点金训练

教师用书

《点金训练》编写组　编

数学

必修第二册

配人教A版

四川教育出版社

CONTENTS

目录

第六章 平面向量及其应用

6.1 平面向量的概念 …………… 1
6.2 平面向量的运算 …………… 5
6.2.1 向量的加法运算 ………… 5
6.2.2 向量的减法运算 ………… 9
6.2.3 向量的数乘运算 ………… 12
第 1 课时 向量的数乘运算 ……………… 12
第 2 课时 向量共线定理 ……………… 16
6.2.4 向量的数量积 ………… 21
第 1 课时 向量的数量积 ……………… 21
第 2 课时 向量的数量积的运算律 ………… 25
6.3 平面向量基本定理及坐标表示 ……………………………… 28
6.3.1 平面向量基本定理 ……… 28
6.3.2 平面向量的正交分解及坐标表示 ……………………… 34
6.3.3 平面向量加、减运算的坐标表示 ……………………… 34
6.3.4 平面向量数乘运算的坐标表示 ……………………… 37
6.3.5 平面向量数量积的坐标表示 ……………………… 41
6.4 平面向量的应用 …………… 45
6.4.1 平面几何中的向量方法 …… 45
6.4.2 向量在物理中的应用举例 … 45
6.4.3 余弦定理、正弦定理 …… 50
第 1 课时 余弦定理 …… 50
第 2 课时 正弦定理 …… 54
第 3 课时 余弦定理、正弦定理应用举例 …… 59
单元活动构建 ……………… 65

第七章 复数

7.1 复数的概念 ……………… 72
7.1.1 数系的扩充和复数的概念 ……………………………… 72
7.1.2 复数的几何意义 ………… 75
7.2 复数的四则运算 ………… 79
7.2.1 复数的加、减运算及其几何意义 ……………………………… 79
7.2.2 复数的乘、除运算 ……… 82
7.3* 复数的三角表示 ………… 86
7.3.1 复数的三角表示式 ……… 86
7.3.2 复数乘、除运算的三角表示及其几何意义 ……………… 89
单元活动构建 ……………… 94

第八章 立体几何初步

8.1 基本立体图形 ……………… 99
第1课时 棱柱、棱锥、棱台 … 99
第 2 课时 圆柱、圆锥、圆台、球 ………………… 103
8.2 立体图形的直观图 ……… 108
8.3 简单几何体的表面积与体积 ……………………………… 112
8.3.1 棱柱、棱锥、棱台的表面积和体积 ………………… 112
8.3.2 圆柱、圆锥、圆台、球的表面积和体积 ………………… 117
8.4 空间点、直线、平面之间的位置关系 ……………………… 122
8.4.1 平面 ………………… 122
8.4.2 空间点、直线、平面之间的位置关系 ………………… 126

8.5　空间直线、平面的平行 …… 130
8.5.1　直线与直线平行 ……… 130
8.5.2　直线与平面平行 ……… 134
8.5.3　平面与平面平行 ……… 138
8.6　空间直线、平面的垂直 …… 144
8.6.1　直线与直线垂直 ……… 144
8.6.2　直线与平面垂直 ……… 148
第1课时　直线与平面垂直的判定………… 148
第2课时　直线与平面垂直的性质………… 153
8.6.3　平面与平面垂直 ……… 157
第1课时　平面与平面垂直的判定………… 157
第2课时　平面与平面垂直的性质………… 162
单元活动构建 …………………… 167

第九章　统计

9.1　随机抽样 ………………… 177
9.1.1　简单随机抽样 ………… 177
第1课时　简单随机抽样 ……………… 177
第2课时　平均数……… 181
9.1.2　分层随机抽样 ………… 184
9.1.3　获取数据的途径 ……… 189
9.2　用样本估计总体 ………… 192
9.2.1　总体取值规律的估计 … 192
第1课时　频率分布直方图 ……………… 192
第2课时　统计图表…… 197
9.2.2　总体百分位数的估计 … 201
9.2.3　总体集中趋势的估计 … 205
9.2.4　总体离散程度的估计 … 208
单元活动构建 …………………… 214

第十章　概率

10.1　随机事件与概率………… 221
10.1.1　有限样本空间与随机事件 ………………………… 221
10.1.2　事件的关系和运算 …… 224
10.1.3　古典概型 ……………… 229
10.1.4　概率的基本性质 ……… 235
10.2　事件的相互独立性……… 238
10.3　频率与概率……………… 243
10.3.1　频率的稳定性 ………… 243
10.3.2　随机模拟 ……………… 243
单元活动构建 …………………… 248

第六章　平面向量及其应用

6.1　平面向量的概念

学习任务目标

1.能结合物理中的力、位移、速度等具体背景认识向量,掌握向量与数量的区别.

2.会用有向线段、字母表示向量,了解有向线段与向量的联系与区别.

3.理解向量的模、零向量、单位向量、平行向量、相等向量、共线向量等概念,会在图形中进行辨识.

问题式预习

知识点一　向量的概念

(1)向量:把既有大小又有方向的量叫做向量.

(2)数量:把只有大小没有方向的量称为数量.

[**微训练**]

给出下列物理量:①质量;②速度;③位移;④力;⑤路程;⑥功;⑦加速度.其中是向量的有　(　　)

A.4 个　　B.5 个

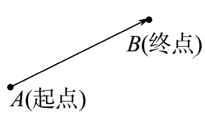
C.6 个　　D.7 个

A　**解析**:速度、位移、力、加速度这 4 个物理量是向量,它们都有大小和方向.

知识点二　向量的表示及向量的模

1.有向线段

(1)有向线段是具有方向的线段,如图所示,通常在有向线段的终点处画上箭头表示它的方向.以 A 为起点、B 为终点的有向线段记作 $\overrightarrow{AB}$.



(2)有向线段包含三个要素:起点、方向、长度.知道了有向线段的起点、方向和长度,它的终点就唯一确定了.

2.向量的表示

几何表示:向量可以用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 来表示,把这个向量记作向量 $\overrightarrow{AB}$,此时有向线段的方向表示向量的方向

字母表示:通常在印刷时用黑体小写字母 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$,…表示向量,书写时用 $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$,…表示向量,也可以用表示向量的有向线段的起点和终点字母表示,例如 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$

3.向量的模及两个特殊向量

(1)向量的长度(模)

向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度(或称模),记作 $|\overrightarrow{AB}|$.

(2)两个特殊向量

①零向量:长度为 0 的向量叫做零向量,记作 $\mathbf{0}$,零向量的方向是任意的;零向量的起点与终点是同一点,故不能用有向线段表示出来.

②单位向量:长度等于 1 个单位长度的向量,叫做单位向量.

[**微训练**]

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)如果 $|\overrightarrow{AB}|>|\overrightarrow{CD}|$,那么 $\overrightarrow{AB}>\overrightarrow{CD}$.　(　　)

×　**提示**:向量的模可以比较大小,但向量不能比较大小.

(2)若 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 都是单位向量,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.　(　　)

×　**提示**:$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都是单位向量,则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,但 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向可能不同.

(3)力、速度和质量都是向量.　(　　)

×　**提示**:质量不是向量.

(4)零向量的大小为 0,没有方向.　(　　)

×　**提示**:任何向量都有方向,零向量的方向是任意的.

2.在同一平面内,把所有长度为 1 的向量的起点固定在同一点,这些向量的终点组成的图形是　(　　)

A.单位圆　　B.一段弧

C.线段　　D.直线

A　**解析**:因为向量的长度都是 1,所以这些向量的终点组成的图形是单位圆.

知识点三　相等向量与共线向量

1.相等向量

(1)定义：长度相等且方向相同的向量叫做相等向量.向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

(2)表示：任意两个相等的非零向量，都可用同一条有向线段表示，并且与有向线段的起点无关；同时，两条方向相同且长度相等的有向线段表示同一个向量，因为向量完全由它的模和方向确定.

2.平行向量

(1)定义：方向相同或相反的非零向量叫做平行向量，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

(2)规定：零向量与任意向量平行，即对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，都有 $\boldsymbol{0}\parallel\boldsymbol{a}$.

(3)共线向量：任一组平行向量都可以平移到同一条直线上，因此，平行向量也叫做共线向量.

[微训练]

判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)平行向量的方向一定相同.　(×)

(2)不相等的向量一定不平行.　(×)

(3)与零向量相等的向量必定是零向量.　(√)

(4)与任意向量都平行的向量是零向量.　(√)

(5)若两个向量在同一条直线上，则这两个向量是平行向量.　(√)

(6)共线向量一定在同一条直线上.　(×)

任务型课堂

任务一　向量的概念

1.下列说法中，正确的是　(　　)

A.数量可以比较大小，向量也可以比较大小

B.方向不同的向量不能比较大小，但方向相同的向量可以比较大小

C.向量的大小与方向有关

D.向量的模可以比较大小

D　**解析**：不管向量的方向如何，它们都不能比较大小，故A，B不正确；向量的大小即为向量的模，指的是有向线段的长度，与方向无关，故C不正确；向量的模是数量，可以比较大小，故D正确.

2.下列说法正确的是　(　　)

A.零向量没有方向

B.若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

C.单位向量都相等

D.若两个相等向量的起点相同，则终点也相同

D　**解析**：选项A不正确，零向量不是没有方向，只是方向不确定.选项B不正确，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 只是说明这两个向量的模相等，但其方向未必相同.选项C不正确，单位向量只是模为1个单位长度，而对方向没要求.选项D正确，相等向量的模相等，方向相同，故当它们的起点相同时，其终点必相同.

3.(多选题)下列说法错误的有　(　　)

A.向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{BA}$ 的长度相等

B.两个有共同起点，且长度相等的向量，它们的终点相同

C.单位向量都是相等的

D.若两个单位向量平行，则这两个单位向量相等

BCD　**解析**：两个有共同起点，且长度相等的向量，它们的方向不一定相同，终点也不一定相同；单位向量的模都是1，但方向不确定；两个平行的单位向量的方向可能相反，此时不相等，故B，C，D都错误，A正确.

【类题通法】

1.判断一个量是否为向量的两个关键条件

(1)有大小；

(2)有方向.两个条件缺一不可.

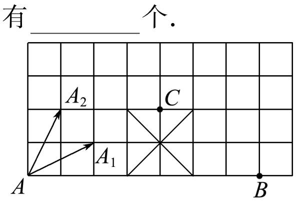
2.理解零向量和单位向量应注意的问题

(1)零向量的方向是任意的，所有的零向量长度都相等.

(2)单位向量不一定相等，它们可能有不同的方向.

任务二　向量的几何表示

1.中国象棋中规定：马走“日”字.下图表示中国象棋的半个棋盘，若马在 A 处，则可跳到 A_1 处，也可跳到 A_2 处，用向量 $\overrightarrow{AA_1}$，$\overrightarrow{AA_2}$ 表示马走了“一步”.若马在 B 处或 C 处，则以 B，C 为起点表示马走了“一步”的向量共有________个.



11　**解析**：表示马在 B 处走了“一步”的向量如图1所示，共3个；表示马在 C 处走了“一步”的向量如图2所示，共8个.

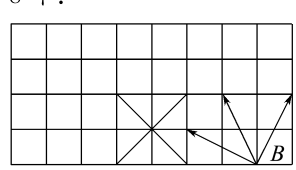


图1

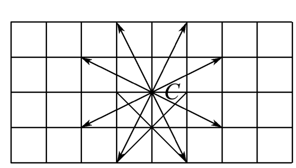


图2

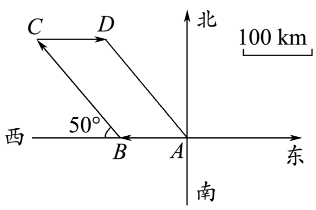
综上，若马在 B 处或 C 处，则以 B，C 为起点表示马走了“一步”的向量共有 11 个.

2. 一辆汽车从点 A 出发向西行驶了 100 km 到达点 B，然后又改变方向，向西偏北 50° 的方向行驶了 200 km 到达点 C，最后又改变方向，向东行驶了 100 km 到达点 D.

(1)作出向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$；

(2)求 $|\overrightarrow{AD}|$.

解：(1)向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$ 如图所示.



(2)由题意，可知 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 方向相反，长度相等，故 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 平行.

因为在四边形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ CD$ 且 $AB=CD$，所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形，所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，所以 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|=200$ km.

【类题通法】

作向量的方法

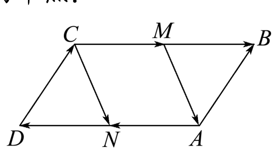
准确画出向量的方法是先确定向量的起点，再确定向量的方向，然后根据向量的大小确定向量的终点.

任务三　相等向量与共线向量

[探究活动]

请根据相等向量与共线向量的相关知识并结合下面的材料，探究以下问题.

如图所示，在平行四边形 $ABCD$ 中，N，M 分别是边 AD，BC 的中点.



探究 1：与 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CN}$ 相等的向量，分别是哪个向量？

提示：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{MA}$.

探究 2：在图中的向量中，与 $\overrightarrow{CM}$ 共线的向量有哪些？

提示：$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{AN}$，$\overrightarrow{ND}$，$\overrightarrow{AD}$.

探究 3：向量由其模和方向所确定.对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，就其模相等与不相等，方向相同与不同而言，有哪几种可能情形？

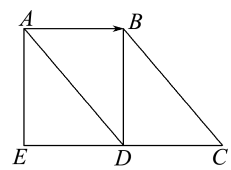
提示：模相等，方向相同；模相等，方向不相同；模不相等，方向相同；模不相等，方向不相同.

[评价活动]

如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，四边形 $ABDE$ 是矩形.在以 A，B，C，D，E 为起点和终点的所有有向线段表示的向量中：

(1)找出与 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量；

(2)找出与 $\overrightarrow{AB}$ 共线的向量.



解：(1)由四边形 $ABCD$ 是平行四边形，四边形 $ABDE$ 是矩形知，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{ED}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的长度相等且方向相同，所以与 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量为 $\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{ED}$.

(2)由题图可知，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{ED}$，$\overrightarrow{EC}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同，$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{CE}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相反，所以与 $\overrightarrow{AB}$ 共线的向量有 $\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{ED}$，$\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{CE}$.

【类题通法】

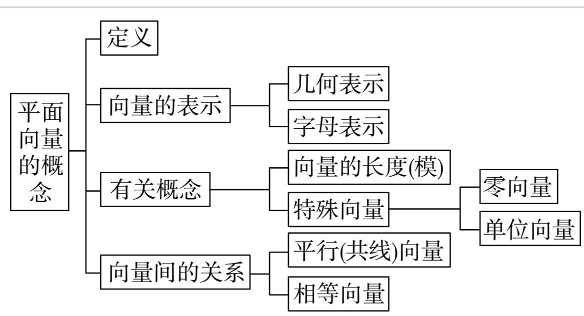
在图形中寻找相等向量与共线向量的方法

(1)寻找相等向量：先找与表示已知向量的有向线段长度相等的向量，再确定哪些是同向共线的向量.

(2)寻找共线向量：先找与表示已知向量的有向线段平行或共线的线段，再构造同向与反向的向量.

注意：不要漏掉以表示已知向量的有向线段的终点为起点，起点为终点的向量.

提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1. 下列说法中，正确说法的个数是　　(　　)

(1)温度、速度、位移、功这些物理量是向量；

(2)零向量没有方向；

(3)单位向量的长度大于零向量的长度；

(4)与非零向量共线的单位向量是唯一的.

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

B　**解析**：(1)温度与功没有方向，不是向量，故(1)错误；

(2)零向量的方向是任意的,故(2)错误;

(3)单位向量的长度1大于零向量的长度0,故(3)正确;

(4)与非零向量共线的单位向量的方向有两个,故(4)错误,故选B.

2.下列说法正确的是 ( )

A.若$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,则$\boldsymbol{a}=\pm\boldsymbol{b}$

B.向量$\overrightarrow{AB}$和向量$\overrightarrow{BA}$长度相等

C.长度相等的向量叫相等向量

D.共线向量是在同一条直线上的向量

B **解析**:对于A,若$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的模相等,但方向无法确定,即选项A错误;

对于B,因为向量$\overrightarrow{AB}$和向量$\overrightarrow{BA}$是方向相反,模相等的两个向量,即选项B正确;

对于C,长度相等且方向相同的向量叫相等向量,即选项C错误;

对于D,共线向量是方向相同或相反的向量,规定零向量与任意向量共线,即选项D错误.

故选B.

3.(多选题)下列说法不正确的是 ( )

A.向量的模是一个非负实数

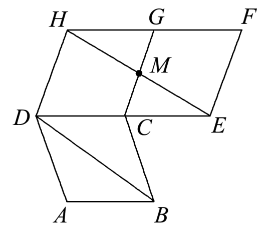
B.任何一个非零向量都可以平行移动

C.长度相等的两个向量一定是共线向量

D.两个有共同起点且共线的向量终点也必相同

CD **解析**:显然,选项A,B说法正确.长度相等的两个向量不一定是共线向量,选项C说法不正确.方向相同或相反的向量都是共线向量,共线向量的模可以不相等,选项D说法不正确.

4.(多选题)如图,四边形$ABCD$,$CEFG$,$CGHD$都是全等的菱形,HE与CG相交于点M,则下列关系一定成立的是 ( )



A.$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{EF}|$

B.$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{FH}$共线

C.$\overrightarrow{BD}$与$\overrightarrow{EH}$共线

D.$\overrightarrow{DC}$与$\overrightarrow{EC}$共线

ABD **解析**:因为三个四边形都是菱形,所以$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{EF}|$,$AB\parallel CD\parallel FH$,故$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{FH}$共线.又点$D,C,E$共线,所以$\overrightarrow{DC}$与$\overrightarrow{EC}$共线,故A,B,D都正确.$\overrightarrow{BD}$与$\overrightarrow{EH}$不一定共线.故选ABD.

综合性·创新提升

1.若$\boldsymbol{a}$为任一非零向量,$\boldsymbol{b}$为单位向量,则 ( )

A.$|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$ B.$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$

C.$|\boldsymbol{a}|>0$ D.$|\boldsymbol{b}|=\pm1$

C **解析**:$|\boldsymbol{a}|$不一定大于1,$|\boldsymbol{b}|=1$,所以A,D不正确;$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不一定平行,故B不正确.

2.(多选题)下列能使$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$成立的是 ( )

A.$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ B.$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$

C.$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$方向相反 D.$|\boldsymbol{a}|=0$,或$|\boldsymbol{b}|=0$

ACD **解析**:对于A,若$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$长度相等且方向相同,所以$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$;对于B,若$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的长度相等,而方向不确定,因此不一定有$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$;对于C,方向相同或相反的向量都是平行向量,因此若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$方向相反,则有$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$;对于D,零向量与任意向量平行,所以若$|\boldsymbol{a}|=0$或$|\boldsymbol{b}|=0$,则$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

3.下列说法中错误的是 ( )

A.有向线段可以表示向量但不是向量,且向量也不是有向线段

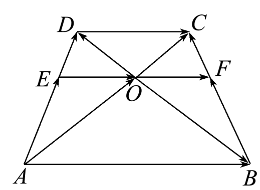
B.若向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不共线,则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$都是非零向量

C.长度相等但方向相反的两个向量不一定共线

D.方向相反的两个非零向量必不相等

C **解析**:长度相等方向相反的两个向量一定为共线向量.故C错误.

4.如图,在等腰梯形$ABCD$中,$AB\parallel CD$,对角线AC与BD相交于点O,EF是过点O且平行于AB的线段,在所标的向量中:



(1)写出与$\overrightarrow{AB}$共线的向量;

(2)写出与$\overrightarrow{EF}$方向相同的向量;

(3)写出与$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OD}$的模相等的向量;

(4)写出与$\overrightarrow{EO}$相等的向量.

解:等腰梯形$ABCD$中,$AB\parallel CD\parallel EF$,$AD=BC$.

(1)题图中与$\overrightarrow{AB}$共线的向量有$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{EO}$,$\overrightarrow{OF}$,$\overrightarrow{EF}$.

(2)题图中与$\overrightarrow{EF}$方向相同的向量有$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{EO}$,$\overrightarrow{OF}$.

(3)题图中与$\overrightarrow{OB}$的模相等的向量为$\overrightarrow{AO}$,与$\overrightarrow{OD}$的模相等的向量为$\overrightarrow{OC}$.

(4)题图中与$\overrightarrow{EO}$相等的向量为$\overrightarrow{OF}$.

6.2　平面向量的运算

6.2.1　向量的加法运算

学习任务目标

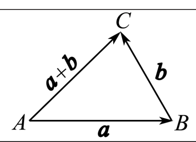
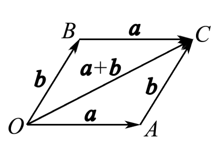
1.理解并掌握向量加法的概念.

2.掌握向量加法的三角形法则和平行四边形法则.

3.了解向量加法的交换律和结合律.

问题式预习

知识点一　向量加法的定义及运算法则

定义		求两个向量和的运算,叫做向量的加法
三角形法则	前提	已知非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$
	作法	在平面内任取一点 A,作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$
	结论	向量$\overrightarrow{AC}$叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
	图形	
平行四边形法则	前提	已知不共线的两个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$
	作法	在平面内任取一点 O,以点 O 为起点作$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$ 分别等于两个已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,以 OA,OB 为邻边作▱$OACB$
	结论	以 O 为起点的向量$\overrightarrow{OC}$(OC 是▱$OACB$ 的对角线)就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和
	图形	
规定		零向量与任一向量 $\boldsymbol{a}$,都有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

[微训练]

1.在△ABC 中,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 等于(　　)

A.$\overrightarrow{CA}$　　B.$\overrightarrow{BC}$

C.$\overrightarrow{AB}$　　D.$\overrightarrow{AC}$

D　**解析**:$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

2.化简:$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}=$(　　)

A.$\overrightarrow{AB}$　B.$\overrightarrow{BA}$　C.$\boldsymbol{0}$　D.$\overrightarrow{AC}$

D　**解析**:$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

知识点二　向量的三角不等式及运算律

1.三角不等式

一般地,我们有$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$,当且仅当 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量或 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是方向相同的非零向量时,等号成立.

2.向量加法的运算律

交换律	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$
结合律	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

[微训练]

1.下列结论中,正确的是(　　)

A.$\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}=0$

B.对于任意向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

C.对于任意向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>0$

D.若向量$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{BC}$,且$|\overrightarrow{AB}|=1$,$|\overrightarrow{BC}|=2\ 022$,则$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|=2\ 023$

B　**解析**:由向量加法的运算律可知 B 正确.

2.化简:$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=$________.

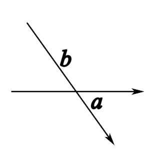
$\overrightarrow{AC}$　**解析**:$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

任务型课堂

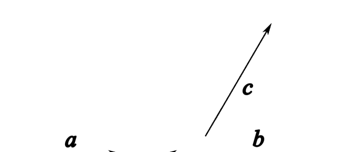
任务一　利用三角形法则和平行四边形法则作向量

1.(1)如图①,已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,求作向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

(2)如图②,已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$,求作向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

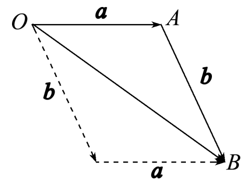


图①

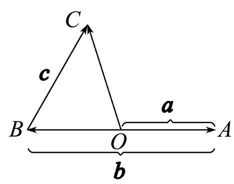


图②

解:(1)在平面内任意取一点 O,作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.如图所示.

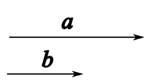


(2)在平面内任意取一点 O,作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$,则$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.如图所示.

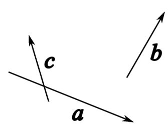


2.(1)如图①所示,已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 求作向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

(2)如图②所示,已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 求作向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

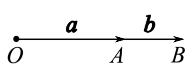


图①

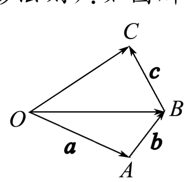


图②

解:(1)如图所示,首先作向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,然后作向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,则向量$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即为所求.

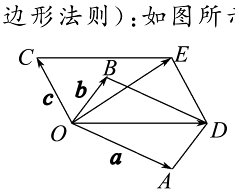


(2)方法一(三角形法则):如图所示,



首先在平面内任取一点 O,作向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,再作向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,则得向量$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,然后作向量$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$,则向量$\overrightarrow{OC}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,即为所求.

方法二(平行四边形法则):如图所示,



首先在平面内任取一点 O,作向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,

以 OA,OB 为邻边作▱$OADB$,连接 OD,

则$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

再以 OD,OC 为邻边作▱$ODEC$,连接 OE,

则$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,即为所求.

【类题通法】

1.向量加法的三角形法则

(1)适用条件:任意两个非零向量,包括共线的非零向量和不共线的非零向量.

(2)“首尾相接”:构造三角形时,第一个向量的终点与第二个向量的起点重合.

(3)“首指尾为和”:以第一个向量的起点为起点并以第二个向量的终点为终点的向量即为两向量的和.

(4)可拓展到多个向量求和.

2.向量加法的平行四边形法则

(1)适用条件:仅适用于不共线的两个向量.

(2)“共起点”:构造平行四边形时,两个向量的起点相同,该起点也是和向量的起点.

(3)“共点对角线为和”:平行四边形过两个向量公共起点的对角线对应的向量就是两已知向量的和向量.

任务二 向量加法运算律的应用

[探究活动]

请根据向量加法运算律并结合下面的材料,探究以下问题.

实数的加法满足交换律、结合律,即对于 a,b,$c\in\mathbf{R}$,有 $a+b=b+a$,$a+(b+c)=(a+b)+c$.

探究 1:向量的加法是否也满足交换律和结合律呢?

提示:向量的加法满足交换律和结合律.

探究 2:怎样进行多个向量的加法运算?

提示:多个向量的加法运算可以按照任意的次序、任意的组合来进行.

[评价活动]

1.化简:

(1)$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}$;

(2)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FA}$.

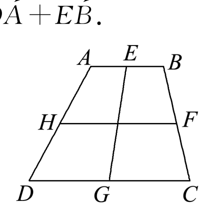
解:(1)$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\mathbf{0}$.

(2)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FA}=\mathbf{0}$.

2.如图,E,F,G,H 分别是梯形 $ABCD$ 的边 AB,BC,CD,DA 的中点,化简下列各式:

(1)$\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{CB}$;

(2)$\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EB}$.



解:(1)$\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{GE}$.

(2)$\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AE}=\mathbf{0}$.

【类题通法】

向量加法运算律的意义和应用原则

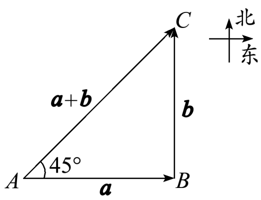
(1)意义:向量加法的运算律为向量加法提供了变形的依据,实现了利用向量加法法则运算的目的.实际上,由于向量的加法满足交换律和结合律,故多个向量的加法运算可以按照任意的次序、任意的组合来进行.

(2)应用原则:通过向量加法的交换律,使向量"首尾相接",通过向量加法的结合律调整向量相加的顺序.

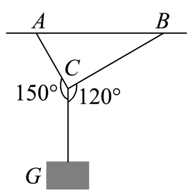
任务三　向量加法的实际应用

1.若 $\boldsymbol{a}$ 表示"向东走 8 km",$\boldsymbol{b}$ 表示"向北走8 km",则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$________,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向是________.

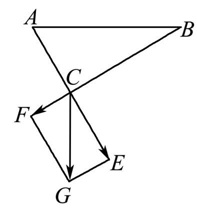
$8\sqrt{2}$ km　北偏东 45°　**解析**:如图所示,设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,且△ABC 为等腰直角三角形,则$|\overrightarrow{AC}|=8\sqrt{2}$ km,$\angle BAC=45°$.



2.如图,用两根绳子把重 10 N 的物体 G 吊在水平杆子 AB 上,$\angle ACG=150°$,$\angle BCG=120°$,求 A 和 B 处所受力的大小(绳子的质量忽略不计).



解:如图所示,设$\overrightarrow{CE}$,$\overrightarrow{CF}$分别表示 A,B 处所受的力,10 N的重力用$\overrightarrow{CG}$表示,则$\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CG}$.易得$\angle ECG=180°-150°=30°$,$\angle FCG=180°-120°=60°$.



所以$|\overrightarrow{CE}|=|\overrightarrow{CG}|\cdot\cos 30°=10\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$,

$|\overrightarrow{CF}|=|\overrightarrow{CG}|\cdot\cos 60°=10\times\dfrac{1}{2}=5$.

所以 A 处所受力的大小为 $5\sqrt{3}$ N,B 处所受力的大小为 5 N.

【类题通法】

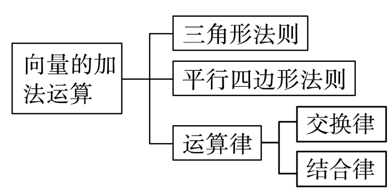
应用向量解决实际问题的基本步骤

(1)表示:用向量表示有关量,将所要解答的问题转化为向量问题.

(2)运算:应用向量加法的平行四边形法则或三角形法则,将有关向量进行运算,解答向量问题.

(3)还原:根据向量的运算结果,结合向量共线、相等等概念回答原问题.

▶提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1.若正方形 ABCD 的边长为 1,则$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|$为　(　　)

A.1　　B.$\sqrt{2}$　　C.3　　D.$2\sqrt{2}$

B　**解析**:在正方形 ABCD 中,AB=1,易知 $AC=\sqrt{2}$,所以$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}$.

2.(多选题)下列各式一定成立的是　(　　)

A.$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

B.$\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

C.$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$

D.$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=0$

ABC　**解析**:A,B,C 项满足向量加法的运算律及运算法则,而 D 项,$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{0}$.

3.(多选题)设 $\boldsymbol{a}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA})$,$\boldsymbol{b}$ 是任一非零向量,则在下列结论中,正确的为　(　　)

A.$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$

B.$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$

C.$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$

D.$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

AC　**解析**:因为 $\boldsymbol{a}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{0}$.所以 A,C 正

确，B错误.对于D，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，D错误.故选AC.

4. 向量$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PB})+(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BM})+\overrightarrow{OP}$化简后等于　　（　　）

A.$\overrightarrow{BC}$　　B.$\overrightarrow{AB}$　　C.$\overrightarrow{AC}$　　D.$\overrightarrow{AM}$

D　**解析**：原式$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM})+(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP})=\overrightarrow{AM}+\boldsymbol{0}=\overrightarrow{AM}$.

5. 在四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$，则四边形$ABCD$是　　（　　）

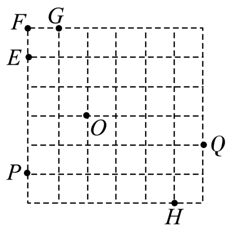
A.梯形　　B.矩形

C.正方形　　D.平行四边形

D　**解析**：由平行四边形法则可得，四边形$ABCD$是以AB，AD为邻边的平行四边形.故选D.

综合性·创新提升

1. 如图所示的方格纸中有定点O，P，Q，E，F，G，H，则$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=$　　（　　）



A.$\overrightarrow{OH}$　　B.$\overrightarrow{OG}$　　C.$\overrightarrow{FO}$　　D.$\overrightarrow{EO}$

C　**解析**：$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{FO}$.故选C.

2. $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$为非零向量，且$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，则　　（　　）

A.$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，且$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$方向相同

B.$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$不是共线向量

C.$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$模相等，方向相反

D.$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$无论什么关系均可

A　**解析**：当两个非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不共线时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的方向与$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的方向都不相同，且$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的方向与$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的方向都相同，且$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$反向且$|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的方向与$\boldsymbol{b}$的方向相同（与$\boldsymbol{a}$的方向相反），且$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|$.

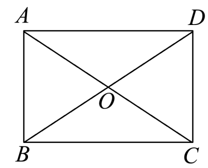
3.（多选题）对于任意一个四边形$ABCD$，下列式子能化简为$\overrightarrow{BC}$的是　　（　　）

A.$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$　　B.$\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}$

C.$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$　　D.$\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$

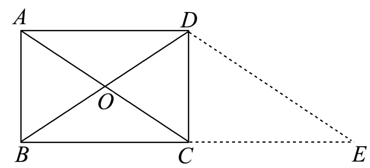
ABD　**解析**：在A中，$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}$；在B中，$\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$；在C中，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$；在D中，$\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}$.

4. 如图，在矩形$ABCD$中，$|\overrightarrow{AD}|=4\sqrt{3}$.设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{c}$，则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=$________.



$8\sqrt{3}$　**解析**：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

延长BC至点E，使$CE=BC$，连接DE，如图.



由于$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$，$CE\parallel AD$，$CE=AD$，

所以四边形$ACED$是平行四边形，所以$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DE}$，

所以$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BE}$，

所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=|\overrightarrow{BE}|=2|\overrightarrow{BC}|=2|\overrightarrow{AD}|=8\sqrt{3}$.

5. 在四边形$ABCD$中，对角线AC，BD交于点O且$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=1$，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{0}$，$\cos\angle DAB=\dfrac{1}{2}$.求$|\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}|$与$|\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}|$.

解：因为$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{0}$，

所以$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO}$，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}$，

所以四边形$ABCD$是平行四边形.

由$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=1$，知四边形$ABCD$为菱形.

又$\cos\angle DAB=\dfrac{1}{2}$，$\angle DAB\in(0,\pi)$，

所以$\angle DAB=60°$，所以$\triangle ABD$为正三角形.因为O为对角线的交点，所以$AO=AB\cdot\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

所以$|\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{AO}|=\sqrt{3}$，$|\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{AB}|=1$.

6.2.2　向量的减法运算

学习任务目标

1.理解相反向量的概念.

2.理解向量减法的几何意义.

3.能用向量的加法和减法解决相关问题.

问题式预习

知识点一　相反向量

1.定义：与向量 $\boldsymbol{a}$ 长度相等，方向相反的向量，叫做 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量，记作 $-\boldsymbol{a}$.

2.性质：

(1) $-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$.

(2) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

(3)如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 互为相反向量，那么 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

[微训练]

判断正误（正确的打"√"，错误的打"×"）.

(1)相反向量就是方向相反的向量.　(×)

(2)向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 是相反向量.　(√)

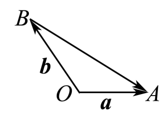
(3) $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$，$-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$.　(√)

(4)两个相等向量之差等于0.　(×)

知识点二　向量的减法

1.定义：向量 $\boldsymbol{a}$ 加上 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量，叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.求两个向量差的运算叫做向量的减法.

2.作法：已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则向量 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，如图.



[微训练]

1.在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=$　(　　)

A. $\overrightarrow{AB}$　B. $\overrightarrow{BA}$　C. $\overrightarrow{CD}$　D. $\overrightarrow{DB}$

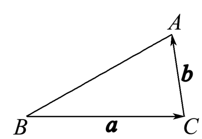
A　**解析**：$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$.

2.在△ABC 中，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AB}=$　(　　)

A. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　B. $-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

C. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$　D. $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$

B　**解析**：如图，因为 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，所以 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.



任务型课堂

任务一　向量减法的几何意义

1.(多选题)若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量，则下列命题正确的是　(　　)

A.若 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同

B.若 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反

C.若 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$

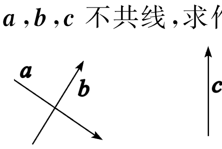
D.若 $||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同

ABD　**解析**：当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相同时，有 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相反时，有 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，故A，B，D均正确.

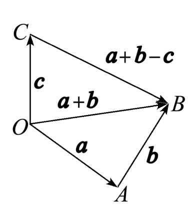
2.若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相反，且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$________.

2　**解析**：因为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相反，且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$.

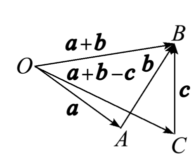
3.如图，已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共线，求作向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.



解：方法一：如图①所示，在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，再作 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，则 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.



图①



图②

方法二：如图②所示，在平面内任取一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，再作$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{c}$，连接 OC，则$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

【类题通法】

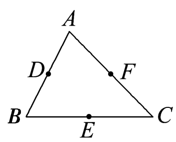
求作两个向量的差向量的两种思路

(1)转化为向量的加法来进行，如作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，可以先作$-\boldsymbol{b}$，再作 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$即可.

(2)直接用向量减法的三角形法则.让两向量的起点重合，连接两个向量的终点，由减向量的终点指向被减向量的终点的向量即为差向量.

任务二 向量减法的运算及简单应用

1.如图，D，E，F 分别是△ABC 的边 AB，BC，CA 的中点，则$\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{DB}=$　　（　　）



A.$\overrightarrow{FD}$　　B.$\overrightarrow{FC}$

C.$\overrightarrow{FE}$　　D.$\overrightarrow{BE}$

D　**解析**：由题图可知，$\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BE}$.

2.化简下列各式：

(1)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}$；

(2)$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})$；

(3)$(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})-(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DO}-\overrightarrow{OB})$.

解：(1)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$.

(2)方法一：原式$=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})-(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})$

$=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}=\mathbf{0}$.

方法二：原式$=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

$=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD})$

$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\mathbf{0}$.

(3)$(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})-(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DO}-\overrightarrow{OB})$

$=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA})-(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BC}=\mathbf{0}$.

【类题通法】

向量减法运算的常用方法

常用方法

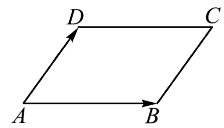
- 可以通过相反向量，把向量的减法运算转化为加法运算
- 运用向量减法的三角形法则，此时要注意两个向量要有共同的起点
- 引入点O，逆用向量减法的三角形法则，将各向量起点统一

任务三 向量加减法运算的综合应用

［探究活动］

根据向量加法、减法的几何意义，探究以下问题.

如图，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$.



探究 1：当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 满足什么条件时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$？

提示：因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AC}|$，

$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{DB}|$.

又$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，即$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{DB}|$，

所以▱$ABCD$ 为矩形.

所以当四边形 $ABCD$ 为矩形时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

探究 2：当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 满足什么条件时，四边形 $ABCD$ 为菱形？

提示：当$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$时，▱$ABCD$ 为菱形.

探究 3：当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 满足什么条件时，四边形 $ABCD$ 为正方形？

提示：当$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，且$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$时，▱$ABCD$ 为正方形.

［评价活动］

1.已知 O 是四边形 $ABCD$ 所在平面内任意一点，$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$，且$|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}|$，则四边形 $ABCD$ 一定为　　（　　）

A.菱形　　B.任意四边形

C.矩形　　D.平行四边形

D　**解析**：由$|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}|$知$|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{DC}|$，且$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$，故四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

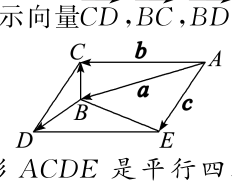
2.若$|\overrightarrow{AB}|=8$，$|\overrightarrow{AC}|=5$，则$|\overrightarrow{BC}|$的取值范围是　　（　　）

A.$[3,8]$　　B.$(3,8)$

C.$[3,13]$　　D.$(3,13)$

C　**解析**：由于$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，则有$||\overrightarrow{AB}|-|\overrightarrow{AC}||\leqslant|\overrightarrow{BC}|\leqslant|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|$，即 $3\leqslant|\overrightarrow{BC}|\leqslant13$.

3.如图所示，四边形 $ACDE$ 是平行四边形，B 是该平行四边形内一点，且$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{c}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示向量$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BD}$.



解：因为四边形 $ACDE$ 是平行四边形，所以$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，故$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$.

【类题通法】

1.用已知向量表示其他向量的三个关注点

(1)搞清楚图形中的相等向量、相反向量、共线向量以及构成三角形的三个向量之间的关系,确定已知向量与被表示向量的转化渠道.

(2)注意综合应用向量加法、减法的几何意义以及向量加法的结合律、交换律来分析解决问题.

(3)注意在封闭图形中利用向量加法的多边形法则.

例如,在四边形 $ABCD$ 中,$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\mathbf{0}$.

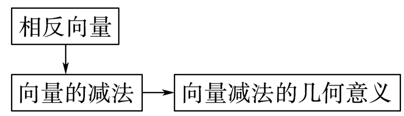
2.平行四边形中有关向量的结论

平行四边形中有关向量的以下结论,在解题中可以直接使用:

(1)对角线的平方和等于四边的平方和,即 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)$.

(2)若 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,则以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形为矩形.

▶ 提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1.(多选题)若非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互为相反向量,则 (　　)

A.$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$　　B.$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$

C.$|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$　　D.$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$

ABD　**解析**:由相反向量和共线向量的定义可知 A,B,D 正确.当非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 互为相反向量时,模一定相等,因此 C 不正确.故选 ABD.

2.(多选题)在菱形 $ABCD$ 中,下列等式成立的是 (　　)

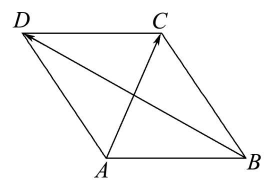
A.$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$

B.$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}$

C.$\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$

D.$\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}$

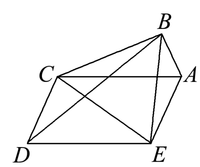
ABD　**解析**:如图,根据向量减法的三角形法则知 A,B,D 均正确;C 中,$\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}\neq\overrightarrow{BC}$.故选 ABD.



3.$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{SP}$等于 (B)

A.$\overrightarrow{QP}$　　B.$\overrightarrow{OQ}$　　C.$\overrightarrow{SP}$　　D.$\overrightarrow{SQ}$

4.如图,在五边形 $ABCDE$ 中,若四边形 $ACDE$ 是平行四边形,且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{c}$,试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示向量$\overrightarrow{BD}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{BE}$,$\overrightarrow{CD}$及$\overrightarrow{CE}$.



解:因为四边形 $ACDE$ 是平行四边形,

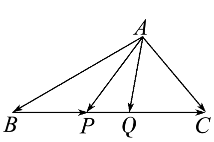
所以$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$,

所以$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$.

综合性·创新提升

1.如图,P,Q 是△ABC 的边 BC 上的两点,且$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{QC}$,则化简$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ}$的结果为 (　　)



A.$\mathbf{0}$　　B.$\overrightarrow{BP}$

C.$\overrightarrow{PQ}$　　D.$\overrightarrow{PC}$

A　**解析**:$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ}=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AQ})=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{QC}-\overrightarrow{BP}=\mathbf{0}$.

2.(多选题)下列各式能化简为$\overrightarrow{AD}$的是 (　　)

A.$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC})-\overrightarrow{CB}$

B.$\overrightarrow{AD}-(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC})$

C.$-(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MC})-(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BM})$

D.$-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{MB}$

ABC　**解析**:选项 A 中,$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC})-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$;选项 B 中,$\overrightarrow{AD}-(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{AD}-\mathbf{0}=\overrightarrow{AD}$;选项 C 中,$-(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MC})-(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BM})=-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{BM}=$

$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM})+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}$；选项 D 中，$-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AD}$.

3. 已知 A,B,C 为三个不共线的点，P 为△ABC 所在平面内一点.若$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{AB}$，则下列结论正确的是　　　　（　　）

A.点 P 在△ABC 内部

B.点 P 在△ABC 外部

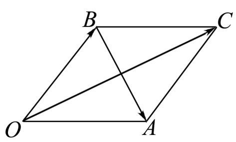
C.点 P 在直线 AB 上

D.点 P 在直线 AC 上

D　**解析**：因为$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{AB}$，所以$\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{PA}$，所以$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}$，即$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AP}$.故点 P 在边 AC 所在的直线上.

4. 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 所在直线的夹角为________.

30°　**解析**：如图，设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，



则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BA}$.

因为 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，

所以 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{BA}|$，

所以△OAB 是等边三角形，

所以∠$BOA=60°$.

因为$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，且在菱形 $OACB$ 中，

对角线 OC 平分∠BOA.

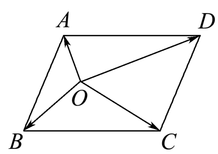
所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 所在直线的夹角为 30°.

5. 已知 $|\boldsymbol{a}|=7$，$|\boldsymbol{b}|=2$，且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$________.

5 或 9　**解析**：当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同时，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|=7-2=5$；

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反时，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=7+2=9$.

6. 如图所示，已知 O 为平行四边形 $ABCD$ 内一点，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，求$\overrightarrow{OD}$.



解：因为$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$，

又在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，所以$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$，

所以$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$.

6.2.3　向量的数乘运算

第 1 课时　向量的数乘运算

学习任务目标

1. 了解向量数乘的概念，并理解这种运算的几何意义.
2. 理解并掌握向量数乘的运算律，会运用向量数乘运算律进行向量运算.

问题式预习

知识点一　向量的数乘运算

一般地，我们规定实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积是一个向量，这种运算叫做向量的数乘，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的长度与方向规定如下：

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

(2) $\lambda\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$ 的方向

$\begin{cases}\text{当 }\lambda>0\text{ 时，与 }\boldsymbol{a}\text{ 的方向相同；}\\ \text{当 }\lambda<0\text{ 时，与 }\boldsymbol{a}\text{ 的方向相反.}\end{cases}$

特别地，当 $\lambda=0$ 时，$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$.

[微训练]

判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1) 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积还是向量.　（√）

(2) 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则 $3\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，$-3\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.　（√）

(3) 若 $m\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.　（×）

(4) 若 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.　（×）

(5) $|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$.　（×）

知识点二　向量数乘的运算律及向量线性运算

1. 向量数乘的运算律

设 λ,μ 为实数，那么

(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

特别地，我们有 $(-\lambda)\boldsymbol{a}=-(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(-\boldsymbol{a})$，$\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$.

2. 向量的线性运算

向量的加、减、数乘运算统称为向量的线性运算.向量线性运算的结果仍是向量.对于任意向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,以及任意实数 λ,μ_1,μ_2,恒有 $\lambda(\mu_1\boldsymbol{a}\pm\mu_2\boldsymbol{b})=\lambda\mu_1\boldsymbol{a}\pm\lambda\mu_2\boldsymbol{b}$.

[微训练]

1. 已知 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则 $6\times\left(-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}\right)$ ( )

A.化简结果为 $2\boldsymbol{a}$　　B.与向量 $\boldsymbol{a}$ 同向

C.与向量 $\boldsymbol{a}$ 反向　　D.长度为 2

C　**解析**:$6\times\left(-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}\right)=-2\boldsymbol{a}$,与向量 $\boldsymbol{a}$ 反向,其长度为 $2|\boldsymbol{a}|$.

2. 若向量 $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{a}$ 满足 $2\boldsymbol{x}-3(\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$,则向量 $\boldsymbol{x}=$________.

$6\boldsymbol{a}$　**解析**:因为 $2\boldsymbol{x}-3(\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$,

所以 $-\boldsymbol{x}+6\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{x}=6\boldsymbol{a}$.

任务型课堂

任务一 数乘向量的概念

1. 已知 $\lambda\in\mathbf{R}$,则下列结论正确的是 ( )

A.$|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$　　B.$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\boldsymbol{a}$

C.$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$　　D.$|\lambda\boldsymbol{a}|>0$

C　**解析**:对于 A,当 $\lambda<0$ 时,$|\lambda\boldsymbol{a}|\neq\lambda|\boldsymbol{a}|$;对于 B,$|\lambda\boldsymbol{a}|$ 是实数,$|\lambda|\boldsymbol{a}$ 是向量,故 $|\lambda\boldsymbol{a}|\neq|\lambda|\boldsymbol{a}$;对于 D,当 $\lambda=0$ 时,$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$.只有 C 正确.

2. 若 $|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,且向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同,则下列关系式正确的是 ( )

A.$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}$　　B.$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{a}$

C.$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$　　D.$\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{b}$

A　**解析**:因为 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 方向相同,且 $|\boldsymbol{b}|=2$,$|\boldsymbol{a}|=1$,所以 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}$.

3. 设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量,λ 是非零实数,则下列结论正确的是 ( )

A.$\boldsymbol{a}$ 与 $-\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向相反

B.$|\lambda\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{a}|$

C.$\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda^2\boldsymbol{a}$ 的方向相同

D.$|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda\boldsymbol{a}$

C　**解析**:当 $\lambda>0$ 时,$\boldsymbol{a}$ 与 $-\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向相反;当 $\lambda<0$ 时,$\boldsymbol{a}$ 与 $-\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向相同,故 A 不正确.当 $|\lambda|\geqslant1$ 时,$|\lambda\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{a}|$;当 $|\lambda|<1$ 时,$|\lambda\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{a}|$,故 B 不正确.因为 $\lambda^2>0$,所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda^2\boldsymbol{a}$ 的方向相同,故 C 正确.$|\lambda\boldsymbol{a}|$ 是实数,$\lambda\boldsymbol{a}$ 是向量,二者不相等,故 D 不正确.

任务二 向量的线性运算

[探究活动]

根据向量线性运算的含义及运算律,探究以下问题.

探究 1:实数运算中的去括号、移项、合并同类项、提取公因式等变形手段在向量的线性运算中适用吗?

提示:适用.

探究 2:在向量的线性运算中,与代数运算中的同类项、公因式、系数对应的分别是什么?

提示:共线向量、相同向量、与向量相乘的实数分别对应代数运算中的同类项、公因式、系数。

[评价活动]

1. 化简下列各式:

(1)$3(6\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-9\left(\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}\right)$;

(2)$\frac{1}{2}\left[3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\left(\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)\right]-2\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{3}{8}\boldsymbol{b}\right)$;

(3)$2(5\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-3(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-7\boldsymbol{a}$.

解:(1)原式 $=18\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-9\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=9\boldsymbol{a}$.

(2)原式 $=\frac{1}{2}\left(2\boldsymbol{a}+\frac{3\boldsymbol{b}}{2}\right)-\boldsymbol{a}-\frac{3}{4}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\frac{3}{4}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-\frac{3}{4}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

(3)原式 $=10\boldsymbol{a}-8\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}-3\boldsymbol{a}+9\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}-7\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

2. $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为已知向量,$\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$ 为未知向量,向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$ 满足关系式 $3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}$,$-4\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$,求向量 $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$.

解:$\begin{cases}3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}, ①\\-4\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}, ②\end{cases}$

由①×3+②×2,得 $\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$,

代入①得 $3\times(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})-2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}$,

所以 $\boldsymbol{y}=4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$.

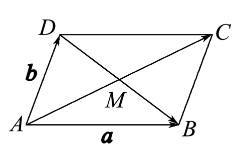
所以 $\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{y}=4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$.

任务三 用已知向量表示其他向量

[探究活动]

根据向量的线性运算,探究下列问题.

探究 1:如图,平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 M,且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,用向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{MA}$,$\overrightarrow{MB}$,$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$.



提示:在▱$ABCD$ 中,

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

由平行四边形的两条对角线互相平分,得

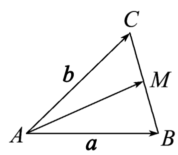
$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{MD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

探究 2:如图,已知 AM 是△ABC 的边 BC 上的中线,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,用 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{AM}$.



提示:$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

[评价活动]

1.(2022·新高考全国Ⅰ卷)在△ABC 中,点 D 在边 AB 上,$BD=2DA$.记$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{m}$,$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{n}$,则$\overrightarrow{CB}=$ ( )

A.$3\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}$　　B.$-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$

C.$3\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$　　D.$2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$

B　**解析**:因为点 D 在边 AB 上,$BD=2DA$,所以$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DA}$,即$\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=2(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD})$,

所以$\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{CD}-2\overrightarrow{CA}=3\boldsymbol{n}-2\boldsymbol{m}=-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$.故选 B.

2.已知点 P 在△ABC 所在平面内,若$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AP}$,则$\overrightarrow{PB}=$ ( )

A.$-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

B.$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

C.$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

D.$-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

C　**解析**:由$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AP}$,得$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,所以$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

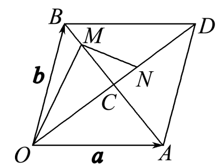
3.若点 C 在直线 AB 上,且$\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$,则$\overrightarrow{BC}=$ ( )

A.$-2\overrightarrow{AB}$　　B.$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

C.$-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$　　D.$2\overrightarrow{AB}$

D　**解析**:$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}$.

4.如图,四边形 $OADB$ 是以 OA,OB 为邻边的平行四边形.已知$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$BM=\frac{1}{3}BC$,$CN=\frac{1}{3}CD$,试用 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{OM}$,$\overrightarrow{ON}$,$\overrightarrow{MN}$.



解:因为$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{6}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=\frac{1}{6}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,

所以$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{6}\boldsymbol{a}-\frac{1}{6}\boldsymbol{b}=\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{5}{6}\boldsymbol{b}$.

因为$\overrightarrow{CN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OD}$,

所以$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{6}\boldsymbol{a}-\frac{5}{6}\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{6}\boldsymbol{b}$.

【类题通法】

用已知向量表示其他向量的两种方法

(1)直接法

画图 —— 结合图形的特征,把待求向量放在三角形或平行四边形中

↓

表示 —— 结合向量加法的三角形法则或平行四边形法则及向量线性运算用已知向量表示未知向量

(2)方程法

当直接表示比较困难时,可以首先利用三角形法则和平行四边形法则建立关于所求向量和已知向量的等量关系,然后解关于所求向量的方程(组)即可.

提质归纳

向量的线性运算
- 向量的加法
- 向量的减法
- 向量的数乘

几何意义

运算律

课后素养评价

基础性·能力运用

1. 下列各式中，正确算式的个数是　（　　）

①$(-7)\times 6\boldsymbol{a}=-42\boldsymbol{a}$；②$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}$；③$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=0$.

A.0　　B.1

C.2　　D.3

C　**解析**：根据向量数乘的运算律可验证①②正确；③错误，因为向量的和、差及数乘运算的结果仍为一个向量，而不是实数.故选 C.

2.（多选题）已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，下列选项正确的有　（　　）

A.$\sqrt{5}\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，且 $\sqrt{5}\boldsymbol{a}$ 的模是 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $\sqrt{5}$ 倍

B.$-4\boldsymbol{a}$ 的方向与 $8\boldsymbol{a}$ 的方向相反，且 $-4\boldsymbol{a}$ 的模是 $8\boldsymbol{a}$ 的模的 $\frac{1}{2}$

C.$-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$ 与 $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$ 是一对相反向量

D.$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ 是一对相反向量

ABC　**解析**：因为 $\sqrt{5}>0$，所以 $\sqrt{5}\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向.

又因为 $|\sqrt{5}\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}|\boldsymbol{a}|$，所以 $\sqrt{5}\boldsymbol{a}$ 的模是 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $\sqrt{5}$ 倍，选项 A 正确.

因为 $-4<0$，所以 $-4\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反，且 $|-4\boldsymbol{a}|=4|\boldsymbol{a}|$.

又因为 $8>0$，所以 $8\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，且 $|8\boldsymbol{a}|=8|\boldsymbol{a}|$，

所以 $-4\boldsymbol{a}$ 与 $8\boldsymbol{a}$ 方向相反，且 $-4\boldsymbol{a}$ 的模是 $8\boldsymbol{a}$ 的模的 $\frac{1}{2}$，选项 B 正确.

由数乘向量和相反向量的定义可知选项 C 正确.

因为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 互为相反向量，

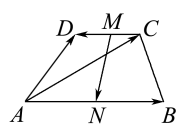
所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ 是相等向量，

所以选项 D 错误.

3. 化简：$2(3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})-8\boldsymbol{a}=$________.

$-2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$　**解析**：原式 $=6\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}-8\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$.

4. 如图，$ABCD$ 是一个梯形，$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$ 且 $|\overrightarrow{AB}|=2|\overrightarrow{CD}|$，$M,N$ 分别是 DC,AB 的中点，已知 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1,\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{e}_2$，试用 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 表示下列向量.



(1) $\overrightarrow{AC}=$________；

(2) $\overrightarrow{MN}=$________.

(1) $\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1$　(2) $\frac{1}{4}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$　**解析**：因为 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$，$|\overrightarrow{AB}|=2|\overrightarrow{CD}|$，所以 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

(1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1$.

(2) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN}$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$=-\frac{1}{4}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1$

$=\frac{1}{4}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$.

综合性·创新提升

1. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为不共线向量，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，则下列关系式正确的是　（　　）

A.$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

B.$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$

C.$\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{BC}$

D.$\overrightarrow{AD}=-2\overrightarrow{BC}$

B　**解析**：$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=-8\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=2(-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{BC}$.故选 B.

2. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，D 为边 BC 中点，且 $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$，则　（　　）

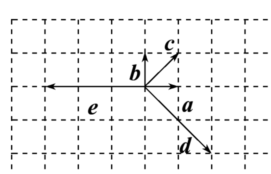
A.$\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{OD}$　　B.$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$

C.$\overrightarrow{AO}=3\overrightarrow{OD}$　　D.$2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$

B　**解析**：因为 D 为边 BC 的中点，所以 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}$，

所以 $2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{0}$，所以 $-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}$，所以 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$.故选 B.

3. 如图，已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}$ 的起点相同，则 $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{e}=$　（　　）



A.$-\boldsymbol{b}$　　B.$\boldsymbol{b}$

C.$-6\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　　D.$6\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

D　解析:因为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{e}=-3\boldsymbol{a}$,所以 $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{e}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.故选 D.

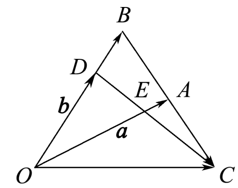
4.若 $3(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})+2(\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{a})-4(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{x}=$________.

$4\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}$　解析:由已知得 $3\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{x}-4\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,所以 $\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,所以 $\boldsymbol{x}=4\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}$.

5.已知平面上不共线的四点 O,A,B,C,若 $\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$,则 $\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{BC}|}=$________.

2　解析:因为 $\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$,所以 $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$,所以 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}$,所以 $\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{BC}|}=2$.

6.如图,在△OAB 中,延长 BA 到点 C,使 $AC=BA$,在 OB 上取点 D,使 $DB=\dfrac{1}{3}OB$,DC 与 OA 交点为 E.设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,用 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{DC}$.



解:因为 $AC=BA$,所以 A 是 BC 的中点,

所以 $\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$,

所以 $\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

所以 $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}-\dfrac{5}{3}\boldsymbol{b}$.

第 2 课时　向量共线定理

学习任务目标

1.理解并掌握向量共线定理.

2.会用向量共线定理处理向量共线、点共线问题.

问题式预习

知识点　向量共线定理

设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量,如果有一个实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,那么 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 是共线向量.

反之,如果 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 是共线向量,那么有且只有一个实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

实质:向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是:存在唯一一个实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

[微训练]

判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)若向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线,则存在唯一的实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.　(×)

(2)若 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.　(√)

(3)若 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.　(×)

任务型课堂

任务一　向量共线的判断

1.下列选项中,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不一定共线的是　(　　)

A.$\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_2-10\boldsymbol{e}_1$

B.$\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{e}_1-\dfrac{2}{5}\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1-\dfrac{1}{10}\boldsymbol{e}_2$

C.$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_1$

D.$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$

C　解析:对于 A,$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{a}$;对于 B,$\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}$;对于 D,$\boldsymbol{b}=-\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}$.只有 C 中,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不一定共线.

2.已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 不共线,若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BC}=-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$,则四边形 $ABCD$ 是　(　　)

A.梯形　B.平行四边形

C.矩形　D.菱形

A　解析:$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})-(4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(5\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})=-8\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{BC}$,

所以 $\overrightarrow{AD}\parallel\overrightarrow{BC}$ 且 $|\overrightarrow{AD}|\neq|\overrightarrow{BC}|$.所以四边形 $ABCD$ 为梯形.

3.(多选题)非零向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}$,$\boldsymbol{b}=-6\boldsymbol{e}$,则下列说法正确的是　(　　)

A.$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$　　B.向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相反

C.$|\boldsymbol{a}|=3|\boldsymbol{b}|$　　D.$\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{a}$

ABD　**解析**:因为 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e},\boldsymbol{b}=-6\boldsymbol{e}$,所以 $\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{a}$,故 D 正确;由共线向量定理知,A 正确;$-3<0$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反,故 B 正确;由上可知 $|\boldsymbol{b}|=3|\boldsymbol{a}|$,故 C 错误.故选 ABD.

【类题通法】

1.由向量共线定理知,只要找到一个实数 λ,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,即可得到 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}$.当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时,λ 为任意实数.

2.对任意两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,若存在 λ,μ 不全为 0 的实数对(λ,μ),使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,则向量 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

任务二　利用向量共线定理求参数

[探究活动]

根据向量共线定理,探究下列问题.

探究 1:向量共线定理说明了向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件,此定理有哪两个方面的应用?

提示:(1)充分性:判定两个向量共线.(2)必要性:由两个向量共线建立两个向量的等量关系.

探究 2:已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个不共线的向量,且 $\mu\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\mu,\lambda\in\mathbf{R})$,如何求 μ,λ 的值?

提示:由 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线,必有 $\mu=\lambda=0$.否则,不妨设 $\mu\neq0$,则 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\lambda}{\mu}\boldsymbol{b}$.由向量共线定理知,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,与已知矛盾.

[评价活动]

1.已知向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线,$\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$.若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,则 $k=$　　(　　)

A.±1　　B.1

C.-1　　D.0

A　**解析**:因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,所以 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,即 $k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2)$.

所以 $\begin{cases}k=\lambda,\\k\lambda=1,\end{cases}$ 解得 $k=\pm1$.

2.已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$,其中 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线,向量 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{e}_1-9\boldsymbol{e}_2$,问:是否存在实数 λ,μ,使 $\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线?

解:$\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\lambda(2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2)+\mu(2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)=(2\lambda+2\mu)\boldsymbol{e}_1+(-3\lambda+3\mu)\boldsymbol{e}_2$.假设存在实数 λ,μ 使 $\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线,则应存在实数 k,使 $\boldsymbol{d}=k\boldsymbol{c}$,即$(2\lambda+2\mu)\boldsymbol{e}_1+(-3\lambda+3\mu)\boldsymbol{e}_2=2k\boldsymbol{e}_1-9k\boldsymbol{e}_2$,即$(2\lambda+2\mu-2k)\boldsymbol{e}_1=(-9k+3\lambda-3\mu)\boldsymbol{e}_2$.

又因为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线,

所以 $\begin{cases}2\lambda+2\mu-2k=0,\\-9k+3\lambda-3\mu=0,\end{cases}$ 所以 $\lambda=-2\mu$.

故存在实数 λ,μ,只要满足 $\lambda=-2\mu$,就能使 $\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线.

【类题通法】

判断、证明向量共线的思路

根据向量共线定理寻求唯一的实数 λ,使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$.而已知向量共线求 λ,常将向量共线的条件转化为相应向量系数相等求解.若两向量不共线,必有向量的系数为零,利用待定系数法建立方程(组),解方程(组)从而求得 λ 的值.

任务三　证明三点共线

[探究活动]

根据共线向量定理,探究以下问题.

已知 O,A,B 是不共线的三点,且$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}(m,n\in\mathbf{R})$.

探究 1:若 $m+n=1$,A,P,B 三点是否共线?

提示:因为 $m+n=1$,

所以$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+(1-m)\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}+m(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$,

所以$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=m(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$,即$\overrightarrow{BP}=m\overrightarrow{BA}$,

所以$\overrightarrow{BP}$与$\overrightarrow{BA}$共线.

又因为$\overrightarrow{BP}$与$\overrightarrow{BA}$有公共点 B,

所以 A,P,B 三点共线.

探究 2:若 A,P,B 三点共线,则 m,n 满足什么条件?

提示:若 A,P,B 三点共线,则$\overrightarrow{BP}\parallel\overrightarrow{BA}$,

所以存在唯一一个实数 λ,使得$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BA}$,

所以$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=\lambda(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$.

又因为$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$,

所以$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=m\overrightarrow{OA}+(n-1)\overrightarrow{OB}$,

所以 $m\overrightarrow{OA}+(n-1)\overrightarrow{OB}=\lambda\overrightarrow{OA}-\lambda\overrightarrow{OB}$,

所以$(m-\lambda)\overrightarrow{OA}+(n+\lambda-1)\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{0}$.

因为 O,A,B 是不共线的三点,

所以$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$不共线,

所以 $\begin{cases}m-\lambda=0,\\n+\lambda-1=0,\end{cases}$

所以 $m+n=1$.

[评价活动]

1.设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b},\overrightarrow{AC}=m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}(k,m\in\mathbf{R})$,则 A,B,C 三点共线时有　　(　　)

A.$k=m$　　B.$km-1=0$

C.$km+1=0$　　D.$k+m=0$

B　**解析**:若 A,B,C 三点共线,则$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$共线,

所以存在唯一实数 λ,使$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$,

即 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}=\lambda(m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,即 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}=\lambda m\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$,

所以 $\begin{cases}\lambda m=1,\\\lambda=k,\end{cases}$

所以 $km=1$,即 $km-1=0$.

2. 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个不共线的向量，$\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{a}+p\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$.若 A，B，D 三点共线，则实数 p 的值是________.

-1 **解析**：因为 A，B，D 三点共线，所以存在实数 λ 使 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BD}$.又 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{a}+p\boldsymbol{b}$，

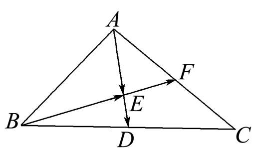
所以 $2\boldsymbol{a}+p\boldsymbol{b}=\lambda(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

所以 $\begin{cases}2=2\lambda,\\ p=-\lambda,\end{cases}$ 所以 $p=-1$.

3. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，D，F 分别是边 BC，AC 的中点，$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$.

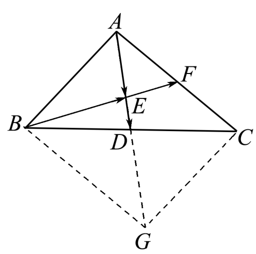
(1)用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{BF}$；

(2)求证：B，E，F 三点共线.



(1)**解**：如图，延长 AD 到点 G，使 $DG=AD$，连接 BG，CG，则四边形 $ABGC$ 是平行四边形，

所以 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.



所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

因为 $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

所以 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

(2)**证明**：由(1)知 $\overrightarrow{BE}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}=-\frac{1}{3}(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，

$\overrightarrow{BF}=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，

所以 $\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BF}$.

又因为 $\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{BF}$ 有公共点 B，

所以 B，E，F 三点共线.

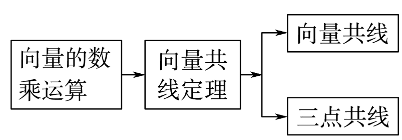
【类题通法】

证明或判断三点共线的方法

(1)一般来说，要判定 A，B，C 三点是否共线，只需看是否存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$（或 $\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ 等）即可.

(2)利用结论：若已知点 O，则 A，B，C 三点共线 $\Leftrightarrow$ 存在实数 x，y，使 $\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$，且 $x+y=1$.

提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个不共线的向量，且向量 $m\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+(2-m)\boldsymbol{b}$ 共线，则实数 m 的值为　（　　）

A. -1 或 3　　B. $\sqrt{3}$

C. -1 或 4　　D. 3 或 4

A **解析**：因为向量 $m\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+(2-m)\boldsymbol{b}$ 共线，且向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个不共线的向量，所以 $m=\frac{-3}{2-m}$，解得 $m=-1$ 或 $m=3$.

2. 已知四边形 $ABCD$ 是菱形，点 P 在对角线 AC 上（不包括端点 A，C），则 $\overrightarrow{AP}=$　（　　）

A. $\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$，$\lambda\in(0,1)$

B. $\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$，$\lambda\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

C. $\lambda(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})$，$\lambda\in(0,1)$

D. $\lambda(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})$，$\lambda\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

A　**解析**：由 P 是对角线 AC 上的一点(不含 A，C)，设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda\in(0,1)$.于是 $\overrightarrow{AP}=\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$，$\lambda\in(0,1)$.

3. 已知 C 是线段 AB 靠近点 B 的三等分点，下列关系式正确的是　(　　)

A. $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{BC}$

B. $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BC}$

C. $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

D. $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{CB}$

D　**解析**：由题意可知 $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CB}$.故只有 D 正确.

4. 在四边形 $ABCD$ 中，若 $\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$，则此四边形是　(　　)

A.平行四边形　　B.菱形

C.梯形　　D.矩形

C　**解析**：因为 $\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$，所以 $AB/\!/CD$，且 $AB\neq CD$，所以四边形 $ABCD$ 为梯形.

5. (多选题)已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量.在下列四个条件中，一定能使 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线的是　(　　)

A. $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{e}$ 且 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{e}$

B.存在相异实数 λ，μ，使 $\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

C. $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$(其中实数 x，y 满足 $x+y=0$)

D.已知梯形 $ABCD$，其中 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}$

AB　**解析**：对于 A，可解得 $\boldsymbol{a}=\frac{2}{7}\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=-\frac{8}{7}\boldsymbol{e}$，故 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线；对于 B，由于 $\lambda\neq\mu$，故 λ，μ 不全为 0，不妨设 $\lambda\neq0$，则由 $\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{a}=\frac{\mu}{\lambda}\boldsymbol{b}$，故 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线；对于 C，当 $x=y=0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不一定共线；对于 D，梯形 $ABCD$ 中不一定有 $AB/\!/CD$，可能 $AD/\!/BC$，故 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不一定共线.

6. 若 $|\boldsymbol{a}|=5$，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反，$|\boldsymbol{b}|=7$，$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，则 $\lambda=$________.

$-\frac{5}{7}$　**解析**：因为 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反，所以存在实数 $\lambda<0$，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，所以 $|\boldsymbol{a}|=-\lambda|\boldsymbol{b}|$，即 $5=-\lambda\times7$，所以 $\lambda=-\frac{5}{7}$，所以 $\boldsymbol{a}=-\frac{5}{7}\boldsymbol{b}$.

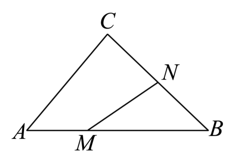
7. 已知在△ABC 所在的平面内有一点 P，满足 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$，则△$PBC$ 与△ABC 的面积之比是________.

2∶3　**解析**：因为 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AP}$，所以点 P 在边 CA 上，且是 CA 靠近点 A 一侧的三等分点，所以△PBC 和△ABC 的面积之比为 2∶3.

8. 如图，在△ABC 中，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$.

(1)用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{MN}$；

(2)若 P 为△ABC 内部一点，且 $\overrightarrow{AP}=\frac{5}{12}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$.求证：$M$，$P$，$N$ 三点共线.



(1)**解**：$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{6}\boldsymbol{a}$.

(2)**证明**：因为 P 为△ABC 内部一点，且 $\overrightarrow{AP}=\frac{5}{12}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$，

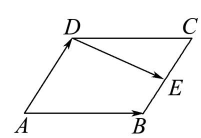
则 $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{5}{12}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}=\frac{1}{12}(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$，

所以 $\overrightarrow{MP}$ 与 $\overrightarrow{MN}$ 共线且有公共点 M，

所以 M，P，N 三点共线.

综合性·创新提升

1. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，E 是 BC 的中点.若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{DE}=$　(　　)



A.$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$　　B.$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

C.$\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　D.$\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

D　**解析**：$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

2.设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$都是非零向量.下列四个条件中，使$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$成立的条件是　（　　）

A.$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$　　B.$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$

C.$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$　　D.$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$且$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$

C　**解析**：$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，$\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$分别表示与$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$同向的单位向量.对于A，当$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$时，$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\neq\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$；对于B，当$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$时，可能有$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$，此时$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\neq\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$；对于C，当$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$时，$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{2\boldsymbol{b}}{|2\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$；对于D，当$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$且$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$时，可能有$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$，此时$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\neq\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.综上所述，使$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$成立的条件是$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$.故选C.

3.已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$中任意两个都不共线，但$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$共线，且$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{a}$共线，则向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=$（　　）

A.$\boldsymbol{a}$　　B.$\boldsymbol{b}$　　C.$\boldsymbol{c}$　　D.$\boldsymbol{0}$

D　**解析**：因为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$共线，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{a}$共线，

所以$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mu\boldsymbol{a}$，两式相减，得$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{c}-\mu\boldsymbol{a}$，

移项得$(1+\lambda)\boldsymbol{c}=(1+\mu)\boldsymbol{a}$.

因为向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}$不共线，所以$1+\lambda=0$，$1+\mu=0$，

即$\lambda=-1$，$\mu=-1$，即$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

4.O为平面上的一定点，A，B，C是平面上不共线的三个动点，动点P满足$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$，$\lambda\in[0,+\infty)$，则点$P$的轨迹一定通过$\triangle ABC$的　（　　）

A.外心　　B.内心

C.重心　　D.垂心

B　**解析**：由$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$，得$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$，

所以$\overrightarrow{AP}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$.

而$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$是与$\overrightarrow{AB}$同向的单位向量，$\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$是与$\overrightarrow{AC}$同向的单位向量，以这两个单位向量对应的线段$AB_1$，$AC_1$为邻边作平行四边形$AB_1P_1C_1$，易得平行四边形$AB_1P_1C_1$是菱形，对角线$AP_1$平分$\angle B_1AC_1$，且$\overrightarrow{AB_1}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$，$\overrightarrow{AC_1}=\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$，所以$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AP_1}$，则$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AP_1}$.

由$\lambda\in[0,+\infty)$，可知点P在$\angle BAC$的平分线上，即动点P的轨迹经过$\triangle ABC$的内心.

5.已知向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不共线，向量$\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{d}=6\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，则向量$\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{d}$的关系是________.（填“共线”或“不共线”）

共线　**解析**：$\boldsymbol{d}=6\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=2(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{c}$，所以向量$\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{d}$共线.

6.设$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$不共线，且$\overrightarrow{OC}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$（$a$，$b\in\mathbf{R}$）.

(1)若$a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{2}{3}$，求证：A，B，C三点共线.

(2)若A，B，C三点共线，则$a+b$是否为定值？说明理由.

(1)**证明**：当$a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{2}{3}$时，

$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$，

所以$\frac{2}{3}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})$，

即$2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$，

所以$\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{CA}$共线.又$\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{CA}$有公共点C，

所以A，B，C三点共线.

(2)**解**：$a+b$为定值1.理由如下：

因为A，B，C三点共线，所以$\overrightarrow{AC}/\!/\overrightarrow{AB}$.

不妨设$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$（$\lambda\in\mathbf{R}$），

所以$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$，

即$\overrightarrow{OC}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$.

又$\overrightarrow{OC}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$，且$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$不共线，

则$\begin{cases}a=1-\lambda,\\ b=\lambda,\end{cases}$所以$a+b=1$（定值）.

6.2.4　向量的数量积

第1课时　向量的数量积

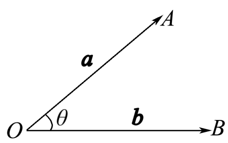
学习任务目标

1.了解平面向量数量积的物理背景.
2.掌握平面向量数量积的定义,理解投影向量.
3.会用两个向量的数量积求两个向量的夹角.

问题式预习

知识点一　向量的夹角

1.夹角:已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$(如图),O 是平面上的任意一点,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则 $\angle AOB=\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.



(1)当 $\theta=0$ 时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向;
(2)当 $\theta=\pi$ 时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向.

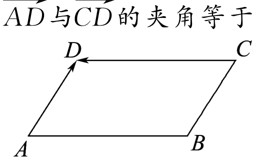
2.垂直:如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 $\dfrac{\pi}{2}$,我们说 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直,记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

[微训练]

在平行四边形 $ABCD$ 中,$\angle DAB=60°$,则 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 的夹角为 (　　)

A.30°　　B.60°　　C.120°　　D.150°

C　**解析**:如图,$\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 的夹角等于 $\angle ABC=120°$.



知识点二　向量的数量积

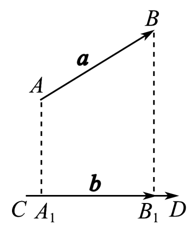
1.向量的数量积的概念

条件	非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ
结论	数量 $\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert\cos\theta$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(或内积)
记法	记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert\cos\theta$
规定	零向量与任一向量的数量积为 0

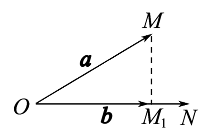
2.投影向量

(1)如图①,设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}$,我们考虑如下的变换:过 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B,分别作 $\overrightarrow{CD}$ 所在直线的垂线,垂足分别为 A_1,B_1,得到 $\overrightarrow{A_1B_1}$,我们称上述变换为向量 $\boldsymbol{a}$ 向向量 $\boldsymbol{b}$ 投影,$\overrightarrow{A_1B_1}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量.

(2)如图②,在平面内任取一点 O,作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{ON}=\boldsymbol{b}$.过点 M 作直线 ON 的垂线,垂足为 M_1,则 $\overrightarrow{OM_1}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量.设与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量为 $\boldsymbol{e}$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,那么 $\overrightarrow{OM_1}=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\cos\theta\,\boldsymbol{e}$.



图①



图②

[微训练]

已知 $\lvert\boldsymbol{a}\rvert=1$,$\lvert\boldsymbol{b}\rvert=2$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于 (　　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

A　**解析**:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times2\times\cos\dfrac{\pi}{3}=1$.

知识点三　向量数量积的重要性质

设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是非零向量,它们的夹角是 θ,$\boldsymbol{e}$ 是与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量,则

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\cos\theta$.
(2)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.
(3)当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert$;当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert$.特别地,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\lvert\boldsymbol{a}\rvert^2$ 或 $\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.
(4)$\lvert\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\rvert\leqslant\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert$.

[微训练]

判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)两个向量的数量积仍然是向量. (×)
(2)若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. (×)
(3)$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 共线 $\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert$. (×)
(4)若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$,则一定有 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$. (×)
(5)两个向量的数量积是一个实数,向量的加法、减法、数乘运算的结果是向量. (√)

任务型课堂

任务一 向量数量积的有关概念及基本运算

1.在等腰直角三角形 ABC 中，若 $\angle C=90°$，$AC=\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值等于 ( )

A. -2　B. 2　C. $-2\sqrt{2}$　D. $2\sqrt{2}$

B **解析**：$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos\angle ABC=2\times\sqrt{2}\times\cos 45°=2$.

2.已知 $|\boldsymbol{a}|=4$，$\boldsymbol{e}$ 为单位向量，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{e}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{e}$ 上的投影向量是________.

$-2\boldsymbol{e}$ **解析**：由题意可知，向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{e}$ 上的投影向量为 $|\boldsymbol{a}|\cos\frac{2\pi}{3}\boldsymbol{e}=-2\boldsymbol{e}$.

3.已知 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=5$，根据下列条件，分别求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积.

(1) $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$；

(2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；

(3) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$.

解：(1)若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，则夹角 $\theta=0°$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 0°=4\times5\times1=20$；若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，则 $\theta=180°$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 180°=4\times5\times(-1)=-20$.

故当 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=20$ 或 -20.

(2)当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时，$\theta=90°$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 90°=0$.

(3)当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60°=4\times5\times\frac{1}{2}=10$.

【类题通法】

1. 投影向量是向量，$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

2.求平面向量数量积的步骤

(1)求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ，其中 $\theta\in[0,\pi]$；

(2)分别求 $|\boldsymbol{a}|$ 和 $|\boldsymbol{b}|$；

(3)求数量积，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

提醒：计算向量的数量积的关键是确定两个向量的夹角，条件是两个向量的起点必须重合，否则，要通过平移使得两个向量符合该条件.

任务二 与向量的模有关的问题

1.已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}$ 的夹角是 $\frac{\pi}{3}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=2$，则 $|\boldsymbol{c}|=$________.

2 **解析**：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cos\frac{\pi}{3}=2\times|\boldsymbol{c}|\times\frac{1}{2}=2$，所以 $|\boldsymbol{c}|=2$.

2.已知 $x=1$ 是方程 $x^2+|\boldsymbol{a}|x+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 的根，且 $\boldsymbol{a}^2=4$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$.求向量 $\boldsymbol{b}$ 的模.

解：因为 $\boldsymbol{a}^2=4$，所以 $|\boldsymbol{a}|^2=4$，即 $|\boldsymbol{a}|=2$.

将 $x=1$ 代入原方程可得 $1+2\times1+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3$.

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=2|\boldsymbol{b}|\cdot\cos 120°=-3$，解得 $|\boldsymbol{b}|=3$.

【类题通法】

定义法求向量的模

(1)利用性质 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$ 或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$ 求向量的模，其实质是通过求向量的数量积来求模，从而实现了实数运算与向量运算的相互转化.

(2)求模时，往往应用 $|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}^2$ 先求模的平方，再开方即可求得 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$.

任务三 向量的夹角

[探究活动]

请根据向量的数量积的意义，探究下列问题.

探究1：非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的数量积是向量还是数量？如果是数量，它什么时候为正，什么时候为负，什么时候为零？

提示：因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是数量.

当 $0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 为正；

当 $\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 为负；

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 为零.

探究2：由向量数量积的定义知，若求非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ，应先求什么？如何求？

提示：先求 $\cos\theta$，依据 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ 求解.

[评价活动]

1.向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=4$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的大小为 ( )

A. $\frac{\pi}{6}$　B. $\frac{\pi}{4}$　C. $\frac{\pi}{3}$　D. $\frac{\pi}{2}$

C **解析**：设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，因为 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，所以 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{2}{1\times4}=\frac{1}{2}$.

又 θ 的取值范围为 $[0,\pi]$，

所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$. 故选 C.

2. 已知 E,F,G,H 分别是四边形 $ABCD$ 的边 AB，BC，CD，DA 的中点. 若 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=0$，则四边形 $EFGH$ 是　　(　　)

A. 梯形　　B. 正方形

C. 菱形　　D. 矩形

D　**解析**：连接 AC，BD(图略)，由题意可知 $EF/\!/AC$，$GH/\!/AC$，所以 $EF/\!/GH$.

同理可得 $EH/\!/FG$，所以四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

又 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=0$，

即 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，所以 $AC\perp BD$，

所以 $EF\perp GF$，所以四边形 $EFGH$ 为矩形.

【类题通法】

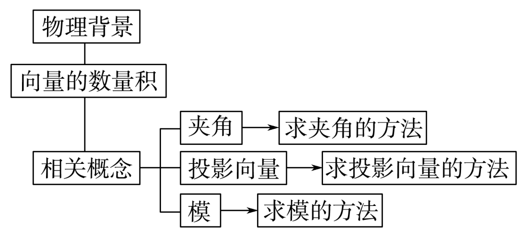
求向量夹角的方法

(1) 求出 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，代入公式 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ 求解.

(2) 用同一个量表示 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，代入公式 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ 求解.

(3) 借助向量运算的几何意义，数形结合求夹角.

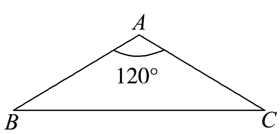
提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1. 如图，$\triangle ABC$ 是顶角为 120° 的等腰三角形，且 $AB=1$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ 等于　　(　　)



A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　C. $-\frac{3}{2}$　D. $\frac{3}{2}$

C　**解析**：因为 $\triangle ABC$ 是顶角为 120° 的等腰三角形，且 $AB=1$，所以 $BC=\sqrt{3}$. 所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=1\times\sqrt{3}\times\cos150^\circ=-\frac{3}{2}$.

2. (多选题)以下四种说法中正确的是　　(　　)

A. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

B. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所成的角为钝角

C. 在 $\triangle ABC$ 中，如果 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，那么 $\triangle ABC$ 为直角三角形

D. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是两个单位向量，则 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$

ACD　**解析**：由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 得 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，选项 A 正确；

若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，则 θ(θ 为向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角)为钝角或 $\theta=180^\circ$，选项 B 错误；

由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 知 $B=90^\circ$，故 $\triangle ABC$ 为直角三角形，选项 C 正确；

由 $\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2=1$，$\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{b}|^2=1$，知 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$，选项 D 正确.

3. 若 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，则 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|$ 的值不可能是　　(　　)

A. 0　B. $\frac{1}{2}$　C. 2　D. 3

D　**解析**：由向量数量积的性质知 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=2$.

4. 若等边三角形 ABC 的边长为 4，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$　　(　　)

A. 8　B. -8　C. $8\sqrt{3}$　D. $-8\sqrt{3}$

A　**解析**：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos60^\circ=4\times4\times\frac{1}{2}=8$.

5. 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=5$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-12$，且 $\boldsymbol{e}$ 是与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为________.

$-\frac{12}{5}\boldsymbol{e}$　**解析**：设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-12}{3\times5}=-\frac{4}{5}$，所以 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\theta\cdot\boldsymbol{e}=3\times\left(-\frac{4}{5}\right)\boldsymbol{e}=-\frac{12}{5}\boldsymbol{e}$.

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为________.

$\frac{\pi}{6}$　**解析**：$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{3}$，

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{2^2-1}{2\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 又 $\theta\in[0,\pi]$，所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$.

综合性·创新提升

1.(多选题)下列说法正确的是 ( )

A.若 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2=0$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

B.已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个非零向量,若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,则 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|$

C.$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|<\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

D.$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^3$

AB **解析**:对于 A,因为 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2=0$,所以 $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=0$,所以 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=0$,所以 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,故 A 正确;对于 B,因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互为相反向量,设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 θ,则 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 $\pi-\theta$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cos\theta$,$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos(\pi-\theta)=-|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta$,所以 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|$,故 B 正确;对于 C,由于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$,故 C 错误;对于 D,由于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{a}$,其结果为向量,故 D 错误.

2.(多选题)已知向量 $\boldsymbol{b}$ 的模为 1,且 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量的模为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 ( )

A.30° B.60° C.120° D.150°

AD **解析**:设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,因为向量 $\boldsymbol{b}$ 的模为 1,且 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量的模为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $||\boldsymbol{b}|\cos\theta|=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $0°\leqslant\theta\leqslant180°$,所以 $\theta=30°$ 或 $150°$.

3.已知平面上三点 A,B,C,满足 $|\overrightarrow{AB}|=3$,$|\overrightarrow{BC}|=4$,$|\overrightarrow{CA}|=5$,则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的值等于 ( )

A.-7 B.7 C.25 D.-25

D **解析**:由条件知 $\angle ABC=90°$,所以原式

$=0+4\times5\cos(180°-C)+5\times3\cos(180°-A)$

$=-20\cos C-15\cos A$

$=-20\times\frac{4}{5}-15\times\frac{3}{5}=-16-9=-25$.

4.已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 为 45°,且 $|\boldsymbol{a}|=2$,$\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4$,则 $|\boldsymbol{b}|=$________.

$2\sqrt{2}$ **解析**:因为 $|\boldsymbol{a}|=2$,$\theta=45°$,

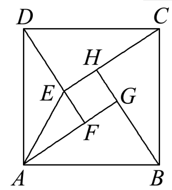
所以由 $\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4$ 得 $|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos45°+|\boldsymbol{b}|^2=4$,

即 $4-2\sqrt{2}|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|^2=4$,

解得 $|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{2}$ 或 $|\boldsymbol{b}|=0$.

因为 $\boldsymbol{b}$ 是非零向量,所以 $|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{2}$.

5.赵爽是我国汉代数学家,大约在公元 222 年,他在为《周髀算经》作注解时,给出了“赵爽弦图”:四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形.如图,正方形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{13}$,正方形 $EFGH$ 的边长为 1,则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$ 的值为________.



4 **解析**:设 $AF=x$,则 $BG=x$,$AG=x+1$.

在 Rt△AGB 中,$AG^2+BG^2=AB^2$,整理得 $(x+1)^2+x^2=(\sqrt{13})^2$,即 $x^2+x-6=0$,

解得 $x=2$ 或 $x=-3$(舍).所以 $AF=BG=2$,$AG=3$.

在 Rt△AFE 中,$AE=\sqrt{AF^2+FE^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,$\cos\angle EAF=\frac{AF}{AE}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$\sin\angle EAF=\frac{EF}{AE}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

在 Rt△AGB 中,$\cos\angle GAB=\frac{AG}{AB}=\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$,

$\sin\angle GAB=\frac{BG}{AB}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$,

所以 $\cos\angle EAB=\cos(\angle EAF+\angle GAB)$

$=\cos\angle EAF\cos\angle GAB-\sin\angle EAF\sin\angle GAB$

$=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{13}}{13}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{2\sqrt{13}}{13}=\frac{4\sqrt{65}}{65}$,

所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\angle EAB=\sqrt{5}\times\sqrt{13}\times\frac{4\sqrt{65}}{65}=4$.

6.在△ABC 中,已知 $|\overrightarrow{AB}|=5$,$|\overrightarrow{BC}|=4$,$|\overrightarrow{AC}|=3$,求:

(1)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$;

(2)设与 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量为 $\boldsymbol{e}$,求 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量.

解:因为 $|\overrightarrow{AB}|=5$,$|\overrightarrow{BC}|=4$,$|\overrightarrow{AC}|=3$,所以△ABC 为直角三角形,且 $C=90°$.

所以 $\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}$,$\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{5}$.

(1)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-5\times4\times\frac{4}{5}=-16$.

(2)设 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角为 θ,则 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为 $|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\theta\,\boldsymbol{e}=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\boldsymbol{e}=\frac{3\times5\times\frac{3}{5}\boldsymbol{e}}{5}=\frac{9}{5}\boldsymbol{e}$.

第2课时　向量的数量积的运算律

学习任务目标

1.能通过向量数量积的定义掌握向量数量积的运算律.

2.能利用运算律进行向量数量积的运算.

问题式预习

知识点　向量数量积的运算律

1.运算律

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

(2)$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})(\lambda\in\mathbf{R})$.

(3)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

2.向量的数量积与实数乘法运算性质的比较

实数 a,b,c	向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$
$a\neq0,a\cdot b=0\Rightarrow b=0$	$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\nRightarrow\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$
$a\cdot b=b\cdot c(b\neq0)\Rightarrow a=c$	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})\nRightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$

续表

实数 a,b,c	向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$
$\lvert a\cdot b\rvert=\lvert a\rvert\cdot\lvert b\rvert$	$\lvert\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\rvert\leqslant\lvert\boldsymbol{a}\rvert\cdot\lvert\boldsymbol{b}\rvert$
满足乘法结合律	不满足乘法结合律

[微训练]

已知$|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=2$,则$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$　(　　)

A.2　　B.3

C.5　　D.-5

C　**解析**:因为$|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=2$,

所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=9-4=5$.

任务型课堂

任务一　向量数量积的运算律的应用

1.已知$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$,则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$　(　　)

A.1　　B.$\sqrt{3}$

C.2　　D.$\sqrt{3}$或2

C　**解析**:$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4-2\times2+4=4$,则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$.

2.图1所示的八角星纹是大汶口文化中期彩陶纹样中具有鲜明特色的花纹.八角星纹常绘于陶盆和陶豆的上腹,先于器外的上腹施一圈红色底衬,然后在上面绘并列的八角星形的单独纹样.八角星纹以白彩绘成,黑线勾边,中为方形或圆形,且有向四面八方扩张的感觉.八角星纹延续的时间较长,传播范围亦广,在长江以南的时间稍晚的崧泽文化的陶豆座上也屡见八角星纹.图2是图1抽象出来的图形,在图2中,圆中各个三角形(以AB为边的三角形、以AB,AO的一部分为边的三角形除外)为等腰直角三角形,点O为圆心,中间部分是边长为2的正方形,定点A,B所在位置如图所示,则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}$的值为　(　　)

图1

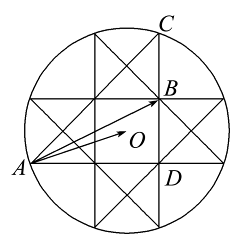
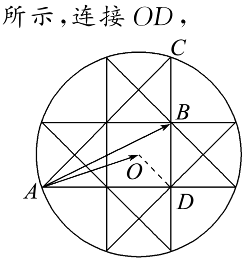


图2

A.10　　B.12　　C.14　　D.16

C　**解析**:如图所示,连接OD,



因为中间部分是边长为2的正方形,

且图中各个三角形(部分三角形除外)为等腰直角三角形,

所以$\angle ADO=\angle ODB=\frac{\pi}{4},|\overrightarrow{OD}|=\sqrt{2},|\overrightarrow{AD}|=4,\angle ADB=\frac{\pi}{2}$,

则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO})$

$=\overrightarrow{AD}^2+|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{DO}|\cos\frac{3\pi}{4}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AD}+|\overrightarrow{DB}||\overrightarrow{DO}|\cdot\cos\frac{\pi}{4}$

$=4^2+4\times\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=14.$

故选 C.

3.(2022·全国甲卷(理))设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值为$\frac{1}{3}$,且$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=3$,则$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=$________.

11 **解析**:设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为θ,因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值为$\frac{1}{3}$,即 $\cos\theta=\frac{1}{3}$,

又$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=3$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=1\times3\times\frac{1}{3}=1$,

所以$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=2\times1+3^2=11$.

4.已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°,且$|\boldsymbol{a}|=4$,$|\boldsymbol{b}|=2$,则$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})=$________.

0 **解析**:$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})$

$=2\boldsymbol{a}^2+6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{b}^2$

$=2|\boldsymbol{a}|^2+5\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3|\boldsymbol{b}|^2$

$=2\times16+5\times4\times2\times\cos120°-3\times4$

$=0$.

【类题通法】

向量数量积的运算律的应用

(1)先分别求出向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的模及向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值,再根据数量积的定义求解.

(2)若待求式是较复杂的数量积的运算,需先利用向量数量积的运算律或相关公式进行化简.

任务二 向量的夹角与向量垂直问题

[探究活动]

设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为θ,请根据 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$,探究下列问题.

探究1:向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角的充要条件是什么?

提示:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不同向共线.

探究2:向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角的充要条件是什么?

提示:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不反向共线.

探究3:向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件是什么?

提示:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

[评价活动]

1.设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,$|3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$,则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 ( )

A.$\frac{\pi}{3}$ B.$\frac{\pi}{6}$ C.$\frac{\pi}{4}$ D.$\frac{2\pi}{3}$

A **解析**:设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为θ.

由题意得$(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})^2=7$,

所以 $9|\boldsymbol{a}|^2+4|\boldsymbol{b}|^2-12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=7$.

又$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$.

所以$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=\frac{1}{2}$,即 $\cos\theta=\frac{1}{2}$.

又 $\theta\in[0,\pi]$,所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$.

2.已知$|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=2$,向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°,$\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{d}=m\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$.当 m 为何值时,$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 垂直?

解:由已知得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times2\times\cos60°=3$.

由 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$,得 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=0$,

即 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=(3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})\cdot(m\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$

$=3m\boldsymbol{a}^2+(5m-9)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15\boldsymbol{b}^2$

$=27m+3(5m-9)-60$

$=42m-87=0$.

所以 $m=\frac{29}{14}$.

故当 $m=\frac{29}{14}$时,$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 垂直.

【类题通法】

两个向量的夹角与其数量积的关系

(1)向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不同向共线.

(2)向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不反向共线.

(3)向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

任务三 向量数量积在平面几何中的应用

1.若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}^2=0$,则△$ABC$ 为 ( )

A.直角三角形

B.钝角三角形

C.锐角三角形

D.等腰直角三角形

A **解析**:因为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,所以$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$,所以∠$BAC=90°$.故选 A.

2.若 O 为△ABC 所在平面内任意一点,且满足$(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0$,试判断△$ABC$ 的形状.

解:由$(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0$,

得$\overrightarrow{CB}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=0$,

即$\overrightarrow{CB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0$，

从而$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0$，

所以$\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AC}^2=0$，即$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2$，

则$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$.

故$\triangle ABC$是等腰三角形.

提质归纳

交换律
数乘结合律　——　向量数量积的运算律　——　求向量的模
分配律
求向量的夹角
判断向量垂直

课后素养评价

基础性·能力运用

1. 已知$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$均为单位向量，它们的夹角为$60°$，那么$|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|$等于（　　）

A. $\sqrt{7}$　　B. $\sqrt{10}$　　C. $\sqrt{13}$　　D. 4

C　**解析**：$|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{1+6\times1\times1\times\cos 60°+9}=\sqrt{13}$.

2. 已知$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为单位向量，其夹角为$60°$，则向量$2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{a}$的关系是（　　）

A. 相等　　B. 垂直　　C. 平行　　D. 共线

B　**解析**：由题意得$(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}^2=2\times1\times1\times\cos 60°-1=0$，所以$(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{a}$.故选B.

3. 已知非零向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，且$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$的夹角为$120°$，则$\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}=$（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

C　**解析**：因为$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{b}^2$，

$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{b}^2}$，$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{b}^2}$.

所以$\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{b}^2=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{b}^2}\cdot\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{b}^2}\cdot\cos 120°$，

化简得$\dfrac{3}{2}\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{b}^2=0$.所以$\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

4. 在$\triangle ABC$中，M是边BC的中点，$AM=3$，$BC=10$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$________.

-16　**解析**：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})=\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}$

$=|\overrightarrow{AM}|^2+(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})\cdot\overrightarrow{AM}+|\overrightarrow{MB}||\overrightarrow{MC}|\cos\pi$

$=9-25=-16$.

5. 已知$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，且$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\geqslant4$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角$\theta$的取值范围是________.

$\left[\dfrac{2\pi}{3},\pi\right]$　**解析**：因为$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

$=2\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2$

$=2\times9-3|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta-2\times16$

$=-14-3\times3\times4\cos\theta\geqslant4$，

所以$\cos\theta\leqslant-\dfrac{1}{2}$，所以$\theta\in\left[\dfrac{2\pi}{3},\pi\right]$.

6. 已知向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$45°$，且$|\boldsymbol{a}|=1$，$|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$，求$|\boldsymbol{b}|$.

解：因为$|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$，所以$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=10$，

所以$4\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=10$.

又因为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$45°$且$|\boldsymbol{a}|=1$，

所以$4\times1^2+4\times1\times|\boldsymbol{b}|\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+|\boldsymbol{b}|^2=10$，

整理得$|\boldsymbol{b}|^2+2\sqrt{2}|\boldsymbol{b}|-6=0$，

解得$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$或$|\boldsymbol{b}|=-3\sqrt{2}$（舍去）.

综合性·创新提升

1. 在平行四边形$ABCD$中，$|\overrightarrow{AB}|=4$，$|\overrightarrow{AD}|=3$，N为DC的中点，$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MC}$，则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NM}=$（　　）

A. 2　　B. 5　　C. 6　　D. 8

C　**解析**：$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM})\cdot(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CM})$

$=\left(\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2-\dfrac{2}{9}\overrightarrow{AD}^2=\dfrac{1}{2}\times4^2-\dfrac{2}{9}\times3^2=6$.

2. 若向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$满足$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$且$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，则$\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=$（　　）

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 0

D　**解析**：因为$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，所以$\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$，

所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$，

所以$\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0+0=0$.

3. 已知$\triangle ABC$满足$\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，则$\triangle ABC$是（　　）

A.等边三角形　　B.锐角三角形
C.直角三角形　　D.钝角三角形

C　**解析**：由题意，得$\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，所以$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，所以$\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$，所以$\triangle ABC$是直角三角形.

4.已知$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$是互相垂直的单位向量，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2$，且$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角$\theta$为锐角，则实数$\lambda$的取值范围是（　　）

A.$(-\infty,-2)\cup\left(-2,\frac{1}{2}\right)$

B.$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

C.$\left(-2,\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$

D.$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$

A　**解析**：因为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角θ为锐角，
所以$\cos\theta>0$且$\cos\theta\neq1$，即$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$且$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$方向不同，
即$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1-2\lambda>0$，且$\boldsymbol{a}\neq m\boldsymbol{b}(m>0)$，
解得$\lambda\in(-\infty,-2)\cup\left(-2,\frac{1}{2}\right)$.

5.已知向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为30°，且$|\boldsymbol{a}|=1$，$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$，则$|\boldsymbol{b}|=$________.

$\sqrt{3}$　**解析**：因为$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$，所以$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=4\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4+|\boldsymbol{b}|^2-4|\boldsymbol{b}|\cos30^\circ=1$，即$|\boldsymbol{b}|^2-2\sqrt{3}|\boldsymbol{b}|+3=0$，所以$(|\boldsymbol{b}|-\sqrt{3})^2=0$，所以$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$.

6.已知$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$且满足$3\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，其中$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角为$60^\circ$，则实数$m=$________.

5或-8　**解析**：因为$3\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，所以$3\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}=-7\boldsymbol{c}$.
所以$(3\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b})^2=(-7\boldsymbol{c})^2$，即$9+m^2+6m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=49$.
又$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos60^\circ=\frac{1}{2}$，所以$m^2+3m-40=0$，
解得$m=5$或$m=-8$.

7.已知$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角为$60^\circ$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{d}=m\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，当$m$为何值时，$\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{d}$垂直？

解：由已知得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times1\times\cos60^\circ=1$.
若$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$，则$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=0$.
所以$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})\cdot(m\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$
$=m\boldsymbol{a}^2+(5m-2)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-10\boldsymbol{b}^2$
$=4m+5m-2-10=9m-12=0$，
所以$m=\frac{4}{3}$.
故当$m=\frac{4}{3}$时，$\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{d}$垂直.

6.3　平面向量基本定理及坐标表示

6.3.1　平面向量基本定理

学习任务目标

1.理解平面向量基本定理的内容，了解基底的含义.
2.会应用平面向量基本定理解决有关平面向量的综合问题.

问题式预习

知识点　平面向量基本定理

(1)定理：如果$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任一向量$\boldsymbol{a}$，有且只有一对实数λ_1,λ_2，使$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$.
(2)基底：若$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$不共线，我们把$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$叫做表示这一平面内所有向量的一个基底.
拓展：①$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$是同一平面内的两个不共线的向量，$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$的选取不唯一，即一个平面可以有多个基底.
②基底$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$确定后，实数$\lambda_1,\lambda_2$是唯一确定的.

[微训练]

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).
(1)平面内任意两个向量都可以作为表示平面内所有向量的一个基底.（　　）
×　**提示**：只有不共线的两个向量才可以作为基底.
(2)$\{\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}\}$可以作为基底.（　　）
×　**提示**：由于$\boldsymbol{0}$和任意向量共线，故$\{\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}\}$不可作为基底.
(3)平面向量基本定理中基底的选取是唯一的.（　　）

× 提示：基底的选取不是唯一的，不共线的两个向量都可作为基底.

(4)若 e_1,e_2 是同一平面内两个不共线向量，则 $\lambda_1e_1+\lambda_2e_2(\lambda_1,\lambda_2$ 为实数)可以表示该平面内所有向量. （√）

2.设 e_1,e_2 是同一平面内两个不共线的向量，以下各组向量中不能作为基底的是 （ ）

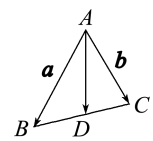
A.$\{e_1,e_2\}$ B.$\{e_1+e_2,3e_1+3e_2\}$

C.$\{e_1,5e_2\}$ D.$\{e_1,e_1+e_2\}$

B **解析**：因为 e_1,e_2 是同一平面内两个不共线的向量，所以$\{e_1,e_2\}$可以作为一个基底；$e_1,5e_2$ 也是两个不共线的向量，所以$\{e_1,5e_2\}$可以作为一个基底；e_1 与 e_1+e_2 是两个不共线的向量，所以$\{e_1,e_1+e_2\}$可以作为一个基底；$3e_1+3e_2=3(e_1+e_2)$，即 e_1+e_2 与 $3e_1+3e_2$ 共线，所以它们不能作为一个基底.

3.AD 是$\triangle ABC$ 的中线，已知$\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{AC}=b$.若以$\{a,b\}$为基底，则$\overrightarrow{AD}=$________.

$\frac{1}{2}(a+b)$ **解析**：如图，AD 是$\triangle ABC$ 的中线，则 D 为线段 BC 的中点，从而$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$，即$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$，从而$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(a+b)$.



任务型课堂

任务一 对基底概念的理解

1.设$\{e_1,e_2\}$是表示平面内所有向量的一个基底，则下列四组向量中，不能作为基底的是 （ ）

A.e_1+e_2 和 e_1-e_2

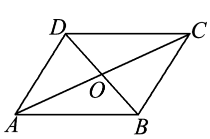
B.$3e_1-4e_2$ 和 $6e_1-8e_2$

C.e_1+2e_2 和 $2e_1+e_2$

D.e_1 和 e_1+e_2

B **解析**：选项 B 中，$6e_1-8e_2=2(3e_1-4e_2)$，所以 $6e_1-8e_2$ 与 $3e_1-4e_2$ 共线，所以不能作为基底；选项 A,C,D 中的两向量均不共线，可以作为基底.故选 B.

2.(多选题)如图，设 O 是平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线的交点，给出下列向量组，其中可以作为表示该平面内所有向量的基底的是 （ ）



A.$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{AB}$

B.$\overrightarrow{DA}$与$\overrightarrow{BC}$

C.$\overrightarrow{CA}$与$\overrightarrow{DC}$

D.$\overrightarrow{OD}$与$\overrightarrow{OB}$

AC **解析**：选项 B 中，$\overrightarrow{DA}$与$\overrightarrow{BC}$共线；选项 D 中，$\overrightarrow{OD}$与$\overrightarrow{OB}$共线；选项 A,C 中，两向量均不共线.由基底的定义可知 A,C 选项正确.

3.如果$\{e_1,e_2\}$是表示平面内所有向量的一个基底，那么 （ ）

A.若实数 m,n 使得 $me_1+ne_2=\mathbf{0}$，则 $m=n=0$

B.空间任一向量 a 可以表示为 $a=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2$，其中 λ_1,λ_2 为实数

C.对于实数 m,n，me_1+ne_2 不一定在此平面内

D.对于平面内的某一向量 a，存在两对以上的实数 m,n，使 $a=me_1+ne_2$

A **解析**：选项 B 中，应为“平面内任一向量”；选项 C 中，me_1+ne_2 一定在此平面内；选项 D 中，m,n 应是唯一的.

【类题通法】

判断基底的方法

根据平面向量基底的定义知判断两个向量能否作为表示平面内所有向量的一个基底，可转化为判断这两个向量是否共线.若不共线，则它们能作为一个基底；若共线，则它们不能作为一个基底.

任务二 用基底表示向量

[探究活动]

请根据平面向量基本定理，探究下列问题.

探究 1：若向量 a 与e_1或e_2共线，a 还能表示为 $a=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2$吗？

提示：当向量 a 与e_1共线时，$a=\lambda_1e_1+0\,e_2$；

当向量 a 与e_2共线时，$a=0\,e_1+\lambda_2e_2$.

探究 2：当 a 是零向量时，a 还能表示为 $a=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2$吗？

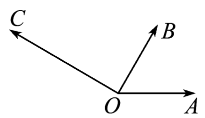
提示：$a=0\,e_1+0\,e_2$.

探究 3：设e_1,e_2是同一平面内两个不共线的向量，在 $a=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2$中，$\lambda_1,\lambda_2$ 是否唯一？

提示：假设 $a=\mu_1e_1+\mu_2e_2$，则$\lambda_1e_1+\lambda_2e_2=\mu_1e_1+\mu_2e_2$，即$(\lambda_1-\mu_1)e_1+(\lambda_2-\mu_2)e_2=\mathbf{0}$，所以 $\lambda_1-\mu_1=0$，且$\lambda_2-\mu_2=0$.所以 λ_1,λ_2 唯一.

[评价活动]

1. 如图所示,$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$,$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{3}$,$\angle AOB=60°$,$OB\perp OC$.设$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$,则 ( )



A.$x=-2,y=-1$　　B.$x=-2,y=1$

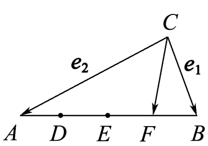
C.$x=2,y=-1$　　D.$x=2,y=1$

B **解析**:过点 C 作 $CD\,/\!/\,OB$ 交 AO 的延长线于点 D,连接 BC(图略).由$|\overrightarrow{OB}|=1$,$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{3}$,$\angle AOB=60°$,$OB\perp OC$,知$\angle COD=30°$.在 $\mathrm{Rt}\triangle OCD$ 中,可得 $OD=2CD=2$,则$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}=-2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.所以 $x=-2$,$y=1$.

2. 已知 $\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$ 不共线,$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2$,要使$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$能作为表示平面内所有向量的一个基底,则实数 λ 的取值范围为________.

$(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$ **解析**:若$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$能作为表示平面内所有向量的一个基底,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线.而 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2$,由$\boldsymbol{a}\neq k\boldsymbol{b}$,得 $\lambda\neq 4$.

3. 如图,在$\triangle ABC$ 中,点 D,E,F 是边 AB 的四等分点.设$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{e}_1$,$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{e}_2$,试以$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$为基底表示$\overrightarrow{CF}$.



解:$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$.

因为点 D,E,F 是边 AB 的四等分点,

所以$\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)$,所以$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{e}_2+\frac{3}{4}(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)=\frac{3}{4}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{4}\boldsymbol{e}_2$.

【类题通法】

用基底表示向量的三个依据和两个"模型"

(1)依据:①向量加法的三角形法则和平行四边形法则;②向量减法的几何意义;③数乘向量的几何意义.

(2)模型 1

条件	多个向量首尾相接,并且最后一个向量的终点与第一个向量的起点重合
结论	这些向量的和为零向量,其中任意一个向量可用其他向量表示

(3)模型 2

条件	在$\triangle ABC$ 中,D 为边 BC 的中点
结论	$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

任务三 平面向量基本定理的应用

[探究活动]

已知向量 $\boldsymbol{a}$ 在基底$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$下可以表示为 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$,请根据平面向量基本定理,探究下列问题.

探究 1:若 $\boldsymbol{a}$ 在基底$\{\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2\}$下可表示为 $\boldsymbol{a}=\lambda(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)+\mu(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)$,试求 λ,μ 的值.

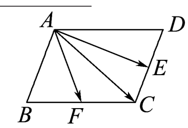
提示:由条件可知$\begin{cases}\lambda+\mu=2,\\\lambda-\mu=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=\frac{5}{2},\\\mu=-\frac{1}{2}.\end{cases}$

探究 2:若存在实数 μ_1,μ_2,使向量 $\boldsymbol{a}=\mu_1\boldsymbol{e}_1+\mu_2\boldsymbol{e}_2$,试求 μ_1,μ_2 的值.

提示:由题意 $2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2=\mu_1\boldsymbol{e}_1+\mu_2\boldsymbol{e}_2$,即$(2-\mu_1)\cdot\boldsymbol{e}_1=(\mu_2-3)\boldsymbol{e}_2$.由于 $\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$ 不共线,故 $\mu_1=2$,$\mu_2=3$.

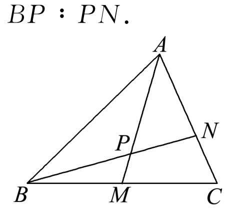
[评价活动]

1. 如图,在平行四边形 $ABCD$ 中,E 和 F 分别是边 CD 和 BC 的中点.若$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AE}+\mu\overrightarrow{AF}$,其中 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$,则 $\lambda+\mu=$________.



$\frac{4}{3}$ **解析**:设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.又因为$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,所以$\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})$,即 $\lambda=\mu=\frac{2}{3}$,所以 $\lambda+\mu=\frac{4}{3}$.

2. 如图,在$\triangle ABC$ 中,点 M 是边 BC 的中点,点 N 在边 AC 上,且 $AN=2NC$,AM 与 BN 相交于点 P,求 $AP:PM$ 与 $BP:PN$.



解:设$\overrightarrow{BM}=\boldsymbol{e}_1$,$\overrightarrow{CN}=\boldsymbol{e}_2$,

则$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=-3\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1$,

$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$.

因为 A,P,M 和 B,P,N 分别共线,

所以存在实数 λ,μ 使得$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AM}=-\lambda\boldsymbol{e}_1-3\lambda\boldsymbol{e}_2$,

$\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{BN}=2\mu\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2$.

故$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{AP}=(\lambda+2\mu)\boldsymbol{e}_1+(3\lambda+\mu)\boldsymbol{e}_2$.

而$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$,

由平面向量基本定理,

得$\begin{cases}\lambda+2\mu=2,\\3\lambda+\mu=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=\frac{4}{5},\\\mu=\frac{3}{5}.\end{cases}$

所以$\overrightarrow{AP}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AM}$,$\overrightarrow{BP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BN}$,

所以 $AP:PM=4:1$,$BP:PN=3:2$.

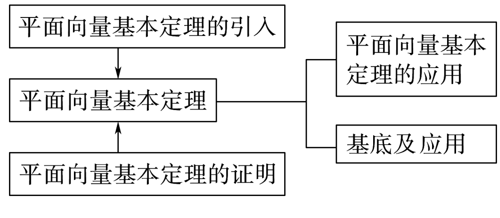
【类题通法】

1. 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是同一平面内的两个不共线向量，若 $x_1\boldsymbol{a}+y_1\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{a}+y_2\boldsymbol{b}$，则 $\begin{cases}x_1=x_2,\\y_1=y_2.\end{cases}$

2. 重要结论：设 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 是表示平面内所有向量的一个基底.

当 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}$ 时	恒有 $\lambda_1=\lambda_2=0$
若 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$	当 $\lambda_2=0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 共线
	当 $\lambda_1=0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 共线
	当 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 时，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1. 给出下列三种说法：

①一个平面内只有一组不共线的向量可作为表示该平面内所有向量的基底；②一个平面内有无数组不共线向量可作为表示该平面内所有向量的基底；③零向量不可作为基底中的向量.

其中，正确的说法有（　　）

A.①②　　B.②③　　C.①③　　D.①②③

B　**解析**：只要两个平面向量不共线就可以作为基底，所以①错误，②③正确.

2.（多选题）如果 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 是平面 α 内表示所有向量的一个基底，那么下列命题错误的是（　　）

A.已知实数 λ_1，λ_2，则向量 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 不一定在平面 α 内

B.对平面 α 内任一向量 $\boldsymbol{a}$，使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 的实数 λ_1，λ_2 可以不唯一

C.若有实数 λ_1，λ_2 使 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1=\lambda_2\boldsymbol{e}_2$，则 $\lambda_1=\lambda_2=0$

D.对平面 α 内任一向量 $\boldsymbol{a}$，使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 的实数 λ_1，λ_2 不一定存在

ABD　**解析**：选项 A 中，由平面向量基本定理知 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 共面，所以 A 项不正确；选项 B 中，实数 λ_1，λ_2 有且仅有一对，所以 B 项不正确；很明显 C 项正确；选项 D 中，实数 λ_1，λ_2 一定存在，所以 D 项不正确.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，若点 D 满足 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，以 $\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 作为基底，则 $\overrightarrow{AD}=$（　　）

A.$\frac{2}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$　　B.$\frac{5}{3}\boldsymbol{c}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$

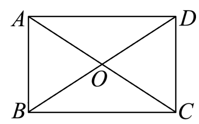
C.$\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$　　D.$\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$

A　**解析**：因为 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，

所以 $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})$，

所以 $\overrightarrow{AD}-\boldsymbol{c}=2(\boldsymbol{b}-\overrightarrow{AD})$，所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$.

4. 如图所示，在矩形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{BC}=5\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{DC}=3\boldsymbol{e}_2$，则 $\overrightarrow{OC}$ 等于（　　）

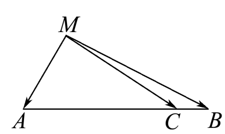


A.$\frac{1}{2}(5\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)$　　B.$\frac{1}{2}(5\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2)$

C.$\frac{1}{2}(3\boldsymbol{e}_2-5\boldsymbol{e}_1)$　　D.$\frac{1}{2}(5\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_1)$

A　**解析**：$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC})=\frac{1}{2}(5\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)$.

5. 如图，在 $\triangle MAB$ 中，C 是边 AB 上的一点，且 $AC=5CB$. 设 $\overrightarrow{MA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{MB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{MC}=$________.（用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示）

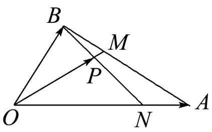


$\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{5}{6}\boldsymbol{b}$　**解析**：$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MA}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MA}+\frac{5}{6}(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA})=\frac{1}{6}\overrightarrow{MA}+\frac{5}{6}\overrightarrow{MB}=\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{5}{6}\boldsymbol{b}$.

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，且 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{d}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，试判断 $\{\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\}$ 能否作为基底.

解：设存在实数 λ，使 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{d}$，则 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\lambda(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，即 $(2-3\lambda)\boldsymbol{a}+(2\lambda-1)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 由于向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，所以 $2-3\lambda=2\lambda-1=0$，这样的 λ 是不存在的，从而 $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 不共线，故 $\{\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\}$ 能作为基底.

7. 如图所示,在$\triangle OAB$中,$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$M$是边$AB$的靠近$B$的一个三等分点,$N$是边$OA$的靠近$A$的一个四等分点.若$OM$与$BN$相交于点$P$,求$\overrightarrow{OP}$.



解:$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$.

因为$\overrightarrow{OP}$与$\overrightarrow{OM}$共线,故可设$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OM}=\frac{t}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2t}{3}\boldsymbol{b}$.

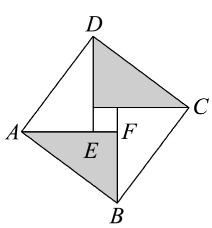
又$\overrightarrow{NP}$与$\overrightarrow{NB}$共线,可设$\overrightarrow{NP}=s\overrightarrow{NB}$,$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{ON}+s\overrightarrow{NB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{ON})=\frac{3}{4}(1-s)\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b}$,

所以$\begin{cases}\frac{3}{4}(1-s)=\frac{t}{3},\\ s=\frac{2}{3}t,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}t=\frac{9}{10},\\ s=\frac{3}{5}.\end{cases}$

所以$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{10}\boldsymbol{a}+\frac{3}{5}\boldsymbol{b}$.

综合性·创新提升

1. 我国东汉末数学家赵爽在《周髀算经》注文中利用一幅“弦图”给出了勾股定理的证明,后人称其为“赵爽弦图”,它是由四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形.如图所示,在“赵爽弦图”中,已知$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{EF}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{AE}=$ ( )



A.$\frac{12}{25}\boldsymbol{a}+\frac{9}{25}\boldsymbol{b}$　　B.$\frac{16}{25}\boldsymbol{a}+\frac{12}{25}\boldsymbol{b}$

C.$\frac{4}{5}\boldsymbol{a}+\frac{3}{5}\boldsymbol{b}$　　D.$\frac{3}{5}\boldsymbol{a}+\frac{4}{5}\boldsymbol{b}$

A　**解析**:因为$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{EF}$,

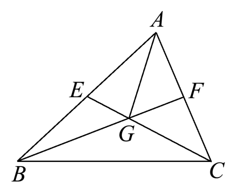
所以$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}(-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD})$,

所以$\frac{4}{3}\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$,整理,得$\overrightarrow{AE}=\frac{12}{25}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{12}{25}\boldsymbol{a}+\frac{9}{25}\boldsymbol{b}$.

故选A.

2. 如图,在$\triangle ABC$中,E为边AB的中点,F为边AC的中点,BF交CE于点G.若$\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AF}$,则$xy$等于 ( )

A.$\frac{2}{9}$　B.$\frac{1}{3}$　C.$\frac{4}{9}$　D.$\frac{4}{3}$



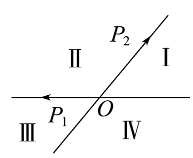
C　**解析**:由题意知,G是$\triangle ABC$的重心,延长AG与边BC交于点D(图略),所以$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

又因为E为边AB的中点,F为边AC的中点,故$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AE}$,$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AF}$,

则$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$,即$x=y=\frac{2}{3}$,

所以$xy=\frac{4}{9}$.

3. 如图,平面内的两条相交直线OP_1和OP_2将该平面分割成四个部分Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ(不包括边界).若$\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OP_1}+b\overrightarrow{OP_2}$,且点$P$落在第Ⅲ部分,则实数$a$,$b$满足 ( )



A.$a>0$,$b>0$　　B.$a>0$,$b<0$

C.$a<0$,$b>0$　　D.$a<0$,$b<0$

B　**解析**:因为$\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OP_1}+b\overrightarrow{OP_2}$,点$P$落在第Ⅲ部分,则根据实数与向量的积的定义及平行四边形法则知$a\overrightarrow{OP_1}$与$\overrightarrow{OP_1}$方向相同,$b\overrightarrow{OP_2}$与$\overrightarrow{OP_2}$方向相反,所以$a>0$,$b<0$.

4. (多选题)D,E,F分别为$\triangle ABC$的边BC,CA,AB的中点,且$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$,给出下列结论,其中正确的结论为 ( )

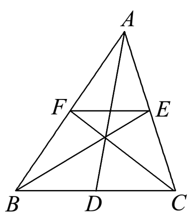
A.$\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

B.$\overrightarrow{BE}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

C.$\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

D.$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$

ABC　**解析：**如图，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，A 正确；

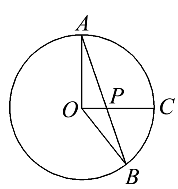


$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，B 正确；

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}(-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，C 正确；

$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，D 不正确.

5.如图，点 A，B，C 是圆 O 上三点，线段 OC 与线段 AB 交于圆内一点 P.若$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+2m\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$，则 $\lambda=$________.



$\frac{2}{3}$　**解析：**因为$\overrightarrow{OP}$与$\overrightarrow{OC}$共线，所以存在实数 μ，使$\overrightarrow{OP}=\mu\overrightarrow{OC}=m\mu\overrightarrow{OA}+2m\mu\overrightarrow{OB}$.

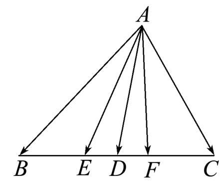
因为$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$，

所以$\overrightarrow{AP}=m\mu\overrightarrow{OA}+2m\mu\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(m\mu-1)\overrightarrow{OA}+2m\mu\overrightarrow{OB}=\lambda\overrightarrow{AB}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=-\lambda\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$.

因为$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$不共线，所以$\begin{cases}m\mu-1=-\lambda,\\2m\mu=\lambda,\end{cases}$解得 $\lambda=\frac{2}{3}$.

6.在$\triangle ABC$ 中，D 为边 BC 的中点，E，F 为边 BC 的三等分点.若$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}$.

解：如图，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，所以$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.



$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$；

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$；

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$.

7.设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是不共线的非零向量，且 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$.

(1)证明：$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$可以作为一个基底；

(2)以$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$为基底，求向量 $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ 的分解式；

(3)若 $4\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，求 λ，μ 的值.

(1)**证明：**若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，则存在 $\lambda\in\mathbf{R}$，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)$.

由 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线，得$\begin{cases}\lambda=1,\\3\lambda=-2,\end{cases}$所以 λ 不存在.

故 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$可以作为一个基底.

(2)**解：**设 $\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}(m,n\in\mathbf{R})$，

则 $3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2=m(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)+n(\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)=(m+n)\cdot\boldsymbol{e}_1+(-2m+3n)\boldsymbol{e}_2$.

因为 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，

所以$\begin{cases}m+n=3,\\-2m+3n=-1,\end{cases}$所以$\begin{cases}m=2,\\n=1.\end{cases}$

所以 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

(3)**解：**由 $4\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，

得 $4\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)+\mu(\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)=(\lambda+\mu)\cdot\boldsymbol{e}_1+(-2\lambda+3\mu)\boldsymbol{e}_2$.

所以$\begin{cases}\lambda+\mu=4,\\-2\lambda+3\mu=-3,\end{cases}$所以$\begin{cases}\lambda=3,\\\mu=1.\end{cases}$

故所求 λ，μ 的值分别为 3 和 1.

6.3.2 平面向量的正交分解及坐标表示
6.3.3 平面向量加、减运算的坐标表示

学习任务目标

1.了解平面向量的正交分解,掌握向量的坐标表示.

2.会用坐标表示平面向量的加、减运算.

问题式预习

知识点一 平面向量的正交分解及坐标表示

(1)平面向量的正交分解

把一个向量分解为两个互相垂直的向量,叫做把向量作正交分解.

(2)平面向量的坐标表示

①向量的直角坐标

在平面直角坐标系中,设与 x 轴、y 轴方向相同的两个单位向量分别为 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,取$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$作为基底.对于平面内的任意一个向量 $\boldsymbol{a}$,由平面向量基本定理可知,有且只有一对实数 x,y,使得 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$.这样,平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$ 都可由 x,y 唯一确定,我们把有序数对(x,y)叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

②向量的坐标表示

在向量 $\boldsymbol{a}$ 的直角坐标中,x 叫做 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的坐标,y 叫做 $\boldsymbol{a}$ 在 y 轴上的坐标,$\boldsymbol{a}=(x,y)$叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示.

③在向量的直角坐标中,$\boldsymbol{i}=(1,0)$,$\boldsymbol{j}=(0,1)$,$\boldsymbol{0}=(0,0)$.

[微训练]

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)两个向量的终点不同,则这两个向量的坐标一定不同. (×)

(2)当向量的起点在坐标原点时,向量的坐标就是向量终点的坐标. (√)

(3)两向量差的坐标与两向量的顺序无关. (×)

(4)点的坐标与向量的坐标相同. (×)

2.如果用 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$ 分别表示与 x 轴、y 轴方向相同的单位向量,且 $A(2,3)$,$B(4,2)$,则$\overrightarrow{AB}$可以表示为 ( )

A.$2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$　　B.$4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$

C.$2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$　　D.$-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$

C **解析**:记 O 为坐标原点,则$\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{OB}=4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$,所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$.

知识点二 平面向量的坐标运算

(1)设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,

运算	数学公式	文字语言表述
向量加法	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$	两个向量和的坐标分别等于这两个向量相应坐标的和
向量减法	$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$	两个向量差的坐标分别等于这两个向量相应坐标的差

(2)已知点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,那么向量$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$,即任意一个向量的坐标等于表示此向量的有向线段的终点的坐标减去起点的坐标.

[微训练]

1.已知 $\boldsymbol{a}=(3,5)$,$\boldsymbol{b}=(-3,2)$,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$ ( )

A.$(8,-1)$　　B.$(0,7)$

C.$(7,0)$　　D.$(-1,8)$

B **解析**:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,5)+(-3,2)=(3-3,5+2)=(0,7)$.

2.已知点 $A(1,-2)$,$B(4,0)$,则向量$\overrightarrow{AB}=$________.

$(3,2)$ **解析**:$\overrightarrow{AB}=(4-1,0+2)=(3,2)$.

任务型课堂

任务一 平面向量的坐标表示

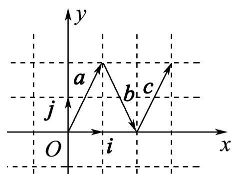
1.四边形 $ABCD$ 为平行四边形,已知$A(5,-1)$,$B(-1,7)$,$C(1,2)$,则顶点 D 的坐标为 ( )

A.$(-7,0)$　　B.$(7,6)$

C.$(6,7)$　　D.$(7,-6)$

D **解析**:设 $D(x,y)$,因为$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,所以$(x-5,y+1)=(2,-5)$,所以 $x=7$,$y=-6$.

2. 在如图所示的网格中，每个小正方形的边长为 1，向量 $\boldsymbol{a}$=<u>(1,2)</u>，$\boldsymbol{b}$=<u>(1,−2)</u>，$\boldsymbol{c}$=<u>(1,2)</u>.（用坐标表示）



3. 设 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 分别为 x 轴、y 轴正方向的单位向量，已知 O 为原点，$\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OB}=4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$，则 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为________.

(2,2)　**解析**：由已知得 $\overrightarrow{OA}=(2,0)$，$\overrightarrow{OB}=(4,2)$，所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,2)$.

【类题通法】

求向量坐标的方法

(1)定义法：根据平面向量坐标的定义得 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=(x,y)$，其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 分别为与 x 轴、y 轴方向相同的两个单位向量.

(2)平移法：把向量的起点移至原点，终点坐标即为向量的坐标.

(3)作差法：先求出这个向量的起点、终点坐标，再运用终点坐标减去起点坐标即得该向量的坐标.

任务二　平面向量加法、减法运算的坐标表示

[探究活动]

根据平面向量的坐标表示，探究下列问题.

探究 1：平面向量的加、减运算结果仍然是向量，坐标表示下，运算的结果是什么？

提示：向量的坐标.

探究 2：根据向量的坐标的定义知 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}$，如何得到 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 的坐标？

提示：$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=(x_2,y_2)+(x_1,y_1)=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}=(x_2+x_1)\boldsymbol{i}+(y_2+y_1)\boldsymbol{j}=(x_2+x_1,y_2+y_1)$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(x_2,y_2)-(x_1,y_1)=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$.

[评价活动]

1. 已知点 $B(1,0)$ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点，向量 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均以原点 O 为起点，且 $\boldsymbol{b}=(-3,4)$，$\boldsymbol{c}=(-1,1)$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的关系为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点坐标为________.

(3,−3)　**解析**：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=(-3,4)-(-1,1)=(-2,3)$.

设 $\boldsymbol{a}$ 的起点为 $A(x,y)$，则 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=(1-x,-y)$，

所以 $\begin{cases}1-x=-2,\\-y=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\y=-3,\end{cases}$ 故起点 A 的坐标为 $(3,-3)$.

2. 已知 $A(1,-2)$，$B(2,1)$，$C(3,2)$ 和 $D(-2,3)$，试用坐标来表示 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}$.

解：因为 $\overrightarrow{AD}=(-3,5)$，$\overrightarrow{BD}=(-4,2)$，$\overrightarrow{CD}=(-5,1)$，

所以 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=(-3,5)+(-4,2)+(-5,1)=(-12,8)$.

【类题通法】

向量坐标运算的方法

(1)若已知向量的坐标，则直接应用两个向量和、差运算法则进行运算.

(2)若已知有向线段两端点的坐标，则可先求出向量的坐标，然后再进行向量的坐标运算.

任务三　平面向量坐标运算的应用

1. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(x,1)$，$\boldsymbol{b}=(-x,x^2)$，则向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　（　　）

A. 平行于 x 轴

B. 平行于第一、三象限的角平分线

C. 平行于 y 轴

D. 平行于第二、四象限的角平分线

C　**解析**：因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(0,1+x^2)$，

所以向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 平行于 y 轴.

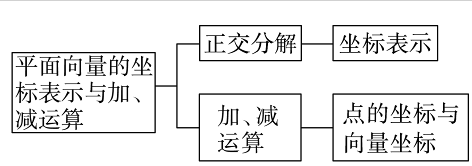
2. 已知 $A(-1,-2)$，$B(2,3)$，$C(-2,0)$，$D(x,y)$，且 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$，求 $x+y$ 的值.

解：因为 $\overrightarrow{AC}=(-2,0)-(-1,-2)=(-1,2)$，$\overrightarrow{BD}=(x,y)-(2,3)=(x-2,y-3)$，且 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$，

所以 $(-1,2)=(x-2,y-3)$.

所以 $\begin{cases}x-2=-1,\\y-3=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=5.\end{cases}$ 所以 $x+y=6$.

提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

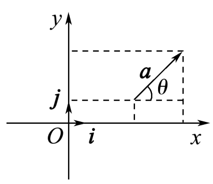
1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,4)$,$\boldsymbol{b}=(1,-2)$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的关系是 ( )

A.不共线　　B.相等

C.方向相同　　D.方向相反

D　**解析**:因为 $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反.故选 D.

2. 如图,在平面直角坐标系中,分别取与 x 轴、y 轴方向相同的两个单位向量 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,以$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$作为基底.对于平面内的一个向量 $\boldsymbol{a}$,若$|\boldsymbol{a}|=2$,$\theta=45°$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为________.

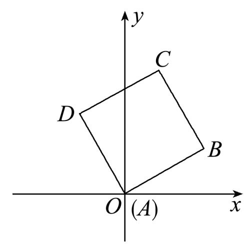


$(\sqrt{2},\sqrt{2})$　**解析**:由题意知 $\boldsymbol{a}=2\cos 45°\boldsymbol{i}+2\sin 45°\boldsymbol{j}=\sqrt{2}\boldsymbol{i}+\sqrt{2}\boldsymbol{j}=(\sqrt{2},\sqrt{2})$.

3. 已知平行四边形 $OABC$,其中 O 为坐标原点.若 $A(2,1)$,$B(1,3)$,则点 C 的坐标为________.

$(-1,2)$　**解析**:设点 C 的坐标为(x,y),则由已知得 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}=(-1,2)$,所以点 C 的坐标为$(-1,2)$.

4. 如图,已知在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中,AB 与 x 轴正半轴成 $30°$角.求点 B,D,向量$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$的坐标.



解:设点 B 的坐标为(x,y),

则 $x=\cos 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$y=\sin 30°=\dfrac{1}{2}$.

所以点 B 的坐标为$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

因为四边形 $ABCD$ 是正方形,

所以$\angle BAD=90°$,所以$\angle xOD=120°$.

设点 D 的坐标为(x',y'),

则 $x'=\cos 120°=-\dfrac{1}{2}$,$y'=\sin 120°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

所以点 D 的坐标为$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{AD}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

综合性·创新提升

1. 若$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$为单位正交基底,设 $\overrightarrow{OA}=(x^2+x+1)\boldsymbol{i}-(x^2-x+1)\boldsymbol{j}$(其中 $x\in\mathbf{R}$,O 为坐标原点),则点 A 位于 ( )

A.第一或第二象限　B.第二或第三象限

C.第三象限　　D.第四象限

D　**解析**:因为 $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$,

$-(x^2-x+1)=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}<0$,

所以点 A 位于第四象限.

2. 已知点 $A(0,1)$,$B(3,2)$,向量$\overrightarrow{AC}=(-4,-3)$,则向量$\overrightarrow{BC}=$ ( )

A.$(-7,-4)$　　B.$(7,4)$

C.$(-1,4)$　　D.$(1,4)$

A　**解析**:方法一:设 $C(x,y)$,则$\overrightarrow{AC}=(x,y-1)=(-4,-3)$,所以$\begin{cases}x=-4,\\y=-2,\end{cases}$从而$\overrightarrow{BC}=(-4,-2)-(3,2)=(-7,-4)$.故选 A.

方法二:$\overrightarrow{AB}=(3,2)-(0,1)=(3,1)$,

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-4,-3)-(3,1)=(-7,-4)$.

3. 设 $\boldsymbol{a}=(4,-3)$,$\boldsymbol{b}=(x,5)$,$\boldsymbol{c}=(-1,y)$.若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,则 $x=$________,$y=$________.

-5　2　**解析**:由题意有$(4,-3)+(x,5)=(x+4,2)=(-1,y)$,

所以 $x+4=-1$,且 $2=y$,即 $x=-5$,$y=2$.

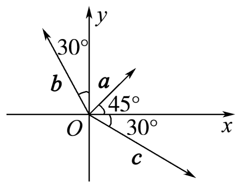
4. 若 A,B,C 三点的坐标分别为$(2,-4)$,$(0,6)$,$(-8,10)$,则$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=$________,$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=$________.

$(-10,14)$　$(2,-10)$　**解析**:因为$\overrightarrow{AB}=(-2,10)$,$\overrightarrow{BC}=(-8,4)$,$\overrightarrow{AC}=(-10,14)$,

所以$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(-2,10)+(-8,4)=(-10,14)$,

$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=(-8,4)-(-10,14)=(2,-10)$.

5. 在平面直角坐标系 xOy 中，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的方向如图所示，且 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$|\boldsymbol{c}|=4$，求向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的坐标.



解：设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$，$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2)$，

则 $a_1=|\boldsymbol{a}|\cos 45°=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，

$a_2=|\boldsymbol{a}|\sin 45°=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，

$b_1=|\boldsymbol{b}|\cos 120°=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$，

$b_2=|\boldsymbol{b}|\sin 120°=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

$c_1=|\boldsymbol{c}|\cos(-30°)=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，

$c_2=|\boldsymbol{c}|\sin(-30°)=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$.

因此 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\boldsymbol{b}=\left(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，$\boldsymbol{c}=(2\sqrt{3},-2)$.

6.3.4　平面向量数乘运算的坐标表示

学习任务目标

1. 会用坐标表示数乘向量.
2. 能根据平面向量的坐标，判断两个向量是否共线.
3. 掌握三点共线的判断方法.

问题式预习

知识点一　向量数乘运算的坐标表示

实数与向量的积的坐标等于用这个实数乘原来向量的相应坐标，即 $\lambda\boldsymbol{a}=$ <u>$(\lambda x,\lambda y)$</u>，其中 $\boldsymbol{a}=(x,y)$.

［微训练］

已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2)$. 若 $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=(9,-8)(m,n\in\mathbf{R})$，则 $m-n$ 的值为________.

-3　**解析**：由题意得 $2m+n=9$，$m-2n=-8$，解得 $m=2$，$n=5$. 所以 $m-n=-3$.

知识点二　两个向量共线的坐标表示

(1)设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，其中 $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是存在实数 λ，使 <u>$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$</u>.

(2)如果用坐标表示，可写为 $(x_1,y_1)=\lambda(x_2,y_2)$，消去 λ，得向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0})$ 共线的充要条件是 <u>$x_1y_2-x_2y_1=0$</u>.

(3)中点坐标公式

若点 P_1,P_2 的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，线段 P_1P_2 的中点 P 的坐标为 (x,y)，则 $\begin{cases}x=\frac{x_1+x_2}{2},\\ y=\frac{y_1+y_2}{2}.\end{cases}$ 此公式为线段 P_1P_2 的中点坐标公式.

［微训练］

1. 判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)若向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$.　(×)

(2)若向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，且 $x_1y_1-x_2y_2=0$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.　(×)

(3)若向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，且 $x_1y_2-x_2y_1=0$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.　(√)

2. 已知 $P(2,6)$，$Q(-4,0)$，则线段 PQ 的中点坐标为 <u>$(-1,3)$</u>.

任务型课堂

任务一　数乘向量的坐标表示

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(4,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,3)$，则 $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=$ (　　)

A. $(2,-13)$　　B. $(2,-5)$

C. $(13,2)$　　D. $(2,13)$

D　**解析**：$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=2(4,2)+3(-2,3)=(8,4)+(-6,9)=(2,13)$.

2. 已知向量 $\overrightarrow{AB}=(2,4)$，$\overrightarrow{AC}=(0,2)$，则 $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=$ (　　)

A. $(-2,-2)$　　B. $(2,2)$

C. $(1,1)$　　D. $(-1,-1)$

D　**解析**：$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(-2,-2)=(-1,-1)$.

3. 已知 $A(-2,4)$，$B(3,-1)$，$C(-3,-4)$，$\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{CB}$，则点 M 的坐标为________，$\overrightarrow{MN}$ 的坐标为________.

$(0,20)$　$(9,-18)$　**解析**：设点 M 的坐标为 (x,y)，所以 $\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CA}=3(1,8)=(3,24)=(x+3,y+4)$，所以 $\begin{cases}x+3=3,\\y+4=24,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=20.\end{cases}$ 所以点 M 的坐标为 $(0,20)$.

因为 $\overrightarrow{CN}=2(6,3)=(12,6)$，所以 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{CM}=(12,6)-(3,24)=(9,-18)$.

【类题通法】

用坐标进行平面向量的线性运算的方法

(1)若已知向量的坐标，则直接应用两个向量和、差及向量数乘运算的法则进行.

(2)若已知有向线段两端点的坐标，则可先求出向量的坐标，然后再进行向量的坐标运算.

(3)向量在坐标形式下的线性运算可完全类比数的运算进行.

任务二 向量共线的证明与判定

1. 下列各组向量中，能作为表示平面内所有向量的基底的是　(　　)

A. $\boldsymbol{e}_1=(0,0)$，$\boldsymbol{e}_2=(1,-2)$

B. $\boldsymbol{e}_1=(-1,2)$，$\boldsymbol{e}_2=(5,7)$

C. $\boldsymbol{e}_1=(3,5)$，$\boldsymbol{e}_2=(6,10)$

D. $\boldsymbol{e}_1=(2,-3)$，$\boldsymbol{e}_2=\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$

B　**解析**：A 选项，因为 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{e}_1\parallel\boldsymbol{e}_2$，所以不可以作为基底；B 选项，因为 $-1\times7-2\times5=-17\neq0$，所以 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，故可以作为基底；C 选项，$3\times10-5\times6=0$，$\boldsymbol{e}_1\parallel\boldsymbol{e}_2$，故不可以作为基底；D 选项，$2\times\left(-\frac{3}{4}\right)-(-3)\times\frac{1}{2}=0$，所以 $\boldsymbol{e}_1\parallel\boldsymbol{e}_2$，不可以作为基底.

2. 已知两点 $A(2,-1)$，$B(3,1)$，与 $\overrightarrow{AB}$ 平行且方向相反的向量 $\boldsymbol{a}=$　(　　)

A. $(1,-2)$　　B. $(9,3)$

C. $(-1,2)$　　D. $(-4,-8)$

D　**解析**：$\overrightarrow{AB}=(1,2)$，与 $\overrightarrow{AB}$ 平行且方向相反的向量 $\boldsymbol{a}=k\overrightarrow{AB}(k<0)$. D 选项中，$\boldsymbol{a}=-4\overrightarrow{AB}$.

【类题通法】

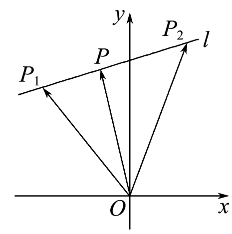
判断向量共线时，应充分利用向量共线定理或向量共线的坐标表示，在利用向量共线的坐标表示进行判断时，要注意坐标之间的搭配.

任务三 利用向量共线求参数

[探究活动]

根据向量共线的坐标表示，可得到中点坐标公式，请据此探究下列问题.

探究 1：如图，线段 P_1P_2 的端点 P_1，P_2 的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，点 P 是直线 P_1P_2 上的一点. 当 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$ 时，点 P 的坐标是什么？



提示：$P\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$.

探究 2：在 $\triangle ABC$ 中，已知 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$. 若 $\triangle ABC$ 的重心为 G，试求重心 G 的坐标.

提示：$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

[评价活动]

已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(x,1)$，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

(1)若 $\boldsymbol{u}=3\boldsymbol{v}$，求 x；

(2)若 $\boldsymbol{u}\parallel\boldsymbol{v}$，求 x，并判断 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 是同向的还是反向的.

解：因为 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(x,1)$，

所以 $\boldsymbol{u}=(1,1)+2(x,1)=(2x+1,3)$，$\boldsymbol{v}=2(1,1)-(x,1)=(2-x,1)$.

(1) $\boldsymbol{u}=3\boldsymbol{v}\Leftrightarrow(2x+1,3)=3(2-x,1)\Leftrightarrow(2x+1,3)=(6-3x,3)\Leftrightarrow2x+1=6-3x$，

解得 $x=1$.

(2) $\boldsymbol{u}\parallel\boldsymbol{v}\Leftrightarrow(2x+1)\times1-3(2-x)=0$，解得 $x=1$.

所以 $\boldsymbol{u}=(3,3)$，$\boldsymbol{v}=(1,1)$.

所以 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 同向.

【类题通法】

由向量共线求参数问题的两种思路

(1)利用向量共线定理 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$，列方程组求解.

(2)利用向量共线的坐标表达式 $x_1y_2-x_2y_1=0$ 求解.

任务四 三点共线问题

1. 若点 $A(-2,0)$，$B(3,4)$，$C(2,a)$ 共线，则 $a=$________.

$\frac{16}{5}$　**解析**：$\overrightarrow{AB}=(5,4)$，$\overrightarrow{AC}=(4,a)$. 因为 A，B，C 三点共线，所以 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{AC}$. 故 $5a-16=0$，所以 $a=\frac{16}{5}$.

2. 已知 $\overrightarrow{OA}=(k,2)$，$\overrightarrow{OB}=(1,2k)$，$\overrightarrow{OC}=(1-k,-1)$，且相异三点 A，B，C 共线，则实数 $k=$________.

$-\frac{1}{4}$　**解析**：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1-k,2k-2)$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(1-2k,-3)$.

由题意 A，B，C 三点共线可知 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{AC}$，

所以$(-3)\times(1-k)-(2k-2)\cdot(1-2k)=0$，

解得 $k=-\frac{1}{4}$（$k=1$ 不符合题意舍去）.

3. 已知 $A(1,-3)$，$B\left(8,\frac{1}{2}\right)$，$C(9,1)$，求证：$A$，$B$，$C$ 三点共线.

证明：$\overrightarrow{AB}=\left(8-1,\frac{1}{2}+3\right)=\left(7,\frac{7}{2}\right)$，

$\overrightarrow{AC}=(9-1,1+3)=(8,4)$.

因为 $7\times4-\frac{7}{2}\times8=0$，

所以$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{AC}$，且$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$有公共点 A，

所以 A，B，C 三点共线.

【类题通法】

三点共线的证明步骤

利用向量平行证明三点共线需分两步完成：

(1)证明两向量平行；

(2)证明两向量有公共点.

提质归纳

- 数乘向量的坐标表示
  - 数乘向量的坐标运算
  - 向量共线的充要条件
    - 证明向量共线、三点共线
    - 由向量共线求参数
  - 中点坐标公式

课后素养评价

基础性·能力运用

1.（多选题）下列四组向量中，能构成表示它们所在平面内所有向量的基底的是（　　）

A. $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,-4)$

B. $\boldsymbol{a}=(3,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,3)$

C. $\boldsymbol{a}=(2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(-2,1)$

D. $\boldsymbol{a}=(3,5)$，$\boldsymbol{b}=(6,10)$

AB　**解析：**C，D 中，$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，故不能作为基底.

2. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(m,-4)$，$\boldsymbol{b}=(-1,m+3)$，若存在实数 $\lambda<0$，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，则实数 m 的值为（　　）

A. 1　　B. $-\frac{12}{5}$

C. -1　　D. -4

A　**解析：**因为平面向量 $\boldsymbol{a}=(m,-4)$，$\boldsymbol{b}=(-1,m+3)$，

存在实数 $\lambda<0$，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，

所以$(m,-4)=(-\lambda,\lambda(m+3))$，

所以$\begin{cases}m=-\lambda,\\-4=\lambda(m+3),\end{cases}$

解得 $\lambda=4$（舍）或 $\lambda=-1$，

所以实数 $m=1$.

3.（多选题）若向量 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},1)$，$\boldsymbol{b}=(0,-2)$，则与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 共线的向量可以是（　　）

A. $(\sqrt{2},-\sqrt{6})$　　B. $(-1,-\sqrt{3})$

C. $(-\sqrt{3},-1)$　　D. $(-1,\sqrt{3})$

AD　**解析：**因为 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},-3)$，

所以$\sqrt{3}\times\sqrt{3}-(-1)\times(-3)=0$. 所以$(-1,\sqrt{3})$与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 是共线向量.

同理$\sqrt{3}\times(-\sqrt{6})-(-3)\times\sqrt{2}=0$. 所以$(\sqrt{2},-\sqrt{6})$与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 是共线向量. 故选 AD.

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(m,4)$，且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，那么 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 等于（　　）

A. $(4,0)$　　B. $(0,4)$

C. $(3,-6)$　　D. $(-3,6)$

C　**解析：**因为 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，所以设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，则$\begin{cases}1=m\lambda,\\-2=4\lambda,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=-\frac{1}{2},\\m=-2,\end{cases}$

所以 $\boldsymbol{b}=(-2,4)$，所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,-2)-(-2,4)=(3,-6)$.

5. 若 $\boldsymbol{a}=(3,4)$，$\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}$，且 $\boldsymbol{b}$ 的起点为$(1,2)$，终点为$(x,3x)$，则 $\boldsymbol{b}=$________.

$\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$　**解析：**因为 $\boldsymbol{b}=(x-1,3x-2)$，且$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，

所以 $3(3x-2)-4(x-1)=0$，解得 $x=\frac{2}{5}$.

所以 $\boldsymbol{b}=\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$.

6. 若 $A(3,-6)$，$B(-5,2)$，$C(6,y)$三点共线，则 $y=$________.

-9　**解析：**$\overrightarrow{AB}=(-8,8)$，$\overrightarrow{AC}=(3,y+6)$. 因为 A，B，C 三点共线，即$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{AC}$，

所以$-8(y+6)-8\times3=0$，解得 $y=-9$.

综合性·创新提升

1. 若向量 $\boldsymbol{a}=(-1,x)$ 与 $\boldsymbol{b}=(-x,2)$ 共线且方向相同，则 x 的值为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $-\sqrt{2}$　　C. 2　　D. -2

A　**解析**：由 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 得 $-x^2+2=0$，得 $x=\pm\sqrt{2}$.

当 $x=\sqrt{2}$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同；

当 $x=-\sqrt{2}$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反. 故选 A.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,-2)$，$\boldsymbol{b}=(\sin\alpha,1)$，且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则 $2\sin\alpha\cos\alpha$ 等于（　　）

A. 3　　B. -3　　C. $-\frac{4}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

C　**解析**：因为 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，所以 $\cos\alpha\times1-(-2)\times\sin\alpha=0$，即 $\cos\alpha=-2\sin\alpha$，$\tan\alpha=-\frac{1}{2}$，

所以 $2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}$

$=\frac{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1}=-\frac{4}{5}$.

3.（多选题）已知 $A(2,1)$，$B(0,2)$，$C(-2,1)$，$O(0,0)$，则（　　）

A. 直线 OC 与直线 BA 平行

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$

C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}$

D. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}$

ACD　**解析**：因为 $\overrightarrow{OC}=(-2,1)$，$\overrightarrow{BA}=(2,-1)$，所以 $\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{BA}$. 又直线 OC，BA 不重合，所以直线 $OC\parallel BA$，A 正确. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\neq\overrightarrow{CA}$，B 错误；$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=(0,2)=\overrightarrow{OB}$，C 正确；$\overrightarrow{AC}=(-4,0)$，$\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}=(0,2)-2(2,1)=(-4,0)$，D 正确.

4. 平面上有 $A(2,1)$，$B(-1,4)$，$D(-2,3)$ 三点，点 C 在直线 AB 上，且 $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BC}$，连接 DC 并延长 DC 至点 E，使 $|\overrightarrow{CE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{CD}|$，则点 E 的坐标为（　　）

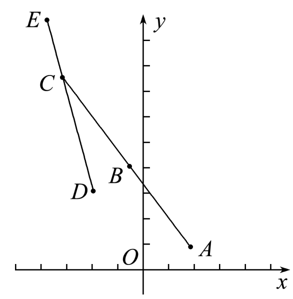
A. $(-5,9)$　　B. $(-3,9)$

C. $(-1,4)$　　D. $(-3,7)$

A　**解析**：因为 $A(2,1)$，$B(-1,4)$，$D(-2,3)$，点 C 在直线 AB 上，且 $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BC}$，

所以 B 为 AC 的中点，则 $C(-4,7)$.

连接 DC 并延长 DC 至点 E，使 $|\overrightarrow{CE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{CD}|$，即 $\overrightarrow{CE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.



设 $E(x,y)$，则 $(x+4,y-7)=-\frac{1}{2}(2,-4)$，

即 $\begin{cases}x+4=-1,\\y-7=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-5,\\y=9,\end{cases}$

所以点 E 的坐标为 $(-5,9)$.

5. 已知点 $A(4,0)$，$B(4,4)$，$C(2,6)$，$O(0,0)$，则 AC 与 OB 的交点 P 的坐标为________.

$(3,3)$　**解析**：由 O，P，B 三点共线，可设 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OB}=(4\lambda,4\lambda)$，

则 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(4\lambda-4,4\lambda)$.

又 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-2,6)$，由 $\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 共线，得 $(4\lambda-4)\times6-4\lambda\times(-2)=0$，解得 $\lambda=\frac{3}{4}$.

所以 $\overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}=(3,3)$. 所以点 P 的坐标为 $(3,3)$.

6. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(2,1)$.

(1) 当 k 为何值时，$k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 共线？

(2) 若 $\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$ 且 A，B，C 三点共线，求 m 的值.

解：(1) $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=k(1,0)-(2,1)=(k-2,-1)$，$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(1,0)+2(2,1)=(5,2)$.

因为 $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 共线，

所以 $2(k-2)-(-1)\times5=0$，即 $2k-4+5=0$，得 $k=-\frac{1}{2}$. 故当 $k=-\frac{1}{2}$ 时，$k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 共线.

(2) 因为 A，B，C 三点共线，所以 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\lambda\in\mathbf{R}$，

即 $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b})$，

所以 $\begin{cases}2=\lambda,\\3=m\lambda,\end{cases}$ 解得 $m=\frac{3}{2}$.

6.3.5　平面向量数量积的坐标表示

学习任务目标

1.理解两个向量数量积的坐标表示的推导过程,能运用数量积的坐标表示进行向量数量积的运算.

2.能根据向量的坐标计算向量的模,并推导平面内两点间的距离公式.

3.能根据向量的坐标求向量的夹角及判定两个向量垂直.

问题式预习

知识点一　向量数量积的坐标表示

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\underline{x_1x_2+y_1y_2}$,即两个向量的数量积等于<u>它们对应坐标的乘积的和</u>.

[微训练]

1.若向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$,$\boldsymbol{b}=(-1,2)$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________.

1　**解析:**$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times(-1)+1\times2=1$.

2.若向量 $\boldsymbol{a}=(x,2)$,$\boldsymbol{b}=(-1,3)$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$,则 x 等于　(　　)

A.3　　B.-3　　C.$\frac{5}{3}$　　D.$-\frac{5}{3}$

A　**解析:**$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-x+6=3$,故 $x=3$.

知识点二　用平面向量的坐标表示公式

(1)向量模的坐标表示

若 $\boldsymbol{a}=(x,y)$,则 $|\boldsymbol{a}|^2=\underline{x^2+y^2}$,或 $|\boldsymbol{a}|=\underline{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(2)两向量垂直的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是非零向量,$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\underline{x_1x_2+y_1y_2=0}$.

(3)两向量夹角的余弦公式

设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量,$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,根据向量数量积的定义及坐标表示可得 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\underline{\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}}$.

[微训练]

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.　(×)

(2)若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.　(×)

(3)若两个非零向量的夹角 θ 满足 $\cos\theta>0$,则两向量的夹角 θ 一定是锐角.　(×)

(4)若两个非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$满足 $x_1y_2-x_2y_1=0$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $0°$.　(×)

(5)若向量 $\boldsymbol{a}=(1,0)$,$\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.　(×)

2.已知 $\boldsymbol{a}=(3,-1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-2)$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为　(　　)

A.$\frac{\pi}{6}$　　B.$\frac{\pi}{4}$

C.$\frac{\pi}{3}$　　D.$\frac{\pi}{2}$

B　**解析:**设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ.因为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{10}$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=5$,所以 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{5}{\sqrt{10}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又因为 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的夹角的取值范围为 $[0,\pi]$,所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$.

任务型课堂

任务一　向量数量积的坐标表示

1.已知 $\boldsymbol{a}=(2,-1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-1)$,则 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=$　(　　)

A.10　　B.-10

C.3　　D.-3

B　**解析:**因为 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(4,-3)$,$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=(-1,2)$,所以 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=4\times(-1)+(-3)\times2=-10$.

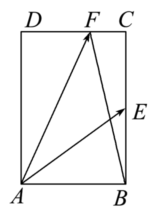
2.在平面直角坐标系 xOy 中,已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$\overrightarrow{AB}=(1,-2)$,$\overrightarrow{AD}=(2,1)$,则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=$　(　　)

A.5　　B.4

C.3　　D.2

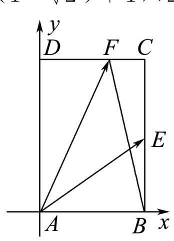
A　**解析**：由$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=(1,-2)+(2,1)=(3,-1)$，得$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times3+1\times(-1)=5$.

3.如图，在矩形$ABCD$中，$AB=\sqrt{2}$，$BC=2$，点E为边BC的中点，点F在边CD上.若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=\sqrt{2}$，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=$________.



$\sqrt{2}$　**解析**：如图，以A为坐标原点，直线AB为x轴、直线AD为y轴建立平面直角坐标系，则$B(\sqrt{2},0)$，$D(0,2)$，$C(\sqrt{2},2)$，$E(\sqrt{2},1)$.

设$F(x,2)$，因为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=\sqrt{2}x+0=\sqrt{2}x=\sqrt{2}$，所以$x=1$.所以$F(1,2)$，所以$\overrightarrow{BF}=(1-\sqrt{2},2)$，所以$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=\sqrt{2}(1-\sqrt{2})+1\times2=\sqrt{2}$.



【类题通法】

向量数量积的坐标表示的注意点

(1)注意向量数量积的坐标表示要与向量共线的坐标表示区分开，前者是“对应坐标相乘后相加”，后者是“交错相乘差为零”.

(2)注意向量数量积的定义和几何意义的应用.

(3)注意利用向量数量积的坐标表示建立方程求参数的值.

任务二　平面向量的模

1.平面向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$60°$，$\boldsymbol{a}=(2,0)$，$|\boldsymbol{b}|=1$，则$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$（　　）

A.$\sqrt{3}$　B.$2\sqrt{3}$　C.4　D.12

B　**解析**：因为$\boldsymbol{a}=(2,0)$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$60°$，

所以$|\boldsymbol{a}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times1\times\cos 60°=1$.

所以$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2}=2\sqrt{3}$.

2.已知平面向量$\boldsymbol{a}=(3,5)$，$\boldsymbol{b}=(-2,1)$.

(1)求$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$的坐标及其模的大小；

(2)若$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}$，求$|\boldsymbol{c}|$.

解：(1)$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(3,5)-2(-2,1)=(7,3)$，

$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{7^2+3^2}=\sqrt{58}$.

(2)因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times(-2)+5\times1=-1$，

所以$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=(3,5)-(-1)\times(-2,1)=(1,6)$，

所以$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{1^2+6^2}=\sqrt{37}$.

【类题通法】

求向量的模的两种基本策略

(1)字母表示下的运算.

利用$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}^2$将向量模的运算转化为向量与向量的数量积的问题.

(2)坐标表示下的运算.

若$\boldsymbol{a}=(x,y)$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2=x^2+y^2$.于是有$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

任务三　平面向量的夹角和垂直问题

1.已知$|\boldsymbol{a}|=1$，$\boldsymbol{b}=(0,2)$，且$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，则向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$夹角的大小为（　　）

A.$\frac{\pi}{6}$　　B.$\frac{\pi}{4}$

C.$\frac{\pi}{3}$　　D.$\frac{\pi}{2}$

C　**解析**：设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为θ.

因为$|\boldsymbol{a}|=1$，$\boldsymbol{b}=(0,2)$，且$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，

所以$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{1\times\sqrt{0+2^2}}=\frac{1}{2}$.

又因为$\theta\in[0,\pi]$，所以$\theta=\frac{\pi}{3}$.

所以向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$夹角的大小为$\frac{\pi}{3}$.

2.已知向量$\boldsymbol{a}=(-2,\lambda)$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(4,0)$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{a}$上的投影向量为（　　）

A.$\boldsymbol{a}$　　B.$-\boldsymbol{a}$

C.$2\boldsymbol{a}$　　D.$-2\boldsymbol{a}$

B　**解析**：因为$\boldsymbol{a}=(-2,\lambda)$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(4,0)$，

所以$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=(2,\lambda)$.因为$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，

所以$-2\times2+\lambda^2=0$，解得$\lambda=\pm2$，所以$|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{2}$，

所以向量$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{a}$上的投影向量为$\frac{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\times\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{-8}{2\sqrt{2}}\times\frac{\boldsymbol{a}}{2\sqrt{2}}=-\boldsymbol{a}$.故选B.

3.已知向量$\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,k)$，且$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为锐角，则实数k的取值范围是（　　）

A.$(-2,+\infty)$

B.$\left(-2,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

C.$(-\infty,-2)$

D.$(-2,2)$

B　**解析**：当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线时，$2k-1=0$，得$k=\frac{1}{2}$，此时$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$方向相同，夹角为$0°$.因为要使$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为

锐角，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$ 且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不同向.由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2+k>0$ 得 $k>-2$，且 $k\neq\frac{1}{2}$，即实数 k 的取值范围是 $\left(-2,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

【类题通法】

解决向量夹角问题的方法及注意事项

(1)若题目条件没有涉及向量的坐标，而给出了 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 以及 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ 等条件，则利用公式 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ 求出 $\cos\theta$.

(2)若题目条件涉及向量的坐标，利用公式 $\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$ 求出 $\cos\theta$.

(3)无论是上述哪种类型，由三角函数值 $\cos\theta$ 求角 θ 的大小时，都应注意角 θ 的取值范围是 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

▶ 提质归纳

- 平面向量数量积的坐标表示
  - 向量的模的公式
  - 两向量垂直的条件
  - 两向量夹角的余弦值

课后素养评价

基础性·能力运用

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-\sqrt{3})$，$\boldsymbol{b}=(0,-2)$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为　　(　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{5\pi}{6}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

A　**解析**：设向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\theta(\theta\in[0,\pi])$，

则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1\times0+(-\sqrt{3})\times(-2)}{\sqrt{1+3}\times\sqrt{0+4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$.故选 A.

2. (多选题)已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,x)$，$\boldsymbol{b}=(x+2,x)$.若 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $x=$　　(　　)

A. -1　　B. 2　　C. 1　　D. -2

AB　**解析**：将 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 两边平方，得到 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.根据向量的坐标运算公式得 $x^2-x-2=0$，解得 $x=-1$ 或 2.

3. 设向量 $\boldsymbol{a}=(3,-4)$，向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相反，且 $|\boldsymbol{b}|=10$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 的坐标为　　(　　)

A. $(-6,8)$　　B. $(6,8)$

C. $(-6,-8)$　　D. $(8,-6)$

A　**解析**：向量 $\boldsymbol{a}=(3,-4)$，向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相反，设 $\boldsymbol{b}=(3x,-4x)$，$x<0$，则 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{9x^2+16x^2}=-5x=10$，解得 $x=-2$，

所以向量 $\boldsymbol{b}$ 的坐标为 $(-6,8)$.

4. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，若 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为________，$\frac{x_1+y_1}{x_2+y_2}$ 的值为________.

$180°$　$-\frac{2}{3}$　**解析**：设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=-6$，所以 $\cos\theta=-1$，所以 $\theta=180°$.

即 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线且反向，所以 $\boldsymbol{a}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$，

所以 $x_1=-\frac{2}{3}x_2$，$y_1=-\frac{2}{3}y_2$，所以 $\frac{x_1+y_1}{x_2+y_2}=-\frac{2}{3}$.

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,k)$，$\boldsymbol{b}=(2,2)$，且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，那么 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________.

4　**解析**：依题意得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,k+2)$，由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，得 $3\times k-1\times(k+2)=0$，解得 $k=1$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2+2k=4$.

6. 已知 $\boldsymbol{a}=(4,3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$.

(1)求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值；

(2)若 $(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\perp(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，求实数 λ 的值.

解：(1)设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4\times(-1)+3\times2=2$，

$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$，

$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$，

所以 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{2}{5\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{25}$.

(2)因为 $\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}=(4+\lambda,3-2\lambda)$，$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(7,8)$，$(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\perp(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，所以 $(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=7(4+\lambda)+8(3-2\lambda)=0$，所以 $\lambda=\frac{52}{9}$.

综合性·创新提升

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,0)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3,1)$，则下列结论正确的是（　　）

A. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$　　B. $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$

C. $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$　　D. $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$

C　**解析**：因为向量 $\boldsymbol{a}=(2,0)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3,1)$，设 $\boldsymbol{b}=(x,y)$，则 $\begin{cases}2-x=3,\\0-y=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1,\\y=-1,\end{cases}$ 所以 $\boldsymbol{b}=(-1,-1)$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,-1)$，故 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-1\times1+(-1)\times(-1)=0$，所以 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

2.（多选题）设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，$\boldsymbol{a}=(3,4)$，$\boldsymbol{b}=(5,12)$，则（　　）

A. $|\boldsymbol{a}|=5$　　B. $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{13}$

C. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=63$　　D. $\cos\theta=\dfrac{63}{65}$

ACD　**解析**：$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{5^2+12^2}=13$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times5+4\times12=63$，

所以 $\cos\theta=\dfrac{63}{5\times13}=\dfrac{63}{65}$.

3. 已知 O 为坐标原点，向量 $\overrightarrow{OA}=(2,2)$，$\overrightarrow{OB}=(4,1)$，在 x 轴上有一点 P，使得 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ 有最小值，则点 P 的坐标是（　　）

A. $(-3,0)$　　B. $(2,0)$

C. $(3,0)$　　D. $(4,0)$

C　**解析**：设点 P 的坐标为 $(x,0)$，则 $\overrightarrow{AP}=(x-2,-2)$，$\overrightarrow{BP}=(x-4,-1)$.

所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(x-2)(x-4)+(-2)\times(-1)=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$，

故当 $x=3$ 时，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ 有最小值 1.

此时点 P 的坐标为 $(3,0)$.

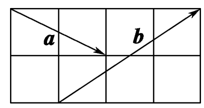
4. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,4)$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量的坐标为________.

$\left(\dfrac{11}{5},\dfrac{22}{5}\right)$　**解析**：由已知可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times1+4\times2=11$，

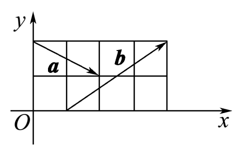
$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $|\boldsymbol{a}|\cdot\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\times\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=5\times\dfrac{11\sqrt{5}}{25}\times\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5},\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\left(\dfrac{11}{5},\dfrac{22}{5}\right)$.

5. 在 2×4 的方格纸中，起点和终点均在格点的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 如图所示，则向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角余弦值是________.



$-\dfrac{4\sqrt{65}}{65}$　**解析**：不妨设每个小正方形的边长为 1，建立如图所示的平面直角坐标系，



则 $\boldsymbol{a}=(2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(3,2)$. 所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(5,1)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-1,-3)$，

所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-5-3=-8$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{26}$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$.

所以向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角余弦值为 $\dfrac{-8}{\sqrt{26}\times\sqrt{10}}=-\dfrac{4\sqrt{65}}{65}$.

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，$\boldsymbol{b}=(1,2)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$.

(1) 求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标；

(2) 若 $\boldsymbol{c}=(2,-1)$，求 $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$.

解：(1) 因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，又 $\boldsymbol{b}=(1,2)$，

所以可设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}=(\lambda,2\lambda)(\lambda>0)$.

又因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$，所以 $1\cdot\lambda+2\cdot2\lambda=10$，解得 $\lambda=2>0$，

所以 $\boldsymbol{a}=(2,4)$.

(2) 因为 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=1\times2+2\times(-1)=0$，

所以 $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

6.4　平面向量的应用

6.4.1　平面几何中的向量方法
6.4.2　向量在物理中的应用举例

学习任务目标

1.会用向量方法解决平面几何中的相关问题.
2.会用向量方法解决物理中的力学问题.
3.会用向量方法解决物理中的速度问题.

问题式预习

知识点一　用向量解决常见平面几何问题的技巧

问题类型	知识点	公式表示
线平行、点共线等问题	向量共线定理	$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$，其中 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$
垂直问题	数量积的运算性质	$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\underline{x_1x_2+y_1y_2=0}$，其中 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为非零向量
夹角问题	数量积的定义	$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert}$（$\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角），其中 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为非零向量
长度问题	数量积的性质	$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}=\sqrt{x^2+y^2}$，其中 $\boldsymbol{a}=(x,y)$，$\boldsymbol{a}$ 为非零向量

[微训练]

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)若$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$，则直线 AB 与直线 CD 平行.（×）

(2)若$\triangle ABC$ 是直角三角形，则必有$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$.（×）

(3)$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.（√）

2.在$\triangle ABC$ 中，若$(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})\cdot(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB})=0$，则$\triangle ABC$（　　）

A.是正三角形　　B.是直角三角形

C.是等腰三角形　　D.形状无法确定

C　**解析**：$(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})\cdot(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{CA}^2-\overrightarrow{CB}^2=0$，即$\lvert\overrightarrow{CA}\rvert=\lvert\overrightarrow{CB}\rvert$，所以 $CA=CB$，则$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

知识点二　向量在物理中的应用举例

(1)向量的线性运算在物理中的应用

①用向量解决力的问题，通常把向量的起点平移到同一个作用点上.

②用向量解决涉及速度、位移等物理量的合成与分解问题时，实质就是进行向量的线性运算.

(2)向量的数量积在物理中的应用

物理上力做的功就是力在物体前进方向上的分力与物体位移的乘积，即 $W=\underline{\lvert\boldsymbol{F}\rvert\lvert\boldsymbol{s}\rvert\cos\langle\boldsymbol{F},\boldsymbol{s}\rangle}$，功是一个实数，它可正可负，也可以为零.力做的功涉及两个向量的模及这两个向量的夹角，它的实质是向量 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的数量积.

[微训练]

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)功是力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的数量积.（√）

(2)力的合成与分解体现了向量的加、减法运算.（√）

(3)某轮船需横渡长江，船速为 $\boldsymbol{v}_1$，水速为 $\boldsymbol{v}_2$，要使轮船最快到达江的另一岸，则需保持船头方向与江岸垂直.（√）

2.已知力 $\boldsymbol{F}$ 的大小$\lvert\boldsymbol{F}\rvert=10$，在 $\boldsymbol{F}$ 的作用下物体产生的位移 $\boldsymbol{s}$ 的大小$\lvert\boldsymbol{s}\rvert=14$，$\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角为 $60°$，则 $\boldsymbol{F}$ 做的功为（　　）

A.7　　B.10

C.14　　D.70

D　**解析**：$\boldsymbol{F}$ 做的功为 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=\lvert\boldsymbol{F}\rvert\lvert\boldsymbol{s}\rvert\cos 60°=10\times14\times\dfrac{1}{2}=70$.

任务型课堂

任务一 向量在物理中的应用

1. 若向量$\overrightarrow{OF_1}=(2,2)$，$\overrightarrow{OF_2}=(-2,3)$分别表示两个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，则$|\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2|$为 (　　)

A.$(0,5)$　　B.$(4,-1)$

C.$2\sqrt{2}$　　D.5

D　**解析**：因为 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=\overrightarrow{OF_1}+\overrightarrow{OF_2}=(0,5)$，所以$|\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2|=\sqrt{0^2+5^2}=5$.

2. 船在静水中的速度为 $\boldsymbol{v}_1$，水速为 $\boldsymbol{v}_2$，则船逆水行驶的速度为 (　　)

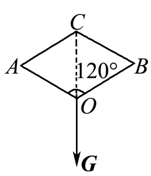
A.$\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$　　B.$\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1$

C.$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$　　D.$|\boldsymbol{v}_1|-|\boldsymbol{v}_2|$

C　**解析**：由题易知，选项 C 正确.

3. 用两条成 $120°$角的等长绳子悬挂一个灯具，已知灯具所受重力为 10 N，则每根绳子的拉力大小为________N.

10　**解析**：如图，由题意，得$\angle AOC=\angle COB=60°$，$|\overrightarrow{OC}|=10$，则$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=10$，即每根绳子的拉力大小为 10 N.



【类题通法】

用向量解决物理问题的一般步骤

(1)问题的转化，即把物理问题转化为数学问题；

(2)模型的建立，即建立以向量为载体的数学模型；

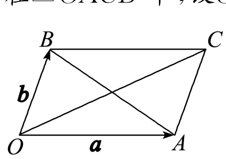
(3)参数的获得，即求出数学模型的有关解——理论参数值；

(4)问题的答案，即回到问题的初始状态，解释相关的物理现象.

任务二 利用向量证明平面几何问题

1. 试用向量方法证明平行四边形对角线的平方和等于其各边平方的和.

证明：如图所示，在▱$OACB$ 中，设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，



则$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

由于$\overrightarrow{OC}^2=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$，

$\overrightarrow{BA}^2=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$，

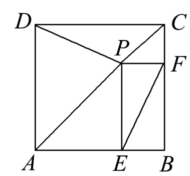
所以 $OC^2+BA^2=2|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{b}|^2$.

由于 $OA=BC=|\boldsymbol{a}|$，$OB=AC=|\boldsymbol{b}|$，

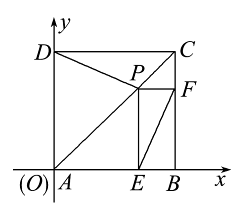
所以 $OC^2+BA^2=OA^2+BC^2+OB^2+AC^2$，

即平行四边形对角线的平方和等于其各边平方的和.

2. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，P 为对角线 AC 上任一点，$PE\perp AB$，$PF\perp BC$，垂足分别为 E，F，连接 DP，EF，求证：$DP\perp EF$.



证明：设正方形的边长为 1，建立如图所示的平面直角坐标系.



设 $P(x,x)$，则 $D(0,1)$，$E(x,0)$，$F(1,x)$，

所以$\overrightarrow{DP}=(x,x-1)$，$\overrightarrow{EF}=(1-x,x)$.

由于$\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{EF}=x(1-x)+x(x-1)=0$，

所以$\overrightarrow{DP}\perp\overrightarrow{EF}$，即 $DP\perp EF$.

【类题通法】

用向量证明平面几何问题的两种基本思路

(1)利用向量的线性运算解决平面几何问题，基本步骤为：①选取基底；②用基底表示相关向量；③利用向量的线性运算或数量积找出相应关系；④把几何问题向量化.

(2)利用向量的坐标运算解决平面几何问题，基本步骤为：①建立适当的平面直角坐标系；②把相关向量坐标化；③利用向量的坐标运算找出相应关系；④把几何问题向量化.

任务三 利用向量解决平面几何中的求值问题

[探究活动]

已知 O 是平面内的一定点，A,B,C 是平面内 $\triangle ABC$ 的顶点.试根据平面向量的相关知识，探究下列问题.

探究 1：若点 D 是边 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ 与中线 AD 存在什么关系？

提示：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ 是 $\triangle ABC$ 的中线 AD 所对应向量 $\overrightarrow{AD}$ 的 2 倍.

探究 2：若动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\lambda\in(0,+\infty)$，则点 P 所在的曲线有何特征？

提示：$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，即 $\overrightarrow{AP}=\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，又 $\lambda>0$，所以点 P 在中线 AD 所在的射线上，即点 P 所在的曲线必过 $\triangle ABC$ 的重心.

探究 3：若动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$，$\lambda\in(0,+\infty)$，则点 P 所在的曲线有何特征？

提示：由已知条件得 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$，即 $\overrightarrow{AP}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$. 而 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ 和 $\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 分别表示平行于 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 的单位向量，故 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 对应的射线平分 $\angle BAC$，即射线 AP 平分 $\angle BAC$，所以点 P 所在的曲线必过 $\triangle ABC$ 的内心.

[评价活动]

1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $A(4,1)$，$B(7,5)$，$C(-4,7)$，则边 BC 上的中线 AD 的长是 ( )

A. $2\sqrt{5}$　　B. $\frac{5\sqrt{5}}{2}$

C. $3\sqrt{5}$　　D. $\frac{7\sqrt{5}}{2}$

B　**解析**：由题可知 $A(4,1)$，$B(7,5)$，$C(-4,7)$，因为线段 BC 的中点为 $D\left(\frac{3}{2},6\right)$，所以 $\overrightarrow{AD}=\left(-\frac{5}{2},5\right)$，所以 $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2+5^2}=\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

2. 已知四边形 $ABCD$ 是边长为 6 的正方形，E 为边 AB 的中点，点 F 在边 BC 上，且 $BF:FC=2:1$，AF 与 EC 交于点 P，求四边形 $APCD$ 的面积.

解：以 A 为坐标原点，AB 为 x 轴，AD 为 y 轴建立如图所示的平面直角坐标系，则 $A(0,0)$，$B(6,0)$，$C(6,6)$，$D(0,6)$，$F(6,4)$，$E(3,0)$，$\overrightarrow{AF}=(6,4)$，$\overrightarrow{EC}=(3,6)$.

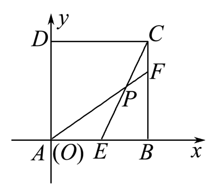
设 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{AP}=(x,y)$，$\overrightarrow{EP}=(x-3,y)$.

由点 A,P,F 和点 C,P,E 分别共线，

得 $\begin{cases}4x-6y=0,\\6(x-3)-3y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{9}{2},\\y=3.\end{cases}$

所以 $S_{四边形APCD}=S_{正方形ABCD}-S_{\triangle AEP}-S_{\triangle CEB}$

$=36-\frac{1}{2}\times3\times3-\frac{1}{2}\times3\times6=\frac{45}{2}$.



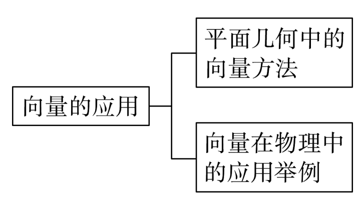
【类题通法】

用向量法解决平面几何问题的两种思想

(1)几何法：选取适当的基底(基底中的向量尽量已知模或夹角)，将题中涉及的向量用基底表示，利用向量的运算法则、运算律或性质计算.

(2)坐标法：建立平面直角坐标系，实现向量的坐标化，将几何问题中的长度、垂直、平行等问题转化为代数运算.

提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1. 已知平面内的四边形 $ABCD$ 和点 O，若 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{d}$，且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}$，则四边形 $ABCD$ 为（　　）

A.菱形　　B.梯形

C.矩形　　D.平行四边形

D　**解析**：由条件知 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$，则 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$，即 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$，所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

2. 在直角三角形 ABC 中，斜边 BC 长为 2，O 是平面 ABC 内一点，点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，则 $|\overrightarrow{AP}|$ 等于（　　）

A.2　　B.1　　C.$\frac{1}{2}$　　D.4

B　**解析**：因为 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，所以 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，即 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

所以 AP 为 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边 BC 的中线，所以 $|\overrightarrow{AP}|=1$.

3. 如果一架飞机先向东飞行 200 km，再向南飞行 300 km，设飞机飞行的路程为 s km，位移为 $\boldsymbol{a}$，则（　　）

A.$s>|\boldsymbol{a}|$　　B.$s<|\boldsymbol{a}|$

C.$s=|\boldsymbol{a}|$　　D.s 与 $|\boldsymbol{a}|$ 不能比较大小

A　**解析**：物理量中的路程是数量，位移是向量，从而 $s=500$，由位移的合成易得 $|\boldsymbol{a}|<500$，故 $s>|\boldsymbol{a}|$.

4. 一物体在力 $\boldsymbol{F}_1=(3,-4)$，$\boldsymbol{F}_2=(2,-5)$，$\boldsymbol{F}_3=(3,1)$ 的共同作用下从点 $A(1,1)$ 移动到点 $B(0,5)$.在这个过程中三个力的合力所做的功等于________.

-40　**解析**：因为 $\boldsymbol{F}_1=(3,-4)$，$\boldsymbol{F}_2=(2,-5)$，$\boldsymbol{F}_3=(3,1)$，所以合力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=(8,-8)$，$\overrightarrow{AB}=(-1,4)$，则 $\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}=-1\times8-8\times4=-40$，即三个力的合力所做的功为 -40.

综合性·创新提升

1. 在 $\triangle ABC$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})<0$，则 $\triangle ABC$ 是（　　）

A.直角三角形　　B.锐角三角形

C.钝角三角形　　D.无法确定的形状

C　**解析**：由已知，$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{AB}\cdot2\overrightarrow{AC}<0$，所以角 A 为钝角.故选 C.

2. 已知非零向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 满足 $\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 且 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}=\frac{1}{2}$，则 $\triangle ABC$ 的形状是（　　）

A.无法确定的　　B.直角三角形

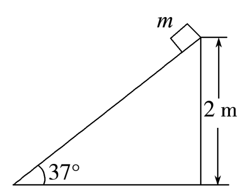
C.等腰三角形　　D.等边三角形

C　**解析**：由 $\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，得角 A 的平分线垂直于 BC，所以 $AB=AC$.

设 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CA}$ 的夹角为 θ，则 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}=\cos\theta=\frac{1}{2}$.

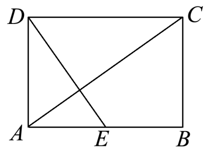
又 $\theta\in[0,\pi]$，所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$，$\angle BAC=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.故 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

3. 如图，在倾斜角为 $37°$（$\sin 37°$ 的值取 0.6），高为 2 m的斜面上，质量为 5 kg的物体 m 沿斜面下滑至底部，物体 m 受到的摩擦力是它对斜面压力的 0.5 倍，则斜面对物体 m 的支持力所做的功为________J，重力对物体 m 所做的功为________J.（g 取9.8 $\mathrm{m/s^2}$）

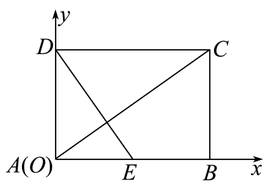


0　98　**解析**：物体 m 的位移大小为 $|\boldsymbol{s}|=\frac{2}{\sin 37°}=\frac{10}{3}$(m)，则支持力对物体 m 所做的功为 $W_1=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos 90°=0$(J)；重力对物体 m 所做的功为 $W_2=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{G}||\boldsymbol{s}|\cos 53°=5\times9.8\times\frac{10}{3}\times0.6=98$(J).

4. 如图所示,在矩形 $ABCD$ 中,$AB=4$,E 为边 AB 的中点,且 $\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{AC}$,则 $|\overrightarrow{DE}|$ 等于________.



$2\sqrt{3}$　**解析**:以 A 为坐标原点,AB 所在直线为 x 轴,AD 所在直线为 y 轴,建立如图所示的平面直角坐标系.



设 $|\overrightarrow{AD}|=a(a>0)$,则 $A(0,0)$,$C(4,a)$,$D(0,a)$,$E(2,0)$,

所以 $\overrightarrow{DE}=(2,-a)$,$\overrightarrow{AC}=(4,a)$.因为 $\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{AC}$,所以 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,

所以 $2\times4+(-a)\cdot a=0$,即 $a^2=8$.

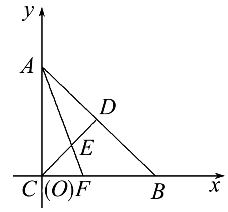
所以 $a=2\sqrt{2}$,所以 $\overrightarrow{DE}=(2,-2\sqrt{2})$,所以 $|\overrightarrow{DE}|=\sqrt{2^2+(-2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$.

5. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,设 $AC=m$,$BC=n$.

(1)若 D 为斜边 AB 的中点,求证:$CD=\frac{1}{2}AB$;

(2)若 E 为 CD 的中点,连接 AE 并延长交 BC 于点 F,求 AF 的长度(用 m,n 表示).

(1)**证明**:以 C 为坐标原点,以边 CB,CA 所在的直线分别为 x 轴、y 轴建立平面直角坐标系,如图所示,则 $A(0,m)$,$B(n,0)$.



因为 D 为斜边 AB 的中点,所以 $D\left(\frac{n}{2},\frac{m}{2}\right)$,

所以 $|\overrightarrow{CD}|=\frac{1}{2}\sqrt{n^2+m^2}$.

因为 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{m^2+n^2}$,

所以 $|\overrightarrow{CD}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$,即 $CD=\frac{1}{2}AB$.

(2)**解**:因为 E 为 CD 的中点,所以 $E\left(\frac{n}{4},\frac{m}{4}\right)$.

设 $F(x,0)$,则 $\overrightarrow{AE}=\left(\frac{n}{4},-\frac{3m}{4}\right)$,$\overrightarrow{AF}=(x,-m)$.

因为 A,E,F 三点共线,所以 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AE}$.

即 $(x,-m)=\lambda\left(\frac{n}{4},-\frac{3m}{4}\right)$,

则 $\begin{cases}x=\frac{n}{4}\lambda,\\-m=-\frac{3}{4}m\lambda,\end{cases}$

故 $\lambda=\frac{4}{3}$,$x=\frac{n}{3}$,所以 $F\left(\frac{n}{3},0\right)$,

所以 $|\overrightarrow{AF}|=\frac{1}{3}\sqrt{n^2+9m^2}$,

即 $AF=\frac{1}{3}\sqrt{n^2+9m^2}$.

6.4.3 余弦定理、正弦定理

第1课时 余弦定理

学习任务目标

1.掌握余弦定理的两种表示形式及证明余弦定理的向量方法,并会运用余弦定理解决两类基本的解三角形问题.

2.利用向量的数量积推出余弦定理及其推论,并通过实践演算掌握运用余弦定理解决两类基本的解三角形问题的方法.

问题式预习

知识点一 余弦定理

在△ABC中,角A,B,C的对边分别是a,b,c,则有

余弦定理	语言叙述	三角形中任何一边的平方,等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍
	公式表达	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$
	推论	$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

[微训练]

1.在△ABC中,符合余弦定理的是 ( )

A.$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

B.$c^2=a^2-b^2-2bc\cos A$

C.$b^2=a^2-c^2-2bc\cos A$

D.$\cos C=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2ab}$

A **解析**:由余弦定理及其推论知只有A正确.故选A.

2.在△ABC中,若$a^2-c^2+b^2=ab$,则$\cos C=$________.

$\dfrac{1}{2}$ **解析**:因为$a^2-c^2+b^2=ab$,所以$c^2=a^2+b^2-ab$.

又因为$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,所以$2\cos C=1$,

所以$\cos C=\dfrac{1}{2}$.

知识点二 解三角形

一般地,三角形的三个角A,B,C和它们的对边a,b,c叫做三角形的元素.已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做解三角形.

[微训练]

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)在△ABC的六个元素中,已知任意三个元素可求其他元素. (×)

(2)在△ABC中,已知两边及夹角时,△ABC不一定唯一. (×)

(3)当$b^2+c^2-a^2>0$时,△ABC为锐角三角形. (×)

(4)若△ABC为锐角三角形,则$b^2+c^2-a^2>0$. (√)

2.△ABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c,已知$a=\sqrt{5}$,$c=2$,$\cos A=\dfrac{2}{3}$,则$b=$ ( )

A.$\sqrt{2}$ B.$\sqrt{3}$

C.2 D.3

D **解析**:由余弦定理得$5=b^2+4-2\times b\times 2\times\dfrac{2}{3}$,解得$b=3$(负值舍去).

任务型课堂

任务一　已知两边及一角解三角形

1. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为$a,b,c,a=4,b=4,C=30°$，则$c^2=$　（　　）

A. $32-16\sqrt{3}$　　B. 16

C. $32+16\sqrt{3}$　　D. 48

A　**解析**：由余弦定理得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=4^2+4^2-2\times4\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=32-16\sqrt{3}$.

2. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为$a,b,c,C=60°,a=4b,c=\sqrt{13}$，则$b=$　（　　）

A. 1　B. 2　C. 3　D. $\sqrt{13}$

A　**解析**：由余弦定理知$(\sqrt{13})^2=a^2+b^2-2ab\cos 60°$.

因为$a=4b$，所以$13=16b^2+b^2-2\times4b\times b\times\frac{1}{2}$，

解得$b=1$（负值舍去）.故选A.

3. 在$\triangle ABC$中，$\cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$BC=1$，$AC=5$，则$AB=$　（　　）

A. $4\sqrt{2}$　B. $\sqrt{30}$　C. $\sqrt{29}$　D. $2\sqrt{5}$

A　**解析**：因为$\cos C=2\cos^2\frac{C}{2}-1=2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-1=-\frac{3}{5}$，所以$AB^2=BC^2+AC^2-2BC\cdot AC\cdot\cos C=1+25-2\times1\times5\times\left(-\frac{3}{5}\right)=32$，所以$AB=4\sqrt{2}$.

4. 在$\triangle ABC$中，已知$a=2,b=4,C=60°$，则$A=$________.

30°　**解析**：因为$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=2^2+4^2-2\times2\times4\times\cos 60°=12$，所以$c=2\sqrt{3}$.

因为$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{16+12-4}{2\times4\times2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$A=30°$.

【类题通法】

已知两边及一角解三角形的步骤

(1)用余弦定理列出关于第三边的等量关系式建立方程，运用解方程的方法求出此边长；

(2)再用余弦定理及其推论和三角形内角和定理求出其他两角.

任务二　已知三边关系解三角形

[探究活动]

根据余弦定理及其推论，探究下面问题.

探究1：在$\triangle ABC$中，已知$a=2\sqrt{6},b=6+2\sqrt{3},c=4\sqrt{3}$，求$A,B,C$.

提示：根据余弦定理，得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\frac{(6+2\sqrt{3})^2+(4\sqrt{3})^2-(2\sqrt{6})^2}{2\times(6+2\sqrt{3})\times4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为$A\in(0,\pi)$，所以$A=\frac{\pi}{6}$.

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(2\sqrt{6})^2+(6+2\sqrt{3})^2-(4\sqrt{3})^2}{2\times2\sqrt{6}\times(6+2\sqrt{3})}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为$C\in(0,\pi)$，所以$C=\frac{\pi}{4}$.

所以$B=\pi-A-C=\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}$，

所以$A=\frac{\pi}{6},B=\frac{7\pi}{12},C=\frac{\pi}{4}$.

探究2：在$\triangle ABC$中，已知$a:b:c=2:\sqrt{6}:(\sqrt{3}+1)$，求$\triangle ABC$各内角的度数.

提示：已知$a:b:c=2:\sqrt{6}:(\sqrt{3}+1)$，令$a=2k,b=\sqrt{6}k,c=(\sqrt{3}+1)k(k>0)$，由余弦定理的推论，得

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(\sqrt{6}k)^2+[(\sqrt{3}+1)k]^2-(2k)^2}{2\times\sqrt{6}k\times(\sqrt{3}+1)k}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为$0°<A<180°$，所以$A=45°$.

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{(2k)^2+[(\sqrt{3}+1)k]^2-(\sqrt{6}k)^2}{2\times2k\times(\sqrt{3}+1)k}$

$=\frac{1}{2}$.

因为$0°<B<180°$，所以$B=60°$.

所以$C=180°-A-B=180°-45°-60°=75°$.

[评价活动]

1. $\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c.若$b^2=ac,c=2a$，则$\cos C=$　（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{3}{4}$　　D. $-\frac{3}{4}$

B　**解析**：由题意，得 $b^2=ac=2a^2$，即 $b=\sqrt{2}a$，

所以 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{a^2+2a^2-4a^2}{2a\times\sqrt{2}a}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，$a=7$，$b=4\sqrt{3}$，$c=\sqrt{13}$，则 $\triangle ABC$ 的最小角为　　（　　）

A. $\dfrac{\pi}{3}$　　B. $\dfrac{\pi}{6}$　　C. $\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{12}$

B　**解析**：由三角形边角关系可知，角 C 为 $\triangle ABC$ 的最小角，则 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{7^2+(4\sqrt{3})^2-(\sqrt{13})^2}{2\times7\times4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\dfrac{\pi}{6}$. 故选 B.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=5$，$b=3$，角 C 的余弦值是方程 $5x^2+7x-6=0$ 的根，则第三边 c 的长为________.

4　**解析**：$5x^2+7x-6=0$ 可化为 $(5x-3)(x+2)=0$，

所以 $x_1=\dfrac{3}{5}$，$x_2=-2$（舍去），所以 $\cos C=\dfrac{3}{5}$.

根据余弦定理，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=5^2+3^2-2\times5\times3\times\dfrac{3}{5}=16$，所以 $c=4$，即第三边长为 4.

【类题通法】

已知三角形的三边解三角形的方法

(1) 利用余弦定理的推论求出两个角，最后利用三角形的内角和定理求出第三个角.

(2) 若已知三角形三边的比例关系，常根据比例的性质引入参数 k，从而转化为已知三边求解.

任务三　判断三角形的形状

[探究活动]

在 $\triangle ABC$ 中，已知角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c. 请借助余弦定理及其推论，探究下列问题.

探究 1：若 $c^2=a^2+b^2$，则 $C=\dfrac{\pi}{2}$ 成立吗？勾股定理与余弦定理有什么关系？

提示：成立. 因为 $c^2=a^2+b^2$，所以由勾股定理知 $C=\dfrac{\pi}{2}$. 勾股定理是余弦定理的特殊情况.

探究 2：若 $c^2>a^2+b^2$，试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

提示：由 $c^2>a^2+b^2>0$ 得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$. 从而 C 为钝角，因此 $\triangle ABC$ 一定是钝角三角形.

[评价活动]

在 $\triangle ABC$ 中，若 $(a-c\cos B)\cdot b=(b-c\cos A)\cdot a$，判断 $\triangle ABC$ 的形状.

解：因为 $(a-c\cdot\cos B)\cdot b=(b-c\cdot\cos A)\cdot a$，

由余弦定理可得 $\left(a-c\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)\cdot b=\left(b-c\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\cdot a$，

整理得 $(a^2+b^2-c^2)b^2=(a^2+b^2-c^2)a^2$，

即 $(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$，

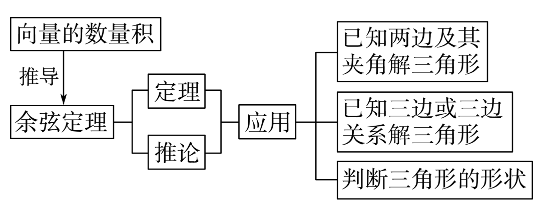
所以 $a^2+b^2-c^2=0$ 或 $a^2=b^2$.

所以 $a^2+b^2=c^2$ 或 $a=b$. 故 $\triangle ABC$ 为直角三角形或等腰三角形.

【类题通法】

判断三角形的形状应围绕三角形的边角关系进行思考，可用余弦定理将已知条件转化为边边关系，通过因式分解、配方等方式得出边的相应关系，从而确定三角形的形状.

▶ 提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=9$，$b=2\sqrt{3}$，$C=150°$，则 c 等于　　（　　）

A. $\sqrt{39}$　　B. $8\sqrt{3}$　　C. $10\sqrt{2}$　　D. $7\sqrt{3}$

D　**解析**：由余弦定理得

$c=\sqrt{9^2+(2\sqrt{3})^2-2\times9\times2\sqrt{3}\times\cos150°}$

$=\sqrt{147}=7\sqrt{3}$.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $b^2=ac$ 且 $c=2a$，则 $\cos B$ 等于　　（　　）

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{3}{4}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

B　**解析**：因为 $b^2=ac$，$c=2a$，所以 $b^2=2a^2$，

所以 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a^2+4a^2-2a^2}{2a\times2a}=\dfrac{3}{4}$.

3.$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.若 $c=\sqrt{2}$,$b=\sqrt{6}$,$B=120°$,则 a 等于　(　　)

A.$\sqrt{6}$　B.$\sqrt{3}$　C.$\sqrt{2}$　D.2

C　**解析**:根据余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,所以 $6=a^2+2-2\sqrt{2}a\times\left(-\frac{1}{2}\right)$,所以 $a=\sqrt{2}$.故选 C.

4.(多选题)在$\triangle ABC$ 中,$AB=5$,$BC=7$,$AC=8$,则　(　　)

A.$\triangle ABC$ 为锐角三角形

B.$A=30°$

C.$\cos B=\frac{1}{7}$

D.$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=5$

AC　**解析**:依题设可知,三角形最大角的余弦值 $\cos B=\frac{5^2+7^2-8^2}{2\times5\times7}=\frac{1}{7}$,所以$\triangle ABC$ 为锐角三角形,选项 A,C 正确;又因为 $\cos A=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\times5\times8}=\frac{1}{2}$,所以 $A=60°$,选项 B 错误;$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cdot\cos(180°-B)=-5$,选项 D 错误.

5.在$\triangle ABC$ 中,已知 $a=\sqrt{6}$,$b=2$,$c=\sqrt{3}+1$,则 $A=$________.

60°　**解析**:由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2^2+(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{6})^2}{2\times2\times(\sqrt{3}+1)}=\frac{1}{2}$.

又 $0°<A<180°$,所以 $A=60°$.

6.在$\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.若 $a=3$,$b=2$,$\cos(A+B)=\frac{1}{3}$,则 $c=$________.

$\sqrt{17}$　**解析**:由三角形内角和定理,可知 $\cos C=-\cos(A+B)=-\frac{1}{3}$.

又由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=9+4-2\times3\times2\times\left(-\frac{1}{3}\right)=17$,所以 $c=\sqrt{17}$.

7.在$\triangle ABC$ 中,$A+C=2B$,$a+c=8$,$ac=15$,求 b.

解:在$\triangle ABC$ 中,因为 $A+C=2B$,$A+B+C=180°$,所以 $B=60°$.

由余弦定理,得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-2ac-2ac\cos B=8^2-2\times15-2\times15\times\frac{1}{2}=19$,

所以 $b=\sqrt{19}$.

综合性·创新提升

1.在$\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,且 $a^2=b^2-c^2+\sqrt{2}ac$,则角 B 的大小是　(　　)

A.45°　B.60°　C.90°　D.135°

A　**解析**:因为 $a^2=b^2-c^2+\sqrt{2}ac$,

所以 $a^2+c^2-b^2=\sqrt{2}ac$.

由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{2}ac}{2ac}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $0°<B<180°$,所以 $B=45°$.

2.在$\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.若 $A=\frac{2\pi}{3}$,$bc=3$,且 $b+c=\frac{\sqrt{5}}{2}a$,则$a=$　(　　)

A.$2\sqrt{3}$　B.$3\sqrt{3}$　C.$2\sqrt{2}$　D.$3\sqrt{2}$

A　**解析**:由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc-2bc\cos\frac{2\pi}{3}=(b+c)^2-bc=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2-3$,

解得 $a=2\sqrt{3}$.故选 A.

3.在$\triangle ABC$ 中,a,b,c 为角 A,B,C 的对边,且 $b^2=ac$,则 B 的取值范围是　(　　)

A.$\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$　B.$\left[\frac{\pi}{3},\pi\right)$

C.$\left(0,\frac{\pi}{6}\right]$　D.$\left[\frac{\pi}{6},\pi\right)$

A　**解析**:$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{(a-c)^2+ac}{2ac}=\frac{(a-c)^2}{2ac}+\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{2}$.

因为 $0<B<\pi$,所以 $B\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$.故选 A.

4.在锐角三角形 ABC 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,$b=1$,$c=2$,则 a 的取值范围是　(　　)

A.$1<a<3$　B.$1<a<5$

C.$\sqrt{3}<a<\sqrt{5}$　D.不确定

C　**解析**:若 a 为最大边,则 $b^2+c^2-a^2>0$,即 $a^2<5$,所以 $a<\sqrt{5}$.

若 c 为最大边,则 $a^2+b^2>c^2$,即 $a^2>3$,所以 $a>\sqrt{3}$.

故$\sqrt{3}<a<\sqrt{5}$.

5.若$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边 a,b,c 满足$(a+b)^2-c^2=4$,且 $C=60°$,则 $ab=$________.

$\frac{4}{3}$　**解析**:因为 $C=60°$,所以由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos 60°$,即 $c^2=a^2+b^2-ab$.①

又因为$(a+b)^2-c^2=4$,所以 $c^2=a^2+b^2+2ab-4$.②

联立①②,得$-ab=2ab-4$,所以 $ab=\frac{4}{3}$.

6.在△ABC中,若$AB=\sqrt{5}$,$AC=5$,且$\cos C=\frac{9}{10}$,则$BC=$________.

4或5 **解析**:由余弦定理得$(\sqrt{5})^2=5^2+BC^2-2\times5\times BC\times\frac{9}{10}$,所以$BC^2-9BC+20=0$,所以$BC=4$或5.

7.在△ABC中,已知$BC=7$,$AC=8$,$AB=9$,试求边AC上的中线的长.

解:由余弦定理的推论得

$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{9^2+8^2-7^2}{2\times9\times8}=\frac{2}{3}$.

设所求的中线长为x,由余弦定理知:

$x^2=\left(\frac{AC}{2}\right)^2+AB^2-2\cdot\frac{AC}{2}\cdot AB\cos A$

$=4^2+9^2-2\times4\times9\times\frac{2}{3}=49$,

则$x=7$.所以边AC上的中线长为7.

第2课时 正弦定理

学习任务目标

1.掌握正弦定理的内容及其证明方法.

2.会运用正弦定理与三角形内角和定理解三角形.

问题式预习

知识点 正弦定理

1.正弦定理

文字语言	在一个三角形中,各边和它所对角的正弦的比相等
符号语言	在△ABC中,角A,B,C所对的边分别为a,b,c,则$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

2.正弦定理的常见变形

(1)$a=2R\sin A$,$b=2R\sin B$,$c=2R\sin C$(R为△ABC外接圆的半径).

(2)$\sin A=\frac{a}{2R}$,$\sin B=\frac{b}{2R}$,$\sin C=\frac{c}{2R}$(R为△ABC外接圆的半径).

(3)三角形的边长之比等于对应角的正弦比,即$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$.

(4)$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

(5)$a\sin B=b\sin A$,$a\sin C=c\sin A$,$b\sin C=c\sin B$.

3.利用正弦定理可以解决的两类问题

(1)已知两角和一边,解三角形;

(2)已知两边和其中一边的对角,解三角形.

[微训练]

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)正弦定理对任意的三角形都成立. (√)

(2)在△ABC中,等式$b\sin C=c\sin B$恒成立. (√)

(3)在△ABC中,已知a,b,A,则能求出唯一的角B. (×)

(4)任意给出三角形的三个元素,都能求出其余元素. (×)

(5)在△ABC中,若$A>B$,则必有$\sin A>\sin B$. ( )

√ **提示**:$A>B\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow\sin A>\sin B$.

(6)在△ABC中,$\frac{a+b-c}{\sin A+\sin B-\sin C}=\frac{a}{\sin A}$. ( )

√ **提示**:设$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,则$a=2R\sin A$,$b=2R\sin B$,$c=2R\sin C$,可知结论正确.

2.在△ABC中,$a=3$,$b=5$,$\sin A=\frac{1}{3}$,则$\sin B=$ ( )

A.$\frac{1}{5}$ B.$\frac{5}{9}$ C.$\frac{\sqrt{5}}{3}$ D.1

B **解析**:由$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,知$\frac{3}{\frac{1}{3}}=\frac{5}{\sin B}$,即$\sin B=\frac{5}{9}$.故选B.

任务型课堂

任务一　已知两角及一边解三角形

1. 在$\triangle ABC$中,$A=60^\circ$,$B=75^\circ$,$a=10$,则c等于　　(　　)

A. $5\sqrt{2}$　　B. $10\sqrt{2}$

C. $\frac{10\sqrt{6}}{3}$　　D. $5\sqrt{6}$

C　**解析**:由$A+B+C=180^\circ$,知$C=45^\circ$.

由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,则$\frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$,

解得$c=\frac{10\sqrt{6}}{3}$.

2. 设$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c.若$a=\sqrt{3}$,$\sin B=\frac{1}{2}$,$C=\frac{\pi}{6}$,则$b=$________.

1　**解析**:因为$\sin B=\frac{1}{2}$,且$B\in(0,\pi)$,

所以$B=\frac{\pi}{6}$或$B=\frac{5\pi}{6}$.又$C=\frac{\pi}{6}$,

所以$B=\frac{\pi}{6}$,$A=\pi-B-C=\frac{2\pi}{3}$.

又$a=\sqrt{3}$,由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,

则$\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{b}{\sin\frac{\pi}{6}}$,

解得$b=1$.

3. 已知$\triangle ABC$的外接圆半径是2 cm,$A=60^\circ$,则边BC的长为________.

$2\sqrt{3}$ cm　**解析**:因为$\frac{BC}{\sin A}=2R$,

所以$BC=2R\sin A=4\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$(cm).

【类题通法】

已知两角及一边解三角形的方法

(1)若所给边是已知角的对边,可先由正弦定理求另一边,再由三角形的内角和定理求第三个角,最后由正弦定理求第三边.

(2)若所给边不是已知角的对边,则先由三角形内角和定理求第三个角,再由正弦定理求另外两边.

任务二　已知两边及其中一边的对角解三角形

[探究活动]

设$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c.已知三角形的两边a,b及A,试根据正弦定理探究下列问题.

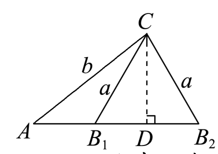
探究1:求角B的流程是什么?

提示:先由$\sin B=\frac{b\sin A}{a}$求角B的正弦值,再由正弦值求角B.

探究2:若$a>b$,试分析三角形解的个数.

提示:首先由正弦定理求出$\sin B$的值,然后由三角形中大边对大角、大角对大边的法则能判断B为锐角,则根据正弦值所求锐角唯一.

探究3:结合下图想一想,若$a<b$,何时此三角形有两个解?



提示:$b\sin A<a<b$时有两解.

[评价活动]

1. 在$\triangle ABC$中,已知$b=40$,$c=20$,$C=60^\circ$,则此三角形的解的情况是　　(　　)

A.有一解

B.有两解

C.无解

D.有解但解的个数不确定

C　**解析**:由正弦定理得$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,

则$\sin B=\frac{b\sin C}{c}=\frac{40\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{20}=\sqrt{3}>1$.

所以角B不存在,即满足条件的三角形不存在.

2. 在$\triangle ABC$中,已知$c=\sqrt{6}$,$A=45^\circ$,$a=2$,求$\triangle ABC$的其他边与角.

解:由正弦定理,得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,

所以$\sin C=\frac{c\sin A}{a}=\frac{\sqrt{6}\times\sin 45^\circ}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为$0^\circ<C<180^\circ$,所以$C=60^\circ$或$C=120^\circ$.

当$C=60^\circ$时,$B=75^\circ$,

$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{\sqrt{6}\sin 75^\circ}{\sin 60^\circ}=\sqrt{3}+1$;

当$C=120^\circ$时,$B=15^\circ$,

$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{\sqrt{6}\sin 15^\circ}{\sin 120^\circ}=\sqrt{3}-1$.

所以$b=\sqrt{3}+1$,$B=75^\circ$,$C=60^\circ$或$b=\sqrt{3}-1$,$B=15^\circ$,$C=120^\circ$.

【类题通法】

已知三角形的两边和其中一边的对角解三角形的方法

(1)由正弦定理求出另一边对角的正弦值.

(2)如果已知的角为大边所对的角时，由三角形中大边对大角、大角对大边的法则能判断另一边所对的角为锐角，由正弦值可求唯一的锐角.

(3)如果已知的角为小边所对的角时，那么不能判断另一边所对的角为锐角，这时由正弦值可得到两个角，要进行分类讨论.

任务三 正弦定理的综合应用

［探究活动］

已知△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.请根据正弦定理探究下列问题.

探究1：若 $2b\cos B=a\cos C+c\cos A$，则 B 的大小是多少？

提示：由正弦定理得 $2\sin B\cos B=\sin A\cos C+\sin C\cos A=\sin(A+C)=\sin B$.因为 $\sin B\neq0$，所以 $\cos B=\frac{1}{2}$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

探究2：若$\frac{\sin A}{a}=\frac{\cos B}{b}$，则 B 的大小是多少？

提示：由正弦定理知，$\frac{\sin A}{\sin A}=\frac{\cos B}{\sin B}$，所以 $\sin B=\cos B$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$.

［评价活动］

1.在△ABC 中，已知 $2\sin A\cos B=\sin C$，那么△ABC 一定是（　　）

A.直角三角形　　B.等腰三角形

C.等腰直角三角形　　D.正三角形

B　**解析：**方法一(利用边的关系进行判断)：

由正弦定理和余弦定理，

$2\sin A\cos B=\sin C$ 可化为 $2a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=c$，

即 $a^2+c^2-b^2=c^2$，即 $a^2=b^2$，故 $a=b$.

所以△ABC 是等腰三角形.

方法二(利用角的关系进行判断)：

因为在△ABC 中，$A+B+C=\pi$，

即 $C=\pi-(A+B)$，所以 $\sin C=\sin(A+B)$.

由 $2\sin A\cos B=\sin C=\sin(A+B)$，

得 $2\sin A\cos B=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

即 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=0$，所以 $\sin(A-B)=0$.

因为 $-\pi<A-B<\pi$，所以 $A-B=0$，即 $A=B$.

所以△ABC 是等腰三角形.

2.(2022·浙江)我国南宋著名数学家秦九韶，发现了从三角形三边求面积的公式，他把这种方法称为“三斜求积”，它填补了我国传统数学的一个空白.如果把这个方法写成公式，就是 $S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}$，其中 a,b,c 是三角形的三边，S 是三角形的面积.设某三角形的三边 $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}$，$c=2$，则该三角形的面积 $S=$________.

$\frac{\sqrt{23}}{4}$　**解析：**$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}$

$=\sqrt{\frac{1}{4}\left[4\times2-\left(\frac{4+2-3}{2}\right)^2\right]}=\frac{\sqrt{23}}{4}$.

3.在△ABC 中，已知$\frac{a}{b}=\frac{\sin B}{\sin A}$，且 $\sin^2A+\sin^2B=\sin^2C$.求证：△ABC 为等腰直角三角形.

证明：因为$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

所以$\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{b}{a}$.

又因为$\frac{a}{b}=\frac{\sin B}{\sin A}$，

所以$\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$，

所以 $a^2=b^2$，即 $a=b$.

设$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k(k\neq0)$，

则 $\sin A=\frac{a}{k}$，$\sin B=\frac{b}{k}$，$\sin C=\frac{c}{k}$.

又因为 $\sin^2A+\sin^2B=\sin^2C$，

所以$\frac{a^2}{k^2}+\frac{b^2}{k^2}=\frac{c^2}{k^2}$，即 $a^2+b^2=c^2$，

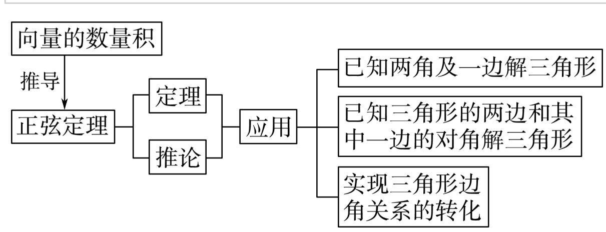
所以△ABC 为等腰直角三角形.

【类题通法】

三角形中角与边的转化

若要把“边”化为“角”，常利用 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$；若要把“角”化为“边”，常利用 $\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$等.然后利用三角形的内角和定理、大边对大角等知识求出三角形的元素.

▶提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1. 在$\triangle ABC$中，已知$a=2$，$\sin(A+B)=\frac{1}{3}$，$\sin A=\frac{1}{4}$，则$c=$ (　　)

A.4　　B.3　　C.$\frac{8}{3}$　　D.$\frac{4}{3}$

C　**解析**：由$\sin(A+B)=\frac{1}{3}$，得$\sin C=\frac{1}{3}$.

又$a=2$，$\sin A=\frac{1}{4}$，

所以$c=\sin C\cdot\frac{a}{\sin A}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{\frac{1}{4}}=\frac{8}{3}$.

2. 在$\triangle ABC$中，一定成立的等式是 (　　)

A.$a\sin A=b\sin B$　　B.$a\cos A=b\cos B$

C.$a\sin B=b\sin A$　　D.$a\cos B=b\cos A$

C　**解析**：由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得$a\sin B=b\sin A$.

3. (多选题)在$\triangle ABC$中，若$a=2$，$b=2\sqrt{3}$，$A=30°$，则B可以为 (　　)

A.$60°$　　B.$30°$　　C.$120°$　　D.$150°$

AC　**解析**：由正弦定理可知$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以

$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为$0°<B<180°$，所以$B=60°$或$120°$.

4. (多选题)在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c.若$a\sin B\cos C+c\sin B\cos A=\frac{1}{2}b$，则$B=$ (　　)

A.$\frac{\pi}{6}$　　B.$\frac{\pi}{3}$　　C.$\frac{2\pi}{3}$　　D.$\frac{5\pi}{6}$

AD　**解析**：由正弦定理得$\sin A\sin B\cos C+\sin C\cdot\sin B\cos A=\frac{1}{2}\sin B$，

所以$\sin A\cos C+\sin C\cos A=\frac{1}{2}$，即$\sin(A+C)=\frac{1}{2}$.所以$\sin B=\frac{1}{2}$.所以$B=\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$.

5. 在$\triangle ABC$中，$AB=\sqrt{6}$，$A=75°$，$B=45°$，则$AC=$________.

2　**解析**：由正弦定理，得$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{AB}{\sin\angle ACB}$，

所以$\frac{AC}{\sin 45°}=\frac{AB}{\sin[180°-(75°+45°)]}$，

即$AC=\frac{AB}{\sin 60°}\times\sin 45°=\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$.

6. 在$\triangle ABC$中，已知$a=2$，$A=60°$，则$\triangle ABC$的外接圆的直径为________.

$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　**解析**：$\triangle ABC$外接圆的直径$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{2}{\sin 60°}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

7. 在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$b\sin A=\sqrt{3}a\cos B$.

(1)求角B的大小；

(2)若$b=3$，$\sin C=2\sin A$，求a,c的值.

解：(1)由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2R$，$R$为$\triangle ABC$外接圆的半径.又$b\sin A=\sqrt{3}a\cos B$，

所以$2R\sin B\sin A=\sqrt{3}\cdot 2R\sin A\cos B$.

又$\sin A\neq 0$，

所以$\sin B=\sqrt{3}\cos B$，$\tan B=\sqrt{3}$.

又因为$0<B<\pi$，所以$B=\frac{\pi}{3}$.

(2)由$\sin C=2\sin A$及$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，得$c=2a$.

由$b=3$及余弦定理得$9=b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

即$9=a^2+c^2-ac$，

所以$a^2+4a^2-2a^2=9$，解得$a=\sqrt{3}$(负值舍去)，故$c=2\sqrt{3}$.

综合性·创新提升

1. 已知△ABC的面积为$\frac{3}{2}$，且$b=2$，$c=\sqrt{3}$，则$\sin A=$（　　）

A.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B.$\frac{1}{2}$　　C.$\frac{\sqrt{3}}{4}$　　D.$\sqrt{3}$

A　**解析**：由已知，得$\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}\times\sin A$，

所以$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. 设△ABC的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c.若$b\cos C+c\cos B=a\sin A$，则△ABC的形状为（　　）

A.锐角三角形　　B.直角三角形

C.钝角三角形　　D.不确定

B　**解析**：由$b\cos C+c\cos B=a\sin A$及正弦定理，

得$\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin A\sin A$，

即$\sin(B+C)=\sin A\sin A$，解得$\sin A=1$，

又$A\in(0,\pi)$，故$A=\frac{\pi}{2}$，

故△ABC为直角三角形.故选B.

3. △ABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c.已知$\sin B+\sin A(\sin C-\cos C)=0$，$a=2$，$c=\sqrt{2}$，则$C=$（　　）

A.$\frac{\pi}{12}$　　B.$\frac{\pi}{6}$　　C.$\frac{\pi}{4}$　　D.$\frac{\pi}{3}$

B　**解析**：由题意得$\sin(A+C)+\sin A(\sin C-\cos C)=0$，

$\sin A\cos C+\cos A\sin C+\sin A\sin C-\sin A\cos C=0$，

即$\sin C(\sin A+\cos A)=\sqrt{2}\sin C\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=0$，

所以$A=\frac{3\pi}{4}$.

由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，即$\frac{2}{\sin\frac{3\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{\sin C}$，则$\sin C=\frac{1}{2}$，得$C=\frac{\pi}{6}$.

4. 在△ABC中，$AB=\sqrt{3}$，$AC=1$，$B=30°$，则△ABC的面积等于________.

$\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\frac{\sqrt{3}}{4}$　**解析**：由正弦定理得$\sin C=\frac{AB\cdot\sin B}{AC}=\frac{\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.又因为$0°<C<180°$，所以$C=60°$或$120°$，所以$A=90°$或$30°$，

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\frac{\sqrt{3}}{4}$.

5. 在△ABC中，若$b=5$，$B=\frac{\pi}{4}$，$\tan A=2$，则$\sin A=$________，$a=$________.

$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　$2\sqrt{10}$　**解析**：由$\tan A=2$，得$\sin A=2\cos A$，所以$\sin^2 A=4\cos^2 A=4-4\sin^2 A$，

所以$\sin A=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

因为A为△ABC的内角，所以$\sin A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

由正弦定理得$a=\frac{b}{\sin B}\cdot\sin A=2\sqrt{10}$.

6. 在平面四边形$ABCD$中，$\angle ADC=90°$，$\angle A=45°$，$AB=2$，$BD=5$.

(1)求$\cos\angle ADB$；

(2)若$DC=2\sqrt{2}$，求BC的长.

解：(1)在△ABD中，由正弦定理得$\frac{BD}{\sin A}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$.

由题设知，$\frac{5}{\sin 45°}=\frac{2}{\sin\angle ADB}$，所以$\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{5}$.

由题设知，$\angle ADB<90°$，所以$\cos\angle ADB=\sqrt{1-\frac{2}{25}}=\frac{\sqrt{23}}{5}$.

(2)由题设及(1)知，$\cos\angle BDC=\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{5}$.

在△BCD中，由余弦定理得$BC^2=BD^2+DC^2-2BD\cdot DC\cdot\cos\angle BDC=25+8-2\times 5\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{5}=25$，

所以$BC=5$.

第3课时　余弦定理、正弦定理应用举例

学习任务目标

1.进一步熟悉余弦定理、正弦定理.

2.了解常用的测量中的相关术语.

3.能运用余弦定理、正弦定理等知识和方法解决有关距离、高度、角度的实际问题.

问题式预习

知识点　测量中的相关术语

1.基线的概念与选择原则

(1)定义

在测量过程中,我们把根据测量的需要而确定的线段叫做基线.

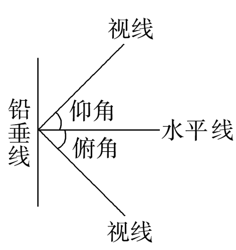
(2)性质

为使测量具有较高的精确度,应根据实际需要选取合适的基线长度.一般来说,基线越长,测量的精确度越高.

2.测量中的有关角的概念

(1)仰角和俯角

与视线在同一铅垂平面内的水平线和视线的夹角中,视线在水平线上方的叫做仰角,视线在水平线下方的叫做俯角,如图所示.



(2)方位角

指从正北方向线顺时针转到目标方向线的水平夹角,如点 B 的方位角为 α(如图1所示).

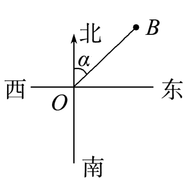


图1

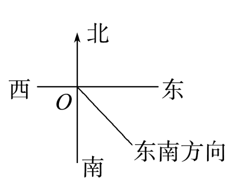


图2

(3)方位角的其他表示——方向角

①正南方向:指从原点 O 出发的经过目标的射线与正南方向线重合,即目标在正南的方向线上.依此可类推正北方向、正东方向和正西方向.

②东南方向:指经过目标的射线是正东方向线和正南方向线的夹角平分线(如图2所示).

[微训练]

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

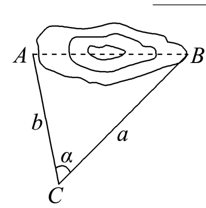
(1)从 A 处望 B 处的仰角为 α,从 B 处望 A 处的俯角为 β,则 α,β 的关系为 $\alpha=\beta$.　(√)

(2)俯角是铅垂线与视线所成的角,其范围为 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.　(×)

(3)若点 P 在点 Q 的北偏东 $44°$,则点 Q 在点 P 的东偏北 $46°$.　(×)

(4)方位角大小的范围是 $(0,\pi)$,方向角大小的范围是 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.　(×)

2.如图,要测量一水塘两侧 A,B 两点间的距离,其方法是先选定适当的位置 C,用经纬仪测出角 α,再分别测出 AC,BC 的长 b,a,则可求出 A,B 两点间的距离.若测得 $AC=400$ m,$BC=600$ m,$\angle ACB=60°$,则 A,B 两点间的距离为________m.



$200\sqrt{7}$　**解析**:在△ABC 中,由余弦定理得

$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\angle ACB$,

所以 $AB^2=400^2+600^2-2\times400\times600\cos 60°=280\ 000$.

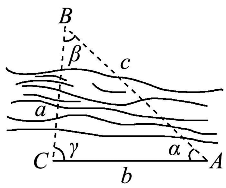
所以 $AB=200\sqrt{7}$ m.

即 A,B 两点间的距离为 $200\sqrt{7}$ m.

任务型课堂

任务一 不能到达的两点间的距离问题

1. 如图，在河岸 AC 测量河的宽度 BC，从下列四组量中选择一组进行测量，较适宜的是 ( )



A. γ, c, α　　B. b, c, α

C. c, α, β　　D. b, α, γ

D **解析**：a, c, β 不易测量，测量 b, α, γ 更合适.

2. 党的二十大强调：教育、科技、人才是全面建设社会主义现代化国家的基础性、战略性支撑.山东省科技馆新馆(如图1)成为济南科教新地标，其主体建筑采用与地形吻合的矩形设计，将数学符号"∞"完美嵌入其中，寓意无限未知、无限发展、无限可能和无限的科技创新.如图2，为了测量科技馆最高点 A 与其附近一建筑物楼顶 B 之间的距离，无人机在点 C 测得点 A 和点 B 的俯角分别为 $75°, 30°$，随后无人机沿水平方向飞行 600 米到点 D，此时测得点 A 和点 B 的俯角分别为 $45°$ 和 $60°$(A, B, C, D 四点在同一铅垂面内)，则 A, B 两点之间的距离为________米.


图1

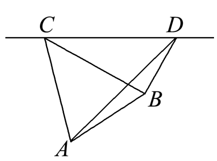


图2

$100\sqrt{15}$ **解析**：由题意知 $\angle DCB=30°, \angle CDB=60°$，所以 $\angle CBD=90°$.

因为 $CD=600$ 米，

所以在 $\mathrm{Rt}\triangle CBD$ 中，$BD=\dfrac{1}{2}CD=300$(米)，$BC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}CD=300\sqrt{3}$(米).

又 $\angle DCA=75°, \angle CDA=45°$，所以 $\angle CAD=60°$.

在 $\triangle ACD$ 中，由正弦定理得 $\dfrac{AC}{\sin 45°}=\dfrac{CD}{\sin 60°}$，所以

$AC=\dfrac{600}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=200\sqrt{6}$(米).

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=\angle DCA-\angle DCB=75°-30°=45°$，

由余弦定理得 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB=(200\sqrt{6})^2+(300\sqrt{3})^2-2\times200\sqrt{6}\times300\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=150\ 000$，

所以 $AB=100\sqrt{15}$ 米.

故答案为 $100\sqrt{15}$.

3. 在相距 2 km 的 A, B 两点处测量目标点 C.若 $\angle CAB=75°, \angle CBA=60°$，则 A, C 两点之间的距离为________ km.

$\sqrt{6}$ **解析**：$\angle ACB=180°-75°-60°=45°$，

由正弦定理得 $\dfrac{AC}{\sin 60°}=\dfrac{AB}{\sin 45°}$，

所以 $AC=\dfrac{2\times\sin 60°}{\sin 45°}=\sqrt{6}$(km).

【类题通法】

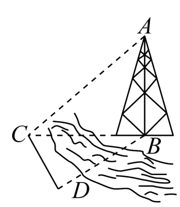
三角形中与距离有关问题的求解策略

(1)解决与距离有关的问题，若所求的线段在一个三角形中，则直接利用正弦定理、余弦定理求解即可；若所求的线段在多个三角形中，要根据条件选择适当的三角形，再利用正弦定理、余弦定理求解.

(2)解决与距离有关的问题的关键是将问题转化为求三角形中的边，分析所解三角形中已知哪些元素，还需要求出哪些元素，灵活应用正弦定理、余弦定理来解决.

任务二 测量高度问题

1. 如图，测量河对岸的塔高 AB 时，可以选与塔底 B 在同一水平面内的两个测点 C 与 D.现测得 $\angle BCD=\alpha, \angle BDC=\beta, CD=s$，并在点 C 测得塔顶 A 的仰角为 θ，求塔高 AB.



解：在 $\triangle BCD$ 中，$\angle CBD=\pi-\alpha-\beta$.

由正弦定理得 $\dfrac{BC}{\sin\angle BDC}=\dfrac{CD}{\sin\angle CBD}$，

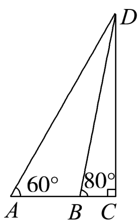
所以 $BC=\dfrac{CD\sin\angle BDC}{\sin\angle CBD}=\dfrac{s\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AB=BC\tan\angle ACB=\dfrac{s\tan\theta\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

2. 李明同学想测量广场上某建筑物的高度，他在广场的点 A 测得建筑物顶端的仰角为 $60°$，然后沿着建筑物底部方向前进 15.2 m，到达点 B，又测得建筑

物顶部仰角为 80°.你能帮助李明同学求出该建筑物的高度吗？($\sqrt{3}\approx1.732$，$\sin 20°\approx0.342$，$\sin 80°\approx0.985$.中间结果精确到0.1 m，最终结果精确到1 m)

解：如图，点 C，D 分别为建筑物的底部和顶端.



依题意，$\angle BAD=60°$，$\angle CBD=80°$，$AB=15.2$ m，

则 $\angle ABD=100°$，$\angle ADB=80°-60°=20°$.

在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理，

得 $\dfrac{BD}{\sin 60°}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$，

所以 $BD=\dfrac{AB\sin 60°}{\sin 20°}=\dfrac{15.2\times\sin 60°}{\sin 20°}\approx38.5$(m).

在 Rt$\triangle BCD$ 中，

$CD=BD\sin 80°\approx38.5\times\sin 80°\approx38$(m)，

即广场上该建筑物的高约为 38 m.

【类题通法】

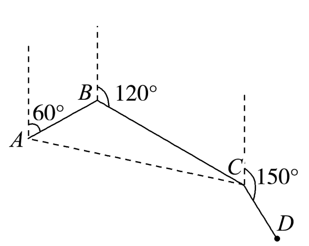
测量高度问题的解题思路

对于底部不能到达或者无法直接测量的物体的高度问题，先用正弦定理或余弦定理计算出物体的顶部或底部到一个可到达的点之间的距离，然后转化为解三角形问题.这类物体高度的求解一般在与地面垂直的竖直平面内构造三角形或者在空间中构造三棱锥，再依据条件，利用正弦定理、余弦定理解其中的一个或者几个三角形，从而求出物体的高度.

任务三　测量角度问题

[探究活动]

如图，某物流投递员沿一条大路前进.从 A 到 B，方位角是 60°，距离是 4 km；从 B 到 C，方位角是 120°，距离是 8 km；从 C 到 D，方位角是 150°，距离是 3 km.



试用正弦定理、余弦定理探究下列问题.

探究 1：若投递员想在半小时之内，沿小路直接从 A 到 C，则此人的速度至少是多少？

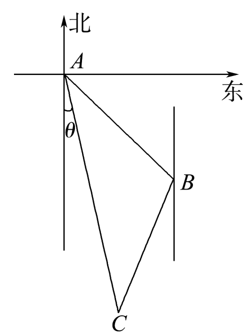
提示：在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=60°+(180°-120°)=120°$，由余弦定理得 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos 120°}=4\sqrt{7}$ km，则此人的速度至少为 $v=\dfrac{4\sqrt{7}}{\dfrac{1}{2}}=8\sqrt{7}$(km/h).

探究 2：若投递员沿大路从 A 到 D 以 24 km/h 的速度匀速前进，10 min 后，某人以$16\sqrt{7}$ km/h的速度沿小路直接由 A 到 C 追赶投递员.问：此人在 C 处能否与投递员相遇？

提示：投递员到达 C 处所用的时间 $t_1=\dfrac{4+8}{24}=\dfrac{1}{2}(h)=30$(min)，追赶投递员的人到达 C 处所用时间 $t_2=\dfrac{4\sqrt{7}}{16\sqrt{7}}=\dfrac{1}{4}(h)=15$(min).因为 $30>15+10$，所以此人在 C 处能与投递员相遇.

[评价活动]

如图，甲船在 A 处；乙船在 A 处南偏东 45°的方向，距 A 有 9 n mile 的 B 处，并以 20 n mile/h 的速度沿南偏西 15°方向行驶.若甲船沿南偏东 θ 的方向，以 28 n mile/h 的速度行驶，恰能在 C 处追上乙船.甲船用多少小时追上乙船？并求 $\sin\theta$ 的值.(结果保留根号)



解：设甲船用 t 小时在 C 处追上乙船，则在$\triangle ABC$ 中，$AC=28t$ n mile，$BC=20t$ n mile，$AB=9$ n mile，$\angle ABC=180°-15°-45°=120°$.

由余弦定理得

$(28t)^2=81+(20t)^2-2\times9\times20t\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，

即 $128t^2-60t-27=0$，

解得 $t=\dfrac{3}{4}$或 $t=-\dfrac{9}{32}$(舍去).

所以甲船用$\dfrac{3}{4}$ h 在 C 处追上乙船.

所以 $AC=21$ n mile，$BC=15$ n mile.

根据正弦定理，得 $\sin\angle BAC=\dfrac{BC\cdot\sin\angle ABC}{AC}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$，

则 $\cos\angle BAC=\sqrt{1-\dfrac{75}{14^2}}=\dfrac{11}{14}$.

又 $\angle ABC=120°$，所以 $\angle BAC$ 为锐角，$\theta=45°-\angle BAC$，

所以 $\sin\theta=\sin(45°-\angle BAC)$

$=\sin 45°\cos\angle BAC-\cos 45°\sin\angle BAC$

$=\dfrac{11\sqrt{2}-5\sqrt{6}}{28}$.

【类题通法】

解决测量角度问题的常用方法与注意点

(1)测量角度问题的关键是弄清题意，画出图形，并在图形中标出有关的角和距离，再用正弦定理或余弦定理解三角形，最后将结果转化为实际问题的解.

(2)求角的度数时，多用余弦定理求角.因为余弦函数在$(0,\pi)$上是单调递减的，而正弦函数不单调，一个正弦值可能对应两个角.若角在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$内，用正弦定理、余弦定理皆可.

提质归纳

正弦定理、余弦定理应用举例
- 距离问题
- 高度问题
- 角度问题

课后素养评价

基础性·能力运用

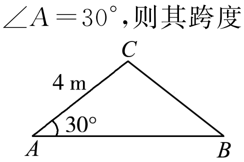
1.两灯塔 A,B 与海洋观察站 C 的距离都等于 a km，灯塔 A 在 C 北偏东 30°，B 在 C 南偏东 60°，则 A,B 之间距离为（　　）

A.$\sqrt{2}a$ km　　B.$\sqrt{3}a$ km

C.a km　　D.$2a$ km

A　**解析**：$\triangle ABC$ 中，$AC=BC=a$，$\angle ACB=90°$，所以 $AB=\sqrt{2}a$.

2.学校体育馆的屋架为等腰三角形，如图，测得 AC 的长度为 4 m，$\angle A=30°$，则其跨度 $AB=$（　　）



A.12 m　B.8 m　C.$3\sqrt{3}$ m　D.$4\sqrt{3}$ m

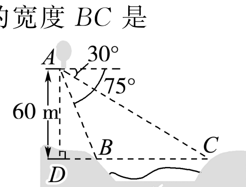
D　**解析**：由题意知，$\angle A=\angle B=30°$，

所以$\angle C=180°-30°-30°=120°$.

由正弦定理，得$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}$，即 $AB=\dfrac{AC\cdot\sin C}{\sin B}$

$=\dfrac{4\cdot\sin 120°}{\sin 30°}=4\sqrt{3}$.

3.如图，从气球 A 上测得其正前下方的河流两岸 B，C 的俯角分别为 75°，30°，此时气球的高度 AD 是 60 m，则河流的宽度 BC 是（　　）



A.$240(\sqrt{3}-1)$ m　　B.$180(\sqrt{2}-1)$ m

C.$120(\sqrt{3}-1)$ m　　D.$30(\sqrt{3}+1)$ m

C　**解析**：由题意知，在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，$\angle C=30°$，$AD=60$ m，所以 $AC=120$ m.

在$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=75°-30°=45°$，$\angle ABC=180°-45°-30°=105°$，

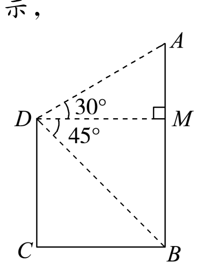
由正弦定理，得 $BC=\dfrac{AC\sin\angle BAC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{120\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=120(\sqrt{3}-1)$(m).

4.为测量某塔 AB 的高度，在一幢与塔 AB 相距 20 m 的楼顶上测得塔顶 A 的仰角为 30°，测得塔基 B 的俯角为 45°，那么塔 AB 的高度是（　　）

A.$20\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ m　　B.$20\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ m

C.$20(1+\sqrt{3})$ m　　D.30 m

A　**解析**：如图所示，



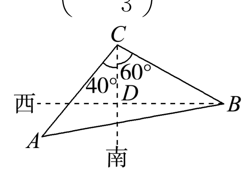
由已知得四边形 $CBMD$ 为正方形，而 $CB=20$ m，所以 $BM=20$ m.

又在 $\mathrm{Rt}\triangle AMD$ 中，$DM=20$ m，$\angle ADM=30°$，

所以 $AM=DM\tan 30°=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$(m).

所以 $AB=AM+MB=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}+20=20\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$(m).

5.如图，两座灯塔 A 和 B 与河岸观察站 C 的距离相等，灯塔 A 在观察站南偏西 40°，灯塔 B 在观察站南偏东 60°，则灯塔 A 在灯塔 B 的（　　）

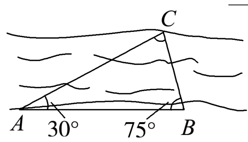


A.北偏东 10°　　B.北偏西 10°

C.南偏东 80°　　D.南偏西 80°

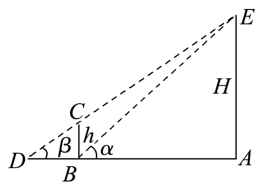
D　**解析**：由条件及题图可知，$\angle A=\angle CBA=40°$，又$\angle BCD=60°$，所以$\angle CBD=30°$，
所以$\angle DBA=10°$，因此灯塔A在灯塔B南偏西$80°$.

6. 如图，为了测定河的宽度，在河的一侧岸边选定两点A，B，望对岸标记物C，测得$\angle CAB=30°$，$\angle CBA=75°$，$AB=120$ m，则河的宽度为________m.



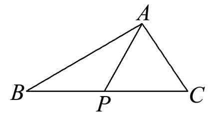
60　**解析**：由题意知，$\angle ACB=180°-30°-75°=75°$，所以$\triangle ABC$为等腰三角形.河宽即边$AB$上的高，与边$AC$上的高相等，过点$B$作$BD\perp AC$于点$D$(图略)，所以$BD=120\cdot\sin 30°=60$(m)，所以河宽为60 m.

7. 某兴趣小组要测量电视塔AE的高度H(单位：m).如图所示，竖直放置的标杆BC的高度$h=4$ m，仰角$\angle ABE=\alpha$，$\angle ADE=\beta$.该小组已测得一组α，β的值，算出了$\tan\alpha=1.24$，$\tan\beta=1.20$.据此可算出H为________m.



124　**解析**：由$AB=\dfrac{H}{\tan\alpha}$，$BD=\dfrac{h}{\tan\beta}$，$AD=\dfrac{H}{\tan\beta}$
及$AB+BD=AD$，得$\dfrac{H}{\tan\alpha}+\dfrac{h}{\tan\beta}=\dfrac{H}{\tan\beta}$，
解得$H=\dfrac{h\tan\alpha}{\tan\alpha-\tan\beta}=\dfrac{4\times1.24}{1.24-1.20}=124$.
因此电视塔的高度H是124 m.

8. 如图，在$\triangle ABC$中，P是边BC上的一点，$\angle APC=60°$，$AB=2\sqrt{3}$，$AP+BP=4$.
(1)求BP的长；
(2)若$AC=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$，求$\cos\angle ACP$的值.



解：(1)由已知，得$\angle APB=120°$，
又$AB=2\sqrt{3}$，$AP+BP=4$，
在$\triangle ABP$中，由余弦定理，
得$(2\sqrt{3})^2=BP^2+(4-BP)^2-2\times BP\times(4-BP)\times\cos 120°$，
整理，得$BP^2-4BP+4=0$，解得$BP=2$.
(2)由(1)知，$AP=2$，
所以在$\triangle ACP$中，由正弦定理，得
$\dfrac{AC}{\sin 60°}=\dfrac{AP}{\sin\angle ACP}$，

解得$\sin\angle ACP=2\times\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5\sqrt{3}}{4}}=\dfrac{4}{5}$.

因为$2<\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$，所以$AP<AC$，从而$\angle ACP<\angle APC$，即$\angle ACP$是锐角，

所以$\cos\angle ACP=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$.

综合性·创新提升

1. 海上有A，B两个小岛相距10海里，从A岛望C岛和B岛成$60°$的视角，从B岛望C岛和A岛成$75°$的视角，则B，C两岛间的距离是　(　　)

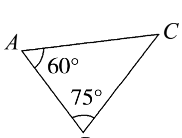
A. $10\sqrt{3}$海里　　B. $\dfrac{10\sqrt{6}}{3}$海里

C. $5\sqrt{2}$海里　　D. $5\sqrt{6}$海里

D　**解析**：如图，根据题意，在$\triangle ABC$中，$A=60°$，$B=75°$，$AB=10$，所以$C=45°$.

由正弦定理可得$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin A}$，即$\dfrac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{BC}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，所以

$BC=5\sqrt{6}$(海里).

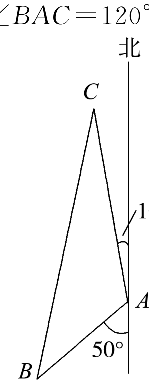


2. 我舰在岛A处南偏西$50°$的B处，且A，B距离为12海里，发现敌舰正离开岛A沿北偏西$10°$的方向以每小时10海里的速度航行.若我舰要用2小时追上敌舰，则速度大小为　(　　)

A. 28海里/时　　B. 14海里/时

C. $14\sqrt{2}$海里/时　　D. 20海里/时

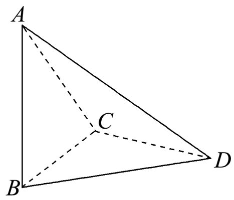
B　**解析**：如图，设我舰在C处追上敌舰，速度为v，
在$\triangle ABC$中，$AC=10\times2=20$(海里)，
$AB=12$(海里)，$\angle BAC=120°$，



所以$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos 120°=784$，

所以 $BC=28$（海里），所以 $v=14$（海里/时）.

3. 国庆期间某校数学兴趣小组的同学开展了测量校园旗杆高度的活动，如图所示，在操场上选择了 C，D 两点，在 C，D 处测得旗杆 AB 的顶端的仰角分别为 $45°$，$30°$.在水平面上测得 $\angle BCD=120°$，且 C，D 的距离为 10 米，则旗杆的高度为（　　）



A.5 米　　B.$5\sqrt{5}$ 米

C.10 米　　D.$10\sqrt{5}$ 米

C　**解析**：设旗杆的高度为 h，

则 $BC=\frac{h}{\tan 45°}=h$，$BD=\frac{h}{\tan 30°}=\sqrt{3}h$.

在△BCD 中，由余弦定理得 $BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cdot\cos 120°$，

即 $(\sqrt{3}h)^2=h^2+10^2-2\times h\times 10\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，

所以 $h^2-5h-50=0$，解得 $h=10$ 或 $h=-5$（舍去）.

故选 C.

4. 一艘船 9:30 在 A 处，测得灯塔 S 在它的北偏东 $30°$，且与它相距 $8\sqrt{2}$ 海里，之后它继续沿正北方向匀速航行，10:00 到达 B 处，此时又测得灯塔 S 在它的北偏东 $75°$，此船的航速是（　　）

A.$8(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ 海里/时

B.$8(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ 海里/时

C.$16(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ 海里/时

D.$16(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ 海里/时

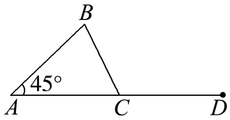
D　**解析**：由题意得在△SAB 中，$\angle BAS=30°$，$\angle SBA=180°-75°=105°$，$\angle BSA=45°$.

由正弦定理得 $\frac{SA}{\sin 105°}=\frac{AB}{\sin 45°}$，

即 $\frac{8\sqrt{2}}{\sin 105°}=\frac{AB}{\sin 45°}$，得 $AB=8(\sqrt{6}-\sqrt{2})$（海里），

因此此船的航速为 $\frac{8(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\frac{1}{2}}=16(\sqrt{6}-\sqrt{2})$（海里/时）.

5. 一次机器人足球比赛中，甲队 1 号机器人由点 A 开始做匀速直线运动，到达点 B 时，发现足球在点 D 处正以 2 倍于自己的速度向点 A 做匀速直线运动，如图所示，已知 $AB=4\sqrt{2}$ dm，$AD=17$ dm，$\angle BAC=45°$.若忽略机器人原地旋转所需的时间，则该机器人最快可在距点 A ________dm 的点 C 处截住足球.



7　**解析**：设机器人最快可在点 C 处截住足球，

由题意知点 C 在线段 AD 上，设 $BC=x$ dm.

则 $CD=2x$ dm，

$AC=AD-CD=(17-2x)$ dm.

在△ABC 中，由余弦定理得

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$，

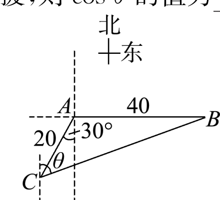
即 $x^2=(4\sqrt{2})^2+(17-2x)^2-8\sqrt{2}(17-2x)\cos 45°$，

解得 $x_1=5$，$x_2=\frac{37}{3}$.

所以 $AC=17-2x=7$ 或 $AC=-\frac{23}{3}$（舍去）.

所以该机器人最快可在线段 AD 上距点 A 7 dm 的点 C 处截住足球.

6. 如图所示，位于 A 处的信息中心获悉：在其正东方向相距 40 海里的 B 处有一艘渔船遇险，在原地等待营救.信息中心立即把消息告知在其南偏西 $30°$相距 20 海里的 C 处的乙船，现乙船朝北偏东 θ 的方向沿直线 CB 前往 B 处救援，则 $\cos\theta$ 的值为________.



$\frac{\sqrt{21}}{14}$　**解析**：由题图知，在△ABC 中，$AB=40$，$AC=20$，$\angle BAC=120°$.

由余弦定理得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos 120°=2\ 800$，

所以 $BC=20\sqrt{7}$.

由正弦定理，得

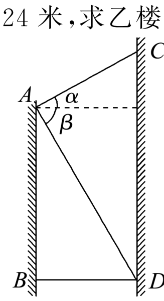
$\sin\angle ACB=\frac{AB}{BC}\cdot\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

由 $\angle BAC=120°$ 知 $\angle ACB$ 为锐角，

故 $\cos\angle ACB=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

故 $\cos\theta=\cos(\angle ACB+30°)=\cos\angle ACB\cos 30°-\sin\angle ACB\sin 30°=\frac{\sqrt{21}}{14}$.

7. 如图，线段 AB，CD 分别表示甲、乙两楼，$AB\perp BD$，$CD\perp BD$.从甲楼顶部 A 处测得乙楼顶部 C 处的仰角为 $\alpha=30°$，测得乙楼底部 D 的俯角 $\beta=60°$.已知甲楼高 $AB=24$ 米，求乙楼高 CD.



解：过 A 作 $AE\perp CD$（图略），垂足为 E，$ED=AB=24$ 米，则 $AE=\frac{ED}{\tan 60°}=\frac{24}{\sqrt{3}}=8\sqrt{3}$（米）.

在 Rt△ACE 中，$CE=AE\cdot\tan 30°=8\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=8$（米），

所以 $CD=CE+ED=8+24=32$（米）.

单元活动构建

任务一　平面向量的线性运算及应用

向量线性运算的基本原则和求解策略

(1)向量是一个有“形”的几何量，因此在进行向量线性运算时，一定要结合图形，这是研究平面向量的重要方法与技巧.

(2)表示线性运算的常用技巧：首尾相接两个向量求和用向量加法的三角形法则，如$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$；共起点两个向量作差用减法的几何意义，如$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$.

(3)注意平行向量(共线向量)、相等向量与相反向量、单位向量等，理解向量的有关概念并进行恰当地应用.

(4)注意常见结论的应用. 如△ABC 中，点 D 是 BC 的中点，则$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$.

任务达标

1.已知 O 是正方形 $ABCD$ 的中心.若$\overrightarrow{DO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，其中 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$，则$\frac{\lambda}{\mu}=$　(　　)

A.-2　B.$-\frac{1}{2}$　C.$-\sqrt{2}$　D.$\sqrt{2}$

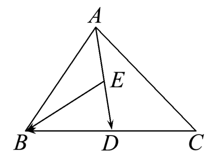
A　**解析**：$\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，所以 $\lambda=1,\mu=-\frac{1}{2}$，因此$\frac{\lambda}{\mu}=-2$.

2.在△ABC 中，AD 为边 BC 上的中线，E 为边 AD 的中点，则$\overrightarrow{EB}=$　(　　)

A.$\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　B.$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

C.$\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　D.$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

A　**解析**：作出示意图如图所示.



$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

【规律方法】

向量线性运算的基本方法

(1)类比法：向量的数乘运算类似于多项式的运算，例如，实数运算中的去括号、移项、合并同类项、提取公因式等变形手段在向量的数乘运算中同样适用，但是这里的“同类项”“公因式”是指向量，实数看作是向量的“系数”.

(2)方程法：向量也可以通过解方程求得，把所求向量当作未知数，利用解方程的方法求解，同时在运算过程中多观察，恰当地运用运算律，简化运算.

任务二　平面向量数量积的运算

平面向量数量积运算的两种求法

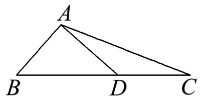
一是根据数量积的定义，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$；

二是利用坐标运算，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

同时还要掌握利用数量积求向量的夹角、求向量的模和判断两个向量垂直的方法.

任务达标

1.如图，在△ABC 中，$AD\perp AB$，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{3}|\overrightarrow{BD}|$，$|\overrightarrow{AD}|=1$，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=$　(　　)



A.$2\sqrt{3}$　B.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　C.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　D.$\sqrt{3}$

D　**解析**：设$|\overrightarrow{BD}|=x$，则$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{3}x$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot\cos\angle ADB=\sqrt{3}x\times1\times\frac{1}{x}=\sqrt{3}$.

2.若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，$|\boldsymbol{b}|=4$，且$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=-72$，则$|\boldsymbol{a}|$为　(　　)

A.2　B.4　C.6　D.12

C　**解析**：因为$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}^2$

$=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos60°-6|\boldsymbol{b}|^2$

$=|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}|-96=-72$，

所以$|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}|-24=0$，所以$|\boldsymbol{a}|=6$(负值舍去).

【规律方法】

1.求向量数量积的步骤

(1)求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ，其中 $\theta\in[0,\pi]$；

(2)分别求$|\boldsymbol{a}|$和$|\boldsymbol{b}|$；

(3)求数量积，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，要特别注意书写时 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间用“·”连接，而不能用“×”连接，也不能省去.

2.常用公式

(1)$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2$.

(2)$|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\pm2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$.

任务三 平面向量的平行与垂直问题

1. 证明向量共线常用的方法

(1)向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$共线⇔存在唯一实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

(2)向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$共线⇔$x_1y_2-x_2y_1=0$.

(3)向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线⇔$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

(4)向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线⇔存在不全为零的实数 λ_1,λ_2,使 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

2. 证明向量垂直问题的常用方法

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$,其中 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$.

「任务达标」

1. 设 $\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(1,1)$,$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$. 若 $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$,则实数 k 的值等于 ( )

A.$-\dfrac{3}{2}$ B.$-\dfrac{5}{3}$ C.$\dfrac{5}{3}$ D.$\dfrac{3}{2}$

A **解析**:$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}=(1+k,2+k)$,又 $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$,所以 $1\times(1+k)+1\times(2+k)=0$,解得 $k=-\dfrac{3}{2}$.

2. 已知$\overrightarrow{OA}=(-2,1)$,$\overrightarrow{OB}=(0,2)$,且$\overrightarrow{AC}\parallel\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AB}$,则点 C 的坐标是 ( )

A.$(2,6)$ B.$(-2,-6)$

C.$(2,-6)$ D.$(-2,6)$

D **解析**:设 $C(x,y)$,则$\overrightarrow{AC}=(x+2,y-1)$,$\overrightarrow{BC}=(x,y-2)$,$\overrightarrow{AB}=(2,1)$. 由$\overrightarrow{AC}\parallel\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AB}$,得 $\begin{cases}-2(x+2)=0,\\2x+y-2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-2,\\y=6.\end{cases}$

所以点 C 的坐标为$(-2,6)$.

3. 已知向量$\overrightarrow{OA}=(k,12)$,$\overrightarrow{OB}=(4,5)$,$\overrightarrow{OC}=(-k,10)$,且 A,B,C 三点共线,则 k 的值是 ( )

A.$-\dfrac{2}{3}$ B.$\dfrac{4}{3}$ C.$\dfrac{1}{2}$ D.$\dfrac{1}{3}$

A **解析**:$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(4-k,-7)$,$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-2k,-2)$. 因为 A,B,C 三点共线,所以$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$共线,所以$-2\times(4-k)=-7\times(-2k)$,解得 $k=-\dfrac{2}{3}$.

【规律方法】

1. 向量共线的判定方法

(1)利用向量共线定理,由 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$推出 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

(2)利用向量共线的坐标表达式 $x_1y_2-x_2y_1=0$ 直接求解.

2. 三点共线的实质

三点共线问题的实质是向量共线问题. 两个非零向量共线只需满足方向相同或相反,两个向量共线与两个向量平行是一致的.

任务四 平面向量的夹角与模的问题

1. 解决向量模的问题常用的策略

(1)应用公式:$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$,其中 $\boldsymbol{a}=(x,y)$.

(2)应用三角形或平行四边形法则.

(3)应用向量不等式$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

(4)研究模的平方:$|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^2$.

2. 求向量的夹角

设非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,两向量夹角 $\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 的余弦 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

「任务达标」

1. 已知$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$,且 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 为 ( )

A.$\dfrac{\pi}{6}$ B.$\dfrac{\pi}{4}$ C.$\dfrac{\pi}{3}$ D.$\dfrac{2\pi}{3}$

B **解析**:因为 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2$. 因为$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$,

所以 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{\boldsymbol{a}^2}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

所以向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\dfrac{\pi}{4}$. 故选 B.

2. 若$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=2$,则$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=$________.

$2\sqrt{3}$ **解析**:因为$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=2$,所以$\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形,所以$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$为$\triangle ABC$ 的边 BC 上的高的 2 倍,所以$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{3}$.

【规律方法】

1. 求向量的模的两种基本策略

(1)字母表示下的运算:

利用$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}^2$,将向量模的运算转化为向量与向量的数量积的运算.

(2)坐标表示下的运算:

若 $\boldsymbol{a}=(x,y)$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2=x^2+y^2$,于是有$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

2.利用数量积的坐标表示求两向量夹角的步骤

(1)利用平面向量数量积的坐标表示求出这两个向量的数量积;

(2)利用$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$计算出这两个向量的模;

(3)由公式$\cos\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$直接求出$\cos\theta$的值;

(4)在$[0,\pi]$内,由$\cos\theta$的值求角θ.

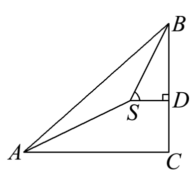
任务五 正弦定理、余弦定理及应用

解斜三角形有下表所示的四种情况:

已知条件	应用定理	一般解法
一边和两角(如a,B,C)	正弦定理	由$A+B+C=180°$求出角A,由正弦定理求出b与c.在有解时只有一解
两边和夹角(如a,b,C)	余弦定理、正弦定理	由余弦定理求出第三边c,由正弦定理求出小边所对的角,再由$A+B+C=180°$求出另一角.在有解时只有一解
三边(a,b,c)	余弦定理	由余弦定理求出角A,B,再利用$A+B+C=180°$求出角C.在有解时只有一解
两边和其中一边的对角(如a,b,A)	正弦定理(余弦定理)	方法一:由正弦定理求出角B,由$A+B+C=180°$求出角C,再利用正弦定理求出边c;方法二:由余弦定理列出关于边c的一元二次方程求出c,再用余弦定理的推论以及三角形内角和定理求另外两角.可有两解、一解或无解

「任务达标」

1.如图所示,在山脚A处测得山顶B的仰角$\angle CAB=45°$,沿倾斜角为$30°$的山坡向山顶走1 000 m到达S处,此时测得山顶仰角$\angle DSB=75°$,则山高BC为 ( )



A.$500\sqrt{2}$ m B.200 m

C.$1\ 000\sqrt{2}$ m D.1 000 m

D **解析**:因为$\angle SAB=45°-30°=15°$,

$\angle SBA=\angle ABC-\angle SBC=45°-(90°-75°)=30°$,

所以$\angle ASB=135°$.

在$\triangle ABS$中,$AB=\dfrac{AS\cdot\sin 135°}{\sin 30°}=\dfrac{1\ 000\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=1\ 000\sqrt{2}$(m),

所以$BC=AB\cdot\sin 45°=1\ 000\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1\ 000$(m).

故选D.

2.在$\triangle ABC$中,内角A,B,C的对边分别是a,b,c,已知$2\cos C(a\cos B+b\cos A)=c$.

(1)求C;

(2)若$c=\sqrt{7}$,求$\triangle ABC$的面积的最大值.

解:(1)由$2\cos C(a\cos B+b\cos A)=c$,

得$2\cos C\left(a\times\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=c$,

所以$2c\cos C=c$,

所以$\cos C=\dfrac{1}{2}$.又$C\in(0,\pi)$,所以$C=\dfrac{\pi}{3}$.

(2)由余弦定理得$a^2+b^2-2ab\cos\dfrac{\pi}{3}=7$,

整理得$a^2+b^2-ab=7$.

又$a^2+b^2\geqslant 2ab$,所以$ab\leqslant 7$,当且仅当$a=b$时,取等号,

所以$\triangle ABC$的面积为$\dfrac{1}{2}ab\sin C\leqslant\dfrac{1}{2}\times 7\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{7\sqrt{3}}{4}$,

所以$\triangle ABC$的面积的最大值为$\dfrac{7\sqrt{3}}{4}$.

【规律方法】

1.已知两边及一角解三角形的两种情况

(1)若已知角是其中一边的对角,可用余弦定理列出关于第三边的一元二次方程求解.

(2)若已知角是两边的夹角,则直接运用余弦定理求出另外一边,再用余弦定理和三角形内角和定理求其他角.

2.已知三角形三边解三角形的方法

先利用余弦定理的推论求出一个角的余弦,从而求出第一个角;再利用余弦定理的推论求出第二个角;最后利用三角形的内角和定理求出第三个角.

第六章质量评估

(时间:120 分钟,分值:150 分)

一、单项选择题(本题包括 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的).

1.已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1)$,$\boldsymbol{b}=(-1,2)$,则$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=$ ( )

A.6 B.5 C.1 D.-6

A **解析**:由向量运算法则知,$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=(3,0)\cdot(2,-1)=6$.

2.已知$|\boldsymbol{a}|=2$,向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为$-2\boldsymbol{a}$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ ( )

A.4 B.8 C.-8 D.-4

C **解析**:因为 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为$-2\boldsymbol{a}$,

所以$\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=-2\boldsymbol{a}$,即$\left(\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}+2\right)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.因为$|\boldsymbol{a}|=2$,所以 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,

所以$\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}+2=0$.即$\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{4}=-2$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-8$,故选 C.

3.已知向量 $\boldsymbol{a}=(m,m+3)$,$\boldsymbol{b}=(4,m)$,则“$m=6$”是“$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向”的 ( )

A.充分不必要条件 B.必要不充分条件

C.充要条件 D.既不充分也不必要条件

C **解析**:当 $m=6$ 时,向量 $\boldsymbol{a}=(6,9)$,$\boldsymbol{b}=(4,6)$,$\boldsymbol{a}=\dfrac{3}{2}\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向,充分性成立;当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时,设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,其中 $\lambda>0$,则$(m,m+3)=(4\lambda,m\lambda)$,

所以$\begin{cases}m=4\lambda,\\m+3=m\lambda,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=-\dfrac{1}{2},\\m=-2\end{cases}$(不合题意,舍去)

或$\begin{cases}\lambda=\dfrac{3}{2},\\m=6,\end{cases}$所以 $m=6$,必要性成立.故选 C.

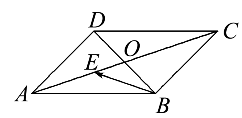
4.已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$,且$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=\dfrac{1}{2}$,则$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=$ ( )

A.1 B.$\sqrt{3}$ C.2 D.$\dfrac{3}{2}$

A **解析**:根据条件得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$,

所以$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=1-4\times\dfrac{1}{4}+4\times\dfrac{1}{4}=1$.所以$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=1$.

5.如图,在平行四边形 $ABCD$ 中,对角线 AC 与 BD 交于点 O,且$\overrightarrow{AE}=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AC}$,则$\overrightarrow{BE}=$ ( )



A.$\dfrac{5}{8}\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AD}$ B.$\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AB}-\dfrac{5}{8}\overrightarrow{AD}$

C.$-\dfrac{5}{8}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AD}$ D.$\dfrac{5}{8}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AD}$

C **解析**:由题意知,$\overrightarrow{AE}=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{8}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$,故$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=-\dfrac{5}{8}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AD}$.

6.在$\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 所对边的长分别为 a,b,c.若 $b^2+c^2-a^2=\dfrac{6}{5}bc$,则 $\sin(B+C)$的值为 ( )

A.$-\dfrac{4}{5}$ B.$\dfrac{4}{5}$ C.$-\dfrac{3}{5}$ D.$\dfrac{3}{5}$

B **解析**:由 $b^2+c^2-a^2=\dfrac{6}{5}bc$,得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{3}{5}$,则 $\sin(B+C)=\sin A=\dfrac{4}{5}$.

7.已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AC}=n\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ $(m,n\in\mathbf{R})$,则$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$共线的条件是 ( )

A.$m+n=0$ B.$m-n=0$

C.$mn+1=0$ D.$mn-1=0$

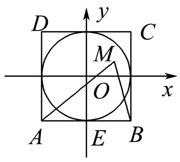
D **解析**:由$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AC}=n\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}(m,n\in\mathbf{R})$共线得 $\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}=\lambda(n\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\lambda\in\mathbf{R})$,所以$\begin{cases}1=\lambda n,\\m=\lambda,\end{cases}$即 $mn-1=0$.故选 D.

8.已知点 M 是边长为 2 的正方形 $ABCD$ 的内切圆内(含边界)一动点,则$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$的取值范围是 ( )

A.$[-1,0]$　　B.$[-1,2]$

C.$[-1,3]$　　D.$[-1,4]$

C　**解析**:建立如图所示的坐标系,



设 $M(x,y)$,其中 $A(-1,-1)$,$B(1,-1)$,易知 $x^2+y^2\leqslant 1$.而$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(-1-x,-1-y)\cdot(1-x,-1-y)=x^2+(y+1)^2-1$,若设 $E(0,-1)$,则$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=|\overrightarrow{ME}|^2-1$.

因为 $0\leqslant|\overrightarrow{ME}|\leqslant 2$,所以$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=|\overrightarrow{ME}|^2-1$ 的取值范围是$[-1,3]$.故选 C.

二、多项选择题(本题包括 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的得 2 分).

9.对任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,下列关系式恒成立的是　(　　)

A.$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$

B.$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$

C.$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2$

D.$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$

ACD　**解析**:设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot|\cos\theta|\leqslant|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$,故 A 正确;由向量的运算法则知 C,D 正确;当 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|>||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$,故 B 错误.故选 ACD.

10.在$\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.若$\sqrt{3}a=2b\sin A$,则 B 为　(　　)

A.$\frac{\pi}{6}$　B.$\frac{\pi}{3}$　C.$\frac{2\pi}{3}$　D.$\frac{5\pi}{6}$

BC　**解析**:由正弦定理得$\sqrt{3}\sin A=2\sin B\sin A$,所以 $\sin A(2\sin B-\sqrt{3})=0$.

因为 $0<A<\pi$,$0<B<\pi$,

所以 $\sin A\neq 0$,$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$或 $B=\frac{2\pi}{3}$.

11.在$\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.若 $A=\frac{\pi}{6}$,$a=2$,$c=2\sqrt{3}$,则角 C 的大小是(　　)

A.$\frac{\pi}{6}$　B.$\frac{\pi}{3}$　C.$\frac{5\pi}{6}$　D.$\frac{2\pi}{3}$

BD　**解析**:由正弦定理可得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,所以 $\sin C=\frac{c}{a}\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

而 $a<c$,所以 $A<C$,所以$\frac{\pi}{6}<C<\frac{5\pi}{6}$,故 $C=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$.

12.点 P 是$\triangle ABC$ 所在平面内一点,满足$|\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}|-|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}-2\overrightarrow{PA}|=0$,则$\triangle ABC$ 的形状不可能是　(　　)

A.钝角三角形　　B.直角三角形

C.锐角三角形　　D.等边三角形

ACD　**解析**:因为 P 是$\triangle ABC$ 所在平面内一点,且$|\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}|-|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}-2\overrightarrow{PA}|=0$,

所以$|\overrightarrow{CB}|-|(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})+(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA})|=0$,

即$|\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}|$,

所以$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}|$.

两边平方并化简得$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,所以$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AB}$,

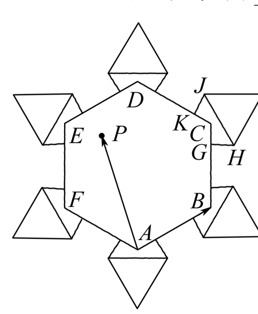
所以$\angle A=90^\circ$,则$\triangle ABC$ 一定是直角三角形.故选 ACD.

三、填空题(本题包括 4 小题,每小题 5 分,共 20 分).

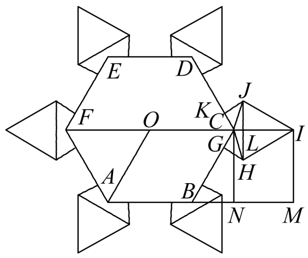
13.已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=5\sqrt{2}$,则$|\boldsymbol{b}|=$________.

5　**解析**:$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=5\sqrt{2}\Rightarrow\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=50$,将已知条件代入得$|\boldsymbol{b}|=5$.

14.剪纸艺术是一种中国传统的民间工艺,它源远流长,经久不衰.某学校为了丰富学生的课外活动,组织了剪纸比赛,小明同学在观看了 2022 年北京冬奥会的节目《雪花》之后,被舞台上一片片漂亮的“雪花”所吸引,决定用作品“雪花”参加剪纸比赛.小明的参赛作品“雪花”的整体形状可简化为如图所示的平面图形,该平面图形既是轴对称图形,又是中心对称图形,其中,P 为该平面图形上的一个动点(含边界),六边形 $ABCDEF$ 为正六边形,$DC=4CK=4JK=8$,$CK\perp JK$,$\triangle HIJ$ 为等边三角形,则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$的最大值为________.



$112+16\sqrt{3}$　**解析**:$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$可以看作是$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AP}$在$\overrightarrow{AB}$上投影向量的数量积.把题中的平面图形顺时针旋转 30°,如图,



设正六边形 $ABCDEF$ 的中心为 O，

连接 CH，CJ，连接 FI 交 HJ 于点 L，易得 O，C 在 FI 上，$HJ\perp CI$.

过点 I 作 $IM\perp AB$，垂足为 M，过点 C 作 $CN\perp AB$，垂足为点 N.

由题意得 $CH=CJ=2\sqrt{2}$，$\angle LCJ=\frac{5\pi}{12}$，

所以 $CL=CJ\cos\angle LCJ=\sqrt{3}-1$，

$HJ=2HL=2CJ\sin\angle LCJ=2(\sqrt{3}+1)$，

所以 $IL=\frac{\sqrt{3}}{2}HJ=3+\sqrt{3}$，所以 $CI=2+2\sqrt{3}$.易证四边形 $CNMI$ 为矩形，

所以 $MN=CI=2+2\sqrt{3}$.易得 $BN=\frac{1}{2}BC=4$，

所以 $AM=AB+BN+NM=14+2\sqrt{3}$.

所以当点 P 与点 I 重合时，

$(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP})_{\max}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AM}|=8\times(14+2\sqrt{3})$

$=112+16\sqrt{3}$.

15. 在 $\triangle ABC$ 中，$a=\sqrt{2}$，$b=1$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)$，则 $c=$________.

1 **解析**：因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$，

所以 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)$，

所以 $a^2+b^2-c^2=2ab\sin C$.

由余弦定理，得 $2ab\cos C=2ab\sin C$，

所以 $\tan C=1$，所以 $C=45^\circ$，

所以 $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}=\sqrt{3-2}=1$.

16. 已知向量 $\overrightarrow{OA}=(3,-4)$，$\overrightarrow{OB}=(6,-3)$，$\overrightarrow{OC}=(5-m,-3-m)$.若以点 A，B，C 为顶点的三角形存在，则实数 m 满足的条件是________.

$m\neq\frac{1}{2}$ **解析**：因为 $\overrightarrow{OA}=(3,-4)$，

$\overrightarrow{OB}=(6,-3)$，$\overrightarrow{OC}=(5-m,-3-m)$，

所以 $\overrightarrow{AB}=(3,1)$，$\overrightarrow{BC}=(-m-1,-m)$.

由于以点 A，B，C 为顶点的三角形存在，所以 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 不共线，而当 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 共线时，有 $\frac{-m-1}{3}=\frac{-m}{1}$，解得 $m=\frac{1}{2}$，故当以点 A，B，C 为顶点的三角形存在时，实数 m 满足的条件是 $m\neq\frac{1}{2}$.

四、解答题（本题包括 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）.

17.（10 分）已知 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=61$.

(1) 求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$；

(2) 求向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 上的投影向量的模.

解：(1) 因为 $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=61$，

所以 $4|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3|\boldsymbol{b}|^2=61$.

因为 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=3$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6$，

所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}$

$=\sqrt{4^2+3^2+2\times(-6)}=\sqrt{13}$.

(2) 因为 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4^2-6=10$，所以向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 上的投影向量的模为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\frac{10}{\sqrt{13}}=\frac{10\sqrt{13}}{13}$.

18.（12 分）设 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $a+c=6$，$b=2$，$\cos B=\frac{7}{9}$.

(1) 求 a，c 的值；

(2) 求 $\sin(A-B)$ 的值.

解：(1) 由余弦定理，得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，即 $b^2=(a+c)^2-2ac(1+\cos B)$.

因为 $a+c=6$，$b=2$，$\cos B=\frac{7}{9}$，所以 $ac=9$.

由 $a+c=6$，$ac=9$，解得 $a=3$，$c=3$.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中，因为 $\cos B=\frac{7}{9}$，所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

由正弦定理，得 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

因为 $a=c$，所以 A 为锐角，所以 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\frac{1}{3}$.

所以 $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B=\frac{10\sqrt{2}}{27}$.

19.（12 分）已知 a，b，c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A，B，C 的对边，$c=\sqrt{3}a\sin C-c\cos A$.

(1) 求角 A；

(2) 若 $a=2$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$，求 b，c 的值.

解:(1)由 $c=\sqrt{3}a\sin C-c\cos A$ 及正弦定理得 $\sqrt{3}\sin A\sin C-\cos A\sin C=\sin C$.

因为 $\sin C\neq0$,所以 $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

又 $0<A<\pi$,故 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{3}$,故 $bc=4$.

而 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,故 $b^2+c^2=8$.

联立 $\begin{cases}bc=4,\\b^2+c^2=8,\end{cases}$ 解得 $b=c=2$.

20.(12 分)已知 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是平面内两个不共线的非零向量,$\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{BE}=-\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{EC}=-2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$,且 A,E,C 三点共线.

(1)求实数 λ 的值;

(2)若 $\boldsymbol{e}_1=(2,1)$,$\boldsymbol{e}_2=(2,-2)$,求 $\overrightarrow{BC}$;

(3)已知点 $D(3,5)$,在(2)的条件下,若四边形 $ABCD$ 为平行四边形,求点 A 的坐标.

解:(1)$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=(2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)+(-\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_1+(1+\lambda)\boldsymbol{e}_2$.

因为 A,E,C 三点共线,所以存在实数 k,使得 $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{EC}$,

即 $\boldsymbol{e}_1+(1+\lambda)\boldsymbol{e}_2=k(-2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$,

得 $(1+2k)\boldsymbol{e}_1=(k-1-\lambda)\boldsymbol{e}_2$.

因为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是平面内两个不共线的非零向量,

所以 $\begin{cases}1+2k=0,\\\lambda=k-1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\\lambda=-\frac{3}{2}.\end{cases}$

(2)$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}=-3\boldsymbol{e}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2=(-6,-3)+(-1,1)=(-7,-2)$.

(3)因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形,所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

设 $A(x,y)$,则 $\overrightarrow{AD}=(3-x,5-y)$.

因为 $\overrightarrow{BC}=(-7,-2)$,

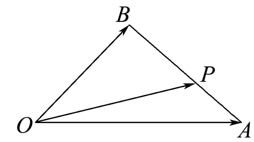
所以 $\begin{cases}3-x=-7,\\5-y=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=10,\\y=7.\end{cases}$

即点 A 的坐标为 $(10,7)$.

21.(12 分)如图,在 $\triangle OAB$ 中,已知 P 为线段 AB 上的一点,$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$.

(1)若 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{PA}$,求 x,y 的值;

(2)若 $\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{PA}$,$|\overrightarrow{OA}|=4$,$|\overrightarrow{OB}|=2$,且 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 $60°$,求 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的值.



解:(1)因为 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{PA}$,所以 $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}$,

即 $2\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$,所以 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$,即 $x=\frac{1}{2}$,$y=\frac{1}{2}$.

(2)因为 $\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{PA}$,所以 $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{PO}+3\overrightarrow{OA}$,

即 $4\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OA}$,

所以 $\overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$.

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}\right)\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$=\frac{1}{4}\times2^2-\frac{3}{4}\times4^2+\frac{1}{2}\times4\times2\times\frac{1}{2}=-9$.

22.(12 分)已知 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且满足 $a=1$,$\frac{\sin(2A+B)}{\sin A}=2(1-\cos C)$.

(1)求 b 的值;

(2)若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,求 c 的值.

解:(1)由已知可得 $\sin(2A+B)=2\sin A(1-\cos C)$,

所以 $\sin[(A+B)+A]=2\sin A-2\sin A\cos C$,

所以 $\sin(A+B)\cos A+\cos(A+B)\sin A=2\sin A+2\sin A\cos(A+B)$,

$\sin(A+B)\cos A-\cos(A+B)\sin A=2\sin A$,

所以 $\sin B=2\sin A$.由正弦定理得 $b=2a$,

又 $a=1$,所以 $b=2$.

(2)因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times1\times2\times\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\cos C=\pm\frac{1}{2}$.

当 $\cos C=\frac{1}{2}$ 时,$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1+4-c^2}{4}=\frac{1}{2}$,所以 $c=\sqrt{3}$;

当 $\cos C=-\frac{1}{2}$ 时,$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1+4-c^2}{4}=-\frac{1}{2}$,所以 $c=\sqrt{7}$.故 $c=\sqrt{3}$ 或 $c=\sqrt{7}$.

第七章 复数

7.1 复数的概念

7.1.1 数系的扩充和复数的概念

学习任务目标

1. 了解数系的扩充与引进复数的必要性.
2. 理解复数的有关概念及复数的代数形式.(数学抽象)
3. 掌握复数相等的充要条件及其应用.

问题式预习

知识点一 复数的概念及其表示

(1)我们把形如 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 的数叫做复数，其中 i 叫做虚数单位，$i^2=-1$.

全体复数所构成的集合 $\mathbf{C}=\{a+bi|a,b\in\mathbf{R}\}$ 叫做复数集.

(2)复数 $z=a+bi$ 中的 a 与 b 分别叫做复数 z 的实部与虚部.

[微思考]

虚数单位的实质是 -1 的一个平方根吗？

提示：因为 $i^2=-1$，所以 i 是 -1 的一个平方根.

知识点二 复数相等及分类

1. 复数相等的充要条件

在复数集 $\mathbf{C}=\{a+bi|a,b\in\mathbf{R}\}$ 中任取两个数 $a+bi$，$c+di(a,b,c,d\in\mathbf{R})$，规定：$a+bi$ 与 $c+di$ 相等当且仅当 $a=c$ 且 $b=d$.

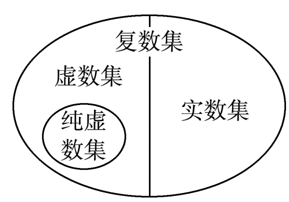
2. 复数的分类

(1)对于复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，当且仅当 $b=0$ 时，它是实数；当且仅当 $a=b=0$ 时，它是实数 0；当 $b\neq0$ 时，它叫做虚数；当 $a=0$ 且 $b\neq0$ 时，它叫做纯虚数.

复数的分类情况如下：

$$z=a+bi\ (a,b\in\mathbf{R})\begin{cases}\text{实数}(b=0)\\ \text{虚数}(b\neq0)\begin{cases}\text{非纯虚数}(a\neq0),\\ \text{纯虚数}(a=0)\end{cases}\end{cases}$$

(2)复数分类的集合表示：



[微训练]

1. 复数 $(2+\sqrt{3})i$ 的实部是 ( )

A. 2　B. $\sqrt{3}$　C. $2+\sqrt{3}$　D. 0

D **解析**：复数 $(2+\sqrt{3})i$ 的实部是 0.

2. 若 $a-2i=bi+1$，$a,b\in\mathbf{R}$，则 $a^2+b^2=$______.

5 **解析**：因为 $a-2i=bi+1$，所以 $a=1$，$b=-2$. 所以 $a^2+b^2=5$.

任务型课堂

任务一 复数的概念

1. 若复数 z 的实部和虚部之和为 3，则复数 z 可能为 ( )

A. $3-i$　B. $3+i$　C. $-1+4i$　D. $1+3i$

C **解析**：选项 C 中，复数 $-1+4i$ 的实部和虚部分别为 -1 和 4，故二者之和为 3. 故选 C.

2. 已知复数 $z=a^2-(2-b)i$ 的实部和虚部分别是 2 和 3，则实数 a,b 的值分别是 ( )

A. $\sqrt{2}$，1　B. $\sqrt{2}$，5

C. $\pm\sqrt{2}$，5　D. $\pm\sqrt{2}$，1

C **解析**：令 $\begin{cases}a^2=2,\\ -2+b=3,\end{cases}$ 得 $a=\pm\sqrt{2}$，$b=5$.

3.给出下列命题：①若 $z\in \mathbf{C}$，则 $z^2\geqslant 0$；②$2i-1$ 的虚部是 $2i$；③$2i$ 的实部是 0.其中真命题的个数为 (　　)

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

B　**解析**：对于①，当 $z\in \mathbf{R}$ 时，$z^2\geqslant 0$ 成立；否则不成立，如 $z=i$，$z^2=-1<0$，①为假命题.对于②，$2i-1=-1+2i$，其虚部为 2，不是 $2i$，②为假命题.对于③，$2i=0+2i$，其实部是 0，③为真命题.

【类题通法】

判断与复数有关的命题是否正确的方法

(1)举反例：判断一个命题为假，只要举一个反例即可，所以解答这种类型的题时，可按照“先特殊，后一般，先否定，后肯定”的方法进行解答.

(2)化代数形式：确定复数的实部、虚部时，不但要把复数化为 $a+bi$ 的形式，更要注意只有这里的 a,b 均为实数时，才能确定复数的实部、虚部.

任务二　复数的分类

当实数 m 为何值时，复数 $\lg(m^2-2m-7)+(m^2+5m+6)i$ 是：(1)纯虚数？(2)实数？(3)虚数？

解：(1)当 $\begin{cases}\lg(m^2-2m-7)=0,\\ m^2+5m+6\neq 0\end{cases}$ 时，

复数 $\lg(m^2-2m-7)+(m^2+5m+6)i$ 是纯虚数，

解得 $m=4$.

(2)当 $\begin{cases}m^2-2m-7>0,\\ m^2+5m+6=0\end{cases}$ 时，

复数 $\lg(m^2-2m-7)+(m^2+5m+6)i$ 是实数，

解得 $m=-2$ 或 $m=-3$.

(3)当 $\begin{cases}m^2-2m-7>0,\\ m^2+5m+6\neq 0\end{cases}$ 时，

复数 $\lg(m^2-2m-7)+(m^2+5m+6)i$ 是虚数，

解得 $m<1-2\sqrt{2}$ 或 $m>1+2\sqrt{2}$ 且 $m\neq -2$，$m\neq -3$.

【类题通法】

1.利用复数的分类求参数时，应将复数化为代数形式 $z=a+bi(a,b\in \mathbf{R})$.

2.要注意确定使实部、虚部有意义的条件，再结合实部与虚部的取值求解.

3.要特别注意复数 $z=a+bi(a,b\in \mathbf{R})$ 为纯虚数的充要条件是 $a=0$ 且 $b\neq 0$.

任务三　复数相等条件的应用

[探究活动]

我们知道，对于两个实数 a 和 b，有 $a>b$，$a=b$，$a<b$ 三种大小关系，结合复数的知识，探究下列问题.

探究 1：由 $3>2$ 能推出 $3+i>2+i$ 吗？

提示：不能.

探究 2：两个复数能比较大小吗？

提示：若两个复数都是实数，可以比较大小，否则是不能比较大小的.

[评价活动]

1.若 $xi-i^2=y+2i$，$x,y\in \mathbf{R}$，则复数 $x+yi=$ (　　)

A.$-2+i$　　B.$2+i$

C.$1-2i$　　D.$1+2i$

B　**解析**：由 $i^2=-1$，得 $xi-i^2=1+xi$.由题意得 $1+xi=y+2i$，根据复数相等的充要条件得 $x=2$，$y=1$，故 $x+yi=2+i$.

2.若复数 $z=(m+1)+(m^2-9)i<0$，则实数 m 的值等于________.

-3　**解析**：因为 $z<0$，所以 $m^2-9=0$，$m+1<0$，所以 $m=-3$.

3.关于 x 的方程 $3x^2-\frac{a}{2}x-1=(10-x-2x^2)i$ 有实根，求实数 a 的值.

解：设方程的实根为 $x=m$，

则原方程可变为 $3m^2-\frac{a}{2}m-1=(10-m-2m^2)i$，

所以 $\begin{cases}3m^2-\frac{a}{2}m-1=0,\\ 10-m-2m^2=0,\end{cases}$ 解得 $a=11$ 或 $a=-\frac{71}{5}$.

【类题通法】

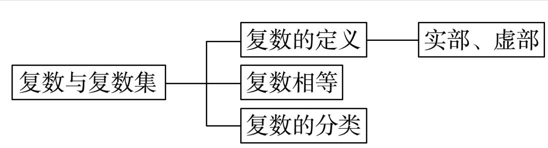
复数相等问题的解题技巧

(1)必须已知复数的代数形式才可以根据实部与实部相等，虚部与虚部相等列方程组求解.

(2)根据复数相等的条件，将复数问题转化为实数问题，为应用方程思想提供了条件，同时这也是复数问题实数化思想的体现.

(3)如果两个复数都是实数，可以比较大小，否则是不能比较大小的.

提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1. 下列复数中,满足方程 $x^2+2=0$ 的是 ( )

A. ±1　　B. $\pm i$

C. $\pm\sqrt{2}i$　　D. $\pm2i$

C **解析**:由题意得 $x^2=-2=2i^2$,所以 $x=\pm\sqrt{2}i$.

2. 以 $\sqrt{5}i-\sqrt{5}$ 的虚部为实部,以 $8i^2+\sqrt{2}i$ 的实部为虚部的复数是 ( )

A. $\sqrt{5}-8i$　　B. $\sqrt{5}+8i$

C. $-\sqrt{5}+8i$　　D. $-\sqrt{5}-8i$

A **解析**:$\sqrt{5}i-\sqrt{5}$ 的虚部为 $\sqrt{5}$,$8i^2+\sqrt{2}i=-8+\sqrt{2}i$ 的实部为 -8.

3. 如果 $(m^2-1)+(m^2-2m)i>0$,则实数 m 的值为________.

2 **解析**:当复数是实数时,才能比较大小,

则 $\begin{cases}m^2-1>0,\\m^2-2m=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m>1\text{ 或 }m<-1,\\m=0\text{ 或 }m=2\end{cases}\Rightarrow m=2$.

所以当 $m=2$ 时,$(m^2-1)+(m^2-2m)i>0$.

4. 若复数 $z=m^2-1+(m^2-m-2)i$ 为实数,则实数 m 的值可以为________.

-1 或 2 **解析**:因为复数 $z=m^2-1+(m^2-m-2)i$ 为实数,

所以 $m^2-m-2=0$,解得 $m=-1$ 或 $m=2$.

5. 实数 x 分别取什么值时,复数 $z=\dfrac{x^2-x-6}{x+3}+(x^2-2x-15)i$ 是:(1)实数?(2)虚数?(3)纯虚数?

解:(1)当 x 满足 $\begin{cases}x^2-2x-15=0,\\x+3\neq0,\end{cases}$ 即 $x=5$ 时,z 是实数.

(2)当 x 满足 $\begin{cases}x^2-2x-15\neq0,\\x+3\neq0,\end{cases}$ 即 $x\neq-3$ 且 $x\neq5$ 时,z 是虚数.

(3)当 x 满足 $\begin{cases}x^2-x-6=0,\\x+3\neq0,\\x^2-2x-15\neq0,\end{cases}$ 即 $x=-2$ 或 $x=3$ 时,z 是纯虚数.

综合性·创新提升

1. 复数 $z=\dfrac{1}{a-1}+(a^2-1)i$ 是实数,则实数 a 的值为 ( )

A. 1 或 -1　　B. 1

C. -1　　D. 0 或 -1

C **解析**:因为复数 $z=\dfrac{1}{a-1}+(a^2-1)i$ 是实数,且 a 为实数,则 $\begin{cases}a^2-1=0,\\a-1\neq0,\end{cases}$ 解得 $a=-1$.故选 C.

2. 已知 $z_1=-4a+1+(2a^2+3a)i$,$z_2=2a+(a^2+a)i$,其中 $a\in\mathbf{R}$,$z_1>z_2$,则 a 的值为 ( )

A. 0　　B. -1　　C. $-\dfrac{3}{2}$　　D. $\dfrac{1}{6}$

A **解析**:由 $z_1>z_2$,得 $\begin{cases}2a^2+3a=0,\\a^2+a=0,\\-4a+1>2a,\end{cases}$

即 $\begin{cases}a=0\text{ 或 }a=-\dfrac{3}{2},\\a=0\text{ 或 }a=-1,\\a<\dfrac{1}{6},\end{cases}$ 解得 $a=0$.

3. (多选题)对于复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,下列结论正确的是 ( )

A. 若 $a=0$,则 $a+bi$ 为纯虚数

B. 若 $a-bi=3+2i$,则 $a=3,b=2$

C. 若 $b=0$,则 $a+bi$ 为实数

D. z 为虚数时,$b\neq0$

CD **解析**:因为复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,所以当 $a=0$ 且 $b\neq0$ 时,复数为纯虚数,故 A 错误;

当 $b=0$ 时,复数为实数,故 C 正确;

z 为虚数时,$b\neq0$,故 D 正确;

对于 B,$a-bi=3+2i$,则 $\begin{cases}a=3,\\-b=2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=3,\\b=-2,\end{cases}$ 故 B 错误.

4. 已知复数 $z=a^2+(2a+3)i(a\in\mathbf{R})$ 的实部大于虚部,则实数 a 的取值范围是________.

$(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$ **解析**:由已知可得 $a^2>2a+3$,即 $a^2-2a-3>0$,解得 $a>3$ 或 $a<-1$,

因此实数 a 的取值范围是 $\{a|a>3\text{ 或 }a<-1\}$.

5. 已知 $z_1=-3-4i$,$z_2=(n^2-3m-1)+(n^2-m-6)i$,且 $z_1=z_2$,则实数 $m=$________,$n=$________.

2 ±2 **解析**:由复数相等的充要条件有

$\begin{cases}n^2-3m-1=-3,\\n^2-m-6=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=2,\\n=\pm2.\end{cases}$

6.(1)若$(4x-2y)\mathrm{i}=x+1$,求实数x,y的值;

(2)若不等式$m^2-(m^2-2m)\mathrm{i}<9+\frac{m-2}{m}\mathrm{i}$成立,求实数$m$的值.

解:(1)由两个复数相等的充要条件可得$\begin{cases}0=x+1,\\4x-2y=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-1,\\y=-2,\end{cases}$

即实数x,y的值分别为$-1,-2$.

(2)依题意可得$\begin{cases}m^2-2m=0,\\\frac{m-2}{m}=0,\\m^2<9,\end{cases}$

即$\begin{cases}m=0\text{ 或 }m=2,\\m=2,m\neq0,\\-3<m<3,\end{cases}$

解得$m=2$,即实数m的值等于2.

7.1.2　复数的几何意义

学习任务目标

1.理解复数的几何意义,会求一个复数的模.(直观想象)

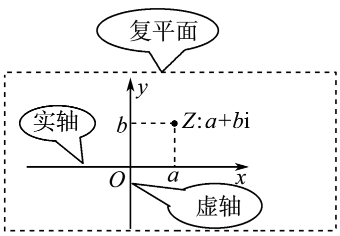
2.理解复数、复平面内的点、向量的一一对应关系.

问题式预习

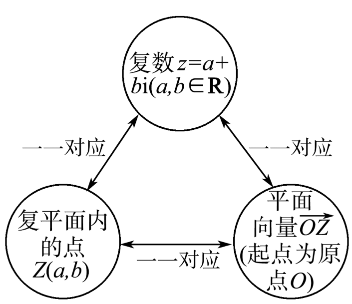
知识点一　复平面与复数的几何意义

1.复平面

建立直角坐标系来表示复数的平面叫做<u>复平面</u>,x轴叫做<u>实轴</u>,y轴叫做<u>虚轴</u>.实轴上的点都表示实数;除了原点外,虚轴上的点都表示纯虚数.



2.复数的几何意义



[微训练]

1.复数$z=3-5\mathrm{i}$在复平面内对应的点的坐标是(　　)

A.$(3,-5)$　　B.$(3,5)$

C.$(3,-5\mathrm{i})$　　D.$(3,5\mathrm{i})$

A　**解析**:$z=3-5\mathrm{i}$在复平面内对应的点的坐标为$(3,-5)$.

2.若复数z对应的向量$\overrightarrow{OZ}=(0,-3)$,则复数$z$(　　)

A.等于0

B.等于-3

C.对应的点在虚轴上

D.对应的点既不在实轴上,也不在虚轴上

C　**解析**:$\overrightarrow{OZ}=(0,-3)$,则$\overrightarrow{OZ}$对应的复数$z=-3\mathrm{i}$,其对应的点在虚轴上.

3.(多选题)与x轴同方向的单位向量为$\boldsymbol{e}_1$,与y轴同方向的单位向量为$\boldsymbol{e}_2$,则(　　)

A.$\boldsymbol{e}_1$对应实数1　　B.$\boldsymbol{e}_2$对应虚数i

C.$\boldsymbol{e}_1$对应虚数i　　D.$\boldsymbol{e}_2$对应实数1

AB　**解析**:$\boldsymbol{e}_1=(1,0)$,$\boldsymbol{e}_2=(0,1)$.因此$\boldsymbol{e}_1$对应实数1,$\boldsymbol{e}_2$对应虚数i.

知识点二　复数的模、共轭复数

1.复数的模

向量$\overrightarrow{OZ}$的模叫做复数$z=a+b\mathrm{i}$的模或绝对值,记作<u>$|z|$</u>或<u>$|a+b\mathrm{i}|$</u>.即$|z|=|a+b\mathrm{i}|=$<u>$\sqrt{a^2+b^2}$</u>,其中$a,b\in\mathbf{R}$.

如果$b=0$,那么$z=a+b\mathrm{i}$是一个实数a,它的模就等于$|a|$(a的绝对值).

2.共轭复数

(1)定义:一般地,当两个复数的实部<u>相等</u>,虚部<u>互为相反数</u>时,这两个复数叫做互为共轭复数.虚部不等于0的两个共轭复数也叫做共轭虚数.

(2)表示方法:复数z的共轭复数用$\bar{z}$表示,即如果$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$,那么$\bar{z}=$<u>$a-b\mathrm{i}$</u>.

[微训练]

1. 复数 $4-2i$ 的模等于 ( )

A. 2　　B. $\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{5}$　　D. 20

C **解析**:$|z|=\sqrt{4^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$.

2. 若复数 $z=-2+i$,则复数 z 的共轭复数 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于 ( )

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

C **解析**:复数 z 的共轭复数 $\bar{z}=-2-i$,在复平面内对应的点为 $(-2,-1)$,位于第三象限.

任务型课堂

任务一 复数与复平面内点的关系

1. 复数 $z=-2+i$ 在复平面内对应的点位于 ( )

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

B **解析**:复数 $z=-2+i$ 在复平面上对应的点的坐标为 $(-2,1)$,它位于第二象限.

2. 当 $\frac{2}{3}<m<1$ 时,复数 $z=(3m-2)+(m-1)i$(i 为虚数单位)在复平面内对应的点位于 ( )

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

D **解析**:因为 $\frac{2}{3}<m<1$,所以 $0<3m-2<1$,$m-1<0$,所以复数 $z=(3m-2)+(m-1)i$ 在复平面内对应的点位于第四象限.

3. 若复数 $z=(a^2-2a)+(a^2-a-2)i(a\in\mathbf{R})$ 对应的点在虚轴上,则 ( )

A. $a\neq2$ 或 $a\neq1$　　B. $a\neq2$ 或 $a\neq-1$

C. $a=2$ 或 $a=0$　　D. $a=0$

C **解析**:由题意知 $a^2-2a=0$,解得 $a=0$ 或 $a=2$.

【类题通法】

利用复数与点的对应关系解题的步骤

(1)找对应关系:复数的几何意义即复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 可以用复平面内的点 $Z(a,b)$ 来表示,这是解决此类问题的根据.

(2)列出方程(组):此类问题可通过建立复数的实部与虚部应满足的等量关系,解方程(组)或不等式(组)求解.

任务二 复数与复平面内向量的关系

在复平面内,点 A,B,C 对应的复数分别为 $1+4i,-3i,2$,O 为复平面内的原点.

(1)求向量 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 对应的复数;

(2)求平行四边形 $ABCD$ 的顶点 D 对应的复数.

解:(1)由已知得 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 所对应的复数分别为 $1+4i,-3i,2$,

则 $\overrightarrow{OA}=(1,4)$,$\overrightarrow{OB}=(0,-3)$,$\overrightarrow{OC}=(2,0)$,

因此 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(1,1)$,$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(1,-4)$.

故 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为 $1+i$,$\overrightarrow{AC}$ 对应的复数为 $1-4i$.

(2)方法一:由已知得点 A,B,C 的坐标分别为 $(1,4),(0,-3),(2,0)$,则 AC 的中点为 $\left(\frac{3}{2},2\right)$,由平行四边形的性质知 BD 的中点也是 $\left(\frac{3}{2},2\right)$.

设 $D(x_0,y_0)$,

则有 $\begin{cases}\frac{0+x_0}{2}=\frac{3}{2},\\ \frac{-3+y_0}{2}=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=3,\\ y_0=7,\end{cases}$

故 $D(3,7)$.

即顶点 D 对应的复数为 $3+7i$.

方法二:由已知得 $\overrightarrow{OA}=(1,4)$,$\overrightarrow{OB}=(0,-3)$,$\overrightarrow{OC}=(2,0)$,所以 $\overrightarrow{BA}=(1,7)$,$\overrightarrow{BC}=(2,3)$.

由平行四边形的性质得 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=(3,10)$,

所以 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}=(3,7)$,于是 $D(3,7)$.

即顶点 D 对应的复数为 $3+7i$.

【类题通法】

复数与平面向量的对应关系

(1)根据复数与平面向量的对应关系可知,当平面向量的起点在原点时,向量的终点对应的复数即为向量对应的复数,反之复数对应的点确定后,从原点引出的指向该点的有向线段,即为复数对应的向量.

(2)解决复数与平面向量一一对应的问题时,一般以复数与复平面内的点一一对应为工具,实现复数、复平面内的点、向量之间的转化.

任务三 复数的模及应用

[探究活动]

已知复数 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$,探究下列问题.

探究1:z 在复平面内的对应点 Z 的坐标是什么?z 的模是多少?

提示:$Z(x,y)$. $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

探究2:根据两点间的距离公式,$|z|$ 的几何意义是什么?

提示：复数 z 在复平面内的对应点 $Z(x,y)$ 与原点的距离.

探究 3：对于不相等的两个复数 z_1,z_2，$|z_1-z_2|$ 的几何意义是什么？

提示：复平面内 z_1,z_2 对应的两点间的距离.

［**评价活动**］

1. 求复数 $z_1=6+8\mathrm{i}$ 及 $z_2=-\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}\,\mathrm{i}$ 的模，并比较它们的大小.

解：因为 $|z_1|=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

$|z_2|=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+(-\sqrt{2})^2}=\dfrac{3}{2}$，

所以 $|z_1|>|z_2|$.

2. 已知复数 $z=3+a\mathrm{i}$，且 $|z|<4$，求实数 a 的取值范围.

解：因为 $z=3+a\mathrm{i}$，所以 $|z|=\sqrt{3^2+a^2}$.

由已知得 $|z|=\sqrt{3^2+a^2}<4$，

所以 $a^2<7$，所以 a 的取值范围为 $(-\sqrt{7},\sqrt{7})$.

3. 若 $|z-1|=|z+1|$，则复数 z 在复平面内对应的点组成什么图形？

解：因为 $|z-1|=|z+1|$，所以复数 z 在复平面内对应的点 Z 到 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$ 的距离相等，即点 Z 在以 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$ 为端点的线段的中垂线上，所以复数 z 在复平面内对应的点组成一条直线.

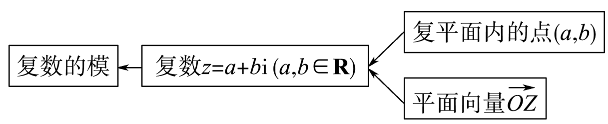
【类题通法】

复数的模的计算

(1)计算复数的模时，应先确定复数的实部和虚部，再利用模长公式计算.虽然两个虚数不能比较大小，但它们的模可以比较大小.

(2)设出复数的代数形式，利用模的定义将问题转化为实数问题求解.

提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1. 向量 $\boldsymbol{a}=(-2,1)$ 所对应的复数是　　(　　)

A. $z=1+2\mathrm{i}$　　B. $z=1-2\mathrm{i}$

C. $z=-1+2\mathrm{i}$　　D. $z=-2+\mathrm{i}$

D　**解析**：向量 $\boldsymbol{a}=(-2,1)$ 所对应的复数是 $z=-2+\mathrm{i}$.

2. 若复数 $z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，则其共轭复数 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于　　(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

A　**解析**：因为 $z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，所以 $\bar{z}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，

则 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点的坐标为 $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，位于第一象限.

3. (多选题)已知复数 $z=(2a^2-4a)+(a+2)\mathrm{i}\ (a\in\mathbf{R})$ 对应的点在虚轴上，则　　(　　)

A. $a\neq2$　　B. $a\neq1$

C. $a=0$　　D. $a=2$

CD　**解析**：由题意，得 $2a^2-4a=0$，解得 $a=0$ 或 $a=2$.故选 CD.

4. 在复平面内，复数 $6+5\mathrm{i}$，$-2+3\mathrm{i}$ 对应的点分别为 A，B.若 C 为线段 AB 的中点，则点 C 对应的复数是　　(　　)

A. $4+8\mathrm{i}$　　B. $8+2\mathrm{i}$

C. $2+4\mathrm{i}$　　D. $4+\mathrm{i}$

C　**解析**：复数 $6+5\mathrm{i}$ 对应的点 A 的坐标为 $(6,5)$，$-2+3\mathrm{i}$ 对应的点 B 的坐标为 $(-2,3)$.由中点坐标公式知点 C 的坐标为 $(2,4)$，所以点 C 对应的复数为 $2+4\mathrm{i}$.故选 C.

5. 已知复数 z 的实部为 1，且 $|z|=2$，则复数 z 的虚部是　　(　　)

A. $-\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}\,\mathrm{i}$　　C. $\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}$　　D. $\pm\sqrt{3}$

D　**解析**：设复数 z 的虚部为 $b\ (b\in\mathbf{R},b\neq0)$.因为 $|z|=2$，实部为 1，所以 $1+b^2=4$，所以 $b=\pm\sqrt{3}$.故选 D.

6. 已知 $3-4\mathrm{i}=x+y\mathrm{i}\ (x,y\in\mathbf{R})$，则 $|1-5\mathrm{i}|$，$|x-y\mathrm{i}|$，$|y+2\mathrm{i}|$ 的大小关系为________.

$|y+2\mathrm{i}|<|x-y\mathrm{i}|<|1-5\mathrm{i}|$　**解析**：由 $3-4\mathrm{i}=x+y\mathrm{i}\ (x,y\in\mathbf{R})$，得 $x=3$，$y=-4$.

而 $|1-5\mathrm{i}|=\sqrt{1+(-5)^2}=\sqrt{26}$，

$|x-y\mathrm{i}|=|3+4\mathrm{i}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

$|y+2i|=|-4+2i|=\sqrt{(-4)^2+2^2}=\sqrt{20}$.

因为$\sqrt{20}<5<\sqrt{26}$，所以$|y+2i|<|x-yi|<|1-5i|$.

7. 复数 $4+3i$ 与 $-2-5i$ 分别对应向量$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$，试求向量$-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$对应的复数.

解：由题意得$\overrightarrow{OA}=(4,3)$，$\overrightarrow{OB}=(-2,-5)$，

所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-6,-8)$，

所以$-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(3,4)$.

所以向量$-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$对应的复数是 $3+4i$.

综合性·创新提升

1.（多选题）已知复数 $z=1+2i$，则 （　　）

A. $|z|=5$

B. $|\overline{z}|=\sqrt{5}$

C. $\overline{z}$在复平面内对应的点在第四象限

D. 复数$\overline{z}$对应的向量为$(-1,2)$

BC　**解析**：因为 $z=1+2i$，所以 $|z|=|1+2i|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，所以选项 A 错误；又因为$|\overline{z}|=|z|=\sqrt{5}$，所以选项 B 正确；因为 $z=1+2i$，所以$\overline{z}=1-2i$ 所对应的点为$(1,-2)$，在第四象限，所以选项 C 正确，选项 D 错误.

2. 已知复数 z 对应的向量为$\overrightarrow{OZ}$（O 为坐标原点），$\overrightarrow{OZ}$与实轴正向的夹角为 $120°$，且复数 z 的模为 2，则复数 z 为 （　　）

A. $1+\sqrt{3}i$　　B. 2

C. $(-1,\sqrt{3})$　　D. $-1+\sqrt{3}i$

D　**解析**：设复数 z 对应的点为(x,y)，则 $x=|z|\cdot\cos 120°=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$，

$y=|z|\cdot\sin 120°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

所以复数 z 对应的点为$(-1,\sqrt{3})$，

所以 $z=-1+\sqrt{3}i$.

3.（多选题）设 $z=(2t^2+5t-3)+(t^2+2t+2)i$，$t\in\mathbf{R}$，i 为虚数单位，则以下结论正确的是 （　　）

A. z 在复平面内对应的点在第一象限

B. z 一定不为纯虚数

C. z 一定不为实数

D. $\overline{z}$在复平面内对应的点在实轴的下方

CD　**解析**：因为 $2t^2+5t-3=2\left(t+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{49}{8}\geqslant-\frac{49}{8}$，$t^2+2t+2=(t+1)^2+1>0$，所以复数 z 对应的点可能在第一象限、第二象限或虚轴上，故 A 错误；当$\begin{cases}2t^2+5t-3=0,\\t^2+2t+2\neq0,\end{cases}$即 $t=-3$ 或 $t=\frac{1}{2}$ 时，z 为纯虚数，故 B 错误；

因为 $t^2+2t+2>0$ 恒成立，所以 z 一定不为实数，故 C 正确；由选项 A 的分析知，z 对应的点在实轴的上方，所以$\overline{z}$对应的点在实轴的下方，故 D 正确.

4. 若 $t\in\mathbf{R}$，$t\neq-1$ 且 $t\neq0$，复数 $z=\frac{t}{1+t}+\frac{1+t}{t}i$，则当 $t=$______时，$|z|$的最小值为______.

$-\frac{1}{2}$　$\sqrt{2}$　**解析**：$|z|^2=\left(\frac{t}{1+t}\right)^2+\left(\frac{1+t}{t}\right)^2\geqslant2\cdot\frac{t}{1+t}\cdot\frac{1+t}{t}=2$，

当且仅当$\frac{t}{1+t}=\frac{1+t}{t}$，即 $t=-\frac{1}{2}$ 时取等号，

所以$|z|_{\min}=\sqrt{2}$.

5. 实数 x 取什么值时，复平面内对应复数 $z=x^2+x-6+(x^2-2x-15)i$ 的点 Z 满足下列条件？

(1) 位于第三象限；

(2) 位于第四象限；

(3) 位于直线 $x-y-3=0$ 上.

解：因为 x 是实数，所以 x^2+x-6，$x^2-2x-15$ 也是实数.

(1) 当实数 x 满足$\begin{cases}x^2+x-6<0,\\x^2-2x-15<0,\end{cases}$即 $-3<x<2$ 时，点 Z 位于第三象限.

(2) 当实数 x 满足$\begin{cases}x^2+x-6>0,\\x^2-2x-15<0,\end{cases}$

即 $2<x<5$ 时，点 Z 位于第四象限.

(3) 当实数 x 满足$(x^2+x-6)-(x^2-2x-15)-3=0$，

即 $3x+6=0$，也即 $x=-2$ 时，

点 Z 位于直线 $x-y-3=0$ 上.

7.2　复数的四则运算

7.2.1　复数的加、减运算及其几何意义

学习任务目标

1. 掌握复数代数形式的加、减运算法则.
2. 理解复数代数形式的加、减运算的几何意义.
3. 能够利用复数代数形式的加、减运算法则及几何意义解决问题.

问题式预习

知识点一　复数代数形式的加、减运算

1. 运算法则

设 $z_1=a+bi, z_2=c+di(a,b,c,d\in\mathbf{R})$，

则 $z_1+z_2=\underline{(a+c)+(b+d)i}$，

$z_1-z_2=\underline{(a-c)+(b-d)i}$.

2. 加法运算律

对任意 $z_1,z_2,z_3\in\mathbf{C}$，有 $z_1+z_2=\underline{z_2+z_1}$，$(z_1+z_2)+z_3=\underline{z_1+(z_2+z_3)}$.

[微训练]

1. 若 $z_1=2+4i, z_2=3-i$，则 $z_1+z_2=$　　(　　)

A. $5+5i$

B. $1+3i$

C. $5+3i$

D. $-1+5i$

C　**解析**：$z_1+z_2=(2+3)+[4+(-1)]i=5+3i$.

2. 若 $z_1=1-i, z_2=2+i$，则 $z_1-z_2=$　　(　　)

A. 3

B. $-1-2i$

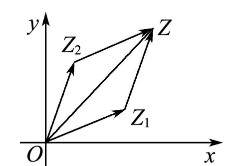
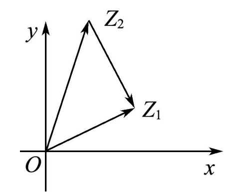
C. $1+2i$

D. $-1+2i$

B　**解析**：$z_1-z_2=(1-2)+[(-1)-1]i=-1-2i$.

知识点二　复数加、减运算的几何意义

若复数 z_1,z_2 对应的向量分别为 $\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2}$.

复数加法的几何意义	$\overrightarrow{OZ}$ 是以 $\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2}$ 为邻边的平行四边形的对角线，复数 z_1+z_2 是 $\overrightarrow{OZ}$ 所对应的复数	
复数减法的几何意义	复数 z_1-z_2 是从向量 $\overrightarrow{OZ_2}$ 的终点指向向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 的终点的向量 $\overrightarrow{Z_2Z_1}$ 所对应的复数	

[微训练]

1. 已知向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 对应的复数是 $5-4i$，向量 $\overrightarrow{OZ_2}$ 对应的复数是 $-5+4i$，则 $\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}$ 对应的复数是________.

0　**解析**：因为 $\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}=(5,-4)+(-5,4)=(0,0)$，所以 $\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}$ 对应的复数是 0.

2. 已知向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 对应的复数是 $2-3i$，向量 $\overrightarrow{OZ_2}$ 对应的复数是 $3-4i$，则向量 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 对应的复数为________.

$1-i$　**解析**：因为 $\overrightarrow{Z_1Z_2}=\overrightarrow{OZ_2}-\overrightarrow{OZ_1}=(3,-4)-(2,-3)=(1,-1)$，所以 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 对应的复数为 $1-i$.

任务型课堂

任务一　复数的加、减运算

1. 已知复数 $z_1=3+4i, z_2=3-4i$，则 $z_1+z_2=$　　(　　)

A. $8i$　　B. 6

C. $6+8i$　　D. $6-8i$

B　**解析**：$z_1+z_2=3+4i+3-4i=6$.

2. 设 $z_1=2+bi, z_2=a+i, a,b\in\mathbf{R}$，当 $z_1+z_2=0$ 时，复数 $a+bi=$　　(　　)

A. $1+i$　　B. $2+i$

C. 3　　D. $-2-i$

D　**解析**：$z_1+z_2=a+2+(b+1)i=0$.

由 $\begin{cases}2+a=0,\\ b+1=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=-2,\\ b=-1.\end{cases}$ 所以 $a+bi=-2-i$.

3. 计算：$(2-3i)-(-4+2i)=$________.

$6-5i$ **解析**：$(2-3i)-(-4+2i)=(2+4)+(-3-2)i=6-5i$.

4. 已知复数 $z_1=(a^2-2)+(a-4)i$，$z_2=a-(a^2-2)i$ $(a\in\mathbf{R})$，且 z_1-z_2 为纯虚数，则 $a=$________.

-1 **解析**：由题意知 $z_1-z_2=(a^2-a-2)+(a-4+a^2-2)i$ $(a\in\mathbf{R})$ 为纯虚数，所以 $\begin{cases}a^2-a-2=0,\\a^2+a-6\neq 0,\end{cases}$ 解得 $a=-1$.

【类题通法】

复数加、减运算的思路

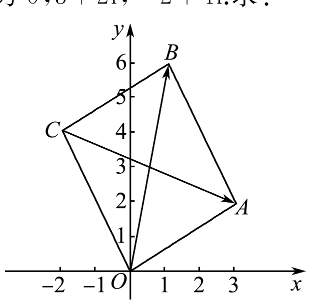
两个复数相加(减)，就是把两个复数的实部相加(减)，虚部相加(减).复数的减法是加法的逆运算，两个复数相减，也可以看成是加上这个复数的相反数.当多个复数相加(减)时，可将这些复数的所有实部相加(减)，所有虚部相加(减).

任务二 复数加、减运算的几何意义及应用

1. 若复数 z_1，z_2 满足 $|z_1|=|z_2|=1$，$|z_1+z_2|=\sqrt{2}$，则 $|z_1-z_2|=$________.

$\sqrt{2}$ **解析**：由 $|z_1|=|z_2|=1$，$|z_1+z_2|=\sqrt{2}$，知 z_1，z_2，z_1+z_2 对应的点是一个边长为1的正方形的三个顶点，所求 $|z_1-z_2|$ 是这个正方形的一条对角线长，所以 $|z_1-z_2|=\sqrt{2}$.

2. 如图所示，平行四边形 $OABC$ 的顶点 O，A，C 对应的复数分别为 0，$3+2i$，$-2+4i$.求：



(1) $\overrightarrow{AO}$ 对应的复数，$\overrightarrow{BC}$ 对应的复数；

(2) $\overrightarrow{CA}$ 对应的复数；

(3) $\overrightarrow{OB}$ 对应的复数及 $\overrightarrow{OB}$ 的模.

解：(1)因为 $\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{OA}$，

所以 $\overrightarrow{AO}$ 对应的复数为 $-3-2i$.

因为 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}$，所以 $\overrightarrow{BC}$ 对应的复数为 $-3-2i$.

(2)因为 $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$，

所以 $\overrightarrow{CA}$ 对应的复数为 $(3+2i)-(-2+4i)=5-2i$.

(3)因为 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$，

所以 $\overrightarrow{OB}$ 所对应的复数为 $(3+2i)+(-2+4i)=1+6i$，

$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{1^2+6^2}=\sqrt{37}$.

【类题通法】

运用复数加、减运算的几何意义应注意的问题

(1)向量加法运算的平行四边形法则和三角形法则是复数加法、减法运算的几何意义的依据.

(2)利用向量加法“首尾相接”和向量减法“指向被减向量”的特点，在三角形内可求得第三个向量及其对应的复数.

(3)注意向量 $\overrightarrow{AB}$ 对应的复数是 z_B-z_A（终点对应的复数减去起点对应的复数）.

任务三 复数模的最值问题

[探究活动]

根据向量三角不等式：对于任意两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，探究下列问题.

探究1：把上述向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 换成两个复数 z_1 和 z_2，写出这个不等式，并判断它是否成立.

提示：$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$，仍然成立.因为每个复数对应一个向量，所以成立.

探究2：探究1中的不等式左右等号成立的条件是什么？

提示：当且仅当复数 z_1 和 z_2 对应的向量反向时，左边等号成立，当且仅当复数 z_1 和 z_2 对应的向量同向时，右边等号成立.

[评价活动]

已知 $z\in\mathbf{C}$ 且 $|z|=1$，求 $\mu=|z+2+2i|$ 的最大值和最小值.

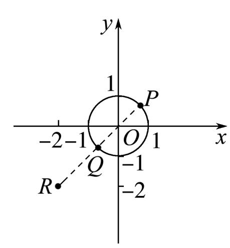
解：方法一(几何法——利用模的几何意义)：

由 $|z|=1$ 知复数 z 对应的点 Z 在以原点为圆心、1为半径的圆上.

$\mu=|z+2+2i|=|z-(-2-2i)|$ 在复平面内表示定点 $R(-2,-2)$ 到点 Z 的距离.

如图，容易得出 $\mu_{\max}=|PR|=|RO|+1=2\sqrt{2}+1$，

$\mu_{\min}=|QR|=|RO|-1=2\sqrt{2}-1$.



方法二(绝对值不等式法——利用不等式 $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$)：

$\mu=|z+2+2i|=|z+(2+2i)|\leqslant|z|+|2+2i|=2\sqrt{2}+1$，

又 $\mu=|z+2+2i|=|z+(2+2i)|\geqslant||z|-|2+2i||=2\sqrt{2}-1$.

故 $\mu_{\max}=2\sqrt{2}+1$，$\mu_{\min}=2\sqrt{2}-1$.

方法三(代数法——复数问题实数化)：

依题意，设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，其中 $a^2+b^2=1$，则 $\mu^2=|(a+2)+(b+2)\mathrm{i}|^2=(a+2)^2+(b+2)^2=a^2+b^2+8+4(a+b)=9+4(a+b)$.

又 $2ab\leqslant a^2+b^2=1$，

所以 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\leqslant 2$，

$-\sqrt{2}\leqslant a+b\leqslant\sqrt{2}$.

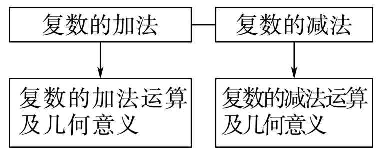
故 $\mu^2_{\max}=9+4\sqrt{2}$，$\mu^2_{\min}=9-4\sqrt{2}$，

从而 $\mu_{\max}=2\sqrt{2}+1$，$\mu_{\min}=2\sqrt{2}-1$.

【类题通法】

$|z_1-z_2|$ 表示复平面内 z_1,z_2 对应的两点间的距离.利用此性质，可把复数的模的问题转化为复平面内两点间的距离问题，从而进行数形结合，把复数问题转化为几何图形问题求解.

▶ 提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1. 在复平面内，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 对应的复数分别为 $-1+2\mathrm{i}$，$-2-3\mathrm{i}$，则 $\overrightarrow{BC}$ 对应的复数为 (　　)

A. $-1-5\mathrm{i}$　　B. $-1+5\mathrm{i}$

C. $3-4\mathrm{i}$　　D. $3+4\mathrm{i}$

A　**解析**：$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-2-3\mathrm{i})-(-1+2\mathrm{i})=-1-5\mathrm{i}$.

2. 复数 $z_1=a+4\mathrm{i}$，$z_2=-3+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，若它们的和 z_1+z_2 为实数，差 z_1-z_2 为纯虚数，则 a,b 的值为 (　　)

A. $a=-3,b=-4$　　B. $a=-3,b=4$

C. $a=3,b=-4$　　D. $a=3,b=4$

A　**解析**：因为 $z_1+z_2=(a-3)+(4+b)\mathrm{i}$ 为实数，所以 $4+b=0$，$b=-4$.因为 $z_1-z_2=(a+4\mathrm{i})-(-3+b\mathrm{i})=(a+3)+(4-b)\mathrm{i}$ 为纯虚数，所以 $a=-3$ 且 $b\neq4$.故 $a=-3$，$b=-4$.

3.（多选题）已知 i 为虚数单位，下列说法正确的是 (　　)

A. 若复数 z 满足 $|z-\mathrm{i}|=\sqrt{5}$，则复数 z 在复平面内对应的点在以 $(1,0)$ 为圆心，$\sqrt{5}$ 为半径的圆上

B. 若复数 z 满足 $z+|z|=2+8\mathrm{i}$，则复数 $z=15+8\mathrm{i}$

C. 复数的模实质上就是复平面内复数对应的点到原点的距离，也就是复数对应的向量的模

D. 复数 z_1 对应的向量为 $\overrightarrow{OZ_1}$，复数 z_2 对应的向量为 $\overrightarrow{OZ_2}$，若 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$，则 $\overrightarrow{OZ_1}\perp\overrightarrow{OZ_2}$

CD　**解析**：满足 $|z-\mathrm{i}|=\sqrt{5}$ 的复数 z 对应的点在以 $(0,1)$ 为圆心，$\sqrt{5}$ 为半径的圆上，A 错误.在 B 中，设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.由 $z+|z|=2+8\mathrm{i}$，得 $a+b\mathrm{i}+\sqrt{a^2+b^2}=2+8\mathrm{i}$，

所以 $\begin{cases}a+\sqrt{a^2+b^2}=2,\\ b=8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-15,\\ b=8.\end{cases}$

所以 $z=-15+8\mathrm{i}$，B 错误.由复数的模的定义知 C 正确.由 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$ 的几何意义知，以 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$ 为邻边的平行四边形为矩形，从而两邻边垂直，D 正确.故选 CD.

4. 在复平面内，O 是原点，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{AB}$ 对应的复数分别为 $-2+\mathrm{i}$，$3+2\mathrm{i}$，$1+5\mathrm{i}$，则 $\overrightarrow{BC}$ 对应的复数为________.

$4-4\mathrm{i}$　**解析**：$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})$，对应的复数为 $3+2\mathrm{i}-(-2+\mathrm{i}+1+5\mathrm{i})=(3+2-1)+(2-1-5)\mathrm{i}=4-4\mathrm{i}$.

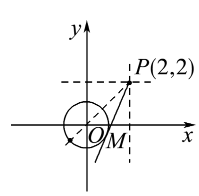
5. 实数 x,y 满足 $(1+\mathrm{i})x+(1-\mathrm{i})y=2$，则 xy 的值是________.

1　**解析**：由题意得 $x+y+(x-y)\mathrm{i}=2$，

所以 $\begin{cases}x+y=2,\\ x-y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\ y=1,\end{cases}$ 所以 $xy=1$.

6. 已知 $|z|=1$ 且 $z\in\mathbf{C}$，求 $|z-2-2\mathrm{i}|$（i 为虚数单位）的最小值.

解：如图，因为 $|z|=1$ 且 $z\in\mathbf{C}$，所以 $|z-2-2\mathrm{i}|$ 的几何意义为单位圆上的点 M 到复平面上的点 $P(2,2)$ 的距离，所以 $|z-2-2\mathrm{i}|$ 的最小值为 $|OP|-1=2\sqrt{2}-1$.



综合性·创新提升

1. 若$(-3a+bi)-(2b+ai)=3-5i$,$a,b\in\mathbf{R}$,则$a+b=$ ( )

A.$\frac{7}{5}$　B.$-\frac{11}{5}$　C.$-\frac{18}{5}$　D.5

B　**解析**:因为$(-3a+bi)-(2b+ai)=(-3a-2b)+(b-a)i=3-5i$,所以$\begin{cases}-3a-2b=3,\\b-a=-5,\end{cases}$解得$a=\frac{7}{5}$,$b=-\frac{18}{5}$.故有$a+b=-\frac{11}{5}$.

2. 已知复数$z_1=(a^2-2)-3ai$,$z_2=a+(a^2+2)i$.若z_1+z_2是纯虚数,那么实数a的值为 ( )

A.1　B.2

C.-2　D.-2或1

C　**解析**:由$z_1+z_2=a^2-2+a+(a^2-3a+2)i$是纯虚数,得$\begin{cases}a^2-2+a=0,\\a^2-3a+2\neq0,\end{cases}$解得$a=-2$.

3. 设z为复数,且$|z|=|z+1|=1$,则$|z-1|=$________.

$\sqrt{3}$　**解析**:设$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,则$z+1=(a+1)+bi$.

又$|z|=|z+1|=1$,所以$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=1,\\\sqrt{(a+1)^2+b^2}=1,\end{cases}$

即$\begin{cases}a^2+b^2=1,\\a^2+b^2+2a=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\b^2=\frac{3}{4},\end{cases}$

故$|z-1|=|(a+bi)-1|=|(a-1)+bi|$

$=\sqrt{(a-1)^2+b^2}=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2+\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$.

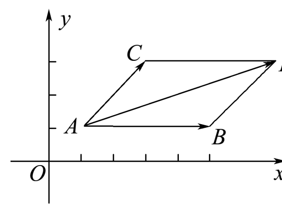
4. 已知复数z的模为1,则$|z+2|$的最大值为________.

3　**解析**:设复数z对应的点为$Z(x,y)$,因为复数z的模为1,所以点Z的轨迹是以原点O为圆心,1为半径的圆.由于$|z+2|$的几何意义是圆上的点(x,y)到点$P(-2,0)$的距离,

因此$|z+2|$的最大值为$|OP|+1=2+1=3$.

5. 在复平面内,点A,B,C分别对应复数$z_1=1+i$,$z_2=5+i$,$z_3=3+3i$,以AB,AC为邻边作一个平行四边形$ABDC$,求点D对应的复数z_4及AD的长.

解:作出示意图如图.$\overrightarrow{AC}$对应复数z_3-z_1,$\overrightarrow{AB}$对应复数z_2-z_1,$\overrightarrow{AD}$对应复数z_4-z_1.



由复数加减运算的几何意义,及$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$,

得$z_4-z_1=(z_2-z_1)+(z_3-z_1)$,

所以$z_4=z_2+z_3-z_1=(5+i)+(3+3i)-(1+i)=7+3i$.所以$AD$的长为$|\overrightarrow{AD}|=|z_4-z_1|=|(7+3i)-(1+i)|=|6+2i|=2\sqrt{10}$.

7.2.2　复数的乘、除运算

学习任务目标

1. 掌握复数乘、除运算法则,能进行复数的乘、除运算.

2. 掌握i幂值的周期性,能进行相关运算.

问题式预习

知识点一　复数的乘法及其运算律

1. 复数代数形式的乘法法则

设$z_1=a+bi$,$z_2=c+di(a,b,c,d\in\mathbf{R})$是任意两个复数,则$z_1z_2=(a+bi)(c+di)=\underline{(ac-bd)+(ad+bc)i}$.

2. 复数乘法的运算律

对于任意$z_1,z_2,z_3\in\mathbf{C}$,有

交换律	$z_1z_2=\underline{z_2z_1}$
结合律	$(z_1z_2)z_3=\underline{z_1(z_2z_3)}$

续表

乘法对加法的分配律	$z_1(z_2+z_3)=\underline{z_1z_2+z_1z_3}$

［微训练］

$i(1-2i)=$ ( )

A.$1-2i$ B.$1+2i$

C.$-2+i$ D.$2+i$

D 解析：$i(1-2i)=i-2i^2=2+i$.

知识点二 复数除法的法则

$(a+bi)\div(c+di)=\dfrac{a+bi}{c+di}=\underline{\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}}i(a,b,c,d\in\mathbf{R}$，且 $c+di\neq0)$.

［微训练］

$\dfrac{1+i}{i}=$________.

$1-i$ 解析：$\dfrac{1+i}{i}=\dfrac{(1+i)i}{i\cdot i}=\dfrac{i-1}{-1}=1-i$.

任务型课堂

任务一 复数的乘法运算

1.(2022·新高考全国Ⅱ卷)$(2+2i)(1-2i)=$ ( )

A.$-2+4i$ B.$-2-4i$

C.$6+2i$ D.$6-2i$

D 解析：$(2+2i)(1-2i)=2+4-4i+2i=6-2i$.故选D.

2.计算：$(1-i)^2-(2-3i)(2+3i)=$ ( )

A.$2-13i$ B.$13+2i$

C.$13-13i$ D.$-13-2i$

D 解析：$(1-i)^2-(2-3i)(2+3i)=1-2i+i^2-(4-9i^2)=-13-2i$.故选D.

3.(2023·全国甲卷(理))若复数$(a+i)(1-ai)=2$，$a\in\mathbf{R}$，则 $a=$ ( )

A.-1 B.0 C.1 D.2

C 解析：C 解析：因为$(a+i)(1-ai)=a-a^2i+i+a=2a+(1-a^2)i=2$，

所以$\begin{cases}2a=2,\\1-a^2=0,\end{cases}$解得 $a=1$.故选C.

【类题通法】

对复数乘法的两点说明

(1)复数的乘法运算与多项式乘法运算类似，可仿照多项式乘法进行运算，但乘后要将 i^2 换成-1，并把含 i 和不含 i 的分开整理.

(2)多项式乘法的运算律在复数乘法中仍然成立，乘法公式也适用.

任务二 复数的除法运算

1.$\dfrac{2-i}{1+2i}=$ ( )

A.1 B.-1

C.i D.$-i$

D 解析：$\dfrac{2-i}{1+2i}=\dfrac{(2-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{-5i}{5}=-i$.故选D.

2.(2022·新高考全国Ⅰ卷)若 $i(1-z)=1$，则 $z+\bar{z}=$ ( )

A.-2 B.-1

C.1 D.2

D 解析：由题设有 $1-z=\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{i^2}=-i$，故 $z=1+i$，故 $z+\bar{z}=(1+i)+(1-i)=2$.故选D.

3.若复数 z 满足 $z(2-i)=11+7i$(i 是虚数单位)，则 z 为 ( )

A.$3+5i$ B.$3-5i$

C.$-3+5i$ D.$-3-5i$

A 解析：因为 $z(2-i)=11+7i$，

所以 $z=\dfrac{11+7i}{2-i}=\dfrac{(11+7i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{15+25i}{5}=3+5i$.

4.$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2\,023}=$________.

$-i$ 解析：$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2\,023}=\left[\dfrac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right]^{2\,023}=\left(\dfrac{2i}{2}\right)^{2\,023}=i^{2\,023}=(i^4)^{505}\cdot i^3=1^{505}\cdot(-i)=-i$.

【类题通法】

1.复数的除法运算的步骤

(1)将除式写为分式；

(2)将分子、分母同乘分母的共轭复数；

(3)将分子、分母分别进行乘法运算，并将其化简.

2.i 幂值的周期性规律要记熟，如 $i^{4n+m}=i^m$，$i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=0(n,m\in\mathbf{N}^*)$.

3.记住以下结果，可提高运算速度.

(1)$(1+i)^2=2i$；

(2)$(1-i)^2=-2i$；

(3)$\dfrac{1}{i}=-i$；

(4)$\dfrac{1-i}{1+i}=-i$；

(5)$\dfrac{1+i}{1-i}=i$.

任务三 实系数一元二次方程在复数范围内根的问题

［探究活动］

已知 $x=1+\mathrm{i}$（i 为虚数单位）是方程 $x^2+bx+c=0(b,c\in\mathbf{R})$ 的一个根.根据复数运算及复数的有关概念解决下列问题.

探究 1：求出实数 b,c 的值.

提示：因为 $x=1+\mathrm{i}$ 是方程 $x^2+bx+c=0$ 的根，所以 $(1+\mathrm{i})^2+b(1+\mathrm{i})+c=0$，即 $b+c+(2+b)\mathrm{i}=0$，所以 $\begin{cases}b+c=0,\\2+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-2,\\c=2.\end{cases}$

探究 2：判断 x 的共轭复数 $\overline{x}$ 是不是方程 $x^2+bx+c=0$ 的根.

提示：因为 $x=1+\mathrm{i}$，所以 $\overline{x}=1-\mathrm{i}$.由探究 1 知，方程可化为 $x^2-2x+2=0$.把 $x=1-\mathrm{i}$ 代入，得 $x^2-2x+2=(1-\mathrm{i})^2-2(1-\mathrm{i})+2=0$，显然方程成立.

探究 3：计算 $x+\overline{x}$，$x\cdot\overline{x}$，你能得出什么结论？

提示：$x+\overline{x}=1+\mathrm{i}+1-\mathrm{i}=2$，$x\cdot\overline{x}=(1+\mathrm{i})\cdot(1-\mathrm{i})=1^2-\mathrm{i}^2=1+1=2$.发现根与系数的关系在复数范围内仍成立.

［评价活动］

1. 已知 $-1+\mathrm{i}$ 是关于 x 的方程 $x^2+px+q=0(p,q\in\mathbf{R})$ 的一个根，则复数 $z=p+q\mathrm{i}$ 等于________.

$2+2\mathrm{i}$ **解析**：方法一：将 $-1+\mathrm{i}$ 代入方程，得 $(-1+\mathrm{i})^2+p(-1+\mathrm{i})+q=0$，整理得 $(q-p)+(p-2)\mathrm{i}=0$，所以 $\begin{cases}q-p=0,\\p-2=0,\end{cases}$ 所以 $p=q=2$.故 $z=p+q\mathrm{i}=2+2\mathrm{i}$.

方法二：因为实系数的一元二次方程虚根成对出现（互为共轭复数），所以 $-1\pm\mathrm{i}$ 为方程的两根，

所以 $\begin{cases}(-1+\mathrm{i})+(-1-\mathrm{i})=-p,\\(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})=q,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=2,\\q=2.\end{cases}$

故 $z=p+q\mathrm{i}=2+2\mathrm{i}$.

2. 在复数范围内解方程 $2x^2+3x+4=0$.

解：因为 $b^2-4ac=3^2-4\times2\times4=9-32=-23<0$，

所以方程 $2x^2+3x+4=0$ 的根为 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{-(-23)}\,\mathrm{i}}{2\times2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{23}\,\mathrm{i}}{4}$.

【类题通法】

在复数范围内，实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 根的求解方法

(1)求根公式法

①当 $\Delta\geqslant0$ 时，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；

②当 $\Delta<0$ 时，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{-(b^2-4ac)}\,\mathrm{i}}{2a}$.

(2)利用复数相等的定义求解

设方程的根为 $x=m+n\mathrm{i}(m,n\in\mathbf{R})$，将其代入方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，化简后利用复数相等的定义求解.

提质归纳

复数的乘法 — 复数的除法

↓

复数范围内解一元二次方程

课后素养评价

基础性·能力运用

1. 已知复数 $z=2-\mathrm{i}$，则 $z\cdot\overline{z}$ 的值为 （　　）

A.5　　B.$\sqrt{5}$　　C.3　　D.$\sqrt{3}$

A **解析**：$z\cdot\overline{z}=(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})=2^2-\mathrm{i}^2=4+1=5$.

2.（2023·新高考全国Ⅱ卷）在复平面内，$(1+3\mathrm{i})(3-\mathrm{i})$ 对应的点位于 （　　）

A.第一象限　　B.第二象限

C.第三象限　　D.第四象限

A **解析**：因为 $(1+3\mathrm{i})(3-\mathrm{i})=3+8\mathrm{i}-3\mathrm{i}^2=6+8\mathrm{i}$，则所求复数对应的点为 $(6,8)$，位于第一象限.故选 A.

3.（2022·天津）已知 i 是虚数单位，化简 $\dfrac{11-3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ 的结果为________.

$1-5\mathrm{i}$ **解析**：$\dfrac{11-3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{(11-3\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=\dfrac{11-6-25\mathrm{i}}{5}=1-5\mathrm{i}$.

4. 计算：$\dfrac{(1+2\mathrm{i})^2}{3-4\mathrm{i}}=$________.

-1 **解析**：$\dfrac{(1+2\mathrm{i})^2}{3-4\mathrm{i}}=\dfrac{-3+4\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}=-1$.

5. 已知 i 是虚数单位，复数 z 满足 $z\cdot(1+\sqrt{3}\mathrm{i})=1$，则 $|z|=$________.

$\dfrac{1}{2}$ **解析**：因为复数 z 满足 $z\cdot(1+\sqrt{3}\mathrm{i})=1$，

所以 $z(1+\sqrt{3}\mathrm{i})(1-\sqrt{3}\mathrm{i})=1-\sqrt{3}\mathrm{i}$，

化为 $4z=1-\sqrt{3}\mathrm{i}$，

即 $z=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$，

所以 $|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{1}{2}$.

6. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $2+a\mathrm{i}$，$b+\mathrm{i}$（i 是虚数单位）是实系数一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根，求 p,q 的值.

解：由一元二次方程根与系数的关系可得

$\begin{cases}(2+a\mathrm{i})+(b+\mathrm{i})=-p,\\(2+a\mathrm{i})(b+\mathrm{i})=q,\end{cases}$

即 $\begin{cases}p=-(2+b)-(a+1)\mathrm{i},\\q=2b-a+(2+ab)\mathrm{i}.\end{cases}$

因为 p,q 均为实数，所以 $\begin{cases}-(a+1)=0,\\2+ab=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=2,\end{cases}$ 从而有 $\begin{cases}p=-4,\\q=5.\end{cases}$

综合性·创新提升

1. 复数 $(1+\mathrm{i})^2(2+3\mathrm{i})$ 等于 （　　）

A. $6-4\mathrm{i}$　　B. $-6-4\mathrm{i}$

C. $6+4\mathrm{i}$　　D. $-6+4\mathrm{i}$

D　**解析**：$(1+\mathrm{i})^2(2+3\mathrm{i})=2\mathrm{i}(2+3\mathrm{i})=-6+4\mathrm{i}$.

2. 若复数 $(1-\mathrm{i})(a+\mathrm{i})$ 在复平面内对应的点在第二象限，则实数 a 的取值范围是 （　　）

A. $(-\infty,1)$　　B. $(-\infty,-1)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $(-1,+\infty)$

B　**解析**：$z=(1-\mathrm{i})(a+\mathrm{i})=(a+1)+(1-a)\mathrm{i}$.

因为对应的点在第二象限，所以 $\begin{cases}a+1<0,\\1-a>0,\end{cases}$ 解得 $a<-1$. 故选 B.

3.（2022·全国甲卷（理））若 $z=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，则 $\frac{z}{z\bar{z}-1}=$ （　　）

A. $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　B. $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

C. $-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$　　D. $-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$

C　**解析**：$\bar{z}=-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$，$z\bar{z}=(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})=1+3=4$. $\frac{z}{z\bar{z}-1}=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{3}=-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$. 故选 C.

4. 设复数 z 的共轭复数是 $\bar{z}$，若复数 $z_1=3+4\mathrm{i}$，$z_2=t+\mathrm{i}$，且 $z_1\cdot\bar{z}_2$ 是实数，则实数 $t=$________.

$\frac{3}{4}$　**解析**：因为 $z_2=t+\mathrm{i}$，所以 $\bar{z}_2=t-\mathrm{i}$.

$z_1\cdot\bar{z}_2=(3+4\mathrm{i})(t-\mathrm{i})=3t+4+(4t-3)\mathrm{i}$.

又因为 $z_1\cdot\bar{z}_2\in\mathbf{R}$，所以 $4t-3=0$，所以 $t=\frac{3}{4}$.

5. 设复数 z_1,z_2 在复平面内的对应点分别为 A,B，点 A 与点 B 关于 x 轴对称. 若 $z_1(1-\mathrm{i})=3-\mathrm{i}$，则 $|z_2|=$________.

$\sqrt{5}$　**解析**：因为 $z_1(1-\mathrm{i})=3-\mathrm{i}$，所以 $z_1=\frac{3-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(3-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=2+\mathrm{i}$.

因为点 A 与点 B 关于 x 轴对称，所以 z_1 与 z_2 互为共轭复数，

所以 $z_2=\bar{z}_1=2-\mathrm{i}$，所以 $|z_2|=\sqrt{5}$.

6. 已知 z 为复数，$z+2\mathrm{i}$ 和 $\frac{z}{2-\mathrm{i}}$ 均为实数，其中 i 是虚数单位.

(1) 求复数 z 和 $|z|$；

(2) 若复数 $z_1=\bar{z}+\frac{1}{m-1}-\frac{7}{m+2}\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点位于第四象限，求实数 m 的取值范围.

解：(1) 设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，

则 $z+2\mathrm{i}=a+(b+2)\mathrm{i}$ 为实数，

所以 $b+2=0$，即 $b=-2$.

又 $\frac{z}{2-\mathrm{i}}=\frac{a+b\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{(a+b\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{5}$

$=\frac{2a-b}{5}+\frac{a+2b}{5}\mathrm{i}$ 为实数，

所以 $\frac{a+2b}{5}=0$，所以 $a=-2b$.

又 $b=-2$，所以 $a=4$，所以 $z=4-2\mathrm{i}$，

所以 $|z|=\sqrt{4^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$.

(2) $z_1=\bar{z}+\frac{1}{m-1}-\frac{7}{m+2}\mathrm{i}$

$=4+\frac{1}{m-1}+\left(2-\frac{7}{m+2}\right)\mathrm{i}$

$=\frac{4m-3}{m-1}+\frac{2m-3}{m+2}\mathrm{i}$.

因为 z_1 在复平面内对应的点位于第四象限，

所以 $\begin{cases}\frac{4m-3}{m-1}>0,\\\frac{2m-3}{m+2}<0,\end{cases}$

解得 $-2<m<\frac{3}{4}$ 或 $1<m<\frac{3}{2}$，

所以实数 m 的取值范围为 $\left(-2,\frac{3}{4}\right)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

7.3* 复数的三角表示

7.3.1 复数的三角表示式

学习任务目标

1.了解复数的三角形式以及复数的辐角、辐角的主值等基本概念.

2.能将复数的三角形式与代数形式进行转化.

问题式预习

知识点一 复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 的辐角

1.复数的辐角

一般地,任何一个复数 $z=a+bi$ 都可以表示成 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的形式.其中,r 是复数 z 的模;θ 是以 x 轴的非负半轴为始边,向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所在射线(射线 OZ)为终边的角,叫做复数 $z=a+bi$ 的<u>辐角</u>.

2.辐角的主值

我们规定在 $0\leqslant\theta<2\pi$ 范围内的辐角 θ 的值为辐角的<u>主值</u>,记作<u>$\arg z$</u>.

[微思考]

1.任意复数是否都有确定的辐角?

提示:不一定,例如复数0,它所对应的向量缩成一个点(零向量),这样的向量没有确定的方向,所以复数0没有确定的辐角.

2.复数的模和辐角的主值是唯一确定的吗?

提示:复数0的模是唯一确定的,辐角的主值不是唯一的;非零复数的模和辐角的主值都是唯一确定的.

3.纯虚数的辐角的主值是什么?

提示:设纯虚数为 $bi(b\neq0)$,当 $b>0$ 时,$\arg(bi)=\frac{\pi}{2}$;当 $b<0$ 时,$\arg(bi)=\frac{3\pi}{2}$.

知识点二 复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 的三角形式

1.复数的三角形式

<u>$r(\cos\theta+i\sin\theta)$</u>叫做复数 $z=a+bi$ 的三角表示式,简称三角形式,其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}\geqslant0$,$\cos\theta=$<u>$\frac{a}{r}$</u>,$\sin\theta=$<u>$\frac{b}{r}$</u>.

2.复数的代数形式

为了与三角形式区分开来,<u>$a+bi$</u>叫做复数的代数表示式,简称代数形式.

[微训练]

判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)复数 $2\left(\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}\right)$ 是三角形式. (×)

(2)$\arg(2+2i)=\frac{\pi}{4}$. (√)

(3)复数 $3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ 的模为 $3\sqrt{2}$. (×)

(4)把 $-3i$ 化为三角形式为 $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$. (×)

任务型课堂

任务一 将复数的代数形式化为三角形式

[探究活动]

任何一个复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 都可以表示成三角形式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$,探究下列问题.

探究1:复数的三角形式唯一吗?

提示:不唯一,例如 $1=\cos0+i\sin0=\cos2\pi+i\sin2\pi=\cdots$.

探究2:复数的三角形式有哪些特征?

提示:模非负,角相同,余弦前,加号连.

[评价活动]

1.若 $a<0$,则 a 的三角形式为 ( )

A.$a(\cos0+i\sin0)$

B.$a(\cos\pi+i\sin\pi)$

C.$-a(\cos\pi+i\sin\pi)$

D.$-a(\cos\pi-i\sin\pi)$

C **解析**:因为 $a<0$,所以辐角的主值为 π,故其三角形式为 $-a(\cos\pi+i\sin\pi)$.

2.复数 $1+i$ 化为三角形式为 ( )

A. $\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$

B. $\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$

C. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

D. $2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

C　**解析**：$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

3. 下列复数是三角形式表示的是　(　　)

A. $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

B. $-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

C. $\frac{1}{2}\left(\sin\frac{3\pi}{4}+i\cos\frac{3\pi}{4}\right)$

D. $\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5}$

D　**解析**：选项 A，$\cos\frac{\pi}{4}$与 $i\sin\frac{\pi}{4}$之间应该用“+”连接，而不是用“−”连接；选项 B，$-\frac{1}{2}<0$，不符合 $r\geq0$ 的要求；选项 C，$\sin\frac{3\pi}{4}+i\cos\frac{3\pi}{4}$不是 $\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$的形式.故 A，B，C 均不是三角形式.故选 D.

4. 复数 $-\sin 30°-i\cos 30°$的三角形式为　(　　)

A. $\sin 30°+i\cos 30°$

B. $\cos 240°+i\sin 240°$

C. $\cos 30°+i\sin 30°$

D. $\sin 240°+i\cos 240°$

B　**解析**：易知 $-\sin 30°=-\cos 60°=\cos(180°+60°)=\cos 240°$，$-\cos 30°=-\sin 60°=\sin(180°+60°)=\sin 240°$，所以 B 选项正确.

【类题通法】

将复数的代数形式转化为三角形式的方法

先确定复数的模 r，再由复数对应的点所在的象限确定辐角 θ 的终边所在的象限，然后由三角函数的知识确定辐角 θ 的大小，最后写出复数的三角形式.若复数为零，则辐角可取任意值.

任务二　将复数的三角形式化为代数形式

分别指出下列复数的模和辐角的主值，并把这些复数表示成代数形式.

(1) $4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$；

(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 60°+i\sin 60°)$；

(3) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

解：(1) 复数 $4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$的模 $r=4$，辐角的主值为$\frac{\pi}{6}$.

$4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=4\cos\frac{\pi}{6}+4i\sin\frac{\pi}{6}$

$=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}+4\times\frac{1}{2}i$

$=2\sqrt{3}+2i$.

(2) 复数$\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 60°+i\sin 60°)$的模 $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$，辐角的主值为 $60°$.

$\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 60°+i\sin 60°)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i$.

(3) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=2\left[\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$，

所以复数的模 $r=2$，辐角的主值为$\frac{5\pi}{3}$.

$2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=2\cos\frac{5\pi}{3}+2i\sin\frac{5\pi}{3}$

$=2\times\frac{1}{2}+2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$

$=1-\sqrt{3}i$.

【类题通法】

将复数的三角形式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$化为代数形式 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$时，$a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$.

任务三　复数的模与辐角的主值

1. 复数 $-2\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$的辐角的主值是　(　　)

A. $\frac{\pi}{5}$　　B. $\frac{4\pi}{5}$

C. $\frac{6\pi}{5}$　　D. $\frac{9\pi}{5}$

C　**解析**：方法一：因为 $-2\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

$=2\left(\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}\right)$，

所以辐角的主值为$\frac{6\pi}{5}$.故选 C.

方法二：复数对应点在第三象限，

所以辐角的主值是第三象限角.故选 C.

2.设复数 z 的辐角主值是$\frac{5\pi}{6}$，实部是$-2\sqrt{3}$，则 $z=$________.

$-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$ **解析**：由复数三角形式的定义结合辐角的正弦值可得 $z=-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$.

3.当实数 $m=$________时，复数$(m^2-m-1)+(2m^2-3m-1)\mathrm{i}$的辐角的主值是$\frac{5\pi}{4}$.

0 **解析**：由辐角的正切值为 1，且 $m^2-m-1<0$，$2m^2-3m-1<0$，可求得 m 的值为 0.

【类题通法】

复数的三角形式 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$中，模 $r\geqslant 0$，θ 为辐角.若 θ 为辐角的主值，则 $\theta\in[0,2\pi)$.

提质归纳

- 复数的三角表示式
  - 辐角 — 辐角的主值
  - 三角形式与代数形式互化

课后素养评价

基础性·能力运用

1.(多选题)将复数 $z=3+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 化为三角形式，正确的是 ( )

A.$z=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$

B.$z=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$

C.$z=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

D.$z=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{13\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{6}\right)$

AD **解析**：$z=3+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{13\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{6}\right)$.故选 AD.

2.复数 $4\left(\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$化为代数形式为 ( )

A.$2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$　　B.$-2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$

C.$2-\sqrt{3}\mathrm{i}$　　D.$2+\sqrt{3}\mathrm{i}$

A **解析**：$4\left(\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$.

3.(多选题)复数 $3\sqrt{3}-3\mathrm{i}$ 的辐角可以是 ( )

A.$-\frac{\pi}{6}$　　B.$\frac{11\pi}{6}$　　C.4π　　D.$\frac{35\pi}{6}$

ABD **解析**：因为 $r=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+(-3)^2}=6$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=-\frac{1}{2}$，

所以辐角的主值 $\theta=\frac{11\pi}{6}$，故可以作为复数 $3\sqrt{3}-3\mathrm{i}$ 的辐角的是$\frac{11\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以当 $k=-1$ 时，$\frac{11\pi}{6}+(-2\pi)=-\frac{\pi}{6}$；

当 $k=0$ 时，$\frac{11\pi}{6}+0=\frac{11\pi}{6}$；

当 $k=2$ 时，$\frac{11\pi}{6}+4\pi=\frac{35\pi}{6}$.

4.若$|z|=2$，$\arg z=\frac{\pi}{3}$，则复数 $z=$________.

$1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ **解析**：由题意知，$z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$.

5.已知复数 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，求复数$\frac{z^2-z+4}{2-z}$的辐角的主值.

解：$\frac{z^2-z+4}{2-z}=\frac{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^2-(1+\sqrt{3}\mathrm{i})+4}{2-(1+\sqrt{3}\mathrm{i})}$

$=\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$.

所以复数$\frac{z^2-z+4}{2-z}$的辐角的主值为$\frac{2\pi}{3}$.

综合性·创新提升

1.下列复数是三角形式的是 ( )

A.$2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\text{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$

B.$2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\text{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$

C.$-2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\text{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$

D.$2\left(\cos\frac{7\pi}{5}+\text{i}\sin\frac{7\pi}{5}\right)$

D **解析**:复数的三角形式是 $r(\cos\theta+\text{i}\sin\theta)$,其中 $r>0$,A,B,C 均不是这种形式.

2.设复数 $2+\text{i}$ 和 $-3-\text{i}$ 的辐角的主值分别是 α,β,则 $\tan(\alpha+\beta)$ 等于 ( )

A.$\sqrt{3}$ B.$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C.-1 D.1

D **解析**:因为复数 $2+\text{i}$ 和 $-3-\text{i}$ 辐角的主值分别是 α,β,所以 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$,$\tan\beta=\frac{1}{3}$,所以 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$.

3.复数 $z=(a+\text{i})^2$ 的辐角的主值为 $\frac{3\pi}{2}$,则实数 $a=$________.

-1 **解析**:由于复数 z 的辐角的主值为 $\frac{3\pi}{2}$,

故 $z=r\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\text{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-r\text{i}$.

因为 $z=(a+\text{i})^2=a^2-1+2a\text{i}$,

所以 $a^2-1+2a\text{i}=-r\text{i}$,

所以 $a^2-1=0$,$2a=-r<0$,所以 $a=-1$.

4.若复数 z 满足 $\left|\frac{z-1}{z}\right|=\frac{1}{2}$,$\arg\left(\frac{z-1}{z}\right)=\frac{\pi}{3}$,则 z 的代数形式是________.

$1+\frac{\sqrt{3}}{3}\text{i}$ **解析**:设 $\frac{z-1}{z}=z_0$,则 $|z_0|=\frac{1}{2}$,$\arg z_0=\frac{\pi}{3}$,

所以 $z_0=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\text{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\text{i}$,

所以 $\frac{z-1}{z}=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\text{i}$,解得 $z=1+\frac{\sqrt{3}}{3}\text{i}$.

5.求复数 $z=1+\cos\theta-\text{i}\sin\theta(\pi<\theta<2\pi)$ 的模与辐角的主值.

解:$z=2\cos^2\frac{\theta}{2}-2\text{i}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\text{i}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$=-2\cos\frac{\theta}{2}\left(-\cos\frac{\theta}{2}+\text{i}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$=-2\cos\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)+\text{i}\cdot\sin\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)\right]$,

所以 $r=-2\cos\frac{\theta}{2}$.

因为 $\pi<\theta<2\pi$,所以 $\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\pi$,

所以 $0<\pi-\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$,所以 $\arg z=\pi-\frac{\theta}{2}$.

故复数 z 的模是 $-2\cos\frac{\theta}{2}$,辐角的主值为 $\pi-\frac{\theta}{2}$.

7.3.2 复数乘、除运算的三角表示及其几何意义

学习任务目标

1.会在三角形式下进行复数的乘、除运算.(数学运算)

2.了解三角形式下复数乘、除运算的几何意义.

问题式预习

知识点一 复数乘法运算的三角表示及其几何意义

1.复数乘法运算的三角表示

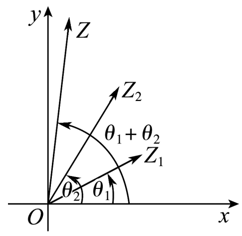
文字描述:两个复数相乘,积的模等于各复数的模的积,积的辐角等于各复数的辐角的和.

符号表示:$r_1(\cos\theta_1+\text{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\text{i}\sin\theta_2)=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\text{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]$.

2.复数乘法运算的三角表示的几何意义

复数 z_1,z_2 对应的向量为 $\overrightarrow{OZ_1}$,$\overrightarrow{OZ_2}$,把向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕点 O 按逆时针方向旋转角 θ_2(如果 $\theta_2<0$,就要把 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕点 O 按顺时针方向旋转角 $|\theta_2|$),再把它的

模变为原来的 r_2 倍,得到向量$\overrightarrow{OZ}$,$\overrightarrow{OZ}$表示的复数就是积 z_1z_2.



[微训练]

设 $z_1=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$,$z_2=3\left(\cos\dfrac{5\pi}{12}+i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$,则 $z_1\cdot z_2=$ ( )

A.$\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　　B.$\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

C.$-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$　　D.$-\dfrac{3}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

C　**解析**:$z_1\cdot z_2=3\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{5\pi}{12}\right)\right]=3\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i.$

知识点二　复数除法运算的三角表示及其几何意义

1.复数除法运算的三角表示

文字描述:两个复数相除,商的模等于被除数的模除以除数的模所得的商,商的辐角等于被除数的辐角减去除数的辐角所得的差.

符号表示:$\dfrac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$.

2.复数除法运算的三角表示的几何意义

复数 z_1,z_2 对应的向量为$\overrightarrow{OZ_1}$,$\overrightarrow{OZ_2}$,把向量$\overrightarrow{OZ_1}$绕点 O 按顺时针方向旋转 θ_2(如果 $\theta_2<0$,就要把$\overrightarrow{OZ_1}$绕点 O 按逆时针方向旋转角$|\theta_2|$),再把它的模变为原来的$\dfrac{1}{r_2}$,得到向量$\overrightarrow{OZ}$,$\overrightarrow{OZ}$表示的复数就是商$\dfrac{z_1}{z_2}$.

[微训练]

设 $z_1=4\left(\cos\dfrac{7\pi}{12}+i\sin\dfrac{7\pi}{12}\right)$,$z_2=\cos\dfrac{11\pi}{12}+i\sin\dfrac{11\pi}{12}$,则$\dfrac{z_1}{z_2}=$ ( )

A.$2+2\sqrt{3}i$　　B.$-2+2\sqrt{3}i$

C.$-2-2\sqrt{3}i$　　D.$2-2\sqrt{3}i$

D　**解析**:$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{4\left(\cos\dfrac{7\pi}{12}+i\sin\dfrac{7\pi}{12}\right)}{\cos\dfrac{11\pi}{12}+i\sin\dfrac{11\pi}{12}}=4\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]=2-2\sqrt{3}i.$

任务型课堂

任务一　复数乘法运算的三角表示

[探究活动]

根据三角形式下复数的乘法法则,探究下列问题.

探究1:三角形式下复数的乘法法则成立的前提条件是什么?

提示:两个复数都是三角形式.如果不是三角形式,要先化成三角形式,然后再运算.

探究2:由两个复数相乘的三角表示,能推广到 n 个复数相乘的形式吗?

提示:有限个复数相乘,结论也成立.

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$,$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$,…,$z_n=r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$,则 $z_1\cdot z_2\cdot\cdots\cdot z_n=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\cdot\cdots\cdot r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)=r_1r_2\cdot\cdots\cdot r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]$.

探究3:如果 n 个复数相等,它们的乘积是什么形式(假设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$)?

提示:$z^n=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$.

[评价活动]

1.复数$(\sin 10°+i\cos 10°)(\sin 10°+i\cos 10°)$的三角形式是 ( )

A.$\sin 30°+i\cos 30°$

B.$\cos 160°+i\sin 160°$

C.$\cos 30°+i\sin 30°$

D.$\sin 160°+i\cos 160°$

B　**解析**:令 $z=\sin 10°+i\cos 10°$,其三角形式为 $z=\cos 80°+i\sin 80°$,所以 $z\cdot z=(\cos 80°+i\sin 80°)^2=\cos 160°+i\sin 160°$.故选B.

2.$\dfrac{1}{2}(\cos 30°+i\sin 30°)\times 2(\cos 60°+i\sin 60°)\times 3(\cos 45°+i\sin 45°)=$ ( )

A.$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$　　B.$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$

C.$-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$　　D.$-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$

C　**解析**:$\dfrac{1}{2}(\cos 30°+i\sin 30°)\times 2(\cos 60°+i\sin 60°)\times 3(\cos 45°+i\sin 45°)$

$=\frac{1}{2}\times2\times3[\cos(30^\circ+60^\circ+45^\circ)+i\sin(30^\circ+60^\circ+45^\circ)]$

$=3(\cos135^\circ+i\sin135^\circ)=3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$=-\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$.故选 C.

3. $-2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=$______.

$-1-\sqrt{3}i$　**解析**：$-2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=-2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=-1-\sqrt{3}i$.

【类题通法】

复数乘法法则的三角表示可简记为：模数相乘，辐角相加.并且可以作以下推广：

(1)有限个复数相乘，结论亦成立.

即 $z_1\cdot z_2\cdot\cdots\cdot z_n=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\cdot\cdots\cdot r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)=r_1\cdot r_2\cdot\cdots\cdot r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]$.

(2)当 $z_1=z_2=\cdots=z_n=z$，即 $r_1=r_2=\cdots=r_n=r$，$\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_n=\theta$ 时，有 $z^n=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$.这就是复数乘方法则的三角表示，即：模数乘方，辐角 n 倍.

任务二　复数除法运算的三角表示

1. $9(\cos3\pi+i\sin3\pi)\div3(\cos2\pi+i\sin2\pi)=$ (　　)

A.3　　B.-3

C.$\sqrt{3}i$　　D.$-\sqrt{3}i$

B　**解析**：$9(\cos3\pi+i\sin3\pi)\div3(\cos2\pi+i\sin2\pi)=3(\cos\pi+i\sin\pi)=-3$.故选 B.

2. 求$\frac{-i}{2(\cos120^\circ-i\sin120^\circ)}$的值.

解：$-i=\cos270^\circ+i\sin270^\circ$，

$2(\cos120^\circ-i\sin120^\circ)=2(\cos240^\circ+i\sin240^\circ)$.

原式$=\frac{\cos270^\circ+i\sin270^\circ}{2(\cos240^\circ+i\sin240^\circ)}$

$=\frac{1}{2}[\cos(270^\circ-240^\circ)+i\sin(270^\circ-240^\circ)]$

$=\frac{1}{2}(\cos30^\circ+i\sin30^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$.

【类题通法】

三角形式下进行两个复数的除法运算时，将模对应相除当商的模，用被除数的辐角减去除数的辐角当商的辐角，即可得两个复数除法运算的结果.可简记为：模数相除，辐角相减.

任务三　复数乘、除法运算的三角表示的几何意义

1. 把复数 $3-\sqrt{3}i$ 对应向量绕原点按顺时针方向旋转$\frac{2\pi}{3}$，所得向量对应复数为 (　　)

A.$2\sqrt{3}i$　　B.$-2\sqrt{3}i$

C.$-3-\sqrt{3}i$　　D.$3-\sqrt{3}i$

C　**解析**：$3-\sqrt{3}i=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$，

$2\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{11\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=-3-\sqrt{3}i$.

2. 复数 $z_1=1$，z_2 对应的向量由 z_1 对应的向量绕原点按逆时针方向旋转$\frac{\pi}{3}$而得到，则$\arg\left(\frac{z_2-z_1}{2}\right)$的值为 (　　)

A.$\frac{\pi}{6}$　　B.$\frac{\pi}{3}$

C.$\frac{2\pi}{3}$　　D.$\frac{4\pi}{3}$

C　**解析**：$z_1=1=\cos0+i\sin0$，

$z_2=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，

所以$\frac{z_2-z_1}{2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

设$\frac{z_2-z_1}{2}$的辐角的主值为 θ，则 θ 为第二象限，且 $\tan\theta=-\sqrt{3}$，

所以 $\theta=\frac{2\pi}{3}$.

3. 设 A,B,C 是$\triangle ABC$ 的内角，$z=(\cos A+i\sin A)\div(\cos B+i\sin B)\cdot(\cos C+i\sin C)$是一个实数，则$\triangle ABC$ (　　)

A.是锐角三角形

B.是钝角三角形

C.是直角三角形

D.形状不能确定

C　**解析**：因为 $z=(\cos A+i\sin A)\div(\cos B+i\sin B)\cdot(\cos C+i\sin C)=\cos(A-B+C)+i\sin(A-B+C)$是一个实数，所以 $\sin(A-B+C)=0$，

所以 $\arg z=A-B+C=\pi-2B=0$，则 $B=\frac{\pi}{2}$.

所以$\triangle ABC$ 是直角三角形.

【类题通法】

利用复数乘、除法的三角表示的几何意义求解复平面内点所对应的复数时，要注意点 Z 所对应的复数就是向量$\overrightarrow{OZ}$对应的复数，$\overrightarrow{OZ}$常常转化为$\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{Z_1Z}$，而求解向量$\overrightarrow{Z_1Z}$所对应的复数时，要注意它与已知或可求向量对应的复数之间的关系，即要明确模与辐角的变化，从而准确地利用复数乘、除法的三角表示的几何意义求解.

▶ 提质归纳

复数乘、除运算的三角表示 —— 乘法法则 / 除法法则 —— 几何意义

课后素养评价

基础性·能力运用

1.设 $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$，$z_2=3\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$，则 $z_1\cdot z_2=$（　　）

A.6　　B.-6　　C.6i　　D.-6i

B　**解析**：$z_1\cdot z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 3\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)=6\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)\right]=-6.$

2.（多选题）设 $f(\theta)=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$（i 为虚数单位），则 $f^2(\theta)=\cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta$，$f^3(\theta)=\cos 3\theta+\mathrm{i}\sin 3\theta$，….若 $f^{10}(\theta)$为实数，则 θ 的值可能等于（　　）

A.$\frac{\pi}{10}$　　B.$\frac{3\pi}{20}$　　C.$\frac{\pi}{5}$　　D.$\frac{\pi}{4}$

AC　**解析**：$f^{10}(\theta)=\cos 10\theta+\mathrm{i}\sin 10\theta$，要使 $f^{10}(\theta)$为实数，则 $\sin 10\theta=0$，$10\theta=k\pi$，$k\notin\mathbf{Z}$，故 $\theta=\frac{k\pi}{10}$，$k\notin\mathbf{Z}$.当$k=1$ 时，$\theta=\frac{\pi}{10}$，当 $k=2$ 时，$\theta=\frac{\pi}{5}$.故选 AC.

3.计算：$2\mathrm{i}\div\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=$（　　）

A.$1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　B.$1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

C.$-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$　　D.$-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$

A　**解析**：$2\mathrm{i}\div\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)\div\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+\sqrt{3}\mathrm{i}.$

4.设复数 $z_1=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，$z_2=\sqrt{3}+\mathrm{i}$，则复数$\frac{z_1}{z_2}$的辐角的主值是________.

$\frac{\pi}{6}$　**解析**：由题知，$z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$，

$z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$，

所以复数$\frac{z_1}{z_2}$的辐角的主值为$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$.

5.把复数 $3+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 对应的向量按顺时针方向旋转$\frac{\pi}{6}$，所得向量对应的复数为________.

$2\sqrt{3}$　**解析**：复数 $3+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 对应的向量按顺时针方向旋转$\frac{\pi}{6}$，所得向量对应的复数是$(3+\sqrt{3}\mathrm{i})\cdot\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=(3+\sqrt{3}\mathrm{i})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=2\sqrt{3}$.

综合性·创新提升

1.设 $\pi<\theta<\frac{5\pi}{4}$，则复数$\frac{\cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta}{\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta}$的辐角的主值为（　　）

A.$2\pi-3\theta$　　B.$3\theta-2\pi$

C.3θ　　D.$3\theta-\pi$

B　**解析**：$\frac{\cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta}{\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta}=\frac{\cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta}{\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)}=\cos 3\theta+\mathrm{i}\sin 3\theta$.

因为 $\pi<\theta<\frac{5\pi}{4}$，所以 $3\pi<3\theta<\frac{15\pi}{4}$，

所以 $\pi<3\theta-2\pi<\frac{7\pi}{4}$,

则辐角的主值为 $3\theta-2\pi$.故选 B.

2.(多选题)已知复数 $z=1+\cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$(其中 i 为虚数单位),下列说法正确的是　(　　)

A.复数 z 在复平面内对应的点可能落在第二象限

B.z 可能为实数

C.$|z|=2\cos\theta$

D.$\frac{1}{z}$的实部为$\frac{1}{2}$

BCD　**解析**:$z=1+\cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta=2\cos\theta(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$.

因为$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$,所以 $\cos\theta>0$,$\sin\theta\in(-1,1)$.

则复数 z 在复平面内对应的点不可能落在第二象限;z 可能为实数;$|z|=2\cos\theta$;

$\frac{1}{z}=\frac{1}{2\cos\theta(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}=\frac{\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta}{2\cos\theta}=\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}\tan\theta$,$\frac{1}{z}$的实部为$\frac{1}{2}$.

3.复数 z_1 与 z_2 各自对应的向量$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$分别按逆时针方向旋转$\frac{\pi}{4}$和$\frac{5\pi}{3}$后完全重合.已知 $z_2=-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$,则复数 z_1 的代数形式和它的辐角的主值分别是　(　　)

A.$-\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i},\frac{3\pi}{4}$　　B.$-\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i},\frac{3\pi}{4}$

C.$-\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i},\frac{\pi}{4}$　　D.$-\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i},\frac{\pi}{4}$

B　**解析**:由题可知 $z_1\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=z_2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right)$,

则 $z_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=-2$,

所以 $z_1=\frac{-2}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}}=\frac{-2\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}=\frac{-2\sqrt{2}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=-\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}$,

可知 z_1 对应的点的坐标为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$,则 z_1 的辐角的主值为$\frac{3\pi}{4}$.故选 B.

4.计算:$8\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)\times\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=$________.

$-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\mathrm{i}$　**解析**:原式$=$

$8\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]=8\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$=-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\mathrm{i}$.

5.复数$\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}$的三角形式是________.

$\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}$　**解析**:$\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}$

$=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)}{2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)}$

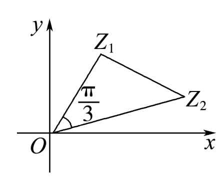
$=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{4\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{4\pi}{3}\right)$

$=\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

$=\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}$.

6.若$\overrightarrow{OZ_1}$与$\overrightarrow{OZ_2}$分别对应复数 $z_1=1+2\sqrt{3}\mathrm{i}$,$z_2=7+\sqrt{3}\mathrm{i}$,求$\angle Z_2OZ_1$,并判断$\triangle Z_2OZ_1$ 的形状.

解:如图,$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+2\sqrt{3}\mathrm{i}}{7+\sqrt{3}\mathrm{i}}=\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{4}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$,所以$\angle Z_2OZ_1=\frac{\pi}{3}$,且$\frac{|\overrightarrow{OZ_1}|}{|\overrightarrow{OZ_2}|}=\frac{1}{2}$.



设$|\overrightarrow{OZ_1}|=k$,$|\overrightarrow{OZ_2}|=2k(k>0)$,由余弦定理,得$|\overrightarrow{Z_1Z_2}|^2=k^2+4k^2-2k\times2k\times\cos\frac{\pi}{3}=3k^2$,

所以$|\overrightarrow{Z_1Z_2}|=\sqrt{3}k$.

而 $k^2+(\sqrt{3}k)^2=(2k)^2$,所以$\triangle Z_2OZ_1$ 为有一锐角为 $60°$的直角三角形.

单元活动构建

任务一 复数的概念

1. 复数 z 的代数形式为 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，其中实部为 a，虚部为 b.

2. $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 的共轭复数为 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$.

3. 复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 的分类

$$\text{复数}\begin{cases}\text{实数}(b=0)\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\\\text{分数}\end{cases}\\\text{无理数(无限不循环小数)}\end{cases}\\\text{虚数}(b\neq0)\begin{cases}\text{纯虚数}(a=0)\\\text{非纯虚数}(a\neq0)\end{cases}\end{cases}$$

(1)若 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 是实数，则 z 与 $\overline{z}$ 的关系为 $z=\overline{z}$.

(2)若 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 是纯虚数，则 z 与 $\overline{z}$ 的关系为 $z+\overline{z}=0(z\neq0)$.

4. 复数相等的充要条件

$$a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}\Leftrightarrow\begin{cases}a=c,\\b=d\end{cases}(a,b,c,d\in\mathbf{R}).$$

「任务达标」

1. 已知在复平面内，复数 z 对应的点是 $Z(1,-2)$，则复数 z 的共轭复数 $\overline{z}=$________.

$1+2\mathrm{i}$ **解析**：因为复数 z 对应的点是 $Z(1,-2)$，所以 $z=1-2\mathrm{i}$，所以复数 z 的共轭复数 $\overline{z}=1+2\mathrm{i}$.

2. 复数 $z=\log_3(x^2-3x-3)+\mathrm{i}\log_2(x-3)$，当 x 为何实数时，(1) $z\in\mathbf{R}$？(2) z 为虚数？

解：(1)因为一个复数是实数的充要条件是虚部为 0，

所以 $\begin{cases}x^2-3x-3>0,\\\log_2(x-3)=0,\\x-3>0,\end{cases}$ 解得 $x=4$.

所以当 $x=4$ 时，$z\in\mathbf{R}$.

(2)因为一个复数是虚数的充要条件是虚部不为 0，

所以 $\begin{cases}x^2-3x-3>0,\\\log_2(x-3)\neq0,\\x-3>0,\end{cases}$ 解得 $x>\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$ 且 $x\neq4$.

所以当 $x>\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$ 且 $x\neq4$ 时，z 为虚数.

【规律方法】

解决复数概念问题的方法及注意事项

(1)复数的分类问题可以转化为复数的实部与虚部应该满足的条件问题，只需把复数化为代数形式，列出实部和虚部满足的方程(不等式)组即可.

(2)解题时一定要先看复数是不是 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 的形式，以确定实部和虚部.

(3)解决此类问题的关键是弄清复数的相关概念.

任务二 复数的几何意义

1. 任何一个复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 一一对应着复平面内一个点 $Z(a,b)$，也一一对应着一个从原点出发的向量 $\overrightarrow{OZ}$.

2. 复数的模

复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 的模 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，且 $z\cdot\overline{z}=|z|^2=a^2+b^2$.

3. 复数加法的几何意义

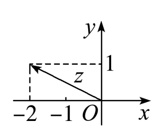
若复数 z_1,z_2 分别对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2}$ 不共线，以 OZ_1,OZ_2 为邻边的平行四边形的对角线为 OZ，则复数 z_1+z_2 是 $\overrightarrow{OZ}$ 所对应的复数.

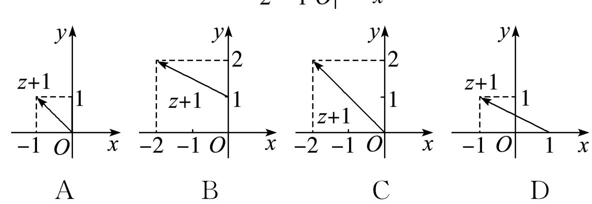
4. 复数减法的几何意义

复数 z_1-z_2 是连接向量 $\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2}$ 的终点，并指向 Z_1 的向量所对应的复数.

「任务达标」

1. 已知复数 z 对应的向量如图所示，则画出复数 $z+1$ 所对应的向量正确的是 ( )





A **解析**：由图可知 $z=-2+\mathrm{i}$，所以 $z+1=-1+\mathrm{i}$，则复数 $z+1$ 所对应的向量的坐标为 $(-1,1)$. 故选 A.

2. (2023·全国乙卷(文)) $|2+\mathrm{i}^2+2\mathrm{i}^3|=$ ( )

A.1 B.2 C.$\sqrt{5}$ D.5

C **解析**：由题意可得 $2+\mathrm{i}^2+2\mathrm{i}^3=2-1-2\mathrm{i}=1-2\mathrm{i}$，

则 $|2+\mathrm{i}^2+2\mathrm{i}^3|=|1-2\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$. 故选 C.

3. 复平面内有 A,B,C 三点，点 A 对应的复数是 $2+\mathrm{i}$，向量$\overrightarrow{BA}$对应的复数是 $1+2\mathrm{i}$，向量$\overrightarrow{BC}$对应的复数是 $3-\mathrm{i}$，求点 C 在复平面内的坐标.

解：因为$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$，

所以$\overrightarrow{AC}$对应的复数为$(3-\mathrm{i})-(1+2\mathrm{i})=2-3\mathrm{i}$.

设 $C(x,y)(x,y\in\mathbf{R})$，则 $(x+y\mathrm{i})-(2+\mathrm{i})=2-3\mathrm{i}$，

所以 $x+y\mathrm{i}=(2+\mathrm{i})+(2-3\mathrm{i})=4-2\mathrm{i}$，

故 $x=4,y=-2$.所以点 C 在复平面内的坐标为$(4,-2)$.

【规律方法】

1. 求复数的模，关键是找出复数的实部与虚部，再利用复数模的公式计算.

2. 复数 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$在复平面内对应的点为 $Z(x,y)$，$|z|$的几何意义为复数 z 在复平面内所对应的点 $Z(x,y)$到原点的距离.

3. 共轭复数的性质：$z+\bar{z}=2a\in\mathbf{R}$，$|z|=|\bar{z}|$.

任务三　复数的四则运算

复数的四则运算

若两个复数 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i},z_2=a_2+b_2\mathrm{i}(a_1,b_1,a_2,b_2\in\mathbf{R})$，则：

(1)$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\mathrm{i}$；

(2)$z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\mathrm{i}$；

(3)$z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\mathrm{i}$；

(4)$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)\mathrm{i}}{a_2^2+b_2^2}=\dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\mathrm{i}(z_2\neq0)$.

「任务达标」

1. 下列各式的运算结果为纯虚数的是　　(　　)

A.$\mathrm{i}(1+\mathrm{i})^2$　　B.$\mathrm{i}^2(1-\mathrm{i})$

C.$(1+\mathrm{i})^2$　　D.$\mathrm{i}(1+\mathrm{i})$

C　**解析**：A 项，$\mathrm{i}(1+\mathrm{i})^2=\mathrm{i}\cdot2\mathrm{i}=-2$，不是纯虚数；B 项，$\mathrm{i}^2(1-\mathrm{i})=-(1-\mathrm{i})=-1+\mathrm{i}$，不是纯虚数；C 项，$(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$，$2\mathrm{i}$ 是纯虚数；D 项，$\mathrm{i}(1+\mathrm{i})=\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=-1+\mathrm{i}$，不是纯虚数.故选 C.

2. 已知复数 $z=a+\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$，若 $z+\bar{z}=4$，则复数 z 的共轭复数$\bar{z}=$　　(　　)

A.$2+\mathrm{i}$　　B.$2-\mathrm{i}$

C.$-2+\mathrm{i}$　　D.$-2-\mathrm{i}$

B　**解析**：因为 $z=a+\mathrm{i}$，所以 $z+\bar{z}=2a=4$，解得 $a=2$. 所以复数 z 的共轭复数$\bar{z}=2-\mathrm{i}$. 故选 B.

3. 若 $z_1=a+2\mathrm{i},z_2=3-4\mathrm{i}$，且$\dfrac{z_1}{z_2}$为纯虚数，则实数 a 的值为________.

$\dfrac{8}{3}$　**解析**：$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{a+2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}=\dfrac{(a+2\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{25}=\dfrac{(3a-8)+(6+4a)\mathrm{i}}{25}$，且$\dfrac{z_1}{z_2}$为纯虚数，解得 $a=\dfrac{8}{3}$.

【规律方法】

复数加、减运算的法则

(1)复数在代数形式下的加、减运算实质就是将实部与实部相加减，虚部与虚部相加减之后分别作为结果的实部与虚部，因此要准确地提取复数的实部与虚部.

(2)复数的加、减运算可以类比多项式的加、减运算(类似于合并同类项)：若有括号，括号优先；若无括号，可以从左到右依次进行计算.

(3)加法交换律和结合律对复数仍成立，复数的减法是加法的逆运算.

任务四　复数三角形式的运算

1. 辐角和辐角的主值的区别与联系

区别：辐角 θ 是指以 x 轴的非负半轴为始边，以复数 z 所对应的向量$\overrightarrow{OZ}$所在射线(射线 OZ)为终边的角，显然辐角有无数个.而辐角的主值是指在 $0\leqslant\theta<2\pi$ 范围内的辐角，因而一个非零复数的辐角的主值只有一个.

联系：$\theta=2k\pi+\arg z,k\in\mathbf{Z}$.

2. 复数乘、除运算的三角表示的两个注意点

(1)转化：首先把两个复数均转化为三角形式.

(2)运算：利用复数乘、除运算在三角形式下的法则运算出结果.

「任务达标」

1. 已知 $z=4\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$，则$\dfrac{1}{z}$的辐角的主值为________.

$\dfrac{23\pi}{12}$　**解析**：$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{12}\right)}$

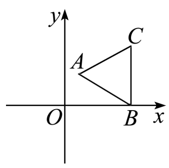
$=\dfrac{\cos0+\mathrm{i}\sin0}{4\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{12}\right)}$

$=\dfrac{1}{4}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\right]$

$=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{23\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{23\pi}{12}\right)$.

所以$\frac{1}{z}$的辐角的主值为$\frac{23\pi}{12}$.

2.如图所示,等边三角形 ABC 的两个顶点 A,B 所对应的复数分别是$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$和 2,则点 C 所对应的复数为________.



$2+\sqrt{3}\mathrm{i}$ **解析**:因为 A,B 所对应的复数分别是$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$和 2,所以$\overrightarrow{AB}$对应的复数为$\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,把$\overrightarrow{AB}$绕点 A 逆时针旋转 $60°$ 得到$\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AC}$对应的复数为$\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)(\cos 60°+\mathrm{i}\sin 60°)=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=(2,\sqrt{3})$,即点 C 对应的复数是 $2+\sqrt{3}\mathrm{i}$.

【规律方法】

1.复数代数形式转化为三角形式的步骤

(1)确定复数的模:利用模长公式 $r=\sqrt{a^2+b^2}$;

(2)确定辐角:由 $\sin\theta=\frac{b}{r}$,$\cos\theta=\frac{a}{r}$及点(a,b)所在象限确定辐角(一般情况下确定出辐角的主值即可);

(3)写出三角形式 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$.

2.利用三角形式确定复数的模和辐角的方法

(1)将复数化为三角形式 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$,其中 $r\geqslant 0$.

(2)模为 r,辐角为 θ.

(3)若求辐角的主值,则应用诱导公式将 θ 化为$[0,2\pi)$范围内的角.

3.复数三角形式转化为代数形式的方法

利用诱导公式和特殊角的三角函数值求解.

第七章质量评估

(时间:120 分钟,分值:150 分)

一、单项选择题(本题包括 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的).

1.(2022·北京)若复数 z 满足 $\mathrm{i}\cdot z=3-4\mathrm{i}$,则$|z|=$ ( )

A.1 B.5 C.7 D.25

B **解析**:由题意有 $z=\frac{3-4\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\frac{(3-4\mathrm{i})(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})}=-4-3\mathrm{i}$,故$|z|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$.故选 B.

2.若复数 $z=1+\mathrm{i}$(i 为虚数单位),$\bar{z}$是 z 的共轭复数,则 $z^2+\bar{z}^2$ 的虚部为 ( )

A.0 B.-1 C.1 D.-2

A **解析**:因为 $z=1+\mathrm{i}$,所以$\bar{z}=1-\mathrm{i}$,所以 $z^2+\bar{z}^2=(1+\mathrm{i})^2+(1-\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}+(-2\mathrm{i})=0$.故选 A.

3.若复数 z 满足 $\mathrm{i}z=2+4\mathrm{i}$,则在复平面内,$z$ 对应的点的坐标是 ( )

A.$(2,4)$ B.$(2,-4)$

C.$(4,-2)$ D.$(4,2)$

C **解析**:$z=\frac{2+4\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=4-2\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点的坐标是$(4,-2)$.故选 C.

4.已知 $z_1=m^2-3m+m^2\mathrm{i}$,$z_2=4+(5m+6)\mathrm{i}$,其中 m 为实数,i 为虚数单位.若 $z_1-z_2=0$,则 m 的值为 ( )

A.4 B.-1 C.6 D.-1 或 6

B **解析**:由题意可得 $z_1=z_2$,即 $m^2-3m+m^2\mathrm{i}=4+(5m+6)\mathrm{i}$.

根据两个复数相等的充要条件可得$\begin{cases}m^2-3m=4,\\m^2=5m+6,\end{cases}$解得 $m=-1$.故选 B.

5.设$(1+\mathrm{i})x=1+y\mathrm{i}$,其中 x,y 是实数,则$|x+y\mathrm{i}|=$ ( )

A.1 B.$\sqrt{2}$ C.$\sqrt{3}$ D.2

B **解析**:因为$(1+\mathrm{i})x=1+y\mathrm{i}$,

所以 $x+x\mathrm{i}=1+y\mathrm{i}$.

又因为 $x,y\in\mathbf{R}$,所以 $x=1$,$y=1$.

所以$|x+y\mathrm{i}|=|1+\mathrm{i}|=\sqrt{2}$.故选 B.

6.已知 $a,b\in\mathbf{C}$,下列命题正确的是 ( )

A.$3\mathrm{i}<5\mathrm{i}$

B.$a=0\Leftrightarrow|a|=0$

C.若$|a|=|b|$,则 $a=\pm b$

D.$a^2\geqslant 0$

B　**解析**：A 选项中，虚数不能比较大小；B 选项正确；C 选项中，当 $a,b\in\mathbf{R}$ 时，结论成立，但在复数集中不一定成立，如 $|\mathrm{i}|=\left|-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right|$，但 $\mathrm{i}\neq-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 或 $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$；D 选项中，当 $a\in\mathbf{R}$ 时结论成立，但在复数集中不一定成立，如 $\mathrm{i}^2=-1<0$.

7. 若复数 $\frac{2-b\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}(b\in\mathbf{R})$ 的实部与虚部互为相反数，则 $b=$（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $-\frac{2}{3}$　　D. 2

C　**解析**：因为 $\frac{2-b\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\frac{(2-b\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{5}=\frac{2-2b}{5}-\frac{4+b}{5}\mathrm{i}$，且复数 $\frac{2-b\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}(b\in\mathbf{R})$ 的实部与虚部互为相反数，所以 $\frac{2-2b}{5}=\frac{4+b}{5}$，即 $b=-\frac{2}{3}$.

8. 数学研究的发展一直推动着数的扩展，从自然数到整数、从整数到有理数、从有理数到实数等等.16 世纪意大利数学家卡尔达诺在解方程时，首先引进了 $\sqrt{-1}$ 这样的数，17 世纪法国数学家笛卡儿把它称为“虚数”，并在直角坐标系上建立了“复平面”来研究复数，18 世纪瑞士数学家欧拉用字母 i 表示虚数单位，并规定 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，从此复数便成了 $a+b\mathrm{i}$ $(a,b\in\mathbf{R})$ 的形式.若复数 z 满足方程 $z^2+2z+5=0$，则 $z=$（　　）

A. $-1+2\mathrm{i}$　　B. $-2-\mathrm{i}$

C. $-1\pm2\mathrm{i}$　　D. $-2\pm\mathrm{i}$

C　**解析**：设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，因为 $z^2+2z+5=0$，则 $(a+b\mathrm{i})^2+2(a+b\mathrm{i})+5=0$，

即 $(a^2-b^2+2a+5)+2b(a+1)\mathrm{i}=0$，而 $a,b\in\mathbf{R}$，

则 $\begin{cases}a^2-b^2+2a+5=0,\\2b(a+1)=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=\pm2,\end{cases}$

所以 $z=-1\pm2\mathrm{i}$.故选 C.

二、多项选择题（本题包括 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分）.

9. 已知 $x,y\in\mathbf{R}$，i 为虚数单位，且 $(x+1)\mathrm{i}-y=-1+2\mathrm{i}$，复数 $z=(1-\mathrm{i})^{x+y}$，则以下结论正确的是（　　）

A. z 的虚部为 $-2\mathrm{i}$

B. z 的模为 2

C. z 的共轭复数为 $2\mathrm{i}$

D. z 在复平面内对应的点在第四象限

BC　**解析**：因为 $(x+1)\mathrm{i}-y=-1+2\mathrm{i}$，所以 $\begin{cases}x+1=2,\\-y=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$ 所以 $z=(1-\mathrm{i})^2=-2\mathrm{i}$.

对于 A，z 的虚部为 -2，A 错误；对于 B，$|z|=2$，B 正确；对于 C，z 的共轭复数为 $2\mathrm{i}$，C 正确；对于 D，z 在复平面内对应的点为 $(0,-2)$，不在第四象限，D 错误.

10. 若 $\theta\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$，则复数 $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 在复平面内对应的点不可能在（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

ABC　**解析**：因为 $\theta\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$，所以 $\cos\theta>0$，$\sin\theta<0$.所以复数 $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 在复平面内对应的点在第四象限.

11. 已知复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R}$，i 为虚数单位)，且 $a+b=1$，下列命题正确的是（　　）

A. z 不可能为纯虚数

B. 若 z 的共轭复数为 $\overline{z}$，且 $z=\overline{z}$，则 z 是实数

C. 若 $z=|z|$，则 z 是实数

D. $|z|$ 可以等于 $\frac{1}{2}$

BC　**解析**：当 $a=0$ 时，$b=1$，此时 $z=\mathrm{i}$ 为纯虚数，A 错误；若 z 的共轭复数为 $\overline{z}$，且 $z=\overline{z}$，则 $a+b\mathrm{i}=a-b\mathrm{i}$，因此 $b=0$，B 正确；由 $|z|$ 是实数，且 $z=|z|$ 知，z 是实数，C 正确；由 $|z|=\frac{1}{2}$ 得 $a^2+b^2=\frac{1}{4}$，又 $a+b=1$，因此 $8a^2-8a+3=0$，$\Delta=64-4\times8\times3=-32<0$，无解，即 $|z|$ 不可能等于 $\frac{1}{2}$，D 错误.故选 BC.

12. 已知复数 $z_0=1+2\mathrm{i}$（i 为虚数单位）在复平面内对应的点为 P_0，复数 z 满足 $|z-1|=|z-\mathrm{i}|$，下列结论正确的是（　　）

A. 点 P_0 的坐标为 $(1,2)$

B. 复数 z_0 的共轭复数对应的点与点 P_0 关于虚轴对称

C. 复数 z 对应的点 Z 在一条直线上

D. P_0 与 z 对应的点 Z 间的距离的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

ACD　**解析**：复数 $z_0=1+2\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点为 $P_0(1,2)$，A 正确；复数 z_0 的共轭复数对应的点与点 P_0 关于实轴对称，B 错误；设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，代入 $|z-1|=|z-\mathrm{i}|$，得 $|(x-1)+y\mathrm{i}|=|x+(y-1)\mathrm{i}|$，即 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$，整理得 $y=x$，即点 Z 在直线 $y=x$ 上，C 正确；易知点 P_0 到直线 $y=x$ 的垂线段的长度即为 P_0 与 Z 之间距离的最小值，结合平面几何知识知 D 正确.故选 ACD.

三、填空题（本题包括 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）.

13. 若复数 $m-3+(m^2-9)\mathrm{i}\geqslant0$，则实数 m 的值为________.

3　**解析**：依题意知 $\begin{cases}m-3\geqslant0,\\m^2-9=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m\geqslant3,\\m=-3\text{ 或 }3,\end{cases}$ 即 $m=3$.

14. 已知 a 为正实数，i 为虚数单位，若 $\left|\frac{a+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right|=2$，则 $a=$________.

$\sqrt{3}$　**解析**：$\frac{a+i}{i}=\frac{(a+i)(-i)}{i\cdot(-i)}=1-ai$，

则 $\left|\frac{a+i}{i}\right|=|1-ai|=\sqrt{a^2+1}=2$，所以 $a^2=3$.

又 a 为正实数，所以 $a=\sqrt{3}$.

15. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，$a+bi=\frac{11-7i}{1-2i}$(i 为虚数单位)，则 $a+b$ 的值为________.

8　**解析**：$a+bi=\frac{11-7i}{1-2i}=\frac{(11-7i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{25+15i}{5}=5+3i$，依据复数相等的充要条件可得 $a=5$，$b=3$.从而 $a+b=8$.

16. 若复数 $(-6+k^2)-(k^2-4)i$ 在复平面内所对应的点在第三象限，则实数 k 的取值范围是________.

$(-\sqrt{6},-2)\cup(2,\sqrt{6})$　**解析**：由已知得 $\begin{cases}-6+k^2<0,\\k^2-4>0,\end{cases}$ 所以 $4<k^2<6$.

所以 $-\sqrt{6}<k<-2$ 或 $2<k<\sqrt{6}$.

四、解答题(本题包括 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤).

17.(10 分)已知复数 z 与 $(z+2)^2-8i$ 均是纯虚数，求复数 z.

解：设 $z=bi$ $(b\in\mathbf{R},b\neq0)$，

则 $(z+2)^2-8i=(2+bi)^2-8i$

$=(4-b^2)+(4b-8)i$.

因为 $(z+2)^2-8i$ 为纯虚数，

所以 $4-b^2=0$ 且 $4b-8\neq0$.

所以 $b=-2$.所以 $z=-2i$.

18.(12 分)设复数 $z=\lg(m^2-2m-2)+(m^2+3m+2)i$，当 m 为何值时，z 分别满足下列条件?

(1)z 是实数；(2)z 是纯虚数.

解：(1)要使复数 z 为实数，

需满足 $\begin{cases}m^2-2m-2>0,\\m^2+3m+2=0,\end{cases}$

解得 $m=-2$ 或 -1.

即当 $m=-2$ 或 -1 时，z 是实数.

(2)要使复数 z 为纯虚数，

需满足 $\begin{cases}m^2-2m-2=1,\\m^2+3m+2\neq0,\end{cases}$ 解得 $m=3$.

即当 $m=3$ 时，z 是纯虚数.

19.(12 分)已知 z 是复数，$z+2i$ 与 $\frac{z}{2-i}$ 均为实数.

(1)求复数 z；

(2)复数 $(z+ai)^2$ 在复平面内对应的点在第一象限，求实数 a 的取值范围.

解：(1)设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$，所以 $z+2i=x+(y+2)i$；

$\frac{z}{2-i}=\frac{x+yi}{2-i}=\frac{(2x-y)+(x+2y)i}{5}$.

由条件得 $y+2=0$ 且 $x+2y=0$，

所以 $x=4$，$y=-2$.

所以 $z=4-2i$.

(2)$(z+ai)^2=(4-2i+ai)^2=(12+4a-a^2)+8(a-2)i$，

由条件得 $\begin{cases}12+4a-a^2>0,\\8(a-2)>0,\end{cases}$

解得 $2<a<6$，所以所求实数 a 的取值范围是 $(2,6)$.

20.(12 分)已知 $x=-1+i$ 是方程 $x^2+ax+b=0(a,b\in\mathbf{R})$ 的一个根.

(1)求实数 a,b 的值；

(2)结合根与系数的关系，猜测方程的另一个根，并给予证明.

解：(1)把 $x=-1+i$ 代入方程 $x^2+ax+b=0$，得 $(-a+b)+(a-2)i=0$，

所以 $\begin{cases}-a+b=0,\\a-2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=2.\end{cases}$

(2)由(1)知方程为 $x^2+2x+2=0$.

设另一个根为 x_2，由根与系数的关系，

得 $-1+i+x_2=-2$，

所以 $x_2=-1-i$.

把 $x_2=-1-i$ 代入方程 $x^2+2x+2=0$ 的左边，

则左边 $=(-1-i)^2+2(-1-i)+2=0=$ 右边，

所以 $x_2=-1-i$ 是方程的另一个根.

21.(12 分)复数 $z=\frac{(1+i)^2+3(1-i)}{2+i}$，若 $z^2+\frac{a}{z}<0$，求纯虚数 a.

解：由 $z^2+\frac{a}{z}<0$ 可知 $z^2+\frac{a}{z}$ 是实数且为负数.

$z=\frac{(1+i)^2+3(1-i)}{2+i}=\frac{2i+3-3i}{2+i}=\frac{3-i}{2+i}=1-i$.

因为 a 为纯虚数，

所以可设 $a=mi(m\in\mathbf{R}$，且 $m\neq0)$，

则 $z^2+\frac{a}{z}=(1-i)^2+\frac{mi}{1-i}=-2i+\frac{mi-m}{2}=-\frac{m}{2}+\left(\frac{m}{2}-2\right)i<0$.

故 $\begin{cases}-\frac{m}{2}<0,\\\frac{m}{2}-2=0,\end{cases}$ 所以 $m=4$，即 $a=4i$.

22.(12 分)设复数 z_1,z_2 满足 $|z_1|=|z_2|=2$，$z_1+z_2=\sqrt{3}+i$，求 $|z_1-z_2|$.

解：因为 $|z_1|=|z_2|=2$，

可设 $z_1=2\cos\theta+2\sin\theta\cdot i$，$z_2=2\cos\alpha+2\sin\alpha\cdot i$，

所以 $z_1+z_2=2(\cos\theta+\cos\alpha)+2(\sin\theta+\sin\alpha)i=\sqrt{3}+i$，

所以 $\begin{cases}2(\cos\theta+\cos\alpha)=\sqrt{3},\\2(\sin\theta+\sin\alpha)=1,\end{cases}$

两式平方作和得 $4(2+2\cos\theta\cos\alpha+2\sin\theta\sin\alpha)=4$，

化简得 $\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=-\frac{1}{2}$，

所以 $|z_1-z_2|$

$=|2(\cos\theta-\cos\alpha)+2(\sin\theta-\sin\alpha)i|$

$=\sqrt{4(\cos\theta-\cos\alpha)^2+4(\sin\theta-\sin\alpha)^2}$

$=\sqrt{8-8(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)}=\sqrt{8+4}$

$=2\sqrt{3}$.

第八章　立体几何初步

8.1　基本立体图形

第1课时　棱柱、棱锥、棱台

学习任务目标

1. 了解空间几何体的概念，了解空间几何体的分类.

2. 了解棱柱、棱锥、棱台的定义，知道这三种几何体的结构特征，能够识别和区分给出的几何体.(数学抽象)

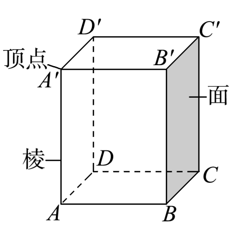
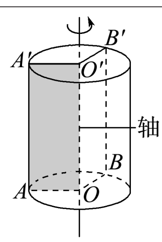
问题式预习

知识点一　空间几何体

1. 空间几何体的定义

空间中的物体都占据着空间的一部分，如果只考虑这些物体的形状和大小，而不考虑其他因素，那么由这些物体抽象出来的空间图形就叫做空间几何体.

2. 空间几何体的分类

类别	多面体	旋转体
定义	一般地，由若干个平面多边形围成的几何体叫做多面体	一条平面曲线(包括直线)绕它所在平面内的一条定直线旋转所形成的曲面叫做旋转面，封闭的旋转面围成的几何体叫做旋转体
图形		
相关概念	面：围成多面体的各个多边形； 棱：两个面的公共边； 顶点：棱与棱的公共点	轴：形成旋转体所绕的定直线

[微训练]

判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").

(1)空间几何体是占有一定空间的空间图形.(　　)

√　**提示**：空间几何体是在只考虑物体的形状与大小，而不考虑其他因素的情况下，由物体抽象出来的空间图形.

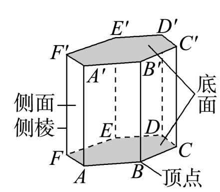
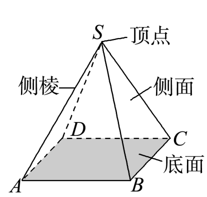
(2)多面体是由多个平面多边形围成的几何体.(　　)

√　**提示**：围成多面体的各个面都是平面多边形.

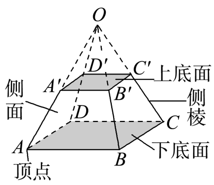
(3)旋转体是由多个曲面围成的几何体.(　　)

×　**提示**：旋转体是由一个平面图形绕它所在平面内的一条定直线旋转而形成的封闭几何体，但在旋转体中也会有平面图形，如旋转体的底面就可以是平面图形.

知识点二　多面体

多面体	定义	图形及表示	相关概念
棱柱	一般地，有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的多面体叫做棱柱	 如图的棱柱可记作：棱柱 $ABCDEF$-$A'B'C'D'E'F'$	底面：这两个互相平行的面； 侧面：除底面外的其余各面； 侧棱：相邻侧面的公共边； 顶点：侧面与底面的公共顶点
棱锥	一般地，有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形，由这些面所围成的多面体叫做棱锥	 如图的棱柱可记作：棱锥 S-$ABCD$	底面：多边形面； 侧面：有公共顶点的各个三角形面； 侧棱：相邻侧面的公共边； 顶点：各侧面的公共顶点

续表

多面体	定义	图形及表示	相关概念
棱台	用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥，底面和截面之间那部分多面体叫做棱台	 如图的棱台可记作：棱台 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$	上底面：原棱锥的截面； 下底面：原棱锥的底面； 侧面：除底面外的其余各面； 侧棱：相邻侧面的公共边； 顶点：侧面与上（下）底面的公共顶点

［微训练］

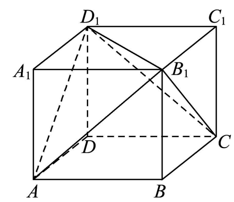
1. 判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)棱柱的侧面都是平行四边形.（　　）

√　**提示**：棱柱有两个本质特征：①有两个互相平行的面(底面)，②侧棱互相平行.由这两个特征可以推出棱柱的所有侧面都是平行四边形.

(2)有一个面是多边形，其余各面都是三角形的几何体叫做棱锥.（　　）

×　**提示**：如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，截去两个三棱锥 $A\text{-}A_1B_1D_1$ 和 $C\text{-}B_1C_1D_1$ 后剩余的部分中，底面 $ABCD$ 是多边形，其余各面都是三角形，但它不是棱锥.



(3)用一个平面去截棱锥，底面和截面之间的部分叫做棱台.（　　）

×　**提示**：截面必须与棱锥的底面平行，否则得不到棱台.

2. 有一个多面体，共有四个面，每一个面都是三角形，则这个几何体为（　　）

A.四棱柱　　B.四棱锥

C.三棱柱　　D.三棱锥

D　**解析**：由于每一个面都是三角形且有四个面，故该几何体为三棱锥.

任务型课堂

任务一　棱柱、棱锥、棱台的概念

1. 下列四个命题中，正确的有（　　）

①棱柱中互相平行的两个面叫做棱柱的底面；

②各个面都是三角形的几何体是三棱锥；

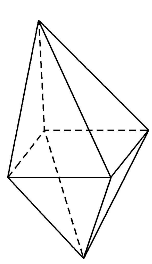
③有两个面互相平行，其余四个面都是等腰梯形的六面体是棱台；

④四棱锥有 4 个顶点.

A.0 个　B.1 个　C.2 个　D.3 个

A　**解析**：①错误，底面为正六边形的棱柱相对的两个侧面互相平行，但不能作为底面；

②错误，如图所示的几何体各面均为三角形，但不是三棱锥；



③错误，因为不能保证侧棱所在直线相交于同一点；

④错误，四棱锥只有一个顶点，就是各侧面的公共顶点.

2. 具有下列条件的多面体是棱台的是（　　）

A.两底面是相似多边形的多面体

B.侧面是梯形的多面体

C.两底面平行的多面体

D.两底面平行，各侧棱延长后交于一点的多面体

D　**解析**：棱台是由棱锥截得的，因此一个几何体要成为棱台应有两个条件：一是上、下底面平行，二是各侧棱延长后必须交于一点.选项 C 只具备一个条件，选项 A，B 两个条件都不具备.

3. 一个棱柱至少有________个面，面数最少的棱柱有________个顶点，________条棱.

5　6　9　**解析**：棱柱至少有 5 个面，这样的棱柱为三棱柱，有 6 个顶点，9 条棱.

【类题通法】

1. 对于棱柱的定义注意以下三个方面：

(1)有两个面互相平行，各侧棱都平行，各侧面都是平行四边形.

(2)有两个面平行，其余各面都是平行四边形的几何体不一定是棱柱.

(3)从运动的观点看，棱柱可以看成是一个平面多边形从一个位置沿一条不与其共面的直线运动到另一位置时形成的几何体.

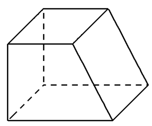
2.对于棱锥要注意有一个面是多边形，其余各面都是三角形的几何体不一定是棱锥，必须强调其余各面是共顶点的三角形.

3.棱台中各侧棱延长后必相交于一点，否则不是棱台.

任务二　对多面体形状的认识

[探究活动]

如图所示，关于这个六面体，探究下列问题.

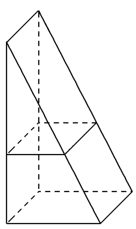


探究 1：此几何体是一个四棱台吗？

提示：不是，因为侧棱的延长线不能交于一点.

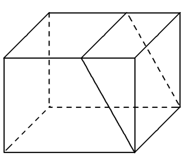
探究 2：此几何体可由三棱柱截去一个三棱柱得到吗？

提示：可以，如图所示.



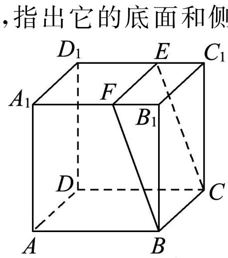
探究 3：此几何体可由四棱柱截去一个三棱柱得到吗？

提示：可以，如图所示.



[评价活动]

如图，四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 被平面 $BCEF$ 所截得的两部分分别是什么几何体？若几何体 $ABCD\text{-}A_1FED_1$ 是棱柱，指出它的底面和侧面.



解：所截得的两部分分别是四棱柱和三棱柱.几何体 $ABCD\text{-}A_1FED_1$ 是四棱柱，它的底面是四边形 $ABFA_1$ 和四边形 $DCED_1$，侧面为四边形 $ABCD$，四边形 $BCEF$，四边形 ADD_1A_1 和四边形 A_1D_1EF，侧面均为平行四边形.

【类题通法】

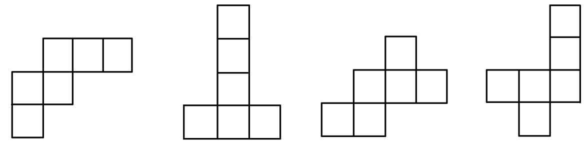
1.棱柱的两个底面互相平行，每一个侧面都是平行四边形.

2.棱锥的每一个侧面都是三角形.

3.棱台的两个底面平行且是相似的多边形，侧面都是梯形.

任务三　多面体的表面展开与折叠

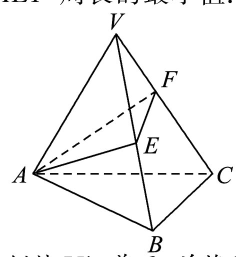
1.（多选题）下列四个平面图形中，每个小四边形都是正方形，其中可以沿相邻正方形的公共边折叠围成一个正方体的是　　（　　）



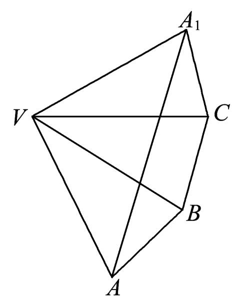
A　　　　B　　　　C　　　　D

BC　**解析：**将四个选项中的平面图形折叠，由 B，C 两项中的图形可以得到正方体.

2.如图，在三棱锥 $V\text{-}ABC$ 中，$VA=VB=VC=4$，$\angle AVB=\angle AVC=\angle BVC=30°$，过点 A 作截面 $\triangle AEF$，求 $\triangle AEF$ 周长的最小值.



解：将三棱锥沿侧棱 VA 剪开，并将其侧面展开平铺在一个平面上，如图，线段 AA_1 的长为所求 $\triangle AEF$ 周长的最小值.



因为 $\angle AVB=\angle A_1VC=\angle BVC=30°$，所以 $\angle AVA_1=90°$.又 $VA=VA_1=4$，所以 $AA_1=4\sqrt{2}$，所以 $\triangle AEF$ 周长的最小值为 $4\sqrt{2}$.

【类题通法】

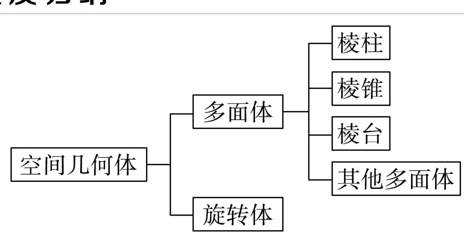
1.解答此类问题要结合多面体的结构特征，发挥空间想象能力和动手能力.

2.若给出多面体，画其展开图，则常常要给多面体的顶点标上字母，先把多面体的底面画出来，再依次画出各侧面.

3.若给出多面体的表面展开图，判断是由哪一个多面体展开的，则可把表面展开图中某个平面图形固定，将其余平面图形折起.

4.求多面体表面上两点间的最短距离，常常要归结为求平面上两点间的距离.解决此类问题的方法就是先把多面体展开，再用平面几何的知识来求解.

提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1.下列说法正确的是 （　　）

A.棱柱的面中，至少有两个面互相平行

B.棱柱中两个互相平行的平面一定是棱柱的底面

C.棱柱的一条侧棱就是棱柱的高

D.棱柱的侧面一定是平行四边形，但它的底面一定不是平行四边形

A　**解析**：棱柱的两底面互相平行，故 A 正确；棱柱的侧面也可能有平行的面（如正方体），故 B 错误；立在一起的一摞书可以看成一个四棱柱，当把这摞书推倾斜时，它的侧棱就不是棱柱的高，故 C 错误；由棱柱的定义知，棱柱的侧面一定是平行四边形.但它的底面可以是平行四边形，也可以是其他多边形，故 D 错误.

2.有两个面平行的多面体不可能是 （B）

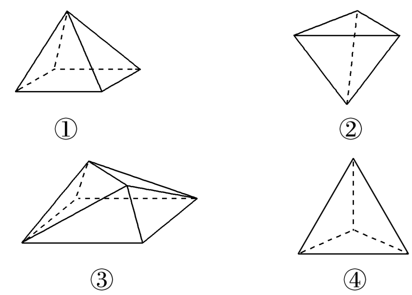
A.棱柱

B.棱锥

C.棱台

D.以上都错

3.下列图形中，为棱锥的是 （　　）



A.①③　　B.①③④

C.①②④　　D.①②

C　**解析**：根据棱锥的定义和结构特征可以判断，①②④是棱锥，③不是棱锥.

4.给出下列关于棱柱的说法：

①所有的面都是平行四边形；

②每一个面都不会是三角形；

③两底面互相平行，各侧棱也互相平行；

④被平面截成的两部分可以都是棱柱.

其中正确说法的序号是________.

③④　**解析**：三棱柱底面为三角形，故①②错；③④正确.

综合性·创新提升

1.给出下列关于棱锥、棱台的说法，其中不正确的是（D）

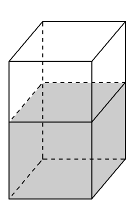
A.棱台的侧面一定不会是平行四边形

B.棱锥的侧面只能是三角形

C.由四个面围成的封闭图形只能是三棱锥

D.棱锥被平面截成的两部分不可能都是棱锥

2.将如图所示装有水的长方体水槽底面一边固定后倾斜一个小角度，则倾斜后水槽中的水形成的几何体是 （　　）



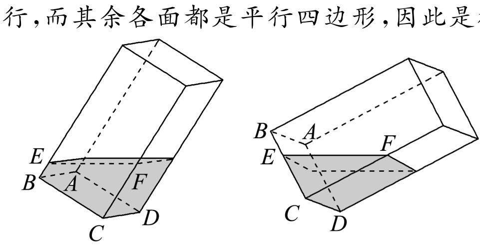
A.棱柱

B.棱台

C.棱柱与棱锥的组合体

D.不能确定

A　**解析**：如图所示，因为有水的部分始终有两个平面平行，而其余各面都是平行四边形，因此是棱柱.



3.图 1 是一个小正方体的表面展开图，小正方体从如图 2 所示的位置依次翻到第 1 格、第 2 格、第 3 格、第 4 格、第 5 格，这时小正方体朝上一面的字是________.

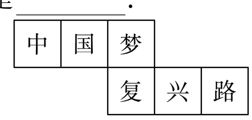


图1

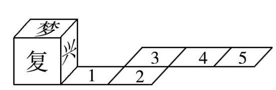


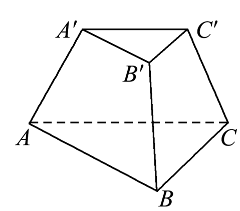
图2

路　**解析**：由题图 1 可知，“国”和“兴”相对，“梦”和“中”相对，“复”和“路”相对；

由题图 2 可得，与第 1、2、3、4、5 格对应的面的字分别是“兴”“梦”“路”“国”“复”，

所以到第 5 格时，小正方体朝上一面的字是“路”.

4.如图所示的是一个三棱台 $ABC\text{-}A'B'C'$，试用两个平面把这个三棱台分成三部分，使每一部分都是一个三棱锥.



解：过 A'，B，C 三点作一个平面，再过 A'，B，C' 作一个平面，就把三棱台 $ABC\text{-}A'B'C'$ 分成三部分，三部分分别是棱锥 $A'\text{-}ABC$，棱锥 $B\text{-}A'B'C'$，棱锥 $A'\text{-}BCC'$.（答案不唯一）

第 2 课时　圆柱、圆锥、圆台、球

学习任务目标

1.掌握圆柱、圆锥、圆台、球的结构特征.(直观想象)

2.会用圆柱、圆锥、圆台、球的结构特征描述简单组合体的结构特征.

3.理解圆柱、圆锥、圆台的关系.

问题式预习

知识点一　圆柱、圆锥与圆台

1.圆柱

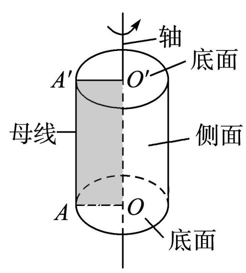
(1)定义

以矩形的一边所在直线为旋转轴,其余三边旋转一周形成的面所围成的旋转体叫做圆柱.

(2)相关概念

旋转轴叫做圆柱的轴;垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做圆柱的底面;平行于轴的边旋转而成的曲面叫做圆柱的侧面;无论旋转到什么位置,平行于轴的边都叫做圆柱侧面的母线.

(3)图形



(4)表示法

圆柱用表示它的轴的字母表示,

图中的圆柱表示为圆柱 $O'O$.

2.圆锥

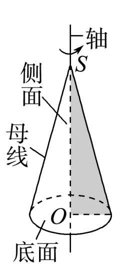
(1)定义

以直角三角形的一条直角边所在直线为旋转轴,其余两边旋转一周形成的面所围成的旋转体叫做圆锥.

(2)相关概念

旋转轴叫做圆锥的轴;垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做圆锥的底面;直角三角形的斜边旋转而成的曲面叫做圆锥的侧面;无论旋转到什么位置,不垂直于轴的边都叫做圆锥侧面的母线.

(3)图形



(4)表示法

圆锥用表示它的轴的字母表示,图中的圆锥表示为圆锥 SO.

3.圆台

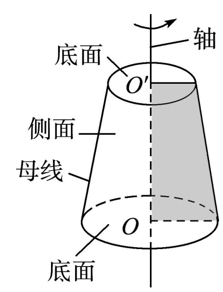
(1)定义

用平行于圆锥底面的平面去截圆锥,底面与截面之间的部分叫做圆台.

(2)相关概念

与圆柱和圆锥一样,圆台也有轴、底面、侧面、母线.

(3)图形



(4)表示法

圆台用表示它的轴的字母表示,图中的圆台表示为圆台 $O'O$.

[微训练]

判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)圆柱、圆锥、圆台的底面都是圆面.　(　　)

√　**提示**:根据旋转体的定义知圆柱、圆锥、圆台的底面都是圆面.

(2)用平面去截圆锥,会得到一个圆锥和一个圆台.　(　　)

×　**提示**:截面与原圆锥的底面平行才能得到一个圆锥和一个圆台,否则既得不到圆锥,也得不到圆台.

(3)直角三角形绕其一边所在直线旋转一周形成的几何体是圆锥.　(　　)

×　**提示**:只有绕直角边所在直线旋转一周才能形成圆锥.

知识点二　球

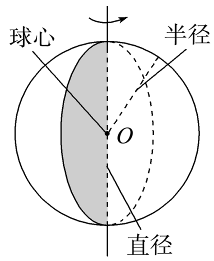
(1)定义

半圆以它的直径所在直线为旋转轴,旋转一周形成的曲面叫做球面,球面所围成的旋转体叫做球体,简称球.

(2)相关概念

半圆的圆心叫做球的球心;连接球心和球面上任意一点的线段叫做球的半径;连接球面上两点并且经过球心的线段叫做球的直径.

(3)图形



(4)表示法

球常用表示球心的字母来表示,图中的球表示为球 O.

[微训练]

给出下列说法:

①连接球面上任一点与球心的线段是球的半径;

②连接球面上任意两点的线段是球的直径;

③用一个平面截一个球,得到的面是一个圆面;

④不过球心的平面截球所得的圆面的半径小于球的半径.

其中正确说法的序号有________.

①③④　**解析**:球的有关概念中要注意直径和截面圆.对于②,球的直径必过球心,故②不对.

知识点三　简单组合体

(1)概念:由简单几何体组合而成的几何体叫做简单组合体.现实世界中的物体大多是由具有柱体、锥体、台体、球等结构特征的物体组合而成.

(2)基本形式:一种是由简单几何体拼接而成,另一种是由简单几何体截去或挖去一部分而成.

[微训练]

判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)一个直角梯形绕下底所在直线旋转一周,所形成的面围成的几何体是圆台.　(　　)

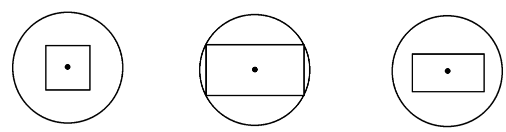
×　**提示**:这样形成的几何体是一个圆柱和一个圆锥的组合体.

(2)若一个圆柱内切于一个正三棱柱,则平行于底面的截面是一个圆内切于一个正三角形.　(　　)

√　**提示**:根据正三棱柱、圆柱、圆内切三角形等定义即可判断.

(3)若一个正方体内接于一个球,则过球心的截面是一个圆与内接于一个正方形.　(　　)

×　**提示**:根据不同的角度可以得到如下几种情况:



①　　　②　　　③

①圆内有一个正方形;②圆内接一个矩形;③圆内有一个矩形.

任务型课堂

任务一　旋转体的结构特征

1.下列命题正确的有　(　　)

①在圆柱的上、下两底面的圆周上各取一点,则这两点的连线是圆柱的母线;

②圆锥的顶点与底面圆周上任意一点的连线是圆锥的母线;

③在圆台上、下两底面的圆周上各取一点,则这两点的连线是圆台的母线;

④圆柱的任意两条母线相互平行.

A.①②　B.②③　C.①③　D.②④

D　**解析**:①以所取的两点与圆柱上、下底面的圆心为顶点的四边形不一定是矩形,若不是矩形,则与圆柱母线定义不符合;③所取两点连线的延长线不一定与轴交于一点,不符合圆台母线的定义;②④分别符合圆锥的定义、圆柱母线的性质.

2.圆锥的侧面展开图是　(　　)

A.长方形　B.扇形

C.圆　D.三角形

B　**解析**:沿圆锥一条母线将圆锥的侧面剪开,得到圆锥侧面的展开图是扇形.

3.(多选题)用一个平面去截一个几何体,得到的截面是三角形,这个几何体可能是　(　　)

A.圆柱　B.圆锥　C.球体　D.棱台

BD　**解析**:无论怎样截圆柱和球,截面不可能是三角形,截圆锥和棱台,截面可以是三角形.故选BD.

4.下列说法中,正确说法的序号有________.

①直线绕直线旋转形成柱面;

②曲线平移一定形成曲面;

③直角梯形绕一边所在直线旋转一周形成圆台;

④半圆面绕直径所在直线旋转一周形成球.

④　**解析**:①错误,当两直线相交时,形不成柱面;②错误,也可能形成平面;③错误,若绕底边所在直线旋转一周,则形成圆柱和圆锥的组合体;④正确,由球的定义知,正确.

【类题通法】

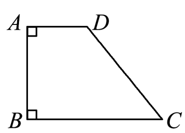
1.解答第1题这类题的关键在于准确理解旋转体的母线的概念.

2.圆锥、圆台的母线是非常重要的概念,应熟练掌握;圆柱、圆锥、圆台的母线实质上就是矩形、直角三角形、直角梯形在绕轴旋转的过程中,特定的一条边在所经过的每一个位置时的这条边本身.因此,圆锥的母线交于顶点,圆柱的母线相互平行,圆台的母线延长后也相交于一点.

任务二　组合体的结构特征

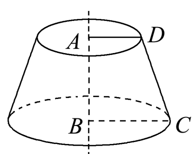
[探究活动]

如图,已知 AB 是直角梯形 $ABCD$ 中与底边垂直的一腰,探究下列问题.



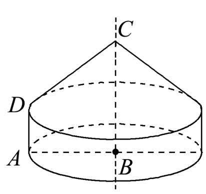
探究1:以边 AB 所在直线为旋转轴,其余三边旋转一周,得到什么样的几何体?

提示:以边 AB 所在直线为旋转轴,其余三边旋转一周,所得旋转体是圆台.如图所示.



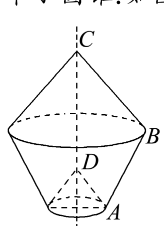
探究2:以边 BC 所在直线为旋转轴,其余三边旋转一周,得到什么样的几何体?

提示:以边 BC 所在直线为旋转轴,其余三边旋转一周,所得的旋转体是一个组合体,下部为圆柱,上部为圆锥.如图所示.



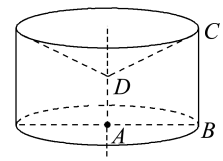
探究3:以边 CD 所在直线为旋转轴,其余三边旋转一周,得到什么样的几何体?

提示:以边 CD 所在直线为旋转轴,其余三边旋转一周,所得的旋转体为一个组合体,上部为圆锥,下部为圆台,再挖去一个小圆锥.如图所示.



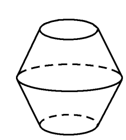
探究4:以边 AD 所在直线为旋转轴,其余三边旋转一周,得到什么样的几何体?

提示:以边 AD 所在直线为旋转轴,其余三边旋转一周,所得的旋转体为一个组合体,一个圆柱上部挖去一个圆锥.如图所示.

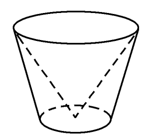


[评价活动]

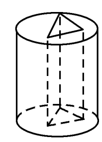
描述下列各图所示几何体的结构特征.



①



②



③

解:题图①所示的几何体是由两个圆台拼接而成的组合体;题图②所示的几何体是由一个圆台挖去一个圆锥得到的组合体;题图③所示的几何体是在一个圆柱中间挖去一个三棱柱后得到的组合体.

【类题通法】

判断组合体是由哪些简单几何体组成的技巧

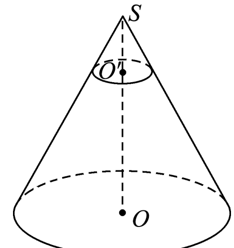
(1)准确理解简单几何体(柱、锥、台、球)的结构特征.

(2)掌握简单组合体的两种基本构成方式.

(3)若用分割的方法,则需要根据几何体的结构特征恰当地作出辅助线(面).

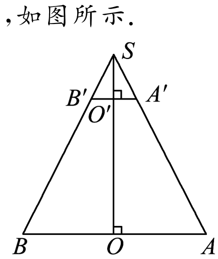
任务三　旋转体的有关计算

1.如图,用一个平行于圆锥 SO 底面的平面截这个圆锥,截得的圆台上、下底面的面积之比为 $1:16$,截去的圆锥的母线长是 3 cm,求圆台 $O'O$ 的母线长.



解:设圆台的母线长为 l cm.由截得的圆台上、下底面的面积之比为 $1:16$,可设截得的圆台上、下底面的半径分别为 r cm,$4r$ cm.

过轴 SO 作截面,如图所示.



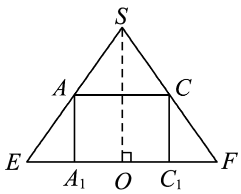
则$\triangle SO'A' \backsim \triangle SOA$，$SA'=3$ cm，

所以$\frac{SA'}{SA}=\frac{O'A'}{OA}$，所以$\frac{3}{3+l}=\frac{r}{4r}=\frac{1}{4}$，解得 $l=9$.

故圆台 $O'O$ 的母线长为 9 cm.

2. 已知圆锥底面半径为 1 cm，高为$\sqrt{2}$ cm，其中有一个内接正方体，求这个内接正方体的棱长.

解： 设圆锥的轴截面为$\triangle SEF$，正方体对角面为矩形 ACC_1A_1 如图所示.



设正方体的棱长为 x cm，则 $AA_1=x$ cm，$A_1C_1=\sqrt{2}x$ cm.

作 $SO\perp EF$ 于点 O，则 $SO=\sqrt{2}$ cm，$OE=1$ cm.

因为$\triangle EAA_1 \backsim \triangle ESO$，

所以$\frac{AA_1}{SO}=\frac{EA_1}{EO}$，即$\frac{x}{\sqrt{2}}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}x}{1}$，

解得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即该内接正方体的棱长为$\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm.

3. 已知半径为 10 的球的两个平行截面的周长分别是 12π 和 16π，求这两个截面间的距离.

解： 设球的大圆为圆 O，点 C，D 为两截面圆的圆心，AB 为经过 C，O，D 三点的直径，且两截面圆的半径分别是 6 和 8.

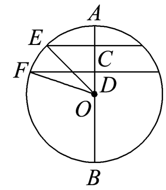


图1

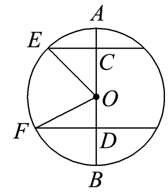


图2

当两截面在球心同侧时，如图 1，此时 $CD=OC-OD=\sqrt{OE^2-EC^2}-\sqrt{OF^2-DF^2}=8-6=2$.

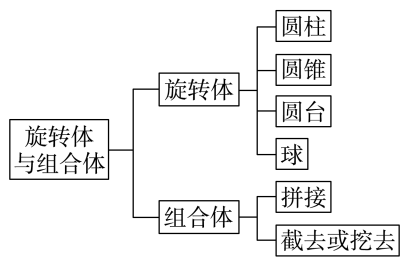
当两截面在球心两侧时，如图 2，此时 $CD=OC+OD=\sqrt{OE^2-EC^2}+\sqrt{OF^2-DF^2}=8+6=14$.

故两截面间的距离为 2 或 14.

【类题通法】

用平行于底面的平面去截柱、锥、台等几何体，注意抓住截面的性质（与底面相似），同时结合旋转体中的经过旋转轴的截面（轴截面）的几何性质，利用相似三角形的相似比，构设相关几何变量的方程（组）而得解.

提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1.（多选题）下列命题正确的有（　　）

A. 圆柱的轴截面是过母线的截面中面积最大的截面

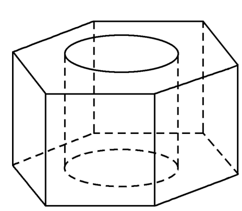
B. 圆柱不是旋转体

C. 半圆绕直径所在直线旋转半周得到一个球

D. 圆台的轴截面是等腰梯形

AD　**解析：** 圆柱的纵截面是矩形，矩形的长是圆柱的高，矩形的宽是圆内的弦，轴截面的宽是过圆心的直径，故圆柱的轴截面是过母线的截面中面积最大的截面，故 A 正确；根据旋转体的概念可知圆柱是旋转体，故 B 错误；半圆围绕直径旋转半周得到半个球，故 C 错误；圆台的上下底面是平行且不相等的圆，且母线等长，所以其轴截面是等腰梯形，故 D 正确.

2. 如图，在日常生活中，常用到的螺母可以看成一个组合体，其结构特征是（　　）



A. 一个棱柱中挖去一个棱柱

B. 一个棱柱中挖去一个圆柱

C. 一个圆柱中挖去一个棱锥

D. 一个棱台中挖去一个圆柱

B 解析：结合定义及实物图形易知螺母是在正六棱柱中挖去一个圆柱.

3. 正方形 $ABCD$ 绕对角线 AC 所在直线旋转一周，所得的组合体是 ( )

A.由两个圆台组成的

B.由两个圆锥组成的

C.由一个圆锥和一个圆台组成的

D.由两个棱台组成的

B 解析：根据圆锥的旋转形成过程可知形成了两个圆锥的组合体.

4. 用长为 4、宽为 2 的矩形作侧面围成一个圆柱，此圆柱轴截面的面积为________.

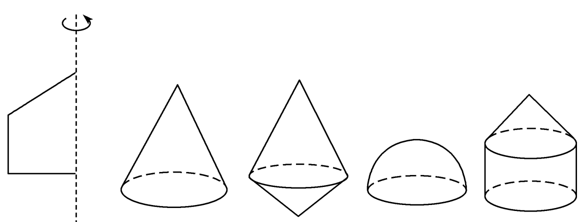
$\frac{8}{\pi}$ 解析：设圆柱底面半径为 r，母线长为 l.若底面周长为 4，由 $2\pi r=4$，得 $r=\frac{2}{\pi}$，所以轴截面面积 $S=2rl=\frac{4}{\pi}\times 2=\frac{8}{\pi}$；若底面周长为 2，由 $2\pi r=2$，得 $r=\frac{1}{\pi}$，所以轴截面面积 $S=2rl=\frac{2}{\pi}\times 4=\frac{8}{\pi}$.

5. 一个圆台的母线长为 5，上、下底面的直径长分别为 2，8，则圆台的高为________.

4 解析：由题意得，圆台的轴截面为等腰梯形，其中上底长为 2，下底长为 8，腰长为 5，所以高 $h=\sqrt{5^2-\left(\frac{8-2}{2}\right)^2}=4$.

综合性·创新提升

1. 如图所示的图形绕虚线旋转一周形成的几何体是 ( )



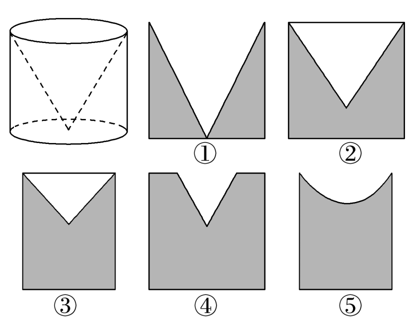
D 解析：题干中图形是直角梯形，绕其长底边所在直线旋转一周后得到的几何体是圆锥与圆柱的组合体.

2. 底面半径为 2 且底面水平放置的圆锥被过高的中点且平行于底面的平面所截，则截面圆的面积为 ( )

A.π　　B.2π　　C.3π　　D.4π

A 解析：由相似三角形的性质可知截面圆的半径为 1，所以截面圆的面积 $S=\pi$.

3. 如图的几何体由一个圆柱挖去一个以圆柱的上底面为底面，下底面圆心为顶点的圆锥而得.现用一个竖直的平面去截这个几何体，则截面图形可能是 ( )



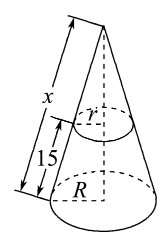
A.①②　　B.①③　　C.①④　　D.①⑤

D 解析：由题图知，当截面过旋转轴时，截面图形是①；当截面不过旋转轴时，截面图形是⑤.故选 D.

4. 把一个圆锥截成圆台，已知圆台的上、下底面面积之比是 1∶16，圆台的母线长为 15，则圆锥的母线长为________.

20 解析：已知圆台的上、下底面面积之比是 1∶16，

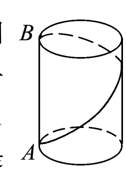
如图，设圆台的上底面半径为 r，则下底面半径 $R=4r$.



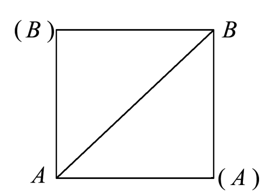
设圆锥的母线长为 x.由相似三角形可得 $\frac{r}{R}=\frac{1}{4}=\frac{x-15}{x}$，解得 $x=20$.

故得圆锥的母线长为 20.

5. 如图所示的是底面半径为 1，高为 2 的圆柱，AB 为圆柱的一条母线，在点 A 有一只蚂蚁.现在这只蚂蚁要围绕圆柱由点 A 爬到点 B，则蚂蚁爬行的最短距离是________.



$2\sqrt{\pi^2+1}$ 解析：沿 AB 将圆柱的侧面展开，如图所示，



其中蚂蚁爬行的最短距离为 AB 的长度，且 $AB=\sqrt{(2\pi)^2+2^2}=2\sqrt{\pi^2+1}$.

8.2　立体图形的直观图

学习任务目标

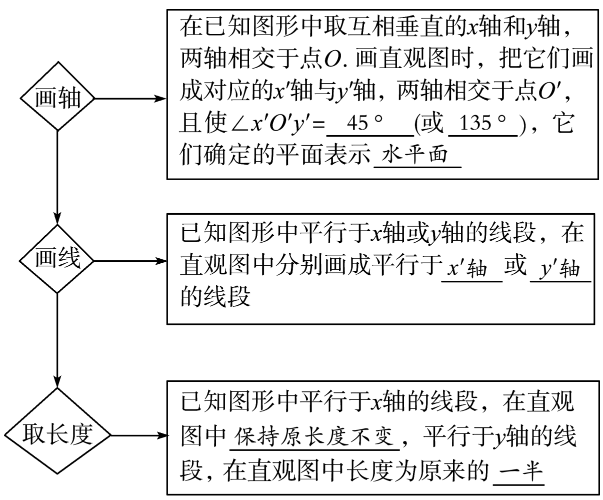
1.了解斜二测画法的概念.

2.会用斜二测画法画出一些简单平面图形和立体图形的直观图.（直观想象）

3.了解空间图形的不同表示形式及不同形式间的联系.

问题式预习

知识点一　用斜二测画法画水平放置的平面图形的直观图



[微训练]

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)相等的角,在直观图中仍相等.　(　　)

×　**提示**:一个等腰直角三角形的直观图不是等腰直角三角形,故相等的角在直观图中不一定相等.

(2)长度相等的线段,在直观图中长度仍相等.　(　　)

×　**提示**:平行于 x 轴的线段长度不变,平行于 y 轴的线段长度变为原来的一半.

(3)若两条线段平行,则在直观图中对应的线段仍平行.　(　　)

√　**提示**:斜二测画法保持了原图形的平行性、共线性和平行线段的长度比.

(4)若两条线段互相垂直,则在直观图中对应的线段也互相垂直.　(　　)

×　**提示**:在原平面直角坐标系 xOy 中,两坐标轴的夹角为 $90°$,对应直观图中的 $\angle x'O'y'$ 为 $45°$ 或 $135°$.

2.下列说法正确的是　(　　)

A.三角形的直观图是三角形

B.圆的直观图是圆

C.正方形的直观图是正方形

D.菱形的直观图是菱形

A　**解析**:三角形的直观图是三角形,圆形的直观图是椭圆,正方形的直观图是平行四边形,菱形的直观图也是平行四边形.

知识点二　立体图形直观图的画法

画几何体的直观图时,与画平面图形的直观图相比,只是多画一个与 x 轴、y 轴都垂直的 z 轴,并且使平行于 z 轴的线段的平行性和长度都<u>不变</u>.

[微训练]

已知两个圆锥,底面水平重合在一起,其中一个圆锥顶点到底面的距离为 2 cm,另一个圆锥顶点到底面的距离为 3 cm,则其直观图中这两个顶点之间的距离为　(　　)

A.2 cm　　B.3 cm

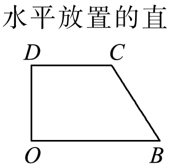
C.2.5 cm　　D.5 cm

D　**解析**:由题意可知,两个顶点的连线与圆锥底面垂直,故两顶点之间的距离为 5 cm.在直观图中,平行于 z 轴的线段长度不变,仍为 5 cm.

任务型课堂

任务一　画水平放置的平面图形的直观图

画出如图所示水平放置的直角梯形的直观图.



解:①在已知的直角梯形 $OBCD$ 中,以底边 OB 所在直线为 x 轴,垂直于 OB 的腰 OD 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系,如图 1.画出相应的 x'轴和 y'轴,使 $\angle x'O'y'=45°$,如图 2.

②在 x' 轴上取 $O'B'=OB$,在 y' 轴上取 $O'D'=$

$\frac{1}{2}OD$，过点D'作x'轴的平行线l，在l上沿x'轴正方向取点C'使得$D'C'=DC$.如图2.

③连接$B'C'$，并擦去x'轴与y'轴及其他一些辅助线，所得四边形$O'B'C'D'$就是直角梯形$OBCD$的直观图.如图3.

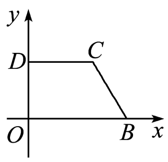


图1

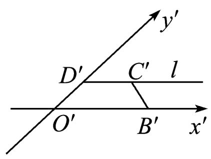


图2

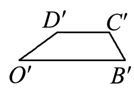


图3

【类题通法】

画水平放置的平面图形的直观图的注意点

在画水平放置的平面图形的直观图时，选取适当的直角坐标系是关键，一般要使平面多边形尽可能多的顶点落在坐标轴上，以便于画点.原图中不平行于坐标轴的线段可以通过作平行于坐标轴的线段来得到其对应线段.

任务二　画空间几何体的直观图

有一个正六棱锥(底面为正六边形，侧面为全等的等腰三角形的棱锥)，底面边长为3，高为3.画出这个正六棱锥的直观图.

解：①先画出水平放置的边长为3的正六边形的直观图，如图1所示；

②过正六边形的中心O'建立z'轴，在z'轴上截取$O'V'=3$，画出正六棱锥的顶点V'，如图2所示；

③连接$V'A'$，$V'B'$，$V'C'$，$V'D'$，$V'E'$，$V'F'$，如图3所示；

④擦去辅助线，遮挡部分用虚线表示，即得到正六棱锥的直观图，如图4所示.

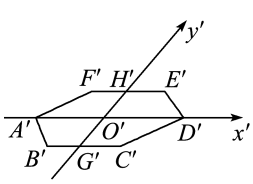


图1

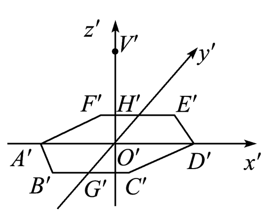


图2

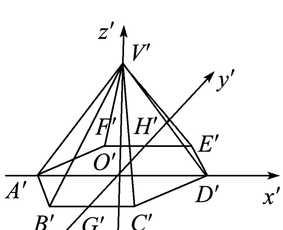


图3

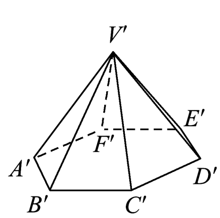


图4

【类题通法】

画空间几何体的直观图的注意点

(1)对于一些常见几何体(柱、锥、台、球)的直观图，应该记住它们的大致形状，以便较快较准地画出.

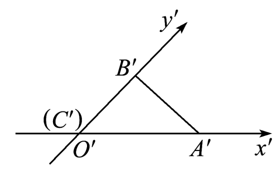
(2)画空间几何体的直观图时，比画平面图形的直观图多画了一个z'轴，z'轴用来确定竖直方向的线段.

(3)z'轴方向上的线段，方向与长度都与原来保持一致.

任务三　直观图的还原与计算问题

[探究活动]

已知$\triangle ABC$，$AC=a$，$BC=b$，其直观图如图所示，探究下列问题.



探究1：$\triangle ABC$是直角三角形吗？其面积S等于多少？

提示：是，$S=\frac{1}{2}ab$.

探究2：直观图中$A'C'$和$B'C'$的长度分别等于多少？

提示：$A'C'=a$，$B'C'=\frac{b}{2}$.

探究3：直观图中$\triangle A'B'C'$底边$A'C'$上的高h'等于多少？

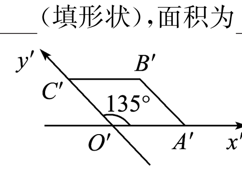
提示：$h'=B'C'\cdot\sin 45°=\frac{b}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}b$.

探究4：直观图中$\triangle A'B'C'$的面积S'与$\triangle ABC$的面积S有何关系？

提示：$S'=\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}b=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{2}ab=\frac{\sqrt{2}}{4}S$.

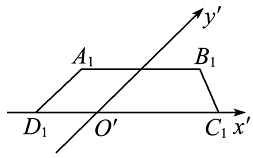
[评价活动]

1.在如图所示的直观图中，四边形$O'A'B'C'$为菱形，且边长为2 cm，则在平面直角坐标系xOy中原四边形$OABC$为________(填形状)，面积为________cm^2.

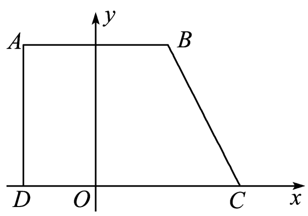


矩形　8　**解析**：由题意，结合斜二测画法可知，四边形$OABC$为矩形，其中$OA=O'A'=2$ cm，$OC=2O'C'=4$ cm，所以四边形$OABC$的面积$S=2\times4=8(cm^2)$.

2. 如图，梯形 $A_1B_1C_1D_1$ 是平面图形 $ABCD$ 的直观图.若 $A_1D_1 /\!/ O'y'$，$A_1B_1 /\!/ C_1D_1$，$A_1B_1=\frac{2}{3}C_1D_1=2$，$A_1D_1=O'D_1=1$.请画出原来的平面图形 $ABCD$ 的形状，并求原图形的面积.



解：如图，建立平面直角坐标系 xOy，在 x 轴上截取 $OD=O'D_1=1$，$OC=O'C_1=2$.过点 D 作 y 轴的平行线，并截取 $DA=2D_1A_1=2$.过点 A 作 x 轴的平行线，并截取 $AB=A_1B_1=2$.连接 BC，即得到原图形.



由上述作图过程可知，原四边形 $ABCD$ 是直角梯形，上底 $AB=2$，下底 $CD=3$，高 $AD=2$.所以原图形的面积 $S=\frac{2+3}{2}\times 2=5$.

【类题通法】

直观图的还原技巧

(1)由直观图还原为原图形是画直观图的逆过程：一是在直观图中建立斜坐标系 $x'O'y'$，使 $\angle x'O'y'=45^\circ$（或 135°），对应地建立直角坐标系 xOy；二是平行于 x' 轴的线段长度不变，平行于 y' 轴的线段长度扩大到原来的 2 倍；三是对于相邻两边不与 x' 轴、y' 轴平行的顶点可通过作 x' 轴、y' 轴的平行线确定其在 xOy 中的位置.还原时，要注意坐标系变化前后变化的量与不变的量，计算时要结合两个坐标系确定数据.

(2)原图形的面积 $S_{原}$ 与直观图的面积 $S_{直观}$ 的数量关系为 $S_{直观}=\frac{\sqrt{2}}{4}S_{原}$.

提质归纳

直观图
- 斜二测画法
- 平面图形的直观图
- 空间几何体的直观图

课后素养评价

基础性·能力运用

1.（多选题）对于用斜二测画法画水平放置的图形的直观图，下列描述正确的是（　　）

A.梯形的直观图仍然是一个梯形

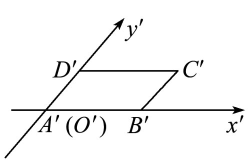
B.90°的角的直观图会变为 45°的角

C.与 y 轴平行的线段长度变为原来的一半

D.由于选轴的不同，所得的直观图可能不同

ACD　**解析**：对于 A，根据斜二测画法特点知，相交直线的直观图仍是相交直线，平行直线的直观图仍是平行直线，因此梯形的直观图仍是一个梯形，故 A 正确；对于 B，90°的角的直观图会变为 45°或 135°的角，故 B 错误；C，D 显然正确.

2. 如图所示的为一个平面图形的直观图，则它的实际形状为（　　）



A.平行四边形　　B.梯形

C.菱形　　D.矩形

D　**解析**：由直观图还原为原图得一个角为直角的平行四边形，即矩形.

3. 若 $AB=2CD$，$AB /\!/ x$ 轴，$CD /\!/ y$ 轴，AB 的直观图为 $A'B'$，CD 的直观图为 $C'D'$，则（　　）

A.$A'B'=2C'D'$

B.$A'B'=C'D'$

C.$A'B'=4C'D'$

D.$A'B'=\frac{1}{2}C'D'$

C　**解析**：因为 $AB /\!/ x$ 轴，$CD /\!/ y$ 轴，所以 $A'B'=AB$，$C'D'=\frac{1}{2}CD$.又 $AB=2CD$，所以 $A'B'=4C'D'$.

4.用斜二测画法画出水平放置的长为 6、宽为 4 的矩形的直观图,则该直观图的面积为 (　　)

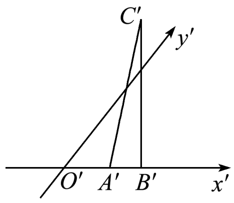
A.12　　B.24　　C.$6\sqrt{2}$　　D.$12\sqrt{2}$

C　**解析**:因为原矩形的面积 $S=6\times4=24$,

所以其直观图的面积为 $24\times\frac{\sqrt{2}}{4}=6\sqrt{2}$.

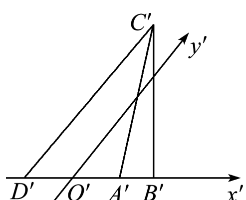
综合性·创新提升

1.如图所示,$\triangle A'B'C'$表示水平放置的$\triangle ABC$在斜二测画法下的直观图,$A'B'$在x'轴上,$B'C'$与x'轴垂直,且$B'C'=3$,则$\triangle ABC$的边AB上的高为 (　　)



A.$6\sqrt{2}$　　B.$3\sqrt{3}$　　C.$3\sqrt{2}$　　D.3

A　**解析**:过点C'作$C'D'/\!/y'$轴,交x'轴于点D',则$\angle C'D'B'=45°$.因为在$\mathrm{Rt}\triangle B'C'D'$中,$B'C'=3$,所以$C'D'=3\sqrt{2}$.所以$\triangle ABC$的边$AB$上的高$CD=2C'D'=6\sqrt{2}$.

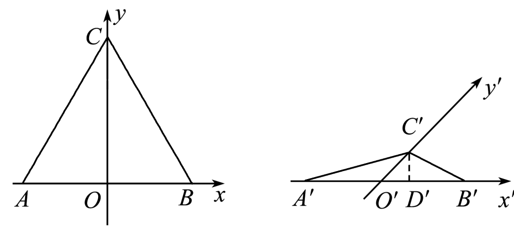


2.已知正三角形ABC的边长为a,那么$\triangle ABC$的直观图$\triangle A'B'C'$的面积为 (　　)

A.$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$

C.$\frac{\sqrt{6}}{8}a^2$　　D.$\frac{\sqrt{6}}{16}a^2$

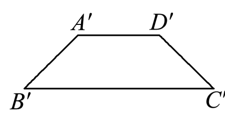
D　**解析**:图①②是正三角形ABC的原图和直观图.由图②可知,$A'B'=AB=a$,$O'C'=\frac{1}{2}OC=\frac{\sqrt{3}}{4}a$.在图②中作$C'D'\perp A'B'$于点$D'$,则$C'D'=\frac{\sqrt{2}}{2}O'C'=\frac{\sqrt{6}}{8}a$.



①　　②

所以$S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}A'B'\cdot C'D'=\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{6}}{8}a=\frac{\sqrt{6}}{16}a^2$.

3.如图所示,一个水平放置的平面图形的直观图是一个底角为45°、腰和上底的长均为 1 的等腰梯形,则这个平面图形的面积是 (　　)

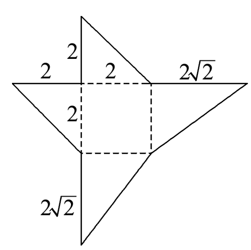


A.$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B.$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

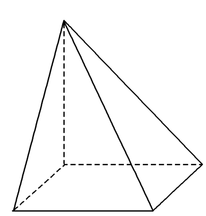
C.$1+\sqrt{2}$　　D.$2+\sqrt{2}$

D　**解析**:由题图可知,原平面图形为直角梯形,其上底长为 1,下底长为 $1+2\times1\times\cos45°=1+\sqrt{2}$,高为 2,所以其面积 $S=\frac{(1+1+\sqrt{2})\times2}{2}=2+\sqrt{2}$.

4.如图为一几何体的展开图,沿图中虚线折叠可将其还原为立体图形,请画出该几何体的直观图.



解:由题设中所给的展开图可以得出,此几何体是一个四棱锥,其底面是一个边长为 2 的正方形,垂直于底面的侧棱长为 2,其直观图如图所示.



8.3 简单几何体的表面积与体积

8.3.1 棱柱、棱锥、棱台的表面积和体积

学习任务目标

1.了解棱柱、棱锥、棱台的表面积与体积的计算公式.

2.理解并掌握侧面展开图与几何体的表面积之间的关系.

3.能利用计算公式求几何体的表面积与体积.(数学运算)

问题式预习

知识点一 棱柱、棱锥、棱台的表面积

多面体的表面积就是围成多面体各个面的面积的和.棱柱、棱锥、棱台的表面积就是围成它们的各个面的面积的和.

[微训练]

1.棱长为3的正方体的表面积为 ( )

A.27 B.64 C.54 D.36

C 解析:根据表面积的定义,组成正方体的面共6个,且每个面都是边长为3的正方形.从而,其表面积为 $6\times3^2=54$.

2.棱长都是3的三棱锥的表面积 S 为________.

$9\sqrt{3}$ 解析:因为三棱锥的四个面是全等的正三角形,所以 $S=4\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times3^2=9\sqrt{3}$.

知识点二 棱柱、棱锥、棱台的体积

几何体	体积	说明
正方体	$V_{正方体}=a^3$	a 是正方体的棱长
长方体	$V_{长方体}=abc$	a,b,c 分别是长方体的长、宽、高

续表

几何体	体积	说明
棱柱	$V_{棱柱}=Sh$	S 为棱柱的底面积,h 为棱柱的高
棱锥	$V_{棱锥}=\frac{1}{3}Sh$	S 为棱锥的底面积,h 为棱锥的高
棱台	$V_{棱台}=\frac{1}{3}h(S'+\sqrt{S'S}+S)$	S',S 分别为棱台的上、下底面面积,h 为棱台的高

[微训练]

1.若正方体的表面积为96,则正方体的体积为( )

A.$48\sqrt{6}$ B.64 C.16 D.96

B 解析:设正方体的棱长为 a,则 $6a^2=96$,所以 $a=4$,故正方体的体积 $V=a^3=4^3=64$.

2.棱台的上、下底面面积分别是2,4,高为3,则棱台的体积等于________.

$6+2\sqrt{2}$ 解析:$V_{棱台}=\frac{1}{3}\times(2+4+\sqrt{2\times4})\times3=\frac{1}{3}\times3\times(6+2\sqrt{2})=6+2\sqrt{2}$.

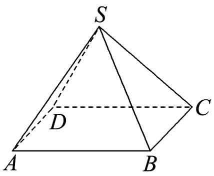
任务型课堂

任务一 棱柱、棱锥、棱台的侧面积和表面积

1.已知正三棱台(上、下底面是正三角形,上底面的中心在下底面的投影是下底面的中心)的上、下底面边长分别为2 cm和4 cm,侧棱长是 $\sqrt{6}$ cm,则该三棱台的表面积为________.

$(5\sqrt{3}+9\sqrt{5})\ \text{cm}^2$ 解析:正三棱台的表面积即上、下两个正三角形的面积与三个侧面的面积和,其中三个侧面为全等的等腰梯形,易求出斜高为 $\sqrt{5}$ cm.故三棱台的表面积为 $3\times\frac{1}{2}\times(2+4)\times\sqrt{5}+\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}=(5\sqrt{3}+9\sqrt{5})(\text{cm}^2)$.

2.已知棱长均为 5，底面为正方形的四棱锥$S\text{-}ABCD$如图所示，则它的侧面积为 ______，表面积为 ________.



$25\sqrt{3}$　$25(\sqrt{3}+1)$　**解析**：因为四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的各棱长均为 5，

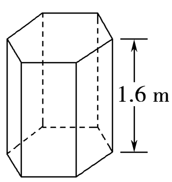
所以各侧面都是全等的正三角形.

设 E 为 AB 的中点，连接 SE(图略)，则 $SE\perp AB$.

所以 $S_{侧}=4S_{\triangle SAB}=4\times\frac{1}{2}AB\cdot SE=2\times5\times\sqrt{5^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=25\sqrt{3}$，

$S_{表}=S_{侧}+S_{底}=25\sqrt{3}+25=25(\sqrt{3}+1)$.

3.如图，有一滚筒是正六棱柱形(底面是正六边形，每个侧面都是矩形)，两端是封闭的，筒高 1.6 m，底面外接圆的半径是 0.46 m，制造这个滚筒需要________m^2铁板.(精确到0.1 m^2)



5.5　**解析**：因为此正六棱柱底面外接圆的半径为 0.46 m，所以底面正六边形的边长是 0.46 m.

所以 $S_{侧}=Ch=6\times0.46\times1.6=4.416(m^2)$.

所以 $S_{表}=S_{侧}+2S_{底}=4.416+2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times0.46^2\times6\approx5.5(m^2)$.

故制造这个滚筒约需要 5.5 m^2铁板.

【类题通法】

棱柱、棱锥、棱台表面积的求法

(1)多面体的表面积是各个面的面积之和.

(2)棱柱、棱锥、棱台的表面积等于它们的侧面积与各自底面面积的和.

任务二　棱柱、棱锥、棱台的体积

[探究活动]

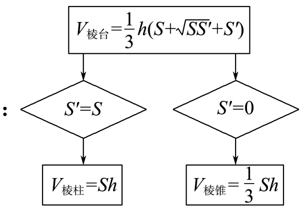
观察棱柱、棱锥、棱台的体积公式：$V_{棱柱}=Sh$，$V_{棱锥}=\frac{1}{3}Sh$，$V_{棱台}=\frac{1}{3}h(S'+\sqrt{S'S}+S)$，探究下列问题.

探究 1：求棱柱、棱锥、棱台的体积时，需先计算哪些量？

提示：底面面积和高.

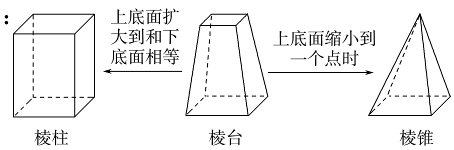
探究 2：它们的体积公式之间有什么关系？

提示：



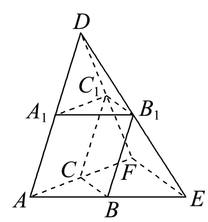
探究 3：你能用棱柱、棱锥、棱台的结构特征来解释这种关系吗？

提示：



[评价活动]

1.如图，在三棱锥 $D\text{-}AEF$ 中，A_1，B_1，C_1 分别是 DA，DE，DF 的中点，B，C 分别是 AE，AF 的中点.设三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的体积为 V_1，三棱锥 $D\text{-}AEF$ 的体积为 V_2，则 $V_1:V_2=$　(　　)



A.$\frac{3}{8}$　　B.$\frac{3}{4}$

C.$\frac{1}{4}$　　D.$\frac{1}{2}$

A　**解析**：设三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 和三棱锥 $D\text{-}AEF$ 的高分别为 h，$2h$，利用体积公式可得三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的体积 $V_1=S_{\triangle ABC}\cdot h=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC\cdot h$，

三棱锥 $D\text{-}AEF$ 的体积 $V_2=\frac{1}{3}S_{\triangle AEF}\cdot2h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot AE\cdot AF\cdot\sin\angle BAC\cdot2h=\frac{4}{3}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC\cdot h$，则体积之比 $V_1:V_2=\frac{1}{2}:\frac{4}{3}=\frac{3}{8}$.

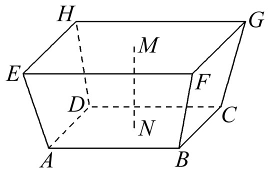
故选 A.

2.(2022·新高考全国Ⅰ卷)南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库.已知该水库水位为海拔 148.5 m 时，相应水面的面积为 140.0 km^2；水位为海拔 157.5 m 时，相应水面的面积为 180.0 km^2.将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔 148.5 m 上升到 157.5 m 时，增加的水量约为($\sqrt{7}\approx2.65$)　(　　)

A.$1.0\times10^9\ m^3$　　B.$1.2\times10^9\ m^3$

C.$1.4\times10^9\ m^3$　　D.$1.6\times10^9\ m^3$

C　**解析**:依题意可知棱台的高为 $MN=157.5-148.5=9(m)$,所以增加的水量即为棱台的体积 V,如图.



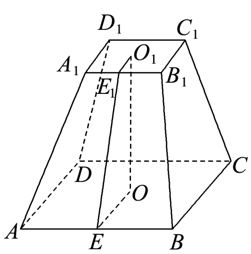
棱台上底面面积 $S=140.0\ km^2=140\times10^6\ m^2$,下底面面积 $S'=180.0\ km^2=180\times10^6\ m^2$,

所以 $V=\frac{1}{3}h(S+S'+\sqrt{SS'})=\frac{1}{3}\times9\times(140\times10^6+180\times10^6+\sqrt{140\times180\times10^{12}})=3\times(320+60\sqrt{7})\times10^6\approx(96+18\times2.65)\times10^7=1.437\times10^9\approx1.4\times10^9(m^3)$.

故选C.

3.正四棱台两底面边长分别为20 cm 和10 cm,侧面面积为 780 cm^2,求其体积.

解:正四棱台的大致形状如图所示,其中 $A_1B_1=10$ cm,$AB=20$ cm,取 A_1B_1 的中点 E_1,AB 的中点 E,连接 E_1E,OE,O_1E_1,则 E_1E 为斜高.设 O_1,O 分别是上、下底面的中心,连接 O_1O,则四边形 EOO_1E_1 为直角梯形.



因为 $S_{侧}=4\times\frac{1}{2}\times(10+20)\times EE_1=780(cm^2)$,

所以 $EE_1=13$ cm.

在直角梯形 EOO_1E_1 中,

$O_1E_1=\frac{1}{2}A_1B_1=5(cm)$,$OE=\frac{1}{2}AB=10(cm)$,

所以 $O_1O=\sqrt{13^2-(10-5)^2}=12(cm)$.

故该正四棱台的体积为

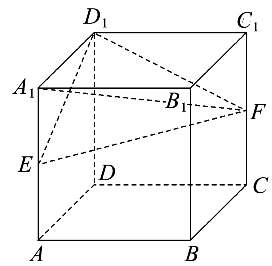
$V=\frac{1}{3}\times12\times(10^2+20^2+10\times20)=2\ 800(cm^3)$.

【类题通法】

计算棱柱、棱锥、棱台的体积,关键是根据条件找出相应的底面面积和高,要充分运用多面体的有关截面,将空间问题转化为平面问题.

任务三　用等积法与割补法求几何体的体积

1.如图,已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a,E 为 AA_1 的中点,F 为 CC_1 上一点,则三棱锥 $A_1\text{-}D_1EF$ 的体积为________.



$\frac{1}{12}a^3$　**解析**:$V_{三棱锥A_1\text{-}D_1EF}=V_{三棱锥F\text{-}A_1D_1E}$.

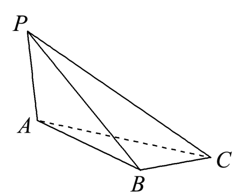
因为 $S_{\triangle A_1D_1E}=\frac{1}{2}EA_1\cdot A_1D_1=\frac{1}{4}a^2$,

三棱锥 $F\text{-}A_1D_1E$ 的高为 $CD=a$,

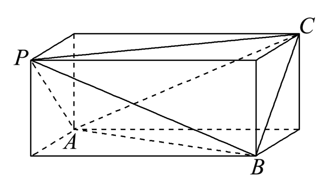
所以 $V_{三棱锥F\text{-}A_1D_1E}=\frac{1}{3}\times a\times\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{12}a^3$,

所以 $V_{三棱锥A_1\text{-}D_1EF}=\frac{1}{12}a^3$.

2.如图,已知三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的每相对的两条棱相等,棱长分别为$\sqrt{5}$,$\sqrt{10}$,$\sqrt{13}$,则三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的体积为________.



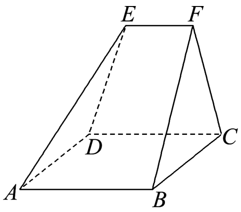
2　**解析**:如图,设补成的长方体的长、宽、高分别为 a,b,c,



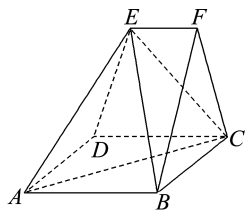
则 $V_{长方形}=abc$,补出的四个三棱锥的体积相等,都等于 $\frac{1}{6}abc$,由 $\begin{cases}a^2+b^2=(\sqrt{5})^2,\\b^2+c^2=(\sqrt{10})^2,\\c^2+a^2=(\sqrt{13})^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=1,\\c=3.\end{cases}$ 所以

$V_{P\text{-}ABC}=abc-4\times\frac{1}{6}abc=\frac{1}{3}abc=\frac{1}{3}\times1\times2\times3=2$.

3.如图,在多面体 $ABCDEF$ 中,已知四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形,$EF\parallel AB$,$EF=2$,EF 上任意一点到平面 $ABCD$ 的距离均为 3.求该多面体的体积.



解:如图,连接 EB,EC,AC,



$V_{四棱锥E\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}\times4^2\times3=16$.

因为 $AB=2EF$,$EF\parallel AB$,所以 $S_{\triangle EAB}=2S_{\triangle BEF}$.

所以 $V_{三棱锥F\text{-}EBC}=V_{三棱锥C\text{-}EFB}$

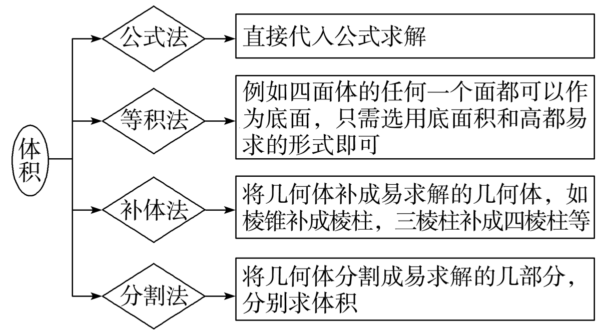
$=\frac{1}{2}V_{三棱锥C\text{-}ABE}=\frac{1}{2}V_{三棱锥E\text{-}ABC}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}V_{四棱锥E\text{-}ABCD}=4$.

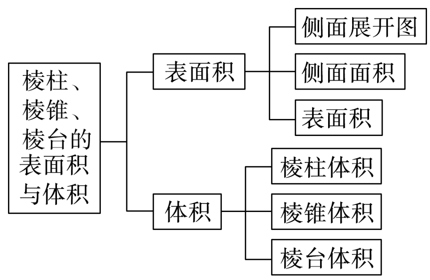
所以多面体的体积 $V=V_{四棱锥E\text{-}ABCD}+V_{三棱锥F\text{-}EBC}=16+4=20$.

【类题通法】

求几何体体积的常用方法



提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1.(多选题)三棱柱的底面是正三角形,侧棱垂直于底面,它的侧面展开图是长、宽分别为 6 和 4 的矩形,则它的体积可能为　(　　)

A.$\frac{8\sqrt{3}}{3}$　　B.$4\sqrt{3}$

C.$\frac{2\sqrt{3}}{9}$　　D.$\frac{\sqrt{3}}{3}$

AB　**解析**:因为正三棱柱的侧面展开图是边长分别为 6 和 4 的矩形,所以有以下两种情况:

①6 是下底面的周长,4 是三棱柱的高,此时,下底面的边长为 2,面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=\sqrt{3}$,所以三棱柱的体积为 $4\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

②4 是下底面的周长,6 是三棱柱的高,此时,下底面的边长为 $\frac{4}{3}$,面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{4\sqrt{3}}{9}$,所以三棱柱的体积为 $\frac{4\sqrt{3}}{9}\times6=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

2.某六棱柱的底面是边长为 2 的正六边形,侧面是矩形,侧棱长为 4,则其表面积为　(　　)

A.$12+12\sqrt{3}$　　B.$48+12\sqrt{3}$

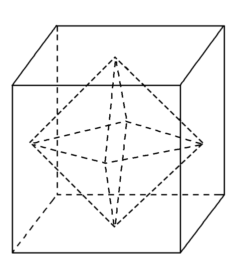
C.$64+6\sqrt{3}$　　D.$72+6\sqrt{3}$

B　**解析**:由题意,知该六棱柱的侧面面积为 $4\times2\times6=48$,上、下底面的面积均为 $\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times6=6\sqrt{3}$,所以六棱柱的表面积等于 $48+12\sqrt{3}$.故选 B.

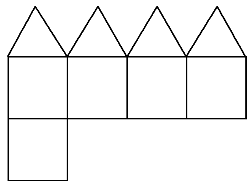
3.若正方体的棱长为$\sqrt{2}$,则以该正方体各个面的中心为顶点的凸多面体的表面积为　(　　)

A.$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　B.$2\sqrt{3}$　　C.$\sqrt{3}$　　D.$\frac{\sqrt{2}}{6}$

B　**解析**:所求凸多面体的表面积是两个底面边长为 1,高为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的正四棱锥的侧面积之和.如图,四棱锥的侧棱长 $l=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$,所以,以该正方体各个面的中心为顶点的凸多面体的表面积 $S=8\times\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin60^\circ=2\sqrt{3}$.



4. 已知一个空间几何体的所有棱长均为1 cm，其表面展开图如图所示，则该空间几何体的体积 $V=$________ cm^3.



$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$ **解析**：由题图知，原几何体是由一个正方体与一个正四棱锥组成，四棱锥的高为 $\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{1+1}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$(cm)，所以该空间几何体的体积 $V=1^3+\frac{1}{3}\times1\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$ (cm^3).

5. 若正四棱锥的底面边长为 $2\sqrt{2}$ cm，体积为 8 cm^3，则它的侧面面积为________ cm^2.

$4\sqrt{22}$ **解析**：因为该正四棱锥的底面边长为 $2\sqrt{2}$ cm，体积为 8 cm^3，所以该四棱锥的高为 3 cm，所以侧面等腰三角形的高为 $\sqrt{3^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{11}$(cm)，故 $S_{侧}=4\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{11}=4\sqrt{22}$ (cm^2).

综合性·创新提升

1.（多选题）已知一个正三棱柱的侧面展开图是一个长为 9 cm、宽为 6 cm 的矩形，则此正三棱柱的体积可以为（　　）

A. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ cm^3　　B. $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ cm^3

C. $6\sqrt{3}$ cm^3　　D. $9\sqrt{3}$ cm^3

BD **解析**：设正三棱柱的高为 h cm，底面等边三角形的边长为 a cm.

①若正三棱柱的底面周长为 9 cm，则高 $h=6$ cm，$3a=9$ cm，所以 $a=3$ cm.

所以 $S_{底面}=\frac{1}{2}\times3\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$ (cm^2).

所以 $V_{正三棱柱}=S_{底面}h=\frac{9\sqrt{3}}{4}\times6=\frac{27\sqrt{3}}{2}$ (cm^3).

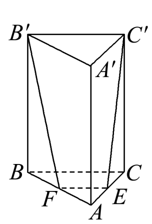
②若正三棱柱的底面周长为 6 cm，则高 $h=9$ cm，$3a=6$ cm，所以 $a=2$ cm.

所以 $S_{底面}=\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ (cm^2)，

所以 $V_{正三棱柱}=S_{底面}h=\sqrt{3}\times9=9\sqrt{3}$ (cm^3).

故此正三棱柱的体积可以为 $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ cm^3 或 $9\sqrt{3}$ cm^3.

2. 如图，三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中，若 E，F 分别为 AC，AB 的中点，平面 $EC'B'F$ 将三棱柱分成体积为 V_1（棱台 $AEF-A'C'B'$ 的体积），V_2 的两部分，那么 $V_1:V_2=$（　　）



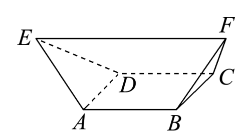
A. 7∶5　　B. 6∶5

C. 8∶3　　D. 4∶3

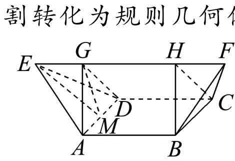
A **解析**：设三棱柱的高为 h，底面面积为 S，体积为 V，则 $V=V_1+V_2=Sh$. 因为 E，F 分别为 AC，AB 的中点，所以 $S_{\triangle AEF}=\frac{1}{4}S$，所以 $V_1=\frac{1}{3}h\cdot\left(S+\frac{1}{4}S+\sqrt{S\cdot\frac{S}{4}}\right)=\frac{7}{12}Sh$，$V_2=V-V_1=\frac{5}{12}Sh$.

所以 $V_1:V_2=7:5$.

3. 如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，且 $\triangle ADE$，$\triangle BCF$ 均为正三角形，$EF\parallel AB$，$EF=2$，则该多面体的体积为________.



$\frac{\sqrt{2}}{3}$ **解析**：该多面体不是规则几何体，不易直接求体积，应将其分割转化为规则几何体.如图，



分别过 A，B 作 EF 的垂线，垂足分别为 G，H，连接 DG，CH，则原几何体分割为两个三棱锥和一个直三棱柱，三棱锥 $E-ADG$ 的高为 $\frac{1}{2}$，棱柱高为 1，$AG=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.取 AD 的中点 M，则 $MG=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$S_{\triangle AGD}=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，所以 $V=\frac{\sqrt{2}}{4}\times1+2\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

4. 长方体的体对角线长为 8，若长、宽、高分别是 a，b，c，且 $a+b+c=14$，则长方体的表面积为________.

132 **解析**：由题意得 $\begin{cases}a+b+c=14,①\\a^2+b^2+c^2=64,②\end{cases}$

①^2－②，得 $2(ab+bc+ca)=14^2-64=132$，

所以长方体的表面积 $S_{表}=2(ab+bc+ca)=132$.

8.3.2　圆柱、圆锥、圆台、球的表面积和体积

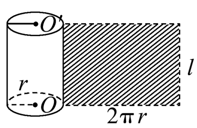
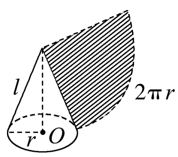
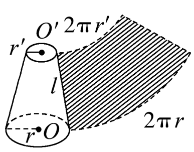
学习任务目标

1.会计算圆柱、圆锥、圆台、球的表面积和体积.(数学运算)

2.理解并掌握侧面展开图与几何体的表面积之间的关系,并能利用计算公式求几何体的表面积与体积.

问题式预习

知识点一　圆柱、圆锥、圆台的表面积

几何体	图形	表面积公式
圆柱		底面积:$S_{底}=\pi r^2$ 侧面积:$S_{侧}=2\pi rl$ 表面积:$S=2\pi r(r+l)$
圆锥		底面积:$S_{底}=\pi r^2$ 侧面积:$S_{侧}=\pi rl$ 表面积:$S=\pi r(r+l)$
圆台		上底面面积:$S_{上底}=\pi r'^2$ 下底面面积:$S_{下底}=\pi r^2$ 侧面积:$S_{侧}=\pi(r'l+rl)$ 表面积:$S=\pi(r'^2+r^2+r'l+rl)$

[微训练]

1.若圆柱的底面半径和圆柱的高都为2,则圆柱侧面展开图的面积为　(　　)

A.4π　B.$4\sqrt{2}\pi$　C.8π　D.$8\sqrt{2}\pi$

C　**解析**:$S_{侧}=2\pi rh=2\pi\times2\times2=8\pi$.

2.母线和底面直径都为2的圆锥的侧面积为________.

2π　**解析**:圆锥的侧面展开图为扇形,半径为2,弧长为2π,所以$S_{侧}=\frac{1}{2}\times2\pi\times2=2\pi$.

知识点二　圆柱、圆锥、圆台的体积

几何体	体积公式	说明
圆柱	$V_{圆柱}=Sh=\pi r^2h$	圆柱底面半径为r,面积为S,高为h
圆锥	$V_{圆锥}=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\pi r^2h$	圆锥底面半径为r,底面积为S,高为h
圆台	$V_{圆台}=\frac{1}{3}(S+\sqrt{SS'}+S')h=\frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2)$	圆台上底面半径为r',上底面面积为S',下底面半径为r,下底面面积为S,高为h

[微训练]

1.若圆锥的底面半径为3,母线长为5,则圆锥的体积是________

12π　**解析**:由已知可得圆锥的高$h=4$,

所以$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi\times3^2\times4=12\pi$.

2.圆台的上、下底面半径分别为2,8,母线长为10,则圆台的体积为________.

224π　**解析**:由已知得圆台的高$h=8$,所以$V_{圆台}=\frac{1}{3}\pi\times8\times(4+64+16)=224\pi$.

知识点三　球的表面积和体积公式

1.球的表面积$S_{球}=4\pi R^2$(R为球的半径).

2.球的体积$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$(R为球的半径).

[微训练]

判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)设球的截面圆上有一点A,球心为O,截面圆心为O_1,则$\triangle AO_1O$是以O_1为直角顶点的直角三角形.　(　　)

√　**提示**:根据球的性质可知球心与截面圆心的连线与截面垂直.

(2)若将球的半径扩大到原来的 2 倍,则它的体积扩大到原来的 4 倍. (　　)

× 提示:根据球的体积公式可知,当球的半径扩大到原来的 2 倍时,它的体积扩大到原来的 8 倍.

(3)若球与圆柱的底面和侧面均相切,则球的直径等于圆柱的高,也等于圆柱底面直径. (　　)

√ 提示:球在圆柱内与上、下底面、侧面均相切,易知球的直径与圆柱的高相等,也与圆柱的底面直径相等.

任务型课堂

任务一 圆柱、圆锥、圆台的表面积

[探究活动]

观察圆柱、圆锥、圆台的侧面积公式:$S_{圆柱侧}=2\pi rl$,$S_{圆锥侧}=\pi rl$,$S_{圆台侧}=\pi(r'l+rl)$,探究下列问题.

探究 1:求圆柱、圆锥、圆台的侧面积时,需先计算哪些量?

提示:底面半径和母线长.

探究 2:它们的侧面积之间有什么关系?

提示:$S_{圆柱侧}=2\pi rl \xleftarrow{r'=r} S_{圆台侧}=\pi(r+r')l \xrightarrow{r'=0} S_{圆锥侧}=\pi rl$.

[评价活动]

1. 已知圆柱的上、下底面的中心分别为 O_1,O_2,过直线 O_1O_2 的平面截该圆柱所得的截面是面积为 8 的正方形,则该圆柱的表面积为 (　　)

A. $12\sqrt{2}\pi$　　B. 12π

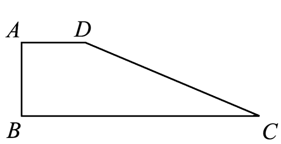
C. $8\sqrt{2}\pi$　　D. 10π

B **解析**:因为过直线 O_1O_2 的平面截该圆柱所得的截面是面积为 8 的正方形,所以圆柱的高为 $2\sqrt{2}$,底面直径为 $2\sqrt{2}$,所以该圆柱的表面积为 $2\times\pi\times(\sqrt{2})^2+2\pi\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=12\pi$.

2. 已知一个圆锥的轴截面是等边三角形,其面积为 $\sqrt{3}$,则这个圆锥的侧面积为________.

2π **解析**:由题意知,母线长 $l=2$,底面半径为 1,所以侧面积为 $\pi\times1\times2=2\pi$.

3. 如图,已知直角梯形 $ABCD$,$BC\parallel AD$,$\angle ABC=90^\circ$,$AB=5$,$BC=16$,$AD=4$.求该直角梯形以 AB 所在直线为轴旋转一周所得几何体的表面积.



解:该直角梯形以 AB 所在直线为轴旋转一周所得几何体为圆台,其上底面半径是 4,下底面半径是 16,母线 $DC=\sqrt{5^2+(16-4)^2}=13$.故该几何体的表面积为 $\pi(4+16)\times13+\pi\times4^2+\pi\times16^2=532\pi$.

【类题通法】

解决圆柱、圆锥、圆台的表面积问题,要利用好旋转体的轴截面及侧面展开图,借助于平面几何知识,求得所需几何要素,代入公式求解即可,基本步骤如下:

(1)得到空间几何体的平面展开图;

(2)依次求出各个平面图形的面积;

(3)将各平面图形的面积相加.

任务二 圆柱、圆锥、圆台的体积

1. 党的二十大报告提出:"坚守中华文化立场,提炼展示中华文明的精神标识和文化精髓,加快构建中国话语和中国叙事体系,讲好中国故事、传播好中国声音,展现可信、可爱、可敬的中国形象."如图,何尊是我国西周早期的青铜礼器,其造型浑厚,工艺精美,尊内底所铸铭文中的"宅兹中国"为"中国"一词最早的文字记载,何尊还是第一个出现"德"字的器物,证明了周王朝以德治国的理念.何尊的形状可近似看作是圆台和圆柱的组合体,组合体的高约为 40 cm,上口直径约为 28 cm,经测量可知圆台的高约为 16 cm,圆柱的底面直径约为 18 cm,则该组合体的体积约为(π 的值取 3) (　　)

A. 11 280 cm^3　　B. 12 380 cm^3

C. 12 680 cm^3　　D. 12 280 cm^3

D **解析**:由题意得圆柱的高约为 $40-16=24$(cm),则何尊的体积 $V=V_{圆台}+V_{圆柱}=\frac{\pi}{3}\times(14^2+9^2+14\times9)\times16+\pi\times9^2\times24\approx12\ 280(cm^3)$.故选 D.

2. 圆锥的轴截面是等腰直角三角形,侧面积是 $16\sqrt{2}\pi$,则圆锥的体积是 (　　)

A. $\frac{64\pi}{3}$　　B. $\frac{128\pi}{3}$

C. 64π　　D. $128\sqrt{2}\pi$

A　**解析**：设圆锥的底面半径为 r，母线长为 l.

因为圆锥的轴截面是等腰直角三角形，

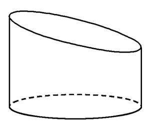
所以 $2r=\sqrt{l^2+l^2}$，即 $l=\sqrt{2}r$.

由题意得，侧面积 $S_{侧}=\pi rl=\sqrt{2}\pi r^2=16\sqrt{2}\pi$，

所以 $r=4$.所以 $l=4\sqrt{2}$，高 $h=\sqrt{l^2-r^2}=4$.

所以圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\pi\times4^2\times4=\frac{64}{3}\pi$.

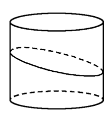
3. 如图，一个底面半径为 2 的圆柱被一平面所截，截得的几何体的最短和最长母线长分别为 2 和 3，则该几何体的体积为　　(　　)



A.5π　　B.6π

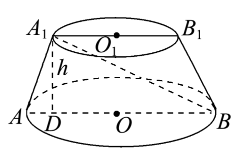
C.20π　　D.10π

D　**解析**：用一个完全相同的几何体把题中几何体补成一个圆柱，如图，则圆柱的体积为 $\pi\times2^2\times5=20\pi$，故所求几何体的体积为 10π.



4. 已知圆台高为 3，轴截面中母线与底面直径的夹角为 $60°$，轴截面的一条对角线垂直于腰.求圆台的体积.

解：如图，作轴截面 A_1ABB_1，设上、下底面半径分别为 r，R，作 $A_1D\perp AB$ 于点 D.



则 $A_1D=3$，$\angle A_1AB=60°$.所以 $AD=\frac{A_1D}{\tan 60°}=\sqrt{3}$，

所以 $R-r=\sqrt{3}$，$BD=A_1D\cdot\tan 60°=3\sqrt{3}$，

所以 $R+r=3\sqrt{3}$.所以 $R=2\sqrt{3}$，$r=\sqrt{3}$，$h=3$.

所以 $V_{圆台}=\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2)=\frac{1}{3}\pi\times3\times[(2\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2]=21\pi$.

【类题通法】

求圆柱、圆锥、圆台的体积的关键是求其底面面积和高，其中高一般是由母线、高、半径组成的直角三角形的边角关系求得.一些不规则的几何体的体积可以利用割补法求得.

任务三　球的表面积和体积

1. 若正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的所有棱长均为 a，且所有顶点都在一个球面上，则该球的表面积为(　　)

A.πa^2　　B.$\frac{7}{3}\pi a^2$

C.$\frac{11}{3}\pi a^2$　　D.$5\pi a^2$

B　**解析**：设 O，O_1 分别为$\triangle ABC$，$\triangle A_1B_1C_1$ 的中心，OO_1 的中点为 D(图略).由题意得点 D 为球的球心，则 $AO=\frac{2}{3}\times a\times\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，所以半径 $R=\sqrt{AO^2+DO^2}=\sqrt{\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{7a^2}{12}}$，所以 $S_{球}=4\pi R^2=4\pi\times\frac{7}{12}a^2=\frac{7}{3}\pi a^2$.

2. 用与球心的距离为 1 的平面去截球，所得的截面的面积为 π，求这个球的体积与表面积.

解：由题意得球心到截面圆的距离为 1，

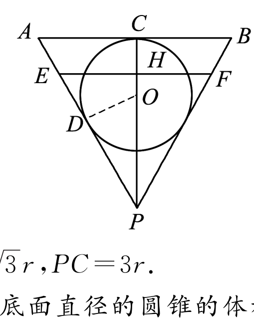
又 $S_{截}=\pi r^2=\pi$，得 $r=1$，即截面圆的半径 $r=1$，

所以球的半径 $R=\sqrt{2}$，

所以 $S_{球}=4\pi R^2=8\pi$，$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$.

3. 有一个倒圆锥形的容器，它的轴截面是正三角形.在这个容器内放入一个半径是 r 的钢球，并注满水，这时球面恰好与水面相切，那么将球从容器中取出后，水面高是多少？

解：设球取出后水面高 $PH=x$，如图.



依题意 $AC=\sqrt{3}r$，$PC=3r$.

所以以 AB 为底面直径的圆锥的体积

$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi\cdot AC^2\cdot PC=\frac{1}{3}\pi(\sqrt{3}r)^2\cdot3r=3\pi r^3$，

$V_{球}=\frac{4}{3}\pi r^3$.

球取出后水面下降到 EF，水的体积 $V_{水}=\frac{1}{3}\pi\cdot EH^2\cdot PH=\frac{1}{3}\pi(PH\cdot\tan 30°)^2\cdot PH=\frac{1}{9}\pi x^3$.

而 $V_{水}=V_{圆锥}-V_{球}$，即$\frac{1}{9}\pi x^3=3\pi r^3-\frac{4}{3}\pi r^3$，所以 $x=\sqrt[3]{15}r$.

故球从容器中取出后水面高是$\sqrt[3]{15}r$.

【类题通法】

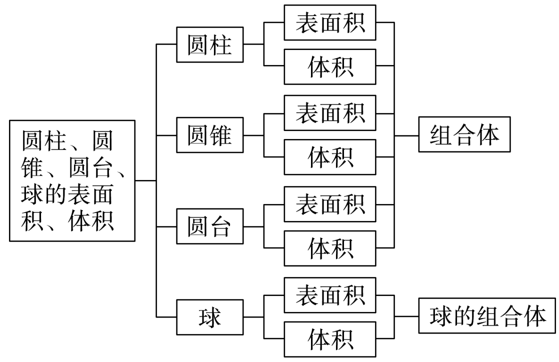
1. 设球的截面圆上有一点 A,球心为 O,截面圆心为 O_1,则 $\triangle AO_1O$ 是以 O_1 为直角顶点的直角三角形,解答球的截面问题时,常作该直角三角形求解,并常作过球心和截面圆心的轴截面.

2. 解决与球有关的"切""接"问题的关键是把空间问题平面化.

(1)"切"的处理:球内切问题主要是球内切于多面体或旋转体的问题.解答时要找准切点,通过作截面来解决.

(2)"接"的处理:一个多面体的所有顶点均在球面上,即球外接于该多面体.解决这类问题的关键是抓住外接的特点,即球心到多面体顶点的距离等于球的半径.

提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1. 直径为 6 的球的表面积和体积分别是 ( )

A. $144\pi,144\pi$ B. $144\pi,36\pi$

C. $36\pi,144\pi$ D. $36\pi,36\pi$

D **解析**:半径 $R=3$.所以 $S_{表}=4\pi R^2=36\pi$,$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4\pi}{3}\times 3^3=36\pi$.故选 D.

2. 表面积为 16π 的球的内接圆柱的轴截面为正方形,则该内接圆柱的体积为 ( )

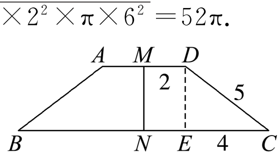
A. $4\sqrt{2}\pi$ B. $2\sqrt{2}\pi$ C. 16π D. 8π

A **解析**:由题可知,$4\pi R^2=16\pi$,$R=2$,即球的半径 $R=2$.设圆柱的底面圆半径为 r,则 $\sqrt{(2r)^2+(2r)^2}=2R$,得 $r=\sqrt{2}$.所以 $V_{圆柱}=\pi r^2\cdot 2r=2\pi\cdot 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}\pi$.

3. 圆台上底面半径为 2,下底面半径为 6,母线长为 5,则圆台的体积为 ( )

A. 40π B. 52π C. 50π D. $\frac{212}{3}\pi$

B **解析**:作出圆台的轴截面如图所示,上底面半径 $MD=2$,下底面半径 $NC=6$,过 D 作 $DE\perp NC$,垂足为 E,则 $EC=6-2=4$,$CD=5$.故 $DE=3$,即圆台的高为 3.所以圆台的体积为 $V=\frac{1}{3}\times 3\times(\pi\times 2^2+\pi\times 6^2+\sqrt{\pi\times 2^2\times\pi\times 6^2})=52\pi$.



4. 已知圆锥 SO 的高为 4,体积为 4π,则底面半径 $r=$________.

$\sqrt{3}$ **解析**:设底面半径为 r,则 $\frac{1}{3}\pi r^2\times 4=4\pi$,解得 $r=\sqrt{3}$,即底面半径为 $\sqrt{3}$.

5. 一个球与一个正三棱柱的三个侧面和两个底面都相切.已知这个球的体积是 $\frac{32\pi}{3}$,那么这个三棱柱的体积是________.

$48\sqrt{3}$ **解析**:设球的半径为 R.由 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{32\pi}{3}$,得 $R=2$.

所以正三棱柱的高 $h=4$.

设正三棱柱的底面边长为 a,则 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=2$,得 $a=4\sqrt{3}$.

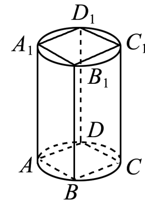
所以 $V_{三棱柱}=\frac{1}{2}\times(4\sqrt{3})^2\times\sin 60^\circ\times 4=48\sqrt{3}$.

6. 已知圆柱内有一个内接长方体,长方体的体对角线长是 $10\sqrt{2}$ cm,圆柱的侧面展开图为矩形,此矩形的面积是 100π cm^2,则圆柱的底面半径为________cm,高为________cm.

5 10 **解析**:设圆柱的底面半径为 r cm,高为 h cm.如图,圆柱的轴截面是个长方形,且长方形的对角线长等于它的内接长方体的体对角线长.

由题意得 $\begin{cases}(2r)^2+h^2=(10\sqrt{2})^2,\\2\pi rh=100\pi,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}r=5,\\h=10.\end{cases}$

即圆柱的底面半径为 5 cm,高为 10 cm.



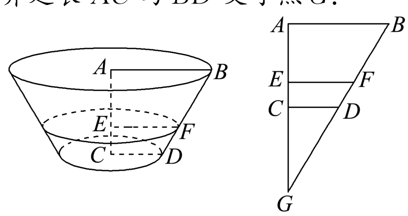
综合性·创新提升

1. 如图,龙洗是我国著名的文物之一,因盆内有龙纹而得名,为古代皇宫盥洗用具,其盆体可以近似看作一个圆台.现有一龙洗盆高 15 cm,盆口直径 36 cm,盆底直径 18 cm.现往盆内倒入水,当水深 5 cm时,盆内水的体积近似为　(　　)

A.$\frac{1\ 505\pi}{3}$cm^3　　B.555π cm^3

C.$\frac{1\ 835\pi}{3}$cm^3　　D.735π cm^3

B　**解析**:如图所示,画出圆台的立体图形和轴截面的一半,并延长 AC 与 BD 交于点 G.



根据题意得 $AB=18$ cm,$CD=9$ cm,$AC=15$ cm,$EC=5$ cm.

因为在圆台 AC 中,$AB\parallel EF\parallel CD$,所以$\triangle GCD\backsim\triangle GAB$,$\triangle GCD\backsim\triangle GEF$,所以 $\frac{CD}{AB}=\frac{CG}{AG}$,$\frac{EF}{CD}=\frac{EG}{CG}$.

设 $CG=x$ cm,$EF=y$ cm,所以 $\frac{9}{18}=\frac{x}{x+15}$,$\frac{y}{9}=\frac{x+5}{x}$,解得 $x=15$,$y=12$,

所以 $V=\frac{1}{3}(\pi\cdot 12^2+\pi\cdot 9^2+\pi\cdot 12\cdot 9)\cdot 5=555\pi(\text{cm}^3)$.故选 B.

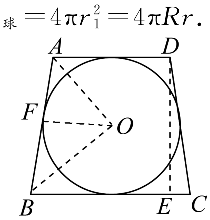
2. 若球的外切圆台的上、下底面半径分别为 r,R,则球的表面积为　(　　)

A.$4\pi(r+R)^2$　　B.$4\pi r^2R^2$

C.$4\pi Rr$　　D.$\pi(R+r)^2$

C　**解析**:如图,过点 D 作 $DE\perp BC$ 交 BC 于点 E,过 O 作 $OF\perp AB$ 于点 F,连接 OA,OB.设球的半径为 r_1,则在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中,$DE=2r_1$,$CE=R-r$,在 $\text{Rt}\triangle AFO$ 中,$OF=r_1$,$OA=\sqrt{r^2+r_1^2}$,所以 $AF=r$,同理可得 $BF=R$,所以 $AB=R+r$,即 $DC=R+r$.由勾股定理得 $DE^2=DC^2-CE^2$,即$(2r_1)^2=(R+r)^2-(R-r)^2$,解得 $r_1=\sqrt{Rr}$.

故球的表面积 $S_{球}=4\pi r_1^2=4\pi Rr$.



3. 已知圆台的上、下底面半径分别为 10 和 20,它的侧面展开图的扇环的圆心角为 180°,则这个圆台的侧面积为　(　　)

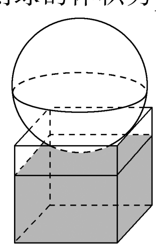
A.600π　B.300π　C.900π　D.450π

A　**解析**:设圆台的母线为 l,扇环所在的小圆的半径为 x.

由题意得$\begin{cases}2\pi\times 20=\pi(l+x),\\2\pi\times 10=\pi x,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=20,\\l=20.\end{cases}$

所以 $S_{圆台侧}=\pi(r+r')l=\pi(20+10)\times 20=600\pi$.

4. 如图,有一个水平放置的透明无盖的正方体容器,容器高 8 cm,将一个球放在容器口,再向容器内注水,当球面恰好接触水面时测得水深为 6 cm,如果不计容器的厚度,则球的体积为________cm^3.



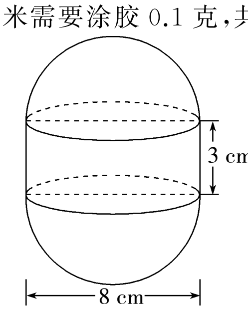
$\frac{500\pi}{3}$　**解析**:设球的半径为 R cm,根据已知条件,知正方体的上底面截球所得截面圆的半径为4 cm,球心到截面的距离为$(R-2)$cm,

所以由 $4^2+(R-2)^2=R^2$,得 $R=5$,所以球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times 5^3=\frac{500\pi}{3}(\text{cm}^3)$.

5. 如图,某种水箱用的"浮球",是由两个半球和一个圆柱筒组成.已知球的直径为8 cm,圆柱筒高为 3 cm.

(1)求这种"浮球"的体积;

(2)要在这样的 3 000 个"浮球"的表面涂一层胶质,如果每平方厘米需要涂胶 0.1 克,共需胶多少克?



解:(1)由题意得该几何体由两个半球和一个圆柱筒组成,

球的体积 $V_1=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{256}{3}\pi(\text{cm}^3)$,

圆柱体积 $V_2=\pi R^2\cdot h=48\pi(\text{cm}^3)$,

所以浮球的体积 $V=V_1+V_2=\frac{400}{3}\pi(\text{cm}^3)$.

(2)上、下半球的表面积之和 $S_1=4\pi R^2=64\pi(\text{cm}^2)$,

圆柱侧面积 $S_2=2\pi Rh=24\pi(\text{cm}^2)$,

所以 1 个浮球的表面积 $S=64\pi+24\pi=88\pi(\text{cm}^2)$,

3 000 个浮球的表面积为 $3\ 000\times 88\pi=264\ 000\pi(\text{cm}^2)$,

因为每平方厘米需要涂胶 0.1 克,

所以共需胶 $264\ 000\pi\times 0.1=26\ 400\pi$(克).

8.4 空间点、直线、平面之间的位置关系

8.4.1 平面

学习任务目标

1.了解平面的概念,会用图形与字母表示平面.
2.能用符号语言描述空间中的点、直线、平面之间的位置关系.
3.能用图形、文字、符号三种语言描述三个基本事实,理解三个基本事实的地位与作用.(直观想象)

问题式预习

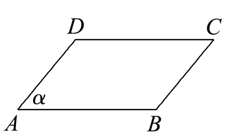
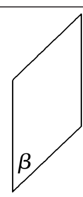
知识点一 平面

1.平面的概念

(1)平面是最基本的几何概念,对它加以描述而不定义.

(2)几何中的平面的特征:无限延展、不计大小、不计厚薄等.

2.平面的画法

<table>
<tr><td rowspan="2">画法</td><td colspan="2">我们常用矩形的直观图,即平行四边形表示平面</td></tr>
<tr><td>当平面水平放置时,常把平行四边形的一边画成横向</td><td>当平面竖直放置时,常把平行四边形的一边画成竖向</td></tr>
<tr><td>图示</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>表示方法</td><td colspan="2">(1)用希腊字母 α,β,γ 等表示平面,如平面 α,平面 β,平面 γ;
(2)用代表平面的平行四边形的四个顶点的大写英文字母表示平面,如平面 $ABCD$;
(3)用代表平面的平行四边形的相对的两个顶点的大写英文字母表示平面,如平面 AC,平面 BD</td></tr>
</table>

[微训练]

下列说法中,正确说法的个数为 ( )

①铺得很平的一张白纸是一个平面;
②一个平面的面积可以等于 6 cm^2;
③平面是矩形或平行四边形的形状.

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

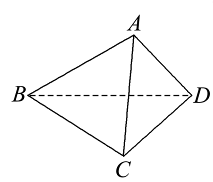
A **解析**:平面无厚薄、无大小,故一张白纸不是一个平面,故①②错;对于③,可以用矩形或平行四边形来表示平面,但平面并不是矩形或平行四边形,故③错.

知识点二 点、直线、平面之间的基本关系的符号表示

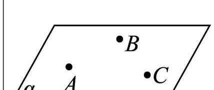
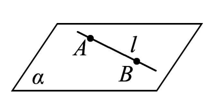
文字语言	符号语言
点 A 在直线 l 上	$A\in l$
点 A 在直线 l 外	$A\notin l$
点 A 在平面 α 内	$A\in\alpha$
点 A 在平面 α 外	$A\notin\alpha$
直线 l 在平面 α 内	$l\subset\alpha$
直线 l 在平面 α 外	$l\not\subset\alpha$
平面 α,β 相交于 l	$\alpha\cap\beta=l$

[微训练]

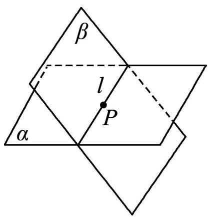
如图,点 $A\in$ 平面 ABC;点 $A\notin$ 平面 BCD;$BD\subset$ 平面 ABD;平面 $ABC\cap$ 平面 $BCD=BC$.



知识点三 平面的基本性质及其推论

名称	内容	图形	符号
基本事实1	过不在一条直线上的三个点,有且只有一个平面		A,B,C 三点不共线⇒存在唯一的平面 α 使 $A,B,C\in\alpha$
基本事实2	如果一条直线上的两个点在一个平面内,那么这条直线在这个平面内		$A\in l,B\in l$,且 $A\in\alpha,B\in\alpha\Rightarrow l\subset\alpha$

续表

名称	内容	图形	符号
基本事实3	如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的<u>公共直线</u>		$P\in\alpha$，且 $P\in\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=l$，且 $P\in l$

名称	内容
推论1	经过一条直线和这条直线外一点，<u>有且只有一个平面</u>.
推论2	经过两条相交直线，<u>有且只有一个平面</u>.
推论3	经过两条平行直线，<u>有且只有一个平面</u>

[微训练]

1. 判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)若点 $A\in$ 直线 a，点 $B\in$ 直线 a，而点 $A\in$ 平面 α，点 $B\notin$ 平面 α，则 $a\not\subset\alpha$.　(　　)

√　**提示**：直线上有两点，一点在平面内，一点在平面外，说明直线与平面相交.

(2)经过三点有且只有一个平面.　(　　)

×　**提示**：经过不共线的三点有且只有一个平面，经过共线的三点则有无数个平面.

(3)两个平面的交线可能是一条线段.　(　　)

×　**提示**：两个平面的交线是一条直线.

2. 若直线 $a\subset$ 平面 α，直线 $b\subset\alpha$，点 $M\in a$，点 $N\in b$，$M\in$ 直线 l，$N\in l$，则　(　　)

A. $l\subset\alpha$　　B. $l\not\subset\alpha$

C. $l\cap\alpha=M$　　D. $l\cap\alpha=N$

A　**解析**：因为 $M\in l$，$N\in l$，且 $M\in\alpha$，$N\in\alpha$，所以 $l\subset\alpha$.

任务型课堂

任务一　立体几何中三种语言的转换

[探究活动]

我们知道，一个点在平面或空间沿着一定方向和其相反方向运动能形成直线.探究下列问题.

探究1：直线沿着一定方向和其相反方向运动能形成什么图形？

提示：平面.

探究2：直线和平面都是由点组成的，运用集合的观点，点和直线、平面的位置关系如何用符号来表示？直线和平面呢？

提示：点和直线、点和平面的位置关系可用数学符号“$\in$”或“$\notin$”表示，直线和平面的位置关系可用数学符号“$\subset$”或“$\not\subset$”表示.

[评价活动]

1. 若点 A 在直线 a 上，而直线 a 在平面 α 内，点 B 在平面 α 内，则可以表示为　(　　)

A. $A\subset a$，$a\subset\alpha$，$B\in\alpha$

B. $A\in a$，$a\subset\alpha$，$B\in\alpha$

C. $A\subset a$，$a\in\alpha$，$B\subset\alpha$

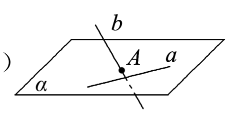
D. $A\in a$，$a\in\alpha$，$B\in\alpha$

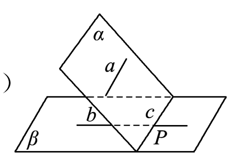
B　**解析**：点 A 在直线 a 上，而直线 a 在平面 α 内，点 B 在平面 α 内，表示为 $A\in a$，$a\subset\alpha$，$B\in\alpha$.

2. 将下列符号语言转换为图形语言.

(1) $a\subset\alpha$，$b\cap\alpha=A$，$A\notin a$；

(2) $\alpha\cap\beta=c$，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a\parallel c$，$b\cap c=P$.

解：(1) 

(2) 

【类题通法】

三种语言转换的注意点

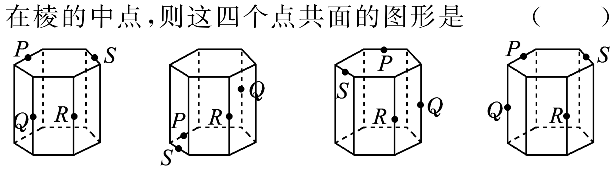
(1)用文字语言、符号语言表示一个图形时，首先仔细观察图形中有几个平面、几条直线、几个点且相互之间的位置关系如何，试着用文字语言进行描述，再用符号语言表示.

(2)符号语言的意义.如点与直线的位置关系只能用“$\in$”或“$\notin$”，直线与平面的位置关系只能用“$\subset$”或“$\not\subset$”.

(3)由符号语言或文字语言画相应的图形时，要注意把被遮挡的部分画成虚线.

任务二　点、线共面问题

1. (多选题)下列各正六棱柱中，P，Q，R，S 分别是所在棱的中点，则这四个点共面的图形是　(　　)

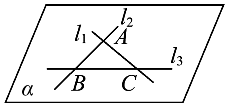


A　　B　　C　　D

ABC　**解析**：在选项A，B，C的图形中，由棱柱、正六边形、中位线的性质知，均有 $PS\parallel QR$，即在此三个图形中 P，Q，R，S 四点共面.故选ABC.

2. 证明：两两相交且不过同一点的三条直线共面.

解：已知：如图，$l_1\cap l_2=A$，$l_2\cap l_3=B$，$l_1\cap l_3=C$.



求证：直线 l_1，l_2，l_3 在同一平面内.

证明：因为 $l_1\cap l_2=A$，所以 l_1 和 l_2 在同一平面 α 内.

因为 $l_2\cap l_3=B$，所以 $B\in l_2$.

又因为 $l_2\subset\alpha$，所以 $B\in\alpha$.同理可证 $C\in\alpha$.

又因为 $B\in l_3$，$C\in l_3$，所以 $l_3\subset\alpha$.

所以直线 l_1，l_2，l_3 在同一平面内.

【类题通法】

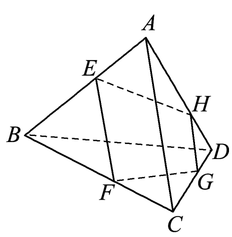
证明点、线共面的常用方法

(1)先由部分点、线确定一个面，再证其余的点、线都在这个平面内，即用“纳入法”.

(2)先由其中一部分点、线确定一个平面 α，其余点、线确定另一个平面 β，再证平面 α 与 β 重合，即用“同一法”.

任务三 多线共点、多点共线问题

1. 如图所示，在空间四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 AB 和 CB 上的点，G，H 分别是 CD 和 AD 上的点，且四边形 $EFGH$ 为梯形，$HG\parallel EF$，$HG:EF=1:3$.求证：EH，BD，FG 三条直线相交于同一点.



证明：延长 EH，FG 交于点 O(图略).

因为 $HG\parallel EF$，$HG:EF=1:3$，

所以 EH 与 FG 共面，且 EH 与 FG 不平行.

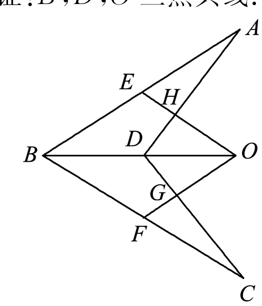
又因为 $O\in EH$，$EH\subset$ 平面 ABD，所以 $O\in$ 平面 ABD.

因为 $O\in FG$，$FG\subset$ 平面 BCD，所以 $O\in$ 平面 BCD.

因为平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=BD$，所以 $O\in BD$，

所以 EH，BD，FG 三条直线相交于同一点 O.

2. 如图，E，F，G，H 分别是空间四边形 $ABCD$ 的边 AB，BC，CD，DA 上的点，且直线 EH 与直线 FG 交于点 O.求证：B，D，O 三点共线.



证明：因为 $E\in AB$，$H\in AD$，

所以 $E\in$ 平面 ABD，$H\in$ 平面 ABD，

所以 $EH\subset$ 平面 ABD.

因为 $EH\cap FG=O$，

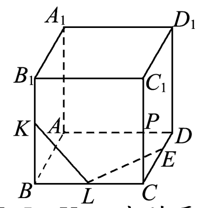
所以 $O\in$ 平面 ABD.

同理，$O\in$ 平面 BCD.

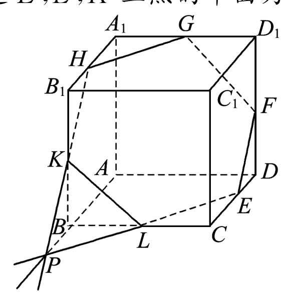
因为平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=BD$，

所以 $O\in BD$，即 B，D，O 三点共线.

3. 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，L，K 分别为棱 CD，BC，BB_1 的中点，试判断过 E，L，K 三点的平面截正方体所得截面的形状.



解：如图，设过 E，L，K 三点的平面为 α，



则平面 $AC\cap$ 平面 $\alpha=LE$.

因为平面 $AC\cap$ 平面 $AB_1=AB$，设 $LE\cap AB=P$，连接 PK 并延长交 A_1B_1 于点 H，所以平面 $\alpha\cap$ 平面 $AB_1=KH$.

同理可得，截面 α 与棱 DD_1，A_1D_1 分别交于点 F，G.

所以截面为六边形 $EFGHKL$，其形状是正六边形.

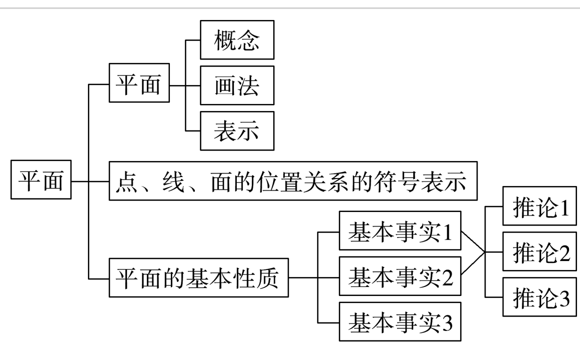
【类题通法】

点共线与线共点的证明方法

(1)点共线：证明多点共线通常用基本事实3，即两相交平面交线的唯一性.通过证明点分别在两个平面内，证明点在相交平面的交线上，也可选择其中两点确定一条直线，然后证明其他点也在其上.

(2)三线共点：证明三线共点，可把其中一条直线作为分别过其余两条直线的两个平面的交线，然后再证这两条直线的交点在此直线上；此外，还可先将其中一条直线看作某两个平面的交线，证明该交线与另两条直线分别交于两点，再证这两点重合，从而证得三线共点.

提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

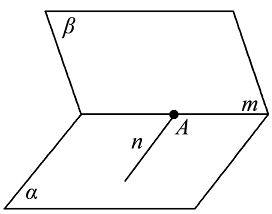
1. 下列说法中,正确说法的个数为　　(　　)

①三角形一定是平面图形;②若四边形的两条对角线相交于一点,则该四边形是平面图形;③一个平面的面积为 6 cm^2.

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

C　**解析**:①②正确,③不正确.

2. 如图所示的位置关系用符号语言可表示为　　(　　)



A.$\alpha\cap\beta=m,n\subset\alpha,m\cap n=A$

B.$\alpha\cap\beta=m,n\in\alpha,m\cap n=A$

C.$\alpha\cap\beta=m,n\subset\alpha,A\subset m,A\subset n$

D.$\alpha\cap\beta=m,n\in\alpha,A\in m,A\in n$

A　**解析**:点可看成元素,直线与平面均为点的集合,因此 $n\subset\alpha,A\in m,A\in n,m\cap n=A,\alpha\cap\beta=m$.

3. 下列图形中,不一定是平面图形的是　　(　　)

A.三角形　　B.菱形

C.梯形　　D.四边相等的四边形

D　**解析**:三角形的三个顶点不共线,因此三角形一定是平面图形;菱形、梯形有两组(或一组)对边平行,故为平面图形;四边相等的四边形可能为空间四边形.

4. 给出以下三个命题:

①不共面的四点中,任意三点不共线;

②若 A,B,C,D 共面,A,B,C,E 共面,则 A,B,C,D,E 共面;

③依次首尾相接的四条线段一定共面.

其中正确命题的个数是　　(　　)

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

B　**解析**:若存在三点共线,则四点一定共面,故①正确;对于②,若 A,B,C 三点共线,如图 1 所示,A,B,C,D,E 不共面,故②不正确;对于③,如图 2 所示的 AB,BC,CD,DA 顺次首尾相连,但四条线段不共面,故③不正确.

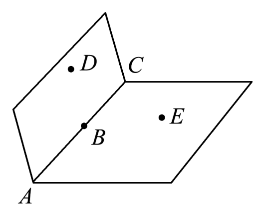


图1

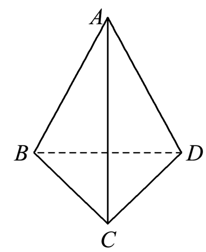
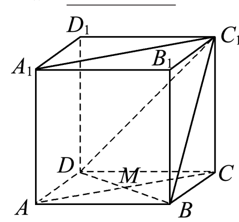


图2

5. 如图,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,平面 A_1C 与平面 BDC_1 的交线是________.



C_1M　**解析**:因为 $C_1\in$ 平面 A_1C,且 $C_1\in$ 平面 BDC_1,同时 $M\in$ 平面 A_1C,且 $M\in$ 平面 BDC_1,所以平面 A_1C 与平面 BDC_1 的交线是 C_1M.

综合性·创新提升

1. (多选题)已知 α,β 为平面,A,B,M,N 为点,a 为直线,下列推理正确的是　　(　　)

A.$A\in a,A\in\beta,B\in a,B\in\beta\Rightarrow a\subset\beta$

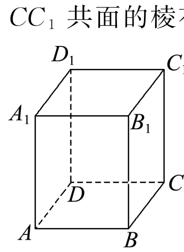
B.$M\in\alpha,M\in\beta,N\in\alpha,N\in\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=MN$

C.$A\in\alpha,A\in\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=A$

D.$A,B,M\in\alpha,A,B,M\in\beta$,且 A,B,M 不共线$\Rightarrow\alpha,\beta$ 重合

ABD　**解析**:对于 A,由基本事实 2 可知,$a\subset\beta$,A 正确.对于 B,由 $M\in\alpha,M\in\beta,N\in\alpha,N\in\beta$,由基本事实 2 可知,直线 $MN\subset\alpha$.同理 $MN\subset\beta$,所以 $\alpha\cap\beta=MN$,B 正确.对于 C,因为 $A\in\alpha,A\in\beta$,所以 $A\in\alpha\cap\beta$.由基本事实可知 $\alpha\cap\beta$ 为经过 A 的一条直线而不是点 A.故 $\alpha\cap\beta=A$ 的写法错误.对于 D,因为 A,B,M 不共线,由基本事实 1 可知,过 A,B,M 有且只有一个平面,故 α,β 重合.故选 ABD.

2. 如图,在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱中,既与 AB 共面,又与 CC_1 共面的棱有________条.



5　**解析**:由题图可知,既与 AB 共面又与 CC_1 共面的棱有 CD,BC,BB_1,AA_1,C_1D_1,共 5 条.

3.已知平面 α 与平面 β，平面 γ 都相交，则这三个平面的交线可能有________条.

1 或 2 或 3 **解析**：当 β 与 γ 相交时，若 α 过 β 与 γ 的交线，有 1 条交线；若 α 不过 β 与 γ 的交线，有 3 条交线.当 β 与 γ 平行时，有 2 条交线.

4.若线段 AB 所在直线与平面 α 相交，P 为直线 AB 外的任一点，且 $P\notin\alpha$，直线 AP，BP 与 α 分别交于 A'，B'.求证：不论点 P 在什么位置，直线 $A'B'$ 必过一定点.

证明：因为 $AP\cap BP=P$，

所以 AP，BP 确定平面 β.

又因为 $A'\in AP$，所以 $A'\in\beta$.

同理可得 $B'\in\beta$.

因为 $A'\in\alpha$，$B'\in\alpha$，所以 $\alpha\cap\beta=A'B'$.

设 $AB\cap\alpha=O$，则 $O\in\alpha$，$O\in\beta$.

所以 $O\in A'B'$.

即直线 $A'B'$ 过定点 O（AB 与平面 α 的交点）.

8.4.2 空间点、直线、平面之间的位置关系

学习任务目标

1.了解直线与直线之间的位置关系，理解异面直线的概念.

2.了解直线与平面之间的三种位置关系，并能判断直线与平面的位置关系.

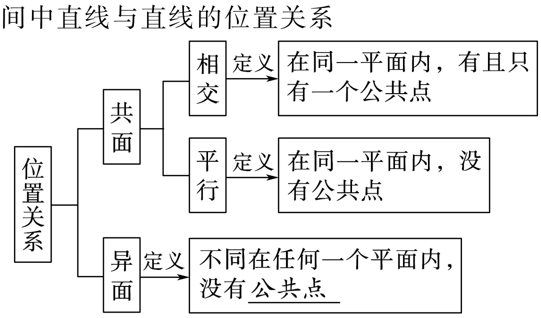
3.了解平面与平面之间的两种位置关系，并能判断两个平面的位置关系.

4.会用符号语言和图形语言表示直线与平面、平面与平面之间的位置关系.（直观想象）

问题式预习

知识点一 空间中直线与直线的位置关系

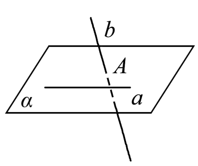
1.空间中直线与直线的位置关系

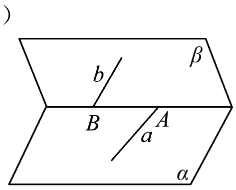


2.异面直线

(1)定义：把不同在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线.

(2)画法：(通常用平面衬托)





［微训练］

1.不平行的两条直线的位置关系是 （ ）

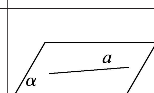
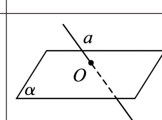
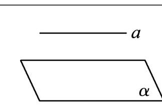
A.相交 B.异面

C.平行 D.相交或异面

D **解析**：由于空间两条直线的位置关系是平行、相交、异面，则不平行的两条直线的位置关系是相交或异面.

2.与同一平面 α 都相交的两条直线的位置关系是相交、平行或异面.

知识点二 空间中直线与平面的位置关系

位置关系	直线 a 在平面 α 内	直线 a 在平面 α 外	
		直线 a 与平面 α 相交	直线 a 与平面 α 平行
公共点个数	无数	1	0
图形表示			
符号表示	$a\subseteq\alpha$	$a\cap\alpha=O$	$a/\!/\alpha$

［微训练］

判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)若直线与平面有公共点，则直线在平面内.（ ）

× **提示**：不一定.若直线与平面只有一个公共点，则直线与平面相交.若有两个公共点，则可说明直线在平面内.

(2)若直线 l 上有无数个点不在平面 α 内，则 $l/\!/\alpha$. （ ）

× **提示**：直线 l 与平面 α 可能平行，也可能相交.

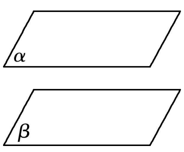
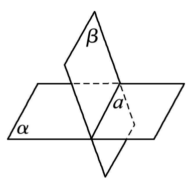
(3)若直线 l 与平面 α 相交，则 l 与平面 α 内的任意一条直线都是异面直线. （ ）

× **提示**：可能异面，也可能相交.

(4)若两条异面直线中的一条与一个平面平行，则另一条直线一定与该平面相交. （ ）

× 　**提示**：另一条直线与该平面可能平行，可能相交，也可能在平面内.

知识点三　空间中平面与平面的位置关系

位置关系	两个平面平行	两个平面相交
公共点	没有公共点	有一条公共直线
图形表示		
符号表示	$\underline{\alpha /\!/ \beta}$	$\underline{\alpha \cap \beta = a}$

[微训练]

判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)若三个平面两两相交，则一定有三条交线.(　　)

×　**提示**：可能有三条交线，也可能只有一条交线.

(2)若平面 $\alpha\cap\beta=b$，$a\subset\alpha$，则直线 a 与 b 一定相交.(　　)

×　**提示**：a 与 b 可能相交，也可能平行.

(3)若 α,β,γ 为三个不重合的平面，则 $\alpha/\!/\beta$，$\beta/\!/\gamma\Rightarrow\alpha/\!/\gamma$.(　　)

√　**提示**：平行具有传递性，故正确.

任务型课堂

任务一　空间中两条直线位置关系的判定

[探究活动]

观察如图的教室，探究下列问题.

探究1：教室内同一列的灯管所在的直线是什么位置关系？

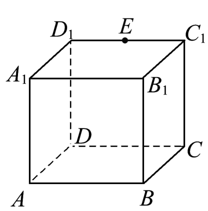
提示：平行.

探究2：教室内某灯管所在的直线和黑板左右两边所在的直线是什么位置关系？

提示：异面.

[评价活动]

如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，判断下列直线间的位置关系：



(1)直线 A_1B 与直线 D_1C 的位置关系是<u>平行</u>；

(2)直线 A_1B 与直线 B_1C 的位置关系是<u>异面</u>；

(3)直线 D_1D 与直线 CE(E 为线段 C_1D_1 的中点)的位置关系是<u>相交</u>；

(4)直线 AB 与直线 B_1C 的位置关系是<u>异面</u>.

任务二　空间中直线与平面的位置关系

1.下列命题中，正确命题的个数是(　　)

①如果 a,b 是两条直线，$a/\!/b$，那么 a 平行于经过 b 的任何一个平面；

②如果直线 a 和平面 α 满足 $a/\!/\alpha$，那么 a 与平面 α 内的任何一条直线平行；

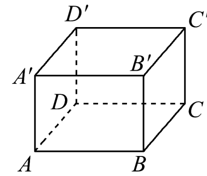
③如果直线 a,b 和平面 α 满足 $a/\!/\alpha$，$b/\!/\alpha$，那么 $a/\!/b$；

④如果直线 a,b 和平面 α 满足 $a/\!/b$，$a/\!/\alpha$，$b\not\subset\alpha$，那么 $b/\!/\alpha$；

⑤如果平面 α 的同侧有两点 A,B 到平面 α 的距离相等，则 $AB/\!/\alpha$.

A.0　　B.2　　C.1　　D.3

B　**解析**：如图，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，$AA'/\!/BB'$，AA'在过 BB'的平面 AB'内，故命题①不正确；$AA'/\!/$平面 $B'C$，$BC\subset$平面 $B'C$，但 AA'不平行于 BC，故命题②不正确；$AA'/\!/$平面 $B'C$，$A'D'/\!/$平面 $B'C$，但 AA'与$A'D'$相交，故命题③不正确；④中，假设 b 与 α 相交，因为 $a/\!/b$，所以 a 与 α 相交，这与 $a/\!/\alpha$ 矛盾，故 $b/\!/\alpha$，即命题④正确；命题⑤显然正确.故选 B.



2.直线 a 在平面 γ 外，则(　　)

A.$a/\!/\gamma$

B.a 与 γ 至少有一个公共点

C.$a\cap\gamma=A$

D.a 与 γ 至多有一个公共点

D　**解析**：直线 a 在平面 γ 外，包括直线 a 与平面 γ 相交或平行两种情况，故 a 与 γ 至多有一个公共点.

3.三棱台的一条侧棱所在直线与其对面所在的平面之间的关系是(　　)

A.相交

B.平行

C.直线在平面内

D.平行或直线在平面内

A　**解析**：延长各侧棱可恢复成棱锥的形状，所以三棱台的一条侧棱所在直线与其对面所在的平面相交.故选 A.

【类题通法】

直线与平面的位置关系的判定

直线与平面的位置关系有三种，即直线在平面内，直线与平面相交，直线与平面平行.

(1)判定直线在平面内，需找到直线上两点在平面内，根据基本事实 2 知直线在平面内.

(2)判定直线与平面相交，据定义只需判定直线与平面有且只有一个公共点.

(3)判定直线与平面平行，可根据定义判断直线与平面没有公共点，也可以排除直线与平面相交及直线在平面内两种情况，从而判断直线与平面平行.

任务三　空间中平面与平面的位置关系

1.下列说法正确的是　(　　)

A.两个平面可以只有一个交点

B.一条直线与一个平面最多有一个公共点

C.两个平面有一个公共点，它们相交或重合

D.两个平面有三个公共点，它们一定重合

C　**解析**：两个平面有公共点，包括两个平面重合或相交.

2.给出下列四个命题，其中正确命题的个数是(　　)

①若平面 α 内有两条直线和平面 β 平行，则这两个平面平行；

②若平面 α 内有无数条直线和平面 β 平行，则 α 与 β 平行；

③若平面 α 内 $\triangle ABC$ 的三个顶点到平面 β 的距离相等，则 α 与 β 平行；

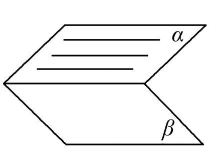
④若两个不重合的平面有无数个公共点，则这两个平面相交.

A.0　　B.1

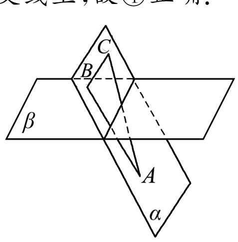
C.3　　D.4

B　**解析**：如图甲，平面 α 内有无数条直线与平面 β 平行，但 α 与 β 相交；如图乙，$\triangle ABC$ 的三个顶点到 β 的距离相等，但 α 与 β 相交.故①②③均错.

不重合的两个平面，若它们有公共点，则它们有无数个公共点，且都在它们的交线上，故④正确.



甲



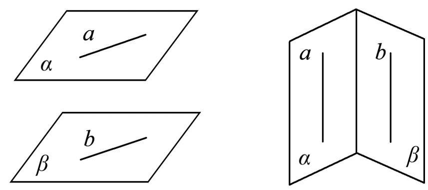
乙

3.如果在两个平面内各有一条直线，这两条直线互相平行，那么这两个平面　(　　)

A.平行　　B.相交

C.平行或相交　　D.不相交

C　**解析**：根据题意作图判断，图①、图②分别为两个平面平行、相交的情形.



①　　②

【类题通法】

平面与平面的位置关系的判定

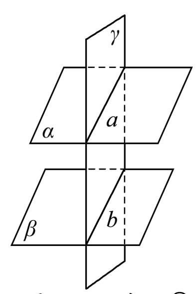
平面与平面的位置关系有两种，即相交与平行.

(1)判定两个平面相交，只需找到两个平面的一个公共点，就可根据基本事实 3 得知，两个不重合的平面是相交的.

(2)判定两个平面平行，可根据定义判定两个平面没有公共点，也可以排除两个平面相交和重合的情况，从而判定两个平面平行.

任务四　空间中直线、平面位置关系的综合应用

1.如图，平面 α,β,γ 满足 $\alpha /\!/ \beta$，$\alpha\cap\gamma=a$，$\beta\cap\gamma=b$，判断 a 与 b，a 与 β 的关系，并证明你的结论.



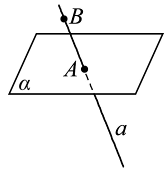
解：$a /\!/ b$，$a /\!/ \beta$.证明如下：由 $\alpha\cap\gamma=a$，知 $a\subset\alpha$ 且 $a\subset\gamma$.由 $\beta\cap\gamma=b$，知 $b\subset\beta$ 且 $b\subset\gamma$.因为 $\alpha /\!/ \beta$，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，所以 a，b 无公共点.又因为 $a\subset\gamma$，且 $b\subset\gamma$，所以 $a /\!/ b$.因为 $\alpha\cap\gamma=a$，所以 $a\subset\alpha$.因为 $\alpha /\!/ \beta$，所以 a 与 β 无公共点，所以 $a /\!/ \beta$.

2.已知平面 α,β，直线 a,b，且 $\alpha /\!/ \beta$，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，则直线 a 与直线 b 具有怎样的位置关系？

解：平面 α 与 β 平行时，平面 α 内的直线 a 与平面 β 内的直线 b 有且只有两种位置关系：平行或异面.因为 $\alpha /\!/ \beta$，则 α 与 β 没有公共点，所以直线 a 与直线 b 也没有公共点.

3.证明：如果一条直线经过平面内一点，又经过平面外一点，那么这条直线和平面相交.

解：已知：如图，$A\in\alpha$，$A\in a$，$B\notin\alpha$，$B\in a$.
求证：直线 a 和平面 α 相交.



证明：根据已知，a 和平面 α 有公共点 A，
所以 a 不平行于平面 α.
假设直线 a 和平面 α 不相交，则 $a\subset\alpha$.
因为 $B\in a$，所以 $B\in\alpha$，与已知 $B\notin\alpha$ 矛盾.
所以假设不成立.所以直线 a 和平面 α 相交.

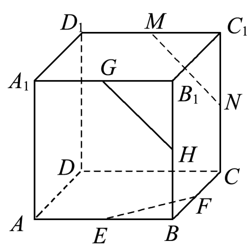
提质归纳

- 空间点、直线、平面之间的位置关系
  - 线线
    - 共面
      - 相交
      - 平行
    - 异面
  - 线面
    - 线在面内
    - 线在面外
      - 平行
      - 相交
  - 面面
    - 相交
    - 平行

课后素养评价

基础性·能力运用

1.（多选题）正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 如图所示，E，F，G，H，M，N 分别是所在棱的中点，则下列结论正确的是　　（ABC）



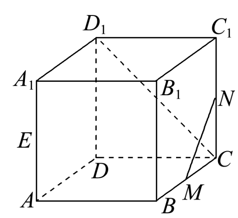
A.GH 和 MN 是平行直线
B.MN 和 EF 是相交直线
C.GH 和 EF 是异面直线
D.AA_1 和 EF 是相交直线

2.如果一条直线与两个平行平面中的一个平行，那么这条直线与另一个平面的位置关系是　　（D）
A.平行　　B.相交
C.直线在平面内　　D.平行或直线在平面内

3.在四棱台 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 ABB_1A_1 与平面 DCC_1D_1 的位置关系是　　（　　）
A.相交　　B.平行
C.不确定　　D.异面
A　**解析**：由棱台的定义可知，平面 ABB_1A_1 与平面 DCC_1D_1 一定相交.

4.在正方体的六个面所在平面中，互相平行的平面有　　（　　）
A.1 组　　B.2 组
C.3 组　　D.1 组或 3 组
C　**解析**：结合正方体图形可知互相平行的平面有 3 组.

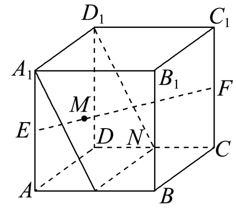
5.在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别是棱 BC，CC_1 的中点，则直线 MN 与 D_1C 的位置关系是________.
异面　**解析**：正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别是棱 BC，CC_1 的中点，
因为 $MN\cap$ 平面 $DCC_1D_1=N$，$D_1C\subset$ 平面 DCC_1D_1，$N\notin D_1C$，
所以直线 MN 与 D_1C 的位置关系是异面.



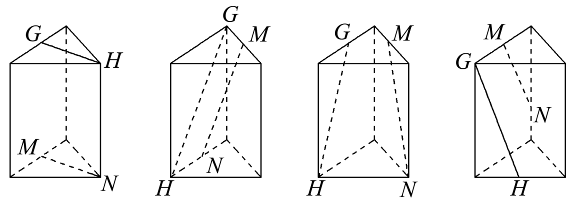
6.过平面 α 外一点 M，作直线 $l\,/\!/\,\alpha$，则这样的直线有________条.
无数　**解析**：过点 M 作一个平面 β，使得 $\beta\,/\!/\,\alpha$，则平面 β 中过点 M 的所有直线都与 α 平行.

综合性·创新提升

1.在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为棱 AA_1，CC_1 的中点，则在空间中与直线 A_1D_1，EF，CD 都相交的直线　　（　　）
A.不存在　　B.有且只有两条
C.有且只有三条　　D.有无数条
D　**解析**：如图所示，在 EF 上任意取一点 M，直线 A_1D_1 与 M 确定一个平面，这个平面与 CD 有且仅有一个交点 N，当 M 取不同的位置时就确定了不同的平面，从而与 CD 有不同的交点 N，而直线 MN 与这三条异面直线都有交点，故有无数条.故选 D.



2.（多选题）如图，G，H，M，N 分别是正三棱柱的顶点或所在棱的中点，则表示直线 GH，MN 是异面直线的图形有（　　）



A　　B　　C　　D

BD　**解析**：选项 A 中，$GH\parallel MN$.

选项 B 中，G，H，N 三点共面，但 $M\notin$ 平面 GHN，因此直线 GH 与 MN 异面.

选项 C 中，连接 GM，$GM\parallel HN$，因此 GH 与 MN 共面.

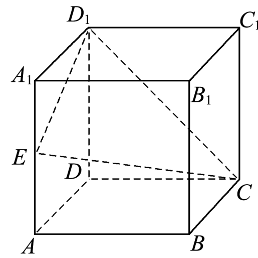
选项 D 中，G，M，N 三点共面，但 $H\notin$ 平面 GMN，因此 GH 与 MN 异面.

3.若 a，b 是两条异面直线，且 $a\parallel$ 平面 α，则 b 与 α 的位置关系是 $b\subset\alpha$，或 $b\parallel\alpha$，或 b 与 α 相交.

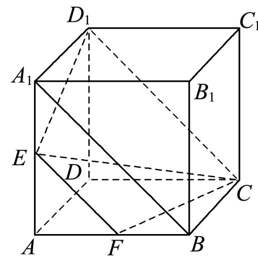
4.平面 $\alpha\cap\beta=c$，直线 $a\parallel\alpha$，a 与 β 相交，则 a 与 c 的位置关系是________.

异面　**解析**：因为 $a\parallel\alpha$，$c\subset\alpha$，所以 a 与 c 无公共点，不相交.若 $a\parallel c$，则直线 $a\parallel\beta$ 或 $a\subset\beta$，这与“a 与 β 相交”矛盾，所以 a 与 c 异面.

5.如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 AA_1 的中点，画出过点 D_1，C，E 的平面与平面 ABB_1A_1 的交线，并说明理由.



解：如图，取 AB 的中点 F，连接 EF，A_1B，CF.



因为 E 是 AA_1 的中点，所以 $EF\parallel A_1B$.

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$A_1D_1\parallel BC$，$A_1D_1=BC$，所以四边形 A_1BCD_1 是平行四边形.

所以 $A_1B\parallel CD_1$，所以 $EF\parallel CD_1$.

所以 E，F，C，D_1 四点共面.

因为 $E\in$ 平面 ABB_1A_1，$E\in$ 平面 D_1CE，

$F\in$ 平面 ABB_1A_1，$F\in$ 平面 D_1CE，

所以平面 $ABB_1A_1\cap$ 平面 $D_1CE=EF$.

所以过点 D_1，C，E 的平面与平面 ABB_1A_1 的交线为 EF.

8.5　空间直线、平面的平行

8.5.1　直线与直线平行

学习任务目标
理解并掌握基本事实 4 和等角定理，并能解决有关问题.（逻辑推理）

问题式预习

知识点一　基本事实 4

文字表述：平行于同一条直线的两条直线平行.这一性质通常叫做平行线的传递性.

符号表述：$\left.\begin{matrix}a\parallel b\\ b\parallel c\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\parallel c$.

［微训练］

已知 a，b 是异面直线，直线 $c\parallel$ 直线 a，那么 c 与 b（　　）

A.一定是异面直线　　B.一定是相交直线

C.不可能是平行直线　　D.不可能是相交直线

C **解析**:假设 c 与 b 平行,由于 $c/\!/a$,根据基本事实4可知 $a/\!/b$,与 a,b 是异面直线矛盾,故 c 与 b 不可能是平行直线.故选C.

知识点二 空间等角定理

如果空间中两个角的两条边分别对应平行,那么这两个角相等或互补.

[微训练]

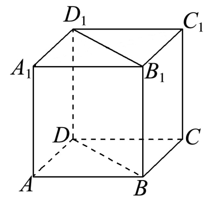
1. 已知 $\angle BAC=30°$,$AB/\!/A'B'$,$AC/\!/A'C'$,则 $\angle B'A'C'=$ ( )

A.30° B.150°

C.30°或150° D.大小无法确定

C **解析**:当 $\angle B'A'C'$ 与 $\angle BAC$ 方向相同时,$\angle B'A'C'=30°$;方向相反时,$\angle B'A'C'=150°$.故选C.

2. 如图,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,BD 和 B_1D_1 是正方形 $ABCD$ 和正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的对角线.



(1)$\angle DBC$ 的两边与________的两边分别平行且方向相同;

(2)$\angle DBC$ 的两边与________的两边分别平行且方向相反.

(1)$\angle D_1B_1C_1$ (2)$\angle B_1D_1A_1$ **解析**:(1)$B_1D_1/\!/BD$,$B_1C_1/\!/BC$,且角的方向相同,所以 $\angle DBC$ 的两边与 $\angle D_1B_1C_1$ 的两边分别平行且方向相同.

(2)$B_1D_1/\!/BD$,$D_1A_1/\!/BC$,且角的方向相反,所以 $\angle DBC$ 的两边与 $\angle B_1D_1A_1$ 的两边分别平行且方向相反.

任务型课堂

任务一 基本事实4的应用

[探究活动]

国旗是我们伟大祖国的象征和标志,代表祖国的尊严.升国旗仪式是学校对学生进行的爱国主义教育.如图,举行升国旗仪式时,同学们都站得笔挺直立,整齐如一.若其中两位升旗手所在的直线分别为 a,b,旗杆所在的直线为 c,探究下列问题.

探究1:直线 a 平行于直线 c 吗?直线 b 平行于直线 c 吗?直线 a 平行于直线 b 吗?

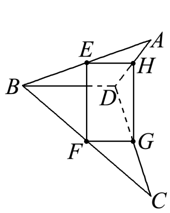
提示:直线 $a/\!/$直线 c;直线 $b/\!/$直线 c;直线 $a/\!/$直线 b.

探究2:由探究1你能得出什么结论?

提示:平行于同一条直线的两条直线平行.

[评价活动]

1. (多选题)如图,设 E,F,G,H 依次是空间四边形 $ABCD$ 的边 AB,BC,CD,DA 上除端点外的点,$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AH}{AD}=\lambda$,$\dfrac{CF}{CB}=\dfrac{CG}{CD}=\mu$,则下列结论中正确的有 ( )



A.当 $\lambda=\mu$ 时,四边形 $EFGH$ 是平行四边形

B.当 $\lambda\neq\mu$ 时,四边形 $EFGH$ 是梯形

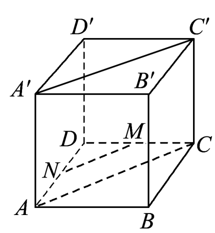
C.当 $\lambda\neq\mu$ 时,四边形 $EFGH$ 一定不是平行四边形

D.当 $\lambda=\mu$ 时,四边形 $EFGH$ 是梯形

ABC **解析**:由 $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AH}{AD}=\lambda$,得 $EH/\!/BD$,且 $\dfrac{EH}{BD}=\lambda$.同理得 $FG/\!/BD$,且 $\dfrac{FG}{BD}=\mu$.当 $\lambda=\mu$ 时,EH $/\!/\!\!=$ FG.当 $\lambda\neq\mu$ 时,$EH/\!/FG$,但 $EH\neq FG$,故A,B,C都正确,只有D错误.

2. 已知棱长为 a 的正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中,M,N 分别为 CD,AD 的中点,则 MN 与 $A'C'$ 的位置关系是________.

平行 **解析**:如图所示,$MN/\!/AC$,又因为 $AC/\!/A'C'$,所以 $MN/\!/A'C'$.



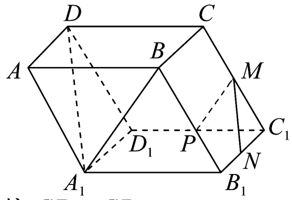
【类题通法】

利用基本事实4证明两条直线平行的方法

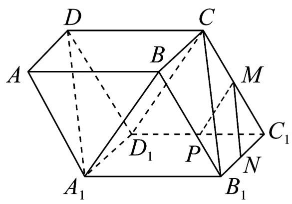
首先寻找第三条直线,然后证明这两条直线都与所找的第三条直线平行,最后根据基本事实4,证明这两条直线平行.

任务二 等角定理的应用

在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N，P 分别是 CC_1，B_1C_1，C_1D_1 的中点.求证：$\angle NMP=\angle BA_1D$.



证明：如图，连接 CB_1，CD_1.



因为 $CD\,/\!/\,A_1B_1$，$CD=A_1B_1$

所以四边形 A_1B_1CD 是平行四边形，

所以 $A_1D\,/\!/\,B_1C$.

因为 M，N 分别是 CC_1，B_1C_1 的中点，

所以 $NM\,/\!/\,B_1C$，所以 $NM\,/\!/\,A_1D$.

因为 $BC\,/\!/\,A_1D_1$，$BC=A_1D_1$，所以四边形 A_1BCD_1 是平行四边形，

所以 $A_1B\,/\!/\,CD_1$.

因为 M，P 分别是 CC_1，C_1D_1 的中点，

所以 $PM\,/\!/\,CD_1$，

所以 $PM\,/\!/\,A_1B$，

所以 $\angle NMP$ 和 $\angle BA_1D$ 的两边分别平行且方向相反，

所以 $\angle NMP=\angle BA_1D$.

【类题通法】

等角定理的应用

(1)根据空间中相应的定理证明角的两边分别平行，即先证明线线平行.

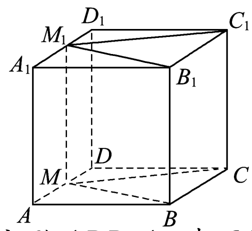
(2)根据角的方向判定两角相等或互补.

任务三 基本事实 4、等角定理的综合应用

如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M，M_1 分别是棱 AD 和 A_1D_1 的中点.求证：

(1)四边形 BB_1M_1M 为平行四边形；

(2)$\angle BMC=\angle B_1M_1C_1$.



证明：(1)在正方形 ADD_1A_1 中，M，M_1 分别为棱 AD，A_1D_1 的中点，所以 $MM_1 \perp\!\!\!\!=\, AA_1$.

又因为 $AA_1 \perp\!\!\!\!=\, BB_1$，所以 $MM_1\,/\!/\,BB_1$，且 $MM_1=BB_1$.

所以四边形 BB_1M_1M 为平行四边形.

(2)由(1)知四边形 BB_1M_1M 为平行四边形，所以 $B_1M_1\,/\!/\,BM$.

同理可得四边形 CC_1M_1M 为平行四边形，所以 $C_1M_1\,/\!/\,CM$.

由平面几何知识可知，$\angle BMC$ 和 $\angle B_1M_1C_1$ 都是锐角，所以 $\angle BMC=\angle B_1M_1C_1$.

【类题通法】

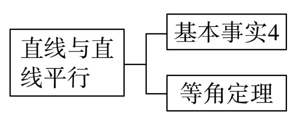
关于证明空间中两直线平行的说明

(1)辅助线：常见的辅助线作法是构造三角形中位线，平行四边形的对边.

(2)证明依据：三角形中位线定理，平行四边形的性质，平行线分线段成比例定理的逆定理，基本事实4，几何体中相对的棱、对角线等的平行关系.

(3)用途：根据两平行直线确定一个平面，可以证明共面问题；与等角定理结合可证明角相等.

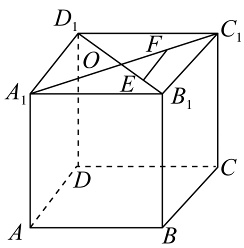
提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是 B_1O 和 C_1O 的中点，则长方体的各棱中与 EF 平行的有　　(　　)



A.3 条　　B.4 条　　C.5 条　　D.6 条

B　**解析**：由于 E，F 分别是 B_1O，C_1O 的中点，故 $EF\parallel B_1C_1$．与棱 B_1C_1 平行的棱还有 3 条：AD，BC，A_1D_1．由基本事实 4 可得与 EF 平行的共有 4 条．

2.（多选题）已知 $AB\parallel PQ$，$BC\parallel QR$，$\angle ABC=30°$，则 $\angle PQR$ 可等于　　(　　)

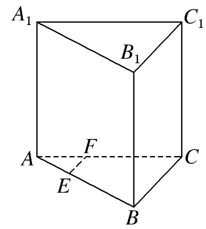
A.$30°$　　B.$60°$

C.$150°$　　D.$120°$

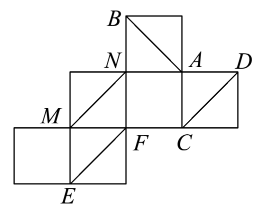
AC　**解析**：$\angle ABC$ 的两边与 $\angle PQR$ 的两边分别平行，但方向不能确定是否相同，所以 $\angle PQR=30°$ 或 $150°$．

3. 如图，在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，E，F 分别是 AB，AC 上的点，且 $AE:EB=AF:FC$，则 EF 与 B_1C_1 的位置关系是________．

平行　**解析**：在 $\triangle ABC$ 中，因为 $AE:EB=AF:FC$，所以 $EF\parallel BC$．又在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$BC\parallel B_1C_1$，所以 $EF\parallel B_1C_1$．



第 3 题图



第 4 题图

4. 一个正方体纸盒展开后如图所示，关于原正方体纸盒中的位置关系，有如下结论：

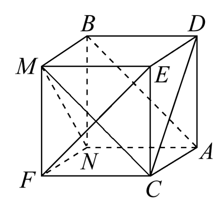
①$AB\parallel CM$；

②EF 与 MN 是异面直线；

③$MN\parallel CD$．

其中正确结论的序号为________．

①②　**解析**：把正方体表面展开图还原为正方体，如图所示，EF 与 MN 是异面直线，$AB\parallel CM$，$MN\perp CD$，只有①②正确．



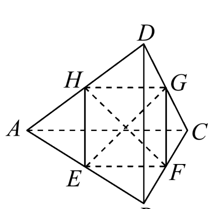
综合性·创新提升

1. 已知 E，F，G，H 分别为空间四边形 $ABCD$ 的边 AB，BC，CD，DA 的中点．若对角线 $BD=2$，$AC=4$，则 EG^2+HF^2 的值是　　(　　)

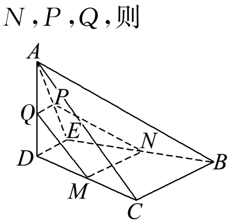
A.5　　B.10

C.12　　D.不能确定

B　**解析**：如图，由三角形中位线的性质可得 $EF \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AC$，$HG \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AC$．再根据基本事实 4 可得四边形 $EFGH$ 是平行四边形，所以 $EG^2+HF^2=2\times(1^2+2^2)=10$．故选 B．



2.（多选题）如图，在四棱锥 $A\text{-}BCDE$ 中，底面四边形 $BCDE$ 为梯形，$BC\parallel DE$．设 CD，BE，AE，AD 的中点分别为 M，N，P，Q，则　　(　　)



A.$PQ=\frac{1}{2}MN$

B.$PQ\parallel MN$

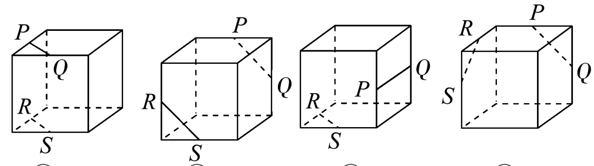
C.M，N，P，Q 四点共面

D.四边形 $MNPQ$ 是梯形

BCD　**解析**：由题意知 $PQ=\frac{1}{2}DE$，且 $DE\neq MN$，所以 $PQ\neq\frac{1}{2}MN$，故 A 不正确；又 $PQ\parallel DE$，

$DE // MN$，所以 $PQ // MN$，又 $PQ \neq MN$，所以 B，C，D 正确.

3.如图，点 P,Q,R,S 分别在正方体的四条棱上，且是所在棱的中点，则直线 PQ 与 RS 是平行直线的是________（填序号）.



① ② ③ ④

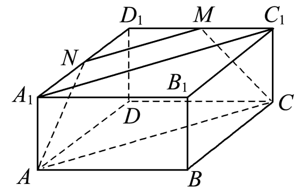
①② **解析**：结合基本事实 4 可知，①②中 RS 与 PQ 均是平行直线，④中 RS 和 PQ 相交，③中 RS 与 PQ 是异面直线.

4.在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，高 AA_1 为 1，M,N 分别是边C_1D_1 与A_1D_1的中点.

(1)求证：四边形 $MNAC$ 是等腰梯形；

(2)求四边形 $MNAC$ 的面积.

(1)**证明**：连接 A_1C_1，则 MN 是$\triangle A_1C_1D_1$的中位线，如图所示，则有 $MN \underline{\underline{//}} \frac{1}{2}A_1C_1$.



又 $A_1C_1 \underline{\underline{//}} AC$，所以 $MN \underline{\underline{//}} \frac{1}{2}AC$.

所以 M,N,A,C 共面，且四边形 $MNAC$ 为梯形.

因为 $\mathrm{Rt}\triangle AA_1N \cong \mathrm{Rt}\triangle CC_1M$，

所以 $AN=CM$，

所以梯形 $MNAC$ 为等腰梯形.

(2)**解**：由题意，得 $AN^2=A_1A^2+A_1N^2=1+1=2$，$AC=2\sqrt{2}$，$MN=\sqrt{2}$，

则梯形 $MNAC$ 的高 $h=\sqrt{AN^2-\left[\frac{1}{2}(AC-MN)\right]^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

所以 $S_{梯形MNAC}=\frac{1}{2}(AC+MN)\times h=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2}+\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

8.5.2 直线与平面平行

学习任务目标

1.理解并掌握直线与平面平行的判定定理，明确定理中“平面外”三个字的重要性.

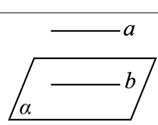
2.能利用直线与平面平行的判定定理证明线面平行.（逻辑推理）

3.理解并能证明直线与平面平行的性质定理，明确定理的条件.

4.能利用直线与平面平行的性质定理解决有关的问题.

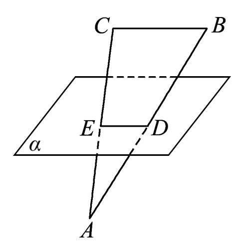
问题式预习

知识点一 直线与平面平行的判定

文字语言	如果平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，那么该直线与此平面平行
图形语言	
符号语言	$a \not\subset \alpha$，$b \subset \alpha$，且 $a // b \Rightarrow a // \alpha$

［微训练］

1.如图，平面 α 与$\triangle ABC$ 的两边 AB,AC 分别交于点 D,E，且$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，则 BC 与平面 α 的关系是（　　）



A.平行　　B.相交

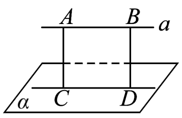
C.异面　　D.$BC \subset \alpha$

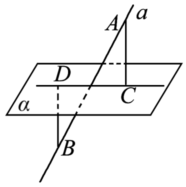
A **解析**：因为$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，所以 $ED // BC$.

又 $ED \subset \alpha$，$BC \not\subset \alpha$，所以 $BC // \alpha$.

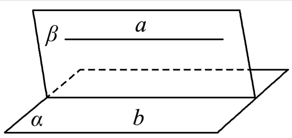
2.如果平面外一条直线上有两点到这个平面的距离相等，那么这条直线与这个平面的位置关系是________.

平行或相交　**解析**：如图所示.





知识点二　直线与平面平行的性质定理

文字语言	一条直线与一个平面平行，如果过该直线的平面与此平面相交，那么该直线与交线<u>平行</u>
图形语言	
符号语言	$a /\!/ \alpha$，$a \subset \beta$，<u>$\alpha \cap \beta = b$</u>$\Rightarrow a /\!/ b$

［微训练］

判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)若直线 $l /\!/$ 平面 α，直线 $a \subset$ 平面 α，则 $l /\!/ a$.（　　）

×　**提示**：l 与 a 可能平行，也可能异面.

(2)若直线 $l /\!/$ 平面 α，则 l 与平面 α 内的任意一条直线都不相交.（　　）

√　**提示**：直线 $l /\!/$ 平面 α，则 l 与 α 无公共点，所以 l 与平面 α 内的任意一条直线都不相交.

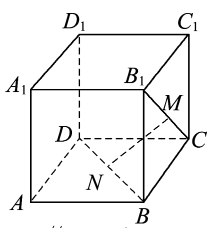
(3)若直线 $m /\!/$ 平面 α，$n /\!/$ 平面 α，则 $m /\!/ n$.（　　）

×　**提示**：m 与 n 可能平行、相交或异面.

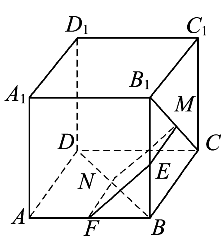
任务型课堂

任务一　直线与平面平行的判定

1.如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 N 在 BD 上，点 M 在 B_1C 上，且 $CM=DN$.求证：$MN /\!/$ 平面 AA_1B_1B.



证明：如图，作 $ME /\!/ BC$ 交 BB_1 于点 E，作 $NF /\!/ AD$ 交 AB 于点 F，连接 EF，则 $EF \subset$ 平面 AA_1B_1B，且 $\dfrac{ME}{BC}=\dfrac{B_1M}{B_1C}$，$\dfrac{NF}{AD}=\dfrac{BN}{BD}$.



因为在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，

$B_1C=BD$，又 $CM=DN$，所以 $B_1M=BN$，

所以 $\dfrac{ME}{BC}=\dfrac{B_1M}{B_1C}=\dfrac{BN}{BD}=\dfrac{FN}{AD}$.

又 $AD=BC$，所以 $EM=FN$.

又 $EM /\!/ BC /\!/ AD /\!/ FN$，

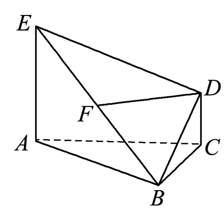
所以四边形 $MEFN$ 为平行四边形，

所以 $MN /\!/ EF$.

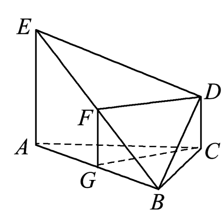
因为 $MN \not\subset$ 平面 AA_1B_1B，$EF \subset$ 平面 AA_1B_1B，

所以 $MN /\!/$ 平面 AA_1B_1B.

2.在如图所示的几何体中，$\triangle ABC$ 是任意三角形，$AE /\!/ CD$，且 $AE=AB=2a$，$CD=a$，F 为 BE 的中点，求证：$DF /\!/$ 平面 ABC.



证明：如图所示，取 AB 的中点 G，连接 FG，CG.



因为 F，G 分别是 BE，AB 的中点，

所以 $FG /\!/ AE$，$FG=\dfrac{1}{2}AE$.

又因为 $AE=2a$，$CD=a$，所以 $CD=\dfrac{1}{2}AE$.

又 $AE /\!/ CD$，所以 $CD /\!/ FG$，$CD=FG$，

所以四边形 $CDFG$ 为平行四边形，所以 $DF /\!/ CG$.

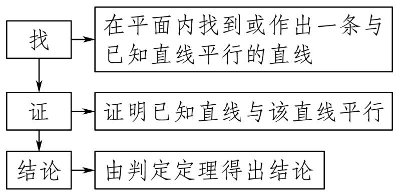
又 $CG \subset$ 平面 ABC，$DF \not\subset$ 平面 ABC，

所以 $DF /\!/$ 平面 ABC.

【类题通法】

证明线面平行的思路及步骤

证明直线与平面平行，可以用定义，也可以用判定定理，但说明直线与平面没有公共点比较难，所以更常用的是判定定理，用判定定理证明直线与平面平行的步骤如下：



任务二 直线与平面平行的性质定理的应用

［探究活动］

已知直线 a∥平面 α，探究下列问题.

探究1：直线 a 与平面 α 内的直线可能有哪些位置关系？

提示：平行或异面.

探究2：过直线 a 与平面 α 相交的平面有多少个？这些平面与平面 α 的交线与直线 a 有什么关系？

提示：无数个.平行.

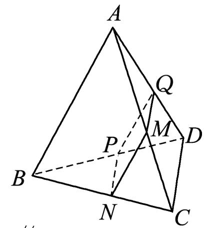
［评价活动］

如图，用平行于四面体 $ABCD$ 的一组对棱 AB，CD 的平面截此四面体，截面为四边形 $MNPQ$.

(1)求证：四边形 $MNPQ$ 是平行四边形；

(2)求证：$\dfrac{BP}{PD}=\dfrac{AM}{MC}$.

(3)若添加条件：$AB\perp CD$，$AB=10$，$CD=8$，且 $BP:PD=1:1$，求四边形 $MNPQ$ 的面积.



(1)**证明**：因为 AB∥平面 $MNPQ$，平面 $ABC\cap$平面 $MNPQ=MN$，且 $AB\subset$平面 ABC，

所以由线面平行的性质定理，知 $AB\parallel MN$.

同理 $AB\parallel PQ$，所以 $MN\parallel PQ$.

同理可得 $MQ\parallel NP$.

所以四边形 $MNPQ$ 是平行四边形.

(2)**证明**：由(1)知，$PQ\parallel AB$，所以 $\dfrac{BP}{PD}=\dfrac{AQ}{QD}$.

因为 $QM\parallel DC$，所以 $\dfrac{AQ}{QD}=\dfrac{AM}{MC}$.所以 $\dfrac{BP}{PD}=\dfrac{AM}{MC}$.

(3)**解**：由(1)知，四边形 $MNPQ$ 是平行四边形.

因为 $AB\perp CD$，所以 $PQ\perp QM$，

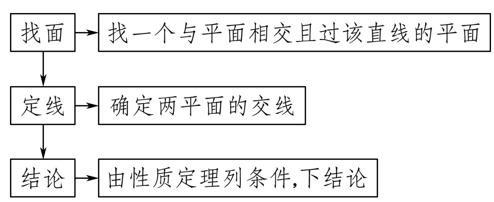
所以四边形 $MNPQ$ 是矩形.

因为 $BP:PD=1:1$，所以 $PQ=5$，$QM=4$，

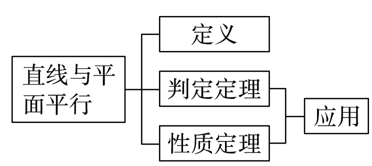
所以四边形 $MNPQ$ 的面积为 $5\times4=20$.

【类题通法】

利用线面平行的性质定理解题的步骤



▶ 提质归纳



课后素养评价

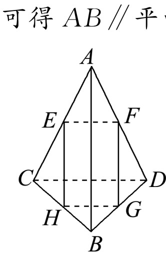
基础性·能力运用

1. 若平面 α 截三棱锥所得截面为平行四边形，则该三棱锥与平面 α 平行的棱有（　　）

A.0条　　B.1条

C.2条　　D.1条或2条

C　**解析**：如图所示，四边形 $EFGH$ 为平行四边形，则 $EF\parallel GH$.因为 $EF\not\subset$平面 BCD，$GH\subset$平面 BCD，所以 EF∥平面 BCD.因为 $EF\subset$平面 ACD，平面 $BCD\cap$平面 $ACD=CD$，所以 $EF\parallel CD$.因为 $EF\subset$平面 $EFGH$，$CD\not\subset$平面 $EFGH$，所以 CD∥平面 $EFGH$.同理可得 AB∥平面 $EFGH$.故选C.



2.已知直线 a // 平面 α，直线 $b \subset$ 平面 α，则　　（　　）

A.$a // b$

B.a 与 b 异面

C.a 与 b 相交

D.a 与 b 无公共点

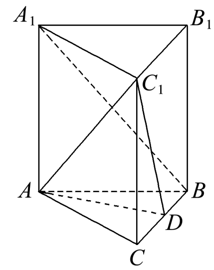
D　**解析**：直线 a // 平面 α，则 a 与平面 α 没有公共点.

又 $b \subset$ 平面 α，所以 a 与 b 无公共点.

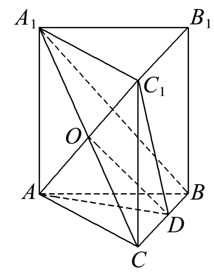
3.在空间四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 AB 和 BC 上的点.若 $AE:EB=CF:FB=1:3$，则直线 AC 与平面 DEF 的位置关系是________.

平行　**解析**：因为 $AE:EB=CF:FB=1:3$，所以 $EF // AC$.又因为 $AC \not\subset$ 平面 DEF，$EF \subset$ 平面 DEF，所以 $AC //$ 平面 DEF.

4.如图，在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，D 为 BC 的中点，连接 AD，DC_1，A_1B，AC_1，求证：$A_1B //$ 平面 ADC_1.



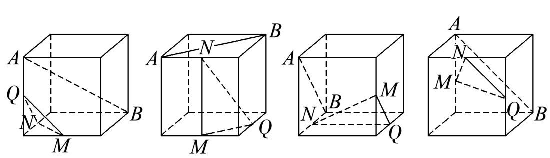
证明：如图，连接 A_1C，设 $A_1C \cap AC_1=O$，再连接 OD.



由题意知，四边形 A_1ACC_1 是平行四边形，所以 O 是 A_1C 的中点.又 D 是 BC 的中点，因此 OD 是 $\triangle A_1CB$ 的中位线，即 $OD // A_1B$.又 $A_1B \not\subset$ 平面 ADC_1，$OD \subset$ 平面 ADC_1，所以 $A_1B //$ 平面 ADC_1.

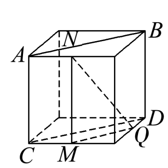
综合性·创新提升

1.(多选题)如图，在下列四个正方体中，A，B 为正方体的两个顶点，M，N，Q 为所在棱的中点，则在这四个正方体中，直线 AB 与平面 MNQ 平行的是　　（　　）



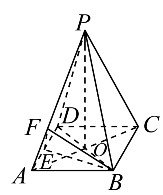
A　　B　　C　　D

BCD　**解析**：对于 B 项，如图所示，连接 CD，因为 $AB // CD$，M，Q 分别是所在棱的中点，所以 $MQ // CD$，所以 $AB // MQ$.又 $AB \not\subset$ 平面 MNQ，$MQ \subset$ 平面 MNQ，所以 $AB //$ 平面 MNQ.



同理可证，C，D 项中均有 $AB //$ 平面 MNQ，只有 A 项中 AB 与平面 MNQ 不平行.

2.如图，已知四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面是平行四边形，AC 交 BD 于点 O，E 为 AD 的中点，F 在 PA 上，$AP=\lambda AF$，$PC //$ 平面 BEF，则 λ 的值为　　（　　）

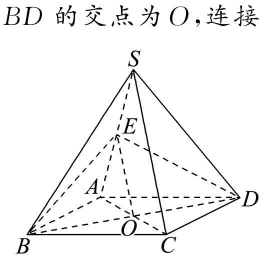


A.1　　B.$\dfrac{3}{2}$　　C.2　　D.3

D　**解析**：设 AO 交 BE 于点 G，连接 FG(图略).因为 O，E 分别是 BD，AD 的中点，所以 $\dfrac{AG}{AO}=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{AG}{AC}=\dfrac{1}{3}$.因为 $PC //$ 平面 BEF，平面 $BEF \cap$ 平面 $PAC=GF$，所以 $GF // PC$，所以 $\dfrac{AF}{AP}=\dfrac{AG}{AC}=\dfrac{1}{3}$，即 $\lambda=3$.

3.若在四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，E 是 SA 上的一点，当点 E 满足条件________时，$SC //$ 平面 EBD.

E 为 SA 的中点　**解析**：当 E 为 SA 的中点时，连接 AC，设 AC 与 BD 的交点为 O，连接 EO.



因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

所以 O 是 AC 的中点.

又 E 是 SA 的中点，

所以 OE 是 $\triangle SAC$ 的中位线.

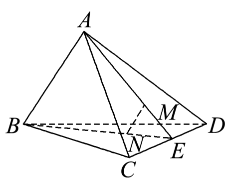
所以 $OE\parallel SC$.

因为 $SC\not\subset$ 平面 EBD，$OE\subset$ 平面 EBD，

所以 $SC\parallel$ 平面 EBD.

4. 在四面体 $ABCD$ 中，M，N 分别是 $\triangle ACD$，$\triangle BCD$ 的重心，则四面体的四个面中与 MN 平行的是____.

平面 ABD，平面 ABC　**解析**：如图，取 CD 的中点 E，则 $EM:MA=1:2$，$EN:BN=1:2$，所以 $MN\parallel AB$.

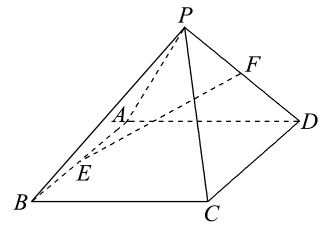


又 $MN\not\subset$ 平面 ABD，$MN\not\subset$ 平面 ABC，

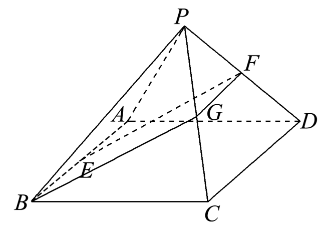
$AB\subset$ 平面 ABD，$AB\subset$ 平面 ABC，

所以 $MN\parallel$ 平面 ABD，$MN\parallel$ 平面 ABC.

5. 如图，已知四棱锥 $P\text{-}ABCD$，底面 $ABCD$ 为正方形，E，F 分别为 AB，PD 的中点.求证：$EF\parallel$ 平面 PBC.



证明：如图，取 PC 的中点 G，连接 FG，BG.



因为 F，G 分别为 PD，PC 的中点，

所以 $FG\parallel CD$，且 $FG=\frac{1}{2}DC$.

因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $AB \mathrel{\underline{\parallel}} CD$.

又因为 E 为 AB 的中点，

所以 $BE \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}DC$，

所以 $BE\parallel FG$，且 $BE=FG$，

所以四边形 $BEFG$ 为平行四边形，

所以 $EF\parallel BG$.

因为 $EF\not\subset$ 平面 PBC，$BG\subset$ 平面 PBC，

所以 $EF\parallel$ 平面 PBC.

8.5.3　平面与平面平行

学习任务目标

1. 理解并掌握平面与平面平行的判定定理，明确定理中“相交”两字的重要性.

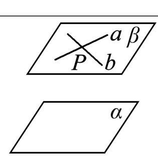
2. 能利用平面与平面平行的判定定理证明面面平行.（逻辑推理）

3. 理解并能证明平面与平面平行的性质定理.

4. 能利用平面与平面平行的性质定理解决有关的问题.

问题式预习

知识点一　平面与平面平行的判定定理

文字语言	如果一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，那么这两个平面平行
图形语言	
符号语言	$a\subset\beta$，$b\subset\beta$，$\underline{a\cap b=P}$，$a\parallel\alpha$，$b\parallel\alpha\Rightarrow\beta\parallel\alpha$

［微训练］

1. 判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1) 如果一个平面内有两条直线和另一个平面平行，那么这两个平面平行.　(　　)

×　**提示**：此处的两条直线必须是相交直线，故错误.

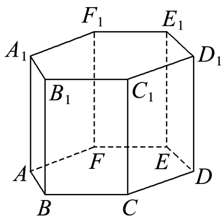
(2) 如果一个平面内的任意直线都和另一个平面平行，那么这两个平面平行.　(　　)

√　**提示**：因为此处的任意直线指的是所有的直线，包括两条相交直线，故正确.

(3)如果两个平面平行于同一条直线,那么这两个平面平行.　(　　)

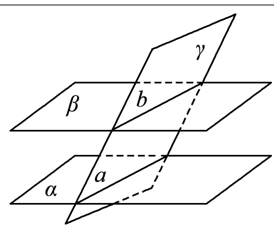
×　**提示**:这两个平面可以平行,也可以相交,故不正确.

2.六棱柱 $ABCDEF\text{-}A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的底面是正六边形,则此六棱柱的面中互相平行的有________对.



4　**解析**:由题图知平面 ABB_1A_1∥平面 EDD_1E_1,平面 BCC_1B_1∥平面 FEE_1F_1,平面 AFF_1A_1∥平面 CDD_1C_1,平面 $ABCDEF$∥平面 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$,所以此六棱柱的面中互相平行的有4对.

知识点二　平面与平面平行的性质定理

文字语言	两个平面平行,如果另一个平面与这两个平面相交,那么两条交线平行
图形语言	
符号语言	$\alpha /\!/ \beta,\alpha\cap\gamma=a,\beta\cap\gamma=b\Rightarrow a /\!/ b$

[微训练]

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)直线 $b\subset$ 平面 α,直线 a∥直线 $b\Rightarrow$直线 a∥平面 α.　(　　)

×　**提示**:直线 a 可能与平面 α 平行,也可能在平面 α 内.

(2)直线 a∥平面 α,直线 $b\subset$平面 $\alpha\Rightarrow$直线 a∥直线 b.　(　　)

×　**提示**:直线 a 与直线 b 可能平行或异面.

(3)直线 a∥平面 β,直线 b∥平面 β,直线 $a\subset$平面 α,直线 $b\subset$平面 $\alpha\Rightarrow$平面 α∥平面 β.　(　　)

×　**提示**:平面 α 与平面 β 可能相交,也可能平行.

(4)平面 α∥平面 β,平面 $\alpha\cap$平面 $\gamma=$直线 a,平面 $\beta\cap$平面 $\gamma=$直线 $b\Rightarrow$直线 a∥直线 b.　(　　)

√　**提示**:平面 α,β 没有公共点,又直线 a 与 b 都在平面 γ 内,所以 $a /\!/ b$.

2.已知直线 a,b,平面 α,β,若 $a /\!/ \alpha,b /\!/ \beta,\alpha /\!/ \beta$,则 a 与 b 的位置关系是　(　　)

A.平行　　B.异面

C.相交　　D.平行或异面或相交

D　**解析**:a 与 b 的关系是平行、相交或异面.

任务型课堂

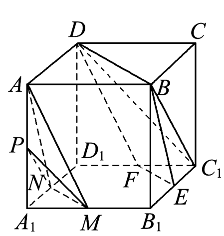
任务一　平面与平面平行的判定定理的应用

如图,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,M,E,F,N 分别是 $A_1B_1,B_1C_1,C_1D_1,D_1A_1$的中点.

(1)求证:E,F,B,D 四点共面;

(2)求证:平面 MAN∥平面 $EFDB$;

(3)设 P 是棱 AA_1 的中点,求证:平面 PMN∥平面 C_1BD.



证明:(1)连接 B_1D_1(图略).

因为 E,F 分别是 B_1C_1,C_1D_1 的中点,

所以 $EF /\!/ B_1D_1$.

而 $BD /\!/ B_1D_1$,

所以 $BD /\!/ EF$.

所以 E,F,B,D 四点共面.

(2)由题意知 $MN /\!/ B_1D_1,B_1D_1 /\!/ BD$,

所以 $MN /\!/ BD$.

而 $MN\not\subset$平面 $EFDB$,$BD\subset$平面 $EFDB$,

所以 MN∥平面 $EFDB$.

连接 MF(图略).

因为 M,F 分别是 A_1B_1,C_1D_1 的中点,

所以 $MF \underline{\underline{/\!/}} AD$,

所以四边形 $ADFM$ 是平行四边形,所以 $AM /\!/ DF$.

因为 $AM\not\subset$平面 $EFDB$,$DF\subset$平面 $EFDB$,

所以 AM∥平面 $EFDB$.又 $AM\cap MN=M$,

所以平面 MAN∥平面 $EFDB$.

(3)连接 AB_1(图略).

因为 P,M 分别是 AA_1,A_1B_1 的中点,

所以 $PM /\!/ AB_1$.

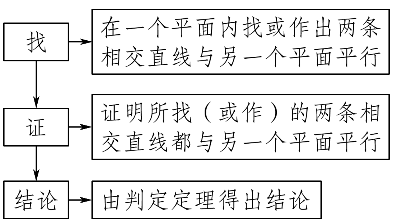
又 $AB_1 /\!/ C_1D$,所以 $PM /\!/ C_1D$.

又 $PM\not\subset$平面 C_1BD,$C_1D\subset$平面 C_1BD,

所以 $PM∥$平面 C_1BD.
同理可证，$MN∥$平面 C_1BD.
又 $PM\cap MN=M$，
所以平面 $PMN∥$平面 C_1BD.

【类题通法】

证明两个平面平行，可以用定义，也可以用判定定理.但用定义证明时，需说明两个平面没有公共点，这一点不容易做到(可用反证法)，所以通常用判定定理证明两个平面平行，其步骤如下：



任务二 平面与平面平行性质定理的应用

[探究活动]

已知平面 $\alpha∥$平面 β，探究下列问题.

探究 1：平面 α 内的直线 a 与平面 β 有什么位置关系？

提示：$a∥\beta$.

探究 2：若 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，则直线 a 与直线 b 有什么位置关系？

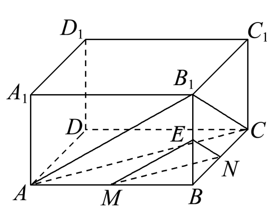
提示：$a∥b$ 或 a 与 b 异面.

探究 3：当第三个平面与这两个平行平面都相交时，交线有什么位置关系？

提示：平行.

[评价活动]

1. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，过 BB_1 的中点 E 作一个与平面 ACB_1 平行的平面交 AB 于点 M，交 BC 于点 N，则 $\dfrac{MN}{AC}=$________.

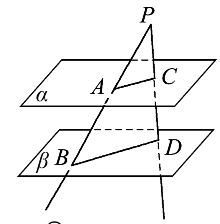


$\dfrac{1}{2}$ **解析**：因为平面 $MNE∥$平面 ACB_1，由面面平行的性质定理可得 $EN∥B_1C$，$EM∥B_1A$.
又因为 E 为 BB_1 的中点，所以 M，N 分别为 BA，BC 的中点，所以 $MN=\dfrac{1}{2}AC$，即 $\dfrac{MN}{AC}=\dfrac{1}{2}$.

2. 如图，已知平面 $\alpha∥$平面 β，P 是平面 α，β 外的一点(不在 α 与 β 之间)，直线 PB，PD 分别与 α，β 相交于点 A，B 和 C，D.

(1)求证：$AC∥BD$；

(2)已知 $PA=4$，$AB=5$，$PC=3$，求 PD 的长.

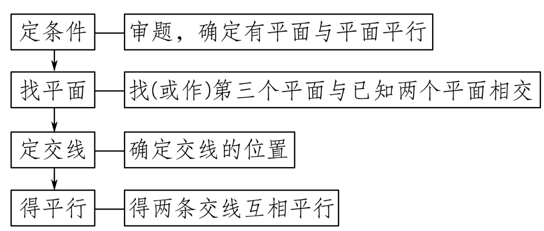


(1)**证明**：因为 $PB\cap PD=P$，
所以直线 PB 和 PD 确定一个平面，记为 γ，
则 $\alpha\cap\gamma=AC$，$\beta\cap\gamma=BD$.
又 $\alpha∥\beta$，所以 $AC∥BD$.

(2)**解**：由(1)得 $AC∥BD$，
所以 $\dfrac{PA}{AB}=\dfrac{PC}{CD}$，所以 $\dfrac{4}{5}=\dfrac{3}{CD}$，所以 $CD=\dfrac{15}{4}$，
所以 $PD=PC+CD=\dfrac{27}{4}$.

【类题通法】

应用平面与平面平行的性质定理解题的基本步骤

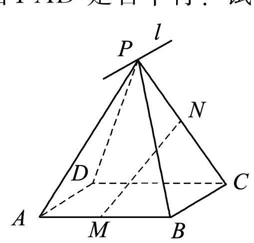


任务三 平面与平面平行的综合应用

1. 如图，已知 P 是▱$ABCD$ 所在平面外一点，M，N 分别是 AB，PC 的中点，平面 $PBC\cap$平面 $PAD=l$.

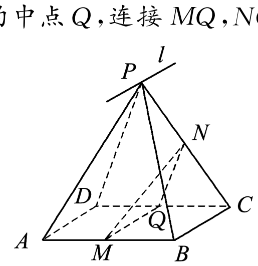
(1)求证：$l∥BC$.

(2)MN 与平面 PAD 是否平行？试证明你的结论.



(1)**证明**：因为 $BC∥AD$，$BC\not\subset$平面 PAD，$AD\subset$平面 PAD，所以 $BC∥$平面 PAD.
又因为 $BC\subset$平面 PBC，平面 $PBC\cap$平面 $PAD=l$，所以 $l∥BC$.

(2)**解**：平行.证明如下：
如图，取 DC 的中点 Q，连接 MQ，NQ.



因为 N 是 PC 的中点，所以 $QN \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}PD$.

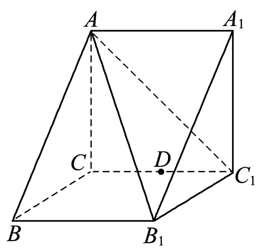
因为 M 是 AB 的中点，所以 $MQ /\!/ AD$.

由此易知平面 $PAD /\!/$ 平面 NMQ.

因为 $MN \subset$ 平面 NMQ，

所以 $MN /\!/$ 平面 PAD.

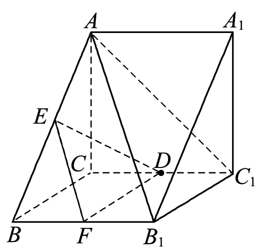
2. 如图，在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，平面 $ABC /\!/$ 平面 $A_1B_1C_1$. 若 D 是棱 CC_1 的中点，在棱 AB 上是否存在一点 E，使 $DE /\!/$ 平面 AB_1C_1？给出你的结论并证明.



解：当 E 为棱 AB 的中点时，$DE /\!/$ 平面 AB_1C_1.

证明如下：

如图所示，取 BB_1 的中点 F，连接 EF，FD，DE.



因为 D，E，F 分别为 CC_1，AB，BB_1 的中点，

所以 $EF /\!/ AB_1$.

因为 $AB_1 \subset$ 平面 AB_1C_1，$EF \not\subset$ 平面 AB_1C_1，

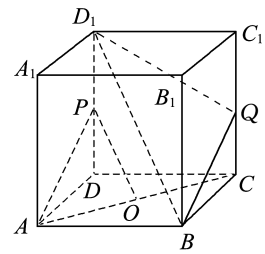
所以 $EF /\!/$ 平面 AB_1C_1.

同理可证 $FD /\!/$ 平面 AB_1C_1.

因为 $EF \cap FD = F$，所以平面 $EFD /\!/$ 平面 AB_1C_1.

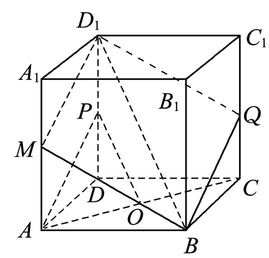
因为 $DE \subset$ 平面 EFD，所以 $DE /\!/$ 平面 AB_1C_1.

3. 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，O 为底面 $ABCD$ 的中心，P 是棱 DD_1 的中点. 设 Q 是棱 CC_1 上的点，则当点 Q 在什么位置时，平面 D_1BQ 与平面 PAO 平行？给出你的结论并证明.



解：当 Q 为 CC_1 中点时，平面 $D_1BQ /\!/$ 平面 PAO.

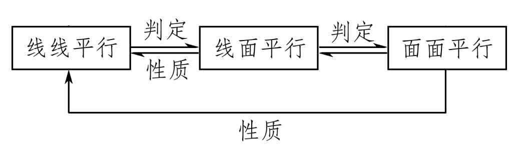
证明如下：如图，设平面 $D_1BQ \cap$ 平面 $ADD_1A_1 = MD_1$，点 M 在 AA_1 上. 由于平面 $D_1BQ \cap$ 平面 $BCC_1B_1 = BQ$，平面 $ADD_1A_1 /\!/$ 平面 BCC_1B_1，由面面平行的性质定理可得 $BQ /\!/ MD_1$.



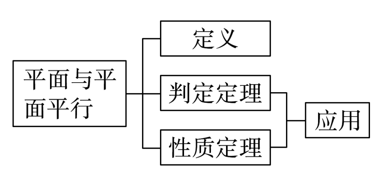
假设平面 $D_1BQ /\!/$ 平面 PAO，由平面 $D_1BQ \cap$ 平面 $ADD_1A_1 = MD_1$，平面 $PAO \cap$ 平面 $ADD_1A_1 = AP$，可得 $AP /\!/ MD_1$，所以 $BQ /\!/ MD_1 /\!/ AP$. 因为 P 为 DD_1 的中点，所以 M 为 AA_1 的中点，所以 Q 为 CC_1 的中点，故当 Q 为 CC_1 的中点时，平面 $D_1BQ /\!/$ 平面 PAO.

【类题通法】

常见的平行关系有线线平行、线面平行和面面平行，这三种平行关系不是孤立存在的，而是可以相互转化的，它们的联系如下：



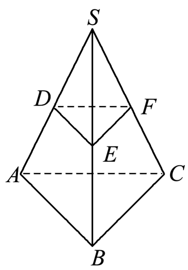
提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1.(多选题)如图,D,E,F 分别为三棱锥 $S\text{-}ABC$ 的棱 SA,SB,SC 的中点,则 ( )



A.$DE\parallel$平面 ABC

B.$EF\parallel$平面 ABC

C.平面 $DEF\parallel$平面 ABC

D.$SA\parallel BC$

ABC **解析**:由线面平行、面面平行的判定定理可知,A,B,C 都正确,显然 SA 与 BC 为异面直线,不平行.

2.在正方体 $EFGH\text{-}E_1F_1G_1H_1$ 中,下列四对截面中,互相平行的一对是 ( )

A.平面 E_1FG_1 与平面 EGH_1

B.平面 FHG_1 与平面 F_1H_1G

C.平面 F_1H_1H 与平面 FHE_1

D.平面 E_1HG_1 与平面 EH_1G

A **解析**:在正方体 $EFGH\text{-}E_1F_1G_1H_1$ 中,$E_1G_1\parallel EG$,$E_1G_1\not\subset$平面 EGH_1,$EG\subset$平面 EGH_1,所以 $E_1G_1\parallel$平面 EGH_1.因为 $G_1F\parallel EH_1$,$G_1F\not\subset$平面 EGH_1,$EH_1\subset$平面 EGH_1,所以 $G_1F\parallel$平面 EGH_1.又因为 $E_1G_1\cap G_1F=G_1$,且 $E_1G_1\subset$平面 E_1FG_1,$G_1F\subset$平面 E_1FG_1,所以由面面平行的判定定理可知,平面 $E_1FG_1\parallel$平面 EGH_1,故 A 符合题意,选项 B,C,D 中的平面都是相交的,不符合题意.

3.平面 α 与平面 β 平行的条件可以是 ( )

A.α 内有无穷多条直线都与 β 平行

B.直线 $a\parallel\alpha$,$a\parallel\beta$,且直线 a 既不在 α 内也不在 β 内

C.直线 $a\subset\alpha$,直线 $b\subset\beta$,且 $b\parallel\alpha$,$a\parallel\beta$

D.α 内的任何直线都与 β 平行

D **解析**:A 项中,当这无穷多条直线互相平行时,不能作为 $\alpha\parallel\beta$ 的条件,B,C 中,两平面相交时,也存在这样的直线 a,b,D 项正确.

4.下列命题中,错误的是 ( )

A.平行于同一直线的两个平面互相平行

B.平行于同一平面的两个平面互相平行

C.若一条直线与两个平行平面中的一个相交,则这条直线与另一个平面也相交

D.夹在两平行平面间的平行线段相等

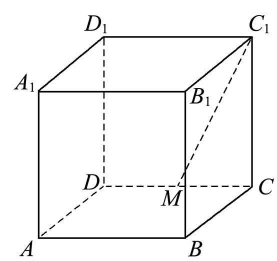
A **解析**:平行于同一直线的两平面可能平行,也可能相交,故 A 不正确.

5.在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,M 是棱 CD 上的动点,则直线 MC_1 与平面 AA_1B_1B 的位置关系是 ( )

A.相交　　B.平行

C.异面　　D.相交或平行

B **解析**:如图,$MC_1\subset$平面 DD_1C_1C,而平面 $AA_1B_1B\parallel$平面 DD_1C_1C,故 $MC_1\parallel$平面 AA_1B_1B.



6.a,b,c 为三条不重合的直线,α,β,γ 为三个不重合的平面,现给出六个命题:

①$\left.\begin{matrix}a\parallel c\\ b\parallel c\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\parallel b$;②$\left.\begin{matrix}a\parallel \gamma\\ b\parallel \gamma\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\parallel b$;

③$\left.\begin{matrix}\alpha\parallel c\\ \beta\parallel c\end{matrix}\right\}\Rightarrow \alpha\parallel \beta$;④$\left.\begin{matrix}\alpha\parallel \gamma\\ \beta\parallel \gamma\end{matrix}\right\}\Rightarrow \alpha\parallel \beta$;

⑤$\left.\begin{matrix}\alpha\parallel c\\ a\parallel c\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\parallel \alpha$;⑥$\left.\begin{matrix}a\parallel \gamma\\ \alpha\parallel \gamma\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\parallel \alpha$.

其中正确的是________.(填序号)

①④ **解析**:①是基本事实 4,正确;②中 a,b 还可能异面或相交;③中 α,β 还可能相交;④是平面平行的传递性,正确;⑤还有可能 $a\subset\alpha$;⑥忽略了 $a\subset\alpha$ 的情形.

7.若 $\alpha\parallel\beta$,$a\subset\alpha$,给出下列四个命题:

①a 与 β 内所有直线平行;

②a 与 β 内的无数条直线平行;

③a 与 β 内的任何一条直线都不垂直;

④a 与 β 无公共点.

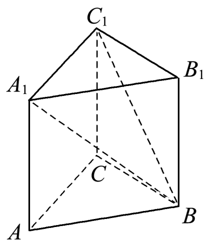
其中正确的是________.(填序号)

②④ **解析**:由于平面 $\alpha\parallel\beta$,且 $a\subset\alpha$,则 $a\parallel$平面 β.由线面平行的性质,得到 a 与平面 β 内的无数条直线平行,故①错误,②正确.

根据线面平行及线线垂直的定义,可得③错误.由于 $a\parallel$平面 β,则 a 与平面 β 无公共点,故④正确.

综合性·创新提升

1.（多选题）如图，在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，过 A_1，B，C_1 的平面与平面 ABC 相交于 l，则　　（ AB ）



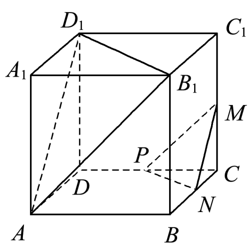
A.$l\parallel AC$

B.$l\parallel$ 平面 $A_1C_1B_1$

C.l 与 A_1B_1 共面

D.l 与 B_1C_1 共面

2.如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N，P 分别为 CC_1，BC，DC 的中点，则下列命题错误的是　　（　　）



A.$MN\parallel AD_1$

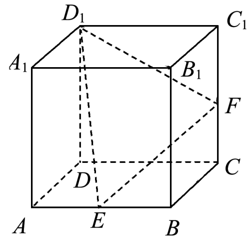
B.PM 与 AA_1 是异面直线

C.平面 $AB_1D_1\parallel$ 平面 MNP

D.$MN\parallel$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$

D　**解析**：因为直线 MN 与直线 B_1C_1 相交，所以 MN 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 相交，故 D 错误.

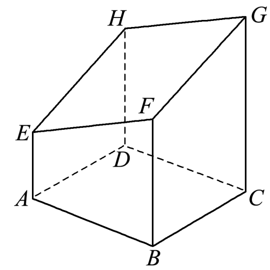
3.如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为棱 AB，CC_1 的中点，在平面 ADD_1A_1 内且与平面 D_1EF 平行的直线　　（ D ）



A.不存在　　　　B.有 1 条

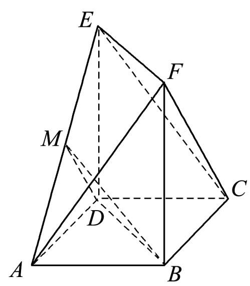
C.有 2 条　　　　D.有无数条

4.如图所示的是长方体被一平面所截得到的几何体，四边形 $EFGH$ 为截面，则四边形 $EFGH$ 的形状为________.

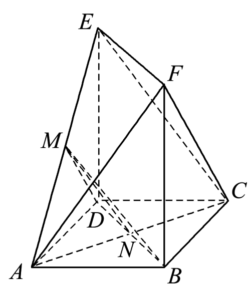


平行四边形　**解析**：因为平面 $ABFE\parallel$ 平面 $CDHG$，平面 $EFGH$ 与两平面分别交于 EF，GH. 由面面平行的性质定理得 $EF\parallel GH$，同理可得 $EH\parallel FG$，所以四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

5.如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是正方形，$AB=2$，$DE=BF=4$，$BF\parallel DE$，M 为棱 AE 的中点.求证：平面 $BMD\parallel$ 平面 EFC.



证明：如图，连接 AC 交 BD 于 N.在正方形 $ABCD$ 中，易知 N 为 AC 的中点.连接 MN，则 $MN\parallel EC$.



因为 $MN\not\subset$ 平面 EFC，$EC\subset$ 平面 EFC，

所以 $MN\parallel$ 平面 EFC.

因为 $BF\parallel DE$，$BF=DE=4$，

所以四边形 $BDEF$ 为平行四边形，所以 $BD\parallel EF$.

因为 $BD\not\subset$ 平面 EFC，$EF\subset$ 平面 EFC，

所以 $BD\parallel$ 平面 EFC.

又因为 $MN\cap BD=N$，所以平面 $BMD\parallel$ 平面 EFC.

8.6 空间直线、平面的垂直

8.6.1 直线与直线垂直

学习任务目标

1.理解异面直线所成的角的概念,会求两条异面直线所成的角,能用异面直线所成的角刻画两条异面直线的位置关系.

2.知道空间两条直线所成角的取值范围是$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,能通过两直线所成的角判定两直线垂直.(直观想象)

问题式预习

知识点 异面直线所成的角

1.定义:已知两条异面直线a,b,经过空间任一点O分别作直线$a'\parallel a$,$b'\parallel b$,我们把直线a'与b'所成的角叫做异面直线a与b所成的角(或夹角).

2.如果两条异面直线所成的角是直角,那么我们就说这两条异面直线互相垂直.直线a与直线b垂直,记作$a\perp b$.

3.当两条直线a,b相互平行时,我们规定它们所成的角为$0°$.所以空间两条直线所成角α的取值范围是$0°\leqslant\alpha\leqslant 90°$.

[微训练]

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)没有公共点的两条直线一定是异面直线. ( )

× 提示:两条直线没有公共点,则这两条直线平行或异面.

(2)若两条直线垂直,则这两条直线一定相交.( )

× 提示:两条直线垂直,可以是异面垂直.

(3)若两条直线和第三条直线成等角,则这两条直线平行. ( )

× 提示:两条直线和第三条直线成等角,则这两条直线可能平行、可能相交也可能异面.

2.老师拿了一把直尺走进教室放在讲桌上,则下列判断中,正确判断的个数是 (B)

①教室地面上有且仅有一条直线与直尺所在直线平行;

②教室地面上有且仅有一条直线与直尺所在直线垂直;

③教室地面上有无数条直线与直尺所在直线平行;

④教室地面上有无数条直线与直尺所在直线垂直.

A.1 B.2 C.3 D.4

3.若空间中三条直线a,b,c满足$a\perp b$,$b\perp c$,则直线a与c的位置关系为 (D)

A.平行 B.相交

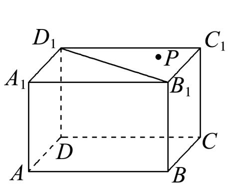
C.异面 D.不确定

任务型课堂

任务一 异面直线所成的角

[探究活动]

如图,在长方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中,点P在平面$A_1B_1C_1D_1$内,但不在对角线B_1D_1上.探究下列问题.



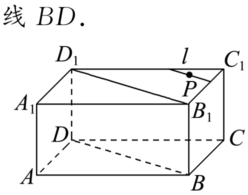
探究1:过点P在空间作一条直线l,使$l\parallel$直线BD,应该如何作图?

提示:在平面$A_1B_1C_1D_1$内过点P作直线l,使$l\parallel B_1D_1$,

则l即为所求作的直线,如图.

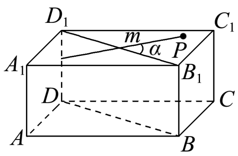
因为$B_1D_1\parallel BD$,$l\parallel B_1D_1$,

所以$l\parallel$直线BD.



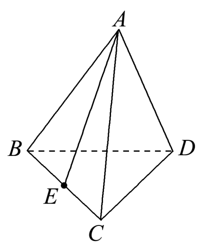
探究 2:过点 P 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内作一条直线 m,使 m 与直线 BD 所成的角为 α,其中 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$. 这样的直线有几条?应该如何作图?

提示:因为 $BD\parallel B_1D_1$,所以直线 m 与直线 BD 所成的角即为直线 m 与直线 B_1D_1 所成的角 α,则直线 m 为所求作的直线,如图.由图知 m 与 BD 是异面直线,且 m 与 BD 所成的角 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时,这样的直线 m 有且只有一条;当 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ 时,这样的直线 m 有两条.



[**评价活动**]

1. 如图,四面体 $ABCD$ 的各条棱的长都相等,E 为 BC 的中点,求异面直线 AE 与 CD 所成的角的余弦值.

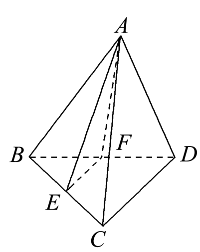


解:如图所示,取 BD 的中点 F,连接 EF,AF.

又 E 为 BC 的中点,所以 $EF \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}CD$,所以$\angle AEF$ 为异面直线 AE 与 CD 所成的角或其补角.

设四面体 $ABCD$ 的棱长为 a,

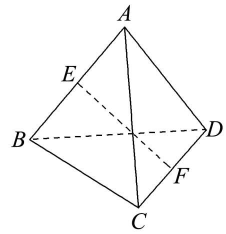
则 $AE=AF=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,$EF=\frac{a}{2}$,



所以 $\cos\angle AEF=\frac{AE^2+EF^2-AF^2}{2AE\cdot EF}=\frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

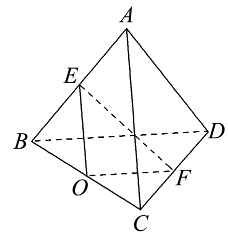
所以异面直线 AE 与 CD 所成的角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{6}$.

2. 如图,在四面体 $ABCD$ 中,E,F 分别是 AB,CD 的中点.若 BD,AC 所成的角为 $60°$,且 $BD=AC=1$,求 EF 的长.



解:取 BC 的中点 O,连接 OE,OF.

因为 E,F 分别是 AB,CD 的中点,



所以 $OE \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AC$,$OF \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BD$,

所以 OE 与 OF 所成的角(或其补角)即为 AC 与 BD 所成的角.

因为 AC,BD 所成的角为 $60°$,

所以$\angle EOF=60°$或$\angle EOF=120°$.

当$\angle EOF=60°$时,$EF=OE=OF=\frac{1}{2}$.

当$\angle EOF=120°$时,

$EF=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\cos 120°}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

综上所述,EF 的长为$\frac{1}{2}$或$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【类题通法】

作异面直线所成的角,可通过多种方法平移完成,主要有三种方法:

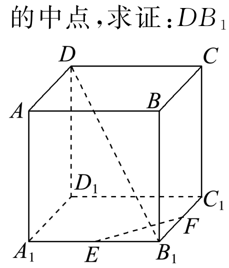
①直接平移法(可利用图中已有的平行线);

②中位线平移法;

③补形平移法(在已知图形中,补作一个相同的几何体,以便找到平行线).

任务二　直线与直线垂直的证明

1. 如图,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F 分别是 A_1B_1,B_1C_1 的中点,求证:$DB_1\perp EF$.



证明:方法一:如图 1,连接 A_1C_1,B_1D_1,并设它们相交于点 O,取 DD_1 的中点 G,连接 OG,A_1G,GC_1,则 $OG\parallel B_1D$,$EF\parallel A_1C_1$.

所以$\angle GOA_1$ 为异面直线 DB_1 与 EF 所成的角或其补角.

因为 $GA_1=GC_1$，O 为 A_1C_1 的中点，
所以$GO\perp A_1C_1$.
所以$\angle GOA_1=90°$，所以 $DB_1\perp EF$.

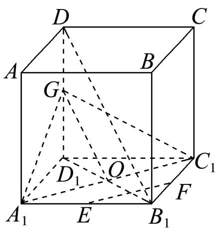


图 1

方法二：如图 2，连接 A_1D，取 A_1D 的中点 H，连接 HE，则 $HE\parallel DB_1$，且 $HE=\dfrac{1}{2}DB_1$. 于是$\angle HEF$ 为异面直线 DB_1 与 EF 所成的角或其补角.

连接 HF，设 $AA_1=1$，则 $EF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$HE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，取 A_1D_1 的中点 I，连接 IF，IH，则 $HI\perp IF$，所以 $HF^2=HI^2+IF^2=\dfrac{1}{4}+1=\dfrac{5}{4}$，所以 $HF^2=EF^2+HE^2$，所以$\angle HEF=90°$，所以 $DB_1\perp EF$.

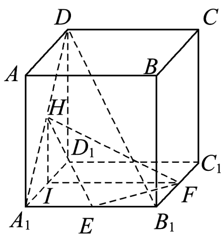


图 2

方法三：如图 3，在原正方体的右侧补上一个大小相同的正方体，连接 B_1Q，则 $B_1Q\parallel EF$.

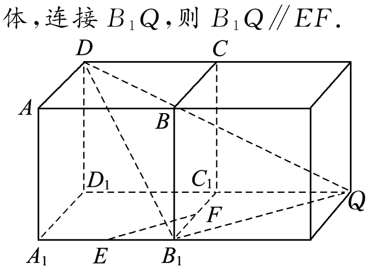


图 3

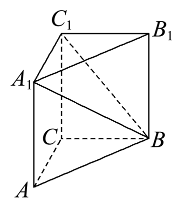
于是$\angle DB_1Q$ 为异面直线 DB_1 与 EF 所成的角或其补角.

通过计算，不难得到 $B_1D^2+B_1Q^2=DQ^2$，

所以$\angle DB_1Q=90°$，所以 $DB_1\perp EF$.

2. 在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，三个侧面都是矩形，且 $AC\perp BC$，求证：$AC\perp BC_1$.

证明： 如图，连接 A_1B. 设 $A_1C_1=a$，$B_1C_1=b$，$AA_1=h$，



由题意得$\angle BB_1C_1=\angle A_1AB=90°$，

所以 $BC_1^2=b^2+h^2$，$AB^2=a^2+b^2$，

$A_1B^2=a^2+b^2+h^2$，

所以 $A_1B^2=A_1C_1^2+BC_1^2$，所以$\angle A_1C_1B=90°$.

所以 $A_1C_1\perp BC_1$.

又因为 $AC\parallel A_1C_1$，所以$\angle A_1C_1B$ 就是异面直线 AC 与 BC_1 所成的角或其补角，所以 $AC\perp BC_1$.

【类题通法】

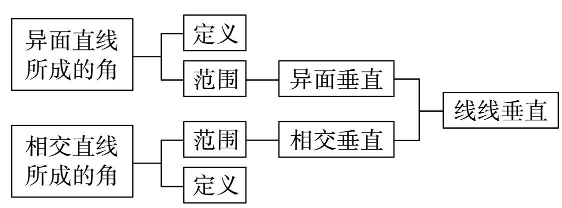
证明线线垂直的常用方法

(1)利用勾股定理的逆定理.

(2)利用等腰三角形底边上的中线就是底边上的高线.

(3)利用平行转化，即 $a\parallel b$，$b\perp c$，则$a\perp c$.

提质归纳



课后素养评价

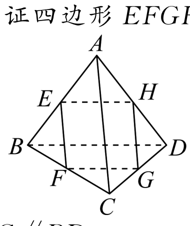
基础性·能力运用

1. 空间四边形的两条对角线相互垂直，顺次连接四边中点所得四边形一定是 （　　）

A.空间四边形　　B.矩形

C.菱形　　D.正方形

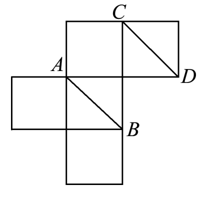
B　**解析：** 如图，易证四边形 $EFGH$ 为平行四边形.



因为 $EF\parallel AC$，$FG\parallel BD$，

所以$\angle EFG$ 或其补角为 AC 与 BD 所成的角. 而 AC 与 BD 所成的角为 $90°$，所以$\angle EFG=90°$，故四边形 $EFGH$ 为矩形.

2. 如图，将无盖正方体纸盒展开，直线 AB，CD 在原正方体中的位置关系是 （　　）



A.平行　　　　B.相交且垂直

C.异面　　　　D.相交且成 60° 角

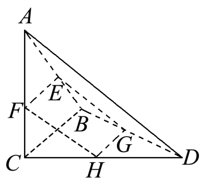
D　**解析**：将平面图形还原为无盖正方体，可知 AB 与 CD 相交且成 60°.

3. 在三棱锥 $A\text{-}BCD$ 中，E，F，G 分别是 AB，AC，BD 的中点.若 AD 与 BC 所成的角为 60°，则 $\angle FEG$ 为（　　）

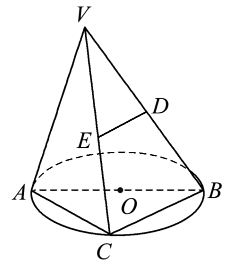
A.30°　　　　B.60°

C.120°　　　　D.60°或 120°

D　**解析**：取 CD 中点 H，顺序连接 E，F，H，G 四点，如图.因为 E，F，H，G 分别为所在棱的中点，所以四边形 $EFHG$ 为平行四边形.因为 AD 与 BC 所成角为 60°，且 $EG\parallel AD$，$GH\parallel BC$，所以 $\angle EGH$ 为 AD 与 BC 所成角或其补角；即 $\angle EGH=60^\circ$或 120°.由平行四边形性质可知，$\angle FEG=120^\circ$或 60°.



4. 如图所示，AB 是圆 O 的直径，点 C 是弧 AB 的中点，V 是圆 O 所在平面外一点，D，E 分别是 VB，VC 的中点，则异面直线 DE 与 AB 所成的角为________.



45°　**解析**：因为 D，E 分别是 VB，VC 的中点，所以 $BC\parallel DE$.因此 $\angle ABC$ 是异面直线 DE 与 AB 所成的角.又因为 AB 是圆 O 的直径，点 C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，所以 $\triangle ABC$ 是以 $\angle ACB$ 为直角的等腰直角三角形，于是 $\angle ABC=45^\circ$，故异面直线 DE 与 AB 所成的角为 45°.

综合性·创新提升

1. 若空间中四条两两不同的直线 l_1，l_2，l_3，l_4，满足 $l_1\perp l_2$，$l_2\perp l_3$，$l_3\perp l_4$，则下列结论一定正确的是（　　）

A.$l_1\perp l_4$

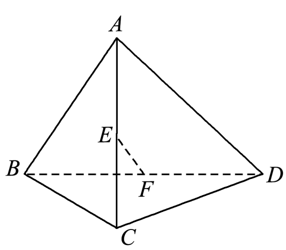
B.$l_1\parallel l_4$

C.l_1 与 l_4 既不垂直也不平行

D.l_1 与 l_4 的位置关系不确定

D　**解析**：因为 $l_1\perp l_2$，$l_2\perp l_3$，所以 l_1 与 l_3 的位置关系不确定.又 $l_1\perp l_3$，所以 l_1 与 l_4 的位置关系不确定.故 A，B，C 错误.故选 D.

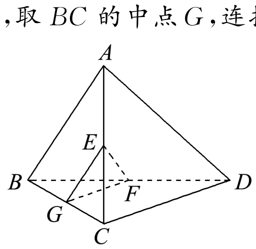
2. 如图，在四面体 $A\text{-}BCD$ 中，E，F 分别是 AC，BD 的中点.若 $AB=2$，$CD=4$，EF 与 CD 所成角的度数为 30°，则 EF 与 AB 所成角的度数为（　　）



A.90°　　　　B.45°

C.60°　　　　D.30°

A　**解析**：如图，取 BC 的中点 G，连接 EG，FG.



因为 E，F 分别是 AC，BD 的中点，

则有 $EG\parallel AB$，$FG\parallel CD$，

则 EF 与 AB 所成角为 $\angle FEG$.

由 $AB=2$，$CD=4$，EF 与 CD 所成角的度数为 30°，

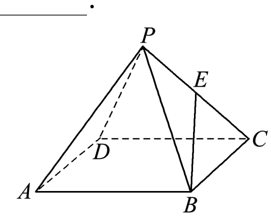
所以 $EG=1$，$FG=2$，$\angle EFG=30^\circ$.

由正弦定理可得 $\dfrac{EG}{\sin\angle EFG}=\dfrac{FG}{\sin\angle FEG}$，

所以 $\sin\angle FEG=1$，

所以 $\angle FEG=90^\circ$.

3. 如图，正四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的所有棱长均相等，E 是 PC 的中点，那么异面直线 BE 与 PA 所成的角的余弦值等于________.



$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　**解析**：连接 AC，BD 交于点 O，连接 EO（图略），则异面直线 BE 与 PA 所成的角即为 EO 与 BE 所成的角.设正四棱锥棱长为 1，则 $EO=\dfrac{1}{2}$，$BE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$BO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.因为 $EO^2+BO^2=BE^2$，所以 $EO\perp BO$，所以 $\cos\angle BEO=\dfrac{EO}{BE}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

8.6.2 直线与平面垂直

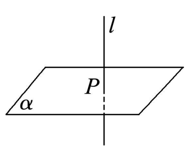
第1课时 直线与平面垂直的判定

学习任务目标
1.理解并掌握直线与平面垂直的定义，明确定义中“任意”两个字的重要性.
2.掌握直线与平面垂直的判定定理，并能解决有关线面垂直的问题.（逻辑推理）
3.了解直线和平面所成的角的含义，并知道其求法.

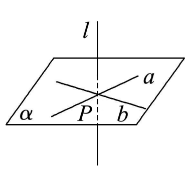
问题式预习

知识点一 直线与平面垂直的定义与判定定理

1.直线与平面垂直的定义

定义	一般地，如果直线 l 与平面 α 内的任意一条直线都垂直，我们就说直线 l 与平面 α 互相垂直
记法	$l\perp\alpha$
有关概念	直线 l 叫做平面 α 的垂线，平面 α 叫做直线 l 的垂面.直线与平面垂直时，它们唯一的公共点 P 叫做垂足
画法	画直线与平面垂直时，通常把直线画成与表示平面的平行四边形的一边垂直
图示	
性质	过一点垂直于已知平面的直线有且只有一条
垂线段与点面距	过一点作垂直于已知平面的直线，则该点与垂足间的线段，叫做这个点到该平面的垂线段，垂线段的长度叫做这个点到该平面的距离

2.直线与平面垂直的判定定理

文字语言	如果一条直线与一个平面内的两条相交直线垂直，那么该直线与此平面垂直
图形语言	
符号语言	$l\perp a,l\perp b,a\subset\alpha,b\subset\alpha,a\cap b=P\Rightarrow l\perp\alpha$

［微训练］

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

（1）若一条直线垂直于平面内的两条直线，则这条直线与平面垂直. （ ）

× **提示**：如果平面内两条直线平行，则这条直线也可能与平面平行.

（2）若一条直线垂直于梯形的两腰所在的直线，则这条直线垂直于两底边所在的直线. （ ）

√ **提示**：因为梯形的两腰延长后是相交直线，所以由判定定理知直线垂直于梯形两腰所在的直线，也就垂直于梯形所在的平面，故这条直线垂直于两底边所在的直线.

（3）若一条直线垂直于梯形的两底边所在的直线，则这条直线垂直于两腰所在的直线. （ ）

× **提示**：梯形两底边所在直线互相平行，不满足判定定理的条件，所以推不出这条直线垂直于两腰所在的直线.

2.若三条直线 OA,OB,OC 两两垂直，则 OA 垂直于 （ ）

A.平面 OAB

B.平面 OAC

C.平面 OBC

D.平面 ABC

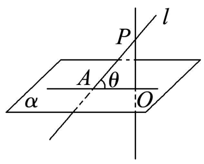
C **解析**：由题意可得，$OA\perp OB,OA\perp OC,OB\cap OC=O,OB,OC\subset$ 平面 OBC，所以 $OA\perp$ 平面 OBC.

知识点二 直线与平面所成的角

1.斜线：一条直线 l 与一个平面 α 相交，但不与这个平面垂直，这条直线叫做这个平面的斜线.

2.斜足：斜线和平面的交点叫做斜足.

3.射影：过斜线上斜足以外的一点 P 向平面 α 引垂线 PO，过垂足 O 和斜足 A 的直线 AO 叫做斜线在这个平面上的射影.



4.直线与平面所成的角

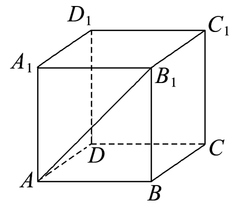
(1)定义：平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的角，叫做这条直线和这个平面所成的角.

(2)规定：一条直线垂直于平面，我们说它们所成的角是 $90°$；一条直线和平面平行，或在平面内，我们说它们所成的角是 $0°$.

如图，直线与平面所成的角 θ 的取值范围是 $0°\leqslant\theta\leqslant 90°$.

[微训练]

如图，在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 AB_1 与平面 $ABCD$ 所成的角等于________.



$45°$　解析：因为在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，$B_1B\perp$ 平面 $ABCD$，所以 AB 即为 AB_1 在平面 $ABCD$ 上的射影，$\angle B_1AB$ 即为直线 AB_1 与平面 $ABCD$ 所成的角.由题意知，$\angle B_1AB=45°$，故所求角为 $45°$.

任务型课堂

任务一　对线面垂直的定义及判定定理的理解

[探究活动]

比萨斜塔是世界著名建筑.把比萨斜塔看作直线 l，地面看作平面 α，探究下列问题.

探究 1：α 与 l 垂直吗？

提示：不垂直.

探究 2：α 内有直线与 l 垂直吗？

提示：有.

探究 3：α 内有多少条直线与 l 垂直？它们是什么关系？

提示：无数条.彼此平行.

[评价活动]

1.直线 $l\perp$ 平面 α，直线 $m\subset\alpha$，则 l 与 m 不可能(　　)

A.平行　　B.相交

C.异面　　D.垂直

A　**解析**：因为直线 $l\perp$ 平面 α，所以 l 与 α 相交.又因为 $m\subset\alpha$，所以 l 与 m 相交或异面.由直线与平面垂直的定义，可知 $l\perp m$.故 l 与 m 不可能平行.故选 A.

2.(多选题)设 l，m 是两条不同的直线，α 是一个平面.下列命题正确的是(　　)

A.若 $l\perp m$，$m\subset\alpha$，则 $l\perp\alpha$

B.若 $l\perp\alpha$，$l\parallel m$，则 $m\perp\alpha$

C.若 $l\parallel\alpha$，$m\subset\alpha$，则 $l\parallel m$

D.若 $l\parallel\alpha$，$m\perp\alpha$，则 $l\perp m$

BD　**解析**：根据两条平行线中的一条直线垂直于一个平面，则另一条直线也垂直于这个平面，可知选项 B 正确.根据线面平行的性质与线面垂直的性质，易知选项 D 正确.

【类题通法】

1.对线面垂直定义的理解

(1)直线和平面垂直的定义是描述性定义，对直线的任意性要注意理解.实际上，“任意一条”与“所有”表达相同的含义.当直线与平面垂直时，该直线就垂直于这个平面内的所有直线.由此可知，如果一条直线与一个平面内的一条直线不垂直，那么这条直线就一定不与这个平面垂直.

(2)由定义可得线面垂直⇒线线垂直，即若 $a\perp\alpha$，$b\subset\alpha$，则 $a\perp b$.

2.理解线面垂直的判定定理

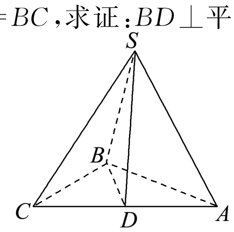
不能用一条直线与平面内的两条平行直线垂直来判断此直线与平面垂直.实际上，由基本事实 4 可知，平行具有“传递性”，因此一条直线与平面内的一条直线垂直，那么它与这个平面内平行于这条直线的所有直线都垂直，但不能保证与其他直线垂直.

任务二　线面垂直判定定理的应用

如图，在三棱锥 S-ABC 中，$\angle ABC=90°$，D 是 AC 的中点，且 $SA=SB=SC$.

(1)求证：$SD\perp$ 平面 ABC；

(2)若 $AB=BC$，求证：$BD\perp$ 平面 SAC.



证明：(1)因为 $SA=SC$，D 是 AC 的中点，所以 $SD\perp AC$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AD=BD$，又已知 $SA=SB$，所以 $\triangle ADS\cong\triangle BDS$，所以 $\angle SDB=\angle SDA=90^\circ$，

所以 $SD\perp BD$.

又 $AC\cap BD=D$，所以 $SD\perp$ 平面 ABC.

(2)因为 $AB=BC$，D 为 AC 的中点，所以 $BD\perp AC$，

由(1)知 $SD\perp BD$.

又 $SD\cap AC=D$，所以 $BD\perp$ 平面 SAC.

【类题通法】

利用判定定理证明线面垂直的步骤

(1)在这个平面内找两条直线，使该直线和这两条直线垂直；

(2)确定这个平面内的两条直线是相交直线；

(3)根据线面垂直的判定定理得出结论.

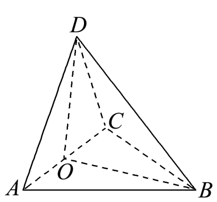
任务三 直线与平面所成的角

1. 把正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起，当以 A,B,C,D 四点为顶点的棱锥体积最大时，直线 BD 和平面 ABC 所成的角的大小为 ( )

A.90° B.60°

C.45° D.30°

C **解析**：如图，点 O 为 AC 中点，以 A,B,C,D 四点为顶点的棱锥体积最大时，$DO\perp$ 平面 ABC，所以 $\angle DBO$ 为直线 BD 和平面 ABC 所成的角. 在 $\mathrm{Rt}\triangle DOB$ 中，$OD=OB$，所以直线 BD 和平面 ABC 所成的角为 45°.



2. (2022·全国甲卷(理))在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 B_1D 与平面 $ABCD$ 和平面 AA_1B_1B 所成的角均为 30°，则 ( )

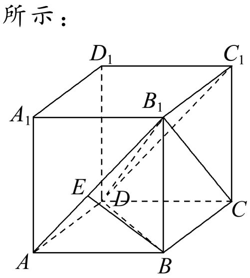
A.$AB=2AD$

B.AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为 30°

C.$AC=CB_1$

D.B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 45°

D **解析**：如图所示：



不妨设 $AB=a$，$AD=b$，$AA_1=c$，依题意以及长方体的结构特征可知，B_1D 与平面 $ABCD$ 所成角为 $\angle B_1DB$，B_1D 与平面 AA_1B_1B 所成角为 $\angle DB_1A$，所以 $\sin 30^\circ=\dfrac{c}{B_1D}=\dfrac{b}{B_1D}$，即 $b=c$，$B_1D=2c=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，解得 $a=\sqrt{2}c$.

对于A，$AB=a$，$AD=b$，$AB=\sqrt{2}AD$，A错误；

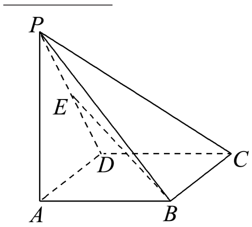
对于B，过 B 作 $BE\perp AB_1$ 于点 E，易知 $BE\perp$ 平面 AB_1C_1D，所以 AB 与平面 AB_1C_1D 所成角为 $\angle BAE$. 因为 $\tan\angle BAE=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\angle BAE\neq 30^\circ$，B错误；

对于C，$AC=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3}c$，$CB_1=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{2}c$，$AC\neq CB_1$，C错误；

对于D，B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成角为 $\angle DB_1C$，$\sin\angle DB_1C=\dfrac{CD}{B_1D}=\dfrac{a}{2c}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，而 $0^\circ<\angle DB_1C<90^\circ$，所以 $\angle DB_1C=45^\circ$，D正确.

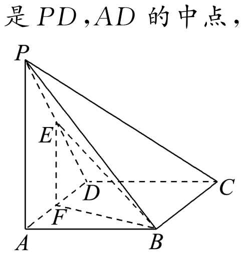
故选D.

3. 如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，侧棱 $PA\perp$ 底面 $ABCD$. 若 $AB=\sqrt{3}$，$BC=1$，$PA=2$，E 为 PD 的中点，则直线 BE 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为________.



$\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$ **解析**：如图，取 AD 的中点 F，连接 EF，BF.

因为 E，F 分别是 PD，AD 的中点，则 $EF\parallel PA$.



因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $EF\perp$ 平面 $ABCD$，即 $\angle EBF$ 为直线 BE 与平面 $ABCD$ 所成的角.

在 $\triangle EBF$ 中，$EF=\dfrac{1}{2}PA=1$，

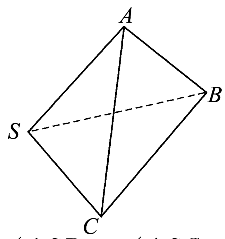
在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中，$AF=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{2}$，

$BF=\sqrt{AF^2+AB^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，

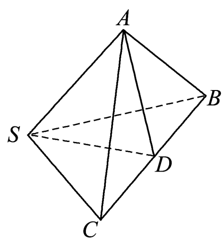
所以 $\tan\angle EBF=\dfrac{EF}{BF}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$，

即直线 BE 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为 $\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

4.如图,在三棱锥 A-SBC 中,$\angle BSC=90^\circ$,$\angle ASB=\angle ASC=60^\circ$,$SA=SB=SC$.求直线 AS 与平面 SBC 所成的角.



解:如图,因为 $\angle ASB=\angle ASC=60^\circ$,$SA=SB=SC$,所以 $\triangle ASB$ 与 $\triangle ASC$ 都是等边三角形,所以 $AB=AC$.



取 BC 的中点 D,连接 AD,SD,则 $AD\perp BC$.

设 $SA=a$,则在 Rt$\triangle BSC$ 中,$BC=\sqrt{2}a$,$CD=SD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

在 Rt$\triangle ADC$ 中,$AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,则 $AD^2+SD^2=SA^2$,所以 $AD\perp SD$.

又 $BC\cap SD=D$,所以 $AD\perp$ 平面 SBC.

所以 $\angle ASD$ 即为直线 AS 与平面 SBC 所成的角.

在 Rt$\triangle ADS$ 中,$SD=AD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,

所以 $\angle ASD=45^\circ$,

即直线 AS 与平面 SBC 所成的角为 45°.

【类题通法】

求直线与平面所成的角的步骤

- 作图 → 作(或找)出斜线在平面上的射影,将空间角转化为平面角,过斜线上斜足以外的一点作平面的垂线,再过垂足和斜足作直线,注意斜线上点的选取以及垂足的位置要与问题中已知量有关,才能便于计算
- 定角 → 证明某平面角就是斜线与平面所成的角
- 计算 → 通常在垂线段、斜线和射影所围成的直角三角形中计算

提质归纳

- 直线与平面垂直
  - 定义
  - 判定定理
  - 直线与平面所成的角
    - 定义
    - 范围

课后素养评价

基础性·能力运用

1.若直线 l 与平面 α 所成的角为 70°,直线 $l\parallel m$,则 m 与 α 所成的角等于 ( )

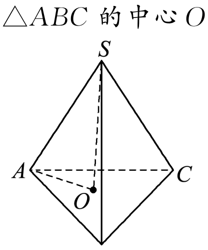
A.20° B.70°

C.90° D.110°

B **解析**:因为 $l\parallel m$,所以直线 l 与平面 α 所成的角等于 m 与 α 所成的角.又直线 l 与平面 α 所成的角为 70°,所以 m 与 α 所成的角为 70°.故选 B.

2.已知正三棱锥 S-ABC 的所有棱长都相等,则 SA 与平面 ABC 所成角的余弦值为________.

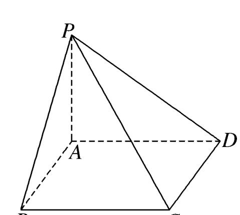
$\frac{\sqrt{3}}{3}$ **解析**:在正三棱锥 S-ABC 中,顶点 S 在底面 ABC 上的射影为 $\triangle ABC$ 的中心 O.



连接 SO,AO,则 $\angle SAO$ 为 SA 与底面 ABC 所成的角.设正三棱锥的棱长为 a,在 Rt$\triangle SOA$ 中,$AO=\frac{2}{3}a\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}a$,$SA=a$,

所以 $\cos\angle SAO=\frac{AO}{SA}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3.如图,在四棱锥 P-$ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为矩形,$PA\perp$ 平面 $ABCD$,则图中直角三角形的个数为________.



4 **解析**:因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$,所以 $PA\perp AB$,$PA\perp AD$,$PA\perp BC$.

又 $BC\perp AB$,所以 $BC\perp$ 平面 PAB,

所以 $BC\perp PB$.同理得 $CD\perp PD$,故共有 4 个直角三角形.

综合性·创新提升

1.（多选题）如图，已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，下列结论错误的是（　　）

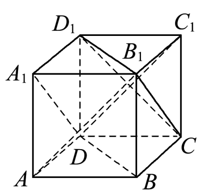
A.BD∥平面 CB_1D_1

B.$AC_1\perp$平面 DBB_1D_1

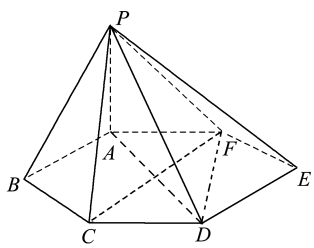
C.$AC_1\perp$平面 CB_1D_1

D.异面直线 AD 与 CB_1 所成的角为 $60°$

BD　**解析**：易知 B 选项错误；对于选项 D，因为 $B_1C\parallel A_1D$，所以 $\angle A_1DA$ 即为 AD 与 CB_1 所成的角，此角为 $45°$. 故 D 错.



第 1 题图



第 2 题图

2.（多选题）如图，在六棱锥 $P\text{-}ABCDEF$ 中，底面 $ABCDEF$ 为正六边形，$PA\perp$平面 ABC，则下列结论不正确的是（　　）

A.$PA\perp CD$

B.$DF\perp$平面 PAF

C.$CB\perp$平面 PCD

D.$CF\perp$平面 PAD

CD　**解析**：A 项，在正六边形 $ABCDEF$ 中，因为 $PA\perp$平面 ABC，所以 $PA\perp$平面 $ABCDEF$.

因为 $CD\subset$平面 $ABCDEF$，

所以 $PA\perp CD$，正确.

B 项，在正六边形 $ABCDEF$ 中，$DF\perp AF$，

又因为 $PA\perp$平面 ABC，

$DF\subset$平面 ABC，

所以 $PA\perp DF$.

因为 $PA\cap AF=A$，

PA，$AF\subset$平面 PAF，

所以 $DF\perp$平面 PAF，正确.

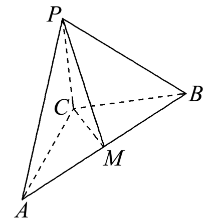
C 项，在正六边形 $ABCDEF$ 中，

$BC\parallel AD$，

易知 AD 与平面 PCD 不垂直，错误.

D 项，因为 CF 与 AD 成 $60°$ 角，所以 CF 与平面 PAD 不垂直，错误.

3.已知△ABC 为等腰直角三角形，P 为空间一点，且 $AC=BC=5\sqrt{2}$，$PC\perp AC$，$PC\perp BC$，$PC=5$，AB 的中点为 M，则 PM 与平面 ABC 所成的角为________.

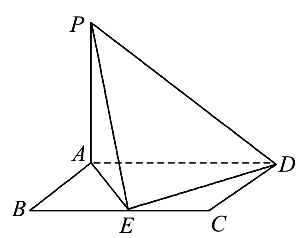


$45°$　**解析**：因为 $PC\perp AC$，$PC\perp BC$，$AC\cap BC=C$，$PC\not\subset$平面 ABC，$AC\subset$平面 ABC，$AB\subset$平面 ABC，所以 $PC\perp$平面 ABC，所以 PM 在平面 ABC 内的射影为 CM，故 $\angle PMC$ 为 PM 与平面 ABC 所成的角. 因为 $AC=BC=5\sqrt{2}$，$\angle ACB=90°$，所以 $CM=5$. 又 $PC=5$，所以△PCM 为等腰直角三角形，所以 $\angle PMC=45°$，即 PM 与平面 ABC 所成的角为 $45°$.

4.已知四边形 $ABCD$ 是矩形，$PA\perp$平面 $ABCD$，$AB=2$，$PA=AD=4$，E 为 BC 的中点.

(1)求证：$DE\perp$平面 PAE；

(2)求直线 DP 与平面 PAE 所成的角.



(1)**证明**：在矩形 $ABCD$ 中，

因为 E 为 BC 的中点，

所以 $AE=DE=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

又 $AD=4$，所以 $AD^2=AE^2+DE^2$，所以 $AE\perp DE$.

因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，$DE\subset$平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp DE$.

又 $PA\cap AE=A$，$PA\subset$平面 PAE，$AE\subset$平面 PAE，所以 $DE\perp$平面 PAE.

(2)**解**：由(1)知 $\angle DPE$ 为 DP 与平面 PAE 所成的角.

在 Rt△PAD 中，$PD=4\sqrt{2}$，

在 Rt△DCE 中，$DE=2\sqrt{2}$，

在 Rt△DEP 中，$PD=2DE$，所以 $\angle DPE=30°$.

第 2 课时　直线与平面垂直的性质

学习任务目标

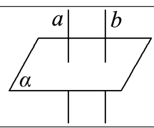
1.掌握线面垂直的性质定理.

2.能利用线面垂直的性质定理解决一些垂直和平行的证明问题.(逻辑推理)

3.了解直线到平面的距离、两个平行平面间的距离的概念.

问题式预习

知识点一　直线与平面垂直的性质定理

文字语言	垂直于同一个平面的两条直线平行
图形语言	
符号语言	$\left.\begin{matrix}a\perp\alpha\\ b\perp\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\parallel b$

[微训练]

从圆柱的一个底面上任取一点(该点不在底面圆周上),过该点作另一个底面的垂线,则这条垂线与圆柱的母线所在直线的位置关系是　(　　)

A.相交

B.平行

C.异面

D.相交或平行

B　**解析**:由直线与平面垂直的性质定理可知,这条垂线与圆柱的母线所在直线平行.故选 B.

知识点二　直线、平面间的距离

1.直线与平面的距离

一条直线与一个平面平行时,这条直线上任意一点到这个平面的距离,叫做这条直线到这个平面的距离.

2.两个平行平面间的距离

如果两个平面平行,那么其中一个平面内的任意一点到另一个平面的距离都相等,我们把它叫做这两个平行平面间的距离.

[微训练]

已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a,则:

(1)直线 A_1A 到平面 B_1BCC_1 的距离为________;

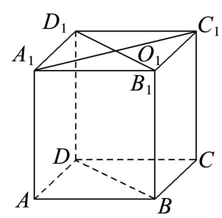
(2)直线 A_1A 到平面 D_1DBB_1 的距离为________.

(1)a　(2)$\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$　**解析**:(1)因为 $A_1A\parallel$ 平面 B_1BCC_1,$A_1B_1\perp$ 平面 B_1BCC_1,

所以直线 A_1A 到平面 B_1BCC_1 的距离等于线段 A_1B_1 的长.

因为 $A_1B_1=a$,所以直线 A_1A 到平面 B_1BCC_1 的距离等于 a.

(2)连接 A_1C_1,B_1D_1,BD,设 A_1C_1 与 B_1D_1 交于点 O_1,如图.



易知 $A_1A\parallel$ 平面 D_1DBB_1.

因为 $A_1O_1\perp$ 平面 D_1DBB_1,

所以直线 A_1A 到平面 D_1DBB_1 的距离等于线段 A_1O_1 的长.

因为 $A_1O_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$,

所以直线 A_1A 到平面 D_1DBB_1 的距离为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

任务型课堂

任务一　对直线与平面垂直的性质定理的理解

1.已知 m,n 为两条不同的直线,α,β 为两个不同的平面,给出下列命题:

①$\left\{\begin{matrix}m\perp\alpha,\\ m\perp n\end{matrix}\right.\Rightarrow n\parallel\alpha$;②$\left\{\begin{matrix}m\perp\beta,\\ n\perp\beta\end{matrix}\right.\Rightarrow m\parallel n$;

③$\left\{\begin{matrix}m\perp\alpha,\\ m\perp\beta\end{matrix}\right.\Rightarrow\alpha\parallel\beta$;④$\left\{\begin{matrix}m\subset\alpha,\\ n\subset\beta,\\ \alpha\parallel\beta\end{matrix}\right.\Rightarrow m\parallel n$.

其中正确命题的序号是 ( )

A.②③ B.③④

C.①② D.①②③④

A **解析**:①中 n 与 α 可能平行或 n 在平面 α 内;②③正确;④直线 m,n 平行或异面.故选 A.

2. 已知 l,m,n 是三条不同的直线,α 是平面.下列命题中,正确命题的个数为 ( )

①若 $l/\!/m,m/\!/n,l\perp\alpha$,则 $n\perp\alpha$;

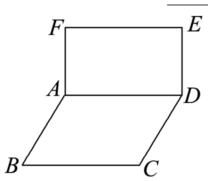
②若 $l/\!/m,m\perp\alpha,n\perp\alpha$,则 $l/\!/n$;

③若 $l/\!/\alpha,l\perp m$,则 $m\perp\alpha$.

A.1 B.2 C.3 D.0

B **解析**:对于①,因为 $l/\!/m,m/\!/n$,所以 $l/\!/n$.又 $l\perp\alpha$,所以 $n\perp\alpha$,故①正确.对于②,因为 $m\perp\alpha,n\perp\alpha$,所以 $m/\!/n$.又 $l/\!/m$,所以 $l/\!/n$,故②正确.对于③,因为 $l/\!/\alpha,l\perp m$,所以 $m/\!/\alpha$ 或 $m\subset\alpha$ 或 $m\perp\alpha$ 或 m 与 α 斜交,故③错误.

3. 如图,已知 $AF\perp$ 平面 $ABCD$,$DE\perp$ 平面 $ABCD$,且 $AF=DE$,$AD=6$,则 $EF=$________.



6 **解析**:因为 $AF\perp$ 平面 $ABCD$,$DE\perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $AF/\!/DE$.

因为 $AF=DE$,所以四边形 $ADEF$ 是平行四边形.

所以 $EF=AD=6$.

【类题通法】

直线与平面垂直的性质定理的认识

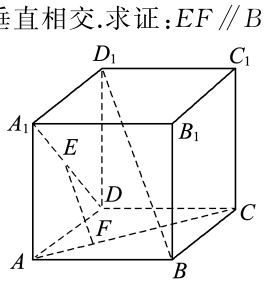
(1)该定理考查的是在直线与平面垂直的条件下,可得出什么结论.

(2)定理给出了判定两条直线平行的另一种方法(只需判定这两条直线都与同一个平面垂直).

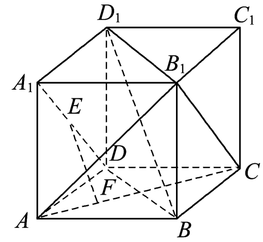
(3)定理揭示了空间中"平行"与"垂直"关系的内在联系,提供了"平行"与"垂直"关系相互转化的依据.

任务二 直线与平面垂直性质定理的应用

1. 如图,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,EF 与直线 AC,A_1D 都垂直相交.求证:$EF/\!/BD_1$.



证明:连接 AB_1,B_1C,BD,B_1D_1,如图.



因为 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$,$AC\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $DD_1\perp AC$.

又 $AC\perp BD$,$BD\cap DD_1=D$,

所以 $AC\perp$ 平面 BDD_1B_1.

因为 $BD_1\subset$ 平面 BDD_1B,所以 $AC\perp BD_1$.

同理 $BD_1\perp B_1C$.因为 $AC\cap B_1C=C$,

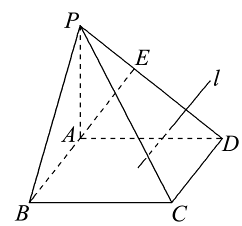
所以 $BD_1\perp$ 平面 AB_1C.

因为 $EF\perp A_1D$,且 $A_1D/\!/B_1C$,所以 $EF\perp B_1C$.

又 $EF\perp AC$,$AC\cap B_1C=C$,

所以 $EF\perp$ 平面 AB_1C.所以 $EF/\!/BD_1$.

2. 在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,$PA\perp$ 平面 $ABCD$,且四边形 $ABCD$ 为矩形,$AE\perp PD$ 于点 E,$l\perp$ 平面 PCD,求证:$l/\!/AE$.



证明:因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$,$CD\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PA\perp CD$.又 $CD\perp AD$,$PA\cap AD=A$,

所以 $CD\perp$ 平面 PAD.

因为 $AE\subset$ 平面 PAD,所以 $AE\perp DC$.

又 $AE\perp PD$,$PD\cap CD=D$,所以 $AE\perp$ 平面 PCD.

因为 $l\perp$ 平面 PCD,所以 $l/\!/AE$.

【类题通法】

证明线线平行的常用方法

(1)利用线线平行定义:证两线共面且无公共点;

(2)利用三线平行基本事实:证两线同时平行于第三条直线;

(3)利用线面平行的性质定理:把证线线平行转化为证线面平行;

(4)利用线面垂直的性质定理:把证线线平行转化为证线面垂直;

(5)利用面面平行的性质定理:把证线线平行转化为证面面平行.

任务三　线面垂直的判定与性质的综合应用

［探究活动］

结合线面垂直的有关知识，探究下面问题.

探究1：如果一条直线垂直于一个平面，那么它是否垂直于这个平面内的任意一条直线？

提示：是.

探究2：如果两条平行线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面吗？

提示：垂直.

探究3：如果一条直线垂直于两个平行平面中的一个，那么它也垂直于另一个平面吗？

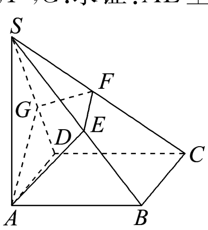
提示：垂直.

探究4：垂直于同一条直线的两个平面是否平行？

提示：是.

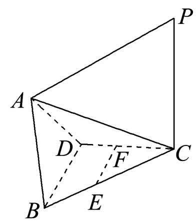
［评价活动］

1.如图所示，四边形 $ABCD$ 为正方形，$SA\perp$ 平面 $ABCD$，过点 A 且垂直于 SC 的平面分别交 SB，SC，SD 于点 E，F，G.求证：$AE\perp SB$.



证明：因为 $SA\perp$ 平面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $SA\perp BC$.
因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $AB\perp BC$.
因为 $SA\cap AB=A$，所以 $BC\perp$ 平面 SAB.
因为 $AE\subset$ 平面 SAB，所以 $BC\perp AE$.
因为 $SC\perp$ 平面 $AGFE$，$AE\subset$ 平面 $AGFE$，所以 $SC\perp AE$.
又因为 $BC\cap SC=C$，所以 $AE\perp$ 平面 SBC.
而 $SB\subset$ 平面 SBC，所以 $AE\perp SB$.

2.如图，$PA\perp$ 平面 ABD，$PC\perp$ 平面 BCD，E，F 分别为 BC，CD 上的点，且 $EF\perp AC$.求证：$\dfrac{CF}{CD}=\dfrac{CE}{CB}$.



证明：因为 $PA\perp$ 平面 ABD，$PC\perp$ 平面 BCD，
$BD\subset$ 平面 ABD，BD，$EF\subset$ 平面 BCD，
所以 $PA\perp BD$，$PC\perp BD$，$PC\perp EF$.
又 $PA\cap PC=P$，所以 $BD\perp$ 平面 PAC.
又 $EF\perp AC$，$PC\cap AC=C$，所以 $EF\perp$ 平面 PAC，
所以 $EF\parallel BD$，所以 $\dfrac{CF}{CD}=\dfrac{CE}{CB}$.

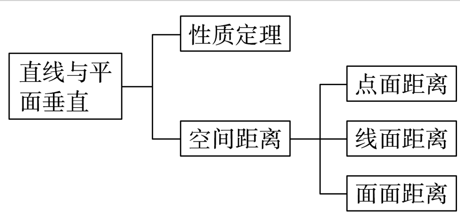
【类题通法】

证明线线、线面垂直的策略

(1)证明线线垂直，一般通过证明一条直线垂直于经过另一条直线的平面，为此分析题设，观察图形找到是哪条直线垂直于经过哪条直线的平面.

(2)证明直线和平面垂直，就是要证明这条直线垂直于平面内的两条相交直线，这一点在解题时一定要体现出来.

提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1.在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 l（与直线 BB_1 不重合）$\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，则　　（　　）

A.$B_1B\perp l$

B.$B_1B\parallel l$

C.B_1B 与 l 异面但不垂直

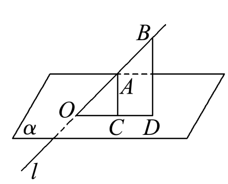
D.B_1B 与 l 相交但不垂直

B　**解析**：因为 $B_1B\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，又因为 $l\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，所以 $l\parallel B_1B$.故选 B.

2.已知直线 $l\cap$ 平面 $\alpha=O$，$A\in l$，$B\in l$，$A\notin\alpha$，$B\notin\alpha$，且 $OA=AB$.若 $AC\perp$ 平面 α，垂足为 C，$BD\perp$ 平面 α，垂足为 D，$AC=1$，则 $BD=$　　（　　）

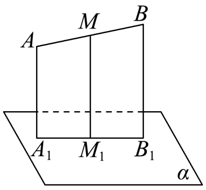
A.2　　B.1　　C.$\dfrac{3}{2}$　　D.$\dfrac{1}{2}$

A　**解析**：因为 $AC\perp$ 平面 α，$BD\perp$ 平面 α，所以 $AC\parallel BD$.连接 OD，所以 $\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{AC}{BD}$.因为 $OA=AB$，所以 $\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{1}{2}$.因为 $AC=1$，所以 $BD=2$.故选 A.



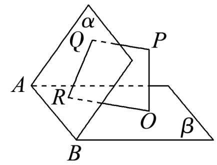
3. 点 A，B 在平面 α 的同侧，A，B 到 α 的距离分别为 3 和 5，则线段 AB 的中点到 α 的距离为________.

4　**解析**：如图，设 AB 的中点为 M，分别过 A，M，B 向 α 作垂线，垂足分别为 A_1，M_1，B_1，则由线面垂直的性质可知，$AA_1 \parallel MM_1 \parallel BB_1$，四边形 AA_1B_1B 为直角梯形，$AA_1=3$，$BB_1=5$，MM_1 为其中位线，所以 $MM_1=\frac{1}{2}(AA_1+BB_1)=\frac{1}{2}\times(3+5)=4$.



4. 已知 $\alpha\cap\beta=AB$，$PQ\perp\alpha$，垂足为 Q，$PO\perp\beta$，垂足为 O，$OR\perp\alpha$，垂足为 R，求证：$QR\perp AB$.

证明：如图，因为 $\alpha\cap\beta=AB$，所以 $AB\subset\alpha$，$AB\subset\beta$.



因为 $PO\perp\beta$，所以 $PO\perp AB$.

因为 $PQ\perp\alpha$，所以 $PQ\perp AB$.

因为 $PO\cap PQ=P$，$PO\subset$ 平面 PQO，$PQ\subset$ 平面 PQO，所以 $AB\perp$ 平面 PQO.

因为 $OR\perp\alpha$，所以 $PQ\parallel OR$.

所以 PQ 与 OR 确定平面 $PQRO$.

又因为 $QR\subset$ 平面 $PQRO$，所以 $QR\perp AB$.

综合性·创新提升

1. 空间四边形 $ABCD$ 的四边相等，则它的两条对角线 AC，BD 的关系是　　(　　)

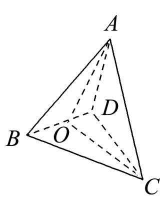
A. 垂直且相交

B. 相交但不一定垂直

C. 垂直但不相交

D. 不垂直也不相交

C　**解析**：取 BD 中点 O，连接 AO，CO，则 $BD\perp AO$，$BD\perp CO$，$AO\cap CO=O$，AO，$CO\subset$ 平面 AOC，所以 $BD\perp$ 平面 AOC，$BD\perp AC$. 又 BD，AC 异面，所以 BD，AC 不相交. 故选 C.



2. 三棱锥的三条侧棱长度相等，则顶点在底面的射影为底面三角形的　　(　　)

A. 内心　B. 重心　C. 外心　D. 垂心

C　**解析**：如图，设点 P 在平面 ABC 内的射影为 O，连接 OA，OB，OC，OP.

因为三棱锥的三条侧棱长度相等，所以 $PA=PB=PC$.

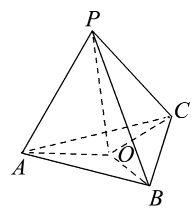
因为 $PO\perp$ 底面 ABC，

所以 $PO\perp OA$，$PO\perp OB$，$PO\perp OC$，

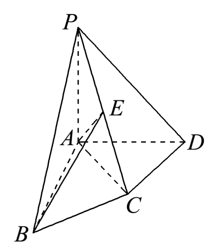
所以 $\mathrm{Rt}\triangle POA\cong\mathrm{Rt}\triangle POB\cong\mathrm{Rt}\triangle POC$，

所以 $OA=OB=OC$，

故顶点 P 在底面的射影为底面三角形的外心.



3. 如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AB\perp AD$，$AC\perp CD$，$\angle ABC=60^\circ$，$PA=AB=BC$，E 是 PC 的中点. 则有



(1) CD________AE；

(2) PD________平面 ABE.（填“$\perp$”或“$\parallel$”）

(1) $\perp$　(2) $\perp$　**解析**：(1) 在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp CD$. 又因为 $AC\perp CD$，且 $PA\cap AC=A$，所以 $CD\perp$ 平面 PAC. 而 $AE\subset$ 平面 PAC，所以 $CD\perp AE$.

(2) 由 $PA=AB=BC$，$\angle ABC=60^\circ$，可得 $AC=PA$.

因为 E 是 PC 的中点，所以 $AE\perp PC$.

由 (1) 知 $AE\perp CD$，且 $PC\cap CD=C$，所以 $AE\perp$ 平面 PCD.

又 $PD\subset$ 平面 PCD，所以 $AE\perp PD$.

因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB$.

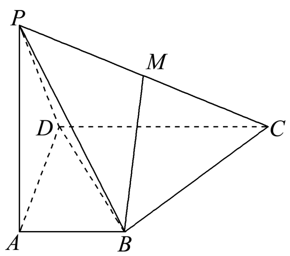
又因为 $AB\perp AD$，且 $PA\cap AD=A$，所以 $AB\perp$ 平面 PAD. 而 $PD\subset$ 平面 PAD，所以 $AB\perp PD$.

又 $AB\cap AE=A$，所以 $PD\perp$ 平面 ABE.

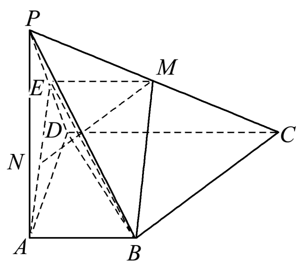
4. 如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$AB\perp AD$，$CD\perp AD$，$PA\perp$平面 $ABCD$，$PA=AD=CD=2AB=2$，M 为 PC 的中点.

(1)求证：$BM/\!/$平面 PAD.

(2)平面 PAD 内是否存在一点 N，使 $MN\perp$平面 PBD？若存在，确定点 N 的位置；若不存在，请说明理由.



(1)**证明**：如图，取 PD 的中点 E，连接 EM，AE，



则有 $EM \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}CD$.而 $AB \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}CD$，所以 $EM \underline{\underline{/\!/}} AB$.

所以四边形 $ABME$ 是平行四边形，所以 $BM/\!/AE$.

因为 $AE\subset$平面 PAD，$BM\not\subset$平面 PAD，

所以 $BM/\!/$平面 PAD.

(2)**解**：当 N 为 AE 的中点时，$MN\perp$平面 PBD.

理由如下：

因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，$AB\subset$平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB$.

又因为 $AB\perp AD$，$PA\cap AD=A$，$PA\subset$平面 PAD，$AD\subset$平面 PAD，所以 $AB\perp$平面 PAD.因为 $PD\subset$平面 PAD，所以 $AB\perp PD$.

因为 $PA=AD$，E 是 PD 的中点，所以 $AE\perp PD$.

又因为 $AB\cap AE=A$，$AB\subset$平面 $ABME$，$AE\subset$平面 $ABME$，所以 $PD\perp$平面 $ABME$.

连接 BE，作 $MN\perp BE$，交 AE 于点 N.因为 $MN\subset$平面 $ABME$，所以 $MN\perp PD$.

又因为 $PD\cap BE=E$，$PD\subset$平面 PBD，$BE\subset$平面 PBD，

所以 $MN\perp$平面 PBD.

易知 $\triangle BME\backsim\triangle MEN$，$BM=\sqrt{2}$，$EM=AB=1$，

所以 $\frac{BM}{ME}=\frac{EM}{NE}$，即 $NE=\frac{EM^2}{BM}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 $AE=\sqrt{2}$，所以 N 为 AE 的中点.

8.6.3　平面与平面垂直

第1课时　平面与平面垂直的判定

学习任务目标

1. 了解二面角及平面角的概念.
2. 掌握两个平面互相垂直的定义和画法.
3. 理解并掌握平面与平面垂直的判定定理，并能解决有关问题.(逻辑推理)

问题式预习

知识点一　二面角

1. 二面角的定义

从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角.这条直线叫做二面角的棱，这两个半平面叫做二面角的面.

图1所示二面角记作：二面角 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 或二面角 $\alpha\text{-}AB\text{-}\beta$ 或二面角 $P\text{-}l\text{-}Q$ 或二面角 $P\text{-}AB\text{-}Q$.

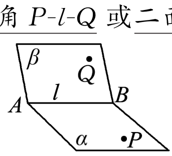


图1

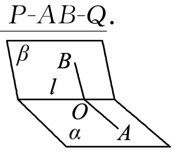


图2

2. 二面角的平面角

如图2，在二面角 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 的棱 l 上任取一点 O，以点 O 为垂足，在半平面 α 和 β 内分别作垂直于棱 l 的射线 OA 和 OB，则射线 OA 和 OB 构成的 $\angle AOB$ 叫做二面角的平面角.

3. 二面角的大小

二面角的大小可以用它的平面角来度量.平面角是直角的二面角叫做直二面角.二面角的平面角 α 的取值范围是 $0°\leqslant\alpha\leqslant180°$.

［微训练］

判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）．

(1)经过平面α外一点和平面α内一点与平面α垂直的平面有无数个．（　　）

×　**提示**：若过平面外一点和平面内一点的直线l与α垂直，则过这条直线与平面α垂直的平面有无数个，若l与α不垂直，则这样的平面只有一个．

(2)异面直线a，b分别和两个平面垂直，则a，b所成的角与这两个平面所成的二面角相等或互补．（　　）

√　**提示**：由于a，b分别垂直于两个平面，所以也垂直于二面角的棱，但由于异面直线所成的角为锐角（或直角），所以应是相等或互补．

(3)二面角的平面角是从棱上一点出发，分别在两个面内作射线所成角中的最小角．（　　）

×　**提示**：因为没有说明射线垂直于棱，所以是错误的．

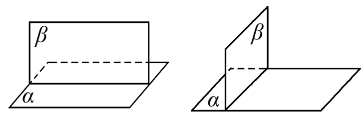
(4)二面角的大小与其平面角的顶点在棱上的位置没有关系．（　　）

√　**提示**：二面角的平面角的顶点可以选在棱上的任何一个位置．

知识点二　平面与平面垂直

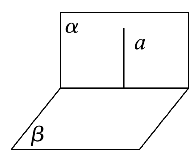
1.定义：一般地，两个平面相交，如果它们所成的二面角是直二面角，就说这两个平面互相垂直．

2.画法：



记作：$\alpha\perp\beta$．

3.面面垂直的判定定理

文字语言	如果一个平面过另一个平面的垂线，那么这两个平面垂直
符号语言	$a\subset\alpha$，$a\perp\beta\Rightarrow\alpha\perp\beta$
图形语言	

任务型课堂

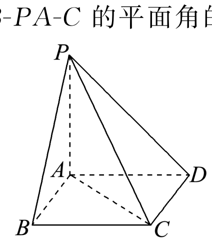
任务一　求二面角的大小

如图，四边形$ABCD$是正方形，$PA\perp$平面$ABCD$，且$PA=AB$．

求：(1)二面角A-PD-C的平面角的度数；

(2)二面角B-PA-D的平面角的度数；

(3)二面角B-PA-C的平面角的度数．



解：(1)因为$PA\perp$平面$ABCD$，$CD\subset$平面$ABCD$，

所以$PA\perp CD$．

又四边形$ABCD$为正方形，所以$CD\perp AD$．

因为$PA\cap AD=A$，所以$CD\perp$平面PAD．

又$CD\subset$平面PCD，

所以平面$PAD\perp$平面PCD．

所以二面角A-PD-C的平面角的度数为90°．

(2)因为$PA\perp$平面$ABCD$，$AB\subset$平面$ABCD$，$AD\subset$平面$ABCD$，

所以$AB\perp PA$，$AD\perp PA$．

所以$\angle BAD$为二面角B-PA-D的平面角．

又四边形$ABCD$为正方形，所以$\angle BAD=90^\circ$，

所以二面角B-PA-D的平面角的度数为90°．

(3)因为$PA\perp$平面$ABCD$，$AB\subset$平面$ABCD$，$AC\subset$平面$ABCD$，

所以$AB\perp PA$，$AC\perp PA$．

所以$\angle BAC$为二面角B-PA-C的平面角．

又四边形$ABCD$为正方形，所以$\angle BAC=45^\circ$，

所以二面角B-PA-C的平面角的度数为45°．

【类题通法】

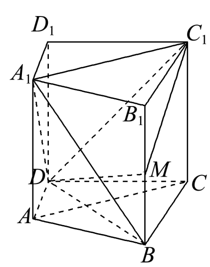
求二面角的常用方法

二面角的大小用它的平面角来度量．平面角的作法常见的有定义法和垂面法．注意利用等腰三角形和特殊平行四边形的性质．

任务二　证明两个平面垂直

［探究活动］

如图，在直四棱柱$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$中，$BD=BC$，M是棱BB_1上一点．试根据面面垂直的判定定理解答下列问题．



探究1：为使平面 $A_1BD\perp$ 平面 AA_1C_1C，底面 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 应满足什么关系？说明理由.

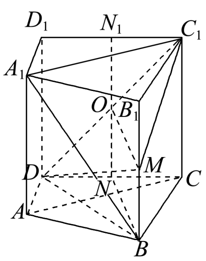
提示：$BD\perp AC$. 理由：因为 $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $BD\perp AA_1$.

因为 $BD\perp AC$，且 $AA_1\cap AC=A$，所以 $BD\perp$ 平面 AA_1C_1C. 又 $BD\subset$ 平面 A_1BD，所以平面 $A_1BD\perp$ 平面 AA_1C_1C.

探究2：当点 M 为棱 BB_1 中点时，平面 $DMC_1\perp$ 平面 CC_1D_1D 是否成立？说明理由.

提示：当点 M 为棱 BB_1 中点时，平面 $DMC_1\perp$ 平面 CC_1D_1D 成立.

理由：如图，取 DC 的中点 N，D_1C_1 的中点 N_1，连接 NN_1，交 DC_1 于点 O，连接 OM，BN，则 $NN_1/\!/CC_1$，且 O 为 NN_1 的中点.



因为 N 是 DC 的中点，$BD=BC$，所以 $BN\perp DC$.

因为在直四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$DD_1\perp$ 平面 $ABCD$，$BN\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $DD_1\perp BN$.

又 $CD\cap DD_1=D$，

所以 $BN\perp$ 平面 CC_1D_1D.

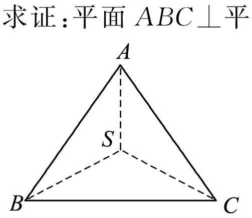
当点 M 为 BB_1 中点时，$BM/\!/ON$，且 $BM=ON$，

所以四边形 $BMON$ 是平行四边形，即 $BN/\!/OM$，所以 $OM\perp$ 平面 CC_1D_1D.

因为 $OM\subset$ 平面 DMC_1，所以平面 $DMC_1\perp$ 平面 CC_1D_1D，即当点 M 为棱 BB_1 中点时，平面 $DMC_1\perp$ 平面 CC_1D_1D 成立.

［评价活动］

1. 如图，已知 $\angle BSC=90°$，$\angle BSA=\angle CSA=60°$，$SA=SB=SC$. 求证：平面 $ABC\perp$ 平面 SBC.



证明：因为 $\angle BSA=\angle CSA=60°$，$SA=SB=SC$，所以 $\triangle ASB$ 和 $\triangle ASC$ 都是等边三角形，则有 $SA=SB=SC=AB=AC$，则 $\triangle ABC$ 和 $\triangle SBC$ 为共底边 BC 的等腰三角形. 设 $SA=SB=SC=AB=AC=a$.

取 BC 的中点 D，连接 AD，SD(图略)，

则 $AD\perp BC$，$SD\perp BC$，

所以 $\angle ADS$ 为二面角 $A\text{-}BC\text{-}S$ 的平面角.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BSC$ 中，因为 $SB=SC=a$.

所以 $SD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，$BD=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$AD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

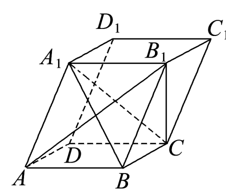
在 $\triangle ADS$ 中，因为 $SD^2+AD^2=SA^2$，所以 $\angle ADS=90°$，

即二面角 $A\text{-}BC\text{-}S$ 为直二面角，故平面 $ABC\perp$ 平面 SBC.

2. 如图，在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB$，$AB_1\perp B_1C_1$.

求证：(1) $AB/\!/$ 平面 A_1B_1C；

(2) 平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 A_1BC.



证明：(1) 在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，易知 $AB/\!/A_1B_1$.

因为 $AB\not\subset$ 平面 A_1B_1C，$A_1B_1\subset$ 平面 A_1B_1C，

所以 $AB/\!/$ 平面 A_1B_1C.

(2) 在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，四边形 ABB_1A_1 为平行四边形.

因为 $AA_1=AB$，所以四边形 ABB_1A_1 为菱形，

所以 $AB_1\perp A_1B$.

因为 $AB_1\perp B_1C_1$，$BC/\!/B_1C_1$，所以 $AB_1\perp BC$.

因为 $A_1B\cap BC=B$，$A_1B\subset$ 平面 A_1BC，$BC\subset$ 平面 A_1BC，

所以 $AB_1\perp$ 平面 A_1BC.

因为 $AB_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 A_1BC.

【类题通法】

证明平面与平面垂直的方法

(1) 利用定义：证明二面角的平面角为直角.

基本步骤是：

①找出两相交平面所成二面角的平面角；

②证明这个平面角是直角；

③根据定义，这两个相交平面互相垂直.

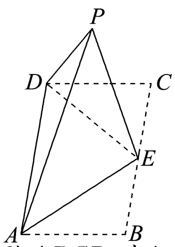
(2) 利用面面垂直的判定定理：要证面面垂直，只需证线面垂直，即在其中一个平面内寻找一条直线与另一个平面垂直.

任务三 折叠问题

如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=\sqrt{2}$，$BC=2$，E 为 BC 的中点，把$\triangle ABE$ 和$\triangle CDE$ 分别沿 AE，DE 折起，使点 B 与点 C 重合于点 P.

(1)求证：平面 $PDE\perp$平面 PAD；

(2)求二面角 $P\text{-}AD\text{-}E$ 的大小.



(1)**证明**：因为四边形 $ABCD$ 为矩形，所以 $AB\perp BE$，所以 $AP\perp PE$.

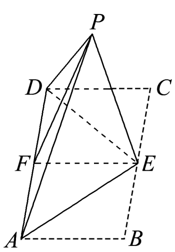
同理 $DP\perp PE$.

因为 $AP\cap DP=P$，所以 $PE\perp$平面 PAD.

又 $PE\subset$平面 PDE，

所以平面 $PDE\perp$平面 PAD.

(2)**解**：如图所示，取 AD 的中点 F，连接 PF，EF，



则易知 $PF\perp AD$，$EF\perp AD$，

所以$\angle PFE$ 就是二面角 $P\text{-}AD\text{-}E$ 的平面角.

又 $PE\perp$平面 PAD，$PF\subset$平面 PAD，所以 $PE\perp PF$.

因为 $EF=AB=\sqrt{2}$，$PE=CE=BE=\frac{1}{2}BC=1$，

所以 $PF=\sqrt{(\sqrt{2})^2-1}=1$，

所以 $\cos\angle PFE=\frac{PF}{EF}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以二面角 $P\text{-}AD\text{-}E$ 的大小为 $45°$.

【类题通法】

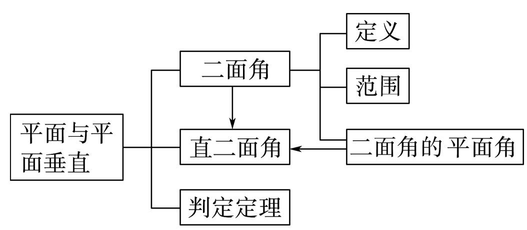
求解折叠问题的基本方法

(1)根据题中条件画出立体图形.

(2)比较翻折前后的图形，弄清楚哪些量和位置关系在翻折过程中不变，哪些已发生改变.

(3)将不变的条件集中到立体图形中，将问题归结为一个条件与结论明朗化的立体几何问题.

提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1.下列命题正确的是（　　）

A.若平面 α 和 β 分别过两条互相垂直的直线，则 $\alpha\perp\beta$

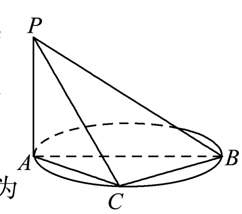
B.若平面 α 内的一条直线垂直于平面 β 内的两条平行直线，则 $\alpha\perp\beta$

C.若平面 α 内的一条直线垂直于平面 β 内的两条相交直线，则 $\alpha\perp\beta$

D.若平面 α 内的一条直线垂直于平面 β 内的无数条直线，则 $\alpha\perp\beta$

C　**解析**：当平面 α 和 β 分别过两条互相垂直且异面的直线时，平面 α 和 β 有可能平行，故 A 错；由直线与平面垂直的判定定理知，B，D 错，C 正确.

2.如图，AB 是圆的直径，PA 垂直于圆所在的平面，C 是圆上一点（不同于 A，B）且 $PA=AC$，则二面角 $P\text{-}BC\text{-}A$ 的大小为（　　）



A.$60°$　　B.$30°$　　C.$45°$　　D.$15°$

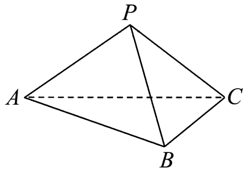
C　**解析**：因为 $PA\perp$平面 ABC，所以 $PA\perp BC$.

易得 $BC\perp AC$，$PA\cap AC=A$，所以 $BC\perp$平面 PAC，

所以 $BC\perp PC$，所以$\angle PCA$ 为二面角 $P\text{-}BC\text{-}A$ 的平面角.

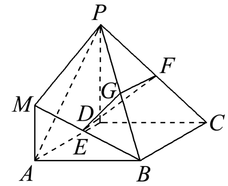
在 Rt$\triangle PAC$ 中，$PA=AC$，所以$\angle PCA=45°$.

3. 在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，已知 $PA\perp PB$，$PB\perp PC$，$PC\perp PA$，如图所示，则在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的四个面中，互相垂直的面有________对.



3　**解析**：因为 $PA\perp PB$，$PA\perp PC$，$PB\cap PC=P$，所以 $PA\perp$ 平面 PBC.因为 $PA\subset$ 平面 PAB，$PA\subset$ 平面 PAC，所以平面 $PAB\perp$ 平面 PBC，平面 $PAC\perp$ 平面 PBC，同理可证平面 $PAB\perp$ 平面 PAC.

4. 如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，$MA\perp$ 平面 $ABCD$，$PD\parallel MA$，E，G，F 分别为 MB，PB，PC 的中点，且 $AD=PD=2MA$.求证：平面 $EFG\perp$ 平面 PDC.



证明：因为 $MA\perp$ 平面 $ABCD$，$PD\parallel MA$，

所以 $PD\perp$ 平面 $ABCD$.

又 $BC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PD\perp BC$.

因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $BC\perp DC$.

又 $PD\cap DC=D$，所以 $BC\perp$ 平面 PDC.

在 $\triangle PBC$ 中，G，F 分别为 PB，PC 的中点，

所以 $GF\parallel BC$，所以 $GF\perp$ 平面 PDC.

又 $GF\subset$ 平面 EFG，

所以平面 $EFG\perp$ 平面 PDC.

综合性·创新提升

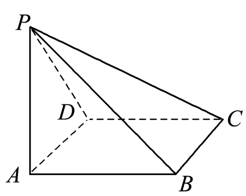
1. 已知直线 m，n 与平面 α，β，给出下列三个结论：①若 $m\parallel\alpha$，$n\parallel\alpha$，则 $m\parallel n$；②若 $m\parallel\alpha$，$n\perp\alpha$，则 $m\perp n$；③若 $m\perp\alpha$，$m\parallel\beta$，则 $\alpha\perp\beta$.其中正确结论的个数是　　(　　)

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

C　**解析**：当 $m\parallel\alpha$，$n\parallel\alpha$ 时，m 与 n 可能平行、相交或异面，故①不正确；②显然正确；当 $m\parallel\beta$ 时，存在 $m'\subset\beta$，使得 $m'\parallel m$，又 $m\perp\alpha$，所以 $m'\perp\alpha$，所以 $\alpha\perp\beta$，故③正确.

2. 过正方形 $ABCD$ 的顶点 A 作线段 $AP\perp$ 平面 $ABCD$，且 $AP=AB$，则平面 ABP 与平面 CDP 所成的锐二面角的度数是　　(　　)

A.30°　　B.45°　　C.60°　　D.90°

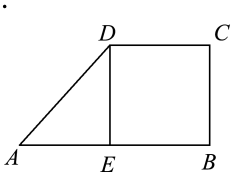


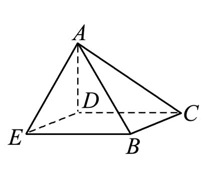
B　**解析**：如图，因为平面 ABP 与平面 CDP 的一个公共点为 P，结合题意可知它们的交线即所成二面角的棱过点 P 且与 AB 平行.因为 $PA\perp AB$，$AB\perp AD$，$PA\cap AD=A$，所以 $AB\perp$ 平面 PAD，所以 $PD\perp AB$.因为 PA，PD 均垂直于所求二面角的棱，即 $\angle APD$ 为所求二面角的平面角，大小为 45°.

3. 如图，E 是直角梯形 $ABCD$ 底边 AB 的中点，$AB=2DC=2BC$.将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起形成四棱锥 $A\text{-}BCDE$.

(1)求证：$DE\perp$ 平面 ABE；

(2)若二面角 $A\text{-}DE\text{-}B$ 为 60°，求二面角 $A\text{-}DC\text{-}B$ 的正切值.





(1)**证明**：在直角梯形 $ABCD$ 中，因为 $DC\parallel BE$，且 $DC=BE$，

所以四边形 $BCDE$ 为平行四边形.

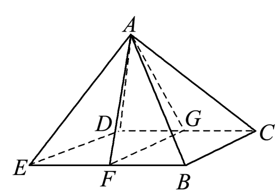
又 $\angle B=90°$，从而 $DE\perp EB$，$DE\perp EA$.

又 $EB\cap EA=E$，$EB\subset$ 平面 ABE，$EA\subset$ 平面 ABE，所以 $DE\perp$ 平面 ABE.

(2)**解**：由(1)知，$\angle AEB$ 即二面角 $A\text{-}DE\text{-}B$ 的平面角，故 $\angle AEB=60°$.

又因为 $AE=EB$，所以 $\triangle AEB$ 为等边三角形.

设 BE 的中点为 F，CD 的中点为 G，连接 AF，FG，AG.



从而 $AF\perp BE$，$FG\parallel DE$，所以 $AF\perp CD$，$FG\perp CD$.

又 $AF\cap FG=F$，$AF\subset$ 平面 AFG，$FG\subset$ 平面 AFG，

所以 $CD\perp$ 平面 AFG，因此 $CD\perp AG$.

所以 $\angle FGA$ 即为所求二面角 $A\text{-}CD\text{-}B$ 的平面角.

因为 $DE\perp$ 平面 ABE，从而 $FG\perp$ 平面 ABE.

因为 $AF\subset$ 平面 ABE，所以 $FG\perp AF$.

设 $AB=2DC=2BC=2$，所以 $AF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$FG=1$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AFG$ 中，可求得 $\tan\angle FGA=\dfrac{AF}{FG}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

即二面角 $A\text{-}DC\text{-}B$ 的正切值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

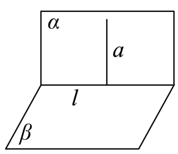
第 2 课时　平面与平面垂直的性质

学习任务目标

1. 理解平面与平面垂直的性质定理及其简单应用.（逻辑推理）
2. 掌握平面与平面垂直性质定理的综合应用.

问题式预习

知识点　平面与平面垂直的性质定理

文字语言	两个平面垂直，如果一个平面内有一直线垂直于这两个平面的交线，那么这条直线与另一个平面垂直
图形语言	
符号语言	$\left.\begin{array}{l}\alpha\perp\beta\\ \alpha\cap\beta=l\\ \underline{a\subset\alpha}\\ \underline{a\perp l}\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp\beta$

［微训练］

1. 判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

（1）如果两个平面垂直，那么一个平面内的直线一定垂直于另一个平面.　（×）

（2）如果两个平面垂直，那么经过第一个平面内一点垂直于第二个平面的直线在第一个平面内.（√）

（3）平面 $\alpha\perp$ 平面 β，平面 $\beta\perp$ 平面 γ，则平面 $\alpha\perp$ 平面 γ.　（×）

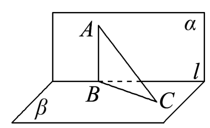
2. 已知直线 m,n 和平面 α,β，若 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=m$，$n\subset\alpha$，要使 $n\perp\beta$，则应增加的条件是（　　）

A. $m\parallel n$　　B. $n\perp m$

C. $n\parallel\alpha$　　D. $n\perp\alpha$

B　**解析**：根据平面与平面垂直的性质定理判断.已知直线 m,n 和平面 α,β，若 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=m$，$n\subset\alpha$，应增加条件 $n\perp m$，才能使 $n\perp\beta$.

3. 如图，平面 $\alpha\perp$ 平面 β，$\alpha\cap\beta=l$，点 $A\in$ 平面 α，$AB\perp l$，垂足为 B，点 $C\in$ 平面 β.若 $AB=3$，$BC=4$，则 $AC=$________.



5　**解析**：因为平面 $\alpha\perp$ 平面 β，$\alpha\cap\beta=l$，$AB\subset$ 平面 α，$AB\perp l$，

所以 $AB\perp$ 平面 β.因为 $BC\subset$ 平面 β，所以 $AB\perp BC$，

所以 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

任务型课堂

任务一　面面垂直性质定理的应用

［探究活动］

观察教室内黑板所在墙面和地面，探究下列问题.

探究 1：黑板所在平面内有直线和地面垂直吗？如果有，有多少条？

提示：有.无数条，它们彼此平行.

探究 2：黑板所在平面内所有直线都和地面垂直吗？

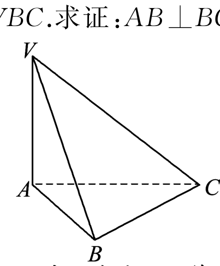
提示：不是.有的与地面垂直，有的与地面斜交，有的与地面平行，有一条在地面所在平面内.

探究 3：黑板所在平面内的直线在什么情况下可以和地面垂直？

提示：当直线垂直于黑板所在平面和地面所在平面的交线的时候.

［评价活动］

如图，已知 V 是 $\triangle ABC$ 外一点，$VA\perp$ 平面 ABC，平面 $VAB\perp$ 平面 VBC.求证：$AB\perp BC$.



证明：在平面 VAB 内，过点 A 作 $AD\perp VB$ 于点 D（图略）.因为平面 $VAB\perp$ 平面 VBC，且交线为 VB，所以 $AD\perp$ 平面 VBC，所以 $AD\perp BC$.

因为 $VA\perp$ 平面 ABC，所以 $VA\perp BC$.

因为 $AD\cap VA=A$，且 $VA\subset$ 平面 VAB，$AD\subset$ 平面 VAB，所以 $BC\perp$ 平面 VAB.

因为 $AB\subset$ 平面 VAB，所以 $AB\perp BC$.

【类题通法】

1.平面与平面垂直的转化

在运用面面垂直的性质定理时，若没有与交线垂直的直线，一般需作辅助线，基本作法是过其中一个平面内一点作交线的垂线，这样便把面面垂直问题转化为线面垂直问题，进而转化为线线垂直问题.

2.平面与平面垂直的其他性质

(1)如果两个平面垂直，那么经过第一个平面内一点垂直于第二个平面的直线在第一个平面内.

(2)如果两个平面垂直，那么与其中一个平面平行的平面垂直于另一个平面.

(3)如果两个平面垂直，那么其中一个平面的垂线平行于另一个平面或在另一个平面内.

任务二　垂直关系的综合应用

1.如图 1，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC=CD=a$，$\angle B=90°$，$\angle BCD=135°$.沿对角线 AC 将四边形折成直二面角，连接 BD，如图 2.

(1)求证：平面 $ABD\perp$ 平面 BCD；

(2)求二面角 B-AD-C 的大小.

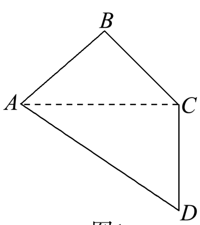


图1

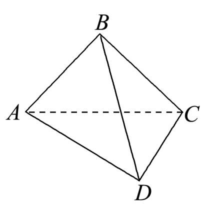


图2

(1)**证明**：因为 $\angle ACD=135°-45°=90°$，

所以 $CD\perp AC$.

已知二面角 B-AC-D 是直二面角，且平面 $ABC\cap$ 平面 $ADC=AC$，如图 1，过点 B 作 $BO\perp AC$，垂足为 O.

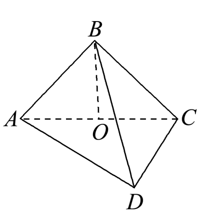


图 1

所以 $BO\perp$ 平面 ACD.

又因为 $CD\subset$ 平面 ACD，所以 $BO\perp CD$.

又因为 $AC\cap BO=O$，所以 $CD\perp$ 平面 ABC.

因为 $AB\subset$ 平面 ABC，所以 $AB\perp CD$.

因为 $\angle ABC=90°$，所以 $AB\perp BC$.

又 $BC\cap CD=C$，所以 $AB\perp$ 平面 BCD.

因为 $AB\subset$ 平面 ABD，所以平面 $ABD\perp$ 平面 BCD.

(2)**解**：如图 2 所示，由 $AB=BC$，知 O 为 AC 的中点，过点 O 作 $OF\perp AD$，垂足为 F，连接 BF，BO.

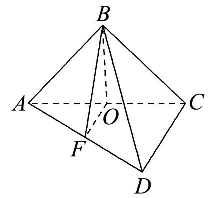


图 2

由(1)知 $BO\perp$ 平面 ACD，所以 $BO\perp AD$，$BO\perp OF$.

因为 $BO\cap OF=O$，所以 $AD\perp$ 平面 BOF.

又因为 $BF\subset$ 平面 BOF，所以 $AD\perp BF$.

所以 $\angle BFO$ 是二面角 B-AD-C 的平面角.

因为 $AB=BC=CD=a$，$\angle ABC=90°$，

所以 $AC=\sqrt{2}a$，所以 $BO=AO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

由(1)知 $AC\perp CD$，所以 $AD=\sqrt{3}a$.

因为 $\triangle AOF\backsim\triangle ADC$，所以 $\dfrac{OF}{DC}=\dfrac{AO}{AD}$，

所以 $OF=\dfrac{a\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{3}a}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}a$.

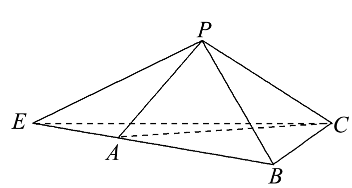
在 $\mathrm{Rt}\triangle BOF$ 中，$\tan\angle BFO=\dfrac{BO}{OF}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}a}{\dfrac{\sqrt{6}}{6}a}=\sqrt{3}$，

所以 $\angle BFO=60°$，即二面角 B-AD-C 的大小为 $60°$.

2.如图，在三棱锥 P-ABC 中，$PA\perp$ 平面 PBC，$PA=PB=2$，$PC=4$，$BC=2\sqrt{3}$.

(1)求证：平面 $PAB\perp$ 平面 ABC；

(2)点 E 为 BA 的延长线上一点，若二面角 P-EC-B 的大小为 $30°$，求 BE 的长.



(1)**证明**：因为 $PA\perp$ 平面 PBC，所以 $PA\perp PC$，$PA\perp PB$，$PA\perp BC$.

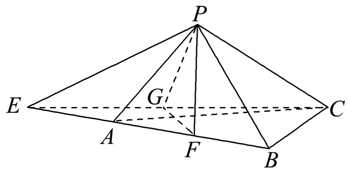
经计算，得 $AC=2\sqrt{5}$，$AB=2\sqrt{2}$.

所以 $AB^2+BC^2=AC^2$，所以 $\angle ABC=90°$，故 $BC\perp AB$.

因为 $PA\cap AB=A$，所以 $BC\perp$ 平面 PAB.

又 $BC\subset$ 平面 ABC，故平面 $PAB\perp$ 平面 ABC.

(2)**解**:如图,取 AB 的中点 F,连接 PF.



因为 $PA=PB$,所以 $PF\perp AB$.

由(1)知平面 $PAB\perp$ 平面 ABC,

又平面 $PAB\cap$ 平面 $ABC=AB$,$PF\subset$ 平面 PAB,

所以 $PF\perp$ 平面 ABC,$PF\perp EC$.

过点 F 作 $FG\perp EC$ 于点 G,连接 PG.

因为 $PF\perp EC$,$PF\cap FG=F$,

所以 $EC\perp$ 平面 FPG.

因为 $PG\subset$ 平面 FPG,所以 $EC\perp PG$.

于是 $\angle PGF$ 是二面角 P-EC-B 的平面角,

因此 $\angle PGF=30°$.

又 $PF=\sqrt{PA^2-AF^2}=\sqrt{PA^2-\left(\frac{1}{2}AB\right)^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$,$PF\perp FG$,所以 $FG=\sqrt{6}$.

设 $BE=x(x>2\sqrt{2})$,由(1)知 $BC\perp AB$,

所以 $\triangle EFG\backsim\triangle ECB$,得 $\frac{FG}{CB}=\frac{EF}{EC}$.

所以 $\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=\frac{x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+12}}$,

即 $x^2-4\sqrt{2}x-8=0$,

解得 $x=2\sqrt{2}+4$($x=2\sqrt{2}-4$ 舍去).

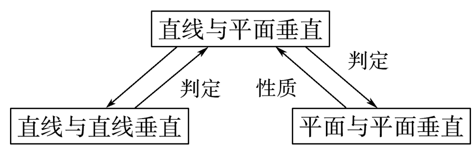
所以 $BE=2\sqrt{2}+4$.

【类题通法】

1. 在证明垂直的过程中要注意线线垂直、线面垂直、面面垂直的相互转化.因此,判定定理与性质定理的合理应用是证明垂直的关键.

2. 空间问题转化成平面问题是解决立体几何问题的一个基本原则.解题时,要通过几何图形自身的特点,如等腰、等边三角形的“三线合一”,中位线定理,菱形的对角线互相垂直等,得出一些题目所需要的条件.对于一些较复杂的问题,注意应用转化思想解决问题.

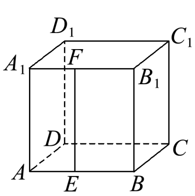
提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1. 如图,在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AB 上任取一点 E,作 $EF\perp A_1B_1$ 于点 F,则 EF 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的关系是 ( )



A.平行

B.$EF\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$

C.相交但不垂直

D.垂直

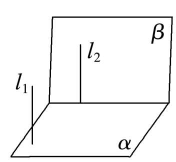
D **解析**:由于正方体中平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,所以根据面面垂直的性质定理可知,EF 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 相交且垂直.故选 D.

2. 已知平面 $\alpha\perp$ 平面 β,直线 $l\perp$ 平面 α,则 l 与 β 的位置关系是 ( )

A.垂直 B.平行

C.$l\subset\beta$ D.平行或 $l\subset\beta$

D **解析**:如图,$l/\!/\beta$ 或 $l\subset\beta$.故选 D.



3. 下列说法错误的是 ( )

A.如果平面 $\alpha\perp$ 平面 β,那么平面 α 内所有直线都垂直于平面 β

B.如果平面 $\alpha\perp$ 平面 β,那么平面 α 内一定存在直线平行于平面 β

C.如果平面 α 不垂直于平面 β,那么平面 α 内一定不存在直线垂直于平面 β

D.如果平面 $\alpha\perp$ 平面 γ,平面 $\gamma\perp$ 平面 β,$\alpha\cap\beta=l$,那么 $l\perp$ 平面 γ

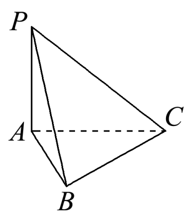
A　**解析**：A 中，举反例：教室内侧墙面与地面垂直，而侧墙面内有很多直线是不垂直于地面的，故此命题错误.

B 中，结合实物：教室的门面与地面垂直，门面的上棱所对应的直线就与地面平行，故此命题成立.

C 中，假若平面 α 内存在直线垂直于平面 β，根据面面垂直的判定定理可知两平面垂直，故此命题成立.

D 中，结合面面垂直的性质可以分别在 α，β 内作异于 l 的直线垂直于交线，再由线面垂直的性质定理可知所作的垂线平行.由线面平行的判定定理和性质定理可得直线 l 平行于所作垂线，故 $l\perp$ 平面 γ.故命题成立.

4.（多选题）如图，在三棱锥 P-ABC 中，平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，则　（　　）



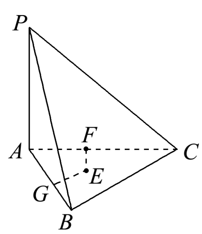
A.$AP\perp AC$

B.$AP\perp AB$

C.$AP\perp$ 平面 ABC

D.AP 与 BC 所成的角为 45°

ABC　**解析**：如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，任取一点 E，作 $EF\perp AC$ 于 F，$EG\perp AB$ 于 G.



因为平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，

平面 $PAB\cap$ 平面 $ABC=AB$，平面 $PAC\cap$ 平面 $ABC=AC$，

所以 $EG\perp$ 平面 PAB，$EF\perp$ 平面 PAC.

由于 $PA\subset$ 平面 PAB，$PA\subset$ 平面 PAC，

所以 $EG\perp PA$，$EF\perp PA$.又 $EF\cap EG=E$，

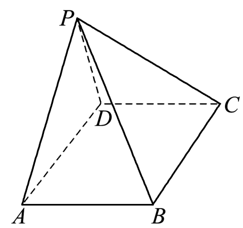
所以 $PA\perp$ 平面 ABC.

又 AB，AC，$BC\subset$ 平面 ABC，

所以 $PA\perp AC$，$PA\perp AB$，$PA\perp BC$.

故 A，B，C 正确，D 错误.

5.（多选题）如图，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，则　（　　）



A.平面 $PAB\perp$ 平面 PAD

B.平面 $PAD\perp$ 平面 PDC

C.$AB\perp PD$

D.平面 $PAD\perp$ 平面 PBC

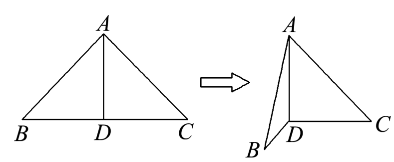
ABC　**解析**：因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 为矩形，所以 $AD\perp AB$，所以 $AB\perp$ 平面 PAD.

所以 $AB\perp PD$.又 $AB\subset$ 平面 PAB，所以平面 $PAB\perp$ 平面 PAD.故 A，C 正确.

同理可证平面 $PAD\perp$ 平面 PDC.故 B 正确.

D 显然不正确.

6. 如图，$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC=1$，将 $\triangle ABC$ 沿斜边 BC 上的高 AD 折叠，使平面 $ABD\perp$ 平面 ACD，则折叠后 $BC=$________.



1　**解析**：由题意知，$BD\perp AD$，$CD\perp AD$，

所以 $\angle BDC$ 为二面角 B-AD-C 的平面角.由于平面 $ABD\perp$ 平面 ACD，所以 $\angle BDC=90^\circ$.

连接 BC（图略），则 $BC=\sqrt{BD^2+DC^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$.

综合性·创新提升

1. 已知 m,n 是两条不重合的直线，α,β 是两个不重合的平面，下面四个结论中正确的是（　　）

A.若 $m\subset\alpha,n\subset\beta,m\perp n$，则 $\alpha\perp\beta$

B.若 $m/\!/\alpha,m\perp n$，则 $n\perp\alpha$

C.若 $m\perp n,m\perp\beta$，则 $n/\!/\beta$

D.若 $m\perp\alpha,m/\!/n,n\perp\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$

D　**解析**：A 中，$m\subset\alpha,n\subset\alpha,m\perp n$，可得 α 与 β 相交或平行，故 A 错；B 中，$m/\!/\alpha,m\perp n$，可得 $n\perp\alpha$ 或 $n\subset\alpha$ 或 $n/\!/\alpha$ 或 n 与 α 斜交，故 B 错；C 中，$m\perp n$，$m\perp\beta$，则 $n/\!/\beta$ 或 $n\subset\beta$，故 C 错；D 中，$m\perp\alpha,m/\!/n$，则 $n\perp\alpha$，又 $n\perp\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$，故 D 正确.

2. 已知平面 α,β,γ，则下列命题中正确的是（　　）

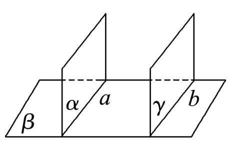
A.若 $\alpha\perp\beta,\beta\perp\gamma$，则 $\alpha/\!/\gamma$

B.若 $\alpha/\!/\beta,\beta\perp\gamma$，则 $\alpha\perp\gamma$

C.若 $\alpha\cap\beta=a,\beta\cap\gamma=b,\alpha\perp\beta,\beta\perp\gamma$，则 $a\perp b$

D.若 $\alpha\perp\beta,\alpha\cap\beta=a,a\perp b$，则 $b\perp\alpha$

B　**解析**：A 中，α,γ 可以相交；C 中，如图，a 与 b 不一定垂直；D 中，b 仅垂直于 α 内的一条直线 a，不能判定 $b\perp\alpha$.故选 B.

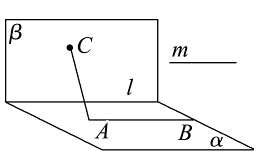


3. 已知平面 $\alpha\perp$ 平面 $\beta,\alpha\cap\beta=l$，点 $A\in\alpha,A\notin l$，直线 $AB/\!/l$，直线 $AC\perp l$，直线 $m/\!/\alpha,m/\!/\beta$，则下列四种位置关系中，不一定成立的是（　　）

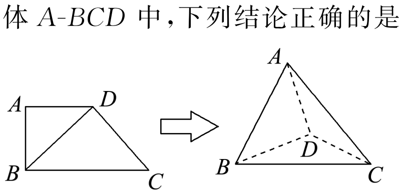
A.$AB/\!/m$　　B.$AC\perp m$

C.$AB/\!/\beta$　　D.$AC\perp\beta$

D　**解析**：如图，$AB/\!/l/\!/m$，A 正确；$AC\perp l,m/\!/l\Rightarrow AC\perp m$，B 正确；$AB/\!/l\Rightarrow AB/\!/\beta$，C 正确.故选 D.



4. 如图，四边形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC,AD=AB$，$\angle BCD=45^\circ,\angle BAD=90^\circ$，将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起，使平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，构成几何体 $A\text{-}BCD$，则在几何体 $A\text{-}BCD$ 中，下列结论正确的是（　　）



A.平面 $ABD\perp$ 平面 ABC

B.平面 $ADC\perp$ 平面 BDC

C.平面 $ABC\perp$ 平面 BDC

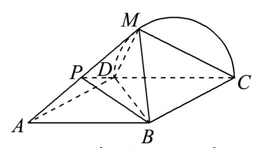
D.平面 $ADC\perp$ 平面 ABC

D　**解析**：由已知得 $BA\perp AD,CD\perp BD$，又平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，所以 $CD\perp$ 平面 ABD，从而 $CD\perp AB$，故 $AB\perp$ 平面 ADC.又 $AB\subset$ 平面 ABC，所以平面 $ABC\perp$ 平面 ADC.

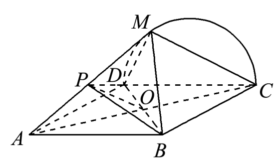
5. 如图，平行四边形 $ABCD$ 所在平面与半圆弧 $\overset{\frown}{CD}$ 所在平面垂直，M 是 $\overset{\frown}{CD}$ 上异于 C,D 的点，P 为线段 AM 的中点，$AB=\sqrt{3},BD=2,\angle ABD=30^\circ$.

求证：(1) $MC/\!/$ 平面 PBD；

(2) 平面 $AMD\perp$ 平面 BMC.



证明：(1) 如图所示，连接 AC 交 BD 于点 O，连接 PO，易得 O 为 AC 中点.



又 P 为线段 AM 的中点，则 $OP/\!/CM$.

又 $OP\subset$ 平面 $PBD,MC\not\subset$ 平面 PBD，则 $MC/\!/$ 平面 PBD.

(2) 由余弦定理，得 $AD^2=AB^2+DB^2-2AB\cdot DB\cdot\cos\angle ABD$，

即 $AD^2=1$，则 $AD^2+AB^2=BD^2$，则 $AB\perp AD$，

所以平行四边形 $ABCD$ 为矩形，则 $AD\perp DC$.

又平面 $ABCD\perp$ 平面 CMD，平面 $ABCD\cap$ 平面 $CMD=CD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，

则 $AD\perp$ 平面 CMD.又 $CM\subset$ 平面 CMD，则 $AD\perp CM$.

又 M 是半圆弧 $\overset{\frown}{CD}$ 上的点，则 $CM\perp MD$.

又 $MD\cap AD=D$，$MD,AD\subset$ 平面 AMD，则 $CM\perp$ 平面 AMD.

又 $CM\subset$ 平面 BMC，则平面 $AMD\perp$ 平面 BMC.

单元活动构建

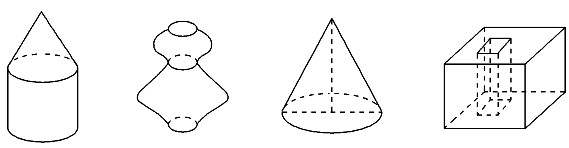
任务一　空间几何体的结构特征

1. 紧扣结构特征是判断的关键，熟悉空间几何体的结构特征，依据条件构建几何模型，在条件不变的情况下，变换模型中的位置关系或增加线、面等基本元素，然后再依据题意判定.

2. 通过举反例对结构特征进行辨析，即要说明一个命题是错误的，只要举出一个反例即可.

「任务达标」

1. 下列几何体不是旋转体的是　　　　(D)

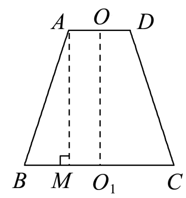


A　　　　B　　　　C　　　　D

2. 已知圆台两底面半径分别是 2 cm 和 5 cm，母线长是$3\sqrt{10}$ cm，则它的轴截面的面积是________.

63 cm^2　**解析**：画出轴截面，如图，过点 A 作 $AM\perp BC$ 于点 M，则 $BM=5-2=3$(cm)，$AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=9$(cm)，

所以 $S_{四边形ABCD}=\dfrac{(4+10)\times 9}{2}=63(cm^2)$.



【规律方法】

1. 多面体是由平面多边形围成的，这里的多边形包括它内部的平面部分.

2. 多面体至少有四个面.一个多面体由几个面围成就称为几面体，如四面体、五面体……

3. 平面图形绕定直线旋转形成旋转体，这条定直线可以是平面图形的边所在的直线，也可以不是，但定直线一定与平面图形在同一平面内.

任务二　空间几何体的表面积和体积

1. 空间几何体表面积的求法

(1)多面体的表面积是各个面的面积之和.求组合体的表面积时应注意各部分的组合方式.

(2)求旋转体的表面积时应注意其侧面展开图的应用.

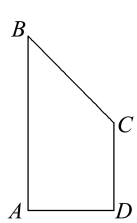
2. 空间几何体体积问题的常见类型及解题策略

(1)若所给定的几何体是可直接用公式求解的柱体、锥体、台体或球体，则可直接利用公式进行求解.

(2)若所给定的几何体的体积不能直接利用公式得出，则常用转换法、分割法、补形法等方法进行求解.

「任务达标」

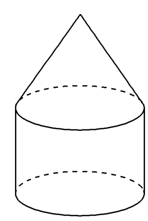
如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AB\perp AD$，$AB=2$，$CD=AD=1$.将直角梯形 $ABCD$ 绕边 AB 所在的直线旋转一周，则旋转形成的几何体的表面积为　　(　　)



A.$\sqrt{2}\pi$　　　　B.$\sqrt{5}\pi$

C.$(3+\sqrt{5})\pi$　　　　D.$(3+\sqrt{2})\pi$

D　**解析**：旋转形成的几何体的直观图如图所示，该几何体是由同底的一个圆锥和一个圆柱组成.



因为圆锥的底面半径为 1，高为 1，母线长为$\sqrt{2}$，所以圆锥的侧面积为 $\pi\times 1\times\sqrt{2}=\sqrt{2}\pi$.

因为圆柱的底面半径为 1，高为 1，所以圆柱的侧面积为$2\pi\times 1\times 1=2\pi$，底面积为 $\pi\times 1^2=\pi$，

所以旋转形成的几何体的表面积为 $S=\pi+2\pi+\sqrt{2}\pi=(3+\sqrt{2})\pi$.

【规律方法】

求旋转体表面积的要点

(1)因为轴截面联系着母线、底面半径、高等元素，因此处理好轴截面图形中的边角关系是解题的关键.

(2)对于圆台问题，要重视“还台为锥”的思想方法.

(3)在计算圆柱、圆锥、圆台的侧面积或表面积时，应根据已知条件先计算出它们的母线长和底面半径，而求解这些未知量常常需要列方程.

任务三 与球有关的切、接问题

与球相关问题的解题策略

(1)作适当的截面(如轴截面等)时,对于球内接长方体、正方体,则截面一要过球心,二要过长方体或正方体的两条体对角线,才有利于解题.

(2)对于"内切"和"外接"等问题,首先要弄清几何体之间的相互关系,主要是指特殊的点、线、面之间的关系,然后把相关的元素放到这些关系中来解决.

「任务达标」

1.表面积为 16π 的球的内接正方体的体积为 ( )

A.8　B.$\frac{16}{9}$　C.$\frac{64\sqrt{3}}{9}$　D.16

C **解析**:设表面积为 16π 的球的半径为 r,则 $4\pi r^2=16\pi$,解得 $r=2$.设球内接正方体的棱长为 a,则 $\sqrt{3}a=2r$,所以 $a=\frac{4}{\sqrt{3}}$.所以球内接正方体的体积 $V=a^3=\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{64\sqrt{3}}{9}$.故选 C.

2.将棱长为 2 的正方体木块削成一个体积最大的球,则该球的体积为 ( )

A.$\frac{4\pi}{3}$　B.$\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$　C.$\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$　D.$\frac{\pi}{6}$

A **解析**:由题意知,此球是正方体的内切球,根据其几何特征知,此球的直径与正方体的棱长相等,故球的直径为 2,半径为 1,其体积 $V=\frac{4}{3}\times\pi\times1^3=\frac{4\pi}{3}$.故选 A.

【规律方法】

1.球的截面的特点

(1)球的截面均为圆.

(2)利用球半径、截面圆半径、球心到截面的距离构建直角三角形是把空间问题转化为平面问题的主要途径.

(3)球心和截面圆圆心的连线垂直于截面.

2.与球有关的组合体一般有两类,一是球内接组合体,在此类组合体中,球心与多面体顶点的连线是半径;二是球外切组合体,在这一类组合体中,球心与各切点的连线是半径.在解答与球有关的组合体问题时,要注意这些半径的应用.

任务四 点、线、面的位置关系

证明共点、共线、共面的方法

(1)三点共线

证明空间三点共线,通常证明这些点都在两个面的交线上,即先确定某两点在某两个平面的交线上,再证第三点是两个平面的公共点,则此点必在两个平面的交线上.

(2)点线共面

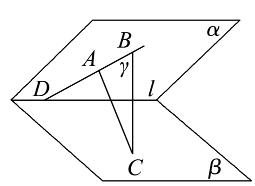
证明点线共面,一般有两种证法:一是由某些元素确定一个平面,然后证明其余元素在这个平面内;二是分别由不同元素确定若干个平面,然后证明这些平面重合.

(3)三线共点

证明三线共点,先证两条直线交于一点,再证明第三条直线经过这点,把三点共线转化为点在直线上.

「任务达标」

1.如图,$\alpha\cap\beta=l$,$A\in\alpha$,$B\in\alpha$,$C\in\beta$,$C\notin l$,直线 $AB\cap l=D$,过 A,B,C 三点确定的平面为 γ,则平面 γ,β 的交线必过 ( )



A.点 A

B.点 B

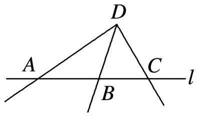
C.点 C,但不过点 D

D.点 C 和点 D

D **解析**:A,B,C 确定的平面 γ 与直线 BD 和点 C 确定的平面重合,故 $C,D\in\gamma$,且 $C,D\in\beta$,故 C,D 在 γ 和 β 的交线上.

2. 已知 $A\in l,B\in l,C\in l,D\notin l$，如图所示.

求证：直线 AD,BD,CD 共面.



证明：因为 $D\notin l$，所以 l 与 D 可以确定平面 α.

因为 $A\in l$，所以 $A\in\alpha$.

又 $D\in\alpha$，所以 $AD\subset\alpha$. 同理，$BD\subset\alpha$，$CD\subset\alpha$，

所以 AD,BD,CD 在同一平面 α 内，即它们共面.

【规律方法】

1. 空间两条直线位置关系的判定方法

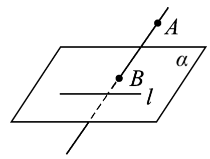
(1)两条直线平行或相交可用平面几何的方法去判定.

(2)两条直线是异面直线可用下列方法去判定：

①定义法：由定义判断两条直线不可能在同一平面内；

②反证法：排除两条直线共面（平行或相交）的可能；

③利用重要结论：连接平面内一点与平面外一点的直线和这个平面内不经过此点的直线是异面直线. 如图，$A\notin\alpha,B\in\alpha,l\subset\alpha,B\notin l\Rightarrow AB$ 与 l 是异面直线.



2. 长方体是一个特殊的图形，当点、直线、平面关系比较复杂时，可以寻找长方体作为载体，将它们置于其中，空间的点、直线与平面的位置关系便可以在这个模型中得以清晰地呈现.

任务五　空间平行关系

1. 平行问题的转化关系

$$\text{线线平行}\ \underset{\text{性质}}{\overset{\text{判定}}{\rightleftarrows}}\ \text{线面平行}\ \underset{\text{性质}}{\overset{\text{判定}}{\rightleftarrows}}\ \text{面面平行}\quad(\text{面面平行}\xrightarrow{\text{性质}}\text{线线平行})$$

2. 直线与平面平行的主要判定方法

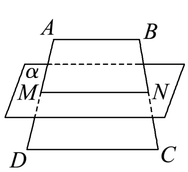
(1)定义法；(2)判定定理；(3)平面与平面平行的性质.

3. 平面与平面平行的主要判定方法

(1)定义法；(2)判定定理；(3)平面平行的传递性；(4) $a\perp\alpha,a\perp\beta\Rightarrow\alpha\parallel\beta$.

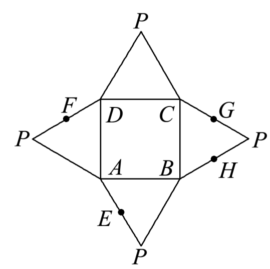
「任务达标」

1. 如图所示，四边形 $ABCD$ 是梯形，$AB\parallel CD$，且 $AB\parallel$ 平面 α，AD,BC 与平面 α 分别交于点 M,N，且点 M 是 AD 的中点，$AB=4,CD=6$，则 $MN=$ ________.

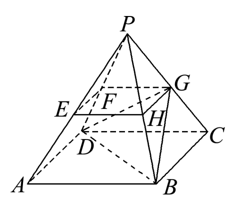


5　**解析**：因为 $AB\parallel$ 平面 α，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $\alpha=MN$，所以 $AB\parallel MN$. 又点 M 是 AD 的中点，所以 MN 是梯形 $ABCD$ 的中位线，故 $MN=5$.

2. 如图是一几何体的平面展开图，其中四边形 $ABCD$ 为正方形，E,F,G,H 分别为 PA,PD,PC,PB 的中点. 关于此几何体中的位置关系，给出下面四个结论：①平面 $EFGH\parallel$ 平面 $ABCD$；②直线 $PA\parallel$ 平面 BDG；③直线 $EF\parallel$ 平面 PBC；④直线 $EF\parallel$ 平面 BDG. 其中正确结论的序号是________.



①②③　**解析**：作出立体图形如图.



可知平面 $EFGH\parallel$ 平面 $ABCD$；$PA\parallel$ 平面 BDG；$EF\parallel$ 平面 PBC；直线 EF 与平面 BDG 不平行.

【规律方法】

1. 解决线面平行问题的关键点

(1)利用判定定理判定直线与平面平行，关键是找出平面内与已知直线平行的直线. 可先直观判断平面内是否已有，若没有，则需作出该直线，常考虑作三角形的中位线、平行四边形的对边或过已知直线作一平面找其交线.

(2)线面平行的性质定理是空间图形中产生线线平行的主要途径，常用于作截面.

2. 证明线线平行常用三角形的中位线定理、平行四边形的性质、平行线分线段成比例定理、基本事实 4 等.

任务六　空间垂直关系

1.空间中垂直关系的相互转化

$$\boxed{\text{线线垂直}}\underset{}{\overset{\text{判定}}{\rightleftarrows}}\boxed{\text{线面垂直}}\underset{\text{性质}}{\overset{\text{判定}}{\rightleftarrows}}\boxed{\text{面面垂直}}$$

2.判定线面垂直的常用方法

(1)利用线面垂直的判定定理.

(2)利用“两平行线中的一条与平面垂直,则另一条也与这个平面垂直”.

(3)利用“一条直线垂直于两平行平面中的一个,则与另一个也垂直”.

(4)利用面面垂直的性质.

3.判定线线垂直的方法

(1)平面几何中证明线线垂直的方法.

(2)线面垂直的定义:$a\perp\alpha,b\subset\alpha\Rightarrow a\perp b$.

(3)线面垂直的结论:$a\perp\alpha,b/\!/\alpha\Rightarrow a\perp b$.

4.判定面面垂直的方法

(1)利用定义:两个平面相交,所成的二面角是直二面角.

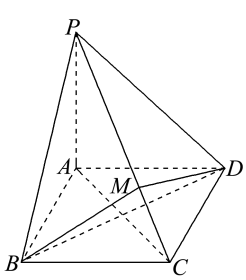
(2)判定定理:$a\subset\alpha,a\perp\beta\Rightarrow\alpha\perp\beta$.

「任务达标」

在四棱锥 P-$ABCD$ 中,四边形 $ABCD$ 为菱形,$PA=AB=2,PB=2\sqrt{2},\angle ABC=60°$,且平面 $PAC\perp$平面 $ABCD$.

(1)证明:$PA\perp$平面 $ABCD$;

(2)若 M 为 PC 上一点,且 $PC\perp BM$,求二面角 M-BD-A 的余弦值.



(1)**证明**:因为四边形 $ABCD$ 为菱形,所以$BD\perp AC$.

因为平面 $PAC\perp$平面 $ABCD$,平面 $PAC\cap$平面 $ABCD=AC$,$BD\subset$平面 $ABCD$,

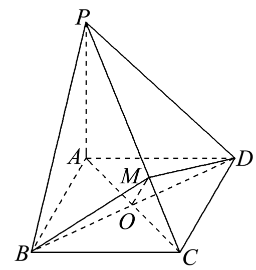
所以 $BD\perp$平面 PAC.

因为 $PA\subset$平面 PAC,所以 $BD\perp PA$.

因为 $PA=AB=2,PB=2\sqrt{2}$,所以 $PA^2+AB^2=PB^2$,即$\triangle PAB$ 为直角三角形,且 $AB\perp PA$.

又 $AB,BD\subset$平面 $ABCD,AB\cap BD=B$,所以 $PA\perp$平面 $ABCD$.

(2)**解**:设 $AC\cap BD=O$,连接 OM,如图所示.



由(1)知 $BD\perp$平面 PAC,$OM\subset$平面 PAC,所以 $OM\perp BD$.

又 $AO\perp BD$,所以$\angle AOM$ 为二面角 M-BD-A 的平面角.

因为 $BD\perp$平面 PAC,$PC\subset$平面 PAC,所以 $BD\perp PC$.

又 $BM\perp PC,BM\cap BD=B,BM,BD\subset$平面 BDM,所以 $PC\perp$平面 BDM.

又 $OM\subset$平面 BDM,所以 $OM\perp PC$.

由(1)知 $PA\perp$平面 $ABCD$,$AC\subset$平面 $ABCD$,所以 $PA\perp AC$.在菱形 $ABCD$ 中,$AB=BC,\angle ABC=60°$,所以$\triangle ABC$ 为等边三角形,所以 $AB=AC$.

在 $Rt\triangle PAC$ 中,$PA=AC=2$,所以$\angle PCA=45°$,则$\angle MOC=45°$,

故 $\cos\angle AOM=\cos(180°-\angle COM)=\cos 135°=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

所以二面角 M-BD-A 的余弦值为$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

【规律方法】

1.确定二面角的平面角的方法

(1)定义法:在二面角的棱上找一个特殊点,在两个半平面内分别过该点作垂直于棱的射线.

(2)垂面法:过棱上一点作棱的垂直平面,该平面与二面角的两个面产生交线,这两条交线所成的角,即为二面角的平面角.

(3)线面垂直法:该法就是利用线面垂直来寻找二面角的平面角,由一个半平面内异于棱上的点 A 向另一半平面作垂线,垂足为 B,由点 B 向二面角的棱作垂线,垂足为 O,连接 AO,则$\angle AOB$ 为二面角的平面角(或其补角).

2.求二面角大小的步骤

作 — 作出平面角
↓
证 — 证明所作的角满足定义,即为所求二面角的平面角
↓
求 — 将作出的角放在三角形中,计算出平面角的大小

第八章质量评估

（时间：120 分钟，分值：150 分）

一、单项选择题(本题包括 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的).

1.过长方体一个顶点的三条棱的长分别为 1，2，3，则长方体的一条体对角线长为　　(B)

A.$2\sqrt{3}$　B.$\sqrt{14}$　C.5　D.6

2.将一个等腰梯形绕着它的较长的底边所在直线旋转一周，所得的几何体包括　　(D)

A.一个圆台、两个圆锥

B.两个圆台、一个圆柱

C.两个圆台、一个圆柱

D.一个圆柱、两个圆锥

3.已知平面 α 和直线 l，则 α 内至少有一条直线与 l　　(C)

A.平行　B.相交　C.垂直　D.异面

4.下列四个命题中，错误的是　　(　　)

A.若直线 a，b 互相平行，则直线 a，b 确定一个平面

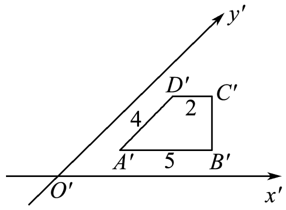
B.若四点不共面，则这四点中任意三点都不共线

C.若两条直线没有公共点，则这两条直线是异面直线

D.两条异面直线不可能垂直于同一个平面

C　**解析**：由两条平行直线确定一个平面，故 A 正确；这四点为一个三棱锥的四个顶点，其中任意三点都不共线，故 B 正确；若两条直线没有公共点，则这两条直线异面或平行，故 C 错误；根据线面垂直的性质定理知，垂直于同一平面的两条直线平行，即不可能异面，故 D 正确.

5.水平放置的四边形 $ABCD$ 的直观图 $A'B'C'D'$ 如图所示，则原四边形 $ABCD$ 的面积是　　(　　)



A.$\sqrt{14}$　B.$10\sqrt{2}$　C.28　D.$14\sqrt{2}$

C　**解析**：因为原图形中与 x，y 轴平行的直线，在斜二测画法中对应的直线与 x'，y' 轴平行，且原图形中与 x 轴平行的线段，在直观图中长度不变，与 y 轴平行的线段，在直观图中长度变为原来的一半，所以由直观图得原图形是上底长为 2，下底长为 5，高为 8 的直角梯形，所以原四边形 $ABCD$ 的面积 $S=\frac{(2+5)\times 8}{2}=28$.故选 C.

6.用一个平行于圆锥底面的平面截圆锥，截得圆台上、下底面半径的比是 1∶4，且该圆台的母线长为 9，则截去的小圆锥的母线长为　　(　　)

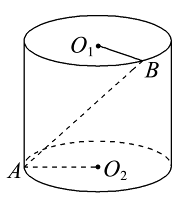
A.$\frac{9}{4}$　B.3　C.12　D.36

B　**解析**：根据题意，设圆台的上、下底面的半径分别为 r，R，圆锥的母线长为 L，截去的小圆锥的母线长为 l，因为圆台的上、下底面互相平行，

所以 $\frac{l}{L}=\frac{r}{R}=\frac{1}{4}$，可得 $L=4l$.因为圆台的母线长为 9，可得 $L-l=9$，

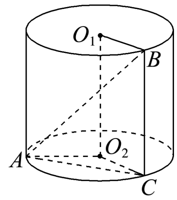
所以 $3l=9$，解得 $l=3$，所以截去的小圆锥的母线长为=3.

7.已知圆柱 O_1O_2 的底面半径和母线长均为 1，A，B 分别为圆 O_2，圆 O_1 上的点.若 $AB=2$，则异面直线 O_1B，O_2A 所成的角为　　(　　)



A.$\frac{\pi}{6}$　B.$\frac{\pi}{4}$　C.$\frac{\pi}{3}$　D.$\frac{\pi}{2}$

C　**解析**：如图，点 B 在下底面的射影为圆 O_2 上的点 C，连接 BC，AC，O_2C，易知 $O_1B\parallel O_2C$.



在 Rt△ABC 中，$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{3}$，

在△O_2AC 中，根据余弦定理的推论，

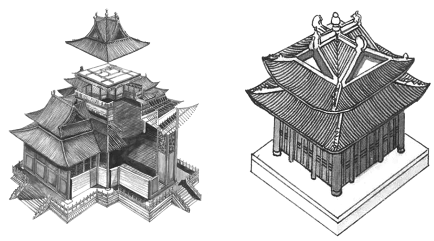
得 $\cos\angle AO_2C=\frac{AO_2^2+CO_2^2-AC^2}{2AO_2\cdot CO_2}=-\frac{1}{2}$.

因为 $\angle AO_2C\in(0,\pi)$，故 $\angle AO_2C=\frac{2\pi}{3}$，

故异面直线 O_1B，O_2A 所成的角为 $\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$.故选 C.

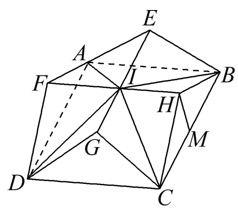
8.(2022・天津)如图，“十字歇山”是由两个直三棱柱重叠后的景象，重叠后的底面为正方形，直三棱柱

的底面是顶角为 $120°$,腰为 3 的等腰三角形,则该几何体的体积为 ( )



A.23 B.24 C.26 D.27

D **解析**:该几何体由直三棱柱 $AFD\text{-}BHC$ 及直三棱柱 $DGC\text{-}AEB$ 组成,作 $HM\perp CB$ 于点 M,如图.



因为 $CH=BH=3$,$\angle CHB=120°$,所以 $CM=BM=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,$HM=\frac{3}{2}$.

因为重叠后的底面为正方形,所以 $AB=BC=3\sqrt{3}$.

在直棱柱 $AFD\text{-}BHC$ 中,$AB\perp$ 平面 BHC,$HM\subset$ 平面 BHC,则 $AB\perp HM$.

由 $AB\cap BC=B$,可得 $HM\perp$ 平面 $ADCB$.

设重叠后 EG 与 FH 的交点为 I,

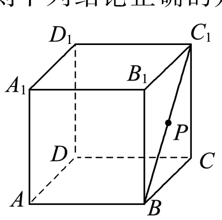
则 $V_{I\text{-}BCDA}=\frac{1}{3}\times3\sqrt{3}\times3\sqrt{3}\times\frac{3}{2}=\frac{27}{2}$,$V_{AFD\text{-}BHC}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times\frac{3}{2}\times3\sqrt{3}=\frac{81}{4}$,

则该几何体的体积为 $V=2V_{AFD\text{-}BHC}-V_{I\text{-}BCDA}=2\times\frac{81}{4}-\frac{27}{2}=27$.

故选 D.

二、多项选择题(本题包括 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的得 2 分).

9. 如图,点 P 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的面对角线 BC_1 上运动,则下列结论正确的是 ( )



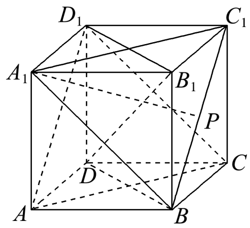
A.三棱锥 $A\text{-}D_1PC$ 的体积不变

B.$A_1P\parallel$ 平面 ACD_1

C.$DP\perp BC_1$

D.平面 $PDB_1\perp$ 平面 ACD_1

ABD **解析**:如图,



对于 A,由题意知 $AD_1\parallel BC_1$,从而 $BC_1\parallel$ 平面 AD_1C,

故 BC_1 上任意一点到平面 AD_1C 的距离均相等.

因为 $\triangle ACD_1$ 的面积为定值,

所以以 P 为顶点,$\triangle AD_1C$ 为底面的三棱锥的体积为定值,则三棱锥 $A\text{-}D_1PC$ 的体积不变,故 A 正确.

对于 B,连接 A_1B,A_1C_1,因为 $A_1C_1\parallel AC$,所以 $A_1C_1\parallel$ 平面 AD_1C,由 A 知 $AD_1\parallel BC_1$,$BC_1\parallel$ 平面 AD_1C.而 $BC_1\cap A_1C_1=C_1$,

所以平面 $A_1BC_1\parallel$ 平面 ACD_1.又 $A_1P\subset$ 平面 A_1BC_1,

所以 $A_1P\parallel$ 平面 ACD_1,

故 B 正确.

对于 C,由于 $DC\perp$ 平面 BCC_1B_1,$BC_1\subset$ 平面 BCC_1B_1,所以 $DC\perp BC_1$.

若 $DP\perp BC_1$,又 $DP\cap DC=D$,则 $BC_1\perp$ 平面 DCP,

故 $BC_1\perp PC$,则 P 为 BC_1 的中点,与 P 为动点矛盾,故 C 错误.

对于 D,因为 $BB_1\perp$ 平面 $ABCD$,$AC\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $BB_1\perp AC$.在正方形 $ABCD$ 中,$BD\perp AC$,

而 $BD\cap BB_1=B$,BD,$BB_1\subset$ 平面 BB_1D_1D,则 $AC\perp$ 平面 BB_1D_1D.

因为 $DB_1\subset$ 平面 BB_1D_1D,则 $DB_1\perp AC$.同理 $DB_1\perp AD_1$,

又 $AD_1\cap AC=A$,AD_1,$AC\subset$ 平面 ACD_1,

所以 $DB_1\perp$ 平面 ACD_1.又 $DB_1\subset$ 平面 PDB_1,所以平面 $PDB_1\perp$ 平面 ACD_1,故 D 正确.

10. 三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的各顶点都在同一球面上,$PC\perp$ 底面 ABC.若 $PC=AC=1$,$AB=2$,且 $\angle BAC=60°$,则下列结论正确的是 ( )

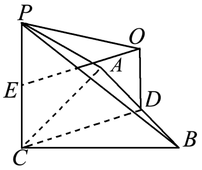
A.$\triangle PAB$ 是钝角三角形

B.此球的表面积等于 5π

C.$BC\perp$ 平面 PAC

D.三棱锥 $A\text{-}PBC$ 的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

BC　**解析**：如图，



在底面三角形 ABC 中，由 $AC=1$，$AB=2$，$\angle BAC=60^\circ$.

利用余弦定理可得 $BC=\sqrt{1^2+2^2-2\times1\times2\times\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$，

所以 $AC^2+BC^2=AB^2$，即 $AC\perp BC$.

由于 $PC\perp$ 平面 ABC，AC，$BC\subset$ 平面 ABC，所以 $PC\perp AC$，$PC\perp BC$.

因为 $PC\cap AC=C$，PC，$AC\subset$ 平面 PAC，所以 $BC\perp$ 平面 PAC，故 C 正确.

所以 $PB=\sqrt{PC^2+BC^2}=2=AB$.

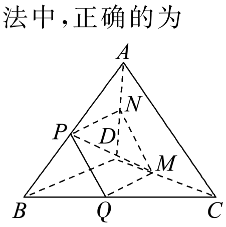
由于 $PA^2=PC^2+AC^2=2$，$PB^2+AB^2-PA^2>0$，即 $\angle PBA$ 为锐角，

所以 $\triangle PAB$ 是顶角为锐角的等腰三角形，故 A 错误.

取 AB 中点 D，则 D 为 $\triangle BAC$ 的外心，可得 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 1.

设三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的外接球的球心为 O，连接 OP，则 $OP=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，即三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的外接球的半径 $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以三棱锥的外接球的表面积等于 $4\pi\times\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=5\pi$，故 B 正确. $V_{P\text{-}ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\times1=\frac{\sqrt{3}}{6}$，故 D 错误. 故选 BC.

11. 如图，在四面体 $ABCD$ 中，截面 $PQMN$ 是正方形，则在下列说法中，正确的为　　（　　）



A. $AC\perp BD$

B. $AC\,/\!/$ 截面 $PQMN$

C. $AC=BD$

D. 异面直线 PM 与 BD 所成的角为 45°

ABD　**解析**：因为截面 $PQMN$ 是正方形，所以 $PQ\,/\!/\,MN$，$QM\,/\!/\,PN$.

因为 $MN\subset$ 平面 DAC，$PQ\not\subset$ 平面 DAC，所以 $PQ\,/\!/$ 平面 DAC.

又 $PQ\subset$ 平面 BAC，平面 $BAC\cap$ 平面 $DAC=AC$，所以 $PQ\,/\!/\,AC\,/\!/\,MN$.

因为 $PQ\subset$ 平面 $PQMN$，$AC\not\subset$ 平面 $PQMN$，

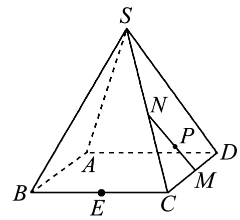
所以 $AC\,/\!/$ 平面 $PQMN$，故 B 正确. 同理可证，$PN\,/\!/\,BD\,/\!/\,QM$.

因为 $PN\perp NM$，所以 $AC\perp BD$，故 A 正确. 又因为 $\angle PMQ=45^\circ$.

所以异面直线 PM 与 BD 所成的角为 45°，

故 D 正确. AC 与 BD 长度不确定，故选 ABD.

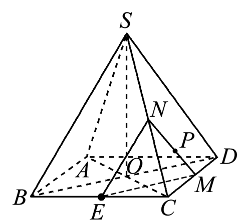
12. 如图，在正四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 中，E，M，N 分别是 BC，CD，SC 的中点，动点 P 在线段 MN 上运动时，下列四个结论中恒成立的为　　（　　）



A. $EP\perp AC$　　B. $EP\,/\!/\,BD$

C. $EP\,/\!/$ 平面 SBD　　D. $EP\perp$ 平面 SAC

AC　**解析**：如图所示，连接 AC，BD 相交于点 O，连接 EM，EN，SO.



由正四棱锥 $S\text{-}ABCD$，可得 $SO\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $SO\perp AC$，$AC\perp BD$.

因为 $SO\cap BD=O$，所以 $AC\perp$ 平面 SBD.

因为 E，M，N 分别是 BC，CD，SC 的中点，

所以 $EM\,/\!/\,BD$，$MN\,/\!/\,SD$. 而 $EM\cap MN=M$，$BD\cap SD=D$，

所以平面 $EMN\,/\!/$ 平面 SBD，所以 $AC\perp$ 平面 EMN. 因为 $EP\subset$ 平面 EMN，所以 $AC\perp EP$，故 A 正确.

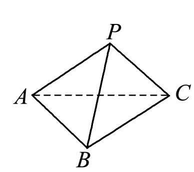
由异面直线的定义可知 EP 与 BD 是异面直线，不可能有 $EP\,/\!/\,BD$，故 B 不正确.

已证平面 $EMN\,/\!/$ 平面 SBD，所以 $EP\,/\!/$ 平面 SBD，故 C 正确.

易知 $EM\perp$ 平面 SAC，若 $EP\perp$ 平面 SAC，则 $EP\,/\!/\,EM$，与 $EP\cap EM=E$ 相矛盾，因此当点 P 与点 M 不重合时，EP 与平面 SAC 不垂直，故 D 不正确. 故选 AC.

三、填空题（本题包括 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）.

13. 如图，在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，$PA=PB=PC=2$，$\angle APB=\angle BPC=\angle APC=30^\circ$，一只蚂蚁从点 A 出发沿三棱锥的表



面绕一周,再回到点 A,则蚂蚁经过的最短路程是______.

$2\sqrt{2}$ **解析**:将三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的侧面沿 PA 剪开,再展开,得到五边形 $PABCA'$,如图 1.

因为在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中,$PA=PB=PC=2$,$\angle APB=\angle BPC=\angle APC=30°$,

所以在图 1 中有 $\angle A'PA=3\times30°=90°$.

连接 AA',

在 $\mathrm{Rt}\triangle AA'P$ 中,$AA'=\sqrt{PA^2+PA'^2}=2\sqrt{2}$.

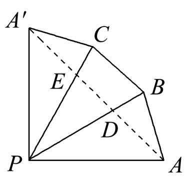


图1

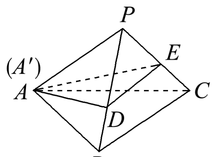


图2

如图 2,再将此展开图围成三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的侧面,得到折线 $AD\text{-}DE\text{-}EA$.

因为 $AA'=AD+DE+EA'$,所以折线 $AD\text{-}DE\text{-}EA$ 为最短路线.

因此蚂蚁从点 A 出发,回到点 A 的最短路程为 $2\sqrt{2}$.

14. 唐朝的狩猎景象浮雕银杯如图 1 所示.其浮雕临摹了国画、漆绘和墓室壁画,体现了古人的智慧与工艺.它的盛酒部分可以近似地看作是半球与圆柱的组合体(假设内壁表面光滑,忽略杯壁厚度),如图 2 所示.已知球的半径为 R,酒杯内壁表面积为 $\frac{14}{3}\pi R^2$,设酒杯上部分(圆柱)的体积为 V_1,下部分(半球)的体积为 V_2,则 $\frac{V_1}{V_2}=$______


图1

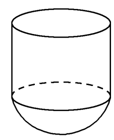


图2

2 **解析**:设酒杯上部分(圆柱)的高为 h,

因为球的半径为 R,所以酒杯下部分(半球)的表面积为 $2\pi R^2$.

由酒杯内壁表面积为 $\frac{14}{3}\pi R^2$,得圆柱侧面积为 $\frac{14}{3}\pi R^2-2\pi R^2=\frac{8}{3}\pi R^2$,

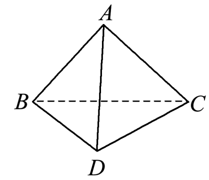
又酒杯上部分(圆柱)的侧面积为 $2\pi R\times h$,由 $2\pi Rh=\frac{8}{3}\pi R^2$,解得 $h=\frac{4}{3}R$.

酒杯下部分(半球)的体积 $V_2=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{2}{3}\pi R^3$,

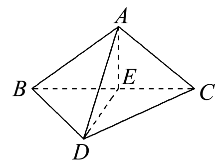
酒杯上部分(圆柱)的体积 $V_1=\pi R^2\times\frac{4}{3}R=\frac{4}{3}\pi R^3$,所以 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{2}{3}\pi R^3}=2$.

15. 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=90°$,点 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面外一点,且 $PA=PB=PC$,则平面 PBC 与平面 ABC 的位置关系是<u>垂直</u>,直线 PA 与平面 ABC 所成角的大小为<u>$60°$</u>.

16. 如图,平面 $ABC\perp$ 平面 BCD,$\angle BAC=\angle BDC=90°$,且 $AB=AC=a$,则 $AD=$______.



a **解析**:取 BC 的中点 E,连接 AE,DE.因为 $AB=AC=a$,



所以 $AE\perp BC$.又平面 $ABC\perp$ 平面 BCD,

平面 $ABC\cap$ 平面 $BCD=BC$,

所以 $AE\perp$ 平面 BCD.

因为 $DE\subset$ 平面 BCD,所以 $AE\perp DE$.

计算得 $BC=\sqrt{2}a$,

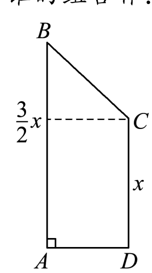
$AE=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,$DE=\frac{1}{2}BC=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

所以 $AD=\sqrt{AE^2+DE^2}=a$.

四、解答题(本题包括 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤).

17.(10 分)若直角梯形的一个底角为 $45°$,下底长为上底长的 $\frac{3}{2}$.将这个梯形绕下底所在直线旋转一周所成的旋转体的表面积是 $(5+\sqrt{2})\pi$,求这个旋转体的体积.

解:如图,在梯形 $ABCD$ 中,$AB/\!/CD$,$\angle A=90°$,$\angle B=45°$,梯形绕边 AB 所在直线旋转一周后形成一个圆柱和一个圆锥的组合体.



设 $CD=x$,则 $AB=\frac{3}{2}x$,

则 $AD=AB-CD=\frac{x}{2}$,$BC=\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

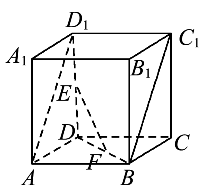
所以 $S_{表}=S_{圆柱底}+S_{圆柱侧}+S_{圆锥侧}=\pi\cdot AD^2+2\pi\cdot AD\cdot CD+\pi\cdot AD\cdot BC=\pi\cdot\frac{x^2}{4}+2\pi\cdot\frac{x}{2}\cdot x+\pi\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}x=\frac{5+\sqrt{2}}{4}\pi x^2$.

所以$\frac{5+\sqrt{2}}{4}\pi x^2=(5+\sqrt{2})\pi$，

所以 $x=2$.

所以旋转体的体积 $V=\pi\cdot AD^2\cdot CD+\frac{\pi}{3}\cdot AD^2\cdot(AB-CD)=\pi\times1^2\times2+\frac{\pi}{3}\times1^2\times(3-2)=\frac{7}{3}\pi$.

18.(12分)如图，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为2的正方形，E，F 分别为线段 DD_1，BD 的中点.求证：$EF\parallel$平面 ABC_1D_1.



证明：连接 BD_1(图略).

因为在 $\triangle DD_1B$ 中，E，F 分别是 D_1D，DB 的中点，

所以 EF 是 $\triangle DD_1B$ 的中位线，

所以 $EF\parallel BD_1$.

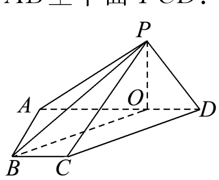
因为 $BD_1\subset$平面 ABC_1D_1，$EF\not\subset$平面 ABC_1D_1，

所以 $EF\parallel$平面 ABC_1D_1.

19.(12分)如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 $PAD\perp$底面 $ABCD$，侧棱 $PA\perp PD$，底面 $ABCD$ 是直角梯形，其中 $BC\parallel AD$，$\angle BAD=90°$，$AD=3BC$，O 是 AD 上一点.

(1)若 $CD\parallel$平面 PBO，试指出点 O 的位置；

(2)求证：平面 $PAB\perp$平面 PCD.



(1)**解**：因为 $CD\parallel$平面 PBO，$CD\subset$平面 $ABCD$，且平面 $ABCD\cap$平面 $PBO=BO$，所以 $BO\parallel CD$.

又 $BC\parallel AD$，所以四边形 $BCDO$ 为平行四边形，

则 $BC=DO$.而 $AD=3BC$，

所以 $AD=3OD$，即点 O 是靠近点 D 的线段 AD 的一个三等分点.

(2)**证明**：因为平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$，$AB\subset$平面 $ABCD$，且 $AB\perp AD$，

所以 $AB\perp$平面 PAD.

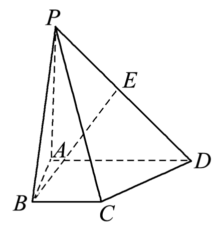
又 $PD\subset$平面 PAD，所以 $AB\perp PD$.又 $PA\perp PD$，$AB\cap PA=A$，AB，$PA\subset$平面 PAB，所以 $PD\perp$平面 PAB.

又 $PD\subset$平面 PCD，所以平面 $PAB\perp$平面 PCD.

20.(12分)如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是直角梯形，$\angle BAD=90°$，$AD\parallel BC$，$AB=BC=1$，$AD=2$，$PA\perp$底面 $ABCD$，PD 与底面成 $45°$ 角，点 E 是 PD 的中点.

(1)求证：$BE\perp PD$；

(2)求二面角 $P-CD-A$ 的余弦值.



(1)**证明**：连接 AE(图略).

因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，

所以 $\angle PDA$ 是 PD 与平面 $ABCD$ 所成的角，

所以 $\angle PDA=45°$，所以 $PA=DA$.

又因为点 E 是 PD 的中点，所以 $AE\perp PD$.

因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，$AB\subset$平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp AB$.

因为 $\angle BAD=90°$，所以 $AB\perp DA$.

又因为 $PA\cap AD=A$，所以 $AB\perp$平面 PAD，

因为 $PD\subset$平面 PAD，

所以 $AB\perp PD$.

又因为 $AB\cap AE=A$，所以 $PD\perp$平面 ABE.

因为 $BE\subset$平面 ABE，所以 $BE\perp PD$.

(2)**解**：连接 AC，取 AD 中点 F，连接 CF(图略)，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB=BC=1$，$AD=2$，

所以 $AC=\sqrt{2}$.

因为 $\angle BAD=90°$，$AB=BC=1$，则四边形 $ABCF$ 是正方形，$\angle ACF=45°$.又 $AD=2$，所以 $FD=CF=1$，$\angle FCD=45°$，所以 $\angle ACD=90°$，

所以 $AC\perp CD$.

又因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，$CD\subset$平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp CD$.

因为 $AC\cap PA=A$，所以 $CD\perp$平面 PAC.

又因为 $PC\subset$平面 PAC，所以 $PC\perp CD$，

所以 $\angle PCA$ 为二面角 $P-CD-A$ 的平面角.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PCA$ 中，$PC=\sqrt{PA^2+AC^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$.

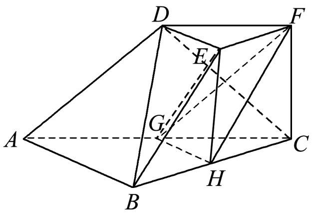
所以 $\cos\angle PCA=\frac{AC}{PC}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以所求的二面角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

21.(12分)如图，在三棱台 $DEF-ABC$ 中，$AB=2DE$，G，H 分别为 AC，BC 的中点.

(1)求证：$BD\parallel$平面 FGH；

(2)若 $CF\perp BC$，$AB\perp BC$，求证：平面 $BCD\perp$平面 EGH.



证明:(1)因为 $DEF\text{-}ABC$ 是三棱台,且 $AB=2DE$,

所以 $BC=2EF$,$AC=2DF$.

因为 G,H 分别是 AC,BC 的中点,所以 $GH\parallel AB$.

因为 $AB\not\subset$ 平面 FGH,$GH\subset$ 平面 FGH,

所以 $AB\parallel$ 平面 FGH.

因为 $EF\parallel BH$ 且 $EF=BH$,

所以四边形 $BHFE$ 是平行四边形,所以 $BE\parallel HF$.

因为 $BE\not\subset$ 平面 FGH,$HF\subset$ 平面 FGH,

所以 $BE\parallel$ 平面 FGH.

又因为 $AB\cap BE=B$,所以平面 $ABED\parallel$ 平面 FGH.

因为 $BD\subset$ 平面 $ABED$,所以 $BD\parallel$ 平面 FGH.

(2)因为 H 是 BC 的中点,

所以 $HC=\frac{1}{2}BC=EF$.

又 $HC\parallel EF$,所以四边形 $HCFE$ 是平行四边形,

所以 $HE\parallel CF$.

因为 $CF\perp BC$,所以 $HE\perp BC$.

因为 $GH\parallel AB$,$AB\perp BC$,所以 $GH\perp BC$.

因为 $GH\cap HE=H$,GH,$HE\subset$ 平面 EGH,所以 $BC\perp$ 平面 EGH.

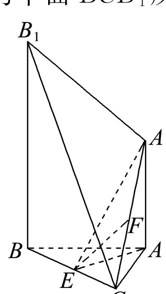
又因为 $BC\subset$ 平面 BCD,所以平面 $BCD\perp$ 平面 EGH.

22.(12分)如图,已知 $AA_1\perp$ 平面 ABC,$BB_1\parallel AA_1$,$AB=AC=3$,$BC=2\sqrt{5}$,$AA_1=\sqrt{7}$,$BB_1=2\sqrt{7}$,点 E 和 F 分别为 BC 和 A_1C 的中点.

(1)求证:$EF\parallel$ 平面 A_1B_1BA;

(2)求证:平面 $AEA_1\perp$ 平面 BCB_1;

(3)求直线 A_1B_1 与平面 BCB_1 所成角的大小.



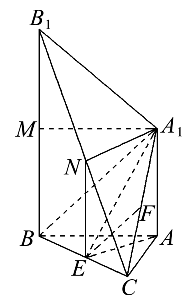
(1)**证明**:如图,连接 A_1B.在 $\triangle A_1BC$ 中,

因为 E 和 F 分别是 BC 和 A_1C 的中点,

所以 $EF\parallel BA_1$.

又 $EF\not\subset$ 平面 A_1B_1BA,$BA_1\subset$ 平面 A_1B_1BA,

所以 $EF\parallel$ 平面 A_1B_1BA.



(2)**证明**:因为 $AB=AC$,E 为 BC 的中点,所以 $AE\perp BC$.

因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC,$BB_1\parallel AA_1$,所以 $BB_1\perp$ 平面 ABC,从而 $BB_1\perp AE$.

又 $BC\cap BB_1=B$,所以 $AE\perp$ 平面 BCB_1.

又 $AE\subset$ 平面 AEA_1,所以平面 $AEA_1\perp$ 平面 BCB_1.

(3)**解**:取 BB_1 的中点 M 和 B_1C 的中点 N,连接 A_1M,A_1N,NE.

因为 N 和 E 分别为 B_1C 和 BC 的中点,

所以 $NE\parallel B_1B$,$NE=\frac{1}{2}B_1B$,

故 $NE\parallel A_1A$ 且 $NE=A_1A$,所以四边形 AA_1NE 为平行四边形.

所以 $A_1N\parallel AE$,且 $A_1N=AE$.

因为 $AE\perp$ 平面 BCB_1,所以 $A_1N\perp$ 平面 BCB_1,

从而 $\angle A_1B_1N$ 为直线 A_1B_1 与平面 BCB_1 所成的角.

在 $\triangle ABC$ 中,可得 $AE=2$,所以 $A_1N=AE=2$.

因为 $BM\parallel AA_1$,$BM=AA_1$,所以四边形 AA_1MB 为平行四边形.

所以 $A_1M\parallel AB$,$A_1M=AB$.由 $AB\perp BB_1$,得 $A_1M\perp BB_1$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1MB_1$ 中,可得 $A_1B_1=\sqrt{B_1M^2+A_1M^2}=4$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1NB_1$ 中,$\sin\angle A_1B_1N=\frac{A_1N}{A_1B_1}=\frac{1}{2}$,

因此 $\angle A_1B_1N=30^\circ$.所以直线 A_1B_1 与平面 BCB_1 所成的角为 30°.

第九章　统计

9.1　随机抽样

9.1.1　简单随机抽样

第1课时　简单随机抽样

学习任务目标

1.了解全面调查与抽样调查的异同.(数学抽象)
2.通过实例,了解简单随机抽样的含义及解决问题的过程.(数学抽象)
3.掌握简单随机抽样中的抽签法、随机数法的一般步骤.(数据分析)

问题式预习

知识点一　全面调查和抽样调查

调查方式	全面调查	抽样调查
定义	对每一个调查对象都进行调查的方法,称为全面调查,又称普查	根据一定目的,从总体中抽取一部分个体进行调查,并以此为依据对总体的情况作出估计和推断的调查方法,称为抽样调查
相关概念	总体:调查对象的全体. 个体:组成总体的每一个调查对象	样本:从总体中抽取的那部分个体. 样本量:样本中包含的个体数

[微训练]

某学校为了解高一800名新入学学生的数学学习水平,从中随机抽取100名学生的中考数学成绩进行分析.在这个问题中,下列说法正确的是　(　　)

A.800名学生是总体　B.100名学生是样本

C.每名学生是个体　D.样本量是100

D　**解析**:据题意,总体是800名新入学学生的中考数学成绩,样本是抽取的100名新入学学生的中考数学成绩,个体是每名学生的中考数学成绩,样本量是100,故只有D项正确.

知识点二　简单随机抽样的概念

放回简单随机抽样	不放回简单随机抽样
一般地,设一个总体含有N(N为正整数)个个体,从中逐个抽取$n(1\leqslant n<N)$个个体作为样本	
如果抽取是放回的,且每次抽取时总体内的各个个体被抽到的概率都相等,我们把这样的抽样方法叫做放回简单随机抽样	如果抽取是不放回的,且每次抽取时总体内未进入样本的各个个体被抽到的概率都相等,我们把这样的抽样方法叫做不放回简单随机抽样
简单随机抽样:放回简单随机抽样和不放回简单随机抽样统称为简单随机抽样.通过简单随机抽样获得的样本称为简单随机样本	

[微训练]

判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)简单随机抽样可以是有放回的抽样.　(√)

(2)简单随机抽样中每个个体被抽到的机会相等.　(√)

(3)从20 000只灯泡中抽取200只进行使用寿命测试,适合用简单随机抽样.　(×)

(4)从20件玩具中一次性抽出3件进行质量检验是简单随机抽样.　(×)

知识点三 实现简单随机抽样的方法

1.抽签法

先把总体中的个体进行编号,然后把所有编号写在外观、质地等无差别的小纸片(也可以是卡片、小球等)上作为号签,并将这些小纸片放在一个不透明的盒里,充分搅拌.最后从盒中不放回地逐个抽取号签,使与号签上的编号对应的个体进入样本,直到抽足样本所需要的个体数.

2.随机数法

(1)先把总体中的个体进行编号,用随机数工具产生与总体中个体数量相等的整数随机数,把产生的随机数作为抽中的编号,并剔除重复的编号,直到抽足样本所需要的个体数.

(2)产生随机数的方法:①用随机试验生成随机数;②用信息技术生成随机数.

[微训练]

1.抽签法确保样本代表性的关键是 ( )

A.制签 B.搅拌均匀

C.逐一抽取 D.抽取不放回

B **解析**:若样本具有很好的代表性,则每一个个体被抽取的机会相等,故需要对号签搅拌均匀.

2.使用简单随机抽样从 1 000 件产品中抽出 50 件进行某项检查,合适的抽样方法是________.

随机数法 **解析**:由于总体量相对较大,样本量较小,故采用随机数法较为合适.

任务型课堂

任务一 简单随机抽样的判断

1.在下列 5 个抽样中,简单随机抽样的个数是 ( )

①从无数个个体中抽取 50 个个体作为样本;

②仓库中有 1 万支奥运火炬,从中一次性抽取 100 支火炬进行质量检查;

③某连队从 200 名党员官兵中,挑选出 50 名最优秀的官兵参加抗震救灾工作;

④一彩民选号,从装有 36 个大小、形状都相同的号签的盒子中不放回地抽出 6 个号签;

⑤箱子里共有 100 个零件,从中选出 10 个零件进行质量检验,在抽样操作中,从中任意取出 1 个零件进行质量检验后,再把它放回箱子里.

A.0 B.1 C.2 D.3

C **解析**:根据简单随机抽样的特点逐个判断.①不是简单随机抽样,因为简单随机抽样要求被抽取样本的总体的个数是有限的.②不是简单随机抽样,虽然“一次性抽取”和“逐个抽取”不影响个体被抽到的可能性,但简单随机抽样要求的是“逐个抽取”.③不是简单随机抽样,因为 50 名官兵是从中挑出来的,是最优秀的,每个个体被抽到的可能性不同,不符合简单随机抽样中“等可能抽样”的要求.④是简单随机抽样,因为总体中的个体数是有限的,并且是从总体中逐个进行抽取的,是不放回、等可能的抽样.⑤是简单随机抽样.综上,④⑤是简单随机抽样.

2.下列问题中,最适合用简单随机抽样方法抽样的是 ( )

A.某电影院有 32 排座位,每排有 40 个座位,座位号是 1～40,有一次报告会坐满了听众,报告会结束后为听取意见,要留下 32 名听众进行座谈

B.从 10 台冰箱中抽出 3 台进行质量检测

C.某学校有在编人员 160 人,其中行政人员 16 人,教师 112 人,后勤人员 32 人,教育部门为了解在编人员对学校机构改革的意见,要从中抽取一个容量为 20 的样本

D.某乡耕地有山地 800 公顷,丘陵 1 200 公顷,平地 2 400 公顷,洼地 400 公顷,现抽取耕地 48 公顷来估计全乡耕地平均每公顷的产量

B **解析**:A 项的总体量较大,用简单随机抽样法比较麻烦;B 项的总体量较少,样本量也较少,适合用简单随机抽样法;C 项由于学校各类人员对这一问题的看法可能差异很大,不宜采用简单随机抽样法;D 项的总体量较大,且各类耕地的差别很大,也不宜采用简单随机抽样法.

【类题通法】

简单随机抽样必须具备下列 4 个特点

(1)被抽取样本的总体中的个体数 N 是有限的.

(2)抽取的样本是从总体中逐个抽取的.

(3)简单随机抽样是一种放回或不放回抽样.

(4)简单随机抽样是一种等可能的抽样.

如果 4 个特点有一个不满足,就不是简单随机抽样.

任务二 抽签法的应用

[探究活动]

某班班长为了从班内 50 人中选出一人参加春季游园活动,他将全班同学进行编号,然后将编号置于某一不透明纸箱内,搅匀后,请学习委员从中任意抽出一个,确定出参加游园的人选.

探究 1:班长的做法公平吗?

提示:公平.

探究 2:如果班长在编号时发生失误,将 11 写了两遍,那么此抽取对于同学来说公平吗?对谁最有利?

提示:不公平,对编号为 11 的同学最有利.

[评价活动]

某市环保局有各县报送的空气质量材料 15 份.为了了解全市的空气质量,要从中抽取一个容量为 5 的样本,试确定用何种方法抽取,请具体实施操作.

解:总体量小,样本量也小,可用抽签法.

步骤如下:

(1)将 15 份材料用随机方式编号,号码是 01,02,03,…,15;

(2)将 15 个号码分别写在 15 张相同的小纸条上,揉成小团,制成号签;

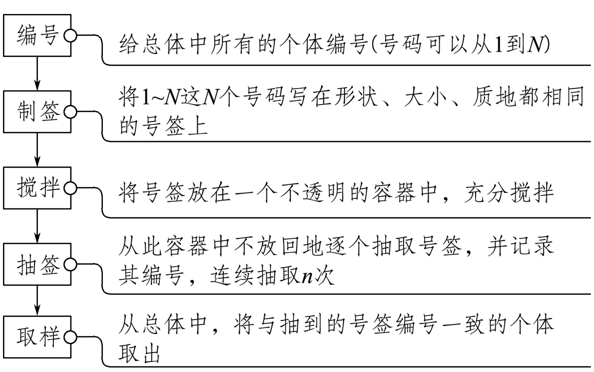
(3)把号签放入一个不透明的容器中,搅拌均匀;

(4)从容器中不放回地逐个抽取 5 个号签,并记录上面的号码;

(5)找出与所抽号码对应的 5 份材料,组成样本.

【类题通法】

抽签法的五个步骤



任务三 随机数法及其综合应用

[探究活动]

为了检验某种产品的质量,决定从 120 件产品中抽取 10 件进行检验.检查人员先将 120 件产品标号为 001,002,003,…,120.然后从随机数表中的某一行、某一列按某一方向读取,凡不在 001~120 中的数跳过去不读,前面已经读过的数也跳过去不读,按照此规则直到取足样本为止.

探究 1:这种取法合理吗?

提示:合理.

探究 2:当总体中的个体数较多时,适合选用这种随机数法抽取,还是选用抽签法抽取?

提示:当总体中的个体数较多时,应当选用随机数法抽取,这样可以节约大量的人力和制作号签的成本与精力.

[评价活动]

某公司要检查某个时间段生产的 500 克/袋的袋装牛奶的质量是否达标,现从 500 袋牛奶中抽取 10 袋进行检验.

(1)利用随机数法抽取样本时,应如何操作?

(2)如果用随机试验生成部分随机数如下所示,据此写出应抽取的袋装牛奶的编号.

162,277,943,949,545,354,821,737,932,354,873,520,964,384,263,491,648,642,175,331,572,455,068,877,047,447,672,172,065,025,834,216,337,663,013,785,916,955,567,199,810,507,175,128,673,580,667.

解:(1)第一步,将 500 袋牛奶编号为 001,002,…,500;

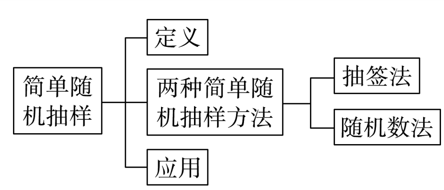
第二步,用随机数工具产生 1~500 范围内的随机数;

第三步,把产生的随机数作为抽中的编号,使编号对应的袋装牛奶进入样本;

第四步,重复上述过程,直到产生不同的编号个数等于样本所需要的数量.

(2)应抽取的袋装牛奶的编号为 162,277,354,384,263,491,175,331,455,068.

▶ 提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1.(多选题)从某年级的 500 名学生中抽取 60 名学生进行体重的统计分析,下列说法正确的是 ( )

A.500 名学生的体重是总体

B.每个学生是个体

C.抽取的 60 名学生的体重是一个样本

D.抽取的 60 名学生的体重是样本量

AC **解析**:由题意可知在此抽样调查中,总体是 500 名学生的体重,所以 A 正确;个体是每个学生

的体重,所以B错误;样本是抽取的60名学生的体重,所以C正确;其中样本容量为60,所以D错误.故选AC.

2.下面的问题可以用普查的方式进行调查的是 ( )

A.检验一批钢材的抗拉强度

B.检验海水中微生物的含量

C.调查某小组10名成员的业余爱好

D.检验一批汽车的使用寿命

C **解析**:A不能用普查的方式调查,因为这种试验具有破坏性;B用普查的方式无法完成;C可以用普查的方式进行调查;D中试验具有破坏性,且需要耗费大量的时间,普查在实际生产中无法实现.故选C.

3.用抽签法进行抽样有以下几个步骤:①制签;②抽签;③将签摇匀;④编号;⑤将抽取的号码对应的个体取出,组成样本.这些步骤的正确顺序为________.(填序号)

④①③②⑤ **解析**:由抽签法的步骤知,正确顺序为④①③②⑤.

综合性·创新提升

1.用简单随机抽样方法从含有10个个体的总体中抽取一个容量为3的样本,其中某一个体a"第一次被抽到"的可能性、"第二次被抽到"的可能性分别是 ( )

A.$\frac{1}{10},\frac{1}{10}$　　B.$\frac{3}{10},\frac{1}{5}$

C.$\frac{1}{5},\frac{3}{10}$　　D.$\frac{3}{10},\frac{3}{10}$

A **解析**:简单随机抽样中每个个体被抽取的机会均等,都为$\frac{1}{10}$.

2.下列调查适合用抽样调查的是________.(填序号)

①了解某电视机厂生产的电视机的质量;

②语文老师要检查某个学生作文中的错别字;

③某部门要了解某湖的水质情况;

④调查某市高中生对健康知识的了解情况.

①③④ **解析**:①某电视机厂生产的电视机很多,普查费时费力,且具有破坏性,应采用抽样调查;②错别字是必须纠正的,应采用普查;③湖水不能全部分析,应采用抽样调查;④高中生较多,调查结果不需要非常精确,应采用抽样调查.

3.一名交警在路上随机观测了6辆车的行驶速度,然后做出了一份报告,调查结果如下表:

车序号	1	2	3	4	5	6
速度/(km/h)	66	65	71	54	69	58

(1)交警采取的是________调查方式.

(2)为了强调调查目的,这次调查的样本是____________,个体是________.

(1)抽样 (2)6辆车的行驶速度 每一辆车的行驶速度

解析:(1)此种调查是抽样调查,调查对象的指标是车的行驶速度.

(2)这次调查的样本是6辆车的行驶速度,个体是每一辆车的行驶速度.

4.选择合适的抽样方法抽样,并写出抽样过程.

(1)现有一批电子元件600个,从中抽取6个进行质量检测;

(2)现有甲厂生产的30个篮球,其中一箱21个,另一箱9个,抽取3个入样.

解:(1)总体中个体数较大,用随机数法.

第一步,给元件编号为001,002,003,…,099,100,…,600;

第二步,用随机数工具产生1~600范围内的整数随机数,把产生的随机数作为抽中的编号,使与编号对应的电子元件进入样本;

第三步,依次操作,如果生成的随机数有重复,则剔除并重新产生随机数,直到样本量达到6;

第四步,以上这6个号码对应的元件就是要抽取的对象.

(2)总体中个体数较小,用抽签法.

第一步,将30个篮球编号为01,02,…,30;

第二步,将以上30个编号分别写在外观、质地等无差别的小纸条上,制成号签;

第三步,把号签放入一个不透明的盒子中,充分搅拌;

第四步,从盒子中不放回地逐个抽取3个号签,并记录上面的编号;

第五步,找出和所得编号对应的篮球.

第 2 课时　平均数

学习任务目标

1.了解总体均值、样本均值的定义和计算公式.(数学运算)

2.能用样本均值估计总体均值.(数据分析)

问题式预习

知识点　总体均值和样本均值

1.总体均值:一般地,总体中有 N 个个体,它们的变量值分别为 Y_1, Y_2, …, Y_N, 则称 $\overline{Y}=\frac{Y_1+Y_2+\cdots+Y_N}{N}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_i$ 为总体均值,又称总体平均数.

2.总体均值加权平均数的形式:如果总体的 N 个变量值中,不同的值共有 $k(k\leqslant N)$个,不妨记为 Y_1, Y_2,…,Y_k,其中 Y_i 出现的频数为 $f_i(i=1,2,\cdots,k)$,则总体均值还可以写成加权平均数的形式 $\overline{Y}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}f_iY_i$.

3.如果从总体中抽取一个容量为 n 的样本,它们的变量值分别为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$,则称 $\overline{y}=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$ 为样本均值,又称样本平均数.

[微训练]

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)样本均值就是总体均值.　(×)

(2)样本量越大,样本均值越接近总体均值.　(√)

(3)一个样本数据为 13,14,19,x,23,27,28,31,若其平均数为 22,则 $x=21$.　(√)

(4)若两组数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的平均数分别为 $\overline{x}$ 和 $\overline{y}$,则数据 $x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n$ 的平均数是 $\overline{x}+\overline{y}$.　(√)

2.用抽签法抽取的一个样本量为 5 的样本,它们的变量值分别为 2,4,5,7,9,则该样本的平均数为　(　　)

A.4.5　　B.4.8

C.5.4　　D.6

C　**解析**:$\overline{x}=\frac{2+4+5+7+9}{5}=5.4$.

任务型课堂

任务一　总体均值、样本均值的计算

[探究活动]

某歌手参加比赛,9 名评委的评分结果为 87,91,90,87,90,94,99,$90+x$,91,其中 $90+x$ 是模糊成绩.

探究 1:若去掉一个最高分,去掉一个最低分,剩余 7 个分数的平均分为 91,则 $90+x$ 是多少?

提示:去掉的最低分为 87,最高分为 99,剩余 7 个数为 87,90,90,91,91,$90+x$,94,由 7 个剩余分数的平均分为 91,得 $87+90+90+91+91+90+x+94=91\times7$,解得 $x=4$,所求的分数是 94.

探究 2:将探究 1 中剩余的 7 个评分结果记为 $x_1,x_2,\cdots,x_7$,则 $2x_1-90,2x_2-90,\cdots,2x_7-90$ 的平均数是多少?

提示:$\frac{1}{7}\times(2x_1-90+2x_2-90+\cdots+2x_7-90)$

$=\frac{1}{7}\times[2(x_1+x_2+\cdots+x_7)-90\times7]$

$=2\times\frac{1}{7}\times(x_1+x_2+\cdots+x_7)-90=2\times\frac{1}{7}\times91\times7-90=2\times91-90=92$.

探究 3:根据探究 2,想一想:若 x_1, x_2, x_3,…, x_n 的平均数为 $\overline{x}$,则 ax_1+b, ax_2+b, ax_3+b,…, ax_n+b 的平均数是多少?

提示:$a\overline{x}+b$.

[评价活动]

随机抽取的某商场 4 月某 5 天的营业额(单位:万元)分别为 3.4,2.9,3.0,3.1,2.6,则这个商场 4 月的营业额大约是多少万元?

解:$\overline{x}=\frac{1}{5}\times(3.4+2.9+3.0+3.1+2.6)=3$,

所以这个商场 4 月的营业额大约是 $3\times30=90$(万元).

【类题通法】

利用公式求平均数的注意点

平均数反映了一组数据的整体水平,平均数的大小与一组数据中每个数据均有联系,任何一个数据的变动都会引起平均数的变动.所以求平均数时,要将每个数据准确代入.

任务二 用样本均值估计总体均值

1.用简单随机抽样的方法抽取某小区20户家庭的日均用电量(单位:千瓦时),统计如下:

日均用电量/千瓦时	4	5	6	7	8	10
户数	1	2	4	6	5	2

根据样本数据,估计该小区200户家庭日均用电量的平均数 ( )

A.一定为7千瓦时

B.一定高于8千瓦时

C.一定低于7千瓦时

D.约为7千瓦时

D **解析**:因为抽取的20户家庭的日均用电量的平均数为$\frac{4\times1+5\times2+6\times4+7\times6+8\times5+10\times2}{20}=7$(千瓦时),所以可以估计该小区200户家庭的日均用电量的平均数约为7千瓦时.故选D.

2.某灯泡厂为检测一批灯泡的使用寿命,从中随机抽查了20只灯泡,它们的使用寿命变量值(单位:h)如下所示:

624 847 1 205 698 1 845 2 457 618

1 325 1 908 2 426 2 018 2 248 2 465

2 576 987 737 1 628 1 998 2 543 2 007

由这些样本数据,估计这批灯泡的平均使用寿命.

解:抽出的20只灯泡的使用寿命组成一个样本,可以用样本的平均使用寿命来估计这批灯泡的平均使用寿命.

根据题中数据,可得样本的平均值为1 658 h.

因此可以估计这批灯泡的平均使用寿命是1 658 h.

【类题通法】

1.计算数据的加权平均数,需理解组中值的意义和数据的"权"的意义.

2.用样本的平均数估计总体的平均数,体现了重要的统计思想.

提质归纳

总体均值

样本均值

用样本均值估计总体均值的方法

课后素养评价

基础性·能力运用

1.从某项综合能力测试成绩表中抽取100人的成绩,统计如下,则这100人的成绩的平均数为 ( )

成绩/分	1	2	3	4	5
人数	20	10	40	10	20

A.3 B.2.5 C.3.5 D.2.75

A **解析**:设所求平均数为$\overline{x}$,则$\overline{x}=\frac{1\times20+2\times10+3\times40+4\times10+5\times20}{100}=3$.

2.若数据$x_1,x_2,\cdots,x_6$的平均数为5,则数据$2x_1-1$,$2x_2-1,\cdots,2x_6-1$的平均数为 ( )

A.10 B.9 C.8 D.6

B **解析**:由已知条件得$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_6}{6}=5$,

则新数据的平均数为

$\frac{(2x_1-1)+(2x_2-1)+\cdots+(2x_6-1)}{6}$

$=\frac{2(x_1+x_2+\cdots+x_6)-6}{6}$

$=2\times\frac{x_1+x_2+\cdots+x_6}{6}-1$

$=2\times5-1=9$.故选B.

3.某工厂抽取50个机械零件检验其直径大小,得到如下数据:

直径/cm	12	13	14
频数	12	34	4

估计这50个零件的直径为______cm.

12.84 **解析**:设这50个零件的直径的平均数为$\overline{y}$,则$\overline{y}=\frac{12\times12+13\times34+14\times4}{50}=12.84$(cm).

4.某展览馆在全年中随机抽取的22天里每天进馆参观的人数如下:180,158,170,185,189,180,184,185,140,179,192,185,190,165,182,170,190,183,175,180,185,147.可估计全年中该展览馆平均每天参观的人数为________.

177　**解析**：根据题意，可用样本均值近似估计总体均值 $\overline{x}=\frac{1}{22}\times(180+158+170+185+189+180+184+185+140+179+192+185+190+165+182+170+190+183+175+180+185+147)=177$.

综合性·创新提升

1. 一位学生在计算 20 个数据的平均数时，错把 68 输成 86，那么由此求出的平均数与实际平均数的差为（　　）

A. -0.9　　B. 0.9

C. 3.4　　D. 4.3

B　**解析**：设 20 个数分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_{20}$，且 x_{20} 就是输错的数据，则求出的平均数为 $\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{19}+86}{20}$，实际平均数 $\overline{x'}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{19}+68}{20}$，所以求出的平均数与实际平均数的差 $\overline{x}-\overline{x'}=\frac{86-68}{20}=0.9$.

2. 在一次射击训练中，某小组的成绩如下表所示：

环数	7	8	9
人数	2		3

已知该小组的平均成绩为 8.1 环，那么成绩为 8 环的人数是（　　）

A. 5　　B. 6

C. 4　　D. 7

A　**解析**：设成绩为 8 环的人数为 x，则有 $\frac{7\times2+8x+9\times3}{x+2+3}=8.1$，解得 $x=5$. 故选 A.

3. 某种作物甲、乙两个品种连续 5 年每年的单位面积平均产量如下（单位：t/km^2）：

品种	第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年
甲	9.8	9.9	10.1	10	10.2
乙	9.4	10.3	10.8	9.7	9.8

则甲、乙两个品种 5 年的单位面积年平均产量分别为____________.

$10\ t/km^2$，$10\ t/km^2$　**解析**：$\overline{x}_{甲}=\frac{1}{5}\times(9.8+9.9+10.1+10+10.2)=10(t/km^2)$，

$\overline{x}_{乙}=\frac{1}{5}\times(9.4+10.3+10.8+9.7+9.8)=10(t/km^2)$，

即甲、乙两个品种 5 年的单位面积年平均产量都为 $10\ t/km^2$.

4. 为了保护学生的视力，教室内的日光灯在使用一段时间后必须更换，已知某校使用的 100 只日光灯在必须换掉前的使用天数见下表：

天数	165	195	225	255	285	315	345	375
灯管数	1	11	18	20	25	16	7	2

估计这种日光灯的平均使用天数为________.（结果取整数）

268　**解析**：样本平均数为 $\frac{1}{100}\times(165\times1+195\times11+225\times18+255\times20+285\times25+315\times16+345\times7+375\times2)=267.9\approx268$（天）.

估计这种日光灯的平均使用天数约为 268.

9.1.2 分层随机抽样

学习任务目标

1.理解分层随机抽样的特点和适用范围.(数学抽象)
2.了解分层随机抽样的必要性,掌握各层样本量比例分配的方法.(数据分析)
3.结合具体实例,掌握分层随机抽样的样本均值的计算.(数据分析)

问题式预习

知识点 分层随机抽样

1.分层随机抽样的定义

一般地,按一个或多个变量把总体划分成若干个子总体,每个个体属于且仅属于一个子总体,在每个子总体中独立地进行简单随机抽样,再把所有子总体中抽取的样本合在一起作为总样本,这样的抽样方法称为分层随机抽样,每一个子总体称为层.

2.比例分配

在分层随机抽样中,如果每层样本量都与层的大小成比例,那么称这种样本量的分配方式为比例分配.

3.分层随机抽样的均值

在分层随机抽样中,如果层数分为2层,第1层和第2层包含的个体数分别为M和N,抽取的样本量分别为m和n,第1层和第2层的样本平均数分别为$\overline{x}$和$\overline{y}$,则样本平均数$\overline{\omega}=\frac{M}{M+N}\overline{x}+\frac{N}{M+N}\overline{y}=\frac{m}{m+n}\overline{x}+\frac{n}{m+n}\overline{y}$.

[微训练]

判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)分层随机抽样中最核心的数据就是抽样比$k=\frac{样本量}{总体量}$. (√)

(2)分层随机抽样时,虽然从各层抽取的样本量不一定一样,但是对每一个个体都是公平的. (√)

(3)分层随机抽样有时也需要剔除若干个个体,对这些个体来说是不公平的. (×)

(4)在统计实践中选择哪种抽样方法关键是看总体量的大小. (×)

任务型课堂

任务一 对分层随机抽样概念的理解

1.在100个零件中,有一级品20个,二级品30个,三级品50个,从中抽取20个作为样本.

方法1:采用简单随机抽样的方法,将零件编号00,01,02,…,99,用抽签法抽取20个.

方法2:采用分层随机抽样的方法,从一级品中随机抽取4个,从二级品中随机抽取6个,从三级品中随机抽取10个.

对于上述问题,下列说法正确的是 ( )

①不论采用哪种抽样方法,这100个零件中每一个零件被抽到的可能性都是$\frac{1}{5}$;

②采用不同的方法,这100个零件中每一个零件被抽到的可能性各不相同;

③在上述两种抽样方法中,方法2抽到的样本比方法1抽到的样本更能反映总体特征.

A.①② B.①③

C.①②③ D.②③

B **解析**:根据两种抽样方法的特点知,不论哪种抽样,总体中每个个体入样的可能性都相等,都是$\frac{n}{N}$,故①正确,②错误.由于总体中有差异较明显的三个层(一级品、二级品和三级品),故方法2抽到的样本更有代表性,③正确.故选B.

2.为了了解某地区的中小学生视力情况,拟从该地区的中小学生中抽取部分学生进行调查,事先已了解到该地区小学、初中、高中三个学段学生的视力情况有较大差异,而男女生视力情况差异不大.在下面的抽样方法中,最合理的抽样方法是 ( )

A.随机数法

B.按性别分层随机抽样

C.按学段分层随机抽样

D.抽签法

C **解析**:该地区小学、初中、高中三个学段学生的视力情况有较大差异,而男女生视力情况差异不大,因此按学段分层随机抽样抽出的样本更具有代表性,比较合理.故选C.

【类题通法】

分层随机抽样的特点

(1)适用于总体由有明显差异的几部分组成的情况.

(2)样本能更充分地反映总体的情况.

(3)等可能抽样,每个个体被抽到的可能性都相等.

任务二　用分层随机抽样抽取样本

[探究活动]

某地区有高中生7 100人,初中生10 900人,小学生11 000人.当地教育部门为了了解本地区中小学生的近视率及其形成原因,要从本地区的中小学生中抽取1%的学生进行调查.

探究1:你认为应当怎样抽取样本?

提示:应分高中、初中、小学三个层进行抽取.

探究2:在高中、初中、小学三部分学生中都按1%的比例抽取,应各抽取多少人?

提示:高中生抽取7 100×1%=71(人),

初中生抽取10 900×1%=109(人),

小学生抽取11 000×1%=110(人).

探究3:在分层随机抽样中,N为总体量,n为样本量,如何确定各层的个体数?

提示:每层抽取的个体的个数为$n_i=N_i\times\frac{n}{N}$,其中N_i为第$i(i=1,2,\cdots,k)$层的个体数,$\frac{n}{N}$为抽样比.

探究4:在分层随机抽样中,总体量、样本量、各层的个体数、各层抽取的样本数这四者之间有何关系?

提示:设总体量为N,样本量为n,第$i(i=1,2,\cdots,k)$层的个体数为N_i,各层抽取的样本数为n_i,则$\frac{n_i}{N_i}=\frac{n}{N}$,这四者中,已知其中三个可以求出另外一个.

[评价活动]

1. 为了对某课题进行研究,分别从A,B,C三所高校中用分层随机抽样的方法抽取若干名教授组成研究小组,其中高校A有m名教授,高校B有72名教授,高校C有n名教授(其中$0<m\leqslant72\leqslant n$).

(1)若A,B两所高校中共抽取3名教授,B,C两所高校中共抽取5名教授,求m和n;

(2)若高校B中抽取的教授人数是高校A和C中抽取的教授人数的$\frac{2}{3}$,求三所高校教授的总人数.

解:(1)因为$0<m\leqslant72\leqslant n$,A,B两所高校中共抽取3名教授,所以高校B中抽取2名教授,高校A中抽取1名教授,高校C中抽取3名教授,所以$\frac{1}{m}=\frac{2}{72}=\frac{3}{n}$,

解得$m=36$,$n=108$.

(2)因为高校B中抽取的教授人数是高校A和C中抽取的教授人数的$\frac{2}{3}$,

所以$\frac{2}{3}(m+n)=72$,解得$m+n=108$,所以$m+n+72=180$,

所以三所高校教授的总人数为180.

2. 某学校有在职人员160人,其中行政人员有16人,教师有112人,后勤人员有32人.教育部门为了了解在职人员对学校机构改革的意见,要从中抽取一个容量为20的样本,请利用分层随机抽样的方法抽取,写出抽样过程.

解:抽样过程如下:

第一步,分层,按工作性质将学校在职人员分层:行政人员、教师、后勤人员.

第二步,确定抽样比,样本量与总体量的比为$\frac{20}{160}=\frac{1}{8}$.

第三步,确定分别从三类人员中抽取的人数,从行政人员中抽取$16\times\frac{1}{8}=2$(人);从教师中抽取$112\times\frac{1}{8}=14$(人);从后勤人员中抽取$32\times\frac{1}{8}=4$(人).

第四步,采用简单随机抽样的方法,抽取行政人员2人,教师14人,后勤人员4人.

第五步,把抽取的个体组合在一起构成所需样本.

【类题通法】

分层随机抽样满足“$\frac{\text{每层抽取的个体数}}{\text{本层的个体数}}=\frac{\text{样本量}}{\text{总体量}}$”,即“$\frac{n_1}{N_1}=\frac{n_2}{N_2}=\cdots=\frac{n}{N}$或$n_1:n_2:\cdots:n=N_1:N_2:\cdots:N$”,据此在已知每层的个体数或数量比、样本量、总体量中的两个时,就可以求出第三个.

任务三　分层随机抽样的均值

[探究活动]

在了解全校学生每年平均阅读多少本文学经典名著时,甲同学用分层随机抽样的方法从高一同学中抽取了一个容量为10的样本,并算得样本的平均数为8;从高二同学中抽取了一个容量为6的样本,并算得样本的平均数为8;从高三同学中抽取了容量为8的样本,并算得样本的平均数为5.

探究 1：据此推断，该校学生每年平均阅读多少本文学经典名著？

提示：样本平均数为$\frac{10\times8+6\times8+8\times5}{10+6+8}=7$，故该校学生每年平均阅读 7 本文学经典名著.

探究 2：在分层随机抽样中，如果层数为 2 层，第一层的样本量为 m，均值为 x；第二层的样本量为 n，均值为 y，你能计算出样本的均值吗？

提示：样本的均值为$\frac{mx+ny}{m+n}$.

［**评价活动**］

1. 为深入学习宣传贯彻党的二十大精神，某学校团委举办了党史知识竞赛（满分 100 分），其中高一、高二、高三年级参赛选手的人数分别为 1 200，900，900.现用分层随机抽样的方法从三个年级中抽取样本，经计算可得高一、高二年级参赛选手成绩的样本平均数分别为 85，90，全校参赛选手成绩的样本平均数为 88，则高三年级参赛选手成绩的样本平均数为（　　）

A.87　　B.89

C.90　　D.91

C　**解析**：由分层随机抽样定义可知，高一、高二、高三年级参赛选手的样本数之比为 1 200∶900∶900＝4∶3∶3.

设高三年级参赛选手成绩的样本平均数为 x，

则$\frac{85\times4+90\times3+3x}{4+3+3}=88$，解得 $x=90$，

故高三年级参赛选手成绩的样本平均数为 90.故选 C.

2. 在某校高一年级的 800 名学生中，男生有 360 名，女生有 440 名.现采用比例分配的分层随机抽样方法，从中抽取样本量为 60 的样本，计算出男生样本的平均数为171 cm，女生样本的平均数为 160 cm，则总体的平均数为________.

164.95 cm　**解析**：因为分配比例为$\frac{60}{800}=\frac{3}{40}$，

所以男生应抽取 $360\times\frac{3}{40}=27$（名），

女生应抽取 $440\times\frac{3}{40}=33$（名）.

则总体平均数为 $\overline{w}=\frac{27}{60}\times171+\frac{33}{60}\times160=164.95$(cm).

【类题通法】

1. 进行分层随机抽样的相关计算时，常用到的两个关系：

(1)$\frac{样本量\ n}{总体量\ N}=\frac{该层抽取的个体数}{该层的个体数}$；

(2)总体中某两层的个体数之比等于样本中这两层抽取的个体数之比.

2. 总体的平均数和各层的样本平均数的关系：

$\overline{w}=\frac{m}{m+n}\overline{x}+\frac{n}{m+n}\overline{y}=\frac{M}{M+N}\overline{x}+\frac{N}{M+N}\overline{y}$.

▶ 提质归纳

- 分层随机抽样
  - 定义
  - 有关概念
    - 层
    - 比例分配
  - 应用

课后素养评价

基础性·能力运用

1. 分层随机抽样中，将相近的个体归入一层，然后每层抽取若干个个体构成样本，所以为了让每个个体等可能入样，必须保证（　　）

A.每层等可能抽样

B.每层不等可能抽样

C.所有层按同一抽样比等可能抽样

D.所有层抽取的个体数量相同

C　**解析**：保证每个个体等可能的被抽取是基本抽样方式的共同特征，为了保证这一点，分层随机抽样时必须在所有层都按同一抽样比等可能抽样.

2.（多选题）为调查某连锁店各分店的经营状况，某统计机构用分层随机抽样的方法，从甲、乙、丙三个城市中抽取若干家分店组成样本进行深入研究，有关数据见下表：

城市	总数量	抽取数量	日平均利润/千元
甲	26	2	6.2
乙	13	x	6.5
丙	39	y	6.3

则下列说法正确的是（　　）

A.乙城市的抽取数量为 1
B.丙城市的抽取数量为 2
C.样本量为 6
D.三个城市各分店的日平均利润约为 6.4 千元

AC　**解析**：由题意，$\frac{x}{13}=\frac{y}{39}=\frac{2}{26}$，所以 $x=1$，$y=3$.
设所求的样本量为 n，由题意得 $n=2+x+y$，解得 $n=6$.抽取的 6 个分店的日平均利润的平均数为 $\frac{6.2\times2+6.5\times1+6.3\times3}{6}=6.3$，据此估计三个城市各分店的日平均利润约为 6.3 千元.

3.有两种糖块，A 种糖块 18 元/千克，B 种糖块 24 元/千克，超市计划把 A，B 两种糖块按照 1∶2 的比例混合出售，则合理的价格应为　（　　）
A.18 元/千克　　B.24 元/千克
C.21 元/千克　　D.22 元/千克

D　**解析**：由题意可得 $\overline{x}=\frac{1}{1+2}\times18+\frac{2}{1+2}\times24=22$(元/千克).

4.(多选题)港珠澳大桥是中国境内连接香港、珠海和澳门的桥隧工程，因其超大的建筑规模、空前的施工难度和顶尖的建造技术而闻名世界.港珠澳大桥为中国内地前往中国香港的游客提供了便捷的交通，某旅行社分年龄段统计了港珠澳大桥建成以后，由港珠澳大桥实现中国内地前往中国香港的老、中、青旅客的人数比为 5∶2∶3，现使用分层随机抽样的方法从这些旅客中随机抽取 n 名.若抽到青年旅客 60 人，则下列说法正确的是　（　　）

A.抽到老年旅客 150 人
B.抽到中年旅客 40 人
C.$n=200$
D.被抽到的老年旅客和中年旅客人数之和超过 200

BC　**解析**：因为老、中、青旅客的人数比为 5∶2∶3，抽到青年旅客 60 人，
所以 $\frac{60}{n}=\frac{3}{5+2+3}$，解得 $n=200$，
所以抽到老年旅客 $200\times\frac{5}{5+2+3}=100$(人)，
抽到中年旅客 $200\times\frac{2}{5+2+3}=40$(人)，$100+40=140<200$.故选 BC.

5.(1)从 10 台电冰箱中抽取 3 台进行质量检验.
(2)某社区有 1 200 户家庭，其中高收入家庭 420 户，中等收入家庭 470 户，低收入家庭 310 户.为了调查该社区购买力的某项指标，要从所有家庭中抽取一个容量为 120 的样本.
(3)某学校有 160 名教职工，其中教师 120 名，行政人员 16 名，后勤人员 24 名.为了了解教职工对学校在校务公开方面的意见，拟抽取一个容量为 20 的样本.
以上问题中，宜采用的抽样方法分别为
(1)________；(2)________；
(3)________.

(1)抽签法　(2)分层随机抽样　(3)分层随机抽样
解析：

题号	判断	原因分析
(1)	抽签法	总体容量较小，宜采用抽签法
(2)	分层随机抽样	该社区中家庭收入层次明显，宜采用分层随机抽样
(3)	分层随机抽样	由于学校各类人员对这一问题的看法可能差异较大，故宜采用分层随机抽样

6.某校 500 名学生中，O 型血的有 200 人，A 型血的有 125 人，B 型血的有 125 人，AB 型血的有 50 人.为了研究血型与色弱的关系，需从中抽取一个容量为 20 的样本.按照分层随机抽样的方法抽取样本，各种血型的人分别抽多少？

解：因为 $\frac{20}{500}=\frac{1}{25}$，所以 $200\times\frac{1}{25}=8$(人)，$125\times\frac{1}{25}=5$(人)，$50\times\frac{1}{25}=2$(人).
故 O 型血的抽 8 人，A 型血的抽 5 人，B 型血的抽 5 人，AB 型血的抽 2 人.

综合性·创新提升

1.某高中共有学生 2 000 名，各年级男、女生人数如下表.

性别	高一年级	高二年级	高三年级
女生	373	x	y
男生	377	370	z

已知在全校学生中随机抽取 1 名，抽到高二年级女生的可能性是 0.19.现用分层随机抽样的方法在全校抽取 64 名学生，则应在高三年级抽取的学生人数为　（　　）
A.24　B.18　C.16　D.12

C　**解析**：由题意可知 $x=2\ 000\times0.19=380$，

所以高一、高二年级男、女生共有 1 500 人,

所以高三年级共有学生 500 人,

所以应在高三年级抽取的学生人数为 $\frac{64}{2\ 000}\times 500=16$.

2. 比例分配的分层随机抽样是将总体分成若干个互不交叉的层,然后按照固定的比例,从各层独立地抽取一定数量的个体,组成一个样本的抽样方法.在《九章算术》第三章"衰分"中有如下问题:"今有甲持钱五百六十,乙持钱三百五十,丙持钱一百八十,凡三人俱出关,关税百钱.欲以钱数多少衰出之,问各几何?"其译文为:今有甲持 560 钱,乙持 350 钱,丙持 180 钱,甲、乙、丙三人一起出关,关税共 100 钱,要按照各人带钱多少的比例进行交税,问,三人各应付多少税?则下列说法错误的是 ( )

A.甲应付税 $51\frac{41}{109}$钱

B.乙应付税 $32\frac{24}{109}$钱

C.丙应付税 $16\frac{56}{109}$钱

D.甲付的税钱最多,丙付的税钱最少

B **解析**:由比例分配的分层随机抽样方法可知,抽样比为 $\frac{100}{560+350+180}=\frac{10}{109}$,

则甲应付税 $\frac{10}{109}\times 560=51\frac{41}{109}$(钱);

乙应付税 $\frac{10}{109}\times 350=32\frac{12}{109}$(钱);

丙应付税 $\frac{10}{109}\times 180=16\frac{56}{109}$(钱).故选 B.

3. $\overline{x}$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_{100}$ 的平均数,a 是 $x_1,x_2,\cdots,x_{40}$ 的平均数,b 是 $x_{41},x_{42},\cdots,x_{100}$ 的平均数,则下列各式正确的是 ( )

A. $\overline{x}=a+b$　　B. $\overline{x}=\frac{3a+2b}{5}$

C. $\overline{x}=\frac{2a+3b}{5}$　　D. $\overline{x}=\frac{a+b}{2}$

C **解析**:由题意可得 $x_1+x_2+\cdots+x_{100}=100\overline{x}$,$x_1+x_2+\cdots+x_{40}=40a$,$x_{41}+x_{42}+\cdots+x_{100}=60b$,所以 $100\overline{x}=40a+60b$,所以 $\overline{x}=\frac{2a+3b}{5}$.

4. 某公司生产三种型号的轿车,产量分别为 1 200 辆、6 000 辆和 2 000 辆.为检验该公司的产品质量,现用分层随机抽样的方法抽取 46 辆进行检验,这三种型号的轿车依次应抽取的辆数为________.

6,30,10 **解析**:设三种型号的轿车依次抽取 x,y,z 辆,则有 $\begin{cases}\frac{x}{1\ 200}=\frac{y}{6\ 000}=\frac{z}{2\ 000},\\ x+y+z=46,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=6,\\ y=30,\\ z=10.\end{cases}$

5. 高一和高二两个年级的同学参加了数学竞赛,高一年级有 450 人,高二年级有 350 人,通过分层随机抽样的方法抽取了 160 位同学的竞赛成绩,得到两个年级的竞赛成绩的平均数分别为 80 分和 90 分,则:

(1)高一、高二年级的样本量分别为________;

(2)高一和高二两个年级数学竞赛成绩的平均数约为________.

(1)90,70 (2)84.375 分 **解析**:(1)由题意可得高一年级的样本量为 $\frac{160}{450+350}\times 450=90$,高二年级的样本量为 $\frac{160}{450+350}\times 350=70$.

(2)高一和高二两个年级数学竞赛成绩的平均数约为 $\overline{w}=\frac{90}{90+70}\times 80+\frac{70}{90+70}\times 90=84.375$(分).

6. 为了了解某区科级干部"消防安全知识"的了解情况,按照分层随机抽样的方法,从全区 320 名正科级干部和 1 280 名副科级干部中抽取 40 名科级干部预测全区科级干部"消防安全知识"的了解情况.现将这 40 名科级干部分为正科级干部组和副科级干部组,利用同一份试卷分别进行测试.两组的测试成绩统计如下表:

分组	人数	平均成绩
正科级干部组	a	80
副科级干部组	b	70

(1)求 a,b 的值;

(2)求这 40 名科级干部测试成绩的平均数 $\overline{x}$.

解:(1)样本量与总体中的个体数的比为 $\frac{40}{320+1\ 280}=\frac{1}{40}$,

则抽取的正科级干部人数 $a=320\times\frac{1}{40}=8$,

副科级干部人数 $b=1\ 280\times\frac{1}{40}=32$.

(2)这 40 名科级干部测试成绩的平均数 $\overline{x}=\frac{80\times 8+70\times 32}{40}=72$.

9.1.3 获取数据的途径

学习任务目标

1.知道获取数据的基本途径包括:统计报表和年鉴、社会调查、试验设计、普查和抽样调查、互联网等.(数据分析)

2.了解数据的随机性.

问题式预习

知识点 获取数据的基本途径

获取数据的基本途径	适用类型	注意问题
通过调查获取数据	对于有限总体问题,我们一般通过抽样调查或普查的方法获取数据	要充分有效地利用背景信息选择或创建更好的抽样方法,并有效避免抽样过程中的人为错误
通过试验获取数据	没有现存的数据可以查询	严格控制试验环境,通过精心的设计安排试验,以提高数据质量
通过观察获取数据	自然现象	要通过长久的持续观察获取数据
通过查询获得数据	众多专家研究过,其收集的样本观测数据有所存储	必须根据问题背景知识"清洗"数据,去伪存真

[微训练]

小明从网上查询得到某地区10户居民从事副业的家庭年收入(单位:万元)如下表所示:

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
年收入	1.2	1.3	1.8	2.0	4.6	1.7	0.9	2.1	1.0	1.6

根据以上数据,我们认为有一个数据是不准确的,需要核实或剔除,这个数据是________.

4.6 **解析**:由于编号为5的数据为4.6,明显高于其他数据,所以这个数据可能是不准确的.

任务型课堂

任务一 获取数据途径的选择

1.下列数据一般通过试验获取的是 ( )

A.1988年济南市的降雨量

B.2020年新生儿人口数量

C.某学校高一年级同学的数学测试成绩

D.某种特效中成药的配方

D **解析**:某种特效中成药的配方的数据只能通过试验获得.

2."中国天眼"为500米口径球面射电望远镜,是具有我国自主知识产权、世界最大单口径、最灵敏的射电望远镜.建造"中国天眼"的目的是 ( )

A.通过调查获取数据

B.通过试验获取数据

C.通过观察获取数据

D.通过查询获得数据

C **解析**:"中国天眼"主要是通过观察获取数据.

3.要得到某乡镇患某种疾病的人口数据,应采取的方法是 ( )

A.通过调查获取数据

B.通过试验获取数据

C.通过观察获取数据

D.通过查询获得数据

A 解析:某乡镇患某种疾病的人口数据属于有限总体问题,所以可以通过调查获取数据.

【类题通法】

调查方法的选取

选择全面调查还是抽样调查,要根据所要考察的对象的特征灵活选用.一般来说,对于具有破坏性的调查、无法进行全面调查、全面调查的意义或价值不大时,应选择抽样调查,对于精确度要求高的调查,事关重大的调查往往选用全面调查.

任务二 获取数据途径的方法的设计与分析

[探究活动]

为调查某小区平均每户居民的月用水量,三名同学分别设计了方案:

学生甲:我把用水量调查表放在互联网某平台上,只要该小区的居民登录该平台就可以看到这张表,他们的填表信息可以很快地反馈到我的电脑中,这样就可以很快估算出小区平均每户居民的月用水量.

学生乙:我给该小区的每一户居民发一张用水量调查表,只要一两天就可以统计出小区平均每户居民的月用水量.

学生丙:我在该小区的电话号码本上随机地选出一定数量的电话号码,然后逐个给这些居民打电话,问一下他们的月用水量,然后就可以估算出小区平均每户居民的月用水量.

探究1:分别说明这三位同学设计的方案的特点.

提示:学生甲的方案得到的样本只能够反映上网居民的用水情况,它是一种方便样本,所得到的样本代表性差,不能准确地获得平均每户居民的月用水量.

学生乙的方案实际上是普查,花费的人力、物力更多一些,但是如果统计过程不出错,可以准确地得到平均每户居民的月用水量.

学生丙的方案是一种随机抽样的方法,既节省人力、物力,又可以得到比较准确的结果.

探究2:你有何建议?

提示:建议用随机抽样方法获得数据,即用学生丙的方案.

[评价活动]

1.简单设计一份问卷,调查高一学生对各学科的态度.

解:请按自己的感受把下面这些学科的序号填在空格里.

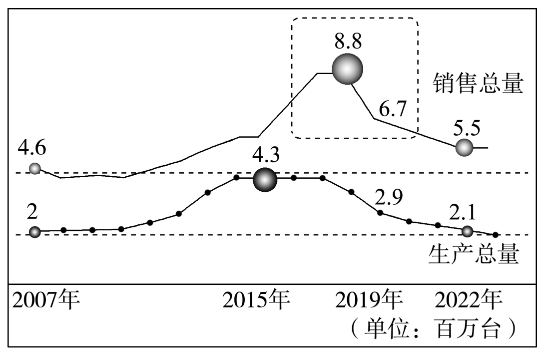
①语文 ②数学 ③外语 ④物理 ⑤化学

⑥生物 ⑦历史 ⑧地理 ⑨政治 ⑩体育

⑪艺术(音乐、美术) ⑫技术

我喜欢的学科	
我感觉压力最大的学科	
我不喜欢的学科	
我觉得有用的学科	
我觉得内容多的学科	
我觉得内容少的学科	

2.为了了解我国某种家电的产销情况,小张在某网站上下载了下图:



(1)小张获取数据的途径是什么?

(2)由图可知,这种家电的销售总量在2018年达到最大值,你认为这种家电销售总量从2019年开始出现下滑的主要原因是什么?

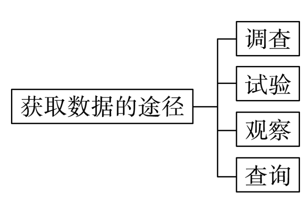
解:(1)小张获取数据的途径是通过查询获得数据.

(2)从2019年开始,这种家电销售总量开始出现下滑的主要原因是市场的饱和.

【类题通法】

在统计活动中,尤其是大型的统计活动中,为避免一些外界因素的干扰,通常需要确定调查的对象、调查的方法和策略,需要认真安排前期的准备工作,精心设计收集数据的方法,然后对数据进行统计分析,得出推断.

提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1. 为了研究近年来我国高等教育发展状况，小明需要获取近年来我国大学生入学人数的相关数据，他获取这些数据的途径最好是 ( )

A.通过调查获取数据

B.通过试验获取数据

C.通过观察获取数据

D.通过查询获得数据

D **解析**：因为近年来我国大学生入学人数的相关数据有所存储，所以小明获取这些数据的途径最好是通过查询获得数据.

2. 影响获取数据可靠程度的因素不包括 (D)

A.获取方法设计

B.所用专业测量设备的精度

C.调查人员的认真程度

D.数据的大小

3. 为了了解某年级同学每天参加体育锻炼的时间，比较恰当的收集数据的方法是 ( )

A.查阅资料　　B.问卷调查

C.做试验　　D.以上均不对

B **解析**：问卷调查能达到目的，比较适合.故选 B.

4. 下列情况应通过试验获取数据的是 ( )

A.了解某市中小学生每天的运动时间

B.了解某地的降水规律

C.检测针对某种病毒的新药的疗效

D.调查某地 2019 年的交通事故情况

C **解析**：选项 A 需要通过调查获取数据，选项 B 需要观察获取数据，选项 C 需要通过试验获取数据，选项 D 应通过查询获取数据.

综合性·创新提升

1.（多选题）以下情况是通过查询获取数据的是 ( )

A.某领导想了解 A 市的大气环境质量，向当地有关部门咨询该市的 PM2.5 的浓度

B.张三利用互联网了解到，2022 年某市居民平均寿命达到 82.2 岁

C.某中学为了了解学生对课堂禁用手机的认同度，进行了问卷调查

D.从某公司员工年度报告中获知该员工的工作情况

ABD **解析**：A，B，D 都是通过查询获取的数据，C 是通过调查获取的数据.

2. 以下数据是观测数据还是试验数据？

(1)据第七次人口普查结果，全国人口约为 141 178 万；

(2)为研究某种药对于预防心脏病的作用，20 000 多人每隔一天服用一次该药，另外 20 000 人服用另一种药剂，五年后的数据显示，该药使得心肌梗死风险大幅降低；

(3)2023 年的某项调查显示，日均使用某社交软件时间在 4 小时以上的人数超过 30%.

解：(1)观测数据.

(2)试验数据.

(3)观测数据.

3. 某中学举办了全校精神文明擂台赛.为了解这次比赛在全校师生中产生的影响，分别在全校 500 名教职员工、3 000 名初中生、4 000 名高中生中做问卷调查.如果要在所有答卷中抽出 120 份用于评估，应如何抽取才能得到比较客观的评估结论？

解：由于这次活动对教职员工、初中生和高中生产生的影响不会相同，所以应当采取分层随机抽样的方法进行抽样.

因为样本量为 120，总体个数为 $500+3\ 000+4\ 000=7\ 500$，则抽样比为 $\frac{120}{7\ 500}=\frac{2}{125}$，

$500\times\frac{2}{125}=8$，$3\ 000\times\frac{2}{125}=48$，$4\ 000\times\frac{2}{125}=64$，

所以在教职员工答卷、初中生答卷、高中生答卷中抽取的个体数分别是 8，48，64.

分层随机抽样的步骤是：

(1)分层：分为教职员工答卷、初中生答卷、高中生答卷，共三层；

(2)确定每层抽取个体的个数：在教职员工答卷、初中生答卷、高中生答卷中抽取的个体数分别是 8，48，64；

(3)各层分别按简单随机抽样的方法抽取样本；

(4)综合每层抽样，组成样本.

这样便完成了整个抽样过程，就能得到比较客观的评估结论.

9.2　用样本估计总体

9.2.1　总体取值规律的估计

第1课时　频率分布直方图

学习任务目标

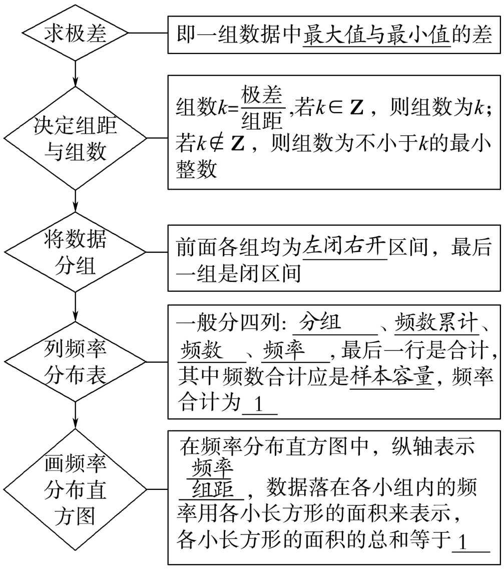
1. 理解用样本的频率分布估计总体分布的方法.
2. 会列频率分布表，会画频率分布直方图.（数据分析）
3. 能够利用图表解决实际问题.

问题式预习

知识点　频率分布表与频率分布直方图

1. 频数指某组中包含的个体数，各组频数和等于样本容量；频率$=\frac{频数}{样本容量}$，各组频率和等于1.

2. 绘制频率分布直方图的步骤



[微训练]

1. 判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)频率分布直方图中小长方形的高表示该组的个体在样本中出现的频率与组距的比值.　　(√)

(2)一般样本容量越大，所分组数越多；样本容量越小，所分组数越少.　　(√)

(3)频率分布直方图的横轴表示样本数据，纵轴表示频率.　　(×)

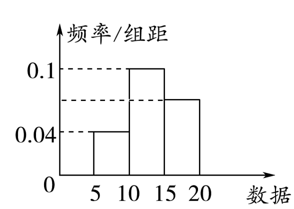
(4)频率分布直方图中各个小长方形的面积之和等于1.　　(√)

2. 从一群学生中抽取一个一定容量的样本对他们的学习成绩进行分析.已知不超过70分的人数为8，其累计频率为0.4，则这个样本的容量是　　(　　)

A.20　　B.40　　C.70　　D.80

A　**解析**：由已知不超过70分的人数为8，累计频率为0.4，则样本量$n=\frac{8}{0.4}=20$.故选A.

3. 如图所示的是一个容量为100的样本数据的频率分布直方图，则由图中的数据可知，样本数据落在[15,20]内的频数为　　(　　)



A.20　　B.30　　C.40　　D.50

B　**解析**：样本数据落在[15,20]内的频数为$100\times[1-5\times(0.04+0.1)]=30$.

任务型课堂

任务一　频率分布直方图的绘制

下表给出了在某校 500 名 11 岁男孩中，用随机抽样得出的 120 人的身高(单位：cm).

区间界限	[122，126)	[126，130)	[130，134)	[134，138)	[138，142)
人数	5	8	10	22	33
区间界限	[142，146)	[146，150)	[150，154)	[154，158]	
人数	20	11	6	5	

(1)列出样本频率分布表；

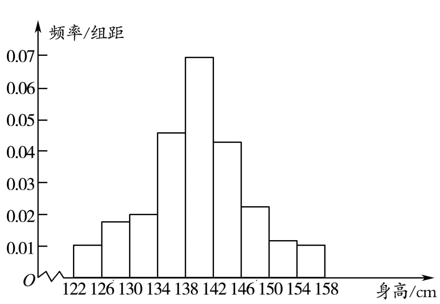
(2)画出频率分布直方图；

(3)估计身高小于 134 cm 的人数占总人数的百分比.(结果精确到 0.01)

解：(1)样本频率分布表如下：

分组	频数	频率
[122,126)	5	0.04
[126,130)	8	0.07
[130,134)	10	0.08
[134,138)	22	0.18
[138,142)	33	0.28
[142,146)	20	0.17
[146,150)	11	0.09
[150,154)	6	0.05
[154,158]	5	0.04
合计	120	1.00

(2)频率分布直方图如下：



(3)由样本频率分布表可知，身高小于 134 cm 的男孩出现的频率为 $0.04+0.07+0.08=0.19$，所以我们估计身高小于 134 cm 的人数占总人数的 19%.

【类题通法】

绘制频率分布直方图应注意的问题

(1)在列出频率分布表后，画频率分布直方图的关键就是确定小长方形的高.一般地，频率分布直方图中两坐标轴上的单位长度是不一致的，合理的定高方法是“找一个恰当的单位长度”(没有统一规定)，然后以各组的“$\frac{频率}{组距}$”来定高.

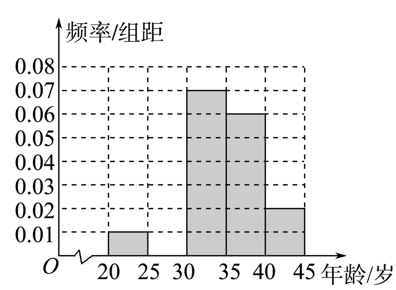
(2)在频率分布直方图中，各个小长方形的面积等于相应各组的频率，小长方形的高与频数成正比，各组频数之和等于样本容量，频率之和为 1.

任务二　频率分布直方图的应用

[探究活动]

为践行“绿水青山就是金山银山”的理念以及增强市民的节能环保意识，某市面向全市征召义务宣传志愿者，现从符合条件的 500 名志愿者中随机抽取 100 名志愿者，得到他们年龄(单位：岁)情况的频率分布表和频率分布直方图如下：

分组	[20,25)	[25,30)	[30,35)	[35,40)	[40,45]	合计
频数	5	①	35	30	10	100
频率	0.05	0.20	②	0.30	0.10	1.00



探究 1：频率分布表中的①②位置应填什么数据？

提示：设年龄在[25,30)内的频数为 x，年龄在[30,35)内的频率为 y.

方法一：根据题意可得 $\frac{x}{100}=0.20$，$\frac{35}{100}=y$，解得 $x=20$，$y=0.35$，

故①处应填 20，②处应填 0.35.

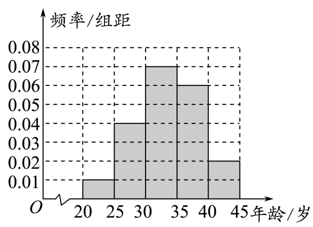
方法二：由题意得 $5+x+35+30+10=100$，$0.05+0.20+y+0.30+0.10=1$，解得 $x=20$，$y=0.35$，故①处应填 20，②处应填 0.35.

探究 2：图中小长方形的面积有怎样的关系？补全频率分布直方图.

提示：每个小长方形的面积表示相应各组的频率，各个小长方形的面积和为 1.

由频率分布表知，年龄在[25，30）内的频率是 0.20，且组距是 5，

所以$\frac{频率}{组距}=\frac{0.20}{5}=0.04$.补全的频率分布直方图如图所示.

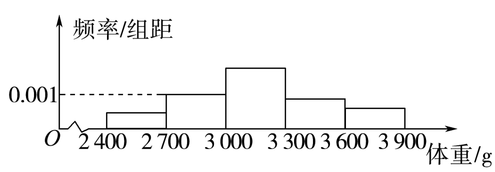


探究 3：估计这 500 名志愿者中年龄在[30，35）内的人数.

提示：估计这 500 名志愿者中年龄在[30，35）内的人数为 $500\times0.35=175$.

[评价活动]

1. 统计了一些新生婴儿的体重，其频率分布直方图如图所示，则新生婴儿的体重（单位：g）在[2 700，3 000）内的频率为（　　）



A.0.001　　B.0.01

C.0.003　　D.0.3

D　**解析**：因为组距$=3\,000-2\,700=300$，

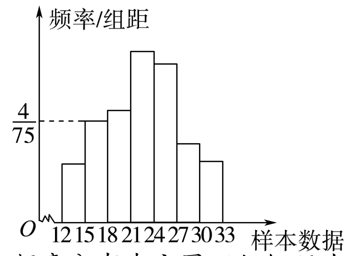
且$\frac{频率}{组距}=0.001$，所以频率$=0.001\times300=0.3$.

2. 如图所示的是一个样本的频率分布直方图，且样本数据在[15，18）内的频数为 8.

(1)求样本数据在[15，18)内的频率；

(2)求样本量；

(3)若在[12，15)上的小长方形面积为 0.06，求样本数据在[18，33)内的频数.



解：由样本频率分布直方图可知组距为 3.

(1)由样本频率分布直方图得样本数据在[15，18)内的频率为$\frac{4}{75}\times3=\frac{4}{25}$.

(2)样本数据在[15，18)内的频数为 8，由(1)可知，样本量为$8\div\frac{4}{25}=8\times\frac{25}{4}=50$.

(3)因为在[12，15)上的小长方形面积为 0.06，所以样本数据在[12，15)内的频率为 0.06，故样本数据在[15，33)内的频数为 $50\times(1-0.06)=47$.又因为样本数据在[15，18)内的频数为 8，故样本数据在[18，33)内的频数为 $47-8=39$.

【类题通法】

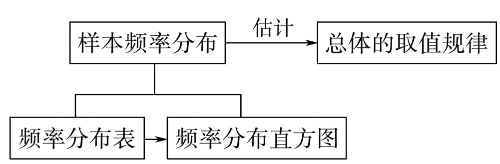
应用频率分布直方图的几类常见问题

(1)求频数、频率.对于这类问题，要注意读懂图表所提供的信息，然后根据频数、频率的定义求解.

(2)填表、补图、估算.读懂分布表、直方图，活用公式：

$组距\times\frac{频率}{组距}=频率$；$\frac{频数}{相应频率}=样本量$.

提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1. 一个容量为 80 的样本中，数据的最大值是 140，最小值是 51，组距是 10，则应将样本数据分为（　　）

A.10 组　　B.9 组

C.8 组　　D.7 组

B　**解析**：根据列频率分布表的步骤，可知$\frac{极差}{组距}=\frac{140-51}{10}=8.9$，所以分为 9 组较为恰当.

2. 已知样本数据：10，8，6，10，13，8，10，12，11，7，8，9，11，9，12，9，10，11，12，11，那么频率为 0.2 的数据范围是 （ ）

A.5.5～7.5 B.7.5～9.5

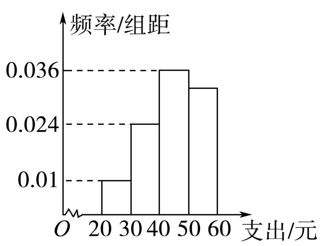
C.9.5～11.5 D.11.5～13.5

D **解析**：列出频率分布表，依次对照就可以找到答案，频率分布表如下：

分组	频数	频率
5.5～7.5	2	0.1
7.5～9.5	6	0.3
9.5～11.5	8	0.4
11.5～13.5	4	0.2
合计	20	1.0

从表中可以看出频率为 0.2 的范围是 11.5～13.5.故选 D.

3. 学校为了调查学生在课外读物方面的支出情况，抽取了一个容量为 n 的样本，其频率分布直方图如图所示，其中支出（单位：元）在[50，60]内的学生有 30 人，则 n 的值为 （ ）

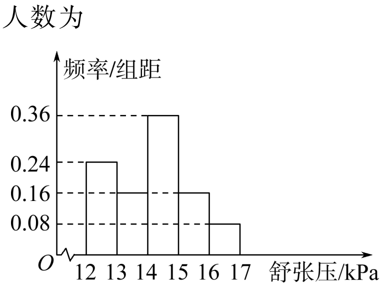


A.100 B.1 000 C.90 D.900

A **解析**：由题意可知，前三组的频率之和为$(0.01+0.024+0.036)\times10=0.7$，

所以支出在[50，60]内的频率为 $1-0.7=0.3$，所以 $n=\frac{30}{0.3}=100$.

4. (2022・天津)为研究某药品的疗效，选取若干名志愿者进行临床试验，所有志愿者的舒张压数据（单位：kPa）的分组区间为[12，13)，[13，14)，[14，15)，[15，16)，[16，17]，将其按从左到右的顺序分别编号为第一组、第二组……第五组，根据试验数据制成如图的频率分布直方图.已知第一组与第二组共有 20 人，第三组中没有疗效的有 6 人，则第三组中有疗效的人数为 （ ）



A.8 B.12

C.16 D.18

B **解析**：志愿者的总人数为 $\frac{20}{(0.24+0.16)\times1}=50$，所以第三组人数为 $50\times0.36=18$，有疗效的人数为 $18-6=12$.故选 B.

5. 如图，一个频数分布表（样本量为 50）不小心被损坏了一部分，只记得样本中数据在[20，60)内的频率为 0.6，则估计样本在[40，50)，[50，60)内的数据个数之和是________.

分组	[10,20)	[20,30)	[30,40)
频数	3	4	5

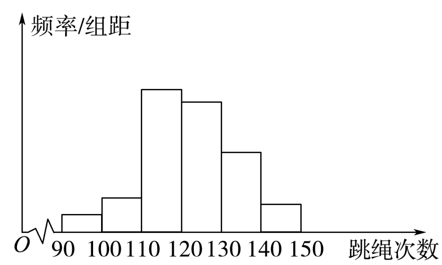
21 **解析**：根据题意，设分布在[40，50)，[50，60)内的数据个数分别为 x，y.

因为样本中数据在[20，60)内的频率为 0.6，样本量为 50，

所以 $\frac{4+5+x+y}{50}=0.6$，解得 $x+y=21$.

即样本在[40，50)，[50，60)内的数据个数之和为 21.

6. 为了了解高一学生的体能情况，某校抽取部分学生进行一分钟跳绳次数测试，将所得数据整理后，画出频率分布直方图（如图），图中从左到右各小矩形面积之比为 2∶4∶17∶15∶9∶3，第二小组频数为 12.



(1)第二小组的频率是多少？样本量是多少？

(2)若次数在 110 以上（含 110 次）为达标，试估计该学校全体高一学生的达标率.

解：(1)由于频率分布直方图以面积的形式反映了数据落在各小组内的频率大小，因此第二小组的频率为

$\frac{4}{2+4+17+15+9+3}=0.08$.

又第二小组的频率$=\frac{第二小组的频数}{样本量}$，

所以样本量$=\frac{第二小组的频数}{第二小组的频率}=\frac{12}{0.08}=150$.

(2)由题意估计该学校高一学生的达标率约为

$\frac{17+15+9+3}{2+4+17+15+9+3}\times100\%=88\%$.

综合性·创新提升

1.容量为 100 的样本数据按从小到大的顺序分为 8 组，如下表：

组号	1	2	3	4	5	6	7	8
频数	10	13	x	14	15	13	12	9

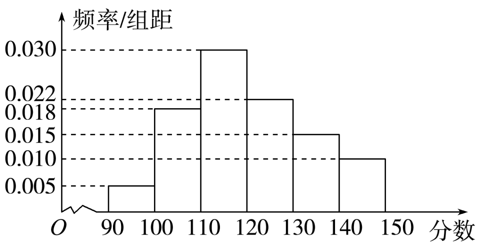
第三组的频数和频率分别是（　　）

A.14 和 0.14　　B.0.14 和 14

C.$\frac{1}{14}$和 0.14　　D.$\frac{1}{3}$和$\frac{1}{14}$

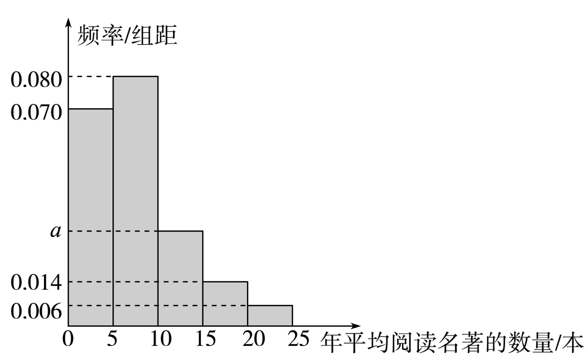
A　**解析**：由表可知，$10+13+x+14+15+13+12+9=100$，解得 $x=14$，故频数为 14，所以频率$=\frac{\text{频数}}{\text{样本量}}=\frac{14}{100}=0.14$.

2.某校 100 名学生的数学测试成绩频率分布直方图如图所示，分数不低于 a（a 为整数）即为优秀.如果优秀的人数为 20，则 a 的估计值是________.



133　**解析**：由已知可以判断 $a\in(130,140)$，所以 $[(140-a)\times0.015+0.01\times10]\times100=20$，解得 $a\approx133$.

3.某学校为了调查高一年级 600 名学生年平均阅读名著的数量，通过简单随机抽样，获得了 100 名学生年平均阅读名著的数量（单位：本），将数据按照 $[0,5)$，$[5,10)$，$[10,15)$，$[15,20)$，$[20,25]$分成 5 组，制成了如图所示的频率分布直方图，则图中 a 的值为________；估计高一年级年平均阅读名著的数量不少于 10 本的人数为________.



0.030　150　**解析**：由题意得，

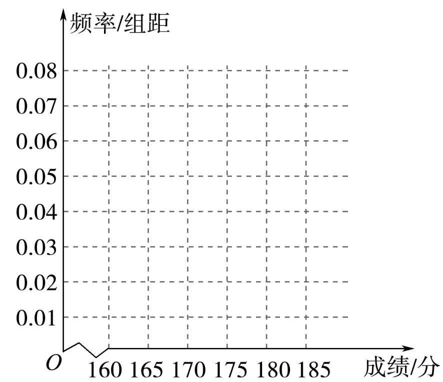
$a=\frac{1}{5}-0.006-0.014-0.080-0.070=0.030$，

估计高一年级年平均阅读名著的数量不少于 10 本的人数为 $600\times(0.014+0.006+0.030)\times5=150$.

4.某高校在一次选拔考试后随机抽取 100 名学生的笔试成绩（满分 200 分），按成绩分组，得到的频率分布表如下：

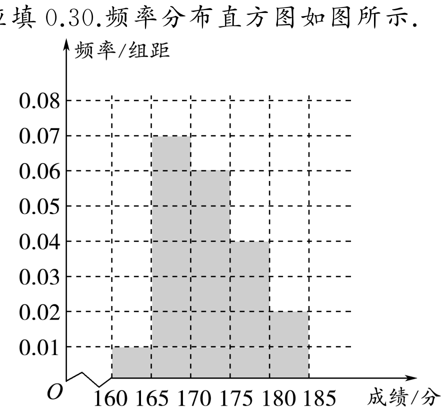
组号	分组	频数	频率
第 1 组	$[160,165)$	5	0.05
第 2 组	$[165,170)$	①	0.35
第 3 组	$[170,175)$	30	②
第 4 组	$[175,180)$	20	0.20
第 5 组	$[180,185]$	10	0.10
合计		100	1.00

（1）请先求出频率分布表中①②处应填写的数据，并完成如图所示的频率分布直方图；



（2）为了能选拔出最优秀的学生，高校决定在笔试成绩高的第 3，4，5 组中用比例分配的分层随机抽样的方法抽取 6 名学生进入第二轮面试，求第 3，4，5 组每组各应抽取多少名学生.

解：（1）由题意可知，第 2 组的频数为 $0.35\times100=35$，第 3 组的频率为 $\frac{30}{100}=0.30$，故①处应填 35，②处应填 0.30.频率分布直方图如图所示.



（2）因为第 3，4，5 组共有 60 名学生，所以利用比例分配的分层随机抽样在这 60 名学生中抽取 6 名学生时，第 3 组应抽取 $6\times\frac{30}{60}=3$（名）学生，第 4 组应抽取 $6\times\frac{20}{60}=2$（名）学生，第 5 组应抽取 $6\times\frac{10}{60}=1$（名）学生，所以第 3，4，5 组应抽取的学生人数分别为 3，2，1.

第 2 课时　统计图表

学习任务目标
1.能选择恰当的统计图表对数据进行可视化描述,体会合理使用统计图表的重要性.(数据分析) 2.结合实例,能用样本估计总体的取值规律.

问题式预习

知识点　统计图表

统计图表	主要应用
扇形图	直观描述各类数据占总数的比例
条形图和直方图	直观描述不同类别或分组数据的频数和频率
折线图	描述数据随时间的变化趋势

[微训练]

1.如果想用统计图来反映各数据的变化趋势,比较合适的统计图是　　(　　)

A.条形图

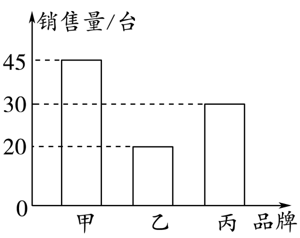
B.折线图

C.扇形图

D.其他统计图

B　**解析**:能反映各数据的变化趋势的统计图是折线图.

2.如图所示的是某商厦某个月甲、乙、丙三种品牌彩电的销售量统计图,则该月甲、丙两种品牌彩电的销售量之和为________台.



75　**解析**:由图可知,该月甲品牌彩电的销售量为 45 台,该月丙品牌彩电的销售量为 30 台,所以该月甲、丙两种品牌彩电的销售量之和为 75 台.

任务型课堂

任务一　条形统计图

1.连续抛掷一枚质地均匀的骰子 120 次,得到 1,2,3,4,5,6 点的次数分别为 18,19,21,22,20,20.

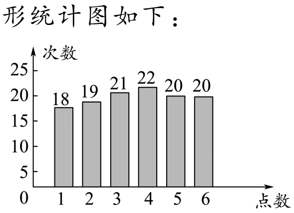
(1)列出样本的数据列表;

(2)画出数据的条形统计图.

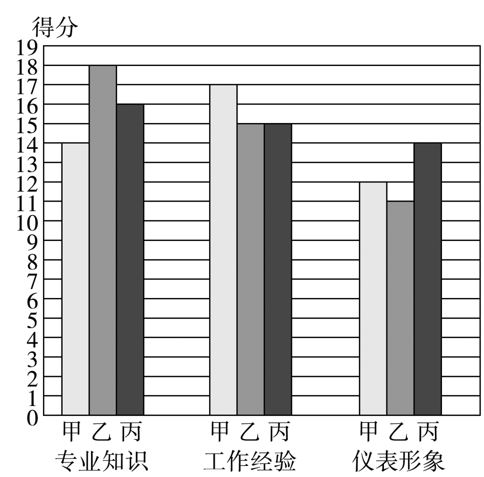
解:(1)数据列表如下:

点数	1	2	3	4	5	6
次数	18	19	21	22	20	20

(2)数据的条形统计图如下:



2.某集团对甲、乙、丙三名应聘者进行面试,并从专业知识、工作经验、仪表形象这三个方面给应聘者打分,每一方面满分 20 分,最后根据三人的得分绘制条形统计图(如图).



(1)利用图中提供的信息,在专业知识方面三人得分的极差是多少?在仪表形象方面谁最有优势?

(2)如果专业知识、工作经验、仪表形象三个方面的重要性之比为 10∶7∶3,那么作为人事主管,你应该录用哪一位应聘者?

解:(1)在专业知识方面三人得分的极差是 18−14=4,在仪表形象方面丙最有优势.

(2)甲得分:$14\times\frac{10}{20}+17\times\frac{7}{20}+12\times\frac{3}{20}=\frac{295}{20}$;

乙得分:$18\times\frac{10}{20}+15\times\frac{7}{20}+11\times\frac{3}{20}=\frac{318}{20}$;

丙得分:$16\times\frac{10}{20}+15\times\frac{7}{20}+14\times\frac{3}{20}=\frac{307}{20}$.

因为$\frac{318}{20}>\frac{307}{20}>\frac{295}{20}$,

所以应录用乙.

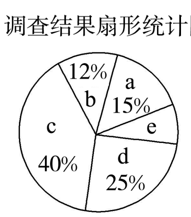
【类题通法】

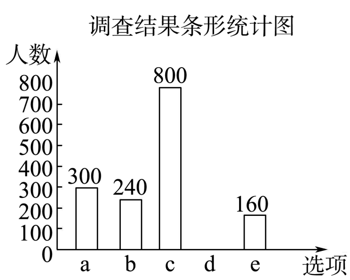
在条形统计图中,各个矩形图的宽度没有严格要求,但要一致,而高度必须以数据为准,它直观反映了各部分在总体中所占比重的大小.

任务二 扇形统计图

1. 每到春夏交替时节,雌性杨树会以满天飞絮的方式来传播下一代,漫天飞舞的杨絮易引发皮肤病、呼吸道疾病等,给人们造成困扰.为了解市民对治理杨絮方法的赞同情况,某课题小组随机调查了部分市民(问卷调查表如下表所示),并根据调查结果绘制了尚不完整的统计图(如图所示).

以下治理杨絮的方法,您选哪一项?(单选)
a.减少杨树新增面积,控制杨树每年的栽种量
b.调整树种结构,逐渐更换现有杨树
c.选育无絮杨树品种,并推广种植
d.对雌性杨树注射生物干扰素,避免产生飞絮
e.其他





由两个统计图可知,选择 d 的人数和扇形统计图中 e 所在扇形的圆心角度数分别为 ( )

A.$500,28.8^\circ$　　B.$250,28.6^\circ$

C.$500,28.6^\circ$　　D.$250,28.8^\circ$

A　**解析**:设接受调查市民的总人数为 x.

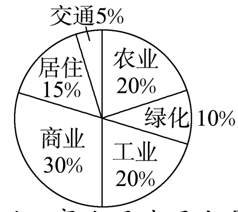
由调查结果条形统计图可知选择 a 的人数为 300,通过调查结果扇形统计图可知选择 a 的人数比例为 15%,所以 $15\%=\frac{300}{x}$,解得 $x=2\ 000$.

所以选择 d 的人数为$2\ 000\times25\%=500$,扇形统计图中 e 所在扇形的圆心角度数为$(1-15\%-12\%-40\%-25\%)\times360^\circ=28.8^\circ$.

2. 某市为了搞好城市建设,由城市用地规划绘制了如图所示的扇形统计图.

(1)哪种类型的用地面积最多?哪种类型的用地面积最少?

(2)若该市居住用地总面积为 150 平方千米,试估计该市用地总面积.



解:(1)由图可知,商业用地面积最多,交通用地面积最少.

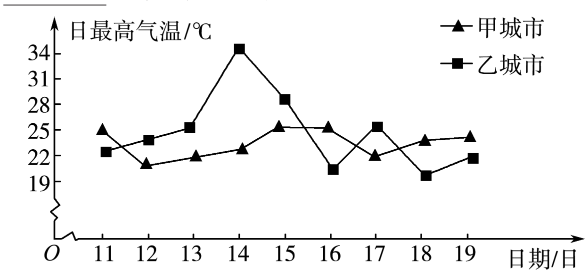
(2)设该市总面积为 x 平方千米,由$\frac{150}{x}\times100\%=15\%$,得 $x=1\ 000$.所以该市用地总面积约为 1 000 平方千米.

【类题通法】

扇形统计图反映了各部分占总体的百分比.由于总量不同,不同扇形统计图中的百分比不可以作为比较数量多少的依据.

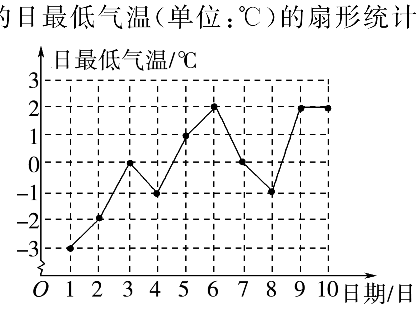
任务三 折线统计图

1. 甲、乙两个城市 2022 年 4 月连续 9 天的最高气温统计图如图所示,则这 9 天里,日最高气温比较稳定的是________城市.(填"甲"或"乙")



甲　**解析**:这 9 天里,乙城市的日最高气温的最大值约为35 ℃,最小值约为 20 ℃;甲城市的日最高气温的最大值约为25 ℃,最小值约为 21 ℃.故甲城市气温较稳定.

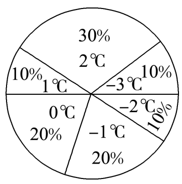
2. 如图所示的是根据某市 3 月 1 日至 3 月 10 日的日最低气温(单位:℃)情况绘制的折线统计图,试根据折线统计图反映的信息,绘制该市 3 月 1 日到 10 日的日最低气温(单位:℃)的扇形统计图.



解:该市3月1日至10日的日最低气温情况如下表:

日期/日	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
日最低气温/℃	−3	−2	0	−1	1	2	0	−1	2	2

其中日最低气温为−3 ℃的有1天,占10%;日最低气温为−2 ℃的有1天,占10%;日最低气温为−1 ℃的有2天,占20%;日最低气温为0 ℃的有2天,占20%;日最低气温为1 ℃的有1天,占10%;日最低气温为2 ℃的有3天,占30%.故绘制的扇形统计图如图所示.



【类题通法】

折线统计图的读图方法

(1)读折线统计图时,首先要看清楚直角坐标系中横、纵坐标表示的意义;其次要明确图中的数量及其单位.

(2)在折线统计图中,从折线的上升、下降可分析统计数量的增减变化情况,从陡峭程度上,可分析增长、下降的幅度.

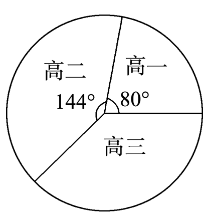
提质归纳

统计图表
- 频率分布直方图
- 条形图
- 扇形图
- 折线图

课后素养评价

基础性·能力运用

1.某市在全市高中学生中进行“我的数学学习之路”的征文比赛,收到的稿件经分类统计,得到如图所示的扇形统计图.又已知全市高一年级共交稿2 000份,则高三年级的交稿数为　　(　　)



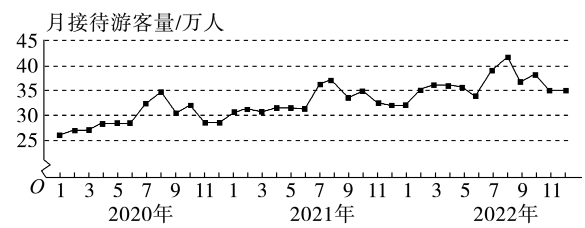
A.2 800份　　B.3 000份

C.3 200份　　D.3 400份

D　**解析**:高一年级交稿2 000份,在总交稿数中占比$\frac{80}{360}=\frac{2}{9}$,所以总交稿数为$2\ 000\div\frac{2}{9}=9\ 000$(份).

高二年级交稿数占总交稿数的$\frac{144}{360}=\frac{2}{5}$,所以高三年级交稿数占总交稿数的$1-\frac{2}{9}-\frac{2}{5}=\frac{17}{45}$,所以高三年级交稿数为$9\ 000\times\frac{17}{45}=3\ 400$(份).

2.某城市为了解游客人数的变化规律,提高旅游服务质量,收集并整理了2020年1月至2022年12月期间月接待游客量(单位:万人)的数据,绘制了如图所示的折线图.



根据该折线图,下列结论错误的是　　(　　)

A.月接待游客量逐月增加

B.年接待游客量逐年增加

C.各年的月接待游客量高峰期大致在7,8月份

D.各年1月至6月的月接待游客量相对于7月至12月,波动更小,比较平稳

A　**解析**:对于选项A,由图易知,月接待游客量每年7,8月份明显高于12月份,故A错;对于选项B,观察折线图的变化趋势可知,年接待游客量逐年增加,故B正确;对于选项C,D,由图可知显然正确.故选A.

3.小波一星期的总开支分布图如图1所示,一星期的食品开支如图2所示,则小波一星期购买鸡蛋的开支占总开支的百分比为　　(　　)

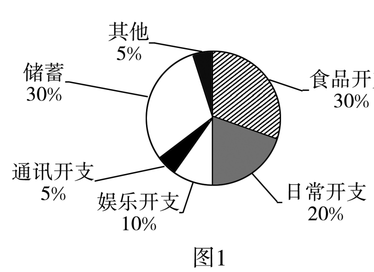


图1

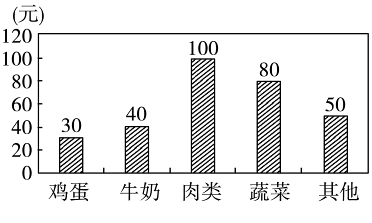


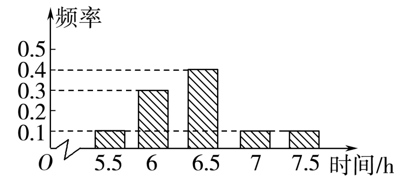
图2

A.30%　　　　B.10%

C.3%　　　　D.不能确定

C　**解析**:本题考查了扇形图、条形图.由图 2 知小波一星期的食品开支为 300 元,其中鸡蛋开支为 30 元,占食品开支的 10%.而食品开支占总开支的 30%,所以小波一星期的鸡蛋开支占总开支的百分比为 3%.

4.某校为了了解学生的睡眠情况,随机调查了 50 名学生,得到他们在某一天各自的睡眠时间的数据,所得结果用如图所示的条形图表示.根据条形图可得,这 50 名学生这一天的平均睡眠时间为________h.



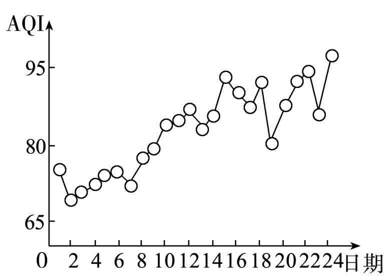
6.4　**解析**:方法一:要确定这 50 名学生的平均睡眠时间,就必须计算其总睡眠时间.总睡眠时间为 $5.5\times0.1\times50+6\times0.3\times50+6.5\times0.4\times50+7\times0.1\times50+7.5\times0.1\times50=27.5+90+130+35+37.5=320$(h).

故平均睡眠时间为 $320\div50=6.4$(h).

方法二:根据图形得这 50 名学生的平均睡眠时间为 $5.5\times0.1+6\times0.3+6.5\times0.4+7\times0.1+7.5\times0.1=6.4$(h).

综合性·创新提升

1.空气质量指数 AQI 是检测空气质量的重要参数,其数值越大说明空气污染状况越严重,空气质量越差.某地环保部门统计了该地区某月 1 日至 24 日连续 24 天的空气质量指数 AQI.根据得到的数据绘制出如图所示的折线图,则下列说法错误的是　(　　)



A.该地区在该月 2 日空气质量最好

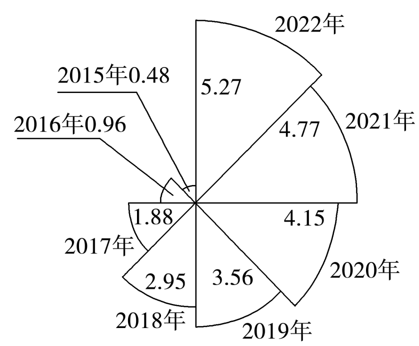
B.该地区在该月 24 日空气质量最差

C.该地区从该月 7 日到 12 日 AQI 持续增大

D.该地区的空气质量指数 AQI 与日期成负相关

D　**解析**:对于 A,由于 2 日的空气质量指数 AQI 最低,所以该地区在该月 2 日空气质量最好,所以正确;对于 B,由于 24 日的空气质量指数 AQI 最高,所以该地区在该月 24 日空气质量最差,所以正确;对于 C,从折线图上看,该地区从该月 7 日到 12 日 AQI 持续增大,所以正确;对于 D,从折线图上看,该地区的空气质量指数 AQI 与这段日期成正相关,所以错误.故选 D.

2.南丁格尔玫瑰图是由近代护理学和护士教育创始人弗洛伦斯·南丁格尔设计的,图中每个扇形圆心角都是相等的,半径长短表示数量大小.某机构统计了近几年中国知识付费用户数量(单位:亿人次),并绘制成南丁格尔玫瑰图如下,根据此图,下列说法错误的是　(　　)



A.2015 年至 2022 年,知识付费用户数量逐年增加

B.2016 年至 2022 年,知识付费用户数量逐年增加量在 2018 年时最多

C.2022 年知识付费用户数量超过 2015 年知识付费用户数量的 10 倍

D.2016 年至 2022 年,知识付费用户数量的逐年增加量逐年递增

D　**解析**:对于 A,由图可知,2015 年至 2022 年,知识付费用户数量逐年增加,故 A 正确;

对于 B,D,知识付费用户数量的逐年增加量分别为:2016 年,$0.96-0.48=0.48$,

2017 年，$1.88-0.96=0.92$，

2018 年，$2.95-1.88=1.07$，

2019 年，$3.56-2.95=0.61$，

2020 年，$4.15-3.56=0.59$，

2021 年，$4.77-4.15=0.62$，

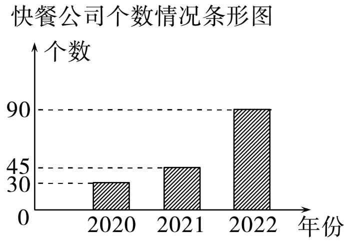
2022 年，$5.27-4.77=0.5$，

可知知识付费用户数量逐年增加量在 2018 年时最多，故 B 正确，D 错误；

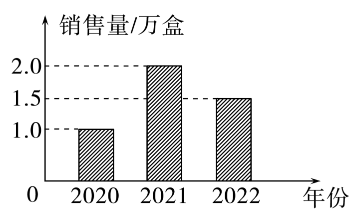
对于 C，由 $5.27>0.48\times10$，即 2022 年知识付费用户数量超过 2015 年知识付费用户数量的 10 倍，故 C 正确.故选 D.

3.某校研究性学习小组对本地区 2020 年至 2022 年快餐公司发展情况进行了调查，制成了如图所示的该地区快餐公司个数情况的条形图和快餐公司盒饭年销售量的平均数情况条形图.根据图中提供的信息可以得出，这三年中该地区平均每年销售盒饭________万盒.

快餐公司个数情况条形图

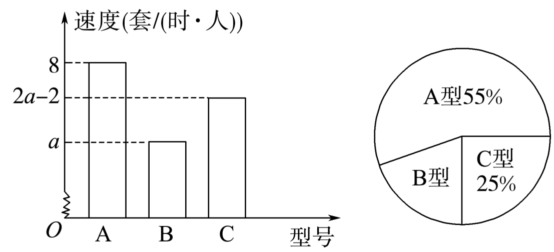


快餐公司盒饭年销量的平均数情况条形图



85　**解析**：三年中该地区平均每年销售盒饭 $\dfrac{30\times1+45\times2+90\times1.5}{3}=85$(万盒).

4.在暑期社会实践活动中，小明所在小组的同学与一家玩具生产厂家联系，给该厂组装玩具，该厂同意他们组装 240 套玩具.这些玩具分为 A，B，C 三种型号，如图所示：



若每人组装同一种型号玩具的速度都相同，根据以上信息，完成下列填空：

(1)从上述统计图可知，A，B，C 型玩具各有________套、________套、________套；

(2)若每人组装 A 型玩具 16 套与组装 C 型玩具 12 套所花的时间相同，那么 a 的值为________，每人每小时组装 C 型玩具________套.

(1)132　48　60　(2)4　6　**解析**：(1)A 型玩具有 $240\times55\%=132$(套)，

B 型玩具有 $240\times(1-55\%-25\%)=48$(套)，

C 型玩具有 $240\times25\%=60$(套).

(2)由题中左图可知每人组装 A 型玩具 16 套用 2 小时，所以每人组装 C 型玩具 12 套用 2 小时，即每小时组装 6 套.由 $2a-2=6$，得 $a=4$.

9.2.2　总体百分位数的估计

学习任务目标

1.结合实例，能用样本估计百分位数.(数据分析)

2.理解百分位数的统计含义.

问题式预习

知识点一　第 p 百分位数的概念

一般地，一组数据的第 p 百分位数是这样一个值，它使得这组数据中至少有 $p\%$ 的数据小于或等于这个值，且至少有 $(100-p)\%$ 的数据大于或等于这个值.

知识点二　计算第 p 百分位数的步骤

第 1 步，按从小到大排列原始数据.

第 2 步，计算 $i=n\times p\%$.

第 3 步，若 i 不是整数，而大于 i 的比邻整数为 j，则第 p 百分位数为第 j 项数据；若 i 是整数，则第 p 百分位数为第 i 项与第 $(i+1)$ 项数据的平均数.

[微思考]

某组数据的第 p 百分位数在此组数据中一定存在吗？为什么？

提示：不一定.当 $i=n\times p\%$ 是整数时，第 p 百分位数

为第 i 项与第 $(i+1)$ 项数据的平均数,若第 i 项与第 $(i+1)$ 项数据不相等,则第 p 百分位数不在此组数据中.

知识点三　四分位数

第 25 百分位数,第 50 百分位数,第 75 百分位数这三个分位数把一组由小到大排列后的数据分成四等份,因此称为四分位数.

[微训练]

数据 12,14,15,17,19,23,27,30 的第 70 百分位数是（　　）

A.14　　B.17

C.19　　D.23

D　**解析**:因为 $8\times70\%=5.6$,所以第 70 百分位数是第 6 项数据 23.

任务型课堂

任务一　百分位数的计算

1. 以下数据为参加数学竞赛决赛的 15 人的成绩(单位:分):78,70,72,86,88,79,80,81,94,84,56,98,83,90,91,则这 15 人成绩的第 80 百分位数是（　　）

A.90　　B.90.5

C.91　　D.91.5

B　**解析**:把成绩按从小到大的顺序排列为

56,70,72,78,79,80,81,83,84,86,88,90,91,94,98.

因为 $15\times80\%=12$,所以这 15 人成绩的第 80 百分位数是 $\frac{90+91}{2}=90.5$.

2. 已知甲、乙两组数据(由小到大排列):

甲组:27,28,39,40,m,50;

乙组:24,n,34,43,48,52.

若这两组数据的第 30 百分位数、第 80 百分位数分别相等,则 $\frac{m}{n}=$（　　）

A.$\frac{12}{7}$　B.$\frac{10}{7}$　C.$\frac{4}{3}$　D.$\frac{7}{4}$

A　**解析**:因为 $30\%\times6=1.8$,$80\%\times6=4.8$ 且两组数据的第 30 百分位数、第 80 百分位数分别相等,所以第 30 百分位数为 $n=28$,第 80 百分位数为 $m=48$,所以 $\frac{m}{n}=\frac{48}{28}=\frac{12}{7}$.

3. 求下列数据的四分位数.

13,15,12,27,22,24,28,30,31,18,19,20.

解:把这 12 个数据按从小到大的顺序排列为

12,13,15,18,19,20,22,24,27,28,30,31,

因为 $12\times25\%=3$,$12\times50\%=6$,$12\times75\%=9$,

所以此列数据的第 25 百分位数为 $\frac{15+18}{2}=16.5$,

第 50 百分位数为 $\frac{20+22}{2}=21$,

第 75 百分位数为 $\frac{27+28}{2}=27.5$.

任务二　百分位数的综合应用

[探究活动]

根据第 p 百分位数的概念,探究以下问题.

探究:第 p 百分位数有什么特点?

提示:总体数据中的任意一个数小于或等于它的概率至少是 $p\%$.

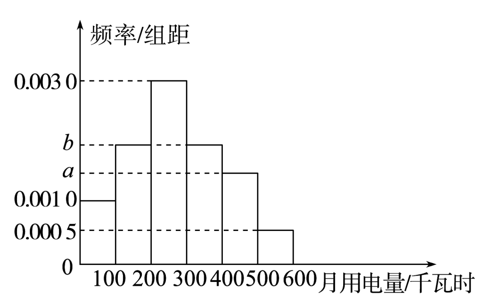
[评价活动]

某市为了鼓励市民节约用电,实行“阶梯式”电价,将该市每户居民的月用电量划分为三档,月用电量不超过 200 千瓦时的部分按0.5 元/千瓦时收费,超过 200 千瓦时但不超过 400 千瓦时的部分按 0.8 元/千瓦时收费,超过 400 千瓦时的部分按 1.0 元/千瓦时收费.

(1)求某户居民用电费用 y(单位:元)关于月用电量 x(单位:千瓦时)的函数解析式;

(2)为了了解居民的用电情况,通过抽样获得了今年 1 月份 100 户居民每户的用电量,统计分析后得到如图所示的频率分布直方图.若这 100 户居民中,今年 1 月份用电费用不超过 260 元的占 80%,求 a,b 的值;

(3)根据(2)中求得的数据计算用电量的 75%分位数.



解:(1)当 $0\leqslant x\leqslant200$ 时,$y=0.5x$;

当 $200<x\leqslant400$ 时,$y=0.5\times200+0.8\times(x-200)=0.8x-60$;

当 $x>400$ 时,$y=0.5\times200+0.8\times200+1.0\times(x-400)=x-140$.

所以 y 关于 x 的函数解析式为

$$y=\begin{cases}0.5x,0\leqslant x\leqslant200,\\0.8x-60,200<x\leqslant400,\\x-140,x>400.\end{cases}$$

(2)由(1)可知,当 $y=260$ 时,$x=400$,即用电量不超过 400 千瓦时的占 80%.

结合频率分布直方图可知

$$\begin{cases}0.001\ 0\times100+2b\times100+0.003\ 0\times100=0.8,\\100a+0.000\ 5\times100=0.2,\end{cases}$$

解得 $a=0.001\ 5$,$b=0.002\ 0$.

(3)设 75%分位数为 m.

因为用电量低于 300 千瓦时的占

$(0.001\ 0+0.002\ 0+0.003\ 0)\times100=60\%$,

用电量不超过 400 千瓦时的占 80%,

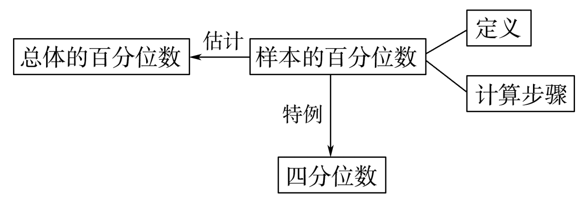
所以用电量的 75%分位数 m 在[300,400)内,所以 $0.6+(m-300)\times0.002=0.75$,

解得 $m=375$,即用电量的 75%分位数为 375 千瓦时.

【类题通法】

根据频率分布直方图计算样本数据的百分位数,首先要理解频率分布直方图中各组数据频率的计算,其次估计百分位数在哪一组,应运用方程的思想方法,设出百分位数,解方程可得.

▶ 提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1.数据 8,6,5,2,7,9,12,4,12 的第 40 百分位数是 ( )

A.5　　B.6　　C.7.5　　D.8

B **解析**:把这组数据按照从小到大的顺序排列,可得 2,4,5,6,7,8,9,12,12.

因为 $9\times40\%=3.6$,所以这组数据的第 40 百分位数是 6.

2.某校调查某班 30 名同学所穿的鞋的尺码,结果如下表所示:

码号	33	34	35	36	37
人数	7	6	14	1	2

则这组数据的第 25 百分位数是 ( )

A.33　　B.34　　C.35　　D.36

B **解析**:因为 $30\times25\%=7.5$,所以这组数据的第 25 百分位数为 34.故选 B.

3.(多选题)某地一年之内 12 个月的降水量分别为 56,46,53,48,51,53,71,58,56,56,64,66,则关于该地区的月降水量,以下说法正确的是 ( )

A.20%分位数为 51

B.75%分位数为 61

C.中位数为 56

D.平均数为 57

ABC **解析**:将数据从小到大排列得 46,48,51,53,53,56,56,56,58,64,66,71,

共 12 个数据.

因为 $12\times20\%=2.4$,所以 20%分位数为第三个数据,即为 51,故 A 选项正确;

因为 $12\times75\%=9$,所以 75%分位数为 $\frac{58+64}{2}=61$,故 B 选项正确;

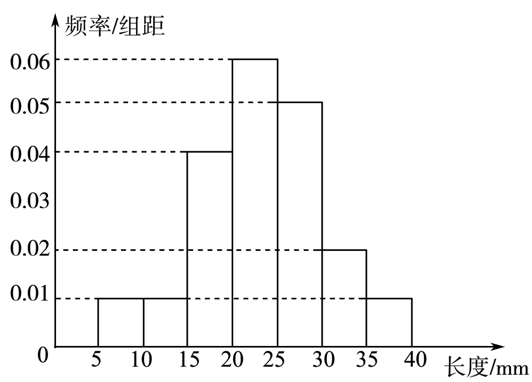
该组数据的中位数为 $\frac{56+56}{2}=56$,故 C 选项正确;

该组数据的平均数为 $\frac{1}{12}\times(46+48+51+53+53+56+56+56+58+64+66+71)=56.5$,故 D 选项错误.

故选 ABC.

综合性·创新提升

1.某棉纺厂为了了解一批棉花的质量，从中随机抽取了100根棉花纤维的长度（棉花纤维的长度是棉花质量的重要指标），所得数据都在区间[5,40]内，其频率分布直方图如图所示.估计棉花纤维的长度的样本数据的80%分位数是（　　）



A.29 mm　　B.32.5 mm

C.33.5 mm　　D.34 mm

A　**解析**：棉花纤维的长度在25 mm以下的比例为$(0.01+0.01+0.04+0.06)\times5=0.60=60\%$，

在30 mm以下的比例为$60\%+25\%=85\%$，

因此80%分位数一定位于[25,30)内，由$25+5\times\frac{0.80-0.60}{0.85-0.60}=29$，

可以估计棉花纤维的长度的样本数据的80%分位数是29 mm.

2.数据3.2，3.4，3.8，4.2，4.3，4.5，x，6.6的第65百分位数是4.5，则实数x的取值范围是（　　）

A.$[4.5,+\infty)$　　B.$[4.5,6.6)$

C.$(4.5,+\infty)$　　D.$(4.5,6.6]$

A　**解析**：因为$8\times65\%=5.2$，所以这组数据的第65百分位数是第6个数据4.5，则$x\geqslant4.5$.故选A.

3.已知30个数据的第60百分位数是8.2，这30个数据从小到大排列后第18个数据是7.8，则第19个数据是________.

8.6　**解析**：因为$30\times60\%=18$，所以第60百分位数为第18个数据与第19个数据的平均数.由题可知，第18个数据为7.8，则第19个数据为$8.2\times2-7.8=8.6$.

4.从某珍珠公司生产的产品中，任意抽取12颗珍珠，得到它们的质量（单位：g）如下：7.9，9.0，8.9，8.6，8.4，8.5，8.5，8.5，9.9，7.8，8.3，8.0.

(1)分别求出这组数据的第25，75，95百分位数；

(2)请你找出质量较小的前15%的珍珠的质量；

(3)若用第25，50，95百分位数把公司生产的珍珠划分为次品、合格品、优等品和特优品，依照这个样本的数据，给出该公司珍珠等级的划分标准.

解：(1)将所有数据从小到大排列，得

7.8，7.9，8.0，8.3，8.4，8.5，8.5，8.5，8.6，8.9，9.0，9.9.

共有12个数据，

$12\times25\%=3$，$12\times75\%=9$，$12\times95\%=11.4$，

则第25百分位数是$\frac{8.0+8.3}{2}=8.15$，

第75百分位数是$\frac{8.6+8.9}{2}=8.75$，

第95百分位数是第12个数据，为9.9.

(2)共有12个数据，$12\times15\%=1.8$，则第15百分位数是第2个数据，为7.9.

即质量较小的前15%的产品有2个，它们的质量分别为7.8 g，7.9 g.

(3)由(1)可知样本数据的第25百分位数是8.15 g，第50百分位数为8.5 g，第95百分位数是9.9 g，所以质量小于或等于8.15 g的珍珠为次品，质量大于8.15 g且小于或等于8.5 g的珍珠为合格品，质量大于8.5 g且小于或等于9.9 g的珍珠为优等品，质量大于9.9 g的珍珠为特优品.

9.2.3　总体集中趋势的估计

学习任务目标

1.结合实例,能用样本估计总体的集中趋势参数(平均数、中位数、众数).(数据分析)

2.理解集中趋势参数的统计含义.(数学抽象)

问题式预习

知识点一　众数、中位数和平均数

1.定义

(1)众数:一组数据中出现次数最多的数.

(2)中位数:一组数据按大小顺序排列后,处于中间位置的数.如果个数是偶数,则取中间两个数据的平均数.

(3)平均数:一组数据的和除以数据个数所得到的数.

2.众数、中位数和平均数的比较

名称	优点	缺点
平均数	与中位数相比,平均数反映出样本数据中的更多信息,对样本中的极端值更加敏感	任何一个数据的改变都会引起平均数的改变.数据越"离群",对平均数的影响越大
中位数	不受少数几个极端数据(即排序靠前或靠后的数据)的影响	对极端值不敏感
众数	体现了样本数据的最大集中点	众数只能传递数据中的信息的很少一部分,对极端值不敏感

[微训练]

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)一个样本的众数、平均数和中位数都是唯一的.　(×)

(2)中位数一定是样本数据中的某个数.　(×)

(3)若改变一组数据中的一个数,则这组数据的平均数、中位数、众数都会发生改变.　(×)

2.七位评委为某跳水运动员打出的分数如下:84,79,86,87,84,93,84,则这组分数的中位数和众数分别是　(　　)

A.84,85　　B.84,84

C.85,84　　D.85,85

B　**解析**:把七位评委打出的分数按从小到大的顺序排列为79,84,84,84,86,87,93,可知众数是84,中位数是84.

知识点二　众数、中位数、平均数与频率分布直方图的关系

1.平均数:在频率分布直方图中,样本平均数可以用每个小矩形底边中点的横坐标与小矩形的面积的乘积之和近似代替.

2.中位数:在频率分布直方图中,中位数左边和右边的直方图的面积应该相等.

3.众数:众数是最高小矩形底边的中点所对应的数据.

任务型课堂

任务一　平均数、中位数和众数的计算

1.某班甲、乙两名同学在5次阶段性检测中的数学成绩(百分制)如下所示,

甲的成绩:75,83,85,85,92;

乙的成绩:74,84,84,85,98.

甲、乙两名同学成绩的中位数分别为x_1,x_2,成绩的平均数分别为y_1,y_2,则下列结论正确的是　(　　)

A.$x_1<x_2$,$y_1<y_2$

B.$x_1<x_2$,$y_1>y_2$

C.$x_1>x_2$,$y_1>y_2$

D.$x_1>x_2$,$y_1<y_2$

D　**解析**:由题意可得$x_1=85$,$x_2=84$,故$x_1>x_2$.而甲的平均数$y_1=\frac{1}{5}\times(75+83+85+85+92)=84$,乙的平均数$y_2=\frac{1}{5}\times(74+84+84+85+98)=85$,故$y_1<y_2$.故选D.

2.在一次中学生田径运动会上,参加男子跳高的 17 名运动员的成绩(单位:m)如表所示:

成绩	1.50	1.60	1.65	1.70	1.75	1.80	1.85	1.90
人数	2	3	2	3	4	1	1	1

分别求这些运动员成绩的众数、中位数与平均数.

解:在 17 个数据中,1.75 出现了 4 次,出现的次数最多,即这组数据的众数是 1.75.表里的 17 个数据可看成是按从小到大的顺序排列的,其中第 9 个数据 1.70 是最中间的一个数据,即这组数据的中位数是 1.70.

这组数据的平均数 $\overline{x}=\frac{1}{17}\times(1.50\times2+1.60\times3+1.65\times2+1.70\times3+1.75\times4+1.80\times1+1.85\times1+1.90\times1)\approx1.69$(m).

故 17 名运动员成绩的众数、中位数、平均数依次为 1.75 m,1.70 m,1.69 m.

【类题通法】

平均数、众数、中位数的求法

平均数一般是根据公式来计算的;求众数、中位数时,可先将这组数据按从小到大或从大到小的顺序排列,再根据各自的定义求得.

任务二 平均数、中位数和众数的应用

某校在一项体育考试中,甲、乙两班学生的数学成绩统计如下:

成绩/分		50	60	70	80	90	100
人数	甲班	1	6	12	11	15	5
	乙班	3	5	15	3	13	11

选用平均数、众数与中位数评估这两个班的成绩.

解:甲班成绩的平均数为 79.6 分,乙班成绩的平均数为 80.2 分,从平均数看成绩较好的是乙班.

甲班成绩的众数为 90 分,乙班成绩的众数为 70 分,从众数看成绩较好的是甲班.

按从高到低(或从低到高)的顺序排列之后,甲班成绩的第 25 个和第 26 个数据都是 80,所以中位数是 80 分.同理乙班成绩的中位数也是 80 分.但是甲班成绩在中位数以上(含中位数)的学生有 31 人,占全班学生的 62%,而乙班有 27 人,占全班学生的 54%.所以从中位数看成绩较好的是甲班.

【类题通法】

众数、中位数、平均数的意义

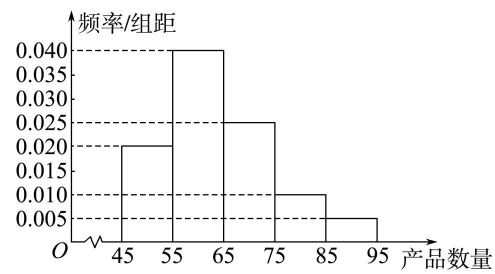
(1)样本的众数、中位数和平均数常用来表示样本数据的“中心值”,其中众数和中位数不受少数几个极端值的影响,但只能表达样本数据中的少量信息,平均数代表了数据更多的信息,但受样本中每个数据的影响,越极端的数据对平均数的影响越大.

(2)当一组数据中有不少数据重复出现时,其众数往往更能反映问题,当一组数据中个别数据较大时,可用中位数描述其集中趋势.

任务三 根据频率分布直方图求平均数、中位数和众数

[探究活动]

为了调查某厂工人生产某种产品的能力,随机抽查了 20 位工人某天生产该产品的数量得到频率分布直方图如图.



探究 1:根据众数的意义和频率分布直方图中小矩形高的含义,这 20 名工人一人一天生产该产品的数量的众数大约是多少?

提示:可以用频率分布直方图中最高矩形底边中点的横坐标作为众数的近似值,

由此估计这 20 名工人一人一天生产该产品的数量的众数大约是 60.

探究 2:这 20 名工人一人一天生产该产品的数量的中位数在哪一组中?设中位数为 x,则 x 的值应是多少?

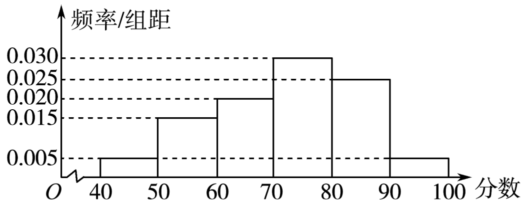
提示:因为 $0.2+0.4>0.5$,所以中位数一定在 $[55,65)$ 内.设中位数为 x,则 $0.2+(x-55)\times0.04=0.5$,解得 $x=62.5$.

探究 3:同一组中的数据用该组区间的中点值作代表,这 20 名工人一人一天生产该产品的数量的平均数大约是多少?

提示:平均数为 $0.2\times50+0.4\times60+0.25\times70+0.1\times80+0.05\times90=64$.

[评价活动]

某校从参加高二年级学业水平测试的学生中抽出 80 名学生,其数学成绩(均为整数)的频率分布直方图如图所示.



(1)求这次测试中数学成绩的众数；

(2)求这次测试中数学成绩的中位数.

解:(1)由题图知众数为$\dfrac{70+80}{2}=75$.

(2)由题图,设中位数为 x.由于前三个矩形面积之和为0.4,第四个矩形面积为 0.3,$0.3+0.4>0.5$,因此中位数位于第四组区间内,则 $0.4+0.03\times(x-70)=0.5$,所以 $x\approx73.3$.

【类题通法】

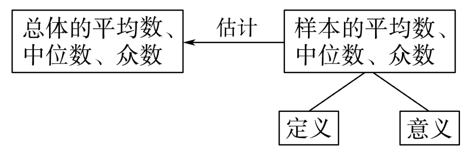
众数、中位数、平均数与频率分布直方图的关系

(1)众数:在样本数据的频率分布直方图中,众数是最高矩形的底边中点的横坐标.

(2)中位数:在频率分布直方图中,中位数所在位置的左边和右边的小矩形的面积应该相等,都是 0.5.

(3)平均数:平均数在频率分布直方图中等于每个小矩形底边中点的横坐标与小矩形的面积的乘积之和.

提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1.已知 10 名工人生产同一种零件,生产的件数分别是 16,18,15,11,16,18,18,17,15,13,设其平均数为 a,中位数为 b,众数为 c,则有 ( )

A.$a>b>c$　　B.$a>c>b$

C.$c>a>b$　　D.$c>b>a$

D **解析**:由题意得 $a=\dfrac{1}{10}\times(16+18+15+11+16+18+18+17+15+13)=\dfrac{157}{10}=15.7$,中位数为 16,众数为 18,则 $b=16$,$c=18$,所以 $c>b>a$.

2.16 位参加百米短跑半决赛同学的成绩各不相同,按成绩取前 8 位进入决赛.如果小刘知道了自己的成绩后,要判断他能否进入决赛,则其他 15 位同学成绩的下列数据中,能使他得出结论的是 ( )

A.平均数　　B.极差

C.中位数　　D.方差

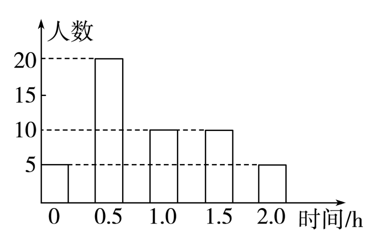
C **解析**:要判断小刘是不是能进入决赛,只要判断小刘的成绩是不是前 8 名,所以只要知道其他 15 位同学的成绩中是不是有 8 个高于他,也就是把其他 15 位同学的成绩排列后看第 8 名的成绩即可,小刘的成绩高于这个成绩就能进入决赛,低于这个成绩就不能进入决赛,这个第 8 名的成绩就是这 15 位同学成绩的中位数.

3.一组数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数是 30,则数据 $2x_1+1,2x_2+1,\cdots,2x_n+1$ 的平均数是________.

61 **解析**:因为样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数是 30,所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=30n$,

所以数据 $2x_1+1,2x_1+1,\cdots,2x_n+1$ 的平均数 $\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(2x_i+1)=\dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+1=61$.

4.某学校为了了解学生课外阅读情况,随机调查了 50 名学生,得到他们在某天内课外阅读所用时间的数据,将结果用条形统计图表示如下.根据条形统计图估计该校全体学生这一天课外阅读的平均时间为________h.



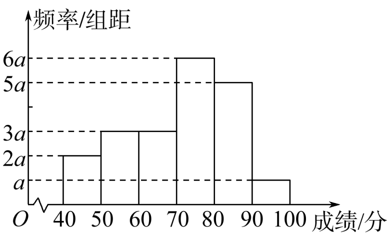
0.9 **解析**:由条形统计图可得,这 50 名学生这一天课外阅读的平均时间为

$\dfrac{5\times0+20\times0.5+10\times1.0+10\times1.5+5\times2.0}{50}=0.9(\text{h})$,

因此估计该校全体学生这一天课外阅读的平均时间为 0.9 h.

综合性·创新提升

1.(多选题)为了加深师生对党史的了解,激发广大师生知史爱党、知史爱国的热情,某校举办了“学党史、育文化”党史知识竞赛,并将 1 000 名师生的竞赛成绩(满分 100 分,成绩取整数)整理成如图所示的频率分布直方图,则下列说法正确的是　(　　)



A.a 的值为 0.005

B.估计成绩低于 60 分的有 25 人

C.估计这组数据的众数为 75

D.估计这组数据的第 85 百分位数为 86

ACD　**解析**:对于 A,由$(a+2a+3a+3a+5a+6a)\times10=1$,得 $a=0.005$,故 A 正确;

对于 B,估计成绩低于 60 分的有 $1\ 000\times(2a+3a)\times10=50\ 000a=250$(人),故 B 错误;

对于 C,由众数的定义知,估计这组数据的众数为 75,故 C 正确;

对于 D,设这组数据的第 85 百分位数为 m,则$(90-m)\times5\times0.005+0.005\times10=1-85\%=0.15$,解得 $m=86$,故 D 正确.故选 C.

2.某企业有 3 个分厂生产同一种电子产品,第一、二、三分厂的产量之比为$1:2:1$,用分层随机抽样的方法(每个分厂的产品为一层)从 3 个分厂生产的电子产品中共抽取 100 件做使用寿命的测试,由所得的测试结果算得从第一、二、三分厂取出的产品的使用寿命的平均值分别为 980 h,1 020 h,1 032 h,则抽取的 100 件产品的使用寿命的平均值为________h.

1 013　**解析**:由题知,第一、二、三分厂取出的产品数量分别为 $100\times\frac{1}{4}=25$(件),$100\times\frac{2}{4}=50$(件),$100\times\frac{1}{4}=25$(件).故这 100 件产品的使用寿命的平均值为$\frac{980\times25+1\ 020\times50+1\ 032\times25}{100}=1\ 013$(h).

3.已知甲、乙两组数据按从小到大的顺序排列后如下所示:

甲:27,m,39;

乙:n,32,34,38.

若这两组数据的中位数相同,平均数也相同,则$\frac{m}{n}=$________.

$\frac{33}{28}$　**解析**:因为两组数据的中位数相同,所以 $m=\frac{32+34}{2}=33$.由于两组数据的平均数相同,所以$\frac{1}{3}\times(27+33+39)=\frac{1}{4}\times(n+32+34+38)$,解得 $n=28$.故$\frac{m}{n}=\frac{33}{28}$.

9.2.4　总体离散程度的估计

学习任务目标

1.结合实例,能用样本估计总体的离散程度参数(标准差、方差、极差).(数据分析)

2.理解离散程度参数的统计意义.(数学抽象)

问题式预习

知识点一　方差和标准差

1.一组数据的方差和标准差

数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方差为 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\overline{x}^2$,标准差为 $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$.

2.总体方差和标准差

(1)总体方差和标准差:如果总体中所有个体的变量值分别为 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_N$,总体平均数为 $\overline{Y}$,则称 $S^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(Y_i-\overline{Y})^2$ 为总体方差,$S=\sqrt{S^2}$ 为总体标准差.

(2)总体方差的加权形式：如果总体的 N 个变量值中，不同的值共有 $k(k\leqslant N)$ 个，不妨记为 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_k$，其中 Y_i 出现的频数为 $f_i(i=1,2,\cdots,k)$，则总体方差为 $S^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}f_i(Y_i-\overline{Y})^2$.

3. 样本方差和标准差

如果一个样本中个体的变量值分别为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，样本平均数为 $\overline{y}$，则称 $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$ 为样本方差，$s=\sqrt{s^2}$ 为样本标准差.

4. 标准差的意义

标准差刻画了数据的离散程度或波动幅度，标准差越大，数据的离散程度越大；标准差越小，数据的离散程度越小.

[微训练]

已知一组数据 4.7，4.8，5.1，5.4，5.5，则该组数据的方差是________.

0.1　**解析**：易求 $\overline{x}=\frac{1}{5}(4.7+4.8+5.1+5.4+5.5)=5.1$，

所以方差 $s^2=\frac{1}{5}[(-0.4)^2+(-0.3)^2+0^2+0.3^2+0.4^2]=0.1$.

知识点二　分层随机抽样的方差

设样本容量为 n，平均数为 $\overline{x}$，其中两层的个体数量分别为 n_1,n_2，两层的平均数分别为 $\overline{x}_1,\overline{x}_2$，方差分别为 s_1^2,s_2^2，则这个样本的方差为 $s^2=\frac{n_1}{n}[s_1^2+(\overline{x}_1-\overline{x})^2]+\frac{n_2}{n}[s_2^2+(\overline{x}_2-\overline{x})^2]$.

[微训练]

在高一期中考试中，甲、乙两个班的数学成绩统计如下表：

班级	人数	平均分数	方差
甲	20	$\overline{x}_甲$	2
乙	30	$\overline{x}_乙$	3

其中 $\overline{x}_甲=\overline{x}_乙$，则两个班数学成绩的方差为（　　）

A. 3　　B. 2

C. 2.6　　D. 2.5

C　**解析**：由题意可知两个班的数学成绩的平均数 $\overline{x}=\overline{x}_甲=\overline{x}_乙$，则两个班数学成绩的方差为

$s^2=\frac{20}{20+30}[2+(\overline{x}_甲-\overline{x})^2]+\frac{30}{20+30}[3+(\overline{x}_乙-\overline{x})^2]=\frac{20}{20+30}\times2+\frac{30}{20+30}\times3=2.6$.

任务型课堂

任务一　方差与标准差的计算

1. 已知一个样本中的数据为 1，2，3，4，5，则该样本的标准差为（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. 2

B　**解析**：因为样本容量 $n=5$，所以 $\overline{x}=\frac{1}{5}\times(1+2+3+4+5)=3$，

所以 $s^2=\frac{1}{5}\times[(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2]=2$，

所以 $s=\sqrt{2}$.

2. 已知某 7 个数的平均数为 4，方差为 2. 现加入一个新数据 4，此时这 8 个数的平均数为 $\overline{x}$，方差为 s^2，则（　　）

A. $\overline{x}=4,s^2<2$　　B. $\overline{x}=4,s^2>2$

C. $\overline{x}>4,s^2<2$　　D. $\overline{x}>4,s^2>2$

A　**解析**：因为这 7 个数的平均数为 4，所以这 7 个数的和为 $4\times7=28$.

因为加入一个新数据 4，所以 $\overline{x}=\frac{28+4}{8}=4$.

因为这 7 个数的方差为 2，且加入一个新数据 4，

所以这 8 个数的方差 $s^2=\frac{7\times2+(4-4)^2}{8}=\frac{7}{4}<2$.

故选 A.

3. 抽样统计甲、乙两位运动员的 5 次训练成绩，结果如下：

运动员	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次
甲	87	91	90	89	93
乙	89	90	91	88	92

则成绩较为稳定的那位运动员成绩的方差为________.

2　**解析**：$\overline{x}_甲=\frac{1}{5}\times(87+91+90+89+93)=90$，

$\overline{x}_乙=\frac{1}{5}\times(89+90+91+88+92)=90$，

$s_甲^2=\frac{1}{5}\times[(87-90)^2+(91-90)^2+(90-90)^2+(89-90)^2+(93-90)^2]=4$，

$s_乙^2=\frac{1}{5}\times[(89-90)^2+(90-90)^2+(91-90)^2+(88-90)^2+(92-90)^2]=2$.

故成绩较为稳定的那位运动员为乙,其成绩的方差为 2.

【类题通法】

计算方差、标准差的步骤

(1)计算样本的平均数 $\overline{x}$;

(2)计算每个样本数据与样本平均数的差 $x_i-\overline{x}(i=1,2,\cdots,n)$;

(3)计算 $(x_i-\overline{x})^2(i=1,2,\cdots,n)$;

(4)计算 $(x_i-\overline{x})^2(i=1,2,\cdots,n)$ 这 n 个数据的平均数,即得样本方差 s^2;

(5)计算方差的算术平方根,即得样本的标准差 s.

任务二 分层随机抽样的方差

[探究活动]

根据方差及分层随机抽样的方差计算方法,探究下面问题.

探究 1:高一年级某次数学考试中,甲班 10 名学生成绩的平均数为 90,方差为 3,乙班 15 名学生成绩的平均数为 85,方差为 5,那么甲班和乙班这 25 名学生成绩的平均数是否为 $\frac{90+85}{2}=87.5$,方差是否为 $\frac{3+5}{2}=4$? 如果不是,应怎样计算?

提示:不是.设这 25 名学生成绩的平均数为 $\overline{x}$,方差为 s^2.因为高一年级甲班 10 名学生成绩的平均数为 90,方差为 3,乙班 15 名学生成绩的平均数为 85,方差为 5,

所以 $\overline{x}=\frac{90\times10+85\times15}{10+15}=87$,

$s^2=\frac{10\times[3+(90-87)^2]+15\times[5+(85-87)^2]}{10+15}=10.2$.

探究 2:如果数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数是 $\overline{x}$,方差为 s^2,数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\overline{x}$ 的方差为 s_1^2,那么 s^2 与 s_1^2 的大小关系如何?

提示:因为数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\overline{x}$ 比数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 相对更加集中,所以方差变小了,即 $s_1^2<s^2$.

[评价活动]

某学校统计教师职称及年龄,中级职称教师的人数为 50,其平均年龄为 38 岁,方差是 2;高级职称的教师中,3 人 58 岁,5 人 40 岁,2 人38 岁.求该校中级职称和高级职称教师年龄的平均数和方差.

解:由已知条件可知高级职称教师的平均年龄 $\overline{x}_{高}=\frac{3\times58+5\times40+2\times38}{3+5+2}=45$(岁),方差 $s_{高}^2=\frac{1}{3+5+2}\times[3\times(58-45)^2+5\times(40-45)^2+2\times(38-45)^2]=73$,

该校中级职称和高级职称教师的平均年龄

$\overline{x}=\frac{50}{50+10}\times38+\frac{10}{50+10}\times45\approx39.2$(岁).

该校中级职称和高级职称教师的年龄的方差

$s^2=\frac{50}{50+10}\times[2+(38-39.2)^2]+\frac{10}{50+10}\times[73+(45-39.2)^2]=20.64$.

【类题通法】

计算分层随机抽样的方差 s^2 的步骤

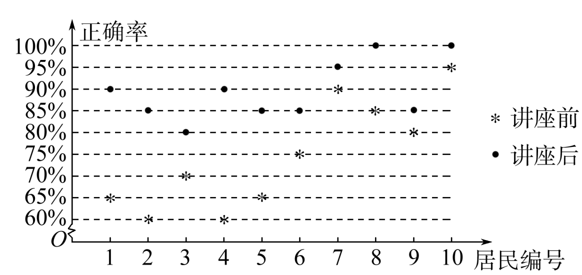
(1)分别计算分层随机抽样中两层样本数据的均值 $\overline{x},\overline{y}$,方差 S_x^2,S_y^2,求出它们的数据个数之比 $\frac{n}{m}$;

(2)总体均值 $\overline{z}=\frac{n}{n+m}\overline{x}+\frac{m}{n+m}\overline{y}$;

(3)总体方差 $s^2=\frac{n}{n+m}[s_x^2+(\overline{z}-\overline{x})^2]+\frac{m}{n+m}[s_y^2+(\overline{z}-\overline{y})^2]$.

任务三 数据的数字特征的综合应用

1.(2022·全国甲卷(理))某社区通过公益讲座以普及社区居民的垃圾分类知识.为了解讲座效果,随机抽取 10 位社区居民,让他们在讲座前和讲座后各回答一份垃圾分类知识问卷,这 10 位社区居民在讲座前和讲座后问卷答题的正确率如下图,则 (　　)



A.讲座前问卷答题的正确率的中位数小于 70%

B.讲座后问卷答题的正确率的平均数大于 85%

C.讲座前问卷答题的正确率的标准差小于讲座后正确率的标准差

D.讲座后问卷答题的正确率的极差大于讲座前正确率的极差

B　**解析**：讲座前中位数为$\frac{70\%+75\%}{2}>70\%$，所以A错误；

讲座后问卷答题的正确率只有一个是80%，4个85%，剩下全部大于等于90%，所以讲座后问卷答题的正确率的平均数大于85%，所以B正确；

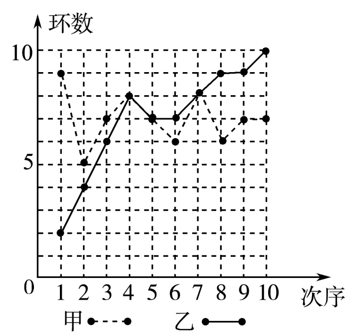
讲座前问卷答题的正确率更加分散，所以讲座前问卷答题的正确率的标准差大于讲座后正确率的标准差，所以C错误；

讲座后问卷答题的正确率的极差为$100\%-80\%=20\%$，

讲座前问卷答题的正确率的极差为$95\%-60\%=35\%>20\%$，所以D错误.

故选B.

2. 甲、乙两人在相同条件下各射击10次，每次中靶环数情况如图所示.



(1)请填写下表(写出计算过程)：

选手	平均数	方差	命中9环及9环以上的次数
甲			
乙			

(2)从下列三个不同的角度对这次射击结果进行分析：

①从平均数和方差相结合看(分析谁的成绩更稳定)；

②从平均数和命中9环及9环以上的次数相结合看(分析谁的成绩好些)；

③从折线图上两人射击命中环数的走势看(分析谁更有潜力).

解：由题图知，甲射击10次中靶环数分别为9，5，7，8，7，6，8，6，7，7.

将它们由小到大排列为5，6，6，7，7，7，7，8，8，9.

乙射击10次中靶环数分别为2，4，6，8，7，7，8，9，9，10.

将它们由小到大排列为2，4，6，7，7，8，8，9，9，10.

(1)$\overline{x}_{甲}=\frac{1}{10}\times(5+6\times2+7\times4+8\times2+9)=7$(环)，

$\overline{x}_{乙}=\frac{1}{10}\times(2+4+6+7\times2+8\times2+9\times2+10)=7$(环)，

$s^2_{甲}=\frac{1}{10}\times[(5-7)^2+(6-7)^2\times2+(7-7)^2\times4+(8-7)^2\times2+(9-7)^2]=\frac{1}{10}\times(4+2+0+2+4)=1.2$，$s^2_{乙}=\frac{1}{10}\times[(2-7)^2+(4-7)^2+(6-7)^2+(7-7)^2\times2+(8-7)^2\times2+(9-7)^2\times2+(10-7)^2]=\frac{1}{10}\times(25+9+1+0+2+8+9)=5.4$.

填表如下：

选手	平均数	方差	命中9环及9环以上的次数
甲	7	1.2	1
乙	7	5.4	3

(2)①因为平均数相同，$s^2_{甲}<s^2_{乙}$，所以甲成绩比乙稳定.

②因为平均数相同，甲命中9环及9环以上的次数比乙少，

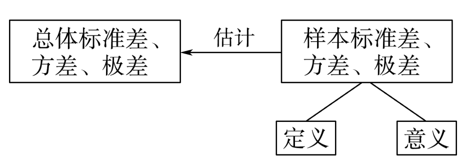
所以乙成绩比甲好些.

③甲成绩在平均数上下波动；而乙成绩处于上升趋势，从第三次以后就没有比甲低的情况发生，所以乙更有潜力.

【类题通法】

在实际问题中，仅靠平均数不能完全表达数据的信息，还要研究方差，方差描述了数据相对平均数的离散程度.在平均数相同的情况下，方差越大，离散程度越大，数据波动性越大，稳定性越差；方差越小，数据越集中，越稳定.

提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1. 一组数据的方差为 s^2,平均数为 $\overline{x}$,将这组数据中的每一个数都乘 2,所得的一组新数据的方差和平均数分别为 ( )

A. $\frac{1}{2}s^2,\frac{1}{2}\overline{x}$　　B. $2s^2,2\overline{x}$

C. $4s^2,2\overline{x}$　　D. $s^2,\overline{x}$

C　**解析**:将一组数据的每一个数都乘 a,则新数据组的方差为原来数据组方差的 a^2 倍,平均数为原来数据组的 a 倍.

2. 高三学生李丽在一年的五次数学模拟考试中的成绩(单位:分)为 $x,y,105,109,110$.已知该同学五次数学成绩数据的平均数为 108,方差为 35.2,则 $|x-y|$ 的值为 ( )

A.15　　B.16　　C.17　　D.18

D　**解析**:由题意,得 $\frac{x+y+105+109+110}{5}=108$,①

$\frac{9+1+4+(x-108)^2+(y-108)^2}{5}=35.2$.②

由①②解得 $\begin{cases}x=99,\\y=117\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=117,\\y=99.\end{cases}$ 所以 $|x-y|=18$.

故选 D.

3. 在教学调查中,甲、乙、丙三个班的数学测试成绩分布分别如图 1、图 2、图 3,假设三个班的平均分都是 75 分,s_1,s_2,s_3 分别表示甲、乙、丙三个班数学测试成绩的标准差,则有 ( )

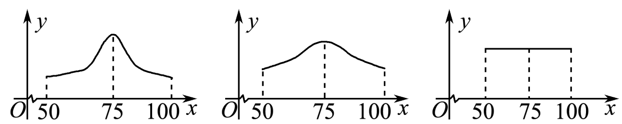


图1　图2　图3

A. $s_3>s_1>s_2$　　B. $s_2>s_1>s_3$

C. $s_1>s_2>s_3$　　D. $s_3>s_2>s_1$

D　**解析**:所给图是成绩分布图,平均分是 75 分,在图 1 中,集中在 75 分附近的数据最多,图 3 中从 50 分到 100 分均匀分布,所有成绩不集中在任何一个数据附近,图 2 介于两者之间.由标准差的意义可得 $s_3>s_2>s_1$.

4. 已知样本数据 $6,7,8,m,n$ 的平均数是 7,标准差是 $\sqrt{2}$,则 m^2+n^2 等于________.

106　**解析**:根据平均数及方差公式,可得 $6+7+8+m+n=5\times7=35$,即 $m+n=14$.

因为标准差是 $\sqrt{2}$,所以方差为 2,所以 $\frac{1}{5}\times[(m-7)^2+(n-7)^2+(6-7)^2+(7-7)^2+(8-7)^2]=2$,即 $(m-7)^2+(n-7)^2=8$,$m^2+n^2-14(m+n)+98=8$,则 $m^2+n^2=106$.

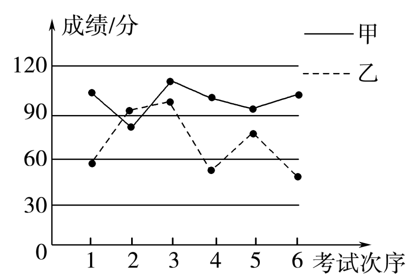
综合性·创新提升

1. 若样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ 的标准差为 6,则数据 $2x_1-1,2x_2-1,\cdots,2x_{10}-1$ 的标准差为 ( )

A.6　　B.11　　C.12　　D.24

C　**解析**:设样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ 的标准差为 s,则 $s=6,s^2=36$.数据 $2x_1-1,2x_2-1,\cdots,2x_{10}-1$ 的方差为 $2^2s^2=2^2\times36$,所以其标准差为 $\sqrt{2^2\times36}=2\times6=12$.故选 C.

2. 甲、乙两名同学 6 次考试的成绩统计如图,甲、乙两组数据的平均数分别为 m_1,m_2,标准差分别为 n_1,n_2,则 ( )



A. $m_1<m_2,n_1<n_2$

B. $m_1<m_2,n_1>n_2$

C. $m_1>m_2,n_1<n_2$

D. $m_1>m_2,n_1>n_2$

C　**解析**：由题中甲、乙两名同学6次考试的成绩统计图知，甲组数据靠上，乙组数据靠下，甲组数据相对集中，乙组数据相对分散.又甲、乙两组数据的平均数分别为 m_1，m_2，标准差分别为 n_1，n_2，得 $m_1>m_2$，$n_1<n_2$.故选C.

3. 若40个数据的平方和是56，平均数是$\frac{\sqrt{2}}{2}$，则这组数据的方差是________.

0.9　**解析**：设这40个数据为 $x_i(i=1,2,\cdots,40)$，平均数为$\overline{x}$，则方差

$$s^2=\frac{1}{40}\times[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_{40}-\overline{x})^2]=\frac{1}{40}\times[x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{40}^2+40\,\overline{x}^2-2\,\overline{x}(x_1+x_2+\cdots+x_{40})]=\frac{1}{40}\times\left[56+40\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times40\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right]=\frac{1}{40}\times(56+20-40)=0.9.$$

4. 某班40人随机分成两组，第1组15人，第2组25人，两组学生一次数学考试的成绩(单位：分)情况如下表：

组别	平均分	标准差
第1组	84	6
第2组	80	4

求全班学生这次数学考试成绩的平均分和方差.

解：由题意，知第1组这次数学考试成绩的平均分 $\overline{x}_1=84$，方差 $s_1^2=6^2=36$，占总体的比例 $w_1=\frac{15}{40}$，

第2组这次数学考试成绩的平均分 $\overline{x}_2=80$，方差 $s_2^2=4^2=16$，占总体的比例 $w_2=\frac{25}{40}$.

故全班学生这次数学考试成绩的平均分 $\overline{x}=\frac{15}{40}\times84+\frac{25}{40}\times80=81.5$(分)，

方差 $s^2=w_1[s_1^2+(\overline{x}_1-\overline{x})^2]+w_2[s_2^2+(\overline{x}_2-\overline{x})^2]$

$=\frac{15}{40}\times[36+(84-81.5)^2]+\frac{25}{40}\times[16+(80-81.5)^2]$

$=27.25$.

单元活动构建

任务一 抽样的基本方法

抽样的目的是为了了解总体的情况，所抽取的样本数据要很好地反映总体的情况，即样本含有和总体基本相同的信息.

任务达标

1. 已知某校高一、高二、高三的学生志愿者人数分别为180，240，160.现采用分层随机抽样的方法从中抽取 n 名同学去某福利院参加慈善活动，其中高一年级被抽取的人数为9，则 $n=$ （ ）

A.21 B.29

C.9 D.20

B **解析**：由题设，有 $\frac{n}{180+240+160}=\frac{9}{180}$，解得 $n=29$.

2. 某住宅小区有居民20 000户，从中随机抽取200户，调查是否安装宽带，调查结果如下表所示：

宽带	租户	业主
已安装	60	42
未安装	36	62

则该小区已安装宽带的居民估计有______户.

10 200 **解析**：样本中已安装宽带的用户比例为 $\frac{60+42}{200}=\frac{51}{100}$，故小区已安装宽带的居民约有 $20\ 000\times\frac{51}{100}=10\ 200$（户）.

3. 某企业共有3 200名职工，已知中、青、老年职工的比例为 $5:3:2$.

(1)若从所有职工中抽取一个容量为400的样本，应采用哪种抽样方法更合理？中、青、老年职工应分别抽取多少人？

(2)采用分层随机抽样的方法从总体中抽取一个样本，若从青年职工中抽取150人，试求样本量.

解：(1)由于中、青、老年职工有明显的差异，采用分层随机抽样更合理.

按照比例抽取中、青、老年职工的人数分别为 $\frac{5}{10}\times400=200$，$\frac{3}{10}\times400=120$，$\frac{2}{10}\times400=80$，

所以应抽取的中、青、老年职工分别为200人、120人、80人.

(2)依题意，青年职工共有 $\frac{3}{10}\times3\ 200=960$（人）.

设样本量为 n，则有 $\frac{n}{3\ 200}\times960=150$，解得 $n=500$，

所以样本量为500.

【规律方法】

利用分层随机抽样抽取样本的操作步骤

(1)将总体按一定标准进行分层.

(2)计算各层的个体数与总体的个体数的比.

(3)按各层的个体数占总体的个体数的比确定各层应抽取的样本的个体数.

(4)在每一层进行抽样(可用简单随机抽样).

(5)最后将每一层抽取的样本汇总组成总体的样本.

任务二 用样本估计总体分布

我们知道，从现实生活中得到的数据往往都是没有规律的、凌乱的，如果不加以整理，可能难以看出数据的特征，也不利于有关信息的挖掘.因此我们呈现结果时，往往对数据进行整理，并用合适的图表来表示有关数据.

任务达标

1. 已知一个样本的容量为72，分成5组，第一、五组的频数都为8，第二、四组的频率都为 $\frac{2}{9}$，则第三组的频数为 （ ）

A.16 B.20

C.24 D.36

C **解析**：因为频率 $=\frac{频数}{样本量}$，所以第二、四组的频数都为 $72\times\frac{2}{9}=16$.所以第三组的频数为 $72-2\times8-2\times16=24$.

2. 从大量棉花中抽取50根棉花纤维，纤维长度(单位：mm)的数据分组及各组的频数如下：[22.5，25.5)，3；[25.5，28.5)，8；[28.5，31.5)，9；[31.5，34.5)，11；[34.5，37.5)，10；[37.5，40.5)，5；[40.5，43.5]，4.

(1)列出样本的频率分布表；

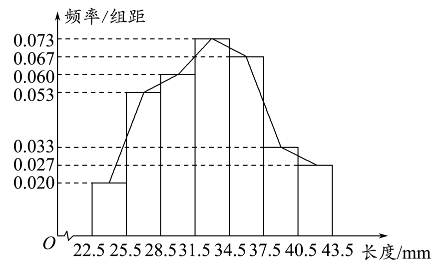
(2)画出频率分布直方图和折线图；

(3)估计纤维长度小于36的百分比.

解:(1)根据已知数据可得频率分布表如下:

分组	频数	频率
[22.5,25.5)	3	0.06
[25.5,28.5)	8	0.16
[28.5,31.5)	9	0.18
[31.5,34.5)	11	0.22
[34.5,37.5)	10	0.20
[37.5,40.5)	5	0.10
[40.5,43.5]	4	0.08
合计	50	1

(2)频率分布直方图和折线图如下:



(3)区间[34.5,37.5)的中点值为 36,所以可估计纤维长度小于 36 的百分比为$\left(0.06+0.16+0.18+0.22+0.20\times\frac{1}{2}\right)\times 100\%=72\%$.

任务三 用样本估计总体的数字特征

在统计中,通常利用样本的数字特征来估计总体的数字特征.例如,用样本的平均数来估计总体的平均数,用样本的方差来估计总体的方差.

「任务达标」

1.某校学生的男女生人数之比为 2∶3,按照男女比例通过分层随机抽样的方法抽到一个样本,样本中男生每天运动时间的平均数为 100 分钟、女生为 80 分钟.结合此数据,估计该校全体学生每天运动时间的平均数为 ( )

A.98 分钟 B.88 分钟

C.90 分钟 D.85 分钟

B **解析**:由题设知,若该校男生人数为 $2n$,则女生人数为 $3n$,所以该校全体学生每天运动时间的平均数为$\frac{2n\times100+3n\times80}{5n}=\frac{440n}{5n}=88$(分钟).

2.为选拔跳水运动员,对某运动员进行测试,在运动员跳完一个动作之后由 7 名裁判打分,统计结果显示,平均分为 9.5 分,方差为 a.为体现公平,裁判委员会决定去掉一个最高分 10 分,一个最低分 9 分,则 ( )

A.平均分变大,方差变大

B.平均分变小,方差变小

C.平均分变小,方差变大

D.平均分不变,方差变小

D **解析**:设 7 个得分中去掉一个最高分 10 分和一个最低分 9 分之后的数据为 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5.

因为$\frac{1}{7}\times(10+9+x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)=9.5$,

故可得 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=47.5$,

则去掉一个最高分 10 分和一个最低分 9 分之后的平均分为$\frac{47.5}{5}=9.5$(分).

因为去掉一个最高分和最低分后,数据更加集中,故方差变小.

3.一组数据按从小到大的顺序排列为 $1,4,4,x,7,8$(其中 $x\neq7$),若该组数据的中位数是众数的$\frac{5}{4}$,则该组数据的方差和第 60 百分位数分别是 ( )

A.$\frac{16}{3}$,5 B.5,5

C.$\frac{16}{3}$,6 D.5,6

C **解析**:由题意知,$\frac{4+x}{2}=4\times\frac{5}{4}$,解得 $x=6$,

所以该组数据的平均数 $\overline{x}=\frac{1}{6}\times(1+4+4+6+7+8)=5$,方差 $s^2=\frac{1}{6}\times[(1-5)^2+(4-5)^2+(4-5)^2+(6-5)^2+(7-5)^2+(8-5)^2]=\frac{16}{3}$.

因为 $6\times60\%=3.6$,所以该组数据的第 60 百分位数是该组数据按从小到大的顺序排列后的第 4 位数,即是 6.

4.农科院的专家为了了解新培育的甲、乙两种麦苗的长势情况,从甲、乙两种麦苗的试验田中各抽取 6 株麦苗测量麦苗的株高(单位:cm),数据如下:

甲:9,10,11,12,10,20;

乙:8,14,13,10,12,21.

分别计算所抽取的甲、乙两种麦苗株高的平均数与方差,并由此判断甲、乙两种麦苗的长势情况.

解:$\overline{x}_{甲}=\frac{9+10+11+12+10+20}{6}=12(\text{cm})$,

$\overline{x}_{乙}=\frac{8+14+13+10+12+21}{6}=13(\text{cm})$,

$s_{甲}^2=\frac{1}{6}\times[(9-12)^2+(10-12)^2+(10-12)^2+(11-12)^2+(12-12)^2+(20-12)^2]=\frac{41}{3}$,

$s_{乙}^2=\frac{1}{6}\times[(8-13)^2+(10-13)^2+(12-13)^2+(13-13)^2+(14-13)^2+(21-13)^2]=\frac{50}{3}$.

因为 $\overline{x}_{甲}<\overline{x}_{乙}$,所以乙种麦苗平均株高较高,

因为 $s_{甲}^2<s_{乙}^2$,所以甲种麦苗长得较为整齐.

【规律方法】

利用平均数、中位数和众数进行决策时的两个关注点

(1)平均数与每一个数据都有关,可以反映更多的总体信息,但受极端值的影响大;中位数是样本数据所占频率的等分线,不受几个极端值的影响;众数只能体现数据的最大集中点,无法客观反映总体特征.

(2)当平均数大于中位数时,说明数据中存在许多较大的极端值;反之,说明数据中存在许多较小的极端值.

第九章质量评估

(时间:120 分钟,分值:120 分)

一、单项选择题(本题包括 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的).

1.从总体容量为 N 的一批零件中,通过简单随机抽样抽取一个容量为 30 的样本.若每个零件被抽到的可能性为 0.25,则 N 的值为 ( )

A.120 B.200 C.150 D.100

A **解析**:因为从含有 N 个个体的总体中通过简单随机抽样抽取一个容量为 30 的样本时,每个个体被抽到的可能性为 $\frac{30}{N}$,所以 $\frac{30}{N}=0.25$,从而有 $N=120$.故选 A.

2.某校高一年级 8 个班参加合唱比赛的得分为 89,87,93,91,96,94,90,92,这组数据的第 25 百分位数和平均数分别是 ( )

A.89 和 91.5 B.89.5 和 91.5

C.90 和 91.5 D.90.5 和 92

B **解析**:将这组数据按从小到大的顺序排列为 87,89,90,91,92,93,94,96.又 $8\times25\%=2$,所以这组数据的第 25 百分位数为 $\frac{89+90}{2}=89.5$,

平均数为 $\frac{87+89+90+91+92+93+94+96}{8}=91.5$.

3.一个容量为 60 的样本中,数据的最大值是 150,最小值是 30,组距是 12,则样本数据的组数为 ( )

A.10 B.9 C.8 D.7

A **解析**:组数$=\frac{极差}{组距}=\frac{150-30}{12}=10$,故样本数据的组数为 10.

4.现有 10 个正数,其平方和是 370,方差是 33,那么这组数的平均数是 ( )

A.1 B.2 C.3 D.4

B **解析**:由题意得 $33=\frac{1}{10}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_{10}-\overline{x})^2]$

$=\frac{1}{10}[x_1^2+\cdots+x_{10}^2-2(x_1+\cdots+x_{10})\overline{x}+10\overline{x}^2]$

$=\frac{1}{10}(370-10\overline{x}^2)$.

因为这 10 个数都为正数,

所以平均数 $\overline{x}=\sqrt{\frac{370}{10}-33}=2$.

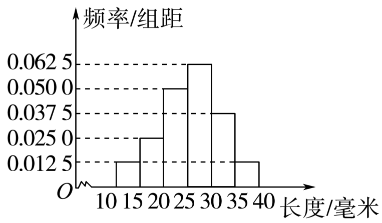
5.某小学共有学生 2 000 人,其中一至六年级的学生人数分别为 400,400,400,300,300,200.学校为做好放学后“快乐 30 分”的活动,现采用分层随机抽样的方法从中抽取容量为 200 的样本进行调查,那么应抽取的一年级学生的人数为 ( )

A.120 B.40 C.30 D.20

B **解析**:某小学共有学生 2 000 人,抽取一个容量为 200 的样本,因为一年级学生共 400 人,所以用分层随机抽样的方法抽取的一年级学生的人数为 $\frac{400}{2\,000}\times200=40$.

6.对一批产品的长度(单位:毫米)进行抽样检测,样本量为 200,如图为检测结果的频率分布直方图,根据产品标准,单件产品长度在区间[25,30)的为一等品,在区间[20,25)和[30,35)的为二等品,其余均为三等品,则该样本中三等品的件数为 ( )

A.5 B.7 C.10 D.50



D　**解析**：根据题中的频率分布直方图可知，三等品的频率为(0.012 5＋0.025 0＋0.012 5)×5＝0.25，因此该样本中三等品的件数为 200×0.25＝50.

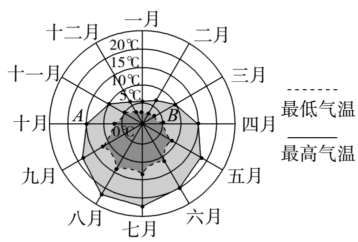
7. 某旅游城市为向游客介绍本地的气温情况，绘制了一年中各月最高气温和最低气温的雷达图.图中点 A 表示十月的最高气温约为 15 ℃，点 B 表示四月的最低气温约为 5 ℃.下面叙述不正确的是（　　）

A.各月的最低气温都在 0 ℃以上

B.七月的温差比一月的温差大

C.三月和十一月的最高气温基本相同

D.最高气温高于 20 ℃的月份有 5 个



D　**解析**：由图形可得各月的最低气温都在0 ℃以上，故 A 正确；七月的温差约为 10 ℃，而一月的温差约为 5 ℃，故 B 正确；三月和十一月的最高气温都在 10 ℃左右，基本相同，故 C 正确；最高气温高于 20 ℃的月份为六、七、八月，有 3 个，故 D 错误.

8. 高二(1)班某次数学考试的平均分为 70 分，标准差为 s，后来发现成绩记录有误，其中甲得 80 分却误记为 60 分，乙得 70 分却误记为 90 分，更正后计算得标准差为 s_1，则 s 和 s_1 之间的大小关系是（　　）

A.$s_1>s$　　B.$s_1<s$

C.$s_1=s$　　D.与人数有关，无法判断

B　**解析**：设更正前甲、乙……的成绩依次为 a_1，a_2，…，a_n，$n\in\mathbf{N}^*$，方差为 s^2，

则 $a_1+a_2+\cdots+a_n=70n$，即 $60+90+a_3+\cdots+a_n=70n$；

$(a_1-70)^2+(a_2-70)^2+\cdots+(a_n-70)^2=ns^2$，

即 $10^2+20^2+(a_3-70)^2+\cdots+(a_n-70)^2=ns^2$.

更正后的平均分 $\overline{x}=\dfrac{80+70+a_3+\cdots+a_n}{n}=70$，

方差 $s_1^2=\dfrac{1}{n}[(80-70)^2+(70-70)^2+(a_3-70)^2+\cdots+(a_n-70)^2]$

$=\dfrac{1}{n}[10^2+(a_3-70)^2+\cdots+(a_n-70)^2]=\dfrac{1}{n}[ns^2-400]=s^2-\dfrac{400}{n}<s^2$，

故更正后的标准差 $s_1<s$.故选 B.

二、多项选择题(本题包括 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分).

9. 某中学高一年级有 20 个班，每班 50 人；高二年级有 30 个班，每班 45 人.甲就读于高一年级，乙就读于高二年级.学校计划从这两个年级中共抽取 235 人进行视力调查，下列说法正确的有（　　）

A.应采用分层随机抽样的方法

B.高一、高二年级应分别抽取 100 人和 135 人

C.乙被抽到的可能性比甲大

D.该问题中的总体是高一、高二年级的全体学生的视力

ABD　**解析**：由于各年级的年龄段不一样，因此应采用分层随机抽样的方法.由于抽样比为 $\dfrac{235}{20\times50+30\times45}=\dfrac{1}{10}$，因此高一年级 1 000 人中应抽取 100 人，高二年级 1 350 人中应抽取 135 人，甲、乙被抽到的可能性都是 $\dfrac{1}{10}$，因此只有 C 不正确，故选 ABD.

10. 假设定义一个同学数学成绩优秀的标志为“连续 5 次数学考试成绩均不低于 120 分”.现有甲、乙、丙三位同学连续 5 次数学考试成绩的记录数据(记录数据都是正整数)：

①甲同学：5 个数据的中位数为 127，众数为 120；

②乙同学：5 个数据的中位数为 125，均值为 127；

③丙同学：5 个数据的中位数为 135，均值为 128，方差为 19.8.

可以判定数学成绩优秀的同学为（　　）

A.甲　B 乙　C.丙　D.无法确定

AC　**解析**：在①中，5 个数据的中位数为 127，众数为 120，所以前三个数为 120，120，127，则后两个数肯定大于 127，故甲同学数学成绩优秀；在②中，5 个数据的中位数为 125，均值为 127，可以找到很多反例，如 118，119，125，128，145，故乙同学数学成绩不一定优秀；在③中，5 个数据的中位数为 135，均值为 128，方差为 19.8，假设有一个数据小于 120，设为 119，则此时方差至少为 $\dfrac{1}{5}\times[(135-128)^2+(119-128)^2]=26$，且这个数据越小，方差越大，故所有数据均不低于 120.所以数学成绩优秀的有甲和丙 2 位同学.故选 AC.

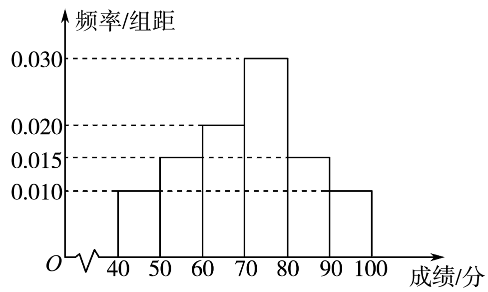
11. 在某次高中学科竞赛中，4 000 名考生的竞赛成绩统计如图所示，60 分以下视为不及格.若同一组中的数据用该组区间中点值为代表，则 （　　）

A.成绩在[70,80)内的考生人数最多

B.不及格的考生人数为 1 000

C.考生竞赛成绩的平均分约为 70.5 分

D.考生竞赛成绩的中位数为 75 分



ABC　**解析**：由频率分布直方图可得，成绩在[70,80)内的频率最高，因此考生人数最多，故 A 正确；由频率分布直方图可得，成绩在[40,60)内的频率为 0.25，因此，不及格的人数为 $4\ 000\times0.25=1\ 000$，故 B 正确；由频率分布直方图可得，平均分为 $45\times0.1+55\times0.15+65\times0.2+75\times0.3+85\times0.15+95\times0.1=70.5$，故 C 正确；因为成绩在[40,70)内的频率为 0.45，在[70,80)内的频率为 0.3，所以中位数为 $70+10\times\dfrac{0.05}{0.3}\approx71.67$，故 D 错误.故选 ABC.

12.（2023・新高考全国Ⅰ卷）有一组样本数据 x_1，x_2，…，x_6，其中 x_1 是最小值，x_6 是最大值，则 （　　）

A.x_2,x_3,x_4,x_5 的平均数等于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的平均数

B.x_2,x_3,x_4,x_5 的中位数等于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的中位数

C.x_2,x_3,x_4,x_5 的标准差不小于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的标准差

D.x_2,x_3,x_4,x_5 的极差不大于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的极差

BD　**解析**：对于选项 A，设 x_2,x_3,x_4,x_5 的平均数为 m，$x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的平均数为 n，

则 $n-m=\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6}-\dfrac{x_2+x_3+x_4+x_5}{4}$

$=\dfrac{2(x_1+x_6)-(x_5+x_2+x_3+x_4)}{12}$，

因为 $2(x_1+x_6)$，$x_5+x_2+x_3+x_4$ 的大小关系没有确定，所以无法判断 m,n 的大小，

例如：对于 1,2,3,4,5,6，可得 $m=n=3.5$，

对于 1,1,1,1,1,7，可得 $m=1<n=2$，

对于 1,2,2,2,2,2，可得 $m=2>n=\dfrac{11}{6}$，故 A 错误.

对于选项 B，不妨设 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\leqslant x_5\leqslant x_6$，可知 x_2,x_3,x_4,x_5 的中位数等于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的中位数，均为 $\dfrac{x_3+x_4}{2}$，故 B 正确.

对于选项 C，因为 x_1 是最小值，x_6 是最大值，则 x_2,x_3,x_4,x_5 的波动性不大于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的波动性，即 x_2,x_3,x_4,x_5 的标准差不大于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的标准差，

例如：对于 2,4,6,8,10,12，平均数 $n=\dfrac{1}{6}(2+4+6+8+10+12)=7$，

标准差 $s_1=\sqrt{\dfrac{1}{6}[(2-7)^2+(4-7)^2+(6-7)^2+(8-7)^2+(10-7)^2+(12-7)^2]}=\dfrac{\sqrt{105}}{3}$，

对于 4,6,8,10，平均数 $m=\dfrac{1}{4}(4+6+8+10)=7$，

标准差 $s_2=\sqrt{\dfrac{1}{4}[(4-7)^2+(6-7)^2+(8-7)^2+(10-7)^2]}=\sqrt{5}$，

显然 $\dfrac{\sqrt{105}}{3}>\sqrt{5}$，即 $s_1>s_2$，故 C 错误.

对于选项 D，不妨设 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\leqslant x_5\leqslant x_6$，则 $x_6-x_1\geqslant x_5-x_2$，当且仅当 $x_1=x_2$，$x_5=x_6$ 时，等号成立，故 D 正确.

故选 BD.

三、填空题（本题包括 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）.

13. 某工厂生产甲、乙、丙三种不同型号的产品，产品数量之比为 5∶2∶3，现用分层随机抽样的方法抽出一个容量为 n 的样本，样本中甲型号产品有 15 件，那么样本量 $n=$________.

30　**解析**：因为该工厂生产甲、乙、丙三种不同型号的产品，产品数量之比为 5∶2∶3，现用分层随机抽样的方法抽出一个容量为 n 的样本，样本中甲型号产品有 15 件，所以 $\dfrac{15}{n}=\dfrac{5}{5+2+3}$，所以 $n=30$.

14. 在某次测量中，甲工厂生产的某产品的 A 样本数据如下：43,50,45,55,60.若乙工厂生产的该产品的 B 样本数据恰好是由 A 样本数据中每个数都增加 5 后得到的，据此可以估计乙工厂生产的该产品

数据的总体均值为________.

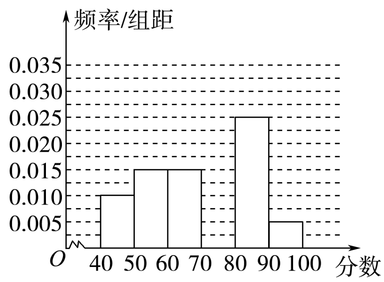
55.6　**解析**:A 样本数据为 43,50,45,55,60,

所以 B 样本数据为 48,55,50,60,65,

所以 B 样本数据的均值为 $\frac{1}{5}\times(48+55+50+60+65)=55.6$,

据此,可以估计乙工厂生产的该产品的总体均值为 55.6.

15. 某校从参加高一年级期中考试的学生中随机抽取 60 名,将其数学成绩(均为整数)分成六组[40,50),[50,60),…,[90,100]后得到如图所示的频率分布直方图(部分).在统计中,同一组数据常用该组区间的中点值作为代表,观察图形的信息,可知成绩在[70,80)的人数约为________,估计本次考试成绩的第 60 百分位数为________(结果精确到 0.01).



18　76.67　**解析**:由题图可知,成绩在[70,80)的频率为 $1-(0.005+0.010+0.015\times2+0.025)\times10=0.3$,所以成绩在[70,80)的人数为 $60\times0.3=18$.因为 $(0.010+0.015\times2)\times10=0.4$,$0.4+0.3=0.7>0.6$,所以本次考试成绩的第 60 百分位数在[70,80)内,所以第 60 百分位数为 $70+10\times\frac{0.2}{0.3}\approx76.67$.

16. 在一次体育水平测试中,甲、乙两校均有 100 名学生参加,其中甲校男生成绩的优秀率为 70%,女生成绩的优秀率为 50%;乙校男生成绩的优秀率为 60%,女生成绩的优秀率为 40%.对于此次测试,给出下列三个结论:

①甲校学生成绩的优秀率大于乙校学生成绩的优秀率;

②甲、乙两校所有男生成绩的优秀率大于甲、乙两校所有女生成绩的优秀率;

③甲校学生成绩的优秀率与甲、乙两校所有学生成绩的优秀率的大小关系不确定.

其中,所有正确结论的序号是________.

②③　**解析**:不能确定甲、乙两校的男女比例,故①不正确;

因为甲、乙两校的男生成绩的优秀率均大于女生成绩的优秀率,故甲、乙两校所有男生成绩的优秀率大于甲、乙两校所有女生成绩的优秀率,故②正确;因为不能确定甲、乙两校的男女比例,故不能确定甲校学生成绩的优秀率与甲、乙两校所有学生成绩的优秀率的大小关系,故③正确.

四、解答题(本题包括 4 小题,共 60 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤).

17. (15 分)在一次科技知识竞赛中,两组学生的成绩如下表:

分数		50	60	70	80	90	100
人数	甲组	2	5	10	13	14	6
	乙组	4	4	16	2	12	12

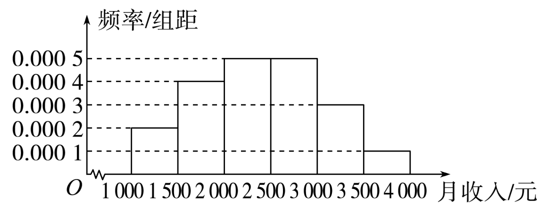
已经算得两组成绩的平均数都是 80 分.请根据你所学过的统计知识,进一步判断这两组在这次竞赛中的成绩谁优谁劣,并说明理由.

解:①甲组成绩的众数为 90 分,乙组成绩的众数为 70 分,从成绩的众数比较看,甲组成绩好些.

②甲、乙两组成绩的中位数、平均数都是 80 分.其中,甲组成绩在 80 分以上(包括 80 分)的有 33 人,乙组成绩在 80 分以上(包括 80 分)的有 26 人.从这一角度看,甲组的成绩较好.

③从成绩统计表看,甲组成绩大于或等于 90 分的有 20 人,乙组成绩大于或等于 90 分的有 24 人,所以乙组成绩集中在高分段的人数多,同时,乙组得满分的人数比甲组得满分的人数多 6 人.从这一角度看,乙组的成绩较好.

18. (15 分)某地统计局就该地居民的月收入调查了 10 000 人,并根据所得数据绘制了频率分布直方图,其中每个分组包括左端点值,不包括右端点值,如第一组的收入在[1 000,1 500).



(1)求居民月收入在[3 000,3 500)的频率;

(2)根据频率分布直方图算出样本数据的中位数;

(3)为了分析居民的收入与年龄、职业等方面的关系,必须按月收入再从这 10 000 人中用分层随机抽样的方法抽出 100 人作进一步分析,则月收入在[2 500,3 000)的这组应抽多少人?

解:(1)月收入在[3 000,3 500)的频率为 $0.000\,3\times(3\,500-3\,000)=0.15$,

所以居民月收入在[3 000,3 500)的频率为 0.15.

(2)$0.000\,2\times(1\,500-1\,000)=0.1$,

$0.000\,4\times(2\,000-1\,500)=0.2$,

$0.000\,5\times(2\,500-2\,000)=0.25$,

$0.1+0.2+0.25=0.55>0.5$,

所以样本数据的中位数为 $2\,000+\frac{0.5-(0.1+0.2)}{0.000\,5}=2\,000+400=2\,400$(元),

所以样本数据的中位数为 2 400 元.

(3)居民月收入在[2 500,3 000)的频率为 $0.000\,5\times(3\,000-2\,500)=0.25$,

所以 10 000 人中月收入在[2 500,3 000)的人数为 $0.25\times10\,000=2\,500$.

再从 10 000 人中用分层随机抽样的方法抽出 100 人,

则月收入在[2 500,3 000)的这段应抽取 $100\times\frac{2\,500}{10\,000}=25$(人),

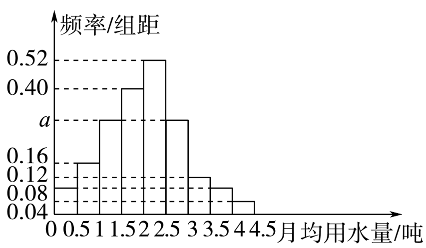
所以月收入在[2 500,3 000)的这段应抽25人.

19.(15分)某市政府为了鼓励居民节约用水,计划在本市试行居民生活用水定额管理,即确定一个合理的居民月用水量标准x(单位:吨),用水量不超过x的部分按平价收费,超出x的部分按议价收费,为了了解全市居民用水量的分布情况,通过抽样,获得了100位居民某年的月均用水量(单位:吨),将数据按照[0,0.5),[0.5,1),…,[4,4.5]分成9组,制成了如图所示的频率分布直方图.

(1)求频率分布直方图中a的值;

(2)若该市政府希望使85%的居民每月的用水量不超过标准x(吨),估计x的值,并说明理由;

(3)已知平价收费标准为4元/吨,议价收费标准为8元/吨,当$x=3$时,估计该市居民的月平均水费.(同一组中的数据用该组区间的中点值代替)



解:(1)由频率分布直方图,

可得$(0.08+0.16+a+0.40+0.52+a+0.12+0.08+0.04)\times0.5=1$,

解得$a=0.30$.

(2)估计x的值为2.9.理由如下:

因为前6组的频率之和为$(0.08+0.16+0.30+0.40+0.52+0.30)\times0.5=0.88>0.85$,

而前5组的频率之和为$(0.08+0.16+0.30+0.40+0.52)\times0.5=0.73<0.85$,

所以$2.5\leqslant x<3$.

由$0.3\times(x-2.5)=0.85-0.73$,

解得$x=2.9$.

因此,估计月用水量标准为2.9吨时,85%的居民每月的用水量不超过标准.

(3)设该市居民月用水量为t吨,相应的水费为y元,则$y=\begin{cases}4t,0\leqslant t\leqslant3,\\3\times4+(t-3)\times8,3<t\leqslant4.5,\end{cases}$

即$y=\begin{cases}4t,0\leqslant t\leqslant3,\\8t-12,3<t\leqslant4.5.\end{cases}$

由题设条件及月均用水量的频率分布直方图,得居民每月的水费数据分组与频率分布表如下:

组号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
分组	[0,2)	[2,4)	[4,6)	[6,8)	[8,10)	[10,12)	[12,16)	[16,20)	[20,24]
频率	0.04	0.08	0.15	0.20	0.26	0.15	0.06	0.04	0.02

根据题意,估计该市居民的月平均水费为

$1\times0.04+3\times0.08+5\times0.15+7\times0.20+9\times0.26+11\times0.15+14\times0.06+18\times0.04+22\times0.02=8.42$(元).

20.(15分)某市2022年4月1日~4月30日空气污染指数的监测数据如下:

61,76,70,56,81,91,92,91,75,81,88,67,101,103,95,91,77,86,81,83,82,82,64,79,86,85,75,71,49,45.

(1)列出频率分布表;

(2)作出频率分布直方图;

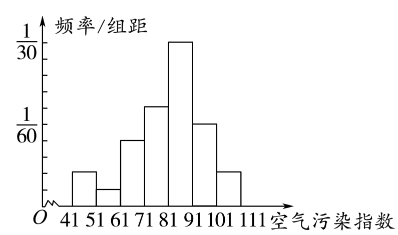
(3)根据国家标准,污染指数在0~50时,空气质量状况为优;污染指数在51~100时,空气质量状况为良;污染指数在101~150时,空气质量状况为轻微污染;污染指数在151~200时,空气质量状况为轻度污染.

请你依据所给数据和上述标准,对该市的空气质量给出一个简短评价.

解:(1)频率分布表:

分组	频数	频率
[41,51)	2	$\frac{1}{15}$
[51,61)	1	$\frac{1}{30}$
[61,71)	4	$\frac{2}{15}$
[71,81)	6	$\frac{1}{5}$
[81,91)	10	$\frac{1}{3}$
[91,101)	5	$\frac{1}{6}$
[101,111]	2	$\frac{1}{15}$

(2)频率分布直方图如图所示.



(3)答案不唯一,如:

①该市一个月中空气污染指数有2天处于优的水平,占当月天数的$\frac{1}{15}$;有26天处于良的水平,占当月天数的$\frac{13}{15}$;处于优或良的天数为28,占当月天数的$\frac{14}{15}$,说明该市空气质量基本良好.

②轻微污染有2天,占当月天数的$\frac{1}{15}$;污染指数在80以上的接近轻微污染的天数为15,加上处于轻微污染的天数,共17天,占当月天数的$\frac{17}{30}$,超过50%,说明该市空气质量有待进一步改善.

第十章　概率

10.1　随机事件与概率

10.1.1　有限样本空间与随机事件

学习任务目标

1.了解样本点和样本空间.
2.了解随机事件发生的不确定性.
3.会初步列举出重复试验的结果.

问题式预习

知识点一　随机试验及其特点

1.随机试验的定义:我们把对随机现象的实现和对它的观察称为随机试验,简称试验,常用字母 E 表示.

2.随机试验的特点:

(1)试验可以在相同条件下重复进行;

(2)试验的所有可能结果是明确可知的,并且不止一个;

(3)每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个,但事先不能确定出现哪一个结果.

[微训练]

下列现象中,是随机现象的有　(　　)

①在一条公路上,交警记录某一小时通过的汽车超过300辆;

②若 a 为整数,则 $a+1$ 为整数;

③发射一颗炮弹,命中目标;

④流水线上一件产品是合格品.

A.1个　　B.2个

C.3个　　D.4个

C　**解析**:当 a 为整数时,$a+1$ 一定为整数,是确定性现象,其余3个均为随机现象.

知识点二　样本点和样本空间

名称	定义	字母表示
样本点	我们把随机试验 E 的每个可能的基本结果称为样本点	用 ω 表示样本点
样本空间	全体样本点的集合称为试验 E 的样本空间	用 Ω 表示样本空间
有限样本空间	如果一个随机试验有 n 个可能结果 ω_1,ω_2,…,ω_n,则称样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ 为有限样本空间	$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$

[微训练]

从有两个小孩的家庭中随机选择一个,记录两个小孩的性别,则样本空间 Ω 是　(　　)

A.{(男,女),(男,男),(女,女)}

B.{(男,女),(女,男)}

C.{(男,男),(男,女),(女,男),(女,女)}

D.{(男,男),(女,女)}

C　**解析**:两个小孩有大、小之分,所以(男,女)与(女,男)是不同的样本点.故选C.

知识点三　三种事件的定义

随机事件	我们将样本空间 Ω 的子集称为随机事件,简称事件,并把只包含一个样本点的事件称为基本事件.随机事件一般用大写字母 A,B,C,…表示.在每次试验中,当且仅当 A 中某个样本点出现时,称为事件 A 发生

续表

必然事件	Ω 作为自身的子集,包含了所有的样本点,在每次试验中总有一个样本点发生,所以 Ω 总会发生,我们称 Ω 为必然事件
不可能事件	空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点,在每次试验中都不会发生,我们称 $\varnothing$ 为不可能事件

[微训练]

在 5 件同类产品中,有 3 件正品,2 件次品,从中任意抽出 3 件,下列是必然事件的是 ( )

A.3 件都是次品 B.3 件都是正品

C.至少有 1 件是次品 D.至少有 1 件是正品

D **解析**:由于只有 2 件次品,故抽出的 3 件产品不可能都是次品,即至少有 1 件是正品.

任务型课堂

任务一 事件类型的判断

1.下列事件中的随机事件为 ( )

A.若 a,b,c 都是实数,则 $a(bc)=(ab)c$

B.任意画一个三角形,其内角和是 $360°$

C.抛掷一枚硬币,反面向上

D.在标准大气压下,温度达到 60 ℃时水沸腾

C **解析**:A 中的等式是实数乘法的结合律,对任意实数 a,b,c 是恒成立的,故 A 是必然事件.三角形的内角和为 $180°$,故 B 是不可能事件.抛掷一枚硬币时,在没得到结果之前,并不知道会是正面向上还是反面向上,故 C 是随机事件.在标准大气压的条件下,只有温度达到 100 ℃时,水才会沸腾;当温度是 60 ℃时,水是绝对不会沸腾的,故 D 是不可能事件.

2.指出下列事件是必然事件、不可能事件,还是随机事件.

(1)在标准大气压下,温度低于 0 ℃时,冰融化;

(2)某个数的绝对值小于 0;

(3)掷一枚硬币,正面朝上;

(4)某地 12 月 12 日下雨;

(5)如果 $a>b$,那么 $a-b>0$;

(6)导体通电后发热;

(7)没有水分,种子发芽;

(8)三角形的内角和为 $180°$;

(9)某人购买 5 注彩票,均未中奖.

解:(5)(6)(8)无论在什么条件下都一定会发生,所以是必然事件.(1)(2)(7)一定不会发生,所以是不可能事件.(3)(4)(9)有可能发生也有可能不发生,所以是随机事件.

【类题通法】

判断事件类型的角度

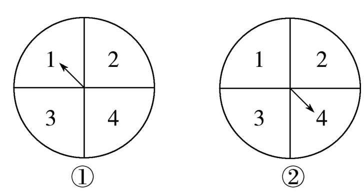
(1)看条件:看试验是在什么条件下进行的.三种事件都是相对于一定条件而言的,随着条件的变化,试验的结果也可能会发生相应的改变.

(2)看结果:事件是按照发生与否的标准分类的,一定发生的是必然事件,不一定发生的是随机事件,一定不发生的是不可能事件.

任务二 随机试验的样本空间

[探究活动]

同时转动如图所示的两个转盘,记转盘①得到的数为 x,转盘②得到的数为 y,结果为 (x,y).根据样本点和样本空间的概念,探究以下问题.



探究 1:写出这个试验的样本空间,并求这个试验的样本点的总数.

提示:$\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$.样本点的总数为 16.

探究 2:“$x+y=5$”这一事件包含哪几个样本点?“$x<3$ 且 $y>1$”呢?

提示:“$x+y=5$”这一事件包含以下 4 个样本点:$(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$;“$x<3$ 且 $y>1$”这一事件包含以下 6 个样本点:$(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)$.

探究 3:“$xy=4$”这一事件包含哪几个样本点?“$x=y$”呢?

提示:“$xy=4$”这一事件包含以下 3 个样本点:(1,4),(2,2),(4,1);“$x=y$”这一事件包含以下 4 个样本点:(1,1),(2,2),(3,3),(4,4).

[**评价活动**]

1.“连续抛掷两枚质地均匀的骰子,记录朝上的点数”,该试验的样本点共有　(　　)

A.6 个　　B.12 个

C.24 个　　D.36 个

D　**解析**:该试验的全部样本点为(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),共 36 个.

2.下列随机试验中,一次试验各指什么?试写出试验的所有结果.

(1)抛掷两枚质地均匀的硬币;

(2)从集合 $A=\{a,b,c,d\}$ 中任取 3 个元素组成集合 A 的子集.

解:(1)一次试验是指“抛掷两枚质地均匀的硬币一次”,试验的可能结果有 4 个,分别为(正,反),(正,正),(反,反),(反,正).

(2)一次试验是指“从集合 A 中一次性选取 3 个元素组成集合 A 的一个子集”,试验的结果共有 4 个,分别为 $\{a,b,c\}$,$\{a,b,d\}$,$\{a,c,d\}$,$\{b,c,d\}$.

【类题通法】

书写试验结果时的注意事项

(1)准确理解随机试验的条件、结果等有关定义,并由此判断事件的类型,指出试验结果.

(2)在写试验结果时,一般采用列举法,首先明确事件发生的条件,然后根据日常生活经验,按一定次序列举,确保所列结果不重不漏.

提质归纳

随机现象,随机试验

↓

样本点,样本空间

↓　　↓　　↓

随机事件　不可能事件　必然事件

课后素养评价

基础性·能力运用

1.先后抛掷均匀的五角、一元硬币各一枚,观察落地后硬币的正反面情况,则下列事件包含 3 个样本点的是　(　　)

A.至少一枚硬币正面向上

B.只有一枚硬币正面向上

C.两枚硬币都是正面向上

D.两枚硬币一枚正面向上,另一枚反面向上

A　**解析**:“至少一枚硬币正面向上”包括“五角向上,一元向下”“五角向下,一元向上”“五角、一元都向上”三个样本点,故选 A.

2.将一枚质地均匀的硬币向上抛掷 10 次,其中“正面朝上恰好有 5 次”是　(　　)

A.必然事件　　B.随机事件

C.不可能事件　　D.无法确定

B　**解析**:“正面朝上恰好有 5 次”是可能发生也可能不发生的事件,故该事件为随机事件.

3.从 1,2,3,…,10 这 10 个数中,任取 3 个数,那么“这 3 个数的和不大于 9”这一事件包含的样本点的个数是　(　　)

A.4　　B.5　　C.6　　D.7

D　**解析**:由题意可得样本空间为{(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,2,6),(1,3,4),(1,3,5),(2,3,4)},样本点个数为 7.

4.甲、乙两人做出拳游戏(锤、剪、布).

(1)写出这个游戏对应的样本空间;

(2)写出这个游戏的样本点总数;

(3)写出事件 A:“甲赢”的集合表示;

(4)说出事件 $B=\{$(锤,锤),(剪,剪),(布,布)$\}$所表示的含义.

解:(1)用(锤,剪)表示甲出锤,乙出剪,其他样本点用类似方法表示,则这个游戏对应的样本空间 $\Omega=\{$(锤,剪),(锤,布),(锤,锤),(剪,锤),(剪,剪),(剪,布),(布,锤),(布,剪),(布,布)$\}$.

(2)这个游戏的样本点总数为 9.

(3)事件 $A=\{$(锤,剪),(剪,布),(布,锤)$\}$.

(4)事件 B 表示“平局”.

综合性·创新提升

1.从含有 10 件正品、2 件次品的 12 件产品中任意抽取 3 件,为必然事件的是 ( )

A.3 件都是正品

B.3 件都是次品

C.至少有 1 件次品

D.至少有 1 件正品

D **解析**:从 10 件正品、2 件次品中任意抽取 3 件,3 件都是正品是随机事件;3 件都是次品是不可能事件;至少有 1 件次品是随机事件.因为只有 2 件次品,所以从中任意抽取 3 件必然会抽到正品,即至少有 1 件是正品是必然事件.故选 D.

2.袋子中只有黑白两球时,有放回地摸取三次,观察黑白球的出现情况,则试验中样本空间的所有样本点的个数为 ( )

A.4 B.5

C.6 D.8

D **解析**:三次摸取球的所有样本点为(黑,黑,黑),(黑,黑,白),(黑,白,黑),(白,黑,黑),(黑,白,白),(白,黑,白),(白,白,黑),(白,白,白),共 8 个.

3.从含有两件正品 a_1,a_2 和一件次品 b 的三件产品中每次任取一件,每次取出后不放回,连续取两次.

(1)写出这个试验的样本空间;

(2)设 A 为“取出两件产品中恰有一件次品”,写出事件 A 的集合表示;

(3)把“每次取出后不放回”这一条件换成“每次取出后放回”,其余不变,请你回答上述两个问题.

解:(1)这个试验的样本空间 $\Omega=\{(a_1,a_2),(a_1,b),(a_2,b),(a_2,a_1),(b,a_1),(b,a_2)\}$.

(2)$A=\{(a_1,b),(a_2,b),(b,a_1),(b,a_2)\}$.

(3)①这个试验的样本空间 $\Omega=\{(a_1,a_1),(a_1,a_2),(a_1,b),(a_2,a_1),(a_2,a_2),(a_2,b),(b,a_1),(b,a_2),(b,b)\}$.

②$A=\{(a_1,b),(a_2,b),(b,a_1),(b,a_2)\}$.

10.1.2 事件的关系和运算

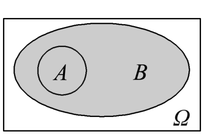
学习任务目标

1.了解随机事件的并、交与互斥的含义.

2.能结合实例进行随机事件的并、交运算.

问题式预习

知识点一 事件的关系

定义	一般地,若事件 A 发生,则事件 B 一定发生,我们就称事件 B 包含事件 A(或事件 A 包含于事件 B)
含义	A 发生导致 B 发生
符号表示	$B\supseteq A$(或 $A\subseteq B$)
图形表示	
特殊情形	如果事件 B 包含事件 A,事件 A 也包含事件 B,即 $B\supseteq A$ 且 $A\supseteq B$,则称事件 A 与事件 B 相等,记作 $A=B$

[微训练]

判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)在掷骰子的试验中,{出现 1 点}$\subseteq${出现的点数为奇数}. (√)

(2)不可能事件记作$\varnothing$,显然 $C\supseteq\varnothing$(C 是任一事件). (√)

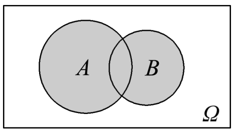
(3)事件 A 包含于事件 A,即 $A\subseteq A$. (√)

知识点二 事件的运算

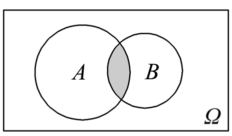
1.并事件(和事件)

定义	一般地,事件 A 与事件 B 至少有一个发生,这样的一个事件中的样本点或者在事件 A 中,或者在事件 B 中,我们称这个事件为事件 A 与事件 B 的并事件(或和事件)

续表

含义	A 与 B 至少有一个发生
符号表示	$A\cup B$(或 $A+B$)
图形表示	

2.交事件(积事件)

定义	一般地,事件 A 与事件 B 同时发生,这样的一个事件中的样本点既在事件 A 中,也在事件 B 中,我们称这样的一个事件为事件 A 与事件 B 的交事件(或积事件)
含义	A 与 B 同时发生
符号表示	$A\cap B$(或 AB)
图形表示	

[微训练]

抛掷一枚骰子,"向上的点数是 1 或 2"为事件 A,"向上的点数是 2 或 3"为事件 B,则　　(　　)

A.$A\subseteq B$

B.$A=B$

C.$A\cup B$ 表示向上的点数是 1 或 2 或 3

D.$A\cap B$ 表示向上的点数是 1 或 2 或 3

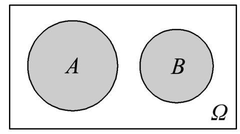
C　**解析**:由题意知 $A=\{1,2\}$,$B=\{2,3\}$,$A\cap B=\{2\}$,$A\cup B=\{1,2,3\}$,所以 $A\cup B$ 表示向上的点数为 1 或 2 或 3.

知识点三　互斥与对立

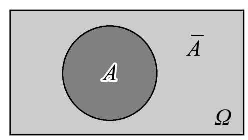
1.互斥(互不相容)

定义	一般地,如果事件 A 与事件 B 不能同时发生,也就是说 $A\cap B$ 是一个不可能事件,即 $A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互斥(或互不相容)
含义	A 与 B 不能同时发生

续表

符号表示	$A\cap B=\varnothing$
图形表示	

2.互为对立

定义	一般地,如果事件 A 与事件 B 在任何一次试验中有且仅有一个发生,即 $A\cup B=\Omega$,且 $A\cap B=\varnothing$,那么称事件 A 与事件 B 互为对立.事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$
含义	A 与 B 有且仅有一个发生
符号表示	$A\cup B=\Omega$,且 $A\cap B=\varnothing$
图形表示	

[微训练]

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)若两个事件是互斥事件,则这两个事件是对立事件.　　(×)

(2)若两个事件是对立事件,则这两个事件也是互斥事件.　　(√)

(3)若事件 A 与事件 B 在任何一次试验中不同时发生,则事件 A 与事件 B 互斥.　　(√)

2.某人在打靶时连续射击两次,事件"至少有一次中靶"的互斥事件是　　(　　)

A.至多有一次中靶

B.两次都中靶

C.两次都不中靶

D.只有一次中靶

C　**解析**:"至少有一次中靶"与"两次都不中靶"为互斥事件.

任务型课堂

任务一 事件关系的判断

1.把红、蓝、黑、白4张纸牌随机地分给甲、乙、丙、丁4个人,每人分得1张,事件“甲分得红牌”与事件“乙分得红牌”是 ( )

A.对立事件

B.互斥但不对立事件

C.不可能事件

D.以上说法都不对

B **解析**:因为只有1张红牌,所以这两个事件不可能同时发生,所以它们是互斥事件;但这两个事件加起来并不是全体事件,例如红牌可以分给丙、丁两人,所以它们不是对立事件.

2.从装有两个红球和两个白球的口袋内任取两个球,判断下面给出的每对事件是否是互斥事件,是否是对立事件,并说明理由.

(1)“至少有一个白球”与“都是白球”;

(2)“至少有一个白球”与“至少有一个红球”;

(3)“恰有一个白球”与“恰有两个白球”;

(4)“至少有一个白球”与“都是红球”.

解:(1)既不互斥又不对立.“至少有一个白球”包含“一白一红”和“两白”,与“都是白球”的事件有相交的部分.

(2)既不互斥又不对立.因为这两种情况可能同时发生,例如“两个球一白一红”.

(3)是互斥事件但不是对立事件.因为这两种情况不能同时发生,但是试验结果并不仅仅有这两种可能.还有第三种可能,“全部为红球”,所以不是对立事件.

(4)既是互斥事件,也是对立事件.首先,“至少有一个白球”和“两者都是红球”不能同时发生,即互斥.从两个红球和两个白球中取两个,共有“红红”“红白”“白白”三种情形,“至少有一个白球”就是要么“红白”要么“白白”,仅剩下“红红”的情形,所以除了“至少有一个白球”,就是“两个红球”,故为对立事件.

所以是互斥事件的是(3)(4),是对立事件的是(4).

【类题通法】

判断事件间关系的方法

(1)要考虑试验的前提条件,无论是包含、相等,还是互斥、对立,其发生的条件都是一样的.

(2)考虑事件间是否有交事件,可考虑利用Venn图分析,对较难判断关系的,也可列出全部结果,再进行分析.

任务二 事件的运算

[探究活动]

掷一枚骰子,有下列事件:

A={出现奇数点},B={出现偶数点},C={点数小于3},D={点数不大于2},E={点数是3的倍数}.根据事件的关系,探究以下问题.

探究1:求$A\cap B$,BC.

提示:$A\cap B=\varnothing$,BC={出现2点}.

探究2:求$A\cup B$,$B+C$.

提示:$A\cup B$={出现1,2,3,4,5或6点},$B+C$={出现1,2,4或6点}.

探究3:求D,AC.

提示:D={点数小于或等于2}={出现1或2点},AC={出现1点}.

[评价活动]

在掷骰子的试验中,可以定义许多事件.例如,事件C_1={出现1点},事件C_2={出现2点},事件C_3={出现3点},事件C_4={出现4点},事件C_5={出现5点},事件C_6={出现6点},事件D_1={出现的点数不大于1},事件D_2={出现的点数大于3},事件D_3={出现的点数小于5},事件E={出现的点数小于7},事件F={出现的点数为偶数},事件G={出现的点数为奇数},请根据上述定义的事件,解答下列问题:

(1)请列举出基本事件与其他事件满足的包含关系、相等关系;

(2)利用和事件的定义,判断上述事件是哪些基本事件的和事件.

解:(1)因为事件C_1,C_2,C_3,C_4发生,则事件D_3必发生,所以$C_1\subseteq D_3$,$C_2\subseteq D_3$,$C_3\subseteq D_3$,$C_4\subseteq D_3$.同理可得,事件E包含事件C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6;事件D_2包含事件C_4,C_5,C_6;事件F包含事件C_2,C_4,C_6;事件G包含事件C_1,C_3,C_5.

易知事件C_1与事件D_1相等,即$C_1=D_1$.

(2)因为事件D_2={出现的点数大于3}={出现4点或5点或6点},

所以$D_2=C_4\cup C_5\cup C_6$(或$D_2=C_4+C_5+C_6$).

同理可得$D_3=C_1+C_2+C_3+C_4$,$E=C_1+C_2+C_3+C_4+C_5+C_6$,$F=C_2+C_4+C_6$,$G=C_1+C_3+C_5$.

【类题通法】

事件的混合运算的方法

(1)利用事件间运算的定义.列出同一条件下的试验的所有样本点,分析并利用这些样本点进行事件间的运算.

(2)利用 Venn 图.借助集合间运算的思想,分析同一条件下的试验的所有样本点,把这些样本点在图中列出,进行运算.

任务三　互斥事件与对立事件的判定

某小组有 3 名男生和 2 名女生,从中任选 2 名同学参加演讲比赛,判断下列每对事件是不是互斥事件,如果是,再判断它们是不是对立事件.

(1)"恰有 1 名男生"与"恰有 2 名男生";

(2)"至少有 1 名男生"与"全是男生";

(3)"至少有 1 名男生"与"全是女生";

(4)"至少有 1 名男生"与"至少有 1 名女生".

解:判断两个事件是否互斥,就要考察它们是否能同时发生;判断两个互斥事件是否对立,就要考察它们是否有且只有一个发生.

从 3 名男生和 2 名女生中任选 2 人有如下 3 种结果:2 名男生,2 名女生,1 男 1 女.

(1)因为"恰有 1 名男生"与"恰有 2 名男生"不可能同时发生,所以它们是互斥事件;当恰有 2 名女生时,它们都不发生,所以它们不是对立事件.

(2)因为恰有 2 名男生时"至少有 1 名男生"与"全是男生"可能同时发生,所以它们不是互斥事件.

(3)因为"至少有 1 名男生"与"全是女生"不可能同时发生,所以它们是互斥事件;由于它们有且只有一个发生,所以它们是对立事件.

(4)由于选出的是 1 名男生 1 名女生时"至少有 1 名男生"与"至少有 1 名女生"同时发生,所以它们不是互斥事件.

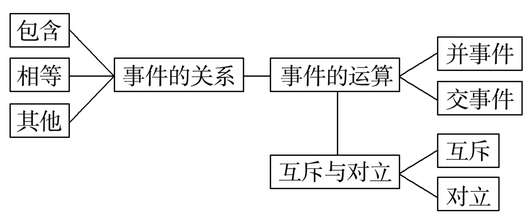
【类题通法】

互斥事件与对立事件的判断方法

(1)利用基本概念:判断两个事件是否为互斥事件,注意看它们能否同时发生.若不同时发生,则这两个事件是互斥事件;若能同时发生,则这两个事件不是互斥事件.

(2)判断两个事件是否为对立事件,主要看是否同时满足两个条件:一是不能同时发生;二是必有一个发生.如果这两个条件同时成立,那么这两个事件就是对立事件,只要有一个条件不成立,那么这两个事件就不是对立事件.两个事件是对立事件则必是互斥事件.

▶提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1.如果事件 A,B 互斥,那么　　(B)

A.$A\cup B$ 是必然事件

B.A 的对立事件与 B 的对立事件的和事件是必然事件

C.A 的对立事件与 B 的对立事件是互斥事件

D.A 的对立事件与 B 的对立事件不是互斥事件

2.(多选题)某小组有三名男生和两名女生,从中任选两名去参加比赛,则下列各对事件是互斥事件的有　　(　　)

A."恰有一名男生"和"全是男生"

B."至少有一名男生"和"至少有一名女生"

C."至少有一名男生"和"全是男生"

D."至少有一名男生"和"全是女生"

AD　**解析**:A 是互斥事件,恰有一名男生的实质是选出的两名同学中有一名男生和一名女生,它与全是男生不可能同时发生;B 不是互斥事件;C 不是互斥事件;D 是互斥事件,至少有一名男生与全是女生不可能同时发生.

3.抽查 10 件产品,设试验的样本空间为 Ω,A="至多有一件次品",B="至少有两件次品",则　　(　　)

A.$A\subseteq B$

B.$B\subseteq A$

C.$A\cap B\neq\varnothing$

D.$A\cap B=\varnothing$,且 $A\cup B=\Omega$

D　**解析**:A="至多有 1 件次品",包含:0 件次品和 1 件次品;B="至少有 2 件次品"包含:2 件次品、3 件次品、4 件次品、5 件次品、6 件次品、7 件次品、8 件次品、9 件次品和 10 件次品,故 $A\cap B=\varnothing$,且 $A\cup B=\Omega$.故选 D.

4. 一个射击手进行一次射击,下列事件哪些是互斥事件?哪些是对立事件?

事件 A:命中环数大于 7 环;事件 B:命中环数为 10 环;事件 C:命中环数小于 6 环;事件 D:命中环数为 6,7,8,9 或 10 环.

解:$A\cap B=\{10\text{ 环}\}\neq\varnothing$,故 A 与 B 不是互斥事件,更不是对立事件;

显然 $A\cap C=\varnothing$,“大于 7 环”与“小于 6 环”是不可能同时发生的,故 A 与 C 是互斥事件,又 $A\cup C\neq\Omega$,即 A 与 C 不是必有一个发生,还可能有 6 环或 7 环,因此 A 与 C 不是对立事件;

$A\cap D=\{8\text{ 环},9\text{ 环},10\text{ 环}\}\neq\varnothing$,故 A 与 D 不是互斥事件;

显然 $B\cap C=\varnothing$,所以 B 与 C 是互斥事件,又因为 $B\cup C\neq\Omega$,因此 B 与 C 不是对立事件;

$B\cap D=\{10\text{ 环}\}\neq\varnothing$,因此 B 与 D 不是互斥事件;

显然 $C\cap D=\varnothing$,因此 C 与 D 是互斥事件,又 $C\cup D=\Omega$,即 C,D 必有一个发生,因此 C 与 D 还是对立事件.

综合性·创新提升

1. (多选题)对空中飞行的飞机连续射击两次,每次发射一枚炮弹,设事件 A=“两弹都击中飞机”,事件 B=“两弹都没击中飞机”,事件 C=“恰有一弹击中飞机”,事件 D=“至少有一弹击中飞机”,下列关系正确的是 ( )

A. $A\subseteq D$　　B. $B\cap D=\varnothing$

C. $A\cup C=D$　　D. $A\cup C=B\cup D$

ABC **解析**:“恰有一弹击中飞机”指第一枚击中第二枚没击中或第一枚没击中第二枚击中,“至少有一弹击中”包含两种情况:一种是恰有一弹击中,一种是两弹都击中,即 $A\cup C\neq B\cup D$,所以 A,B,C 正确,D 错误.

2. (多选题)将《红楼梦》《水浒传》《西游记》《三国演义》四本书随机地分发给甲、乙、丙三人,每人至少分得一本,则下列说法不正确的是 ( )

A. 事件“甲分得一本”与事件“丙分得两本”为互斥事件

B. 事件“乙分得《三国演义》”与事件“丙分得《水浒传》”为对立事件

C. 事件“甲分得两本”与事件“乙分得两本”为对立事件

D. 事件“甲分得《红楼梦》”与事件“乙分得《红楼梦》”为互斥事件

ABC **解析**:对于 A,事件“甲分得一本”与事件“丙分得两本”能同时发生,故 A 错误;

对于 B,事件“乙分得《三国演义》”与事件“丙分得《水浒传》”能同时发生,不为对立事件,故 B 错误;

对于 C,事件“甲分得两本”与事件“乙分得两本”不能同时发生,是互斥事件,但两个事件的并集不等于总的样本空间,故不是对立事件,故 C 错误;

对于 D,事件“甲分得《红楼梦》”与事件“乙分得《红楼梦》”不能同时发生,故是互斥事件,故 D 正确.

故选 ABC.

3. 某人从装有 5 个黑球、5 个白球的袋中任取 5 个小球,事件“至少 4 个是黑球”的对立事件是____.

至多 3 个是黑球 **解析**:事件“至少 4 个是黑球”的对立事件是“至多 3 个是黑球”.

4. 从装有 5 个红球、5 个白球的袋中任意取出 3 个球,判断下列每对事件是不是互斥事件,是不是对立事件.

(1)“取出 3 个红球”与“取出 3 个球中至少有 1 个白球”;

(2)“取出 2 个红球和 1 个白球”与“取出 3 个红球”;

(3)“取出 3 个红球”与“取出的球中至少有 1 个红球”.

解:(1)是互斥事件,也是对立事件.因为两个事件不会同时发生,也不会同时不发生.

(2)是互斥事件,但不是对立事件.因为两个事件不会同时发生,但可以同时不发生.

(3)两个事件不是互斥事件,也不是对立事件.因为两个事件可以同时发生.

10.1.3　古典概型

学习任务目标

1. 理解古典概型的定义.(数学抽象)
2. 会应用古典概型的概率公式解决实际问题.(数学建模)

问题式预习

知识点一　古典概型

如果某些试验具有如下共同特征：

(1)有限性：样本空间的样本点只有有限个；

(2)等可能性：每个样本点发生的可能性相等.

我们将具有以上两个特征的试验称为古典概型试验，其数学模型称为古典概率模型，简称古典概型.

[微训练]

1. 判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").

(1)任何一个事件都是一个样本点.　(×)

(2)在古典概型中，每一个样本点出现的可能性相等.　(√)

(3)古典概型中的任何两个样本点都是互斥的.　(√)

2. 下列试验中是古典概型的是　(　　)

A. 任意抛掷两枚均匀的正方体骰子，所得点数之和作为样本点

B. 口袋里有2个白球和2个黑球，这4个球除颜色外完全相同，从中任取一球观察其颜色

C. 向一圆面内随机地投一个点，观察该点落在圆内的位置

D. 射击运动员进行射击试验，试验结果为命中10环，命中9环……命中0环

B　**解析**：古典概型要求所有结果出现的可能性都相等，强调所有结果，即每一结果出现的概率都相同，A中尽管点数之和只有有限个取值：2，3，…，12，但它们不是等可能性的；B中摸到白球与黑球的概率相同，均为$\frac{1}{2}$；C中的样本点有无限个；D中由于受射击运动员水平的影响，命中10环，命中9环……命中0环的可能性不相等.

知识点二　古典概型的概率公式

一般地，设试验E是古典概型，样本空间Ω包含n个样本点，事件A包含其中的k个样本点，则定义事件A的概率$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$.其中，$n(A)$和$n(\Omega)$分别表示事件$A$和样本空间$\Omega$包含的样本点个数.

[微训练]

甲、乙、丙三名同学站成一排，甲站在中间的概率是　(　　)

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

C　**解析**：样本空间Ω={甲乙丙、甲丙乙、乙甲丙、乙丙甲、丙甲乙、丙乙甲}，共有6个样本点.甲站在中间包括：乙甲丙、丙甲乙，共2个样本点.所以甲站在中间的概率$P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

任务型课堂

任务一　古典概型的定义

1. 下列试验中是古典概型的是　(　　)

A. 任意抛掷两枚均匀的骰子，所得的点数之积作为样本点

B. 为求任意的一个正整数平方的个位数字是1的概率，将取出的正整数作为样本点

C. 从甲地到乙地共n条路线，随机选择其中一条路线

D. 抛掷一枚均匀的硬币，首次出现正面时已抛掷的次数为样本点

C　**解析**：A中尽管点数之积只有有限个取值：1，2，3，…，36，但它们不是等可能性的，故A不是古典概型.对于B，尽管各个正整数被取到是等可能性的，但正整数有无限个，故B不是古典概型.对于C，由于只有n个等可能的结果，故是古典概型.对于D，可能的结果即抛掷次数可能是无限次，故D不是古典概型.

2. 将一枚质地均匀地骰子先后抛掷两次，则：

(1)一共有几个样本点？

(2)"出现的点数之和大于8"包含几个样本点？

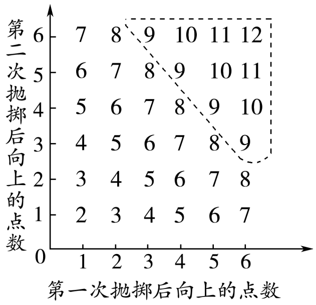
解：方法一（列举法）：

(1)用(x,y)表示结果，其中x表示骰子第1次出现的点数，y表示骰子第2次出现的点数，则试验的样本空间$\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$，共36个样本点.

(2)“出现的点数之和大于8”包含以下10个样本点：$(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)$.

方法二（列表法）：

如图所示，坐标平面内的数表示相应两次抛掷后出现的点数的和，样本点与所列数一一对应.

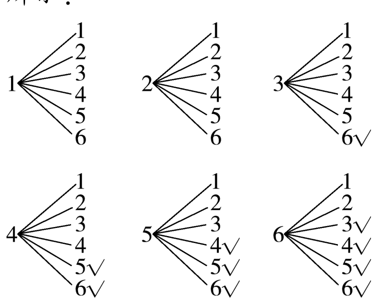


(1)由此可知，一共有36个样本点.

(2)“出现点数之和大于8”包含10个样本点（已用虚线圈出）.

方法三（画树状图法）：

一枚骰子先后抛掷两次的所有可能结果用树状图表示.如图所示：



(1)由图知，共有36个样本点.

(2)“出现点数之和大于8”包含10个样本点（已用“√”标出）.

【类题通法】

1.判断一个随机试验是不是古典概型，只要看以下两个特征是否同时满足：

(1)有限性：样本空间的样本点是有限个；

(2)等可能性：每个样本点出现的可能性相等.

两个特征同时满足的才是古典概型.

2.常见的具备等可能性的语句有“随机抽取”“任选”“质地均匀”“完全相同”等.

任务二 利用古典概型公式求概率

[探究活动]

请根据古典概型公式，结合下面材料，探究以下问题.

现有6道题，其中4道甲类题，2道乙类题，张同学从中任取2道题解答.

探究1：求所取的2道题都是甲类题的概率.

提示：将4道甲类题依次编号为1，2，3，4；2道乙类题依次编号为5，6.任取2道题，这个试验的样本空间$\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}$，共15个样本点，且每个样本点出现的可能性是相等的，可用古典概型公式来计算概率.

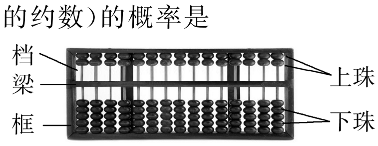
用A表示“所取的2道题都是甲类题”这一事件，则$A=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$，共含有6个样本点，所以$P(A)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.

探究2：求所取的2道题不是同一类题的概率.

提示：由探究1知试验的样本空间共有15个样本点，用B表示“所取的2道题不是同一类题”这一事件，则$B=\{(1,5),(1,6),(2,5),(2,6),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6)\}$，共包含8个样本点，所以$P(B)=\frac{8}{15}$.

[评价活动]

1.算盘是中国传统的计算工具，是中国人在长期使用算筹的基础上发明的，“珠算”一词最早见于东汉徐岳所撰的《数术记遗》，其中有云：“珠算控带四时，经纬三才.”北周甄鸾为此作注，大意是：把木板刻为3部分，上、下两部分是停游珠用的，中间一部分是作定位用的.下图是一把算盘的初始状态，自右向左，各档分别表示个位、十位、百位……上面一粒珠（简称上珠）代表5，下面一粒珠（简称下珠）是1，即五粒下珠的大小等于同档一粒上珠的大小.现在从个位和十位这两档中随机选择往下拨一粒上珠，往上拨3粒下珠，得到的数为质数（除了1和本身没有其他的约数）的概率是（　　）



A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{3}{8}$

C.$\frac{1}{3}$　　D.$\frac{2}{3}$

B　**解析**：由题意可知，算盘所有可以表示的数有17，26，8，35，62，71，80，53，其中是质数的有17，71，53，故所求事件的概率$P=\frac{3}{8}$.故选B.

2. 从 1,2,3,4,5 中随机选取一个数 a,从 1,2,3 中随机选取一个数 b,则 $b>a$ 的概率是 ( )

A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

D **解析**:设所取的数中 $b>a$ 为事件 A,如果把选出的数 a,b 写成数对 (a,b) 的形式,则试验的样本空间 $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3)\}$,共 15 个样本点,事件 A 包含的样本点有 $(1,2),(1,3),(2,3)$,共 3 个,因此所求的概率 $P(A)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$.

3. 从 1,2,3,4,5 这 5 个数字中任取三个不同的数字,求下列事件的概率:

(1)事件 $A=\{$三个数字中不含 1 和 5$\}$;

(2)事件 $B=\{$三个数字中含 1 或 5$\}$.

解:这个试验的样本空间 $\Omega=\{(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),(1,3,5),(1,4,5),(2,3,4),(2,3,5),(2,4,5),(3,4,5)\}$,所以样本点总数 $n=10$.

(1)因为事件 $A=\{(2,3,4)\}$,所以事件 A 包含的样本点数 $k=1$,所以 $P(A)=\frac{k}{n}=\frac{1}{10}$.

(2)因为事件 $B=\{(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),(1,3,5),(1,4,5),(2,3,5),(2,4,5),(3,4,5)\}$,

所以事件 B 包含的样本点数 $k=9$.

所以 $P(B)=\frac{k}{n}=\frac{9}{10}$.

【类题通法】

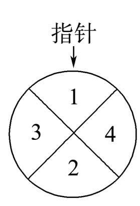
使用古典概型概率公式应注意:首先确定是否为古典概型;其次弄清楚事件 A 是什么,包含的样本点有哪些.

任务三 较复杂古典概型的概率计算

[探究活动]

请根据古典概型的概率计算方法,结合下面的材料,探究以下问题.

某儿童乐园在儿童节推出了一项趣味活动.参加活动的儿童需转动如图所示的转盘两次,每次转动后,待转盘停止转动时,记录指针所指区域中的数.设两次记录的数分别为 x,y.



奖励规则如下:

①若 $xy\leqslant 3$,则奖励玩具一个;②若 $xy\geqslant 8$,则奖励水杯一个;③其余情况奖励饮料一瓶.

假设转盘质地均匀,四个区域划分均匀.小亮准备参加此项活动.

探究 1:求小亮获得玩具的概率.

提示:用数对 (x,y) 表示小亮参加活动先后转动转盘所记录的数,

则样本空间 $\Omega=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N},1\leqslant x\leqslant 4,1\leqslant y\leqslant 4\}$.

因为 Ω 中元素的个数是 $4\times 4=16$,

所以样本点总数 $n=16$.

记"$xy\leqslant 3$"为事件 A,则事件 A 包含的样本点共 5 个,

即 $A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1)\}$.

所以 $P(A)=\frac{5}{16}$,即小亮获得玩具的概率为 $\frac{5}{16}$.

探究 2:请比较小亮获得水杯与获得饮料的概率的大小,并说明理由.

提示:小亮获得水杯的概率大于获得饮料的概率.理由如下:记"$xy\geqslant 8$"为事件 B,"$3<xy<8$"为事件 C.

则事件 B 包含的样本点共 6 个,即 $B=\{(2,4),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$.

所以 $P(B)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.

事件 C 包含的样本点共 5 个,即 $C=\{(1,4),(2,2),(2,3),(3,2),(4,1)\}$.

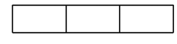
所以 $P(C)=\frac{5}{16}$.因为 $\frac{3}{8}>\frac{5}{16}$,所以小亮获得水杯的概率大于获得饮料的概率.

[评价活动]

1. 从 2,3,8,9 中任取两个不同的数字,分别记为 a,b,则 $\log_a b$ 为整数的概率为________.

$\frac{1}{6}$ **解析**:从 2,3,8,9 中任取 2 个不同的数字分别记为 (a,b),则有 $(2,3),(3,2),(2,8),(8,2),(2,9),(9,2),(3,8),(8,3),(3,9),(9,3),(8,9),(9,8)$,共有 12 个样本点,其中符合 $\log_a b$ 为整数的有 $\log_3 9$ 和 $\log_2 8$ 两种情况,所以所求概率为 $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

2. 用三种不同的颜色给如图所示的 3 个矩形随机涂色,每个矩形只涂一种颜色.

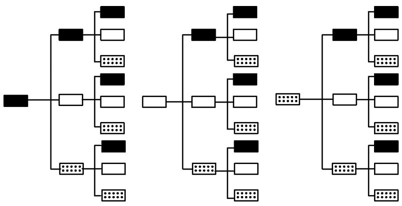


(1)求 3 个矩形颜色都相同的概率;

(2)求 3 个矩形颜色都不相同的概率;

(3)求 3 个矩形颜色不都相同的概率.

解:设 3 个矩形从左到右依次为矩形 1、矩形 2、矩形 3.用三种不同的颜色给题目中所示的 3 个矩形随机涂色,可能的结果如图所示.



由图可知共有 27 个样本点.

(1)记"3 个矩形颜色都相同"为事件 A.由图知事件 A 包含的样本点有 3 个,故 $P(A)=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$.

(2)记"3 个矩形颜色都不相同"为事件 B.由图知事件 B 包含的样本点有 6 个,故 $P(B)=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$.

(3)记"3 个矩形颜色不都相同"为事件 C.

由图可知事件 C 包含的样本点有 24 个,故$P(C)=\frac{24}{27}=\frac{8}{9}$.

【类题通法】

关于有放回和不放回抽样的两点注意

(1)关于不放回抽样,计算样本点个数时,既可以看作是有顺序的,也可以看作是无顺序的,其最后结果是一致的.但不论选择哪一种方式,观察的角度必须一致,否则会产生错误.

(2)关于有放回抽样,应注意在连续取出两次的过程中,因为先后顺序不同,所以(a,b),(b,a)不是同一个样本点.

提质归纳

- 古典概型
  - 特征
    - 有限性
    - 等可能性
  - 概率公式

课后素养评价

基础性·能力运用

1.下列概率模型属于古典概型的是 ( )

A.在平面直角坐标系内,从横坐标和纵坐标都是整数的所有点中任取一点

B.某射手射击一次,可能命中 0 环,1 环,2 环……10 环

C.某小组有男生 5 人,女生 3 人,从中任选 1 人做演讲

D.一只使用中的灯泡的寿命长短

C **解析**:A 不属于,原因:所有横坐标和纵坐标都是整数的点有无限多个,不满足有限性;B 不属于,原因:命中 0 环,1 环,2 环……10 环的概率不一定相同,不满足等可能性;C 属于,原因:满足有限性,且任选 1 人与学生的性别无关,是等可能的;D 不属于,原因:灯泡的寿命是任何一个非负实数,有无限多种可能,不满足有限性.

2.将 2 本不同的数学书和 1 本语文书在书架上随机排成一行,则 2 本数学书相邻的概率为 ( )

A.$\frac{1}{6}$ B.$\frac{1}{3}$ C.$\frac{1}{2}$ D.$\frac{2}{3}$

D **解析**:两本不同的数学书用 a_1,a_2 表示,语文书用 b 表示,

则 $\Omega=\{(a_1,a_2,b),(a_1,b,a_2),(a_2,a_1,b),(a_2,b,a_1),(b,a_1,a_2),(b,a_2,a_1)\}$,即 2 本数学书相邻的情况有 4 种,故所求概率为 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

3.某国际科研合作项目由两个美国人,一个法国人和一个中国人共同开发完成,现从中随机选出两个人作为成果发布人,选出的两人中有中国人的概率为 ( )

A.$\frac{1}{4}$ B.$\frac{1}{3}$ C.$\frac{1}{2}$ D.1

C **解析**:用列举法可知,样本空间共有 6 个样本点,有中国人的样本点有 3 个,所以 $p=\frac{1}{2}$.

4.袋中装有 1 个白球和 3 个黑球,从中摸出 2 个球正好一白一黑的概率是 ( )

A.$\frac{1}{4}$ B.$\frac{1}{2}$ C.$\frac{1}{3}$ D.$\frac{2}{3}$

B **解析**:1 个白球记作 A,3 个黑球分别记为 a,b,c,样本空间为$\{Aa,Ab,Ac,ab,ac,bc\}$,共有 6 个样本点,"一白一黑"有 3 个样本点,所以 $P=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

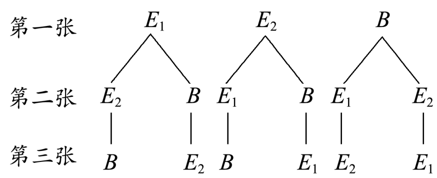
5.盒中有 10 个铁钉,其中 8 个是合格的,2 个是不合格的,从中任取的一个恰为合格铁钉的概率是 ( )

A.$\frac{1}{5}$ B.$\frac{1}{4}$ C.$\frac{4}{5}$ D.$\frac{1}{10}$

C **解析**:从盒中任取一个铁钉包含样本点总数为 10,其中取到合格铁钉(记为事件 A)包含 8 个样本点,所以$P(A)=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$.

6. 三张卡片上分别写有字母 E，E，B，将三张卡片随机排成一行，恰好排成 BEE 的概率为________.

$\frac{1}{3}$　**解析**：记写有 E 的两张卡片分别为 E_1，E_2，画树状图如下：



故样本空间 $\Omega=\{E_1E_2B, E_1BE_2, E_2E_1B, E_2BE_1, BE_1E_2, BE_2E_1\}$，共 6 个样本点.记事件 A 为"恰好排成 BEE"，则 $A=\{BE_1E_2, BE_2E_1\}$，共包含 2 个样本点，故 $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

7. 从长度分别为 2，3，4，5 的四条线段中任意取出三条，则以这三条线段为边可以构成三角形的概率是________.

$\frac{3}{4}$　**解析**：此试验的样本空间 $\Omega=\{(2,3,4),(2,3,5),(2,4,5),(3,4,5)\}$，共有 4 个样本点.设事件 A＝"可构成三角形"，则 $A=\{(2,3,4),(2,4,5),(3,4,5)\}$，共有 3 个样本点，故 $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{3}{4}$.

综合性·创新提升

1. 某班准备到郊外野营，为此向商店订了帐篷，如果下雨与不下雨是等可能的，能否准时收到帐篷也是等可能的，只要帐篷如期运到，他们就不会淋雨.下列说法正确的是（　　）

A.一定不会淋雨　　B.淋雨概率为 $\frac{3}{4}$

C.淋雨概率为 $\frac{1}{2}$　　D.淋雨概率为 $\frac{1}{4}$

D　**解析**：用 A，B 分别表示下雨和不下雨，用 a，b 表示帐篷运到和运不到，则所有可能情形为 (A,a)，(A,b)，(B,a)，(B,b)，则当 (A,b) 发生时就会被雨淋到，所以淋雨的概率为 $\frac{1}{4}$.

2. 党的二十大报告内涵丰富，鼓舞人心.某学校党支部评选了 5 份优秀学习报告心得体会（其中教师 2 份，学生 3 份），现从中随机抽取 2 份参展，则参展的优秀学习报告心得体会中，学生、教师各一份的概率是（　　）

A. $\frac{1}{20}$　　B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{3}{10}$　　D. $\frac{9}{10}$

B　**解析**：在 5 份优秀报告中，设教师的报告为 a_1，a_2，学生的报告为 b_1，b_2，b_3，从中随机抽取 2 份的样本空间 $\Omega=\{(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3),(b_1,b_2),(b_1,b_3),(b_2,b_3)\}$，共 10 个样本点，学生、教师各一份的样本点有 (a_1,b_1)，(a_1,b_2)，(a_1,b_3)，(a_2,b_1)，(a_2,b_2)，(a_2,b_3)，共 6 个，所以学生、教师各一份的概率 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.故选 B.

3. 先后抛掷两枚均匀的正方体骰子（它们的六个面的点数分别为 1，2，3，4，5，6），骰子朝上的面的点数分别为 x，y，则 $\log_{2x}y=1$ 的概率为（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{5}{36}$

C. $\frac{1}{12}$　　D. $\frac{1}{2}$

C　**解析**：样本空间样本点的个数为 36.

由 $\log_{2x}y=1$ 得 $2x=y$，其中 $x,y\in\{1,2,3,4,5,6\}$，所以 $\begin{cases}x=1,\\y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2,\\y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3,\\y=6\end{cases}$ 满足 $\log_{2x}y=1$，故事件"$\log_{2x}y=1$"包含 3 个样本点，所以所求的概率为 $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

4. 某车间共有 6 名工人，他们某日加工零件个数的茎叶图如图所示，其中茎为十位数，叶为个位数，日加工零件个数大于样本平均数的工人为优秀工人.从该车间 6 名工人中，任选 2 人，则至少有 1 名优秀工人的概率为________.

1	7	9	
2	0	1	5
3	0		

$\frac{3}{5}$ **解析**:由茎叶图可知6名工人日加工的零件个数为17,19,20,21,25,30.平均数为$\frac{1}{6}\times(17+19+20+21+25+30)=22$.因为日加工零件个数大于22的为25,30,

所以优秀工人有2人.

从该车间6名工人中,任选2人共有15种选法:(17,19),(17,20),(17,21),(17,25),(17,30),(19,20),(19,21),(19,25),(19,30),(20,21),(20,25),(20,30),(21,25),(21,30),(25,30).

其中至少有1名优秀工人的共有9种选法:(17,25),(17,30),(19,25),(19,30),(20,25),(20,30),(21,25),(21,30),(25,30).由概率公式可得至少有1名优秀工人的概率为$\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.

5. 一叠卡片共有10张,正面分别写有数字1~10,将它们背面朝上洗匀后,任意抽出一张卡片,则P(抽到卡片上的数字大于6)=________,P(抽到卡片上的数字大于7小于9)=_________,P(抽到卡片上的数字为偶数)=________.

$\frac{2}{5}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{2}$ **解析**:从10张卡片中任抽一张有10种抽法,即10个样本点,

其中抽到卡片上的数字大于6包含4个样本点.

由于抽到每一张卡片的可能性都相等,

故P(抽到卡片上的数字大于6)$=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

同理可得P(抽到卡片上的数字大于7小于9)$=\frac{1}{10}$,

P(抽到卡片上的数字为偶数)$=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

6. 某小组共有A,B,C,D,E五位同学,他们的身高(单位:m)及体重指标(单位:kg/m^2)如表所示:

项目	A	B	C	D	E
身高	1.69	1.73	1.75	1.79	1.82
体重指标	19.2	25.1	18.5	23.3	20.9

(1)从该小组身高低于1.80 m的同学中任选2人,求选到的2人身高都在1.78 m以下的概率;

(2)从该小组同学中任选2人,求选到的2人的身高都在1.70 m以上且体重指标都在[18.5,23.9)内的概率.

解:(1)从身高低于1.80 m的同学中任选2人,样本空间$\Omega=\{$(A,B),(A,C),(A,D),(B,C),(B,D),(C,D)$\}$,共6个样本点.

选到的2人身高都在1.78 m以下的事件包含样本点(A,B),(A,C),(B,C),共3个.

因此选到的2人身高都在1.78 m以下的概率为$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

(2)从该小组同学中任选2人,样本空间$\Omega=\{$(A,B),(A,C),(A,D),(A,E),(B,C),(B,D),(B,E),(C,D),(C,E),(D,E)$\}$,共10个样本点.

选到的2人身高都在1.70 m以上且体重指标都在[18.5,23.9)内的事件含有的样本点有(C,D),(C,E),(D,E),共3个.

因此选到的2人的身高都在1.70 m以上且体重指标都在[18.5,23.9)内的概率为$\frac{3}{10}$.

7. 投掷一枚质地均匀的骰子2次,观察出现的点数,并记第一次出现的点数为a,第二次出现的点数为b.

(1)写出试验的样本空间;

(2)若向量$\boldsymbol{m}=(a,b)$,$\boldsymbol{n}=(2,1)$.求$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\geqslant10$的概率.

解:(1)试验的样本空间为$\Omega=\{(a,b)\mid1\leqslant a\leqslant6,1\leqslant b\leqslant6,a,b\in\mathbf{Z}\}$.

(2)向量$\boldsymbol{m}=(a,b)$,$\boldsymbol{n}=(2,1)$,

则$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=2a+b$,

则$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\geqslant10$即$2a+b\geqslant10$的样本点有(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5),(3,4),(4,4),(5,4),(6,4),(4,3),(5,3),(6,3),(4,2),(5,2),(6,2),(5,1),(6,1),共21个,

由(1)可知样本空间中的样本点共36个,

故所求概率$P=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$.

10.1.4 概率的基本性质

学习任务目标

1.通过实例,理解概率的性质.(逻辑推理)

2.掌握随机事件概率的运算法则.(数学运算)

问题式预习

知识点 概率的基本性质

性质1:对任意的事件A,都有$P(A)\geqslant 0$.

性质2:必然事件的概率为1,不可能事件的概率为0,即$P(\Omega)=1$,$P(\varnothing)=0$.

性质3:如果事件A与事件B互斥,那么$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

性质4:如果事件A与事件B互为对立事件,那么$P(B)=1-P(A)$,$P(A)=1-P(B)$.

性质5:如果$A\subseteq B$,那么$P(A)\leqslant P(B)$.

性质6:设A,B是一个随机试验中的两个事件,我们有$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

[微训练]

1.中国乒乓球队甲、乙两名队员参加奥运会乒乓球女子单打比赛,甲夺得冠军的概率为$\frac{3}{7}$,乙夺得冠军的概率为$\frac{1}{4}$,那么中国乒乓球队夺得女子乒乓球单打冠军的概率为________.

$\frac{19}{28}$ **解析**:由于事件“中国乒乓球队夺得女子乒乓球单打冠军”包括事件“甲夺得冠军”和“乙夺得冠军”,但这两个事件不可能同时发生,即彼此互斥,所以由互斥事件概率的加法公式得,中国乒乓球队夺得女子乒乓球单打冠军的概率为$\frac{3}{7}+\frac{1}{4}=\frac{19}{28}$.

2.某产品分甲、乙、丙三级,其中乙、丙两级均属次品.若生产中出现乙级品的概率为0.03,出现丙级品的概率为0.01,则抽查一件产品,抽得正品的概率为________.

0.96 **解析**:由对立事件概率公式,抽得正品的概率$P=1-0.03-0.01=0.96$.

任务型课堂

任务一 概率的基本性质

1.随机事件A发生的概率$P(A)$的取值范围是 ( )

A.$P(A)>0$ B.$P(A)<1$

C.$0<P(A)<1$ D.$0\leqslant P(A)\leqslant 1$

D **解析**:必然事件的概率是1,不可能事件的概率是0,必然事件和不可能事件是随机事件的两种极端情况,因此随机事件的概率的取值范围是$[0,1]$.

2.从一批羽毛球产品中任取一个,其质量小于4.8 g的概率为0.3,质量小于4.85 g的概率为0.32,那么质量(单位:g)在$[4.8,4.85]$范围内的概率是 ( )

A.0.62 B.0.38

C.0.02 D.0.68

C **解析**:设“质量小于4.8 g”为事件A,“质量小于4.85 g”为事件B,“质量在区间$[4.8,4.85]$内”为事件C,则$A\cup C=B$,且A,C为互斥事件,所以$P(B)=P(A\cup C)=P(A)+P(C)$.

所以$P(C)=P(B)-P(A)=0.32-0.3=0.02$.

3.甲、乙2人下棋,下成和棋的概率是$\frac{1}{2}$,乙获胜的概率是$\frac{1}{3}$,则甲获胜的概率是 ( )

A.$\frac{1}{2}$ B.$\frac{5}{6}$ C.$\frac{1}{6}$ D.$\frac{2}{3}$

C **解析**:因为甲胜的概率就是乙不胜,故甲胜的概率为$1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$.

任务二 利用基本性质求概率

1.一个电路板上装有甲、乙两根熔丝,甲熔断的概率为0.85,乙熔断的概率为0.74,两根同时熔断的概率为0.63,则至少有一根熔断的概率为________.

0.96 **解析**：设 A＝“甲熔丝熔断”，B＝“乙熔丝熔断”，则“甲、乙两根熔丝至少有一根熔断”为事件 $A\cup B$.$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.85+0.74-0.63=0.96$.

2. 在数学考试中，小王的成绩在 90 分以上（含 90 分）的概率是 0.18，在 80～89 分的概率是 0.51，在 70～79 分的概率是 0.15，在60～69分的概率是 0.09，在 60 分以下（不含 60 分）的概率是 0.07.求：

(1)小王在数学考试中取得 80 分以上（含 80 分）成绩的概率；

(2)小王数学考试及格（60 分及以上为及格）的概率.

解：设小王的成绩“在 90 分以上（含 90 分）”“在 80～89 分”“在 60 分以下（不含 60 分）”分别为事件 A,B,C，易知 A,B,C 两两互斥.

(1)设小王的成绩“在 80 分以上（含 80 分）”为事件 D，则 $D=A\cup B$，所以 $P(D)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.18+0.51=0.69$.

(2)设“小王数学考试及格”为事件 E，由于事件 E 与事件 C 为对立事件，所以 $P(E)=1-P(C)=1-0.07=0.93$.

任务三 互斥事件、对立事件概率公式的应用

［探究活动］

某公司第一分厂有男职工 4 000 人、女职工 1 600 人，第二分厂有男职工 3 000 人、女职工 1 400 人，第三分厂有男职工 800 人、女职工 500 人.

探究 1：现从该公司职工中随机抽取 1 人，求该职工为第二分厂职工或为第三分厂职工的概率.

提示：记事件 A 为“抽取的是第二分厂的职工”，事件 B 为“抽取的是第三分厂的职工”，则 $A\cup B$ 表示“抽取的是第二分厂职工或第三分厂的职工”，可知 A 与 B 互斥.公司共有职工 4 000＋1 600＋3 000＋1 400＋800＋500＝11 300(人).

所以 $P(A)=\dfrac{3\ 000+1\ 400}{11\ 300}=\dfrac{4\ 400}{11\ 300}=\dfrac{44}{113}$，

$P(B)=\dfrac{800+500}{11\ 300}=\dfrac{1\ 300}{11\ 300}=\dfrac{13}{113}$，

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\dfrac{44}{113}+\dfrac{13}{113}=\dfrac{57}{113}$.

探究 2：现从该公司职工中随机抽取 1 人，求该职工为女职工或为第三分厂职工的概率.

提示：记事件 B 为“抽取的是第三分厂的职工”，事件 C 为“抽取的是女职工”，

则 $B\cap C$ 表示“抽取的是第三分厂的女职工”，$B\cup C$ 表示“抽取的是女职工或第三分厂的职工”.

易知，公司共有职工 4 000＋1 600＋3 000＋1 400＋800＋500＝11 300(人).

所以 $P(B)=\dfrac{800+500}{11\ 300}=\dfrac{1\ 300}{11\ 300}=\dfrac{13}{113}$，$P(C)=\dfrac{1\ 600+1\ 400+500}{11\ 300}=\dfrac{3\ 500}{11\ 300}=\dfrac{35}{113}$，

$P(B\cap C)=\dfrac{500}{11\ 300}=\dfrac{5}{113}$，

所以该职工为女职工或为第三分厂职工的概率为

$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)=\dfrac{35}{113}+\dfrac{13}{113}-\dfrac{5}{113}=\dfrac{43}{113}$.

［评价活动］

某市各种血型的人所占比例如下：

血型	A	B	AB	O
该血型的人所占比例(%)	28	29	8	35

已知同种血型的人之间可以输血，O 型血可以输血给任意一种血型的人，其他不同血型的人不能互相输血.小明是 B 型血，若小明因病需要输血，则：

(1)在该市任找一个人，其血可以输给小明的概率是多少？

(2)在该市任找一个人，其血不能输给小明的概率是多少？

解：(1)对任一个人，其血型为 A，B，AB，O 的事件分别记为 A',B',C',D'，它们是彼此互斥的.

由已知，得 $P(A')=0.28$，$P(B')=0.29$，$P(C')=0.08$，$P(D')=0.35$.

因为 B 型血、O 型血可以输给 B 型血的人，故“可以输血给小明”为事件 $B'\cup D'$，

根据互斥事件的概率加法公式，有

$P(B'\cup D')=P(B')+P(D')=0.29+0.35=0.64$.

(2)方法一：由于 A 型血、AB 型血不能输给 B 型血的人，故“不能输血给小明”为事件 $A'\cup C'$，

且 $P(A'\cup C')=P(A')+P(C')=0.28+0.08=0.36$.

方法二：因为任找一个人，其血要么可以输给小明，要么不可以输给小明，两者为对立事件，所以不能输血给小明的概率为 $1-P(B'\cup D')=1-0.64=0.36$.

【类题通法】

1. 只有当 A,B 互斥时，公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ 才成立；只有当 A,B 互为对立事件时，公式 $P(A)=1-P(B)$ 才成立.

2. 复杂的互斥事件概率的求法有两种：一是直接求解，将所求事件的概率分解为一些彼此互斥事件的概率的和，运用互斥事件的概率的加法公式计算；二是间接求解，先找出所求事件的对立事件，再用公式 $P(A)=1-P(\overline{A})$ 求解.

提质归纳

概率的基本性质
- 性质1 非负性
- 性质2 不可能事件、必然事件的概率
- 性质3 互斥事件的概率
- 性质4 对立事件的概率
- 性质5 具备包含关系的事件的概率
- 性质6 任意两个事件的并事件的概率

课后素养评价

基础性·能力运用

1. 已知随机事件 A 和 B 互斥，且 $P(A\cup B)=0.5$，$P(B)=0.3$，则 $P(\overline{A})=$ （　　）

A.0.5　　B.0.2

C.0.7　　D.0.8

D　**解析**：由互斥事件的概率性质 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$，可得 $P(A)=0.2$，故 $P(\overline{A})=1-P(A)=0.8$.

2. 已知随机事件 A,B,C 中，A 与 B 互斥，B 与 C 对立，且 $P(A)=0.3$，$P(C)=0.6$，则 $P(A\cup B)=$ （　　）

A.0.3　　B.0.6

C.0.7　　D.0.9

C　**解析**：A 与 B 互斥，B 与 C 对立，则 $P(B)+P(C)=1$，可知 $P(B)=0.4$，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.3+0.4=0.7$.

3. 抛掷一枚质地均匀的骰子，观察掷出骰子的点数，设事件 A 为"出现奇数点"，事件 B 为"出现 2 点". 已知 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{6}$，则出现奇数点或 2 点的概率为 （　　）

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{5}{6}$　　C.$\frac{1}{6}$　　D.$\frac{2}{3}$

D　**解析**：记"出现奇数点或 2 点"为事件 C，因为事件 A 与事件 B 互斥，所以 $P(C)=P(A)+P(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

综合性·创新提升

1. 某产品分为优质品、合格品、次品三个等级，生产中出现合格品的概率为 0.25，出现次品的概率为 0.03. 在该产品中任抽一件，则抽得优质品的概率是 （　　）

A.0.28　　B.0.72　　C.0.75　　D.0.97

B　**解析**：根据对立事件的概率公式，计算可得结果. 根据题意，对该产品抽查一次抽得优质品的概率 $P=1-0.25-0.03=0.72$.

2. 已知随机事件 A,B 满足条件 $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$，某人猜测事件 $\overline{A}\cap\overline{B}$ 发生，则此人猜测正确的概率为 （　　）

A.1　　B.$\frac{1}{2}$　　C.$\frac{1}{4}$　　D.0

C　**解析**：因为事件 $\overline{A}\cap\overline{B}$ 与事件 $A\cup B$ 是对立事件，随机事件 A,B 满足条件 $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$，所以事件 $\overline{A}\cap\overline{B}$ 发生的概率为 $P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$. 故选 C.

3. 已知电话响第一声时被接的概率为 $\frac{1}{10}$，响第二声时被接的概率为 $\frac{3}{10}$，响第三声时被接的概率为 $\frac{2}{5}$，响第四声时被接的概率为 $\frac{1}{10}$，则电话在响前四声内被接的概率为 （　　）

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{9}{10}$　　C.$\frac{3}{10}$　　D.$\frac{4}{5}$

B　**解析**：设"电话响第一声被接"为事件 A，"电话响第二声被接"为事件 B，"电话响第三声被接"为事件 C，"电话响第四声被接"为事件 D，则 $A,B,$

C,D 两两互斥,从而 $P(A+B+C+D)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}+\frac{2}{5}+\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$.

4. 袋中装有红球、黑球、黄球、绿球共 12 个.从中任取一球,取到红球的概率是 $\frac{1}{3}$,取到黑球或黄球的概率是 $\frac{5}{12}$,取到黄球或绿球的概率是 $\frac{5}{12}$.试求取到黑球、黄球、绿球的概率各是多少.

解:从袋中任取一球,记事件"取到红球""取到黑球""取到黄球"和"取到绿球"分别为 A,B,C,D,则事件 A,B,C,D 显然是两两互斥的.

由题意,得 $\begin{cases}P(A)=\frac{1}{3},\\ P(B\cup C)=\frac{5}{12},\\ P(C\cup D)=\frac{5}{12},\\ P(A\cup B\cup C\cup D)=1,\end{cases}$

即 $\begin{cases}P(B)+P(C)=\frac{5}{12},\\ P(C)+P(D)=\frac{5}{12},\\ \frac{1}{3}+P(B)+P(C)+P(D)=1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}P(B)=\frac{1}{4},\\ P(C)=\frac{1}{6},\\ P(D)=\frac{1}{4}.\end{cases}$

故取到黑球的概率是 $\frac{1}{4}$,取到黄球的概率是 $\frac{1}{6}$,取到绿球的概率是 $\frac{1}{4}$.

10.2 事件的相互独立性

学习任务目标

1. 理解两个事件相互独立的概念.(数学抽象)
2. 会判断两个事件是否为相互独立事件.(逻辑推理)
3. 能进行一些与独立事件有关的概率的计算.(数学运算)

问题式预习

知识点一 相互独立事件的定义

对任意两个事件 A 与 B,如果 $P(AB)=\underline{P(A)P(B)}$ 成立,则称事件 A 与事件 B 相互独立,简称为独立.

[微训练]

若 $P(AB)=\frac{1}{9}$,$P(\overline{A})=\frac{2}{3}$,$P(B)=\frac{1}{3}$,则事件 A 与 B 的关系是 ( )

A.事件 A 与 B 互斥
B.事件 A 与 B 对立
C.事件 A 与 B 相互独立
D.事件 A 与 B 既互斥又相互独立

C **解析**:因为 $P(\overline{A})=\frac{2}{3}$,所以 $P(A)=\frac{1}{3}$.又 $P(B)=\frac{1}{3}$,$P(AB)=\frac{1}{9}$,所以有 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$,所以事件 A 与事件 B 相互独立但一定不互斥.

知识点二 相互独立事件的有关结论

1. 若 A 与 B 是相互独立事件,则 A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 B,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

2. 必然事件 Ω、不可能事件 $\varnothing$ 都与任意事件相互独立.

[微训练]

在一段时间内,甲去某地的概率是 $\frac{1}{4}$,乙去此地的概率是 $\frac{1}{5}$.假定两人的行动相互之间没有影响,那么在这段时间内,至少有 1 人去此地的概率是 ( )

A.$\frac{3}{20}$　　B.$\frac{1}{5}$　　C.$\frac{2}{5}$　　D.$\frac{9}{20}$

C **解析**:方法一(相互独立事件的概率公式):设"甲去此地"为事件 A,"乙去此地"为事件 B,则至少 1 人去此地的概率 $P=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)+P(A)P(B)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$.

方法二(对立事件):$P=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$.

任务型课堂

任务一　事件的相互独立性

1. 掷一枚正方体骰子一次，设事件 A =“出现偶数点”，事件 B =“出现 3 点或 6 点”，则事件 A 与 B 的关系是　　（　　）

A.互斥但不相互独立

B.相互独立但不互斥

C.互斥且相互独立

D.既不相互独立也不互斥

B　**解析**：事件 $A=\{2,4,6\}$，事件 $B=\{3,6\}$，事件 $AB=\{6\}$，样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

所以 $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，

$P(AB)=\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$，

即 $P(AB)=P(A)P(B)$，因此事件 A 与 B 相互独立.当“出现 6 点”时，事件 A，B 同时发生，所以 A，B 不是互斥事件.

2. 容器中盛有 5 个白乒乓球和 3 个黄乒乓球.

(1)“从 8 个球中任意取出 1 个，取出的是白球”与“从剩下的 7 个球中任意取出 1 个，取出的还是白球”这两个事件是否相互独立？为什么？

(2)“从 8 个球中任意取出 1 个，取出的是白球”与“把取出的 1 个白球放回容器，再从容器中任意取出 1 个，取出的是黄球”这两个事件是否相互独立？为什么？

解：(1)不是相互独立事件.理由如下：“从 8 个球中任意取出 1 个，取出的是白球”的概率为 $\frac{5}{8}$，若这一事件发生了，则“从剩下的 7 个球中任意取出 1 个，取出的仍是白球”的概率为 $\frac{4}{7}$；若前一事件没有发生，则后一事件发生的概率为 $\frac{5}{7}$.可见，前一事件是否发生，对后一事件发生的概率有影响，所以二者不是相互独立事件.

(2)是相互独立事件.理由如下：由于把取出的白球放回容器，故对“从中任意取出 1 个，取出的是黄球”的概率没有影响，所以二者是相互独立事件.

3. 判断下列各对事件是互斥事件还是相互独立事件.

(1)运动员甲射击 1 次，“射中 9 环”与“射中 8 环”；

(2)甲、乙两运动员各射击 1 次，“甲射中 10 环”与“乙射中 9 环”；

(3)甲、乙两运动员各射击 1 次，“甲、乙都射中目标”与“甲、乙都没有射中目标”.

解：(1)甲射击 1 次，“射中 9 环”与“射中 8 环”这两个事件不可能同时发生，所以二者是互斥事件.

(2)甲、乙各射击 1 次，“甲射中 10 环”发生与否对“乙射中 9 环”的概率没有影响，所以二者为相互独立事件.

(3)甲、乙各射击 1 次，“甲、乙都射中目标”与“甲、乙都没有射中目标”不可能同时发生，所以二者是互斥事件.

【类题通法】

判断事件是否相互独立的方法

(1)定义法：事件 A，B 相互独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$.

(2)利用性质：A 与 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也都相互独立.

任务二　事件相互独立性的应用

[**探究活动**]

根据相互独立事件的概率计算方法，结合下面的材料，探究以下问题.

面对某流感病毒，各国医疗科研机构都在研究疫苗，现有 A，B，C 三个独立的研究机构在一定的时期内能研制出疫苗的概率分别是 $\frac{1}{5}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$.

探究 1：求他们都研制出疫苗的概率.

提示：令事件 A，B，C 分别表示 A，B，C 三个独立的研究机构在一定时期内成功研制出该疫苗，依题意可知，事件 A，B，C 相互独立，且 $P(A)=\frac{1}{5}$，$P(B)=\frac{1}{4}$，$P(C)=\frac{1}{3}$.

他们都研制出疫苗，即事件 ABC 发生，故 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{60}$.

探究 2：求他们都失败的概率.

提示：他们都失败即事件 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 发生.

故 $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})$

$=(1-P(A))(1-P(B))(1-P(C))$

$=\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)$

$=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$.

探究 3:求他们能够研制出疫苗的概率.

提示:"他们能够研制出疫苗"的对立事件为"他们都失败",结合对立事件之间的概率关系可得所求事件的概率 $P=1-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$.

[**评价活动**]

在某校运动会中,甲、乙、丙三支足球队进行单循环赛(即每两队比赛一场),共赛三场,每场比赛胜者得 3 分,负者得 0 分,没有平局.在每一场比赛中,甲胜乙的概率为$\frac{1}{3}$,甲胜丙的概率为$\frac{1}{4}$,乙胜丙的概率为$\frac{1}{3}$.

(1)求甲队获第一名且丙队获第二名的概率;

(2)求在该次比赛中甲队至少得 3 分的概率.

解:(1)"设甲队获第一名且丙队获第二名"为事件 A,

则$P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{18}$.

(2)甲队至少得 3 分有两种情况:两场只胜一场;两场都胜.设事件 B 为"甲两场只胜一场",事件 C 为"甲两场都胜",则事件"甲队至少得 3 分"为 $B\cup C$,由题可知 B 与 C 互斥,

则 $P(B\cup C)=P(B)+P(C)=\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

【**类题通法**】

与相互独立事件有关的概率问题求解策略

1.明确"至少有一个发生""至多有一个发生""恰好有一个发生""都发生""都不发生""不都发生"等词语的意义.

2.一般地,已知两个事件 A,B,它们的概率分别为 $P(A),P(B)$,那么:

(1)A,B 中至少有一个发生为事件 $A+B$.

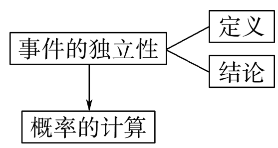
(2)A,B 都发生为事件 AB.

(3)A,B 都不发生为事件$\overline{A}\,\overline{B}$.

(4)A,B 恰有一个发生为事件 $A\overline{B}+\overline{A}B$.

(5)A,B 中至多有一个发生为事件 $A\overline{B}+\overline{A}B+\overline{A}\,\overline{B}$.

提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1.袋内有 3 个白球和 2 个黑球,从中不放回地摸球,一次摸一个球,用 A 表示"第一次摸得白球",用 B 表示"第二次摸得白球",则 A 与 B ( )

A.是互斥事件

B.是相互独立事件

C.是对立事件

D.不是相互独立事件

D **解析**:根据互斥事件、对立事件和相互独立事件的定义可知,A 与 B 不是相互独立事件.

2.在某段时间内,甲地下雨的概率为 0.3,乙地下雨的概率为 0.4,假设在这段时间内两地是否下雨之间没有影响,则这段时间内,甲、乙两地都不下雨的概率为 ( )

A.0.12 B.0.88 C.0.28 D.0.42

D **解析**:$p=(1-0.3)\times(1-0.4)=0.42$.

3.甲、乙两人练习射击,命中目标的概率分别为$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{3}$,甲、乙两人各射击一次,有下列说法:

①目标恰好被命中一次的概率为$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$;

②目标恰好被命中两次的概率为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$;

③目标被命中的概率为$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$;

④目标被命中的概率为 $1-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$.

其中正确说法的序号是 ( )

A.②③ B.①②③

C.②④ D.①③

C **解析**:设"甲射击一次命中目标"为事件 A,"乙射击一次命中目标"为事件 B,显然,A,B 相互独立,则目标恰好被命中一次的概率为 $P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$,故①不正确;目标恰好被命中两次的概率为 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$,故②正确;目标被命中的概率为

$P(A\overline{B}\cup\overline{A}B\cup AB)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+P(AB)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ 或 $1-P(\overline{A}\ \overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$,故③不正确,④正确.

4.已知 A,B,C 为三个独立事件,若事件 A 发生的概率是$\frac{1}{2}$,事件 B 发生的概率是$\frac{2}{3}$,事件 C 发生的概率是$\frac{3}{4}$.

(1)求事件 A,B,C 只发生两个的概率;

(2)求事件 A,B,C 至多发生两个的概率.

解:(1)记"事件 A,B,C 只发生两个"为 M_1,则事件 M_1 包括三种彼此互斥的情况:$AB\overline{C}$,$A\overline{B}C$,$\overline{A}BC$.由互斥事件概率的加法公式和相互独立事件的概率乘法公式,

得 $P(M_1)=P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)=\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{11}{24}$,

所以事件 A,B,C 只发生两个的概率为$\frac{11}{24}$.

(2)记"事件 A,B,C 至多发生两个"为 M_2,

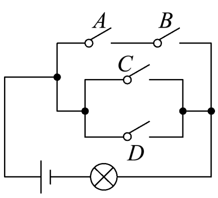
事件 M_2 则包括彼此互斥的三种情况:事件 A,B,C 一个也不发生,记为 M_3,事件 A,B,C 只发生一个,记为 M_4,事件 A,B,C 只发生两个,即事件 M_1,

故 $P(M_2)=P(M_3)+P(M_4)+P(M_1)=\frac{1}{24}+\frac{6}{24}+\frac{11}{24}=\frac{3}{4}$.

所以事件 A,B,C 至多发生两个的概率为$\frac{3}{4}$.

综合性·创新提升

1.如图,已知电路中 4 个开关闭合的概率都是$\frac{1}{2}$,且是互相独立的,则灯亮的概率为 ( )



A.$\frac{3}{16}$ B.$\frac{3}{4}$ C.$\frac{13}{16}$ D.$\frac{1}{4}$

C **解析**:记开关 A,B,C,D 闭合分别为事件 A,B,C,D,可用对立事件求解,图中含开关的三条线路同时断开的概率为 $P(\overline{C})P(\overline{D})[1-P(AB)]=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{16}$.

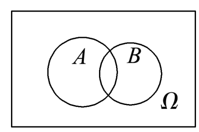
所以灯亮的概率为 $1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$.

2.从某地区的儿童中挑选体操学员,已知儿童体型合格的概率为$\frac{1}{5}$,身体关节构造合格的概率为$\frac{1}{4}$.从中任意挑选一儿童,这两项至少有一项合格的概率是(假定体型与身体关节构造合格与否相互之间没有影响) ( )

A.$\frac{13}{20}$ B.$\frac{1}{5}$ C.$\frac{1}{4}$ D.$\frac{2}{5}$

D **解析**:设"体型合格"为事件 A,"身体关节构造合格"为事件 B,A 与 B 为相互独立事件,且 $P(A)=\frac{1}{5}$,$P(B)=\frac{1}{4}$,所以两项中至少一项合格的概率 $P=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=1-\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{2}{5}$.

3.已知一个古典概型的样本空间 Ω 和事件 A,B 如图所示.其中 $n(\Omega)=12$,$n(A)=6$,$n(B)=4$,$n(A\cup B)=8$,则事件 A 与事件 $\overline{B}$ ( )



A.是互斥事件,不是独立事件

B.不是互斥事件,是独立事件

C.既是互斥事件,也是独立事件

D.既不是互斥事件,也不是独立事件

B **解析**:因为这个古典概型的样本空间 Ω 和事件 A,B 如题图所示,

其中 $n(\Omega)=12$,$n(A)=6$,$n(B)=4$,$n(A\cup B)=8$,

所以 $n(A\cap\overline{B})=4$,

$P(A)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$,

$P(B)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$,$P(\overline{B})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

$P(A\cap\overline{B})=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}\neq0$.

又因为 $P(A)P(\overline{B})=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}=P(A\cap\overline{B})$,

所以事件 A 与事件$\overline{B}$不是互斥事件,是独立事件.

4.(多选题)我国经常在各种乒乓球比赛中取得优异的成绩,例如在 2022 年成都世界乒乓球团体锦标赛中,中国的乒乓球健将们再创佳绩,男团、女团分别获得了团体冠军.甲、乙两位乒乓球初学者,都学习了三种发球的技巧,分别是:上旋球、下旋球以及侧旋球.两人在发球以及接对方发球成功的概率如

下表,两人每次发、接球均相互独立:则下列说法正确的是 ( )

初学者	上旋球		下旋球		侧旋球	
	发	接	发	接	发	接
甲	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$
乙	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

A.若甲选择每种发球方式的概率相同,则甲发球成功的概率是$\frac{3}{4}$

B.甲在连续三次发球中选择了三种不同的方式,均成功的概率为$\frac{1}{72}$

C.若甲选择三种发球方式的概率相同,乙选择三种发球方式的概率也相同,则乙发球成功的概率更大

D.在一次发球中甲选择了发上旋球,则乙接球成功(甲发球失误也算乙接球成功)的概率是$\frac{13}{15}$

BC **解析**:甲选择每种发球方式的概率相同,则选择每种发球方式的概率都为$\frac{1}{3}$,

则甲选择上旋球发球方式且发球成功概率为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$,

则甲选择下旋球发球方式且发球成功概率为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$,

则甲选择侧旋球发球方式且发球成功概率为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$,

所以甲发球成功的概率是$\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}=\frac{1}{4}$,故A错误;

甲在连续三次发球中选择了三种不同的方式,均成功的概率为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{72}$,故B正确;

乙选择每种发球方式的概率相同,则选择每种发球方式的概率都为$\frac{1}{3}$,

则乙选择上旋球发球方式且发球成功概率为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$,

则乙选择下旋球发球方式且发球成功概率为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$,

则乙选择侧旋球发球方式且发球成功概率为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$,

所以乙发球成功的概率是$\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$,因为$\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$,

所以乙发球成功率的概率更大,故C正确;

乙接球成功分为以下两种情况:

甲发上旋球发球失误或甲发上旋球成功且乙接球成功,

所以乙接球成功的概率等于$\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{11}{15}$,故D错误.

故选BC.

5.已知事件A,B,C相互独立,如果$P(AB)=\frac{1}{6}$,$P(\overline{B}C)=\frac{1}{8}$,$P(AB\overline{C})=\frac{1}{8}$,则$P(\overline{A}B)=$________.

$\frac{1}{3}$ **解析**:依题意得$\begin{cases}P(AB)=\frac{1}{6},\\P(\overline{B}C)=\frac{1}{8},\\P(AB\overline{C})=\frac{1}{8},\end{cases}$解得$P(A)=\frac{1}{3}$,$P(B)=\frac{1}{2}$,$P(C)=\frac{1}{4}$.所以$P(\overline{A}B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$.

6.在一次考试中,某学生语、数、英三科成绩排名全班第一的概率:语文为0.9,数学为0.8,英语为0.85,求该学生在一次考试中:

(1)三科成绩均未获得第一名的概率;

(2)恰有一科成绩未获得第一名的概率.

解:分别记该学生语、数、英成绩排名全班第一的事件为A,B,C,则A,B,C两两互相独立,

且$P(A)=0.9$,$P(B)=0.8$,$P(C)=0.85$.

(1)"三科成绩均未获得第一名"可以用$\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$表示,

$P(\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})$

$=[1-P(A)][1-P(B)][1-P(C)]$

$=(1-0.9)\times(1-0.8)\times(1-0.85)=0.003$,

即三科成绩均未获得第一名的概率是0.003.

(2)"恰有一科成绩未获得第一名"可以用$(\overline{A}BC)\cup(A\overline{B}C)\cup(AB\overline{C})$表示.

由于事件$\overline{A}BC$,$A\overline{B}C$和$AB\overline{C}$两两互斥,

根据概率加法公式和相互独立事件的概率乘法公式可知,所求的概率为$P(\overline{A}BC)+P(A\overline{B}C)+P(AB\overline{C})$

$=P(\overline{A})P(B)P(C)+P(A)P(\overline{B})P(C)+P(A)\cdot P(B)P(\overline{C})=[1-P(A)]P(B)P(C)+P(A)\cdot[1-P(B)]P(C)+P(A)P(B)[1-P(C)]=(1-0.9)\times0.8\times0.85+0.9\times(1-0.8)\times0.85+0.9\times0.8\times(1-0.85)=0.329$，

即恰有一科成绩未获得第一名的概率是0.329.

7.红队队员甲、乙、丙与蓝队队员A,B,C进行围棋比赛，甲对A、乙对B、丙对C各一盘.已知甲胜A、乙胜B、丙胜C的概率分别为0.6,0.5,0.5.假设各盘比赛结果相互独立，求红队至少两名队员获胜的概率.

解：记甲对A、乙对B、丙对C各一盘中甲胜A、乙胜B、丙胜C分别为事件D,E,F，则“甲不胜A、乙不胜B、丙不胜C”分别为事件$\overline{D},\overline{E},\overline{F}$.

根据各盘比赛结果相互独立可得红队至少两名队员获胜的概率

$P=P(DE\overline{F})+P(D\overline{E}F)+P(\overline{D}EF)+P(DEF)$

$=P(D)P(E)P(\overline{F})+P(D)P(\overline{E})P(F)+P(\overline{D})\cdot P(E)P(F)+P(D)P(E)P(F)=0.6\times0.5\times(1-0.5)+0.6\times(1-0.5)\times0.5+(1-0.6)\times0.5\times0.5+0.6\times0.5\times0.5=0.55$.

10.3　频率与概率

10.3.1　频率的稳定性

10.3.2　随机模拟

学习任务目标

1.理解频率的稳定性.(数学抽象)

2.理解频率与概率的联系.(数学抽象)

3.能用随机模拟的方法求概率.(数学建模)

问题式预习

知识点一　频率的稳定性及其应用

1.频率的稳定性

在任何确定次数的随机试验中，一个随机事件A发生的频率具有随机性.一般地，随着试验次数n的增大，频率偏离概率的幅度会缩小，即事件A发生的频率$f_n(A)$会逐渐稳定于事件A发生的概率$P(A)$.我们称频率的这个性质为频率的稳定性.

2.频率稳定性的应用

可以用频率$f_n(A)$估计概率$P(A)$.

[微训练]

判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)在随机试验中，频率和概率不可能相等.　(×)

(2)在掷硬币的试验中，正面朝上的概率和频率都一定是0.5.　(×)

(3)频率是一个随机变量，随着试验次数的增加，频率会越来越接近概率.　(√)

(4)任何事件的概率和频率都是[0,1]范围内的一个数.　(√)

知识点二　随机模拟

1.产生随机数的常用方法

(1)用计算器产生；(2)用计算机产生；(3)抽签法.

2.随机模拟方法(蒙特卡洛方法)

利用计算机或计算器产生的随机数来做模拟试验，通过模拟试验得到的频率来估计概率，这种用计算机或计算器模拟试验的方法称为随机模拟方法或蒙特卡洛方法.

[微训练]

1.下列不能产生随机数的是　(　　)

A.抛掷骰子试验

B.抛硬币

C.计算器

D.正方体的六个面上分别写有1,2,2,3,4,5,抛掷该正方体

D　**解析**：D项中，出现2的概率为$\frac{2}{6}$，出现1,3,4,5的概率均是$\frac{1}{6}$，故D项不能产生随机数.

2. 已知某运动员每次投篮命中的概率都为 40%.现采用随机模拟的方法估计该运动员三次投篮恰有两次命中的概率:先由计算器产生 0 到 9 之间取整数值的随机数,指定 1,2,3,4 表示命中,5,6,7,8,9,0 表示未命中;再以每三个随机数为一组代表三次投篮的结果.经随机模拟产生了如下 20 组随机数:

907　966　191　925　271　932　812

458　569　683　431　257　393　027

556　488　730　113　537　989

据此估计,该运动员三次投篮恰有两次命中的概率为________.

0.25　**解析**:易知 20 组随机数中表示恰有两次命中的数据有 191,271,932,812,393,所以 $P=\frac{5}{20}=0.25$.

任务型课堂

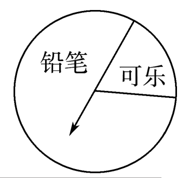
任务一　利用频率的稳定性估计概率

1. 下表中列出了抛掷硬币 10 轮的试验结果,n 为抛掷硬币的次数,m 为硬币正面朝上的次数.计算每轮试验中“正面朝上”这一事件的频率,并估算它的概率.

试验轮次	抛掷的次数 n	正面朝上的次数 m	“正面朝上”出现的频率
1	500	251	
2	500	249	
3	500	256	
4	500	253	
5	500	251	
6	500	245	
7	500	244	
8	500	258	
9	500	262	
10	500	247	

解:由 $f_n(A)=\frac{m}{n}$ 可得出这 10 轮试验中“正面朝上”这一事件出现的频率依次为 0.502,0.498,0.512,0.506,0.502,0.490,0.488,0.516,0.524,0.494,这些数字在 0.5 左右摆动.由概率的统计定义可得,“正面朝上”的概率约为 0.5.

2. 某商场设立了一个可以自由转动的转盘(如图所示),并规定:顾客购物 10 元以上就能获得一次转动转盘的机会,当转盘停止时,指针指向哪一区域就可以获得相应的奖品,下表是活动进行中的一组统计数据.



转动转盘的次数 n	100	150	200	500	800	1 000
指向“铅笔”区域的次数 m	68	111	136	345	564	701
指向“铅笔”区域的频率 $\frac{m}{n}$						

(1)计算并完成表格.

(2)请估计,当 n 很大时,指向“铅笔”区域的频率将会接近多少?

(3)假如你去转动该转盘一次,你获得铅笔的概率约是多少?

解:(1)

转动转盘的次数 n	100	150	200	500	800	1 000
指向“铅笔”区域的次数 m	68	111	136	345	564	701
指向“铅笔”区域的频率 $\frac{m}{n}$	0.68	0.74	0.68	0.69	0.705	0.701

(2)当 n 很大时,指向“铅笔”区域的频率将会接近 0.7.

(3)获得铅笔的概率约是 0.7.

【类题通法】

1. 频率是事件 A 发生的次数 m 与试验总次数 n 的比值,利用此公式可求出它们的频率.频率本身是随机变量,当 n 很大时,频率总是在一个稳定值附近摆动,这个稳定值就是概率.

2.解此类题目的步骤:先利用频率的计算公式依次计算频率,然后用频率估计概率.

任务二　利用随机模拟试验估计概率

[探究活动]

根据利用随机模拟试验估计概率的方法,探究以下问题.

探究1:若事件 A 发生的概率为0.6,如何设计模拟试验的随机数?

提示:产生10个随机数0到9,可以用数字0,1,2,3,4,5表示事件 A 发生,用数字6,7,8,9表示事件 A 不发生.

探究2:用频率估计概率时,用计算机模拟试验产生随机数有什么优点?

提示:用频率估计概率时,需做大量的重复试验,费时费力,并且有些试验具有破坏性,有些试验无法真正进行.因此利用计算机进行随机模拟试验就成为一种很重要的替代方法,它可以在短时间内多次重复地来做试验,不需要对试验进行具体操作,可以广泛应用到各个领域.

[评价活动]

1.某人有5把钥匙,其中2把能打开锁,现随机地取1把钥匙试着开锁,不能开锁就扔掉,第三次才打开锁的概率是多少?如果试过的钥匙又混进去,这个概率又是多少?设计一个随机模拟试验,估计上述概率.

解:用计算器或计算机产生1到5之间的整数随机数,1,2表示能打开锁,3,4,5表示打不开锁.

(1)三个一组(每组数字不重复),统计总组数 N 及前两个大于2、第三个是1或2的组数 N_1,则 $\frac{N_1}{N}$ 即为不能打开锁就扔掉,第三次才打开锁的概率的近似值.

(2)三个一组(每组数字可重复),统计总组数 M 及前两个大于2、第三个为1或2的组数 M_1,则 $\frac{M_1}{M}$ 即为试过的钥匙不扔掉,第三次才打开锁的概率的近似值.

2.盒中有大小、形状相同的5个白球、2个黑球,用随机模拟法求下列事件的概率.

(1)任取一球,得到白球;

(2)任取三球,都是白球.

解:(1)步骤:①利用计算器或计算机可以产生1到7的整数随机数,用1,2,3,4,5表示白球,6,7表示黑球.每一个数一组,统计组数 n;

②统计这 n 组数中小于6的组数 m;

③任取一球,得到白球的概率估计值是 $\frac{m}{n}$.

(2)步骤:①利用计算器或计算机可以产生1到7的整数随机数,用1,2,3,4,5表示白球,6,7表示黑球.每三个数一组(每组数字不重复),统计组数 a;

②统计这 a 组数中,每个数字均小于6的组数 b;

③任取三球,都是白球的概率估计值是 $\frac{b}{a}$.

【类题通法】

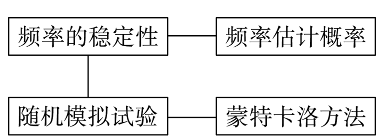
利用随机模拟估计概率的关注点

(1)当试验的基本事件等可能时,基本事件总数即为产生随机数的范围,每个随机数代表一个基本事件.

(2)研究等可能事件的概率时,用按比例分配的方法确定表示各个结果的数字个数及总个数.

(3)当每次试验结果需要 n 个随机数表示时,要把 n 个随机数作为一组来处理,此时一定要注意每组中的随机数字能否重复.

提质归纳



课后素养评价

基础性·能力运用

1.容量为20的样本中的数据分组后的频数如下表:

分组	[10,20)	[20,30)	[30,40)	[40,50)	[50,60)	[60,70]
频数	2	3	4	5	4	2

则根据样本数据估计总体数据落在区间[10,40)的概率为　　(　　)

A.0.35　　B.0.45

C.0.55　　D.0.65

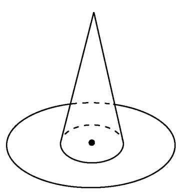
B **解析**:由频率分布表知,
样本在[10,40)上的频数为 2+3+4=9,
故样本在[10,40)上的概率为 9÷20=0.45.

2.在学习概率时,老师说:“掷一枚质地均匀的硬币,正面朝上的概率是$\frac{1}{2}$”,小明做了下列三个模拟试验来验证.

①取一枚新硬币,在桌面上进行抛掷,计算正面朝上的次数与总次数的比值;

②把一个质地均匀的圆形转盘平均分成偶数份,并依次标上奇数和偶数,转动转盘,计算指针落在奇数区域的次数与总次数的比值;

③将一个圆形纸板放在水平的桌面上,纸板正中间放一个圆锥(如图),从圆锥的正上方往下撒米粒,计算其中一半纸板上的米粒数与纸板上总米粒数的比值.



上面的试验中,不科学的有 ( )

A.0 个　B.1 个　C.2 个　D.3 个

A **解析**:①由于一枚质地均匀的硬币,只有正、反两面,故正面朝上的概率是$\frac{1}{2}$;②由于把一个质地均匀的圆形转盘平均分成偶数份,并依次标上奇数和偶数,标奇数和偶数的转盘各占一半.指针落在奇数区域的次数与总次数的比值为$\frac{1}{2}$;③由于圆锥是均匀的,所以落在圆形纸板上的米粒的个数也是均匀分布的,与纸板面积成正比,可验证其中一半纸板上的米粒数与纸板上总米粒数的比值为$\frac{1}{2}$.三个试验均科学.

3.在一个袋子中装有分别标注数字 1,2,3,4,5 的五个小球,这些小球除标注的数字外完全相同.现从中随机取出两个小球,则取出的小球标注的数字之和为 3 或 6 的概率是 ( )

A.$\frac{3}{10}$　B.$\frac{1}{5}$　C.$\frac{1}{10}$　D.$\frac{1}{12}$

A **解析**:随机取出两个小球有(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5),共 10 种情况,和为 3 有(1,2)1 种情况,和为 6 有(1,5),(2,4)共 2 种情况,所以 $p=\frac{3}{10}$.

4.从 13 张扑克牌中随机抽一张,用随机模拟的方法估计这张牌是 7 的概率为$\frac{N_1}{N}$,则估计这张牌不是 7 的概率是________.

$1-\frac{N_1}{N}$ **解析**:这张牌不是 7 的概率是 $1-\frac{N_1}{N}$.

5.对某产品进行抽样检查,数据如下:

抽查件数	50	100	200	300	500
合格件数	47	92	192	285	475

根据上表中的数据,如果要从该产品中抽到 950 件合格品,则大约需要抽查______件产品.

1 000 **解析**:根据题表中数据可知合格品出现的频率依次为 0.94.0.92,0.96,0.95,0.95,因此合格品出现的概率约为 0.95,因此要抽到 950 件合格品,大约需要抽查1 000 件产品.

6.袋子中有四个小球,分别写有“幸”“福”“快”“乐”四个字,有放回地从中任取一个小球,取到“快”就停止,用随机模拟的方法估计到第二次停止的概率:先由计算器产生 1 到 4 之间取整数值的随机数,且用 1,2,3,4 表示取出小球上分别写有“幸”“福”“快”“乐”四个字,以每两个随机数为一组,代表两次的结果,经随机模拟产生了 20 组随机数:

13　24　12　32　43　14　24　32　31
21　23　13　32　21　24　42　13　32
21　34

据此估计,到第二次停止的概率为________.

$\frac{1}{4}$ **解析**:由随机模拟产生的随机数可知,第二次停止的有 13,43,23,13,13,共 5 个样本点,故所求的概率 $P=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$.

7.掷三枚质地均匀的骰子,利用电子表格软件进行随机模拟,试验 20 次,计算出现点数之和是 9 的概率.

解:操作步骤:

(1)打开电子表格软件,在表格中选择一格,比如 A1,输入“=RANDBETWEEN(1,6)”,按 Enter 键,则在此格中的数是随机产生的 1～6 中的数;

(2)选定 A1 这个格,按 Ctrl+C 快捷键,然后选定要随机产生的 1～6 的格,如 A1 至 T3,按 Ctrl+V 快捷键,则在 A1 至 T3 的数均为随机产生的 1～6 的数;

(3)对产生随机数的各列求和,填入 A4 至 T4 中;

(4)统计和为 9 的个数 S,最后,计算概率$\frac{S}{20}$.

综合性·创新提升

1. 在检测一批相同规格共 500 kg 航空用耐热垫片的品质时，随机抽取了 280 片，检测到有 5 片非优质品，则这批垫片中非优质品约为 (　　)

A.2.8 kg　　B.8.9 kg

C.10 kg　　D.28 kg

B　**解析**：根据频率估计概率，由题意可得，这批垫片中非优质品约为 $\frac{5}{280}\times500\approx8.9$(kg).

2. 下列说法正确的是 (　　)

A.某人打靶，射击 10 次，击中 7 次，那么此人中靶的概率为 0.7

B.一位同学做掷硬币试验，掷 6 次，一定有 3 次"正面朝上"

C.某种彩票的回报率为 47%，有人花了 100 元钱买这种彩票，一定会有 47 元的回报

D.概率等于 1 的事件不一定为必然事件

D　**解析**：选项 A，某人打靶，射击 10 次，击中 7 次，那么此人中靶的频率为 0.7，故错误；

选项 B，一位同学做掷硬币试验，掷 6 次，不一定有 3 次"正面朝上"，故错误；

选项 C，买这种彩票，中奖或者不中奖都有可能，但事先无法预料，故错误；

选项 D，正确，比如说在 0 和 5 之间随机取一个数，这个数不等于 3.352 64 的概率是 1，但不是必然事件.

3. 已知某射击运动员，每次击中目标的概率都是0.8.现采用随机模拟的方法估计该运动员射击 4 次至少击中 3 次的概率：先由计算器得出 0 到 9 之间取整数值的随机数，指定 0，1 表示没有击中目标，2，3，4，5，6，7，8，9 表示击中目标；因为射击 4 次，故以每 4 个随机数为一组，代表射击 4 次的结果.经随机模拟产生了如下 20 组随机数：

5727　0293　7140　9857　0347

4373　8636　9647　1417　4698

0371　6233　2616　8045　6011

3661　9597　7424　6710　4281

据此估计，该射击运动员射击 4 次至少击中 3 次的概率为 (　　)

A.0.7　　B.0.75

C.0.8　　D.0.85

B　**解析**：由题意知模拟射击 4 次的结果，经随机模拟产生了 20 组随机数，

在 20 组随机数中表示射击 4 次至少击中 3 次的有：

5727　0293　9857　0347　4373　8636　9647

4698　6233　2616　8045　3661　9597　7424

4281

共 15 组随机数，

所以所求概率为 $\frac{15}{20}=0.75$.

4. 在利用整数随机数进行随机模拟试验时，整数 a 到整数 b 之间的每个整数出现的概率等于________.

$\frac{1}{b-a+1}$　**解析**：$[a,b]$ 中共有 $(b-a+1)$ 个整数，每个整数出现的概率相等，所以每个整数出现的概率等于 $\frac{1}{b-a+1}$.

5. 抛掷两枚均匀的正方体骰子，用随机模拟的方法估计朝上的面的点数的和是 6 的倍数的概率时，用 1，2，3，4，5，6 分别表示朝上的面的点数是 1，2，3，4，5，6.用计算器或计算机分别产生 1 到 6 的两组整数随机数，每组各 60 个，每组第 $i(i=1,2,\cdots,60)$ 个数组成一对，共组成 60 对数，其中有一对是(1，6)，这对数表示的结果是否满足朝上的面的点数的和是 6 的倍数：________.(填"是"或"否")

否　**解析**：(1，6)表示第一枚骰子朝上的面的点数是 1，第二枚骰子朝上的面的点数是 6，则朝上的面的点数的和是 $1+6=7$，不是 6 的倍数.

6. 某射击队统计了甲、乙两名运动员在平日训练中击中 10 环的次数，如下表：

射击次数	10	20	50	100	200	500
甲击中 10 环的次数	9	17	44	92	179	450
甲击中 10 环的频率						
乙击中 10 环的次数	8	19	44	93	177	453
乙击中 10 环的频率						

(1)分别计算甲、乙两名运动员击中 10 环的频率，补全表格；

(2)根据(1)中的数据估计两名运动员击中 10 环的概率.

解：(1)两名运动员击中 10 环的频率如下表：

射击次数	10	20	50	100	200	500
甲击中 10 环的次数	9	17	44	92	179	450
甲击中 10 环的频率	0.9	0.85	0.88	0.92	0.895	0.9
乙击中 10 环的次数	8	19	44	93	177	453
乙击中 10 环的频率	0.8	0.95	0.88	0.93	0.885	0.906

(2)由(1)中的数据可知两名运动员击中 10 环的频率都集中在 0.9 附近，所以两人击中 10 环的概率均约为 0.9.

单元活动构建

任务一 随机现象与随机事件

日常生活中我们经常会接触到一些现象,即确定性现象和随机现象.并且当我们进行试验时,不仅关心试验的所有结果,还常常关心满足某些特定要求的试验.

「任务达标」

1.用2,3,4这3个数组成没有重复数字的三位数,则事件“这个三位数是偶数”与事件“这个三位数大于342” ( )

A.是互斥但不对立事件

B.不是互斥事件

C.是对立事件

D.是不可能事件

B **解析**:由题意,将2,3,4组成没有重复数字的三位数的情况有234,243,324,342,423,432,其中偶数有234,324,342,432,大于342的有423,432.所以两个事件不是互斥事件,也不是对立事件.

2.(多选题)设A,B是两个任意事件,则下面关系正确的是 ( )

A.$A+B=A$　　B.$A+AB=A$

C.$\overline{A}\,\overline{B}\subseteq A$　　D.$A(A+B)=A$

BD **解析**:若$A+B=A$,则$B\subseteq A$,故A错误;

由题知$AB\subseteq A$,所以$A+AB=A$,故B正确;

因为当事件A,B都不发生时,$\overline{A}\,\overline{B}$发生,但$A$不发生,所以$\overline{A}\,\overline{B}$不是$A$的子集,故C错误;

因为$A\subseteq(A+B)$,所以$A(A+B)=A$,故D正确.

故选BD.

【规律方法】

1.判断事件间关系的方法

(1)要判断两个事件是不是互斥事件,只需要分别找出各个事件包含的所有结果,看它们之间能不能同时发生.在互斥的前提下,看两个事件的并事件是否为必然事件,从而可判断是否为对立事件.

(2)考虑事件间是否有交事件,可考虑利用Venn图分析,对于较难判断的关系,也可考虑列出全部结果,再进行分析.

2.事件间运算的方法

(1)利用事件间运算的定义,列出同一条件下的试验所有可能出现的结果,分析并利用这些结果进行事件间的运算.

(2)利用Venn图,借助集合间运算的思想,分析同一条件下的试验所有可能出现的结果,把这些结果在图中列出,进行运算.

任务二 古典概型

古典概型具有如下特征:

(1)样本空间Ω为有限样本空间.

(2)每次试验中,样本空间Ω的各个样本点出现的可能性相等.

如果一个试验模型为古典概型,那么事件A发生的概率为$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.

「任务达标」

1.根据防疫要求,需从2名男医生和1名女医生中任选2名参加社区防控服务,则选中的2名都是男医生的概率为 ( )

A.$\dfrac{1}{6}$　　B.$\dfrac{1}{3}$　　C.$\dfrac{1}{2}$　　D.$\dfrac{2}{3}$

B **解析**:将2名男医生记为a_1,a_2,1名女医生记为b,从2名男医生和1名女医生中任选2名参加社区防控服务,所有可能情况有:(a_1,a_2),(a_1,b),(a_2,b),共3种,

选中的2名都是男医生的情况为(a_1,a_2),共1种,

所以选中的2名都是男医生的概率为$\dfrac{1}{3}$.

2.某数学兴趣小组有男生3名,记为a_1,a_2,a_3;有女生2名,记为b_1,b_2.现从中任选2名学生去参加学校数学竞赛.

(1)写出样本空间Ω所包含的样本点;

(2)求参赛学生中恰好有1名男生的概率;

(3)求参赛学生中至少有1名男生的概率.

解:(1)根据题意,用有序实数对来表示选出学生的情况,

样本空间$\Omega=\{(a_1,a_2),(a_1,a_3),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,a_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_1),(a_3,b_2),(b_1,b_2)\}$,共10个样本点.

(2)由(1)可得,参赛学生中恰好有1名男生的情况如下:

(a_1,b_1)，(a_1,b_2)，(a_2,b_1)，(a_2,b_2)，(a_3,b_1)，(a_3,b_2)，共 6 个样本点，

因此参赛学生中恰好有 1 名男生的概率为$\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

(3)由(1)可知，参赛学生中至少有 1 名男生的情况如下：(a_1,a_2)，(a_1,a_3)，(a_1,b_1)，(a_1,b_2)，(a_2,a_3)，(a_2,b_1)，(a_2,b_2)，(a_3,b_1)，(a_3,b_2)，共 9 个样本点.

因此参赛学生中至少有 1 名男生的概率为$\frac{9}{10}$.

3.某班级有 45%的学生喜欢打羽毛球，80%的学生喜欢打乒乓球；两种运动都喜欢的学生有 30%.现从该班随机抽取一名学生，求以下事件的概率：

(1)这名学生只喜欢打羽毛球；

(2)这名学生至少喜欢以上一种运动；

(3)这名学生只喜欢以上一种运动；

(4)这名学生以上两种运动都不喜欢.

解：(1)设事件 A＝“喜欢打羽毛球”，事件B＝“喜欢打乒乓球”，那么事件 AB＝“两种运动都喜欢”，

$P(A)=0.45$，$P(B)=0.8$，$P(AB)=0.3$，

只喜欢打羽毛球的概率为

$P(A)-P(AB)=0.45-0.3=0.15$.

(2)至少喜欢以上一种运动的概率为

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.45+0.8-0.3=0.95$.

(3)只喜欢以上一种运动的概率为

$P(A\cup B)-P(AB)=0.95-0.3=0.65$.

(4)以上两种运动都不喜欢的概率为

$1-P(A\cup B)=1-0.95=0.05$.

【规律方法】

1.求古典概型概率的步骤

(1)确定样本空间包含的样本点总数 n.

(2)确定事件 A 包含的样本点个数 k.

(3)计算事件 A 的概率 $P(A)=\frac{k}{n}$.

2.概率性质的应用

(1)熟记概率的六条性质，特别地，运用互斥事件的概率加法公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$时，首先要分清事件间是否互斥，同时要学会把一个事件拆分为几个互斥事件，然后求出各事件的概率，用加法公式得出结果.

(2)当直接计算事件的概率比较烦琐时，可间接地先计算出其对立事件所包含的样本点的个数，求得对立事件的概率，然后利用对立事件的概率加法公式$P(A)+P(B)=1$，求出符合条件的事件的概率.

任务三　事件的独立性

已知事件 A 发生的概率为 $P(A)$，事件 B 发生的概率为 $P(B)$，事件 AB 发生的概率为$P(AB)$，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，则事件 A 与事件 B 相互独立.

「任务达标」

1.甲口袋内装有除颜色外均相同的 8 个红球和 4 个白球，乙口袋内装有除颜色外均相同的 9 个红球和 3 个白球，从两个口袋内各摸出一球，那么$\frac{5}{12}$等于　　(　　)

A.两个球都是白球的概率

B.两个球中恰好有一个是白球的概率

C.两个球都不是白球的概率

D.两个球不都是红球的概率

B　**解析**：记事件 A 为“从甲口袋中摸出白球”，事件 B 为“从乙口袋中摸出白球”，则 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{1}{4}$，

两个球都是白球的概率为

$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$，故 A 不符合；

两球中恰好有一球是白球的概率为

$P=(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)\cdot P(\overline{B})+P(\overline{A})\cdot P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$，故 B 符合；

两个球都不是白球的概率为 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$，故 C 不符合；

两个球都是红球的概率为 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$，故两个球不都是红球的概率为 $1-P(\overline{A}\,\overline{B})=\frac{1}{2}$，故 D 不符合.

2.在体育知识有奖问答竞赛中，甲、乙、丙三人同时回答一道有关篮球知识的问题，已知甲答题正确的概率是$\frac{3}{4}$，乙答题错误的概率是$\frac{1}{3}$，乙、丙两人都答题

正确的概率是$\frac{1}{4}$,假设每人答题正确与否是相互独立的.

(1)求丙答题正确的概率;

(2)求甲、丙都答题错误,且乙答题正确的概率.

解:(1)记甲、乙、丙3人独自答对这道题分别为事件A,B,C,

则甲答对题的概率$P(A)=\frac{3}{4}$,

乙答对题的概率$P(B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$,

设丙答对题的概率$P(C)=x$.

由于每人回答问题正确与否是相互独立的,因此A,B,C是相互独立事件.

根据相互独立事件同时发生的概率公式,

得$P(BC)=\frac{2}{3}x=\frac{1}{4}$,解得$x=\frac{3}{8}$,

所以丙答对这道题的概率$P(C)=\frac{3}{8}$.

(2)甲、丙都答题错误,且乙答题正确的概率为

$P(\overline{A}B\overline{C})=P(\overline{A})\cdot P(B)\cdot P(\overline{C})$

$=\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{3}{8}\right)=\frac{5}{48}$.

【规律方法】

判断两个事件是否相互独立的两个方法

(1)对于相对复杂的两个事件A,B,通过计算$P(AB)$与$P(A)P(B)$的值判断事件A,B是否相互独立.若$P(AB)=P(A)P(B)$,则事件A,B相互独立;若$P(AB)\neq P(A)P(B)$,则事件A,B不相互独立.

(2)对于较简单的一些事件,也可以根据生活经验进行直观判断.

任务四　频率与概率

我们知道,利用古典概型可以方便地确定出有关随机事件的概率,但并不是所有的随机事件都能归结为古典概型,所以我们会用随机事件发生的频率来估计随机事件的概率.

「任务达标」

1.在n次重复试验中,事件A发生的频率为$\frac{m}{n}$,当n很大时,事件A发生的概率$P(A)$与$\frac{m}{n}$的关系是(　　)

A.$P(A)\approx\frac{m}{n}$　　B.$P(A)<\frac{m}{n}$

C.$P(A)>\frac{m}{n}$　　D.$P(A)=\frac{m}{n}$

A　**解析**:在n次重复试验中,事件A发生的频率为$\frac{m}{n}$.当n很大时,$\frac{m}{n}$越来越接近于$P(A)$,所以可以用$\frac{m}{n}$近似代替$P(A)$,即$P(A)\approx\frac{m}{n}$.

2.在一次抛硬币的试验中,某同学用一枚质地均匀的硬币做了100次试验,发现正面朝上出现了40次,那么出现正面朝上的频率和概率分别为(　　)

A.0.4,0.4　　B.0.5,0.5

C.0.4,0.5　　D.0.5,0.4

C　**解析**:100次试验中有40次正面朝上,所以正面朝上的频率为$\frac{40}{100}=0.4$.因为硬币质地均匀,所以正面朝上和反面朝上的概率都是0.5.

【规律方法】

1.概率与频率的关系

频率反映了一个随机事件出现的频繁程度,频率是随机的,而概率是一个确定的值,通常用概率来反映随机事件发生的可能性的大小,有时也用频率来作为随机事件概率的估计值.频率是概率的近似值,概率是频率的稳定值.

2.随机事件概率的求法

利用概率的定义求随机事件的概率,即通过大量的重复试验,事件发生的频率会逐渐趋近于某一个常数,这个常数就是概率.

提醒:概率的定义是求一个随机事件概率的基本方法.

第十章质量评估

（时间：120 分钟，分值：150 分）

一、单项选择题（本题包括 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）.

1.下列事件是随机事件的有 （　　）

①连续两次抛掷一枚质地均匀的骰子，两次都出现 2 点；

②在地球上，树上掉下的雪梨未被接住就继续往下掉；

③某人买彩票中奖；

④在第一胎生了一个女儿的情况下，第二胎生男孩；

⑤在标准大气压下，水加热到 90 ℃时会沸腾.

A.1 个　B.2 个　C.3 个　D.4 个

C　**解析**：随机事件就是在指定条件下，可能发生，也可能不发生的事件.

①连续两次抛掷一枚质地均匀的骰子，两次都出现 2 点，此事可能发生，也可能不发生，故是随机事件.

②在地球上，树上掉下的雪梨未被接住就继续往下掉，这是一定会发生的事件，属于必然事件，不是随机事件.

③某人买彩票中奖，此事可能发生，也可能不发生，故是随机事件.

④在第一胎生了一个女儿的情况下，第二胎生男孩，此事可能发生，也可能不发生，故是随机事件.

⑤在标准大气压下，水加热到 90 ℃时会沸腾，此事一定不会发生，是不可能事件，不是随机事件.故选 C.

2.抽查 10 件产品，设“至少抽到 2 件次品”为事件 A，则 A 的对立事件是 （　　）

A.至多抽到 2 件次品

B.至多抽到 2 件正品

C.至少抽到 2 件正品

D.至多抽到 1 件次品

D　**解析**：抽查 10 件产品，设“至少抽到 2 件次品”为事件 A，则 $\overline{A}$ 为“至多抽到 1 件次品”.故选 D.

3.质地均匀的骰子六个面上分别刻有 1 到 6 的点数，掷两次骰子，得到向上一面的两个点数，则下列事件中，发生的可能性最大的是 （　　）

A.点数都是偶数　B.点数的和是奇数

C.点数的和小于 13　D.点数的和小于 2

C　**解析**：质地均匀的骰子六个面上分别刻有 1 到 6 的点数，掷两次骰子，得到向上一面的两个点数，

样本点总数 $n=6\times 6=36$，

点数都是偶数包含的样本点有(2,2)，(2,4)，(2,6)，(4,2)，(4,4)，(4,6)，(6,2)，(6,4)，(6,6)，共 9 个，所以点数都是偶数的概率 $P(A)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$；

点数和是奇数包含的样本点有 18 个，分别为(1,2)，(1,4)，(1,6)，(2,1)，(2,3)，(2,5)，(3,2)，(3,4)，(3,6)，(4,1)，(4,3)，(4,5)，(5,2)，(5,4)，(5,6)，(6,1)，(6,3)，(6,5)，所以点数的和为奇数的概率 $P(B)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$；

点数和小于 13 是必然事件，所以点数和小于 13 的概率 $P(C)=1$；

点数和小于 2 是不可能事件，所以点数和小于 2 的概率 $P(D)=0$.

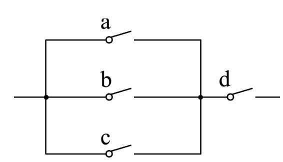
所以点数和小于 13 的概率最大.故选 C.

4.某次抽奖活动共设置一等奖、二等奖两类奖项.已知中一等奖的概率为 0.1，中二等奖的概率为 0.1，那么本次活动中，中奖的概率为 （　　）

A.0.1　B.0.2　C.0.3　D.0.7

B　**解析**：由于中一等奖、中二等奖为互斥事件，故中奖的概率为 $0.1+0.1=0.2$.故选 B.

5.如图所示，a，b，c，d 是四个处于断开状态的开关，将其中任意两个闭合，则电路被接通的概率为 （　　）



A.1　B.$\frac{1}{2}$

C.$\frac{1}{4}$　D.0

B　**解析**：四个开关任意闭合两个，有 ab，ac，ad，bc，bd，cd，共 6 个样本点，电路被接通的条件是：①开关 d 必须闭合，②开关 a，b，c 中有一个闭合，即电

路被接通有 ad,bd 和 cd,共 3 个样本点,所以所求概率是$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

6. A 地的天气预报显示,A 地在今后的三天中,每一天有强浓雾的概率为 30%,现用随机模拟的方法估计这三天中至少有两天有强浓雾的概率,先利用计算器产生 0~9 之间整数值的随机数,并用 0,1,2,3,4,5,6 表示没有强浓雾,用 7,8,9 表示有强浓雾,再以每 3 个随机数作为一组,代表三天的天气情况,产生了如下 20 组随机数:

402　978　191　925　273　842　812　479　569　683

231　357　394　027　506　588　730　113　537　779

则这三天中至少有两天有强浓雾的概率近似为　(　　)

A.$\frac{1}{4}$　B.$\frac{2}{5}$　C.$\frac{7}{10}$　D.$\frac{1}{5}$

D　**解析**:由题意知,在 20 组随机数中表示三天中至少有两天有强浓雾的有 978,479,588,779,共 4 组,故所求概率近似为$\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$.

7. 从甲袋中摸出 1 个白球的概率为$\frac{1}{3}$,从乙袋内摸出 1 个白球的概率为$\frac{1}{2}$,从两个袋内各摸 1 个球,那么概率为$\frac{5}{6}$的事件是　(　　)

A.2 个球都是白球　B.2 个球都不是白球

C.2 个球不都是白球　D.2 个球恰好有 1 个是白球

C　**解析**:从甲袋内摸出白球与从乙袋内摸出白球两事件相互独立,故 2 个球都是白球的概率$P_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$,所以 2 个球不都是白球的概率 $P=1-P_1=\frac{5}{6}$.

8. 抛掷一枚质地均匀的骰子两次,将第一次得到的点数记为 x,第二次得到的点数记为 y,那么事件"$2^{x+y}\leqslant 16$"的概率为　(　　)

A.$\frac{1}{9}$　B.$\frac{5}{36}$　C.$\frac{1}{6}$　D.$\frac{1}{3}$

C　**解析**:根据题意抛掷一枚质地均匀的骰子两次,共有样本点 36 个,且将第一次得到的点数记为 x,第二次得到的点数记为 y.

又 $2^{x+y}\leqslant 16=2^4$,则 $x+y\leqslant 4$.

满足"$2^{x+y}\leqslant 16$"的样本点为(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1),共 6 个,

则事件"$2^{x+y}\leqslant 16$"的概率为$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

二、多项选择题(本题包括 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的得 2 分).

9. 某男篮球运动员在最近几次参加的比赛中的得分情况如下表:

投篮次数	投中两分球的次数	投中三分球的次数
100	55	18

记该运动员在一次投篮中,投中两分球为事件 A,投中三分球为事件 B,没投中为事件 C,用频率估计概率的方法得到的下述结论中,正确的是(　　)

A.$P(A)=0.55$　B.$P(B)=0.18$

C.$P(C)=0.27$　D.$P(B+C)=0.55$

ABC　**解析**:由题意可知,$P(A)=\frac{55}{100}=0.55$,

$P(B)=\frac{18}{100}=0.18$,

事件 $A+B$ 与事件 C 为对立事件,且事件 A,B,C 互斥,

所以 $P(C)=1-P(A+B)=1-P(A)-P(B)=0.27$,

$P(B+C)=P(B)+P(C)=0.45$.故选 ABC.

10. 某商场推出抽奖活动,在甲抽奖箱中有四张有奖奖票,六张无奖奖票;乙抽奖箱中有三张有奖奖票,七张无奖奖票.每人能在甲、乙两箱中各抽一次,用 A 表示通过甲抽奖箱中奖的事件,B 表示通过乙抽奖箱中奖的事件,C 表示两次抽奖均未中奖的事件.下列结论正确的是　(　　)

A.$P(C)=\frac{21}{50}$

B.事件 A 与事件 B 相互独立

C.$P(AB)$与 $P(C)$的和为 54%

D.事件 A 与事件 B 互斥

ABC　**解析**:由题意可知,$P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$,

$P(B)=\frac{3}{10}$,

对于 A,$P(C)=\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{3}{10}\right)=\frac{21}{50}$,故 A 正确;

对于 B,在甲抽奖箱抽奖和在乙抽奖箱抽奖互不影响,故事件 A 和事件 B 相互独立,故 B 正确;对于 C,由 B 可知 $P(AB)=P(A)P(B)=\frac{3}{25}$,所以 $P(AB)+P(C)=\frac{27}{50}=0.54$,故 C 正确;对于 D,事件 A 与事件 B 相互独立而非互斥,故 D 错误.故选 ABC.

11. 某超市随机选取 1 000 位顾客,记录了他们购买甲、乙、丙、丁四种商品的情况,整理成如下统计表,其中"√"表示购买,"×"表示未购买.

顾客人数	甲	乙	丙	丁
100	√	×	√	√
217	×	√	×	√
200	√	√	√	×
300	√	×	√	×
85	√	×	×	×
98	×	√	×	×

根据表中数据,下列结论正确的是 ( )

A.顾客购买乙商品的概率最大

B.顾客同时购买乙和丙的概率约为 0.2

C.顾客在甲、乙、丙、丁中同时购买 3 种商品的概率约为 0.3

D.顾客仅购买 1 种商品的概率不大于 0.2

BCD **解析**:对于 A,由于购买甲商品的顾客有 685 位,购买乙商品的顾客有 515 位,故 A 错误;

对于 B,因为从统计表可以看出,在这 1 000 位顾客中,有 200 位顾客同时购买了乙和丙,

所以可以估计顾客同时购买乙和丙的概率为 $\frac{200}{1\ 000}=0.2$,故 B 正确;

对于 C,因为从统计表可以看出,在这 1 000 位顾客中,有 100 位顾客同时买了甲、丙、丁,另有 200 位顾客同时购买了甲、乙、丙,其他顾客最多购买了 2 种商品,

所以可以估计顾客在甲、乙、丙、丁中同时购买 3 种商品的概率为 $\frac{100+200}{1\ 000}=0.3$,故 C 正确;

对于 D,因为从统计表可以看出,在这 1 000 位顾客中,有 183 位顾客仅购买 1 种商品,

所以可以估计顾客仅购买 1 种商品的概率为 $0.183<0.2$,故 D 正确.故选 BCD.

12. 某次竞赛的多项选择题的得分规则是:"在每小题给出的四个选项中,全部选对的得 10 分,部分选对的得 5 分,有选错的得 0 分."已知某一道多项选择题的正确答案是 CD,且甲、乙、丙、丁四位同学都不会做,下列表述正确的是 ( )

A.甲同学仅随机选一个选项,能得 5 分的概率是 $\frac{1}{2}$

B.乙同学仅随机选两个选项,能得 10 分的概率是 $\frac{1}{6}$

C.丙同学随机选择选项,能得分的概率是 $\frac{1}{5}$

D.丁同学随机选择至少两个选项,能得分的概率是 $\frac{1}{10}$

ABC **解析**:当至少选择一个选项,所有可能的选择情况有 15 种,分别为 A,B,C,D,AB,AC,AD,BC,BD,CD,ABC,ABD,ACD,BCD,ABCD.

甲同学仅随机选一个选项有 4 种情况,能得 5 分有 2 种情况为 C,D,则能得 5 分的概率是 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$,故 A 正确;

乙同学仅随机选两个选项有 6 种情况,能得 10 分有 1 种情况为 CD,则能得 10 分的概率 $\frac{1}{6}$,故 B 正确;

丙同学仅随机选择选项有 15 种情况,能得分有 3 种情况为 C,D,CD,则能得分的概率是 $\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$,故 C 正确;

丁同学随机选择至少两个选项有 11 种情况,能得分有 1 种情况为 CD,则能得分的概率是 $\frac{1}{11}$,故 D 错误.故选 ABC.

三、填空题(本题包括 4 小题,每小题 5 分,共 20 分).

13. 哥德巴赫猜想包括两个命题,其中一个命题是"每个大于 2 的偶数可以表示为两个素数的和",如 $8=3+5$,在不超过 11 的素数中,随机选取两个不同的数,其和为偶数的概率是________.(用分数表示)

$\frac{3}{5}$ **解析**:因为不超过 11 的素数有 2,3,5,7,11 五个数,从中选取两个不同的数的样本点有

(2,3),(2,5),(2,7),(2,11),(3,5),(3,7),(3,11),(5,7),(5,11),(7,11),共 10 个,

其中和为偶数的样本点有(3,5),(3,7),(3,11),(5,7),(5,11),(7,11),共 6 个,

所以和为偶数的概率为$\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

14.事件 A,B 互斥,它们都不发生的概率为$\frac{2}{5}$,且 $P(A)=2P(B)$,则 $P(\overline{A})=$________.

$\frac{3}{5}$ **解析**:由题意知 $P(A\cup B)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$,

即 $P(A)+P(B)=\frac{3}{5}$.

又因为 $P(A)=2P(B)$,解得 $P(A)=\frac{2}{5}$,$P(B)=\frac{1}{5}$,

故 $P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{3}{5}$.

15.电视台组织中学生知识竞赛,共设有 5 个主题的试题,主题分别是“中华诗词”“社会主义核心价值观”“依法治国理念”“中国戏剧”“创新能力”.某参赛队从中任选 2 个主题作答,则“中华诗词”主题被该队选中的概率是________.

$\frac{2}{5}$ **解析**:知识竞赛有 5 个主题,从中任选 2 个主题共有 10 种结果,

“中华诗词”被选中的结果有 4 种,

则“中华诗词”主题被选中的概率 $P=\frac{2}{5}$.

16.将一个各个面上均涂有红漆的正方体锯成 27 个大小相同的小正方体,从这些小正方体中任取一个,其中恰有 2 面涂有红漆的概率是________,至少有 2 面涂红漆的概率是________.

$\frac{4}{9}$ $\frac{20}{27}$ **解析**:在 27 个小正方体中,有 8 个(8 个顶点处)3 面涂红漆;12 个(在 12 条棱上,每条棱上 1 个)2 面涂红漆;6 个(在 6 个面上,每个面上 1 个)1 面涂红漆;1 个(中心)各面都不涂漆.故其中恰有 2 面涂红漆的概率为$\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$,至少有 2 面涂有红漆的概率为$\frac{8+12}{27}=\frac{20}{27}$.

四、解答题(本题包括 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤).

17.(10 分)对一批衬衣进行抽样检查,结果如下表:

抽取件数 n	50	100	200	500	600	700	800
次品件数 m	0	2	12	27	27	35	40
次品率$\frac{m}{n}$							

(1)分别求各次检查中的次品频率;

(2)记“任取一件衬衣是次品”为事件 A,求 $P(A)$;

(3)为了保证买到次品的顾客能够及时更换,销售 1 000 件衬衣,至少需进货多少件?

解:(1)次品率依次为:0,0.02,0.06,0.054,0.045,0.05,0.05.

(2)当 n 充分大时,出现次品的频率$\frac{m}{n}$在 0.05 附近摆动,故 $P(A)\approx 0.05$.

(3)设进货衬衣 x 件,为保证 1 000 件衬衣为正品,则$(1-0.05)x\geqslant 1\ 000$,得 $x\geqslant 1\ 052.6$.又 x 为整数,故 $x\geqslant 1\ 053$.

所以至少需进货 1 053 件.

18.(12 分)已知集合 $A=\{-9,-7,-5,-3,-1,0,2,4,6,8\}$,在平面直角坐标系中,点$(x,y)$的坐标 $x\in A$,$y\in A$,且 $x\neq y$,计算:

(1)点(x,y)不在 x 轴上的概率;

(2)点(x,y)正好在第二象限的概率.

解:点(x,y),$x\in A$,$y\in A$,且 $x\neq y$ 的所有可能的结果有$(-9,-7)$,$(-9,-5)$,$(-9,-3)$,$(-9,-1)$,$(-9,0)$,$(-9,2)$,$(-9,4)$,$(-9,6)$,$(-9,8)$,$(-7,-9)$,$(-7,-5)$,$(-7,-3)$,$(-7,-1)$,$(-7,0)$,$(-7,2)$,$(-7,4)$,$(-7,6)$,$(-7,8)$,…,$(8,-9)$,$(8,-7)$,…,$(8,6)$,共有 90 种,且每一种结果出现的可能性相等.

(1)设事件 A 为“点(x,y)不在 x 轴上”,不符合要求的结果有$(-9,0)$,$(-7,0)$,$(-5,0)$,$(-3,0)$,$(-1,0)$,$(2,0)$,$(4,0)$,$(6,0)$,$(8,0)$,共 9 种,所以符合要求的有$90-9=81$(种),即事件 A 包含的样本点个数为 81.因此,事件 A 的概率 $P(A)=\frac{81}{90}=0.9$.

(2)设事件 B 为"点(x,y)正好在第二象限",则 $x<0,y>0$,则符合要求的样本点为$(-9,2)$,$(-9,4)$,$(-9,6)$,$(-9,8)$,$(-7,2)$,$(-7,4)$,$(-7,6)$,$(-7,8)$,$\cdots$,$(-1,2)$,$(-1,4)$,$(-1,6)$,$(-1,8)$,共 20 个,即事件 B 包含的样本点个数为 20.因此,事件 B 的概率$P(B)=\frac{20}{90}=\frac{2}{9}$.

19.(12 分)从高三年级所有女生中,随机抽取 n 名,其体重(单位:kg)的频数分布表如下:

分组	[40,45)	[45,50)	[50,55)	[55,60]
频数	10	50	x	15

已知从 n 名女生中随机抽取一名,抽到体重在[50,55)的女生的概率为$\frac{4}{19}$.

(1)求出 n,x 的值;

(2)用分层随机抽样的方法从体重在[40,45)和[55,60]的女生中共抽取 5 名,再从这 5 名女生中任取 2 名,求体重在[40,45)和[55,60]的女生各有 1 名的概率.

解:(1)依题意可得$\begin{cases}\frac{x}{n}=\frac{4}{19},\\ n=10+50+15+x,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=20,\\ n=95.\end{cases}$

(2)若采用分层随机抽样的方法从体重在[40,45)和[55,60]的女生中共抽取 5 名,则体重在[40,45)的女生有$\frac{10}{10+15}\times5=2$(名),记为 A,B;

在[55,60]的女生有$\frac{15}{10+15}\times5=3$(名),记为 a,b,c.

从抽出的 5 个女生中,任取 2 名,有(A,a),(A,b),(A,c),(a,b),(a,c),(b,c),(B,a),(B,b),(B,c),(A,B),共 10 种情况.

其中符合体重在[40,45)和[55,60]的女生各有 1 名的情况有(A,a),(A,b),(A,c),(B,a),(B,b),(B,c),共 6 种.

设事件 A 表示"从这 5 名女生中任取 2 名,体重在[40,45)和[55,60]的女生各有 1 名",

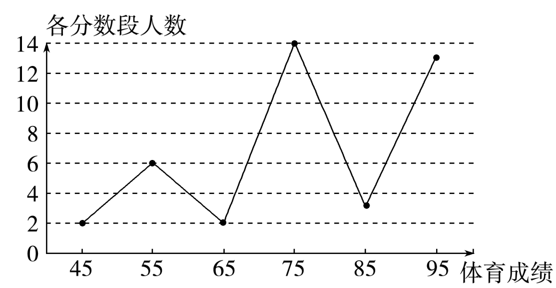
则 $P(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

所以从这 5 名女生中任取 2 个,体重在[40,45)和[55,60]的女生中各有 1 名的概率为$\frac{3}{5}$.

20.(12 分)某校高一年级 1 000 名学生全部参加了体育达标测试,现从中随机抽取 40 名学生的测试成绩,整理并按分数段[40,50),[50,60),[60,70),[70,80),[90,100]进行分组,假设同一组中的每个数据可用该组区间的中点值代替,则得到体育成绩的折线图如图:

(1)估计该校高一年级中体育成绩大于或等于 70 分的学生人数;

(2)现从体育成绩在[60,70)和[80,90)的样本学生中随机抽取 2 人,求其中恰有 1 人体育成绩在[60,70)的概率.



解:(1)根据折线图可以得到体育成绩大于或等于 70 分的学生人数为 $14+3+13=30$,所以该校高一年级中体育成绩大于或等于 70 分的学生人数估计为 $1\,000\times\frac{30}{40}=750$.

(2)样本学生中,体育成绩在[60,70)和[80,90)的分别有 2 人和 3 人,分别记为 a,b,A,B,C.

若随机抽取 2 人,则所有的样本点为

(a,b),(a,A),(a,B),(a,C),(b,A),(b,B),(b,C),(A,B),(A,C),(B,C),共 10 个.

其中恰有 1 人体育成绩在[60,70)的样本点有 6 个,

设事件 A 为"恰有 1 人体育成绩在[60,70)",则 $P(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

21.(12 分)在某次 1 500 米体能测试中,甲、乙、丙三人各自通过测试的概率分别为$\frac{2}{5}$,$\frac{3}{4}$,$\frac{1}{3}$,求:

(1)3 人都通过体能测试的概率;

(2)只有 2 人通过体能测试的概率;

(3)只有 1 人通过体能测试的概率.

解：设事件 A 表示“甲通过体能测试”，事件 B 表示“乙通过体能测试”，事件 C 表示“丙通过体能测试”.由题意有

$P(A)=\frac{2}{5}$，$P(B)=\frac{3}{4}$，$P(C)=\frac{1}{3}$.

(1)设 M_1 表示事件“甲、乙、丙 3 人都通过体能测试”，即 $M_1=ABC$.

由事件 A,B,C 相互独立，可得

$P(M_1)=P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

$=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$.

所以 3 人都通过体能测试的概率为$\frac{1}{10}$.

(2)设 M_2 表示事件“甲、乙、丙 3 人中只有 2 人通过体能测试”，则 $M_2=AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$.由于事件 $A,B,C,\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 均相互独立，并且事件 $AB\overline{C},A\overline{B}C,\overline{A}BC$ 两两互斥，因此所求概率 $P(M_2)=P(A)P(B)P(\overline{C})+P(A)\cdot P(\overline{B})P(C)+P(\overline{A})P(B)P(C)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{3}+\left(1-\frac{2}{5}\right)\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{23}{60}$.

所以只有 2 人通过体能测试的概率为$\frac{23}{60}$.

(3)设 M_3 表示事件“甲、乙、丙 3 人中只有 1 人通过体能测试”，则 $M_3=A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$.

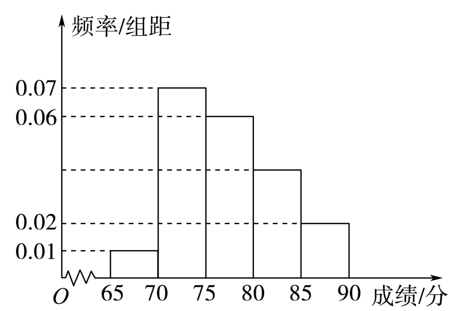
由于事件 $A,B,C,\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 均相互独立，并且事件 $A\overline{B}\,\overline{C},\overline{A}B\overline{C},\overline{A}\,\overline{B}C$ 两两互斥，因此所求概率为 $P(M_3)=P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})\cdot P(C)=\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(1-\frac{2}{5}\right)\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(1-\frac{2}{5}\right)\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$.

所以只有 1 人通过体能测试的概率为$\frac{5}{12}$.

22.(12 分)党的二十大报告中指出：“必须牢固树立和践行绿水青山就是金山银山的理念，站在人与自然和谐共生的高度谋划发展.”某中学作为蓝色海洋教育特色学校，随机抽取 100 名学生，进行一次海洋知识测试，按测试成绩(假设测试成绩均在[65，90]内)分组如下：第一组[65，70)，第二组[70，75)，第三组[75，80)，第四组[80，85)，第五组[85，90].得到频率分布直方图如图.

(1)求测试成绩在[80，85)内的频率；

(2)从第三、四、五组学生中用比例分配的分层随机抽样的方法抽取 6 名学生组成海洋知识宣讲小组，定期在校内进行义务宣讲，并在这 6 名学生中随机选取 2 名参加本市组织的蓝色海洋教育义务宣讲队，求第四组至少有 1 名学生被抽中的概率.



解：(1)测试成绩在[80，85)内的频率为 $1-(0.01+0.07+0.06+0.02)\times5=0.2$.

(2)第三组的人数为 $0.06\times5\times100=30$，第四组的人数为 $0.2\times100=20$，第五组的人数为 $0.02\times5\times100=10$，所以第三组抽取 3 人，第四组抽取 2 人，第五组抽取 1 人.

设第三组抽到的 3 人为 A_1,A_2,A_3，第四组抽到的 2 人为 B_1,B_2，第五组抽到的 1 人为 C.

从 6 名学生中随机选取 2 名学生的所有可能结果有 15 种：(A_1,A_2)，(A_1,A_3)，(A_1,B_1)，(A_1,B_2)，(A_1,C)，(A_2,A_3)，(A_2,B_1)，(A_2,B_2)，(A_2,C)，(A_3,B_1)，(A_3,B_2)，(A_3,C)，(B_1,B_2)，(B_1,C)，(B_2,C)，这 15 种结果出现的可能性相等.

设“第四组 2 名学生中至少有 1 名学生被抽中”为事件 M，则事件 M 包含的样本点有 (A_1,B_1)，(A_1,B_2)，(A_2,B_1)，(A_2,B_2)，(A_3,B_1)，(A_3,B_2)，(B_1,B_2)，(B_1,C)，(B_2,C)，共 9 个.

所以第四组至少有 1 名学生被抽中的概率 $P(M)=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.

模块综合检测

(时间:120 分钟,分值:150 分)

一、单项选择题(本题包括 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的).

1. i 是虚数单位,复数$\frac{3+i}{1-i}$等于 ( )

A.$1+2i$ B.$2+4i$ C.$-1-2i$ D.$2-i$

A **解析**:$\frac{3+i}{1-i}=\frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2+4i}{2}=1+2i$.

2. 某同学使用计算器求 30 个数的平均数时,错将其中一个数 105 输入为 15,则由此求出的平均数与实际平均数的差是 ( )

A.3.5 B.-3 C.3 D.-0.5

B **解析**:少输入 90,$\frac{90}{30}=3$,平均数少 3,求出的平均数减去实际平均数等于-3.

3. 设△ABC 的内角 A,B,C 所对边的长分别为 a,b,c.若 $b+c=2a$,$3\sin A=5\sin B$,则角$C=$ ( )

A.$\frac{\pi}{3}$ B.$\frac{2\pi}{3}$ C.$\frac{3\pi}{4}$ D.$\frac{5\pi}{6}$

B **解析**:由正弦定理可知 $3a=5b$,$a=\frac{5}{3}b$,又 $b+c=2a$,所以 $c=2a-b$,所以 $c=\frac{7}{3}b$.将 $a=\frac{5}{3}b$,$c=\frac{7}{3}b$ 代入得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{b^2+\frac{25}{9}b^2-\frac{49}{9}b^2}{2\times\frac{5}{3}b\times b}=-\frac{1}{2}$.因为$0<C<\pi$,所以 $C=\frac{2\pi}{3}$.

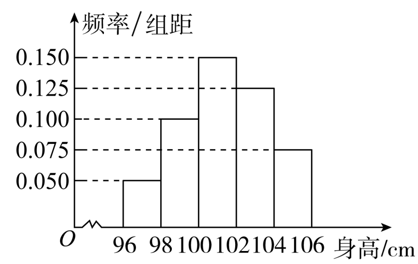
4. 在平面直角坐标系中,O 为坐标原点,已知两点 $A(3,1)$,$B(-1,3)$.若点 C 满足$\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$,其中 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ 且 $\alpha+\beta=1$,则点 C 的轨迹方程为 ( )

A.$3x+2y-11=0$ B.$(x-1)^2+(y-2)^2=5$

C.$2x-y=0$ D.$x+2y-5=0$

D **解析**:设$\overrightarrow{OC}=(x,y)$,$\overrightarrow{OA}=(3,1)$,$\overrightarrow{OB}=(-1,3)$.由 $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ 得 $(x,y)=\alpha(3,1)+\beta(-1,3)$,$\begin{cases}x=3\alpha-\beta,\\y=\alpha+3\beta.\end{cases}$因为 $\alpha+\beta=1$,所以 $x+2y=5$,点 C 的轨迹方程为 $x+2y-5=0$.

5. 为了解某幼儿园儿童的身高情况,抽查该园 120 名儿童的身高并绘制成如图所示的频率分布直方图,则抽查的 120 名儿童身高大于或等于 98 cm 且小于 104 cm 的有 ( )



A.90 名 B.75 名

C.65 名 D.40 名

A **解析**:由频率分布直方图可知,身高大于或等于 98 cm 且小于 104 cm 的频率为$(0.100+0.150+0.125)\times2=0.75$,则抽查的 120 名儿童身高大于或等于 98 cm 且小于 104 cm 的人数为 $120\times0.75=90$.故选 A.

6. (2022·新高考全国Ⅱ卷)已知正三棱台的高为 1,上、下底面边长分别为 $3\sqrt{3}$ 和 $4\sqrt{3}$,其顶点都在同一球面上,则该球的表面积为 ( )

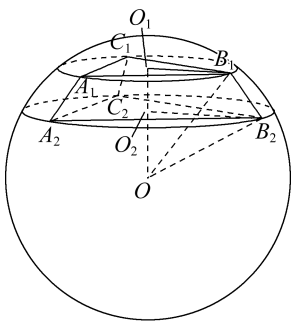
A.100π B.128π

C.144π D.192π

A **解析**:设正三棱台上、下底面的半径分别为 r_1,r_2,所以 $2r_1=\frac{3\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$,$2r_2=\frac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$,即 $r_1=3$,$r_2=4$.设球心到上、下底面的距离分别为 d_1,d_2,球的半径为 R,所以 $d_1=\sqrt{R^2-9}$,$d_2=\sqrt{R^2-16}$,故 $|d_1-d_2|=1$ 或 $d_1+d_2=1$,即 $|\sqrt{R^2-9}-$

$\sqrt{R^2-16}\,|=1$ 或 $\sqrt{R^2-9}+\sqrt{R^2-16}=1$,解得 $R^2=25$ 符合题意,所以球的表面积为 $S=4\pi R^2=100\pi$.

故选 A.



7. 在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,异面直线 AB,A_1D_1 所成的角等于 (　　)

A.30°　B.45°　C.60°　D.90°

D　**解析**:由长方体的性质可知,$A_1B_1 /\!/ AB$,$A_1B_1 \perp A_1D_1$,所以 $AB \perp A_1D_1$,故异面直线 AB,A_1D_1 所成的角等于 90°.

8. 甲、乙、丙三位同学上课后独立完成 5 道自我检测题,甲及格的概率为 $\frac{4}{5}$,乙及格的概率为 $\frac{2}{5}$,丙及格的概率为 $\frac{2}{3}$,则三位同学至少有一位及格的概率为 (　　)

A.$\frac{1}{25}$　B.$\frac{16}{75}$　C.$\frac{24}{25}$　D.$\frac{59}{75}$

C　**解析**:由题设可知甲、乙、丙三位同学都不及格的概率是 $\left(1-\frac{4}{5}\right)\times\left(1-\frac{2}{5}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{25}$,故甲、乙、丙三位同学至少有一位及格的概率是 $1-\frac{1}{25}=\frac{24}{25}$.故选 C.

二、多项选择题(本题包括 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的得 2 分).

9. 一个盒子中装有 5 支圆珠笔,其中 3 支一等品,2 支二等品,大小质地完全相同.若从中随机取出 3 支,则与事件"取出 1 支一等品和 2 支二等品"互斥的事件有 (　　)

A.取出的 3 支圆珠笔中,至少 2 支一等品

B.取出的 3 支圆珠笔中,至多 1 支二等品

C.取出的 3 支圆珠笔中,既有一等品也有二等品

D.取出的 3 支圆珠笔中,没有二等品

ABD　**解析**:对于 A,事件"取出的 3 支圆珠笔中,至少 2 支一等品"包括 2 支一等品和 1 支二等品,3 支一等品两种结果,与事件"取出 1 支一等品和 2 支二等品"不能同时发生,它们是互斥事件,故 A 正确;对于 B,事件"取出的 3 支笔中,至多 1 支二等品"包括 2 支一等品和 1 支二等品,3 支一等品两种结果,与事件"取出 1 支一等品和 2 支二等品"不能同时发生,它们是互斥事件,故 B 正确;对于 C,事件"取出的 3 支笔中,既有一等品也有二等品"包括 1 支一等品和 2 支二等品,2 支一等品和 1 支二等品两种结果,与事件"取出 1 支一等品和 2 支二等品"可能同时发生,它们不是互斥事件,故 C 不正确;对于 D,事件"取出的 3 支笔中,没有二等品"指 3 支一等品,与事件"取出 1 支一等品和 2 支二等品"不能同时发生,它们是互斥事件,故 D 正确.故选 ABD.

10. 下列说法正确的是 (　　)

A.用简单随机抽样的方法从含有 50 个个体的总体中抽取一个容量为 5 的样本,则个体 m 被抽到的概率是 0.1

B.已知一组数据 1,2,m,6,7 的平均数为 4,则这组数据的方差是 $\frac{26}{5}$

C.数据 13,27,24,12,14,30,15,17,19,23 的第 70 百分位数是 23

D.若数据 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ 的标准差为 8,则数据 $2x_1-1,2x_2-1,\cdots,2x_{10}-1$ 的标准差为 32

AB　**解析**:用简单随机抽样的方法从含有 50 个个体的总体中抽取一个容量为 5 的样本,则个体 m 被抽到的概率为 $\frac{5}{50}=0.1$,A 正确;已知一组数据 1,2,m,6,7 的平均数为 4,所以 $\frac{1+2+m+6+7}{5}=4$,解得 $m=4$,所以 $\frac{(1-4)^2+(2-4)^2+(4-4)^2+(6-4)^2+(7-4)^2}{5}=\frac{26}{5}$,则这组数据的方差是 $\frac{26}{5}$,B 正确;数据 13,27,24,12,14,30,15,17,19,23 共 10 个数,从小到大排列为 12,13,14,15,17,19,23,24,27,30,

由于 $10\times0.7=7$,故选择第 7 个和第 8 个数的平均数作为第 70 百分位数,

即 $\frac{23+24}{2}=23.5$,所以第 70 百分位数是 23.5,C 错误;

若数据 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ 的标准差为 8，所以 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ 的方差为 64，

则数据 $2x_1-1,2x_2-1,\cdots,2x_{10}-1$ 的方差为 $64\times4=256$，

所以数据 $2x_1-1,2x_2-1,\cdots,2x_{10}-1$ 的标准差为 $\sqrt{256}=16$，D 错误.故选 AB.

11. 定义平面向量之间的一种运算“⊙”如下：对任意的 $\boldsymbol{a}=(m,n)$，$\boldsymbol{b}=(p,q)$，令 $\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b}=mq-np$.下列说法正确的是 ( )

A.若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则 $\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b}=0$

B.$\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\odot\boldsymbol{a}$

C.对任意的 $\lambda\in\mathbf{R}$，有 $(\lambda\boldsymbol{a})\odot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b})$

D.$(\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$

ACD **解析**：若 $\boldsymbol{a}=(m,n)$，$\boldsymbol{b}=(p,q)$ 共线，则 $mq-np=0$，依运算“⊙”知 $\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b}=0$，故 A 正确；

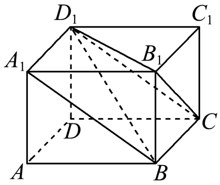
由于 $\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b}=mq-np$，又 $\boldsymbol{b}\odot\boldsymbol{a}=np-mq$，因此 $\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\odot\boldsymbol{a}$，故 B 不正确；

对于 C，由于 $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda m,\lambda n)$，因此 $(\lambda\boldsymbol{a})\odot\boldsymbol{b}=\lambda mq-\lambda np$，

又 $\lambda(\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b})=\lambda(mq-np)=\lambda mq-\lambda np$，故 C 正确；

对于 D，$(\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=m^2q^2-2mnpq+n^2p^2+(mp+nq)^2=m^2(p^2+q^2)+n^2(p^2+q^2)=(m^2+n^2)(p^2+q^2)=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$，故 D 正确.故选 ACD.

12. 如图，在直四棱柱 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，$AA_1=3$，则 ( )



A.异面直线 A_1B 与 B_1D_1 所成角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{5}$

B.异面直线 A_1B 与 B_1D_1 所成角的余弦值为 $\frac{3}{5}$

C.A_1B∥平面 B_1D_1C

D.点 B_1 到平面 A_1BD_1 的距离为 $\frac{12}{5}$

ACD **解析**：因为 $A_1B\parallel D_1C$，所以 $\angle B_1D_1C$ 或其补角即为异面直线 A_1B 与 B_1D_1 所成的角.

又因为 $B_1D_1=4\sqrt{2}$，$D_1C=5$，$B_1C=5$，

所以 $\cos\angle B_1D_1C=\frac{B_1D_1^2+D_1C^2-B_1C^2}{2B_1D_1\cdot D_1C}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$，故 A 正确，B 错误.

因为 $A_1B\parallel D_1C$，$A_1B\not\subset$ 平面 B_1D_1C，$D_1C\subset$ 平面 B_1D_1C，

所以 A_1B∥平面 B_1D_1C，故 C 正确.

设点 B_1 到平面 A_1BD_1 的距离为 h，因为 $V_{B\text{-}A_1B_1D_1}=V_{B_1\text{-}A_1BD_1}$，即 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}A_1B_1\cdot A_1D_1\cdot B_1B=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}A_1B\cdot A_1D_1\cdot h$，

解得 $h=\frac{12}{5}$，故 D 正确.故选 ACD.

三、填空题(本题包括 4 小题，每小题 5 分，共 20 分).

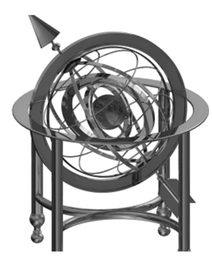
13. 某学校三个兴趣小组的学生人数分布如下表(每名同学只参加一个小组)

年级	篮球组	书画组	乐器组
高一	45	30	a
高二	15	10	20

学校要对这三个小组的活动效果进行抽样调查，按小组分层随机抽样，从参加这三个兴趣小组的学生中抽取 30 人，结果篮球组被抽出 12 人，则 a 的值为________.

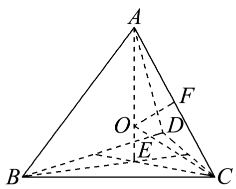
30 **解析**：由题意可得 $\frac{12}{30}=\frac{45+15}{45+15+30+10+a+20}$，解得 $a=30$.

14. 如图，浑仪是中国古代的一种天文观测仪器，是以浑天说为理论基础制造的、由相应天球坐标系各基本圈的环规及瞄准器构成的古代天文测量天体的仪器，它的基本结构由若干个同心圆环构成.某校某社团的同学根据浑仪运行原理制作了一个浑仪的模型：同心的小球半径为 3，大球半径为 R.现为提高浑仪的稳固性，该社团同学在大球内放入一个由六根等长的铁丝(不计粗细)组成的四面体框架，为了不影响浑仪的正常使用，且小球能在框架内自由转动，则大球半径 R 的最小值为________.



$3\sqrt{3}$　**解析**：由题意知，若小球与正四面体的各棱相切，大球为正四面体的外接球，即可保证大球半径 R 最小.

如图，设正四面体的棱长为 a，E 为 $\triangle BCD$ 的中心，故 $AE\perp$ 平面 BCD.



又 $CE\subset$ 平面 BCD，则 $AE\perp CE$，且 $CE=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

又小球半径 $OF=r=3$，则 $OF\perp AC$，大球半径 $OA=R$，$AC=a$，

所以 $\triangle AOF\backsim\triangle ACE$，故 $\frac{OA}{AC}=\frac{OF}{CE}$，即 $\frac{R}{a}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{3}a}$，

解得 $R=3\sqrt{3}$.

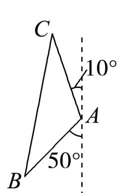
所以大球半径 R 的最小值为 $3\sqrt{3}$.

15. 甲船在岛 A 南偏西 50° 的 B 处，且 A，B 的距离为 10 海里，另有乙船正离开岛 A 沿北偏西 10° 的方向以每小时 8 海里的速度航行.若甲船要用 2 小时追上乙船，则速度大小为________海里/时.

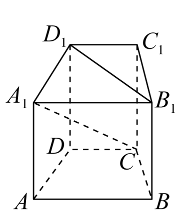
$\sqrt{129}$　**解析**：如图，假设甲船在 C 处追上乙船，则 $AC=2\times8=16$（海里），$AB=10$ 海里，由余弦定理得 $BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC}$.

由图可知，$\angle BAC=120^\circ$，

所以 $BC=\sqrt{10^2+16^2-2\times16\times10\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{516}$，则速度 $v=\frac{\sqrt{516}}{2}=\sqrt{129}$（海里/时）.



16. 如图所示，在直四棱柱 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，当底面四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 满足条件________时，有 $A_1C\perp B_1D_1$.（注：填上你认为正确的一种情况即可，不必考虑所有可能的情况）



$B_1D_1\perp A_1C_1$（答案不唯一）　**解析**：因为直四棱柱 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$，所以 $CC_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$.因为 $B_1D_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，所以 $CC_1\perp B_1D_1$.若 $A_1C_1\perp B_1D_1$，又 $A_1C_1\cap C_1C=C_1$，则 $B_1D_1\perp$ 平面 A_1C_1C.因为 $A_1C\subset$ 平面 A_1C_1C，所以 $B_1D_1\perp A_1C$.（答案不唯一）

四、解答题（本题包括 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）.

17.（10 分）已知复数 $z=m^2+m-(m+1)\mathrm{i}$，$m\in\mathbf{R}$，i 为虚数单位.

(1)当 z 是纯虚数时，求 m 的值；

(2)当 $m=1$ 时，求 $|\bar{z}|$ 的值.

解：(1)要使复数 z 为纯虚数，需满足 $\begin{cases}m^2+m=0,\\ m+1\neq0,\end{cases}$ 解得 $m=0$.

即当 $m=0$ 时，z 是纯虚数.

(2)当 $m=1$ 时，$z=2-2\mathrm{i}$，$\bar{z}=2+2\mathrm{i}$，$|\bar{z}|=2\sqrt{2}$.

18.（12 分）为了了解九年级女生的身高（单位：cm）情况，某中学对九年级女生身高进行了一次测量，所得数据整理后列出的频率分布表如下：

分组	频数	频率
[145.5,149.5)	1	0.02
[149.5,153.5)	4	0.08
[153.5,157.5)	20	0.40
[157.5,161.5)	15	0.30
[161.5,165.5)	8	0.16
[165.5,169.5]	m	n
合计	M	N

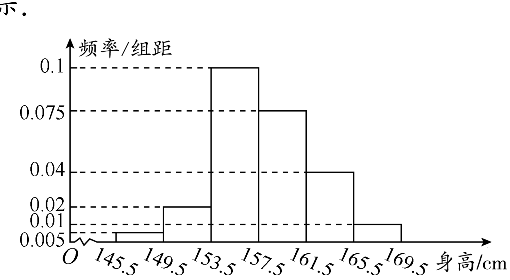
(1)求出表中 m，n，M，N 所表示的数分别是多少；

(2)画出频率分布直方图；

(3)九年级女生身高的 70%分位数是多少？

解：(1)$M=\frac{1}{0.02}=50$，$m=50-(1+4+20+15+8)=2$，$N=1$，$n=\frac{m}{M}=\frac{2}{50}=0.04$.

(2)作出平面直角坐标系，组距为 4，纵轴表示 $\frac{\text{频率}}{\text{组距}}$，横轴表示身高，画出频率分布直方图如图所示.



(3)$0.02+0.08+0.40=0.5<0.7$，

$0.02+0.08+0.40+0.30=0.8>0.7$，

故70%分位数位于[157.5,161.5)内，为 $157.5+\frac{0.7-0.5}{0.3}\times(161.5-157.5)\approx160.2(\text{cm})$.

19.(12分)有7位歌手(1至7号)参加一场歌唱比赛，由500名大众评委现场投票决定歌手名次，根据年龄将大众评委分为五组，各组的人数如下：

组别	A	B	C	D	E
人数	50	100	150	150	50

(1)为了调查大众评委对7位歌手的支持情况，现用分层随机抽样的方法从各组中抽取若干名评委，其中从B组中抽取了6人.请将其余各组抽取的人数填入下表.

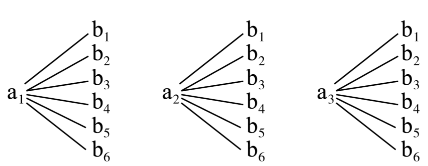
组别	A	B	C	D	E
人数	50	100	150	150	50
抽取人数		6			

(2)在(1)中，若A，B两组被抽到的评委中各有2人支持1号歌手，现从这两组被抽到的评委中分别任选1人，求这2人都支持1号歌手的概率.

解：(1)由题设知，分层随机抽样的抽取比例为6%，所以各组抽取的人数如下表：

组别	A	B	C	D	E
人数	50	100	150	150	50
抽取人数	3	6	9	9	3

(2)记从A组抽到的3个评委为 a_1,a_2,a_3，其中 a_1,a_2 支持1号歌手；从B组抽到的6个评委为 b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6，其中 b_1,b_2 支持1号歌手.从 $\{a_1,a_2,a_3\}$ 和 $\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6\}$ 中各抽取1人的所有结果为



由以上树状图知所有等可能的结果共18种，其中2人都支持1号歌手的结果有 $a_1b_1,a_1b_2,a_2b_1,a_2b_2$，共4种，故所求概率 $P=\frac{4}{18}=\frac{2}{9}$.

20.(12分)已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos x,\sin x)$，$\boldsymbol{b}=(-\cos x,\cos x)$，$\boldsymbol{c}=(-1,0)$.

(1)若 $x=\frac{\pi}{6}$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角；

(2)当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{9\pi}{8}\right]$ 时，求函数 $f(x)=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+1$ 的最大值.

解：(1)当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|}=\frac{-\cos x}{\sqrt{\sin^2x+\cos^2x}\cdot\sqrt{(-1)^2+0^2}}$

$=-\cos x=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，

所以 $\theta=\frac{5\pi}{6}$，即向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 $\frac{5\pi}{6}$.

(2)$f(x)=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+1=2(-\cos^2x+\sin x\cos x)+1$

$=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，

因为 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{9\pi}{8}\right]$，

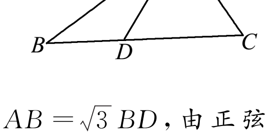
故 $\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\in[-\sqrt{2},1]$，

所以函数 $f(x)=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+1$ 的最大值为1.

21.(12分)如图，已知△ABC 为直角三角形，斜边 BC 上有一点 D，满足 $AB=\sqrt{3}BD$.

(1)若 $\angle BAD=30°$，求 $\angle C$；

(2)若 $BD=\frac{1}{2}CD$，$AD=2$，求 BC.



解：(1)已知 $AB=\sqrt{3}BD$，由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin 30°}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，

得 $\sin\angle ADB=\frac{AB\cdot\sin 30°}{BD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $60°<\angle ADB<180°$，所以 $\angle ADB=120°$，

所以 $\angle C+\angle DAC=120°$.

因为$\angle DAC=60^\circ$,所以$\angle C=60^\circ$.

(2)设$BD=\frac{1}{2}CD=a$,

因为$AB=\sqrt{3}BD$,所以$AB=\sqrt{3}a$,所以$AC=\sqrt{6}a$,

从而$\cos C=\frac{AC}{BC}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.在$\triangle ACD$中,

由余弦定理得$\cos C=\frac{AC^2+DC^2-AD^2}{2AC\cdot DC}$,

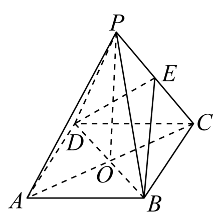
即$\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{6a^2+4a^2-4}{2\cdot\sqrt{6}a\cdot 2a}$,解得$a=\sqrt{2}$,所以$BC=3\sqrt{2}$.

22.(12分)如图所示,在四棱锥P-$ABCD$中,四边形$ABCD$是正方形,O是正方形的中心,$PO\perp$底面$ABCD$,底面正方形的边长为a,E是PC的中点.

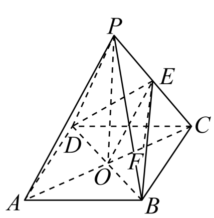
(1)求证:$PA\parallel$平面BDE;

(2)求证:平面$PAC\perp$平面BDE;

(3)若二面角E-BD-C为30°,求四棱锥P-$ABCD$的体积.



(1)**证明**:连接OE,如图所示.



因为O,E分别为AC,PC的中点,所以$OE\parallel PA$.

因为$OE\subset$平面BDE,$PA\not\subset$平面BDE,

所以$PA\parallel$平面BDE.

(2)**证明**:因为$PO\perp$平面$ABCD$,$BD\subset$平面$ABCD$,所以$PO\perp BD$.

在正方形$ABCD$中,$BD\perp AC$,

又因为$PO\cap AC=O$,$PO,AC\subset$平面PAC,所以$BD\perp$平面PAC.

又因为$BD\subset$平面BDE,所以平面$PAC\perp$平面BDE.

(3)**解**:如图,取OC中点F,连接EF.

因为E为PC中点,

所以EF为$\triangle POC$的中位线,所以$EF\parallel PO$.

又因为$PO\perp$平面$ABCD$,所以$EF\perp$平面$ABCD$.

因为$BD\subset$平面$ABCD$,所以$EF\perp BD$.

因为$OF\perp BD$,$OF\cap EF=F$,$OF,EF\subset$平面EFO,所以$BD\perp$平面EFO.

因为$OE\subset$平面EFO,所以$OE\perp BD$.

所以$\angle EOF$为二面角E-BD-C的平面角,

所以$\angle EOF=30^\circ$.

又$OF=\frac{1}{2}OC=\frac{1}{4}AC=\frac{\sqrt{2}}{4}a$,

所以在$\mathrm{Rt}\triangle OEF$中,$EF=OF\cdot\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{6}}{12}a$,

所以$OP=2EF=\frac{\sqrt{6}}{6}a$.

所以$V_{P\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}\times a^2\times\frac{\sqrt{6}}{6}a=\frac{\sqrt{6}}{18}a^3$.