点金训练

教师用书

数学

必修第一册

配人教A版

《点金训练》编写组　编

DIANJIN XUNLIAN
—— SHUXUE ——
JIAOSHI YONGSHU

四川教育出版社

教师用书 点金训练 数学 必修第一册 配人教A版

四川教育出版社

winshare文轩教育
四川教育出版社

扫码查看本书
配套资源包

赠　品

6662023025002

点金训练

教师用书

《点金训练》编写组 编

数学

必修第一册

配人教A版

四川教育出版社

CONTENTS

目录

第一章 集合与常用逻辑用语

1.1 集合的概念 …… 1

第 1 课时 集合的概念 …… 1

第 2 课时 集合的表示 …… 4

1.2 集合间的基本关系 …… 8

1.3 集合的基本运算 …… 12

第 1 课时 并集与交集 …… 12

第 2 课时 补集及综合应用 …… 15

1.4 充分条件与必要条件 …… 19

1.4.1 充分条件与必要条件 …… 19

1.4.2 充要条件 …… 22

1.5 全称量词与存在量词 …… 26

1.5.1 全称量词与存在量词 …… 26

1.5.2 全称量词命题和存在量词命题的否定 …… 29

单元活动构建 …… 31

第二章 一元二次函数、方程和不等式

2.1 等式性质与不等式性质 …… 37

第 1 课时 不等关系与比较大小 …… 37

第 2 课时 不等式的性质 …… 41

2.2 基本不等式 …… 45

第 1 课时 基本不等式及其简单应用 …… 45

第 2 课时 基本不等式的综合应用 …… 49

2.3 二次函数与一元二次方程、不等式 …… 53

第 1 课时 一元二次不等式的解法 …… 53

第 2 课时 一元二次不等式的应用 …… 57

单元活动构建 …… 62

第三章 函数的概念与性质

3.1 函数的概念及其表示 …… 69

3.1.1 函数的概念 …… 69

第 1 课时 函数的概念 …… 69

第 2 课时 函数概念的应用 …… 72

3.1.2 函数的表示法 …… 76

第 1 课时 函数的表示法 …… 76

第 2 课时 分段函数及其应用 …… 81

3.2 函数的基本性质 …… 86

3.2.1 单调性与最大(小)值 …… 86

第 1 课时 函数的单调性 …… 86

第 2 课时 函数的最大(小)值 …… 90

3.2.2 奇偶性 …… 95

第 1 课时 函数的奇偶性 …… 95

第 2 课时 函数的奇偶性的应用 …… 99

3.3 幂函数 …… 103

3.4 函数的应用(一) …… 108

单元活动构建 …… 112

第四章 指数函数与对数函数

4.1 指数 …… 120

4.1.1 n 次方根与分数指数幂 …… 120

4.1.2 无理数指数幂及其运算性质 …… 123

4.2 指数函数 …… 126

4.2.1 指数函数的概念 …… 126

4.2.2 指数函数的图象和性质 …… 129
第 1 课时 指数函数的图象和性质 …………………… 129
第 2 课时 指数函数的图象和性质的应用 ……… 134
4.3 对数 ……………………………… 138
4.3.1 对数的概念 …………………… 138
4.3.2 对数的运算 …………………… 141
4.4 对数函数 ………………………… 145
4.4.1 对数函数的概念 ……………… 145
4.4.2 对数函数的图象和性质 …… 148
第 1 课时 对数函数的图象和性质 …………………… 148
第 2 课时 对数函数的图象和性质的应用 ……… 153
4.4.3 不同函数增长的差异 ……… 158
4.5 函数的应用(二) ………………… 163
4.5.1 函数的零点与方程的解 …… 163
4.5.2 用二分法求方程的近似解 ………………………… 168
4.5.3 函数模型的应用 ……………… 172
单元活动构建 ……………………… 177

第五章 三角函数

5.1 任意角和弧度制 ………………… 186
5.1.1 任意角 ………………………… 186
5.1.2 弧度制 ………………………… 190
5.2 三角函数的概念 ………………… 195
5.2.1 三角函数的概念 ……………… 195
第 1 课时 三角函数的概念 …………………… 195
第 2 课时 三角函数的一些简单性质 ……………… 199
5.2.2 同角三角函数的基本关系 … 202
5.3 诱导公式 ………………………… 206
第 1 课时 诱导公式二～四 … 206
第 2 课时 诱导公式五、六 … 210
5.4 三角函数的图象与性质 ……… 214
5.4.1 正弦函数、余弦函数的图象 … 214
5.4.2 正弦函数、余弦函数的性质 … 220
第 1 课时 正弦函数、余弦函数的周期性与奇偶性 …………………… 220
第 2 课时 正弦函数、余弦函数的单调性与最值 …………………… 225
5.4.3 正切函数的性质与图象 …… 230
5.5 三角恒等变换 …………………… 237
5.5.1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式 ………………………… 237
第 1 课时 两角差的余弦公式 …………………… 237
第 2 课时 两角和与差的正弦、余弦、正切公式 …………………… 241
第 3 课时 二倍角的正弦、余弦、正切公式 ……… 245
5.5.2 简单的三角恒等变换 ……… 249
第 1 课时 半角公式及应用 …………………… 249
第 2 课时 三角恒等变换的综合应用 ……………… 253
5.6 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ ……… 259
第 1 课时 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象变换 ……… 259
第 2 课时 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的性质 …………… 265
5.7 三角函数的应用 ………………… 272
单元活动构建 ……………………… 278

模块综合检测 ………………………………………………… 290

第一章　集合与常用逻辑用语

1.1　集合的概念

第 1 课时　集合的概念

学习任务目标

1.通过实例了解集合的含义.
2.理解元素与集合的“属于”与“不属于”关系;熟记常用数集专用符号.
3.理解集合中元素的特性,并能够用其解决有关问题.

问题式预习

知识点一　元素与集合的相关概念

(1)元素:一般地,把研究对象统称为元素,常用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.

(2)集合:把一些元素组成的总体叫做集合(简称为集),常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.

(3)集合相等:只要构成两个集合的元素是一样的,就称这两个集合是相等的.

(4)集合中元素的特性:确定性、互异性和无序性.

[微训练]

判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)所有的直角三角形组成一个集合. (√)

(2)高中数学课本上的所有难题组成一个集合. (×)

(3)由 1,2,3 构成的集合与由 3,2,1 构成的集合是相等的. (√)

(4)一个集合中可以找到两个相同的元素. (×)

知识点二　元素与集合的关系

关系	概念	记法	读法
属于	如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于集合 A	$a\in A$	a 属于 A
不属于	如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于集合 A	$a\notin A$	a 不属于 A

知识点三　常用数集及其记法

数集	意义	符号
非负整数集(或自然数集)	全体非负整数组成的集合	$\mathbf{N}$
正整数集	全体正整数组成的集合	$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$
整数集	全体整数组成的集合	$\mathbf{Z}$
有理数集	全体有理数组成的集合	$\mathbf{Q}$
实数集	全体实数组成的集合	$\mathbf{R}$

[微训练]

1.下列关系正确的是 (　　)

A.$0\in\mathbf{N}^*$　　B.$\pi\in\mathbf{Q}$

C.$0\notin\mathbf{Z}$　　D.$\sqrt{2}\in\mathbf{R}$

D　**解析**:对于 A,因为 0 不是正整数,所以 $0\notin\mathbf{N}^*$,所以 A 错误;

对于 B,因为 π 是无理数,所以 $\pi\notin\mathbf{Q}$,所以 B 错误;

对于 C,0 是整数,因此 $0\in\mathbf{Z}$,所以 C 错误;

对于 D,因为 $\sqrt{2}$ 是实数,所以 $\sqrt{2}\in\mathbf{R}$,所以 D 正确.

2.用符号“$\in$”或“$\notin$”填空:

(1)$\frac{1}{2}$ $\notin$ $\mathbf{N}$;(2)-3 $\in$ $\mathbf{Z}$;(3)$\sqrt{3}$ $\notin$ $\mathbf{Q}$;(4)π $\notin$ $\mathbf{N}^*$;

(5)$\sqrt{5}$ $\in$ $\mathbf{R}$.

任务型课堂

任务一　集合的有关概念

1. 下列各组对象中能构成集合的是　（　　）

A. 接近$\sqrt{3}$的实数

B. 数学成绩比较好的同学

C. 小于 20 的所有自然数

D. 未来世界的高科技产品

C　**解析**：集合的元素特征：确定性、无序性、互异性.选项 A,B,D 中集合的元素均不满足确定性，只有 C 中的元素是确定的，满足集合的定义.

2. 下列集合 P 与 Q 表示同一个集合的是　（　　）

A. P 是由元素 $1,\sqrt{3},\pi$ 构成的集合，Q 是由元素 $\pi,1,|-\sqrt{3}|$ 构成的集合

B. P 是由 π 构成的集合，Q 是由 3.141 59 构成的集合

C. P 是由 2,3 构成的集合，Q 是由有序数对$(2,3)$构成的集合

D. P 是满足不等式$-1\leqslant x\leqslant 1$ 的自然数 x 构成的集合，Q 是方程 $x^2=1$ 的解集

A　**解析**：因为 A 项中 P,Q 的元素完全相同，所以 P 与 Q 表示同一个集合，而 B,C,D 中 P,Q 的元素不相同，所以 P 与 Q 不能表示同一个集合.故选 A.

【类题通法】

判断一组对象能否组成集合的策略

(1)注意集合中元素的确定性.看是否具有一个明确的标准，使得对于任何一个对象，都能判断其是否符合此标准，若具有此“标准”，就可以组成集合；否则，不能组成集合.

(2)注意集合中元素的互异性、无序性.

任务二　元素与集合的关系

［探究活动］

探究 1：已知集合 A 是不等式 $x>2$ 的解集.

(1)$-1,3$ 与集合 A 分别是什么关系？

(2)若 $a\in A$，则 a 应满足什么条件？

(3)若 $a\notin A$，则 a 应满足什么条件？

提示：(1)$-1\notin A,3\in A$　(2)$a>2$　(3)$a\leqslant 2$

探究 2：若集合 A 中的元素 x 满足$\frac{6}{3-x}\in\mathbf{N}$，$x\in\mathbf{N}$，则集合 A 中的元素有哪些？

提示：因为$\frac{6}{3-x}\in\mathbf{N}$，所以 $3-x=1$ 或 2 或 3 或 6，即 $x=2$ 或 1 或 0 或-3.

又 $x\in\mathbf{N}$，所以 $x=0$ 或 1 或 2，即集合 A 中的元素为 0,1,2.

［评价活动］

1. 集合 A 由不超过 5 的实数组成，$a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，则　（　　）

A. $a\in A$　　B. $a^2\in A$

C. $\frac{1}{a}\notin A$　　D. $a+1\notin A$

A　**解析**：因为 $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}<\sqrt{4}+\sqrt{4}=4<5$，所以 $a\in A$.

因为 $a+1<\sqrt{4}+\sqrt{4}+1=5$，所以 $a+1\in A$.因为 $a^2=(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}>5$，所以 $a^2\notin A$.

因为$\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\sqrt{3}-\sqrt{2}<5$，所以$\frac{1}{a}\in A$.

2. 下列关系中，正确的有　（　　）

①$\frac{1}{2}\in\mathbf{R}$；②$\sqrt{5}\notin\mathbf{Q}$；③$|-3|\in\mathbf{N}$；④$|-\sqrt{3}|\in\mathbf{Q}$.

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

C　**解析**：$\frac{1}{2}$是实数，$\sqrt{5}$是无理数，$|-3|=3$ 是自然数，$|-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$ 是无理数.因此，①②③正确，④错误.

3. (多选)已知集合 M 是关于 x 的方程 $x^2-x+m=0$ 的解组成的集合.若 $2\in M$，则　（　　）

A. $m=2$　　B. $m=-2$

C. $-1\in M$　　D. $-2\in M$

BC　**解析**：由 $2\in M$ 知 2 为方程 $x^2-x+m=0$ 的一个根，所以 $2^2-2+m=0$，解得 $m=-2$.

所以方程为 $x^2-x-2=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=2$.

故方程的另一根为-1，即$-1\in M$.故选 BC.

【类题通法】

判断元素与集合关系的两种方法

(1)直接法

①使用前提：集合中的元素是直接给出的.

②判断方法：首先明确集合是由哪些元素构成的，然后判断所给元素在集合中是否出现.

(2)推理法

①使用前提：集合中的元素不是直接给出的.

②判断方法：首先明确集合中的元素具有什么特征，然后判断所给元素是否满足集合中元素所具有的特征.

任务三　集合中元素的特性及应用

1. 已知集合 A 中含有元素 $1,a,a-2$，且 $3\in A$，则实数 a 的值为（　　）

A.3　　B.5

C.3 或 5　　D.不确定

B　**解析**：由题意得 $a-2=3$ 或 $a=3$.当 $a-2=3$，即 $a=5$ 时，满足题意；

当 $a=3$ 时，$a-2=1$，不满足集合中元素的互异性，故舍去.综上可得 a 的值为 5.

2. 已知集合 A 中含有 a 和 a^2 两个元素.若 $1\in A$，则实数 a 的值为________.

-1　**解析**：因为集合 A 中含有 a 和 a^2 两个元素，且 $1\in A$，所以 $a=1$ 或 $a^2=1$.

①若 $a=1$，则 $a^2=1$.这与 $a^2\neq a$ 相矛盾.故 $a\neq 1$.

②若 $a^2=1$，则 $a=-1$ 或 $a=1$（舍去）.又当 $a=-1$ 时，A 中含有元素 1 和 -1，满足集合中元素的互异性，符合题意.

综上可知，实数 a 的值为 -1.

【类题通法】

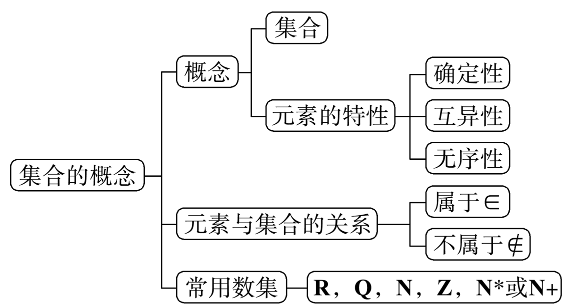
由集合中元素的特性求参数的值(范围)的步骤

(1)根据集合中元素的确定性，求出参数的值(范围)；

(2)根据集合中元素的互异性，对求出的值进行检验；

(3)写出符合题意的参数的值(范围).

提质归纳



课后素养评价(一)

基础性·能力运用

1. (多选)下列给出的对象中，不能构成集合的是（　　）

A.很大的数

B.好心人

C.漂亮的小女孩

D.方程 $x^2-1=0$ 的实数根

ABC　**解析**：对于 A：很大的数，B：好心人，C：漂亮的小女孩，

描述都不够准确具体，元素都不能确定，所以都不能组成集合；

选项 D：方程 $x^2-1=0$ 的实数根为 ± 1，元素是确定的，具体的，能组成集合.

2. (多选)下列结论正确的是（　　）

A.$\frac{1}{3}\in \mathbf{Z}$　　B.$\sqrt{2}\in \mathbf{R}$

C.$0\in \mathbf{N}^*$　　D.$\pi\notin \mathbf{Q}$

BD　**解析**：因为 $\frac{1}{3}\notin \mathbf{Z}$，故 A 错误；因为 $\sqrt{2}\in \mathbf{R}$，故 B 正确；因为 $0\notin \mathbf{N}^*$，故 C 错误；又 $\pi\notin \mathbf{Q}$，故 D 正确.

3. 若一个集合中的三个元素 a,b,c 分别是△ABC 的三边长，则此三角形一定不是（　　）

A.锐角三角形　　B.直角三角形

C.钝角三角形　　D.等腰三角形

D　**解析**：△ABC 的三边长两两不等，故一定不是等腰三角形.

4. 若 $1\in A$，且集合 A 与集合 B 相等，则 1________B.(填“∈”或“∉”)

∈　**解析**：由集合相等的定义可知，$1\in B$.

5. 若 $a,b\in \mathbf{R}$，且 $a\neq 0,b\neq 0$，则 $\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}$ 的所有可能取值组成的集合中，元素的个数为________，所有元素的和为________.

3　0　**解析**：当 a,b 同正时，$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}=\frac{a}{a}+\frac{b}{b}=1+1=2$.

当 a,b 同负时，$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}=-1-1=-2$.

当 a,b 异号时，$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}=0$.

所以 $\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}$ 的可能取值所组成的集合中元素共有 3 个，且 3 个元素的和为 $2+(-2)+0=0$.

6. 设 A 表示由 $a^2+2a-3,2,3$ 构成的集合，B 表示由 $2,|a+3|$ 构成的集合.已知 $5\in A$，且 $5\notin B$，求 a 的值.

解：因为 $5\in A$，所以 $a^2+2a-3=5$，

解得 $a=2$ 或 $a=-4$.

当 $a=2$ 时，$|a+3|=5$；

当 $a=-4$ 时，$|a+3|=1$.

又 $5\notin B$，所以 $a=-4$.

综合性·创新提升

1. 下列结论中正确的个数为（　　）

①$\mathbf{N}$ 中最小的元素是 1；

②若 $a\in\mathbf{N}$，$b\in\mathbf{N}$，则 $a+b$ 的最小值是 2；

③$|-\sqrt{3}|\in\mathbf{Q}$.

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

A　**解析**：自然数集 $\mathbf{N}$ 中最小的元素是 0，故①不正确；当 $a=b=0$ 时，$a+b$ 的最小值是 0，故②不正确；$|-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$ 是无理数，故③不正确.故选 A.

2.（多选）下列给出的对象构成的集合的元素个数有限的是（　　）

A.方程 $x^2-6x-16=0$ 的根

B.大于 0 且小于 5 的实数

C.小于 22 的质数

D.倒数等于它本身的实数

ACD　**解析**：方程 $x^2-6x-16=0$ 的根为 -2，8；大于 0 且小于 5 的实数有无穷多个；小于 22 的质数为 2，3，5，7，11，13，17，19；倒数等于它本身的实数为 ±1.故选 ACD.

3.（多选）若集合 A 由元素 1，3，a^2 组成，且 $a\in A$，则 a 的值可能为（　　）

A.0　　B.1　　C.3　　D.9

AC　**解析**：$a=0$ 时，该集合为 $\{1,3,0\}$ 符合要求；$a=3$ 时，该集合为 $\{1,3,9\}$ 符合要求，其他均不符合.

4. 已知集合 P 中的元素 x 满足：$x\in\mathbf{N}$，且 $2<x<a$.若集合 P 中恰有三个元素，则整数 $a=$________.

6　**解析**：$x\in\mathbf{N}$，$2<x<a$，且集合 P 中恰有三个元素，结合数轴(图略)知 $a=6$.

5. 已知数集 A 满足：若 $a\in A$，则 $\frac{1}{1-a}\in A(a\neq1)$.若 $2\in A$，则 A 中的所有元素为________.

$-1,\frac{1}{2},2$　**解析**：因为 $2\in A$，由题意可知，$\frac{1}{1-2}=-1\in A$.由 $-1\in A$ 可知，$\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\in A$；由 $\frac{1}{2}\in A$ 可知，$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\in A$.故集合 A 中共有 3 个元素，它们分别是 $-1,\frac{1}{2},2$.

6. 设集合 D 是满足方程 $y=x^2$ 的有序实数对 (x,y) 构成的集合，则 -1__________ D，$(-1,1)$________ D.(填“$\in$”或“$\notin$”)

$\notin$　$\in$　**解析**：由于集合 D 中的元素是有序实数对 (x,y)，而 -1 是数，所以 $-1\notin D$.

又 $(-1)^2=1$，所以 $(-1,1)\in D$.

7. 设 A 是由满足不等式 $x<6$ 的自然数 x 构成的集合.若 $a\in A$ 且 $3a\in A$，求 a 的值.

解：因为 $a\in A$ 且 $3a\in A$，

所以 $\begin{cases}a<6,\\3a<6,\end{cases}$

解得 $a<2$.

又 $a\in\mathbf{N}$，所以 $a=0$ 或 1.

第 2 课时　集合的表示

学习任务目标

1. 掌握集合的两种常用表示方法——列举法和描述法.

2. 通过实例选择自然语言、集合语言描述不同的具体问题，感受集合语言的意义和作用.

问题式预习

知识点一　列举法

1. 定义：把集合的所有元素<u>一一列举</u>出来，并用花括号“{　}”括起来表示集合的方法叫做列举法.

2. 形式：$\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$.

[微训练]

1. 判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)由 1，1，2，3 组成的集合可用列举法表示为 $\{1,1,2,3\}$.（×）

(2)集合 $\{(1,2)\}$ 中的元素是 1 和 2.（×）

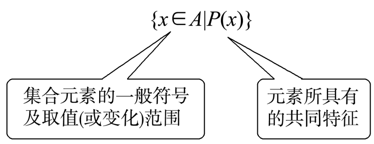
2. 方程 $x^2+x-6=0$ 的根组成的集合，用列举法可以表示为________.

$\{-3,2\}$　**解析**：由 $x^2+x-6=0$，解得 $x=-3$ 或 $x=2$，所以用列举法可以表示为 $\{-3,2\}$.

知识点二　描述法

1. 定义：一般地，设 A 是一个集合，把集合 A 中所有具有共同特征 $P(x)$ 的元素 x 所组成的集合表示为 $\{x\in A\mid P(x)\}$，这种表示集合的方法称为描述法.

2. 形式：



[**微训练**]

1. 判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").

(1)集合 $\{x\mid x>3$，且 $x\in\mathbf{N}\}$ 与集合 $\{x\in\mathbf{N}\mid x>3\}$ 表示同一个集合.　　(√)

(2)集合 $\{x\mid x<3$，且 $x\in\mathbf{N}\}$ 与集合 $\{1,2,3\}$ 表示同一个集合.　　(×)

2. 用描述法表示下列集合：

(1)不等式 $3x-8\geqslant 7-2x$ 的解集：________；

$\{x\mid x\geqslant 3\}$　**解析**：由 $3x-8\geqslant 7-2x$，解得 $x\geqslant 3$，所以不等式的解集为 $\{x\mid x\geqslant 3\}$.

(2)函数 $y=x^2-1$ 的图象上的所有点组成的集合：$\{(x,y)\mid y=x^2-1,x,y\in\mathbf{R}\}$.

任务型课堂

任务一　用列举法表示集合

1. 方程组 $\begin{cases}x-y=3,\\2x+y=6\end{cases}$ 的解构成的集合为　　(　　)

A.$\{x=3,y=0\}$　　B.$\{(3,0)\}$

C.$\{3,0\}$　　D.$\{0,3\}$

B　**解析**：由 $\begin{cases}x-y=3,\\2x+y=6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\y=0,\end{cases}$

则方程组 $\begin{cases}x-y=3,\\2x+y=6\end{cases}$ 的解构成的集合是 $\{(3,0)\}$.

2. 已知非零实数 a,b,c，则代数式 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}$ 的所有可能的值组成的集合是　　(　　)

A.$\{3\}$　　B.$\{-3\}$

C.$\{3,-3\}$　　D.$\{3,-3,1,-1\}$

D　**解析**：非零实数 a,b,c，

当 a,b,c 都是正数时，

$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}=3$；

当 a,b,c 中有 2 个正数 1 个负数时，

$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}=1$；

当 a,b,c 中有 1 个正数 2 个负数时，

$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}=-1$；

当 a,b,c 都是负数时，

$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}=-3$.

所以代数式 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}$ 表示的所有值的集合是 $\{3,-3,1,-1\}$.

3. 直线 $y=x+2\ 023$ 与坐标轴的交点所组成的集合用列举法表示为________________；该集合由________个元素组成.

$\{(0,2\ 023),(-2\ 023,0)\}$　2　**解析**：将 $x=0$ 代入 $y=x+2\ 023$，得 $y=2\ 023$，即直线与 y 轴的交点是 $(0,2\ 023)$，将 $y=0$ 代入 $y=x+2\ 023$，得 $x=-2\ 023$，即直线与 x 轴的交点是 $(-2\ 023,0)$，故直线与坐标轴的交点组成的集合是 $\{(0,2\ 023),(-2\ 023,0)\}$，共 2 个元素.

【类题通法】

用列举法表示集合的步骤

(1)求出集合的元素；

(2)把元素一一列举出来，中间用"，"隔开，相同元素只列举一次；

(3)用花括号括起来.

注意：一定要分清所求集合是数集还是点集.

任务二　用描述法表示集合

[**探究活动**]

探究 1：能否用列举法表示不等式 $2x-7<3$ 的解集？该集合中的元素有什么特点？

提示：不能；该集合中的元素都是小于 5 的实数.

探究 2：探究 1 中的集合用描述法怎样表示？

提示：$\{x\mid x<5\}$

探究 3：偶数有什么性质？所有偶数构成的集合用描述法怎么表示？

提示：都能被 2 整除；$\{x\mid x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$

［评价活动］

1. 集合$\{-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$用描述法可表示为（　　）

A. $\{-1\leqslant x\leqslant 8\}$

B. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 8\}$

C. $\{x\in\mathbf{Z}|-1\leqslant x\leqslant 8\}$

D. $\{x\in\mathbf{N}|-1\leqslant x\leqslant 8\}$

C　**解析**：观察可知集合中的元素是从-1到8的连续整数，所以可以表示为$\{x\in\mathbf{Z}|-1\leqslant x\leqslant 8\}$.

2. 用描述法表示以下集合：

(1)所有不小于2，且不大于20的实数组成的集合；

(2)平面直角坐标系中第二象限内的点组成的集合；

(3)200以内的正奇数组成的集合；

(4)方程$x^2-5x-6=0$的解组成的集合.

解：(1)集合可表示为$\{x\in\mathbf{R}|2\leqslant x\leqslant 20\}$.

(2)第二象限内的点(x,y)满足$x<0$，且$y>0$，故集合可表示为$\{(x,y)|x<0,且\ y>0\}$.

(3)$\{x|x=2k+1,k\leqslant 99,k\in\mathbf{N}\}$.

(4)$\{x|x^2-5x-6=0\}$.

【类题通法】

用描述法表示集合的步骤

(1)弄清元素的形式；

(2)写出代表元素，写在“|”的前面；

(3)确定元素所具有的共同特征，写在“|”的后面；

(4)用花括号把它们括起来.

任务三　集合表示方法的综合应用

1. 若集合$A=\{x|ax^2+ax-1=0\}$只有一个元素，则$a=$（　　）

A. -4　　B. 0

C. 4　　D. 0或-4

A　**解析**：依题意，得关于x的方程$ax^2+ax-1=0$只有一个实根，所以$\begin{cases}a\neq 0,\\ \Delta=0,\end{cases}$即$\begin{cases}a\neq 0,\\ a^2+4a=0,\end{cases}$解得$a=-4$.故选A.

2. 设集合$A=\{x|x^2-3x+a=0\}$，若$4\in A$，用列举法表示集合A为________.

$\{-1,4\}$　**解析**：因为$4\in A$，所以$16-12+a=0$，所以$a=-4$，

所以$A=\{x|x^2-3x-4=0\}=\{-1,4\}$.

3. 已知集合$A=\{x\in\mathbf{R}|mx^2-2x+3=0,m\in\mathbf{R}\}$.

(1)若A中至多有一个元素，求m的取值范围.

(2)若A中至少有一个元素，求m的取值范围.

解：(1)①当$m=0$时，

原方程为$-2x+3=0$，得$x=\dfrac{3}{2}$，符合题意.

②当$m\neq 0$时，方程$mx^2-2x+3=0$为一元二次方程.由题意得$\Delta=4-12m\leqslant 0$，解得$m\geqslant\dfrac{1}{3}$，即当$m\geqslant\dfrac{1}{3}$时，方程$mx^2-2x+3=0$无实数根或有两个相等的实数根，符合题意.

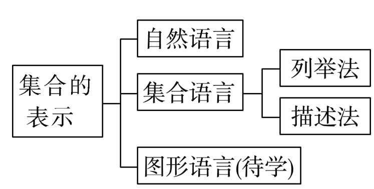
所以m的取值范围是$\left\{m\,\middle|\,m=0或m\geqslant\dfrac{1}{3}\right\}$.

(2)A中至少有一个元素，即A中有一个或两个元素.由(1)可知，当$m=0$或$m=\dfrac{1}{3}$时，A中有一个元素；当A中有两个元素时，$\Delta=4-12m>0$，即$m<\dfrac{1}{3}$且$m\neq 0$.所以A中至少有一个元素时，m的取值范围为$\left\{m\,\middle|\,m\leqslant\dfrac{1}{3}\right\}$.

【类题通法】

由集合的元素个数求参数的值(范围)时，要弄清用描述法表示的集合的代表元素及其特征；如果所给方程是一元二次方程的形式，要对二次项系数的取值进行分类讨论.

提质归纳



课后素养评价(二)

基础性·能力运用

1.集合 $A=\{x\in\mathbf{N}^*|x-5<0\}$中的元素个数是　(　　)

A.0　B.4　C.5　D.6

B　**解析**:$A=\{x\in\mathbf{N}^*|x-5<0\}=\{1,2,3,4\}$,故集合 A 中有 4 个元素.

2.集合 $A=\left\{x\in\mathbf{N}^*\left|\frac{6}{3-x}\in\mathbf{N}^*\right.\right\}$用列举法可以表示为　(　　)

A.$\{3,6\}$　B.$\{1,2\}$

C.$\{0,1,2\}$　D.$\{-2,-1,0,1,2\}$

B　**解析**:因为 $x\in\mathbf{N}^*$,$\frac{6}{3-x}\in\mathbf{N}^*$,所以 $A=\{1,2\}$.

3.定义集合运算:$A*B=\{z|z=xy,x\in A,y\in B\}$.设 $A=\{1,2\}$,$B=\{0,2\}$,则集合 $A*B$ 中所有元素之和为　(　　)

A.0　B.2

C.3　D.6

D　**解析**:因为 $A*B$ 中的元素是 A,B 中各任取一元素相乘所得结果,

所以只需把 A 中任意元素与 B 中任意元素相乘即可.

因为 $1\times0=0$,$1\times2=2$,$2\times0=0$,$2\times2=4$,所以 $A*B=\{0,2,4\}$.

所以,所有元素之和为 $0+2+4=6$.

4.(多选)由大于-3且小于 11 的偶数所组成的集合是　(　　)

A.$\{-2,0,2,4,6,8,10\}$

B.$\{x|-3<2x<11,x\in\mathbf{Z}\}$

C.$\{x|-3<x<11,x=2k,k\in\mathbf{N}\}$

D.$\{x|-3<x<11,x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$

AD　**解析**:选项 A 是用列举法表示大于-3且小于 11 的偶数所组成的集合;选项 B 表示的是所有大于$-\frac{3}{2}$且小于$\frac{11}{2}$的整数;选项 C 表示的集合中不含有-2这个偶数;选项 D 表示的是大于-3且小于 11 的偶数所组成的集合.

5.集合 $A=\left\{1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\frac{1}{9}\right\}$用描述法可表示为$\underline{\left\{x\left|x=\frac{1}{2n-1},n\in\mathbf{N}^*,n\leqslant5\right.\right\}}$.

6.求方程 $x^2-(a+1)x+a=0$ 的解组成的集合.

解:$x^2-(a+1)x+a=(x-a)(x-1)=0$,

所以方程的解为 $x=1$ 或 $x=a$.

若 $a=1$,则方程的解组成的集合为$\{1\}$;

若 $a\neq1$,则方程的解组成的集合为$\{1,a\}$.

综合性·创新提升

1.给出下列说法:

①在直角坐标平面内,第一、三象限内的点组成的集合为$\{(x,y)|xy>0\}$;

②所有奇数组成的集合为$\{x|x=2n+1\}$;

③集合$\{(x,y)|y=1-x\}$与$\{x|y=1-x\}$是同一集合.

其中正确的有　(　　)

A.1 个　B.2 个

C.3 个　D.4 个

A　**解析**:①正确;②不正确,应为$\{x|x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$;③不正确,$\{(x,y)|y=1-x\}$表示的是点集,而$\{x|y=1-x\}$表示的是数集.

2.(多选)已知集合 $A=\{x|x=2m-1,m\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{x|x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$,且 $x_1,x_2\in A$,$x_3\in B$,则　(　　)

A.$x_1x_2\in A$　B.$x_2x_3\in B$

C.$x_1+x_2\in B$　D.$x_1+x_2+x_3\in A$

ABC　**解析**:由题意易知集合 A 表示奇数集,集合 B 表示偶数集.又由 $x_1,x_2\in A$,$x_3\in B$,则 x_1,x_2 是奇数,x_3 是偶数.对于 A,两个奇数的积为奇数,即 $x_1x_2\in A$,故 A 正确;对于 B,一奇一偶两个数的积为偶数,即 $x_2x_3\in B$,故 B 正确;对于 C,两个奇数的和为偶数,即 $x_1+x_2\in B$,故 C 正确;对于 D,两个奇数与一个偶数的和为偶数,即 $x_1+x_2+x_3\in B$,故 D 错误.

3.方程组$\begin{cases}x+y=0,\\x^2+y^2=2\end{cases}$的解集是　　（　　）

A.$\{(1,-1),(-1,1)\}$

B.$\{(1,1),(-1,1)\}$

C.$\{(1,-1),(-1,-1)\}$

D.$\{1,-1\}$

A　**解析**：由 $x+y=0$，得 $x=-y$，代入 $x^2+y^2=2$，得 $2y^2=2$，解得 $y=\pm1$.

当 $y=1$ 时，$x=-1$；$y=-1$ 时，$x=1$.故方程组的解集是$\{(1,-1),(-1,1)\}$.

4.若 $A=\{2,3,4\}$，$B=\{x\mid x=n-m,m,n\in A,m\neq n\}$，则集合 B 中的元素为________.

$-2,-1,1,2$　**解析**：当 $n=2,m=3$ 时，$n-m=-1$；

当 $n=2,m=4$ 时，$n-m=-2$；

当 $n=3,m=2$ 时，$n-m=1$；

当 $n=3,m=4$ 时，$n-m=-1$；

当 $n=4,m=2$ 时，$n-m=2$；

当 $n=4,m=3$ 时，$n-m=1$.

所以集合 B 中的元素共 4 个，它们是 $-2,-1,1,2$.

5.已知集合 $A=\{x\mid ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R}\}$.

(1)若 A 中有且只有一个元素，求 a 的值；

(2)若 A 中至多有一个元素，求 a 的取值范围.

解：(1)由题意知，A 中有且只有一个元素，

即对应方程 $ax^2+2x+1=0$ 只有一个根或有两个相等的实根.

当 $a=0$ 时，对应方程为一次方程，此时 $A=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$，符合题意；

当 $a\neq0$ 时，对应方程 $ax^2+2x+1=0$ 有两个相等的实根，

即 $\Delta=4-4a=0$，得 $a=1$，符合题意.

综上所述，a 的值为 0 或 1.

(2)由(1)知，当 $a=0$ 或 1 时，A 中有且只有一个元素，符合题意；

当 $\Delta=4-4a<0$，即 $a>1$ 时，对应方程 $ax^2+2x+1=0$ 无实根，即 A 中无元素，符合题意.

综上所述，a 的取值范围为$\{a\mid a=0$ 或 $a\geqslant1\}$.

1.2　集合间的基本关系

学习任务目标

1.理解集合之间的包含与相等的含义，能识别给定集合的子集、真子集.

2.会判断给定集合间的关系，并会用符号和 Venn 图表示.

3.在具体情境中，了解空集的含义.

问题式预习

知识点一　子集与真子集

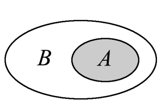
1.子集

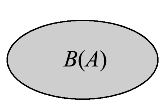
(1)定义：一般地，对于两个集合 A，B，如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素，就称集合 A 为集合 B 的子集.

(2)符号：$A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$）.

(3)读法：A 包含于 B（或 B 包含 A）.

(4)图示：



或


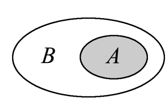
2.真子集

(1)定义：如果集合 $A\subseteq B$，但存在元素 $x\in B$，且 $x\notin A$，就称集合 A 是集合 B 的真子集.

(2)符号：$A\subsetneqq B$（或 $B\supsetneqq A$）.

(3)读法：A 真包含于 B（或 B 真包含 A）.

(4)图示：



知识点二　空集的概念

(1)定义：一般地，把不含任何元素的集合叫做空集.

(2)符号：$\varnothing$.

(3)规定：空集是任何集合的子集.

[微训练]

1.判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").

(1)空集中只有元素 0，无其他元素.　(×)

(2)任何一个集合都有子集.　(√)

(3)空集是任何集合的真子集.　(×)

2. 下列四个集合中，是空集的为 (　　)

A. $\{0\}$

B. $\{x\mid x>8$，且 $x<5\}$

C. $\{x\mid x^2-1=0\}$

D. $\{x\mid x>4\}$

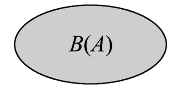
B　**解析**：满足 $x>8$ 且 $x<5$ 的实数不存在，故 $\{x\mid x>8$，且 $x<5\}=\varnothing$.

知识点三　集合相等

(1)定义：一般地，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素，那么集合 A 与集合 B 相等，记作 $\underline{A=B}$.

(2)符号：若 $A\subseteq B$ 且 $\underline{B\subseteq A}$，则 $A=B$.

(3)图示：



[微训练]

设 $a\in\mathbf{R}$，若集合 $\{2,9\}=\{1-a,9\}$，则 $a=$________.

-1　**解析**：由题意知 $1-a=2$，故 $a=-1$.

知识点四　集合间关系的性质

(1)任何一个集合都是它本身的子集，即 $A\underline{\subseteq}A$.

(2)对于集合 A,B,C，

①若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq C$，则 $A\underline{\subseteq}C$；

②若 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，则 $A\subsetneqq C$.

(3)若 $A\subseteq B$，$A\neq B$，则 $A\subsetneqq B$.

任务型课堂

任务一　集合间关系的判断

1. 下列各个关系式中，正确的是 (　　)

A. $\varnothing=\{0\}$　　B. $\sqrt{2}\in\mathbf{Q}$

C. $\{3,5\}\neq\{5,3\}$　　D. $\{1\}\subseteq\{x\mid x^2=x\}$

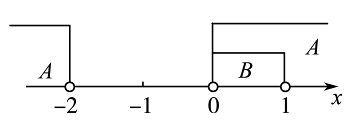
D　**解析**：因为 $\varnothing\subseteq\{0\}$，$\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$，$\{3,5\}=\{5,3\}$，所以 A，B，C 错误.因为 $\{x\mid x^2=x\}=\{0,1\}$，所以 $\{1\}\subseteq\{x\mid x^2=x\}$.

2. 已知集合 $A=\{x\mid x<-2$，或 $x>0\}$，$B=\{x\mid 0<x<1\}$，则 (　　)

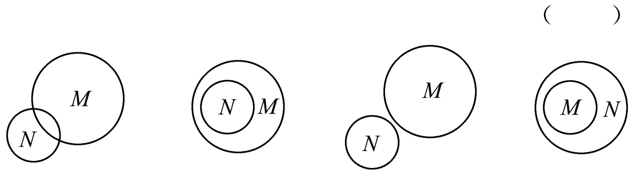
A. $A=B$　　B. $A\subsetneqq B$

C. $B\subsetneqq A$　　D. $A\subseteq B$

C　**解析**：由数轴知 $B\subsetneqq A$.



3. 能正确表示集合 $M=\{x\in\mathbf{R}\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$ 和集合 $N=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-x=0\}$ 之间的关系的 Venn 图是 (　　)



A　　B　　C　　D

B　**解析**：解 $x^2-x=0$ 得 $x=1$ 或 $x=0$.故 $N=\{0,1\}$.易得 $N\subsetneqq M$，其对应的 Venn 图如选项 B 所示.

【类题通法】

判断集合间关系的方法

(1)观察法：将集合的元素一一列举，然后观察.

(2)元素特征法：首先确定集合的元素是什么，弄清集合中元素的特征，再利用集合中元素的特征判断集合间的关系.

(3)数形结合法：利用数轴或 Venn 图判断.

任务二　确定集合的子集、真子集

[探究活动]

探究 1：集合 A 是集合 B 的真子集，则集合 A 中的元素与集合 B 有何关系？集合 B 中的元素与集合 A 又有何关系？

提示：集合 A 中的元素都在集合 B 中；集合 B 中的元素涵盖集合 A 的元素且至少要比集合 A 的元素多一个.

探究 2：若集合 A 中含有两个元素，则集合 A 的子集有多少个？

提示：设集合 $A=\{a,b\}$，则集合 A 的子集有 $\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{a,b\}$，共 4 个.

[评价活动]

1. 若 $A=\{1,4,x\}$，$B=\{1,x^2\}$，且 $B\subseteq A$，则 $x=$ (　　)

A. ±2　　B. ±2 或 0

C. ±2 或 1 或 0　　D. ±2 或 ±1 或 0

B　**解析**：因为 $B\subseteq A$，所以 $x^2=4$ 或 $x^2=x$，所以 $x=\pm2$ 或 1 或 0.根据集合中元素的互异性，得 $x=\pm2$ 或 0.

2. 已知集合 $A=\{-1,0,1\}$，则含有元素 0 的集合 A 的子集的个数为 (　　)

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

B　**解析**：根据题意，含有元素 0 的集合 A 的子集为 $\{0\}$，$\{0,1\}$，$\{0,-1\}$，$\{-1,0,1\}$，共 4 个.

3. 集合 $A=\{x\mid 0\leqslant x<3,x\in\mathbf{N}\}$ 的真子集的个数是 (　　)

A. 16　　B. 8　　C. 7　　D. 4

C　**解析**：易知集合 $A=\{0,1,2\}$，含有 3 个元素，所以 A 的真子集有 $2^3-1=7$(个).

【类题通法】

集合的子集、真子集个数的判断

若集合 A 中有 $n(n\geqslant1)$ 个元素，则

(1)A 的子集有 2^n 个；

(2)A 的非空子集有 (2^n-1) 个；

(3)A 的非空真子集有 (2^n-2) 个.

注意：①写集合的子集时勿漏掉空集和它自身；②一个非空集合的真子集是除了它自身的所有子集.

任务三　由集合间关系确定参数的值

1. 已知集合 $A=\{x\mid-3\leqslant x\leqslant4\}$，$B=\{x\mid1<x<m\ (m>1)\}$，且 $B\subseteq A$，则实数 m 的取值范围是$\underline{\{m\mid1<m\leqslant4\}}$.

2. 已知集合 $A=\{1,3,x^2\}$，$B=\{1,x+2\}$，是否存在实数 x，使得集合 B 是 A 的子集？若存在，求出 A，B；若不存在，请说明理由.

解：因为 $B\subseteq A$，所以 $x+2=3$ 或 $x+2=x^2$，得 $x=1$ 或 $x=-1$ 或 $x=2$.

当 $x=1$ 时，$A=\{1,3,1\}$，不满足互异性，所以 $x\neq1$.

当 $x=2$ 时，$A=\{1,3,4\}$，$B=\{1,4\}$，满足 $B\subseteq A$.

当 $x=-1$ 时，$A=\{1,3,1\}$，不满足互异性，所以 $x\neq-1$.

综上，存在 $x=2$ 使得 $B\subseteq A$.

此时，$A=\{1,3,4\}$，$B=\{1,4\}$.

3. 已知集合 $A=\{x\mid a-1<x<2a+1\}$，$B=\{x\mid0<x<4\}$.若 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

解：由题意 $A\subseteq B$，可知当 $A=\varnothing$ 时，满足题意，可得 $a-1\geqslant2a+1$，解得 $a\leqslant-2$；

当 $A\neq\varnothing$ 时，要使 $A\subseteq B$，则 $\begin{cases}a-1<2a+1,\\a-1\geqslant0,\\2a+1\leqslant4,\end{cases}$ 解得 $1\leqslant a\leqslant\dfrac{3}{2}$.

综上可知，当 $A\subseteq B$ 时，实数 a 的取值范围是 $\left\{a\,\middle|\,a\leqslant-2，或\ 1\leqslant a\leqslant\dfrac{3}{2}\right\}$.

【类题通法】

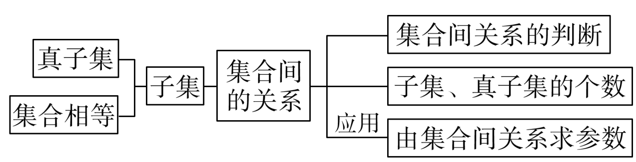
由集合间的关系确定参数的值的注意事项

(1)弄清“谁是谁的(真)子集”；

(2)注意对含参集合是否为空集的讨论；

(3)不忘验证端点值.

提质归纳



课后素养评价（三）

基础性·能力运用

1. 集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid1\leqslant x<4\}$ 的真子集的个数是 (　　)

A.16　　B.8　　C.7　　D.4

C　**解析**：因为 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid1\leqslant x<4\}=\{1,2,3\}$ 含有 3 个元素，

所以 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid1\leqslant x<4\}$ 的真子集为 $\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，共 7 个.

2. 已知集合 $B=\{2,3,4,5\}$，$C=\{-2,-1,4,5\}$，非空集合 A 满足：$A\subseteq B$，$A\subseteq C$，则符合条件的集合 A 的个数为 (　　)

A.3　　B.4　　C.7　　D.8

A　**解析**：由题意知集合 $B=\{2,3,4,5\}$，$C=\{-2,-1,4,5\}$.因为非空集合 A 满足 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$，所以 $A=\{4\}$，$\{5\}$，$\{4,5\}$.所以符合条件的集合 A 的个数为 3.

3. (多选)已知集合 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{a,2\}$，若 $B\subseteq A$，则 a 的值可以是 (　　)

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

AB　**解析**：因为集合 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{a,2\}$，且 $B\subseteq A$，则 $a=0$ 或 $a=1$.

4. 在数学漫长的发展过程中，数学家发现在数学中存在着神秘的“黑洞”现象.数字黑洞现象：无论怎样设值，在规定的处理法则下，最终都将得到一个固定的值.定义：若一个 n 位正整数的所有数位上数字的 n 次方的和等于这个数本身，则称这个数是自恋数.已知所有一位正整数中的自恋数组成集合 A，集合

$B=\{x|-3<x<4,x\in\mathbf{Z}\}$,则 $A\cap B$ 的子集个数为 ( )

A.3 B.4

C.7 D.8

D **解析**:依题意,$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,$B=\{-2,-1,0,1,2,3\}$,

故 $A\cap B=\{1,2,3\}$,故 $A\cap B$ 的子集个数为 8.

5.设集合 $A=\{x,y\}$,$B=\{0,x^2\}$.若 $A=B$,则 $2x+y=$________.

2 **解析**:由已知得 $\begin{cases}x=x^2,\\y=0,\\x\neq0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=0.\end{cases}$ 符合题意.

所以 $2x+y=2$.

6.已知集合 $A=\{x|1\leqslant x\leqslant2\}$,$B=\{x|1\leqslant x\leqslant a,a\geqslant1\}$.

(1)若 $A\subsetneqq B$,求 a 的取值范围;

(2)若 $B\subseteq A$,求 a 的取值范围.

解:(1)若 $A\subsetneqq B$,则集合 A 中的元素都在集合 B 中,且 B 中有不在 A 中的元素,所以 $a>2$,即 a 的取值范围是 $\{a|a>2\}$.

(2)若 $B\subseteq A$,则集合 B 中的元素都在集合 A 中,所以 $a\leqslant2$.因为 $a\geqslant1$,所以 $1\leqslant a\leqslant2$,即 a 的取值范围是 $\{a|1\leqslant a\leqslant2\}$.

综合性·创新提升

1.(多选)已知集合 $B=\{1,2\}$,$A\subsetneqq B$,则集合 A 可以为 ( )

A.$\varnothing$ B.$\{1\}$

C.$\{2\}$ D.$\{1,2\}$

ABC **解析**:因为 $A\subsetneqq B$,所以集合 A 是集合 B 的真子集,可以是 $\varnothing$,$\{1\}$,$\{2\}$.故选 ABC.

2.已知集合 $A=\{0,2\}$,$B=\{x|ax+2=0\}$,若 $B\subseteq A$,则实数 $a=$ ( )

A.-1 B.1

C.0 或 -1 D.0 或 1

C **解析**:因为 $A=\{0,2\}$,$B=\{x|ax+2=0\}$,又 $B\subseteq A$,

所以 $B=\varnothing$ 或 $B=\{2\}$ 或 $B=\{0\}$.

当 $B=\varnothing$ 时,关于 x 的方程 $ax+2=0$ 无解,所以 $a=0$;

当 $B=\{2\}$ 时,$x=2$ 是方程 $ax+2=0$ 的根,所以 $2a+2=0$,所以 $a=-1$;

当 $B=\{0\}$ 时,$x=0$ 是方程 $ax+2=0$ 的根,不存在这样的实数 a.

综上可得 $a=0$ 或 -1.

3. 已知集合 $M=\left\{y\,\middle|\,y=\dfrac{2x+1}{3},x\in\mathbf{Z}\right\}$,$N=\left\{y\,\middle|\,y=\dfrac{2}{3}x-1,x\in\mathbf{Z}\right\}$,则集合 M,N 的关系是 ( )

A.$M=N$ B.$M\subseteq N$

C.$M\supseteq N$ D.$M\cap N=\varnothing$

A **解析**:因为集合 $M=\left\{y\,\middle|\,y=\dfrac{2x+1}{3},x\in\mathbf{Z}\right\}$,集合 $N=\left\{y\,\middle|\,y=\dfrac{2}{3}x-1,x\in\mathbf{Z}\right\}=\left\{y\,\middle|\,y=\dfrac{2x-3}{3}=\dfrac{2(x-2)+1}{3},x\in\mathbf{Z}\right\}$,即 $M=N$.

4.设 $x,y\in\mathbf{R}$,$A=\{(x,y)|y=x\}$,$B=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{x}{y}=1\right\}$,则 A,B 的关系是______.

$B\subsetneqq A$ **解析**:因为 $B=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{x}{y}=1\right\}=\{(x,y)|y=x$,且 $y\neq0\}$,所以 $B\subsetneqq A$.

5.设 $a,b\in\mathbf{R}$,集合 $A=\{1,a\}$,$B=\{x|x(x-a)\cdot(x-b)=0\}$.若 $A=B$,则 $a=$________,$b=$________.

0 1 **解析**:$A=\{1,a\}$,解方程 $x(x-a)(x-b)=0$,得 $x=0$ 或 a 或 b.若 $A=B$,则 $a=0$,$b=1$.

6.设 $A=\{x|x^2-8x+15=0\}$,$B=\{x|ax-1=0\}$.

(1)若 $a=\dfrac{1}{5}$,试判断集合 A 与 B 的关系;

(2)若 $B\subseteq A$,求实数 a 的所有可能的值组成的集合 C.

解:(1)$A=\{x|x^2-8x+15=0\}=\{5,3\}$.

当 $a=\dfrac{1}{5}$ 时,$B=\{5\}$,所以 $B\subsetneqq A$.

(2)当 $a=0$ 时,$B=\varnothing$;

当 $a\neq0$ 时,$B=\left\{\dfrac{1}{a}\right\}$.

又 $A=\{3,5\}$,$B\subseteq A$,所以 $\dfrac{1}{a}=3$ 或 5,则有 $a=\dfrac{1}{3}$ 或 $a=\dfrac{1}{5}$.所以 $C=\left\{0,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{5}\right\}$.

1.3　集合的基本运算

第1课时　并集与交集

学习任务目标

1. 理解两个集合的并集和交集的含义.
2. 掌握有关的术语和符号，并会用它们正确地进行集合间的并集、交集运算.
3. 能用Venn图表示两个集合的并集和交集.

问题式预习

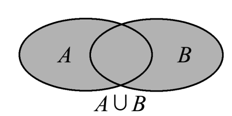
知识点一　并集

(1)概念：

自然语言：一般地，由所有属于集合A或属于集合B的元素组成的集合，称为集合A与B的并集，记作$A\cup B$(读作“<u>A并B</u>”)

符号语言：$A\cup B=$<u>$\{x|x\in A,或x\in B\}$</u>

图形语言：



(2)性质：$A\cup A=$<u>A</u>，$A\cup\varnothing=$<u>A</u>.

［微训练］

1. 判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)若$A\cup B=A\cup C$，则$B=C$.　　(×)

(2)若A,B中分别有3个元素，则$A\cup B$中必有6个元素.　　(×)

2. 已知集合$A=\{x|-1<x<1\}$，$B=\{x|0<x<2\}$，则$A\cup B=$　　(　　)

A. $\{x|0<x<1\}$　　B. $\{x|-1<x<0\}$

C. $\{x|-1<x<2\}$　　D. $\{x|1<x<2\}$

C　**解析**：集合$A=\{x|-1<x<1\}$，$B=\{x|0<x<2\}$，则$A\cup B=\{x|-1<x<2\}$.

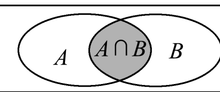
知识点二　交集

(1)概念：

自然语言：一般地，由所有属于集合A且属于集合B的元素组成的集合，称为集合A与B的交集，记作$A\cap B$(读作“<u>A交B</u>”)

符号语言：$A\cap B=$<u>$\{x|x\in A，且x\in B\}$</u>

图形语言：



(2)性质：$A\cap A=$<u>A</u>，$A\cap\varnothing=$<u>$\varnothing$</u>.

［微训练］

1. 判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)若$A\cap B=\varnothing$，则A,B均为空集.　　(×)

(2)若$x\in(A\cap B)$，则$x\in(A\cup B)$.　　(√)

2. 设集合$M=\{1,2,4,8\}$，$N=\{x|x$是2的倍数$\}$，则$M\cap N=$　　(　　)

A. $\{2,4\}$　　B. $\{2,4,8\}$

C. $\{1,2,4\}$　　D. $\{1,2,4,8\}$

B　**解析**：由题知$M\cap N=\{2,4,8\}$.

任务型课堂

任务一　并集的运算

1. (2022·浙江)设集合$A=\{1,2\}$，$B=\{2,4,6\}$，则$A\cup B=$　　(　　)

A. $\{2\}$　　B. $\{1,2\}$

C. $\{2,4,6\}$　　D. $\{1,2,4,6\}$

D　**解析**：$A\cup B=\{1,2,4,6\}$.

2. 设集合$A=\{x\in \mathbf{N}^*|-1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{2,3\}$，则$A\cup B=$　　(　　)

A. $\{-1,0,1,2,3\}$

B. $\{1,2,3\}$

C. $\{-1,2\}$

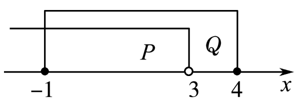
D. $\{-1,3\}$

B　**解析**：集合$A=\{1,2\}$，$B=\{2,3\}$，则$A\cup B=\{1,2,3\}$.

3. 已知集合$P=\{x|x<3\}$，$Q=\{x|-1\leqslant x\leqslant 4\}$，那么$P\cup Q=$　　(　　)

A.$\{x|-1\leqslant x<3\}$
B.$\{x|-1\leqslant x\leqslant 4\}$
C.$\{x|x\leqslant 4\}$
D.$\{x|x\geqslant -1\}$

C　**解析**:在数轴上表示两个集合,如图.



所以 $P\cup Q=\{x|x\leqslant 4\}$.故选 C.

【类题通法】

求集合并集的方法

(1)定义法:若集合是用列举法表示的,可以直接利用并集的定义求解.

(2)数形结合法:若集合是用描述法表示的由实数组成的数集,则可以借助数轴分析求解.

任务二　交集的运算

1.设 $A=\{x|x$ 是矩形$\}$,$B=\{x|x$ 是菱形$\}$,则 $A\cap B=$　(　　)

A.$\{x|x$ 是四边形$\}$
B.$\{x|x$ 是平行四边形$\}$
C.$\{x|x$ 是正方形$\}$
D.$\{x|x$ 是梯形$\}$

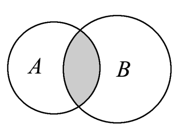
C　**解析**:由题意,$A\cap B=\{x|x$ 既是矩形又是菱形$\}=\{x|x$ 是正方形$\}$.

2.设集合 $A=\{x|x^2+x=0\}$,$B=\{x|x^2-x=0\}$,则 $A\cap B=$　(　　)

A.0　　B.$\{0\}$
C.$\varnothing$　　D.$\{-1,0,1\}$

B　**解析**:因为 $A=\{x|x^2+x=0\}=\{-1,0\}$,$B=\{x|x^2-x=0\}=\{0,1\}$,所以 $A\cap B=\{0\}$.

3.已知集合 $A=\{x|-2<x\leqslant 3\}$,$B=\{-2,0,2,4\}$,则图中阴影部分所表示的集合是　(　　)



A.$\{-2,0,2,4\}$　　B.$\{0,2,4\}$
C.$\{0,2\}$　　D.$\{0,1,2,3\}$

C　**解析**:题图中阴影部分所表示的集合是 $A\cap B$,又 $A\cap B=\{0,2\}$.故选 C.

4.设集合 $A=\{x|0<x<4,x\in\mathbf{N}\}$,$B=\left\{x\middle|\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 5\right\}$,则 $A\cap B=$　(　　)

A.$\left\{x\middle|0<x\leqslant\frac{1}{3}\right\}$　　B.$\left\{x\middle|\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 4\right\}$
C.$\{1,2,3\}$　　D.$\{x|0<x\leqslant 5\}$

C　**解析**:因集合 $A=\{x|0<x<4,x\in\mathbf{N}\}$,则 $A=\{1,2,3\}$.又 $B=\left\{x\middle|\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 5\right\}$,所以 $A\cap B=\{1,2,3\}$.

【类题通法】

求集合交集的方法

(1)对于两个元素个数有限的集合,求交集时逐个挑出两个集合的公共元素即可.

(2)对于两个不等式的解集,求交集时一般借助数轴,两个集合的交集用两个集合在数轴上所对应部分的公共区域表示,要注意端点值的取舍.

(3)对于用描述法表示的文字叙述型的集合,求交集(或并集)只需将涉及元素用“且”(“或”)连起来即可,要注意文字语言的提炼与简化.

任务三　集合交集、并集性质的应用

[探究活动]

探究 1:设 A,B 是两个集合,若 $A\cap B=A$,$A\cup B=B$,则集合 A 与 B 具有什么关系?

提示:$A\cap B=A\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$.

探究 2:若 $A\cap B=A\cup B$,则集合 A,B 间存在怎样的关系?

提示:若 $A\cap B=A\cup B$,则 $A=B$.

[评价活动]

1.已知集合 $A=\{x|1\leqslant x<5\}$,$B=\{x|-a<x\leqslant a+3\}$.若 $A\cap B=B$,则 a 的值范围为　(　　)

A.$\left\{a\middle|-\frac{3}{2}<a\leqslant 1\right\}$　　B.$\left\{a\middle|a\leqslant\frac{3}{2}\right\}$
C.$\{a|a\leqslant -1\}$　　D.$\left\{a\middle|a>\frac{3}{2}\right\}$

C　**解析**:$A\cap B=B\Leftrightarrow B\subseteq A$.当 $B=\varnothing$ 时,$a+3\leqslant -a$,即 $a\leqslant-\frac{3}{2}$,符合题意;

当 $B\neq\varnothing$ 时,$\begin{cases}a+3>-a,\\-a\geqslant 1,\\a+3<5,\end{cases}$ 解得 $-\frac{3}{2}<a\leqslant -1$,所以 a 的值范围为 $\{a|a\leqslant -1\}$.

2.已知集合 $A=\{x|x^2-x-2=0\}$,$B=\{x|ax=1\}$.若 $A\cup B=A$,则 $a=$　(　　)

A.$-\frac{1}{2}$或 1　　B.$\frac{1}{2}$或 1
C.$-\frac{1}{2}$或 1 或 0　　D.$\frac{1}{2}$或-1 或 0

D　**解析**:因为 $x^2-x-2=0$ 等价于 $(x-2)(x+1)=0$,解得 $x=2$ 或 $x=-1$,

所以 $A=\{x|x^2-x-2=0\}=\{-1,2\}$.

因为 $A\cup B=A$,所以 $B\subseteq A$,

当 $B=\varnothing$ 时,成立,此时 $a=0$;

当 $B\neq\varnothing$ 时，$a\neq0$，解 $ax=1$ 可得 $x=\dfrac{1}{a}$.

因为 $B\subseteq A$，所以$\dfrac{1}{a}=2$ 或$\dfrac{1}{a}=-1$，

解得 $a=\dfrac{1}{2}$或 $a=-1$.

综上，a 的值为$\dfrac{1}{2}$或-1 或 0.

3.已知集合 $A=\{x\mid -3<x\leqslant4\}$，集合 $B=\{x\mid k+1\leqslant x\leqslant 2k-1\}$，且 $A\cup B=A$，试求 k 的取值范围.

解：当 $B=\varnothing$，即 $k+1>2k-1$ 时，$k<2$，满足 $A\cup B=A$.

当 $B\neq\varnothing$ 时，要使 $A\cup B=A$，则 $B\subseteq A$，

只需$\begin{cases}k+1>-3,\\2k-1\leqslant4,\\k+1\leqslant2k-1,\end{cases}$ 解得 $2\leqslant k\leqslant\dfrac{5}{2}$.

综上可知 k 的取值范围为$\left\{k\,\middle|\,k\leqslant\dfrac{5}{2}\right\}$.

【类题通法】

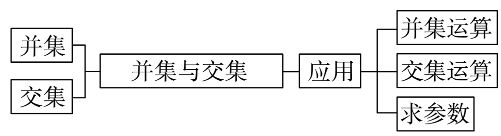
利用集合交集、并集的性质解题的技巧

(1)在进行集合运算时，若条件中出现 $A\cap B=A$ 或 $A\cup B=B$，应转化为 $A\subseteq B$，然后用集合间的关系解决问题，并注意 $A=\varnothing$ 的情况.

(2)集合运算常用的性质：

①$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$；②$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$；③$A\cap B=A\cup B\Leftrightarrow A=B$.

提质归纳



课后素养评价（四）

基础性·能力运用

1.已知集合 $A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{x\mid 0<x<6,x\in\mathbf{Z}\}$，则 $A\cup B=$ (　　)

A.$\{1,4\}$　　B.$\{1,2,7\}$

C.$\{1,3,5\}$　　D.$\{1,2,3,4,5,7\}$

D　**解析**：因为 $A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{x\mid 0<x<6,x\in\mathbf{Z}\}=\{1,2,3,4,5\}$，

所以 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,7\}$.

2.已知集合 $A=\{x\mid -2<x\leqslant1\}$，$B=\{x\mid 0<x\leqslant a\}$，若 $A\cup B=\{x\mid -2<x\leqslant3\}$，$A\cap B=$ (　　)

A.$\{x\mid -2<x<0\}$　　B.$\{x\mid 0<x\leqslant1\}$

C.$\{x\mid 1<x\leqslant3\}$　　D.$\{x\mid -2<x\leqslant3\}$

B　**解析**：因为 $A=\{x\mid -2<x\leqslant1\}$，$B=\{x\mid 0<x\leqslant a\}$，$A\cup B=\{x\mid -2<x\leqslant3\}$，

所以 $a=3$，$B=\{x\mid 0<x\leqslant3\}$，所以 $A\cap B=\{x\mid 0<x\leqslant1\}$.

3.(多选)已知集合 $A=\{1,4,a\}$，$B=\{1,2,3\}$，若 $A\cup B=\{1,2,3,4\}$，则 a 的值可以是 (　　)

A.2　　B.3

C.4　　D.5

AB　**解析**：集合 $A=\{1,4,a\}$，$B=\{1,2,3\}$，$A\cup B=\{1,2,3,4\}$，

所以 a 的值可以是 2 或 3.

4.(多选)已知集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{x\mid mx-1=0\}$.若 $A\cap B=B$，则实数 m 的值可能为 (　　)

A.0　　B.1

C.$\dfrac{1}{2}$　　D.$-\dfrac{1}{2}$

ABC　**解析**：当 $m=0$ 时，$B=\varnothing$，所以 $A\cap B=B$；当 $m\neq0$ 时，$x=\dfrac{1}{m}$，要使 $A\cap B=B$，则$\dfrac{1}{m}=1$ 或$\dfrac{1}{m}=2$，即 $m=1$ 或 $m=\dfrac{1}{2}$.

5.设集合 $A=\{(x,y)\mid y=ax+1\}$，$B=\{(x,y)\mid y=x+b\}$，且 $A\cap B=\{(2,5)\}$，则 $a=$________，$b=$________.

2　3　**解析**：因为 $A\cap B=\{(2,5)\}$，所以$\begin{cases}5=2a+1,\\5=2+b,\end{cases}$解得$a=2$，$b=3$.

6.已知集合 $A=\{x\mid -2<x<4\}$，$B=\{x\mid x-m<0\}$.

(1)若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 m 的取值范围；

(2)若 $A\cup B=B$，求实数 m 的取值范围.

解：(1)因为 $A=\{x\mid -2<x<4\}$，$B=\{x\mid x<m\}$，$A\cap B=\varnothing$，所以 $m\leqslant-2$.

故实数 m 的取值范围为$\{m\mid m\leqslant-2\}$.

(2)因为 $A\cup B=B$，所以 $A\subseteq B$.又因为 $A=\{x\mid -2<x<4\}$，$B=\{x\mid x<m\}$，所以 $m\geqslant4$.

故实数 m 的取值范围为$\{m\mid m\geqslant4\}$.

综合性·创新提升

1.(多选)已知集合 $A=\{x|x^2-x=0\}$,集合 B 中有两个元素,且满足 $A\cup B=\{0,1,2\}$,则集合 B 可以是　(　　)

A.$\{0,1\}$　　B.$\{0,2\}$

C.$\{0,3\}$　　D.$\{1,2\}$

BD　**解析**:因为 $A=\{0,1\}$,且满足 $A\cup B=\{0,1,2\}$,

所以集合 B 中必有元素 2.又集合 B 有两个元素,所以集合 B 可以是 $\{0,2\}$ 或 $\{1,2\}$.

2.(多选)已知集合 $A=\{1,2,3\}$,集合 $B=\{x-y|x\in A,y\in A\}$,则　(　　)

A.$A\cap B=\{1,2\}$

B.$A\cup B=\{-1,0,1,2,3\}$

C.$0\in B$

D.$-1\in B$

ACD　**解析**:因为 $A=\{1,2,3\}$,集合 $B=\{x-y|x\in A,y\in A\}$,所以 $B=\{-2,-1,0,1,2\}$,所以 $A\cap B=\{1,2\}$,所以 $A\cup B=\{-2,-1,0,1,2,3\}$,$0\in B$,$-1\in B$,所以 A,C,D 选项正确.

3.中国古代重要的数学著作《孙子算经》中有题:"今有物,不知其数.三三数之,剩二;五五数之,剩三;七七数之,剩二.问:物几何?"现有如下表示:已知 $A=\{x|x=3n+2,n\in \mathbf{N}^*\}$,$B=\{x|x=5n+3,n\in \mathbf{N}^*\}$,$C=\{x|x=7n+2,n\in \mathbf{N}^*\}$.若 $x\in A\cap B\cap C$,则 x 的值是多少?符合题意的整数 x 的值可以为　(　　)

A.8　　B.127　　C.37　　D.23

D　**解析**:因为 $8=7\times1+1$,则 $8\notin C$,选项 A 不合题意.

$127=3\times42+1$,则 $127\notin A$,选项 B 不合题意.

$37=3\times12+1$,则 $37\notin A$,选项 C 不合题意.

$23=3\times7+2$,故 $23\in A$;$23=5\times4+3$,故 $x\in B$;$23=7\times3+2$,故 $x\in C$,则 $23\in A\cap B\cap C$,选项 D 符合题意.故选 D.

4.已知集合 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{y|y=2x-1,x\in A\}$,则 $A\cap B=$________.

$\{1,3\}$　**解析**:$A\cap B=\{1,2,3\}\cap\{y|y=2x-1,x\in A\}=\{1,2,3\}\cap\{1,3,5\}=\{1,3\}$.

5.已知集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 7\}$,$B=\{x|m+1<x<2m-1\}$,则使 $A\cup B=A$ 的实数 m 的取值范围是 $\{m|m\leqslant 4\}$.

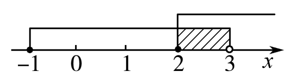
6.设集合 $A=\{x|-1\leqslant x<3\}$,$B=\{x|2x-4\geqslant x-2\}$.

(1)求 $A\cap B$;

(2)若集合 $C=\{x|2x+a>0\}$,满足 $B\cup C=C$,求实数 a 的取值范围.

解:(1)由题意,得 $B=\{x|x\geqslant 2\}$.

又 $A=\{x|-1\leqslant x<3\}$,如图.



所以 $A\cap B=\{x|2\leqslant x<3\}$.

(2)由题意,得 $C=\left\{x\,\middle|\,x>-\dfrac{a}{2}\right\}$.

又 $B\cup C=C$,故 $B\subseteq C$.所以 $-\dfrac{a}{2}<2$,

即 $a>-4$.

所以实数 a 的取值范围为 $\{a|a>-4\}$.

第 2 课时　补集及综合应用

学习任务目标

1.了解全集的含义及符号表示.

2.理解给定集合中一个子集的补集的含义,并会求给定集合的补集.

3.会用 Venn 图、数轴进行集合的运算.

问题式预习

知识点一　全集

(1)定义

一般地,如果一个集合含有所研究问题中涉及的所有元素,那么就称这个集合为全集.

(2)记法

全集通常记作 U.

知识点二　补集

(1)自然语言

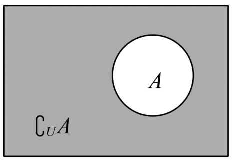
对于一个集合 A,由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集,

简称为集合 A 的<u>补集</u>,记作<u>$\complement_U A$</u>.

(2)符号语言

$\complement_U A=\{x|x\in U$,且 $x\notin A\}$.

(3)图形语言



[微训练]

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)一个集合的补集中至少含有一个元素.　(×)

(2)研究集合 A 的补集时,A 必须是全集 U 的子集.　(√)

(3)一个集合的补集的补集是其自身.　(√)

2.设集合 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$,$M=\{1,2,4\}$,则 $\complement_U M=$　(　　)

A.U

B.$\{1,3,5\}$

C.$\{3,5,6\}$

D.$\{2,4,6\}$

C　**解析**:因为 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$,$M=\{1,2,4\}$,所以 $\complement_U M=\{3,5,6\}$.

任务型课堂

任务一　补集的概念与运算

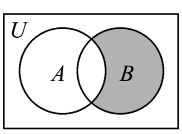
1.(2022·全国乙卷(理))设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$,集合 M 满足 $\complement_U M=\{1,3\}$,则　(　　)

A.$2\in M$　　B.$3\in M$

C.$4\notin M$　　D.$5\notin M$

A　**解析**:由题知 $M=\{2,4,5\}$,对比选项知,A 正确,BCD 错误.

2.下图中矩形表示集合 U,A,B 是 U 的两个子集,则下列集合不能用阴影部分表示的是　(　　)



A.$(\complement_U A)\cap B$　　B.$\complement_B(A\cap B)$

C.$\complement_U[A\cap(\complement_U B)]$　　D.$\complement_{(A\cup B)}A$

C　**解析**:由题图知当 U 为全集时,阴影部分表示集合 A 的补集与集合 B 的交集,即$(\complement_U A)\cap B$;当 B 为全集时,阴影部分表示 $A\cap B$ 的补集,即 $\complement_B(A\cap B)$;当 $A\cup B$ 为全集时,阴影部分表示 A 的补集,即 $\complement_{(A\cup B)}A$.

3.已知全集为 U,集合 $A=\{0,1,3,5,7\}$,$\complement_U A=\{2,4,6\}$,$\complement_U B=\{0,1,4,6,7\}$,则集合$B=$________.

$\{2,3,5\}$　**解析**:因为 $A=\{0,1,3,5,7\}$,$\complement_U A=\{2,4,6\}$,所以 $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.又 $\complement_U B=\{0,1,4,6,7\}$,所以 $B=\{2,3,5\}$.

【类题通法】

补集运算的原则与方法

(1)原则:从全集 U 中去掉属于集合 A 的元素后,由所有剩下的元素组成的集合即为 A 的补集 $\complement_U A$.

(2)方法:①若所给的集合是有关不等式的集合,常借助数轴求解;②若所给的集合是用列举法表示的,则可用 Venn 图求解.

任务二　集合的综合运算

1.已知全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x|x\leqslant 0\}$,$B=\{x|x\geqslant 1\}$,则集合 $\complement_U(A\cup B)=$　(　　)

A.$\{x|x\geqslant 0\}$　　B.$\{x|x\leqslant 1\}$

C.$\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$　　D.$\{x|0<x<1\}$

D　**解析**:由题意可知,$A\cup B=\{x|x\leqslant 0$,或 $x\geqslant 1\}$,所以 $\complement_U(A\cup B)=\{x|0<x<1\}$.

2.(2022·天津)设全集 $U=\{-2,-1,0,1,2\}$,集合 $A=\{0,1,2\}$,$B=\{-1,2\}$,则 $A\cap(\complement_U B)=$(　　)

A.$\{0,1\}$　　B.$\{0,1,2\}$

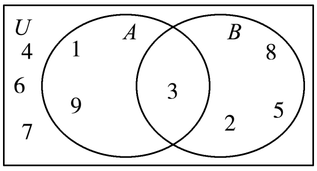
C.$\{-1,1,2\}$　　D.$\{0,-1,1,2\}$

A　**解析**:$\complement_U B=\{-2,0,1\}$,故 $A\cap(\complement_U B)=\{0,1\}$.

3.全集 $U=\{x|x<10,x\in\mathbf{N}^*\}$,$A\subseteq U$,$B\subseteq U$,$(\complement_U B)\cap A=\{1,9\}$,$A\cap B=\{3\}$,$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{4,6,7\}$,求集合 A,B.

解:(方法一:Venn 图法)根据题意作出 Venn 图如

图所示.



由图可知 $A=\{1,3,9\}$,$B=\{2,3,5,8\}$.

(方法二:定义法)因为$(\complement_U B)\cap A=\{1,9\}$,

$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{4,6,7\}$,所以 $\complement_U B=\{1,4,6,7,9\}$.

又 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,所以 $B=\{2,3,5,8\}$.

因为$(\complement_U B)\cap A=\{1,9\}$,$A\cap B=\{3\}$,

所以 $A=\{1,3,9\}$.

【类题通法】

解决集合交、并、补运算的技巧

(1)若所给集合是有限集,则先把集合中的元素一一列举出来,然后结合交集、并集、补集的定义来求解.在解答过程中常常借助于 Venn 图.这样处理起来,相对来说比较直观、形象,且不易出错.

(2)若所给集合是无限集,则常借助数轴,把已知集合分别表示在数轴上,然后进行交集、并集、补集的运算.解答过程中要注意边界问题.

任务三 与补集相关的参数问题

[探究活动]

探究 1:设集合 $A=\{x\mid x+m\geqslant 0\}$,$B=\{x\mid -2<x<4\}$,全集 $U=\mathbf{R}$,且$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$,求实数 m 的取值范围.

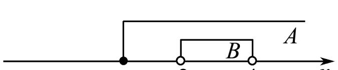
提示:(方法一:直接法)由 $A=\{x\mid x+m\geqslant 0\}=\{x\mid x\geqslant -m\}$,得 $\complement_U A=\{x\mid x<-m\}$.

因为 $B=\{x\mid -2<x<4\}$,$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$,

所以 $-m\leqslant -2$,即 $m\geqslant 2$,

所以 m 的取值范围是 $\{m\mid m\geqslant 2\}$.

(方法二:集合间的关系)由$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$可知 $B\subseteq A$.又 $B=\{x\mid -2<x<4\}$,$A=\{x\mid x+m\geqslant 0\}=\{x\mid x\geqslant -m\}$,结合数轴,得 $-m\leqslant -2$,即 $m\geqslant 2$.



所以 m 的取值范围是 $\{m\mid m\geqslant 2\}$.

探究 2:将探究 1 中的条件“$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$”改为“$(\complement_U A)\cap B=B$”,其他条件不变,求 m 的取值范围.

提示:由已知得 $A=\{x\mid x\geqslant -m\}$,所以 $\complement_U A=\{x\mid x<-m\}$.又$(\complement_U A)\cap B=B$,所以 $B\subseteq\complement_U A$,$-m\geqslant 4$,解得 $m\leqslant -4$.所以 m 的取值范围是 $\{m\mid m\leqslant -4\}$.

探究 3:将探究 1 中的条件“$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$”改为“$(\complement_U B)\cup A=\mathbf{R}$”,其他条件不变,求 m 的取值范围.

提示:由已知得 $A=\{x\mid x\geqslant -m\}$,$\complement_U B=\{x\mid x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 4\}$.又$(\complement_U B)\cup A=\mathbf{R}$,所以 $-m\leqslant -2$,解得 $m\geqslant 2$.所以 m 的取值范围是 $\{m\mid m\geqslant 2\}$.

[评价活动]

1. 已知 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$,$A=\{|2a-1|,2\}$,$\complement_U A=\{5\}$,则实数 $a=$________.

2　**解析**:由题意知,$a^2+2a-3=5$,解得 $a=-4$ 或 $a=2$.当 $a=-4$ 时,$|2a-1|=9$,

而 $9\notin U$,所以 $a=-4$ 不满足题意,舍去;

当 $a=2$ 时,$|2a-1|=3$,$3\in U$,满足题意.

故实数 a 的值为 2.

2. 设 $U=\{0,1,2,3\}$,$A=\{x\in U\mid x^2+mx=0\}$.若 $\complement_U A=\{1,2\}$,则实数 $m=$________.

-3　**解析**:因为 $\complement_U A=\{1,2\}$,所以 $A=\{0,3\}$.所以 $9+3m=0$,解得 $m=-3$.

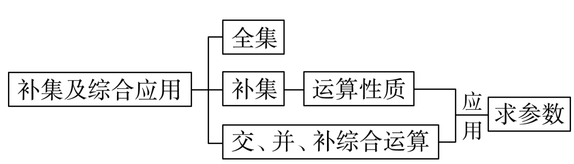
【类题通法】

利用补集求参数的注意点

(1)与集合的交、并、补运算有关的参数问题,一般利用数轴求解,涉及集合间关系时不要漏掉空集的情形;

(2)不等式中的等号在补集中能否取到,要引起重视,还要注意补集是全集的子集.

提质归纳



课后素养评价（五）

基础性·能力运用

1. 已知全集 $U=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$，集合 $A=\{x\mid -1<x\leqslant 0\}$，则 $\complement_U A=$　　（　　）

A. $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant -1$ 或 $0<x\leqslant 2\}$

B. $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant -1$ 或 $0\leqslant x\leqslant 2\}$

C. $\{x\mid -1\leqslant x<0\}$

D. $\{x\mid -1<x\leqslant 0\}$

A　**解析**：全集 $U=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$，集合 $A=\{x\mid -1<x\leqslant 0\}$，

则 $\complement_U A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant -1$ 或 $0<x\leqslant 2\}$.

2.（多选）已知集合 $M=\{-1,0,1\}$，$N=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$，则下列结论正确的是　　（　　）

A. $M\subseteq N$

B. $N\subseteq M$

C. $M\cup N=\{-1,0,1,2\}$

D. $M\cap(\complement_{\mathbf{R}}N)=\varnothing$

AD　**解析**：因为 $M=\{-1,0,1\}$，$N=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$，所以 $M\subseteq N$，所以 A 正确，B 错误；

因为 $M\cup N=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$，所以 C 错误；因为 $M\subseteq N$，所以 $M\cap(\complement_{\mathbf{R}}N)=\varnothing$，所以 D 正确.

3. 已知集合 $A=\{x\mid x<a\}$，$B=\{x\mid 1<x<2\}$，且 $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围为________.

$\{a\mid a\geqslant 2\}$　**解析**：由于 $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\mathbf{R}$，则 $B\subseteq A$，可知 $a\geqslant 2$.

4. 设全集为 $\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid 3\leqslant x<7\}$，$B=\{x\mid 2<x<10\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=$________，$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=$________.

$\{x\mid x\leqslant 2$ 或 $x\geqslant 10\}$　$\{x\mid 2<x<3$ 或 $7\leqslant x<10\}$

解析：由题意知，$A\cup B=\{x\mid 2<x<10\}$，

所以 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=\{x\mid x\leqslant 2$ 或 $x\geqslant 10\}$.

又 $\complement_{\mathbf{R}}A=\{x\mid x<3$ 或 $x\geqslant 7\}$，

所以 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{x\mid 2<x<3$ 或 $7\leqslant x<10\}$.

5. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x<1\}$，$B=\{x\mid x>m\}$. 若 $\complement_U A\subseteq B$，则实数 m 的取值范围是 $\underline{\{m\mid m<1\}}$.

6. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x-3\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid x<0$ 或 $x>2\}$，$C=\{x\mid m-2\leqslant x\leqslant m+2\}$.

(1) 求 $A\cap B$ 和 $\complement_{\mathbf{R}}B$；

(2) 若 $A\subseteq \complement_{\mathbf{R}}C$，求实数 m 的取值范围.

解：由题知 $A=\{x\mid x^2-2x-3\leqslant 0\}=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid x<0$ 或 $x>2\}$，

(1) $A\cap B=\{x\mid -1\leqslant x<0$ 或 $2<x\leqslant 3\}$，

$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$.

(2) 因为 $C=\{x\mid m-2\leqslant x\leqslant m+2\}$，

所以 $\complement_{\mathbf{R}}C=\{x\mid x<m-2$ 或 $x>m+2\}$.

因为 $A\subseteq \complement_{\mathbf{R}}C$，

所以 $m+2<-1$ 或 $m-2>3$，

解得 $m<-3$ 或 $m>5$.

所以实数 m 的取值范围是 $\{m\mid m<-3$ 或 $m>5\}$.

综合性·创新提升

1. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，若集合 M 满足 $\complement_U M=\{1,2\}$，则　　（　　）

A. $2\in M$　　B. $3\in M$

C. $4\notin M$　　D. $5\notin M$

B　**解析**：因为全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，又 $\complement_U M=\{1,2\}$，所以 $M=\{3,4,5\}$，故只有 B 正确.

2.（多选）已知集合 $A=\{x\mid -1<x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid |x|\leqslant 2\}$，则　　（　　）

A. $A\cap B=\varnothing$

B. $A\cup B=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$

C. $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x\mid x\leqslant -1$ 或 $x>2\}$

D. $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x\mid 2<x\leqslant 3\}$

BD　**解析**：因为 $A=\{x\mid -1<x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid |x|\leqslant 2\}=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$，

所以 $A\cap B=\{x\mid -1<x\leqslant 3\}\cap\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}=\{x\mid -1<x\leqslant 2\}$，故 A 不正确；

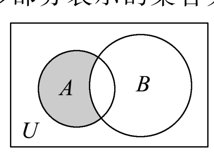
$A\cup B=\{x\mid -1<x\leqslant 3\}\cup\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$，故 B 正确；

因为 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid x<-2$ 或 $x>2\}$，

所以 $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x\mid -1<x\leqslant 3\}\cup\{x\mid x<-2$ 或 $x>2\}=\{x\mid x<-2$ 或 $x>-1\}$，故 C 不正确；

$A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x\mid -1<x\leqslant 3\}\cap\{x\mid x<-2$ 或 $x>2\}=\{x\mid 2<x\leqslant 3\}$，故 D 正确. 故选 BD.

3. 如图，全集 $U=\mathbf{N}$，集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{x\in\mathbf{N}\mid x>3\}$，则阴影部分表示的集合为　　（　　）



A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{0,4,5\}$

C. $\{1,2\}$　　D. $\{1,2,3\}$

D **解析**：由题中 Venn 图可知阴影部分表示的集合为$(\complement_U B)\cap A$，又$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{x\in\mathbf{N}|x>3\}$，

所以$\complement_U B=\{x|x\leqslant 3\}$，所以$(\complement_U B)\cap A=\{1,2,3\}$.

则题图阴影部分表示的集合为$\{1,2,3\}$.

4. 设全集U为实数集，集合$M=\{x|0<x<2\}$，$N=\{y|y=x^2\}$，则$(\complement_U M)\cap N=$________.

$\{x|x\geqslant 2$ 或 $x=0\}$ **解析**：$N=\{y|y=x^2\}=\{y|y\geqslant 0\}$，$\complement_U M=\{x|x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 2\}$，则$(\complement_U M)\cap N=\{x|x\geqslant 2$ 或 $x=0\}$.

5. 已知全集$U=\{x|1\leqslant x\leqslant 5\}$，集合$A=\{x|1\leqslant x<a\}$.若$\complement_U A=\{x|2\leqslant x\leqslant 5\}$，则$a=$2.

6. 设全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x|x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 5\}$，$B=\{x|x\leqslant 2\}$.

(1)求$\complement_U(A\cup B)$；

(2)记$\complement_U(A\cup B)=D$，$C=\{x|2a-3\leqslant x\leqslant -a\}$，且$C\cap D=C$，求$a$的取值范围.

解：(1)因为$A=\{x|x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 5\}$，$B=\{x|x\leqslant 2\}$，所以$A\cup B=\{x|x\leqslant 2$ 或 $x\geqslant 5\}$.

又全集$U=\mathbf{R}$，则$\complement_U(A\cup B)=\{x|2<x<5\}$.

(2)由(1)得$D=\{x|2<x<5\}$.

由$C\cap D=C$得$C\subseteq D$.

①当$C=\varnothing$时，有$-a<2a-3$，解得$a>1$；

②当$C\neq\varnothing$时，有$\begin{cases}2a-3\leqslant -a,\\2a-3>2,\\-a<5,\end{cases}$无解.

综上，a的取值范围为$\{a|a>1\}$.

1.4 充分条件与必要条件

1.4.1 充分条件与必要条件

学习任务目标

1. 理解充分条件、必要条件的概念，能进行充分条件、必要条件的判断.

2. 了解充分条件与判定定理、必要条件与性质定理的关系.

3. 能通过充分性、必要性解决简单的问题.

问题式预习

知识点一 充分条件与必要条件

一般地，已知命题“若p，则q”，有如下结论：

命题真假	真命题	假命题
推出关系	由p可以推出q	由p不能推出q
符号表示	$p\Rightarrow q$	$p\nRightarrow q$
条件关系	p是q的充分条件；q是p的必要条件	p不是q的充分条件；q不是p的必要条件

[微训练]

判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)“$x=3$”是“$x^2=9$”的必要条件. ( )

× **提示**：$x^2=9\nRightarrow x=3$.

(2)“$x>0$”是“$x>1$”的充分条件. ( )

× **提示**：$x>0\nRightarrow x>1$.

(3)若p是q的充分条件，则p是唯一的. ( )

× **提示**：不唯一.如$x>3$，$x>5$，$x>10$等都是$x>0$的充分条件.

知识点二 定理关系

(1)数学中的每一条判定定理都给出了相应结论成立的一个充分条件.

(2)数学中的每一条性质定理都给出了相应结论成立的一个必要条件.

[微训练]

“四边形的四条边相等”是“四边形是正方形”的 ( )

A.充分条件

B.必要条件

C.充分条件与必要条件

D.无法判断

B **解析**：因为正方形的四条边相等，但四条边相等的四边形不一定是正方形，所以“四边形的四条边相等”是“四边形是正方形”的必要条件.

任务型课堂

任务一　充分条件的判断

1.在平面内，下列是“四边形是矩形”的充分条件的是（　　）

A.四边形是平行四边形且对角线相等

B.四边形两组对边分别相等

C.四边形的对角线互相平分

D.四边形的对角线互相垂直

A　**解析**：若四边形是平行四边形且对角线相等，则四边形是矩形.故选A.

2.设 $x\in\mathbf{R}$，则 $x>3.14$ 的一个充分条件是（　　）

A.$x>3$　　B.$x<3$

C.$x>4$　　D.$x<4$

C　**解析**：因为 $4>3.14$，所以 $x>4$ 能推出 $x>3.14$.故选C.

3.若 $a\in\mathbf{R}$，则“$a=1$”是“$|a|=1$”的（　　）

A.充分条件

B.必要条件

C.充分条件与必要条件

D.无法判断

A　**解析**：当 $a=1$ 时，$|a|=1$ 成立.但当 $|a|=1$ 时，$a=\pm1$.所以 $a=1$ 不一定成立.

所以“$a=1$”是“$|a|=1$”的充分条件.故选A.

【类题通法】

用定义法判断充分条件：分清什么是条件 p，什么是结论 q，若 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的充分条件.

任务二　必要条件的判断

1.$|x|=x$ 的一个必要条件是（　　）

A.$x<0$　　B.$x\geqslant0$ 或 $x\leqslant-1$

C.$x>0$　　D.$x\leqslant-1$

B　**解析**：因为 $|x|=x$，所以 $x\geqslant0$，因此选项B是 $|x|=x$ 的一个必要条件.

2.在下列各题中，q 是 p 的必要条件吗？

(1) p：$|x|=|y|$，q：$x=y$；

(2) p：$\triangle ABC$ 是直角三角形，q：$\triangle ABC$ 是等腰三角形；

(3) p：$x=1$，q：$x-1=\sqrt{x-1}$；

(4) p：$-2\leqslant x\leqslant5$，q：$-1\leqslant x\leqslant5$；

(5) p：0是自然数，q：0是正整数；

(6) p：三角形是等边三角形，q：三角形是等腰三角形.

解：(1)若 $|x|=|y|$，则 $x=y$ 或 $x=-y$，

因此 $p\nRightarrow q$，所以 q 不是 p 的必要条件.

(2)直角三角形不一定是等腰三角形.

因此 $p\nRightarrow q$，所以 q 不是 p 的必要条件.

(3)当 $x=1$ 时，$x-1=\sqrt{x-1}=0$，

所以 $p\Rightarrow q$，所以 q 是 p 的必要条件.

(4)当 $x=-2$ 时，$-2\leqslant x\leqslant5$ 成立，但是 $-1\leqslant x\leqslant5$ 不成立，所以 $p\nRightarrow q$，所以 q 不是 p 的必要条件.

(5)0是自然数，但是0不是正整数，所以 $p\nRightarrow q$，所以 q 不是 p 的必要条件.

(6)等边三角形一定是等腰三角形，所以 $p\Rightarrow q$，所以 q 是 p 的必要条件.

【类题通法】

1.用定义法判断必要条件：若 $p\Rightarrow q$，则 q 是 p 的必要条件.

2.用集合法判断充分条件、必要条件：设 p 构成的集合为 A，q 构成的集合为 B，若 $A\subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件；若 $A\supseteq B$，则 p 是 q 的必要条件.

任务三　充分条件、必要条件的应用

[探究活动]

探究1：若集合 A，B 满足 $A\subseteq B$，则“$x\in A$”是“$x\in B$”的什么条件？

提示：若 $A\subseteq B$，则“$x\in A$”是“$x\in B$”的充分条件.

探究2：若集合 A，B 满足 $B\subseteq A$，则“$x\in A$”是“$x\in B$”的什么条件？

提示：若 $B\subseteq A$，则“$x\in A$”是“$x\in B$”的必要条件.

[评价活动]

1.下列条件中，是“$-2<x<2$”的必要条件的是（　　）

A.$1<x<3$　　B.$-2<x<0$

C.$0<x\leqslant2$　　D.$-2\leqslant x\leqslant2$

D　**解析**：在所给的条件中，只有 $\{x|-2<x<2\}\subsetneqq\{x|-2\leqslant x\leqslant2\}$.故选D.

2.已知 $M=\{x|a-1<x<a+1\}$，$N=\{x|-3<x<8\}$.若“$x\in M$”是“$x\in N$”的充分条件，求 a 的取值范围.

解：因为“$x\in M$”是“$x\in N$”的充分条件，所以 $M\subseteq N$.

因为 $M=\{x|a-1<x<a+1\}$，$N=\{x|-3<x<8\}$，

所以 $\begin{cases}a-1\geqslant -3,\\ a+1\leqslant 8,\end{cases}$ 解得 $-2\leqslant a\leqslant 7$.

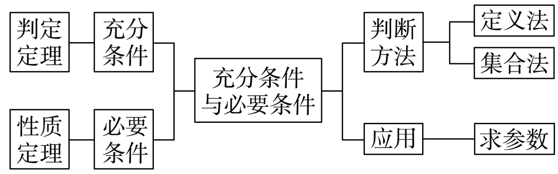
故 a 的取值范围是 $\{a|-2\leqslant a\leqslant 7\}$.

【类题通法】

充分条件与必要条件的应用技巧

利用充分性与必要性求参数的值或取值范围时，先把所给条件等价转化，再利用充分条件、必要条件与集合间的包含关系，建立关于参数的不等式(组)进行求解.

▶ 提质归纳



课后素养评价(六)

基础性·能力运用

1.“$x<8$”的一个充分条件是　(　　)

A.$x>9$　　B.$x<9$

C.$x<7$　　D.$x>7$

C　**解析**：根据选项，可知 $x<7\Rightarrow x<8$，所以 $x<7$ 是 $x<8$ 的一个充分条件.

2.“$a^2>b^2$”的一个必要条件是　(　　)

A.$a<b$　　B.$a>b$

C.$|a|>|b|$　　D.$ab>0$

C　**解析**：$a^2>b^2\Rightarrow|a|>|b|$.

3.(多选)若“$-1<x<2$”是“$-2<x<a$”的充分条件，则实数 a 的值可以是　(　　)

A.1　B.2　C.3　D.4

BCD　**解析**：由“$-1<x<2$”是“$-2<x<a$”的充分条件，知 $\{x|-1<x<2\}\subseteq\{x|-2<x<a\}$.所以 $a\geqslant 2$.

所以实数 a 的值可以是 2，3，4.

4.已知 p：$x+y=2$，q：$\begin{cases}x=-1,\\ y=3,\end{cases}$ 则 p 是 q 的　(　　)

A.充分条件

B.必要条件

C.不是充分条件，也不是必要条件

D.既是充分条件，也是必要条件

B　**解析**：因为当 $x+y=2$ 时，x，y 可取任意实数，不一定有 $\begin{cases}x=-1,\\ y=3,\end{cases}$ 所以 p 不是 q 的充分条件；因为 $\begin{cases}x=-1,\\ y=3,\end{cases}$ 所以 $x+y=2$，所以 p 是 q 的必要条件.

5.若“$x^2+ax+2=0$”是“$x=1$”的必要条件，则 $a=$________.

-3　**解析**：由题意知 $x=1\Rightarrow x^2+ax+2=0$，即 $x=1$ 是方程 $x^2+ax+2=0$ 的根，所以 $a=-3$.

6.设 p：$1\leqslant x<4$，q：$x<m$.若 p 是 q 的充分条件，则实数 m 的取值范围为________.

$\{m|m\geqslant 4\}$　**解析**：令 $A=\{x|1\leqslant x<4\}$，$B=\{x|x<m\}$.因为 p 是 q 的充分条件，所以 $A\subseteq B$.所以 $m\geqslant 4$.

综合性·创新提升

1.对于任意实数 a，b，c，在下列命题中，是真命题的是　(　　)

A.“$ac>bc$”是“$a>b$”的必要条件

B.“$ac=bc$”是“$a=b$”的必要条件

C.“$ac<bc$”是“$a<b$”的充分条件

D.“$ac=bc$”是“$a=b$”的充分条件

B　**解析**：$a>b\not\Rightarrow ac>bc$，A 错误；$a=b\Rightarrow ac=bc$，B 正确；$ac<bc\not\Rightarrow a<b$，C 错误；$ac=bc\not\Rightarrow a=b$，D 错误.故选 B.

2.(多选)下列条件中是“$a+b>0$”的充分条件的是　(　　)

A.$a>0$，$b>0$

B.$a<0$，$b<0$

C.$a=3$，$b=-2$

D.$a>0$，$b<0$ 且 $|a|>|b|$

ACD　**解析**：A 中，因为 $a>0$，$b>0\Rightarrow a+b>0$，所以 A 满足题意；

B 中，因为 $a<0$，$b<0\not\Rightarrow a+b>0$，所以 B 不满足题意；

C 中，因为 $a=3,b=-2\Rightarrow a+b=1>0$，所以 C 满足题意；

D 中，因为 $a>0,b<0$ 且 $|a|>b\Rightarrow a>-b\Rightarrow a+b>0$，所以 D 满足题意.

3.(多选)下列选项正确的是　（　　）

A.“$x>2$”是“$|x|>2$”的充分条件

B.在$\triangle ABC$中，“$AB^2+AC^2=BC^2$”是“$\triangle ABC$为直角三角形”的必要条件

C.若 $a,b\in\mathbf{R}$，则“$a^2+b^2\neq0$”是“a,b 都不为 0”的充分条件

D.若 $a,b\in\mathbf{R}$，则“$a^2+b^2\neq0$”是“a,b 都不为 0”的必要条件

AD　**解析**：因为 $x>2\Rightarrow|x|>2$，所以 $x>2$ 是 $|x|>2$ 的充分条件，选项 A 正确；选项 B 中，$\angle A$ 不一定为直角，故为充分条件，选项 B 错误；因为 $a^2+b^2\neq0 \not\Rightarrow a,b$ 都不为 0，而 a,b 都不为 $0\Rightarrow a^2+b^2\neq0$，选项 C 错误，选项 D 正确.

4.“$x^2=2x$”是“$x=0$”的________条件，“$x=0$”是“$x^2=2x$”的________条件.(填“充分”或“必要”)

必要　充分　**解析**：由于 $x=0\Rightarrow x^2=2x$，所以“$x^2=2x$”是“$x=0$”的必要条件，“$x=0$”是“$x^2=2x$”的充分条件.

5.已知集合 $A=\{1,a\}$，$B=\{1,2,3\}$，则“$a=3$”是“$A\subseteq B$”的________条件.(填“充分”或“必要”)

充分　**解析**：当 $A\subseteq B$ 时，$a=2$ 或 $a=3$.所以“$a=3$”是“$A\subseteq B$”的充分条件.

6.已知 p：实数 x 满足 $3a<x<a$，其中 $a<0$；q：实数 x 满足 $-2\leqslant x\leqslant3$.若 q 是 p 的必要条件，求实数 a 的取值范围.

解：p：$3a<x<a$，设集合 $A=\{x\mid 3a<x<a\}$，$a<0$.

q：$-2\leqslant x\leqslant3$，设集合 $B=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant3\}$.

因为 $p\Rightarrow q$，所以 $A\subseteq B$.

所以$\begin{cases}3a\geqslant-2,\\a\leqslant3,\\a<0,\end{cases}$

即 $-\dfrac{2}{3}\leqslant a<0$.

所以 a 的取值范围是$\left\{a\,\middle|\,-\dfrac{2}{3}\leqslant a<0\right\}$.

1.4.2　充要条件

学习任务目标

1.理解充要条件的意义.

2.会解决一些简单的与充要条件相关的问题.

3.能对充要条件进行证明.

问题式预习

知识点一　充要条件

1.定义：如果“若 p，则 q”和它的逆命题“若 q，则 p”均是真命题，即既有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，就记作 $p\Leftrightarrow q$.此时 p 既是 q 的充分条件，也是 q 的必要条件，即 p 是 q 的充分必要条件，简称为充要条件.

2.条件与结论的等价性：如果 p 是 q 的充要条件，那么 q 也是 p 的充要条件.

3.概括：如果 $p\Leftrightarrow q$，那么 p 与 q 互为充要条件.

［微训练］

1.“$x=0$”是“$x^2=0$”的　（　　）

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

C　**解析**：当 $x=0$ 时，$x^2=0$；当 $x^2=0$ 时，$x=0$.所以“$x=0$”是“$x^2=0$”的充要条件.

2.点 $P(x,y)$ 是第二象限内的点的充要条件是　（　　）

A.$x<0,y<0$　　B.$x<0,y>0$

C.$x>0,y>0$　　D.$x>0,y<0$

B　**解析**：$P(x,y)$在第二象限，等价于 $x<0,y>0$.

3.在$\triangle ABC$中，“$\angle B=\angle C$”是“$\triangle ABC$是等腰三角形”的____________条件.

充分不必要　**解析**：$\angle B=\angle C\Rightarrow\triangle ABC$是等腰三角形，而$\triangle ABC$是等腰三角形$\not\Rightarrow\angle B=\angle C$.

知识点二　命题的条件、结论与充分性、必要性

命题“若 p，则 q”中 p 与 q 的关系：

若 p 是 q 的充分必要条件(充要条件)，则 $p\Rightarrow q$，且 $q\Rightarrow p$.

若 p 是 q 的充分不必要条件，则 $p\Rightarrow q$，且 $q\not\Rightarrow p$.

若 p 是 q 的必要不充分条件，则 $p\not\Rightarrow q$，且 $q\Rightarrow p$.

若 p 是 q 的既不充分也不必要条件，则 $p \nRightarrow q$，且 $q \nRightarrow p$.

[微训练]

判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1) q 是 p 的必要条件时，p 是 q 的充分条件.　（√）

(2) q 不是 p 的必要条件时，$p \nRightarrow q$.　（√）

(3) 若 q 是 p 的必要条件，则当 q 成立时，p 也成立.　（×）

(4) 如果一个命题及其逆命题均是真命题，那么原命题中的条件是结论的充要条件.　（√）

任务型课堂

任务一　充要条件的判断

1.“$a>0$”是“$|a|>0$”的　（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

A　**解析**：因为“$a>0$”⇒“$|a|>0$”，“$|a|>0$”⇒“$a>0$ 或 $a<0$”，所以“$|a|>0$”不一定推出“$a>0$”.故“$a>0$”是“$|a|>0$”的充分不必要条件.故选 A.

2.“$x^2-4x-5=0$”是“$x=5$”的　（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

B　**解析**：由 $x^2-4x-5=0$ 得 $x=5$ 或 $x=-1$.所以，当 $x=5$ 时，$x^2-4x-5=0$ 成立，但 $x^2-4x-5=0$ 时，$x=5$ 不一定成立.故选 B.

3. 设集合 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，那么“$m\in A$”是“$m\in B$”的　（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

B　**解析**：集合 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$，集合 $B=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，则由“$m\in A$”得不到“$m\in B$”.反之，由“$m\in B$”可得到“$m\in A$”.故选 B.

【类题通法】

判断充要条件的三种方法

(1) 定义法：直接判断“若 p，则 q”以及“若 q，则 p”的真假.

(2) 集合法：利用集合的包含关系进行判断.

(3) 传递法：充分条件和必要条件具有传递性，即由 $p_1\Rightarrow p_2\Rightarrow\cdots\Rightarrow p_n$，可得 $p_1\Rightarrow p_n$，充要条件也有传递性.

任务二　充要条件的证明

1. 函数 $y=x^2+mx+1$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称的充要条件是________.

$m=-2$　**解析**：若函数 $y=x^2+mx+1$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，则 $-\dfrac{m}{2}=1$，即 $m=-2$；反之，若 $m=-2$，则 $y=x^2-2x+1$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称.

2. 求证：一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图象过原点 $(0,0)$ 的充要条件是 $b=0$.

证明：①充分性：如果 $b=0$，那么 $y=kx$.

当 $x=0$ 时，$y=0$.

所以一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图象过原点 $(0,0)$.

②必要性：因为一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图象过原点 $(0,0)$，所以 $0=0+b$.所以 $b=0$.

综上，一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图象过原点 $(0,0)$ 的充要条件是 $b=0$.

3. 设 $x,y\in\mathbf{R}$，求证：$|x+y|=|x|+|y|$ 的充要条件是 $xy\geqslant 0$.

证明：①充分性：如果 $xy\geqslant 0$，则有 $xy=0$ 和 $xy>0$ 两种情况.

当 $xy=0$ 时，不妨设 $x=0$，得 $|x+y|=|y|$，且 $|x|+|y|=|y|$，所以等式 $|x+y|=|x|+|y|$ 成立.

当 $xy>0$ 时，分两种情况，即 $x>0$，$y>0$ 或 $x<0$，$y<0$.又当 $x>0$，$y>0$ 时，$|x+y|=x+y$，$|x|+|y|=x+y$，所以等式 $|x+y|=|x|+|y|$ 成立.

当 $x<0$，$y<0$ 时，$|x+y|=-(x+y)$，

$|x|+|y|=-x-y=-(x+y)$，所以等式 $|x+y|=|x|+|y|$ 成立.所以，当 $xy\geqslant 0$ 时，$|x+y|=|x|+|y|$ 成立.

②必要性：若 $|x+y|=|x|+|y|$，且 $x,y\in\mathbf{R}$，

则 $|x+y|^2=(|x|+|y|)^2$，即 $x^2+2xy+y^2=x^2+y^2+2|x|\cdot|y|$.

所以 $|xy|=xy$.所以 $xy\geqslant 0$.

综上，等式 $|x+y|=|x|+|y|$ 成立的充要条件是 $xy\geqslant 0$.

【类题通法】

充要条件的证明策略

要证明 p 是 q 的充要条件，需要从充分性和必要性两个方向进行，即证明命题“若 p，则 q”为真且“若

q，则 p”为真.

注意：证明时一定要分清充分性与必要性的推导方向.

任务三　根据充要条件求参数的取值范围

［探究活动］

探究1：已知集合 A，B.若 p：$x\in A$ 是 q：$x\in B$ 的充分不必要条件，则集合 A，B 的关系是什么？若 p：$x\in A$ 是 q：$x\in B$ 的必要不充分条件呢？

提示：若 p 是 q 的充分不必要条件，则 $A\subsetneqq B$；若 p 是 q 的必要不充分条件，则 $B\subsetneqq A$.

探究2：已知集合 A，B.若 $A\subsetneqq B$，则 p：$x\in A$ 是 q：$x\in B$ 的什么条件？若 $B\subsetneqq A$ 或 $A=B$ 呢？

提示：若 $A\subsetneqq B$，则 p 是 q 的充分不必要条件；若 $B\subsetneqq A$，则 p 是 q 的必要不充分条件；若 $A=B$，则 p 是 q 的充要条件.

［评价活动］

1.若“$x>2$”是“$x>m$”的必要不充分条件，则 m 的取值范围是________.

$\{m|m>2\}$　**解析**：因为“$x>2$”是“$x>m$”的必要不充分条件，所以 $\{x|x>m\}$ 是 $\{x|x>2\}$ 的真子集，即 $m>2$.

2.已知 p：$x-3<0$ 是 q：$2x-3<m$ 的充分不必要条件，求实数 m 的取值范围.

解：由 $x-3<0$，得 $x<3$；由 $2x-3<m$，得 $x<\dfrac{m+3}{2}$.因为 p 是 q 的充分不必要条件，

所以 $\{x|x<3\}\subsetneqq\left\{x\left|x<\dfrac{m+3}{2}\right.\right\}$.

所以 $3<\dfrac{m+3}{2}$，解得 $m>3$.

所以实数 m 的取值范围是 $\{m|m>3\}$.

3.已知 p：$-2\leqslant x\leqslant 10$，$q$：$1-m\leqslant x\leqslant 1+m$.若 p 是 q 的必要不充分条件，求实数 m 的取值范围.

解：由 p 是 q 的必要不充分条件，得集合 $\{x|1-m\leqslant x\leqslant 1+m\}$ 是集合 $\{x|-2\leqslant x\leqslant 10\}$ 的真子集.

当 $\{x|1-m\leqslant x\leqslant 1+m\}=\varnothing$，即 $m<0$ 时，符合题意.

当 $\{x|1-m\leqslant x\leqslant 1+m\}\neq\varnothing$，即 $m\geqslant 0$ 时，

可得 $\begin{cases}m\geqslant 0,\\1-m>-2,\\1+m\leqslant 10,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m\geqslant 0,\\1-m\geqslant -2,\\1+m<10.\end{cases}$ 解得 $0\leqslant m\leqslant 3$.

综上，实数 m 的取值范围是 $\{m|m\leqslant 3\}$.

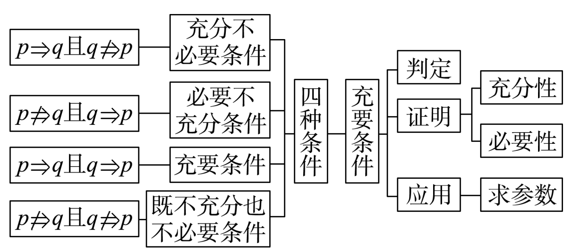
【类题通法】

根据充要条件求参数取值范围的一般步骤

(1)根据已知将充分不必要条件、必要不充分条件或充要条件转化为集合间的关系；

(2)根据集合间的关系构建关于参数的方程(组)或不等式(组)求解.

提质归纳



课后素养评价（七）

基础性·能力运用

1.“$a=b=c(a,b,c\in\mathbf{R})$”是“$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$”的　　（　　）

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

C　**解析**：由 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac\Leftrightarrow(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0\Leftrightarrow a=b=c$，故“$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$”是“$a=b=c(a,b,c\in\mathbf{R})$”的充要条件.

2.(多选)下列结论中，正确的有　　（　　）

A.“$x^2>4$”是“$x^3<-8$”的必要不充分条件

B.在△ABC 中，“$AB^2+AC^2=BC^2$”是“△ABC 为直角三角形”的充要条件

C.若 $a,b\in\mathbf{R}$，则“$a^2+b^2\neq 0$”是“a,b 不全为 0”的充要条件

D.“x,y 均为奇数”是“$x+y$ 为偶数”的必要不充分条件

AC　**解析**：A 中，$x^3<-8\Rightarrow x<-2\Rightarrow x^2>4$，但是 $x^2>4\Rightarrow x>2$ 或 $x<-2\Rightarrow x^3>8$ 或 $x^3<-8$，不一定有 $x^3<-8$，故 A 正确；B 中，$AB^2+AC^2=BC^2\Rightarrow\triangle ABC$ 为直角三角形，反之不一定，故 B 不正确；C 中，$a^2+b^2\neq0\Leftrightarrow a,b$ 不全为 0，故 C 正确；D 中，x,y 均为奇数$\Rightarrow x+y$ 为偶数，反之不一定，故 D 不正确.

3.若"$x<a$"是"$x\geqslant3$ 或 $x\leqslant-1$"的充分不必要条件，则 a 的取值范围是　（　　）

A.$\{a|a\geqslant3\}$

B.$\{a|a\leqslant-1\}$

C.$\{a|-1\leqslant a\leqslant3\}$

D.$\{a|a\leqslant3\}$

B　**解析**：因为"$x<a$"是"$x\geqslant3$ 或 $x\leqslant-1$"的充分不必要条件，故 $a\leqslant-1$.

4."$ab>4$"是"$a>2$ 且 $b>2$"的　（B）

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

5.已知集合 $A=\{x|x>a\}$，$B=\{x|x>5\}$.若"$x\in A$"是"$x\in B$"的必要不充分条件，则实数 a 的取值范围是________.

$\{a|a<5\}$　**解析**：由题意，得 B 是 A 的真子集.故 $a<5$.

综合性·创新提升

1.下列命题中是真命题的是　（　　）

①"$x>3$"是"$x>4$"的必要条件；

②"$x=1$"是"$x^2=1$"的必要条件；

③"$a=0$"是"$ab=0$"的必要条件.

A.①　　B.①②

C.①③　　D.②③

A　**解析**：$x>4\Rightarrow x>3$，故①是真命题；

$x=1\Rightarrow x^2=1$，但$x^2=1\not\Rightarrow x=1$，故②是假命题；

$a=0\Rightarrow ab=0$，但 $ab=0\not\Rightarrow a=0$，故③是假命题.

2."a,b 至少有一个不为零"的充要条件是　（　　）

A.$ab=0$　　B.$ab>0$

C.$a^2+b^2=0$　　D.$a^2+b^2>0$

D　**解析**：$a^2+b^2>0$，则 a,b 不同时为零；a,b 中至少有一个不为零，则 $a^2+b^2>0$.

3."$x<y$"是"$|x|<|y|$"的　（　　）

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

D　**解析**：当 $x=-3,y=1$ 时，$|x|>|y|$，故 $x<y$ 推不出$|x|<|y|$；反之，当 $x=1,y=-3$ 时，$|x|<|y|$，但 $x>y$，故$|x|<|y|$推不出 $x<y$；由充分、必要条件定义，知"$x<y$"是"$|x|<|y|$"的既不充分也不必要条件.

4.(多选)给出下列各组条件，其中 p 是 q 的必要不充分条件的有　（　　）

A.$p:ab=0$，$q:a^2+b^2=0$

B.$p:xy\geqslant0$，$q:|x|+|y|=|x+y|$

C.$p:m>0$，q：方程 $x^2-x-m=0$ 有实根

D.$p:x>2$ 或 $x<-1$，$q:x<-1$

AD　**解析**：对于 A，因为 $p\not\Rightarrow q$，$q\Rightarrow p$，所以 p 是 q 的必要不充分条件；对于 B，由$|x|+|y|=|x+y|$知 x,y 要么同为正数，要么同为负数，要么至少一个为零，能得到$xy\geqslant0$，故 p 是 q 的充要条件；对于 C，方程 $x^2-x-m=0$ 有实数解，判别式 $\Delta=1+4m\geqslant0$，即 $m\geqslant-\frac{1}{4}$，所以 $p\Rightarrow q$，$q\not\Rightarrow p$，所以 p 是 q 的充分不必要条件；对于 D，因为$p\not\Rightarrow q$，$q\Rightarrow p$，所以 p 是 q 的必要不充分条件.

5.若"$x^2+x-6=0$"是"$ax+1=0$"的必要不充分条件，则实数 a 的值为________.

$-\frac{1}{2}$或$\frac{1}{3}$　**解析**：由 $x^2+x-6=0$，可得 $x=2$ 或 $x=-3$.对于 $ax+1=0$，当 $a=0$ 时，方程无解；

当 $a\neq0$ 时，$x=-\frac{1}{a}$.

由题意知 $p\not\Rightarrow q$，$q\Rightarrow p$，则可得 $a\neq0$，此时应有$-\frac{1}{a}=2$或$-\frac{1}{a}=-3$，解得 $a=-\frac{1}{2}$或 $a=\frac{1}{3}$.

综上，$a=-\frac{1}{2}$或 $a=\frac{1}{3}$.

6.如果"$x\leqslant m$"的充分不必要条件是"$1\leqslant x\leqslant2$"，那么 m 的最小值为________.

2　**解析**：由题意可知，$1\leqslant x\leqslant2\Rightarrow x\leqslant m$，反之不成立，所以 $m\geqslant2$，即 m 的最小值为 2.

1.5　全称量词与存在量词

1.5.1　全称量词与存在量词

学习任务目标

1.理解全称量词与存在量词的含义，熟悉常见的全称量词和存在量词.
2.理解全称量词命题和存在量词命题的含义，并能用数学符号表示.
3.会判断一个命题是全称量词命题还是存在量词命题，并会判断它们的真假.

问题式预习

知识点一　全称量词与全称量词命题

1.定义：短语“所有的”“任意一个”在逻辑中通常叫做全称量词，并用符号“$\forall$”表示.含有全称量词的命题，叫做全称量词命题.

2.表述形式：全称量词命题“对 M 中任意一个 x，$p(x)$成立”可用符号简记为 $\forall x\in M, p(x)$.

[微训练]

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)命题“正方形都是长方形”是全称量词命题.（√）

(2)命题“有些菱形是正方形”是全称量词命题.（×）

2.下列命题是全称量词命题的是（　　）

A.有的三角形是等边三角形

B.所有 2 的倍数都是偶数

C.有一个实数 x，使 $|x|\leqslant 0$

D.至少有一个 $x\in\{x|x$ 是无理数$\}$，使 x^2 是无理数

B　**解析**：因为选项 A，C，D 中依次存在“有的”“有一个”“至少有一个”等量词，所以它们都不是全称量词命题，而选项 B 中有“所有”这个量词，所以该选项正确.

知识点二　存在量词与存在量词命题

1.定义：短语“存在一个”“至少有一个”在逻辑中通常叫做存在量词，并用符号“$\exists$”表示.含有存在量词的命题，叫做存在量词命题.

2.表述形式：存在量词命题“存在 M 中的元素 x，$p(x)$成立”可用符号简记为 $\exists x\in M, p(x)$.

[微训练]

1.下列命题中，是存在量词命题的是（D）

A.任何一个实数乘 0 都等于 0

B.自然数都是正整数

C.所有的语句都是命题

D.一定存在没有最大值的二次函数

2.命题“存在实数 x,y，使得 $x+y>1$”是存在量词命题，用符号表示为 $\exists x, y\in\mathbf{R}$，使得 $x+y>1$.

任务型课堂

任务一　全称量词命题与存在量词命题的改写与判断

1.将命题“$x^2+y^2\geqslant 2xy$”改写成全称量词命题为（　　）

A.对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，都有 $x^2+y^2\geqslant 2xy$ 成立

B.存在 $x,y\in\mathbf{R}$，使 $x^2+y^2\geqslant 2xy$ 成立

C.对任意 $x>0, y>0$，都有 $x^2+y^2\geqslant 2xy$ 成立

D.存在 $x<0, y<0$，使 $x^2+y^2\leqslant 2xy$ 成立

A　**解析**：改写成全称量词命题：对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，都有 $x^2+y^2\geqslant 2xy$ 成立.

2.用全称量词或存在量词表示下列语句：

(1)有理数都能写成分数形式；

(2)方程 $x^2+2x+8=0$ 有实数解.

解：(1)任意一个有理数都能写成分数形式.

(2)存在实数 x，使 $x^2+2x+8=0$ 成立.

【类题通法】

判断一个命题是全称量词命题还是存在量词命题的关键是看量词.由于某些全称量词命题的量词可能省略，所以要根据命题表达的意义判断，同时要会用相应的量词符号正确表达命题.

任务二　全称量词命题与存在量词命题的真假判断

判断下列命题的真假.

(1)$\forall x\in\mathbf{R}, x^2+1>\dfrac{1}{2}$；

(2) $\exists\alpha,\beta\in\mathbf{R},(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2$；
(3)存在一个数既是偶数又是负数；
(4)每一条线段的长度都能用正有理数表示；
(5)存在一个实数 x，使等式 $x^2+x+8=0$ 成立.

解：(1)真命题，因为 $x^2\geqslant0$，所以 $x^2+1\geqslant1$，所以 $x^2+1>\frac{1}{2}$ 恒成立.
(2)真命题，例如 $\alpha=0,\beta=1$，符合题意.
(3)真命题，如 $-2,-4$ 等既是偶数又是负数.
(4)假命题，如边长为 1 的正方形的对角线长为 $\sqrt{2}$，它的长度就不是有理数.
(5)假命题，因为该方程的判别式 $\Delta=-31<0$，故无实数解.

【类题通法】

判断全称量词命题和存在量词命题真假的方法

(1)要判定一个全称量词命题为真，必须证明给定集合中的每一个元素 x，均使命题 $p(x)$ 为真；要判定一个全称量词命题为假，只需在给定的集合中找到一个元素 x，使命题 $p(x)$ 为假.

(2)要判定一个存在量词命题为真，只需在给定的集合中找到一个元素 x，使命题 $p(x)$ 为真；要判定一个存在量词命题为假，必须证明给定集合中的每一个元素 x，均使命题 $p(x)$ 为假.

任务三　全称量词命题与存在量词命题的应用

[探究活动]

探究 1：已知 y 是 x 的函数，定义域为 M.若全称量词命题“$\forall x\in M,a>y$ 或 $a<y$”为真命题，如何确定实数 a 的范围？

提示：该问题实质就是不等式恒成立问题，通常转化为求 y 的最大值或最小值，即 $a>y_{\max}$ 或 $a<y_{\min}$.

探究 2：已知 y 是 x 的函数，定义域为 M.若存在量词命题“$\exists x\in M,a>y$ 或 $a<y$”为真命题，如何确定实数 a 的范围？

提示：该问题实质就是不等式能成立问题，通常转化为求 y 的最小值或最大值，即 $a>y_{\min}$ 或 $a<y_{\max}$.

[评价活动]

1.已知命题“$\forall x\in\mathbf{R},x^2+1>2x+a$”为真命题，求实数 a 的取值范围.

解：因为 $x^2+1>2x+a$，所以 $a<(x-1)^2$，又 $(x-1)^2\geqslant0$，所以实数 a 的取值范围是 $\{a|a<0\}$.

2.若存在 $x\in\left\{x\,\middle|\,x\geqslant-\frac{1}{2}\right\}$，使 $2x+a<0$，求实数 a 的取值范围.

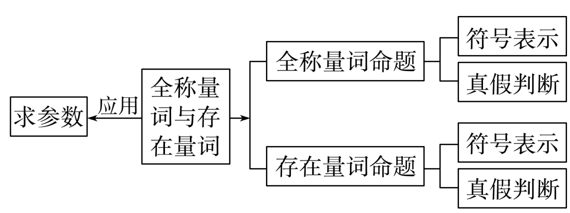
解：由题意知，$y=2x+a$ 的最小值为 $-1+a$，则 $-1+a<0$，解得 $a<1$.
所以实数 a 的取值范围为 $\{a|a<1\}$.

【类题通法】

根据命题的真假求参数取值范围的方法

首先，根据全称量词和存在量词的含义透彻地理解题意，把命题的真假问题转化为集合间的关系或函数的最值问题，再建立关于参数的不等式(组)求参数的取值范围.

提质归纳



课后素养评价(八)

基础性·能力运用

1.下列命题不是存在量词命题的是　(　　)
A.有的无理数的平方是有理数
B.有的无理数的平方不是有理数
C.对于任意 $x\in\mathbf{Z}$，$2x+1$ 是奇数
D.存在 $x\in\mathbf{R}$，$2x+1$ 是奇数

C　**解析**：A，B，D 中都有存在量词，是存在量词命题，C 中含有量词“任意”，为全称量词命题.

2.下列命题是“$\forall x\in\mathbf{R},x^2>3$”的另一种表述方式的是　(　　)
A.有一个 $x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2>3$
B.对有些 $x\in\mathbf{R}$，有 $x^2>3$
C.任选一个 $x\in\mathbf{R}$，都有 $x^2>3$
D.至少有一个 $x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2>3$

C　**解析**：“$\forall$”和“任选一个”都是全称量词.

3.下列存在量词命题是假命题的是　(　　)
A.存在 $x\in\mathbf{Q}$，使 $2x-x^3=0$
B.存在 $x\in\mathbf{R}$，使 $x^2+x+1=0$
C.有的整数是偶数
D.有的有理数没有倒数

B　**解析**：对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

$+\frac{3}{4}>0$ 恒成立，所以“存在 $x\in\mathbf{R}$，使 $x^2+x+1=0$”是假命题.

4.下列命题中是全称量词命题并且是真命题的是（　　）

A.$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+1>0$

B.若 $2x$ 为偶数，则 $x\in\mathbf{N}$

C.所有菱形的四条边都相等

D.π 是无理数

C　**解析**：对于 A，是全称量词命题，当 $x=-1$ 时命题不正确，故不是真命题，故 A 不正确；对于 B，若 $2x$ 为偶数，x 也可以是负整数，故是假命题，也不是全称量词命题，故 B 不正确；对于 C，是全称量词命题，也是真命题，故 C 正确；对于 D，是真命题，但不是全称量词命题，故 D 不正确.

5.(多选)下列四个命题中是真命题的是（　　）

A.一切实数均有相反数

B.$\exists a\in\mathbf{N}$，使得方程 $ax+1=0$ 无实数根

C.梯形的对角线相等

D.有些三角形不是等腰三角形

ABD　**解析**：A 为真命题；对于 B，当 $a=0$ 时，方程 $ax+1=0$ 无实数根；对于 C，只有等腰梯形的对角线相等，错误；D 为真命题.

6.若命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-2x+m\neq0$ 是真命题，则实数 m 的取值范围是________.

$\{m|m>1\}$　**解析**：命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-2x+m\neq0$ 是真命题，则 $\Delta=4-4m<0$，即 $m>1$.

综合性·创新提升

1.以下四个命题中既是存在量词命题又是真命题的是（　　）

A.锐角三角形的内角是锐角或钝角

B.至少有一个实数 x，使 $x^2\leqslant0$

C.两个无理数的和必是无理数

D.存在一个负数 x，使 $\frac{1}{x}>2$

B　**解析**：A 中，锐角三角形的内角是锐角或钝角是全称量词命题；B 中，$x=0$ 时，$x^2=0$，所以选项 B 中既是存在量词命题又是真命题；C 中，因为 $\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$，所以选项 C 是假命题；D 中，对于任一个负数 x，都有 $\frac{1}{x}<0$，所以选项 D 是假命题.

2.(多选)下列命题是真命题的有（ABD）

A.$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-3x+2=0$

B.$\exists x\in\mathbf{Q}$，$(x+3)(x^2-2)=0$

C.$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+1>0$

D.$\forall x\in\mathbf{R}$，$2x>2x-1$

3.若命题“$\forall x\in\{1\leqslant x\leqslant2\}$，$ax+1>0$”是真命题，则 a 的取值范围是 $\left\{a\,\middle|\,a>-\frac{1}{2}\right\}$.

4.根据下列等式，得到的全称量词命题或存在量词命题为________________.

$1^3+2^3=(1+2)^2$，

$1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$，

$1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2$，

$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=(1+2+3+4+5)^2$，

……

$\forall n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant2$，$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$　**解析**：根据已知等式可得，对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant2$，总有 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$，

所以得到如下全称量词命题：$\forall n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant2$，$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$.

5.已知函数 $y_1=x_1^2$，$y_2=-2x_2-m$.若对 $\forall x_1\in\{x|-1\leqslant x\leqslant3\}$，$\exists x_2\in\{x|0\leqslant x\leqslant2\}$，使得 $y_1\geqslant y_2$，求实数 m 的取值范围.

解：因为 $x_1\in\{x|-1\leqslant x\leqslant3\}$，$x_2\in\{x|0\leqslant x\leqslant2\}$，

所以 $y_1\in\{y|0\leqslant y\leqslant9\}$，$y_2\in\{y|-4-m\leqslant y\leqslant-m\}$.

又因为对 $\forall x_1\in\{x|-1\leqslant x\leqslant3\}$，$\exists x_2\in\{x|0\leqslant x\leqslant2\}$，使得 $y_1\geqslant y_2$，

即 y_1 的最小值大于等于 y_2 的最小值，即 $-4-m\leqslant0$，所以 $m\geqslant-4$，即实数 m 的取值范围是 $\{m|m\geqslant-4\}$.

1.5.2　全称量词命题和存在量词命题的否定

学习任务目标

1.通过实例总结含有一个量词的命题与它们的否定在形式上的变化规律.

2.能写出全称量词命题与存在量词命题的否定并判断真假.

问题式预习

知识点一　全称量词命题的否定

全称量词命题 p	$\forall x\in M, p(x)$
命题 p 的否定	$\exists x\in M, \neg p(x)$
结论	全称量词命题的否定是存在量词命题

［微训练］

1.命题“$\forall x\in\mathbf{R}, |x|+1-x\neq 0$”的否定为$\exists x\in\mathbf{R}, |x|+1-x=0$.

2.用自然语言描述的全称量词命题的否定形式唯一吗？

答案：不唯一

知识点二　存在量词命题的否定

存在量词命题 p	$\exists x\in M, p(x)$
命题 p 的否定	$\forall x\in M, \neg p(x)$
结论	存在量词命题的否定是全称量词命题

［微训练］

1.命题“$\exists x\in\mathbf{R}, x^3-2x+1=0$”的否定是　　(　　)

A.$\exists x\in\mathbf{R}, x^3-2x+1\neq 0$

B.不存在 $x\in\mathbf{R}, x^3-2x+1\neq 0$

C.$\forall x\in\mathbf{R}, x^3-2x+1=0$

D.$\forall x\in\mathbf{R}, x^3-2x+1\neq 0$

D　**解析**：存在量词命题的否定是全称量词命题，故排除A；由命题的否定要否定结论，可排除C；由存在量词“$\exists$”应改为全称量词“$\forall$”，可排除B.

2.命题“$\exists a\in\mathbf{R}$，使一次函数 $y=x+a$ 的图象经过原点”的否定为$\forall a\in\mathbf{R}$，一次函数 $y=x+a$ 的图象不经过原点.

任务型课堂

任务一　全称量词命题的否定

1.命题“对于任意 $x\in\mathbf{R}, x^2\geqslant 0$”的否定是　　(　　)

A.不存在 $x\in\mathbf{R}, x^2\geqslant 0$

B.存在 $x\in\mathbf{R}, x^2\leqslant 0$

C.对任意的 $x\in\mathbf{R}, x^2<0$

D.存在 $x\in\mathbf{R}, x^2<0$

D　**解析**：“对于任意的 $x\in\mathbf{R}, x^2\geqslant 0$”的否定为“存在 $x\in\mathbf{R}, x^2<0$”.

2.命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，若 $y>0$，则 $x^2+y>0$”的否定是________.

$\exists x\in\mathbf{R}$，若 $y>0$，则 $x^2+y\leqslant 0$　**解析**：已知命题是一个全称量词命题，其否定为存在量词命题.先将“$\forall$”换成“$\exists$”，再否定结论，即命题的否定是“$\exists x\in\mathbf{R}$，若 $y>0$，则 $x^2+y\leqslant 0$”.

3.命题“$\forall x\in\mathbf{R}, -2x+4\leqslant 0$”的否定是________.

$\exists x\in\mathbf{R}, -2x+4>0$　**解析**：原命题为全称量词命题，其否定为存在量词命题，既要修改量词又要否定结论，所以其否定为“$\exists x\in\mathbf{R}, -2x+4>0$”.

【类题通法】

求全称量词命题的否定的方法

(1)两变：一变量词，即把全称量词变为存在量词；二变结论，即否定结论.

(2)一补：对省略全称量词的全称量词命题要补上量词后再进行否定.

任务二　存在量词命题的否定

1.命题“有些三角形是等腰三角形”的否定是　(　　)

A.有些三角形不是等腰三角形

B.所有三角形都是等边三角形

C.所有三角形都不是等腰三角形

D.所有三角形都是等腰三角形

C　**解析**：在写命题的否定时，一是更换量词，二是

否定结论.更换量词:“有些”改为“所有”,否定结论:“是等腰三角形”改为“不是等腰三角形”,故命题 p 的否定为“所有三角形都不是等腰三角形”.

2. 写出下列存在量词命题的否定,并判断其真假.

(1) $\exists x\in\mathbf{R}, 2x+1\geqslant 0$;

(2) $\exists x\in\mathbf{R}, x^2-x+\frac{1}{4}<0$;

(3)有些分数不是有理数.

解:(1) $\forall x\in\mathbf{R}, 2x+1<0$,为假命题.

(2) $\forall x\in\mathbf{R}, x^2-x+\frac{1}{4}\geqslant 0$.

因为 $x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$,所以是真命题.

(3)所有分数都是有理数,是真命题.

【类题通法】

求存在量词命题的否定及判断其真假的方法

(1)写命题的否定时,先将存在量词变为全称量词,再否定结论.

(2)由于命题与命题的否定一真一假,所以当判断一个命题的否定的真假困难时,可以转化为判断原命题的真假从而进行判断.

任务三　全称量词命题与存在量词命题的否定的应用

1. 对于任意实数 x, $y=x^2+8x-2$ 的值恒大于实数 m,则 m 的取值范围是________.

$\{m|m<-18\}$　**解析**:$y=(x+4)^2-18\geqslant -18$.

因为 $\forall x\in\mathbf{R}$,不等式 $x^2+8x-2>m$ 恒成立,

所以只要 $m<-18$ 即可.

所以 m 的取值范围是 $\{m|m<-18\}$.

2. (1)已知命题“$\forall x\in\mathbf{R}, x^2+4x-1>m$”为真命题,求实数 m 的取值范围.

(2)存在实数 x,使不等式 $-x^2+4x-1>m$ 有解,求实数 m 的取值范围.

解:(1)令 $y=x^2+4x-1, x\in\mathbf{R}$,

则 $y=(x+2)^2-5\geqslant -5$,

因为 $\forall x\in\mathbf{R}$,不等式 $x^2+4x-1>m$ 恒成立,

所以只要 $m<-5$ 即可.

所以 m 的取值范围是 $\{m|m<-5\}$.

(2)令 $y=-x^2+4x-1$,

因为 $y=-x^2+4x-1=-(x-2)^2+3\leqslant 3$,

且 $\exists x\in\mathbf{R}, -x^2+4x-1>m$ 有解,

所以只要 m 小于函数的最大值即可,

所以 m 的取值范围是 $\{m|m<3\}$.

【类题通法】

求含有量词的命题中参数取值范围的策略

(1)全称量词命题“$\forall x\in M, a>y$(或 $a<y$)”为真的问题,实质就是不等式恒成立问题,通常转化为求 y 的最大值(或最小值),即 $a>y_{\max}$(或 $a<y_{\min}$).

(2)存在量词命题“$\exists x\in M, a>y$(或 $a<y$)”为真的问题,实质就是不等式能成立问题,通常转化为求 y 的最小值(或最大值),即 $a>y_{\min}$(或 $a<y_{\max}$).

提质归纳

- 换量词、否结论 —方法— 全称量词命题与存在量词命题的否定
  - 符号表示
  - 真假判断
  - 应用 — 求参数

课后素养评价(九)

基础性·能力运用

1. 设命题 p: $\forall x\in\{x|-1<x<1\}$, $|x|<1$,则命题 p 的否定为　(　　)

A. $\exists x\in\{x|-1<x<1\}$, $|x|<1$

B. $\exists x\in\{x|-1<x<1\}$, $|x|\geqslant 1$

C. $\forall x\in\{x|-1<x<1\}$, $|x|\geqslant 1$

D. $\forall x\notin\{x|-1<x<1\}$, $|x|\geqslant 1$

B　**解析**:命题 p 是全称量词命题,其否定为“$\exists x\in\{x|-1<x<1\}$, $|x|\geqslant 1$”.

2. 设命题 p: $\exists x\in\mathbf{R}, x^2+1=0$,则命题 p 的否定为　(　B　)

A. $\forall x\notin\mathbf{R}, x^2+1=0$

B. $\forall x\in\mathbf{R}, x^2+1\neq 0$

C. $\exists x\notin\mathbf{R}, x^2+1=0$

D. $\exists x\in\mathbf{R}, x^2+1\neq 0$

3. (多选)关于命题 p: $\forall x\in\mathbf{R}, x^2+1\neq 0$ 的叙述,正确的是　(　　)

A. p 的否定:$\exists x\in\mathbf{R}, x^2+1=0$

B. p 的否定:$\forall x\in\mathbf{R}, x^2+1=0$

C. p 是真命题,p 的否定是假命题

D. p 是假命题,p 的否定是真命题

AC　**解析**:因为命题 p:“$\forall x\in\mathbf{R}, x^2+1\neq 0$”的否定是“$\exists x\in\mathbf{R}, x^2+1=0$”.且 p 为真命题,则 p 的否定是假命题.

4. 设命题 p: $\exists n\in\mathbf{N}, n^2>2^n$,则命题 p 的否定为______

__________.

$\forall n\in\mathbf{N},n^2\leqslant 2^n$　**解析**：因为“$\exists x\in M,p(x)$”的否定是“$\forall x\in M,\neg p(x)$”，所以命题“$\exists n\in\mathbf{N},n^2>2^n$”的否定是“$\forall n\in\mathbf{N},n^2\leqslant 2^n$”.

5.已知命题 p：$\exists x\in\mathbf{R},x^2+2x+a=0$.

(1)命题 p 的否定为________________________;

(2)若命题 p 是真命题，则实数 a 的取值范围是__________.

(1)$\forall x\in\mathbf{R},x^2+2x+a\neq 0$　(2)$\{a|a\leqslant 1\}$

解析：(1)命题“$\exists x\in\mathbf{R},x^2+2x+a=0$”是存在量词命题，其否定为“$\forall x\in\mathbf{R},x^2+2x+a\neq 0$”.

(2)因为$\exists x\in\mathbf{R},x^2+2x+a=0$ 为真命题，所以 $\Delta=4-4a\geqslant 0$.所以 $a\leqslant 1$.

综合性·创新提升

1.命题“$\forall x\in\mathbf{R},\exists n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n\geqslant x^2$”的否定是　(D)

A.$\forall x\in\mathbf{R},\exists n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n<x^2$

B.$\forall x\in\mathbf{R},\forall n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n<x^2$

C.$\exists x\in\mathbf{R},\exists n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n<x^2$

D.$\exists x\in\mathbf{R},\forall n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n<x^2$

2.命题“对任意正整数 $n>2$，关于 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解”的否定为　(　　)

A.对任意正整数 $n>2$，关于 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 都有正整数解

B.对任意正整数 $n>2$，关于 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 至少存在一个正整数解

C.存在正整数 $n\leqslant 2$，关于 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 至少存在一个正整数解

D.存在正整数 $n>2$，关于 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 至少存在一个正整数解

D　**解析**：命题为全称量词命题，则命题的否定为：存在正整数 $n>2$，关于 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 至少存在一个正整数解.

3.(多选)已知集合 $A=\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$，命题“$\forall x\in A,x-a\leqslant 0$”是真命题的一个充分不必要条件可以是　(CD)

A.$a\geqslant 1$　B.$a\geqslant 2$　C.$a\geqslant 3$　D.$a\geqslant 4$

4.若命题“$\exists x\in\mathbf{R},x^2-ax+1\leqslant 0$”是假命题，则实数 a 的取值范围是$\{a|-2<a<2\}$.

5.已知命题 p：$\forall x\in\{x|1\leqslant x\leqslant 3\},m\geqslant x$；命题 q：$\exists x\in\{x|1\leqslant x\leqslant 3\},m\geqslant x$.若 p 为真命题，q 的否定为假命题，求实数 m 的取值范围.

解：由题意知命题 p,q 都是真命题.

由 $\forall x\in\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，都有 $m\geqslant x$ 成立，

只需 $m\geqslant x_{\max}$，即 $m\geqslant 3$.

由 $\exists x\in\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，使 $m\geqslant x$ 成立，

只需 $m\geqslant x_{\min}$，即 $m\geqslant 1$.

因为两者同时成立，故实数 m 的取值范围为$\{m|m\geqslant 3\}\cap\{m|m\geqslant 1\}=\{m|m\geqslant 3\}$.

单元活动构建

任务一　集合

问题 1　$\{a\}\subseteq A$ 与 $a\in A$ 有什么区别？你能结合具体的例子作出解释吗？

答案：略

问题 2　填表.你能根据表格得到集合的子集个数与集合的元素个数之间的关系吗？

集合	元素个数	所有子集	子集个数
$\{a\}$	1		
$\{a,b\}$	2		
$\{a,b,c\}$	3		
$\{a,b,c,d\}$	4		

答案：略

问题 3　我们知道实数的“$+$”“$\times$”运算有如下运算律：

$a+b=b+a,a\times b=b\times a$，

$(a+b)+c=a+(b+c)$，

$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$，

$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$.

已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\},A=\{1,2,3,4,5,6\},B=\{4,5,6,7,8\}$，集合的“$\cup$”“$\cap$”运算是否也满足类似的运算律呢？你能通过画 Venn 图进行探究吗？

答案：略

问题 4　对于集合 A,B，我们把集合 $\{x \mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 叫做集合 A,B 的差集，记作 $A-B$.已知集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，$B=\{4,5,6,7,8\}$，求 $A-B$.

答案：略

「任务达标」

1.(多选)已知集合 $A=\{1,2,3\}$，则下列结论正确的是　(　　)

A.$\varnothing\subseteq A$　　B.$\{1,2\}\in A$

C.$A\subseteq \mathbf{N}^*$　　D.$1\subseteq A$

AC　**解析**：因为 $A=\{1,2,3\}$，所以对于 A，$\varnothing\subseteq A$，故 A 正确；对于 B，$\{1,2\}\subseteq A$，故 B 错误；对于 C，$A\subseteq\mathbf{N}^*$，故 C 正确；对于 D，$1\in A$，故 D 错误.

2.已知集合 $A=\{x \mid 0\leqslant x<4$ 且 $x\in\mathbf{N}\}$，则 A 的真子集的个数是　(　　)

A.16　　B.15　　C.7　　D.8

B　**解析**：因为 $A=\{0,1,2,3\}$，所以集合 A 的真子集的个数为 $2^4-1=15$.

3.已知集合 $A=\{x|x<-1$ 或 $x>5\}$，$B=\{x|a\leqslant x<a+4\}$，且 $B\subseteq A$，则实数 a 的取值范围为　(　　)

A.$a<-5$ 或 $a>5$　　B.$a<-5$ 或 $a\geqslant5$

C.$a\leqslant-5$ 或 $a\geqslant5$　　D.$a\leqslant-5$ 或 $a>5$

D　**解析**：因为 $A=\{x|x<-1$ 或 $x>5\}$，$B=\{x|a\leqslant x<a+4\}$，且 $B\subseteq A$，所以 $a+4\leqslant-1$ 或 $a>5$，解得 $a\leqslant-5$ 或 $a>5$.

4.设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|x<-4$ 或 $x\geqslant3\}$，$B=\{x|-1<x<6\}$，则集合 $\{x|-1<x<3\}=$　(　　)

A.$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$　　B.$\complement_U(A\cup B)$

C.$(\complement_U A)\cap B$　　D.$A\cap B$

C　**解析**：由题意可得，$\complement_U A=\{x|-4\leqslant x<3\}$，则 $(\complement_U A)\cap B=\{x|-1<x<3\}$.

5.已知集合 $M=\{x|x\leqslant0$ 或 $x\geqslant2\}$，$N=\{x|m<x<n\}$，若 $M\cap N=\varnothing$，$M\cup N=\mathbf{R}$，则 $m+n=$　(　　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

B　**解析**：因为 $M=\{x|x\leqslant0$ 或 $x\geqslant2\}$，$N=\{x|m<x<n\}$，$M\cap N=\varnothing$，$M\cup N=\mathbf{R}$，所以 $N=\{x|0<x<2\}$，所以 $m=0$，$n=2$，$m+n=2$.

6.党的二十大报告指出：“全面提高人才自主培养质量，着力造就拔尖创新人才，聚天下英才而用之”.高一某班学生为提高创新能力，积极参与研究性学习，已知该班共有 40 人，其中参加 A 课题的学生有 23 名，参加 B 课题的学生有 25 名(并非每个学生必须参加某个课题)，则在该班学生中，同时参加两个课题的最多有________名学生，最少有________名学生.

23　8　**解析**：当参加 A 课题的学生，同时也参加 B 课题，此时同时参加 A 课题和 B 课题的人数最多，最多 23 人.当每个学生至少参加一个课题时，此时同时参加 A 课题和 B 课题的人数最少，最少有 $23+25-40=8$(人).

【规律方法】

集合运算问题的关注点

(1)运算口诀：交集元素仔细找，属于 A 且属于 B；并集元素勿遗漏，切记重复仅取一；全集 U 是大范围，去掉 U 中 A 元素，剩余元素成补集.

(2)数形结合法：利用 Venn 图或数轴解决集合的运算问题，能将复杂问题直观化.

注意：要注意端点值是否符合题意，以免增解或漏解.

任务二　常用逻辑用语

笛卡儿说过：“要想获得真理和知识，唯有两件武器，那就是清晰的直觉和严格的演绎.”同样，在数学研究过程中，解决问题需要进行数学推理，推理过程要用数学语言表达，需要使用一些基本用语.例如，“如果”“那么”“因为”“任意”“存在”“即”……

问题 1　由初中数学知识可知，“四边形有 3 个角是直角”是“四边形是矩形”的一个充分条件，“四边形是矩形”的充分条件唯一吗？

答案：略

问题 2　“四边形的对角线相等”是“四边形是矩形”的什么条件？你能再写出几个相似的条件吗？

答案：略

问题 3　市场上卖鸡蛋的老太太说：“我篮子里的每一个鸡蛋都是好的.”以此为例，举出几个生活中的全称量词命题或存在量词命题，并写出这些命题的否定.

答案：略

问题 4　以“若 $x\geqslant2$，则 $x>1$，反之不然”为例，探讨逻辑用语和集合的联系.

答案：略

「任务达标」

1.(2022·天津)“x 为整数”是“$2x+1$ 为整数”的(　　)

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

A　**解析**：当 x 为整数时，$2x+1$ 必为整数；

当 $2x+1$ 为整数时，x 不一定为整数，例如当 $2x+1=2$ 时，$x=\frac{1}{2}$.

所以“x 为整数”是“$2x+1$ 为整数”的充分不必要条件.

2.已知四边形 $ABCD$ 的两条对角线分别为 AC，BD，则“四边形 $ABCD$ 为菱形”是“$AC\perp BD$”的（　　）

A.充分不必要条件

B.充要条件

C.必要不充分条件

D.既不充分也不必要条件

A　**解析**：若四边形 $ABCD$ 为菱形，则 $AC\perp BD$；反之，若 $AC\perp BD$，则四边形 $ABCD$ 不一定是菱形.

故为充分不必要条件.故选 A.

3.命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$|x|\geqslant 0$”的否定是（　　）

A.$\exists x\in\mathbf{R}$，$|x|\leqslant 0$

B.$\exists x\in\mathbf{R}$，$|x|<0$

C.$\forall x\in\mathbf{R}$，$|x|<0$

D.$\forall x\in\mathbf{R}$，$|x|\leqslant 0$

B　**解析**：该命题的否定为“$\exists x\in\mathbf{R}$，$|x|<0$”.故选 B.

4.若“$-1<x<1$”是“$-1<x-m<1$”的充要条件，则实数 m 的值是________.

0　**解析**：$-1<x-m<1\Rightarrow m-1<x<m+1$，

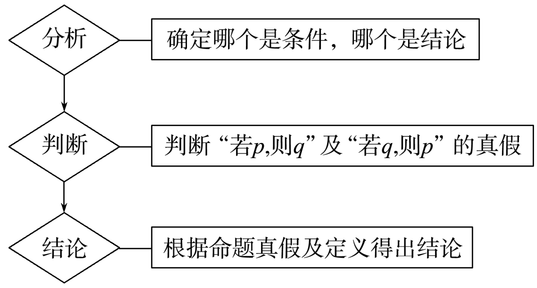
则 $\{x|-1<x<1\}=\{x|m-1<x<m+1\}$，

即 $\begin{cases}m-1=-1,\\ m+1=1,\end{cases}$ 解得 $m=0$.

【规律方法】

1.充分条件与必要条件的判断方法

(1)定义法



(2)集合法：先将条件转化为集合，再利用集合之间的包含关系加以判断.用集合法判断时，要尽可能利用 Venn 图、数轴等帮助分析，图形形象、直观，能简化解题过程，降低思维难度.

2.全称量词命题和存在量词命题的否定要把握两点：一是改量词，二是否结论.

第一章综合检测

（时间：120 分钟，分值：150 分）

一、单项选择题(本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分).

1.已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x|0\leqslant x<2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A.$\{-1,0,1\}$　　B.$\{0,1,2\}$

C.$\{0,1\}$　　D.$\{1,2\}$

C　**解析**：因为 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x|0\leqslant x<2\}$，所以 $A\cap B=\{0,1\}$.故选 C.

2.命题“对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $x^2>0$”的否定是（D）

A.对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $x^2\leqslant 0$

B.不存在 $x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2\leqslant 0$

C.存在 $x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2\geqslant 0$

D.存在 $x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2\leqslant 0$

3.设集合 $A=\{4,5,7,9\}$，$B=\{3,4,7,8,9\}$，若集合 $U=A\cup B$，则集合 $\complement_U(A\cap B)$ 中的元素共有（　　）

A.3 个　　B.4 个　　C.5 个　　D.6 个

A　**解析**：$A\cup B=\{3,4,5,7,8,9\}$，$A\cap B=\{4,7,9\}$ 所以 $\complement_U(A\cap B)=\{3,5,8\}$.

4.若集合 $A=\{(x,y)|y=3x-2\}$，$B=\{(x,y)|y=x+4\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A.$\{3,7\}$　　B.$\{(3,7)\}$

C.$(3,7)$　　D.$\{x=3,y=7\}$

B　**解析**：联立集合 A 与集合 B 中方程得 $\begin{cases}y=3x-2,\\ y=x+4,\end{cases}$

消去 y 得 $3x-2=x+4$，解得 $x=3$.

把 $x=3$ 代入方程 $y=3x-2$ 得 $y=9-2=7$，

所以方程组的解为 $\begin{cases}x=3,\\ y=7.\end{cases}$

因为 $A=\{(x,y)|y=3x-2\}$，$B=\{(x,y)|y=x+4\}$，

所以 $A\cap B=\{(3,7)\}$.故选 B.

5.对任意实数 a，b，c，给出下列命题，其中真命题是（　　）

A.“$a=b$”是“$ac=bc$”的充要条件

B.“$a>b$”是“$a^2>b^2$”的充分条件

C.“$a<5$”是“$a<3$”的必要条件

D.“$a+5$ 是无理数”是“a 是无理数”的充分不必要

条件

C　**解析**:$a=b\Rightarrow ac=bc$,当 $c=0$,$ac=bc$ 时,a 与 b 不一定相等,A 是假命题;

若 $a=1>b=-2$ 时,充分性不成立,B 是假命题;

$a<5$ 不一定 $a<3$,但 $a<3$ 必有 $a<5$,所以“$a<5$”是“$a<3$”的必要条件,C 是真命题;

$a+5$ 是无理数,则 a 是无理数,若 a 是无理数,则 $a+5$ 是无理数,

所以“$a+5$ 是无理数”是“a 是无理数”的充要条件,D 是假命题.故选 C.

6.集合$\{y\in\mathbf{N}|y=-x^2+6,x\in\mathbf{N}\}$的真子集的个数是　(　　)

A.9　　B.8　　C.7　　D.6

C　**解析**:$x=0$ 时,$y=6$;$x=1$ 时,$y=5$;$x=2$ 时,$y=2$;$x=3$ 时,$y=-3$.

所以$\{y\in\mathbf{N}|y=-x^2+6,x\in\mathbf{N}\}=\{2,5,6\}$共 3 个元素,其真子集的个数为 $2^3-1=7$.故选 C.

7.已知集合 $A=\{x|ax^2-3x+2=0\}$的子集只有两个,则实数 a 的值为　(　　)

A.$\frac{9}{8}$　　B.0

C.$\frac{9}{8}$或 0　　D.不确定

C　**解析**:由集合 A 的子集有两个,知集合 A 中有一个元素.

当 $a=0$ 时,$A=\{x|ax^2-3x+2=0\}=\{x|-3x+2=0\}=\left\{\frac{2}{3}\right\}$,符合题意;

当 $a\neq0$ 时,$ax^2-3x+2=0$ 有一个解,则 $\Delta=9-8a=0$,解得 $a=\frac{9}{8}$.

综上,$a=0$ 或 $a=\frac{9}{8}$.故选 C.

8.已知实数 x,y,$p:x+y\neq8$,$q:x\neq2$ 或 $y\neq6$,那么 p 是 q 的　(　　)

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

A　**解析**:设 $U=\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$.

命题 $p:x+y\neq8$,对应集合为 $A=\{(x,y)|x+y\neq8\}$,

命题 $q:x\neq2$ 或 $y\neq6$,对应集合为 $B=\{(x,y)|x\neq2$ 或 $x\neq6\}$,

p 的否定:$x+y=8$,对应集合为 $\complement_UA=\{(x,y)|x+y=8\}$,

q 的否定:$x=2$ 且 $y=6$,对应集合为 $\complement_UB=\{(x,y)|x=2$ 且 $y=6\}=\{(2,6)\}$,

显然 $\complement_UB\subsetneqq\complement_UA$,所以 $A\subsetneqq B$,即 p 是 q 的充分不必要条件.

二、多项选择题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分).

9.已知 $A\subseteq B$,$A\subseteq C$,$B=\{2,0,1,8\}$,$C=\{1,9,3,8\}$,则 A 可以是　(　　)

A.$\{1,8\}$　　B.$\{2,3\}$　　C.$\{1\}$　　D.$\{2\}$

AC　**解析**:因为 $B=\{2,0,1,8\}$,$C=\{1,9,3,8\}$,所以 $B\cap C=\{1,8\}$.因为 $A\subseteq B$,$A\subseteq C$,所以 $A\subseteq(B\cap C)\Rightarrow A\subseteq\{1,8\}$.故选 AC.

10.设非空集合 P,Q 满足 $P\cap Q=Q$,且 $P\neq Q$,则　(　　)

A.$\forall x\in Q$,有 $x\in P$

B.$\exists x\notin P$,使得 $x\in Q$

C.$\exists x\notin Q$,使得 $x\in P$

D.$\forall x\notin Q$,有 $x\notin P$

AC　**解析**:因为 $P\cap Q=Q$,且 $P\neq Q$,所以 Q 是 P 的真子集.

所以 $\forall x\in Q$,有 $x\in P$;$\exists x\notin Q$,使得 $x\in P$,A,C 正确.

$\forall x\notin P$,$x\notin Q$;$\forall x\notin Q$,有 $x\notin P$ 或 $x\in P$,B,D 错误.故选 AC.

11.下列命题正确的是　(　　)

A.命题“$\exists x\in\mathbf{R}$,$x^2+x+1\geqslant0$”的否定是“$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2+x+1<0$”

B.$a+b=0$ 的充要条件是$\frac{b}{a}=-1$

C.$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2>0$

D.$a>1$,$b>1$ 是 $ab>1$ 的充分条件

AD　**解析**:因为 $\exists x\in\mathbf{R}$,$x^2+x+1\geqslant0$ 的否定是 $\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2+x+1<0$,所以 A 正确;

当 $a=b=0$ 时,满足 $a+b=0$,但$\frac{a}{b}=-1$ 不成立,所以 B 错误;

当 $x=0$ 时,$x^2=0$,所以 C 错误;

当 $a>1$,$b>1$ 时,则 $ab>1$,所以充分性成立,所以 D 正确.

12.设集合 $A=\{x|x^2-(a+2)x+2a=0\}$,$B=\{x|x^2-5x+4=0\}$,集合 $A\cup B$ 中所有元素之和为 7,则实数 a 的值可以为　(　　)

A.0　　B.1　　C.2　　D.4

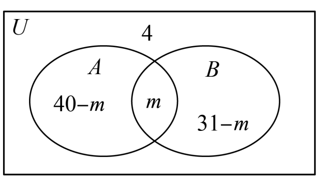
ABCD　**解析**:由 $x^2-(a+2)x+2a=(x-2)(x$

$-a)=0$,解得 $x=2$ 或 $x=a$.所以 $A=\{2,a\}$.由 $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)=0$,解得 $x=1$ 或 $x=4$.所以 $B=\{1,4\}$.当 $a=0$ 时,$A=\{0,2\}$,$B=\{1,4\}$,$A\cup B=\{0,1,2,4\}$,其元素之和为 $0+1+2+4=7$;当 $a=1$ 时,$A=\{1,2\}$,$B=\{1,4\}$,$A\cup B=\{1,2,4\}$,其元素之和为 $1+2+4=7$;当 $a=2$ 时,$A=\{2\}$,$B=\{1,4\}$,$A\cup B=\{1,2,4\}$,其元素之和为 $1+2+4=7$;当 $a=4$ 时,$A=\{2,4\}$,$B=\{1,4\}$,$A\cup B=\{1,2,4\}$,其元素之和为 $1+2+4=7$.所以实数 a 的取值集合为 $\{0,1,2,4\}$.

三、填空题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分).

得分　**13.**某班 50 名学生做物理、化学两种实验,已知物理实验做成功的有 40 人,化学实验做成功的有 31 人,两种实验都没做成功的有 4 人,则这两种实验都做成功的有________人.

25　**解析**:根据题意,可设 $A=\{x\mid x$ 是做成功物理实验的学生$\}$,$B=\{x\mid x$ 是做成功化学实验的学生$\}$,并将两种实验都做成功的学生人数记为 m,如图.



所以 $(40-m)+m+(31-m)+4=50$,解得 $m=25$.故两种实验都做成功的学生为 25 人.

得分　**14.**若命题“$\forall x\in\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$,使 $x-a\geqslant 0$”是真命题,则 a 的取值范围是________.

$\{a\mid a\leqslant 1\}$　**解析**:由题意知,$a\leqslant x$ 在 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时恒成立,所以 $a\leqslant 1$.

得分　**15.**中国古代数学专著《孙子算经》中有一问题“今有三女,长女五日一归,中女四日一归,少女三日一归,问:三女几何日相会?”根据此问题可知,三女前三次相会经过的天数组成的集合用列举法可表示为________,三女每次相会经过的天数组成的集合用描述法可表示为________.

$\{60,120,180\}$　$\{x\mid x=60n,n\in\mathbf{N}^*\}$　**解析**:因为三女相会经过的天数是 5,4,3 的公倍数,且它们的最小公倍数为 60,所以三女前三次相会经过的天数组成的集合用列举法可表示为 $\{60,120,180\}$.三女每次相会经过的天数组成的集合用描述法可表示为 $\{x\mid x=60n,n\in\mathbf{N}^*\}$.

得分　**16.**设集合 $S=\{A_0,A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\}$,在 S 中定义运算“$\oplus$”为 $A_i\oplus A_j=A_k$,其中 k 为 $i+j$ 被 4 除的余数,$i,j\in\{0,1,2,3,4,5\}$,则满足关系式 $(x\oplus x)\oplus A_2=A_0$ 的 $x(x\in S)$ 的个数为________.

3　**解析**:当 $x=A_0$ 时,$(x\oplus x)\oplus A_2=(A_0\oplus A_0)\oplus A_2=A_0\oplus A_2=A_2\neq A_0$;

当 $x=A_1$ 时,$(x\oplus x)\oplus A_2=(A_1\oplus A_1)\oplus A_2=A_2\oplus A_2=A_0$;

当 $x=A_2$ 时,$(x\oplus x)\oplus A_2=(A_2\oplus A_2)\oplus A_2=A_0\oplus A_2=A_2\neq A_0$;

当 $x=A_3$ 时,$(x\oplus x)\oplus A_2=(A_3\oplus A_3)\oplus A_2=A_2\oplus A_2=A_0$;

当 $x=A_4$ 时,$(x\oplus x)\oplus A_2=(A_4\oplus A_4)\oplus A_2=A_0\oplus A_2=A_2\neq A_0$;

当 $x=A_5$ 时,$(x\oplus x)\oplus A_2=(A_5\oplus A_5)\oplus A_2=A_2\oplus A_2=A_0$.

所以满足关系式 $(x\oplus x)\oplus A_2=A_0$ 的 $x(x\in S)$ 的个数为 3.

四、解答题(本题共 6 小题,共 70 分).

得分　**17.**(10 分)判断下列命题是全称量词命题还是存在量词命题,并写出它们的否定.

(1)对任意 $x\in\mathbf{R}$,$x^2+x+1=0$ 都成立;

(2)$\exists x\in\mathbf{R}$,$(x+1)^2\leqslant 0$.

解:(1)由于命题中含有全称量词“任意的”,因而是全称量词命题.

命题的否定:$\exists x\in\mathbf{R}$,使 $x^2+x+1\neq 0$ 成立.

(2)由于命题中含有“$\exists$”,因而是存在量词命题.

命题的否定:$\forall x\in\mathbf{R}$,$(x+1)^2>0$.

得分　**18.**(12 分)已知集合 $A=\{x\mid 3\leqslant x<10\}$,$B=\{x\mid 1<3x-5<16\}$.

(1)求 $A\cup B$;

(2)求 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B$.

解:(1)易知 $B=\{x\mid 2<x<7\}$,

所以 $A\cup B=\{x\mid 2<x<10\}$.

(2)$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x\mid x<3$ 或 $x\geqslant 10\}$,

$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{x\mid 2<x<3\}$.

得分　**19.**(12 分)若集合 $A=\{x\mid x>-2\}$,$B=\{x\mid bx>1\}$,其中 b 为实数且 $b\neq 0$,试写出:

(1)$A\cup B=\mathbf{R}$ 的一个充要条件;

(2)$A\cup B=\mathbf{R}$ 的一个必要不充分条件;

(3)$A\cup B=\mathbf{R}$ 的一个充分不必要条件.

解:若 $b>0$,则集合 $B=\left\{x\,\middle|\,x>\dfrac{1}{b}\right\}$;若 $b<0$,则集

合$B=\left\{x\left|x<\dfrac{1}{b}\right.\right\}$.

(1)若 $A\cup B=\mathbf{R}$,则必有$\begin{cases}b<0,\\ \dfrac{1}{b}>-2,\end{cases}$即$\begin{cases}b<0,\\ b<-\dfrac{1}{2},\end{cases}$

所以 $b<-\dfrac{1}{2}$.

故 $A\cup B=\mathbf{R}$ 的一个充要条件是 $b<-\dfrac{1}{2}$.

(2)由(1)知 $A\cup B=\mathbf{R}$ 的一个充要条件是 $b<-\dfrac{1}{2}$.

所以 $A\cup B=\mathbf{R}$ 的一个必要不充分条件可以是 $b<0$.

(3)由(1)知 $A\cup B=\mathbf{R}$ 的一个充要条件是 $b<-\dfrac{1}{2}$.

所以 $A\cup B=\mathbf{R}$ 的一个充分不必要条件可以是 $b<-1$.

得分	

20.(12 分)已知集合 $A=\{x|2<x<4\}$,$B=\{x|a<x<3a\}$,且 $B\neq\varnothing$.

(1)若"$x\in A$"是"$x\in B$"的充分条件,求 a 的取值范围;

(2)若 $A\cap B=\varnothing$,求 a 的取值范围.

解:(1)因为"$x\in A$"是"$x\in B$"的充分条件,所以 $A\subseteq B$.

所以$\begin{cases}a\leqslant 2,\\ 3a\geqslant 4,\\ a<3a,\end{cases}$解得$\dfrac{4}{3}\leqslant a\leqslant 2$.

故 a 的取值范围为$\left\{a\left|\dfrac{4}{3}\leqslant a\leqslant 2\right.\right\}$.

(2)由 $B=\{x|a<x<3a\}$且 $B\neq\varnothing$,得 $a<3a$.

所以 $a>0$.

若 $A\cap B=\varnothing$,则有 $a\geqslant 4$ 或 $3a\leqslant 2$,

所以 a 的取值范围为$\left\{a\left|0<a\leqslant\dfrac{2}{3}\text{或 }a\geqslant 4\right.\right\}$.

得分	

21.(12 分)已知集合 $A=\{x|-3<x<5\}$,$B=\{x|-4\leqslant x\leqslant 3\}$,$C=\{x|2x-3a-1>0\}$,求 $C\cap(A\cup B)$.

解:因为 $A=\{x|-3<x<5\}$,$B=\{x|-4\leqslant x\leqslant 3\}$,

所以 $A\cup B=\{x|-4\leqslant x<5\}$.

因为 $2x-3a-1>0$,

所以 $x>\dfrac{3a+1}{2}$.

当$\dfrac{3a+1}{2}<-4$,即 $a<-3$ 时,$C\cap(A\cup B)=\{x|-4\leqslant x<5\}$;

当$-4\leqslant\dfrac{3a+1}{2}<5$,即$-3\leqslant a<3$ 时,$C\cap(A\cup B)=\left\{x\left|\dfrac{3a+1}{2}<x<5\right.\right\}$;

当$\dfrac{3a+1}{2}\geqslant 5$,即 $a\geqslant 3$ 时,$C\cap(A\cup B)=\varnothing$.

综上,当 $a<-3$ 时,$C\cap(A\cup B)=\{x|-4\leqslant x<5\}$;

当 $-3\leqslant a<3$ 时,$C\cap(A\cup B)=\left\{x\left|\dfrac{3a+1}{2}<x<5\right.\right\}$;

当 $a\geqslant 3$ 时,$C\cap(A\cup B)=\varnothing$.

得分	

22.(12 分)给出如下三种条件:①充分不必要条件;②必要不充分条件;③充要条件.

请从中选择一种条件补充到下面的横线上并进行解答.

已知集合 $P=\{x|1\leqslant x\leqslant 4\}$,$S=\{x|1-m\leqslant x<1+m\}$,是否存在实数 m 使"$x\in P$"是"$x\in S$"的______.若存在,求出 m 的取值范围;若不存在,请说明理由.

解:若选择①,即"$x\in P$"是"$x\in S$"的充分不必要条件,则 $P\subsetneqq S$ 且 $S\neq\varnothing$,

所以$\begin{cases}1-m\leqslant 1,\\ 1+m>4,\\ 1-m<1+m.\end{cases}$　解得 $m>3$.

即实数 m 的取值范围为$\{m|m>3\}$.

若选择②,即"$x\in P$"是"$x\in S$"的必要不充分条件,则$S\subsetneqq P$.

当 $S=\varnothing$时,$1-m\geqslant 1+m$,解得 $m\leqslant 0$;

当 $S\neq\varnothing$ 时,$1-m<1+m$,解得 $m>0$,

且$\begin{cases}1-m\geqslant 1,\\ 1+m\leqslant 4,\end{cases}$

此时解集为$\varnothing$.

综上,实数 m 的取值范围是$\{m|m\leqslant 0\}$.

若选择③,即"$x\in P$"是"$x\in S$"的充要条件,则 $P=S$,显然不成立.

所以不存在实数 m,使"$x\in P$"是"$x\in S$"的充要条件.

第二章　一元二次函数、方程和不等式

2.1　等式性质与不等式性质

第1课时　不等关系与比较大小

学习任务目标

1.会用不等式(组)表示实际问题中的不等关系.
2.会用不同方法比较两个实数的大小.

问题式预习

知识点一　相等关系与不等关系

类似于多与少、大与小、长与短等问题,反映在数量关系上,就是相等与不等,相等用<u>等式</u>表示,不等用<u>不等式</u>表示.

[微训练]

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)不等式 $x\geqslant 2$ 的含义是 x 不小于2.　(　　)

√　**提示**:不等式 $x\geqslant 2$ 表示 $x>2$ 或 $x=2$,即 x 不小于2.

(2)若 $x^2=0$,则 $x=0$.　(　　)

√　**提示**:若 $x^2=0$,则 $x=0$,所以 $x\geqslant 0$ 成立.

(3)若 $x-1\leqslant 0$,则 $x<1$.　(　　)

×　**提示**:若 $x-1\leqslant 0$,则 $x<1$ 或者 $x=1$,即 $x\leqslant 1$.

2.大桥桥头立着的“限重40 t”的警示牌,是提示司机要安全通过该桥,应使车和货物的总质量 T(单位:t)满足关系　(　　)

A.$T<40$　　B.$T>40$

C.$T\leqslant 40$　　D.$T\geqslant 40$

C　**解析**:限重40吨是指不超过40吨,即 $T\leqslant 40$.

知识点二　实数 a,b 的大小比较

(1)画数轴比较法

设 a,b 是两个实数,它们在数轴上所对应的点分别是 A,B.那么,当点 A 在点 B 的左边时,$\underline{a<b}$;当点 A 在点 B 的右边时,$\underline{a>b}$.

(2)作差比较法

如果 $a-b$ 是正数,那么 $\underline{a>b}$;如果 $a-b$ 等于0,那么 $\underline{a=b}$;如果 $a-b$ 是负数,那么$\underline{a<b}$.反过来也对.

这个基本事实可以表示为

$\underline{a>b}\Leftrightarrow a-b>0$;

$a=b\Leftrightarrow\underline{a-b=0}$;

$a<b\Leftrightarrow\underline{a-b<0}$.

知识点三　重要不等式

一般地,$\forall a,b\in\mathbf{R}$,有 $a^2+b^2\underline{\geqslant}2ab$,当且仅当 $\underline{a=b}$ 时,等号成立.

[微训练]

1.设 $a=3x^2-x+1$,$b=2x^2+x$,$x\in\mathbf{R}$,则　(　　)

A.$a>b$　　B.$a<b$

C.$a\geqslant b$　　D.$a\leqslant b$

C　**解析**:因为 $a-b=x^2-2x+1=(x-1)^2\geqslant 0$,所以 $a\geqslant b$.

2.设 $m=2a^2+2a+1$,$n=(a+1)^2$,$a\in\mathbf{R}$,则 m,n 的大小关系是________.

$m\geqslant n$　**解析**:$m-n=2a^2+2a+1-(a+1)^2=a^2\geqslant 0$.

任务型课堂

任务一　用不等式(组)表示不等关系

1.下面表示“a 与 b 的差是非负数”的不等式正确的是　(　　)

A.$a-b>0$　　B.$a-b<0$

C.$a-b\geqslant 0$　　D.$a-b\leqslant 0$

C　**解析**:“a 与 b 的差是非负数”用不等式表示为 $a-b\geqslant 0$,故选C.

2.在进行工程爆破时，已知导火索燃烧的速度是0.5 cm/s，人跑开的速度是4 m/s，为了使点燃导火索的人能够在爆破时跑到100 m以外的安全区，导火索的长度x(cm)应该满足的不等式为（　　）

A.$4\times 2x\geqslant 100$　　B.$4\times 2x\leqslant 100$

C.$4\times 2x>100$　　D.$4\times 2x<100$

C　**解析**：当导火索的长度为x cm时，燃烧的时间为$2x$ s，人跑开的距离为$(4\times 2x)$m，为了保证安全，有$4\times 2x>100$.

3.用不等式表示下面的不等关系.

(1)a与b的积是非负数；

(2)m与n的和大于p；

(3)实数t大于16小于18.

解：(1)$ab\geqslant 0$.

(2)$m+n>p$.

(3)$16<t<18$.

【类题通法】

将不等关系表示成不等式(组)的思路

(1)读懂题意，找准不等式所涉及的量；

(2)用适当的不等号连接；

(3)同时成立的多个不等关系用不等式组表示.

任务二　用作差法比较大小

[探究活动]

探究：对于两个实数a，b，它们的大小关系有几种？怎样判断？

提示：对于两个实数a，b，它们的大小关系有3种：如果$a-b$是正数，那么$a>b$；如果$a-b$是负数，那么$a<b$；如果$a-b$等于零，那么$a=b$.

[评价活动]

1.若$a\neq 2$且$b\neq -1$，则$M=a^2+b^2-4a+2b$的值与-5的大小关系是（　　）

A.$M>-5$　　B.$M<-5$

C.$M=-5$　　D.不能确定

A　**解析**：$M=(a-2)^2+(b+1)^2-5>-5$.故选A.

2.若$a>b$，则a^2-ab________$ba-b^2$.（填“$>$”或“$<$”）

$>$　**解析**：因为$(a^2-ab)-(ba-b^2)=(a-b)^2$，$a>b$，所以$(a-b)^2>0$.所以$a^2-ab>ba-b^2$.

3.当$x\leqslant 1$时，比较$3x^3$与$3x^2-x+1$的大小.

解：$3x^3-(3x^2-x+1)=(3x^3-3x^2)+(x-1)$
$=3x^2(x-1)+(x-1)=(3x^2+1)(x-1)$.

因为$x\leqslant 1$，所以$x-1\leqslant 0$.

而$3x^2+1>0$，

所以$(3x^2+1)(x-1)\leqslant 0$，所以$3x^3\leqslant 3x^2-x+1$.

【类题通法】

用作差法比较大小的一般步骤

第一步，作差；

第二步，变形，常采用配方、因式分解等恒等变形手段，将“差”化成“和”或“积”；

第三步，定号，即确定结果是大于0，等于0，还是小于0(不确定的要分情况讨论)；

第四步，得结论.

说明：作差比较大小的关键是作差后的变形，可采用配方、因式分解、通分、有理化等手段进行恒等变形，最终要变成能够判断符号的形式(常数、几个平方和的形式或几个因式积的形式).注意变形过程中要保持等价性及正确性.

任务三　用作差法证明不等式

1.已知$a>0$，求证：$a+\dfrac{1}{a}\geqslant 2$.

证明：方法一：利用$a^2+b^2\geqslant 2ab$.

因为$a>0$，所以$a+\dfrac{1}{a}=(\sqrt{a})^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\geqslant 2\sqrt{a}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{a}}=2$.

当且仅当$a=1$时，等号成立.

方法二：因为$a+\dfrac{1}{a}-2=(\sqrt{a})^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2-2=\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\geqslant 0$，所以$a+\dfrac{1}{a}\geqslant 2$.

2.已知$a>b>1$，证明下列不等式.

(1)$\dfrac{b+1}{a+1}>\dfrac{b}{a}$；(2)$a+\dfrac{1}{a}>b+\dfrac{1}{b}$.

证明：(1)$\dfrac{b+1}{a+1}-\dfrac{b}{a}=\dfrac{a(b+1)-b(a+1)}{(a+1)a}=\dfrac{ab+a-ab-b}{(a+1)a}=\dfrac{a-b}{(a+1)a}$，

因为$a>b>1$，所以$a-b>0$，$a+1>0$，$a>0$，

所以$\dfrac{a-b}{(a+1)a}>0$，即$\dfrac{b+1}{a+1}>\dfrac{b}{a}$.

(2)$a+\dfrac{1}{a}-\left(b+\dfrac{1}{b}\right)=a-b+\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=a-b+\dfrac{b-a}{ab}=(a-b)\left(1-\dfrac{1}{ab}\right)=(a-b)\cdot\dfrac{ab-1}{ab}$，

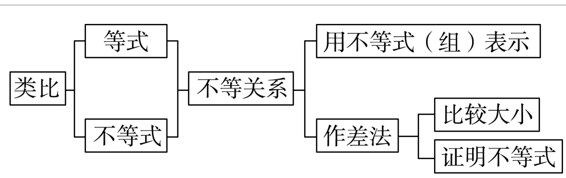
因为$a>b>1$，所以$a-b>0$，$ab>1$，

所以$(a-b)\cdot\dfrac{ab-1}{ab}>0$，即$a+\dfrac{1}{a}>b+\dfrac{1}{b}$.

【类题通法】

用作差法证明不等式的关键是对差式进行变形，通过配方、通分、分解因式等方法确定差式的符号，从而证明不等式.

提质归纳



课后素养评价(十)

基础性·能力运用

1.(多选)下列说法错误的是 (　　)

A.实数 x 不大于 2 000 可表示为“$x<2\ 000$”

B.小明的身高为 x cm,小华的身高为 y cm,则小明比小华矮表示为“$x>y$”

C.实数 x 的最小值是 a 可表示为“$x\geqslant a$”

D.实数 y 不超过 a 可表示为“$y\geqslant a$”

ABD　**解析**:对于 A,x 应满足 $x\leqslant 2\ 000$,故 A 错误;对于 B,x,y 应满足 $x<y$,故 B 错误;C 正确;对于 D,y 与 a 的关系可表示为 $y\leqslant a$,故 D 错误.

2.(多选)使 $m^3>m^2-m+1$ 成立的实数 m 的值可以为 (　　)

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

CD　**解析**:因为 $m^3-(m^2-m+1)=m^3-m^2+m-1=m^2(m-1)+(m-1)=(m-1)(m^2+1)>0$.所以 $m>1$.故选 CD.

3.雷电可使周围空气的温度达到是 28 000 ℃,比太阳表面温度的 4.5 倍还要高.设太阳表面的温度为 t ℃,那么 t 应满足的关系式是______.

$4.5t<28\ 000$　**解析**:由题意得,太阳表面温度的4.5倍小于 28 000 ℃,即 $4.5t<28\ 000$.

4.一个两位数,个位数字为 x,十位数字为 y,且这个两位数大于 70,用不等式表示为________.

$10y+x>70$　**解析**:该两位数可表示为 $10y+x$,所以 $10y+x>70$.

5.若 $x<y$,设 $M=x^2+2y^2$,$N=2xy+2y-1$,则 M,N 的大小关系是 $\underline{M>N}$.

6.若 $x\in\mathbf{R}$,则 $\frac{x}{1+x^2}$ 与 $\frac{1}{2}$ 的大小关系为____________.

$\frac{x}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{2}$　**解析**:因为 $\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{2}=\frac{2x-1-x^2}{2(1+x^2)}=\frac{-(x-1)^2}{2(1+x^2)}\leqslant 0$,所以 $\frac{x}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{2}$.

7.用一段长为 30 m 的篱笆围成一个一边靠墙的矩形菜园,墙长 18 m,要求菜园的面积不小于 216 m²,靠墙的一边长为 x m.试用不等式(组)表示其中的不等关系.

解:由于矩形菜园靠墙的一边长为 x m,而墙长为 18 m,所以 $0<x\leqslant 18$.

这时菜园的另一条边长为 $\frac{30-x}{2}=\left(15-\frac{x}{2}\right)$(m),

因此菜园的面积 $S=x\cdot\left(15-\frac{x}{2}\right)$.

依题意,有 $S\geqslant 216$,即 $x\left(15-\frac{x}{2}\right)\geqslant 216$.

故该题中的不等关系可用不等式组表示为 $\begin{cases}0<x\leqslant 18,\\ x\left(15-\frac{x}{2}\right)\geqslant 216.\end{cases}$

8.甲、乙两家旅行社对家庭旅游提出优惠方案.甲旅行社提出:一人按原价收费,其余人可享受五五折优惠;乙旅行社提出:所有人按七五折优惠.如果这两家旅行社的原价相同,那么选择哪家旅行社更优惠?

解:设某家庭共有 $(x+1)$ 人参加旅游,甲、乙两旅行社收费总额分别为 $y_甲$,$y_乙$,原价为 a 元,则 $y_甲=a+0.55ax$,$y_乙=0.75(x+1)a$.

$y_甲-y_乙=(a+0.55ax)-0.75(x+1)a$

$=0.2a(1.25-x)$.

当 $x>1.25(x\in\mathbf{N}^*)$ 时,$y_甲<y_乙$;

当 $x<1.25(x\in\mathbf{N}^*)$,即 $x=1$ 时,$y_甲>y_乙$.

因此,两口之家,选择乙旅行社更优惠,三口之家或多于三口的家庭,选择甲旅行社更优惠.

综合性·创新提升

1.(多选)若 $x>1>y$,则下列不等式一定成立的有 (　　)

A.$x-1>1-y$　　B.$x-1>y-1$

C.$x-y>1-y$　　D.$1-x>y-x$

BCD　**解析**:$x-1-(1-y)=x+y-2$,无法判断它与 0 的大小关系,取 $x=2$,$y=-1$ 得 $x-1-(1-y)<0$,故选项 A 中不等式不一定成立;$x-1-(y-1)=x-y>0$,故选项 B 中不等式一定成立;$x-y-(1-y)=x-1>0$,故选项 C 中不等式一定成立;$1-x-(y-x)=1-y>0$,故选项 D 中不等式一定成立.

2. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，定义运算“$\otimes$”和“$\oplus$”如下：$a\otimes b=\begin{cases}a,a\leqslant b,\\b,a>b,\end{cases}$ $a\oplus b=\begin{cases}b,a\leqslant b,\\a,a>b.\end{cases}$ 若 $m\otimes n\geqslant 2$，$p\oplus q\leqslant 2$，则（　　）

A. $mn\geqslant 4$ 且 $p+q\leqslant 4$

B. $m+n\geqslant 4$ 且 $pq\leqslant 4$

C. $mn\leqslant 4$ 且 $p+q\geqslant 4$

D. $m+n\leqslant 4$ 且 $pq\leqslant 4$

A　**解析**：由 $m\otimes n\geqslant 2$ 知，m 与 n 中的较小值大于或等于 2；由 $p\oplus q\leqslant 2$ 知，p 与 q 中的较大值小于或等于 2. 所以 $mn\geqslant 4$ 且 $p+q\leqslant 4$.

3. 已知 $c>1$，且 $x=\sqrt{c+1}-\sqrt{c}$，$y=\sqrt{c}-\sqrt{c-1}$，则 x,y 之间的大小关系是（　　）

A. $x>y$

B. $x=y$

C. $x<y$

D. x,y 的大小关系由 c 确定

C　**解析**：由题意 $x>0,y>0$，因为 $\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{c+1}-\sqrt{c}}{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}}=\frac{\sqrt{c}+\sqrt{c-1}}{\sqrt{c+1}+\sqrt{c}}<1$，所以 $x<y$.

4. 已知实数 a,b,c 满足：$b+c=6-4a+3a^2$，$c-b=4-4a+a^2$，则 a,b,c 的大小关系是（　　）

A. $c\geqslant b>a$　　B. $a>c\geqslant b$

C. $c>b>a$　　D. $a>c>b$

A　**解析**：因为 $c-b=4-4a+a^2=(a-2)^2\geqslant 0$，所以 $c\geqslant b$. 又 $b+c=6-4a+3a^2$，

所以 $2b=2+2a^2$，所以 $b=a^2+1$，

所以 $b-a=a^2-a+1=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，

所以 $b>a$，所以 $c\geqslant b>a$.

5. 某公司有 20 名技术人员，计划生产 A，B 两类电子器件共 50 件，生产每件电子器件所需人员数和预计产值如下：

产品种类	每件需要人员数	每件产值
A	$\frac{1}{2}$	7.5 万元
B	$\frac{1}{3}$	6 万元

现制订计划欲使总产值最高，则 A 类产品应生产 <u>20</u> 件，最高产值为 <u>330</u> 万元.

6. 已知 a 为实数，则 $(a+3)(a-5)$________$(a+2)(a-4)$.（填“$>$”“$<$”或“$=$”）

$<$　**解析**：因为 $(a+3)(a-5)-(a+2)(a-4)=(a^2-2a-15)-(a^2-2a-8)=-7<0$，所以 $(a+3)(a-5)<(a+2)(a-4)$.

7. 甲、乙两车从 A 地沿同一路线到达 B 地，甲车一半时间的速度为 a，另一半时间的速度为 b；乙车以速度 a 行驶一半路程，以速度 b 行驶另一半路程. 若 $a\neq b$，试判断哪辆车先到达 B 地.

解：设 A，B 两地路程为 $2s$，甲车从 A 地到 B 地所用时间为 t_1，则 $\frac{t_1}{2}a+\frac{t_1}{2}b=2s$，即 $t_1=\frac{4s}{a+b}$.

设乙车从 A 地到 B 地所用的时间为 t_2，则 $t_2=\frac{s}{a}+\frac{s}{b}$.

因为 $a\neq b,a>0,b>0,s>0$，

所以 $t_1-t_2=\frac{4s}{a+b}-\frac{s}{a}-\frac{s}{b}$

$=\frac{4sab-sb(a+b)-sa(a+b)}{ab(a+b)}$

$=\frac{-s(a-b)^2}{ab(a+b)}<0$.

所以 $t_1<t_2$，即甲车先到达 B 地.

8. 设 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq -1$，比较 $\frac{1}{1+x}$ 与 $1-x$ 的大小.

解：$\frac{1}{1+x}-(1-x)=\frac{1-(1-x^2)}{1+x}=\frac{x^2}{1+x}$.

当 $x=0$ 时，$\frac{1}{1+x}=1-x$.

当 $1+x<0$，即 $x<-1$ 时，$\frac{x^2}{1+x}<0$，所以 $\frac{1}{1+x}<1-x$.

当 $1+x>0$ 且 $x\neq 0$，即 $-1<x<0$ 或 $x>0$ 时，$\frac{x^2}{1+x}>0$，所以 $\frac{1}{1+x}>1-x$.

综上，当 $x<-1$ 时，$\frac{1}{1+x}<1-x$；

当 $x=0$ 时，$\frac{1}{1+x}=1-x$；

当 $-1<x<0$ 或 $x>0$ 时，$\frac{1}{1+x}>1-x$.

第 2 课时　不等式的性质

学习任务目标

1.梳理等式的性质，掌握不等式的性质.

2.会用不等式的性质解决有关问题.

问题式预习

知识点　不等式的性质

(1)性质 1：$a>b\Leftrightarrow \underline{b<a}$.

(2)性质 2：$a>b$，$b>c\Rightarrow \underline{a>c}$.

(3)性质 3：$a>b\Leftrightarrow a+c>\underline{b+c}$.

(4)性质 4：$a>b$，$c>0\Rightarrow ac>\underline{bc}$；

$a>b$，$c<0\Rightarrow ac\underline{<}bc$.

(5)性质 5：$a>b$，$c>d\Rightarrow a+c\underline{>}b+d$.

(6)性质 6：$a>b>0$，$c>d>0\Rightarrow ac\underline{>}bd$.

(7)性质 7：$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N},n\geqslant 2)$.

[微训练]

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)若 $a>b$，则 $ac>bc$.　　(　　)

×　**提示**：由不等式的可乘性知，当不等式两端同乘一个正数时，不等号方向不变.因此，若 $a>b$，则 $ac>bc$ 不一定成立.

(2)同向不等式相加与相乘的条件是一致的.　　(　　)

×　**提示**：相乘需要看是否满足 $\begin{cases}a>b>0,\\c>d>0,\end{cases}$ 而相加与正、负和零均无关系.

(3)设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a>b$，则 $a^3>b^3$.　　(　　)

√　**提示**：符合不等式的可乘方性.

(4)若 $a+c>b+d$，则 $a>b$，$c>d$.　　(　　)

×　**提示**：取 $a=4$，$c=5$，$b=6$，$d=2$，满足 $a+c>b+d$，但不满足 $a>b$，故此说法错误.

2.若 $a>b$，$c>d$，则下列不等式不一定成立的是　(B)

A.$a-b>d-c$　　B.$a+d>b+c$

C.$a-c>b-c$　　D.$a-c<a-d$

任务型课堂

任务一　利用不等式的性质判断真假

1.已知 $a>b$，$c>d$，且 c,d 均不为 0，那么下列不等式一定成立的是　　(　　)

A.$ad>bc$　　B.$ac>bd$

C.$a-c>b-d$　　D.$a+c>b+d$

D　**解析**：令 $a=2$，$b=-2$，$c=3$，$d=-6$，可排除 A，B，C.

由不等式的性质知，D 一定成立.

2.若 $a<b<0$，则下列结论正确的是　　(　　)

A.$a^2<b^2$　　B.$ab<b^2$

C.$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　　D.$ac^2>bc^2$

C　**解析**：对于 A 选项，当 $a=-2$，$b=-1$ 时，不成立；对于 B 选项，等价于 $a>b$，不成立；对于 C 选项，$\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}<0$，故 C 选项成立；对于 D 选项，当 $c=0$ 时，不成立.

3.下列命题正确的是　　(　　)

A.若 $ac>bc$，则 $a>b$

B.若 $a^2>b^2$，则 $a>b$

C.若 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$，则 $a<b$

D.若 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$，则 $a<b$

D　**解析**：对于 A，若 $c<0$，其不成立；对于 B，若 a，b 均小于 0 或 $a<0$，其不成立；对于 C，若 $a>0$，$b<0$，其不成立；对于 D，其中 $a\geqslant 0$，$b>0$，平方后显然有 $a<b$.

【类题通法】

判断不等式是否成立的技巧

(1)注意不等式成立的条件，不要弱化条件.

(2)解决有关不等式的选择题时，可采用特殊值法进行排除，注意取值要遵循以下原则：一是满足题设条件；二是取值要简单，便于验证计算.

任务二　利用不等式的性质证明不等式

1.已知 $a<b<0$，求证：$\dfrac{b}{a}<\dfrac{a}{b}$.

证明：因为 $a<b<0$，所以 $\dfrac{1}{ab}>0$.

所以 $a\cdot\frac{1}{ab}<b\cdot\frac{1}{ab}<0$，即 $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<0$.

又因为 $-\frac{1}{b}>-\frac{1}{a}>0$，$-a>-b>0$，

所以 $\left(-\frac{1}{b}\right)(-a)>\left(-\frac{1}{a}\right)(-b)$，即 $\frac{b}{a}<\frac{a}{b}$.

2. 若 $a>b>0$，$c<d<0$，$e<0$，求证：$\frac{e}{(a-c)^2}>\frac{e}{(b-d)^2}$.

证明：因为 $c<d<0$，所以 $-c>-d>0$.

又因为 $a>b>0$，所以 $a-c>b-d>0$.

所以 $(a-c)^2>(b-d)^2>0$.

两边同乘 $\frac{1}{(a-c)^2(b-d)^2}$，得 $\frac{1}{(a-c)^2}<\frac{1}{(b-d)^2}$.

又 $e<0$，所以 $\frac{e}{(a-c)^2}>\frac{e}{(b-d)^2}$.

【类题通法】

利用不等式的性质证明不等式的注意事项

(1)利用不等式的性质及其推论可以证明一些不等式.解决此类问题一定要在理解的基础上，记准、记熟不等式的性质并注意在解题时灵活准确地加以应用.

(2)根据不等式的性质进行推导时，应注意紧扣不等式成立的条件，且不可省略条件或跳步推导，更不能随意构造性质与法则.

任务三　利用不等式的性质求取值范围

[探究活动]

探究1：小明同学解决某问题时进行如下变形：

因为 $2<b<3$，所以 $\frac{1}{3}<\frac{1}{b}<\frac{1}{2}$.

又因为 $-6<a<8$，所以 $-2<\frac{a}{b}<4$.

你认为正确吗？为什么？

提示：不正确.因为不等式两边同乘一个正数，不等号的方向不变，但同乘一个负数，不等号方向改变.在本题中只知道 $-6<a<8$，不明确 a 值的正负.故不能将 $\frac{1}{3}<\frac{1}{b}<\frac{1}{2}$ 与 $-6<a<8$ 两边分别相乘，只有两边都是正数的同向不等式才能分别相乘.

探究2：由 $-6<a<8$，$-4<b<2$，不等式两边分别相减得 $-2<a-b<6$，你认为正确吗？

提示：不正确.因为同向不等式具有可加性，但不能相减，解题时要充分利用条件，运用不等式的性质进行等价变形，而不可随意“创造”性质.

[评价活动]

1. 已知 $-1<x<4$，$2<y<3$，则 $x-y$ 的取值范围为________，$3x+2y$ 的取值范围为________.

$-4<x-y<2$　$1<3x+2y<18$　**解析**：因为 $-1<x<4$，$2<y<3$，所以 $-3<-y<-2$，所以 $-4<x-y<2$.

由 $-1<x<4$，$2<y<3$，

得 $-3<3x<12$，$4<2y<6$，

所以 $1<3x+2y<18$.

2. 已知 $1<a<4$，$2<b<8$，试求 $a-b$ 与 $\frac{a}{b}$ 的取值范围.

解：因为 $1<a<4$，$2<b<8$，

所以 $-8<-b<-2$.

所以 $1-8<a-b<4-2$，即 $-7<a-b<2$.

因为 $\frac{1}{8}<\frac{1}{b}<\frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{8}<\frac{a}{b}<\frac{4}{2}$，即 $\frac{1}{8}<\frac{a}{b}<2$.

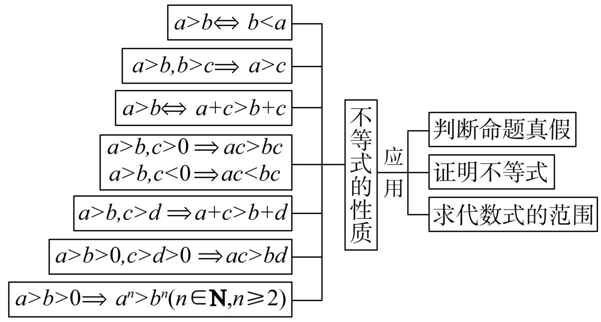
【类题通法】

利用不等式的性质求取值范围的策略

(1)先建立待求范围的代数式与已知范围的代数式的关系，再利用不等式的性质进行运算，求得取值范围.

(2)同向不等式具有可加性，但这种转化不是等价变形，如果在解题过程中多次使用这种转化，就有可能扩大所求的取值范围.

提质归纳



课后素养评价(十一)

基础性·能力运用

1. 下列与 $a>b$ 等价的不等式是　(　　)

A. $|a|>|b|$　　B. $a^2>b^2$

C. $\frac{a}{b}>1$　　D. $a^3>b^3$

D　**解析**：可利用赋值法.令 $a=-3,b=-1$，则 A，B，C 正确但不满足 $a>b$.故选 D.

2. 英国数学家雷科德在《砺智石》一书中首先使用"＝"，英国数学家哈里奥特首先使用"＞"和"＜"不等号的引入对不等式的发展影响深远.若 $a,b,c\in\mathbf{R}$，则下列命题错误的是　(　　)

A. 若 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则 $a>b$

B. 若 $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$，则 $a>b$

C. 若 $b>a>0,c>0$，则 $\frac{a+c}{b+c}<\frac{a}{b}$

D. 若 $a>b>0,c<d<0$，则 $ac<bd$

C　**解析**：对 A：因为 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}<0$，且 $a<0,b<0$，

所以 $ab>0$，则 $b-a<0$，即 $a>b$，A 正确；

对 B：因为 $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$，且 $c^2>0$，所以 $a>b$，B 正确；

对 C：$\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+c}=\frac{a(b+c)-b(a+c)}{b(b+c)}=\frac{(a-b)c}{b(b+c)}$.

因为 $b>a>0,c>0$，则 $b+c>0,a-b<0$，

所以 $\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+c}<0$，则 $\frac{a+c}{b+c}>\frac{a}{b}$，C 错误；

对 D：因为 $c<d<0$，则 $-c>-d>0$.

又因为 $a>b>0$，则 $-ac>-bd>0$，

所以 $ac<bd$，D 正确.故选 C.

3. 已知 $a>b>c>d>0$，且 $a+d=b+c$，则以下不等式错误的是　(　　)

A. $a+c>b+d$

B. $ac>bd$

C. $ad<bc$

D. $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$

D　**解析**：因为 $a>b>c>d>0$，所以 $a+c>b+d$，$ac>bd$；即选项 A，B 正确；

因为 $a-d>b-c>0$，所以 $(a-d)^2>(b-c)^2$，即 $(a+d)^2-4ad>(b+c)^2-4bc$，即 $ad<bc$，故选项 C 正确；

因为 $ad<bc$，所以 $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$，即选项 D 错误.

4. (多选)已知 a,b,c 满足 $c<a<b$，且 $ac<0$，那么下列各式中一定成立的是　(　　)

A. $ac(a-c)>0$　　B. $c(b-a)<0$

C. $cb^2<ab^2$　　D. $ab>ac$

BCD　**解析**：因为 a,b,c 满足 $c<a<b$，且 $ac<0$，

所以 $c<0,a>0,b>0,a-c>0,b-a>0$，

所以 $ac(a-c)<0,c(b-a)<0,cb^2<ab^2,ab>ac$.

5. 已知 $a>b,e>f,c>0$，求证：$f-ac<e-bc$.

证明：因为 $a>b,c>0$，所以 $ac>bc$.

又因为 $e>f$，所以 $e+ac>f+bc$，

所以 $e-bc>f-ac$，即 $f-ac<e-bc$.

6. 若 $bc-ad\geqslant 0,bd>0$，求证：$\frac{a+b}{b}\leqslant\frac{c+d}{d}$.

证明：因为 $bc-ad\geqslant 0$，所以 $ad\leqslant bc$.

因为 $bd>0$，$\frac{1}{bd}>0$，所以 $\frac{a}{b}\leqslant\frac{c}{d}$，

所以 $\frac{a}{b}+1\leqslant\frac{c}{d}+1$，

所以 $\frac{a+b}{b}\leqslant\frac{c+d}{d}$.

7. 已知 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$，求 $\frac{\alpha+\beta}{2}$，$\frac{\alpha-\beta}{2}$ 的取值范围.

解：因为 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$，

所以 $-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$，$-\frac{\pi}{4}<\frac{\beta}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}$.

两式相加，得 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$.

因为 $-\frac{\pi}{4}<\frac{\beta}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}$，所以 $-\frac{\pi}{4}\leqslant-\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{4}$.

所以 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\alpha-\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$.

又 $\alpha<\beta$，所以 $\frac{\alpha-\beta}{2}<0$.故 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\alpha-\beta}{2}<0$.

即 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\alpha-\beta}{2}<0$.

综合性·创新提升

1. 若 α,β 满足 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，则 $2\alpha-\beta$ 的取值范围是　　　　(C)

A. $-\pi<2\alpha-\beta<0$

B. $-\pi<2\alpha-\beta<\pi$

C. $-\frac{3\pi}{2}<2\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$

D. $0<2\alpha-\beta<\pi$

2. 若 $abcd<0$，且 $a>0,b>c,d<0$，则　　　　(　　)

A. $b<0,c<0$

B. $b>0,c>0$

C. $b>0,c<0$

D. $0<c<b$ 或 $c<b<0$

D　**解析**：由 $a>0,d<0$，且 $abcd<0$，知 $bc>0$。又因为 $b>c$，所以 $0<c<b$ 或 $c<b<0$。

3.（多选）已知实数 x,y 满足 $-1\leqslant x+y\leqslant 3,4\leqslant 2x-y\leqslant 9$，则　　　　(　　)

A. $1\leqslant x\leqslant 4$

B. $-2\leqslant y\leqslant 1$

C. $2\leqslant 4x+y\leqslant 15$

D. $\frac{1}{3}\leqslant x-y\leqslant\frac{23}{3}$

AC　**解析**：因为 $-1\leqslant x+y\leqslant 3,4\leqslant 2x-y\leqslant 9$，所以 $3\leqslant 3x\leqslant 12$，所以 $1\leqslant x\leqslant 4$，A 正确；因为 $\begin{cases}-6\leqslant -2x-2y\leqslant 2,\\ 4\leqslant 2x-y\leqslant 9,\end{cases}$ 所以 $-2\leqslant -3y\leqslant 11$，解得 $-\frac{11}{3}\leqslant y\leqslant\frac{2}{3}$，B 错误；$4x+y=2(x+y)+(2x-y)$，所以 $2\leqslant 4x+y\leqslant 15$，C 正确；$x-y=-\frac{1}{3}(x+y)+\frac{2}{3}(2x-y)$，所以 $\frac{5}{3}\leqslant x-y\leqslant\frac{19}{3}$，D 错误。

4. 给出以下四个命题：

①$a>b\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N}^*)$；②$a>|b|\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N}^*)$；③$a<b<0\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$；④$a<b<0\Rightarrow\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$.

其中真命题的序号是________.

②③　**解析**：①取 $a=-1,b=-2,n=2,a^2>b^2$ 不成立；

②由 $a>|b|$，得 $a>0$，所以 $a^n>b^n$ 成立；

③由 $a<b<0$，得 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 成立；

④由 $a<b<0$，得 $a-b<0$，且 $a-b>a$，故 $\frac{1}{a-b}<\frac{1}{a}$.

5. 已知三个不等式：①$ab>0$；②$\frac{c}{a}>\frac{d}{b}$；③$bc>ad$. 若以其中的两个作为条件，余下的一个作为结论，则可以组成 3 个真命题.

6. 已知 $3<a+b<4,0<b<1$，求下列各式的取值范围.

(1) a；(2) $a-b$；(3) $\frac{a}{b}$.

解：(1) 因为 $3<a+b<4,0<b<1$，所以 $-1<-b<0$.
所以 $2<a+b+(-b)<4$，即 $2<a<4$.

(2) 因为 $0<b<1$，所以 $-1<-b<0$.
由(1)知 $2<a<4$，所以 $1<a-b<4$.

(3) 因为 $0<b<1$，所以 $\frac{1}{b}>1$.
由(1)知 $2<a<4$，所以 $\frac{a}{b}>2$.

7. 设 $a>b>c$，求证：$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}>0$.

证明：因为 $a>b>c$，所以 $-c>-b$.

所以 $a-c>a-b>0$，

所以 $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a-c}>0$，

所以 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a}>0$.

又 $b-c>0$，所以 $\frac{1}{b-c}>0$.

所以 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}>0$.

2.2　基本不等式

第 1 课时　基本不等式及其简单应用

学习任务目标

1. 了解基本不等式的证明过程.
2. 能利用基本不等式比较代数式的大小.
3. 能利用基本不等式求最值.

问题式预习

知识点一　基本不等式

1. 算术平均数与几何平均数

(1)条件：给定两个正数 a,b.

(2)结论：$\frac{a+b}{2}$叫做正数 a,b 的算术平均数；$\sqrt{ab}$叫做正数 a,b 的几何平均数.

2. 基本不等式

(1)不等式成立的条件：a,b 都是正数.

(2)结论：$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$.

(3)等号成立的条件：当且仅当 $a=b$.

(4)语言描述：两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

[微训练]

判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").

(1)基本不等式成立的条件"$a>0,b>0$"不能省略.　(　　)

√　**提示**：不能省略条件"$a>0,b>0$".

(2)对任意 $a,b\in\mathbf{R}$，$a^2+b^2\geqslant 2ab$，$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$均成立.　(　　)

×　**提示**：对任意 $a,b\in\mathbf{R}$，有 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 成立；当 a,b 都为正数时，不等式 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$成立.

(3)若 $a\neq 0$，则 $a+\frac{1}{a}\geqslant 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$.　(　　)

×　**提示**：只有当 $a>0$ 时，根据基本不等式，才有不等式 $a+\frac{1}{a}\geqslant 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$ 成立.

知识点二　基本不等式与最值

已知 x,y 都是正数，

(1)如果积 xy 等于定值 P，那么当 $x=y$ 时，和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{P}$.

(2)如果和 $x+y$ 等于定值 S，那么当 $x=y$ 时，积 xy 有最大值 $\frac{1}{4}S^2$.

[微训练]

1. 已知 $x>0,y>0$，且 $xy=100$，则 $x+y$ 的最小值为________.

20　**解析**：因为 $x>0,y>0$，所以 $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}=2\sqrt{100}=20$，当且仅当 $x=y=10$ 时，等号成立.

2. 已知 $x>0,y>0$，且 $x+y=18$，则 xy 的最大值为________.

81　**解析**：因为 $x>0,y>0$，所以 $xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=81$，当且仅当 $x=y=9$ 时，等号成立.

任务型课堂

任务一　对基本不等式的理解

1. 不等式 $a^2+1\geqslant 2a$ 中等号成立的条件是　(　　)

A. $a=\pm1$　　B. $a=1$

C. $a=-1$　　D. $a=0$

B　**解析**：令 $a^2+1=2a$，即 $(a-1)^2=0$，即 $a=1$ 时，等号成立.

2. 不等式$\frac{9}{x-2}+(x-2)\geqslant 6$(其中 $x>2$)中等号成立的条件是　(　　)

A. $x=3$　　B. $x=-3$

C. $x=5$　　D. $x=-5$

C　**解析**：由基本不等式知等号成立的条件为$\frac{9}{x-2}=x-2$，即 $x=5$($x=-1$ 舍去).

3. 不等式$(x-2y)+\frac{1}{x-2y}\geqslant 2$ 成立的条件为(　　)

A. $x\geqslant 2y$，当且仅当 $x-2y=1$ 时取等号

B.$x>2y$，当且仅当 $x-2y=1$ 时取等号

C.$x\leqslant 2y$，当且仅当 $x-2y=1$ 时取等号

D.$x<2y$，当且仅当 $x-2y=1$ 时取等号

B　**解析**：因为不等式成立的前提条件是各项均为正，所以 $x-2y>0$，即 $x>2y$，且等号成立时 $(x-2y)^2=1$，即 $x-2y=1$.故选 B.

【类题通法】

理解基本不等式的关键

(1)不等式成立的条件是 a,b 都是正数.

(2)"当且仅当"的含义：当 $a=b$ 时，$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$ 的等号成立，即 $a=b\Rightarrow\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$；仅当 $a=b$ 时，$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 的等号成立，即 $\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}\Rightarrow a=b$.

任务二　用基本不等式比较大小

1. 若 $a,b\in\mathbf{R}$，$s=a+b^2+1$，$t=a+2b$，则 s 与 t 的大小关系是　　(　　)

A.$s\geqslant t$　　B.$s>t$

C.$s\leqslant t$　　D.$s<t$

A　**解析**：因为 $b^2+1\geqslant 2b$，所以 $s=a+b^2+1\geqslant a+2b=t$.

2. 已知 $m=a+\frac{1}{a-2}(a>2)$，则　　(　　)

A.$m>4$　　B.$m<4$

C.$m\geqslant 4$　　D.$m\leqslant 4$

C　**解析**：因为 $a>2$，所以 $a-2>0$，所以 $m=(a-2)+\frac{1}{a-2}+2\geqslant 2\sqrt{(a-2)\cdot\frac{1}{a-2}}+2=4$，当且仅当 $a=3$ 时，等号成立.

3. 已知 $a>b>c$，则 $\sqrt{(a-b)(b-c)}$ 与 $\frac{a-c}{2}$ 的大小关系是________.

$\sqrt{(a-b)(b-c)}\leqslant\frac{a-c}{2}$　**解析**：因为 $a>b>c$，所以 $a-b>0$，$b-c>0$，所以 $\frac{a-c}{2}=\frac{(a-b)+(b-c)}{2}\geqslant\sqrt{(a-b)(b-c)}$，当且仅当 $a-b=b-c$ 时，等号成立.

4. 已知 $a>0$，$b>0$，$c>0$，$d>0$.求证：$\frac{ad+bc}{bd}+\frac{bc+ad}{ac}\geqslant 4$.

证明：$\frac{ad+bc}{bd}+\frac{bc+ad}{ac}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\right)\geqslant 2+2=4$，当且仅当 $a=b$ 且 $c=d$ 时，等号成立.

故 $\frac{ad+bc}{bd}+\frac{bc+ad}{ac}\geqslant 4$.

【类题通法】

运用基本不等式比较大小的注意点

(1)要灵活运用基本不等式，特别注意其变形.

(2)应注意不等式成立的条件，$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ 成立的条件是 $a>0$，$b>0$，等号成立的条件是 $a=b$；$a^2+b^2\geqslant 2ab$ 成立的条件是 $a,b\in\mathbf{R}$，等号成立的条件是 $a=b$.

任务三　用基本不等式求最值

[探究活动]

探究 1：已知 $x>\frac{5}{4}$，求代数式 $4x-2+\frac{1}{4x-5}$ 的最小值.

提示：因为 $x>\frac{5}{4}$，所以 $4x-5>0$.

所以 $4x-2+\frac{1}{4x-5}=4x-5+\frac{1}{4x-5}+3\geqslant 2\sqrt{(4x-5)\cdot\frac{1}{4x-5}}+3=5$，

当且仅当 $4x-5=\frac{1}{4x-5}$，即 $x=\frac{3}{2}$ 时取等号.

所以当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$4x-2+\frac{1}{4x-5}$ 取得最小值 5.

探究 2：已知 $x<\frac{5}{4}$，求代数式 $4x-2+\frac{1}{4x-5}$ 的最大值.

提示：因为 $x<\frac{5}{4}$，

所以 $4x-5<0$.所以 $5-4x>0$.

所以 $4x-2+\frac{1}{4x-5}=4x-5+\frac{1}{4x-5}+3$

$=-\left[(5-4x)+\frac{1}{5-4x}\right]+3$

$\leqslant -2\sqrt{(5-4x)\cdot\frac{1}{5-4x}}+3=-2+3=1$，

当且仅当 $5-4x=\frac{1}{5-4x}$，即 $x=1$ 时取等号.

故当 $x=1$ 时，$4x-2+\frac{1}{4x-5}$ 取得最大值 1.

[评价活动]

1. 已知 $y=x+\frac{1}{x}-2(x<0)$，则 y 有　　(　　)

A.最大值 0　　B.最小值 0

C.最大值 -4　　D.最小值 -4

C　**解析**：因为 $x<0$，所以 $y=-\left(-x+\frac{1}{-x}\right)-2\leqslant -2-2=-4$，当且仅当 $-x=\frac{1}{-x}$，即 $x=-1$ 时取等号.

2.若 $0<x<1$，则 $y=\sqrt{x(3-2x)}$ 的取值范围是______________________.

$\left\{y\,\middle|\,0<y\leqslant\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right\}$　**解析**：由 $0<x<1$ 知 $3-2x>0$.

故 $\sqrt{x(3-2x)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2x(3-2x)}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2x+(3-2x)}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，当且仅当 $x=\dfrac{3}{4}$ 时，等号成立，所以 $0<\sqrt{x(3-2x)}\leqslant\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

3.已知 $0<x<\dfrac{1}{3}$，求代数式 $x(1-3x)$ 的最大值.

解：因为 $0<x<\dfrac{1}{3}$，所以 $1-3x>0$.

所以 $x(1-3x)=\dfrac{1}{3}\cdot 3x(1-3x)\leqslant\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{3x+(1-3x)}{2}\right]^2=\dfrac{1}{12}$，当且仅当 $x=\dfrac{1}{6}$ 时，等号成立，因此 $x(1-3x)$ 的最大值为 $\dfrac{1}{12}$.

【类题通法】

利用基本不等式求最值的方法

(1)知和求积的最值：求解此类问题的关键是明确“和为定值，积有最大值”.但应注意两点：①具备条件——正数；②验证等号成立.

(2)知积求和的最值：明确“积为定值，和有最小值”，直接利用基本不等式求解，但要注意利用基本不等式求最值的条件.

提质归纳

- $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ $(a>0,b>0)$；$ab\leqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ $(a>0,b>0)$
  - 变形：$\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}$ $(a>0,b>0)$
    - 基本不等式
      - 基本不等式成立的条件：一正；二定；三相等
      - 基本不等式的应用：比较大小；求最值

课后素养评价(十二)

基础性·能力运用

1.若 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $ab>0$，则下列不等式中，恒成立的是（　　）

A.$a^2+b^2>2ab$　　B.$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$

C.$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant 2$　　D.$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geqslant\dfrac{2}{\sqrt{ab}}$

C　**解析**：因为 $(a-b)^2\geqslant 0$，所以 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立，A 不正确；取 $a<0,b<0$ 时，$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ 不成立，B 不正确；因为 $ab>0$，所以 $\dfrac{a}{b},\dfrac{b}{a}$ 都大于 0，所以 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}=2$，当且仅当 $a=b$ 时取等号，C 正确；取 $a<0,b<0$ 时，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geqslant\dfrac{2}{\sqrt{ab}}$ 不成立，D 不正确.

2.若 $0<a<b$ 且 $a+b=1$，则下列四个数中最大的是（　　）

A.$\dfrac{1}{2}$　　B.a^2+b^2

C.$2ab$　　D.a

B　**解析**：$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab\geqslant(a+b)^2-2\cdot\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$.

因为 $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geqslant 0$，所以 $a^2+b^2\geqslant 2ab$.

因为 $0<a<b$ 且 $a+b=1$，所以 $a<\dfrac{1}{2}$.

所以 a^2+b^2 最大.

3.若 $x>0$，则 $2x+\dfrac{1}{x}$________2.(选填“=”“≥”“≤”“>”或“<”)

$>$　**解析**：当 $x>0$ 时，$2x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{2}>2$，当且仅当 $2x=\dfrac{1}{x}$，即 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立.

4.已知 $x<0$，则 $4x+\dfrac{1}{x}-1$ 的最大值是 $\underline{-5}$.

5.设 $x,y\in\mathbf{N}^*$，且满足 $x+y=20$，则 xy 的最大值为________.

100　**解析**：因为 $x,y\in\mathbf{N}^*$，

所以 $20=x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$，

所以 $xy\leqslant 100$，

当且仅当 $x=y=10$ 时，等号成立.

6.已知 $x>0$，求函数 $y=\dfrac{x^2+5x+4}{x}$ 的最小值.

解：$y=\dfrac{x^2+5x+4}{x}=x+\dfrac{4}{x}+5\geqslant 2\sqrt{4}+5=9$，

当且仅当 $x=\dfrac{4}{x}$，即 $x=2$ 时，等号成立.

故 $y=\dfrac{x^2+5x+4}{x}(x>0)$ 的最小值为 9.

综合性·创新提升

1.(多选)已知 $a>1$,则 $2a+\dfrac{2}{a-1}$的值可以是（　　）

A.5　　B.6

C.7　　D.8

BCD　**解析**:因为 $a>1$,所以 $a-1>0$.

$2a+\dfrac{2}{a-1}=2+2(a-1)+\dfrac{2}{a-1}\geqslant 2+2\sqrt{2(a-1)\cdot\dfrac{2}{a-1}}=6$,

当且仅当 $a=2$ 时,等号成立,故 $2a+\dfrac{2}{a-1}$的最小值为 6,

故 $2a+\dfrac{2}{a-1}$的取值可以是 6,也可以是 7 或 8.

2.如果 $0<a<b<1$,$P=\dfrac{a+b}{2}$,$Q=\sqrt{ab}$,$M=\sqrt{a+b}$,那么 P,Q,M 的大小关系是（　　）

A.$P>Q>M$　　B.$M>P>Q$

C.$Q>M>P$　　D.$M>Q>P$

B　**解析**:显然$\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$.由 $a+b>\dfrac{(a+b)^2}{4}$,得$\dfrac{a+b}{4}<1$,所以$\dfrac{a+b}{2}<\sqrt{a+b}$.所以$\sqrt{a+b}>\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$.故$M>P>Q$.

3.(多选)若 $a>0,b>0$,且 $a+b=4$,则下列不等式不一定恒成立的是（　　）

A.$\dfrac{1}{ab}>\dfrac{1}{2}$　　B.$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\leqslant 1$

C.$\sqrt{ab}\geqslant 2$　　D.$\dfrac{1}{a^2+b^2}\leqslant\dfrac{1}{8}$

ABC　**解析**:由 $a+b=4$,可得$\sqrt{ab}\leqslant 2$,得 $ab\leqslant 4$,所以$\dfrac{1}{ab}\geqslant\dfrac{1}{4}$,故 A,C 不一定恒成立;

B 中,$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{4}{ab}\geqslant 1$,故 B 不一定恒成立;

由$\dfrac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ 得 $a^2+b^2\geqslant 2\times\left(\dfrac{4}{2}\right)^2=8$,所以$\dfrac{1}{a^2+b^2}\leqslant\dfrac{1}{8}$,D 一定恒成立.

4.已知正实数 a,b 满足 $2a+b=2$,则 ab 的最大值为________.

$\dfrac{1}{2}$　**解析**:因为正实数 a,b 满足 $2a+b=2$,所以 $2a+b\geqslant 2\sqrt{2ab}$,整理得 $ab\leqslant\dfrac{1}{2}$,

当且仅当 $a=\dfrac{1}{2}$,$b=1$ 时,等号成立,所以 ab 的最大值为$\dfrac{1}{2}$.

5.当 $x>3$ 时,不等式 $x+\dfrac{1}{x-3}\geqslant a$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是$\underline{\{a|a\leqslant 5\}}$.

6.已知 x,y,z 都是正数,求证:

$(x+y)(y+z)(z+x)\geqslant 8xyz$.

证明:因为 x,y,z 都是正数,

所以 $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$,$y+z\geqslant 2\sqrt{yz}$,$z+x\geqslant 2\sqrt{zx}$,

所以 $(x+y)(y+z)(z+x)\geqslant 2\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt{yz}\cdot 2\sqrt{zx}=8xyz$.

当且仅当 $x=y=z$ 时,等号成立.

第2课时　基本不等式的综合应用

学习任务目标

1.进一步理解运用基本不等式求最值的条件，能够灵活运用基本不等式求最值.

2.能利用基本不等式证明简单的不等式.

3.能够运用基本不等式解决生活中的实际问题.

任务型课堂

任务一　基本不等式在实际问题中的应用

1.制作一个容积为 4 m^3、高为 1 m 的无盖长方体容器.已知该容器的底面造价是每平方米 20 元，侧面造价是每平方米 10 元，则该容器的最低总造价是　　(　　)

A.80 元　　B.120 元

C.160 元　　D.240 元

C　**解析**：设底面相邻两边的长分别为 x m，y m，总造价为 T 元，则 $xy\times1=4\Rightarrow xy=4$.

所以 $T=4\times20+(2x+2y)\times1\times10=80+20(x+y)\geqslant80+20\times2\sqrt{xy}=80+20\times4=160$，当且仅当 $x=y=2$ 时，等号成立.

故该容器的最低总造价是 160 元.

2.若用总长为 20 m 的篱笆围一个矩形场地，则矩形场地的最大面积是________.

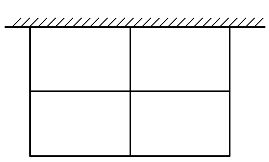
25 m^2　**解析**：设矩形的一边长为 x m，

则另一边长为 $\frac{1}{2}\times(20-2x)=(10-x)$m.

所以 $y=x(10-x)\leqslant\left[\frac{x+(10-x)}{2}\right]^2=25$，

当且仅当 $x=10-x$，即 $x=5$ 时，等号成立，此时 $y_{\max}=25\ m^2$.

3.如图，动物园要围成大小相同的长方形虎笼四间，一面可利用原有的墙，其他各面用钢筋网围成.现有 36 m 长的钢筋网，每间虎笼的长、宽分别设计为多少时，可使每间虎笼面积最大？



解：设每间虎笼长 x m，宽 y m.

由条件知，$4x+6y=36$，即 $2x+3y=18$.

设每间虎笼面积为 S，则 $S=xy$.

(方法一)因为 $2x+3y\geqslant2\sqrt{2x\cdot3y}=2\sqrt{6xy}$，

所以 $2\sqrt{6xy}\leqslant18$.所以 $xy\leqslant\frac{27}{2}$，即 $S_{\max}=\frac{27}{2}$，当且仅当 $2x=3y$ 时，等号成立.

由 $\begin{cases}2x+3y=18,\\2x=3y,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=4.5,\\y=3.\end{cases}$

故每间虎笼长为 4.5 m，宽为 3 m 时，可使每间虎笼面积最大.

(方法二)由 $2x+3y=18$，得 $x=9-\frac{3}{2}y$.

因为 $x>0$，所以 $0<y<6$，

$S=xy=y\left(9-\frac{3}{2}y\right)=\frac{3}{2}y(6-y)$.

因为 $0<y<6$，所以 $6-y>0$.

所以 $S\leqslant\frac{3}{2}\left[\frac{(6-y)+y}{2}\right]^2=\frac{27}{2}$.

当且仅当 $6-y=y$，即 $y=3$ 时，等号成立，此时 $x=4.5$.故每间虎笼长为 4.5 m，宽为 3 m 时，可使每间虎笼面积最大.

【类题通法】

运用基本不等式解决实际问题的思路

(1)理解题意，设出变量，一般把要求最值的量定为因变量；

(2)建立相应的关系式，把实际问题抽象成数学问题，利用基本不等式求解；

(3)根据实际背景得出答案.

任务二　用基本不等式求较复杂代数式的最值

1.设 x,y 为正数，则 $(x+y)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)$ 的最小值为　　(　　)

A.6　　B.9　　C.12　　D.15

B　**解析**：因为 x,y 是正数，所以 $(x+y)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)=5+\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant5+2\sqrt{\frac{4x}{y}\times\frac{y}{x}}=5+4=9$，当且仅当 $y=2x$ 时，等号成立.

2.设 x,y,z 均为正实数，若 $x-2y+3z=0$，则 $\frac{y^2}{xz}$ 的最小值为________.

3　**解析**：由已知，得 $y=\dfrac{x+3z}{2}$.

所以 $\dfrac{y^2}{xz}=\dfrac{\left(\dfrac{x+3z}{2}\right)^2}{xz}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{9z}{x}+6\right)$

$\geqslant\dfrac{1}{4}\left(2\sqrt{\dfrac{x}{z}\cdot\dfrac{9z}{x}}+6\right)=3$，

当且仅当 $x=y=3z$ 时，$\dfrac{y^2}{xz}$ 取得最小值 3.

3. 已知关于 x 的不等式 $2x+\dfrac{2}{x-a}\geqslant7$ 在 $x>a$ 时恒成立，则实数 a 的最小值为________.

$\dfrac{3}{2}$　**解析**：由 $x>a$，知 $x-a>0$，则 $2x+\dfrac{2}{x-a}=2(x-a)+\dfrac{2}{x-a}+2a\geqslant2\sqrt{2(x-a)\cdot\dfrac{2}{x-a}}+2a=4+2a$，当且仅当 $(x-a)^2=1$ 时，等号成立.

由题意可知 $4+2a\geqslant7$，解得 $a\geqslant\dfrac{3}{2}$，即实数 a 的最小值为 $\dfrac{3}{2}$.

任务三　基本不等式的综合应用

[探究活动]

探究 1：含条件不等式的证明有什么技巧？

提示：(1)要将待证不等式与已知条件结合起来考虑.比如可通过“1”的代换，将不等式的左边化成齐次式，一方面为使用基本不等式创造条件，另一方面可通过约分与不等式的右边建立联系.

(2)先局部运用基本不等式，再利用不等式的性质(注意限制条件)，通过相加(乘)合成为待证的不等式.

探究 2：已知 $a>0,b>0,a+b=1$，如何证明 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geqslant4$？

提示：因为 $a>0,b>0,a+b=1$，

所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{a}+\dfrac{a+b}{b}=2+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant2+2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}=4$，当且仅当 $a=b=\dfrac{1}{2}$ 时，等号成立.

所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geqslant4$.

[评价活动]

1. 已知 $y=-\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{x}$.若 $y+2x\geqslant0$ 在 $x>0$ 时恒成立，则实数 a 的取值范围是________.

$\left\{a\,\middle|\,a<0\text{ 或 }a\geqslant\dfrac{1}{4}\right\}$　**解析**：因为 $y+2x\geqslant0$ 在 $x>0$ 时恒成立，即 $-\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{x}+2x\geqslant0$ 在 $x>0$ 时恒成立，所以 $\dfrac{1}{a}\leqslant2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ 在 $x>0$ 时恒成立.

当 $a<0$ 时，不等式恒成立；

当 $a>0$ 时，因为 $2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\geqslant4$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立，所以 $0<\dfrac{1}{a}\leqslant4$，解得 $a\geqslant\dfrac{1}{4}$.

所以 $a<0$ 或 $a\geqslant\dfrac{1}{4}$.

2. 已知 $a>0,b>0,a+b=1$，求证：$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{ab}\geqslant8$.

证明：因为 $a>0,b>0,a+b=1$，

所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{ab}=\dfrac{a+b}{a}+\dfrac{a+b}{b}+\dfrac{a+b}{ab}=4+2\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)\geqslant4+4\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}=8$，当且仅当 $a=b=\dfrac{1}{2}$ 时，等号成立.所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{ab}\geqslant8$.

3. 已知 a,b,c 是互不相等的正数，且 $a+b+c=1$，求证：$\left(\dfrac{1}{a}-1\right)\left(\dfrac{1}{b}-1\right)\left(\dfrac{1}{c}-1\right)>8$.

证明：因为 a,b,c 是正数，且 $a+b+c=1$，

所以 $\dfrac{1}{a}-1=\dfrac{b+c}{a}>0$，$\dfrac{1}{b}-1=\dfrac{a+c}{b}>0$，$\dfrac{1}{c}-1=\dfrac{a+b}{c}>0$，所以 $\left(\dfrac{1}{a}-1\right)\left(\dfrac{1}{b}-1\right)\left(\dfrac{1}{c}-1\right)=\dfrac{b+c}{a}\cdot\dfrac{a+c}{b}\cdot\dfrac{a+b}{c}\geqslant\dfrac{2\sqrt{bc}\cdot2\sqrt{ac}\cdot2\sqrt{ab}}{abc}=8$，当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立.

又因为 a,b,c 是互不相等的正数，

所以 $\left(\dfrac{1}{a}-1\right)\left(\dfrac{1}{b}-1\right)\left(\dfrac{1}{c}-1\right)>8$.

【类题通法】

利用基本不等式证明不等式的策略与注意事项

(1)策略：从已知条件出发，借助不等式的性质和基本不等式，经过逐步的逻辑推理，最后转化为所求证不等式，其特征是以“已知”看“可知”，逐步推向“未知”.

(2)注意事项：

①多次使用基本不等式时，要注意等号能否成立；②累加法是不等式证明中的一种常用方法，证明不等式时注意使用；③当不能直接使用基本不等式时，可通过等价变形，构造基本不等式模型后再使用.

提质归纳

$\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}$ $(a>0,b>0)$ — 基本不等式的综合应用

- 实际应用
- 证明不等式
- 含条件的不等式的最值

课后素养评价(十三)

基础性·能力运用

1.某商场的某种商品的年进货量为 1 万件,分若干次进货,每次进货的量相同,且每次需运费 100 元,运来的货物还需租仓库存放,一年的租金按一次进货量的一半来计算,每件 2 元.为使一年的运费和租金最省,每次进货量应为　(　　)

A.200 件　　B.5 000 件

C.2 500 件　　D.1 000 件

D　**解析**:设进货 n 次,则每次的进货量为 $\frac{10\ 000}{n}$ 件,一年的运费和租金为 y 元.

根据题意得 $y=100n+\frac{10\ 000}{n}\times\frac{1}{2}\times2=100n+\frac{10\ 000}{n}\geqslant2\ 000$,当且仅当 $n=10$ 时,等号成立,此时每次进货量应为 1 000 件.故选 D.

2.已知 $x>0,y>0,x+2y=1$,则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值是　(　　)

A.$2\sqrt{2}$　　B.$3+2\sqrt{2}$

C.6　　D.8

B　**解析**:因为 $x>0,y>0$,且 $x+2y=1$,

则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+2y)=3+\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant3+2\sqrt{2}$,

当且仅当 $\frac{2y}{x}=\frac{x}{y}$ 且 $x+2y=1$,即 $y=\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$,$x=\sqrt{2}-1$ 时取等号.

3.要设计一个矩形,现只知道它的对角线长度为 10,则在所有满足条件的设计中,面积最大的一个矩形的面积为　(　　)

A.50　　B.$25\sqrt{3}$

C.$50\sqrt{3}$　　D.100

A　**解析**:设矩形的长和宽分别为 x,y,则 $x^2+y^2=100$.

于是 $S=xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}=50$,当且仅当 $x=y=5\sqrt{2}$ 时,等号成立.

4.(多选)下列函数中,最小值为 4 的有　(　　)

A.$y=x^2+\frac{4}{x^2}$

B.$y=x+\frac{9}{x}-2$

C.$y=\frac{x^2+10}{\sqrt{x^2+6}}$

D.$y=\frac{1}{x-1}+x+1(x>1)$

AD　**解析**:对于 A,$y=x^2+\frac{4}{x^2}\geqslant2\sqrt{x^2\times\frac{4}{x^2}}=4$,当且仅当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时等号成立,故 A 正确;

对于 B,取 $x=-1$,则 $y=-12<4$,故 B 不正确;

对于 C,$y=\sqrt{x^2+6}+\frac{4}{\sqrt{x^2+6}}\geqslant4$,因为 $x^2+6=4$ 无解,故等号不成立,故 C 错误;

对于 D,$y=\frac{1}{x-1}+x-1+2\geqslant2+2=4$,当且仅当 $x-1=1$ 即 $x=2$ 时等号成立,故 D 正确.

5.设 $x>0,y>0,x+y=1$,且 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant a$ 恒成立,则 a 的最小值是　(　　)

A.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B.$\sqrt{2}$

C.2　　D.$2\sqrt{2}$

B　**解析**:$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=1+2\sqrt{xy}\leqslant1+1=2$,当且仅当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时,等号成立,所以 $a\geqslant\sqrt{2}$.故选 B.

6.已知 $a>0,b>0,\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=4$,则 $a+b$ 的最小值为________.

1　**解析**:由 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=4$,得 $\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}=1$.

所以 $a+b=\left(\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}\right)(a+b)=\frac{1}{2}+\frac{b}{4a}+\frac{a}{4b}\geqslant\frac{1}{2}+2\sqrt{\frac{b}{4a}\times\frac{a}{4b}}=1$,当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时,等号成立.

7.在“4×□+9×□=60”的两个□中,分别填入两个自然数,使它们的倒数和最小,应依次填上________和________.

6　4　**解析**:设两数分别为 x,y,即 $4x+9y=60$,

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{4x+9y}{60}=\frac{1}{60}\left(13+\frac{4x}{y}+\frac{9y}{x}\right)\geqslant\frac{1}{60}\times(13+12)=\frac{5}{12}$,

当且仅当$\frac{4x}{y}=\frac{9y}{x}$，且$4x+9y=60$，即$x=6$且$y=4$时，等号成立，故应分别填上6，4.

8.设a,b,c均为正数，求证：$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant a+b+c$.

证明：因为a,b,c均是正数，所以$\frac{bc}{a},\frac{ca}{b},\frac{ab}{c}$均是正数.

所以$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geqslant 2c,\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant 2a,\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geqslant 2b$.

三式相加得$2\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)\geqslant 2(a+b+c)$，

所以$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant a+b+c$，当且仅当$a=b=c$时，等号成立.

综合性·创新提升

1.若$-4<x<1$，则$y=\frac{x^2-2x+2}{2x-2}$　　(D)

A.有最小值1　　B.有最大值1

C.有最小值-1　　D.有最大值-1

2.已知$x>0,y>0$，且$x+y=8$，则$(1+x)\cdot(1+y)$的最大值为　　(　　)

A.9　　B.16　　C.25　　D.36

C　**解析**：$(1+x)(1+y)\leqslant\left[\frac{(1+x)+(1+y)}{2}\right]^2=\left[\frac{2+(x+y)}{2}\right]^2=25$，当且仅当$x=y=4$时，等号成立.

3.已知不等式$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{a}{y}\right)\geqslant 9$对任意正实数$x$，$y$恒成立，则正实数$a$的最小值为　　(　　)

A.8　　B.6　　C.4　　D.2

C　**解析**：$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{a}{y}\right)=1+\frac{ax}{y}+\frac{y}{x}+a$

$\geqslant a+1+2\sqrt{a\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=a+2\sqrt{a}+1$，

当且仅当$a\cdot\frac{x}{y}=\frac{y}{x}$时，等号成立.

所以$(\sqrt{a})^2+2\sqrt{a}+1\geqslant 9$.所以$\sqrt{a}\geqslant 2$，则$a\geqslant 4$.

所以a的最小值为4.

4.（多选）若正实数a,b满足$a+b=1$，则　　(　　)

A.ab有最大值$\frac{1}{4}$

B.$\sqrt{a}+\sqrt{b}$有最小值$\sqrt{2}$

C.$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$有最小值4

D.a^2+b^2有最小值$\frac{\sqrt{2}}{2}$

AC　**解析**：因为$a>0,b>0$，且$a+b=1$，所以$1=a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，所以$ab\leqslant\frac{1}{4}$（当且仅当$a=b=\frac{1}{2}$时，等号成立），所以$ab$有最大值$\frac{1}{4}$，所以选项A正确；$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}\leqslant 1+2\cdot\frac{a+b}{2}=2$（当且仅当$a=b=\frac{1}{2}$时，等号成立），所以$\sqrt{a}+\sqrt{b}$有最大值$\sqrt{2}$，所以B错误；$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{ab}\geqslant 4$，所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$有最小值4，所以C正确；$a^2+b^2\geqslant 2ab$，$2ab\leqslant\frac{1}{2}$，所以$a^2+b^2$的最小值不是$\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以D错误.故选AC.

5.当$x>0$时，$\frac{3x}{x^2+4}$的最大值为________.

$\frac{3}{4}$　**解析**：当$x>0$时，$\frac{3x}{x^2+4}=\frac{3}{x+\frac{4}{x}}\leqslant\frac{3}{2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}}=\frac{3}{4}$，当且仅当$x=\frac{4}{x}$，即$x=2$时等号成立，即$\frac{3x}{x^2+4}$的最大值为$\frac{3}{4}$.

6.设$a>b>c$，$n\in\mathbf{N}^*$，使不等式$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{n}{a-c}$成立的$n$的最大值为________.

4　**解析**：因为$a-b>0,a-c>0$，要使原不等式成立，

只需$\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}\geqslant n$成立，

即$\frac{(a-b)+(b-c)}{a-b}+\frac{(a-b)+(b-c)}{b-c}\geqslant n$成立，

也就是$2+\frac{b-c}{a-b}+\frac{a-b}{b-c}\geqslant n$成立.

又$\frac{b-c}{a-b}+\frac{a-b}{b-c}\geqslant 2$，当且仅当$b-c=a-b$，

即$a+c=2b$时，等号成立，

所以$n\leqslant 4$，所以n的最大值为4.

7.已知$x>0,y>0$，且$2x+8y-xy=0$，

(1)xy的最小值为<u>64</u>；

(2)$x+y$的最小值为<u>18</u>.

8.某厂家拟在明年举行某产品的促销活动，经调查，该产品的年销售量(即该产品的年产量)x(单位：万件)与年促销费用$m(m\geqslant 0)$(单位：万元)满足$x=3-\frac{k}{m+1}$(k为常数).如果不举行促销活动，该产品

的年销售量是 1 万件.已知明年生产该产品的固定投入为 8 万元,每生产 1 万件该产品需要再投入 16 万元,厂家将每件产品的销售价格定为每件产品年平均成本的 1.5 倍(产品成本包括固定投入和再投入两部分资金,不包括促销费用).该厂家明年的促销费用为多少万元时,厂家的利润最大?最大利润为多少?

解:设明年厂家的利润为 y 万元.

由题意,当 $m=0$ 时,$x=1$,所以 $1=3-k$,解得 $k=2$.所以 $x=3-\dfrac{2}{m+1}$.

又每万件产品的销售价格为 $1.5\times\dfrac{8+16x}{x}$ 万元,

所以 $y=x\left(1.5\times\dfrac{8+16x}{x}\right)-(8+16x+m)$

$=4+8x-m=4+8\left(3-\dfrac{2}{m+1}\right)-m$

$=-\left[\dfrac{16}{m+1}+(m+1)\right]+29.$

因为 $m\geqslant 0$,所以 $\dfrac{16}{m+1}+(m+1)\geqslant 2\sqrt{16}=8$,

当且仅当 $\dfrac{16}{m+1}=m+1$,即 $m=3$ 时等号成立.

所以 $y\leqslant -8+29=21$,所以 $y_{\max}=21$.

故该厂家明年的促销费用为 3 万元时,厂家的利润最大,最大利润为 21 万元.

2.3　二次函数与一元二次方程、不等式

第 1 课时　一元二次不等式的解法

学习任务目标

1.能够借助二次函数求解一元二次不等式.

2.理解一元二次方程、二次函数与一元二次不等式之间的关系,并能解决相应的问题.

3.能解决一元二次不等式中的恒成立问题.

问题式预习

知识点一　一元二次不等式、二次函数的零点

1.一元二次不等式

定义	一般地,我们把只含有一个未知数,并且未知数的最高次数是 2 的不等式,称为一元二次不等式
一般形式	$ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$,其中 a,b,c 均为常数,$a\neq 0$

2.二次函数的零点

一般地,对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$,我们把使 $ax^2+bx+c=0$ 的实数 x 叫做二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的零点.

[**微训练**]

判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)$mx^2-5x<0$ 是一元二次不等式.　(　　)

×　**提示**:当 $m=0$ 时,是一元一次不等式;当 $m\neq 0$ 时,是一元二次不等式.

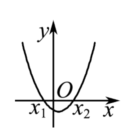
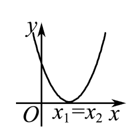
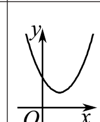
(2)函数 $y=ax^2+bx+c$ 的零点就是函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴的交点.　(　　)

×　**提示**:函数 $y=ax^2+bx+c$ 的零点是图象与 x 轴的交点的横坐标.

(3)$x^2-y^2>0$ 是一元二次不等式.　(　　)

×　**提示**:此不等式含有两个变量,根据一元二次不等式的定义可知不是一元二次不等式.

知识点二　二次函数与一元二次方程、不等式的解的对应关系

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$y=ax^2+bx+c\ (a>0)$的图象			
$ax^2+bx+c=0\ (a>0)$的根	有两个不相等的实数根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$	有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2+bx+c>0\ (a>0)$的解集	$\{x\mid x<x_1$,或 $x>x_2\}$	$\left\{x\,\middle|\,x\neq -\dfrac{b}{2a}\right\}$	**R**

续表

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$ax^2+bx+c<0(a>0)$的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

[微训练]

判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)若方程 $ax^2+bx+c=0(a<0)$没有实数根,则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$.　(　　)

×　**提示**:若方程 $ax^2+bx+c=0(a<0)$没有实根,则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为$\varnothing$.

(2)设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个解为 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,则一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集不可能为$\{x\mid x_1<x<x_2\}$.　(　　)

×　**提示**:当二次项系数 $a<0$ 时,不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为$\{x\mid x_1<x<x_2\}$.

(3)不等式 $ax^2+bx+c\leqslant0(a\neq0)$或 $ax^2+bx+c\geqslant0(a\neq0)$的解集为空集,则方程 $ax^2+bx+c=0$ 无实根.　(　　)

√　**提示**:当 $\Delta<0$ 时,一元二次不等式的解集为空集,此时方程无实根.

任务型课堂

任务一　简单一元二次不等式的解法

1.不等式 $x^2-3x+2<0$ 的解集为　(　　)

A.$\{x\mid x<-2,或\ x>-1\}$

B.$\{x\mid -2<x<-1\}$

C.$\{x\mid x<1,或\ x>2\}$

D.$\{x\mid 1<x<2\}$

D　**解析**:原不等式即为$(x-1)(x-2)<0$,所以 $1<x<2$.故原不等式的解集为$\{x\mid 1<x<2\}$.

2.不等式 $x^2-2x-5>2x$ 的解集是________.

$\{x\mid x<-1,或\ x>5\}$　**解析**:由 $x^2-2x-5>2x$,得 $x^2-4x-5>0$.因为 $x^2-4x-5=0$ 的两根为 -1,5,所以 $x^2-4x-5>0$ 的解集为$\{x\mid x<-1,或\ x>5\}$.

3.不等式$-x^2+6x-10>0$ 的解集为________.

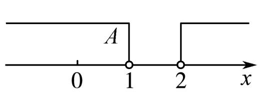
$\varnothing$　**解析**:原不等式可化为 $x^2-6x+10<0$.

因为 $\Delta=36-40=-4<0$,所以方程 $x^2-6x+10=0$ 没有实数根.所以原不等式的解集为$\varnothing$.

4.已知集合 $A=\{x\mid 3x-2-x^2<0\}$,$B=\{x\mid x-a<0\}$,且 $B\subseteq A$,则 a 的取值范围为________.

$\{a\mid a\leqslant1\}$　**解析**:$A=\{x\mid 3x-2-x^2<0\}=\{x\mid x^2-3x+2>0\}=\{x\mid x<1,或\ x>2\}$,$B=\{x\mid x<a\}$.

如图,因为 $B\subseteq A$,所以 $a\leqslant1$.



【类题通法】

解一元二次不等式的一般步骤

(1)将一元二次不等式化为一端为 0 的形式(习惯上使二次项系数大于 0);

(2)求出相应一元二次方程的根,或判断方程没有实根;

(3)画出相应二次函数的图象,方程有根的将根标在图中;

(4)观察图象中位于 x 轴上方或下方的部分,对比不等式中不等号的方向,写出解集.

任务二　三个"二次"之间的关系

1.若不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集是$\left\{x\middle|-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{3}\right\}$,则 $a-b$ 的值为　(　　)

A.14　　　B.-14

C.10　　　D.-10

D　**解析**:由不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集是$\left\{x\middle|-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{3}\right\}$,可得$-\dfrac{1}{2}$,$\dfrac{1}{3}$是一元二次方程 $ax^2+bx+2=0$ 的两个实数根.所以
$$\begin{cases}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=-\dfrac{b}{a},\\-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{a},\end{cases}$$
解得 $a=-12$,$b=-2$.所以 $a-b=-12-(-2)=-10$.故选 D.

2.若不等式 $ax^2+bx+c\leqslant0$ 的解集为$\{x\mid x\leqslant-3,或\ x\geqslant4\}$,求不等式 $bx^2+2ax-c-3b\geqslant0$ 的解集.

解:因为不等式 $ax^2+bx+c\leqslant0$ 的解集为$\{x\mid x\leqslant-3,或\ x\geqslant4\}$,

所以 $a<0$,且-3,4 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根.由根与系数的关系可得
$$\begin{cases}-3+4=-\dfrac{b}{a},\\-3\times4=\dfrac{c}{a},\end{cases}$$

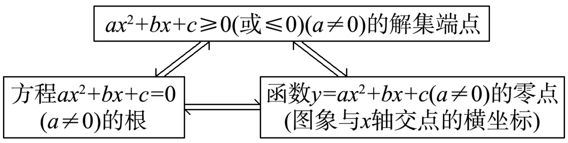
即$\begin{cases}b=-a,\\c=-12a.\end{cases}$

所以不等式 $bx^2+2ax-c-3b\geqslant0$ 可化为$-ax^2+2ax+15a\geqslant0$,即 $x^2-2x-15\geqslant0$,解得 $x\leqslant-3$ 或

$x \geqslant 5$.故所求不等式的解集为$\{x \mid x \leqslant -3$,或 $x \geqslant 5\}$.

【类题通法】

三个"二次"之间的关系



注意:不要忽视二次项系数的符号和不等号的方向.

任务三　一元二次不等式的恒成立问题

[探究活动]

探究 1:若不等式 $ax^2+bx+c>0$ 恒成立,则 a,b,c 应满足什么条件?

提示:当 $a=0$ 时,$b=0$,$c>0$;

当 $a \neq 0$ 时,$\begin{cases} a>0, \\ \Delta<0, \end{cases}$ 即$\begin{cases} a>0, \\ b^2-4ac<0. \end{cases}$

探究 2:若不等式 $ax^2+bx+c<0$ 恒成立,则 a,b,c 应满足什么条件?

提示:当 $a=0$ 时,$b=0$,$c<0$;

当 $a \neq 0$ 时,$\begin{cases} a<0, \\ \Delta<0, \end{cases}$ 即$\begin{cases} a<0, \\ b^2-4ac<0. \end{cases}$

[评价活动]

1. 若 $ax^2+ax-1<0$ 恒成立,则 a 的取值范围是　(　　)

A. $a \leqslant 0$

B. $a<-4$

C. $-4<a<0$

D. $-4<a \leqslant 0$

D　**解析**:当 $a=0$ 时,$ax^2+ax-1=-1<0$ 恒成立;

当 $a \neq 0$ 时,则$\begin{cases} a<0, \\ \Delta<0, \end{cases}$ 即$\begin{cases} a<0, \\ a^2+4a<0, \end{cases}$ 解得$-4<a<0$.综上,$-4<a \leqslant 0$.

2. 若关于 x 的不等式 $ax^2+2x+a>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,则实数 a 的取值范围是________.

$\{a \mid a>1\}$　**解析**:当 $a=0$ 时,易知条件不成立;当 $a \neq 0$ 时,要使不等式 $ax^2+2x+a>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,必须满足$\begin{cases} a>0, \\ \Delta=4-4a^2<0, \end{cases}$ 解得 $a>1$.

3. 不等式$(m^2-2m-3)x^2-(m-3)x-1<0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,求 m 的取值范围.

解:①当 $m^2-2m-3=0$ 时,解得 $m=3$ 或 $m=-1$.

若 $m=3$,原不等式化为$-1<0$,恒成立,原不等式的解集为 $\mathbf{R}$.

若 $m=-1$,原不等式化为 $4x-1<0$,得 $x<\frac{1}{4}$,原不等式的解集为$\left\{x \,\middle|\, x<\frac{1}{4}\right\}$,不合题意,舍去.

②当 $m^2-2m-3 \neq 0$ 时,依题意有

$\begin{cases} m^2-2m-3<0, \\ \Delta=(m-3)^2+4(m^2-2m-3)<0, \end{cases}$

所以$\begin{cases} -1<m<3, \\ -\frac{1}{5}<m<3, \end{cases}$ 所以$-\frac{1}{5}<m<3$.

综上所述,当$-\frac{1}{5}<m \leqslant 3$ 时,不等式$(m^2-2m-3)x^2-(m-3)x-1<0$ 的解集为 $\mathbf{R}$.

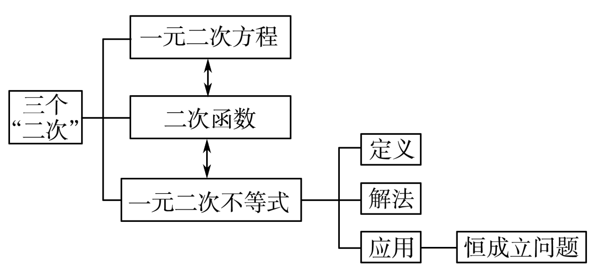
【类题通法】

一元二次不等式恒成立的条件

(1)$ax^2+bx+c>0(a \neq 0)$对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立的充要条件是$\begin{cases} a>0, \\ b^2-4ac<0; \end{cases}$

(2)$ax^2+bx+c<0(a \neq 0)$对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立的充要条件是$\begin{cases} a<0, \\ b^2-4ac<0. \end{cases}$

提质归纳



课后素养评价(十四)

基础性·能力运用

1.不等式 $4x^2-12x+9\leqslant 0$ 的解集是　(　　)

A.$\varnothing$　　B.$\mathbf{R}$

C.$\left\{x\middle|x\neq\frac{3}{2}\right\}$　　D.$\left\{\frac{3}{2}\right\}$

D　**解析**:原不等式可化为 $(2x-3)^2\leqslant 0$,故 $x=\frac{3}{2}$.故选 D.

2.若集合 $A=\{x|(2x+1)(x-3)>0\}$,$B=\{x\in\mathbf{N}^*|x\leqslant 4\}$,则 $A\cap B=$　(　　)

A.$\{1,2,3\}$　　B.$\{4\}$

C.$\{3,4\}$　　D.$\{1,2,3,4,5\}$

B　**解析**:由题意,$A=\left\{x\middle|x<-\frac{1}{2}或x>3\right\}$,$B=\{1,2,3,4\}$,所以 $A\cap B=\{4\}$.

3.(多选)下列四个不等式中,解集为$\varnothing$的是　(　　)

A.$-x^2+x+1\leqslant 0$

B.$2x^2-3x+4<0$

C.$x^2+3x+10\leqslant 0$

D.$-x^2+4x-\left(a+\frac{4}{a}\right)>0(a>0)$

BCD　**解析**:对于 A,$-x^2+x+1\leqslant 0$ 化为 $x^2-x-1\geqslant 0$,其解集不为$\varnothing$;

对于 B,$2x^2-3x+4<0$,$\Delta=9-32<0$,其解集为$\varnothing$;

对于 C,$x^2+3x+10\leqslant 0$,$\Delta=9-40<0$,其解集为$\varnothing$;

对于 D,$-x^2+4x-\left(a+\frac{4}{a}\right)>0$ 化为 $x^2-4x+\left(a+\frac{4}{a}\right)<0$,$\Delta=16-4\left(a+\frac{4}{a}\right)\leqslant 16-4\times 2\left(a\cdot\frac{4}{a}\right)=0$,当且仅当 $a=2$ 时取等号,故不等式的解集为$\varnothing$.

4.已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R})$中,$x$,$y$满足如下表所给的对应关系:

x	1	2	4
y	0	-1	0

则方程 $y=0$ 的根为________;不等式 $y<0$ 的解集为________.

1 和 4　$\{x|1<x<4\}$　**解析**:设函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$,

由表中数据知 1 和 4 是方程 $y=0$ 的两根.

又 $x=2$ 时,$y=-1<0$,故此二次函数图象是开口向上的抛物线,并且与 x 轴交于两点 $(1,0)$ 和 $(4,0)$,所以不等式 $y<0$ 的解集为 $\{x|1<x<4\}$.

5.设函数 $y=2x^2+bx+c$.若关于 x 的不等式 $2x^2+bx+c<0$ 的解集是 $\{x|1<x<5\}$,则 b,c 的值分别为________.

-12,10　**解析**:由题意知 1 和 5 是方程 $2x^2+bx+c=0$ 的两个根.

由根与系数的关系,知 $-\frac{b}{2}=6$,$\frac{c}{2}=5$,

解得 $b=-12$,$c=10$.

6.若关于 x 的不等式 $(a+1)x^2+ax+a>0$ 对任意实数 x 恒成立,求实数 a 的取值范围.

解:当 $a+1=0$,即 $a=-1$ 时,原不等式化为 $-x-1>0$,得 $x<-1$,不合题意;

当 $a+1\neq 0$ 时,由题意,得 $\begin{cases}a+1>0,\\ \Delta=a^2-4a(a+1)<0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a>-1,\\ a>0或a<-\frac{4}{3}.\end{cases}$ 所以 $a>0$.

所以实数 a 的取值范围为 $\{a|a>0\}$.

综合性·创新提升

1.已知 $p:x^2<2x+3$ 和 $q:|x-1|\leqslant 2$,则 p 是 q 的　(　　)

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

A　**解析**:因为 $x^2<2x+3\Rightarrow x|-1<x<3$,$|x-1|\leqslant 2\Rightarrow -1\leqslant x\leqslant 3$,所以 p 是 q 的充分不必要条件.

2.若关于 x 的方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不相等的实数根,则　(　　)

A.$-1<m<1$　　B.$m<-1$ 或 $m>1$

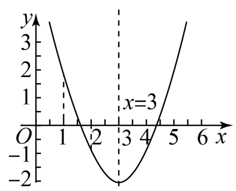
C.$-2<m<2$　　D.$m<-2$ 或 $m>2$

D　**解析**:因为方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不相等的实数根,所以 $\Delta=m^2-4>0$,所以 $m>2$ 或 $m<-2$.

3.(多选)关于 x 的一元二次不等式 $x^2-6x+a\leqslant 0(a\in\mathbf{Z})$ 的解集中有且仅有 3 个整数,则 a 的值可以是　(　　)

A.7　　B.8　　C.9　　D.10

AB　**解析**:设函数 $y=x^2-6x+a$,其图象是开口向上,对称轴是 $x=3$ 的抛物线,如图.



若关于 x 的一元二次不等式 $x^2-6x+a\leqslant 0$ 的解集中有且仅有 3 个整数,则当 $x=2$ 时,$y\leqslant 0$,当 $x=1$ 时,$y>0$,即 $\begin{cases}4-12+a\leqslant 0,\\1-6+a>0,\end{cases}$ 解得 $5<a\leqslant 8$.

又 $a\in\mathbf{Z}$,所以 $a=6$ 或 7 或 8.

4.若关于 x 的不等式 $ax^2+3x-1>0$ 的解集是 $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}<x<1\right\}$,则 a 的值为______.不等式 $ax^2-3x+a^2+1>0$ 的解集为____________.

-2　$\left\{x\,\middle|\,-\frac{5}{2}<x<1\right\}$　**解析**:依题意,可知方程 $ax^2+3x-1=0$ 的两个实数根为 $\frac{1}{2}$ 和 1,$\frac{1}{2}+1=-\frac{3}{a}$,$\frac{1}{2}\times 1=-\frac{1}{a}$,解得 $a=-2$.不等式 $ax^2-3x+a^2+1>0$ 可化为 $-2x^2-3x+5>0$,即 $2x^2+3x-5<0$.

因为 $2x^2+3x-5=0$ 有两根为 $x_1=1$,$x_2=-\frac{5}{2}$,

所以不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,-\frac{5}{2}<x<1\right\}$.

5.若关于 x 的不等式 $(a^2-1)x^2-(a-1)x-1<0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,则实数 a 的取值范围是________.

$\left\{a\,\middle|\,-\frac{3}{5}<a\leqslant 1\right\}$　**解析**:①当 $a^2-1\neq 0$,即 $a\neq\pm 1$ 时,

由 $\begin{cases}a^2-1<0,\\\Delta=(a-1)^2+4(a^2-1)<0,\end{cases}$

解得 $-\frac{3}{5}<a<1$.

②当 $a^2-1=0$,即 $a=\pm 1$ 时,

若 $a=1$,则原不等式为 $-1<0$,恒成立;

若 $a=-1$,则原不等式为 $2x-1<0$,即 $x<\frac{1}{2}$,不符合题目要求,舍去.

综上所述,当 $-\frac{3}{5}<a\leqslant 1$ 时,原不等式的解集为 $\mathbf{R}$.

6.解不等式 $x^2-3|x|+2\leqslant 0$.

解:原不等式等价于 $|x|^2-3|x|+2\leqslant 0$,

即 $1\leqslant|x|\leqslant 2$.

当 $x\geqslant 0$ 时,$1\leqslant x\leqslant 2$;

当 $x<0$ 时,$-2\leqslant x\leqslant -1$.

所以原不等式的解集为 $\{x|-2\leqslant x\leqslant -1$,或 $1\leqslant x\leqslant 2\}$.

第 2 课时　一元二次不等式的应用

学习任务目标

1.会求分式不等式的解集.

2.能利用一元二次不等式解决实际问题.

3.会利用分类讨论思想解含参数的一元二次不等式.

任务型课堂

任务一　分式不等式的解法

1.不等式 $\frac{-x+1}{x-2}>0$ 的解集是　(　　)

A.$\{x|x<-1$,或 $x>2\}$

B.$\{x|-1<x<2\}$

C.$\{x|1<x<2\}$

D.$\{x|x<1$,或 $x>2\}$

C　**解析**:原不等式可化为 $\frac{x-1}{x-2}<0$,等价于 $(x-1)\cdot(x-2)<0$,其解集为 $\{x|1<x<2\}$.

2.不等式 $2>\frac{1}{x}$ 的解集是________.

$\left\{x\,\middle|\,x<0\text{ 或 }x>\frac{1}{2}\right\}$　**解析**:不等式 $2>\frac{1}{x}$,可化为

$\frac{2x-1}{x}>0$,解得 $x<0$ 或 $x>\frac{1}{2}$.

3.解不等式:$\frac{x+1}{2x-3}\leqslant 1$.

解:因为$\frac{x+1}{2x-3}\leqslant 1$,所以$\frac{x+1}{2x-3}-1\leqslant 0$.

所以$\frac{-x+4}{2x-3}\leqslant 0$,即$\frac{x-4}{x-\frac{3}{2}}\geqslant 0$.

此不等式等价于$(x-4)\left(x-\frac{3}{2}\right)\geqslant 0$,且 $x-\frac{3}{2}\neq 0$,

解得 $x<\frac{3}{2}$或 $x\geqslant 4$.

所以原不等式的解集为$\left\{x\,\middle|\,x<\frac{3}{2}\text{或 }x\geqslant 4\right\}$.

【类题通法】

分式不等式的解题策略

(1)直接法:不等号右边为零的分式不等式,可直接转化为一元二次不等式或一元二次不等式组求解,但要注意分母不为零.

(2)转化法:不等号右边不为零的分式不等式,要先移项、通分,使不等号右边变为零,再用直接法求解.

注意:对于不等号右边不为零的分式不等式,求解时,一定不要直接去分母.

任务二　一元二次不等式的实际应用

1.某蛋糕厂生产某种蛋糕的成本为 40 元/个,出厂价为 60 元/个,日销售量为1 000个.为适应市场需求,计划提高蛋糕档次,适度增加成本.若每个蛋糕成本增加的百分率为 $x(0<x<1)$,则每个蛋糕的出厂价相应提高的百分率为 $0.5x$,同时预计日销售量增加的百分率为 $0.8x$.为使日利润有所增加,求 x 的取值范围.

解:设增加成本后的日利润为 y 元.

$y=[60\times(1+0.5x)-40\times(1+x)]\times 1\ 000\times(1+0.8x)=2\ 000(-4x^2+3x+10)(0<x<1)$.

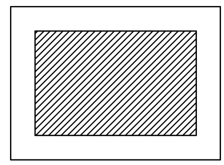
要保证日利润有所增加,

则 $y>(60-40)\times 1\ 000$,且 $0<x<1$,

即$\begin{cases}-4x^2+3x>0,\\0<x<1,\end{cases}$解得 $0<x<\frac{3}{4}$.

所以,为使日利润有所增加,x 的取值范围为$\left\{x\,\middle|\,0<x<\frac{3}{4}\right\}$.

2.如图所示,学校要在一块长 40 m、宽 30 m 的矩形地面上进行绿化,四周种植花卉(花卉带的宽度相同),中间铺设草坪.要求草坪的面积不少于总面积的一半,求花卉带宽度的取值范围.



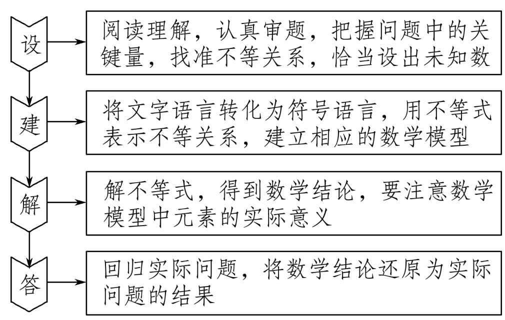
解:设花卉带的宽度为 x m,则草坪的长和宽分别是$(40-2x)$米,$(30-2x)$m,

所以$\begin{cases}(40-2x)(30-2x)\geqslant\frac{1}{2}\times 40\times 30,\\40-2x>0,\\30-2x>0,\\x>0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x\leqslant 5\text{ 或 }x\geqslant 30,\\x<20,\\x<15,\\x>0.\end{cases}$　所以 $0<x\leqslant 5$.

故花卉带宽度 x 的取值范围为$\{x|0<x\leqslant 5\}$.

【类题通法】



任务三　含参数的一元二次不等式的解法

[探究活动]

探究 1:如果不等式的二次项的系数 a 为参数,如何对 a 进行讨论?

提示:二次项系数 a 应分三种情况讨论,即 $a>0$,$a<0$,$a=0$.

探究 2:已知 $a\neq 0$,在求解一元二次不等式时,如果对应的方程的根不确定,应如何进行讨论?

提示:关于不等式对应的方程根的讨论,应分三种情况:(1)$\Delta>0$,方程有两个不相等的实数根;(2)$\Delta=0$,方程有两个相等的实数根;(3)$\Delta<0$,方程没有实数根.

探究 3:若一元二次不等式所对应的方程的根含有参数,应如何讨论?

提示:关于不等式对应的方程根的大小,应分三种情况讨论:$x_1>x_2$,$x_1=x_2$,$x_1<x_2$.

[评价活动]

1.解关于 x 的不等式 $x^2-ax-2a^2<0$.

解:原不等式变形为$(x-2a)(x+a)<0$.

①若 $a>0$,则 $-a<x<2a$,此时不等式的解集为

$\{x\mid -a<x<2a\}$；

②若 $a<0$，则 $2a<x<-a$，此时不等式的解集为 $\{x\mid 2a<x<-a\}$；

③若 $a=0$，则原不等式即为 $x^2<0$，此时解集为 $\varnothing$.

综上所述，当 $a>0$ 时，原不等式的解集为 $\{x\mid -a<x<2a\}$；

当 $a=0$ 时，原不等式的解集为 $\varnothing$；

当 $a<0$ 时，原不等式的解集为 $\{x\mid 2a<x<-a\}$.

2.解关于 x 的不等式 $ax^2-(a+1)x+1<0$.

解：①当 $a=0$ 时，原不等式可化为 $x>1$.

②当 $a\neq 0$ 时，原不等式可化为 $(ax-1)(x-1)<0$.

当 $a<0$ 时，不等式可化为 $\left(x-\dfrac{1}{a}\right)(x-1)>0$.

因为 $\dfrac{1}{a}<1$，所以 $x<\dfrac{1}{a}$ 或 $x>1$.

当 $a>0$ 时，原不等式可化为 $\left(x-\dfrac{1}{a}\right)(x-1)<0$.

若 $\dfrac{1}{a}<1$，即 $a>1$，则 $\dfrac{1}{a}<x<1$；

若 $\dfrac{1}{a}=1$，即 $a=1$，则 $x\in\varnothing$；

若 $\dfrac{1}{a}>1$，即 $0<a<1$，则 $1<x<\dfrac{1}{a}$.

综上所述，当 $a<0$ 时，原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x<\dfrac{1}{a}\text{或}x>1\right\}$；当 $a=0$ 时，原不等式的解集为 $\{x\mid x>1\}$；当 $0<a<1$ 时，原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,1<x<\dfrac{1}{a}\right\}$；当 $a=1$ 时，原不等式的解集为 $\varnothing$；当 $a>1$ 时，原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{a}<x<1\right\}$.

3.解关于 x 的不等式 $ax^2-2\geqslant 2x-ax(a<0)$.

解：原不等式移项得 $ax^2+(a-2)x-2\geqslant 0$，化简为 $(x+1)(ax-2)\geqslant 0$.

因为 $a<0$，所以 $(x+1)\left(x-\dfrac{2}{a}\right)\leqslant 0$.

当 $\dfrac{2}{a}<-1$，即 $-2<a<0$ 时，解得 $\dfrac{2}{a}\leqslant x\leqslant -1$；

当 $\dfrac{2}{a}=-1$，即 $a=-2$ 时，解得 $x=-1$；

当 $\dfrac{2}{a}>-1$，即 $a<-2$ 时，解得 $-1\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{a}$.

综上所述，

当 $-2<a<0$ 时，不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,\dfrac{2}{a}\leqslant x\leqslant -1\right\}$；

当 $a=-2$ 时，不等式的解集为 $\{x\mid x=-1\}$；

当 $a<-2$ 时，不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,-1\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{a}\right\}$.

【类题通法】

解含参数的一元二次型不等式的策略

在解含参数的一元二次型的不等式时，往往要对参数进行分类讨论.为了做到分类“不重不漏”，讨论需从如下三个方面进行考虑：

(1)关于不等式类型的讨论：二次项系数 $a>0$，$a<0$，$a=0$.

(2)关于不等式对应方程的根的讨论：两根($\Delta>0$)，一根($\Delta=0$)，无根($\Delta<0$).

(3)关于不等式对应方程的根的大小的讨论：$x_1>x_2$，$x_1=x_2$，$x_1<x_2$.

提质归纳

一元二次不等式的应用
- 分式不等式的解法
- 实际应用
- 含参数的一元二次不等式的解法

课后素养评价(十五)

基础性·能力运用

1.不等式 $\dfrac{x-1}{x+2}<0$ 的解集为 (　　)

A. $\{x\mid x>1\}$

B. $\{x\mid x<-2\}$

C. $\{x\mid -2<x<1\}$

D. $\{x\mid x>1,\text{或}\ x<-2\}$

C　**解析**：原不等式等价于 $(x-1)(x+2)<0$，解得 $-2<x<1$.

2.产品的总成本 y(单位：万元)与产量 x(单位：台)之间的函数关系式是 $y=3\,000+20x-0.1x^2$，$x\in(0,240)$.若每台产品的售价为 25 万元，则生产者不亏本时(销售收入不小于总成本)的最低产量是 (　　)

A. 100 台　　B. 120 台

C. 150 台　　D. 180 台

C　**解析**：由题设，产量 x 台时，总售价为 $25x$；欲使生产者不亏本，必须满足总售价大于等于总成本，即 $25x\geqslant 3\,000+20x-0.1x^2$，即 $0.1x^2+5x-3\,000\geqslant 0$，$x^2+50x-30\,000\geqslant 0$，解得 $x\geqslant 150$ 或 $x\leqslant -200$(舍去).

故欲使生产者不亏本，最低产量是 150 台.

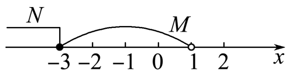
3.已知集合 $M=\left\{x\left|\frac{x+3}{x-1}<0\right.\right\}$，$N=\{x\mid x\leqslant -3\}$，则集合 $\{x\mid x\geqslant 1\}=$ （　　）

A.$M\cap N$　　B.$M\cup N$

C.$\complement_{\mathbf{R}}(M\cap N)$　　D.$\complement_{\mathbf{R}}(M\cup N)$

D　**解析**：$\frac{x+3}{x-1}<0\Leftrightarrow(x+3)(x-1)<0\Leftrightarrow -3<x<1$，故集合 M 可化为 $\{x\mid -3<x<1\}$.

将集合 M 和集合 N 在数轴上表示出来(如图).



易知答案为 D.

4.设 $a<-1$，则关于 x 的不等式 $a(x-a)\cdot\left(x-\frac{1}{a}\right)<0$ 的解集为__________.

$\left\{x\left|x>\frac{1}{a}\right.,\text{或 }x<a\right\}$　**解析**：因为 $a<-1$，所以 $a(x-a)\cdot\left(x-\frac{1}{a}\right)<0\Leftrightarrow(x-a)\cdot\left(x-\frac{1}{a}\right)>0$.

又 $a<-1$，所以 $\frac{1}{a}>a$，所以 $x>\frac{1}{a}$，或 $x<a$.

5.若关于 x 的不等式 $(mx-1)(x-2)>0$ 的解集为 $\left\{x\left|\frac{1}{m}<x<2\right.\right\}$，则 m 的取值范围是________.

$\{m\mid m<0\}$　**解析**：因为不等式 $(mx-1)(x-2)>0$ 的解集为 $\left\{x\left|\frac{1}{m}<x<2\right.\right\}$，

所以方程 $(mx-1)(x-2)=0$ 的两个实数根为 $\frac{1}{m}$ 和 2，且 $\begin{cases}m<0,\\ \frac{1}{m}<2,\end{cases}$ 解得 $m<0$.所以 m 的取值范围是 $m<0$.

6.解关于 x 的不等式 $x^2-ax-2a^2<0$.

解：原不等式可变形为 $(x-2a)(x+a)<0$.

①若 $a>0$，则 $-a<x<2a$，此时不等式的解集为 $\{x\mid -a<x<2a\}$；

②若 $a<0$，则 $2a<x<-a$，此时不等式的解集为 $\{x\mid 2a<x<-a\}$；

③若 $a=0$，则原不等式即为 $x^2<0$，此时解集为 $\varnothing$.

7.某地区原计划以 2 400 元/t 的价格收购某种农产品 m t.按规定，种植户出售该农产品每收入 100 元需纳税 8 元(称作税率为 8 个百分点，即 8%).为了减轻种植户负担，制定积极的收购政策，政府计划调低税率.根据市场规律，税率降低 x 个百分点，收购量能增加 $2x$ 个百分点.试确定 x 的范围，使税率调低后，该地区此项税收总收入不低于原计划的 78%.

解：设税率调低后，税收总收入为 y 元.

$y=2\,400m(1+2x\%)\cdot(8-x)\%=-\frac{12}{25}m(x^2+42x-400)$.

依题意，得 $y\geqslant 2\,400m\times 8\%\times 78\%$，

即 $-\frac{12}{25}m(x^2+42x-400)\geqslant 2\,400m\times 8\%\times 78\%$.

整理，得 $x^2+42x-88\leqslant 0$，解得 $-44\leqslant x\leqslant 2$.

根据 x 的实际意义，知 $0<x\leqslant 8$.所以 $0<x\leqslant 2$.

综合性·创新提升

1.关于 x 的不等式 $x^2-2ax-8a^2<0(a>0)$ 的解集为 $\{x\mid x_1<x<x_2\}$，且 $x_2-x_1=15$，则 $a=$ （　　）

A.$\frac{5}{2}$　　B.$\frac{7}{2}$

C.$\frac{15}{4}$　　D.$\frac{15}{2}$

A　**解析**：(方法一)$x^2-2ax-8a^2<0$ 可化为 $(x+2a)\cdot(x-4a)<0$.

因为 $a>0$ 且解集为 $\{x\mid x_1<x<x_2\}$，所以 $x_1=-2a$，$x_2=4a$.所以 $x_2-x_1=6a=15$.故 $a=\frac{5}{2}$.

(方法二)由题意知 x_1，x_2 为方程 $x^2-2ax-8a^2=0$ 的两根，则 $x_1+x_2=2a$，$x_1x_2=-8a^2$.故 $(x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(2a)^2-4\times(-8a^2)=36a^2=15^2$，结合 $a>0$ 得 $a=\frac{5}{2}$.

2.若 $0<m<1$，则关于 x 的不等式 $(x-m)\left(x-\frac{1}{m}\right)<0$ 的解集为 (D)

A.$\left\{x\left|\frac{1}{m}<x<m\right.\right\}$

B.$\left\{x\left|x>\frac{1}{m}\right.,\text{或 }x<m\right\}$

C.$\left\{x\left|x>m\right.,\text{或 }x<\frac{1}{m}\right\}$

D.$\left\{x\left|m<x<\frac{1}{m}\right.\right\}$

3.已知关于 x 的不等式 $\frac{x+1}{x+a}<2$ 的解集为 P，若 $1\notin$

P,则实数 a 的取值范围为　（　　）

A.$\{a|a\geqslant 0$ 或 $a\leqslant -1\}$

B.$\{a|-1\leqslant a\leqslant 0\}$

C.$\{a|a>0$ 或 $a<-1\}$

D.$\{a|-1<a<0\}$

B　**解析**:由题意可得$\frac{1+1}{1+a}\geqslant 2$,或式子$\frac{1+1}{1+a}$无意义.

化简可得$\frac{a}{1+a}\leqslant 0$ 或 $a=-1$.

解得$-1\leqslant a\leqslant 0$.

4.(多选)若不等式$x^2+ax+1\geqslant 0$ 对任意 $0<x<\frac{1}{2}$ 恒成立,则 a 的值可以为　（　　）

A.0　　B.-2

C.$-\frac{5}{2}$　　D.-3

ABC　**解析**:因为 $0<x<\frac{1}{2}$,

所以原不等式等价于 $a\geqslant -\left(x+\frac{1}{x}\right)$.

因为 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$,当且仅当 $x=\frac{1}{x}$,即 $x=1$ 时,等号成立,又 $0<x<\frac{1}{2}$,所以 $x+\frac{1}{x}>\frac{5}{2}$,

所以$-\left(x+\frac{1}{x}\right)<-\frac{5}{2}$,所以 $a\geqslant -\frac{5}{2}$.

5. 若集合 $A=\{x|-1\leqslant 2x+1\leqslant 3\}$, $B=\left\{x\left|\frac{x-2}{x}\leqslant 0\right.\right\}$,则 $A\cap B=$__________.

$\{x|0<x\leqslant 1\}$　**解析**:由题可得 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$.因为$\frac{x-2}{x}\leqslant 0$,所以$\begin{cases}(x-2)x\leqslant 0,\\ x\neq 0,\end{cases}$解得 $0<x\leqslant 2$,$B=\{x|0<x\leqslant 2\}$,所以 $A\cap B=\{x|0<x\leqslant 1\}$.

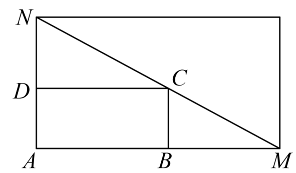
6.党的二十大报告指出:我们要构建高水平社会主义市场经济体制,坚持和完善社会主义基本经济制度,毫不动摇巩固和发展公有制经济,毫不动摇鼓励、支持、引导非公有制经济发展,充分发挥市场在资源配置中的决定性作用,更好发挥政府作用.某非公有制企业抓住机遇推进生产改革,生产的某种产品月销售量 x(单位:件)与售价 p(单位:万元/件)之间的关系为 $p=160-2x$,生产 x 件产品的成本 $r=500+30x$(万元).若该企业销售这种产品月获利不少于 1 300 万元,则 x 的取值范围是________.

$20\leqslant x\leqslant 45$,且 $x\in \mathbf{Z}$　**解析**:设月产量为 $x(x\in\mathbf{Z})$件,由题意可知$(160-2x)x-(500+30x)\geqslant 1\ 300$,即 $x^2-65x+900\leqslant 0$,解得 $20\leqslant x\leqslant 45$.

7.如图,有一长 30 m、宽 20 m 的矩形空地,物业计划将其中的一部分(矩形 $ABCD$)建为仓库,要求顶点 C 在空地的对角线 MN 上,B,D 分别在边 AM,AN 上,其他地方建停车场和路.设 $AB=x$ m.

(1)求仓库占地面积 S 关于 x 的函数解析式;

(2)若要求仓库占地面积不小于 144 m^2,求 x 的取值范围.



解:(1)由题意知,$\triangle NDC\backsim\triangle NAM$,则$\frac{DC}{AM}=\frac{ND}{NA}$,即$\frac{x}{30}=\frac{20-AD}{20}$,解得 $AD=20-\frac{2}{3}x$.

所以仓库占地面积 S 关于 x 的函数解析式为 $S=20x-\frac{2}{3}x^2(0<x<30)$.

(2)由题意得 $20x-\frac{2}{3}x^2\geqslant 144$,即 $x^2-30x+216\leqslant 0$,解得 $12\leqslant x\leqslant 18$.

故 x 的取值范围是$\{x|12\leqslant x\leqslant 18\}$.

8.解关于 x 的不等式 $x^2-(a+a^2)x+a^3>0(a\in\mathbf{R})$.

解:原不等式可化为$(x-a)(x-a^2)>0$.

当 $a<0$ 时,$a<a^2$,原不等式的解集为$\{x|x<a$,或 $x>a^2\}$;

当 $a=0$ 时,$a^2=a$,原不等式的解集为$\{x|x\neq 0,x\in\mathbf{R}\}$;

当 $0<a<1$ 时,$a^2<a$,原不等式的解集为$\{x|x<a^2$,或$x>a\}$;

当 $a=1$ 时,$a^2=a$,原不等式的解集为$\{x|x\neq 1,x\in\mathbf{R}\}$;

当 $a>1$ 时,$a<a^2$,原不等式的解集为$\{x|x<a$,或 $x>a^2\}$.

综上所述,当 $a<0$ 或 $a>1$ 时,原不等式的解集为$\{x|x<a$,或 $x>a^2\}$;

当 $0<a<1$ 时,原不等式的解集为$\{x|x<a^2$,或 $x>a\}$;

当 $a=1$ 时,原不等式的解集为$\{x|x\neq 1,x\in\mathbf{R}\}$;

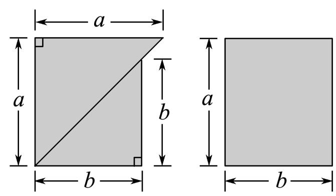
当 $a=0$ 时,原不等式的解集为$\{x|x\neq 0,x\in\mathbf{R}\}$.

单元活动构建

任务一　不等式的性质

实数可分为正数、零和负数,任给一个实数,它只可能为正数、零和负数中的一种.那么,对于任意两个实数 a,b,它们的差 $a-b$ 也只可能为正数、零和负数中的一种.

问题 1　有如图所示的两种广告牌:图①由两个等腰直角三角形构成,图②是一个矩形.试比较这两个广告牌面积的大小,并将这种大小关系用含字母 a,b 的不等式表示出来.



答案:图①的面积大,$\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2>ab$.

问题 2　(1)如果 $a>b$,且 $c>d$,能否判断 ac 与 bd 的大小?

(2)如果 $a>b$,$c<d$,且 $c\neq0$,$d\neq0$,能否判断 $\frac{a}{c}$ 与 $\frac{b}{d}$ 的大小?

答案:(1)不能判断,例如 $a=2,b=-1,c=-1,d=-2$ 时,$ac<bd$;当 $a=2,b=1,c=1,d=-2$ 时,$ac>bd$.

(2)与(1)类似,也无法判断 $\frac{a}{c}$ 与 $\frac{b}{d}$ 的大小.

问题 3　假设有一种机器可以抽取糖水中的糖,生活常识告诉我们:若把糖水中的糖抽取掉一部分,则糖水会变淡.据此可得出一个结论:若 $a>b>m>0$,则 $\frac{b-m}{a-m}<\frac{b}{a}$,你能证明这个结论吗?

答案:略

『任务达标』

1.(多选)若 $a,b,c\in\mathbf{R}$,则下列命题正确的是 (　　)

A.若 $b>a>0$,则 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

B.若 $a>b$,则 $ac>bc$

C.若 $a>b,c>d$,则 $a+c>b+d$

D.若 $ac^2>bc^2$,则 $a>b$

ACD　**解析**:选项 A,因为 $b>a>0$,所以 $ab>0$.在不等式 $b>a$ 两边同除以 ab 得 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$,A 正确;

选项 B,当 $c=0$ 时,$ac=bc$,B 错误;

选项 C,同向不等式相加,不等号方向不变,C 正确;

选项 D,因为 $ac^2>bc^2$,所以 $c^2>0$,两边同除以 c^2,得 $a>b$,D 正确.

故选 ACD.

2.如果 $ac>bc$,那么下列不等式中,一定成立的是 (　　)

A.$ac^2>bc^2$　　B.$a>b$

C.$a+c>b+c$　　D.$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

D　**解析**:若 $c<0$,则 $a<b$,所以,$ac^2<bc^2$,$a+c<b+c$.

因为 $ac>bc$,$c^2>0$,则 $\frac{ac}{c^2}>\frac{bc}{c^2}$,即 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$.故选 D.

【规律方法】

判断不等式是否成立的方法

不等式是否成立,主要根据不等式的性质进行判断,要注意不等式的性质的适用范围和条件.特例法也是判断不等式是否成立的一种好方法,用特例法验证时要注意,适合的不一定对,不适合的一定错,故特例法只能判定不等式不成立.

提醒:运用不等式的性质时,要注意不等式成立的条件及其是否具有可逆性.

任务二　基本不等式

问题 1　把一个物体放在天平的一端,在另一端放砝码使天平平衡,称得物体的质量为 a.如果天平制造得不精确,天平的两臂长略有不同(其他因素不计),那么 a 并非物体的实际质量.不过,我们可进行第二次测量:把物体调换到天平的另一端,此时称得物体的质量为 b.如何合理地表示物体的质量呢?

简单的做法是把两次称得物体的质量"平均"一下,以 $A=\frac{a+b}{2}$ 表示物体的质量.这样的做法合理吗?如果不合理,请你求出物体的实际质量.

答案:不合理,物体的实际质量为$\sqrt{ab}$.

问题2　甲、乙两人同时从A地出发,沿同一条线路步行到B地.甲在前一半时间的行走速度为a,后一半时间的行走速度为b;乙用速度a走完前半段路程,用速度b走完后半段路程.若$a\neq b$,问甲、乙两人谁先到达B地?

答案:甲先到达B地.

任务达标

1.正实数a,b满足$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$,则$(a+2)(b+4)$的最小值为　(　　)

A.16　　B.24

C.32　　D.40

C　**解析**:因为正实数a,b满足$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$,所以$1\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{ab}}$,解得$ab\geqslant 8$,当且仅当$b=2a=4$时取等号,$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$化简得$ab=2a+b$,所以$(a+2)(b+4)=ab+2(2a+b)+8=3ab+8\geqslant 32$.故选C.

2.已知$x>0$,$y>0$,且$x+y=4$,则$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}$的最小值为________.

4　**解析**:因为$x+y=4$,即$\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1$,所以$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{4}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{y}{x}+\frac{9x}{y}+10\right)$.

又因为$x>0$,$y>0$,所以$\frac{y}{x}+\frac{9x}{y}\geqslant 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{9x}{y}}=6$,当且仅当$\frac{y}{x}=\frac{9x}{y}$且$x+y=4$,即$x=1$,$y=3$时,等号成立,则$\frac{1}{x}+\frac{9}{y}$的最小值为4.

3.已知$x>0$,则$2x+\frac{4}{2x+1}$的最小值为________.

3　**解析**:$2x+\frac{4}{2x+1}=2x+1+\frac{4}{2x+1}-1\geqslant 2\sqrt{(2x+1)\cdot\frac{4}{2x+1}}-1=3$,当且仅当$2x+1=2$,即$x=\frac{1}{2}$时,等号成立.

4.设a为正数,计算下列各组数的算术平均数与几何平均数.

(1)4,16;(2)3,12;(3)1,$4a^2$;(4)$5a$,$5a$.

解:(1)4和16的算术平均数为$\frac{4+16}{2}=10$,几何平均数为$\sqrt{4\times 16}=8$.

(2)3和12的算术平均数为$\frac{3+12}{2}=\frac{15}{2}$,几何平均数为$\sqrt{3\times 12}=6$.

(3)1和$4a^2$的算术平均数为$\frac{1+4a^2}{2}$,几何平均数为$\sqrt{1\times 4a^2}=2a$.

(4)$5a$与$5a$的算术平均数为$\frac{5a+5a}{2}=5a$,几何平均数为$\sqrt{5a\times 5a}=5a$.

【规律方法】

利用基本不等式求最值的解题技巧

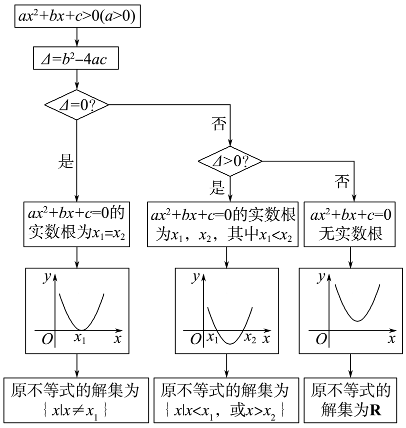
(1)凑项:通过变换项的符号,使其积或和为定值,再利用基本不等式求最值.

(2)凑系数:通过配凑项的系数,使其和或积为定值,再利用基本不等式求最值.

(3)换元:分式求最值,通常直接将分子配凑后将分式折开或将分母换元后将分式折开,再利用基本不等式求最值.

任务三　一元二次不等式

问题1　一元二次不等式$ax^2+bx+c>0(a>0)$的求解思路,如图.



请你试着画出当$a<0$时,$ax^2+bx+c>0$的求解思路.

答案:略

问题2　形如$\frac{ax+b}{cx+d}\geqslant 0$的不等式如何求解?

答案:转化成解不等式组$\begin{cases}(ax+b)(cx+d)\geqslant 0,\\ cx+d\neq 0.\end{cases}$

问题3　若$ax^2+bx+c>0$的解集为$\mathbf{R}$,则a,b,c应满足怎样的条件?当解集为$\varnothing$时呢?

答案:解集为$\mathbf{R}$时,$a=0$,$b=0$,且$c>0$或$a>0$,且$\Delta<0$;解集为$\varnothing$时,$a=0$,$b=0$,且$c\leqslant 0$或$a<0$,且$\Delta<0$.

任务达标

1. 设集合 $A=\{x\mid x^2+x-6\leqslant 0\}$，$B=\{-1,0,1,2,3\}$，则 $A\cap B=$ （　　）

A. $\{-1,0\}$　　B. $\{-1,0,1,2\}$

C. $\{-1,0,1,2,3\}$　　D. $\{1,2,3\}$

B　**解析**：因为 $A=\{x\mid x^2+x-6\leqslant 0\}=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{-1,0,1,2,3\}$，所以 $A\cap B=\{-1,0,1,2\}$. 故选 B.

2. 不等式 $(x+1)^2-x\geqslant 7$ 的解集为 （　　）

A. $\{x\mid x\leqslant -2$，或 $x\geqslant 3\}$

B. $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$

C. $\{x\mid x\leqslant -3$，或 $x\geqslant 2\}$

D. $\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 2\}$

C　**解析**：不等式 $(x+1)^2-x\geqslant 7$ 整理得 $x^2+x-6\geqslant 0$，解得 $x\leqslant -3$ 或 $x\geqslant 2$，则不等式 $(x+1)^2-x\geqslant 7$ 的解集为 $\{x\mid x\leqslant -3$，或 $x\geqslant 2\}$. 故选 C.

3. 对任意实数 x，不等式 $2kx^2+kx-3<0$ 恒成立，则实数 k 的取值范围是 （　　）

A. $0<k<24$　　B. $-24<k\leqslant 0$

C. $0<k\leqslant 24$　　D. $k\geqslant 24$

B　**解析**：当 $k=0$ 时，不等式即为 $-3<0$，恒成立；当 $k\neq 0$ 时，若不等式恒成立，则 $\begin{cases}k<0,\\ \Delta=k^2+24k<0\end{cases}\Rightarrow -24<k<0$，于是 $-24<k\leqslant 0$. 故选 B.

【规律方法】

一元二次不等式的解集的确定因素

(1)不含参数的一元二次不等式的解集受二次项系数的符号以及对应方程的根的判别式的符号的影响，且与相应的二次函数、一元二次方程有密切联系.

(2)含有参数的不等式的求解，常就“二次项系数”“对应方程的根的判别式 Δ”“对应方程的两个根的大小”对参数进行讨论.

第二章综合检测

（时间：120 分钟，分值：150 分）

一、单项选择题(本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分).

1. 若 $m<0$，$n>0$ 且 $m+n<0$，则下列不等式成立的是 （　　）

A. $-n<m<n<-m$

B. $-n<m<-m<n$

C. $m<-n<-m<n$

D. $m<-n<n<-m$

D　**解析**：(方法一)令 $m=-3$，$n=2$，分别代入各选项检验，可知 D 正确.

(方法二)$m+n<0\Rightarrow m<-n\Rightarrow n<-m$.

由于 $m<0<n$，故 $m<-n<n<-m$ 成立.

2. 若 $a>b>c$ 且 $a+b+c=0$，则下列不等式中正确的是 （　　）

A. $ab>ac$　　B. $ac>bc$

C. $a|b|>c|b|$　　D. $a^2>b^2>c^2$

A　**解析**：由 $a>b>c$ 及 $a+b+c=0$，知 $a>0$，$c<0$.

又因为 $a>0$，$b>c$，所以 $ab>ac$. 故选 A.

3. 设 $M=2a(a-2)$，$N=(a+1)(a-3)$，则 （　　）

A. $M>N$　　B. $M\geqslant N$

C. $M<N$　　D. $M\leqslant N$

A　**解析**：因为 $M-N=2a(a-2)-(a+1)(a-3)=(2a^2-4a)-(a^2-2a-3)=a^2-2a+3=(a-1)^2+2>0$，所以 $M>N$.

4. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x-4<0\}$，$B=\{-4,1,3,5\}$，则 $A\cap B=$ （　　）

A. $\{-4,1\}$　　B. $\{1,5\}$

C. $\{3,5\}$　　D. $\{1,3\}$

D　**解析**：由 $x^2-3x-4<0$，解得 $-1<x<4$. 所以 $A=\{x\mid -1<x<4\}$.

又因为 $B=\{-4,1,3,5\}$，所以 $A\cap B=\{1,3\}$. 故选 D.

5. 不等式 $\dfrac{x-2}{x+1}\leqslant 0$ 的解集是 （　　）

A. $\{x\mid x<-1$ 或 $-1<x\leqslant 2\}$

B.$\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$

C.$\{x|x<-1$ 或 $x\geqslant 2\}$

D.$\{x|-1<x\leqslant 2\}$

D　**解析**:原不等式等价于$\begin{cases}x+1\neq 0,\\(x-2)(x+1)\leqslant 0,\end{cases}$解得$-1<x\leqslant 2$.故选 D.

6. 设 $A=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$,其中 a,b 是正实数,且 $a\neq b$,$B=-x^2+4x-2$,则 A 与 B 的大小关系是　(　　)

A.$A\geqslant B$　　B.$A>B$

C.$A<B$　　D.$A\leqslant B$

B　**解析**:因为 a,b 都是正实数,且 $a\neq b$,

所以 $A=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$,即 $A>2$.

$B=-x^2+4x-2=-(x^2-4x+4)+2$

$=-(x-2)^2+2\leqslant 2$,即 $B\leqslant 2$,所以 $A>B$.

7. 已知 $b<a<0$,则下列选项正确的是　(　　)

A.$a^2>b^2$

B.$a+b>ab$

C.$|a|<|b|$

D.$ab>b^2$

C　**解析**:因为 $b<a<0$,所以 $b^2>a^2$,所以 A 错误;因为 $a+b<0$,$ab>0$,所以 B 错误;因为$|a|<|b|$,所以 C 正确;因为 $b^2-ab=b(b-a)>0$,所以 D 错误.

8. 设 $a>0,b>0$,且不等式$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{k}{a+b}\geqslant 0$ 恒成立,则实数 k 的最小值等于　(　　)

A.0　　B.4

C.-4　　D.2

C　**解析**:由$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{k}{a+b}\geqslant 0$,得 $k\geqslant-\frac{(a+b)^2}{ab}$.

而$\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2\geqslant 4$(当且仅当 $a=b$ 时取等号).所以 $-\frac{(a+b)^2}{ab}\leqslant-4$.因此,要使 $k\geqslant-\frac{(a+b)^2}{ab}$恒成立,应有 $k\geqslant-4$,即实数 k 的最小值等于-4.

二、多项选择题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分).

9. 对于任意实数 a,b,c,d,下列四个命题中为假命题的是　(　　)

A.若 $a>b,c\neq 0$,则 $ac>bc$

B.若 $a>b$,则 $ac^2>bc^2$

C.若 $ac^2>bc^2$,则 $a>b$

D.若 $a>b>0,c>d$,则 $ac>bd$

ABD　**解析**:A 中,当 $a>b,c<0$ 时,$ac<bc$,A 错误;B 中,若 $c=0$,则有 $ac^2=bc^2$,B 错误;C 正确;D 中,只有 $c>d>0$ 时,$ac>bd$ 才成立,D 错误.故选 ABD.

10. 若正实数 a,b 满足 $a+b=1$,则下列说法正确的是　(　　)

A.ab 有最小值$\frac{1}{4}$

B.$\sqrt{a}+\sqrt{b}$有最大值$\sqrt{2}$

C.$\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{2a+b}$有最小值$\frac{4}{3}$

D.a^2+b^2有最小值$\frac{1}{2}$

BCD　**解析**:由正实数 a,b 满足 $a+b=1$,则 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$时,等号成立,

所以 ab 的最大值为$\frac{1}{4}$,故 A 选项错误;

由$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}\leqslant 2(a+b)=2$,则$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$,当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$时,等号成立,

所以$\sqrt{a}+\sqrt{b}$有最大值$\sqrt{2}$,故 B 选项正确;

由$\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{2a+b}=\frac{1}{3}(3a+3b)\left(\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{2a+b}\right)$

$=\frac{1}{3}[(a+2b)+(2a+b)]\left(\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{2a+b}\right)=$

$\frac{1}{3}\left(2+\frac{2a+b}{a+2b}+\frac{a+2b}{2a+b}\right)\geqslant\frac{1}{3}\left(2+2\sqrt{\frac{a+2b}{2a+b}\cdot\frac{2a+b}{a+2b}}\right)$

$=\frac{4}{3}$,当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$时,等号成立,所以$\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{2a+b}$有最小值$\frac{4}{3}$,故 C 选项正确;

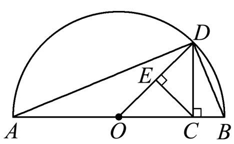
由 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab\geqslant(a+b)^2-2\times$

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(a+b)^2}{2}=\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，所以 a^2+b^2 有最小值 $\frac{1}{2}$，故 D 选项正确.

11. 使不等式 $(a^2-1)x^2-(a-1)x-1<0$ 的解集为 $\mathbf{R}$ 的 a 的值可能为　　(AB)

A.0　　B.1　　C.2　　D.-1

12. 几何代数法是以几何方法研究代数问题的一种方法，利用这一方法，很多的代数公理或定理都能够通过图形实现证明.如图所示，C 为线段 AB 上的点，且 $AC=a$，$BC=b$，O 为 AB 的中点，以 AB 为直径作半圆.过点 C 作 AB 的垂线交半圆于点 D，连接 OD，AD，BD，过点 C 作 OD 的垂线，垂足为 E.下列不等式可以利用该图形证明的是　（　　）



A.$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\,(a>0,b>0)$

B.$a^2+b^2\geqslant 2ab\,(a>0,b>0)$

C.$\sqrt{ab}\geqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\,(a>0,b>0)$

D.$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\frac{a+b}{2}\,(a>0,b>0)$

AC　**解析**：由题知 $AC+CB=a+b$，由射影定理可知 $CD=\sqrt{ab}$.又 $OD\geqslant CD$，所以 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\,(a>0,b>0)$，A 正确；由射影定理可知 $CD^2=DE\cdot OD$，即 $DE=\frac{CD^2}{OD}=\frac{ab}{\frac{a+b}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.又 $CD\geqslant DE$，即 $\sqrt{ab}\geqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\,(a>0,b>0)$，C 正确.故选 AC.

三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）.

得分　**13.** $a,b\in\mathbf{R}$，$a<b$ 和 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 同时成立的条件是________.

$a<0<b$　**解析**：若 $ab<0$，由 $a<b$ 两边同除以 ab，得 $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$，即 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；若 $ab>0$，则 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.所以 $a<b$ 和 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 同时成立的条件是 $a<0<b$.

得分　**14.** 已知不等式 $x^2-ax-b<0$ 的解集为 $\{x\,|\,2<x<3\}$，则不等式 $bx^2-ax-1>0$ 的解集为________.

$\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}\right\}$　**解析**：由题意知方程 $x^2-ax-b=0$ 的两个根为 2，3.

由根与系数的关系得 $a=5$，$b=-6$.

所以不等式 $bx^2-ax-1>0$ 即 $6x^2+5x+1<0$，

解得 $-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}$.

所以所求不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}\right\}$.

得分　**15.**（2021·天津）若 $a>0$，$b>0$，则 $\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b$ 的最小值为________.

$2\sqrt{2}$　**解析**：因为 $a>0$，$b>0$，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{b^2}}+b=\frac{2}{b}+b\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{b}\cdot b}=2\sqrt{2}$，

当且仅当 $\frac{1}{a}=\frac{a}{b^2}$ 且 $\frac{2}{b}=b$，即 $a=b=\sqrt{2}$ 时等号成立，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

得分　**16.** 若 x,y 为正实数，且 $x+2y=4$，则当 $y=$__________时，xy 取得最大值，最大值为________.

1　2　**解析**：$xy=\frac{1}{2}\cdot x\cdot(2y)\leqslant\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x+2y}{2}\right)^2=2$，当且仅当 $x=2y$ 且 $x+2y=4$，即 $x=2$，$y=1$ 时，等号成立.

四、解答题（本题共 6 小题，共 70 分）.

得分　**17.**（10 分）已知 $a>0$，$b>0$，$a+b=3ab$.

(1)求 $a+b$ 的最小值;

(2)证明:$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant\frac{8}{9ab}$.

(1)**解**:因为 $a+b=3ab$,所以$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1$.

所以 $a+b=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=\frac{1}{3}\left(2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$

$\geqslant\frac{1}{3}\left(2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}\right)=\frac{4}{3}$.

当且仅当$\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$,即 $a=b=\frac{2}{3}$时等号成立.

(2)**证明**:因为 $a>0,b>0$,所以要证$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant\frac{8}{9ab}$,

只需证 $a^2+b^2\geqslant\frac{8}{9}$.

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a+b)^2-\frac{2(a+b)}{3}$,

令 $t=a+b$,由(1)得 $t\geqslant\frac{4}{3}$,

所以 $a^2+b^2=t^2-\frac{2t}{3}=\left(t-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}$.当 $t=\frac{4}{3}$时,

$t^2-\frac{2t}{3}$取得最小值$\frac{8}{9}$.所以 $a^2+b^2\geqslant\frac{8}{9}$.

得分	

18.(12 分)(1)解关于 a 的不等式 $a^2-6a-3<0$;

(2)若不等式 $-3x^2+a(6-a)x+6>b$ 的解集为 $\{x\mid -1<x<3\}$,求实数 a,b 的值.

解:(1)由不等式 $a^2-6a-3<0$,

解得 $3-2\sqrt{3}<a<3+2\sqrt{3}$,

所以原不等式的解集为 $\{a\mid 3-2\sqrt{3}<a<3+2\sqrt{3}\}$.

(2)不等式 $-3x^2+a(6-a)x+6>b$ 的解集为 $\{x\mid -1<x<3\}$ 等价于方程 $-3x^2+a(6-a)x+6-b=0$ 的两根为 $-1,3$,即 $\begin{cases}-1+3=\frac{a(6-a)}{3},\\ -1\times3=-\frac{6-b}{3},\end{cases}$ 解

得 $\begin{cases}a=3\pm\sqrt{3},\\ b=-3.\end{cases}$

得分	

19.(12 分)已知 $a>0,b>0,c>0,d>0$,$a^2+b^2=ab+1,cd>1$.

(1)求证:$a+b\leqslant2$;

(2)判断等式 $\sqrt{ac}+\sqrt{bd}=c+d$ 能否成立,并说明理由.

(1)**证明**:由题意得 $(a+b)^2=3ab+1\leqslant3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+1$,当且仅当 $a=b$ 时取等号,

解得 $(a+b)^2\leqslant4$.

又 $a>0,b>0$,所以 $a+b\leqslant2$.

(2)**解**:不能成立.

理由:由基本不等式得 $\sqrt{ac}+\sqrt{bd}\leqslant\frac{a+c}{2}+\frac{b+d}{2}$,

当且仅当 $a=c$ 且 $b=d$ 时等号成立.

因为 $a+b\leqslant2$,所以 $\sqrt{ac}+\sqrt{bd}\leqslant1+\frac{c+d}{2}$.

因为 $c>0,d>0,cd>1$,所以 $c+d=\frac{c+d}{2}+\frac{c+d}{2}$

$\geqslant\frac{c+d}{2}+\sqrt{cd}>\frac{c+d}{2}+1\geqslant\sqrt{ac}+\sqrt{bd}$.

故 $\sqrt{ac}+\sqrt{bd}=c+d$ 不成立.

得分	

20.(12 分)某汽车厂上年度生产某型号汽车的投入成本为 10 万元/辆,出厂价为 12 万元/辆,年销售量为 10 000 辆.本年度为适应市场需求,计划提高产品质量,适度增加投入成本.若投入成本增加的比例为 $x(0<x<1)$,则出厂价相应提高的比例为 $0.75x$,同时预计年销售量增加的比例为 $0.6x$,已知年利润=(出厂价-投入成本)×年销售量.

(1)写出本年度预计的年利润 y 与投入成本增加的比例 x 的关系式;

(2)为使本年度的年利润比上年度有所增加,则投入成本增加的比例 x 应在什么范围内?

解:(1)由题意得 $y=[12(1+0.75x)-10(1+x)]\times10\ 000\times(1+0.6x)(0<x<1)$,

整理得 $y=-6\ 000x^2+2\ 000x+20\ 000(0<x<1)$.

(2)要保证本年度的年利润比上年度有所增加,

必须有 $y-(12-10)\times10\ 000>0(0<x<1)$,

即 $-6\ 000x^2+2\ 000x>0(0<x<1)$,解得 $0<x$

$<\frac{1}{3}$.

所以 x 的取值范围为 $\left\{x \middle| 0<x<\frac{1}{3}\right\}$.

得分	

21.(12 分)经观测，某路段在某时段内的车流量 y(千辆/h)与汽车的平均速度 v(km/h)之间有函数关系：$y=\frac{920v}{v^2+3v+1\ 600}(v>0)$.

(1)在该时段内，当汽车的平均速度 v 为多少时车流量 y 最大？最大车流量为多少？(精确到 0.01)

(2)为保证在该时段内车流量至少为 10 千辆/h，则汽车的平均速度应控制在什么范围内？

解：(1)$y=\frac{920v}{v^2+3v+1\ 600}=\frac{920}{v+\frac{1\ 600}{v}+3}$

$\leqslant\frac{920}{2\sqrt{v\cdot\frac{1\ 600}{v}}+3}=\frac{920}{83}\approx11.08$，当且仅当 $v=40$ 时，等号成立.

即平均速度为 40 km/h 时，车流量最大，最大车流量为 11.08 千辆/h.

(2)根据题意，有 $\frac{920v}{v^2+3v+1\ 600}\geqslant10$，

化简得 $v^2-89v+1\ 600\leqslant0$，即 $(v-25)(v-64)\leqslant0$.

所以 $25\leqslant v\leqslant64$.

所以汽车的平均速度 v 应控制在 $25\leqslant v\leqslant64$ 这个范围内.

得分	

22.(12 分)已知关于 x 的不等式 $ax^2+2ax+1\geqslant0$ 恒成立.

(1)求 a 的取值范围；

(2)解关于 x 的不等式 $x^2-x-a^2+a<0$.

解：(1)①当 $a=0$ 时，$1\geqslant0$ 恒成立；

②当 $a\neq0$ 时，则 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=4a^2-4a\leqslant0,\end{cases}$

解得 $0<a\leqslant1$.

综上，a 的取值范围为 $\{a|0\leqslant a\leqslant1\}$.

(2)由 $x^2-x-a^2+a<0$，得 $(x-a)[x-(1-a)]<0$.

由(1)知 $0\leqslant a\leqslant1$.

①当 $1-a>a$，即 $0\leqslant a<\frac{1}{2}$ 时，$a<x<1-a$；

②当 $1-a=a$，即 $a=\frac{1}{2}$ 时，$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2<0$，不等式无解；

③当 $1-a<a$，即 $\frac{1}{2}<a\leqslant1$ 时，$1-a<x<a$.

综上所述，当 $0\leqslant a<\frac{1}{2}$ 时，解集为 $\{x|a<x<1-a\}$；

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，解集为 $\varnothing$；

当 $\frac{1}{2}<a\leqslant1$ 时，解集为 $\{x|1-a<x<a\}$.

第三章 函数的概念与性质

3.1 函数的概念及其表示

3.1.1 函数的概念

第1课时 函数的概念

学习任务目标

1. 在初中用变量之间的依赖关系描述函数的基础上,用集合语言和对应关系刻画函数,建立完整的函数概念.
2. 了解构成函数的三要素.
3. 能构造问题情境描述解析式中变量的关系.

问题式预习

知识点一 函数的概念

(1)定义:一般地,设 A,B 是非空的实数集,如果对于集合 A 中的任意一个数 x,按照某种确定的对应关系 f,在集合 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应,那么就称 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数.

(2)记法:$y=f(x)$,$x\in A$.

(3)定义域:其中 x 叫做自变量,x 的取值范围 A 叫做函数的定义域.

(4)值域:与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值,函数值的集合 $\{f(x)|x\in A\}$ 叫做函数的值域.

知识点二 常见函数的定义域和值域

(1)一次函数 $y=ax+b(a\neq0)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$,值域也是 $\mathbf{R}$.对应关系 f 把 $\mathbf{R}$ 中的任意一个数 x,对应到 $\mathbf{R}$ 中唯一确定的数 $ax+b(a\neq0)$.

(2)二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$,值域是 B.当 $a>0$ 时,$B=\left\{y\left|y\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a}\right.\right\}$;当 $a<0$ 时,$B=\left\{y\left|y\leqslant\frac{4ac-b^2}{4a}\right.\right\}$.对应关系 f 把 $\mathbf{R}$ 中的任意一个数 x,对应到 B 中唯一确定的数 $ax^2+bx+c(a\neq0)$.

[微训练]

1. 函数 $y=-x^2+1$ 的值域是 $\{y|y\leqslant1\}$.
2. 函数 $y=x+1$,$x\in\{1,2,3,4,5\}$ 的值域是 $\{2,3,4,5,6\}$.

任务型课堂

任务一 函数的概念

1. 下列等式中,表示 y 关于 x 的函数的是 ( )

A. $y=x^2$　　B. $y^2=x$

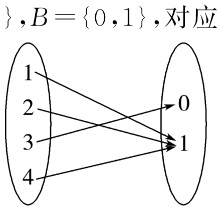
C. $|y|=x$　　D. $|y|=|x|$

A **解析**:结合函数的定义可知 A 正确.故选 A.

2. 下列对应关系中,$f:A\to B$ 是从集合 A 到集合 B 的函数的是 ( )

A. $A=\mathbf{R}$,$B=\mathbf{R}$,$f:x\to y=\sqrt{1-x^2}$

B. $A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{0,1\}$,对应关系 f 如图:

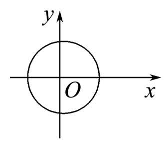


C. $A=\mathbf{R}$,$B=\mathbf{R}$,$f:x\to y=\frac{1}{x-2}$

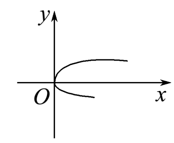
D. $A=\mathbf{Z}$,$B=\mathbf{Z}$,$f:x\to y=\sqrt{2x-1}$

B **解析**:$x^2+y^2=1$ 可化为 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$,显然对任意 $x\in A$,y 值不唯一,故 A 项不符合.B 项符合函数的定义.$2\in A$,但在集合 B 中找不到与之相对应的数,故 C 项不符合.$-1\in A$,但在集合 B 中找不到与之相对应的数,故 D 项不符合.

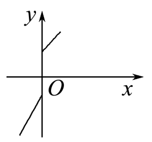
3. 下列图形中,能表示函数 $y=f(x)$ 的图象的是 ( )



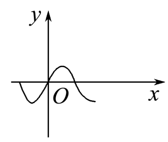
A



B



C

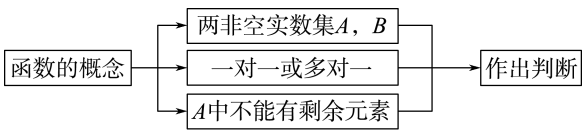


D

D　**解析**：根据题意，对于选项 A，B 中的两个图象，可以找到一个 x 与两个 y 对应的情形；选项 C 中的图象，当 $x=0$ 时，有两个 y 值对应；选项 D 中图象能表示 y 是 x 的函数.故选 D.

【类题通法】

1.判断等式是否为函数的方法



2.判断图形是否为函数图象的方法

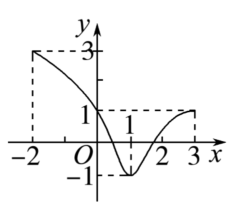
(1)任取一条垂直于 x 轴的直线 l；

(2)平行移动直线 l，保证垂足的横坐标在 x 的取值范围内；

(3)若 l 与图形始终有且只有一个交点，则是函数图象；若没有交点或有两个及两个以上的交点，则不是函数图象.

任务二　函数的三要素

1.函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，则定义域为 $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$，值域为 $\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 3\}$，$f(0)=1$，$f(1)=-1$.



2.已知集合 $A=B=\{1,2,3\}$，设 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的函数.

(1)求函数的定义域.

(2)这样的函数一共有多少个？

(3)函数的值域一共有多少种不同的情况？

解：(1)函数的定义域是 $\{1,2,3\}$.

(2)因为定义域中有三个元素 1，2，3，其中每个元素都可以对应到集合 B 中的三个元素中的任意一个，所以对应关系 f 共有 $3\times3\times3=27$(种)，所以从集合 A 到集合 B 的函数共有 27 个.

(3)将(2)中对应关系分为：一对一，多对一(二对一、三对一).

若只有一对一，值域为 $\{1,2,3\}$，共 1 种情况；

若有一对一和二对一，值域为 $\{1,2\}$ 或 $\{1,3\}$ 或 $\{2,3\}$，共 3 种情况；

若只有三对一，值域有 $\{1\}$ 或 $\{2\}$ 或 $\{3\}$，共 3 种情况.

所以所求函数的值域共有 7 种不同情况.

【类题通法】

由函数图象求函数定义域、值域的方法

若函数用图象给出，则图象在 x 轴上的射影所对应的 x 的集合即为定义域，图象在 y 轴上的射影所对应的 y 的集合即为值域.

任务三　根据解析式构建问题情境

[探究活动]

探究 1：你能构建一个问题情境，使其中的变量关系可以用 $y=x(10-x)$，$x\in\{x\mid 0<x<10\}$来描述吗？

提示：构建如下情境：

长方形的周长为 20，设其中一边长为 x，面积为 y，那么 $y=x(10-x)$.其中，x 的取值范围是 $\{x\mid 0<x<10\}$，y 的取值范围是 $\{y\mid 0<y\leqslant 25\}$，对应关系 f 把每一个长方形的边长 x，对应到唯一确定的面积 $x(10-x)$.(答案不唯一，合理即可)

探究 2：你能构建可用解析式 $y=x(10-x)$描述其中变量关系的问题情境吗？

提示：设两个实数的和为 10，其中一个数为 x，这两个数的积为 y，则 $y=x(10-x)$，其中 x 的取值范围为 $\mathbf{R}$，y 的取值范围是 $\{y\mid y\leqslant 25\}$.对应关系 f 把任意的一个 x 值，对应到唯一确定的数 $x(10-x)$.

[评价活动]

1.构建两个问题情境，使得其中的变量关系可以分别用解析式 $y=\dfrac{10}{x}$和 $y=2\left(x+\dfrac{10}{x}\right)$来描述.

解：由 $y=\dfrac{10}{x}$可得 $xy=10$，联想到矩形的面积公式，可构建如下的问题情境：

已知矩形的面积为 10.如果矩形的一边长为 $x(x>0)$，另一边长为 $y(y>0)$，那么 $xy=10$，即 $y=\dfrac{10}{x}$，定义域为 $\{x\mid x>0\}$，值域为 $\{y\mid y>0\}$.同理，对于函数 $y=2\left(x+\dfrac{10}{x}\right)$，可构建如下问题情境：

已知矩形的面积为 10，周长为 y，如果矩形的一边长为 x，那么另一边长为 $\dfrac{10}{x}$.所以矩形的周长为 $y=2\left(x+\dfrac{10}{x}\right)$，定义域为 $\{x\mid x>0\}$.由基本不等式可知 $y=2\left(x+\dfrac{10}{x}\right)\geqslant 4\sqrt{10}$，当且仅当 $x=\sqrt{10}$ 时，等号成立，即函数的值域为 $\{y\mid y\geqslant 4\sqrt{10}\}$.

2.构建一个问题情境,使得其中的变量关系能用解析式 $s=30t$ 来描述.

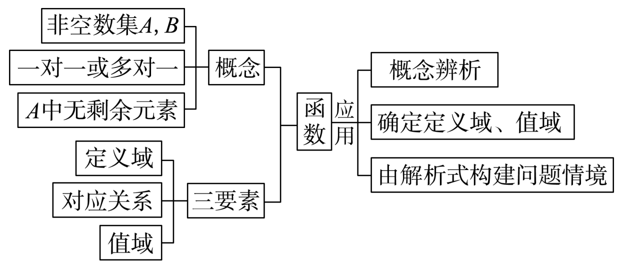
解:设运动的物体的速度为 30 m/s,运动的时间为 t s,则运动的距离为 $s=30t$.定义域为$\{t\mid t\geqslant 0\}$,值域为$\{s\mid s\geqslant 0\}$.

【类题通法】

构建问题情境的策略

常见的函数有一次函数、二次函数、正比例函数、反比例函数等,要熟悉这些函数与常见的几何图形、实际问题的联系,根据函数的解析式构建与其相符的问题情境.

提质归纳



课后素养评价(十六)

基础性·能力运用

1.有下列三个说法:

①若函数的值域只含有一个元素,则定义域也只含有一个元素;②若 $f(x)=5(x\in\mathbf{R})$,则 $f(\pi)=5$ 一定成立;③函数就是两个集合之间的对应关系.

其中正确说法的个数为　　(　　)

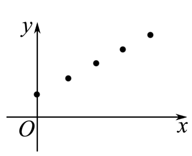
A.0　　B.1　　C.2　　D.3

B　**解析**:①错误,若函数的值域只含有一个元素,则定义域不一定只含有一个元素;

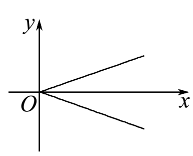
②正确,因为 $f(x)=5$,这个数值不随 x 的变化而变化,所以 $f(\pi)=5$;

③错误,函数是两个非空数集之间的对应关系.

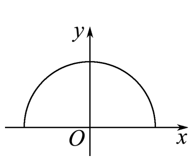
2.(多选)下列各图中,可能是函数图象的是　　(　　)



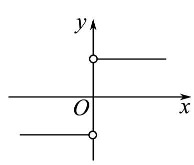
A



B



C



D

ACD　**解析**:B 选项,$x>0$ 时有两个 y 值与之对应,不是函数,B 错误,其他均符合函数的定义.

3.(多选)下列两个集合间的对应关系中,$f:A\to B$ 是从 A 到 B 的函数的有　　(　　)

A.$A=\{-1,0,1\}$,$B=\{-1,0,1\}$,$f:A$ 中的数的平方

B.$A=\{0,1,2\}$,$B=\{-1,0,1\}$,$f:A$ 中的数的相反数

C.$A=\mathbf{Z}$,$B=\mathbf{Q}$,$f:A$ 中的数的倒数

D.$A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{2,4,6,8\}$,$f:A$ 中的数的 2 倍

AD　**解析**:对于 A,满足函数的定义,A 正确;对于 B,不是函数关系,因为 2 没有对应元素,所以不是函数关系,B 不正确;对于 C,不是函数关系,因为 0 的倒数不存在,所以 0 没有对应元素,不是函数关系,C 不正确;$A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{2,4,6,8\}$,$f:A$ 中的数的 2 倍,即 $m=2n$,其中 $n\in A$,$m\in B$,故此对应关系是 A 到 B 的函数,D 正确.

4.已知函数 $f:A\to B$(A,B 为非空数集)的定义域为 M,值域为 N,则 A,B,M,N 的关系是　　(　　)

A.$M=A$,$N=B$　　B.$M\subseteq A$,$N=B$

C.$M=A$,$N\subseteq B$　　D.$M\subseteq A$,$N\subseteq B$

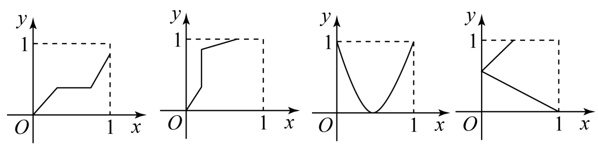
C　**解析**:根据函数的定义,有 $M=A$,$N\subseteq B$.故选 C.

5.已知 $P=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$,$Q=\{y\mid y=x+1,x\in\mathbf{R}\}$,则 $P\cap Q=$________.

$\{y\mid y\geqslant 1\}$　**解析**:因为 $P=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}=\{y\mid y\geqslant 1\}$,$Q=\{y\mid y=x+1,x\in\mathbf{R}\}=\mathbf{R}$,所以 $P\cap Q=\{y\mid y\geqslant 1\}$.

综合性·创新提升

1. 下列图形中可以表示以 $M=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$ 为定义域,以 $N=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 为值域的函数的图象的是 (　　)



A　　B　　C　　D

C　**解析**:由函数的定义可知,选项 C 正确.

2. 以下集合 M 与 N 的对应关系中,$f:M\to N$ 是从 M 到 N 的函数的是 (B)

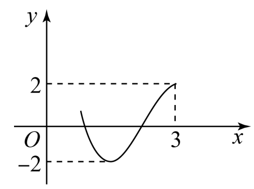
A. $M=\mathbf{R}, N=\{y\mid y>0\}, f:x\to y=|x|$

B. $M=\{x\mid x\geqslant 2, x\in\mathbf{N}^*\}, N=\{y\mid y>0, y\in\mathbf{N}^*\}$, $f:x\to y=x^2-2x+2$

C. $M=\{x\mid x>0\}, N=\mathbf{R}, f:x\to y=\pm\sqrt{x}$

D. $M=\mathbf{R}, N=\mathbf{R}, f:x\to y=\dfrac{1}{x}$

3. 函数 $y=f(x)$ 的部分图象如图,则 $f(3)$ 等于 $\underline{2}$,函数的值域为 $\underline{\{y\mid -2\leqslant y\leqslant 2\}}$.



4. 构建一个问题情境,使其中的变量关系能用解析式 $y=(300+10x)(200-4x)$ 来描述,其中 $1\leqslant x\leqslant 50$,$x\in\mathbf{N}^*$.

解:某汽车租赁公司有 200 辆小汽车.若每辆车一天的租金为 300 元,可全部租出;若将每天出租收费标准提高 $10x(1\leqslant x\leqslant 50, x\in\mathbf{N}^*)$ 元,则租出的车辆会相应减少 $4x$ 辆.

设该汽车租赁公司每天的收入为 y 元,则 $y=(300+10x)(200-4x)$.

第 2 课时　函数概念的应用

学习任务目标

1. 能正确使用区间表示数集.

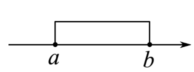
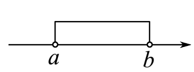
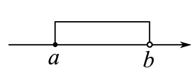
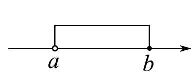
2. 能求简单函数的定义域.

3. 理解同一函数的概念,会判断两个函数是不是同一函数.

问题式预习

知识点一　区间及有关概念

设 a,b 是两个实数,且 $a<b$,规定如下:

区间	类别	含义	数轴表示
$\underline{[a,b]}$	闭区间	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	
$\underline{(a,b)}$	开区间	$\{x\mid a<x<b\}$	
$[a,b)$	半开半闭区间	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$	
$(a,b]$	半开半闭区间	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$	

[微训练]

1. 若 $[a,3a-1]$ 为一个确定的区间,则 a 的取值范围是________.

$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　**解析**:由题意知 $3a-1>a$,则 $a>\dfrac{1}{2}$.

2. 不等式 $(x+2)(x-3)>0$ 的解集用区间表示为____________.

$(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$　**解析**:因为方程 $(x+2)\cdot(x-3)=0$ 的两根为 -2 和 3,所以不等式 $(x+2)\cdot(x-3)>0$ 的解集为 $(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$.

知识点二　函数的三要素与同一个函数

(1)一个函数的构成要素为<u>定义域</u>、<u>对应关系</u>和<u>值域</u>.

(2)同一个函数:如果两个函数的<u>定义域</u>相同,并且<u>对应关系</u>完全一致,即相同的自变量对应的函数值也相同,那么这两个函数是同一个函数.

[微训练]

下列函数中,与函数 $y=x$ 是同一个函数的是 (　　)

A.$y=(\sqrt{x})^2$　　B.$y=\sqrt{x^2}$

C.$y=|x|$　　D.$y=\sqrt[3]{x^3}$

D　**解析**：函数 $y=x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，定义域不同；函数 $y=\sqrt{x^2}=|x|$ 与 $y=x$ 的对应关系不同；函数 $y=|x|$ 与 $y=x$ 的对应关系不同；函数 $y=\sqrt[3]{x^3}=x$，定义域为 $\mathbf{R}$，与函数 $y=x$ 是同一个函数.故选 D.

任务型课堂

任务一　已知函数的解析式求定义域

1.函数 $y=\dfrac{3}{1-\sqrt{1-x}}$ 的定义域用区间表示为________.

$(-\infty,0)\cup(0,1]$　**解析**：由 $\begin{cases}1-x\geqslant 0,\\ 1-\sqrt{1-x}\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x\leqslant 1$ 且 $x\neq 0$，用区间表示为 $(-\infty,0)\cup(0,1]$.

2.求下列函数的定义域：

(1)$y=\dfrac{(x+2)^0}{|x|-x}$；

(2)$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}-\sqrt{4-x}$.

解：(1)要使函数有意义，自变量 x 的取值必须满足 $\begin{cases}x+2\neq 0,\\ |x|-x\neq 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\neq -2,\\ |x|\neq x,\end{cases}$ 解得 $x<0$，且 $x\neq -2$.故原函数的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$.

(2)要使函数有意义，自变量 x 的取值必须满足 $\begin{cases}4-x\geqslant 0,\\ x-1\neq 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\leqslant 4,\\ x\neq 1.\end{cases}$ 故原函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,4]$.

【类题通法】

求函数定义域的策略

(1)分式的分母不为零；

(2)偶次根式的被开方数大于或等于零；

(3)零次幂的底数不为零；

(4)要使实际问题有意义.

任务二　求函数值

1.已知函数 $f(x)=\dfrac{3}{x}$，则 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=$　　(　　)

A.$\dfrac{1}{a}$　　B.$\dfrac{3}{a}$　　C.a　　D.$3a$

D　**解析**：$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=3a$.故选 D.

2.若 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$，则 $f(3)=$________.

$-\dfrac{1}{8}$　**解析**：$f(3)=\dfrac{1}{1-9}=-\dfrac{1}{8}$.

3.已知 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}(x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq -1)$，$g(x)=x^2+2(x\in\mathbf{R})$，求 $f(2)$，$g(2)$，$f(g(2))$ 的值.

解：因为 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，所以 $f(2)=\dfrac{1}{1+2}=\dfrac{1}{3}$.

因为 $g(x)=x^2+2$，所以 $g(2)=2^2+2=6$.

所以 $f(g(2))=f(6)=\dfrac{1}{1+6}=\dfrac{1}{7}$.

【类题通法】

求函数值的方法

(1)已知函数 $f(x)$ 的解析式时，只需用 a 替换解析式中的 x 即得 $f(a)$ 的值.

(2)求 $f(g(a))$ 的值应遵循由里往外的原则，先根据函数 $g(x)$ 求出 $g(a)$ 的值，再由函数 $f(x)$ 求出 $f(g(x))$ 的值.

任务三　同一个函数的判定

［探究活动］

探究 1：我们知道，当两个函数的定义域和对应关系相同时，它们为同一个函数.如果两个函数的定义域和值域相同，它们是否为同一个函数？请举例说明.

提示：不一定为同一个函数，例如函数 $y=x$ 与 $y=x-1$，定义域、值域均为 $\mathbf{R}$，但不是同一个函数.

探究 2：函数 $u=t^2$，$t\in\mathbf{R}$ 与函数 $x=y^2$，$y\in\mathbf{R}$ 以及 $y=x^2$，$x\in\mathbf{R}$ 是同一个函数吗？

提示：因为三个函数的定义域都是 $\mathbf{R}$，对应关系 $u=t^2$，$x=y^2$，$y=x^2$ 虽然所用字母不一样，但实质是相同的，所以它们是同一个函数.

［评价活动］

1.(多选)下列各组函数是同一个函数的是　　(　　)

A.$f(x)=\sqrt{-2x^3}$ 与 $g(x)=x\sqrt{-2x}$

B.$f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$

C.$f(x)=x^0$ 与 $g(x)=\dfrac{1}{x^0}$

D.$f(x)=x^2-2x-1$ 与 $g(t)=t^2-2t-1$

CD　**解析**：对于选项 A，$f(x)=\sqrt{-2x^3}=$

$|x|\sqrt{-2x}$ 与 $g(x)=x\sqrt{-2x}$ 的对应关系不同,故不是同一个函数;对于选项B,$g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$ 与 $f(x)=x$ 的对应关系不同,故不是同一个函数;对于选项C,$f(x)=x^0$ 与 $g(x)=\frac{1}{x^0}$ 都可化为 $y=1$ 且定义域都是 $\{x|x\neq 0\}$,是同一个函数;对于选项D,$f(x)=x^2-2x-1$ 与 $g(t)=t^2-2t-1$ 的定义域都是 $\mathbf{R}$,对应关系也相同,而与用什么字母表示无关,故是同一个函数.故选CD.

2. 下列各组函数是否为同一个函数?为什么?

(1)$f(x)=|x|$ 与 $\varphi(t)=\sqrt{t^2}$;

(2)$y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$;

(3)$f(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}$ 与 $g(x)=\sqrt{x(x+1)}$;

(4)$f(x)=1$ 与 $g(x)=x^0(x\neq 0)$.

解:(1)在定义域 $\mathbf{R}$ 上,$f(x)=|x|$ 和 $\varphi(t)=\sqrt{t^2}=|t|$ 的对应关系完全相同,是同一个函数.

(2)$y=\sqrt{x^2}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $[0,+\infty)$,两者定义域不同,不是同一个函数.

(3)$f(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$,$g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$,不是同一个函数.

(4)$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$g(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$,不是同一个函数.

【类题通法】

判断函数是否为同一个函数的方法

(1)先看定义域,若定义域不同,则不是同一个函数;

(2)若定义域相同,再化简函数的解析式,看对应关系是否相同.

任务四　复合函数、抽象函数的定义域

1. 若函数 $y=f(x+1)$ 的定义域为 $[-1,2]$,则函数 $y=f(1-x)$ 的定义域为　　(　　)

A.$[0,3]$　　B.$[0,2]$

C.$[-1,1]$　　D.$[-2,1]$

D　**解析**:因为函数 $y=f(x+1)$ 的定义域为 $[-1,2]$,即 $-1\leqslant x\leqslant 2$,所以 $0\leqslant x+1\leqslant 3$,

所以 $0\leqslant 1-x\leqslant 3\Rightarrow -1\leqslant -x\leqslant 2\Rightarrow -2\leqslant x\leqslant 1$,

所以函数 $y=f(1-x)$ 的定义域为 $[-2,1]$.

2. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-1,4]$,则函数 $f(2x+1)$ 的定义域为________.

$\left[-1,\frac{3}{2}\right]$　**解析**:已知 $f(x)$ 的定义域是 $[-1,4]$,即 $-1\leqslant x\leqslant 4$.

故对于 $f(2x+1)$ 应有 $-1\leqslant 2x+1\leqslant 4$,

所以 $-2\leqslant 2x\leqslant 3$,所以 $-1\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$.

所以函数 $f(2x+1)$ 的定义域是 $\left[-1,\frac{3}{2}\right]$.

3. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$,则函数 $g(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)+f(x-1)$ 的定义域是________.

$(0,2)$　**解析**:由题意知 $\begin{cases}-1<\frac{x}{2}<1,\\-1<x-1<1,\end{cases}$

即 $\begin{cases}-2<x<2,\\0<x<2,\end{cases}$ 解得 $0<x<2$,于是函数 $g(x)$ 的定义域为 $(0,2)$.

【类题通法】

抽象函数定义域的求解方法

解此类问题的关键是明确对应关系,在同一对应关系下,不管对应关系中的对象是单个字母还是复杂的代数式,其限制条件是一致的,即都在同一取值范围内.求复合函数的定义域,应取使各部分都有意义的自变量 x 的取值范围的公共部分(取交集),可通过解不等式组求得.对于含有参数的函数,求其定义域时必须对参数作分类讨论,并要注意函数的定义域为非空数集.

提质归纳

函数概念的应用
- 求定义域
- 求函数值
- 同一个函数的判断

课后素养评价(十七)

基础性·能力运用

1.函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=+\sqrt{4-x^2}$ 的定义域为　(　　)

A.$[-2,2]$　　B.$[0,2]$

C.$(0,2]$　　D.$[-2,0)\cup(0,2]$

C　**解析**:由题意,$\begin{cases}x>0,\\4-x^2\geqslant 0,\end{cases}$解得 $0<x\leqslant 2$.

所以函数 $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{4-x^2}$ 的定义域为 $(0,2]$.

2.(多选)若函数 $f(x)=\frac{5x}{x^2+1}$,且 $f(a)=2$,则 a 的值可以为　(　　)

A.$\frac{1}{2}$　　B.1　　C.2　　D.3

AC　**解析**:由 $f(a)=2$,得 $\frac{5a}{a^2+1}=2$,解得 $a=2$ 或 $\frac{1}{2}$.

3.已知 $2\in(m,3m^2-m]$,则实数 m 的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right]\cup[1,2)$.

4.若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[2,3]$,则函数 $f(x-1)$ 的定义域为________.

$[3,4]$　**解析**:函数 $f(x)$ 的定义域为 $[2,3]$,则在函数 $f(x-1)$ 中,$2\leqslant x-1\leqslant 3$,解得 $3\leqslant x\leqslant 4$,即函数 $f(x-1)$ 的定义域为 $[3,4]$.

5.已知函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}$ 是同一个函数,则函数 $y=f(x)$ 的定义域是________.

$[-3,1]$　**解析**:由于 $y=f(x)$ 与 $y=\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}$ 是同一个函数,故二者定义域相同,所以 $y=f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 1\}$.故写成区间形式为 $[-3,1]$.

6.已知函数 $f(x)=\frac{6}{x-1}-\sqrt{x+4}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的定义域;

(2)求 $f(-1)$,$f(12)$ 的值.

解:(1)根据题意知 $x-1\neq 0$ 且 $x+4\geqslant 0$,

所以 $x\geqslant -4$ 且 $x\neq 1$.

即函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-4,1)\cup(1,+\infty)$.

(2)$f(-1)=\frac{6}{-2}-\sqrt{-1+4}=-3-\sqrt{3}$,

$f(12)=\frac{6}{12-1}-\sqrt{12+4}=\frac{6}{11}-4=-\frac{38}{11}$.

综合性·创新提升

1.设函数 $f(x)=ax+b$.若 $f(1)=-2$,$f(-1)=0$,则　(　　)

A.$a=1,b=-1$　　B.$a=-1,b=-1$

C.$a=-1,b=1$　　D.$a=1,b=1$

B　**解析**:由 $f(1)=-2$,得 $a+b=-2$;

由 $f(-1)=0$,得 $-a+b=0$.

所以 $a=-1,b=-1$.故选 B.

2.设函数 $f(x)=3x^2-1$,则 $f(a)-f(-a)$ 的值是　(　　)

A.0　　B.$3a^2-1$

C.$6a^2-2$　　D.$6a^2$

A　**解析**:$f(a)-f(-a)=3a^2-1-[3(-a)^2-1]=0$.

3.(多选)在下列四组函数中,$f(x)$ 与 $g(x)$ 表示同一函数的是　(　　)

A.$f(x)=x-1$,$g(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$

B.$f(x)=|x+1|$,$g(x)=\begin{cases}x+1,x\geqslant -1,\\-1-x,x<-1\end{cases}$

C.$f(x)=1$,$g(x)=(x+1)^0$

D.$f(x)=\frac{(\sqrt{x})^2}{x}$,$g(x)=\frac{x}{(\sqrt{x})^2}$

BD　**解析**:对于 A,$f(x)=x-1(x\in\mathbf{R})$,$g(x)=\frac{x^2-1}{x+1}=x-1(x\neq -1)$,两函数的定义域不同,故不为同一函数;对于 B,$f(x)=|x+1|=\begin{cases}x+1,x\geqslant -1,\\-1-x,x<-1,\end{cases}$即两函数的定义域相同,对应关系相同,故为同一函数;对于 C,$f(x)=1,x\in\mathbf{R}$,$g(x)=(x+1)^0=1(x\neq -1)$,两函数的定义域不同,故不为同一函数;对于 D,$f(x)=\frac{(\sqrt{x})^2}{x}=1(x>0)$,$g(x)=\frac{x}{(\sqrt{x})^2}=1(x>0)$,即两函数的定义域相同,对应关系相同,故为同一函数.

4.函数 $f(x)=x^2-2x+2(x\geqslant 2)$ 的值域是　(D)

A.$[0,+\infty)$　　B.$[1,+\infty)$

C.$[\sqrt{3},+\infty)$　　D.$[2,+\infty)$

5.已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

(1)求 $f(2)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(3)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)$的值；

(2)求证：$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$是定值.

(1)**解**：因为 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$，

所以 $f(2)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2^2}{1+2^2}+\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=1$，

$f(3)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{3^2}{1+3^2}+\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=1.$

(2)**证明**：$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}=$

$\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{1}{x^2+1}=\dfrac{x^2+1}{x^2+1}=1$，为定值.

3.1.2　函数的表示法

第1课时　函数的表示法

学习任务目标

1.掌握函数的三种表示方法，会根据不同的需要选择恰当的方法表示函数.

2.理解函数图象的作用，能作出函数的图象.

3.掌握求函数解析式的常用方法.

问题式预习

知识点　函数的表示法

函数的表示法：
- 解析法：就是用__解析式__表示两个变量之间的对应关系
- 列表法：就是列出__表格__来表示两个变量之间的对应关系
- 图象法：就是用__图象__表示两个变量之间的对应关系

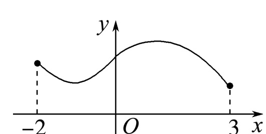
[微训练]

1.判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").

(1)任何一个函数都可以用解析法表示.　(×)

(2)函数的图象一定是定义区间上一条连续不断的曲线.　(×)

2.已知函数 $y=f(x)$的图象如图所示，则其定义域是________.



$[-2,3]$　**解析**：由图象可知 $f(x)$的定义域为$[-2,3]$.

任务型课堂

任务一　函数的表示方法

1.购买某种饮料 x 听，需要 y 元.若每听2元，用解析法将 y 表示成 $x(x\in\{1,2,3,4\})$的函数为　(　　)

A.$y=2x$

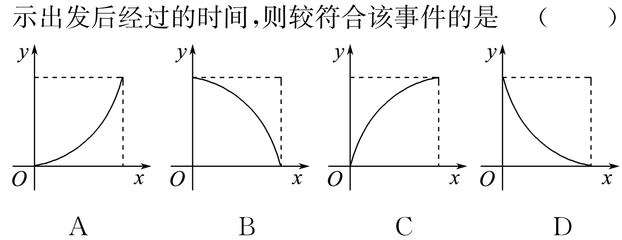
B.$y=2x(x\in\mathbf{R})$

C.$y=2x(x\in\{1,2,3,\cdots\})$

D.$y=2x(x\in\{1,2,3,4\})$

D　**解析**：题中已给出自变量的取值范围，$x\in\{1,2,3,4\}$.故选D.

2.某学生离家去学校，一开始跑步前进，跑累了再走完余下的路程.下列图中纵轴表示离学校的距离，横轴表示出发后经过的时间，则较符合该事件的是　(　　)



D　**解析**：结合题意可知，该生离校的距离先快速减少，又较慢减少，最后到0.故选D.

3. 由下表给出函数 $y=f(x)$，则 $f(f(1))$ 等于　　(　　)

x	1	2	3	4	5
y	4	5	3	2	1

A.1　　B.2　　C.4　　D.5

B　**解析**：由题意可知，$f(1)=4$，$f(4)=2$，

所以 $f(f(1))=f(4)=2$. 故选 B.

4. 已知 $f(1-2x)=\frac{1}{x^2}$，则 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 的值为　　(　　)

A.4　　B.$\frac{1}{2}$　　C.16　　D.$\frac{1}{16}$

C　**解析**：根据题意，令 $1-2x=\frac{1}{2}$，解得 $x=\frac{1}{4}$，

故 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}=16$.

【类题通法】

理解函数表示法的关注点

(1)列表法、图象法、解析法均是函数的表示法，无论用哪种方法表示函数，都必须满足函数的概念；

(2)列表法直观具体，图象法从形的角度描述函数，解析法从数的角度描述函数；

(3)许多函数是可以用三种方法表示的，但在实际应用中，仍以解析法为主.

任务二　函数的图象及应用

[探究活动]

探究 1：函数的图象是由哪些元素构成的？请举例说明.

提示：略

探究 2：作出一个函数的图象的一般方法是什么？

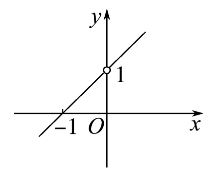
提示：作函数的图象最常用的方法是描点法.

探究 3：设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A，则集合 $P=\{(x,y)|y=f(x),x\in A\}$ 与 $Q=\{y|y=f(x),x\in A\}$ 相等吗？说明理由.

提示：不相等. 因为 P 是点的集合，据此可得函数的图象，而 Q 是数的集合，仅为函数的值域.

[评价活动]

1. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象如图，则 $f(x)$ 的定义域是　　(　　)



A.$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$　　B.$\mathbf{R}$

C.$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$　　D.$(-1,0)$

C　**解析**：由图象，知 $x\neq 0$，即 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2. 作出下列函数的图象并求出其值域.

(1) $y=-x$，$x\in\{0,1,-2,3\}$；

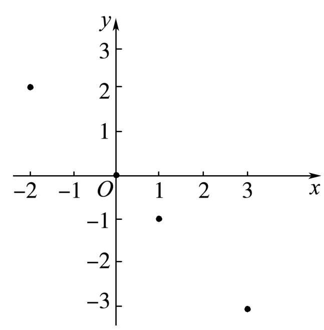
(2) $y=\frac{2}{x}$，$x\in[2,+\infty)$；

(3) $y=x^2+2x$，$x\in[-2,2)$.

解：(1)列表：

x	0	1	-2	3
y	0	-1	2	-3

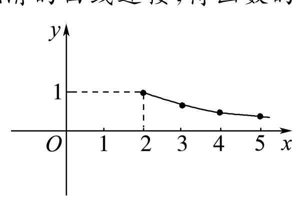
函数图象是四个点 $(0,0)$，$(1,-1)$，$(-2,2)$，$(3,-3)$，其值域为 $\{0,-1,2,-3\}$.



(2)列表：

x	2	3	4	5	…
y	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	…

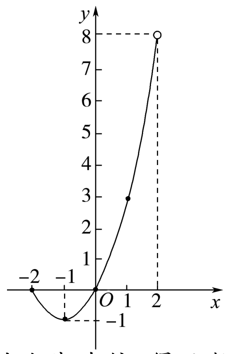
描点并用光滑的曲线连接，得函数的图象，如图.



图象是反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图象的一部分，观察图象可知其值域为 $(0,1]$.

(3)列表：

x	-2	-1	0	1	2
y	0	-1	0	3	8



描点并用光滑的曲线连接,得函数的图象,如图.图象是抛物线 $y=x^2+2x$ 在 $-2\leqslant x<2$ 之间的部分,由图象可得函数的值域为 $[-1,8)$.

【类题通法】

作函数图象的注意点

(1)要在函数的定义域内作图.

(2)要标出图象的关键点,例如图象的顶点、端点、与坐标轴的交点等.要分清这些关键点是实心点还是空心圈.

任务三　函数解析式的求法

1. 已知 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x}{1-x}$,则当 $x\neq0$ 且 $x\neq1$ 时,$f(x)=$ (　　)

A. $\dfrac{1}{x}$　　B. $\dfrac{1}{x-1}$　　C. $\dfrac{1}{1-x}$　　D. $\dfrac{1}{x}-1$

B　**解析**:令 $\dfrac{1}{x}=t$,则 $x=\dfrac{1}{t}$.代入 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x}{1-x}$,得 $f(t)=\dfrac{\frac{1}{t}}{1-\frac{1}{t}}=\dfrac{1}{t-1}$.所以 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$.故选B.

2. 已知 $f(x)+2f(-x)=x^2+2x$,则 $f(x)$ 的解析式为____________.

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^2-2x$　**解析**:以 $-x$ 代替 x 得 $f(-x)+2f(x)=x^2-2x$,与 $f(x)+2f(-x)=x^2+2x$ 联立,解得 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^2-2x$.

3. 已知 $f(x)$ 是二次函数,且满足 $f(0)=1$,$f(x+1)-f(x)=2x$,求 $f(x)$ 的解析式.

解:设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$.

因为 $f(0)=1$,所以 $c=1$.

又因为 $f(x+1)-f(x)=2x$,

所以 $a(x+1)^2+b(x+1)+1-(ax^2+bx+1)=2x$,

整理得 $2ax+(a+b)=2x$,所以 $\begin{cases}2a=2,\\a+b=0,\end{cases}$

解得 $a=1,b=-1$,所以 $f(x)=x^2-x+1$.

【类题通法】

求函数解析式的四种常用方法

(1)待定系数法:若已知函数 $f(x)$ 的类型,设出它的一般形式,根据特殊值确定相关的系数即可.

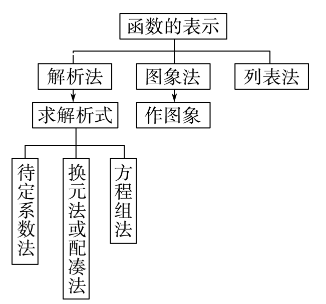
(2)换元法:设 $t=g(x)$,解出 x,代入 $f(g(x))$,求出 $f(t)$ 的解析式即可.

(3)配凑法:对 $f(g(x))$ 的解析式进行配凑变形,使它能用 $g(x)$ 表示出来,再用 x 代替两边所有的“$g(x)$”即可.

(4)方程组法:当同一个对应关系中的两个变量互为相反数或互为倒数时,可构造方程组求解.

提醒:应用换元法求函数解析式时,务必保证函数在换元前后的等价性.

提质归纳



课后素养评价(十八)

基础性·能力运用

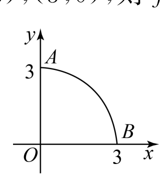
1. 已知函数 $f(x)$ 由下表给出,则 $f(f(3))$ 等于 (　　)

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	2	4	1

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

A　**解析**:因为 $f(3)=4$,所以 $f(f(3))=f(4)=1$.

2. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示,其中点 A,B 的坐标分别为 $(0,3)$,$(3,0)$,则 $f(f(0))=$ (　　)



A.2　　B.4　　C.0　　D.3

C　**解析**：结合图象可知 $f(0)=3$，则 $f(f(0))=f(3)=0$.

3.下列函数中，对任意 x，不满足 $2f(x)=f(2x)$ 的是　(D)

A.$f(x)=|x|$　　B.$f(x)=-2x$

C.$f(x)=x-|x|$　　D.$f(x)=x-1$

4.若一次函数的图象经过点 $A(1,6)$ 和 $B(2,8)$，则该函数的图象还可能经过的点的坐标为　(　　)

A.$\left(\frac{1}{2},5\right)$　　B.$\left(\frac{1}{4},4\right)$

C.$(-1,3)$　　D.$(-2,1)$

A　**解析**：设一次函数的解析式为 $y=kx+b(k\neq0)$.

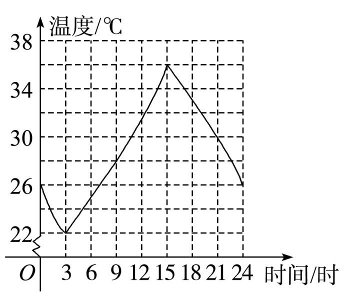
由该函数的图象经过点 $A(1,6)$ 和 $B(2,8)$，

得 $\begin{cases}k+b=6,\\2k+b=8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\b=4.\end{cases}$

所以此函数的解析式为 $y=2x+4$.

只有 A 选项的坐标符合此函数的解析式.故选 A.

5.(多选)如图是反映某市某一天的温度随时间变化情况的图象.由图象可知，下列说法中正确的是　(　　)



A.这天 15 时的温度最高

B.这天 3 时的温度最低

C.这天的最高温度与最低温度相差 13 ℃

D.这天 21 时的温度是 30 ℃

ABD　**解析**：由图象知，这天 15 时的温度最高，为 36 ℃；3 时的温度最低，为 22 ℃；这天的最高温度与最低温度相差 $36-22=14$(℃)；21 时的温度是 30 ℃，只有 C 错误.

6.已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 分别由下表给出.

x	1	2	3
$f(x)$	2	1	1

x	1	2	3
$g(x)$	3	2	1

$f(g(1))$ 的值为________；当 $g(f(x))=2$ 时，$x=$________.

1　1　**解析**：由于函数关系是用表格形式给出的，知 $g(1)=3$，所以 $f(g(1))=f(3)=1$.由于 $g(2)=2$，所以 $f(x)=2$，所以 $x=1$.

7.已知 $f(x)$ 为二次函数，且 $f(x+1)+f(x-1)=2x^2-4x$，则 $f(x)=$________.

x^2-2x-1　**解析**：设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$.

所以 $f(x+1)+f(x-1)=a(x+1)^2+b(x+1)+c+a(x-1)^2+b(x-1)+c=2ax^2+2bx+2a+2c=2x^2-4x$.

所以 $2a=2$，$2b=-4$，$2a+2c=0$.所以 $a=1$，$b=-2$，$c=-1$.所以 $f(x)=x^2-2x-1$.

8.已知函数 $f(x)=ax+b$，且 $f(-1)=-4$，$f(2)=5$.求：

(1)a，b 的值；

(2)$f(0)$ 的值.

解：(1)由 $\begin{cases}f(-1)=-4,\\f(2)=5,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-a+b=-4,\\2a+b=5,\end{cases}$

解得 $a=3$，$b=-1$.

(2)由(1)知 $f(x)=3x-1$，所以 $f(0)=-1$.

综合性·创新提升

1.已知函数 $f(2x+1)=3x+2$，且 $f(a)=2$，则 a 的值为　(　　)

A.-1　　B.5　　C.1　　D.8

C　**解析**：由 $3x+2=2$ 得 $x=0$.所以 $a=2\times0+1=1$.故选 C.

2.如果函数 $y=x^2+2$ 的定义域为 $\{-2,-1,0,1,2\}$，那么其值域为　(B)

A.$\{3,6,2,3,6\}$　　B.$\{2,3,6\}$

C.$\{y|-3\leqslant y\leqslant6\}$　　D.$\{y|2\leqslant y\leqslant6\}$

3.(多选)如果二次函数的图象关于直线 $x=1$ 对称，且过点 $(0,0)$，则此二次函数的解析式可以是　(　　)

A.$f(x)=x^2-1$

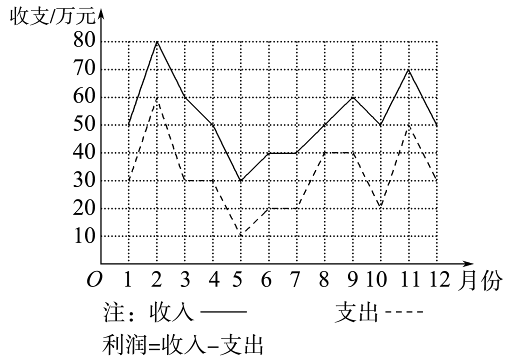
B.$f(x)=-(x-1)^2+1$

C.$f(x)=(x-1)^2+1$

D.$f(x)=(x-1)^2-1$

BD　**解析**：由题意设 $f(x)=a(x-1)^2+b(a\neq0)$，由于点 $(0,0)$ 在图象上，所以 $a+b=0$，$a=-b$，故符合条件的是选项 B，D.

4.某商场一年中各月份的收入、支出情况如图所示，则下列说法中正确的是　(　　)



A.支出最高值与支出最低值的比是 8∶1

B.4 至 6 月份的平均收入为 50 万元

C.利润最高的月份是 2 月份

D.2 至 3 月份的收入的变化率与 11 至 12 月份的收入的变化率相同

D　**解析**：由图可知，支出最高值为 60 万元，支出最低值为 10 万元，其比是 6∶1，故 A 错误；由图可知，4 至 6 月份的平均收入为 $\frac{1}{3}(50+30+40)=40$(万元)，故 B 错误；由图可知，利润最高的月份为 3 月份和 10 月份，故 C 错误；由图可知 2 至 3 月份的收入的变化率与 11 至 12 月份的收入的变化率相同，故 D 正确.

5. 若一个长方体的高为 80，长比宽多 10，则这个长方体的体积 y 与长方体的宽 x 之间的关系式是________.

$y=80x(x+10)$，$x\in(0,+\infty)$　**解析**：由题意可知，长方体的长为$(x+10)$，从而长方体的体积 $y=80x(x+10)$，$x>0$.

6. 已知 $f(x)=2x+a$，$g(x)=\frac{1}{4}(x^2+3)$.

(1)若 $f(g(1))=5$，则 $a=$________；

(2)若 $g(f(x))=x^2-x+1$，则 $a=$______.

(1)3　(2)-1　**解析**：(1)因为 $g(1)=\frac{1}{4}\times(1+3)=1$，所以 $f(g(1))=f(1)=2+a=5$.所以 $a=3$.

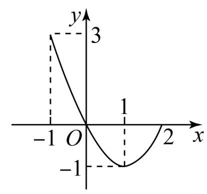
(2)因为 $g(x)=\frac{1}{4}(x^2+3)$，所以 $g(f(x))=\frac{1}{4}[(2x+a)^2+3]=\frac{1}{4}(4x^2+4ax+a^2+3)=x^2+ax+\frac{a^2+3}{4}=x^2-x+1$，解得 $a=-1$.

7. 已知函数 $f(x)=x^2-2x(-1\leqslant x\leqslant 2)$.

(1)画出 $f(x)$的图象；

(2)根据函数图象写出 $f(x)$的值域.

解：(1)$f(x)$的图象如图所示.

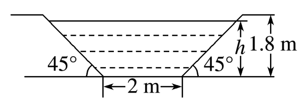


(2)观察 $f(x)$的图象可知，$f(x)$图象上所有点的纵坐标的取值范围是$[-1,3]$，即 $f(x)$的值域是$[-1,3]$.

8. 如图，某灌溉渠的横断面是等腰梯形，底宽为 2 m，渠深为 1.8 m，斜坡的倾斜角是 45°.

(1)试将横断面中水的面积 $A(\mathrm{m}^2)$表示成水深 $h(\mathrm{m})$的函数；

(2)确定(1)中函数的定义域和值域.



解：(1)由已知条件，横断面中水的形状为等腰梯形，下底为 2 m，上底为$(2+2h)$m，高为 h m，

所以水的面积 $A=\frac{[2+(2+2h)]h}{2}=h^2+2h$.

(2)函数的定义域为$\{h\mid 0<h\leqslant 1.8\}$.

由函数 $A=h^2+2h=(h+1)^2-1$ 的图象(图略)可知，在区间$(0,1.8]$上函数值 A 随自变量 h 的增大而增大.

所以 $0<A\leqslant 6.84$.故函数的值域为$\{A\mid 0<A\leqslant 6.84\}$.

第 2 课时　分段函数及其应用

学习任务目标

1.了解分段函数的概念，会求分段函数的函数值，能画出分段函数的图象.

2.能在实际问题中列出分段函数的解析式，并能解决有关问题.

问题式预习

知识点　分段函数

(1)在定义域内，对于自变量的不同取值范围有不同的函数解析式.像这样的函数，通常叫做分段函数.

(2)分段函数的定义域是各段定义域的并集，其值域是各段值域的并集.

(3)分段函数是一个函数，在画分段函数的图象时，应根据自变量的取值范围及各段对应解析式画出各段函数图象.

[微训练]

1. 判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").

(1)分段函数有几段就是几个函数.　(×)

(2)分段函数的定义域要分开写成几个集合的形式.　(×)

(3)函数 $f(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ 1, x\geqslant 0\end{cases}$ 不是分段函数.　(×)

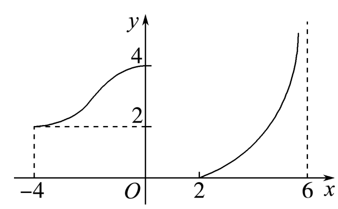
2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+5, x\geqslant 4,\\ x-2, x<4,\end{cases}$ 则 $f(3)$ 的值是(　　)

A.1　　B.2

C.8　　D.9

A　**解析**：$f(3)=3-2=1$.

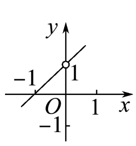
3. 函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，则它的定义域为 $[-5,0]\cup[2,6)$，值域为 $[0,+\infty)$.



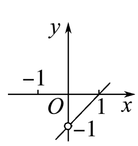
任务型课堂

任务一　分段函数的图象

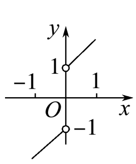
1. 函数 $y=x+\dfrac{|x|}{x}$ 的图象是(　　)



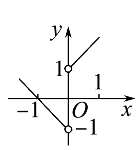
A



B



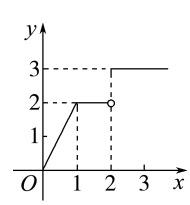
C



D

C　**解析**：对于 $y=x+\dfrac{|x|}{x}$，当 $x>0$ 时，$y=x+1$；当 $x<0$ 时，$y=x-1$.即 $y=\begin{cases}x+1, x>0,\\ x-1, x<0,\end{cases}$ 故其图象应为 C.

2. 函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，则其解析式为________.



$f(x)=\begin{cases}2x, 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2, 1<x<2,\\ 3, x\geqslant 2\end{cases}$　**解析**：当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，设 $f(x)=kx$，又函数图象过点 $(1,2)$，故 $k=2$，所以 $f(x)=2x$.

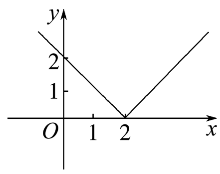
当 $1<x<2$ 时，$f(x)=2$.当 $x\geqslant 2$ 时，$f(x)=3$.

综上，$f(x)=\begin{cases}2x, 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2, 1<x<2,\\ 3, x\geqslant 2.\end{cases}$

3.将函数 $f(x)=|x-2|$ 用分段函数的形式表示出来,并作出其图象.

解:$f(x)=|x-2|=\begin{cases}x-2,x\geqslant 2,\\2-x,x<2.\end{cases}$

函数 $f(x)$ 的图象如图所示.



【类题通法】

画分段函数图象的方法

(1)整段作图分段取:先不考虑定义域的限制,用虚线分别作出各段图象,再用实线保留定义域内的图象.

(2)端点虚实要明确:一定要明确区间端点是否包含在内,由此确定端点的虚实.

任务二　分段函数求值

1. 若函数 $f(x)=\begin{cases}x-3,x\geqslant 10,\\f(f(x+5)),x<10,\end{cases}$ 则 $f(7)=$________.

8　**解析**:因为函数 $f(x)=\begin{cases}x-3,x\geqslant 10,\\f(f(x+5)),x<10,\end{cases}$ 所以 $f(7)=f(f(12))=f(9)=f(f(14))=f(11)=8$.

2.已知 $f(x)=\begin{cases}x^2-1,x\leqslant 1,\\-x+1,x>1,\end{cases}$ 则 $f(f(-1))=$______;若 $f(x)=-1$,则 $x=$________.

-1　0 或 2　**解析**:由 $-1<1$,得 $f(-1)=(-1)^2-1=0$.由 $0<1$,得 $f(0)=-1$.所以 $f(f(-1))=f(0)=-1$.因为 $f(x)=-1$,所以 $\begin{cases}x\leqslant 1,\\x^2-1=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>1,\\-x+1=-1,\end{cases}$

解得 $x=0$ 或 $x=2$,满足题意.

3.已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+1,x\leqslant -2,\\x^2+2x,-2<x<2,\\2x-1,x\geqslant 2.\end{cases}$ 若 $f(a)=3$,求实数 a 的值.

解:①当 $a\leqslant -2$ 时,$a+1=3$.所以 $a=2>-2$,不合题意,舍去.

②当 $-2<a<2$ 时,$a^2+2a=3$,即 $a^2+2a-3=0$.所以 $(a-1)(a+3)=0$.所以 $a=1$ 或 $a=-3$.

因为 $1\in(-2,2)$,$-3\notin(-2,2)$,所以 $a=1$,符合题意.

③当 $a\geqslant 2$ 时,$2a-1=3$,所以 $a=2$,符合题意.

综合①②③,当 $f(a)=3$ 时,$a=1$ 或 $a=2$.

【类题通法】

分段函数求值的关注点

(1)注意所给自变量的值所在的范围,代入相应的解析式求得;

(2)多层函数嵌套时,按照由里到外的顺序,层层处理;

(3)已知函数值求相应的自变量的值时,应在各段中分别求解.

任务三　选择恰当的方法表示函数关系

[探究活动]

探究 1:若函数 $f(x)=\begin{cases}-x,x\leqslant 0,\\ax,x>0\end{cases}$ 是分段函数,则 a 的值满足什么条件?

提示:分段函数在不同段上对应关系不同,所以 $a\neq -1$.

探究 2:函数 $f(x)=\begin{cases}-x,x\leqslant 0,\\2x,x>0\end{cases}$ 的定义域是 $\{x|x\leqslant 0\}$ 吗?是 $\{x|x>0\}$ 吗?还是它们的并集?

提示:该函数的定义域既不是 $\{x|x\leqslant 0\}$,也不是 $\{x|x>0\}$,应是它们的并集 **R**.

探究 3:你能举几个现实生活中的分段函数的例子吗?

提示:如出租车计费问题、个人所得税问题、邮资问题等.

[评价活动]

1.某地居民生活用水按三档分阶梯计费(如下表所示),水费以年为周期结算,不同周期之间不累计、不结转.

阶梯	年用水量/t	单价/(元/t)
第一阶梯	0～144(含)	3.50
第二阶梯	144～204(含)	7.00
第三阶梯	204 以上	9.00

若一户家庭一年所缴水费为 756 元,则其一年用水多少吨?

解:设用水量为 x t,所缴水费为 $f(x)$ 元.

当 $0\leqslant x\leqslant 144$ 时,$f(x)=3.5x$;

当 $144<x\leqslant 204$ 时,$f(x)=144\times 3.5+7(x-144)=7x-504$;

当 $x>204$ 时,$f(x)=144\times 3.5+7\times(204-144)+9(x-204)=9x-912$.

故 $f(x)=\begin{cases}3.5x, 0\leqslant x\leqslant 144,\\ 7x-504, 144<x\leqslant 204,\\ 9x-912, x>204.\end{cases}$

由 $3.5x=756$，解得 $x=216$，不符合题意；

由 $7x-504=756$，解得 $x=180$，符合题意.

$180\in(144,204]$，

所以一年用水 180 t.

2. 已知某工厂一条手机配件生产线的产量 ω（单位：百个）与生产成本 x（单位：百元）满足如下关系：

$$\omega(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2+3, 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 6-\dfrac{3}{1+x}, 2<x\leqslant 5.\end{cases}$$

此外，还需要投入其他成本（如运输、包装成本等）$2x$ 百元.已知这种手机配件的市场售价为 16 元/个（即 16 百元/百个），且始终供不应求.记由这条生产线获得的利润为 $L(x)$（单位：百元）.

(1)求 $L(x)$ 的函数解析式.

(2)当投入的生产成本为多少时，由这条生产线获得的利润最大？最大利润是多少？

解：(1) $L(x)=16\omega(x)-2x-x$

$=\begin{cases}8x^2-3x+48, 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 96-\dfrac{48}{1+x}-3x, 2<x\leqslant 5.\end{cases}$

(2)当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，$L(x)=8x^2-3x+48$，图象的对称轴方程为 $x=\dfrac{3}{16}$.

所以 $L(x)_{\max}=L(2)=74$.

当 $2<x\leqslant 5$ 时，$L(x)=99-\left[\dfrac{48}{x+1}+3(x+1)\right]\leqslant 99-2\sqrt{\dfrac{48}{x+1}\times 3(x+1)}=75$.

当且仅当 $\dfrac{48}{x+1}=3(x+1)$，即 $x=3$ 时，等号成立.

因为 $75>74$，所以当投入的生产成本为 300 元时，由这条生产线获得的利润最大，最大利润是 7 500 元.

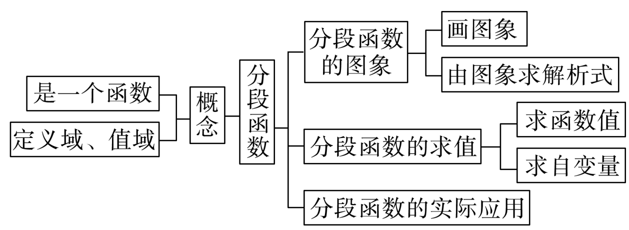
【类题通法】

用分段函数表示函数关系的方法

(1)当两个变量在不同取值区间有不同的对应关系时，往往需要用分段函数来表示两变量间的对应关系；

(2)写出分段函数的关键是确定分段的各分界点，即明确自变量的取值区间，对每一个区间进行分类讨论，从而写出相应的函数解析式.

提质归纳



课后素养评价（十九）

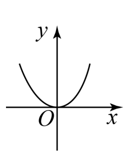
基础性·能力运用

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\leqslant 1,\\ \dfrac{2}{x}, x>1,\end{cases}$ 则 $f(f(3))=$ （　　）

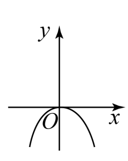
A. $\dfrac{1}{5}$　　B. 3　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{13}{9}$

D　**解析**：因为 $f(3)=\dfrac{2}{3}\leqslant 1$，所以 $f(f(3))=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+1=\dfrac{13}{9}$.

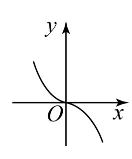
2. 下列图形是函数 $y=x|x|$ 的图象的是 （　　）



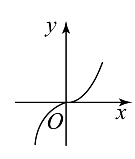
A



B



C



D

D　**解析**：函数 $y=x|x|=\begin{cases}x^2, x\geqslant 0,\\ -x^2, x<0.\end{cases}$ 故选 D.

3. （2021・浙江）已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-4, x>2,\\ |x-3|+a, x\leqslant 2,\end{cases}$ 若 $f(f(\sqrt{6}))=3$，则 $a=$______.

2　**解析**：$f(f(\sqrt{6}))=f(6-4)=f(2)=|2-3|+a=3$，故 $a=2$.

4. 若函数 $f(x)=\begin{cases}x, x>0,\\ x^2-1, x<0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的定义域为

________，值域为________.

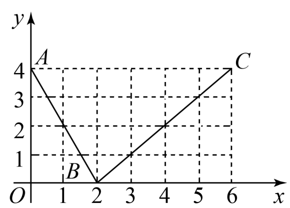
$\{x|x\neq0\}$　$\{y|y>-1\}$　**解析**：定义域为$\{x|x>0$ 或$x<0\}=\{x|x\neq0\}$.

当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，当 $x<0$ 时，$f(x)>-1$，所以值域为$\{y|y>-1\}$.

5. 某单位为鼓励职工节约用水，作出了如下规定：每位职工每月用水量不超过 10 m^3 的，按每立方米 m 元收费；用水量超过10 m^3 的，超过部分按每立方米 $2m$ 元收费.某职工某月缴水费 $16m$ 元，则该职工这个月实际用水量为________m^3.

13　**解析**：设该单位职工每月应缴水费为 y 元，实际用水量为 x m^3，则满足的关系式为 $y=\begin{cases}mx,0\leqslant x\leqslant10,\\2mx-10m,x>10.\end{cases}$ 由 $y=16m$，可知 $x>10$.令 $2mx-10m=16m$，解得 $x=13$.

6. 如图，函数 $f(x)$ 的图象是折线段 ABC，其中 A，B，C 的坐标分别为$(0,4)$，$(2,0)$，$(6,4)$.



(1)求 $f(f(0))$的值；

(2)求函数 $f(x)$的解析式.

解：(1)直接由图可得 $f(f(0))=f(4)=2$.

(2)设线段 AB 所对应的函数解析式为 $y=kx+b$.

将 $A(0,4)$，$B(2,0)$代入，

得$\begin{cases}4=b,\\0=2k+b,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}b=4,\\k=-2.\end{cases}$

所以 $y=-2x+4(0\leqslant x\leqslant2)$.

同理，线段 BC 所对应的函数解析式为 $y=x-2(2<x\leqslant6)$.所以 $f(x)=\begin{cases}-2x+4,0\leqslant x\leqslant2,\\x-2,2<x\leqslant6.\end{cases}$

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-4,0\leqslant x\leqslant2,\\2x,x>2.\end{cases}$

(1)求 $f(2)$，$f(f(2))$的值；

(2)若 $f(x_0)=8$，求 x_0 的值.

解：(1)因为 $0\leqslant x\leqslant2$ 时，$f(x)=x^2-4$，

所以 $f(2)=2^2-4=0$，$f(f(2))=f(0)=0^2-4=-4$.

(2)当 $0\leqslant x_0\leqslant2$ 时，由 $x_0^2-4=8$，得 $x_0=\pm2\sqrt{3}$(舍去)；

当 $x_0>2$ 时，由 $2x_0=8$，得 $x_0=4$.所以 $x_0=4$.

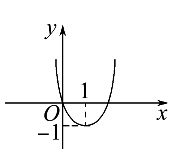
综合性·创新提升

1. (多选)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1(x\leqslant0),\\2x(x>0),\end{cases}$ 若$f(a)=10$，则 a 的值可以是　(　　)

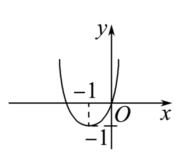
A.3　　B.-3　　C.-5　　D.5

BD　**解析**：若 $a\leqslant0$，则 $f(a)=a^2+1=10$，所以 $a=-3(a=3$ 舍去).若 $a>0$，则 $f(a)=2a=10$，所以 $a=5$.综上可得，$a=5$ 或 $a=-3$.

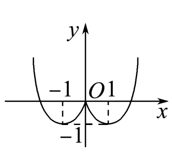
2. 函数 $f(x)=x^2-2|x|$的图象是　(C)



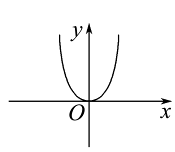
A



B



C



D

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x},0<x<2,\\2x-4,x\geqslant2.\end{cases}$ 若 $f(a)=f(a+2)$，则 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=$　(　　)

A.2　　B.4

C.6　　D.8

B　**解析**：若 $0<a<2$，则 $a+2>2$.

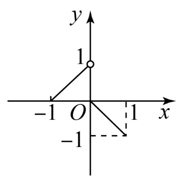
由 $f(a)=f(a+2)$，得$\sqrt{a}=2(a+2)-4$，解得 $a=\dfrac{1}{4}$或 $a=0$(舍去).

所以 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=f(4)=2\times4-4=4$.

若 $a\geqslant2$，由 $f(a)=f(a+2)$，得 $2a-4=2(a+2)-4$，无解.

综上，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=4$.故选 B.

4. 已知函数 $y=f(x)$的图象如图所示，则 $f(x)$的解析式是____________.



$f(x)=\begin{cases}x+1,-1\leqslant x<0,\\-x,0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$　**解析**:由题图可知,函数$f(x)$的图象由两条线段组成.

当$-1\leqslant x<0$时,设$f(x)=ax+b$.

将$(-1,0)$,$(0,1)$代入解析式,则$\begin{cases}-a+b=0,\\b=1,\end{cases}$

所以$\begin{cases}a=1,\\b=1,\end{cases}$即$f(x)=x+1$.

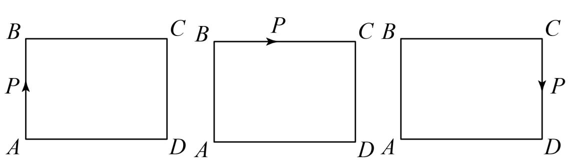
当$0\leqslant x\leqslant 1$时,设$f(x)=kx$.

将$(1,-1)$代入$f(x)=kx$,则$k=-1$,即$f(x)=-x$.

综上,$f(x)=\begin{cases}x+1,-1\leqslant x<0,\\-x,0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

5.已知函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+1,x\leqslant 0,\\-(x-1)^2,x>0,\end{cases}$则当$f(x)\geqslant -1$时,$x$的取值范围是$[-4,2]$.

6.如图,在矩形$ABCD$中,$AB=6$,$BC=8$,点P从点A出发沿$A\to B\to C\to D$的路线移动.设点P移动的路线长为x,$\triangle PAD$的面积为y.



(1)写出y关于x的函数解析式.

(2)当$x=4$和$x=18$时,求函数值y.

(3)当x取何值时,$y=20$?请说明此时点P在矩形的哪条边上.

解:(1)当点P在线段AB上运动时,$AP=x$.根据三角形的面积公式可得$y=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AP=\frac{1}{2}\times 8\times x=4x$.

当点P在线段BC上运动时,$\triangle PAD$的面积不变,$y=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AB=\frac{1}{2}\times 8\times 6=24$.

当点P在线段CD上运动时,$DP=6+8+6-x=20-x$,$AD=8$.根据三角形的面积公式可得$y=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot DP=\frac{1}{2}\times 8\times(20-x)=80-4x$.

所以y与x之间的函数关系式为$y=\begin{cases}4x,0\leqslant x\leqslant 6,\\24,6<x\leqslant 14,\\80-4x,14<x\leqslant 20.\end{cases}$

(2)当$x=4$时,$y=4x=4\times 4=16$;

当$x=18$时,$y=80-4\times 18=8$.

(3)由$y=4x=20$,解得$x=5$,此时点P在线段AB上;

由$y=80-4x=20$,解得$x=15$,此时点P在线段CD上.

7.已知函数$f(x)=1+\frac{|x|-x}{2}(-2<x\leqslant 2)$.

(1)用分段函数的形式表示$f(x)$;

(2)画出$f(x)$的图象;

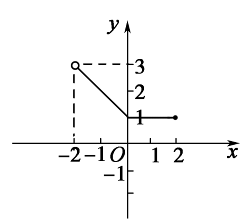
(3)若$f(a)=2$,求实数a的值.

解:(1)当$0\leqslant x\leqslant 2$时,$f(x)=1+\frac{x-x}{2}=1$;

当$-2<x<0$时,$f(x)=1+\frac{-x-x}{2}=1-x$.

所以$f(x)=\begin{cases}1,0\leqslant x\leqslant 2,\\1-x,-2<x<0.\end{cases}$

(2)函数$f(x)$的图象如图所示.



(3)因为$f(a)=2$,由函数图象可知$a\in(-2,0)$,所以$1-a=2$,即$a=-1$.

3.2　函数的基本性质

3.2.1　单调性与最大(小)值

第 1 课时　函数的单调性

学习任务目标

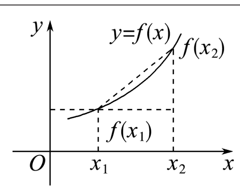
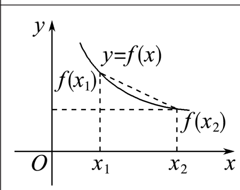
1. 了解函数单调性、单调区间等概念.

2. 会利用函数图象判断一次函数、二次函数的单调性.

3. 能利用定义判断一些简单函数在给定区间上的单调性，掌握利用单调性的定义判断、证明函数单调性的方法.

问题式预习

知识点一　函数的单调性

前提条件	一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subseteq D$	
条件	如果 $\forall x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，都有	
	$f(x_1)<f(x_2)$	$f(x_1)>f(x_2)$
图示		
结论	$f(x)$ 在区间 I 上单调递增	$f(x)$ 在区间 I 上单调递减
特别地	当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递增时，我们就称它是增函数	当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递减时，我们就称它是减函数

［微训练］

1. 函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调递减，$x_1,x_2\in(a,b)$，且 $x_1<x_2$，则有　(　　)

A. $f(x_1)<f(x_2)$　　B. $f(x_1)>f(x_2)$

C. $f(x_1)=f(x_2)$　　D. 以上都有可能

B　**解析**：因为函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上单调递减，且 $x_1<x_2$，所以 $f(x_1)>f(x_2)$. 故选 B.

2. 函数 $f(x)=2$ 在区间 $[-2,4]$ 上　(　　)

A. 单调递减　　B. 单调递增

C. 先减后增　　D. 不具有单调性

D　**解析**：当 $x\in[-2,4]$ 时，$f(x)$ 的值恒等于 2，故函数 $f(x)=2$ 在 $[-2,4]$ 上不具有单调性.

知识点二　函数的单调性与单调区间

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调递增或单调递减，那么就说函数 $y=f(x)$ 在这一区间具有(严格的)单调性，区间 I 叫做 $y=f(x)$ 的单调区间.

［微训练］

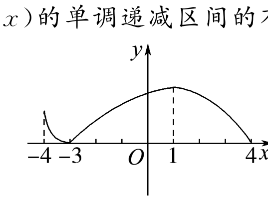
1. 判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").

(1) 函数在其定义域上都具有单调性.　(×)

(2) 若函数 $y=f(x)$ 在定义域上有 $f(1)<f(2)$，则该函数是单调递增函数.　(×)

(3) 若函数 $y=f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增，则该函数的单调递增区间是 $[0,2]$.　(×)

2. (多选)函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，则下列区间中，是 $y=f(x)$ 的单调递减区间的有　(　　)



A. $[-4,1]$

B. $[-4,-3]$

C. $[-3,1]$

D. $[1,4]$

BD　**解析**：根据函数单调性定义及函数图象知 $f(x)$ 在 $[-4,-3]$ 和 $[1,4]$ 上单调递减，故选 BD.

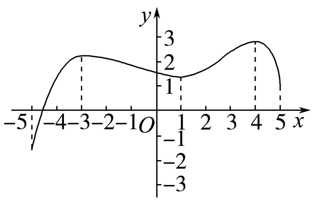
3. 函数 $f(x)=x^2-2x+3$ 的单调递减区间是______.

$(-\infty,1]$　**解析**：因为函数 $f(x)=x^2-2x+3$ 的图象开口向上，其对称轴为 $x=1$，所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,1]$.

任务型课堂

任务一　判断函数的单调性

1.(多选)如图是定义在区间$[-5,5]$上的函数 $y=f(x)$ 的图象,则下列说法正确的是　(　　)



A.$f(x)$在区间$[-5,-3]$上单调递增

B.$f(x)$在区间$[1,4]$上单调递增

C.$f(x)$在区间$[-3,1]\cup[4,5]$上单调递减

D.$f(x)$在区间$[-5,5]$上没有单调性

ABD　**解析**:由题图可知,$f(x)$在区间$[-5,-3]$上单调递增,在区间$[-3,1]$上单调递减,在区间$[1,4]$上单调递增,在区间$[4,5]$上单调递减,选项 ABD 正确.而单调区间不可以用“$\cup$”连接,所以选项 C 错误.

2.下列函数中,在区间$(0,1)$上单调递增的是　(　　)

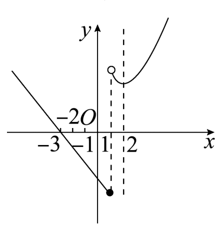
A.$y=|x|$　　B.$y=3-x$

C.$y=\dfrac{1}{x}$　　D.$y=-x^2+4$

A　**解析**:因为$-1<0$,所以一次函数 $y=3-x=-x+3$ 在 **R** 上单调递减,B 不符合.反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上单调递减,C 不符合.二次函数 $y=-x^2+4$ 在$(0,+\infty)$上单调递减,D 不符合.

3.画出函数 $f(x)=\begin{cases}-x-3,x\leqslant 1,\\(x-2)^2+3,x>1\end{cases}$的图象,并写出函数的单调区间.

解:$f(x)=\begin{cases}-x-3,x\leqslant 1,\\(x-2)^2+3,x>1\end{cases}$的图象如图所示.



由图象可知,函数的单调递减区间为$(-\infty,1]$和$(1,2]$;单调递增区间为$(2,+\infty)$.

【类题通法】

由图象求函数单调区间的关注点

(1)首先确定定义域;

(2)确定在某个区间内,函数的图象由左至右是上升的还是下降的.

注意:当单调性相同的区间多于一个时,用“和”或“,”连接,不能用“$\cup$”连接.

任务二　函数单调性的判断与证明

1.用函数单调性的定义证明:函数 $f(x)=2x^2+4x$ 在$(-\infty,-1]$上单调递减.

证明:设 $x_1<x_2\leqslant -1$,则

$f(x_1)-f(x_2)=(2x_1^2+4x_1)-(2x_2^2+4x_2)$

$=2(x_1^2-x_2^2)+4(x_1-x_2)$

$=2(x_1-x_2)(x_1+x_2+2)$.

因为 $x_1<x_2\leqslant -1$,所以 $x_1-x_2<0$,$x_1+x_2+2<0$.

所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$.

所以 $f(x)$在$(-\infty,-1]$上单调递减.

2.证明:函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1)$上单调递减.

证明:设 x_1,x_2 是区间$(0,1)$上的任意两个实数,且 $x_1<x_2$,则 $f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1+\dfrac{1}{x_1}\right)-\left(x_2+\dfrac{1}{x_2}\right)=(x_1-x_2)+\left(\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right)=(x_1-x_2)+\dfrac{x_2-x_1}{x_1x_2}=(x_1-x_2)\cdot\left(1-\dfrac{1}{x_1x_2}\right)$

$=\dfrac{(x_1-x_2)(x_1x_2-1)}{x_1x_2}$.

因为 $0<x_1<x_2<1$,

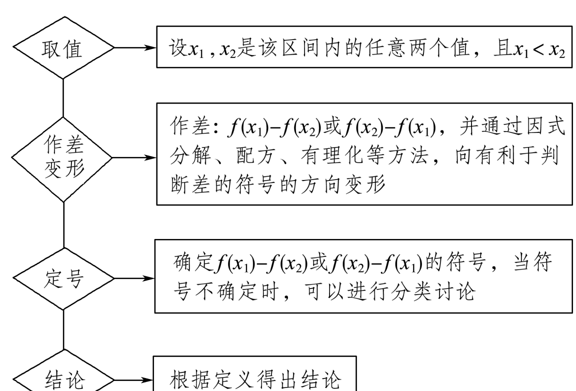
所以 $x_1-x_2<0$,$0<x_1x_2<1$,则 $x_1x_2-1<0$,

所以$\dfrac{(x_1-x_2)(x_1x_2-1)}{x_1x_2}>0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$,

所以 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1)$上单调递减.

【类题通法】

利用定义证明函数单调性的步骤



任务三　函数单调性的应用

[探究活动]

探究1：若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，且 $x_1>x_2$，则 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小关系如何？若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数呢？

提示：由增函数的定义知，若 $x_1>x_2$，则 $f(x_1)>f(x_2)$；而当 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数时，若 $x_1>x_2$，则 $f(x_1)<f(x_2)$.

探究2：若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，且 $f(x_1)>f(x_2)$，则 x_1 与 x_2 的大小关系如何？若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数呢？

提示：因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，所以 $f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow x_1>x_2$；同理，若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，则 $f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow x_1<x_2$.

[评价活动]

1. 已知函数 $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，且 $f(2x-3)>f(5x-6)$，则实数 x 的取值范围为________.

$(-\infty,1)$　**解析**：因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，且 $f(2x-3)>f(5x-6)$，

所以 $2x-3>5x-6$，即 $x<1$.

所以实数 x 的取值范围为 $(-\infty,1)$.

2. 已知函数 $f(x)=-x^2-2(a+1)x+3$，若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,3]$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围为________；若函数 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上是单调函数，则实数 a 的取值范围为________________.

$(-\infty,-4]$　$(-\infty,-3]\cup[-2,+\infty)$　**解析**：因为 $f(x)=-x^2-2(a+1)x+3$ 的图象开口向下，要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,3]$ 上单调递增，只需 $-(a+1)\geqslant 3$，即 $a\leqslant -4$.

所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-4]$.

由题意可知 $-(a+1)\leqslant 1$ 或 $-(a+1)\geqslant 2$，

即 $a\leqslant -3$ 或 $a\geqslant -2$.

所以 a 的取值范围为 $(-\infty,-3]\cup[-2,+\infty)$.

3. 已知 $f(x)$ 是定义在区间 $[-1,1]$ 上的增函数，且 $f(x-2)<f(1-x)$，求 x 的取值范围.

解：由题意，得 $\begin{cases}-1\leqslant x-2\leqslant 1,\\ -1\leqslant 1-x\leqslant 1,\end{cases}$

解得 $1\leqslant x\leqslant 2$①.

因为 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调递增，且 $f(x-2)<f(1-x)$，所以 $x-2<1-x$，解得 $x<\dfrac{3}{2}$②.

由①②得 $1\leqslant x<\dfrac{3}{2}$.

所以，满足题设条件的 x 的取值范围为 $\left[1,\dfrac{3}{2}\right)$.

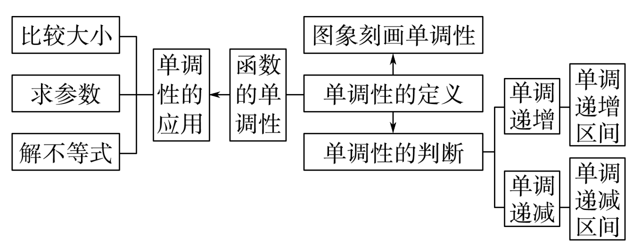
【类题通法】

由单调性求二次函数中的参数的方法

(1)若已知函数的单调中区间，则根据图象的对称轴对应区间的端点求参数的值(范围)；

(2)若已知函数在某区间上的单调性，则根据该区间是函数单调区间的子区间，利用区间端点关系求参数的值(范围).

提质归纳



课后素养评价(二十)

基础性·能力运用

1. 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，则有　(　　)

A. $f(3)<f(5)$　　B. $f(3)\leqslant f(5)$

C. $f(3)>f(5)$　　D. $f(3)\geqslant f(5)$

C　**解析**：因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，且 $3<5$，所以 $f(3)>f(5)$.

2. 函数 $f(x)=-x^2+2x+3$ 的单调递减区间是　(　　)

A. $(-\infty,1)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $(-\infty,2)$　　D. $(2,+\infty)$

B　**解析**：易知函数 $f(x)=-x^2+2x+3$ 是图象开口向下的二次函数，其对称轴为 $x=1$，所以其单调递减区间是 $(1,+\infty)$.

3. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的单调递减区间是　(　　)

A. $(0,+\infty)$

B. $(-\infty,0)$

C. $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$

D. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

C　**解析**：函数 $y=\frac{1}{x}$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$．由函数的图象可知 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上分别单调递减．

4.（多选）下列函数中满足对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 的是　（　　）

A. $f(x)=-\frac{2}{x}$

B. $f(x)=-3x+1$

C. $f(x)=x^2+4x+3$

D. $f(x)=x-1$

ACD　**解析**：因为对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增．对于 A，根据反比例函数性质可知 $f(x)=-\frac{2}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，符合题意；对于 B，根据一次函数的性质可知，$f(x)=-3x+1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，不符合题意；对于 C，根据二次函数的性质可知 $f(x)=x^2+4x+3$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，符合题意；对于 D，根据一次函数的性质可知，$f(x)=x-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，符合题意．

5. 若 $f(x)=\begin{cases}\frac{a}{x},x\geqslant1,\\-x+3a,x<1\end{cases}$ 是 **R** 上的单调函数，则实数 a 的取值范围为________．

$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　**解析**：因为函数 $f(x)=-x+3a$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，又 $f(x)=\begin{cases}\frac{a}{x},x\geqslant1,\\-x+3a,x<1\end{cases}$ 是 **R** 上的单调函数，所以 $f(x)=\frac{a}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $a>0$，且 $\frac{a}{1}\leqslant-1+3a$，即 $a\geqslant\frac{1}{2}$．

综上所述，a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$．

6. 若 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的增函数，且对一切 $x,y>0$，满足 $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$．

(1) $f(1)$ 的值为 $\underline{0}$．

(2) 若 $f(6)=1$，则不等式 $f(x+3)-f\left(\frac{1}{3}\right)<2$ 的解集为 $\underline{\{x\,|\,-3<x<9\}}$．

7. 用函数单调性的定义证明：函数 $y=\frac{2x}{x+1}$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增．

证明：设 $x_1>x_2>-1$，

则 $x_1-x_2>0$，$x_1+1>0$，$x_2+1>0$，

$y_1-y_2=\frac{2x_1}{x_1+1}-\frac{2x_2}{x_2+1}=\frac{2(x_1-x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}>0$．

所以 $y_1>y_2$．

所以，函数 $y=\frac{2x}{x+1}$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增．

综合性·创新提升

1.（多选）下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是　（　　）

A. $y=3-x$　　B. $y=x^2+1$

C. $y=\frac{1}{x}$　　D. $y=-x^2$

ACD　**解析**：分别画出各个函数的图象（图略），可知在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的有 A，C，D．

2. 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的减函数，且 $f(2a-3)<f(a-2)$，则实数 a 的取值范围是　（　　）

A. $(1,2]$　　B. $(1,3]$

C. $(1,4]$　　D. $(1,+\infty)$

A　**解析**：因为 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的减函数，且 $f(2a-3)<f(a-2)$，

所以 $\begin{cases}-1\leqslant2a-3\leqslant1,\\-1\leqslant a-2\leqslant1,\\2a-3>a-2,\end{cases}$ 解得 $1<a\leqslant2$．

3. 函数 $f(x)=|x|$，$g(x)=x(2-x)$ 的单调递增区间依次是　（C）

A. $(-\infty,0]$，$(-\infty,1]$

B. $(-\infty,0]$，$(1,+\infty)$

C. $[0,+\infty)$，$(-\infty,1]$

D. $[0,+\infty)$，$[1,+\infty)$

4.（多选）关于函数 $f(x)=\frac{3-x}{x+1}$，下列判断正确的是　（　　）

A. $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减

B. $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增

C. $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减

D. $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增

AC　**解析**：根据题意，$f(x)=\frac{3-x}{x+1}=-1+\frac{4}{x+1}$．

$f(x)$的图象由函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图象向左平移 1 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度得到，
故 $f(x)$在$(-\infty,-1)$和$(-1,+\infty)$上单调递减，则 A,C 正确，B,D 错误.

5.若函数 $f(x)=\frac{1}{x+1}$在$(a,+\infty)$上单调递减，则 a 的取值范围是________.

$[-1,+\infty)$　**解析**：函数 $f(x)=\frac{1}{x+1}$的单调递减区间为$(-\infty,-1)$，$(-1,+\infty)$，
又 $f(x)$在$(a,+\infty)$上单调递减，所以 $a\geqslant-1$.

6.已知 $f(x)$在定义域内是减函数，且 $f(x)>0$，下列函数在其定义域内为增函数的是________.
①$y=a+f(x)$(a 为常数)；
②$y=a-f(x)$(a 为常数)；
③$y=\frac{1}{f(x)}$；
④$y=[f(x)]^2$.

②③　**解析**：$f(x)$在定义域内是减函数，且 $f(x)>0$ 时，$-f(x)$，$\frac{1}{f(x)}$均为增函数，故选②③.

7.证明：函数 $f(x)=x^2-\frac{1}{x}$在区间$(0,+\infty)$上单调递增.

证明：任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，
则 $f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-\frac{1}{x_1}-x_2^2+\frac{1}{x_2}$
$=(x_1-x_2)\left(x_1+x_2+\frac{1}{x_1x_2}\right)$.
因为 $0<x_1<x_2$，所以 $x_1-x_2<0$，$x_1+x_2+\frac{1}{x_1x_2}>0$.
所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.
所以，函数$f(x)=x^2-\frac{1}{x}$在区间$(0,+\infty)$上单调递增.

8.函数 $f(x)$对任意 $a,b\in\mathbf{R}$，都有 $f(a+b)=f(a)+f(b)-1$，并且当 $x>0$ 时，$f(x)>1$.
(1)求证：$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数；
(2)若 $f(4)=5$，解不等式 $f(3m-2)<3$.

(1)**证明**：设 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，则 $x_2-x_1>0$，$f(x_2-x_1)>1$.
所以 $f(x_2)-f(x_1)=f((x_2-x_1)+x_1)-f(x_1)$
$=f(x_2-x_1)+f(x_1)-1-f(x_1)=f(x_2-x_1)-1>0$.
所以 $f(x_2)>f(x_1)$.故 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.
(2)**解**：因为 $f(4)=f(2+2)=f(2)+f(2)-1=5$，所以 $f(2)=3$.
所以原不等式可化为 $f(3m-2)<f(2)$.
因为 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，所以 $3m-2<2$，
解得$m<\frac{4}{3}$.故不等式的解集为$\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)$.

第 2 课时　函数的最大(小)值

学习任务目标

1.理解函数的最大值和最小值的概念及其几何意义.
2.能借助函数的图象和单调性，求一些简单函数的最值.
3.能利用函数的最值解决有关的实际应用问题.

问题式预习

知识点　函数的最大(小)值

	最大值	最小值
条件	一般地，设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，如果存在实数 M 满足 $\forall x\in D$，都有	
	$f(x)\leqslant M$	$f(x)\geqslant M$
	$\exists x_0\in D$，使得 $f(x_0)=M$	

续表

	最大值	最小值
结论	M 是函数 $y=f(x)$的最大值	M 是函数 $y=f(x)$的最小值
几何意义	$f(x)$图象上最高点的纵坐标	$f(x)$图象上最低点的纵坐标

[微训练]

1. 在函数 $y=f(x)$ 的定义域中存在无数个实数 x 满足 $f(x)\geqslant M$，则（　　）

A. 函数 $y=f(x)$ 的最小值为 M

B. 函数 $y=f(x)$ 的最大值为 M

C. 函数 $y=f(x)$ 无最小值

D. 不能确定 M 是函数 $y=f(x)$ 的最小值

D　**解析**：根据函数最值的定义，易知选 D.

2. 设函数 $f(x)=2x-1(x<0)$，则 $f(x)$（　　）

A. 有最大值

B. 有最小值

C. 既有最大值又有最小值

D. 既无最大值又无最小值

D　**解析**：因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，所以 $f(x)<f(0)=-1$. 故选 D.

任务型课堂

任务一　用图象法求函数的最值

[探究活动]

探究 1：观察如图所示的两个函数图象，并结合函数最大值、最小值的概念观察下图，探究以下问题.

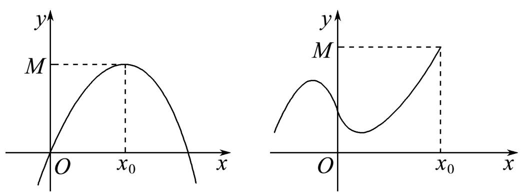


图1　　　图2

这两个函数图象有何共同特征？函数图象上最高点的纵坐标叫什么？

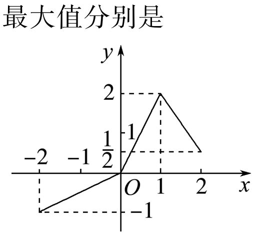
提示：共同特征是对定义域内任意 x，都有 $f(x)\leqslant f(x_0)=M$；最高点的纵坐标叫函数的最大值.

探究 2：如果函数 $f(x)$ 在定义域内存在 x_1 和 x_2，使对定义域内任意 x 都有 $f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)$ 成立，由此你能得到什么结论？

提示：函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(x_1)$，最大值为 $f(x_2)$.

[评价活动]

1. 函数 $y=f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的图象如图所示，则此函数的最小值和最大值分别是（　　）



A. $-1,0$　　B. $0,2$

C. $-1,2$　　D. $\frac{1}{2},2$

C　**解析**：由题图可知，$f(x)$ 的最大值为 $f(1)=2$，$f(x)$ 的最小值为 $f(-2)=-1$. 故选 C.

2. 函数 $y=-|x|$ 在 $\mathbf{R}$ 上（　　）

A. 有最大值 0，无最小值

B. 无最大值，有最小值 0

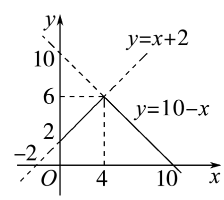
C. 既无最大值，又无最小值

D. 以上都不对

A　**解析**：画出 $y=f(x)$ 的图象（图略）可知，函数 $y=-|x|$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以当 $x=0$ 时，y 取最大值 0，无最小值.

3. 用 $\min\{a,b\}$ 表示 a,b 两个数中的较小者. 设 $f(x)=\min\{x+2,10-x\}(x\geqslant 0)$，则 $f(x)$ 的最大值为________.

6　**解析**：在同一个平面直角坐标系内，画出函数 $y=x+2$ 和 $y=10-x$ 的图象，如图所示.



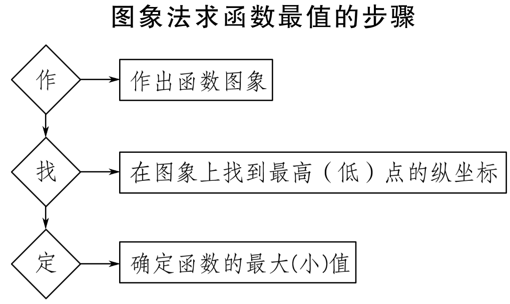
根据 $\min\{x+2,10-x\}(x\geqslant 0)$ 的含义可知，$f(x)$ 的图象应为图中的实线部分.

解方程 $x+2=10-x$，得 $x=4$，此时 $y=6$. 故两图象的交点为 $(4,6)$.

所以 $f(x)=\begin{cases}x+2,0\leqslant x\leqslant 4,\\10-x,x>4,\end{cases}$ 其最大值为交点的纵坐标，所以 $f(x)$ 的最大值为 6.

【类题通法】

图象法求函数最值的步骤



任务二　利用单调性求函数的最值

[探究活动]

探究 1：若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是增函数，则 $y=f(x)$ 在此区间上的最大值是 $\underline{f(b)}$，最小值是 $\underline{f(a)}$.

探究 2：若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是减函数，在 $[b,$

c]上是增函数，则 $y=f(x)$ 在区间[a，c]上的最小值与最大值的情况如何？

提示：最小值是 $f(b)$，最大值不确定，但一定是 $f(a)$ 与 $f(c)$ 中的较大者．

[评价活动]

1. 函数 $y=x^2-2x$，$x\in[0,3]$的值域为　　(　　)

A.$[0,3]$　　B.$[-1,0]$

C.$[-1,+\infty)$　　D.$[-1,3]$

D　**解析**：因为函数 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$，$x\in[0,3]$，所以，当 $x=1$ 时，函数取得最小值为 -1；当 $x=3$ 时，函数取得最大值为 3．故函数的值域为$[-1,3]$．故选 D．

2. 函数 $f(x)=\sqrt{6-x}-3x$ 在区间$[2,4]$上的最大值为________．

-4　**解析**：因为 $y=\sqrt{6-x}$ 在区间$[2,4]$上单调递减，$y=-3x$ 在区间$[2,4]$上单调递减，所以函数 $f(x)=\sqrt{6-x}-3x$ 在区间$[2,4]$上单调递减，所以函数 $f(x)$ 的最大值为 $f(2)=\sqrt{6-2}-3\times2=-4$．

3. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$．

(1)判断函数 $f(x)$ 在区间$(-1,+\infty)$上的单调性，并用定义证明你的结论；

(2)求该函数在区间$[2,4]$上的最大值和最小值．

解：(1)$f(x)$ 在$(-1,+\infty)$上单调递增．

证明：任取 $-1<x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{2x_1+1}{x_1+1}-\dfrac{2x_2+1}{x_2+1}$

$=\dfrac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}$．

因为 $-1<x_1<x_2$，所以 $x_1+1>0$，$x_2+1>0$，$x_1-x_2<0$，所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以 $f(x)$ 在$(-1,+\infty)$上单调递增．

(2)由(1)知 $f(x)$ 在$[2,4]$上单调递增，

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(2)=\dfrac{2\times2+1}{2+1}=\dfrac{5}{3}$，

最大值为 $f(4)=\dfrac{2\times4+1}{4+1}=\dfrac{9}{5}$．

【类题通法】

利用函数的单调性求最值的关注点

(1)若函数 $y=f(x)$ 在区间$[a,b]$上单调递增，则 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的最大值为 $f(b)$，最小值为 $f(a)$．

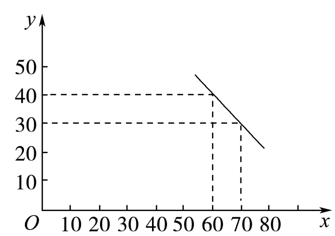
(2)若函数 $y=f(x)$ 在区间$[a,b]$上单调递减，则 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的最大值为 $f(a)$，最小值为 $f(b)$．

(3)若函数 $y=f(x)$ 有多个单调区间，则先求出各区间上的最值，再从各区间上的最值中找出最大(小)值．函数的最大(小)值是整个值域范围内的最大(小)值．

(4)若函数的定义域为半开半闭区间或开区间，则不但要考虑函数在该区间上的单调性，还要考虑函数在端点处的函数值或发展趋势．

任务三　函数最值的应用

1. 某公司试销一种成本为 50 元/件的新产品，规定试销时售价不低于成本，且不高于 80 元/件．经试销调查，发现销售量 y(件)与售价 x(元/件)可近似看作一次函数关系 $y=kx+b$(如图所示)．



(1)根据图象，求一次函数 $y=kx+b$ 的解析式．

(2)设公司获得的利润为 S 元(利润＝销售额－总成本，销售额＝售价×销售量，总成本价＝成本×销售量)．

①试用售价 x 表示利润 S．

②试问售价定为多少时，该公司可获得最大利润？最大利润是多少？此时的销售量是多少？

解：(1)由图象知，当 $x=60$ 时，$y=40$；

当 $x=70$ 时，$y=30$．

代入 $y=kx+b$ 中，得$\begin{cases}40=60k+b,\\30=70k+b,\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=-1,\\b=100.\end{cases}$

所以 $y=-x+100(50\leqslant x\leqslant80)$．

(2)①由题意可知 $S=xy-50y$

$=x(-x+100)-50(-x+100)$

$=-x^2+150x-5\,000$

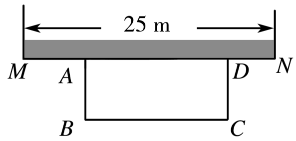
$=-(x-75)^2+625(50\leqslant x\leqslant80)$．

②由①知，当 $x=75$ 时，利润 S 取得最大值 625，所以当售价定为 75 元/件时，可获得最大利润 625 元，此时销售量为 25 件．

2. 如图，某中学准备在校园里利用院墙的一段，用篱笆围成一个矩形花园 $ABCD$．已知院墙 MN 的长为 25 m，篱笆长为 50 m(篱笆全部用完)，设 AB 的长为 x m．

(1)当 AB 的长为多少时，矩形花园的面积为 300 m^2？

(2)若围成的矩形花园的面积为 S m^2，当 x 为何值时，S 有最大值？最大值是多少？



解：(1)因为 $AB=x$ m，所以 $BC=(50-2x)$m.

由题意得，$x(50-2x)=300$，

解得 $x_1=15$，$x_2=10$.

因为 $50-2x\leqslant 25$，所以 $x\geqslant 12.5$，所以 $x=15$，

所以，AB 的长为 15 m 时，矩形花园的面积为 300 m^2.

(2)由题意得，$S=x(50-2x)=-2x^2+50x=-2(x-12.5)^2+312.5$，$12.5\leqslant x<25$，

所以 $x=12.5$ 时，S 取得最大值，最大值为 312.5.

【类题通法】

求解实际应用中的最值问题的步骤

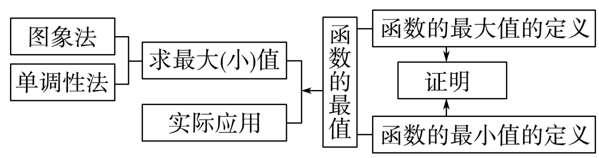
(1)审题：把问题情境译为数学语言，找出问题中的主要关系.

(2)建模：建立函数解析式，把实际问题转化成函数问题.

(3)求解：选择合适的数学方法求出函数的最值.

(4)验证：对结果进行验证，最后将结果应用于现实，作出解释.

提质归纳



课后素养评价(二十一)

基础性·能力运用

1. 函数 $y=\dfrac{1}{x-1}$在[2,3]上的最小值为　(　　)

A.2　　B.$\dfrac{1}{2}$　　C.$\dfrac{1}{3}$　　D.$-\dfrac{1}{2}$

B　**解析**：函数 $y=\dfrac{1}{x-1}$在[2,3]上单调递减，所以当 $x=3$ 时，$y_{\min}=\dfrac{1}{3-1}=\dfrac{1}{2}$.

2. 函数 $f(x)=-2x^2+4x$，$x\in[-1,2]$的值域为　(　　)

A.$[-6,2]$　　B.$[-6,1]$

C.$[0,2]$　　D.$[0,1]$

A　**解析**：函数 $f(x)=-2x^2+4x$ 的图象开口向下，对称轴为 $x=1$，

所以 $f(x)$在$[-1,1]$上单调递增，在$[1,2]$上单调递减，

所以 $f(x)_{\max}=f(1)=2$，$f(x)_{\min}=f(-1)=-6$，

所以函数 $f(x)=-2x^2+4x$，$x\in[-1,2]$的值域为$[-6,2]$.

3. (多选)若函数 $y=ax+1$ 在[1,2]上的最大值与最小值的差为 2，则实数 a 的值可能是　(　　)

A.2　　B.-2

C.1　　D.0

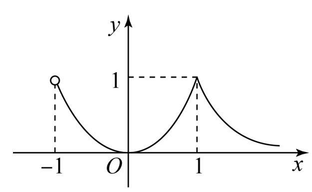
AB　**解析**：由题意知 $a\neq 0$，当 $a>0$ 时，$y=ax+1$ 在[1,2]上单调递增，

有$(2a+1)-(a+1)=2$，解得 $a=2$；当 $a<0$ 时，$y=ax+1$ 在[1,2]上单调递减，

有$(a+1)-(2a+1)=2$，解得 $a=-2$.综上知 $a=\pm 2$.

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,-1<x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{x},x>1,\end{cases}$ 则函数$f(x)$的最大值为______，最小值为________.

1　0　**解析**：作出函数 $f(x)$的图象(如图).



由图象可知，当 $x=1$ 时，$f(x)$取最大值为 $f(1)=1$；当 $x=0$ 时，$f(x)$取最小值 $f(0)=0$.

故 $f(x)$的最大值为 1，最小值为 0.

5. 函数 $y=x^2-2x$，$x\in[0,3]$的值域为________.

$[-1,3]$　**解析**：因为函数 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$，$x\in[0,3]$，所以当 $x=1$ 时，函数取得最小值为 -1，当 $x=3$ 时，函数取得最大值为 3.故函数的值域为$[-1,3]$.

6. 已知函数 $f(x)=\dfrac{3x+7}{x+2}$，$x\in[-1,1]$.

(1)判断 $f(x)$的单调性，并证明；

(2)求 $f(x)$的最大值和最小值.

解：(1)函数 $f(x)=\dfrac{3x+7}{x+2}$在区间$[-1,1]$上单调递减.

证明如下：

设 x_1，x_2 是区间$[-1,1]$上的任意两个实数，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{3x_1+7}{x_1+2}-\dfrac{3x_2+7}{x_2+2}$

$=\dfrac{(3x_1+7)(x_2+2)-(3x_2+7)(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}$

$=\dfrac{x_2-x_1}{(x_1+2)(x_2+2)}$.

因为 $-1\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$,

所以 $x_2-x_1>0,(x_1+2)(x_2+2)>0$,

于是 $f(x_1)-f(x_2)>0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$,

所以函数 $f(x)=\dfrac{3x+7}{x+2}$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调递减.

(2)由(1)知,函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调递减,

所以当 $x=-1$ 时,$f(x)$ 取最大值,$f(-1)=4$;

当 $x=1$ 时,$f(x)$ 取最小值,$f(1)=\dfrac{10}{3}$.

综合性·创新提升

1. 设函数 $f(x)=\dfrac{2x}{x-2}$ 在区间 $[3,4]$ 上的最大值和最小值分别为 M,m,则 $M+m=$　(　　)

A.4　　B.6　　C.10　　D.24

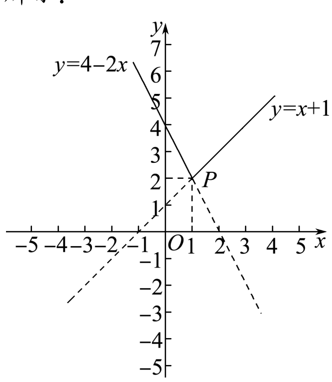
C　**解析**:因为 $f(x)=\dfrac{2(x-2)+4}{x-2}=2+\dfrac{4}{x-2}$,所以 $f(x)$ 在 $[3,4]$ 上单调递减.

所以 $m=f(4)=4,M=f(3)=6$.所以 $M+m=6+4=10$.

2. 规定 $\max\{a,b\}$ 表示取 a,b 中的较大者,例如 $\max\{0.1,-2\}=0.1,\max\{2,2\}=2$.则函数 $f(x)=\max\{x+1,4-2x\}$ 的最小值为　(　　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

B　**解析**:根据定义,通过 $y=x+1$ 和 $y=4-2x$ 的图象作出函数 $f(x)=\max\{x+1,4-2x\}$ 的图象,如图中实线所示.



由 $x+1=4-2x$,解得 $x=1$,此时 $y=1+1=2$.

由图可知,当 $x=1$ 时,$f(x)$ 有最小值 2,即 $f(x)=\max\{x+1,4-2x\}$ 的最小值为 2.

3.(多选)下列关于函数 $f(x)=\sqrt{-x^2+4x}$ 的结论正确的是　(CD)

A.定义域为 $(0,4)$

B.单调递增区间是 $(-\infty,2]$

C.值域为 $[0,2]$

D.单调递减区间是 $[2,4]$

4. 已知函数 $f(x)=x^2-6x+8,x\in[1,a]$,且函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(a)$,则实数 a 的取值范围是________.

$(1,3]$　**解析**:因为函数 $f(x)=x^2-6x+8$ 的图象的对称轴为直线 $x=3$,且在区间 $[1,a]$ 上,$f(x)_{\min}=f(a)$,所以 $a\leqslant 3$.又 $a>1$,所以 $1<a\leqslant 3$.

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-x,0\leqslant x\leqslant 2,\\ \dfrac{2}{x-1},x>2,\end{cases}$ 则函数 $f(x)$ 的最大值为 $\underline{2}$,最小值为 $\underline{-\dfrac{1}{4}}$.

6. 已知函数 $f(x)=-x^2+2x-3$.

(1)求 $f(x)$ 在区间 $[2a-1,2]$ 上的最小值 $g(a)$;

(2)求 $g(a)$ 的最大值.

解:(1) $f(x)=-x^2+2x-3=-(x-1)^2-2$,

$f(2)=-3,f(0)=-3$,

所以,当 $2a-1\leqslant 0$,即 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,$f(x)_{\min}=f(2a-1)=-4a^2+8a-6$;

当 $0<2a-1<2$,即 $\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{2}$ 时,$f(x)_{\min}=f(2)=-3$.

所以 $g(a)=\begin{cases}-4a^2+8a-6,a\leqslant\dfrac{1}{2},\\ -3,\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{2}.\end{cases}$

(2)当 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,$g(a)=-4a^2+8a-6$ 单调递增,

所以 $g(a)\leqslant g\left(\dfrac{1}{2}\right)=-3$;

又当 $\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{2}$ 时,$g(a)=-3$,

所以 $g(a)$ 的最大值为 -3.

3.2.2　奇偶性

第 1 课时　函数的奇偶性

学习任务目标

1. 了解奇偶性的概念，掌握判断函数奇偶性的方法.
2. 了解奇函数、偶函数图象的特征.
3. 会利用函数的奇偶性求函数或参数的值.

问题式预习

知识点一　函数的奇偶性

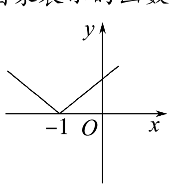
奇偶性	偶函数	奇函数
条件	一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果 $\forall x\in D$，都有 $-x\in D$	
结论	$f(-x)=f(x)$	$f(-x)=-f(x)$
图象特点	关于 y 轴对称	关于原点对称

知识点二　奇函数、偶函数的运算性质

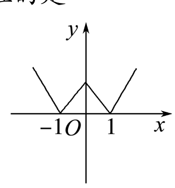
在公共定义域内，有如下结论：
(1)两个奇函数的和是奇函数，两个奇函数的积是偶函数；
(2)两个偶函数的和、积都是偶函数；
(3)一个奇函数、一个偶函数的积是奇函数.

[**微训练**]

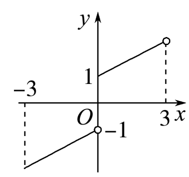
1. 下列图象表示的函数具有奇偶性的是（　　）



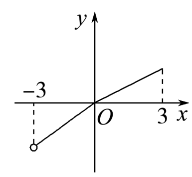
A



B



C



D

B　**解析**：B 选项的图象关于 y 轴对称，是偶函数，其余选项都不具有奇偶性.

2. 若函数 $y=f(x)$，$x\in[-1,a]$ $(a>-1)$ 是奇函数，则 a 等于（　　）

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 无法确定

C　**解析**：因为奇函数的定义域关于原点对称，所以 $a-1=0$，即 $a=1$.

3. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，若 $f(2)=4$，则 $f(-2)=$______.

4　**解析**：根据偶函数的定义，$f(-2)=f(2)=4$.

任务型课堂

任务一　函数奇偶性的判断

1. 已知函数 $f(x)=|x|+1$，则（　　）

A. $f(x)$ 是奇函数
B. $f(x)$ 是偶函数
C. $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数
D. $f(x)$ 是非奇非偶函数

B　**解析**：显然 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $-x\in\mathbf{R}$，且 $f(-x)=|-x|+1=|x|+1=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为偶函数.

2. 已知 $y=f(x)$，$x\in(-a,a)$，$F(x)=f(x)+f(-x)$，则 $F(x)$（　　）

A. 是奇函数
B. 是偶函数
C. 既是奇函数又是偶函数
D. 是非奇非偶函数

B　**解析**：显然 $F(x)$ 的定义域为 $(-a,a)$，关于原点对称，$\forall x\in(-a,a)$，都有 $-x\in(-a,a)$，且 $F(-x)=f(-x)+f(x)=F(x)$. 所以 $F(x)$ 是偶函数.

3.（多选）设函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域都为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，则下列结论中正确的是（　　）

A. $f(x)g(x)$ 是奇函数

B. $|f(x)|g(x)$ 是偶函数

C. $f(x)|g(x)|$ 是偶函数

D. $|f(x)g(x)|$ 是偶函数

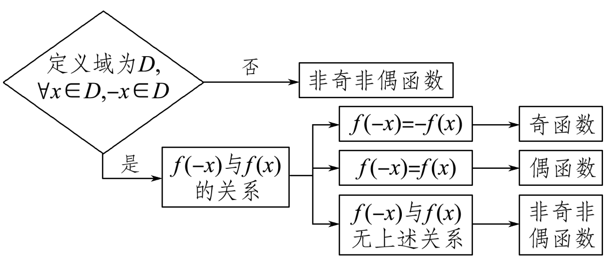
ABD　**解析**：因为 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，所以 $|f(x)|$ 为偶函数，$|g(x)|$ 为偶函数.

再根据两个奇函数的积是偶函数、两个偶函数的积是偶函数、一个奇函数与一个偶函数的积是奇函数，可得 A 项为奇函数，B 项为偶函数，C 项为奇函数，D 项为偶函数.故选 ABD.

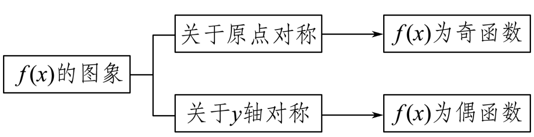
【类题通法】

判断函数奇偶性的方法

(1)定义法：



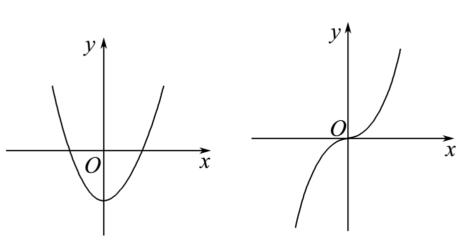
(2)图象法：



任务二　奇函数、偶函数图象的应用

[探究活动]

观察以下两个函数图象的对称性，探究下列问题.



探究 1：奇函数的图象关于原点对称，一定有 $f(0)=0$ 吗？

提示：不一定.若 0 在定义域内，则图象一定过原点，即有 $f(0)=0$，否则图象不过原点.

探究 2：偶函数的图象一定与 y 轴相交吗？

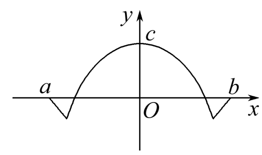
提示：偶函数的图象关于 y 轴对称，但不一定与 y 轴相交，如 $y=\dfrac{1}{|x|}$ 为偶函数，但图象与 y 轴不相交.

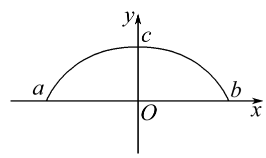
探究 3：图象过原点的单调函数一定是奇函数吗？

提示：不一定.图象过原点的单调函数的图象不一定关于原点对称，所以不一定是奇函数.

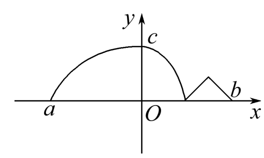
[评价活动]

1.我国著名数学家华罗庚先生曾说："数缺形时少直观，形少数时难入微，数形结合百般好，隔离分家万事休."在数学的学习和研究中，经常用函数的图象来研究函数的性质，也经常用函数的解析式来研究函数图象的特征.若函数 $y=f(|x|)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图象如图，则函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图象可能是（　　）

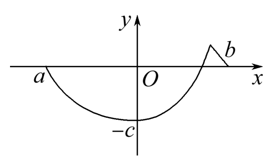




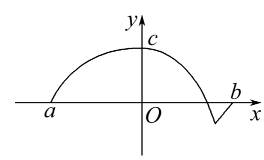
A



B



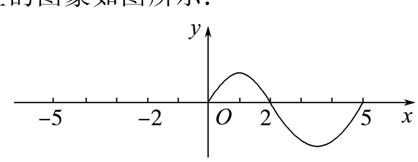
C



D

D　**解析**：函数 $y=f(|x|)$ 是偶函数，所以它的图象是由 $y=f(x)$ 把 $x\geqslant 0$ 的图象保留，再关于 y 轴对称得到的.结合选项可知选项 D 正确.

2.已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-5,5]$，且在区间 $[0,5]$ 上的图象如图所示.

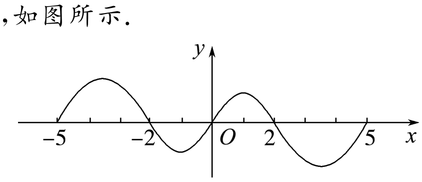


(1)画出 $f(x)$ 在区间 $[-5,0]$ 上的图象；

(2)写出使 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围.

解：(1)因为函数 $f(x)$ 是奇函数，所以 $y=f(x)$ 在 $[-5,5]$ 上的图象关于原点对称.

由 $y=f(x)$ 在 $[0,5]$ 上的图象，可知它在 $[-5,0]$ 上的图象，如图所示.



(2)由图象知，使 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围为 $(-2,0)\cup(2,5)$.

【类题通法】

巧用奇、偶函数的图象解决问题的依据

根据奇、偶函数图象的对称性可以解决诸如求

值、比较大小及解不等式问题.依据为奇函数⇔图象关于原点对称,偶函数⇔图象关于 y 轴对称.

任务三　利用函数的奇偶性求值

1. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且当 $x\leqslant 0$ 时,$f(x)=x^2-\frac{1}{2}x$,则 $f(1)=$　(　　)

A. $-\frac{3}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

A　**解析**:因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $f(1)=-f(-1)=-\frac{3}{2}$.

2. 若 $f(x)=(x+a)(x-4)$ 为偶函数,则实数 $a=$________.

4　**解析**:(方法一)$f(x)=(x+a)(x-4)=x^2+(a-4)x-4a$,$f(-x)=x^2-(a-4)x-4a$,两式恒相等,则 $a-4=0$,即 $a=4$.

(方法二)$f(x)=(x+a)(x-4)=x^2+(a-4)x-4a$,要使函数为偶函数,只需多项式的奇次项系数为 0,即 $a-4=0$.所以 $a=4$.

3. 已知 $f(x)=x^7-ax^5+bx^3+cx+2$.若 $f(-3)=-3$,则 $f(3)=$________.

7　**解析**:令 $g(x)=x^7-ax^5+bx^3+cx$,则 $g(x)$ 是奇函数.所以 $f(-3)=g(-3)+2=-g(3)+2$.又 $f(-3)=-3$,所以 $g(3)=5$.

所以 $f(3)=g(3)+2=5+2=7$.

4. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=x^2$.若对任意的 $x\in[a,a+2]$,不等式 $f(x+a)\geqslant 2f(x)$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是________.

$[\sqrt{2},+\infty)$　**解析**:由题意知 $f(x)=\begin{cases}x^2,x\geqslant 0,\\-x^2,x<0,\end{cases}$

则 $2f(x)=f(\sqrt{2}x)$.

因此,原不等式等价于 $f(x+a)\geqslant f(\sqrt{2}x)$.

易知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,所以 $x+a\geqslant\sqrt{2}x$,即 $a\geqslant(\sqrt{2}-1)x$.又 $x\in[a,a+2]$,所以当 $x=a+2$ 时,$(\sqrt{2}-1)x$ 取得最大值 $(\sqrt{2}-1)(a+2)$.

因此,$a\geqslant(\sqrt{2}-1)(a+2)$,解得 $a\geqslant\sqrt{2}$.故 a 的取值范围是 $[\sqrt{2},+\infty)$.

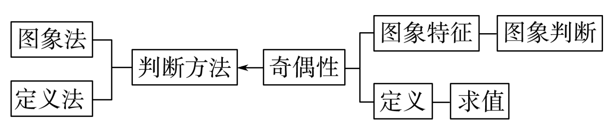
【类题通法】

利用函数奇偶性求值的常见类型

(1)求参数值:若解析式含参数,则根据 $f(-x)=-f(x)$ 或 $f(-x)=f(x)$ 列式,比较系数,利用待定系数法求解;若定义域含参数,则根据定义域特点,利用区间的端点和为 0 求解.

(2)求函数值:利用 $f(-x)=-f(x)$ 或 $f(-x)=f(x)$ 求解,有时需要构造奇函数或偶函数以便于求值.

提质归纳



课后素养评价(二十二)

基础性·能力运用

1. 已知函数 $f(x)=3x^2$,$x\in(-2,2]$,则　(　　)

A. $f(x)$ 是奇函数

B. $f(x)$ 是偶函数

C. $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数

D. $f(x)$ 是非奇非偶函数

D　**解析**:函数的定义域为 $(-2,2]$,$\forall x\in(-2,2]$,$-x\notin(-2,2]$,故此函数既不是奇函数,也不是偶函数.

2. 函数 $f(x)=2x-\frac{1}{x}$ 的图象关于　(　　)

A. y 轴对称

B. 直线 $y=-x$ 对称

C. 直线 $y=x$ 对称

D. 坐标原点对称

D　**解析**:函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,则 $f(-x)=-2x+\frac{1}{x}=-\left(2x-\frac{1}{x}\right)=-f(x)$,所以函数 $f(x)$ 是奇函数.所以函数 $f(x)=2x-\frac{1}{x}$ 的图象关于坐标原点对称.故选 D.

3. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的一个函数,函数 $F(x)=f(x)-f(-x)$,则　(　　)

A. $F(x)$ 是奇函数

B. $F(x)$ 是偶函数

C.$F(x)$既是奇函数又是偶函数

D.$F(x)$是非奇非偶函数

A　**解析**：因为 $F(-x)=f(-x)-f[-(-x)]=f(-x)-f(x)=-[f(x)-f(-x)]=-F(x)$，定义域为 $\mathbf{R}$，所以函数 $F(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数.

4.若函数 $f(x)=ax^2+bx+3a+b$ 是偶函数，定义域为$[a-1,2a]$，则 $a=$________，$b=$________.

$\frac{1}{3}$　0　**解析**：因为 $f(x)$是偶函数，所以 $a-1=-2a$，解得 $a=\frac{1}{3}$.

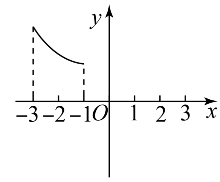
又函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^2+bx+b+1$ 为二次函数，结合偶函数图象的特点，易得 $b=0$.

5.已知函数 $f(x)=ax^5+bx^3+2$，若 $f(2)=7$，则 $f(-2)=$__-3__.

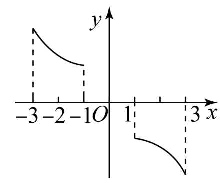
6.已知定义在$[-3,-1]\cup[1,3]$上的函数 $f(x)$是奇函数，其部分图象如图所示.

(1)请在坐标系中补全函数 $f(x)$的图象；

(2)比较 $f(1)$与 $f(3)$的大小.



解：(1)因为 $f(x)$是奇函数，所以其图象关于原点对称，如图所示.



(2)观察图象，知 $f(3)<f(1)$.

综合性·创新提升

1.(2021·全国乙卷)设函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，则下列函数中为奇函数的是　(　　)

A.$f(x-1)-1$　　B.$f(x-1)+1$

C.$f(x+1)-1$　　D.$f(x+1)+1$

B　**解析**：由题意可得 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}=-1+\frac{2}{1+x}$，

对于 A，$f(x-1)-1=\frac{2}{x}-2$ 不是奇函数；

对于 B，$f(x-1)+1=\frac{2}{x}$是奇函数；

对于 C，$f(x+1)-1=\frac{2}{x+2}-2$，不是奇函数；

对于 D，$f(x+1)+1=\frac{2}{x+2}$，不是奇函数.

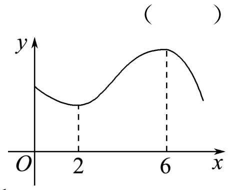
2.如图是偶函数 $y=f(x)$的部分图象，根据图象所给信息，下列结论正确的是　(　　)

A.$f(-2)-f(6)=0$

B.$f(-2)-f(6)<0$

C.$f(-2)+f(6)<0$

D.$f(-2)-f(6)>0$



B　**解析**：由图象可知，$f(2)<f(6)$，又因为 $f(x)$为偶函数，所以 $f(-2)=f(2)$，所以 $f(-2)-f(6)<0$，$f(-2)+f(6)>0$.故选 B.

3.设 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2+1$，则 $f(-2)+f(0)=$________.

-5　**解析**：由题意知 $f(-2)=-f(2)=-(2^2+1)=-5$，$f(0)=0$，所以 $f(-2)+f(0)=-5$.

4.函数 $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2-|x+2|}$ 的定义域为________，$f(x)$为________(填“奇”或“偶”)函数.

$[-2,0)\cup(0,2]$　奇　**解析**：依题意有 $\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\2-|x+2|\neq 0,\end{cases}$ 解得 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 且 $x\neq 0$.

所以 $f(x)$的定义域为$[-2,0)\cup(0,2]$.

因为 $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2-|x+2|}=\frac{\sqrt{4-x^2}}{-x}=-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$，

所以 $f(-x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}=-f(x)$.所以 $f(x)$为奇函数.

5.已知函数 $f(x)=\frac{ax^2+1}{bx+c}$是奇函数，且 $f(1)=3$，$f(2)=5$，求 a,b,c 的值.

解：因为函数 $f(x)=\frac{ax^2+1}{bx+c}$是奇函数，

所以 $f(-x)=-f(x)$. 故 $\frac{a(-x)^2+1}{b(-x)+c}=-\frac{ax^2+1}{bx+c}$，即$\frac{ax^2+1}{-bx+c}=-\frac{ax^2+1}{bx+c}$.所以$-bx+c=-(bx+c)$，即$c=-c$，解得 $c=0$.

所以 $f(x)=\frac{ax^2+1}{bx}$.

而 $f(1)=\frac{a+1}{b}=3$，所以 $a+1=3b$.①

由 $f(2)=5$，即$\frac{4a+1}{2b}=5$，所以 $4a+1=10b$.②

解①②组成的方程组，得$\begin{cases}a=\frac{7}{2},\\b=\frac{3}{2}.\end{cases}$

故 $a=\frac{7}{2}$，$b=\frac{3}{2}$，$c=0$.

第 2 课时　函数的奇偶性的应用

学习任务目标

1.会判断分段函数、抽象函数的奇偶性.

2.掌握用奇偶性求解析式的方法.

3.理解奇偶性对单调性的影响,并能用于比较大小、求最值和解不等式.

任务型课堂

任务一　分段函数、抽象函数的奇偶性

1.已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+1,x>0,\\-\frac{1}{2}x^2-1,x<0,\end{cases}$ 则 (　　)

A.$f(x)$是奇函数

B.$f(x)$是偶函数

C.$f(x)$既是奇函数又是偶函数

D.$f(x)$是非奇非偶函数

A　**解析**:函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,关于原点对称.

当 $x>0$ 时,$-x<0$,则 $f(-x)=-\frac{1}{2}(-x)^2-1=-\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)=-f(x)$;

当 $x<0$ 时,$-x>0$,则 $f(-x)=\frac{1}{2}(-x)^2+1=\frac{1}{2}x^2+1=-\left(-\frac{1}{2}x^2-1\right)=-f(x)$.综上可知,函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+1,x>0,\\-\frac{1}{2}x^2-1,x<0\end{cases}$ 是奇函数.

2.已知函数 $y=f(x)(x\in\mathbf{R})$,若对于任意实数 a,b 都有 $f(a+b)=f(a)+f(b)$,且 $f(x)$不恒为零,则 (　　)

A.$f(x)$是奇函数

B.$f(x)$是偶函数

C.$f(x)$既是奇函数又是偶函数

D.$f(x)$是非奇非偶函数

A　**解析**:令 $a=0$,则 $f(b)=f(0)+f(b)$.所以 $f(0)=0$.

再令 $a=-x,b=x$,则 $f(0)=f(-x)+f(x)$.所以$f(-x)=-f(x)$,且定义域关于原点对称.所以 $f(x)$是奇函数.

3.已知 $f(x)$是奇函数,$g(x)$是偶函数,且$f(-1)+g(1)=2$,$f(1)+g(-1)=4$,则$g(1)=$________.

3　**解析**:由题意知 $f(-1)+g(1)=-f(1)+g(1)=2$,$f(1)+g(-1)=f(1)+g(1)=4$,两式相加,解得 $g(1)=3$.

【类题通法】

1.分段函数奇偶性的判断方法

(1)图象法:画出图象,根据图象的对称性判断.

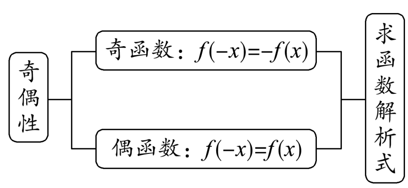
(2)定义法:利用奇、偶函数的定义,分段判断,要注意每段函数的定义域.

2.抽象函数奇偶性的判断方法

赋值法:先根据函数的结构特点赋值,再利用奇、偶函数的定义判断.

任务二　利用奇偶性求解析式

[**探究活动**]



探究 1:已知 $x\in(m,+\infty)$,则$-x\in$<u>$(-\infty,-m)$</u>.

探究 2:我们已经学会判断分段函数的奇偶性.如果已知分段函数的奇偶性和某段上的解析式,如何求分段函数在整个定义域上的解析式呢?

提示:略

[**评价活动**]

1.已知函数 $y=f(x)$的图象关于原点对称,且当 $x>0$ 时,$f(x)=x^2-2x+3$.试求 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上的解析式.

解:因为函数 $f(x)$的图象关于原点对称,

所以 $f(x)$为奇函数,则 $f(0)=0$.设 $x<0$,则$-x>0$.因为 $x>0$ 时,$f(x)=x^2-2x+3$,所以 $f(x)=-f(-x)=-(x^2+2x+3)=-x^2-2x-3$.

所以 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3,x>0,\\0,x=0,\\-x^2-2x-3,x<0.\end{cases}$

2. 设 $f(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是奇函数，且 $f(x)+g(x)=\dfrac{1}{x-1}$，求函数 $f(x)$，$g(x)$ 的解析式.

解：因为 $f(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是奇函数，

所以 $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=-g(x)$.

由 $f(x)+g(x)=\dfrac{1}{x-1}$①，

用 $-x$ 代替 x，

得 $f(-x)+g(-x)=\dfrac{1}{-x-1}$，

所以 $f(x)-g(x)=\dfrac{1}{-x-1}$②.

联立①②解得 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$，$g(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$.

【类题通法】

利用函数奇偶性求解析式的方法

(1)“求谁设谁”，即在哪个区间上求解析式，就应在哪个区间上设自变量 x；

(2)利用函数在已知区间上的解析式，并结合 $f(x)$ 的奇偶性求出 $-f(x)$ 或 $f(-x)$，从而得出 $f(x)$ 在整个定义域上的解析式.

提醒：若函数 $f(x)$ 的定义域内含 0 且为奇函数，则必有 $f(0)=0$；若为偶函数，则未必有 $f(0)=0$.

任务三　函数单调性与奇偶性的应用

1. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，$f(2)=0$.若 $f(x-1)>0$，则 x 的取值范围是________.

$(-1,3)$　**解析**：因为 $f(2)=0$，

$f(x-1)>0$，所以 $f(x-1)>f(2)$.

又因为 $f(x)$ 是偶函数，且在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(|x-1|)>f(2)$，所以 $|x-1|<2$，

所以 $-2<x-1<2$，

所以 $-1<x<3$，所以 $x\in(-1,3)$.

2. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2-4x$，那么不等式 $f(x+2)<5$ 的解集是________.

$\{x\mid -7<x<3\}$　**解析**：因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(|x+2|)=f(x+2)$，所以 $f(x+2)<5$ 可化为 $f(|x+2|)<5$，即 $|x+2|^2-4|x+2|<5$，

即 $(|x+2|+1)(|x+2|-5)<0$，

所以 $|x+2|<5$，解得 $-7<x<3$，

所以不等式 $f(x+2)<5$ 的解集是 $\{x\mid -7<x<3\}$.

3. 已知奇函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，解不等式 $f(x-1)+f(2x+3)>0$.

解：因为 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减且为奇函数，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x-1)+f(2x+3)>0\Leftrightarrow f(x-1)>-f(2x+3)=f(-2x-3)\Leftrightarrow x-1<-2x-3$，

解得 $x<-\dfrac{2}{3}$，

所以原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x<-\dfrac{2}{3}\right\}$.

【类题通法】

利用奇偶性、单调性解不等式的方法

(1)若 $f(x)$ 为奇函数，则在连续的区间上，由 $f(a)$，$f(b)$ 的大小关系，利用单调性可直接得到关于 a，b 的大小关系；

(2)若 $f(x)$ 为偶函数，则在连续的区间上，由 $f(a)$，$f(b)$ 的大小关系，可得出 $|a|$，$|b|$ 的大小关系.

注意：解不等式不能忽视定义域，解出的自变量的取值范围要与定义域求交集.

提质归纳

- 奇偶性的应用
  - 求值
    - 求函数值
    - 求参数的值
  - 求函数解析式
  - 综合应用
    - 比较大小
    - 解不等式

课后素养评价(二十三)

基础性·能力运用

1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x, x<0,\\ x-x^2, x>0,\end{cases}$ 则　　(　　)

A. $f(x)$ 是奇函数

B. $f(x)$ 是偶函数

C. $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数

D. $f(x)$ 是非奇非偶函数

A　**解析**：显然函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称.

当 $x>0$ 时，$-x<0$，$f(-x)=x^2-x=-(x-x^2)=-f(x)$；

当 $x<0$ 时，$-x>0$，$f(-x)=-x-x^2=-(x^2+x)=-f(x)$.

所以 $f(-x)=-f(x)$.所以函数 $f(x)$ 为奇函数.

2.下列函数中,既是偶函数又在$(0,+\infty)$上单调递增的是 ( )

A.$y=x^3$　　B.$y=|x|+1$

C.$y=-x^2+1$　　D.$y=x-\frac{1}{x}$

B **解析**:因为$y=x^3$在定义域**R**上是奇函数,故A不符合;$y=-x^2+1$在定义域**R**上是偶函数,但在$(0,+\infty)$上是减函数,故C不符合;$y=x-\frac{1}{x}$是奇函数,在$(0,+\infty)$上是增函数,故D不符合;B中$y=|x|+1$是偶函数,且在$(0,+\infty)$上是增函数.

3.(多选)下列函数中,既是奇函数又是增函数的是 ( )

A.$y=2x$　　B.$y=-x^2$

C.$y=\frac{1}{x}$　　D.$y=x|x|$

AD **解析**:函数$y=2x$既是奇函数又是增函数,函数$y=-x^2$是偶函数,函数$y=\frac{1}{x}$不是增函数,函数$y=x|x|=\begin{cases}x^2,x\geqslant0,\\-x^2,x<0\end{cases}$是奇函数,且在**R**上单调递增.故选AD.

4.(多选)已知函数$f(x)$是定义在**R**上的奇函数,则下列说法正确的有 ( )

A.$f(0)=0$

B.若$f(x)$在$(0,+\infty)$上有最小值-3,则$f(x)$在$(-\infty,0)$上有最大值3

C.若$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减,则$f(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递增

D.$f(-1)=f(1)$

AB **解析**:对于A,因为$f(x)$是定义在**R**上的奇函数,所以$f(-x)=-f(x)$,所以$f(-0)=-f(0)$,即$f(0)=0$,故A正确;对于B,若$f(x)$在$(0,+\infty)$上有最小值-3,即当$x>0$时,$f(x)\geqslant-3$,所以当$x<0$时,$-x>0$,所以$f(-x)\geqslant-3$,因为$f(x)$为奇函数,所以$f(x)=-f(-x)\leqslant-(-3)=3$,即$f(x)$在$(-\infty,0)$上有最大值3,故B正确;对于C,根据奇函数在对称区域内的单调性一致,可知若$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减,则$f(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递减,故C错误;对于D,$f(-1)=-f(1)$,故D错误.

5.已知函数$f(x)$是定义在**R**上的奇函数,当$x\in(-\infty,0)$时,$f(x)=2x^3+x^2$,则$f(2)=$________.

12 **解析**:因为当$x\in(-\infty,0)$时,$f(x)=2x^3+x^2$,

所以$f(-2)=2\times(-2)^3+(-2)^2=-16+4=-12$.

又因为$f(x)$是定义在**R**上的奇函数,

所以$f(-2)=-f(2)=-12$,所以$f(2)=12$.

6.已知$f(x)$,$g(x)$均为**R**上的奇函数,且$F(x)=af(x)+bg(x)+2$在区间$(0,+\infty)$上的最大值为8,则$F(x)$在区间$(-\infty,0)$上的最小值为$\underline{-4}$.

7.已知函数$y=f(x)(x\in\mathbf{R})$,若对任意实数x_1,x_2,都有$f(x_1+x_2)+f(x_1-x_2)=2f(x_1)\cdot f(x_2)$,求证:$f(x)$为偶函数.

证明:令$x_1=0,x_2=x$,得$f(x)+f(-x)=2f(0)\cdot f(x)$①;

令$x_1=x,x_2=0$,得$f(x)+f(x)=2f(x)\cdot f(0)$②.

由①②,得$f(-x)=f(x)$,且定义域为**R**,所以函数$f(x)$为偶函数.

综合性·创新提升

1.若奇函数$f(x)$在$(-\infty,0)$上的解析式为$f(x)=x(1+x)$,则$f(x)$在$(0,+\infty)$上有 ( )

A.最大值$-\frac{1}{4}$　　B.最大值$\frac{1}{4}$

C.最小值$-\frac{1}{4}$　　D.最小值$\frac{1}{4}$

B **解析**:当$x>0$时,$-x<0$,

所以$f(-x)=-x(1-x)$.又$f(-x)=-f(x)$,

所以$f(x)=x(1-x)=-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$,

所以$f(x)$有最大值$\frac{1}{4}$.

2.设$f(x)$是**R**上的偶函数,且在$(0,+\infty)$上单调递减.若$x_1<0$且$x_1+x_2>0$,则 ( )

A.$f(-x_1)>f(-x_2)$

B.$f(-x_1)=f(-x_2)$

C.$f(-x_1)<f(-x_2)$

D.$f(-x_1)$与$f(-x_2)$的大小关系不确定

A **解析**:因为$x_2>-x_1>0$,$f(x)$是**R**上的偶函数,所以$f(-x_2)=f(x_2)$.

又$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,

所以$f(-x_2)=f(x_2)<f(-x_1)$.

3.已知偶函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增,则满足$f(2x-1)<f\left(\frac{1}{3}\right)$的$x$的取值范围为( )

A.$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$　　B.$\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

C.$\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$　　D.$\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$

A　**解析**:因为 $f(x)$ 为偶函数,且在$[0,+\infty)$上单调递增,所以不等式 $f(2x-1)<f\left(\frac{1}{3}\right)$,即$-\frac{1}{3}<2x-1<\frac{1}{3}$,解得$\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$.

4.设 $f(x)$为偶函数,且在区间$(-\infty,0)$上单调递增,$f(-2)=0$,则 $xf(x)<0$ 的解集为　(　　)

A.$(-1,0)\cup(2,+\infty)$

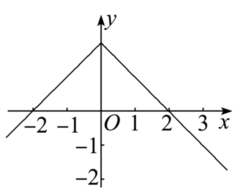
B.$(-\infty,-2)\cup(0,2)$

C.$(-2,0)\cup(2,+\infty)$

D.$(-2,0)\cup(0,2)$

C　**解析**:根据题意,偶函数 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增,且 $f(-2)=0$,

则函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,且 $f(-2)=f(2)=0$,作出函数 $f(x)$的草图如图所示.



又由 $xf(x)<0$,

可得$\begin{cases}x<0,\\f(x)>0,\end{cases}$或$\begin{cases}x>0,\\f(x)<0.\end{cases}$

由图可得$-2<x<0$ 或 $x>2$,

即不等式的解集为$(-2,0)\cup(2,+\infty)$.

5.已知 $y=f(x)$是定义在 **R** 上的奇函数,当 $x\geqslant0$时,$f(x)=x^2-2x$,则 $f(x)$在 **R** 上的解析式为____________.

$f(x)=\begin{cases}x^2-2x,x\geqslant0,\\-x^2-2x,x<0\end{cases}$　**解析**:当 $x<0$ 时,$-x>0$,所以 $f(-x)=x^2+2x$.

又因为 $f(x)$是奇函数,所以 $f(x)=-f(-x)=-x^2-2x$.所以 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x,x\geqslant0,\\-x^2-2x,x<0.\end{cases}$

6.已知定义 **R** 上的函数 $f(x)$,对一切 x,y 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

(1)求证:$f(x)$是奇函数;

(2)若 $f(-3)=a$,试用 a 表示 $f(12)$.

(1)**证明**:由已知 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,

令 $y=-x$,得 $f(0)=f(x)+f(-x)$.

令 $x=y=0$,得 $f(0)=2f(0)$,所以 $f(0)=0$.

所以 $f(x)+f(-x)=0$,即 $f(-x)=-f(x)$,

故 $f(x)$是奇函数.

(2)**解**:因为 $f(x)$为奇函数,

所以 $f(-3)=-f(3)=a$,

所以 $f(3)=-a$.

又 $f(12)=f(6)+f(6)=2f(3)+2f(3)=4f(3)$,

所以 $f(12)=-4a$.

7.已知函数 $f(x)=x^2+\frac{a}{2x}(x\neq0,a\in\mathbf{R})$.

(1)判断函数 $f(x)$的奇偶性,并说明理由;

(2)若函数 $f(x)$在$[1,+\infty)$上是增函数,求实数 a 的取值范围.

解:(1)当 $a=0$ 时,$f(x)=x^2$,

对任意 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,

有 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$,

所以 $f(x)$为偶函数.

当 $a\neq0$ 时,$f(x)=x^2+\frac{a}{2x}(x\neq0)$,

取 $x=\pm1$,得 $f(-1)+f(1)=2\neq0$,

$f(-1)-f(1)=-a\neq0$,

所以 $f(-1)\neq-f(1)$,$f(-1)\neq f(1)$.

所以函数 $f(x)$是非奇非偶函数.

综上所述,当 $a=0$ 时,函数 $f(x)$为偶函数;当 $a\neq0$ 时,函数 $f(x)$为非奇非偶函数.

(2)设 $1\leqslant x_1<x_2$,

$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2+\frac{a}{2x_1}-x_2^2-\frac{a}{2x_2}$

$=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\left[x_1x_2(x_1+x_2)-\frac{a}{2}\right]$.

要使函数 $f(x)$在$[1,+\infty)$上为增函数,

则 $f(x_1)-f(x_2)<0$ 恒成立.

因为 $x_1-x_2<0$,$x_1x_2>1$,

所以 $x_1x_2(x_1+x_2)-\frac{a}{2}>0$,

即 $a<2x_1x_2(x_1+x_2)$恒成立.

又因为 $x_1+x_2>2$,所以 $2x_1x_2(x_1+x_2)>4$,

所以 a 的取值范围是$(-\infty,4]$.

3.3　幂函数

学习任务目标

1.了解幂函数的概念,会求幂函数的解析式.

2.结合幂函数 $y=x$,$y=x^2$,$y=x^3$,$y=\dfrac{1}{x}$,$y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图象,掌握它们的性质.

3.能利用幂函数的性质解决简单的问题.

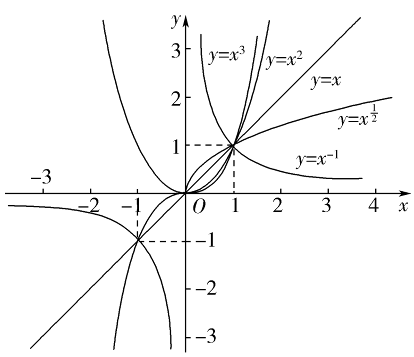
问题式预习

知识点一　幂函数的概念

一般地,函数 $\underline{y=x^{\alpha}}$ 叫做幂函数,其中 $\underline{x}$ 是自变量,$\underline{\alpha}$ 是常数.

知识点二　幂函数的图象与性质

1.五个幂函数的图象



2.五个幂函数的性质

函数	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=x^{-1}$
定义域	**R**	**R**	**R**	$[0,+\infty)$	$\{x\mid x\neq 0\}$
值域	**R**	$\underline{[0,+\infty)}$	**R**	$\underline{[0,+\infty)}$	$\{y\mid y\neq 0\}$
奇偶性	奇	偶	奇	非奇非偶	奇
单调性	增	在 $[0,+\infty)$ 上增,在 $(-\infty,0]$ 上减	增	增	在 $(0,+\infty)$ 上减,在 $(-\infty,0)$ 上减

[微训练]

1.下列函数中不是幂函数的是　　(　　)

A.$y=\sqrt{x}$

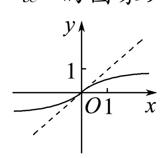
B.$y=x^3$

C.$y=3x$

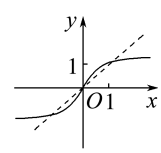
D.$y=x^{-1}$

C　**解析**:只有 $y=3x$ 不符合幂函数 $y=x^{\alpha}$ 的形式.故选 C.

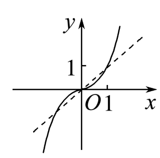
2.函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的图象大致是　　(　　)



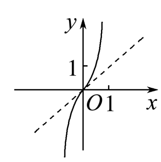
A



B



C



D

B　**解析**:当 $0<x<1$ 时,$x^{\frac{1}{3}}>x$;当 $x>1$ 时,$x^{\frac{1}{3}}<x$,故选 B.

3.已知幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 的图象过点(2,4),则 $f(4)=$________.

16　**解析**:由 $f(2)=4$ 可知 $2^{\alpha}=4$,即 $\alpha=2$.所以幂函数 $f(x)=x^2$.所以 $f(4)=4^2=16$.

任务型课堂

任务一　幂函数

1.下列函数为幂函数的是　　(　　)

A.$y=2x^4$　　B.$y=2x^3-1$

C.$y=\dfrac{2}{x}$　　D.$y=x^2$

D　**解析**:$y=2x^4$ 中,x^4 的系数为 2,故 A 不是幂函数;$y=2x^3-1$ 不是 $y=x^{\alpha}$ 的形式,故 B 不是幂函数;$y=\dfrac{2}{x}=2x^{-1}$,x^{-1} 的系数为 2,故 C 不是幂函数;只有 D 中的函数 $y=x^2$ 是幂函数.

2.已知 $f(x)=(m+1)x^{m^2+2}$ 是幂函数,则 $m=$　　(　　)

A.2　　B.1　　C.3　　D.0

D　**解析**:由题意可知 $m+1=1$,即 $m=0$.

3. 若幂函数的图象过点$(2,\sqrt{2})$，则该幂函数的解析式是　　(　　)

A. $y=x^{-1}$　　　　B. $y=x^{\frac{1}{2}}$

C. $y=x^{2}$　　　　D. $y=x^{3}$

B　**解析**：设$f(x)=x^{\alpha}$，则$2^{\alpha}=\sqrt{2}$. 所以$\alpha=\frac{1}{2}$.

所以$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$. 故选B.

【类题通法】

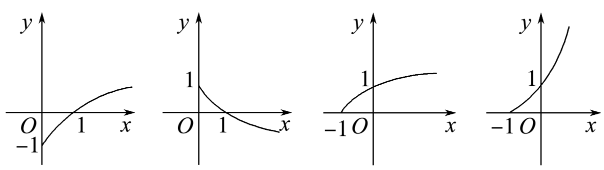
幂函数的判断及应用

(1)判断一个函数是否为幂函数的依据是该函数是否为$y=x^{\alpha}$(α为常数)的形式，需满足：①指数为常数，②底数为自变量，③x^{α}的系数为1.形如$y=(3x)^{\alpha}$，$y=2x^{\alpha}$，$y=x^{\alpha}+5$，…的函数都不是幂函数.

(2)若一个函数为幂函数，则该函数也必具有$y=x^{\alpha}$(α为常数)这一形式.

任务二　幂函数的图象及应用

1. 函数$y=x^{\frac{1}{2}}-1$的图象关于x轴对称的图象大致是　　(　　)



A　　　　B　　　　C　　　　D

B　**解析**：$y=x^{\frac{1}{2}}$的图象位于第一象限且为增函数，所以函数图象是上升的，函数$y=x^{\frac{1}{2}}-1$的图象可看作由$y=x^{\frac{1}{2}}$的图象向下平移1个单位长度得到的(如选项A中的图所示)，将$y=x^{\frac{1}{2}}-1$的图象关于x轴对称后即为选项B.

2. 当$\alpha\in\left\{-1,\frac{1}{2},1,3\right\}$时，幂函数$y=x^{\alpha}$的图象不可能经过第________象限.

二、四　**解析**：幂函数$y=x^{-1}$，$y=x$，$y=x^{3}$的图象分布在第一、三象限，$y=x^{\frac{1}{2}}$的图象分布在第一象限.

所以幂函数$y=x^{\alpha}\left(\alpha=-1,\frac{1}{2},1,3\right)$的图象不可能经过第二、四象限.

3. 已知点$(\sqrt{2},2)$与点$\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$分别在幂函数$f(x)$，$g(x)$的图象上，当$x$为何值时，有：

(1)$f(x)>g(x)$？

(2)$f(x)=g(x)$？

(3)$f(x)<g(x)$？

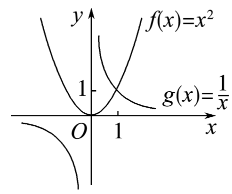
解：设$f(x)=x^{\alpha}$，$g(x)=x^{\beta}$.

因为$(\sqrt{2})^{\alpha}=2$，$(-2)^{\beta}=-\frac{1}{2}$，

所以$\alpha=2$，$\beta=-1$.

所以$f(x)=x^{2}$，$g(x)=x^{-1}$.

分别作出它们的图象，如图.



(1)当$x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$时，$f(x)>g(x)$.

(2)当$x=1$时，$f(x)=g(x)$.

(3)当$x\in(0,1)$时，$f(x)<g(x)$.

【类题通法】

解决幂函数图象问题应掌握的两个方法

(1)依据图象高低可判断指数大小，相关结论为：在$(0,1)$上，指数越大，幂函数图象越靠近x轴；在$(1,+\infty)$上，指数越大，幂函数图象越远离x轴.

(2)依据图象确定指数α与0，1的大小关系时，一般根据幂函数在第一象限内的图象来判断.

任务三　幂函数性质的应用

[探究活动]

探究1：幂函数$y=x^{\alpha}$在$(0,+\infty)$上的单调性与α有什么关系？

提示：当$\alpha>0$时，幂函数$y=x^{\alpha}$在$(0,+\infty)$上单调递增；当$\alpha<0$时，幂函数$y=x^{\alpha}$在$(0,+\infty)$上单调递减.

探究2：已知幂函数$y=x^{\alpha}$，令$\alpha=\frac{n}{m}$(其中$m\in\mathbf{N}^{*}$，$n\in\mathbf{Z}$，且m，n互质)，则n，m的取值是如何影响函数的奇偶性的？

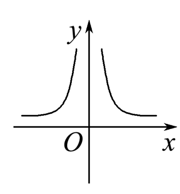
提示：①当m为奇数，n为偶数时，$f(x)$为偶函数，其图象关于y轴对称；

②当m，n都为奇数时，$f(x)$为奇函数，其图象关于原点对称；

③当m为偶数，n为奇数时，$f(x)$为非奇非偶函数，其图象只能在第一象限.

[评价活动]

1. 已知幂函数$y=x^{\frac{p}{q}}$($p,q\in\mathbf{Z}$，$q\neq0$且p，q互质)的图象关于y轴对称，如图所示，则　　(　　)



A.p,q 均为奇数，且$\dfrac{p}{q}>0$

B.q 为偶数，p 为奇数，且$\dfrac{p}{q}<0$

C.q 为奇数，p 为偶数，且$\dfrac{p}{q}>0$

D.q 为奇数，p 为偶数，且$\dfrac{p}{q}<0$

D　**解析**：因为函数 $y=x^{\frac{p}{q}}$ 的图象关于 y 轴对称，于是得函数 $y=x^{\frac{p}{q}}$ 为偶函数，即 p 为偶数.又函数 $y=x^{\frac{p}{q}}$ 的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且在$(0,+\infty)$上单调递减，则有$\dfrac{p}{q}<0$.又因 p,q 互质，则 q 为奇数，所以只有选项 D 正确.

2.幂函数 $f(x)=(m^2+5m-5)x^{m^2-3m}(m\in\mathbf{Z})$是偶函数，且在$(0,+\infty)$上单调递减，则 m 的值为　(　　)

A.-6　　B.1

C.6　　D.1 或-6

B　**解析**：因为幂函数 $f(x)=(m^2+5m-5)x^{m^2-3m}(m\in\mathbf{Z})$是偶函数，且在$(0,+\infty)$上单调递减，

所以$\begin{cases}m^2+5m-5=1,\\m^2-3m<0,\end{cases}$且 m^2-3m 为偶数，所以 $m=1$.

当 $m=1$ 时，$m^2-3m=-2$ 满足条件.

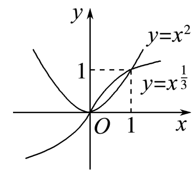
3.已知幂函数 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$.若 $f(10-2a)<f(a+1)$，则 a 的取值范围是________.

$(3,5]$　**解析**：$f(x)=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}(x\geqslant0)$，易知 $f(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数.

又 $f(10-2a)<f(a+1)$，所以$\begin{cases}a+1\geqslant0,\\10-2a\geqslant0,\\a+1>10-2a,\end{cases}$解得$\begin{cases}a\geqslant-1,\\a\leqslant5,\\a>3,\end{cases}$所以 $3<a\leqslant5$.

4.已知 $x^2>x^{\frac{1}{3}}$，则 x 的取值范围是________.

$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$　**解析**：作出函数 $y=x^2$ 和 $y=x^{\frac{1}{3}}$的图象(如图所示)，易得 $x<0$ 或 $x>1$.



5.(1)比较 $2.3^{-0.2}$和 $2.2^{-0.2}$的大小.

(2)比较 $1.2^{\frac{1}{2}},0.9^{-\frac{1}{2}},\sqrt{1.1}$的大小.

解：(1)因为函数 $f(x)=x^{-0.2}$在$(0,+\infty)$上单调递减，所以 $2.3^{-0.2}<2.2^{-0.2}$.

(2)$0.9^{-\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{10}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$，$\sqrt{1.1}=1.1^{\frac{1}{2}}$.

因为 $1.2>\dfrac{10}{9}>1.1$，且 $y=x^{\frac{1}{2}}$在$[0,+\infty)$上单调递增，

所以 $1.2^{\frac{1}{2}}>\left(\dfrac{10}{9}\right)^{\frac{1}{2}}>1.1^{\frac{1}{2}}$，即 $1.2^{\frac{1}{2}}>0.9^{-\frac{1}{2}}>\sqrt{1.1}$.

【类题通法】

比较幂函数值的大小的方法

(1)比较幂函数值的大小，一般先构造幂函数并明确其单调性，然后由单调性判断值的大小.当不便于利用单调性时，可先分别与 0 和 1 进行比较，这种方法常称为“搭桥法”.

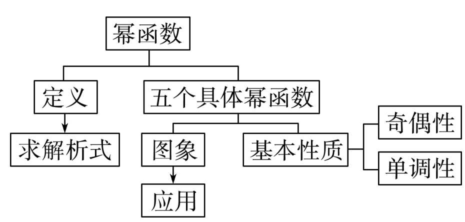
(2)利用单调性比较大小的一般步骤：

①构造幂函数；

②比较底数的大小；

③由单调性确定幂函数值的大小.

提质归纳



课后素养评价(二十四)

基础性·能力运用

1.在函数 $y=\dfrac{1}{x^2}$，$y=2x^2$，$y=x^2+x$，$y=1$ 中，幂函数的个数为　(　　)

A.0　　B.1

C.2　　D.3

B　**解析**：$y=\dfrac{1}{x^2}=x^{-2}$，是幂函数；$y=2x^2$ 不是幂函数；

$y=x^2+x$ 是两项和的形式，不是幂函数；

$y=1=x^0(x\neq0)$，可以看出，常函数 $y=1$ 的图象

比幂函数 $y=x^0$ 的图象多了一个点(0,1)，所以常函数 $y=1$ 不是幂函数.

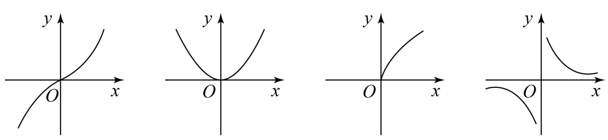
2. 已知函数 $f(x)=(a^2-a-1)x^{\frac{1}{a-2}}$ 为幂函数，则实数 a 的值为　（　　）

A. -1 或 2　　B. -2 或 1

C. -1　　D. 1

C　**解析**：因为 $f(x)=(a^2-a-1)x^{\frac{1}{a-2}}$ 为幂函数，所以 $a^2-a-1=1$，即 $a=2$ 或 -1. 又 $a-2\neq0$，所以 $a=-1$.

3. 下面给出 4 个幂函数的图象，则图象与函数的大致对应关系是　（　　）



①　②　③　④

A. ①$y=x^{\frac{1}{3}}$，②$y=x^2$，③$y=x^{\frac{1}{2}}$，④$y=x^{-1}$

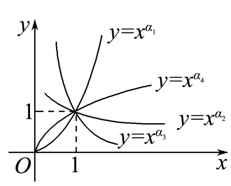
B. ①$y=x^3$，②$y=x^2$，③$y=x^{\frac{1}{2}}$，④$y=x^{-1}$

C. ①$y=x^2$，②$y=x^3$，③$y=x^{\frac{1}{2}}$，④$y=x^{-1}$

D. ①$y=x^3$，②$y=x^{\frac{1}{2}}$，③$y=x^2$，④$y=x^{-1}$

B　**解析**：$y=x^3$ 的定义域为 **R**，且为奇函数，应为图①；$y=x^2$ 的图象为开口向上的抛物线且顶点为原点，应为图②. 同理可得出选项 B 正确.

4. 如图是幂函数 $y=x^{\alpha_1}$，y^{α_2}，$y=x^{\alpha_3}$，$y=x^{\alpha_4}$ 在第一象限的图象，则 $0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,1$ 的大小关系为　（　　）



A. $\alpha_1<\alpha_3<0<\alpha_4<\alpha_2<1$

B. $0<\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\alpha_4<1$

C. $\alpha_2<\alpha_4<0<\alpha_3<1<\alpha_1$

D. $\alpha_3<\alpha_2<0<\alpha_4<1<\alpha_1$

D　**解析**：由题图知取 $x=2$ 得 $0<2^{\alpha_3}<2^{\alpha_2}<1<2^{\alpha_4}<2^{\alpha_1}$，所以 $\alpha_3<\alpha_2<0<\alpha_4<\alpha_1$. 又 $\alpha_1>1$，$0<\alpha_4<1$，所以 $\alpha_3<\alpha_2<0<\alpha_4<1<\alpha_1$.

5.（多选）设 $\alpha\in\left\{-1,\frac{1}{2},1,3\right\}$，则使函数 $y=x^\alpha$ 的定义域是 **R**，且为奇函数的 α 的值可以是　（　　）

A. -1　　B. $\frac{1}{2}$

C. 1　　D. 3

CD　**解析**：当 $\alpha=-1$ 时，$y=x^{-1}$ 的定义域是 $\{x|x\neq0\}$，且为奇函数；当 $\alpha=1$ 时，函数 $y=x$ 的定义域是 **R**，且为奇函数；当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时，函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域是 $\{x|x\geqslant0\}$，且为非奇非偶函数；当 $\alpha=3$ 时，函数 $y=x^3$ 的定义域是 **R**，且为奇函数. 故选 CD.

6. 写出一个同时具有下列三个性质的函数：$f(x)=$ x^2（答案不唯一）.

①$f(x)$ 为幂函数；

②$f(x)$ 为偶函数；

③$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减.

7. 已知幂函数 $y=f(x)$ 的图象经过点 $\left(2,\frac{1}{8}\right)$.

(1) 试求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性并写出函数的单调区间.

解：(1) 由题意，得 $f(2)=2^\alpha=\frac{1}{8}$，即 $\alpha=-3$.

故函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=x^{-3}$.

(2) 因为 $f(x)=x^{-3}$，所以要使函数 $f(x)$ 有意义，则 $x\neq0$，即定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

因为 $f(-x)=(-x)^{-3}=-x^{-3}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数.

当 $x>0$ 时，根据幂函数的性质可知 $f(x)=x^{-3}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也单调递减.

故函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$，无单调递增区间.

综合性·创新提升

1. 已知幂函数 $f(x)=k\cdot x^\alpha(k\in\mathbf{R},\alpha\in\mathbf{R})$ 的图象经过点 $\left(4,\frac{1}{2}\right)$，则 $k+\alpha=$　（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1

C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

A　**解析**：幂函数 $f(x)=k\cdot x^\alpha(k\in\mathbf{R},\alpha\in\mathbf{R})$ 的图象经过点 $\left(4,\frac{1}{2}\right)$，所以 $\begin{cases}k=1,\\4^\alpha=\frac{1}{2},\end{cases}$

解得 $k=1$，$\alpha=-\frac{1}{2}$，所以 $k+\alpha=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

2. 幂函数 $f(x)=x^{m^2+m-2}(0\leqslant m\leqslant3,m\in\mathbf{Z})$ 的图象

关于 y 轴对称，且 $f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数，则 m 的值为　(　　)

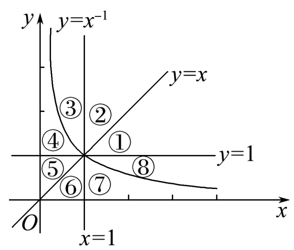
A.0　　B.2

C.3　　D.2 或 3

D　**解析**：由题意，可得 $m^2+m-2>0$，且 m^2+m-2 为偶数，

因为 $0\leqslant m\leqslant 3$，$m\in\mathbf{Z}$，所以 $m=2$ 或 3.

3. 幂函数 $y=x^{-1}(x>0)$的图象及直线 $y=x$，$y=1$，$x=1$ 将平面直角坐标系的第一象限分成八个"卦限"：①，②，③，④，⑤，⑥，⑦，⑧(如图所示)，则幂函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图象经过的"卦限"是　(　　)



A.①，⑦　　B.④，⑧

C.③，⑦　　D.①，⑤

D　**解析**：取 $x=\frac{1}{2}$，得 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，故经过第⑤卦限；

再取 $x=2$，得 $y=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\in(1,2)$，故经过第①卦限.

4. 当 $0<x<1$ 时，$f(x)=x^2$，$g(x)=x^{\frac{1}{2}}$，$h(x)=x^{-2}$ 的大小关系是　(D)

A.$h(x)<g(x)<f(x)$

B.$h(x)<f(x)<g(x)$

C.$g(x)<h(x)<f(x)$

D.$f(x)<g(x)<h(x)$

5. 已知幂函数 $f(x)$的图象过点$(9,3)$，则 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ $=$________，函数 $f\left(\frac{1}{x}-1\right)$的定义域为________.

$\frac{\sqrt{2}}{2}$　$(0,1]$　**解析**：设 $f(x)=x^{\alpha}$.因为 $f(9)=3$，即 $9^{\alpha}=3$，所以 $\alpha=\frac{1}{2}$.故 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$.

所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

令 $\frac{1}{x}-1\geqslant 0$，解得 $0<x\leqslant 1$.故 $f\left(\frac{1}{x}-1\right)$的定义域为$(0,1]$.

6. 已知幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 的图象过点$\left(2,\frac{1}{2}\right)$，函数 $g(x)=(x-2)f(x)\left(\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right)$，则函数 $g(x)$的最大值为________，最小值为________.

-1　-3　**解析**：因为 $f(x)$的图象过点$\left(2,\frac{1}{2}\right)$，则有 $\frac{1}{2}=2^{\alpha}$.

所以 $\alpha=-1$.故 $f(x)=x^{-1}$.

所以 $g(x)=(x-2)\cdot x^{-1}=\frac{x-2}{x}=1-\frac{2}{x}$.

又 $g(x)=1-\frac{2}{x}$ 在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上是单调递增的，

所以 $g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{2}\right)=-3$，$g(x)_{\max}=g(1)=-1$.

7. 已知函数 $f(x)=(m^2+2m)\cdot x^{m^2+m-1}$，$m$ 为何值时，函数 $f(x)$分别满足下列条件？

(1)$f(x)$是正比例函数.

(2)$f(x)$是反比例函数.

(3)$f(x)$是幂函数.

解：(1)若函数 $f(x)$为正比例函数，

则 $\begin{cases}m^2+m-1=1,\\ m^2+2m\neq 0,\end{cases}$ 所以 $m=1$.

(2)若函数 $f(x)$为反比例函数，

则 $\begin{cases}m^2+m-1=-1,\\ m^2+2m\neq 0,\end{cases}$ 所以 $m=-1$.

(3)若函数 $f(x)$为幂函数，

则 $m^2+2m=1$，所以 $m=-1\pm\sqrt{2}$.

8. 已知幂函数 $f(x)=x^{(2k-1)(3-k)}(k\in\mathbf{Z})$是偶函数且在$(0,+\infty)$上单调递增.

(1)求 $f(x)$的解析式；

(2)当 $x\in[-1,1]$时，$g(x)=f(x)-mx$ 是单调函数，求 m 的取值范围.

解：(1)因为幂函数 $f(x)=x^{(2k-1)(3-k)}(k\in\mathbf{Z})$在$(0,+\infty)$上单调递增，

所以$(2k-1)(3-k)>0$，解得 $\frac{1}{2}<k<3$.

因为 $k\in\mathbf{Z}$，所以 $k=1$ 或 $k=2$.

当 $k=1$ 时，$(2k-1)(3-k)=2$，

满足函数 $f(x)$为偶函数；

当 $k=2$ 时，$(2k-1)(3-k)=3$，

不满足函数 $f(x)$为偶函数.

所以 $k=1$，$f(x)=x^2$.

(2)因为 $f(x)=x^2$，所以 $g(x)=f(x)-mx=x^2-mx$，

函数 $g(x)$图象的对称轴为直线 $x=\frac{m}{2}$.

要使函数 $g(x)$在区间$[-1,1]$上是单调函数，则 $\frac{m}{2}\leqslant -1$ 或 $\frac{m}{2}\geqslant 1$，解得 $m\leqslant -2$ 或 $m\geqslant 2$.

故 m 的取值范围是$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

3.4　函数的应用（一）

学习任务目标

1.了解函数模型(如一次函数、二次函数、幂函数、分段函数等函数模型)在现实生活中的广泛应用.

2.能够利用给定的函数模型或建立确定的函数模型解决实际问题.

问题式预习

知识点　函数模型

1.一次函数模型

形如 $y=kx+b$ 的函数模型称为<u>一次函数模型</u>,其中 $k\neq0$.

2.二次函数模型

(1)解析式:$y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$ 或 $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}(a\neq0)$.

(2)条件:$a\neq0$.

3.幂函数模型

(1)解析式:$y=ax^\alpha+b$(a,b,α 为常数,$a\neq0,\alpha\neq0$ 且 $\alpha\neq1$).

(2)单调性:由解析式中的 α 的值决定.

[微训练]

1.一个矩形的周长是40,则矩形的长 y 关于宽 x 的函数解析式为　(　　)

A.$y=20-x,0<x<10$

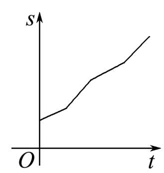
B.$y=20-2x,0<x<20$

C.$y=40-x,0<x<10$

D.$y=40-2x,0<x<20$

A　**解析**:依题意,得 $2x+2y=40$,所以 $y=20-x,0<x<10$.

2.一辆汽车在某段时间内的行驶路程 s 关于时间 t 变化的图象如图所示,那么图象所对应的函数模型是　(　　)



A.一次函数模型

B.二次函数模型

C.分段函数模型

D.无法确定

C　**解析**:由 s 与 t 的图象,可知 t 分4段,则函数模型为分段函数模型.

3.某人驾驶汽车从 A 地出发,以80 km/h的速度行驶2 h到达 B 地,在 B 地停留2 h,则汽车离开 A 地的距离 y(单位:km)是时间 t(单位:h)的函数,该函数的解析式是<u>$y=\begin{cases}80t,0\leqslant t\leqslant2,\\160,2<t\leqslant4.\end{cases}$</u>

任务型课堂

任务一　一次函数模型

1.一辆匀速行驶的汽车90 min行驶的路程为180 km,则这辆汽车行驶的路程 y(单位:km)关于时间 t(单位:h)的函数解析式是　(　　)

A.$y=2t$　　B.$y=120t$

C.$y=2t(t\geqslant0)$　　D.$y=120t(t\geqslant0)$

D　**解析**:因为90 min=1.5 h,所以汽车的速度为 $180\div1.5=120$(km/h).所以路程 y 与时间 t 之间的函数解析式是 $y=120t(t\geqslant0)$.

2.某厂日生产文具盒的总成本 y(单位:元)与日产量 x(单位:套)之间的关系为 $y=6x+30\ 000$,而文具盒的出售价格为每套12元.要使该厂不亏本,至少日生产文具盒　(　　)

A.2 000套　　B.3 000套

C.4 000套　　D.5 000套

D　**解析**:设利润 $z=12x-(6x+30\ 000)$,所以 $z=6x-30\ 000$.由 $z\geqslant0$,解得 $x\geqslant5\ 000$.故至少日生产文具盒5 000套.

3.一定范围内,某种产品的购买量 y(单位:t)与单价 x(单位:元/t)之间满足一次函数关系.若购买1 000 t,则价格为800元/t;若购买2 000 t,则价格为700元/t.某客户购买400 t,其价格为________元.

860　**解析**:设 $y=kx+b$,则 $1\ 000=800k+b$,且 $2\ 000=700k+b$,解得 $k=-10,b=9\ 000$.所以 $y=-10x+9\ 000$.令 $-10x+9\ 000=400$,解得 $x=860$.

【类题通法】

一次函数模型的特点和解题方法

(1)一次函数模型的突出特点是其图象是一条直线.

(2)求解有关一次函数模型的问题时,注意待定系数法的应用,主要步骤是:设元、列式、求解.

任务二　二次函数模型

1.某品牌电动车有两个连锁店,其月利润(单位:元)分别为 y_1,y_2,且 $y_1=-5x^2+900x-16\ 000$,$y_2=300x-2\ 000$,其中 x(单位:辆)为销售量.若某月两店共销售了 110 辆电动车,则最大利润为 (　　)

A.11 000 元　　B.22 000 元

C.33 000 元　　D.40 000 元

C　**解析**:设两个店分别销售出 x 辆与$(110-x)$辆电动车,则两店月利润 $L=-5x^2+900x-16\ 000+300(110-x)-2\ 000=-5x^2+600x+15\ 000=-5(x-60)^2+33\ 000$.所以,当 $x=60$ 时,两店的月利润取得最大值,为 33 000 元.

2.某水果批发商销售每箱进价为 40 元的苹果,假设每箱售价不得低于 50 元且不得高于 55 元.市场调查发现,若每箱以 50 元的价格销售,平均每天销售 90 箱,价格每提高 1 元,平均每天少销售 3 箱.

(1)求平均每天的销售量 y(箱)与销售价格 x(元/箱)之间的函数关系式.

(2)求该批发商平均每天的销售利润 w(元)与销售价格 x(元/箱)之间的函数关系式.

(3)当每箱苹果的售价为多少元时,该批发商可以获得最大利润?最大利润是多少?

解:(1)根据题意,得 $y=90-3(x-50)$,

即 $y=-3x+240(50\leqslant x\leqslant 55,x\in\mathbf{N})$.

(2)$w=(x-40)(-3x+240)=-3x^2+360x-9\ 600(50\leqslant x\leqslant 55,x\in\mathbf{N})$.

(3)因为 $w=-3x^2+360x-9\ 600=-3(x-60)^2+1\ 200$,

所以当 $x<60$ 时,w 随 x 的增大而增大.

又 $50\leqslant x\leqslant 55$,$x\in\mathbf{N}$,所以当 $x=55$ 时,w 有最大值,最大值为 1 125.

所以当每箱苹果的售价为 55 元时,该批发商可以获得最大利润,且最大利润为 1 125 元.

【类题通法】

利用二次函数求最值的方法

根据实际问题建立函数模型,求出解析式后,可利用配方法、判别式法、换元法以及函数的单调性等求最值,从而解决实际问题中的利润最大、用料最省等最值问题.

注意:实际问题中应考虑取得最值时的自变量与实际意义是否相符.

任务三　幂函数及分段函数模型

[探究活动]

分段函数在定义域内的不同区间上解析式不同,请探究并回答以下问题.

探究 1:求分段函数的函数值时应注意什么问题?

提示:求分段函数的函数值时应注意确定自变量属于定义域的哪个区间.若不能确定,应分类讨论.

探究 2:如何确定分段函数的最值和值域?

提示:应先分段分别求其最值和值域,再以各段的最大值中最大者为函数的最大值,各段的最小值中最小者为函数的最小值;而各段值域的并集则是函数的值域.

[评价活动]

1.已知 A,B 两地相距 150 km,某人驾驶汽车以 60 km/h 的速度从 A 地到 B 地,在 B 地停留 1 h 后再以 50 km/h 的速度返回 A 地.

(1)把汽车离开 A 地的距离 y(单位:km)表示为时间 t(单位:h)的函数;

(2)求汽车经过 5 h 时与 A 地的距离.

解:(1)汽车以 60 km/h 的速度从 A 地到 B 地需 2.5 h,这时 $y=60t$;当 $2.5<t\leqslant 3.5$ 时,$y=150$;汽车以50 km/h的速度返回 A 地需 3 h,这时 $y=150-50(t-3.5)=-50t+325$.

所求函数的解析式为

$$y=\begin{cases}60t,0\leqslant t\leqslant 2.5,\\150,2.5<t\leqslant 3.5,\\-50t+325,3.5<t\leqslant 6.5.\end{cases}$$

(2)当 $t=5$ 时,$y=-50\times 5+325=75$,

即汽车经过 5 h 时距离 A 地 75 km.

2.在固定压力差(压力差为常数)下,当气体通过圆柱形管道时,其流量速率 R(单位:cm^3/s)与管道半径 r(单位:cm)的四次方成正比.

(1)写出 R 关于 r 的函数解析式;

(2)假设某气体在半径为 3 cm 的管道中,流量速率为 400 cm^3/s,求该气体通过半径为 r 的管道时,其流量速率 R 关于 r 的解析式;

(3)已知(2)中的气体通过的管道半径为5 cm,计算该气体的流量速率.(结果保留整数)

解:(1)由题意,得 $R=kr^4$(k 是大于 0 的常数).

(2)由 $r=3$ cm,$R=400\ cm^3/s$,得 $k\cdot 3^4=400$.

所以 $k=\dfrac{400}{81}$,故解析式为 $R=\dfrac{400}{81}r^4$.

(3)因为 $R=\dfrac{400}{81}r^4$,所以当 $r=5$ 时,

$R=\dfrac{400}{81}\times 5^4\approx 3\ 086(cm^3/s)$.

【类题通法】

应用分段函数时的三个注意点

(1)分段函数的“段”一定要分得合理，不重不漏.

(2)分段函数的定义域为对应每一段自变量取值范围的并集.

(3)分段函数的值域的求法：逐段求函数值的范围，然后取并集.

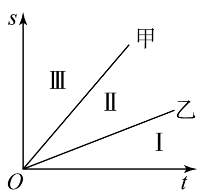
提质归纳

函数的应用
- 一次函数模型
- 二次函数模型
- 幂函数模型
- 分段函数模型

课后素养评价(二十五)

基础性·能力运用

1. 甲、乙、丙、丁四辆玩具赛车同时从起点出发并做匀速直线运动，丙车最先到达终点，丁车最后到达终点.若甲、乙两车行驶路程 s 与时间 t 的图象如图所示，则对于丙、丁两车行驶路程 s 与时间 t 的图象所在区域，判断正确的是　(　　)



A.丙在Ⅲ区域，丁在Ⅰ区域

B.丙在Ⅰ区域，丁在Ⅲ区域

C.丙在Ⅱ区域，丁在Ⅰ区域

D.丙在Ⅲ区域，丁在Ⅱ区域

A　**解析**：由图象，可得相同时间内，丙车行驶路程最远，丁车行驶路程最近，即丙在Ⅲ区域，丁在Ⅰ区域.故选 A.

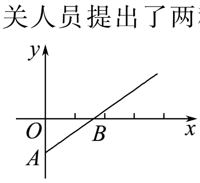
2. 某市生产总值连续两年持续增加.第一年的增长率为 p，第二年的增长率为 q，则该市这两年生产总值的年平均增长率为　(　　)

A.$\dfrac{p+q}{2}$　　B.$\dfrac{(p+1)(q+1)-1}{2}$

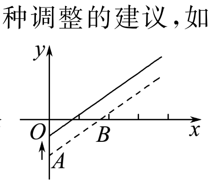
C.$\sqrt{pq}$　　D.$\sqrt{(p+1)(q+1)}-1$

D　**解析**：设年平均增长率为 x，原生产总值为 a，则 $a(1+p)(1+q)=a(1+x)^2$，解得 $x=\sqrt{(1+p)(1+q)}-1$.故选 D.

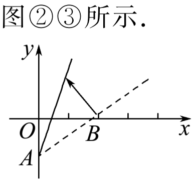
3. (多选)如图①是反映某条公交线路收支差额(即营运所得票价收入与付出成本的差)y 与乘客量 x 之间关系的图象.由于目前该条公交线路亏损，公司有关人员提出了两种调整的建议，如图②③所示.



图①



图②



图③

则下列说法中，正确的有　(BC)

A.图②的建议：提高成本，并提高票价

B.图②的建议：降低成本，并保持票价不变

C.图③的建议：提高票价，并保持成本不变

D.图③的建议：提高票价，并降低成本

4. 把长为 12 cm 的细铁丝截成两段，各自围成一个正三角形，那么这两个正三角形面积之和的最小值是________cm^2.

$2\sqrt{3}$　**解析**：设一个三角形的边长为 x cm，则另一个三角形的边长为$(4-x)$cm，两个三角形的面积和为 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}(4-x)^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-2)^2+2\sqrt{3}\geqslant 2\sqrt{3}$.

这两个正三角形面积之和的最小值是 $2\sqrt{3}$ cm^2.

5. 某药厂研制出一种新型药剂，投放市场后其广告投入 x(单位：万元)与销售利润 y(单位：万元)存在关系 $y=x^{\alpha}$(α 为常数)，其中 x 不超过 5.已知去年投入广告费用为 3 万元时，销售利润为27 万元.若今年广告投入 5 万元，预计今年销售利润为________万元.

125　**解析**：由已知投入广告费用为 3 万元时，销售利润为 27 万元，代入 $y=x^{\alpha}$ 中，即 $3^{\alpha}=27$，解得 $\alpha=3$，故函数解析式为 $y=x^3$，所以当 $x=5$ 时，$y=125$.

6. 某市居民自来水收费标准如下：每户每月用水量不超过 4 t 时，每吨 3 元，当用水量超过 4 t 时，超过部分每吨 4 元.现甲、乙两户共缴水费 y 元，已知甲、乙两户该月用水量分别为 $5x$ t，$3x$ t.

(1)求 y 与 x 的函数关系式；

(2)若甲、乙两户该月共缴水费 40 元，分别求出甲、乙两户该月的用水量和水费.

解：(1)当甲户用水量不超过 4 t，即 $5x\leqslant 4$ 时，乙户用水量也不超过 4 t，$y=(5x+3x)\times 3=24x$；

当甲户的用水量超过 4 t，而乙户的用水量不超过

4 t,即 $5x>4$ 且 $3x\leqslant4$ 时,
$y=4\times3+3x\times3+4\times(5x-4)=29x-4$;
当甲、乙两户的用水量均超过 4 t,即 $3x>4$ 时,$y=4\times3\times2+(5x-4)\times4+(3x-4)\times4=32x-8$.

故 $y=\begin{cases}24x,0\leqslant x\leqslant\dfrac{4}{5},\\29x-4,\dfrac{4}{5}<x\leqslant\dfrac{4}{3},\\32x-8,x>\dfrac{4}{3}.\end{cases}$

(2)令 $y=f(x)$,因为函数 $y=f(x)$ 在各段区间上均单调递增,所以,当 $x\in\left[0,\dfrac{4}{5}\right]$时,$y\leqslant f\left(\dfrac{4}{5}\right)=19.2<40$.

当 $x\in\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{4}{3}\right]$时,$y\leqslant f\left(\dfrac{4}{3}\right)=34\dfrac{2}{3}<40$.

故$x\in\left(\dfrac{4}{3},+\infty\right)$.

令 $32x-8=40$,解得 $x=1.5$.所以 $5x=7.5$,$3x=4.5$.
所以甲户用水量为 7.5 t,乙户用水量为 4.5 t,分别应付水费 $4\times3+(7.5-4)\times4=26$(元),$4\times3+(4.5-4)\times4=14$(元).

综合性·创新提升

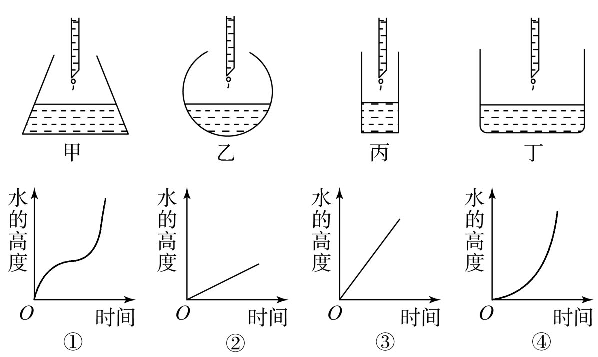
1.某地固定电话市话收费规定:前三分钟0.20 元(不满三分钟按三分钟计算),以后每增加一分钟增收0.10 元(不满一分钟按一分钟计算),那么某人打市话 550 s,应支付电话费　　(　　)

A.1.00 元　　B.0.90 元

C.1.20 元　　D.0.80 元

B　**解析**:设打市话 x min,应支付 y 元,则 $y=0.20+0.10\times([x]-3)$($[x]$是不小于 x 的最小整数,$x>0$).令$x=\dfrac{550}{60}$,故$[x]=10$,则 $y=0.9$.

2.(多选)生活经验告诉我们,当把水注进容器时(设单位时间内进水量相同),容器内水的高度会随着时间的变化而变化,则下列选项中容器与图象匹配正确的是　　(　　)



A.甲—(3)　　B.乙—(1)

C.丙—(4)　　D.丁—(2)

BD　**解析**:甲容器下粗上细,水高变化为逐渐变快,故甲应匹配(4);乙容器为球形,水高变化为先逐渐变慢再逐渐变快,故乙应匹配(1);丙、丁容器都是柱形的,水高变化的速度都应是不变的,但丙容器细,丁容器粗,故丙容器水高变化快,丁容器水高变化慢.丙应匹配(3),丁应匹配(2).故正确匹配的是 BD.

3.某车间分批生产某种产品,每批产品的生产准备费用为 900 元.若每批生产 x 件,则平均仓储时间为$\dfrac{x}{4}$天,且每件产品每天的仓储费用为 1 元.为使平均到每件产品的生产准备费用与仓储费用之和最小,每批应生产产品　　(B)

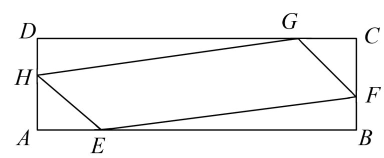
A.30 件　　B.60 件

C.80 件　　D.100 件

4.某辆汽车以 x km/h 的速度在高速公路上匀速行驶(考虑到高速公路行车安全,要求 $60\leqslant x\leqslant120$)时,每小时的油耗(所需要的汽油量)为$\dfrac{1}{5}\left(x-k+\dfrac{4\ 500}{x}\right)$ L,其中 k 为常数.若汽车以 120 km/h 的速度行驶,每小时的油耗为 11.5 L,则$k=$________,欲使每小时的油耗不超过9 L,则速度 x 的取值范围为________.

100　[60,100]　**解析**:设每小时的油耗为 y,根据题意得 $y=\dfrac{1}{5}\left(x-k+\dfrac{4\ 500}{x}\right)$,则当 $x=120$ 时,$y=\dfrac{1}{5}\left(120-k+\dfrac{4\ 500}{120}\right)=11.5$,解得 $k=100$,所以 $y=\dfrac{1}{5}\left(x-100+\dfrac{4\ 500}{x}\right)$.由题意知 $y\leqslant9$,即$\dfrac{1}{5}\left(x-100+\dfrac{4\ 500}{x}\right)\leqslant9$,解得 $45\leqslant x\leqslant100$,又因为 $60\leqslant x\leqslant120$,所以 x 的取值范围为$[60,100]$.

5.如图,在矩形 $ABCD$ 中,已知 $AB=13$,$BC=3$,在 AB,AD,CD,CB 上分别截取AE,AH,CG,CF,且 $AE=AH=CG=CF=x$,则 $x=$________时,四边形 $EFGH$的面积最大,最大面积为________.



3　30　**解析**：设四边形 $EFGH$ 的面积为 S，

则 $S=13\times3-2\times\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(13-x)(3-x)\right]$

$=-2x^2+16x=-2(x-4)^2+32, x\in(0,3]$.

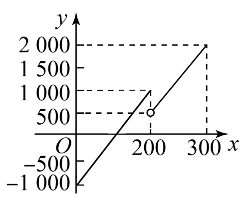
因为 $S=-2(x-4)^2+32$ 在 $(0,3]$ 上单调递增，

所以当 $x=3$ 时，S 有最大值为 30.

6. 某游乐场每天的盈利额 y 元与售出的门票张数 x 之间的函数关系如图所示，试由图象解决下列问题：

(1)求 y 关于 x 的函数解析式；

(2)要使该游乐场每天的盈利额超过1 000元，每天至少需要卖出多少张门票？



解：(1)由图象知，当 $x\in[0,200]$ 时，可设 $y=kx+b(k\neq0)$.

直线 $y=kx+b$ 过点 $(0,-1\ 000)$ 和 $(200,1\ 000)$，所以 $\begin{cases}b=-1\ 000,\\200k+b=1\ 000,\end{cases}$ 解得 $k=10, b=-1\ 000$. 从而 $y=10x-1\ 000$.

当 $x\in(200,300]$ 时，可设 $y=mx+n(x\neq0)$，直线 $y=mx+n$ 过点 $(200,500)$ 和 $(300,2\ 000)$，所以 $\begin{cases}200m+n=500,\\300m+n=2\ 000,\end{cases}$ 解得 $m=15, n=-2\ 500$，从而 $y=15x-2\ 500$.

所以 $y=\begin{cases}10x-1\ 000, x\in[0,200],\\15x-2\ 500, x\in(200,300].\end{cases}$

(2)每天的盈利额超过 1 000 元，则 $x\in(200,300]$.

由 $15x-2\ 500>1\ 000$，得 $x>\frac{700}{3}$.

故每天至少需要卖出 234 张门票.

单元活动构建

任务一　函数的概念与表示

函数是变量与变量之间的确定性对应关系，确定性是函数的“灵魂”. 在一个函数中，函数的值域由函数的定义域与对应关系确定，也就是说，函数的定义域和对应关系是确定一个函数的两个主要要素.

问题 1　矩形的面积是周长的函数吗？如果是正方形呢？

答案：矩形的面积不是周长的函数；正方形的面积是周长的函数.

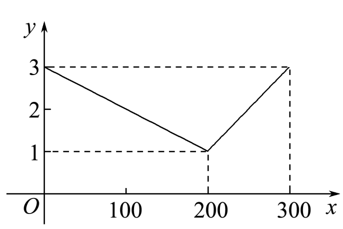
问题 2　已知一个函数的对应关系为 $f: x\to y=x^2$，值域为 $[1,4]$，这样的函数有多少个？请你试着写出 2 个.

答案：有无数个，例如函数 $y=x^2(x\in[1,2])$，$y=x^2(x\in[-2,-1])$.

问题 3　设函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=\begin{cases}0, x\leqslant0,\\1, x>0.\end{cases}$

(1)画出该函数的图象；

(2)观察函数 $f(x)$ 的各段图象与函数解析式的对应关系，并写出如图所示的函数的解析式.



答案：略

任务达标

1. 函数 $f(x)=\sqrt{1+x}-\frac{1}{x}$ 的定义域是　（　　）

A. $[-1,0)\cup(0,+\infty)$

B. $[-1,+\infty)$

C. $\mathbf{R}$

D. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

A　**解析**：对于 $\sqrt{1+x}$，$x\geqslant-1$；对于 $\frac{1}{x}$，$x\neq0$. 故选 A.

2. 已知函数 $y=f(x+1)$ 的定义域是 $[-2,3]$，则 $y=f(x)$ 的定义域是　（　　）

A. $[0,5]$　　B. $[-1,4]$

C. $[-3,2]$　　D. $[-2,3]$

B　**解析**：因为函数 $y=f(x+1)$ 的定义域是 $[-2,3]$，所以 $-2\leqslant x\leqslant3$，所以 $-1\leqslant x+1\leqslant4$，所以函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[-1,4]$. 故选 B.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, x\geqslant0,\\-x, x<0,\end{cases}$ 则 $f(f(-2))$ 的值是　（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

C　**解析**：因为函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, x\geqslant0,\\-x, x<0,\end{cases}$

所以 $f(f(-2))=f(2)=4$. 故选 C.

4.函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x-1,x\geqslant 0,\\ \frac{1}{x},x<0,\end{cases}$ 若 $f(a)=a$，则实数 a 的值为　　（　　）

A.±1　　B.-2 或 ±1

C.-1　　D.-2 或 -1

C　**解析**：当 $a\geqslant 0$ 时，令 $\frac{1}{2}a-1=a$，得 $a=-2$，与 $a\geqslant 0$ 矛盾，不符合题意；

当 $a<0$ 时，令 $\frac{1}{a}=a$，得 $a=\pm1$，取 $a=-1$，符合题意.

故选 C.

【规律方法】

1.理解函数的概念的关键

关键是把握函数概念中“任意”“唯一确定”的意义.

2.函数的三要素的关系

定义域、对应关系和值域是函数的三个不可分割的要素，其中定义域和对应关系是最本质的要素，这两个确定了，值域也就确定了.

任务二　函数的基本性质

问题 1　一般地，设函数 $f(x)$，$g(x)$的定义域均为 A，请你试着填写下表.

$f(x)$	$g(x)$	$f(x)+g(x)$	$f(x)-g(x)$
增函数	增函数		
增函数	减函数		
减函数	增函数		
减函数	减函数		

答案：增函数　不能确定　不能确定　增函数　不能确定　减函数　减函数　不能确定

问题 2　已知函数 $y=f(x)$，$x\in\mathbf{R}$，对于任意 x，$y\in\mathbf{R}$，$f(x+y)=f(x)+f(y)$，求证：$f(0)=0$，且 $f(x)$ 是奇函数.

证明：因为对任意的 x，$y\in\mathbf{R}$，$f(x+y)=f(x)+f(y)$，

所以令 $x=0$，$y=0$，则有 $f(0+0)=f(0)+f(0)$，即 $f(0)=2f(0)$，

所以 $f(0)=0$.

令 $y=-x$，则有 $f(x-x)=f(x)+f(-x)$，

所以 $f(x)+f(-x)=0$，

所以 $f(-x)=-f(x)$，$x\in\mathbf{R}$，

所以 $f(x)$ 是奇函数.

「任务达标」

1.若二次函数 $f(x)=ax^2+(2b-a)x+b-a$ 是定义在$[2-2a,a]$上的偶函数，则 $a-b=$　　（　　）

A.1　　B.2

C.3　　D.4

A　**解析**：因为二次函数为偶函数，所以图象的对称轴为 y 轴，且区间$[2-2a,a]$满足 $2-2a=-a$，

所以 $\begin{cases}2-2a+a=0,\\ 2b-a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2,\\ b=1,\end{cases}$

所以 $a-b=1$.故选 A.

2.(2021·全国甲卷(文))设 $f(x)$是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，且 $f(1+x)=f(-x)$.若 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$，则 $f\left(\frac{5}{3}\right)=$　　（　　）

A.$-\frac{5}{3}$　　B.$-\frac{1}{3}$

C.$\frac{1}{3}$　　D.$\frac{5}{3}$

C　**解析**：由题意可得 $f\left(\frac{5}{3}\right)=f\left(1+\frac{2}{3}\right)=f\left(-\frac{2}{3}\right)=-f\left(\frac{2}{3}\right)$，

而 $f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(1-\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=-f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$，故 $f\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{1}{3}$.

3.(2022·北京)设函数 $f(x)=\begin{cases}-ax+1,x<a,\\ (x-2)^2,x\geqslant a.\end{cases}$ 若 $f(x)$存在最小值，则 a 的一个值为________，a 的最大值为________.

0(答案不唯一)　1　**解析**：当 $a=0$ 时，$f(x)=\begin{cases}1,x<0,\\ (x-2)^2,x\geqslant 0,\end{cases}$ 所以 $f(x)_{\min}=0$；

若 $a<0$，当 $x<a$ 时，$f(x)=-ax+1$ 单调递增，当 $x\to-\infty$时，$f(x)\to-\infty$，故 $f(x)$没有最小值，不符合题目要求；

若 $a>0$，当 $x<a$ 时，$f(x)=-ax+1$ 单调递减，$f(x)>f(a)=-a^2+1$，

当 $x>a$ 时，$f(x)_{\min}=\begin{cases}0,0<a<2,\\ (a-2)^2,a\geqslant 2,\end{cases}$

所以$-a^2+1\geqslant 0$ 或$-a^2+1\geqslant(a-2)^2$，解得 $0<a\leqslant 1$.

综上可得 $0\leqslant a\leqslant 1$.

【规律方法】

1.函数单调性的判断与证明

(1)函数的单调性可以利用函数图象的直观性判断;

(2)证明函数单调性的方法是定义法,其关键是对差式 $f(x_1)-f(x_2)$ 的变形,只有合理变形,才能准确判断差式的符号.

2.求函数最值的方法

(1)一般先证明或判断函数的单调性,再利用单调性求最值;

(2)特殊函数可以根据图象求最值.

3.函数奇偶性的判断

判断的依据是奇偶性的定义,先检查定义域是否满足条件.也可以结合特殊值、图象等进行判断.

4.函数奇偶性的应用

函数奇偶性的应用主要体现在图象、解析式与单调性的判断三个方面.解题时往往先利用奇偶性进行转化,再结合单调性等函数的性质解题.

任务三　幂函数

问题 1　已知函数 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$.画出函数 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ 的图象,并指出其奇偶性和单调性.

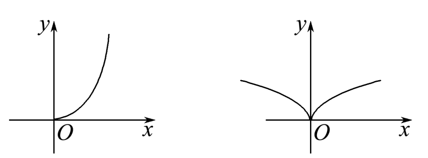
答案:略

问题 2　对任意 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$,你能利用函数 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ 的图象比较 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 和 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ 的大小吗?

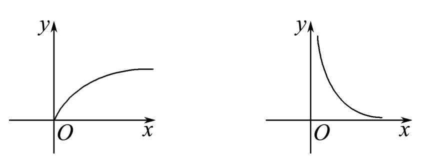
答案:略

「任务达标」

1.已知幂函数 $f(x)$ 的图象过点 $(9,3)$,则函数 $f(x)$ 的图象大致是　(　　)



A　　B



C　　D

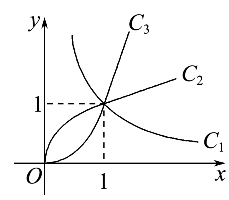
C　**解析**:设幂函数的解析式为 $f(x)=x^{\alpha}$.

因为幂函数 $y=f(x)$ 的图象过点 $(9,3)$,所以 $3=9^{\alpha}$,解得 $\alpha=\dfrac{1}{2}$,

所以 $y=f(x)=\sqrt{x}$,其定义域为 $[0,+\infty)$,且是增函数.

当 $0<x<1$ 时,其图象在直线 $y=x$ 的上方.对照各选项可知 C 满足题意.故选 C.

2.如图,C_1,C_2,C_3 分别为幂函数 $y=x^{\alpha},y=x^{\beta},y=x^{\gamma}$ 在第一象限内的图象,则 α,β,γ 的值依次可以是　(　　)



A.$\dfrac{1}{2},3,-1$　　B.$-1,3,\dfrac{1}{2}$

C.$\dfrac{1}{2},-1,3$　　D.$-1,\dfrac{1}{2},3$

D　**解析**:由幂函数在第一象限内的图象,结合幂函数的性质,

可得 $\alpha<0,0<\beta<1,\gamma>1$,

结合选项知,α,β,γ 的值依次可以是 $-1,\dfrac{1}{2},3$.故选 D.

3.已知点 $\left(\dfrac{1}{3},27\right)$ 在幂函数 $f(x)=(t-2)x^{a}$ 的图象上,则 $t+a=$　(　　)

A.-1　　B.0　　C.1　　D.2

B　**解析**:因为 $f(x)=(t-2)x^{a}$ 为幂函数,所以 $t-2=1$,得 $t=3$,又因为点 $\left(\dfrac{1}{3},27\right)$ 在函数图象上,所以 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{a}=27$,解得 $a=-3$,所以 $t+a=0$.

【规律方法】

解决与幂函数有关问题的方法

(1)首先要考虑幂函数的概念,函数必具有 $y=x^{\alpha}$(α 为常数)这一形式.

(2)其次要熟记五个常见幂函数的图象与性质.

(3)对于幂函数 $y=x^{\alpha}$(α 是常数),当 α 的值不同时,相应幂函数的单调性和奇偶性也不同.同时,注意分类讨论思想的应用.

第三章综合检测

（时间：120 分钟，分值：150 分）

一、单项选择题(本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分).

1. 函数 $y=\sqrt{x(3-x)}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域为　（　　）

A.$[0,3]$　　B.$[1,3]$

C.$[3,+\infty)$　　D.$(1,3]$

D　**解析**：由题意，得 $\begin{cases}x(3-x)\geqslant 0,\\ x-1>0,\end{cases}$ 解得 $1<x\leqslant 3$，故选 D.

2. 下列各组函数中，是同一个函数的是　（　　）

A.$y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$

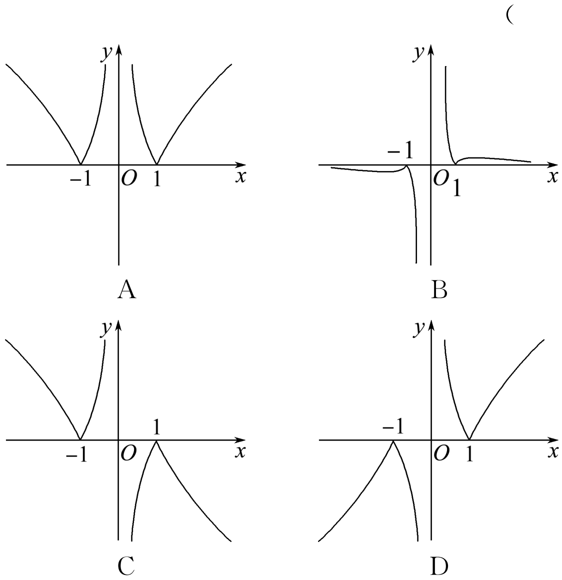
B.$y=2x^2+x+1$ 与 $y=2t^2+t+1$

C.$y=(\sqrt{3x})^2$ 与 $y=3|x|$

D.$y=\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x-2}$ 与 $y=\sqrt{(x+2)(x-2)}$

B　**解析**：对于 A，$y=x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，故 A 不正确；对于 B，两函数的定义域均为 $\mathbf{R}$，且对应关系相同，故 B 正确；对于 C，$y=(\sqrt{3x})^2$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，$y=3|x|$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，故 C 不正确；对于 D，$y=\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x-2}$ 的定义域为 $[2,+\infty)$，对于 $y=\sqrt{(x+2)(x-2)}$，令 $(x+2)(x-2)\geqslant 0$，则定义域为 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$，故 D 不正确.故选 B.

3. (2022·天津)函数 $f(x)=\dfrac{|x^2-1|}{x}$ 的图象为　（　　）



D　**解析**：函数 $f(x)=\dfrac{|x^2-1|}{x}$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，且 $f(-x)=\dfrac{|(-x)^2-1|}{-x}=-\dfrac{|x^2-1|}{x}=-f(x)$，

函数 $f(x)$ 为奇函数，A 选项错误；

又当 $x<0$ 时，$f(x)=\dfrac{|x^2-1|}{x}\leqslant 0$，C 选项错误；

当 $x>1$ 时，$f(x)=\dfrac{|x^2-1|}{x}=\dfrac{x^2-1}{x}=x-\dfrac{1}{x}$，函数单调递增，故 B 选项错误.故选 D.

4. 若函数 $f(x)=\dfrac{x}{(2x-1)(x+a)}$ 为奇函数，则 $a=$　（　　）

A.$\dfrac{1}{2}$　　B.$\dfrac{2}{3}$　　C.$\dfrac{3}{4}$　　D.1

A　**解析**：由函数 $f(x)=\dfrac{x}{(2x-1)(x+a)}$ 为奇函数，可得 $f(-x)=-f(x)$，所以 $\dfrac{-x}{(-2x-1)(-x+a)}=-\dfrac{x}{(2x-1)(x+a)}$，所以 $-x(2x-1)(x+a)=-x\cdot(-2x-1)(-x+a)$，化简得 $2(2a-1)\cdot x^2=0$ 恒成立，所以 $2a-1=0$，即 $a=\dfrac{1}{2}$，故选 A.

5. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则对实数 a,b，“$a>b$”是“$f(a)>f(b)$”的　（　　）

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

D　**解析**：因为 $f(x)$ 为偶函数，且在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，且函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，若 $a>0>-a>b$，根据函数的单调性可得 $f(-a)<f(b)$，即 $f(a)<f(b)$，所以由 $a>b$ 不能推出 $f(a)>f(b)$；若 $f(a)>f(b)$，根据函数的单调性可得 $|a|>|b|$，不能推出 $a>b$.综上，$a>b$ 是 $f(a)>f(b)$ 的既不充分也不必要条件，故选 D.

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(a-2)x+3, x\leqslant 1,\\ \dfrac{2a}{x}, x>1\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数，则 a 的取值范围为　（　　）

A.$(0,1)$　　B.$(0,1]$

C.$(0,2)$　　D.$(0,2]$

B　**解析**：因为函数 $f(x)=\begin{cases}(a-2)x+3,x\leqslant 1,\\ \dfrac{2a}{x},x>1\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数，所以 $\begin{cases}a-2<0,\\ 2a>0,\\ a-2+3\geqslant \dfrac{2a}{1},\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant 1$，故选 B.

7. 已知函数 $f(x)=(m^2-m-5)x^{m^2-6}$ 是幂函数，对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，满足 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，若 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a+b>0$，则 $f(a)+f(b)$ 的值　（　　）

A.恒大于 0　　B.恒小于 0

C.等于 0　　D.无法判断

A　**解析**：因为 $f(x)=(m^2-m-5)x^{m^2-6}$ 是幂函数，所以 $m^2-m-5=1$，解得 $m=-2$ 或 $m=3$，因为对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，满足 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，所以 $m^2-6>0$，故 $m=3$，所以 $f(x)=x^3$ 为奇函数且为 $\mathbf{R}$ 上的增函数.对任意 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a+b>0$，则 $a>-b$，所以 $f(a)>f(-b)=-f(b)$，所以 $f(a)+f(b)>0$，故选 A.

8. 已知 $\min\{a,b\}=\begin{cases}a,a\leqslant b,\\ b,a>b,\end{cases}$ 设 $f(x)=\min\{x-2,-x^2+4x-2\}$，则函数 $f(x)$ 的最大值是　（　　）

A.-2　　B.1　　C.2　　D.3

B　**解析**：由 $x-2=-x^2+4x-2$，得 $x^2-3x=0$，解得 $x=0$ 或 $x=3$.

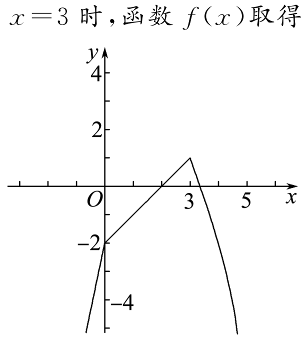
所以当 $0\leqslant x\leqslant 3$ 时，$x-2\leqslant -x^2+4x-2$，当 $x<0$ 或 $x>3$ 时，$x-2>-x^2+4x-2$，

则 $f(x)=\min\{x-2,-x^2+4x-2\}$

$=\begin{cases}x-2,0\leqslant x\leqslant 3,\\ -x^2+4x-2,x<0\text{ 或 }x>3.\end{cases}$

作出 $f(x)$ 的图象如图所示，

由图可知，当 $x=3$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值为 1.



二、多项选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）.

9. 下列说法正确的是　（　　）

A.若幂函数的图象经过点 $\left(\dfrac{1}{8},2\right)$，则函数解析式为 $y=x^{-\frac{1}{3}}$

B.所有幂函数的图象均过点 $(0,0)$

C.幂函数一定具有奇偶性

D.任何幂函数的图象都不经过第四象限

AD　**解析**：若幂函数的图象经过点 $\left(\dfrac{1}{8},2\right)$，则函数解析式为 $y=x^{-\frac{1}{3}}$，所以 A 正确；函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象不经过点 $(0,0)$，所以 B 不正确；$y=x^{\frac{1}{2}}$ 是非奇非偶函数，所以幂函数不一定具有奇偶性，所以 C 不正确；因为对于幂函数 $y=x^{\alpha}$，当 $x>0$ 时，$y>0$ 一定成立，所以任何幂函数的图象都不经过第四象限，所以 D 正确.故选 AD.

10. 下列函数中，满足 $f(2x)=2f(x)$ 的是　（　　）

A.$f(x)=|2x|$　　B.$f(x)=3x-|3x|$

C.$f(x)=-x$　　D.$f(x)=x+2$

ABC　**解析**：若 $f(x)=|2x|$，则 $f(2x)=|2\times 2x|=2|2x|=2f(x)$，A 满足题意；若 $f(x)=3x-|3x|$，则 $f(2x)=6x-|6x|=2(3x-|3x|)=2f(x)$，B 满足题意；若 $f(x)=-x$，则 $f(2x)=-2x=2(-x)=2f(x)$，C 满足题意；若 $f(x)=x+2$，则 $f(2x)=2x+2$，而 $2f(x)=2(x+2)=2x+4$，D 不满足题意，故选 ABC.

11. 若函数 $f(x)$ 具有性质 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 满足“倒负”变换.下列函数满足“倒负”变换的是　（　　）

A.$y=x-\dfrac{1}{x}$　　B.$y=x+\dfrac{1}{x}$

C.$y=\begin{cases}x,0<x<1,\\ 0,x=1,\\ -\dfrac{1}{x},x>1\end{cases}$　　D.$y=-x^3+\dfrac{1}{x^3}$

ACD　**解析**：对于 A，$y=f(x)=x-\dfrac{1}{x}$，

则 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}-x=-f(x)$，满足“倒负”变换；

对于 B，$y=f(x)=x+\dfrac{1}{x}$，则 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}+x\neq -f(x)$，不满足“倒负”变换；

对于 C，$y=f(x)=\begin{cases}x, 0<x<1, \\ 0, x=1, \\ -\dfrac{1}{x}, x>1,\end{cases}$ 则 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\begin{cases}-x, 0<x<1, \\ 0, x=1, \\ \dfrac{1}{x}, x>1,\end{cases}$ 满足 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$，满足“倒负”变换；

对于 D，$y=f(x)=-x^3+\dfrac{1}{x^3}$，则 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-x^{-3}+x^3$，满足 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$，满足“倒负”变换.故选 ACD.

12. 给出定义：若 $m-\dfrac{1}{2}<x\leqslant m+\dfrac{1}{2}(m\in\mathbf{Z})$，则称 m 为离实数 x 最近的整数，记作 $\{x\}=m$.在此基础上给出下列关于函数 $f(x)=|x-\{x\}|$ 的四个结论，其中正确的是　　(ABC)

A.函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$

B.函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{k}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 对称

C.函数 $y=f(x)$ 是偶函数

D.函数 $y=f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ 上单调递增

三、填空题(本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分).

得分	

13. 某同学研究了一个幂函数 $f(x)$，并给出这个幂函数的两个性质：(1) $f(x)$ 为偶函数；(2) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.他研究的幂函数可以是________.

$f(x)=x^{-2}$(答案不唯一)　**解析**：由 $f(x)$ 为偶函数且 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，可知该函数可能为 $f(x)=x^{-2}$.

得分	

14. 德国数学家狄利克雷在 1837 年时提出：“如果对于 x 的每一个值，y 总有一个完全确定的值与之对应，那么 y 是 x 的函数.”这个定义较清楚地说明了函数的内涵.只要有一个关系，使得取值范围中的每一个 x，有一个确定的 y 和它对应就行了，不管这个法则是用解析式还是用图象、表格等形式表示.已知函数 $f(x)$ 由下表给出，则 $f(1\ 949f(2\ 021))$ 的值为________.

x	$x<1\ 921$	$1\ 921\leqslant x<1\ 949$	$1\ 949\leqslant x<2\ 021$	$2\ 021\leqslant x<2\ 049$	$x\geqslant 2\ 049$
$f(x)$	1	2	3	4	5

5　**解析**：由题意知 $f(2\ 023)=4$，$f(1\ 949\times 4)=5$.

得分	

15. 设函数 $f(x)=\dfrac{x^3+(x+1)^2}{x^2+1}$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值为 M，最小值为 N，则 $(M+N-1)^{2\ 021}$ 的值为________.

1　**解析**：由题意知，$f(x)=\dfrac{x^3+2x}{x^2+1}+1$，设 $g(x)=\dfrac{x^3+2x}{x^2+1}$，则 $g(-x)=\dfrac{-x^3-2x}{x^2+1}=-g(x)$，所以 $g(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值与最小值的和为 0，故 $M+N=2$，$(M+N-1)^{2\ 021}=(2-1)^{2\ 021}=1$.

得分	

16. 已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}a^2-ax, x<1, \\ x^2-ax, x\geqslant 1,\end{cases}$ 若 $f(f(a))=1$，则 $a=$________；若不等式 $f(x)\geqslant f(1)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则 a 的取值范围是________.

± 1　$[1,2]$　**解析**：当 $a<1$ 时，$f(a)=a^2-a\times a=0$，所以 $f(f(a))=f(0)=a^2=1$，所以 $a=-1$；当 $a\geqslant 1$ 时，$f(a)=a^2-a\times a=0$，所以 $f(f(a))=f(0)=a^2=1$，所以 $a=1$，故 $a=\pm 1$.

因为不等式 $f(x)\geqslant f(1)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，所以当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得最小值，$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，所以 $\begin{cases}-a<0, \\ \dfrac{a}{2}\leqslant 1, \\ a^2-a\times 1\geqslant 1^2-a\times 1,\end{cases}$ 解得 $1\leqslant a\leqslant 2$，所以 a 的取值范围是 $[1,2]$.

四、解答题(本题共 6 小题，共 70 分).

得分	

17. (10 分)已知函数 $f(x)=3x^2-5x+2$.

(1)求函数 $f(x)$ 的定义域和值域；

(2)分别求 $f(3)$，$f(a)$，$f(x+1)$.

解：(1)函数 $f(x)=3x^2-5x+2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

因为 $f(x)=3\left(x-\dfrac{5}{6}\right)^2-\dfrac{1}{12}\geqslant-\dfrac{1}{12}$，

所以 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\dfrac{1}{12},+\infty\right)$.

(2) $f(3)=3\times 3^2-5\times 3+2=14$，

$f(a)=3a^2-5a+2$，

$f(x+1)=3(x+1)^2-5(x+1)+2=3x^2+x$.

得分 **18.**（12 分）已知函数 $f(x)=1+\dfrac{|x|-x}{2}$ $(-2<x\leqslant 2)$.

（1）用分段函数的形式表示该函数；

（2）画出该函数的图象；

（3）写出该函数的值域.

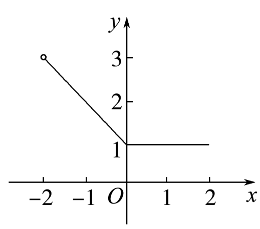
解：（1）$f(x)=1+\dfrac{|x|-x}{2}(-2<x\leqslant 2)$，

当 $-2<x\leqslant 0$ 时，$f(x)=1-x$；

当 $0<x\leqslant 2$ 时，$f(x)=1$.

所以函数 $f(x)=\begin{cases}1-x, & -2<x\leqslant 0,\\ 1, & 0<x\leqslant 2.\end{cases}$

（2）函数 $f(x)$ 的图象如图所示：

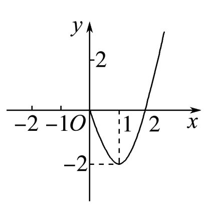


（3）由（2）中的图象，得函数 $f(x)$ 的值域为 $[1,3)$.

得分 **19.**（12 分）若函数 $f(x)$ 为奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=2x^2-4x$.

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式，补全函数 $f(x)$ 的图象，并求不等式 $xf(x)>0$ 的解集；

（2）若函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,a-2]$ 上单调递减，求实数 a 的取值范围.

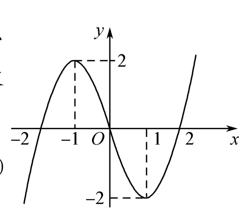


解：（1）当 $x<0$ 时，$-x>0$，$f(-x)=2x^2+4x$.

由 $f(x)$ 是奇函数，得 $f(x)=-f(-x)=-2x^2-4x$.

所以 $f(x)=\begin{cases}2x^2-4x, & x\geqslant 0,\\ -2x^2-4x, & x<0.\end{cases}$

根据奇函数的图象关于原点对称这一性质即可补全函数 $f(x)$ 的图象，如图.



不等式 $xf(x)>0$，当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，则 $x>2$；

当 $x<0$ 时，$f(x)<0$，则 $x<-2$.

综上，不等式 $xf(x)>0$ 的解集为 $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

（2）由图象可知，函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $[-1,1]$，

要使 $f(x)$ 在 $[-1,a-2]$ 上单调递减，

则 $\begin{cases}a-2>-1,\\ a-2\leqslant 1,\end{cases}$ 解得 $1<a\leqslant 3$，

所以实数 a 的取值范围是 $(1,3]$.

得分 **20.**（12 分）在①$k=-1$，②$k=1$ 这两个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解答.

已知函数 $f(x)=\dfrac{k}{x}-kx$，且________.

（1）求 $f(x)$ 的定义域，并判断 $f(x)$ 的奇偶性；

（2）判断 $f(x)$ 的单调性，并用定义给予证明.

解：选择①.

（1）因为 $k=-1$，所以 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$.

要使函数 $f(x)$ 有意义，只需 $x\neq 0$，

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

因为 $f(-x)=-x-\dfrac{1}{-x}=-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 为奇函数.

（2）函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上均单调递增.

证明如下：$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=x_1-\dfrac{1}{x_1}-\left(x_2-\dfrac{1}{x_2}\right)=(x_1-x_2)+\dfrac{x_1-x_2}{x_1x_2}=(x_1-x_2)\left(1+\dfrac{1}{x_1x_2}\right)$

$=\dfrac{(x_1-x_2)(x_1x_2+1)}{x_1x_2}$.

因为 $0<x_1<x_2$，所以 $x_1-x_2<0$，$x_1x_2>0$，$x_1x_2+1>0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

故函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

同理可证，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增，

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上均单调递增.

选择②.

（1）因为 $k=1$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}-x$.

要使函数 $f(x)$ 有意义，只需 $x\neq 0$，

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

因为 $f(-x)=\dfrac{1}{-x}-(-x)=-\left(\dfrac{1}{x}-x\right)=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(2)函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上均单调递减.

证明如下：$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1}-x_1-\left(\frac{1}{x_2}-x_2\right)=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}+(x_2-x_1)=(x_2-x_1)\left(1+\frac{1}{x_1x_2}\right)$

$=\frac{(x_2-x_1)(x_1x_2+1)}{x_1x_2}$，

因为 $0<x_1<x_2$，所以 $x_2-x_1>0$，$x_1x_2>0$，$x_1x_2+1>0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，

故函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

同理可证，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上均单调递减.

得分	

21.(12 分)若点 $(\sqrt{2},2)$ 在幂函数 $f(x)$ 的图象上，点 $\left(2,\frac{1}{2}\right)$ 在幂函数 $g(x)$ 的图象上，定义 $h(x)=\begin{cases}f(x),f(x)\leqslant g(x),\\ g(x),f(x)>g(x),\end{cases}$ 求函数 $h(x)$ 的最大值以及单调区间.

解：设 $f(x)=x^{\alpha}$，因为点 $(\sqrt{2},2)$ 在幂函数 $f(x)$ 的图象上，所以 $(\sqrt{2})^{\alpha}=2$，解得 $\alpha=2$，所以 $f(x)=x^2$.

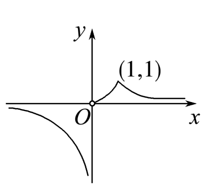
设 $g(x)=x^{\beta}$，因为点 $\left(2,\frac{1}{2}\right)$ 在幂函数 $g(x)$ 的图象上，所以 $2^{\beta}=\frac{1}{2}$，解得 $\beta=-1$，所以 $g(x)=x^{-1}$.

在同一坐标系中画出函数 $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=x^{-1}$ 的图象(图略)，由题意及图象，可知 $h(x)=\begin{cases}x^{-1},x<0\text{ 或 }x>1,\\ x^2,0<x\leqslant 1.\end{cases}$

作出函数 $h(x)$ 的图象如图所示，

可知函数 $h(x)$ 的最大值为 1，

$h(x)$ 的单调递增区间是 $(0,1)$，单调递减区间是 $(-\infty,0)$ 和 $(1,+\infty)$.



得分	

22.(12 分)已知生产某种产品需投入的年固定成本为 3 万元，每生产 x 万件该产品，需另投入变动成本 $W(x)$ 万元，在年产量不足 6 万件时，$W(x)=\frac{1}{2}x^2+x$，在年产量不小于 6 万件时，$W(x)=7x+\frac{81}{x}-37$.每件产品售价为 6 元.假设该产品每年的销量等于当年的产量.

(1)写出年利润 $L(x)$(万元)关于年产量 x(万件)的函数解析式.(注：年利润＝年销售收入－固定成本－变动成本)

(2)年产量为多少万件时，年利润最大？最大年利润是多少？

解：(1)由题可知，$L(x)=6x-3-W(x)$，

所以 $L(x)=\begin{cases}6x-3-\left(\frac{1}{2}x^2+x\right),0<x<6,\\ 6x-3-\left(7x+\frac{81}{x}-37\right),x\geqslant 6\end{cases}$

$=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+5x-3,0<x<6,\\ -x-\frac{81}{x}+34,x\geqslant 6.\end{cases}$

(2)当 $0<x<6$ 时，$L(x)=-\frac{1}{2}x^2+5x-3=-\frac{1}{2}\cdot(x-5)^2+\frac{19}{2}$，

由二次函数的性质知，图象的对称轴为 $x=5$，开口向下，

所以当 $x=5$ 时，$L(x)$ 取得最大值为 $-\frac{1}{2}(5-5)^2+\frac{19}{2}=\frac{19}{2}$；

当 $x\geqslant 6$ 时，$L(x)=-x-\frac{81}{x}+34\leqslant -2\sqrt{x\cdot\frac{81}{x}}+34=16$，当且仅当 $x=\frac{81}{x}$，即 $x=9$ 时，等号成立.

因为 $16>\frac{19}{2}$，所以年产量为 9 万件时，年利润最大，最大年利润是 16 万元.

第四章　指数函数与对数函数

4.1　指数

4.1.1　n 次方根与分数指数幂

学习任务目标

1. 理解根式的概念及分数指数幂的含义.
2. 会进行根式与分数指数幂的互化.
3. 掌握根式的运算性质和有理数指数幂的运算性质.

问题式预习

知识点一　n 次方根

(1)定义：一般地，如果 $x^n=a$，那么 x 叫做 a 的 n 次方根，其中 $n>1$，且 $n\in\mathbf{N}^*$.

(2)性质：

n 是奇数	$a>0$	$x>0$	x 仅有一个值，记为 $\sqrt[n]{a}$
	$a<0$	$x<0$	
n 是偶数	$a>0$	x 有两个值，且互为相反数，记为 $\pm\sqrt[n]{a}$	
	$a<0$	x 不存在	

[微训练]

判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)16 的 4 次方根为 2.　(×)

(2)2 是 16 的 4 次方根.　(√)

(3)$\sqrt[4]{16}$ 的运算结果为 ±2.　(×)

(4)当 n 为大于 1 的奇数时，$\sqrt[n]{a}$ 对任意 $a\in\mathbf{R}$ 都有意义.　(√)

(5)当 n 为大于 1 的偶数时，$\sqrt[n]{a}$ 只有当 $a\geqslant0$ 时才有意义.　(√)

知识点二　根式

(1)定义：式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式，这里 n 叫做根指数，a 叫做被开方数.

(2)性质：当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；当 n 为偶数时，

$$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

[微训练]

求下列各式的值.

(1) $\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$；

(2) $\sqrt{(3-\pi)^2}=\pi-3$.

知识点三　分数指数幂的意义

分数指数幂	正数的正分数指数幂	$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\,(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*,n>1)$
	正数的负分数指数幂	$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\,(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*,n>1)$
	0 的分数指数幂	0 的正分数指数幂等于 0，0 的负分数指数幂没有意义

知识点四　有理数指数幂的运算性质

(1) $a^ra^s=a^{r+s}\,(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$；

(2) $(a^r)^s=a^{rs}\,(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$；

(3) $(ab)^r=a^rb^r\,(a>0,b>0,r\in\mathbf{Q})$.

[微训练]

1. 若 m 是实数，则下列式子中可能没有意义的是　(C)

A. $\sqrt[4]{m^2}$　B. $\sqrt[5]{m}$　C. $\sqrt[6]{m}$　D. $\sqrt[5]{-m}$

2. 计算：$4^{\frac{1}{2}}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}=$　(C)

A. -2　B. -1　C. 0　D. 1

3. (多选)下列运算结果中正确的是　(BD)

A. $a^2\cdot a^3=a^6$　B. $\sqrt[3]{a^3}=a$

C. $(\sqrt{a}-1)^0=1$　D. $(-a^2)^3=-a^6$

任务型课堂

任务一　根式的概念及运算

1.填空：

(1)16 的平方根为$\underline{\pm 4}$，-27 的 3 次方根为$\underline{-3}$；

(2)已知 $x^7=6$，则 $x=\underline{\sqrt[7]{6}}$；

(3)若 $\sqrt[4]{x-2}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是$\underline{[2,+\infty)}$.

2.化简：(1)$\sqrt[n]{(x-\pi)^n}$$(x<\pi,n\in\mathbf{N}^*)$；

(2)$\sqrt{4a^2-4a+1}\left(a\leqslant\dfrac{1}{2}\right)$.

解：(1)因为 $x<\pi$，所以 $x-\pi<0$.

当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{(x-\pi)^n}=|x-\pi|=\pi-x$；

当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{(x-\pi)^n}=x-\pi$.

综上，$\sqrt[n]{(x-\pi)^n}=\begin{cases}\pi-x, n\text{ 为偶数}, n\in\mathbf{N}^*,\\ x-\pi, n\text{ 为奇数}, n\in\mathbf{N}^*.\end{cases}$

(2)$\sqrt{4a^2-4a+1}=\sqrt{(2a-1)^2}=|2a-1|$.

因为 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$，

所以 $2a-1\leqslant0$，所以$\sqrt{4a^2-4a+1}=1-2a$.

【类题通法】

根式化简与求值的思路及注意点

(1)思路：首先要分清根式为奇次根式还是偶次根式，然后运用根式的性质进行化简.

(2)注意点：①正确区分$(\sqrt[n]{a})^n$与$\sqrt[n]{a^n}$两式；

②运算时注意变式、整体代换，以及平方差、立方差、完全平方、完全立方公式的运用，必要时要进行分类讨论.

任务二　根式与分数指数幂的互化

用分数指数幂表示下列各式$(a>0,b>0)$：

(1)$a^2\sqrt{a}$；(2)$\sqrt{a\sqrt{a}}$；

(3)$\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a^3}$；(4)$(\sqrt[3]{a})^2\cdot\sqrt{ab^3}$；

(5)$\sqrt[4]{b^{-\frac{2}{3}}}$；(6)$\dfrac{1}{\sqrt[4]{(a^3+b^3)^2}}$.

解：(1)原式$=a^2a^{\frac{1}{2}}=a^{2+\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{2}}$.

(2)原式$=\sqrt{a\cdot a^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}=a^{\frac{3}{4}}$.

(3)原式$=a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}=a^{\frac{13}{6}}$.

(4)原式$=(a^{\frac{1}{3}})^2\cdot(ab^3)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{3}{2}}$.

(5)原式$=b^{\frac{-\frac{2}{3}}{4}}=b^{-\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}}=b^{-\frac{1}{6}}$.

(6)原式$=[(a^3+b^3)^2]^{-\frac{1}{4}}=(a^3+b^3)^{2\times\left(-\frac{1}{4}\right)}=(a^3+b^3)^{-\frac{1}{2}}$.

【类题通法】

根式与分数指数幂互化的规律与应用

(1)根指数$\xrightarrow{\text{化为}}$分数指数的分母，被开方数(式)的指数$\xrightarrow{\text{化为}}$分数指数的分子.

(2)在具体计算时，通常会把根式转化成分数指数幂的形式，然后利用有理数指数幂的运算性质解题.

任务三　分数指数幂的运算

[探究活动]

探究：观察分数指数幂的运算性质：

(1)$a^sa^t=a^{s+t}$；

(2)$(a^s)^t=a^{st}$；

(3)$(ab)^t=a^tb^t$.

其中 $a>0,b>0,s,t$ 为有理数.

在 $a<0,b<0$ 时，分数指数幂的运算性质成立吗?

提示：不一定成立，如$(-2)^{-\frac{4}{2}}\times(-2)^{\frac{5}{2}}=(-2)^{\frac{1}{2}}$，而$(-2)^{\frac{1}{2}}$无意义，所以$(-2)^{-\frac{4}{2}}\times(-2)^{\frac{5}{2}}=(-2)^{\frac{1}{2}}$不成立，即当 $a<0,b<0$ 时，分数指数幂的运算性质不一定成立.

[评价活动]

计算下列各式：

(1)$2\sqrt{3}\times\sqrt[3]{1.5}\times\sqrt[6]{12}$；

(2)$\left(2\dfrac{7}{9}\right)^{0.5}+0.1^{-2}+\left(2\dfrac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}-3\pi^0+\dfrac{37}{48}$；

(3)$\dfrac{(3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{4}})\times(-8a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}})}{-4\sqrt[6]{a^4}\cdot\sqrt{b^3}}(a>0,b>0)$；

(4)$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{(\sqrt{4ab^{-1}})^3}{0.1^{-2}(a^3b^{-3})^{\frac{1}{2}}}(a>0,b>0)$.

解：(1)原式$=2\times3^{\frac{1}{2}}\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\times12^{\frac{1}{6}}=2^{1+\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=2\times3=6$.

(2)原式$=\left(\dfrac{25}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\dfrac{1}{10}\right)^{-2}+\left(\dfrac{64}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}-3\times1+\dfrac{37}{48}=\dfrac{5}{3}+100+\dfrac{9}{16}-3+\dfrac{37}{48}=100$.

(3)原式$=\dfrac{(-24)\times a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}}{(-4)\times a^{\frac{2}{3}}\times b^{\frac{3}{2}}}=6\times a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}\times$

$b^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}=6a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{4}}$.

(4)原式$=4^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{4^{\frac{3}{2}}\cdot a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{-\frac{3}{2}}}{100\times a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{-\frac{3}{2}}}=\dfrac{2\times8}{100}=\dfrac{4}{25}$.

【类题通法】

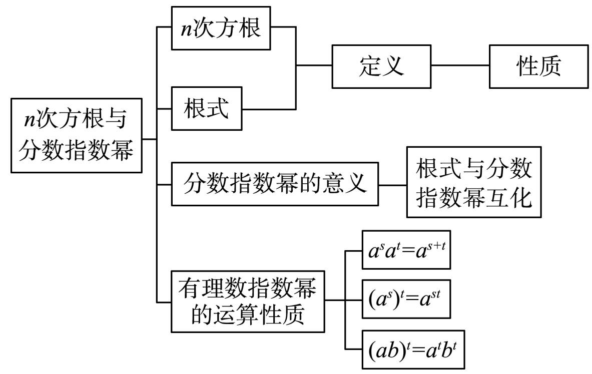
分数指数幂运算的常用技巧

(1)有括号先算括号里的,无括号先进行指数运算.

(2)负指数幂化为正指数幂的倒数.

(3)底数是小数的,先化成分数,底数是带分数的,先化成假分数,然后用指数幂的运算性质进行运算.

▶ 提质归纳



课后素养评价(二十六)

基础性·能力运用

1.若 $a=\sqrt[3]{(3-\pi)^3}$,$b=\sqrt[4]{(2-\pi)^4}$,则 $a+b$ 的值为　(　　)

A.1　　B.5

C.-1　　D.$2\pi-5$

A　**解析**:$a=\sqrt[3]{(3-\pi)^3}=3-\pi$,$b=\sqrt[4]{(2-\pi)^4}=\pi-2$,所以 $a+b=3-\pi+\pi-2=1$.

2.化简$\sqrt[3]{-a}\cdot\sqrt[6]{a}$的结果为　(　　)

A.$-\sqrt{a}$　　B.$-\sqrt{-a}$

C.$\sqrt{-a}$　　D.$\sqrt{a}$

A　**解析**:显然 $a\geqslant0$,

所以$\sqrt[3]{-a}\cdot\sqrt[6]{a}=-a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{6}}=-a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=-a^{\frac{1}{2}}=-\sqrt{a}$.

3.(多选)下列等式中,一定正确的是　(　　)

A.$a^3\cdot a^4=a^7$　　B.$(-a^2)^3=a^6$

C.$\sqrt[8]{a^8}=a$　　D.$\sqrt[5]{(-\pi)^5}=-\pi$

AD　**解析**:对于 A,$a^3\cdot a^4=a^{3+4}=a^7$,正确;对于 B,$(-a^2)^3=-a^6$,错误;对于 C,当 $a\geqslant0$ 时,$\sqrt[8]{a^8}=a$,当 $a<0$ 时,$\sqrt[8]{a^8}=-a$,错误;对于 D,$\sqrt[5]{(-\pi)^5}=-\pi$,正确.

4.计算:$2^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{(-4)^0}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}-\sqrt{(1-\sqrt{5})^0}\cdot8^{\frac{2}{3}}=$________.

$2\sqrt{2}-3$　**解析**:原式$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+(\sqrt{2}+1)-(2^3)^{\frac{2}{3}}$

$=2\sqrt{2}+1-4$

$=2\sqrt{2}-3$.

5.计算:$16^{\frac{3}{4}}-8\times\left(\dfrac{64}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}-8\times\left(\dfrac{8}{7}\right)^{-1}=$________.

-6　**解析**:$16^{\frac{3}{4}}-8\times\left(\dfrac{64}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}-8\times\left(\dfrac{8}{7}\right)^{-1}=8-7-7=-6$.

6.已知 $a>0$,$b>0$,且 $a^b=b^a$,$b=9a$,求 a 的值.

解:(方法一)因为 $a>0$,$b>0$,

又 $a^b=b^a$,

所以$(a^b)^{\frac{1}{b}}=(b^a)^{\frac{1}{b}}\Rightarrow a=b^{\frac{a}{b}}\Rightarrow a=(9a)^{\frac{1}{9}}$,

所以 $a^{\frac{8}{9}}=9^{\frac{1}{9}}\Rightarrow a^8=3^2\Rightarrow a=\sqrt[4]{3}$.

(方法二)因为 $a^b=b^a$,$b=9a$,所以 $a^{9a}=(9a)^a$,

即$(a^9)^a=(9a)^a$,所以 $a^9=9a$,$a^8=9$,$a=\sqrt[4]{3}$.

综合性·创新提升

1.若$\sqrt[n]{a^n}+(\sqrt[n+1]{a})^{n+1}=0$,$a\neq0$,且 $n\in\mathbf{N}^*$,则　(　　)

A.$a>0$,且 n 为偶数

B.$a<0$,且 n 为偶数

C.$a>0$,且 n 为奇数

D.$a<0$,且 n 为奇数

B　**解析**:$(\sqrt[n+1]{a})^{n+1}=a$,$\sqrt[n]{a^n}=-a$,故 n 为偶数且 $a<0$.

2.把$\sqrt[3]{-2\sqrt{2}}$化为分数指数幂的形式是　(　　)

A.$2^{\frac{1}{2}}$　　B.$-2^{\frac{1}{2}}$

C.$2^{-\frac{1}{2}}$　　D.$-2^{-\frac{1}{2}}$

B　**解析**：$\sqrt[3]{-2\sqrt{2}}=(-2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}=(-2\times2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=(-2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}=-2^{\frac{1}{2}}$.

3.(多选)若 $a>0,b>0,m,n$ 都是有理数，则下列各式成立的是　　(　　)

A.$\frac{a^m}{b^n}=a^m\cdot b^{-n}$　　B.$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(\frac{b}{a}\right)^{-m}$

C.$a^m+a^n=a^{mn}$　　D.$a^m\cdot a^{-n}=a^{m-n}$

ABD　**解析**：由有理数指数幂的运算性质，可知 A，B，D 成立.

4.$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=$________.

4　**解析**：$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$.

5. 已知 $\sqrt[4]{(a-1)^4}+1=a$，化简：$\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{(1-a)^2}+\sqrt[3]{(1-a)^3}=$________.

$a-1$　**解析**：由已知$\sqrt[4]{(a-1)^4}+1=a$，即 $|a-1|=a-1$ 知 $a\geqslant1$.

所以原式$=(a-1)+(a-1)+(1-a)=a-1$.

6.化简与计算.

(1)$(m^{\frac{1}{4}}n^{-\frac{3}{8}})^8(m>0,n>0)$；

(2)$8^{\frac{2}{3}}-(0.5)^{-3}+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-6}\times\left(\frac{81}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

解：(1)$(m^{\frac{1}{4}}n^{-\frac{3}{8}})^8=(m^{\frac{1}{4}})^8(n^{-\frac{3}{8}})^8=m^2n^{-3}=\frac{m^2}{n^3}$.

(2)$8^{\frac{2}{3}}-(0.5)^{-3}+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-6}\times\left(\frac{81}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$

$=(2^3)^{\frac{2}{3}}-(2^{-1})^{-3}+(3^{-\frac{1}{2}})^{-6}\times\left[\left(\frac{3}{2}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}}$

$=2^2-2^3+3^3\times\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

$=4-8+27\times\frac{8}{27}$

$=4$.

4.1.2　无理数指数幂及其运算性质

学习任务目标

1.了解指数幂由有理数扩充到无理数的过程.

2.能进行实数指数幂的运算.

问题式预习

知识点　无理数指数幂及实数指数幂的运算性质

一般地，无理数指数幂 $a^\alpha(a>0,\alpha$ 为无理数)是一个确定的实数.整数指数幂的运算性质也适用于实数指数幂，即对于任意实数 r,s，均有下面的运算性质.

(1)$a^ra^s=a^{r+s}(a>0,r,s\in\mathbf{R})$；

(2)$(a^r)^s=a^{rs}(a>0,r,s\in\mathbf{R})$；

(3)$(ab)^r=a^rb^r(a>0,b>0,r\in\mathbf{R})$.

[微训练]

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)α,β 是实数，当 $a>0$ 时，$(a^\alpha)^\beta=(a^\beta)^\alpha$.　(√)

(2)当 $a>0,b>0$ 时，$(a^{\frac{\pi}{2}}+b^{\frac{\pi}{2}})(a^{\frac{\pi}{2}}-b^{\frac{\pi}{2}})=a^\pi-b^\pi$.　(√)

(3)当 $a>0$ 时，$(a-a^{-1})^2=(a+a^{-1})^2-2$.　(×)

(4)$(a^{\sqrt{2}})^2=a^2$.　(×)

(5)$(3^{-2})^{\frac{1}{2}}\times(\sqrt{3})^{-2}=\frac{1}{9}$.　(√)

2.填空：

(1)$(3^{-\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}=\underline{\frac{1}{27}}$.

(2)已知 $5^\alpha=3,5^\beta=2$，则：

①$5^{\alpha+\beta}=\underline{6}$；②$5^{\alpha-\beta}=\underline{\frac{3}{2}}$；

③$5^{-3\alpha}=\underline{\frac{1}{27}}$；④$5^{\frac{\alpha}{2}}=\underline{\sqrt{3}}$.

任务型课堂

任务一　无理数指数幂的运算

计算下列各式：

(1)$(\sqrt{8^{\sqrt{3}}}\times\sqrt[3]{3^{\sqrt{3}}})^{2\sqrt{3}}$；

(2)$a^{\frac{\pi}{6}}a^{\frac{7\pi}{6}}a^{-\frac{4\pi}{3}}(a>0)$；

(3)$\left(\frac{\pi^{\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{\pi^{\sqrt{3}}}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

解：(1)原式$=(2^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\times3^{\frac{\sqrt{3}}{3}})^{2\sqrt{3}}=2^9\times3^2=4\ 608$.

(2)原式$=a^{\frac{\pi}{6}+\frac{7\pi}{6}-\frac{4\pi}{3}}=a^0=1$.

(3)原式 $=\left(\dfrac{\pi^{\sqrt{3}}}{\pi^{\frac{\sqrt{3}}{3}}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=(\pi^{\frac{2\sqrt{3}}{3}})^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\pi$.

【类题通法】

无理数指数幂的运算方法

(1)底数相同时，直接对指数上的无理数进行加减运算；

(2)若式子中含有根式，则先化为分数指数幂再进行运算，一般指数中的根式可以保留.

任务二　实数指数幂的化简与求值

1. 已知 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3(a>0)$，求下列各式的值：

(1)$a+a^{-1}$；(2)a^2+a^{-2}；(3)$\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}$.

解：(1)将 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$ 两边平方，得 $a+a^{-1}+2=9$，所以 $a+a^{-1}=7$.

(2)将 $a+a^{-1}=7$ 两边平方，得 $a^2+a^{-2}+2=49$，所以 $a^2+a^{-2}=47$.

(3)$\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}=\dfrac{(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})(a+a^{-1}+a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}$

$=a+a^{-1}+1=8$.

2. 已知 $x+y=12$，$xy=9$，且 $x<y$，求 $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$ 的值.

解：$\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})^2}{(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})}$

$=\dfrac{(x+y)-2(xy)^{\frac{1}{2}}}{x-y}$①.

因为 $x+y=12$，$xy=9$②，

所以 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=12^2-4\times9=108$.

因为 $x<y$，所以 $x-y=-6\sqrt{3}$③.

将②③代入①得 $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{12-2\times9^{\frac{1}{2}}}{-6\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

【类题通法】

利用整体代换法求值的关键

(1)整体代换法是数学变形与计算常用的技巧方法，分析观察条件与结论的结构特点，灵活运用恒等式是关键；

(2)利用整体代换法解决分数指数幂的计算问题，常常运用完全平方公式及其变形.

提质归纳

- 实数指数幂
  - 无理数指数幂 — 运算性质
    - $a^sa^t=a^{s+t}$
    - $(a^s)^t=a^{st}$
    - $(ab)^t=a^tb^t$
  - 条件求值

课后素养评价(二十七)

基础性·能力运用

1. 化简 $(2a^{-3}b^{-\frac{2}{3}})\cdot(-3a^{-1}b)\div(4a^{-4}b^{-\frac{5}{3}})(a>0,b>0)$ 的结果为　(　　)

A. $-\dfrac{3}{2}b^2$　B. $\dfrac{2}{3}b^2$　C. $-\dfrac{2}{3}b^{\frac{7}{3}}$　D. $\dfrac{3}{2}b^{\frac{7}{3}}$

A　**解析：**$(2a^{-3}b^{-\frac{2}{3}})\cdot(-3a^{-1}b)\div(4a^{-4}b^{-\frac{5}{3}})=\dfrac{2\times(-3)}{4}a^{-3-1-(-4)}b^{-\frac{2}{3}+1-(-\frac{5}{3})}=-\dfrac{3}{2}b^2$.

2. 已知 $m>0$，则 $\sqrt{m^{\frac{1}{2}}\sqrt{m^{\frac{5}{2}}\sqrt{m}}}=$　(　　)

A. $m^{\frac{5}{4}}$　B. $m^{\frac{5}{2}}$　C. m　D. 1

C　**解析：**原式 $=[(m^{\frac{5}{2}}\cdot m^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\cdot m^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}=(m^{\frac{3}{2}}\cdot m^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=m$.

3. 设 $2^a=5^b=m$，且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=2$，则 m 等于　(　　)

A. $\sqrt{10}$　B. 10　C. 20　D. 100

A　**解析：**因为 $2^a=m$，$5^b=m$，所以 $2=m^{\frac{1}{a}}$，$5=m^{\frac{1}{b}}$. 因为 $2\times5=m^{\frac{1}{a}}\cdot m^{\frac{1}{b}}=m^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$，所以 $m^2=10$，所以 $m=\sqrt{10}$. 故选 A.

4. 已知 $a+\dfrac{1}{a}=4$，则 $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}$ 等于　(　　)

A. 2　B. $\sqrt{2}$　C. $-\sqrt{2}$　D. $\pm\sqrt{2}$

D　**解析：**因为 $a+\dfrac{1}{a}=4$，所以 $(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2=a+\dfrac{1}{a}-2=4-2=2$，所以 $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{2}$.

5. 计算：$\dfrac{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\times\sqrt{2^{\sqrt{2}}}}{\sqrt[3]{8^{\sqrt{2}}}}=$________.

1　**解析：**$\dfrac{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\times\sqrt{2^{\sqrt{2}}}}{\sqrt[3]{8^{\sqrt{2}}}}=\dfrac{2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{8^{\frac{\sqrt{2}}{3}}}=\dfrac{2^{\sqrt{2}}}{(2^3)^{\frac{\sqrt{2}}{3}}}=\dfrac{2^{\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}}}=1$.

6. 若 $10^x=3^{-\frac{1}{8}}$，$10^y=\sqrt[4]{27}$，则 $10^{2x-y}=$________.

$\dfrac{1}{3}$　**解析：**$10^{2x-y}=(10^x)^2\div10^y=(3^{-\frac{1}{8}})^2\div\sqrt[4]{27}=3^{-\frac{1}{4}}\div3^{\frac{3}{4}}=\dfrac{1}{3}$.

综合性·创新提升

1.已知 $ab=-5$，则 $a\sqrt{-\frac{b}{a}}+b\sqrt{-\frac{a}{b}}$ 的值是 (　　)

A.$2\sqrt{5}$　　B.0

C.$-2\sqrt{5}$　　D.$\pm2\sqrt{5}$

B　**解析**：由题意知 $ab<0$，

$a\sqrt{-\frac{b}{a}}+b\sqrt{-\frac{a}{b}}$

$=a\sqrt{-\frac{ab}{a^2}}+b\sqrt{-\frac{ab}{b^2}}$

$=a\sqrt{\frac{5}{a^2}}+b\sqrt{\frac{5}{b^2}}$

$=a\frac{\sqrt{5}}{|a|}+b\frac{\sqrt{5}}{|b|}=0$.

2.若 $0<a<1,b>0$，且 $a^b-a^{-b}=-2$，则 a^b+a^{-b} 的值为 (　　)

A.$2\sqrt{2}$　　B.$\pm2\sqrt{2}$

C.$-2\sqrt{2}$　　D.$\sqrt{6}$

A　**解析**：根据题意，$a^b-a^{-b}=-2$，则 $(a^b-a^{-b})^2=a^{2b}+a^{-2b}-2=4$，

则有 $a^{2b}+a^{-2b}=6$，又由 $(a^b+a^{-b})^2=a^{2b}+a^{-2b}+2=6+2=8$，则有 $a^b+a^{-b}=\pm2\sqrt{2}$.

又由 $0<a<1,b>0,a^b+a^{-b}>0$，则有 $a^b+a^{-b}=2\sqrt{2}$.

3.若 $y=(3x-2)^{\frac{1}{2}}+(2-3x)^{\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{6}}{2}$ 有意义，则实数 x,y 的值分别为________.

$\frac{2}{3},\frac{\sqrt{6}}{2}$　**解析**：$y=(3x-2)^{\frac{1}{2}}+(2-3x)^{\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{3x-2}+\sqrt{2-3x}+\frac{\sqrt{6}}{2}$，要使式子有意义必须有 $\begin{cases}3x-2\geqslant0,\\2-3x\geqslant0,\end{cases}$ 解得 $x=\frac{2}{3},y=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

4.$1.5^{-\frac{1}{3}}\times\left(-\frac{7}{6}\right)^0+2^{\frac{\pi}{4}}\times2^{1-\frac{\pi}{4}}+(\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3})^6-\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}}=$________.

110　**解析**：由指数幂的运算法则及根式意义可知，

$1.5^{-\frac{1}{3}}\times\left(-\frac{7}{6}\right)^0+2^{\frac{\pi}{4}}\times2^{1-\frac{\pi}{4}}+(\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3})^6-\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}}$

$=\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}+2+2^2\times3^3-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}+2+4\times27-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}=110$.

5.设 α,β 是方程 $5x^2+10x+1=0$ 的两个根，则 $2^\alpha\cdot2^\beta=$________，$(2^\alpha)^\beta=$________.

$\frac{1}{4}$　$2^{\frac{1}{5}}$　**解析**：利用一元二次方程根与系数的关系，

得 $\alpha+\beta=-2,\alpha\beta=\frac{1}{5}$，则 $2^\alpha\cdot2^\beta=2^{\alpha+\beta}=2^{-2}=\frac{1}{4}$，

$(2^\alpha)^\beta=2^{\alpha\beta}=2^{\frac{1}{5}}$.

6.(1)计算：$\frac{1}{\sqrt{2}-1}+(3-2\sqrt{2})^0-\left(\frac{9}{4}\right)^{-0.5}+\sqrt[4]{(\sqrt{2}-\pi)^4}$；

(2)设 $a>0$，化简：$\frac{\sqrt[3]{a^4\cdot\sqrt{a^{-3}}}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^4}a^4}}$；

(3)若 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$，求 $\frac{x+x^{-1}-1}{x^2+x^{-2}-2}$ 的值.

解：(1)原式 $=\sqrt{2}+1+1-\frac{2}{3}+\pi-\sqrt{2}=\pi+\frac{4}{3}$.

(2)原式 $=\frac{a^{\frac{4}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}}{a^{\frac{2}{3}}\cdot a^2}=a^{-\frac{11}{6}}$.

(3)若 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$，

则 $x+x^{-1}=4,x^2+x^{-2}=14$.

故 $\frac{x+x^{-1}-1}{x^2+x^{-2}-2}=\frac{4-1}{14-2}=\frac{1}{4}$.

4.2　指数函数

4.2.1　指数函数的概念

学习任务目标

1. 理解指数函数的概念.
2. 了解指数函数中底数的限制条件的合理性.
3. 会解决简单的指数增长问题.

问题式预习

知识点一　指数函数的概念

一般地,函数 $y=a^x$($a>0$,且 $a\neq 1$)叫做指数函数,其中指数 x 是自变量,定义域是 $\mathbf{R}$.

［微训练］

1. 下列各函数中,是指数函数的是　(D)

A. $y=(-2)^x$　B. $y=-3^x$

C. $y=4^{1-x}$　D. $y=3^x$

2. 若函数 $y=(2m-5)^x$ 是指数函数,则实数 m 的取值范围是 $\left(\frac{5}{2},3\right)\cup(3,+\infty)$.

知识点二　指数增长模型

在实际问题中,经常会遇到指数增长模型.设原有量为 N,每次的增长率为 p,经过 x 次增长,该量增长到 y,则 $y=N(1+p)^x(x\in\mathbf{N})$.形如 $y=ka^x$($k\in\mathbf{R}$,且 $k\neq 0$;$a>0$,且 $a\neq 1$)的函数是刻画指数增长或指数衰减变化规律的非常有用的函数模型.

［微训练］

1. 已知某种放射性物质经过 100 年剩余原来质量的 95.76%.设质量为 1 的该种物质经过 x 年后的剩余量为 y,则 x,y 之间的函数关系为　(　　)

A. $y=0.957\,6^{\frac{x}{100}}$

B. $y=0.957\,6^{100x}$

C. $y=\left(\frac{0.957\,6}{100}\right)^x$

D. $y=1-0.042^{\frac{x}{100}}$

A　**解析**:特殊值法,将(0,1)和(100,0.957 6)代入各选项,只有 A 正确.

2. 某工厂生产某种产品的月产量 y(单位:万件)与月份 x 之间满足关系 $y=a\left(\frac{3}{2}\right)^x+b$.现已知该厂今年 1 月份、2 月份分别生产该产品 3 万件、5 万件,则此工厂 3 月份生产该产品______万件.

8　**解析**:由已知得 $\begin{cases}\frac{3}{2}a+b=3,\\ \left(\frac{3}{2}\right)^2a+b=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{8}{3},\\ b=-1.\end{cases}$ 所以 $y=\frac{8}{3}\times\left(\frac{3}{2}\right)^x-1$.当 $x=3$ 时,$y=8$.

任务型课堂

任务一　指数函数的概念及解析式

［探究活动］

探究 1:在指数函数 $y=a^x$ 中,为什么要规定 $a>0$,且 $a\neq 1$ 呢?

提示:若 $a=0$,当 $x>0$ 时,a^x 恒等于 0,当 $x<0$ 时,a^x 无意义;若 $a<0$,比如 $y=(-4)^x$,这时当 x 的值为 $\frac{1}{2}$,$\frac{1}{4}$,$\frac{1}{6}$,…时,在实数范围内函数值不存在;若 $a=1$,$y=1^x=1$ 是一个常量,对它没有研究的必要.为了避免上述情况,所以规定 $a>0$,且 $a\neq 1$.

探究 2:指数函数的解析式具有什么样的结构特征呢?

提示:指数函数 $y=a^x$ 的解析式具有以下三个特征:

①底数 a 是大于 0 且不等于 1 的常数;

②指数 x 是自变量,且其系数等于 1;

③a^x 的系数等于 1.

［评价活动］

1. 下列函数:① $y=2\times 3^x$,② $y=3^{x+1}$,③ $y=3^x$,④ $y=$

x^3中，指数函数的个数是 (　　)

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

B　**解析**：3^x 的系数是 2，故①不是指数函数；

$y=3^{x+1}$的指数是 $x+1$，故②不是指数函数；

③中，$y=3^x$ 是指数函数；

$y=x^3$ 中，底数为自变量，指数为常数，故④不是指数函数.所以指数函数的个数是 1.

2.若函数 $y=(a-2)^2a^x$ 是指数函数，则 (　　)

A.$a=1$ 或 $a=3$　　B.$a=1$

C.$a=3$　　D.$a>0$ 且 $a\neq1$

C　**解析**：由指数函数的定义知$\begin{cases}(a-2)^2=1,\\a>0,且\ a\neq1,\end{cases}$解得 $a=3$.

3.已知指数函数 $y=f(x)$，且 $f(2)=4$，则$f(3)$的值为 (　　)

A.4　　B.8　　C.16　　D.1

B　**解析**：设指数函数 $f(x)=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$，则 $a^2=4$，解得 $a=2$ 或 $a=-2$(舍).

所以 $f(x)=2^x$.所以 $f(3)=2^3=8$.

【类题通法】

1.判断一个函数是否为指数函数的方法

(1)判断的依据是指数函数的定义，即函数解析式的三个结构特征；

(2)有些函数需要对解析式变形后判断，如 $y=\frac{1}{2^x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是指数函数.

2.求指数函数解析式的步骤

(1)设指数函数的解析式为 $f(x)=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$；

(2)利用已知条件求底数 a；

(3)写出指数函数的解析式.

任务二　指数增长模型

[探究活动]

探究 1：设原有量为 N，每次的增长率为 p，经过 x 次增长，该量增长到 y，y 与 x 之间的函数关系式是什么？

提示：$y=N(1+p)^x$.

探究 2：设原有量为 N，每次的减少率为 p，经过 x 次减少，该量减少到 y，y 与 x 之间的函数关系式是什么？

提示：$y=N(1-p)^x$.

[评价活动]

1.某地区植树造林，森林面积在 20 年内增加了 5%.若按此规律，设 2021 年的森林面积为 m，从 2021 年起，经过 x 年后森林面积 y 与 x 的函数关系式为 (　　)

A.$y=\frac{1.05mx}{20}$　　B.$y=\left(1-\frac{0.05x}{20}\right)m$

C.$y=m(1+5\%)^{\frac{x}{20}}$　　D.$y=[1+(5\%)^x]m$

C　**解析**：设平均每年增加 $a\%$，则$(1+a\%)^{20}=1+5\%$，所以 $1+a\%=(1+5\%)^{\frac{1}{20}}$，可知，经过 x 年后森林面积 y 与 x 的函数关系式为 $y=m(1+5\%)^{\frac{x}{20}}$.

2.据不完全统计，某地从 2017 年到 2022 年间，患呼吸道疾病的人数平均每年上升 2%.按这个增长率进行研究，设从 2017 年开始经过 $x(x\in\mathbf{N}^*)$年，患呼吸道疾病的人数为 y，若 2022 年患呼吸道疾病人数为 11 万.(参考数据：$1.02^3\approx1.06$，$1.02^5\approx1.1$)

(1)试计算出 2017 年患呼吸道疾病的人数.

(2)写出 x，y 之间的关系式，并计算 2025 年患呼吸道疾病的人数.

解：(1)设 2017 年患呼吸道疾病的人数为 a 万，

则 $a(1+2\%)^5=11$，即 $a\times1.02^5=11$.

因为 $1.02^5\approx1.1$，所以 $a\approx10$，

所以 2017 年患呼吸道疾病的人数约为 10 万.

(2)2018 年患呼吸道疾病的人数为 $10(1+2\%)$，

2019 年患呼吸道疾病的人数为 $10(1+2\%)+10(1+2\%)\times2\%=10(1+2\%)^2$，

2020 年患呼吸道疾病的人数为 $10(1+2\%)^2+10(1+2\%)^2\times2\%=10(1+2\%)^3$，

……

x 年后患呼吸道疾病的人数为 $10(1+2\%)^x$.

故 $y=10(1+2\%)^x=10\times1.02^x(x\in\mathbf{N}^*)$.

当 $x=8$ 时，$y=10\times1.02^8=10\times1.02^5\times1.02^3\approx10\times1.1\times1.06=11.66$.

所以 2025 年患呼吸道疾病的人数约为 11.66 万.

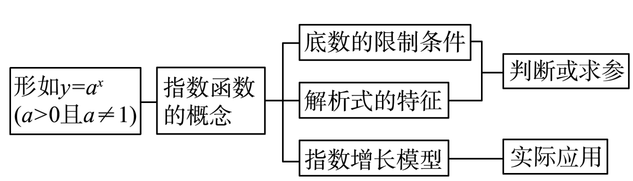
【类题通法】

利用函数 $y=ka^x$ 解决实际问题的策略

(1)函数 $y=ka^x$ 可用来刻画实际问题中的指数增长或指数衰减变化规律，一般地，当 $k>0$ 时，若 $a>1$，则刻画指数增长变化规律，若 $0<a<1$，则刻画指数衰减变化规律.

(2)解决此类问题可利用待定系数法，根据条件确定出解析式中的系数后，利用指数运算解题.

提质归纳



课后素养评价（二十八）

基础性·能力运用

1. 函数 $y=(a^2-4a+4)a^x$ 是指数函数，则 a 的值是　（　　）

A.4　　B.1 或 3

C.3　　D.1

C　**解析**：由题意，得 $\begin{cases}a>0,\\a\neq1,\\a^2-4a+4=1,\end{cases}$ 解得 $a=3$.

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x,x<0,\\3^x,x>0,\end{cases}$ 则 $f(f(-1))=$　（　　）

A.2　　B.$\sqrt{3}$　　C.0　　D.$\frac{1}{2}$

B　**解析**：$f(-1)=2^{-1}=\frac{1}{2}$，

$f(f(-1))=f\left(\frac{1}{2}\right)=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$.

3. 某校图书馆的藏书两年内从 5 万册增加到 7.2 万册，则这两年的平均增长率为　（　　）

A.10%　　B.12%　　C.20%　　D.25%

C　**解析**：设两年的平均增长率为 x，则可列出方程：$5(1+x)^2=7.2$，

解得 $x=0.2$ 或者 $x=-2.2$（舍）.

4. 放射性物质的半衰期为 T 的含义为每经过时间 T，该物质的质量会衰减为原来的一半.某铅制容器中有两种放射性物质 A，B，开始记录时，容器中物质 A 的质量是物质 B 的质量的 2 倍，而 120 h 后两种物质的质量相等.已知物质 A 的半衰期为7.5小时，则物质 B 的半衰期为　（　　）

A.10 h　　B.8 h

C.12 h　　D.15 h

B　**解析**：由题意得 $\frac{120}{7.5}=16$.又不妨设 $m_B=1$，则 $m_A=2$.

设物质 B 的半衰期为 t.由题意可得 $2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{16}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{120}{t}}$，解得 $t=8$.故选 B.

5. 据报道，某淡水湖的湖水在 50 年内减少了 10%.若每年湖水以相同的衰减率呈指数衰减，按此规律，设 2022 年的湖水量为 m，从 2022 年起，经过 x 年后湖水量为 y，则 y 与 x 的函数关系为　（　　）

A.$y=0.9^{\frac{x}{50}}$

B.$y=(1-0.1^{\frac{x}{50}})m$

C.$y=0.9^{\frac{x}{50}}m$

D.$y=(1-0.1^{50x})m$

C　**解析**：设每年的衰减率为 $q\%$，

则 $(1-q\%)^{50}=0.9$.所以 $1-q\%=0.9^{\frac{1}{50}}$.

所以 $y=m\cdot(1-q\%)^x=0.9^{\frac{x}{50}}m$.

6. 已知函数 $f(x+2)=2^x+x-2$，则 $f(x)=$　（　　）

A.$2^{x-2}+x-4$　　B.$2^{x-2}+x-2$

C.$2^{x+2}+x$　　D.$2^{x+2}+x-2$

A　**解析**：设 $t=x+2$，则 $x=t-2$.所以 $f(t)=2^{t-2}+t-2-2=2^{t-2}+t-4$.所以 $f(x)=2^{x-2}+x-4$.故选 A.

7. 地震的震级越大，以地震波的形式从震源释放出的能量就越大，震级 M 与所释放的能量 E 的关系如下：$E=10^{4.8+1.5M}$.那么，7.5 级地震释放的能量是 5.5 级地震释放的能量的 $\underline{10^3}$ 倍.

8. 复利是把前一期的利息和本金加在一起作本金，再计算下一期利息的一种计算利息的方法.某人向银行贷款 10 万元，约定按年利率 7% 的复利计算利息.

(1)写出 x 年后，需要还款总数 y（单位：万元）和 x（单位：年）之间的函数关系式；

(2)计算 5 年后的还款总额（精确到元）；

(3)如果该人从贷款的第二年起，每年向银行还款 a 元，分 5 次还清，求每次还款的金额 a（精确到元）.

（参考数据：$1.07^3\approx1.225\ 0$，$1.07^4\approx1.310\ 8$，$1.07^5\approx1.402\ 552$，$1.07^6\approx1.500\ 730$）

解：(1)$y=10\cdot(1+7\%)^x$，定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{N}^*\}$.

(2)5 年后的还款总额为 $y=10\times(1+7\%)^5=10\times1.07^5\approx14.025\ 5$.故 5 年后还款总额为 140 255 元.

(3)由已知得，$a(1+1.07+1.07^2+1.07^3+1.07^4)\approx14.025\ 5$，解得 $a\approx2.438\ 9$.故每次还款的金额为 24 389元.

综合性·创新提升

1. 若函数 $f(x)=(a-3)\cdot a^x$ 是指数函数，则 $f(2)$ 的值为（　　）

A.4　　B.8　　C.2　　D.16

D　**解析**：因为函数 $f(x)$ 是指数函数，所以 $a-3=1$，所以 $a=4$.

所以 $f(x)=4^x$，$f(2)=4^2=16$.

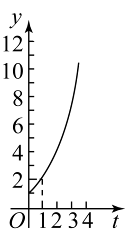
2. 设 $f(x)=\begin{cases}2^x, x\leqslant 8,\\ f(x-8), x>8,\end{cases}$ 则 $f(17)=$（　　）

A.2　　B.4　　C.8　　D.16

A　**解析**：因为 $f(x)=\begin{cases}2^x, x\leqslant 8,\\ f(x-8), x>8,\end{cases}$

所以 $f(17)=f(9)=f(1)=2^1=2$. 故选 A.

3.（多选）某湖泊中的蓝藻面积 y（单位：m^2）与时间 t（单位：月）之间的关系满足 $y=a^t$，且 $y=a^t$ 的图象如图所示，则下列说法正确的是（　　）



A. 每个月蓝藻面积的增长率为 100%

B. 每个月蓝藻增加的面积都相等

C. 第 6 个月时，蓝藻面积就会超过 60 m^2

D. 若蓝藻面积增加到 2 m^2，3 m^2，6 m^2 所经过的时间分别是 t_1，t_2，t_3，则一定有 $t_1+t_2=t_3$

ACD　**解析**：由图可知，函数 $y=a^t$ 的图象经过 $(1,2)$，即 $a^1=2$，则 $a=2$，所以 $y=2^t$，

蓝藻每个月的面积是上个月的 2 倍，则每个月的增长率为 100%，A 正确，又 $2^{t+1}-2^t=2^t$ 不是常数，B 错误；当 $t=6$ 时，$y=2^6=64>60$，C 正确；

若蓝藻面积增加到 2 m^2，3 m^2，6 m^2 所经过的时间分别是 t_1，t_2，t_3，则 $2^{t_1}=2$，$2^{t_2}=3$，$2^{t_3}=6$，则 $2^{t_1}\cdot 2^{t_2}=2\times 3$，即 $2^{t_1+t_2}=6=2^{t_3}$，所以 $t_1+t_2=t_3$，D 正确. 故选 ACD.

4. 已知 $f(x)$ 是指数函数，且 $f(1+\sqrt{3})\cdot f(1-\sqrt{3})=9$，则 $f(2+\sqrt{17})\cdot f(2-\sqrt{17})$ 的值为________.

81　**解析**：因为 $f(x)$ 是指数函数，所以可设 $f(x)=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$.

因为 $f(1+\sqrt{3})\cdot f(1-\sqrt{3})=9$，所以 $a^{1+\sqrt{3}}\cdot a^{1-\sqrt{3}}=a^2=9$，即 $a=3$.

所以 $f(2+\sqrt{17})\cdot f(2-\sqrt{17})=3^{2+\sqrt{17}}\cdot 3^{2-\sqrt{17}}=3^4=81$.

5. 已知函数 $f(x)=3^x-1$，且 $[f(a)+1]\cdot[f(b)+1]=27$，则 $f(a+b)=$ $\underline{26}$.

6. 已知函数 $f(x)=(a^2+a-5)a^x$ 是指数函数.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式.

(2) 判断函数 $F(x)=f(x)-f(-x)$ 的奇偶性，并证明.

解：(1) 因为函数 $f(x)=(a^2+a-5)a^x$ 是指数函数，

所以 $a^2+a-5=1$ 且 $a>0$ 且 $a\neq 1$，解得 $a=2$，

故 $f(x)=2^x$.

(2) $F(x)$ 为奇函数，证明如下：

$F(x)=f(x)-f(-x)=2^x-2^{-x}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

对 $\forall x\in\mathbf{R}$，$-x\in\mathbf{R}$，

$F(-x)=2^{-x}-2^x=-(2^x-2^{-x})=-F(x)$，

故 $F(x)$ 为奇函数.

4.2.2　指数函数的图象和性质

第 1 课时　指数函数的图象和性质

学习任务目标

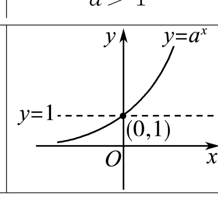
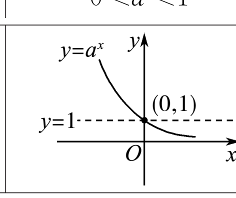
1. 能画出具体指数函数的图象，探索并理解指数函数的单调性与特殊点.
2. 掌握指数函数的性质，能利用指数函数的单调性比较幂的大小及解不等式.

问题式预习

知识点　指数函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的图象和性质

1. 若点 (x,y) 在指数函数 $\underline{y=a^x}(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的图象上，则点 $(-x,y)$ 在指数函数 $\underline{y=\left(\frac{1}{a}\right)^x}$ 的图象上. 反之亦然，即底数互为倒数的两个指数函数的图象关于 $\underline{y}$ 轴对称.

2. 指数函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的图象和性质

	$a>1$	$0<a<1$
图象		

续表

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td>$a>1$</td><td>$0<a<1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">定义域</td><td colspan="2">$\mathbf{R}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">值域</td><td colspan="2">$(0,+\infty)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">性质</td><td>定点</td><td colspan="2">过定点$(0,1)$，即 $x=0$ 时，$y=1$</td></tr>
<tr><td>函数值的变化</td><td>当 $x>0$ 时，$y>1$；当 $x<0$ 时，$0<y<1$</td><td>当 $x>0$ 时，$0<y<1$；当 $x<0$ 时，$y>1$</td></tr>
<tr><td>单调性</td><td>在 $\mathbf{R}$ 上是增函数</td><td>在 $\mathbf{R}$ 上是减函数</td></tr>
</table>

［微训练］

1. 判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”)．

(1)指数函数的图象一定在 x 轴的上方．　(√)

(2)当 $a>1$ 时，对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 总有 $a^x>1$．　(×)

(3)函数 $f(x)=2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数．　(×)

2. 若函数 $y=(1-2a)^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，则实数 a 的取值范围为________．

$(-\infty,0)$　**解析**：由题意知，此函数为指数函数，且为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，所以底数 $1-2a>1$，解得 $a<0$．

任务型课堂

任务一　指数型函数的定义域

1. $y=0.3^{\frac{1}{x-1}}$ 的定义域为________．

$\{x\mid x\neq1\}$　**解析**：由 $x-1\neq0$ 得 $x\neq1$．所以函数的定义域为 $\{x\mid x\neq1\}$．

2. $y=3^{\sqrt{5x-1}}$ 的定义域为________．

$\left\{x\,\middle|\,x\geqslant\frac{1}{5}\right\}$　**解析**：由 $5x-1\geqslant0$ 得 $x\geqslant\frac{1}{5}$．

所以函数的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\geqslant\frac{1}{5}\right\}$．

【类题通法】

函数 $y=a^{f(x)}$ 的定义域与 $f(x)$ 的定义域相同．

任务二　指数函数图象的简单应用

1. 已知函数 $y=a^{x-a}+b(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象恒过定点 $(2,2)$，则 a,b 的值分别为　(　　)

A. 1，2　　B. 2，1

C. 2，2　　D. 1，1

B　**解析**：由于函数 $y=a^{x-a}+b$ 的图象恒过定点 $(2,2)$，所以 $a^{2-a}+b=2$ 恒成立，故 $a=2$，$b=1$．

2. 若 $a>1$，$-1<b<0$，则函数 $y=a^x+b$ 的图象一定过　(　　)

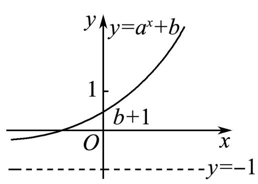
A. 第一、二、三象限

B. 第一、三、四象限

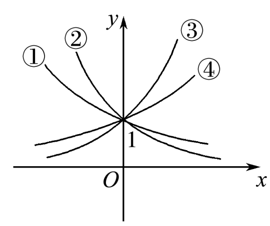
C. 第二、三、四象限

D. 第一、二、四象限

A　**解析**：因为 $a>1$，$-1<b<0$，故函数 $y=a^x+b$ 的大致图象如图所示，过第一、二、三象限．



3. 如图是指数函数①$y=a^x$，②$y=b^x$，③$y=c^x$，④$y=d^x$ 的图象，则 a,b,c,d 与 1 的大小关系是　(　　)



A. $a<b<1<c<d$

B. $b<a<1<d<c$

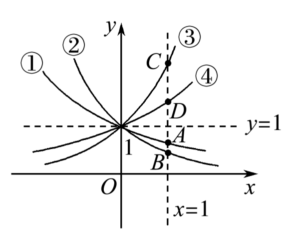
C. $1<a<b<c<d$

D. $a<b<1<d<c$

B　**解析**：(方法一)在 y 轴的右侧，指数函数的图象由下到上，底数依次增大．

由指数函数图象的升降，知 $c>d>1$，$b<a<1$．所以 $b<a<1<d<c$．

(方法二)作直线 $x=1$，与四个图象分别交于 A,B,C,D 四点．因为 $x=1$ 时的函数值等于底数的大小，所以四个交点的纵坐标越大，则底数越大．由图可知 $b<a<1<d<c$．故选 B．



【类题通法】

1. 形如 $y=k\cdot a^{x+c}+b(k\neq0,a>0,a\neq1)$ 的函数图象过定点的问题的解决办法：

令指数 $x+c=0$，即 $x=-c$，得 $y=k+b$，函数图象过定点 $(-c,k+b)$．

2.解决与指数函数图象有关的问题应把握三点：

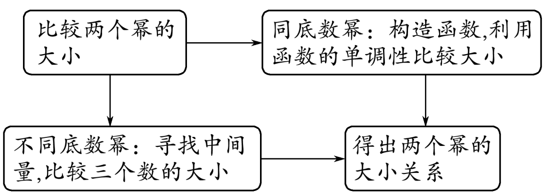
(1)根据图象“上升”或“下降”确定底数 $a>1$ 或 $0<a<1$.

(2)在 y 轴右侧，指数函数的图象从下到上相应的底数由小到大；在 y 轴左侧，指数函数的图象从下到上相应的底数由大到小.

(3)根据“左加右减，上加下减”的原则，确定图象的平移变换，从而确定指数型函数的解析式.

任务三　利用指数函数的单调性比较大小

[探究活动]



探究1：比较 3^2 与 $3^{\sqrt{2}}$，2^3 与 $(\sqrt{2})^3$ 的大小可分别构造什么的指数函数？

提示：比较 3^2 与 $3^{\sqrt{2}}$ 的大小可构造函数 $y=3^x$，比较 2^3 与 $(\sqrt{2})^3$ 的大小可先把 $(\sqrt{2})^3$ 转化为 $2^{\frac{3}{2}}$，构造函数 $y=2^x$.

探究2：如何判断构造出的指数函数的单调性？

提示：可根据底数与1的大小关系判断该函数的单调性.

探究3：依据指数函数的性质，如果两个幂底数不同，寻找的中间量可能是多少？

提示：由于无论指数函数的底数是大于1，还是大于0且小于1，函数的图象都过点(0,1)，所以中间量一般可考虑1.

[评价活动]

比较下列各组数的大小.

(1)$1.5^{2.5}$ 和 $1.5^{3.2}$；

(2)$0.6^{-1.2}$ 和 $0.6^{-1.5}$；

(3)$1.7^{0.2}$ 和 $0.9^{2.1}$；

(4)$a^{1.1}$ 与 $a^{0.3}$ $(a>0$，且 $a\neq1)$.

解：(1)$1.5^{2.5}$，$1.5^{3.2}$ 可看作函数 $y=1.5^x$ 的两个函数值.由于底数 $1.5>1$，所以函数 $y=1.5^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.因为 $2.5<3.2$，所以 $1.5^{2.5}<1.5^{3.2}$.

(2)$0.6^{-1.2}$，$0.6^{-1.5}$ 可看作函数 $y=0.6^x$ 的两个函数值.因为函数 $y=0.6^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，且 $-1.2>-1.5$，所以 $0.6^{-1.2}<0.6^{-1.5}$.

(3)由指数函数的性质得

$1.7^{0.2}>1.7^0=1$，$0.9^{2.1}<0.9^0=1$，

所以 $1.7^{0.2}>0.9^{2.1}$.

(4)当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，此时 $a^{1.1}>a^{0.3}$；

当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，此时 $a^{1.1}<a^{0.3}$.

【类题通法】

比较幂的大小的方法

(1)同底数幂比较大小时，构造指数函数，根据其单调性比较；

(2)指数相同底数不同时，分别画出以两幂底数为底数的指数函数图象，比较当 x 取相同指数的值时图象的高低，得出函数值的大小；

(3)底数、指数都不相同时，取与其中一底数相同与另一指数相同的幂与两数比较，或借助“1”与两数比较；

(4)当底数含参数时，要按底数与1的大小关系分类讨论.

任务四　利用指数函数的单调性解不等式

1.不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1}\leqslant2$ 的解集为________.

$\{x|x\geqslant0\}$　**解析：**因为 $2=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$，所以原不等式可以转化为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$.

因为 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，

所以 $3x-1\geqslant-1$.所以 $x\geqslant0$.

故原不等式的解集是 $\{x|x\geqslant0\}$.

2.解关于 x 的不等式 $a^{2x+1}\leqslant a^{x-5}$ $(a>0$，且 $a\neq1)$.

解：当 $0<a<1$ 时，因为 $a^{2x+1}\leqslant a^{x-5}$，

所以 $2x+1\geqslant x-5$，解得 $x\geqslant-6$.

当 $a>1$ 时，因为 $a^{2x+1}\leqslant a^{x-5}$，

所以 $2x+1\leqslant x-5$，解得 $x\leqslant-6$.

综上，当 $0<a<1$ 时，不等式的解集为 $\{x|x\geqslant-6\}$；当 $a>1$ 时，不等式的解集为 $\{x|x\leqslant-6\}$.

3.解关于 x 的不等式 $a^{x^2-3x+1}<a^{x+6}$ $(a>0$，且 $a\neq1)$.

解：①当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)=a^x$ $(a>0$，且 $a\neq1)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

所以 $x^2-3x+1>x+6$.

所以 $x^2-4x-5>0$.

解得 $x<-1$ 或 $x>5$.

②当 $a>1$ 时，函数 $f(x)=a^x$ $(a>0$，且 $a\neq1)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

所以 $x^2-3x+1<x+6$.所以 $x^2-4x-5<0$.

解得 $-1<x<5$.

综上所述，当 $0<a<1$ 时，解集为 $\{x|x<-1$ 或 $x>5\}$；当 $a>1$ 时，解集为 $\{x|-1<x<5\}$.

【类题通法】

利用指数函数的单调性解不等式的步骤

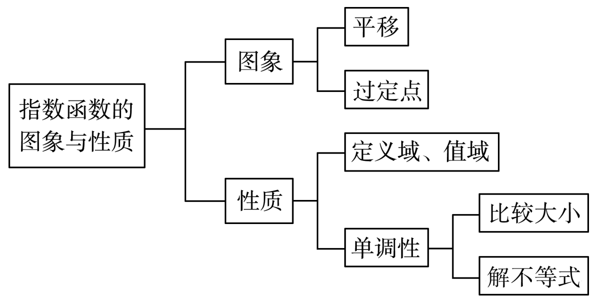
(1)将不等式两边都化成底数相同的指数式;

(2)根据底数的取值范围,利用指数函数的单调性去掉底数;

(3)求由指数构成的不等式的解集.

注意:若底数不确定,则需进行分类讨论.

提质归纳



课后素养评价(二十九)

基础性·能力运用

1. 函数 $y=a^{x-1}+1(a>0$,且 $a\neq1)$ 的图象必经过一个定点,则这个定点的坐标是　(　　)

A.(0,1)　　B.(1,2)

C.(2,3)　　D.(3,4)

B　**解析**:函数 $y=a^{x-1}+1(a>0$,且 $a\neq1)$ 的图象必经过一个定点,

当 $x=1$ 时,$y=a^{x-1}+1=a^0+1=2$,所以函数 $y=a^{x-1}+1$ 的图象过定点(1,2).

2. 下列选项正确的是　(　　)

A.$0.6^{2.5}>0.6^3$　　B.$1.7^{-\frac{1}{3}}<1.7^{-\frac{1}{2}}$

C.$1.1^{1.5}<0.7^{2.1}$　　D.$2^{\frac{1}{2}}>3^{\frac{1}{2}}$

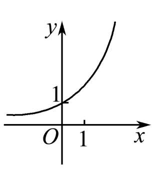
A　**解析**:因为指数函数 $y=0.6^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,且 $2.5<3$,所以 $0.6^{2.5}>0.6^3$,故 A 正确;

因为指数函数 $y=1.7^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,且 $-\frac{1}{3}>-\frac{1}{2}$,所以 $1.7^{-\frac{1}{3}}>1.7^{-\frac{1}{2}}$,故 B 错误;

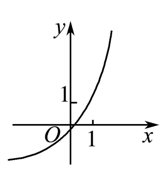
因为 $1.1^{1.5}>1.1^0=1$,$0<0.7^{2.1}<0.7^0=1$,所以 $1.1^{1.5}>0.7^{2.1}$,故 C 错误;

因为 $(2^{\frac{1}{2}})^6=2^3=8$,$(3^{\frac{1}{3}})^6=3^2=9$,所以 $2^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{1}{3}}$,故 D 错误.

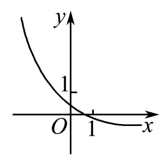
3. 函数 $y=a^x-\frac{1}{a}(a>0$,且 $a\neq1)$ 的图象可能是　(　　)



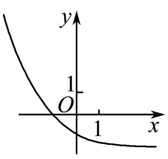
A



B



C



D

D　**解析**:当 $a>1$ 时,$y=a^x-\frac{1}{a}$ 为增函数,当 $x=0$ 时,$y=1-\frac{1}{a}$.由 $0<1-\frac{1}{a}<1$,排除 A,B.当 $0<a<1$ 时,$y=a^x-\frac{1}{a}$ 为减函数,且 $1-\frac{1}{a}<0$.故选 D.

4. (多选)若函数 $y=a^x+b-1(a>0$,且 $a\neq1)$ 的图象不经过第二象限,则需同时满足　(AD)

A.$a>1$　　B.$0<a<1$

C.$b>0$　　D.$b\leqslant0$

5. (多选)$2^x>1$ 的充分不必要条件可以是　(　　)

A.$x<0$　　B.$x>0$

C.$0<x<1$　　D.$x>1$

CD　**解析**:由 $2^x>1$,则 $2^x>2^0$,即 $x>0$.

$x<0$ 是既不充分也不必要条件,$x>0$ 是充要条件,$0<x<1$ 和 $x>1$ 均是充分不必要条件.故选 CD.

6. 函数 $y=3^{-x}$ 与 $y=-3^x$ 的图象　(　　)

A.关于 x 轴对称

B.关于 y 轴对称

C.关于原点对称

D.关于直线 $y=x$ 对称

C　**解析**:在函数 $y=3^{-x}$ 的图象上任意取一点 $A(x,3^{-x})$,则点 A 关于原点的对称点为 $B(-x,-3^{-x})$,显然,点 B 在函数 $y=-3^x$ 的图象上,故函数 $y=3^{-x}$ 与函数 $y=-3^x$ 的图象关于原点对称.

7.函数 $y=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}}$ 的定义域是______________.

$[0,+\infty)$　**解析**:由 $1-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\geqslant0$ 得 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\leqslant1=\left(\frac{1}{2}\right)^{0}$,所以 $x\geqslant0$,所以函数 $y=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$.

8.关于指数函数,有下列几个命题:

①指数函数的定义域为 $(0,+\infty)$;

②指数函数的值域不含 1;

③指数函数 $f(x)=3^{x}$ 和 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ 的图象关于 y 轴对称;

④指数函数都是单调函数.

其中正确的命题有③④(填序号).

9.比较下列各组数的大小.

(1)$\left(\frac{2}{5}\right)^{0.3}$ 与 $\left(\frac{2}{5}\right)^{\pi}$;

(2)$\left(\frac{2}{3}\right)^{3}$ 与 $2^{\frac{3}{2}}$;

(3)$\left(\frac{2}{5}\right)^{0.3}$ 与 $0.3^{\frac{2}{5}}$.

解:(1)因为 $0<\frac{2}{5}<1$,所以函数 $y=\left(\frac{2}{5}\right)^{x}$ 在 **R** 上单调递减.

又 $0.3<\pi$,所以 $\left(\frac{2}{5}\right)^{0.3}>\left(\frac{2}{5}\right)^{\pi}$.

(2)因为 $\left(\frac{2}{3}\right)^{3}<1,2^{\frac{3}{2}}>1$,

所以 $\left(\frac{2}{3}\right)^{3}<2^{\frac{3}{2}}$.

(3)函数 $y=x^{0.3}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

由 $\frac{2}{5}>0.3$,可得 $\left(\frac{2}{5}\right)^{0.3}>0.3^{0.3}$.①

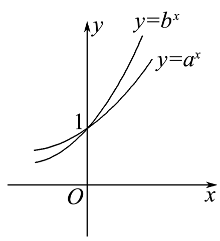
又函数 $y=0.3^{x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减,

所以 $0.3^{0.3}>0.3^{\frac{2}{5}}$.②

由①②知 $\left(\frac{2}{5}\right)^{0.3}>0.3^{\frac{2}{5}}$.

综合性·创新提升

1.(多选)已知函数 $y=a^{x}$,$y=b^{x}$($a,b>0$,且 $a\neq1,b\neq1$)的图象如图所示,则下列结论正确的是(　　)



A.$a>b>1$　　B.$0<a<b<1$

C.$2^{a}<2^{b}$　　D.$b>a>1$

CD　**解析**:由图象可知 $b>a>1$,所以 $2^{b}>2^{a}$.

2.已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $(1,2)$,则函数 $f(2^{x})$ 的定义域是　　(A)

A.$(0,1)$　B.$(2,4)$　C.$\left(\frac{1}{2},1\right)$　D.$(1,2)$

3.设 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的函数,且 $y=f(x+1)$ 是偶函数,当 $x\geqslant1$ 时,$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-1$,则 $f\left(\frac{2}{3}\right)$,$f\left(\frac{3}{2}\right)$,$f\left(\frac{1}{3}\right)$ 的大小关系是(　　)

A.$f\left(\frac{2}{3}\right)>f\left(\frac{3}{2}\right)>f\left(\frac{1}{3}\right)$

B.$f\left(\frac{2}{3}\right)>f\left(\frac{1}{3}\right)>f\left(\frac{3}{2}\right)$

C.$f\left(\frac{3}{2}\right)>f\left(\frac{2}{3}\right)>f\left(\frac{1}{3}\right)$

D.$f\left(\frac{1}{3}\right)>f\left(\frac{3}{2}\right)>f\left(\frac{2}{3}\right)$

A　**解析**:函数 $y=f(x+1)$ 是偶函数,所以 $f(-x+1)=f(x+1)$,即函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称.

所以 $f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{4}{3}\right)$,$f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{5}{3}\right)$.

当 $x\geqslant1$ 时,$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-1$ 单调递减,

由 $\frac{4}{3}<\frac{3}{2}<\frac{5}{3}$,可得 $f\left(\frac{4}{3}\right)>f\left(\frac{3}{2}\right)>f\left(\frac{5}{3}\right)$,

即 $f\left(\frac{2}{3}\right)>f\left(\frac{3}{2}\right)>f\left(\frac{1}{3}\right)$.故选 A.

4.不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^{2}-8}-2^{-2x}\geqslant0$ 的解集是(　　)

A.$[-2,4]$

B.$(-\infty,-2]\cup[4,+\infty)$

C.$[-4,2]$

D.$[-2,0]$

A　**解析**:由原不等式可得 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^{2}-8}\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$.

因为函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 在 **R** 上单调递减,所以 $x^{2}-8\leqslant2x$,即 $x^{2}-2x-8\leqslant0$,解得 $-2\leqslant x\leqslant4$.

5.设 $y_1=4^{0.9}$,$y_2=8^{0.48}$,$y_3=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1.5}$,则 y_1,y_2,y_3

的大小关系为__________.

$y_1>y_3>y_2$　**解析**：因为 $y_1=4^{0.9}=2^{1.8}$，$y_2=8^{0.48}=2^{1.44}$，$y_3=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1.5}=2^{1.5}$，

且函数 $y=2^x$ 在定义域内是增函数，

而 $1.8>1.5>1.44$，

所以 $2^{1.8}>2^{1.5}>2^{1.44}$，

即 $y_1>y_3>y_2$.

6.求下列函数的定义域.

(1)$y=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}(a>0$，且 $a\neq1)$；

(2)$y=0.3^{\frac{1}{x-1}}$；

(3)$y=3^{\sqrt{5x-1}}$.

解：(1)由 $a^x-1\neq0$，得 $a^x\neq1$，所以 $x\neq0$.

所以函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

(2)由 $x-1\neq0$，得 $x\neq1$，所以函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

(3)由 $5x-1\geqslant0$，得 $x\geqslant\frac{1}{5}$，所以函数的定义域为 $\left\{x\middle|x\geqslant\frac{1}{5}\right\}$.

7.若函数 $f(x)=(k+3)a^x+3-b(a>1)$ 是指数函数.

(1)求 k,b 的值；

(2)解不等式 $f(2x-7)>f(4x-3)$.

解：(1)因为函数 $f(x)=(k+3)a^x+3-b(a>1)$ 是指数函数，

所以 $k+3=1,3-b=0$，所以 $k=-2,b=3$.

(2)由(1)得 $f(x)=a^x(a>1)$，则函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

因为 $f(2x-7)>f(4x-3)$，

所以 $2x-7>4x-3$，解得 $x<-2$.

即不等式的解集为 $\{x|x<-2\}$.

第 2 课时　指数函数的图象和性质的应用

学习任务目标

1.掌握指数函数的图象特征，会利用图象变换解决简单的问题.

2.掌握指数函数的性质，会利用指数函数的性质研究指数型函数的单调性与值域.

任务型课堂

任务一　指数型函数的图象

[探究活动]

探究 1：指数型函数 $y=a^{x\pm m}(a>0$，且 $a\neq1,m>0)$ 的图象是由指数函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象如何变化得来的？

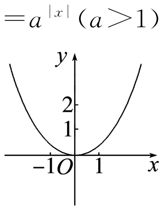
提示：由 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象向左(+)或向右(−)平移 m 个单位长度得到.

探究 2：指数型函数 $y=a^x\pm n(a>0$，且 $a\neq1,n>0)$ 的图象是由指数函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象如何变化得来的？

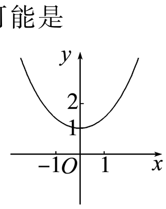
提示：由 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象向上(+)或向下(−)平移 n 个单位长度得到.

[评价活动]

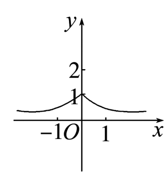
1.函数 $y=a^{|x|}(a>1)$ 的图象可能是　(B)



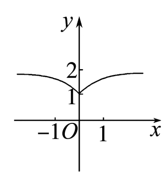
A



B

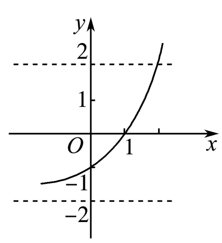


C

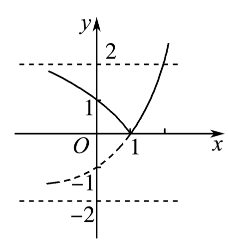


D

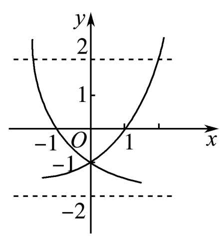
2.函数 $y=|2^x-2|$ 的图象大致是　(B)



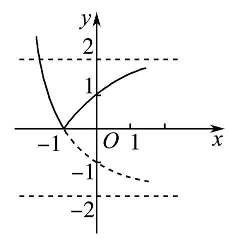
A



B



C



D

【类题通法】

函数图象的翻折变换

$y=|f(x)|$的图象：可将$y=f(x)$的图象在x轴下方的部分关于x轴翻折，其余部分不变

翻折变换

$y=f(|x|)$的图象：可先作出$y=f(x)$在y轴上及y轴右边的图象，再作y轴右边的图象关于y轴对称的图象

任务二　指数函数的单调区间

1. 已知函数 $f(x)=2^{|2x-m|}$(m 为常数).若 $m=2$,则 $f(x)$ 的单调递增区间为$\underline{[1,+\infty)}$;若 $f(x)$ 在区间$[2,+\infty)$上单调递增,则 m 的取值范围是$\underline{(-\infty,4]}$.

2. 求下列函数的单调区间.

(1)$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-x^2}$;

(2)$y=4^x-2\times 2^x+5$.

解:(1)令 $u(x)=2x-x^2$,则 $u(x)=-(x-1)^2+1$,定义域为 $\mathbf{R}$.故 $u(x)$在$(-\infty,1]$上是增函数,在$[1,+\infty)$上是减函数.又 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^u$ 为减函数,根据复合函数"同增异减"得 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-x^2}$ 在$(-\infty,1]$上单调递减,在$[1,+\infty)$上单调递增.故函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-x^2}$ 的单调递增区间为$[1,+\infty)$,单调递减区间为$(-\infty,1]$.

(2)函数的定义域为 $\mathbf{R}$,令 $t=2^x$,$x\in\mathbf{R}$ 时,$t\in(0,+\infty)$.$y=(2^x)^2-2\times 2^x+5=t^2-2t+5=(t-1)^2+4$,$t\in(0,+\infty)$.

当 $t\geqslant 1$ 时,$2^x\geqslant 1$,$x\geqslant 0$;当 $0<t\leqslant 1$ 时,$0<2^x\leqslant 1$,$x\leqslant 0$.

因为 $y=(t-1)^2+4$ 在$[1,+\infty)$上单调递增,$t=2^x$ 在$[0,+\infty)$上单调递增,

所以 $y=(2^x-1)^2+4$ 的单调递增区间为$[0,+\infty)$.

同理可得单调递减区间为$(-\infty,0]$.

【类题通法】

求复合函数的单调性的策略

(1)求复合函数的单调区间,首先求出函数的定义域,然后把函数变换成 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$的形式,通过考察 $f(u)$和 $\varphi(x)$的单调性,利用"同增异减"原则,求出 $y=f(\varphi(x))$的单调性.

(2)指数型函数 $y=a^{f(x)}$($a>0$,且 $a\neq 1$)的单调性由两点决定,一是底数 a 的大小,$a>1$ 还是$0<a<1$;二是$f(x)$的单调性.$y=a^{f(x)}$由两个函数 $y=a^u$,$u=f(x)$复合而成.

任务三　指数函数的值域问题

1. (1)若函数 $f(x)=2^x+3$,$x\in[2,3]$,则函数 $f(x)$的值域为________.

$[7,11]$　**解析:**函数 $f(x)=2^x+3$,$x\in[2,3]$是增函数,又 $2^x\in[4,8]$,故 $f(x)$的值域为$[7,11]$.

(2)已知函数 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ 在$[-2,-1]$上的最小值是 m,最大值是 n,则 $m+n$ 的值为________.

12　**解析:**因为函数 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ 在区间$[-2,-1]$上单调递减,

所以 $m=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}=3$,$n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}=9$.

所以 $m+n=12$.

2. 求下列函数的值域.

(1)$y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-2x}$;

(2)$y=4^x+2^{x+1}+2$,$0\leqslant x\leqslant 2$.

解:(1)令 $u=x^2-2x$,则原函数变为 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^u$.

因为 $u=x^2-2x=(x-1)^2-1$ 在$(-\infty,1]$上单调递减,在$[1,+\infty)$上单调递增,

所以 $u=x^2-2x=(x-1)^2-1\geqslant -1$.

又因为 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^u$ 在$(-\infty,+\infty)$上单调递减,

所以 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^u$,$u\in[-1,+\infty)$也单调递减.

所以 $0<\left(\dfrac{1}{3}\right)^u\leqslant\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}=3$.

所以原函数的值域为$(0,3]$.

(2)$y=4^x+2^{x+1}+2=(2^x)^2+2\times 2^x+2=(2^x+1)^2+1$.

令 $2^x=t$,则 $y=(t+1)^2+1$.

因为 $0\leqslant x\leqslant 2$,所以 $1\leqslant 2^x\leqslant 4$,即 $t\in[1,4]$.

易知 $y=(t+1)^2+1$ 在$[1,4]$上单调递增.

所以 $5\leqslant y\leqslant 26$,

即函数 $y=4^x+2^{x+1}+2$ 的值域为$[5,26]$.

【类题通法】

求指数型函数的值域的方法

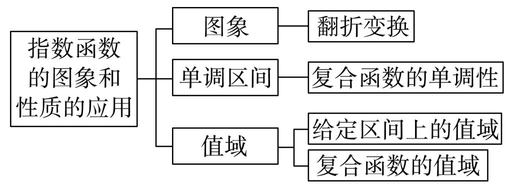
(1)求函数 $y=a^x$($a>0$,且 $a\neq 1$)在给定区间上的值域,直接利用函数的单调性即可求出;

(2)求函数 $y=a^{f(x)}$($a>0$,且 $a\neq 1$)的值域,需先确定$f(x)$的值域,再根据指数函数 $y=a^x$($a>0$,且 $a\neq 1$)的单调性确定函数 $y=a^{f(x)}$($a>0$,且 $a\neq 1$)

的值域；

(3)求与指数函数有关的较复杂复合函数值域，一般通过换元法将函数转化为二次函数等便于求最值的函数，再利用指数函数的性质确定新函数的定义域，然后得出原函数的值域.

提质归纳



课后素养评价(三十)

基础性·能力运用

1. 函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-1}$ 的单调递增区间为　(　　)

A.$(-\infty,0]$　　B.$[0,+\infty)$

C.$(-1,+\infty)$　　D.$(-\infty,-1)$

A　**解析**：因为 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-1}$，又函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在定义域 **R** 上单调递减，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $u(x)=x^2-1$ 的单调递减区间，即$(-\infty,0]$.

2. 若函数 $f(x)=3^{(2a-1)x+3}$ 在 **R** 上是减函数，则实数 a 的取值范围是　(A)

A.$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$　　B.$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

C.$\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$　D.$\left(\frac{1}{2},1\right)$

3. 若 $2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$，则　(　　)

A.$x<y$　　B.$|x|<|y|$

C.$x>y$　　D.$|x|>|y|$

A　**解析**：因为 $2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$，所以 $2^x-3^{-x}<2^y-3^{-y}$.令 $f(x)=2^x-3^{-x}$，则有 $f(x)<f(y)$.因为函数 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增，所以 $x<y$.

4. (多选)若函数 $f(x)=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值和最小值的和为 $\frac{10}{3}$，则 a 的值可能是　(　　)

A.$\frac{1}{3}$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C.$\sqrt{3}$　　D.3

BC　**解析**：因为 $f(x)=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$ 在区间 $[-2,2]$ 上是单调函数，

所以 $a^{-2}+a^2=\frac{10}{3}$，所以 $3a^4-10a^2+3=0$，所以 $a^2=3$ 或 $a^2=\frac{1}{3}$，即 $a=\sqrt{3}$ 或 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. 函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-x^2}$ 的值域为 $\underline{\left[\frac{1}{2},+\infty\right)}$.

解析：由题意知函数的定义域为 **R**.

因为 $2x-x^2=-(x-1)^2+1\leqslant1$.

又函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 为减函数，

所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-x^2}\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$.

故函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-x^2}$ 的值域为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

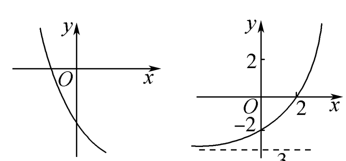
6. 已知函数 $f(x)=a^{2x}+2a^x-1(0<a<1)$，当 $x\geqslant0$ 时，函数 $f(x)$ 的值域为 $\underline{(-1,2]}$.

7. 已知函数 $f(x)=a^{-x}(a>0$，且 $a\neq1)$ 满足 $f(-2)>f(-3)$，则函数 $g(x)=a^{1-x^2}$ 的单调递增区间是 $\underline{[0,+\infty)}$.

8. 已知函数 $f(x)=a^x+b\ (a>0$，且 $a\neq1)$.

(1)若 $f(x)$ 的图象如图①所示，求 a,b 的取值范围；

(2)若 $f(x)$ 的图象如图②所示，$|f(x)|=m$ 有且仅有一个实数解，求 m 的取值范围.

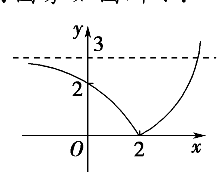


①　②

解：(1)由 $f(x)$ 为减函数可知 a 的取值范围为$(0,1)$.

又 $f(0)=1+b<0$，所以 b 的取值范围为$(-\infty,-1)$.

(2)$y=|f(x)|$ 的图象如图所示.



由图象可知使 $|f(x)|=m$ 有且仅有一个实数解的 m 的取值范围为 $\{m|m=0$ 或 $m\geqslant3\}$.

综合性·创新提升

1.设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x},x\leqslant 0,\\1,x>0,\end{cases}$ 则满足 $f(x+1)<f(2x)$ 的 x 的取值范围是　　(　　)

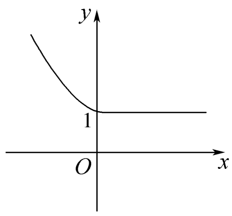
A.$(-\infty,-1]$　　B.$(0,+\infty)$

C.$(-1,0)$　　D.$(-\infty,0)$

D　**解析**：当 $x\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)=2^{-x}$ 是减函数，

则 $f(x)\geqslant f(0)=1$.

作出 $f(x)$ 的大致图象，如图所示.



结合图象可知，要使 $f(x+1)<f(2x)$，则需 $\begin{cases}x+1<0,\\2x<0,\\2x<x+1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\2x<0,\end{cases}$ 解得 $x<0$.

2.函数 $y=\begin{cases}3^{x-1}-2,x\leqslant 1,\\3^{1-x}-2,x>1\end{cases}$ 的值域是　　(　　)

A.$(-2,-1)$　　B.$(-2,+\infty)$

C.$(-\infty,-1]$　　D.$(-2,-1]$

D　**解析**：当 $x\leqslant 1$ 时，$y=3^{x-1}-2$ 单调递增，值域为 $(-2,-1]$；

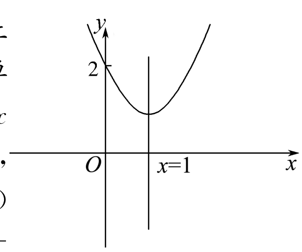
当 $x>1$ 时，$y=3^{1-x}-2=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}-2$ 单调递减，值域为 $(-2,-1)$. 所以函数值域为 $(-2,-1]$.

3.已知函数 $f(x)=2^{|x-1|}$，若 $a<b<1$，且 $a+c>2$，则　　(　　)

A.$f(a)<f(b)<f(c)$　　B.$f(c)<f(b)<f(a)$

C.$f(b)<f(a)<f(c)$　　D.$f(a)<f(c)<f(b)$

C　**解析**：作出 $f(x)$ 的图象如图所示.



该函数在区间 $(-\infty,1]$ 上单调递减，在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，且图象关于直线 $x=1$ 对称，因为 $a<b<1$，且 $a+c>2$，所以 $f(2-a)=f(a)>f(b)$，而 $c>2-a>1$，故 $f(c)>f(2-a)$，所以 $f(b)<f(a)<f(c)$.

4.若函数 $f(x)=\begin{cases}a^x,x>1,\\\left(4-\frac{a}{2}\right)x+2,x\leqslant 1\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，则实数 a 的取值范围是 $\underline{[4,8)}$.

5.设 $a>0$，且 $a\neq 1$，函数 $y=a^{2x}+2a^x-1$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值是 14，求实数 a 的值.

解：令 $t=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$，则原函数化为 $y=f(t)=t^2+2t-1=(t+1)^2-2(t>0)$.

①当 $0<a<1$ 时，$x\in[-1,1]$，$t=a^x\in\left[a,\frac{1}{a}\right]$，

此时 $f(t)$ 在 $\left[a,\frac{1}{a}\right]$ 上单调递增.

所以 $f(t)_{\max}=f\left(\frac{1}{a}\right)=\left(\frac{1}{a}+1\right)^2-2=14$.

所以 $\left(\frac{1}{a}+1\right)^2=16$，所以 $a=-\frac{1}{5}$ 或 $a=\frac{1}{3}$.

又因为 $0<a<1$，所以 $a=\frac{1}{3}$.

②当 $a>1$ 时，$x\in[-1,1]$，$t=a^x\in\left[\frac{1}{a},a\right]$，

此时 $f(t)$ 在 $\left[\frac{1}{a},a\right]$ 上单调递增.

所以 $f(t)_{\max}=f(a)=(a+1)^2-2=14$.

解得 $a=3$ 或 $a=-5$(舍去负值).

综上，$a=\frac{1}{3}$ 或 3.

6.已知函数 $f(x)=\frac{a}{2}+\frac{2}{2^x+1}$ 是奇函数.

(1)求 a 的值；

(2)判断 $f(x)$ 的单调性，并用定义加以证明；

(3)求 $f(x)$ 的值域.

解：(1)因为 $f(x)$ 为奇函数，

所以 $f(0)=0$，即 $\frac{a}{2}+\frac{2}{2}=0$，解得 $a=-2$.

此时，$f(x)=-1+\frac{2}{2^x+1}=\frac{1-2^x}{1+2^x}$. 再验证如下：

$f(x)+f(-x)=\frac{1-2^x}{1+2^x}+\frac{1-2^{-x}}{1+2^{-x}}=\frac{1-2^x}{1+2^x}-\frac{1-2^x}{1+2^x}$

$=0$，

所以 $f(-x)=-f(x)$，$f(x)$ 为定义域上的奇函数.

(2)$f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数.

证明如下：任取 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{2}{2^{x_1}+1}-\frac{2}{2^{x_2}+1}$

$=2\times\frac{2^{x_2}-2^{x_1}}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$.

因为 $x_1<x_2$，所以 $f(x_1)>f(x_2)$，所以 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的减函数.

(3)因为 $f(x)=\frac{2}{2^x+1}-1$，其中，$2^x+1\in(1,+\infty)$，所以 $\frac{2}{2^x+1}\in(0,2)$.

所以 $f(x)\in(-1,1)$. 因此 $f(x)$ 的值域为 $(-1,1)$.

4.3　对数

4.3.1　对数的概念

学习任务目标

1.理解对数的概念,掌握对数的性质,能进行简单的对数计算.
2.理解指数式与对数式的等价关系,会进行对数式与指数式的互化.
3.理解常用对数、自然对数的概念及记法.

问题式预习

知识点一　对数的有关概念

(1)一般地,如果 $a^x=N(a>0$,且 $a\neq1)$,那么数 x 叫做以 a 为底 N 的对数,记作 $x=\log_a N$,其中 a 叫做对数的底数,N 叫做真数.

(2)常用对数与自然对数

常见的对数
- 常用对数 — $\lg N$ — 以 10 为底
- 自然对数 — $\ln N$ — 以 e 为底

(3)对数与指数间的关系

当 $a>0,a\neq1$ 时,$a^x=N\Leftrightarrow x=\log_a N$.

[微训练]

1.$\log_b N=a(b>0$,且 $b\neq1,N>0)$对应的指数式是　(B)

A.$a^b=N$　B.$b^a=N$

C.$a^N=b$　D.$b^N=a$

2.若 $a^2=M(a>0$,且 $a\neq1)$,则有　(B)

A.$\log_2 M=a$　B.$\log_a M=2$

C.$\log_a 2=M$　D.$\log_2 a=M$

知识点二　对数的性质

(1)负数和 0 没有对数,即 $\log_a N$ 中 N 必须大于 0.

(2)1 的对数为 0,即 $\log_a 1=0(a>0$,且 $a\neq1)$.

(3)$\log_a a=1(a>0$,且 $a\neq1)$.

(4)对数恒等式:$a^{\log_a N}=N(a>0$,且 $a\neq1,N>0)$.

[微训练]

1.$4^{\log_4 3}=$3.

2.$\ln 1=$0,$\lg 10=$1.

任务型课堂

任务一　对数的概念

[探究活动]

探究 1:为什么对数 $\log_a N$ 只有在 $a>0,a\neq1$ 且 $N>0$ 时才有意义?

提示:当 $a<0$ 时,N 为某些值时,b 的某些值不存在,如方程 $(-2)^x=3$ 没有实数解,所以 $\log_{-2}3$ 不存在,为此规定 a 不能小于零;再由指数函数的定义可知,N 不能小于等于零.当 $a=0$,且 $N\neq0$ 时,$\log_a N$ 不存在,如 0^{-2} 没意义,所以规定 $a\neq0$.当 $a=1$,且 N 不为 1 时,$\log_a N$ 不存在,如 $1^x=2$ 不成立,所以规定 $a\neq1$.

探究 2:对数与指数之间有怎样的关系?

提示:当 $a>0$,且 $a\neq1$ 时,$a^x=N\Leftrightarrow x=\log_a N$.

[评价活动]

1.对数式 $\log_{(x-2)}(x+2)$ 中,实数 x 的取值范围是________.

$(2,3)\cup(3,+\infty)$　**解析**:由题意可得 $\begin{cases}x+2>0,\\x-2>0,\\x-2\neq1,\end{cases}$ 解得 $x>2$,且 $x\neq3$,所以实数 x 的取值范围是 $(2,3)\cup(3,+\infty)$.

2.已知 $4^a=2,\lg x=a$,则 $x=$________.

$\sqrt{10}$　**解析**:因为 $4^a=2$,所以 $a=\frac{1}{2}$.

又 $\lg x=a$,所以 $x=10^a=\sqrt{10}$.

3.将下列对数式化为指数式或将指数式化为对数式.

(1)$2^{-7}=\frac{1}{128}$;(2)$\log_{\frac{1}{2}}32=-5$;

(3)$\lg 1\,000=3$;(4)$\ln x=2$.

解:(1)由 $2^{-7}=\frac{1}{128}$,可得 $\log_2\frac{1}{128}=-7$.

(2)由 $\log_{\frac{1}{2}}32=-5$,可得 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=32$.

(3)由 $\lg 1\,000=3$,可得 $10^3=1\,000$.

(4)由 $\ln x=2$,可得 $e^2=x$.

【类题通法】

指数式与对数式互化的思路

(1)指数式化为对数式:将指数式的幂作为真数,指数作为对数,底数不变,写出对数式.

(2)对数式化为指数式:将对数式的真数作为幂,对数作为指数,底数不变,写出指数式.

任务二　利用指数式与对数式的互化求值

1. 已知 $\log_2 m=2.020$,$\log_2 n=1.020$,则 $\frac{n}{m}$ 等于(　　)

A.2　　B.$\frac{1}{2}$

C.10　　D.$\frac{1}{10}$

B　**解析**:因为 $\log_2 m=2.020$,$\log_2 n=1.020$,所以 $m=2^{2.020}$,$n=2^{1.020}$,所以 $\frac{n}{m}=\frac{2^{1.020}}{2^{2.020}}=2^{1.020-2.020}=2^{-1}=\frac{1}{2}$.

2. 已知 $\log_a 2=m$,$\log_a 3=n$,则 $a^{2m-n}=$________.

$\frac{4}{3}$　**解析**:因为 $\log_a 2=m$,$\log_a 3=n$,所以 $a^m=2$,$a^n=3$,所以 $a^{2m-n}=\frac{(a^m)^2}{a^n}=\frac{2^2}{3}=\frac{4}{3}$.

3. 求下列各式中 x 的值.

(1)$\log_x 27=\frac{3}{2}$;

(2)$\log_2 x=-\frac{2}{3}$;

(3)$x=\log_{27}\frac{1}{9}$;

(4)$x=\log_{\frac{1}{2}}16$.

解:(1)由 $\log_x 27=\frac{3}{2}$,可得 $x^{\frac{3}{2}}=27$,

所以 $x=27^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}=3^2=9$.

(2)由 $\log_2 x=-\frac{2}{3}$,可得 $x=2^{-\frac{2}{3}}$,

所以 $x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.

(3)由 $x=\log_{27}\frac{1}{9}$,可得 $27^x=\frac{1}{9}$,

所以 $3^{3x}=3^{-2}$,所以 $x=-\frac{2}{3}$.

(4)由 $x=\log_{\frac{1}{2}}16$,可得 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=16$,

所以 $2^{-x}=2^4$,所以 $x=-4$.

【类题通法】

对数式求值的基本思想和方法

(1)基本思想

在一定条件下求对数式的值,或求对数式中参数的值,要注意利用方程思想求解.

(2)基本方法

①将对数式化为指数式;

②利用幂的运算性质和指数的性质计算.

任务三　利用对数的性质求值

1. 设 $5^{\log_5(2x-1)}=25$,求 x 的值.

解:因为 $5^{\log_5(2x-1)}=25$,所以 $2x-1=25$,解得 $x=13$.

2. 求下列各式中 x 的值.

(1)$\log_5(\log_3 x)=0$;

(2)$\log_3(\lg x)=1$;

(3)$\ln[\log_2(\lg x)]=0$.

解:(1)设 $t=\log_3 x$,则 $\log_5 t=0$,所以 $t=1$,即 $\log_3 x=1$,所以 $x=3$.

(2)因为 $\log_3(\lg x)=1$,所以 $\lg x=3$,

所以 $x=10^3=1\ 000$.

(3)因为 $\ln[\log_2(\lg x)]=0$,所以 $\log_2(\lg x)=1$,

所以 $\lg x=2$,所以 $x=10^2=100$.

3. 若 $\log_2[\log_3(\log_4 x)]=\log_3[\log_4(\log_2 y)]=0$,求 $x+y$ 的值.

解:因为 $\log_2[\log_3(\log_4 x)]=0$,

所以 $\log_3(\log_4 x)=1$.所以 $\log_4 x=3$.所以 $x=4^3=64$.

同理求得 $y=16$.所以 $x+y=80$.

【类题通法】

利用对数性质求值的策略

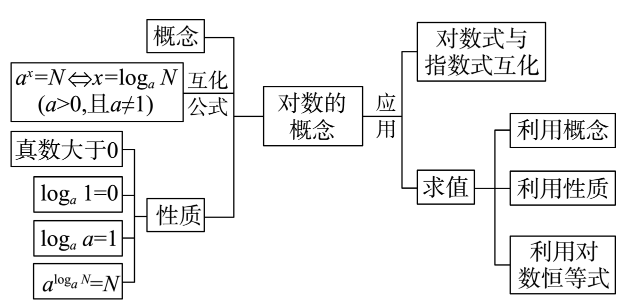
(1)求多重对数式的值

其策略为由内向外,如求 $\log_a(\log_b c)$ 的值,先求 $\log_b c$ 的值,再求 $\log_a(\log_b c)$ 的值.

(2)已知多重对数式的值,求参数的值

其策略为从外到里,逐层脱去"log",转化为解指数方程.

提质归纳



课后素养评价(三十一)

基础性·能力运用

1.在 $\log_3(m-1)$中,实数 m 的取值范围是 ( )

A.$\mathbf{R}$ B.$(0,+\infty)$

C.$(-\infty,1)$ D.$(1,+\infty)$

D 解析:由 $m-1>0$ 得 $m>1$.故选 D.

2.(多选)下列指数式与对数式互化正确的是 ( )

A.$e^0=1$ 与 $\ln 1=0$

B.$\log_2 16=4$ 与 $2^4=16$

C.$8^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$与$\log_{\frac{1}{2}}8=-\frac{1}{3}$

D.$\log_7 7=1$ 与 $7^1=7$

ABD 解析:$8^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$,则$\log_8\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$,故 C 错误,其他均对.

3.(多选)下列结论正确的是 ( )

A.$\log_2 4=2$

B.$-\ln e=1$

C.$3^{\log_3 2}=2$

D.若$\log_x 27=3$,则 $x=\pm 3$

AC 解析:由对数的运算可得 $\log_2 4=2$,$3^{\log_3 2}=2$,$-\ln e=-1$,若$\log_x 27=3$,则 $x=3$,故 AC 正确,BD 错误.

4.使 $\log_{(x-1)}(x+2)$有意义的 x 的取值范围是________.

$(1,2)\cup(2,+\infty)$ 解析:要使 $\log_{(x-1)}(x+2)$有意义,则$\begin{cases}x-1>0,\\x-1\neq 1,\\x+2>0,\end{cases}$所以 $x>1$ 且 $x\neq 2$.

5.已知 $\log_2 x=3$,则 $x^{-\frac{1}{2}}=$________.

$\frac{\sqrt{2}}{4}$ 解析:因为 $\log_2 x=3$,所以 $x=2^3=8$,

所以 $x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

6.若 $\log_2(\log_x 9)=1$,则 $x=$________.

3 解析:由 $\log_2(\log_x 9)=1$ 可知 $\log_x 9=2$,即 $x^2=9$,所以 $x=3(x=-3$ 舍去).

7.使等式$(\lg x)^2-\lg x=0$ 成立的 x 的值为________.

1 或 10 解析:由 $\lg x(\lg x-1)=0$ 得 $\lg x=0$ 或 $\lg x=1$,即 $x=1$ 或 $x=10$.

综合性·创新提升

1.方程 $2^{\log_3 x}=\frac{1}{4}$的解是 ( )

A.$x=\frac{1}{9}$ B.$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

C.$x=\sqrt{3}$ D.$x=9$

A 解析:因为 $2^{\log_3 x}=2^{-2}$,

所以 $\log_3 x=-2$,所以 $x=3^{-2}=\frac{1}{9}$.

2.(多选)以下四个结论中正确的是 ( )

A.$\ln(\lg 10)=0$

B.$\ln(\ln e)=0$

C.若 $e=\ln x$,则 $x=e^2$

D.$\ln(\lg 1)=0$

AB 解析:因为 $\lg 10=\ln e=1$,$\ln(\lg 10)=\ln 1=0$,$\ln(\ln e)=\ln 1=0$,所以 A,B 均正确;C 中,若 $e=\ln x$,则 $x=e^e$,故 C 错误;D 中,$\lg 1=0$,而 $\ln 0$ 没有意义,故 D 错误.故选 AB.

3.设 $\log_4 5=2m$,则 $4^m=$ (D)

A.$\frac{1}{25}$ B.25 C.$\frac{1}{5}$ D.$\sqrt{5}$

4.已知 $\log_2(\log_3(\log_4 x))=0$,且$\log_4(\log_2 y)=1$,则$\sqrt{x}\cdot y^{\frac{3}{4}}$的值为________.

64 解析:因为 $\log_2(\log_3(\log_4 x))=0$,

所以 $\log_3(\log_4 x)=1$,

所以 $\log_4 x=3$,所以 $x=4^3=64$.

由 $\log_4(\log_2 y)=1$,知 $\log_2 y=4$,所以 $y=2^4=16$.

因此$\sqrt{x}\cdot y^{\frac{3}{4}}=\sqrt{64}\times 16^{\frac{3}{4}}=8\times 8=64$.

5.若 $\log_{\frac{1}{2}}x=m$,$\log_{\frac{1}{4}}y=m+2$,则$\frac{x^2}{y}$的值为________.

16 解析:因为 $\log_{\frac{1}{2}}x=m$,所以$\left(\frac{1}{2}\right)^m=x$,$x^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$.

因为 $\log_{\frac{1}{4}}y=m+2$,

所以$\left(\frac{1}{4}\right)^{m+2}=y$,即$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+4}$,

所以 $\frac{x^2}{y}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+4}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-(2m+4)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=16.$

6. 利用对数恒等式 $a^{\log_a N}=N(a>0$，且 $a\neq1,N>0)$，计算：

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1+\log_{0.5}4}$；

(2) $2^{3+\log_2 3}+3^{2-\log_3 9}$.

解：(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1+\log_{0.5}4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}4}$

$=2\times4$

$=8.$

(2) $2^{3+\log_2 3}+3^{2-\log_3 9}$

$=2^3\times2^{\log_2 3}+\frac{3^2}{3^{\log_3 9}}$

$=8\times3+\frac{9}{9}$

$=25.$

4.3.2　对数的运算

学习任务目标

1. 理解并掌握对数的运算性质.

2. 理解并掌握换底公式.

3. 能运用对数的运算性质及换底公式进行化简或求值.

问题式预习

知识点一　对数的运算性质

如果 $a>0$，且 $a\neq1,M>0,N>0$，那么

(1) $\log_a(MN)=\underline{\log_a M+\log_a N}$；

(2) $\log_a\frac{M}{N}=\underline{\log_a M-\log_a N}$；

(3) $\log_a M^n=\underline{n\log_a M}(n\in\mathbf{R})$.

[微训练]

1. 判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").

(1) 积、商的对数可以化为对数的和、差.　(√)

(2) $\log_a(xy)=\log_a x\cdot\log_a y$.　(×)

(3) $\log_2(-5)^2=2\log_2(-5)$.　(×)

2. 计算 $\log_8 4+\log_8 2$ 的结果等于　(D)

A. $\log_8 6$　　B. 8　　C. 6　　D. 1

3. 计算：$\log_5 10-\log_5 2=\underline{1}$.

知识点二　对数换底公式

$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}(a>0$，且 $a\neq1$；$b>0$；$c>0$，且 $c\neq1)$.

特别地，$\log_a b\cdot\log_b a=\underline{1}$.

[微训练]

1. $\log_2 3\times\log_3 2=$____.

1　**解析**：$\log_2 3\times\log_3 2=\frac{\lg 3}{\lg 2}\times\frac{\lg 2}{\lg 3}=1.$

2. $\log_2 9\times\log_3 2=$________.

2　**解析**：$\log_2 9\times\log_3 2=\frac{\lg 9}{\lg 2}\times\frac{\lg 2}{\lg 3}=2.$

任务型课堂

任务一　对数运算性质的应用

[探究活动]

观察对数的运算性质：

(1) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；

(2) $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

(3) $\log_a M^n=n\log_a M(n\in\mathbf{R})$.

其中 $a>0$，且 $a\neq1,M>0,N>0$.

探究 1：对于性质(1)，当 $M<0,N<0$ 时成立吗？

提示：不成立.如 $\lg[(-5)(-3)]$ 有意义，而 $\lg(-5),\lg(-3)$ 无意义.

探究 2：逆用性质时，还需要条件 $M>0,N>0$ 吗？

提示：不需要，因为 $\log_a M,\log_a N$ 有意义，就有 $M>0,N>0$.

［评价活动］

1. 若 $\lg 2=a$，$\lg 3=b$，则 $\dfrac{\lg 45}{\lg 12}=$ （　　）

A. $\dfrac{a+2b}{2a+b}$　　B. $\dfrac{1-a+2b}{2a+b}$

C. $\dfrac{1-b+2a}{2a+b}$　　D. $\dfrac{1-a+2b}{a+2b}$

B　**解析：** $\dfrac{\lg 45}{\lg 12}=\dfrac{\lg 5+\lg 9}{\lg 3+\lg 4}=\dfrac{1-\lg 2+2\lg 3}{\lg 3+2\lg 2}=\dfrac{1-a+2b}{2a+b}$.

2. 计算：

(1) $\log_3 45-\log_3 5$；

(2) $\log_2(2^3\times 4^5)$；

(3) $\dfrac{\lg\sqrt{27}+\lg 8-\lg\sqrt{1\ 000}}{\lg 1.2}$；

(4) $\log_2 9\cdot\log_3 8$.

解： (1) $\log_3 45-\log_3 5=\log_3\dfrac{45}{5}=\log_3 9=\log_3 3^2=2$.

(2) $\log_2(2^3\times 4^5)=\log_2(2^3\times 2^{10})=\log_2 2^{13}=13\log_2 2=13$.

(3) 原式 $=\dfrac{\lg(\sqrt{27}\times 8)-\lg 10^{\frac{3}{2}}}{\lg\dfrac{12}{10}}=\dfrac{\lg(3^{\frac{3}{2}}\times 2^3\div 10^{\frac{3}{2}})}{\lg\dfrac{12}{10}}=\dfrac{\lg\left(\dfrac{3\times 4}{10}\right)^{\frac{3}{2}}}{\lg\dfrac{12}{10}}=\dfrac{\dfrac{3}{2}\lg\dfrac{12}{10}}{\lg\dfrac{12}{10}}=\dfrac{3}{2}$.

(4) $\log_2 9\times\log_3 8=\log_2 3^2\times\log_3 2^3=2\log_2 3\times 3\log_3 2=6\log_2 3\times\dfrac{1}{\log_2 3}=6$.

【类题通法】

对数式化简与求值的基本原则和方法

(1) 基本原则：对数式的化简、求值一般是正用或逆用对数运算性质，对真数进行处理，一般本着便于真数化简的原则进行.

(2) 两种常用的方法：①“收”，将同底的两对数的和(差)收成积(商)的对数；②“拆”，将积(商)的对数拆成同底的两对数的和(差).

任务二　对数换底公式

1. 计算：(1) $\log_2 3\times\log_3 5\times\log_5 16$；

(2) $(\log_3 2+\log_9 2)(\log_4 3+\log_8 3)$；

(3) $(\log_2 125+\log_4 25+\log_8 5)\cdot(\log_5 2+\log_{25} 4+\log_{125} 8)$.

解： (1) 原式 $=\dfrac{\lg 3}{\lg 2}\times\dfrac{\lg 5}{\lg 3}\times\dfrac{\lg 16}{\lg 5}=\dfrac{\lg 16}{\lg 2}=\dfrac{4\lg 2}{\lg 2}=4$.

(2) 原式 $=\left(\dfrac{\lg 2}{\lg 3}+\dfrac{\lg 2}{\lg 9}\right)\left(\dfrac{\lg 3}{\lg 4}+\dfrac{\lg 3}{\lg 8}\right)=\left(\dfrac{\lg 2}{\lg 3}+\dfrac{\lg 2}{2\lg 3}\right)\left(\dfrac{\lg 3}{2\lg 2}+\dfrac{\lg 3}{3\lg 2}\right)=\dfrac{3\lg 2}{2\lg 3}\times\dfrac{5\lg 3}{6\lg 2}=\dfrac{5}{4}$.

(3)（方法一）原式 $=\left(\log_2 5^3+\dfrac{\log_2 25}{\log_2 4}+\dfrac{\log_2 5}{\log_2 8}\right)\left(\log_5 2+\dfrac{\log_5 4}{\log_5 25}+\dfrac{\log_5 8}{\log_5 125}\right)$

$=\left(3\log_2 5+\dfrac{2\log_2 5}{2\log_2 2}+\dfrac{\log_2 5}{3\log_2 2}\right)\left(\log_5 2+\dfrac{2\log_5 2}{2\log_5 5}+\dfrac{3\log_5 2}{3\log_5 5}\right)=\left(3+1+\dfrac{1}{3}\right)\log_2 5\times(3\log_5 2)$

$=13\log_2 5\times\dfrac{\log_2 2}{\log_2 5}=13$.

（方法二）原式 $=\left(\dfrac{\lg 125}{\lg 2}+\dfrac{\lg 25}{\lg 4}+\dfrac{\lg 5}{\lg 8}\right)\left(\dfrac{\lg 2}{\lg 5}+\dfrac{\lg 4}{\lg 25}+\dfrac{\lg 8}{\lg 125}\right)=\left(\dfrac{3\lg 5}{\lg 2}+\dfrac{2\lg 5}{2\lg 2}+\dfrac{\lg 5}{3\lg 2}\right)\left(\dfrac{\lg 2}{\lg 5}+\dfrac{2\lg 2}{2\lg 5}+\dfrac{3\lg 2}{3\lg 5}\right)$

$=\left(\dfrac{13\lg 5}{3\lg 2}\right)\left(\dfrac{3\lg 2}{\lg 5}\right)=13$.

2. 已知 $\log_{18} 9=a$，$18^b=5$，求 $\log_{36} 45$(用 a,b 表示).

解： 因为 $18^b=5$，所以 $\log_{18} 5=b$.

（方法一）$\log_{36} 45=\dfrac{\log_{18} 45}{\log_{18} 36}=\dfrac{\log_{18}(9\times 5)}{\log_{18}\dfrac{18^2}{9}}$

$=\dfrac{\log_{18} 9+\log_{18} 5}{2\log_{18} 18-\log_{18} 9}=\dfrac{a+b}{2-a}$.

（方法二）因为 $\dfrac{\lg 9}{\lg 18}=\log_{18} 9=a$，所以 $\lg 9=a\lg 18$，

同理得 $\lg 5=b\lg 18$，

所以 $\log_{36} 45=\dfrac{\lg 45}{\lg 36}=\dfrac{\lg(9\times 5)}{\lg\dfrac{18^2}{9}}=\dfrac{\lg 9+\lg 5}{2\lg 18-\lg 9}$

$=\dfrac{a\lg 18+b\lg 18}{2\lg 18-a\lg 18}=\dfrac{a+b}{2-a}$.

【类题通法】

应用换底公式应注意的两个方面

(1) 将不同底的对数化成同底的对数时，要注意换底公式的正用、逆用以及变形应用；

(2) 题目中有指数式和对数式时，要注意将指数式与对数式统一成一种形式.

任务三　对数的实际应用

1. 20 世纪 30 年代，里克特制订了一种表明地震能量大小的尺度，就是使用测震仪衡量地震能量的等级，地震能量越大，测震仪记录的地震曲线的振幅就越大.这就是我们常说的里氏震级 M，其计算公式为 $M=\lg A-\lg A_0$，其中 A 是被测地震的最大振幅，A_0 是“标准地震”的振幅.5 级地震给人的震感已比较明显，8 级地震的最大振幅是 5 级地震最大振幅的 (　　)

A.30 倍　　B.lg 30 倍

C.100 倍　　D.1 000 倍

D　**解析**：设 8 级地震的最大振幅为 A_1，5 级地震的最大振幅为 A_2，

则 $\lg\dfrac{A_1}{A_2}=\lg A_1-\lg A_2=(\lg A_1-\lg A_0)-(\lg A_2-\lg A_0)=8-5=3$，所以 $\dfrac{A_1}{A_2}=10^3=1\ 000$.故选 D.

2. 射线测厚技术利用的计算公式为 $I=I_0e^{-\rho\mu t}$，其中 I_0，I 分别为射线穿过被测物前后的强度，e 是自然对数的底数，t 为被测物厚度，ρ 为被测物的密度，μ 是被测物对射线的吸收系数.工业上通常用镅 241(^{241}Am)低能 γ 射线测量钢板的厚度.若这种射线对钢板的半价层厚度为 0.8，钢的密度为 7.6，则钢板对这种射线的吸收系数约为 (　　)

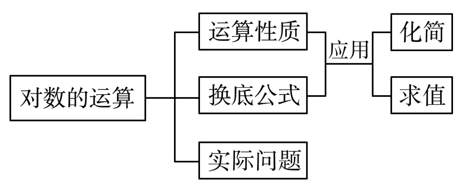
(注：半价层厚度是指将已知射线强度减弱为一半的某种物质厚度，ln 2≈0.693 1，结果精确到 0.001)

A.0.110　　B.0.112

C.0.114　　D.0.116

C　**解析**：由题意可得，$t=0.8$，$\rho=7.6$，$\dfrac{I}{I_0}=\dfrac{1}{2}$.因为 $I=I_0e^{-\rho\mu t}$，所以 $\dfrac{1}{2}=e^{-7.6\times0.8\times\mu}$，即 $\mu=\dfrac{\ln 2}{7.6\times0.8}\approx\dfrac{0.693\ 1}{6.08}\approx0.114$.所以钢板对这种射线的吸收系数约为0.114.故选 C.

提质归纳



课后素养评价(三十二)

基础性·能力运用

1. 求值：$\lg 4+2\lg 5+\log_2 8+8^{\frac{2}{3}}=$ (　　)

A.8　　B.9

C.10　　D.1

B　**解析**：$\lg 4+2\lg 5+\log_2 8+8^{\frac{2}{3}}=2\lg 2+2\lg 5+3+2^2=2+3+4=9$.

2. 计算：$(\log_5 4)\cdot(\log_{16}25)=$ (　　)

A.2　　B.1

C.$\dfrac{1}{2}$　　D.$\dfrac{1}{4}$

B　**解析**：$(\log_5 4)\cdot(\log_{16}25)=\dfrac{\lg 4}{\lg 5}\times\dfrac{\lg 25}{\lg 16}=\dfrac{2\lg 2}{\lg 5}\times\dfrac{2\lg 5}{4\lg 2}=1$.

3. (多选)下列等式正确的是 (　　)

A.$\sqrt[12]{(-3)^4}=\sqrt[3]{-3}$

B.$2^{1-\log_2 3}=\dfrac{2}{3}$

C.$\sqrt{\sqrt[3]{9}}=\sqrt[3]{3}$

D.$\log_3(-4)^2=4\log_3 2$

BCD　**解析**：$\sqrt[12]{(-3)^4}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[3]{3}$，A 错误；

$2^{1-\log_2 3}=\dfrac{2}{2^{\log_2 3}}=\dfrac{2}{3}$，B 正确；

$\sqrt{\sqrt[3]{9}}=(9^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=(3^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3}$，C 正确；

$\log_3(-4)^2=\log_3 16=\log_3 2^4=4\log_3 2$，D 正确.

故选 BCD.

4. 若 $a=\log_4 3$，则 $2^a+2^{-a}=$________.

$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　**解析**：因为 $a=\log_4 3=\dfrac{1}{2}\log_2 3$，

所以 $2^a+2^{-a}=2^{\frac{1}{2}\log_2 3}+2^{-\frac{1}{2}\log_2 3}$

$=(2^{\log_2 3})^{\frac{1}{2}}+(2^{\log_2 3})^{-\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

5. $\lg 0.01+\log_2 16$ 的值是________.

2　**解析**：$\lg 0.01+\log_2 16=-2+4=2$.

6. 计算下列各式的值.

(1) $\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{32}{49}-\dfrac{4}{3}\lg\sqrt{8}+\lg\sqrt{245}$；

(2) $\lg 5^2+\dfrac{2}{3}\lg 8+\lg 5\times\lg 20+(\lg 2)^2$；

(3) $\dfrac{\lg\sqrt{2}+\lg 3-\lg\sqrt{10}}{\lg 1.8}$.

解:(1)原式$=\frac{1}{2}(5\lg 2-2\lg 7)-\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}\lg 2+\frac{1}{2}(2\lg 7+\lg 5)$

$=\frac{5}{2}\lg 2-\lg 7-2\lg 2+\lg 7+\frac{1}{2}\lg 5$

$=\frac{1}{2}\lg 2+\frac{1}{2}\lg 5=\frac{1}{2}(\lg 2+\lg 5)$

$=\frac{1}{2}\lg 10=\frac{1}{2}$.

(2)原式$=2\lg 5+2\lg 2+\lg 5(2\lg 2+\lg 5)+(\lg 2)^2$

$=2\lg 10+(\lg 5+\lg 2)^2$

$=2+(\lg 10)^2=2+1=3$.

(3)原式$=\dfrac{\frac{1}{2}(\lg 2+\lg 9-\lg 10)}{\lg 1.8}=\dfrac{\lg\frac{18}{10}}{2\lg 1.8}$

$=\dfrac{\lg 1.8}{2\lg 1.8}=\frac{1}{2}$.

综合性·创新提升

1. $(\lg 2)^2+\log_{\sqrt{10}}\sqrt{2}\times\lg 50+\dfrac{2\log_3 5}{\log_3 10}$的值为　　(B)

A.1　　B.2　　C.-1　　D.-2

2.(多选)下列各式中,值为1的是　　(　　)

A.$\log_2 6\times\log_6 2$

B.$\log_6 2+\log_6 4$

C.$(2+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}\times(2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$

D.$(2+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}-(2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$

AC　**解析**:对于A,根据$\log_a b\cdot\log_b a=1$可知,A选项符合题意.

对于B,原式$=\log_6(2\times 4)=\log_6 8\neq 1$,B选项不符合题意.

对于C,原式$=[(2+\sqrt{3})\times(2-\sqrt{3})]^{\frac{1}{2}}=1^{\frac{1}{2}}=1$,C选项符合题意.

对于D,由于$[(2+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}-(2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}]^2=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}-2\times(2+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}\times(2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}=4-2=2\neq 1$,D选项不符合题意.

3.若$2^a=5^b=10$,则$2^{\frac{a}{b}}=$　　(　　)

A.2　　　　B.4

C.5　　　　D.10

C　**解析**:因为$2^a=5^b=10$,所以$a=\log_2 10$,$b=\log_5 10$,

$\frac{a}{b}=\frac{\log_2 10}{\log_5 10}=\frac{\lg 5}{\lg 2}=\log_2 5$,则$2^{\frac{a}{b}}=2^{\log_2 5}=5$.

4.计算:$\dfrac{(1-\log_6 3)^2+\log_6 2\times\log_6 18}{\log_6 4}=$________.

1　**解析**:原式

$=\dfrac{1-2\log_6 3+(\log_6 3)^2+\log_6\frac{6}{3}\times\log_6(6\times 3)}{\log_6 4}$

$=\dfrac{1-2\log_6 3+(\log_6 3)^2+1-(\log_6 3)^2}{\log_6 4}$

$=\dfrac{2(1-\log_6 3)}{2\log_6 2}=\dfrac{\log_6 6-\log_6 3}{\log_6 2}$

$=\dfrac{\log_6 2}{\log_6 2}=1$.

5.已知x,y,z为正数,$3^x=4^y=6^z$,且$2x=py$.

(1)求p的值;

(2)证明:$\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=\frac{1}{2y}$.

(1)**解**:设$3^x=4^y=6^z=k$(显然$k>0$,且$k\neq 1$),

则$x=\log_3 k$,$y=\log_4 k$,$z=\log_6 k$.

由$2x=py$,

得$2\log_3 k=p\log_4 k=p\cdot\dfrac{\log_3 k}{\log_3 4}$.

因为$\log_3 k\neq 0$,

所以$p=2\log_3 4=4\log_3 2$.

(2)**证明**:$\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=\frac{1}{\log_6 k}-\frac{1}{\log_3 k}$

$=\log_k 6-\log_k 3=\log_k 2=\frac{1}{2}\log_k 4=\frac{1}{2y}$.

4.4　对数函数

4.4.1　对数函数的概念

学习任务目标

1. 理解对数函数的概念,能根据对数函数的定义,判断一个函数是否为对数函数.
2. 会求对数函数的定义域.
3. 了解对数函数在实际问题中的简单应用.

问题式预习

知识点　对数函数的概念

一般地,函数 $y=\underline{\log_a x}$($a>0$,且 $a\neq1$)叫做对数函数,其中 x 是自变量,定义域是$\underline{(0,+\infty)}$.

[**微训练**]

1. 判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)对数函数的定义域为 **R**.　　(×)

(2)函数 $y=\log_2(2x)$是对数函数.　　(×)

(3)$y=\log_5 x^2$ 的定义域为 **R**.　　(×)

2. 若函数 $f(x)=(a-1)\log_{(a+1)}x$ 是对数函数,则实数 $a=\underline{2}$.

任务型课堂

任务一　对数函数的概念

1. 给出下列函数:①$y=\log_5 x+1$;②$y=\log_a x^2$($a>0$,且 $a\neq1$);③$y=\log_{(\sqrt{3}-1)}x$;④$y=\log_x\sqrt{3}$($x>0$,且 $x\neq1$);⑤$y=\log_{\frac{2}{\pi}}x$.其中是对数函数的为　(　　)

A.③④⑤　　B.②④

C.①③⑤　　D.③⑤

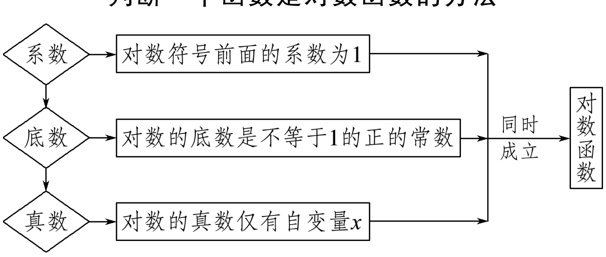
D　**解析**:由对数函数的定义知,③⑤是对数函数.故选 D.

2. 若函数 $y=\log_{(2a-1)}x+(a^2-5a+4)$是对数函数,则 $a=$________.

4　**解析**:因为函数 $y=\log_{(2a-1)}x+(a^2-5a+4)$是对数函数,所以$\begin{cases}2a-1>0,\\2a-1\neq1,\\a^2-5a+4=0,\end{cases}$解得 $a=4$.

【类题通法】

判断一个函数是对数函数的方法



任务二　对数函数的定义域

[**探究活动**]

探究:求函数定义域时需注意哪些问题?

提示:①对数的底数大于 0 且不能为 1;

②对数的真数大于 0.

[**评价活动**]

求下列函数的定义域.

(1)$y=\log_a(x-3)+\log_a(x+3)$;

(2)$y=\log_a[(x+3)(x-3)]$;

(3)$y=\log_{(2x-1)}(-4x+8)$.

解:(1)由$\begin{cases}x-3>0,\\x+3>0\end{cases}$得 $x>3$.

所以函数 $y=\log_a(x-3)+\log_a(x+3)$的定义域为$\{x|x>3\}$.

(2)由$(x+3)(x-3)>0$,解得 $x<-3$ 或 $x>3$.

所以函数 $y=\log_a[(x+3)(x-3)]$的定义域为$\{x|x<-3$ 或 $x>3\}$.

(3)由题意得$\begin{cases}-4x+8>0,\\2x-1>0,\\2x-1\neq1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x<2,\\x>\dfrac{1}{2},\\x\neq1.\end{cases}$

故函数 $y=\log_{(2x-1)}(-4x+8)$的定义域为$\left\{x\left|\dfrac{1}{2}<x<2,且\ x\neq1\right.\right\}$.

【类题通法】

求函数的定义域时应遵循的原则

(1)分母不能为0；

(2)根指数为偶数时，被开方数非负；

(3)对数的真数大于0，底数大于0且不为1.

任务三　对数函数的实际应用

1. 某地为了抑制一种有害昆虫的繁殖，引入了一种以该昆虫为食物的动物.已知该动物的数量 y(只)与引入时间 x(年)的关系为 $y=a\log_2(x+1)$.若该动物在引入一年后的数量为100只，则引入7年后它们的数量为　(　　)

A.300只　　B.400只

C.600只　　D.700只

A　**解析**：将 $x=1$，$y=100$ 代入 $y=a\log_2(x+1)$ 中，得 $100=a\log_2(1+1)$，解得 $a=100$.

所以 $y=100\log_2(x+1)$.

所以当 $x=7$ 时，$y=100\log_2(7+1)=300$.故选A.

2. 地震震级是根据测震仪记录的地震曲线的振幅来测定的，一般采用里氏震级标准.震级 M_L 是由距离震中100 km处的标准地震仪所记录的地震最大振幅的对数来表示的.里氏震级的计算公式：$M_L=\lg\left(\dfrac{A_{\max}}{A_0}\right)$，其中 A_0 表示“标准地震”振幅(使用标准地震振幅是为了修正测震仪距离实际震中的距离造成的偏差)，$A_{\max}$ 表示被测地震的最大振幅.4.5级地震给人的震感已比较明显，那么6.5级地震的最大振幅是4.5级地震的最大振幅的　(　　)

A.e倍　　B.10倍

C.100倍　　D.e^2倍

C　**解析**：由于 $M_L=\lg\left(\dfrac{A_{\max}}{A_0}\right)$，所以 $A_{\max}=A_0 10^{M_L}$，所以6.5级地震的最大振幅与4.5级地震的最大振幅的比值为：$\dfrac{A_0 10^{6.5}}{A_0 10^{4.5}}=10^2=100$.

【类题通法】

对数函数应用题的解题思路

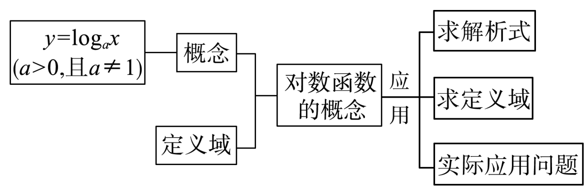
(1)依题意，建立数学模型；

(2)依已知条件确定解析式中的参数的值；

(3)依题设数据解决数学问题；

(4)得出实际问题的答案.

提质归纳



课后素养评价(三十三)

基础性·能力运用

1. 给出下列函数：

①$y=\log_{\frac{2}{3}}x^2$；

②$y=\log_3(x-1)$；

③$y=\log_{(x+1)}x$；

④$y=\log_\pi x$.

其中是对数函数的有　(　　)

A.1个　B.2个　C.3个　D.4个

A　**解析**：①②不是对数函数，因为对数的真数不是只含有自变量 x；③不是对数函数，因为对数的底数不是常数；④是对数函数.

2. (多选)下列四组函数中，定义域不相同的是　(　　)

A.$y=\sqrt{x}$ 和 $y=\lg x$

B.$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 和 $y=\dfrac{1}{\lg x}$

C.$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 和 $y=\lg x$

D.$y=\sqrt{x}$ 和 $y=\dfrac{1}{\lg x}$

ABD　**解析**：A中，$y=\sqrt{x}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，$y=\lg x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，定义域不同；B中，$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$y=\dfrac{1}{\lg x}$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$，定义域不同；C中，$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$y=\lg x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，定义域相同；D中，$y=\sqrt{x}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，$y=\dfrac{1}{\lg x}$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$，定义域不同.

3. 已知集合 $A=\{x\mid y=\log_2(x+1)\}$，$B=\{x\mid 2^x\leqslant 4\}$，则 $A\cap B=$　(　　)

A.$\{x\mid -1<x\leqslant 2\}$　　B.$\{x\mid -1<x\leqslant 1\}$

C.$\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$　　D.$\{x\mid -1<x\leqslant 1\}$

A　**解析**：因为 $A=\{x\mid y=\log_2(x+1)\}=\{x\mid x>-1\}$，$B=\{x\mid 2^x\leqslant 4\}=\{x\mid x\leqslant 2\}$，

所以 $A\cap B=\{x\mid x>-1\}\cap\{x\mid x\leqslant 2\}=\{x\mid -1<$

$x\leqslant 2\}$.

4. 若函数 $f(x)=(a^2-a+1)\log_{(a+1)}x$ 是对数函数，则实数 $a=$　　(　　)

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

B　**解析**：由题意可知 $a^2-a+1=1$，解得 $a=1$ 或 $a=0$. 又 $a+1>0$，且 $a+1\neq 1$，所以 $a=1$.

5. 若对数函数的图象过点 $M(16,4)$，则此对数函数的解析式为　　(　　)

A. $y=\log_4 x$　　B. $y=\log_{\frac{1}{4}} x$

C. $y=\log_{\frac{1}{2}} x$　　D. $y=\log_2 x$

D　**解析**：设该函数为 $y=\log_a x$. 因为对数函数的图象过点 $M(16,4)$，所以 $4=\log_a 16$. 解得 $a=2$. 所以对数函数的解析式为 $y=\log_2 x$. 故选 D.

6. 已知函数 $f(x)=\log_2(x^2+a)$. 若 $f(3)=1$，则 $a=$________.

-7　**解析**：$f(3)=\log_2(9+a)=1$，所以 $9+a=2$，$a=-7$.

7. 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\lg(x-2)+\dfrac{1}{x-3}$；

(2) $f(x)=\log_{(x+1)}(16-4x)$.

解：(1) 要使函数 $f(x)$ 有意义，应满足 $\begin{cases}x-2>0,\\ x-3\neq 0,\end{cases}$

所以 $x>2$ 且 $x\neq 3$.

故所求函数的定义域为 $(2,3)\cup(3,+\infty)$.

(2) 要使函数 $f(x)$ 有意义，应满足 $\begin{cases}x+1>0,\\ x+1\neq 1,\\ 16-4x>0.\end{cases}$

解得 $-1<x<4$，且 $x\neq 0$.

故所求函数的定义域为 $(-1,0)\cup(0,4)$.

8. 已知对数函数 $y=f(x)$ 的图象过点 $(4,2)$，求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 及 $f(2^{\lg 2})$ 的值.

解：设 $y=f(x)=\log_a x\ (a>0$，且 $a\neq 1)$，则 $2=\log_a 4$，故 $a=2$，即 $y=\log_2 x$. 因此 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\log_2\dfrac{1}{2}=-1$，$f(2^{\lg 2})=\log_2 2^{\lg 2}=\lg 2$.

综合性·创新提升

1. 函数 $f(x)=\ln\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ 的定义域为　　(　　)

A. $\left(-2,\dfrac{1}{2}\right)$　　B. $(-2,+\infty)$

C. $\left(-2,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

C　**解析**：对于函数 $f(x)=\ln\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$，

有 $\begin{cases}x-\dfrac{1}{2}\neq 0,\\ x+2>0.\end{cases}$ 解得 $x>-2$ 且 $x\neq\dfrac{1}{2}$.

故定义域为 $\left(-2,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

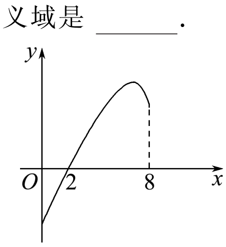
2. 在天文学中，天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述. 两颗星的星等与亮度满足关系式 $m_1-m_2=\dfrac{1}{2}\lg E_2^5-\dfrac{1}{2}\lg E_1^5$，其中星等为 m_k 的星的亮度为 E_k $(k=1,2)$. 已知牛郎星的星等是 0.75，织女星的星等是 0，则牛郎星与织女星的亮度的比值为　　(　　)

A. $10^{\frac{3}{10}}$　　B. $10^{-\frac{3}{10}}$

C. $\lg\dfrac{3}{10}$　　D. $\lg\dfrac{10}{3}$

B　**解析**：$m_1-m_2=\dfrac{1}{2}\lg E_2^5-\dfrac{1}{2}\lg E_1^5=\dfrac{5}{2}\lg\dfrac{E_2}{E_1}$，设牛郎星的星等为 m_1，织女星的星等为 m_2，则 $m_1-m_2=0.75$，则 $\dfrac{5}{2}\lg\dfrac{E_2}{E_1}=0.75$，可得 $\dfrac{E_1}{E_2}=10^{-\frac{3}{10}}$.

3. 已知函数 $f(x)$ 的图象如图所示，则函数 $g(x)=\log_{\sqrt{2}} f(x)$ 的定义域是______.



$(2,8]$　**解析**：要使函数 $g(x)=\log_{\sqrt{2}} f(x)$ 有意义，则 $f(x)>0$.

结合图象可知当 $x\in(2,8]$ 时，$f(x)>0$，

所以函数 $g(x)=\log_{\sqrt{2}} f(x)$ 的定义域是 $(2,8]$.

4. 若函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=3^{x+a}$ 的图象关于直线 $y=-x$ 对称，$f(-1)+f(-3)=3$，则实数 a 的值为 <u>2</u>.

5. 设函数 $f(x)=\log_a x\ (a>0$，且 $a\neq 1)$. 若 $f(x_1x_2\cdots x_{2\,023})=8$，则 $f(x_1^2)+f(x_2^2)+\cdots+f(x_{2\,023}^2)=$________.

16　**解析**：$f(x)=\log_a x(a>0$，且 $a\neq 1)$，

$f(x_1x_2\cdots x_{2\,023})=\log_a(x_1x_2\cdots x_{2\,023})=8$.

$f(x_1^2)+f(x_2^2)+\cdots+f(x_{2\,023}^2)$

$=\log_a x_1^2+\log_a x_2^2+\cdots+\log_a x_{2\,023}^2$

$=\log_a(x_1x_2\cdots x_{2\,023})^2=2\log_a(x_1x_2\cdots x_{2\,023})=16.$

6. 碳 14 是碳的一种具有放射性的同位素，它常用于确定生物的死亡年代.在活的生物体内碳 14 的含量与自然界中碳 14 的含量一样且保持稳定，一旦生物死亡，碳 14 摄入停止，生物体内的碳 14 会按指数函数的规律衰减，大约每经过 5 730 年衰减为原来的一半.通过测定生物体内碳 14 的含量就可以测定该生物的死亡年代.设刚死亡的生物体内碳 14 的含量为 1 个单位，死亡 t 年后，生物体内碳 14 的含量为 P.

(1)试将 P 表示为 t 的函数；

(2)科学家发现一块生物化石上的碳 14 的含量为自然界中碳 14 的含量的 8%，请推算该生物死亡的年代距今多少年.(参考数据：lg 2≈0.3)

解：(1)已知碳 14 含量与死亡年数成指数函数关系.设 $P=a^t$，由碳 14 每经过 5 730 年衰减为原来的一半，可得 $\frac{1}{2}=a^{5\,730}$.

故碳 14 的含量 P 与死亡年数 t 的函数关系式为 $P=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\,730}}$.

(2)由题意得 $\frac{t}{5\,730}=\log_{\frac{1}{2}}\frac{8}{100}=\frac{\lg\frac{8}{100}}{\lg\frac{1}{2}}=\frac{\lg 8-\lg 100}{-\lg 2}=\frac{2-3\lg 2}{\lg 2}\approx\frac{11}{3}$，

解得 $t=5\,730\times\frac{11}{3}=21\,010$.

所以推算该生物死亡的年代距今 21 010 年.

4.4.2 对数函数的图象和性质

第 1 课时 对数函数的图象和性质

学习任务目标

1. 掌握对数函数的图象和性质.

2. 掌握对数函数图象与性质的简单应用.

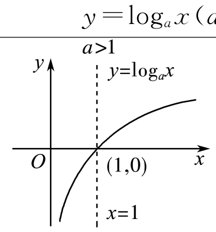
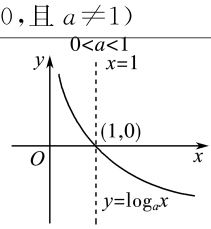
3. 知道同底的指数函数与对数函数互为反函数.

问题式预习

知识点一 对数函数的图象与性质

1. 因为点 (x,y) 与点 $(x,-y)$ 关于 x 轴对称，所以 $y=\log_2 x$ 图象上任意一点 (x,y) 关于 x 轴对称的对称点 $(x,-y)$ 都在 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的图象上，反之亦然.由此可知，底数互为倒数的两个对数函数的图象关于 x 轴对称.

2. 对数函数的图象与性质

定义	$y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$	
图象	$a>1$ 	$0<a<1$ 
值域	**R**	
定义域	$(0,+\infty)$	
单调性	在 $(0,+\infty)$ 上是增函数	在 $(0,+\infty)$ 上是减函数

续表

定义	$y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$	
共点性	过定点 $(1,0)$，即 $x=1$ 时，$y=0$	
函数值的特点	$x\in(0,1)$ 时，$y\in(-\infty,0)$；$x\in[1,+\infty)$ 时，$y\in[0,+\infty)$	$x\in(0,1)$ 时，$y\in(0,+\infty)$；$x\in[1,+\infty)$ 时，$y\in(-\infty,0]$

[微训练]

函数 $f(x)=\log_a(x-1)+1(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象恒过点 ( )

A.(1,1) B.(2,1)

C.(1,2) D.(2,2)

B **解析**：真数为 1 时，对数为 0，所以令 $x=2$，则 $f(x)=1$.

知识点二 反函数

一般地，指数函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$ 与对数函数 $y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$ 互为反函数，它们的定义域

与值域正好互换,图象关于直线 $y=x$ 对称.

[微训练]

1. 若函数 $y=f(x)$ 是函数 $y=a^x(a>0$,且 $a\neq1)$ 的反函数,且 $f(2)=1$,则 $f(x)=$ (　　)

A.$\log_2 x$　　B.$\frac{1}{2^x}$　　C.$\log_{\frac{1}{2}} x$　　D.2^{x-2}

A　**解析**:函数 $y=a^x(a>0$,且 $a\neq1)$ 的反函数是 $f(x)=\log_a x$.又 $f(2)=1$,即 $\log_a 2=1$,所以 $a=2$.故 $f(x)=\log_2 x$.

2. 下列函数中,与函数 $y=\lg x$ 互为反函数的是 (　　)

A.$y=10^x$　　B.$y=10^{-x}$

C.$y=-\lg x$　　D.$y=\lg(-x)$

A　**解析**:由 $y=\lg x$ 得 $x=10^y$.

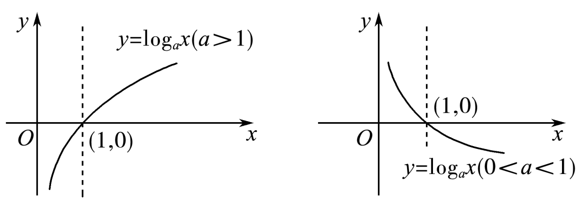
对换 x,y 的位置可得 $y=\lg x$ 的反函数为 $y=10^x$.所以与函数 $y=\lg x$ 互为反函数的是 $y=10^x$.故选 A.

任务型课堂

任务一　对数函数的图象

[探究活动]

请观察对数函数的图象,思考下列问题.



探究 1:对数函数 $y=\log_a x$ 的图象不经过第几象限?

提示:观察对数函数的图象可知:对数函数的图象不经过第二、三象限.

探究 2:根据对数函数的图象在第一、四象限,你能得到对数函数的哪些性质?

提示:因为图象在 y 轴的右侧,所以零和负数没有对数.

探究 3:对数函数中底数 a 的取值范围影响着图象的变化特点及函数值的取值范围,具体有哪些影响呢?请完成下表:

底数 a	$a>1$	$0<a<1$
图象	从左向右看是______	从左向右看是______
函数值	若 $x>1$,则______;若 $0<x<1$,则______	若 $x>1$,则______;若 $0<x<1$,则______

提示:(1)图象:当 $a>1$ 时,图象从左向右看是上升的;当 $0<a<1$ 时,图象从左向右看是下降的.

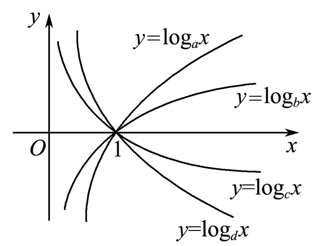
(2)函数值:当 $a>1$ 时,若 $x>1$,则 $y>0$;若 $0<x<1$,则 $y<0$.

当 $0<a<1$ 时,若 $x>1$,则 $y<0$;若 $0<x<1$,则 $y>0$.

答案:上升的　下降的　$y>0$　$y<0$　$y<0$　$y>0$

[评价活动]

1. 在同一平面直角坐标系中,函数 $y=\log_a x$,$y=\log_b x$,$y=\log_c x$,$y=\log_d x$ 的图象如图所示,则下列结论正确的是 (　　)



A.$0<a<b<1<d<c$

B.$0<b<a<1<c<d$

C.$0<d<c<1<a<b$

D.$0<c<d<1<a<b$

D　**解析**:由于在第一象限中,图象从左往右,对应的底数越来越大,且 $a>1$,$b>1$,$0<c<1$,$0<d<1$,所以 $0<c<d<1<a<b$.故选 D.

2. 函数 $y=\log_a(x+1)-2(a>0$,且 $a\neq1)$ 的图象恒过点______.

$(0,-2)$　**解析**:函数 $y=\log_a x(a>0$,且 $a\neq1)$ 的图象恒过点 $(1,0)$.在 $y=\log_a(x+1)-2$ 中,令 $x+1=1$ 得 $x=0$,此时 $y=\log_a(x+1)-2=-2$.所以函数 $y=\log_a(x+1)-2$ 的图象恒过点 $(0,-2)$.

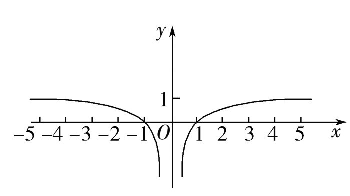
3. 已知 $f(x)=\log_a|x|$ 满足 $f(-5)=1$,试画出函数 $f(x)$ 的图象.

解:因为 $f(x)=\log_a|x|$,

所以 $f(-5)=\log_a 5=1$,即 $a=5$.

所以 $f(x)=\log_5|x|$.

所以 $f(x)$ 是偶函数,其图象如图所示.

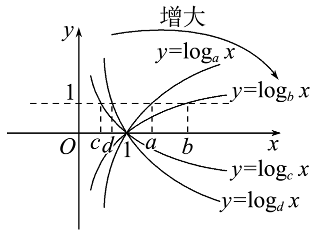


【类题通法】

1.定点问题求解方法

求函数 $y=m+\log_a f(x)(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象所过定点时，只需令 $f(x)=1$ 求出 x 的值，即得定点为 (x,m).

2.对数函数的底数与图象的关系



其中 a,b,c,d 是各对数函数的底数，根据图象，可得 $0<c<d<1<a<b$.

任务二 利用对数函数的性质比较大小

1. 设 $a=\log_3\pi$，$b=\log_2\sqrt{3}$，$c=\log_3\sqrt{2}$，则（　　）

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$

C. $b>a>c$　　D. $b>c>a$

A　**解析**：因为 $\log_3\sqrt{2}<\log_2\sqrt{2}<\log_2\sqrt{3}$，所以 $b>c$. 因为 $\log_2\sqrt{3}<\log_2 2=\log_3 3<\log_3\pi$，所以 $a>b$，所以 $a>b>c$. 故选 A.

2. 已知 $a=\log_3\frac{7}{2}$，$b=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$，$c=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{5}$，则 a,b,c 的大小关系为（　　）

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$

C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

D　**解析**：因为 $c=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{5}=\log_3 5>\log_3\frac{7}{2}>\log_3 3=1$，$b=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}<\left(\frac{1}{4}\right)^{0}=1$，即 $c>a>b$.

3. 比较下列各题中两个值的大小.

(1) $\log_2 3.4$，$\log_2 8.5$；

(2) $\log_{0.3}1.8$，$\log_{0.3}2.7$；

(3) $\log_a 5.1$，$\log_a 5.9(a>0$，且 $a\neq1)$.

解：(1) 对数函数 $y=\log_2 x$，

因为它的底数 $2>1$，

所以它在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

又 $3.4<8.5$，

于是 $\log_2 3.4<\log_2 8.5$.

(2) 对数函数 $y=\log_{0.3}x$，

因为它的底数 $0<0.3<1$，

所以它在 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

又 $1.8<2.7$，于是 $\log_{0.3}1.8>\log_{0.3}2.7$.

(3) 当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

又 $5.1<5.9$，于是 $\log_a 5.1<\log_a 5.9$.

当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

又 $5.1<5.9$，于是 $\log_a 5.1>\log_a 5.9$.

综上，当 $a>1$ 时，$\log_a 5.1<\log_a 5.9$；

当 $0<a<1$ 时，$\log_a 5.1>\log_a 5.9$.

【类题通法】

比较对数值大小时常用的方法

(1) 若底数为同一常数，则可由对数函数的单调性直接进行比较；

(2) 若底数为同一参数，则根据底数对对数函数单调性的影响，对底数进行分类讨论；

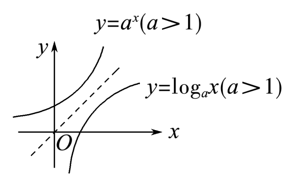
(3) 若底数不同，真数相同，则可以先用换底公式化为同底后，再进行比较；

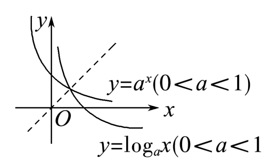
(4) 若底数与真数都不同，则常借助 1，0 等中间量进行比较.

任务三 反函数

[探究活动]

观察指数函数 $y=a^x$ 及对数函数 $y=\log_a x$ 在同一直角坐标系内的图象，探究二者的图象间的关系.





探究 1：如果 $P_0(x_0,y_0)$ 在函数 $y=a^x$ 的图象上，那么 P_0 关于直线 $y=x$ 的对称点在函数 $y=\log_a x$ 的图象上吗？为什么？

提示：P_0 关于直线 $y=x$ 的对称点在函数 $y=\log_a x$ 的图象上.

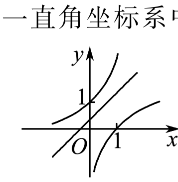
因为 $P_0(x_0,y_0)$ 在函数 $y=a^x$ 的图象上，所以 $y_0=a^{x_0}$，P_0 关于直线 $y=x$ 的对称点为 (y_0,x_0)，则 $\log_a y_0=\log_a a^{x_0}=x_0$，所以点 (y_0,x_0) 在函数 $y=\log_a x$ 的图象上.

探究 2：两个函数的图象关于______对称.

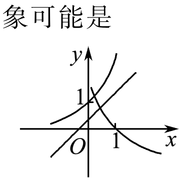
直线 $y=x$　**提示**：通过探究 1 可知两函数的图象关于直线 $y=x$ 对称.

[评价活动]

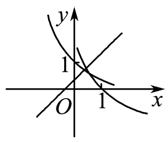
1. 已知 $a>0$ 且 $a\neq1$，函数 $y=\log_a x$，$y=a^x$，$y=x+a$ 在同一直角坐标系中的图象可能是（　　）



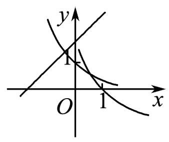
A



B



C



D

C　**解析**:函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,排除 B;当 $a>1$ 时,$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 在定义域内都是单调递增的,$y=x+a$ 在 y 轴上的截距 $a>1$,排除 A;当 $0<a<1$ 时,$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 在定义域内单调递减,$y=x+a$ 在 y 轴上的截距 a 满足 $0<a<1$,排除 D,故选 C.

2.函数 $f(x)=\log_a(3x-2)(a>0$,且 $a\neq1)$的图象过定点　(　　)

A.$\left(0,\frac{2}{3}\right)$　B.$\left(\frac{2}{3},0\right)$　C.$(0,1)$　D.$(1,0)$

D　**解析**:令 $3x-2=1$,解得 $x=1$,即得函数 $y=\log_a(3x-2)$的图象过定点$(1,0)$.

3.已知 $a=\log_2 e,b=\ln 2,c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$,则 a,b,c 的大小关系为　(　　)

A.$a>b>c$　B.$b>a>c$

C.$c>b>a$　D.$c>a>b$

D　**解析**:因为 $e=2.718\ 28\cdots>2$,

所以 $a=\log_2 e>\log_2 2=1.b=\ln 2<\ln e=1.$

因为 $c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}=\log_2 3>\log_2 2=1$,

$a=\log_2 e<\log_2 3=c$,所以 $c>a>b$.

4.若函数 $f(x)$与 $g(x)=a^x$ 互为反函数,且函数$g(x)$的图象过点$(-2,4)$,则 $f(1)+f(2)=$　(　　)

A.-1　B.0

C.1　D.$\frac{1}{4}$

A　**解析**:由题意可得 $f(x)=\log_a x$.

因为函数 $g(x)$的图象过点$(-2,4)$,所以函数 $f(x)$的图象过点$(4,-2)$,

即 $-2=\log_a 4$,解得 $a=\frac{1}{2}$.所以 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$.

所以 $f(1)+f(2)=\log_{\frac{1}{2}}1+\log_{\frac{1}{2}}2=0-1=-1$.故选 A.

【类题通法】

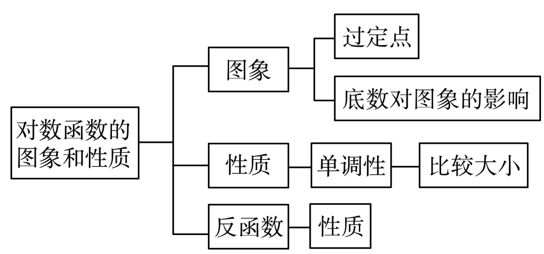
互为反函数的函数的性质

(1)同底数的指数函数与对数函数互为反函数;

(2)互为反函数的两个函数定义域与值域互换;

(3)互为反函数的两个函数的图象关于直线 $y=x$ 对称.

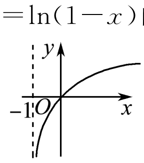
提质归纳



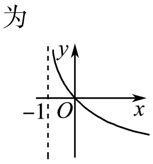
课后素养评价(三十四)

基础性·能力运用

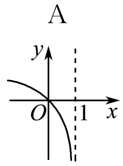
1.函数 $y=\ln(1-x)$的图象大致为　(　　)



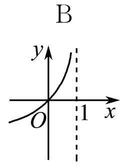
A



B



C



D

C　**解析**:函数的定义域为$(-\infty,1)$,且在定义域上单调递减,故选 C.

2.(多选)函数 $f(x)=\log_a(x+e)$的图象可能不过　(　　)

A.第一象限　B.第二象限

C.第三象限　D.第四象限

AD　**解析**:当 $0<a<1$ 时,$f(x)=\log_a(x+e)$的图象不过第一象限;当 $a>1$ 时,$f(x)=\log_a(x+e)$的图象不过第四象限.

3.已知 $a=\log_2 3,b=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2},c=\log_3\frac{1}{2}$,则　(　　)

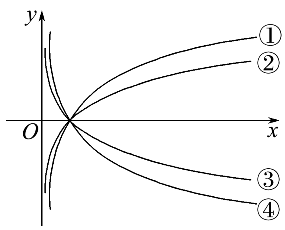
A.$a>b>c$　B.$a>c>b$

C.$b>c>a$　D.$c>b>a$

A　**解析**:$a=\log_2 3>1,b=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}=\log_3 2\in(0,1)$,

$c=\log_3\frac{1}{2}<0$,故 $c<b<a$.

4.如图,函数 $y=\log_2 x,y=\log_{0.5}x,y=-\log_3 x$ 的图象依次为　(　　)



A.①④②　　B.①④③

C.②③①　　D.②③④

B　**解析**:根据函数的图象,函数的底数决定函数的单调性,

当底数 $a>1$ 时,函数单调递增,当 $0<a<1$ 时,函数单调递减,

当底数 $a>1$,满足底数越大函数的图象在 $x>1$ 时,越靠近 x 轴,

故曲线①对应函数 $y=\log_2 x$ 的图象,根据对称性,曲线④对应函数 $y=\log_{0.5} x$ 的图象,

曲线③对应函数 $y=-\log_3 x$ 的图象,故曲线②不属于3个函数中的任一个.故选B.

5. 若函数 $f(x)=4+\log_a(x-1)(a>0$,且 $a\neq1)$ 的图象过一个定点,则这个定点的坐标是________.

(2,4)　**解析**:因为函数 $y=\log_a(x-1)(a>0$,且 $a\neq1)$ 的图象过定点(2,0),

所以函数 $f(x)=4+\log_a(x-1)$ 的图象过定点(2,4).

6. 若指数函数 $y=a^x(a>0$,且 $a\neq1)$ 的反函数的图象过点(9,2),则 a 的值为 $\underline{3}$.

7. 若函数 $y=\log_{(3a-1)}x$ 是 $(0,+\infty)$ 上的减函数,则实数 a 的取值范围是________.

$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$　**解析**:由题意可得 $0<3a-1<1$,解得 $\frac{1}{3}<a<\frac{2}{3}$,所以实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

8. 比较下列各组值的大小.

(1) $\log_3 1.99$,$\log_3 2$;

(2) $\log_3 0.2$,$\log_4 0.2$;

(3) $\log_2 3$,$\log_{0.3} 2$;

(4) $\log_a \pi$,$\log_a 3.14(a>0$,且 $a\neq1)$.

解:(1)因为函数 $f(x)=\log_3 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,且 $1.99<2$,则 $f(1.99)<f(2)$.

所以 $\log_3 1.99<\log_3 2$.

(2)因为 $0>\log_{0.2} 3>\log_{0.2} 4$,

所以 $\frac{1}{\log_{0.2} 3}<\frac{1}{\log_{0.2} 4}$,即 $\log_3 0.2<\log_4 0.2$.

(3)因为 $\log_2 3>\log_2 1=0$,$\log_{0.3} 2<\log_{0.3} 1=0$,

所以 $\log_2 3>\log_{0.3} 2$.

(4)当 $a>1$ 时,函数 $y=\log_a x$ 在定义域上是增函数,

则 $\log_a \pi>\log_a 3.14$;

当 $0<a<1$ 时,函数 $y=\log_a x$ 在定义域上是减函数,

则 $\log_a \pi<\log_a 3.14$.

综上所述,当 $a>1$ 时,$\log_a \pi>\log_a 3.14$;

当 $0<a<1$ 时,$\log_a \pi<\log_a 3.14$.

综合性·创新提升

1. 已知 $g(x)$ 是函数 $f(x)=10^x$ 的反函数,则 $g(1)$ 的值为　(　　)

A.0　　B.1　　C.10　　D.100

A　**解析**:由题意,$g(x)=\lg x$,

所以 $g(1)=\lg 1=0$.

2. (多选)下列不等式成立的是　(　　)

A. $\log_{0.2} 0.3<\log_{0.2} 0.4$

B. $2^{0.3}>\log_3 2$

C. $\log_3 e>\ln 3$

D. $\log_2 5>\log_3 5$

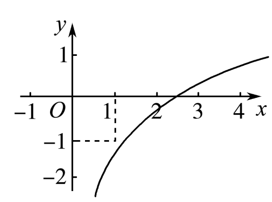
BD　**解析**:因为函数 $y=\log_{0.2} x$ 是减函数,所以 $\log_{0.2} 0.3>\log_{0.2} 0.4$,故A错误;

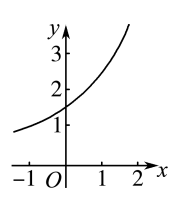
因为 $2^{0.3}>2^0=1$,$\log_3 2<\log_3 3=1$,所以 $2^{0.3}>\log_3 2$,故B正确;

因为 $\log_3 e<\log_3 3=1$,$\ln 3>1$,所以 $\log_3 e<\ln 3$,故C错误;

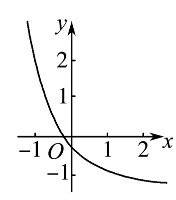
因为 $\log_2 5=\frac{\lg 5}{\lg 2}$,$\log_3 5=\frac{\lg 5}{\lg 3}$,且 $1>\lg 5>\lg 3>\lg 2>0$,所以 $\log_2 5>\log_3 5$,故D正确.

3. 已知函数 $f(x)=\log_a x+b$ 的图象如图所示,那么函数 $g(x)=a^x+b$ 的图象可能为　(D)

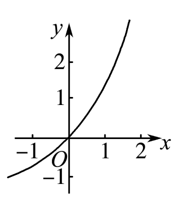




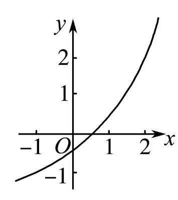
A



B



C



D

4. 为了得到函数 $y=\lg \dfrac{x+3}{10}$ 的图象，只需把函数 $y=\lg x$ 的图象　　(　　)

A.向左平移 3 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度

B.向右平移 3 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度

C.向左平移 3 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度

D.向右平移 3 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度

C　**解析**：将函数 $y=\lg x$ 的图象向左平移 3 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度，即可以得到 $y=\lg(x+3)-1=\lg \dfrac{x+3}{10}$ 的图象.故选 C.

5. 已知函数 $f(x)=\log_2(1+4^x)-x$，则下列说法正确的是　　(D)

A.函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上为增函数

B.函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$

C.函数 $f(x)$ 是奇函数

D.函数 $f(x)$ 是偶函数

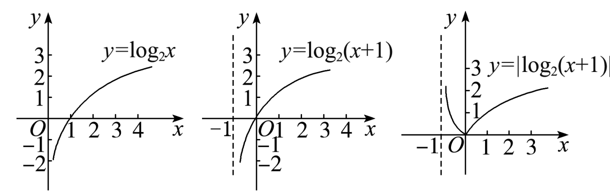
6. 已知奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.若 $a=-f\left(\log_2\dfrac{1}{5}\right)$，$b=f(\log_2 4.1)$，$c=f(2^{0.8})$，则 a,b,c 的大小关系为 $\underline{c<b<a}$.

7. 作出函数 $y=|\log_2(x+1)|$ 的图象.

解：第一步：作 $y=\log_2 x$ 的图象，如图(1)所示；

第二步：将 $y=\log_2 x$ 的图象沿 x 轴向左平移 1 个单位长度，得到 $y=\log_2(x+1)$ 的图象，如图(2)所示；

第三步：将 $y=\log_2(x+1)$ 在 x 轴下方的图象作关于 x 轴的对称变换，得到 $y=|\log_2(x+1)|$ 的图象，如图(3)所示.



(1)　　(2)　　(3)

第 2 课时　对数函数的图象和性质的应用

学习任务目标

1. 能够利用对数函数的单调性解简单的对数型不等式.

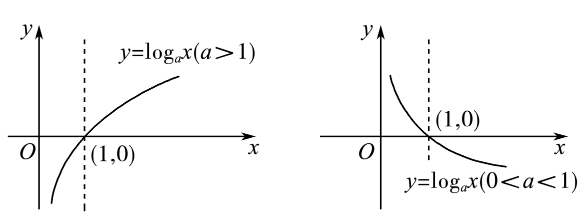
2. 能够利用对数函数的性质研究与对数相关的复合函数的单调性、奇偶性等问题.

任务型课堂

任务一　解简单的对数不等式

[探究活动]

观察对数函数 $y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的图象，思考下面问题.



探究 1：a 和 x 为何值时，$\log_a x$ 是一个大于 0 的数？a 和 x 为何值时，$\log_a x$ 是一个小于 0 的数？

提示：当 $a>1$ 且 $x>1$ 或 $0<a<1$ 且 $0<x<1$ 时，$\log_a x>0$；

当 $a>1$ 且 $0<x<1$ 或 $0<a<1$ 且 $x>1$ 时，$\log_a x<0$.

探究 2：在解不等式 $\log_a x>0$ 时，应特别注意什么？

提示：讨论底数 a 与 1 的大小关系，它决定了对数函数的单调性，还应注意 $x>0$.

[评价活动]

1. 若 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)}}$，则 $f(x)$ 的定义域为　　(　　)

A. $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$　　B. $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

C. $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $(0,+\infty)$

A　**解析**：由题知 $\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)>0,\\ 2x+1>0,\end{cases}$

则 $0<2x+1<1$，解得 $-\dfrac{1}{2}<x<0$.

所以 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$.故选 A.

2.已知 $a=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，若 $\log_a m>\log_a 5$，则 m 的取值范围是________.

$(0,5)$　**解析**：因为 $0<a<1$，

所以 $f(x)=\log_a x$ 在$(0,+\infty)$上是减函数.

所以 $0<m<5$.所以 m 的取值范围是$(0,5)$.

3.已知 $\log_a \frac{1}{2}>1$，则 a 的取值范围为________.

$\left(\frac{1}{2},1\right)$　**解析**：由 $\log_a \frac{1}{2}>1$ 得 $\log_a \frac{1}{2}>\log_a a$.

①当 $a>1$ 时，有 $a<\frac{1}{2}$，此时无解.

②当 $0<a<1$ 时，有 $\frac{1}{2}<a$，从而 $\frac{1}{2}<a<1$.

故 a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

【类题通法】

解对数型不等式的一般思路

(1)把不等式两边均化为 $\log_a f(x)$ 的形式；

(2)利用单调性，把不等式转化为真数的大小关系，得到新的不等式，要注意底数 a 和 1 的大小关系；

(3)在真数大于零的前提下，解这个新的不等式；

(4)总结得出原不等式的解集.

任务二　简单对数型复合函数的值域

1.设 $a>1$，函数 $f(x)=\log_a x$ 在区间$[a,2a]$上的最大值与最小值之差为 $\frac{1}{2}$，则 a 等于　　(　　)

A.4　　B.$2\sqrt{2}$

C.2　　D.$\sqrt{2}$

A　**解析**：因为 $a>1$，所以函数 $f(x)=\log_a x$ 在区间$[a,2a]$上是增函数.

所以 $f(x)_{\max}=f(2a)=\log_a(2a)=1+\log_a 2$，

$f(x)_{\min}=f(a)=\log_a a=1$.

所以 $1+\log_a 2-1=\frac{1}{2}$.所以 $a=4$.

2.已知函数 $f(x)=3\log_{\frac{1}{3}}x$ 的定义域为$[3,9]$，则函数 $f(x)$的值域是________.

$[-6,-3]$　**解析**：因为 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ 在$(0,+\infty)$上是减函数，

所以，当 $3\leqslant x\leqslant 9$ 时，$\log_{\frac{1}{3}}9\leqslant\log_{\frac{1}{3}}x\leqslant\log_{\frac{1}{3}}3$，

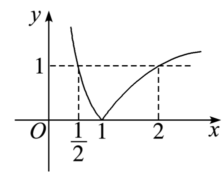
即 $-2\leqslant\log_{\frac{1}{3}}x\leqslant-1$.

所以 $-6\leqslant 3\log_{\frac{1}{3}}x\leqslant-3$.

所以函数 $f(x)$的值域是$[-6,-3]$.

3.已知函数 $f(x)=|\log_{\frac{1}{2}}x|$的定义域为$\left[\frac{1}{2},m\right]$，值域为$[0,1]$，则 m 的取值范围为________.

$[1,2]$　**解析**：作出 $f(x)=|\log_{\frac{1}{2}}x|$的图象(如图)，可知 $f\left(\frac{1}{2}\right)=f(2)=1$，$f(1)=0$.由题意，结合图象知 $1\leqslant m\leqslant 2$.



【类题通法】

(1)直接利用对数函数的单调性，可求对数函数 $y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$在给定区间上的值域.

(2)求形如 $y=\log_a f(x)(a>0$，且 $a\neq1)$的复合函数值域的步骤：①求函数的定义域；②将函数拆分成 $y=\log_a u(a>0$，且 $a\neq1)$，$u=f(x)$两个函数；③由定义域求 u 的取值范围；④利用函数 $y=\log_a u(a>0$，且 $a\neq1)$的单调性求值域.

任务三　对数型复合函数的单调性及单调区间

1.求函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+2x+1)$的值域和单调区间.

解：设 $t=-x^2+2x+1$，

则 $t=-(x-1)^2+2\leqslant 2$.

因为 $y=\log_{\frac{1}{2}}t$ 为减函数，且 $0<t\leqslant 2$，

所以 $y_{\min}=\log_{\frac{1}{2}}2=-1$.

所以函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+2x+1)$的值域为$[-1,+\infty)$.

令 $-x^2+2x+1>0$，得 $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$.

所以 $t=-x^2+2x+1$ 在$(1-\sqrt{2},1)$上单调递增，在$(1,1+\sqrt{2})$上单调递减.

又 $y=\log_{\frac{1}{2}}t$ 为减函数，

所以函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+2x+1)$的单调递增区间为$(1,1+\sqrt{2})$，单调递减区间为$(1-\sqrt{2},1)$.

2.已知函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-ax+a)$在区间$(-\infty,\sqrt{2})$上是增函数，求实数 a 的取值范围.

解：令 $g(x)=x^2-ax+a$，$g(x)$在$\left(-\infty,\frac{a}{2}\right]$上单调递减.

因为 $0<\frac{1}{2}<1$，所以 $y=\log_{\frac{1}{2}}g(x)$是减函数.

已知复合函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-ax+a)$在区间$(-\infty,\sqrt{2})$上单调递增，

所以只要 $g(x)$在$(-\infty,\sqrt{2})$上单调递减，且 $g(x)>0$ 在$(-\infty,\sqrt{2})$上恒成立，

即 $\begin{cases}\sqrt{2}\leqslant\frac{a}{2},\\(\sqrt{2})^2-\sqrt{2}a+a\geqslant 0,\end{cases}$　所以 $2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 2(\sqrt{2}+1)$.

故实数 a 的取值范围是$[2\sqrt{2},2(\sqrt{2}+1)]$.

【类题通法】

解决复合函数的单调性问题的策略

(1)求复合函数的单调区间,首先求出函数的定义域,再利用复合函数单调性的法则“同增异减”求单调区间;

(2)若已知函数在某个区间上的单调性,则该区间为函数相应单调区间的子区间,从而求参数的范围.

注意:函数在某区间上单调,前提是在该区间上有意义,不能忽视其对参数范围的限制.

任务四　对数型复合函数性质的综合应用

1.(2022·全国乙卷(文))若 $f(x)=\ln\left|a+\frac{1}{1-x}\right|+b$ 是奇函数,则 $a=$______,$b=$______.

$-\frac{1}{2}$　$\ln 2$　**解析**:若 $a=0$,则 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq 1\}$,不符合题意,

所以 $a\neq 0$.

若奇函数 $f(x)=\ln\left|a+\frac{1}{1-x}\right|+b$ 有意义,则 $x\neq 1$ 且 $a+\frac{1}{1-x}\neq 0$,

所以 $x\neq 1$ 且 $x\neq 1+\frac{1}{a}$.

因为函数 $f(x)$ 为奇函数,所以 $1+\frac{1}{a}=-1$,解得 $a=-\frac{1}{2}$.

由 $f(0)=0$,得 $\ln\frac{1}{2}+b=0$,所以 $b=\ln 2$.

2.判断函数 $f(x)=\lg(\sqrt{1+x^2}-x)$ 的奇偶性.

解:(方法一)由 $\sqrt{1+x^2}-x>0$ 可得 $x\in\mathbf{R}$,

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

又 $f(-x)=\lg(\sqrt{1+x^2}+x)$

$=\lg\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}-x}$

$=\lg\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}$

$=-\lg(\sqrt{1+x^2}-x)=-f(x)$,

即 $f(-x)=-f(x)$.

所以函数 $f(x)=\lg(\sqrt{1+x^2}-x)$ 是奇函数.

(方法二)由 $\sqrt{1+x^2}-x>0$ 可得 $x\in\mathbf{R}$,

$f(x)+f(-x)=\lg(\sqrt{1+x^2}-x)+\lg(\sqrt{1+x^2}+x)$

$=\lg[(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)]$

$=\lg(1+x^2-x^2)=0$.

所以 $f(-x)=-f(x)$.

所以函数 $f(x)=\lg(\sqrt{1+x^2}-x)$ 是奇函数.

3.已知函数 $f(x)=\log_a(x+1)$,$g(x)=\log_a(1-x)$(其中 $a>0$,且 $a\neq 1$).

(1)求函数 $f(x)+g(x)$ 的定义域;

(2)判断函数 $f(x)-g(x)$ 的奇偶性,并予以证明.

解:(1)由题意得 $\begin{cases}x+1>0,\\1-x>0,\end{cases}$

所以 $-1<x<1$.

所以所求函数的定义域为 $(-1,1)$.

(2)函数 $f(x)-g(x)$ 为奇函数.

证明如下:

令 $H(x)=f(x)-g(x)$,

则 $H(x)=\log_a(x+1)-\log_a(1-x)$

$=\log_a\frac{x+1}{1-x}(-1<x<1)$.

因为 $H(-x)=\log_a\frac{-x+1}{1+x}=-\log_a\frac{x+1}{1-x}=-H(x)$,

所以函数 $H(x)=f(x)-g(x)$ 为奇函数.

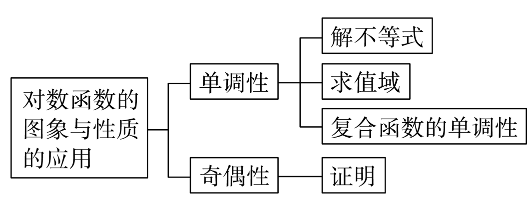
【类题通法】

解决综合性问题的关注点

(1)增强定义域意识:求单调区间、证明奇偶性、解不等式都要先求定义域,符合定义域是满足性质的前提.

(2)增强性质的应用意识:解对数不等式的关键是转化为常见的不等式,转化工具就是对数函数的单调性.

提质归纳



课后素养评价（三十五）

基础性·能力运用

1. 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$ 是　　（　　）

A. $(0,+\infty)$ 上的增函数

B. $(0,+\infty)$ 上的减函数

C. $(-\infty,0)$ 上的增函数

D. $(-\infty,0)$ 上的减函数

C　**解析**：函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$，定义域为 $(-\infty,0)$，令 $u=-x$，则 $y=\log_{\frac{1}{2}}u$，

因为 $u=-x$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，$y=\log_{\frac{1}{2}}u$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以由复合函数的单调性可知，函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增.

2. 已知函数 $f(x)$ 的图象与 $g(x)=\log_{\frac{1}{4}}x$ 的图象关于 x 轴对称，则不等式 $f(3x)<f(2x+1)$ 的解集为　　（　　）

A. $(0,+\infty)$　　B. $(0,1)$

C. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　D. $(-\infty,1)$

B　**解析**：根据题意，$g(x)$ 是在 $(0,+\infty)$ 上的减函数，又 $f(x)$ 与 $g(x)$ 关于 x 轴对称，则 $f(x)=\log_4 x$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数，所以 $0<3x<2x+1$，解得 $0<x<1$.

3. 已知 $y=\log_a(2-ax)$ 的单调递减区间为 $[0,1]$，则 a 的取值范围为　　（B）

A. $(0,1)$　　B. $(1,2)$

C. $(0,2)$　　D. $[2,+\infty)$

4. 如果 $\log_{\frac{1}{2}}x<\log_{\frac{1}{2}}y<0$，那么　　（　　）

A. $y<x<1$　　B. $x<y<1$

C. $1<x<y$　　D. $1<y<x$

D　**解析**：对数函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，则由 $\log_{\frac{1}{2}}x<\log_{\frac{1}{2}}y<0=\log_{\frac{1}{2}}1$，可得 $1<y<x$.

5. 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(1-x^2)$ 的单调递增区间为________，最小值为________.

$[0,1)$　0　**解析**：要使 $y=\log_{\frac{1}{2}}(1-x^2)$ 有意义，则 $1-x^2>0$.

所以 $x^2<1$. 所以 $-1<x<1$. 因此函数的定义域为 $(-1,1)$.

令 $t=1-x^2$，$x\in(-1,1)$.

当 $x\in(-1,0]$ 时，x 增大，t 增大，$y=\log_{\frac{1}{2}}t$ 减小，所以 $x\in(-1,0]$ 时，$y=\log_{\frac{1}{2}}(1-x^2)$ 单调递减.

同理，当 $x\in[0,1)$ 时，$y=\log_{\frac{1}{2}}(1-x^2)$ 单调递增.

故函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(1-x^2)$ 的单调递增区间为 $[0,1)$，且函数的最小值 $y_{\min}=\log_{\frac{1}{2}}(1-0^2)=0$.

6. 函数 $f(x)=\log_2\sqrt{x}\cdot\log_{\sqrt{2}}(2x)$ 的最小值为________.

$-\dfrac{1}{4}$　**解析**：显然 $x>0$，所以 $f(x)=\log_2\sqrt{x}\cdot\log_{\sqrt{2}}(2x)=\dfrac{1}{2}\log_2 x\cdot\log_2(4x^2)=\dfrac{1}{2}\log_2 x\cdot(\log_2 4+2\log_2 x)=\log_2 x+(\log_2 x)^2=\left(\log_2 x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\geqslant-\dfrac{1}{4}$，当且仅当 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，有 $f(x)_{\min}=-\dfrac{1}{4}$.

7. 已知函数 $f(x)=\lg[(a^2-1)x^2+(a+1)x+1]$. 若 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-1]\cup\left(\dfrac{5}{3},+\infty\right)$.

8. 已知函数 $f(x)=\lg(2+x)+\lg(2-x)$.

(1) 求函数 $y=f(x)$ 的定义域；

(2) 判断函数 $y=f(x)$ 的奇偶性；

(3) 若 $f(m-2)<f(m)$，求 m 的取值范围.

解：(1) 要使函数 $f(x)$ 有意义，则 $\begin{cases}2+x>0,\\2-x>0,\end{cases}$

解得 $-2<x<2$.

所以函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid -2<x<2\}$.

(2) 由(1)，可知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-2,2)$，对任意 $x\in(-2,2)$，有 $-x\in(-2,2)$.

因为 $f(-x)=\lg(2-x)+\lg(2+x)=\lg(2+x)+\lg(2-x)=f(x)$，

所以函数 $y=f(x)$ 为偶函数.

(3) 函数 $f(x)=\lg(2+x)+\lg(2-x)=\lg(4-x^2)$.

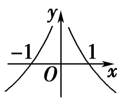
当 $0\leqslant x<2$ 时，函数 $y=f(x)$ 为减函数；当 $-2<x<0$ 时，函数 $y=f(x)$ 为增函数.

所以不等式 $f(m-2)<f(m)$ 等价于 $\begin{cases}-2<m-2<2,\\-2<m<2,\\|m|<|m-2|,\end{cases}$ 解得 $0<m<1$.

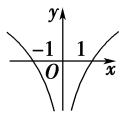
故 m 的取值范围为 $\{m\mid 0<m<1\}$.

综合性·创新提升

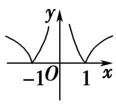
1. 若函数 $y=\log_a(3-ax)$ 为增函数，则函数 $y=\log_a|x|$ 的图象大致是（　　）



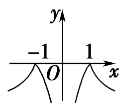
A



B



C



D

A　**解析**：由题可知 $a>0$ 且 $a\neq1$，令 $u=3-ax$，则 $u=3-ax$ 为减函数.

由函数 $y=\log_a(3-ax)$ 为增函数可得 $0<a<1$.

当 $x>0$ 时，$y=\log_a|x|=\log_a x$，此时函数 $y=\log_a|x|$ 为减函数.结合函数 $y=\log_a|x|$ 为偶函数可知，函数 $y=\log_a|x|$ 的图象为选项 A 中的图象.

2. 若函数 $y=\log_a(x^2-ax+1)$ 有最小值，则 a 的取值范围是（　　）

A. $0<a<1$　　B. $0<a<2, a\neq1$

C. $1<a<2$　　D. $a\geqslant2$

C　**解析**：令 $g(x)=x^2-ax+1(a>0$，且 $a\neq1)$，

①当 $a>1$ 时，$g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒为正，所以 $\Delta=a^2-4<0$，解得 $1<a<2$；

②当 $0<a<1$ 时，函数 $y=\log_a(x^2-ax+1)$ 没有最小值，不符合题意.

综上所述，$1<a<2$.

3.（多选）已知函数 $f(x)=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象经过点 $(4,2)$，则下列命题正确的有（　　）

A. 函数 $f(x)$ 为增函数

B. 函数 $f(x)$ 为偶函数

C. 若 $x>1$，则 $f(x)>0$

D. 若 $0<x_1<x_2$，则 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$

ACD　**解析**：由题可知 $2=\log_a4$，解得 $a=2$，故 $f(x)=\log_2x$.

对于 A，函数 $f(x)$ 为增函数，正确；

对于 B，$f(x)=\log_2x$ 不为偶函数；

对于 C，当 $x>1$ 时，$f(x)=\log_2x>\log_21=0$，正确；

对于 D，由对数函数的图象可知，若 $0<x_1<x_2$，则 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$.

4.（多选）已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2-x)-\log_2(x+4)$，则下列结论中正确的是（　　）

A. $f(x)$ 的定义域是 $[-4,2]$

B. $y=f(x-1)$ 是偶函数

C. $f(x)$ 在区间 $[-1,2)$ 上是增函数

D. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称

BCD　**解析**：对于 A，由题意可得函数

$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2-x)-\log_2(x+4)=-\log_2[(2-x)(x+4)]$.

由 $2-x>0$，$x+4>0$ 可得 $-4<x<2$，故函数定义域为 $(-4,2)$，故 A 错误；

对于 B，$y=f(x-1)=-\log_2[(3-x)(x+3)]$ 的定义域为 $(-3,3)$，

设 $g(x)=-\log_2[(3-x)(x+3)]$，所以 $g(-x)=-\log_2[(3+x)(-x+3)]=g(x)$，

即 $y=f(x-1)$ 是偶函数，故 B 正确；

对于 C，

$f(x)=-\log_2[(2-x)(x+4)]=-\log_2(-x^2-2x+8)=-\log_2[-(x+1)^2+9]=\log_{\frac{1}{2}}[-(x+1)^2+9]$，

令 $t=-(x+1)^2+9$，可得 $y=\log_{\frac{1}{2}}t$，

因为当 $x\in[-1,2)$ 时，$t=-(x+1)^2+9$ 是减函数，而函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}t$ 也是减函数，

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,2)$ 上是增函数，故 C 正确；

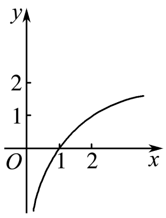
对于 D，$f(-2-x)=-\log_2[(x+4)(2-x)]=f(x)$，得 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称，故 D 正确.

5. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=0$，则不等式 $f(\log_{\frac{1}{8}}x)>0$ 的解集为 $\underline{\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)}$，不等式 $f(\log_{\frac{1}{8}}x)<0$ 的解集为 $\underline{\left(\dfrac{1}{2},2\right)}$.

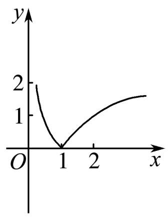
6. 作出函数 $y=|\log_2x|+2$ 的图象，并根据图象写出函数的单调区间及值域.

解：先作出函数 $y=\log_2x$ 的图象，如图(1)；再将 $y=\log_2x$ 在 x 轴下方的图象翻折到 x 轴上方（原来在 x 轴上方的图象不变），得到函数 $y=|\log_2x|$ 的图象，如图(2)；然后将 $y=|\log_2x|$ 的图象向上平移 2 个单位长度，得到函数 $y=|\log_2x|+2$ 的图象，如图(3).

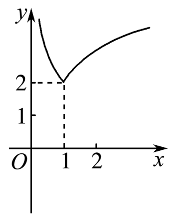
由图(3)得函数 $y=|\log_2x|+2$ 的单调递增区间是 $[1,+\infty)$，单调递减区间是 $(0,1)$，值域是 $[2,+\infty)$.



图(1)



图(2)



图(3)

7. 设函数 $f(x)=(\log_2 x+\log_2 4)\cdot(\log_2 x+\log_2 2)$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{4},4\right]$.

(1)若 $t=\log_2 x$，求 t 的取值范围；

(2)求 $y=f(x)$ 的最大值与最小值，并求出取最值时对应的 x 的值.

解：(1)因为 $t=\log_2 x$ 是增函数，而 $x\in\left[\frac{1}{4},4\right]$，所以 t 的取值范围为 $\left[\log_2\frac{1}{4},\log_2 4\right]$，即 $t\in[-2,2]$.

(2)记 $t=\log_2 x$，则 $y=f(x)=(\log_2 x+2)(\log_2 x+1)=(t+2)(t+1)=\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(-2\leqslant t\leqslant 2)$.

因为 $y=\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ 在 $\left[-2,-\frac{3}{2}\right]$ 上单调递减，在 $\left[-\frac{3}{2},2\right]$ 上单调递增，

所以，当 $t=\log_2 x=-\frac{3}{2}$，即 $x=2^{-\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时，

$y=f(x)$ 有最小值 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=-\frac{1}{4}$；

当 $t=\log_2 x=2$，即 $x=2^2=4$ 时，

$y=f(x)$ 有最大值 $f(4)=12$.

4.4.3　不同函数增长的差异

学习任务目标

1. 理解“直线上升”“指数爆炸”“对数增长”的含义.
2. 区分指数函数、对数函数以及幂函数增长速度的差异.
3. 会选择适当的函数模型分析和解决一些实际问题.

问题式预习

知识点　三种常见函数模型的增长差异

性质＼函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$y=kx$ $(k>0)$
在 $(0,+\infty)$ 上的增减性	增函数	增函数	增函数
图象的变化	随 x 的增大逐渐变“陡”	随 x 的增大逐渐趋于平缓	增长速度保持不变
增长速度	$y=a^x(a>1)$ 的增长快于 $y=kx(k>0)$ 的增长，$y=kx(k>0)$ 的增长快于 $y=\log_a x(a>1)$ 的增长		
增长结果	总会存在一个 x_0，当 $x>x_0$ 时，有 $a^x>kx>\log_a x$		

［微训练］

1. 下列函数中，y 随 x 的增大而增大且增长速度最快的是　(A)

A. $y=e^x$

B. $y=\ln x$

C. $y=x^2$

D. $y=e^{-x}$

2. 若 $x\in(1,2)$，则下列结论正确的是　(　　)

A. $2x>x^{\frac{1}{2}}>\lg x$

B. $2x>\lg x>x^{\frac{1}{2}}$

C. $x^{\frac{1}{2}}>2x>\lg x$

D. $x^{\frac{1}{2}}>\lg x>2x$

A　**解析**：因为 $x\in(1,2)$，所以 $2x>2$，$x^{\frac{1}{2}}\in(1,\sqrt{2})$，$\lg x\in(0,\lg 2)$. 所以 $2x>x^{\frac{1}{2}}>\lg x$.

任务型课堂

任务一　几类函数的增长差异

1. 下列函数中，增长速度最快的是　　（　　）

A. $y=2\ 024^{x}$

B. $y=x^{2\ 024}$

C. $y=\log_{2\ 024}x$

D. $y=2\ 024x$

A　**解析**：指数函数 $y=a^{x}(a>0$，且 $a\neq 1)$ 在 $a>1$ 时呈爆炸式增长，并且随 a 值的增大，增长速度越来越快.故选 A.

2. 三个变量 y_1,y_2,y_3 随变量 x 变化的数据如下表：

x	1	5	10	15	20	25	30
y_1	2	32	1 024	32 768	1.05×10^{6}	3.36×10^{7}	1.07×10^{9}
y_2	2	10	20	30	40	50	60
y_3	2	4.322	5.322	5.907	6.322	6.644	6.907

其中关于 x 呈指数增长的变量是 $\underline{y_1}$.

【类题通法】

根据不同函数增长差异判断函数模型的方法

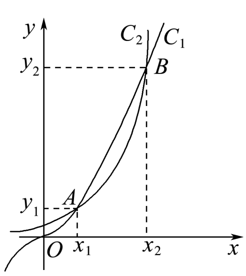
(1)根据函数值的变化量的情况对函数模型进行判断.

(2)根据图象判断增长型的指数函数、对数函数时，通常是观察函数图象上升的快慢，即随着自变量的增大，图象变“陡”的函数是指数函数；图象趋于平缓的函数是对数函数.

任务二　几类函数增长速度的比较

[探究活动]

函数 $f(x)=2^{x}$ 和 $g(x)=x^{3}$ 的图象如图所示，设两函数的图象交于点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，且 $x_1<x_2$.



探究 1：请指出图中曲线 C_1,C_2 分别对应的函数.

提示：C_1 对应的函数为 $g(x)=x^{3}$，C_2 对应的函数为 $f(x)=2^{x}$.

探究 2：结合函数图象，比较 $f(6)$，$g(6)$，$f(2\ 021)$，$g(2\ 021)$ 的大小.

提示：因为 $f(1)>g(1)$，$f(2)<g(2)$，$f(9)<g(9)$，$f(10)>g(10)$，所以 $1<x_1<2$，$9<x_2<10$，

所以 $x_1<6<x_2$，$2\ 021>x_2$.

从图象上可以看出，当 $x_1<x<x_2$ 时，

$f(x)<g(x)$，所以 $f(6)<g(6)$；

当 $x>x_2$ 时，$f(x)>g(x)$，

所以 $f(2\ 021)>g(2\ 021)$.

又 $g(2\ 021)>g(6)$，

所以 $f(2\ 021)>g(2\ 021)>g(6)>f(6)$.

[评价活动]

1. 已知 $a>0$，且 $a\neq 1$，以下四种说法中，正确的是　　（　　）

A. 幂函数增长的速度比一次函数增长的速度快

B. 对任意的 $x>0$，$x^{a}>\log_a x$

C. 对任意的 $x>0$，$a^{x}>\log_a x$

D. 一定存在 x_0，当 $x>x_0$ 时，总有 $a^{x}>x^{a}>\log_a x$ $(a>1)$

D　**解析**：对于 A，幂函数增长的速度不一定比一次函数增长的速度快，如 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 和 $y=2x+1$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 时，所以 A 错误；

对于 B，当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，由幂函数和对数函数的性质知，对任意的 $x>0$，$x^{a}>\log_a x$ 不成立，所以 B 错误；

对于 C，当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，由指数函数和对数函数的性质知，对任意的 $x>0$，$a^{x}>\log_a x$ 不成立，所以 C 错误；

对于 D，由幂函数和指数函数、对数函数的性质知，一定存在 x_0，当 $x>x_0$ 时，总有 $a^{x}>x^{a}>\log_a x$，所以 D 正确.

2. 下面对函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$，$g(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$ 与 $h(x)=-\dfrac{x}{3}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的单调递减情况说法正确的是　　（　　）

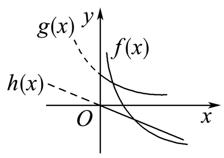
A. $f(x)$ 减小速度越来越慢，$g(x)$ 减小速度越来越快，$h(x)$ 减小速度比较平稳

B. $f(x)$ 减小速度越来越快，$g(x)$ 减小速度越来越慢，$h(x)$ 减小速度越来越快

C. $f(x)$ 减小速度越来越慢，$g(x)$ 减小速度越来越慢，$h(x)$ 减小速度比较平稳

D. $f(x)$ 减小速度越来越快，$g(x)$ 减小速度越来越快，$h(x)$ 减小速度越来越快

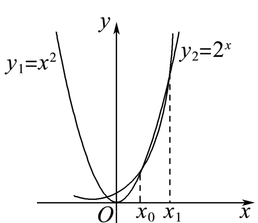
C　**解析**:观察函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$,$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$,$h(x)=-\frac{x}{3}$在区间$(0,+\infty)$上的图象如下图所示:



函数 $f(x)$的图象在区间$(0,1)$上递减较快,但递减速度逐渐变慢;函数 $f(x)$在区间$(1,+\infty)$上递减较慢,且越来越慢.同样,函数 $g(x)$的图象在区间$(0,+\infty)$上递减较慢,且递减速度越来越慢.函数$h(x)$的图象递减速度比较平稳.

3.判断方程 $2^x=x^2$有几个实根.

解:设 $y_1=x^2$,$y_2=2^x$,作出这两个函数的图象,如图所示.



由图象知,方程一定有一个负根.当 $x>0$ 时,开始时 $y_1=x^2$的图象在 $y_2=2^x$ 的图象下方,但此时由于 $y_1=x^2$比 $y_2=2^x$ 增长的速度快,所以存在 x_0,当 $x>x_0$时,$y_1=x^2$的图象就会在 $y_2=2^x$ 的图象的上方,故此时产生一个实根 x_0,随着 x 的增大,$y_2=2^x$ 的增长速度越来越快,并超过 $y_1=x^2$的增长速度,故存在 x_1,当 $x>x_1$时,$y_2=2^x$ 的图象又在 $y_1=x^2$的图象的上方,故又产生一个实根 x_1,此后一直是 $y_2=2^x$ 比 $y_1=x^2$增长得快,再没有实根了,故此方程有三个实根.

【类题通法】

常见的函数模型及增长特点

(1)线性函数模型

线性函数模型 $y=kx+b(k>0)$的增长特点是“直线上升”,其增长速度不变.

(2)指数函数模型

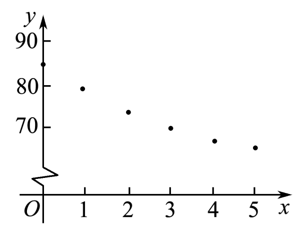
指数函数模型 $y=a^x(a>1)$的增长特点是随着自变量的增大,函数值增大的速度越来越快,呈爆炸性增长,形象地称为“指数爆炸”.

(3)对数函数模型

对数函数模型 $y=\log_a x(a>1)$的增长特点是随着自变量的增大,函数值增大的速度越来越慢,即增长速度平缓,可称为“对数增长”.

任务三　几类函数增长模型的实际应用

1.中国茶文化博大精深.茶水的口感与茶叶类型和水的温度有关.经验表明,某种绿茶用 85 ℃的水泡制,再等到茶水温度降至 60 ℃时饮用,可以产生最佳口感.为分析泡制一杯最佳口感茶水所需时间,某研究人员每隔1 min测量一次茶水的温度,根据所得数据作出如图所示的散点图.观察点的分布情况,下列可以近似地刻画茶水温度 y(单位:℃)随时间 x(单位:min)变化的规律的函数模型是　　(　　)



A.$y=mx^2+n(m>0)$

B.$y=mx+n(m>0)$

C.$y=ma^x+n(m>0,a>0,a\neq1)$

D.$y=m\log_a x+n(m>0,a>0,a\neq1)$

C　**解析**:由函数图象,可知符合条件的只有指数函数模型.故选 C.

2.某大型超市为了满足顾客的购物需求,对超市的商品种类做了一定的调整,结果调整初期利润增长迅速,随着时间的推移,增长速度越来越慢.如果建立恰当的函数模型来反映该超市调整后利润 y 与售出商品的数量 x 的关系,则可选用　　(　　)

A.一次函数

B.二次函数

C.指数型函数

D.对数型函数

D　**解析**:四个函数中,A 的增长速度不变,B,C 增长速度越来越快,其中 C 增长速度比 B 更快,D 增长速度越来越慢,故只有 D 能反映 y 与 x 的关系.

3.某公司预投资 100 万元,有两种投资方案可供选择:

甲方案:年利率 10%,按单利计算,5 年后收回本金和利息;

乙方案:年利率 9%,按复利计算,5 年后收回本金和利息.

若投资 5 年,哪种投资方案更有利?可多得利息多少元?(结果精确到 0.01 万元)

解:按甲方案投资,每年利息为 $100\times10\%=10$ 万元,5 年后本息合计 150 万元;

按乙方案投资,第一年本息合计 100×1.09 万元,第

二年本息合计 100×1.09^2 万元……5 年后本息合计 $100\times1.09^5\approx153.86$(万元).

故乙方案更有利,按乙方案投资 5 年可多得利息 3.86万元.

4. 某皮鞋厂今年 1 月份开始投产,并且前 4 个月的产量分别为 1 万双、1.2 万双、1.3 万双、1.37 万双.由于产品质量好、款式新颖,前几个月的销售情况良好.为了推销员在推销产品时,接受订单不至于过多或过少,需要估计以后几个月的产量.厂里分析,产量的增加仅依靠工人熟练程度的提高和生产流程的优化.厂里暂时不准备增加设备和工人.针对月份 x 与产量 y(单位:万双),给出三种函数模型:$y=ax+b$,$y=ax^2+bx+c$,$y=ab^x+c$,你认为利用哪一种模型估算以后几个月的产量最合适?

解:由题意知,将产量随时间变化的离散量分别抽象为$A(1,1)$,$B(2,1.2)$,$C(3,1.3)$,$D(4,1.37)$这四点的坐标.

(1)当选函数模型 $y=ax+b$ 时,将 B,C 两点的坐标代入函数解析式,

得$\begin{cases}3a+b=1.3,\\2a+b=1.2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=0.1,\\b=1.\end{cases}$

所以 $y=0.1x+1$.

由此可得结论为:在不增加工人和设备的条件下,产量会每月上升 1 000 双,这是不太现实的.

(2)当选函数模型 $y=ax^2+bx+c$ 时,将 A,B,C 三点的坐标代入函数解析式,得$\begin{cases}a+b+c=1,\\4a+2b+c=1.2,\\9a+3b+c=1.3,\end{cases}$解

得$\begin{cases}a=-0.05,\\b=0.35,\\c=0.7.\end{cases}$

所以 $y=-0.05x^2+0.35x+0.7$.

由此函数计算 4 月份的产量为 1.3 万双,比实际产量少 700 双,而且由二次函数性质可知,产量自 4 月份开始将每月下降(图象开口向下,对称轴为 $x=3.5$),不符合实际.

(3)当选函数模型 $y=ab^x+c$ 时,将 A,B,C 三点的坐标代入函数解析式,

得$\begin{cases}ab+c=1,①\\ab^2+c=1.2,②\\ab^3+c=1.3.③\end{cases}$

由①,得 $ab=1-c$,代入②③,

得$\begin{cases}b(1-c)+c=1.2,\\b^2(1-c)+c=1.3,\end{cases}$

则$\begin{cases}c=\dfrac{1.2-b}{1-b},\\c=\dfrac{1.3-b^2}{1-b^2},\end{cases}$解得$\begin{cases}b=0.5,\\c=1.4.\end{cases}$

则 $a=\dfrac{1-c}{b}=-0.8$.

所以 $y=-0.8\times0.5^x+1.4$.

把 $x=4$ 代入得 $y=-0.8\times0.5^4+1.4=1.35$.

比较上述三个函数模型的优劣,既要考虑误差最小,又要考虑生产的实际.由指数函数的性质知,一段时间内产量会明显上升,但经过一段时间之后,如果不增加工人和设备,产量必然趋于稳定,符合实际情况.

因此选用函数模型 $y=ab^x+c$.

【类题通法】

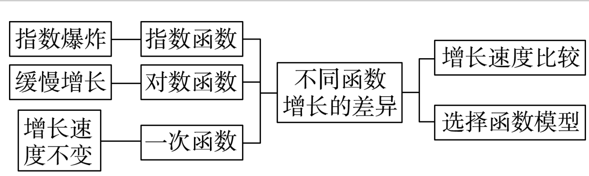
建立函数模型应遵循的三个原则

(1)简化原则:建立函数模型,一定要对实际问题进行简化,抓主要因素、主要变量,尽量建立较低阶、较简便的模型.

(2)可推演原则:建立模型,一定要有意义,既能作理论分析,又能计算、推理,且能得出正确结论.

(3)反映性原则:建立模型,应与实际问题具有"相似性",所得模型的解应具有说明问题的功能,能回到具体问题中解决问题.

提质归纳



课后素养评价(三十六)

基础性·能力运用

1. 四人赛跑,假设他们跑过的路程 $f_i(x)$(其中 $i\in\{1,2,3,4\}$)和时间 $x(x>1)$的函数关系分别是 $f_1(x)=x^2$,$f_2(x)=4x$,$f_3(x)=\log_2x$,$f_4(x)=2^x$.如果他们一直跑下去,最终跑在最前面的人对应的函数关系是 ( )

A.$f_1(x)=x^2$　　B.$f_2(x)=4x$

C.$f_3(x)=\log_2x$　　D.$f_4(x)=2^x$

D　**解析**：显然四个函数中，指数函数是增长最快的，故最终跑在最前面的人具有的函数关系是 $f_4(x)=2^x$.故选 D.

2. 若 $\log_2 x<x^2<2^x$，则 x 的取值范围是　（　　）

A.$(0,+\infty)$　　B.$(2,+\infty)$

C.$(-\infty,2)$　　D.$(4,+\infty)$

D　**解析**：当 $x>4$ 时，$\log_2 x<x^2<2^x$.故选 D.

3. 在某试验中，测得变量 x 和变量 y 之间的对应数据，如下表.

x	0.50	0.99	2.01	3.98
y	-1.01	0.01	0.98	2.00

则最适合表示 x,y 之间关系的函数是　（　　）

A.$y=2^x$　　B.$y=x^2-1$

C.$y=2x-2$　　D.$y=\log_2 x$

D　**解析**：根据 $x=0.50,y=-1.01$，代入计算，可以排除 A；根据 $x=2.01,y=0.98$，代入计算，可以排除 B,C；将各数据代入函数 $y=\log_2 x$，可知满足题意.故选 D.

4. 若 $a>1,k>0$，则当 x 足够大时，$a^x,x^k,\log_a x$ 的大小关系是________.

$a^x>x^k>\log_a x$　**解析**：因为 $a>1,k>0$，所以函数 $y_1=a^x,y_2=x^k,y_3=\log_a x$ 都是增函数.

由指数函数、对数函数、幂函数的变化规律可知，当 x 足够大时，$a^x>x^k>\log_a x$.

5. 设某人投资 x 元，获利 y 元，有甲、乙、丙三种方案可供选择，三种方案中 y 与 x 的关系分别为甲：$y=0.2x$，乙：$y=\log_2 x+100$，丙：$y=1.005^x$，则投资 500 元、1 000 元、1 500 元时，应分别选择________方案.

乙、甲、丙　**解析**：将投资额分别代入甲、乙、丙的函数关系式中，比较 y 值的大小即可求出.

6. 某商场去年 1 月份到 12 月份销售额呈现先下降后上升的趋势，现有三种模型：

①$f(x)=p\cdot q^x(q>0$，且 $q\neq1)$；

②$f(x)=\log_p x+q(p>0$，且 $p\neq1)$；

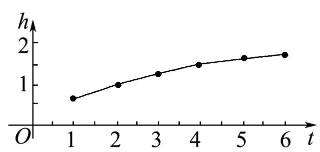
③$f(x)=x^2+px+q$.

能较准确地反映该商场月销售额 $f(x)$ 与月份 x 关系的函数模型为③（填序号）.若所选函数满足 $f(1)=10,f(3)=2$，则 $f(x)=x^2-8x+17$.

7. 某人对一棵松树的生长进行了研究，收集了其高度 h（单位：m）与生长时间 t（单位：年）的相关数据如下表所示，并准备选择 $h=mt+b(m\neq0)$ 或 $h=\log_a(t+1)(a>0$，且 $a\neq1)$ 来刻画 h 与 t 的关系.你认为选择哪个函数更合理？请预测第 8 年松树的高度.

t	1	2	3	4	5	6
h	0.6	1	1.3	1.5	1.6	1.7

解：据表中数据作图.



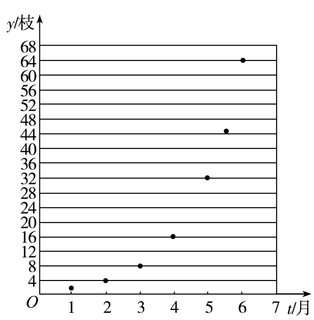
由图可以看出，选用对数型函数更合理.将(2,1)代入到 $h=\log_a(t+1)$ 中，得 $1=\log_a 3$，解得 $a=3$.即 $h=\log_3(t+1)$.

当 $t=8$ 时，$h=\log_3(8+1)=2$，

故可预测第 8 年松树的高度为 2 m.

综合性·创新提升

1. 下面给出了一株红豆树的生长时间 t（单位：月）与枝条数 y 的关系图象，那么下列最符合红豆树生长时间 t 与枝条数 y 的关系的函数模型是（A）



A.指数函数模型 $y=2^t$

B.对数函数模型 $y=\log_2 t$

C.幂函数模型 $y=t^3$

D.二次函数模型 $y=2t^2$

2. 某食品的保鲜时间 y（单位：h）与储存温度 x（单位：℃）满足函数关系 $y=e^{kx+b}$（$e=2.718\cdots$ 为自然对数的底数，k,b 为常数）.若该食品在 0 ℃的保鲜时间是 192 h，在 22 ℃的保鲜时间是 48 h，则该食品在 33 ℃的保鲜时间是　（D）

A.22 h　　B.23 h

C.33 h　　D.24 h

3. 某地区植被被破坏，土地沙漠化越来越严重，最近三年测得沙漠增加量分别为 0.2 万公顷、0.4 万公顷

和 0.76 万公顷，则沙漠增加量 y(万公顷)关于年数 x 的函数关系可近似表示为 (C)

A. $y=0.2x$　　B. $y=\frac{1}{10}(x^2+2x)$

C. $y=\frac{2^x}{10}$　　D. $y=0.2+\log_{16}x$

4. 党的二十大报告强调，要加快建设交通强国、数字中国.专家称数字交通让出行更智能、安全、舒适.数字交通研究中，将某路段单位时间内通过的车辆数称为道路密度，将该路段单位长度内的车辆数称为车辆密度.现定义交通流量 $F=\frac{q}{x}$，其中 x 为道路密度，q 为车辆密度，已知 $F=f(x)=\begin{cases}100-45a^x, 0<x<40, \\ -\frac{7}{8}x+120, 40\leqslant x\leqslant 80,\end{cases}$ 其中 $a>0$.当道路密度 $x=2$ 时，交通流量 $F=95$.

(1)求 a 的值；

(2)若交通流量 $F>95$，求道路密度 x 的取值范围；

(3)求车辆密度 q 的最大值.

解：(1)依题意，$100-45a^2=95$，即 $a^2=\frac{1}{9}$，

又 $a>0$，所以 $a=\frac{1}{3}$.

(2)当 $40\leqslant x\leqslant 80$ 时，$F=f(x)=-\frac{7}{8}x+120$ 单调递减，

F 最大值为 $f(40)=85$；

当 $0<x<40$ 时，由 $100-45\times\left(\frac{1}{3}\right)^x>95$，解得 $x>2$，即 $2<x<40$，所以，若交通流量 $F>95$，则道路密度 x 的取值范围为 $(2,40)$.

(3)依题意，$q=F\cdot x=$

$$\begin{cases}\left[100-45\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]\cdot x, 0<x<40, \\ -\frac{7}{8}x^2+120x, 40\leqslant x\leqslant 80,\end{cases}$$

所以，当 $0<x<40$ 时，$q<100\cdot x<4\ 000$；

当 $40\leqslant x\leqslant 80$ 时，$q=-\frac{7}{8}\left(x-\frac{480}{7}\right)^2+\frac{28\ 800}{7}\leqslant\frac{28\ 800}{7}$.

由于 $40<\frac{480}{7}<80$，所以，当 $x=\frac{480}{7}$ 时，q 取得最大值 $\frac{28\ 800}{7}$.

因为 $\frac{28\ 800}{7}>4\ 000$，

所以车辆密度 q 的最大值为 $\frac{28\ 800}{7}$.

4.5　函数的应用（二）

4.5.1　函数的零点与方程的解

学习任务目标

1. 理解函数的零点的概念及函数的零点、方程的根与图象与 x 轴的交点的关系.

2. 会求函数的零点.

3. 掌握函数零点存在定理并会判断函数零点所在的大致区间及个数.

问题式预习

知识点一　函数的零点的概念

对于一般函数 $y=f(x)$，我们把使 $\underline{f(x)=0}$ 的实数 x 叫做函数 $y=f(x)$ 的零点.

知识点二　方程、函数、函数图象之间的关系

方程 $f(x)=0$ 有<u>实数解</u>⇔函数 $y=f(x)$ 有<u>零点</u>⇔函数 $y=f(x)$ 的图象与 <u>x 轴</u>有公共点.

［微训练］

1. 判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)函数的零点是一个点. (×)

(2)所有的函数都有零点. (×)

(3)若方程 $f(x)=0$ 有两个不等实数解 x_1,x_2，则函数 $y=f(x)$ 的零点为 $(x_1,0),(x_2,0)$. (×)

(4)函数 $y=f(x)$ 的零点是函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴交点的横坐标，是方程 $f(x)=0$ 的实数解. (√)

2. 函数 $f(x)=\log_2x$ 的零点是 (　　)

A. 1　　B. (1,0)　　C. 0　　D. (0,1)

A　**解析：**令 $f(x)=0$，即 $\log_2x=0$，得 $x=1$.

知识点三　函数零点存在定理

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图象是一条<u>连续不断</u>的曲线，且有 $\underline{f(a)f(b)<0}$，那么，函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内至少有一个零点，即存在 $c\in$

(a,b)，使得 $\underline{f(c)=0}$，这个 c 也就是方程 $f(x)=0$ 的解.

［微训练］

以下函数在区间(0,2)内必有零点的是　(　　)

A.$y=x-3$　　B.$y=2^x$

C.$y=x^3$　　D.$y=\lg x$

D　**解析**：画出A，B，C，D四个选项中的函数的图象(图略)可知，只有D选项中 $y=\lg x$ 在区间(0,2)上有零点.

任务型课堂

任务一　求函数的零点

求下列函数的零点.

(1)$f(x)=x^3+8$；

(2)$f(x)=\dfrac{(x+2)\ln x}{x-3}$；

(3)$f(x)=\begin{cases}2^{-x}-4, x\leqslant 0,\\ \lg x, x>0.\end{cases}$

解：(1)令 $x^3+8=0$，得 $x=-2$.

所以函数 $f(x)=x^3+8$ 的零点为 -2.

(2)函数 $f(x)=\dfrac{(x+2)\ln x}{x-3}$ 的定义域为 $(0,3)\cup(3,+\infty)$.令 $\dfrac{(x+2)\ln x}{x-3}=0$，得 $x+2=0$ 或 $\ln x=0$，

所以 $x=-2$(舍去)或 $x=1$.

所以函数 $f(x)=\dfrac{(x+2)\ln x}{x-3}$ 的零点为1.

(3)当 $x\leqslant 0$ 时，令 $2^{-x}-4=0$，得 $x=-2$，满足要求；当 $x>0$ 时，令 $\lg x=0$，得 $x=1$，满足要求.

所以函数 $f(x)$ 的零点是 -2，1.

【类题通法】

求函数零点的两种求法

(1)代数法：求方程 $f(x)=0$ 的实数根，若存在实数根，则实数根即为函数零点，否则函数不存在零点.

(2)几何法：与函数 $y=f(x)$ 的图象联系起来，图象与 x 轴的交点的横坐标即为函数的零点.

任务二　判断函数零点所在的区间

1.已知函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-1-\log_2 x$.若 x_0 是方程 $f(x)=0$ 的根，则 $x_0\in$　(　　)

A.$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　B.$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

C.$\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$　　D.$\left(\dfrac{3}{2},2\right)$

B　**解析**：因为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-1-\log_2\dfrac{1}{2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}>0$，$f(1)=\dfrac{1}{2}-1-\log_2 1=-\dfrac{1}{2}<0$，所以 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

2.函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{2}{x}$ 的零点所在的大致区间是　(　　)

A.(1,2)　　B.(2,3)

C.$\left(1,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$和(3,4)　　D.$(\mathrm{e},+\infty)$

B　**解析**：因为 $f(1)=-2<0$，$f(2)=\ln 2-1<0$，$f(3)=\ln 3-\dfrac{2}{3}>0$，所以 $f(2)f(3)<0$，

所以 $f(x)$ 在(2,3)内有零点.

3.若 $a<b<c$，则函数 $f(x)=(x-a)\cdot(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$ 的两个零点分别位于区间　(　　)

A.(a,b)和(b,c)内

B.$(-\infty,a)$和(a,b)内

C.(b,c)和$(c,+\infty)$内

D.$(-\infty,a)$和$(c,+\infty)$内

A　**解析**：因为 $a<b<c$，

所以 $f(a)=(a-b)(a-c)>0$，

$f(b)=(b-c)(b-a)<0$，

$f(c)=(c-a)(c-b)>0$，

所以 $f(a)f(b)<0$，$f(b)f(c)<0$，

即函数的两个零点分别位于区间(a,b)和(b,c)内.

4.设函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x(x>0)$ 与 $g(x)=3-x$ 的图象的交点坐标为 (x_0,y_0)，则 x_0 所在的区间为　(　　)

A.(0,1)　　B.(1,2)

C.(2,3)　　D.(3,4)

C　**解析**：令 $h(x)=f(x)-g(x)=\dfrac{1}{3^x}+x-3$，$h(2)=f(2)-g(2)=\dfrac{1}{9}-1<0$，$h(3)=f(3)-g(3)=\dfrac{1}{27}>0$，故 $h(2)\cdot h(3)<0$，故 x_0 所在的区间为(2,3).

【类题通法】

函数零点所在区间的确定

确定函数的零点所在的区间时，通常利用函数零

点存在定理，转化为判断区间两端点对应的函数值的符号是否相反.具体分为如下三个步骤：

(1)代入：将区间端点值代入函数解析式，求出函数值.

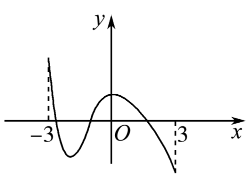
(2)判号：把所得的函数值相乘，并进行符号判断.

(3)定论：若符号为负且图象连续，则在该区间内至少有一个零点.

任务三　函数零点个数问题

［探究活动］

观察函数 $y=f(x)$，$x\in[-3,3]$的图象，并思考以下问题.



探究1：函数 $y=f(x)$有几个零点？

提示：函数 $y=f(x)$的图象与 x 轴有三个交点，所以函数 $y=f(x)$有三个零点.

探究2：函数 $y=f(x)$在$(0,3)$内有几个零点？

提示：函数 $y=f(x)$在$(0,3)$内的图象与 x 轴有1个交点，所以函数 $y=f(x)$在$(0,3)$内有1个零点.

［评价活动］

1. 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3,x\leqslant 0,\\-2+\ln x,x>0\end{cases}$ 的零点个数为　　(　　)

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

C　**解析**：当 $x\leqslant 0$ 时，令 $x^2+2x-3=0$，解得 $x=-3$ 或 $x=1$(舍去)；

当 $x>0$ 时，令 $-2+\ln x=0$，解得 $x=e^2$.

所以函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3,x\leqslant 0,\\-2+\ln x,x>0\end{cases}$ 有2个零点.

故选C.

2. 已知当 $x\in[0,1]$时，函数 $y=(mx-1)^2$与 $y=\sqrt{x}+m$ 的图象有且只有一个交点，则正实数 m 的取值范围是　　(　　)

A.$(0,1]\cup[2\sqrt{3},+\infty)$

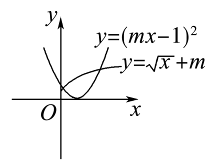
B.$(0,1]\cup[3,+\infty)$

C.$(0,\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{3},+\infty)$

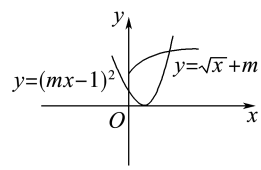
D.$(0,\sqrt{2}]\cup[3,+\infty)$

B　**解析**：函数 $y=(mx-1)^2$的图象的对称轴为 $x=\dfrac{1}{m}$.

①当$\dfrac{1}{m}\geqslant 1$，即 $0<m\leqslant 1$ 时，作出函数 $y=(mx-1)^2$与 $y=\sqrt{x}+m$ 的图象，如图，则二者在区间$[0,1]$上只有一个交点；



②当$\dfrac{1}{m}<1$，即 $m>1$ 时，作出函数 $y=(mx-1)^2$与 $y=\sqrt{x}+m$ 的图象，如图所示，



要使二者只有一个交点，则需 $y=\sqrt{x}+m$ 在 $x=1$ 时的值小于等于 $y=(mx-1)^2$在 $x=1$ 时的值，即 $m+1\leqslant(m-1)^2$，解得 $m\geqslant 3$.

综上，正实数 m 的取值范围是$(0,1]\cup[3,+\infty)$.故选B.

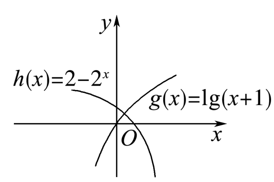
3. 函数 $f(x)=2^x+\lg(x+1)-2$ 有________个零点.

1　**解析**：(方法一)因为 $f(0)=1+0-2=-1<0$，$f(2)=4+\lg 3-2>0$，

所以 $f(x)$在$(0,2)$上存在零点.

又 $f(x)=2^x+\lg(x+1)-2$ 在$(-1,+\infty)$上为增函数，故$f(x)$有且只有一个零点.

(方法二)在同一直角坐标系中作出 $h(x)=2-2^x$ 和 $g(x)=\lg(x+1)$的图象.由图象知 $g(x)=\lg(x+1)$的图象和$h(x)=2-2^x$ 的图象有且只有一个交点，



即 $f(x)=2^x+\lg(x+1)-2$ 有且只有一个零点.

【类题通法】

判断函数零点个数的四种常用方法

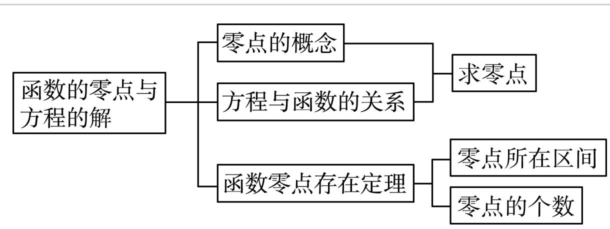
(1)利用函数 $y=f(x)$的零点与方程 $f(x)=0$ 的根的关系，解方程 $f(x)=0$，方程有几个不同的实数根，函数就有几个零点.

(2)画出函数 $y=f(x)$的图象，判断它与 x 轴的交点个数，从而判断零点的个数.

(3)结合函数单调性，利用函数零点存在定理，可判断 $y=f(x)$在(a,b)上零点的个数.

(4)转化成两个函数图象的交点个数问题.

提质归纳



课后素养评价（三十七）

基础性·能力运用

1. 下列函数有零点的是　（　　）

A. $y=\dfrac{1}{x}$　　B. $y=2^x$

C. $y=x^2+1$　　D. $y=x-1$

D　**解析**：因为 $y=\dfrac{1}{x}$ 的值域是 $\{y\mid y\neq 0\}$，故不成立；

因为 $y=2^x$ 的值域是 $\{y\mid y>0\}$，故不成立；

因为 $y=x^2+1$ 的值域是 $\{y\mid y\geqslant 1\}$，故不成立；

而 $y=x-1$ 的值域是 $\mathbf{R}$，故符合要求.

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-1, x\leqslant 1,\\ 1+\log_2 x, x>1,\end{cases}$ 则函数 $f(x)$ 的零点为　（　　）

A. $\dfrac{1}{2}, 0$　　B. $-2, 0$

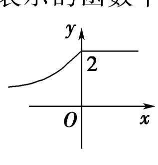
C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 0

D　**解析**：当 $x\leqslant 1$ 时，令 $2^x-1=0$，得 $x=0$.

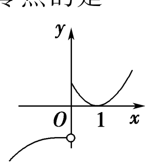
当 $x>1$ 时，令 $1+\log_2 x=0$，得 $x=\dfrac{1}{2}$，此时无解.

综上所述，函数 $f(x)$ 的零点为 0.

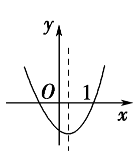
3. 下列图象表示的函数中没有零点的是　（A）



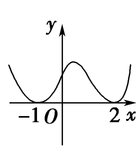
A



B



C



D

4. 函数 $f(x)=\log_2 x-\dfrac{1}{x}$ 的零点所在的区间为　（　　）

A. $(0,1)$　　B. $(1,2)$

C. $(2,3)$　　D. $(3,4)$

B　**解析**：由函数 $f(x)=\log_2 x-\dfrac{1}{x}$，可得 $f(1)=-1<0$，$f(2)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}>0$，所以 $f(1)\cdot f(2)<0$.

根据函数零点存在定理可得，函数 $f(x)=\log_2 x-\dfrac{1}{x}$ 的零点所在的区间为 $(1,2)$.

5. （多选）若函数 $f(x)$ 的图象在 $\mathbf{R}$ 上连续不断，且满足 $f(0)>0$，$f(1)>0$，$f(2)<0$，则下列说法正确的是　（BD）

A. $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内一定没有零点

B. $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可能有零点

C. $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内可能没有零点

D. $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内一定有零点

6. 函数 $f(x)=\begin{cases}x\ln(x+1), x>0\\ 2x^2-3x-2, x\leqslant 0\end{cases}$ 的零点个数为　（　　）

A. 3　　B. 2

C. 1　　D. 0

C　**解析**：当 $x>0$ 时，由 $f(x)=x\ln(x+1)=0$ 可得 $x=0$（舍）；

当 $x\leqslant 0$ 时，由 $f(x)=2x^2-3x-2=0$，可得 $x=2$（舍）或 $x=-\dfrac{1}{2}$.

综上可得，函数只有 1 个零点.

7. 函数 $f(x)=x-\dfrac{4}{x}$ 的零点有　（C）

A. 0 个　　B. 1 个

C. 2 个　　D. 无数个

8. 若函数 $f(x)$ 的图象是连续不断的，且 $f(0)>0$，$f(1)f(2)f(4)<0$，则下列命题正确的是　（　　）

A. 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点

B. 函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内有零点

C. 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内有零点

D. 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,4)$ 内有零点

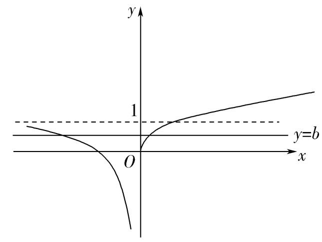
D　**解析**：$f(1)\cdot f(2)\cdot f(4)<0$，则 $f(1)$，$f(2)$，$f(4)$ 中有一个小于 0，另两个大于 0 或三个都小于 0，则有零点的可能区间为 $(0,1)$，$(1,2)$，$(0,2)$，$(2,4)$，但它们都包含于 $(0,4)$，因此选项 D 正确.

9. 设函数 $f(x)=2^{1-x}-4$，$g(x)=1-\log_2(x+3)$，则函数 $f(x)$ 的零点与 $g(x)$ 的零点之和为 $\underline{-2}$.

10. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}+1, x<0,\\ \sqrt{x}, x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $f(1)+f(-1)=$ ________；使得方程 $f(x)=b$ 有且仅有两个解的

实数 b 的取值范围为________.

0　$[0,1)$　**解析**：由题意知，函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}+1,x<0,\\ \sqrt{x},x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $f(1)+f(-1)=\sqrt{1}+\dfrac{2}{-1}+1=0$.要使得方程 $f(x)=b$ 有且仅有两个解，则只需使得 $y=f(x)$ 和 $y=b$ 的图象有两个不同的交点，作出函数 $f(x)$ 的图象，如图所示.



结合图象可知，要使得方程 $f(x)=b$ 有且仅有两个解，只需 $0\leqslant b<1$，即实数 b 的取值范围是 $[0,1)$.

综合性·创新提升

1. 已知函数 $f(x)=2^x+x^3-8$ 的零点 $x_0\in(m,m+1)$，则整数 m 的值为　(C)

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 2

2. 已知函数 $f(x)$ 的图象是连续不断的，x，$f(x)$ 的对应值如下表：

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	15	10	-7	6	-4	-5

则函数 $f(x)$ 在区间 $[1,6]$ 内的零点至少有　(　　)

A. 2 个　　B. 3 个

C. 4 个　　D. 5 个

B　**解析**：由已知数表可知 $f(2)\cdot f(3)=10\times(-7)<0$，$f(3)\cdot f(4)=(-7)\times 6<0$，$f(4)\times f(5)=6\times(-4)<0$，故函数 $f(x)$ 在 $(2,3)$，$(3,4)$，$(4,5)$ 内分别存在零点，故至少有 3 个零点.

3. 设函数 $f(x)=x+\lg x$ 满足 $f(a)f(b)\cdot f(c)<0(a<b<c)$，$f(x)$ 的零点为 x_0，则下列结论一定错误的是　(　　)

A. $x_0\in(a,c)$　　B. $x_0\in(a,b)$

C. $x_0\in(b,c)$　　D. $x_0\in(c,+\infty)$

C　**解析**：函数 $f(x)=x+\lg x$ 的定义域为 $\{x|x>0\}$，函数是增函数，

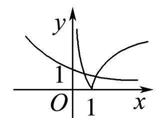
满足 $f(a)f(b)f(c)<0(a<b<c)$，说明 $f(a)$，$f(b)$，$f(c)$，有 1 个负数和 2 个正数或 3 个负数，$f(a)$ 一定是负数.由函数的零点存在定理可知，函数的零点可能在 (a,c)，(a,b)，$(c,+\infty)$ 内，不可能在 (b,c) 内.

4. 函数 $f(x)=2^x|\log_{0.5}x|-1$ 的零点个数为　(　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

B　**解析**：函数 $f(x)=2^x|\log_{0.5}x|-1$ 的零点个数 $\Leftrightarrow$ 方程 $|\log_{0.5}x|=\dfrac{1}{2^x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 的根的个数 $\Leftrightarrow$ 函数 $y_1=|\log_{0.5}x|$ 与 $y_2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 的图象的交点个数.作出两个函数的图象如图所示，由图可知两个函数图象有 2 个交点.故选 B.



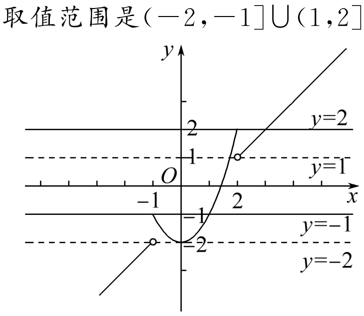
5. 对实数 a 和 b，定义运算“$\otimes$”：$a\otimes b=\begin{cases}a,a-b\leqslant 1,\\ b,a-b>1.\end{cases}$ 设函数 $f(x)=(x^2-2)\otimes(x-1)$，$x\in\mathbf{R}$.若函数 $y=f(x)-c$ 恰有两个零点，则实数 c 的取值范围是________.

$(-2,-1]\cup(1,2]$　**解析**：因为 $a\otimes b=\begin{cases}a,a-b\leqslant 1,\\ b,a-b>1,\end{cases}$

所以 $f(x)=(x^2-2)\otimes(x-1)=\begin{cases}x^2-2,-1\leqslant x\leqslant 2,\\ x-1,x<-1\text{ 或 }x>2,\end{cases}$

由图可知，当 $-2<c\leqslant -1$ 或 $1<c\leqslant 2$ 时，函数 $f(x)$ 与 $y=c$ 的图象有两个公共点，

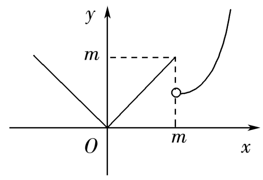
所以 c 的取值范围是 $(-2,-1]\cup(1,2]$.



6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x|,x\leqslant m,\\ x^2-2mx+4m,x>m,\end{cases}$ 其中 $m>0$.若存在实数 b，使得关于 x 的方程 $f(x)=b$ 有三个不同的根，则 m 的取值范围是________.

$(3,+\infty)$　**解析**：由题意知方程 $f(x)-b=0$ 有三个不同的根，即直线 $y=b$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象有三个不同的交点.

作出函数 $f(x)=\begin{cases}|x|,x\leqslant m,\\ x^2-2mx+4m,x>m\end{cases}$ 的图象，如图所示.



若存在实数 b，使方程 $f(x)-b=0$ 有三个不同的根，则 $m>-m^2+4m$，即 $m^2-3m>0$.

又因为 $m>0$，所以 $m>3$，即 m 的取值范围为 $(3,+\infty)$.

7. 已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x+\frac{1}{2x}-\frac{17}{2}$.

(1)用单调性的定义证明 $f(x)$ 在定义域上是单调函数；

(2)证明 $f(x)$ 有零点；

(3)设 $f(x)$ 的零点 x_0 落在区间 $\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$ 内，求正整数 n 的值.

(1)**证明**：显然 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

设 $0<x_1<x_2$，则 $x_2-x_1>0$，$x_1x_2>0\Rightarrow\frac{1}{2x_1}-\frac{1}{2x_2}=\frac{x_2-x_1}{2x_1x_2}>0$，

又 $\log_{\frac{1}{2}}x_1>\log_{\frac{1}{2}}x_2\Rightarrow\log_{\frac{1}{2}}x_1-\log_{\frac{1}{2}}x_2>0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)=(\log_{\frac{1}{2}}x_1-\log_{\frac{1}{2}}x_2)+\left(\frac{1}{2x_1}-\frac{1}{2x_2}\right)>0$，所以 $f(x_1)>f(x_2)$.

故 $f(x)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

(2)**证明**：因为 $f(1)=0+\frac{1}{2}-\frac{17}{2}=-8<0$，$f\left(\frac{1}{16}\right)=4+8-\frac{17}{2}=\frac{7}{2}>0$，所以 $f(1)f\left(\frac{1}{16}\right)<0$.

又因为 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{16},1\right)$ 上连续不断，所以 $f(x)$ 有零点.

(3)**解**：$f\left(\frac{1}{11}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{11}+\frac{11}{2}-\frac{17}{2}$

$=\log_2 11-3>\log_2 8-3=0$，

$f\left(\frac{1}{10}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{10}+5-\frac{17}{2}$

$=\log_2 10-\frac{7}{2}=\log_2 5-\frac{5}{2}$

$=\log_2\sqrt{25}-\log_2\sqrt{32}<0$，

所以 $f\left(\frac{1}{10}\right)f\left(\frac{1}{11}\right)<0$，

所以 $f(x)$ 的零点在区间 $\left(\frac{1}{11},\frac{1}{10}\right)$ 内，故 $n=10$.

4.5.2　用二分法求方程的近似解

学习任务目标

1.通过具体实例理解二分法的概念及其使用条件.

2.了解二分法是求方程近似解的常用方法，能借助计算器用二分法求方程的近似解.

3.会用二分法思想解决其他的实际问题.

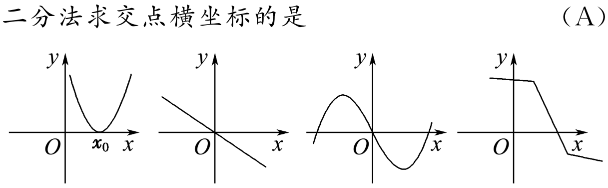
问题式预习

知识点一　二分法的概念

对于在区间 $[a,b]$ 上图象连续不断且 $f(a)f(b)<0$ 的函数 $y=f(x)$，通过不断地把它的零点所在区间一分为二，使所得区间的两个端点逐步逼近零点，进而得到零点近似值的方法叫做二分法.

[微训练]

1. 如图，下列函数的图象与 x 轴均有交点，但不能用二分法求交点横坐标的是　　(A)



A　　B　　C　　D

2. 下列函数中，不能用二分法求零点近似值的是②④.

①$f(x)=3x$；②$f(x)=x^2+1$；③$f(x)=\ln x$；④$f(x)=|x|$.

知识点二　用二分法求函数零点近似值的步骤

给定精确度 ε，用二分法求函数 $y=f(x)$ 的零点 x_0 的近似值的一般步骤如下：

(1)确定零点 x_0 的初始区间 $[a,b]$，验证 $f(a)f(b)<0$.

(2)求区间 (a,b) 的中点 c.

(3)计算 $f(c)$，并进一步确定零点所在的区间：

①若 $f(c)=0$(此时 $x_0=c$)，则 c 就是函数的零点；

②若 $f(a)f(c)<0$(此时 $x_0\in(a,c)$)，则令 $b=c$；

③若 $f(c)f(b)<0$(此时 $x_0\in(c,b)$)，则令 $a=c$.

(4)判断是否达到精确度 ε：若 $|a-b|<\varepsilon$，则得到零点近似值 a(或 b)；否则重复步骤(2)～(4).

以上步骤可借助口诀记忆:定区间,找中点,中值计算两边看;同号去,异号算,零点落在异号间;周而复始怎么办?精确度上来判断.

[微训练]

1. 判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)精确度 ε 就是近似值. (×)

(2)用二分法求函数 $y=f(x)$ 的零点时,若初始区间为 $[a,b]$,则计算 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$,如果 $f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$,则零点在区间 $\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$ 内. (√)

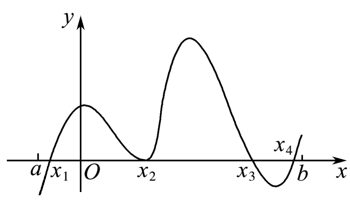
2. 用二分法研究函数 $f(x)=x^3+x^2-2x-2$ 的零点时,$f(1)f(2)<0$,用二分法逐次计算.若 x_0 是 $(1,2)$ 的中点,则 $f(x_0)=$<u>0.625</u>.

任务型课堂

任务一 二分法的概念及适用条件

[探究活动]

观察函数 $y=f(x)(x\in[a,b])$ 的图象,并思考以下问题.



探究 1:函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有几个零点?能用函数零点存在定理判断的有几个?

提示:函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有 4 个零点,分别为 x_1,x_2,x_3,x_4;其中能用函数零点存在定理判断的有 3 个,分别为 x_1,x_3,x_4.

探究 2:图中零点 x_2 有何特点?能用二分法求它的近似值吗?

提示:零点 x_2 对应的点是函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴的切点,它不能用二分法求它的近似值.

[评价活动]

1. 下面关于二分法的叙述中,正确的是 ( )

A.用二分法可求所有函数零点的近似值

B.用二分法求方程的近似解时,可以精确到小数点后的任意一位

C.二分法无规律可循,无法在计算机上完成

D.只能用二分法求函数的零点

B **解析**:用二分法求函数零点的近似值,需要有端点函数值符号相反的区间,故选项 A 错误;二分法是一种程序化的运算,可以在计算机上完成,故选项 C 错误;求函数的零点的方法还有方程法、函数图象法等,故选项 D 错误.故选 B.

2. 下列关于函数 $f(x)$,$x\in[a,b]$ 的命题中,正确的是 ( )

A.若 $x_0\in[a,b]$ 且满足 $f(x_0)=0$,则 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点

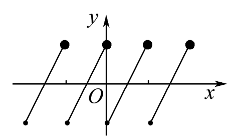
B.若 x_0 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的零点,则可以用二分法求 x_0 的近似值

C.函数 $f(x)$ 的零点是方程 $f(x)=0$ 的根,但 $f(x)=0$ 的根不一定是函数 $f(x)$ 的零点

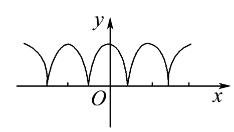
D.用二分法求方程的根时,得到的都是近似解

A **解析**:对于 A,$x_0\in[a,b]$ 且满足 $f(x_0)=0$,则 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点,故 A 正确;对于 B,函数 $f(x)$ 不一定连续,故 B 错误;对于 C,方程 $f(x)=0$ 的根一定是函数 $f(x)$ 的零点,故 C 错误;对于 D,用二分法求方程的根时,得到的根也可能是精确值,故 D 错误.

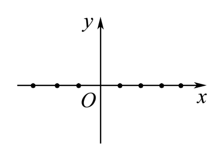
3. 已知下列四个函数图象,其中能用二分法求出函数零点近似值的是 ( )



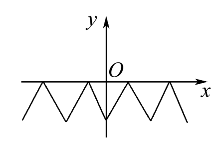
A



B



C



D

A **解析**:由二分法的定义可知,零点左右函数值异号时,可用二分法求零点近似值,故选 A.

【类题通法】

运用二分法求函数的零点近似值的条件

(1)函数图象在零点附近连续不断;

(2)在该零点左右函数值异号.

只有满足上述两个条件,才可用二分法求函数零点近似值.

任务二 用二分法求方程的近似解

1. 利用二分法求方程 $x^2-x-1=0$ 的近似解(精确度为 0.3).

解:令 $f(x)=x^2-x-1$,由于 $f(0)=-1<0$,$f(1)=-1<0$,$f(2)=1>0$,故可取区间 $(1,2)$ 作为计算的初始区间.

用二分法逐次计算,列表如下:

零点所在区间	中点的值	中点函数值
(1,2)	1.5	−0.25
(1.5,2)	1.75	0.312 5
(1.5,1.75)	1.625	0.015 625

因为$|1.75-1.5|=0.25<0.3$，

所以方程$x^2-x-1=0$的近似解可取1.5或1.75.

2. 证明：函数$f(x)=2^x+3x-6$在区间$(1,2)$内有唯一零点，并求出这个零点.（精确度为0.1）

证明：因为函数$f(x)=2^x+3x-6$，

所以$f(1)=-1<0$，$f(2)=4>0$.

所以$f(x)$在区间$(1,2)$内有零点.

又因为$f(x)$是增函数，

所以函数$f(x)=2^x+3x-6$在区间$(1,2)$内有唯一的零点.

设该零点为x_0，则$x_0\in(1,2)$，

取$x_1=1.5$，$f(1.5)\approx1.33>0$，$f(1)\cdot f(1.5)<0$，

所以$x_0\in(1,1.5)$.

取$x_2=1.25$，$f(1.25)\approx0.128>0$，$f(1)\cdot f(1.25)<0$，

所以$x_0\in(1,1.25)$.

取$x_3=1.125$，$f(1.125)\approx-0.44<0$，

$f(1.125)\cdot f(1.25)<0$，所以$x_0\in(1.125,1.25)$.

取$x_4=1.187\ 5$，$f(1.187\ 5)\approx-0.16<0$，

$f(1.187\ 5)\cdot f(1.25)<0$，

所以$x_0\in(1.187\ 5,1.25)$.

因为$|1.25-1.187\ 5|=0.062\ 5<0.1$，

所以可取$x_0=1.25$，则该函数的零点近似值为1.25.

【类题通法】

利用二分法求方程的近似解的步骤

(1)构造函数，确定方程的解所在的大致区间，通常取区间$(n,n+1)$，$n\in\mathbf{Z}$；

(2)利用二分法求出满足精确度的方程的解所在的区间M；

(3)区间M内的任一实数均是方程的近似解，通常取区间M的一个端点.

任务三　二分法思想的应用

1. 某方程在区间$D=(2,4)$内有一无理根，若用二分法求此根的近似值，要使所得的近似值的精确度达到0.1，则应将区间D等分的次数至少是________.

5　**解析**：第一次等分，则根在区间$(2,3)$内或$(3,4)$内，此时精确度$\varepsilon>0.1$；不妨设根在$(2,3)$内，第二次等分，则根在区间$(2,2.5)$内或$(2.5,3)$内，此时精确度$\varepsilon>0.1$；不妨设根在$(2,2.5)$内，第三次等分，则根在区间$(2,2.25)$内或$(2.25,2.5)$内，此时精确度$\varepsilon>0.1$；不妨设根在$(2,2.25)$内，第四次等分，则根在区间$(2,2.125)$内或$(2.125,2.25)$内，此时精确度$\varepsilon>0.1$；不妨设根在$(2,2.125)$内，第五次等分，则根在区间$(2,2.062\ 5)$内或$(2.062\ 5,2.125)$内，此时精确度$\varepsilon<0.1$.满足题目要求，故至少要等分5次.

2. 设$f(x)=2^x+3x-7$，某学生用二分法求方程$f(x)=0$的近似解（精确度为0.1），列出了如下表格.

x	0	1	1.25	1.375	1.437 5	1.5	2
$f(x)$	-6	-2	-0.87	-0.28	0.02	0.33	3

若依据此表格中的数据，则得到符合要求的方程的近似解可以为__________.

1.4（答案不唯一）　**解析**：根据表格中的数据可知，$f(1.375)<0$，$f(1.437\ 5)>0$，所以方程的近似解在区间$(1.375,1.437\ 5)$内，又$1.437\ 5-1.375<0.1$，所以区间$(1.375,1.437\ 5)$内的任意数均满足条件.

提质归纳

- 用二分法求方程的近似解
  - 二分法的定义
  - 二分法的步骤
  - 二分法的应用
    - 求方程的近似解
    - 实际应用

课后素养评价（三十八）

基础性·能力运用

1. （多选）下列函数中，能用二分法求函数零点近似值的有　　　（　　）

A. $f(x)=3^x-1$

B. $f(x)=x^2-2x+1$

C. $f(x)=\log_4 x$

D. $f(x)=e^{x+1}-2$

ACD　**解析**：根据题意，依次分析选项：对于A，$f(x)=3^x-1$，有$f(0)=0$，在函数零点两侧的函数值异号，故可以用二分法求函数零点；对于B，$f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$，且$f(1)=0$，当$x<1$时，$f(x)>0$，当$x>1$时，$f(x)>0$，$f(x)$在零点两侧的函数值同号，不能用二分法求函数零点；对于C，$f(x)=\log_4 x$，有$f(1)=0$，在函数零点两侧的函数值异号，故可以用二分法求函数零点；对于D，$f(x)$

$=e^{x+1}-2$，有 $f(\ln 2-1)=0$，在函数零点两侧的函数值异号，故可以用二分法求函数零点.

2. 用二分法研究函数 $f(x)=x^3+3x-1$ 的零点时，第一次计算，得 $f(0)<0, f(0.5)>0$，第二次应计算 $f(x_1)$，则 x_1 等于 (　　)

A. 1　　B. -1

C. 0.25　　D. 0.75

C　**解析**：因为 $f(0)<0, f(0.5)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,0.5)$ 内存在零点，根据二分法第二次应该计算 $f(x_1)$，其中 $x_1=\dfrac{0+0.5}{2}=0.25$.

3. 用二分法求方程的近似解，求得函数 $f(x)=x^3+2x-9$ 的部分函数值如下：$f(1)=-6, f(2)=3, f(1.5)=-2.625, f(1.75)=-0.640\ 6$，则方程 $x^3+2x-9=0$ 的一个近似解 x 所在区间为 (　　)

A. $(-0.6406,0)$　　B. $(1.75,2)$

C. $(1.5,1.75)$　　D. $(1,1.5)$

B　**解析**：$f(1)f(2)<0, f(1.5)f(2)<0, f(1.75)f(2)<0$，即在 $(1.75,2)$ 内存在零点，即方程 $x^3+2x-9=0$ 的一个近似根 x 所在区间为 $(1.75,2)$ 内.

4. (多选)某同学求函数 $f(x)=\ln x+2x-6$ 的零点时，用计算器算得部分函数值如下所示.

$f(2)\approx-1.307, f(3)\approx1.099, f(2.5)\approx-0.084, f(2.75)\approx0.512, f(2.625)\approx0.215, f(2.562\ 5)\approx0.066$.

则方程 $\ln x+2x-6=0$ 的近似解(精确度为 0.1)可取为 (　　)

A. 2.52　　B. 2.56　　C. 2.66　　D. 2.75

AB　**解析**：由表格函数值在 0 的左右两侧最接近的值，即 $f(2.5)\approx-0.084, f(2.562\ 5)\approx0.066$，

可知方程 $\ln x+2x-6=0$ 的近似根在 $(2.5, 2.562\ 5)$ 内，

因此选项 A 中 2.52 符合，选项 B 中 2.56 也符合.

综合性·创新提升

1. 用“二分法”可求方程的近似解，对于精确度 ε 说法正确的是 (　　)

A. ε 越大，近似解的精确度越高

B. ε 越大，近似解的精确度越低

C. 重复计算次数就是 ε

D. 重复计算次数与 ε 无关

B　**解析**：依“二分法”的具体步骤可知，ε 越大，近似解的精确度越低.

2. 若函数 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 内有 1 个零点，要使零点的近似值满足精确度为 0.01，则对区间 $(1,2)$ 至少二等分 (C)

A. 5 次　　B. 6 次　　C. 7 次　　D. 8 次

3. (多选)若函数 $f(x)$ 的图象是连续的，且函数 $f(x)$ 的唯一零点同时在区间 $(0,4)$，$(0,2)$，$\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，$\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{3}{2}\right)$ 内，则下列函数值与 $f(0)$ 符号不同的是 (　　)

A. $f(4)$　　B. $f(2)$　　C. $f(1)$　　D. $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$

ABD　**解析**：由二分法的步骤可知：(1) 零点在 $(0,4)$ 内，则有 $f(0)\cdot f(4)<0$，不妨设 $f(0)>0, f(4)<0$，取中点 2；(2) 零点在 $(0,2)$ 内，则有 $f(0)\cdot f(2)<0$，则 $f(0)>0, f(2)<0$，取中点 1；(3) 零点在 $(1,2)$ 内，则有 $f(1)\cdot f(2)<0$，则 $f(1)>0, f(2)<0$，取中点 $\dfrac{3}{2}$；(4) 零点在 $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ 内，则有 $f(1)\cdot f\left(\dfrac{3}{2}\right)<0$，则 $f(1)>0, f\left(\dfrac{3}{2}\right)<0$，取中点 $\dfrac{5}{4}$；(5) 零点在 $\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{3}{2}\right)$ 内，则有 $f\left(\dfrac{5}{4}\right)\cdot f\left(\dfrac{3}{2}\right)<0$，

则 $f\left(\dfrac{5}{4}\right)>0, f\left(\dfrac{3}{2}\right)<0$，所以与 $f(0)$ 符号不同的是 $f(4), f(2), f\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

4. (多选)在用“二分法”求函数 $f(x)$ 零点近似值时，第一次所取的区间是 $[-2,4]$，则第三次所取的区间可能是 (　　)

A. $\left[1,\dfrac{5}{2}\right]$　　B. $[-2,1]$

C. $\left[-2,\dfrac{5}{2}\right]$　　D. $\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$

AD　**解析**：因为第一次所取的区间是 $[-2,4]$，所以第二次所取的区间可能为 $[-2,1]$，$[1,4]$，所以第三次所取的区间可能为 $\left[-2,-\dfrac{1}{2}\right]$，$\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$，$\left[1,\dfrac{5}{2}\right]$，$\left[\dfrac{5}{2},4\right]$.

5. 用二分法求方程 $x^2-5=0$ 的一个近似正解.(精确度为 0.1)

解：令 $f(x)=x^2-5$，因为 $f(2.2)=-0.16<0$，$f(2.4)=0.76>0$，所以 $f(2.2)\cdot f(2.4)<0$，即这个函数在区间 $(2.2,2.4)$ 内有零点 x_0.

取区间 $(2.2,2.4)$ 的中点 $x_1=2.3$，$f(2.3)=0.29$，因为 $f(2.2)\cdot f(2.3)<0$，所以 $x_0\in(2.2,2.3)$.

再取区间 $(2.2,2.3)$ 的中点 $x_2=2.25$，$f(2.25)=0.062\ 5$，因为 $f(2.2)\cdot f(2.25)<0$，所以 $x_0\in(2.2,2.25)$.

由于 $|2.25-2.2|=0.05<0.1$，

所以原方程的近似正解可取为 2.25.

4.5.3　函数模型的应用

学习任务目标

1.会利用已知函数模型解决实际问题.
2.能建立函数模型解决实际问题.
3.认识函数模型的作用,提高数学建模、数据分析的能力.

问题式预习

知识点　两个函数模型

两个函数模型	
指数函数模型	$y=ba^x+c$(a,b,c 为常数,$b\neq0$,$a>0$,且 $a\neq1$)
对数函数模型	$y=m\log_a x+n$(m,a,n 为常数,$m\neq0$,$a>0$,且 $a\neq1$)

[微训练]

1.下列函数是四种投资方案预期的收益 y 关于时间 x 的函数,从足够长远的角度看,收益最好的是(A)

A.$y=10\times1.05^x$　　B.$y=20+x^{1.5}$
C.$y=30+\lg(x-1)$　　D.$y=50$

2.据统计,每年到某湿地公园越冬的白鹤数量 y(只)与时间 x(年)近似满足关系 $y=a\log_3(x+2)$,观测发现2018年冬(作为第1年)有越冬白鹤3 000只,估计到2024年冬有越冬白鹤　(C)

A.4 000只　　B.5 000只
C.6 000只　　D.7 000只

3.假设在不考虑空气阻力的情况下,某种火箭的最大速度 v(单位:m/s)和燃料的质量 M(单位:kg)、火箭(除燃料外)的质量 m(单位:kg)的函数关系是 $v=2\ 000\cdot\ln\left(1+\frac{M}{m}\right)$.当燃料质量是火箭质量的 $\underline{e^6-1}$ 倍时,火箭的最大速度可达12 km/s.

任务型课堂

任务一　已知函数模型解决实际问题

若进行科研实验时,某种病毒的总数 y 和天数 t 的函数关系为 $y=2^{t-1}$,且该种病毒的个数超过 10^8 时会发生变异,则该种病毒发生变异前,实验进行的天数最多为($\lg 2\approx0.301\ 0$)　(　　)

A.25　　B.26　　C.27　　D.28

C　**解析**:令 $y=2^{t-1}=10^8$,则 $t-1=\log_2 10^8=8\log_2 10$,即 $t=8\log_2 10+1=8\left(\frac{1}{\lg 2}\right)+1\approx27.6$.故该种病毒发生变异前,实验进行的天数最多为27.故选C.

【类题通法】

利用已知函数模型解决实际问题的策略

已知函数模型解决实际问题,往往给出的函数解析式含有参数,需要将题中的数据代入函数解析式,求得函数解析式中的参数,再将问题转化为已知函数解析式求函数值或自变量的值.

任务二　建立函数模型解决实际问题

[探究活动]

假设你有一笔资金用于投资,现有三种投资方案供你选择,这三种方案的回报如下:

方案一:每天回报40元;

方案二:第一天回报10元,以后每天比前一天多回报10元;

方案三:第一天回报0.4元,以后每天的回报是前一天的2倍.

请思考以下问题:

探究1:设第 x 天所得的回报为 y 元,那么上述三种投资方案对应的函数模型分别是什么?

提示:方案一可以用 $y=40(x\in\mathbf{N}^*)$进行描述;

方案二可以用 $y=10x(x\in\mathbf{N}^*)$进行描述;

方案三可以用 $y=0.4\times2^{x-1}(x\in\mathbf{N}^*)$进行描述.

探究2:探究1中的三个函数分别是什么类型的函数?其单调性如何?

提示:方案一是常数函数,不具有单调性;方案二是一次函数,是单调递增的,增长量是固定不变的;方

案三是指数型函数，是单调递增的，且增长量是成倍增加的.

[评价活动]

1. 某地现在人均年收入为 3.6 万元，该地人口平均每年增长 1.2%，总收入平均每年增长 4%.设 x 年后该地人均年收入为 y 万元，则 y 关于 x 的解析式为 ( )

A. $y=3.6\times\left(\frac{1.04}{1.012}\right)^{x-1}$

B. $y=3.6\times1.04^{x}$

C. $y=\frac{3.6\times1.04^{x}}{1.012}$

D. $y=3.6\times\left(\frac{1.04}{1.012}\right)^{x}$

D **解析**：设该地现在人口为 M，则该地现在一年的总收入为 $3.6M$，1 年后，该地总收入为 $3.6M(1+4\%)$，人口为 $M(1+1.2\%)$，则人均年收入为 $\frac{3.6M(1+4\%)}{M(1+1.2\%)}$，2 年后，人均年收入为 $\frac{3.6M(1+4\%)^{2}}{M(1+1.2\%)^{2}}$，…，$x$ 年后，人均年收入为 $\frac{3.6M(1+4\%)^{x}}{M(1+1.2\%)^{x}}$，即所求解析式为 $y=3.6\times\left(\frac{1.04}{1.012}\right)^{x}$.

2. 某地下车库在排气扇发生故障的情况下，测得空气中一氧化碳含量达到了危险状态，经抢修，排气扇恢复正常.排气 4 min 后，测得车库内的一氧化碳浓度为 64 μL/L，继续排气 4 min，又测得一氧化碳浓度为 32 μL/L.经检测知，该地下车库一氧化碳浓度 y (μL/L) 与排气时间 t (min) 存在函数关系 $y=c\left(\frac{1}{2}\right)^{mt}$ (c,m 为常数).

(1) 求 c,m 的值；

(2) 若地下车库中一氧化碳浓度不高于 0.5 μL/L 为正常，则至少排气多少分钟，这个地下车库中的一氧化碳浓度才能达到正常状态？

解：(1) 由题意，可得方程组 $\begin{cases}64=c\left(\frac{1}{2}\right)^{4m},\\32=c\left(\frac{1}{2}\right)^{8m},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}c=128,\\m=\frac{1}{4}.\end{cases}$

(2) 由 (1) 知 $y=128\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}t}$，

由题意，可得 $128\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}t}\leqslant0.5$，

即 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}t}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{8}$，即 $\frac{t}{4}\geqslant8$，解得 $t\geqslant32$.

所以至少排气 32 min，这个地下车库中的一氧化碳浓度才能达到正常状态.

【类题通法】

建立函数模型解决实际问题的关注点

建立模型时主要抓住四个关键："求什么""设什么""列什么""限制什么".

"求什么"就是弄清楚要解决什么问题，完成什么任务.

"设什么"就是弄清楚这个问题有哪些因素，谁是核心因素，通常设核心因素为自变量.

"列什么"就是把问题中的已知条件用所设变量表示出来，可以是方程、函数、不等式等.

"限制什么"主要是指自变量应满足的限制条件，在实际问题中，除了要使函数有意义外，还要考虑自变量的实际含义，如人数不能是负数等.

任务三 实际问题中函数模型的选择

1. 现测得 (x,y) 的两组值为 (1,2)，(2,5).现有两个拟合模型，甲：$y=x^{2}+1$，乙：$y=3x-1$.若又测得 (x,y) 的一组值为 (3,10.2)，则应选用________作为拟合模型较好.

甲 **解析**：运用图象法(图略)，即根据已知的三个点的坐标画出两个函数的图象，根据图象发现选甲拟合度更高.

2. 某地西红柿从 2 月 1 号开始上市，通过市场调查，得到每 100 kg 的种植成本 y(单位：元)与上市时间 x(距 2 月 1 日的天数，单位：天)的数据如下表：

上市时间 x	50	110	250
成本 y	150	108	150

(1) 根据上表数据，从下列函数中选取一个函数描述西红柿种植成本 y 与上市时间 x 的变化关系：$y=ax+b$，$y=ax^{2}+bx+c$，$y=a\cdot b^{x}$，$y=a\cdot\log_{b}x$；

(2) 利用 (1) 中选取的函数，求西红柿种植成本 y 最低时的上市时间 x 及最低种植成本.

解：(1) 根据表中数据，可判定描述西红柿种植成本 y 与上市时间 x 的变化关系的函数不是单调函数，

这与函数 $y=ax+b$，$y=a\cdot b^x$，$y=a\cdot \log_b x$ 的单调性都不符，

所以在 $a\neq 0$ 的前提下，可选取二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 进行描述.

把(50,150)，(110,108)，(250,150)代入二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中，

可得 $\begin{cases}2\ 500a+50b+c=150,\\12\ 100a+110b+c=108,\\62\ 500a+250b+c=150,\end{cases}$ 解得 $a=\dfrac{1}{200}$，$b=-\dfrac{3}{2}$，$c=\dfrac{425}{2}$.

所以西红柿种植成本 y 与上市时间 x 的函数关系是 $y=\dfrac{1}{200}x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{425}{2}$.

(2)由 $y=\dfrac{1}{200}x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{425}{2}$，

可得函数的图象开口向上，且对称轴为 $x=-\dfrac{-\frac{3}{2}}{2\times\frac{1}{200}}=150$，

所以，当 $x=150$ 时，西红柿种植成本 y 最低，

最低成本 $y_{\min}=\dfrac{1}{200}\times150^2-\dfrac{3}{2}\times150+\dfrac{425}{2}=100$.

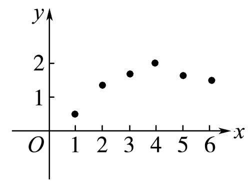
即西红柿上市 150 天时，种植成本 y 最低，为 100 元.

3. 某个体经营者根据前六个月经营 A，B 两种商品的逐月投入金额与销售两种商品所获纯利润得到下表.

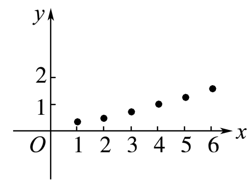
投入金额/万元	1	2	3	4	5	6
销售 A 种商品所获纯利润/万元	0.65	1.39	1.85	2	1.84	1.40
销售 B 种商品所获纯利润/万元	0.25	0.49	0.76	1	1.26	1.51

该经营者准备第七个月投入 12 万元经营这两种商品，请你设计一种资金投入方案，使该经营者能获得最大利润，并按你的方案求出该经营者第七个月可获得的最大纯利润.

解：以投入金额为横坐标，所获纯利润为纵坐标，在平面直角坐标系中画出散点图，如图所示.



A 种商品



B 种商品

由散点图可以看出，销售 A 种商品所获纯利润 y 与投入金额 x 之间的变化规律可以用二次函数模型进行拟合.

设 $y=a(x-h)^2+b(a\neq0)$，则 $y=a(x-4)^2+2$.

再把点(1,0.65)代入，得 $0.65=a(1-4)^2+2$，解得 $a=-0.15$，所以 $y=-0.15(x-4)^2+2$.

销售 B 种商品所获纯利润 y 与投入金额 x 之间的变化规律是线性的，可以用一次函数模型进行拟合.

设 $y=kx+b(k\neq0)$，将点(1,0.25)和(4,1)代入，得 $\begin{cases}0.25=k+b,\\1=4k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=0.25,\\b=0,\end{cases}$ 所以 $y=0.25x$.

设第七个月经营 A，B 两种商品投入的资金分别为 x_A 万元，x_B 万元，总利润为 W 万元，那么

$\begin{cases}x_A+x_B=12,\\W=y_A+y_B=-0.15(x_A-4)^2+2+0.25x_B,\end{cases}$

所以 $W=-0.15\left(x_A-\dfrac{19}{6}\right)^2+0.15\times\left(\dfrac{19}{6}\right)^2+2.6(0<x_A<12)$.

当 $x_A=\dfrac{19}{6}\approx3.2$ 时，W 取最大值，约为 4.1，此时 $x_B=8.8$.

即该经营者第七个月把 12 万元中的 3.2 万元投入 A 种商品，8.8 万元投入 B 种商品，可获得最大纯利润，最大纯利润约为 4.1 万元.

【类题通法】

函数拟合与预测的一般步骤

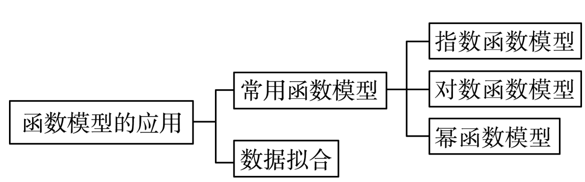
(1)根据原始数据、表格，绘出散点图；

(2)通过考察散点图，画出拟合直线或拟合曲线；

(3)求出拟合直线或拟合曲线的函数解析式；

(4)利用函数解析式，根据条件对所给问题进行预测，为决策和管理提供依据.

提质归纳



课后素养评价(三十九)

基础性·能力运用

1.有一组试验数据如下：

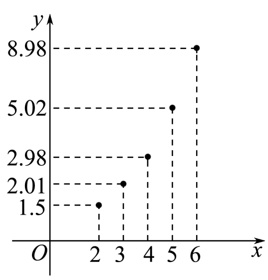
x	2	3	4	5	6
y	1.5	2.01	2.98	5.02	8.98

现准备用下列函数中的一个近似地表示这些数据所满足的规律，其中最合适的一个是　(　　)

A.$y=3\log_3 x$　　B.$y=2^{x-3}+1$

C.$y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}$　　D.$y=2x-2$

B　**解析**：根据表格中的数据，作出散点图，如图所示.



根据散点图可知，随着 x 的增大，y 的值增大，并且增长速度越来越快，

结合选项：函数 $y=3\log_3 x$ 增长速度越来越缓慢，不符合题意；

函数 $y=2^{x-3}+1$ 增长速度越来越快，符合题意；

函数 $y=2x-2$，增长速度不变，不符合题意；

而函数 $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}$，当 $x=3$ 时，可得 $y=2.75$；当 $x=4$ 时，可得 $y=4.5$，此时与真实数据误差较大，所以最接近的一个函数是 $y=2^{x-3}+1$.

2.某品种的甜瓜成熟后的甜度 y 与昼夜温差 x(单位：℃，$5\leqslant x\leqslant 35$)近似满足函数关系 $y=\frac{1}{\ln 2}\cdot\ln(x-3)+10$.当昼夜温差为 30℃时，甜瓜成熟后的甜度约为(参考数据：$\log_2 3\approx 1.585$)　(　　)

A.14.4　B.14.6　C.14.8　D.15.1

C　**解析**：由题意可得，当 $x=30$ 时，$y=\frac{1}{\ln 2}\cdot\ln(30-3)+10=10+3\log_2 3\approx 14.755\approx 14.8$.

3.设在海拔 x m 处的大气压强为 y kPa，y 与 x 的函数关系可近似表示为 $y=100e^{ax}$.已知在海拔 1 000 m处的大气压强为 90 kPa，根据函数关系式，在海拔2 000 m 处的大气压强为________kPa.

81　**解析**：将(1 000，90)代入 $y=100e^{ax}$，可得 $a=\frac{\ln 0.9}{1\ 000}$，y 与 x 的函数关系可近似地表示为 $y=100e^{\frac{\ln 0.9}{1\ 000}x}$.当 $x=2\ 000$ 时，$y=100(e^{\ln 0.9})^2=81$.

4.科学家通过研究，发现地震时释放出的能量 E(单位：J)与地震里氏震级 M 之间的关系为 $\lg E=4.8+1.5M$.设里氏 6.4 级地震所释放的能量为 E_1，里氏 7.4 级地震所释放的能量为 E_2，则 $\frac{E_2}{E_1}$ 等于 $\underline{10^{1.5}}$.

综合性·创新提升

1.将甲桶中的 a L 水缓慢注入空桶乙中，t min 后甲桶中剩余的水量 y(单位：L)符合指数衰减规律，且 $y=ae^{nt}$ n 为常数.若 5 min 后甲桶和乙桶中的水量相等，又过了 m min 后甲桶中的水只有 $\frac{a}{8}$ L，则 m 的值为　(　　)

A.7　B.8　C.9　D.10

D　**解析**：令 $\frac{1}{8}a=ae^{nt}$，即 $\frac{1}{8}=e^{nt}$.由已知得 $\frac{1}{2}=e^{5n}$，故 $\frac{1}{8}=e^{15n}$，比较知 $t=15$，$m=15-5=10$.

2.已知函数 $t=-144\lg\left(1-\frac{N}{100}\right)$可表示打字速度与所需的学习时间之间的关系，其中 N(单位：字/min)表示打字速度，t(单位：h)表示打字速度达到 N 所需的学习时间，则打字速度达到90 字/min的水平，所需的学习时间是　(　　)

A.144 h　　B.90 h

C.60 h　　D.40 h

A　**解析**：由 $N=90$ 可知，$t=-144\lg\left(1-\frac{90}{100}\right)=144$.

3.某工厂产生的废气经过过滤后排放，过滤过程中废气中的污染物数量 P(mg/L)与时间 t(h)之间的关

系为 $P=P_0\mathrm{e}^{-kt}$(P_0 为污染物初始值,k 为常数).如果在前 5 h 消除了 20%的污染物,则消除 50%的污染物需要(精确到1 h,参考数据:$\ln 2\approx0.69$,$\ln 10\approx2.30$)　　(　　)

A.13 h　　B.15 h

C.18 h　　D.20 h

B　**解析**:前 5 h 消除了 20%的污染物,

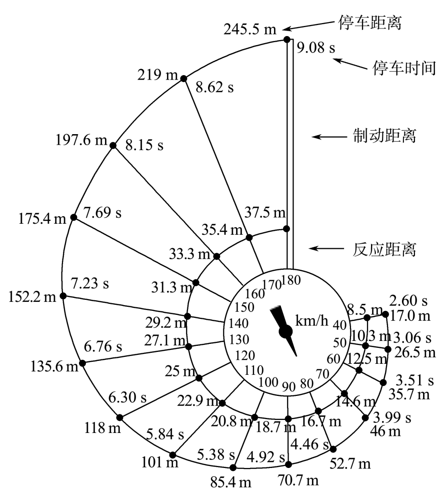
所以$(1-20\%)P_0=P_0\mathrm{e}^{-5k}$,即 $k=-\dfrac{\ln 0.8}{5}$.

当污染物减少 50%时,$P=(1-50\%)P_0=0.5P_0$,

所以 $0.5P_0=P_0\mathrm{e}^{\frac{\ln 0.8}{5}t}$.

所以 $t=\dfrac{5\ln 0.5}{\ln 0.8}=-\dfrac{5\ln 2}{3\ln 2-\ln 10}\approx-\dfrac{5\times0.69}{3\times0.69-2.30}=15$.故选 B.

4. 汽车急刹时的停车距离与诸多因素有关,其中最为关键的两个因素是驾驶员的反应时间和汽车行驶的速度.设 d 表示停车距离,d_1 表示反应距离,d_2 表示制动距离,则 $d=d_1+d_2$.如图是根据试验数据制作的停车距离示意图,由图中部分数据得到如下表格.



序号	速度/(km/h)	停车距离/m
1	40	17.0
2	50	26.5
3	60	35.7
4	70	46.0
5	80	52.7
6	90	70.7
7	100	85.4
8	110	101.0

根据表格中的数据,建立停车距离与汽车速度的函数模型.可选择模型①:$d=av+b$,模型②:$d=av^2+bv$,模型③:$d=av+\dfrac{b}{v}$,模型④:$d=av^2+\dfrac{b}{v}$(其中 v 为汽车速度,a,b 为待定系数)进行拟合.根据序号 3 和序号 7 两组数据分别求出四个函数的解析式,并通过计算汽车速度为 120 km/h 时的停车距离和试验数据比较,找出拟合效果最好的函数模型.

解:若选择模型①,则 $\begin{cases}60a+b=35.7,\\100a+b=85.4,\end{cases}$ 解得 $a=1.242\ 5$,$b=-38.85$.

故 $d=1.242\ 5v-38.85$.

当 $v=120$ 时,停车距离 d 的预测值为 $1.242\ 5\times120-38.85=110.25$.

若选择模型②,则 $\begin{cases}3\ 600a+60b=35.7,\\10\ 000a+100b=85.4,\end{cases}$

解得 $a=0.006\ 475$,$b=0.206\ 5$,

故 $d=0.006\ 475v^2+0.206\ 5v$.

当 $v=120$ 时,停车距离 d 的预测值为 $0.006\ 475\times120^2+0.206\ 5\times120=118.02$.

若选择模型③,则 $\begin{cases}60a+\dfrac{b}{60}=35.7,\\100a+\dfrac{b}{100}=85.4,\end{cases}$ 解得 $a=0.999\ 687\ 5$,$b=-1\ 456.875$,

故 $d=0.999\ 687\ 5v-\dfrac{1\ 456.875}{v}$.

当 $v=120$ 时,停车距离 d 的预测值为 $0.999\ 687\ 5\times120-\dfrac{1\ 456.875}{120}=107.821\ 875$.

若选择模型④,则 $\begin{cases}3\ 600a+\dfrac{b}{60}=35.7,\\10\ 000a+\dfrac{b}{100}=85.4,\end{cases}$ 解得 $a=\dfrac{15.995}{1\ 960}$,$b=379.285\ 714\ 3$,

故 $d=\dfrac{15.995}{1\ 960}v^2+\dfrac{379.285\ 714\ 3}{v}$.

当 $v=120$ 时,停车距离 d 的预测值为 $\dfrac{15.995}{1\ 960}\times120^2+\dfrac{379.285\ 714\ 3}{120}=120.675$.

由试验数据可知当 $v=120$ 时,停车距离为 118 m.模型②的预测值更接近 118 m,故模型②拟合效果最好.

单元活动构建

任务一　指数与指数运算

问题 1　观察下列各式.

$\sqrt{2^2}=2,\sqrt{(-2)^2}=2=|-2|$；

$\sqrt[4]{2^4}=2,\sqrt[4]{(-2)^4}=2=|-2|$；

$\sqrt[6]{2^6}=2,\sqrt[6]{(-2)^6}=2=|-2|$；

$\sqrt[3]{3^3}=3,\sqrt[3]{(-3)^3}=-3$；

$\sqrt[5]{3^5}=3,\sqrt[5]{(-3)^5}=-3$；

……

你能由上面各式总结出关于 $\sqrt[n]{a^n}$ $(n\in\mathbf{N}^*,n>1)$ 的一个一般规律吗？

答案：略

问题 2　根式运算是比较复杂的数学运算，常常需要把根式化为同次根式，再根据运算法则进行运算.而引入分数指数幂的概念就可以大大简化根式运算过程了.

计算下列各式(式中字母都是正数).

(1)$(3m^{\frac{3}{4}}\cdot n^{\frac{3}{2}})\cdot(-4m^{-\frac{1}{4}}\cdot n^{\frac{1}{3}})\div(-6m^{\frac{1}{2}}\cdot n^{\frac{5}{6}})$；

(2)$(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{5}{6}})^6$.

解：(1)$(3m^{\frac{3}{4}}\cdot n^{\frac{3}{2}})\cdot(-4m^{-\frac{1}{4}}\cdot n^{\frac{1}{3}})\div(-6m^{\frac{1}{2}}\cdot n^{\frac{5}{6}})$

$=\dfrac{3\times(-4)}{-6}\cdot m^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}\cdot n^{\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}=2n$.

(2)$(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{5}{6}})^6=(a^{\frac{1}{3}})^6\cdot(b^{-\frac{5}{6}})^6=a^2b^{-5}=\dfrac{a^2}{b^5}$.

「任务达标」

1. 当 $x<0$ 时，$x+\sqrt[4]{x^4}+\dfrac{\sqrt[3]{x^3}}{x}=$________.

1　**解析**：当 $x<0$ 时，$\sqrt[4]{x^4}=|x|=-x$.

又 $\sqrt[3]{x^3}=x$，故原式 $=x-x+1=1$.

2. 若 $4^x=8,4^y=7$，则 4^{x+y} 的值为________.

56　**解析**：$4^{x+y}=4^x\cdot4^y=8\times7=56$.

3. 求值.

(1)$8^{0.25}\times\sqrt[4]{2}+\left(\dfrac{27}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}-(-2\ 022)^0$；

(2)$\sqrt{(\mathrm{e}-3)^2}+\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}\div\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}-\left(\dfrac{25}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

解：(1)$8^{0.25}\times\sqrt[4]{2}+\left(\dfrac{27}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}-(-2\ 022)^0$

$=(2^3)^{\frac{1}{4}}\times2^{\frac{1}{4}}+\sqrt[3]{\dfrac{64}{27}}-1$

$=2+\dfrac{4}{3}-1=\dfrac{7}{3}$.

(2)$\sqrt{(\mathrm{e}-3)^2}+\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}\div\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}-\left(\dfrac{25}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$=|\mathrm{e}-3|+\mathrm{e}^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}-\dfrac{3}{5}$

$=3-\mathrm{e}+\mathrm{e}-\dfrac{3}{5}=\dfrac{12}{5}$.

【规律方法】

指数运算应遵循的原则

一般将负指数转化成正指数，根式转化为分数指数幂，再进行计算.另外，若出现分式，则要对分子、分母因式分解以达到约分的目的.

任务二　指数函数

问题 1　由指数函数的定义，可知指数函数具有以下基本性质：

(1)定义域是 $\mathbf{R}$，函数值大于 0；

(2)图象过定点(0,1).

你还能写出指数函数具有的其他性质吗？

答案：略

问题 2　设 $f(x)=3^x$，求证：

(1)$f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$；

(2)$\dfrac{f(x)}{f(y)}=f(x-y)$.

证明：(1)因为 $f(x)\cdot f(y)=3^x\cdot3^y=3^{x+y}$，

$f(x+y)=3^{x+y}$，所以 $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$.

(2)因为 $\dfrac{f(x)}{f(y)}=\dfrac{3^x}{3^y}=3^{x-y}$，$f(x-y)=3^{x-y}$，

所以 $\dfrac{f(x)}{f(y)}=f(x-y)$.

问题 3　已知函数 $f(x)=2^x$，对于任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，试通过图象比较 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 与 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ 的大小.

答案：略

「任务达标」

1. “$x>-1$”是“$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<9$”的　　(　　)

A.充要条件

B.充分不必要条件

C.必要不充分条件

D.既不充分也不必要条件

B 解析：由 $\left(\frac{1}{3}\right)^x<9=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$，得 $x>-2$.

所以“$x>-1$”是“$\left(\frac{1}{3}\right)^x<9$”的充分不必要条件.故选 B.

2. 设 $a=1.2^{0.2}, b=0.9^{1.2}, c=0.3^{-0.2}$，则 a,b,c 的大小关系为 ( )

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$

C. $c>a>b$　　D. $c>b>a$

C 解析：因为 $a=1.2^{0.2}>1.2^0=1, b=0.9^{1.2}<0.9^0=1$，所以 $b<a$.

又 $y=x^{0.2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $1<a=1.2^{0.2}<0.3^{-0.2}=\left(\frac{10}{3}\right)^{0.2}$，所以 $b<a<c$.故选 C.

3. 函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最小值是 ( )

A. $-\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{4}$

C. -4　　D. 4

B 解析：因为函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在定义域 **R** 上单调递减，

所以 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最小值为 $f(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.故选 B.

4. 已知函数 $f(x)=a^x+b(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象过点 $(1,7)$，其反函数的图象过点 $(4,0)$，则 a 的值为 ________.

4 解析：函数 $f(x)=a^x+b(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象过点 $(1,7)$，其反函数的图象过点 $(4,0)$，可得函数 $f(x)$ 的图象过点 $(0,4)$，所以 $\begin{cases}a+b=7,\\a^0+b=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4,\\b=3.\end{cases}$ 所以 a 的值为 4.

【规律方法】

1.指数函数单调性的判断与应用

(1)对于指数函数，注意底数 a 对函数单调性的影响.

(2)根据指数函数的单调性可以比较函数值的大小和求不等式的解集.

2. 指数函数的图象是数形结合求交点、最值、解不等式的工具，注意指数函数的图象的平移、伸缩、对称、翻折等变换.

任务三 对数与对数运算

问题 1 已知 $a>0$，且 $a\neq1, M>0, N>0$，你能由 $\log_a(MN)=\log_aM+\log_aN$ 推导出 $\log_a\frac{M}{N}=\log_aM-\log_aN$ 和 $\log_aM^n=n\log_aM$ 吗？

答案：略

问题 2 当 $N>0$，且 $N\neq1$ 时，常用对数 $\lg N$ 和自然对数 $\ln N$ 可以互相转化，即存在实数 A，使得 $\lg N=A\ln N$.你能推导出 A 的值吗？

答案：$A=\frac{1}{\ln 10}$

问题 3 我们知道，任何一个正实数 N 都可以表示成 $N=a\times10^n(1\leqslant a<10, n\in\mathbf{Z})$ 的形式，此时 $\lg N=n+\lg a(0\leqslant\lg a<1)$.当 $n>0$ 时，N 是 $n+1$ 位数.

(1)用上述方法，判断 2^{100} 是多少位数($\lg 2\approx0.301\ 0$)；

(2)当 $n<0$ 时，你有怎样的结论？

答案：(1) 2^{100} 是 31 位数；

(2) N 是 $-n$ 位小数.

问题 4 学习了对数运算，请对比指数运算，你有什么收获和体会？

答案：略

『任务达标』

1. (2022·天津)化简 $(2\log_43+\log_83)(\log_32+\log_92)$ 的结果为 ( )

A.1　　B.2　　C.4　　D.6

B 解析：原式 $=\left(2\times\frac{1}{2}\log_23+\frac{1}{3}\log_23\right)\left(\log_32+\frac{1}{2}\log_32\right)=\frac{4}{3}\log_23\times\frac{3}{2}\log_32=2$.

2. (2022·浙江)已知 $2^a=5, \log_83=b$，则 $4^{a-3b}=$ ( )

A.25　　B.5　　C. $\frac{25}{9}$　　D. $\frac{5}{3}$

C 解析：因为 $2^a=5, b=\log_83=\frac{1}{3}\log_23$，即 $2^{3b}=3$，所以 $4^{a-3b}=\frac{4^a}{4^{3b}}=\frac{(2^a)^2}{(2^{3b})^2}=\frac{5^2}{3^2}=\frac{25}{9}$.

3. $e^{\ln 2}+\frac{\log_{3.8}16}{\log_{3.8}4}=$ ________.

4 解析：$e^{\ln 2}+\frac{\log_{3.8}16}{\log_{3.8}4}=2+\log_416=2+2=4$.

4. 计算：$2\log_3 2-\log_3 \frac{32}{9}+\log_3 8$.

解：$2\log_3 2-\log_3\frac{32}{9}+\log_3 8=\log_3 4-\log_3\frac{32}{9}+\log_3 8$

$=\log_3 \frac{4\times 8}{\frac{32}{9}}=\log_3 9=2$.

【规律方法】

进行对数运算时，注意运算过程中式子变形前后要等价，熟练地运用对数的三个运算性质并结合对数恒等式，换底公式是对数计算、化简、证明常用的技巧.

任务四　对数函数

问题 1　画出对数函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的图象，并说出它的性质.一般地，当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 的图象有怎样的特征呢？

答案：略

问题 2　请你说明函数 $y=\log_2 x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的图象为何关于 x 轴对称，并借助函数 $y=\log_2 x$ 的图象画出函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的图象，结合图象归纳这两个函数的相同点与不同点.

答案：略

问题 3　已知函数 $y=\log_n x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{n}}x$.

(1)若 $0<n<1$，你能在直角坐标系中画出它们的大致图象吗？你发现了什么？

(2)若 $n>1$，你能在直角坐标系中画出它们的大致图象吗？你发现了什么？

答案：略

「任务达标」

1. 函数 $y=\log_3 x$，其中 $\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 81$，则函数的值域为　　（　　）

A. $(0,+\infty)$　　B. $\left(\frac{1}{3},81\right)$

C. $[-1,4]$　　D. $(1,4)$

C　**解析**：$\log_3\frac{1}{3}=\log_3 3^{-1}=-1$，$\log_3 81=\log_3 3^4=4$，$y=\log_3 x$ 在 $\left[\frac{1}{3},81\right]$ 上单调递增，所以 $y\in[-1,4]$.

2. 已知 $a=4^{-5}$，$b=\log_4 5$，$c=\log_{0.4}5$，则 a,b,c 的大小关系为　　（　　）

A. $a>b>c$　　B. $c>b>a$

C. $b>a>c$　　D. $c>a>b$

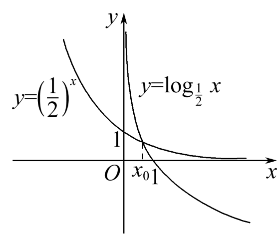
C　**解析**：因为 $a=4^{-5}<4^0=1$，且 $b=\log_4 5>\log_4 4=1$，$c=\log_{0.4}5<\log_{0.4}1=0$，

故 $b>a>c$.故选 C.

3. 设 $x\in\mathbf{R}$，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如：$[-5.1]=-6$，$[\pi]=3$.若 $\log_{\frac{1}{2}}x_0=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_0}$，则 $[x_0]=$　　（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

B　**解析**：作出函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 和 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象如图，交点的横坐标即为 x_0，



由图可知 $x_0\in(0,1)$，所以 $[x_0]=0$.

4. 已知函数 $f(x)=\log_a(2+3x)$，$g(x)=\log_a(2-3x)$ $(a>0$，且 $a\neq 1)$.

(1)求函数 $f(x)+g(x)$ 的定义域；

(2)判断函数 $f(x)+g(x)$ 的奇偶性，并说明理由.

解：(1)由 $f(x)=\log_a(2+3x)$，$g(x)=\log_a(2-3x)$，令 $h(x)=f(x)+g(x)=\log_a(2+3x)+\log_a(2-3x)$.

因此函数 $h(x)$ 需满足 $\begin{cases}2+3x>0,\\2-3x>0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$，所以函数 $f(x)+g(x)$ 的定义域为 $\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

(2)由(1)得函数的定义域为 $\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$，因为 $h(-x)=f(-x)+g(-x)=\log_a(2-3x)+\log_a(2+3x)=h(x)$，所以函数 $f(x)+g(x)$ 为偶函数.

【规律方法】

1. 根据函数的图象可判断函数的单调性与奇偶性：

单调性：函数图象的变化趋势；

奇偶性：函数图象的对称性.

2. 对数函数性质的核心是单调性，比较大小、解不等式、求参数的范围等都需要利用单调性进行分析.当单调性不确定时，需要分类讨论.

第四章综合检测

（时间：120 分钟，分值：150 分）

一、单项选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）.

1. 函数 $f(x)=\dfrac{\ln(3-x)}{x-1}$ 的定义域为　　（　　）

A. $(-\infty,-1)\cup(-1,3]$

B. $(-\infty,1)\cup(1,3]$

C. $(-\infty,-1)\cup(-1,3)$

D. $(-\infty,1)\cup(1,3)$

D　**解析**：由题意可知 $\begin{cases}3-x>0,\\x-1\neq0,\end{cases}$ 解得 $x<3$ 且 $x\neq1$，所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,3)$，故选 D.

2. 若函数 $f(x)=\log_a(x-b)+c\ (a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象恒过定点 $(3,2)$，则 $b+c=$　　（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

C　**解析**：函数 $f(x)=\log_a(x-b)+c\ (a>0$，且 $a\neq1)$，令 $x-b=1$，得 $x=b+1$，此时 $f(b+1)=c$，所以函数 $f(x)$ 恒过定点 $(b+1,c)$，即 $b+1=3$，$c=2$，所以 $b=2$，$c=2$，所以 $b+c=4$.

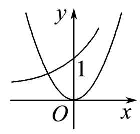
3. 函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{3}{\mathrm{e}}$ 的零点所在的区间为（　　）

A. $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right)$　　B. $(1,\mathrm{e})$

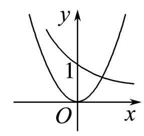
C. $(\mathrm{e},\mathrm{e}^2)$　　D. $(\mathrm{e}^2,\mathrm{e}^3)$

C　**解析**：因为 $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\dfrac{3}{\mathrm{e}}=-1-\dfrac{3}{\mathrm{e}}<0$，$f(1)=\ln1-\dfrac{3}{\mathrm{e}}=-\dfrac{3}{\mathrm{e}}<0$，$f(\mathrm{e})=\ln \mathrm{e}-\dfrac{3}{\mathrm{e}}=1-\dfrac{3}{\mathrm{e}}<0$，$f(\mathrm{e}^2)=\ln \mathrm{e}^2-\dfrac{3}{\mathrm{e}}=2-\dfrac{3}{\mathrm{e}}>0$，所以 $f(\mathrm{e})\cdot f(\mathrm{e}^2)<0$，根据函数零点存在定理可知，函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{3}{\mathrm{e}}$ 的零点所在区间是 $(\mathrm{e},\mathrm{e}^2)$. 故选 C.

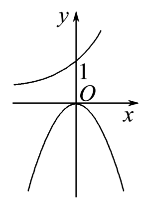
4. 已知 $a>1$，则函数 $y=a^x$ 与 $y=(a-1)x^2$ 在同一平面直角坐标系中的图象可能是　　（　　）



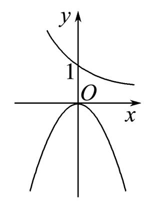
A



B



C



D

A　**解析**：因为 $a>1$，所以函数 $y=a^x$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，函数 $y=(a-1)x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 A 中图象符合题意，故选 A.

5. 设 p：$\log_2 x\leqslant0$，q：$2^x\leqslant2$，则 p 是 q 的　　（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

A　**解析**：因为 $\log_2 x\leqslant0$，所以 $0<x\leqslant1$，即 p：$0<x\leqslant1$. 因为 $2^x\leqslant2$，所以 $x\leqslant1$，即 q：$x\leqslant1$，所以 p 是 q 的充分不必要条件. 故选 A.

6. 党的二十大报告指出，“坚持精准治污、科学治污、依法治污，持续深入打好蓝天、碧水、净土保卫战. 加强污染物协同控制，基本消除重污染天气.”按照相关规定，某化工厂产生的废气需经过过滤装置的处理，将其中的某类污染物含量降至过滤前的 5% 以下才能排放. 已知过滤过程中，废气中该类污染物的含量 P（单位：mg/L）与时间 t（单位：min）的关系为 $P=P_0\mathrm{e}^{-kt}$，其中 P_0，k 是常数. 若 $t=4$ 时，该类污染物的含量降为过滤前的 25%，那么废气排放前至少需要过滤的时长为？（结果保留整数，参考数据：$\lg 2=0.301\ 0$）　　（　　）

A.7 min　　B.8 min

C.9 min　　D.10 min

C　**解析**:依题意可得 $P_0e^{-4k}=25\%P_0$,所以 $e^{-4k}=\frac{1}{4}$,两边取对数可得 $\lg e^{-4k}=\lg\frac{1}{4}$,

所以 $-4k\lg e=-\lg 4$,则 $k=\frac{\lg 2}{2\lg e}$,

所以 $P=P_0e^{-\frac{\lg 2}{2\lg e}t}$,令 $P_0e^{-\frac{\lg 2}{2\lg e}t}\leqslant 5\%P_0$,即 $e^{-\frac{\lg 2}{2\lg e}t}\leqslant\frac{1}{20}$,所以 $-\frac{\lg 2}{2\lg e}t\leqslant\ln\frac{1}{20}$,

即 $\frac{\lg 2}{2\lg e}t\geqslant\ln 20=\frac{\lg 20}{\lg e}$,

所以 $t\geqslant\frac{2\lg 20}{\lg 2}=\frac{2(\lg 2+\lg 10)}{\lg 2}=\frac{2(\lg 2+1)}{\lg 2}=\frac{2\times(0.301\ 0+1)}{0.301\ 0}\approx 8.64$,

所以废气至少需要过滤 9 min 才能排放.

7. 下列式子错误的是　(　　)

A.$2.1^{\frac{2}{3}}>2.3^{\frac{2}{3}}>2.1^{\frac{1}{3}}$

B.$2^{-0.2}<2^{1.6}<0.4^{-2.5}$

C.$\log_{0.9}0.7>\log_{0.9}0.8>\log_{0.8}0.9$

D.$\log_2 3>\log_3 4>\log_4 5$

A　**解析**:因为 $2.3^{\frac{2}{3}}>2.1^{\frac{2}{3}}>2.1^{\frac{1}{3}}$,选项 A 错误;因为 $0.4^{-2.5}=2.5^{2.5}>2^{2.5}>2^{1.6}>2^{-0.2}$,选项 B 正确;因为 $\log_{0.9}0.7>\log_{0.9}0.8>\log_{0.9}0.9>\log_{0.8}0.9$,选项 C 正确; $\log_2 3-\log_3 4=\frac{\lg 3}{\lg 2}-\frac{\lg 4}{\lg 3}=\frac{(\lg 3)^2-\lg 2\lg 4}{\lg 2\lg 3}>\frac{(\lg 3)^2-\left(\frac{\lg 2+\lg 4}{2}\right)^2}{\lg 2\lg 3}=\frac{(\lg 9)^2-(\lg 8)^2}{4\lg 2\lg 3}>0$,即 $\log_2 3>\log_3 4$,同理可得 $\log_3 4>\log_4 5$,即 $\log_2 3>\log_3 4>\log_4 5$,选项 D 正确.

8. 设 $a\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)=\begin{cases}|\log_{\frac{1}{2}}x|,0<x\leqslant 4,\\ \frac{10}{x},x>4,\end{cases}$ 若方程 $f(x)=a$ 有三个不相等的实数根 x_1,x_2,x_3,且 $x_1<x_2<x_3$,则下列说法正确的是　(　　)

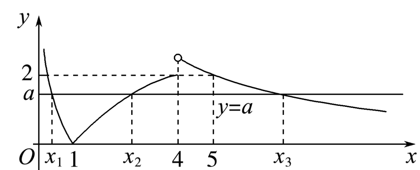
A.a 的取值范围为 $\left(0,\frac{5}{2}\right]$

B.x_3 的取值范围为 $(4,+\infty)$

C.$x_1x_2=2$

D.$\frac{x_3}{x_1\cdot x_2}$ 的取值范围为 $[5,+\infty)$

D　**解析**:画出函数 $f(x)$ 的图象,如图所示.方程 $f(x)=a$ 有三个不相等的实数根可转化为函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 有三个交点,所以实数 a 的取值范围是 $(0,2]$,A 不正确;令 $\frac{10}{x}=2$,得 $x=5$,所以 $x_3\geqslant 5$,B 不正确;由图可知,$0<x_1<1<x_2$,所以 $\log_{\frac{1}{2}}x_1>0$,$\log_{\frac{1}{2}}x_2<0$,由 $|\log_{\frac{1}{2}}x_1|=|\log_{\frac{1}{2}}x_2|$,得 $\log_{\frac{1}{2}}x_1=-\log_{\frac{1}{2}}x_2$,所以 $x_1x_2=1$,C 不正确;$\frac{x_3}{x_1x_2}=x_3\geqslant 5$,D 正确.故选 D.



二、多项选择题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分).

9. 下列命题中正确的是　(　　)

A.$\exists x\in(0,+\infty)$,$2^x>3^x$

B.$\exists x\in(0,1)$,$\log_2 x<\log_3 x$

C.$\forall x\in(0,+\infty)$,$\left(\frac{1}{2}\right)^x>\log_{\frac{1}{3}}x$

D.$\forall x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$,$\left(\frac{1}{2}\right)^x<\log_{\frac{1}{3}}x$

BD　**解析**:当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$\frac{2^x}{3^x}=\left(\frac{2}{3}\right)^x<1$,即 $2^x<3^x$ 恒成立,A 错误;当 $x\in(0,1)$ 时,$\log_2 x<0$ 且 $\log_3 x<0$,因为 $\frac{\log_2 x}{\log_3 x}=\frac{\frac{\log_3 x}{\log_3 2}}{\log_3 x}=\frac{1}{\log_3 2}=\log_2 3>1$,所以 $\log_2 x<\log_3 x$ 恒成立,B 正确;当 $x=\frac{1}{9}$ 时,$\left(\frac{1}{2}\right)^x<1$,$\log_{\frac{1}{3}}x=2$,此时 $\log_{\frac{1}{3}}x>\left(\frac{1}{2}\right)^x$,C 错误;由对数函数与指数函数的性质可知,当 $x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$ 时,$\left(\frac{1}{2}\right)^x<1<\log_{\frac{1}{3}}x$ 恒成立,D 正确.故选 BD.

10. 已知函数 $f(x)=2^x+x$，$g(x)=x+\log_2 x$，$h(x)=x^3+x$ 的零点依次为 a,b,c，则　（　　）

A. $a>0$　　B. $b>0$

C. $c=0$　　D. $b>c>a$

BCD　**解析**：在同一平面直角坐标系中画出 $y=2^x$ 和 $y=-x$ 的图象（图略），可得 $a<0$，用同样的方法可得 $b>0$，$c=0$，所以 $b>c>a$. 故选 BCD.

11. 已知函数 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)$，则　（　　）

A. $f(x)$在$(0,2)$上单调递增

B. $f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,2)$上单调递减

C. $y=f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称

D. $y=f(x)$的图象关于点$(1,0)$对称

BC　**解析**：由题易知，$f(x)=\ln x+\ln(2-x)$的定义域为$(0,2)$，$f(x)=\ln[x(2-x)]=\ln[-(x-1)^2+1]$，由复合函数的单调性知，函数 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,2)$上单调递减，所以 A 错误，B 正确；$f(1-x)=\ln(1-x)+\ln(x+1)$，$f(1+x)=\ln(x+1)+\ln(1-x)$，所以 $f(1-x)=f(1+x)$，所以 $y=f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 C 正确；$f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}+\ln\left(2-\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{3}{4}$，$f\left(\frac{3}{2}\right)=\ln\frac{3}{2}+\ln\left(2-\frac{3}{2}\right)=\ln\frac{3}{4}$，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\ln\frac{3}{4}$，所以 D 错误. 故选 BC.

12. 高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的称号，用其名字命名的一个函数叫做“高斯函数”. 设 $x\in\mathbf{R}$，用$[x]$表示不超过 x 的最大整数，则 $y=[x]$为高斯函数，例如$[-3.5]=-4$，$[2.1]=2$. 已知函数 $f(x)=\frac{2^x}{1+2^x}-\frac{1}{2}$，$g(x)=[f(x)]$，则下列叙述正确的是　（　　）

A. $g(x)$是偶函数

B. $f(x)$是奇函数

C. $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

D. $g(x)$的值域是$\{-1,0,1\}$

BC　**解析**：根据题意知 $f(x)=\frac{2^x}{1+2^x}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+2^x}$. 因为 $g(1)=[f(1)]=\left[\frac{1}{6}\right]=0$，$g(-1)=[f(-1)]=\left[-\frac{1}{6}\right]=-1$，所以 $g(1)\neq g(-1)$，$g(1)\neq -g(-1)$，所以函数 $g(x)$既不是奇函数也不是偶函数，A 错误；因为 $f(-x)=\frac{2^{-x}}{1+2^{-x}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{1+2^x}-\frac{1}{2}=-f(x)$，所以 $f(x)$是奇函数，B 正确；因为 $y=\frac{1}{2^x+1}$在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，所以 $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+2^x}$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，C 正确；因为 $2^x>0$，所以 $1+2^x>1$，所以 $-\frac{1}{2}<f(x)<\frac{1}{2}$，所以当 $f(x)\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$时，$g(x)=[f(x)]=-1$，当 $f(x)\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$时，$g(x)=[f(x)]=0$，

所以 $g(x)$的值域为$\{-1,0\}$，D 错误. 故选 BC.

三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）.

得分	

13. 用二分法求函数 $f(x)=x^3-2x-5$ 在区间$(2,3)$内的零点时，取区间$(2,3)$的中点 2.5，则下一个 $f(x)$的零点所在区间是________.

$(2,2.5)$　**解析**：因为 $f(2)<0$，$f(2.5)>0$，所以下一个有零点的区间为$(2,2.5)$.

得分	

14. 若函数 $y=f(x)$与 $y=10^x$ 互为反函数，则 $y=f(x^2-2x)$的单调递增区间是________.

$(2,+\infty)$　**解析**：由题意知，$f(x)=\log_{10}x=\lg x$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，设 $g(x)=x^2-2x$，令 $x^2-2x>0$，解得 $x<0$ 或 $x>2$，由二次函数的性质知，$g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(2,+\infty)$上单调递增，则 $y=f(x^2-2x)$的单调递增区间是$(2,+\infty)$.

得分 | **15.** 已知 $a>b>1$，若 $\log_a b+\log_b a=\dfrac{5}{2}$，$a^b=b^a$，则 $a=$________，$b=$________.

4　2　**解析**：由于 $a>b>1$，则 $\log_a b\in(0,1)$. 因为 $\log_a b+\log_b a=\dfrac{5}{2}$，即 $\log_a b+\dfrac{1}{\log_a b}=\dfrac{5}{2}$，所以 $\log_a b=\dfrac{1}{2}$ 或 $\log_a b=2$（舍去），所以 $a^{\frac{1}{2}}=b$，即 $a=b^2$，所以 $a^b=(b^2)^b=b^{2b}=b^a$，所以 $a=2b$，则 $b^2=2b$，所以 $b=2$（$b=0$ 舍去），$a=4$.

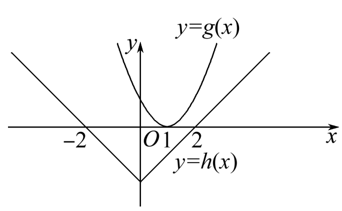
得分 | **16.**（2022·天津）设 $a\in\mathbf{R}$，对任意实数 x，记 $f(x)=\min\{|x|-2,x^2-ax+3a-5\}$. 若 $f(x)$ 至少有 3 个零点，则实数 a 的取值范围为________.

$[10,+\infty)$　**解析**：设 $g(x)=x^2-ax+3a-5$，$h(x)=|x|-2$，由 $|x|-2=0$ 可得 $x=\pm2$.

要使得函数 $f(x)$ 至少有 3 个零点，则函数 $g(x)$ 至少有一个零点，则 $\Delta=a^2-12a+20\geqslant0$，

解得 $a\leqslant2$ 或 $a\geqslant10$.

①当 $a=2$ 时，$g(x)=x^2-2x+1$，作出函数 $g(x)$，$h(x)$ 的图象如图所示：



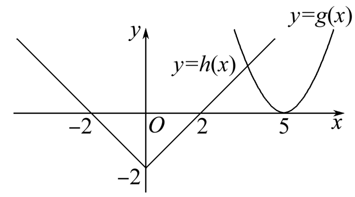
此时函数 $f(x)$ 只有两个零点，不合题意；

②当 $a<2$ 时，设函数 $g(x)$ 的两个零点分别为 x_1，x_2（$x_1<x_2$），

要使得函数 $f(x)$ 至少有 3 个零点，则 $x_2\leqslant-2$，

所以 $\begin{cases}\dfrac{a}{2}<-2,\\ g(-2)=4+5a-5\geqslant0,\end{cases}$ 无解；

③当 $a=10$ 时，$g(x)=x^2-10x+25$，作出函数 $g(x)$，$h(x)$ 的图象如图所示：



由图可知，函数 $f(x)$ 的零点个数为 3，合乎题意；

④当 $a>10$ 时，设函数 $g(x)$ 的两个零点分别为 x_3，x_4（$x_3<x_4$），

要使得函数 $f(x)$ 至少有 3 个零点，则 $x_3\geqslant2$，

可得 $\begin{cases}\dfrac{a}{2}>2,\\ g(2)=4+a-5\geqslant0,\end{cases}$ 解得 $a>4$，此时 $a>10$.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $[10,+\infty)$.

四、解答题（本题共 6 小题，共 70 分）.

得分 | **17.**（10 分）求值：

(1) $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{4}\times\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}+\lg\dfrac{1}{100}-3^{\log_3 2}$；

(2) $(\log_2 5+\log_4 0.2)(\log_5 2-\log_{25}0.5)$.

解：(1) $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{4}\times\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}+\lg\dfrac{1}{100}-3^{\log_3 2}=2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{2}{3}}\times2^{-\frac{1}{6}}+\lg 10^{-2}-2=2-2-2=-2$.

(2) $(\log_2 5+\log_4 0.2)(\log_5 2-\log_{25}0.5)$

$=\left(\log_2 5+\dfrac{1}{2}\log_2 0.2\right)\left(\log_5 2-\dfrac{1}{2}\log_5 0.5\right)$

$=\left(\log_2 5+\log_2\sqrt{\dfrac{1}{5}}\right)\left(\log_5 2-\log_5\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)$

$=\log_2\sqrt{5}\times\log_5 2\sqrt{2}=\dfrac{\lg\sqrt{5}}{\lg 2}\times\dfrac{\lg 2\sqrt{2}}{\lg 5}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}\lg 5}{\lg 2}\times\dfrac{3\lg 2}{2\lg 5}=\dfrac{3}{4}$.

得分 | **18.**（12 分）已知函数 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域；

(2) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性.

解：(1) 由题意知 $\dfrac{1-x}{1+x}>0$，

解得 $-1<x<1$，

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid-1<x<1\}$.

(2)对于函数 $f(x)=\lg \frac{1-x}{1+x}$，其定义域为 $(-1,1)$，

因为对于定义域内的每一个 x 都有 $f(-x)=\lg \frac{1+x}{1-x}=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\lg \frac{1-x}{1+x}=-f(x)$，

所以函数 $f(x)=\lg \frac{1-x}{1+x}$ 是奇函数.

得分	

19.(12 分)某化工企业致力于改良工艺，使排放的废气中含有的污染物数量逐渐减少.设改良工艺前所排放的废气中含有的污染物数量为 r_0 mg/m^3，首次改良工艺后所排放的废气中含有的污染物数量为 r_1 mg/m^3，第 n 次改良工艺后所排放的废气中含有的污染物数量为 r_n mg/m^3，则可建立函数模型 $r_n=r_0-(r_0-r_1)\cdot 5^{0.5n+p}$（$p\in\mathbf{R}$，$n\in\mathbf{N}^*$），其中 n 是指改良工艺的次数.现已知 $r_0=2$，$r_1=1.94$.

(1)试求 r_n 关于 n 的函数解析式；

(2)若该地环保部门要求企业所排放的废气中含有的污染物数量不能超过 0.08 mg/m^3，试问至少进行多少次工艺改良才能使该企业所排放的废气中含有的污染物数量达标？（参考数据：$\lg 2\approx 0.3$）

解：(1)由题意知，$r_0=2$，$r_1=1.94$，

所以当 $n=1$ 时，$r_1=r_0-(r_0-r_1)\cdot 5^{0.5+p}$，

即 $1.94=2-(2-1.94)\times 5^{0.5+p}$，解得 $p=-0.5$，

所以 $r_n=2-0.06\times 5^{0.5n-0.5}$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

(2)由题意可得，$r_n=2-0.06\times 5^{0.5n-0.5}\leqslant 0.08$，

整理得 $5^{0.5n-0.5}\geqslant 32$，

两边同时取对数，得 $0.5n-0.5\geqslant \frac{\lg 32}{\lg 5}$，

整理得 $n\geqslant 2\times\frac{5\lg 2}{1-\lg 2}+1$，

将 $\lg 2\approx 0.3$ 代入，得 $2\times\frac{5\lg 2}{1-\lg 2}+1\approx 5.3$，

又 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n\geqslant 6$.

所以至少进行 6 次工艺改良才能使该企业所排放的废气中含有的污染物数量达标.

得分	

20.(12 分)已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)=\frac{-2^x+b}{2^{x+1}+a}$ 是奇函数.

(1)求 a,b 的值，并用定义证明函数 $f(x)$ 的单调性；

(2)若对任意 $t\in\mathbf{R}$，不等式 $f(t^2-2t)+f(2t^2-k)<0$ 恒成立，求 k 的取值范围.

解：(1)因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，

即 $\frac{-1+b}{2+a}=0$，解得 $b=1$，

所以 $f(x)=\frac{1-2^x}{2^{x+1}+a}$.

又 $f(-1)=-f(1)$，所以 $\frac{1-\frac{1}{2}}{a+1}=-\frac{1-2}{2^2+a}$，解得 $a=2$，

经检验当 $a=2,b=1$ 时，$f(x)=\frac{1-2^x}{2^{x+1}+2}$ 是奇函数，所以 $a=2,b=1$.

$f(x)=\frac{1-2^x}{2+2^{x+1}}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^x+1}$，

对任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，

有 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{2^{x_1}+1}-\frac{1}{2^{x_2}+1}=\frac{2^{x_2}-2^{x_1}}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$，

因为 $x_1<x_2$，所以 $2^{x_1}<2^{x_2}$，所以 $f(x_1)>f(x_2)$，

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

(2)因为 $f(x)$ 是奇函数，

所以 $f(t^2-2t)+f(2t^2-k)<0$ 等价于 $f(t^2-2t)<-f(2t^2-k)=f(k-2t^2)$.

又 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数，所以 $t^2-2t>k-2t^2$，

所以对任意的 $t\in\mathbf{R}$ 总有 $3t^2-2t-k>0$，

从而 $\Delta=4+12k<0$，得 $k<-\frac{1}{3}$，

所以 k 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$.

得分	

21.(12 分)已知函数 $f(x)=\log_2\frac{x}{8}\cdot$

$\log_2(2x)$，函数 $g(x)=4^x-2^{x+1}-3$.

(1)求函数 $f(x)$的值域；

(2)若不等式 $f(x)-g(a)\leqslant 0$ 对任意实数 $a\in\left[\frac{1}{2},2\right]$恒成立，试求实数 x 的取值范围.

解：(1)$f(x)=(\log_2x-3)(\log_2x+1)=(\log_2x)^2-2\log_2x-3=(\log_2x-1)^2-4\geqslant -4$，

即 $f(x)$的值域为$[-4,+\infty)$.

(2)因为不等式 $f(x)\leqslant g(a)$对任意实数 $a\in\left[\frac{1}{2},2\right]$恒成立，所以 $f(x)\leqslant g(a)_{\min}$，

$g(a)=4^a-2^{a+1}-3=(2^a)^2-2\times 2^a-3=(2^a-1)^2-4$，

令 $t=2^a$，因为 $a\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，所以 $t\in[\sqrt{2},4]$，

设 $h(t)=(t-1)^2-4$，$t\in[\sqrt{2},4]$，

当 $t=\sqrt{2}$ 时，$h(t)$取得最小值$-1-2\sqrt{2}$，

即 $g(a)_{\min}=-1-2\sqrt{2}$，

所以 $f(x)\leqslant -1-2\sqrt{2}$，即$(\log_2x-1)^2-4\leqslant -1-2\sqrt{2}$，

所以 $1-\sqrt{2}\leqslant \log_2x-1\leqslant \sqrt{2}-1$，

即 $2-\sqrt{2}\leqslant \log_2x\leqslant \sqrt{2}$，

解得 $2^{2-\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant 2^{\sqrt{2}}$，

所以实数 x 的取值范围为$[2^{2-\sqrt{2}},2^{\sqrt{2}}]$.

得分	

22.(12分)已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a>0)$，且 $f(1)=-\frac{a}{2}$.

(1)求证：函数 $f(x)$有两个不同的零点.

(2)设 x_1,x_2 是函数 $f(x)$的两个不同的零点，求$|x_1-x_2|$的取值范围.

(3)求证：函数 $f(x)$在区间$(0,2)$内至少有一个零点.

(1)**证明**：因为 $f(1)=a+b+c=-\frac{a}{2}$，所以 $c=-\frac{3a}{2}-b$.

所以 $f(x)=ax^2+bx-\frac{3a}{2}-b$.

对于方程 $f(x)=0$，

$\Delta=b^2-4a\left(-\frac{3a}{2}-b\right)=b^2+6a^2+4ab=(2a+b)^2+2a^2$，

所以 $\Delta>0$ 恒成立，

又 $a>0$，所以函数 $f(x)$有两个不同的零点.

(2)**解**：由 x_1,x_2 是函数 $f(x)$的两个不同的零点，得 x_1,x_2 是方程 $f(x)=0$ 的两个根.

所以 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=-\frac{b}{a}-\frac{3}{2}$.

所以 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-4\left(-\frac{b}{a}-\frac{3}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{b}{a}+2\right)^2+2}\geqslant\sqrt{2}$.

所以$|x_1-x_2|$的取值范围是$[\sqrt{2},+\infty)$.

(3)**证明**：因为 $f(0)=c$，$f(2)=4a+2b+c$，

由(1)知 $3a+2b+2c=0$，

所以 $f(2)=a-c$.

(ⅰ)当 $c>0$ 时，有 $f(0)>0$，又 $a>0$，

所以 $f(1)=-\frac{a}{2}<0$，

所以函数 $f(x)$在区间$(0,1)$内至少有一个零点.

(ⅱ)当 $c\leqslant 0$ 时，$f(2)=a-c>0$，$f(1)<0$，

所以 $f(x)$在区间$(1,2)$内至少有一个零点.

综上所述，函数 $f(x)$在区间$(0,2)$内至少有一个零点.

第五章　三角函数

5.1　任意角和弧度制

5.1.1　任意角

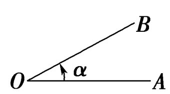
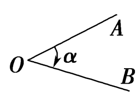
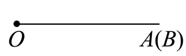
学习任务目标

1.了解角的概念的推广，能正确区分正角、负角和零角.
2.了解象限角的概念.
3.理解并掌握终边相同的角的表示方法，并能判断角的终边所在的位置.

问题式预习

知识点一　角的概念

(1)角的概念：角可以看成一条射线绕着它的端点旋转所成的图形.
(2)角的构成：顶点、始边、终边.
(3)分类：按旋转方向可将角分为如下三类：

类型	定义	图示
正角	一条射线绕其端点按逆时针方向旋转形成的角	
负角	一条射线绕其端点按顺时针方向旋转形成的角	
零角	如果一条射线没有做任何旋转，就称它形成了一个零角	

知识点二　角的运算

(1)相等的角：设角 α 由射线 OA 绕端点 O 旋转而成，角 β 由射线 $O'A'$ 绕端点 O' 旋转而成.如果它们的旋转方向相同且旋转量相等，那么就称 $\alpha=\beta$.
(2)相反的角：把射线 OA 绕端点 O 按不同方向旋转相同的量所成的两个角叫做互为相反角.角 α 的相反角记为 $-\alpha$.
(3)角的运算
①角的加法：设 α,β 是任意两个角.我们规定，把角 α 的终边旋转角 β，这时终边所对应的角是 $\alpha+\beta$.
②角的减法：$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$.这样，角的减法可以转化为角的加法.

[微训练]

1.若角 $\alpha=30^\circ$，把角 α 逆时针旋转 20° 得到角 β，则 $\beta=50^\circ$.
2.角 α 和 β 的顶点与原点重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，且 $\alpha=45^\circ$，角 $\beta(-360^\circ<\beta<0^\circ)$ 的终边和角 α 的终边关于 x 轴对称，把角 β 顺时针旋转 45° 得到的角是 -90°.

知识点三　象限角

(1)前提：①角的顶点与坐标原点重合，②角的始边与 x 轴的非负半轴重合.
(2)结论：角的终边(除端点外)在第几象限，就说这个角是第几象限角.如果角的终边在坐标轴上，那么就认为这个角不属于任何一个象限.

[微训练]

判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).
(1)第一象限角都是锐角.　(×)
(2)小于 90° 的角一定是锐角.　(×)
(3)第四象限角可以是负角.　(√)
(4)三角形的内角必是第一或第二象限角.　(×)
(5)-435° 角是第三象限角.　(×)

知识点四　终边相同的角

所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合 $S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，即任一与角 α 终边相同的角，都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

[微训练]

1.(多选)与 -457° 角终边相同的角的集合可以表示为　(BC)
A.$\{\alpha|\alpha=k\cdot360^\circ+457^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$
B.$\{\alpha|\alpha=k\cdot360^\circ-97^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$
C.$\{\alpha|\alpha=k\cdot360^\circ+263^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$
D.$\{\alpha|\alpha=k\cdot360^\circ-263^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$
2.若角 α 满足 $180^\circ<\alpha<360^\circ$，且角 5α 与 α 是终边相同的角，那么角 $\alpha=270^\circ$.

任务型课堂

任务一　任意角

1.把一条射线绕其端点按顺时针方向旋转 240°所形成的角是 (　　)

A.120°　　B.−120°

C.240°　　D.−240°

D　**解析**:因为该射线按顺时针方向旋转,所以旋转形成的角是负角,即为−240°.

2.射线 OA 绕端点 O 逆时针旋转 120°到达 OB 位置.由 OB 位置顺时针旋转 270°到达 OC 位置,则 $\angle AOC=$ (　　)

A.150°　　B.−150°

C.390°　　D.−390°

B　**解析**:各角和的旋转量等于各角旋转量的和.所以 120°+(−270°)=−150°.故选 B.

3.给出下列结论:

①始边相同而终边不同的角一定不相等;

②大于 90°的角为钝角;

③钝角比第三象限角小;

④小于 180°的角是钝角、直角或锐角.

其中正确的为________(填序号).

①　**解析**:①始边相同而终边不同的角一定不相等,故①正确;②显然不正确;③钝角大于−100°的角,而−100°的角是第三象限角,故③不正确;④0°角小于 180°,但它既不是钝角,也不是直角或锐角,故④不正确.

【类题通法】

解决与任意角相关问题的关键与技巧

(1)关键:①弄清角的始边与终边及旋转方向与大小,②正确理解象限角与锐角、直角、钝角、平角、周角等概念.

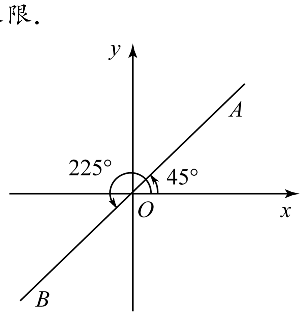
(2)技巧:判断命题为真需要证明,而判断命题为假只要举出反例即可.

任务二　象限角的判断

[**探究活动**]

探究 1:如果将 45°角与 225°角的顶点与原点重合,始边与 x 轴非负半轴重合,则 45°角的终边 OA,225°角的终边 OB 分别在第几象限?

提示:如图,45°角的终边在第一象限;225°角的终边在第三象限.



探究 2:将 45°角与 225°角推广到任意角 α,如何判断角 α 是第几象限角?

提示:判断方法是将角 α 的顶点与原点重合,始边与 x 轴的非负半轴重合,角 α 的终边在第几象限,就说该角是第几象限角.

[**评价活动**]

1.已知 α 是第三象限角,则 $\frac{\alpha}{2}$ 是 (　　)

A.第二或第四象限角

B.第一或第三象限角

C.第三或第四象限角

D.第一或第四象限角

A　**解析**:因为 α 是第三象限角,所以 $k\cdot360°+180°<\alpha<k\cdot360°+270°(k\in\mathbf{Z})$,所以 $k\cdot180°+90°<\frac{x}{2}<k\cdot180°+135°$,当 $k=0$ 时,$90°<\frac{\alpha}{2}<135°$,在第二象限,当 $k=1$ 时,$270°<\frac{\alpha}{2}<315°$,在第四象限.故选 A.

2.已知 α 是第二象限角,则 $180°-\alpha$ 是 (　　)

A.第一象限角

B.第二象限角

C.第三象限角

D.第四象限角

A　**解析**:由 α 是第二象限角可得,$90°+k\cdot360°<\alpha<180°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$.所以 $180°-(90°+k\cdot360°)>180°-\alpha>180°-(180°+k\cdot360°)(k\in\mathbf{Z})$,即 $90°-k\cdot360°>180°-\alpha>-k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$,所以 $180°-\alpha$ 是第一象限角.

3.给出下列四个说法:①−75°角是第四象限角;②225°角是第三象限角;③475°角是第二象限角;④−315°角是第一象限角.其中正确的有 (　　)

A.1 个　　B.2 个

C.3 个　　D.4 个

D　**解析**:对于①,−75°角是第四象限角;对于②,225°角是第三象限角;对于③,因为 475°=115°+360°,所以 475°角是第二象限角;对于④,因为−315°=45°−360°,所以−315°角是第一象限角,因此,真命题有 4 个.故选 D.

【类题通法】

象限角的判断方法

(1)判断一个角是第几象限角的关键是看角的终边在哪个象限.

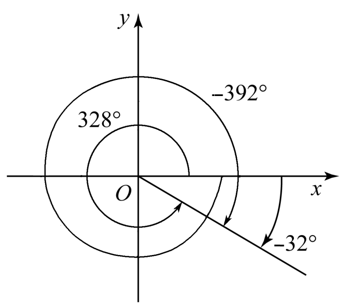
(2)若已知角α是第几象限角，判断$\frac{\alpha}{2}$，$\frac{\alpha}{3}$等是第几象限角，主要方法是解不等式并对整数k进行分类讨论.

任务三　终边相同的角的表示

[探究活动]

探究1：在同一直角坐标系中作出$-32°$，$328°$，$-392°$的角，并观察这三个角的终边有什么关系.角的大小与角的终边有什么关系？

提示：$-32°$，$328°$，$-392°$的角在同一坐标系中如图所示.



由图可知三个角的终边相同，它们两两之间相差$360°$的整数倍.

探究2：如何用$328°$角表示$-32°$角和$-392°$角？

提示：$-32°=-360°+328°$，

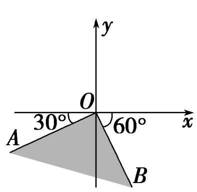
$-392°=-2\times360°+328°$.

[评价活动]

1. 如图，已知射线OA，OB与x轴的夹角分别为$30°$，$60°$.

(1)写出终边分别为射线OA，OB的角的集合；

(2)写出终边在阴影部分(含边界)的角的集合.



解：(1)终边为射线OA的角的集合是$\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+210°,k\in\mathbf{Z}\}$.

终边为射线OB的角的集合是$\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+300°,k\in\mathbf{Z}\}$.

(2)终边在阴影部分(含边界)的角的集合是$\{\alpha|k\cdot360°+210°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360°+300°,k\in\mathbf{Z}\}$.

2. 在与$10\ 030°$角终边相同的角中，求满足下列条件的角.

(1)最大的负角；

(2)最小的正角；

(3)在$360°\sim720°$范围内的角.

解：与$10\ 030°$角终边相同的角的一般形式为$\beta=k\cdot360°+10\ 030°(k\in\mathbf{Z})$.

(1)由$-360°<k\cdot360°+10\ 030°<0°$，

得$-10\ 390°<k\cdot360°<-10\ 030°$，

解得$k=-28$.

故所求的最大负角为$\beta=-28\times360°+10\ 030°=-50°$.

(2)由$0°<k\cdot360°+10\ 030°<360°$，

得$-10\ 030°<k\cdot360°<-9\ 670°$，

解得$k=-27$，故所求的最小正角为$\beta=310°$.

(3)由$360°<k\cdot360°+10\ 030°<720°$，

得$-9\ 670°<k\cdot360°<-9\ 310°$，

解得$k=-26$，故所求的角为$\beta=670°$.

3. 写出与下列各角终边相同的角的集合S，并把S中适合不等式$-360°\leqslant\beta<720°$的元素β写出来.

(1)$60°$；(2)$-21°$.

解：(1)与$60°$角的终边相同的角的集合$S=\{\beta|\beta=k\cdot360°+60°,k\in\mathbf{Z}\}$.

$k=-1$时，$\beta=-300°$；$k=0$时，$\beta=60°$；$k=1$时，$\beta=420°$.

S中适合不等式$-360°\leqslant\beta<720°$的元素β为$-300°,60°,420°$.

(2)与$-21°$角的终边相同的角的集合$S=\{\beta|\beta=k\cdot360°-21°,k\in\mathbf{Z}\}$.

$k=0$时，$\beta=-21°$；$k=1$时，$\beta=339°$；$k=2$时，$\beta=699°$.

S中适合不等式$-360°\leqslant\beta<720°$的元素β为$-21°,339°,699°$.

【类题通法】

1.终边相同的角的表示

(1)与角α终边相同的角都可以表示成$\alpha+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$的形式.

(2)终边相同的角相差$360°$的整数倍.

2.表示终边在某个区域内的角的三个步骤

第一步：先按逆时针方向找到区域的起始和终止边界.

第二步：由小到大分别标出起始和终止边界对应的$-360°\sim360°$范围内的角α和β，写出最简集合$\{x|\alpha<x<\beta\}$，其中$\beta-\alpha<360°$.

第三步：起始、终止边界对应角α，β分别加上$360°$的整数倍，即得终边在该区域内的角的集合.

提质归纳

任意角
- 定义
  - 正角
  - 负角
  - 零角
- 角的运算
- 象限角
- 终边相同的角

课后素养评价(四十)

基础性·能力运用

1.(多选)下列说法错误的是　(　　)

A.小于 90° 的角是锐角

B.钝角是第二象限角

C.第二象限角大于第一象限角

D.若角 α 与角 β 的终边相同,那么 $\alpha=\beta$

ACD　**解析**:大于 0° 而小于 90° 的角为锐角,故 A 错误;钝角是大于 90° 而小于 180° 的角,且位于第二象限,故 B 正确;第二象限的角不一定大于第一象限的角,比如第二象限的角 120° 小于第一象限的角 390°,故 C 错误;若角 α 与角 β 的终边相同,则 $\alpha=2k\cdot180^\circ+\beta,k\in\mathbf{Z}$,故 D 错误.

2.已知角 $\alpha=2\ 022^\circ$,则角 α 的终边在　(　　)

A.第一象限　　B.第二象限

C.第三象限　　D.第四象限

C　**解析**:因为 $\alpha=2\ 022^\circ=5\times360^\circ+222^\circ$,且 222° 是第三象限角,则角 α 的终边在第三象限.

3.(多选)下列四个选项正确的有　(ABC)

A.-75°角是第四象限角

B.225°角是第三象限角

C.475°角是第二象限角

D.-315°角是第四象限角

4.已知 $\alpha=2\ 022^\circ$,若 β 与 α 的终边相同,且 $\beta\in(-360^\circ,0^\circ)$,则 $\beta=$________.

-138°　**解析**:因为 $\alpha=2\ 022^\circ=360^\circ\times6-138^\circ$,$\beta$ 与 α 的终边相同,又因为 $\beta\in(-360^\circ,0^\circ)$,所以 $\beta=-138^\circ$.

5.角 α 为 30°,其终边按逆时针方向旋转 3 周后得到的角的度数为________.

$1\ 110^\circ$　**解析**:按逆时针方向旋转得到的角是正角,旋转 3 周得 $30^\circ+3\times360^\circ=1\ 110^\circ$.

6.(1)写出与 $-1\ 840^\circ$角终边相同的角 β 的集合 M;

(2)把 $-1\ 840^\circ$角写成 $k\cdot360^\circ+\alpha(k\in\mathbf{Z},0^\circ\leqslant\alpha<360^\circ)$的形式,并指出其是第几象限角;

(3)若角 α 与 -1840°角终边相同,且 $-360^\circ<\alpha<0^\circ$,求角 α.

解:(1)由终边相同的角的概念得 $M=\{\beta|\beta=k\cdot360^\circ+(-1\ 840^\circ),k\in\mathbf{Z}\}=\{\beta|\beta=k\cdot360^\circ-40^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

(2)因为 $-1\ 840^\circ=-6\times360^\circ+320^\circ$,而 320° 是第四象限角,

所以 $-1\ 840^\circ$ 是第四象限角.

(3)$M=\{\beta|\beta=k\cdot360^\circ-40^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$,又 $\alpha\in M$ 且 $-360^\circ<\alpha<0^\circ$,所以取 $k=0$ 得,$\alpha=-40^\circ$.

综合性·创新提升

1.在 $360^\circ\sim1\ 440^\circ$范围内与 $-21^\circ16'$角终边相同的角有　(　　)

A.1 个　B.2 个　C.3 个　D.4 个

C　**解析**:与 $-21^\circ16'$角终边相同的角可表示为 $\alpha=-21^\circ16'+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$.由 $360^\circ\leqslant-21^\circ16'+k\cdot360^\circ\leqslant1\ 440^\circ,k\in\mathbf{Z}$,得 $k=2,3,4$.故选 C.

2.(多选)已知角 α 的终边在第一象限,那么角 $\frac{\alpha}{2}$ 可能是　(AC)

A.第一象限角　　B.第二象限角

C.第三象限角　　D.第四象限角

3.已知角 α,β 的终边关于 y 轴对称,若 $\alpha=30^\circ$,则 $\beta=$____________.

$150^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}$　**解析**:因为 30°角与 150°角的终边关于 y 轴对称,所以角 β 的终边与 150°角的终边相同.

所以 $\beta=150^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}$.

4.已知角 α 与 $180^\circ-\alpha$ 的顶点与原点重合,始边与 x 轴的非负半轴重合,终边相同,且 $450^\circ<\alpha<720^\circ$,则 $\alpha=$________.

630°　**解析**:因为角 α 与 $180^\circ-\alpha$ 的顶点与原点重合,始边与 x 轴的非负半轴重合,终边相同,所以 $k\times360^\circ+\alpha=n\times360^\circ+180^\circ-\alpha,k,n\in\mathbf{Z}$,即 $(2k-2n)\times180^\circ+2\alpha=180^\circ,k,n\in\mathbf{Z}$,

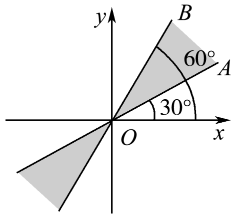
即 $\alpha=90^\circ+(n-k)\times180^\circ,k,n\in\mathbf{Z}$.再结合 $450^\circ<\alpha<720^\circ$,则 $\alpha=3\times180^\circ+90^\circ=630^\circ$.

5.若角 α 的终边在第一、三象限的角平分线上,则角 $2\alpha=$____________________.

$90^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}$　**解析**:因为 $\alpha=45^\circ+k\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}$,所以 $2\alpha=2\times45^\circ+2k\cdot180^\circ=90^\circ+k\times360^\circ,k\in\mathbf{Z}$.

6.如图,分别写出符合下列条件的角的集合.

(1)终边为射线 OB;
(2)终边在直线 OA 上;
(3)终边在阴影区域内(含边界).



解:(1)终边为射线 OB 的角的集合为 $S_1=\{\alpha|\alpha=60°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.
(2)终边在直线 OA 上的角的集合为 $S_2=\{\alpha|\alpha=30°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$.
(3)终边在第一象限中的阴影部分区域的角的集合为 $\{\alpha|30°+k\cdot360°\leqslant\alpha\leqslant60°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$,
终边在第三象限中的阴影部分区域的角的集合为 $\{\alpha|210°+k\cdot360°\leqslant\alpha\leqslant240°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|30°+180°+k\cdot360°\leqslant\alpha\leqslant60°+180°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|30°+(2k+1)\cdot180°\leqslant\alpha\leqslant60°+(2k+1)\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$.
因此,终边在阴影区域内的角的集合为 $S_3=\{\alpha|30°+k\cdot360°\leqslant\alpha\leqslant60°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|30°+(2k+1)\cdot180°\leqslant\alpha\leqslant60°+(2k+1)\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|30°+k\cdot180°\leqslant\alpha\leqslant60°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$.

5.1.2 弧度制

学习任务目标

1.了解弧度制的概念.
2.能进行弧度和角度的互化.
3.会计算弧长和扇形的面积.

问题式预习

知识点一 弧度制的定义

角度制	定义:用度作为单位来度量角的单位制. 1度的角:周角的 $\frac{1}{360}$
弧度制	定义:以弧度作为单位来度量角的单位制. 1弧度的角:长度等于半径长的圆弧所对的圆心角
任意角的弧度数与实数的对应关系	正角的弧度数是一个正数,负角的弧度数是一个负数,零角的弧度数是0
计算公式	在半径为 r 的圆中,弧长为 l 的弧所对的圆心角为 α rad,那么 $|\alpha|=\frac{l}{r}$

[**微训练**]

判断正误(正确的打"√",错误的打"×").
(1)1弧度=1°. (×)
(2)每个弧度制的角,都有唯一的角度制的角与之对应. (√)
(3)1弧度是长度等于半径的弧. (×)
(4)1°的角是周角的 $\frac{1}{360}$,1 rad的角是周角的 $\frac{1}{2\pi}$. (√)

知识点二 角度制与弧度制的换算

(1)角度制与弧度制的换算
$180°=\pi$ rad;
$1°=\frac{\pi}{180}$ rad$\approx0.017\ 45$ rad;
1 rad$=\left(\frac{180}{\pi}\right)°\approx57.30°$.
(2)一些特殊角的度数与弧度数的对应表

度	0°	1°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

(3)角的集合与实数集 $\mathbf{R}$ 之间的关系

正角 $\rightleftarrows$	正实数
零角 $\rightleftarrows$	0
负角 $\rightleftarrows$	负实数

[**微训练**]

1. $\frac{3\pi}{4}$ 对应的角度为 ( )
A.75° B.125° C.135° D.155°

C **解析**:因为 1 rad$=\left(\frac{180}{\pi}\right)°$,所以 $\frac{3\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi\times\left(\frac{180}{\pi}\right)°=135°$.故选C.

2. $-105°$化为弧度为________，$\frac{11\pi}{3}$化为角度为________.

$-\frac{7}{12}\pi$　$660°$　**解析**：$-105°=-105\times\frac{\pi}{180}=-\frac{7}{12}\pi$，$\frac{11}{3}\pi=\frac{11}{3}\times180°=660°$.

知识点三　弧度制下的弧长公式和扇形面积公式

设扇形的半径为 R，弧长为 l，面积为 S，α 为其圆心角，则

类别	角度制($\alpha=n°$)	弧度制
弧长	$l=\frac{n\pi R}{180}$	$l=\underline{\alpha R}$
扇形面积	$S=\frac{n\pi R^2}{360}$	$S=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}\alpha R^2$

[微训练]

1. 已知扇形面积为$\frac{3\pi}{8}$，半径是1，则扇形的圆心角是　　(　　)

A. $\frac{3\pi}{16}$　　B. $\frac{3\pi}{8}$　　C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{3\pi}{2}$

C　**解析**：因为扇形面积为$\frac{3\pi}{8}$，半径是1，所以$S=\frac{1}{2}\alpha R^2=\frac{3\pi}{8}$，即$\alpha=\frac{3}{4}\pi$.

2. 已知一个扇形的圆心角为$54°$，半径$r=20$ cm，则该扇形的周长为________cm.

$(40+6\pi)$　**解析**：因为$1°=\frac{\pi}{180}$ rad，所以$54°=\frac{\pi}{180}\times54=\frac{3\pi}{10}$，则扇形的弧长$l=\alpha r=\frac{3\pi}{10}\times20=6\pi$(cm).故扇形的周长为$(40+6\pi)$cm.

任务型课堂

任务一　弧度与角度的互化

1. $-300°$化为弧度是　　(　　)

A. $-\frac{4\pi}{3}$　　B. $-\frac{5\pi}{3}$　　C. $-\frac{7\pi}{4}$　　D. $-\frac{7\pi}{6}$

B　**解析**：$-300°=-300\times\frac{\pi}{180}=-\frac{5\pi}{3}$.

2. $\frac{8\pi}{5}$化为角度是　　(　　)

A. $270°$　　B. $280°$　　C. $288°$　　D. $318°$

C　**解析**：$\frac{8\pi}{5}=\frac{8\pi}{5}\times\left(\frac{180}{\pi}\right)°=288°$.

3. (1)把$112°30'$化成弧度；

(2)把$-\frac{5\pi}{12}$化成角度.

解：(1)$112°30'=\left(\frac{225}{2}\right)°=\frac{225}{2}\times\frac{\pi}{180}=\frac{5\pi}{8}$.

(2)$-\frac{5\pi}{12}=-\frac{5\pi}{12}\times\left(\frac{180}{\pi}\right)°=-75°$.

【类题通法】

角度制与弧度制互化的关键与方法

(1)关键：抓住互化公式 π rad$=180°$是关键.

(2)方法：角度数$\times\frac{\pi}{180}=$弧度数；弧度数$\times\left(\frac{180}{\pi}\right)°=$角度数.

注意：角度化弧度时，应先将分、秒化成度，再化成弧度.

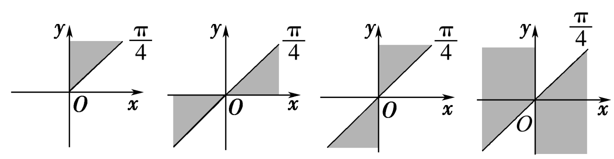
任务二　用弧度表示角或范围

1. 3弧度的角终边在　　(　　)

A.第一象限　　B.第二象限
C.第三象限　　D.第四象限

B　**解析**：因为$\frac{\pi}{2}<3<\pi$，所以3弧度的角终边在第二象限.

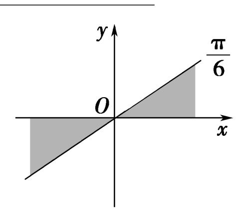
2. 集合$\left\{\alpha\left|k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$中的角的终边所在的区域(阴影部分，包括边界)是　　(　　)



A　　B　　C　　D

C　**解析**：当$k=2m$时，$2m\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant2m\pi+\frac{\pi}{2}$，$m\in\mathbf{Z}$；当$k=2m+1$时，$2m\pi+\frac{5\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant2m\pi+\frac{3\pi}{2}$，$m\in\mathbf{Z}$.故选C.

3. 如图，终边在阴影部分(包括边界)的角的集合为________.



$\left\{\alpha\left|n\pi\leqslant\alpha\leqslant n\pi+\frac{\pi}{6},n\in\mathbf{Z}\right.\right\}$　**解析**：终边在第一象限阴影部分的角的集合可表示为$\left\{\alpha\left|2k\pi\leqslant\alpha\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，终边在第三象限阴影部

分的角的集合可表示为$\left\{\alpha \middle| (2k+1)\pi\leqslant\alpha\leqslant(2k+1)\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$,

所以终边在阴影部分的角的集合表示为

$\left\{\alpha \middle| 2k\pi\leqslant\alpha\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{\alpha \middle| (2k+1)\pi\leqslant\alpha\leqslant(2k+1)\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$

$=\left\{\alpha \middle| n\pi\leqslant\alpha\leqslant n\pi+\frac{\pi}{6},n\in\mathbf{Z}\right\}$.

4. 已知$\alpha=-800°$.

(1)把α改写成$\beta+2k\pi(k\in\mathbf{Z},0\leqslant\beta<2\pi)$的形式,并指出$\alpha$是第几象限角;

(2)求角γ,使γ与α的终边相同,且$\gamma\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

解:(1)因为$-800°=-3\times360°+280°$,$280°=\frac{14\pi}{9}$,

所以$\alpha=\frac{14\pi}{9}+(-3)\times2\pi$.

所以α与$\frac{14\pi}{9}$角终边相同,是第四象限角.

(2)因为与α终边相同的角可写为$2k\pi+\frac{14\pi}{9}$,$k\in\mathbf{Z}$的形式,而γ与α的终边相同,

所以$\gamma=2k\pi+\frac{14\pi}{9}$,$k\in\mathbf{Z}$.

又$\gamma\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

所以$-\frac{\pi}{2}<2k\pi+\frac{14\pi}{9}<\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,

解得$k=-1$,所以$\gamma=-2\pi+\frac{14\pi}{9}=-\frac{4\pi}{9}$.

【类题通法】

用弧度制表示终边相同的角的注意点

(1)用弧度制表示终边相同的角$2k\pi+\alpha(k\in\mathbf{Z})$时,其中$2k\pi$是$\pi$的偶数倍,而不是整数倍.

(2)角度制与弧度制不能混用.

任务三　弧长公式与扇形面积公式的应用

[探究活动]

探究1:半径为r的圆中,1°的圆心角所对的弧长是多少?圆心角为1°的扇形面积是多少?

提示:因为半径为r的圆的周长为$2\pi r$,面积是πr^2,故1°的圆心角所对的弧长是$l=\frac{2\pi r}{360}=\frac{\pi r}{180}$,

扇形的面积是$S=\frac{\pi r^2}{360}$.

探究2:若扇形的圆心角为$\alpha(0<\alpha<2\pi)$,如何由角度制下的弧长公式和扇形的面积公式得出弧度制下的公式?

提示:设圆心角的度数为$n°$,

因为$\alpha=\frac{n\pi}{180}$,所以$n=\frac{180\alpha}{\pi}$,

所以$l=\frac{\pi r}{180}\times\frac{180\alpha}{\pi}=\alpha r$,

$S=\frac{\pi r^2}{360}\times\frac{180\alpha}{\pi}=\frac{1}{2}\alpha\cdot r^2=\frac{1}{2}lr$.

[评价活动]

1. 半径为2 cm的圆上的一段弧的长为6 cm,则此弧所对圆心角的弧度数是　(　　)

A.1.5　　B.2　　C.3　　D.12

C　**解析**:由弧长公式$l=\alpha r$,可得$\alpha=\frac{l}{r}=\frac{6}{2}=3$.

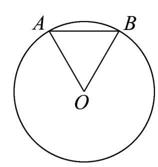
2. 已知圆中一条弦的长度等于半径r,求:

(1)这条弦所对的劣弧长;

(2)这条弦和劣弧所组成的弓形的面积.

解:(1)设半径为r的$\odot O$中弦$AB=r$,则$\triangle OAB$为等边三角形,所以$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$.

所以弦AB所对的劣弧长为$\frac{\pi}{3}r$.



(2)因为$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}OA^2=\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$,

$S_{扇形OAB}=\frac{1}{2}\alpha r^2=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times r^2=\frac{\pi}{6}r^2$,

所以$S_{弓形}=S_{扇形OAB}-S_{\triangle AOB}=\frac{\pi}{6}r^2-\frac{\sqrt{3}}{4}r^2=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2$.

3. 已知扇形的圆心角是α,半径为R,弧长为l.

(1)若$\alpha=60°$,$R=10$,求扇形的弧长l;

(2)若扇形的周长为20,当扇形的圆心角α为多少弧度时,这个扇形的面积最大?

解:(1)$\alpha=60°=\frac{\pi}{3}$,$l=10\times\frac{\pi}{3}=\frac{10\pi}{3}$.

(2)由已知得$l+2R=20$,所以$S=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}(20-2R)R=10R-R^2=-(R-5)^2+25$,

所以当$R=5$时,S取得最大值25,此时$l=10$,$\alpha=2$.

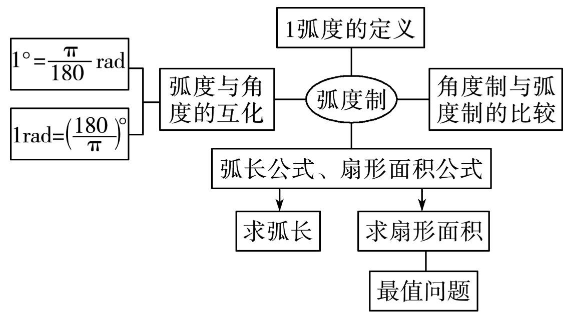
【类题通法】

扇形的弧长和面积的求解策略

(1)记公式:弧度制下扇形的面积公式是 $S=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}\alpha R^2$(其中 l 是扇形的弧长,R 是扇形的半径,α 是扇形圆心角,$0<\alpha<2\pi$).

(2)找关键:涉及扇形的半径、周长、弧长、圆心角、面积等的计算问题,关键是分清题目中已知哪些量、求哪些量,然后灵活运用弧长公式、扇形面积公式直接求解或列方程(组)求解.

提质归纳



课后素养评价(四十一)

基础性·能力运用

1.下列结论不正确的是　　　　(D)

A.$\frac{\pi}{3}$ rad$=60°$　　　B.$10°=\frac{\pi}{18}$ rad

C.$36°=\frac{\pi}{5}$ rad　　　D.$\frac{5\pi}{8}$ rad$=115°$

2.在半径为 10 的圆中,$240°$的圆心角所对弧长为　　(　　)

A.$\frac{40}{3}\pi$　　　B.$\frac{20}{3}\pi$

C.$\frac{200}{3}\pi$　　　D.$\frac{400}{3}\pi$

A　**解析**:由 $240°=\frac{240}{180}\pi=\frac{4}{3}\pi$,得弧长 $l=|\alpha|\cdot r=\frac{4}{3}\pi\times10=\frac{40}{3}\pi$.

3.(多选)已知扇形的周长是 6 cm,面积是2 cm^2,下列选项可能正确的有　　(　　)

A.半径为 2 cm

B.半径为 1 cm

C.圆心角的弧度数是 1

D.圆心角的弧度数是 2

ABC　**解析**:设扇形半径为 r cm,圆心角的弧度数为 α.

由题意得 $\begin{cases}2r+\alpha r=6,\\ \frac{1}{2}\alpha r^2=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}r=1,\\ \alpha=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}r=2,\\ \alpha=1.\end{cases}$

可得圆的半径为 1 cm 或 2 cm,圆心角的弧度数是 4 或 1.

4.将$-\frac{23}{12}\pi$ rad 化成角度应为________.

$-345°$　**解析**:$-\frac{23}{12}\pi=-\frac{23}{12}\times\left(\frac{180}{\pi}\right)°=-345°$.

5.在$(-2\pi,2\pi)$内与$-\frac{58\pi}{7}$终边相同的角是________.

$-\frac{2\pi}{7}$或$\frac{12\pi}{7}$　**解析**:$-\frac{58\pi}{7}=-8\pi-\frac{2\pi}{7}=-10\pi+\frac{12\pi}{7}$,故在$(-2\pi,2\pi)$内与$\frac{58\pi}{7}$终边相同的角是$-\frac{2\pi}{7}$或$\frac{12\pi}{7}$.

综合性·创新提升

1.(多选)下列转化结果正确的是　　(　　)

A.$67°30'$化成弧度是$\frac{3\pi}{8}$

B.$-\frac{10\pi}{3}$化成角度是$-600°$

C.$-150°$化成弧度是$-\frac{7\pi}{6}$

D.$\frac{\pi}{12}$化成角度是$15°$

ABD　**解析**:对于 A,$67°30'=67.5\times\frac{\pi}{180}=\frac{3\pi}{8}$,正确;

对于 B,$-\frac{10\pi}{3}=-\frac{10\pi}{3}\times\left(\frac{180}{\pi}\right)°=-600°$,正确;

对于C，$-150°=-150\times\frac{\pi}{180}=-\frac{5\pi}{6}$，错误；

对于D，$\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{12}\times\left(\frac{180}{\pi}\right)°=15°$，正确.

2.现有两个相互啮合的齿轮，大轮有64齿，小轮有24齿，当小轮转动一周时，大轮转动的弧度是（　　）

A.$\frac{\pi}{2}$　B.$\frac{7\pi}{8}$　C.$\frac{3\pi}{4}$　D.$\frac{16\pi}{3}$

C　**解析**：当小轮转动一周时，大轮转动$\frac{24}{64}$周，则大轮转动的弧度是$\frac{24}{64}\times 2\pi=\frac{3\pi}{4}$.

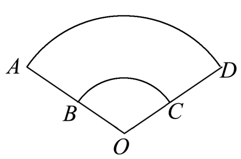
3.一条弧所对的圆心角是2 rad，它所对的弦长为2，则这条弧的长是（　　）

A.$\frac{1}{\sin 1}$　B.$\frac{1}{\sin 2}$　C.$\frac{2}{\sin 2}$　D.$\frac{2}{\sin 1}$

D　**解析**：因为一条弧所对的圆心角是2 rad，它所对的弦长为2，

所以所在圆的半径为$r=\frac{1}{\sin 1}$，则这条弧的长$l=2\times\frac{1}{\sin 1}=\frac{2}{\sin 1}$.

4.如图，在扇形AOD中，弧$\overset{\frown}{AD}$的长度是l_1，弧$\overset{\frown}{BC}$的长度是l_2，扇环$ABCD$的面积为S_1，扇形BOC的面积为S_2，若$\frac{l_1}{l_2}=2$，则$\frac{S_1}{S_2}=$（　　）



A.1　B.2　C.3　D.4

C　**解析**：设$\angle BOC=\alpha$，由$\frac{l_1}{l_2}=2$，得$\frac{OA\cdot\alpha}{OB\cdot\alpha}=\frac{OA}{OB}=2$，即$OA=2OB$，

所以$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}\alpha\cdot OA^2-\frac{1}{2}\alpha\cdot OB^2}{\frac{1}{2}\alpha\cdot OB^2}=\frac{OA^2-OB^2}{OB^2}=\frac{4OB^2-OB^2}{OB^2}=3$.

5.(1)已知扇形的面积为25，当扇形的圆心角为多大时，扇形的周长取最小值？

(2)已知扇形的周长为40，当它的半径和圆心角取什么值时，才能使扇形的面积最大？最大面积是多少？

解：(1)设扇形的半径为R，弧长为l，扇形的周长为y，则$y=l+2R$.

由题意，得$\frac{1}{2}lR=25$，则$l=\frac{50}{R}$，故$y=\frac{50}{R}+2R(R>0)$.

当$0<R\leqslant 5$时，函数$y=\frac{50}{R}+2R$单调递减；当$R>5$时，函数$y=\frac{50}{R}+2R$单调递增.所以当$R=5$时，y取最小值20，此时$l=10$，$\alpha=\frac{l}{R}=2$，即当扇形的圆心角为2时，扇形的周长取最小值.

(2)设扇形的圆心角为θ，半径为r，弧长为l，面积为S，

则$l+2r=40$，所以$l=40-2r$，所以$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times(40-2r)r=-(r-10)^2+100$.

所以，当半径$r=10$时，扇形的面积最大，最大值为100，这时$\theta=\frac{l}{r}=\frac{40-2\times 10}{10}=2$.

5.2　三角函数的概念

5.2.1　三角函数的概念

第1课时　三角函数的概念

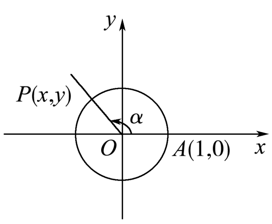
学习任务目标

1.理解任意角的三角函数的定义.
2.会求给定角的三角函数值.
3.掌握任意角的正弦、余弦、正切的定义及应用.

问题式预习

知识点一　任意角的三角函数的定义

如图，设 α 是一个任意角，$\alpha\in\mathbf{R}$，它的终边 OP 与单位圆相交于点 $P(x,y)$.



(1)把点 P 的纵坐标 y 叫做 α 的正弦函数，记作 $\sin\alpha$，即 $y=\sin\alpha$；

(2)把点 P 的横坐标 x 叫做 α 的余弦函数，记作 $\underline{\cos\alpha}$，即 $x=\cos\alpha$；

(3)把点 P 的纵坐标与横坐标的比值 $\frac{y}{x}$ 叫做 α 的正切，记作 $\underline{\tan\alpha}$，即 $\frac{y}{x}=\tan\alpha(x\neq0)$.

$\frac{y}{x}=\tan\alpha(x\neq0)$ 也是以角为自变量，以单位圆上点的纵坐标与横坐标的比值为函数值的函数，称为正切函数.

我们将正弦函数、余弦函数和正切函数统称为三角函数.

知识点二　三角函数的定义域

函数名	定义域
正弦函数	$\mathbf{R}$
余弦函数	$\mathbf{R}$
正切函数	$\underline{\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R},且\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}}$

[微训练]

1.判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").

(1) $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值与点 $P(x,y)$ 在角 α 终边上的位置无关.　　(√)

(2)同一个三角函数值只能有唯一的一个角与之对应.　　(×)

(3)若角 α 终边上一点为 $P(2,3)$，则 $\sin\alpha=3$.　　(×)

(4)若角 α 的终边为第一象限的角平分线，则 $\sin\alpha=\cos\alpha$.　　(√)

(5)对于任意一个角 α，都可以求出它的三个三角函数值.　　(×)

2.已知角 α 的终边与单位圆交于点 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$，则 $\sin\alpha$ 的值为　　(　　)

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

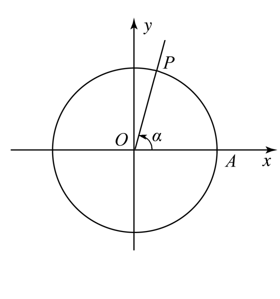
B　**解析**：由正弦函数的定义得 $\sin\alpha=y=-\frac{1}{2}$.故选B.

任务型课堂

任务一　利用单位圆法求三角函数值

[探究活动]

探究1：如图，以单位圆的圆心 O 为原点，以射线 OA 为 x 轴的非负半轴，建立直角坐标系，点 A 的坐标为(1,0).射线 OA 从 x 轴非负半轴开始，绕点 O 按逆时针方向旋转角 α，终止位置为 OP，点 P 在单位圆上，坐标为 (x,y).



(1)当 $\alpha=\frac{\pi}{6}$时，点 P 的坐标是什么？

(2)当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$或 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$时，点 P 的坐标是什么？

提示：(1)当 $\alpha=\frac{\pi}{6}$时，点 P 的坐标为$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

(2)当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$或 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$时，点 P 的坐标分别为$(0,1)$和$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

探究 2：$\sin\frac{\pi}{6}$，$\cos\frac{\pi}{6}$，$\tan\frac{\pi}{6}$的值分别是多少？

提示：根据$\frac{\pi}{6}$与单位圆交点 P 的坐标可知 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

［评价活动］

1.在直角坐标系中，以原点为角的顶点，以 x 轴的非负半轴为角的始边，如果角 α,β 的终边分别与单位圆交于点$\left(\frac{12}{13},\frac{5}{13}\right)$，$\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，那么 $\sin\alpha\cos\beta=$　（　　）

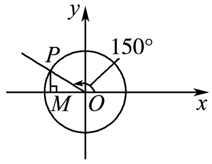
A.$-\frac{36}{65}$　　B.$-\frac{3}{13}$

C.$\frac{4}{13}$　　D.$\frac{48}{65}$

B　**解析：**由三角函数的定义可知，$\sin\alpha=\frac{5}{13}$，$\cos\beta=-\frac{3}{5}$，所以 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{5}{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{3}{13}$.

2.已知 $\alpha=150°$，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

解：如图，设点 P 是 $150°$角的终边与单位圆的交点，故$\angle POM=30°$.



所以 $PM=\frac{1}{2}$，$OM=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以点 P 的坐标为$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，

所以 $\sin 150°=\frac{1}{2}$，$\cos 150°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $\tan 150°=\dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【类题通法】

利用单位圆法求三角函数值的方法

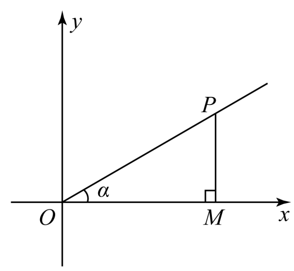
(1)确定角的终边与单位圆的交点的坐标(x,y).

(2)根据三角函数的定义可知 $\sin\alpha=y$，$\cos\alpha=x$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}(x\neq0)$.

任务二　利用坐标法求三角函数值

［探究活动］

如图，在直角坐标系中，锐角 α 的顶点与原点 O 重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，在终边上任取一点 P，作 $PM\perp x$ 轴于点M，设点 P 的坐标为(x,y)，$|OP|=r$，据此回答下列问题：



探究 1：角 α 的正弦、余弦、正切分别等于什么？

提示：$\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

探究 2：将角 α 推广到任意角，探究 1 中的结论是否成立？

提示：对任意角 α 上述结论都成立.

［评价活动］

1.已知角 θ 的终边经过点$(-4,3)$，则 $\cos\theta$ 等于　(D)

A.$\frac{4}{5}$　B.$\frac{3}{5}$　C.$-\frac{3}{5}$　D.$-\frac{4}{5}$

2.若 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，且角 α 的终边经过点 $P(x,2)$，则点 P 的横坐标 x 是　（　　）

A.$2\sqrt{3}$　B.$\pm2\sqrt{3}$　C.$-2\sqrt{2}$　D.$-2\sqrt{3}$

D　**解析：**由题意得 $r=\sqrt{x^2+2^2}$，

所以$\frac{x}{\sqrt{x^2+2^2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $x=-2\sqrt{3}$.故选 D.

3.已知角 α 的终边过点 $P(-3a,4a)(a\neq0)$，则 $2\sin\alpha+\cos\alpha=$________.

1 或-1　**解析：**$r=\sqrt{(-3a)^2+(4a)^2}=5|a|$，

①若 $a>0$，则 $r=5a$，点 P 在第二象限，

所以 $\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{4a}{5a}=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-3a}{5a}=\frac{-3}{5}$.

所以 $2\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}=1$.

②若 $a<0$，则 $r=-5a$，点 P 在第四象限，

所以 $\sin\alpha=\frac{4a}{-5a}=-\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{-3a}{-5a}=\frac{3}{5}$，

所以 $2\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{8}{5}+\frac{3}{5}=-1$.

4.已知角 α 的终边过点 $P(m,\sqrt{3})$，且 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{4}$，求 $\sin\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

解：由题意得 $x=m$，$y=\sqrt{3}$，

所以 $r=|OP|=\sqrt{m^2+3}$.

所以 $\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{m}{\sqrt{m^2+3}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$，

解得 $m=\sqrt{5}$（负值舍去）.所以 $r=2\sqrt{2}$.

所以 $\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

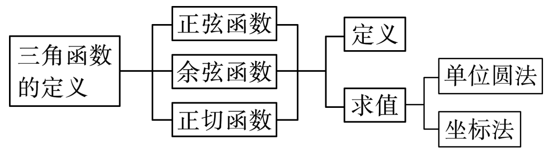
【类题通法】

利用坐标法求三角函数值的方法

(1)已知角 α 的终边上一点 $P(x,y)$，求三角函数值时，先求 $r=|OP|$（O 为原点），再根据 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}(x\neq0)$ 确定三角函数值.

(2)若条件中含有参数，要注意对参数进行讨论.

提质归纳



课后素养评价（四十二）

基础性·能力运用

1.已知角 α 的终边经过点 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，则 $\cos\alpha$ 等于　　（　　）

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D.$\pm\frac{1}{2}$

B　**解析**：由三角函数定义可知，角 α 的终边与单位圆交点的横坐标为角 α 的余弦值，故 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.已知角 θ 的终边经过点 $M(m,3-m)$，且 $\tan\theta=\frac{1}{2}$，则 $m=$　　（　　）

A.$\frac{1}{2}$　　B.1　　C.2　　D.$\frac{5}{2}$

C　**解析**：因为角 θ 的终边经过点 $M(m,3-m)$，且 $\tan\theta=\frac{1}{2}=\frac{3-m}{m}$，所以 $m=2$.

3.(多选)已知角 α 的终边与单位圆交于点 $\left(-\frac{1}{2},n\right)$，则符合条件的角 α 可以是　　（　　）

A.$-\frac{\pi}{3}$　　B.$\frac{2\pi}{3}$　　C.$\frac{4\pi}{3}$　　D.$\frac{7\pi}{3}$

BC　**解析**：角 α 的终边与单位圆交于点 $\left(-\frac{1}{2},n\right)$，可得 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$.

对于A，当 $\alpha=-\frac{\pi}{3}$ 时，$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\neq-\frac{1}{2}$，故错误；

对于B，当 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$ 时，$\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$，故正确；

对于C，当 $\alpha=\frac{4\pi}{3}$ 时，$\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}$，故正确；

对于D，当 $\alpha=\frac{7\pi}{3}$ 时，$\cos\frac{7\pi}{3}=\frac{1}{2}\neq-\frac{1}{2}$，故错误.

4.已知角 α 的终边与单位圆的交点为 $P\left(\frac{3}{5},y\right)(y<0)$，则 $\tan\alpha$ 的值为________.

$-\frac{4}{3}$　**解析**：因为点 $P\left(\frac{3}{5},y\right)(y<0)$ 在单位圆上，由勾股定理得 $\frac{9}{25}+y^2=1$，所以 $y=-\frac{4}{5}$.

所以 $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$.

5.已知角 α 的终边过点 $P(5,a)$，且 $\tan\alpha=-\frac{12}{5}$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值为________.

$-\frac{7}{13}$　**解析**：根据三角函数的定义，$\tan\alpha=\frac{a}{5}=$

$-\frac{12}{5}$，所以 $a=-12$．所以 $P(5,-12)$，$r=13$．所以 $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$，$\cos\alpha=\frac{5}{13}$．从而 $\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{7}{13}$．

6. 已知角 α 的终边在直线 $\sqrt{3}x+y=0$ 上，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值．

解：直线 $\sqrt{3}x+y=0$，即 $y=-\sqrt{3}x$，经过第二、四象限．在第二象限取直线上的点 $(-1,\sqrt{3})$，则 $r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$．

所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，$\tan\alpha=-\sqrt{3}$．

在第四象限取直线上的点 $(1,-\sqrt{3})$，则 $r=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$．

所以 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha=\frac{1}{2}$，$\tan\alpha=-\sqrt{3}$．

综合性·创新提升

1. 已知角 α 的终边过点 $M(x,-1)(x<0)$，且 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，则 $x=$ （ ）

A. $-\sqrt{3}$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $-\sqrt{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

C **解析**：由于角 α 的终边过点 $M(x,-1)(x<0)$，所以 $\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{3}x}{3}$，解得 $x=-\sqrt{2}$．

2.（多选）已知角 θ 的终边经过点 $(-2,-\sqrt{3})$，且 θ 与 α 的终边关于 x 轴对称，则 （ ）

A. $\sin\theta=-\frac{\sqrt{21}}{7}$

B. α 为钝角

C. $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{7}}{7}$

D. 点 $(\tan\theta,\tan\alpha)$ 在第四象限

ACD **解析**：角 θ 的终边经过点 $(-2,-\sqrt{3})$，则 $\sin\theta=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{(-2)^2+(-\sqrt{3})^2}}=-\frac{\sqrt{21}}{7}$，故 A 正确；因为 θ 与 α 的终边关于 x 轴对称，所以 α 的终边经过点 $(-2,\sqrt{3})$，α 为第二象限角，不一定为钝角，故 B 错误；$\cos\alpha=\frac{-2}{\sqrt{(-\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2}}=-\frac{2\sqrt{7}}{7}$，故 C 正确；

因为 $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}>0$，$\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$，所以点 $(\tan\theta,\tan\alpha)$ 在第四象限，故 D 正确．

3. 已知 $\sin\alpha=\frac{1}{5}$，若角 α 与角 β 的终边关于 x 轴对称，则 $\sin\beta=$________；若它们的终边关于 y 轴对称，则 $\sin\beta=$________．

$-\frac{1}{5}$　$\frac{1}{5}$　**解析**：设角 α 的终边与单位圆相交于点 $P(x,y)$，若角 α 与角 β 的终边关于 x 轴对称，则角 β 的终边与单位圆相交于点 $Q(x,-y)$．由题意知 $\sin\alpha=y=\frac{1}{5}$，所以 $\sin\beta=-y=-\frac{1}{5}$．

若它们的终边关于 y 轴对称，则角 β 的终边与单位圆交于点 $M(-x,y)$，所以 $\sin\beta=y=\frac{1}{5}$．

4. 若 $P(4,y)$ 是角 θ 终边上一点，且 $\sin\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，则 $y=$________．

-8　**解析**：因为 $\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{4^2+y^2}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $y<0$，解得 $y^2=64$．所以 $y=-8$．

5. 已知角 α 的终边上的点 P 与点 $A(a,b)$ 关于 x 轴对称 $(a\neq0,b\neq0)$，角 β 的终边上的点 Q 与点 A 关于直线 $y=x$ 对称，求 $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}+\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}+\frac{1}{\cos\alpha\sin\beta}$ 的值．

解：由题意可知 $P(a,-b)$，则 $\sin\alpha=\frac{-b}{\sqrt{a^2+(-b)^2}}$，$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+(-b)^2}}$，$\tan\alpha=-\frac{b}{a}$．

由题意可知 $Q(b,a)$，则 $\sin\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\tan\beta=\frac{a}{b}$，

所以 $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}+\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}+\frac{1}{\cos\alpha\sin\beta}=-1-\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2+b^2}{a^2}=0$．

第 2 课时　三角函数的一些简单性质

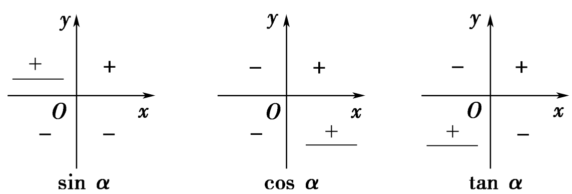
学习任务目标

1.借助任意角的三角函数的定义理解并掌握正弦、余弦、正切函数在各象限内的符号.

2.通过对任意角的三角函数定义的理解,掌握诱导公式一.

问题式预习

知识点一　正弦、余弦、正切函数值在各象限的符号



记忆口诀:一全正,二正弦,三正切,四余弦.

[微训练]

1.下列各角的正弦值为负数的是　　(D)

A.$\frac{\pi}{4}$　　B.$\frac{\pi}{3}$　　C.$\frac{2\pi}{3}$　　D.$\frac{4\pi}{3}$

2.若 $\sin\theta>0$,则角 θ 的终边在　　(B)

A.第一象限

B.第一象限或第二象限或 y 轴的正半轴上

C.第三象限

D.第三象限或第四象限

知识点二　诱导公式一

终边相同的角的同一三角函数的值相等.由此得到一组公式(公式一):

$\sin(\alpha+k\cdot2\pi)=\sin\alpha$,

$\cos(\alpha+k\cdot2\pi)=\cos\alpha$,

$\tan(\alpha+k\cdot2\pi)=\tan\alpha$,其中 $k\in\mathbf{Z}$.

[微训练]

1.下列三角函数值与 $\sin30°$ 相等的是　　(D)

A.$\sin60°$　　B.$\sin(-30°)$

C.$\sin330°$　　D.$\sin390°$

2.计算:$\sin405°=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

任务型课堂

任务一　三角函数值符号的判断

[探究活动]

探究 1:设 $P(x,y)$ 为角 α 终边上任意一点(异于原点 O),记 $r=|OP|$,则 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$,$\cos\alpha=\frac{x}{r}$,$\tan\alpha=\frac{y}{x}(x\neq0)$,由此可知角 α 的三角函数值的符号与什么有关?

提示:角 α 的三角函数值的符号与点 P 的横、纵坐标 x,y 的正负有关.所以只需要知道角 α 的终边所在的象限,就可以判断角 α 的三角函数值的符号.

探究 2:已知角 α,则角 α 的三角函数值符号确定,反之,若角 α 的某个三角函数值符号确定,则角 α 的终边所在的象限确定吗?

提示:不一定,若已知角 α 的一个三角函数值的符号,则角 α 的终边所在的象限可能有两种情况,若已知角 α 的两个三角函数值的符号,则角 α 的终边所在的象限就唯一确定.

[评价活动]

1.(多选)已知 $\cos\theta\cdot\tan\theta<0$,则角 θ 可能是(　　)

A.第一象限角　　B.第二象限角

C.第三象限角　　D.第四象限角

CD　**解析**:因为 $\cos\theta\cdot\tan\theta<0$,

所以 $\begin{cases}\cos\theta<0,\\\tan\theta>0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\cos\theta>0,\\\tan\theta<0.\end{cases}$ 由 $\begin{cases}\cos\theta<0,\\\tan\theta>0\end{cases}$ 得角 θ 为第三象限角;由 $\begin{cases}\cos\theta>0,\\\tan\theta<0\end{cases}$ 得角 θ 为第四象限角.

所以角 θ 为第三或第四象限角.

2.函数 $y=\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\tan x}{|\tan x|}$ 的值域为______.

$\{-2,0,2\}$　**解析**:由题意得 $\cos x\neq0$ 且 $\tan x\neq0$,

所以角 x 的终边不在 x 轴上,也不在 y 轴上.

当 x 是第一象限角时,$|\cos x|=\cos x$,$|\tan x|=\tan x$,所以 $y=\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\tan x}{|\tan x|}=2$;

当 x 是第二象限角时,$|\cos x|=-\cos x$,$|\tan x|=-\tan x$,所以 $y=\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\tan x}{|\tan x|}=-2$;

当 x 是第三象限角时,$|\cos x|=-\cos x$,$|\tan x|=\tan x$,所以 $y=\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\tan x}{|\tan x|}=0$;

当 x 是第四象限角时,$|\cos x|=\cos x$,$|\tan x|=-\tan x$,所以 $y=\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\tan x}{|\tan x|}=0$.

故所求函数的值域为 $\{-2,0,2\}$.

3. 判断下列三角函数值的符号.

(1) $\sin 3$,$\cos 4$,$\tan 5$;

(2) $\sin(\cos\theta)$(θ 为第二象限角).

解:(1)因为 $\frac{\pi}{2}<3<\pi<4<\frac{3\pi}{2}<5<2\pi$,

所以 3,4,5 分别为第二、三、四象限角.

所以 $\sin 3>0$,$\cos 4<0$,$\tan 5<0$.

(2)因为 θ 是第二象限角,

所以 $-\frac{\pi}{2}<-1<\cos\theta<0$,所以 $\sin(\cos\theta)<0$.

【类题通法】

确定三角函数值符号的关键

由三角函数的定义知 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$,$\cos\alpha=\frac{x}{r}$,$\tan\alpha=\frac{y}{x}$($x\neq 0$,$r>0$),因此三角函数值的符号是由角的终边上任一点 $P(x,y)$ 的坐标确定的,则准确确定角的终边位置是判断三角函数值符号的关键.

任务二 诱导公式一的应用

1. $\cos(-690°)$ 的值为 ( )

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

A **解析**:$\cos(-690°)=\cos(-690°+720°)=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.故选 A.

2. 计算下列各式的值.

(1) $\sin(-1\ 395°)\cos 1\ 110°+\cos(-1\ 020°)\cdot\sin 750°$;

(2) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)+\cos\frac{12\pi}{5}\tan 4\pi$;

(3) $\sin\frac{7\pi}{3}\cos\left(-\frac{23\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{-15\pi}{4}\right)\cos\frac{13\pi}{3}$.

解:(1)原式 $=\sin(-4\times 360°+45°)\cos(3\times 360°+30°)+\cos(-3\times 360°+60°)\sin(2\times 360°+30°)=\sin 45°\cdot\cos 30°+\cos 60°\sin 30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1+\sqrt{6}}{4}$.

(2)原式 $=\sin\left(-2\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(2\pi+\frac{2\pi}{5}\right)\tan(4\pi+0)=\sin\frac{\pi}{6}+0\times\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$.

(3)原式 $=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-4\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(-4\pi+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1\times\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$.

【类题通法】

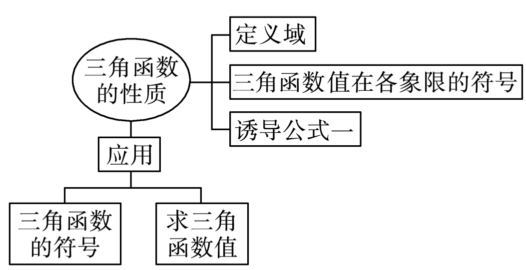
利用诱导公式一进行化简、求值的步骤

(1)定形:将已知角写成 $2k\pi+\alpha$ 的形式,其中 $\alpha\in[0,2\pi)$,$k\in\mathbf{Z}$.

(2)转化:根据诱导公式,转化为求角 α 的某个三角函数值.

(3)求值:若角 α 为特殊角,可直接求出该角的三角函数值.

提质归纳



课后素养评价(四十三)

基础性·能力运用

1. $\sin\frac{13\pi}{6}$的值是　(　　)

A. $-\frac{1}{2}$　B. $\frac{1}{2}$　C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B　**解析**：$\sin\frac{13\pi}{6}=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

2. $\sin 1\cdot\cos 2\cdot\tan 3$ 的值是　(　　)

A.正数　B.负数　C.0　D.不存在

A　**解析**：因为 $0<1<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<2<\pi$，$\frac{\pi}{2}<3<\pi$，所以$\sin 1>0$，$\cos 2<0$，$\tan 3<0$，所以 $\sin 1\cdot\cos 2\cdot\tan 3>0$.

3. 点$\left(\sin\frac{3\pi}{4},\cos\frac{3\pi}{4}\right)$位于　(　　)

A.第一象限　B.第二象限
C.第三象限　D.第四象限

D　**解析**：$\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\left(\sin\frac{3\pi}{4},\cos\frac{3\pi}{4}\right)$位于第四象限.

4. (多选)给出下列三角函数值，其中符号为负的是　(　　)

A. $\sin(-100^\circ)$　B. $\cos(-220^\circ)$
C. $\tan(-10)$　D. $\cos 0$

ABC　**解析**：因为-100°角是第三象限角，所以 $\sin(-100^\circ)<0$；因为-220°角是第二象限角，所以 $\cos(-220^\circ)<0$；因为$-10\in\left(-\frac{7}{2}\pi,-3\pi\right)$，所以$-10$是第二象限角，所以 $\tan(-10)<0$；$\cos 0=1>0$.

5. 设 α 是第一象限角，且$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\cos\frac{\alpha}{2}$，则$\frac{\alpha}{2}$所在的象限是　(　　)

A.第一象限　B.第二象限
C.第三象限　D.第四象限

A　**解析**：因为 α 是第一象限的角，所以$\frac{\alpha}{2}$是第一或第三象限角.

又因为$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\cos\frac{\alpha}{2}$，所以$\frac{\alpha}{2}$所在的象限是第一象限.

6. 求下列各式的值.

(1) $\cos\frac{25\pi}{4}+\tan\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$；

(2) $\sin 810^\circ+\tan 765^\circ-\cos 360^\circ$.

解：(1)原式$=\cos\left(6\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(-2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$.

(2)原式$=\sin(90^\circ+2\times360^\circ)+\tan(45^\circ+2\times360^\circ)-\cos 360^\circ=\sin 90^\circ+\tan 45^\circ-1=1+1-1=1$.

综合性·创新提升

1. (多选)已知 $\cos\theta\cdot\tan\theta>0$，则 θ 可能为　(　　)

A.第一象限角　B.第二象限角
C.第三象限角　D.第四象限角

AB　**解析**：因为 $\cos\theta\cdot\tan\theta=\sin\theta>0$($\theta$ 的终边不在 y 轴上)，所以 θ 可能为第一或第二象限角.

2. 下列各式的符号为正的是　(　　)

A. $\cos 3$　B. $\sin\frac{5\pi}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

C. $\tan\frac{7\pi}{8}$　D. $\sin 2-\cos 2$

D　**解析**：因为$\frac{\pi}{2}<3<\pi$，所以 $\cos 3<0$，A 不符合题意；

$\sin\frac{5\pi}{3}<0$，$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)>0$，故 $\sin\frac{5\pi}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)<0$，B 不符合题意；

因为$\frac{\pi}{2}<\frac{7\pi}{8}<\pi$，所以 $\tan\frac{7\pi}{8}<0$，C 不符合题意；

因为$\frac{\pi}{2}<2<\frac{3\pi}{4}$，所以 $\sin 2>\cos 2$，故 $\sin 2-\cos 2>0$，D 符合题意.

3. 函数 $y=\sqrt{2\sin x-1}$ 的定义域为$\underline{\left[\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right],k\in\mathbf{Z}}$.

4. 已知角 α 的终边经过点 $P(3,4)$.

(1) $\tan(-6\pi+\alpha)$的值为________；

(2)$\dfrac{\sin(\alpha-4\pi)}{\cos(6\pi+\alpha)}\cdot\sin(\alpha-2\pi)\cdot\cos(2\pi+\alpha)$的值为________.

(1)$\dfrac{4}{3}$　(2)$\dfrac{16}{25}$　**解析**：由题意知 $r=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

所以 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{4}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=\dfrac{3}{5}$，$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}=\dfrac{4}{3}$.

(1)$\tan(-6\pi+\alpha)=\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$.

(2)原式$=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin^2\alpha=\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{16}{25}$.

5.判断下列各式的符号.

(1)$\sin 340^\circ\cos 265^\circ$；

(2)$\sin 4\tan\left(-\dfrac{23\pi}{4}\right)$；

(3)$\dfrac{\sin(\cos\theta)}{\cos(\sin\theta)}$($\theta$ 为第二象限角).

解：(1)因为 340° 是第四象限角，265° 是第三象限角，所以 $\sin 340^\circ<0$，$\cos 265^\circ<0$.所以 $\sin 340^\circ\cos 265^\circ>0$.

(2)因为 $\pi<4<\dfrac{3\pi}{2}$，所以 4 是第三象限角.因为 $-\dfrac{23\pi}{4}=-6\pi+\dfrac{\pi}{4}$，所以 $-\dfrac{23\pi}{4}$ 是第一象限角.所以 $\sin 4<0$，$\tan\left(-\dfrac{23\pi}{4}\right)>0$.所以 $\sin 4\tan\left(-\dfrac{23\pi}{4}\right)<0$.

(3)因为 θ 为第二象限角，所以 $0<\sin\theta<1<\dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2}<-1<\cos\theta<0$.所以 $\sin(\cos\theta)<0$，$\cos(\sin\theta)>0$.

所以 $\dfrac{\sin(\cos\theta)}{\cos(\sin\theta)}<0$.

5.2.2　同角三角函数的基本关系

学习任务目标

1.能通过三角函数的定义推导出同角三角函数的基本关系.

2.理解同角三角函数的基本关系式.

3.能运用同角三角函数的基本关系式进行三角函数式的化简、求值和证明.

问题式预习

知识点一　同角三角函数的基本关系式

(1)平方关系：$\underline{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$.

(2)商数关系：$\underline{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha\left(\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right)}$.

知识点二　同角三角函数基本关系式的变形

(1)$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 的变形：

$\sin^2\alpha=\underline{1-\cos^2\alpha}$；

$\cos^2\alpha=\underline{1-\sin^2\alpha}$.

(2)$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$的变形：

$\sin\alpha=\underline{\cos\alpha\tan\alpha}$；

$\cos\alpha=\underline{\dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha}}$.

[微训练]

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)对于任意角 α，β，均有 $\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$.　(×)

(2)存在角 α，使得 $\sin\alpha=\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$.　(×)

(3)存在角 α，使得 $\tan\alpha=1$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.　(√)

(4)对于任意角 α，$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$都成立.　(×)

(5)$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha$.　(√)

2.若 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，且 α 是第二象限角，则 $\tan\alpha=$　(　　)

A.$-\dfrac{4}{3}$　B.$\dfrac{3}{4}$　C.$\pm\dfrac{3}{4}$　D.$\pm\dfrac{4}{3}$

A　**解析**：因为 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，且 α 是第二象限角，所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{3}{5}$，所以 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{4}{3}$.故选 A.

3.若 $\tan\alpha=3$，则$\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=$　(　　)

A.2　B.3　C.4　D.6

D　**解析**：因为 $\tan\alpha=3$ 且 $\cos\alpha\neq0$，所以$\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}=2\tan\alpha=6$.故选 D.

任务型课堂

任务一　利用同角三角函数基本关系式化简

化简：(1)$\dfrac{\cos 36°-\sqrt{1-\cos^2 36°}}{\sqrt{1-2\sin 36°\cos 36°}}$；

(2)$\dfrac{1}{\cos^2\alpha\sqrt{1+\tan^2\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$（$\alpha$ 为第二象限角）.

解：(1)原式$=\dfrac{\cos 36°-\sqrt{\sin^2 36°}}{\sqrt{\sin^2 36°+\cos^2 36°-2\sin 36°\cos 36°}}$

$=\dfrac{\cos 36°-\sin 36°}{\sqrt{(\cos 36°-\sin 36°)^2}}$

$=\dfrac{\cos 36°-\sin 36°}{|\cos 36°-\sin 36°|}=\dfrac{\cos 36°-\sin 36°}{\cos 36°-\sin 36°}=1$.

(2)因为 α 是第二象限角，所以 $\cos\alpha<0$，

则原式$=\dfrac{1}{\cos^2\alpha\sqrt{1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}}-\sqrt{\dfrac{(1+\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}}$

$=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\sqrt{\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}-\dfrac{1+\sin\alpha}{|\cos\alpha|}=\dfrac{-\cos\alpha}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{-1+1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$.

【类题通法】

利用同角三角函数基本关系式化简的方法

(1)当要化简的式子中同时含有 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 时，一般应切化弦.

(2)当式子中含有根号时，应先把被开方式化为完全平方式，再去掉根号.

(3)当式子中含有高次的三角函数式时，可借助因式分解，或构造平方关系，以降幂化简.

任务二　利用同角三角函数基本关系式证明

1.已知 $\tan^2\alpha=2\tan^2\beta+1$，求证：$\sin^2\beta=2\sin^2\alpha-1$.

证明：(方法一)因为 $\tan^2\alpha=2\tan^2\beta+1$，

所以 $\tan^2\beta=\dfrac{\tan^2\alpha-1}{2}$.①

因为 $\tan^2\beta=\dfrac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}$，

所以 $\tan^2\beta=\dfrac{\sin^2\beta}{1-\sin^2\beta}$，所以 $\sin^2\beta=\dfrac{\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}$.②

由①②，得 $\sin^2\beta=\dfrac{\dfrac{\tan^2\alpha-1}{2}}{1+\dfrac{\tan^2\alpha-1}{2}}=\dfrac{\tan^2\alpha-1}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-1}{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1}=\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=2\sin^2\alpha-1$.

(方法二)因为 $\tan^2\alpha=2\tan^2\beta+1$，

所以 $\tan^2\alpha+1=2(\tan^2\beta+1)$.

所以 $\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2\cdot\dfrac{\sin^2\beta+\cos^2\beta}{\cos^2\beta}$.

所以 $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=\dfrac{2}{\cos^2\beta}$.

所以 $\cos^2\beta=2\cos^2\alpha$.所以 $1-\sin^2\beta=2(1-\sin^2\alpha)$.

所以 $\sin^2\beta=2\sin^2\alpha-1$.

2.求证：$\dfrac{1-2\sin 2x\cos 2x}{\cos^2 2x-\sin^2 2x}=\dfrac{1-\tan 2x}{1+\tan 2x}$.

证明：左边$=\dfrac{\cos^2 2x+\sin^2 2x-2\sin 2x\cos 2x}{\cos^2 2x-\sin^2 2x}$

$=\dfrac{(\cos 2x-\sin 2x)^2}{(\cos 2x-\sin 2x)(\cos 2x+\sin 2x)}$

$=\dfrac{\cos 2x-\sin 2x}{\cos 2x+\sin 2x}=\dfrac{1-\tan 2x}{1+\tan 2x}=$右边.

所以原等式成立.

【类题通法】

证明恒等式的关注点

(1)实质：清除等式两端的差异，有目的地化简.

(2)基本原则：化繁为简.例如：通过化切为弦，将式子化简.

(3)常用方法：从等式的一边开始，推出它等于另一边.

任务三　利用同角三角函数基本关系式求值

[探究活动]

探究 1：若已知某角的正切值，如何求该角的正弦、余弦值？

提示：可利用方程组$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{cases}$求解.

探究 2：若已知某角的正弦值或余弦值，如何求其他三角函数值？

提示：可先由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 求出余弦值或正弦值，再利用$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$求正切值.

探究 3：如何求形如$\dfrac{a\sin\alpha+b\cos\alpha}{c\sin\alpha+d\cos\alpha}$或$\dfrac{a\sin^2\alpha+b\sin\alpha\cos\alpha+c\cos^2\alpha}{d\sin^2\alpha+e\sin\alpha\cos\alpha+f\cos^2\alpha}$的式子的值？

提示：将分子、分母同除以 $\cos\alpha$ 或$\cos^2\alpha$，化成关于 $\tan\alpha$ 的式子，从而解决问题.

[评价活动]

1.(多选)若 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，且 α 为第二象限角，则下列选

项中正确的有　（　　）

A.$\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$

B.$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$

C.$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$

D.$\sin\alpha-\cos\alpha=-\dfrac{1}{5}$

AC　**解析**：因为 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，且 α 为第二象限角，所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=-\dfrac{3}{5}$，故 B 错误；$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{4}{3}$，故 A 正确；$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}=\dfrac{1}{5}$，故 C 正确；$\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}=\dfrac{7}{5}$，故 D 错误.

2.已知 $\alpha\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$，$\tan\alpha=2$，则 $\cos\alpha=$________.

$-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　**解析**：由 $\alpha\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 及 $\tan\alpha=2$，得 $\sin\alpha=2\cos\alpha<0$.

又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{5}$，$\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

3.已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$，$\alpha\in(0,\pi)$，求下列各式的值.

(1) $\sin\alpha\cos\alpha$；(2) $\sin\alpha-\cos\alpha$.

解：(1) 由 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$，两边平方得 $2\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{24}{25}$，所以 $\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{12}{25}$.

(2) 因为 $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1+\dfrac{24}{25}=\dfrac{49}{25}$，所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=\pm\dfrac{7}{5}$.

又由(1)知 $\sin\alpha\cos\alpha<0$，所以 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$.

所以 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$.所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{7}{5}$.

4.已知 $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=2$，计算下列各式的值.

(1) $\dfrac{3\sin\alpha-\cos\alpha}{2\sin\alpha+3\cos\alpha}$；

(2) $\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+1$.

解：由 $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=2$，化简得 $\sin\alpha=3\cos\alpha$，所以 $\tan\alpha=3$.

(1) 原式 $=\dfrac{3\times3\cos\alpha-\cos\alpha}{2\times3\cos\alpha+3\cos\alpha}=\dfrac{8\cos\alpha}{9\cos\alpha}=\dfrac{8}{9}$.

(2) 原式 $=\dfrac{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}+1$

$=\dfrac{\tan^2\alpha-2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}+1=\dfrac{3^2-2\times3}{3^2+1}+1=\dfrac{13}{10}$.

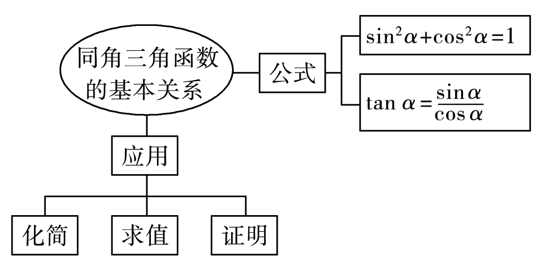
【类题通法】

三角函数求值问题的解题策略

(1) 已知角 α 的某种三角函数值，求角 α 的其余三角函数值时，要注意公式的合理选择与变形；若角的终边所在的象限不确定，应分类讨论.

(2) 已知 $\tan\alpha$，求关于 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 的 n 次齐次式的值，可将分子、分母同除以 $\cos\alpha$ 的 n 次幂，进行弦化切；有时可把分母看作 1，并将 1 用 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ 代换.

提质归纳



课后素养评价(四十四)

基础性·能力运用

1.已知 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$ 的值为　（　　）

A.$-\dfrac{1}{5}$　B.$-\dfrac{3}{5}$　C.$\dfrac{1}{5}$　D.$\dfrac{3}{5}$

B　**解析**：$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=2\sin^2\alpha-1=\dfrac{2}{5}-1=-\dfrac{3}{5}$.

2.已知 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{2}$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $\sin\alpha-2\cos\alpha=$　（　　）

A.$\sqrt{5}$　　B.$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

C.1　　D.$-\sqrt{5}$

A　**解析**:因为 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$,

所以 $\begin{cases}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{1}{2},\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\end{cases}$

又 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$,所以 $\sin\alpha-2\cos\alpha=\sqrt{5}$.

3. 已知 $\frac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{1}{2}$,则 $\tan\alpha=$ (　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$ 或 1　　D. $\frac{1}{2}$ 或 1

A　**解析**:因为 $\frac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{1}{2}$,

所以 $\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{2}$,解得 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$.

4. (2022·浙江)设 $x\in\mathbf{R}$,则"$\sin x=1$"是"$\cos x=0$"的 (　　)

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

A　**解析**:因为 $\sin^2x+\cos^2x=1$,可得:

当 $\sin x=1$ 时,$\cos x=0$,充分性成立;

当 $\cos x=0$ 时,$\sin x=\pm1$,必要性不成立;

所以当 $x\in\mathbf{R}$,"$\sin x=1$"是"$\cos x=0$"的充分不必要条件.

5. 已知 α 是第四象限角,$\tan\alpha=-\frac{5}{12}$,则 $\sin\alpha=$ $\underline{-\frac{5}{13}}$.

6. $\frac{\sqrt{1-2\sin70^\circ\cos70^\circ}}{\sin70^\circ-\sqrt{1-\sin^2 70^\circ}}=$ ________.

1　**解析**:原式 $=\frac{\sqrt{(\sin70^\circ-\cos70^\circ)^2}}{\sin70^\circ-\sqrt{\cos^2 70^\circ}}=\frac{\sin70^\circ-\cos70^\circ}{\sin70^\circ-\cos70^\circ}=1$.

综合性·创新提升

1. 若 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,且满足 $\frac{6}{\tan\theta}-\tan\theta=1$,则 $\sin\theta+\cos\theta=$ (　　)

A. $\frac{\sqrt{10}}{5}$　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　D. $-\frac{\sqrt{10}}{5}$

A　**解析**:由 $\frac{6}{\tan\theta}-\tan\theta=1$,得 $(\tan\theta-2)(\tan\theta+3)=0$,因为 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,$\tan\theta<0$,所以 $\tan\theta=-3$. 由 $\begin{cases}\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-3,\\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1\end{cases}$ 及 $\sin\theta>0$ 得 $\sin\theta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,所以 $\cos\theta=\frac{\sin\theta}{\tan\theta}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$,$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

2. 若 α 为第二象限角,则 $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}+\frac{2\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$ 的值为 (C)

A. 3　B. -3　C. 1　D. -1

3. 若 $\tan\theta=-2$,则 $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta$ 的值是 (　　)

A. $-\frac{1}{5}$　B. $-\frac{3}{5}$　C. $-\frac{7}{5}$　D. $\frac{1}{5}$

A　**解析**:因为 $\tan\theta=-2$,

所以 $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta$

$=\frac{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\tan^2\theta+2\tan\theta-1}{\tan^2\theta+1}=\frac{4+2\times(-2)-1}{4+1}=-\frac{1}{5}$.

4. 已知 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{8}$,且 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$,则 $\cos\alpha-\sin\alpha=$ $\underline{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

5. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{13}$,$\alpha\in(0,\pi)$,则 $\tan\alpha=$ ________.

$-\frac{12}{5}$　**解析**:(方法一:构建方程组)

因为 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{13}$①,

所以 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{49}{169}$,

即 $2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{120}{169}$.

因为 $\alpha\in(0,\pi)$,所以 $\sin\alpha>0$,$\cos\alpha<0$.

所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{17}{13}$②.

由①②解得 $\sin\alpha=\frac{12}{13}$,$\cos\alpha=-\frac{5}{13}$,

所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{12}{5}$.

(方法二:弦化切)同方法一,求出 $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{60}{169}$,$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=-\frac{60}{169}$,$\frac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=-\frac{60}{169}$,

整理得 $60\tan^2\alpha+169\tan\alpha+60=0$,

解得 $\tan\alpha=-\frac{5}{12}$或 $\tan\alpha=-\frac{12}{5}$.

由 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{13}>0$ 知$|\sin\alpha|>|\cos\alpha|$.

故 $\tan\alpha=-\frac{12}{5}$.

6. 已知$\frac{4\sin\theta-2\cos\theta}{3\sin\theta+5\cos\theta}=\frac{6}{11}$,求下列各式的值.

(1)$\frac{5\cos^2\theta}{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-3\cos^2\theta}$;

(2)$1-4\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta$.

解:由已知$\frac{4\sin\theta-2\cos\theta}{3\sin\theta+5\cos\theta}=\frac{6}{11}$,

可得$\frac{4\tan\theta-2}{3\tan\theta+5}=\frac{6}{11}$,

解得 $\tan\theta=2$.

(1)原式$=\frac{5}{\tan^2\theta+2\tan\theta-3}=\frac{5}{5}=1$.

(2)原式$=\sin^2\theta-4\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta$

$=\frac{\sin^2\theta-4\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$

$=\frac{\tan^2\theta-4\tan\theta+3}{\tan^2\theta+1}=-\frac{1}{5}$.

5.3　诱导公式

第1课时　诱导公式二～四

学习任务目标

1. 理解并掌握诱导公式二、三、四的结构特征及记忆方法.

2. 会运用诱导公式二、三、四求三角函数的值及化简与证明简单的三角函数式.

问题式预习

知识点　诱导公式二～四

(1)公式二:$\sin(\pi+\alpha)=$<u>$-\sin\alpha$</u>,$\cos(\pi+\alpha)=$<u>$-\cos\alpha$</u>,$\tan(\pi+\alpha)=$<u>$\tan\alpha$</u>.

(2)公式三:$\sin(-\alpha)=$<u>$-\sin\alpha$</u>,$\cos(-\alpha)=$<u>$\cos\alpha$</u>,$\tan(-\alpha)=$<u>$-\tan\alpha$</u>.

(3)公式四:$\sin(\pi-\alpha)=$<u>$\sin\alpha$</u>,$\cos(\pi-\alpha)=$<u>$-\cos\alpha$</u>,$\tan(\pi-\alpha)=$<u>$-\tan\alpha$</u>.

[微训练]

1. $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$的值为　(　　)

A. $-\frac{1}{2}$　B. $\frac{1}{2}$　C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C　**解析**:$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. 求下列三角函数的值.

(1)$\sin 690^\circ=$________;

(2)$\cos\left(-\frac{20}{3}\pi\right)=$________;

(3)$\tan(-1\ 845^\circ)=$________.

(1)$-\frac{1}{2}$　(2)$-\frac{1}{2}$　(3)-1

解析:(1)$\sin 690^\circ=\sin(360^\circ+330^\circ)=\sin 330^\circ$

$=\sin(180^\circ+150^\circ)=-\sin 150^\circ$

$=-\sin(180^\circ-30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$.

(2)$\cos\left(-\frac{20}{3}\pi\right)=\cos\frac{20}{3}\pi$

$=\cos\left(6\pi+\frac{2}{3}\pi\right)=\cos\frac{2}{3}\pi$

$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

(3)$\tan(-1\ 845^\circ)=\tan(-5\times360^\circ-45^\circ)=\tan(-45^\circ)=-\tan 45^\circ=-1$.

任务型课堂

任务一　给角求值问题

[探究活动]

探究:如何将任意角的三角函数值转化为$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$范围内角的三角函数值?

提示:首先由公式一,转化为$[0,2\pi)$范围内角的三角函数值,再由公式二、三、四,即可转化为$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$范围内角的三角函数值.

[评价活动]

1.求下列三角函数值.

(1)$\cos 210°$;(2)$\sin \frac{11\pi}{4}$;(3)$\sin\left(-\frac{43\pi}{6}\right)$;

(4)$\cos(-1\ 920°)$.

解:(1)$\cos 210° = \cos(180° + 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2)$\sin \frac{11\pi}{4} = \sin\left(2\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \sin \frac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3)$\sin\left(-\frac{43\pi}{6}\right) = -\sin\left(6\pi + \frac{7\pi}{6}\right) = -\sin \frac{7\pi}{6} = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

(4)$\cos(-1\ 920°) = \cos 1\ 920° = \cos(5 \times 360° + 120°) = \cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$.

2.求 $\sin\left(2n\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(n\pi + \frac{4\pi}{3}\right)(n \in \mathbf{Z})$的值.

解:分类讨论:

①当 n 为奇数时,原式$= \sin \frac{2\pi}{3}\left(-\cos \frac{4\pi}{3}\right)$

$= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \left[-\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

②当 n 为偶数时,原式$= \sin \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cdot \left(-\cos \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

【类题通法】

利用诱导公式求三角函数值的步骤

(1)"负化正"——用公式一或公式三将负角转化为正角.

(2)"大化小"——用公式一将角化为$[0,2\pi]$范围内的角.

(3)"小化锐"——用公式二或公式四将大于$\frac{\pi}{2}$的角转化为锐角.

(4)"锐求值"——得到锐角的三角函数后求值.

任务二　利用诱导公式化简

化简下列各式.

(1)$\frac{\tan(2\pi - \alpha)\sin(-2\pi - \alpha)\cos(6\pi - \alpha)}{\cos(\alpha - \pi)\sin(5\pi - \alpha)}$;

(2)$\frac{\cos(\pi + \alpha) \cdot \sin(2\pi + \alpha)}{\sin(-\alpha - \pi) \cdot \cos(-\pi - \alpha)}$;

(3)$\frac{\cos 190° \cdot \sin(-210°)}{\cos(-350°) \cdot \tan(-585°)}$;

(4)$\frac{\sqrt{1 + 2\sin 290° \cos 430°}}{\sin 250° + \cos 790°}$.

解:(1) 原式$= \frac{\frac{\sin(2\pi - \alpha)}{\cos(2\pi - \alpha)} \cdot \sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}{\cos(\pi - \alpha)\sin(\pi - \alpha)}$

$= \frac{-\sin\alpha(-\sin\alpha)\cos\alpha}{\cos\alpha(-\cos\alpha)\sin\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$.

(2)原式$= \frac{-\cos\alpha \cdot \sin\alpha}{-\sin(\pi + \alpha) \cdot \cos(\pi + \alpha)}$

$= \frac{\cos\alpha \sin\alpha}{\sin\alpha \cos\alpha} = 1$.

(3)原式$= \frac{\cos(180° + 10°)[-\sin(180° + 30°)]}{\cos(-360° + 10°)[-\tan(360° + 225°)]}$

$= \frac{-\cos 10° \cdot \sin 30°}{\cos 10° \cdot [-\tan(180° + 45°)]}$

$= \frac{-\frac{1}{2}}{-\tan 45°}$

$= \frac{1}{2}$.

(4)原式$= \frac{\sqrt{1 + 2\sin(360° - 70°)\cos(360° + 70°)}}{\sin(180° + 70°) + \cos(720° + 70°)}$

$= \frac{\sqrt{1 - 2\sin 70° \cos 70°}}{-\sin 70° + \cos 70°} = \frac{|\cos 70° - \sin 70°|}{\cos 70° - \sin 70°}$

$= \frac{\sin 70° - \cos 70°}{\cos 70° - \sin 70°} = -1$.

【类题通法】

化简三角函数式的常用方法

(1)利用诱导公式,将任意角的三角函数转化为锐角的三角函数.

(2)切化弦:一般需将式中的正切函数转化为正弦、余弦函数.

(3)注意"1"的代换:$1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \tan \frac{\pi}{4}$.

任务三　给值求值问题

1.若 $\sin(3\pi + \alpha) = -\frac{1}{2}$,则 $\sin\alpha$ 的值为　　(　　)

A.$-\frac{1}{2}$　　B.$\frac{1}{2}$

C.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D.$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

B　**解析**:因为 $\sin(3\pi + \alpha) = -\frac{1}{2}$,且 $\sin(3\pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$,所以 $\sin\alpha = \frac{1}{2}$.

2. 已知 $\cos(\alpha-75^\circ)=-\frac{1}{3}$，且 α 为第四象限角，求 $\sin(105^\circ+\alpha)$ 的值.

解：因为 $\cos(\alpha-75^\circ)=-\frac{1}{3}<0$，且 α 为第四象限角，所以 $\alpha-75^\circ$ 是第三象限角.

所以 $\sin(\alpha-75^\circ)=-\sqrt{1-\cos^2(\alpha-75^\circ)}=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

所以 $\sin(105^\circ+\alpha)=\sin[180^\circ+(\alpha-75^\circ)]=-\sin(\alpha-75^\circ)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

3. 已知 $\cos(\pi+\alpha)=-\frac{3}{5}$，$\pi<\alpha<2\pi$，求 $\sin(\alpha-3\pi)+\cos(\alpha-\pi)$ 的值.

解：因为 $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，所以 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$. 又因为 $\pi<\alpha<2\pi$，所以 $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，所以 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$.

所以 $\sin(\alpha-3\pi)+\cos(\alpha-\pi)=-\sin(3\pi-\alpha)+\cos(\pi-\alpha)=-\sin(\pi-\alpha)+(-\cos\alpha)=-\sin\alpha-\cos\alpha=-(\sin\alpha+\cos\alpha)=-\left(-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{5}$.

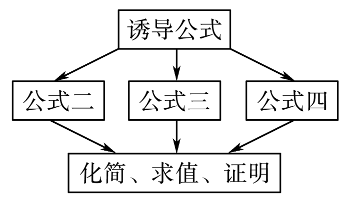
【类题通法】

解决条件求值问题的策略

(1)解决条件求值问题，首先要仔细观察条件与所求式的角、函数名称之间的差异及联系.

(2)可以将已知式进行变形向所求式转化，或将所求式进行变形向已知式转化.

提质归纳



课后素养评价(四十五)

基础性·能力运用

1.（多选）下列结论正确的有　　(　　)

A. $\sin\frac{17}{6}\pi=\frac{1}{2}$

B. $\tan\left(-\frac{10}{3}\pi\right)=-\sqrt{3}$

C. -150° 化成弧度是 $-\frac{7}{6}\pi$

D. $\frac{\pi}{12}$ 化成角度是 75°

AB　**解析**：$\sin\frac{17\pi}{6}=\sin\left(3\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，故 A 正确；$\tan\left(-\frac{10\pi}{3}\right)=\tan\left(-3\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$，故 B 正确；

-150° 化成弧度是 $-\frac{5\pi}{6}$，故 C 错误；$\frac{\pi}{12}$ 化成度是 15°，故 D 错误.

2. 若 $\cos(\pi+\alpha)=-\frac{1}{2}$，$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，则 $\sin(2\pi+\alpha)$ 等于　　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

D　**解析**：由 $\cos(\pi+\alpha)=-\frac{1}{2}$，得 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$，又 $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，故 $\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$（$\alpha$ 为第四象限角）.

3.（多选）下列化简正确的是　　(　　)

A. $\tan(\pi+1)=\tan 1$

B. $\frac{\sin(-\alpha)}{\tan(360^\circ-\alpha)}=\cos\alpha$

C. $\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}=\tan\alpha$

D. $\frac{\cos(\pi-\alpha)\tan(-\pi-\alpha)}{\sin(2\pi-\alpha)}=1$

AB　**解析**：对于 A，根据三角函数的诱导公式可知 $\tan(\pi+1)=\tan 1$，故 A 正确；

对于 B，$\frac{\sin(-\alpha)}{\tan(360^\circ-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{-\tan\alpha}=\cos\alpha$，故 B 正确；

对于 C，$\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\tan\alpha$，故 C 错误；

对于 D，$\frac{\cos(\pi-\alpha)\tan(-\pi-\alpha)}{\sin(2\pi-\alpha)}=\frac{(-\cos\alpha)(-\tan\alpha)}{-\sin\alpha}$ $=-1$，故 D 错误.

4.$\sqrt{1-2\sin(\pi+2)\cos(\pi+2)}=$ $\underline{\sin 2-\cos 2}$.

5.若 $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\theta\right)=$ $\underline{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$.

6.化简：$\frac{\cos 210^\circ\cdot\cos(-420^\circ)\cdot\tan 330^\circ}{\tan 390^\circ\cdot\sin 750^\circ\cdot\cos 900^\circ}$.

解：原式$=$

$$\frac{\cos(180^\circ+30^\circ)\cdot\cos(-360^\circ-60^\circ)\cdot\tan(360^\circ-30^\circ)}{\tan(360^\circ+30^\circ)\cdot\sin(720^\circ+30^\circ)\cdot\cos(720^\circ+180^\circ)}$$

$$=\frac{(-\cos 30^\circ)\cdot\cos 60^\circ\cdot(-\tan 30^\circ)}{\tan 30^\circ\cdot\sin 30^\circ\cdot\cos 180^\circ}$$

$$=\frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}\times(-1)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

综合性·创新提升

1.点 $P(\sin 2\ 022^\circ-\cos 2\ 022^\circ,\sin 2\ 022^\circ\cdot\cos 2\ 022^\circ)$ 位于　　(　　)

A.第一象限　　B.第二象限

C.第三象限　　D.第四象限

A　**解析**：因为 $2\ 022^\circ=360^\circ\times5+222^\circ$，又 $\sin 222^\circ=\sin(180^\circ+42^\circ)=-\sin 42^\circ<0$，可得 $\cos 222^\circ=\cos(180^\circ+42^\circ)=-\cos 42^\circ<0$，可得 $\sin 222^\circ>\cos 222^\circ$，

所以 $\sin 2\ 022^\circ-\cos 2\ 022^\circ=\sin 222^\circ-\cos 222^\circ>0$.

又 $\sin 2\ 022^\circ\cdot\cos 2\ 022^\circ=\sin 222^\circ\cos 222^\circ>0$，

所以 $P(\sin 2\ 022^\circ-\cos 2\ 022^\circ,\sin 2\ 022^\circ\cdot\cos 2\ 022^\circ)$ 位于第一象限.

2.已知 $\cos 31^\circ=a$，则 $\cos 211^\circ\cdot\tan 149^\circ$ 的值是　(B)

A.$\frac{1-a^2}{a}$　　B.$\sqrt{1-a^2}$

C.$\frac{a^2-1}{a}$　　D.$-\sqrt{1-a^2}$

3.已知 $\cos 80^\circ=k$，则 $\cos 620^\circ$ 的值为　(B)

A.k　　B.$-k$

C.$\pm k$　　D.$\sqrt{1-k^2}$

4.已知 $\cos(508^\circ-\alpha)=\frac{12}{13}$，则 $\cos(212^\circ+\alpha)=$________.

$\frac{12}{13}$　**解析**：因为 $\cos(508^\circ-\alpha)=\cos(360^\circ+148^\circ-\alpha)=\cos(148^\circ-\alpha)=\frac{12}{13}$，

所以 $\cos(212^\circ+\alpha)=\cos(360^\circ+\alpha-148^\circ)=\cos(\alpha-148^\circ)=\cos(148^\circ-\alpha)=\frac{12}{13}$.

5.已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x,x<0,\\ f(x-1)-1,x>0,\end{cases}$

则 $f\left(-\frac{11}{6}\right)+f\left(\frac{11}{6}\right)$ 的值为 $\underline{-2}$.

6.若 $\cos(\alpha-\pi)=-\frac{2}{3}$，

求 $\frac{\sin(\alpha-2\pi)+\sin(-\alpha-3\pi)\cos(\alpha-3\pi)}{\cos(\pi-\alpha)-\cos(-\pi-\alpha)\cos(\alpha-4\pi)}$ 的值.

解：原式$=\frac{-\sin(2\pi-\alpha)-\sin(3\pi+\alpha)\cos(3\pi-\alpha)}{-\cos\alpha-(-\cos\alpha)\cos\alpha}$

$=\frac{\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{-\cos\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{-\cos\alpha(1-\cos\alpha)}$

$=-\tan\alpha$.

因为 $\cos(\alpha-\pi)=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{2}{3}$，

所以 $\cos\alpha=\frac{2}{3}$. 所以 α 为第一象限角或第四象限角.

(1)当 α 为第一象限角时，$\cos\alpha=\frac{2}{3}$，$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以原式 $=-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(2)当 α 为第四象限角时，$\cos\alpha=\frac{2}{3}$，$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$，

所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以原式$=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

综上，原式$=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

第2课时　诱导公式五、六

学习任务目标

1.掌握诱导公式五、六的推导,并能应用于解决求值、化简与证明问题.

2.对诱导公式一～六,能做综合归纳,体会出六组公式的共性与个性,培养由特殊到一般的数学推理意识和能力.

问题式预习

知识点　诱导公式五、六

(1)公式五:$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\underline{\cos\alpha}$;

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\underline{\sin\alpha}$.

(2)公式六:$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\underline{\cos\alpha}$;

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\underline{-\sin\alpha}$.

[微训练]

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)诱导公式五、六中的角α只能是锐角.　(×)

(2)$\sin(90°+\alpha)=-\cos\alpha$.　(×)

(3)$\cos\alpha=-\sin\alpha$.　(×)

2.已知$\sin\alpha=\frac{5}{13}$,则$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$的值为　(C)

A.$\frac{5}{13}$　B.$\frac{12}{13}$

C.$-\frac{5}{13}$　D.$-\frac{12}{13}$

3.下列式子与$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$的值相等的为　(D)

A.$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$　B.$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

C.$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)$　D.$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)$

任务型课堂

任务一　利用诱导公式化简与求值

[探究活动]

探究1:公式五反映了互余两角三角函数之间的关系,你还能举出一些互余的角吗?

提示:常见的互余的角有:$\frac{\pi}{3}-\alpha$与$\frac{\pi}{6}+\alpha$;$\frac{\pi}{3}+\alpha$与$\frac{\pi}{6}-\alpha$;$\frac{\pi}{4}+\alpha$与$\frac{\pi}{4}-\alpha$等.

探究2:你能列举一些常见的互补的角吗?

提示:常见的互补的角有:$\frac{\pi}{3}+\theta$与$\frac{2\pi}{3}-\theta$;$\frac{\pi}{4}+\theta$与$\frac{3\pi}{4}-\theta$等.

[评价活动]

1.已知$\cos(\pi+\alpha)=-\frac{1}{2}$,$\alpha$为第一象限角,求$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$的值.

解:因为$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{1}{2}$,

所以$\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

又α为第一象限角,则$\sin\alpha>0$,

所以$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.已知$\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$,求$\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)$的值.

解:$\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)$

$=\cos\left[\pi-\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]\cdot\sin\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]$

$=-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\frac{1}{9}$.

3.求值:

$$\frac{\cos(270°+\alpha)+\cos(90°+\alpha)-\tan(360°+\alpha)}{\tan(\alpha+180°)+\sin(90°-\alpha)+\sin(270°-\alpha)}.$$

解：原式$=\dfrac{\cos[180^\circ+(90^\circ+\alpha)]-\sin\alpha-\tan\alpha}{\tan\alpha+\cos\alpha+\sin[180^\circ+(90^\circ-\alpha)]}$

$=\dfrac{-\cos(90^\circ+\alpha)-\sin\alpha-\tan\alpha}{\tan\alpha+\cos\alpha-\sin(90^\circ-\alpha)}$

$=\dfrac{\sin\alpha-\sin\alpha-\tan\alpha}{\tan\alpha+\cos\alpha-\cos\alpha}$

$=-\dfrac{\tan\alpha}{\tan\alpha}=-1.$

【类题通法】

利用诱导公式化简、求值的策略

(1)已知角求值问题，关键是利用诱导公式把任意角的三角函数值转化成锐角的三角函数值求解，转化过程中注意口诀“奇变偶不变，符号看象限”的应用.

(2)对式子进行化简或求值时，要注意要求的角与已知角之间的关系，并结合诱导公式进行转化，特别要注意角的范围.

(3)常见的互余的角：$\dfrac{\pi}{3}-\alpha$ 与 $\dfrac{\pi}{6}+\alpha$，$\dfrac{\pi}{4}+\alpha$ 与 $\dfrac{\pi}{4}-\alpha$ 等，常见的互补的角：$\dfrac{\pi}{6}+\alpha$ 与 $\dfrac{5\pi}{6}-\alpha$，$\dfrac{\pi}{3}+\alpha$ 与 $\dfrac{2\pi}{3}-\alpha$，$\dfrac{\pi}{4}+\alpha$ 与 $\dfrac{3\pi}{4}-\alpha$ 等.

任务二　利用诱导公式证明三角函数式

求证：

(1)$\dfrac{\tan(2\pi-\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos(6\pi-\alpha)}{\sin\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}=-\tan\alpha$；

(2)$\dfrac{2\sin\left(\theta-\frac{3\pi}{2}\right)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)-1}{1-2\sin^2(\pi+\theta)}=\dfrac{\tan(9\pi+\theta)+1}{\tan(\pi+\theta)-1}$.

证明：(1)左边

$=\dfrac{\tan(-\alpha)\cdot(-\sin\alpha)\cdot\cos(-\alpha)}{\sin\left[2\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]\cdot\cos\left[2\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}$

$=\dfrac{(-\tan\alpha)\cdot(-\sin\alpha)\cdot\cos\alpha}{\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]\cos\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}$

$=\dfrac{\sin^2\alpha}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\dfrac{\sin^2\alpha}{-\cos\alpha\cdot\sin\alpha}$

$=-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\tan\alpha=$右边.

所以原等式成立.

(2)左边$=\dfrac{-2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\cdot(-\sin\theta)-1}{1-2\sin^2\theta}$

$=\dfrac{2\sin\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]\sin\theta-1}{1-2\sin^2\theta}$

$=\dfrac{-2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin\theta-1}{1-2\sin^2\theta}$

$=\dfrac{-2\cos\theta\sin\theta-1}{\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sin^2\theta}$

$=\dfrac{(\sin\theta+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$.

右边$=\dfrac{\tan(9\pi+\theta)+1}{\tan(\pi+\theta)-1}=\dfrac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$.

所以左边=右边，故原式成立.

【类题通法】

三角恒等式的证明策略

对于三角恒等式的证明，应遵循化繁为简的原则，由左边推导出右边或由右边推导出左边，也可以用左右归一、变更论证的方法.常用定义法、切化弦法、拆项拆角法、“1”的代换法、公式变形法，要熟练掌握基本公式，善于从中选择巧妙简捷的方法.

任务三　诱导公式在三角形中的应用

[探究活动]

探究1：在△ABC中，隐含着一些等量关系，如$A+B+C=\pi$，$\dfrac{A+B+C}{2}=\dfrac{\pi}{2}$，结合诱导公式，将下列常用等式补充完整.

(1)$\sin(A+B)=$______；

(2)$\cos(A+B)=$______；

(3)$\sin\dfrac{A+B}{2}=$________；

(4)$\cos\dfrac{A+B}{2}=$________.

提示：(1)$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$；

(2)$\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C$；

(3)$\sin\dfrac{A+B}{2}=\sin\dfrac{\pi-C}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)=\cos\dfrac{C}{2}$；

(4)$\cos\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{\pi-C}{2}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)=\sin\dfrac{C}{2}$.

探究2：在△ABC中，$\sin^2\dfrac{A+B}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}$的值是多少？请说明理由.

提示：$\sin^2\dfrac{A+B}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}=1$.理由如下：

因为$A+B+C=\pi$，所以$\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}$，

所以 $\sin\dfrac{A+B}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)=\cos\dfrac{C}{2}$，

所以 $\sin^2\dfrac{A+B}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}=\cos^2\dfrac{C}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}=1$.

[评价活动]

1. 已知任意$\triangle ABC$，给出下列 4 个式子，其中值为常数的是　（　　）

①$\sin(A+B)+\sin C$；

②$\cos(A+B)+\cos C$；

③$\sin(2A+2B)+\sin 2C$；

④$\cos(2A+2B)+\cos 2C$.

A.①②　　B.②③

C.③④　　D.①④

B　**解析**：对于①，$\sin(A+B)+\sin C=\sin(\pi-C)+\sin C=\sin C+\sin C=2\sin C$，故①不正确；

对于②，$\cos(A+B)+\cos C=\cos(\pi-C)+\cos C=-\cos C+\cos C=0$，故②正确；

对于③，$\sin(2A+2B)+\sin 2C=\sin[2(\pi-C)]+\sin 2C=-\sin 2C+\sin 2C=0$，故③正确；

对于④，$\cos(2A+2B)+\cos 2C=\cos[2(\pi-C)]+\cos 2C=\cos 2C+\cos 2C=2\cos 2C$，故④不正确.

2. 在$\triangle ABC$中，若$\sin(A+B-C)=\sin(A-B+C)$，则$\triangle ABC$必是　（　　）

A.等腰三角形

B.直角三角形

C.等腰三角形或直角三角形

D.等腰直角三角形

C　**解析**：因为 $A+B+C=\pi$，

而 $\sin(A+B-C)=\sin(A-B+C)$，

所以 $\sin(\pi-2C)=\sin(\pi-2B)$，所以 $\sin 2C=\sin 2B$.

所以 $2C=2B$ 或 $2C+2B=\pi$.

所以 $C=B$ 或 $B+C=\dfrac{\pi}{2}$.

所以$\triangle ABC$为等腰三角形或直角三角形.

3. 在$\triangle ABC$中，$\sin\dfrac{A+B-C}{2}=\sin\dfrac{A-B+C}{2}$，试判断$\triangle ABC$的形状.

解：因为 $A+B+C=\pi$，

所以 $A+B-C=\pi-2C$，$A-B+C=\pi-2B$.

因为 $\sin\dfrac{A+B-C}{2}=\sin\dfrac{A-B+C}{2}$，

所以 $\sin\dfrac{\pi-2C}{2}=\sin\dfrac{\pi-2B}{2}$，

所以 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-C\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)$，即 $\cos C=\cos B$.

又因为 B，C 为$\triangle ABC$的内角，所以 $C=B$，

所以$\triangle ABC$为等腰三角形.

【类题通法】

三角形中的三角函数关系

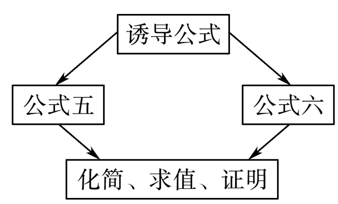
(1)$\sin(A+B)=\sin C$；

(2)$\cos(A+B)=-\cos C$；

(3)$\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$；

(4)$\cos\dfrac{A+B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}$.

提质归纳



课后素养评价(四十六)

基础性·能力运用

1. (多选)下面诱导公式使用不正确的是　（　　）

A.$\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$

B.$\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

C.$\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta$

D.$\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$

ABD　**解析**：因为 $\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta$，所以选项 A 错误；

因为 $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\theta\right)=\sin\theta$，所以 B 错误；

因为 $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta$，所以 C 正确；

因为 $\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$，所以 D 错误.

2. $\cos(\pi-x)+\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=$　　(　　)

A. $-2\cos x$　　B. 0

C. $-2\sin x$　　D. $\cos x-\sin x$

A　**解析**：$\cos(\pi-x)+\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos x-\cos x=-2\cos x$.

3. 若 $\sin(\pi+\alpha)=\frac{1}{3}$，则 $\sin(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$　　(　　)

A. $-\frac{2}{3}$　B. $\frac{2}{3}$　C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　D. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

A　**解析**：因为 $\sin(\pi+\alpha)=\frac{1}{3}$，即 $-\sin\alpha=\frac{1}{3}$，

所以 $\sin\alpha=-\frac{1}{3}$，

则 $\sin(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha+\sin\alpha=-\frac{2}{3}$.

4. 已知角 α 的终边上有一点 $P(1,3)$，则 $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+2\cos(-\pi+\alpha)}$ 的值为　　(　　)

A. $-\frac{2}{5}$　B. $-\frac{4}{5}$　C. $-\frac{4}{7}$　D. -4

A　**解析**：因为点 $P(1,3)$ 在 α 终边上，所以 $\tan\alpha=3$.

所以 $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+2\cos(-\pi+\alpha)}=\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{-\sin\alpha-2\cos\alpha}$

$=\dfrac{\tan\alpha-1}{-\tan\alpha-2}=\dfrac{3-1}{-3-2}=-\dfrac{2}{5}$. 故选 A.

5. 已知 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，则 $\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)$ 的值为 $\underline{\frac{3}{5}}$.

6. 若 $\cos\alpha=\frac{1}{5}$，且 α 是第四象限角，则 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=$________.

$\frac{2\sqrt{6}}{5}$　**解析**：因为 $\cos\alpha=\frac{1}{5}$，且 α 是第四象限角，

所以 $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$. 所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

7. 计算：$\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\cdots+\sin^2 88^\circ+\sin^2 89^\circ=\underline{\frac{89}{2}}$.

8. 证明：$\dfrac{\sin(\theta-5\pi)}{\cos(3\pi-\theta)}\cdot\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin(\theta-3\pi)}\cdot\dfrac{\cos(8\pi-\theta)}{\sin(-\theta-4\pi)}=1$.

证明：原式 $=\dfrac{-\sin(5\pi-\theta)}{\cos(\pi-\theta)}\cdot\dfrac{\sin\theta}{-\sin(3\pi-\theta)}\cdot\dfrac{\cos\theta}{-\sin(4\pi+\theta)}=\dfrac{-\sin\theta}{-\cos\theta}\cdot\dfrac{\sin\theta}{-\sin\theta}\cdot\dfrac{\cos\theta}{-\sin\theta}=1$.

综合性·创新提升

1. 已知 $\cos(75^\circ+\alpha)=\frac{1}{3}$，则 $\sin(\alpha-15^\circ)+\cos(105^\circ-\alpha)$ 的值是　　(D)

A. $\frac{1}{3}$　B. $\frac{2}{3}$　C. $-\frac{1}{3}$　D. $-\frac{2}{3}$

2.（多选）已知 $\sqrt{3}\sin(\pi+\theta)=\sin\left(\frac{2\,021\pi}{2}-\theta\right)$，$\theta\in(0,2\pi)$，则 θ 可能等于　　(　　)

A. $\frac{2\pi}{3}$　B. $\frac{5\pi}{6}$　C. $\frac{5\pi}{3}$　D. $\frac{11\pi}{6}$

BD　**解析**：因为 $\sqrt{3}\sin(\pi+\theta)=\sin\left(\frac{2\,021\pi}{2}-\theta\right)$，$\theta\in(0,2\pi)$，

所以 $-\sqrt{3}\sin\theta=\cos\theta$，即 $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\theta=\frac{5\pi}{6}$，或 $\theta=\frac{11\pi}{6}$.

3. 已知 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，则 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=$________.

$-\frac{1}{3}$　**解析**：$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}+\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right]=-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{3}$.

4. 已知 $\sin(5\pi-\theta)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\sqrt{7}}{2}$，则 $\sin^4\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos^4\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)$ 的值为________.

$\frac{23}{32}$　**解析**：因为 $\sin(5\pi-\theta)+\sin\left(\frac{5}{2}\pi-\theta\right)=\sin(\pi-\theta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}$，所以 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\cdot[(\sin\theta+\cos\theta)^2-1]=\frac{1}{2}\times\left[\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2-1\right]=\frac{3}{8}$. 所以 $\sin^4\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos^4\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\cos^4\theta+\sin^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1-2\times\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{23}{32}$.

5. 已知 α 是第三象限角，$f(\alpha)=\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\cos(2\pi-\alpha)\tan\left(-\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)}{\cos(-\alpha-\pi)}$.

(1)若 $\cos\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{5}$，求 $f(\alpha)$的值；

(2)若 $\alpha=-1\ 920^\circ$，求 $f(\alpha)$的值.

解：$f(\alpha)=\sin\alpha\cdot\cos(-\alpha)\cdot\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}\cdot\dfrac{1}{\cos(\alpha+\pi)}=\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha(-\cos\alpha)}{-\sin\alpha(-\cos\alpha)}=-\cos\alpha$.

(1)因为 $\cos\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\sin\alpha=\dfrac{1}{5}$，所以 $\sin\alpha=-\dfrac{1}{5}$.

因为 α 为第三象限角，所以 $\cos\alpha=-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

所以 $f(\alpha)=-\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

(2)因为 $-1\ 920^\circ=-5\times360^\circ-120^\circ$，

所以 $f(-1\ 920^\circ)=-\cos(-5\times360^\circ-120^\circ)$

$=-\cos120^\circ=\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$.

6.已知函数 $f(\alpha)=\dfrac{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\tan(2\pi-\alpha)}{\tan(\alpha+\pi)\sin(\alpha+\pi)}$.

(1)化简 $f(\alpha)$；

(2)若 $f(\alpha)\cdot f\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{8}$，且 $\dfrac{5\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{3\pi}{2}$，求 $f(\alpha)+f\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)$的值；

(3)若 $f\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=2f(\alpha)$，求$f(\alpha)\cdot f\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)$的值.

解：(1) $f(\alpha)=\dfrac{-\cos\alpha\sin\alpha(-\tan\alpha)}{\tan\alpha(-\sin\alpha)}=-\cos\alpha$.

(2) $f\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha$，

因为 $f(\alpha)\cdot f\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{8}$，

所以 $\cos\alpha\cdot\sin\alpha=\dfrac{1}{8}$，

可得 $\left[f(\alpha)+f\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\right]^2=(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\dfrac{3}{4}$.

由 $\dfrac{5\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{3\pi}{2}$，得 $\cos\alpha>\sin\alpha$，

所以 $f(\alpha)+f\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha-\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(3)由(2)及 $f\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=2f(\alpha)$，得 $\sin\alpha=-2\cos\alpha$，

由 $\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\\ \sin\alpha=-2\cos\alpha,\end{cases}$ 解得 $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{5}$，

所以 $f(\alpha)\cdot f\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha\cos\alpha=2\cos^2\alpha=\dfrac{2}{5}$.

5.4　三角函数的图象与性质

5.4.1　正弦函数、余弦函数的图象

学习任务目标

1.了解利用单位圆画正弦曲线的方法.

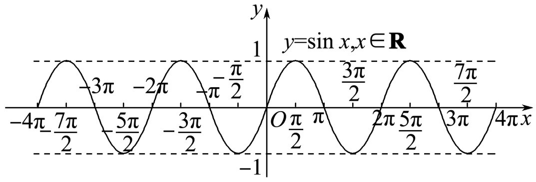
2.理解正弦曲线与余弦曲线之间的关系，能用“五点法”作出简单的正弦、余弦曲线.

3.会用正弦曲线与余弦曲线解决简单问题.

问题式预习

知识点一　正弦曲线

正弦函数 $y=\sin x,x\in\mathbf{R}$ 的图象叫做正弦曲线，是一条“波浪起伏”的连续光滑曲线.



知识点二　正弦函数图象的画法

(1)单位圆法：

①利用单位圆画出 $y=\sin x,x\in[0,2\pi]$的图象；

②将图象向左、右平行移动(每次移动 2π 个单位长度).

(2)五点法：

①描出正弦函数图象在$[0,2\pi]$上的五个关键点：$(0,0)$，$\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$，$(\pi,0)$，$\left(\dfrac{3\pi}{2},-1\right)$，$(2\pi,0)$，用光滑的

曲线连接；

②将所得图象向左、右平行移动(每次移动 2π 个单位长度).

[微训练]

1. 判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)正弦函数 $y=\sin x$ 的图象向左、右和上、下无限伸展.　(×)

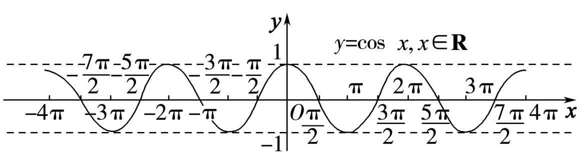
(2)函数 $y=\sin x$ 与 $y=\sin(-x)$ 的图象完全相同.　(×)

(3)正弦函数 $y=\sin x$ 的图象关于(0,0)对称.　(√)

2. 函数 $y=\sin x$ 的图象与直线 $y=-\dfrac{1}{2}$ 的交点有无数个.

知识点三　余弦曲线

余弦函数 $y=\cos x$,$x\in\mathbf{R}$ 的图象叫做余弦曲线.它是与正弦曲线具有相同形状的“波浪起伏”的连续光滑曲线.



知识点四　余弦函数图象的画法

(1)要得到 $y=\cos x$ 的图象,只需把 $y=\sin x$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位长度即可,这是由于 $\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(2)用“五点法”画余弦函数 $y=\cos x$ 在$[0,2\pi]$上的图象时,所取的五个关键点分别为$(0,1)$,$\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$,$(\pi,-1)$,$\left(\dfrac{3\pi}{2},0\right)$,$(2\pi,1)$,再用光滑的曲线连接.

[微训练]

1. 判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)余弦函数 $y=\cos x$ 的图象与 x 轴有无数个交点.　(√)

(2)余弦函数 $y=\cos x$ 的图象与 $y=\sin x$ 的图象形状和位置都不一样.　(×)

(3)函数 $y=\sin x$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位长度可得到函数 $y=\cos x$ 的图象.　(×)

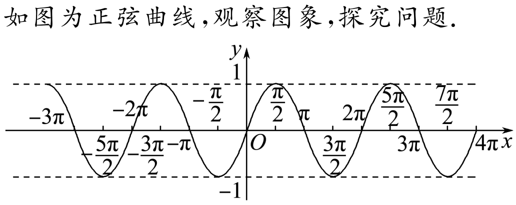
2. 函数 $y=\cos x$,$x\in(0,2\pi)$的图象与直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 的交点个数为2.

任务型课堂

任务一　对正弦、余弦函数图象的认识

[探究活动]

如图为正弦曲线,观察图象,探究问题.



探究1: $y=\sin x$,$x\in[0,2\pi]$的图象与 $y=\sin x$,$x\in[2\pi,4\pi]$的图象有何关系?

提示: 它们的形状相同位置不同,将 $y=\sin x$,$x\in[0,2\pi]$的图象向右平移 2π 个单位长度与 $y=\sin x$,$x\in[2\pi,4\pi]$的图象重合.

探究2: 观察正弦曲线 $y=\sin x$,$x\in\mathbf{R}$,你能发现哪些规律?

提示: (1)正弦曲线夹在两条直线 $y=-1$ 和 $y=1$ 之间.

(2)每 2π 个单位长度图象重复出现.

(3)正弦曲线在 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$附近,曲线“陡”一些;在 $x=kx+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$附近,曲线“平缓”一些.

[评价活动]

1. 对于正弦函数 $y=\sin x$ 的图象,下列说法错误的是　(　　)

A.向左、右无限伸展

B.与 $y=\cos x$ 的图象形状相同,只是位置不同

C.与 x 轴有无数个交点

D.关于 y 轴对称

D　**解析:** 画出 $y=\sin x$ 的图象(图略),由图可知,A,B,C 三个选项说法正确,D 选项说法错误.故选 D.

2. 在同一平面直角坐标系内,函数 $y=\sin x$,$x\in[0,2\pi]$与 $y=\cos x$,$x\in[2\pi,4\pi]$的图象　(　　)

A.重合

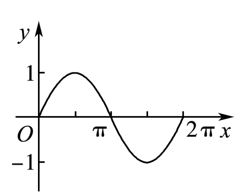
B.形状相同,位置不同

C.关于 y 轴对称

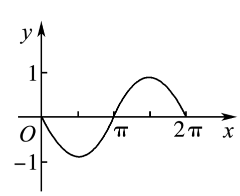
D.形状不同,位置不同

D　**解析:** 分别画出 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的图象(图略),由图可知,$y=\sin x$,$x\in[0,2\pi]$与 $y=\cos x$,$x\in[2\pi,4\pi]$的图象形状不同,位置不同.

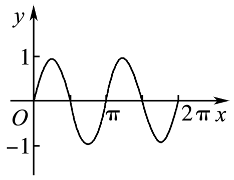
3. 函数 $y=\sin(-x)$,$x\in[0,2\pi]$的简图是　(　　)



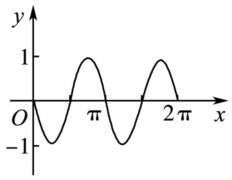
A



B



C



D

B　**解析**：$y=\sin(-x)$，$x\in[0,2\pi]$的图象可看作由$y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$的图象关于x轴对称后得到.故选B.

【类题通法】

正弦、余弦函数图象的关注点

(1)正弦曲线、余弦曲线的形状相同，只是在坐标系中的位置不同，相互可以通过平移得到.

(2)注意正弦曲线、余弦曲线在$[-2\pi,2\pi]$内的特殊点(最高点、最低点及与x轴的交点)的坐标，以及特殊点之间的横向距离.

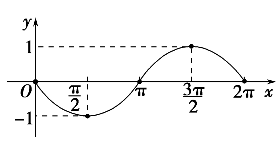
任务二　五点法作图

1.作出函数$y=-\sin x(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$的简图.

解：列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$-\sin x$	0	-1	0	1	0

描点并用光滑的曲线连接起来，如图.

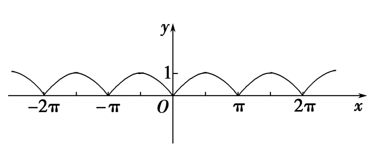


2.作出函数$y=\sqrt{1-\cos^2 x}$的图象.

解：将$y=\sqrt{1-\cos^2 x}$化为$y=|\sin x|$，即

$$y=\begin{cases}\sin x,2k\pi\leqslant x\leqslant\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z},\\-\sin x,\pi+2k\pi<x<2\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

其图象如图.

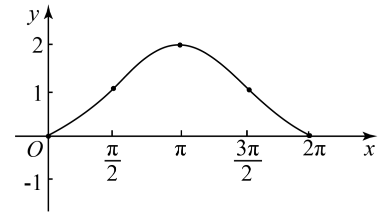


3.用“五点法”作出函数$y=1-\cos x(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$的简图.

解：列表如下：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$1-\cos x$	0	1	2	1	0

描点并用光滑的曲线连接起来，如图.



【类题通法】

作正弦、余弦型函数图象的步骤

列表：在[0,2π]内先分别找出确定函数图象的五个关键点，在表中列出相应的五点的坐标

↓

描点：根据所列出的五个关键点的坐标，在坐标系中描出相应的点

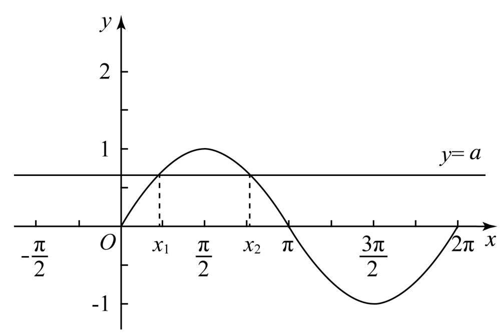
↓

连线：用光滑的曲线将所描出的五个关键点连接起来，便得到所求函数的图象

任务三　正弦、余弦函数图象的应用

［探究活动］

探究：如图，$y=\sin x$在$[0,2\pi]$上的图象与直线$y=a$交点的横坐标分别为x_1，x_2.



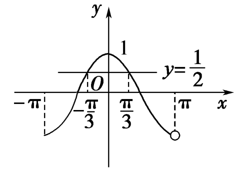
根据图象，不等式$\sin x\geqslant a$在$[0,2\pi]$上的解是什么？

提示：由图象可知，当$x_1\leqslant x\leqslant x_2$时，$\sin x\geqslant a$.所以$\sin x\geqslant a$的解为$x_1\leqslant x\leqslant x_2$.

［评价活动］

1.若$x\in[-\pi,\pi)$，则满足$\cos x\geqslant\frac{1}{2}$的$x$的取值范围是________.

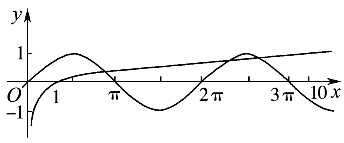
$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$　**解析**：如图，由题意得$x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$.



2.方程$\sin x=\lg x$的解的个数是________.

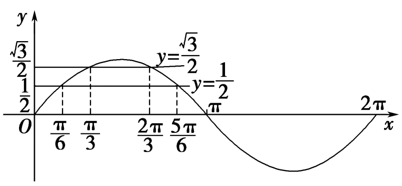
3　**解析**：画出函数$y=\sin x$与$y=\lg x$的图象，如图所示.

由图象可知方程$\sin x=\lg x$的解有3个.



3. 利用正弦曲线,求不等式$\frac{1}{2}<\sin x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$的解集.

解:首先作出 $y=\sin x$ 在$[0,2\pi]$上的图象,如图所示,作直线 $y=\frac{1}{2}$,根据特殊角的正弦值,可知该直线与 $y=\sin x$,$x\in[0,2\pi]$的图象的交点横坐标为$\frac{\pi}{6}$和$\frac{5\pi}{6}$.



作直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$,该直线与 $y=\sin x$,$x\in[0,2\pi]$的图象的交点横坐标为$\frac{\pi}{3}$和$\frac{2\pi}{3}$.

观察图象可知,在$[0,2\pi]$上,当$\frac{\pi}{6}<x\leqslant\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}\leqslant x<\frac{5\pi}{6}$时,不等式$\frac{1}{2}<\sin x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$成立.

所以$\frac{1}{2}<\sin x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$的解集为$\left\{x\middle|\frac{\pi}{6}+2k\pi<x\leqslant\frac{\pi}{3}+2k\pi\text{ 或 }\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leqslant x<\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

4. 用"五点法"作出函数 $y=1-2\sin x$,$x\in[-\pi,\pi]$的简图,并回答下列问题.

(1)观察函数图象,写出满足下列条件的 x 的取值范围.

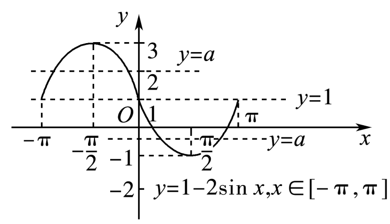
①$y>1$;②$y<1$.

(2)若直线 $y=a$ 与 $y=1-2\sin x$,$x\in[-\pi,\pi]$的图象有两个交点,求实数 a 的取值范围.

解:列表如下:

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	-1	0	1	0
$1-2\sin x$	1	3	1	-1	1

描点并用光滑的曲线连接起来,如图.



(1)由图可知,①当 $x\in(-\pi,0)$时,$y>1$;②当 $x\in(0,\pi)$时,$y<1$.

(2)如图所示,当直线 $y=a$ 与 $y=1-2\sin x$ 的图象有两个交点时,$1<a<3$ 或$-1<a<1$.所以实数 a 的取值范围是$\{a|1<a<3$ 或$-1<a<1\}$.

【类题通法】

利用图象解 $\sin x>a$(或 $\cos x>a$)的步骤

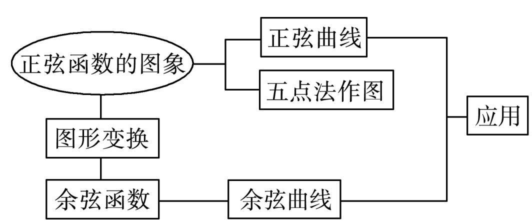
(1)作出 $y=a$,$y=\sin x$(或 $y=\cos x$)的图象;

(2)根据图象确定 $\sin x=a$(或 $\cos x=a$)时的 x 的值;

(3)确定 $\sin x>a$(或 $\cos x>a$)的解集.

注意:如果没有限定 x 的范围,一般先利用图象求出$[0,2\pi]$内 x 的取值范围,然后根据终边相同角的同一三角函数值相等,写出不等式的解集.

提质归纳



课后素养评价(四十七)

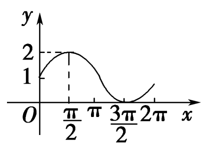
基础性·能力运用

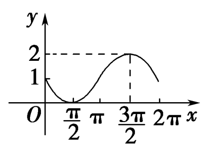
1. 用五点法作函数 $y=2\sin x-1$ 的图象时，首先应描出的五点的横坐标可以是　　(A)

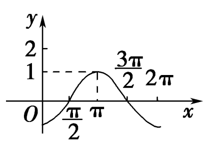
A. $0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$　　B. $0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi$

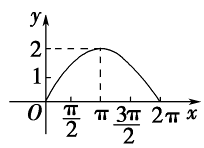
C. $0,\pi,2\pi,3\pi,4\pi$　　D. $0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}$

2. 函数 $y=1-\sin x(x\in[0,2\pi])$ 的大致图象是　(B)


A


B


C

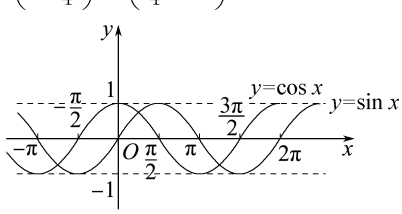

D

3. (多选)下列区间内 $\cos x>\sin x$ 成立的是　(　　)

A. $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$

C. $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right)$　　D. $\left(\frac{\pi}{4},2\pi\right)$

AC　**解析**：如图，在同一平面直角坐标系中画出正弦、余弦函数的图象，在 $(0,2\pi)$ 上，当 $\cos x=\sin x$ 时，$x=\frac{\pi}{4}$ 或 $x=\frac{5\pi}{4}$，结合图象可知满足 $\cos x>\sin x$ 的是 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 和 $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right)$.



4. 正弦函数 $y=\sin x(x\in[0,2))$ 的图象与直线 $y=1$ 交点的个数为　(　　)

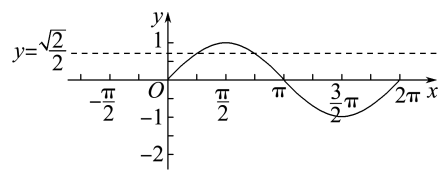
A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

B　**解析**：正弦函数 $y=\sin x(x\in[0,2))$ 的图象与直线 $y=1$ 交点的个数，就是 $\sin x=1,x\in[0,2)$ 时解的个数，可知 $x=\frac{\pi}{2}$.

5. 已知函数 $f(x)=3+2\cos x$ 的图象经过点 $\left(\frac{\pi}{3},b\right)$，则 $b=$ 4.

6. 不等式 $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2},x\in(0,2\pi)$ 的解集为________.

$\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$　**解析**：因为 $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2},x\in(0,2\pi)$，又因为函数 $y=\sin x$ 的图象与直线 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 如图所示.



所以 $\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}$，所以不等式 $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2},x\in(0,2\pi)$ 的解集为 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$.

7. 下列函数：① $y=\sin x-1$，② $y=|\sin x|$，③ $y=-\cos x$，④ $y=\sqrt{\cos^2 x}$，⑤ $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$ 中，图象与函数 $y=\sin x$ 的图象形状完全相同的有①③.

8. 用五点法作出下列函数在 $[0,2\pi]$ 上的图象，并说明它们与 $y=\sin x,x\in[0,2\pi]$ 的图象的关系.

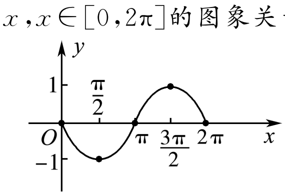
(1) $y=-\sin x$；

(2) $y=\sin x-1$.

解：(1)找五个关键点，列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$-\sin x$	0	-1	0	1	0

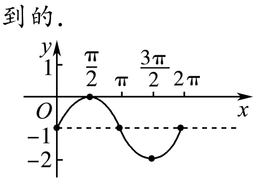
描点、连线，如图所示，$y=-\sin x,x\in[0,2\pi]$ 的图象与 $y=\sin x,x\in[0,2\pi]$ 的图象关于 x 轴对称.



(2)找五个关键点，列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\sin x-1$	-1	0	-1	-2	-1

描点、连线，如图所示，$y=\sin x-1,x\in[0,2\pi]$ 的图象是将 $y=\sin x,x\in[0,2\pi]$ 的图象向下平移 1 个单位长度得到的.

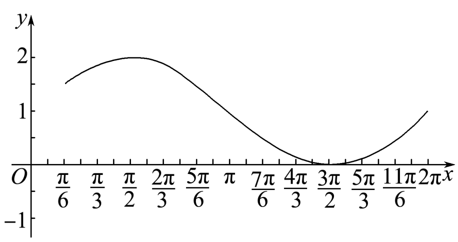


综合性·创新提升

1.(多选)函数 $y=1+\sin x, x\in\left(\frac{\pi}{6},2\pi\right)$ 的图象与直线 $y=t$(t 为常数)的交点可能有 (　　)

A.0 个　　B.1 个　　C.2 个　　D.3 个

ABC　**解析**:由题意 $y=1+\sin x, x\in\left(\frac{\pi}{6},2\pi\right)$ 的图象如图.



可得当 $t>2$ 或 $t<0$ 时,交点个数为 0;

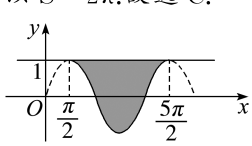
当 $t=2$ 或 $t=0$ 或 $t\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$ 时,交点个数为 1;

当 $t\in\left(\frac{3}{2},2\right)$ 或 $t\in(0,1)$ 时,交点个数为 2.

2.若函数 $y=\sin x, x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$ 的图象与直线 $y=1$ 围成一个封闭图形,则这个封闭图形的面积是 (　　)

A.2　　B.4　　C.2π　　D.4π

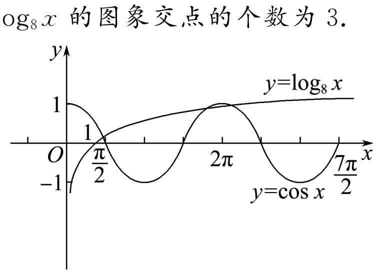
C　**解析**:如图,由正弦函数图象的对称性知,所围成平面图形的面积等于长为 $\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=2\pi$,宽为 1 的矩形的面积,所以 $S=2\pi$.故选 C.



3.方程 $\cos x=\log_8 x$ 的实数解的个数是 (　　)

A.4　　B.3　　C.2　　D.1

B　**解析**:方程 $\cos x=\log_8 x$ 的实数解的个数,即函数 $y=\cos x$ 的图象和函数 $y=\log_8 x$ 的图象交点的个数.如图,数形结合可得函数 $y=\cos x$ 的图象和函数 $y=\log_8 x$ 的图象交点的个数为 3.



4.有下列命题:

①$y=\sin|x|$ 的图象与 $y=\sin x$ 的图象关于 y 轴对称;

②$y=\cos(-x)$ 的图象与 $y=\cos|x|$ 的图象重合;

③$y=|\sin x|$ 的图象与 $y=\sin(-x)$ 的图象关于 x 轴对称;

④$y=\cos x$ 的图象与 $y=\cos(-x)$ 的图象关于 y 轴对称.

其中正确命题的序号是②④.

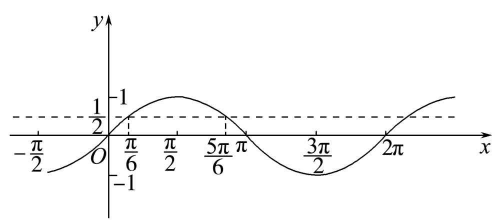
5.函数 $y=\sqrt{\log_2\frac{1}{\sin x}-1}$ 的定义域为________.

$\left\{x\middle|2k\pi<x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{x\middle|2k\pi+\frac{5\pi}{6}\leqslant x<2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$

解析:为使函数有意义,需满足 $\begin{cases}\log_2\frac{1}{\sin x}-1\geqslant 0,\\ \sin x>0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}\sin x\leqslant\frac{1}{2},\\ \sin x>0.\end{cases}$

正弦函数 $y=\sin x$ 的图象如图所示.



由图可知定义域为 $\left\{x\middle|2k\pi<x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{x\middle|2k\pi+\frac{5\pi}{6}\leqslant x<2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

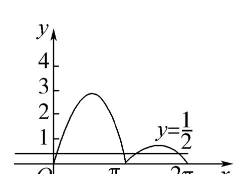
6.函数 $y=\sin x+2|\sin x|, x\in[0,2\pi]$ 的图象与直线 $y=\frac{1}{2}$ 的交点共有______个.若函数图象与直线 $y=k$ 有且仅有 2 个不同的交点,则 k 的取值范围为________.

4　(1,3)　**解析**:当 $x\in[0,\pi]$ 时,$\sin x\geqslant 0$;

则 $y=\sin x+2|\sin x|=3\sin x$;

当 $x\in[\pi,2\pi]$ 时,$\sin x\leqslant 0$,则 $y=\sin x+2|\sin x|=-\sin x$.

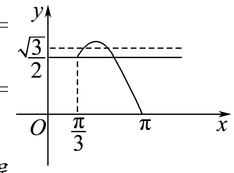
在同一直角坐标系中画出 $y=\sin x+2|\sin x|, x\in[0,2\pi]$ 与 $y=\frac{1}{2}$ 的图象(如图所示),可以看到在 $[0,2\pi]$ 内两者有 4 个交点,当 $1<k<3$ 时,仅有 2 个交点.



7. 方程 $\sin x=\frac{1-a}{2}$ 在 $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ 上有两个实数根，求 a 的取值范围.

解：设 $y_1=\sin x, x\in\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$，$y_2=\frac{1-a}{2}$.

$y_1=\sin x, x\in\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ 的图象如图.



由图象可知，当 $\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\frac{1-a}{2}<1$，

即 $-1<a\leqslant 1-\sqrt{3}$ 时，$y_1=\sin x, x\in\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ 的图象与 $y_2=\frac{1-a}{2}$ 的图象有两个交点，即方程 $\sin x=\frac{1-a}{2}$ 在 $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ 上有两个实根.

5.4.2　正弦函数、余弦函数的性质

第1课时　正弦函数、余弦函数的周期性与奇偶性

学习任务目标

1. 了解周期函数、周期、最小正周期的定义.

2. 会求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 及 $y=A\cos(\omega x+\varphi)(A\neq 0)$ 的周期.

3. 掌握函数 $y=\sin x, y=\cos x$ 的奇偶性，会判断简单三角函数的奇偶性.

问题式预习

知识点一　周期性

1. 函数的周期性

(1)一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个<u>非零常数 T</u>，使得对每一个 $x\in D$，都有 $x+T\in D$，且 <u>$f(x+T)=f(x)$</u>，那么函数 $f(x)$ 就叫做周期函数.<u>非零常数 T</u> 叫做这个函数的周期.

(2)如果在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在一个<u>最小的正数</u>，那么这个最小正数叫做 $f(x)$ 的<u>最小正周期</u>.

2. 正弦函数、余弦函数的周期性

由 $\sin(x+2k\pi)=$<u>$\sin x$</u>，$\cos(x+2k\pi)=$<u>$\cos x$</u>$(k\in\mathbf{Z})$ 知，$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 都是<u>周期</u>函数，$2k\pi(k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq 0)$ 都是它们的周期，且它们的最小正周期都是 2π.

[微训练]

1. 判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").

(1)函数 $f(x)=x^2$ 满足 $f(-3+6)=f(-3)$，所以 $f(x)=x^2$ 是以6为周期的周期函数.　(×)

(2)周期函数 $y=f(x)$ 的定义域可以为 $[a,b](a,b\in\mathbf{R})$.　(×)

(3)任何周期函数都有最小正周期.　(×)

2. 函数 $y=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期为2，则 ω 的值为<u>$\pm\pi$</u>.

3. 函数 $y=\cos\frac{(1-x)}{2}\pi$ 的最小正周期是<u>4</u>.

知识点二　正弦函数、余弦函数的奇偶性

(1)对于 $y=\sin x, x\in\mathbf{R}$，恒有 $\sin(-x)=-\sin x$，所以正弦函数 $y=\sin x$ 是<u>奇</u>函数，正弦曲线关于<u>原点</u>对称.

(2)对于 $y=\cos x, x\in\mathbf{R}$，恒有 $\cos(-x)=\cos x$，所以余弦函数 $y=\cos x$ 是<u>偶</u>函数，余弦曲线关于<u>y 轴</u>对称.

[微训练]

1. 函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$　(B)

A.是奇函数

B.是偶函数

C.既是奇函数又是偶函数

D.是非奇非偶函数

2. 设函数 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right), x\in\mathbf{R}$，则 $f(x)$ 是　(A)

A.最小正周期为 π 的奇函数

B.最小正周期为 π 的偶函数

C.最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的奇函数

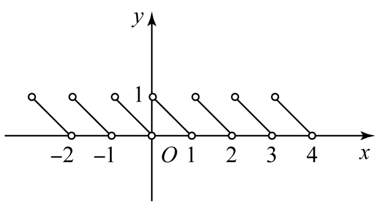
D.最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的偶函数

任务型课堂

任务一　正弦函数、余弦函数的周期性

[探究活动]

探究 1：如图是函数 $f(x)$ 的部分图象，观察图象，函数图象每相隔多少个单位长度重复出现？



提示：每相隔 1 个单位重复出现.

探究 2：由 $\begin{cases}\sin(x+2k\pi)=\sin x,\\ \cos(x+2k\pi)=\cos x\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$，结合正(余)弦曲线，可以看出正(余)弦函数具有怎样的特征？图象变化趋势是怎样的？

提示：自变量 x 增加 2π 的整数倍时，函数值重复出现，图象发生“周而复始”的变化.

[评价活动]

1. 若函数 $y=\cos\left(\frac{k}{4}x+\frac{\pi}{3}\right)(k>0)$ 的最小正周期不大于 2，则正整数 k 的最小值是　(　　)

A.10　　B.11　　C.12　　D.13

D　**解析**：$T=\frac{2\pi}{\frac{k}{4}}\leqslant 2$，即 $k\geqslant 4\pi$. 所以正整数 k 的最小值是 13.

2. 求下列三角函数的最小正周期.

(1) $y=\cos 2x$；

(2) $y=3\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$；

(3) $y=|\sin x|(x\in\mathbf{R})$.

解：(1)(方法一)令 $z=2x$，

则 $f(x)=\cos 2x=\cos z=\cos(z+2\pi)=\cos(2x+2\pi)=\cos[2(x+\pi)]$，

即 $f(x+\pi)=f(x)$，所以 $T=\pi$.

(方法二)因为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，所以函数 $y=\cos 2x$ 的周期为 π.

(2)(方法一)令 $z=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}$，

则 $f(x)=3\sin z=3\sin(z+2\pi)=3\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}+2\pi\right)=3\sin\left(\frac{x+4\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=f(x+4\pi)$，

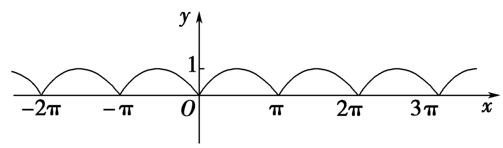
所以 $T=4\pi$.

(方法二)由于 $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$，

故函数 $y=3\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ 的周期为 4π.

(3) $y=|\sin x|=\begin{cases}\sin x, 2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi,\\ -\sin x, 2k\pi+\pi<x<2k\pi+2\pi\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$.

其图象如图所示.



所以该函数的最小正周期为 π.

【类题通法】

求三角函数周期的方法

(1)定义法：利用周期函数的定义求解.

(2)公式法：形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$($A,\omega,\varphi$ 是常数，$A\neq 0,\omega\neq 0$)的函数，最小正周期 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$.

(3)图象法：通过观察函数图象求其周期.

任务二　正弦函数、余弦函数的奇偶性

判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=|\sin x|+\cos x$；

(2) $f(x)=\cos(2\pi-x)-x^3\cdot\sin x$；

(3) $f(x)=x^2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$；

(4) $f(x)=\sin(\cos x)$.

解：(1)函数的定义域为 $\mathbf{R}$，

又 $f(-x)=|\sin(-x)|+\cos(-x)=|\sin x|+\cos x=f(x)$，

所以 $f(x)$ 是偶函数.

(2)函数的定义域为 $\mathbf{R}$，

因为 $f(x)=\cos x-x^3\cdot\sin x$，

所以 $f(-x)=\cos(-x)-(-x)^3\cdot\sin(-x)=\cos x-x^3\cdot\sin x=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(3)函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

因为 $f(x)=x^2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-x^2\sin x$，

所以 $f(-x)=-(-x)^2\sin(-x)=x^2\sin x=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(4)函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，

因为 $f(-x)=\sin[\cos(-x)]=\sin(\cos x)=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数.

【类题通法】

函数奇偶性的判断方法

(1)判断函数奇偶性应从两个方面入手：一看函数的定义域；二看 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系.

(2)对于三角函数奇偶性的判断，可根据诱导公式先将函数化简后再判断.

任务三　正弦函数、余弦函数性质的综合应用

[探究活动]

探究1：已知 $f(x)$ 是 **R** 上的奇函数，且 $f(1)=2$，$f(x+3)=f(x)$，则 $f(8)=$________.

提示：因为 $f(x+3)=f(x)$，

所以 $f(x)$ 的周期为3.

又 $f(-x)=-f(x)$，

所以 $f(8)=f(-1+3\times3)=f(-1)=-f(1)=-2$.

答案：-2

探究2：若定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 既是偶函数又是周期函数，$f(x)$ 的最小正周期是 π，且当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)=\sin x$，则 $f\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)=$________.

提示：因为 $f(x)$ 的最小正周期是 π，

所以 $f\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)=f\left(\dfrac{5\pi}{3}-2\pi\right)=f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

又因为 $f(x)$ 是 **R** 上的偶函数，

所以 $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $f\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

答案：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

[评价活动]

1. 若 $f(x)$ 是以 $\dfrac{\pi}{2}$ 为一个周期的奇函数，且 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=1$，则 $f\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)=$______.

-1　**解析**：因为 $f(x)$ 是以 $\dfrac{\pi}{2}$ 为一个周期的奇函数，所以 $f\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)=f\left(-\dfrac{5\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$.

2. 设函数 $f(x)=\sin\dfrac{\pi}{3}x$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\ 022)=$________.

0　**解析**：因为 $f(x)=\sin\dfrac{\pi}{3}x$ 的周期 $T=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$，

所以 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\ 020)+f(2\ 021)+f(2\ 022)+f(2\ 022)$

$=337[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)]$

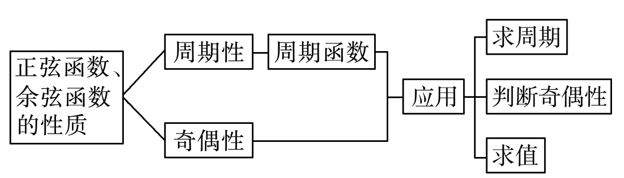
$=337\left(\sin\dfrac{\pi}{3}+\sin\dfrac{2\pi}{3}+\sin\pi+\sin\dfrac{4\pi}{3}+\sin\dfrac{5\pi}{3}+\sin 2\pi\right)=337\times0=0$.

【类题通法】

1. 已知函数的奇偶性求函数值时，若函数是三角函数，则先利用诱导公式把函数化为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)(A\neq0,\omega>0)$ 的形式，再根据正弦函数与余弦函数的奇偶性求函数值.注意所给的函数中自变量的范围.

2. 利用周期函数的性质求函数值时，先把自变量加减整数个周期，再结合函数的奇偶性等求解.

▶ 提质归纳



课后素养评价（四十八）

基础性·能力运用

1. 函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x\in\mathbf{R}$ 的最小正周期为　　(　　)

A. $\dfrac{\pi}{2}$　　B. π　　C. 2π　　D. 4π

D　**解析**：由正弦函数的周期公式可得 $T=\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$.

2. 函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 的最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$，则 ω 的值为　　(　　)

A. 4　　B. 2　　C. 1　　D. $\dfrac{1}{2}$

A　**解析**：因为 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 的最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$，又 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$.

3. 下列函数中是奇函数且最小正周期是 π 的函数是　　(　　)

A. $y=\cos|2x|$　　B. $y=|\sin x|$

C. $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2x\right)$　　D. $y=\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2x\right)$

D　**解析**：$y=\cos|2x|$ 是偶函数，$y=|\sin x|$ 是偶函数，$y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2x\right)=\cos 2x$ 是偶函数，$y=\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2x\right)=-\sin 2x$ 是奇函数，根据公式求得其最小正周期 $T=\pi$.

4. 已知函数 $f(x)=\sqrt{2\sin x-1}$，则　　(　　)

A. $f(x)$ 是奇函数

B. $f(x)$ 既是奇函数也是偶函数

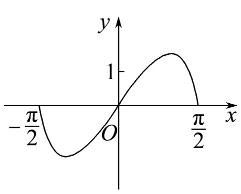
C. $f(x)$ 是偶函数

D. $f(x)$ 是非奇非偶函数

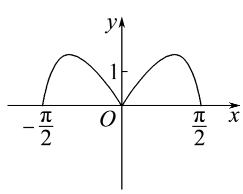
D　**解析**：由 $2\sin x-1\geqslant 0$，即 $\sin x\geqslant\dfrac{1}{2}$，得函数定义域为 $\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{6},2k\pi+\dfrac{5}{6}\pi\right](k\in\mathbf{Z})$，此定义域在 x 轴上表示的区间不关于原点对称.

所以该函数不具有奇偶性，为非奇非偶函数.

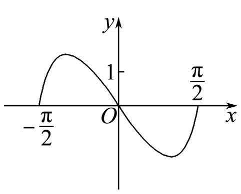
5. (2022·全国甲卷(理))函数 $y=(3^x-3^{-x})\cos x$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的图象大致为　　(　　)



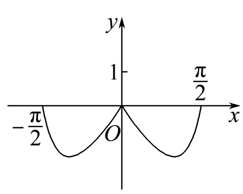
A



B



C



D

A　**解析**：令 $f(x)=(3^x-3^{-x})\cos x$，$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，

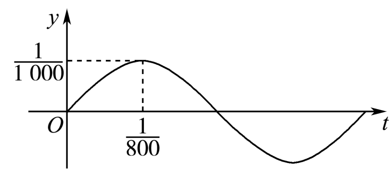
则 $f(-x)=(3^{-x}-3^x)\cos(-x)=-(3^x-3^{-x})\cdot\cos x=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 为奇函数，排除 BD；

又当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$3^x-3^{-x}>0$，$\cos x>0$，

所以 $f(x)>0$，排除 C.故选 A.

6. 音叉是呈"Y"形的钢质或铝合金发声器，各种音叉可因其质量和叉臂长短、粗细不同而在振动时发出不同频率的纯音.敲击某个音叉时，在一定时间内，音叉上点 P 离开平衡位置的位移 y 与时间 t 的函数关系为 $y=\dfrac{1}{1\,000}\sin\omega t$.如图是该函数在一个周期内的图象，根据图中数据可确定 ω 的值为　　(D)



A. 200　　B. 400

C. 200π　　D. 400π

7. (多选)关于函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)(\varphi\in\mathbf{R})$ 有以下说法，其中正确的是　　(　　)

A. 对任意 φ，$f(x)$ 都是非奇非偶函数

B. 存在 φ，使 $f(x)$ 是偶函数

C. 存在 φ，使 $f(x)$ 是奇函数

D. 对任意 φ，$f(x)$ 都不是偶函数

BC　**解析**：$\varphi=0$ 时，$f(x)=\sin x$ 是奇函数；$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x)=\cos x$ 是偶函数，故 B，C 正确.

8. 已知函数 $f(x)$ 对于任意实数 x 满足条件 $f(x+2)=-\dfrac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$.

(1)求证：函数 $f(x)$ 是周期函数；

(2)若 $f(1)=-5$，求 $f(f(5))$ 的值.

(1)**证明**：因为 $f(x+2)=-\dfrac{1}{f(x)}$，

所以 $f(x+4)=-\dfrac{1}{f(x+2)}=-\dfrac{1}{-\dfrac{1}{f(x)}}=f(x)$，

所以 $f(x)$ 是周期函数，4 就是它的一个周期.

(2)**解**：因为 4 是 $f(x)$ 的一个周期，

所以 $f(5)=f(1)=-5$.

所以 $f(f(5))=f(-5)=f(-1)=\dfrac{-1}{f(-1+2)}=\dfrac{-1}{f(1)}=\dfrac{1}{5}$.

综合性·创新提升

1.（多选）下列函数是偶函数的是　（BC）

A. $f(x)=\sqrt{x}$　　B. $f(x)=|\sin x|$

C. $f(x)=\cos x$　　D. $f(x)=e^{x}-e^{-x}$

2. 已知函数 $f(x)=x^3-3\sin x+2$. 若 $f(m)=3$，则 $f(-m)=$　（　）

A. -3　B. -1　C. 1　D. 2

C　**解析**：因为 $y=x^3$，$y=\sin x$ 是奇函数，$f(x)=x^3-3\sin x+2$，所以 $f(m)+f(-m)=4$. 所以 $f(-m)=4-f(m)=1$. 故选 C.

3. 若函数 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$ 是奇函数，则 φ 的值可以是　（　）

A. $\frac{5\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{2}$

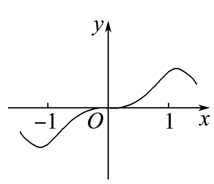
C. $-\frac{2\pi}{3}$　　D. $-\frac{\pi}{2}$

C　**解析**：若函数 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$ 是奇函数，则 $-\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi$，$\varphi=\frac{\pi}{3}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，当 $k=-1$ 时，$\varphi=-\frac{2\pi}{3}$.

4. 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$，最小正周期为 $\frac{3\pi}{2}$ 的函数. 当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi$ 时，$f(x)$ 满足 $f(x)=\begin{cases}\cos x, -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0,\\ \sin x, 0<x\leqslant\pi,\end{cases}$ 则 $f\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$ 的值等于　（B）

A. 1　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　C. 0　D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. 已知函数 $f(x)=x^3$，$g(x)=\cos x$，则图象如图所示的函数可能是　（　）



A. $y=f(x)g(x)$

B. $y=\frac{f(x)}{g(x)}$

C. $y=f(x)+g(x)-1$

D. $y=f(x)-g(x)+1$

A　**解析**：$f(x)=x^3$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\mathbf{R}$，且为奇函数，$g(x)=\cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $[-1,1]$，且为偶函数.

由图象可知，函数定义域为 $\mathbf{R}$，而 $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ 的定义域为 $g(x)\neq 0$，故 B 错误；

由函数图象可知该函数为奇函数，而 C，D 选项函数不具有奇偶性，对于 A，因为 $f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)$，故 $y=f(x)g(x)$ 为奇函数，所以 A 正确.

6. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$，则“$\omega=2$”是“$f(x)$ 的最小正周期是 π”的　（　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

A　**解析**：$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期 $T=\left|\frac{2\pi}{\omega}\right|=\pi$，解得 $\omega=\pm 2$.

故 $\omega=2$ 是 $f(x)$ 的最小正周期是 π 的充分不必要条件. 故选 A.

7. 设函数 $f(x)=3\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，$\omega>0$，$x\in(-\infty,+\infty)$，且以 $\frac{\pi}{2}$ 为最小正周期. 若 $f\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{9}{5}$，则 $\sin\alpha$ 的值为________.

$\pm\frac{4}{5}$　**解析**：因为 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，$\omega>0$，

所以 $\omega=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$. 所以 $f(x)=3\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$.

由 $f\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{12}\right)=3\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=3\cos\alpha=\frac{9}{5}$，

得 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$. 所以 $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\frac{4}{5}$.

8. 已知 $f(x)$ 是以 π 为一个周期的偶函数，且当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)=1-\sin x$. 求当 $x\in\left[\frac{5\pi}{2},3\pi\right]$ 时，$f(x)$ 的解析式.

解：当 $x\in\left[\frac{5\pi}{2},3\pi\right]$ 时，$3\pi-x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

因为当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)=1-\sin x$，

所以 $f(3\pi-x)=1-\sin(3\pi-x)=1-\sin x$.

又因为 $f(x)$ 是以 π 为一个周期的偶函数，

所以 $f(3\pi-x)=f(-x)=f(x)$. 所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=1-\sin x$，$x\in\left[\frac{5\pi}{2},3\pi\right]$.

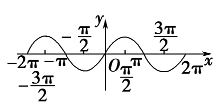
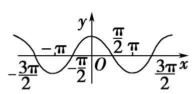
第 2 课时　正弦函数、余弦函数的单调性与最值

学习任务目标

1. 掌握正弦函数、余弦函数的单调性，能利用单调性比较大小.
2. 会求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$及 $y=A\cos(\omega x+\varphi)(A\neq 0)$的单调区间.
3. 掌握正弦函数、余弦函数的最值和值域.

问题式预习

知识点　正弦函数、余弦函数的性质

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$
定义域	$\mathbf{R}$	
值域	$[-1,1]$	
图象		
单调性	在$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$上单调递增；在$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$上单调递减	在$[-\pi+2k\pi,2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上单调递增；在$[2k\pi,\pi+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上单调递减
最值	当$x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，$y_{\min}=-1$；当$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，$y_{\max}=1$	当$x=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$时，$y_{\min}=-1$；当$x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，$y_{\max}=1$

续表

对称性	图象的对称轴为 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$	图象的对称轴为 $x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$
	图象的对称中心为 $(k\pi,0),k\in\mathbf{Z}$	图象的对称中心为 $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,0\right),k\in\mathbf{Z}$

[微训练]

1. 判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)正弦函数在定义域上是单调函数. (×)

(2)正弦函数在第一象限是增函数. (×)

(3)存在实数 x，使得 $\cos x=\sqrt{2}$. (×)

(4)余弦函数 $y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上是单调递减. (√)

2. 函数 $y=\cos x-1$ 的最小值是 (C)

A. 0　　B. 1

C. -2　　D. -1

3. 函数 $y=\sin 2x$ 的单调递减区间是 $\left[k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{3\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$.

任务型课堂

任务一　求正弦函数、余弦函数的单调区间

[探究活动]

探究：对形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A,\omega,\varphi$ 为常数，且 $A>0,\omega>0)$的函数，如何求其单调区间？

提示：由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\omega x+\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 解出 x 的范围，从而得到单调递增区间；

由$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\omega x+\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 解出 x 的范围，从而得到单调递减区间.

[评价活动]

1. 函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),x\in\mathbf{R}$ (　　)

A. 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增

B. 在$[0,\pi]$上单调递减

C.在$[-\pi,0]$上单调递减

D.在$[-\pi,\pi]$上单调递减

B　**解析**：因为 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$，

所以函数在$[-\pi,0]$上单调递增，在$[0,\pi]$上单调递减.

2.求函数 $y=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$的单调区间.

解：因为 $y=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，

所以函数 $y=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的单调递增区间、单调递减区间分别由下面的不等式确定.

$2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$①，

$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$②.

解①得 $2k\pi+\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{7\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，

解②得 $2k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$.

故函数 $y=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$的单调递增区间为$\left[2k\pi+\frac{3\pi}{4},2k\pi+\frac{7\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$，单调递减区间为$\left[2k\pi-\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$.

3.求函数 $y=1+2\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$的单调递增区间.

解：$y=1+2\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=1-2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

令 $u=x-\frac{\pi}{6}$，则根据复合函数的单调性知，所给函数的单调递增区间就是 $y=\sin u$ 的单调递减区间，

令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant u\leqslant 2k\pi+\frac{3}{2}\pi(k\in\mathbf{Z})$，

即 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3}{2}\pi(k\in\mathbf{Z})$，

即 $2k\pi+\frac{2}{3}\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5}{3}\pi(k\in\mathbf{Z})$，

故函数 $y=1+2\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$的单调递增区间是$\left[2k\pi+\frac{2}{3}\pi,2k\pi+\frac{5}{3}\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

【类题通法】

利用正弦函数、余弦函数求单调区间的方法

(1)数形结合：结合正弦、余弦函数的图象，找出它们的单调区间.

(2)整体代换：确定函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$的单调区间时，一般采用“换元法”，将 $\omega x+\varphi$ 看作一个整体，可令 $z=\omega x+\varphi$，即通过求 $y=A\sin z$ 的单调区间从而求出函数的单调区间.若 $\omega<0$，则可利用诱导公式转化为正数.

任务二　正弦函数、余弦函数单调性的应用

1.比较下列各组数的大小.

(1)$\sin\left(-\frac{37}{6}\pi\right)$与 $\sin\frac{49}{3}\pi$；

(2)$\cos 870^\circ$与 $\sin 980^\circ$.

解：(1)$\sin\left(-\frac{37}{6}\pi\right)=\sin\left(-6\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，

$\sin\frac{49}{3}\pi=\sin\left(16\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}$.

因为 $y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，

所以 $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)<\sin\frac{\pi}{3}$，

即 $\sin\left(-\frac{37}{6}\pi\right)<\sin\frac{49}{3}\pi$.

(2)$\cos 870^\circ=\cos(720^\circ+150^\circ)=\cos 150^\circ$，

$\sin 980^\circ=\sin(720^\circ+260^\circ)=\sin 260^\circ=\sin(90^\circ+170^\circ)=\cos 170^\circ$.

因为 $0^\circ<150^\circ<170^\circ<180^\circ$，$y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上单调递减，

所以 $\cos 150^\circ>\cos 170^\circ$，即 $\cos 870^\circ>\sin 980^\circ$.

2.已知 ω 是正数，函数 $f(x)=2\sin\omega x$ 在区间$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$上单调递增，求 ω 的取值范围.

解：由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\omega x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，$\omega>0$，得

$-\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是$\left[-\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega},\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

根据题意，得$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]\subseteq\left[-\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega},\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\right](k\in\mathbf{Z})$，

从而有$\begin{cases}-\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\leqslant-\frac{\pi}{3},\\ \frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\geqslant\frac{\pi}{4},\\ \omega>0,k\in\mathbf{Z},\end{cases}$　解得$\begin{cases}\omega\leqslant\frac{3}{2}-6k,\\ \omega\leqslant 2+8k,\\ \omega>0,k\in\mathbf{Z},\end{cases}$

令 $k=0$，得 $0<\omega\leqslant\frac{3}{2}$.

故 ω 的取值范围是$\left(0,\frac{3}{2}\right]$.

【类题通法】

比较三角函数值大小的步骤

(1)异名函数化为同名函数；

(2)利用诱导公式把已知角转化到同一单调区间上；

(3)利用函数的单调性比较大小.

任务三　正弦函数、余弦函数的最值和值域

［探究活动］

探究1:形如 $y=a\sin x+b(a\neq 0)$ 的函数如何求其最大(小)值?

提示:对 a 讨论求解,

当 $a>0$ 时,$y_{\max}=a+b$,$y_{\min}=-a+b$;

当 $a<0$ 时,$y_{\max}=-a+b$,$y_{\min}=a+b$.

探究2:形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的函数如何求其最值?

提示:形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的函数求最值通常利用“整体代换”,即令 $\omega x+\varphi=z$,将其转化为 $y=A\sin z$ 的形式,利用三角函数的有界性求最值.

［评价活动］

1.函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,$x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$的值域为______.

$[0,1]$　**解析**:因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$,所以 $2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$,所以 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\in[0,1]$,即函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,$x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$的值域为$[0,1]$.

2.求函数 $y=3-2\sin\frac{1}{2}x$ 的最值及取到最值时自变量 x 的集合.

解:因为 $-1\leqslant\sin\frac{1}{2}x\leqslant 1$,所以当 $\sin\frac{1}{2}x=-1$,即 $\frac{1}{2}x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,即 $x=4k\pi-\pi$,$k\in\mathbf{Z}$ 时,$y_{\max}=5$,

此时自变量 x 的集合为$\{x\mid x=4k\pi-\pi,k\in\mathbf{Z}\}$;

当 $\sin\frac{1}{2}x=1$,即$\frac{1}{2}x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,即 $x=4k\pi+\pi$,$k\in\mathbf{Z}$ 时,$y_{\min}=1$,

此时自变量 x 的集合为$\{x\mid x=4k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

3.求函数 $f(x)=2\sin^2x+2\sin x-\frac{1}{2}$,$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$的值域.

解:令 $t=\sin x$.因为 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$,所以 $t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$,则 $f(x)$ 可化为 $y=2t^2+2t-\frac{1}{2}=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-1$,$t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$.所以当 $t=\frac{1}{2}$ 时,$y_{\min}=1$;当 $t=1$ 时,$y_{\max}=\frac{7}{2}$.故 $f(x)$的值域是$\left[1,\frac{7}{2}\right]$.

4.求下列函数的最大值和最小值.

(1)$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$,$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;

(2)$y=-2\cos^2x+2\sin x+3$,$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$.

解:(1)当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时,$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$,故 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

所以 $f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值和最小值分别为 $1,-\frac{1}{2}$.

(2)$y=-2(1-\sin^2x)+2\sin x+3=2\sin^2x+2\sin x+1=2\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$.

因为 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$,所以$\frac{1}{2}\leqslant\sin x\leqslant 1$.

当 $\sin x=1$ 时,$y_{\max}=5$;

当 $\sin x=\frac{1}{2}$ 时,$y_{\min}=\frac{5}{2}$.

【类题通法】

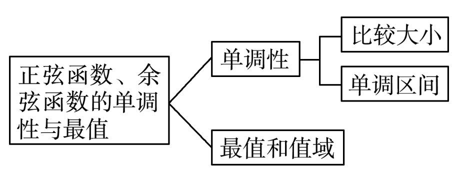
三角函数值域(最值)问题的求解方法

(1)形如 $y=a\sin x$(或 $y=a\cos x$)的函数,可利用正弦函数、余弦函数的有界性求解,注意对 a 正负的讨论.

(2)形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$(或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)+b$)的函数,可先由定义域求得 $\omega x+\varphi$ 的范围,然后求得 $\sin(\omega x+\varphi)$(或 $\cos(\omega x+\varphi)$)的范围,最后求得函数值域(最值).

(3)形如 $y=a\sin^2x+b\sin x+c(a\neq 0)$的函数,可利用换元思想,设 $t=\sin x$,转化为二次函数 $y=at^2+bt+c$ 求最值.t 的范围需要根据定义域来确定.

提质归纳



课后素养评价(四十九)

基础性·能力运用

1. 若 $y=\sin x$ 是减函数，$y=\cos x$ 是增函数，则 $x(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$ 的取值范围是　(　　)

A. $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$　　B. $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

C. $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$　　D. $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$

C　**解析**：因为 $y=\sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$ 上单调递减，$y=\cos x$ 在 $[-\pi+2k\pi,2k\pi](k\in\mathbf{Z})$ 上单调递增，所以 x 的取值范围是 $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$.

2.（多选）关于函数 $f(x)=\sin x$ 的性质，下列说法正确的是　(　　)

A. 函数 $f(x)$ 是偶函数

B. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{3\pi}{2}$ 对称

C. 函数 $f(x)$ 在第一象限是增函数

D. 函数 $f(x)$ 的图象既关于 $(0,0)$ 对称，也关于 $(\pi,0)$ 对称

BD　**解析**：对于A，函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上的值域是 $\left[\frac{1}{2},1\right]$，故A错误；

对于B，函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{3\pi}{2}$ 对称，故B正确；

对于C，当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=2\pi+\frac{\pi}{6}$，$f(\alpha)>f(\beta)$，故函数 $f(x)$ 在第一象限不是严格单调递增函数，故C错误；

对于D，函数 $f(x)$ 的图象既关于 $(0,0)$ 对称，也关于 $(\pi,0)$ 对称，故D正确.

3. 若 α,β 都是第一象限角，且 $\alpha<\beta$，则　(D)

A. $\sin\alpha>\sin\beta$

B. $\sin\beta>\sin\alpha$

C. $\sin\alpha\geqslant\sin\beta$

D. $\sin\alpha$ 与 $\sin\beta$ 的大小不定

4. 若 $\sin x=2m+3$，且 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$，则 m 的取值范围是　(　　)

A. $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$　　B. $\left[-\frac{5}{4},-\frac{1}{2}\right]$

C. $\left[-\frac{7}{4},-\frac{5}{4}\right]$　　D. $\left[-\frac{7}{4},-\frac{1}{2}\right]$

C　**解析**：因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$，所以 $\sin x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，

所以 $2m+3\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，所以 $m\in\left[-\frac{7}{4},-\frac{5}{4}\right]$.

5. 函数 $y=2\sin^2x+2\cos x-3$ 的最大值是　(　　)

A. -1　　B. 1

C. $-\frac{1}{2}$　　D. -5

C　**解析**：由题意，得 $y=2\sin^2x+2\cos x-3=2(1-\cos^2x)+2\cos x-3=-2\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$.

因为 $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$，所以当 $\cos x=\frac{1}{2}$ 时，函数有最大值 $-\frac{1}{2}$.

6. 下列关系式中正确的是　(B)

A. $\sin 15^\circ<\cos 15^\circ<\sin 166^\circ$

B. $\sin 166^\circ<\sin 15^\circ<\cos 15^\circ$

C. $\sin 15^\circ<\sin 166^\circ<\cos 15^\circ$

D. $\sin 166^\circ<\cos 15^\circ<\sin 15^\circ$

7. 已知函数 $f(x)=2\sin x-1$，当且仅当 $x=$________时，$f(x)$ 有最大值________；当且仅当 $x=$________时，$f(x)$ 有最小值________.

$\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$　1　$-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$　-3

解析：由正弦函数 $y=\sin x$ 的最值可知，当且仅当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$f(x)=2\sin x-1$ 有最大值 1；当且仅当 $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$f(x)=2\sin x-1$ 有最小值 -3.

8. 求下列函数的单调递增区间.

(1) $y=1-\sin\frac{x}{2}$；

(2) $y=\log_{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$.

解：(1) 由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{x}{2}\leqslant 2k\pi+\frac{3}{2}\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $4k\pi+\pi\leqslant x\leqslant 4k\pi+3\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以 $y=1-\sin\dfrac{x}{2}$ 的单调递增区间为 $[4k\pi+\pi,4k\pi+3\pi](k\in\mathbf{Z})$.

(2)要求函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的单调递增区间,即求使 $y=\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)>0$ 且单调递减的区间.

所以 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\leqslant\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}<2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$,

整理得 $4k\pi+\dfrac{5\pi}{3}\leqslant x<4k\pi+\dfrac{8\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$.

所以函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的单调递增区间为 $\left[4k\pi+\dfrac{5\pi}{3},4k\pi+\dfrac{8\pi}{3}\right),k\in\mathbf{Z}$.

综合性·创新提升

1.(多选)函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{|\cos x|}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的单调递减区间为 ( )

A. $\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$　B. $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$

C. $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$　D. $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

AB **解析**:在 $[-\pi,\pi]$ 上,依据函数图象的对称性可知 $y=|\cos x|$ 的单调递增区间是 $\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ 及 $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$,而 $f(x)$ 依 $|\cos x|$ 取值的递增而递减,故 $\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ 及 $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 为 $f(x)$ 的单调递减区间.故选 AB.

2.函数 $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)$ 的单调递减区间是 ( )

A. $\left[k\pi-\dfrac{\pi}{8},k\pi+\dfrac{3\pi}{8}\right](k\in\mathbf{Z})$

B. $\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{8},2k\pi+\dfrac{3\pi}{8}\right](k\in\mathbf{Z})$

C. $\left[2k\pi+\dfrac{3\pi}{8},2k\pi+\dfrac{7\pi}{8}\right](k\in\mathbf{Z})$

D. $\left[k\pi+\dfrac{3\pi}{8},k\pi+\dfrac{7\pi}{8}\right](k\in\mathbf{Z})$

A **解析**:$y=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)=-\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$,令 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,解得 $k\pi-\dfrac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{3\pi}{8},k\in\mathbf{Z}$,故函数的单调递减区间为 $\left[k\pi-\dfrac{\pi}{8},k\pi+\dfrac{3\pi}{8}\right](k\in\mathbf{Z})$.

3.下列不等式中成立的是 (D)

A. $\sin\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)>\sin\left(-\dfrac{\pi}{10}\right)$

B. $\sin 3>\sin 2$

C. $\sin\dfrac{7\pi}{5}>\sin\left(-\dfrac{2\pi}{5}\right)$

D. $\sin 2>\cos 1$

4.已知函数 $f(x)=2\sin\omega x(\omega>0)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最小值是 -2,则 ω 的最小值等于 ( )

A. $\dfrac{2}{3}$　B. $\dfrac{3}{2}$　C. 2　D. 3

B **解析**:由 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4}\right]$,得 $\omega x\in\left[-\dfrac{\pi}{3}\omega,\dfrac{\pi}{4}\omega\right]$.要使函数 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上取得最小值 -2,则 $-\dfrac{\pi}{3}\omega\leqslant-\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{\pi}{4}\omega\geqslant\dfrac{3\pi}{2}$.所以 $\omega\geqslant\dfrac{3}{2}$.故 ω 的最小值为 $\dfrac{3}{2}$.

5.(多选)已知函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right)$ 上单调,则 ω 的值可能为 ( )

A. 2　B. 3　C. 4　D. 5

AB **解析**:因为 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right),\omega>0$,故可得 $\omega x\in\left(-\dfrac{\pi}{6}\omega,\dfrac{\pi}{6}\omega\right)$,又 $y=\sin x$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right],k\in\mathbf{Z}$,

故 $-\dfrac{\pi}{6}\omega\geqslant 2k\pi-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{6}\omega\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$,解得 $\omega\leqslant-12k+3$ 且 $\omega\leqslant 12k+3,k\in\mathbf{Z}$,

又 $\omega>0$,故 $k=0,\omega\leqslant 3$.

6.若函数 $y=\cos x$ 在区间 $[-\pi,a]$ 上单调递增,则 a 的取值范围是________.

$(-\pi,0]$ **解析**:因为 $y=\cos x$ 在 $[-\pi,0]$ 上单调递增,又在 $[-\pi,a]$ 上单调递增,所以 $[-\pi,a]\subseteq[-\pi,0]$,所以 $a\leqslant 0$.

又因为 $a>-\pi$,所以 $-\pi<a\leqslant 0$.

7.已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right),x\in\mathbf{R}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调递增区间;

(2)求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{8},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值和最大值,并求出取得最值时 x 的值.

解:(1)因为 $f(x)=\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$,所以该函数的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

解不等式 $-\pi+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得 $-\frac{3\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{8}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

因此,函数 $y=f(x)$ 的最小正周期为 π,单调递增区间为 $\left[-\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{\pi}{8}+k\pi\right]$,$k\in\mathbf{Z}$.

(2)因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{4}$.

当 $2x-\frac{\pi}{4}=0$,即 $x=\frac{\pi}{8}$ 时,函数 $y=f(x)$ 取得最大值,$f(x)_{\max}=\sqrt{2}$;

当 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$,即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时,函数 $y=f(x)$ 取得最小值,$f(x)_{\min}=\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}=-1$.

8.设函数 $f(x)=a\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+b$.

(1)若 $a>0$,求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2)当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 时,$f(x)$ 的值域为 $[1,3]$,求 a,b 的值.

解:(1)令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,得 $k\pi-\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{12}$,$k\in\mathbf{Z}$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[k\pi-\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{12}\right]$,$k\in\mathbf{Z}$.

(2)当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 时,$\frac{\pi}{3}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{5\pi}{6}$,

则 $\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$.

由 $f(x)$ 的值域为 $[1,3]$ 知,

$\begin{cases}a>0,\\a+b=3,\\\frac{1}{2}a+b=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\b=-1;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0,\\a+b=1,\\\frac{1}{2}a+b=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-4,\\b=5.\end{cases}$ 综上,$\begin{cases}a=4,\\b=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-4,\\b=5.\end{cases}$

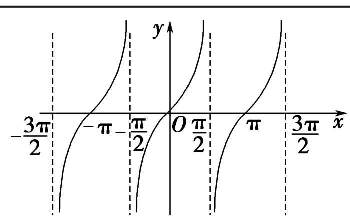
5.4.3　正切函数的性质与图象

学习任务目标

1.能够借助单位圆中的正切线画出函数 $y=\tan x$ 的图象.
2.掌握正切函数的定义域、值域、周期性、奇偶性、单调性.
3.能利用正切函数的图象及性质解决有关问题.

问题式预习

知识点　正切函数 $y=\tan x$ 的图象和性质

图象	
定义域	$\left\{x\,\middle\vert\,x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$
值域	$\mathbf{R}$
奇偶性	奇函数
单调性	在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$,$k\in\mathbf{Z}$ 上单调递增

续表

周期性	最小正周期为 $T=\pi$
对称性	图象的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2},0\right)(k\in\mathbf{Z})$

[微训练]

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)函数 $y=\tan x$ 在其定义域上是增函数.　(×)

(2)函数 $y=\tan x$ 的图象的对称中心是 $(k\pi,0)(k\in\mathbf{Z})$.　(×)

(3)正切函数 $y=\tan x$ 无单调递减区间.　(√)

(4)正切函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增.　(×)

2. 函数 $y=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$ 的定义域是　　（　　）

A. $\left\{x\middle|x\neq\dfrac{\pi}{4},x\in\mathbf{R}\right\}$

B. $\left\{x\middle|x\neq-\dfrac{\pi}{4},x\in\mathbf{R}\right\}$

C. $\left\{x\middle|x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{R}\right\}$

D. $\left\{x\middle|x\neq k\pi+\dfrac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{R}\right\}$

D　**解析**：函数 $y=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=-\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$，令 $x-\dfrac{\pi}{4}\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $x\neq k\pi+\dfrac{3\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以函数的定义域是 $\left\{x\middle|x\neq k\pi+\dfrac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{R}\right\}$.

3. 函数 $y=4\tan\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为________.

$\dfrac{\pi}{3}$　**解析**：$T=\dfrac{\pi}{|3|}=\dfrac{\pi}{3}$.

4. 函数 $y=\tan x\left(\dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{3\pi}{4}\text{，且 }x\neq\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的值域是________________.

$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　**解析**：因为函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，在区间 $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ 上也单调递增，所以函数的值域是 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

任务型课堂

任务一　正切函数的定义域、值域

1. 函数 $y=\tan\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的定义域为________.

$\left\{x\middle|x\neq\dfrac{k\pi}{3}+\dfrac{5\pi}{18},k\in\mathbf{Z}\right\}$　**解析**：要使函数有意义，自变量 x 的取值应满足 $3x-\dfrac{\pi}{3}\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

得 $x\neq\dfrac{k\pi}{3}+\dfrac{5\pi}{18}(k\in\mathbf{Z})$，

所以函数的定义域为 $\left\{x\middle|x\neq\dfrac{k\pi}{3}+\dfrac{5\pi}{18},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

2. 当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 时，函数 $f(x)=\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)$ 的值域为________.

$[-\sqrt{3},0]$　**解析**：因为 $x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$，所以 $2x\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right]$，所以 $2x-\dfrac{\pi}{3}\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$.

所以 $0\leqslant\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\leqslant\sqrt{3}$.

所以 $-\sqrt{3}\leqslant\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)\leqslant0$.

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3},0]$.

3. 求函数 $y=-\tan^2x+4\tan x+1$，$x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 的值域.

解：因为 $-\dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}$，

所以 $-1\leqslant\tan x\leqslant1$.

令 $\tan x=t$，则 $t\in[-1,1]$，

所以 $y=-t^2+4t+1=-(t-2)^2+5$.

所以，当 $t=-1$，即 $x=-\dfrac{\pi}{4}$ 时，$y_{\min}=-4$，

当 $t=1$，即 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$y_{\max}=4$.

故所求函数的值域为 $[-4,4]$.

【类题通法】

利用正切函数求定义域、值域的方法

1. 定义域：求函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 的定义域时，要保证 $\tan(\omega x+\varphi)$ 有意义，即 $\omega x+\varphi\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

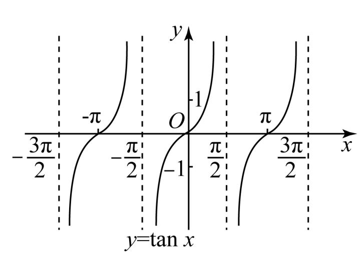
2. 值域：(1)求函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 的值域时，先求角 $\omega x+\varphi$ 的范围，再利用正切函数的单调性来求解；

(2)求函数 $y=a\tan^2x+b\tan x+c$ 的值域时，先换元，再利用二次函数的性质求解.

任务二　正切函数的单调性

[探究活动]

如图为正切函数 $y=\tan x$ 的图象，观察图象，探究问题.



探究 1：正切函数在定义域上是单调函数吗？

提示：不是.

探究 2:正切函数的单调区间是什么?

提示:正切函数的单调区间为 $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right),k\in\mathbf{Z}$.

［评价活动］

1. 函数 $y=2\tan\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)-5$ 的单调递增区间是________.

$\left(\dfrac{k\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{12}\right),k\in\mathbf{Z}$　**解析**:令 $-\dfrac{\pi}{2}+k\pi<3x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得 $-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{3}<x<\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.故函数的单调递增区间为 $\left(\dfrac{k\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{12}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

2. 比较大小:$\tan\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)$____$\tan\left(-\dfrac{9\pi}{5}\right)$.

$>$　**解析**:$\tan\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)=-\tan\left(2\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=\tan\dfrac{\pi}{4}$,$\tan\left(-\dfrac{9\pi}{5}\right)=-\tan\left(2\pi-\dfrac{\pi}{5}\right)=\tan\dfrac{\pi}{5}$.因为 $y=\tan x$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调递增,又因为 $0<\dfrac{\pi}{5}<\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{2}$,所以 $\tan\dfrac{\pi}{5}<\tan\dfrac{\pi}{4}$,所以 $\tan\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)>\tan\left(-\dfrac{9\pi}{5}\right)$.

3. 将 $\tan 1,\tan 2,\tan 3$ 从小到大排序为________.

$\tan 2<\tan 3<\tan 1$　**解析**:$\tan 2=\tan(2-\pi)$,$\tan 3=\tan(3-\pi)$.

因为 $\dfrac{\pi}{2}<2<\pi$,所以 $-\dfrac{\pi}{2}<2-\pi<0$.

因为 $\dfrac{\pi}{2}<3<\pi$,所以 $-\dfrac{\pi}{2}<3-\pi<0$.

显然 $-\dfrac{\pi}{2}<2-\pi<3-\pi<1<\dfrac{\pi}{2}$,

且 $y=\tan x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,

所以 $\tan(2-\pi)<\tan(3-\pi)<\tan 1$,

即 $\tan 2<\tan 3<\tan 1$.

【类题通法】

运用正切函数单调性的策略

(1)求 $y=\tan(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的单调区间,把 $\omega x+\varphi$ 看成一个整体,解 $-\dfrac{\pi}{2}+k\pi<\omega x+\varphi<\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 即可.当 $\omega<0$ 时,先用诱导公式把 x 的系数化为正值再求单调区间.

(2)运用正切函数的单调性比较大小的步骤:

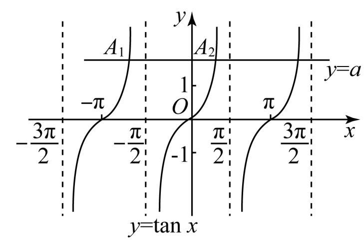
①运用函数的周期性或诱导公式将角化到同一单调区间内;

②运用单调性比较大小关系.

任务三　正切函数性质的综合应用

［探究活动］

如图,直线 $y=a(a\in\mathbf{R})$ 与正切函数的图象的两个相邻交点为 A_1,A_2,根据图象回答下面问题.



探究 1:直线 $y=a$ 与正切函数图象的两个相邻交点 A_1,A_2 之间的距离是多少?

提示:由图象结合正切函数的周期性可知,两交点之间的距离为 π.

探究 2:正切曲线与直线 $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 存在怎样的关系?

提示:由正切函数的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$,所以正切曲线与直线 $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 无限接近但不会相交,即正切曲线是由相互平行的直线 $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 隔开的无穷多支曲线组成的.

探究 3:怎样作 $y=\tan x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的简图?

提示:①描出三点 $\left(-\dfrac{\pi}{4},-1\right),(0,0),\left(\dfrac{\pi}{4},1\right)$,作出两条直线 $x=\pm\dfrac{\pi}{2}$;②用光滑曲线连接三点,注意曲线无限接近于直线 $x=\pm\dfrac{\pi}{2}$.

［评价活动］

1. 函数 $f(x)=|\tan 2x|$ 是　　　　(　　)

A.周期为 π 的奇函数

B.周期为 π 的偶函数

C.周期为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的奇函数

D.周期为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的偶函数

D　**解析**：$f(x)=\tan 2x$ 的周期为 $\frac{\pi}{2}$，加上绝对值符号后，周期未改变．

又 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数．故选 D．

2. 设函数 $f(x)=\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$．

(1)求函数 $f(x)$ 的定义域、最小正周期、单调区间及图象的对称中心；

(2)求不等式 $-1\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{3}$ 的解集；

(3)作出函数 $y=f(x)$ 在一个周期内的简图．

解：(1)由 $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $x\neq\frac{5\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$．

所以 $f(x)$ 的定义域是 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{5\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$．

因为 $\omega=\frac{1}{2}$，所以最小正周期 $T=\frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$．

由 $-\frac{\pi}{2}+k\pi<\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

得 $-\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$．

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{5\pi}{3}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$，无单调递减区间．

由 $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 得 $x=k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，

故函数 $f(x)$ 图象的对称中心是 $\left(k\pi+\frac{2\pi}{3},0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$．

(2)由 $-1\leqslant\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\sqrt{3}$，得 $-\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

解得 $\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{4\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$．

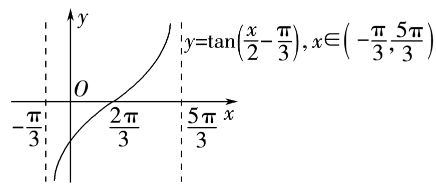
所以不等式 $-1\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{3}$ 的解集是 $\left\{x\,\middle|\,\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{4\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$．

(3)令 $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=0$，则 $x=\frac{2\pi}{3}$；

令 $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，则 $x=\frac{5\pi}{3}$；

令 $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}$，则 $x=-\frac{\pi}{3}$．

所以函数 $y=\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象与 x 轴的一个交点坐标是 $\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$，在这个交点左、右两侧相邻的两条渐近线方程分别是 $x=-\frac{\pi}{3}$，$x=\frac{5\pi}{3}$．从而得到函数 $y=f(x)$ 在一个周期内的简图(如图)．



【类题通法】

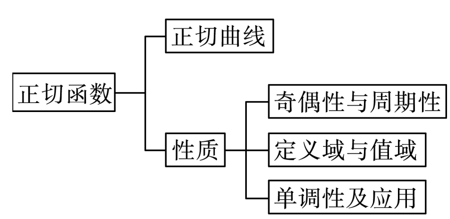
解答正切函数图象与性质问题的注意点

(1)周期性：函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期 $T=\frac{\pi}{|\omega|}$．

(2)奇偶性：先求函数的定义域 D，判断其是否满足对任意 $x\in D$，有 $-x\in D$，若不满足，则该函数无奇偶性；若满足，再判断 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系．

(3)对称性：正切函数图象的对称中心是 $\left(\frac{k\pi}{2},0\right)(k\in\mathbf{Z})$，不存在对称轴．

提质归纳



课后素养评价（五十）

基础性·能力运用

1. 已知函数 $f(x)=3\tan\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，则正数 $\omega=$ （　　）

A.4　　B.3　　C.2　　D.1

C　**解析**：因为 $\omega>0$，所以 $T=\frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$．所以 $\omega=2$．

2. 函数 $y=3\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的定义域是 （　　）

A.$\left\{x\left|x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

B.$\left\{x\left|x\neq\frac{k\pi}{2}-\frac{3\pi}{8},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

C.$\left\{x\left|x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

D.$\left\{x\left|x\neq\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

C　**解析**：由 $2x+\frac{\pi}{4}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $x\neq\frac{k}{2}\pi+\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}$．

3. 对于函数 $y=\tan\frac{x}{2}$，下列判断正确的是 （　　）

A.周期为 2π 的奇函数

B.周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的奇函数

C.周期为 π 的偶函数

D.周期为 2π 的偶函数

A　**解析**：函数 $y=\tan\frac{x}{2}$ 的周期 $T=\frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$，再由 $\tan\left(-\frac{x}{2}\right)=-\tan\frac{x}{2}$ 可得，此函数为奇函数．

4. 下列说法正确的是 （C）

A.$y=\tan x$ 是增函数

B.$y=\tan x$ 在第一象限内单调递增

C.$y=\tan x$ 在区间 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$ 上单调递增

D.$y=\tan x$ 在某一区间上单调递减

5.（多选）在下列给出的函数中，以 π 为最小正周期且在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递减的是 （　　）

A.$y=\sin\frac{x}{2}$　　B.$y=\cos 2x$

C.$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$　　D.$y=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

BD　**解析**：由函数周期为 π 可排除选项 A．函数 $y=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ 可变形为 $y=-\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$．当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$2x\in(0,\pi)$，$x-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$，此时 B，D 中的函数均是单调递减的．

6.（多选）已知函数 $f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-1$，则 （　　）

A.$f(x)$ 的最小正周期为 π

B.$f(x)$ 的定义域为 $\left\{x\left|x\neq\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

C.$f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{8},0\right)$ 对称

D.$f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}\right)$ 上单调递增

BD　**解析**：对于 A，$f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，故 A 错误；对于 B，由 $2x+\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $x\neq\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$，故 B 正确；对于 C，由 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，所以 $f(x)$ 的图象关于 $\left(-\frac{\pi}{8},-1\right)$ 对称，故 C 错误；对于 D，若 $x\in\left(\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}\right)$，则 $2x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}\right)$ 上单调递增，故 D 正确．

7.已知函数 $f(x)=3\tan\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$.

(1)求 $f(x)$ 的定义域、值域;

(2)讨论 $f(x)$ 的周期性、奇偶性和单调性.

解:(1)由 $\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $x\neq\frac{5\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{5\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$,值域为 $\mathbf{R}$.

(2)$f(x)$ 为周期函数,最小正周期 $T=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$.

$f(x)$ 为非奇非偶函数.

由 $-\frac{\pi}{2}+k\pi<\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $-\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{5\pi}{3}+2k\pi\right),k\in\mathbf{Z}$.

综合性·创新提升

1.函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}\tan x}$ 的定义域是 (C)

A.$\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$

B.$\left(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{4}\right],k\in\mathbf{Z}$

C.$\left(k\pi,k\pi+\frac{\pi}{4}\right],k\in\mathbf{Z}$

D.$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{4}\right],k\in\mathbf{Z}$

2.下列直线与函数 $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象不相交的是 ( )

A.$x=\frac{\pi}{2}$　　B.$x=-\frac{\pi}{2}$

C.$x=\frac{\pi}{4}$　　D.$x=\frac{\pi}{8}$

D **解析**:由 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.取 $x=0$,可得 $x=\frac{\pi}{8}$.所以与函数 $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象不相交的直线是 $x=\frac{\pi}{8}$.

3.(多选)已知函数 $f(x)=|\tan x|$,则下列关于函数 $f(x)$ 的图象与性质的叙述中,正确的有 ( )

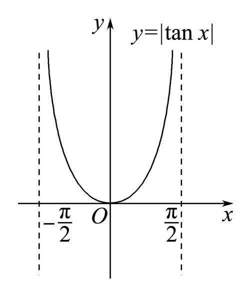
A.函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π

B.函数 $f(x)$ 在 $\left(k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$ 上单调递增

C.函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称

D.$f\left(\frac{\pi}{5}\right)<f\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

ABC **解析**:因为函数 $f(x)=|\tan x|=\begin{cases}\tan x,x\in\left[k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}\right),k\in\mathbf{Z},\\-\tan x,x\in\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi\right),k\in\mathbf{Z},\end{cases}$ 画出函数 $f(x)$ 的部分图象,如图所示.



对于A,函数 $f(x)=|\tan x|$ 的最小正周期为 π,选项A正确;

对于B,函数 $f(x)$ 在 $\left(k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$ 上单调递增,选项B正确;

对于C,根据函数 $f(x)$ 的图象知,$f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 对称,选项C正确;对于D,$f\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\left|\tan\frac{4\pi}{5}\right|=\tan\frac{\pi}{5}=f\left(\frac{\pi}{5}\right)$,所以选项D错误.

4.已知函数 $f(x)=x+\tan x+1$.若 $f(a)=2$,则 $f(-a)=$ ( )

A.0　　B.-1　　C.-2　　D.3

A **解析**:设 $g(x)=x+\tan x$.显然 $g(x)$ 为奇函数.

因为 $f(a)=g(a)+1=2$,所以 $g(a)=1$.所以 $f(-a)=g(-a)+1=-g(a)+1=0$.故选A.

5. 若函数 $f(x)=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，则　　(　　)

A. $f(0)>f(-1)>f(1)$

B. $f(0)>f(1)>f(-1)$

C. $f(1)>f(0)>f(-1)$

D. $f(-1)>f(0)>f(1)$

A　**解析**：当 $k\pi-\frac{\pi}{2}<x+\frac{\pi}{4}<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，即 $k\pi-\frac{3\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$ 时，$f(x)$ 单调递增.而 $f(0)=\tan\frac{\pi}{4}$，$f(1)=\tan\left(1+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(1+\frac{\pi}{4}-\pi\right)=\tan\left(1-\frac{3\pi}{4}\right)$，$f(-1)=\tan\left(\frac{\pi}{4}-1\right)$.

所以 $f(0)>f(-1)>f(1)$.

6. 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}\tan x$ 的单调递减区间为________.

$\left(k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}\right),k\in\mathbf{Z}$　**解析**：因为函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 在其定义域上为减函数，

所以此函数的单调递减区间即为满足 $\tan x>0$ 时，$y=\tan x$ 的单调递增区间，故为 $\left(k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}\right),k\in\mathbf{Z}$.

7. 若 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$，求函数 $y=\frac{1}{\cos^2 x}+2\tan x+1$ 的最值及相应的 x 的值.

解：$y=\frac{1}{\cos^2 x}+2\tan x+1$

$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}+2\tan x+1=\tan^2 x+2\tan x+2$

$=(\tan x+1)^2+1$.

因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$，所以 $\tan x\in[-\sqrt{3},1]$.

所以当 $\tan x=-1$，即 $x=-\frac{\pi}{4}$ 时，y 取得最小值 1；

当 $\tan x=1$，即 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，y 取得最大值 5.

8. 设函数 $f(x)=\tan(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$，已知函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴相邻两个交点的距离为 $\frac{\pi}{2}$，且图象关于点 $M\left(-\frac{\pi}{8},0\right)$ 对称.

(1)求 $f(x)$ 的解析式；

(2)求 $f(x)$ 的单调区间；

(3)求不等式 $-1\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{3}$ 的解集.

解：(1)由题意知，函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{\pi}{2}$，即 $\frac{\pi}{|\omega|}=\frac{\pi}{2}$.

因为 $\omega>0$，所以 $\omega=2$，从而 $f(x)=\tan(2x+\varphi)$.

又因为函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $M\left(-\frac{\pi}{8},0\right)$ 对称，

所以 $2\times\left(-\frac{\pi}{8}\right)+\varphi=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

即 $\varphi=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$.

因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，

故 $f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

(2)令 $-\frac{\pi}{2}+k\pi<2x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

得 $-\frac{3\pi}{4}+k\pi<2x<k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$，

即 $-\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}<x<\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.

所以函数的单调递增区间为 $\left(-\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，无单调递减区间.

(3)由 $-1\leqslant\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{3}$，

得 $-\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

即 $-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.

所以不等式 $-1\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{3}$ 的解集为 $\left\{x\middle|-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

5.5 三角恒等变换

5.5.1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式

第1课时 两角差的余弦公式

学习任务目标

1.了解两角差的余弦公式的推导过程,知道两角差的余弦公式的意义.

2.熟记两角差的余弦公式的形式及符号特征,并能利用该公式进行求值、计算.

问题式预习

知识点 两角差的余弦公式

公式	$C_{(\alpha-\beta)}$:$\cos(\alpha-\beta)=\underline{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$
适用条件	α,β 都是任意角
公式结构	公式右端的两部分为同名三角函数的积,连接符号与左边角的连接符号相反

[微训练]

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)存在角 α,β,使得 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha-\cos\beta$. (√)

(2)任意角 α,β,$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$. (×)

(3)任意角 α,β,$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$. (√)

2.$\cos 44^\circ\cos 14^\circ+\sin 44^\circ\sin 14^\circ$的值为 ( )

A.$\frac{1}{2}$ B.$-\frac{1}{2}$

C.$\frac{\sqrt{3}}{2}$ D.$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

C **解析**:原式$=\cos(44^\circ-14^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.若 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$,$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,则 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$的值为 ( )

A.$-\frac{\sqrt{2}}{5}$ B.$-\frac{\sqrt{2}}{10}$

C.$-\frac{7\sqrt{2}}{10}$ D.$-\frac{7\sqrt{2}}{5}$

B **解析**:由已知可得 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$,

所以 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

任务型课堂

任务一 给角求值

[探究活动]

探究1:已知 $\cos 45^\circ$,$\cos 60^\circ$和$\cos 30^\circ$的值,如何求 $\cos 15^\circ$的值呢?

提示:将 15°转化为两个特殊角的差,即 $15^\circ=60^\circ-45^\circ$或 $45^\circ-30^\circ$,再利用两角差的余弦公式求解.

探究2:类比探究1,思考一下,对于非特殊角如何求其余弦值?

提示:把非特殊角转化为两个特殊角的差,然后利用两角差的余弦公式求解.

[评价活动]

填空:

(1)$\sin 75^\circ=$________;

(2)$\cos(-15^\circ)=$________;

(3)$\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12}=$______;

(4)$\cos(\alpha+85^\circ)\cos(\alpha-35^\circ)+\sin(\alpha+85^\circ)\cdot\sin(\alpha-35^\circ)=$______;

(5)$\frac{1}{2}\cos 15^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 15^\circ=$______.

(1)$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (2)$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (3)0 (4)$-\frac{1}{2}$ (5)$\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析:(1)$\sin 75^\circ=\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)$

$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

(2)原式$=\cos(30°-45°)=\cos 30°\cos 45°+\sin 30°\cdot\sin 45°=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

(3)原式$=\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{7\pi}{12}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$.

(4)原式$=\cos[(\alpha+85°)-(\alpha-35°)]=\cos 120°=-\frac{1}{2}$.

(5)$\frac{1}{2}\cos 15°+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 15°$

$=\cos 60°\cos 15°+\sin 60°\sin 15°$

$=\cos(60°-15°)=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【类题通法】

利用两角差的余弦公式求值的一般思路

(1)把非特殊角转化为两个特殊角的差，正用公式直接求值；

(2)根据式子结构特点，充分利用诱导公式，构造两角差的余弦公式中等号右边的形式，然后逆用公式求值.

任务二　给值求值

1.已知$\sin\alpha-\sin\beta=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{2}$，则$\cos(\alpha-\beta)=$　　(　　)

A.$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B.$-\frac{1}{2}$

C.$\frac{1}{2}$　　D.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

D　**解析**：因为$\sin\alpha-\sin\beta=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$(\sin\alpha-\sin\beta)^2=\frac{7}{4}-\sqrt{3}$.

因为$\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{2}$，所以$(\cos\alpha-\cos\beta)^2=\frac{1}{4}$，

两式相加，得$2-2\cos(\alpha-\beta)=2-\sqrt{3}$.

所以$\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.已知$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{12}{13}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$，求$\cos\alpha$的值.

解：因为$\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$，所以$\frac{\pi}{3}+\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

所以$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}$

$=-\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=-\frac{5}{13}$.

因为$\alpha=\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\frac{\pi}{3}$，

所以$\cos\alpha=\cos\left[\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\frac{\pi}{3}\right]$

$=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cos\frac{\pi}{3}+\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\frac{\pi}{3}$

$=-\frac{5}{13}\times\frac{1}{2}+\frac{12}{13}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{12\sqrt{3}-5}{26}$.

3.设$\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=-\frac{1}{9}$，$\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\frac{2}{3}$，其中$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，求$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$的值.

解：因为$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以$\alpha-\frac{\beta}{2}\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$，$\frac{\alpha}{2}-\beta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，

所以$\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}=\sqrt{1-\frac{1}{81}}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$，

$\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

所以$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)\right]$

$=\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)$

$=-\frac{1}{9}\times\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{4\sqrt{5}}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{7\sqrt{5}}{27}$.

【类题通法】

给值求值问题的解题策略

(1)已知某些角的三角函数值，求另外一些角的三角函数值，要注意观察已知角与待求值的式子中角的关系，即通过拆角与凑角将其联系起来.

(2)解题过程中根据需要灵活地进行拆角或凑角的变换.常见角的变换有：

①$\alpha=(\alpha-\beta)+\beta$；②$\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}$；③$2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$；④$2\beta=(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)$.

任务三　给值求角

1.已知$\cos\alpha=\frac{1}{7}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$，且$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则$\beta$的值为________.

$\frac{\pi}{3}$　**解析**：因为$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\cos\alpha=\frac{1}{7}$，

$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}<0$，

所以 $\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

$\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

因为 $\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$，

所以 $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]$

$=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$

$=\left(-\frac{11}{14}\right)\times\frac{1}{7}+\frac{5\sqrt{3}}{14}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{1}{2}$.

又因为 $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\beta=\frac{\pi}{3}$.

2.已知 α,β 均为锐角，且 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$，求 $\alpha-\beta$ 的值.

解：因为 α,β 均为锐角，

所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

所以 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}+\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又因为 $\sin\alpha<\sin\beta$，所以 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，

所以 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<0$，所以 $\alpha-\beta=-\frac{\pi}{4}$.

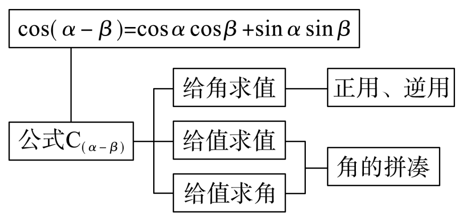
【类题通法】

给值求角问题的解题策略

(1)要求角需先求这个角的三角函数值，然后根据范围得出角的值；

(2)已知一个角的正弦值(余弦值)求余弦值(正弦值)时，要根据角的范围确定其符号.

提质归纳



课后素养评价(五十一)

基础性·能力运用

1.$\cos62°\cos32°+\sin32°\sin118°=$　　(　　)

A.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B.$\frac{1}{2}$　　C.$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D.$-\frac{1}{2}$

A　**解析：**$\cos62°\cos32°+\sin32°\sin118°=\cos62°\cdot\cos32°+\sin32°\sin62°=\cos(62°-32°)=\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.$\cos165°$等于　　(C)

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

C.$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　　D.$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3.已知 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{3}$，且 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\cos\alpha=$　　(　　)

A.$\frac{4+\sqrt{2}}{6}$　B.$\frac{4-\sqrt{2}}{6}$　C.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　D.$\frac{\sqrt{2}}{3}$

B　**解析：**因为 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{3}$，且 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\alpha+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$，

所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

则 $\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}=\left(-\frac{1}{3}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{4-\sqrt{2}}{6}$.

4.已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\cos\beta=-\frac{5}{13}$，$\beta$ 是第三象限角，则 $\cos(\alpha-\beta)=$　　(A)

A.$-\frac{33}{65}$　　B.$\frac{33}{65}$

C.$\frac{63}{65}$　　D.$-\frac{63}{65}$

5.若 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，且 $\sin x=\frac{4}{5}$，则 $2\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+2\cos x$ 的值为________.

$\frac{4\sqrt{3}-3}{5}$　**解析：**因为 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，$\sin x=\frac{4}{5}$，所以 $\cos x=-\frac{3}{5}$.

所以 $2\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+2\cos x$

$=2\left(\cos x\cos\frac{2\pi}{3}+\sin x\sin\frac{2\pi}{3}\right)+2\cos x$

$=2\left(-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)+2\cos x$

$=\sqrt{3}\sin x+\cos x$

$=\frac{4\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{5}=\frac{4\sqrt{3}-3}{5}$.

6.已知 α,β 为锐角，$\cos\alpha=\frac{1}{7}$，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，则 β $=$________.

$\frac{\pi}{3}$　**解析**：因为 α 为锐角，且 $\cos\alpha=\frac{1}{7}$，

所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

又 α,β 为锐角，所以 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$.

又 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{5\sqrt{3}}{14}<\sin\alpha$，所以 $\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

所以 $\cos(\alpha+\beta)=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}=-\sqrt{1-\left(\frac{5\sqrt{3}}{14}\right)^2}=-\frac{11}{14}$.

所以 $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=\left(-\frac{11}{14}\right)\times\frac{1}{7}+\frac{5\sqrt{3}}{14}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{1}{2}$.

又 β 为锐角，所以 $\beta=\frac{\pi}{3}$.

综合性·创新提升

1.已知点 $P(1,\sqrt{2})$是角 α 终边上一点，则$\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$等于　　（A）

A.$\frac{3+\sqrt{6}}{6}$　　B.$\frac{3-\sqrt{6}}{6}$

C.$-\frac{3+\sqrt{6}}{6}$　　D.$\frac{\sqrt{6}-3}{6}$

2.已知 $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$Q(\cos\beta,\sin\beta)$，则$|PQ|$的最大值为　　（　　）

A.$\sqrt{2}$　　B.2　　C.4　　D.$2\sqrt{2}$

B　**解析**：因为 $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$Q(\cos\beta,\sin\beta)$

所以$|PQ|^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$

$=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta+\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta$

$=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(\cos^2\beta+\sin^2\beta)-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$

$=2-2\cos(\alpha-\beta)$.

所以$|PQ|=\sqrt{2-2\cos(\alpha-\beta)}$. 因为 $\cos(\alpha-\beta)\in[-1,1]$，所以$|PQ|\in[0,2]$. 故选 B.

3.化简：$\frac{2\cos 10^\circ-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}=$________.

$\sqrt{3}$　**解析**：原式$=\frac{2\cos(30^\circ-20^\circ)-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$

$=\frac{2\cos 30^\circ\cos 20^\circ+2\sin 30^\circ\sin 20^\circ-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$

$=\frac{\sqrt{3}\cos 20^\circ+\sin 20^\circ-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$

$=\frac{\sqrt{3}\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}$

$=\sqrt{3}$.

4.若 $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{5}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$，则 $\tan\alpha\tan\beta=$________.

$\frac{1}{2}$　**解析**：$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}$，

又 $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{5}$，所以 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{2}{5}$，$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{5}$，两式相除可得 $\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{2}$.

5.已知 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$B(\cos\beta,\sin\beta)$，其中 α,β 为锐角，且$|AB|=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

(1)求 $\cos(\alpha-\beta)$的值；

(2)若 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，求 $\cos\beta$ 的值.

解：(1)由$|AB|=\frac{\sqrt{10}}{5}$，

得$\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

所以 $2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=\frac{2}{5}$.

所以 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}$.

(2)因为 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}$，$\alpha,\beta$ 为锐角，

所以 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\sin(\alpha-\beta)=\pm\frac{3}{5}$.

当 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$时，$\cos\beta=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]$

$=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{24}{25}$.

当 $\sin(\alpha-\beta)=-\frac{3}{5}$时，$\cos\beta=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)=0$.

因为 β 为锐角，所以 $\cos\beta=\frac{24}{25}$.

第2课时　两角和与差的正弦、余弦、正切公式

学习任务目标

1.能利用两角差的余弦公式,推导出两角和的余弦公式及两角和与差的正弦、正切公式.
2.会用两角和与差的正弦、余弦、正切公式进行简单的三角函数的求值、化简、计算等.
3.灵活运用两角和与差的正弦、余弦、正切公式,了解公式的正用、逆用以及角的变换的常用方法.

问题式预习

知识点一　两角和的余弦公式

公式	$\cos(\alpha+\beta)=\underline{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$
简记符号	$\underline{C_{(\alpha+\beta)}}$
使用条件	α,β 为<u>任意角</u>

知识点二　两角和与差的正弦公式

(1)两角和的正弦:$\sin(\alpha+\beta)=\underline{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$.$(S_{(\alpha+\beta)})$

(2)两角差的正弦:$\sin(\alpha-\beta)=\underline{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$.$(S_{(\alpha-\beta)})$

[微训练]

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)不存在角 α,β,使得 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.　(×)

(2)对任意角 α,β,都有 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.　(√)

(3)存在角 α,β,使 $\sin(\alpha-\beta)\neq\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$.　(×)

(4)存在角 α,β,使 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$.　(√)

2.$\sin 7^\circ\cos 37^\circ-\cos 7^\circ\sin 37^\circ$的值为　(　　)

A.$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　B.$-\frac{1}{2}$　C.$\frac{1}{2}$　D.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

B　**解析**:原式 $=\sin(7^\circ-37^\circ)=\sin(-30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$.

知识点三　两角和与差的正切公式

名称	公式	简记符号	使用条件
两角和的正切公式	$\tan(\alpha+\beta)=\underline{\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}$	$T_{(\alpha+\beta)}$	$\alpha,\beta,\alpha+\beta$ 均不等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$

续表

名称	公式	简记符号	使用条件
两角差的正切公式	$\tan(\alpha-\beta)=\underline{\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}}$	$T_{(\alpha-\beta)}$	$\alpha,\beta,\alpha-\beta$ 均不等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$

[微训练]

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)对于任意角 α,β,总有 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$.　(×)

(2)使公式 $\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$ 有意义,只需 $\alpha,\beta\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 即可.　(×)

(3)若 $\alpha,\beta,\alpha+\beta$ 均不等于 $k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,则 $\tan(\alpha+\beta)=\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta\tan(\alpha+\beta)$ 恒成立.　(√)

(4)当 $\alpha\neq k\pi-\frac{\pi}{4}$,且 $\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$ 时,$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$.　(√)

2.若 $\tan\alpha=3,\tan\beta=\frac{4}{3}$,则 $\tan(\alpha-\beta)$ 等于　(　　)

A.$\frac{1}{3}$　B.$-\frac{1}{3}$　C.3　D.-3

A　**解析**:因为 $\tan\alpha=3,\tan\beta=\frac{4}{3}$,所以 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3-\frac{4}{3}}{1+3\times\frac{4}{3}}=\frac{1}{3}$.

任务型课堂

任务一 给角求值

求值：(1)$\dfrac{\sin 7°+\cos 15°\sin 8°}{\cos 7°-\sin 15°\sin 8°}$；

(2)$\tan 23°+\tan 37°+\sqrt{3}\tan 23°\tan 37°$；

(3)$\cos 61°\cos 16°+\sin 61°\sin 16°$；

(4)$\sin 13°\cos 17°+\cos 13°\sin 17°$；

(5)$\tan 72°-\tan 42°-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\tan 72°\tan 42°$.

解：(1)原式$=\dfrac{\sin(15°-8°)+\cos 15°\sin 8°}{\cos(15°-8°)-\sin 15°\sin 8°}$

$=\dfrac{\sin 15°\cos 8°-\cos 15°\sin 8°+\cos 15°\sin 8°}{\cos 15°\cos 8°+\sin 15°\sin 8°-\sin 15°\sin 8°}$

$=\dfrac{\sin 15°\cos 8°}{\cos 15°\cos 8°}=\dfrac{\sin 15°}{\cos 15°}=\dfrac{\sin(45°-30°)}{\cos(45°-30°)}$

$=\dfrac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=2-\sqrt{3}$.

(2)(方法一)原式$=\tan(23°+37°)\cdot(1-\tan 23°\tan 37°)+\sqrt{3}\tan 23°\tan 37°=(1-\tan 23°\tan 37°)\tan 60°+\sqrt{3}\tan 23°\cdot\tan 37°=\sqrt{3}$.

(方法二)因为$\tan(23°+37°)=\dfrac{\tan 23°+\tan 37°}{1-\tan 23°\tan 37°}$，

所以$\sqrt{3}=\dfrac{\tan 23°+\tan 37°}{1-\tan 23°\tan 37°}$，

所以$\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan 23°\tan 37°=\tan 23°+\tan 37°$，

所以$\tan 23°+\tan 37°+\sqrt{3}\tan 23°\tan 37°=\sqrt{3}$.

(3)原式$=\cos(61°-16°)=\cos 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(4)原式$=\sin(13°+17°)=\sin 30°=\dfrac{1}{2}$.

(5)原式$=\tan(72°-42°)(1+\tan 72°\tan 42°)-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\tan 72°\cdot\tan 42°=\tan 30°(1+\tan 72°\tan 42°)-\tan 30°\tan 72°\tan 42°=\tan 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

【类题通法】

给角求值问题的解题策略

(1)非特殊角的三角函数求值问题，若三角函数式的形式与和角公式或差角公式相符，则整体变形后求值，否则先进行局部的变形.

(2)三角函数式变形的一般途径有：将非特殊角化为特殊角的和或差的形式，构造可正负相消的项，变换分子、分母的形式进行约分.解题时要注意公式的逆用或变形.

任务二 给值求值

1.已知$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{2}{5}$，$\tan\left(\beta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$，那么$\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$等于　　(　　)

A.$\dfrac{13}{18}$　　B.$\dfrac{13}{22}$　　C.$\dfrac{3}{22}$　　D.$\dfrac{3}{18}$

C　**解析**：$\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\tan\left[(\alpha+\beta)-\left(\beta-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

$=\dfrac{\frac{2}{5}-\frac{1}{4}}{1+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}}=\dfrac{3}{22}$.

2.已知$\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{5}{13}$，$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\beta\right)=\dfrac{3}{5}$，且$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}<\beta<\dfrac{3\pi}{4}$，求$\cos(\alpha+\beta)$的值.

解：因为$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}<\beta<\dfrac{3\pi}{4}$，

所以$\dfrac{3\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{4}+\alpha<\pi$，$-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{4}-\beta<0$.

又因为$\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{5}{13}$，$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\beta\right)=\dfrac{3}{5}$，

所以$\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}+\alpha\right)=-\dfrac{12}{13}$，$\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\beta\right)=-\dfrac{4}{5}$.

所以$\cos(\alpha+\beta)=\sin\left[\dfrac{\pi}{2}+(\alpha+\beta)\right]$

$=\sin\left[\dfrac{3\pi}{4}+\alpha-\left(\dfrac{\pi}{4}-\beta\right)\right]$

$=\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\beta\right)-\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\beta\right)$

$=\dfrac{5}{13}\times\dfrac{3}{5}-\left(-\dfrac{12}{13}\right)\times\left(-\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{33}{65}$.

3.已知$\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\tan(\alpha-\beta)=-\dfrac{1}{3}$，求$\cos\beta$的值.

解：因为$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，所以$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$.

因为$\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以$\alpha-\beta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

因为$\tan(\alpha-\beta)=-\dfrac{1}{3}<0$，所以$\alpha-\beta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$.

所以$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，$\sin(\alpha-\beta)=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

所以$\cos\beta=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+$

$\sin\alpha\cdot\sin(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}+\frac{3}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{9\sqrt{10}}{50}$.

【类题通法】

角的拼凑问题的解题策略

(1)当已知角有两个时，一般将未知角表示为两个已知角的和或差的形式.

(2)当已知角有一个时，一般将未知角表示为已知角和特殊角的和或差的形式，有时也利用诱导公式把未知角变成已知角.

任务三　给值求角

1.已知 $\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，若 $\tan\alpha,\tan\beta$ 是方程 $x^2-4\sqrt{3}x+5=0$ 的两个根，则 $\alpha+\beta=$　　(　　)

A.$-\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$　　B.$-\frac{\pi}{3}$

C.$\frac{2\pi}{3}$　　D.$\frac{5\pi}{6}$

C　**解析**：因为 $\tan\alpha,\tan\beta$ 是方程 $x^2-4\sqrt{3}x+5=0$ 的两个根，所以 $\tan\alpha+\tan\beta=4\sqrt{3}$，$\tan\alpha\tan\beta=5$.

所以 $\tan\alpha,\tan\beta$ 均为正数.

又 $\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

所以 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{4\sqrt{3}}{1-5}=-\sqrt{3}$.

又 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$，所以 $\alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$.故选 C.

2.已知 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$，且 α 和 β 均为钝角，求 $\alpha+\beta$ 的值.

解：因为 α 和 β 均为钝角，

所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

由 α 和 β 均为钝角，得 $\pi<\alpha+\beta<2\pi$.

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\times\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $\alpha+\beta=\frac{7\pi}{4}$.

【类题通法】

给值求角问题的关注点

(1)解题步骤

①求出角的某个三角函数值；

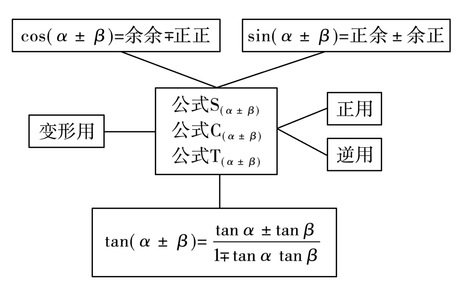
②确定角的范围(范围过大或过小，会使求出的角不合题意或漏解)，根据范围找出角.

(2)选取三角函数的原则

①已知正切函数值，选正切函数；

②已知正弦或余弦函数值，选正弦或余弦函数，若角的范围是 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，选正弦或余弦函数均可；若角的范围是 $(0,\pi)$，选余弦函数较好；若角的范围是 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，选正弦函数较好.

提质归纳



课后素养评价(五十二)

基础性·能力运用

1.$\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{5\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{7\pi}{8}=$　　(　　)

A.1　　B.-1　　C.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D.$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

B　**解析**：$\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{5\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{7\pi}{8}=-\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}-\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=-\sin\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$.

2.(多选)已知 θ 是锐角，那么下列各值中，$\sin\theta+\cos\theta$不能取得的值是　　(　　)

A.$\frac{4}{3}$　　B.$\frac{3}{4}$

C.$\frac{5}{3}$　　D.$\frac{1}{2}$

BCD　**解析**：因为 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以 $\theta+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$.

又 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，

所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$，所以 $1<\sin\theta+\cos\theta\leqslant\sqrt{2}$.

故选 BCD.

3. 已知 α,β 均为锐角，且 $(1-\sqrt{3}\tan\alpha)(1-\sqrt{3}\tan\beta)=4$，则 $\alpha+\beta=$　　(　　)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$　　C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

B　**解析**：由 $(1-\sqrt{3}\tan\alpha)(1-\sqrt{3}\tan\beta)=4$，得

$1-\sqrt{3}\tan\beta-\sqrt{3}\tan\alpha+3\tan\alpha\tan\beta=4$，

所以 $-\sqrt{3}(\tan\beta+\tan\alpha)=3(1-\tan\alpha\tan\beta)$，所以 $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\frac{3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$，即 $\tan(\alpha+\beta)=-\sqrt{3}$，因为 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $(\alpha+\beta)\in(0,\pi)$，

所以 $\alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$.

4. 若 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{6}$，则 $\tan\alpha=$________.

$\frac{7}{5}$　**解析**：$\tan\alpha=\tan\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right]$

$$=\frac{\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{6}+1}{1-\frac{1}{6}}=\frac{7}{5}.$$

5. 已知 $\frac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{12}{13}$，$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$，求 $\sin 2\alpha$ 的值.

解：因为 $\frac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，

所以 $0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{4}$，$\pi<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$.

又 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{12}{13}$，$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$，

所以 $\sin(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$，

$\cos(\alpha+\beta)=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}$

$=-\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$.

所以 $\sin 2\alpha=\sin[(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)]$

$=\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)$

$=\frac{5}{13}\times\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{12}{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{56}{65}$.

综合性·创新提升

1. 已知 $\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$，则 $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=$　　(　　)

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\pm\sqrt{2}$　　D. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

D　**解析**：因为 $\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\theta+\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\theta=\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1$，所以 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\pm\sqrt{1-\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$，则 $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.（2022·新高考全国Ⅱ卷）若 $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta$，则　　(　　)

A. $\tan(\alpha-\beta)=1$　　B. $\tan(\alpha+\beta)=1$

C. $\tan(\alpha-\beta)=-1$　　D. $\tan(\alpha+\beta)=-1$

C　**解析**：由已知得 $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=2(\cos\alpha-\sin\alpha)\sin\beta$，

即 $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=0$，

即 $\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\beta)=0$，所以 $\tan(\alpha-\beta)=-1$.

3. $\frac{1-\sqrt{3}\tan 75^\circ}{\sqrt{3}+\tan 75^\circ}=$ $\underline{-1}$.

4. 已知 $0<\beta<\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{3}{5}$，$\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)=\frac{5}{13}$，则 $\sin(\alpha+\beta)=$ $\underline{\frac{56}{65}}$.

5. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期和最大值；

(2) 讨论 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上的单调性.

解：(1) $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因此 $f(x)$ 的最小正周期为 π，最大值为 $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

(2)当 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$ 时，$0\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\pi$，

从而当 $0\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}$，即 $\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}$ 时，$f(x)$ 单调递增；

当 $\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\pi$，即 $\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$ 时，$f(x)$ 单调递减.

综上可知，$f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{12}\right]$ 上单调递增；在 $\left[\frac{5\pi}{12},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递减.

第3课时　二倍角的正弦、余弦、正切公式

学习任务目标

1.会推导二倍角的正弦、余弦、正切公式.
2.能够灵活运用二倍角公式解决求值、化简和证明等问题.

问题式预习

知识点一　倍角公式

(1)$S_{2\alpha}$：$\sin 2\alpha=$<u>$2\sin\alpha\cos\alpha$</u>；

(2)$C_{2\alpha}$：$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=$<u>$1-2\sin^2\alpha$</u>；

(3)$T_{2\alpha}$：$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

[微训练]

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.　(√)

(2)$\cos 4\alpha=\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha$.　(√)

(3)对任意角 α，$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.　(×)

2.已知 $\cos x=\frac{3}{4}$，则 $\cos 2x$ 等于　(　　)

A.$-\frac{1}{4}$　　B.$\frac{1}{4}$

C.$-\frac{1}{8}$　　D.$\frac{1}{8}$

D　**解析**：因为 $\cos 2x=2\cos^2x-1$，且 $\cos x=\frac{3}{4}$，所以 $\cos 2x=2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2-1=\frac{1}{8}$.故选 D.

知识点二　倍角公式常用变形

(1)$\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}=$<u>$\cos\alpha$</u>，$\frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}=$<u>$\sin\alpha$</u>；

(2)$(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=$<u>$1\pm\sin 2\alpha$</u>；

(3)$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$，$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

[微训练]

1.$\sin 15°\sin 75°$的值是　(　　)

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C.$\frac{1}{4}$　　D.$\frac{\sqrt{3}}{4}$

C　**解析**：原式$=\sin 15°\cos 15°=\frac{1}{2}\sin 30°=\frac{1}{4}$.

2.求值：$\frac{1}{2}-\cos^2\frac{\pi}{8}=$________.

$-\frac{\sqrt{2}}{4}$　**解析**：原式$=-\frac{1}{2}\left(2\cos^2\frac{\pi}{8}-1\right)=-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

任务型课堂

任务一　给角求值

求下列各式的值.

(1)$1-2\sin^2 750°$；

(2)$\frac{2\tan 150°}{1-\tan^2 150°}$；

(3)$\cos 20°\cos 40°\cos 80°$.

解：(1)原式$=\cos(2\times 750°)=\cos 1\,500°=\cos(4\times 360°+60°)=\cos 60°=\frac{1}{2}$.

(2)原式$=\tan(2\times 150°)=\tan 300°=\tan(360°-60°)=-\tan 60°=-\sqrt{3}$.

(3)原式$=\frac{2\sin 20°\cdot\cos 20°\cdot\cos 40°\cdot\cos 80°}{2\sin 20°}$

$=\dfrac{2\sin 40^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ}{4\sin 20^\circ}$

$=\dfrac{2\sin 80^\circ\cdot\cos 80^\circ}{8\sin 20^\circ}$

$=\dfrac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ}=\dfrac{1}{8}$.

【类题通法】

解决给角求值问题的策略

(1)注意观察式子的结构特点及角之间是否存在特殊的倍数关系,灵活正用或逆用二倍角公式.

(2)结合诱导公式恰当变换函数名称,灵活处理系数,构造二倍角公式的形式.

任务二 给值求值

[探究活动]

根据二倍角公式及其变形,观察下列等量关系:$2x=\dfrac{\pi}{2}-2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$,$2x=2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\dfrac{\pi}{2}$,回答下列问题.

探究1:如何用 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$ 与 $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$ 表示 $\sin 2x$ 与 $\cos 2x$?

提示:$\sin 2x=\cos\left[2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]=2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)-1=1-2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$,

$\cos 2x=\sin\left[2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]=2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

探究2:如何用 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$ 与 $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$ 表示 $\sin 2x$ 与 $\cos 2x$?

提示:$\sin 2x=\sin\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\right]$

$=-\cos\left[2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\right]=1-2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$

$=2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-1$,

$\cos 2x=\cos\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\right]$

$=\sin\left[2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\right]=2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$.

[评价活动]

1.已知 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{3}$,则 $\sin 2\theta$ 的值为________.

$-\dfrac{7}{9}$ **解析:**$\sin 2\theta=-\cos\left(2\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\left[1-2\sin^2\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]=2\sin^2\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)-1=-\dfrac{7}{9}$.

2.已知 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{5}$,$\dfrac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$,求 $\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值.

解:因为 $\dfrac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$,所以 $\dfrac{3\pi}{4}\leqslant\alpha+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{7\pi}{4}$.

因为 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{5}>0$,所以 $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{7\pi}{4}$,

所以 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}$

$=-\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=-\dfrac{4}{5}$,

所以 $\cos 2\alpha=\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\times\left(-\dfrac{4}{5}\right)\times\dfrac{3}{5}=-\dfrac{24}{25}$,

$\sin 2\alpha=-\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=1-2\cos^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=1-2\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{7}{25}$.

所以 $\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\dfrac{24}{25}-\dfrac{7}{25}\right)=-\dfrac{31\sqrt{2}}{50}$.

【类题通法】

解决给值求值问题的策略

(1)有方向地将已知式或未知式化简,使关系明朗化.

(2)寻找角之间的关系,看是否适合相关公式的使用条件,注意常见角的变换和角之间的二倍关系.

(3)注意诱导公式在角的变换中的应用.

任务三 化简与证明

1.化简:(1)$\dfrac{1}{1-\tan\theta}-\dfrac{1}{1+\tan\theta}$;

(2)$\dfrac{\sin 2\theta}{(\sin\theta+\cos\theta-1)(\sin\theta-\cos\theta+1)}$;

(3)$\dfrac{\sin\theta+\sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta}$.

解:(1)原式 $=\dfrac{(1+\tan\theta)-(1-\tan\theta)}{(1-\tan\theta)(1+\tan\theta)}=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\tan 2\theta$.

(2)原式=

$$\dfrac{\sin 2\theta}{\left(2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right)\left(2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}+2\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right)}$$

$=\dfrac{\sin 2\theta}{4\sin^2\dfrac{\theta}{2}\left(\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right)}=\dfrac{\sin 2\theta}{4\sin^2\dfrac{\theta}{2}\cos\theta}$

$=\dfrac{4\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\theta}{4\sin^2\dfrac{\theta}{2}\cos\theta}=\dfrac{1}{\tan\dfrac{\theta}{2}}$.

(3)原式$=\dfrac{\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta+2\cos^2\theta}$

$=\dfrac{\sin\theta(1+2\cos\theta)}{\cos\theta(1+2\cos\theta)}$

$=\tan\theta$.

2.求证:$\dfrac{1+\sin 4\theta-\cos 4\theta}{2\tan\theta}=\dfrac{1+\sin 4\theta+\cos 4\theta}{1-\tan^2\theta}$.

证明:原式等价于 $1+\sin 4\theta-\cos 4\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\cdot(1+\sin 4\theta+\cos 4\theta)$,

即 $1+\sin 4\theta-\cos 4\theta=\tan 2\theta(1+\sin 4\theta+\cos 4\theta)$①.

而①式右边$=\tan 2\theta(1+\cos 4\theta+\sin 4\theta)$

$=\dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}(2\cos^2 2\theta+2\sin 2\theta\cos 2\theta)$

$=\sin 4\theta+1-\cos 4\theta=$左边,

所以①式成立,原式得证.

【类题通法】

1.化简问题的解题策略

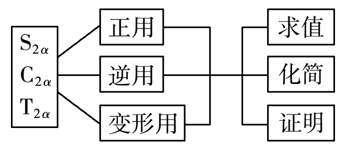
(1)着手点:从“幂”的差异、“名”的差异、“角”的差异这三个方面,结合所给“形”的特征入手解决.

(2)化简方法:①弦切互化,异名化同名,异角化同角;②降幂或升幂;③利用重要结论:$(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=1\pm\sin 2\theta$.

2.证明三角恒等式的方法

(1)化简法:从复杂的一边入手,通过化简,证明其等于另一边;(2)比较法:左边−右边=0,$\dfrac{左边}{右边}=1$;(3)分析法:从要证明的等式出发,一步步寻找等式成立的条件.

提质归纳



课后素养评价(五十三)

基础性·能力运用

1.已知角 α 满足$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$,则$\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)=$ ( )

A.$-\dfrac{3}{4}$ B.$\dfrac{3}{4}$ C.$-\dfrac{1}{4}$ D.$\dfrac{1}{4}$

D **解析**:$\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=1-2\times\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)^2=\dfrac{1}{4}$.

2.(多选)下列计算正确的是 ( )

A.$\dfrac{\tan 15^\circ+1}{\tan 15^\circ-1}=-\sqrt{3}$

B.$\cos^4 22.5^\circ-\sin^4 22.5^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C.$\sin 15^\circ\sin 45^\circ\sin 75^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

D.$\tan 37^\circ+\tan 23^\circ+\sqrt{3}\tan 37^\circ\tan 23^\circ=1$

ABC **解析**:$\dfrac{\tan 15^\circ+1}{\tan 15^\circ-1}=-\dfrac{\tan 15^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 15^\circ\tan 45^\circ}=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$,A 正确;

$\cos^4 22.5^\circ-\sin^4 22.5^\circ=(\cos^2 22.5^\circ+\sin^2 22.5^\circ)\cdot(\cos^2 22.5^\circ-\sin^2 22.5^\circ)=\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,B 正确;

$\sin 15^\circ\sin 45^\circ\cdot\sin 75^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 15^\circ\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\sin 30^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$,C 正确;$\sqrt{3}=\tan(37^\circ+23^\circ)=\dfrac{\tan 37^\circ+\tan 23^\circ}{1-\tan 37^\circ\tan 23^\circ}$,则 $\tan 37^\circ+\tan 23^\circ+\sqrt{3}\tan 37^\circ\tan 23^\circ=\sqrt{3}$,D 错误.

3.若 $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$,则 $\cos^2\alpha+2\sin 2\alpha=$________.

$\dfrac{64}{25}$ **解析**:$\cos^2\alpha+2\sin 2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\dfrac{1+4\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$.把 $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$代入,

得 $\cos^2\alpha+2\sin 2\alpha=\dfrac{1+4\times\dfrac{3}{4}}{1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{4}{\dfrac{25}{16}}=\dfrac{64}{25}$.

4.已知 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{1}{2}$.

(1)求 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$的值;

(2)求$\dfrac{\sin 2\alpha-\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha}$的值.

解：(1)因为 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{1}{2}$，

所以 $2+2\tan\alpha=1-\tan\alpha$，得 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$.

所以 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$=\frac{\sqrt{3}-1}{3}\times\frac{9}{9+\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}-3}{9+\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}-6}{13}$.

(2) $\frac{\sin 2\alpha-\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha}$

$=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha}=\tan\alpha-\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$

$=-\frac{5}{6}$.

综合性·创新提升

1. 已知 θ 为第三象限角，$\tan 2\theta=-2\sqrt{2}$，则 $\sin^2\theta+\sin(3\pi-\theta)\cos(2\pi+\theta)-\sqrt{2}\cos^2\theta$ 等于　　(　　)

A. $-\frac{\sqrt{2}}{6}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{6}$　　C. $-\frac{2}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

D　**解析**：因为 θ 为第三象限角，所以 $\tan\theta>0$，又 $\tan 2\theta=-2\sqrt{2}=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$，整理可得 $\sqrt{2}\tan^2\theta-\tan\theta-\sqrt{2}=0$，所以 $\tan\theta=\sqrt{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$（负值舍去），则 $\sin^2\theta+\sin(3\pi-\theta)\cdot\cos(2\pi+\theta)-\sqrt{2}\cos^2\theta=\frac{\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-\sqrt{2}\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\tan^2\theta+\tan\theta-\sqrt{2}}{\tan^2\theta+1}=\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2+1}=\frac{2}{3}$.

2.（多选）已知函数 $f(x)=\sin x|\cos x|$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$，则以下结论正确的是　　(　　)

A. $f(x)$的图象关于 y 轴对称

B. $f(x)$在区间 $\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递减

C. $f(x)$的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称

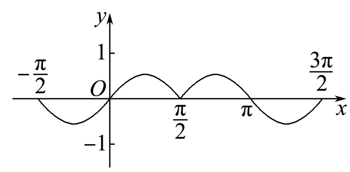
D. $f(x)$的最大值为 $\frac{1}{2}$

BCD　**解析**：当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，

$f(x)=\sin x|\cos x|=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$，

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)=\sin x|\cos x|=-\sin x\cos x=-\frac{1}{2}\sin 2x$，

作出函数 $f(x)$的图象如图.



则函数图象不关于 y 轴对称，故 A 错误；

区间 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 的中点为 $\frac{3\pi}{4}$，区间 $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ 的中点为 $\frac{5\pi}{4}$，则 $f(x)$在区间 $\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递减，故 B 正确；

由图象知 $f(x)$关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，故 C 正确；

当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x\in[-\pi,\pi]$，当 $2x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$取得最大值 $\frac{1}{2}$，故 D 正确.

3. 已知 $\sin 2\alpha=\frac{2}{3}$，则 $\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$________.

$\frac{1}{6}$　**解析**：$\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\cos\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right]}{2}$

$=\frac{1+\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{1-\sin 2\alpha}{2}=\frac{1-\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{6}$.

4. 已知 $\tan\alpha=2$，则 $\tan 2\alpha$ 的值为________，$\frac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha-1}$ 的值为______.

$-\frac{4}{3}$　1　**解析**：$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{4}{3}$.

$\frac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha-1}$

$=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+\tan\alpha-2}$

$=\dfrac{2\times2}{4+2-2}$

$=1.$

5.已知 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=2$，求 $\tan\left(2\alpha+\dfrac{7\pi}{12}\right)$的值.

解：因为 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=2$，

所以 $\tan\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)}{1-\tan^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)}=-\dfrac{4}{3}$.

所以 $\tan\left(2\alpha+\dfrac{7}{12}\pi\right)=\tan\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)+\tan\dfrac{\pi}{4}}{1-\tan\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\tan\dfrac{\pi}{4}}=-\dfrac{1}{7}$.

5.5.2　简单的三角恒等变换

第1课时　半角公式及应用

学习任务目标

1.能通过二倍角公式推导出半角的正弦、余弦、正切公式.

2.能利用三角恒等变换对三角函数式进行化简、求值以及证明.

问题式预习

知识点一　降幂公式

$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$；

$\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$；

$\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

知识点二　半角公式

$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$，

$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$，

$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\underline{\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}=\underline{\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}$.

［微训练］

1.若 $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\alpha\in(0,\pi)$，则 $\cos\dfrac{\alpha}{2}$的值为　(　　)

A.$\dfrac{\sqrt6}{3}$　　B.$-\dfrac{\sqrt6}{3}$　　C.$\pm\dfrac{\sqrt6}{3}$　　D.$\pm\dfrac{\sqrt3}{3}$

A　**解析**：因为 $0<\alpha<\pi$，所以 $0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}=\dfrac{\sqrt6}{3}$，故选 A.

2.已知 $2\pi<\theta<4\pi$，且 $\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$，$\cos\theta<0$，则 $\tan\dfrac{\theta}{2}$的值等于　(　　)

A.-3　　B.3　　C.$-\dfrac{1}{3}$　　D.$\dfrac{1}{3}$

A　**解析**：由题意知 θ 为第三象限角，所以 $\cos\theta=-\sqrt{1-\dfrac{9}{25}}=-\dfrac{4}{5}$，所以 $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{-\dfrac{3}{5}}{1-\dfrac{4}{5}}=-3$.故选 A.

3.化简$\dfrac{2\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha}\cdot\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos2\alpha}$的结果为　(　　)

A.$\tan\alpha$　　B.$\tan2\alpha$　　C.1　　D.2

B　**解析**：原式$=\dfrac{2\sin2\alpha}{2\cos^2\alpha}\cdot\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos2\alpha}=\tan2\alpha$.

任务型课堂

任务一　利用半角公式求值

1. 若 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，则 $\tan\frac{\alpha}{2}=$________.

-2　**解析：**（方法一）因为 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，则 $\frac{\alpha}{2}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$，

则由半角公式，得 $\tan\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=-\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}}=-2$.

（方法二）因为 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，

所以 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，所以 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{-\frac{4}{5}}=-2$.

2. 已知 $\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$450^\circ<\alpha<540^\circ$，则 $\tan\frac{\alpha}{2}$的值为________.

2　**解析：**由题意得$\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{1}{5}$，

即 $1-\sin\alpha=\frac{1}{5}$，得 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

因为 $450^\circ<\alpha<540^\circ$，

所以 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，

所以 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{\frac{4}{5}}=2$.

【类题通法】

利用半角公式求值的思路

(1)观察角：找出已知三角函数式中的角与待求三角函数式中角的倍数关系.

(2)明范围：依据已知角的范围，确定相应半角的范围.

(3)选公式：涉及半角的正切值时，常用 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$计算，其优点是计算时可避免因开方带来的求角的范围问题；涉及半角的正、余弦值时，常先利用 $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$，$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$计算，再由角的范围确定正弦、余弦值.

任务二　三角函数式的化简

1. 化简：$\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=$　　(　　)

A. $\sin\alpha$　　B. $\cos\alpha$

C. $\tan\alpha$　　D. $-\sin\alpha$

C　**解析：**$\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+(2\cos^2\alpha-1)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$.

2. 已知 α 是第三象限角，则$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=$　　(　　)

A. $-\frac{2}{\sin\alpha}$　　B. $-\frac{2}{\cos\alpha}$

C. $2\tan\alpha$　　D. $-\frac{2}{\tan\alpha}$

A　**解析：**（方法一）因为 α 是第三象限角，则$\frac{\alpha}{2}$是第二或第四象限角，

则$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}+\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$

$=-\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}+\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)=-\frac{2}{\sin\alpha}$.

（方法二）原式$=\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}}+\sqrt{\frac{(1+\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}}=$

$\dfrac{|1-\cos\alpha|}{|\sin\alpha|}+\dfrac{|1+\cos\alpha|}{|\sin\alpha|}=\dfrac{2}{|\sin\alpha|}=-\dfrac{2}{\sin\alpha}$.

3. 化简：$\left(\dfrac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}-\tan\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=$

________.

2　**解析**：原式$=\left(\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)\cdot\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

$=\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$=2$.

【类题通法】

化简问题中的“三变”

(1)变角：寻找式子中各角之间的联系，通过拆、凑等手段消除角之间的差异，合理选择联系它们的公式.

(2)变名：观察三角函数种类的差异，尽量统一函数的名称，如统一为弦或统一为切.

(3)变式：分析式子的结构形式的差异，选择适当的变形途径.如升幂、降幂、配方、开方等.

任务三　三角函数式的证明

1. 设 α 为第四象限角，若 $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{13}{5}$，则 $\tan 2\alpha=$________.

$-\dfrac{3}{4}$　**解析**：因为 $\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos^2\alpha+(2\cos^2\alpha-1)\sin\alpha=4\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin\alpha=4\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)-\sin\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$，所以 $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{\sin\alpha}=3-4\sin^2\alpha=\dfrac{13}{5}$，且 α 为第四象限角.所以 $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，$\cos\alpha=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，于是 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{1}{3}$.

所以 $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2\times\left(-\frac{1}{3}\right)}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=-\dfrac{3}{4}$.

2. 证明：$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$.

证明：$\cos 3\theta=\cos(2\theta+\theta)$

$=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta$

$=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta$

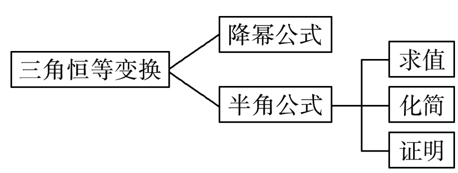
$=4\cos^3\theta-3\cos\theta$.

【类题通法】

证明三角恒等式的思路

通过观察分析等式两端的结构，从两端角的差异、三角函数名称及结构的差异入手，寻求证明途径，消除等式两端的差异，达到形式上的统一.

提质归纳



课后素养评价（五十四）

基础性·能力运用

1.已知 $\cos x=\frac{2}{3}$，且 x 为第四象限角，则 $\tan\frac{x}{2}=$　（　　）

A.$-\frac{\sqrt{5}}{5}$　B.$\frac{\sqrt{5}}{5}$　C.$\frac{\sqrt{5}}{2}$　D.$-\frac{\sqrt{5}}{3}$

A　**解析**：因为 $\cos x=\frac{2}{3}$，且 x 为第四象限角，所以 $\sin x=-\sqrt{1-\cos^2 x}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$，则 $\tan\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

2.已知 $\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{7}{25}$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)=$　（　　）

A.$-\frac{3}{5}$　B.$\frac{3}{5}$　C.$\frac{4}{5}$　D.$-\frac{4}{5}$

B　**解析**：因为 $\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)-1=-\frac{7}{25}$，所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)=\pm\frac{3}{5}$.

又 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3}{5}$.

3.若 $\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，$\sin 2\theta=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，则 $\sin\theta=$　（　　）

A.$\frac{3}{5}$　B.$\frac{4}{5}$　C.$\frac{\sqrt{7}}{4}$　D.$\frac{3}{4}$

D　**解析**：（方法一）由 $\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 可得 $2\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，所以 $\cos 2\theta=-\sqrt{1-\sin^2 2\theta}=-\frac{1}{8}$，$\sin\theta=\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}=\frac{3}{4}$.

（方法二）由 $\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 及 $\sin 2\theta=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，可得 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{1+\sin 2\theta}=\sqrt{1+\frac{3\sqrt{7}}{8}}=\sqrt{\frac{16+6\sqrt{7}}{16}}=\sqrt{\frac{9+6\sqrt{7}+7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}+\frac{3}{4}$.

而当 $\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$时，$\sin\theta>\cos\theta$.

结合选项即可得 $\sin\theta=\frac{3}{4}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

4.在$\triangle ABC$ 中，已知 $2\cos^2\frac{A-B}{2}\cos B-\sin(A-B)\cdot\sin B+\cos(A+C)=\frac{1}{2}$，则 $A=$\underline{$\frac{\pi}{3}$}.

5.计算：$\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}=$\underline{$\frac{2-\sqrt{3}}{4}$}.

6. 已知 $\sin\alpha=-\frac{8}{17}$，且 $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，求 $\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$，$\tan\frac{\alpha}{2}$的值.

解：因为 $\sin\alpha=-\frac{8}{17}$，$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，所以 $\cos\alpha=-\frac{15}{17}$.

又$\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}$，

所以 $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{15}{17}}{2}}=\frac{4\sqrt{17}}{17}$，

$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=-\sqrt{\frac{1-\frac{15}{17}}{2}}=-\frac{\sqrt{17}}{17}$，

$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=-4$.

综合性·创新提升

1.已知 $\sin\theta=\frac{3}{5}$，$\frac{5\pi}{2}<\theta<3\pi$，那么 $\tan\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}$的值为　（B）

A.$\frac{\sqrt{10}}{10}-3$　B.$3-\frac{\sqrt{10}}{10}$

C.$-3-\frac{\sqrt{10}}{10}$　D.$3+\frac{\sqrt{10}}{10}$

2.设 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 6^\circ-\frac{1}{2}\sin 6^\circ$，$b=\frac{2\tan 27^\circ}{1-\tan^2 27^\circ}$，$c=\sqrt{\frac{1-\cos 110^\circ}{2}}$，则有　（　　）

A.$c<b<a$　B.$a<b<c$

C.$a<c<b$　D.$b<c<a$

C　**解析**：由题意得，$a=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 6^\circ-\frac{1}{2}\sin 6^\circ=\sin(60^\circ-6^\circ)=\sin 54^\circ$，$b=\frac{2\tan 27^\circ}{1-\tan^2 27^\circ}=\tan 54^\circ$，$c=\sqrt{\frac{1-\cos 110^\circ}{2}}=\sin 55^\circ$，

因为 $\tan 54^\circ>\tan 45^\circ=1$，$\sin 54^\circ<\sin 55^\circ<1$，所以 $a<c<b$.

3.函数 $y=\frac{\cos 2x+\sin 2x}{\cos 2x-\sin 2x}$的最小正周期为________.

$\frac{\pi}{2}$　**解析**：$y=\frac{\cos 2x+\sin 2x}{\cos 2x-\sin 2x}=\frac{1+\tan 2x}{1-\tan 2x}$

$=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan 2x}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan 2x}=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，

最小正周期 $T=\frac{\pi}{2}$.

4.若 $\tan\frac{\theta}{2}=2$，则 $\sin 2\theta+\cos 2\theta=$________.

$-\frac{31}{25}$　**解析**：$\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{4}{1-4}=-\frac{4}{3}$，

则 $\sin 2\theta+\cos 2\theta=2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$=\frac{2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

$=\frac{2\tan\theta+1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{-\frac{8}{3}+1-\frac{16}{9}}{1+\frac{16}{9}}=-\frac{31}{25}$.

5.(1)已知 $\alpha\neq(2k+1)\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，求证：$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$；

(2)若 α，β 都是锐角，且满足 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$，求 $\tan\frac{\beta}{2}$的值.

(1)**证明**：右边$=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1+2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\tan\frac{\alpha}{2}=$左边.

(2)**解**：因为 α，β 都是锐角，$\cos\alpha=\frac{4}{5}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

因为 $0<\alpha+\beta<\pi$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}\Rightarrow\sin(\alpha+\beta)=\frac{12}{13}$，

所以 $\sin\beta=\sin(\alpha+\beta-\alpha)=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha=\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}-\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}=\frac{33}{65}$，

所以 $\cos\beta=\sqrt{1-\left(\frac{33}{65}\right)^2}=\frac{56}{65}$，

所以 $\tan\frac{\beta}{2}=\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}=\frac{\frac{33}{65}}{1+\frac{56}{65}}=\frac{33}{121}=\frac{3}{11}$.

第 2 课时　三角恒等变换的综合应用

学习任务目标

1.了解三角恒等变换的特点、变换技巧，掌握三角恒等变换的基本思想方法.

2.能利用三角恒等变换进行三角函数式的化简、求值以及解决三角恒等式的证明.

问题式预习

知识点　辅助角公式

$a\sin x+b\cos x=\underline{\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)}$，其中 $\tan\theta=\frac{b}{a}$.

[微训练]

1.(多选)$\sin x-\cos x=$　(　　)

A.$\sqrt{2}\sin(x-45^\circ)$　B.$-\sqrt{2}\cos(x-45^\circ)$

C.$\sqrt{2}\sin(x+45^\circ)$　D.$-\sqrt{2}\cos(x+45^\circ)$

AD　**解析**：$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$

$=-\sqrt{2}(\cos 45^\circ\cos x-\sin 45^\circ\sin x)$

$=-\sqrt{2}\cos(x+45^\circ)$

$=\sqrt{2}\sin(x-45^\circ)$.

2.函数 $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$ 的最小正周期为　(　　)

A.$\frac{\pi}{2}$　B.π　C.2π　D.4π

B　**解析**:$f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$

$=2\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)$

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

因为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$,所以函数 $f(x)$的最小正周期为 π.

故选 B.

3. 若 $3\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sqrt{3}\sin(x+\varphi)$,$\varphi\in(-\pi,\pi)$,则 $\varphi=$________.

$-\frac{\pi}{6}$　**解析**:$3\sin x-\sqrt{3}\cos x$

$=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)=2\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

因为 $\varphi\in(-\pi,\pi)$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

任务型课堂

任务一　利用辅助角公式研究三角函数的性质

[探究活动]

探究 1:如何对 $A\cos\varphi\sin x+A\sin\varphi\cos x$ 进行变形?

提示:逆用两角和的正弦公式,$A\cos\varphi\sin x+A\sin\varphi\cos x=A\sin(x+\varphi)$.

探究 2:若令 $a=A\cos\varphi$,$b=A\sin\varphi$,则 $A\cos\varphi\sin x+A\sin\varphi\cos x=a\sin x+b\cos x$,如何化简 $a\sin x+b\cos x$?

提示:$a\sin x+b\cos x$

$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$.

因为 $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$,所以令 $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$,其中 $\tan\varphi=\frac{b}{a}$,

则 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x)$

$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$.

[评价活动]

1. 函数 $f(x)=2\cos^2\frac{x}{2}+\sin x$ 的最小正周期是____.

2π　**解析**:$f(x)=2\cos^2\frac{x}{2}+\sin x=1+\cos x+\sin x=1+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,所以 $T=\frac{2\pi}{1}=2\pi$.

2. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$ $(x\in\mathbf{R})$.

(1)求函数 $f(x)$的最小正周期;

(2)求使函数 $f(x)$取得最大值的 x 的集合.

解:(1)因为 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$

$=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\right]+1$

$=2\sin\left[\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]+1=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$,

所以 $f(x)$的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)当 $f(x)$取得最大值时,$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1$,

有 $2x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

即 $x=k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$,

所以所求 x 的集合为 $\left\{x\,\middle|\,x=k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

3. 已知函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+2\cos^2x-1$,若 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 且 $f(\alpha)=\frac{4}{5}$,求 $\cos 2\alpha$ 的值.

解:$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+2\cos^2x-1=\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}-\cos 2x\sin\frac{\pi}{6}+\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,故 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

由题意得 $f(\alpha)=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$.

又 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$,$\frac{2\pi}{3}<2\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$,

所以 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3}{5}$.

因此 $\cos 2\alpha=\cos\left[\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]$

$=\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}+\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}$

$=\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{-3\sqrt{3}+4}{10}$.

【类题通法】

研究三角函数的性质,如单调性、周期性等,通常是把复杂的三角函数通过恰当的三角变换,转化为简单的三角函数,再研究转化后的函数的性质.在这个过程中通常利用辅助角公式,将 $y=a\sin x+b\cos x$ 转化为 $y=A\sin(x+\varphi)$ 或 $y=A\cos(x+\varphi)$ 的形式,以便研究函数的性质.

任务二　利用三角恒等变换证明、求值

1. 计算:$\sin^2\frac{5\pi}{24}-\sin^2\frac{\pi}{24}=$________.

$\frac{\sqrt{2}}{4}$　**解析**:由 $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$,得

$\sin^2\frac{5\pi}{24}-\sin^2\frac{\pi}{24}=\sin\left(\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{24}-\frac{\pi}{24}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

2. 求证:$\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$.

证明:因为 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$,

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$,

所以 $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

$=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta$

$=\cos^2\alpha(1-\sin^2\beta)-\sin^2\alpha\sin^2\beta$.

$=\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta$

$=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

【类题通法】

角的三种变换

(1)配角变换:

$\alpha=2\cdot\frac{\alpha}{2}$,$\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$,$\alpha=\beta-(\beta-\alpha)$,$\alpha=\frac{1}{2}[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]$,$\beta=\frac{1}{2}[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]$,$\frac{\pi}{4}+\alpha=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$等.

(2)辅助角变换:

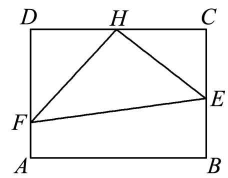
$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$,其中 $\tan\varphi=\frac{b}{a}$.

(3)常值代换:

$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$,$1=\sin 90^\circ=\tan 45^\circ$,$\frac{1}{2}=\sin 30^\circ$,$\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ$等.

任务三　三角恒等变换在实际生活中的应用

1. 如图所示,某高校专家楼前现有一块矩形草坪 $ABCD$.已知 $AB=100$ m,$BC=50\sqrt{3}$ m,为了便于专家平时工作、起居,该高校计划在这块草坪内铺设三条小路 HE,HF 和 EF,并要求 H 是 CD 的中点,点 E 在边 BC 上,点 F 在边 AD 上,且 $\angle EHF$ 为直角,设 $\angle CHE=x$.



(1)试将三条小路的总长(即△HEF 的周长)L(单位:m)表示成 x 的函数,并求出此函数的定义域.

(2)这三条小路的铺设预算费用为每米 400 元,试问如何设计才能使铺路的总费用最低?求出最低总费用(结果保留整数,可能用到的参考值:$\sqrt{3}\approx1.732$,$\sqrt{2}\approx1.414$).

解:(1)在 Rt△CHE 中,因为 $CH=50$,$\angle C=\frac{\pi}{2}$,$\angle CHE=x$,所以 $HE=\frac{50}{\cos x}$.

在 Rt△HDF 中,$HD=50$,$\angle D=\frac{\pi}{2}$,$\angle DFH=x$,

所以 $HF=\frac{50}{\sin x}$.

又 $\angle EHF=\frac{\pi}{2}$,所以 $EF=\frac{50}{\sin x\cos x}$.

所以三条小路的总长(即△HEF 的周长)$L=\frac{50(\sin x+\cos x+1)}{\sin x\cos x}$.

当点 F 在 A 点时,$\angle CHE$ 最小,求得此时 $x=\frac{\pi}{6}$;

当点 E 在 B 点时,$\angle CHE$ 最大,求得此时 $x=\frac{\pi}{3}$.

故此函数的定义域为 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$.

(2)由题意知,要求最低铺路总费用,只要求出△HEF 的周长 L 的最小值即可.由(1)得 $L=\frac{50(\sin x+\cos x+1)}{\sin x\cos x}$,$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$.设 $\sin x+\cos x=t$,则 $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

所以 $L=\frac{50(t+1)}{\frac{t^2-1}{2}}=\frac{100}{t-1}$.

由 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$,

得 $\frac{\sqrt{3}+1}{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$.

从而 $\sqrt{2}+1\leqslant\frac{1}{t-1}\leqslant\sqrt{3}+1$.

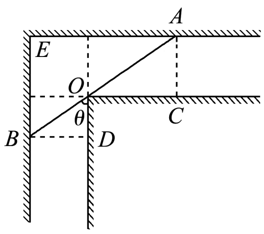
当 $x=\frac{\pi}{4}$，即 $CE=50$ 时，$L_{\min}=100(\sqrt{2}+1)$.

所以，当 $CE=DF=50$ m 时，铺路总费用最低，最低总费用为 96 560 元.

2.某人想要搬运一根长为 L（单位：m）的铁棒 AB 通过直角走廊，如图所示，已知走廊的宽 $AC=BD=1$ m，$\angle BOD=\theta$.

(1)试将 L 表示为 θ 的函数；

(2)求 L 的最小值，并说明此最小值的实际意义.



解：(1)$AO=\frac{1}{\cos\theta}$，$BO=\frac{1}{\sin\theta}$，

$L=AO+BO=\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(2)$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

设 $\sin\theta+\cos\theta=x$，则 $x\in(1,\sqrt{2}]$，

所以，$\sin\theta\cos\theta=\frac{x^2-1}{2}$，此时 $L(x)=\frac{2x}{x^2-1}$.

任取 $x_1,x_2\in(1,\sqrt{2}]$，且 $x_1<x_2$，$L(x_1)-L(x_2)=\frac{2x_1}{x_1^2-1}-\frac{2x_2}{x_2^2-1}=\frac{2(x_2-x_1)(x_1x_2+1)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}$.

因为 $x_1,x_2\in(1,\sqrt{2}]$，且 $x_1<x_2$，

所以 $(x_1^2-1)(x_2^2-1)>0$，

$(x_2-x_1)(x_1x_2+1)>0$.

故 $L(x_1)-L(x_2)>0$，即 $L(x)$ 在 $x\in(1,\sqrt{2}]$ 时是减函数，所以 $L_{\min}=2\sqrt{2}$.

L 最小值的实际意义是：在拐弯时，铁棒的长度不能超过 $2\sqrt{2}$ m，否则，铁棒无法通过，也就是说，能够通过这个直角走廊的铁棒的最大长度为 $2\sqrt{2}$ m.

【类题通法】

三角恒等变换的实际应用问题的关注点

(1)关键：合理引入辅助角 α，确定各量之间的关系，将实际问题转化为三角函数问题.

(2)注意：①充分借助平面几何性质，寻找数量关系；②注意实际问题中变量（角 α）的范围；③重视三角函数有界性的影响.

提质归纳

- 简单三角恒等变换
  - 应用
    - 辅助角公式 — 三角函数的性质
    - 三角恒等变换
      - 证明
      - 求值
      - 实际问题

课后素养评价（五十五）

基础性·能力运用

1.函数 $f(x)=\sin x-\cos x$ 的图象　　(　　)

A.关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称

B.关于直线 $x=-\frac{\pi}{4}$ 对称

C.关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称

D.关于直线 $x=-\frac{\pi}{2}$ 对称

B　**解析**：函数 $f(x)=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，所以由 $x-\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得到 $x=k\pi+\frac{3\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，则当 $k=-1$ 时，函数的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{4}$ 对称.

2.函数 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x(x\in[-\pi,0])$ 的单调递增区间是　　(　　)

A.$\left[-\pi,-\frac{5\pi}{6}\right]$　　B.$\left[-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right]$

C.$\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$　　D.$\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$

D　**解析**：因为 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，所以由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得到 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{5}{6}\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

令 $k=0$ 得单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi\right]$.

因为 $x\in[-\pi,0]$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$.故选 D.

3.函数 $y=\frac{1}{2}\sin 2x+\sin^2 x$，$x\in\mathbf{R}$ 的值域是　(　　)

A. $\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$　　B. $\left[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right]$

C. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right]$ D. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right]$

C　**解析**：$y=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right]$.故选 C.

4.化简：$\frac{\sqrt{1-2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}}{\sin 10^\circ-\sqrt{1-\sin^2 10^\circ}}=$________.

-1　**解析**：$\frac{\sqrt{1-2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}}{\sin 10^\circ-\sqrt{1-\sin^2 10^\circ}}=\frac{|\sin 10^\circ-\cos 10^\circ|}{\sin 10^\circ-\cos 10^\circ}=\frac{\cos 10^\circ-\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ-\cos 10^\circ}=-1$.

5.已知 $A+B=\frac{2\pi}{3}$，那么 $\cos^2 A+\cos^2 B$ 的最大值是________，最小值是________.

$\frac{3}{2}$　$\frac{1}{2}$　**解析**：因为 $A+B=\frac{2\pi}{3}$，

所以 $\cos^2 A+\cos^2 B$

$=\frac{1}{2}(1+\cos 2A+1+\cos 2B)$

$=1+\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)$

$=1+\cos(A+B)\cos(A-B)$

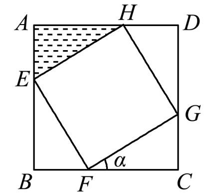
$=1+\cos\frac{2\pi}{3}\cdot\cos(A-B)$

$=1-\frac{1}{2}\cos(A-B)$.

所以当 $\cos(A-B)=-1$ 时，原式取得最大值 $\frac{3}{2}$.

当 $\cos(A-B)=1$ 时，原式取得最小值 $\frac{1}{2}$.

6.如图，有一块正方形的钢板 $ABCD$，其中一个角有部分损坏，现要把它截成一块正方形的钢板 $EFGH$，其面积是原正方形钢板面积的 $\frac{2}{3}$，则角 $\alpha=$ $\underline{\frac{\pi}{12}或\frac{5\pi}{12}}$.



7.已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x+2\cos^2 x-1$.

(1)求 $f(x)$ 的最小正周期；

(2)求 $f(x)$ 的单调递增区间；

(3)当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，求 $f(x)$ 的最大值和最小值.

解：$f(x)=2\sin x\cos x+2\cos^2 x-1=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

(1) $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2) $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

得 $k\pi-\frac{3\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{\pi}{8}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

(3)因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，

所以 $2x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$.

当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{8}$ 时，$f(x)$ 取到最大值为 $\sqrt{2}$；

当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 取到最小值为 -1.

综合性·创新提升

1. $(2\sqrt{3}\cos 20^\circ-\tan 70^\circ)\cos 10^\circ=$　(　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

C　**解析**：$(2\sqrt{3}\cos 20^\circ-\tan 70^\circ)\cos 10^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}\sin 40^\circ-\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}\cdot\cos 10^\circ$

$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^\circ+\frac{3}{2}\sin 10^\circ-\cos(30^\circ-10^\circ)}{\sin 20^\circ}\cdot\cos 10^\circ$

$=\frac{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{1}{2}$.

2.已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x(\omega>0)$在$[0,\pi]$上有两个零点，则 ω 的取值范围为　(　　)

A. $\left(\frac{11}{6},\frac{17}{6}\right)$　　B. $\left[\frac{11}{6},\frac{17}{6}\right)$

C.$\left(\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)$　　D.$\left[\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)$

B　**解析**：$f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，因为 $x\in[0,\pi]$，所以 $\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\omega\pi+\frac{\pi}{6}\right]$，要使函数 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上有两个零点，则 $2\pi\leqslant\omega\pi+\frac{\pi}{6}<3\pi$，

解得$\frac{11}{6}\leqslant\omega<\frac{17}{6}$.所以 ω 的取值范围为$\left[\frac{11}{6},\frac{17}{6}\right)$.

3.已知正实数 a,b 满足$\dfrac{a\sin\frac{\pi}{5}+b\cos\frac{\pi}{5}}{a\cos\frac{\pi}{5}-b\sin\frac{\pi}{5}}=\tan\frac{8\pi}{15}$，则$\frac{b}{a}$的值为________.

$\sqrt{3}$　**解析**：由题设得$\dfrac{\sin\frac{\pi}{5}+\frac{b}{a}\cos\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}-\frac{b}{a}\sin\frac{\pi}{5}}=\dfrac{\sin\frac{8}{15}\pi}{\cos\frac{8}{15}\pi}\Rightarrow$

$$\frac{b}{a}=\frac{\sin\frac{8}{15}\pi\cdot\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{8}{15}\pi\cdot\sin\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{8}{15}\pi\cdot\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{8}{15}\pi\cdot\sin\frac{\pi}{5}}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{8}{15}\pi-\frac{\pi}{5}\right)}{\cos\left(\frac{8}{15}\pi-\frac{\pi}{5}\right)}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}.$$

4.已知函数 $f(x)=\sin x\tan x$.给出下列结论：

①函数 $f(x)$是偶函数；

②函数 $f(x)$在区间$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$上是增函数；

③$2\pi$ 是函数 $f(x)$的一个周期；

④函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=\pi$ 对称.

其中正确结论的序号是________.(写出所有正确结论的序号)

①③④　**解析**：对于 $f(x)=\sin x\tan x$，其定义域为$\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$，

且 $f(-x)=\sin(-x)\tan(-x)=\sin x\tan x$，

所以函数 $f(x)$是偶函数，故①正确；

当 $x=-\frac{\pi}{3}$时，$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$，

当 $x=-\frac{\pi}{6}$时，$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

$-\frac{\pi}{3}<-\frac{\pi}{6}$，而 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)>f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，故②错误；

因为 $f(2\pi+x)=\sin(x+2\pi)\tan(x+2\pi)=\sin x\tan x$，

所以 2π 是函数 $f(x)$的一个周期，故③正确；

因为 $f(\pi-x)=\sin(\pi-x)\tan(\pi-x)=-\sin x\tan x$，

$f(\pi+x)=\sin(\pi+x)\tan(\pi+x)=-\sin x\tan x$，

所以 $f(\pi-x)=f(\pi+x)$，即函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=\pi$ 对称，故④正确.

所以正确结论的序号是①③④.

5.已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin(x-3\pi)\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+2\sin^2\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)-1,x\in\mathbf{R}$.

(1)求函数 $f(x)$的最小正周期及 $f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值和最小值；

(2)若 $f(x_0)=\frac{6}{5},x_0\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，求 $\cos 2x_0$ 的值.

解：(1)$f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2x-1$

$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

$f(x)$的最小正周期为 π.因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{7\pi}{6}$，所以$-1\leqslant 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 2$，

所以 $f(x)$的最大值为 2，最小值为-1.

(2)由(1)可知 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

又因为 $f(x_0)=\frac{6}{5}$，所以 $\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$.

由 $x_0\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，得 $2x_0+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right]$.

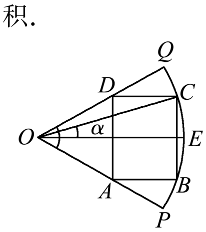
所以 $\cos\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{4}{5}$，

$\cos 2x_0=\cos\left[\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]$

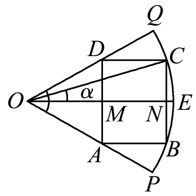
$=\cos\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}+\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$.

6.如图，已知扇形 OPQ 的半径为 1，圆心角为$\frac{\pi}{3}$，四边形 $ABCD$ 是扇形的内接矩形，B,C 两点在圆弧上，OE 是$\angle POQ$ 的平分线，E 在$\overset{\frown}{PQ}$上.连接 OC，记$\angle COE=\alpha$，则角 α 为何值时矩形 $ABCD$ 的面积最大？并求最大面积.



解：如图，设 OE 交 AD 于点 M，交 BC 于点 N.



显然矩形 $ABCD$ 关于 OE 对称，而 M,N 分别为 AD,BC 的中点，在 $\mathrm{Rt}\triangle ONC$ 中，$CN=\sin\alpha$，$ON=\cos\alpha$，$OM=\dfrac{DM}{\tan\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}DM=\sqrt{3}CN=\sqrt{3}\sin\alpha$，

所以 $MN=ON-OM=\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha$，

即 $AB=\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha$，而 $BC=2CN=2\sin\alpha$，

故 $S_{矩形ABCD}=AB\cdot BC=(\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha)\cdot 2\sin\alpha$

$=2\sin\alpha\cos\alpha-2\sqrt{3}\sin^2\alpha$

$=\sin 2\alpha-\sqrt{3}(1-\cos 2\alpha)$

$=\sin 2\alpha+\sqrt{3}\cos 2\alpha-\sqrt{3}$

$=2\left(\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha\right)-\sqrt{3}$

$=2\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}$.

因为 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{6}$，

所以 $0<2\alpha<\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{3}<2\alpha+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{2\pi}{3}$.

故当 $2\alpha+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\alpha=\dfrac{\pi}{12}$ 时，$S_{矩形ABCD}$ 取得最大值，此时 $S_{矩形ABCD}=2-\sqrt{3}$.

5.6　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$

第 1 课时　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象变换

学习任务目标

1. 理解 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中 ω,φ,A 的意义.

2. 掌握 $y=\sin x$ 与 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象间的变换关系，并能正确地指出其变换步骤.

问题式预习

知识点一　A,ω,φ 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的影响

(1)φ 对函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 图象的影响：

$y=\sin x$ 的图象 → $\varphi>0$ 时向<u>左</u> / $\varphi<0$ 时向<u>右</u> → 平移$|\varphi|$个单位长度 → $y=\sin(x+\varphi)$的图象

(2)ω 对函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的影响：

$y=\sin(x+\varphi)$的图象上所有点的横坐标 → $\omega>1$时<u>缩短</u>到 / $0<\omega<1$时<u>伸长</u>到 → 原来的$\dfrac{1}{\omega}$倍 → <u>$y=\sin(\omega x+\varphi)$</u> 的图象

(3)A 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的影响：

$y=\sin(\omega x+\varphi)$的图象上所有点的纵坐标 → $A>1$时<u>伸长</u>到 / $0<A<1$时<u>缩短</u>到 → 原来的A倍 → <u>$y=A\sin(\omega x+\varphi)$</u> 的图象

知识点二　由正弦函数 $y=\sin x$ 的图象得到函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的图象的变换过程

$y=\sin x$ 的图象 $\xrightarrow[\text{平移}|\varphi|\text{个单位长度}]{\text{向左}(\varphi>0)\text{或向右}(\varphi<0)}$ <u>$y=\sin(x+\varphi)$</u> 的图象 $\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{所有点的横坐标变为原来的}\frac{1}{\omega}\text{倍}}$ <u>$y=\sin(\omega x+\varphi)$</u> 的图象 $\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{所有点的纵坐标变为原来的}A\text{倍}}$ <u>$y=A\sin(\omega x+\varphi)$</u> 的图象.

[微训练]

1. 判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)把函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度，得到函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象.　(×)

(2)要得到函数 $y=\sin\left(-x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象，可把函数 $y=\sin(-x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度.(×)

(3)把函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标变为原来的 2 倍，得到 $y=\sin 2x$ 的图象.　(×)

(4)函数 $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象可由函数 $y=\cos x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到. (√)

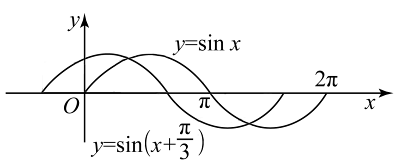
2. 将函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x$ 的图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍(横坐标不变)，再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g\left(\frac{\pi}{6}\right)$ $=\underline{3}$.

任务型课堂

任务一　三角函数图象的平移变换

[探究活动]

探究 1： 观察如图所示的函数图象，思考下面的问题.



(1)函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象可看作把正弦函数 $y=\sin x$ 的图象________平行移动________个单位长度而得到.

(2)函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象可看作把函数 $y=\sin 2x$ 的图象________平行移动________个单位长度而得到.

(1)向左　$\frac{\pi}{3}$　(2)向右　$\frac{\pi}{8}$　**提示：**(1)由 $y=\sin x$ 与 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象可以看出，将 $y=\sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度可得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

(2)由 $y=\sin 2x$ 与 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象可以看出，由 $y=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度，可得到 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象.

探究 2： 函数 $y=\sin(x+\varphi)$(其中 $\varphi\neq 0$)的图象，可以由正弦曲线 $y=\sin x$ 怎样变化得到？

提示： 函数 $y=\sin(x+\varphi)$(其中 $\varphi\neq 0$)的图象，可以由正弦曲线 $y=\sin x$ 向左(当 $\varphi>0$ 时)或向右(当 $\varphi<0$ 时)平移 $|\varphi|$ 个单位长度而得到.

探究 3： 函数 $y=\sin(2x+\varphi)$(其中 $\varphi\neq 0$)的图象，可以由 $y=\sin 2x$ 的图象怎样变化得到？

提示： 函数 $y=\sin(2x+\varphi)$(其中 $\varphi\neq 0$)的图象，可以由 $y=\sin 2x$ 的图象向左(当 $\varphi>0$ 时)或向右(当 $\varphi<0$ 时)平移 $\frac{|\varphi|}{2}$ 个单位长度而得到.

[评价活动]

1. 要得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，只需将 $y=\sin 2x$ 的图象 (　　)

A. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

D. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

C　**解析：** 因为 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]$，所以把 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，就得到 $y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

2. 要得到函数 $y=\sin x$ 的图象，只需将函数 $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象 (　　)

A. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

D. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

A　**解析：** 因为 $y=\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$，所以要得到函数 $y=\sin x$ 的图象，只需将函数 $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度.

3. 若将某函数的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到

函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象，则原来的函数解析式为（　　）

A. $y=\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$

B. $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

C. $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

D. $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}$

A　**解析**：$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\xrightarrow[\text{单位长度}]{\text{向左平移}\frac{\pi}{2}\text{个}}y=\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$，故选 A.

【类题通法】

三角函数图象平移变换的关注点

(1)解题关键：确定平移方向和平移的量.

(2)平移方法：

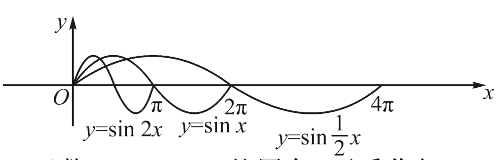
①当 x 的系数是 1 时，若 $\varphi>0$，则左移 φ 个单位长度；若 $\varphi<0$，则右移 $|\varphi|$ 个单位长度.

②当 x 的系数是 $\omega(\omega>0)$ 时，若 $\varphi>0$，则左移 $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$ 个单位长度；若 $\varphi<0$，则右移 $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$ 个单位长度.

任务二　三角函数图象的伸缩变换

[探究活动]

探究 1：根据下面的图象，完成下面的填空：



(1)函数 $y=\sin 2x$ 的图象，可看作把 $y=\sin x$ 图象上所有点的________缩短到原来的________(________不变)而得到的.

(2)函数 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 的图象，可看作把 $y=\sin x$ 图象上所有点的________伸长到原来的________倍(________不变)而得到.

(1)横坐标　$\frac{1}{2}$　纵坐标　**提示**：通过观察图象可以看出，$y=\sin 2x$ 的图象可由 $y=\sin x$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标不变)而得到.

(2)横坐标　2　纵坐标　**提示**：通过观察图象可以看出，$y=\sin\frac{1}{2}x$ 的图象可由 $y=\sin x$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变)而得到.

探究 2：函数 $y=\sin\omega x(\omega>0$ 且 $\omega\neq1)$ 的图象，可由正弦曲线 $y=\sin x$ 怎样变化得到？

提示：函数 $y=\sin\omega x(\omega>0$ 且 $\omega\neq1)$ 的图象，可看作把正弦函数 $y=\sin x$ 图象上所有点的横坐标缩短$(\omega>1)$或伸长$(0<\omega<1)$到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍(纵坐标不变)得到.

[评价活动]

1. 要得到 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 的图象，则（　　）

A. 只需将函数 $y=\sin x$ 的图象向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度

B. 只需将函数 $y=\sin x$ 的图象上每一点的纵坐标不变，横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$

C. 只需将函数 $y=\sin x$ 的图象上每一点的纵坐标不变，横坐标伸长到原来的 2 倍

D. 只需将函数 $y=\sin x$ 的图象上每一点的纵坐标伸长到原来的 2 倍，横坐标也伸长到原来的 2 倍

C　**解析**：这里的 $\omega=\frac{1}{2}<1$，故将函数 $y=\sin x$ 图象上每一点的纵坐标不变，横坐标伸长到原来的 2 倍即可.

2. 下列关于图象变换的说法中，正确的是　(A)

A. 将 $y=\sin 2x$ 图象上各点的横坐标扩大到原来的 2 倍(纵坐标不变)，即可得到 $y=\sin x$ 的图象

B. 将 $y=\sin 2x$ 图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标不变)，即可得到 $y=\sin x$ 的图象

C. 将 $y=-\sin 2x$ 图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标变为原来的相反数，即可得到 $y=\sin x$ 的图象

D. 将 $y=-3\sin 2x$ 图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$，且变为相反数，即可得到 $y=\sin x$ 的图象

3. 将函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 图象上各点的纵坐标不变，横坐标伸长到原来的 5 倍，然后将所得图象上各点的横坐标不变，纵坐标伸长到原来的 5 倍，可得到函数____________的图象.

$y=5\sin\left(\frac{1}{5}x-\frac{\pi}{3}\right)$　**解析**：将函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 图象上各点的纵坐标不变，横坐标伸长到原来的 5 倍，得

到函数 $y=\sin\left(\frac{1}{5}x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象，然后横坐标不变，纵坐标伸长到原来的5倍，可得到函数 $y=5\sin\left(\frac{1}{5}x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象.

【类题通法】

三角函数图象伸缩变换的关注点

(1)解题关键：弄清是横向伸缩还是纵向伸缩，弄清是伸还是缩.

(2)伸缩规律：$\omega>0$ 时，横向伸缩规律为"ω 乘伸缩倍数的倒数"，$A>0$ 时，纵向伸缩规律为"A 乘伸缩的倍数".

任务三　三角函数图象变换的综合应用

1. 将函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象先向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，然后将所得图象上所有的点的横坐标伸长到原来的2倍(纵坐标不变)，则所得到的图象对应的函数解析式为　　(　　)

A. $y=-\cos x$

B. $y=\sin 4x$

C. $y=\sin x$

D. $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

C　**解析**：$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\xrightarrow{\text{向左平移}\frac{\pi}{6}\text{个单位长度}} y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\sin 2x\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标伸长到原来的2倍}} y=\sin x$.

2. 将函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍(纵坐标不变)，再将所得图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度得到曲线 C，则曲线 C 对应的函数解析式是________.

$y=\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$　**解析**：$y=\sin x\rightarrow y=\sin\frac{x}{2}\rightarrow y=\sin\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$.

3. 把函数 $y=f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，然后把横坐标伸长到原来的2倍，纵坐标缩短到原来的$\frac{2}{3}$，所得图象对应的解析式是 $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$，求函数 $f(x)$的解析式.

解：$y=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标伸长到原来的}\frac{3}{2}\text{倍}} y=3\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标缩短到原来的}\frac{1}{2}} y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\xrightarrow{\text{向左平移}\frac{\pi}{6}\text{个单位长度}} y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=3\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=3\cos x$.

所以 $f(x)=3\cos x$.

4. 如何由函数 $y=\sin x$ 的图象得到函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象?

解：方法一：$y=\sin x\xrightarrow{\text{向右平移}\frac{\pi}{3}\text{个单位长度}}$
$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{将各点的横坐标缩短到原来的}\frac{1}{2}}$
$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{将各点的纵坐标伸长到原来的3倍}}$
$y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

方法二：$y=\sin x\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{将各点的横坐标缩短到原来的}\frac{1}{2}}$
$y=\sin 2x\xrightarrow{\text{向右平移}\frac{\pi}{6}\text{个单位长度}}$
$y=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{将各点的纵坐标伸长到原来的3倍}}$
$y=3\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

【类题通法】

三角函数图象变换的关注点

(1)步骤：先用诱导公式将不同名三角函数化为同名三角函数，再根据平移、伸缩变换规律，得出最终结果.

(2)注意：由 $y=\sin x$ 的图象经过平移、伸缩变换能得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象，若先平移，则平移$|\varphi|$个单位长度，若先伸缩再平移，则平移$\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$个单位长度.

提质归纳

- 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$
  - ω，φ，A对图象的影响
  - 图象变换
    - 平移变换
    - 伸缩变换
    - 综合问题

课后素养评价(五十六)

基础性·能力运用

1.(2022·浙江)为了得到函数 $y=2\sin 3x$ 的图象,只要把函数 $y=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)$ 图象上所有的点 (　　)

A.向左平移 $\frac{\pi}{5}$ 个单位长度

B.向右平移 $\frac{\pi}{5}$ 个单位长度

C.向左平移 $\frac{\pi}{15}$ 个单位长度

D.向右平移 $\frac{\pi}{15}$ 个单位长度

D　**解析**:因为 $y=2\sin 3x=2\sin\left[3\left(x-\frac{\pi}{15}\right)+\frac{\pi}{5}\right]$,所以把函数 $y=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)$ 图象上的所有点向右平移 $\frac{\pi}{15}$ 个单位长度即可得到函数 $y=2\sin 3x$ 的图象.

2.(多选)要得到函数 $y=\sin x$ 的图象,可以将函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)$ 的图象上所有的点 (　　)

A.先向右平移 $\frac{\pi}{5}$ 个单位长度,再把所得各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标不变)

B.先向左平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度,再把所得各点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变)

C.先把横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标不变),再把所得各点向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度

D.先把横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变),再把所得各点向左平移 $\frac{\pi}{5}$ 个单位长度

BD　**解析**:只需将函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)$ 的图象上所有的点,横坐标扩大到原来的 2 倍(纵坐标不变),可得 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)$ 的图象,

再向左平移 $\frac{\pi}{5}$ 个单位长度,可得函数 $y=\sin x$ 的图象,故 D 正确;

又 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{10}\right)\right]$,

所以将函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{10}\right)\right]$ 的图象上所有的点,先向左平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度,得到函数 $y=\sin 2x$ 的图象,

再把所得各点横坐标扩大到原来的 2 倍,可得函数 $y=\sin x$ 的图象,故 B 正确.

3.若把函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 m $(m>0)$ 个单位长度后,得到 $y=\sin x$ 的图象,则 m 的最小值为 (　　)

A.$\frac{\pi}{6}$　　B.$\frac{5\pi}{6}$

C.$\frac{\pi}{3}$　　D.$\frac{2\pi}{3}$

C　**解析**:依题意,$y=\sin\left(x-m+\frac{\pi}{3}\right)=\sin x$,

所以 $m-\frac{\pi}{3}=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,所以 $m=\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

又 $m>0$,所以 m 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$.

4.将函数 $y=3\sin 2x$ 的图象向左平移 φ 个单位长度 $\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$,所得图象关于 y 轴对称,则 $\varphi=$_____.

$\frac{\pi}{4}$　**解析**:$y=3\sin[2(x+\varphi)]=3\sin(2x+2\varphi)$ 为偶函数,所以 $2\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

5.将函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 图象上所有点的横坐标保持不变,纵坐标________(填“伸长”或“缩短”)为原来的________倍,将会得到函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象.

伸长　3　**解析**:$A=3>0$,故将函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 图象上所有点的横坐标保持不变,纵坐标伸长为原来的 3 倍即可得到函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象.

6.已知函数 $y=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+2$.

(1)求函数的最小正周期及单调递增区间；

(2)函数的图象可由 $y=\sin x$ 的图象经过怎样的变换而得到？

解：(1) $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

得 $k\pi-\frac{3\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以函数的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{\pi}{8}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

(2) $y=\sin x\xrightarrow{\text{向左平移}\frac{\pi}{4}\text{个单位长度}}y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\xrightarrow{\text{横坐标缩短到原来的}\frac{1}{2}\text{（纵坐标不变）}}y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\xrightarrow{\text{纵坐标伸长到原来的}\sqrt{2}\text{倍（横坐标不变）}}y=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\xrightarrow{\text{向上平移 2 个单位长度}}y=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+2$.

综合性·创新提升

1.(多选)为了得到函数 $y=2\sin 3x$ 的图象，只要把函数 $y=2\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$ 图象上所有的点　(　　)

A.向右平移 $\frac{\pi}{9}$ 个单位长度

B.向左平移 $\frac{7\pi}{18}$ 个单位长度

C.向左平移 $\frac{\pi}{9}$ 个单位长度

D.向右平移 $\frac{5\pi}{18}$ 个单位长度

BD　**解析**：为了得到函数 $y=2\sin 3x$ 的图象，只要把函数 $y=2\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$ 图象上所有的点向左平移 $\frac{7\pi}{18}$ 个单位长度或向右平移 $\frac{5\pi}{18}$ 个单位长度即可.

2.(2022·全国甲卷(文))将函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到曲线 C，若 C 关于 y 轴对称，则 ω 的最小值是　(　　)

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

C　**解析**：由题意知，曲线 C 为 $y=\sin\left[\omega\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(\omega x+\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，又 C 关于 y 轴对称，则 $\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=\frac{1}{3}+2k$，$k\in\mathbf{Z}$.又 $\omega>0$，故当 $k=0$ 时，ω 的最小值为 $\frac{1}{3}$.故选C.

3.把函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\pi)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再将图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变)，所得图象对应的函数解析式为 $y=\sin x$，则　(　　)

A. $\omega=2,\varphi=\frac{\pi}{6}$　　B. $\omega=2,\varphi=-\frac{\pi}{3}$

C. $\omega=\frac{1}{2},\varphi=\frac{\pi}{6}$　　D. $\omega=\frac{1}{2},\varphi=-\frac{\pi}{3}$

B　**解析**：将 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标不变)所得图象对应的函数解析式为 $y=\sin 2x$，再将此函数图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度可得 $y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]$ 的图象，即 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.所以 $\omega=2,\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

4.(多选)将函数 $y=\sin(2x+\varphi)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后，得到一个奇函数的图象，则 φ 的值可能为　(　　)

A. $\frac{5\pi}{4}$　　B. $\frac{3\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $-\frac{\pi}{4}$

BD　**解析**：将函数 $y=\sin(2x+\varphi)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后，得到的函数图象对应解析式为 $y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)+\varphi\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$，

因函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$ 是奇函数，则 $\frac{\pi}{4}+\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，当 $k=1$ 时，$\varphi=\frac{3\pi}{4}$，当 $k=0$ 时，$\varphi=-\frac{\pi}{4}$，选项B，D满足，A，C不满足.

5.为得到函数 $y=\cos x$ 的图象,可以把 $y=\sin x$ 的图象向右平移 φ 个单位长度,那么 φ 的最小正值是________.

$\frac{3}{2}\pi$ **解析**:$y=\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$,

向右平移 φ 个单位长度后得 $y=\cos\left(x-\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\varphi+\frac{\pi}{2}=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以 $\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.

所以 φ 的最小正值是 $\frac{3}{2}\pi$.

6.函数 $y=\cos(2x+\varphi)(-\pi\leqslant\varphi<\pi)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后,与函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象重合,则 $\varphi=$__$\frac{5\pi}{6}$__.

7.已知函数 $f(x)=2\sin\omega x(\cos\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x)-\sqrt{3}$ $(\omega>0)$ 的最小正周期为 π.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2)将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,再向上平移 2 个单位长度,得到函数 $g(x)$ 的图象,求函数 $g(x)$ 在区间 $[0,5\pi]$ 上的所有零点的和.

解:(1) $f(x)=2\sin\omega x(\cos\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x)-\sqrt{3}=\sin 2\omega x+2\sqrt{3}\cdot\frac{1-\cos 2\omega x}{2}-\sqrt{3}=2\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$,因为函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$,所以 $\omega=1$,所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,求得 $k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$,可得函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right],k\in\mathbf{Z}$.

(2)将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,可得 $y=2\sin 2x$ 的图象;

再向上平移 2 个单位长度,得到函数 $g(x)=2\sin 2x+2$ 的图象.

令 $g(x)=0$,得 $\sin 2x=-1$,所以 $2x=2k\pi-\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,即 $x=k\pi-\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$.

函数 $g(x)$ 在区间 $[0,5\pi]$ 上的所有零点的和为 $\frac{3\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}+\frac{11\pi}{4}+\frac{15\pi}{4}+\frac{19\pi}{4}=\frac{55\pi}{4}$.

第 2 课时 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的性质

学习任务目标

1.会用“五点法”画函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象.

2.能根据 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象,确定其解析式.

3.掌握函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的性质,并能熟练运用.

问题式预习

知识点一 用“五点法”作 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 在一个周期内的图象的步骤

第一步:列表.

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{\pi}{2\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{\pi}{\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{3\pi}{2\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$
y	0	A	0	$-A$	0

第二步:在直角坐标系中描出各点.

第三步:用光滑的曲线连接这些点,形成图象.

知识点二 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$,$A>0$,$\omega>0$ 的性质

名称	性质
定义域	$\mathbf{R}$
值域	$[-A,A]$
周期性	最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$
对称性	图象的对称中心:$\left(\frac{k\pi-\varphi}{\omega},0\right)(k\in\mathbf{Z})$

续表

名称	性质
对称性	图象的对称轴：$x=\dfrac{\pi}{2\omega}+\dfrac{k\pi-\varphi}{\omega}(k\in\mathbf{Z})$
奇偶性	当 $\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$时是奇函数； 当 $\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$时是偶函数

[微训练]

1.(多选)已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$的最小正周期为 π,则该函数的图象　(　　)

A.关于点$\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$对称

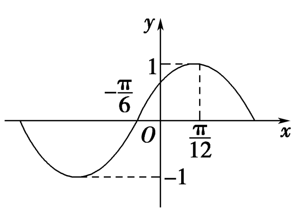
B.关于直线 $x=\dfrac{5\pi}{12}$对称

C.关于点$\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$对称

D.关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$对称

AB　**解析**：由 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=2$，则 $f(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，所以该函数图象关于点$\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$对称，关于直线 $x=\dfrac{5\pi}{12}$对称，故选 AB.

2.某函数图象的一部分如图所示，则该函数的解析式为　(　　)



A.$y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

B.$y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

C.$y=\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

D.$y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

D　**解析**：由图象可知函数的周期 $T=4\times\left[\dfrac{\pi}{12}-\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]=\pi$，所以 $w=2$，又因为函数图象过点$\left(\dfrac{\pi}{12},1\right)$，所以 $\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{12}+\alpha\right)=1$，解得 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，故选 D.

3.关于函数 $f(x)=2\sin\left(3x-\dfrac{3\pi}{4}\right)$，有以下说法：

①其最小正周期为$\dfrac{2\pi}{3}$；

②图象关于点$\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$对称；

③直线 $x=-\dfrac{\pi}{4}$是其图象的一条对称轴.

其中正确说法的序号是______.

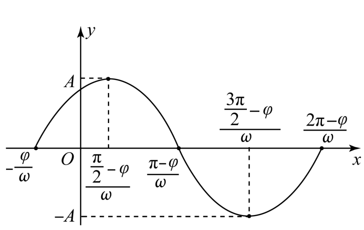
①②③　**解析**：$T=\dfrac{2\pi}{w}=\dfrac{2\pi}{3}$，故①正确；当 $x=\dfrac{\pi}{4}$时，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{3\pi}{4}\right)=0$，所以图象关于点$\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$对称，故②正确；当 $x=-\dfrac{\pi}{4}$时，$f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{3\pi}{4}\right)=2$，所以直线 $x=-\dfrac{\pi}{4}$是其图象的一条对称轴，故③正确.

任务型课堂

任务一　用“五点法”画 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象

[探究活动]

探究：如图为用“五点法”所作的函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$在一个周期内的图象.



请根据图象填表：

$\omega x+\varphi$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\dfrac{\varphi}{\omega}$	$\dfrac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}$	$\dfrac{\pi-\varphi}{\omega}$	$\dfrac{\frac{3\pi}{2}-\varphi}{\omega}$	$\dfrac{2\pi-\varphi}{\omega}$
y	0	A	0	$-A$	0

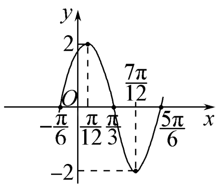
[评价活动]

用“五点法”作出函数 $y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$的简图，并指出该函数的单调区间.

解:(1)列表如下:

$2x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
y	0	2	0	-2	0

(2)描点、连线,如图所示.



由图象知,在一个周期内,函数在$\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$上单调递减,在$\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$上单调递增.

又因为函数的周期为π,

所以函数的单调递减区间为$\left[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$,单调递增区间为$\left[-\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

【类题通法】

1.用“五点法”作函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$图象的实质:利用函数的三个零点、两个最值点画出函数在一个周期内的图象.

2.用“五点法”作函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$图象的步骤:

第一步:列表.

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{\pi}{2\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{\pi}{\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{3\pi}{2\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$
y	0	A	0	$-A$	0

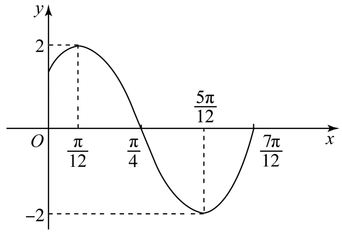
第二步:在平面直角坐标系中描出各点.

第三步:用光滑的曲线连接这些点,形成图象.

任务二　由图象求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的解析式

[探究活动]

如图为函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$图象的一部分,根据图象探究下面的问题.



探究1:根据函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如何求$A$?

提示:根据图象的最高点(或最低点)确定A.

探究2:根据函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如何求$\omega$?

提示:因为$T=\frac{2\pi}{\omega}$,所以常通过周期来确定ω.

探究3:根据函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如何确定$\varphi$?

提示:确定φ的方法有:

①代入法:把图象上的一个已知点的坐标代入(此时,A,ω已知)求解.

②五点法:往往以“五点法”中的第一个点$\left(-\frac{\varphi}{\omega},0\right)$作为突破口.

“五点”的$\omega x+\varphi$的值具体如下:

“第一点”(即图象上升时与x轴的交点)为$\omega x+\varphi=0$;

“第二点”(即图象的“峰点”)为$\omega x+\varphi=\frac{\pi}{2}$;

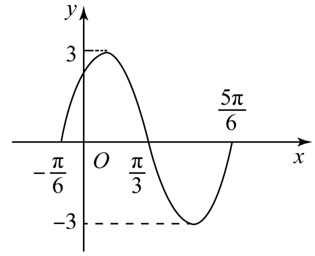
“第三点”(即图象下降时与x轴的交点)为$\omega x+\varphi=\pi$;

“第四点”(即图象的“谷点”)为$\omega x+\varphi=\frac{3\pi}{2}$;

“第五点”为$\omega x+\varphi=2\pi$.

[评价活动]

函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的图象的一部分如图所示,求此函数的解析式.



解:(方法一)由图象知$A=3$,

$T=\frac{5\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$,所以$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$,

所以$y=3\sin(2x+\varphi)$.

因为点$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$在函数图象上,

所以$0=3\sin\left(-\frac{\pi}{6}\times2+\varphi\right)$.

所以$-\frac{\pi}{6}\times2+\varphi=k\pi$,得$\varphi=\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$.

所以 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

(方法二)由图象知 $A=3$.

因为图象过点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 和 $\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$,

所以 $\begin{cases}\frac{5\pi\omega}{6}+\varphi=2\pi,\\ \frac{\pi\omega}{3}+\varphi=\pi,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\varphi=\frac{\pi}{3},\\ \omega=2.\end{cases}$ 所以 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

(方法三)由 $A=3$, $T=\pi$,点 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 在图象上,可知函数图象由 $y=3\sin 2x$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度而得,所以所求函数为 $y=3\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]$,即 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

【类题通法】

求 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中 A,ω,φ 的方法

(1)求 A,根据函数的最值确定 A;

(2)求 ω,由函数的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$,可得 $\omega=\frac{2\pi}{T}$;

(3)求 φ,常用的方法有:

①代入法:把函数图象上的一个已知点的坐标代入解析式(此时 A,ω 已知)求解.

②特殊点法:可以以函数的"最值点"为突破口.具体如下:

函数取得最大值(即图象的"峰点")时,$\omega x+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$;函数取得最小值(即图象的"谷点")时,$\omega x+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

任务三　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 性质的应用

1.(多选)函数 $y=\sin\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)$ 的图象的对称轴方程可以是　(　　)

A.$x=-\frac{\pi}{2}$　　B.$x=\frac{\pi}{2}$

C.$x=\frac{\pi}{8}$　　D.$x=-\frac{5\pi}{4}$

AB　**解析**:$y=\sin\left(2x+\frac{5}{2}\pi\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$,再由 $2x=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$,得 $x=\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$,此即为原函数图象的对称轴方程,故选 AB.

2.已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 的最小正周期为 π,则该函数的图象　(A)

A.关于点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 对称

B.关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称

C.关于点 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 对称

D.关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称

3.设函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)(-\pi<\varphi<0)$,函数 $y=f(x)$ 的图象的一条对称轴是直线 $x=\frac{\pi}{8}$.

(1)求 φ 的值;

(2)求函数 $y=f(x)$ 的单调区间及最值.

解:(1)由 $2x+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$,

得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

令 $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}=\frac{\pi}{8}$, $k\in\mathbf{Z}$,

得 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{4}$, $k\in\mathbf{Z}$.

因为 $-\pi<\varphi<0$,所以 $\varphi=-\frac{3\pi}{4}$.

(2)由(1)知,$f(x)=\sin\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)$.

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{3\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

得 $k\pi+\frac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$,

故函数的单调递增区间是 $\left[k\pi+\frac{\pi}{8},k\pi+\frac{5\pi}{8}\right](k\in\mathbf{Z})$.

同理可得函数的单调递减区间是 $\left[k\pi+\frac{5\pi}{8},k\pi+\frac{9\pi}{8}\right](k\in\mathbf{Z})$.

当 $2x-\frac{3\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

即 $x=k\pi+\frac{5\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$ 时,函数取得最大值 1;

当 $2x-\frac{3\pi}{4}=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

即 $x=k\pi+\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$ 时,函数取得最小值 -1.

【类题通法】

利用函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的性质解决问题时,要注意整体思想的运用,视"$\omega x+\varphi$"为一个整体,结合正弦函数 $y=\sin x$ 的性质灵活应用.

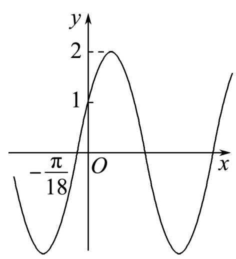
提质归纳

- 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$
  - "五点法"作图 — 由图象求解析式
  - 性质
    - 单调性与最值
    - 奇偶性与对称性

课后素养评价(五十七)

基础性·能力运用

1. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,|\omega|<4,0<\varphi<\pi)$ 的部分图象如图所示,则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=$ (　　)



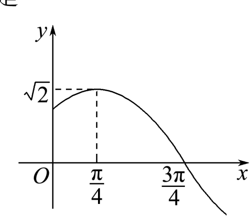
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\sqrt{3}$　　D. -1

C　**解析**:由题设图象知,$A=2$,$f\left(-\frac{\pi}{18}\right)=0$,$2\sin\left(-\frac{\pi}{18}\omega+\varphi\right)=0$,由五点法作图可知 $-\frac{\pi}{18}\omega+\varphi=0$,$2\sin(0+\varphi)=1$,即 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.所以 $\omega=3$,

故函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$.

则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-2\cos\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3}$.

2. (多选)已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示,则下列结论中正确的是 (　　)



A. $\omega=1$

B. $\varphi=\frac{\pi}{4}$

C. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{4}$ 对称

D. 函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

ABD　**解析**:由题图知 $A=\sqrt{2}$,$\frac{T}{4}=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$,$T=2\pi$,所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=1$.

又函数图象过点 $\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$,

所以 $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=\sqrt{2}$,

所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$,

所以 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,所以A,B选项正确;

又 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=0$ 不为最值,所以直线 $x=-\frac{\pi}{4}$ 不是对称轴,所以C选项错误;

由 $\frac{\pi}{2}<x+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{2}$,得 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ 上单调递减,所以D选项正确.

3. 已知函数 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后,得到函数 $y=g(x)$ 的图象.下列关于函数 $y=g(x)$ 的说法正确的是 (　　)

A. 图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$ 对称

B. 图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称

C. 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$ 上单调递增

D. 最小正周期为 2π

A　**解析**:$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

将函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后,得到函数 $y=g(x)$ 的图象,

则 $g(x)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$.

对于A,令 $2x+\frac{2\pi}{3}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$.当 $k=0$ 时,函数图象的对称点为 $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$,故A正确.

对于 B,令 $2x+\frac{2\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,解得 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.令 $-\frac{\pi}{6}=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$,$k$ 无解,故 B 错误.

对于 C,令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{2\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,

解得 $k\pi-\frac{7\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi-\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$,

即 $g(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{7\pi}{12},k\pi-\frac{\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$.

所以函数 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$ 上不是单调递增的,故 C 错误.

对于 D,由 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$,得函数 $g(x)$ 的最小正周期为 π,故 D 错误.

故选 A.

4. (多选)把函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\varphi(0<\varphi<\pi)$ 个单位长度可以得到函数 $g(x)$ 的图象.若函数 $g(x)$ 的图象关于 y 轴对称,则 φ 的值可能为 (BC)

A. $\frac{5\pi}{12}$　B. $\frac{\pi}{3}$　C. $\frac{5\pi}{6}$　D. $\frac{11\pi}{12}$

5. 若函数 $f(x)=3\sin(\omega x+\varphi)$ 对任意 x 都有 $f\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$,则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=$________.

-3 或 3　**解析**:由 $f\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ 知,$x=\frac{\pi}{6}$ 是函数图象的对称轴,所以 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=3$ 或 -3.

6. 已知曲线 $y=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 上的一个最高点的坐标为 $\left(\frac{\pi}{8},\sqrt{2}\right)$,此点到相邻最低点间的曲线与 x 轴交于点 $\left(\frac{3\pi}{8},0\right)$.

(1)试求这条曲线对应函数的解析式;

(2)画出(1)中函数在 $[0,\pi]$ 上的图象.

解:(1)由题意知 $A=\sqrt{2}$,$T=4\times\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\right)=\pi$,$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$,所以 $y=\sqrt{2}\sin(2x+\varphi)$.

又因为 $\sin\left(\frac{\pi}{8}\times 2+\varphi\right)=1$.

所以 $\frac{\pi}{4}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.

所以 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$.

又因为 $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$,

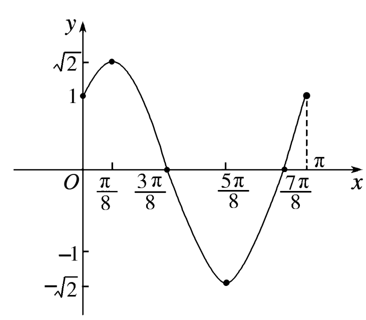
所以 $y=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

(2)因为 $0\leqslant x\leqslant\pi$,所以 $\frac{\pi}{4}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{9\pi}{4}$,

列出 x,y 的对应值表:

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$2x+\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$
y	1	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	0	1

描点、连线,如图所示.



综合性·创新提升

1. (多选)已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期为 4π,且 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$,则下列各点为函数 $f(x)$ 的图象的对称中心的是 (　　)

A. $\left(-\frac{2\pi}{3},0\right)$　B. $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$

C. $\left(\frac{4\pi}{3},0\right)$　D. $\left(\frac{5\pi}{3},0\right)$

AC　**解析**:由 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期为 4π,得 $\omega=\frac{1}{2}$.

因为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$,所以 $\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

即 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

由 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.故 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$.

令 $\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得 $x=2k\pi-\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.故

$f(x)$的图象的对称中心为$\left(2k\pi-\frac{2\pi}{3},0\right)(k\in\mathbf{Z})$.当$k=0$时,$f(x)$的图象的对称中心为$\left(-\frac{2\pi}{3},0\right)$;当$k=1$时,$f(x)$的图象的对称中心为$\left(\frac{4\pi}{3},0\right)$.

2.(多选)已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$,根据函数$f(x)$得到下表,则下列结论正确的是　(　　)

x				$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$
$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	2	5			

A.函数解析式为$f(x)=3\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$

B.函数$f(x)$的图象的一条对称轴为$x=-\frac{2\pi}{3}$

C.$\left(-\frac{5\pi}{12},2\right)$是函数$f(x)$的图象的一个对称中心

D.将函数$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度,再向下平移2个单位长度,所得图象对应的函数为奇函数

BCD　**解析**:由表格的第1,2列可得:$A\times0+B=2\Rightarrow B=2,A+B=5\Rightarrow A=3$.

由表格的第4,5列可得:$\frac{T}{4}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{2\pi}{\omega}=\pi\Rightarrow\omega=2$,所以$2\cdot\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\varphi=\frac{5\pi}{6}$,

所以$f(x)=3\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)+2$,故A错误;

令$g(x)=3\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$,

因为$g\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=3\sin\left(-\frac{4\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)=-3$,

所以$x=-\frac{2\pi}{3}$是函数$g(x)$的图象的一条对称轴,即为函数$f(x)$的图象的一条对称轴,故B正确;

因为$g\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=3\sin\left(-\frac{5\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}\right)=0$,所以$\left(-\frac{5\pi}{12},0\right)$是函数$g(x)$的图象的一个对称中心,

所以$\left(-\frac{5\pi}{12},2\right)$是函数$f(x)$图象的一个对称中心,故C正确;

因为将函数$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度,再向下平移2个单位长度,所得图象对应的函数为$y=3\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{5\pi}{6}\right]+2-2=-3\sin 2x$,为奇函数,故D正确.故选BCD.

3.已知函数$f(x)=2\sin(2x+\varphi)+b(0<\varphi<\pi)$有相邻的两个零点$\frac{\pi}{12}$和$\frac{3\pi}{4}$,则$b=$　(D)

A.1　　B.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

C.$-\frac{1}{2}$　　D.-1

4.直线$x=-\frac{3\pi}{8}$,$x=\frac{\pi}{8}$都是函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$图象的对称轴,且函数$f(x)$在区间$\left[-\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right]$上单调递增,则函数$f(x)$的解析式为$f(x)=$________.

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$　**解析**:由题意可得函数$f(x)$的周期$T=2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}\right)=\pi$,所以$\pi=\frac{2\pi}{\omega}$,解得$\omega=2$.

又由题意可得$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(2\times\frac{\pi}{8}+\varphi\right)=1$,

所以$2\times\frac{\pi}{8}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,解得$\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$.

又因为$0<\varphi<\pi$,所以$\varphi=\frac{\pi}{4}$,所以函数$f(x)$的解析式为$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

5.将函数$f(x)=2\sin(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后得到函数$y=g(x)$的图象,若函数$y=g(x)$为偶函数,则函数$y=f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的值域为________.

$[-1,2]$　**解析**:将函数$f(x)=2\sin(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后得到函数$y=g(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$的图象,若函数$y=g(x)$为偶函数,则$\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,即$\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}$.又$0<\varphi<\pi$,所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$,故函数$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，所以 $\sin\left[2x+\frac{\pi}{6}\right]\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in[-1,2]$，

则函数 $y=f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的值域为$[-1,2]$.

6. 将函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$图象上所有点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$，纵坐标不变，再向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，得到 $y=\sin x$ 的图象.

(1)求函数 $f(x)$的解析式；

(2)当 $x\in[0,3\pi]$时，方程 $f(x)=m$ 有唯一实数根，求 m 的取值范围.

解：(1)将 $y=\sin x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象；横坐标变为原来的 2 倍，纵坐标不变，可得 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象.

故 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$.

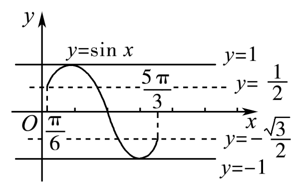
(2)因为 $x\in[0,3\pi]$，所以$\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{3}\right]$.

所以 $\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)\in[-1,1]$.

因为当 $x\in[0,3\pi]$时，方程 $f(x)=m$ 有唯一实数根，

所以函数 $f(x)$的图象和直线 $y=m$ 只有一个交点.

作出函数 $y=\sin x$，$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{3}\right]$的图象，如图所示.



故方程 $f(x)=m$ 有唯一实数根时，m 的取值范围为$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)\cup\{1,-1\}$.

5.7　三角函数的应用

学习任务目标

1. 了解 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象的物理意义，能指出简谐运动中的振幅、周期、相位、初相.

2. 会用三角函数解决一些简单的实际问题.

3. 体会三角函数模型是描述事物周期变化现象的重要数学模型.

问题式预习

知识点一　描述简谐运动 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$x\in[0,+\infty)(A>0,\omega>0)$**的物理量**

物理量	定义	意义
振幅	A 就是这个简谐运动的振幅	做简谐运动的物体离开平衡位置的最大距离
周期	这个简谐运动的周期是 $T=\frac{2\pi}{\omega}$	做简谐运动的物体往复运动一次所需要的时间
频率	这个简谐运动的频率由公式 $f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$给出	做简谐运动的物体在单位时间内往复运动的次数
相位和初相	$\omega x+\varphi$ 称为相位；$x=0$ 时的相位 φ 称为初相	

[微训练]

1. 判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)函数 $y=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)$表示的简谐运动的振幅是$-2$.　(×)

(2)函数 $y=\frac{3}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$表示的简谐运动的初相是$\frac{\pi}{4}$.　(×)

(3)函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象的对称轴方程是 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.　(√)

2. 函数 $y=2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{5}\right)$表示的简谐运动的周期、振幅依次是　(　　)

A. $4\pi,-2$　　B. $4\pi,2$

C. $\pi,2$　　D. $\pi,-2$

B　**解析**:函数的周期 $T=\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$,振幅 $A=2$,故选 B.

知识点二　利用三角函数模型解决实际问题的一般步骤

第一步:阅读理解,审清题意.

读题要做到逐字逐句,读懂题中的文字,理解题目所反映的实际背景,在此基础上分析出已知什么、求什么,从中提炼出相应的数学问题.

第二步:收集、整理数据,建立数学模型.

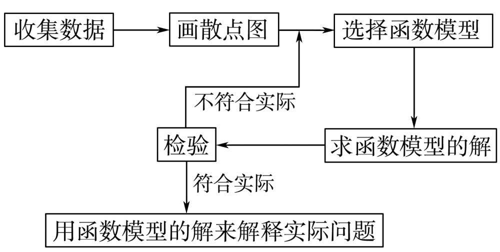
根据收集到的数据找出变化规律,运用已掌握的三角函数知识、物理知识及其他相关知识建立关系式,将实际问题转化为一个与三角函数有关的数学问题,即建立三角函数模型,从而实现实际问题的数学化.

第三步:利用所学的三角函数知识对得到的三角函数模型予以解答.

第四步:将所得结论翻译成实际问题的答案.

知识点三　三角函数模型的建立

三角函数模型的建立过程如图所示:



[微训练]

1. 一个弹簧振子做简谐运动的周期为 0.4 s,振幅为 5 cm,则该振子在 2 s 内通过的路程为　　(　　)

A. 0.2 m　B. 0.5 m　C. 1 m　D. 2 m

C　**解析**:因为 2 s 为 5 个周期,且一个周期通过的路程为 $5\times4=20$(cm),所以 2 s 内通过的路程为 $5\times20=100$(cm)$=1$(m),故选 C.

2. 电流强度 I(A)随时间 t(s)变化的关系式是 $I=5\sin\left(100\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right)$,则当 $t=\dfrac{1}{200}$时,电流强度为　　(　　)

A. 5 A　　B. 2.5 A

C. 2 A　　D. -5 A

B　**解析**:当 $t=\dfrac{1}{200}$时,代入关系式得,$I=5\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{5}{2}$.

3. 一根长 l cm 的线,一端固定,另一端悬挂一个小球,小球摆动时离开平衡位置的位移 s(cm)与时间 t(s)的函数关系式为 $s=3\cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{l}}t+\dfrac{\pi}{3}\right)$,其中 g 是重力加速度,当小球摆动的周期是 1 s 时,线长为______cm.

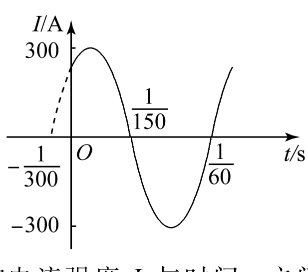
$\dfrac{g}{4\pi^2}$　**解析**:$T=\dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{g}{l}}}=1$,所以 $\sqrt{\dfrac{g}{l}}=2\pi$,所以 $l=\dfrac{g}{4\pi^2}$.

任务型课堂

任务一　三角函数模型在物理中的应用

[探究活动]

探究 1:如图为电流强度 I(单位:A)与时间 t(单位:s)的函数关系的图象.



由图象知电流强度 I 与时间 t 之间具有怎样的函数关系?并求出函数关系式.

提示:由图知电流强度 I 与时间 t 的函数关系可用 $I=A\sin(\omega t+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 来表示.

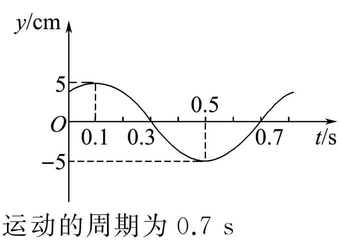
由图象可得 $I=300\sin\left(100\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

探究 2:结合三角函数的周期性,思考哪些物理方面的问题可以用三角函数模型解决.

提示:物理学中的单摆、机械波、电磁波等知识都可以利用三角函数模型来研究.

[评价活动]

1. 如图是一个简谐运动的图象,则下列判断正确的是　(D)



A. 该简谐运动的周期为 0.7 s

B. 该简谐运动的振幅为 -5 cm

C. 该简谐运动在 0.1 s 和 0.5 s 时的振动速度最大

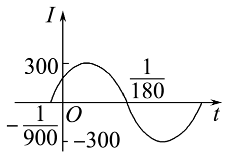
D. 该简谐运动在 0.3 s 和 0.7 s 时的加速度为零

2. 已知电流强度 I(单位:A)与时间 t(单位:s)的关系为 $I=A\sin(\omega t+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(1)如图所示的是 $I=A\sin(\omega t+\varphi)$ 在一个周期内

的图象，根据图中数据求出 I 与 t 的函数关系式；

(2)如果在任意一段 $\frac{1}{150}$ s 的时间内，电流强度都能取得最大值和最小值，那么 ω 的最小正整数值是多少？



解：(1)由题图知 $A=300$，设 $t_1=-\frac{1}{900}$，$t_2=\frac{1}{180}$，

则周期 $T=2(t_2-t_1)=2\left(\frac{1}{180}+\frac{1}{900}\right)=\frac{1}{75}$.

所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=150\pi$. 又当 $t=\frac{1}{180}$ 时，$I=0$，

即 $\sin\left(150\pi\times\frac{1}{180}+\varphi\right)=0$，而 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

故所求的解析式为 $I=300\sin\left(150\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$.

(2)依题意，周期 $T\leqslant\frac{1}{150}$，即 $\frac{2\pi}{\omega}\leqslant\frac{1}{150}(\omega>0)$，

所以 $\omega\geqslant 300\pi>942$.

又 $\omega\in\mathbf{N}^*$，故 ω 的最小正整数值为 943.

【类题通法】

利用三角函数处理物理问题的策略

(1)常涉及的物理问题有单摆、光波、电流、机械波等，其共同的特点是具有周期性.

(2)明确物理概念的意义，此类问题往往涉及诸如频率、振幅等概念，因此要熟知其意义并与对应的三角函数知识结合解题.

任务二　三角函数模型在生活中的应用

[探究活动]

下面是某码头在某天的时间 x(单位：h)与水深 y(单位：m)的关系表，根据表格探究下列问题：

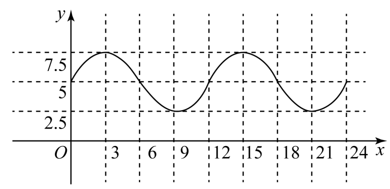
x	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y	5	7.5	5	2.5	5	7.5	5	2.5	5

探究 1：仔细观察表格中的数据，你能从中得到一些什么信息？

提示：发现水深最大值是 7.5 m，最小值为 2.5 m. 水的深度由 5 m 增加到 7.5 m，后逐渐减少到 2.5 m，又开始逐渐变深，增加到 7.5 m 后，又开始减少.

探究 2：以时间为横坐标，以水深为纵坐标建立平面直角坐标系，根据表格中数据作出水深与时间的关系图象，你能得到什么结论？

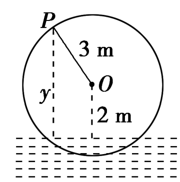
提示：如图，



由图象知，该图象符合三角函数模型 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+k$，可求得 $A=\frac{7.5-2.5}{2}=2.5$，$k=5$，$T=12$，$\omega=\frac{\pi}{6}$，$\varphi=0$，所以 $y=2.5\sin\frac{\pi x}{6}+5$.

[评价活动]

1. 如图，一个半径为 3 m 的水轮每分钟旋转 4 圈，水轮的轴心 O 距离水面 2 m. 已知水轮上的点 P 到水面的距离 y(m)与时间 x(s)满足关系式 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+2$，则有 (　　)



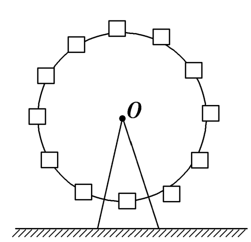
A. $\omega=\frac{15}{2\pi}$，$A=3$　　B. $\omega=\frac{2\pi}{15}$，$A=3$

C. $\omega=\frac{2\pi}{15}$，$A=5$　　D. $\omega=\frac{15}{2\pi}$，$A=5$

B　**解析**：易知水轮的角速度 $\omega=\frac{2\pi\times4}{60}=\frac{2\pi}{15}$，

所以 $y=3\sin(\omega x+\varphi)+2=3\sin\left(\frac{2\pi}{15}x+\varphi\right)+2$，则 $A=3$，$\omega=\frac{2\pi}{15}$.

2. 如图，游乐场中的摩天轮匀速转动，每转一圈需要 12 min，其轴心 O 距离地面 40.5 m，半径为 40 m. 如果某人从最低处登上摩天轮，那么其与地面的距离将随时间的变化而变化，以其登上摩天轮的时刻开始计时，请解答下列问题：



(1)求出此人与地面的距离 y(m)与时间 t(s)的函数关系式；

(2)当此人第 4 次距离地面 60.5 m 时，用了多长时间？

解：(1)由已知可设 $y=40.5+40\sin(\omega t+\varphi)$，$t\geqslant0$，

$\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}$.

由周期为 12 min 可知 $\frac{2\pi}{\omega}=12$，即 $\omega=\frac{\pi}{6}$.又由题意知，$t=0$ 时，$y=0.5$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$，

所以 $y=40.5+40\sin\left(\frac{\pi}{6}t-\frac{\pi}{2}\right)=40.5-40\cos\frac{\pi}{6}t$ $(t\geqslant 0)$.

(2)设转第 1 圈时，第 t_0 min 时距离地面 60.5 m.

由 $60.5=40.5-40\cos\frac{\pi}{6}t_0$，得 $\cos\frac{\pi}{6}t_0=-\frac{1}{2}$，

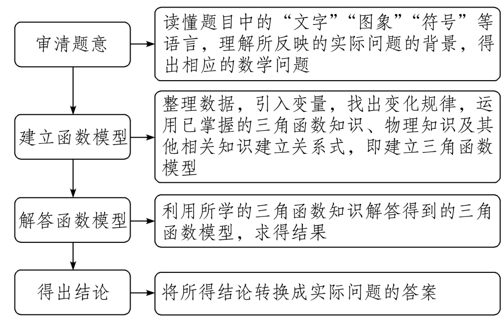
所以 $\frac{\pi}{6}t_0=\frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{6}t_0=\frac{4\pi}{3}$，解得 $t_0=4$ 或 $t_0=8$，

所以 $t=8$ 时，第 2 次距地面 60.5 m，

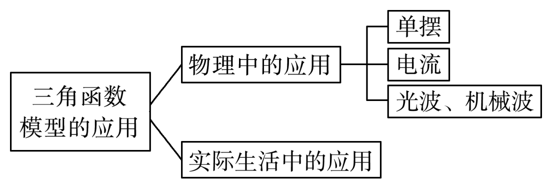
故第 4 次距离地面 60.5 m 时，用了 $12+8=20$ (min).

【类题通法】

解三角函数应用问题的基本步骤



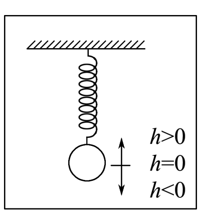
提质归纳



课后素养评价(五十八)

基础性·能力运用

1. 如图，弹簧挂着的一个小球做上下运动，小球在 t s 时相对于平衡位置的高度 h(cm)由如下关系式确定：$h=2\sin\left(\frac{\pi}{6}t+\varphi\right)$，$t\in[0,+\infty)$，$\varphi\in(-\pi,\pi)$.已知当 $t=2$ 时，小球处于平衡位置，并开始向下运动，则 $t=0$ 时 h 的值为　　(　　)



A.-2　　B.2　　C.$-\sqrt{3}$　　D.$\sqrt{3}$

D　**解析**：因为当 $t=2$ 时，小球处于平衡位置，并开始向下移动，

故 $\frac{\pi}{3}+\varphi=\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\varphi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

又 $\varphi\in(-\pi,\pi)$，所以 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$，$h=2\sin\left(\frac{\pi}{6}t+\frac{2\pi}{3}\right)$.

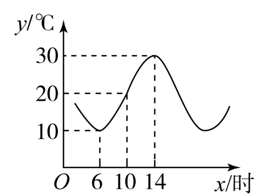
故当 $t=0$ 时，$h=2\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}$.

2. 商场的人流量被定义为每分钟通过入口的人数.某天商场第 t min 的人流量 $F(t)$ 满足函数 $F(t)=50+4\sin\frac{t}{2}(t\geqslant 0)$，则人流量增加时，$t$ 的取值范围是 (C)

A.$[0,5]$　　B.$[5,10]$

C.$[10,15]$　　D.$[15,20]$

3.(多选)如图是某地某一天的气温变化曲线，若该曲线近似地满足函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ $(0<\varphi<\pi)$，则下列说法正确的是　　(　　)



A.该函数的周期是 16

B.该函数图象的一条对称轴是直线 $x=14$

C.该函数的解析式是 $y=10\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{3\pi}{4}\right)+20(6\leqslant x\leqslant 14)$

D.该地这一天 18 时的气温一定为 20 ℃

AB　**解析**：由题意以及函数的图象可知，

$A+B=30$，$-A+B=10$，所以 $A=10$，$B=20$.

因为 $\frac{T}{2}=14-6$，所以 $T=16$，A 正确；

因为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=\frac{\pi}{8}$，

所以 $y=10\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\varphi\right)+20$.

因为图象经过点(14,30)，

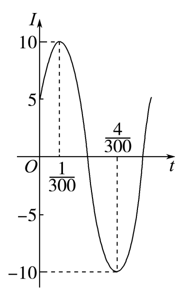
所以 $30=10\sin\left(\frac{\pi}{8}\times 14+\varphi\right)+20$，

即 $\sin\left(\frac{\pi}{8}\times 14+\varphi\right)=1$，所以 φ 可以取 $\frac{3\pi}{4}$.

函数解析式 $y=10\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{3\pi}{4}\right)+20(0\leqslant x\leqslant 24)$，B 正确，C 错误；根据函数关系式只能估计不同时刻的气温，所以 D 错误.

故选 AB.

4.(多选)电流强度 I(A)随时间 t(s)变化的函数 $I=A\sin(\omega t+\varphi)$ $\left(A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$的图象如图所示，则下列说法正确的是　　(ABD)



A.最大电流强度为 10 A

B.$\omega=100\pi,\varphi=\frac{\pi}{6}$

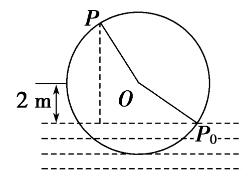
C.当 $t=\frac{1}{100}$时，$I=5$

D.当 $t=\frac{1}{100}$时，$I=-5$

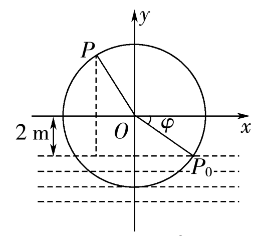
5.如图，一个水轮的半径为4 m，水轮轴心 O 距离水面2 m.已知水轮每分钟转动 1 圈，当水轮上点 P 从水中浮现时(图中点 P_0 位置)开始计算时间.

(1)将点 P 距离水面的高度 z(m)表示为时间 t(s)的函数；

(2)点 P 第一次到达最高点大约需要多长时间？



解：(1)如图，建立平面直角坐标系.设角 $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi<0\right)$是以 Ox 为始边，OP_0 为终边的角.



OP 每秒钟内所转过的角为 $\frac{2\pi}{60}=\frac{\pi}{30}$，则 OP 在 t s内所转过的角为 $\frac{\pi}{30}t$.

由题意可知水轮逆时针转动，得 $z=4\sin\left(\frac{\pi}{30}t+\varphi\right)+2$.

当 $t=0$ 时，$z=0$，得 $\sin\varphi=-\frac{1}{2}$，即 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

故所求的函数为 $z=4\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)+2$.

(2)令 $z=4\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)+2=6$，得 $\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)=1$，

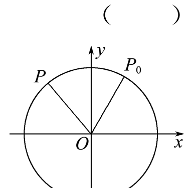
令 $\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，得 $t=20$，

故点 P 第一次到达最高点大约需要 20 s.

综合性·创新提升

1.为了研究钟表秒针针尖的运动变化规律，建立如图所示的平面直角坐标系，设秒针针尖在时间 t(单位：s)时的位置为点 $P(x,y)$.若秒针针尖初始位置为点 $P_0\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$(规定此时 $t=0$)，秒针沿顺时针方向转动，则点 P 的纵坐标 y 与时间 t 的函数关系式可能为　　(　　)

A.$y=2\sin\left(-\frac{\pi}{30}t+\frac{\pi}{3}\right)$



B.$y=-\sin\left(\frac{\pi}{60}t-\frac{\pi}{3}\right)$

C.$y=\sin\left(-\frac{\pi}{30}t+\frac{\pi}{6}\right)$

D.$y=\cos\left(\frac{\pi}{30}t+\frac{\pi}{6}\right)$

D　**解析：**设函数解析式为 $y=\sin(\omega t+\varphi)$ $\left(\omega<0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$，因为函数的最小正周期为 $T=60$，所以 $|\omega|=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{30}$.

因为初始位置为 $P_0\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，即 $t=0$ 时，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

函数解析式为 $y=\sin\left(-\frac{\pi}{30}t+\frac{\pi}{3}\right)$，由诱导公式可得 $y=\cos\left(\frac{\pi}{30}t+\frac{\pi}{6}\right)$.

2. 由于潮汐，某港口一天 24h 的海水深度 H（单位：m）随时间 t（单位：h，$0\leqslant t<24$）的变化近似满足关系式 $H(t)=12+4\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{2\pi}{3}\right)$，则该港口一天内水深不小于 10 m 的时长为（　　）

A.12 h　B.14 h　C.16 h　D.18 h

C　**解析**：由题意，$H(t)=12+4\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{2\pi}{3}\right)\geqslant10$，即 $\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{2\pi}{3}\right)\geqslant-\frac{1}{2}$.

因为 $0\leqslant t<24$，所以 $-\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{12}t-\frac{2\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}$.

由正弦函数图象与性质可知，$-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{12}t-\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{7\pi}{6}$，

解得 $6\leqslant t\leqslant22$.

所以该港口一天内水深不小于 10 m 的时长为 $22-6=16$(h).

3. 以一年为一个周期调查某商品出厂价格及该商品在商店的销售价格时发现：该商品的出厂价格是在 6 元基础上按月份呈正弦曲线波动的.已知 3 月份出厂价格最高为 8 元，7 月份出厂价格最低为 4 元.该商品在商店的销售价格是在 8 元基础上按月份呈正弦曲线波动的，已知 5 月份销售价最高为 10 元，9 月份销售价最低为 6 元.假设某商店每月购进这种商品 m 件，且当月售完，估计盈利最大的是________月份.

6　**解析**：由已知条件可得，出厂价格函数关系式为 $y_1=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)+6$，销售价格函数关系式为 $y_2=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{3}{4}\pi\right)+8$.

所以利润函数关系式为 $y=m(y_2-y_1)=m\left[2\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{3}{4}\pi\right)+8-2\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)-6\right]$

$=-2\sqrt{2}m\sin\frac{\pi}{4}x+2m$.当 $x=6$ 时，$y=2m+2\sqrt{2}m=(2+2\sqrt{2})m$，即 6 月份盈利最大.

4. 如图，弹簧挂着的一个小球做上下运动，时间 t（单位：s）与小球相对平衡位置（即静止时的位置）的高度 h（单位：cm）之间的函数关系式是 $h=2\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)$，$t\in[0,+\infty)$.

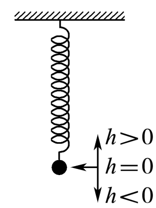
(1)以 t 为横坐标，h 为纵坐标，画出函数在一个周期的闭区间上的简图.

(2)小球开始振动（即 $t=0$）时的位置在哪里？

(3)小球最高点、最低点的位置及各自与平衡位置的距离分别是多少？

(4)经过多长时间小球往复振动一次？

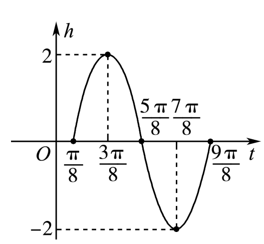
(5)每秒钟小球能往复振动多少次？



解：(1)按五个关键点列表：

t	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$
$2t-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
h	0	2	0	-2	0

描点，并将它们用光滑的曲线连接起来，即得 $h=2\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)$（$t\geqslant0$）在一个周期上的简图如图所示.



(2)$t=0$ 时，$h=2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$，即小球开始振动时的位置为 $(0,-\sqrt{2})$（平衡位置的下方 $\sqrt{2}$ cm 处）.

(3)当 $t=\frac{3\pi}{8}+k\pi(k\in\mathbf{N})$ 时，$h=2$；

当 $t=\frac{7\pi}{8}+k\pi(k\in\mathbf{N})$ 时，$h=-2$.

即最高点位置为 $\left(\frac{3\pi}{8}+k\pi,2\right)$，$k\in\mathbf{N}$，最低点位置为

$\left(\frac{7\pi}{8}+k\pi,-2\right)$,$k\in\mathbf{N}$,最高点、最低点与平衡位置的距离均为 2 cm.

(4)小球往复振动一次所需时间即最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(5)每秒钟小球往复振动的次数,即频率 $f=\frac{1}{T}=\frac{1}{\pi}$.

单元活动构建

任务一　三角函数的概念

已知点 A,P 在半径为 r 的圆 O 上.如图 1 和图 2,以射线 OA 的方向作参照方向,有序数对(r,α),(r,l)都可以表示点 P,其中 α 为圆心角$\angle AOP$ 的大小,l 为$\overset{\frown}{AP}$的长;如图 3,以射线 OA 为 x 轴的非负半轴,圆心 O 为坐标原点,建立直角坐标系,则坐标(x,y)也可以表示点 P.思考下列问题.

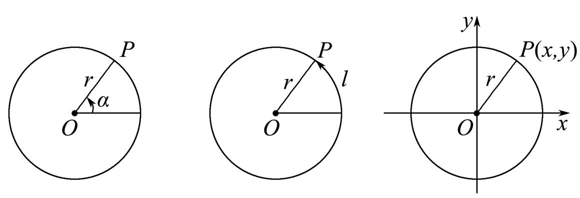


图1　　图2　　图3

问题 1　用(r,α)与(r,l)均可表示圆 O 上的点 P,α 与 l 有什么关系呢?

答案:$\alpha=\frac{l}{r}$.

问题 2　用(r,α)与(x,y)均可表示圆 O 上的点 P,二者之间有怎样的关系呢?

答案:$\sin\alpha=\frac{y}{r}$,$\cos\alpha=\frac{x}{r}$,$\tan\alpha=\frac{y}{x}(x\neq0)$.

问题 3　当 $r=1$ 时,结合问题 2 中的结论,我们可以得到哪些数量关系?

答案:$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

「任务达标」

1.若 α 为第三象限角,则　(　　)

A.$\sin\alpha>0$　　B.$\cos\alpha>0$

C.$\tan\alpha>0$　　D.$\sin\alpha\cos\alpha<0$

C　**解析**:若 α 为第三象限角,则 $\sin\alpha<0$,$\cos\alpha<0$,$\tan\alpha>0$,$\sin\alpha\cos\alpha>0$,

由此可得:A,B,D 错误,C 正确.故选 C.

2.已知角 α 的终边经过点 $P(4,-3)$,则 $\sin\alpha=$(　　)

A.$-\frac{3}{4}$　　B.$-\frac{3}{5}$

C.$\frac{4}{5}$　　D.$\frac{4}{3}$

B　**解析**:因为角 α 的终边过点$(4,-3)$,所以 $x=4$,$y=-3$,$r=|OP|=\sqrt{x^2+y^2}=5$,

所以 $\sin\alpha=\frac{y}{r}=-\frac{3}{5}$.故选 B.

3.若一个扇形所在圆的半径为 2,其圆心角为 2 rad,则扇形的面积为　(　　)

A.1　　B.2

C.4　　D.8

C　**解析**:设扇形的弧长为 l,由题得 $2=\frac{l}{2}$,所以 $l=4$.

所以扇形的面积为 $S=\frac{1}{2}\times4\times2=4$.故选 C.

4.已知 $\alpha\in(0,\pi)$,$\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{1}{5}$,则下列结论正确的是　(　　)

A.$\cos\alpha=\frac{4}{5}$

B.$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{5}$

C.$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\tan\alpha}=-\frac{4}{15}$

D.$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{3\sin\alpha+2\cos\alpha}=-7$

B　**解析**:因为 $\alpha\in(0,\pi)$,$\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{1}{5}$,又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,解得 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$,$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$,故 A 错误;

$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{3}{5}-\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{7}{5}$,故 B 正确;

$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\tan\alpha}=\frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{3}{4}}=\frac{4}{15}$,故 C 错误;

$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{3\sin\alpha+2\cos\alpha}=\frac{\frac{7}{5}}{\frac{1}{5}}=7$,故 D 错误.故选 B.

【规律方法】

巧用三角函数的概念解题

(1)已知角 α 终边上任意一点的坐标求三角函数值的方法:

已知角 α 的终边上一点 $P(x,y)$,则点 P 到原点的距离为 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,$\sin\alpha=\frac{y}{r}$,$\cos\alpha=\frac{x}{r}$.

(2)判断三角函数值符号的方法:

①准确判断角的终边所在的象限;②准确记忆三角函数在各象限的符号.

注意:用弧度制给出的角常常不写单位,不要误认为角度导致判断错误.

任务二　诱导公式

问题 1　由诱导公式一,我们可以得到三角函数的一个正周期吗?

答案:正周期为 $2k\pi,k\in\mathbf{N}^*$.

问题 2　在平面直角坐标系中,点 $P_1(x_1,y_1)$ 与点 $P_2(x_2,y_2)$ 关于坐标原点对称的充要条件是 $\begin{cases}x_1=-x_2,\\y_1=-y_2,\end{cases}$ 由此可以推导出诱导公式二.请你类比得出其他诱导公式的推导方法.

答案:略

问题 3　由诱导公式三,我们能确定正弦函数、余弦函数和正切函数的奇偶性吗?

答案:正弦函数和正切函数是奇函数,余弦函数是偶函数.

『任务达标』

1. 若 $\sin\left(-\frac{\pi}{7}-\theta\right)=\frac{3}{4}$,则 $\sin\left(\frac{6\pi}{7}-\theta\right)$ 的值为(　　)

A.$-\frac{3}{4}$　　B.$\frac{3}{4}$

C.$-\frac{\sqrt{7}}{4}$　　D.$\frac{\sqrt{7}}{4}$

A　**解析**:$\sin\left(\frac{6\pi}{7}-\theta\right)=\sin\left[\left(-\frac{\pi}{7}-\theta\right)+\pi\right]=-\sin\left(-\frac{\pi}{7}-\theta\right)=-\frac{3}{4}$.故选 A.

2. 已知角 α 的终边经过点 $P(-2,1)$,则 $\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)$ 的值为(　　)

A.$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B.$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C.$-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D.$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

A　**解析**:由题意,角 α 的终边经过点 $P(-2,1)$,可得 $r=|OP|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$.

根据三角函数的定义,可得 $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

所以 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.故选 A.

3. 若 $\tan x=\cos(\pi-x)$,则 $\sin x=$(　　)

A.$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$　　B.$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

C.$\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$　　D.$\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$

B　**解析**:由 $\tan x=\cos(\pi-x)$,得 $\frac{\sin x}{\cos x}=-\cos x$,所以 $\sin x=-\cos^2x=\sin^2x-1$,整理得 $\sin^2x-\sin x-1=0$,所以 $\sin x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$(舍去),或 $\sin x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.故选 B.

【规律方法】

诱导公式的应用的关注点

(1)应用口诀:奇变偶不变,符号看象限.

(2)基本步骤:负角化为正角,大角化为小角,最终化为锐角.

(3)求函数值的技巧:观察已知角与所求角的关系,准确选择诱导公式.

任务三　三角函数的图象与性质

问题1　类比以往对函数性质的研究，应从哪些方面研究正弦函数、余弦函数、正切函数的性质？

答案：略

问题2　画出并观察正弦函数、余弦函数、正切函数的图象，结合问题1研究它们的性质.

答案：略

问题3　我们可以用怎样的方法得到函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A\neq0,\omega>0)$ 的图象，试着研究它的周期性、奇偶性和单调性.

答案：略

任务达标

1. 函数 $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是　（　　）

A.最小正周期为 π 的奇函数

B.最小正周期为 π 的偶函数

C.最小正周期为 2π 的奇函数

D.最小正周期为 2π 的偶函数

A　**解析**：因为函数 $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin 2x$，所以函数 $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin 2x$ 是最小正周期为 π 的奇函数.故选A.

2. 满足 $\sin\alpha>\dfrac{1}{2}$ 的角的 α 集合为　（　　）

A. $\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha>2k\pi+\dfrac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$

B. $\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha>2k\pi+\dfrac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$

C. $\left\{\alpha\,\middle|\,2k\pi+\dfrac{\pi}{3}<\alpha<2k\pi+\dfrac{2\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$

D. $\left\{\alpha\,\middle|\,2k\pi+\dfrac{\pi}{6}<\alpha<2k\pi+\dfrac{5\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$

D　**解析**：$\sin\alpha>\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left\{\alpha\,\middle|\,2k\pi+\dfrac{\pi}{6}<\alpha<2k\pi+\dfrac{5\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$.故选D.

3.（多选）设函数 $f(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x\in\mathbf{R}$，则下列关于 $f(x)$ 的说法正确的是　（　　）

A.最小正周期为 π

B.最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$

C.奇函数

D.偶函数

AD　**解析**：$f(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos 2x$，最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$；

由 $f(-x)=-\cos(-2x)=-\cos 2x=f(x)$ 可知函数 $f(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 为偶函数.故选AD.

4.（多选）由函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象得到 $y=\sin x$ 的图象，下列方法正确的是　（　　）

A.先将图象向右平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位长度，再将图象上各点的纵坐标不变，横坐标变为原来的2倍

B.先将图象向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位长度，再将图象上各点的纵坐标不变，横坐标变为原来的2倍

C.先将图象上各点的纵坐标不变，横坐标变为原来的2倍，再将图象向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度

D.先将图象上各点的纵坐标不变，横坐标变为原来的2倍，再将图象向右平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位长度

AC　**解析**：将 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\left[2\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)\right]$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位长度，得 $y=\sin 2x$ 的图象，再将横坐标变为原来的2倍得到 $y=\sin x$ 的图象，故A正确，B错误；将 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象上各点的横坐标变为原来的2倍，得到 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象，再向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度得到 $y=\sin x$ 的图象，故C正确，D错误.故选AC.

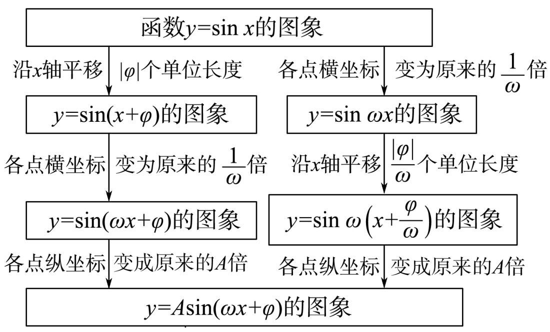
【规律方法】

1.三角函数图象与性质问题解题思路

解决三角函数的图象和性质问题，重点应掌握 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 的定义域、值域、单调性、奇偶性、对称性等有关性质.在此基础上掌握函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$y=A\cos(\omega+\varphi)$ 及 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 的相关性质.在研究其相关性质时，将 $\omega x+\varphi$ 看成一个整体，利用整体代换思想解题是常见的技巧.

2.图象变换

(1)由函数 $y=\sin x$ 的图象变换得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 图象的两种方法

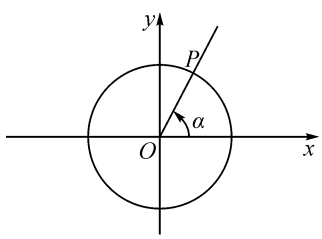


(2)由图象确定函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中的参数的方法:

①由最大值、最小值确定 A.②由最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$确定 ω.③利用已知点坐标列方程确定 φ.

任务四 三角恒等变换

问题 1 如图,在直角坐标系中,角 α 的顶点与原点重合,始边与 x 轴的非负半轴重合,终边与单位圆交于点 P.



将 OP 顺时针旋转角 β,你能用 α,β 表示旋转后点 P 的对应点 P'的坐标吗?

答案:$P'(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta))$.

问题 2 问题 1 中,若将 OP 逆时针旋转角 β,结果怎样?

答案:$P'(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$.

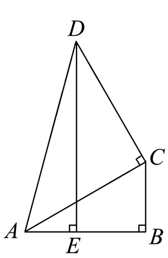
问题 3 请你结合两角和与差的正弦、余弦公式推导两角和与差的正切公式及倍角公式.

答案:略

问题 4 如图,在四边形 $ABCD$ 中,$\angle B$ 为直角,$DE\perp AB$ 于点 E,$AC\perp DC$,$BC=1$.

(1)若$\angle BAC=30°$,$\angle DAC=45°$,试求$\triangle ADE$ 各边的长度,由此推出 75°角的三角函数值;

(2)设$\angle BAC=\alpha$,$\angle DAC=\beta(\alpha,\beta,\alpha+\beta$ 均为锐角),试由图推出 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.



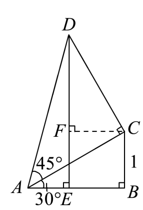
解:(1)在 Rt$\triangle ABC$ 中,因为$\angle BAC=30°$,$BC=1$,所以 $AC=2$.

又 Rt$\triangle ACD$ 为等腰直角三角形,所以 $DC=AC=2$,$AD=2\sqrt{2}$,作 $CF\perp DE$ 于点 F,如图①,则$\angle DCF=90°-30°=60°$,

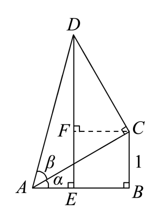
所以 $DF=CD\sin 60°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

所以 $DE=DF+FE=\sqrt{3}+1$,所以 $AE=\sqrt{AD^2-DE^2}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$.又$\angle DAE=45°+30°=75°$,所以 $\sin 75°=\frac{DE}{AD}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,

$\cos 75°=\frac{AE}{AD}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,$\tan 75°=\frac{DE}{AE}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$.



图①



图②

(2)如图②,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$AC=\frac{1}{\sin\alpha}$,

在 Rt$\triangle ACD$ 中,$AD=\frac{AC}{\cos\beta}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\beta}$,

$CD=AD\sin\beta=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta}$,$\angle DCF=90°-\alpha$,

故 $DF=CD\sin\angle DCF=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta}\sin(90°-\alpha)$

$=\dfrac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\beta}$,

$DE=DF+FE=\dfrac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\beta}+1$

$=\dfrac{\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta}$.

在 Rt $\triangle AED$ 中，$\sin\angle DAE=\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{DE}{AD}=\dfrac{\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta}\cdot\sin\alpha\cos\beta$,

即 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

「任务达标」

1. 已知 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，则 $\cos 2\theta=$________.

$\dfrac{7}{25}$　**解析：** 因为 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，所以 $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{7}{25}$.

2. $\tan 10°+\tan 35°+\tan 10°\tan 35°=$________.

1　**解析：** 因为 $1=\tan 45°=\tan(10°+35°)=\dfrac{\tan 10°+\tan 35°}{1-\tan 10°\tan 35°}$,

所以 $\tan 10°+\tan 35°+\tan 10°\tan 35°=1$.

3. 已知函数 $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$，$x\in\mathbf{R}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

(2)求函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最值.

解： (1)因为 $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$x\in\mathbf{R}$,

所以 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，即函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π.

(2)因为 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，所以 $2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right]$,

所以 $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\in\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$,

所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\in[-\sqrt{3},2]$,

所以 $f(x)$ 的最大值为 2，最小值为 $-\sqrt{3}$.

【规律方法】

三角恒等变换的策略

(1)常值代换：特别是“1”的代换，即 $1=\sin^2\theta+\cos^2\theta$，$1=\tan 45°$ 等.

(2)项的拆分与角的配凑：如 $\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\cos^2\alpha=1+\cos^2\alpha$，$\alpha=(\alpha-\beta)+\beta$ 等.

(3)降次与升次：正用二倍角公式升次，逆用二倍角公式降次.

(4)弦、切互化：一般是切化弦.

第五章综合检测

（时间：120 分钟，分值：150 分）

一、单项选择题(本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分).

1. $\sin 20°\cos 10°-\cos 160°\cos 80°=$ （　　）

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

D　**解析**：因为 $\cos 160°=\cos(180°-20°)=-\cos 20°$，$\cos 80°=\cos(90°-10°)=\sin 10°$，

所以 $\sin 20°\cos 10°-\cos 160°\cos 80°=\sin 20°\cos 10°+\cos 20°\sin 10°=\sin(20°+10°)=\sin 30°=\frac{1}{2}$. 故选 D.

2. 若 $\sin(\pi+\alpha)=-\frac{4}{5}$，则 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=$ （　　）

A. $-\frac{4}{5}$　　B. $-\frac{3}{5}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{3}{5}$

A　**解析**：因为 $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，所以 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，所以 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha=-\frac{4}{5}$. 故选 A.

3. 函数 $f(x)=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的单调递增区间为（　　）

A. $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right),k\in\mathbf{Z}$

B. $\left(k\pi-\frac{3\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4}\right),k\in\mathbf{Z}$

C. $(k\pi,k\pi+\pi),k\in\mathbf{Z}$

D. $\left(k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{3\pi}{4}\right),k\in\mathbf{Z}$

B　**解析**：对于函数 $f(x)=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，令 $k\pi-\frac{\pi}{2}<x+\frac{\pi}{4}<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，得 $k\pi-\frac{3\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$，所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(k\pi-\frac{3\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4}\right),k\in\mathbf{Z}$. 故选 B.

4. 将函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度所得图象对应的函数为 $g(x)$，则“$\varphi=\frac{\pi}{3}$”是“$g(x)$ 为偶函数”的 （　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

A　**解析**：因为函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象，所以 $g(x)=\sin\left(2x-2\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$. 若 $g(x)$ 为偶函数，则 $-2\varphi+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\varphi=-\frac{\pi}{6}-\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，当 $k=-1$ 时 $\varphi=\frac{\pi}{3}$. 因为 $\varphi=\frac{\pi}{3}$ 可以推出函数 $g(x)$ 为偶函数而函数 $g(x)$ 为偶函数不能推出 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以“$\varphi=\frac{\pi}{3}$”是“$g(x)$ 为偶函数”的充分不必要条件. 故选 A.

5. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\cos A\cos B=-\cos^2\frac{C}{2}+1$，则 $\triangle ABC$ 一定是 （　　）

A. 等腰直角三角形

B. 直角三角形

C. 等边三角形

D. 等腰三角形

D　**解析**：由已知得 $2\cos A\cos B=-2\cos^2\frac{C}{2}+2=-\cos C+1=\cos(A+B)+1=\cos A\cos B-\sin A\sin B+1$，所以 $\cos A\cos B+\sin A\sin B=\cos(A-B)=1$，又 $-\pi<A-B<\pi$，所以 $A-B=0$，即 $A=B$. 故选 D.

6.若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1}{3}$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)=$　(　　)

A.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B.$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C.$\frac{5\sqrt{3}}{9}$　　D.$-\frac{\sqrt{6}}{9}$

C　**解析**：$\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)=\cos\left[\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$，

因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+\alpha<\frac{3\pi}{4}$，所以 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.又 $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，所以 $\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$.故选 C.

7.已知函数 $f(x)=\sin x\cos(2x+\varphi)$（$\varphi\in[0,\pi]$）为偶函数，则 $\varphi=$　(　　)

A.0　　B.$\frac{\pi}{4}$　　C.$\frac{\pi}{2}$　　D.π

C　**解析**：因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且为偶函数，所以 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow-\cos(-\pi+\varphi)=\cos(\pi+\varphi)\Rightarrow\cos\varphi=-\cos\varphi\Rightarrow\cos\varphi=0$，

因为 $\varphi\in[0,\pi]$，$\varphi=\frac{\pi}{2}$.

当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)=-\sin x\sin 2x$ 为偶函数满足题意.

8.已知函数 $y=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$（$\omega>0$）在区间 $\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上单调递增，且在区间 $[0,\pi]$ 上恰好取得一次最大值 1，则 ω 的取值范围是　(　　)

A.$\left(0,\frac{1}{5}\right]$　　B.$\left[\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right]$

C.$\left[\frac{1}{6},\frac{1}{5}\right]$　　D.$\left[\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$

C　**解析**：令 $X=\omega x+\frac{\pi}{3}$，$\omega>0$，$-\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}$，则 $-\frac{2\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3}\leqslant X\leqslant\frac{5\pi\omega}{6}+\frac{\pi}{3}$，所以函数 $y=\sin X$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3},\frac{5\pi\omega}{6}+\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增，由正弦函数单调性可得 $\begin{cases}-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant-\frac{2\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3},\\ \frac{5\pi\omega}{6}+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$，

分析可知 k 取 0，则 $0<\omega\leqslant\frac{1}{5}$.当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，$\frac{\pi}{3}\leqslant X\leqslant\pi\omega+\frac{\pi}{3}$，因为函数 $y=\sin X$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{3},\pi\omega+\frac{\pi}{3}\right]$ 恰好取得一次最大值 1，所以 $\frac{\pi}{2}\leqslant\pi\omega+\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{2}$，解得 $\frac{1}{6}\leqslant\omega\leqslant\frac{13}{6}$.综上，可知 $\frac{1}{6}\leqslant\omega\leqslant\frac{1}{5}$.故选 C.

二、多项选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）.

9.下列选项正确的是　(　　)

A.存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得 $2\cos x_0=3$

B.$\cos 652^\circ\sin(-108^\circ)<0$

C.$\sin(45^\circ-\alpha)=\cos(45^\circ+\alpha)$

D.$\tan\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sin\theta$

BC　**解析**：对于 A，由 $2\cos x_0=3$ 得 $\cos x_0=\frac{3}{2}$，而 $\cos x\in[-1,1]$，所以 $\cos x_0=\frac{3}{2}$ 无解，所以 A 错误；对于 B，$\cos 652^\circ\sin(-108^\circ)=\cos(-68^\circ)\cdot(-\sin 108^\circ)=-\cos 68^\circ\cdot\sin 108^\circ<0$，所以 B 正确；对于 C，$\sin(45^\circ-\alpha)=\cos[90^\circ-(45^\circ-\alpha)]=\cos(45^\circ+\alpha)$，所以 C 正确；对于 D，$\tan\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}=\tan\theta\sqrt{\cos^2\theta}=\tan\theta\cdot|\cos\theta|=\begin{cases}\sin\theta,\cos\theta>0,\\-\sin\theta,\cos\theta<0,\end{cases}$ 所以 D 错误，故选 BC.

10.已知曲线 $C_1:y=\cos 4x$，$C_2:y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，则下列结论正确的是　(　　)

A.把曲线 C_1 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，再把得到的曲线上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），得到曲线 C_2

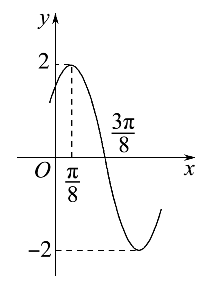
B.把曲线 C_1 向右平移$\frac{\pi}{24}$个单位长度，再把得到的曲线上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变)，得到曲线 C_2

C.把曲线 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$(纵坐标不变)，再把得到的曲线向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到曲线 C_2

D.把曲线 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变)，再把得到的曲线向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到曲线 C_2

BD　**解析**:解析:把曲线 C_1 向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，得到曲线 $y=\cos 4\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(4x+\frac{4\pi}{3}\right)$，再把得到的曲线上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变)，得到曲线 $y=\cos\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(2x+\frac{11\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(2x+\frac{11\pi}{6}\right)$，选项 A 错误；把曲线 C_1 向右平移$\frac{\pi}{24}$个单位长度，得到曲线 $y=\cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$，再把得到的曲线上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变)，得到曲线 $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，选项 B 正确；把曲线 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$(纵坐标不变)，得到曲线 $y=\cos 8x$，再把所得曲线和向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到曲线 $y=\cos 8\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$，选项 C 错误；把曲线 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变)，得到曲线 $y=\cos 2x$，再把所得曲线向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到曲线 $y=\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right]=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，选项 D 正确.故选 BD.

11.已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，将函数 $f(x)$的图象向右平移$\frac{3\pi}{16}$个单位长度，再将图象上所有点的横坐标变为原来的 2 倍(纵坐标不变)，得到函数 $y=g(x)$的图象，则　(　　)



A.$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

B.$g(x)$的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{8}$对称

C.$g(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{8},0\right)$对称

D.函数 $f(x)+g(x)$的最小值为-4

ACD　**解析**:由图象可得，$A=2$.设 $f(x)$的最小正周期为 T，则$\frac{T}{4}=\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$，解得 $T=\pi$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\pi}=2$，故$f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，

因为 $f(x)$过点$\left(\frac{\pi}{8},2\right)$，所以 $2\sin\left(2\times\frac{\pi}{8}+\varphi\right)=2$，

即$\frac{\pi}{4}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，

故 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，故 A 正确；

将函数 $f(x)$的图象向右平移$\frac{3\pi}{16}$个单位长度，则 $y=2\sin\left[2\left(x-\frac{3\pi}{16}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)$，再将图象上所有点的横坐标变为原来的 2 倍(纵坐标不变)，得到函数 $y=g(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$的图象，

$g\left(-\frac{\pi}{8}\right)=-\sqrt{2}\neq\pm 2$，故 B 错误；

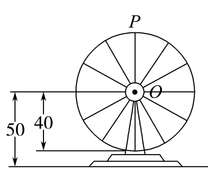
$g\left(\frac{\pi}{8}\right)=0$，则 $g(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{8},0\right)$ 对称，故 C 正确；

因为 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $f(x)_{\min}=-2$，当且仅当 $2x+\frac{\pi}{4}=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，即 $x=k\pi-\frac{3\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时取得，因为 $g(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$，所以 $g(x)_{\min}=-2$，当且仅当 $x-\frac{\pi}{8}=2m\pi-\frac{\pi}{2}$，即 $x=2m\pi-\frac{3\pi}{8}$，$m\in\mathbf{Z}$ 时取得，

综上所述，当 k 为偶数时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 可同时取得最小值 -2，

故函数 $f(x)+g(x)$ 的最小值为 -4，故 D 正确.

12. 如图，摩天轮的半径为 40 m，其轴心点 O 距离地面的高度为 50 m，摩天轮按逆时针方向匀速转动，且 20 min 转一圈，若摩天轮上点 P 的起始位置在最高点处，则下列说法正确的是　　(　　)



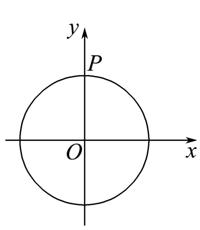
A. 摩天轮转动 10 min 后点 P 距离地面 10 m

B. 若摩天轮转速减半，则转动一圈所需的时间变为原来的 $\frac{1}{2}$

C. 第 17 min 和第 43 min 点 P 距离地面的高度相同

D. 摩天轮转动一圈，点 P 距离地面的高度不低于 70 m 的时间为 5 min

AC　**解析**：由题意知，可以以点 O 为原点建立如图所示的平面直角坐标系，设转动的时间为 t min，点 P 距离地面的高度 $h(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+50$，其中 $|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$，$\omega>0$.



由题意得，$A=40$，函数 $h(t)$ 的最小正周期 $T=20$，得 $\omega=\frac{2\pi}{20}=\frac{\pi}{10}$，又当 $t=0$ 时，$h(t)=90$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，所以 $h(t)=40\sin\left(\frac{\pi}{10}t+\frac{\pi}{2}\right)+50$，化简得 $h(t)=40\cos\frac{\pi}{10}t+50$. 当 $t=10$ 时，$h(t)=10$，故 A 正确；若摩天轮转速减半，则 $T=40$，转动一圈所需的时间变为原来的 2 倍，故 B 错误；第 17 min 点 P 距离地面的高度为 $h(17)=40\cos\frac{17\pi}{10}+50=40\cos\frac{3\pi}{10}+50$，第 43 min 点 P 距离地面的高度为 $h(43)=40\cos\frac{43\pi}{10}+50=40\cos\frac{3\pi}{10}+50$，所以第 17 min和第 43 min 点 P 距离地面的高度相同，故 C 正确；若点 P 距离地面的高度不低于 70 m，则 $40\cos\frac{\pi}{10}t+50\geqslant70$，即 $\cos\frac{\pi t}{10}\geqslant\frac{1}{2}$，当 $0\leqslant t\leqslant20$ 时，$0\leqslant\frac{\pi t}{10}\leqslant2\pi$，则 $0\leqslant\frac{\pi t}{10}\leqslant\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{5\pi}{3}\leqslant\frac{\pi t}{10}\leqslant2\pi$，解得 $0\leqslant t\leqslant\frac{10}{3}$ 或 $\frac{50}{3}\leqslant t\leqslant20$，则摩天轮转动一圈，点 P 距离地面的高度不低于 70 m 的时间为 $\frac{20}{3}$ min，故 D 错误. 故选 AC.

三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）.

得分	

13. 写出一个最小正周期为 1 的奇函数 $f(x)=$________.

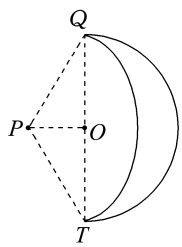
$\sin 2\pi x$（答案不唯一）　**解析**：不妨设 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$，由 $T=\frac{2\pi}{\omega}=1$，得 $\omega=2\pi$，即 $f(x)=\sin 2\pi x$ 符合题意.

得分	

14. “一湾如月弦初上，半壁澄波镜比明”描述的是“敦煌八景”之一的月牙泉. 如图所示，月牙泉由两段在同一平面内的圆弧形岸围成. 两岸连接点间的距离为 $60\sqrt{3}$ m. 其中外岸为半圆形，内岸圆弧所在圆的半径为 60 m. 某游客绕着月牙泉的岸边步行一周，则该游客步行

的路程为________m.

$(40+30\sqrt{3})\pi$　**解析**:如图,是月牙泉的示意图,O是QT的中点,P是内岸圆弧所在圆的圆心,可得$PO\perp QT$,由条件可知$QT=60\sqrt{3}$,$PQ=60$,所以$\sin\angle QPO=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$\angle QPO=\frac{\pi}{3}$,$\angle QPT=\frac{2\pi}{3}$,所以月牙泉的周长$l=\frac{2\pi}{3}\times60+\pi\times30\sqrt{3}=(40+30\sqrt{3})\pi$,所以该游客步行的路程为$(40+30\sqrt{3})\pi$ m.



得分　**15.** 若$\tan(\alpha+\beta)=3$,$\tan\beta=\frac{3}{2}$,则$5\sqrt{2}\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$________.

$-\frac{23}{13}$　**解析**:依题意,$\tan\alpha=\tan[(\alpha+\beta)-\beta]=\frac{3-\frac{3}{2}}{1+3\times\frac{3}{2}}=\frac{3}{11}$,$5\sqrt{2}\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=5(\sin2\alpha-\cos2\alpha)=\frac{5(2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{5(2\tan\alpha-1+\tan^2\alpha)}{\tan^2\alpha+1}=\frac{5\times\left(\frac{6}{11}-1+\frac{9}{121}\right)}{\frac{9}{121}+1}=-\frac{23}{13}$.

得分　**16.** 已知函数$f(x)=\sqrt{2}\cos(\omega x+\varphi)$$\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$,若$\exists x_1,x_2\in\mathbf{R}$,使得$f(x_1)f(x_2)=-2$,且$|x_2-x_1|$的最小值为$\frac{\pi}{2}$,则$\omega$的值为________;若将$f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后所得函数图象关于直线$x=\frac{7\pi}{12}$对称,则$f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上的最小值为________.

2　$-\frac{\sqrt{6}}{2}$　**解析**:因为$f(x)=\sqrt{2}\cos(\omega x+\varphi)$的最大值和最小值分别为$\sqrt{2}$和$-\sqrt{2}$,又$f(x_1)f(x_2)=-2$,所以$f(x_1)$,$f(x_2)$中一个为最大值,一个为最小值.因为$|x_2-x_1|$的最小值为$\frac{\pi}{2}$,所以$f(x)$的最小正周期$T$满足$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$,所以$T=\pi$,故$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$.将$f(x)=\sqrt{2}\cos(2x+\varphi)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后,所得图象对应的函数为$g(x)=\sqrt{2}\cos\left(2x+\varphi-\frac{\pi}{3}\right)$,由题意可知,直线$x=\frac{7\pi}{12}$是$g(x)$图象的一条对称轴,所以$2\times\frac{7\pi}{12}+\varphi-\frac{\pi}{3}=k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,所以$\varphi=-\frac{5\pi}{6}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,令$k=1$,则$\varphi=\frac{\pi}{6}$,所以$f(x)=\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.因为$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$,所以$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$,所以$f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上为减函数,故最小值为$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}$.

四、解答题(本题共6小题,共70分).

得分　**17.**(10分)已知角α的顶点在原点,始边与x轴的非负半轴重合,终边为射线$2x+y=0(x\geqslant0)$.

(1)求$2\sin\alpha+\cos\alpha$的值;

(2)求$\frac{1+2\sin(\pi+\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$的值.

解:(1)因为角α的终边为射线$2x+y=0(x\geqslant0)$,所以可设终边上一点$P(a,-2a)(a>0)$.

则$\tan\alpha=-2$,$\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

所以$2\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

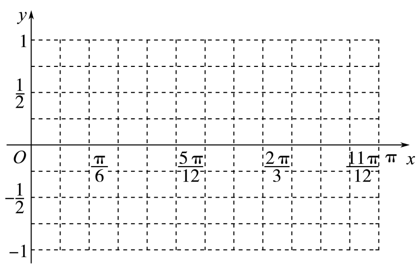
(2) $\dfrac{1+2\sin(\pi+\alpha)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}$，

因为 $\tan\alpha=-2$，所以原式 $=\dfrac{-2-1}{-2+1}=3$.

得分	

18.（12 分）设 $x\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<0\right)$ 的最小正周期为 π，且 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



(1)求 ω 和 φ 的值；

(2)在给定的直角坐标系中作出函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的图象；

(3)若 $f(x)>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求 x 的取值范围.

解：(1)因为函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$，

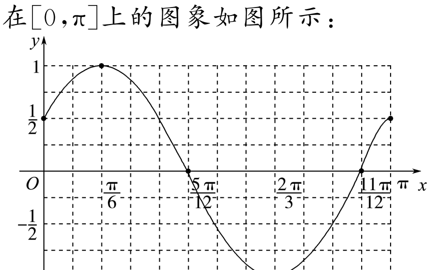
所以 $\omega=2$，$f(x)=\cos(2x+\varphi)$，

所以 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2\times\dfrac{\pi}{4}+\varphi\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\varphi\right)=-\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且 $-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<0$，所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$.

(2)由(1)知 $f(x)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，列表如下：

x	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{5\pi}{12}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{11\pi}{12}$	π
$2x-\dfrac{\pi}{3}$	$-\dfrac{\pi}{3}$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	$\dfrac{5\pi}{3}$
$f(x)$	$\dfrac{1}{2}$	1	0	-1	0	$\dfrac{1}{2}$

$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的图象如图所示：



(3)因为 $f(x)>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $2k\pi-\dfrac{\pi}{4}<2x-\dfrac{\pi}{3}<2k\pi+\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，

则 $2k\pi+\dfrac{\pi}{12}<2x<2k\pi+\dfrac{7\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$，

即 $k\pi+\dfrac{\pi}{24}<x<k\pi+\dfrac{7\pi}{24}(k\in\mathbf{Z})$.

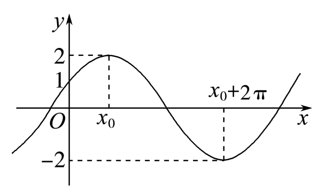
所以 x 的取值范围是 $\left\{x\,\middle|\,k\pi+\dfrac{\pi}{24}<x<k\pi+\dfrac{7\pi}{24},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

得分	

19.（12 分）如图，函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象与 y 轴的交点为 $(0,1)$，且其图象在 y 轴右侧的第一个最高点和第一个最低点的横坐标分别为 x_0 和 $x_0+2\pi$.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2)将函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $a(a\in(0,2\pi))$ 个单位长度后，所得图象对应的函数 $y=g(x)$ 是奇函数，求 a 的值.



解：(1)由题意，知 $\dfrac{T}{2}=x_0+2\pi-x_0=2\pi$，

所以 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=4\pi$，得 $\omega=\dfrac{1}{2}$，

所以 $f(0)=2\cos\left(\dfrac{1}{2}\times0+\varphi\right)=1$，即 $\cos\varphi=\dfrac{1}{2}$.

因为 $-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，

当 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上先取得最小值，后取得最大值，不符合题意，所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$，

所以函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2\cos\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

(2)由题意得 $g(x)=2\cos\left[\dfrac{1}{2}(x+a)-\dfrac{\pi}{3}\right]$，

因为 $y=g(x)$ 是奇函数，

所以 $g(0)=2\cos\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=0$，

所以$\frac{a}{2}-\frac{\pi}{3}=k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $a=2k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，

又 $a\in(0,2\pi)$，所以 $a=\frac{5\pi}{3}$，

当 $a=\frac{5\pi}{3}$时，$g(x)=2\cos\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{5\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=2\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin\frac{1}{2}x$，满足 $g(-x)=-g(x)$，所以 $g(x)$ 为奇函数，所以 $a=\frac{5\pi}{3}$满足题意.

得分

20.（12 分）已知函数 $f(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}x\right)$.

(1)求函数 $f(x)$图象的对称轴方程；

(2)将函数 $f(x)$的图象向左平移 1 个单位长度，得到函数 $g(x)$的图象，若函数 $y=g(x)+k$ 在区间$(-2,4)$内有两个零点，求实数 k 的取值范围.

解：(1)$f(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}x\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{4}\right)$，

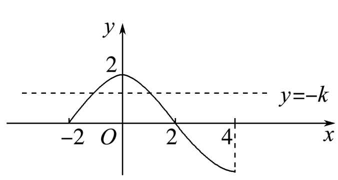
令$\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

解得 $x=1+4k,k\in\mathbf{Z}$，

所以函数 $f(x)$图象的对称轴方程为 $x=1+4k,k\in\mathbf{Z}$.

(2)依题意，将函数 $f(x)$的图象向左平移 1 个单位长度后，得到的图象对应函数的解析式为 $g(x)=2\sin\left[\frac{\pi}{4}(x+1)+\frac{\pi}{4}\right]=2\cos\frac{\pi}{4}x$，

函数 $y=g(x)+k$ 在区间$(-2,4)$内有两个零点，即函数 $y=g(x)$的图象与直线 $y=-k$ 在区间$(-2,4)$内有两个交点，如图所示，



所以 $0<-k<2$，即$-2<k<0$，

所以实数 k 的取值范围为$(-2,0)$.

得分

21.(12 分)已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x+2\sqrt{3}\cos^2x-\sqrt{3}$.

(1)求函数 $f(x)$的单调递减区间；

(2)将函数 $y=f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，再将所得图象上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，纵坐标不变，得到函数 $y=g(x)$的图象，求 $y=g(x)$在$\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{8}\right]$上的值域.

解：(1) $f(x)=2\sin x\cos x+2\sqrt{3}\cos^2x-\sqrt{3}=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，解得 $k\pi+\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{7\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$，

因此，函数 $f(x)$ 的单调递减区间为$\left[k\pi+\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{7\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$.

(2)将函数 $y=f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，可得 $y=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]$，

即 $y=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$的图象，

再将所得图象上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，纵坐标不变，

得到函数 $y=g(x)=2\sin\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)$的图象，

当 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{8}\right]$时，$4x+\frac{2\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right]$，

所以 $2\sin\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)\in[-1,2]$，

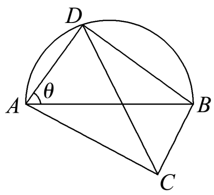
所以 $y=g(x)$在$\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{8}\right]$上的值域为$[-1,2]$.

得分

22.(12 分)如图，在 Rt$\triangle ACB$ 中，斜边 $AB=2,BC=1$，在以 AB 为直径的半圆上有一点 D(不含端点)，$\angle DAB=\theta$，设$\triangle ABD$ 的面积为 S_1，$\triangle ACD$ 的面积为 S_2.

(1)若 $S_1=S_2$，求 θ；

(2)令 $S=S_1-S_2$，求 S 的最大值及此时的 θ.



解：因为在 Rt△ACB 中，$AB=2$，$BC=1$，

所以 $AC=\sqrt{3}$，$\angle BAC=\frac{\pi}{6}$，$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$.

又因为 D 为以 AB 为直径的半圆上一点，

所以 $\angle ADB=\frac{\pi}{2}$.

在 Rt△ADB 中，$AD=2\cos\theta$，$BD=2\sin\theta$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，作 $CF\perp AD$ 于点 F（图略），则 $CF=\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$，

$S_1=\frac{1}{2}\times AD\times BD=\frac{1}{2}\times 2\cos\theta\times 2\sin\theta=\sin 2\theta$，

$S_2=\frac{1}{2}\times AD\times CF=\frac{1}{2}\times 2\cos\theta\times\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\cos\theta\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$.

(1)若 $S_1=S_2$，则 $\sin 2\theta=\sqrt{3}\cos\theta\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$，

因为 $\cos\theta\neq 0$，所以 $2\sin\theta=\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$，整理得 $\sin\theta=\sqrt{3}\cos\theta$，

所以 $\tan\theta=\sqrt{3}$，$\theta=\frac{\pi}{3}$.

(2) $S=\sin 2\theta-\sqrt{3}\cos\theta\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2\theta-\sqrt{3}\cos\theta\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)=\sin 2\theta-\frac{3}{4}\sin 2\theta-\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\cos 2\theta)=\frac{1}{4}\sin 2\theta-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2\theta-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}$，

因为 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以 $-\frac{\pi}{3}<2\theta-\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}$，

当 $2\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{5\pi}{12}$ 时，S 取得最大值，为 $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

模块综合检测

（时间：120 分钟，分值：150 分）

一、单项选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）.

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,4,6,8\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数为　　(B)

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

2. 已知角 α 的终边经过点 $(3a-9,a+2)$，且 $\cos\alpha\leqslant 0$，$\sin\alpha>0$，则实数 a 的取值范围是　　(A)

A. $(-2,3]$　　B. $(-2,3)$

C. $[-2,3)$　　D. $[-2,3]$

3. 命题“$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+2\leqslant 0$”的否定是　　(　　)

A. $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+2>0$

B. $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+2\leqslant 0$

C. $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+2>0$

D. $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+2\geqslant 0$

A　**解析**：存在量词命题的否定是全称量词命题，注意到要否定结论，故选 A.

4. 已知函数 $f(x)=2\cos(2x+\varphi)\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后，得到函数 $g(x)$ 的图象，若 $g(x)$ 的图象关于原点对称，则 $\varphi=$　　(　　)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{12}$

C　**解析**：将函数 $f(x)=2\cos(2x+\varphi)\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得

$g(x)=2\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\varphi\right]=2\cos\left(2x+\varphi-\frac{2\pi}{3}\right)$.

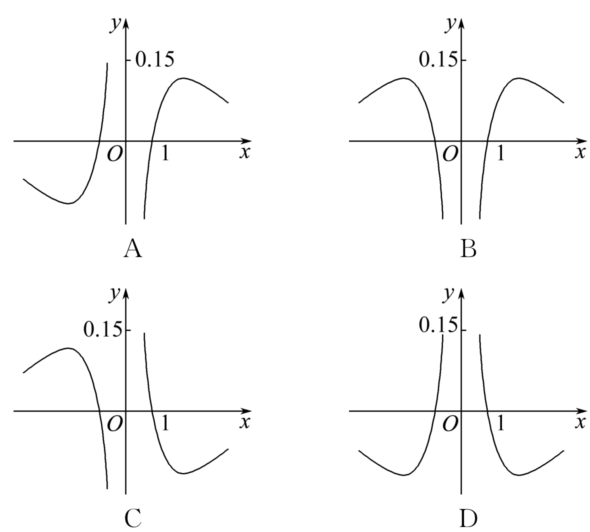
又 $g(x)$ 的图象关于原点对称，则 $\varphi-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $\varphi=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+k\pi=\frac{7\pi}{6}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，则当 $k=-1$ 时，$\varphi=\frac{\pi}{6}$.

5. 设 α 为锐角，若 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$，则 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$ 的值为 (B)

A. $\frac{12}{25}$　B. $\frac{24}{25}$　C. $-\frac{24}{25}$　D. $-\frac{12}{25}$

6. (2021·天津)函数 $y=\frac{\ln|x|}{x^2+2}$ 的图象大致为 (　　)



B　**解析**：设 $y=f(x)=\frac{\ln|x|}{x^2+2}$，则函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq0\}$，关于原点对称，

又 $f(-x)=\frac{\ln|-x|}{(-x)^2+2}=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为偶函数，排除 AC；

当 $x\in(0,1)$ 时，$\ln|x|<0$，$x^2+2>0$，所以 $f(x)<0$，排除 D. 故选 B.

7. “$a=0$”是“函数 $f(x)=\sin x-\frac{1}{x}+a$ 为奇函数”的 (C)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

8. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减. 若 $f(x^2-2x+a)<f(x+1)$ 对任意 $x\in[-1,2]$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为 (D)

A. $\left(-\infty,\frac{13}{4}\right)$　B. $(-\infty,-3)$

C. $(-3,+\infty)$　D. $\left(\frac{13}{4},+\infty\right)$

二、多项选择题(本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分).

9. 已知 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$，下列关于该函数的说法错误的是 (　　)

A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π

B. $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增

C. 当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 时，$f(x)$ 的取值范围为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$

D. $f(x)$ 的图象可由 $g(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度得到

ACD　**解析**：因为 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$，所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，A 不正确；令 $t=2x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，而 $y=\frac{1}{2}\sin t$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，B 正确；因为 $t=2x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，$\sin t\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，所以 $f(x)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{2}\right]$，C 不正确；由于 $g(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right]$，所以 $f(x)$ 的图象可由 $g(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度得到，D 不正确. 故选 ACD.

10. 已知集合 $M=\{x|x^2=1\}$，$N=\{x|ax=1\}$. 若 $N\subseteq M$，则实数 a 的值可能为 (AB)

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

11. 对于函数 $f(x)=\lg(|x-2|+1)$，下列说法正确的是　（　　）

A. $f(x+2)$ 是偶函数

B. $f(x+2)$ 是奇函数

C. $f(x)$ 在区间 $(-\infty,2)$ 上是减函数，在区间 $(2,+\infty)$ 上是增函数

D. $f(x)$ 没有最小值

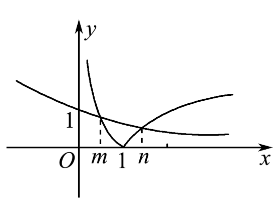
AC　**解析**：令 $g(x)=f(x+2)=\lg(|x|+1)$，$g(-x)=\lg(|-x|+1)=g(x)$，故 $f(x+2)$ 是偶函数.

作出 $f(x)$ 的图象（图略），可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上是减函数，在 $(2,+\infty)$ 上是增函数，函数存在最小值 0. 所以 A，C 正确.

12. 若函数 $f(x)=|\log_a x|-2^{-x}$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的两个零点是 m，n，且 $m<n$，则　（　　）

A. $0<m<1$　B. $mn>1$　C. $0<mn<1$　D. $n>1$

ACD　**解析**：由 $f(x)=0$ 可得 $|\log_a x|=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. 不妨设 $a>1$，画出函数 $y=|\log_a x|$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象如图所示，结合图象可知 $0<m<1$，$n>1$，且 $-\log_a m=\left(\frac{1}{2}\right)^m$，$\log_a n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，以上两式相减可得 $\log_a(mn)=\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^m<0$，所以 $0<mn<1$，故选 ACD.



三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）.

得分

13. $\lg\sqrt{2}+\lg\sqrt{5}+2^0+(5^{\frac{1}{3}})^2\times\sqrt[3]{5}=$ $\underline{\frac{13}{2}}$.

得分

14. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(\log_2 x)^2-1}}$ 的定义域为 $\underline{\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)}$.

得分

15. 函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)-3\cos x$ 的最小值为 ________.

-4　**解析**：因为 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)-3\cos x=-\cos 2x-3\cos x=-2\cos^2 x-3\cos x+1$，

令 $t=\cos x$，则 $-1\leqslant t\leqslant1$，

令 $g(t)=-2t^2-3t+1$，则 $g(t)$ 图象的开口向下，对称轴为 $t=-\frac{3}{4}$，在 $[-1,1]$ 上先增后减，

故当 $t=1$ 即 $\cos x=1$ 时，函数 $f(x)$ 有最小值 -4.

得分

16. 已知正实数 a，b 满足 $a+b=4$，则 $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+3}$ 的最小值为 $\underline{\frac{1}{2}}$.

四、解答题（本题共 6 小题，共 70 分）.

得分

17.（10 分）(1) 计算：$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+4^{\frac{3}{2}}-\log_9 4\cdot\log_2 3-5^{\log_5 7}$；

(2) 化简：$\dfrac{\cos(2\pi-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)\sin\left(\frac{11\pi}{2}+\alpha\right)}$.

解：(1) 原式 $=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+(2^2)^{\frac{3}{2}}-\log_3 2\cdot\log_2 3-7=2^2+2^3-1-7=4+8-8=4$.

(2) $\dfrac{\cos(2\pi-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)\sin\left(\frac{11\pi}{2}+\alpha\right)}=\dfrac{\cos\alpha\cdot(-\sin\alpha)}{\sin\alpha(-\cos\alpha)}=1$.

得分

18.（12 分）已知函数 $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{|x|-a}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 若 $f(x)$ 的最大值是 $\frac{9}{4}$，求 a 的值.

解：(1) 令 $t=|x|-a$，则 $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^t$，不论 a 取何值，$t=|x|-a$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^t$ 是单调递减函数，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,0]$，单调递减区间是 $[0,+\infty)$.

(2) 由于 $f(x)$ 的最大值是 $\frac{9}{4}$，且 $\frac{9}{4}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$，

所以 $|x|-a$ 应该有最小值 -2,从而 $a=2$.

得分	

19.(12分)已知函数 $f(x)=x^2-2ax-1+a, a\in\mathbf{R}$.

(1)若 $a=2$,试求函数 $y=\frac{f(x)}{x}(x>0)$的最小值;

(2)对于任意 $x\in[0,2]$,不等式 $f(x)\leqslant a$ 成立,试求实数 a 的取值范围.

解:(1)依题意得

$y=\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2-4x+1}{x}=x+\frac{1}{x}-4.$

因为 $x>0$,所以 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$,当且仅当 $x=\frac{1}{x}$,即 $x=1$ 时,等号成立.

所以 $y\geqslant -2$.

所以当 $x=1$ 时,$y=\frac{f(x)}{x}$的最小值为 -2.

(2)因为 $f(x)-a=x^2-2ax-1$,

所以要使 $\forall x\in[0,2]$,不等式 $f(x)\leqslant a$ 成立,

只要 $x^2-2ax-1\leqslant 0$ 在$[0,2]$上恒成立.

不妨设 $g(x)=x^2-2ax-1$,

则只要 $g(x)\leqslant 0$ 在$[0,2]$上恒成立即可.

所以$\begin{cases}g(0)\leqslant 0,\\g(2)\leqslant 0,\end{cases}$

即$\begin{cases}0-0-1\leqslant 0,\\4-4a-1\leqslant 0,\end{cases}$解得 $a\geqslant\frac{3}{4}$.

则实数 a 的取值范围为$\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$.

得分	

20.(12分)已知函数 $f(x)=\sin\omega x-\cos\omega x(\omega>0)$的最小正周期为 π.

(1)求函数 $y=f(x)$图象的对称轴方程;

(2)讨论函数 $f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的单调性.

解:(1)因为 $f(x)=\sin\omega x-\cos\omega x=\sqrt{2}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$,且 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,

所以 $\omega=2$,$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

令 $2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$,即函数 $f(x)$图象的对称轴方程为 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$.

(2)令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,得函数$f(x)$的单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{8},k\pi+\frac{3\pi}{8}\right](k\in\mathbf{Z})$.

因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,所以令 $k=0$,得函数 $f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的单调递增区间为$\left[0,\frac{3\pi}{8}\right]$.

令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,得函数$f(x)$的单调递减区间为$\left[k\pi+\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{7\pi}{8}\right](k\in\mathbf{Z})$,令 $k=0$,得 $f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的单调递减区间为$\left[\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right]$.

所以 $f(x)$在$\left[0,\frac{3\pi}{8}\right]$上单调递增,在$\left[\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减.

得分	

21.(12分)已知角 α 的顶点在坐标原点,始边与 x 轴的非负半轴重合,终边经过点 $P(-3,\sqrt{3})$.

(1)求 $\sin 2\alpha-\tan\alpha$ 的值;

(2)若函数 $f(x)=\cos(x-\alpha)\cos\alpha-\sin(x-\alpha)\sin\alpha$,求函数 $g(x)=\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-2[f(x)]^2$ 在区间$\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$上的值域.

解:(1)因为角 α 的终边经过点 $P(-3,\sqrt{3})$,

所以 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$,$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以 $\sin 2\alpha-\tan\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha-\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$.

(2)因为 $f(x)=\cos(x-\alpha)\cos\alpha-\sin(x-\alpha)\cdot\sin\alpha=\cos x$,

所以 $g(x)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-2\cos^2x=\sqrt{3}\sin 2x-1-\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-1$.

因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$,所以 $-\frac{\pi}{6}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{7\pi}{6}$.

所以 $-\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$,

所以 $-2\leqslant 2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-1\leqslant 1$,

故函数 $g(x)=\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-2[f(x)]^2$ 在区间 $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$上的值域是$[-2,1]$.

得分	

22.(12 分)某工厂某种产品的年固定成本为 250 万元,每生产 x 千件该产品,需另投入的成本$C(x)$万元.当年产量不足 80 千件时,$C(x)=\frac{1}{3}x^2+10x$;当年产量不小于80 千件时,$C(x)=51x+\frac{10\ 000}{x}-1\ 450$.每件产品的售价为0.05 万元,且该厂生产的产品当年能全部售完.

(1)写出年利润 $L(x)$(万元)关于年产量 x(千件)的函数解析式;

(2)当年产量为多少千件时,该厂在这一产品的生产中所获利润最大?

解:(1)因为每件产品售价为 0.05 万元,

所以 x 千件产品的销售额为 $0.05\times 1\ 000x=50x$(万元).

依题意得,当 $0<x<80$ 时,$L(x)=50x-\frac{1}{3}x^2-10x-250=-\frac{1}{3}x^2+40x-250$;

当 $x\geqslant 80$ 时,$L(x)=50x-51x-\frac{10\ 000}{x}+1\ 450-250=1\ 200-\left(x+\frac{10\ 000}{x}\right)$.

所以 $L(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}x^2+40x-250,0<x<80,\\ 1\ 200-\left(x+\frac{10\ 000}{x}\right),x\geqslant 80.\end{cases}$

(2)当 $0<x<80$ 时,

$L(x)=-\frac{1}{3}(x-60)^2+950$.

当 $x=60$ 时,$L(x)$取得最大值 $L(60)=950$.

当 $x\geqslant 80$ 时,$L(x)=1\ 200-\left(x+\frac{10\ 000}{x}\right)\leqslant 1\ 200-2\sqrt{x\cdot\frac{10\ 000}{x}}=1\ 200-200=1\ 000$.

当且仅当 $x=\frac{10\ 000}{x}$,即 $x=100$ 时,$L(x)$取得最大值1 000.

由于 $950<1\ 000$,所以当年产量为 100 千件时,该厂在这一产品生产中所获利润最大,最大利润为1 000万元.