winshare文轩教育
四川教育出版社

扫码查看本书
配套资源包

赠 品

6662023025018

教师用书 点金训练 数学 选择性必修第二册 配人教A版

四川教育出版社

点金训练

教师用书

数学

选择性必修第二册

配人教A版

《点金训练》编写组　编

DIANJIN XUNLIAN
—— SHUXUE ——
JIAOSHI YONGSHU

四川教育出版社

点金训练

教师用书

《点金训练》编写组　编

数学

选择性必修第二册

配人教A版

四川教育出版社

CONTENTS

目录

第四章 数列

第五章 一元函数的导数及其应用

第四章　数列

4.1　数列的概念

第 1 课时　数列的概念

学习任务目标

1.理解数列的有关概念与数列的表示方法.
2.掌握数列的分类,了解数列的单调性.
3.理解数列的通项公式,并会用通项公式写出数列的任一项.(数学运算)
4.能根据数列的前几项写出数列的一个通项公式.(逻辑推理)

问题式预习

知识点一　数列的概念及分类

1.数列的概念

数列	按照确定的顺序排列的一列数
项	数列中的每一个数叫做这个数列的项.数列的第一个位置上的数叫做这个数列的第 1 项,常用符号 a_1 表示,第二个位置上的数叫做这个数列的第 2 项,用 a_2 表示……第 n 个位置上的数叫做这个数列的第 n 项,用 a_n 表示.其中第 1 项也叫做首项
表示	$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$,简记为 $\{a_n\}$

2.数列的分类

分类标准	名称	含义
按项的个数	有穷数列	项数有限的数列
	无穷数列	项数无限的数列
按数列的单调性	递增数列	从第 2 项起,每一项都大于它的前一项的数列
	递减数列	从第 2 项起,每一项都小于它的前一项的数列
	常数列	各项都相等的数列

3.数列与函数的关系

数列 $\{a_n\}$ 是从正整数集 $\mathbf{N}^*$(或它的有限子集 $\{1,2,\cdots,n\}$)到实数集 $\mathbf{R}$ 的函数,其自变量是序号 n,对应的函数值是数列的第 n 项 a_n,记为 $a_n=f(n)$.另一方面,对于函数 $y=f(x)$,如果 $f(n)(n\in\mathbf{N}^*)$ 有意义,那么 $f(1),f(2),\cdots,f(n),\cdots$ 构成了一个数列 $\{f(n)\}$.

[微训练]

判断(正确的打"√",错误的打"×").

(1)数列中的项互换次序后还是原来的数列.　　(×)

(2)数列可分为递增数列和递减数列两类.　　(×)

(3) $\{a_n\}$ 与 a_n 的意义一样,都表示数列.　　(×)

知识点二　数列的通项公式

如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与它的序号 n 之间的对应关系可以用一个式子来表示,那么这个式子叫做这个数列的通项公式.通项公式就是数列的函数解析式,根据通项公式可以写出数列的各项.

[微训练]

1.已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=(-1)^n\cdot(n^2-1)$,则 $a_6=$　　(　　)

A.35　　B.-11　　C.-35　　D.11

A　**解析**:$a_6=(-1)^6\times(6^2-1)=35$.故选 A.

2.已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3-2^n$,则 $a_{2n}=$______,$\dfrac{a_2}{a_3}=$______.

$3-4^n$　$\dfrac{1}{5}$　**解析**:因为 $a_n=3-2^n$,所以 $a_{2n}=3-2^{2n}=3-4^n$,$\dfrac{a_2}{a_3}=\dfrac{3-2^2}{3-2^3}=\dfrac{1}{5}$.

任务型课堂

任务一 数列的概念

1.下列对象是数列的是________；是有穷数列的是________；是无穷数列的是________.（填序号）

(1)$\{1,3,5,7,9\}$；(2)4,3,2,1,0；(3)所有无理数；(4)1,2,3,4,…；(5)2,2,2,2,2.

(2)(4)(5)　(2)(5)　(4)　**解析**：(1)是集合，不是数列；(3)不能构成数列，因为没有把所有的无理数按确定顺序排列起来；(2)(4)(5)是数列，其中(4)是无穷数列，(2)(5)是有穷数列.

2.下列说法正确的是（　　）

A.1,2,3,4,…,n 是无穷数列

B.数列 3,5,7 与数列 7,5,3 是相同数列

C.同一个数在数列中不能重复出现

D.数列$\{2n+1\}$的第 6 项是 13

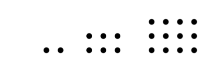
D　**解析**：A 错误，数列 1,2,…,n，共 n 项，是有穷数列.B 错误，数列中的项是有次序的.C 错误，数列中的数可以重复出现.D 正确，当 $n=6$ 时，$2\times6+1=13$.

任务二 数列的通项公式

［探究活动］

传说古希腊毕达哥拉斯学派的数学家用沙粒和小石子来研究数.如图 1 所示的数 1,3,6,10,…称为三角形数，如图 2 所示的数 1,4,9,16,…称为正方形数.


1　3　6　10
图1


1　4　9　16
图2

探究 1：三角形数构成的数列与正方形数构成的数列的第 5 项分别是多少？

提示：15,25.

探究 2：你能分别写出三角形数构成的数列与正方形数构成的数列的通项公式吗？

提示：三角形数：$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$；正方形数：$b_n=n^2$.

探究 3：在数 289,1 024,1 225,1 378 中，既是三角形数又是正方形数的是哪个？

提示：因为 $1\ 225=35^2=\dfrac{49\times(49+1)}{2}$，所以 1 225既是三角形数又是正方形数.

［评价活动］

1.已知数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=\begin{cases}3n+1, n\text{ 是奇数},\\2n-2, n\text{ 是偶数},\end{cases}$ 则 $a_4=$________，$a_5=$________.

6　16　**解析**：因为 $a_n=\begin{cases}3n+1, n\text{ 是奇数},\\2n-2, n\text{ 是偶数},\end{cases}$

所以 $a_4=2\times4-2=6$，$a_5=3\times5+1=16$.

2.写出下列数列的一个通项公式：

(1)$\dfrac{1}{2},2,\dfrac{9}{2},8,\dfrac{25}{2},\cdots$；

(2)1,−3,5,−7,9,…；

(3)9,99,999,9 999,…；

(4)$\dfrac{2^2-1}{1},\dfrac{3^2-2}{3},\dfrac{4^2-3}{5},\dfrac{5^2-4}{7},\cdots$；

(5)$-\dfrac{1}{1\times2},\dfrac{1}{2\times3},-\dfrac{1}{3\times4},\dfrac{1}{4\times5},\cdots$；

(6)4,0,4,0,4,0,….

解：(1)将各项都统一成分数：$\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{2},\dfrac{9}{2},\dfrac{16}{2},\dfrac{25}{2},\cdots$，所以它的一个通项公式为 $a_n=\dfrac{n^2}{2}$.

(2)数列各项的绝对值分别为 1,3,5,7,9,…，是连续的正奇数，其通项公式为 $A_n=2n-1$.考虑$(-1)^{n+1}$具有转换符号的作用，所以原数列的一个通项公式为 $a_n=(-1)^{n+1}(2n-1)$.

(3)各项加 1 后，分别变为 10,100,1 000,10 000,…，此数列的通项公式为 $A_n=10^n$，可得原数列的通项公式为 $a_n=10^n-1$.

(4)数列中每一项均由三部分组成，分母是从 1 开始的奇数，其通项公式为 $A_n=2n-1$；分子的前一部分是从 2 开始的正整数的平方，其通项公式为 $B_n=(n+1)^2$，分子的后一部分是负整数，其通项公式为 $C_n=-n$.综合得原数列的一个通项公式为 $a_n=\dfrac{(n+1)^2-n}{2n-1}$.

(5)这个数列的前 4 项的绝对值都等于序号与序号加 1 的积的倒数，且奇数项为负，偶数项为正，所以它的一个通项公式是 $a_n=(-1)^n\cdot\dfrac{1}{n(n+1)}$.

(6)由于该数列中，奇数项全部都是 4，偶数项全部都是 0，因此可用分段函数的形式表示通项公式，即 $a_n=\begin{cases}4, n\text{ 为奇数},\\0, n\text{ 为偶数}.\end{cases}$ 该数列也可改写为 2+2,2−2,2+2,2−2,2+2,2−2,…，因此其通项公式又可以

表示为 $a_n=2+2\times(-1)^{n+1}$.

【类题通法】

根据数列的前几项写出数列的一个通项公式的关注点

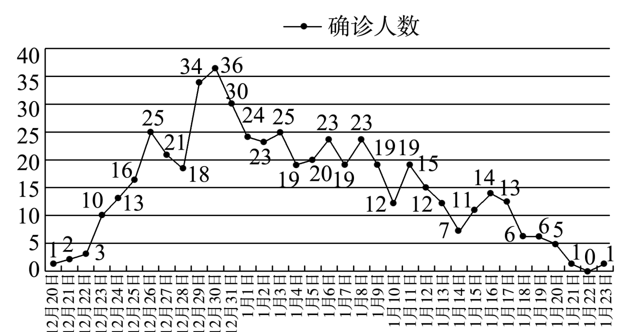
(1)根据所给数列的前几项求其通项公式时,需仔细观察分析,抓住分式中分子、分母的特征,相邻项的变化特征,拆项后的特征,各项符号特征等,并对此进行归纳、联想.

(2)根据数列的前几项写出数列的一个通项公式是不完全归纳,它蕴含着“从特殊到一般”的思想.由不完全归纳得出的结果不一定是可靠的,要注意代值检验,对于符号的正负变化,可用$(-1)^n$或$(-1)^{n+1}$来调整.

任务三　数列的函数特性

[探究活动]

某地某段时间每日流感确诊人数变化曲线如图所示.设该地这段时间的每日流感确诊人数按日期先后顺序构成数列$\{a_n\}$.



探究 1:数列$\{a_n\}$是递增数列吗?是递减数列吗?

提示:都不是.

探究 2:数列$\{a_n\}$的前 7 项是递增的吗?数列$\{a_n\}$的后 5 项是递减的吗?

提示:前 7 项是递增的,后 5 项不是递减的.

探究 3:数列$\{a_n\}$的最大项与最小项分别为第几项?

提示:最大项是第 11 项,最小项是第 34 项.

[评价活动]

1.数列$\left\{\dfrac{2n}{3n+1}\right\}$是　(　　)

A.递增数列　　B.递减数列

C.摆动数列　　D.常数列

A　**解析:**在数列$\left\{\dfrac{2n}{3n+1}\right\}$中,$a_n=\dfrac{2n}{3n+1}$,

$a_{n+1}-a_n=\dfrac{2n+2}{3n+4}-\dfrac{2n}{3n+1}=\dfrac{2}{(3n+1)(3n+4)}>0$,

所以 $a_n<a_{n+1}$.所以数列$\left\{\dfrac{2n}{3n+1}\right\}$是递增数列.

2.若数列$\{a_n\}$是递减数列,则其通项公式可能是　(　　)

A.$a_n=2n$　　B.$a_n=n^2$

C.$a_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$　　D.$a_n=\log_2 n$

C　**解析:**由于函数$f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$在其定义域上是减函数,故数列$a_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$是递减数列.故选 C.

3.若通项公式为$a_n=n^2+bn$的数列$\{a_n\}$是递增数列,则实数 b 的取值范围是________.

$(-3,+\infty)$　**解析:**由题知 $a_{n+1}-a_n=[(n+1)^2+b(n+1)]-(n^2+bn)=2n+1+b>0$ 恒成立,即 $b>-2n-1$ 恒成立.而当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,$-2n-1$ 的最大值为$-3(n=1$ 时$)$,所以 $b>-3$,即实数 b 的取值范围为$(-3,+\infty)$.

4.在数列$\{a_n\}$中,$a_n=n^2-8n$.

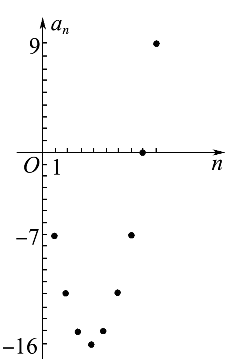
(1)画出$\{a_n\}$的图象;

(2)根据图象写出数列$\{a_n\}$的单调性.

解:(1)列表:

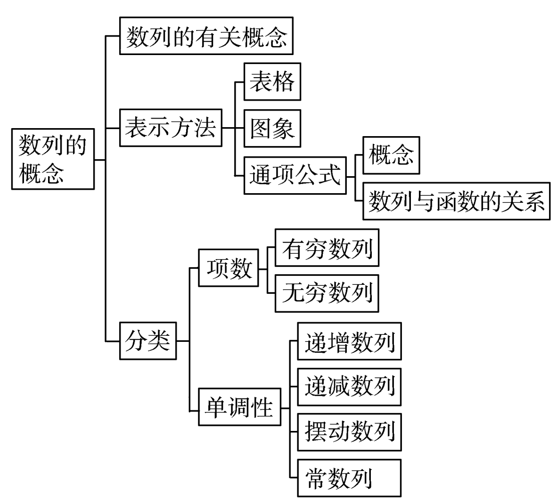
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
a_n	-7	-12	-15	-16	-15	-12	-7	0	9	…

描点、连线,图象如图所示.



(2)数列$\{a_n\}$在 $n=1,2,3,4$ 时是递减的,在 $n=4,5,6,7,\cdots$时是递增的.

提质归纳



课后素养评价(一)

基础性·能力运用

1.(多选)下列关于数列的说法正确的是 (　　)

A.按一定次序排列的一列数叫做数列

B.若$\{a_n\}$表示数列,则a_n表示数列的第n项,$a_n=f(n)$表示数列的通项公式

C.同一个数列的通项公式的形式不一定唯一

D.同一个数列的任意两项均不可能相同

ABC **解析**:因为一个数列的不同项的值是可以相同的(比如常数列),所以D项错误,A,B,C均正确.

2.(多选)下面四个数列中,既是无穷数列又是递增数列的是 (　　)

A.$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$

B.$\sin\frac{1}{7}\pi,\sin\frac{2}{7}\pi,\sin\frac{3}{7}\pi,\cdots,\sin\frac{n}{7}\pi,\cdots$

C.$-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\cdots,-\frac{1}{2^{n-1}},\cdots$

D.$1,2,3,\cdots$

CD **解析**:选项C,D中的数列既是无穷数列又是递增数列,而选项A中的数列是递减数列,选项B中的数列是摆动数列.故选CD.

3.数列$-1,3,-7,15,\cdots$的一个通项公式可以是 (　　)

A.$a_n=(-1)^n\cdot(2^n-1)$

B.$a_n=(-1)^n\cdot(2n-1)$

C.$a_n=(-1)^{n+1}\cdot(2^n-1)$

D.$a_n=(-1)^{n+1}\cdot(2n-1)$

A **解析**:将$n=1$代入,可知C中的$a_1=1$,D中的$a_1=1$.排除C,D.

当$n=3$时,B中的$a_3=-5$,排除B.故选A.

4.数列$\{8n-1\}$的最小项等于 (　　)

A.-1　　B.7

C.8　　D.不存在

B **解析**:数列$\{8n-1\}$的最小项为$a_1=8\times1-1=7$.故选B.

5.已知数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=\frac{n}{n^2+8}(n\in\mathbf{N}^*)$,则数列的第4项为 (　　)

A.$\frac{1}{10}$　　B.$\frac{1}{6}$　　C.$\frac{1}{4}$　　D.$\frac{1}{3}$

B **解析**:由题意,根据数列$\{a_n\}$的通项公式,得$a_4=\frac{4}{4^2+8}=\frac{1}{6}$.

6.已知数列$\{a_n\}$满足$a_1>0$,对一切$n\in\mathbf{N}^*$,$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$,则数列$\{a_n\}$是 (　　)

A.递增数列　　B.递减数列

C.摆动数列　　D.不确定

B **解析**:因为$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$,$a_1>0$,则$a_n>0$,所以$a_{n+1}<a_n$,故数列$\{a_n\}$是递减数列.故选B.

7.若数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=\frac{2n}{n+1}$,则此数列是 (　　)

A.递增数列　　B.递减数列

C.摆动数列　　D.以上都不是

A **解析**:因为$a_n=\frac{2n}{n+1}=\frac{2(n+1)-2}{n+1}=2-\frac{2}{n+1}$,所以$a_n-a_{n-1}=\left(2-\frac{2}{n+1}\right)-\left(2-\frac{2}{n}\right)=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}=\frac{2}{n(n+1)}>0(n\geqslant0)$.因此数列$\{a_n\}$是递增数列.故选A.

8.根据下面的通项公式,写出数列的前5项.

(1)$a_n=\frac{n^2+1}{2n-1}$;

(2)$a_n=(-1)^{n-1}\cdot\frac{2n-1}{3n}$.

解:(1)当$n=1$时,$a_1=\frac{1^2+1}{2\times1-1}=2$;

当$n=2$时,$a_2=\frac{2^2+1}{2\times2-1}=\frac{5}{3}$;

当$n=3$时,$a_3=\frac{3^2+1}{2\times3-1}=2$;

当$n=4$时,$a_4=\frac{4^2+1}{2\times4-1}=\frac{17}{7}$;

当$n=5$时,$a_5=\frac{5^2+1}{2\times5-1}=\frac{26}{9}$.

(2)当$n=1$时,$a_1=(-1)^{1-1}\times\frac{2\times1-1}{3\times1}=\frac{1}{3}$;

当$n=2$时,$a_2=(-1)^{2-1}\times\frac{2\times2-1}{3\times2}=-\frac{1}{2}$;

当$n=3$时,$a_3=(-1)^{3-1}\times\frac{2\times3-1}{3\times3}=\frac{5}{9}$;

当$n=4$时,$a_4=(-1)^{4-1}\times\frac{2\times4-1}{3\times4}=-\frac{7}{12}$;

当$n=5$时,$a_5=(-1)^{5-1}\times\frac{2\times5-1}{3\times5}=\frac{3}{5}$.

综合性·创新提升

1.已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^2+\lambda n(n\in\mathbf{N}^*,\lambda\in\mathbf{R})$，则“$a_1<a_2$”是“数列$\{a_n\}$为递增数列”的（　　）

A.充分不必要条件

B.充要条件

C.必要不充分条件

D.既不充分也不必要条件

B　**解析**：因为$a_n=n^2+\lambda n(n\in\mathbf{N}^*)$，

若$a_1<a_2$，则$a_1=1+\lambda<a_2=4+2\lambda$，

所以$\lambda>-3$.

若数列$\{a_n\}$是递增数列，则$a_{n+1}-a_n>0,n\in\mathbf{N}^*$恒成立，

所以$(n+1)^2+\lambda(n+1)-n^2-\lambda n=2n+1+\lambda>0$，

即$\lambda>-2n-1$恒成立，

所以$\lambda>-3$.

故“$a_1<a_2$”是“数列$\{a_n\}$为递增数列”的充要条件.故选B.

2.数列$0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\cdots$的通项公式为（　　）

A.$a_n=\frac{n-2}{n}$　　B.$a_n=\frac{n-1}{n}$

C.$a_n=\frac{n-1}{n+1}$　　D.$a_n=\frac{n-2}{n+2}$

C　**解析**：原数列可变形为$\frac{0}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{4},\frac{3}{5},\frac{4}{6},\cdots$，

所以$a_n=\frac{n-1}{n+1}$.

3.已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^2-6n+5$，则该数列中最小项的序号是（　　）

A.3　　B.4　　C.5　　D.6

A　**解析**：因为$a_n=(n^2-6n+9)-4=(n-3)^2-4$，所以当$n=3$时，$a_n$取得最小值.

4.已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$，则该数列的前4项依次为（　　）

A.1,0,1,0　　B.0,1,0,1

C.$\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0$　　D.2,0,0,2

A　**解析**：$a_1=\frac{1+(-1)^{1+1}}{2}=\frac{1+1}{2}=1$；

$a_2=\frac{1+(-1)^{2+1}}{2}=\frac{1-1}{2}=0$；

$a_3=\frac{1+(-1)^{3+1}}{2}=\frac{1+1}{2}=1$；

$a_4=\frac{1+(-1)^{4+1}}{2}=\frac{1-1}{2}=0$.故选A.

5.已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a^n+m(a<0,n\in\mathbf{N}^*,m\in\mathbf{R})$，满足$a_1=2$，$a_2=4$，则$a_3=$________.

2　**解析**：由题意得$\begin{cases}a_1=a+m=2,\\a_2=a^2+m=4,\end{cases}$

所以$a^2-a=2$，

所以$a=2$或$a=-1$.又$a<0$，所以$a=-1$.

因为$a+m=2$，所以$m=3$，

所以$a_n=(-1)^n+3$，所以$a_3=(-1)^3+3=2$.

6.已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=(20-n)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n$，则$a_n$取最大值时，$n=$________.

17或18　**解析**：由$a_n=(20-n)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n$可得，当$n\geqslant21$时，$a_n<0$；当$n=20$时，$a_n=0$；当$n\leqslant19$时，$a_n>0$.

故a_n取最大值时，一定有$n\leqslant19$.

设a_n为数列$\{a_n\}$的最大项，

则$\begin{cases}a_n\geqslant a_{n+1},\\a_n\geqslant a_{n-1},\end{cases}$

即$\begin{cases}(20-n)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\geqslant(19-n)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1},\\(20-n)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\geqslant(21-n)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},\end{cases}$

解得$17\leqslant n\leqslant18$，

则$n=17$或18，此时$a_{17}=a_{18}=\frac{3^{18}}{2^{17}}$.

故答案为17或18.

7.已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=cn+dn^{-1}(n\in\mathbf{N}^*,c,d\in\mathbf{R})$，且$a_2=\frac{3}{2}$，$a_4=\frac{3}{2}$，求$a_n$和$a_{10}$.

解：因为$a_2=\frac{3}{2}$，$a_4=\frac{3}{2}$，代入通项公式中得

$\begin{cases}\frac{3}{2}=2c+\frac{d}{2},\\\frac{3}{2}=4c+\frac{d}{4},\end{cases}$解得$c=\frac{1}{4},d=2$，

所以$a_n=\frac{n}{4}+\frac{2}{n}$，所以$a_{10}=\frac{10}{4}+\frac{2}{10}=\frac{27}{10}$.

8.已知数列$\{a_n\}$：25,37,49,61,73,…；$\{b_n\}$：1,4,9,16,25,….

(1)根据前5项的特征，分别写出它们的一个通项公式.

(2)根据第(1)题的两个通项公式，判断是否存在$n\in\mathbf{N}^*$，使$a_n=b_n$.如果不存在，请说明理由；如果存在，求出n的值.

解：(1)$a_n=12n+13$，$b_n=n^2$.

(2)存在.令$a_n=b_n$，即$n^2=12n+13$，解得$n=13$或$n=-1$(舍去).所以$n=13$.

第2课时　数列的递推公式及前 n 项和

学习任务目标

1.会判断一个实数是否为某个数列的项.(数学抽象)
2.掌握数列的递推公式及其应用.(逻辑推理)
3.理解 S_n 与 a_n 的关系,能运用这个关系解决相关问题.(数学运算)

问题式预习

知识点一　数列的递推公式

如果一个数列的相邻两项或多项之间的关系可以用一个式子来表示,那么这个式子叫做这个数列的递推公式.

［微训练］

1.判断(正确的打"√",错误的打"×").

(1)递推公式也是表示数列的一种方法.　(√)

(2)所有数列都有递推公式.　(×)

2.数列 $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots$ 的递推公式可以是　(　　)

A.$a_n=\frac{1}{2^{n+1}}(n\in\mathbf{N}^*)$

B.$a_n=\frac{1}{2n}(n\in\mathbf{N}^*)$

C.$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n(n\in\mathbf{N}^*)$

D.$a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}^*)$

C　**解析**:因为后一项是前一项的 $\frac{1}{2}$,所以 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n(n\in\mathbf{N}^*)$.

3.已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2,a_n=2-\frac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*)$,则该数列的第5项为　(　　)

A.$\frac{5}{4}$　　B.$\frac{6}{5}$

C.$\frac{4}{5}$　　D.$\frac{5}{6}$

B　**解析**:因为 $a_1=2,a_n=2-\frac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*)$,所以 $a_2=2-\frac{1}{a_1}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2},a_3=2-\frac{1}{a_2}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3},a_4=2-\frac{1}{a_3}=2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4},a_5=2-\frac{1}{a_4}=2-\frac{4}{5}=\frac{6}{5}$.故选B.

知识点二　数列的前 n 项和

(1)定义:数列 $\{a_n\}$ 从第1项起到第 n 项止的各项之和,称为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,记作 S_n,即 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

(2)前 n 项和公式:如果数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 与它的序号 n 之间的对应关系可以用一个式子来表示,那么这个式子叫做这个数列的前 n 项和公式.

(3)a_n 与 S_n 的关系:若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,则

$$a_n=\begin{cases}S_1,n=1,\\S_n-S_{n-1},n\geqslant 2.\end{cases}$$

［微训练］

1.设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,已知 $a_1=3,S_{n+1}=S_n+2^n$,那么 $a_3=$　(　　)

A.4　　B.5

C.7　　D.9

A　**解析**:由 $S_{n+1}=S_n+2^n$,得 $S_{n+1}-S_n=2^n$,所以 $a_3=S_3-S_2=2^2=4$.故选A.

2.若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-10n$,则 $a_1=$______,$a_2=$______.

9　-7　**解析**:因为 $S_n=n^2-10n$,所以 $a_1=S_1=1^2-10\times 1=-9,a_2=S_2-S_1=-16-(-9)=-7$.

3.已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-2n+2$,则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为______.

$a_n=\begin{cases}1,n=1,\\2n-3,n\geqslant 2\end{cases}$　**解析**:$a_n=\begin{cases}S_1,n=1,\\S_n-S_{n-1},n\geqslant 2,\end{cases}$

而 $S_1=1-2+2=1$,

当 $n\geqslant 2$ 时,$S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2-2=2n-3$.

当 $n=1$ 时,不满足上式.故 $a_n=\begin{cases}1,n=1,\\2n-3,n\geqslant 2.\end{cases}$

任务型课堂

任务一 数列通项公式的应用

1. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^2-7n-8$.

(1)数列中为负数的项的个数是________;

(2)该数列的最小项为________.

(1)7 (2)-20 **解析**:(1)令$a_n<0$,即$n^2-7n-8<0$,得$-1<n<8$.

又$n\in\mathbf{N}^*$,所以$n=1,2,3,\cdots,7$,

所以数列从第1项至第7项均为负数,共7项.

(2)(方法一)$a_n=n^2-7n-8$是关于n的二次函数,图象的对称轴方程为$n=\frac{7}{2}=3.5$,

所以当$1\leqslant n\leqslant3$时,$\{a_n\}$递减;

当$n\geqslant4$时,$\{a_n\}$递增.

所以当$n=3$或$n=4$时,a_3,a_4是数列中的最小项,且最小项$a_3=a_4=-20$.

(方法二)设$a_n(n\geqslant2)$为数列$\{a_n\}$的最小项.

则$\begin{cases}a_n\leqslant a_{n-1},\\a_n\leqslant a_{n+1},\end{cases}$

即$\begin{cases}n^2-7n-8\leqslant(n-1)^2-7(n-1)-8,\\n^2-7n-8\leqslant(n+1)^2-7(n+1)-8,\end{cases}$

解得$3\leqslant n\leqslant4$.

故当$n=3$或$n=4$时,a_3,a_4是数列中的最小项,且最小项$a_3=a_4=-20$.

2. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n^2-28n$.

(1)这个数列的第4项是______,第6项是______;

(2)-49是该数列的第________项;

(3)68是该数列的项吗?

解:(1)根据$a_n=3n^2-28n$,

得$a_4=3\times4^2-28\times4=-64$,

$a_6=3\times6^2-28\times6=-60$.

(2)令$3n^2-28n=-49$,

即$3n^2-28n+49=0$,解得$n=7$或$n=\frac{7}{3}$(舍).

所以-49是该数列的第7项.

(3)令$3n^2-28n=68$,即$3n^2-28n-68=0$,

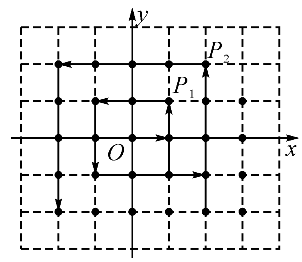
解得$n=-2$或$n=\frac{34}{3}$,均不是正整数.

所以68不是数列$\{a_n\}$中的项.

任务二 数列的递推公式

[探究活动]

"贪吃蛇"游戏:假设贪吃蛇从原点O出发,沿着如图所示的路线逆时针方向螺旋式前进,不停地吞食途中的每一个格点(不包括原点).已知贪吃蛇的初始长度为0,并且每吞食一个格点,长度就增加1,如:它的头部到达点$P_1(1,1)$时,其长度增加到2,它的头部到达点$P_2(2,2)$时,其长度增加到12.



探究1:当贪吃蛇的头部到达点$P_3(3,3)$时,它的长度增加到多少?

提示:设贪吃蛇的头部到达点$P_n(n,n)$时的长度为a_n,则$a_1=2,a_2=a_1+10=12,a_3=a_2+18=30$.

探究2:当贪吃蛇的头部到达点$P_9(9,9)$时,它的长度增加到多少?

提示:由探究1,$a_1=2$,

$a_2=a_1+10$,即$a_2-a_1=10$,

$a_3=a_2+18$,即$a_3-a_2=18$,

……

以此类推:$a_n-a_{n-1}=8n-6(n\geqslant2)$,

则有$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=4n^2-2n$,

当$n=9$时,有$a_9=306$.

[评价活动]

1. 已知数列$\{a_n\}$满足关系$a_na_{n+1}=1-a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$且$a_{2\,022}=2$,则$a_{2\,021}$等于 ( )

A.$-\frac{1}{3}$ B.$\frac{1}{3}$ C.$-\frac{1}{2}$ D.$\frac{1}{2}$

C **解析**:由$a_na_{n+1}=1-a_{n+1}$,得$a_{n+1}=\frac{1}{a_n+1}$.又因为$a_{2\,022}=2$,所以$a_{2\,021}=-\frac{1}{2}$.故选C.

2. 已知数列$\{a_n\}$,$a_1=1$,且满足$a_n=3a_{n-1}+\frac{(-1)^n}{2}$

$(n\in \mathbf{N}^*$，且 $n>1)$.写出数列$\{a_n\}$的前 5 项.

解：由题意，得 $a_2=3a_1+\frac{(-1)^2}{2}$.

而 $a_1=1$，所以 $a_2=3\times1+\frac{(-1)^2}{2}=\frac{7}{2}$.

同理，$a_3=3a_2+\frac{(-1)^3}{2}=10$，

$a_4=3a_3+\frac{(-1)^4}{2}=\frac{61}{2}$，$a_5=3a_4+\frac{(-1)^5}{2}=91$.

【类题通法】

由递推公式写出数列的项的方法

(1)根据递推公式写出数列的前几项，首先要弄清楚公式中各部分的关系，依次代入计算即可.

(2)若知道的是末项，通常将所给公式整理成用后面的项表示前面的项的形式，如 $a_n=2a_{n+1}+1$.

(3)若知道的是首项，通常将所给公式整理成用前面的项表示后面的项的形式，如 $a_{n+1}=\frac{a_n-1}{2}$.

任务三 a_n 与 S_n 的关系

［探究活动］

党的二十大报告指出，中华优秀传统文化是“中华文明的智慧结晶”.我国古代数学著作《张丘建算经》中有一道“今有女善织”的题目，题目意思为：现有一善于织布的女子，第一天织了 5 尺布，从第二天开始，每天比前一天多织相同量的布……假设该女子从第二天开始，每天比前一天多织 5 尺布.

探究 1：该女子第六天织布多少尺？第七天呢？

提示：用 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 表示该女子第 1,2,3,…,n 天织布的数量，用 $S_1,S_2,S_3,\cdots,S_n$ 表示前 1,2,3,…,n 天织布数量的和，则 $a_1=5$，$a_2=10$，$a_3=15$，$a_4=20$，$a_5=25$，$a_6=30$，$a_7=35$.故该女子第六天织布 30 尺，第七天织布 35 尺.

探究 2：该女子前六天一共织布多少尺？前七天呢？

提示：$S_6=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=5+10+15+20+25+30=105$.

$S_7=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=5+10+15+20+25+30+35=140$.

故该女子前六天共织布 105 尺，前七天共织布 140 尺.

探究 3：该女子前七天织布数量的和比前六天织布数量的和多多少尺？

提示：$S_7-S_6=(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)-(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)=a_7=35$.

故该女子前七天织布数量的和比前六天织布数量的和多 35 尺.

［评价活动］

1.已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=5^n-1$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解：当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=5^1-1=4$.

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(5^n-1)-(5^{n-1}-1)=5^n-5^{n-1}=4\times5^{n-1}$.

由于 $a_1=4$ 也满足 $a_n=4\times5^{n-1}$，

因此，数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=4\times5^{n-1}$.

2.已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=\frac{n+1}{n}$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解：当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=\frac{1+1}{1}=2$.

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n+1}{n}-\frac{n}{n-1}=-\frac{1}{n(n-1)}$.

由于 $a_1=2$ 不满足 $a_n=-\frac{1}{n(n-1)}$，

因此，数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=\begin{cases}2,n=1,\\-\frac{1}{n(n-1)},n\geqslant2.\end{cases}$

【类题通法】

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n，求通项公式的步骤

(1)当 $n=1$ 时，$a_1=S_1$.

(2)当 $n\geqslant2$ 时，根据 S_n 写出 S_{n-1}，则 $a_n=S_n-S_{n-1}$.

(3)如果 a_1 也满足当 $n\geqslant2$ 时 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 的式子，那么数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=S_n-S_{n-1}$；如果 a_1 不满足当 $n\geqslant2$ 时 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 的式子，那么数列$\{a_n\}$的通项公式要分段表示为 $a_n=\begin{cases}S_1,n=1,\\S_n-S_{n-1},n\geqslant2.\end{cases}$

提质归纳

- 数列的递推公式及前n项和
  - 递推公式
    - 结构
      - 初始条件
      - 递推关系
    - 应用
      - 求各项
      - 求通项公式
  - 前n项和
    - a_n与S_n的关系

课后素养评价(二)

基础性·能力运用

1. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=n^3+2n-1$,则$a_1=$ (　　)

A.0　　B.1

C.2　　D.3

C　**解析**:因为$S_n=n^3+2n-1$,当$n=1$时,$S_1=a_1=1+2-1=2$.故选C.

2. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=n^2$,则a_n等于 (　　)

A.n　　B.n^2

C.$2n+1$　　D.$2n-1$

D　**解析**:因为$S_n=n^2$,所以当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$.

当$n=1$时,$S_1=a_1=1$满足上式,所以$a_n=2n-1$.

3. 已知数列$\{a_n\}$对任意$m,n\in\mathbf{N}^*$,满足$a_{m+n}=a_m\cdot a_n$,且$a_3=8$,则$a_1=$ (　　)

A.2　　B.1　　C.±2　　D.$\frac{1}{2}$

A　**解析**:令$m=n=1$,则$a_2=a_1\cdot a_1=a_1^2$.

令$m=1,n=2$,则$a_3=a_1\cdot a_2=a_1^3=8$,所以$a_1=2$.

4. (多选)已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^2-8n+15$.若$a_n=3$,则n的值可能是 (　　)

A.2　　B.4

C.6　　D.8

AC　**解析**:由$n^2-8n+15=3$,得$n^2-8n+12=0$,所以$n=2$或$n=6$.所以3是$\{a_n\}$中的第2项或第6项.

5. 已知斐波那契数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_2=1,a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.若$a_2+a_3+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{57}+a_{59}=a_k(k\in\mathbf{N}^*)$,则$k=$ (　　)

A.2 020　　B.2 021　　C.59　　D.60

D　**解析**:由$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$,得$a_2+a_3+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{57}+a_{59}=a_4+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{57}+a_{59}=a_6+a_7+a_9+\cdots+a_{57}+a_{59}=\cdots=a_{58}+a_{59}=a_{60}$,因此$k=60$.故选D.

6. (多选)设$a_n=-3n^2+15n-18$,则数列$\{a_n\}$的前n项和的最大值为 (　　)

A.S_1　　B.S_2　　C.S_3　　D.S_4

ABC　**解析**:由$a_n=-3n^2+15n-18\geqslant0$,得$2\leqslant n\leqslant3$,$a_2=-3\times4+15\times2-18=0$,$a_3=-3\times9+15\times3-18=0$,当$n\geqslant4$时,$a_n<0$,所以$S_1=S_2=S_3>S_4>S_5>\cdots$,所以数列$\{a_n\}$的前$n$项和的最大值为$S_1,S_2,S_3$.

7. 已知数列$\{a_n\}$的第一项$a_1=1$,以后的各项由公式$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$给出,试写出这个数列的前5项.

解:因为$a_1=1,a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$,

所以$a_2=\frac{2a_1}{a_1+2}=\frac{2}{3}$,

$a_3=\frac{2a_2}{a_2+2}=\frac{2\times\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+2}=\frac{1}{2}$,

$a_4=\frac{2a_3}{a_3+2}=\frac{2\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+2}=\frac{2}{5}$,

$a_5=\frac{2a_4}{a_4+2}=\frac{2\times\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}+2}=\frac{1}{3}$.

故该数列的前5项分别为$1,\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{5},\frac{1}{3}$.

综合性·创新提升

1. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=n^2-5n$.若它的第k项满足$3<a_k<7$,则$k=$ (　　)

A.4或5　　B.5或6

C.6或7　　D.7或8

B　**解析**:当$n=1$时,$S_1=-4$,即$a_1=-4$;

当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-5n)-[(n-1)^2-5(n-1)]=2n-6$.

并且$n=1$时,$a_1=2\times1-6=-4$,上式依然成立,故$a_n=2n-6(n\in\mathbf{N}^*)$.

令$3<2k-6<7$,解得$\frac{9}{2}<k<\frac{13}{2}$,所以$k=5$或$k=6$.故选B.

2. 在数列$\{a_n\}$中,$a_1=2,a_n=1-\frac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant2)$,则

$a_{2\,022}=$　　　　（　　）

A.$-\frac{1}{2}$　　　　B.$\frac{1}{2}$

C.-1　　　　D.2

C　**解析**：由 $a_1=2,a_n=1-\frac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2)$ 可得

$a_2=1-\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2},a_3=1-\frac{1}{a_2}=-1,a_4=1-\frac{1}{a_3}=2$，

故数列$\{a_n\}$为周期数列，

而 $2\,022=3\times 674$，故 $a_{2\,022}=a_3=-1$.

故选 D.

3.已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=-\frac{1}{4},a_n=1-\frac{1}{a_{n-1}}(n>1)$，则 a_4 等于　　（　　）

A.$\frac{4}{5}$　　B.$\frac{1}{4}$　　C.$-\frac{1}{4}$　　D.$\frac{1}{5}$

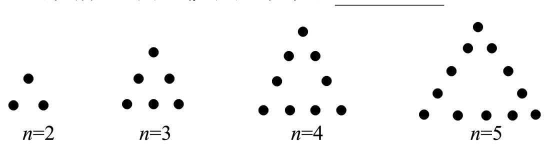
C　**解析**：$a_2=1-\frac{1}{a_1}=5,a_3=1-\frac{1}{a_2}=\frac{4}{5},a_4=1-\frac{1}{a_3}=-\frac{1}{4}$.

4.(多选)设 $a_n=-n^2+10n+11$，数列$\{a_n\}$从首项到第 n 项的和最大，则 n 的值可能是　　（　　）

A.10　　B.11　　C.12　　D.13

AB　**解析**：由 $a_n=-n^2+10n+11\geqslant 0$ 得 $(n+1)(n-11)\leqslant 0$，所以 $1\leqslant n\leqslant 11$.故数列$\{a_n\}$的前 11 项为非负数，且 $a_{11}=0$，故从首项到第 10 项或第 11 项的和最大.

5.如图所示，将若干个点摆成三角形图案，每条边(包括两个端点)有 $n(n>1,n\in\mathbf{N}^*)$个点，相应的图案中总的点数记为 a_n，则 a_7 等于________.



18　**解析**：由题图知 $a_2=3,a_3=6,a_4=9,a_5=12,\cdots$，所以 $a_n=3(n-1)(n>1,n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $a_7=18$.

6.数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n^2\cdot a_n(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，且 $a_1=1$，则 $a_n=$________.

$\frac{2}{n(n+1)}$　**解析**：已知 $S_n=n^2\cdot a_n(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，当 $n\geqslant 3$ 时，$S_n-S_{n-1}=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}\Rightarrow n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}=a_n$，进而得 $(n^2-1)a_n=(n-1)^2a_{n-1}$.因为 $n\geqslant 3$，所以 $(n+1)a_n=(n-1)\cdot a_{n-1}\Rightarrow\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n+1}(n\geqslant 3)$，

故 $\frac{a_n}{a_2}=\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\frac{a_5}{a_4}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}\times\cdots\times\frac{n-1}{n+1}=\frac{6}{n(n+1)}(n\geqslant 3)$.因为 $S_n=n^2\cdot a_n(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，当 $n=2$ 时，$a_1+a_2=4a_2,a_1=1$，解得 $a_2=\frac{1}{3}$，所以 $\frac{a_n}{\frac{1}{3}}=\frac{6}{n(n+1)}(n\geqslant 3)$.所以 $a_n=\frac{2}{n(n+1)}(n\geqslant 3)$.又 $a_1=1=\frac{2}{1\times 2},a_2=\frac{1}{3}=\frac{2}{2\times 3}$，所以 $a_n=\frac{2}{n(n+1)}(n\in\mathbf{N}^*)$.

7.在数列$\{a_n\}$中，$a_n=\frac{n^2}{n^2+1}$.

(1)求数列的第 7 项.

(2)求证：此数列的各项都在区间$(0,1)$内.

(3)区间$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$内有没有数列中的项？若有，有几项？

(1)**解**：$a_7=\frac{7^2}{7^2+1}=\frac{49}{50}$.

(2)**证明**：因为 $a_n=\frac{n^2}{n^2+1}=1-\frac{1}{n^2+1}$，

所以 $0<a_n<1$，故数列的各项都在区间$(0,1)$内.

(3)**解**：区间$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$内有数列$\{a_n\}$中的项.

令 $\frac{1}{3}<\frac{n^2}{n^2+1}<\frac{2}{3}$，则 $\frac{1}{2}<n^2<2,n\in\mathbf{N}^*$，

故 $n=1$，即在区间$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$内有数列中的项且只有 1 项，为 a_1.

8.数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1,a_{n+1}+2a_na_{n+1}-a_n=0$.

(1)写出数列的前 5 项.

(2)由(1)写出数列$\{a_n\}$的一个通项公式.

(3)实数$\frac{1}{99}$是否为这个数列中的一项？若是，为第几项？

解：(1)由已知可得 $a_1=1,a_2=\frac{1}{3},a_3=\frac{1}{5},a_4=\frac{1}{7},a_5=\frac{1}{9}$.

(2)由(1)可得数列的每一项的分子均为 1，分母分别为 $1,3,5,7,9,\cdots$，所以它的一个通项公式为 $a_n=\frac{1}{2n-1}$.

(3)实数$\frac{1}{99}$是这个数列中的一项.令 $\frac{1}{99}=\frac{1}{2n-1}$，解得 $n=50$，故$\frac{1}{99}$是这个数列的第 50 项.

4.2　等差数列

4.2.1　等差数列的概念

第1课时　等差数列的概念

学习任务目标
1.理解等差数列、等差中项的概念.(数学抽象) 2.掌握等差数列的通项公式,并能运用通项公式解决一些简单的问题.(数学运算) 3.掌握等差数列的判断与证明方法.(逻辑推理)

问题式预习

知识点一　等差数列、等差中项的概念

等差数列	一般地,如果一个数列从第 2 项起,每一项与它的前一项的差都等于同一个常数,那么这个数列就叫做等差数列,这个常数叫做等差数列的公差,公差通常用字母d 表示
等差中项	由三个数 a,A,b 组成的等差数列可以看成是最简单的等差数列.这时,A 叫做 a 与 b 的等差中项,且 $2A=a+b$

[微训练]

1.判断(正确的打"√",错误的打"×").

(1)如果一个数列的每一项与它的前一项的差是一个常数,那么这个数列是等差数列.　(×)

(2)数列 0,0,0,0,…不是等差数列.　(×)

(3)在等差数列中,除第 1 项和最后一项外,其余各项都是它前一项和后一项的等差中项.　(√)

2.若 a,b 是方程 $x^2-2x-3=0$ 的两根,则 a,b 的等差中项为　(　　)

A.-1　　B.$-\frac{3}{2}$

C.1　　D.$\frac{3}{2}$

C　**解析**:因为 a,b 是方程 $x^2-2x-3=0$ 的两根,所以 $a+b=2$.所以 a,b 的等差中项为$\frac{a+b}{2}=1$.

知识点二　等差数列的通项公式

(1)首项为 a_1,公差为 d 的等差数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_1+(n-1)d$.

(2)第 n 项与第 m 项的关系为 $a_n=a_m+(n-m)d$,从而变形可得 $d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$.

知识点三　等差数列的函数特性

(1)$a_n=a_1+(n-1)d=dn+(a_1-d)$,所以当 $d\neq0$ 时,等差数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n 是一次函数 $f(x)=dx+(a_1-d)(x\in\mathbf{R})$当 $x=n$ 时的函数值,即 $a_n=f(n)$.

(2)任给一次函数 $f(x)=kx+b$(k,b 为常数),则 $f(1)=k+b$,$f(2)=2k+b$,…,$f(n)=nk+b$,…构成一个等差数列$\{nk+b\}$,其首项为 $k+b$,公差为k.

[微训练]

1.(多选)已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n+5$,则此数列　(　　)

A.是公差为 2 的递增等差数列

B.是公差为 2 的递减等差数列

C.是首项为 7 的递减等差数列

D.是首项为 7 的递增等差数列

AD　**解析**:因为 $a_1=7$,$a_n-a_{n-1}=2n+5-(2n+3)=2>0(n\geqslant2)$,所以$\{a_n\}$是首项为 7,公差为 2 的递增等差数列.

2.在等差数列$\{a_n\}$中,首项 $a_1=5$,公差 $d=3$,则当 $a_n=2\ 024$ 时,n 等于　(　　)

A.671　　B.672

C.673　　D.674

D　**解析**:因为 $a_1=5$,$d=3$,所以 $a_n=5+(n-1)\times3=3n+2$.令 $3n+2=2\ 024$,得 $n=674$.

任务型课堂

任务一 等差数列及等差中项的概念

1.(多选)下列说法正确的是 ( )

A.若 $a-b=b-c$,则 a,b,c 成等差数列

B.若 $a_n-a_{n-1}=n(n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n>1)$,则 $\{a_n\}$ 是等差数列

C.等差数列是相邻两项中的后项与前项之差都等于同一个常数的数列

D.等差数列的公差是该数列中任意两项的差

AC **解析**:对于 A,由 $a-b=b-c$,可得 $a+c=2b$,因此 a,b,c 成等差数列,A 正确;对于 B,n 不是固定常数,该数列不是等差数列,B 错误;对于 C,根据等差数列的定义可知,C 正确;对于 D,公差为相邻两项中后项与前项之差,D 错误.

2.若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,且 $a_n=an^2+n$,则实数 $a=$________.

0 **解析**:因为 $\{a_n\}$ 是等差数列,所以 $a_{n+1}-a_n$ 为常数,所以 $[a(n+1)^2+(n+1)]-(an^2+n)=2an+a+1$ 为常数,所以 $2a=0$,所以 $a=0$.

3.若 m 和 $2n$ 的等差中项为 4,$2m$ 和 n 的等差中项为 5,则 m 与 n 的等差中项是________.

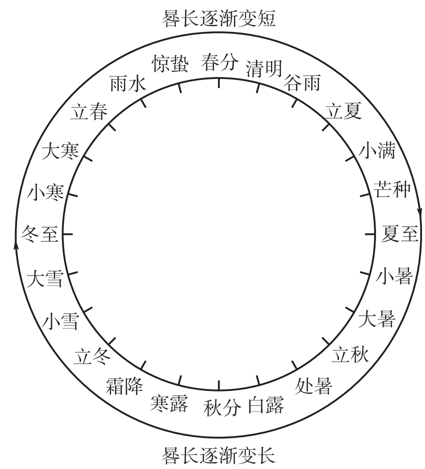
3 **解析**:由 m 和 $2n$ 的等差中项为 4,得 $m+2n=8$.

由 $2m$ 和 n 的等差中项为 5,得 $2m+n=10$.两式相加,得 $m+n=6$.所以 m 与 n 的等差中项为 $\frac{m+n}{2}=\frac{6}{2}=3$.

任务二 等差数列的通项公式

[探究活动]

我国古代天文学和数学著作《周髀算经》中记载:一年有二十四个节气,每个节气的晷长损益相同(晷是按照日影测定时刻的仪器,晷长即为所测量影子的长度).二十四节气的变化如图所示,相邻两个节气晷长减少或增加的量相同,周而复始.每年冬至的晷长为一丈三尺五寸,夏至的晷长为一尺六寸(一丈等于十尺,一尺等于十寸).以冬至的晷长(单位:寸)为首项,夏至的晷长(单位:寸)为最后一项,按图中顺时针方向,由每个节气的晷长构成的数列为 $\{a_n\}$.



探究 1:数列 $\{a_n\}$ 是等差数列吗?

提示:因为相邻两个节气晷长减少的量相同,所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

探究 2:相邻两个节气晷长减少的量是多少?

提示:设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,由题意知 $a_1=135,a_{13}=16$,则 $d=\frac{a_{13}-a_1}{12}=-\frac{119}{12}$.

所以相邻两个节气晷长减少的量为 $\frac{119}{12}$ 寸.

探究 3:春分的晷长为多少?

提示:因为 $a_1=135,d=-\frac{119}{12}$,所以 $a_7=-\frac{119}{12}\times6+135=\frac{151}{2}$.所以春分的晷长为 $\frac{151}{2}$ 寸.

[评价活动]

1.在等差数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_5=11,a_8=5$,求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及 a_{10} 的值.

解:(方法一)设 $a_n=a_1+(n-1)d$,

则 $\begin{cases}a_5=a_1+(5-1)d,\\a_8=a_1+(8-1)d,\end{cases}$

即 $\begin{cases}11=a_1+4d,\\5=a_1+7d,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=19,\\d=-2.\end{cases}$

所以 $a_n=-2n+21$.

所以 $a_{10}=-2\times10+21=1$.

(方法二)设 $a_n=An+B$,

则 $\begin{cases}a_5=5A+B,\\a_8=8A+B,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}11=5A+B,\\5=8A+B,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=-2,\\B=21.\end{cases}$

所以 $a_n=-2n+21$.所以 $a_{10}=1$.

2.在等差数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_5=10,a_{12}=31$,求首项 a_1 与公差 d.

解:设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.因为$a_5=10,a_{12}=31$,

所以$\begin{cases}a_1+4d=10,\\a_1+11d=31,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=-2,\\d=3.\end{cases}$

所以等差数列$\{a_n\}$的首项$a_1=-2$,公差$d=3$.

3.已知数列$\{a_n\}$为等差数列,$a_3=\frac{5}{4}$,$a_7=-\frac{7}{4}$,求a_{15}的值.

解:设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

由$\begin{cases}a_3=\frac{5}{4},\\a_7=-\frac{7}{4},\end{cases}$得$\begin{cases}a_1+2d=\frac{5}{4},\\a_1+6d=-\frac{7}{4},\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=\frac{11}{4},\\d=-\frac{3}{4}.\end{cases}$

所以$a_{15}=a_1+(15-1)d=\frac{11}{4}+14\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{31}{4}$.

【类题通法】

求等差数列通项公式的方法

(1)通过解方程组求得a_1,d的值,再利用$a_n=a_1+(n-1)d$写出通项公式,这是求解这类问题的基本方法.

(2)已知等差数列中的两项,可用$d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$直接求得公差,再利用$a_n=a_m+(n-m)d$写出通项公式.

(3)抓住等差数列的通项公式的结构特点,利用a_n是关于n的一次函数,列出方程组求解.

任务三　等差数列的判定

[探究活动]

现将2至101这100个整数中能被3除余2且被4除余1的数按由小到大的顺序排成一列构成一个数列.

探究1:该数列共有多少项?

提示:设所构成数列为$\{a_n\}$.由题意得$3n+2=4k+1(n,k\in\mathbf{N}^*)$,所以$4k-1=3n$.所以$k=1,4,7,10,13,16,19,22,25$,该数列为5,17,29,41,53,65,77,89,101,共有9项.

探究2:该数列是等差数列吗?

提示:是等差数列.

探究3:如果用图象表示该数列,组成图象的这些散点在同一条直线上吗?

提示:该数列的通项公式为$a_n=12n-7$,所以这些散点都在直线$y=12x-7$上.

[评价活动]

1.判断满足下列条件的数列是否为等差数列,若是等差数列,求出首项和公差.

(1)在数列$\{a_n\}$中,$a_n=3n+2$;

(2)在数列$\{a_n\}$中,$a_n=n^2+n$.

解:(1)$a_{n+1}-a_n=3(n+1)+2-(3n+2)=3(n\in\mathbf{N}^*)$,故该数列为等差数列,首项$a_1=5$,公差$d=3$.

(2)$a_{n+1}-a_n=(n+1)^2+(n+1)-(n^2+n)=2n+2$,故该数列不是等差数列.

2.已知数列$\{a_n\}$,$a_1=\frac{3}{5}$,$a_n=2-\frac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$,数列$\{b_n\}$满足$b_n=\frac{1}{a_n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.求证:数列$\{b_n\}$是等差数列,并求出通项公式.

证明:因为$a_n=2-\frac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$,

$b_n=\frac{1}{a_n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$,

所以$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1}$

$=\frac{1}{2-\frac{1}{a_n}-1}-\frac{1}{a_n-1}$

$=\frac{a_n}{a_n-1}-\frac{1}{a_n-1}=1$.

又$b_1=\frac{1}{a_1-1}=-\frac{5}{2}$,

所以数列$\{b_n\}$是以$-\frac{5}{2}$为首项,1为公差的等差数列,通项公式为$b_n=n-\frac{7}{2}$.

3.已知$\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$成等差数列,求证:$\frac{b+c}{a},\frac{a+c}{b},\frac{a+b}{c}$也成等差数列.

证明:因为$\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$成等差数列,

所以$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$,即$2ac=b(a+c)$.

而$\frac{b+c}{a}+\frac{a+b}{c}=\frac{c(b+c)+a(a+b)}{ac}$

$=\frac{c^2+a^2+b(a+c)}{ac}=\frac{c^2+a^2+2ac}{ac}$

$=\frac{c^2+a^2+2ac}{\frac{b(a+c)}{2}}=\frac{2(a+c)}{b}$,

所以$\frac{b+c}{a}$，$\frac{a+c}{b}$，$\frac{a+b}{c}$成等差数列.

4.已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，且$na_{n+1}-(n+1)a_n=2n^2+2n$.

(1)求a_2，a_3；

(2)证明数列$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$是等差数列，并求$\{a_n\}$的通项公式.

(1)**解**：由已知，得$a_2-2a_1=4$，则$a_2=2a_1+4$.

又$a_1=1$，所以$a_2=6$.

由$2a_3-3a_2=12$，

得$2a_3=12+3a_2$，又$a_2=6$，所以$a_3=15$.

(2)**证明**：由$na_{n+1}-(n+1)a_n=2n^2+2n$，

得$\frac{na_{n+1}-(n+1)a_n}{n(n+1)}=2$，即$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=2$，

所以数列$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$是首项为$\frac{a_1}{1}=1$，公差为$d=2$的等差数列.

所以$\frac{a_n}{n}=1+2(n-1)=2n-1$.所以$a_n=2n^2-n$.

【类题通法】

等差数列的判定方法

(1)定义法：$a_{n+1}-a_n=d$（常数）($n\in\mathbf{N}^*$)$\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列；$a_n-a_{n-1}=d$（常数）($n\geqslant2$，$n\in\mathbf{N}^*$)$\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列.

(2)等差中项法：证明对任意正整数n都有$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$.

(3)通项公式法：得出$a_n=pn+q$后，再根据定义判定数列$\{a_n\}$为等差数列.

注意：要证明一个数列是等差数列，无论采用以上哪种方法，都必须使用等差数列的定义或等差中项的定义.

▶提质归纳

- 等差数列
  - 定义
    - 从第2项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数
    - 递推关系
  - 通项公式
    - $a_n=a_1+(n-1)d$
    - $a_n=a_m+(n-m)d$
    - $a_n=An+B$
  - 等差中项
    - a,A,b成等差数列$\Leftrightarrow A$是a与b的等差中项$\Leftrightarrow 2A=a+b$

课后素养评价（三）

基础性·能力运用

1.在△ABC中，三个内角∠A，∠B，∠C的度数成等差数列，则∠B等于（　　）

A.30°　　B.60°　　C.90°　　D.120°

B　**解析**：因为∠A，∠B，∠C的度数成等差数列，所以∠A+∠C=2∠B.又∠A+∠B+∠C=180°，所以∠B=60°.

2.已知各项均不为0的等差数列的前4项分别是a，x，b，$2x$，则$\frac{a}{b}$等于（　　）

A.$\frac{1}{4}$　　B.$\frac{1}{2}$

C.$\frac{1}{3}$　　D.$\frac{2}{3}$

C　**解析**：因为$\begin{cases}2x=a+b,\\2b=3x,\end{cases}$所以$\begin{cases}b=\frac{3}{2}x,\\a=\frac{1}{2}x.\end{cases}$

所以$\frac{a}{b}=\frac{1}{3}$.

3.在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_2+a_3=9$，$a_4+a_5=16$，则$a_6=$（　　）

A.9　　B.10　　C.11　　D.12

C　**解析**：因为$a_1+a_2+a_3=3a_1+3d=9$，$a_4+a_5=2a_1+7d=16$，所以可解得$a_1=1$，$d=2$，所以$a_6=a_1+5d=1+10=11$.故选C.

4.在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=8$，$a_5=2$.若在相邻两项之间各插入一个数，使之成一个新的等差数列，则新等差数列的公差为（　　）

A.$\frac{3}{4}$　　B.$-\frac{3}{4}$

C.$-\frac{6}{7}$　　D.-1

B　**解析**：新等差数列中，首项为8，第9项为2.

所以新公差$d'=\frac{2-8}{9-1}=\frac{-6}{8}=-\frac{3}{4}$.

5.在等差数列40，37，34，…中，第一个负数项是（　　）

A.第13项　　B.第14项

C.第 15 项　　　　D.第 16 项

C　**解析**:$37-40=-3$,可知等差数列首项为 40,公差为 -3,则通项公式为 $a_n=40+(n-1)\cdot(-3)=43-3n$.令 $43-3n<0$,解得 $n>\frac{43}{3}$,故第一个负数项是第 15 项.故选 C.

6.(多选)下列命题正确的是　(　　)

A.给出数列的有限项就可以唯一确定这个数列的通项公式

B.若等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d>0$,则 $\{a_n\}$ 是递增数列

C.若 a,b,c 成等差数列,则 $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ 可能成等差数列

D.若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,则数列 $\{a_n+2a_{n+1}\}$ 也是等差数列

BCD　**解析**:A 选项中,给出数列的有限项不一定可以唯一确定通项公式;B 选项中,由等差数列的函数特性知,$d>0$ 时 $\{a_n\}$ 必是递增数列;C 选项中,$a=b=c=1$ 时,$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=1$,此时 $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ 成等差数列;D 选项中,数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,公差为 d,所以 $a_n+2a_{n+1}=a_1+(n-1)d+2a_1+2nd=3a_1+(3n-1)d=3a_1+2d+(n-1)\cdot 3d$,$\{a_n+2a_{n+1}\}$ 也是等差数列.故选 BCD.

7.《九章算术》是我国古代的数学名著,书中“均输”章有如下问题:“今有五人分五钱,令上二人所得与下三人等.问:各得几何?”其意思为:已知 A,B,C,D,E 五人分 5 钱,A,B 两人所得与 C,D,E 三人所得相等,且 A,B,C,D,E 每人所得成等差数列.问:五人各得多少钱?在这个问题中,E 所得为　(　　)

A.$\frac{2}{3}$钱　　　　B.$\frac{4}{3}$钱

C.$\frac{5}{6}$钱　　　　D.$\frac{3}{2}$钱

A　**解析**:由题意,设 A 所得为 $a-4d$,B 所得为 $a-3d$,C 所得为 $a-2d$,D 所得为 $a-d$,E 所得为 a,则 $\begin{cases}5a-10d=5,\\2a-7d=3a-3d,\end{cases}$ 解得 $a=\frac{2}{3}$,$d=-\frac{1}{6}$,故 E 所得为 $\frac{2}{3}$钱.

8.在数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=3$,$a_{n+1}=\frac{3a_n}{a_n+3}$,则 $a_4=$　(　　)

A.$\frac{3}{4}$　　B.1　　C.$\frac{4}{3}$　　D.$\frac{3}{2}$

A　**解析**:依题意得 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+3}{3a_n}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{3}$,$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3}$,故数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 $\frac{1}{a_1}=\frac{1}{3}$ 为首项,$\frac{1}{3}$ 为公差的等差数列,则 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3}+\frac{n-1}{3}=\frac{n}{3}$,$a_n=\frac{3}{n}$,所以 $a_4=\frac{3}{4}$.

9.已知等差数列 $\{a_n\}$.

(1)若 $a_5=4$,$a_{10}=-9$,求 a_{20};

(2)若 $a_5-a_3=12$,$a_{12}=20$,求 a_1 和公差 d;

(3)若 $a_3a_4=-7$,$a_4-a_3=8$,求 a_7.

解:(1)设公差为 d,由 $a_5=4$,$a_{10}=-9$,

得 $\begin{cases}a_1+4d=4,\\a_1+9d=-9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=\frac{72}{5},\\d=-\frac{13}{5}.\end{cases}$

所以 $a_{20}=a_1+19d=-35$.

(2)因为 $a_5-a_3=12$,所以公差 $d=6$.又 $a_{12}=20\Rightarrow a_1+11d=20$,解得 $a_1=-46$,即 $a_1=-46$,$d=6$.

(3)设公差为 d,因为 $a_4-a_3=8$,所以 $d=8$,

所以 $a_3(a_3+8)=-7$,解得 $a_3=-1$ 或 $a_3=-7$.

当 $a_3=-1$ 时,$a_7=a_3+4d=31$;

当 $a_3=-7$ 时,$a_7=a_3+4d=25$.

综合性·创新提升

1.(多选)设 d 为正项等差数列 $\{a_n\}$ 的公差.若 $d>0$,$a_3=2$,则　(　　)

A.$a_2\cdot a_4<4$

B.$a_2^2+a_4\geqslant\frac{15}{4}$

C.$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_5}>1$

D.$a_1\cdot a_5>a_2\cdot a_4$

ABC　**解析**:由题意知,$\begin{cases}a_1=2-2d>0,\\d>0\end{cases}\Rightarrow 0<d<1$.

$a_2\cdot a_4=(2-d)\cdot(2+d)=4-d^2<4$,A 正确;

$a_2^2+a_4=(2-d)^2+(2+d)=d^2-3d+6>4\geqslant\frac{15}{4}$, B 正确；

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_5}=\frac{1}{2-2d}+\frac{1}{2+2d}=\frac{1}{1-d^2}>1$，C 正确；

$a_1 \cdot a_5-a_2 \cdot a_4=(2-2d)\cdot(2+2d)-(2-d)\cdot(2+d)=-3d^2<0$，所以 $a_1 \cdot a_5<a_2 \cdot a_4$，D 错误.

2.若等差数列$\{a_n\}$的首项为 70，公差为-9，则这个数列中绝对值最小的一项为 （　　）

A.a_8　　B.a_9　　C.a_{10}　　D.a_{11}

B　**解析**：由已知条件知 $a_n=a_1+(n-1)d=70+(n-1)\times(-9)=79-9n$，

所以 $a_8=7$，$a_9=-2$，$a_{10}=-11$，故绝对值最小的一项为 a_9.

3.在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=-1$，公差 $d=2$，$a_{n-1}=15$，则 n 的值为 （　　）

A.7　　B.8　　C.9　　D.10

D　**解析**：$a_{n-1}=a_1+(n-2)d=-1+2(n-2)=2n-5=15$，所以 $n=10$.

4.已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且满足$a_1=1$，$\frac{1}{a_n^2}-\frac{1}{a_{n-1}^2}=1(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_{1\,024}=$ （　　）

A.$\frac{\sqrt{2}}{16}$　　B.$\frac{1}{16}$

C.$\frac{\sqrt{2}}{32}$　　D.$\frac{1}{32}$

D　**解析**：因为数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且满足 $a_1=1$，$\frac{1}{a_n^2}-\frac{1}{a_{n-1}^2}=1(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，

所以数列$\left\{\frac{1}{a_n^2}\right\}$是等差数列，公差为 1，首项为 1.

所以$\frac{1}{a_n^2}=1+(n-1)=n$，解得 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$.

所以 $a_{1\,024}=\frac{1}{\sqrt{1\,024}}=\frac{1}{32}$.故选 D.

5.已知数列 8，a，2，b，c 是等差数列，则 a，b，c 的值分别是________.

5，-1，-4　**解析**：依据等差中项的定义，由 8，a，2 是等差数列，

得 $2a=8+2$，解得 $a=5$.①

由 a，2，b 是等差数列，得 $2\times 2=a+b$，②

同理，由 2，b，c 是等差数列，得 $2b=2+c$.③

联立①②③，

解得 $b=-1$，$c=-4$.

6.设$\{a_n\}$是公差为-2 的等差数列，如果$a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{97}=50$，那么 $a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{99}=$________.

-82　**解析**：因为$\{a_n\}$是公差为-2 的等差数列，所以 $a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{99}=(a_1+2d)+(a_4+2d)+(a_7+2d)+\cdots+(a_{97}+2d)=a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{97}+33\times 2d=50-132=-82$.

7.在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_4=70$，$a_{21}=-100$.

(1)求首项 a_1 与公差 d，并写出通项公式；

(2)数列$\{a_n\}$中有多少项属于区间$[-18,18]$？

解：(1)因为$\begin{cases}a_4=a_1+3d=70,\\a_{21}=a_1+20d=-100,\end{cases}$

所以$\begin{cases}a_1=100,\\d=-10.\end{cases}$

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=100+(n-1)\times(-10)=-10n+110$.

(2)令$-18\leqslant a_n\leqslant 18$，即$-18\leqslant -10n+110\leqslant 18$，得 $9.2\leqslant n\leqslant 12.8$.因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n=10,11,12$.

所以有 3 项属于区间$[-18,18]$.

8.在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$3a_na_{n-1}+a_n-a_{n-1}=0(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求证：数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是等差数列；

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

(1)**证明**：由 $3a_na_{n-1}+a_n-a_{n-1}=0(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，

整理得$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=3(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，

所以数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是以 1 为首项，以 3 为公差的等差数列.

(2)**解**：由(1)可得$\frac{1}{a_n}=1+3(n-1)=3n-2$，

所以 $a_n=\frac{1}{3n-2}$.

第2课时　等差数列的性质及应用

学习任务目标

1.能够根据等差数列的定义和通项公式推出等差数列的重要性质.(逻辑推理)
2.能够运用等差数列的性质解决有关问题.(数学运算)
3.能够运用等差数列的知识解决简单的实际问题.(数学建模)

问题式预习

知识点　等差数列的性质

1.(1)若$\{a_n\}$,$\{b_n\}$分别是公差为d_1,d_2的等差数列,则数列$\{pa_n+qb_n\}$($p,q\in \mathbf{R}$)是公差为$\underline{pd_1+qd_2}$的等差数列.

(2)若$\{a_n\}$是公差为d的等差数列,则$a_k,a_{k+m},a_{k+2m},\cdots(k,m\in \mathbf{N}^*)$是公差为$\underline{md}$的等差数列.

2.(1)等差数列的项的对称性:在有穷等差数列中,与首末两项"等距离"的两项之和等于首项与末项的和,即$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots$.

(2)在等差数列$\{a_n\}$中,若$m+n=p+q(m,n,p,q\in \mathbf{N}^*)$,则$\underline{a_m+a_n=a_p+a_q}$.特别地,若$m+n=2k$($m,n,k\in \mathbf{N}^*$),则$\underline{a_m+a_n=2a_k}$.

[微训练]

1.判断(正确的打"√",错误的打"×").

(1)在等差数列$\{a_n\}$中,若$a_m+a_n=a_p+a_q$,则$m+n=p+q$.　　(×)

(2)若数列$\{a_n\}$为等差数列,则数列$a_m,a_{m+k},a_{m+2k},a_{m+3k},\cdots(m,k\in \mathbf{N}^*)$也是等差数列.　　(√)

(3)在等差数列$\{a_n\}$中,若$m+n+p=3t(m,n,p,t\in \mathbf{N}^*)$,则$a_m+a_n+a_p=3a_t$.　　(√)

2.已知$\{a_n\}$是等差数列,则满足下列条件的数列$\{b_n\}$也为等差数列的是　　(　　)

A.$b_n=a_n^2$　　B.$b_n=\dfrac{1}{a_n}$

C.$b_n=a_{3n}$　　D.$b_n=|a_n|$

C　**解析**:$\{a_{3n}\}$为等差数列,公差为原来的3倍.

3.已知等差数列$\{a_n\}$,$a_7+a_{19}=19$,$a_9=1$,则a_{17}等于　　(　　)

A.20　　B.18

C.15　　D.17

B　**解析**:因为$a_7+a_{19}=a_9+a_{17}=19$,所以$a_{17}=19-a_9=18$.

任务型课堂

任务一　等差数列的性质

1.已知等差数列$\{a_n\}$,$a_5=10$,$a_{15}=25$,求a_{25}.

解:(方法一)设$\{a_n\}$的公差为d,

则$\begin{cases}a_1+4d=10,\\ a_1+14d=25,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=4,\\ d=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$

故$a_{25}=a_1+24d=4+24\times\dfrac{3}{2}=40$.

(方法二)在等差数列$\{a_n\}$中,因为$5+25=2\times15$,所以有$a_5+a_{25}=2a_{15}$,从而$a_{25}=2a_{15}-a_5=2\times25-10=40$.

(方法三)因为5,15,25是等差数列,所以a_5,a_{15},a_{25}也是等差数列,因此$a_{25}-a_{15}=a_{15}-a_5$,即$a_{25}-25=25-10$,解得$a_{25}=40$.

2.已知等差数列$\{a_n\}$中$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=70$,求a_1+a_9.

解:由等差数列的性质,得$a_3+a_7=a_4+a_6=2a_5=a_1+a_9$,所以$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=5a_5=70$,于是$a_5=14$,故$a_1+a_9=2a_5=28$.

3.已知数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都是等差数列,且$a_1=2$,$b_1=-3$,$a_7-b_7=17$,求$a_{19}-b_{19}$.

解:令$c_n=a_n-b_n$.因为$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都是等差数列,所以$\{c_n\}$也是等差数列.设数列$\{c_n\}$的公差为d.由已知,得$c_1=a_1-b_1=5$,$c_7=17$,则$5+6d=17$,解得$d=2$.故$a_{19}-b_{19}=c_{19}=5+18\times2=41$.

任务二　等差数列的实际应用

[探究活动]

《张丘建算经》中有一个"十人分金"问题,现有类似问题情境:今有某郡守赏赐下属10人,10人官职

依次递降,赏赐随官职递降依次等差递减,前 2 人共得赏赐 190 贯,后 3 人共得赏赐 60 贯.

探究 1:前两人所得赏赐相差多少贯?

提示:由题意,设 10 人所得赏赐由多到少构成的等差数列为$\{a_n\}$,公差为 d,则可得 $a_1+a_2=190$,$a_8+a_9+a_{10}=60$,即$\begin{cases}2a_1+d=190,\\3a_1+24d=60,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=100,\\d=-10.\end{cases}$则前两人所得赏赐相差 10 贯.

探究 2:第 5 人所得赏赐为多少贯?

提示:由探究 1,$a_1=100$,$d=-10$,得 $a_n=-10n+110$.故 $a_5=-50+110=60$,即第 5 人所得赏赐为 60 贯.

[评价活动]

1.某公司经销一种产品,第 1 年可获利 200 万元.从第 2 年起,由于市场竞争等方面的原因,其利润每年比上一年减少 20 万元.按照这一规律,如果公司不引进新产品,也不调整经营策略,那么从哪一年起,该公司经销这一产品将会亏损?

解:设第 n 年的利润为 a_n 万元,

则 $a_1=200$,$a_n-a_{n-1}=-20(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$.

所以每年的利润可构成一个等差数列$\{a_n\}$,且公差 $d=-20$.所以 $a_n=a_1+(n-1)d=200+(n-1)\cdot(-20)=220-20n$.

若 $a_n<0$,则该公司经销这一产品将会亏损.

由 $a_n=220-20n<0$,得 $n>11$.

故从第 12 年起,该公司经销这一产品将会亏损.

2.通常情况下,从地面到 10 km 高空,高度每增加 1 km,气温就下降某一个固定数值.如果 1 km 高度的气温是 8.5 ℃,5 km 高度的气温是 −17.5 ℃,求 2 km,4 km,8 km 高度的气温.

解:设$\{a_n\}$表示 1 km,2 km,…,10 km 高度的气温构成的等差数列,公差为 d,则 $a_1=8.5$,$a_5=-17.5$.

由 $a_5=a_1+4d$ 得 $8.5+4d=-17.5$,解得 $d=-6.5$.

所以 $a_n=15-6.5n(1\leqslant n\leqslant 10,n\in\mathbf{N}^*)$.

所以 $a_2=2$,$a_4=-11$,$a_8=-37$,

即 2 km,4 km,8 km 高度的气温分别为 2 ℃,−11 ℃,−37 ℃.

3.梯子的最高一级宽 33 cm,最低一级宽 110 cm,中间还有 10 级,各级的宽度成等差数列,计算中间各级的宽度.

解:用$\{a_n\}$表示梯子自上而下各级宽度所构成的等差数列,公差为 d.

由已知,得 $a_1=33$,$a_{12}=110$.

由通项公式,得 $a_{12}=a_1+(12-1)d$,

即 $110=33+11d$,解得 $d=7$.

因此,$a_2=33+7=40$,$a_3=40+7=47$,$a_4=54$,$a_5=61$,$a_6=68$,$a_7=75$,$a_8=82$,$a_9=89$,$a_{10}=96$,$a_{11}=103$.

所以,梯子中间各级的宽度从上而下依次是 40 cm,47 cm,54 cm,61 cm,68 cm,75 cm,82 cm,89 cm,96 cm,103 cm.

【类题通法】

解答数列实际应用问题的基本步骤

(1)审题,即仔细阅读材料,认真理解题意;

(2)建模,即将已知条件翻译成数学(数列)语言,将实际问题转化成数学问题;

(3)判型,即判断该数列是否为等差数列;

(4)求解,即求出该问题的数学解;

(5)还原,即将所数学解还原到实际问题中.

任务三 等差数列的综合问题

[探究活动]

“干支纪年法”是中国的传统纪年方法,甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸被称为“十天干”,子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥叫做“十二地支”.“天干”以“甲”字开始,“地支”以“子”字开始,两者按照干支顺序相配,构成了“干支纪年法”,其相配顺序为:甲子、乙丑、丙寅……癸酉、甲戌、乙亥、丙子……癸未、甲申、乙酉、丙戌……癸巳……癸亥,60 年为一个纪年周期,周而复始,循环使用.按照“干支纪年法”,公元 2022 年是壬寅年.

探究 1:按照“干支纪年法”,公元 2023 年是什么年?

提示:公元 2023 年是癸卯年.

探究 2:按照“干支纪年法”,中华人民共和国成立 100 周年时的公元 2049 年是什么年?

提示:从 2022 年到 2049 年经过 27 年,且 2022 年为壬寅年,

$27\div 10=2\cdots\cdots 7$,

壬、癸、甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛,

则 2049 年的天干为己,

$27\div 12=2\cdots\cdots 3$,

寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥、子、丑,

则 2049 年的地支为巳,

即公元 2049 年是己巳年.

[评价活动]

1.已知递减等差数列$\{a_n\}$的前三项的和为 18,前三项的积为 66,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解:(方法一)依题意,得$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=18,\\a_1a_2a_3=66,\end{cases}$

所以$\begin{cases}3a_1+3d=18,\\a_1(a_1+d)(a_1+2d)=66,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=11,\\d=-5\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=1,\\d=5.\end{cases}$

因为数列$\{a_n\}$是递减等差数列，所以$d<0$.

故$a_1=11$，$d=-5$.

所以$a_n=11+(n-1)\times(-5)=-5n+16$.

即等差数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=-5n+16$.

(方法二)设等差数列$\{a_n\}$的前三项依次为$a-d$，a，$a+d$，则$\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=18,\\(a-d)a(a+d)=66,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=6,\\d=\pm5.\end{cases}$

又因为$\{a_n\}$是递减等差数列，所以$d<0$，

所以$a=6$，$d=-5$.

所以等差数列$\{a_n\}$的首项$a_1=11$，公差$d=-5$.

所以$a_n=11+(n-1)\times(-5)=-5n+16$.

2.已知四个数成等差数列，它们的和为26，中间两项的积为40，求这四个数.

解：设这四个数分别为$a-3d$，$a-d$，$a+d$，$a+3d$.

根据题意，得

$\begin{cases}(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=26,\\(a-d)(a+d)=40,\end{cases}$

化简，得$\begin{cases}4a=26,\\a^2-d^2=40,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\dfrac{13}{2},\\d=\pm\dfrac{3}{2}.\end{cases}$

所以这四个数分别为2，5，8，11或11，8，5，2.

3.已知两个等差数列2，5，8，…，197与2，7，12，…，197，求它们的相同项构成的数列的通项公式及相同项的个数.

解：记数列2，5，8，…，197为$\{a_n\}$，由已知，数列$\{a_n\}$的首项为2，公差为3.

所以通项公式为$a_n=3n-1(1\leqslant n\leqslant66)$.

记数列2，7，12，…，197为$\{b_m\}$，则$b_m=5m-3(1\leqslant m\leqslant40)$.

若数列$\{a_n\}$的第n项与数列$\{b_m\}$的第m项相同，即$a_n=b_m$，则$3n-1=5m-3$，

所以$n=\dfrac{5m-2}{3}=m+\dfrac{2(m-1)}{3}$.

又$n\in\mathbf{N}^*$，所以必须有$m-1=3k$，即$m=3k+1$(k为非负整数).

又$1\leqslant m\leqslant40$，所以$m=1,4,7,\cdots,40$.

所以两数列的相同项为2，17，32，…，197.

记两数列的相同项构成的数列为$\{c_n\}$，则$\{c_n\}$的通项公式为$c_n=15n-13$，共有$\dfrac{40-1}{3}+1=14$(个)相同项.

【类题通法】

等差数列项的常见设法

(1)通项法

设数列的通项公式，即设$a_n=a_1+(n-1)d$.

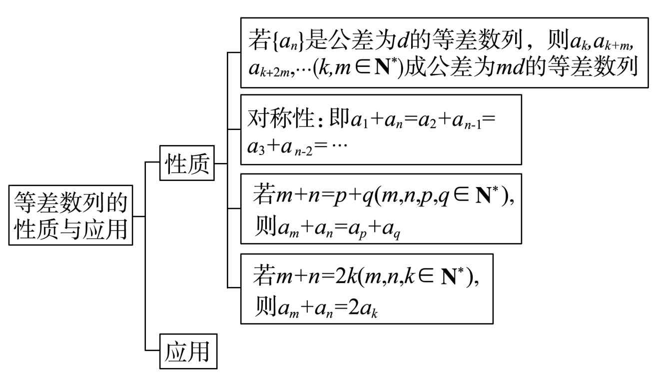
(2)对称项法

①当等差数列$\{a_n\}$的项数为奇数时，可设中间一项为a，再以公差为d向两边分别设项：…，$a-2d$，$a-d$，a，$a+d$，$a+2d$，…；

②当等差数列$\{a_n\}$的项数为偶数时，可设中间两项分别为$a-d$，$a+d$，再以公差为$2d$向两边分别设项：…，$a-3d$，$a-d$，$a+d$，$a+3d$，….

对称项法的优点：若有n个数构成等差数列，利用对称项法设出这个数列，则其各项和为na.

提质归纳



课后素养评价(四)

基础性·能力运用

1.在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2+a_9=10$，$a_1=2$，则$a_{10}=$ (　　)

A.8　　B.9　　C.11　　D.12

A　**解析**：因为$a_1+a_{10}=a_2+a_9=10$，所以$10=2+a_{10}$，解得$a_{10}=8$.故选A.

2.在等差数列$\{a_n\}$中，$a_4+a_6=8$，则$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=$ (　　)

A.10　　B.16

C.20　　D.24

C　**解析**：因为$a_4+a_6=2a_5=8$，所以$a_5=4$，所以$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=5a_5=20$.

3.设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都是等差数列，且$a_1=25$，$b_1=$

$75, a_2+b_2=100$，则数列$\{a_n+b_n\}$的第 37 项为（　　）

A.0　　B.37　　C.100　　D.-37

C　**解析**：因为$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是等差数列，

所以$\{a_n+b_n\}$是等差数列.

因为$a_1+b_1=100$，$a_2+b_2=100$，

所以数列$\{a_n+b_n\}$的公差$d=0$，所以$a_{37}+b_{37}=100$.

4.已知数列$\{a_n\}$满足$2a_{n+1}=2a_n+1$，其中$a_8=\dfrac{9}{2}$，则$a_3=$（　　）

A.1　　B.$\dfrac{3}{2}$　　C.2　　D.$\dfrac{5}{2}$

C　**解析**：由$2a_{n+1}=2a_n+1$，得$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2}$，所以$\{a_n\}$是等差数列.设公差为d，则$a_3=a_8-5d=\dfrac{9}{2}-5\times\dfrac{1}{2}=2$.

故选 C.

5.已知等差数列$\{a_n\}$共有k项.其中，过圆$x^2+y^2=10x$内一点$(5,3)$的最短弦的长度为数列的首项a_1，最长弦的长度为数列的末项a_k.若公差$d\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right]$，则$k$的值不可能是（　　）

A.4　　B.5　　C.6　　D.7

A　**解析**：将$x^2+y^2=10x$化为$(x-5)^2+y^2=5^2$，表示圆心为$C(5,0)$，半径$r=5$的圆.

设$A(5,3)$，则$AC=3$，故$a_1=8$，$a_k=10$.

所以$10=8+(k-1)d$，所以$k=\dfrac{2}{d}+1$.

因为$\dfrac{1}{3}\leqslant d\leqslant\dfrac{1}{2}$，

所以$5\leqslant\dfrac{2}{d}+1\leqslant 7$，即$5\leqslant k\leqslant 7$.

6.已知等差数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=10$，$a_8^2-a_2^2=36$，则a_{11}的值为________.

11　**解析**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

因为$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=5a_5=10$，

所以$a_5=2$.

因为$a_8^2-a_2^2=(a_8+a_2)(a_8-a_2)=2a_5\times 6d=36$，

所以$d=\dfrac{3}{2}$.所以$a_{11}=a_5+6d=2+9=11$.

7.正项数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=2$，$2a_n^2=a_{n+1}^2+a_{n-1}^2$ $(n\in\mathbf{N}^*, n\geqslant 2)$，则$a_7=$________.

$\sqrt{19}$　**解析**：因为$2a_n^2=a_{n+1}^2+a_{n-1}^2$，则$a_n^2-a_{n-1}^2=a_{n+1}^2-a_n^2$，所以$\{a_n^2\}$是等差数列，首项$a_1^2=1$，公差为$a_2^2-a_1^2=3$，所以$a_n^2=3n-2$，所以$a_n=\sqrt{3n-2}$.

所以$a_7=\sqrt{21-2}=\sqrt{19}$.

8.在等差数列$\{a_n\}$中，$a_{12}=23$，$a_{42}=143$.若$a_n=239$，求n及公差d.

解：由题意可得，$d=\dfrac{a_{42}-a_{12}}{42-12}=\dfrac{143-23}{30}=4$，

所以$a_1=a_{12}-11d=-21$.

因为$a_n=a_1+(n-1)d=-21+4(n-1)=239$，

解得$n=66$.综上，$n=66$，$d=4$.

综合性·创新提升

1.已知函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，且$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增.若a,b,c成等差数列，且$b>0$，则下列结论正确的是（　　）

A.$f(b)>0$，且$f(a)+f(c)>0$

B.$f(b)>0$，且$f(a)+f(c)<0$

C.$f(b)<0$，且$f(a)+f(c)>0$

D.$f(b)<0$，且$f(a)+f(c)<0$

A　**解析**：由已知，$f(b)>f(0)=0$.因为$a+c=2b>0$，则$a>-c$，从而$f(a)>f(-c)=-f(c)$，即$f(a)+f(c)>0$，故选 A.

2.已知数列$\{a_n\}$为等差数列.若$a_2+a_8=\dfrac{2\pi}{3}$，则$\tan(a_3+a_7)$的值为（　　）

A.$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B.$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C.$\sqrt{3}$　　D.$-\sqrt{3}$

D　**解析**：因为数列$\{a_n\}$为等差数列，

所以$a_3+a_7=a_2+a_8=\dfrac{2\pi}{3}$.

所以$\tan(a_3+a_7)=\tan\dfrac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

3.如果点(n, a_n) $(n\in\mathbf{N}^*)$都在直线$3x-y-24=0$上，那么在数列$\{a_n\}$中有（　　）

A.$a_7+a_9>0$

B.$a_7+a_9<0$

C.$a_7+a_9=0$

D.$a_7a_9=0$

C　**解析**：因为$3n-a_n-24=0$，

所以$a_n=3n-24(n\in\mathbf{N}^*)$.

所以$\{a_n\}$为等差数列.

所以 $a_7+a_9=2a_8=0$.

4.(多选)设正项等差数列$\{a_n\}$满足$(a_1+a_{10})^2=2a_2a_9+20$,则　　(　　)

A.a_2a_9 的最大值为 10

B.a_2+a_9 的最大值为 $2\sqrt{10}$

C.$\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_9^2}$的最大值为$\frac{1}{5}$

D.$a_2^4+a_9^4$ 的最小值为 200

ABD　**解析**:因为正项等差数列$\{a_n\}$满足$(a_1+a_{10})^2=2a_2a_9+20$,

所以$(a_2+a_9)^2=2a_2a_9+20$,即 $a_2^2+a_9^2=20$.

A 项,$a_2a_9\leqslant\frac{a_2^2+a_9^2}{2}=\frac{20}{2}=10$,当且仅当 $a_2=a_9=\sqrt{10}$时,等号成立,故 A 选项正确.

B 项,由于$\left(\frac{a_2+a_9}{2}\right)^2\leqslant\frac{a_2^2+a_9^2}{2}=10$,所以$\frac{a_2+a_9}{2}\leqslant\sqrt{10}$,$a_2+a_9\leqslant2\sqrt{10}$,当且仅当 $a_2=a_9=\sqrt{10}$时,等号成立,故 B 选项正确.

C 项,$\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_9^2}=\frac{a_2^2+a_9^2}{a_2^2a_9^2}=\frac{20}{a_2^2a_9^2}\geqslant\frac{20}{\left(\frac{a_2^2+a_9^2}{2}\right)^2}=\frac{20}{10^2}=\frac{1}{5}$,当且仅当 $a_2=a_9=\sqrt{10}$时,等号成立,所以$\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_9^2}$的最小值为$\frac{1}{5}$,故 C 选项错误.

D 项,结合 A 项的结论,有 $a_2^4+a_9^4=(a_2^2+a_9^2)^2-2a_2^2a_9^2=400-2a_2^2a_9^2\geqslant400-2\times10^2=200$,当且仅当 $a_2=a_9=\sqrt{10}$时,等号成立,故 D 选项正确.

5.在等差数列$-5,-3\frac{1}{2},-2,-\frac{1}{2},\cdots$的每相邻两项间插入一个数,使之成为一个新的等差数列$\{a_n\}$,则新数列的通项公式为 $a_n=$________.

$\frac{3}{4}n-\frac{23}{4}$　**解析**:新数列的公差 $d=\frac{1}{2}\times\left(-3\frac{1}{2}+5\right)=\frac{3}{4}$,

所以 $a_n=-5+(n-1)\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}n-\frac{23}{4}$.

6.在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_2+2a_3+a_4=12$.

(1)求 a_5+a_7 的值;

(2)若数列$\{b_n\}$满足 $b_n=a_{2n}-1$,证明:数列$\{b_n\}$是等差数列.

(1)**解**:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

因为 $a_2+a_4=2a_3$,$a_2+2a_3+a_4=4a_3=12$,

所以 $a_3=3$.

因为 $a_3=a_1+2d$,即 $1+2d=3$,所以 $d=1$.

所以 $a_5+a_7=2a_1+10d=12$.

(2)**证明**:由(1)可知 $a_n=n$,

所以 $b_n=a_{2n}-1=2n-1$.

因为 $b_n-b_{n-1}=(2n-1)-[2(n-1)-1]=2(n\geqslant2)$,

$b_1=a_2-1=1$,

所以数列$\{b_n\}$是等差数列,首项是 1,公差是 2.

7.已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$a_1=1$,$a_n\neq0$,$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$,其中 λ 为常数.

(1)证明:$a_{n+2}-a_n=\lambda$;

(2)是否存在 λ,使得$\{a_n\}$为等差数列?请说明理由.

(1)**证明**:由题设知,$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$,$a_{n+1}a_{n+2}=\lambda S_{n+1}-1$,

两式相减得 $a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=\lambda a_{n+1}$.

由于 $a_{n+1}\neq0$,所以 $a_{n+2}-a_n=\lambda$.

(2)**解**:存在.理由如下:

由题设知,$a_1=1$,$a_1a_2=\lambda S_1-1$,可得 $a_2=\lambda-1$.

由(1)知,$a_3=\lambda+1$.

令 $2a_2=a_1+a_3$,

解得 $\lambda=4$.

故 $a_{n+2}-a_n=4$,由此可得

$\{a_{2n-1}\}$是首项为 1,公差为 4 的等差数列,$a_{2n-1}=4n-3$;

$\{a_{2n}\}$是首项为 3,公差为 4 的等差数列,$a_{2n}=4n-1$.

所以 $a_n=2n-1$,$a_{n+1}-a_n=2$.

因此存在 $\lambda=4$,使得数列$\{a_n\}$为等差数列.

8.已知$\{a_n\}$是等差数列,且 $a_1+a_2+a_3=12$,$a_8=16$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若从数列$\{a_n\}$中,依次取出第 2 项、第 4 项、第 6 项……第 $2n$ 项,按原来的顺序组成一个新数列$\{b_n\}$,试求出$\{b_n\}$的通项公式.

解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

因为 $a_1+a_2+a_3=3a_2=12$,所以 $a_2=4$.

因为 $a_8=a_2+(8-2)d$,所以 $16=4+6d$,所以 $d=2$,

所以 $a_n=a_2+(n-2)d=4+(n-2)\times2=2n$.

(2)$a_2=4$,$a_4=8$,$a_6=12$,$a_8=16$,$\cdots$,$a_{2n}=4n$.

当 $n>1$ 时,$a_{2n}-a_{2(n-1)}=4n-4(n-1)=4$,

所以$\{b_n\}$是以 4 为首项,4 为公差的等差数列.

所以 $b_n=b_1+(n-1)d=4+4(n-1)=4n$.

4.2.2 等差数列的前 n 项和公式

第1课时 等差数列的前 n 项和

学习任务目标

1.了解等差数列前 n 项和公式的推导过程.(逻辑推理)

2.掌握等差数列的前 n 项和公式.

3.熟练掌握等差数列的五个量 a_1,d,n,a_n,S_n 的关系,能够由其中三个求另外两个.

4.掌握等差数列的前 n 项和的简单性质.(数学运算)

问题式预习

知识点一 等差数列的前 n 项和公式

$S_n=\underline{\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}}=\underline{na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}}$.

[微训练]

1.在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=1,a_{30}=30$,则数列的前30项和 S_{30} 的值为 ( )

A.456 B.465

C.930 D.654

B 解析:$S_{30}=\dfrac{30\times(a_1+a_{30})}{2}=\dfrac{30\times(1+30)}{2}=465$.

2.设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.若 $a_6=S_3=12$,则数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=$________.

$2n$ 解析:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,

由题知$\begin{cases}a_6=a_1+5d=12,\\S_3=3a_1+3d=12,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=2,\\d=2.\end{cases}$所以 $a_n=2+(n-1)\times2=2n$.

知识点二 等差数列前 n 项和的性质

(1)若数列$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列,S_n 为其前 n 项和,则数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$也是等差数列,且公差为$\underline{\dfrac{d}{2}}$.

(2)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,S_n 为其前 n 项和,则 $S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m},\cdots$仍构成等差数列,且公差为$\underline{m^2d}$.

[微训练]

1.判断(正确的打"√",错误的打"×").

(1)若等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,则 S_6,S_{12},S_{18} 也成等差数列. (×)

(2)若等差数列$\{a_n\}$共有20项,$S_{奇}=a_1+a_3+\cdots+a_{19}$,$S_{偶}=a_2+a_4+\cdots+a_{20}$,则$\dfrac{S_{奇}}{S_{偶}}=\dfrac{a_8}{a_{10}}$. (×)

2.已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,若 $a_2+a_3+a_{14}+a_{15}=40$,则 $S_{16}=$ ( )

A.150 B.160

C.170 D.与 a_1 和公差有关

B 解析:因为$\{a_n\}$是等差数列,所以 $a_2+a_3+a_{14}+a_{15}=2(a_1+a_{16})=40$,所以 $a_1+a_{16}=20$,所以 $S_{16}=\dfrac{16(a_1+a_{16})}{2}=\dfrac{16\times20}{2}=160$.故选B.

3.已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$S_2=4,S_4=9$,则 $S_6=$________.

15 解析:因为 S_2,S_4-S_2,S_6-S_4 成等差数列,所以 $4+(S_6-9)=2\times(9-4)$,解得 $S_6=15$.

任务型课堂

任务一 等差数列的前 n 项和公式

1.设 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和,且 $a_1=1,a_4=7$,则 $S_9=$________.

81 解析:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,则 $a_4=a_1+3d=1+3d=7$,所以 $d=2$.

故 $S_9=9a_1+\dfrac{9\times8}{2}d=9+\dfrac{9\times8}{2}\times2=81$.

2.设 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和,若 $S_3=3,S_6=24$,则 $a_9=$________.

15 解析:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,

则$\begin{cases}S_3=3a_1+\dfrac{3\times2}{2}d=3,\\S_6=6a_1+\dfrac{6\times5}{2}d=24,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=-1,\\d=2.\end{cases}$

所以 $a_9=a_1+8d=-1+8\times2=15$.

3. 在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_1=1$，$a_n=-512$，前n项和$S_n=-1\ 022$，则公差$d=$________.

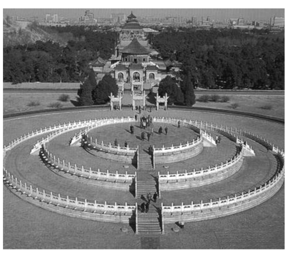
-171　**解析**：由$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(1-512)}{2}=-1\ 022$，解得$n=4$.

又由$a_n=a_1+(n-1)d$，即$-512=1+(4-1)d$，解得$d=-171$.

任务二　等差数列前n项和性质的应用

[探究活动]

如图，北京天坛的圜丘坛为古代祭天的场所，分上、中、下三层．上层中心有一块圆形石板(称为天心石)，环绕天心石砌9块扇面形石板构成第一环，向外每环的扇面形石板依次增加9块．下一层第一环的扇面形石板比上一层的最后一环多9块，向外每环的扇面形石板也依次增加9块．已知每层环数相同，且下层的扇面形石板比中层多729块．



探究1：从内到外每环的扇面形石板数能构成等差数列吗？

提示：能，且公差$d=9$，首项$a_1=9$.

探究2：每一层有多少环扇面形石板？

提示：设每一层有n环．由题意可知从内到外每环的扇面形石板数构成等差数列，且公差$d=9$，$a_1=9$，设该等差数列的前m项和为S_m．由等差数列的性质可得S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$成等差数列，且$(S_{3n}-S_{2n})-(S_{2n}-S_n)=n^2d$，则$n^2d=729$，解得$n=9$，即每一层有9环扇面形石板．

探究3：下层最后一环有多少块扇面形石板？

提示：由探究1、探究2，记从内到外每环的扇面形石板数构成的等差数列为$\{a_n\}$，则公差$d=9$，$a_1=9$，且下层最后一环的扇面形石板数为数列$\{a_n\}$的第27项，所以$a_n=9+(n-1)\times 9=9n$，$a_{27}=9\times 27=243$，即下层最后一环有243块扇面形石板．

[评价活动]

1. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_{10}=310$，$S_{20}=1\ 220$，求S_{30}.

解：(方法一)设数列$\{a_n\}$的公差为d.

由已知，得$\begin{cases}10a_1+\frac{1}{2}\times 10\times 9\times d=310,\\20a_1+\frac{1}{2}\times 20\times 19\times d=1\ 220,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=4,\\d=6.\end{cases}$

所以$S_{30}=30\times 4+\frac{1}{2}\times 30\times 29\times 6=2\ 730$.

(方法二)因为数列$\{a_n\}$为等差数列，

所以S_{10}，$S_{20}-S_{10}$，$S_{30}-S_{20}$也成等差数列．

所以$2(S_{20}-S_{10})=S_{10}+S_{30}-S_{20}$，

即$2\times(1\ 220-310)=310+S_{30}-1\ 220$，

所以$S_{30}=2\ 730$.

(方法三)设$S_n=An^2+Bn$(A，B为常数)．

由题意，得$\begin{cases}310=100A+10B,\\1\ 220=400A+20B,\end{cases}$解得$\begin{cases}A=3,\\B=1.\end{cases}$

所以$S_n=3n^2+n$．所以$S_{30}=3\times 900+30=2\ 730$.

(方法四)设数列$\{a_n\}$的公差为d.

由$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，得$\frac{S_n}{n}=a_1+(n-1)\frac{d}{2}$，

所以$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是以$a_1$为首项，$\frac{d}{2}$为公差的等差数列．

所以$\frac{S_{10}}{10}$，$\frac{S_{20}}{20}$，$\frac{S_{30}}{30}$成等差数列，

所以$\frac{S_{10}}{10}+\frac{S_{30}}{30}=2\times\frac{S_{20}}{20}$.

所以$S_{30}=30\times\left(\frac{S_{20}}{10}-\frac{S_{10}}{10}\right)=30\times(122-31)=2\ 730$.

2. 已知项数为奇数的等差数列$\{a_n\}$，奇数项之和为44，偶数项之和为33，求这个数列的中间项及项数．

解：设等差数列$\{a_n\}$共有$(2n+1)$项，则奇数项有$(n+1)$项，偶数项有n项，中间项是第$(n+1)$项，即a_{n+1}，所以$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{\frac{1}{2}(a_1+a_{2n+1})(n+1)}{\frac{1}{2}(a_2+a_{2n})n}$

$=\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_{n+1}}=\frac{n+1}{n}=\frac{44}{33}=\frac{4}{3}$，所以$n=3$.

因为$S_{奇}=(n+1)a_{n+1}=44$，

所以$a_{n+1}=11$.

所以这个数列的中间项为11，共有$2n+1=7$(项)．

3. 设$\{a_n\}$为等差数列，S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_1=-2$，$S_7=7$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设T_n为数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$的前$n$项和，求$T_n$.

解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

则$S_n=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d$.

因为$S_7=7$，$a_1=-2$，

所以 $7=7\times(-2)+\frac{7\times 6}{2}d$，解得 $d=1$.

所以 $a_n=-2+(n-1)\times 1=n-3$.

(2)因为 $\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{1}{2}(n-1)d=-2+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n-5}{2}$，所以 $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{1}{2}$.

又 $\frac{S_1}{1}=\frac{a_1}{1}=-2$，

所以数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列，其首项为 -2，公差为 $\frac{1}{2}$，

所以 $T_n=n\times(-2)+\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}n^2-\frac{9}{4}n$.

【类题通法】

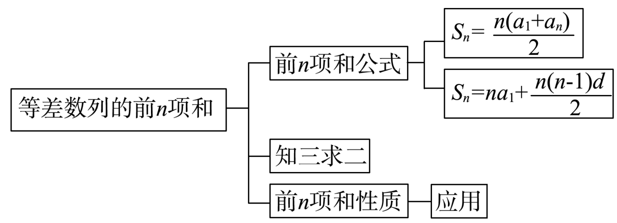
1. 设等差数列的项数有限，其奇数项的和为 $S_{奇}$，偶数项的和为 $S_{偶}$.

(1)若等差数列的项数为 $2n$，则 $S_{2n}=n(a_n+a_{n+1})$，$S_{偶}-S_{奇}=nd$，$\frac{S_{偶}}{S_{奇}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

(2)若等差数列的项数为 $2n+1$，则 $S_{2n+1}=(2n+1)a_{n+1}$，$S_{偶}-S_{奇}=-a_{n+1}$，$\frac{S_{偶}}{S_{奇}}=\frac{n}{n+1}$.

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_n=m$，$a_m=n(m\neq n)$，则 $a_{m+n}=0$；若 $S_n=m$，$S_m=n(m\neq n)$，则 $S_{m+n}=-(m+n)$；若 $S_m=S_n(m\neq n)$，则 $S_{m+n}=0$.

提质归纳



课后素养评价（五）

基础性·能力运用

1. (多选)若等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，前 5 项和 $S_5=25$，且 $a_2=3$，则 ( )

A. $a_1=1$　　B. $a_7=13$

C. $d=2$　　D. $d=3$

ABC **解析**：由题可得

$\begin{cases}S_5=5a_1+10d=25,\\a_2=a_1+d=3,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a_1=1,\\d=2.\end{cases}$

所以 $a_7=a_1+6d=13$.

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_4+a_8=16$，则该数列前 11 项和 $S_{11}=$ ( )

A. 58　　B. 88　　C. 143　　D. 176

B **解析**：$S_{11}=\frac{11\times(a_1+a_{11})}{2}=\frac{11\times(a_4+a_8)}{2}=88$.

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 若 $a_1=2$，且 $S_3=S_{19}$，则 $S_{21}=$ ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

B **解析**：方法一：因为 $S_3=S_{19}$，所以 $S_{19}-S_3=a_4+a_5+\cdots+a_{19}=8(a_4+a_{19})=0$，

所以 $a_4+a_{19}=0$，

$S_{21}=a_1+a_2+a_3+(a_4+a_5+\cdots+a_{19})+a_{20}+a_{21}=a_1+a_2+a_3+a_{20}+a_{21}=a_1+2(a_4+a_{19})=a_1=2$.

方法二：由于 $S_n=An^2+Bn$（A，B 为常数），$S_3=S_{19}$，根据二次函数图象的对称性可知，$S_{21}=S_1=a_1=2$.

故选 B.

4. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 若 $a_1+a_2+a_3=a_4+a_5$，$S_5=60$，则 $a_5=$ ( )

A. 16　　B. 20

C. 24　　D. 26

A **解析**：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

因为 $a_1+a_2+a_3=a_4+a_5$，

所以 $3a_1+3d=2a_1+7d$，所以 $a_1=4d$.

又因为 $S_5=5a_1+10d=30d=60$，

所以 $d=2$，所以 $a_1=8$. 所以 $a_5=a_1+4d=16$.

5. 已知一个项数有限的等差数列 $\{a_n\}$，前 4 项的和是 40，最后 4 项的和是 80，所有项的和是 210，则此数列的项数为 ( )

A. 12　　B. 14

C. 16　　D. 18

B **解析**：由题意知 $a_1+a_2+a_3+a_4=40$，$a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}=80$，两式相加得 $a_1+a_n=30$. 又因为 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{30n}{2}=210$，所以 $n=14$.

6. $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_1+a_4+a_7=39$，$a_3+a_6+a_9=27$，则前 9 项和 $S_9=$________.

99 **解析**：在等差数列 $\{a_n\}$ 中，由 $a_1+a_4+a_7=39$，$a_3+a_6+a_9=27$ 两式相加可得 $a_1+a_4+a_7+a_3+a_6+a_9=39+27=66$.

而由等差数列的性质可得 $a_1+a_9=a_4+a_6=a_7+a_3=2a_5$，

故可得 $6a_5=66$，解得 $a_5=11$，故 $S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=$

$9a_5=99$.

7. 等差数列$\{a_n\}$前 n 项和为 S_n，且 $S_3=30$，$S_6=100$，则$S_9=$________.

210 **解析**：因为 S_3，S_6-S_3，S_9-S_6 成等差数列，即 30，70，S_9-100 成等差数列，

所以 $140=30+S_9-100$，所以 $S_9=210$.

8. 在等差数列$\{a_n\}$中，S_n 是其前 n 项和，$a_1=-11$，$\frac{S_{10}}{10}-\frac{S_8}{8}=2$，则 $S_{11}=$________.

-11 **解析**：由题意知，$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是等差数列，首项为$\frac{a_1}{1}=-11$.

设公差为 d，则$\frac{S_{10}}{10}-\frac{S_8}{8}=2d=2$，所以 $d=1$，

所以$\frac{S_{11}}{11}=-11+10\times1=-1$.

所以 $S_{11}=-11$.

9. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_3=6$，$a_9=17$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n.

解：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

(1)因为 $a_1+a_3=2a_2=6$，所以 $a_2=3$，

所以 $d=\frac{a_9-a_2}{9-2}=\frac{17-3}{9-2}=2$，

则 $a_n=a_2+(n-2)d=3+(n-2)\times2=2n-1$.

(2)由(1)可得 $a_1=1$，所以 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}=n^2$.

综合性·创新提升

1. 若$\{a_n\}$是等差数列，且 a_2，$a_{2\,022}$是方程$x^2-4x+3=0$ 的两个根，则 $2^{a_1}\times2^{a_2}\times2^{a_3}\times\cdots\times2^{a_{2\,023}}=$ ( )

A.4 046　B.4 044　C.$2^{4\,046}$　D.$2^{4\,044}$

C **解析**：因为 a_2，$a_{2\,022}$是方程 $x^2-4x+3=0$ 的两个根，

所以 $a_2+a_{2\,022}=4$，

所以 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2\,023}=\frac{2\,023(a_1+a_{2\,023})}{2}=\frac{2\,023(a_2+a_{2\,022})}{2}=4\,046$，

所以 $2^{a_1}\times2^{a_2}\times2^{a_3}\times\cdots\times2^{a_{2\,023}}=2^{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2\,023}}=2^{4\,046}$.

故选 C.

2. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n. 若 $a_3+a_7+a_{11}=12$，则 S_{13}等于 ( )

A.52　B.54　C.56　D.58

A **解析**：因为 $a_3+a_7+a_{11}=12$，所以 $a_7=4$，

所以 $S_{13}=\frac{13(a_1+a_{13})}{2}=13a_7=52$.

3. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且$\frac{S_4}{S_8}=\frac{1}{3}$，则$\frac{S_8}{S_{16}}=$ ( )

A.$\frac{3}{10}$　B.$\frac{3}{7}$　C.$\frac{1}{3}$　D.$\frac{1}{2}$

A **解析**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

因为$\frac{S_4}{S_8}=\frac{4a_1+6d}{8a_1+28d}=\frac{1}{3}$，所以 $a_1=\frac{5}{2}d$.

所以$\frac{S_8}{S_{16}}=\frac{8a_1+28d}{16a_1+120d}=\frac{48d}{160d}=\frac{3}{10}$.

4. 在等差数列$\{a_n\}$中，S_n 为其前 n 项和. 已知 $S_3=9$，$a_4+a_5+a_6=7$，则$S_9-S_6=$________.

5 **解析**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

因为 S_3，S_6-S_3，S_9-S_6 成等差数列，而$S_3=9$，$S_6-S_3=a_4+a_5+a_6=7$，所以 $S_9-S_6=5$.

5. 若 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，$S_9=-36$，$S_{13}=-104$，则 a_5 与 a_7 的等差中项为________.

-6 **解析**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

因为$\begin{cases}S_9=9a_1+36d=-36,\\S_{13}=13a_1+78d=-104,\end{cases}$

所以$\begin{cases}a_1=4,\\d=-2.\end{cases}$

因为 a_5 与 a_7 的等差中项为 a_6，

所以 $a_6=4+5\times(-2)=-6$.

6. (2022·浙江(节选))已知等差数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=-1$，公差 $d>1$. 记$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n(n\in\mathbf{N}^*)$. 若 $S_4-2a_2a_3+6=0$，求 S_n.

解：因为 $S_4-2a_2a_3+6=0$，$a_1=-1$，

所以$-4+6d-2(-1+d)(-1+2d)+6=0$，

所以 $d^2-3d=0$.

又 $d>1$，所以 $d=3$，所以 $a_n=3n-4$，

所以 $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{3n^2-5n}{2}$.

7. 等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_2+a_4=48$，$a_5=28$. 若 $S_n+30>n\lambda$ 对任意$n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，求实数 λ 的取值范围.

解：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

由题意得 $a_2+a_4=a_1+a_5=48$，因为 $a_5=28$，

所以 $a_1=20$，则 $d=\frac{28-20}{5-1}=2$，

所以 $S_n=20n+\frac{n(n-1)}{2}\times2=n(n+19)$.

由 $n(n+19)+30>n\lambda$ 得 $\lambda<\frac{n^2+19n+30}{n}=n+\frac{30}{n}+$

19 成立.

设 $f(x)=x+\frac{30}{x}+19$,令 $x=\frac{30}{x}$,解得 $x=\pm\sqrt{30}$.

当 $x\in(0,\sqrt{30})$时,$f(x)$单调递减;当 $x\in(\sqrt{30},+\infty)$时,$f(x)$单调递增.

又因为 $5<\sqrt{30}<6$,$f(5)=f(6)=30$,

所以当 $n=5$ 或 $n=6$ 时,$n+\frac{30}{n}+19$ 取得最小值 30,

所以 $\lambda<30$.

8.已知 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和,且 $S_2=2$,$S_3=-6$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式和前 n 项和 S_n.

(2)是否存在 n,使 S_n,$S_{n+2}+2n$,S_{n+3}成等差数列?若存在,求出 n 的值;若不存在,请说明理由.

解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,

则$\begin{cases}2a_1+d=2,\\3a_1+\frac{3\times2}{2}d=-6,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=4,\\d=-6,\end{cases}$

所以 $a_n=4-6(n-1)=10-6n$,

$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=7n-3n^2$.

(2)存在.$S_n+S_{n+3}=7n-3n^2+7(n+3)-3(n+3)^2=-6n^2-4n-6$.

$S_{n+2}=7(n+2)-3(n+2)^2=-3n^2-5n+2$,

$2(S_{n+2}+2n)=2(-3n^2-5n+2+2n)=-6n^2-6n+4$.

若存在 n,使 S_n,$S_{n+2}+2n$,S_{n+3}成等差数列,

则 $-6n^2-4n-6=-6n^2-6n+4$,解得 $n=5$,

所以存在 $n=5$,使 S_n,$S_{n+2}+2n$,S_{n+3}成等差数列.

第 2 课时　等差数列前 n 项和的应用

学习任务目标

1.了解等差数列前 n 项和的一些性质,会应用等差数列前 n 项和解决实际问题.(数学建模)

2.掌握解决等差数列前 n 项和的最值问题的方法.(数学运算)

3.会用裂项相消法求和.(数学运算)

问题式预习

知识点　等差数列前 n 项和的性质

(1)设两个等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n,T_n,则$\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\frac{a_n}{b_n}$.

(2)等差数列前 n 项和 S_n有最大(小)值的情形:

①若 $a_1>0$,$d<0$,则 S_n存在最大值,即所有非负项之和;

②若 $a_1<0$,$d>0$,则 S_n存在最小值,即所有非正项之和.

[微训练]

1.判断(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)等差数列的前 n 项和 S_n一定是关于 n 的二次函数.　(×)

(2)若无穷等差数列$\{a_n\}$的公差 $d>0$,则其前 n 项和 S_n不存在最大值.　(√)

(3)若两个等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 A_n,B_n,则一定有$\frac{A_n}{B_n}=\frac{a_n}{b_n}$.　(×)

2.设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.若 $a_2=-3$,$S_5=-10$,则 $a_5=$________,S_n的最小值为________.

0　-10　**解析**:$a_2=a_1+d=-3$,$S_5=5a_1+10d=-10$,即 $a_1+2d=-2$,解得 $a_1=-4$,$d=1$,所以 $a_5=a_1+4d=0$,$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{n^2-9n}{2}$.

当 $n=4$ 或 5 时,S_n最小,最小值为 -10.

任务型课堂

任务一　等差数列前 n 项和的实际应用

[探究活动]

在我国古代著名的数学专著《九章算术》里有一个“二马至齐”问题,现有类似情境:今有良马与驽马发某地至齐,齐去此地一千一百二十五里.良马初日行一百零三里,日增十三里;驽马初日行九十七里,日减半里;良马先至齐,复还迎驽马,二马相逢.

探究 1:相逢时两马共行多少里?

提示：1 125×2=2 250(里).

探究 2：从出发到两马相逢共多少日？

提示：由题可知，良马每日所行路程 a_n 构成一个首项为 103，公差为 13 的等差数列，

驽马每日所行路程 b_n 构成一个首项为 97，公差为 $-\frac{1}{2}$ 的等差数列，

则 $a_n=103+13(n-1)=13n+90$，$b_n=97-\frac{1}{2}(n-1)=\frac{195}{2}-\frac{1}{2}n$.

设从出发到两马相逢共 n 日.

由探究 1 知数列 $\{a_n\}$ 与数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 1 125×2=2 250，

又因为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $\frac{n}{2}\times(103+13n+90)=\frac{n}{2}\times(193+13n)$，

数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $\frac{n}{2}\times\left(97+\frac{195}{2}-\frac{1}{2}n\right)=\frac{n}{2}\times\left(\frac{389}{2}-\frac{1}{2}n\right)$，

所以 $\frac{n}{2}\times(193+13n)+\frac{n}{2}\times\left(\frac{389}{2}-\frac{1}{2}n\right)=2\ 250$.

整理，得 $25n^2+775n-9\ 000=0$，

即 $n^2+31n-360=0$，

解得 $n=9$ 或 $n=-40$(舍)，

即从出发到两马相逢共 9 日.

[评价活动]

1.为了参加学校的长跑比赛，高二年级小李同学完成了一个为期 15 天的训练.已知后一天的跑步路程都是在前一天的基础上增加相同路程.若小李同学前三天共跑了 3 600 米，最后三天共跑了 10 800 米，则这 15 天的训练中小李同学的跑步路程之和为（　　）

A.34 000 米　　B.36 000 米

C.38 000 米　　D.40 000 米

B　**解析**：根据题意知，小李同学每天的跑步路程构成等差数列，记为 $\{a_n\}$，设其前 n 项和为 S_n.$a_1+a_2+a_3=3a_2=3\ 600$，故 $a_2=1\ 200$；$a_{13}+a_{14}+a_{15}=3a_{14}=10\ 800$，故 $a_{14}=3\ 600$.

所以 $S_{15}=\frac{1}{2}(a_1+a_{15})\times15=\frac{1}{2}(a_2+a_{14})\times15=36\ 000$.故选 B.

2.在某地举办的苹果节上，一商家将参展的苹果摆成 16 层，从上到下每层的苹果数构成一个等差数列.已知第 8 层和第 9 层共有苹果40 个，则此商家参展的苹果共有（　　）

A.300 个　　B.320 个　　C.340 个　　D.360 个

B　**解析**：由题意，设每层摆放的苹果的数量构成的等差数列为 $\{a_n\}$，其前 n 项和为 S_n.因为 $a_8+a_9=40$，所以 $S_{16}=\frac{16(a_1+a_{16})}{2}=\frac{16(a_8+a_9)}{2}=\frac{16\times40}{2}=320$.故选 B.

3.一个剧场共有 20 排座位，后一排比前一排多 2 个座位，最后一排有 60 个座位，则该剧场的总座位数为________.

820　**解析**：因为剧场有 20 排座位，后一排比前一排多 2 个座位，最后一排有 60 个座位，所以 20 排座位的数量构成以 60 为首项，-2 为公差的等差数列.设该数列的前 n 项和为 S_n，则 $S_{20}=20\times60+\frac{20\times19}{2}\times(-2)=820$.

任务二　等差数列前 n 项和的最值问题

[探究活动]

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项依次为 $-8,-5,-2,1,4$.在等差数列 $\{b_n\}$ 中，$b_1=10$，公差 $d=-3$.

探究 1：数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 有最大值还是最小值？n 为多少时取得？

提示：当 $n=3$ 时，S_n 取得最小值.

探究 2：数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 有最大值还是最小值？n 为多少时取得？

提示：当 $n=4$ 时，S_n 取得最大值.

探究 3：利用函数的性质，如何判断等差数列前 n 项和 S_n 能否取得最值？

提示：等差数列前 n 项和 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$，是关于 n 的二次函数.利用二次函数图象的开口方向及对称轴的位置即可判断.

[评价活动]

1.在等差数列 $\{a_n\}$ 中，S_n 为其前 n 项和，$a_1=29$，$S_{10}=S_{20}$，则 S_n 的最大值为（　　）

A.S_{15}　　B.S_{16}　　C.S_{15} 或 S_{16}　　D.S_{17}

A　**解析**：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

因为 $a_1=29$，$S_{10}=S_{20}$，

所以 $10a_1+\frac{10\times9}{2}d=20a_1+\frac{20\times19}{2}d$，解得 $d=-2$.

所以 $S_n=29n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-2)=-n^2+30n=-(n-15)^2+225$.

所以当 $n=15$ 时，S_n取得最大值.

2.在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=7$，公差为 d，前 n 项和为 S_n，当且仅当 $n=8$ 时 S_n 取得最大值，则 d 的取值

范围为________.

$\left(-1,-\frac{7}{8}\right)$ **解析**：由题意，当且仅当 $n=8$ 时 S_n 有最大值，

可得$\begin{cases}d<0,\\a_8>0,\\a_9<0,\end{cases}$即$\begin{cases}d<0,\\7+7d>0,\\7+8d<0,\end{cases}$解得$-1<d<-\frac{7}{8}$.

3. 在等差数列$\{a_n\}$中，S_n为其前 n 项和，$a_1=25$，$S_{17}=S_9$，数列$\{a_n\}$的前多少项和最大？

解：(方法一)因为 $a_1=25$，$S_{17}=S_9$，

所以 $17a_1+\frac{17\times16}{2}d=9a_1+\frac{9\times8}{2}d$，解得 $d=-2$.

从而 $S_n=25n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-2)=-n^2+26n=-(n-13)^2+169$.

故数列$\{a_n\}$的前 13 项和最大.

(方法二)由方法一得 $d=-2$.

因为 $a_1=25>0$，

由$\begin{cases}a_n=25-2(n-1)\geqslant0,\\a_{n+1}=25-2n\leqslant0,\end{cases}$得$\begin{cases}n\leqslant13\frac{1}{2},\\n\geqslant12\frac{1}{2}.\end{cases}$

所以当 $n=13$ 时，S_n有最大值，即数列$\{a_n\}$的前 13 项和最大.

4. 记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，已知 $a_1=-8$，$S_3=-18$.

(1)求公差 d 及数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求 S_n，并求 S_n 的最小值及取得最小值时 n 的值.

解：(1)在等差数列$\{a_n\}$中，

因为 $a_1=-8$，$S_3=-18$，

所以 $S_3=3a_1+\frac{3\times2}{2}d=-24+3d=-18$，则 $d=2$，

所以 $a_n=-8+(n-1)\times2=2n-10$.

(2)$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(-8+2n-10)}{2}=n^2-9n$.

因为 $S_n=n^2-9n=\left(n-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{81}{4}$，又 n 为正整数，

所以 $n=4$ 或 5 时，S_n 的最小值为-20.

【类题通法】

求等差数列前 n 项和 S_n 最值的方法

(1)函数法：利用等差数列前 n 项和的函数表达式 $S_n=an^2+bn(a\neq0)$，通过配方或借助函数图象求解.

(2)邻项变号法：①若 $a_1>0$，$d<0$，则满足$\begin{cases}a_m\geqslant0,\\a_{m+1}\leqslant0\end{cases}$的项数 m 使得 S_n 取得最大值 S_m；

②若 $a_1<0$，$d>0$，则满足$\begin{cases}a_m\leqslant0,\\a_{m+1}\geqslant0\end{cases}$的项数 m 使得 S_n 取得最小值 S_m.

(3)一般地，在等差数列$\{a_n\}$中，若 $a_1>0$，且 $S_p=S_q$ $(p\neq q)$，则

①若 $p+q$ 为偶数，则当 $n=\frac{p+q}{2}$ 时，S_n 最大；

②若 $p+q$ 为奇数，则当 $n=\frac{p+q-1}{2}$ 或 $n=\frac{p+q+1}{2}$ 时，S_n 最大.

任务三 与等差数列相关的特殊数列的前 n 项和

1. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_3=3$，$S_4=10$，则$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=$________.

$\frac{2n}{n+1}$ **解析**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

由题意有$\begin{cases}a_1+2d=3,\\4a_1+\frac{4\times3}{2}d=10,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=1.\end{cases}$

数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=n\times1+\frac{n(n-1)}{2}\times1=\frac{n(n+1)}{2}$，

可得$\frac{1}{S_k}=\frac{2}{k(k+1)}=2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$，

所以$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}$

$=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$

$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$.

2. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=-\frac{3}{2}n^2+\frac{205}{2}n$，求数列$\{|a_n|\}$的前 n 项和 T_n.

解：当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=-\frac{3}{2}\times1^2+\frac{205}{2}\times1=101$.

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(-\frac{3}{2}n^2+\frac{205}{2}n\right)-\left[-\frac{3}{2}(n-1)^2+\frac{205}{2}(n-1)\right]=-3n+104$.

因为 $a_1=101$ 也满足上式，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=-3n+104$.

由$a_n=-3n+104\geqslant 0$,得$n\leqslant\frac{104}{3}$.

即当$n\leqslant 34$时,$a_n>0$;当$n\geqslant 35$时,$a_n<0$.

①当$n\leqslant 34$时,$T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n=-\frac{3}{2}n^2+\frac{205}{2}n$.

②当$n\geqslant 35$时,

$T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{34}|+|a_{35}|+\cdots+|a_n|$

$=2(a_1+a_2+\cdots+a_{34})-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$

$=2S_{34}-S_n$

$=2\left(-\frac{3}{2}\times 34^2+\frac{205}{2}\times 34\right)-\left(-\frac{3}{2}n^2+\frac{205}{2}n\right)$

$=\frac{3}{2}n^2-\frac{205}{2}n+3\ 502$.

所以$T_n=\begin{cases}-\frac{3}{2}n^2+\frac{205}{2}n, n\leqslant 34,\\ \frac{3}{2}n^2-\frac{205}{2}n+3\ 502, n\geqslant 35.\end{cases}$

3. 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=3$,公差$d=2$,S_n为其前n项和,求$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}$.

解:因为等差数列$\{a_n\}$的首项$a_1=3$,公差$d=2$,所以前n项和$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=3n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2+2n(n\in\mathbf{N}^*)$,

所以$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n^2+2n}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$.

所以$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}$

$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$.

4. 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=-60$,$a_{17}=-12$,求数列$\{|a_n|\}$的前n项和.

解:因为数列$\{a_n\}$的公差$d=\frac{a_{17}-a_1}{17-1}=\frac{-12-(-60)}{17-1}=3$,

所以$a_n=a_1+(n-1)d=-60+(n-1)\times 3=3n-63$.

令$a_n<0$,即$3n-63<0$,解得$n<21$.

所以数列$\{a_n\}$的前20项是负数,第20项以后的项都为非负数.

设S_n,S_n'分别表示数列$\{a_n\}$和$\{|a_n|\}$的前n项和.

当$n\leqslant 20$时,

$S_n'=-S_n=-\left[-60n+\frac{n(n-1)}{2}\times 3\right]=-\frac{3}{2}n^2+\frac{123}{2}n$;

当$n>20$时,

$S_n'=-S_{20}+(S_n-S_{20})=S_n-2S_{20}=-60n+\frac{n(n-1)}{2}\times 3-2\times\left(-60\times 20+\frac{20\times 19}{2}\times 3\right)=\frac{3}{2}n^2-\frac{123}{2}n+1\ 260$.

所以数列$\{|a_n|\}$的前n项和

$S_n'=\begin{cases}-\frac{3}{2}n^2+\frac{123}{2}n, n\leqslant 20,\\ \frac{3}{2}n^2-\frac{123}{2}n+1\ 260, n>20.\end{cases}$

【类题通法】

特殊的求和方法——裂项相消法

把数列的通项拆成两项之差,即数列的每一项可按此方法拆成两项之差,在求和时一些正负项相抵消,于是前n项和变成首尾若干项之和,这一求和方法称为裂项相消法.

常见的拆项公式(其中$n\in\mathbf{N}^*$):

①$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$;

②$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$;

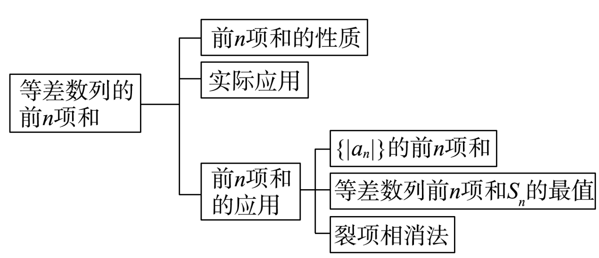
③$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$;

④若等差数列$\{a_n\}$的公差为d,

则$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$,$\frac{1}{a_na_{n+2}}=\frac{1}{2d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$;

⑤$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$.

提质归纳



课后素养评价(六)

基础性·能力运用

1. 已知数列$\{a_n\}$为递增等差数列,且前3项和$S_3=-3$,$a_1a_2a_3=8$,则$\{|a_n|\}$的前5项和为 ( )

A. -20　B. 10　C. 20　D. 24

C **解析**:设$\{a_n\}$公差为d.

则$\begin{cases}S_3=3a_1+3d=3a_2=-3,\\(a_2-d)a_2(a_2+d)=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=3,\\a_1=-4\end{cases}$或$\begin{cases}d=-3,\\a_1=2.\end{cases}$因为数列$\{a_n\}$为递增等差数列,所以$d=3$,$a_1=-4$,所以数列$\{|a_n|\}$的前5项分别为4,1,2,5,8,其和为20.故选C.

2. (多选)朱世杰是元代著名数学家,他所著的《算学启蒙》是一部算学普及著作.《算学启蒙》中有一些"堆垛"问题,其实质是利用"堆垛"研究数列以及数列的求和问题.现有100根相同的圆柱形铅笔,小明将它们堆放成纵断面为等腰梯形的"垛",要求铅笔没有剩余,层数不小于2,且从最下面一层开始,每一层比上一层多1根,则该等腰梯形"垛"堆放的层数可以是 ( )

A. 4　B. 5　C. 7　D. 8

BD **解析**:从上至下各层铅笔的根数构成等差数列,设首项即第一层的根数为a_1,公差为$d=1$.若一共堆放$n(n\geqslant 2)$层,则总根数$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}=100$,整理得$2a_1=\dfrac{200}{n}+1-n$.

因为$a_1\in\mathbf{N}^*$,所以n为200的因数,$\dfrac{200}{n}+(1-n)$大于等于2且为偶数,验证可知$n=5$或$n=8$满足题意.

3. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=26-2n$.若使此数列的前n项和S_n最大,则n的值为 ( )

A. 12　B. 13

C. 12或13　D. 14

C **解析**:由$a_n\geqslant 0$,得$n\leqslant 13$,当$n=13$时,$a_n=0$,所以$S_{13}=S_{12}$,为最大.

4. (多选)已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2-4n+1$,则 ( )

A. $a_n=2n-5$

B. $\{a_n\}$不是等差数列

C. 在数列$\{a_n\}$中,a_2最小

D. $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{10}|=67$

BD **解析**:因为$S_n=n^2-4n+1$,当$n=1$时,$a_1=S_1=1^2-4\times1+1=-2$,

当$n\geqslant 2$时,$S_{n-1}=(n-1)^2-4(n-1)+1$,

所以$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-4n+1-[(n-1)^2-4(n-1)+1]=2n-5(n\geqslant 2)$,显然当$n=1$时,$a_n=2n-5$不成立,

所以$a_n=\begin{cases}-2,n=1,\\2n-5,n\geqslant 2,\end{cases}$所以$\{a_n\}$从第二项起为以2为公差的等差数列,

故数列$\{a_n\}$不是等差数列,故A错误,B正确.

从第二项起$\{a_n\}$为递增的等差数列,又$a_1<a_2$,所以a_1为数列的最小项,故C错误;

因为$a_1<a_2<0<a_3<\cdots<a_{10}$,所以

$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{10}|=-a_1-a_2+a_3+\cdots+a_{10}=S_{10}-2(a_1+a_2)=10^2-4\times10+1-2(-2-1)=67$,故D正确.

故选BD.

5. 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1>0$,$a_{10}\cdot a_{11}<0$.若此数列前10项和$S_{10}=36$,前18项和$S_{18}=12$,则数列$\{|a_n|\}$的前18项和T_{18}的值为________.

60 **解析**:因为$a_1>0$,$a_{10}\cdot a_{11}<0$,

所以$d<0$,$a_{10}>0$,$a_{11}<0$,

所以$T_{18}=a_1+a_2+\cdots+a_{10}-(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{18})=S_{10}-(S_{18}-S_{10})=60$.

6. 已知等差数列$\{a_n\}$,$|a_5|=|a_9|$,公差$d>0$,则使得其前n项和S_n取得最小值的正整数n的值是________.

6或7 **解析**:因为$d>0$,所以$|a_5|=|a_9|$可化为$-a_5=a_9$.

即$a_5+a_9=2a_7=0$.所以$a_7=0$,所以$a_6<0$,$a_8>0$.所以$S_6=S_7$,为最小.

7. 已知数列$\{a_n\}$为等差数列,其中$a_2+a_3=8$,$a_5=3a_2$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)记$b_n=\dfrac{2}{a_na_{n+1}}$,设$\{b_n\}$的前$n$项和为$S_n$,求使得$S_n>\dfrac{2\,020}{2\,021}$的正整数$n$的最小值.

解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,

依题意有$\begin{cases}2a_1+3d=8,\\a_1+4d=3a_1+3d,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}$

从而$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-1$.

(2)因为$b_n=\dfrac{2}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}$,

所以$S_n=\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)=1-\dfrac{1}{2n+1}$.

令$1-\dfrac{1}{2n+1}>\dfrac{2\,020}{2\,021}$,解得$n>1\,010$,故$n$的最小值为1 011.

综合性·创新提升

1.已知数列$\{a_n\}$是等差数列.若$a_9+a_{12}>0$,$a_{10}\cdot a_{11}<0$,且数列$\{a_n\}$的前n项和S_n有最大值,那么当$S_n>0$时,n的最大值为　(　　)

A.10　　B.11

C.20　　D.21

C　**解析**:由等差数列的性质可知,$a_9+a_{12}=a_{11}+a_{10}>0$,

又因为$a_{10}\cdot a_{11}<0$,所以a_{10}和a_{11}异号.

因为数列$\{a_n\}$的前n项和S_n有最大值,

所以数列$\{a_n\}$是递减的等差数列,即$a_n-a_{n-1}<0$,

所以$a_{10}>0$,$a_{11}<0$,所以$S_{21}=\frac{21\times(a_1+a_{21})}{2}=21a_{11}<0$,$S_{20}=\frac{20(a_1+a_{20})}{2}=10(a_9+a_{12})>0$,

所以当$S_n>0$时,n的最大值为20.故选C.

2.(多选)设d,S_n分别为等差数列$\{a_n\}$的公差与前n项和.若$S_{10}=S_{20}$,则下列结论中正确的有　(　　)

A.当$n=15$时,S_n取最大值

B.当$n=30$时,$S_n=0$

C.当$d>0$时,$a_{10}+a_{22}>0$

D.当$d<0$时,$|a_{10}|>|a_{22}|$

BC　**解析**:因为d,S_n分别为等差数列$\{a_n\}$的公差与前n项和,$S_{10}=S_{20}$,

所以$10a_1+\frac{10\times9}{2}d=20a_1+\frac{20\times19}{2}d$,

可得$a_1=-\frac{29}{2}d$,

$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}\times d=-\frac{29}{2}nd+\frac{d}{2}n^2-\frac{1}{2}nd=\frac{d}{2}(n-15)^2-\frac{225}{2}d$.

若$d>0$,当$n=15$时,S_n取最小值,若$d<0$,当$n=15$时,S_n取最大值,故A错误;

当$n=30$时,$S_n=\frac{d}{2}(n-15)^2-\frac{225}{2}d=0$,故B正确;

当$d>0$时,$a_{10}+a_{22}=2a_1+30d=d>0$,故C正确;

当$d<0$时,$|a_{10}|=|a_1+9d|=-\frac{11}{2}d$,

$|a_{22}|=|a_1+21d|=-\frac{13}{2}d$,

所以当$d<0$时,$|a_{10}|<|a_{22}|$,故D错误.

故选BC.

3.已知两个等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前n项和分别为A_n和B_n,且$\frac{A_n}{B_n}=\frac{7n+45}{n+3}$,则使得$\frac{a_n}{b_n}$为整数的正整数$n$有　(　　)

A.2个　　B.3个

C.4个　　D.5个

D　**解析**:$\frac{a_n}{b_n}=\frac{A_{2n-1}}{B_{2n-1}}=\frac{7(2n-1)+45}{2n-1+3}=\frac{14n+38}{2n+2}=\frac{7n+19}{n+1}=7+\frac{12}{n+1}$.

当$n+1=2,3,4,6,12$,即$n=1,2,3,5,11$时,$\frac{a_n}{b_n}$是整数.

4.(多选)在等差数列$\{a_n\}$中,$|a_3|=|a_9|$,公差$d<0$,则使其前n项和S_n取得最大值的自然数n是　(　　)

A.4　　B.5

C.6　　D.7

BC　**解析**:因为在等差数列$\{a_n\}$中,$|a_3|=|a_9|$,公差$d<0$,所以$a_3+a_9=0$,所以$a_6=0$.又$d<0$,所以$a_5>0$,$a_7<0$,

所以使其前n项和S_n取得最大值的自然数n是5或6.

5.等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n,T_n,若$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n-1}{3n+1}$,则$\frac{a_4}{b_4}=$________.

$\frac{13}{22}$　**解析**:依题意可得$\frac{a_4}{b_4}=\frac{2a_4}{2b_4}=\frac{a_1+a_7}{b_1+b_7}=\frac{\frac{7}{2}(a_1+a_7)}{\frac{7}{2}(b_1+b_7)}=\frac{S_7}{T_7}=\frac{2\times7-1}{3\times7+1}=\frac{13}{22}$.

6.已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=-2n-1$,则数列$\{|a_n|\}$的前n项和为________.

n^2+2n　**解析**:由题可知数列$\{a_n\}$的各项均为负值,设数列$\{|a_n|\}$的前n项和为S_n,则有$S_n=-a_1-a_2-\cdots-a_n=3+5+7+\cdots+(2n+1)=\frac{n(3+2n+1)}{2}=n^2+2n$.

7.设数列$\{a_n\}$的各项都为正数,其前n项和为S_n.已知对任意$n\in\mathbf{N}^*$,S_n是a_n^2和a_n的等差中项.

(1)证明数列$\{a_n\}$为等差数列,并求a_n;

(2)若$b_n=-n+5$,求$a_n\cdot b_n$的最大值,并求出取最大值时n的值.

解:(1)由已知,得 $2S_n=a_n^2+a_n$,且 $a_n>0$.

当 $n=1$ 时,$2a_1=a_1^2+a_1$,解得 $a_1=1$.

当 $n\geqslant 2$ 时,$2S_{n-1}=a_{n-1}^2+a_{n-1}$.

所以 $2S_n-2S_{n-1}=a_n^2-a_{n-1}^2+a_n-a_{n-1}$,

即 $2a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+a_n-a_{n-1}$,

即$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1})=a_n+a_{n-1}$.

因为 $a_n+a_{n-1}>0$,所以 $a_n-a_{n-1}=1(n\geqslant 2)$.

故数列$\{a_n\}$是首项为1,公差为1的等差数列,

则 $a_n=n$.

(2)由(1)可知 $a_n=n$.设 $c_n=a_n\cdot b_n$,

则 $c_n=n(-n+5)=-n^2+5n=-\left(n-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$.

因为 $n\in\mathbf{N}^*$,所以当 $n=2$ 或 $n=3$ 时,$\{c_n\}$的最大项为6.

故 $a_n\cdot b_n$ 的最大值为6,此时 $n=2$ 或 $n=3$.

8.(2022·新高考全国Ⅰ卷)记 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和,已知 $a_1=1$,$\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是公差为$\frac{1}{3}$的等差数列.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)证明:$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$.

(1)**解**:因为 $a_1=1$,所以 $S_1=a_1=1$,所以$\frac{S_1}{a_1}=1$.

又因为$\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是公差为$\frac{1}{3}$的等差数列,

所以 $\frac{S_n}{a_n}=1+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{n+2}{3}$,所以 $S_n=\frac{(n+2)a_n}{3}$.

当 $n\geqslant 2$ 时,$S_{n-1}=\frac{(n+1)a_{n-1}}{3}$,

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{(n+2)a_n}{3}-\frac{(n+1)a_{n-1}}{3}$,

整理得$(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}$,

即$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$,

所以 $a_n=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\frac{a_n}{a_{n-1}}$

$=1\times\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\cdots\times\frac{n}{n-2}\times\frac{n+1}{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}$,

显然 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$对于 $n=1$ 也成立,

所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

(2)**证明**:$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

所以$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$

$=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$

$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<2$.

9.已知 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和,$a_1=25$,$a_4=16$.

(1)求 S_n 取得最大值时 n 的值;

(2)求 $a_2+a_4+a_6+a_8+\cdots+a_{20}$的值;

(3)求数列$\{|a_n|\}$的前 n 项和 T_n.

解:(1)在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=25$,$a_4=16$,

所以公差 $d=\frac{a_4-a_1}{4-1}=-3$.所以 $a_n=-3n+28$.

由 $a_n=-3n+28\geqslant 0$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$,得 $n\leqslant 9$.

所以当 $n\leqslant 9$ 时,$a_n>0$;当 $n>9$ 时,$a_n<0$.

所以当 $n=9$ 时,S_n 取得最大值.

(2)因为数列$\{a_n\}$是等差数列,

所以 $a_2+a_4+a_6+a_8+\cdots+a_{20}=\frac{10(a_2+a_{20})}{2}=10a_{11}=10\times(-3\times 11+28)=-50$.

(3)由(1)得,当 $n\leqslant 9$ 时,$a_n>0$;当 $n>9$ 时,$a_n<0$.

所以当 $n\leqslant 9$ 时,$T_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$

$=25n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-3)=-\frac{3}{2}n^2+\frac{53}{2}n$.

当 $n>9$ 时,$T_n=a_1+a_2+\cdots+a_9-(a_{10}+a_{11}+\cdots+a_n)=2S_9-S_n=2\times(9\times 25-36\times 3)-\left[25n-\frac{3}{2}n(n-1)\right]=\frac{3}{2}n^2-\frac{53}{2}n+234$.

所以 $T_n=\begin{cases}-\frac{3}{2}n^2+\frac{53}{2}n, n\leqslant 9,\\ \frac{3}{2}n^2-\frac{53}{2}n+234, n>9.\end{cases}$

易错强化练(一)

练易错

易错点 1 | 忽视数列是特殊的函数

[防范要诀]

数列的通项公式及前 n 项和公式都可看作定义域为正整数集或其子集的函数,要善于运用函数的观点认识和理解数列问题.

[对点集训]

1. 设 $a_n=-n^2+5n-6$,则数列$\{a_n\}$中的最大项是 ( )

A.$\frac{16}{3}$　　B.$\frac{13}{3}$　　C.$\frac{3}{4}$　　D.0

D　**解析**:数列通项公式对应的二次函数的图象的对称轴为 $n=\frac{5}{2}\notin\mathbf{N}^*$.

所以当 $n=2$ 或 3 时,a_n 取最大值,即最大项为 $a_2=a_3=0$.

2. (多选)下列条件能确定数列$\{a_n\}$为等差数列的有 ( )

A.$a_n=kn+b$(k,b 为常数,$n\in\mathbf{N}^*$)

B.$a_{n+2}-a_n=d$(d 为常数,$n\in\mathbf{N}^*$)

C.$a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$ ($n\in\mathbf{N}^*$)

D.前 n 项和 $S_n=An^2+Bn+C$(A,B,C 为常数,$n\in\mathbf{N}^*$)

AC　**解析**:A 选项,$a_n=kn+b$(k,b 为常数,$n\in\mathbf{N}^*$),$a_{n+1}-a_n=k$,所以$\{a_n\}$是等差数列,故 A 正确.

B 选项,$a_{n+2}-a_n=d$(d 为常数,$n\in\mathbf{N}^*$),不一定符合从第二项起,相邻两项的差为同一个常数,如 $a_n=\begin{cases}2n,n=2k-1,k\in\mathbf{N}^*,\\2(n-1),n=2k,k\in\mathbf{N}^*,\end{cases}$ 故 B 错误.

C 选项,$a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$($n\in\mathbf{N}^*$),即数列$\{a_n\}$的关系式符合等差中项的形式,所以$\{a_n\}$是等差数列,故 C 正确.

D 选项,前 n 项和 $S_n=An^2+Bn+C$(A,B,C 为常数,$n\in\mathbf{N}^*$),

则当 $n\geqslant2$ 时,$S_{n-1}=A(n-1)^2+B(n-1)+C$,

两式相减得 $a_n=2An-A+B(n\geqslant2)$.

当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=A+B+C$,当且仅当 $C=0$ 时,满足上式,

且当 $C=0$ 时,$a_{n+1}-a_n=2A$,此时$\{a_n\}$是等差数列,

所以$\{a_n\}$不一定是等差数列,故 D 错误.

故选 AC.

3. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=-n^2+10n+11$,则该数列前________项的和最大.

10 或 11　**解析**:令 $a_n\geqslant0$,得 $-n^2+10n+11\geqslant0$,

即 $n^2-10n-11\leqslant0$,所以 $-1\leqslant n\leqslant11$.

因为 $n\in\mathbf{N}^*$,所以该数列前 10 项为正,第 11 项为 0.

所以该数列前 10 项或前 11 项的和最大.

易错点 2 | 不能正确进行 a_n 与 S_n 互化

[防范要诀]

凡是已知 S_n 的表达式或 S_n 与 a_n 的关系式,都需要用到当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}$;另外,也不要忽视检验 $n=1$ 是否也适合由 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 所得公式.

[对点集训]

4. (多选)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n^2-5n$,则下列说法正确的是 ( )

A.$\{a_n\}$为等差数列

B.$a_n>0$

C.S_n 的最小值为 $-\frac{21}{4}$

D.$\{a_n\}$为递增数列

AD　**解析**:当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=1-5=-4$,

当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-5n-[(n-1)^2-5(n-1)]=2n-6$.

当 $n=1$ 时,$a_1=-4$ 满足上式,

所以 $a_n=2n-6$.

由于 $a_n-a_{n-1}=2(n\geqslant2)$,所以数列$\{a_n\}$是首项为 -4,公差为 2 的等差数列.

因为公差大于零,所以$\{a_n\}$为递增等差数列,所以 A,D 正确.

因为首项 $a_1=-4<0$,所以 B 错误.

由于 $S_n=n^2-5n=\left(n-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$,而 $n\in\mathbf{N}^*$,所以当 $n=2$ 或 $n=3$ 时,S_n 取最小值,且最小值为 -6,所以 C 错误.

故选 AD.

5.已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n^2+1$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=$________.

$\begin{cases}2,n=1,\\2n-1,n\geqslant2\end{cases}$ **解析**：因为 $S_n=n^2+1$，

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+1-[(n-1)^2+1]=2n-1(n\geqslant2)$.当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2$ 不满足上式.

所以 $a_n=\begin{cases}2,n=1,\\2n-1,n\geqslant2.\end{cases}$

易错点 3 | 对等差数列的定义理解不透彻致误

[防范要诀]

使用等差数列的定义时容易出现以下错误：(1)对定义中"从第二项起"理解有误，常常忽略首项；(2)忽略"任意"，误认为验证有限个相邻两项的差是常数即得等差数列；(3)误认为任意相邻两项的差就是等差数列的公差.

[对点集训]

6.已知数列$\{a_n\}$，且 $a_1=1$，$a_2=2$，$2a_{n+1}=2a_n+3(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$，判断$\{a_n\}$是否是等差数列.

解：当 $n\geqslant2$ 时，由 $2a_{n+1}=2a_n+3$，得 $a_{n+1}-a_n=\frac{3}{2}$.但 $a_2-a_1=1\neq\frac{3}{2}$，故数列$\{a_n\}$不是等差数列.

7.已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=\frac{1}{4}(a_n+1)^2$，且 $a_n>0$.求$\{a_n\}$的通项公式.

解：因为 $S_n=\frac{1}{4}(a_n+1)^2$，

所以当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=\frac{1}{4}(a_n+1)^2-\frac{1}{4}(a_{n-1}+1)^2$，

所以 $a_n^2-a_{n-1}^2-2a_n-2a_{n-1}=0$，

所以$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$.

因为 $a_n>0$，所以 $a_n-a_{n-1}=2(n\geqslant2)$.

所以$\{a_n\}$为等差数列，公差为 2.

当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=\frac{1}{4}(a_1+1)^2$，

即 $a_1^2-2a_1+1=0$，所以 $a_1=1$.

所以 $a_n=2n-1$.

练疑难

1.在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_n\cdot a_{n-1}=a_{n-1}+(-1)^n(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$，则 a_3 的值是 ( )

A.$\frac{1}{2}$ B.$\frac{2}{3}$ C.$\frac{3}{4}$ D.1

A **解析**：因为在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_n\cdot a_{n-1}=a_{n-1}+(-1)^n(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$，

所以 $a_2\times1=1+(-1)^2=1+1=2$，即 $a_2=2$，

所以 $a_3\times2=2+(-1)^3=2-1=1$，所以 $a_3=\frac{1}{2}$.

2.若 $\lg 2$，$\lg(2^x-1)$，$\lg(2^x+3)$成等差数列，则 x 的值为 ( )

A.0 B.$\log_2 5$

C.32 D.0 或 32

B **解析**：依题意得 $2\lg(2^x-1)=\lg 2+\lg(2^x+3)$，

所以$(2^x-1)^2=2(2^x+3)$，所以$(2^x)^2-4\cdot2^x-5=0$，

所以$(2^x-5)(2^x+1)=0$，

所以 $2^x=5$ 或 $2^x=-1$(舍)，

所以 $x=\log_2 5$.

3.已知$\{a_n\}$为等差数列，首项为$\frac{1}{25}$，数列$\{a_n\}$从第 10 项开始比 1 大，那么公差 d 的取值范围是 ( )

A.$d>\frac{8}{75}$ B.$d<\frac{3}{25}$

C.$\frac{8}{75}<d<\frac{3}{25}$ D.$\frac{8}{75}<d\leqslant\frac{3}{25}$

D **解析**：由题可得 $a_1=\frac{1}{25}$，且$\begin{cases}a_{10}>1,\\a_9\leqslant1,\end{cases}$

根据等差数列的通项公式可得$\begin{cases}\frac{1}{25}+9d>1,\\\frac{1}{25}+8d\leqslant1,\end{cases}$

从而解得$\frac{8}{75}<d\leqslant\frac{3}{25}$.

4.等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且满足 $S_{20}=S_{40}$，则下列结论正确的是 ( )

A.S_{30}是 S_n 的最大值

B.S_{30}是 S_n 的最小值

C.$S_{30}=0$

D.$S_{60}=0$

D **解析**：等差数列的前 n 项和公式可写为 $S_n=an^2+bn$ 的形式，由 $S_{20}=S_{40}$ 知对应二次函数的图象关于直线 $n=30$ 对称，但因为不知道 a 的符号，所以无法判断 S_{30}是最大值还是最小值.由 $S_{20}=S_{40}$ 可知 $S_{60}=0$.故选 D.

5.已知等差数列$\{a_n\}$，$a_n=2n-9$，则$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{10}|=$________.

52　**解析**:由 $a_n=2n-9$ 可知 $a_1=-7,d=2$.由 $a_n\geqslant 0$ 得 $n\geqslant 4.5$,所以前4项为负,以后各项为正,所以 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{10}|=-(a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_5+\cdots+a_{10})=-S_4+S_{10}-S_4=S_{10}-2S_4=-7\times 10+\frac{10\times 9}{2}\times 2-2\left(-7\times 4+\frac{4\times 3}{2}\times 2\right)=52$.

6. 数列$\{a_n\}$满足递推关系 $a_n=3a_{n-1}+3^n-1(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$,$a_1=5$,则使得数列$\left\{\frac{a_n+m}{3^n}\right\}$为等差数列的实数 m 的值为________.

$-\frac{1}{2}$　**解析**:$a_1=5,a_2=3\times 5+3^2-1=23$,

$a_3=3\times 23+3^3-1=95$,

依题意得$\frac{5+m}{3},\frac{23+m}{3^2},\frac{95+m}{3^3}$成等差数列,

所以 $2\times\frac{23+m}{3^2}=\frac{5+m}{3}+\frac{95+m}{3^3}$,

解得 $m=-\frac{1}{2}$.经检验 $m=-\frac{1}{2}$满足题设.

7. 已知等差数列$\{a_n\}$的前3项和为6,前8项和为-4.

(1)求数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n;

(2)求数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$的前 n 项和 T_n.

解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

由题意,得$\begin{cases}3a_1+\frac{3\times 2}{2}d=6,\\8a_1+\frac{8\times 7}{2}d=-4.\end{cases}$

即$\begin{cases}3a_1+3d=6,\\8a_1+28d=-4,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=3,\\d=-1.\end{cases}$

所以 $S_n=3n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-1)=-\frac{1}{2}n^2+\frac{7}{2}n$.

(2)由(1),得$\frac{S_n}{n}=-\frac{1}{2}n+\frac{7}{2}$,

所以 $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=-\frac{1}{2}(n+1)+\frac{7}{2}-\left(-\frac{1}{2}n+\frac{7}{2}\right)=-\frac{1}{2}$,即数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是首项为$\frac{S_1}{1}=3$,公差为$-\frac{1}{2}$的等差数列,

故 $T_n=3n+\frac{n(n-1)}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}n^2+\frac{13}{4}n$.

8. 已知函数 $f(x)=2^x-2^{-x}$,数列$\{a_n\}$满足 $f(\log_2 a_n)=-2n$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)证明:数列$\{a_n\}$是递减数列.

(1)**解**:因为 $f(x)=2^x-2^{-x}$,$f(\log_2 a_n)=-2n$,

所以 $2^{\log_2 a_n}-2^{-\log_2 a_n}=-2n$,

所以 $a_n-\frac{1}{a_n}=-2n$,

所以 $a_n^2+2na_n-1=0$,

解得 $a_n=-n\pm\sqrt{n^2+1}$.

因为 $a_n>0$,

所以 $a_n=\sqrt{n^2+1}-n$.

(2)**证明**:$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{(n+1)^2+1}-(n+1)}{\sqrt{n^2+1}-n}$

$=\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{(n+1)^2+1}+(n+1)}<1$.

又 $a_n>0$,所以 $a_{n+1}<a_n$,故数列$\{a_n\}$是递减数列.

9. 数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^2+kn+2$.

(1)若 $a_2=a_7$,求数列$\{a_n\}$的最小项;

(2)若不等式 $a_n\geqslant a_4$ 恒成立,求实数 k 的取值范围.

解:(1)由 $a_2=a_7$ 得 $k=-9$,

即 $a_n=n^2-9n+2=\left(n-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{73}{4}$.

因为 $n\in\mathbf{N}^*$,所以当 $n=4$ 或5时,$\{a_n\}$的最小项为 $a_4=a_5=-18$.

(2)$a_n=n^2+kn+2=\left(n+\frac{k}{2}\right)^2+2-\frac{k^2}{4}$,

因为不等式 $a_n\geqslant a_4$ 恒成立,所以 $3.5\leqslant-\frac{k}{2}\leqslant 4.5$,

解得$-9\leqslant k\leqslant-7$.

所以实数 k 的取值范围为$\{k\mid-9\leqslant k\leqslant-7\}$.

4.3 等比数列

4.3.1 等比数列的概念

第1课时 等比数列的概念

学习任务目标

1.理解等比数列及等比中项的概念.(数学抽象)
2.掌握等比数列的通项公式,能运用公式解决相关问题.(数学运算)
3.掌握等比数列的判断与证明方法.(逻辑推理)

问题式预习

知识点一 等比数列、等比中项的概念

等比数列	一般地,如果一个数列从第2项起,每一项与它的前一项的比都等于同一个常数,那么这个数列叫做等比数列,这个常数叫做等比数列的公比,公比通常用字母q表示(显然$q\neq0$)
等比中项	如果在a与b中间插入一个数G,使a,G,b成等比数列,那么G叫做a与b的等比中项.此时,$G^2=ab$

[微训练]

判断(正确的打"√",错误的打"×").

(1)等比数列中不存在数值为0的项. (√)

(2)常数列$a,a,a,a,\cdots$一定是等比数列. (×)

(3)存在一个数列既是等差数列,又是等比数列. (√)

(4)任何两个实数都有等比中项. (×)

知识点二 等比数列的通项公式

(1)首项为a_1,公比为q的等比数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\underline{a_1q^{n-1}}$.

(2)第n项与第m项的关系为$a_n=\underline{a_mq^{n-m}}$,变形得$q^{n-m}=\dfrac{a_n}{a_m}$.

(3)由$a_n=\dfrac{a_1}{q}\cdot q^n$可知,当$q>0$且$q\neq1$时,等比数列$\{a_n\}$的第$n$项$a_n$是指数函数$f(x)=\dfrac{a_1}{q}\cdot q^x(x\in\mathbf{R})$当$x=n$时的函数值,即$a_n=f(n)$.

[微训练]

1.已知等比数列$\{a_n\}$的首项$a_1=\dfrac{9}{8}$,公比$q=\dfrac{2}{3}$,$a_n=\dfrac{1}{3}$,则项数n为 ( )

A.3 B.4 C.5 D.6

B **解析**:由$a_1q^{n-1}=a_n$得$\dfrac{9}{8}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{3}$,解得$n=4$.

2.在等比数列$\{a_n\}$中,已知$a_5+a_1=34$,$a_5-a_1=30$,则$a_3=$ ( )

A.8 B.-8 C.±8 D.16

A **解析**:由$\begin{cases}a_5+a_1=34,\\a_5-a_1=30,\end{cases}$得$\begin{cases}a_1=2,\\a_5=32.\end{cases}$

所以$q^4=16$,所以$q^2=4$.所以$a_3=a_1q^2=8$.

任务型课堂

任务一 等比数列的概念

1.下列数列为等比数列的是 ( )

A.$m,m^2,m^3,m^4,\cdots$

B.$2^2,4^2,6^2,8^2,\cdots$

C.$q-1,(q-1)^2,(q-1)^3,(q-1)^4,\cdots$

D.$\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{a^2},\dfrac{1}{a^3},\dfrac{1}{a^4},\cdots$

D **解析**:当$m=0,q=1$时,A,C均不是等比数列;$\dfrac{6^2}{4^2}\neq\dfrac{4^2}{2^2}$,所以B不是等比数列.

2.下列数列是等比数列的有________.(填序号)

①$1,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{12},\cdots$;

②$10,10,10,10,10,\cdots$;

③$\dfrac{2}{3},\left(\dfrac{2}{3}\right)^2,\left(\dfrac{2}{3}\right)^3,\left(\dfrac{2}{3}\right)^4,\cdots$;

④$1,0,1,0,1,0,\cdots$;

⑤1，-4，16，-64，256，….

②③⑤　**解析**：①不是等比数列.②是等比数列，公比为1.③是等比数列，公比为$\frac{2}{3}$.④不是等比数列.⑤是等比数列，公比为-4.

任务二　等比数列的通项公式、等比中项及应用

[探究活动]

将一条线段一分为二，若较长部分与整体的比等于较短部分与较长部分的比，则其比值是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，大约为0.618.这个比值被公认为是最能引起美感的比值，因此这种分割被称为黄金分割.在直角三角形中，a，b为直角边，c为斜边，若直角边a是将斜边c进行黄金分割所得两部分中的较长部分，则a，b，c成等比数列.现有一直角三角形恰好满足上面的特性，其斜边$c=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

探究1：该直角三角形的直角边a的长是多少？

提示：由题意，$c=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，$\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，所以$a=\frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}{4}=1$.

探究2：由题意，该直角三角形三边a，b，c满足哪些数量关系？

提示：$a^2+b^2=c^2$，$b^2=ac$.

探究3：该三角形两直角边平方差的绝对值是多少？

提示：由探究1、探究2，得$a^2=1$，$b^2=ac=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，所以$|a^2-b^2|=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

[评价活动]

1. 已知数列$\{a_n\}$，$a_1=1$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$，则数列$\{a_n\}$的通项公式是　(　　)

A.$a_n=2n$　　B.$a_n=\frac{1}{2n}$

C.$a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$　　D.$a_n=\frac{1}{n^2}$

C　**解析**：因为在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$，

所以数列$\{a_n\}$是首项$a_1=1$，公比$q=\frac{1}{2}$的等比数列.

所以$a_n=a_1q^{n-1}=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}$.故选C.

2. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，公比$q\neq\pm1$.若$a_m=a_2a_3$，则m等于　(　　)

A.2　　B.3　　C.4　　D.5

C　**解析**：$a_m=a_2a_3\Rightarrow a_1q^{m-1}=a_1qa_1q^2$.

因为$a_1=1$，所以$q^{m-1}=q^3$.

又因为$q\neq\pm1$，$q\neq0$，所以$m-1=3\Rightarrow m=4$.故选C.

3. 若-1，a，b，c，-9成等比数列，则实数b的值为　(　　)

A.-3　　B.3

C.±3　　D.不能确定

A　**解析**：因为-1，a，b，c，-9成等比数列，

所以-1，a，b成等比数列，a，b，c成等比数列，b，c，-9成等比数列.

所以$a^2=-b$，$b^2=ac$，$c^2=-9b$.

所以$b^4=a^2c^2=(-1)\times(-9)b^2$.所以$b^2=9$.

又$a^2=-b>0$，所以$b<0$.所以$b=-3$.

4. 已知数列$\{a_n\}$是等比数列.

(1)若$a_2=4$，$a_5=-\frac{1}{2}$，求a_n；

(2)若$a_2+a_5=18$，$a_3+a_6=9$，$a_n=1$，求n.

解：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.

(1)根据题意，可知$\begin{cases}a_2=a_1q=4,\\ a_5=a_1q^4=-\frac{1}{2},\end{cases}$

所以$\begin{cases}q=-\frac{1}{2},\\ a_1=-8.\end{cases}$

所以$a_n=a_1q^{n-1}=-8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(-2)^{4-n}$.

(2)因为$a_3+a_6=(a_2+a_5)q$，

即$9=18q$，所以$q=\frac{1}{2}$.

由$a_1q+a_1q^4=18$，得$a_1=32$.

由$a_n=a_1q^{n-1}=1$，得$n=6$.

5. (1)已知等比数列的前3项依次为x，$2x+2$，$3x+3$，求实数x的值.

(2)已知等比数列$\{a_n\}$，$a_2a_3a_4=64$，$a_3+a_6=36$，求a_2和a_6的等比中项.

解：(1)因为等比数列的前3项依次为x，$2x+2$，$3x+3$，所以$x(3x+3)=(2x+2)^2$，解得$x=-1$或$x=-4$.又因为当$x=-1$时，$2x+2=3x+3=0$，不合题意，所以实数x的值为-4.

(2)因为$\{a_n\}$是等比数列，所以a_3是a_2和a_4的等比中项，即$a_3^2=a_2a_4$.所以$a_3^3=64$，解得$a_3=4$，从而$a_6=32$.

设$\{a_n\}$的公比为q，则$\begin{cases}a_1q^2=4,\\ a_1q^5=32,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\ q=2.\end{cases}$

所以 $a_2=a_1q=2$.

设 a_2 和 a_6 的等比中项为 G，

则 $G^2=a_2a_6=64$，所以 $G=\pm8$.

【类题通法】

对等比中项的理解

(1)在一个等比数列中，从第 2 项起，每一项(有穷数列的末项除外)都是它的前一项与后一项的等比中项.

(2)“a,G,b 成等比数列”等价于“$G^2=ab$(a,b 均不为 0)”，可以用它来判断或证明三个数成等比数列.应注意“a,G,b 成等比数列”与“$G=\sqrt{ab}$”是不等价的.

(3)当 a,b 同号时，a,b 的等比中项有两个，且它们互为相反数；当 a,b 异号时，a,b 没有等比中项.

任务三 等比数列的判定

1.已知 a,b,c 构成等比数列，求证：$a^2+b^2,ab+bc,b^2+c^2$ 构成等比数列.

证明：因为 a,b,c 构成等比数列，所以 b 是 a,c 的等比中项，则 $b^2=ac$，且 a,b,c 均不为零.

又 $(a^2+b^2)(b^2+c^2)=a^2b^2+a^2c^2+b^4+b^2c^2=a^2b^2+2a^2c^2+b^2c^2$，

$(ab+bc)^2=a^2b^2+2ab^2c+b^2c^2=a^2b^2+2a^2c^2+b^2c^2$，所以 $(ab+bc)^2=(a^2+b^2)(b^2+c^2)$，

即 $ab+bc$ 是 a^2+b^2 与 b^2+c^2 的等比中项.

所以 $a^2+b^2,ab+bc,b^2+c^2$ 构成等比数列.

2.数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}S_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，求证：数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 为等比数列.

证明：因为 $\dfrac{S_{n+1}}{n+1}=\dfrac{S_n+a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{S_n+\dfrac{n+2}{n}S_n}{n+1}=\dfrac{\dfrac{2n+2}{n}S_n}{n+1}=2\times\dfrac{S_n}{n}$，所以 $\dfrac{\dfrac{S_{n+1}}{n+1}}{\dfrac{S_n}{n}}=2$.

又 $\dfrac{S_1}{1}=\dfrac{a_1}{1}=1$，

所以数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 是以 1 为首项，以 2 为公比的等比数列.

【类题通法】

判定一个数列 $\{a_n\}$ 是等比数列的方法

(1)定义法：若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$(q 为常数且不为 0)或 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=q$($n\geqslant2$，q 为常数且不为 0)，则数列 $\{a_n\}$ 是等比数列.

(2)等比中项法：对于数列 $\{a_n\}$，若 $a_{n+1}^2=a_n\cdot a_{n+2}$ 且 $a_n\neq0$，则数列 $\{a_n\}$ 是等比数列.

(3)通项公式法：若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_1q^{n-1}$($a_1\neq0,q\neq0$)，则数列 $\{a_n\}$ 是等比数列.

提质归纳

- 等比数列的概念
  - 定义
    - 一个数列从第2项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个常数
    - 递推关系
  - 通项公式
    - $a_n=a_1q^{n-1}$
    - $a_n=a_mq^{n-m}$
    - $a_n=\dfrac{a_1}{q}q^n$
  - 等比中项
    - 若a,G,b成等比数列，则G叫做a与b的等比中项，此时$G^2=ab$

课后素养评价(七)

基础性·能力运用

1.在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=32$，公比 $q=-\dfrac{1}{2}$，则 a_6 等于 ( )

A.1　　B.$-\dfrac{1}{2}$　　C.-1　　D.$\dfrac{1}{2}$

C　**解析：**$a_6=32\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^5=-1$.故选 C.

2.$2-\sqrt{3}$ 与 $2+\sqrt{3}$ 的等比中项是 ( )

A.1　　B.-1

C.2　　D.-1 或 1

D　**解析：**由题意可设 $2-\sqrt{3}$ 与 $2+\sqrt{3}$ 的等比中项是 m，则 $m^2=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$，解得 $m=-1$ 或 $m=1$.故选 D.

3.在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=2$，公比$q=2$，若 $a_n=16$，则n 为 ( )

A.2　　B.3　　C.4　　D.5

C　**解析：**根据 $a_n=a_1q^{n-1}$，得 $16=2\times2^{n-1}$，解得$n=4$.

4.对任意等比数列 $\{a_n\}$，下列说法一定正确的是 ( )

A.a_1,a_3,a_9 成等比数列

B.a_2,a_3,a_6 成等比数列

C. a_2,a_4,a_8 成等比数列

D. a_3,a_6,a_9 成等比数列

D　**解析**：由等比数列的性质得 $a_3\cdot a_9=a_6^2\neq0$，因此 a_3,a_6,a_9 一定成等比数列.

故选 D.

5. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_{2\,023}=-8a_{2\,020}$，则公比 q 等于　(　　)

A. 2　　B. -2

C. ±2　　D. $\frac{1}{2}$

B　**解析**：因为 $\frac{a_{2\,023}}{a_{2\,020}}=q^3=-8$，所以 $q=-2$.

6.（多选）已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，给出以下数列，其中一定是等比数列的是　(　　)

A. $\{|a_n|\}$　　B. $\{a_n-a_{n+1}\}$

C. $\left\{\frac{a_1}{a_n}\right\}$　　D. $\{ka_n\}$

AC　**解析**：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q.

因为 $\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}=|q|$，所以 $\{|a_n|\}$ 是等比数列；

当 $\{a_n\}$ 为常数列时，$a_n-a_{n+1}=0$，所以 $\{a_n-a_{n+1}\}$ 不一定是等比数列；

因为 $\frac{\frac{a_1}{a_n}}{\frac{a_1}{a_{n-1}}}=\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{1}{q}$，所以 $\left\{\frac{a_1}{a_n}\right\}$ 是等比数列；

当 $k=0$ 时，$ka_n=0$，所以 $\{ka_n\}$ 不一定是等比数列.

故选 AC.

7. “$m=3$”是“1，m，9 成等比数列”的　(　　)

A. 必要不充分条件

B. 充分不必要条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

B　**解析**：1，m，9 成等比数列，等价于 $m^2=1\times9$，即 $m=\pm3$；

而“$m=3$”是“$m=\pm3$”的充分不必要条件，

所以“$m=3$”是“1，m，9 成等比数列”的充分不必要条件.

故选 B.

8. 在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=3$，且对任意正整数 n 都有 $2a_{n+1}-a_n=0$，则 $a_n=$________.

$3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　**解析**：因为 $2a_{n+1}-a_n=0$，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$.

所以 $\{a_n\}$ 是等比数列，且公比 $q=\frac{1}{2}$.

所以 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

9. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_3=9$，$a_6=243$，求 a_9.

解：设等比数列的公比为 q，则 $\begin{cases}a_3=a_1q^2=9,①\\a_6=a_1q^5=243,②\end{cases}$

所以 $\frac{②}{①}$ 得 $q^3=27$，

所以 $a_9=a_6q^3=243\times27=6\ 561$.

综合性·创新提升

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，则“公比 $q>1$”是“$\{a_n\}$ 为递增数列”的　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

D　**解析**：等比数列 $\{a_n\}$ 为递增数列的充要条件是 $\begin{cases}a_1>0,\\q>1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1<0,\\0<q<1.\end{cases}$ 故“公比 $q>1$”是“$\{a_n\}$ 为递增数列”的既不充分也不必要条件. 故选 D.

2.（多选）若 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $S_n=2a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，则下列说法正确的是　(　　)

A. $a_5=-16$

B. $S_5=-63$

C. 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列

D. 数列 $\{S_n+1\}$ 是等比数列

AC　**解析**：因为 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $S_n=2a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以 $S_1=a_1=2a_1+1$，因此 $a_1=-1$.

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$，即 $a_n=2a_{n-1}$.

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 -1 为首项，以 2 为公比的等比数列，故 C 正确.

因为 $a_5=-1\times2^4=-16$，故 A 正确.

又 $S_n=2a_n+1=-2^n+1$，所以 $S_5=-2^5+1=-31$，故 B 错误.

因为 $S_1+1=0$，所以数列 $\{S_n+1\}$ 不是等比数列，故 D 错误.

3. 已知数列 $\{a_n\}$，且 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3$，则 $a_{10}=$ （　　）

A. 2 045　　B. 1 021

C. 1 027　　D. 2 051

A　**解析**：设 $a_{n+1}=2a_n+3$ 可变形为 $a_{n+1}+x=2(a_n+x)$，即 $a_{n+1}=2a_n+x$，可得 $x=3$，即 $a_{n+1}+3=2(a_n+3)$. 故数列 $\{a_n+3\}$ 为等比数列，首项为 4，公比为 2.

所以 $a_n+3=4\cdot 2^{n-1}$.

所以 $a_n=4\cdot 2^{n-1}-3=2^{n+1}-3$.

所以 $a_{10}=2\ 045$.

故选 A.

4. 已知 q 为等比数列 $\{a_n\}$ 的公比，$a_1a_2=-\frac{1}{2}$，$a_3=\frac{1}{4}$，则 $q=$ （　　）

A. -1　　B. 4

C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\pm\frac{1}{2}$

C　**解析**：由题可得 $\begin{cases} a_1(a_1q)=-\frac{1}{2}, \\ a_1q^2=\frac{1}{4}, \end{cases}$

所以 $\frac{q}{q^4}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{16}}$，所以 $q=-\frac{1}{2}$. 故选 C.

5.（多选）已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，那么下列数列一定是等比数列的是 （　　）

A. $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$

B. $\{\log_2 a_n^2\}$

C. $\{a_n+a_{n+1}\}$

D. $\{a_n+a_{n+1}+a_{n+2}\}$

AD　**解析**：当 $a_n=1$ 时，$\log_2 a_n^2=0$，故数列 $\{\log_2 a_n^2\}$ 不一定是等比数列；当数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=-1$ 时，$a_n+a_{n+1}=0$，故数列 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 不一定是等比数列.

由等比数列的定义知 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 和 $\{a_n+a_{n+1}+a_{n+2}\}$ 都是等比数列. 故选 AD.

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=4a_n-1(n\in\mathbf{N}^*)$，证明数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，并求出其通项公式.

解：依题意，当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=4a_{n-1}-1$，

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=(4a_n-1)-(4a_{n-1}-1)$，

即 $3a_n=4a_{n-1}$，所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{4}{3}$，

故数列 $\{a_n\}$ 是公比为 $\frac{4}{3}$ 的等比数列.

因为 $S_1=4a_1-1$，即 $a_1=4a_1-1$，所以 $a_1=\frac{1}{3}$，

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=\frac{1}{3}\times\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$.

7. 在各项均为正偶数的数列 a_1,a_2,a_3,a_4 中，前 3 项成公差为 $d(d>0)$ 的等差数列，后 3 项成公比为 q 的等比数列. 若 $a_4-a_1=88$，求 q 的所有可能的值构成的集合.

解：设四个数依次为 a_1，a_1+d，a_1+2d，a_1+88，其中 a_1，d 均为偶数.

因为后三项成公比为 q 的等比数列，

所以 $(a_1+2d)^2=(a_1+d)(a_1+88)\Rightarrow a_1=\frac{4d(22-d)}{3d-88}>0$，

所以 $(d-22)(3d-88)<0\Rightarrow 22<d<\frac{88}{3}$，

所以 d 可能的值为 24，26，28.

当 $d=24$ 时，$a_1=12$，$q=\frac{5}{3}$；

当 $d=26$ 时，$a_1=\frac{208}{5}$（舍去）；

当 $d=28$ 时，$a_1=168$，$q=\frac{8}{7}$.

所以 q 的所有可能的值构成的集合为 $\left\{\frac{5}{3},\frac{8}{7}\right\}$.

第 2 课时　等比数列的性质及应用

学习任务目标

1. 能够根据等比数列的定义和通项公式推出等比数列的常用性质.(逻辑推理)
2. 能够运用等比数列的性质解决有关问题.(数学运算)
3. 能够运用等比数列的知识解决简单的实际问题.(数学建模)
4. 掌握等比数列的判断与证明方法.(逻辑推理)

问题式预习

知识点一　等比数列的性质

(1)若 $m+n=p+q(m,n,p,q\in\mathbf{N}^*)$,则 $a_m\cdot a_n=$ $\underline{a_p\cdot a_q}$;

若 $m+n=2k(m,n,k\in\mathbf{N}^*)$,则 $a_k^2=a_m\cdot a_n$.

(2)若数列$\{a_n\}$是等比数列,则$\{|a_n|\}$,$\{a_n^2\}$,$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$仍为<u>等比</u>数列.

(3)若数列$\{a_n\}$(各项为正数)是等差数列,则$\{a^{a_n}\}$为等比数列.

(4)若数列$\{a_n\}$(各项为正数)是等比数列,则$\{\log_a a_n\}$($a>0$ 且 $a\neq1$)为<u>等差</u>数列.

[微训练]

1. 判断(正确的打"√",错误的打"×").

(1)在等比数列$\{a_n\}$中,若 $a_ma_n=a_pa_q$,则 $m+n=p+q$.　　(×)

(2)若数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都是等比数列,则数列$\{a_n+b_n\}$也一定是等比数列.　　(×)

(3)若数列$\{a_n\}$是等比数列,则数列$\{\lambda a_n\}$也是等比数列.　　(×)

2. 在等比数列$\{a_n\}$中,若 $a_2a_8=9$,则 $a_3a_7=$　(　　)

A.3　　B.±3　　C.9　　D.±9

C　**解析**:因为 $2+8=3+7$,所以 $a_3a_7=a_2a_8=9$.

知识点二　等比数列性质的应用

一般来说,当三个数成等比数列时,可设这三个数分别为 a,aq,aq^2 或$\dfrac{a}{q}$,a,aq,此时公比为<u>q</u>;当四个数成等比数列时,可设这四个数分别为 a,aq,aq^2,aq^3,公比为 q;当四个数均为正(负)数时,可设为$\dfrac{a}{q^3}$,$\dfrac{a}{q}$,aq,aq^3,公比为<u>q^2</u>.

[微训练]

1. 在等比数列$\{a_n\}$中,若 $a_3a_4a_5=3$,$a_6a_7a_8=24$,则 $a_9a_{10}a_{11}=$　(　　)

A.48　　B.72

C.144　　D.192

D　**解析**:$\dfrac{a_6a_7a_8}{a_3a_4a_5}=q^9=8$($q$ 为公比),

所以 $a_9a_{10}a_{11}=a_6a_7a_8q^9=24\times8=192$.

2. 在等比数列$\{a_n\}$中,若 $a_1=\dfrac{1}{9}$,$a_4=3$,则该数列前 5 项的积为<u>1</u>.

3. 已知三个数成等比数列,它们的积为 27,它们的平方和为 91,则这三个数是<u>1,3,9 或−1,3,−9 或 9,3,1 或−9,3,−1</u>.

任务型课堂

任务一　等比数列的性质

1. 在等比数列$\{a_n\}$中,若 $a_3=\dfrac{1}{2}$,$a_9=2$,则 $a_{15}=$________.

8　**解析**:因为 $a_3a_{15}=a_9^2$,所以 $a_{15}=\dfrac{a_9^2}{a_3}=\dfrac{2^2}{\frac{1}{2}}=8$.

2. 已知公比为 q 的等比数列$\{a_n\}$,$a_5+a_9=q$,则 $a_6(a_2+2a_6+a_{10})$的值为________.

1　**解析**:因为 $a_5+a_9=q$,所以 $a_4+a_8=1$,

所以 $a_6(a_2+2a_6+a_{10})=a_6a_2+2a_6^2+a_6a_{10}=a_4^2+2a_4a_8+a_8^2=(a_4+a_8)^2=1$.

3. 在等比数列$\{a_n\}$中,$a_7a_{11}=6$,$a_4+a_{14}=5$,求$\dfrac{a_{20}}{a_{10}}$.

解:设公比为 q.

因为 $a_7a_{11}=a_4a_{14}=6$,$a_4+a_{14}=5$,

所以$\begin{cases}a_4=2,\\a_{14}=3\end{cases}$或$\begin{cases}a_4=3,\\a_{14}=2.\end{cases}$所以 $q^{10}=\dfrac{3}{2}$或 $q^{10}=\dfrac{2}{3}$.

所以$\dfrac{a_{20}}{a_{10}}=q^{10}=\dfrac{3}{2}$或$\dfrac{2}{3}$.

任务二 等比数列的实际应用

[探究活动]

《九章算术》中有一个“蒲莞等长”问题，现有类似问题情境：今有蒲生一日，长四尺，莞生一日，长一尺．蒲生日自半，莞生日自倍．意思是：今有蒲第一天长高四尺，莞第一天长高一尺，以后蒲每天所长高度是前一天所长高度的一半，莞每天所长高度是前一天所长高度的两倍．

探究 1：设蒲、莞每天长高的尺数分别构成数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，你能写出这两个数列的通项公式吗？

提示：由题意，数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都是等比数列，设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的公比分别为q，q'，则$a_1=4$，$q=\frac{1}{2}$，$b_1=1$，$q'=2$，所以$a_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$，$b_n=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$．

探究 2：到第几天，莞长高的长度是蒲长高长度的 64 倍？

提示：由探究 1，得$\dfrac{2^{n-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}}=64$，所以$n=5$，即到第 5 天，莞长高的长度是蒲长高长度的 64 倍．

[评价活动]

1．一种专门占据内存的计算机病毒开始时占据内存 2 KB，然后每 3 分钟自动复制一次，复制后所占内存是原来的 2 倍，那么开机后________分钟，该病毒占据内存 64 MB（1 MB$=2^{10}$ KB）．

45 **解析**：3 分钟后占据内存2^2 KB，两个 3 分钟后占据内存2^3 KB，三个 3 分钟后占据内存2^4 KB……n 个 3 分钟后占据内存2^{n+1} KB．令$2^{n+1}=64\times 2^{10}=2^{16}$，得$n=15$．又$15\times 3=45$（分钟），故开机后 45 分钟，该病毒占据内存 64 MB．

2．2022 年，某县甲、乙两个林场森林木材的存量分别为$16a$ m^3 和$25a$ m^3，甲林场木材存量每年比上一年增加 25%，而乙林场木材存量每年比上一年减少 20%．

(1)哪一年两林场木材的存量相等？

(2)两林场木材的总存量到 2026 年能否翻一番？

解：(1)设第 n 年两林场木材的存量相等，则

$16a(1+25\%)^{n-1}=25a(1-20\%)^{n-1}$，

解得$n=2$．

故到 2024 年两林场木材的存量相等．

(2)$16a\left(\frac{5}{4}\right)^4+25a\left(\frac{4}{5}\right)^4<2(16a+25a)$，

故到 2026 年不能翻一番．

3．某人买了一辆价值 13.5 万元的新车，专家预测这种车每年按 10% 的速度贬值．

(1)用一个式子表示$n(n\in\mathbf{N}^*)$年后这辆车的价值；

(2)如果他打算用满 4 年时卖掉这辆车，大概能卖得多少万元（保留一位小数）？

解：(1)设 n 年后，车的价值为a_n万元．

由题意，得$a_1=13.5\times(1-10\%)$，

$a_2=13.5\times(1-10\%)^2$，

$a_3=13.5\times(1-10\%)^3$，

……

$a_n=13.5\times 0.9^n$．

故 n 年后车的价值为13.5×0.9^n万元．

(2)由(1)得$a_4=13.5\times 0.9^4\approx 8.9$（万元），

所以用满 4 年时卖掉这辆车，大概能卖得 8.9 万元．

【类题通法】

求解等比数列实际应用问题的关键点

求解此类问题应先把实际问题转化为等比数列问题，在建立等比数列模型后，往往要进行指数运算，要注意运算的准确性，对于近似计算问题，答案要符合题设中实际问题的需要．

任务三 等比数列与等差数列的综合应用

[探究活动]

将n^2个数排成 n 行 n 列的一个数阵，如图：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots\cdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

该数阵第一列的 n 个数从上到下构成以 m 为公差的等差数列，每一行的 n 个数从左到右构成以 m 为公比的等比数列（其中$m>0$）．已知$a_{11}=2$，$a_{13}=a_{61}+1$．

探究 1：m 的值是多少？

提示：因为$a_{11}=2$，$a_{13}=a_{61}+1$，所以$2m^2=2+(6-1)m+1$，解得$m=3$或$m=-\frac{1}{2}$（舍）．

探究 2：a_{67}的值是多少？

提示：$a_{67}=a_{61}m^6=(2+5\times 3)\times 3^6=17\times 3^6$．

探究 3：$a_{ij}(i,j=1,2,3,\cdots,n)$的表达式是什么？

提示：由探究 1，得$a_{ij}=a_{i1}\cdot 3^{j-1}=[2+(i-1)\cdot 3]\cdot 3^{j-1}=(3i-1)\cdot 3^{j-1}$．

[评价活动]

1．已知数列$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列，且a_1，a_2，a_5成等比数列，则a_2等于　（　　）

A．3　　B．-3　　C．2　　D．-2

A **解析**：因为a_1，a_2，a_5成等比数列，

所以$a_2^2=a_1a_5=(a_2-2)(a_2+6)$，解得$a_2=3$．

2. 有四个实数,前三个数成等比数列,后三个数成等差数列,前三个数之积为 27,中间两个数之和为 9,求这四个数.

解:(方法一)设前三个数分别为 $\frac{a}{q}$,a,$aq(a\neq0)$,则第四个数为 $2aq-a$.

由题意得 $\begin{cases}\frac{a}{q}\cdot a\cdot qa=27,\\a+aq=9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\q=2.\end{cases}$

所以这四个数分别为 $\frac{3}{2}$,3,6,9.

(方法二)设后三个数分别为 $a-d$,a,$a+d(a\neq0)$,则第一个数为 $\frac{(a-d)^2}{a}$.

由题意得 $\begin{cases}\frac{(a-d)^2}{a}\cdot(a-d)\cdot a=27,\\a-d+a=9,\end{cases}$

化简得 $\begin{cases}a-d=3,\\2a-d=9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=6,\\d=3.\end{cases}$

所以这四个数分别为 $\frac{3}{2}$,3,6,9.

(方法三)设前三个数分别为 a,aq,$aq^2(a\neq0)$,则第四个数为 $2aq^2-aq$.

由题意得 $\begin{cases}a\cdot aq\cdot aq^2=27,\\aq+aq^2=9,\end{cases}$

化简得 $\begin{cases}aq=3,\\aq(1+q)=9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{3}{2},\\q=2.\end{cases}$

所以这四个数分别为 $\frac{3}{2}$,3,6,9.

3. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n,$a_1=1$,$a_{n+1}=2S_n+1(n\geqslant1)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)等差数列 $\{b_n\}$ 的各项为正,其前 n 项和为 T_n,且 $T_3=15$,又 a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3 成等比数列,求 T_n.

解:(1)由 $a_{n+1}=2S_n+1$,

可得 $a_n=2S_{n-1}+1(n\geqslant2)$.

两式相减,得 $a_{n+1}-a_n=2a_n$,即 $a_{n+1}=3a_n(n\geqslant2)$.

又因为 $a_2=2S_1+1=3$,所以 $a_2=3a_1$.

故 $\{a_n\}$ 是首项为 1,公比为 3 的等比数列,

所以 $a_n=3^{n-1}$.

(2)设 $\{b_n\}$ 的公差为 d.

由 $T_3=15$,得 $b_1+b_2+b_3=15$,可得 $b_2=5$,

故 $b_1=5-d$,$b_3=5+d$.

又 $a_1=1$,$a_2=3$,$a_3=9$,

由题意可得 $(5-d+1)(5+d+9)=(5+3)^2$,

解得 $d_1=2$,$d_2=-10$.

因为等差数列 $\{b_n\}$ 的各项为正,

所以 $d>0$.

所以 $d=2$.所以 $b_1=3$.

所以 $T_n=3n+\frac{n(n-1)}{2}\times2=n^2+2n$.

【类题通法】

解决等差数列与等比数列的综合问题
应注意的四个方面

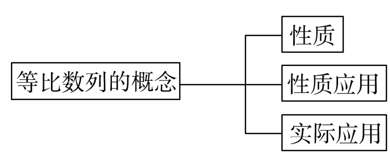
(1)注意等差数列、等比数列相关公式和性质的灵活应用.

(2)注意基本量及方程思想.

(3)注重问题的转化,利用非等差数列、非等比数列构造出新的等差数列或等比数列,以便利用公式和性质解题.

(4)当题中出现多个数列时,既要纵向考查单一数列的项与项之间的关系,又要横向考查各数列之间的内在联系.

提质归纳



课后素养评价(八)

基础性·能力运用

1. 公比不为 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_5a_6+a_4a_7=8$.若 $a_2a_m=4$,则 m 的值为　(　　)

A.8　　B.9

C.10　　D.11

B　**解析**:因为公比不为 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_5a_6+a_4a_7=8$,所以 $a_5a_6=a_4a_7=4$.

因为 $a_2a_m=4$,所以 $2+m=5+6=11$,解得 $m=9$.故选 B.

2. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 q 为正数,且 $a_3a_9=2a_5^2$,$a_2=1$,则 $a_1=$　(　　)

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

C.$\sqrt{2}$　　D.2

B　**解析**:因为 $a_3a_9=a_6^2$,所以 $a_6=\sqrt{2}a_5$,所以 $q=\sqrt{2}$.因为 $a_2=a_1q=1$,所以 $a_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. 已知$\{a_n\}$为等比数列，$a_4+a_7=2$，$a_5a_6=-8$，则$a_{10}=$ ( )

A.1　　B.-1

C.1或-8　　D.-8

C　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.

由$a_4+a_7=2$，$a_5a_6=a_4a_7=-8$，可得$a_4=4$，$a_7=-2$或$a_4=-2$，$a_7=4$.

当$a_4=4$，$a_7=-2$时，$q^3=\frac{a_7}{a_4}=-\frac{1}{2}$，则$a_{10}=a_4q^6=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=1$；

当$a_4=-2$，$a_7=4$时，$q^3=\frac{a_7}{a_4}=-2$，则$a_{10}=a_4q^6=(-2)\times(-2)^2=-8$.

故选C.

4. 已知等比数列$\{a_n\}$，且$a_5=9$，$a_3a_8=81a_2$，则$a_2a_6=$ ( )

A.27　　B.9　　C.±9　　D.±27

A　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.由$a_3a_8=a_2a_9=81a_2$，可得$a_9=81$.

因为$a_5=9$，所以$\frac{a_9}{a_5}=q^4=9$，$q^2=3$，$a_3=\frac{a_5}{q^2}=\frac{9}{3}=3$，

所以$a_2a_6=a_3a_5=27$.

故选A.

5. 若a,b,c成等差数列，而$a+1,b,c$和$a,b,c+2$都分别成等比数列，则b的值为 ( )

A.16　　B.15　　C.14　　D.12

D　**解析**：因为a,b,c成等差数列，所以$2b=a+c$.

因为$a+1,b,c$与$a,b,c+2$都分别成等比数列，

所以$b^2=(a+1)\cdot c$，$b^2=a\cdot(c+2)$.

联立$\begin{cases}2b=a+c,\\ b^2=(a+1)c,\\ b^2=a(c+2),\end{cases}$可得$b=12$.

6. 已知数列$\{a_n\}$是首项$a_1=4$的等比数列，且$4a_1$，a_5，$-2a_3$成等差数列，则其公比q等于________.

±1　**解析**：因为$4a_1$，a_5，$-2a_3$成等差数列，

所以$2a_5=4a_1-2a_3$，即$a_5=2a_1-a_3$，

所以$4q^4=8-4q^2$，所以$q^4+q^2-2=0$.

解得$q^2=1$或$q^2=-2$(舍).所以$q=\pm1$.

7. 已知数列$\{a_n\}$满足$\log_3 a_n+1=\log_3 a_{n+1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，$a_2+a_4+a_6=9$，则$\log_{\frac{1}{3}}(a_5+a_7+a_9)$的值为________.

-5　**解析**：因为$\log_3 a_n+1=\log_3 a_{n+1}$，

所以$\log_3 a_{n+1}-\log_3 a_n=1$，所以$\log_3\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$，

所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$，所以$\{a_n\}$是等比数列，公比为3.

则$\log_{\frac{1}{3}}(a_5+a_7+a_9)=\log_{\frac{1}{3}}[(a_2+a_4+a_6)\cdot q^3]=\log_{\frac{1}{3}}(9\times27)=-5$.

8. 设公比不为1的等比数列$\{a_n\}$满足$a_1a_2a_3=-\frac{1}{8}$，且a_2,a_4,a_3成等差数列，求a_1.

解：设$\{a_n\}$的公比为$q(q\neq1)$.

因为$a_1a_2a_3=a_2^3=-\frac{1}{8}$，所以$a_2=-\frac{1}{2}$.

因为a_2,a_4,a_3成等差数列，所以$2a_4=a_2+a_3$.

所以$2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot q^2=-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot q$，

解得$q=-\frac{1}{2}$或$q=1$(舍).

所以$a_1=\frac{a_2}{q}=1$.

综合性·创新提升

1. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，公比$q\neq\pm1$.若$a_m=a_1a_2a_3a_4a_5$，则m等于 ( )

A.9　　B.10

C.11　　D.12

C　**解析**：因为$a_m=a_1a_2a_3a_4a_5=a_3^5=q^{10}=a_{11}$，所以$m=11$.

2. (多选)设$\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$是各项为正数的等比数列，$q$是其公比，$K_n$是其前$n$项的积，且$K_5<K_6$，$K_6=K_7>K_8$，则下列选项中成立的有 ( )

A.$0<q<1$

B.$a_7=1$

C.$K_9>K_5$

D.K_6与K_7均为K_n的最大值

ABD　**解析**：由$K_5<K_6$可得$a_6=\frac{K_6}{K_5}>1$.又$K_6=K_7$，则$a_7=\frac{K_7}{K_6}=1$，则$q=\frac{a_7}{a_6}\in(0,1)$，A，B正确.

对于C，由$\{a_n\}$是各项为正数的等比数列且$q\in(0,1)$，可得数列递减，则有$K_9<K_5$，故C项错误.对于D，结合$K_5<K_6$，$K_6=K_7>K_8$，可知D正确.

3. (多选)已知等比数列$\{a_n\}$，$a_1>0$，公比$q>1$，且$a_1a_2\cdots a_{2\,021}<1$，$a_1a_2\cdots a_{2\,022}>1$，则 ( )

A.$a_{2\,022}>1$

B.当$n=2\,021$时，$a_1a_2\cdots a_n$最小

C.当$n=1\,011$时，$a_1a_2\cdots a_n$最小

D.存在$n<1\,011$，使得$a_na_{n+1}=a_{n+2}$

AC **解析**:对于A,因为 $a_1>0,q>1$,所以 $a_n>0$.又 $a_1a_2\cdots a_{2\,021}<1,a_1a_2\cdots a_{2\,022}>1$,

所以 $a_{2\,022}>\dfrac{1}{a_1a_2\cdots a_{2\,021}}>1$,故A正确.

对于B,C,由等比数列的性质,可得 $a_1a_{2\,021}=a_2a_{2\,020}=\cdots=a_{1\,010}a_{1\,012}=a_{1\,011}^2$,

故 $a_1a_2\cdots a_{2\,021}=a_{1\,011}^{2\,021}<1,a_{1\,011}<1$.

因为 $a_2a_{2\,022}=a_3a_{2\,021}=\cdots=a_{1\,011}a_{1\,013}=a_{1\,012}^2$,

所以 $a_2a_3a_4\cdots a_{2\,022}=a_{1\,012}^{2\,021}>\dfrac{1}{a_1}$.

因为 $a_1a_2\cdots a_{2\,021}<1,a_1>0,q>1$,所以 $a_1<1,\dfrac{1}{a_1}>1$,

所以 $a_{1\,012}>1$,故当 $n=1\,011$ 时,$a_1a_2\cdots a_n$ 最小,B错误,C正确.

对于D,当 $n<1\,011$ 时,$a_n<a_{1\,011}<1$,故 $a_na_{n+1}<a_{n+1}<a_{n+2}$,故D错误.

故选AC.

4. 已知等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,前4项的和为 a_1+14,且 a_2,a_3+1,a_4 成等差数列,则 q 的值为 ( )

A.$\dfrac{1}{2}$ B.1 C.2或$\dfrac{1}{2}$ D.3

C **解析**:因为 a_2,a_3+1,a_4 成等差数列,所以 $a_2+a_4=2(a_3+1)$,

因此,$a_1+a_2+a_3+a_4=a_1+3a_3+2=a_1+14$,故 $a_3=4$.又$\{a_n\}$是公比为 q 的等比数列,所以由 $a_2+a_4=2(a_3+1)$,得 $a_3\left(q+\dfrac{1}{q}\right)=2(a_3+1)$,即 $q+\dfrac{1}{q}=\dfrac{5}{2}$,解得 $q=2$ 或 $\dfrac{1}{2}$.

5. 已知数列$\{a_n\}$是等比数列,且 $a_3+a_5=18,a_9+a_{11}=144$,则 $a_6+a_8=$________.

$\pm36\sqrt{2}$ **解析**:设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q.

因为 $\dfrac{a_9+a_{11}}{a_3+a_5}=q^6=\dfrac{144}{18}=8$,

所以 $q^3=\pm2\sqrt{2}$.

所以 $a_6+a_8=(a_3+a_5)\cdot q^3=18\times(\pm2\sqrt{2})=\pm36\sqrt{2}$.

6. 已知$\{a_n\}$是等比数列,且 $a_n>0,a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$,则 $a_3+a_5=$________,a_4 的最大值为________.

5 $\dfrac{5}{2}$ **解析**:因为$\{a_n\}$是等比数列,$a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$,

所以 $a_3^2+2a_3a_5+a_5^2=25$,即 $(a_3+a_5)^2=25$.

因为 $a_n>0$,

所以 $a_3+a_5=5$,

故 $a_3+a_5\geqslant2\sqrt{a_3a_5}=2a_4$,即 $a_4\leqslant\dfrac{5}{2}$.

7. 已知数列$\{a_n\}$是首项为1,公比为 q 的等比数列.

(1)求证:当 $0<q<1$ 时,$\{a_n\}$是递减数列;

(2)若对任意 $k\in\mathbf{N}^*$,都有 a_k,a_{k+2},a_{k+1} 成等差数列,求 q 的值.

(1)**证明**:因为 $a_n=a_1q^{n-1}=q^{n-1}$,

所以 $a_{n+1}-a_n=q^n-q^{n-1}=q^{n-1}(q-1)$.

当 $0<q<1$ 时,有 $q^{n-1}>0,q-1<0$,

所以 $a_{n+1}-a_n<0$,

所以$\{a_n\}$为递减数列.

(2)**解**:因为 a_k,a_{k+2},a_{k+1} 成等差数列,

所以 $2a_{k+2}=a_k+a_{k+1}$.

所以 $2q^{k+1}-(q^{k-1}+q^k)=0$,

即 $q^{k-1}\cdot(2q^2-q-1)=0$.

因为 $q\neq0$,所以 $2q^2-q-1=0$,

解得 $q=1$ 或 $q=-\dfrac{1}{2}$.

8. 设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,已知 $a_1=1,S_{n+1}=4a_n+2$,且 $b_n=a_{n+1}-2a_n$.

(1)求证:数列$\{b_n\}$是等比数列;

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

(1)**证明**:$S_{n+1}=4a_n+2,S_{n+2}=4a_{n+1}+2$,

两式相减,得 $S_{n+2}-S_{n+1}=4(a_{n+1}-a_n)$,

即 $a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$,

所以 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{a_{n+2}-2a_{n+1}}{a_{n+1}-2a_n}=\dfrac{4a_{n+1}-4a_n-2a_{n+1}}{a_{n+1}-2a_n}=2$.

当 $n=1$ 时,由 $S_2=4a_1+2$ 得 $a_2=5$,

所以 $b_1=a_2-2a_1=3$,

所以$\{b_n\}$是首项为3,公比为2的等比数列.

(2)**解**:由(1)知等比数列$\{b_n\}$的首项 $b_1=3$,公比 $q=2$,

所以 $a_{n+1}-2a_n=3\times2^{n-1}$,则 $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{3}{4}$.

所以数列$\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$是首项为$\dfrac{1}{2}$,公差为$\dfrac{3}{4}$的等差数列.

所以 $\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{1}{2}+(n-1)\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{4}n-\dfrac{1}{4}$,

所以 $a_n=(3n-1)\cdot2^{n-2}$.

4.3.2 等比数列的前 n 项和公式

第1课时 等比数列的前 n 项和

学习任务目标

1.掌握等比数列的前 n 项和公式及其应用.(数学运算)
2.掌握等比数列前 n 项和的性质.(数学运算)
3.会用错位相减法求数列的和.(数学运算)

问题式预习

知识点一 等比数列的前 n 项和

已知量	首项 a_1、公比 $q(q\neq1)$ 与项数 n	首项 a_1、末项 a_n 与公比 $q(q\neq1)$	首项 a_1、公比 $q=1$
求和公式	$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$	$S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$	$S_n=na_1$

[微训练]

1.判断(正确的打"√",错误的打"×").

(1)求等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和时,可直接套用公式 $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$. (×)

(2)若首项为 a 的数列既是等比数列又是等差数列,则其前 n 项和等于 na. (√)

(3)若 $a\in\mathbf{R}$,则 $1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}=\dfrac{1-a^n}{1-a}$. (×)

2.(多选)在等比数列$\{a_n\}$中,其前 n 项和为 S_n,$a_1=2$,$S_3=26$,则公比 q 可能为 ( )

A.3 B.-4 C.-3 D.4

AB **解析**:由题意可知 $q\neq1$,且 $S_3=\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\dfrac{2(1-q^3)}{1-q}=26$,所以 $q^2+q-12=0$,所以 $q=3$ 或 $q=-4$.

3.在各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中,S_n为其前 n 项和.若 $a_1=81$,$a_5=16$,则 $S_5=$________.

211 **解析**:由 $16=81\times q^{5-1}$,$q>0$,得公比 $q=\dfrac{2}{3}$,

所以 $S_5=\dfrac{81\times\left[1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^5\right]}{1-\dfrac{2}{3}}=211$.

知识点二 等比数列前 n 项和的性质

(1)若数列$\{a_n\}$为非常数列的等比数列,且其前 n 项和 $S_n=A\cdot q^n+B(A\neq0,B\neq0,q\neq0,q\neq1)$,则必有 $A+B=0$;反之,若某一数列(非常数列)的前 n 项和 $S_n=A\cdot q^n-A(A\neq0,q\neq0,q\neq1)$,则该数列必为等比数列.

(2)若等比数列$\{a_n\}$的公比 $q\neq-1$,前 n 项和为 S_n,则 $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$成等比数列,公比为 q^n.

(3)当等比数列$\{a_n\}$的项数为偶数时,偶数项的和与奇数项的和之比$\dfrac{S_{偶}}{S_{奇}}=q$.

知识点三 错位相减法求和

推导等比数列前 n 项和的方法是错位相减法,一般适用于求一个等差数列与一个等比数列对应项乘积所构成数列的前 n 项和.

[微训练]

1.判断(正确的打"√",错误的打"×").

(1)若等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+m$,则 $m=-2$. (√)

(2)若数列$\{a_n\}$是公比 $q\neq1$ 的等比数列,则其前 n 项和公式可表示为 $S_n=-Aq^n+A(A\neq0,q\neq0$ 且 $q\neq1,n\in\mathbf{N}^*)$. (√)

2.下列数列中,可以用错位相减法求和的是 ( )

A.$\{n^2\}$ B.$\{n+3^n\}$

C.$\left\{-n\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$ D.$\left\{\dfrac{2^n}{n}\right\}$

C **解析**:错位相减法适用于求一个等差数列与一个等比数列的对应项乘积所构成数列的前 n 项和,故选C.

3.数列$\{n\times2^{n-1}\}$的前 n 项和为 ( )

A.$-3+(n+1)\times2^n$ B.$3+(n+1)\times2^n$

C.$1+(n+1)\times2^n$ D.$1+(n-1)\times2^n$

D **解析**:设数列$\{n\times2^{n-1}\}$的前 n 项和为 T_n,

则 $T_n=1\times2^0+2\times2^1+3\times2^2+\cdots+n\times2^{n-1}$,

$2T_n=1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n$.

两式作差得 $-T_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\times2^n=\dfrac{1-2^n}{1-2}-n\times2^n=-1+(1-n)\times2^n$,

故 $T_n=1+(n-1)\times2^n$.

任务型课堂

任务一　等比数列的前 n 项和

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，其前 n 项和为 S_n. 若公比 $q=-\frac{1}{2}$，$S_5=11$，则 $a_1=$________.

16　**解析**：由 $S_5=\frac{a_1\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^5\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\times\frac{33}{32}a_1=11$，解得 $a_1=16$.

2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，S_n 为其前 n 项和，解决下列问题.

(1) 若 $a_n=2^n$，求 S_6；

(2) 若 $a_1+a_3=\frac{5}{4}$，$a_4+a_6=10$，求 S_5；

(3) 若 $S_n=189$，公比 $q=2$，$a_n=96$，求 a_1 和 n.

解：(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q.

因为 $a_n=2^n=2\times2^{n-1}$，所以 $a_1=2$，$q=2$.

所以 $S_6=\frac{2\times(1-2^6)}{1-2}=126$.

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q.

由题意，得 $\begin{cases}a_1+a_1q^2=\frac{5}{4},\\ a_1q^3+a_1q^5=10,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=\frac{1}{4},\\ q=2.\end{cases}$

从而 $S_5=\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\frac{\frac{1}{4}\times(1-2^5)}{1-2}=\frac{31}{4}$.

(3)(方法一) 由 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，$a_n=a_1q^{n-1}$ 及已知条件，得 $\begin{cases}189=\frac{a_1(1-2^n)}{1-2},\\ 96=a_1\cdot2^{n-1},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=3,\\ n=6.\end{cases}$

(方法二) 由公式 $S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$ 及已知条件，

得 $189=\frac{a_1-96\times2}{1-2}$，解得 $a_1=3$.

又由 $a_n=a_1q^{n-1}$，得 $96=3\times2^{n-1}$，解得 $n=6$.

任务二　等比数列前 n 项和的性质

［探究活动］

我国古代数学著作《算法统宗》中有这样一个问题情境：三百七十八里关，初行健步不为难，次日脚痛减一半，六朝终得到其关. 其大意为：有一个人走 378 里路，第一天健步行走，从第二天起脚痛，每天走的路程为前一天所走路程的一半，走了 6 天后到达目的地.

探究 1：此人第一天走的路程为多少里？

提示：由题设知，此人每天走的路程构成等比数列 $\{a_n\}$，且公比 $q=\frac{1}{2}$，

由前 6 项的和为 378，可得 $\frac{a_1\left(1-\frac{1}{2^6}\right)}{1-\frac{1}{2}}=378$，

解得 $a_1=192$. 所以此人第一天走了 192 里.

探究 2：此人第二天走了多少里？后三天共走了多少里？

提示：由探究 1，得 $a_2=96$，$a_3=48$，$a_4=24$，$a_5=12$，$a_6=6$，所以此人第二天走了 96 里，后三天共走了 42 里.

［评价活动］

1. 若等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_2=7$，$S_6=91$，则 S_4 为　　(　　)

A. 28　　B. 32

C. 21　　D. 28 或 -21

A　**解析**：因为 $\{a_n\}$ 为等比数列，

所以 S_2，S_4-S_2，S_6-S_4 也为等比数列，

即 7，S_4-7，$91-S_4$ 成等比数列.

由 $(S_4-7)^2=7\times(91-S_4)$，得 $S_4=28$ 或 $S_4=-21$.

又因为 $S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=a_1+a_2+a_1q^2+a_2q^2=(a_1+a_2)(1+q^2)=S_2(1+q^2)>S_2$，

所以 $S_4=28$.

2. (1) 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，公比 $q=3$，$S_{80}=32$，则 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{80}=$________.

(2) 等比数列 $\{a_n\}$ 共 $2n$ 项，其所有项的和为 -240，且奇数项的和比偶数项的和大 80，则公比 $q=$________.

(3) 若等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=2\times3^n+r$，则实数 $r=$________.

(1) 24　(2) 2　(3) -2　**解析**：(1) 设 $A=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{80}$，

$B=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{79}$，

则 $\frac{A}{B}=q=3$，即 $A=3B$.

又 $A+B=S_{80}=32$，所以 $\frac{4}{3}A=32$，解得 $A=24$.

所以 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{80}=24$.

(2) 根据题意得 $\begin{cases}S_{奇}+S_{偶}=-240,\\ S_{奇}-S_{偶}=80,\end{cases}$

所以$\begin{cases}S_{奇}=-80,\\S_{偶}=-160.\end{cases}$

所以 $q=\dfrac{S_{偶}}{S_{奇}}=\dfrac{-160}{-80}=2$.

(3)因为 $S_n=2\times3^n+r$,

所以当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2\times3^n-2\times3^{n-1}=4\times3^{n-1}$.

当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=6+r$.

因为$\{a_n\}$为等比数列,所以 $6+r=4$.所以 $r=-2$.

【类题通法】

应用等比数列前 n 项和性质的关注点

(1)运用等比数列的前 n 项和公式,要注意公比 $q=1$ 和 $q\neq1$ 两种情形,在解有关的方程(组)时,通常用约分或两式相除的方法进行消元.

(2)在解决等比数列前 n 项和问题时,当条件涉及奇数项和与偶数项和的时候,如果项数为偶数,可考虑利用奇数项和与偶数项和之间的关系求解.

(3)当已知条件涉及片段和时,要考虑性质 $S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m},\cdots$成等比数列.

任务三 错位相减法求数列的和

[探究活动]

已知数列:$\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{8},\cdots,\dfrac{2n-1}{2^n},\cdots$.

探究 1:观察此数列的每一项是怎样构成的.

提示:此数列可以写成 $1\times\dfrac{1}{2},3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2,5\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3,\cdots,(2n-1)\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$,每一项均可以看作数列$\{a_nb_n\}$的项,其中$\{a_n\}$是等差数列,$\{b_n\}$是等比数列.

探究 2:应使用什么方法求这种数列的前 n 项和?

提示:使用“错位相减法”.

探究 3:求这种数列前 n 项和的具体步骤是怎样的?

提示:分别写出 S_n 与 qS_n(q 为对应等比数列的公比)的表达式,两式交错对齐,作差,再利用等比数列的前 n 项和公式求解.

步骤如下:

$S_n=1\times\dfrac{1}{2}+3\times\dfrac{1}{2^2}+5\times\dfrac{1}{2^3}+\cdots+(2n-1)\cdot\dfrac{1}{2^n}$,

$\dfrac{1}{2}S_n=1\times\dfrac{1}{2^2}+3\times\dfrac{1}{2^3}+\cdots+(2n-1)\cdot\dfrac{1}{2^{n+1}}$.

两式相减,得

$\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{1}{2^2}+\cdots+2\times\dfrac{1}{2^n}-(2n-1)\cdot\dfrac{1}{2^{n+1}}$

$=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)-\dfrac{1}{2}-(2n-1)\cdot\dfrac{1}{2^{n+1}}$

$=2\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)-\dfrac{1}{2}-(2n-1)\dfrac{1}{2^{n+1}}$,

$S_n=4\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)-1-(2n-1)\dfrac{1}{2^n}=3-\dfrac{1}{2^n}(4+2n-1)=3-(2n+3)\cdot\dfrac{1}{2^n}=3-\dfrac{2n+3}{2^n}$.

[评价活动]

1.(2022·全国乙卷(理))已知等比数列$\{a_n\}$的前 3 项和为 168,$a_2-a_5=42$,则 $a_6=$ ( )

A.14 B.12

C.6 D.3

D **解析**:设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q.

若 $q=1$,则 $a_2-a_5=0$,与题意矛盾,

所以 $q\neq1$,则$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=168,\\a_2-a_5=a_1q-a_1q^4=42,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=96,\\q=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$所以 $a_6=a_1q^5=3$.故选 D.

2.已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $a_n=n\cdot2^n$,则 $S_n=$________.

$(n-1)2^{n+1}+2(n\in\mathbf{N}^*)$ **解析**:因为 $a_n=n\cdot2^n$,

所以 $S_n=1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n$①,

所以 $2S_n=1\times2^2+2\times2^3+\cdots+(n-1)\times2^n+n\times2^{n+1}$②,

①−②,得

$-S_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\times2^{n+1}$

$=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-n\times2^{n+1}$

$=2^{n+1}-2-n\times2^{n+1}$

$=(1-n)2^{n+1}-2$.

所以 $S_n=(n-1)2^{n+1}+2(n\in\mathbf{N}^*)$.

3.已知数列$\{(2n-1)a^{n-1}\}(a\neq0)$,求它的前 n 项和 S_n.

解:当 $a=1$ 时,数列变成 $1,3,5,7,\cdots,2n-1,\cdots$,

则 $S_n=\dfrac{n[1+(2n-1)]}{2}=n^2$.

当 $a\neq1$ 时,

有 $S_n=1+3a+5a^2+7a^3+\cdots+(2n-1)\cdot a^{n-1}$①,

$aS_n=a+3a^2+5a^3+7a^4+\cdots+(2n-1)a^n$②.

①−②得 $S_n-aS_n=1+2a+2a^2+2a^3+\cdots+2a^{n-1}-(2n-1)a^n$,

所以$(1-a)S_n=1-(2n-1)a^n+2(a+a^2+a^3+a^4+\cdots+a^{n-1})=1-(2n-1)a^n+2\times\dfrac{a(1-a^{n-1})}{1-a}$

$=1-(2n-1)a^n+\dfrac{2(a-a^n)}{1-a}$.

又 $1-a\neq 0$，

所以 $S_n=\frac{1-(2n-1)a^n}{1-a}+\frac{2(a-a^n)}{(1-a)^2}$.

所以 $S_n=\begin{cases}n^2, a=1,\\ \frac{1-(2n-1)a^n}{1-a}+\frac{2(a-a^n)}{(1-a)^2}, a\neq 1.\end{cases}$

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 是首项、公比均为 5 的等比数列，$b_n=a_n\log_{25}a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

解：依题意，得 $a_n=5\times 5^{n-1}=5^n$，

于是 $b_n=5^n\log_{25}5^n=\frac{1}{2}\cdot n\cdot 5^n$.

所以 $S_n=\frac{1}{2}\times 1\times 5+\frac{1}{2}\times 2\times 5^2+\frac{1}{2}\times 3\times 5^3+\cdots+\frac{1}{2}\times n\times 5^n$.

则 $5S_n=\frac{1}{2}\times 1\times 5^2+\frac{1}{2}\times 2\times 5^3+\frac{1}{2}\times 3\times 5^4+\cdots+\frac{1}{2}\times(n-1)\times 5^n+\frac{1}{2}\times n\times 5^{n+1}$.

两式相减，得 $-4S_n=\frac{1}{2}\times 5+\frac{1}{2}\times 5^2+\frac{1}{2}\times 5^3+\cdots+\frac{1}{2}\times 5^n-\frac{1}{2}\times n\times 5^{n+1}=\frac{1}{2}(5+5^2+5^3+\cdots+5^n)-\frac{1}{2}\times n\times 5^{n+1}=\frac{1}{2}\times\frac{5(1-5^n)}{1-5}-\frac{1}{2}\times n\times 5^{n+1}=\frac{5^{n+1}-5}{8}-\frac{n\times 5^{n+1}}{2}$，

故 $S_n=\frac{5-5^{n+1}+4n\times 5^{n+1}}{32}=\frac{5+(4n-1)\cdot 5^{n+1}}{32}$.

【类题通法】

错位相减法的适用范围及注意事项

(1)适用范围

它主要适用于当 $\{a_n\}$ 是等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列时，求数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 n 项和.

(2)注意事项

①利用“错位相减法”时，在写出 S_n 与 qS_n 的表达式时，应注意使两式交错对齐，以便作差，从而正确写出 $(1-q)S_n$ 的表达式.

②注意对公式的选择，常用 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq 1)$.

③使用此法时要注意讨论公比 q 是否等于 1.

提质归纳

- 等比数列前n项和
  - 前n项和公式
    - $S_n=\begin{cases}na_1, q=1,\\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}, q\neq 1\end{cases}$
    - $S_n=A(q^n-1)$，其中$A\neq 0, q\neq 0$且$q\neq 1$
  - 前n项和的性质 — 应用
  - 错位相减法求数列的前n项和

课后素养评价(九)

基础性·能力运用

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=2^n$，S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则 S_{10} 等于（　　）

A. 10　　B. 210

C. $2^{10}-2$　　D. $2^{11}-2$

D　**解析**：因为 $a_n=2^n$，所以 $a_1=2, q=2$.

所以 $S_{10}=\frac{2\times(1-2^{10})}{1-2}=2^{11}-2$.

2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=9, a_5=243$，则 $\{a_n\}$ 的前 4 项和为（　　）

A. 81　　B. 120

C. 168　　D. 192

B　**解析**：设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

因为 $a_2=9, a_5=243$，

所以 $q^3=\frac{a_5}{a_2}=27$，所以 $q=3$.

又因为 $a_2=a_1q$，所以 $a_1=3$.

所以前 4 项和 $S_4=\frac{3\times(1-3^4)}{1-3}=120$.

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_2a_6=8(a_4-2)$，则 $S_{2\,024}=$（　　）

A. $2^{2\,023}-\frac{1}{2}$　　B. $1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2\,023}$

C. $2^{2\,024}-\frac{1}{2}$　　D. $1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2\,024}$

A　**解析**：设 $\{a_n\}$ 的公比为 q.

因为 $a_2a_6=a_4^2=8(a_4-2)$，

所以 $a_4^2-8a_4+16=0$，所以 $a_4=4$.

所以 $q^3=\frac{a_4}{a_1}=8$，所以 $q=2$.

所以 $S_{2\,024}=\frac{\frac{1}{2}\times(1-2^{2\,024})}{1-2}=2^{2\,023}-\frac{1}{2}$.

4.等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，已知 $S_3=a_2+10a_1$，$a_5=9$，则 $a_1=$ （　　）

A.$\frac{1}{3}$　　B.$-\frac{1}{3}$　　C.$\frac{1}{9}$　　D.$-\frac{1}{9}$

C　**解析**：设公比为 q.因为 $S_3=a_2+10a_1$，$a_5=9$，

所以$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=a_2+10a_1,\\a_1q^4=9,\end{cases}$所以$\begin{cases}a_1q^2=9a_1,\\a_1q^4=9,\end{cases}$

解得 $a_1=\frac{1}{9}$.故选 C.

5.已知各项为正的等比数列的前 5 项和为 3，前 15 项和为 39，则该数列的前 10 项和为 （　　）

A.$3\sqrt{2}$　　B.$3\sqrt{13}$　　C.12　　D.15

C　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.由等比数列的性质可得 S_5，$S_{10}-S_5$，$S_{15}-S_{10}$ 也为等比数列.

又 $S_5=3$，$S_{15}=39$，故可得$(S_{10}-S_5)^2=S_5(S_{15}-S_{10})$，即$(S_{10}-3)^2=3(39-S_{10})$，解得 $S_{10}=12$ 或 $S_{10}=-9$.因为等比数列各项为正，所以 $S_{10}=12$，故选 C.

6.在等比数列$\{a_n\}$中，若 $a_1+a_2+a_3+a_4=\frac{15}{8}$，$a_2a_3=-\frac{9}{8}$，则$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}$等于________.

$-\frac{5}{3}$　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，则 $a_1+a_2+a_3+a_4=a_1(1+q+q^2+q^3)=\frac{15}{8}$，$a_2a_3=a_1^2q^3=-\frac{9}{8}$，

所以 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}=\frac{1}{a_1}\left(1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}\right)=\frac{q^3+q^2+q+1}{a_1q^3}=\frac{a_1(q^3+q^2+q+1)}{a_1^2q^3}=\frac{\frac{15}{8}}{-\frac{9}{8}}=-\frac{5}{3}$.

7.已知 $f(x)=x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n$，则 $f\left(\frac{1}{2}\right)=$________.

$2-\frac{n+2}{2^n}$　**解析**：因为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2^2}+3\times\frac{1}{2^3}+\cdots+n\times\frac{1}{2^n}$①，

所以$\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^2}+2\times\frac{1}{2^3}+3\times\frac{1}{2^4}+\cdots+n\times\frac{1}{2^{n+1}}$②.

由①－②，得$\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$，

所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$.

8.已知等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，前 n 项和为 S_n.

(1)若 $a_1=-8$，$a_3=-2$，求 S_4；

(2)若 $S_6=315$，$q=2$，求 a_1.

解：(1)由题意可得 $q^2=\frac{a_3}{a_1}=\frac{-2}{-8}=\frac{1}{4}$，

所以 $q=-\frac{1}{2}$ 或 $q=\frac{1}{2}$.

当 $q=-\frac{1}{2}$ 时，$S_4=\frac{-8\times\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^4\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-5$；

当 $q=\frac{1}{2}$ 时，$S_4=\frac{-8\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]}{1-\frac{1}{2}}=-15$.

综上所述，$S_4=-15$ 或 $S_4=-5$.

(2)$S_6=\frac{a_1(1-2^6)}{1-2}=315$，解得 $a_1=5$.

综合性·创新提升

1.设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，前 n 项的倒数之和为 T_n，则$\frac{S_n}{T_n}$的值为 （　　）

A.a_1a_n　　B.$\frac{a_1}{a_n}$　　C.$a_1^na_n^n$　　D.$\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^n$

A　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q.

当 $q\neq1$ 时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，$T_n=\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^n}{1-\frac{1}{q}}=\frac{1}{a_1q^{n-1}}\cdot\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{1}{a_n}\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$，

所以$\frac{S_n}{T_n}=\frac{\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}}{\frac{1}{a_n}\cdot\frac{q^n-1}{q-1}}=a_1a_n$；

当 $q=1$ 时，$a_n=a_1$，$S_n=na_1$，$T_n=\frac{n}{a_1}$，

所以$\frac{S_n}{T_n}=\frac{na_1}{\frac{n}{a_1}}=a_1^2=a_1a_n$.

综上所述，$\frac{S_n}{T_n}=a_1a_n$.

故选 A.

2.(多选)已知$\{a_n\}$是首项为 1 的等比数列，S_n 是$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $9S_3=S_6$，则 （　　）

A.公比 $q=2$

B.$S_9=2^9-1$

C.数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前 5 项和为$\frac{31}{16}$

D.$6S_3=S_9$

ABC　**解析**:设$\{a_n\}$的公比为 q.

因为 $9S_3=S_6$,所以 $9\times\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}$,

所以 $9=1+q^3$,所以 $q=2$.

所以 $S_9=\frac{1-2^9}{1-2}=2^9-1$.故选项 A,B 正确.

又 $6S_3=6\times(2^3-1)\neq S_9$,所以选项 D 不正确.

因为$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是等比数列,首项$\frac{1}{a_1}=1$,公比为$\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$,

所以其前 5 项和 $S_5'=\frac{1\times\left(1-\frac{1}{2^5}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{31}{16}$.选项 C 正确.

3.等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.若 $S_3=2,S_6=18$,则$\frac{S_{10}}{S_5}$等于　(　　)

A.-3　　B.5

C.-31　　D.33

D　**解析**:设$\{a_n\}$的公比为 q.

因为 $S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=2,S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=18$,

所以 $1+q^3=9$,所以 $q=2$.

所以$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{1-q^{10}}{1-q^5}=1+q^5=33$.

4.数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 3^n-1,则数列$\{a_n^2\}$的前 n 项和为　(　　)

A.$\frac{9^{n+1}+15}{8}+n-3^{n+1}$　　B.$\frac{9^n+15}{8}+n-3^n$

C.$\frac{9^n-1}{4}$　　D.$\frac{9^n-1}{2}$

D　**解析**:设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,依题意可得 $S_n=3^n-1$.

当 $n=1$ 时,$a_1=3-1=2$,

当 $n\geqslant 2$ 时,由 $S_n=3^n-1$ 得 $S_{n-1}=3^{n-1}-1$,

两式相减得 $a_n=2\cdot 3^{n-1}$,

a_1 也符合上式,所以 $a_n=2\cdot 3^{n-1}$,

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2\cdot 3^n}{2\cdot 3^{n-1}}=3$,所以数列$\{a_n\}$是等比数列,首项为 2,公比为 3.

所以数列$\{a_n^2\}$是首项为 $a_1^2=4$,公比为 $3^2=9$ 的等比数列,

所以数列$\{a_n^2\}$的前 n 项和为$\frac{4(1-9^n)}{1-9}=\frac{9^n-1}{2}$.

故选 D.

5.已知$\{a_n\}$是等比数列,$a_2=2,a_5=\frac{1}{4}$,则 $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}=$________.

$\frac{32}{3}(1-4^{-n})$　**解析**:设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,

由 $a_5=\frac{1}{4}=a_2q^3=2q^3$,解得 $q=\frac{1}{2}$.又数列$\{a_na_{n+1}\}$仍是等比数列,其首项是 $a_1a_2=8$,公比为$\frac{1}{4}$,所以

$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}=\frac{8\times\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}}=\frac{32}{3}(1-4^{-n})$.

6.设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.若 S_3,S_9,S_6 成等差数列,且 $a_8=3$,则 a_5 的值为________.

-6　**解析**:因为 S_3,S_9,S_6 成等差数列,

所以 $2S_9=S_3+S_6$.

显然公比 $q\neq 1$,

所以 $2\times\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}$,

所以 $2q^9-q^6-q^3=0$,所以 $q^3=-\frac{1}{2}$.

所以 $a_5=\frac{a_8}{q^3}=3\times(-2)=-6$.

7.等比数列$\{a_n\}$共有 $2n$ 项,若它的所有项的和是奇数项的和的 3 倍,则公比$q=$________.

2　**解析**:由已知可得公比 $q\neq 1$.显然数列$\{a_n\}$的奇数项也构成等比数列,其公比为 q^2,首项为 a_1,

$S_{2n}=\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}$,$S_{奇}=\frac{a_1[1-(q^2)^n]}{1-q^2}$.

由题意得$\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}=\frac{3a_1(1-q^{2n})}{1-q^2}$,所以 $1+q=3$,

所以 $q=2$.

8.在等比数列$\{a_n\}$中,$a_5=162$,公比 $q=3$,前 n 项和 $S_n=242$,求首项 a_1 和项数 n.

解:由已知条件,得$\begin{cases}a_1\cdot 3^{5-1}=162,①\\ \frac{a_1(1-3^n)}{1-3}=242,②\end{cases}$

由①得 $81a_1=162$,解得 $a_1=2$.

将 $a_1=2$ 代入②,得$\frac{2(1-3^n)}{1-3}=242$,

即 $3^n=243$,解得 $n=5$,

所以数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=2$,项数 $n=5$.

9.已知等差数列$\{a_n\}$的首项为 a,公差为 b,方程 $ax^2-3x+2=0$ 的解为 $x_1=1,x_2=b(b\neq 1)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若数列$\{b_n\}$满足 $b_n=a_n\times 2^n$,求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

解：(1)由方程 $ax^2-3x+2=0$ 的两根为 $x_1=1$，$x_2=b$，可得 $\begin{cases}a-3+2=0,\\ab^2-3b+2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=2.\end{cases}$

所以 $a_n=2n-1$.

(2)由(1)得 $b_n=(2n-1)\times2^n$，

所以 $T_n=1\times2+3\times2^2+\cdots+(2n-1)\times2^n$，①

$2T_n=1\times2^2+3\times2^3+\cdots+(2n-3)\times2^n+(2n-1)\times2^{n+1}$.②

由①－②，得 $-T_n=1\times2+2\times2^2+2\times2^3+\cdots+2\times2^n-(2n-1)\times2^{n+1}=2(2+2^2+2^3+\cdots+2^n)-(2n-1)\times2^{n+1}-2=2\times\frac{2(1-2^n)}{1-2}-(2n-1)\times2^{n+1}-2=(3-2n)\times2^{n+1}-6$.

所以 $T_n=(2n-3)\times2^{n+1}+6$.

10. 设 $\{a_n\}$ 是公比为正数的等比数列，$a_1=2$，$a_3=a_2+4$.设 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_n=n^2$.

(1)求 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2)求数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 n 项和 T_n；

(3)设 $c_n=\frac{1}{b_n\cdot b_{n+1}}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 H_n.

解：(1)由题意 $\{a_n\}$ 是公比为正数的等比数列，$a_1=2$，$a_3=a_2+4$，

设公比为 q，则 $2q^2=2q+4$，所以 $q=2$，

故 $a_n=2^n$.

因为 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2$，所以 $b_1=S_1=1$，

当 $n\geqslant2$ 时，$b_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$，

$b_1=1$ 也满足该式，故 $b_n=2n-1$.

(2)由题意可得 $T_n=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)=(2+2^2+\cdots+2^n)+[1+3+\cdots+(2n-1)]$

$=2^{n+1}-2+n^2$.

(3)由(1)得 $c_n=\frac{1}{b_n\cdot b_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

故 $H_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.

第2课时　等比数列前 n 项和的应用

学习任务目标

1. 能运用等比数列的前 n 项和公式解决一些简单的实际问题.(数学建模)

2. 能够运用所学知识解决等差数列与等比数列的综合应用问题.(数学运算)

问题式预习

知识点　分组求和

某些数列通过适当分组，可得出两个或几个等差数列或等比数列，进而利用等差数列或等比数列的求和公式分别求和，从而得出原数列的和.

[微训练]

1. 数列 $\{2^n-1\}$ 的前 n 项和 $S_n=$________.

$2^{n+1}-2-n$　**解析**：$S_n=(2^1-1)+(2^2-1)+(2^3-1)+\cdots+(2^n-1)=(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n)-n=2^{n+1}-2-n$.

2. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$a_n+a_{n+1}=4\times3^{n-1}$，则 $S_{2\,020}=$________.

$\frac{3^{2\,020}-1}{2}$　**解析**：由题意得 $S_{2\,020}=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{2\,019}+a_{2\,020})=4\times(3^0+3^2+3^4+\cdots+3^{2\,018})=4\times\frac{1\times(1-3^{2\,020})}{1-3^2}=\frac{3^{2\,020}-1}{2}$.

任务型课堂

任务一　等比数列前 n 项和的实际应用

1. 我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题："远望巍巍塔七层，红光点点倍加增，共灯三百八十一，请问尖头几盏灯."意思是：一座7层塔共挂了381盏灯，且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的2倍，则塔的顶层共有灯（　　）

A.2盏　　B.3盏　　C.5盏　　D.6盏

B　**解析**：设从上到下塔的各层灯数构成的等比数列为 $\{a_n\}$，数列的前 n 项和为 S_n，公比为 q，则由题

意知 $S_7=381, q=2$.

又由 $S_7=\frac{a_1(1-q^7)}{1-q}=\frac{a_1(1-2^7)}{1-2}=381$，解得 $a_1=3$.故选 B.

2. 为了庆祝元旦，某公司特意制作了一个热气球，在热气球上写着"喜迎新年"四个大字.已知热气球在第一分钟上升 25 m，以后每分钟上升的高度都是前一分钟上升高度的 80%，则该气球________上升到 125 m 高空.(填"能"或"不能")

不能 **解析**：设 a_n 表示热气球在第 n 分钟上升的高度.根据题意，有 $a_n=\frac{4}{5}a_{n-1}(n\geqslant2, n\in\mathbf{N}^*)$，$a_1=25$.易知 $\{a_n\}$ 为等比数列，且公比 $q=\frac{4}{5}$.则热气球前 n 分钟上升的总高度 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=125\times\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]<125$，即该气球不能上升到 125 m 高空.

3. 党的二十大报告指出："必须牢固树立和践行绿水青山就是金山银山的理念，站在人与自然和谐共生的高度谋划发展."某地投入资金进行生态环境建设，并以此发展旅游产业.据规划，本年度投入 800 万元，以后每年投入的资金将比上一年减少 $\frac{1}{5}$，本年度当地旅游业收入估计为 400 万元.由于该项建设对旅游业的促进作用，预计今后的旅游业收入每年会比上一年增长 $\frac{1}{4}$，则 n 年内的总投入为________万元，n 年内旅游业的总收入为________万元.

$4\ 000\times\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]$ $1\ 600\times\left[\left(\frac{5}{4}\right)^n-1\right]$

解析：由题意知，第 1 年投入 800 万元，

第 2 年投入 $800\times\left(1-\frac{1}{5}\right)$ 万元，

……

第 n 年投入 $800\times\left(1-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ 万元，

所以每年的投入资金数构成首项为 800，公比为 $\left(1-\frac{1}{5}\right)$ 的等比数列.

所以 n 年内的总投入 $S_n=800+800\times\left(1-\frac{1}{5}\right)+\cdots+800\times\left(1-\frac{1}{5}\right)^{n-1}=4\ 000\times\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]$(万元).

由题意知，第 1 年旅游业收入为 400 万元，

第 2 年旅游业收入为 $400\times\left(1+\frac{1}{4}\right)$ 万元，

……

第 n 年旅游业收入为 $400\times\left(1+\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ 万元，

所以每年的旅游业收入资金数构成首项为 400，公比为 $\left(1+\frac{1}{4}\right)$ 的等比数列.

所以 n 年内旅游业的总收入 $T_n=400+400\times\left(1+\frac{1}{4}\right)+\cdots+400\times\left(1+\frac{1}{4}\right)^{n-1}=1\ 600\times\left[\left(\frac{5}{4}\right)^n-1\right]$(万元).

故 n 年内的总投入为 $4\ 000\times\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]$ 万元，n 年内旅游业的总收入为 $1\ 600\times\left[\left(\frac{5}{4}\right)^n-1\right]$ 万元.

任务二 分组求和法

[探究活动]

"提丢斯数列"由 18 世纪德国天文学家提丢斯给出.首先构造数列：0，3，6，12，24，48，96，192，…，容易发现，从第 3 项开始，每一项是前一项的 2 倍；将每一项加上 4 得到一个新数列：4，7，10，16，28，52，100，196，…；再将新数列的每一项除以 10 后便得到"提丢斯数列"：0.4，0.7，1.0，1.6，2.8，5.2，10.0，….

探究 1：数列 0，3，6，12，24，48，96，192，…是等比数列吗？

提示：不是.

探究 2：根据叙述，你能写出"提丢斯数列"的通项公式吗？

提示：记"提丢斯数列"为 $\{a_n\}$，

则当 $n\geqslant2$ 时，$10a_n-4=3\times2^{n-2}$，

可得 $a_n=\frac{3\times2^{n-2}+4}{10}$.

当 $n=1$ 时，$a_1=0.4\neq0.55$，

所以 $a_n=\begin{cases}0.4, n=1,\\ \frac{3\times2^{n-2}+4}{10}, n\geqslant2.\end{cases}$

探究 3："提丢斯数列"的前 31 项和为多少？

提示：由探究 2，得"提丢斯数列"前 31 项和

$S_{31}=0.4+30\times\frac{4}{10}+\frac{3}{10}(2^0+2+2^2+\cdots+2^{29})=\frac{124}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{1-2^{30}}{1-2}=\frac{3\times2^{30}}{10}+\frac{121}{10}=\frac{3\times2^{30}+121}{10}$.

[评价活动]

1. 利用数列 $\{a_n\}$：$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 构造一个新数列：$a_1, a_2-a_1, \cdots, a_n-a_{n-1}, \cdots$，新数列是首项为

1，公比为$\frac{1}{3}$的等比数列.求：

(1)数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)数列$\{a_n\}$的前n项和S_n.

解：(1)$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{3}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$.

(2)$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$=\frac{3}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{3}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]+\cdots+\frac{3}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$

$=\frac{3}{2}n-\frac{3}{4}\times\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$

$=\frac{3(2n-1)}{4}+\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

2.在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2+a_7=-23$，$a_3+a_8=-29$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设数列$\{a_n+b_n\}$是首项为1，公比为$|a_2|$的等比数列，求$\{b_n\}$的前n项和S_n.

解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

依题意得$a_3+a_8-(a_2+a_7)=2d=-6$，

从而$d=-3$.

又$a_2+a_7=2a_1+7d=-23$，解得$a_1=-1$.

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=-3n+2$.

(2)由(1)得$a_2=-4$，所以$|a_2|=4$.

而数列$\{a_n+b_n\}$是首项为1，公比为4的等比数列，

所以$a_n+b_n=4^{n-1}$，即$-3n+2+b_n=4^{n-1}$，

所以$b_n=3n-2+4^{n-1}$.

所以$S_n=[1+4+7+\cdots+(3n-2)]+(1+4+4^2+\cdots+4^{n-1})=\frac{n(3n-1)}{2}+\frac{1-4^n}{1-4}=\frac{n(3n-1)}{2}+\frac{4^n-1}{3}$.

【类题通法】

分组转化法求数列的前n项和的常见类型

(1)若$a_n=b_n+c_n$，且$\{b_n\}$，$\{c_n\}$为等差或等比数列，求数列$\{a_n\}$的前n项和.

(2)若$a_n=\begin{cases}b_n,n\text{ 为奇数},\\c_n,n\text{ 为偶数},\end{cases}$其中$\{b_n\}$，$\{c_n\}$为等差或等比数列，求数列$\{a_n\}$的前$n$项和.

任务三 等差数列、等比数列的综合问题

1.在各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，且a_2，a_4+2，a_5成等差数列，S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，则$S_{10}-S_4=$________.

2 016 **解析**：设数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>0)$.

因为a_2，a_4+2，a_5成等差数列，

所以$2a_4+4=a_2+a_5$.

所以$2\times2\times q^3+4=2\times q+2\times q^4$.

所以$q^4-2q^3+q-2=0$.

所以$(q-2)(q^3+1)=0$.

所以$q=2$或$q=-1$(舍).

所以$S_{10}-S_4=\frac{2\times(1-2^{10})}{1-2}-\frac{2\times(1-2^4)}{1-2}=2\ 016$.

2.在①$a_5=b_4+2b_6$，②$a_3+a_5=4(b_1+b_4)$，③$b_2S_4=5a_2b_3$三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解答.

设数列$\{a_n\}$是公比大于0的等比数列，其前n项和为S_n，$\{b_n\}$是等差数列.已知$a_1=1$，$S_3-S_2=a_2+2a_1$，$a_4=b_3+b_5$，________.

(1)求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(2)设$T_n=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n$，求$T_n$.

解：(1)方案一：选条件①.

设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.

因为$a_1=1$，$S_3-S_2=a_2+2a_1$，

所以$q^2-q-2=0$，解得$q=2$或$q=-1$.

因为$q>0$，所以$q=2$，所以$a_n=2^{n-1}$.

设等差数列$\{b_n\}$的公差为d.

因为$a_4=b_3+b_5$，$a_5=b_4+2b_6$，

所以$\begin{cases}2b_1+6d=8,\\3b_1+13d=16,\end{cases}$解得$\begin{cases}b_1=1,\\d=1.\end{cases}$所以$b_n=n$.

所以$a_n=2^{n-1}$，$b_n=n$.

方案二：选条件②.

设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.

因为$a_1=1$，$S_3-S_2=a_2+2a_1$，

所以$q^2-q-2=0$，解得$q=2$或$q=-1$.

因为$q>0$，所以$q=2$，所以$a_n=2^{n-1}$.

设等差数列$\{b_n\}$的公差为d.

因为$a_4=b_3+b_5$，$a_3+a_5=4(b_1+b_4)$，

所以$\begin{cases}2b_1+6d=8,\\2b_1+3d=5,\end{cases}$解得$\begin{cases}b_1=1,\\d=1.\end{cases}$所以$b_n=n$.

所以$a_n=2^{n-1}$，$b_n=n$.

方案三：选条件③.

设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.

因为$a_1=1$，$S_3-S_2=a_2+2a_1$，

所以$q^2-q-2=0$，解得$q=2$或$q=-1$.

因为$q>0$，所以$q=2$，所以$a_n=2^{n-1}$.

设等差数列$\{b_n\}$的公差为d.

因为$a_4=b_3+b_5$，$b_2S_4=5a_2b_3$，

所以$\begin{cases}2b_1+6d=8,\\b_1-d=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}b_1=1,\\d=1.\end{cases}$

所以 $b_n=n$.所以 $a_n=2^{n-1}$,$b_n=n$.

(2)由(1)知,$a_n=2^{n-1}$,$b_n=n$,

所以 $T_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

$=1\times2^0+2\times2^1+\cdots+(n-1)\times2^{n-2}+n\times2^{n-1}$,

所以 $2T_n=1\times2^1+2\times2^2+\cdots+(n-1)\times2^{n-1}+n\times2^n$,

所以 $-T_n=1+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\times2^n$

$=\dfrac{1-2^n}{1-2}-n\times2^n=2^n-1-n\times2^n$,

所以 $T_n=(n-1)\times2^n+1$.

3.已知数列$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列,它的前 n 项和为 S_n,且 a_1+1,a_3+1,a_7+1 成等比数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)求数列$\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$的前 n 项和 T_n.

解:(1)由题意,得 $a_3+1=a_1+5$,$a_7+1=a_1+13$.

由$(a_3+1)^2=(a_1+1)(a_7+1)$,

得$(a_1+5)^2=(a_1+1)(a_1+13)$,

解得 $a_1=3$.所以 $a_n=3+2(n-1)$,即 $a_n=2n+1$.

(2)由(1)知 $a_n=2n+1$,则 $S_n=n(n+2)$,

所以$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$,所以 T_n

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

$=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$.

【类题通法】

数列求和问题的求解方法

若数列$\{a_n\}$既不是等差数列又不是等比数列,在求数列$\{a_n\}$的前 n 项和时,可通过转化的思想,将数列的求和问题转化为等差或等比数列求和问题解决,常用的方法有分组求和法、裂项相消求和法以及错位相减求和法等.

提质归纳

等比数列前n项和的应用
- 实际应用
- 分组求数列的前n项和
- 综合应用

课后素养评价(十)

基础性·能力运用

1.设首项为 1,公比为$\dfrac{2}{3}$的等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,则 ( )

A.$S_n=2a_n-1$　　B.$S_n=3a_n-2$

C.$S_n=4-3a_n$　　D.$S_n=3-2a_n$

D　**解析**:$S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}=\dfrac{1-a_n\times\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=3-2a_n$.

2.数列$\dfrac{1}{2}$,$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}$,$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}$,…,$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}$,…的前 n 项和为 ( )

A.$n+\dfrac{1}{2n}$　　B.$n-1+\dfrac{1}{2^n}$

C.$n-1+\dfrac{1}{2^{n+1}}$　　D.$n+\dfrac{1}{2^{n-1}}$

B　**解析**:因为数列的通项 $a_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\dfrac{1}{2^n}$,

所以前 n 项和

$S_n=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)+\cdots+\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$

$=n-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$

$=n-1+\dfrac{1}{2^n}$.

3.已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=2^{n-1}+1$,则数列$\{a_n\}$的前 10 项中的所有奇数项之和与前 10 项中的所有偶数项之和的比为 ( )

A.$\dfrac{1}{2}$　　B.2　　C.$\dfrac{172}{341}$　　D.$\dfrac{341}{172}$

C　**解析**:当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n-2}$,又 $a_1=S_1=2$,

则前 10 项分别为 2,1,2,4,8,16,32,64,128,256,

所以数列$\{a_n\}$的前 10 项中,$S_{偶}=\dfrac{1-4^5}{1-4}=\dfrac{1\ 023}{3}=341$,$S_{奇}=2+\dfrac{2(1-4^4)}{1-4}=172$,所以$\dfrac{S_{奇}}{S_{偶}}=\dfrac{172}{341}$.

故选 C.

4.已知数列$\{a_n\}$是以 2 为首项,1 为公差的等差数列,$\{b_n\}$是以 1 为首项,2 为公比的等比数列,则 $a_{b_1}+a_{b_2}+\cdots+a_{b_{10}}=$ ( )

A.1 033　　B.1 034

C.2 057　　　　D.2 058

A　**解析**:设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.

因为$a_n=n+1$,$b_n=2^{n-1}$,

所以$a_{b_1}+a_{b_2}+\cdots+a_{b_{10}}=a_1+a_{2^1}+a_{2^2}+\cdots+a_{2^9}$

$=(1+1)+(2^1+1)+(2^2+1)+\cdots+(2^9+1)$

$=10+(1+2+2^2+\cdots+2^9)=10+\dfrac{1-2^{10}}{1-2}=1\ 033$.

5.(多选)已知$\{a_n\}$为等比数列,S_n是其前n项和.若$a_2a_3=8a_1$,且a_4与$2a_5$的等差中项为20,则(　　)

A.$a_1=-1$　　　　B.公比$q=-2$

C.$a_4=8$　　　　D.$S_5=31$

CD　**解析**:因为$a_2a_3=8a_1$,所以$a_1q^3=8$,即$a_4=8$.

因为$a_4+2a_5=40$,所以$a_4(1+2q)=40$,所以$q=2$,$a_1=1$.

所以$S_5=\dfrac{1-2^5}{1-2}=31$.

6.(多选)在《算法统宗》里的一个算题中有这样的描述:三百七十八里关,初行健步不为难;次日脚痛减一半,六朝终得过其关.则下列说法正确的是(　　)

A.此人第三天走了二十四里路

B.此人第一天所走路程比后五天所走路程多六里

C.此人第二天所走路程占全程的$\dfrac{1}{4}$

D.此人前三天所走路程之和是后三天所走路程之和的8倍

BD　**解析**:由题意,此人每天所走路程构成以$\dfrac{1}{2}$为公比的等比数列.

记该等比数列为$\{a_n\}$,首项为a_1,公比为$q=\dfrac{1}{2}$,前n项和为S_n,

则$S_6=\dfrac{a_1\left(1-\dfrac{1}{2^6}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{63}{32}a_1=378$,解得$a_1=192$.

所以,此人第三天所走路程为$a_3=a_1\cdot q^2=48$(里),故A错误.

此人第一天所走路程比后五天所走路程多$a_1-(S_6-a_1)=2a_1-S_6=384-378=6$(里),故B正确.

此人第二天所走路程为$a_2=a_1\cdot q=96\neq\dfrac{378}{4}=94.5$(里),故C错误.

此人前三天所走路程之和为$S_3=a_1+a_2+a_3=192+96+48=336$(里),后三天所走路程之和为$S_6-S_3=378-336=42$(里),$336=42\times 8$,即前三天所走路程之和是后三天所走路程之和的8倍,D正确.

7.在等比数列$\{a_n\}$中,已知$a_1+a_2+a_3=1$,$a_4+a_5+a_6=-2$,则该数列的前15项的和$S_{15}=$________.

11　**解析**:因为$S_3=1$,$S_6-S_3=-2$,所以$S_9-S_6=4$,$S_{12}-S_9=-8$,$S_{15}-S_{12}=16$,所以$S_{15}=S_3+S_6-S_3+S_9-S_6+S_{12}-S_9+S_{15}-S_{12}=1-2+4-8+16=11$.

8.已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\dfrac{n^2+n}{2}$,$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设$b_n=2^{a_n}+(-1)^na_n$,求数列$\{b_n\}$的前$2n$项和.

解:(1)当$n=1$时,$a_1=S_1=1$;

当$n\geqslant 2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{n^2+n}{2}-\dfrac{(n-1)^2+(n-1)}{2}=n$.

$a_1=1$也满足上式.

故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n$.

(2)由(1)知$a_n=n$,故$b_n=2^n+(-1)^nn$.

记数列$\{b_n\}$的前$2n$项和为T_{2n},则

$T_{2n}=(2^1+2^2+\cdots+2^{2n})+(-1+2-3+4-\cdots+2n)$.

记$A=2^1+2^2+\cdots+2^{2n}$,$B=-1+2-3+4-\cdots+2n$,则$A=\dfrac{2(1-2^{2n})}{1-2}=2^{2n+1}-2$,

$B=(-1+2)+(-3+4)+\cdots+[-(2n-1)+2n]=n$,

故数列$\{b_n\}$的前$2n$项和$T_{2n}=A+B=2^{2n+1}+n-2$.

综合性·创新提升

1.设等比数列的前n项和、前$2n$项和、前$3n$项和分别为A,B,C,则(　　)

A.$A+B=C$

B.$B^2=AC$

C.$A+B-C=B^2$

D.$A^2+B^2=A(B+C)$

D　**解析**:设该等比数列的前n项和为S_n,则S_n,$S_{2n}-S_n$,$S_{3n}-S_{2n}$成等比数列,

所以$(S_{2n}-S_n)^2=S_n(S_{3n}-S_{2n})$,

即$(B-A)^2=A(C-B)$,

所以$A^2+B^2=A(B+C)$.

2.(多选)计算机病毒危害很大,一直是计算机学家们研究的对象.当计算机内的文件感染病毒后,病毒文件就不断地传染其他未感染的文件.计算机学家们研究的计算机病毒传染指数C_0,即一个病毒文件在一分钟内平均传染的文件数.某计算机病毒的传染指数$C_0=2$,一台计算机有10^5个文件,若该计算机有一半以上文件感染,则该计算机将处于瘫痪状态.该计算机现只有一个病毒文件,且未经杀毒处理,则下列说法正确的是(　　)

A.在第3分钟内,该计算机新感染的文件为18个

B.经过 5 分钟，该计算机共有 243 个病毒文件

C.10 分钟后，该计算机处于瘫痪状态

D.该计算机瘫痪前，每分钟内新感染的文件数成公比为 2 的等比数列

ABC　**解析：**设第$(n+1)$分钟之内新感染的文件数为a_{n+1}，前n分钟内新感染的文件数之和为S_n，则$a_{n+1}=2(S_n+1)$，且$a_1=2$.

由$a_{n+1}=2(S_n+1)$可得$a_n=2(S_{n-1}+1)$，两式相减得$a_{n+1}-a_n=2a_n$.

所以$a_{n+1}=3a_n$，所以每分钟内新感染的文件数构成以$a_1=2$为首项，3 为公比的等比数列，

所以$a_n=2\times 3^{n-1}$.

在第 3 分钟内，新感染的文件数为$a_3=2\times 3^{3-1}=18$，故选项 A 正确.

经过 5 分钟，该计算机共有$1+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1+\dfrac{2\times(1-3^5)}{1-3}=3^5=243$(个)病毒文件，故选项 B 正确.

10 分钟后，计算机感染病毒的文件的总数为$1+a_1+a_2+\cdots a_{10}=1+\dfrac{2\times(1-3^{10})}{1-3}=3^{10}>\dfrac{1}{2}\times 10^5$，

所以计算机处于瘫痪状态，故选项 C 正确.

该计算机瘫痪前，每分钟内新被感染的文件数成公比为 3 的等比数列，故选项 D 不正确.

3.设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，其前n项和为S_n，前n项积为T_n，并满足条件$a_1>1$，$a_{2\,023}a_{2\,024}>1$，$\dfrac{a_{2\,023}-1}{a_{2\,024}-1}<0$，则　(　　)

A.$S_{2\,023}<S_{2\,024}$

B.$a_{2\,023}a_{2\,024}-1<0$

C.$T_{2\,024}$是数列$\{T_n\}$中的最大项

D.数列$\{T_n\}$无最大项

A　**解析：**当$q<0$时，$a_{2\,023}a_{2\,024}=a_{2\,023}^2q<0$，不符合题意；

当$q\geqslant 1$时，$a_{2\,023}>1$，$a_{2\,024}>1$，$\dfrac{a_{2\,023}-1}{a_{2\,024}-1}>0$，不符合题意.

故$0<q<1$，且$a_{2\,023}>1$，$0<a_{2\,024}<1$，故$S_{2\,024}>S_{2\,023}$，A 正确.

$a_{2\,023}a_{2\,024}-1>1-1=0$，故 B 错误.

因为$a_{2\,023}>1$，$0<a_{2\,024}<1$，所以$T_{2\,023}$是数列$\{T_n\}$中的最大项，故 C，D 错误.

4.在等比数列$\{a_n\}$中，公比$q=2$，前n项和为S_n.若$S_5=1$，则$S_{10}=$________.

33　**解析：**因为$S_5=\dfrac{a_1(1-2^5)}{1-2}=1$，所以$a_1=\dfrac{1}{31}$.

所以$S_{10}=\dfrac{a_1(1-2^{10})}{1-2}=\dfrac{1}{31}\times 1\,023=33$.

5.已知正项等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n.若-1，S_5，S_{10}成等差数列，则$S_{10}-2S_5=$________，且$S_{15}-S_{10}$的最小值为________.

1　4　**解析：**由题意知$2S_5=-1+S_{10}$，

所以$S_{10}-2S_5=1$.

由$\{a_n\}$为等比数列可知S_5，$S_{10}-S_5$，$S_{15}-S_{10}$成等比数列，所以

$(S_{10}-S_5)^2=S_5(S_{15}-S_{10})$，$S_{15}-S_{10}=\dfrac{(S_{10}-S_5)^2}{S_5}=\dfrac{(2S_5+1-S_5)^2}{S_5}=\dfrac{1}{S_5}+S_5+2\geqslant 2\sqrt{\dfrac{1}{S_5}\cdot S_5}+2=4$，当且仅当$S_5=1$时，等号成立.

6.在等差数列$\{a_n\}$中，$a_6=16$，$a_{16}=36$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

(2)若________，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n.

在①$b_n=\dfrac{4}{a_na_{n+1}}$，②$b_n=(-1)^n\cdot a_n$，③$b_n=2^{a_n}\cdot a_n$这三个条件中任选一个补充在第(2)问中，并解答.

解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

则$a_{16}=a_6+(16-6)d$，

即$36=16+10d$，解得$d=2$，

故$a_n=16+(n-6)\times 2=2n+4$.

(2)选①.$b_n=\dfrac{4}{a_na_{n+1}}=\dfrac{4}{(2n+4)[2(n+1)+4]}$

$=\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}=\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}$，

$S_n=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{n+3}=\dfrac{n}{3(n+3)}$.

选②.$b_n=(-1)^na_n=(-1)^n(2n+4)$得，

当n为偶数时，$S_n=2[-3+4-5+6-\cdots+(n+2)]=2\times\dfrac{n}{2}\times 1=n$；

当n为奇数时，

$S_n=2[-3+4-5+6-\cdots+(n+1)-(n+2)]$

$=2\times\left[\dfrac{n-1}{2}\times 1-(n+2)\right]=-n-5$.

故$S_n=\begin{cases}n(n\text{ 为偶数}),\\-n-5(n\text{ 为奇数}).\end{cases}$

选③.由$b_n=(2n+4)\cdot 2^{2n+4}$，得$S_n=6\cdot 2^6+8\cdot 2^8+10\cdot 2^{10}+\cdots+(2n+4)\cdot 2^{2n+4}$(ⅰ)，

则$4S_n=6\cdot 2^8+8\cdot 2^{10}+\cdots+(2n+2)\cdot 2^{2n+4}+(2n+4)\cdot 2^{2n+6}$(ⅱ).

由(ⅰ)−(ⅱ)，得$-3S_n=6\cdot 2^6+2\cdot 2^8+2\cdot 2^{10}+\cdots+2\cdot 2^{2n+4}-(2n+4)\cdot 2^{2n+6}$

$=6\cdot 2^6+2\left(\dfrac{2^8-2^{2n+4}\cdot 2^2}{1-2^2}\right)-(2n+4)\cdot 2^{2n+6}$

$=\dfrac{5}{3}\cdot 2^7-\left(n+\dfrac{5}{3}\right)\cdot 2^{2n+7}$，

故 $S_n=\frac{3n+5}{9}\cdot 2^{2n+7}-\frac{640}{9}$.

7.“现值”与“终值”是利息计算中的两个基本概念,所谓“现值”是指为得到 n 期计息后的金额,现在应提供的金额,而“终值”是指 n 期计息后的本利和.例如,在复利计息的情况下,设本金为 A,每期利率为 r,n 期末的本利和为 S,则 $S=A(1+r)^n$.其中,S 称为 n 期末的终值;A 称为 n 期后终值 S 的现值,即 n 期后的 S 元现在的价值为 $\frac{S}{(1+r)^n}$(元).

现有如下问题:小明想买一套房子,有如下两个付款方案:

方案一:一次性付全款 25 万元;

方案二:分期付款,每年年初付款 3 万元,第十年年初付完.

(1)已知一年期存款的年利率为 2.5%,试讨论两种方案哪一种更好;

(2)若小明把房子租出去,第一年年初可收租金 2 万元,此后每年年初涨租金1 000 元,参照第(1)问中的存款年利率2.5%,预计第十年房租到期后小明所获得全部租金的终值(精确到百元).

参考数据:$(1+2.5\%)^{10}\approx 1.28$.

解:(1)(方法一:从终值来考虑)若付全款,则 25 万元 10 年后的价值为 $25(1+2.5\%)^{10}\approx 32.00$(万元);

若分期付款,每年年初所付金额为 3 万元,10 年后的总价值 $S=3(1+2.5\%)^{10}+3(1+2.5\%)^9+\cdots+3(1+2.5\%)\approx 34.44$(万元).

因此,方案一更好.

(方法二:从现值来考虑)每年年初付款 3 万元,10 年的现值之和

$Q=3+\frac{3}{1+2.5\%}+\frac{3}{(1+2.5\%)^2}+\cdots+\frac{3}{(1+2.5\%)^9}$

$\Rightarrow 1.025^{10}Q=3\times 1.025\times\left(\frac{1-1.025^{10}}{1-1.025}\right)\Rightarrow Q\approx\frac{3\times 41\times 0.28}{1.28}\approx 26.91$(万元),

比一次性付款 25 万元多,故方案一更好.

(2)由题意,设第十年房租到期后小明所获得的全部租金的终值为 T 万元,则

$T=2(1+2.5\%)^{10}+2.1(1+2.5\%)^9+\cdots+2.9(1+2.5\%)$.

记 $1+2.5\%=q$,$a_n=-0.1n+3$,

则 $T=a_1q+a_2q^2+\cdots+a_{10}q^{10}$,

$qT=a_1q^2+a_2q^3+\cdots+a_9q^{10}+a_{10}q^{11}$,

作差可得 $(1-q)T=2.9q-0.1(q^2+q^3+\cdots+q^{10})-2q^{11}$

$\Rightarrow(1-q)T=3q-0.1(q+q^2+q^3+\cdots+q^{10})-2q^{11}$

$\Rightarrow T=3\cdot\frac{q}{1-q}-0.1\cdot\frac{q(1-q^{10})}{(1-q)^2}-2\cdot\frac{q^{11}}{1-q}$

≈ 27.88(万元).

8.(2022·天津)设 $\{a_n\}$ 是等差数列,$\{b_n\}$ 是等比数列,且 $a_1=b_1=a_2-b_2=a_3-b_3=1$.

(1)求 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2)设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,求证:$(S_{n+1}+a_{n+1})b_n=S_{n+1}b_{n+1}-S_nb_n$;

(3)求 $\sum\limits_{k=1}^{2n}[a_{k+1}-(-1)^ka_k]b_k$.

(1)**解**:设 $\{a_n\}$ 的公差为 d,$\{b_n\}$ 的公比为 q,则 $a_n=1+(n-1)d$,$b_n=q^{n-1}$,

由 $a_2-b_2=a_3-b_3=1$ 可得 $\begin{cases}1+d-q=1,\\1+2d-q^2=1\end{cases}\Rightarrow d=q=2$($d=q=0$ 舍去),

所以 $a_n=2n-1$,$b_n=2^{n-1}$.

(2)**证明**:因为 $b_{n+1}=2b_n\neq 0$,

所以要证 $(S_{n+1}+a_{n+1})b_n=S_{n+1}b_{n+1}-S_nb_n$,

即证 $(S_{n+1}+a_{n+1})b_n=S_{n+1}\cdot 2b_n-S_nb_n$,即证 $S_{n+1}+a_{n+1}=2S_{n+1}-S_n$,

即证 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$,

而 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ 显然成立,所以 $(S_{n+1}+a_{n+1})\cdot b_n=S_{n+1}\cdot b_{n+1}-S_n\cdot b_n$.

(3)**解**:因为 $[a_{2k}-(-1)^{2k-1}a_{2k-1}]b_{2k-1}+[a_{2k+1}-(-1)^{2k}a_{2k}]b_{2k}$

$=(4k-1+4k-3)\times 2^{2k-2}+[4k+1-(4k-1)]\times 2^{2k-1}=2k\cdot 4^k$,

所以 $\sum\limits_{k=1}^{2n}[a_{k+1}-(-1)^ka_k]b_k=\sum\limits_{k=1}^{n}[(a_{2k}-(-1)^{2k-1}\cdot a_{2k-1})b_{2k-1}+(a_{2k+1}-(-1)^{2k}a_{2k})b_{2k}]=\sum\limits_{k=1}^{n}2k\cdot 4^k$.

设 $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}2k\cdot 4^k$,

即 $T_n=2\times 4+4\times 4^2+6\times 4^3+\cdots+2n\times 4^n$,

则 $4T_n=2\times 4^2+4\times 4^3+6\times 4^4+\cdots+2n\times 4^{n+1}$,

作差得 $-3T_n=2(4+4^2+4^3+4^4+\cdots+4^n)-2n\cdot 4^{n+1}=\frac{2\times 4(1-4^n)}{1-4}-2n\times 4^{n+1}=\frac{(2-6n)4^{n+1}-8}{3}$,

所以 $T_n=\frac{(6n-2)4^{n+1}+8}{9}$,

即 $\sum\limits_{k=1}^{2n}[a_{k+1}-(-1)^ka_k]b_k=\frac{(6n-2)4^{n+1}+8}{9}$.

易错强化练(二)

练易错

易错点1｜ 对等比数列的定义理解不透彻致误

[防范要诀]

等比数列中任意一项 $a_n\neq0$,且公比 $q\neq0$.

[对点集训]

1.已知等比数列$\{a_n\}$的前三项为 $a,2a+2,3a+3$,则 $a=$________.

-4　**解析**:由$(2a+2)^2=a(3a+3)\Rightarrow a=-1$ 或 $a=-4$.但当 $a=-1$ 时,第 2、3 项均为零,故 $a=-1$舍去,得$a=-4$.

2.已知数列$\{a_n\}$,$a_n\neq0$,a_1,a_2,a_3 成等差数列,a_2,a_3,a_4 成等比数列,a_3,a_4,a_5 的倒数成等差数列,证明:a_1,a_3,a_5 成等比数列.

证明:由已知,有 $2a_2=a_1+a_3$,①

$a_3^2=a_2a_4$,②

$\frac{2}{a_4}=\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_5}$.③

由③得$\frac{2}{a_4}=\frac{a_3+a_5}{a_3a_5}$,所以 $a_4=\frac{2a_3a_5}{a_3+a_5}$.④

由①得 $a_2=\frac{a_1+a_3}{2}$.⑤

将④⑤代入②,得 $a_3^2=\frac{a_1+a_3}{2}\cdot\frac{2a_3a_5}{a_3+a_5}$.

所以 $a_3=\frac{(a_1+a_3)a_5}{a_3+a_5}$,即 $a_3(a_3+a_5)=a_5(a_1+a_3)$.

化简,得 $a_3^2=a_1a_5$.

又 a_1,a_3,a_5 都不等于 0,所以 a_1,a_3,a_5 成等比数列.

易错点2｜ 利用等比中项时忽略判断符号致误

[防范要诀]

1.等比数列中所有奇数项的符号都相同,所有偶数项的符号都相同.

2.只有同号两数才有等比中项,且有两个,它们互为相反数.

[对点集训]

3.如果 $1,a,b,c,16$ 成等比数列,那么 $b=$________,$ac=$________.

4　16　**解析**:设等比数列的公比为 q.

因为 $b^2=1\times16=16$,且 $b=1\times q^2>0$,

所以 $b=4$.又因为 $b^2=ac$,所以 $ac=16$.

4.等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$a_3=5+\sqrt{2}$,$S_3=9+3\sqrt{2}$.

(1)求 a_n 以及 S_n;

(2)设 $b_n=\frac{S_n}{n}$,证明:数列$\{b_n\}$中不存在不同的三项成等比数列.

(1)**解**:设$\{a_n\}$的公差为 d,

由已知得 $5+\sqrt{2}=a_1+2d$,$9+3\sqrt{2}=3a_1+3d$,

解得 $a_1=\sqrt{2}+1$,$d=2$,

所以 $a_n=2n+\sqrt{2}-1$,$S_n=n^2+\sqrt{2}n$.

(2)**证明**:$b_n=\frac{S_n}{n}=n+\sqrt{2}$,

假设$\{b_n\}$中存在不同的三项 b_n,b_m,b_p 成等比数列,

则 $b_m^2=b_n\cdot b_p$,

即$(m+\sqrt{2})^2=(n+\sqrt{2})\cdot(p+\sqrt{2})$,

所以$(m^2-np)+\sqrt{2}[2m-(n+p)]=0$.

因为 m,n,p 是正整数,所以 m^2-np 和 $2m-(n+p)$均为有理数,

所以 $m^2-np=0$,$2m-(n+p)=0$,

所以$(n+p)^2=4np$,所以$(n-p)^2=0$,所以 $n=p$,与$n\neq p$ 矛盾,

所以数列$\{b_n\}$中不存在不同的三项成等比数列.

5.已知$-2,a_1,a_2,-8$ 成等差数列,$-2,b_1,b_2,b_3,-8$ 成等比数列,则$\frac{a_2-a_1}{b_2}=$________.

$\frac{1}{2}$　**解析**:因为$-2,a_1,a_2,-8$ 成等差数列,

所以$\begin{cases}2a_1=-2+a_2,\\2a_2=a_1-8,\end{cases}$得$\begin{cases}a_1=-4,\\a_2=-6.\end{cases}$

又因为$-2,b_1,b_2,b_3,-8$ 成等比数列,

所以 $b_2^2=-2\times(-8)=16$,

所以 $b_2=4$ 或 $b_2=-4$.

由等比数列隔项同号,可得 $b_2=-4$,

所以$\frac{a_2-a_1}{b_2}=\frac{-6-(-4)}{-4}=\frac{1}{2}$.

易错点3｜ 忽视对公比 q 的讨论

[防范要诀]

等比数列的公比 $q\neq0$,数列中各项都不为零;当公比 $q\neq1$ 时,前 n 项和 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$;当公比 $q=1$ 时,前 n 项和$S_n=na_1$.

[对点集训]

6.等比数列 $1,a,a^2,a^3,\cdots(a\neq0)$的前 n 项和 $S_n=$________.

$\begin{cases}n,a=1,\\\frac{1-a^n}{1-a},a\neq1\end{cases}$　**解析**:当 $a=1$ 时,$S_n=n$;当 $a\neq1$

时，$S_n=\frac{1-a^n}{1-a}$.所以 $S_n=\begin{cases}n,a=1,\\ \frac{1-a^n}{1-a},a\neq 1.\end{cases}$

7.在公比为 q 的等比数列$\{a_n\}$中，其前 n 项和为 S_n.若 $S_3=4$，$S_6=36$，求 a_n.

解：因为 $S_6\neq 2S_3$，所以 $q\neq 1$.

由$\begin{cases}S_3=4,\\ S_6=36,\end{cases}$得$\begin{cases}\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=4,①\\ \frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=36.②\end{cases}$

由$\frac{②}{①}$得$\frac{1-q^6}{1-q^3}=9$，即 $1+q^3=9$，所以 $q=2$.

将 $q=2$ 代入①式得 $a_1=\frac{4}{7}$.

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=\frac{4}{7}\times 2^{n-1}=\frac{2^{n+1}}{7}$.

练疑难

1.设$\{a_n\}$是公比为 q 的等比数列，S_n 是它的前 n 项和.若$\{S_n\}$是等差数列，则 q 等于（　　）

A.1　　B.0

C.1 或 0　　D.-1

A　**解析**：因为$\{S_n\}$是等差数列，所以 $2S_2=S_1+S_3$，

所以 $2(a_1+a_2)=a_1+(a_1+a_2+a_3)$，所以 $a_2=a_3$，

所以 $q=\frac{a_3}{a_2}=1$.

2.已知等比数列$\{a_n\}$满足 $a_1=\frac{1}{4}$，$a_3a_5=4(a_4-1)$，则 $a_2=$（　　）

A.2　　B.1

C.$\frac{1}{2}$　　D.$\frac{1}{8}$

C　**解析**：因为$\{a_n\}$为等比数列，所以 $a_3a_5=a_4^2$，所以 $a_4^2=4(a_4-1)$，解得 $a_4=2$.设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，则 $a_1q^3=2$，所以 $q^3=8$，所以 $q=2$，所以 $a_2=a_1q=\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{2}$.

3.已知数列$\{a_n\}$是公比为 q 的等比数列，且 a_1，a_3，a_2 成等差数列，则公比 q 的值为（　　）

A.$-\frac{1}{2}$　　B.-2

C.-1 或$\frac{1}{2}$　　D.1 或$-\frac{1}{2}$

D　**解析**：因为 a_1，a_3，a_2 成等差数列，所以 $2a_3=a_1+a_2$，

所以 $2q^2-q-1=0$.所以 $q=1$ 或$-\frac{1}{2}$.

4.数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=1-5+9-13+17-21+\cdots+(-1)^{n-1}(4n-3)$，则 $S_{15}+S_{22}-S_{31}$ 的值为（　　）

A.13　　B.-76

C.46　　D.76

B　**解析**：因为 $S_{15}=(-4)\times 7+(-1)^{14}(4\times 15-3)=29$，$S_{22}=(-4)\times 11=-44$，$S_{31}=(-4)\times 15+(-1)^{30}(4\times 31-3)=61$，

所以 $S_{15}+S_{22}-S_{31}=29-44-61=-76$.

5.已知等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$的各项都是正数，且 $a_1=b_1$，$a_{11}=b_{11}$，那么一定有（　　）

A.$a_6\leqslant b_6$　　B.$a_6\geqslant b_6$

C.$a_{12}\leqslant b_{12}$　　D.$a_{12}\geqslant b_{12}$

B　**解析**：因为等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$的各项都是正数，且 $a_1=b_1$，$a_{11}=b_{11}$，

所以 $a_1+a_{11}=b_1+b_{11}=2a_6$，

所以 $a_6=\frac{a_1+a_{11}}{2}=\frac{b_1+b_{11}}{2}\geqslant\sqrt{b_1b_{11}}=b_6$.

当且仅当 $b_1=b_{11}$ 时，取等号，此时数列$\{b_n\}$的公比为 1.

6.数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=n\cos\frac{n\pi}{2}$，其前 n 项和为 S_n，则 $S_{2\,021}$ 等于（　　）

A.1 010　　B.2 020

C.504　　D.0

A　**解析**：$a_1=\cos\frac{\pi}{2}=0$，$a_2=2\cos\pi=-2$，$a_3=0$，$a_4=4$，…，所以数列$\{a_n\}$的奇数项均为 0，前2 021项中的偶数项（共 1 010 项）依次为-2，4，-6，8，…，$-2\,018$，2 020.

故 $S_{2\,021}=0+(-2+4)+(-6+8)+\cdots+(-2\,018+2\,020)=1\,010$.

7.在等比数列$\{a_n\}$中，$a_3=4$，前 3 项和$S_3=12$，数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=$________.

4 或$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-5}$　**解析**：设数列$\{a_n\}$的公比为 q，当 $q=1$ 时，$a_3=4$，$a_1=a_2=a_3=4$，

$S_3=a_1+a_2+a_3=12$，所以 $q=1$ 符合题意，

此时 $a_n=4$；

当 $q\neq 1$ 时，$\begin{cases}a_3=a_1q^2=4,\\ S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=12,\end{cases}$

解得 $q=-\frac{1}{2}$，

所以 $a_n=a_3q^{n-3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-5}$.

故 $a_n=4$ 或 $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-5}$.

8. 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，点$\left(n,\frac{S_n}{n}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$均在直线$y=x+\frac{1}{2}$上.若$b_n=3^{a_n+\frac{1}{2}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

解：依题意得$\frac{S_n}{n}=n+\frac{1}{2}$，即$S_n=n^2+\frac{1}{2}n$.

当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(n^2+\frac{1}{2}n\right)-\left[(n-1)^2+\frac{1}{2}(n-1)\right]=2n-\frac{1}{2}$；

当$n=1$时，$a_1=S_1=\frac{3}{2}$，满足$a_n=2n-\frac{1}{2}$.

所以$a_n=2n-\frac{1}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$，则$b_n=3^{a_n+\frac{1}{2}}=3^{2n}$.

由$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{3^{2(n+1)}}{3^{2n}}=3^2=9$，可知$\{b_n\}$为等比数列，$b_1=3^{2\times1}=9$，故$T_n=\frac{9(1-9^n)}{1-9}=\frac{9^{n+1}-9}{8}$.

9. 已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$a_2=6$，$a_3+a_4=72$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若数列$\{b_n\}$满足$b_n=a_n-n(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$.

解：(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.

因为$a_2=6$，$a_3+a_4=72$，

所以$6q+6q^2=72$，即$q^2+q-12=0$，

所以$q=3$或$q=-4$.

又因为$a_n>0$，所以$q>0$，所以$q=3$，$a_1=\frac{a_2}{q}=2$.

所以$a_n=a_1q^{n-1}=2\times3^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)因为$b_n=2\times3^{n-1}-n$，

所以$S_n=2(1+3+3^2+\cdots+3^{n-1})-(1+2+3+\cdots+n)=2\times\frac{1-3^n}{1-3}-\frac{n(1+n)}{2}=3^n-1-\frac{n^2+n}{2}$.

10. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$2a_1+a_2=a_3$，且对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，当$n\geqslant2$时都有$2nS_{n+1}-(2n+5)S_n+S_{n-1}=ra_1$.

(1)若$a_1\neq0$，$a_2=3a_1$，求r的值.

(2)数列$\{a_n\}$是否为等比数列？请说明理由.

(3)当$r=1$时，求证：数列$\{a_n\}$是等差数列.

(1)**解**：令$n=2$，得$4S_3-9S_2+S_1=ra_1$，

即$4(a_3+a_2+a_1)-9(a_2+a_1)+a_1=ra_1$，

化简，得$4a_3-5a_2-4a_1=ra_1$.

因为$2a_1+a_2=a_3$，$a_2=3a_1$，

所以$4\times5a_1-5\times3a_1-4a_1=ra_1$，解得$r=1$.

(2)**解**：数列$\{a_n\}$不是等比数列.理由如下：假设$\{a_n\}$是等比数列，公比为q，则$2a_1+a_1q=a_1q^2$，且$a_1\neq0$，

解得$q=2$或$q=-1$.

由$2nS_{n+1}-(2n+5)S_n+S_{n-1}=ra_1$，

可得$4S_n=2na_{n+1}-a_n-ra_1(n\geqslant2)$，

所以$4S_{n-1}=2(n-1)a_n-a_{n-1}-ra_1(n\geqslant3)$，

两式相减，整理得$2na_{n+1}+a_{n-1}=(2n+3)a_n$，

两边同除以a_{n-1}，可得$2n(q^2-q)=3q-1$.

因为$q\neq1$，所以$q^2-q\neq0$，

所以上式不可能对任意$n\geqslant3$恒成立，故$\{a_n\}$不是等比数列.

(3)**证明**：当$r=1$时，令$n=2$，得$4S_3-9S_2+S_1=a_1$，

整理得$-4a_1-5a_2+4a_3=a_1$，

又$2a_1+a_2=a_3$，可得$a_2=3a_1$，$a_3=5a_1$，

令$n=3$，得$6S_4-11S_3+S_2=a_1$，可得$a_4=7a_1$.

由(2)可知$4S_n=2na_{n+1}-a_n-a_1(n\geqslant2)$，

所以$4S_{n-1}=2(n-1)a_n-a_{n-1}-a_1(n\geqslant3)$，

两式相减，整理得$2na_{n+1}+a_{n-1}=(2n+3)a_n(n\geqslant3)$，

所以$2(n-1)a_n+a_{n-2}=(2n+1)a_{n-1}(n\geqslant4)$，

两式相减，可得$2n[(a_{n+1}-a_n)-(a_n-a_{n-1})]=(a_n-a_{n-1})-(a_{n-1}-a_{n-2})(n\geqslant4)$.

因为$(a_4-a_3)-(a_3-a_2)=0$，所以$(a_n-a_{n-1})-(a_{n-1}-a_{n-2})=0(n\geqslant4)$，

即$a_n-a_{n-1}=a_{n-1}-a_{n-2}(n\geqslant4)$.又因为$a_3-a_2=a_2-a_1=2a_1$，

所以数列$\{a_n\}$是以a_1为首项，$2a_1$为公差的等差数列.

4.4* 数学归纳法

学习任务目标

1. 了解数学归纳法的原理.(数学抽象)

2. 掌握用数学归纳法证明问题的一般方法与步骤.(数学运算)

3. 能用数学归纳法证明一些数学命题.(逻辑推理)

问题式预习

知识点 数学归纳法

1. 数学归纳法的定义

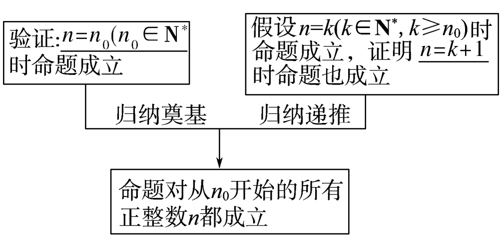
一般地,证明一个与正整数 n 有关的命题,可按下列步骤进行:

(1)(归纳奠基)证明当 $n=n_0(n_0\in\mathbf{N}^*)$ 时命题成立;

(2)(归纳递推)以“当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant n_0)$ 时命题成立”为条件,推出“当 $n=k+1$ 时命题也成立”.

只要完成这两个步骤,就可以断定命题对从 n_0 开始的所有正整数 n 都成立,这种证明方法称为数学归纳法.

2. 数学归纳法的框图表示



[微训练]

1. 判断(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)与自然数 n 有关的命题都可以用数学归纳法进行证明. (×)

(2)在利用数学归纳法证明命题时,只要推理过程正确,也可以不用进行假设. (×)

(3)用数学归纳法证明等式时,由 $n=k$ 到 $n=k+1$,等式的项数一定增加了 1. (×)

2. 已知式子 $1+k+k^2+\cdots+k^n(n\in\mathbf{N}^*)$,当 $n=1$ 时,式子的值为 (B)

A. 1　　B. $1+k$

C. $1+k+k^2$　　D. 以上都不对

3. 用数学归纳法证明 $3^n\geqslant n^3(n\geqslant3,n\in\mathbf{N}^*)$ 时,第一步应验证 ( )

A. $n=1$ 时不等式成立　　B. $n=2$ 时不等式成立

C. $n=3$ 时不等式成立　　D. $n=4$ 时不等式成立

C **解析**:由题知,n 的最小值为 3,所以第一步应验证 $n=3$ 时不等式成立.

任务型课堂

任务一 对数学归纳法的理解

1. 用数学归纳法证明 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n(n\in\mathbf{N}^*,n>1)$ 时,第一步应验证不等式 ( )

A. $1+\frac{1}{2}<2$　　B. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<3$

C. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<2$　　D. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}<3$

C **解析**:用数学归纳法证明 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n(n\in\mathbf{N}^*,n>1)$,第一步先验证当 $n=2$ 时,不等式 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<2$ 成立.故选 C.

2. 已知 $f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}(n\in\mathbf{N}^*)$,从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时,$f(k+1)$ 比 $f(k)$ 共增加了( )

A. 1 项　　B. 2^{k-1} 项

C. 2^{k+1} 项　　D. 2^k 项

D **解析**:由题意,当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时,最后一项为 $\frac{1}{2^k}$,当 $n=k+1$ 时,最后一项为 $\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^k\times2}=\frac{1}{2^k+2^k}$.所以由 $n=k$ 变到 $n=k+1$ 时,增加的部分为 $\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^k}$,增加了 2^k 项.故选 D.

任务二 用数学归纳法证明与数列相关的等式

[探究活动]

观察下列等式：

$1=1$,

$2+3+4=9$,

$3+4+5+6+7=25$,

$4+5+6+7+8+9+10=49$,

……

探究 1：按照以上式子的规律，你能写出第 5 个等式吗？试猜想第 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 个等式.

提示：第 5 个等式为 $5+6+7+8+9+10+11+12+13=9^2$；

第 n 个等式为 $n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n-2)=(2n-1)^2$, $n\in\mathbf{N}^*$.

探究 2：如果用数学归纳法证明上面的猜想，第一步应验证什么？

提示：应验证当 $n=1$ 时，猜想式的左边与右边相等.

探究 3：用数学归纳法证明上面的猜想时，怎样做归纳假设？

提示：假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，猜想式成立，即 $k+(k+1)+(k+2)+\cdots+(3k-2)=(2k-1)^2(k\geqslant 1,k\in\mathbf{N}^*)$.

[评价活动]

1. 用数学归纳法证明：$1+3\times2+5\times2^2+\cdots+(2n-1)\times2^{n-1}=2^n(2n-3)+3(n\in\mathbf{N}^*)$.

证明：(1)当 $n=1$ 时，左边 $=1$，右边 $=2\times(2-3)+3=1$，左边 $=$ 右边，等式成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，等式成立，即 $1+3\times2+5\times2^2+\cdots+(2k-1)\times2^{k-1}=2^k(2k-3)+3$,

则当 $n=k+1$ 时，$1+3\times2+5\times2^2+\cdots+(2k-1)\times2^{k-1}+(2k+1)\times2^k=2^k(2k-3)+3+(2k+1)\times2^k=2^k(4k-2)+3=2^{k+1}[2(k+1)-3]+3$,

即当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

由(1)(2)知，等式对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

2. 用数学归纳法证明：

$\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n+2}\right)=\dfrac{2}{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

证明：(1)当 $n=1$ 时，左边 $=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$,

右边 $=\dfrac{2}{1+2}=\dfrac{2}{3}$，等式成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，等式成立，

即 $\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{k+2}\right)=\dfrac{2}{k+2}$,

则当 $n=k+1$ 时，

$\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{k+2}\right)\left(1-\dfrac{1}{k+3}\right)$

$=\dfrac{2}{k+2}\left(1-\dfrac{1}{k+3}\right)=\dfrac{2(k+2)}{(k+2)(k+3)}=\dfrac{2}{k+3}=\dfrac{2}{(k+1)+2}$，即当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

由(1)(2)可知，对任何 $n\in\mathbf{N}^*$，等式都成立.

3. 观察以下等式：

$1^3=1^2$,

$1^3+2^3=(1+2)^2$,

$1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$,

$1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2$,

……

(1)请用含 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 的等式归纳猜想出一般性结论，并用数学归纳法加以证明；

(2)设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_n=n^3+n$，求 S_{10}.

解：(1)猜想 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$.

证明：当 $n=1$ 时，左边 $=1$，右边 $=1$，等式成立.

假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=(1+2+3+\cdots+k)^2$ 成立，

当 $n=k+1$ 时，$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=(1+2+3+\cdots+k)^2+(k+1)^3$

$=\left[\dfrac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3=(k+1)^2\cdot\dfrac{k^2+4k+4}{4}$

$=\left[\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2=[1+2+\cdots+(k+1)]^2$,

即当 $n=k+1$ 时，等式也成立，

综上可得，对任意的正整数 n，$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$.

(2)数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_n=n^3+n$，则 $S_{10}=(1^3+2^3+\cdots+10^3)+(1+2+3+\cdots+10)$

$=(1+2+\cdots+10)^2+\dfrac{10\times11}{2}$

$=55^2+55=3\ 080$.

【类题通法】

用数学归纳法证明等式时应注意的几点

(1)弄清 n 取第一个值 n_0 时等式两端的项的情况.

(2)弄清从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 等式两端的项是如何变化的，即增加了哪些项，减少了哪些项.

(3)证明 $n=k+1$ 时结论也成立，要设法将待证式与归纳假设建立联系，并向 $n=k+1$ 时的目标表达式进行变形.

任务三 用数学归纳法证明与数列相关的不等式

［探究活动］

观察下列不等式：

$1+\frac{1}{2^2}<\frac{3}{2}$，

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}<\frac{5}{3}$，

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}<\frac{7}{4}$，

……

探究1：照此规律，你能写出第 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 个不等式吗？

提示：第 n 个不等式为 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{2(n+1)-1}{n+1}$.

探究2：用数学归纳法证明上述不等式时，假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*$ 且 $k\geqslant 1)$ 时，不等式 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{2(k+1)-1}{k+1}$ 成立，则当 $n=k+1$ 时，我们需要证明的不等式是怎样的？

提示：$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+2)^2}<\frac{2(k+1+1)-1}{(k+1)+1}$.

探究3：除了数学归纳法，上述不等式还可以怎样证明？

提示：用放缩法证明.因为 $n^2>n(n-1)$，所以 $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}(n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n>1)$，

所以 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}<1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

$=1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$=2-\frac{1}{n+1}=\frac{2(n+1)-1}{n+1}$.

［评价活动］

1. 用数学归纳法证明：$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}>1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

证明：(1)当 $n=1$ 时，左边 $=1$，右边 $=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，左边 $>$ 右边，所以不等式成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，不等式成立，

即 $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)^2}>1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}$.

当 $n=k+1$ 时，

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)^2}+\frac{1}{(2k+1)^2}$

$>1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{(2k+1)^2}$

$>1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2(k+1)-1}-\frac{1}{2(k+1)}$，

即当 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

由(1)(2)知，不等式对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

2. 用数学归纳法证明：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}>\frac{n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

证明：(1)当 $n=1$ 时，左边 $=1$，右边 $=\frac{1}{2}$，不等式成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，不等式成立，

即 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}>\frac{k}{2}$.

当 $n=k+1$ 时，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k}>\frac{k}{2}+\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k}>\frac{k}{2}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}=\frac{k}{2}+(2^k-2^{k-1})\frac{1}{2^k}=\frac{k+1}{2}$.

所以当 $n=k+1$ 时，不等式成立.

由(1)(2)可知，不等式对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$na_{n+1}=(n+1)a_n+n(n+1)$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)求证：数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 为等差数列，并求出数列 $\{a_n\}$ 的

通项公式；

(2)记 $b_n=\frac{2}{(n+1)a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$，用数学归纳法证明：$b_1+b_2+\cdots+b_n<1-\frac{1}{(n+1)^2}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

证明：(1)由 $a_1=2$，$na_{n+1}=(n+1)a_n+n(n+1)$，

可得 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+1$，

则数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是首项为2，公差为1的等差数列，

所以 $\frac{a_n}{n}=2+n-1=n+1$，即 $a_n=n(n+1)$.

(2)由(1)可得 $b_n=\frac{2}{(n+1)a_n}=\frac{2}{n(n+1)^2}$.

当 $n=1$ 时，左边 $=b_1=\frac{1}{2}$，右边 $=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，$\frac{1}{2}<\frac{3}{4}$，不等式成立.

假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，不等式 $b_1+b_2+\cdots+b_k<1-\frac{1}{(k+1)^2}$ 成立.

当 $n=k+1$ 时，$b_1+b_2+\cdots+b_k+b_{k+1}<1-\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{2}{(k+1)(k+2)^2}$，

要证 $1-\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{2}{(k+1)(k+2)^2}<1-\frac{1}{(k+2)^2}$，

即证 $\frac{2}{(k+1)(k+2)^2}<\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{(k+2)^2}$，

即证 $2(k+1)<2k+3$，显然成立，

即当 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

则 $b_1+b_2+\cdots+b_n<1-\frac{1}{(n+1)^2}$，$n\in\mathbf{N}^*$ 成立.

【类题通法】

用数学归纳法证明不等式应注意的两点

(1)在归纳递推的证明过程中，方向不明确时，可采用分析法完成，经过分析找到推证的方向后，再用综合法、比较法等其他方法证明.

(2)在推证“$n=k+1$ 时不等式也成立”的过程中，常常要将表达式作适当放缩、变形，便于应用所作假设，变换出要证明的结论.

任务四　用数学归纳法证明整除命题

1. 求证：$a^{n+1}+(a+1)^{2n-1}$ 能被 a^2+a+1 整除(其中 $n\in\mathbf{N}^*$，$a\in\mathbf{R}$).

证明：(1)当 $n=1$ 时，$a^2+(a+1)^1=a^2+a+1$，显然能被 a^2+a+1 整除，命题成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，

$a^{k+1}+(a+1)^{2k-1}$ 能被 a^2+a+1 整除.

当 $n=k+1$ 时，

$a^{k+2}+(a+1)^{2k+1}=a\cdot a^{k+1}+(a+1)^2(a+1)^{2k-1}$

$=a[a^{k+1}+(a+1)^{2k-1}]+(a+1)^2(a+1)^{2k-1}-a(a+1)^{2k-1}=a[a^{k+1}+(a+1)^{2k-1}]+(a^2+a+1)\cdot(a+1)^{2k-1}$.

上式能被 a^2+a+1 整除，

即当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

由(1)(2)知，对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，$a\in\mathbf{R}$，命题都成立.

2. 用数学归纳法证明：$2^{3n}-1\ (n\in\mathbf{N}^*)$ 能被7整除.

证明：(1)当 $n=1$ 时，$2^{3\times1}-1=8-1=7$，能被7整除.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，$2^{3k}-1$ 能被7整除.

那么当 $n=k+1$ 时，$2^{3(k+1)}-1=8\times2^{3k}-1=8\times2^{3k}-8+7=8(2^{3k}-1)+7$.

因为 $2^{3k}-1$ 能被7整除，

所以 $8(2^{3k}-1)+7$ 能被7整除.

所以当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

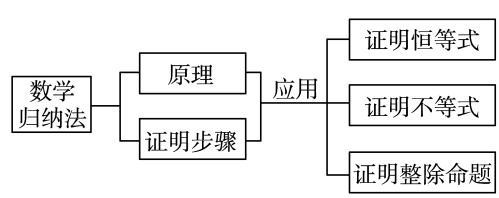
由(1)(2)可知，$2^{3n}-1(n\in\mathbf{N}^*)$ 能被7整除.

【类题通法】

用数学归纳法证明整除命题的策略

证明整除命题的关键是凑项，即采取增项、减项、拆项和因式分解等手段，凑出 $n=k$ 时的情形，从而利用归纳递推使命题得以证明.

提质归纳



课后素养评价(十一)

基础性·能力运用

1.用数学归纳法证明等式 $1+2+3+\cdots+(n+3)=\frac{(n+3)(n+4)}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$时,第一步验证 $n=1$ 时等式成立,左边的式子是 ( )

A.1　　B.$1+2$

C.$1+2+3$　　D.$1+2+3+4$

D **解析**:当 $n=1$ 时,$n+3=4$,故左边应为 $1+2+3+4$.

2.用数学归纳法证明 $1+2+3+\cdots+n^2=\frac{n^4+n^2}{2}$,则当 $n=k+1(n\in\mathbf{N}^*)$时,左边应在 $n=k$ 时的式子的基础上加上 ( )

A.k^2+1

B.$(k+1)^2$

C.$\frac{(k+1)^4+(k+1)^2}{2}$

D.$(k^2+1)+(k^2+2)+(k^2+3)+\cdots+(k+1)^2$

D **解析**:当 $n=k$ 时,左边$=1+2+\cdots+k^2$;当 $n=k+1$ 时,左边$=1+2+\cdots+k^2+(k^2+1)+\cdots+(k+1)^2$.故选 D.

3.用数学归纳法证明 $1+a+a^2+\cdots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}(a\neq1,n\in\mathbf{N}^*)$,在验证等式对于 $n=1$ 成立时,左边的式子是 ( )

A.1　　B.$1+a$

C.$1+a+a^2$　　D.$1+a+a^2+a^3$

B **解析**:当 $n=1$ 时,$\frac{1-a^{n+1}}{1-a}=1+a$,故左边应为 $1+a$.

4.用数学归纳法证明“当 n 为正奇数时,x^n+y^n 能被 $x+y$ 整除”,第二步归纳递推应为 ( )

A.假设 $n=2k+1(k\in\mathbf{N}^*)$时正确,再推 $n=2k+3$ 时正确

B.假设 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$时正确,再推 $n=2k+1$ 时正确

C.假设 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时正确,再推 $n=k+1$ 时正确

D.假设 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时正确,再推 $n=k+2$ 时正确

B **解析**:因为 n 为正奇数,所以在证明时,应假设 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$时正确,再推出 $n=2k+1$ 时正确.故选 B.

5.在数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,S_n 表示其前 n 项和,且 S_n,S_{n+1},$2S_1$ 成等差数列,通过计算 S_1,S_2,S_3 的值,猜想 $S_n=$________.

$\frac{2^n-1}{2^{n-1}}$ **解析**:由题意可知 $2S_{n+1}=2S_1+S_n$.当 $n=1$ 时,$S_2=\frac{3}{2}$.

当 $n=2$ 时,$2S_3=2S_1+S_2=\frac{7}{2}$,$S_3=\frac{7}{4}$.

$S_1=1=\frac{2-1}{2^0}$,$S_2=\frac{3}{2}=\frac{2^2-1}{2^{2-1}}$,$S_3=\frac{7}{4}=\frac{2^3-1}{2^{3-1}}$.

猜想当 $n\geqslant1$ 时,$S_n=\frac{2^n-1}{2^{n-1}}$.

6.用数学归纳法证明 $1+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$的过程中,由$n=k$ 到 $n=k+1$ 时,左边增加的项是________.

$(2k+1)^2$ **解析**:由题可知 $n=k$ 时,左边$=1+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2$,

当 $n=k+1$ 时,左边$=1+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2$,

所以等式左边增加的项是$(2k+1)^2$.

7.用数学归纳法证明:$1+3+\cdots+(2n-1)=n^2(n\in\mathbf{N}^*)$.

证明:(1)当 $n=1$ 时,左边$=1$,右边$=1$,等式成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时,等式成立,

即 $1+3+\cdots+(2k-1)=k^2$,

则当 $n=k+1$ 时,

$1+3+\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1]=k^2+[2(k+1)-1]=k^2+2k+1=(k+1)^2$.

即当 $n=k+1$ 时等式成立,根据(1)和(2)可知等式对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

综合性·创新提升

1.利用数学归纳法证明：$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<1(n\in\mathbf{N}^*$，且 $n\geqslant2)$，第二步由 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时，左边的变化是 ( )

A.增加了$\frac{1}{2k+1}$这一项

B.增加了$\frac{1}{2k+1}$和$\frac{1}{2k+2}$两项

C.增加了$\frac{1}{2k+1}$和$\frac{1}{2k+2}$两项，减少了$\frac{1}{k}$这一项

D.以上都不对

C **解析**：当 $n=k$ 时，左边$=\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}$；当 $n=k+1$ 时，左边$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$，对比可知，C 正确.

2.对于不等式$\sqrt{n^2+n}\leqslant n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，某学生的证明过程如下：

(1)当 $n=1$ 时，$\sqrt{1^2+1}\leqslant1+1$，不等式成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时，不等式成立，即$\sqrt{k^2+k}\leqslant k+1$，则当 $n=k+1$ 时，$\sqrt{(k+1)^2+(k+1)}=\sqrt{k^2+3k+2}<\sqrt{(k^2+3k+2)+(k+2)}=\sqrt{(k+2)^2}=(k+1)+1$，所以当 $n=k+1$ 时，不等式成立.

上述证法 ( )

A.过程全都正确

B.$n=1$ 时的验证不正确

C.假设不正确

D.从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 的推理不正确

D **解析**：$n=1$ 时的验证及假设都正确，但从$n=k$到$n=k+1$ 的推理中没有使用假设作为条件，而是通过不等式的放缩法直接证明，这不符合数学归纳法的证明要求.故选 D.

3.已知 $f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4^n}(n\in\mathbf{N}^*)$，用数学归纳法证明 $f(n)>n$ 时，$f(k+1)$比 $f(k)$多了________项.

3×4^k **解析**：$f(k+1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4^{k+1}}$，$f(k)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4^k}$，

所以 $f(k+1)-f(k)=\frac{1}{4^k+1}+\frac{1}{4^k+2}+\cdots+\frac{1}{4^k+3\times4^k}$，

所以 $f(k+1)$比 $f(k)$多了 3×4^k 项.

故答案为 3×4^k.

4.用数学归纳法证明$(n+1)(n+2)\cdots(n+n)=2^n\times1\times3\times\cdots\times(2n-1)(n\in\mathbf{N}^*)$，从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时，左边增乘的代数式为________.

$2(2k+1)$ **解析**：令 $f(n)=(n+1)(n+2)\cdots(n+n)$，则 $f(k)=(k+1)(k+2)\cdots(k+k)$，

$f(k+1)=(k+2)(k+3)\cdots(k+k)(2k+1)(2k+2)$，

所以$\frac{f(k+1)}{f(k)}=\frac{(2k+1)(2k+2)}{k+1}=2(2k+1)$.

5.若存在正整数 m，使得 $f(n)=(2n+7)\cdot3^n+9(n\in\mathbf{N}^*)$能被 m 整除，则 m 的最大值为________.

36 **解析**：$f(1)=36$，$f(2)=36\times3$，$f(3)=36\times10$，…，猜想 m 的最大值为 36，可由数学归纳法证得该猜想正确.

6.用数学归纳法证明：$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ 能被 9 整除$(n\in\mathbf{N}^*)$.

证明：(1)当 $n=1$ 时，$1^3+2^3+3^3=36$ 能被 9 整除，所以结论成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时结论成立，

即 $k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$ 能被 9 整除.

则当 $n=k+1$ 时，

$(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3$

$=[k^3+(k+1)^3+(k+2)^3]+[(k+3)^3-k^3]$

$=[k^3+(k+1)^3+(k+2)^3]+9k^2+27k+27$

$=[k^3+(k+1)^3+(k+2)^3]+9(k^2+3k+3)$.

因为 $k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$ 能被 9 整除，$9(k^2+3k+3)$也能被 9 整除，

所以$(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3$ 也能被 9 整除，

即$n=k+1$ 时结论也成立.

由(1)(2)知命题对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

7.是否存在常数 a,b，使等式 $1\times n+2\times(n-1)+3\times(n-2)+\cdots+(n-1)\times2+n\times1=\frac{1}{6}n(n+a)(n+b)$对一切正整数 n 都成立？猜测并用数学归纳法证明你的结论.

解：将 $n=1,n=2$ 分别代入，

得 $\begin{cases}1=\dfrac{1}{6}\times1\times(a+1)(b+1),\\1\times2+2\times1=\dfrac{1}{6}\times2\times(a+2)(b+2),\end{cases}$

则 $\begin{cases}a+b=3,\\ab=2,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a=1,\\b=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=2,\\b=1.\end{cases}$

猜测 $1\times n+2\times(n-1)+3\times(n-2)+\cdots+(n-1)\times2+n\times1=\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ 对一切正整数都成立.

证明：①当 $n=1$ 时，显然成立.

②假设当 $n=k$ 时，$1\times k+2(k-1)+3(k-2)+\cdots+(k-1)\times2+k\times1=\dfrac{1}{6}k(k+1)(k+2)$ 成立.

则当 $n=k+1$ 时，

左边 $=1\times(k+1)+2\times k+3(k-1)+\cdots+k\times2+(k+1)\times1$

$=1\times k+2(k-1)+3(k-2)+\cdots+(k-1)\times2+k\times1+[1+2+3+\cdots+k+(k+1)]$

$=\dfrac{1}{6}k(k+1)(k+2)+[1+2+3+\cdots+k+(k+1)]$

$=\dfrac{1}{6}k(k+1)(k+2)+\dfrac{1}{2}(k+2)(k+1)$

$=\dfrac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3)=$ 右边，

所以当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

综合①②，等式对一切正整数 n 都成立.

单元活动构建

任务一　求数列的通项公式

问题 1：你能看出数列 $\{a_n\}$：$-1,1,-1,1,\cdots$ 与数列 $\{b_n\}$：$1,3,1,3,\cdots$ 的联系吗？由此写出数列(2)的一个通项公式.

答案：数列 $\{a_n\}$ 每项加 2 得到数列 $\{b_n\}$. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=(-1)^n$，故数列 $\{b_n\}$ 的通项公式是 $b_n=(-1)^n+2$.

问题 2：如何用递推公式 $a_{n+1}-a_n=2$ 求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式？

答案：累加法.

问题 3：如何用数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 表示 a_n？

答案：$a_n=\begin{cases}S_1,n=1,\\S_n-S_{n-1},n\geqslant2.\end{cases}$

「任务达标」

1. 已知数列 $\{a_n\}$，$a_1=1$，$a_{n+1}=2^na_n(n\in\mathbf{N}^*)$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为（　　）

A. $a_n=2^{n-1}$　　B. $a_n=2^n$

C. $a_n=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$　　D. $a_n=2^{\frac{n^2}{2}}$

C　**解析**：由 $a_{n+1}=2^na_n$，得 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2^n$，即 $\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\dfrac{a_4}{a_3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2^1\times2^2\times2^3\times\cdots\times2^{n-1}(n\geqslant2)$，

即 $\dfrac{a_n}{a_1}=2^{1+2+3+\cdots+(n-1)}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$，故 $a_n=2^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1=2^{\frac{n(n-1)}{2}}(n\geqslant2)$.

当 $n=1$ 时，$a_1=1$，满足上式. 故选 C.

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_n=2a_n-4$，$n\in\mathbf{N}^*$，则 a_n 等于（　　）

A. 2^{n+1}　　B. 2^n

C. 2^{n-1}　　D. 2^{n-2}

A　**解析**：因为 $S_n=2a_n-4$，所以 $S_{n-1}=2a_{n-1}-4(n\geqslant2)$，两式相减可得 $S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$，即 $a_n=2a_n-2a_{n-1}$，整理得 $a_n=2a_{n-1}$，即 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2(n\geqslant2)$. 因为 $S_1=a_1=2a_1-4$，即 $a_1=4$，所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 4，公比为 2 的等比数列，则 $a_n=4\times2^{n-1}=2^{n+1}$. 故选 A.

3. 已知数列 $\{a_n\}$，$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3$，则 $a_n=$________.

$2^{n+1}-3(n\in\mathbf{N}^*)$　**解析**：设递推公式 $a_{n+1}=2a_n+3$ 可以化为 $a_{n+1}-t=2(a_n-t)$，即 $a_{n+1}=2a_n-t$，则 $t=-3$.

故递推公式化为 $a_{n+1}+3=2(a_n+3)$.

令 $b_n=a_n+3$，则 $b_1=a_1+3=4$，且 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{a_{n+1}+3}{a_n+3}=2$.

所以 $\{b_n\}$ 是以 4 为首项，2 为公比的等比数列.

所以 $b_n=4\times2^{n-1}=2^{n+1}$，则 $a_n=2^{n+1}-3(n\in\mathbf{N}^*)$.

4. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都有 $a_{n+1}=a_1+a_n+n$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为________.

$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$　**解析**：因为 $a_{n+1}=a_n+n+1$，所以 $a_{n+1}-a_n=n+1$，即 $a_2-a_1=2$，$a_3-a_2=3$，$\cdots$，$a_n-a_{n-1}=n(n\geqslant2)$，等式两边同时相加得

$a_n-a_1=2+3+4+\cdots+n$，

即 $a_n=a_1+2+3+4+\cdots+n=1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}(n\geqslant 2)$.

当 $n=1$ 时，也满足上式，所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{n(n+1)}{2},n\in\mathbf{N}^*$.

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=2a_n+3\times 5^n$，$a_1=6$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为________.

$a_n=2^{n-1}+5^n(n\in\mathbf{N}^*)$　**解析**：设 $a_{n+1}+x\times 5^{n+1}=2(a_n+x\times 5^n)$①.

将 $a_{n+1}=2a_n+3\times 5^n$ 代入①式，得 $2a_n+3\times 5^n+x\times 5^{n+1}=2a_n+2x\times 5^n$，等式两边消去 $2a_n$，得 $3\times 5^n+x\times 5^{n+1}=2x\times 5^n$，两边同时除以 5^n，得 $3+5x=2x$，则 $x=-1$，代入①式得 $a_{n+1}-5^{n+1}=2(a_n-5^n)$②.

由 $a_1-5^1=6-5=1\neq 0$ 及②式得 $a_n-5^n\neq 0$，则 $\frac{a_{n+1}-5^{n+1}}{a_n-5^n}=2$，所以数列 $\{a_n-5^n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列.所以 $a_n-5^n=2^{n-1}$.故 $a_n=2^{n-1}+5^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

【规律方法】

由数列前几项归纳数列通项公式的方法

一般会用到观察(观察规律)、比较(比较已知数列)、归纳、转化(转化为特殊数列)、联想(联想常见的数列)等方法.同时也可以使用添项、还原、分割等方法，转化为一个常见数列，通过常见数列的通项公式求得所给数列的通项公式.

任务二　等差数列的判定

问题 1：等差数列的判定方法有哪些？

答案：(1)定义法；(2)通项公式法；(3)等差中项法.

问题 2：如何利用定义法判断一个数列是等差数列？

答案：证明 $a_n-a_{n-1}=d(n\geqslant 2,d$ 为常数)或 $a_{n+1}-a_n=d(n\in\mathbf{N}^*,d$ 为常数).

任务达标

1. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$2a_na_{n-1}=a_{n-1}-a_n(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)证明：数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列；

(2)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(1)**证明**：由 $2a_na_{n-1}=a_{n-1}-a_n$ 知，若 $a_n=0$，则 $a_{n-1}=0$，与 $a_1=1$ 矛盾，故 $a_n\neq 0$.

将 $2a_na_{n-1}=a_{n-1}-a_n$ 两边同时除以 a_na_{n-1} 得 $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=2(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，

故数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 1 为首项，2 为公差的等差数列.

(2)**解**：由(1)得 $\frac{1}{a_n}=1+2(n-1)=2n-1$，

所以 $a_n=\frac{1}{2n-1}$.

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=4$，$a_n=4-\frac{4}{a_{n-1}}(n\geqslant 2)$，记 $b_n=\frac{1}{a_n-2}$.

(1)求证：数列 $\{b_n\}$ 是等差数列；

(2)求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(1)**证明**：因为 $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{a_{n+1}-2}-\frac{1}{a_n-2}=\frac{1}{\left(4-\frac{4}{a_n}\right)-2}-\frac{1}{a_n-2}=\frac{a_n}{2(a_n-2)}-\frac{1}{a_n-2}=\frac{a_n-2}{2(a_n-2)}=\frac{1}{2}$，又 $b_1=\frac{1}{a_1-2}=\frac{1}{2}$，

所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$，公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列.

(2)**解**：由(1)知 $b_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}n$，

所以 $\frac{1}{a_n-2}=\frac{n}{2}$.

所以 $a_n=\frac{2}{n}+2=\frac{2n+2}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+2(n\geqslant 3)$.

(1)判断数列 $\{a_n\}$ 是否为等差数列，并说明理由；

(2)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：(1)数列 $\{a_n\}$ 不是等差数列.理由如下：

当 $n\geqslant 3$ 时，$a_n=a_{n-1}+2$，

即 $a_n-a_{n-1}=2$，

而 $a_2-a_1=0$ 不满足 $a_n-a_{n-1}=2$，

所以 $\{a_n\}$ 不是等差数列.

(2)当 $n\geqslant 2$ 时，$\{a_n\}$ 是等差数列，公差为 2.

所以 $a_n=1+2(n-2)=2n-3$.

又 $a_1=1$ 不满足上式，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\begin{cases}1,n=1,\\2n-3,n\geqslant 2.\end{cases}$

【规律方法】

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=pn+q$(其中 p,q 为常数)，则数列 $\{a_n\}$ 一定是等差数列，且公差为 p.

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1>0,d<0$，则 S_n 存在最大值；若 $a_1<0,d>0$，则 S_n 存在最小值.

3. 等差数列 $\{a_n\}$ 的单调性：当 $d>0$ 时，$\{a_n\}$ 是递增数列；当 $d<0$ 时，$\{a_n\}$ 是递减数列；当 $d=0$ 时，$\{a_n\}$ 是常数列.

4. 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列 $\Leftrightarrow S_n=An^2+Bn(A,B$ 为常数).

任务三 等差数列的通项公式及其应用

问题 1：等差数列的通项公式如何表述？此公式是用什么方法证明的？

答案：若一个等差数列$\{a_n\}$的首项是a_1，公差为d，则通项公式为$a_n=a_1+(n-1)d$.此公式可用累加法证明.

问题 2：等差数列的通项公式有何用途？

答案：可以利用通项公式求等差数列中的任意一项.

问题 3：等差数列中，由“下标和”相等得出“项之和”相等的性质是如何表述的？

答案：若数列$\{a_n\}$是等差数列，$m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$，且$m+n=p+q$，则$a_m+a_n=a_p+a_q$，反之不一定成立.特别地，若$m+n=2p$，则$a_m+a_n=2a_p$.

「任务达标」

1. 在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=80$，则$a_7-\frac{1}{2}a_8$等于（　　）

A.4　　B.6　　C.8　　D.10

C　**解析**：因为$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=5a_6=80$，所以$a_6=16$.

所以$a_7-\frac{1}{2}a_8=\frac{1}{2}(2a_7-a_8)=\frac{1}{2}(a_6+a_8-a_8)=\frac{1}{2}a_6=8$.

2. 在等差数列20，17，14，11，…中，第一个负数项是（　　）

A.第7项　　B.第8项

C.第9项　　D.第10项

B　**解析**：因为$a_1=20$，$d=-3$，所以$a_n=20+(n-1)\times(-3)=23-3n$.

所以$a_7=2>0$，$a_8=-1<0$.

3. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_6=12$，$a_{18}=36$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为________.

$a_n=2n$　**解析**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.由题意可得$\begin{cases}a_1+5d=12,\\a_1+17d=36,\end{cases}$解得$\begin{cases}d=2,\\a_1=2.\end{cases}$

所以$a_n=2+(n-1)\times2=2n$.

4. 已知等差数列$\{a_n\}$，$a_2+a_6+a_{10}=1$，则$a_4+a_8=$________.

$\frac{2}{3}$　**解析**：根据等差数列的性质得$a_2+a_{10}=a_4+a_8=2a_6$.

由$a_2+a_6+a_{10}=1$，得$3a_6=1$，解得$a_6=\frac{1}{3}$.所以$a_4+a_8=2a_6=\frac{2}{3}$.

5. 某市出租车的计费标准：起步价为10元，即3 km内（含3 km）计费10元；超出3 km的部分按1.2元/km计费.如果某人乘坐该市的出租车去往14 km处的目的地，那么需要支付多少车费？

解：$10+(14-3)\times1.2=23.2$.

即需要支付车费23.2元.

【规律方法】

等差数列中常用的两个性质

(1)若等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$d=\frac{a_p-a_q}{p-q}$.

(2)在等差数列$\{a_n\}$中，若$m+n=p+q$，则$a_m+a_n=a_p+a_q(m,n,p,q\in\mathbf{N}^*)$.

任务四 等差数列的前n项和公式及其应用

问题 1：常用的等差数列的前n项和公式有几个？分别在已知什么条件时应用？

答案：两个.若已知a_1，a_n和项数n，则使用公式$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，此公式还可以结合等差数列中由“下标和”相等可得“项之和”相等的性质使用；若已知首项a_1、公差d及项数n，则使用公式$S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$.

问题 2：在等差数列$\{a_n\}$中，S_n表示前n项之和，则S_k，$S_{2k}-S_k$，$S_{3k}-S_{2k}$，…构成的数列是等差数列吗？

答案：是公差为k^2d的等差数列，其中d是等差数列$\{a_n\}$的公差.

问题 3：等差数列前n项和S_n的最值有哪些情形？

答案：等差数列前n项和S_n最大(小)值的情形：

①若$a_1>0$，$d<0$，则S_n存在最大值，即所有非负项之和；

②若$a_1<0$，$d>0$，则S_n存在最小值，即所有非正项之和.

「任务达标」

1. 已知数列$\{a_n\}$是等差数列，其前n项和为S_n.

(1)若$a_5+a_{10}=58$，$a_4+a_9=50$，求S_{10}；

(2)若$S_7=42$，$S_n=510$，$a_{n-3}=45$，求n.

解：(1)(方法一)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

由已知条件得

$\begin{cases}a_5+a_{10}=2a_1+13d=58,\\a_4+a_9=2a_1+11d=50,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=3,\\d=4.\end{cases}$

所以$S_{10}=10a_1+\frac{10\times(10-1)}{2}d=10\times3+\frac{10\times9}{2}$

$\times 4=210$.

(方法二)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,

由已知条件得$\begin{cases}a_5+a_{10}=(a_1+a_{10})+4d=58,\\a_4+a_9=(a_1+a_{10})+2d=50,\end{cases}$

所以$\begin{cases}d=4,\\a_1+a_{10}=42.\end{cases}$

所以 $S_{10}=\dfrac{10(a_1+a_{10})}{2}=5\times 42=210$.

(2)$S_7=\dfrac{7(a_1+a_7)}{2}=7a_4=42$,

所以 $a_4=6$.

所以 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(a_4+a_{n-3})}{2}=\dfrac{n(6+45)}{2}$

$=510$.所以 $n=20$.

2.已知等差数列$\{a_n\}$,$a_1=9$,$a_4+a_7=0$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)当 n 为何值时,数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 取得最大值?

解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

由 $a_1=9$,$a_4+a_7=0$,

得 $a_1+3d+a_1+6d=0$,解得 $d=-2$.

所以 $a_n=a_1+(n-1)\cdot d=11-2n$.

(2)(方法一)由(1)知 $a_1=9$,$d=-2$,

所以 $S_n=9n+\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot(-2)=-n^2+10n=$

$-(n-5)^2+25$.

所以当 $n=5$ 时,S_n取得最大值.

(方法二)由(1)知 $a_1=9$,$d=-2<0$,

所以$\{a_n\}$是递减数列.

令 $a_n\geqslant 0$,则 $11-2n\geqslant 0$,解得 $n\leqslant\dfrac{11}{2}$.

因为 $n\in\mathbf{N}^*$,所以 $n\leqslant 5$ 时,$a_n>0$,$n\geqslant 6$ 时,$a_n<0$.

所以当 $n=5$ 时,S_n取得最大值.

3.已知数列$\{a_n\}$为等差数列,S_n为数列$\{a_n\}$的前 n 项和,且 $S_7=7$,$S_{15}=75$,求数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$的前 n 项和 T_n.

解:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,

则 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$.

因为 $S_7=7$,$S_{15}=75$,

所以$\begin{cases}7a_1+21d=7,\\15a_1+105d=75,\end{cases}$

即$\begin{cases}a_1+3d=1,\\a_1+7d=5,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=-2,\\d=1.\end{cases}$

所以$\dfrac{S_n}{n}=a_1+\dfrac{n-1}{2}d=-2+\dfrac{n-1}{2}=\dfrac{n}{2}-\dfrac{5}{2}$.

所以$\dfrac{S_{n+1}}{n+1}-\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{1}{2}$.

所以数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$是等差数列,且首项为$-2$,公差为$\dfrac{1}{2}$.

所以 $T_n=\dfrac{1}{4}n^2-\dfrac{9}{4}n(n\in\mathbf{N}^*)$.

4.设等差数列$\{a_n\}$满足 $a_3=5$,$a_{10}=-9$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)求数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n及使得 S_n最大时的 n 的值.

解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

由 $a_n=a_1+(n-1)d$ 及 $a_3=5$,$a_{10}=-9$,

得$\begin{cases}a_1+2d=5,\\a_1+9d=-9,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=9,\\d=-2.\end{cases}$

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=11-2n$,$n\in\mathbf{N}^*$.

(2)由(1)知,$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=10n-n^2$.

因为 $S_n=-(n-5)^2+25$,

所以当 $n=5$ 时,S_n取得最大值.

【规律方法】

在等差数列$\{a_n\}$中,S_n 为其前 n 项和,则:

(1)S_m,$S_{2m}-S_m$,$S_{3m}-S_{2m}$,…成等差数列;

(2)$S_{2n}=n(a_1+a_{2n})=\cdots=n(a_n+a_{n+1})$;

(3)$S_{2n-1}=(2n-1)a_n$.

任务五　等比数列的概念

问题 1:等比数列是怎样定义的?

答案:一般地,如果一个数列从第 2 项起,每一项与它的前一项的比都等于同一个常数,那么这个数列叫做等比数列,这个常数叫做等比数列的公比,公比通常用字母 q 表示(显然 $q\neq 0$).

问题 2:等比数列的判定方法有哪些?

答案:(1)定义法;(2)通项公式法;(3)等比中项法.

问题 3:你能从不同角度对比等比中项与等差中项吗?

答案:等比中项与等差中项的对比如下表.

对比项	等差中项	等比中项
定义	若 a,A,b 成等差数列,则 A 叫做 a 与 b 的等差中项	若 a,G,b 成等比数列,则 G 叫做 a,b 的等比中项
定义式	$A-a=b-A$	$\dfrac{G}{a}=\dfrac{b}{G}$

续表

对比项	等差中项	等比中项
公式	$A=\frac{a+b}{2}$	$G=\pm\sqrt{ab}$
个数	a 与 b 的等差中项唯一	a 与 b 的等比中项有两个，且互为相反数
存在条件	任意两个数 a 与 b 都有等差中项	只有当 $ab>0$ 时，a 与 b 才有等比中项

「任务达标」

1. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$.

(1)证明：数列$\{a_n+1\}$是等比数列；

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

(1)**证明**：因为 $a_{n+1}=2a_n+1$，

所以 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$.

由 $a_1=1$，知 $a_1+1\neq0$，从而 $a_n+1\neq0$.

所以$\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2(n\in\mathbf{N}^*)$.

所以数列$\{a_n+1\}$是等比数列.

(2)**解**：由(1)知$\{a_n+1\}$是以 $a_1+1=2$ 为首项，2 为公比的等比数列.

所以 $a_n+1=2\times2^{n-1}=2^n$，即 $a_n=2^n-1$.

2. 数列$\{a_n\}$满足 $a_1=-1$，且 $a_n=3a_{n-1}-2n+3(n\geqslant2)$.

(1)求 a_2，a_3，并证明数列$\{a_n-n\}$是等比数列；

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解：(1)$a_2=3a_1-2\times2+3=-4$，

$a_3=3a_2-2\times3+3=-15$.

证明如下：

$\frac{a_{n+1}-(n+1)}{a_n-n}=\frac{3a_n-2(n+1)+3-(n+1)}{a_n-n}$

$=\frac{3a_n-3n}{a_n-n}=3(n\in\mathbf{N}^*)$.

又 $a_1-1=-2$，所以数列$\{a_n-n\}$是以-2 为首项，3 为公比的等比数列.

(2)由(1)知 $a_n-n=-2\times3^{n-1}$，

所以 $a_n=n-2\times3^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

【规律方法】

判定等比数列时应注意的两点

(1)$a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$是$\{a_n\}$为等比数列的必要不充分条件.判定一个数列是等比数列时，要注意各项不为 0.

(2)证明数列$\{a_n\}$为等比数列时，不能仅仅证明 $a_{n+1}=qa_n$，还要说明 $q\neq0$，才能递推得出数列中的各项均不为零，断定数列$\{a_n\}$为等比数列.

任务六　等比数列的通项公式及其应用

问题 1：等比数列的通项公式是怎样的?

答案：已知等比数列$\{a_n\}$的首项为 a_1，公比为 $q(q\neq0)$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=a_1q^{n-1}$.

问题 2：在等比数列的基本量运算中，解方程组时常用的方法是什么?

答案：两式相除求公比.

问题 3：等比数列中有关“下标和”的性质是怎样的?

答案：若 $m+n=p+q(m,n,p,q\in\mathbf{N}^*)$，

则 $a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$.

若 $m+n=2k(m,n,k\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_k^2=a_m\cdot a_n$.

「任务达标」

1. 若$\{a_n\}$为公比大于 1 的等比数列，$a_3=2$，$a_2+a_4=\frac{20}{3}$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为________.

$a_n=2\times3^{n-3}(n\in\mathbf{N}^*)$　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，则 $q>1$，$a_2=\frac{a_3}{q}=\frac{2}{q}$，$a_4=a_3q=2q$，所以$\frac{2}{q}+2q=\frac{20}{3}$，解得 $q=\frac{1}{3}$(舍)或 3.

由 $q=3$ 知，$a_1=\frac{2}{9}$，所以 $a_n=\frac{2}{9}\times3^{n-1}=2\times3^{n-3}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

2. 在等比数列$\{a_n\}$中，已知 $a_4+a_7=2$，$a_5a_6=-8$，求 a_1+a_{10}.

解：因为$\{a_n\}$是等比数列，所以 $a_5a_6=a_4a_7=-8$.

又 $a_4+a_7=2$，

解得 $a_4=4$，$a_7=-2$ 或 $a_4=-2$，$a_7=4$.

设$\{a_n\}$的公比为 q，

当 $a_4=4$，$a_7=-2$ 时，$q^3=-\frac{1}{2}$，

$a_1+a_{10}=\frac{a_4}{q^3}+a_7q^3=-7$；

当 $a_4=-2$，$a_7=4$ 时，$q^3=-2$，

$a_1+a_{10}=\frac{a_4}{q^3}+a_7q^3=-7$.

故 $a_1+a_{10}=-7$.

3. 已知数列$\{a_n\}$为等比数列.

(1)若 $a_2=18$，$a_4=8$，求 a_n；

(2)若 $a_n>0$，且 $a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=36$，求 a_3+a_5；

(3)若数列$\{a_n\}$的前三项和为 168，$a_2-a_5=42$，求 a_5，a_7 的等比中项.

解：(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，

则由已知得$\begin{cases}a_1q=18,\\a_1q^3=8,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=27,\\q=\frac{2}{3}\end{cases}$ 或$\begin{cases}a_1=-27,\\q=-\frac{2}{3}.\end{cases}$

所以 $a_n=27\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ 或 $a_n=-27\times\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

(2)因为 $a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=36$,

所以 $a_3^2+2a_3a_5+a_5^2=36$,即$(a_3+a_5)^2=36$.

又因为 $a_n>0$,所以 $a_3+a_5=6$.

(3)设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q.

因为 $a_2-a_5=42$,所以 $q\neq1$.

由已知,得$\begin{cases}a_1+a_1q+a_1q^2=168,\\a_1q-a_1q^4=42,\end{cases}$

所以$\begin{cases}a_1(1+q+q^2)=168,\\a_1q(1-q^3)=42,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=96,\\q=\frac{1}{2}.\end{cases}$

若 G 是 a_5,a_7 的等比中项,则有 $G^2=a_5\cdot a_7=a_1q^4\cdot a_1q^6=a_1^2q^{10}=96^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=9$,

所以 a_5,a_7 的等比中项为 ±3.

【规律方法】

1. 已知首项 a_1 和公比 q 的前提下,利用通项公式 $a_n=a_1q^{n-1}$ 可以求出等比数列中的任意一项.

2. 在公式 $a_n=a_1q^{n-1}$ 中,有 a_1,a_n,q,n 四个基本量,如果已知其中任意三个,可求第四个,即"知三求一".

3. 可以利用通项公式来判断数列是否是等比数列.

任务七　等比数列的前 n 项和公式及其应用

问题 1:常用的等比数列的前 n 项和公式有几个?分别在已知什么条件时使用?

答案:当公比 $q\neq1$ 时,等比数列的前 n 项和公式有两个.若已知 a_1,q,n,用 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 较为方便;若已知 a_1,q,a_n,用 $S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$ 较为方便.

问题 2:使用等比数列的前 n 项和公式时要注意的问题是什么?

答案:注意分为公比 $q=1$ 和 $q\neq1$ 两种情形.

问题 3:在等比数列$\{a_n\}$中,S_n 表示前 n 项之和,则 $S_k,S_{2k}-S_k,S_{3k}-S_{2k},\cdots$构成的数列是等比数列吗?

答案:如果公比 $q\neq-1$,$S_k,S_{2k}-S_k,S_{3k}-S_{2k},\cdots$构成的数列是等比数列.

「任务达标」

1. 在等比数列$\{a_n\}$中,若 $a_1+a_2=40,a_3+a_4=60$,那么 a_5+a_6等于　(　　)

A.80　　B.90

C.95　　D.100

B　**解析**:设$\{a_n\}$的公比为 q.因为 $a_1+a_2=a_1(1+q)=40$,$a_3+a_4=a_3(1+q)=60$,所以 $q^2=\frac{a_3(1+q)}{a_1(1+q)}=\frac{3}{2}$,所以 $a_5+a_6=q^2(a_3+a_4)=\frac{3}{2}\times60=90$.

2. 设数列$\{a_n\}$是等比数列,其前 n 项和为 S_n,且 $S_3=3a_3$,则公比 q 的值为________.

1 或 $-\frac{1}{2}$　**解析**:当 $q=1$ 时,$S_3=a_1+a_2+a_3=3a_1=3a_3$,成立;

当 $q\neq1$ 时,$S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}$,$a_3=a_1q^2$.

又 $S_3=3a_3$,

所以$\frac{1-q^3}{1-q}=3q^2$,化简得 $2q^2-q-1=0$,

即$(q-1)(2q+1)=0$.

由 $q\neq1$,即 $q-1\neq0$,解得 $q=-\frac{1}{2}$.

综上可知,公比 q 的值为 1 或$-\frac{1}{2}$.

3. 已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.

(1)若公比 $q=2,S_4=1$,求 S_8;

(2)若 $a_1+a_3=10,a_4+a_6=\frac{5}{4}$,求 a_4和 S_6;

(3)若前 10 项和 $S_{10}=10$,前 20 项和 $S_{20}=30$,求 S_{30}.

解:(1)(方法一)因为 $q=2,S_4=1$,

所以$\frac{a_1(1-2^4)}{1-2}=1$,则 $a_1=\frac{1}{15}$.

所以 $S_8=\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}=\frac{\frac{1}{15}\times(1-2^8)}{1-2}=17$.

(方法二)因为 $S_4=\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=1$,且 $q=2$,

所以 $S_8=\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}=\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}\cdot(1+q^4)=1\times(1+2^4)=17$.

(2)设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q.由题意得

$\begin{cases}a_1+a_1q^2=10,\\a_1q^3+a_1q^5=\frac{5}{4},\end{cases}$即$\begin{cases}a_1(1+q^2)=10,①\\a_1q^3(1+q^2)=\frac{5}{4}.②\end{cases}$

因为 $a_1\neq0,1+q^2\neq0$,所以②÷①得,$q^3=\frac{1}{8}$,即 $q=\frac{1}{2}$.

所以 $a_1=8$.所以 $a_4=a_1q^3=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=1$,

$S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{8\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{63}{4}$.

(3)因为 S_{10}，$S_{20}-S_{10}$，$S_{30}-S_{20}$ 仍成等比数列，

又 $S_{10}=10$，$S_{20}=30$，

所以 $S_{30}-S_{20}=S_{30}-30=\frac{(S_{20}-S_{10})^2}{S_{10}}=\frac{(30-10)^2}{10}$，

则 $S_{30}=70$.

【规律方法】

在等比数列$\{a_n\}$的五个量 a_1，q，a_n，n，S_n 中，a_1 与 q 是最基本的量，当条件与结论的联系不明确时，可以用 a_1 与 q 表示 a_n 与 S_n，从而列方程组求解，在解方程组时经常用到两式相除从而达到整体消元的目的，这是方程思想与整体思想在等比数列中的具体应用.

任务八　等比数列的实际应用

问题 1：推导等比数列的前 n 项和公式时用到的方法是什么？

答案：错位相减法.

问题 2：解决等比数列的实际应用问题的关键是什么？

答案：从实际问题中抽象出等比数列模型，利用等比数列前 n 项和公式列出方程(组)，再准确计算，得出结果.

「任务达标」

1.《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，收有大量与生产实践有关的应用题.书中有一道“两鼠穿墙”题，现有类似问题如下：今有垣厚十八尺，两鼠对穿，大鼠日一尺，小鼠亦日一尺，大鼠日自倍，小鼠日自半，问：何日相逢？其大意为：现在有厚 18 尺的墙，有两只老鼠从墙的两边刚好相对的位置打洞穿墙.大老鼠第一天前进一尺，以后每天加倍；小老鼠第一天也前进一尺，以后每天减半，问：两只老鼠第几天相逢？（天数取整数）

解：大老鼠每天前进的距离构成首项为 1，公比为 2 的等比数列，小老鼠每天前进的距离构成首项为 1，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列.

设相遇时是第 n 天，则满足$\frac{1-2^n}{1-2}+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\geqslant 18$，

即 $2^n-1+2-\frac{2}{2^n}\geqslant 18$，即 $2^n-\frac{2}{2^n}\geqslant 17$，

$f(n)=2^n-\frac{2}{2^n}$在 $n\geqslant 1$ 时单调递增.

因为 $f(4)=2^4-\frac{2}{2^4}=16-\frac{1}{8}<17$，

$f(5)=2^5-\frac{2}{2^5}=32-\frac{1}{16}>17$，

所以相遇时是第 5 天.

2.公元前 5 世纪，古希腊哲学家芝诺发表了著名的阿基里斯悖论.他提出让乌龟在阿基里斯（古希腊善跑的英雄）前面 1 000 米处开始，和阿基里斯赛跑，并且假定阿基里斯的速度是乌龟的 10 倍.当比赛开始后，若阿基里斯跑了 1 000 米，此时乌龟便领先他 100 米；当阿基里斯跑完下一个 100 米时，乌龟仍然领先他 10 米；当阿基里斯跑完下一个 10 米时，乌龟仍然领先他1 米……所以，阿基里斯永远追不上乌龟.按照悖论中的前提条件，当阿基里斯和乌龟的距离恰好为$\frac{1}{10}$米时，求乌龟爬行的总距离.

解：由题意知，乌龟每次爬行的距离构成等比数列$\{a_n\}$，且 $a_1=100$，公比 $q=\frac{1}{10}$，$a_n=\frac{1}{10}$.

所以乌龟爬行的总距离 $S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{100-\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1\ 111}{10}$（米）.

【规律方法】

1.对公比为参数的等比数列求和时，要注意分公比 $q=1$ 和 $q\neq 1$ 两种情况讨论.

2.当 $q\neq 1$ 时，等比数列的前 n 项和公式有两个，若已知 a_1，q，n，用 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$较为方便；若已知 a_1，q，a_n，用 $S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$较为方便.

3.在等比数列的通项公式及前 n 项和公式中，共有 a_1，q，a_n，n，S_n 五个量，知道其中任意三个量，都可以利用方程或方程组求出其余两个量，即“知三求二”.

第四章综合检测

（时间：120 分钟，分值：150 分）

一、单项选择题(本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分)

1. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_3=2$，$a_6=17$，则数列$\{a_n\}$的公差是　（　　）

A. -2　　B. 5

C. -5　　D. 4

B　**解析**：因为 $a_3=2$，$a_6=17$，所以数列$\{a_n\}$的公差是$\frac{a_6-a_3}{6-3}=\frac{15}{3}=5$.故选 B.

2. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3^{n-1}$，那么 9 是数列$\{a_n\}$的　（　　）

A. 第 10 项　　B. 第 4 项

C. 第 3 项　　D. 第 2 项

C　**解析**：因为数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3^{n-1}$，令 $3^{n-1}=9$，解得 $n=3$，所以 9 是数列$\{a_n\}$的第 3 项.故选 C.

3. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_5=6$，则数列的前 9 项和 $S_9=$　（　　）

A. 54　　B. 27

C. 36　　D. 24

A　**解析**：$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=\frac{9\times 2a_5}{2}=9a_5=54$.故选 A.

4. 在数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1=-\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=2a_n-1$，则 $a_3=$　（　　）

A. -5　　B. -4

C. -3　　D. -2

A　**解析**：因为 $a_1=-\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=2a_n-1$，所以 $a_2=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1=-2$，$a_3=2\times(-2)-1=-5$.故选 A.

5. 已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.若公比 $q=2$，则$\frac{a_2+a_4+a_6}{S_6}=$　（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{7}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{3}{7}$

A　**解析**：由已知可得$\frac{a_2+a_4+a_6}{S_6}=\frac{a_1q(1+q^2+q^4)}{\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}}$

$=\frac{2\times(1+4+16)}{\frac{1-2^6}{1-2}}=\frac{42}{63}=\frac{2}{3}$.故选 A.

6. 已知数列$\{a_n\}$，$a_3=2$，$a_5=1$.若$\left\{\frac{1}{1+a_n}\right\}$是等差数列，则 a_{11} 等于　（　　）

A. 0　　B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

A　**解析**：因为$\frac{1}{1+a_3}=\frac{1}{3}$，$\frac{1}{1+a_5}=\frac{1}{2}$，设等差数列$\left\{\frac{1}{1+a_n}\right\}$的公差为 d，则$\begin{cases}\frac{1}{1+a_1}+2d=\frac{1}{3},\\ \frac{1}{1+a_1}+4d=\frac{1}{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}\frac{1}{1+a_1}=\frac{1}{6},\\ d=\frac{1}{12}.\end{cases}$所以$\frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{6}+(n-1)\cdot\frac{1}{12}$，所以$\frac{1}{1+a_{11}}=\frac{1}{6}+\frac{11-1}{12}=1$，所以 $a_{11}=0$.

7. 设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，$a_1>0$，则“$a_5>0$”是“$d>0$”的　（　　）

A. 充要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分不必要条件

D. 既不充分也不必要条件

B　**解析**：由等差数列$\{a_n\}$的公差 $d>0$ 可知，$a_5=a_1+4d>0$，必要性成立；

充分性不成立，例如：$a_1=5$，$a_5=1$ 得 $d=-1$.

所以“$a_5>0$”是“$d>0$”的必要不充分条件.故选 B.

8. (2022·浙江)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n-\frac{1}{3}a_n^2(n\in\mathbf{N}^*)$，则　（　　）

A. $2<100a_{100}<\frac{5}{2}$　　B. $\frac{5}{2}<100a_{100}<3$

C. $3<100a_{100}<\frac{7}{2}$　　D. $\frac{7}{2}<100a_{100}<4$

B　**解析**：由 $a_1=1$，易得 $a_2=\frac{2}{3}\in(0,1)$，依次类推可得 $a_n\in(0,1)$.

由题意，$a_{n+1}=a_n\left(1-\frac{1}{3}a_n\right)$，即$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{a_n(3-a_n)}$

$=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{3-a_n}$,

所以$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3-a_n}>\frac{1}{3}$,即$\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}>\frac{1}{3}$,$\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}>\frac{1}{3}$,$\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_3}>\frac{1}{3}$,…,$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}>\frac{1}{3}(n\geqslant 2)$,

累加可得$\frac{1}{a_n}-1>\frac{1}{3}(n-1)$,即$\frac{1}{a_n}>\frac{1}{3}(n+2)(n\geqslant 2)$,

所以 $a_n<\frac{3}{n+2}(n\geqslant 2)$,即 $a_{100}<\frac{1}{34}$,$100a_{100}<\frac{100}{34}<3$.

又$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3-a_n}<\frac{1}{3-\frac{3}{n+2}}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)(n\geqslant 2)$,

所以$\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}<\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)$,$\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}<\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)$,$\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_3}<\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{4}\right)$,…,$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}<\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)(n\geqslant 3)$,

累加可得$\frac{1}{a_n}-1<\frac{1}{3}(n-1)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(n\geqslant 3)$,

所以 $\frac{1}{a_{100}}-1<33+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}\right)<33+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\times 4+\frac{1}{6}\times 96\right)<39$,

即$\frac{1}{a_{100}}<40$,所以 $a_{100}>\frac{1}{40}$,即 $100a_{100}>\frac{5}{2}$.

综上,$\frac{5}{2}<100a_{100}<3$.故选 B.

二、多项选择题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

9.已知等比数列$\{a_n\}$是递增数列,q 是公比,则 ( )

A.$a_1>0$　　B.$q>0$

C.$a_1q>0$　　D.$a_1(q-1)>0$

BD　**解析**:等比数列$\{a_n\}$递增包括两种情况:$a_1>0$ 时 $q>1$,或 $a_1<0$ 时 $0<q<1$.

故 $q>0$,$a_1(q-1)>0$.故选 BD.

10.已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$a_5=1$,则 ( )

A.$a_2+a_8=2$　　B.$a_3a_7=1$

C.$S_9=9$　　D.$S_{10}=10$

AC　**解析**:对于 A 选项,$a_2+a_8=2a_5=2$,A 正确;

对于 B 选项,设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,

则 $a_3a_7=(a_5-2d)(a_5+2d)=a_5^2-4d^2=1-4d^2\leqslant 1$,B 错误;

对于 C 选项,$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5=9$,C 正确;

对于 D 选项,$S_{10}=S_9+a_{10}=9+a_{10}$,$S_{10}$的值无法确定,D 错误.

故选 AC.

11.已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\begin{cases}3n+1,n\text{ 为奇数},\\2-2n,n\text{ 为偶数},\end{cases}$ S_n为数列$\{a_n\}$的前 n 项和,则 ( )

A.$a_6=19$　　B.$a_7>a_6$

C.$S_5=22$　　D.$S_6>S_8$

BC　**解析**:由题知 $a_1=4$,$a_3=10$,$a_5=16$,$a_7=22$,$a_2=-2$,$a_4=-6$,$a_6=-10$,$a_8=-14$,故 A 错误;$a_7>a_6$,故 B 正确;

$S_5=22$,故 C 正确;

$S_6=12$,$S_8=20$,$S_6<S_8$,故 D 错误.

故选 BC.

12.如果有穷数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m$(m 为正整数)满足 $a_1=a_m$,$a_2=a_{m-1}$,…,即 $a_i=a_{m-i+1}(i=1,2,\cdots,m)$,那么称其为"对称数列".例如,数列 1,2,5,2,1 与数列 8,4,2,2,4,8 都是"对称数列".设$\{b_n\}$是项数为 $2m(m>1,m\in\mathbf{N}^*)$的"对称数列",且 $1,2,2^2,2^3,\cdots,2^{m-1}$依次为该数列中连续的前 m 项,则数列$\{b_n\}$的前 100 项和 S_{100}的值可能为 ( )

A.$2^{100}-1$　　B.$2^{51}-2$

C.$2^{26}-4$　　D.$2^{m+1}-2^{2m-100}-1$

ABD　**解析**:由题意知数列$\{b_n\}$为 $1,2,2^2,2^3,\cdots,2^{m-1},2^{m-1},\cdots,2^3,2^2,2,1$.

若 $m=50$,则 $S_{100}=2\times\frac{1\times(1-2^{50})}{1-2}=2^{51}-2$,B 正确;

若 $51\leqslant m<100$,则 $S_{100}=2\times\frac{1\times(1-2^m)}{1-2}-\frac{1\times(1-2^{2m-100})}{1-2}=2^{m+1}-2^{2m-100}-1$,故 D 正确.

若 $m\geqslant 100$,则 $S_{100}=\frac{1\times(1-2^{100})}{1-2}=2^{100}-1$,故 A 正确.

三、填空题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

得分	

13.若数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n^2-5n+2$,则数列$\{a_n\}$的最小项的值是________.

-1　**解析**:由题意,数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n^2-5n+2=2\left(n-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$,

当 $n=1$ 时，$a_1=-1$；当 $n=2$ 时，$a_2=0$.

结合二次函数的性质，可得数列$\{a_n\}$的最小项的值是-1.

得分	

14.在等差数列$\{a_n\}$中，若 $a_1=3$，$a_n=21$，公差 $d=2$，则项数 $n=$________.

10 **解析**：在等差数列$\{a_n\}$中，因为 $a_1=3$，$a_n=21$，公差 $d=2$，所以 $21=3+(n-1)\times 2$，解得 $n=10$.

得分	

15.等比数列$\{a_n\}$满足如下条件：①$a_1>0$；②$\{a_n\}$递增.则数列$\{a_n\}$的一个通项公式为 $a_n=$________.

2^n(答案不唯一) **解析**：满足条件的一个数列$\{a_n\}$的一个通项公式 $a_n=2^n$(答案不唯一).

得分	

16.设等比数列$\{a_n\}$满足 $a_1+a_2=12$，$a_1-a_3=6$，则 $a_n=$________，$a_1a_2\cdots a_n$的最大值为________.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$ 64 **解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q $(q\neq 0)$，由 $a_1+a_2=12$，$a_1-a_3=6$，可得$\begin{cases}a_1+a_1q=12,\\a_1-a_1q^2=6,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=8,\\q=\frac{1}{2}.\end{cases}$

所以 $a_n=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$.

所以 $a_1a_2\cdots a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3-2-1+0+1+\cdots+(n-4)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-7)}{2}}$.

令 $f(n)=\frac{1}{2}n(n-7)=\frac{1}{2}(n^2-7n)=\frac{1}{2}\left(n-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{8}$，

所以当 $n=3$ 或 $n=4$ 时，$f(n)$有最小值，

即 $f(n)_{\min}=-6$，

所以 $a_1a_2\cdots a_n$的最大值为$\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}=64$.

四、解答题(本题共 6 小题，共 70 分)

得分	

17.(10 分)(2022·新高考全国Ⅱ卷)已知$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$是公比为 2 的等比数列，且 $a_2-b_2=a_3-b_3=b_4-a_4$.

(1)证明：$a_1=b_1$；

(2)求集合$\{k|b_k=a_m+a_1,1\leqslant m\leqslant 500\}$中元素的个数.

(1)**证明**：设数列$\{a_n\}$的公差为 d，

所以$\begin{cases}a_1+d-2b_1=a_1+2d-4b_1,\\a_1+d-2b_1=8b_1-(a_1+3d),\end{cases}$

解得 $b_1=a_1=\frac{d}{2}$.

(2)**解**：由(1)知，$b_1=a_1=\frac{d}{2}$，

所以 $b_k=a_m+a_1\Leftrightarrow b_1\times 2^{k-1}=a_1+(m-1)d+a_1$，

即 $2^{k-1}=2m$，亦即 $m=2^{k-2}\in[1,500]$，解得 $2\leqslant k\leqslant 10$，

所以 $k=2,3,4,\cdots,10$，

故集合$\{k|b_k=a_m+a_1,1\leqslant m\leqslant 500\}$中元素的个数为 $10-2+1=9$.

得分	

18.(12 分)已知数列$\{a_n\}$，$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$.

(1)求数列$\{a_n+1\}$的前 5 项；

(2)求数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n.

解：(1)由题意知 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，

而 $a_1+1=2$，

所以$\{a_n+1\}$是首项、公比都为 2 的等比数列，

则 $a_n+1=2^n$.

故数列$\{a_n+1\}$的前 5 项依次为 2,4,8,16,32.

(2)由(1)知 $a_n=2^n-1$，所以 $S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2$.

得分	

19.(12 分)已知数列$\{a_n\}$，$a_1=3$，点(a_n,a_{n+1})在直线 $y=3x$ 上.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式及其前 n 项和 S_n；

(2)设 $b_n=\frac{n}{a_n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，证明：$b_1+b_2+\cdots+b_n<\frac{3}{4}$.

(1)**解**：因为点(a_n,a_{n+1})在直线 $y=3x$ 上，

所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$.

又 $a_1=3$，故数列$\{a_n\}$是以 3 为公比，3 为首项的等比数列，

所以 $a_n=3^n$，$S_n=\frac{3(1-3^n)}{1-3}=\frac{3^{n+1}-3}{2}$.

(2)**证明**：由题意知 $b_n=\frac{n}{3^n}$.

记 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，

所以 $T_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{n}{3^n}$，①

①$\times\frac{1}{3}$，得$\frac{1}{3}T_n=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^{n+1}}$.②

①$-$②，

得$\frac{2}{3}T_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-$

$\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{2}-\frac{3+2n}{2\times3^{n+1}}$,故 $T_n=\frac{3}{4}-\frac{3+2n}{4\times3^n}$.

又 $\frac{3+2n}{4\times3^n}>0$,故 $T_n<\frac{3}{4}$.

得分	

20.(12 分)给出条件:① $a_3=5,a_5+a_7=22$;② $a_1=1,S_5=25$;③ $S_n=n^2$.在这三个条件中任选一个,补充在下面的问题中,并解答问题.

问题:S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和,已知________.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若 $c_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$,求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 T_n.

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

解:(1)选①.$a_3=5,a_5+a_7=22$,

则 $\begin{cases}a_1+2d=5,\\2a_1+10d=22,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}$ 所以 $a_n=2n-1$.

选②.$a_1=1,S_5=25$,则 $\begin{cases}a_1=1,\\5a_1+\frac{5(5-1)}{2}d=25,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}$ 所以 $a_n=2n-1$.

选③.$S_n=n^2$,当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=1^2=1$;

当 $n\geqslant2$ 时,$S_{n-1}=(n-1)^2$,

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$.

当 $n=1$ 时 $a_n=2n-1$ 也成立,所以 $a_n=2n-1$.

(2)由(1)知 $a_n=2n-1$.

$c_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$,

$T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.

得分	

21.(12 分)数列$\{a_n\}$是等差数列,其前 n 项和为 S_n.已知 $S_4=2a_5$,且 a_1-1,a_2-2,a_3-1 成等比数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设 $b_n=2^{a_n}-a_n$,数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n,求 T_n.

解:(1)设数列$\{a_n\}$的公差为 d,

则 $4a_1+6d=2(a_1+4d)\Rightarrow a_1=d$.

因为 a_1-1,a_2-2,a_3-1 成等比数列,

所以$(a_2-2)^2=(a_1-1)(a_3-1)$,

所以 $a_2^2-4a_2+4=a_1a_3-a_1-a_3+1$,

所以$(a_1+d)^2-4(a_1+d)+3=a_1(a_1+2d)-a_1-(a_1+2d)$,解得 $a_1=d=1$(舍)或 $a_1=d=3$,所以 $a_n=3n$.

(2)由于 $b_n=2^{a_n}-a_n=8^n-3n$,

所以 $T_n=(8+8^2+\cdots+8^n)-3(1+2+\cdots+n)$

$=\frac{8(1-8^n)}{1-8}-3\times\frac{(1+n)n}{2}=\frac{8^{n+1}-8}{7}-\frac{3n^2+3n}{2}$.

得分	

22.(12 分)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1,S_{n+1}=2S_n+1$,$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)证明$\{S_n+1\}$为等比数列,并求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)令 $b_n=[\lg a_n]$,其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数,求数列$\{b_n\}$的前 15 项和 T_{15}.

解:(1)由 $S_{n+1}=2S_n+1$ 得 $S_{n+1}+1=2(S_n+1)$,

即 $\frac{S_{n+1}+1}{S_n+1}=2$.

又 $S_1+1=a_1+1=2$,所以$\{S_n+1\}$是以 2 为首项,2 为公比的等比数列,

则 $S_n+1=2\times2^{n-1}=2^n$,即 $S_n=2^n-1$.

当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-1-(2^{n-1}-1)=2^{n-1}$.

又 $a_1=1$,符合 $a_n=2^{n-1}$,

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^{n-1},n\in\mathbf{N}^*$.

(2)$b_n=[\lg a_n]=[\lg 2^{n-1}]$,

若$[\lg 2^{n-1}]=0$,则 $0\leqslant\lg 2^{n-1}<1$,得 $1\leqslant n\leqslant4$;

若$[\lg 2^{n-1}]=1$,则 $1\leqslant\lg 2^{n-1}<2$,得 $5\leqslant n\leqslant7$;

若$[\lg 2^{n-1}]=2$,则 $2\leqslant\lg 2^{n-1}<3$,得 $8\leqslant n\leqslant10$;

若$[\lg 2^{n-1}]=3$,则 $3\leqslant\lg 2^{n-1}<4$,得 $11\leqslant n\leqslant14$;

若$[\lg 2^{n-1}]=4$,则 $4\leqslant\lg 2^{n-1}<5$,得 $15\leqslant n\leqslant17$.

故 $T_{15}=4\times0+3\times1+3\times2+4\times3+1\times4=25$.

第五章　一元函数的导数及其应用

5.1　导数的概念及其意义

5.1.1　变化率问题

学习任务目标

1.了解平均速度的意义，会利用运动方程求某一区间内的平均速度.(数学运算)

2.体会由平均速度过渡到瞬时速度的过程，会利用运动方程求某一时刻的瞬时速度.(逻辑推理、数学运算)

3.体会极限的思想，会求曲线在某点处的切线的斜率及切线方程.(数学运算)

问题式预习

知识点一　平均速度与瞬时速度

在一次跳水运动中，某运动员在运动过程中的重心相对于水面的高度 h(单位：m)与起跳后的时间 t(单位：s)存在函数关系 $h(t)$.

(1)平均速度：一般地，在 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 这段时间里，$\bar{v}=\dfrac{h(t_2)-h(t_1)}{t_2-t_1}$称为平均速度.

(2)瞬时速度：物体在某一时刻的速度称为瞬时速度.设运动员在 t_0 时刻附近某一时间段内的平均速度是 $\bar{v}$，如果不断缩短这一时间段的长度，那么 $\bar{v}$ 将越来越趋近于运动员在 t_0 时刻的瞬时速度.

(3)为了求运动员在 $t=1$ 时的瞬时速度，在 $t=1$ 之后或之前，任意取一个时刻 $1+\Delta t$，Δt 是时间改变量，可以是正值，也可以是负值，但不为0.当 $\Delta t>0$ 时，把运动员在时间段$[1,1+\Delta t]$内近似看成做匀速直线运动，计算时间段$[1,1+\Delta t]$内的平均速度 $\bar{v}$，用平均速度 $\bar{v}$ 近似表示运动员在 $t=1$ 时的瞬时速度.当 $\Delta t<0$ 时，在时间段$[1+\Delta t,1]$内可作类似处理.

[**微训练**]

判断(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)瞬时速度就是一段时间内的平均速度.　(　　)

×　**提示**：瞬时速度是 Δt 趋近于0时的平均速度.

(2)若平均速度不断增大，则位移关于时间的函数图象越来越“陡”.　(　　)

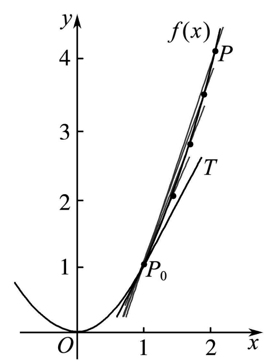
√　**提示**：时间段长度相同，平均速度不断增大，图象越来越“陡”.

(3)火箭发射 t s后，其高度(单位：m)$h(t)=0.9t^2$，火箭在 $1 \leqslant t \leqslant 2$ 这段时间内的平均速度为2.7 m/s.　(　　)

√　**提示**：由平均速度的定义可知 $\bar{v}=\dfrac{0.9\times4-0.9\times1}{1}=2.7$(m/s).

知识点二　抛物线的切线与斜率

如图，当点 $P(x,x^2)$沿着抛物线 $f(x)=x^2$ 趋近于点 $P_0(1,1)$时，割线 P_0P 随之变化.



当点 P 无限趋近于点 P_0 时，割线 P_0P 无限趋近于一个确定的位置，这个确定位置的直线 P_0T 称为抛物线 $f(x)=x^2$ 在点 $P_0(1,1)$处的切线.我们可以用割线 P_0P 的斜率 k 近似地表示切线 P_0T 的斜率 k_0，并且可以通过不断缩短横坐标间隔 $|\Delta x|$ 来提高近似表示的精确度.记 $\Delta x=x-1$，则 $k_0=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$.

[**微训练**]

1.已知抛物线 $f(x)=x^2+1$，则抛物线在点(2,5)处的切线的斜率为　(　　)

A.5　　B.4　　C.3　　D.2

B　**解析**：$k=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=4$.

2.抛物线 $f(x)=2x^2-1$ 在点(1,1)处的切线的方程为________.

$y=4x-3$　**解析**：抛物线 $f(x)$在点(1,1)处的切线的斜率为 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(1+\Delta t)-f(1)}{\Delta t}=4$，所以切线方程为 $y=4x-3$.

任务型课堂

任务一 计算平均速度

[探究活动]

下表是某病人吃完退烧药后,他的体温 y(单位:℃)随时间 x(单位:分钟)的变化情况:

x(分钟)	0	10	20	30	40	50	60
y(℃)	39	38.7	38.5	38	37.6	37.3	36.9

探究 1:观察上表,每 10 分钟病人的体温变化相同吗?哪段时间体温变化较快?

提示:每 10 分钟病人的体温变化不相同,从 20 分钟到 30 分钟变化最快.

探究 2:如何刻画体温变化的快慢?

提示:用体温的平均变化率.

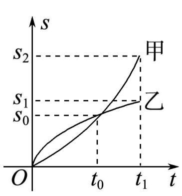
[评价活动]

1. 一质点做直线运动,位移 s 与时间 t 的关系式为 $s=t^2+1$,则质点在时间段$[1,2]$内的平均速度为 ( )

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

C　**解析**:由题设可知平均速度 $\bar{v}=\dfrac{2^2+1-(1^2+1)}{2-1}=\dfrac{5-2}{2-1}=3$.故选 C.

2. 物体甲、乙在时间段$[0,t_1]$内位移 s 的变化情况如图所示,下列说法正确的是________.(填序号)



①在$[0,t_0]$内,甲的平均速度大于乙的平均速度;
②在$[0,t_0]$内,甲的平均速度小于乙的平均速度;
③在$[t_0,t_1]$内,甲的平均速度大于乙的平均速度;
④在$[t_0,t_1]$内,甲的平均速度小于乙的平均速度.

③　**解析**:在$[0,t_0]$内,甲、乙的平均速度都为$\dfrac{s_0}{t_0}$,故①②错误.

在$[t_0,t_1]$内,甲的平均速度为$\dfrac{s_2-s_0}{t_1-t_0}$,乙的平均速度为$\dfrac{s_1-s_0}{t_1-t_0}$.

因为 $s_2-s_0>s_1-s_0$,$t_1-t_0>0$,所以$\dfrac{s_2-s_0}{t_1-t_0}>\dfrac{s_1-s_0}{t_1-t_0}$,故③正确,④错误.

任务二 求瞬时速度

[探究活动]

物体的位移 s 与时间 t 的关系式是 $s(t)=5t^2$.

探究 1:该物体在$[1,1+\Delta t]$这段时间内的平均速度是多少?

提示:$\Delta s=5(1+\Delta t)^2-5=10\Delta t+5(\Delta t)^2$,$\bar{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=10+5\Delta t$.

探究 2:当 Δt 趋近于 0 时,该物体的平均速度趋近于多少?怎样理解这时的平均速度?

提示:当 Δt 趋近于 0 时,平均速度 $\bar{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$趋近于 10,这时的平均速度即为 $t=1$ 时的瞬时速度.

[评价活动]

1. 一个物体的运动方程是 $s=3+t^2$,其中 s 表示位移,t 表示时间,则该物体在 $t=2$ 时的瞬时速度为 ( )

A.3　　B.4　　C.5　　D.7

B　**解析**:$\lim\limits_{\Delta t\to 0}=\dfrac{3+(2+\Delta t)^2-(3+2)^2}{\Delta t}=4$.

2. 一质点按照规律 $s=2t^2-t$ 运动,其中 s 表示位移,t 表示时间,则质点在$[2,2+\Delta t]$这段时间内的平均速度是________,在 $t=2$ 时的瞬时速度是________.

$7+2\Delta t$　7　**解析**:这段时间 $\bar{v}=\dfrac{2(2+\Delta t)^2-(2+\Delta t)-(2\times 2^2-2)}{\Delta t}=\dfrac{2(\Delta t)^2+7\Delta t}{\Delta t}=7+2\Delta t$,$\lim\limits_{\Delta t\to 0}(7+2\Delta t)=7$.

3. 子弹在枪筒中的运动可以看作是匀变速运动,其运动方程为 $s=\dfrac{1}{2}at^2$,其中 s(单位:m)表示位移,t(单位:s)表示时间.如果它的加速度 $a=5\times 10^5\ \mathrm{m/s^2}$,子弹从枪口射出时所用的时间 $t_0=1.6\times 10^{-3}$ s,求子弹射出枪口时的瞬时速度.

解:瞬时速度为 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}a(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}at_0^2}{\Delta t}=at_0$.

由题意知 $a=5\times 10^5\ \mathrm{m/s^2}$,$t_0=1.6\times 10^{-3}$ s,

故 $at_0=8\times 10^2=800(\mathrm{m/s})$,

即子弹射出枪口时的瞬时速度为 800 m/s.

【类题通法】

求运动物体瞬时速度的三个步骤

(1)求时间改变量 Δt 和位移改变量 $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$;

(2)求平均速度 $\overline{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$;

(3)求瞬时速度,当 Δt 无限趋近于 0 时,$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 无限趋近于的常数 v 即为瞬时速度,即 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

任务三 求切线的斜率与方程

[探究活动]

曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处的切线 PT 与割线 PP_n $(n=1,2,3,4)$ 如图所示.

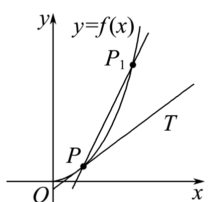


图 1

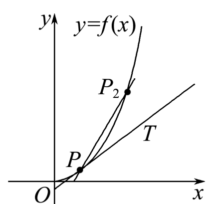


图 2

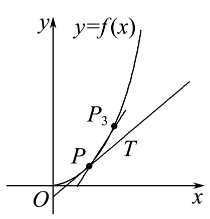


图 3

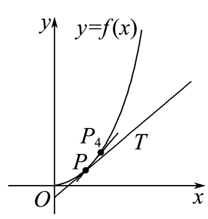


图 4

探究 1:当点 P_n 沿曲线无限接近点 P 时,割线 PP_n 的位置与切线 PT 有何关系?

提示:割线 PP_n 逐渐趋于与切线 PT 重合.

探究 2:当点 P_n 沿曲线无限接近点 P 时,割线 PP_n 的斜率与切线 PT 的斜率有何关系?

提示:近似相等.

[评价活动]

1.(1)求抛物线 $f(x)=-x^2+x$ 在点$(-1,-2)$处的切线的斜率;

(2)求曲线 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$ 在点$(1,0)$处的切线的方程.

解:(1)设抛物线 $f(x)$ 在点$(-1,-2)$处的切线的斜率为 k,则 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}=3$.

(2)曲线 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$ 在点$(1,0)$处的切线的斜率

$k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{1+\Delta x}\right)=2$.

故所求切线方程为 $y=2(x-1)$,

即 $2x-y-2=0$.

2.求抛物线 $f(x)=x^2+3$ 在点 $P(1,4)$处的切线的斜率.

解:$\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\dfrac{(1+\Delta x)^2+3-(1^2+3)}{\Delta x}=2+\Delta x$.

所以所求切线的斜率

$k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2$.

3.在抛物线 $y=x^2$ 上求一点 P,使在该点处的切线垂直于直线 $2x-6y+5=0$.

解:设点 P 的坐标为(x_0,y_0).

则抛物线 $y=x^2$ 在点 P 处的切线的斜率

$k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=2x_0$,

直线 $2x-6y+5=0$ 的斜率为 $\dfrac{1}{3}$,

由题设知 $2x_0\cdot\dfrac{1}{3}=-1$,解得 $x_0=-\dfrac{3}{2}$,

此时 $y_0=\dfrac{9}{4}$,

所以点 P 的坐标为 $\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{4}\right)$.

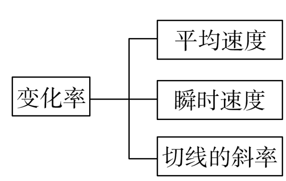
【类题通法】

求曲线 $f(x)$ 在点$(x_0,f(x_0))$处的切线的方程的步骤:

(1)求曲线 $f(x)$ 在点$(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率,$k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$;

(2)利用点$(x_0,f(x_0))$和斜率 k 求出切线方程 $y-f(x_0)=k(x-x_0)$.

提质归纳



课后素养评价(十二)

基础性·能力运用

1.一木块沿一光滑斜面下滑,测得下滑的水平距离 s(单位:m)与时间 t(单位:s)之间的函数关系式为 $s(t)=\frac{1}{8}t^2$.当 $t=2$ 时,此木块在水平方向的瞬时速度为 ( )

A.2　B.1　C.$\frac{1}{2}$　D.$\frac{1}{4}$

C **解析**:$\Delta s=\frac{1}{8}(2+\Delta t)^2-\frac{1}{8}\times 2^2$

$=\frac{1}{8}[4+4\Delta t+(\Delta t)^2-4]$

$=\frac{1}{8}[(\Delta t)^2+4\Delta t]$,

所以 $\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{1}{8}\Delta t+\frac{1}{2}$,

所以 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(\frac{1}{8}\Delta t+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

故此木块在水平方向的瞬时速度为 $\frac{1}{2}$ m/s.故选 C.

2.曲线 $y=\frac{1}{3}x^3-2$ 在点 $\left(1,-\frac{5}{3}\right)$ 处的切线的倾斜角为 ( )

A.1　B.$\frac{\pi}{4}$

C.$\frac{5\pi}{4}$　D.$-\frac{\pi}{4}$

B **解析**:因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\left[\frac{1}{3}(1+\Delta x)^3-2\right]-\left(\frac{1}{3}\times 1^3-2\right)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[1+\Delta x+\frac{1}{3}(\Delta x)^2\right]=1$,

所以曲线在 $x=1$ 处的切线的斜率 $k=1$.

所以倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$.故选 B.

3.曲线 $y=ax^2$ 在点 $(1,a)$ 处的切线与直线 $2x-y-6=0$ 平行,则 a 等于 ( )

A.1　B.$\frac{1}{2}$

C.$-\frac{1}{2}$　D.-1

A **解析**:因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a(1+\Delta x)^2-a\times 1^2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2a\Delta x+a(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2a+a\Delta x)=2a$,

所以切线的斜率 $k=2a$,所以 $2a=2$,所以 $a=1$.

4.已知曲线 $y=x^2-1$ 上两点 $A(2,3)$,$B(2+\Delta x,3+\Delta y)$.当 $\Delta x=1$ 时,直线 AB 的斜率是________;当 $\Delta x=0.1$ 时,直线 AB 的斜率是________.

5　4.1 **解析**:当 $\Delta x=1$ 时,直线 AB 的斜率

$k_1=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(2+\Delta x)^2-1-2^2+1}{\Delta x}=\frac{(2+1)^2-2^2}{1}=5$.

当 $\Delta x=0.1$ 时,直线 AB 的斜率

$k_2=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(2+0.1)^2-1-2^2+1}{0.1}=4.1$.

5.已知函数 $f(x)=x^2-1$ 在区间 $[1,m]$ 上的平均变化率为 3,则实数 m 的值为________.

2 **解析**:函数 $f(x)=x^2-1$ 在区间 $[1,m]$ 上的平均变化率为 $\frac{f(m)-f(1)}{m-1}=\frac{m^2-1}{m-1}=m+1=3$,所以 $m=2$.

6.求函数 $y=\sqrt{x^2+1}$ 在区间 $[x_0,x_0+\Delta x]$ 上的平均变化率.

解:$\frac{\sqrt{(x_0+\Delta x)^2+1}-\sqrt{x_0^2+1}}{(x_0+\Delta x)-x_0}$

$=\frac{(x_0+\Delta x)^2+1-(x_0^2+1)}{\Delta x[\sqrt{(x_0+\Delta x)^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}]}$

$=\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x[\sqrt{(x_0+\Delta x)^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}]}$

$=\frac{2x_0+\Delta x}{\sqrt{(x_0+\Delta x)^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}}$.

综合性·创新提升

1.设 $f(x)=\frac{1}{x}$,则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 等于 ( )

A.$-\frac{1}{a}$　B.$\frac{2}{a}$

C.$-\frac{1}{a^2}$　D.$\frac{1}{a^2}$

C **解析**:$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}$

$=\lim\limits_{x\to a}\frac{a-x}{(x-a)\cdot xa}=-\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{ax}=-\frac{1}{a^2}$.

2.已知点 $P(x_0,y_0)$ 是抛物线 $f(x)=3x^2+6x+1$ 上

一点，且抛物线在点 P 处的切线的斜率为 0，则点 P 的坐标为（　　）

A.(1,10)　　B.(−1,−2)

C.(1,−2)　　D.(−1,10)

B　**解析**：因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(6x_0+3\Delta x+6)=6x_0+6$，令 $6x_0+6=0$，得 $x_0=-1$，所以 $y_0=3x_0^2+6x_0+1=-2$.

3. 函数 $y=f(x)=x^2$ 在 $[x_0,x_0+\Delta x]$ 上的平均变化率为 k_1，在 $[x_0-\Delta x,x_0]$ 上的平均变化率为 k_2，则 k_1 与 k_2 的大小关系是________.

$k_1>k_2$　**解析**：因为 $y=f(x)=x^2$，

函数从 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 的改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=\Delta x(2x_0+\Delta x)$，

所以 $k_1=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0+\Delta x$.

因为 $y=f(x)=x^2$，函数从 $x_0-\Delta x$ 到 x_0 的改变量 $\Delta y=f(x_0)-f(x_0-\Delta x)=x_0^2-(x_0-\Delta x)^2=\Delta x(2x_0-\Delta x)$，所以 $k_2=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0-\Delta x$. 因为 $k_1-k_2=2\Delta x$，而 $\Delta x>0$，所以 $k_1>k_2$.

4. 已知一个沿直线运动的物体的运动方程是 $s=\begin{cases}3t^2+2, & 0\leqslant t<3,\\ 29+3(t-3)^2, & t\geqslant 3,\end{cases}$ 其中 s 表示位移，t 表示时间，则此物体在 $t=1$ 和 $t=4$ 时的瞬时速度分别为________.

6,6　**解析**：当 $t=1$ 时，

$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{3(1+\Delta t)^2+2-(3\times 1^2+2)}{\Delta t}=6+3\Delta t$，

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(6+3\Delta t)=6$；

当 $t=4$ 时，

$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{29+3(4+\Delta t-3)^2-[29+3\times(4-3)^2]}{\Delta t}=6+3\Delta t$，

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(6+3\Delta t)=6$.

5. 曲线 $y=x^2-3x$ 的一条切线的斜率为 1，则切点坐标为________.

(2,−2)　**解析**：设 $f(x)=y=x^2-3x$，切点坐标为 (x_0,y_0)，

斜率 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x_0+\Delta x)^2-3(x_0+\Delta x)-x_0^2+3x_0}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2x_0\Delta x-3\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=2x_0-3=1$.

故 $x_0=2$，$y_0=x_0^2-3x_0=4-6=-2$，故切点坐标为 (2,−2).

6. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-x^2$ 的图象在点 (1,0) 处的切线的方程.

解：$\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\dfrac{-3-3\Delta x-(\Delta x)^2}{1+\Delta x}$，

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=-3$，所以斜率 $k=-3$，所以切线方程为 $y=-3(x-1)$，即 $3x+y-3=0$.

7. 航天飞机升空后一段时间内，第 t s 时的高度（单位：m）为 $h(t)=5t^3+30t^2+45t+4$.

(1) $h(0)$，$h(1)$，$h(2)$ 分别表示什么？

(2) 求第 2 s 内的平均速度.

(3) 求第 2 s 末的瞬时速度.

解：(1) $h(0)$ 表示航天飞机升空前的高度；

$h(1)$ 表示航天飞机升空后第 1 s 时的高度；

$h(2)$ 表示航天飞机升空后第 2 s 时的高度.

(2) 航天飞机升空后第 2 s 内的平均速度

$\overline{v}=\dfrac{h(2)-h(1)}{2-1}=$

$\dfrac{5\times 2^3+30\times 2^2+45\times 2+4-(5\times 1^3+30\times 1^2+45\times 1+4)}{1}$

$=170$ (m/s).

(3) 第 2 s 末的瞬时速度为

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta h}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t}=$

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{5(2+\Delta t)^3+30(2+\Delta t)^2+45(2+\Delta t)+4-(5\times 2^3+30\times 2^2+45\times 2+4)}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{5(\Delta t)^3+60(\Delta t)^2+225\Delta t}{\Delta t}=225$ (m/s).

因此，第 2 s 末的瞬时速度为 225 m/s.

5.1.2 导数的概念及其几何意义

第1课时 导数的概念

学习任务目标

1.理解函数在某点的平均变化率的概念并会求此变化率.(数学抽象、数学运算)

2.体会由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，了解导数概念产生的实际背景，会求函数在自变量取某值时的导数.(数学抽象、数学运算)

问题式预习

知识点 平均变化率与瞬时变化率

对于函数 $y=f(x)$，设自变量 x 从 x_0 变化到 $x_0+\Delta x$，相应地，函数值 y 就从 $f(x_0)$ 变化到 $f(x_0+\Delta x)$.这时，x 的变化量为 Δx，y 的变化量为 $\Delta y=$ $\underline{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}$.我们把比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$，即 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=$ $\underline{\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$ 叫做函数 $y=f(x)$ 从 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 的平均变化率.

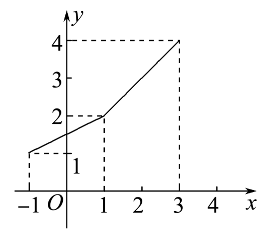
如果当 $\Delta x\to 0$ 时，平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 无限趋近于一个确定的值，即 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 有极限，则称 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处<u>可导</u>，并把这个确定的值叫做 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数(也称为瞬时变化率)，记作 $\underline{f'(x_0)}$ 或 $\underline{y'|_{x=x_0}}$，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\underline{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$.

[微训练]

1.如图，已知函数 $y=f(x)$ 的图象.

(1)函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的平均变化率为________;

(2)函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的平均变化率为________.



(1)$\frac{1}{2}$ (2)$\frac{3}{4}$ **解析**：(1)函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的平均变化率为 $\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$.

(2)由函数 $y=f(x)$ 的图象知，$f(x)=\begin{cases}\frac{x+3}{2},-1\leqslant x\leqslant 1,\\ x+1,1<x\leqslant 3,\end{cases}$

所以函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的平均变化率为 $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{3-\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4}$.

2.一个物体运动，位移 s(单位:m)与时间 t(单位:s)之间的关系式为 $s(t)=4t^2+2t-3$，且 $s'(5)=42$ m/s，其实际意义是：物体在 $t=5$ s 时的瞬时速度是________.

42 m/s **解析**：由导数的物理意义知，$s'(5)=42$ m/s 表示物体在 $t=5$ s 时的瞬时速度.

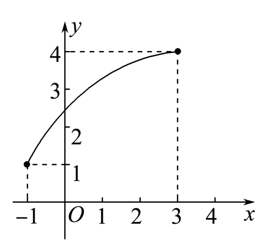
任务型课堂

任务一 求函数的平均变化率

1.函数 $f(x)=8x-6$ 在区间 $[m,n]$ 上的平均变化率为________.

8 **解析**：$\frac{f(n)-f(m)}{n-m}=\frac{(8n-6)-(8m-6)}{n-m}=8$.

2.如图所示，已知函数 $y=f(x)$ 的图象，则函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的平均变化率为________.



$\frac{3}{4}$ **解析**：由题中函数 $f(x)$ 的图象，知函数 $f(x)$

在区间$[-1,3]$上的平均变化率为$\dfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\dfrac{4-1}{3-(-1)}=\dfrac{3}{4}$.

3.已知函数$y=\sin x$在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$，$\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$上的平均变化率分别为$k_1$，$k_2$，那么$k_1$，$k_2$的大小关系为________.

$k_1>k_2$　**解析：**在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$上，平均变化率$k_1=\dfrac{\sin\frac{\pi}{6}-\sin 0}{\frac{\pi}{6}}=\dfrac{3}{\pi}$；

在区间$\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$上，平均变化率$k_2=\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}=\dfrac{3(2-\sqrt{3})}{\pi}$.所以$k_1>k_2$.

任务二　求函数在某一点处的导数

[探究活动]

探究1：一质点按规律$s=2t^2+2t$做直线运动（位移s的单位：m，时间t的单位：s）.质点在前3 s内的平均速度是多少？在3 s时的瞬时速度是多少？

提示：8 m/s，14 m/s.

探究2：对于函数$y=f(x)$，当x从x_0变到$x_0+\Delta x$时，y的平均变化率是多少？

提示：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

探究3：当Δx趋于0时，探究2中的平均变化率趋于一个常数吗？

提示：当Δx趋于0时，平均变化率趋于一个常数.

[评价活动]

1.求函数$y=f(x)=x-\dfrac{4}{x}$在$x=2$处的导数.

解：因为$\Delta y=f(2+\Delta x)-f(2)=(2+\Delta x)-\dfrac{4}{2+\Delta x}-\left(2-\dfrac{4}{2}\right)=\Delta x+\dfrac{2\Delta x}{2+\Delta x}$，

所以$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta x+\frac{2\Delta x}{2+\Delta x}}{\Delta x}=1+\dfrac{2}{2+\Delta x}$，

所以$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1+\dfrac{2}{2+\Delta x}\right)=2$，

从而$f'(2)=2$.

2.已知函数$y=f(x)=-x^2+3x$，求$f'(1)$.

解：因为$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=[-(1+\Delta x)^2+3(1+\Delta x)]-(-1+3)=-(\Delta x)^2+\Delta x$，

所以$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\Delta x+1$.

所以$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(-\Delta x+1)=1$.

故$f'(1)=1$.

3.求函数$y=f(x)=x^2-2$在$x=1$处的瞬时变化率.

解：因为$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=[(1+\Delta x)^2-2]-(1^2-2)=(\Delta x)^2+2\Delta x$，

所以$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{(\Delta x)^2+2\Delta x}{\Delta x}=\Delta x+2$.

所以$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2$，

所以函数$y=x^2-2$在$x=1$处的瞬时变化率为2.

【类题通法】

求函数在$x=x_0$处的导数的步骤

(1)求函数值的变化量，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

(2)求平均变化率，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(3)取极限，$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

任务三　导数定义的应用

[探究活动]

已知函数$f(x)$在$x=x_0$处可导.

探究1：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=f'(x_0)$成立吗？

提示：成立.因为$\Delta x\to 0$，所以$(-\Delta x)\to 0$，所以$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=f'(x_0)$.

探究2：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$成立吗？

提示：不成立.$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=-f'(x_0)$.

探究3：若函数$f(x)$在$x=x_0$处的导数为2，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}$等于多少？

提示：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$=\frac{1}{2}f'(x_0)=\frac{1}{2}\times 2=1.$

[评价活动]

1.已知函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数为 12,则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}=$ ( )

A.-4 B.4 C.-36 D.36

A **解析**:由函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数为 12,

得 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}$

$=-\frac{1}{3}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=-\frac{12}{3}=-4.$

故选 A.

2.已知函数 $f(x)$ 在定义域 **R** 上可导,则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-\Delta x)-f(1)}{-\Delta x}$等于 ( )

A.$f'(1)$ B.$-f'(1)$

C.$\frac{1}{3}f'(1)$ D.$3f'(1)$

A **解析**:因为 $\Delta x\to 0$,所以 $(-\Delta x)\to 0$,

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-\Delta x)-f(1)}{-\Delta x}=f'(1)$.故选 A.

3.若函数 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处的瞬时变化率为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$,且 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=4+\Delta x$,则 $f'(2)=$ ( )

A.2 B.4

C.$2+\Delta x$ D.$4+\Delta x$

B **解析**:由导数的定义,知 $f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$.故选 B.

【类题通法】

正确理解导数定义式的变形

在导数的定义中,自变量的增量 Δx 可正,可负,但不能为零,它有多种表达形式.不论采用哪种表达形式,Δy 中自变量的增量 Δx 都必须用相同的形式,如将 Δx 变形为 $a\Delta x$,则 $\Delta y=f(x_0+a\Delta x)-f(x_0)$,只有这样,才能满足 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+a\Delta x)-f(x_0)}{a\Delta x}=f'(x_0)$.

提质归纳

- 导数的概念
  - 平均变化率
  - 瞬时变化率
  - 导数的概念

课后素养评价(十三)

基础性·能力运用

1.已知 $f(x)=\frac{1}{x}$,则 $f'(2)=$ ( )

A.$-\frac{1}{4}$ B.2

C.$\frac{1}{4}$ D.-2

A **解析**:$f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{2+\Delta x}-\frac{1}{2}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{2(2+\Delta x)}=-\frac{1}{4}.$

2.若可导函数 $f(x)$的图象过原点,且满足 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=-1$,则 $f'(0)=$ ( )

A.-2 B.-1

C.1 D.2

B **解析**:因为 $f(x)$的图象过原点,所以 $f(0)=0$,

所以 $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=-1.$

3.设函数 $f(x)$可导,则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+3\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}=$ ( )

A.$f'(1)$ B.$3f'(1)$

C.$\frac{1}{3}f'(1)$ D.$f'(3)$

A **解析**:$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+3\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}=f'(1).$

4.若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+m\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=1$($m$ 为常数),则 $f'(x_0)=$ ( )

A.$-m$ B.1

C.m D.$\frac{1}{m}$

D **解析**:由题意,$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+m\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=m\cdot\lim\limits_{m\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+m\Delta x)-f(x_0)}{m\Delta x}=mf'(x_0)=1.$

所以 $f'(x_0)=\dfrac{1}{m}$.

5. 设函数 $f(x)=ax+3$. 若 $f'(1)=3$，则实数 $a=$________.

3　**解析**：因为 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a(x+\Delta x)+3-(ax+3)}{\Delta x}=a$，$f'(1)=3$，所以 $a=3$.

6. 求出函数 $f(x)=x^2$ 在 $x=1,2,3$ 附近的平均变化率.若 Δx 都为 $\dfrac{1}{3}$，则在哪一点附近的平均变化率最大？

解：在 $x=1$ 附近的平均变化率 $k_1=\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\dfrac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}=2+\Delta x$；在 $x=2$ 附近的平均变化率 $k_2=\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\dfrac{(2+\Delta x)^2-2^2}{\Delta x}=4+\Delta x$；在 $x=3$ 附近的平均变化率 $k_3=\dfrac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\dfrac{(3+\Delta x)^2-3^2}{\Delta x}=6+\Delta x$.

若 $\Delta x=\dfrac{1}{3}$，则 $k_1=2+\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}$，$k_2=4+\dfrac{1}{3}=\dfrac{13}{3}$，$k_3=6+\dfrac{1}{3}=\dfrac{19}{3}$.

因为 $k_1<k_2<k_3$，所以在 $x=3$ 附近的平均变化率最大.

7. 在函数 $y=f(x)=x^2+3$ 图象上取一点 $P(1,4)$ 及点 P 附近一点 $(1+\Delta x,4+\Delta y)$.

求：(1)$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$；(2)$f'(1)$.

解：(1)$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\dfrac{(1+\Delta x)^2+3-(1^2+3)}{\Delta x}=2+\Delta x$.

(2)$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2$.

综合性·创新提升

1. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=1$，则 $f'(x_0)=$ (　　)

A. 1　　B. 0

C. 3　　D. $\dfrac{1}{3}$

D　**解析**：因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=1$，

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}=\dfrac{1}{3}$，

所以 $\lim\limits_{3\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}=\dfrac{1}{3}$，

所以 $f'(x_0)=\lim\limits_{3\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}=\dfrac{1}{3}$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 附近有定义，且有 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=a\Delta x+b(\Delta x)^2$（$a,b$ 为常数），则 (　　)

A. $f'(x)=a$　　B. $f'(x)=b$

C. $f'(x_0)=a$　　D. $f'(x_0)=b$

C　**解析**：因为 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a\Delta x+b(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(a+b\Delta x)=a$，

所以 $f'(x_0)=a$.

3. 已知函数 $f(x)=-x^2+10$，则 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{3}{2}$ 处的瞬时变化率是 (　　)

A. 3　　B. -3

C. 2　　D. -2

B　**解析**：$\dfrac{f\left(\frac{3}{2}+\Delta x\right)-f\left(\frac{3}{2}\right)}{\Delta x}=\dfrac{-\left(\frac{3}{2}+\Delta x\right)^2+10-\left[-\left(\frac{3}{2}\right)^2+10\right]}{\Delta x}=\dfrac{-(\Delta x)^2-3\Delta x}{\Delta x}=-\Delta x-3$，

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(\frac{3}{2}+\Delta x\right)-f\left(\frac{3}{2}\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(-\Delta x-3)=-3$.

4. 已知函数 $y=x^2$，在 $x=$________处导数值等于函数值.

0 或 2　**解析**：$y=f(x)=x^2$ 在 $x=x_0$ 处的导数值为 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x_0)=2x_0$.

由 $2x_0=x_0^2$，

解得 $x_0=0$ 或 $x_0=2$.

5. 已知函数 $y=f(x)=2x^2+1$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率为 -8，则点 $M(x_0,f(x_0))$ 的坐标为________.

$(-2,9)$　**解析**：由 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=2(x_0+\Delta x)^2+1-2x_0^2-1=4x_0\Delta x+2(\Delta x)^2$，得

$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(4x_0+2\Delta x)=4x_0$.

所以 $4x_0=-8$，解得 $x_0=-2$.所以点 M 的坐标为 $(-2,9)$.

6.(1)计算函数 $y=f(x)=x^2$ 从 $x=1$ 到 $x=1+\Delta x$ 的平均变化率，其中 Δx 的值为①2；② 1；③0.1；④0.01.

(2)当 Δx 越来越小时，函数 $f(x)=x^2$ 在区间$[1,1+\Delta x]$上的平均变化率有怎样的变化趋势？

解：(1)因为 $\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)^2-1^2=(\Delta x)^2+2\Delta x$，

所以$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{(\Delta x)^2+2\Delta x}{\Delta x}=\Delta x+2$.

①当 $\Delta x=2$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x+2=4$；

②当 $\Delta x=1$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x+2=3$；

③当 $\Delta x=0.1$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x+2=2.1$；

④当 $\Delta x=0.01$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x+2=2.01$.

(2)由(1)可知$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{(\Delta x)^2+2\Delta x}{\Delta x}=\Delta x+2$，当 Δx 越来越小时，函数 $f(x)$在区间$[1,1+\Delta x]$上的平均变化率逐渐变小，并趋近于 2.

7.求函数 $y=x^2+\dfrac{1}{x}+5$ 在 $x=2$ 处的导数.

解：因为 $\Delta y=(2+\Delta x)^2+\dfrac{1}{2+\Delta x}+5-\left(2^2+\dfrac{1}{2}+5\right)=4\Delta x+(\Delta x)^2+\dfrac{-\Delta x}{2(2+\Delta x)}$，

所以$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=4+\Delta x-\dfrac{1}{4+2\Delta x}$.

所以 $y'|_{x=2}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(4+\Delta x-\dfrac{1}{4+2\Delta x}\right)=4-\dfrac{1}{4}=\dfrac{15}{4}$.

第 2 课时　导数的几何意义

学习任务目标

1.通过函数图象直观地理解导数的几何意义.(直观想象)

2.能根据导数的几何意义求曲线在某点处的切线的方程.(数学运算)

3.正确理解曲线“过某点”的切线和“在某点”处的切线，并会求其方程.(数学运算)

问题式预习

知识点一　导数的几何意义

(1)在曲线 $y=f(x)$上任取一点 $P(x,f(x))$，如果当点 $P(x,f(x))$沿着曲线 $y=f(x)$无限趋近于点 $P_0(x_0,f(x_0))$时，割线 P_0P 无限趋近于一个确定的位置，这个确定位置的直线 P_0T 称为曲线 $y=f(x)$在点 P_0 处的切线.

(2)函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$就是切线 P_0T 的斜率 k_0，即 $k_0=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$.

知识点二　导函数的概念

当 x 变化时，$y=f'(x)$是 x 的函数，我们称它为 $y=f(x)$的导函数(简称导数).$y=f(x)$的导函数有时也记作 y'，即 $f'(x)=y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

［微训练］

1.已知函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数为 1，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}=$　(　　)

A.0　　B.$\dfrac{1}{3}$　　C.1　　D.3

B　**解析**：因为函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数为 1，

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}$

$=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{1}{3}f'(x_0)=\dfrac{1}{3}$.

故选 B.

2.曲线 $y=3x^2-4x$ 在点$(1,-1)$处的切线的方程为________.

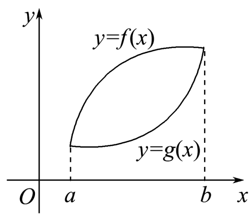
$y=2x-3$　**解析**：切线的斜率 $k=f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3(1+\Delta x)^2-4(1+\Delta x)-(3\times 1^2-4\times 1)}{\Delta x}=2$.

所以切线方程为 $y+1=2(x-1)$，即 $y=2x-3$.

任务型课堂

任务一　根据函数的图象描述曲线的变化情况

1.(多选)已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间$[a,b]$上的图象如图所示,则下列说法正确的是　(　　)



A.$f(x)$在区间$[a,b]$上的平均变化率大于$g(x)$在区间$[a,b]$上的平均变化率

B.$f(x)$在区间$[a,b]$上的平均变化率等于$g(x)$在区间$[a,b]$上的平均变化率

C.对于任意 $x_0\in(a,b)$,函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率总大于函数 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率

D.存在 $x_0\in(a,b)$,使得函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率小于函数 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率

BD　**解析**:函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的平均变化率是$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$,

函数 $g(x)$ 在区间$[a,b]$上的平均变化率是$\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}$.

又因为 $f(b)=g(b)$,$f(a)=g(a)$,

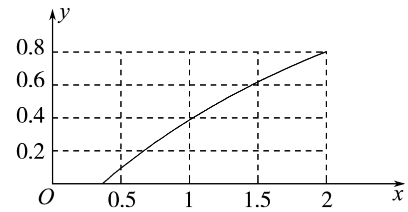
所以$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}$,所以 A 错误,B 正确.

易知函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数,即函数 $f(x)$ 的图象在 $x=x_0$ 处的切线的斜率.

同理,函数 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是函数 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数,即函数 $g(x)$ 的图象在该点处的切线的斜率.

由题中图象知,当 $x_0\in(a,b)$ 时,曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处切线的斜率有可能大于曲线 $y=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处切线的斜率,也有可能小于曲线 $y=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处切线的斜率,故 C 错误,D 正确.

2.如图,已知函数 $y=f(x)$ 的图象,则该函数在 $x=1$ 时的瞬时变化率大约是　(　　)



A.0.1　　B.1.5

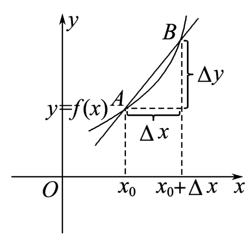
C.4　　D.0.5

D　**解析**:函数在 $x=1$ 时的瞬时变化率为函数图象在 $x=1$ 处的切线的斜率,约为 0.5,故选 D.

任务二　求曲线的切线方程

[探究活动]

如图,函数 $y=f(x)$ 在区间$[x_0,x_0+\Delta x]$上的平均变化率为$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.



探究 1:你能说出平均变化率$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$的几何意义吗?

提示:表示过点 $A(x_0,f(x_0))$,$B(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$的直线的斜率.

探究 2:当 Δx 变化时,直线 AB 如何变化?

提示:直线 AB 绕点 A 转动.

探究 3:当 $\Delta x\to0$ 时,直线 AB 变化到什么位置?

提示:过点 A 与曲线 $y=f(x)$相切的位置.

探究 4:你能说出函数 $y=f(x)$在某点处的导数与该函数图象在该点处的切线的斜率有何关系吗?

提示:函数 $y=f(x)$在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$,是曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率.

[评价活动]

1.曲线 $y=x^2-2x+3$ 在点 $A(-1,6)$处的切线的方程是________.

$4x+y-2=0$　**解析**:由导数的定义知 $y'|_{x=-1}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{(-1+\Delta x)^2-2(-1+\Delta x)+3-(-1)^2+2\times(-1)-3}{\Delta x}=-4$,所以所求切线方程为 $y-6=-4(x+1)$,即 $4x+y-2=0$.

2.求抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 过点 $\left(4,\frac{7}{4}\right)$ 的切线方程.

解:点 $\left(4,\frac{7}{4}\right)$ 不在抛物线上,故设切点为 $\left(x_0,\frac{1}{4}x_0^2\right)$,切线的斜率为 k.

因为 $y'|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{1}{4}(x_0+\Delta x)^2-\frac{1}{4}x_0^2}{\Delta x}=\frac{1}{2}x_0$,

所以切线的斜率 $k=\dfrac{\frac{7}{4}-\frac{1}{4}x_0^2}{4-x_0}=\frac{1}{2}x_0$,

即 $x_0^2-8x_0+7=0$,解得 $x_0=7$ 或 $x_0=1$,

故 $k=\frac{1}{2}x_0=\frac{7}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$.

所以所求切线方程为 $14x-4y-49=0$ 或 $2x-4y-1=0$.

3.(1)求曲线 $y=x^3+2$ 在点 $M(-1,1)$ 处的切线方程.

(2)求经过点 $(2,0)$,且与曲线 $y=\frac{1}{x}$ 相切的直线的方程.

解:(1)因为曲线在点 M 处的切线的斜率就等于函数 $y=x^3+2$ 在 $x=-1$ 处的导数.

又 $y'|_{x=-1}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[(-1+\Delta x)^3+2]-[(-1)^3+2]}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^3-3(\Delta x)^2+3\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[(\Delta x)^2-3\Delta x+3]=3$,

所以切线的斜率为 3.

由点 $(-1,1)$ 和斜率 3 可得切线方程为 $y-1=3(x+1)$,

即 $3x-y+4=0$.

(2)经验证,点 $(2,0)$ 不在曲线 $y=\frac{1}{x}$ 上,设切点为 $P(x_0,y_0)$.

由 $y'|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x\cdot(x_0+\Delta x)\cdot x_0}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}=-\dfrac{1}{x_0^2}$,

得所求直线方程为 $y-y_0=-\frac{1}{x_0^2}(x-x_0)$.

因为点 $(2,0)$ 在切线上,

所以 $x_0^2y_0=2-x_0$.①

又点 $P(x_0,y_0)$ 在曲线 $y=\frac{1}{x}$ 上,所以 $x_0y_0=1$.②

联立①②可解得 $x_0=1$,$y_0=1$,

故所求直线方程为 $x+y-2=0$.

【类题通法】

1.利用导数的几何意义求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的方程的步骤如下:

(1)求函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$,即切线的斜率;

(2)根据已知点和切线斜率可得切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

2.运用导数的几何意义解决切线问题时,一定要注意所给的点是否在曲线上.若点在曲线上,则该点处的导数值就是该点处的切线的斜率;若点不在曲线上,应另设切点,再利用导数的几何意义求解.

任务三 导数几何意义的综合应用

[探究活动]

已知曲线 $C_1:y=x^2-1$ 与曲线 $C_2:y=1-x^3$.

探究 1:曲线 C_1,C_2 在 $x=x_0$ 处的切线的斜率 k_1,k_2 分别是多少?

提示:由导数的几何意义可得

$$k_1=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-1-(x_0^2-1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x\cdot x_0+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0,$$
$$k_2=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-(x_0+\Delta x)^3-(1-x_0^3)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(\Delta x)^3-3x_0^2\cdot\Delta x-3x_0\cdot(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}[-(\Delta x)^2-3x_0^2-3x_0\cdot\Delta x]=-3x_0^2.$$

探究 2:若曲线 C_1,C_2 在 $x=x_0$ 处的切线互相平行,则 x_0 的值是多少?

提示:因为曲线 C_1,C_2 在 $x=x_0$ 处的切线互相平行,所以曲线 C_1,C_2 在 $x=x_0$ 处的切线的斜率 k_1,k_2 相等,由探究 1 得 $2x_0=-3x_0^2$,解得 $x_0=0$ 或 $x_0=-\frac{2}{3}$.

经验证切点两个值均成立.

探究 3:若曲线 C_1,C_2 在 $x=x_0$ 处的切线互相平行,你能求出这两条平行的切线的方程吗?

提示：由探究 2 知 $x_0=0$ 或 $x_0=-\frac{2}{3}$.

若 $x_0=0$，则曲线 C_1 的切线的方程为 $y-(-1)=0$，即 $y=-1$；

曲线 C_2 的切线的方程为 $y-1=0$，即 $y=1$.

若 $x_0=-\frac{2}{3}$，则曲线 C_1 的切线的方程为 $y+\frac{5}{9}=-\frac{4}{3}\left(x+\frac{2}{3}\right)$，即 $12x+9y+13=0$；

曲线 C_2 的切线的方程为 $y-\left(1+\frac{8}{27}\right)=-\frac{4}{3}\left(x+\frac{2}{3}\right)$，即 $36x+27y-11=0$.

[评价活动]

1. 曲线 $y=x^3$ 在点(1,1)处的切线与 x 轴、直线 $x=2$ 所围成的三角形的面积为________.

$\frac{8}{3}$　**解析**：因为切线的斜率 $k=y'|_{x=1}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^3-1^3}{\Delta x}=3$，

所以在点(1,1)处的切线的方程为 $y-1=3(x-1)$，

即 $y=3x-2$.

它与 x 轴的交点为 $\left(\frac{2}{3},0\right)$，与直线 $x=2$ 的交点为 $(2,4)$，

所以围成三角形的面积 $S=\frac{1}{2}\times\left(2-\frac{2}{3}\right)\times 4=\frac{8}{3}$.

2. 已知曲线 $y=x^2$ 在点 P 处的切线满足下列条件，请分别求出点 P 的坐标.

(1)平行于直线 $y=6x-5$；

(2)垂直于直线 $x-3y+5=0$；

(3)倾斜角为 $135°$.

解：$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x$，设 $P(x_0,y_0)$ 是满足条件的点.

(1)因为切线与直线 $y=6x-5$ 平行，

所以 $2x_0=6$，得 $x_0=3$，$y_0=9$，即 $P(3,9)$ 是满足条件的点.

(2)因为切线与直线 $x-3y+5=0$ 垂直，

所以 $2x_0\times\frac{1}{3}=-1$，得 $x_0=-\frac{3}{2}$，$y_0=\frac{9}{4}$，

即 $P\left(-\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$ 是满足条件的点.

(3)因为切线的倾斜角为 $135°$，

所以切线的斜率为 -1，即 $2x_0=-1$，得 $x_0=-\frac{1}{2}$，

$y_0=\frac{1}{4}$，即 $P\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ 是满足条件的点.

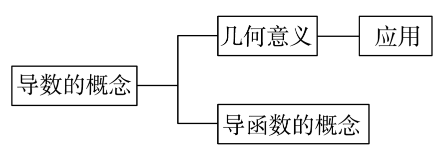
【类题通法】

对导数几何意义的综合应用的认识

(1)导数的几何意义是曲线的切线的斜率，已知切点可以求斜率，反过来，已知斜率也可以求切点，从而可以与解析几何等知识相联系.

(2)导数几何意义的综合应用题的解题关键是对函数进行求导，利用题目提供的诸如斜率的线性关系、斜率的最值、斜率的范围等条件求解相应问题.此处常与圆锥曲线、函数、不等式等知识点结合.

提质归纳



课后素养评价(十四)

基础性·能力运用

1. 设 $f'(x_0)=0$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线　　(B)

A. 不存在

B. 与 x 轴平行或重合

C. 与 x 轴垂直

D. 与 x 轴斜交

2. (多选)下列说法正确的是　　(　　)

A. 曲线的切线和曲线可能有两个交点

B. 过曲线上的一点作曲线的切线，该点一定是切点

C. 若 $f'(x_0)$ 不存在，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处无切线

D. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处有切线，$f'(x_0)$ 不一定存在

AD　**解析**：曲线的切线和曲线除有一个公共切点外，还可能有其他公共点，故 A 正确，B 不正确；$f'(x_0)$ 不存在，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率不存在，但切线可能存在，故 C 不正确，D 正确.

3. 如果曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的方程为 $x+2y-3=0$，那么　　(　　)

A. $f'(x_0)>0$　　B. $f'(x_0)<0$

C. $f'(x_0)=0$　　D. $f'(x_0)$ 不存在

B　**解析**：由 $x+2y-3=0$ 知切线斜率 $k=-\frac{1}{2}$，

所以 $f'(x_0)=-\frac{1}{2}<0$.

4. 设 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2-\Delta x)}{\Delta x}=-2$，则曲线 $y=$

$f(x)$在点$(2,f(2))$处的切线的倾斜角是（　　）

A.$\frac{\pi}{4}$　　B.$\frac{\pi}{3}$　　C.$\frac{3\pi}{4}$　　D.$\frac{2\pi}{3}$

C　**解析**：因为$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2-\Delta x)}{\Delta x}=2f'(2)=-2$，所以$f'(2)=-1$.

所以，曲线$y=f(x)$在点$(2,f(2))$处切线的斜率为-1.故所求切线的倾斜角为$\frac{3\pi}{4}$.故选C.

5. 曲线$y=\sqrt{x}$在点$P(4,2)$处的切线的方程为（　　）

A.$x+4y+4=0$

B.$x-4y+4=0$

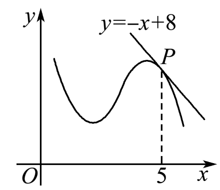
C.$x+4y+12=0$

D.$x-4y+12=0$

B　**解析**：因为$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{4+\Delta x}-2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{(\sqrt{4+\Delta x}+2)\Delta x}=\frac{1}{4}$，

所以曲线在点P处的切线方程为$y-2=\frac{1}{4}(x-4)$，即$x-4y+4=0$.

6. 如图，函数$y=f(x)$的图象在点P处的切线的方程是$y=-x+8$，则$f(5)+f'(5)=$________.



2　**解析**：由题意知$f(5)=-5+8=3$，

由导数几何意义知$f'(5)=-1$，

所以$f(5)+f'(5)=3-1=2$.

7. 已知函数$f(x)=3x^2+5$，求：

(1)函数$f(x)$从$x=0.1$到$x=0.2$的平均变化率；

(2)函数$f(x)$在$x=0.2$处的瞬时变化率.

解：(1)因为$f(x)=3x^2+5$，

所以函数$f(x)$从$x=0.1$到$x=0.2$的平均变化率为$\frac{3\times 0.2^2+5-3\times 0.1^2-5}{0.2-0.1}=0.9$.

(2)$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=3(x_0+\Delta x)^2+5-(3x_0^2+5)=3x_0^2+6x_0\Delta x+3(\Delta x)^2+5-3x_0^2-5=6x_0\Delta x+3(\Delta x)^2$，

所以函数$f(x)$在区间$[x_0,x_0+\Delta x]$上的平均变化率为$\frac{6x_0\Delta x+3(\Delta x)^2}{\Delta x}=6x_0+3\Delta x$.

所以函数$f(x)$在$x=0.2$处的瞬时变化率为$\lim\limits_{\Delta x\to 0}(6\times 0.2+3\Delta x)=1.2$.

综合性·创新提升

1. (多选)曲线$y=f(x)=x^3$在点P处的切线的斜率$k=3$，则点P的坐标是（　　）

A.$(1,1)$　　B.$(-1,-1)$

C.$(-2,-8)$　　D.$(2,8)$

AB　**解析**：$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0^3}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{3(\Delta x)^2x_0+3x_0^2\Delta x+(\Delta x)^3}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[3\Delta x\cdot x_0+3x_0^2+(\Delta x)^2]=3x_0^2$.

令$3x_0^2=3$，则$x_0=\pm 1$.

当$x_0=1$时，$y_0=1$；当$x_0=-1$时，$y_0=-1$.

2. 已知曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线与直线$x+y-3=0$垂直，则$f'(1)=$（　　）

A.2　　B.0

C.1　　D.-1

C　**解析**：曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线的斜率为$f'(1)$，直线$x+y-3=0$的斜率为-1，由题意知$f'(1)\cdot(-1)=-1$，故$f'(1)=1$.故选C.

3. 抛物线$y=x^2+bx+c$在点$(1,2)$处的切线与其平行直线$bx+y+c=0$间的距离是（　　）

A.$\frac{\sqrt{2}}{4}$　　B.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C.$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D.$\sqrt{2}$

C　**解析**：由题意知抛物线过点$(1,2)$，所以$b+c=1$.

又因为$y'|_{x=1}=2+b$，由题意得$2+b=-b$，

所以$b=-1$，$c=2$.

所以切线的方程为$y-2=x-1$，

即$x-y+1=0$，

所以平行直线$x-y+1=0$与$x-y-2=0$间的距离$d=\frac{|1+2|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

4. 若曲线$y=2x^2-4x+p$与直线$y=1$相切，则$p=$________.

3　**解析**：设$f(x)=y=2x^2-4x+p$，切点为$(x_0,1)$.由$y'|_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(4x_0-4+2\Delta x)=4x_0-4$，根据导数的几何意义有$4x_0-4=0$，所以$x_0=1$，即切点为$(1,1)$，所以$1=2-4+p$，所以$p=3$.

5. 直线l过点$P(-1,2)$，且与曲线$y=3x^2-4x+2$在点$M(1,1)$处的切线平行，则直线l的方程为________.

$2x-y+4=0$　**解析**：$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{3(1+\Delta x)^2-4(1+\Delta x)+2-(3\times 1^2-4\times 1+2)}{\Delta x}=2$.

故所求直线方程为$y-2=2(x+1)$，

即$2x-y+4=0$.

6.(2022·新高考全国Ⅱ卷)曲线 $y=\ln|x|$ 过坐标原点的两条切线的方程为____________，____________.

$y=\frac{1}{e}x$　$y=-\frac{1}{e}x$　**解析**:(方法一:分段求)

当 $x>0$ 时，$y=\ln x$，$y'=\frac{1}{x}$，设切点为 $(x_0,\ln x_0)$，则 $y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$，所以切线方程为 $y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$.

又切线过坐标原点，所以 $-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(-x_0)$，解得 $x_0=e$，所以切线方程为 $y-1=\frac{1}{e}(x-e)$，即 $y=\frac{1}{e}x$.

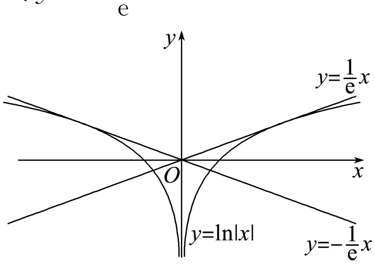
当 $x<0$ 时，$y=\ln(-x)$，$y'=\frac{1}{x}$，设切点为 $(x_1,\ln(-x_1))$，则 $y'|_{x=x_1}=\frac{1}{x_1}$，所以切线方程为 $y-\ln(-x_1)=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$.

又切线过坐标原点，所以 $-\ln(-x_1)=\frac{1}{x_1}(-x_1)$，解得 $x_1=-e$，所以切线方程为 $y-1=\frac{1}{-e}(x+e)$，即 $y=-\frac{1}{e}x$.

(方法二:利用对称性)当 $x>0$ 时，$y=\ln x$，$y'=\frac{1}{x}$，设切点为 $(x_0,\ln x_0)$，所以 $y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$，所以切线方程为 $y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$.

又切线过坐标原点，所以 $-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(-x_0)$，解得 $x_0=e$，所以切线方程为 $y-1=\frac{1}{e}(x-e)$，即 $y=\frac{1}{e}x$.

如图，因为 $y=\ln|x|$ 是偶函数，所以曲线关于 y 轴对称，所以曲线的另一条切线，即 $y=\frac{1}{e}x$ 关于 y 轴对称的直线 $y=-\frac{1}{e}x$.



7.已知直线 $l:y=x+a(a\neq0)$ 和曲线 $C:y=x^3-x^2+1$ 相切，求 a 的值和切点的坐标.

解:设直线 l 与曲线 C 相切于点 $P(x_0,y_0)$.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)^2+1-(x^3-x^2+1)}{\Delta x}$$

$$=3x^2-2x.$$

由题意知，直线 l 的斜率 $k=1$，则 $3x_0^2-2x_0=1$，解得 $x_0=-\frac{1}{3}$ 或 $x_0=1$.

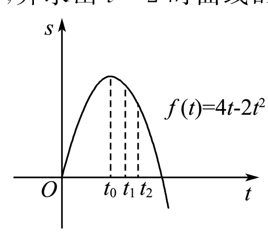
于是切点的坐标为 $\left(-\frac{1}{3},\frac{23}{27}\right)$ 或 $(1,1)$.

当切点为 $\left(-\frac{1}{3},\frac{23}{27}\right)$ 时，$\frac{23}{27}=-\frac{1}{3}+a$，所以 $a=\frac{32}{27}$.

当切点为 $(1,1)$ 时，$1=1+a$，$a=0$(舍去).

所以 a 的值为 $\frac{32}{27}$，切点坐标为 $\left(-\frac{1}{3},\frac{23}{27}\right)$.

8.一个物体沿直线运动，位移 s 关于时间 t 的函数 $s=f(t)=4t-2t^2$ 的图象如图所示，试根据图象，描述、比较曲线 $s=f(t)$ 分别在 $t=t_0$，$t=t_1$，$t=t_2$ 附近的变化情况，并求出 $t=2$ 时曲线的切线方程.

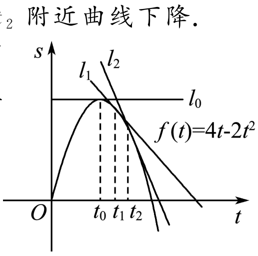


解:如图，用曲线 $s=f(t)$ 分别在 $t=t_0$，$t=t_1$，$t=t_2$ 附近的切线，刻画曲线 $s=f(t)$ 在上述三个时刻附近的变化情况.

①当 $t=t_0$ 时，曲线 $s=f(t)$ 在 $t=t_0$ 处的切线 l_0 平行于 t 轴，所以在 $t=t_0$ 附近曲线比较平坦，几乎没有升降；

②当 $t=t_1$ 时，曲线 $s=f(t)$ 在 $t=t_1$ 处的切线 l_1 的斜率 $f'(t_1)<0$，所以在 $t=t_1$ 附近曲线下降；

③当 $t=t_2$ 时，曲线 $s=f(t)$ 在 $t=t_2$ 处的切线 l_2 的斜率 $f'(t_2)<0$，所以在 $t=t_2$ 附近曲线下降.



由图象可以看出，直线 l_1 的倾斜程度小于直线 l_2 的倾斜程度，说明曲线 $s=f(t)$ 在 $t=t_1$ 附近比在 t_2 附近下降得慢.

当 $t=2$ 时，$f(2)=0$.

当 $t=2$ 时，切线的斜率

$$k=f'(2)=\lim_{\Delta t\to0}\frac{f(2+\Delta t)-f(2)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to0}\frac{4(2+\Delta t)-2(2+\Delta t)^2-8+8}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to0}\frac{4\Delta t-2(\Delta t)^2-8\Delta t}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to0}(-2\Delta t-4)=-4.$$

所以切线方程为 $s=-4(t-2)$，即 $4t+s-8=0$.

5.2 导数的运算

5.2.1 基本初等函数的导数

学习任务目标

1.能根据导数的定义推导常用函数的导数.(数学运算)

2.掌握基本初等函数的导数公式.(数学抽象)

3.利用基本初等函数的导数公式解决有关问题.(数学运算)

问题式预习

知识点一 几个常用函数的导数

函数	用定义法求导数
$y=f(x)=c$	$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=\underline{0}$
$y=f(x)=x$	$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=\underline{1}$
$y=f(x)=x^2$	$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=\underline{2x}$
$y=f(x)=x^3$	$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2]=\underline{3x^2}$
$y=f(x)=\frac{1}{x}$	$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2+x\cdot\Delta x}\right)=\underline{-\frac{1}{x^2}}$
$y=f(x)=\sqrt{x}$	$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

[微训练]

判断(正确的打"√",错误的打"×").

(1)若 $f(x)=2$,则 $f'(x)=2$. (　　)

× 提示:$f'(x)=0$.

(2)若 $f(x)=x^2$,则 $f'(x)=2x^2$. (　　)

× 提示:$f'(x)=2x$.

(3)若 $f(x)=x^{-1}$,则 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$. (√)

知识点二 基本初等函数的导数公式

(1)若 $f(x)=c$(c 是常数),则 $f'(x)=\underline{0}$.

(2)若 $f(x)=x^{\alpha}$($\alpha\in\mathbf{R}$,且 $\alpha\neq 0$),则 $f'(x)=\underline{\alpha x^{\alpha-1}}$.

(3)若 $f(x)=\sin x$,则 $f'(x)=\underline{\cos x}$.
(4)若 $f(x)=\cos x$,则 $f'(x)=\underline{-\sin x}$.
(5)若 $f(x)=a^x(a>0$,且 $a\neq1)$,则 $f'(x)=\underline{a^x\cdot\ln a}$;
特别地,若 $f(x)=e^x$,则 $f'(x)=\underline{e^x}$.
(6)若 $f(x)=\log_a x(a>0$,且 $a\neq1)$,则 $f'(x)=\underline{\dfrac{1}{x\ln a}}$;
特别地,若 $f(x)=\ln x$,则 $f'(x)=\underline{\dfrac{1}{x}}$.

[微训练]

1.判断(正确的打"√",错误的打"×").

(1)$\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)'=\cos\dfrac{\pi}{3}$.　(　　)

×　**提示**:因为 $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$(常数),所以$\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)'=0$.

(2)$(2^x)'=x2^{x-1}$.　(　　)

×　**提示**:$(2^x)'=2^x\ln 2$.

(3)$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.　(√)

2.(多选)下列求导正确的是　(　　)

A.若 $y=\ln 2$,则 $y'=\dfrac{1}{2}$

B.若 $y=\dfrac{1}{x^2}$,则 $y'|_{x=3}=-\dfrac{2}{27}$

C.若 $y=2^x$,则 $y'=2^x\ln 2$

D.若 $y=\log_2 x$,则 $y'=\dfrac{1}{x\ln 2}$

BCD　**解析**:对于 A,$y'=0$,故 A 错误;对于 B,因为 $y'=-\dfrac{2}{x^3}$,所以 $y'|_{x=3}=-\dfrac{2}{27}$,故 B 正确;显然 C,D 正确.故选 BCD.

任务型课堂

任务一　利用导数公式求函数的导数

[探究活动]

下面是某同学利用导数的定义求出的几个幂函数的导数:

$f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1=1x^{1-1}$;

$f(x)=x^2\Rightarrow f'(x)=2x=2x^{2-1}$;

$f(x)=x^3\Rightarrow f'(x)=3x^2=3x^{3-1}$;

$f(x)=\dfrac{1}{x}=x^{-1}\Rightarrow f'(x)=-x^{-2}=-x^{-1-1}$;

$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$.

探究 1:你认为幂函数的导数有什么规律?能总结一下吗?

提示:通过观察,我们发现这几个幂函数的导数都满足 $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$.

探究 2:如何求函数 $f(x)=\sqrt[n]{x^m}$ 的导数?

提示:首先把函数化为 $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$,再利用幂函数的导数公式得 $f'(x)=\dfrac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$.

[评价活动]

求下列函数的导数:

(1)$y=\dfrac{1}{x^4}$的导数为________;
(2)$y=7^x$ 的导数为________;
(3)$y=\log_5 x$ 的导数为________;
(4)$y=x^{12}$的导数为________;
(5)$y=\sqrt[5]{x^3}$的导数为________;
(6)$g(x)=\log_3 x$ 的导数为________.

(1)$y'=-\dfrac{4}{x^5}$　**解析**:$y'=\left(\dfrac{1}{x^4}\right)'=(x^{-4})'=-4x^{-5}=-\dfrac{4}{x^5}$.

(2)$y'=7^x\ln 7$　**解析**:$y'=(7^x)'=7^x\ln 7$.

(3)$y'=\dfrac{1}{x\ln 5}$　**解析**:$y'=(\log_5 x)'=\dfrac{1}{x\ln 5}$.

(4)$y'=12x^{11}$　**解析**:$y'=(x^{12})'=12x^{11}$.

(5)$y'=\dfrac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$　**解析**:$y'=(\sqrt[5]{x^3})'=(x^{\frac{3}{5}})'=\dfrac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$.

(6)$g'(x)=\dfrac{1}{x\ln 3}$　**解析**:$g'(x)=\dfrac{1}{x\ln 3}$.

【类题通法】

利用公式求导应注意的三点

(1)若函数的形式符合导数公式的使用条件,则直接利用公式求解,这样最简捷.
(2)对于不能直接利用公式求解的类型,一般遵循"先化简,再求导"的基本原则,避免不必要的运算失误.比如对带根号的函数,一般先将其转化为分数指数幂的形式,再利用公式 $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ 进行求导.
(3)要特别注意"$\dfrac{1}{x}$与 $\ln x$""a^x 与 $\log_a x$""$\sin x$ 与 $\cos x$"的导数的区别.

任务二　利用公式求函数在某点处的导数

1.若函数 $y=10^x$,则 $y'|_{x=1}$等于　(　　)

A.$\dfrac{1}{10}$　　B.10

C.10ln 10　　D.$\dfrac{1}{10\ln 10}$

C　**解析**:因为 $y'=10^x\ln 10$,所以 $y'|_{x=1}=10\ln 10$.

2. 已知质点的运动方程是 $s=\sin t$，其中 s 是质点的位移，t 是时间.

(1)求质点在 $t=\frac{\pi}{3}$ 时的速度；

(2)求质点运动的加速度.

解：(1)因为 $s'=\cos t$，

所以 $s'|_{t=\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，

即质点在 $t=\frac{\pi}{3}$ 时的速度为 $\frac{1}{2}$.

(2)令 $v(t)=\cos t$，

所以加速度为 $v'(t)=(\cos t)'=-\sin t$.

3. 求函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 在 $x=1$ 处的导数.

解：因为 $f'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)'=(x^{-\frac{1}{3}})'=-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}=-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$，

所以 $f'(1)=-\frac{1}{3\sqrt[3]{1}}=-\frac{1}{3}$.

4. 求函数 $f(x)=\cos x$ 在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处的导数.

解：因为 $f'(x)=-\sin x$，

所以 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【类题通法】

1. 速度是路程对时间的导数，加速度是速度对时间的导数.
2. 求函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数的步骤：
(1)先求函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$；
(2)把 $x=x_0$ 代入导函数 $f'(x)$ 求相应的导数值 $f'(x_0)$.

任务三 导数公式的应用

[探究活动]

若函数 $y=f(x)$ 的图象上存在两点，使得函数的图象在这两点处的切线互相垂直，则称函数 $y=f(x)$ 具有 T 性质.

探究 1：若函数 $y=f(x)$ 具有 T 性质，其图象上对应两点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 处的导数分别为 $f'(x_1)$，$f'(x_2)$，则 $f'(x_1)$ 与 $f'(x_2)$ 满足什么关系？

提示：由导数的几何意义可知，点 P，Q 处切线的斜率分别为 $k_1=f'(x_1)$，$k_2=f'(x_2)$，且函数具有 T 性质，则 $k_1\cdot k_2=f'(x_1)\cdot f'(x_2)=-1$.

探究 2：函数 $y=e^x$ 具有 T 性质吗？

提示：因为 $f'(x)=e^x>0$，显然 $k_1\cdot k_2=e^{x_1}\cdot e^{x_2}=-1$ 无解，故函数 $y=e^x$ 不具有 T 性质.

[评价活动]

1. 已知 $y=kx$ 是曲线 $y=\ln x$ 的一条切线的方程，则 $k=$________.

$\frac{1}{e}$ **解析**：设切点为 (x_0,y_0)，

因为函数 $y=\ln x$ 的导数为 $y'=\frac{1}{x}$，所以 $k=\frac{1}{x_0}$，

所以切线的方程化为 $y=\frac{1}{x_0}\cdot x$.

又点 (x_0,y_0) 在曲线 $y=\ln x$ 上，也在切线 $y=kx$ 上，

所以 $y_0=\ln x_0=\frac{x_0}{x_0}=1$，所以 $k=\frac{1}{e}$.

2. 分别求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与抛物线 $y=x^2$ 在交点处的切线的方程.

解：易求得曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与抛物线 $y=x^2$ 的交点坐标为 $(1,1)$.

曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在交点处的切线的斜率为 $y'|_{x=1}=-1$，

故切线方程为 $y-1=-(x-1)$，即 $x+y-2=0$.

抛物线 $y=x^2$ 在交点处的切线的斜率为 $y'|_{x=1}=2$，故切线方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $2x-y-1=0$.

3. 求过曲线 $f(x)=\cos x$ 上一点 $P\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$ 且与曲线在该点处的切线垂直的直线的方程.

解：因为 $f(x)=\cos x$，

所以 $f'(x)=-\sin x$.

所以曲线 $f(x)=\cos x$ 在点 $P\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$ 处切线的斜率为 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由题意得所求直线的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

则所求直线方程为 $y-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，

即 $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi+\frac{1}{2}$.

【类题通法】

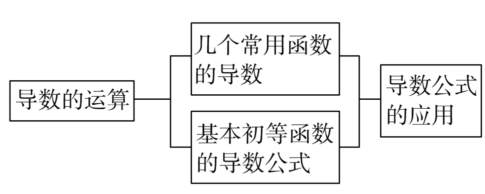
求曲线方程或切线方程时应注意的几点

(1)切点是曲线与切线的公共点，切点坐标既满足曲线方程也满足切线方程.

(2)曲线在切点 (x_0,y_0) 处的切线的斜率，即对应函数在 $x=x_0$ 处的导数.

(3)必须明确已知点是不是切点，如果不是，应先设出切点.

提质归纳



课后素养评价(十五)

基础性·能力运用

1.已知 $f(x)=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{Q}^{*})$.若 $f'(1)=\frac{1}{4}$,则 α 等于　(　　)

A.$\frac{1}{3}$　　B.$\frac{1}{2}$

C.$\frac{1}{8}$　　D.$\frac{1}{4}$

D　**解析**:因为 $f(x)=x^{\alpha}$,

所以 $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$,

所以 $f'(1)=\alpha=\frac{1}{4}$.

2.直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 是曲线 $y=\ln x(x>0)$的一条切线,则实数 b 的值为　(　　)

A.2　　B.$\ln 2+1$

C.$\ln 2-1$　　D.$\ln 2$

C　**解析**:因为 $y=\ln x$ 的导数 $y'=\frac{1}{x}$,

所以令$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$,得 $x=2$,所以切点为$(2,\ln 2)$.

代入 $y=\frac{1}{2}x+b$,得 $b=\ln 2-1$.

3.曲线 $y=e^{x}$ 在点$(0,1)$处的切线与 y 轴交点的纵坐标是　(　　)

A.e　　B.1　　C.-1　　D.$-e$

B　**解析**:因为 $y'=e^{x}$,所以 $y'|_{x=0}=e^{0}=1$,所以切线方程为 $y-1=x$,即 $y=x+1$,令 $x=0$,则 $y=1$.

4.已知函数 $f(x)=2^{-x}$,则 $f'(x)=$　(　　)

A.$-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\ln 2$

B.$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\ln 2$

C.$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\log_{2}e$

D.$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\frac{1}{\ln 2}$

A　**解析**:因为 $f(x)=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$,所以 $f'(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\ln\frac{1}{2}=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\ln 2$.

5.(多选)下列结论正确的是　(　　)

A.$(\cos x)'=\sin x$

B.$\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)'=\cos\frac{\pi}{3}$

C.若 $y=\frac{1}{x^{2}}$,则 $y'=\frac{-2}{x^{3}}$

D.$\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

CD　**解析**:因为$(\cos x)'=-\sin x$,所以 A 错误. $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,而$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)'=0$,所以 B 错误. $\left(\frac{1}{x^{2}}\right)'=(x^{-2})'=\frac{-2}{x^{3}}$,所以 C 正确. $\left(\frac{-1}{\sqrt{x}}\right)'=(-x^{-\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2x\sqrt{x}}$,所以 D 正确.

6.已知函数 $f(x)=e^{x}+1$,$f'(x)$为 $f(x)$的导函数,则 $f'(0)=$________.

1　**解析**:由题意可得 $f'(x)=e^{x}$,所以 $f'(0)=e^{0}=1$,故答案为 1.

7.已知直线 $y=kx$ 是曲线 $y=3^{x}$ 的切线,则 k 的值为________.

$e\ln 3$　**解析**:设切点为(x_{0},y_{0}).

因为函数 $y=3^{x}$ 的导函数为 $y'=3^{x}\ln 3$,

所以 $k=3^{x_{0}}\ln 3$,

所以 $y=kx$ 化为 $y=(3^{x_{0}}\ln 3)\cdot x$.

又因为(x_{0},y_{0})在曲线 $y=3^{x}$ 上,

所以$(3^{x_{0}}\ln 3)\cdot x_{0}=3^{x_{0}}$,

所以 $x_{0}=\frac{1}{\ln 3}=\log_{3}e$.

所以 $k=e\ln 3$.

8.求下列函数的导数.

(1)$y=\frac{1}{x^{4}}$;

(2)$y=x\sqrt{x}$;

(3)$y=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

解:(1)因为 $y=\frac{1}{x^{4}}=x^{-4}$,所以 $y'=-4x^{-5}=-\frac{4}{x^{5}}$.

(2)因为 $y=x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}$,所以 $y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$.

(3)因为 $y=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\sin x$,所以 $y'=\cos x$.

综合性·创新提升

1.已知 $f(x)=x^2$，$g(x)=\ln x$.若 $f'(x)-g'(x)=1$，则 x 的值为（　）

A.1　　B.-1

C.2　　D.-2

A　**解析**：因为 $f(x)=x^2$，$g(x)=\ln x$，

所以 $f'(x)=2x$，$g'(x)=\dfrac{1}{x}$ 且 $x>0$，

$f'(x)-g'(x)=2x-\dfrac{1}{x}=1$，即 $2x^2-x-1=0$，

解得 $x=1$ 或 $x=-\dfrac{1}{2}$（舍去）.故 $x=1$.

2.已知正弦曲线 $y=\sin x$ 上一点 P，直线 l 是曲线以点 P 为切点的切线，则直线 l 的倾斜角的取值范围是（　）

A.$\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$　　B.$[0,\pi)$

C.$\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$　　D.$\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right]$

A　**解析**：因为 $y'=\cos x$，而 $\cos x\in[-1,1]$.

所以直线 l 的斜率的范围是 $[-1,1]$，

所以直线 l 倾斜角的取值范围是 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$.

3.若曲线 $y=x^{-\frac{1}{2}}$ 在点 $(a,a^{-\frac{1}{2}})$ 处的切线与两条坐标轴围成的三角形的面积为18，则 $a=$（　）

A.64　　B.32

C.16　　D.8

A　**解析**：因为 $y'=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$，

所以曲线 $y=x^{-\frac{1}{2}}$ 在点 $(a,a^{-\frac{1}{2}})$ 处的切线的方程为

$y-a^{-\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}(x-a)$.

令 $x=0$，得 $y=\dfrac{3}{2}a^{-\frac{1}{2}}$；令 $y=0$ 得 $x=3a$.

所以 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}a^{-\frac{1}{2}}\cdot 3a=18$，解得 $a=64$.

4.我国魏晋时期的数学家刘徽利用“割圆术”，进行“以直代曲”的近似计算，用正 n 边形进行“内外夹逼”的办法求出了圆周率 π 的精度较高的近似值.借用“以直代曲”的近似计算方法，在切点附近，可以用函数图象的切线近似代替在切点附近的曲线来近似计算.设 $f(x)=\ln x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线的方程为________，用此结论近似计算 $\sqrt[4\,000]{e}$ 的值为________（结果用分数表示）.

$y=x-1$　$\dfrac{4\,001}{4\,000}$　**解析**：由已知得 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$，$f'(1)=1$，所以切线方程为 $y=x-1$，设 $\sqrt[4\,000]{e}=e^{\frac{1}{4\,000}}=x$，则 $\ln x=\dfrac{1}{4\,000}$，由切线方程，得 $\dfrac{1}{4\,000}=x-1$，$x=1+\dfrac{1}{4\,000}=\dfrac{4\,001}{4\,000}$，所以 $\sqrt[4\,000]{e}\approx\dfrac{4\,001}{4\,000}$.

5.点 P 是曲线 $y=f(x)=x^2$ 上任意一点，则点 P 到直线 $y=x-1$ 的最短距离是________.

$\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$　**解析**：与直线 $y=x-1$ 平行的 $f(x)=x^2$ 的切线的切点到直线 $y=x-1$ 的距离即为所求.设切点为 (x_0,y_0)，则 $f'(x_0)=2x_0=1$，

所以 $x_0=\dfrac{1}{2}$，$y_0=\dfrac{1}{4}$.即 $P\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$ 到直线 $y=x-1$ 的距离最短.

所以 $d=\dfrac{\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}-1\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$.

6.若函数 $y=2x^3+1$ 与 $y=3x^2-b$ 的图象在一个公共点处的切线相同，则实数 $b=$________.

-1 或 0　**解析**：设切点的横坐标为 x_0，根据切点在函数图象上，可以得到 $2x_0^3+1=3x_0^2-b$①，

由函数 $y=2x^3+1$ 得 $y'=6x^2$，由函数 $y=3x^2-b$ 得 $y'=6x$，所以得 $6x_0^2=6x_0$②，

由①②得 $\begin{cases}x_0=0,\\b=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=1,\\b=0.\end{cases}$

7.已知 $f(x)=a^2$（a 为常数），$g(x)=\ln x$.若 $2x[f'(x)+1]-g'(x)=1$，则 $x=$________.

1　**解析**：因为 $f'(x)=0$，$g'(x)=\dfrac{1}{x}(x>0)$，所以 $2x[f'(x)+1]-g'(x)=2x-\dfrac{1}{x}=1$，解得 $x=1$ 或 $x=-\dfrac{1}{2}$.因为 $x>0$，所以 $x=1$.

8.已知 $P(-1,1)$，$Q(2,4)$ 是曲线 $y=x^2$ 上的两点.

(1)分别求曲线 $y=x^2$ 过点 P，Q 的切线的方程；

(2)求与直线 PQ 平行的曲线 $y=x^2$ 的切线的方程.

解：(1)因为 $y'=2x$，$P(-1,1)$，$Q(2,4)$ 都是曲线 $y=x^2$ 上的点.

所以过点 P 的切线的斜率 $k_1=-2$，

过点 Q 的切线的斜率 $k_2=4$，

所以过点 P 的切线的方程为 $y-1=-2(x+1)$，

即 $2x+y+1=0$，

过点 Q 的切线的方程为 $y-4=4(x-2)$，

即 $4x-y-4=0$.

(2)$y'=2x$，直线 PQ 的斜率为 $\dfrac{4-1}{2+1}=1$，

设切点坐标为 $M(x_0,y_0)$，则切线的斜率 $k=2x_0=1$，

所以 $x_0=\dfrac{1}{2}$，所以切点 $M\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$.

所以与 PQ 平行的切线的方程为 $y-\dfrac{1}{4}=x-\dfrac{1}{2}$，

即 $4x-4y-1=0$.

5.2.2　导数的四则运算法则

学习任务目标

1.掌握导数的四则运算法则.(数学运算)

2.利用导数的四则运算法则解决有关问题.(数学运算)

问题式预习

知识点　导数的四则运算法则

(1)$[f(x)\pm g(x)]'=\underline{f'(x)\pm g'(x)}$;

(2)$[f(x)g(x)]'=\underline{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$;

(3)$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\underline{\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}}$$(g(x)\neq 0)$.

特别地:

①当 $g(x)=c$(c 为常数)时,$[cf(x)]'=\underline{cf'(x)}$;

②当 $f(x)=1$ 时,$\left[\dfrac{1}{g(x)}\right]'=\underline{-\dfrac{g'(x)}{[g(x)]^2}}$.

[微训练]

1.判断(正确的打"√",错误的打"×").

(1)若 $f'(x)=2x$,则 $f(x)=x^2$.　(　　)

×　提示:若 $f'(x)=2x$,则 $f(x)=x^2+c$(c 为常数).

(2)已知函数 $y=2\sin x-\cos x$,则 $y'=2\cos x+\sin x$.　(　　)

√　提示:若 $y=2\sin x-\cos x$,

则 $y'=(2\sin x)'-(\cos x)'=2\cos x+\sin x$.

(3)已知函数 $f(x)=(x+1)(x+2)$,则 $f'(x)=2x+1$.　(　　)

×　提示:因为 $f(x)=(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$,所以 $f'(x)=2x+3$.

2.函数 $y=\sin x\cos x$ 的导数是　(　　)

A.$y'=\cos^2x+\sin^2x$　B.$y'=\cos^2x-\sin^2x$

C.$y'=2\cos x\sin x$　D.$y'=\cos x\sin x$

B　解析:$y'=(\sin x\cos x)'=\cos x\cdot\cos x+\sin x\cdot(-\sin x)=\cos^2x-\sin^2x$.

3.(多选)下列求导运算正确的是　(　　)

A.$\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)'=1-\dfrac{1}{x^3}$

B.$(\log_2x)'=\dfrac{1}{x\ln 2}$

C.$(x\ln x)'=\ln x+1$

D.$(3^x)'=3^x\log_3 e$

BC　解析:$\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)'=1-\dfrac{2}{x^3}$,$(\log_2x)'=\dfrac{1}{x\ln 2}$,$(x\ln x)'=\ln x+1$,$(3^x)'=3^x\ln 3$,故 A,D 错误,B,C 正确.

4.$f(x)=(2x+a)^2$,且 $f'(2)=20$,则 $a=$________.

1　解析:因为 $f(x)=4x^2+4ax+a^2$,

所以 $f'(x)=8x+4a$,

所以 $f'(2)=16+4a=20$,所以 $a=1$.

任务型课堂

任务一　利用导数的加法与减法法则求导

1.函数 $y=2x^3+x^2-x+1$ 的导数为________.

$y'=6x^2+2x-1$　解析:$y'=(2x^3)'+(x^2)'-x'+1'=6x^2+2x-1$.

2.函数 $y=x^4+\cos x$ 的导数为________.

$y'=4x^3-\sin x$　解析:$y'=(x^4)'+(\cos x)'=4x^3-\sin x$.

3.函数 $y=e^x+\ln x$ 的导数为________.

$y'=e^x+\dfrac{1}{x}$　解析:$y'=(e^x)'+(\ln x)'=e^x+\dfrac{1}{x}$.

4.函数 $y=\log_5x+\sin x$ 的导数为________.

$y'=\dfrac{1}{x\ln 5}+\cos x$　解析:$y'=(\log_5x)'+(\sin x)'=\dfrac{1}{x\ln 5}+\cos x$.

任务二　利用导数的乘法与除法法则求导

[探究活动]

已知函数 $f(x)=x^3$,$g(x)=x^2$.

探究 1:$[f(x)g(x)]'=f'(x)g'(x)$成立吗?

提示:不成立,因为$[f(x)g(x)]'=(x^5)'=5x^4$,而 $f'(x)g'(x)=3x^2\cdot 2x=6x^3$.

探究 2:能否用 $f(x)$和 $g(x)$的导数表示 $f(x)\cdot g(x)$的导数?如何表示?

提示:能.因为 $f'(x)=3x^2$,$g'(x)=2x$,$[f(x)\cdot g(x)]'=5x^4$,有$[f(x)g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)g'(x)$.

探究 3:其他函数也满足探究 2 中得出的关系吗?

提示:满足.

[评价活动]

1.已知 $f(x)=\frac{1}{x}\cos x$，则 $f(\pi)+f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=$________.

$-\frac{3}{\pi}$ **解析**：因为 $f(x)=\frac{1}{x}\cos x$，

所以 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\cos x-\frac{1}{x}\sin x$，

所以 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{\pi}$. 又 $f(\pi)=-\frac{1}{\pi}$，

所以 $f(\pi)+f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{3}{\pi}$.

2.求下列函数的导数.

(1) $y=(2x^2+3)(3x-2)$；

(2) $y=2^x\cos x-3x\ln x$；

(3) $y=\frac{x+3}{x^2+3}$.

解：(1)(方法一) $y'=(2x^2+3)'(3x-2)+(2x^2+3)\cdot(3x-2)'=4x(3x-2)+(2x^2+3)\times 3=18x^2-8x+9$.

(方法二)因为 $y=(2x^2+3)(3x-2)=6x^3-4x^2+9x-6$，所以 $y'=18x^2-8x+9$.

(2) $y'=(2^x\cos x-3x\ln x)'=(2^x)'\cos x+2^x(\cos x)'-3[x'\ln x+x(\ln x)']=2^x\ln 2\times\cos x-2^x\sin x-3\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=2^x\ln 2\times\cos x-2^x\sin x-3\ln x-3$.

(3) $y'=\frac{(x+3)'(x^2+3)-(x+3)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}$

$=\frac{1\times(x^2+3)-(x+3)\times 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{-x^2-6x+3}{(x^2+3)^2}$.

【类题通法】

利用求导公式及法则解题应注意的几点

(1)熟记常见基本初等函数的求导公式是进行求导运算的前提.

(2)求导之前观察函数解析式的结构特点，看是否可以化简，先化简再进行求导可以避免反复使用求导法则，从而减少运算量.

(3)运算过程出现失误的一个重要原因是不能正确理解求导法则，特别是商的求导法则.

(4)求导过程中对符号判断不清，也是导致错误的常见原因.

任务三 与切线有关的综合问题

[探究活动]

已知曲线 $y=x\ln x$ 与直线 $2x-y-5=0$.

探究1：曲线上是否存在一点 P，使曲线在点 P 处的切线与直线平行？

提示：存在.设 $P(x_0,y_0)$.因为 $y=x\ln x$，

所以 $y'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$.

所以曲线 $y=x\ln x$ 在点 P 处的切线的斜率 $k=1+\ln x_0$.

又 $k=2$，所以 $1+\ln x_0=2$，所以 $x_0=\mathrm{e}$.

所以 $y_0=\mathrm{e}\ln\mathrm{e}=\mathrm{e}$.

所以点 P 的坐标是 (e,e).

探究2：曲线上的点到直线的最短距离是多少？

提示：曲线上的点到直线的最短距离即与已知直线平行的切线的切点到直线的距离，由探究1知，即点 $P(\mathrm{e},\mathrm{e})$ 到直线 $2x-y-5=0$ 的距离，故最短距离 $d=\frac{|2\mathrm{e}-\mathrm{e}-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}(5-\mathrm{e})$.

[评价活动]

1.若曲线 $y=\frac{x+1}{x-1}$ 在点(3,2)处的切线与直线 $ax+y+1=0$ 垂直，则 a 等于 ( )

A.2 B.$\frac{1}{2}$

C.$-\frac{1}{2}$ D.-2

D **解析**：因为 $y=\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$，

所以 $y'=-\frac{2}{(x-1)^2}$，

所以函数 $y=\frac{x+1}{x-1}$ 在 $x=3$ 处的导数为 $-\frac{1}{2}$.

所以 $-a\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$，即 $a=-2$.

2.已知函数 $f(x)=ax^2+bx+3(a\neq 0)$，其导函数 $f'(x)=2x-8$.

(1)求 a,b 的值；

(2)设函数 $g(x)=\mathrm{e}^x\sin x+f(x)$，求曲线 $y=g(x)$ 在点(0,3)处的切线的方程.

解：(1)因为 $f(x)=ax^2+bx+3(a\neq 0)$，

所以 $f'(x)=2ax+b$.

又知 $f'(x)=2x-8$，所以 $a=1,b=-8$.

(2)由(1)可知 $g(x)=\mathrm{e}^x\sin x+x^2-8x+3$，

所以 $g'(x)=\mathrm{e}^x\sin x+\mathrm{e}^x\cos x+2x-8$.

因为 $g'(0)=\mathrm{e}^0\sin 0+\mathrm{e}^0\cos 0+2\times 0-8=-7$，

所以曲线 $y=g(x)$ 在点(0,3)处的切线的方程为 $y-3=-7(x-0)$，即 $7x+y-3=0$.

3.已知函数 $f(x)=ax^2+\ln x$ 的导数为 $f'(x)$.

(1)求 $f(1)+f'(1)$；

(2)若曲线 $y=f(x)$ 存在垂直于 y 轴的切线，求实数 a 的取值范围.

解：(1)由题意，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

由 $f(x)=ax^2+\ln x$，得 $f'(x)=2ax+\frac{1}{x}$，

所以 $f(1)+f'(1)=3a+1$.

(2)因为曲线 $y=f(x)$ 存在垂直于 y 轴的切线,故此时切线的斜率为 0,条件转化为在 $x\in(0,+\infty)$ 时导函数 $f'(x)=2ax+\frac{1}{x}$ 存在零点.

所以 $f'(x)=0$,即 $2ax+\frac{1}{x}=0$ 有正实数解,

即 $2ax^2=-1$ 有正实数解,故有 $a<0$,

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,0)$.

【类题通法】

解决有关切线的问题时应关注的几点

(1)此类问题往往涉及切点、切点处对应的导数、切线方程三个主要元素.

(2)准确利用求导公式求出导函数是解决此类问题的第一步,也是解题的关键,务必做到准确.

(3)分清已知点是否在曲线上,若不在曲线上,则要设出切点,这是解题时的易错点.另外有的点虽然在切线上,但是经过该点的切线不一定只有一条,即该点有可能是切点,也可能是切线与曲线的交点,解题时不要漏解.

提质归纳

导数的运算法则
- 加、减法法则
- 乘法法则
- 除法法则

课后素养评价(十六)

基础性·能力运用

1. 已知 $f(x)=x^3-3^x$,则 $f'(x)=$ (　　)

A. $3x^2-3^x$　　B. $3x^2-3^x\ln 3+\frac{1}{3}$

C. $3x^2+3^x\ln 3$　　D. $3x^2-3^x\ln 3$

D　**解析**:因为 $f(x)=x^3-3^x$,所以 $f'(x)=3x^2-3^x\ln 3$.

2. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$,且满足 $f(x)=f'(\mathrm{e})\ln x+2x$,则 $f'(\mathrm{e})=$ (　　)

A. 1　　B. -1

C. $\frac{2\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$　　D. $-\frac{2\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$

C　**解析**:由 $f(x)=f'(\mathrm{e})\ln x+2x$,

得 $f'(x)=\frac{1}{x}f'(\mathrm{e})+2$.

令 $x=\mathrm{e}$,得 $f'(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}f'(\mathrm{e})+2$,解得 $f'(\mathrm{e})=\frac{2\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$.

3. 曲线 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+5$ 在点 $\left(1,\frac{13}{3}\right)$ 处的切线的倾斜角为 (　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{3\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

B　**解析**:$y'=x^2-2x$,斜率 $k=y'|_{x=1}=-1$,故切线的倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$.

4. 曲线 $y=2\sin x+\cos x$ 在点 $(\pi,-1)$ 处的切线的方程为 (　　)

A. $x-y-\pi-1=0$

B. $2x-y-2\pi-1=0$

C. $2x+y-2\pi+1=0$

D. $x+y-\pi+1=0$

C　**解析**:由 $y=2\sin x+\cos x$ 可得 $y'=2\cos x-\sin x$,当 $x=\pi$ 时,$y'=-2$,即切线的斜率为 -2,所以切线方程为 $2x+y-2\pi+1=0$.

5. (多选)下列求导运算错误的是 (　　)

A. $(3^x)'=3^x\log_3\mathrm{e}$　　B. $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$

C. $\left(\frac{1}{\ln x}\right)'=x$　　D. $(x\cdot\mathrm{e}^x)'=3^x+1$

ACD　**解析**:$(3^x)'=3^x\ln 3$,故 A 错误;

$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$,故 B 正确;

$\left(\frac{1}{\ln x}\right)'=-\frac{1}{x\cdot(\ln x)^2}$,故 C 错误;

$(x\cdot\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x+x\cdot\mathrm{e}^x$,故 D 错误.

故选 ACD.

6. 曲线 $f(x)=\frac{x}{x+2}$ 在点 $(-1,-1)$ 处的切线的方程为 (　　)

A. $y=2x+1$

B. $y=2x-1$

C. $y=-2x-3$

D. $y=-2x-2$

A　**解析**:因为 $f'(x)=\frac{x'(x+2)-x(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{2}{(x+2)^2}$,

所以斜率 $k=f'(-1)=\frac{2}{(-1+2)^2}=2$.

所以切线方程为 $y+1=2(x+1)$,即 $y=2x+1$.

7.已知函数 $f(x)=ax\ln x$，$x\in(0,+\infty)$，其中 a 为实数，$f'(x)$为 $f(x)$的导函数.若 $f'(1)=3$，则 a 的值为________.

3 **解析**：$f'(x)=a\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=a(1+\ln x)$，

则 $f'(1)=a(1+\ln 1)=a$，又 $f'(1)=3$，所以 $a=3$.

8.如果函数 $y=\frac{x^2+a^2}{x}(a>0)$在 $x=x_0$ 处的导数为 0，那么 x_0 等于________.

$\pm a$ **解析**：$y'=\frac{2x\cdot x-(x^2+a^2)\cdot 1}{x^2}=\frac{x^2-a^2}{x^2}$.

由 $x_0^2-a^2=0$ 得 $x_0=\pm a$.

9.求下列函数的导数.

(1)$y=3\sqrt{x}-x^3$；

(2)$y=\sin x-2x^2$；

(3)$y=\cos x\cdot\ln x$；

(4)$y=\frac{e^x}{\sin x}$.

解：(1)$y'=(3\sqrt{x})'-(x^3)'=\frac{3}{2\sqrt{x}}-3x^2$.

(2)$y'=(\sin x-2x^2)'=(\sin x)'-(2x^2)'=\cos x-4x$.

(3)$y'=(\cos x\cdot\ln x)'=(\cos x)'\cdot\ln x+\cos x\cdot(\ln x)'=-\sin x\cdot\ln x+\frac{\cos x}{x}$.

(4)$y'=\left(\frac{e^x}{\sin x}\right)'=\frac{(e^x)'\cdot\sin x-e^x\cdot(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{e^x\cdot\sin x-e^x\cdot\cos x}{\sin^2 x}=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{\sin^2 x}$.

综合性·创新提升

1.若函数 $f(x)=x^2-2x-4\ln x$，则$f'(x)>0$ 时 x 的取值范围为 ( )

A.$(0,+\infty)$ B.$(-1,0)\cup(2,+\infty)$

C.$(2,+\infty)$ D.$(-1,0)$

C **解析**：由题意知 $x>0$，$f'(x)=2x-2-\frac{4}{x}$.

若$f'(x)=\frac{2x^2-2x-4}{x}>0$，则 $x^2-x-2>0$，

解得 $x<-1$ 或 $x>2$.又 $x>0$，所以 $x>2$.

2.(多选)已知曲线 $y=ae^x+x\ln x$ 在点$(1,ae)$处的切线的方程为 $y=2x+b$，则 ( )

A.$a=e$ B.$a=e^{-1}$

C.$b=1$ D.$b=-1$

BD **解析**：令 $f(x)=ae^x+x\ln x$，

则 $f'(x)=ae^x+\ln x+1$，$f'(1)=ae+1=2$，得 $a=\frac{1}{e}=e^{-1}$.$f(1)=ae=2+b$，可得 $b=-1$.

3.曲线 $y=x\sin x$ 在点$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$处的切线与 x 轴、直线 $x=\pi$ 所围成的三角形的面积为 ( )

A.$\frac{\pi^2}{2}$ B.π^2

C.$2\pi^2$ D.$\frac{1}{2}(2+\pi)^2$

A **解析**：曲线 $y=x\sin x$ 在点$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$处的切线的方程为 $y=-x$，所围成的三角形的顶点为 $O(0,0)$，$A(\pi,0)$，$C(\pi,-\pi)$，所以三角形面积为$\frac{\pi^2}{2}$.

4.曲线 $f(x)=\frac{x}{2x-1}$在点$(1,1)$处的切线为 l，则 l 上的点到圆 $x^2+y^2+4x+3=0$ 上的点的最近距离是 ( )

A.$2\sqrt{2}-1$ B.$2\sqrt{2}+1$

C.$2\sqrt{2}$ D.1

A **解析**：$f'(x)=\frac{-1}{(2x-1)^2}$，则 $f'(1)=-1$，

所以切线方程为 $y-1=-(x-1)$，即 $x+y-2=0$，圆心$(-2,0)$到直线 $x+y-2=0$ 的距离 $d=2\sqrt{2}$，圆的半径 $r=1$，所以所求最近距离为 $2\sqrt{2}-1$.

5.已知曲线 $y_1=2-\frac{1}{x}$与 $y_2=x^3-x^2+2x$ 在 $x=x_0$ 处切线的斜率的乘积为 3，则 $x_0=$________.

1 **解析**：由题知 $y_1'=\frac{1}{x^2}$，$y_2'=3x^2-2x+2$，所以两曲线在 $x=x_0$ 处切线的斜率分别为$\frac{1}{x_0^2}$，$3x_0^2-2x_0+2$，所以$\frac{3x_0^2-2x_0+2}{x_0^2}=3$，所以 $x_0=1$.

6.已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-a\ln x$.若函数$f(x)$的图象在点$(1,f(1))$处的切线不过第四象限且不过原点，则实数 a 的取值范围为________.

$\left[\frac{1}{2},1\right]$ **解析**：由 $f'(x)=x-\frac{a}{x}$，得 $f'(1)=1-a$.

因为 $f(1)=\frac{1}{2}$，所以函数 $f(x)$的图象在点(1,

$f(1))$处的切线的方程为 $y-\frac{1}{2}=(1-a)(x-1)$，

即 $y=(1-a)x+a-\frac{1}{2}$.由题意得$\begin{cases}1-a\geq 0,\\ a-\frac{1}{2}>0,\end{cases}$解得

$\frac{1}{2}<a\leq 1$,所以实数 a 的取值范围为$\left(\frac{1}{2},1\right]$.

7.函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-4x,x<0,\\ -\frac{1}{x}-\ln x,0<x<1.\end{cases}$ 若 $f'(a)=12$，则实数 a 的值为________.

$\frac{1}{4}$或-4　**解析**:由题意得 $f'(x)=\begin{cases}x^2-4,x<0,\\ \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x},0<x<1.\end{cases}$

因为 $f'(a)=12$，

所以$\begin{cases}0<a<1,\\ \frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}=12\end{cases}$或$\begin{cases}a<0,\\ a^2-4=12,\end{cases}$解得 $a=\frac{1}{4}$ 或 $a=-4$.

8.已知 $f(x)=x^2+ax+b$，$g(x)=x^2+cx+d$，又 $f(2x+1)=4g(x)$，且 $f'(x)=g'(x)$，$f(5)=30$，求 $g(4)$.

解:由 $f(2x+1)=4g(x)$得

$4x^2+2(a+2)x+(a+b+1)=4x^2+4cx+4d$.

于是有 $a+2=2c$，①

$a+b+1=4d$.②

由 $f'(x)=g'(x)$得 $2x+a=2x+c$，

于是 $a=c$.③

由①③得 $a=c=2$.

此时 $f(x)=x^2+2x+b$，

由 $f(5)=30$ 得 $25+10+b=30$，

于是 $b=-5$，再由②得 $d=-\frac{1}{2}$.

从而 $g(x)=x^2+2x-\frac{1}{2}$，

故 $g(4)=16+8-\frac{1}{2}=\frac{47}{2}$.

5.2.3　简单复合函数的导数

学习任务目标

1.了解复合函数的概念.(数学抽象)
2.理解复合函数的求导法则.(数学抽象)
3.能求简单的复合函数的导数.(数学运算)

问题式预习

知识点一　复合函数的概念

一般地，对于两个函数 $y=f(u)$和 $u=g(x)$，如果通过中间变量 u，y 可以表示成 x 的函数，那么称这个函数为函数 $y=f(u)$和 $u=g(x)$的复合函数，记作$y=f(g(x))$.

[微训练]

判断(正确的打"√"，错误的打"×").

(1)函数 $y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$ 与 $u=\sin x$ 复合而成的.(√)

(2)若函数 $f(u)=2^u$，$g(x)=\ln x$，则 $f(g(x))=2^{\ln x}$.(√)

(3)若函数 $y=\ln(2x)$，则 $y'=\frac{1}{2x}$.(　　)

×　**提示**:$y'=(\ln 2+\ln x)'=\frac{1}{x}$.

(4)$y=x\cos x$ 是复合函数.(　　)

×　**提示**:$y=x\cos x$ 是两个函数的积.

知识点二　复合函数的求导法则

一般地，对于由函数 $y=f(u)$和 $u=g(x)$复合而成的函数 $y=f(g(x))$，它的导数与函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$的导数间的关系为$y'_x=y'_u\cdot u'_x$.即 y 对 x 的导数等于 y 对 u 的导数与 u 对 x 的导数的乘积.

[微训练]

1.设 $y=f(\sin x)$是可导函数，则 y'_x 等于(　　)

A.$f'(\sin x)$　　B.$f'(\sin x)\cdot\cos x$

C.$f'(\sin x)\cdot\sin x$　　D.$f'(\cos x)\cdot\cos x$

B　**解析**:$y'_x=f'(\sin x)\cdot(\sin x)'=f'(\sin x)\cdot\cos x$.

2.(多选)下列式子正确的是(　　)

A.$\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)'=-\sin\frac{\pi}{6}$　　B.$(e^{2x})'=2e^{2x}$

C.$(\sin 3x)'=3\cos x$　　D.$[\ln(-x+1)]'=\frac{1}{x-1}$

BD　**解析**:因为$\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)'=0$，$(e^{2x})'=2e^{2x}$，$(\sin 3x)'=3\cos 3x$，$[\ln(-x+1)]'=\frac{-1}{-x+1}=\frac{1}{x-1}$.所以 B，D 正确.

任务型课堂

任务一 求较复杂函数的导数

1. 函数 $y=(1-\sqrt{x})\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ 的导数为________.

$y'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ **解析**：因为 $y=(1-\sqrt{x})\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=1-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-1=x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}$，

所以 $y'=(x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}})'=(x^{-\frac{1}{2}})'-(x^{\frac{1}{2}})'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

2. 函数 $y=\frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$ 的导数为________.

$y'=\sin x-\cos x$ **解析**：因为 $y=\frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x-\cos x}=-\sin x-\cos x$，所以 $y'=(-\sin x-\cos x)'=\sin x-\cos x$.

3. 函数 $y=\frac{1}{1-\sqrt{x}}+\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ 的导数为________.

$y'=\frac{2}{(1-x)^2}$ **解析**：因为 $y=\frac{1}{1-\sqrt{x}}+\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1+\sqrt{x}}{1-x}+\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\frac{2}{1-x}$，所以 $y'=\frac{2}{(1-x)^2}$.

任务二 求复合函数的导数

[探究活动]

已知函数 $y=(3x+2)^2$.

探究 1：函数 $y=(3x+2)^2$ 是复合函数吗？它是由哪些函数复合而成的？

提示：是，由一次函数 $u=3x+2$ 和二次函数 $y=u^2$ 复合而成的.

探究 2：在上一节课中，我们怎样求函数 $y=(3x+2)^2$ 的导数？

提示：先变形，得 $y=(3x+2)^2=9x^2+12x+4$，所以 $y'=(9x^2+12x+4)'=18x+12$.

探究 3：令 $u=3x+2$，你能分别求出 $f(u)=u^2$，$g(x)=3x+2$ 的导数吗？$f'(u)\ g'(x)$ 等于多少？

提示：$f'(u)=2u=6x+4$，$g'(x)=3$. $f'(u)\ g'(x)=18x+12$.

探究 4：由上面探究 2、探究 3，你能得出什么结论？

提示：$y'=[f(g(x))]'=f'(u)\cdot g'(x)$.

[评价活动]

1.（多选）以下求导正确的是 （　　）

A. 若 $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$，则 $f'(x)=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$

B. 若 $f(x)=e^{2x}$，则 $f'(x)=e^{2x}$

C. 若 $f(x)=\sqrt{2x-1}$，则 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

D. 若 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，则 $f'(x)=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

AC **解析**：对于选项 A，$f'(x)=\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$，故 A 正确；对于选项 B，$f'(x)=e^{2x}\cdot 2=2e^{2x}$，故 B 错误；对于选项 C，$f'(x)=[(2x-1)^{\frac{1}{2}}]'=\frac{1}{2}\cdot(2x-1)^{-\frac{1}{2}}\times 2=(2x-1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$，故 C 正确；对于选项 D，$f'(x)=\left[-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right]\cdot 2=-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，故 D 错误.

2. 求下列函数的导数.

(1) $y=\left(2x^3-x+\frac{1}{x}\right)^4$；

(2) $y=\frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}$；

(3) $y=\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$；

(4) $y=x\sqrt{1+x^2}$.

解：(1) $y'=\left[\left(2x^3-x+\frac{1}{x}\right)^4\right]'$

$=4\left(2x^3-x+\frac{1}{x}\right)^3\left(2x^3-x+\frac{1}{x}\right)'$

$=4\left(2x^3-x+\frac{1}{x}\right)^3\left(6x^2-1-\frac{1}{x^2}\right)$.

(2) $y'=\left(\frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}\right)'$

$=[(1-2x^2)^{-\frac{1}{2}}]'$

$=-\frac{1}{2}(1-2x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(1-2x^2)'$

$=2x(1-2x^2)^{-\frac{3}{2}}$

$=\frac{2x}{(1-2x^2)\sqrt{1-2x^2}}$.

(3) $y'=\left[\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]'$

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left[\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]'$

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left[\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]\cdot\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)'$

$=2\sin\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)$.

(4) $y'=(x\sqrt{1+x^2})'$

$=x'\sqrt{1+x^2}+x(\sqrt{1+x^2})'$

$=\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

$=\frac{(1+2x^2)\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}$.

【类题通法】

1. 求复合函数的导数的步骤：

分层	选择中间变量，写出构成它的内、外层函数
↓ 分别求导	分别求各层函数对相应变量的导数
↓ 相乘	把上述求导的结果相乘
↓ 变量回代	把中间变量回代

2. 求复合函数的导数时应注意的几点：

(1)分解的函数通常为基本初等函数；

(2)求导时分清是对哪个变量求导；

(3)计算结果尽量简洁.

任务三　复合函数求导数运算的应用

[探究活动]

探究1： 函数 $y=\sin 2x$ 的图象在点 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 处的切线的斜率是多少？

提示： 因为 $y'=(\sin 2x)'=2\cos 2x$，

所以 $k=y'|_{x=\frac{\pi}{6}}=2\cos\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)=1$.

探究2： 已知 P 为曲线 $y=e^{-x}$ 上一点，若曲线在点 P 处切线的斜率为 -2，则点 P 的坐标是多少？

提示： 设点 P 坐标为 (x_0,y_0)，又 $y'=-e^{-x}$，所以 $y'|_{x=x_0}=-e^{-x_0}=-2$，

解得 $x_0=-\ln 2$，则 $y_0=2$，所以 $P(-\ln 2,2)$.

[评价活动]

1. 已知 $f(x)=\ln(2x+1)-ax$，且 $f'(2)=-1$，则 $a=$ (　　)

A. $\frac{7}{5}$　　B. $\frac{6}{5}$　　C. $-\frac{3}{5}$　　D. $-\frac{4}{5}$

A　**解析：** 因为 $f(x)=\ln(2x+1)-ax$，

所以 $f'(x)=\frac{2}{2x+1}-a$. 所以 $f'(2)=\frac{2}{2\times2+1}-a=-1$，解得 $a=\frac{7}{5}$. 故选 A.

2. (多选)若直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条切线，则函数的解析式可以是 (　　)

A. $f(x)=\frac{1}{x}$　　B. $f(x)=x^4$

C. $f(x)=\sin\frac{1}{2}x$　　D. $f(x)=e^{2x}$

BCD　**解析：** 直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 的斜率为 $k=\frac{1}{2}$.

由 $f(x)=\frac{1}{x}$，得 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$，方程 $-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{2}$ 无解，故 A 不正确；

由 $f(x)=x^4$，得 $f'(x)=4x^3$，令 $4x^3=\frac{1}{2}$，解得 $x=\frac{1}{2}$，故 B 正确；

由 $f(x)=\sin\frac{1}{2}x$，得 $f'(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}x$，方程 $\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}$ 有解，故 C 正确；

由 $f(x)=e^{2x}$，得 $f'(x)=2e^{2x}$，令 $2e^{2x}=\frac{1}{2}$，解得 $x=-\ln 2$，故 D 正确. 故选 BCD.

3. 曲线 $y=f(x)=e^{\sin x}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与直线 l 平行，且切线与直线 l 的距离为 $\sqrt{2}$，则直线 l 的方程为__________.

$x-y+3=0$ 或 $x-y-1=0$　**解析：** 设 $u=\sin x$，

则 $f'(x)=(e^{\sin x})'=(e^u)'(\sin x)'=\cos x\,e^{\sin x}$，

所以 $f'(0)=1$.

则切线方程为 $y-1=x-0$，即 $x-y+1=0$.

由直线 l 与切线平行可设直线 l 的方程为 $x-y+c=0$.

两平行线间的距离 $d=\frac{|c-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Rightarrow c=3$ 或 $c=-1$.

故直线 l 的方程为 $x-y+3=0$ 或 $x-y-1=0$.

【类题通法】

1. 求切线方程的关键要素为切点，若切点已知便直接使用，若切点未知则需先设再求. 两直线平行与垂直的关系与直线的斜率密切相关，是求解出切点横坐标的关键条件.

2. 利用导数求参数的问题，能较全面地考查导数的应用，突出导数的工具性作用. 解决此类问题时要认清函数解析式的结构特点并准确使用求导法则，然后列方程求解.

提质归纳

导数的运算	较复杂函数的导数	应用
	简单复合函数的导数	

课后素养评价(十七)

基础性·能力运用

1.(多选)下列函数可以看成是复合函数的是 ( )

A.$y=x\cos x$　　B.$y=\dfrac{1}{\ln x}$

C.$y=(2x+3)^4$　　D.$y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$

BCD　**解析**:A中的函数是两函数积的形式,不是复合函数,B,C,D中的函数均为复合函数.

2.函数 $y=\sin 2x-\cos 2x$ 的导数是 $y'=$ ( )

A.$2\sqrt{2}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$　　B.$\cos 2x+\sin x$

C.$\cos 2x-\sin 2x$　　D.$2\sqrt{2}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

A　**解析**:$y'=2\cos 2x+2\sin 2x=2\sqrt{2}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

3.函数 $y=\dfrac{1}{(3x-1)^2}$ 的导数是 $y'=$ ( )

A.$\dfrac{6}{(3x-1)^3}$　　B.$\dfrac{6}{(3x-1)^2}$

C.$-\dfrac{6}{(3x-1)^3}$　　D.$-\dfrac{6}{(3x-1)^2}$

C　**解析**:因为 $y=\dfrac{1}{(3x-1)^2}=(3x-1)^{-2}$,

所以 $y'=-2(3x-1)^{-3}\cdot(3x-1)'=\dfrac{-6}{(3x-1)^3}$.故选C.

4.函数 $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ 的导数是 $y'=$ ( )

A.$\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

B.$\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

C.e^x-e^{-x}

D.e^x+e^{-x}

A　**解析**:$y'=\left(\dfrac{1}{2}e^x\right)'+\left(\dfrac{1}{2}e^{-x}\right)'=\dfrac{1}{2}e^x-\dfrac{1}{2}e^{-x}=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.

5.函数 $y=x\ln(2x+5)$ 的导数为 $y'=$ ( )

A.$\ln(2x+5)-\dfrac{x}{2x+5}$

B.$\ln(2x+5)+\dfrac{2x}{2x+5}$

C.$2x\ln(2x+5)$

D.$\dfrac{x}{2x+5}$

B　**解析**:$y'=x'\cdot\ln(2x+5)+x\cdot[\ln(2x+5)]'=\ln(2x+5)+x\cdot\dfrac{1}{2x+5}\cdot(2x+5)'=\ln(2x+5)+\dfrac{2x}{2x+5}$.

6.曲线 $f(x)=x+e^{2x}$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线的方程为 ( )

A.$y=2x$　　B.$y=2x+1$

C.$y=3x$　　D.$y=3x+1$

D　**解析**:因为 $f(x)=x+e^{2x}$,

所以 $f'(x)=1+2e^{2x}$,所以 $f'(0)=1+2=3$.

又 $f(0)=1$,所以曲线 $f(x)=x+e^{2x}$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线的方程为 $y=3x+1$.

故选D.

7.已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-ax+bx^2$,曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的方程为 $3x-2y+2\ln 2-3=0$,则 $a+b=$________.

2　**解析**:因为 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-a+2bx$.

又因为直线 $3x-2y+2\ln 2-3=0$ 的斜率为 $\dfrac{3}{2}$,且直线过点 $(1,\ln 2)$,即切点为 $(1,\ln 2)$,所以 $\begin{cases}f(1)=\ln 2,\\ f'(1)=\dfrac{3}{2},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}b-a=0,\\ 2b-a=1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=1,\end{cases}$ 所以 $a+b=2$.

故答案为2.

8.求下列函数的导数.

(1)$y=x-\sin\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}$;

(2)$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot\cos x$.

解:(1)因为 $y=x-\sin\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}=x-\dfrac{1}{2}\sin x$,

所以 $y'=1-\dfrac{1}{2}\cos x$.

(2)$y'=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot\cos x\right)'=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'\cos x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}(\cos x)'$

$=(x^{-\frac{1}{2}})'\cos x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\sin x=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\cos x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\sin x$

$=-\dfrac{\cos x}{2\sqrt{x^3}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\sin x=-\dfrac{\cos x+2x\sin x}{2x\sqrt{x}}$.

综合性·创新提升

1. 已知函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$，则其导函数 $f'(x)$ 是　（　　）

A. 最小正周期为 2π 的奇函数

B. 最小正周期为 2π 的偶函数

C. 最小正周期为 π 的偶函数

D. 最小正周期为 π 的奇函数

D　**解析**：$f'(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin 2x$，最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，且为奇函数.

2. 函数 $f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$ 的导数为　（　　）

A. $f'(x)=5\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$

B. $f'(x)=5\left(x+\frac{1}{x}\right)^4\left(1+\frac{1}{x}\right)$

C. $f'(x)=5\left(x+\frac{1}{x}\right)^4\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

D. $f'(x)=5\left(x+\frac{1}{x}\right)^4\left(x+\frac{1}{x}\right)$

C　**解析**：$f'(x)=5\left(x+\frac{1}{x}\right)^4\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)'=5\left(x+\frac{1}{x}\right)^4\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$.

3.（多选）下列命题正确的是　（　　）

A. 若 $f(x)=x\sin x+\cos 2x$，则 $f'(x)=\sin x-x\cos x+2\sin 2x$

B. 设函数 $f(x)=x\ln x$，若 $f'(x_0)=2$，则 $x_0=\mathrm{e}$

C. 已知函数 $f(x)=3x^2\mathrm{e}^{2x}$，则 $f'(1)=12\mathrm{e}$

D. 设函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且 $f(x)=x^2+3xf'(2)+\ln x$，则 $f'(2)=-\frac{9}{4}$

BD　**解析**：对 A，$f'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin 2x$，故 A 错误；

对 B，$f'(x)=\ln x+1\Rightarrow f'(x_0)=\ln x_0+1=2\Rightarrow x_0=\mathrm{e}$，故 B 正确；

对 C，$f(x)=3x^2\mathrm{e}^{2x}\Rightarrow f'(x)=6x\mathrm{e}^{2x}+6x^2\mathrm{e}^{2x}\Rightarrow f'(1)=12\mathrm{e}^2$，故 C 错误；

对 D，$f(x)=x^2+3xf'(2)+\ln x\Rightarrow f'(x)=2x+3f'(2)+\frac{1}{x}\Rightarrow f'(2)=-\frac{9}{4}$，故 D 正确.

4. 点 P 在曲线 $y=x^3-x+\frac{2}{3}$ 上，设曲线在点 P 处的切线的倾斜角为 α，则 α 的取值范围是　（　　）

A. $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$　　B. $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

C. $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$　　D. $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$

B　**解析**：因为 $y'=3x^2-1\geqslant-1$，所以 $\tan\alpha\geqslant-1$. 因为 $\alpha\in[0,\pi)$，所以 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$.

5. 若函数 $f(x)=3^x+\sin 2x$，则 $f'(x)=$________.

$3^x\ln 3+2\cos 2x$　**解析**：$f'(x)=(3^x)'+(\sin 2x)'=3^x\ln 3+(2x)'\cdot\cos 2x=3^x\ln 3+2\cos 2x$.

6. 曲线 $y=f(x)=(2x-2)^3$ 在点 $(2,8)$ 处的切线与 x 轴、直线 $x=2$ 所围成的三角形的面积是________.

$\frac{4}{3}$　**解析**：$f'(x)=6(2x-2)^2$，所以 $f'(2)=6\times(4-2)^2=24$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,8)$ 处的切线的方程为 $y-8=24(x-2)$，即 $24x-y-40=0$.

所以切线与 x 轴的交点是 $\left(\frac{5}{3},0\right)$，与直线 $x=2$ 的交点是 $(2,8)$，

所围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times\left|2-\frac{5}{3}\right|\times 8=\frac{4}{3}$.

7. 若曲线 $y=f(x)=x\mathrm{e}^{a-x}+bx$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线的方程为 $y=(\mathrm{e}-1)x+4$，则 $a=$________，$b=$________.

2　e　**解析**：因为 $f(x)=x\mathrm{e}^{a-x}+bx$，

所以 $f'(x)=(1-x)\mathrm{e}^{a-x}+b$，

又因为曲线在点 $(2,f(2))$ 处的切线的方程为 $y=(\mathrm{e}-1)x+4$，

所以 $f'(2)=(1-2)\mathrm{e}^{a-2}+b=\mathrm{e}-1$，且 $2(\mathrm{e}-1)+4=2\mathrm{e}^{a-2}+2b$，

解得 $b=\mathrm{e}$，$a=2$.

8. 求函数 $y=\ln(2x+3)$ 的导数，并求曲线 $y=\ln(2x+3)$ 在点 $\left(-\frac{1}{2},\ln 2\right)$ 处的切线的倾斜角.

解：令 $y=\ln u$，$u=2x+3$，

则 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=(\ln u)'\cdot(2x+3)'=\frac{1}{u}\cdot 2=\frac{2}{2x+3}$.

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$y'_x=\frac{2}{3-1}=1$，即曲线在点 $\left(-\frac{1}{2},\ln 2\right)$ 处的切线的倾斜角的正切值为 1，所以倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$.

易错强化练（三）

练易错

易错点1｜ 混淆曲线"在某点"与"过某点"的切线

[防范要诀]

曲线"在某点"处的切线是以该点为切点的直线，只有一条；"过某点"的切线，该点一定在切线上，但不一定在曲线上，这样的切线可能不止一条.

[对点集训]

1.（多选）曲线 $C:y=x\cdot e^x$ 过点 $A(a,0)$ 的切线有且仅有两条，则实数 a 的值可能是（　　）

A.0　　B.$\sqrt{2}$

C.$-\ln e^5$　　D.e

BCD　**解析**：设切点坐标为 $(x_0,x_0e^{x_0})$，因为 $y'=(x+1)e^x$，所以 $y'|_{x=x_0}=(x_0+1)e^{x_0}$，所以切线方程为 $y-x_0e^{x_0}=(x_0+1)e^{x_0}(x-x_0)$.将 $A(a,0)$ 代入可得 $-x_0e^{x_0}=(x_0+1)e^{x_0}(a-x_0)$，化简得 $x_0^2-ax_0-a=0$.曲线 C 过点 $A(a,0)$ 的切线有且仅有两条，即方程 $x_0^2-ax_0-a=0$ 有两个不同的解，则 $\Delta=a^2+4a>0$，解得 $a>0$ 或 $a<-4$，故实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$.

$-\ln e^5=-5\ln e=-5$，所以对选项逐一判断可知B，C，D正确.

2.若存在过点(1,0)的直线与曲线 $y=x^3$ 和 $y=ax^2+\frac{15}{4}x-9$ 都相切，则 a 等于（　　）

A.-1 或 $-\frac{25}{64}$　　B.-1 或 $\frac{21}{4}$

C.$-\frac{7}{4}$ 或 $-\frac{25}{64}$　　D.$-\frac{7}{4}$ 或 $\frac{21}{4}$

A　**解析**：设过(1,0)的直线与 $y=x^3$ 相切于点 (x_0,x_0^3)，所以切线方程为 $y-x_0^3=3x_0^2(x-x_0)$，即 $y=3x_0^2x-2x_0^3$.

又点(1,0)在切线上，则 $x_0=0$ 或 $x_0=\frac{3}{2}$.

当 $x_0=0$ 时，由直线 $y=0$ 与曲线 $y=ax^2+\frac{15}{4}x-9$ 相切可得 $a=-\frac{25}{64}$.

当 $x_0=\frac{3}{2}$ 时，由直线 $y=\frac{27}{4}x-\frac{27}{4}$ 与曲线 $y=ax^2+\frac{15}{4}x-9$ 相切可得 $a=-1$.所以选A.

易错点2｜ 用错导数公式或运算法则

[防范要诀]

1.幂函数 $y=x^\alpha$ 与指数函数 $y=a^x$ 的形式相近，导数公式却有很大区别，解题时易混淆导致计算错误.

2.两个函数的乘积和商的导数的运算法则形式较特别，使用时一定记清形式与符号，以免出错.

[对点集训]

3.若 $f'(x)=\frac{1}{x^2}$，则函数 $f(x)$ 可以是（　　）

A.$\frac{x-1}{x}$　　B.$\frac{1}{x}$

C.$\frac{1}{3}x^{-3}$　　D.$\ln x$

A　**解析**：$\left(\frac{x-1}{x}\right)'=\frac{(x-1)'x-(x-1)x'}{x^2}=\frac{1}{x^2}$；$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$；$\left(\frac{1}{3}x^{-3}\right)'=-x^{-4}$；$(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

4.曲线 $y=xe^{x-1}$ 在点(1,1)处的切线的斜率等于（　　）

A.2e　　B.e　　C.2　　D.1

C　**解析**：由题意可得 $y'=e^{x-1}+xe^{x-1}$，所以曲线在点(1,1)处的切线的斜率等于 $y'|_{x=1}=e^0+e^0=2$.故选C.

5.函数 $f(x)=\frac{f'(1)}{x+1}+\ln x$ 的图象在点 $(2,f(2))$ 处的切线的斜率为（　　）

A.$\frac{4}{5}$　　B.$-\frac{4}{45}$　　C.$\frac{5}{9}$　　D.$\frac{37}{90}$

D　**解析**：因为 $f'(x)=-\frac{f'(1)}{(x+1)^2}+\frac{1}{x}$，

所以 $f'(1)=-\frac{f'(1)}{4}+1$，解得 $f'(1)=\frac{4}{5}$，

则 $f'(2)=-\frac{f'(1)}{9}+\frac{1}{2}=\frac{37}{90}$，即函数图象在 $(2,f(2))$ 处的切线的斜率为 $\frac{37}{90}$.故选D.

易错点3｜ 对复合函数求导时因层次不清致误

[防范要诀]

1.对较复杂的函数求导时，先判断该函数是否为复合函数.

2.若一个函数是复合函数，求导时要先明确函数的构成，分清内层函数和外层函数，合理换元.

[对点集训]

6.设函数 $f(x)=(1-2x^3)^{10}$，则 $f'(1)$ 等于（　　）

A.0　　B.60

C.-1　　D.-60

B　**解析**：因为 $f'(x)=10(1-2x^3)^9\cdot(1-2x^3)'=10(1-2x^3)^9\cdot(-6x^2)=-60x^2(1-2x^3)^9$，

所以 $f'(1)=-60\times1^2\times(1-2\times1^3)^9=60$.

7.（多选）下列结论不正确的是（　　）

A.若 $y=\cos\frac{1}{x}$，则 $y'=-\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$

B.若 $y=\sin x^2$，则 $y'=2x\cos x^2$

C.若 $y=\cos 5x$，则 $y'=-\sin 5x$

D.若 $y=\frac{1}{2}x\sin 2x$，则 $y'=x\sin 2x$

ACD　**解析**：对于 A，$y=\cos\frac{1}{x}$，则 $y'=\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$，故 A 错误；对于 B，$y=\sin x^2$，则 $y'=2x\cos x^2$，故 B 正确；对于 C，$y=\cos 5x$，则 $y'=-5\sin 5x$，故 C 错误；对于 D，$y=\frac{1}{2}x\sin 2x$，则 $y'=\frac{1}{2}\sin 2x+x\cos 2x$，故 D 错误.

练疑难

1.函数 $f(x)=2x^2+3$ 在下列区间上的平均变化率最大的是　　(　　)

A.$[1,1.5]$　　B.$[1,2]$

C.$[1,3]$　　D.$[1,1.05]$

C　**解析**：平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=4x_0+2\Delta x$，把数据代入可知选 C.

2.运动物体的位移 s 与时间 t 的关系式为 $s=3t^2-2t+1$，则此物体在 $t=10$ 时的瞬时速度为　　(　　)

A.281　　B.58　　C.85　　D.10

B　**解析**：因为 $s'=6t-2$，当 $t=10$ 时，$s'=6\times10-2=58$.

3.若曲线 $y=x^4$ 的一条切线 l 与直线 $x+4y-8=0$ 垂直，则 l 的方程为　　(　　)

A.$4x-y-3=0$

B.$x+4y-5=0$

C.$4x-y+3=0$

D.$x+4y+3=0$

A　**解析**：因为 l 与直线 $x+4y-8=0$ 垂直，所以直线 l 的斜率 $k_l=4$.

因为 $y'=4x^3$，令 $4x^3=4$ 得 $x=1$，所以切点为 $(1,1)$，

所以切线方程为 $y-1=4(x-1)$，即 $4x-y-3=0$.

4.(多选)若以曲线 $y=f(x)$ 上任意一点 $M(x,y)$ 为切点作切线 l，曲线上总存在异于点 M 的点 $N(x',y')$，使得曲线以点 N 为切点的切线 l' 满足 $l/\!/l'$，则称曲线 $y=f(x)$ 具有“可平行性”，下列曲线具有“可平行性”的是　　(　　)

A.$y=x+\frac{1}{x}$

B.$y=x^3-x$

C.$y=\sin x$

D.$y=(x-2)^2+\ln x$

AC　**解析**：由题意得，曲线具有“可平行性”的条件是方程 $y'=a$(a 是导数值)至少有两个根.对于 A，令 $y'=1-\frac{1}{x^2}=a(x\neq0$ 且 $a\neq1)$，即 $\frac{1}{x^2}=1-a$，此方程有两个不同的实根，符合题意；对于 B，由 $y'=3x^2-1$ 知，当 $y'=-1$时，x 的取值唯一，只有 0，不符合题意；对于 C，由 $y'=\cos x$ 和三角函数的周期性知，$\cos x=a(-1\leqslant a\leqslant1)$ 的解有无穷多个，符合题意；对于 D，$y'=2x-4+\frac{1}{x}(x>0)$，令 $2x-4+\frac{1}{x}=a$，则有 $2x^2-(4+a)x+1=0$，当 $\Delta=0$ 时，解唯一，不符合题意.故选 AC.

5.已知函数 $f(x)=e^{-x-2}\cdot(2x+1)^4$，则 $f'(0)=$　　(　　)

A.e^{-2}　　B.1　　C.$7e^{-2}$　　D.$9e^{-2}$

C　**解析**：$(e^{-x-2})'=-e^{-x-2}$，$[(2x+1)^4]'=8(2x+1)^3$，$f'(x)=-e^{-x-2}\cdot(2x+1)^4+e^{-x-2}\cdot8(2x+1)^3$.

所以 $f'(0)=-e^{-2}+8e^{-2}=7e^{-2}$.故选 C.

6.已知点 P 在曲线 $y=\frac{4}{e^x+1}$ 上，α 为曲线在点 P 处的切线的倾斜角，则 α 的取值范围是　　(　　)

A.$\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$　　B.$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

C.$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$　　D.$\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

D　**解析**：因为 $y'=\frac{-4e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{-4}{e^x+2+\frac{1}{e^x}}\geqslant-1$，当且仅当 $e^x=1$ 时等号成立，且 $y'<0$，即 $-1\leqslant\tan\alpha<0$，所以 $\frac{3\pi}{4}\leqslant\alpha<\pi$.

7.已知函数 $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}$，则 $f'(2)=$________.

$\frac{2-3\ln 3}{12}$　**解析**：由 $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$，

所以 $f'(2)=\frac{2-(2+1)\ln(2+1)}{2^2\cdot(2+1)}=\frac{2-3\ln 3}{12}$.

8.已知函数 $f(x)=e^{\pi x}\sin\pi x$，则 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=$________.

$\pi e^{\frac{\pi}{2}}$　**解析**：因为 $f'(x)=\pi e^{\pi x}\sin\pi x+\pi e^{\pi x}\cos\pi x=\pi e^{\pi x}(\sin\pi x+\cos\pi x)$，

所以 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\pi e^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right)=\pi e^{\frac{\pi}{2}}$.

9.曲线 $f(x)=x^2-3x$ 在点 P 处的切线平行于 x 轴，则点 P 的坐标为________.

$\left(\frac{3}{2},-\frac{9}{4}\right)$　**解析**：根据题意可设切点为 $P(x_0,y_0)$，$f'(x)=2x-3$，令 $f'(x_0)=0$，即 $2x_0-3=0$，得 $x_0=\frac{3}{2}$，代入曲线方程得 $y_0=-\frac{9}{4}$，

所以点 P 的坐标为 $\left(\frac{3}{2},-\frac{9}{4}\right)$.

10.已知曲线 $y=x+\ln x$ 在点(1,1)处的切线与曲线 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 相切,求 a 的值.

解:因为 $y'=1+\dfrac{1}{x}$,$y'|_{x=1}=2$,

所以曲线 $y=x+\ln x$ 在点(1,1)处的切线的方程为

$y-1=2(x-1)$,即 $y=2x-1$.

又因为直线 $y=2x-1$ 与曲线 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 相切,

所以 $a\neq0$(当 $a=0$ 时,曲线变为直线 $y=2x+1$,与直线 $y=2x-1$ 平行).

由 $\begin{cases}y=2x-1,\\y=ax^2+(a+2)x+1,\end{cases}$ 消去 y 得 $ax^2+ax+2=0$.

由 $\Delta=a^2-8a=0$ 得 $a=8$.

11.已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

(1)曲线 $y=f(x)$在点 P 处的切线与直线 $y=4x-5$ 互相垂直,求点 P 的坐标;

(2)过点 $Q(-1,3)$作曲线 $y=f(x)$的切线,求此切线的方程.

解:(1)因为 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,所以 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

设 $P\left(x_0,\dfrac{1}{x_0}\right)$,

因为曲线 $y=f(x)$在点 P 处的切线与直线 $y=4x-5$ 互相垂直,

所以 $f'(x_0)=-\dfrac{1}{x_0^2}=-\dfrac{1}{4}$,解得 $x_0=\pm2$,

所以 $P\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$或 $P\left(-2,-\dfrac{1}{2}\right)$.

(2)过点 $Q(-1,3)$作曲线 $y=f(x)$的切线,设切点为$\left(x_1,\dfrac{1}{x_1}\right)$,

则 $f'(x_1)=-\dfrac{1}{x_1^2}$,

切线方程为 $y=-\dfrac{1}{x_1^2}(x-x_1)+\dfrac{1}{x_1}=-\dfrac{1}{x_1^2}x+\dfrac{2}{x_1}$.

将点 $Q(-1,3)$的坐标代入,得 $3=\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{2}{x_1}$,解得 $x_1=-\dfrac{1}{3}$或 $x_1=1$,则切线方程为 $y=-9x-6$ 或 $y=-x+2$.

12.设函数 $f(x)=ax-\dfrac{b}{x}$,曲线 $y=f(x)$在点$(2,f(2))$处的切线的方程为$7x-4y-12=0$.

(1)求 $f(x)$的解析式;

(2)证明曲线 $y=f(x)$上任一点处的切线与直线 $x=0$ 和 $y=x$ 所围成的三角形的面积为定值,并求此定值.

解:(1)方程 $7x-4y-12=0$ 可化为 $y=\dfrac{7}{4}x-3$.

当 $x=2$ 时,$y=\dfrac{1}{2}$.又 $f'(x)=a+\dfrac{b}{x^2}$,

于是$\begin{cases}2a-\dfrac{b}{2}=\dfrac{1}{2},\\a+\dfrac{b}{4}=\dfrac{7}{4},\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=1,\\b=3.\end{cases}$

故 $f(x)=x-\dfrac{3}{x}$.

(2)设点 $P(x_0,y_0)$为曲线上任一点,

由 $f'(x)=1+\dfrac{3}{x^2}$知曲线 $y=f(x)$在点 $P(x_0,y_0)$处的切线的方程为 $y-y_0=\left(1+\dfrac{3}{x_0^2}\right)(x-x_0)$,

即 $y-\left(x_0-\dfrac{3}{x_0}\right)=\left(1+\dfrac{3}{x_0^2}\right)(x-x_0)$.

令 $x=0$,得 $y=-\dfrac{6}{x_0}$,

从而得切线与直线 $x=0$ 的交点坐标为$\left(0,-\dfrac{6}{x_0}\right)$.

令 $y=x$,得 $y=x=2x_0$,

从而得切线与直线 $y=x$ 的交点坐标为$(2x_0,2x_0)$.

所以曲线在点 $P(x_0,y_0)$处的切线与直线 $x=0$ 和 $y=x$ 所围成的三角形的面积为 $\dfrac{1}{2}\cdot\left|-\dfrac{6}{x_0}\right|\cdot|2x_0|=6$.

故曲线 $y=f(x)$上任一点处的切线与直线 $x=0$ 和$y=x$ 所围成的三角形的面积为定值,此定值为 6.

5.3　导数在研究函数中的应用

5.3.1　函数的单调性

第1课时　函数的单调性

学习任务目标

1.结合实例，借助图象直观了解函数的单调性与导数的关系.(直观想象)

2.能利用导数研究函数的单调性.(数学运算)

3.能求不超过三次的多项式函数的单调区间.(数学运算)

问题式预习

知识点　函数的单调性与导数

在某个区间(a,b)内，如果$f'(x)>0$，那么函数$y=f(x)$在区间(a,b)内单调递增；

在某个区间(a,b)内，如果$f'(x)<0$，那么函数$y=f(x)$在区间(a,b)内单调递减.

[微训练]

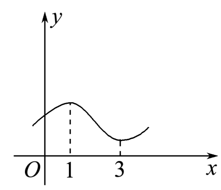
1.判断(正确的打"√"，错误的打"×").

(1)对于函数$y=f(x)$，在区间I上，若$f'(x)<0$，则$f(x)$在I上单调递减.　(√)

(2)对于函数$y=f(x)$，在区间I上，若$f(x)$是单调递增的，则$f'(x)>0$.　(　)

×　**提示**：$f'(x)=0$也有可能，如$y=x^3$.

2.函数$y=f(x)$的图象如图所示，则在区间$(1,3)$内，有　(　)



A.$f'(x)>0$　　B.$f'(x)<0$

C.$f'(x)=0$　　D.$f'(x)$的符号不确定

B　**解析**：在区间$(1,3)$内，函数$y=f(x)$的图象是下降的，函数单调递减，所以$f'(x)<0$.

任务型课堂

任务一　由图象理解导数的正负与函数的单调性

[探究活动]

已知下列A，B两组函数：

A：(1)$y=2x-1$，(2)$y=2^x$，(3)$y=x^3$；

B：(1)$y=-3x$，(2)$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$，(3)$y=\frac{1}{x}(x>0)$.

探究1：A，B两组中的函数分别是增函数还是减函数？

提示：A组中的函数都是增函数，B组中的函数都是减函数.

探究2：计算两组函数的导数，你能判断导数的正负吗？

提示：A组：(1)$y'=2>0$，(2)$y'=2^x\ln 2>0$，(3)$y'=3x^2\geqslant 0$.

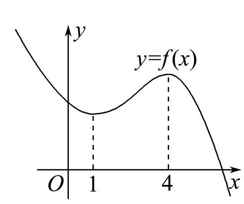
B组：(1)$y'=-3<0$，(2)$y'=\left(\frac{1}{3}\right)^x\ln\frac{1}{3}<0$，(3)$y'=-\frac{1}{x^2}<0$.

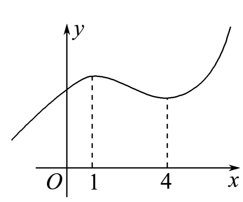
探究3：结合探究1、探究2的结论，你有何猜想？

提示：导数的正负决定函数的单调性.

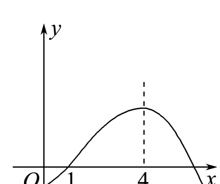
[评价活动]

1.设函数$f(x)$的图象如图所示，则导函数$f'(x)$的图象可能为　(　)

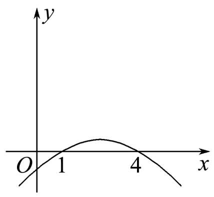




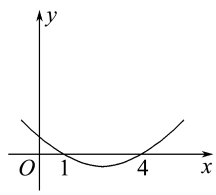
A



B



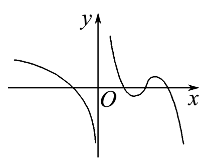
C

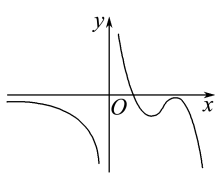


D

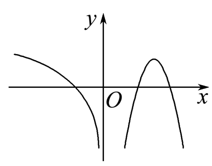
C　**解析**：因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$，$(4,+\infty)$ 上单调递减，在 $(1,4)$ 上单调递增，所以当 $x<1$ 或 $x>4$ 时，$f'(x)<0$，当 $1<x<4$ 时，$f'(x)>0$.故选 C.

2. 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导，$y=f(x)$ 的图象如图所示，则导函数 $y=f'(x)$ 的图象可能为　(　　)

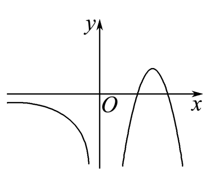




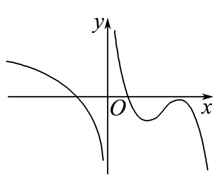
A



B



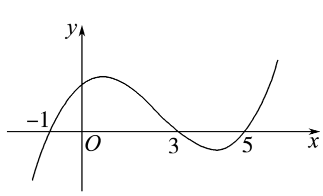
C



D

C　**解析**：由图可知，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，所以 $y=f'(x)<0$ 在 $(-\infty,0)$ 上恒成立，排除选项 B 和 D；函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上先单调递减，后单调递增，再单调递减，所以 $y=f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上应先为负，后为正，再为负，即选项 A 错误，C 正确.故选 C.

3.（多选）已知函数 $f(x)$ 的导函数的图象如图所示，则　(　　)



A.函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增

B.函数 $y=f(x)$ 在 $(5,+\infty)$ 上单调递增

C.$f'(3)<f'(5)$

D.$f(-1)<f(3)$

BD　**解析**：当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)<0$，则函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，故 A 错误；同理，函数 $y=f(x)$ 在 $(5,+\infty)$ 上单调递增，故 B 正确；由题图可知，$f'(3)=f'(5)=0$，故 C 错误；函数 $y=f(x)$ 在 $[-1,3]$ 上单调递增，则 $f(-1)<f(3)$，故 D 正确.故选 BD.

任务二　利用导数判断函数的单调性或求单调区间

[探究活动]

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}(x>0$ 且 $x\neq1)$.

探究 1：求出该函数的导数.

提示：$f'(x)=-\dfrac{\ln x+1}{(x\ln x)^2}$.

探究 2：当 x 取何值时，$f'(x)>0$？当 x 取何值时，$f'(x)<0$？

提示：$f'(x)=-\dfrac{\ln x+1}{(x\ln x)^2}$，令 $f'(x)>0$，即 $\ln x+1<0$，所以 $0<x<\dfrac{1}{e}$；令 $f'(x)<0$，得 $x>\dfrac{1}{e}$ 且 $x\neq1$.

探究 3：函数 $f(x)$ 的单调递增区间、单调递减区间分别是什么？

提示：由探究 2，得 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$；单调递减区间为 $\left(\dfrac{1}{e},1\right)$，$(1,+\infty)$.

[评价活动]

1. 函数 $y=x+\ln x$ 的单调递增区间为　(　　)

A.$(0,+\infty)$

B.$(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$

C.$(-1,0)$

D.$(-1,1)$

A　**解析**：函数 $y=x+\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

因为 $y'=(x+\ln x)'=1+\dfrac{1}{x}$，

又 $x>0$，所以 $y'>0$ 恒成立.

所以 $y=x+\ln x$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$.

2.（多选）下列选项中，在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增的函数有　(　　)

A.$f(x)=x^4$

B.$f(x)=x-\sin x$

C.$f(x)=xe^x$

D.$f(x)=e^x-e^{-x}-2x$

BD　**解析**：对于 A 选项，由 $f(x)=x^4$ 得 $f'(x)=4x^3$，当 $x>0$ 时，$f'(x)=4x^3>0$，则 $f(x)$ 单调递增；当 $x<0$ 时，$f'(x)=4x^3<0$，则 $f(x)$ 单调递减，故排除 A.对于 B 选项，由 $f(x)=x-\sin x$ 得 $f'(x)=1-\cos x\geqslant0$，显然 $f'(x)\geqslant0$ 恒成立且 $f'(x)$ 不恒为零，所以 $f(x)=x-\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，故 B 满足题意.对于 C 选项，由

$f(x)=xe^x$ 得 $f'(x)=(1+x)e^x$，当 $x>-1$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增；当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减，故排除 C. 对于 D 选项，由 $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$，得 $f'(x)=e^x+e^{-x}-2\geqslant 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2=0$，显然 $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立且 $f'(x)$ 不恒为零，所以 $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，故 D 满足题意. 故选 BD.

3. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2+(2-a)x$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

解：$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-2ax+(2-a)=\dfrac{-(2x+1)(ax-1)}{x}$.

①若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

②若 $a>0$，由 $f'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{1}{a}$，则当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减.

【类题通法】

利用导数求函数 $f(x)$ 的单调区间的关注点

(1)应先确定函数的定义域，忽视定义域研究单调性与单调区间是无意义的.

(2)实质上是转化为解不等式 $f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$，不等式的解集就是函数的单调区间.

(3)如果函数的单调区间不唯一，中间应用“,”或“和”隔开，不可用“∪”连接.

任务三　由函数的单调性求参数的范围

1. 已知函数 $f(x)=2x^2-\ln x$，若 $f(x)$ 在区间 $(2m,m+1)$ 上单调递增，求 m 的取值范围.

解：$f(x)=2x^2-\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=4x-\dfrac{1}{x}$.

由 $f'(x)>0$，得 $4x-\dfrac{1}{x}>0$，解得 $x>\dfrac{1}{2}$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

因为 $f(x)$ 在区间 $(2m,m+1)$ 上单调递增，所以 $(2m,m+1)\subseteq\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

所以 $\begin{cases}m+1>2m,\\ 2m\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$

解得 $\dfrac{1}{4}\leqslant m<1$.

因此，实数 m 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{4},1\right)$.

2. 已知函数 $f(x)=2ax-\dfrac{1}{x^2}$，$x\in(0,1]$，若 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，求实数 a 的取值范围.

解：由已知得 $f'(x)=2a+\dfrac{2}{x^3}$.

因为 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，

所以 $f'(x)\geqslant 0$，即 $a\geqslant-\dfrac{1}{x^3}$ 在 $x\in(0,1]$ 时恒成立.

令 $g(x)=-\dfrac{1}{x^3}$，而 $g(x)=-\dfrac{1}{x^3}$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，

所以 $g(x)_{\max}=g(1)=-1$，所以 $a\geqslant-1$.

当 $a=-1$ 时，$f'(x)=-2+\dfrac{2}{x^3}$，

对 $x\in(0,1]$ 也有 $f'(x)\geqslant 0$，所以 $a=-1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增时，实数 a 的取值范围是 $[-1,+\infty)$.

【类题通法】

已知函数单调性求参数取值范围的方法

(1)若参数在函数解析式中，则可转化为不等式恒成立问题求解. 一般地，函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递增(递减)等价于不等式 $f'(x)\geqslant 0$ $(f'(x)\leqslant 0)$ 在区间 $[a,b]$ 上恒成立，然后可借助分离参数等多种方法求出参数的取值范围.

特别注意，得到参数的取值范围后，要验证等号是否成立.

(2)若参数在表示区间端点的式子中，则可以先求出函数的单调区间，再令给定区间是函数相应单调区间的子区间，建立关于参数的不等式，从而求出参数的取值范围.

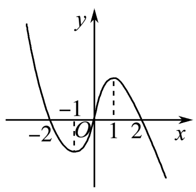
提质归纳

- 函数的单调性
  - 函数与导数图象间的关系
  - 应用
    - 判断函数的单调性
    - 求函数的单调区间
    - 借助单调性求参数(范围)

课后素养评价（十八）

基础性·能力运用

1. 如图所示，已知 $y=f'(x)$ 的图象，则函数 $y=f(x)$ 的单调递减区间是（　　）



A. $(-\infty,-1)$

B. $(-2,0)$

C. $(-2,0)$，$(2,+\infty)$

D. $(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$

C　**解析**：由导函数图象知，当 $-2<x<0$ 或 $x>2$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(-2,0)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递减．故选 C．

2. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x$，$x\in(0,+\infty)$，则 $f(x)$（　　）

A. 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

B. 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减

C. 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减

D. 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增

C　**解析**：因为 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}-1<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减．故选 C．

3. 下列函数中，在区间 $(-1,1)$ 上单调递减的是（　　）

A. $y=2-3x^2$　　B. $y=\ln x$

C. $y=\frac{1}{x-2}$　　D. $y=\sin x$

C　**解析**：对于函数 $y=\frac{1}{x-2}$，其导数 $y'=\frac{-1}{(x-2)^2}<0$，且函数在区间 $(-1,1)$ 上有意义，所以函数 $y=\frac{1}{x-2}$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递减，其余选项都不符合要求．

4. 已知函数 $f(x)$，若在区间 $[a,b]$ 内有 $f'(x)>0$，且 $f(a)\geqslant0$，则在 (a,b) 内有（　　）

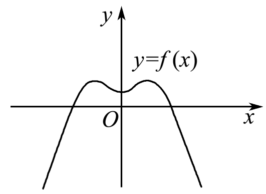
A. $f(x)>0$　　B. $f(x)<0$

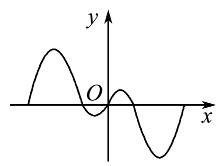
C. $f(x)=0$　　D. 不能确定

A　**解析**：由 $f'(x)>0$，得 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增．

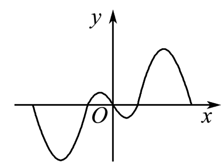
所以当 $x\in(a,b)$ 时，$f(x)>f(a)\geqslant0$．

5. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，则其导函数 $y=f'(x)$ 的图象可能是（　　）

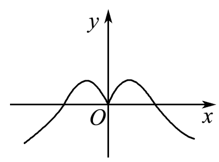




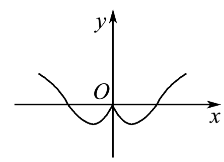
A



B



C



D

A　**解析**：对于 A，随着 x 的递增，$y=f'(x)$ 的符号变化情况依次为大于零、小于零、大于零、小于零，反映在函数 $y=f(x)$ 的图象上，即得 $y=f(x)$ 的单调性变化情况为增、减、增、减，区间端点也大致吻合，故 A 正确．

6. 若函数 $h(x)=2x-\frac{k}{x}+\frac{k}{2}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则实数 k 的取值范围是________．

$[-2,+\infty)$　**解析**：根据条件得 $h'(x)=2+\frac{k}{x^2}=\frac{2x^2+k}{x^2}\geqslant0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，即 $k\geqslant-2x^2$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，所以 $k\in[-2,+\infty)$．

7. 函数 $y=\frac{1}{2}x^2-\ln x$ 的单调递减区间为________．

$(0,1]$　**解析**：该函数的定义域为 $(0,+\infty)$，由 $y'=x-\frac{1}{x}\leqslant0$，得 $0<x\leqslant1$，所以函数的单调递减区间为 $(0,1]$．

8. 已知函数 $f(x)=ax-\ln x$．若 $f(x)>1$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围．

解：由已知得 $a>\frac{1+\ln x}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，

设 $g(x)=\frac{1+\ln x}{x}$，则 $g'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}<0\ (x>1)$．

所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

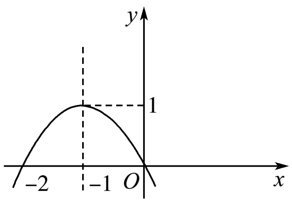
所以 $g(x)<g(1)$．

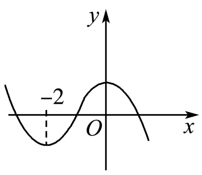
因为 $g(1)=1$，所以 $\frac{1+\ln x}{x}<1$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立．

所以 $a\geqslant1$，即实数 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$．

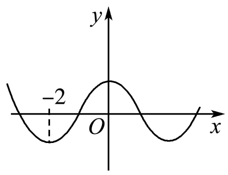
综合性·创新提升

1.已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示，那么函数 $f(x)$ 的图象最有可能是　（　　）

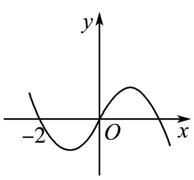




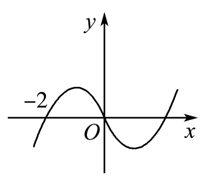
A



B



C



D

A　**解析**：由 $f'(x)$ 的符号易判断，选 A.

2.函数 $f(x)=\ln x+ax^2-2$ 在区间 $\left(\frac{1}{4},2\right)$ 内存在单调递增区间，则实数 a 的取值范围是　（　　）

A.$(-\infty,-2)$　　B.$\left(-\frac{1}{8},+\infty\right)$

C.$(-8,+\infty)$　　D.$(-2,+\infty)$

C　**解析**：由题意得 $f'(x)=\frac{1}{x}+2ax$，

因为函数 $f(x)=\ln x+ax^2-2$ 在区间 $\left(\frac{1}{4},2\right)$ 内存在单调递增区间，

所以存在 $x\in\left(\frac{1}{4},2\right)$ 使得 $f'(x)=\frac{1}{x}+2ax>0$ 成立，即 $a>\left(-\frac{1}{2x^2}\right)_{\min}=-8$.故选 C.

3.已知函数 $f(x)=\sqrt{x}+\ln x$，则有　（　　）

A.$f(2)<f(\mathrm{e})<f(3)$　　B.$f(\mathrm{e})<f(2)<f(3)$

C.$f(3)<f(\mathrm{e})<f(2)$　　D.$f(\mathrm{e})<f(3)<f(2)$

A　**解析**：因为 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

又 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x}$，

且当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又因为 $2<\mathrm{e}<3$，所以 $f(2)<f(\mathrm{e})<f(3)$.

4.（多选）如果定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $y=f(x)$，对任意两个不相等的实数 x_1,x_2，都有 $x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>x_1f(x_2)+x_2f(x_1)$，那么称函数 $y=f(x)$ 为“H 函数”.下列函数为 H 函数的是　（　　）

A.$f(x)=\sin x$　　B.$f(x)=\mathrm{e}^x$

C.$f(x)=x^3+3x$　　D.$f(x)=x|x|$

CD　**解析**：因为 $x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>x_1f(x_2)+x_2f(x_1)$，所以 $(x_1-x_2)(f(x_1)-f(x_2))>0$，即 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

对于 A，由于 $f(x)=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上不具有单调性，故排除 A；对于 B，易知 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 为非奇非偶函数，故排除 B；对于 C，$f(x)=x^3+3x$，$f'(x)=3x^2+3>0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，满足题意；对于 D，易知 $f(x)=x|x|$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.又 $f(x)$ 是奇函数，故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，满足题意.

5.函数 $f(x)=1+x-\sin x$ 在区间 $(0,2\pi)$ 上单调递________.（填“增”或“减”）

增　**解析**：因为 $f'(x)=1-\cos x>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上单调递增.

6.若函数 $f(x)=\cos^2x-\sin^2x$ 在区间 $[0,m]$ 上单调递减，则 m 的一个值可以是________.

$\frac{\pi}{4}$（答案不唯一）　**解析**：因为 $f(x)=\cos 2x$，所以 $f'(x)=-2\sin 2x$.因为 $f'(x)=-2\sin 2x\leqslant 0$ 在区间 $[0,m]$ 上恒成立，

所以 $\sin 2x\geqslant 0$ 在区间 $[0,m]$ 上恒成立.

取 $m=\frac{\pi}{4}$，显然 $\sin 2x\geqslant 0$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上恒成立.

7.求函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$ 的单调区间.

解：由 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 得 $f'(x)=\frac{(\ln x)'x-x'\ln x}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

令 $f'(x)=0$，即 $\frac{1-\ln x}{x^2}=0$，得 $1-\ln x=0$，从而 $x=\mathrm{e}$.

令 $f'(x)>0$，即 $\frac{1-\ln x}{x^2}>0$，得 $x<\mathrm{e}$.

又 $x>0$，得函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\mathrm{e})$.

令 $f'(x)<0$，即 $\frac{1-\ln x}{x^2}<0$，得 $x>\mathrm{e}$.故函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(\mathrm{e},+\infty)$.

综上，函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$ 的单调递增区间为 $(0,\mathrm{e})$，单调递减区间为 $(\mathrm{e},+\infty)$.

第 2 课时　函数的单调性的应用

学习任务目标

1.会用导数研究多项式函数的单调性，进一步理解导数与函数单调性的关系.（数学抽象）

2.通过对对数型函数、幂函数型函数的研究，理解导数的大小与函数增减变化快慢的关系.（逻辑推理）

问题式预习

知识点一　判断函数 $y=f(x)$ 的单调性的步骤

第 1 步，确定函数的定义域；

第 2 步，求出导数 $f'(x)$ 的零点；

第 3 步，用 $f'(x)$ 的零点将 $f(x)$ 的定义域划分为若干个区间，列表给出 $f'(x)$ 在各区间上的正负，由此得出函数 $y=f(x)$ 在定义域内的单调性.

知识点二　导数的绝对值与函数值变化的关系

一般地，设函数 $y=f(x)$，在区间 (a,b) 上：

导数的绝对值	函数值变化	函数的图象
较大	较快	比较“陡峭”（向上或向下）
较小	较慢	比较“平缓”（向上或向下）

［微训练］

1.函数 $y=3x-x^3$ 的单调递增区间为　　（　　）

A.$(0,+\infty)$

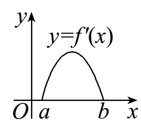
B.$(-\infty,-1)$

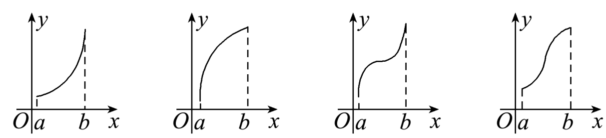
C.$(-1,1)$

D.$(1,+\infty)$

C　**解析**：$y'=3-3x^2$，令 $y'>0$，得 $-1<x<1$，即函数的单调递增区间为 $(-1,1)$.

2.已知 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，$f'(x)$ 的图象如图所示，则 $f(x)$ 的图象可能是　　（　　）





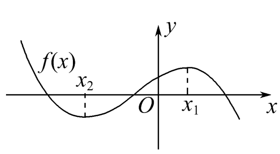
A　　　B　　　C　　　D

D　**解析**：从 $f'(x)$ 的图象可以看出，在区间 $\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$ 内，导函数单调递增；在区间 $\left(\frac{a+b}{2},b\right)$ 内，导函数单调递减. 所以函数 $f(x)$ 的图象在 $\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$ 内越来越陡，在 $\left(\frac{a+b}{2},b\right)$ 内越来越平缓，由此可知，只有选项 D 符合.

任务型课堂

任务一　多项式函数的单调性

1.函数 $f(x)=ax^3-x^2+cx+d$ 的图象如图所示，则有　　（　　）



A.$a>0,c<0,d>0$

B.$a<0,c<0,d>0$

C.$a<0,c>0,d>0$

D.$a>0,c>0,d<0$

C　**解析**：$f'(x)=3ax^2-2x+c$，由题图可知，$f(x)$ 先减后增再减，所以 $f'(x)$ 先负后正再负，所以 $a<0$. 因为 $f(x)$ 在 (x_2,x_1) 内单调递增，所以 $f'(x)$ 在 (x_2,x_1) 内大于 0，$x_2<0<x_1$，所以 $f'(0)=c>0$. 由题图知，$f(0)=d>0$. 故选 C.

2.已知函数 $f(x)=x^3+x$，则“$a+b>0$”是“$f(a)+f(b)>0$”的　　（　　）

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

C　**解析**：由题意可得 $f'(x)=3x^2+1>0$ 恒成立，所以函数 $f(x)=x^3+x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 又 $f(-x)=(-x)^3+(-x)=-(x^3+x)=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是奇函数. 当 $a+b>0$，即 $a>-b$ 时，有 $f(a)>f(-b)=-f(b)$，即 $f(a)+f(b)>0$ 成立；反之，若 $f(a)+f(b)>0$，则 $f(a)>$

$f(-b)$，有 $a>-b$，即 $a+b>0$ 成立.所以“$a+b>0$”是“$f(a)+f(b)>0$”的充要条件.

3. 若函数 $y=x^3+2x^2+mx+1$ 是 **R** 上的单调函数，则 m 的取值范围是________.

$\left[\frac{4}{3},+\infty\right)$　**解析**：令 $y=f(x)=x^3+2x^2+mx+1$，则 $f'(x)=3x^2+4x+m$.若函数 $f(x)$ 是 **R** 上的单调函数，则函数 $f(x)$ 只能是 **R** 上的增函数，所以 $f'(x)=3x^2+4x+m\geqslant 0$ 在 **R** 上恒成立，故 $\Delta=16-12m\leqslant 0$，得 $m\geqslant\frac{4}{3}$.

任务二　判断函数单调性的步骤

[探究活动]

已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+2x+1$，利用导数讨论函数 $f(x)$ 的单调区间时，先求导，得 $f'(x)=3ax^2+2bx+2$，再对参数分类讨论.

探究 1：若 $b=1$，如何对参数 a 进行分类讨论？

提示：分 $a=0$ 与 $a\neq 0$ 两种情况讨论.

探究 2：若 $a=1$，如何对参数 b 进行分类讨论？

提示：先求 $\Delta=4b^2-24$，分 $\Delta\leqslant 0$ 与 $\Delta>0$ 两种情况讨论.

探究 3：若 $a>0$ 且 $f'(x)=3ax^2+2bx+2=0$ 的两根分别为 $m,1$，应如何进行讨论？

提示：分 $m>1$，$m=1$，$m<1$ 三种情况讨论.

[评价活动]

1. 已知函数 $f(x)=x^3-3ax^2+x(a\in\mathbf{R})$，且 $f'(1)=0$.

(1)求 a 的值；

(2)求函数 $f(x)$ 的单调区间.

解：(1) $f'(x)=3x^2-6ax+1$，

$f'(1)=3-6a+1=0$，解得 $a=\frac{2}{3}$.

(2)由(1)知 $f(x)=x^3-2x^2+x$，

则 $f'(x)=3x^2-4x+1=(x-1)(3x-1)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=1$，$x_2=\frac{1}{3}$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0	↗

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$，$(1,+\infty)$，单调递减区间为 $\left(\frac{1}{3},1\right)$.

2. 已知函数 $f(x)=x+a\ln x$，求 $f(x)$ 的单调区间.

解：$f'(x)=\frac{x+a}{x}(x>0)$.

当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,+\infty)$，无单调递减区间；

当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 在定义域上的情况如下：

x	$(0,-a)$	$-a$	$(-a,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	$-a+a\ln(-a)$	↗

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-a,+\infty)$，单调递减区间为 $(0,-a)$.

综上，当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,+\infty)$，无单调递减区间；当 $a<0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(-a,+\infty)$，单调递减区间是 $(0,-a)$.

【类题通法】

判断函数的单调性的关注点

(1)求函数的单调区间，需要先确定函数的定义域.

(2)当 $f'(x)=0$ 的根的大小不确定时，要分类讨论，必要时，可借助表格进行分析.

(3)熟练掌握二次函数的图象与性质，对解决函数单调性的问题很有帮助.

任务三　已知函数单调性求参数取值范围

1. 函数 $f(x)=\frac{x^2-a}{e^x}$ 在 **R** 上存在单调递增区间，则 a 的取值范围是　　(　　)

A. $a\geqslant -1$　　B. $a>-1$

C. $a\leqslant -1$　　D. $a<-1$

B　**解析**：因为 $f(x)=\frac{x^2-a}{e^x}$，所以 $f'(x)=\frac{2x-(x^2-a)}{e^x}=\frac{a+2x-x^2}{e^x}$.由题意可知，存在 $x\in\mathbf{R}$，使得 $f'(x)>0$，即存在 $x\in\mathbf{R}$，使得 $a>x^2-2x$.二次函数 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1\geqslant -1$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立，则 $a>-1$.

2. 若函数 $f(x)=\frac{3x}{x^2+4}$ 在区间 $(m,4m-1)$ 上单调递增，求实数 m 的取值范围.

解：函数定义域为 **R**，

$f'(x)=\frac{-3(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2}$.

令 $f'(x)>0$，得 $-2<x<2$，

即 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-2,2)$.

又 $f(x)$ 在区间 $(m,4m-1)$ 上单调递增，

所以 $\begin{cases}m\geqslant -2,\\4m-1\leqslant 2,\\4m-1>m,\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{3}<m\leqslant\frac{3}{4}$.

故实数 m 的取值范围是 $\left(\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right]$.

【类题通法】

已知函数单调性求参数范围的几种转化

(1)已知可导函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增，则在区间 D 上 $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立.

(2)已知可导函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递减，则在区间 D 上 $f'(x)\leqslant 0$ 恒成立.

(3)已知可导函数 $f(x)$ 在区间 D 上存在单调递增区间，则 $f'(x)>0$ 在区间 D 上有解.

(4)已知可导函数 $f(x)$ 在区间 D 上存在单调递减区间，则 $f'(x)<0$ 在区间 D 上有解.

提质归纳

- 函数的单调性
  - 多项式函数的单调性
  - 判断函数单调性的步骤
  - 函数增减变化的快慢

课后素养评价（十九）

基础性·能力运用

1. 若 $f(x)=x^3-ax^2+1$ 在 $(1,3)$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,3]$　　B. $\left[\frac{9}{2},+\infty\right)$

C. $\left(3,\frac{9}{2}\right)$　　D. $(0,3)$

B　**解析**：由 $f(x)=x^3-ax^2+1$，得 $f'(x)=3x^2-2ax$.

因为 $f(x)=x^3-ax^2+1$ 在 $(1,3)$ 上单调递减，

所以 $f'(x)\leqslant 0$ 在 $(1,3)$ 上恒成立，即 $3x^2-2ax\leqslant 0$ 在 $(1,3)$ 上恒成立，

即 $a\geqslant\frac{3}{2}x$ 在 $(1,3)$ 上恒成立. 故 $a\geqslant\frac{9}{2}$，

所以实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{9}{2},+\infty\right)$. 故选 B.

2. 函数 $y=ax^3-x(a\in\mathbf{R})$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，则（　　）

A. $a=\frac{1}{3}$　　B. $a=1$

C. $a=2$　　D. $a\leqslant 0$

D　**解析**：因为 $y'=3ax^2-1$，

又函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $y'\leqslant 0$ 恒成立，所以 $a\leqslant 0$.

当 $a=0$ 时，$y=-x$，满足题意. 故 $a\leqslant 0$.

3. 若函数 $f(x)=\ln x-kx(k\in\mathbf{R})$ 在定义域内单调，则 k 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,0]$　　B. $[0,+\infty)$

C. $(-\infty,1]$　　D. $[1,+\infty)$

A　**解析**：因为 $f'(x)=\frac{1}{x}-k$，

依题意可得函数 $f(x)$ 在定义域内只能单调递增，

所以 $\frac{1}{x}-k\geqslant 0$ 恒成立，即 $k\leqslant\frac{1}{x}$ 恒成立.

因为 $x>0$，所以 $k\leqslant 0$，故选 A.

4. 若函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-bx$ 存在单调递减区间，则实数 b 的取值范围为（　　）

A. $[2,+\infty)$　　B. $(2,+\infty)$

C. $(-\infty,2)$　　D. $(-\infty,2]$

B　**解析**：由 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-bx$，可得 $f'(x)=\frac{x^2-bx+1}{x}(x>0)$. 由题意可得存在 $x>0$，使得 $f'(x)=\frac{x^2-bx+1}{x}<0$，即存在 $x>0$，使得 $x^2-bx+1<0$，等价于 $b>x+\frac{1}{x}$. 由函数性质易得 $b>2$. 故选 B.

5. 已知函数 $f(x)=x^2-2\cos x$，则 $f(0)$，$f\left(-\frac{1}{3}\right)$，$f\left(\frac{2}{3}\right)$ 的大小关系是（　　）

A. $f(0)<f\left(-\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{2}{3}\right)$

B. $f\left(-\frac{1}{3}\right)<f(0)<f\left(\frac{2}{3}\right)$

C. $f\left(\frac{2}{3}\right)<f\left(-\frac{1}{3}\right)<f(0)$

D. $f(0)<f\left(\frac{2}{3}\right)<f\left(-\frac{1}{3}\right)$

A　**解析**：易知 $f(x)=x^2-2\cos x$ 为偶函数，

所以 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)$.

因为 $f'(x)=2x+2\sin x$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增.

所以 $f(0)<f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{2}{3}\right)$.

所以 $f(0)<f\left(-\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{2}{3}\right)$.故选 A.

6.已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{m}{2}x^2-6x+1$ 在$(-1,1)$上单调递减,则实数 m 的取值范围为________.

$[-5,5]$ **解析**:因为 $f(x)$在$(-1,1)$上单调递减,所以 $f'(x)=x^2+mx-6\leqslant 0$ 在$(-1,1)$上恒成立.又$f'(x)=x^2+mx-6$ 是开口向上的抛物线,为使 $f'(x)\leqslant 0$ 在$(-1,1)$上恒成立,只需 $\begin{cases}f'(-1)\leqslant 0,\\ f'(1)\leqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}1-m-6\leqslant 0,\\ 1+m-6\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $m\in[-5,5]$.

7.函数 $f(x)=x^3-ax+1$ 既有单调递增区间,又有单调递减区间,则实数 a 的取值范围是________.

$(0,+\infty)$ **解析**:因为 $f'(x)=3x^2-a$,由条件知 $f'(x)=0$ 时有两个不等实根,所以 $a>0$.

8.已知函数 $y=\frac{1}{3}x^3+bx^2+(b+2)x+3$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是单调递增的,求实数 b 的取值范围.

解:若 $y'=x^2+2bx+b+2\geqslant 0$ 恒成立,

则 $\Delta=4b^2-4(b+2)\leqslant 0$,

解得 $-1\leqslant b\leqslant 2$.

由题意知 $y'\geqslant 0$ 不恒成立,

故 $b<-1$ 或 $b>2$.

所以 b 的取值范围为$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

综合性·创新提升

1.已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+x+1$ 在$(-\infty,0)$,$(3,+\infty)$上单调递增,在$(1,2)$上单调递减,则实数 a 的取值范围为 ( )

A.$(-\infty,-1]$ B.$\left[-\frac{5}{3},-\frac{5}{4}\right]$

C.$\left(-\frac{5}{3},-1\right]$ D.$\left(-\frac{5}{3},-\frac{5}{4}\right)$

B **解析**:由 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+x+1$,得 $f'(x)=x^2+2ax+1$.

因为 $f(x)$在$(-\infty,0)$,$(3,+\infty)$上单调递增,在$(1,2)$上单调递减,

所以$\begin{cases}f'(0)\geqslant 0,\\ f'(1)\leqslant 0,\\ f'(2)\leqslant 0,\\ f'(3)\geqslant 0,\end{cases}$即$\begin{cases}1\geqslant 0,\\ 1+2a+1\leqslant 0,\\ 4+4a+1\leqslant 0,\\ 9+6a+1\geqslant 0,\end{cases}$

解得 $-\frac{5}{3}\leqslant a\leqslant -\frac{5}{4}$.所以实数 a 的取值范围为 $\left[-\frac{5}{3},-\frac{5}{4}\right]$.故选 B.

2.(多选)已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$满足 $f(x)>-f'(x)$,则下列结论成立的是 ( )

A.$f(2\,023)<\mathrm{e}f(2\,024)$

B.$\mathrm{e}f(2\,023)>f(2\,024)$

C.$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增

D.若 $t>0$,则有 $f(x)<\mathrm{e}^t f(x+t)$

AD **解析**:由 $f(x)>-f'(x)$,得 $\mathrm{e}^x f(x)+\mathrm{e}^x f'(x)>0$,即$[\mathrm{e}^x f(x)]'>0$,所以函数 $\mathrm{e}^x f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.故 $\mathrm{e}^{2\,023}f(2\,023)<\mathrm{e}^{2\,024}f(2\,024)$,所以 $f(2\,023)<\mathrm{e}f(2\,024)$,故 A 正确,B 不正确;函数 $\mathrm{e}^x f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增时,$f(x)$不一定单调递增,如 $\mathrm{e}^x\left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^x$,但 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,故 C 不正确;因为函数 $\mathrm{e}^x f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以当 $t>0$ 时,有 $\mathrm{e}^x f(x)<\mathrm{e}^{x+t}f(x+t)$,故有 $f(x)<\mathrm{e}^t f(x+t)$成立,故 D 正确.

3.函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax-5$ 在区间$[-1,2]$上不单调,则实数 a 的取值范围是 ( )

A.$(-\infty,-3]$

B.$(-3,1)$

C.$[1,+\infty)$

D.$(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$

B **解析**:$f'(x)=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$,

如果函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax-5$ 在区间$[-1,2]$上单调,

那么 $a-1\geqslant 0$ 或$\begin{cases}f'(-1)=1+2+a\leqslant 0,\\ f'(2)=4-4+a\leqslant 0,\end{cases}$解得 $a\geqslant 1$ 或 $a\leqslant -3$,

所以当函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax-5$ 在区间$[-1,2]$上不单调时,$-3<a<1$.故选 B.

4.已知函数 $f(x)=2x-\sin x$.如果 $f(a^2-3a)+f(3-a)<0$,那么实数 a 的取值范围是________.

$(1,3)$ **解析**:因为 $f(x)=2x-\sin x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x)=-(2x-\sin x)=-f(x)$,所以 $f(x)$是奇函数.

又 $f'(x)=2-\cos x>0$,故 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

若 $f(a^2-3a)+f(3-a)<0$,

即 $a^2-3a<a-3$,故 $a^2-4a+3<0$,

解得 $1<a<3$.

5. 已知函数 $f(x)=x-\frac{a}{x}-(a+1)\ln x\ (a>0)$，求 $f(x)$ 的单调区间.

解：$f'(x)=\frac{x^2+a-(a+1)x}{x^2}=\frac{(x-a)(x-1)}{x^2}$，令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=a$，$x_2=1$.

①若 $a>1$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x\in(1,a)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

②若 $a=1$，则 $f'(x)\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

③若 $0<a<1$，

当 $x\in(0,a)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x\in(a,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

综上所述，当 $a>1$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，$(a,+\infty)$，单调递减区间为 $(1,a)$；

当 $a=1$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，无单调递减区间；

当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,a)$，$(1,+\infty)$，单调递减区间为 $(a,1)$.

6. 讨论函数 $f(x)=(a-1)\ln x+ax^2+1\ (a\in\mathbf{R})$ 的单调性.

解：$f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x>0\}$，$f'(x)=\frac{a-1}{x}+2ax=\frac{2ax^2+a-1}{x}$.

①若 $a-1\geqslant 0$，则 $a\geqslant 1$，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

②若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

③若 $0<a<1$，则令 $f'(x)=0$，解得 $x=\sqrt{\frac{1-a}{2a}}$.

当 $x\in\left(0,\sqrt{\frac{1-a}{2a}}\right)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in\left(\sqrt{\frac{1-a}{2a}},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$.

故 $f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{\frac{1-a}{2a}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\sqrt{\frac{1-a}{2a}},+\infty\right)$ 上单调递增.

综上所述，当 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{\frac{1-a}{2a}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\sqrt{\frac{1-a}{2a}},+\infty\right)$ 上单调递增.

5.3.2　函数的极值与最大(小)值

第 1 课时　函数的极值

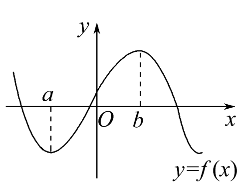
学习任务目标

1. 了解极值、极值点的概念.(数学抽象)
2. 理解函数在某点处取得极值的条件.(数学抽象)
3. 掌握求函数极值的方法步骤.(数学运算)

问题式预习

知识点　函数的极值

1. 极值点与极值



如图，函数 $y=f(x)$ 在点 $x=a$ 处的函数值 $f(a)$ 比它在点 $x=a$ 附近其他点处的函数值都小，$f'(a)=0$；而且在点 $x=a$ 附近的左侧 $f'(x)<0$，右侧 $f'(x)>0$. 类似地，函数 $y=f(x)$ 在点 $x=b$ 处的函数值 $f(b)$ 比它在点 $x=b$ 附近其他点处的函数值都大，$f'(b)=0$；而且在点 $x=b$ 附近的左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$. 我们把 a 叫做函数 $y=f(x)$ 的极小值点，$f(a)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的极小值；b 叫做函数 $y=f(x)$ 的极大值点，$f(b)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的极大值. 极小值点、极大值点统称为

极值点，极小值和极大值统称为极值.

2. 求函数 $y=f(x)$ 的极值的方法

解方程 $f'(x)=0$，当 $f'(x_0)=0$ 时：

(1)如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$，那么 $f(x_0)$ 是极大值；

(2)如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)<0$，右侧 $f'(x)>0$，那么 $f(x_0)$ 是极小值.

[微训练]

1. 判断(正确的打"√"，错误的打"×").

(1)导数值为 0 的点一定是函数的极值点.　(　　)

×　**提示**：不一定，如 $f(x)=x^3$，$f'(0)=0$，但 $x=0$ 不是 $f(x)=x^3$ 的极值点.

(2)在可导函数的极值点处，函数图象的切线与 x 轴平行.　(　　)

×　**提示**：切线不一定与 x 轴平行.

(3)函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 无极值.　(√)

2. (多选)关于函数的极值，下列说法正确的是(　　)

A. 导数值为零的点一定是函数的极值点

B. 函数的极小值可能大于它的极大值

C. $f(x)$ 在定义域内最多只能有一个极大值、一个极小值

D. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内有极值，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内不是单调函数

BD　**解析**：对于 $f(x)=x^3$，$f'(0)=0$，但 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，故 A 错误；函数的极小值可能大于极大值，故 B 正确；C 显然错误；D 显然正确.

3. 函数 $y=2x^3-x^2$ 的极大值为　(　　)

A. 0　　B. -9

C. $0,\dfrac{27}{16}$　　D. $\dfrac{27}{16}$

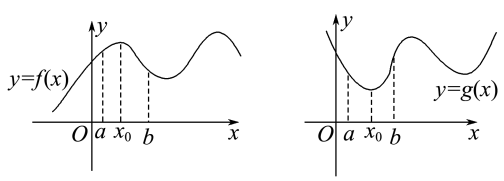
A　**解析**：$y'=6x^2-2x$，令 $y'=0$，得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{1}{3}$. 当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$y'>0$；当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ 时，$y'<0$，故 $x=0$ 是极大值点，则极大值为 0.

任务型课堂

任务一　函数极值的概念

[探究活动]

已知 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 的图象如图所示.



探究 1：观察 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 的图象，在区间 (a,b) 内，函数值 $f(x_0)$，$g(x_0)$ 有何特点？

提示：$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 (a,b) 内最大的函数值，$g(x_0)$ 是 $g(x)$ 在 (a,b) 内最小的函数值.

探究 2：函数值 $f(x_0)$ 在定义域内还是最大吗？

提示：不是.

探究 3：在 (a,x_0)，(x_0,b) 上，$f(x)$ 的单调性与 $f(x)$ 的导数的符号有何特点？

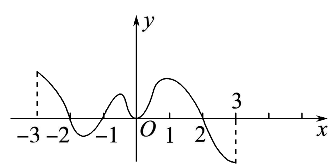
提示：$f(x)$ 在 (a,x_0) 上单调递增，导数大于零，在 (x_0,b) 上单调递减，导数小于零.

探究 4：在 (a,x_0)，(x_0,b) 上，$g(x)$ 的单调性与 $g(x)$ 的导数的符号有何特点？

提示：$g(x)$ 在 (a,x_0) 上单调递减，导数小于零，在 (x_0,b) 上单调递增，导数大于零.

[评价活动]

1. 如图，已知 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象，则 $f(x)$ 的极小值点的个数为　(　　)



A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

A　**解析**：由导函数 $f'(x)$ 的图象知，在 $x=-2$ 处，$f'(-2)=0$，且其两侧导数符号相反，左正右负，所以 $x=-2$ 是极大值点；

在 $x=-1$ 处，$f'(-1)=0$，且其两侧导数符号相反，左负右正，所以 $x=-1$ 是极小值点；

在 $x=0$ 处，$f'(0)=0$，其两侧导数符号相同，所以 $x=0$ 不是极值点；

在 $x=2$ 处，$f'(2)=0$，且其两侧导数符号相反，左正右负，所以 $x=2$ 是极大值点.

所以 $f(x)$ 的极小值点的个数为 1. 故选 A.

2. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+ax^2+(2a+3)x-1$ 有两个极值点，则实数 a 的取值范围是　(　　)

A. $(-1,3)$

B. $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

C. $(-3,1)$

D. $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

B　**解析**：由题意，函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+ax^2+(2a+3)x-1$，则 $f'(x)=x^2+2ax+(2a+3)$.

因为函数 $f(x)$ 有两个极值点,所以方程 $f'(x)=0$ 有两个不相等的实数根,

即 $x^2+2ax+(2a+3)=0$ 有两个不相等的实数根.所以 $\Delta=(2a)^2-4(2a+3)>0$,解得 $a<-1$ 或 $a>3$.所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.故选 B.

3.已知函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{e^x}$,那么 ( )

A.$f(x)$ 有极小值,也有极大值

B.$f(x)$ 有极小值,没有极大值

C.$f(x)$ 有极大值,没有极小值

D.$f(x)$ 没有极值

C **解析**:$f(x)=\dfrac{x^3}{e^x}$,则 $f'(x)=\dfrac{x^2(3-x)}{e^x}$.故函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,3)$ 上单调递增,在 $[3,+\infty)$ 上单调递减.故函数有极大值,没有极小值.故选 C.

任务二 求函数的极值

1.函数 $f(x)=-x^3+3x+1$ 的极小值为________,极大值为________.

-1 3 **解析**:$f'(x)=-3x^2+3$,由 $f'(x)=0$ 可得 $x_1=1,x_2=-1$.当 $x<-1$ 和 $x>1$ 时,$f(x)<0$,$f(x)$ 单调递减;当 $-1<x<1$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,所以函数 $f(x)$ 有极大值 $f(1)=3$,极小值 $f(-1)=-1$.

2.求下列函数的极值.

(1)$f(x)=x^3-3x^2-9x+5$;

(2)$f(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}x^2$;

(3)$f(x)=2x+\dfrac{8}{x}$.

解:(1)$f'(x)=3x^2-6x-9$.

令 $f'(x)=0$,即 $3x^2-6x-9=0$,

解得 $x_1=-1,x_2=3$.

当 x 变化时,$f'(x)$,$f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以当 $x=-1$ 时,函数 $f(x)$ 有极大值,且极大值为 $f(-1)=10$;

当 $x=3$ 时,函数 $f(x)$ 有极小值,且极小值为 $f(3)=-22$.

(2)$f'(x)=\dfrac{1}{x}-x$,令 $f'(x)=0$,得 $x_1=1,x_2=-1$.又函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$,故 $x_2=-1$ 舍去.

当 x 变化时,$f'(x)$,$f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

由表可知,$x=1$ 为函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}x^2$ 的极大值点,函数在该点处的极大值为 $f(1)=-\dfrac{1}{2}$.

函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}x^2$ 不存在极小值.

(3)函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,

且 $f'(x)=2-\dfrac{8}{x^2}$.令 $f'(x)=0$,得 $x=\pm2$.

当 x 变化时,$f'(x)$,$f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−		−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘		↘	极小值	↗

因此,当 $x=-2$ 时,$f(x)$ 有极大值,且极大值为 $f(-2)=-8$;

当 $x=2$ 时,$f(x)$ 有极小值,且极小值为 $f(2)=8$.

【类题通法】

1.讨论函数的性质时,要把握定义域优先的原则,若忽略了定义域,则容易求错极值.

2.利用导数求函数的极值时,常列表判断导数值为 0 的点 x_0 的左、右两侧的导数值是否异号.若异号,则 $f(x_0)$ 是极值;否则,$f(x_0)$ 不是极值.利用表格可使函数在极值点两边的单调性一目了然.

任务三 与函数极值有关的参数问题

[探究活动]

已知函数 $f(x)=x^3-3x+a$(a 为实数).

探究 1:函数 $f(x)$ 的极大值与极小值分别为多少?

提示:令 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)=0$,解得 $x_1=-1,x_2=1$.

当 $x<-1$ 时,$f'(x)>0$;当 $-1<x<1$ 时,$f'(x)<0$;当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$.

所以当 $x=-1$ 时,$f(x)$ 有极大值,且极大值 $f(-1)=2+a$;当 $x=1$ 时,$f(x)$ 有极小值,且极小值 $f(1)=-2+a$.

探究 2:若方程 $f(x)=0$ 有唯一一个实数根,求实数 a 的取值范围.

提示:由探究 1 知,$2+a<0$ 或 $-2+a>0$,即 $a>2$ 或 $a<-2$.

探究 3:若方程 $f(x)=0$ 恰有两个实数根,求实数 a 的值.

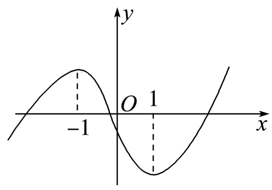
提示:由探究 1 知,$2+a=0$ 或 $-2+a=0$,即 a

$=2$ 或 $a=-2$.

探究 4:若方程 $f(x)=0$ 有三个不同的实数根,求实数 a 的取值范围.

提示:因为方程 $f(x)=0$ 有三个不同实根,

所以 $y=f(x)$的图象与 x 轴有三个交点,如图.



由探究 1 知,应有$\begin{cases}2+a>0,\\-2+a<0,\end{cases}$

解得$-2<a<2$,故实数 a 的取值范围是$(-2,2)$.

[**评价活动**]

1.若函数 $y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+ax$ 在 **R** 上无极值点,则实数 a 的取值范围是________.

$[1,+\infty)$　**解析**:令 $y'=x^2+2x+a=0$,则 $\Delta=4-4a\leqslant 0$,所以 $a\geqslant 1$.经验证,当 $a=1$ 时,符合题意.故 $a\geqslant 1$.

2.已知函数 $f(x)=ax^5-bx^3+c$ 在 $x=\pm 1$ 处的极大值为 4,极小值为 0,试确定 a,b,c 的值.

解:$f'(x)=5ax^4-3bx^2=x^2(5ax^2-3b)$.

由题意可知 $x=\pm 1$ 是 $f'(x)=0$ 的两个根,故 $5a=3b$,且 $a\neq 0,b\neq 0$.

于是 $f'(x)=5ax^2(x^2-1)$.

①当 $a>0$ 时,列表如下:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	无极值	↘	极小值	↗

由表可知$\begin{cases}f(-1)=-a+b+c=4,\\f(1)=a-b+c=0,\end{cases}$

又 $5a=3b$,解得 $a=3,b=5,c=2$.

②当 $a<0$ 时,同理可得 $a=-3,b=-5,c=2$.

综上,$a=3,b=5,c=2$ 或 $a=-3,b=-5,c=2$.

3.已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$ 在 $x=1$ 处取得极值$\dfrac{5}{2}$.

(1)求实数 a,b 的值;

(2)求函数的另一个极值.

解:(1)因为 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$,

所以 $f'(x)=3x^2+2ax+b$.

依题意可得 $f'(1)=0,f(1)=\dfrac{5}{2}$,

即$\begin{cases}3+2a+b=0,\\1+a+b+4=\dfrac{5}{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2},\\b=-2,\end{cases}$经验证成立.

(2)由(1)知 $f(x)=x^3-\dfrac{1}{2}x^2-2x+4$,

$f'(x)=3x^2-x-2=(3x+2)(x-1)$.

令 $f'(x)=0$ 得 $x=-\dfrac{2}{3}$或 $x=1$.

当 x 变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下表:

x	$\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right)$	$-\dfrac{2}{3}$	$\left(-\dfrac{2}{3},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数的另一个极值在 $x=-\dfrac{2}{3}$处取得,是极大值,且极大值 $f\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{130}{27}$.

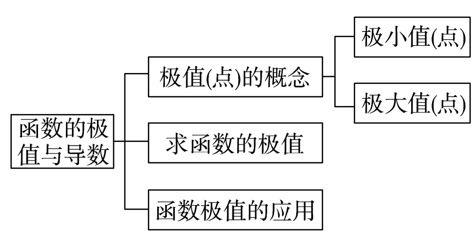
【类题通法】

利用函数的极值确定参数值的关注点

(1)利用函数的极值确定参数的值,常根据极值点处导数为 0 和此处函数值为极值两个条件列方程组,利用待定系数法求解.

(2)因为“导数值等于零”不是“此点为极值点”的充要条件,所以利用待定系数法求解后,必须验证根的合理性.

提质归纳



课后素养评价(二十)

基础性·能力运用

1. 下列说法正确的是 ( )

A. 当 $f'(x_0)=0$ 时，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值

B. 当 $f'(x_0)=0$ 时，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值

C. 当 $f'(x_0)=0$ 时，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极值

D. 当 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的极值且 $f'(x_0)$ 存在时，必有 $f'(x_0)=0$

D **解析**：令 $f(x)=x^3$，$f'(0)=0$，但 $f(0)$ 不是极值，所以选项 A,B,C 错误.若函数可导，极值点处的导数一定等于 0.故选 D.

2. 下列四个函数在 $x=0$ 处取得极小值的是 ( )

A. $y=x^3$　　B. $y=x^2+1$

C. $y=|x|$　　D. $y=2^x$

B **解析**：作出各函数的图象，由极值的定义可知函数 $y=x^2+1$ 在 $x=0$ 处取得极小值. $y=|x|$ 在 $x=0$ 处的导数不存在，即 $x=0$ 处无极值.

3. 函数 $y=x+\frac{1}{x}(-2<x<0)$ 的极大值为 ( )

A. -2　　B. 2

C. $-\frac{5}{2}$　　D. 不存在

A **解析**：$y'=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$.令 $y'=0$ 得 $x=-1$.在 $(-2,-1)$ 上，$y'>0$；在 $(-1,0)$ 上，$y'<0$.故函数在 $x=-1$ 处取得极大值 -2.

4. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-mx^2+mx+9$ 在 $\mathbf{R}$ 上无极值，则实数 m 的取值范围为 ( )

A. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

B. $(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$

C. $(0,1)$

D. $[0,1]$

D **解析**：函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-mx^2+mx+9$ 在 $\mathbf{R}$ 上无极值 $\Leftrightarrow f'(x)=x^2-2mx+m$ 在 $\mathbf{R}$ 上无变号零点 $\Leftrightarrow \Delta=4m^2-4m\leqslant 0\Leftrightarrow 0\leqslant m\leqslant 1$，故选 D.

5. 函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-2x+1$ 在 $(1,3)$ 内存在极值点，则 ( )

A. $-\frac{7}{6}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$

B. $-\frac{7}{6}<a<\frac{1}{2}$

C. $a\leqslant-\frac{1}{2}$ 或 $a\geqslant\frac{1}{2}$

D. $a<\frac{1}{2}$ 或 $a>\frac{1}{2}$

B **解析**：$f'(x)=x^2+2ax-2$，$\Delta=4a^2+8>0$，

令 $f'(x)=x^2+2ax-2=0$，由于 $x\in(1,3)$，

所以 $2a=\frac{2-x^2}{x}=\frac{2}{x}-x$.

$y=\frac{2}{x}-x$ 在 $(1,3)$ 上单调递减，当 $x=1$ 时，$y=1$；

当 $x=3$ 时，$y=-\frac{7}{3}$.

由于函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-2x+1$ 在 $(1,3)$ 内存在极值点，

所以 $-\frac{7}{3}<2a<1$，即 $-\frac{7}{6}<a<\frac{1}{2}$.故选 B.

6. 若 $x=-2$ 与 $x=4$ 是函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 的两个极值点，则有 ( )

A. $a=-2,b=4$

B. $a=-3,b=-24$

C. $a=1,b=3$

D. $a=2,b=-4$

B **解析**：$f'(x)=3x^2+2ax+b=0$ 的两根为 $x=-2$ 与 $x=4$，则 $\begin{cases}-2+4=-\frac{2}{3}a,\\ -2\times4=\frac{b}{3},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-3,\\ b=-24.\end{cases}$

7. 已知函数 $f(x)=2\ln x+ax^2-3x$ 在 $x=2$ 处取得极小值，则 $f(x)$ 的极大值为________.

$-\frac{5}{2}$ **解析**：由题意得 $f'(x)=\frac{2}{x}+2ax-3$，

所以 $f'(2)=4a-2=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$.

所以 $f(x)=2\ln x+\frac{1}{2}x^2-3x$，$f'(x)=\frac{2}{x}+x-3=\frac{(x-1)(x-2)}{x}$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$，$(2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(1,2)$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=\frac{1}{2}-3=-\frac{5}{2}$.

8. 若函数 $y=-x^3+6x^2+m$ 的极大值为 13，则实数 m 等于________.

-19 **解析**：$y'=-3x^2+12x$，由 $y'=0$，得 $x=0$ 或 $x=4$，

易知当 $x=4$ 时函数取得极大值，所以 $-4^3+6\times4^2+m=13$，解得 $m=-19$.

9. 已知函数 $f(x)=x(x-c)^2$ 在 $x=1$ 处取得极小值，求 $f(x)$ 的极大值.

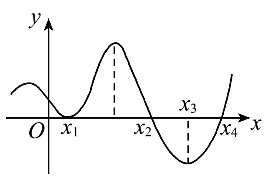
解： 因为 $f(x)=x(x-c)^2=x^3-2cx^2+c^2x$，

所以 $f'(x)=3x^2-4cx+c^2=3(x-c)\left(x-\frac{c}{3}\right)$.

由 $f'(x)=0$，解得 $x=c$ 或 $x=\frac{c}{3}$. 依题意，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，所以 $c=1$，所以当 $x=\frac{1}{3}$ 时，$f(x)$ 取得极大值 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}-1\right)^2=\frac{4}{27}$.

综合性·创新提升

1. 如图，已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象，则函数 $y=f(x)$ 的极小值点是 (　　)



A. x_1　　B. x_2　　C. x_3　　D. x_4

D　**解析：** 由导函数 $f'(x)$ 的图象可以看出，当 $x<x_2$ 时，$f'(x)\geqslant0$，函数 $f(x)$ 单调递增，当 $x_2<x<x_4$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，当 $x>x_4$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，

所以函数 $y=f(x)$ 的极小值点是 x_4，故选 D.

2. 已知函数 $f(x)=2f'(1)\cdot\ln x-x$，则 $f(x)$ 的极大值为 (　　)

A. $2\ln 2-2$　　B. $2\ln 2+2$

C. $\ln 2-2$　　D. $\ln 2+2$

A　**解析：** 因为 $f'(x)=\frac{2f'(1)}{x}-1$，

所以 $f'(1)=2f'(1)-1$，$f'(1)=1$，

所以 $f(x)=2\ln x-x$，$f'(x)=\frac{2}{x}-1$.

易知当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$.

故 $x=2$ 是极大值点，$f(x)_{极大}=f(2)=2\ln 2-2$. 故选 A.

3. 设 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\cos x$，则函数 $f(x)$ (　　)

A. 有且仅有一个极小值

B. 有且仅有一个极大值

C. 有无数个极值

D. 没有极值

A　**解析：** $f'(x)=x-\sin x$，$f''(x)=1-\cos x\geqslant0$.

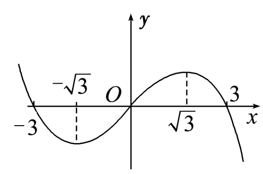
所以 $f'(x)$ 单调递增且 $f'(0)=0$.

所以当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增.

故 $f(x)$ 有且仅有一个极小值. 故选 A.

4. (多选)设三次函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，函数 $y=xf'(x)$ 的图象如图所示，则下列结论正确的是 (　　)



A. $f(x)$ 的极小值为 $f(-\sqrt{3})$

B. $f(x)$ 的极大值为 $f(-\sqrt{3})$

C. $f(x)$ 的极大值为 $f(3)$

D. $f(x)$ 的极小值为 $f(-3)$

CD　**解析：** 当 $x\in(-\infty,-3)$ 时，$xf'(x)>0$，即 $f'(x)<0$；

当 $x\in(-3,0)$ 时，$xf'(x)<0$，即 $f'(x)>0$；

当 $x\in(0,3)$ 时，$xf'(x)>0$，即 $f'(x)>0$；

当 $x\in(3,+\infty)$ 时，$xf'(x)<0$，即 $f'(x)<0$.

故函数 $f(x)$ 在 $x=-3$ 处取得极小值，在 $x=3$ 处取得极大值.

5. 若 $x=2$ 是函数 $f(x)=x(x-m)^2$ 的极大值点，则函数 $f(x)$ 的极大值为________.

32　**解析：** $f'(x)=3x^2-4mx+m^2=(x-m)\cdot(3x-m)$.

令 $f'(x)=0$，则 $x=m$ 或 $x=\frac{m}{3}$，

由题设知 $m=2$ 或 $m=6$.

当 $m=2$ 时，极大值点为 $x=\frac{2}{3}$，与题意不符；

当 $m=6$ 时，极大值为 $f(2)=32$.

6. (2022·全国乙卷(理))已知 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-ex^2$ ($a>0$ 且 $a\neq1$)的极小值点和极大值点. 若 $x_1<x_2$，则 a 的取值范围是________.

$\left(\frac{1}{e},1\right)$　**解析：** (方法一：将函数的零点问题转为两个函数图象的交点问题)因为 $f'(x)=2\ln a\cdot a^x-2ex$，所以方程 $2\ln a\cdot a^x-2ex=0$ 的两个根为 x_1，x_2，

即方程 $\ln a\cdot a^x=ex$ 的两个根为 x_1,x_2，

即函数 $y=\ln a\cdot a^x$ 与函数 $y=ex$ 的图象有两个不同的交点.

因为 $x=x_1,x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-ex^2$ 的极小值点和极大值点，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1),(x_2,+\infty)$ 上单调递减，在 (x_1,x_2) 上单调递增，

所以当 x 在区间 $(-\infty,x_1),(x_2,+\infty)$ 上时，$f'(x)<0$，即 $y=ex$ 的图象在 $y=\ln a\cdot a^x$ 图象的上方；当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$f'(x)>0$，即 $y=ex$ 的图象在 $y=\ln a\cdot a^x$ 图象的下方.

因为 $a>1$ 时图象显然不符合题意，所以 $0<a<1$.

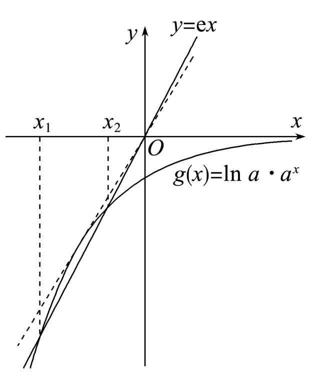
令 $g(x)=\ln a\cdot a^x$，则 $g'(x)=(\ln a)^2\cdot a^x$，$0<a<1$，

如图，设过原点的直线与函数 $y=g(x)$ 的图象相切于点 $(x_0,\ln a\cdot a^{x_0})$.

则切线的斜率为 $g'(x_0)=(\ln a)^2\cdot a^{x_0}$，故切线方程为 $y-\ln a\cdot a^{x_0}=(\ln a)^2\cdot a^{x_0}(x-x_0)$.

则有 $-\ln a\cdot a^{x_0}=-x_0(\ln a)^2\cdot a^{x_0}$，解得 $x_0=\dfrac{1}{\ln a}$，则切线的斜率为 $\ln^2 a\cdot a^{\frac{1}{\ln a}}=e(\ln a)^2$.

因为函数 $y=\ln a\cdot a^x$ 与函数 $y=ex$ 的图象有两个不同的交点，



所以 $e\ln^2 a<e$，解得 $\dfrac{1}{e}<a<e$. 又 $0<a<1$，所以 $\dfrac{1}{e}<a<1$，综上所述，a 的取值范围为 $\left(\dfrac{1}{e},1\right)$.

（方法二：构造新函数，二次求导）$f'(x)=2\ln a\cdot a^x-2ex=0$ 的两个根为 x_1,x_2.

因为 $x=x_1,x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-ex^2$ 的极小值点和极大值点，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1),(x_2,+\infty)$ 上单调递减，在 (x_1,x_2) 上单调递增.

设函数 $g(x)=f'(x)=2(a^x\ln a-ex)$，则 $g'(x)=2a^x(\ln a)^2-2e$.

若 $a>1$，则 $g'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，此时若 $g'(x_0)=0$，则 $f'(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，此时若有 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-ex^2(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的极小值点和极大值点，则 $x_1>x_2$，不符合题意.

若 $0<a<1$，则 $g'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，此时若 $g'(x_0)=0$，则 $f'(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，令 $g'(x_0)=0$，则 $a^{x_0}=\dfrac{e}{(\ln a)^2}$，此时若有 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-ex^2(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的极小值点和极大值点，且 $x_1<x_2$，则需满足 $f'(x_0)>0$，$f'(x_0)=2(a^{x_0}\ln a-ex_0)=2\left(\dfrac{e}{\ln a}-ex_0\right)>0$，即 $x_0<\dfrac{1}{\ln a}$，$x_0\ln a>1$. 故 $\ln a^{x_0}=x_0\ln a=\ln\dfrac{e}{(\ln a)^2}>1$，所以 $\dfrac{1}{e}<a<e$. 又因为 $0<a<1$，所以 $\dfrac{1}{e}<a<1$.

7. 设函数 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(a,b,c\in\mathbf{R})$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1) 若 $a=b=c$，$f(4)=8$，求 a 的值；

(2) 若 $a\neq b,b=c$，且 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的零点均在集合 $\{-3,1,3\}$ 中，求 $f(x)$ 的极小值.

解：(1) 因为 $a=b=c$，所以 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=(x-a)^3$.

因为 $f(4)=8$，所以 $(4-a)^3=8$，解得 $a=2$.

(2) 因为 $b=c$，所以 $f(x)=(x-a)(x-b)^2=x^3-(a+2b)x^2+b(2a+b)x-ab^2$，

从而 $f'(x)=3(x-b)\left(x-\dfrac{2a+b}{3}\right)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=b$ 或 $x=\dfrac{2a+b}{3}$.

因为 $a,b,\dfrac{2a+b}{3}$ 都在集合 $\{-3,1,3\}$ 中，且 $a\neq b$，所以 $\dfrac{2a+b}{3}=1$，$a=3$，$b=-3$.

此时令 $f'(x)=0$，得 $x=-3$ 或 $x=1$. 列表如下：

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=(1-3)\times(1+3)^2=-32$.

第2课时　函数的最大(小)值

学习任务目标

1.了解函数最大值、最小值的定义.(直观想象)
2.理解导数与函数最值的关系.(逻辑推理)
3.掌握利用导数求函数最值的方法.(数学运算)
4.体会导数与单调性、极值、最大(小)值的关系.(数学建模、数学运算)

问题式预习

知识点　函数的最值

1.一般地,如果在区间$[a,b]$上函数$y=f(x)$的图象是一条连续不断的曲线,那么它必有最大值和最小值.

2.一般地,求函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值与最小值的步骤如下:
(1)求函数$y=f(x)$在区间(a,b)内的极值;
(2)将函数$y=f(x)$的各极值与端点处的函数值$f(a)$,$f(b)$比较,其中最大的一个是最大值,最小的一个是最小值.

[微训练]

1.判断(正确的打"√",错误的打"×").
(1)函数的极大值一定是函数的最大值.　(×)
(2)开区间上的单调连续函数无最值.　(√)
(3)函数$f(x)=\frac{1}{x}$在区间$[-1,1]$上有最值.　(×)

2.下列说法正确的是　(　　)
A.函数的极大值就是函数的最大值
B.函数的极小值就是函数的最小值
C.函数的最值一定是极值
D.在闭区间上图象连续的函数一定存在最值

D　**解析**:根据最值的概念与求法可知,连续函数$y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上一定存在最值,最值可能是极值或端点值$f(a)$,$f(b)$,要根据它们的大小来判断.

3.函数$f(x)=x^3-3x+3$在$[-3,3]$上的最小值为　(　　)
A.1　　B.5
C.12　　D.-15

D　**解析**:$f'(x)=3x^2-3$,令$f'(x)=0$得$x=\pm1$,且$f(1)=1$,$f(-1)=5$,$f(-3)=-15$,$f(3)=21$.故选D.

4.(多选)函数$f(x)=2x-\cos x$在$\mathbf{R}$上　(　　)
A.无最值　　B.无极值
C.有最大值　　D.有最小值

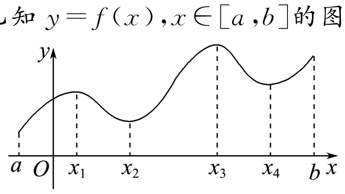
AB　**解析**:$f'(x)=2+\sin x>0$恒成立,故$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增,无极值,也无最值.

任务型课堂

任务一　求函数的最值

[探究活动]

如图,已知$y=f(x)$,$x\in[a,b]$的图象.



探究1:观察$[a,b]$上函数$y=f(x)$的图象,你能找出它的极大值、极小值吗?

提示:极大值为$f(x_1)$,$f(x_3)$,极小值为$f(x_2)$,$f(x_4)$.

探究2:结合图象判断,函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上是否存在最大值、最小值?若存在,分别为多少?

提示:存在,$f(x)_{\min}=f(a)$,$f(x)_{\max}=f(x_3)$.

探究3:函数$y=f(x)$在$[a,b]$上的最大(小)值一定是某个极值吗?

提示:不一定,也可能是区间端点处的函数值.

[评价活动]

1.函数$f(x)=x^3-3x^2+2$在$[-1,1]$上的最大值是　(　　)
A.-2　　B.0　　C.2　　D.4

C　**解析**:$f'(x)=3x^2-6x$,令$f'(x)=0$得$x=0$或$x=2$(舍去).比较$f(0)$,$f(-1)$,$f(1)$的大小可知$f(x)_{\max}=f(0)=2$.

2.求下列函数的最值.
(1)$f(x)=x^3-3x^2-10$,$x\in[-1,1]$;

(2)$f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3}$.

解：(1)$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$，令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=2$(舍去).

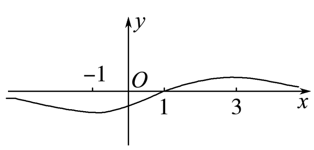
当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-14	↗	极大值-10	↘	-12

所以当 $x=-1$ 时，函数取最小值 $f(-1)=-14$；当 $x=0$ 时，函数取最大值 $f(0)=-10$.

(2)$f'(x)=\dfrac{-(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=3$.容易验证函数在 $x=-1$ 处取得极小值，在 $x=3$ 处取得极大值.又因为当 $x=1$ 时，$f(x)=0$；当 $x<1$ 时，$f(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f(x)>0$.据此可以画出函数的大致图象，如图所示.



由图象可知，函数的最大值等于 $f(3)=\dfrac{3-1}{3^2+3}=\dfrac{1}{6}$，最小值为 $f(-1)=\dfrac{-1-1}{(-1)^2+3}=-\dfrac{1}{2}$.

【类题通法】

求函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上的最值的步骤如下：

(1)求函数 $f(x)$的导函数 $f'(x)$.

(2)计算函数 $f(x)$在区间(a,b)内使得 $f'(x)=0$ 的所有点处的函数值以及区间端点处的函数值 $f(a)$与$f(b)$.

(3)比较以上各个函数值，其中最大的是函数的最大值，最小的是函数的最小值.

任务二 与函数最值有关的参数问题

［探究活动］

已知函数 $f(x)=4x+\dfrac{a}{x}(x>0,a>0)$和函数 $h(x)=x^3+3x^2-9x+1$.

探究 1：若函数 $f(x)$在 $x=3$ 时取得最小值，则 a 的值是多少？

提示：由题意知 $f'(x)=4-\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{4x^2-a}{x^2}$.又 $x>0,a>0$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\dfrac{\sqrt{a}}{2}$.

当 $0<x<\dfrac{\sqrt{a}}{2}$时，$f'(x)<0$；当 $x>\dfrac{\sqrt{a}}{2}$时，$f'(x)>0$.

故 $f(x)$在$\left(0,\dfrac{\sqrt{a}}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2},+\infty\right)$上单调递增，

即当 $x=\dfrac{\sqrt{a}}{2}$时，$f(x)$取得最小值，则$\dfrac{\sqrt{a}}{2}=3$，解得 $a=36$.

探究 2：若函数 $h(x)$在区间$[k,2]$上的最大值是 28，则 k 的取值范围是多少？

提示：因为 $h(x)=x^3+3x^2-9x+1$，

所以 $h'(x)=3x^2+6x-9$.

令 $h'(x)=0$，得 $x_1=-3$，$x_2=1$，

当 x 变化时，$h'(x)$，$h(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	28	↘	-4	↗

当 $x=-3$ 时，$h(x)$取极大值 28；当 $x=1$ 时，$h(x)$取极小值-4.

而 $h(2)=3<h(-3)=28$，若 $h(x)$在区间$[k,2]$上的最大值为 28，则 $k\leqslant-3$.

［评价活动］

1.(2022·全国甲卷(理))当 $x=1$ 时，函数$f(x)=a\ln x+\dfrac{b}{x}$取得最大值-2，则 $f'(2)=$（　　）

A.-1　　B.$-\dfrac{1}{2}$

C.$\dfrac{1}{2}$　　D.1

B　**解析**：因为函数 $f(x)$定义域为$(0,+\infty)$，所以依题可知，$f(1)=-2$，$f'(1)=0$.又 $f'(x)=\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{x^2}$，所以 $b=-2$，$a-b=0$，即 $a=-2$，$b=-2$，所以 $f'(x)=-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2(1-x)}{x^2}$.此时验证 $f(x)$满足题意，则有 $f'(2)=-1+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$.故选 B.

2.已知 $f(x)=-x^3+3x^2+m$ 在$[-2,2]$上的最小值为 1，则实数 $m=$________.

1　**解析**：$f'(x)=-3x^2+6x$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=0$ 或 $x=2$.当 $x\in[-2,0)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(0,2]$时，$f'(x)\geqslant0$.所以当 $x=0$ 时，$f(x)$有极小值，也是最小值，$f(0)=m=1$.

3.设$\dfrac{2}{3}<a<1$，函数 $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}ax^2+b(-1\leqslant x\leqslant1)$的最大值为 1，最小值为$-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，求实数 a，b 的值.

解：$f'(x)=3x^2-3ax=3x(x-a)$，令 $f'(x)=0$，得 $x_1=0$，$x_2=a$.根据 x_1，x_2列表，分析 $f'(x)$的符

号和函数 $f(x)$ 的单调性.

x	-1	$(-1,0)$	0	$(0,a)$	a	$(a,1)$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$b-1-\frac{3}{2}a$	↗	b	↘	$b-\frac{a^3}{2}$	↗	$1-\frac{3}{2}a+b$

由表可知，$f(x)$ 的极大值为 $f(0)=b$，极小值为 $f(a)=b-\frac{a^3}{2}$.

因为 $f(0)>f(a)$，$f(-1)<f(1)$，

$f(0)-f(1)=\frac{3}{2}a-1>0$，

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(0)=b=1$.

因为 $f(-1)-f(a)=\frac{1}{2}(a^3-3a-2)=\frac{1}{2}(a+1)^2\cdot(a-2)<0$，

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(-1)=b-1-\frac{3}{2}a=-\frac{3}{2}a=-\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以 $a=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

综上可知，$a=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$b=1$.

4. 已知函数 $f(x)=ax^3-6ax^2+b$，是否存在实数 a，b，使 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上取得最大值 3，最小值 -29？若存在，求出 a，b 的值；若不存在，请说明理由.

解：存在. 显然 $a\neq0$，$f'(x)=3ax^2-12ax=3ax(x-4)$，令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=4$（舍去）.

①若 $a>0$，当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$[-1,0)$	0	$(0,2]$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以当 $x=0$ 时，$f(x)$ 取得最大值，所以 $f(0)=b=3$.

又因为 $f(2)=-16a+3$，$f(-1)=-7a+3$，$f(-1)>f(2)$，

所以当 $x=2$ 时，$f(x)$ 取得最小值，即 $-16a+3=-29$，解得 $a=2$.

②若 $a<0$，当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$[-1,0)$	0	$(0,2]$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以当 $x=0$ 时，$f(x)$ 取得最小值，所以 $f(0)=b=-29$.

又因为 $f(2)=-16a-29$，$f(-1)=-7a-29$，$f(2)>f(-1)$，所以当 $x=2$ 时，$f(x)$ 取得最大值，即 $-16a-29=3$，解得 $a=-2$.

综上所述，$a=2$，$b=3$ 或 $a=-2$，$b=-29$.

【类题通法】

解决与函数最值有关的参数问题的思路

(1)根据条件求出参数的值，从而化为不含参数的函数的最值问题.

(2)对于不能求出参数值的问题，则要对参数进行讨论，其实质是讨论导函数大于 0、等于 0、小于 0 三种情况.若导函数恒不等于 0，则函数在已知区间上是单调函数，最值在端点处取得；若导函数可能等于 0，则求出极值点后求极值，再与端点值比较后确定最值.

任务三　与函数最值有关的恒成立问题

1. 设函数 $f(x)=tx^2+2t^2x+t-1(x\in\mathbf{R},t>0)$.

(1)求 $f(x)$ 的最小值 $h(t)$；

(2)若 $h(t)<-2t+m$ 对 $t\in(0,2)$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

解：(1)因为 $f(x)=t(x+t)^2-t^3+t-1(x\in\mathbf{R},t>0)$，

所以当 $x=-t$ 时，$f(x)$ 取最小值 $f(-t)=-t^3+t-1$，即 $h(t)=-t^3+t-1$.

(2)令 $g(t)=h(t)-(-2t+m)=-t^3+3t-1-m$，

由 $g'(t)=-3t^2+3=0$，得 $t=1$ 或 $t=-1$（舍）.

当 t 变化时，$g'(t)$，$g(t)$ 的变化情况如表：

t	$(0,1)$	1	$(1,2)$
$g'(t)$	$+$	0	$-$
$g(t)$	↗	极大值 $1-m$	↘

所以 $g(t)$ 在 $(0,2)$ 上有极大值也是最大值 $g(1)=1-m$.

$h(t)<-2t+m$ 在 $(0,2)$ 上恒成立，等价于 $g(t)<0$ 在 $(0,2)$ 内恒成立，即等价于 $1-m<0$，所以 m 的取值范围为 $(1,+\infty)$.

2. 已知函数 $f(x)=e^x-e(\ln x+1)$，求证：$f(x)\geqslant0$ 恒成立.

证明：由题意知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=e^x-\frac{e}{x}=\frac{xe^x-e}{x}$.

设 $F(x)=xe^x-e(x\geqslant0)$，则 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，且 $F(1)=0$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$F(x)<0$，所以 $f'(x)=\frac{F(x)}{x}<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$F(x)>0$，所以 $f'(x)=\frac{F(x)}{x}>0$，$f(x)$ 单调递增.

所以 $f(x)$ 的最小值 $f(x)_{\min}=f(1)=0$.

所以 $f(x)\geqslant0$ 恒成立.

3. 已知函数 $f(x)=ax+\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $a=2$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,2)$ 处的切线的斜率；

(2)求 $f(x)$ 的单调区间；

(3)设 $g(x)=x^2-2x+2$，若对任意 $x_1\in(0,+\infty)$，均存在 $x_2\in[0,1]$，使得 $f(x_1)<g(x_2)$，求 a 的取值范围.

解：(1)由已知得 $f'(x)=2+\dfrac{1}{x}(x>0)$，$f'(1)=2+1=3$.故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,2)$ 处的切线的斜率为 3.

(2)$f'(x)=a+\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax+1}{x}(x>0)$.

①当 $a\geqslant 0$ 时，由于 $x>0$，故 $ax+1>0$，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$.

②当 $a<0$ 时，由 $f'(x)=0$，得 $x=-\dfrac{1}{a}$.

在区间 $\left(0,-\dfrac{1}{a}\right)$ 上，$f'(x)>0$，在区间 $\left(-\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上，$f'(x)<0$，所以，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,-\dfrac{1}{a}\right)$，单调递减区间为 $\left(-\dfrac{1}{a},+\infty\right)$.

(3)由已知，原不等式转化为 $f(x)_{\max}<g(x)_{\max}$.

易知 $g(x)_{\max}=2$.

由(2)知，当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，值域为 $\mathbf{R}$，故不符合题意. 当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,-\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，故 $f(x)$ 的极大值即最大值 $f\left(-\dfrac{1}{a}\right)=-1+\ln\left(\dfrac{1}{-a}\right)=-1-\ln(-a)$，所以 $2>-1-\ln(-a)$，解得 $a<-\dfrac{1}{e^3}$.即 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{e^3}\right)$.

【类题通法】

利用导数解决不等式恒成立问题的两种情形

(1)若函数的最值可以通过导数求得，则可先利用导数研究函数的单调性，将不等式恒成立问题转化为求函数的最值问题来解决：

① $f(x)>k\Rightarrow f(x)_{\min}>k$；

② $f(x)<k\Rightarrow f(x)_{\max}<k$.

(2)若函数的最值无法通过导数求得，即导函数的零点无法精确求出时，则一般往以下两个方向思考：

①将要处理的函数拆分成两个可求最值的函数的和或积，分别求其最值，进而解决问题；

②利用“虚设和代换”的方法求解.

▶ 提质归纳

函数最值
- 求最大（小）值
- 利用最值求参数
- 极值与最值的综合问题

课后素养评价（二十一）

基础性·能力运用

1. 函数 $f(x)=x^3-3x(-1<x<1)$ （　　）

A.有最大值，但无最小值

B.有最大值，也有最小值

C.无最大值，但有最小值

D.既无最大值，也无最小值

D　**解析**：$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$，当 $x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减，无最大值和最小值.故选 D.

2. $f(x)=e^x-x$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最小值是（　　）

A.$1+\dfrac{1}{e}$　　B.1

C.$e+1$　　D.$e-1$

B　**解析**：因为 $f(x)=e^x-x$，所以 $f'(x)=e^x-1$. 令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$.所以当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)=e^x-x$ 单调递减；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)=e^x-x$ 单调递增.所以函数 $f(x)=e^x-x$ 在 $[-1,1]$ 上的最小值为 $f(0)=e^0-0=1$，故选 B.

3. 函数 $f(x)=x^3-3ax-a$ 在 $(0,1)$ 上有最小值，则 a 的取值范围为 （　　）

A.$0\leqslant a<1$　　B.$0<a<1$

C.$-1<a<1$　　D.$0<a<\dfrac{1}{2}$

B　**解析**：因为 $f'(x)=3x^2-3a$，$f'(x)=0$ 在 $(0,1)$ 上有解，所以 $a=x^2$ 在 $(0,1)$ 上有解.

又因为 $x\in(0,1)$，所以 $0<a<1$.故选 B.

4. (多选)已知函数 $f(x)=x\ln x$，则 （　　）

A.$f(x)$ 的单调递增区间为 $(e,+\infty)$

B.$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 上单调递减

C.当 $x\in(0,1]$时，$f(x)$有最小值$-\frac{1}{e}$

D.$f(x)$在定义域内无极值

BC　**解析**：$f'(x)=\ln x+1(x>0)$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{e}$.

当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$，$f'(x)<0$；当 $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上单调递增，$x=\frac{1}{e}$是极小值点，故 A 错误，B 正确.

当 $x\in(0,1]$时，根据单调性可知，$f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$，故 C 正确.

显然 $f(x)$有极小值 $f\left(\frac{1}{e}\right)$，故 D 错误.

5.如果函数 $f(x)=x^4-8x^2+c$ 在$[-1,3]$上的最小值是-14，那么 $c=$　(　　)

A.1　　B.2　　C.-1　　D.-2

B　**解析**：令 $f'(x)=4x^3-16x=0$，得 $x=0$ 或 $x=-2$ 或 $x=2$.由 $f(-1)=c-7$，$f(0)=c$，$f(2)=c-16$，$f(3)=c+9$，得最小值为 $f(2)=c-16=-14$.所以 $c=2$.

6.函数 $y=x+2\cos x$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上取最大值时，$x$ 的值为________.

$\frac{\pi}{6}$　**解析**：$y'=1-2\sin x$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.由 $y'\geqslant0$，得 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}$；由 $y'<0$，得$\frac{\pi}{6}<x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

所以函数 $y=x+2\cos x$ 在$\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$上单调递增，在$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减.故当 $x=\frac{\pi}{6}$时，函数取得极大值，此极大值也是$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值.

7.已知函数 $f(x)=ax^4-4ax^3+b(a>0)$，$x\in[1,4]$，$f(x)$的最大值为 3，最小值为-6，则 $a+b=$________.

$\frac{10}{3}$　**解析**：$f'(x)=4ax^3-12ax^2=4ax^2(x-3)$.令 $f'(x)=0$，得 $x=3$ 或 $x=0$(舍去).

当 $1\leqslant x<3$ 时，$f'(x)<0$；当 $3<x\leqslant4$ 时，$f'(x)>0$，

故 $x=3$ 为极小值点，也是最小值点.

因为 $f(3)=b-27a$，$f(1)=b-3a$，$f(4)=b$，

所以 $f(x)$的最小值为 $f(3)=b-27a$，

最大值为 $f(4)=b$，

所以$\begin{cases}b=3,\\b-27a=-6,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\frac{1}{3},\\b=3,\end{cases}$

所以 $a+b=\frac{10}{3}$.

8.已知函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$.

(1) 求函数 $f(x)$的单调区间；

(2) 求函数 $f(x)$在区间$[-2,2]$上的最小值.

解：(1)$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=3$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上的变化情况如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$的单调递增区间是$(-\infty,-1)$，$(3,+\infty)$，$f(x)$的单调递减区间是$(-1,3)$.

(2)由 $f(-2)=0$，$f(2)=-20$，再结合 $f(x)$的单调性可知，函数 $f(x)$在区间$[-2,2]$上的最小值为-20.

综合性·创新提升

1.已知 $f(x)=2x^3-6x^2+m$ 是定义在$[-2,2]$上的函数，函数的最大值为 3，那么函数的最小值是　(　　)

A.-43　　B.-37

C.-29　　D.-5

B　**解析**：因为 $f(x)=2x^3-6x^2+m$，$x\in[-2,2]$，

所以 $f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$.令 $f'(x)=0$，

得 $x=0$ 或 $x=2$，

所以当$-2<x<0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$在$(-2,0)$上单调递增.

当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$在$(0,2)$上单调递减，

所以当 $x=0$ 时，函数 $f(x)$取得最大值，最大值为 m，

所以 $m=3$.

又 $f(-2)=-40+m$，$f(2)=-8+m$，

所以当 $x=-2$ 时，函数 $f(x)$取得最小值，最小值为-37.

故选 B.

2.(多选)已知函数 $f(x)=e^x+a\ln x$,下列结论正确的是 ( )

A.当 $a=1$ 时,$f(x)$有最大值

B.对于任意的 $a>0$,函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增

C.对于任意的 $a<0$,函数 $f(x)$一定存在最小值

D.对于任意的 $a>0$,都有 $f(x)>0$

BC **解析**:$f'(x)=e^x+\dfrac{a}{x}$,

当 $a=1$ 时,$f(x)=e^x+\ln x$,函数 $y=e^x$,$y=\ln x$ 都单调递增,易知函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,无最大值,故 A 错误.

对于任意的 $a>0$,函数 $y=e^x$,$y=a\ln x$ 都单调递增,

则函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,故 B 正确.

当 $x\to0$ 时,$e^x\to1$,$\ln x\to-\infty$,$f(x)\to-\infty$,故 D 错误.

对于任意的 $a<0$,易知 $f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

当 $x\to+\infty$时,$f'(x)\to+\infty$;当 $x\to0$ 时,$f'(x)\to-\infty$.

所以存在 $x_0>0$ 使 $f'(x_0)=0$,当 $0<x<x_0$ 时,$f'(x)<0$,函数单调递减;当 $x>x_0$ 时,$f'(x)>0$,函数单调递增.

所以$f(x)$存在最小值,故 C 正确.故选 BC.

3.(多选)已知函数 $f(x)=x^3+3x^2-9x+1$.若$f(x)$在区间$(k,2]$上的最大值为 28,则实数 k 的值可以是 ( )

A.-5　　B.-4

C.-3　　D.-2

AB **解析**:因为 $f(x)=x^3+3x^2-9x+1$,所以 $f'(x)=3x^2+6x-9$.

令 $f'(x)=3x^2+6x-9=0$,解得 $x_1=-3$,$x_2=1$,

所以在$(-\infty,-3)$,$(1,+\infty)$上,$f'(x)>0$,在$(-3,1)$上,$f'(x)<0$.所以函数 $f(x)$在$(-\infty,-3)$,$(1,+\infty)$上单调递增,在$(-3,1)$上单调递减.

则 $f(x)$在$[1,2]$上单调递增,所以在$[1,2]$上,$f(2)$是最大值;

$f(x)$在$(-3,1)$上单调递减,所以在$[-3,1]$上,$f(-3)$是最大值;

$f(x)$在$(-\infty,-3)$上单调递增,所以在$(-\infty,-3]$上,$f(-3)$是最大值.

因为 $f(2)=3$,$f(-3)=28$,且 $f(x)$在区间$(k,2]$上的最大值为 28,

所以 $k<-3$,即 k 的取值范围是$(-\infty,-3)$.故选 AB.

4.已知函数 $f(x)=(x-1)e^x$.若对于区间$(-\infty,1)$上的任意 x_1,x_2,都有$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant t$,则 ( )

A.t 的最小值是 1

B.t 的最小值小于 1

C.t 的最大值是 1

D.这样的 t 不存在

A **解析**:由题意,函数 $f(x)=(x-1)e^x$ 对于区间$(-\infty,1)$上的任意 x,都有 $f(x)_{\max}-f(x)_{\min}\leqslant t$.

因为 $f(x)=(x-1)e^x$,则 $f'(x)=xe^x$,$x\in(-\infty,1)$.

由 $f'(x)<0$,可得 $x<0$;由 $f'(x)>0$,可得 $0<x<1$.

所以函数 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,在$(0,1)$上单调递增,

所以函数的最小值为 $f(0)=-1$.

又当 $x\in(-\infty,1)$时,$f(x)=(x-1)e^x<0$,而 $f(1)=0$,

所以$-1\leqslant f(x)<0$,所以 $t\geqslant1$,即实数 t 的最小值是 1.

故选 A.

5.当 $x\in[-1,1]$时,函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$ 的值域是________.

$[0,e]$ **解析**:$f'(x)=\left(\dfrac{x^2}{e^x}\right)'=\dfrac{2x\cdot e^x-x^2\cdot e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{2x-x^2}{e^x}$,$x\in[-1,1]$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=0$ 或 $x=2$(舍去),

所以 $f(x)$在$(-1,0)$上单调递减,在$(0,1)$上单调递增,$f(x)$在 $x=0$ 处取得极小值.

因为 $f(-1)=e$,$f(0)=0$,$f(1)=\dfrac{1}{e}$,

所以函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$,$x\in[-1,1]$的值域为$[0,e]$.

6.已知函数 $f(x)=\dfrac{a}{x^2}+2\ln x(a>0)$.若 $f(x)\geqslant2$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是________.

$[e,+\infty)$ **解析**:由 $f(x)=\dfrac{a}{x^2}+2\ln x$ 得 $f'(x)=\dfrac{2(x^2-a)}{x^3}$.又函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,且 $a>0$,令 $f'(x)=0$,得$x=-\sqrt{a}$(舍去)或 $x=\sqrt{a}$.当 $0<x<\sqrt{a}$ 时,$f'(x)<0$;当 $x>\sqrt{a}$ 时,$f'(x)>0$.故 $x=\sqrt{a}$ 是函数 $f(x)$的极小值点,也是最小值点,且$f(\sqrt{a})=\ln a+1$.要使$f(x)\geqslant2$ 恒成立,需 $\ln a+1\geqslant2$ 恒成立,则 $a\geqslant e$.

7.已知函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+1(x\in\mathbf{R})$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若 $f(x)-2a+1\geqslant 0$ 对任意 $x\in[-2,4]$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

解：(1)令 $f'(x)=3x^2-6x-9>0$，解得 $x<-1$ 或 $x>3$.

令 $f'(x)=3x^2-6x-9<0$，解得 $-1<x<3$.

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$，$(3,+\infty)$，单调递减区间为 $(-1,3)$.

(2)由(1)知 $f(x)$ 在 $[-2,-1]$ 上单调递增，在 $[-1,3]$ 上单调递减，在 $[3,4]$ 上单调递增，

又 $f(-2)=-1$，$f(3)=-26$，$f(3)<f(-2)$，

所以 $f(x)_{\min}=-26$.

因为 $f(x)-2a+1\geqslant 0$ 对任意 $x\in[-2,4]$ 恒成立，

所以 $f(x)_{\min}\geqslant 2a-1$，即 $2a-1\leqslant -26$，解得 $a\leqslant -\dfrac{25}{2}$.故实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\dfrac{25}{2}\right]$.

8.已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 图象在点 $P(0,-2)$ 处的切线的斜率为 -1，且函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2)当 $x\in[-1,2]$ 时，求函数 $f(x)$ 的最值.

解：(1)因为 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，

所以 $f'(x)=3x^2+2ax+b$.

由题意可知，$f(0)=-2$，$f'(0)=-1$，$f'(1)=0$，

所以 $\begin{cases}f(0)=c=-2,\\f'(0)=b=-1,\\f'(1)=3+2a+b=0,\end{cases}$

解得 $a=-1$，$b=-1$，$c=-2$，

所以函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=x^3-x^2-x-2$，经检验符合题意，

所以 $f(x)=x^3-x^2-x-2$.

(2)由(1)知 $f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$，

令 $f'(x)=0$，即 $(3x+1)(x-1)=0$，解得 $x=-\dfrac{1}{3}$，或 $x=1$.

当 x 在区间 $\left[-1,-\dfrac{1}{3}\right)$，$[1,2]$ 上时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(-\dfrac{1}{3},1\right)$ 时，$f'(x)<0$；

所以 $f(x)$ 在 $\left[-1,-\dfrac{1}{3}\right)$，$[1,2]$ 上单调递增，在 $\left[-\dfrac{1}{3},1\right)$ 上单调递减，

当 $x=-\dfrac{1}{3}$ 时，$f(x)$ 取得极大值为 $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{27}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{3}-2=-\dfrac{49}{27}$；

当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极小值为 $f(1)=1^3-1^2-1-2=-3$.

又 $f(-1)=(-1)^3-(-1)^2-(-1)-2=-3$，$f(2)=2^3-2^2-2-2=0$，

所以 $f(x)_{\min}=-3$，$f(x)_{\max}=0$.

9.设函数 $f(x)$ 是定义在 $[-1,0)\cup(0,1]$ 上的奇函数，当 $x\in[-1,0)$ 时，$f(x)=2ax+\dfrac{1}{x^2}(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $x\in(0,1]$ 时，求 $f(x)$ 的解析式；

(2)若 $a>-1$，试判断 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上的单调性，并证明你的结论；

(3)是否存在 a，使得当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)$ 有最大值 -6？

解：(1)设 $x\in(0,1]$，则 $-x\in[-1,0)$，$f(-x)=-2ax+\dfrac{1}{x^2}$.

因为 $f(x)$ 是奇函数，

所以 $f(-x)=-f(x)$，

所以 $f(x)=2ax-\dfrac{1}{x^2}$，$x\in(0,1]$.

(2)当 $a>-1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增.证明如下：

$f'(x)=2a+\dfrac{2}{x^3}=2\left(a+\dfrac{1}{x^3}\right)$.

因为 $a>-1$，$x\in(0,1)$，$\dfrac{1}{x^3}>1$，

所以 $a+\dfrac{1}{x^3}>0$，即 $f'(x)>0$.

所以当 $a>-1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增.

(3)由(2)知当 $a\geqslant -1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增.

由 $f(x)_{\max}=f(1)=-6$，得 $a=-\dfrac{5}{2}$(不合题意，舍去).

当 $a<-1$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\sqrt[3]{-\dfrac{1}{a}}$.

列表如下：

x	$\left(0,\sqrt[3]{-\frac{1}{a}}\right)$	$\sqrt[3]{-\frac{1}{a}}$	$\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{a}},1\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	极大值	↘

可知 $f(x)_{\max}=f\left(\sqrt[3]{-\dfrac{1}{a}}\right)=-6$，解得 $a=-2\sqrt{2}$.

此时 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\in(0,1)$.

所以存在 $a=-2\sqrt{2}$，使得 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上有最大值 -6.

第3课时　函数的最大(小)值的应用

学习任务目标

1.了解画函数的大致图象的步骤.

2.掌握利用导数解决实际问题中的求最大(小)值的方法.(数学运算)

问题式预习

知识点一　画函数 $f(x)$ 的大致图象的步骤

(1)求出函数 $f(x)$ 的定义域；

(2)求导数 $f'(x)$ 及函数 $f'(x)$ 的零点；

(3)用 $f'(x)$ 的零点将 $f(x)$ 的定义域划分为若干个区间，列表给出 $f'(x)$ 在各区间上的正负，并得出 $f(x)$ 的单调性与极值；

(4)确定 $f(x)$ 的图象所经过的一些特殊点，以及图象的变化趋势；

(5)画出 $f(x)$ 的大致图象.

知识点二　导数在实际问题中的应用

导数在实际问题中的应用，主要体现在：利润最大问题，用料最省问题，效率最高问题，体积最大问题等.

[微训练]

1.某工厂要围建一个面积为512平方米的矩形堆料场，一边可以利用原有的墙壁，其他三边需要砌新的墙壁.若使砌墙壁所用的材料最省，则堆料场的长和宽应分别为(单位：米)　(　　)

A.32，16　　B.30，15

C.40，20　　D.36，18

A　**解析**：要使材料最省，则要求新砌的墙壁的总长最短.设堆料场的宽为 x 米，则长为 $\frac{512}{x}$ 米，因此新砌墙壁总长 $L=2x+\frac{512}{x}(x>0)$，则 $L'=2-\frac{512}{x^2}$.令 $L'=0$，得 $x=16$ 或 $x=-16$(舍去).此时长为 $\frac{512}{16}=32$(米)，可使 L 最短.

2.已知圆锥内接于半径为 R 的球，当圆锥的体积最大时，圆锥的高为　(　　)

A.R　　B.$2R$　　C.$\frac{4}{3}R$　　D.$\frac{3}{4}R$

C　**解析**：设圆锥高为 h，底面半径为 r，则 $R^2=(h-R)^2+r^2$，所以 $r^2=2Rh-h^2$.

所以 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi}{3}h(2Rh-h^2)=\frac{2}{3}\pi Rh^2-\frac{\pi}{3}h^3$.

$V'=\frac{4}{3}\pi Rh-\pi h^2$.令 $V'=0$，得 $h=\frac{4}{3}R$.

当 $0<h<\frac{4}{3}R$ 时，$V'>0$；

当 $\frac{4}{3}R<h<2R$ 时，$V'<0$.

故当 $h=\frac{4}{3}R$ 时，圆锥的体积最大.

任务型课堂

任务一　与图象有关的导数问题

1.已知函数 $f(x)=x^3-3ax-1(a\neq 0)$.若函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 时取得极值，直线 $y=m$ 与 $y=f(x)$ 的图象有三个不同的交点，求 m 的取值范围.

解：因为 $f(x)$ 在 $x=-1$ 时取得极值，

$f'(x)=3x^2-3a$，

所以 $f'(-1)=3\times(-1)^2-3a=0$，所以 $a=1$.

所以 $f(x)=x^3-3x-1$，$f'(x)=3x^2-3$.

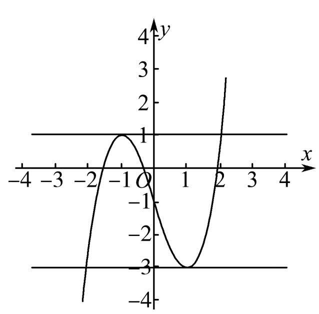
由 $f'(x)=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=1$.

当 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$；

当 $-1<x<1$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$.

画出函数 $f(x)=x^3-3x-1$ 的大致图象，如图.



由 $f(x)$ 的单调性可知，$f(x)$ 在 $x=-1$ 时取得极大值 $f(-1)=1$，在 $x=1$ 时取得极小值 $f(1)=-3$.

要使直线 $y=m$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象有三个不同的交点，结合 $f(x)$ 的单调性可知，m 的取值范围是

$(-3,1)$.

2.设 a 为实数,函数 $f(x)=x^3-x^2-x+a$.

(1)求 $f(x)$的极值;

(2)当 a 在什么范围内取值时,曲线 $y=f(x)$与 x 轴仅有一个交点?

解:(1)$f'(x)=3x^2-2x-1$.

令 $f'(x)=0$,则 $x=-\frac{1}{3}$或 $x=1$.

当 x 变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下表:

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$的极大值是 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{27}+a$,极小值是 $f(1)=a-1$.

(2)函数 $f(x)=x^3-x^2-x+a=(x-1)^2(x+1)+a-1$,

由此可知,x 取足够大的正数时,有 $f(x)>0$,x 取足够小的负数时,有 $f(x)<0$,所以曲线 $y=f(x)$与 x 轴至少有一个交点.

因此若 $y=f(x)$与 x 轴仅有一个交点,应有$\frac{5}{27}+a<0$ 或 $a-1>0$.

所以当 $a\in\left(-\infty,-\frac{5}{27}\right)\cup(1,+\infty)$时,曲线 $y=f(x)$与 x 轴仅有一个交点.

3.求函数 $f(x)=x^3-3ax+2$ 的极值,并讨论关于 x 的方程 $x^3-3ax+2=0$ 何时有三个不同的实根,何时有唯一的实根(其中 $a>0$).

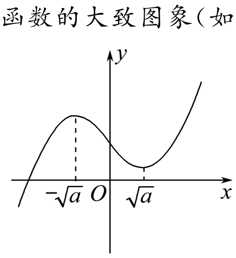
解:函数的定义域为 $\mathbf{R}$,其导函数为 $f'(x)=3x^2-3a$.

由 $f'(x)=0$ 可得 $x=\pm\sqrt{a}$,列表讨论如下:

x	$(-\infty,-\sqrt{a})$	$-\sqrt{a}$	$(-\sqrt{a},\sqrt{a})$	$\sqrt{a}$	$(\sqrt{a},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

由此可得,函数在 $x=-\sqrt{a}$ 时取得极大值 $2+2a^{\frac{3}{2}}$,在 $x=\sqrt{a}$ 时取得极小值 $2-2a^{\frac{3}{2}}$.

根据表格,可作函数的大致图象(如图).



因为极大值 $f(-\sqrt{a})=2+2a^{\frac{3}{2}}>0$,当 x 取足够小的负数时,有 $f(x)<0$,故当极小值 $f(\sqrt{a})=2-2a^{\frac{3}{2}}<0$,即 $a>1$ 时,方程 $x^3-3ax+2=0$ 有三个不同的实根;当极小值 $f(\sqrt{a})=2-2a^{\frac{3}{2}}>0$,即 $0<a<1$ 时,方程 $x^3-3ax+2=0$ 有唯一的实根.

任务二　导数在实际问题中的应用

[探究活动]

问题 1:某厂家计划用一种材料生产一种盛 500 mL 溶液的圆柱形易拉罐.

探究 1:生产这种易拉罐,如何计算使用材料的多少呢?

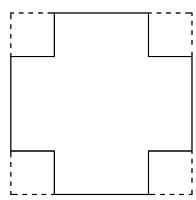
提示:计算出圆柱的表面积即可.

探究 2:如何制作使用材料最省?

提示:要使用料最省,只需圆柱的表面积最小.可设圆柱的底面半径为 x cm,则圆柱的表面积 $S=2\pi x^2+\frac{1\ 000}{x}(x>0)$,求当 S 最小时圆柱的半径、高即可.

问题 2:有一块边长为 60 cm 的正方形硬纸片,现准备利用这块硬纸片制作一个包装盒.

探究 1:如图,在硬纸片的四个角上切去四个相同的小正方形,制成一个无盖的盒子,小正方形的边长 x(cm)为多少时,盒子的容积 V 最大?



提示:由题意,制成的盒子高为 x cm$(0<x<30)$,底面边长为$(60-2x)$cm,

$V=(60-2x)(60-2x)x=4x^3-240x^2+3\ 600x$,

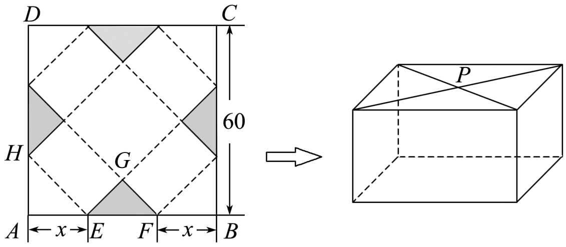
$V'=12x^2-480x+3\ 600$.

令 $V'=0$,得 $x=10$ 或 $x=30$(舍去),

当 $x=10$ 时,$V_{极大}=16\ 000$.

因为在定义域内仅有一个极大值,所以 $V_{最大}=16\ 000$,即当小正方形的边长为 10 cm 时,盒子的容积最大.

探究 2:如图,切去阴影部分所示的四个全等的等腰直角三角形,再沿虚线折起,使得 A,B,C,D 四个点重合于图中的点 P,正好制成一个正四棱柱形状的包装盒.点 E,F 在边 AB 上,是被切去的一个等腰直角三角形斜边的两个端点.若 $AE=FB=x$ cm,则 x 取何值时,包装盒的容积 V 最大?



提示:因为 $V(x)=(\sqrt{2}x)^2\times(60-2x)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}x^2\times(60-2x)=-2\sqrt{2}x^3+60\sqrt{2}x^2(0<x<30)$,

所以 $V'(x)=-6\sqrt{2}x^2+120\sqrt{2}x=-6\sqrt{2}x(x-20)$.

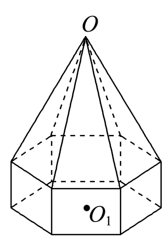
令 $V'(x)=0$,得 $x=0$(舍去)或 $x=20$.

因为当 $0<x<20$ 时,$V'(x)>0$;当 $20<x<30$ 时,$V'(x)<0$.

所以 $V(x)$ 在 $x=20$ 时取得的极大值是唯一的极值,故为最大值.

[评价活动]

1. 一个帐篷如图所示,它下部的形状是高为 1 m 的正六棱柱,上部的形状是侧棱长为 3 m 的正六棱锥.试问:当帐篷的顶点 O 到底面中心 O_1 的距离为多少时,帐篷的体积最大?



解:设 OO_1 为 x m,则 $1<x<4$.

由题设可得正六棱锥的底面边长为 $\sqrt{3^2-(x-1)^2}=\sqrt{8+2x-x^2}$,

故底面正六边形的面积为

$6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{8+2x-x^2})^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}(8+2x-x^2)$.

帐篷的体积

$V(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}(8+2x-x^2)\left[\frac{1}{3}(x-1)+1\right]$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}(16+12x-x^3)$,求导得 $V'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(12-3x^2)$.

令 $V'(x)=0$,解得 $x=-2$(不合题意,舍去)或 $x=2$.

当 $1<x<2$ 时,$V'(x)>0$,$V(x)$ 单调递增;

当 $2<x<4$ 时,$V'(x)<0$,$V(x)$ 单调递减.

故当 $x=2$ 时,$V(x)$ 最大,且最大值 $V(2)=16\sqrt{3}$.

所以当 OO_1 为 2 m 时,帐篷的体积最大,最大体积为 $16\sqrt{3}$ m^3.

2. 某公司决定采用增加广告投入和技术改造投入来获得更大的利益.通过对市场的预测,当两项投入都不大于 3 百万元时,每投入 x 百万元广告费,增加的销售额 y_1(单位:百万元)可近似地用函数 $y_1=-2x^2+14x$ 来计算;每投入 x 百万元技术改造费,增加的销售额 y_2(单位:百万元)可近似地用函数 $y_2=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+5x$ 来计算.现该公司准备共投入 3 百万元,用于广告和技术改造,请设计一种资金分配方案,使得该公司增加的销售额最大.(参考数据:$\sqrt{2}\approx1.41$,$\sqrt{3}\approx1.73$)

解:设 3 百万元中技术改造投入为 $x(0\leqslant x\leqslant3)$ 百万元,广告投入为 $(3-x)$ 百万元,则广告投入带来的销售额增加值为 $[-2(3-x)^2+14(3-x)]$ 百万元,技术改造投入带来的销售额增加值为 $\left(-\frac{1}{3}x^3+2x^2+5x\right)$ 百万元,所以投入带来的销售额增加值 $F(x)=-2(3-x)^2+14(3-x)-\frac{1}{3}x^3+2x^2+5x$.整理上式,得 $F(x)=-\frac{1}{3}x^3+3x+24$.

$F'(x)=-x^2+3$,令 $F'(x)=0$,

解得 $x=\sqrt{3}$ 或 $x=-\sqrt{3}$(舍去).

当 $x\in[0,\sqrt{3})$ 时,$F'(x)>0$;

当 $x\in(\sqrt{3},3]$ 时,$F'(x)<0$.

所以当 $x=\sqrt{3}\approx1.73$ 时,$F(x)$ 取得最大值.

所以当广告投入为 1.27 百万元,技术改造投入为 1.73 百万元时,该公司增加的销售额最大.

3. 有关统计数据显示,从上午6 时到 12 时,车辆通过某市某一路段的用时 y(单位:min)与车辆进入该路段的时刻 t 之间的关系可近似地用如下函数表示:$y=\begin{cases}-\frac{1}{8}t^3-\frac{3}{4}t^2+36t-\frac{629}{4}, 6\leqslant t<9,\\ \frac{t}{8}+\frac{55}{4}, 9\leqslant t\leqslant10,\\ -3t^2+66t-345, 10<t\leqslant12.\end{cases}$

求在这段时间内通过该路段用时最多的时刻.

解:当 $6\leqslant t<9$ 时,$y'=-\frac{3}{8}t^2-\frac{3}{2}t+36=-\frac{3}{8}(t^2+4t-96)=-\frac{3}{8}(t+12)(t-8)$.

令 $y'=0$,得 $t_1=-12$(舍去),$t_2=8$.

当 $6\leqslant t<8$ 时,$y'>0$;当 $8<t<9$ 时,$y'<0$.

所以当 $t=8$ 时,y 有最大值,$y_{max}=18.75$.

当 $9\leqslant t\leqslant10$ 时,$y=\frac{t}{8}+\frac{55}{4}$ 单调递增,

所以当 $t=10$ 时，y 有最大值，$y_{max}=15$.

当 $10<t\leqslant 12$ 时，$y=-3(t-11)^2+18$，

所以当 $t=11$ 时，y 有最大值，$y_{max}=18$.

综上所述，通过该路段用时最多的时刻为上午 8 时.

【类题通法】

1.求面积与体积的最值问题是实际生产生活中的常见问题.解决这类问题的关键是熟练掌握相关的面积、体积公式，能够依据题意确定出自变量的取值范围，得出准确的函数解析式，然后利用导数的方法加以解决.必要时，可选择建立坐标系，通过点的坐标得出函数解析式或曲线方程，以便问题的解决.

2.利用导数解决利润(收益)最大问题，关键是灵活运用题设条件，得出利润(收益)的函数解析式，然后再利用导数的方法求出该函数的最大值，即可得到最大利润(收益).常见的基本等量关系如下：

(1)利润(收益)=收入-成本.

(2)利润(收益)=每件产品的利润(收益)×销售量.

提质归纳

- 导数的应用
  - 单调性 — 图象 — 极值、最值
  - 实际问题中的应用
    - 利润最大问题
    - 用料最省问题
    - 效率最高问题

课后素养评价(二十二)

基础性·能力运用

1.已知关于 x 的不等式 $\frac{1}{2}x^2-a\ln x>0(a>0)$ 恒成立，则 a 的取值范围是 ( )

A.$a>0$

B.$0<a<\mathrm{e}$

C.$a>\mathrm{e}$

D.$0<a<1$

B **解析**：令 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-a\ln x(x>0)$，

则 $f'(x)=x-\frac{a}{x}=\frac{x^2-a}{x}$.

因为 $a>0$，所以在 $(0,\sqrt{a})$ 上，$f'(x)<0$；

在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 上，$f'(x)>0$.

所以在 $(0,+\infty)$ 上，$f(x)_{\min}=f(\sqrt{a})=\frac{1}{2}a-a\ln\sqrt{a}$.

又因为不等式 $\frac{1}{2}x^2-a\ln x>0(a>0)$ 恒成立，

所以 $f(x)_{\min}>0$，即 $\frac{1}{2}a-a\ln\sqrt{a}>0$，解得 $0<a<\mathrm{e}$.故选 B.

2.某生产厂家的年利润 y(单位：万元)与年产量 x(单位：万件)的函数关系式为 $y=-\frac{1}{3}x^3+81x-286$，则该生产厂家获取的最大年利润为 ( )

A.300 万元

B.252 万元

C.200 万元

D.128 万元

C **解析**：因为 $y=-\frac{1}{3}x^3+81x-286$，所以 $y'=-x^2+81$.

当 $0<x<9$ 时，$y'>0$，函数单调递增；

当 $x>9$ 时，$y'<0$，函数单调递减.

所以当 $x=9$ 时，y 有最大值，最大值为 200.故选 C.

3.若关于 x 的不等式 $2x^2+a-\ln x<0$ 有解，则实数 a 的取值范围是 ( )

A.$\left(-\infty,-\ln 2-\frac{1}{2}\right)$

B.$\left(-\infty,\ln 2-\frac{1}{2}\right)$

C.$\left(-\ln 2-\frac{1}{2},0\right)$

D.$\left(-\ln 2-\frac{1}{2},+\infty\right)$

A **解析**：由 $2x^2+a-\ln x<0$ 有解，得 $a<\ln x-2x^2$ 有解.

令 $f(x)=\ln x-2x^2(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}-4x=\frac{1-4x^2}{x}(x>0)$.

当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减.

所以当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{4}=-\ln 2-\frac{1}{2}$.

所以 $a<-\ln 2-\frac{1}{2}$.故选 A.

4. 在正四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$PA=4$，则当该正四棱锥的体积最大时，它的高 h 等于________.

$\frac{4\sqrt{3}}{3}$ **解析**：设正四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面边长为 a.

因为 $PA=4$，所以 $\frac{a^2}{2}+h^2=16$，即 $a^2=32-2h^2$.

所以正四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的体积 $V=\frac{1}{3}a^2h=\frac{32}{3}h-\frac{2}{3}h^3(h>0)$.

所以 $V'=\frac{32}{3}-2h^2$.

令 $V'=0$，解得 $h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

当 $0<h<\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时，$V'>0$，所以函数在 $\left(0,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递增；

当 $h>\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时，$V'<0$，所以函数在 $\left(\frac{4\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 上单调递减.

所以当 $h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时，正四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的体积取得最大值.

5. 若关于 x 的不等式 $ax\leqslant \ln x-x^2$ 恰有两个整数解，则实数 a 的最大值为________.

$\frac{\ln 2}{2}-2$ **解析**：关于 x 的不等式 $ax\leqslant \ln x-x^2$ 恰有两个整数解，即关于 x 的不等式 $a\leqslant\frac{\ln x}{x}-x$ 恰有两个整数解.

令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}-x$，$x\in(0,+\infty)$，得 $g'(x)=\frac{1-\ln x-x^2}{x^2}$.

令 $h(x)=1-\ln x-x^2$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，$h(1)=0$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$h(x)>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)<0$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减.

因为 $g(2)=\frac{\ln 2}{2}-2$，$g(3)=\frac{\ln 3}{3}-3$，

由题意可得 $g(3)<a\leqslant g(2)$，

所以 $\frac{\ln 3}{3}-3<a\leqslant\frac{\ln 2}{2}-2$.

所以实数 a 的最大值为 $\frac{\ln 2}{2}-2$.

6. 设函数 $f(x)=x^3-6x+5$，$x\in\mathbf{R}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值；

(2)若关于 x 的方程 $f(x)=a$ 有三个不同的实根，求实数 a 的取值范围；

(3)已知当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)\geqslant k(x-1)$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

解：(1) $f'(x)=3x^2-6$，令 $f'(x)=0$，

解得 $x_1=-\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{2}$.

当 $x>\sqrt{2}$ 或 $x<-\sqrt{2}$ 时，$f'(x)>0$；

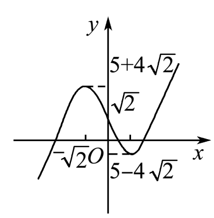
当 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-\sqrt{2})$，$(\sqrt{2},+\infty)$，单调递减区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

当 $x=-\sqrt{2}$ 时，$f(x)$ 有极大值 $5+4\sqrt{2}$；

当 $x=\sqrt{2}$ 时，$f(x)$ 有极小值 $5-4\sqrt{2}$.

(2)由(1)知 $y=f(x)$ 的图象的大致形状及走向如图所示，当 $5-4\sqrt{2}<a<5+4\sqrt{2}$ 时，直线 $y=a$ 与 $y=f(x)$ 的图象有三个不同交点，即方程 $f(x)=a$ 有三个不同实根.



(3) $f(x)\geqslant k(x-1)$，即 $(x-1)(x^2+x-5)\geqslant k(x-1)$.

因为 $x>1$，所以 $k\leqslant x^2+x-5$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立.

令 $g(x)=x^2+x-5$，$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $g(x)>g(1)=-3$.

所以 k 的取值范围是 $(-\infty,-3]$.

综合性·创新提升

1. 若函数 $f(x)=2\ln x+4x^2+bx+5$ 的图象在任意一点处的切线的斜率都大于 0，则实数 b 的取值范围是 (　　)

A.$(-\infty,-8)$　　B.$(-8,+\infty)$

C.$(-\infty,8)$　　D.$(8,+\infty)$

B　**解析**：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{2}{x}+8x+b$.

因为 $f(x)$ 的图象在任意一点处的切线的斜率都大于 0，

所以 $f'(x)=\frac{2}{x}+8x+b>0$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立.

所以 $b>-\frac{2}{x}-8x$.

设 $g(x)=-\frac{2}{x}-8x$，则 $b>g(x)_{\max}$，$g'(x)=\frac{2}{x^2}-8$.

令 $g'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$，负根舍去.

所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减.

所以当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$g(x)$ 取得最大值，且最大值 $g(x)_{\max}=g\left(\frac{1}{2}\right)=-8$，

所以 $b>-8$. 故选 B.

2. 某厂生产一种产品，固定成本为 20 000 元，每生产一件该产品，成本增加 100 元. 若总收入 R(单位：元)与年产量 x(单位：件)的关系是 $R(x)=-\frac{x^3}{900}+400x$，$0\leqslant x\leqslant 390$，则当总利润最大时，每年生产的产品件数是 (　　)

A.150　　B.200　　C.250　　D.300

D　**解析**：总利润 $P(x)=-\frac{x^3}{900}+400x-100x-20\ 000=-\frac{x^3}{900}+300x-20\ 000(0\leqslant x\leqslant 390)$，

$P'(x)=-\frac{x^2}{300}+300(0\leqslant x\leqslant 390)$.

令 $P'(x)=0$，可得 $x=300$.

当 $0\leqslant x<300$ 时，$P'(x)>0$；

当 $300<x\leqslant 390$ 时，$P'(x)<0$.

故当 $x=300$ 时，$P(x)$ 取得最大值. 故选 D.

3. 现需设计一套数学试卷的版式. 该试卷含有左右两个相同的矩形栏. 假设这两栏的面积之和为 720 cm^2，四周空白的宽度为 4 cm，两栏之间的空白的宽度为 2 cm. 试卷的面积最小时，该试卷的高为 (　　)

A.8 cm　　B.10 cm

C.32 cm　　D.40 cm

C　**解析**：设试卷的高和宽分别为 x cm，y cm，则每栏的高和宽分别为 $(x-8)$cm，$\frac{y-10}{2}$cm，其中 $x>8$，$y>10$，两栏面积之和为 $2(x-8)\cdot\frac{y-10}{2}=720$.

由此得 $y=\frac{720}{x-8}+10$，$x\in(8,+\infty)$.

设试卷的面积为 S，

则 $S=xy=x\left(\frac{720}{x-8}+10\right)(x>8)$.

所以 $S'=\frac{-5\ 760}{(x-8)^2}+10$，令 $S'=0$ 得 $x=32$(负值舍去).

所以函数 S 在 $(8,32)$ 上单调递减，在 $(32,+\infty)$ 上单调递增.

所以当 $x=32$ 时，S 取得最小值.

所以当试卷的高为 32 cm，宽为 40 cm 时，可使试卷的面积最小. 故选 C.

4. 海轮每小时的燃料费与它的航行速度的立方成正比，已知某海轮的最大航速为 30 海里/时，当速度为 10 海里/时时，它每小时的燃料费是 25 元，每小时的其余费用(无论速度如何)都是 400 元. 如果甲、乙两地相距 800 海里，则要使该海轮从甲地航行到乙地的总费用最低，它的航速应为 (　　)

A.30 海里/时

B.25 海里/时

C.20 海里/时

D.10 海里/时

C　**解析**：海轮每小时的燃料费与它的航行速度的立方成正比，设船速为 $x(0<x\leqslant 30)$ 海里/时，每小时的燃料费为 W 元，比例系数为 k，则满足 $W=kx^3$.

当速度为 10 海里/时时，它每小时的燃料费是 25 元，由此可得 $25=k\times 10^3$，解得 $k=\frac{1}{40}$.

若甲、乙两地相距 800 海里，则所需时间为 $\frac{800}{x}$ 小时.

所以总费用 $f(x)=\left(\frac{1}{40}x^3+400\right)\times\frac{800}{x}=\frac{20x^3+320\ 000}{x}(0<x\leqslant30)$，

所以 $f'(x)=\frac{40\times(x^3-8\ 000)}{x^2}$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=20$.

当 $0<x<20$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,20)$ 上单调递减；

当 $20<x\leqslant30$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(20,30]$ 上单调递增.

所以当 $x=20$ 时，海轮从甲地航行到乙地的总费用最低.故选 C.

5. 某商场销售某种商品，经验表明，该商品每日的销售量 y（单位：千克）与销售价格 x（单位：元/千克）满足关系式 $y=\frac{2}{x-3}+10(x-6)^2$，$x\in(3,6)$.若该商品的成本为 3 元/千克，则当销售价格为______元/千克时，该商场每日销售该商品所获得的利润最大.

4 **解析**：该商场每日销售该商品所获得的利润

$f(x)=(x-3)\left[\frac{2}{x-3}+10(x-6)^2\right]=2+10(x-3)\cdot(x-6)^2$，$3<x<6$，

$f'(x)=10[(x-6)^2+2(x-3)(x-6)]=30(x-4)\cdot(x-6)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=4$ 或 $x=6$（舍去）.

所以函数 $f(x)$ 在 $(3,4)$ 上单调递增，在 $(4,6)$ 上单调递减，

所以当 $x=4$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值为 $f(4)=42$.

故当销售价格为 4 元/千克时，该商场每日销售该商品所获得的利润最大，最大利润为 42 元.

6. 某地政府向当地企业发放补助款，对纳税额 x（单位：万元）满足 $x\in[4,8]$ 内的小微企业设计了补助款发放方案.方案要同时具备下列两个条件：①补助款 $f(x)$（单位：万元）随企业纳税额的增加而增加；②补助款不低于纳税额的 50%.经测算，政府决定采用函数 $f(x)=\frac{x}{4}-\frac{m}{x}+4$（其中 m 为使用参数）表示补助款发放方案.

(1)当使用参数 $m=13$ 时，$f(x)$ 是否满足条件？并说明理由.

(2)求同时满足条件①②的使用参数 m 的取值范围.

解：(1)不满足条件.理由如下：当 $m=13$ 时，函数 $f(x)=\frac{x}{4}-\frac{13}{x}+4$，可得 $f'(x)=\frac{1}{4}+\frac{13}{x^2}>0$.

所以 $f(x)$ 在 $[4,8]$ 上单调递增，满足条件①.

又因为 $f(4)=\frac{7}{4}<2=\frac{1}{2}\times4$，所以当 $m=13$ 时，$f(x)$ 不满足条件②.

综上，当使用参数 $m=13$ 时，$f(x)$ 不满足条件.

(2)由函数 $f(x)=\frac{x}{4}-\frac{m}{x}+4$，

可得 $f'(x)=\frac{1}{4}+\frac{m}{x^2}=\frac{x^2+4m}{4x^2}$.

所以当 $m\geqslant0$ 时，$f'(x)\geqslant0$，满足条件①.

当 $m<0$ 时，由 $f'(x)=0$，可得 $x=2\sqrt{-m}$.

当 $x\in[2\sqrt{-m},+\infty)$ 时，$f'(x)\geqslant0$，$f(x)$ 单调递增.

所以 $2\sqrt{-m}\leqslant4$，解得 $-4\leqslant m<0$.

综上，$m\geqslant-4$.

由条件②可知，$f(x)\geqslant\frac{x}{2}$，即不等式 $\frac{x}{4}+\frac{m}{x}\leqslant4$ 在 $[4,8]$ 上恒成立，

等价于 $m\leqslant-\frac{1}{4}x^2+4x=-\frac{1}{4}(x-8)^2+16$.

当 $x=4$ 时，$y=-\frac{1}{4}(x-8)^2+16$ 取得最小值 12，

所以 $m\leqslant12$.

综上，使用参数 m 的取值范围是 $[-4,12]$.

7. 某地建一座桥，两端的桥墩已建好，这两个桥墩相距 m 米，余下的工程为建两端桥墩之间的桥面和桥墩.经预算，一个桥墩的工程费用为 256 万元；距离为 x 米的相邻两墩之间的桥面工程费用为 $(2+\sqrt{x})$ 万元/米.假设桥墩等距离分布，所有桥墩都视为点，且不考虑其他因素.记余下的工程费用为 y 万元.

(1)试写出 y 关于 x 的函数解析式；

(2)当 $m=640$ 米时，需要建多少个桥墩才能使 y 最小？

解：(1)设需新建 n 个桥墩，则 $(n+1)x=m$，即 $n=\frac{m}{x}-1$，

所以 $y=f(x)=256n+(n+1)(2+\sqrt{x})x$

$=256\left(\frac{m}{x}-1\right)+m(2+\sqrt{x})$

$=\frac{256m}{x}+m\sqrt{x}+2m-256(x>0)$.

(2)由(1)知 $f(x)=\frac{256m}{x}+m\sqrt{x}+2m-256$，

所以 $f'(x)=-\frac{256m}{x^2}+\frac{1}{2}mx^{-\frac{1}{2}}=\frac{m}{2x^2}(x^{\frac{3}{2}}-512)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x^{\frac{3}{2}}=512$，所以 $x=64$.

当 $0<x<64$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$在区间$(0,64)$上单调递减；

当 $64<x<640$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$在区间$(64,640)$上单调递增.

所以 $f(x)$在 $x=64$ 处取得最小值.

此时 $n=\frac{m}{x}-1=\frac{640}{64}-1=9$.

故需要建 9 个桥墩才能使 y 最小.

8.已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+a\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $a=-1$，求函数 $f(x)$的极值，并指出是极大值还是极小值；

(2)若 $a=1$，求证：在区间$[1,+\infty)$上，函数 $f(x)$的图象在函数 $g(x)=\frac{2}{3}x^3$ 的图象的下方.

(1)**解**：函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

当 $a=-1$ 时，$f'(x)=x-\frac{1}{x}=\frac{(x+1)(x-1)}{x}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$ 或 $x=-1$(舍去).

当 $x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$在$(0,1)$上单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增.

则 $x=1$ 是 $f(x)$的极小值点，

所以 $f(x)$在 $x=1$ 处取得极小值为 $f(1)=\frac{1}{2}$.

(2)**证明**：设 $F(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^2+\ln x-\frac{2}{3}x^3$，

则 $F'(x)=x+\frac{1}{x}-2x^2=\frac{-2x^3+x^2+1}{x}$

$=\frac{-(x-1)(2x^2+x+1)}{x}$，

当 $x>1$ 时，$F'(x)<0$，

故 $F(x)$在区间$[1,+\infty)$上单调递减.

又 $F(1)=-\frac{1}{6}<0$，

所以在区间$[1,+\infty)$上，$F(x)<0$ 恒成立，

即 $f(x)<g(x)$恒成立.

因此当 $a=1$ 时，在区间$[1,+\infty)$上，函数 $f(x)$的图象在函数 $g(x)$的图象的下方.

易错强化练(四)

练易错

易错点 1｜ 忽视导数为零的情况致误

[防范要诀]

$f'(x)>0\Rightarrow$函数 $y=f(x)$单调递增，但反之，当函数 $y=f(x)$单调递增时，$f'(x)\geqslant0$，此处常会因漏掉导数等于零的情况致误.

[对点集训]

1.函数 $y=x+x\ln x$ 的单调递减区间是　(　　)

A.$(-\infty,e^{-2})$　B.$(0,e^{-2})$

C.$(e^{-2},+\infty)$　D.$(e^2,+\infty)$

B　**解析**：$y=x+x\ln x$ 的定义域为$(0,+\infty)$，令 $y'=2+\ln x<0$，得 $0<x<e^{-2}$，即原函数的单调递减区间为$(0,e^{-2})$.

2.若函数 $f(x)=ax^3-x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，则(　　)

A.$a<0$　B.$a\leqslant0$

C.$a<\frac{1}{3}$　D.$a\leqslant\frac{1}{3}$

B　**解析**：$f'(x)=3ax^2-1$，

因为 $f(x)=ax^3-x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

所以 $f'(x)=3ax^2-1\leqslant0$ 恒成立，故 $a\leqslant0$.

3.若函数 $f(x)=x-\frac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，则 a 的取值范围是　(　　)

A.$[-1,1]$　B.$\left[-1,\frac{1}{3}\right]$

C.$\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$　D.$\left[-1,-\frac{1}{3}\right]$

C　**解析**：方法一(特殊值法)：不妨取 $a=-1$，

则 $f(x)=x-\frac{1}{3}\sin 2x-\sin x$，

$f'(x)=1-\frac{2}{3}\cos 2x-\cos x$，则 $f'(0)=1-\frac{2}{3}-1=-\frac{2}{3}<0$，不满足 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，排除 A,B,D.故选 C.

方法二(综合法)：因为函数 $f(x)=x-\frac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，

所以 $f'(x)=1-\frac{2}{3}\cos 2x+a\cos x$

$=1-\frac{2}{3}(2\cos^2x-1)+a\cos x$

$=-\frac{4}{3}\cos^2x+a\cos x+\frac{5}{3}\geqslant0$，

即 $a\cos x\geqslant\frac{4}{3}\cos^2x-\frac{5}{3}$在$(-\infty,+\infty)$上恒成立.

当 $\cos x=0$ 时，恒有 $0\geqslant-\frac{5}{3}$，得 $a\in\mathbf{R}$；

当 $0<\cos x\leqslant1$ 时，得 $a\geqslant\frac{4}{3}\cos x-\frac{5}{3\cos x}$，令 $t=$

$\cos x, g(t)=\frac{4}{3}t-\frac{5}{3t}$在$(0,1]$上单调递增，得 $a\geqslant g(1)=-\frac{1}{3}$；

当$-1\leqslant\cos x<0$时，得 $a\leqslant\frac{4}{3}\cos x-\frac{5}{3\cos x}$，令 $t=\cos x, g(t)=\frac{4}{3}t-\frac{5}{3t}$在$[-1,0)$上单调递增，得 $a\leqslant g(-1)=\frac{1}{3}$. 综上，可得 a 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$，故选 C.

易错点 2｜ 由极值求参数时因未检验致误

［防范要诀］

可导函数在 $x=x_0$ 处的导数为 0 是该函数在 $x=x_0$ 处取得极值的必要不充分条件，故已知极值求函数时，由 $f'(x)=0$ 求出的参数的值要进行检验，否则易出错.

［对点集训］

4. 函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+a^2$ 在 $x=1$ 时有极值 10，那么（　　）

A. $a=-3, b=3$

B. $a=4, b=-11$

C. $a=-3, b=3$ 或 $a=4, b=-11$

D. 以上均不正确

B　**解析**：$f'(x)=3x^2+2ax+b$.

因为 $f'(1)=2a+b+3=0, f(1)=a^2+a+b+1=10$，

所以$\begin{cases}2a+b=-3,\\a^2+a+b=9,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-3,\\b=3\end{cases}$或$\begin{cases}a=4,\\b=-11.\end{cases}$经检验，当 $a=-3, b=3$ 时，$x=1$ 不是极值点，故 $a=4, b=-11$.

5. 函数 $y=x^3-2ax+a$ 在$(0,1)$上有极小值，则实数 a 的取值范围是（　　）

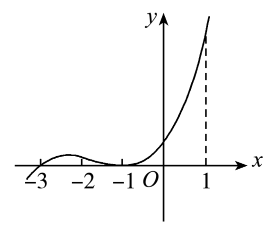
A. $(0,3)$　　B. $\left(0,\frac{3}{2}\right)$

C. $(0,+\infty)$　　D. $(-\infty,3)$

B　**解析**：$y'=3x^2-2a$. 要使函数在$(0,1)$上有极小值，必有 $a>0$. 令 $y'=3x^2-2a=0$，得 $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}a}$. 当 $x<-\sqrt{\frac{2}{3}a}$ 时，$y'>0$；当 $-\sqrt{\frac{2}{3}a}<x<\sqrt{\frac{2}{3}a}$ 时，$y'<0$；当 $x>\sqrt{\frac{2}{3}a}$ 时，$y'>0$. 故函数在 $x=\sqrt{\frac{2}{3}a}$ 时取得极小值. 令 $0<\sqrt{\frac{2}{3}a}<1$，得 $0<a<\frac{3}{2}$.

练疑难

1. 函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示，则（　　）



A. -3 是函数 $y=f(x)$ 的极大值点

B. $y=f(x)$ 在区间$(-3,1)$上单调递增

C. -1 是函数 $y=f(x)$ 的最小值点

D. 曲线 $y=f(x)$ 在点$(0,f(0))$处的切线的斜率小于零

B　**解析**：根据导函数图象可知：当 $x\in(-\infty,-3)$ 时，$f'(x)<0$，在 $x\in(-3,1)$ 时，$f'(x)>0$，所以函数 $y=f(x)$ 在$(-\infty,-3)$上单调递减，在$(-3,1)$上单调递增，-3 是函数 $y=f(x)$ 的极小值点，故 A 错误，B 正确；因为函数在$(-3,1)$上单调递增，所以 -1 不是函数 $y=f(x)$ 的最小值点，故 C 不正确；因为函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数大于 0，所以切线的斜率大于零，故 D 不正确. 故选 B.

2. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2-3x-9$ 的两个极值点为 x_1, x_2，则 $x_1x_2=$（　　）

A. 9　　B. -9　　C. 1　　D. -1

D　**解析**：令 $f'(x)=0$，得方程 $3x^2+2ax-3=0$，则 x_1, x_2 就是方程的两个根. 由根与系数的关系知 $x_1x_2=\frac{-3}{3}=-1$.

3. 已知函数 $y=-x^2-2x+3$ 在$[a,2]$上的最大值为 $\frac{15}{4}$，则 a 等于（　　）

A. $-\frac{3}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$或$-\frac{3}{2}$

C　**解析**：$y'=-2x-2$，令 $y'=0$，得 $x=-1$. 当 $a\leqslant-1$ 时，最大值为 $f(-1)=4$，不符合题意. 当 $-1<a<2$ 时，$f(x)$ 在$[a,2]$上单调递减，最大值为 $f(a)=-a^2-2a+3$，令 $f(a)=\frac{15}{4}$，解得 $a=-\frac{1}{2}$ 或 $a=-\frac{3}{2}$（舍去）.

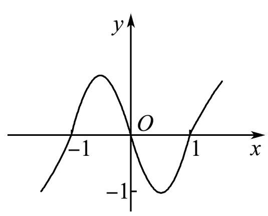
4. 已知 $a\geqslant0$，函数 $f(x)=(x^2-2ax)e^x$. 若函数 $f(x)$ 在$[-1,1]$上单调递减，则 a 的取值范围是（　　）

A.$0<a<\frac{3}{4}$　　B.$\frac{1}{2}<a<\frac{3}{4}$

C.$a\geqslant\frac{3}{4}$　　D.$0<a<\frac{1}{2}$

C　**解析**：(方法一)当 $a=1$ 时，$f(x)=(x^2-2x)e^x$，
$f'(x)=(2x-2)e^x+(x^2-2x)e^x=e^x(x^2-2)$.
当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$x^2-2<0$，所以 $f'(x)<0$，
所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减，排除 A，B，D，故选 C.
(方法二)$f'(x)=e^x[x^2+2(1-a)x-2a]$，
因为 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减，所以 $f'(x)\leqslant 0$ 在 $[-1,1]$ 上恒成立.令 $g(x)=x^2+2(1-a)x-2a$，
则 $\begin{cases}g(1)\leqslant 0,\\g(-1)\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant\frac{3}{4}$.

5.(多选)已知函数 $y=xf'(x)$ 的图象如图所示，则函数 $f(x)$　　(　　)



A.在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增
B.在区间 $(-1,1)$ 上无单调性
C.在 $x=-\frac{1}{2}$ 处取得极大值
D.在 $x=1$ 处取得极小值

AD　**解析**：从图象上可以发现，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$xf'(x)>0$，于是 $f'(x)>0$，故函数 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，A 正确；当 $x\in(-1,0)$ 时，$xf'(x)>0$，于是 $f'(x)<0$，当 $x\in(0,1)$ 时，$xf'(x)<0$，于是 $f'(x)<0$，故函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递减，B，C 错误；由于 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递减，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，故 D 正确.故选 AD.

6.设 $F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，其中 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)<f(x)$ 对于 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则　　(　　)

A.$f(2)>e^2f(0)$，$f(2\,023)>e^{2\,023}f(0)$
B.$f(2)<e^2f(0)$，$f(2\,023)>e^{2\,023}f(0)$
C.$f(2)<e^2f(0)$，$f(2\,023)<e^{2\,023}f(0)$
D.$f(2)>e^2f(0)$，$f(2\,023)<e^{2\,023}f(0)$

C　**解析**：因为函数 $F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ 的导函数 $F'(x)=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}<0$，
所以函数 $F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，
所以 $F(2)<F(0)$，即 $\frac{f(2)}{e^2}<\frac{f(0)}{e^0}$，故有 $f(2)<e^2f(0)$.
同理可得 $f(2\,023)<e^{2\,023}f(0)$.故选 C.

7.设函数 $f(x)=x(e^x-1)-\frac{1}{2}x^2$，则 $f(x)$ 的单调递增区间是________，单调递减区间是________.

$(-\infty,-1)$，$(0,+\infty)$　$(-1,0)$　**解析**：$f'(x)=e^x-1+xe^x-x=(e^x-1)(x+1)$.
当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)>0$；
当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$；
当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.
故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-1,0)$ 上单调递减.

8.设圆柱的体积为 V，那么其表面积最小时，底面半径为________.

$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$　**解析**：设底面半径为 r，高为 h，则 $V=\pi r^2h$.
所以 $h=\frac{V}{\pi r^2}$.
所以 $S_{表}=2S_{底}+S_{侧}=2\pi r^2+2\pi r\cdot h=2\pi r^2+2\pi r\cdot\frac{V}{\pi r^2}=2\pi r^2+\frac{2V}{r}$.
所以 $S'_{表}=4\pi r-\frac{2V}{r^2}$.令 $S'_{表}=0$，得 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.
当 $r\in\left(0,\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)$ 时，$S'_{表}<0$；
当 $r\in\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},V\right)$ 时，$S'_{表}>0$.
所以当 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时，表面积最小.

9.判断函数 $f(x)=2^x+x^3-2$ 在区间 $(0,1)$ 内的零点个数.

解：因为 $f(x)=2^x+x^3-2$，$0<x<1$，
所以 $f'(x)=2^x\ln 2+3x^2>0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，
所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增.
又 $f(0)=2^0+0-2=-1<0$，$f(1)=2+1-2=1>0$，
$f(0)f(1)<0$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有且只有一个零点.

10.若 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+b\ln(x+2)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调

递减，求实数 b 的取值范围.

解：因为 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f'(x)\leqslant 0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立.

因为 $f'(x)=-x+\dfrac{b}{x+2}$，所以 $-x+\dfrac{b}{x+2}\leqslant 0$，

所以 $b\leqslant x(x+2)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立，所以 $b\leqslant -1$.

故 b 的取值范围是 $(-\infty,-1]$.

11. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2e^x$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若当 $x\in[-2,2]$ 时，不等式 $f(x)>m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

解：(1) $f'(x)=xe^x+\dfrac{1}{2}x^2e^x=\dfrac{e^x}{2}x(x+2)$.

由 $\dfrac{e^x}{2}x(x+2)>0$，解得 $x>0$ 或 $x<-2$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-2)$，$(0,+\infty)$.

由 $\dfrac{e^x}{2}x(x+2)<0$，解得 $-2<x<0$.

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-2,0)$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-2)$，$(0,+\infty)$，单调递减区间为 $(-2,0)$.

(2)令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=-2$.

因为 $f(-2)=\dfrac{2}{e^2}$，$f(2)=2e^2$，$f(0)=0$，

所以当 $x\in[-2,2]$ 时，$f(x)\in[0,2e^2]$.

又因为 $f(x)>m$ 恒成立，所以 $m<0$.

故 m 的取值范围为 $(-\infty,0)$.

12. 设 $x=-3$ 是函数 $f(x)=ax^3+bx^2-3x+c$ 的一个极值点，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为 8.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上的最大值为 10，求 c 的值.

解：(1) $f'(x)=3ax^2+2bx-3$，

由已知得 $\begin{cases}f'(-3)=0,\\ f'(1)=8,\end{cases}$

得 $\begin{cases}27a-6b-3=0,\\ 3a+2b-3=8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=4.\end{cases}$

于是 $f'(x)=3x^2+8x-3=(x+3)(3x-1)$.

由 $f'(x)>0$，得 $x<-3$ 或 $x>\dfrac{1}{3}$；

由 $f'(x)<0$，得 $-3<x<\dfrac{1}{3}$.

可知 $x=-3$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，故 $a=1$，$b=4$ 符合题意.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,-3)$，$\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$，单调递减区间是 $\left(-3,\dfrac{1}{3}\right)$.

(2)由(1)知 $f(x)=x^3+4x^2-3x+c$，

因为 $f(x)$ 在区间 $\left[-1,\dfrac{1}{3}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{3},1\right]$ 上单调递增，

又 $f(1)=2+c<f(-1)=6+c$，

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(-1)=6+c=10$，解得 $c=4$.

单元活动构建

任务一　导数的概念及应用

问题 1：如何求运动物体的平均速度？位移的瞬时变化率是瞬时速度吗？

答案：在 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 这段时间里，平均速度 $\bar{v}=\dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$，位移的瞬时变化率就是瞬时速度.

问题 2：已知函数 $y=f(x)$，当自变量 x 从 x_0 变化到 $x_0+\Delta x$ 时，$f(x)$ 的平均变化率是怎样表示的？在 $x=x_0$ 时，$f(x)$ 的瞬时变化率呢？

答案：平均变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，瞬时变化率 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

问题 3：函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的瞬时变化率与在 $x=x_0$ 处的导数有何关系？

答案：是同一个概念.

『任务达标』

1. 已知物体的运动方程为 $s=t^2+\dfrac{3}{t}$（s 表示位移，t 表示时间），则物体在 $t=2$ 时的瞬时速度为（　　）

A. $\dfrac{19}{4}$　　B. $\dfrac{17}{4}$

C. $\dfrac{15}{4}$　　D. $\dfrac{13}{4}$

D　**解析**：因为 $s'=2t-\frac{3}{t^2}$，所以当 $t=2$ 时，$s'=4-\frac{3}{4}=\frac{13}{4}$.

2. 设 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，a 为常数，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+a\Delta x)-f(x_0-a\Delta x)}{\Delta x}$ 等于（　　）

A. $f'(x_0)$　　B. $2af'(x_0)$

C. $af'(x_0)$　　D. 0

B　**解析**：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+a\Delta x)-f(x_0-a\Delta x)}{\Delta x}=2a\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+a\Delta x)-f(x_0-a\Delta x)}{2a\Delta x}=2af'(x_0)$.

3. 已知一个物体的运动方程是 $s=3t^2-t+2$，其中 s 表示位移，t 表示时间.试求物体在 $t=10$ 时的瞬时速度和加速度.

解：物体的瞬时速度 $v(t)=s'=6t-1$，所以物体在 $t=10$ 时的瞬时速度为 $v(10)=59$.物体的加速度 $a(t)=v'(t)=6$，所以物体在 $t=10$ 时的加速度为 6.

【规律方法】

1. 平均速度与瞬时速度的关系

(1)区别：平均速度刻画位移在时间段 $[t_1,t_2]$ 内变化的快慢，瞬时速度刻画位移在 $t=t_0$ 时变化的快慢.

(2)联系：当 Δt 趋于 0 时，平均速度 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 趋于一个常数，这个常数即为运动物体在 $t=t_0$ 时的瞬时速度，它是一个固定值.

2. “Δt 趋于 0”的含义

Δt 趋于 0 指 Δt 与 0 的差异要多小有多小，即 $|\Delta t-0|$ 可以小于给定的任意小的正数，且始终保持 $\Delta t\neq 0$.

任务二　导数的计算

问题 1：六个常用函数的导数都是哪类函数的导数？

答案：幂函数.

问题 2：基本初等函数的导数公式有哪些？

答案：(1)若 $f(x)=c$（c 是常数），则 $f'(x)=0$.

(2)若 $f(x)=x^\alpha$（$\alpha\in\mathbf{R}$，且 $\alpha\neq 0$），则 $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$.

(3)若 $f(x)=\sin x$，则 $f'(x)=\cos x$.

(4)若 $f(x)=\cos x$，则 $f'(x)=-\sin x$.

(5)若 $f(x)=a^x$（$a>0$，且 $a\neq 1$），则 $f'(x)=a^x\ln a$；

特别地，若 $f(x)=e^x$，则 $f'(x)=e^x$.

(6)若 $f(x)=\log_a x$（$a>0$，且 $a\neq 1$），则 $f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$；特别地，若 $f(x)=\ln x$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}$.

问题 3：导数的四则运算法则是怎样的？

答案：(1) $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$；

(2) $[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$；

(3) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ $(g(x)\neq 0)$.

特别地：

①当 $g(x)=c$（c 为常数）时，$[cf(x)]'=cf'(x)$；

②当 $f(x)=1$ 时，$\left[\frac{1}{g(x)}\right]'=-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$.

问题 4：函数 $y=f(g(x))$ 是如何构成的？怎样求它的导数？

答案：是由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的，它的导数与函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 的导数间的关系为 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

「任务达标」

1. 求下列函数的导数.

(1) $y=\frac{x^3-1}{\cos x}$；

(2) $y=e^x\cdot\sin x$；

(3) $y=(2+3x)(3-5x+x^2)$；

(4) $y=2^x+\log_2 x$.

解：(1) $y'=\frac{(x^3-1)'\cdot\cos x-(x^3-1)\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{3x^2\cos x+(x^3-1)\sin x}{\cos^2 x}$.

(2) $y'=(e^x)'\cdot\sin x+e^x\cdot(\sin x)'=e^x(\sin x+\cos x)$.

(3) $y'=(2+3x)'\cdot(3-5x+x^2)+(2+3x)\cdot(3-5x+x^2)'=9x^2-26x-1$.

(4) $y'=2^x\ln 2+\frac{1}{x\ln 2}$.

2. 求下列函数的导数.

(1) $y=\sin^4\frac{x}{4}+\cos^4\frac{x}{4}$；

(2) $y=\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)$.

解：(1)因为 $y=\sin^4\frac{x}{4}+\cos^4\frac{x}{4}$

$=\left(\sin^2\frac{x}{4}+\cos^2\frac{x}{4}\right)^2-2\sin^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}$

$=1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{x}{2}=1-\frac{1}{2}\times\frac{1-\cos x}{2}$

$=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos x$，

所以 $y'=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos x\right)'=-\frac{1}{4}\sin x$.

(2)因为 $y=\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)$

$=\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}$

$=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2}$，

所以 $y'=\left[\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2}\right]'$

$=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)'$

$=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

【规律方法】

进行求导运算时应注意的几点

(1)$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$可以推广到 n 个函数.

设 $f_1(x),f_2(x),f_3(x),\cdots,f_n(x)$可导，则 $[f_1(x)\pm f_2(x)\pm f_3(x)\pm\cdots\pm f_n(x)]'=f_1'(x)\pm f_2'(x)\pm f_3'(x)\pm\cdots\pm f_n'(x)$.

(2)注意$[f(x)g(x)]'\neq f'(x)g'(x)$，$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'\neq\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(3)若两个函数可导，则它们的和、差、积、商（商的情况下分母不为 0）必可导；若两个函数均不可导，则它们的和、差、积、商不一定不可导.例如 $f(x)=\sin x+\frac{1}{x}$，$g(x)=\cos x-\frac{1}{x}$，则 $f(x)$，$g(x)$在 $x=0$ 处均不可导，但它们的和在 $x=0$ 处可导.

任务三　导数的几何意义及其应用

问题 1：什么是导数的几何意义？

答案：函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$就是函数图象在点$(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率 k_0，即 $k_0=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$.

问题 2：导数的几何意义有何用途？

答案：利用导数的几何意义求切线方程.

问题 3：利用导数几何意义求切线的方程的常见类型有哪些？如何解决？

答案：常见的类型有两种，一种是求“在某点处的切线的方程”，则此点一定为切点，先求导，再求斜率，代入直线方程即可；另一种是求“过某点的切线的方程”，这种类型中的点不一定是切点，需要先根据条件求切点坐标.

「任务达标」

1.已知函数 $f(x)=x^3-3x^2+ax$，$x\in\mathbf{R}$，且曲线 $y=f(x)$的切线的斜率的最小值为-1.

(1)求实数 a 的值；

(2)求曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线的方程；

(3)若直线 l 过原点，且与曲线 $y=f(x)$相切，求直线 l 的斜率 k 的值.

解：(1)因为 $f'(x)=3x^2-6x+a=3(x-1)^2+a-3$，

所以切线斜率的最小值为 $f'(1)=a-3=-1$，

所以 $a=2$.

(2)由(1)知 $f(x)=x^3-3x^2+2x$，$f'(x)=3x^2-6x+2$，

所以曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线的斜率为 $f'(1)=-1$，且 $f(1)=0$，

所以切线方程为 $y=-1\times(x-1)$，

即 $x+y-1=0$.

(3)因为 $f(x)=x^3-3x^2+2x$，所以 $f'(x)=3x^2-6x+2$.

设切点坐标为$(x_0,x_0^3-3x_0^2+2x_0)$，

则切线 l 的斜率 $k=f'(x_0)=3x_0^2-6x_0+2$，

所以切线 l 的方程为 $y-(x_0^3-3x_0^2+2x_0)=(3x_0^2-6x_0+2)(x-x_0)$.

因为切线过原点$(0,0)$，

所以 $3x_0^3-6x_0^2+2x_0=x_0^3-3x_0^2+2x_0$，

所以 $x_0=0$ 或 $x_0=\frac{3}{2}$.

当 $x_0=0$ 时，直线 l 的斜率 $k=f'(0)=2$；

当 $x_0=\frac{3}{2}$时，直线 l 的斜率 $k=f'\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{4}$.

2.已知曲线 $y=x^3+x-2$ 在点 P_0 处的切线 l_1 平行于直线 $4x-y-1=0$，且点 P_0 在第三象限.

(1)求切点 P_0 的坐标；

(2)若直线 $l\perp l_1$，且 l 也过切点 P_0，求直线 l 的方程.

解：(1)由 $y=x^3+x-2$，得 $y'=3x^2+1$，

由已知，令 $3x^2+1=4$，解得 $x=\pm 1$.

当 $x=1$ 时，$y=0$；

当 $x=-1$ 时，$y=-4$.

又因为点 P_0 在第三象限，

所以切点 P_0 的坐标为 $(-1,-4)$.

(2)因为直线 $l\perp l_1$，l_1 的斜率为 4，

所以直线 l 的斜率为 $-\frac{1}{4}$.

因为 l 过切点 P_0，点 P_0 的坐标为 $(-1,-4)$，

所以直线 l 的方程为 $y+4=-\frac{1}{4}(x+1)$，

即 $x+4y+17=0$.

【规律方法】

"函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数""导函数""导数"之间的区别与联系

"函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数"是一个数值，是针对 x_0 而言的，与给定的函数及 x_0 的值有关，与 Δx 无关；"导函数"简称"导数"，是一个函数，导函数是对一个区间而言的，它是一个确定的函数，依赖于函数本身，与 x，Δx 无关.

任务四　利用导数研究函数的单调性

问题 1：函数的单调性与导数有何关系？

答案：在某个区间 (a,b) 内，如果 $f'(x)>0$，那么函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调递增；在某个区间 (a,b) 内，如果 $f'(x)<0$，那么函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调递减.

问题 2：在某一区间内 $f'(x)>0$（或 $f'(x)<0$）是函数 $f(x)$ 在该区间上为增（或减）函数的充要条件吗？

答案：不是充要条件，是充分不必要条件.

问题 3：判断函数 $y=f(x)$ 的单调性的步骤是什么？

答案：第 1 步，确定函数的定义域；

第 2 步，求出导数 $f'(x)$ 的零点；

第 3 步，用 $f'(x)$ 的零点将 $f(x)$ 的定义域划分为若干个区间，列表给出 $f'(x)$ 在各区间上的正负，由此得出函数 $y=f(x)$ 在定义域内的单调性.

问题 4：导数的绝对值与函数值变化有何关系？

答案：一般地，如果一个函数在某一范围内导数的绝对值较大，那么函数在这个范围内变化得较快，这时函数的图象就比较"陡峭"（向上或向下）；反之，函数在这个范围内变化得较慢，函数的图象就比较"平缓".

「任务达标」

1. 函数 $f(x)=\ln x-4x+1$ 的单调递增区间为（　　）

A. $\left(0,\frac{1}{4}\right)$　　B. $(0,4)$

C. $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$

A　**解析**：$f(x)=\ln x-4x+1$ 的定义域是 $\{x|x>0\}$，$f'(x)=\frac{1}{x}-4=\frac{1-4x}{x}$，由 $f'(x)>0$，解得 $0<x<\frac{1}{4}$. 故选 A.

2. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+(2a-3)x-1$. 若 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1,1)$，则 a 的取值集合为________.

$\{0\}$　**解析**：$f'(x)=3x^2+2ax+2a-3$，

因为 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1,1)$，

所以 -1 和 1 是方程 $f'(x)=0$ 的两根.

由根与系数的关系，得 $\frac{2a-3}{3}=-1$，

所以 $a=0$，所以 a 的取值集合为 $\{0\}$.

3. 函数 $f(x)=(x^2+2x)e^x(x\in\mathbf{R})$ 的单调递减区间为________.

$(-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2})$　**解析**：由 $f'(x)=(x^2+4x+2)e^x<0$，

即 $x^2+4x+2<0$，

解得 $-2-\sqrt{2}<x<-2+\sqrt{2}$.

所以 $f(x)=(x^2+2x)e^x$ 的单调递减区间为 $(-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2})$.

4. 若函数 $f(x)=ax^3+x(a\neq 0)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，则实数 a 的取值范围是________.

$(0,+\infty)$　**解析**：$f'(x)=3ax^2+1$，

因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，

所以 $3ax^2+1\geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立. 又 $a\neq 0$，所以 $a>0$.

5. 求函数 $f(x)=kx-\ln x(k\in\mathbf{R})$ 的单调区间.

解：函数 $f(x)=kx-\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=k-\frac{1}{x}=\frac{kx-1}{x}$.

当 $k\leq 0$ 时，$kx-1<0$，所以 $f'(x)<0$，

则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

当 $k>0$ 时，

由 $f'(x)<0$，即 $\frac{kx-1}{x}<0$，解得 $0<x<\frac{1}{k}$；

由 $f'(x)>0$，即 $\frac{kx-1}{x}>0$，解得 $x>\frac{1}{k}$.

所以当 $k>0$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(0,\frac{1}{k}\right)$，单调递增区间为 $\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$.

综上所述，当 $k\leq 0$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,+\infty)$，无单调递增区间；

当 $k>0$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(0,\frac{1}{k}\right)$，单调递增区间为 $\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$.

6.设函数 $f(x)=e^x-ax-2(a\in\mathbf{R})$，求 $f(x)$ 的单调区间.

解：$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=e^x-a$.

若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

若 $a>0$，则当 $x\in(-\infty,\ln a)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(\ln a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增.

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$，无单调递减区间；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,\ln a)$，单调递增区间为 $(\ln a,+\infty)$.

【规律方法】

当给定的函数有参数时，判断函数单调性一般要分类讨论，应注意分类的全面性.此类问题一般可归结为解含参数的一元二次不等式，其分类标准为：

(1)对二次项系数大于零、小于零、等于零分类讨论；

(2)当二次项系数不为零时，对判别式大于零、小于零、等于零分类讨论；

(3)判别式大于零时，对两根的大小分类讨论.

任务五　利用导数研究函数的极值

问题1：函数的极值点是一个点吗？

答案：不是.

问题2：若函数 $y=f(x)$ 在点 $x=a$ 处取得极小值，那么它在点 $x=a$ 附近的其他点的导数是怎样的？

答案：在点 $x=a$ 附近的左侧 $f'(x)<0$，右侧 $f'(x)>0$.

问题3：如何求函数 $y=f(x)$ 的极值？

答案：解方程 $f'(x)=0$.当 $f'(x_0)=0$ 时：

(1)如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$，那么 $f(x_0)$ 是极大值；

(2)如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)<0$，右侧 $f'(x)>0$，那么 $f(x_0)$ 是极小值.

「任务达标」

1.设 $a\in\mathbf{R}$，若函数 $y=e^x+ax(x\in\mathbf{R})$ 有大于零的极值点，则 a 的取值范围是________.

$(-\infty,-1)$　**解析**：因为 $y=e^x+ax$，所以 $y'=e^x+a$.令 $y'=e^x+a=0$，则 $e^x=-a$，

所以 $x=\ln(-a)$.

又因为函数有大于零的极值点，所以 $-a>1$，即 $a<-1$.

2.求函数 $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}-2$ 的极值.

解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2}=-\frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=1$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

由上表可以看出，当 $x=-1$ 时，函数 $f(x)$ 有极小值，且极小值为 $f(-1)=-3$；

当 $x=1$ 时，函数 $f(x)$ 有极大值，且极大值为 $f(1)=-1$.

3.已知函数 $f(x)=x^3+\frac{1}{2}mx^2-2m^2x-4$（$m$ 为常数，且 $m>0$）有极大值 $-\frac{5}{2}$，求 m 的值.

解：因为 $f'(x)=3x^2+mx-2m^2=(x+m)(3x-2m)$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=-m$ 或 $x=\frac{2}{3}m$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-m)$	$-m$	$\left(-m,\frac{2}{3}m\right)$	$\frac{2}{3}m$	$\left(\frac{2}{3}m,+\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 有极大值 $f(-m)=-m^3+\frac{1}{2}m^3+2m^3-4=-\frac{5}{2}$，

所以 $m=1$.

4.已知 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+1$ 的导数为 $f'(x)$，函数 $f'(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{1}{2}$ 对称，且 $f'(1)=0$.

(1)求实数 a，b 的值；

(2)求函数 $f(x)$ 的极值.

解：(1)因为 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+1$，所以 $f'(x)=6x^2+2ax+b$，即 $f'(x)=6\left(x+\frac{a}{6}\right)^2+b-\frac{a^2}{6}$，

所以 $f'(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{a}{6}$ 对称，从而由条件可知 $-\frac{a}{6}=-\frac{1}{2}$，解得 $a=3$.又由 $f'(1)=0$，得 $6+2a+b=0$，解得 $b=-12$.

(2)由(1)知 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$,
$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x-1)(x+2)$.
令 $f'(x)=0$,得 $x=1$ 或 $x=-2$.
当 $x\in(-\infty,-2)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$(-\infty,-2)$上单调递增;当 $x\in(-2,1)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$在$(-2,1)$上单调递减;当 $x\in(1,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,从而$f(x)$在$x=-2$处取到极大值$f(-2)=21$,在 $x=1$ 处取到极小值 $f(1)=-6$.

【规律方法】

理解函数极值应注意的几点

(1)极值是一个局部性的概念,只反映了函数在某一点附近的大小情况.
(2)函数的极值点一定出现在区间的内部,区间端点不能成为极值点,极值点可以看成函数单调递增区间与单调递减区间的分界点,定义区间上的单调函数没有极值点.
(3)函数的极值不是唯一的,在某个区间或定义域内极大值与极小值可以不止一个;极大值与极小值之间没有确定的大小关系,即一个函数的极大值未必大于极小值.
(4)函数 $y=f(x)$在某一点处的导数存在,且导数值为 0 是函数 $y=f(x)$在这一点处取得极值的必要条件,而非充分条件.

任务六　函数的最大(小)值

问题 1:函数 $f(x)$在区间(a,b)上一定有最值吗?
答案:不一定.一般地,如果在闭区间$[a,b]$上函数 $y=f(x)$的图象是一条连续不断的曲线,那么它必有最大值和最小值.
问题 2:函数的极值一定是它的最值吗?
答案:不一定,最值是极值或区间端点处的函数值.
问题 3:如何求函数在区间$[a,b]$上的最值?
答案:一般地,求函数 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值与最小值的步骤如下:
(1)求函数 $y=f(x)$在区间(a,b)上的极值.
(2)将函数 $y=f(x)$的各极值与端点处的函数值$f(a)$,$f(b)$比较,其中最大的一个是最大值,最小的一个是最小值.

「任务达标」

1.函数 $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}(x\in[-2,2])$的最大值是____,最小值是________.

2　-2　**解析**:$f'(x)=\dfrac{4(x^2+1)-4x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{4(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$.
令 $f'(x)=0$,得 $x_1=-1,x_2=1$.
因为 $f(-2)=-\dfrac{8}{5}$,$f(-1)=-2$,$f(1)=2$,$f(2)=\dfrac{8}{5}$,
所以 $f(x)_{\max}=2$,$f(x)_{\min}=-2$.

2.已知 $a\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)=x^2(x-a)$,求$f(x)$在区间$[0,2]$上的最大值.
解:$f'(x)=3x^2-2ax$.
令 $f'(x)=0$,解得 $x_1=0,x_2=\dfrac{2a}{3}$.
①当$\dfrac{2a}{3}\leqslant 0$,即 $a\leqslant 0$ 时,
$f(x)$在$[0,2]$上单调递增,
从而 $f(x)_{\max}=f(2)=8-4a$.
②当$\dfrac{2a}{3}\geqslant 2$,即 $a\geqslant 3$ 时,
$f(x)$在$[0,2]$上单调递减,
从而 $f(x)_{\max}=f(0)=0$.
③当 $0<\dfrac{2a}{3}<2$,即 $0<a<3$ 时,$f(x)$在$\left[0,\dfrac{2a}{3}\right]$上单调递减,在$\left[\dfrac{2a}{3},2\right]$上单调递增,且 $f(0)=0$,$f(2)=8-4a$,
从而 $f(x)_{\max}=\begin{cases}8-4a,0<a\leqslant 2,\\0,2<a<3.\end{cases}$
综上所述,$f(x)_{\max}=\begin{cases}8-4a,a\leqslant 2,\\0,a>2.\end{cases}$

3.求函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\sin x$ 在区间$[0,2\pi]$上的最大值与最小值.
解:因为 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\sin x$,
所以 $f'(x)=\dfrac{1}{2}+\cos x,x\in[0,2\pi]$
令 $f'(x)=0$,解得 $x_1=\dfrac{2\pi}{3},x_2=\dfrac{4\pi}{3}$.
因为 $f(0)=0$,$f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$f\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$f(2\pi)=\pi$,
所以函数 $f(x)$在$[0,2\pi]$上的最大值是 π,最小值是 0.

4.已知一家公司生产某种品牌服装的年固定成本为 10 万元,每生产 1 千件需另投入 2.7 万元.设该公司一年内生产该品牌服装 x 千件并全部销售完,每千件的销售收入为 $R(x)$万元,

且$R(x)=\begin{cases}10.8-\dfrac{1}{30}x^2,0<x\leqslant 10,\\ \dfrac{108}{x}-\dfrac{1\ 000}{3x^2},x>10.\end{cases}$

(1)求年利润 W(单位:万元)关于年产量 x(单位:千件)的函数解析式;

(2)当年产量为多少千件时,该公司在这一品牌服装的生产中所获得的年利润最大?并求出最大年利润.

解:(1)当 $0<x\leqslant 10$ 时,

$W=xR(x)-(10+2.7x)=8.1x-\dfrac{x^3}{30}-10$;

当 $x>10$ 时,

$W=xR(x)-(10+2.7x)=98-\dfrac{1\ 000}{3x}-2.7x$.

所以 $W=\begin{cases}8.1x-\dfrac{x^3}{30}-10,0<x\leqslant 10,\\ 98-\dfrac{1\ 000}{3x}-2.7x,x>10.\end{cases}$

(2)当 $0<x\leqslant 10$ 时,

由 $W'=8.1-\dfrac{x^2}{10}=0$,得 $x=9$,

当 $x\in(0,9)$时,$W'>0$,当 $x\in(9,10]$时,$W'<0$,

所以当 $x=9$ 时,W 取得极大值,也是最大值,

且 $W_{\max}=8.1\times 9-\dfrac{1}{30}\times 9^3-10=38.6$;

当 $x>10$ 时,$W=98-\left(\dfrac{1\ 000}{3x}+2.7x\right)$

$\leqslant 98-2\sqrt{\dfrac{1\ 000}{3x}\times 2.7x}=38$,

当且仅当$\dfrac{1\ 000}{3x}=2.7\ x$,即 $x=\dfrac{100}{9}$时,$W_{\max}=38$.

综上可得,当 $x=9$ 时,W 取得最大值 38.6.

故当年产量为 9 千件时,该公司在这一品牌服装的生产中所获得的年利润最大,最大年利润为 38.6 万元.

【规律方法】

已知函数最值求参数,可先求出函数在给定区间上的极值及函数在区间端点处的函数值,通过比较它们的大小,判断出哪个是最大值,哪个是最小值.结合已知求出参数,进而使问题得以解决.要注意极值点是否在区间内.

第五章综合检测

(时间:120 分钟,分值:150 分)

一、单项选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分)

1.函数 $f(x)=x^2+x$ 在 $x=1$ 处的导数 $f'(1)=$ ( )

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

D　**解析**:因为 $f(x)=x^2+x$,所以 $f'(x)=2x+1$,所以 $f'(1)=2\times 1+1=3$.故选 D.

2.已知函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数为 $f'(x_0)$,则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=$ ( )

A.$f'(x_0)$　　B.$2f'(x_0)$　　C.$-2f'(x_0)$　　D.0

B　**解析**:$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=$

$2\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=2f'(x_0)$.故选 B.

3.若函数 $f(x)=x-a\ln x$ 的图象在点$(1,f(1))$处的切线的斜率为 3,则 $a=$ ( )

A.-2　　B.-1

C.1　　D.2

A　**解析**:因为 $f(x)=x-a\ln x$,所以 $f'(x)=1-\dfrac{a}{x}$.

若函数 $f(x)=x-a\ln x$ 的图象在点$(1,f(1))$处的切线的斜率为 3,

则 $f'(1)=1-\dfrac{a}{1}=3\Rightarrow a=-2$.故选 A.

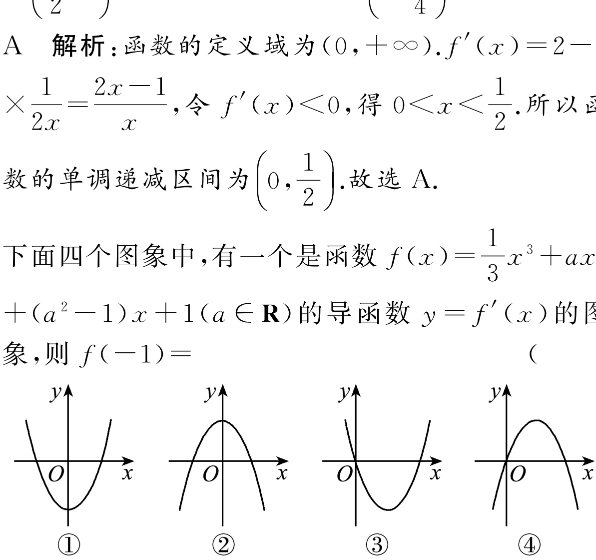
4.函数 $f(x)=2x-\ln 2x$ 的单调递减区间为 ( )

A.$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　B.$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

C.$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　D.$\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$

A　**解析**:函数的定义域为$(0,+\infty)$.$f'(x)=2-2\times\dfrac{1}{2x}=\dfrac{2x-1}{x}$,令 $f'(x)<0$,得 $0<x<\dfrac{1}{2}$.所以函数的单调递减区间为$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.故选 A.

5.下面四个图象中,有一个是函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+ax^2+(a^2-1)x+1(a\in\mathbf{R})$的导函数 $y=f'(x)$的图象,则 $f(-1)=$ ( )



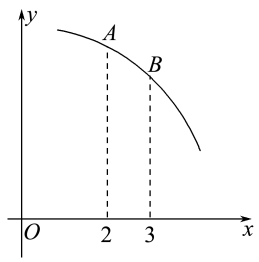
A.$\dfrac{1}{3}$　　B.$-\dfrac{2}{3}$

C.$\dfrac{7}{3}$　　D.$-\dfrac{1}{3}$或$\dfrac{5}{3}$

D　**解析**:因为 $f'(x)=x^2+2ax+a^2-1$,所以 $y=f'(x)$的图象开口向上,排除②④.若 $y=f'(x)$的

图象为①，则 $a=0$，$f(-1)=\frac{5}{3}$；若 $y=f'(x)$ 的图象为③，则 $a^2-1=0$，得 $a=\pm1$. 又对称轴 $x=-a>0$，所以 $a=-1$，所以 $f(-1)=-\frac{1}{3}$.

6. 已知函数 $f(x)$ 的图象如图所示，则下列结论正确的是　（　　）



A. $f'(2)<f'(3)$

B. $f'(3)>f(3)-f(2)$

C. $f'(2)>f(3)-f(2)$

D. $f'(2)>0$

C　**解析**：由导数的几何意义判断斜率大小，可知 $f'(3)<\frac{f(3)-f(2)}{3-2}<f'(2)<0$. 故选 C.

7. 已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则　（　　）

A. 函数 $f(x)$ 的极大值为 $\frac{1}{e}$，无极小值

B. 函数 $f(x)$ 的极小值为 $\frac{1}{e}$，无极大值

C. 函数 $f(x)$ 的极大值为 0，无极小值

D. 函数 $f(x)$ 的极小值为 0，无极大值

A　**解析**：$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. 在 $(0,e)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；在 $(e,+\infty)$ 上，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(e)=\frac{1}{e}$，没有极小值. 故选 A.

8. 已知 $a=\frac{1}{100}$，$b=e^{-\frac{99}{100}}$，$c=\ln\frac{101}{100}$，则 a,b,c 的大小关系为　（　　）

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$

C. $c<a<b$　　D. $b<a<c$

C　**解析**：先用导数证明两个重要的不等式.

① $e^x\geqslant x+1$，当且仅当 $x=0$ 时取“=”.

令 $y=e^x-(x+1)$，则 $y'=e^x-1$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$y'<0$，函数单调递减；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$y'>0$，函数单调递增，故 $x=0$ 时函数取得最小值 0，故 $y\geqslant0$，即 $e^x\geqslant x+1$，当且仅当 $x=0$ 时取“=”.

② $\ln x\leqslant x-1$，当且仅当 $x=1$ 时取“=”.

令 $y=\ln x-(x-1)$，则 $y'=\frac{1}{x}-1$，当 $x\in(0,1)$ 时，$y'>0$，函数单调递增；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$y'<0$，函数单调递减，故 $x=1$ 时函数取得最大值 0，故 $y\leqslant0$，即 $\ln x\leqslant x-1$，当且仅当 $x=1$ 时取“=”.

故 $e^{-\frac{99}{100}}>-\frac{99}{100}+1=\frac{1}{100}$，$c=\ln\frac{101}{100}<\frac{101}{100}-1=\frac{1}{100}$. 故选 C.

二、多项选择题(本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

9. 已知函数 $f(x)=(x-a)(x-3)^2$，当 $x=3$ 时，$f(x)$ 有极大值，则实数 a 的值可以是　（　　）

A. 6　　B. 5

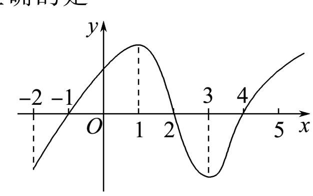
C. 4　　D. 3

ABC　**解析**：因为 $f(x)=(x-a)(x-3)^2$，所以 $f'(x)=(x-3)^2+2(x-a)(x-3)=(x-3)(3x-3-2a)$，

令 $f'(x)=0$，则 $x=3$ 或 $x=\frac{3+2a}{3}$，

当 $\frac{3+2a}{3}>3$ 时，即 $a>3$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,3)$ 上单调递增，在 $\left(3,\frac{3+2a}{3}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{3+2a}{3},+\infty\right)$ 上单调递增，所以当 $x=3$ 时，$f(x)$ 有极大值，则 a 的值可以是 4,5,6. 故选 ABC.

10. 函数 $y=f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示，下列选项正确的是　（　　）



A. 当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 取得极小值

B. $f(x)$ 在 $[-2,1]$ 上单调递增

C. 当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极大值

D. $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上单调递增，在 $[2,4]$ 上单调递减

AD　**解析**：由导函数 $f'(x)$ 的图象可知，

当 $-2<x<-1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x=-1$ 时，$f'(x)=0$；

当 $-1<x<2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x=2$ 时，$f'(x)=0$；

当 $2<x<4$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x=4$ 时，$f'(x)=0$；

当 $x>4$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

所以当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 取得极小值，故选项 A 正确；

$f(x)$ 在 $[-2,1]$ 上有减有增，故选项 B 错误；

当 $x=2$ 时，$f(x)$ 取得极大值，故选项 C 错误；

$f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上是增函数，在 $[2,4]$ 上是减函数，故选项 D 正确. 故选 AD.

11.(2022·新高考全国Ⅰ卷)已知函数 $f(x)=x^3-x+1$,则 ( )

A.$f(x)$有两个极值点

B.$f(x)$有三个零点

C.点$(0,1)$是曲线 $y=f(x)$的对称中心

D.直线 $y=2x$ 是曲线 $y=f(x)$的切线

AC **解析**:由题,$f'(x)=3x^2-1$,令 $f'(x)>0$ 得 $x>\frac{\sqrt{3}}{3}$或 $x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$,令 $f'(x)<0$ 得$-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以函数$f(x)$在$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$上单调递增,在$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$上单调递减,所以 $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$是极值点,故 A 正确;

因为 $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1+\frac{2\sqrt{3}}{9}>0$,$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1-\frac{2\sqrt{3}}{9}>0$,$f(-2)=-5<0$,所以,函数 $f(x)$ 在$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$上有一个零点,当 $x\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$时,$f(x)\geqslant f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)>0$,即函数 $f(x)$在$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$上无零点,综上所述,函数 $f(x)$有一个零点,故 B 错误;

令 $h(x)=x^3-x$,该函数的定义域为 $\mathbf{R}$,$h(-x)=(-x)^3-(-x)=-x^3+x=-h(x)$,则 $h(x)$是奇函数,$(0,0)$是 $h(x)$的对称中心,将 $h(x)$的图象向上平移一个单位长度得到 $f(x)$的图象,所以点$(0,1)$是曲线 $y=f(x)$的对称中心,故 C 正确;

令 $f'(x)=3x^2-1=2$,可得 $x=\pm1$,又 $f(1)=f(-1)=1$,当切点为$(1,1)$时,切线方程为 $y=2x-1$,当切点为$(-1,1)$时,切线方程为 $y=2x+3$,故 D 错误.故选 AC.

12.已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 的导函数为 $f'(x)$,则 ( )

A.若 $f(x)$为奇函数,则 $f'(x)$为偶函数

B.若 $f'(0)=0$,则 $f(x)$为奇函数

C.若 $f'(x)$的最小值为 0,则 $a^2=3b$

D.若 $f'(x)$为偶函数,则 $f(x)$为奇函数

ACD **解析**:对于选项 A,若 $f(x)$为奇函数,则 $f(-x)=-f(x)$,$-x^3+ax^2-bx=-x^3-ax^2-bx$,故 $a=0$.又 $f'(x)=3x^2+b$,$f'(-x)=f'(x)$,所以$f'(x)$是偶函数,故 A 正确;

对于选项 B,若 $f'(0)=0$,由 $f'(x)=3x^2+2ax+b$,得 $b=0$,故 $f(x)=x^3+ax^2$,$f(-x)=-x^3+ax^2$,当 $a=0$ 时,$f(-x)=-f(x)$,$f(x)$是奇函数,当 $a\neq0$ 时,$f(-x)\neq-f(x)$,$f(x)$不是奇函数,所以 $f(x)$不一定是奇函数,故 B 错误;

对于选项 C,若 $f'(x)$的最小值为 0,由 $f'(x)=3x^2+2ax+b=3\left(x+\frac{a}{3}\right)^2-\frac{a^2}{3}+b$,得 $f'(x)_{\min}=-\frac{a^2}{3}+b=0$,则 $a^2=3b$,故 C 正确;

对于选项 D,若 $f'(x)$为偶函数,由 $f'(x)=3x^2+2ax+b$,$f'(-x)=3x^2-2ax+b$,$f'(-x)=f'(x)$,解得 $a=0$,故 $f(x)=x^3+bx$,$f(-x)=-f(x)$,所以 $f(x)$为奇函数,故 D 正确.故选 ACD.

三、填空题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

得分	

13.已知 $f(x)=x^3-2x+3$,则曲线 $y=f(x)$在点 $P(1,2)$处的切线的斜率为________.

1 **解析**:$f'(x)=3x^2-2$,所以 $k=f'(1)=1$.

得分	

14.已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$的导函数 $f'(x)>1$,且 $f(2m)<f(m+1)$,则实数 m 的取值范围为________.

$(-\infty,1)$ **解析**:因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$的导函数 $f'(x)>1>0$,所以 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,由$f(2m)<f(m+1)$,得 $2m<m+1$,即 $m<1$.所以实数 m 的取值范围为$(-\infty,1)$.

得分	

15.设函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx(x>0)$的图象与直线 $y=4$ 相切于点 $M(1,4)$,则 $y=f(x)$在区间$(0,4]$上的最大值为________,最小值为________.

4 0 **解析**:$f'(x)=3x^2+2ax+b(x>0)$.

依题意,得$\begin{cases}f'(1)=0,\\f(1)=4,\end{cases}$即$\begin{cases}3+2a+b=0,\\1+a+b=4,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-6,\\b=9.\end{cases}$所以 $f(x)=x^3-6x^2+9x$.

令 $f'(x)=3x^2-12x+9=0$,解得 $x=1$ 或 $x=3$.当 x 变化时,$f'(x)$,$f(x)$在区间$(0,4]$上的变化情况如下表:

x	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,4)$	4
$f'(x)$	+	0	−	0	+	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗	4

所以函数 $f(x)=x^3-6x^2+9x$ 在区间$(0,4]$上的最大值是 4,最小值是 0.

得分	

16.已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2-a$.若$\exists x>0$,使 $f(x)\geqslant0$,则实数 a 的取值范围是________.

$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ **解析**:由$\exists x>0$,使 $f(x)\geqslant0$,可得$\exists x>0$,使 $a\leqslant\ln x-\frac{1}{2}x^2$,

令 $g(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-x$

$=\frac{(1-x)(1+x)}{x}$，

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 单调递增，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$ 单调递减，

所以 $x=1$ 时，函数 $g(x)$ 有最大值 $g(1)=-\frac{1}{2}$，所以 $a\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$.

四、解答题(本题共 6 小题，共 70 分)

得分	

17.(10 分)求下列函数的导数.

(1)$y=\frac{\ln x}{e^x}$；

(2)$y=(2x^2+3)(3x-2)$.

解：(1)$y'=\frac{\frac{e^x}{x}-e^x\ln x}{(e^x)^2}=\frac{1-x\ln x}{xe^x}$.

(2)$y'=(2x^2+3)'(3x-2)+(2x^2+3)(3x-2)'$

$=4x(3x-2)+(2x^2+3)\times3$

$=18x^2-8x+9$.

得分	

18.(12 分)已知函数 $f(x)=x^3+ax^2-2$ 在 $x=-2$ 处取得极值.

(1)求实数 a 的值；

(2)求 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最大值与最小值.

解：(1)因为 $f(x)=x^3+ax^2-2$，所以 $f'(x)=3x^2+2ax$，

所以 $f'(-2)=12-4a=0$，解得 $a=3$. 经检验成立.

(2)由(1)知 $f(x)=x^3+3x^2-2$，$x\in[-1,2]$，

所以 $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$.

所以当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

所以 $f(x)_{\min}=f(0)=-2$.

因为 $f(-1)=0$，$f(2)=18$，所以 $f(x)_{\max}=18$.

得分	

19.(12 分)已知函数 $f(x)=e^x+(m+1)x$ $(m\in\mathbf{R})$.

(1)当 $m=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线的方程；

(2)讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

解：(1)当 $m=1$ 时，$f(x)=e^x+2x$，

$f(2)=e^2+4$，$f'(x)=e^x+2$，$f'(2)=e^2+2$，

故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线的方程为 $y-(e^2+4)=(e^2+2)(x-2)$，

即 $(e^2+2)x-y-e^2=0$.

(2)$f'(x)=e^x+m+1$.

当 $m+1\geqslant0$，即 $m\geqslant-1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

当 $m+1<0$，即 $m<-1$ 时，

由 $f'(x)>0$，得 $x>\ln(-m-1)$，

由 $f'(x)<0$，得 $x<\ln(-m-1)$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(-m-1))$ 上单调递减，在 $(\ln(-m-1),+\infty)$ 上单调递增.

综上所述，当 $m\geqslant-1$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；当 $m<-1$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(-m-1))$ 上单调递减，在 $(\ln(-m-1),+\infty)$ 上单调递增.

得分	

20.(12 分)(2022·北京)已知函数 $f(x)=e^x\ln(1+x)$.

(1)求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线的方程；

(2)设 $g(x)=f'(x)$，讨论函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的单调性；

(3)证明：对任意的 $s,t\in(0,+\infty)$，有 $f(s+t)>f(s)+f(t)$.

(1)**解**：因为 $f(x)=e^x\ln(1+x)$，所以 $f(0)=0$，即切点坐标为 $(0,0)$.

又 $f'(x)=e^x\left[\ln(1+x)+\frac{1}{1+x}\right]$，

所以切线斜率 $k=f'(0)=1$，

所以切线方程为 $y=x$.

(2)**解**：因为 $g(x)=f'(x)$

$=e^x\left[\ln(1+x)+\frac{1}{1+x}\right]$，

所以 $g'(x)=e^x\left[\ln(1+x)+\frac{2}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\right]$.

令 $h(x)=\ln(1+x)+\frac{2}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}$，

则 $h'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{2}{(1+x)^2}+\frac{2}{(1+x)^3}=\frac{x^2+1}{(1+x)^3}>0$，

所以 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)\geqslant h(0)=1>0$，

所以 $g'(x)>0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

(3)**证明**：原不等式等价于 $f(s+t)-f(s)>f(t)-f(0)$ $(s>0,t>0)$，

令 $m(x)=f(x+t)-f(x)$ $(x>0)$，

即证 $m(s)>m(0)$.

因为 $m(x)=f(x+t)-f(x)=e^{x+t}\ln(1+x+t)-e^x\ln(1+x)$，

$m'(x)=e^{x+t}\ln(1+x+t)+\frac{e^{x+t}}{1+x+t}-e^x\ln(1+x)-\frac{e^x}{1+x}=g(x+t)-g(x)$，

由(2)知 $g(x)=f'(x)=e^x\left[\ln(1+x)+\frac{1}{1+x}\right]$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x+t)>g(x)$，所以 $m'(x)>0$，

所以 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又因为 $s>0$,

所以 $m(s)>m(0)$,所以命题得证.

得分 21.(12分)已知函数 $f(x)=2x^3-6x^2-18x+5$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2)若函数 $g(x)=f(x)+a$ 至多有两个零点,求实数 a 的取值范围.

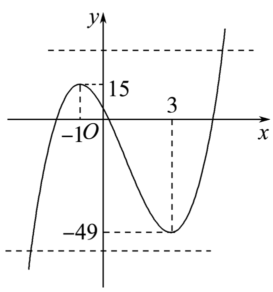
解:(1)依题意得 $f'(x)=6x^2-12x-18=6(x-3)(x+1)$,

故当 $x\in(-\infty,-1)$ 时,$f'(x)>0$;当 $x\in(-1,3)$ 时,$f'(x)<0$;当 $x\in(3,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$,$(3,+\infty)$,单调递减区间为 $(-1,3)$.

(2)令 $g(x)=0$,得 $-a=f(x)$.

因为 $f(-1)=15$,$f(3)=-49$,结合 $f(x)$ 的单调性,作出 $f(x)$ 的大致图象如图所示:



所以 $g(x)=f(x)+a$ 至多有两个零点可转化为曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=-a$ 至多有两个交点.

结合图象可知,$-a\geqslant15$ 或 $-a\leqslant-49$,

即实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-15]\cup[49,+\infty)$.

得分 22.(12分)已知函数 $f(x)=x-m\ln x-m$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2)若函数 $f(x)$ 有最小值 $g(m)$,证明:$g(m)\leqslant\frac{1}{e}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

(1)**解**:函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,且 $f'(x)=1-\frac{m}{x}=\frac{x-m}{x}$.

当 $m\leqslant0$ 时,$f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,此时函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;

当 $m>0$ 时,由 $f'(x)>0$,解得 $x>m$,

由 $f'(x)<0$,解得 $0<x<m$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,m)$ 上单调递减,在 $(m,+\infty)$ 上单调递增.

综上,当 $m\leqslant0$ 时,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;当 $m>0$ 时,函数 $f(x)$ 在 $(0,m)$ 上单调递减,在 $(m,+\infty)$ 上单调递增.

(2)**证明**:由(1)知,当 $m\leqslant0$ 时,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,$f(x)$ 无最小值.

当 $m>0$ 时,$f(x)$ 在 $(0,m)$ 上单调递减,在 $(m,+\infty)$ 上单调递增,所以 $f(x)_{\min}=f(m)=-m\ln m$,

即 $g(m)=-m\ln m$,

则 $g'(m)=-1-\ln m$.

由 $g'(m)=-1-\ln m>0$,解得 $0<m<\frac{1}{e}$;

由 $g'(m)=-1-\ln m<0$,解得 $m>\frac{1}{e}$.

所以 $g(m)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递增,在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递减,

所以 $g(m)\leqslant g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}=\frac{1}{e}$,

即 $g(m)\leqslant\frac{1}{e}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

模块综合检测

(时间:120分钟,分值:150分)

一、单项选择题(本题共8小题,每小题5分,共40分)

1.已知数列 $\{a_n\}$ 的一个通项公式为 $a_n=(-1)^n\cdot2^n+a$,且 $a_3=-5$,则实数 a 等于 ( )

A.3　　B.1

C.-1　　D.0

A　**解析**:因为 $a_3=-5$,$a_n=(-1)^n\cdot2^n+a$,所以 $-8+a=-5$,即 $a=3$.故选A.

2.函数 $f(x)=e^{x-1}$ 的图象在点 $(0,f(0))$ 处的切线的斜率为 ( )

A.1　　B.e

C.$\frac{1}{e}$　　D.$\frac{\pi}{4}$

C　**解析**:$f'(x)=e^{x-1}$,故 $f'(0)=e^{-1}=\frac{1}{e}$,故切线斜率为 $\frac{1}{e}$.故选C.

3.已知函数 $f(x)=ax^3+bx+c$ 的导函数为 $f'(x)$.若 $f'(1)=2$,则 $f'(-1)=$ ( )

A.-3　　B.-2　　C.2　　D.3

C　**解析**:$f(x)=ax^3+bx+c\Rightarrow f'(x)=3ax^2+b$,

由 $f'(1)=2\Rightarrow3a\cdot1^2+b=2\Rightarrow3a+b=2$,

所以 $f'(-1)=3a\cdot(-1)^2+b=3a+b=2$.

故选C.

4.已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2=8$,$a_2+a_3=4$,则公比 $q=$ ( )

A.$-\frac{1}{2}$　　B.$\frac{1}{2}$　　C.-2　　D.2

B　**解析**:由 $a_2+a_3=a_1q+a_2q=(a_1+a_2)q=8q$

$=4$,可得 $q=\dfrac{1}{2}$.故选 B.

5. 在 a 和 b 之间插入 10 个数,使之成为等差数列,则插入的 10 个数的和为 ( )

A.$12(a+b)$　　B.$10(a+b)$

C.$6(a+b)$　　D.$5(a+b)$

D **解析**:由题可知,该数列一共有 12 项,且 $a_1=a,a_{12}=b$,

$a_1+a_{12}=a_2+a_{11}=a_3+a_{10}=\cdots=a_6+a_7=a+b$,

故插入的数之和 $S=(6-1)\times(a+b)=5(a+b)$.

故选 D.

6. 若函数 $f(x)=ax+e^x$ 在$(-\infty,1]$上是减函数,则实数 a 的取值范围是 ( )

A.$(-\infty,-1]$　　B.$(-\infty,-1)$

C.$(-\infty,-e)$　　D.$(-\infty,-e]$

D **解析**:由题意知,$f'(x)=a+e^x\leqslant 0$ 在$(-\infty,1]$上恒成立,得 $a\leqslant(-e^x)_{\min}$.

又函数 $y=-e^x$ 在$(-\infty,1]$上单调递减,所以$(-e^x)_{\min}=-e,a\leqslant -e$.故选 D.

7. 在宋元时期,我国涌现了一大批卓有成就的数学家,其中朱世杰与秦九韶、李冶、杨辉被誉为我国"宋元数学四大家".朱世杰著有《四元玉鉴》和《算学启蒙》等.在《算学启蒙》中,最引人入胜的问题之一莫过于堆垛问题.其中记载有以下问题:"今有三角、四角果子各一所,共积六百八十五个,只云三角底子一面不及四角底子一面七个,问:二色底子一面各几何?"其中"积"是和的意思,"三角果子"是每层都是正三角形的果子垛,自上至下每层依次有 1,3,6,10,15,…个果子,"四角果子"是每层都是正方形的果子垛,自上至下每层依次有 1,4,9,16,…个果子,"底子一面"指每垛最底层每条边.根据题意,可知这里的三角、四角果子垛最底层每条边上的果子数分别是$\left(\text{参考公式}:1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$ ( )

A.4,11　　B.5,12

C.6,13　　D.7,14

B **解析**:设三角果子垛自上至下各层的果子数构成数列$\{a_n\}$,则 $a_1=1,a_2=3,a_3=6,a_4=10,\cdots$,

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=a_n-a_{n-1}+a_{n-1}-a_{n-2}+\cdots+a_3-a_2+a_2-a_1+a_1=n+n-1+\cdots+2+1=\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n}{2}$;

当 $n=1$ 时,$a_1=1$.

所以三角果子垛自上至下第 n 层的果子数 $a_n=\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n}{2}$,

四角果子垛自上至下第 n 层的果子数为 n^2.

设三角、四角果子垛最底层每条边上的果子数分别为 $m,m+7$,

所以三角果子垛各层果子数的总和为 $\dfrac{1}{2}(1^2+2^2+3^2+\cdots+m^2)+\dfrac{1}{2}(1+2+3+\cdots+m)$.

四角果子垛各层果子数的总和为 $1^2+2^2+3^2+\cdots+(m+7)^2$.

由题意,$\dfrac{1}{2}(1^2+2^2+3^2+\cdots+m^2)+\dfrac{1}{2}(1+2+3+\cdots+m)+1^2+2^2+3^2+\cdots+(m+7)^2=685$,

即 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6}+\dfrac{m(m+1)}{4}+\dfrac{(m+7)(m+8)(2m+15)}{6}=685$,

解得 $m=5,m+7=12$,所以该三角、四角果子垛最底层每条边上的果子数分别是 5,12.

故选 B.

8. 设 $a\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)=e^x+a\cdot e^{-x}$ 的导函数是 $f'(x)$,且 $f'(x)$是奇函数.若曲线 $y=f(x)$的一条切线的斜率是$\dfrac{3}{2}$,则切点的横坐标为 ( )

A.$-\dfrac{\ln 2}{2}$　　B.$-\ln 2$　　C.$\dfrac{\ln 2}{2}$　　D.$\ln 2$

D **解析**:由题可知 $x\in\mathbf{R}$,因为函数 $f(x)=e^x+a\cdot e^{-x}$,所以 $f'(x)=e^x-\dfrac{a}{e^x}$.

又因为 $f'(x)$是奇函数,所以 $f'(0)=1-a=0$,

所以 $a=1$,所以 $f(x)=e^x+\dfrac{1}{e^x},f'(x)=e^x-\dfrac{1}{e^x}$.

因为曲线 $y=f(x)$的一条切线的斜率是$\dfrac{3}{2}$,

所以$\dfrac{3}{2}=e^x-\dfrac{1}{e^x}$,解方程可得 $x=\ln 2$.

故选 D.

二、多项选择题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

9. 已知各项都是正数的数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $S_n=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{2a_n}$,则 ( )

A.$\{S_n^2\}$是等差数列　　B.$S_n+S_{n+2}<2S_{n+1}$

C.$a_{n+1}>a_n$　　D.$S_n-\dfrac{1}{S_n}\geqslant\ln n$

ABD **解析**:$a_1=S_1=\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{1}{2a_1},a_1>0$,解得 $S_1=a_1=1$,

$n\geqslant 2$ 时,$S_n=\dfrac{S_n-S_{n-1}}{2}+\dfrac{1}{2(S_n-S_{n-1})}$,整理得 $S_n^2-S_{n-1}^2=1$,

故$\{S_n^2\}$是等差数列,选项 A 正确;

$S_n^2=S_1^2+n-1=n$,则 $S_n=\sqrt{n},S_n+S_{n+2}=\sqrt{n}+$

$\sqrt{n+2}<2\sqrt{\dfrac{n+n+2}{2}}=2\sqrt{n+1}=2S_{n+1}$，选项 B 正确；

$a_2=S_2-S_1=\sqrt{2}-1<a_1$，选项 C 错误；

令 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}-2\ln x,x\geqslant 1$，

则 $f'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}\geqslant 0$，

$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，$f(x)\geqslant f(1)=0$，则 $f(\sqrt{n})=\sqrt{n}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\ln n\geqslant 0$，

即$S_n-\dfrac{1}{S_n}\geqslant \ln n$，选项 D 正确.

故选 ABD.

10. 在等差数列$\{a_n\}$中，已知 $a_2+a_9+a_{12}-a_{14}+a_{20}-a_7=8$，则 （　　）

A. $a_{10}=4$　　B. $a_{11}=4$

C. $a_9-\dfrac{1}{4}a_3=3$　　D. $a_{10}-\dfrac{1}{4}a_3=3$

BC　**解析**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，则 $a_2+a_9+a_{12}-a_{14}+a_{20}-a_7=2a_1+20d=2(a_1+10d)=8$，即 $a_{11}=a_1+10d=4$，所以 $a_9-\dfrac{1}{4}a_3=a_1+8d-\dfrac{1}{4}(a_1+2d)=\dfrac{3}{4}(a_1+10d)=3$.故选 BC.

11. 若数列$\{a_n\}$对任意 $n\geqslant 2(n\in\mathbf{N}^*)$满足$(a_n-a_{n-1}-2)(a_n-2a_{n-1})=0$，下列关于数列$\{a_n\}$的说法正确的是 （　　）

A. $\{a_n\}$可以是等差数列

B. $\{a_n\}$可以是等比数列

C. $\{a_n\}$可以既是等差数列又是等比数列

D. $\{a_n\}$可以既不是等差数列又不是等比数列

ABD　**解析**：因为$(a_n-a_{n-1}-2)(a_n-2a_{n-1})=0$，

所以 $a_n-a_{n-1}-2=0$ 或 $a_n-2a_{n-1}=0$，

即 $a_n-a_{n-1}=2$ 或 $a_n=2a_{n-1}$.

易知$\{a_n\}$可以是等差数列或等比数列.

当数列$\{a_n\}$为 1,3,6,8,16,18,36,…时，满足$(a_n-a_{n-1}-2)(a_n-2a_{n-1})=0$，但$\{a_n\}$既不是等差数列，又不是等比数列.故选 ABD.

12. 已知函数 $f(x)$及其导数 $f'(x)$，若存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得 $f(x_0)=f'(x_0)$，则称 x_0 是 $f(x)$的一个“巧值点”.下列函数中，没有“巧值点”的是 （　　）

A. $f(x)=2x^2+3$　　B. $f(x)=\dfrac{1}{x}$

C. $f(x)=e^{-x}$　　D. $f(x)=\ln x$

AC　**解析**：对于 A，由 $f(x_0)=f'(x_0)$得 $2x_0^2+3=4x_0$，

即 $2x_0^2-4x_0+3=0$，$\Delta=-8<0$，所以该方程无解，

所以函数 $f(x)=2x^2+3$ 无“巧值点”，故 A 符合题意；

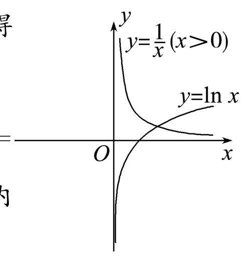
对于 B，由 $f(x_0)=f'(x_0)$得$\dfrac{1}{x_0}=-\dfrac{1}{x_0^2}$，解得 $x_0=-1$，

所以函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$有“巧值点”-1，故 B 不符合题意；

对于 C，由 $f(x_0)=f'(x_0)$得 $e^{-x_0}=-e^{-x_0}$无解，

所以函数 $f(x)=e^{-x}$无“巧值点”，故 C 符合题意；

对于 D，由 $f(x_0)=f'(x_0)$得 $\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}$，



如图，易知函数 $y=\ln x$ 与 $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$的图象在第一象限内有一个交点，

所以方程 $\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}$有一个解，所以函数 $f(x)=\ln x$ 有“巧值点”，故 D 不符合题意.

故选 AC.

三、填空题(本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

得分　**13.** 已知 $a=4+2\sqrt{3}$，$c=4-2\sqrt{3}$.若 a,b,c 三个数成等差数列，则 $b=$______；若 a,b,c 三个数成等比数列，则 $b=$______.

4　± 2　**解析**：若 a,b,c 三个数成等差数列，

则 $b=\dfrac{a+c}{2}=\dfrac{4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}}{2}=4$.

若 a,b,c 三个数成等比数列，

则 $b^2=ac=(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})=4\Rightarrow b=\pm 2$.

得分　**14.** 在数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1=1,a_2=5$，$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_6=$______.

-4　**解析**：由递推公式可知，$a_3=a_2-a_1=5-1=4$，$a_4=a_3-a_2=4-5=-1$，

$a_5=a_4-a_3=-1-4=-5$，$a_6=a_5-a_4=-5-(-1)=-4$.

得分　**15.**(2022·新高考全国Ⅰ卷)若曲线 $y=(x+a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线，则 a 的取值范围是______.

$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$　**解析**：因为 $y=(x+a)\cdot e^x$，所以 $y'=(x+1+a)e^x$，

设切点为(x_0,y_0)，则 $y_0=(x_0+a)e^{x_0}$，切线斜率 $k=(x_0+1+a)e^{x_0}$，

切线方程为 $y-(x_0+a)e^{x_0}=(x_0+1+a)e^{x_0}(x-x_0)$.

因为切线过原点，所以$-(x_0+a)e^{x_0}=(x_0+1+a)\cdot e^{x_0}(-x_0)$，

整理得 $x_0^2+ax_0-a=0$.

因为切线有两条，所以 $\Delta=a^2+4a>0$，解得 $a<-4$ 或 $a>0$，

所以 a 的取值范围是 $(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$.

得分 16.已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$.若 $f(t+3)+f(t-t^2)>0$ 成立，则实数 t 的取值范围为________.

$(-1,3)$　**解析**：由题得函数的定义域为 $\mathbf{R}$.因为 $f(-x)=e^{-x}-e^x+2x=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是奇函数.又 $f'(x)=e^x+e^{-x}-2\geqslant 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2=0$.

所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$f(t+3)+f(t-t^2)>0$ 等价于 $f(t+3)>-f(t-t^2)=f(t^2-t)$，所以 $t+3>t^2-t$，所以 $t^2-2t-3<0$，所以 $-1<t<3$.

所以实数 t 的取值范围为 $(-1,3)$.

四、解答题(本题共 6 小题，共 70 分)

得分 17.(10 分)已知函数 $f(x)=a\ln(x+1)+\dfrac{1}{2}x^2-ax+1(a>0)$.

(1)求函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $(0,f(0))$ 处的切线的方程；

(2)当 $a>1$ 时，求函数 $y=f(x)$ 的单调区间和极值.

解：(1) $f(0)=1$，$f'(x)=\dfrac{a}{x+1}+x-a=\dfrac{x(x-a+1)}{x+1}$，$f'(0)=0$，

所以函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $(0,f(0))$ 处的切线的方程为 $y=1$.

(2)函数的定义域为 $(-1,+\infty)$，令 $f'(x)=0$，即 $\dfrac{x(x-a+1)}{x+1}=0$，解得 $x=0$ 或 $x=a-1$.

当 $a>1$ 时，$f(x)$，$f'(x)$ 随 x 的变化而变化的情况如下表：

x	$(-1,0)$	0	$(0,a-1)$	$a-1$	$(a-1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

可知 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,a-1)$，单调递增区间是 $(-1,0)$ 和 $(a-1,+\infty)$，极大值为 $f(0)=1$，极小值为 $f(a-1)=a\ln a-\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{3}{2}$.

得分 18.(12 分)(2022·全国甲卷(理))记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.已知 $\dfrac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$.

(1)证明：$\{a_n\}$ 是等差数列；

(2)若 a_4,a_7,a_9 成等比数列，求 S_n 的最小值.

(1)**证明**：由 $\dfrac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$，可得 $2S_n+n^2=2na_n+n$，①

当 $n\geqslant 2$ 时，$2S_{n-1}+(n-1)^2=2(n-1)a_{n-1}+(n-1)$，②

①－②得，$2S_n+n^2-2S_{n-1}-(n-1)^2=2na_n+n-2(n-1)a_{n-1}-(n-1)$，

即 $2a_n+2n-1=2na_n-2(n-1)a_{n-1}+1$，

即 $2(n-1)a_n-2(n-1)a_{n-1}=2(n-1)$，所以 $a_n-a_{n-1}=1$，$n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$，

所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为公差的等差数列.

(2)**解**：(方法一)由(1)可得 $a_4=a_1+3$，$a_7=a_1+6$，$a_9=a_1+8$，

又 a_4,a_7,a_9 成等比数列，所以 $a_7^2=a_4\cdot a_9$，

即 $(a_1+6)^2=(a_1+3)\cdot(a_1+8)$，解得 $a_1=-12$.

所以 $a_n=n-13$，所以 $S_n=-12n+\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{1}{2}n^2-\dfrac{25}{2}n=\dfrac{1}{2}\left(n-\dfrac{25}{2}\right)^2-\dfrac{625}{8}$，

所以，当 $n=12$ 或 $n=13$ 时，$(S_n)_{\min}=-78$.

(方法二)由(1)可得 $a_4=a_1+3$，$a_7=a_1+6$，$a_9=a_1+8$，

又 a_4,a_7,a_9 成等比数列，所以 $a_7^2=a_4\cdot a_9$，

即 $(a_1+6)^2=(a_1+3)\cdot(a_1+8)$，解得 $a_1=-12$，

所以 $a_n=n-13$，即有 $a_1<a_2<\cdots<a_{12}<0$，$a_{13}=0$.

则当 $n=12$ 或 $n=13$ 时，$(S_n)_{\min}=-78$.

得分 19.(12 分)在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1+a_2+a_3=18$ 且 $a_4+a_5+a_6=54$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $b_n=\dfrac{4}{a_n\cdot a_{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

解：(1)由题意，设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

则 $\begin{cases}3a_1+3d=18,\\3a_1+12d=54,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=2,\\d=4,\end{cases}$

所以 $a_n=2+4(n-1)=4n-2$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(2)因为 $b_n=\dfrac{4}{a_n\cdot a_{n+1}}=\dfrac{4}{(4n-2)(4n+2)}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，

所以 $S_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{n}{2n+1}$.

得分 20.(12 分)给出条件：①直线 l_1 与直线 $3x+y+3=0$ 平行；②直线 l_1 的倾斜角为 α，且 $\tan\left(\alpha+\dfrac{7\pi}{4}\right)=2$.在这两个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解答问题.

问题：函数 $f(x)=(x+1)^3-3x^2-mx-1$ 的图象在点 $(0,f(0))$ 处的切线为 l_1，已知________.

(1)求 $f'(x)$；

(2)若曲线 $y=f(x)$ 过点 $(2,-6)$ 的切线为 l_2，且 l_1,l_2 不重合，求切线 l_2 的方程.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

解：(1)选①.因为 $f(x)=(x+1)^3-3x^2-mx-1=x^3+(3-m)x$，

所以 $f'(x)=3x^2+3-m$.

因为直线 l_1 与直线 $3x+y+3=0$ 平行，所以 $f'(0)=3-m=-3$，所以 $m=6$.

所以 $f(x)=x^3-3x$，$f'(x)=3x^2-3$.

选②.因为 $f(x)=(x+1)^3-3x^2-mx-1=x^3+(3-m)x$，

所以 $f'(x)=3x^2+3-m$.

由 $\tan\left(\alpha+\frac{7\pi}{4}\right)=\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=2$，解得 $\tan\alpha=-3$，

所以 $f'(0)=3-m=-3$，所以 $m=6$.

所以 $f(x)=x^3-3x$，$f'(x)=3x^2-3$.

(2)设 l_2 与曲线 $y=f(x)$ 的切点为 $(x_0,x_0^3-3x_0)$，则 $\frac{x_0^3-3x_0+6}{x_0-2}=3x_0^2-3$，即 $2x_0^3-6x_0^2=0$，

解得 $x_0=0$ 或 $x_0=3$.

因为 l_1,l_2 不重合，所以 $x_0=0$ 应舍去，所以 $x_0=3$.

所以切点为 $(3,18)$，切线的斜率为 24，所以切线 l_2 的方程为 $y-18=24(x-3)$，

即 $24x-y-54=0$.

得分	

21.(12 分)在等差数列 $\{a_n\}$ 中，其前 n 项和为 S_n，且 $S_n=\left(\frac{a_n+1}{2}\right)^2$；在等比数列 $\{b_n\}$ 中，其前 n 项和为 T_n，且 $T_n=\left(\frac{b_n+1}{2}\right)^2$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求 a_n,b_n；

(2)求 $\{a_nb_n\}$ 的前 n 项和 M_n.

解：(1)由 $S_1=\left(\frac{a_1+1}{2}\right)^2=a_1$，解得 $a_1=1$.

又 $S_2=a_1+a_2=1+a_2=\left(\frac{a_2+1}{2}\right)^2$，所以 $a_2=3$ 或 -1.

因为 $a_2=-1$ 时，$a_3=2a_2-a_1=-3$，此时 $S_3=a_1+a_2+a_3=-3\neq\left(\frac{a_3+1}{2}\right)^2=1$，故 $a_2=-1$ 舍去，

所以等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=a_2-a_1=2$.

所以 $a_n=2n-1$.

同理可得 $b_1=1$，$b_2=3$ 或 -1.

因为 $b_2=3$ 时，$b_3=\frac{b_2^2}{b_1}=9$，此时 $T_3=13\neq\left(\frac{b_3+1}{2}\right)^2=25$，故 $b_2=3$ 舍去.

又 $\{b_n\}$ 为等比数列，所以 $b_n=(-1)^{n-1}$.

(2)因为 $M_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$，

所以 $M_n=1\times(-1)^0+3\times(-1)^1+5\times(-1)^2+\cdots+(2n-1)\times(-1)^{n-1}$，①

令 $-M_n=1\times(-1)^1+3\times(-1)^2+5\times(-1)^3+\cdots+(2n-1)\times(-1)^n$，②

①－②得 $2M_n=1+2\times(-1)^1+2\times(-1)^2+2\times(-1)^3+\cdots+2\times(-1)^{n-1}-(2n-1)\times(-1)^n=1+2\times\frac{(-1)-(-1)^{n-1}\times(-1)}{1-(-1)}-(2n-1)\times(-1)^n$，所以 $M_n=n\times(-1)^{n-1}$.

得分	

22.(12 分)已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-ax$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2)当 $x\geqslant0$ 时，不等式 $f(x)\leqslant e^x-1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

解：(1)由题意得 $x>-1$，$f'(x)=\frac{1}{x+1}-a$.

当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$，故函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，在区间 $\left(-1,-1+\frac{1}{a}\right)$ 上，$f'(x)>0$，在区间 $\left(-1+\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上，$f'(x)<0$，

所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-1,-1+\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在区间 $\left(-1+\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减.

综上所述，当 $a\leqslant0$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上单调递增；当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-1,-1+\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在区间 $\left(-1+\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减.

(2)由 $f(x)\leqslant e^x-1$，可得 $\ln(x+1)-ax+1-e^x\leqslant0$.

设 $g(x)=\ln(x+1)-ax+1-e^x$，则 $g(0)=0$，$g'(x)=\frac{1}{x+1}-a-e^x$.

设 $h(x)=g'(x)=\frac{1}{x+1}-a-e^x$，

则 $h'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}-e^x<0$，

所以函数 $g'(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递减，则 $g'(x)\leqslant g'(0)=-a$.

当 $a\geqslant0$ 时，$g'(x)\leqslant0$，$g(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(x)\leqslant g(0)=0$ 恒成立.

当 $a<0$ 时，$g'(0)=-a>0$.因为 $g'(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $\exists x_0\in(0,+\infty)$，在区间 $(0,x_0)$ 上，有 $g'(x)>0$，在区间 $(x_0,+\infty)$ 上，有 $g'(x)<0$.

所以 $g(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上单调递增，在区间 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(x_0)>g(0)=0$，不合题意.

综上所述，实数 a 的取值范围为 $[0,+\infty)$.