$中，$CE=BM=1$，$NC=3$，

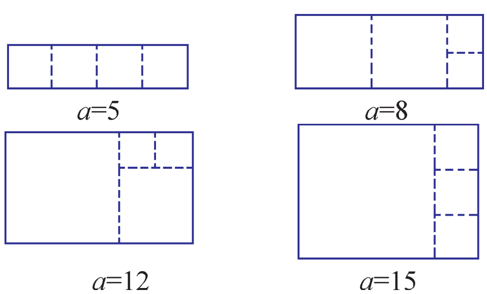
$\therefore MN=EN=\sqrt{CE^2+NC^2}=\sqrt{10}$.

◎平行四边形　新题型探究

例题　**解：**（1）矩形 $ABCD$ 是“3阶奇异矩形”，裁剪线的示意图如下.



（2）裁剪线的示意图如下.



【点拨】此题主要考查了矩形的性质，正方形的性质及对新定义的理解，解题关键是根据数据的特点进行分类讨论作图.

变式训练

（1）**证明：**由矩形的性质可知 $\angle BMN=\angle N=90°$.

由折叠可知$\angle MBC=\angle N=90°$，$MN=MB$.

$\therefore \angle BMN=\angle N=\angle MBC=90°$.

$\therefore$四边形 $MNCB$ 是矩形.

又$\because MN=MB$，

$\therefore$矩形 $MNCB$ 是正方形.

（2）**解：**$\because MN=4$，

$\therefore$图3中，$AC=2$.

在$\triangle ABC$中，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.

由折叠可知，$AD=AB=2\sqrt{5}$.

$\therefore BE=CD=AD-AC=2\sqrt{5}-2$.

又$\because DE=BC=MN=4$，

$\therefore \dfrac{BE}{BC}=\dfrac{2\sqrt{5}-2}{4}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$\therefore$矩形 $BCDE$ 是“黄金矩形”.

培优精练

$90°$　**【解析】**$\because$四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore AD=AB=CD$，$\angle ADC=90°$. $\because \triangle ADE \cong \triangle DCF$，$\therefore AD=CD=AE=DF$. $\because \angle FDC=\angle FDA+\angle ADC=60°+90°=150°$，$\therefore \angle DFC=\angle DCF=\angle ADE=\angle AED=15°$. $\therefore \angle FDE=\angle FDA+\angle ADE=60°+15°=75°$. $\therefore \angle MFD+\angle FDM=15°+75°=90°$，即$\angle CMD=90°$.

（1）**证明：**$\because \triangle ABE$为等边三角形，

$\therefore \angle EAB=60°$，$EA=AB$.

∵$\triangle ADF$为等边三角形，

∴$\angle ADF=60^\circ$，$AD=DF$.

∵四边形$ABCD$为矩形，

∴$\angle BAD=\angle ADC=90^\circ$，$CD=AB$.

∴$EA=CD$.

∵$\angle EAD=\angle EAB+\angle BAD=150^\circ$，$\angle CDF=\angle FDA+\angle ADC=150^\circ$，

∴$\angle EAD=\angle CDF$.

在$\triangle EAD$和$\triangle CDF$中，

$$\begin{cases} EA=CD, \\ \angle EAD=\angle CDF, \\ AD=DF, \end{cases}$$

∴$\triangle EAD\cong\triangle CDF$（SAS）.

∴$DE=CF$.

（2）**解：**由（1）可知，$\triangle EAD\cong\triangle CDF$.

∴$\angle ADE=\angle DFC=20^\circ$.

∴$\angle CMD=\angle FDM+\angle DFC=\angle ADF+\angle ADE+\angle DFC=60^\circ+20^\circ+20^\circ=100^\circ$.

专题四　一次函数

第1讲　利用图象表示函数

例一　C　**【解析】**在某个变化过程中，有两个变量x，y，当x每取一个值，y都有唯一确定的值与之相对应，此时就把x称为自变量，y称为因变量，y是x的函数. 只有选项C中的x每取一个值，y都有唯一值与之相对应，其他选项中的都不是有唯一相对应的值，所以选项C中的y是x的函数，故选C.

【点拨】本题主要考查函数的定义，理解自变量x每取一个值，因变量y都有唯一值与之相对应是判断函数的关键.

变式训练一

1. D　**【解析】**对于A，B，C，自变量x任取一个值，y都有唯一的值与之对应，所以y是x的函数，故A，B，C不符合题意. 对于D，自变量x任取一个值，y有两个值与之对应，所以y不是x的函数，故D符合题意. 故选D.

例二　**解：**观察图象，得上学时上坡路程为1 600 m，上坡时间为8 min，

∴上坡速度为$\frac{1\ 600}{8}=200$（m/min）.

观察图象，得上学时下坡路程为$4\ 000-1\ 600=2\ 400$（m）.

下坡时间为$16-8=8$（min）.

∴下坡速度为$\frac{2\ 400}{8}=300$（m/min）.

∵返回时，上坡、下坡的路程正好相反，

∴返回途中所用的时间为：$\frac{2\ 400}{200}+\frac{1\ 600}{300}=12+\frac{16}{3}=\frac{52}{3}$（min）.

即小明从学校骑车回家所用的时间为$\frac{52}{3}$ min.

【点拨】本题根据函数图象的“拐点”，

确定上学时所行的上坡路程，其余的则是下坡路程，再根据函数图象中的信息，利用路程、速度、时间之间的关系进行计算，即可求得返回时所用的时间.

变式训练二

1. C 【解析】由图象可得，乙车先出发的时间为 0.5 h，此时乙车行驶了 100−70＝30(km). 则乙车的行驶速度为$\frac{30}{0.5}$＝60（km/h），故选项 A 正确. 乙车行驶全程所用的时间为$\frac{100}{60}$＝1$\frac{2}{3}$（h）. 根据图上最后时间为 1.75 h，可得乙车先到达 A 地. 故甲车整个过程所用时间为 1.75−0.5＝1.25（h），故 B 正确. 甲车的行驶速度为$\frac{100}{1.25}$＝80（km/h）. 所以甲车出发 0.5 h 时行驶的路程为 80×0.5＝40（km），乙车行驶的路程为 60×(0.5＋0.5)＝60（km），40＋60＝100（km），故两车相遇，故 C 不正确. 由以上所求可得，乙车到达 A 地比甲车到达 B 地早；1.75−1$\frac{2}{3}$＝$\frac{1}{12}$（h），故 D 正确，故选 C.

2. **解**：(1) 根据函数图象，可知王叔叔家离体育活动中心的距离是 4 800 m.
(2) ∵24−16＝8（min），
∴王叔叔在书店停留了 8 min.
(3) 王叔叔从书店去体育活动中心的路程为 4 800−3 000＝1 800（m），所用时间为 30−24＝6（min），
∴王叔叔从书店到体育活动中心骑车的平均速度为
1 800÷6＝300（m/min）.
(4) 根据函数图象，得王叔叔一共骑行了 4 800＋2×(4 000−3 000)＝6 800（m）.

例三 **解**：(1) ∵图象的最高点对应的坐标是（16，10），
∴这一天中，16 时气温最高，最高气温是 10℃.
(2) ∵图象的最低点对应的坐标是（4，−4），
∴这一天中，4 时气温最低，最低气温是−4℃.
(3) ∵点（4，−4）到点（12，8）之间，点（14，8）到点（16，10）之间的图象从左到右逐渐升高，
∴4 时到 12 时，14 时到 16 时这两个时间段内气温连续上升.
(4) ∵点（0，2）到点（4，−4）之间，点（16，10）到点（24，4）之间图象从左到右逐渐降低，
∴0 时到 4 时，16 时到 24 时这两个时间段内气温连续下降.

【点拨】本题考查了利用函数图象解决实际问题，正确理解函数图象横、纵坐标表示的意义，理解问题的本质，就能通过图象找到问题的相应解决.

变式训练三

C　【解析】对于A，由图象可知，在早上6时函数图象的最低点对应的气温是19℃，所以早上6时气温最低为19℃，故A正确，不合题意．对于B，由图象可知，在下午15时函数图象的最高点对应的气温是28℃，故B正确，不合题意．对于C，由图象可知，从早上6时至下午15时，气温随时间而上升，而不是从0时开始，故C错误，符合题意．对于D，由图象可知，下午15时至晚上20时，气温随时间而下降，故D正确，不合题意．故选C．

培优精练

1. C　【解析】在一个变化过程中有两个变量x与y，对于x的每一个确定的值，y都有唯一的值与其对应，那么y是x的函数，x是自变量，y是因变量．A，B，D选项都符合函数的定义，而C选项，当给出一个x的值，y的值可能有两个值与其对应．故选C．

2. 1.5　7　【解析】由图象可得，当$s=0$时，$h=1.5$，即在铅球出手时，铅球的高度为1.5 m．当$h=0$时，$s=7$，即嘉淇投掷铅球的成绩为7 m．

3. D　【解析】由图2，得当$2<t<5$时，小明的速度为$(680-200)\div(5-2)=160$（m/min）．设当小明离家600 m时，所用的时间是t min，则$200+160(t-2)=600$或$80(16-t)=600$．解得$t=4.5$或$t=8.5$．故选D．

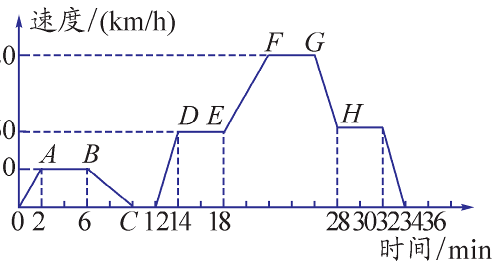
名卷压轴题

解：（1）根据图象，得汽车从点A到点B是匀速行驶，从点E到点F是匀加速行驶，从点G到点H是匀减速行驶．

（2）根据图象，得汽车在点A时的速度是30 km/h，在点C时的速度是0 km/h．

（3）根据图象，得汽车行驶途中在10～12 min期间停车休息，休息了$12-10=2$（min）．

（4）补充后的关系图如下图所示．



第2讲　一次函数的图象和性质

例一　B　【解析】∵直线$y=kx+b$经过一、二、四象限，∴$k<0$，$b>0$．∴$-k>0$．∴$y=bx-k$的图象经过一、二、三象限．故选项B中的图象符合题意．

【点拨】本题考查了一次函数的图象与k，b的关系，牢记“$k<0$，$b>0 \Leftrightarrow y=kx+b$的图象经过一、二、四象限”是解题的关键．

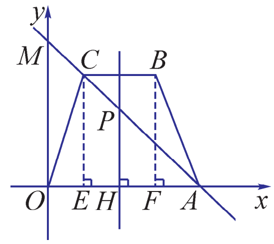
变式训练一

1. B　【解析】对于选项A，∵一次函

数的图象经过一、三、四象限，$\therefore k>0$，$b<0$. $\therefore kb<0$. $\therefore$正比例函数 $y=kbx$ 的图象应该经过二、四象限. 故 A 选项错误. 对于选项 B，$\because$一次函数的图象经过一、二、四象限，$\therefore k<0$，$b>0$. $\therefore kb<0$. $\therefore$正比例函数 $y=kbx$ 的图象应该经过二、四象限. 故 B 选项正确. 对于选项 C，$\because$一次函数的图象经过二、三、四象限，$\therefore k<0$，$b<0$. $\therefore kb>0$. $\therefore$正比例函数 $y=kbx$ 的图象应该经过一、三象限. 故 C 选项错误. 对于选项 D，$\because$一次函数的图象经过一、二、三象限，$\therefore k>0$，$b>0$. $\therefore kb>0$. $\therefore$正比例函数 $y=kbx$ 的图象应该经过一、三象限. 故 D 选项错误.

2. D　**【解析】** 当 $a>0$，$b>0$ 时，一次函数 $y_1=ax+b$ 的图象经过一、二、三象限，$y_2=bx+a$ 的图象经过一、二、三象限，故选项 D 正确；当 $a<0$，$b>0$ 时，一次函数 $y_1=ax+b$ 的图象经过一、二、四象限，$y_2=bx+a$ 的图象经过一、三、四象限，无选项符合题意；当 $a<0$，$b<0$ 时，一次函数 $y_1=ax+b$ 的图象经过二、三、四象限，$y_2=bx+a$ 的图象经过二、三、四象限，无选项符合题意；当 $a>0$，$b<0$ 时，一次函数 $y_1=ax+b$ 的图象经过一、三、四象限，$y_2=bx+a$ 的图象经过一、二、四象限，无选项符合题意. 故选 D.

例二　**解：**（1）如下图，过点 C 作 $CE\perp OA$ 于点 E，过点 B 作 $BF\perp OA$ 于点 F.



$\therefore \angle CEO=\angle BFA=90^\circ$.

$\therefore CE\parallel BF$.

又 $OA\parallel BC$，

$\therefore$四边形 $ECBF$ 是矩形.

$\therefore CE=BF$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OEC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle AFB$ 中，

$\begin{cases} OC=AB, \\ CE=BF, \end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle OEC\cong \mathrm{Rt}\triangle AFB$（HL）.

$\therefore OE=AF$.

$\because A(8,0)$，$B(6,6)$，

$\therefore OA=8$，$OF=6$，$BF=6$.

$\therefore OE=AF=OA-OF=8-6=2$.

$\therefore C(2,6)$.

设直线 AC 的解析式为 $y=kx+b$，

$\because$直线 AC 过点 $A(8,0)$，$C(2,6)$，

$\therefore \begin{cases} 0=8k+b, \\ 6=2k+b. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k=-1, \\ b=8. \end{cases}$

$\therefore$直线 AC 的解析式为 $y=-x+8$.

（2）将 $x=4$ 代入 $y=-x+8$，

得 $y=4$.

$\therefore P(4,4)$.

$\therefore PH=4$.

$\therefore S_{\triangle OCP}=S_{\triangle OAC}-S_{\triangle OAP}=\frac{1}{2}\times8\times6-\frac{1}{2}\times8\times4=8.$

$\because$点 Q 在直线 AC 上，

$\therefore$设点 Q 的坐标为（t，$-t+8$）.

$\therefore$点 Q 到直线 PH 的距离为 $|t-4|$.

$\because S_{\triangle PHQ}=\frac{3}{4}S_{\triangle OCP}$，

$\therefore \frac{1}{2}\times|t-4|\times4=\frac{3}{4}\times8.$

解得 $t=7$ 或 $t=1$.

$\therefore$点 Q 的坐标为（7，1）或（1，7）.

【点拨】 本题为一次函数的综合应用，涉及待定系数法、全等三角形的判定和性质、方程思想等知识点. 在（1）中构造三角形全等是解题的关键，在（2）中求得点 P 的坐标及 $S_{\triangle OCP}$ 是解题的关键.

变式训练二

1. 解： $\because$点 A 的横坐标为 $-\frac{1}{2}$，

$\therefore A\left(-\frac{1}{2}，0\right)$.

把 $A\left(-\frac{1}{2}，0\right)$代入一次函数 $y=kx+b$，得 $-\frac{1}{2}k+b=0.$ ①

令 $x=0$，得 $y=b$，即 B（0，b）.

令 $x=4$，得 $y=4k+b$，

即 C（4，$4k+b$）.

$\because S_{四边形OBCD}=\frac{1}{2}(OB+CD)\cdot OD=10$，

即 $\frac{1}{2}\times(-b-4k-b)\times4=10$，

$\therefore 4k+2b=-5.$ ②

联立①②，解得 $k=-1$，$b=-\frac{1}{2}$.

$\therefore$一次函数的解析式为 $y=-x-\frac{1}{2}$.

2. 解：（1）设直线 l_1 的解析式为 $y=kx+b$，

把 $A(-1，0)$，$B(2，3)$ 代入，

得$\begin{cases}-k+b=0,\\2k+b=3.\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=1,\\b=1.\end{cases}$

$\therefore$直线 l_1 的解析式为 $y=x+1$.

（2）$\because\triangle ABP$ 的面积为 3，

$\therefore \frac{1}{2}\times|m+1|\times3=3.$

解得 $m=1$ 或 $m=-3$.

$\therefore m$ 的值为 1 或 -3.

例三　解：（1）令 $x=0$，得 $y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

$\therefore A$（0，$\sqrt{3}$）.

令 $y=0$，得 $\sqrt{3}x+\sqrt{3}=0$，

解得 $x=-1$.

$\therefore B$（-1，0）.

$\because M$ 为线段 AB 的中点，

$\therefore x_M=\frac{1}{2}\times[0+(-1)]=-\frac{1}{2}$，

$y_M=\frac{1}{2}\times(\sqrt{3}+0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

即 $M\left(-\frac{1}{2}，\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(2) 设点 B 关于 y 轴的对称点为点 B'，

$\because B\ (-1,\ 0)$，

$\therefore$ 点 B' 的坐标为 $(1,\ 0)$.

设直线 l' 的解析式为 $y=kx+\sqrt{3}$，

把点 $B'\ (1,\ 0)$ 代入，得 $0=k+\sqrt{3}$.

解得 $k=-\sqrt{3}$.

$\therefore$ 直线 l' 的解析式为 $y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$.

(3) 设直线 CM 的解析式为 $y=ax+b$，

分别把点 $C(1,\ 0)$，$M\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 代入，得

$$\begin{cases} a+b=0, \\ -\frac{1}{2}a+b=\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a=-\frac{\sqrt{3}}{3}, \\ b=\frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$

$\therefore$ 直线 CM 的解析式为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}$.

令 $x=0$，得 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore N\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

则 $ON=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\because A\ (0,\ \sqrt{3})$，$B\ (-1,\ 0)$，

$\therefore AB=\sqrt{(-1-0)^2+(0-\sqrt{3})^2}=2$.

$\because OM$ 是 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 斜边的中线，

$\therefore OM=\frac{1}{2}AB=1$.

【点拨】 本题主要考查了一次函数图象上点的坐标特点，一次函数图象的对称变换以及直角三角形斜边上的中线的性质. 根据数形结合思想求出相关点的坐标是解题关键.

变式训练三

1. (1) $(0,\ -2)$　$y=2x-2$　**【解析】** 点 $(0,\ 1)$ 向下平移 3 个单位长度后的坐标是 $(0,\ -2)$. 直线 $y=2x+1$ 向下平移 3 个单位长度后的解析式是 $y=2x+1-3=2x-2$.

(2) $y=2x+5$　**【解析】** 直线 $y=2x+1$ 向左平移 2 个单位长度后的解析式是 $y=2(x+2)+1=2x+5$.

(3) **解：** $\because$ 点 C 为直线 $y=x$ 上在第一象限内的一点，

$\therefore$ 直线上所有点的横、纵坐标相等.

$\therefore$ 将直线 AB 沿射线 OC 方向平移 $\sqrt{2}$ 个单位长度，可以分解为先向右平移 1 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度.

$\therefore y=2(x-1)+1+1$，

即 $y=2x$.

故平移后的直线的解析式为 $y=2x$.

2. **解：** $\because$ 一次函数 $y=2x-1$ 的图象分别交 x，y 轴于点 A，B，

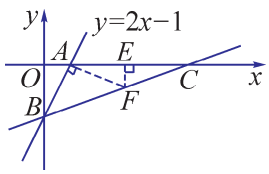
令 $x=0$，得 $y=-1$；

令 $y=0$，得 $x=\frac{1}{2}$.

$\therefore A\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$，$B(0,\ -1)$.

$\therefore OA=\frac{1}{2}$，$OB=1$.

过点 A 作 $AF\perp AB$ 交 BC 于点 F，过点 F 作 $FE\perp x$ 轴于点 E，如下图所示.



∵ $\angle ABC=45^\circ$，

∴$\triangle ABF$ 是等腰直角三角形.

∴$AB=AF$.

∵ $\angle OAB+\angle ABO=\angle OAB+\angle EAF=90^\circ$，

∴ $\angle ABO=\angle EAF$.

又∵ $\angle AOB=\angle FEA=90^\circ$，

∴$\triangle ABO\cong\triangle FAE$（AAS).

∴$BO=AE=1$，$OA=EF=\frac{1}{2}$.

∴$OE=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$.

∴点 F 的坐标为$\left(\frac{3}{2}，-\frac{1}{2}\right)$.

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+b$，则有$\begin{cases}\frac{3}{2}k+b=-\frac{1}{2}，\\ b=-1.\end{cases}$

∴$\begin{cases}k=\frac{1}{3}，\\ b=-1.\end{cases}$

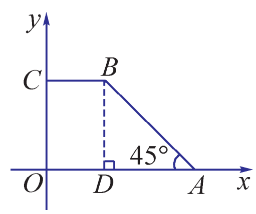
∴直线 BC 的解析式为 $y=\frac{1}{3}x-1$.

培优精练

1. B　【解析】由图象可知，正比例函数 $y=2kx$ 的图象经过二、四象限，∴ $2k<0$. ∴ $k<0$. ∴ $k-2<0$，$1-k>0$. ∴一次函数 $y=(k-2)x+1-k$ 的图象经过一、二、四象限. 故选 B.

2. A　【解析】∵将直线 l_1：$y=-2x-2$ 平移，得到直线 l_2：$y=-2x+4$. ①设直线 l_1 向右平移 a 个单位长度得到直线 l_2，则 $-2(x-a)-2=-2x+4$. ∴$2a-2=4$. 解得 $a=3$. 故将直线 l_1 向右平移 3 个单位长度得到直线 l_2. ②设直线 l_1 向上平移 b 个单位长度得到直线 l_2，则 $-2x-2+b=-2x+4$，即 $-2+b=4$. 解得 $b=6$. 故将直线 l_1 向上平移 6 个单位长度得到直线 l_2. 故选 A.

3. **解**：(1) 如下图，过点 B 作 $BD\perp OA$ 于点 D.



则四边形 $ODBC$ 是矩形.

∴$OD=BC=2$，$BD=OC=3$.

∵ $\angle OAB=45^\circ$，

∴ $\angle ABD=45^\circ$.

∴$AD=BD=3$.

∴$OA=OD+AD=2+3=5$.

∴A（5，0），B（2，3）.

(2) 设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$，

将 A（5，0），B（2，3）代入，得

$\begin{cases}5k+b=0，\\ 2k+b=3.\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=-1,\\b=5.\end{cases}$

∴直线 AB 的解析式为 $y=-x+5$.

4. 解：∵一次函数 $y=-\frac{3}{4}x+3$ 的图象分别与 x 轴，y 轴交于点 A，B，

令 $x=0$，则 $y=3$；

令 $y=0$，则 $x=4$.

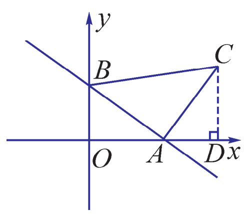
∴A（4，0），B（0，3）.

∴$AB=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

∵线段 AB 绕点 A 顺时针旋转 90°得到线段 AC，

∴$AC=AB=5$.

过点 C 作 $CD\perp x$ 轴于点 D，如下图所示.



∵∠AOB=∠ADC=90°，

∠OAB=∠ACD，

$AB=AC$，

∴△AOB≌△CDA（AAS）.

∴$AO=CD=4$，

$OB=DA=3$.

∴$OD=4+3=7$.

∴点 C 的坐标为（7，4）.

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+b$，

把 B（0，3），C（7，4）代入，

得$\begin{cases}b=3,\\7k+b=4.\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=\frac{1}{7},\\b=3.\end{cases}$

所以直线 BC 的解析式为 $y=\frac{1}{7}x+3$.

名卷压轴题

解：（1）∵正比例函数 $y=3x$ 的图象过 B（-1，a），

∴$a=3\times(-1)=-3$.

∴点 B 的坐标为（-1，-3）.

∵一次函数 $y=kx+b$ 的图象过点 A（2，0），B（-1，-3），

∴$\begin{cases}0=2k+b,\\-3=-k+b.\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=1,\\b=-2.\end{cases}$

∴一次函数的解析式为 $y=x-2$.

（2）∵点 C 在正比例函数 $y=3x$ 的图象上，

∴设 C（m，$3m$）($m>0$).

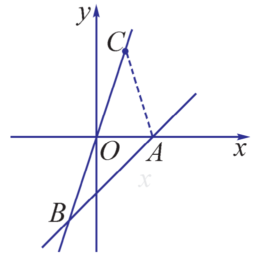
∵$OC=\sqrt{10}$，

∴$m^2+(3m)^2=(\sqrt{10})^2$.

解得 $m=1$.

∴点 C 的坐标为（1，3）.

（3）连接 AC，如下图.



∵A（2，0），

$\therefore S_{\triangle COA}=\frac{1}{2}\times2\times3=3.$

$\because B\ (-1,\ -3)$，

$\therefore S_{\triangle BOA}=\frac{1}{2}\times2\times3=3.$

$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle COA}+S_{\triangle BOA}=3+3=6.$

第3讲　一次函数与方程、不等式的关系及实际应用

例一　D　**【解析】**$\because$函数 $y=ax+b$ 和 $y=kx$ 的图象相交于点 P 的坐标为 $(2,\ -1)$，$\therefore$关于 x，y 的二元一次方程组$\begin{cases}y=ax+b,\\y=kx\end{cases}$的解是$\begin{cases}x=2,\\y=-1.\end{cases}$

【点拨】本题考查二元一次方程组的解就是使方程组中两个方程同时成立的一组未知数的值，而这一组未知数的值也同时满足两个相对应的一次函数解析式，因此方程组的解就是两个相对应的一次函数图象的交点坐标.

变式训练一

1. C　**【解析】**方程组$\begin{cases}x-2y=4,\\2x+y=4\end{cases}$的两个方程可以转化为 $y=\frac{1}{2}x-2$ 和 $y=-2x+4$. 直线 $y=\frac{1}{2}x-2$ 经过第一、三、四象限，直线 $y=-2x+4$ 经过第一、二、四象限，且过点 $(2,\ 0)$，对照各选项，只有选项C符合.

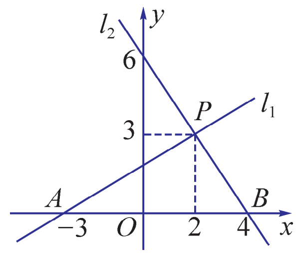
2. 解：(1) 由 $y=\frac{3}{5}x+\frac{9}{5}$，当 $y=0$ 时，$x=-3$，

$\therefore A\ (-3,\ 0).$

由 $y=-\frac{3}{2}x+6$，当 $y=0$ 时，$x=4$，

$\therefore B\ (4,\ 0).$

(2) 画出的直线 l_1，l_2，如下图所示.



观察图象，l_1，l_2 的交点为 $P\ (2,\ 3)$，

由 $y=\frac{3}{5}x+\frac{9}{5}$，得 $3x-5y=-9.$

由 $y=-\frac{3}{2}x+6$，得 $3x+2y=12.$

$\therefore$ 方程组$\begin{cases}3x-5y=-9,\\3x+2y=12\end{cases}$的解是$\begin{cases}x=2,\\y=3.\end{cases}$

(3) $\because A\ (-3,\ 0)$，

$\therefore OA=3.$

$\because B\ (4,\ 0)$，

$\therefore OB=4.$

$\therefore AB=OA+OB=3+4=7.$

$\therefore S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}AB\cdot y_p=\frac{1}{2}\times7\times3=\frac{21}{2}.$

例二　A　**【解析】**由图易知，当 $x=-2$ 时，$y=0$. 又 y 随 x 的增大而增大，$\therefore$当 $x>-2$ 时，$y>0$，即 $kx+b>0$. 则不等式 $kx+b>0$ 的解集为 $x>-2$.

【点拨】本题考查一次函数与一元一次

不等式之间的联系．求一元一次不等式的解集就是求使所对应的一次函数 $y=kx+b$ 的函数值大于（或小于）0 时自变量 x 的取值范围．

变式训练二

1. C 【解析】求不等式 $kx+b>1$ 的解集等价于求使一次函数 $y=kx+b$ 的函数值大于 1 时所对应的自变量 x 的取值范围．∵当 $x=1$ 时，$y=1$．又 y 随 x 的增大而增大，∴当 $x>1$ 时，$y>1$，即 $kx+b>1$．故不等式 $kx+b>1$ 的解集为 $x>1$．

2. 解：（1）∵ $y=-2x+3$ 的图象过 $P(n，-2)$．

∴ $-2=-2n+3$．

解得 $n=\frac{5}{2}$．

∴ $P\left(\frac{5}{2}，-2\right)$．

∵ $y=-\frac{1}{2}x+m$ 的图象过 $P\left(\frac{5}{2}，-2\right)$．

∴ $-2=-\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}+m$．

解得 $m=-\frac{3}{4}$．

（2）不等式 $-\frac{1}{2}x+m>-2x+3$ 的解集为 $x>\frac{5}{2}$．

（3）在 $y=-2x+3$ 中，令 $x=0$，

得 $y=3$．

∴ $A(0，3)$．

在 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$ 中，令 $x=0$，

得 $y=-\frac{3}{4}$．

∴ $B\left(0，-\frac{3}{4}\right)$．

∴ $AB=3-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{15}{4}$．

∴ $\triangle ABP$ 的面积为 $\frac{1}{2}AB\times\frac{5}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{15}{4}\times\frac{5}{2}=\frac{75}{16}$．

例三 解：（1）∵当 $10<x\leqslant16$ 时，$y=-20x+320$．

∴当 $x=14$ 时，$y=-20\times14+320=40$（kg）．

即第 14 天草莓的日销售量是 40 kg．

（2）当 $4\leqslant x\leqslant12$ 时，设草莓单价 m 与 x 之间的函数关系式为 $m(x)=kx+b$，

∵点（4，24），（12，16）在 $m(x)=kx+b$ 的图象上，

∴ $\begin{cases}4k+b=24，\\12k+b=16.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1，\\b=28.\end{cases}$

∴当 $4\leqslant x\leqslant12$ 时，草莓单价 m 与 x 之间的函数关系式为 $m(x)=-x+28$．

（3）当 $0\leqslant x\leqslant10$ 时，$y=12x$．

∴当 $x=8$ 时，$y=12\times8=96$．

当 $x=10$ 时，$y=12\times10=120$．

当 $4\leqslant x\leqslant12$ 时，$m(x)=-x+28$．

∴当 $x=8$ 时，$m(8)=-8+28=20$，

当 $x=10$ 时，$m(10)=-10+28=18$．

∴第 8 天的销售金额为 $96\times20=1\,920$（元），

第 10 天的销售金额为 $120\times18=2\ 160$（元）.

$\because 2\ 160>1\ 920$，

$\therefore$ 第 10 天的销售金额多.

【点拨】 本题考查了一次函数的应用. 解题的关键是理解题意，利用待定系数法求得函数解析式，注意数形结合思想与函数思想的应用.

变式训练三

解：（1）当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，

设 $y=k_1x$，

把（2，10）代入 $y=k_1x$，得 $k_1=5$.

$\therefore$ 当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，$y=5x$.

当 $x>2$ 时，设 $y=k_2x+b$，

把（2，10），（8，6）代入 $y=k_2x+b$，得

$$\begin{cases}2k_2+b=10,\\8k_2+b=6.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}k_2=-\dfrac{2}{3},\\b=\dfrac{34}{3}.\end{cases}$

$\therefore$ 当 $x>2$ 时，$y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{34}{3}$.

令 $-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{34}{3}=0$，得 $x=17$.

综上所述，y 与 x 之间的关系式为 $y=5x$（$0\leqslant x\leqslant 2$）或 $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{34}{3}$（$2<x\leqslant 17$）.

（2）把 $y=5$ 代入 $y=5x$，得 $x_1=1$.

把 $y=5$ 代入 $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{34}{3}$，得 $x_2=\dfrac{19}{2}$.

则 $x_2-x_1=\dfrac{19}{2}-1=\dfrac{17}{2}=8.5$（h）.

故该药的有效时间是 8.5 h.

例四　解：（1）图中点 B 表示的实际意义为当销量为 60 kg 时，

甲、乙两种苹果的销售额均为 1 200 元.

（2）设甲种苹果销售额 y 与销售量 x 之间的函数关系式为 $y_{甲}=kx$（$k\neq0$），

把点 B（60，1 200）代入，得

$1\ 200=60k$.

解得 $k=20$.

$\therefore y_{甲}=20x$，$0\leqslant x\leqslant 120$.

当 $0\leqslant x\leqslant 30$ 时，设乙种苹果销售额 y 与销售量 x 之间的函数关系式为 $y_{乙}=k'x$（$k'\neq0$），

把（30，750）代入，得 $750=30k'$.

解得 $k'=25$.

$\therefore y_{乙}=25x$，$0\leqslant x\leqslant 30$.

当 $30\leqslant x\leqslant 120$ 时，设乙种苹果销售额 y 与销售量 x 之间的函数关系式为 $y_{乙}=mx+n$（$m\neq0$），

把点 A（30，750），B（60，1 200）代入，得 $\begin{cases}30m+n=750,\\60m+n=1\ 200.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m=15,\\n=300.\end{cases}$

$\therefore y_{乙}=15x+300$，$30<x\leqslant 120$.

综上所述，

$$y_{乙}=\begin{cases}25x & 0\leqslant x\leqslant 30,\\15x+300 & 30<x\leqslant 120.\end{cases}$$

（3）分两种情况：

①当 $0\leqslant a\leqslant 30$ 时，

根据题意，得 $(20-8)a+(25-12)a=1\,500$.

解得 $a=60>30$，不合题意.

②当 $30<a\leqslant 120$ 时，

根据题意，得 $(20-8)a+(15-12)a+300=1\,500$.

解得 $a=80$.

综上所述，a 的值为 80.

【点拨】 本题（2）求解的技巧运用了数形结合的方法，观察函数图象可知，$y_甲$ 是一条经过原点的线段，对应的函数为正比例函数；而 $y_乙$ 是一条折线，其拐点为点 A，所以 $y_乙$ 对应的函数关系式有两段，应分类讨论，根据点 A，利用待定系数法可求得 $y_乙$ 的前一部分，根据点 A，B，利用待定系数法可求得 $y_乙$ 的后一部分.

变式训练四

解：（1）由图象可知，货车的速度为 $300\div 5=60$（km/h）.

当轿车到达乙地时，货车的行驶时间为 4.5 h.

此时货车与甲地的距离是 $60\times 4.5=270$（km）.

（2）设线段 CD 对应的函数关系式是 $y=kx+b$，

∵点 C（2.5，80），点 D（4.5，300）在线段 CD 上，

$\therefore \begin{cases} 2.5k+b=80, \\ 4.5k+b=300. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k=110, \\ b=-195. \end{cases}$

∴线段 CD 对应的函数关系式是 $y=110x-195$，$2.5\leqslant x\leqslant 4.5$.

（3）当 $x=2.5$ 时，两车之间的距离为 $60\times 2.5-80=70$（km）.

∵$70>15$，

∴在轿车行进过程中，两车相距 15 km 的时间是在 2.5 h～4.5 h 之间.

由图象可知，线段 OA 对应的函数关系式为 $y=60x$.

令 $|60x-(110x-195)|=15$，

解得 $x_1=3.6$，$x_2=4.2$.

∵轿车比货车晚出发 1.5 h，

∴$3.6-1.5=2.1$（h），

$4.2-1.5=2.7$（h）.

∴在轿车行进过程中，轿车行驶 2.1 h 或 2.7 h，两车相距 15 km.

培优精练

1. $\begin{cases} x=-3, \\ y=1 \end{cases}$ **【解析】** 由图可知，函数 $y=ax+b$ 和 $y=kx$ 的图象交于点 P（-3,1），故关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases} y=ax+b, \\ y=kx \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x=-3, \\ y=1. \end{cases}$

2. $-3<x<-1$ **【解析】** 由图象可知，直线 l_1 和直线 l_2 相交于点（-1，-2），∴不等式 $k_2x<k_1x+b$ 的解集为 $x<-1$. ∵直线 l_1：$y=k_1x+b$ 交 x 轴于点（-3，0），∴不等式 $k_2x<k_1x+b<0$ 的解集是 $-3<x<-1$.

3. 解：（1）将点 P（1，b）代入 $y=3x+1$，得 $b=3\times1+1=4$.

（2）方程组 $\begin{cases}y=3x+1,\\y=mx+n\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x=1,\\y=4.\end{cases}$

（3）直线 l_3 也经过点 P. 理由如下：

将点 P（1，4）代入 $y=mx+n$，得 $m+n=4$.

将 $x=1$ 代入 $y=nx+m$，得 $y=n+m=4$.

∴直线 l_3 也经过点 P.

4. 解：（1）方式 A：$y=0.1x$，

方式 B：$y=0.06x+20$.

方式 A，当 $x=100$ 时，$y=10$.

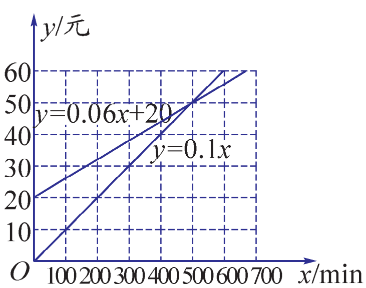
∴$y=0.1x$ 经过坐标原点与点（100，10）.

方式 B，当 $x=0$ 时，$y=20$.

当 $x=500$ 时，$y=0.06\times500+20=50$.

∴$y=0.06x+20$ 经过点（0，20）和（500，50）.

画出两个函数的图象如下图所示.



（2）当 $0.1x=0.06x+20$ 时，

解得 $x=500$.

由图可知，当 $0\leqslant x<500$，即通话时间小于 500 min 时，选择方式 A 计费较划算；

当 $x=500$，即通话时间为 500 min 时，选择方式 A 与方式 B 计费一样；

当 $x>500$，即通话时间大于 500 min 时，选择方式 B 计费较划算.

名卷压轴题

（1）4.5　60　【解析】∵线段 DE 代表乙车在途中的货站装货耗时半小时，

∴$a=4+0.5=4.5$（h）. ∵40 min $=\frac{2}{3}$ h，∴甲车的行驶速度 $=\dfrac{460}{\frac{2}{3}+7}=60$（km/h）.

（2）**解：**设乙车在 OD 段的行驶速度为 v km/h，

则 $4v+(7-4.5)(v-50)=460$.

解得 $v=90$（km/h）.

则 $4v=360$.

∴D（4，360），E（4.5，360）.

∴线段 OD 的函数关系式为 $y=90x$（$0\leqslant x\leqslant4$）.

设线段 EF 的解析式为 $y=kx+b$，

则 $\begin{cases}7k+b=460,\\4.5k+b=360.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=40,\\b=180.\end{cases}$

所以线段 EF 所表示的 y 与 x 的函数关系式为 $y=40x+180(4.5\leqslant x\leqslant7)$.

（3）**解：**∵甲车先出发 40 min 驶向 B 地，

$60\times\frac{2}{3}=40$（km），

∴C（0，40）.

设线段 CF 的解析式为 $y=k'x+40$，

根据题意，得 $7k'+40=460$.

解得 $k'=60$.

∴线段 CF 的解析式为 $y=60x+40$ $(0\leqslant x\leqslant 7)$.

∵甲、乙两车之间的距离不超过 10 km 时，车载通话机可以进行通话，

当 $60x+40-90x=10$ 或 $90x-(60x+40)=10$ 时，解得 $x=1$ 或 $x=\frac{5}{3}$.

由图可得当 $1\leqslant x\leqslant\frac{5}{3}$ 时，符合题意.

当 $40x+180-(60x+40)=10$ 时，

解得 $x=\frac{13}{2}$.

由图可得当 $\frac{13}{2}\leqslant x\leqslant 7$ 时，符合题意.

则两车在行驶过程中可以通话的总时长为 $\left(\frac{5}{3}-1\right)+\left(7-\frac{13}{2}\right)=\frac{7}{6}$（h).

◎一次函数　新题型探究

例题　(1)(3，6）或（−3，6）　**【解析】** ∵ $y=2|x|$，且 $y=6$，∴ $2|x|=6$. 解得 $x=\pm3$. ∴在直线 $y=6$ 上的“和谐点”为（3，6）或（−3，6).

(2) **解：** ∵ $y=2|x|$，

∴ $y=2x$ 或 $y=-2x$.

∴“和谐点”在直线 $y=2x$ 或直线 $y=-2x$ 上.

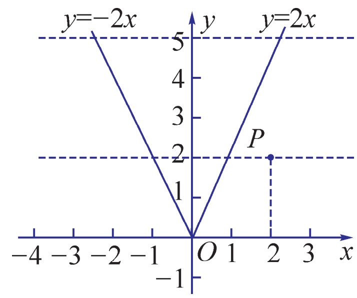
根据题意，得

$\begin{cases}y=-x+2,\\y=2x\end{cases}$ 或 $\begin{cases}y=-x+2,\\y=-2x.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=\frac{2}{3},\\y=\frac{4}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-2,\\y=4.\end{cases}$

∴一次函数 $y=-x+2$ 的图象上的“和谐点”为 $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ 或（−2，4).

(3) **解：** 如图，作直线 $y=2$，$y=5$，则线段 PQ 一定在 $y=2$ 和 $y=5$ 之间.



因为线段 PQ 上始终存在“和谐点”，所以线段 PQ 与 $y=2|x|$ 一定有交点.

①当 Q（m，5）在直线 $y=2x$ 上时，得 $5=2m$.

解得 $m=\frac{5}{2}$.

∴当 $m\leqslant\frac{5}{2}$ 时，线段 PQ 上始终存在“和谐点”.

②当 Q（m，5）在直线 $y=-2x$ 上时，得 $5=-2m$.

解得 $m=-\frac{5}{2}$.

∴当 $m\leqslant-\frac{5}{2}$ 时，线段 PQ 上始终存在“和谐点”.

综上所述，当 $m\leqslant\frac{5}{2}$ 时，线段 PQ 上始终存在“和谐点”.

【点拨】本题运用了转化的方法，即根据“和谐点”的定义，把解决“和谐点”的问题转化为与一次函数有关的问题．本题还运用了数形结合的方法，根据点 P，Q 的纵坐标求线段 PQ 的范围，先求线段 PQ 与直线 $y=2x$ 或 $y=-2x$ 相交的端点值，再根据图象确定 m 的取值范围．

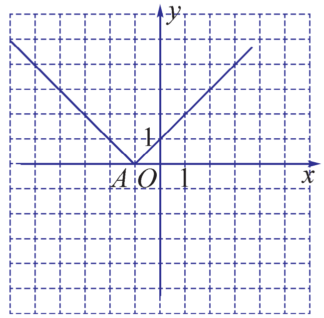
变式训练

（1）$\begin{cases}x=1,\\y=1\end{cases}$　【解析】（1）把 $P(0,-2)$，$Q\left(1,-\frac{1}{3}\right)$ 代入“明线”$t^2x+hy=6$ 中，得 $\begin{cases}h=-3,\\t^2=5.\end{cases}$ 把 $h=-3$，$t^2=5$ 代入 $\left(\frac{1}{5}t^2+2\right)x-(t^2+h-4)y=5$ 中，得 $3x+2y=5$．则 $x=\frac{5-2y}{3}=1+\frac{2(1-y)}{3}$．$\because x$，$y$ 都为正整数，$\therefore$ 正整数解为 $\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

（2）-9　【解析】把 $P(|m|,n^2)$ 代入“明线”$2x-3y=s$ 中，得 $s=2|m|-3n^2$．$\because |m|+n^2=9$，$\therefore |m|=9-n^2$．$\therefore s=18-2n^2-3n^2=-5n^2+18$．$\because |m|\geqslant 0$，$\therefore 0\leqslant 9-n^2$，即 $0\leqslant n^2\leqslant 9$．$\therefore$ 当 $n^2=0$ 时，$s=-5n^2+18$ 取最大值 18．当 $n^2=9$ 时，$s=-5n^2+18$ 取最小值 -27．$\therefore s$ 的最大值和最小值的和为 $18+(-27)=-9$．

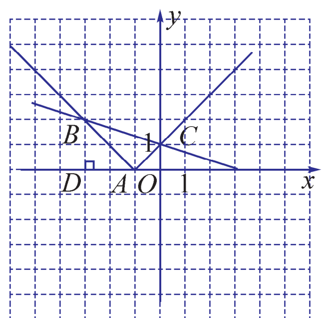
培优精练

（1）$(-1,0)$　画出的一次函数 $y=x+1$ 的“V 形图象”如下图所示．



【解析】对于一次函数 $y=x+1$，当 $y=0$ 时，得 $0=x+1$．解得 $x=-1$．$\therefore$ 点 A 的坐标是 $(-1,0)$．

（2）解：在（1）中的直角坐标系中画出直线 $y=-\frac{1}{3}x+1$，交 $y=x+1$ 的“V 形图象”于点 B，C，过点 B 作 $BD\perp x$ 轴于点 D，如下图所示．



解方程组 $\begin{cases}y=-x-1,\\y=-\frac{1}{3}x+1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-3,\\y=2.\end{cases}$

$\therefore B(-3,2)$，$D(-3,0)$．

解方程组 $\begin{cases}y=x+1,\\y=-\frac{1}{3}x+1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0,\\y=1.\end{cases}$

$\therefore C(0,1)$．

由（1），得 $A(-1,0)$．

$\because OD=3$，$OC=1$，$BD=2$，$AD=2$，$OA=1$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{梯形BDOC}-S_{\triangle ABD}-S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\times(2+1)\times3-\frac{1}{2}\times2\times2-\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{9}{2}-2-\frac{1}{2}=2.$

(3) **解**：$\because$ 直线 $y=kx-5k+4=k(x-5)+4(k\neq0$，且为常数)，

又 $x-5=0$ 时，$y=4$，

即当 $x=5$ 时，$y=4$.

$\therefore$一次函数 $y=kx-5k+4(k$ 为常数)的图象经过定点 (5，4).

$\because$当 $y=0$ 时，$x=\frac{5k-4}{k}$.

$\therefore$一次函数 $y=kx-5k+4$ 的图象与 x 轴交于点$\left(\frac{5k-4}{k}, 0\right)$.

①当 $k>0$ 时，

$\because y_1>y_2$，

$\therefore$由图象可知$\frac{5k-4}{k}>1$，

解得 $k>1$.

②当 $k<0$ 时，$\frac{5k-4}{k}=5-\frac{4}{k}>5$.

由图象可知，始终有 $y_1>y_2$.

综上所述，k 的取值范围为 $k>1$ 或 $k<0$.

专题五　数据的分析

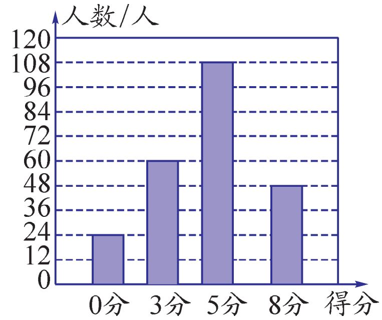
利用统计图分析数据

例一　(1) 25　20

补全的条形统计图如下图所示.

八年级数学检测一道解答题

学生得分情况条形统计图



【解析】 由条形统计图可知得 0 分的同学有 24 人. 由扇形统计图可知，得 0 分的同学占 10%. $\therefore$抽取的样本人数为 $24\div10\%=240$. $\therefore$得 3 分的学生人数为 $240-24-108-48=60$. $\therefore a\%=\frac{60}{240}\times100\%=25\%$，$b\%=\frac{48}{240}\times100\%=20\%$. $\therefore a=25$，$b=20$.

(2) **解**：由 (1) 可得，得满分（即 8 分）的学生人数占 20%.

$\therefore$估计该地区此题得满分（即 8 分）的学生人数为 $4\,500\times20\%=900$.

(3) **解**：根据题意，得

$X=0\times10\%+3\times25\%+5\times45\%+8\times20\%=0+0.75+2.25+1.6=4.6$.

$\therefore L=\frac{X}{W}=\frac{4.6}{8}=0.575$.

$\because 0.4<0.575\leqslant0.7$，

$\therefore$此试题对于该地区的八年级学生来说属于中档题.

【点拨】 本题的求解需要深刻理解统计图所表示的意义，运用数形结合的方法从统计图中提取与解题有关的信息.

从条形统计图中得到各类别的人数，从扇形统计图中得到各类别的权，由此求得学生得分的平均数，计算出该试题的难度系数.

变式训练一

解：（1）该小型养鸡场这 3 批次的平均孵化率为

$$\frac{40\times82.5\%+50\times78\%+60\times80\%}{40+50+60}=80\%.$$

（2）$2\ 000\div80\%=2\ 500$(个).

即估计该小型养鸡场需要 2 500 个鸡蛋.

例二　（1）20%　38　**【解析】**根据几何成绩扇形统计图，得 $m=1-5\%-10\%-25\%-40\%=20\%$. 根据代数成绩频数分布直方图可知：第 1 组 1 人，第 2 组 2 人，第 3 组 2 人，第 4 组 10 人，第 5 组 5 人，且 $1+2+2=5<10$，$1+2+2+10=15>10$，∴代数成绩的中位数落在第 4 组 $30\leqslant x<40$ 内. ∵代数成绩在 $30\leqslant x<40$ 这一组的数据是：35，36，37，37，38，38，39，39，39，39，代数成绩第 10 名与第 11 名均为 38 分. ∴$n=38$.

（2）**解：**根据代数成绩频数分布直方图可知 30 分及以上的人数为 $10+5=15$.

∴估计该校九年级本次代数测试及格的人数为 $400\times\frac{15}{20}=300$.

（3）②　**【解析】**根据统计表可知，代数成绩的平均分为 35.2，几何成绩的平均分为 32.05. ∴代数成绩的平均分高于几何成绩的平均分. ∵平均数受极端值的影响，∴平均数不能反映大多数学生掌握得较好. ∴不一定大多数学生代数掌握得比几何好，即推断①不合理. ∵几何成绩在 $30\leqslant x<50$ 的人数为 $400\times(20\%+40\%)=240$，又被抽到的学生小莉的几何成绩是 29 分，∴全年级里大概有 240 人的几何成绩比她高. 即推断②合理.

【点拨】本题所给信息较多，需要弄清楚各统计图、统计表的意义，运用数形结合的方法从统计图中提取对解题有用的信息. 如在（1）中根据频数分布直方图得到各分数段的人数，其目的是确定中位数所在的分数段，注意此处需把数据按从小到大排序.

变式训练二

（1）

八年级	平均数	中位数	众数
（1）班	85	85	85
（2）班	85	80	100

【解析】八年级（1）班 5 名同学的成绩从小到大排列为 80，85，85，85，90，则中位数是 85，众数是 85. 八年级（2）班 5 名同学的成绩分别为 100，70，80，100，75，则平均数是 $\frac{1}{5}(100+70+80+100+75)=85$. 出现次数最多的是 100，故众数是 100.

（2）**解：**两个班的平均分相同，但八

年级（1）班的中位数高，所以八年级（1）班的成绩较好.

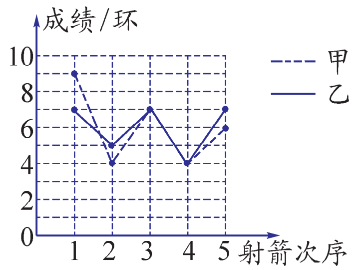
（3）**解**：如果两个班各选 2 名同学参加决赛，八年级（2）班的实力更强.

虽然两个班的平均分相同，但是八年级（2）班前 2 名的成绩较好.

故八年级（2）班的实力更强.

例三　（1）4　6　**【解析】** 由题意，得甲的总成绩为 $9+4+7+4+6=30$（环），则 $a=30-7-5-7-7=4$，$\overline{x_乙}=30\div5=6$.

（2）**解**：如下图所示.



（3）①乙　**【解析】** 观察折线图，可看出乙的成绩比较稳定.

解：由（1）知 $\overline{x_乙}=6$.

则 $s_乙^2=\frac{1}{5}[(7-6)^2+(5-6)^2+(7-6)^2+(4-6)^2+(7-6)^2]=1.6$.

因为 $s_乙^2<s_甲^2$，

所以乙成绩比较稳定.

②因为两人成绩的平均数相同，均为 6，又乙的成绩比甲稳定，

所以乙将被选中.

【点拨】 本题考查了折线图的意义、平均数、方差等知识，根据已知得出 a 的值，进而利用方差的意义比较稳定性，正确记忆方差公式是解题关键.

变式训练三

1. A　**【解析】** 根据题意可知，$\overline{x_甲}=\frac{1}{5}\times(60+70+70+60+80)=68$，$\overline{x_乙}=\frac{1}{5}\times(70+80+80+70+90)=78$. $\therefore\overline{x_甲}<\overline{x_乙}$. 由两折线图可知甲队数据的波动情况与乙队数据的波动情况相同，$\therefore S_甲^2=S_乙^2$.

2. （1）86　85　85　**【解析】** 八（2）班的平均分 $a=(79+85+92+85+89)\div5=86$. 将八（1）班的前 5 名同学的成绩按从小到大的顺序排列为：77，85，85，86，92，第三个数是 85，所以中位数 $b=85$. 因为这 5 名同学的成绩中 85 出现的次数最多，所以众数 $c=85$.

（2）**解**：八（2）班的方差 $s_{八(2)班}^2=[(79-86)^2+(85-86)^2+(92-86)^2+(85-86)^2+(89-86)^2]\div5=19.2$.

由（1）可知，两个班成绩的中位数相同，众数也相同，但八（2）班的平均分更高且方差更小，则八（2）班的成绩更稳定.

∴八（2）班前 5 名同学的成绩较好.

培优精练

1. B　**【解析】** 由扇形统计图知，得 4 分的人数占总人数的 45%，人数最多，所以所打分数的众数为 4.

2. 3　**【解析】** 甲同学的成绩依次为 8，9，8，7，8，按从小到大排列为 7，8，8，8，9，则中位数为 8，平均数

为 8，方差为$\frac{1}{5}\times[(7-8)^2+3\times(8-8)^2+(9-8)^2]=0.4$. 乙同学的成绩依次为 6，7，10，8，9，按从小到大排列为 6，7，8，9，10，则中位数为 8，平均数为 8，方差为$\frac{1}{5}\times[(6-8)^2+(7-8)^2+(8-8)^2+(9-8)^2+(10-8)^2]=2$.

因为乙的方差比甲的方差大，所以乙的成绩比甲波动大，①正确. 乙的最好成绩比甲高，②正确. 甲、乙二人成绩的平均数相同，③正确. 甲、乙二人成绩的中位数相同，④错误.

3. (1) 100　8　**【解析】**根据条形统计图可知“1 h”的人数为 30，根据扇形统计图可知，“1 h”所占的比例为 30%. ∴本次抽查的学生人数为 $30\div30\%=100$. 则 $m\%=\frac{8}{100}=8\%$. 解得 $m=8$.

(2) **解：**观察条形统计图可知，所有被抽查学生完成家庭作业时间的平均数为$\frac{1}{100}\times(12\times0.5+30\times1+50\times1.5+8\times2)=1.27$.

观察条形统计图，可知“1.5 h”的人数最多.

∴被抽查的学生完成家庭作业时间的众数是 1.5.

∵$12+30=42<50$，

$12+30+50=92>50$，

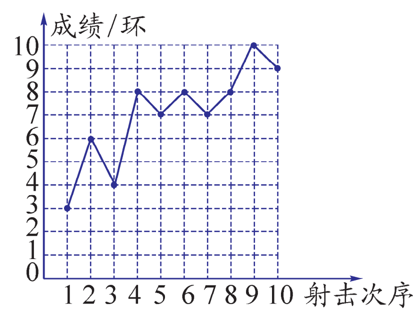
∴被抽查的学生完成家庭作业时间的中位数是 1.5.

名卷压轴题

(1) 7　8　**【解析】**从条形统计图可知，把甲队员的射击训练成绩按从低到高排列后，第 5 次和第 6 次的射击成绩均为 7 环，则 $a=7$. 从折线统计图可知，乙队员第 6 次的射击成绩为 $7\times10-(3+6+4+8+7+7+8+10+9)=8$（环）. 则乙队员的射击成绩中，8 环出现的次数最多，故众数 $b=8$.

(2) **解：**由 (1) 可知第 6 次的射击成绩为 8 环，补充完整的折线统计图如下图所示.

乙运动员射击训练成绩的折线统计图



(3) **解：**从中位数和方差看，甲队员的成绩比较稳定，若保出线选甲队员参赛.

从众数看，乙队员的高分较多，若要争名次，则选乙队员参赛.

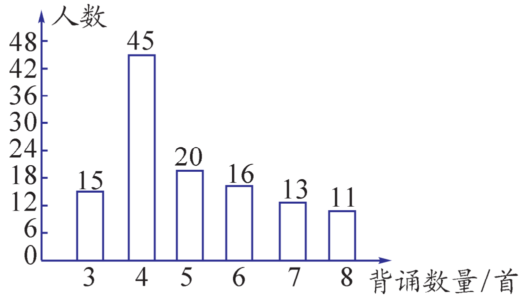
◎数据的分析　新题型探究

例题　**解：**(1) 由统计图可知，本次被抽取调查的学生人数为 $20\div\frac{60}{360}=120$.

活动启动之初一周诗词背诵 4 首的学生人数为 $120-15-20-16-13-11=45$.

由此补全条形统计图如图所示.

活动启动之初一周诗词背诵数量条形统计图



把一周诗词背诵数量的数据按从小到大排列，中位数是第 60 个数和第 61 个数的平均数. ∵ $15+45=60$，$15+45+20=80$，∴第 60 个数是 4，第 61 个数是 5.

∴中位数为 $(4+5)\div 2=4.5$.

(2) 根据题意，估计经典诗词大赛后一个月该校学生一周诗词背诵 6 首（含 6 首）以上的人数为 $1\ 200\times\dfrac{40+25+20}{120}=850$.

(3) 活动启动之初的中位数是 4.5，平均数是 $\dfrac{1}{120}\times(3\times15+4\times45+5\times20+6\times16+7\times13+8\times11)=5$.

∵ $10+10+15=35$，

$10+10+15+40=75$，

∴经典诗词大赛后一个月时的中位数是 6，

平均数是 $\dfrac{1}{120}\times(3\times10+4\times10+5\times15+6\times40+7\times25+8\times20)=6$.

由活动启动之初和经典诗词大赛后一个月的中位数和平均数看，学生在经典诗词大赛之后一周诗词背诵数量都好于活动启动之初.

根据样本估计总体，说明这次活动效果明显.

【点拨】 本题求解的关键是深刻理解平均数、中位数的意义与求解方法，其技巧是运用数形结合的方法从统计图中提取有用的信息，如在（1）中从条形统计图中得到“5 首”的人数，从扇形统计图中得到“5 首”所占的百分比，由此求得样本人数，进而求出“4 首”的人数，然后补全条形统计图.

变式训练

解：（1）①平均数为 $\dfrac{1}{n}[(a_1+3)+(a_2+3)+(a_3+3)+\cdots+(a_n+3)]=\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+3n)=\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+3=x+3$.

方差为 $\dfrac{1}{n}\{[(a_1+3)-(x+3)]^2+[(a_2+3)-(x+3)]^2+[(a_3+3)-(x+3)]^2+\cdots+[(a_n+3)-(x+3)]^2\}=\dfrac{1}{n}[(a_1-x)^2+(a_2-x)^2+(a_3-x)^2+\cdots+(a_n-x)^2]=y$.

②平均数为 $\dfrac{1}{n}(5a_1+5a_2+5a_3+\cdots+5a_n)=5\cdot\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)=5x$.

方差为 $\dfrac{1}{n}[(5a_1-5x)^2+(5a_2-5x)^2+(5a_3-5x)^2+\cdots+(5a_n-5x)^2]=25\cdot\dfrac{1}{n}[(a_1-x)^2+(a_2-x)^2+(a_3-x)^2+\cdots+(a_n-x)^2]=25y$.

③平均数为$\frac{1}{n}[(5a_1+3)+(5a_2+3)+(5a_3+3)+\cdots+(5a_n+3)]=5\cdot\frac{1}{n}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+3=5x+3$.

方差为$\frac{1}{n}\{[(5a_1+3)-(5x+3)]^2+[(5a_2+3)-(5x+3)]^2+[(5a_3+3)-(5x+3)]^2+\cdots+[(5a_n+3)-(5x+3)]^2\}=\frac{1}{n}[(5a_1-5x)^2+(5a_2-5x)^2+(5a_3-5x)^2+\cdots+(5a_n-5x)^2]=25\cdot\frac{1}{n}[(a_1-x)^2+(a_2-x)^2+(a_3-x)^2+\cdots+(a_n-x)^2]=25y$.

(2) 结论：当数据中的每个数都增加m时，其平均数随之增加m，但方差不变；当数据中的每个数都扩大为原来的n倍时，则数据的平均数随之扩大为原来的n倍，方差扩大为原来的n^2倍.

(3) 补充完整的表格如下表所示.

数据	平均数	方差
1，2，3，4，5，6，7，8，9，10	5.5	8.25
11，12，13，14，15，16，17，18，19，20	15.5	8.25
10，20，30，40，50，60，70，80，90，100	55	825

培优精练

(1) 9 【解析】$6\times8-(4+3+5+6+7+6+8)=9$(环)，故乙的第 8 次射击成绩是 9 环.

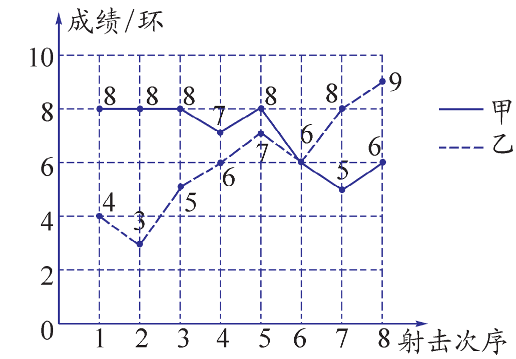
(2) 解：∵甲的平均成绩为$\frac{1}{8}\times(8+8+8+7+8+6+5+6)=7$，

∴甲的方差为$\frac{1}{8}\times[4\times(8-7)^2+(7-7)^2+2\times(6-7)^2+(5-7)^2]=1.25$.

∵乙的 8 次成绩按从小到大排列为 3，4，5，6，6，7，8，9，

∴乙的中位数为$\frac{6+6}{2}=6$.

∴补全的统计图和统计表如下所示.



	平均成绩	中位数	方差
甲	7	7.5	1.25
乙	6	6	3.5

(3) 解：选甲参加比赛. 理由如下：

①甲的平均成绩、中位数均比乙的都高；

②甲成绩的方差更小，说明甲的成绩更稳定.

∴应选甲参加比赛.