答案详解

第一章　集合、常用逻辑用语、不等式

第1课时　集合

梳理·必备知识

1.(2)$\in$　$\notin$　(3)描述法　(4)$\mathbf{N}^*$(或$\mathbf{N}_+$)　**Z**　**Q**　**R**

2.(1)任意一个元素　$B\supseteq A$　(2)$x\notin A$　$A\subsetneqq B$　$B\supsetneqq A$
(3)$B\subseteq A$　(4)子集　真子集

3.$\{x|x\in A$,或$x\in B\}$　$\{x|x\in A$,且$x\in B\}$　$\{x|x\in U$,且$x\notin A\}$　A　A　A　$\varnothing$　($\complement_U A$)　($\complement_U A$)

激活·基本技能

一、(1)×　(2)×　(3)×　(4)×

二、1.**A**　[全集$U=\{x|x>0\}$,集合$A=\{x|x>4\}$,则$\complement_U A=\{x|0<x\leqslant 4\}$,故选A.]

2.**AD**

3.**AD**　[在阴影部分区域内任取一个元素x,则$x\in A\cap B$或$x\in B\cap C$,故阴影部分所表示的集合为$B\cap(A\cup C)$或$(A\cap B)\cup(B\cap C)$.故选AD.]

4.$\{x|x\leqslant 2$或$x\geqslant 10\}$　$\{x|2<x<3$或$7\leqslant x<10\}$　[因为$A=\{x|3\leqslant x<7\}$,$B=\{x|2<x<10\}$,所以$A\cup B=\{x|2<x<10\}$,$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|x<3$或$x\geqslant 7\}$,所以$\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=\{x|x\leqslant 2$或$x\geqslant 10\}$,$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{x|2<x<3$或$7\leqslant x<10\}$.]

考点一

典例1　(1)**C**　(2)$-\frac{3}{2}$　(3)$\{0,1\}$(或$\{-1,1\}$)

[(1)因为$A=\{1,2,3\}$,
所以$B=\{(2,1),(3,1),(3,2),(1,2),(1,3),(2,3)\}$,$B$中含6个元素.故选C.

(2)由题意得$m+2=3$或$2m^2+m=3$,
则$m=1$或$m=-\frac{3}{2}$.
当$m=1$时,$m+2=3$且$2m^2+m=3$,根据集合中元素的互异性可知不满足题意;
当$m=-\frac{3}{2}$时,$m+2=\frac{1}{2}$,而$2m^2+m=3$,符合题意,故$m=-\frac{3}{2}$.

(3)由题意,不妨设$S=\{a,b\}$,根据题意有$a^2,ab,b^2\in S$,
所以a^2,ab,b^2必有两个是相等的,
若$a^2=b^2$,则$a=-b$,故$ab=-a^2$,又$a^2=a$,或$a^2=b=-a$,所以$a=0$(舍去)或$a=1$或$a=-1$,此时$S=\{-1,1\}$;
若$a^2=ab$,则$a=0$,此时$b^2=b$,故$b=1$,此时$S=\{0,1\}$,
若$b^2=ab$,则$b=0$,此时$a^2=a$,故$a=1$,此时$S=\{0,1\}$,
综上,$S=\{0,1\}$或$S=\{-1,1\}$.]

跟进训练

1.(1)**C**　(2)$\left\{0,\frac{1}{4}\right\}$　[(1)$\because \frac{4}{x-2}\in\mathbf{Z}$,$\therefore x-2$的取值有$-4,-2,-1,1,2,4$,$\therefore x$的值分别为$-2,0,1,3,4,6$,
又$x\in\mathbf{N}$,故x的值为$0,1,3,4,6$.
故集合A中有5个元素.

(2)依题意知,方程$kx^2+x+1=0$有且仅有一个实数根,
$\therefore k=0$或$\begin{cases}k\neq 0,\\ \Delta=1-4k=0,\end{cases}$
$\therefore k=0$或$k=\frac{1}{4}$,$\therefore k$的取值集合为$\left\{0,\frac{1}{4}\right\}$.]

考点二

典例2　(1)**D**　(2)-2　(3)$[-1,+\infty)$　[(1)因为$P=\{y|y=x^2+1\}=\{y|y\geqslant 1\}$,$M=\{x|y=x^2+1\}=\mathbf{R}$,所以$P\subsetneqq M$.

(2)$\because\{1,m,m+n\}=\left\{0,n,\frac{n}{m}\right\}$,且$m\neq 0$,
$\therefore m+n=0$,即$m=-n$,于是$\frac{n}{m}=-1$.
$\therefore$由两集合相等,得$m=-1$,$n=1$,
$\therefore m-n=-2$.

(3)$\because B\subseteq A$,①当$B=\varnothing$时,$2m-1>m+1$,解得$m>2$,
②当$B\neq\varnothing$时,$\begin{cases}2m-1\leqslant m+1,\\ 2m-1\geqslant -3,\\ m+1\leqslant 4,\end{cases}$　解得$-1\leqslant m\leqslant 2$.
综上,实数m的取值范围是$[-1,+\infty)$.]

跟进训练

2.(1)**C**　(2)**B**　[(1)**法一**:$\because A=\{1,2\}$,$B=\{1,2,3,4,5\}$,且$A\subsetneqq C\subseteq B$,$\therefore$集合$C$的所有可能为$\{1,2,3\}$,$\{1,2,4\}$,$\{1,2,5\}$,$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,5\}$,$\{1,2,4,5\}$,$\{1,2,3,4,5\}$,共7个.

法二:由题意知,$\{1,2\}\subsetneqq C\subseteq\{1,2,3,4,5\}$,
$\therefore$集合C中必有除1,2外的3,4,5中至少一个元素,故共有$2^3-1=7$个集合C.故选C.

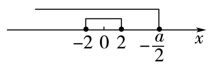
(2)依题意,有$a-2=0$或$2a-2=0$.当$a-2=0$时,解得$a=2$,此时$A=\{0,-2\}$,$B=\{1,0,2\}$,不满足$A\subseteq B$;当$2a-2=0$时,解得$a=1$,此时$A=\{0,-1\}$,$B=\{-1,0,1\}$,满足$A\subseteq B$.所以$a=1$,故选B.]

考点三

考向1　**典例3**　(1)**A**　(2)**D**　[(1)由题意知,$\complement_U M=\{2,3,5\}$,又$N=\{2,5\}$,所以$N\cup\complement_U M=\{2,3,5\}$,故选A.

(2)$M=\{x|0\leqslant x<16\}$,$N=\left\{x\left|x\geqslant\frac{1}{3}\right.\right\}$,故$M\cap N=\left\{x\left|\frac{1}{3}\leqslant x<16\right.\right\}$,故选D.]

考向 2 **典例** 4 **D** [集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,x\leqslant -\frac{a}{2}\right\}$，由 $A\cup B=B$ 可得 $A\subseteq B$，作出数轴如图.



可知 $-\frac{a}{2}\geqslant 2$，即 $a\leqslant -4$.]

跟进训练

3.(1)**D** (2)5 [(1)易得 $\complement_U A=(-3,-2]\cup(1,3)$. 故选 D.

(2)由 $A\cap B=A$，则 $A\subseteq B$，

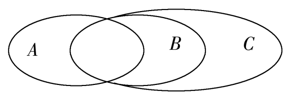
由 $|x-3|\leqslant m$，得 $-m+3\leqslant x\leqslant m+3$，

故有 $\begin{cases}4\leqslant m+3,\\-2\geqslant -m+3,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m\geqslant 1,\\m\geqslant 5,\end{cases}$ 即 $m\geqslant 5$，

即 m 的最小值为 5.]

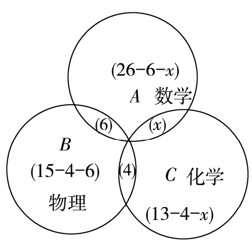
考点四

典例 5 (1)**D** (2)8 [(1)因为非空集合 A,B,C 满足：$(A\cap B)\subseteq C$，$(A\cap C)\subseteq B$，作出符合题意的三个集合之间关系的 Venn 图，如图所示，



所以 $A\cap B=A\cap C$. 故选 D.

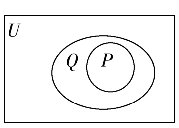
(2)设参加数学、物理、化学小组的人构成的集合分别为 A，B，C，同时参加数学和化学小组的有 x 人，由题意可得如图所示的 Venn 图.



由全班共 36 名同学可得 $(26-6-x)+6+(15-4-6)+4+(13-4-x)+x=36$，解得 $x=8$，即同时参加数学和化学小组的有 8 人.]

跟进训练

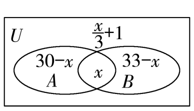
4.(1)**B** (2)**D** [(1)如图所示，



P,Q 满足 $(\complement_U P)\cup Q=\mathbf{R}$，即 $P\subseteq Q$，故选 B.

(2)记赞成 A 的学生组成集合 A，赞成 B 的学生组成集合 B，50 名学生组成全集 U，则集合 A 有 30 个元素，集合 B 有 33 个元素.

设对 A，B 都赞成的学生人数为 x，则集合 $\complement_U(A\cup B)$ 的元素个数为 $\frac{x}{3}+1$，如图，



由 Venn 图可知，$(30-x)+(33-x)+x+\left(\frac{x}{3}+1\right)=50$，

即 $14-\frac{2x}{3}=0$，解得 $x=21$，

所以对 A，B 都赞成的学生有 21 人. 故选 D.]

第 2 课时 常用逻辑用语

梳理·必备知识

1.(1)充分 必要 (2)充分不必要 (3)$p\nRightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$ (4)$p\Leftrightarrow q$ (5)既不充分也不必要

2.(1)$\forall$ (2)$\exists$

3. $\forall x\in M,p(x)$ $\exists x\in M,p(x)$ $\exists x\in M,\neg p(x)$ $\forall x\in M,\neg p(x)$

激活·基本技能

一、(1)√ (2)√ (3)× (4)√

二、1. **ABD** [A：由 $a=b$ 有 $ac=bc$，当 $ac=bc$ 不一定有 $a=b$，必要性不成立，假命题；

B：当 $a=1>b=-2$ 时 $a^2<b^2$，充分性不成立，假命题；

C：$a<5$ 不一定 $a<3$，但 $a<3$ 必有 $a<5$，故"$a<5$"是"$a<3$"的必要条件，真命题；

D：$a+5$ 是无理数，则 a 是无理数，若 a 是无理数也有 $a+5$ 是无理数，故为充要条件，假命题. 故选 ABD.]

2. **ACD**

3. $\exists x,y\in\mathbf{R},x+y>1$ $\forall x,y\in\mathbf{R},x+y\leqslant 1$ 假

4. $[3,+\infty)$

考点一

考向 1 **典例** 1 **C** [若 $\{a_n\}$ 为等差数列，设其公差为 d，则 $a_n=a_1+(n-1)d$，所以 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，所以 $\frac{S_n}{n}=a_1+(n-1)\cdot\frac{d}{2}$，所以 $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=a_1+(n+1-1)\cdot\frac{d}{2}-\left[a_1+(n-1)\cdot\frac{d}{2}\right]=\frac{d}{2}$ 为常数，所以 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，即甲⇒乙；若 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，设其公差为 t，则 $\frac{S_n}{n}=\frac{S_1}{1}+(n-1)t=a_1+(n-1)t$，所以 $S_n=na_1+n(n-1)t$，所以当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=na_1+n(n-1)t-[(n-1)a_1+(n-1)(n-2)t]=a_1+2(n-1)t$，当 $n=1$ 时，$S_1=a_1$ 也满足上式，所以 $a_n=a_1+2(n-1)t(n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $a_{n+1}-a_n=a_1+2(n+1-1)t-[a_1+2(n-1)t]=2t$ 为常数，所以 $\{a_n\}$ 为等差数列，即乙⇒甲. 所以甲是乙的充要条件，故选 C.]

考向 2 **典例** 2 **A** [对于 A，$\ln x>\ln y\Leftrightarrow x>y>0$，∴"$\ln x>\ln y$"是"$x>y$"的充分不必要条件，故 A 正确；对于 B，$x^2>y^2\Leftrightarrow|x|>|y|$，∴"$x^2>y^2$"是"$x>y$"的既不充分也不必要条件，故 B 错误；对于 C，$x^3>y^3\Leftrightarrow x>y$，∴"$x^3>y^3$"是"$x>y$"的充要条件，故 C 错误；对于 D，$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}\Leftrightarrow\begin{cases}xy>0,\\y<x,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0,\\y>0,\end{cases}$ ∴"$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$"是"$x>y$"的既不充分也不必要条件，故 D 错误. 故选 A.]

考向 3 **典例** 3 **解**：由 $x^2-8x-20\leqslant 0$，得 $-2\leqslant x\leqslant 10$，

∴$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 10\}$.

由 $x\in A$ 是 $x\in B$ 的必要条件，知 $B\subseteq A$.

则 $\begin{cases}1-m\leqslant 1+m,\\1-m\geqslant -2,\\1+m\leqslant 10,\end{cases}$ ∴$0\leqslant m\leqslant 3$.

∴当 $0\leqslant m\leqslant 3$ 时，$x\in A$ 是 $x\in B$ 的必要条件，

即所求 m 的取值范围是 $[0,3]$.

拓展变式

解：由原题知 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 10\}$，∵$x\in A$ 是 $x\in B$ 的充分条件，∴$A\subseteq B$，

∴$\begin{cases}1-m\leqslant 1+m,\\1-m\leqslant -2,\\1+m\geqslant 10,\end{cases}$ 解得 $m\geqslant 9$.

故 m 的取值范围是 $[9,+\infty)$.

跟进训练

1.(1)**D** (2)**D** (3)$ac<0$ [(1)$\ln(x+1)<0$ 等价于 $0<x+1<1$，即 $-1<x<0$，因为 $-1<x<0$ 可以推出 $x<0$，而 $x<0$ 不能推出 $-1<x<0$，所以 $x<0$ 是 $-1<x<0$ 的必要不充分条件，所以“$\ln(x+1)<0$”的一个必要不充分条件是“$x<0$”.

(2)由 $x^2-3x+2\leqslant 0$，得 $1\leqslant x\leqslant 2$，

由 $x^2-4x+4-m^2\leqslant 0$，得 $2-|m|\leqslant x\leqslant 2+|m|$，

若 p 是 q 的充分不必要条件，

则 $\begin{cases}2-|m|\leqslant 1,\\2+|m|>2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2-|m|<1,\\2+|m|\geqslant 2,\end{cases}$

解得 $|m|\geqslant 1$，所以 $m\leqslant -1$ 或 $m\geqslant 1$.

故选 D.

(3)$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有一个正根和一个负根的充要条件是 $\begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0,\\\dfrac{c}{a}<0,\end{cases}$ 即 $ac<0$.]

考点二

考向 1 典例 4 (1)**C** (2)存在一个奇数，它的立方不是奇数 [(1)因为命题 p 的否定为“$\exists x<0,x+2>2^x$”，所以命题 p 为“$\forall x<0,x+2\leqslant 2^x$”. 故选 C.

(2)命题的否定为：存在一个奇数，它的立方不是奇数.]

考向 2 典例 5 ACD [当 $x=1$ 时，$(x-1)^2=0$，故 B 为假命题，其余都是真命题，故选 ACD.]

考向 3 典例 6 $(-4,0)$ [**法一**：若 p 为真命题，即 $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-mx-m\leqslant 0$，∴$\Delta=m^2+4m\geqslant 0$，∴$m\geqslant 0$ 或 $m\leqslant -4$，

∴当 p 为假命题时，$-4<m<0$.

法二：∵p 为假命题，

∴$\neg p$：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-mx-m>0$ 为真命题，

即 $\Delta=m^2+4m<0$，∴$-4<m<0$.]

跟进训练

2.(1)**B** (2)1 [(1)全称量词命题的否定是存在量词命题，所以 $\neg p$：$\exists x\geqslant 0$，$e^x<1$，故选 B.

(2)因为函数 $y=\tan x$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上是增函数，所以 $y_{\max}=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$. 依题意知，$m\geqslant y_{\max}$，即 $m\geqslant 1$. 所以 m 的最小值为 1.]

第 3 课时 不等式的性质与一元二次不等式

梳理 · 必备知识

1.$>$ $=$ $<$

2.$b<a$ $a>c$ $a+c>b+c$ $ac>bc$ $ac<bc$ $a+c>b+d$ $ac>bd$

3.$\{x|x<x_1$ 或 $x>x_2\}$ $\{x|x_1<x<x_2\}$ $\varnothing$ $\varnothing$

激活 · 基本技能

一、(1)× (2)√ (3)√ (4)×

二、1.**C** [由方程 $(x-1)(x-3)=0$，可得方程的两根为 $x_1=1$，$x_2=3$，结合一元二次不等式的解法，可得不等式 $(x-1)\cdot(x-3)>0$ 的解集为 $\{x|x<1$ 或 $x>3\}$，故选 C.]

2.**A** [向糖水中加入 m g 水，糖水的浓度变为 $\dfrac{a}{b+m}$，此时浓度变小，糖水变淡，即 $\dfrac{a}{b+m}<\dfrac{a}{b}$，故选 A.]

3.(1)$<$ (2)$<$ (3)$>$

4.$(-6,5)$ [∵$-3<b<5$，∴$-5<-b<3$，

又 $-1<a<2$，∴$-6<a-b<5$.]

考点一

典例 1 B [**法一**(作差法)：

$a-b=\dfrac{\ln 3}{3}-\dfrac{\ln 4}{4}=\dfrac{4\ln 3-3\ln 4}{12}=\dfrac{\ln 81-\ln 64}{12}>0$，

$b-c=\dfrac{\ln 4}{4}-\dfrac{\ln 5}{5}=\dfrac{5\ln 4-4\ln 5}{20}=\dfrac{\ln 1\,024-\ln 625}{20}>0$，

所以 $a>b>c$.

法二(作商法)：

易知 a,b,c 都是正数，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{3\ln 4}{4\ln 3}=\log_{81}64<1$，所以 $a>b$；$\dfrac{b}{c}=\dfrac{5\ln 4}{4\ln 5}=\log_{625}1\,024>1$，所以 $b>c$. 即 $c<b<a$.

法三(单调性法)：

对于函数 $y=f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

易知当 $x>e$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减.

因为 $e<3<4<5$，

所以 $f(3)>f(4)>f(5)$，即 $c<b<a$.]

跟进训练

1.(1)**B** (2)$a^ab^b>a^bb^a$ [(1)$p-q=\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}-a-b=\dfrac{b^2-a^2}{a}+\dfrac{a^2-b^2}{b}=(b^2-a^2)\cdot\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$

$=\dfrac{(b^2-a^2)(b-a)}{ab}=\dfrac{(b-a)^2(b+a)}{ab}$，

因为 $a<0,b<0$，所以 $a+b<0,ab>0$.

又 $(b-a)^2\geqslant 0$，所以 $p-q\leqslant 0$.

综上，$p\leqslant q$.

(2)因为 $\dfrac{a^ab^b}{a^bb^a}=\dfrac{a^{a-b}}{b^{a-b}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}$，

又 $a>b>0$，故 $\dfrac{a}{b}>1$，$a-b>0$，

所以 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，即 $\dfrac{a^ab^b}{a^bb^a}>1$，

又 $a^bb^a>0$，所以 $a^ab^b>a^bb^a$.]

考点二

典例 2 (1)**D** (2)**ABD** [(1)对选项 A，$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b-a}{ab}$，因为 $a<b<0$，所以 $ab>0$，$b-a>0$，即 $\dfrac{b-a}{ab}>0$，所以 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$，故 A 错误；对选项 B，$a-\dfrac{1}{b}-\left(b-\dfrac{1}{a}\right)=a-b+\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=$

$(a-b)\cdot\frac{ab-1}{ab}$,因为 $a<b<0$,所以 $a-b<0$,$ab>0$,不能判断 ab 与 1 之间的关系,故 B 不正确;对选项 C,因为 $b-a>0$,所以 $\ln(b-a)$ 的取值范围为 $\mathbf{R}$,故 C 错误;对选项 D,因为 $a<b<0$,所以 $\frac{a}{b}>0$,$\frac{b}{a}>0$,因为 $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{a^2-b^2}{ab}>0$,

所以 $\frac{a}{b}>\frac{b}{a}$,又因为 $c>0$,所以 $y=x^c$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $\left(\frac{a}{b}\right)^c>\left(\frac{b}{a}\right)^c$,故 D 正确. 故选 D.

(2)因为 $-1<2x-y<4$,所以 $-2<4x-2y<8$. 因为 $-3<x+2y<2$,所以 $-5<5x<10$,则 $-1<x<2$,故 A 正确;

因为 $-3<x+2y<2$,所以 $-6<2x+4y<4$.

因为 $-1<2x-y<4$,所以 $-4<-2x+y<1$,

所以 $-10<5y<5$,所以 $-2<y<1$,故 B 正确;

因为 $-3<x+2y<2$,$-1<2x-y<4$,

所以 $-\frac{9}{5}<\frac{3}{5}(x+2y)<\frac{6}{5}$,$-\frac{1}{5}<\frac{1}{5}(2x-y)<\frac{4}{5}$,

则 $-2<x+y<2$,故 C 错误;

因为 $-3<x+2y<2$,$-1<2x-y<4$,

所以 $-\frac{2}{5}<-\frac{1}{5}(x+2y)<\frac{3}{5}$,$-\frac{3}{5}<\frac{3}{5}(2x-y)<\frac{12}{5}$,则 $-1<x-y<3$,故 D 正确. 故选 ABD.]

跟进训练

2.(1)**ABD**　(2)$(-24,45)$　$\left(\frac{1}{3},4\right)$

[(1)对于 A,若 $ac^2>bc^2$,因为 $c^2>0$,所以 $a>b$,故 A 正确;对于 B,若 $bc-ad\geqslant0$,$bd>0$,则 $\frac{bc-ad}{bd}\geqslant0$,化为 $\frac{c}{d}\geqslant\frac{a}{b}$,可得 $\frac{a+b}{b}\leqslant\frac{c+d}{d}$,故 B 正确;对于 C,若 $a<b<0$,所以 $a^2>b^2>0$,$ab>0$,则 $\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=\frac{b^2-a^2}{ab}<0$,故 $\frac{b}{a}<\frac{a}{b}$,故 C 错误;对于 D,若 $a>b$,$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$,则 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}>0$,所以 $ab<0$,所以 $a>0$,$b<0$,故 D 正确.

(2)因为 $15<b<36$,所以 $-36<-b<-15$.

又 $12<a<60$,

所以 $12-36<a-b<60-15$,

所以 $-24<a-b<45$,

即 $a-b$ 的取值范围是 $(-24,45)$.

因为 $\frac{1}{36}<\frac{1}{b}<\frac{1}{15}$,所以 $\frac{12}{36}<\frac{a}{b}<\frac{60}{15}$,即 $\frac{1}{3}<\frac{a}{b}<4$,

所以 $\frac{a}{b}$ 的取值范围是 $\left(\frac{1}{3},4\right)$.]

考点三

典例 3　(1)$\{x|-2\leqslant x<-1$ 或 $2<x\leqslant3\}$　[原不等式等价于 $\begin{cases}x^2-x-2>0,\\x^2-x-2\leqslant4,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x^2-x-2>0,\\x^2-x-6\leqslant0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x>2\text{ 或 }x<-1,\\-2\leqslant x\leqslant3.\end{cases}$

故原不等式的解集为 $\{x|-2\leqslant x<-1$ 或 $2<x\leqslant3\}$.]

(2)**解**:原不等式可化为 $(x-a)(x-1)<0$.

当 $a>1$ 时,原不等式的解集为 $\{x|1<x<a\}$;

当 $a=1$ 时,原不等式的解集为 $\varnothing$;

当 $a<1$ 时,原不等式的解集为 $\{x|a<x<1\}$.

拓展变式

解:原不等式可化为 $(ax-1)(x-1)<0$.

因为 $a>0$,所以 $a\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)<0$.

所以,当 $a>1$ 时,解得 $\frac{1}{a}<x<1$;

当 $a=1$ 时,解集为 $\varnothing$;

当 $0<a<1$ 时,解得 $1<x<\frac{1}{a}$.

综上,当 $0<a<1$ 时,不等式的解集为 $\left\{x\middle|1<x<\frac{1}{a}\right\}$;

当 $a=1$ 时,不等式的解集为 $\varnothing$;

当 $a>1$ 时,不等式的解集为 $\left\{x\middle|\frac{1}{a}<x<1\right\}$.

跟进训练

3.(1)**B**　(2)$\{x\mid x\geqslant3$ 或 $x\leqslant2\}$　[(1)$\frac{1-x}{2+x}\geqslant0$ 等价于 $\begin{cases}(1-x)(2+x)\geqslant0,\\2+x\neq0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-1)(x+2)\leqslant0,\\x+2\neq0,\end{cases}$

$\therefore -2<x\leqslant1$,即解集为 $(-2,1]$. 故选 B.

(2)由题意,知 $-\frac{1}{2}$,$-\frac{1}{3}$ 是方程 $ax^2-bx-1=0$ 的两个根,且 $a<0$,

所以 $\begin{cases}-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{b}{a},\\-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{-1}{a},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-6,\\b=5.\end{cases}$ 故不等式 $x^2-bx-a\geqslant0$ 为 $x^2-5x+6\geqslant0$,解得 $x\geqslant3$ 或 $x\leqslant2$.]

(3)**解**:$\Delta=a^2-4$.

①当 $\Delta=a^2-4\leqslant0$,即 $-2\leqslant a\leqslant2$ 时,原不等式无解.

②当 $\Delta=a^2-4>0$,即 $a>2$ 或 $a<-2$ 时,方程 $x^2+ax+1=0$ 的两根为 $x_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}$,$x_2=\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}$,

则原不等式的解集为

$\left\{x\middle|\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}<x<\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right\}$.

综上所述,当 $-2\leqslant a\leqslant2$ 时,原不等式无解.

当 $a>2$ 或 $a<-2$ 时,原不等式的解集为

$\left\{x\middle|\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}<x<\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right\}$.

第 4 课时　基本不等式

梳理 · 必备知识

1.(1)$a>0$,$b>0$　(2)$a=b$　(3)$\frac{a+b}{2}$　$\sqrt{ab}$

2.(1)$2\sqrt{p}$　(2)$\frac{q^2}{4}$

激活·基本技能

一、(1)× (2)× (3)× (4)×

二、1. **C** [$xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=81$,当且仅当 $x=y=9$ 时,等号成立.故选 C.]

2. **D** [$\because x>2$,

$\therefore x+\frac{1}{x-2}=x-2+\frac{1}{x-2}+2\geqslant2\sqrt{(x-2)\cdot\frac{1}{x-2}}+2=4$,

当且仅当 $x-2=\frac{1}{x-2}$,即 $x=3$ 时,等号成立.故选 D.]

3. **BC** [当 $\frac{b}{a}<0$ 时,A 不成立;当 $ab<0$ 时,D 不成立.]

4. 15 $\frac{15}{2}$ [设矩形的长为 x m,宽为 y m.则 $x+2y=30(0<x\leqslant18)$,所以 $S=xy=\frac{1}{2}x\cdot2y\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{x+2y}{2}\right)^2=\frac{225}{2}$,当且仅当 $x=2y$,即 $x=15,y=\frac{15}{2}$ 时取等号.]

考点一

考向 1 典例 1 (1)**D** (2)5 (3)$2\sqrt{3}+2$ [(1)$y=x(3-2x)\leqslant\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2x+3-2x}{2}\right)^2=\frac{9}{8}$.当且仅当 $2x=3-2x$,即 $x=\frac{3}{4}$ 时等号成立.

(2)$\because x>\frac{5}{4}$,$\therefore 4x-5>0$,

$\therefore f(x)=4x-2+\frac{1}{4x-5}=4x-5+\frac{1}{4x-5}+3\geqslant2+3=5$,当且仅当 $4x-5=\frac{1}{4x-5}$,即 $x=\frac{3}{2}$ 时取等号.

(3)因为 $x>1$,所以 $x-1>0$,则

$y=\frac{x^2+2}{x-1}=\frac{(x^2-2x+1)+(2x-2)+3}{x-1}$

$=\frac{(x-1)^2+2(x-1)+3}{x-1}$

$=(x-1)+\frac{3}{x-1}+2\geqslant2\sqrt{3}+2$.

当且仅当 $x-1=\frac{3}{x-1}$,即 $x=\sqrt{3}+1$ 时,取等号.]

考向 2 典例 2 9 [$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=\left(1+\frac{a+b}{a}\right)\left(1+\frac{a+b}{b}\right)=\left(2+\frac{b}{a}\right)\left(2+\frac{a}{b}\right)=5+2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqslant5+4=9$.当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时,等号成立.]

拓展变式

(1)4 (2)$\frac{11}{4}+\frac{\sqrt{10}}{2}$ [(1)因为 $a>0,b>0,a+b=1$,

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=4$,即 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 4,当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时等号成立.

(2)由 $4a+b=4$ 得 $a+\frac{b}{4}=1$,

$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=\left(1+\frac{a+\frac{b}{4}}{a}\right)\left(1+\frac{a+\frac{b}{4}}{b}\right)=\left(2+\frac{b}{4a}\right)\left(\frac{5}{4}+\frac{a}{b}\right)=\frac{5}{2}+\frac{2a}{b}+\frac{5b}{16a}+\frac{1}{4}\geqslant\frac{11}{4}+2\sqrt{\frac{5}{8}}=\frac{11}{4}+\frac{\sqrt{10}}{2}$.当且仅当 $4\sqrt{2}a=\sqrt{5}b$ 时,等号成立.]

考向 3 典例 3 6 [**法一**(换元消元法):

由已知得 $x+3y=9-xy$,$\because x>0,y>0$,

$\therefore x+3y\geqslant2\sqrt{3xy}$,$\therefore 3xy\leqslant\left(\frac{x+3y}{2}\right)^2$,

当且仅当 $x=3y$,即 $x=3,y=1$ 时取等号,

$\therefore x+3y+\frac{1}{3}\left(\frac{x+3y}{2}\right)^2\geqslant9$,

即 $(x+3y)^2+12(x+3y)-108\geqslant0$,

令 $x+3y=t$,则 $t>0$ 且 $t^2+12t-108\geqslant0$,

解得 $t\geqslant6$,即 $x+3y$ 的最小值为 6.

法二(代入消元法):

由 $x+3y+xy=9$,得 $x=\frac{9-3y}{1+y}$,

$\therefore x+3y=\frac{9-3y}{1+y}+3y=\frac{9-3y+3y(1+y)}{1+y}$

$=\frac{9+3y^2}{1+y}=\frac{3(1+y)^2-6(1+y)+12}{1+y}$

$=3(1+y)+\frac{12}{1+y}-6$

$\geqslant2\sqrt{3(1+y)\cdot\frac{12}{1+y}}-6$

$=12-6=6$,

当且仅当 $3(1+y)=\frac{12}{1+y}$,即 $x=3,y=1$ 时等号成立,

$\therefore x+3y$ 的最小值为 6.]

跟进训练

1. (1)**BC** (2)4 [(1)由 $x^2+y^2-xy=1$,可得 $(x+y)^2-3xy=1$,而 $xy\leqslant\frac{(x+y)^2}{4}$,

即 $1=(x+y)^2-3xy\geqslant(x+y)^2-\frac{3(x+y)^2}{4}=\frac{(x+y)^2}{4}$,

$\therefore (x+y)^2\leqslant4$,$\therefore -2\leqslant x+y\leqslant2$,故 A 错误,B 正确;

由 $x^2+y^2-xy=1$,得 $x^2+y^2-1=xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}$,

$\therefore x^2+y^2\leqslant2$,故 C 正确,D 错误,故选 BC.

(2)令 $x-1=m,2y-1=n$,

则 $m>0,n>0$ 且 $m+n=x-1+2y-1=1$,

$\therefore \frac{1}{x-1}+\frac{1}{2y-1}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)(m+n)$

$=2+\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\geqslant2+2=4$,

当且仅当 $\frac{n}{m}=\frac{m}{n}$,即 $m=n=\frac{1}{2}$,$x=\frac{3}{2}$,$y=\frac{3}{4}$ 时取等号.

$\therefore \frac{1}{x-1}+\frac{1}{2y-1}$ 的最小值为 4.]

考点二

典例 4 **解**:(1)由题意知,当 $m=0$ 时,$x=1$,

所以 $1=3-k\Rightarrow k=2$,

所以 $x=3-\dfrac{2}{m+1}$，每万件产品的销售价格为 $1.5\times\dfrac{8+16x}{x}$（万元），

所以明年的利润 $y=1.5x\times\dfrac{8+16x}{x}-8-16x-m=4+8x-m=4+8\left(3-\dfrac{2}{m+1}\right)-m=-\left[\dfrac{16}{m+1}+(m+1)\right]+29(m\geqslant0)$.

(2)因为 $m\geqslant0$ 时，$\dfrac{16}{m+1}+(m+1)\geqslant2\sqrt{\dfrac{16}{m+1}\cdot(m+1)}=2\sqrt{16}=8$，

所以 $y\leqslant-8+29=21$，

当且仅当 $\dfrac{16}{m+1}=m+1$，即 $m=3$ 时，$y_{\max}=21$.

故该厂家明年的促销费用投入 3 万元时，厂家的利润最大，为 21 万元.

跟进训练

2.(1)**B**　(2)30　[(1)由题意得，

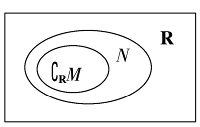
$N=\dfrac{1\ 000v}{0.7v+0.3v^2+30}=\dfrac{1\ 000}{0.7+0.3v+\dfrac{30}{v}}\leqslant\dfrac{1\ 000}{0.7+2\sqrt{0.3v\times\dfrac{30}{v}}}\approx149$，当且仅当 $0.3v=\dfrac{30}{v}$，即 $v=10$ 时取等号，所以该道路 1 h“道路容量”的最大值约为 149. 故选 B.

(2)由题意得，一年购买 $\dfrac{600}{x}$ 次，则总运费与总存储费用之和为 $6\cdot\dfrac{600}{x}+4x=4\left(\dfrac{900}{x}+x\right)\geqslant8\sqrt{\dfrac{900}{x}\cdot x}=240$（万元），当且仅当 $x=30$ 时取等号，故总运费与总存储费用之和最小时，x 的值是 30.]

高考研究在线 1　预备知识在高考中的五大创新命题点

命题点一

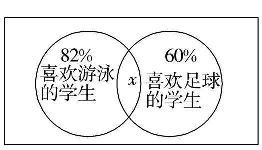
典例 1　(1)**D**　(2)**C**　[(1)由题意知，$\complement_{\mathbf{R}}M\subseteq N$，其 Venn 图如图所示，



∴只有 $\complement_{\mathbf{R}}N\subseteq M$ 正确. 故选 D.

(2)设既喜欢足球又喜欢游泳的学生所占比例为 x.

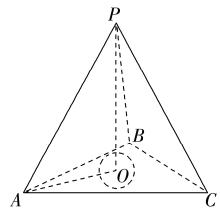
由 Venn 图可知，$82\%-x+60\%=96\%$，



解得 $x=46\%$，故选 C.]

命题点二

典例 2　**B**　[如图，过点 P 作 $PO\perp$ 平面 ABC，O 为垂足，则由题意知，$AO=2\sqrt{3}$，$PA=6$，所以 $PO=2\sqrt{6}$，当 AO 上存在一点 Q 使得 $PQ=5$，此时 $QO=1$，则动点 Q 在以 QO 为半径，O 为圆心的圆上及圆内，所以 T 表示的区域的面积为 π. 故选 B.



]

命题点三

典例 3　**A**　[因为 $1\times3>0$，$1+3\neq2$，又四个命题三真一假，故甲、乙必有一个是假命题，若甲为假命题，易知符合题意，若乙为假命题推出矛盾. 故选 A.]

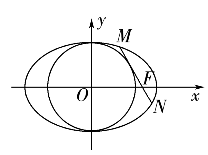
命题点四

典例 4　**ABD**　[对于选项 A，∵$a^2+b^2\geqslant2ab$，∴$2(a^2+b^2)\geqslant a^2+b^2+2ab=(a+b)^2=1$，∴$a^2+b^2\geqslant\dfrac{1}{2}$，A 正确；对于选项 B，易知 $0<a<1$，$0<b<1$，∴$-1<a-b<1$，∴$2^{a-b}>2^{-1}=\dfrac{1}{2}$，B 正确；对于选项 C，令 $a=\dfrac{1}{4}$，$b=\dfrac{3}{4}$，则 $\log_2\dfrac{1}{4}+\log_2\dfrac{3}{4}=-2+\log_2\dfrac{3}{4}<-2$，C 错误；对于选项 D，∵$\sqrt{2}=\sqrt{2(a+b)}$，∴$[\sqrt{2(a+b)}]^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant0$，∴$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$，D 正确. 故选 ABD.]

命题点五

典例 5　(1)**解**：由题意知 $\begin{cases}c=\sqrt{2},\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3},\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{3},\\ b=1,\end{cases}$ 故椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$.

(2)**证明**：证必要性，如图，当 M,N,F 三点共线时，设直线 MN 的方程为 $x=my+\sqrt{2}$，



圆心 $O(0,0)$ 到 MN 的距离 $d=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+1}}=1\Rightarrow m^2=1$，

联立 $\begin{cases}x=my+\sqrt{2},\\ x^2+3y^2=3\end{cases}\Rightarrow(m^2+3)y^2+2\sqrt{2}my-1=0\Rightarrow4y^2+2\sqrt{2}my-1=0$，$\Delta=8m^2+16$，∴$y_1+y_2=-\dfrac{\sqrt{2}m}{2}$，$y_1y_2=-\dfrac{1}{4}$，

$|MN|=\sqrt{1+m^2}\cdot\dfrac{\sqrt{8m^2+16}}{4}=\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{24}}{4}=\sqrt{3}$，必要性成立.

证充分性，当 $|MN|=\sqrt{3}$ 时，设直线 MN 的方程为 $x=ty+m$，

此时圆心 $O(0,0)$ 到 MN 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{t^2+1}}=1$，$m^2-t^2=1$，

联立 $\begin{cases}x=ty+m,\\x^2+3y^2=3\end{cases}\Rightarrow(t^2+3)y^2+2tmy+m^2-3=0$，

$\Delta=4t^2m^2-4(t^2+3)(m^2-3)=12(t^2-m^2+3)=24$，$y_1+y_2=-\frac{2tm}{t^2+3}$，$y_1y_2=\frac{m^2-3}{t^2+3}$，

且 $|MN|=\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{\sqrt{24}}{t^2+3}=\sqrt{3}\Rightarrow t^2=1$，

$\therefore m^2=2$，

$\because MN$ 与曲线 $x^2+y^2=b^2(x>0)$ 相切，

$\therefore m>0$，$m=\sqrt{2}$，

$\therefore$ 直线 MN 的方程为 $x=ty+\sqrt{2}$，MN 恒过点 $F(\sqrt{2},0)$，

$\therefore M,N,F$ 三点共线，充分性得证，证毕.

第二章　函数的概念与性质

第1课时　函数的概念及其表示

梳理·必备知识

1. 实数集　任意一个数 x　唯一　x　$\{f(x)|x\in A\}$
2. 定义域　对应关系
3. 解析法　图象法　列表法
4. 不同　不同的式子

激活·基本技能

一、(1)×　(2)×　(3)×　(4)×

二、1. **A**　[$f(f(-1))=f(2)=16$. 故选 A.]

2. **B**　[函数 $f(x)=|x-1|=\begin{cases}x-1,x\geqslant1,\\1-x,x<1.\end{cases}$

结合选项可知，选项 B 正确. 故选 B.]

3. **AC**　[$f(x)=\sqrt{-x^3}$ 与 $g(x)=x\sqrt{-x}$ 的值域不同；$f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$ 的对应关系不同，故 BD 错误，AC 正确.]

4. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$　1　[要使函数 $f(x)$ 有意义，必须使 $x\neq0$，

故 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

由 $f(a)=2$ 得 $a+\frac{1}{a}=2$，解得 $a=1$.]

考点一

典例 1　(1)**B**　(2)$[1,3]$　[(1)要使函数 $f(x)$ 有意义，则 $\begin{cases}x-1>0,\\2x-x^2>0,\end{cases}$ 解得 $1<x<2$.

所以函数 $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x-1}}+\ln(2x-x^2)$ 的定义域为 $(1,2)$. 故选 B.

(2)$\because f(x)$ 的定义域为 $[0,2]$，$\therefore 0\leqslant x-1\leqslant2$，即 $1\leqslant x\leqslant3$，

$\therefore$ 函数 $f(x-1)$ 的定义域为 $[1,3]$.]

拓展变式

$[2,4]$　[$\because f(x+1)$ 的定义域为 $[0,2]$，

$\therefore 0\leqslant x\leqslant2$，

$\therefore 1\leqslant x+1\leqslant3$，$\therefore 1\leqslant x-1\leqslant3$，$\therefore 2\leqslant x\leqslant4$，

$\therefore f(x-1)$ 的定义域为 $[2,4]$.]

跟进训练

1. (1)**C**　(2)$[0,4]$　[(1)由条件可知 $\begin{cases}0\leqslant3x\leqslant6,\\x-2\neq0,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant x<2$，所以函数 $g(x)$ 的定义域为 $[0,2)$，故选 C.

(2)由题意可得 $mx^2+mx+1\geqslant0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

当 $m=0$ 时，$1\geqslant0$ 恒成立；

当 $m\neq0$ 时，则 $\begin{cases}m>0,\\\Delta=m^2-4m\leqslant0,\end{cases}$ 解得 $0<m\leqslant4$.

综上可得 $0\leqslant m\leqslant4$.]

考点二

典例 2　解：(1)(换元法)设 $1-\sin x=t$，$t\in[0,2]$，

则 $\sin x=1-t$.

$\because f(1-\sin x)=\cos^2x=1-\sin^2x$，

$\therefore f(t)=1-(1-t)^2=2t-t^2$，$t\in[0,2]$.

即 $f(x)=2x-x^2$，$x\in[0,2]$.

(2)(配凑法)$\because f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$，

$\therefore f(x)=x^2-2$，$x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

(3)(待定系数法)设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$，

由 $f(0)=2$，得 $c=2$，

$f(x+1)-f(x)=a(x+1)^2+b(x+1)+2-ax^2-bx-2=x-1$，即 $2ax+a+b=x-1$，

所以 $\begin{cases}2a=1,\\a+b=-1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\b=-\frac{3}{2}.\end{cases}$

所以 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2$.

(4)(构造法)$\because 2f(x)+f(-x)=3x$，　①

$\therefore$ 将 x 用 $-x$ 替换，

得 $2f(-x)+f(x)=-3x$，　②

由①②解得 $f(x)=3x$.

跟进训练

2. (1)$x^2-4x+3(x\geqslant1)$　(2)$-\frac{2x}{3}-\frac{4}{3x}$　(3)$4x+1$

[(1)**法一**(换元法)：令 $t=\sqrt{x}+1$，则 $t\geqslant1$，$x=(t-1)^2$，

代入原式有 $f(t)=(t-1)^2-2(t-1)=t^2-4t+3$，

所以 $f(x)=x^2-4x+3(x\geqslant1)$.

法二(配凑法)：$f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}+1-4\sqrt{x}-4+3=(\sqrt{x}+1)^2-4(\sqrt{x}+1)+3$，

因为 $\sqrt{x}+1\geqslant1$，所以 $f(x)=x^2-4x+3(x\geqslant1)$.

(2)因为 $f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=2x$，　①

以 $\frac{1}{x}$ 代替①中的 x，得 $f\left(\frac{1}{x}\right)-2f(x)=\frac{2}{x}$，　②

①+②×2 得 $-3f(x)=2x+\frac{4}{x}$，

所以 $f(x)=-\frac{2x}{3}-\frac{4}{3x}$.

(3)$\because f(x)$为单调递增的一次函数,$\therefore$设 $f(x)=ax+b,a>0$,故 $f(f(x))=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b=16x+5$,$\therefore a^2=16,ab+b=5$,解得 $a=4,b=1$ 或 $a=-4,b=-\frac{5}{3}$(不合题意,舍去).因此 $f(x)=4x+1$.]

考点三

考向1　典例3　(1)$\frac{1}{\mathrm{e}}$　(2)2　[(1)$\because f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x+1},x\leqslant 0,\\ f(x-4),x>0,\end{cases}$

$\therefore f(2\,022)=f(2\,018)=f(2\,014)=\cdots=f(2)=f(-2)=\mathrm{e}^{-2+1}=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

(2)因为$\sqrt{6}>2$,所以 $f(\sqrt{6})=6-4=2$,

所以 $f(f(\sqrt{6}))=f(2)=1+a=3$,解得 $a=2$.]

考向2　典例4　(1)**D**　(2)$\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$　[(1)由分段函数的结构知,$f(x)$的定义域是$(-1,+\infty)$,所以 $a>0$.

①当 $0<a<1$ 时,$-1<a-1<0$,则 $f(a)=f(a-1)$可化为 $2a=\sqrt{a}$,解得 $a=\frac{1}{4}$,

$\therefore f\left(\frac{1}{a}\right)=f(4)=8$;

②当 $a\geqslant 1$ 时,$a-1\geqslant 0$,则 $f(a)=f(a-1)$可化为 $2a=2(a-1)$,方程无解.故选 D.

(2)当 $x\leqslant 0$ 时,$x+1\leqslant 1$,$f(x)<f(x+1)\Leftrightarrow x^2-1<(x+1)^2-1$,解得$-\frac{1}{2}<x\leqslant 0$.

当 $0<x\leqslant 1$ 时,$x+1>1$,此时 $f(x)=x^2-1\leqslant 0$,$f(x+1)=\log_2(x+1)>0$.

$\therefore 0<x\leqslant 1$ 恒成立;

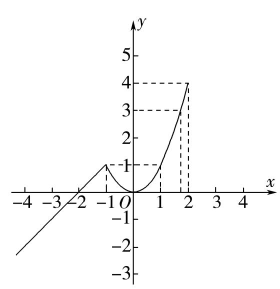
当 $x>1$ 时,$f(x)<f(x+1)$恒成立.

综上知,$f(x)<f(x+1)$的解集为$\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$.]

跟进训练

3.(1)**B**　(2)$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

[(1)因为 $f(x)=\begin{cases}x+2,x\leqslant -1,\\ x^2,-1<x<2,\end{cases}$ 函数图象如图所示:



由图可知 $f(0)=0$,故 A 错误;$f(x)$的值域为$(-\infty,4)$,故 B 正确;由 $f(x)<1$ 解得 x 的取值范围为$(-\infty,-1)\cup(-1,1)$,故 C 错误;$f(x)=3$,即$\begin{cases}x^2=3,\\ -1<x<2,\end{cases}$解得 $x=\sqrt{3}$,故 D 错误;

故选 B.

(2)由题意知,$a\neq 0$,当 $a>0$ 时,不等式 $a[f(a)-f(-a)]>0$ 可化为 $a^2+a-3a>0$,解得 $a>2$.当 $a<0$ 时,不等式 $a[f(a)-f(-a)]>0$ 可化为$-a^2-2a<0$,解得 $a<-2$.综上所述,a 的取值范围为$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.]

第2课时　函数的单调性与最值

梳理·必备知识

1.(1)$f(x_1)<f(x_2)$　$f(x_1)>f(x_2)$　(2)单调递增　单调递减　区间 I

2.$f(x)\leqslant M$　$f(x_0)=M$　$f(x)\geqslant M$　$f(x_0)=M$

激活·基本技能

一、(1)×　(2)×　(3)×　(4)√

二、1.**C**

2.$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$　[因为函数 $y=(2k+1)x+b$ 在 **R** 上是减函数,所以 $2k+1<0$,即 $k<-\frac{1}{2}$.]

3.$(-\infty,2]$　[由题意知,$[2,+\infty)\subseteq[m,+\infty)$,$\therefore m\leqslant 2$.]

4.$-\frac{2}{5}$　-2　[可判断函数 $f(x)=\frac{2}{1-x}$在区间$[2,6]$上单调递增,所以 $f(x)_{\max}=f(6)=-\frac{2}{5}$,$f(x)_{\min}=f(2)=-2$.]

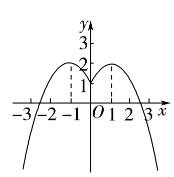
考点一

典例1　(1)**A**　(2)$(-\infty,-1]$和$[0,1]$　[(1)由$-x^2+x+6>0$,得$-2<x<3$,故函数 $f(x)$的定义域为$(-2,3)$,令 $t=-x^2+x+6$,则 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}t$,易知其为减函数,由复合函数的单调性法则可知,本题等价于求函数 $t=-x^2+x+6$ 在$(-2,3)$上的单调递减区间.利用二次函数的性质可得 $t=-x^2+x+6$ 在定义域$(-2,3)$上的单调递减区间为$\left(\frac{1}{2},3\right)$.故选 A.

(2)$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+1,x\geqslant 0,\\ -x^2-2x+1,x<0\end{cases}$

$=\begin{cases}-(x-1)^2+2,x\geqslant 0,\\ -(x+1)^2+2,x<0.\end{cases}$

画出函数图象如图所示,



可知单调递增区间为$(-\infty,-1]$和$[0,1]$.]

(3)**解:法一**(定义法):设$-1<x_1<x_2<1$,

$f(x)=a\left(\frac{x-1+1}{x-1}\right)=a\left(1+\frac{1}{x-1}\right)$,

$f(x_1)-f(x_2)=a\left(1+\frac{1}{x_1-1}\right)-a\left(1+\frac{1}{x_2-1}\right)=\frac{a(x_2-x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$,由于$-1<x_1<x_2<1$,

所以 $x_2-x_1>0$,$x_1-1<0$,$x_2-1<0$,

故当 $a>0$ 时,$f(x_1)-f(x_2)>0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$,函数 $f(x)$在$(-1,1)$上单调递减;

当 $a<0$ 时,$f(x_1)-f(x_2)<0$,

即 $f(x_1)<f(x_2)$，函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递增.

法二(导数法)：$f'(x)=\dfrac{(ax)'(x-1)-ax(x-1)'}{(x-1)^2}$

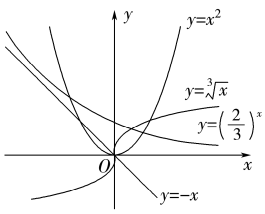
$=\dfrac{a(x-1)-ax}{(x-1)^2}=-\dfrac{a}{(x-1)^2}$.

当 $a>0$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减；

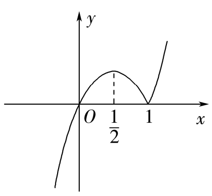
当 $a<0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递增.

跟进训练

1.(1)**D** (2)$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$(答案不唯一) [(1)如图，在坐标系中分别画出 A,B,C,D 四个选项中函数的大致图象，即可快速直观判断 D 项符合题意. 故选 D.



(2)$f(x)=\begin{cases}x^2-x,x\geqslant1,\\-x^2+x,x<1.\end{cases}$ 画出 $f(x)$ 的大致图象(如图所示)，由图知 $f(x)$ 的单调递减区间是 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.



当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)=x(x-1)=x^2-x$；当 $x<1$ 时，$f(x)=x(1-x)=-x^2+x$，$\therefore f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 上单调递减. 令 $f(x)=0$，解得 $x=1$ 或 $x=0$；令 $f(x)=2$，解得 $x=2$，$\therefore$ 只需 $I=[a,2]$，$0\leqslant a<1$ 或 $I=(b,2]$，$0\leqslant b<1$ 时，$f(x)$ 在 I 上不单调且函数值的集合为 $[0,2]$.]

(3)**解**：函数 $f(x)=ax^2+\dfrac{1}{x}(1<a<3)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增.

法一：设 $1\leqslant x_1<x_2\leqslant2$，则 $f(x_2)-f(x_1)=ax_2^2+\dfrac{1}{x_2}-ax_1^2-\dfrac{1}{x_1}=(x_2-x_1)\left[a(x_1+x_2)-\dfrac{1}{x_1x_2}\right]$，

由 $1\leqslant x_1<x_2\leqslant2$，得 $x_2-x_1>0$，$2<x_1+x_2<4$，$1<x_1x_2<4$，$-1<-\dfrac{1}{x_1x_2}<-\dfrac{1}{4}$.

又因为 $1<a<3$，

所以 $2<a(x_1+x_2)<12$，得 $a(x_1+x_2)-\dfrac{1}{x_1x_2}>0$，

从而 $f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x_2)>f(x_1)$，

故当 $a\in(1,3)$ 时，$f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递增.

法二：$f'(x)=2ax-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2ax^3-1}{x^2}$，

因为 $1\leqslant x\leqslant2$，所以 $1\leqslant x^3\leqslant8$，又 $1<a<3$，

所以 $2ax^3-1>0$，所以 $f'(x)>0$，所以函数 $f(x)=ax^2+\dfrac{1}{x}$(其中 $1<a<3$)在 $[1,2]$ 上单调递增.

考点二

考向1 典例2 **D** [因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称. 由此可得 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{5}{2}\right)$. 当 $x_2>x_1>1$ 时，$[f(x_2)-f(x_1)](x_2-x_1)<0$ 恒成立，知 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

因为 $1<2<\dfrac{5}{2}<\mathrm{e}$，所以 $f(2)>f\left(\dfrac{5}{2}\right)>f(\mathrm{e})$，所以 $b>a>c$.]

考向2 典例3 $(-\sqrt{5},-2)\cup(2,\sqrt{5})$ [因为函数 $f(x)=\ln x+2^x$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(1)=\ln 1+2=2$，所以由 $f(x^2-4)<2$ 得 $f(x^2-4)<f(1)$，所以 $0<x^2-4<1$，解得 $-\sqrt{5}<x<-2$ 或 $2<x<\sqrt{5}$.]

考向3 典例4 (1)**D** (2)$(1,2]$ [(1)由 $x^2-4x-5>0$，解得 $x>5$ 或 $x<-1$，所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$. 又函数 $y=x^2-4x-5$ 在 $(5,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，所以函数 $f(x)=\lg(x^2-4x-5)$ 在 $(5,+\infty)$ 上单调递增，所以 $a\geqslant5$，故选 D.

(2)由题意，得 $1^2+\dfrac{1}{2}a-2\leqslant0$，则 $a\leqslant2$，又 $y=a^x-a(x>1)$ 是增函数，故 $a>1$，所以 a 的取值范围为 $(1,2]$.]

跟进训练

2.(1)**D** (2)**AB** [(1)由题意得 $0\leqslant2x-1<\dfrac{1}{3}$，解得 $\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{2}{3}$.

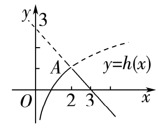
(2)由函数 $f(x)$ 满足 $f(-2-x)=f(x)$，则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称，又 $x_1,x_2\in[-1,+\infty)$，$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0(x_1\neq x_2)$，则函数 $f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上为减函数. 对于选项 A，因为 $|-3-(-1)|>|0-(-1)|$，所以 $f(0)>f(-3)$，即 A 正确；对于选项 B，由已知有 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上为增函数，在 $[-1,+\infty)$ 上为减函数，即 $f(x)_{\max}=f(-1)$，即 B 正确；对于选项 C，$a^2-a+1=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\geqslant\dfrac{3}{4}$，又 $f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上为减函数，所以 $f(a^2-a+1)\leqslant f\left(\dfrac{3}{4}\right)$，即 C 错误；对于选项 D，若 $f(m)<f(2)$，则 $|m-(-1)|>|2-(-1)|$，则 $m<-4$ 或 $m>2$，即 D 错误. 故选 AB.]

考点三

典例5 (1)3 (2)1 [(1)$\because f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-\log_2(x+2)$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调递减，

$\therefore f(x)_{\max}=f(-1)=3-\log_2 1=3$.

(2)**法一**(图象法)：在同一坐标系中，作函数 $f(x)$，$g(x)$ 的图象，依题意，$h(x)$ 的图象为如图所示的实线部分.



易知点$A(2,1)$为图象的最高点，

因此$h(x)$的最大值为$h(2)=1$.

法二(单调性法)：依题意，

$h(x)=\begin{cases}\log_2 x,0<x\leqslant 2,\\-x+3,x>2.\end{cases}$

当$0<x\leqslant 2$时，$h(x)=\log_2 x$是增函数，

当$x>2$时，$h(x)=3-x$是减函数，

因此$h(x)$在$x=2$时取得最大值$h(2)=1$.]

跟进训练

3.(1)**B**　(2)**D**　[(1)**法一**：设$\sqrt{1-2x}=t$，则$t\geqslant 0$，$x=\dfrac{1-t^2}{2}$，

所以$y=1+\dfrac{1-t^2}{2}-t=\dfrac{1}{2}(-t^2-2t+3)=-\dfrac{1}{2}(t+1)^2+2$.

因为$t\geqslant 0$，所以$y\leqslant\dfrac{3}{2}$.

所以函数$y=1+x-\sqrt{1-2x}$的值域为$\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$.

法二：因为$y=1+x-\sqrt{1-2x}$在定义域$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$上单调递增，所以$y=1+x-\sqrt{1-2x}$的值域为$\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$.

(2)当$x>0$时，$f(x)=x+\dfrac{1}{x}+a\geqslant 2+a$，当且仅当$x=\dfrac{1}{x}$，

即$x=1$时，等号成立，故当$x=1$时取得最小值$2+a$.

$\because f(x)$的最小值为$f(0)$，

$\therefore$当$x\leqslant 0$时，$f(x)=(x-a)^2$单调递减，故$a\geqslant 0$，

此时的最小值为$f(0)=a^2$，故$2+a\geqslant a^2$，得$-1\leqslant a\leqslant 2$.

又$a\geqslant 0$，得$0\leqslant a\leqslant 2$.故选D.]

第3课时　函数的奇偶性、周期性与对称性

梳理·必备知识

1.$f(-x)=f(x)$　y轴　$f(-x)=-f(x)$　原点

2.(1)$f(x+T)=f(x)$　(2)最小　最小正数

激活·基本技能

一、(1)×　(2)√　(3)√　(4)√

二、1.**BC**

2.$\dfrac{1}{2}$　[$\because f(x)$的周期为2，$\therefore f(2\ 023)=f(1)=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$.]

3.-1　$-2^{-x}-2x+1$　[$\because f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，

$\therefore f(0)=0$，即$1+a=0$，$\therefore a=-1$.

$\therefore$当$x\geqslant 0$时，$f(x)=2^x-2x-1$，设$x<0$，则$-x>0$，

$\therefore f(-x)=2^{-x}-2(-x)-1=2^{-x}+2x-1$，

又$f(x)$为奇函数，$\therefore f(-x)=-f(x)$，

$\therefore -f(x)=2^{-x}+2x-1$，$\therefore f(x)=-2^{-x}-2x+1$.]

4.$(-2,0)\cup(2,5]$　[由题图可知，当$0<x<2$时，$f(x)>0$；当$2<x\leqslant 5$时，$f(x)<0$，又$f(x)$是奇函数，$\therefore$当$-2<x<0$时，$f(x)<0$，当$-5\leqslant x<-2$时，$f(x)>0$.

综上，$f(x)<0$的解集为$(-2,0)\cup(2,5]$.]

考点一

考向1　典例1　解：(1)由$\begin{cases}3-x^2\geqslant 0,\\x^2-3\geqslant 0,\end{cases}$得$x^2=3$，解得$x=\pm\sqrt{3}$，

即函数$f(x)$的定义域为$\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$，

从而$f(x)=\sqrt{3-x^2}+\sqrt{x^2-3}=0$.

因此$f(-x)=-f(x)$且$f(-x)=f(x)$，

$\therefore$函数$f(x)$既是奇函数又是偶函数.

(2)由$\begin{cases}1-x^2>0,\\|x-2|\neq 2,\end{cases}$得定义域为$(-1,0)\cup(0,1)$，

$\therefore x-2<0$，$\therefore |x-2|-2=-x$，$\therefore f(x)=\dfrac{\lg(1-x^2)}{-x}$.

又$\because f(-x)=\dfrac{\lg[1-(-x)^2]}{x}$

$=-\dfrac{\lg(1-x^2)}{-x}=-f(x)$，

$\therefore$函数$f(x)$为奇函数.

(3)显然函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

$\because$当$x<0$时，$-x>0$，

则$f(-x)=-(-x)^2-x=-x^2-x=-f(x)$；

当$x>0$时，$-x<0$，

则$f(-x)=(-x)^2-x=x^2-x=-f(x)$.

综上可知：对于定义域内的任意x，总有$f(-x)=-f(x)$成立，$\therefore$函数$f(x)$为奇函数.

(4)显然函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，

$f(-x)=\log_2[-x+\sqrt{(-x)^2+1}]=\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)$

$=\log_2(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1}$

$=-\log_2(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)$，

故$f(x)$为奇函数.

考向2　典例2　(1)**D**　(2)**D**　(3)$(-2,-1)\cup(1,2)$

[(1)$\because$当$x\geqslant 0$时，$f(x)=e^x-1$，设$x<0$，则$-x>0$，

$\therefore f(-x)=e^{-x}-1$.

又$\because f(x)$为奇函数，

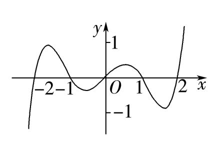
$\therefore f(x)=-f(-x)=-e^{-x}+1$.故选D.

(2)**法一**：$f(x)$的定义域为$\{x|x\neq 0\}$，因为$f(x)$是偶函数，所以$f(x)=f(-x)$，即$\dfrac{xe^x}{e^{ax}-1}=\dfrac{-xe^{-x}}{e^{-ax}-1}$，即$e^{(1-a)x}-e^x=-e^{(a-1)x}+e^{-x}$，即$e^{(1-a)x}+e^{(a-1)x}=e^x+e^{-x}$，所以$a-1=\pm 1$，解得$a=0$(舍去)或$a=2$，故选D.

法二：$f(x)=\dfrac{xe^x}{e^{ax}-1}=\dfrac{x}{e^{(a-1)x}-e^{-x}}$，$f(x)$是偶函数，又$y=x$是奇函数，所以$y=e^{(a-1)x}-e^{-x}$是奇函数，故$a-1=1$，即$a=2$，故选D.

(3)$\because xf(x)<0$，$\therefore x$和$f(x)$异号，

由于$f(x)$为奇函数，补齐函数的图象如图.



当$x\in(-2,-1)\cup(0,1)\cup(2,+\infty)$时，$f(x)>0$，

当$x\in(-\infty,-2)\cup(-1,0)\cup(1,2)$时，$f(x)<0$，

$\therefore$不等式$xf(x)<0$的解集为$(-2,-1)\cup(1,2)$.]

跟进训练

1.(1)**AD**　(2)**C**　[(1)因为函数$f(x)$，$g(x)$分别是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数、奇函数，且满足$f(x)+2g(x)=e^x$，　①

所以 $f(-x)+2g(-x)=e^{-x}$，

即 $f(x)-2g(x)=e^{-x}$. ②

联立①② $\begin{cases} f(x)+2g(x)=e^{x}, \\ f(x)-2g(x)=e^{-x}, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}, \\ g(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{4}, \end{cases}$

所以 $f(-2)=\dfrac{e^{-2}+e^{2}}{2}$，$f(-3)=\dfrac{e^{-3}+e^{3}}{2}$，$g(-1)=\dfrac{e^{-1}-e}{4}<0$，所以 $g(-1)<f(-2)$，$g(-1)<f(-3)$，故选 AD.

(2)依题意，令 $g(x)=x(e^{x}+e^{-x})$，

显然函数 $g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

则 $g(-x)=-x(e^{-x}+e^{x})=-g(x)$，

即函数 $g(x)$ 是奇函数，

因此，函数 $g(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值与最小值的和为 0，而 $f(x)=g(x)+1$，

则有 $M=g(x)_{\max}+1$，$N=g(x)_{\min}+1$，

于是得 $M+N=g(x)_{\max}+1+g(x)_{\min}+1=2$，

所以 $M+N$ 的值为 2.]

考点二

典例 3 (1)**A** (2)**D** (3)1 [(1)由 $f(x-2)=f(x+2)$，知 $y=f(x)$ 的周期 $T=4$，

又 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

$\therefore f\left(\dfrac{13}{2}\right)=f\left(8-\dfrac{3}{2}\right)=f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{9}{4}$.

(2)依题意，定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=f(x)-2$，所以 $f(x+1)+2(x+1)=f(x)+2x$，所以 $y=f(x)+2x$ 是周期为 1 的周期函数. 故选 D.

(3)因为 $f(x+2)=-\dfrac{1}{f(x)}$，

所以 $f(x+4)=-\dfrac{1}{f(x+2)}=f(x)$，

所以函数 $y=f(x)$ 的周期 $T=4$.

$f(17)=f(4\times4+1)=f(1)=1$.]

跟进训练

2. (1)4 (2)x^2-6x+8 (3)0 [(1)$\because f(x+2)=-f(x)$，

$\therefore f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$.

$\therefore f(x)$ 是周期为 4 的周期函数.

(2)当 $x\in[-2,0]$ 时，$-x\in[0,2]$，由已知得

$f(-x)=2(-x)-(-x)^2=-2x-x^2$.

又 $f(x)$ 是奇函数，$\therefore f(-x)=-f(x)=-2x-x^2$.

$\therefore f(x)=x^2+2x$.

又当 $x\in[2,4]$ 时，$x-4\in[-2,0]$，

$\therefore f(x-4)=(x-4)^2+2(x-4)$.

又 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，

$\therefore f(x)=f(x-4)=(x-4)^2+2(x-4)=x^2-6x+8$.

即当 $x\in[2,4]$ 时，$f(x)=x^2-6x+8$.

(3)$\because f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(2)=0$，$f(3)=-1$，

且 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，

$\therefore f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=f(4)+f(5)+f(6)+f(7)=\cdots=f(2\,020)+f(2\,021)+f(2\,022)+f(2\,023)=0$.

$\therefore f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(2\,023)=0$.]

考点三

典例 4 (1)**ACD** (2)**C** [(1)对于 A，$f(x)$ 是奇函数，故图象关于原点对称，将 $f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度得到 $f(x-1)$ 的图象，故 $f(x-1)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，正确；对于 B，若对 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x+1)=f(x-1)$，得 $f(x+2)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是一个周期为 2 的周期函数，不能说明其图象关于直线 $x=1$ 对称，错误；对于 C，若函数 $f(x+1)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称，则 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，故为偶函数，正确；对于 D，由 $f(x+1)+f(1-x)=2$ 得 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,1)$ 对称，正确. 故选 ACD.

(2)由对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)+f(5-x)=-1$，

可知函数的图象关于点 $\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ 对称，

又 $y=\dfrac{1-x}{2x-5}=\dfrac{-x+1}{2x-5}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\frac{3}{2}}{2x-5}$，

所以函数 $y=\dfrac{1-x}{2x-5}$ 图象的中心对称点为 $\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$，

所以两个函数图象的交点成对出现，

且每对交点都关于点 $\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ 对称，

则 $x_1+x_n=x_2+x_{n-1}=\cdots=\dfrac{5}{2}\times2=5$，$y_1+y_n=y_2+y_{n-1}=\cdots=-\dfrac{1}{2}\times2=-1$，

所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i+y_i)=5\times\dfrac{n}{2}+(-1)\times\dfrac{n}{2}=2n$. 故选 C.]

跟进训练

3. (1)**B** (2)**A** (3)$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$(答案不唯一) [(1)由 $f(x+2)$ 是偶函数，知函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，函数 $y=|x^2-4x-5|=|(x-2)^2-9|$，其图象也关于直线 $x=2$ 对称，所以函数 $y=|x^2-4x-5|$ 与函数 $y=f(x)$ 图象的交点也关于直线 $x=2$ 对称，

当 n 为偶数时，其和为 $4\times\dfrac{n}{2}=2n$；当 n 为奇数时，

其和为 $4\times\dfrac{n-1}{2}+2=2n$. 故选 B.

(2)函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称，则必有 $f(3-x)=f(x+3)$，所以 $f(0)=f(6)$，$f(1)=f(5)$，$f(2)=f(4)$，又因为 $f(x)$ 满足 $f(2-x)=2-f(x)$，取 $x=1$，所以，$f(1)=2-f(1)$，$f(1)=1$，则 $f(1)=f(5)=1$，取 $x=5$，则 $f(-3)=2-f(5)=1$，A 正确. 故选 A.

(3)要使对称中心为 $\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$，可将任何奇函数的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度即可，如将 $y=\sin x$ 向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度可得 $f(x)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.]

第 4 课时　函数性质的综合应用

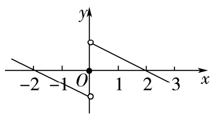
考点一

典例 1　(1)**D**　(2)**AC**　[(1)因为函数 $f(x)$为定义在 **R** 上的奇函数，则 $f(0)=0$.

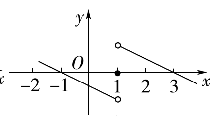
又 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，且 $f(2)=0$,

画出函数 $f(x)$的大致图象如图①所示，

则函数 $f(x-1)$的大致图象如图②所示.



图①



图②

当 $x\leqslant 0$ 时，要满足 $xf(x-1)\geqslant 0$,

则 $f(x-1)\leqslant 0$,得$-1\leqslant x\leqslant 0$.

当 $x>0$ 时，要满足 $xf(x-1)\geqslant 0$,

则 $f(x-1)\geqslant 0$,得 $1\leqslant x\leqslant 3$.

故满足 $xf(x-1)\geqslant 0$ 的 x 的取值范围是$[-1,0]\cup[1,3]$.

故选 D.

(2)函数 $f(x)$为 **R** 上的奇函数，且为减函数，

偶函数 $g(x)$在区间$[0,+\infty)$上的图象与$f(x)$的图象重合，

由 $a>b>0$,得 $f(a)<f(b)<0$,$f(a)=g(a)$,$f(b)=g(b)$;

对于 A,$f(b)-f(-a)<g(a)-g(-b)\Leftrightarrow f(b)+f(a)-g(a)+g(b)=2f(b)<0$(因为 $f(a)=g(a)$在 $a>0$ 上成立)，所以 A 正确；

对于 B,$f(b)-f(-a)>g(a)-g(-b)\Leftrightarrow f(b)+f(a)-g(a)+g(b)=2f(b)>0$,这与 $f(b)<0$ 矛盾，所以 B 错误；

对于 C,$f(a)+f(-b)<g(b)-g(-a)\Leftrightarrow f(a)-f(b)-g(b)+g(a)=2[f(a)-f(b)]<0$,这与 $f(a)<f(b)$符合，所以 C 正确；

对于 D,$f(a)+f(-b)>g(b)-g(-a)\Leftrightarrow f(a)-f(b)-g(b)+g(a)=2[f(a)-f(b)]>0$,这与 $f(a)<f(b)$矛盾，所以 D 错误.]

跟进训练

1.(1)**C**　(2)**D**　[(1)因为 $f(x+2)$的图象向右平移 2 个单位长度得到 $f(x)$的图象，且 $f(x+2)$的图象关于 y 轴对称，

所以 $f(x)$的图象关于直线 $x=2$ 对称.

由 $f(x)$在$(2,+\infty)$上单调递减可得 $f(x)$在$(-\infty,2)$上单调递增，由 $f(\ln x)<f(1)$,所以 $\ln x<1$ 或 $\ln x>3$,解得 $0<x<\mathrm{e}$ 或 $x>\mathrm{e}^3$.

(2)因为$\forall x,y\in\mathbf{R}$,$f(x+y)=f(x)+f(y)$,

所以，令 $x=y=0$ 得 $f(0)=f(0)+f(0)$,即 $f(0)=0$.

令 $y=-x$,得 $f(0)=f(x)+f(-x)=0$,

即 $f(-x)=-f(x)$,

所以函数 $f(x)$为奇函数.

设 $x_1>x_2>0$,则 $x_1=x_2+(x_1-x_2)$,所以 $f(x_1)=f(x_2)+f(x_1-x_2)$,

即 $f(x_1)-f(x_2)=f(x_1-x_2)$,

因为$\forall x>0$,$f(x)>0$,$x_1-x_2>0$,

所以 $f(x_1-x_2)>0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$,

所以函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

所以函数 $f(x)$在 **R** 上单调递增，

综上，$f(x)$是奇函数且单调递增.

故选 D.]

考点二

典例 2　(1)**D**　(2)**C**　[(1)由于 $f(x+1)$为奇函数，所以函数 $f(x)$的图象关于点$(1,0)$对称，即有 $f(x)+f(2-x)=0$,所以 $f(1)+f(2-1)=0$,得 $f(1)=0$,即 $a+b=0$.　①

由于 $f(x+2)$为偶函数，所以函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=2$ 对称，即有$f(x)-f(4-x)=0$,所以 $f(0)+f(3)=-f(2)+f(1)=-4a-b+a+b=-3a=6$.　②

根据①②可得 $a=-2$,$b=2$,所以当 $x\in[1,2]$时，$f(x)=-2x^2+2$.

根据函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=2$ 对称，且关于点$(1,0)$对称，可得函数 $f(x)$的周期为 4,所以 $f\left(\frac{9}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{3}{2}\right)=2\times\left(\frac{3}{2}\right)^2-2=\frac{5}{2}$.

(2)因为 $f(x)$为偶函数，$f(x+2)-f(x)=f(1)$,

所以 $f(-1+2)-f(-1)=f(1)$,解得$f(1)=0$,

所以 $f(x+2)=f(x)$,那么 $f(x)$的周期为 2,

所以 $f(100)=f(0)=8$,$f(99)=f(1)=0$,

$f(99)+f(100)=8$,故 A,B,D 错误.

故选 C.]

跟进训练

2.**B**　[由 $f(x+8)+f(x)=0$,得 $f(x+8)=-f(x)$,所以 $f(x+16)=-f(x+8)=f(x)$,故函数 $y=f(x)$是以 16 为周期的周期函数. 在 $f(x+8)+f(x)=0$ 中，令 $x=0$,得 $f(8)+f(0)=0$,因为函数 $y=f(x)$是定义在 **R** 上的奇函数，所以 $f(0)=0$. 故$f(8)=0$. 故 $f(2\,024)=f(16\times126+8)=f(8)=0$. 又在 $f(x+8)+f(x)=0$ 中，令 $x=-3$,得 $f(5)+f(-3)=0$,得 $f(5)=-f(-3)=f(3)=5$,则$f(2\,019)=f(16\times126+3)=f(3)=5$,所以 $f(2\,019)+f(2\,024)=5$.

故选 B.]

考点三

典例 3　(1)**B**　(2)**A**　[(1)根据题意，函数$f(x-1)(x\in\mathbf{R})$是偶函数，则函数 $f(x)$图象的对称轴为 $x=-1$,则有 $f(x)=f(-2-x)$,又由函数 $f(x)$的图象关于点$(1,0)$对称，则 $f(x)=-f(2-x)$,则有 $f(-2-x)=-f(2-x)$,则 $f(x+4)=-f(x)$,则有$f(x+8)=-f(x+4)=f(x)$,则函数 $f(x)$是周期为 8 的周期函数，又 $f(1)=0$,则 $a-1=0$,即 $a=1$,则当 $x\in[-1,1]$时，$f(x)=x-1$,$f(-1)=-2$,则 $f(2\,023)=f(-1+253\times8)=f(-1)=-2$. 故选 B.

(2)函数 $f(x)$的图象关于点$(-2,0)$对称，

$\therefore f(x-4)=-f(-x)$,又 $f(x)$为定义在 **R** 上的奇函数，

所以$-f(-x)=f(x)$,所以 $f(x-4)=f(x)$,即函数 $f(x)$的周期是 4,则 $f(11)=f(-1)$,$f(12)=f(0)$,$f(21)=f(1)$,

$\because f(x)$为奇函数，且在$[0,2)$上单调递增，

则 $f(x)$在$(-2,2)$上单调递增，$\therefore f(-1)<f(0)<f(1)$,

即 $f(11)<f(12)<f(21)$.]

跟进训练

3.**B** [因为 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称,则
$g(x+2)=g(2-x)$,
又 $g(2-x)=|-x|f(2-x)=|x|f(2-x)$,
且 $g(x+2)=|x|f(x+2)$,
所以 $|x|f(2-x)=|x|f(2+x)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,所以 $f(2-x)=f(2+x)$,因为 $f(-1)=-1$ 且 $f(x)$ 为奇函数,所以 $f(3)=f(2+1)=f(2-1)=-f(-1)=1$,
因此,$g(3)=|3-2|f(3)=f(1)=1$.故选 B.]

考点四

典例 4 **ACD** [$f(x)$ 的图象关于直线 $x=-3$ 对称,
则 $f(-x)=f(x-6)$,
又 $f(x+3)=f(x-3)$,则 $f(x)$ 的周期 $T=6$,
$\therefore f(-x)=f(x-6)=f(x)$,
$\therefore f(x)$ 为偶函数,故 A 正确;
当 $x\in[0,3]$ 时,$f(x)=4^x+2x-11$ 单调递增,
$\because T=6$,故 $f(x)$ 在 $[-6,-3]$ 上也单调递增,故 B 错误;
$\because f(x)$ 的图象关于直线 $x=-3$ 对称且 $T=6$,
$\therefore f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称,故 C 正确;
$f(100)=f(16\times6+4)=f(4)=f(-2)=f(2)=9$,故 D 正确.]

跟进训练

4.①②④ [在 $f(x+1)=f(x-1)$ 中,令 $x-1=t$,
则有 $f(t+2)=f(t)$,
因此 2 是函数 $f(x)$ 的周期,故①正确;
当 $x\in[0,1]$ 时,$f(x)=2^x$ 单调递增,
根据函数的奇偶性知,$f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上单调递减,根据函数的周期性知,函数 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减,在 $(2,3)$ 上单调递增,故②正确;
由②知,$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最大值 $f(x)_{\max}=f(1)=2$,$f(x)$ 的最小值 $f(x)_{\min}=f(0)=f(2)=2^0=1$ 且 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数,$\therefore f(x)$ 的最大值是 2,最小值是 1,故③错误;
$f(x)$ 为偶函数,$\therefore f(-x)=f(x)$,又 $T=2$,$\therefore f(x)=f(x+2)$,$\therefore f(-x)=f(x+2)$,故 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,故④正确.]

第 5 课时 幂函数与二次函数

梳理·必备知识

1.(1)$y=x^\alpha$ (3)(1,1) (0,0) (1,1) 奇函数 偶函数

2.(1)$ax^2+bx+c(a\neq0)$ (m,n) 零点

(2)$\left[\dfrac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)$ $\left(-\infty,\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right]$ $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$

$b=0$ $b\neq0$ 减 增 增 减

激活·基本技能

一、(1)× (2)√ (3)√ (4)×

二、1.**C** [由题意知 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta<0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a>0,\\ 1-20a<0,\end{cases}$

解得 $a>\dfrac{1}{20}$.]

2.$(-\infty,30]\cup[120,+\infty)$ [依题意知,$\dfrac{k}{6}\geqslant20$ 或 $\dfrac{k}{6}\leqslant5$,解得 $k\geqslant120$ 或 $k\leqslant30$.]

3.$y=x^{-\frac{1}{2}}$ $(0,+\infty)$ [设 $y=f(x)=x^\alpha$,因为图象过点 $\left(4,\dfrac{1}{2}\right)$,代入解析式得 $\alpha=-\dfrac{1}{2}$,则 $y=x^{-\frac{1}{2}}$,由幂函数的性质可知函数 $y=x^{-\frac{1}{2}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.]

4.$c<b<a$ [由指数函数、幂函数的单调性可知 $0.3^{0.4}<0.3^{0.3}$,$0.4^{0.3}>0.3^{0.3}$,即 $c<b<a$.]

考点一

典例 1 (1)**D** (2)2 (3)$\left[-1,\dfrac{2}{3}\right)$

[(1)幂函数 $y=x^\alpha$,当 $\alpha>0$ 时,$y=x^\alpha$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数,且 $0<\alpha<1$ 时,图象上凸,所以 $0<m<1$;当 $\alpha<0$ 时,$y=x^\alpha$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数,不妨令 $x=2$,根据图象可得 $2^{-1}<2^n$,所以 $-1<n<0$.综上所述,选 D.

(2)由幂函数定义,知 $m^2-3m+3=1$,
解得 $m=1$ 或 $m=2$,
当 $m=1$ 时,$f(x)=x$ 的图象不关于 y 轴对称,舍去,
当 $m=2$ 时,$f(x)=x^2$ 的图象关于 y 轴对称,因此 $m=2$.

(3)易知函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$,在定义域内为增函数,

所以 $\begin{cases}a+1\geqslant0,\\ 3-2a\geqslant0,\\ a+1<3-2a,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant a<\dfrac{2}{3}$.]

跟进训练

1.**B** [对于 A,$y=x^{-1}$ 是奇函数,值域是 $\{y\mid y\in\mathbf{R}$,且 $y\neq0\}$,在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,三个性质中有两个不正确;对于 B,$y=x^{-2}$ 是偶函数,值域是 $\{y\mid y\in\mathbf{R}$,且 $y>0\}$,在 $(-\infty,0)$ 上单调递增,三个性质中有两个正确,符合条件;同理可判断 C,D 中的函数不符合条件.]

考点二

典例 2 **解**:$f(x)=x^2-tx-1=\left(x-\dfrac{t}{2}\right)^2-1-\dfrac{t^2}{4}$.

(1)依题意,$-1<\dfrac{t}{2}<2$,解得 $-2<t<4$,

$\therefore$ 实数 t 的取值范围是 $(-2,4)$.

(2)①当 $\dfrac{t}{2}\geqslant2$,即 $t\geqslant4$ 时,$f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上单调递减,

$\therefore f(x)_{\min}=f(2)=3-2t$.

②当 $-1<\dfrac{t}{2}<2$,即 $-2<t<4$ 时,$f(x)_{\min}=f\left(\dfrac{t}{2}\right)=-1-\dfrac{t^2}{4}$.

③当 $\dfrac{t}{2}\leqslant-1$,即 $t\leqslant-2$ 时,$f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上单调递增,

$\therefore f(x)_{\min}=f(-1)=t$.

综上,$g(t)=\begin{cases}t,t\leqslant-2,\\ -1-\dfrac{t^2}{4},-2<t<4,\\ 3-2t,t\geqslant4.\end{cases}$

拓展变式

解：∵$f(-1)=t,f(2)=3-2t$，

∴$f(x)_{\max}=\max\{f(-1),f(2)\}$.

又 $f(2)-f(-1)=3-3t$，

当 $t\geqslant1$ 时，$f(2)-f(-1)\leqslant0$，

∴$f(2)\leqslant f(-1)$，

∴$f(x)_{\max}=f(-1)=t$；

当 $t<1$ 时，$f(2)-f(-1)>0$，

∴$f(2)>f(-1)$，

∴$f(x)_{\max}=f(2)=3-2t$，

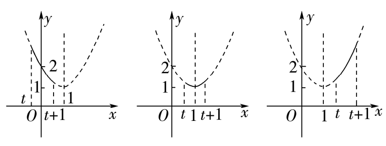
综上，$G(t)=\begin{cases}t,t\geqslant1,\\3-2t,t<1.\end{cases}$

跟进训练

2. **解**：$f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1,x\in[t,t+1],t\in\mathbf{R}$，函数图象的对称轴为 $x=1$.

当 $t+1\leqslant1$，即 $t\leqslant0$ 时，函数图象如图①所示，函数 $f(x)$ 在区间$[t,t+1]$上为减函数，所以最小值为 $f(t+1)=t^2+1$.

当 $t<1<t+1$，即 $0<t<1$ 时，函数图象如图②所示，在对称轴 $x=1$ 处取得最小值，最小值为 $f(1)=1$.



图①　　图②　　图③

当 $t\geqslant1$ 时，函数图象如图③所示，函数 $f(x)$ 在区间$[t,t+1]$上为增函数，

所以最小值为 $f(t)=t^2-2t+2$.

综上可知，当 $t\leqslant0$ 时，$f(x)_{\min}=t^2+1$；当 $0<t<1$ 时，$f(x)_{\min}=1$；当 $t\geqslant1$ 时，$f(x)_{\min}=t^2-2t+2$.

考点三

典例 3　解：(1)由题意得 $\Delta=(2a)^2-4(-a+2)\leqslant0$，即 $a^2+a-2\leqslant0$，解得 $-2\leqslant a\leqslant1$，所以实数 a 的取值范围是$[-2,1]$.

(2)因为对于$\forall x\in[-1,1]$，$f(x)\geqslant0$ 恒成立，所以 $f(x)_{\min}\geqslant0,x\in[-1,1]$. 函数$f(x)$图象的对称轴方程为 $x=-a$.

①当 $-a\leqslant-1$，即 $a\geqslant1$ 时，$f(x)$ 在区间$[-1,1]$上单调递增，则 $f(x)_{\min}=f(-1)=3-3a\geqslant0$，得 $a\leqslant1$，所以 $a=1$.

②当 $-1<-a<1$，即 $-1<a<1$ 时，$f(x)_{\min}=f(-a)=-a^2-a+2\geqslant0$，得 $-2\leqslant a\leqslant1$，所以 $-1<a<1$.

③当 $-a\geqslant1$，即 $a\leqslant-1$ 时，$f(x)$ 在区间$[-1,1]$上单调递减，则 $f(x)_{\min}=f(1)=a+3\geqslant0$，得 $a\geqslant-3$，所以 $-3\leqslant a\leqslant-1$.

综上可得，实数 a 的取值范围是$[-3,1]$.

(3)若$\exists x\in[-1,1]$，$f(x)\geqslant0$ 成立，则 $f(x)_{\max}\geqslant0,x\in[-1,1]$. 函数 $f(x)$图象的对称轴方程为 $x=-a$.

①当 $-a\leqslant0$，即 $a\geqslant0$ 时，$f(x)_{\max}=f(1)=a+3\geqslant0$，得 $a\geqslant-3$，所以 $a\geqslant0$.

②当 $-a>0$，即 $a<0$ 时，$f(x)_{\max}=f(-1)=3-3a\geqslant0$，得 $a\leqslant1$，所以 $a<0$.

综上可得，实数 a 的取值范围是 $\mathbf{R}$.

(4)因为对于$\forall a\in[-1,1]$，$f(x)>0$，令$g(a)=(2x-1)a+x^2+2$，则 $g(a)>0$ 在$[-1,1]$上恒成立，

所以$\begin{cases}g(-1)=x^2-2x+3>0,\\g(1)=x^2+2x+1>0.\end{cases}$解得 $x\neq-1$，故实数 x 的取值范围是$\{x|x\neq-1\}$.

跟进训练

3. **解**：(1)要使 $mx^2-mx-1<0$ 恒成立，

若 $m=0$，显然 $-1<0$，满足题意；

若 $m\neq0$，得$\begin{cases}m<0,\\\Delta=m^2+4m<0,\end{cases}$

即 $-4<m<0$. ∴$-4<m\leqslant0$.

∴所求 m 的取值范围是$(-4,0]$.

(2) 要使 $f(x)<-m+5$ 在 $x\in[1,3]$时恒成立，

即 $m\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}m-6<0$ 在 $x\in[1,3]$时恒成立.

法一：令 $g(x)=m\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}m-6$，$x\in[1,3]$.

当 $m>0$ 时，$g(x)$在$[1,3]$上单调递增，

所以 $g(x)_{\max}=g(3)$，即 $7m-6<0$，

所以 $m<\dfrac{6}{7}$，所以 $0<m<\dfrac{6}{7}$；

当 $m=0$ 时，$-6<0$ 恒成立；

当 $m<0$ 时，$g(x)$在$[1,3]$上单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(1)=m-6<0$，

所以 $m<6$，所以 $m<0$.

综上所述，m 的取值范围是$\left(-\infty,\dfrac{6}{7}\right)$.

法二：因为 $x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$，

又因为 $m(x^2-x+1)-6<0$ 在 $x\in[1,3]$时恒成立，

所以 $m<\dfrac{6}{x^2-x+1}$在 $x\in[1,3]$时恒成立.

令 $y=\dfrac{6}{x^2-x+1}$，

因为函数 $y=\dfrac{6}{x^2-x+1}=\dfrac{6}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$在$[1,3]$上的最小值为$\dfrac{6}{7}$，所以只需 $m<\dfrac{6}{7}$即可.

所以 m 的取值范围是$\left(-\infty,\dfrac{6}{7}\right)$.

第 6 课时　指数与指数函数

梳理·必备知识

1. (1)x　(2)根式　(3)a　a

2. $\sqrt[n]{a^m}$　$\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$　0

3. a^{r+s}　a^{rs}　a^rb^r

4. (1)指数 x　a　(3)$(0,+\infty)$　$(0,1)$　1　$y>1$　$0<y<1$　$y>1$　$0<y<1$　增　减

激活·基本技能

一、(1)×　(2)×　(3)×

二、1. **B**　[原式$=(\sqrt[3]{5^2})^{\frac{3}{4}}=(5^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}=5^{\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$.]

2. **C** ［依题意可知 $a^2=\frac{1}{3}$，解得 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $f(x)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^x$，所以 $f(-1)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-1}=\sqrt{3}$.］

3. **BCD** ［因为 $y=1.7^x$ 为增函数，所以 $1.7^{2.5}<1.7^3$，故 A 错误；$2^{-\frac{4}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 为减函数，所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}=2^{-\frac{4}{3}}$，故 B 正确；因为 $1.7^{0.3}>1$，而 $0.9^{3.1}\in(0,1)$，所以 $1.7^{0.3}>0.9^{3.1}$，故 C 正确；$y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ 为减函数，所以 $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}<\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$，又 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$，所以 $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}<\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$. 故 D 正确.］

4. $\frac{3}{4}$ ［因为 $f(x)$ 的图象过原点，所以 $f(0)=a\left(\frac{1}{2}\right)^0+b=0$，即 $a+b=0$. 又因为 $f(x)$ 的图象无限接近直线 $y=1$，但又不与该直线相交，所以 $b=1$，$a=-1$，所以 $f(x)=-\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}+1$，所以 $f(-2)=-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=\frac{3}{4}$.］

考点一

典例 1 (1)**ABD** (2)$\frac{8}{5}$ ［(1)因为 $a+a^{-1}=3$，所以 $a^2+a^{-2}=(a+a^{-1})^2-2=9-2=7$，故选项 A 正确；因为 $a+a^{-1}=3$，所以 $a^3+a^{-3}=(a+a^{-1})(a^2-1+a^{-2})=(a+a^{-1})\cdot[(a+a^{-1})^2-3]=3\times6=18$，故选项 B 正确；因为 $a+a^{-1}=3$，所以 $(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2=a+a^{-1}+2=5$，且 $a>0$，所以 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$，故选项 C 错误；因为 $a^3+a^{-3}=18$，且 $a>0$，所以 $\left(a\sqrt{a}+\frac{1}{a\sqrt{a}}\right)^2=a^3+a^{-3}+2=20$，所以 $a\sqrt{a}+\frac{1}{a\sqrt{a}}=2\sqrt{5}$，故选项 D 正确.

(2)原式 $=\frac{2\cdot4^{\frac{3}{2}}a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{3}{2}}}{10a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{3}{2}}}=\frac{8}{5}$.］

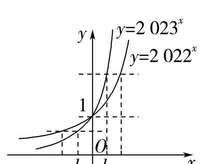
跟进训练

1. (1)**B** (2)$-\frac{167}{9}$ ［(1)由题意得 $\sqrt[4]{9x^8y^4}=9^{\frac{1}{4}}(x^8)^{\frac{1}{4}}\cdot(y^4)^{\frac{1}{4}}=\sqrt{3}x^2|y|=\sqrt{3}x^2y$.

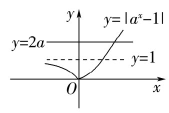
(2)原式 $=\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}+500^{\frac{1}{2}}-\frac{10(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}+1=\frac{4}{9}+10\sqrt{5}-10\sqrt{5}-20+1=-\frac{167}{9}$.］

考点二

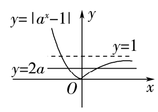
典例 2 (1)**ABD** (2)$\left(0,\frac{1}{2}\right)$ ［(1)如图，观察易知，$a<b<0$ 或 $0<b<a$ 或 $a=b=0$，故选 ABD.



(2)$y=|a^x-1|$ 的图象是由 $y=a^x$ 的图象先向下平移 1 个单位长度，再将 x 轴下方的图象沿 x 轴翻折到 x 轴上方得到的. 当 $a>1$ 时，如图①，两个图象只有一个交点，不合题意；当 $0<a<1$ 时，如图②，要使两个图象有两个交点，则 $0<2a<1$，得 $0<a<\frac{1}{2}$. 综上可知，a 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.



图①



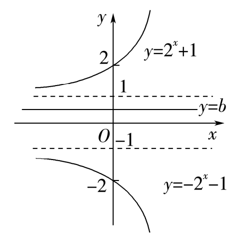
图②

］

跟进训练

2. (1)**B** (2)$[-1,1]$ ［(1)指数函数 $y=\left(\frac{b}{a}\right)^x$ 图象位于 x 轴上方，据此可区分两函数图象. 二次函数 $y=ax^2-bx=(ax-b)x$，有零点 $\frac{b}{a}$，0. A，B 选项中，指数函数 $y=\left(\frac{b}{a}\right)^x$ 在 **R** 上单调递增，故 $\frac{b}{a}>1$，故 A 错误，B 正确. C，D 选项中，指数函数 $y=\left(\frac{b}{a}\right)^x$ 在 **R** 上单调递减，故 $0<\frac{b}{a}<1$，故 C，D 错误. 故选 B.

(2)曲线 $|y|=2^x+1$ 与直线 $y=b$ 的图象如图所示，由图象可得：如果曲线 $|y|=2^x+1$ 与直线 $y=b$ 没有公共点，则 b 应满足的条件是 $b\in[-1,1]$.



］

考点三

考向 1 **典例 3** (1)**B** (2)**B** ［(1)因为 $y=2^x$ 在 **R** 上单调递增，$y=x^{\frac{1}{4}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $c=4^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{3}{4}}=a=8^{\frac{1}{4}}<9^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{1}{2}}=b$. 故选 B.

(2)设函数 $f(x)=2^x-5^{-x}$，易知 $f(x)$ 为增函数.

又 $f(-y)=2^{-y}-5^y$，由已知得 $f(x)\leqslant f(-y)$，

所以 $x\leqslant -y$，所以 $x+y\leqslant0$.］

考向 2 **典例 4** (1)$\frac{1}{2}$ (2)$(-3,1)$

［(1)当 $a<1$ 时，$4^{1-a}=2^1$，解得 $a=\frac{1}{2}$；

当 $a>1$ 时，$2^{a-(1-a)}=4^{a-1}$ 无解，故 a 的值为 $\frac{1}{2}$.

(2)当 $a<0$ 时，原不等式化为 $\left(\frac{1}{2}\right)^a-7<1$，

则 $2^{-a}<8$，解得 $a>-3$，所以 $-3<a<0$.

当 $a\geqslant0$ 时，则 $\sqrt{a}<1$，$0\leqslant a<1$.

综上，实数 a 的取值范围是 $(-3,1)$.］

考向 3 **典例 5** (1)1 (2)$(-\infty,4]$ (3)$(1,+\infty)$

［(1)**法一**（定义法）：因为 $f(x)=x^3(a\cdot2^x-2^{-x})$ 的定义域为 **R**，且是偶函数，

所以 $f(-x)=f(x)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

所以 $(-x)^3(a\cdot 2^{-x}-2^x)=x^3(a\cdot 2^x-2^{-x})$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，所以 $x^3(a-1)\cdot(2^x+2^{-x})=0$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，所以 $a=1$.

法二(取特殊值检验法)：因为 $f(x)=x^3(a\cdot 2^x-2^{-x})$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且是偶函数，所以 $f(-1)=f(1)$，所以 $-\left(\frac{a}{2}-2\right)=2a-\frac{1}{2}$，解得 $a=1$，经检验，$f(x)=x^3(2^x-2^{-x})$ 为偶函数，所以 $a=1$.

法三(转化法)：由题意知 $f(x)=x^3(a\cdot 2^x-2^{-x})$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且是偶函数. 设 $g(x)=x^3$，$h(x)=a\cdot 2^x-2^{-x}$，因为 $g(x)=x^3$ 为奇函数，所以 $h(x)=a\cdot 2^x-2^{-x}$ 为奇函数，所以 $h(0)=a\cdot 2^0-2^{-0}=0$，解得 $a=1$，经检验，$f(x)=x^3(2^x-2^{-x})$ 为偶函数，所以 $a=1$.

(2)令 $t=|2x-m|$，则 $t=|2x-m|$ 在区间 $\left[\frac{m}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，在区间 $\left(-\infty,\frac{m}{2}\right]$ 上单调递减. 而 $y=2^t$ 是增函数，所以要使函数 $f(x)=2^{|2x-m|}$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，则有 $\frac{m}{2}\leqslant 2$，即 $m\leqslant 4$，所以 m 的取值范围是 $(-\infty,4]$.

(3)原不等式可化为 $a>-4^x+2^{x+1}$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

令 $t=2^x$，则 $t>0$，$\therefore y=-4^x+2^{x+1}=-t^2+2t=-(t-1)^2+1\leqslant 1$，当 $t=1$ 时，$y_{\max}=1$，$\therefore a>1$.]

跟进训练

3. (1)**A** (2)$(-\infty,-1]$ [(1)函数 $f(x)=e^{-(x-1)^2}$ 是由函数 $y=e^u$ 和 $u=-(x-1)^2$ 复合而成的复合函数，$y=e^u$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，$u=-(x-1)^2$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以由复合函数的单调性可知，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减. 易知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $c=f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=f\left(2-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，又 $\frac{\sqrt{2}}{2}<2-\frac{\sqrt{6}}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}<1$，所以 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<f\left(2-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)<f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以 $b>c>a$，故选 A.

(2)$\because y=\left(\frac{1}{3}\right)^t$ 是减函数，且 $f(x)$ 的值域是 $\left(0,\frac{1}{9}\right]$，

$\therefore t=ax^2+2x+3$ 有最小值 2，

则 $a>0$ 且 $\frac{12a-2^2}{4a}=2$，解之得 $a=1$，

因此 $t=x^2+2x+3$ 的单调递减区间是 $(-\infty,-1]$，

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,-1]$.]

第 7 课时 对数与对数函数

梳理·必备知识

1. $x=\log_a N$　a　N　10　$\lg N$　e　$\ln N$

2. (1)0　1　(2)$\log_a M+\log_a N$　$\log_a M-\log_a N$　$n\log_a M$　(3)N

3. (1)$y=\log_a x$　$(0,+\infty)$　(2)$(0,+\infty)$　$(1,0)$　$y>0$　$y<0$　$y<0$　$y>0$　增　减

4. $y=x$

激活·基本技能

一、(1)×　(2)×　(3)√　(4)√

二、1. $\left(\frac{1}{2},1\right]$　[由 $\log_{\frac{2}{3}}(2x-1)\geqslant 0$，得 $0<2x-1\leqslant 1$.

$\therefore \frac{1}{2}<x\leqslant 1$.

$\therefore$ 函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{2}{3}}(2x-1)}$ 的定义域是 $\left(\frac{1}{2},1\right]$.]

2. (1)<　(2)=

3. $\frac{5}{6}$　[$(\log_4 3+\log_8 3)\cdot\log_3 2=\left(\frac{\lg 3}{2\lg 2}+\frac{\lg 3}{3\lg 2}\right)\cdot\frac{\lg 2}{\lg 3}=\frac{5}{6}$.]

4. $\left(0,\frac{2}{3}\right)\cup(1,+\infty)$　[当 $a>1$ 时，满足条件；

当 $0<a<1$ 时，由 $\begin{cases}0<a<1,\\ \log_a\frac{2}{3}<\log_a a,\end{cases}$ 得 $0<a<\frac{2}{3}$，

综上，$a\in\left(0,\frac{2}{3}\right)\cup(1,+\infty)$.]

考点一

典例 1 (1)**C** (2)4 [(1)$\because 2^a=5^b=10$，

$\therefore \log_2 10=a$，$\log_5 10=b$，

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{\log_2 10}+\frac{1}{\log_5 10}=\lg 2+\lg 5=\lg 10=1$.

(2)原式 $=2\lg 5+\lg(5\times 10)+\lg 2\cdot\lg(5\times 10^2)+(\lg 2)^2$

$=2\lg 5+\lg 5+1+\lg 2\cdot(\lg 5+2)+(\lg 2)^2$

$=3\lg 5+1+\lg 2\cdot\lg 5+2\lg 2+(\lg 2)^2$

$=3\lg 5+2\lg 2+1+\lg 2(\lg 5+\lg 2)$

$=3\lg 5+2\lg 2+1+\lg 2$

$=3(\lg 5+\lg 2)+1$

$=4$.]

跟进训练

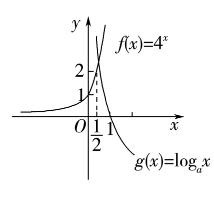
1. (1)**C** (2)5 [(1)$2^a=5$，$8^b=3$，$2^{a-3b}=\frac{2^a}{2^{3b}}=\frac{2^a}{8^b}=\frac{5}{3}$，$4^{a-3b}=(2^{a-3b})^2=\frac{25}{9}$，故选 C.

(2)原式 $=\frac{\lg 3}{\lg 2}\cdot\frac{3\lg 2}{\lg 3}+(3^{\frac{1}{2}})^{\log_3 4}=3+3^{\log_3 2}=3+2=5$.]

考点二

典例 2 (1)**AD** (2)**B** [(1)易知 $g(x)=\log_a|x|$ 为偶函数. 当 $0<a<1$ 时，$f(x)=a^{x-2}$ 单调递减，$g(x)=\log_a|x|$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，此时 A 选项符合题意. 当 $a>1$ 时，$f(x)=a^{x-2}$ 单调递增，$g(x)=\log_a|x|$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，此时 D 选项符合题意. 故选 AD.

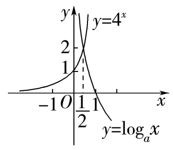
(2)构造函数 $f(x)=4^x$ 和 $g(x)=\log_a x$，当 $a>1$ 时，不满足条件；当 $0<a<1$ 时，画出两个函数大致的图象，如图所示，由题意可知 $f\left(\frac{1}{2}\right)<g\left(\frac{1}{2}\right)$，



即 $2<\log_a\frac{1}{2}$，则 $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 a 的取值范围为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.]

拓展变式

$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ [若方程 $4^x=\log_a x$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$上有解,则函数 $y=4^x$ 的图象和函数 $y=\log_a x$ 的图象在 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$上有交点.



由图象可知 $\begin{cases}0<a<1,\\ \log_a\frac{1}{2}\leqslant 2,\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.]

跟进训练

2.(1)**D** (2)**BC** [(1)$f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\ln\frac{1}{1-x}=-\ln(1-x)$,其定义域为$(-\infty,1)$,为增函数,故选 D.

(2)由图象可知函数为减函数,所以 $0<a<1$,令 $y=0$ 得 $\log_a(x+c)=0$,

$x+c=1,x=1-c$.由图象知 $0<1-c<1$,$\therefore 0<c<1$.]

考点三

考向1 **典例**3 (1)**C** (2)**C** [(1)$\because a=\log_5 2<\log_4 2=\frac{1}{2}=c,b=\log_8 3>\log_9 3=\frac{1}{2}=c$,故 $a<c<b$,故选 C.

(2)根据不等式的性质和对数的换底公式可得$\frac{1}{\log_2 a}<\frac{1}{\log_2 b}<\frac{1}{\log_2 c}<0$,即 $\log_2 c<\log_2 b<\log_2 a<0$,可得 $c<b<a<1$.故选 C.]

考向2 **典例**4 (1)**C** (2)**C** [(1)因为 $\log_{\frac{1}{2}}a=-\log_2 a$,所以 $f(\log_2 a)+f(\log_{\frac{1}{2}}a)=f(\log_2 a)+f(-\log_2 a)=2f(\log_2 a)$,原不等式变为 $2f(\log_2 a)\leqslant 2f(1)$,即 $f(\log_2 a)\leqslant f(1)$.又因为$f(x)$是定义在 **R** 上的偶函数,且在$[0,+\infty)$上单调递增,所以$|\log_2 a|\leqslant 1$,即$-1\leqslant\log_2 a\leqslant 1$,解得$\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 2$,故选 C.

(2)由题意可得 $\begin{cases}a>0,\\ \log_2 a>-\log_2 a,\end{cases}$

或 $\begin{cases}a<0,\\ \log_{\frac{1}{2}}(-a)>\log_2(-a),\end{cases}$

解得 $a>1$ 或$-1<a<0$.故选 C.]

考向3 **典例**5 (1)**A** (2)**ACD** (3)2 [(1)令函数 $g(x)=x^2-2ax+1+a=(x-a)^2+1+a-a^2$,则对称轴为 $x=a$,要使函数 $f(x)$在$(-\infty,1]$上单调递减,则有 $\begin{cases}g(1)>0,\\ a\geqslant 1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2-a>0,\\ a\geqslant 1,\end{cases}$ 解得 $1\leqslant a<2$,即 $a\in[1,2)$.

(2)令$\frac{2x+1}{2x-1}>0$,解得 $x>\frac{1}{2}$或 $x<-\frac{1}{2}$,

$\therefore f(x)$的定义域为$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$,

又 $f(-x)=\ln\frac{-2x+1}{-2x-1}=\ln\frac{2x-1}{2x+1}=\ln\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{-1}$

$=-\ln\frac{2x+1}{2x-1}=-f(x)$,

$\therefore f(x)$为奇函数,故 A 正确;B 错误.

又 $f(x)=\ln\frac{2x+1}{2x-1}=\ln\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)$,

令 $t=1+\frac{2}{2x-1}$,$t>0$ 且 $t\neq 1$,则 $y=\ln t$,

又 $t=1+\frac{2}{2x-1}$在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递减,且 $y=\ln t$ 为增函数,

$\therefore f(x)$在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递减,故 C 正确;

由 C 分析可得 $f(x)$的值域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,故 D 正确.

(3)由题意知 $f(x)$的定义域为 **R**,函数 $f(x)=\ln(e^{ax}+1)-x$是偶函数,则$f(-x)=\ln(e^{-ax}+1)+x=f(x)=\ln(e^{ax}+1)-x$,

即 $\ln\left(\frac{e^{ax}+1}{e^{-ax}+1}\right)=2x$,化简得 $\ln e^{ax}=2x$,解得 $a=2$.]

跟进训练

3.(1)**A** (2)**BD** (3)4 (4)5 [(1)由对数运算公式得$\frac{1}{a}=\log_2 6=1+\log_2 3,\frac{1}{b}=\log_4 12=1+\log_4 3,\frac{1}{c}=\log_6 18=1+\log_6 3$,易知 $\log_2 3>\log_4 3>\log_6 3>0$,即$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>\frac{1}{c}>1$,故 $c>b>a$.

(2)$f(x)=\ln(x-2)+\ln(6-x)=\ln[(x-2)(6-x)]$,定义域为$(2,6)$.令$t=(x-2)\cdot(6-x)$,则 $y=\ln t$.因为二次函数 $t=(x-2)(6-x)$的图象的对称轴为直线 $x=4$,又$f(x)$的定义域为$(2,6)$,所以 $f(x)$的图象关于直线 $x=4$ 对称,且在$(2,4)$上单调递增,在$(4,6)$上单调递减,当 $x=4$ 时,t 有最大值,所以 $f(x)_{\max}=\ln(4-2)+\ln(6-4)=2\ln 2$,故选 BD.

(3)设 $g(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$,则 $f(x)=g(x)+2$,显然有 $g(-x)=-g(x)$,即$g(x)$为奇函数,则 $g(-x)+g(x)=0$,所以$f(\lg 3)+f\left(\lg\frac{1}{3}\right)=f(\lg 3)+f(-\lg 3)=g(\lg 3)+2+g(-\lg 3)+2=4$.

(4)由题意得 $\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 9,\\ 1\leqslant x^2\leqslant 9,\end{cases}$

$\therefore 1\leqslant x\leqslant 3$,$\therefore g(x)$的定义域为$[1,3]$,

$g(x)=[f(x)]^2+f(x^2)$

$=(1+\log_3 x)^2+1+\log_3 x^2$

$=(\log_3 x)^2+4\log_3 x+2$,

设 $t=\log_3 x$,则 $0\leqslant t\leqslant 1$,

则 $y=t^2+4t+2=(t+2)^2-2$ 在$[0,1]$上单调递增,

$\therefore$ 当 $t=0$,即 $x=1$ 时,$g(x)_{\min}=g(1)=2$,

当 $t=1$,即 $x=3$ 时,$g(x)_{\max}=g(3)=7$,

$\therefore g(x)_{\max}-g(x)_{\min}=5$.]

高考培优 1　指数式、对数式、幂式的大小比较

题型一

典例 1　(1)**D**　(2)**A**　[(1)结合函数 $y=5^x$，$y=\log_{\frac{2}{3}}x$，$y=\lg x$ 的图象易知 $0<a=5^{-0.7}<5^0=1$，$b=\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{2}>\log_{\frac{2}{3}}\frac{2}{3}=1$，$c=\lg\frac{3}{4}<\lg 1=0$，所以 $b>a>c$. 故选 D.

(2)$\because \log_5 1<\log_5 2<\log_5\sqrt{5}$，$\therefore 0<a<\frac{1}{2}$，

$\because b=\frac{1}{\log_{0.1}0.7}=\log_{0.7}0.1>\log_{0.7}0.7$，$\therefore b>1$，

$\because 0.7^1<0.7^{0.3}<0.7^0$，$\therefore 0.7<c<1$，$\therefore a<c<b$. 故选 A.]

跟进训练

1. (1)**C**　(2)**B**　[(1)$a=2^{0.1}>2^0=1$，

$\because 4>3>2=4^{\frac{1}{2}}$，$\therefore 1>b=\log_4 3>\log_4 4^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$，

$\because 2<5^{\frac{1}{2}}$，$\therefore c=\log_5 2<\log_5 5^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$，

$\therefore a>b>c$，故选 C.

(2)因为 $a=\sqrt{3}$，$b=2^{\frac{3}{4}}$，所以 $a^4=9$，$b^4=8$，可知 $a>b$，

又由 $b^4-\left(\frac{3}{2}\right)^4=8-\frac{81}{16}=\frac{47}{16}>0$，可得 $b>\frac{3}{2}$，又由 $e^2<8$，

可得 $e<2\sqrt{2}=2^{\frac{3}{2}}$，所以 $\log_2 e<\frac{3}{2}$，即 $c<\frac{3}{2}$，故有 $a>b>c$. 故选 B.]

题型二

典例 2　**A**　[**法一**(特值法)：取 $z=1$，则由 $2^x=3^y=5$ 得 $x=\log_2 5$，$y=\log_3 5$，所以 $2x=\log_2 25<\log_2 32=5z$，$3y=\log_3 125<\log_3 243=5z$，所以 $5z$ 最大. 取 $y=1$，则由 $2^x=3$ 得 $x=\log_2 3$，所以 $2x=\log_2 9>3y$. 综上可得，$3y<2x<5z$. 故选 A.

法二(设元法)：设 $2^x=3^y=5^z=k$，则 $x=\log_2 k$，$y=\log_3 k$，$z=\log_5 k$，所以 $\frac{1}{2x}=\log_k 2^{\frac{1}{2}}$，$\frac{1}{3y}=\log_k 3^{\frac{1}{3}}$，$\frac{1}{5z}=\log_k 5^{\frac{1}{5}}$. 又易知 $k>1$，$5^{\frac{1}{5}}<2^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{1}{3}}$，所以 $\log_k 5^{\frac{1}{5}}<\log_k 2^{\frac{1}{2}}<\log_k 3^{\frac{1}{3}}$，即 $0<\frac{1}{5z}<\frac{1}{2x}<\frac{1}{3y}$，所以 $3y<2x<5z$. 故选 A.]

跟进训练

2. **ACD**　[**法一**(特值法)：取 $x=2$，则由 $\log_2 x=\log_3 y=\log_5 z$ 得 $y=3$，$z=5$，此时易知 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}$，选项 C 正确；取 $x=4$，则由 $\log_2 x=\log_3 y=\log_5 z$ 得 $y=9$，$z=25$，此时易知 $\frac{x}{2}<\frac{y}{3}<\frac{z}{5}$，选项 A 正确；取 $x=\sqrt{2}$，则由 $\log_2 x=\log_3 y=\log_5 z$ 得 $y=\sqrt{3}$，$z=\sqrt{5}$，此时易知 $\frac{z}{5}<\frac{y}{3}<\frac{x}{2}$，选项 D 正确.

法二(设元法)：设 $\log_2 x=\log_3 y=\log_5 z=k$，则 $x=2^k$，$y=3^k$，$z=5^k$，所以 $\frac{x}{2}=2^{k-1}$，$\frac{y}{3}=3^{k-1}$，$\frac{z}{5}=5^{k-1}$. 又易知 $k>0$，若 $k=1$，则 $\frac{x}{2}=1$，$\frac{y}{3}=1$，$\frac{z}{5}=1$，所以 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}$，所以选项 C 正确；若 $0<k<1$，则根据函数 $f(t)=t^{k-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减可得 $2^{k-1}>3^{k-1}>5^{k-1}$，所以 $\frac{z}{5}<\frac{y}{3}<\frac{x}{2}$，所以选项 D 正确；若 $k>1$，则根据函数 $f(t)=t^{k-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增可得 $2^{k-1}<3^{k-1}<5^{k-1}$，所以 $\frac{x}{2}<\frac{y}{3}<\frac{z}{5}$，所以选项 A 正确.]

题型三

典例 3　(1)**D**　(2)**B**　[(1)$\frac{a}{6\pi}=\frac{\ln 2}{2}$，$\frac{b}{6\pi}=\frac{\ln 3}{3}$，$\frac{c}{6\pi}=\frac{\ln \pi}{\pi}$，

$\because 6\pi>0$，

$\therefore a,b,c$ 的大小比较可以转化为 $\frac{\ln 2}{2}$，$\frac{\ln 3}{3}$，$\frac{\ln \pi}{\pi}$ 的大小比较.

设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x=e$ 时，$f'(x)=0$，

当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$，当 $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，$\because e<3<\pi<4$，

$\therefore \frac{\ln 3}{3}>\frac{\ln \pi}{\pi}>\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln 2}{2}$，$\therefore b>c>a$，故选 D.

(2)令 $f(x)=2^x+\log_2 x$，因为 $y=2^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$y=\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)=2^x+\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 又 $2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b=2^{2b}+\log_2 b<2^{2b}+\log_2 2b$，所以 $f(a)<f(2b)$，所以 $a<2b$. 故选 B.]

跟进训练

3. (1)**A**　(2)①③④　[(1)由 $2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$，得 $2^x-3^{-x}<2^y-3^{-y}$，即 $2^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x<2^y-\left(\frac{1}{3}\right)^y$. 设 $f(x)=2^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x$，则 $f(x)<f(y)$. 因为函数 $y=2^x$ 在 **R** 上为增函数，$y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在 **R** 上为增函数，所以 $f(x)=2^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在 **R** 上为增函数，则由 $f(x)<f(y)$，得 $x<y$，所以 $y-x>0$，所以 $y-x+1>1$，所以 $\ln(y-x+1)>0$，故选 A.

(2)构造函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，导函数为 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

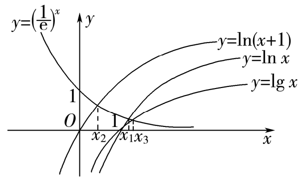
当 $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，可得当 $x=e$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{e}$.

$\ln 3<\sqrt{3}\ln 2 \Leftrightarrow 2\ln\sqrt{3}<\sqrt{3}\ln 2 \Leftrightarrow \frac{\ln\sqrt{3}}{\sqrt{3}}<\frac{\ln 2}{2}$，由 $\sqrt{3}<2<e$ 可得 $f(\sqrt{3})<f(2)$，故①正确；

$\ln\pi<\sqrt{\frac{\pi}{e}} \Leftrightarrow \frac{\ln\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}<\frac{\ln\sqrt{e}}{\sqrt{e}}$，由 $\sqrt{e}<\sqrt{\pi}<e$，可得 $f(\sqrt{e})<f(\sqrt{\pi})$，故②错误；由 $f(\sqrt{16})<f(\sqrt{15})$ 可推导出 $\frac{\ln\sqrt{16}}{\sqrt{16}}<\frac{\ln\sqrt{15}}{\sqrt{15}}$，即 $\frac{2\ln 2}{4}<\frac{\ln\sqrt{15}}{\sqrt{15}}$，所以 $\frac{\ln 2}{2}<\frac{\ln\sqrt{15}}{\sqrt{15}}$，可得 $f(2)<f(\sqrt{15})$，即 $2^{\sqrt{15}}<15$，故③正确；$3e\ln 2<4\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\ln 8}{8}<\frac{\sqrt{2}}{2e}<\frac{1}{e}$，由 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{e}$，可知④正确.]

题型四

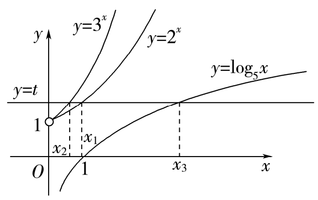
典例 4 (1)**D** (2)**C** [(1)画出函数 $y=\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^x$,$y=\ln x$,$y=\ln(x+1)$,$y=\lg x$ 的图象,如图所示,



由图象可知 $x_2<x_1<x_3$.

(2)因为 x,y,z 均为大于 0 的实数,

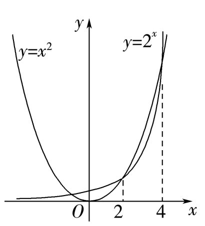
所以令 $2^x=3^y=\log_5 z=t>1$,进而将问题转化为函数 $y=2^x$,$y=3^x$,$y=\log_5 x$ 与直线 $y=t>1$ 的交点的横坐标 x_1,x_2,x_3 的大小关系,故作出各函数图象,如图,由图可知 $x_3>x_1>x_2$,即 $z>x>y$. 故选 C.



]

跟进训练

4. **ABD** [作出 $y=2^x$ 和 $y=x^2$ 的图象,如图所示,由图象可得,当 $x\in(0,2)$ 时,$2^x>x^2$,当 $x\in(2,4)$ 时,$x^2>2^x$,



$1.9^2<2^{1.9}$,$2^{2.9}<2.9^2$,故 A,B 正确.

令 $f(x)=\frac{2^x}{2^x-1}$,则 $f(x)=1+\frac{1}{2^x-1}$,$f(x)$在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,所以 $\frac{2^{\ln 2}}{2^{\ln 2}-1}>\frac{2^{\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}}-1}$,故 C 错误.

$\log_7 4-\log_{12} 7=\log_7 4-\frac{1}{\log_7 12}=\frac{\log_7 4\cdot\log_7 12-1}{\log_7 12}<\frac{\left(\frac{\log_7 4+\log_7 12}{2}\right)^2-1}{\log_7 12}=\frac{\left(\frac{\log_7 48}{2}\right)^2-1}{\log_7 12}<0$,所以 $\log_7 4<\log_{12} 7$,故 D 正确. 故选 ABD.]

第 8 课时 函数的图象

梳理 · 必备知识

2. (1)$f(x+h)$ $f(x-h)$ (2)$-f(x)$ $f(-x)$ $-f(-x)$ $\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$

(3)$f(ax)$ $af(x)$ (4)$|f(x)|$ $f(|x|)$

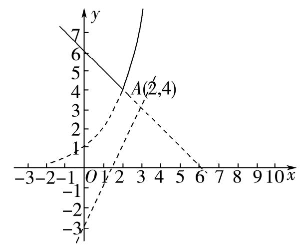
激活 · 基本技能

一、(1)× (2)√ (3)× (4)×

二、1. **C** [$\because f(x)=\frac{1}{x}+x$ 是奇函数,$\therefore$图象关于原点对称.]

2. **C** [其图象是由 $y=x^2$ 图象中 $x<0$ 的部分和 $y=x-1$ 图象中 $x\geqslant 0$ 的部分组成.]

3. **C** [画出 $y=\max\{2^x,2x-3,6-x\}$ 的示意图,如图所示. y 的最小值为 $2^2=6-2=4$,故选 C.

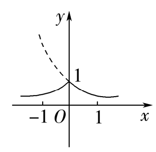


]

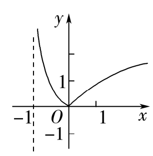
4. e^{-x+1} [$f(x)=\mathrm{e}^{-x}$,$\therefore g(x)=\mathrm{e}^{-(x-1)}=\mathrm{e}^{-x+1}$.]

考点一

典例 1 **解**:(1)先作出 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象,保留 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 图象中 $x\geqslant 0$ 的部分,再作出 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象中 $x>0$ 部分关于 y 轴的对称部分,即得 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ 的图象,如图①实线部分所示.



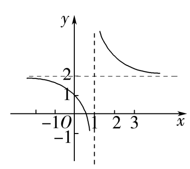
图①



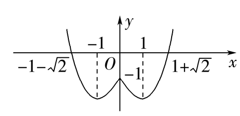
图②

(2)将函数 $y=\log_2 x$ 的图象向左平移一个单位长度,再将 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折上去,即可得到函数 $y=|\log_2(x+1)|$ 的图象,如图②.

(3)$\because y=\frac{2x-1}{x-1}=2+\frac{1}{x-1}$,故函数图象可由 $y=\frac{1}{x}$ 的图象向右平移 1 个单位长度,再向上平移 2 个单位长度得到,如图③.



图③



图④

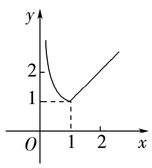
(4)$\because y=\begin{cases}x^2-2x-1, x\geqslant 0,\\ x^2+2x-1, x<0,\end{cases}$ 且函数为偶函数,先用描点法作出$[0,+\infty)$上的图象,再根据对称性作出$(-\infty,0)$上的图象,如图④.

跟进训练

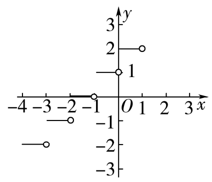
1. **解**:(1)$y=10^{|\lg x|}=\begin{cases}x, x\geqslant 1,\\ \frac{1}{x}, 0<x<1,\end{cases}$ 其图象如图①所示.

(2)$f(x)=[x]+2=\begin{cases}\cdots\\ -2, -4\leqslant x<-3,\\ -1, -3\leqslant x<-2,\\ 0, -2\leqslant x<-1,\\ 1, -1\leqslant x<0,\\ 2, 0\leqslant x<1,\\ \cdots\end{cases}$

函数部分图象如图②所示.



图①



图②

考点二

典例 2　(1)**A**　(2)**B**　[(1)设 $f(x)=\frac{x^3-x}{x^2+1}$,则 $f(1)=0$,故排除 B;

设 $h(x)=\frac{2x\cos x}{x^2+1}$,当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$0<\cos x<1$,

所以 $h(x)=\frac{2x\cos x}{x^2+1}<\frac{2x}{x^2+1}\leqslant 1$,故排除 C;

设 $g(x)=\frac{2\sin x}{x^2+1}$,则 $g(3)=\frac{2\sin 3}{10}>0$,故排除 D.

故选 A.

(2)**法一**(图象变换法):作出函数 $y=f(x)$关于 y 轴对称的图象得到函数 $y=f(-x)$的图象,再把得到的图象向右平移 2 个单位长度,得到函数 $y=f(2-x)$的图象,再作出与此图象关于 x 轴对称的图象,得到 $y=-f(2-x)$的图象,故选 B.

法二(特殊值验证):当 $x=0$ 时,$-f(2-x)=-f(2)=-1$;当 $x=1$ 时,$-f(2-x)=-f(1)=-1$.

观察各选项可知,故选 B.]

跟进训练

2.(1)**A**　(2)**D**　(3)**C**　[(1)令 $f(x)=(3^x-3^{-x})\cos x$,$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,

则 $f(-x)=(3^{-x}-3^x)\cos(-x)=-(3^x-3^{-x})\cos x=-f(x)$,所以 $f(x)$为奇函数,排除 BD;

又当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$3^x-3^{-x}>0$,$\cos x>0$,所以 $f(x)>0$,排除 C.

故选 A.

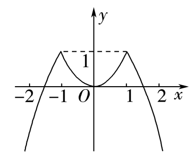
(2)**法一**:由题图可知函数 $f(x)$的图象关于 y 轴对称,所以函数 $f(x)$是偶函数. 对于 A,$f(x)=\frac{5(e^x-e^{-x})}{x^2+2}$,定义域为 $\mathbf{R}$,$f(-x)=\frac{5(e^{-x}-e^x)}{x^2+2}=-f(x)$,所以函数 $f(x)=\frac{5(e^x-e^{-x})}{x^2+2}$是奇函数,所以排除 A;对于 B,$f(x)=\frac{5\sin x}{x^2+1}$,定义域为 $\mathbf{R}$,$f(-x)=\frac{5\sin(-x)}{x^2+1}=-\frac{5\sin x}{x^2+1}=-f(x)$,所以函数 $f(x)=\frac{5\sin x}{x^2+1}$是奇函数,所以排除 B;对于 C,$f(x)=\frac{5(e^x+e^{-x})}{x^2+2}$,定义域为 $\mathbf{R}$,$f(-x)=\frac{5(e^{-x}+e^x)}{x^2+2}=f(x)$,所以函数 $f(x)=\frac{5(e^x+e^{-x})}{x^2+2}$是偶函数,又 $x^2+2>0$,$e^x+e^{-x}>0$,所以 $f(x)>0$ 恒成立,不符合题意,所以排除 C;分析知,选项 D 符合题意,故选 D.

法二:由题图可知函数 $f(x)$的图象关于 y 轴对称,所以函数 $f(x)$是偶函数. 因为 $y=x^2+2$ 是偶函数,$y=e^x-e^{-x}$是奇函数,所以 $f(x)=\frac{5(e^x-e^{-x})}{x^2+2}$是奇函数,故排除 A;因为 $y=x^2+1$ 是偶函数,$y=\sin x$ 是奇函数,所以 $f(x)=\frac{5\sin x}{x^2+1}$是奇函数,故排除 B;因为 $x^2+2>0$,$e^x+e^{-x}>0$,所以 $f(x)=\frac{5(e^x+e^{-x})}{x^2+2}>0$ 恒成立,不符合题意,故排除 C. 分析知,选项 D 符合题意,故选 D.

(3)由 $f(x)=\frac{ax+b}{(x+c)^2}$及图象可知,$x\neq -c$,$-c>0$,则 $c<0$;当 $x=0$ 时,$f(0)=\frac{b}{c^2}>0$,所以 $b>0$;当 $y=0$ 时,$ax+b=0$,所以 $x=-\frac{b}{a}>0$,所以 $a<0$. 故 $a<0$,$b>0$,$c<0$. 故选 C.]

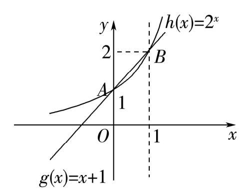
考点三

考向 1　**典例 3**　**ABD**



[根据函数 $f(x)=2-x^2$ 与 $g(x)=x^2$,画出函数$F(x)=\min\{f(x),g(x)\}$的图象,如图. 由图象可知,函数 $F(x)=\min\{f(x),g(x)\}$关于 y 轴对称,所以 A 项正确;函数 $F(x)$的图象与 x 轴有 3 个交点,所以方程 $F(x)=0$ 有 3 个解,所以 B 项正确;函数$F(x)$在$(-\infty,-1]$上单调递增,在$[-1,0]$上单调递减,在$[0,1]$上单调递增,在$[1,+\infty)$上单调递减,所以 C 项错误,D 项正确.]

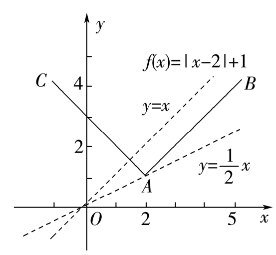
考向 2　**典例 4**　**D**　[$f(x)>0\Leftrightarrow 2^x>x+1$,在同一平面直角坐标系中画出$h(x)=2^x$,$g(x)=x+1$ 的图象,如图所示,两图象交点坐标为$A(0,1)$和 $B(1,2)$,



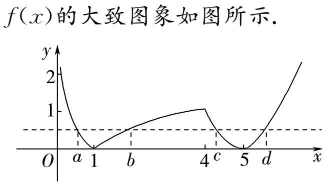
观察图象可知不等式 $f(x)>0$ 的解集为$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$,故选 D.]

考向 3　**典例 5**　(1)$\left(\frac{1}{2},1\right)$　(2)$(24,25)$

[(1)先作出函数$f(x)=|x-2|+1$ 的图象,如图所示,当直线 $g(x)=kx$ 与直线 AB 平行时,斜率为 1,当直线$g(x)=kx$ 过点 A 时,斜率为$\frac{1}{2}$,故 $f(x)=g(x)$有两个不相等的实根时,k 的取值范围为$\left(\frac{1}{2},1\right)$.



(2)作出函数 $f(x)$的大致图象如图所示.



因为 a,b,c,d 互不相同,不妨设 $a<b<c<d$,且 $f(a)=f(b)=f(c)=f(d)$,则有$-\log_4 a=\log_4 b$,即 $\log_4 a+\log_4 b=0$,可得 $ab=1$,则 $abcd=cd$.

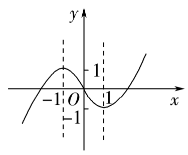
由 $c+d=10$，且 $c<d$，可得 $cd<\left(\frac{c+d}{2}\right)^2=25$，且 $cd=c(10-c)=-(c-5)^2+25$，

当 $c=4$ 时，$d=6$，此时 $cd=24$，但 c 取不到 4，

故 $abcd$ 的取值范围是 $(24,25)$.]

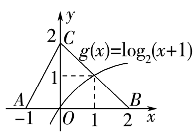
跟进训练

3.(1)**C**　(2)**C**　(3)$(0,1]$　[(1)$f(x)=\begin{cases}x^2-2x,x\geqslant 0,\\-x^2-2x,x<0,\end{cases}$ 画出函数 $f(x)$ 的图象，如图.



观察图象可知，函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称，故函数 $f(x)$ 为奇函数，且在 $(-1,1)$ 上单调递减.

(2)令 $y=g(x)=\log_2(x+1)$，作出函数 $g(x)$ 的图象，如图所示.

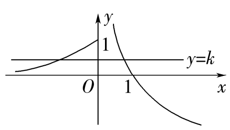


由 $\begin{cases}x+y=2,\\y=\log_2(x+1),\end{cases}$

得 $\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

所以结合图象知不等式 $f(x)\geqslant\log_2(x+1)$ 的解集为 $\{x\mid -1<x\leqslant 1\}$.

(3)作出函数 $y=f(x)$ 与 $y=k$ 的图象，如图所示，



由图可知 $k\in(0,1]$.]

第 9 课时　函数的零点与方程的解

梳理·必备知识

1.(1)$f(x)=0$　(2)零点　x 轴　(3)连续不断　$f(a)f(b)<0$　(a,b)　$f(c)=0$

2.连续不断　$f(a)f(b)<0$　零点

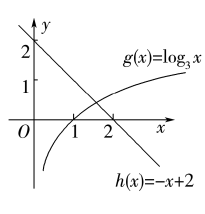
激活·基本技能

一、(1)×　(2)×　(3)√　(4)×

二、1.**A**　[根据二分法的概念可知选项 A 中函数不能用二分法求零点.]

2.**B**　[**法一**(定理法)：函数 $f(x)=\log_3 x+x-2$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，并且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，图象是一条连续曲线. 由题意知 $f(1)=-1<0$，$f(2)=\log_3 2>0$，$f(3)=2>0$，根据函数零点存在定理可知，函数 $f(x)=\log_3 x+x-2$ 有唯一零点，且零点在区间 $(1,2)$ 内.

法二(图象法)：函数 $f(x)$ 的零点所在的区间转化为函数 $g(x)=\log_3 x$，$h(x)=-x+2$ 图象交点的横坐标所在的范围. 作出两个函数的图象如图所示，可知 $f(x)$ 的零点所在的区间为 $(1,2)$. 故选 B.



]

3.**BCD**　[由所给的函数值表知，$f(1)f(2)>0$，$f(2)f(3)<0$，$f(5)f(6)<0$，$f(5)f(7)<0$，∴函数 $f(x)$ 必有零点的区间为 $(2,3)$，$(5,6)$，$(5,7)$，故选 BCD.]

4.-2，e　[由题意得 $\begin{cases}x\leqslant 0,\\x^2+x-2=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>0,\\-1+\ln x=0,\end{cases}$ 解得 $x=-2$ 或 $x=\mathrm{e}$.]

考点一

典例 1　(1)**D**　(2)**B**　[(1)**法一**(定理法)：$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{1}{3}-\frac{1}{x}=\frac{x-3}{3x}$，令 $f'(x)>0\Rightarrow x>3$，$f'(x)<0\Rightarrow 0<x<3$，

∴$f(x)$ 在 $(0,3)$ 上单调递减，在 $(3,+\infty)$ 上单调递增，

又 $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\frac{1}{3\mathrm{e}}+1>0$，$f(1)=\frac{1}{3}>0$，

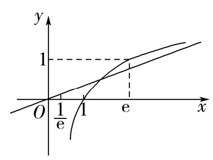
∴$f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},1\right)$ 内无零点.

又 $f(\mathrm{e})=\frac{\mathrm{e}}{3}-1<0$，∴$f(x)$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 内有零点.

法二(图象法)：令 $f(x)=0$ 得 $\frac{1}{3}x=\ln x$.

其中 $y=\ln x$ 过原点的切线方程为 $y=\frac{1}{\mathrm{e}}x$，∵$\frac{1}{\mathrm{e}}>\frac{1}{3}$，

∴作出函数 $y=\frac{1}{3}x$ 和 $y=\ln x$ 的图象，如图，



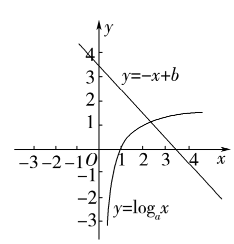
显然 $y=f(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},1\right)$ 内无零点，在区间 $(1,\mathrm{e})$ 内有零点.

(2)设 $h(x)=2\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}-5$，$y=\mathrm{e}^x$ 是 **R** 上的增函数，$y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 和 $(-\infty,0)$ 上都是减函数，因此 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上都是增函数，只考虑在 $(0,+\infty)$ 上的情形即可，$h(1)=2\mathrm{e}-1-5=2\mathrm{e}-6<0$，$h(2)=2\mathrm{e}^2-\frac{1}{2}-5=2\mathrm{e}^2-\frac{11}{2}>0$，所以 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 上有零点. 所以函数 $f(x)=2\mathrm{e}^x$ 的图象与函数 $g(x)=\frac{1}{x}+5$ 的图象交点所在的区间可能为 $(1,2)$. 故选 B.]

跟进训练

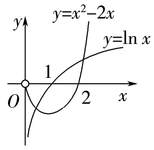
1.(1)**A**　(2)2　[(1)函数 $y=f(x)$ 是图象开口向上的二次函数，最多有两个零点，由于 $a<b<c$，则 $a-b<0$，$a-c<0$，$b-c<0$，因此 $f(a)=(a-b)(a-c)>0$，$f(b)=(b-c)\cdot(b-a)<0$，$f(c)=(c-a)(c-b)>0$. 所以 $f(a)f(b)<0$，$f(b)f(c)<0$，即 $f(x)$ 在区间 (a,b) 和区间 (b,c) 内各有一个零点.

(2)对于函数 $y=\log_a x$，当 $x=2$ 时，可得 $y<1$，当 $x=3$ 时，可得 $y>1$，在同一坐标系中画出函数 $y=\log_a x$，$y=-x+b$ 的图象，判断出两个函数图象的交点的横坐标在 $(2,3)$ 内，所以函数 $f(x)$ 的零点 $x_0\in(n,n+1)$ 时，$n=2$.]



考点二

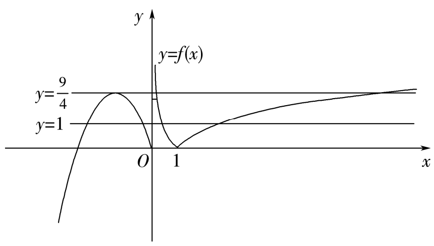
典例2 (1)**B** (2)**B** [(1)当 $x>0$ 时,如图所示,作出函数 $y=\ln x$ 和 $y=x^2-2x$ 的图象,由图知,当 $x>0$ 时,$f(x)$有 2 个零点;当 $x\leqslant 0$ 时,令 $f(x)=0$,得 $x=-\frac{1}{4}$.



综上,$f(x)$有 3 个零点,故选 B.

(2)根据题意,令 $4[f(x)]^2-13f(x)+9=0$,

得 $f(x)=1$ 或 $f(x)=\frac{9}{4}$.作出 $f(x)$的简图:



由图象可得当 $f(x)=1$ 或 $f(x)=\frac{9}{4}$ 时,分别有 4 个和 3 个交点,故关于 x 的函数 $y=4[f(x)]^2-13f(x)+9$ 的零点的个数为 7.故选 B.]

跟进训练

2.(1)**B** (2)①②④ [(1)令 $f(x)=x^2-x=0$,则 $x=0$ 或 $x=1$,所以 $f(0)=0,f(1)=0$,

因为函数的最小正周期为 2,

所以 $f(2)=0,f(3)=0,f(-2)=0$,

$f(-1)=0,f(-3)=0$.

所以函数 $y=f(x)$的图象在区间$[-3,3]$上与 x 轴的交点个数为 7.

(2)将 $f(x)=|\lg x|-kx-2$ 的零点问题转化成两个函数 $y_1=|\lg x|,y_2=kx+2$ 图象的交点问题.

对于①,当 $k=0$ 时,$|\lg x|=2$,两函数图象有两个交点,①正确;

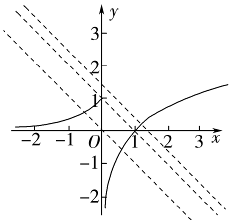
对于②,存在 $k<0$,使 $y_1=|\lg x|$ 与 $y_2=kx+2$ 相切,②正确;

对于③,若 $k<0,y_1=|\lg x|$与 $y_2=kx+2$ 最多有 2 个交点,③错误;

对于④,当 $k>0$ 时,过点(0,2)存在函数$g(x)=\lg x(x>1)$图象的切线,此时共有两个交点,当直线斜率稍微小于相切时的斜率时,就会有 3 个交点,故④正确.]

考点三

考向1 **典例**3 $[-1,+\infty)$ [函数 $g(x)=f(x)+x+a$ 存在 2 个零点,即关于 x 的方程 $f(x)=-x-a$ 有 2 个不同的实根,即函数 $f(x)$的图象与直线 $y=-x-a$ 有 2 个交点,作出直线 $y=-x-a$ 与函数 $f(x)$的图象,如图所示,由图可知,$-a\leqslant 1$,解得 $a\geqslant -1$.



]

考向2 **典例**4 (1)**D** (2)$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ [(1)由题意知方程 $ax=x^2+1$ 在$\left(\frac{1}{2},3\right)$上有解,即 $a=x+\frac{1}{x}$在$\left(\frac{1}{2},3\right)$上有解,设 $t=x+\frac{1}{x},x\in\left(\frac{1}{2},3\right)$,则 t 的取值范围是$\left[2,\frac{10}{3}\right)$.所以实数 a 的取值范围是$\left[2,\frac{10}{3}\right)$.

(2)依题意,结合函数 $f(x)$的图象分析可知,m 需满足

$\begin{cases}m\neq 2,\\ f(-1)\cdot f(0)<0,\\ f(1)\cdot f(2)<0,\end{cases}$即$\begin{cases}m\neq 2,\\ (2m-1)(2m+1)<0,\\ (4m-1)(8m-7)<0,\end{cases}$

解得$\frac{1}{4}<m<\frac{1}{2}$.]

跟进训练

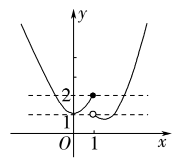
3.(1)**C** (2)**C** [(1)由题意,知函数 $f(x)$在(1,2)上单调递增,又函数的一个零点在区间(1,2)内,

所以$\begin{cases}f(1)<0,\\ f(2)>0,\end{cases}$即$\begin{cases}-a<0,\\ 3-a>0,\end{cases}$解得 $0<a<3$,故选 C.

(2)作出函数 $f(x)$的图象如图,

因为关于 x 的方程$f(x)=2a$ 恰有两个不同的实根,

所以 $y=2a$ 与函数 $y=f(x)$的图象恰有两个交点,结合图象,



得 $2a>2$ 或$\frac{3}{4}<2a\leqslant 1$.解得 $a>1$ 或$\frac{3}{8}<a\leqslant\frac{1}{2}$.]

第 10 课时 函数模型的应用

梳理·必备知识

1.递增 递增 越快 越慢 y 轴 x 轴

激活·基本技能

一、(1)× (2)× (3)√ (4)×

二、1.**B** [当 $x\in(4,+\infty)$时,易知增长速度由大到小依次为 $g(x)>f(x)>h(x)$.故选 B.]

2.**C** [设该死亡生物体内原有的碳 14 的含量为 1,则经过 $n(n\in\mathbf{N}^*)$个"半衰期"后的含量为$\left(\frac{1}{2}\right)^n$,由$\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{1\,000}$,得 $n\geqslant 10$.所以,若某死亡生物体内的碳 14 用一般的放射性探测器探测不到,则它至少需要经过 10 个"半衰期".]

3.**C** [由题图可知,$y=a^t$ 过点(1,2),则 $2=a^1$,即 $a=2$,

所以池塘里浮萍的面积 y(单位:m^2)与时间 t(单位:月)的关系为 $y=2^t$,

当 $t=5$ 时,$y=2^5=32<50$,故 A 错误;

当 $t=1$ 时,$y=2$,当 $t=2$ 时,$y=2^2=4$,当 $t=3$ 时,$y=2^3=8$,

所以第一个月浮萍增加的面积为 2 m^2,第二个月浮萍增加的面积为 $4-2=2(m^2)$,第三个月浮萍增加的面积为 $8-4=4(m^2)$,故 B 错误;

浮萍面积每月增长率为$\frac{2^{t+1}-2^t}{2^t}=1$,故 C 正确;

因为 $2^{t_1}=2,2^{t_2}=3,2^{t_3}=6$,所以 $2^{t_1}\cdot 2^{t_2}=2^{t_3}$,即 $t_1+t_2=t_3$,故 D 错误.故选 C.]

4. $y=\begin{cases}0.5x,0\leqslant x\leqslant 100,\\0.4x+10,x>100\end{cases}$ [由题意可得

$y=\begin{cases}0.5x,0\leqslant x\leqslant 100,\\0.4x+10,x>100.\end{cases}$]

考点一

典例1 (1)**B** (2)**B** [(1)由图可知水深 h 越大，水的体积 v 就越大，故函数 $v=f(h)$ 是个增函数，故排除A,C项，由鱼缸形状可知，下面细中间粗，上面较细，所以随着水深的增加，体积的变化的速度是先慢后快再慢的，所以B正确. 故选B.

(2)由函数图象可知符合条件的只有指数型函数模型，并且 $m>0,0<a<1,n>0$.]

跟进训练

1.② $\frac{10}{3}$ [由散点图的走势，知模型①不合适.

曲线过点 $\left(4,\frac{7}{3}\right)$，则后三个模型的解析式分别为② $y=\frac{1}{3}+\log_2 t$；③ $y=\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}$；④ $y=\sqrt{t}+\frac{1}{3}$，当 $t=1$ 时，代入④中，得 $y=\frac{4}{3}$，与散点图不符，易知拟合最好的是②.

将 $t=8$ 代入②式，得 $y=\frac{1}{3}+\log_2 8=\frac{10}{3}$.]

考点二

典例2 解：(1)由题意得当 $0<x<40$ 时，$S(x)=500x-(10x^2+100x)-3\ 000=-10x^2+400x-3\ 000$，

当 $x\geqslant 40$ 时，$S(x)=500x-\left(501x+\frac{10\ 000}{x}-4\ 500\right)-3\ 000=1\ 500-x-\frac{10\ 000}{x}$，

所以 $S(x)=\begin{cases}-10x^2+400x-3\ 000,0<x<40,\\1\ 500-x-\frac{10\ 000}{x},x\geqslant 40.\end{cases}$

(2)由(1)得当 $0<x<40$ 时，$S(x)=-10x^2+400x-3\ 000$，

当 $x=20$ 时，$S(x)_{\max}=1\ 000$，

当 $x\geqslant 40$ 时，$S(x)=1\ 500-x-\frac{10\ 000}{x}=1\ 500-\left(x+\frac{10\ 000}{x}\right)$，

$\because x+\frac{10\ 000}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{10\ 000}{x}}=200$，当且仅当 $x=\frac{10\ 000}{x}$，

即 $x=100$ 时等号成立，$\therefore S(x)\leqslant 1\ 500-200=1\ 300$，

$\therefore x=100$ 时，$S(x)_{\max}=1\ 300$，

$\because 1\ 300>1\ 000$，$\therefore x=100$ 时，即明年产量为100百辆时，企业所获利润最大，最大利润为1 300万元.

跟进训练

2.33 [依题意得，$\begin{cases}10\%=m\cdot a^{10},\\20\%=m\cdot a^{20}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^{10}=2,\\m=\frac{1}{20},\end{cases}$

故 $a=2^{\frac{1}{10}}$，故 $h=\frac{1}{20}\cdot 2^{\frac{t}{10}}$，

令 $h=\frac{1}{2}$，$\therefore 2^{\frac{t}{10}}=10$，$\therefore \frac{t}{10}\lg 2=1$，故 $t\approx\frac{10}{0.3}\approx 33$.]

考点三

典例3 解：(1)设年增长率为 x，则 $a(1+x)^{10}=2a$，即 $(1+x)^{10}=2$，解得 $x=2^{\frac{1}{10}}-1$，因此，森林面积的年增长率为 $2^{\frac{1}{10}}-1$.

(2)设已植树造林 n 年，则 $a\cdot 2^{\frac{n}{10}}=\sqrt{2}a$，

即 $2^{\frac{n}{10}}=2^{\frac{1}{2}}$，$\therefore\frac{n}{10}=\frac{1}{2}$，解得 $n=5$，

因此，该地已经植树造林5年.

(3)设至少需要植树造林 m 年，则 $a\cdot 2^{\frac{m}{10}}\geqslant 6a$，可得 $2^{\frac{m}{10}}\geqslant 6$，

所以 $\frac{m}{10}\geqslant\log_2 6=\frac{\lg 6}{\lg 2}=\frac{\lg 2+\lg 3}{\lg 2}=1+\frac{\lg 3}{\lg 2}$，

$\therefore m\geqslant 10+\frac{10\lg 3}{\lg 2}\approx 10+\frac{10\times 0.477\ 1}{0.301\ 0}\approx 25.9$.

因此，至少需要植树造林26年.

跟进训练

3.①13 ②36 [①若某家庭某月分类投放120 kg垃圾，则该家庭月底的积分为 $120+10=130$(分)，

故该家庭该月积分能兑换 $130\times 0.1=13$(元)；

②设每个家庭每月分类投放的垃圾为 t kg，每个家庭月底积分能兑换的金额为 $f(t)$ 元.

当 $0\leqslant t<100$ 时，$f(t)=0.1t<0.34t\times 0.4=0.136t$ 恒成立；

当 $t\geqslant 100$ 时，$f(t)=0.1t+0.1x\leqslant 0.34t\times 0.4$，可得 $x\leqslant(0.36t)_{\min}=36$. 故 x 的最大值为36.]

高考研究在线2 高考试题中的抽象函数

命题点一

典例1 **BC** [因为 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right)$，$g(2+x)$ 均为偶函数，

所以 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right)=f\left(\frac{3}{2}+2x\right)$，

即 $f\left(\frac{3}{2}-x\right)=f\left(\frac{3}{2}+x\right)$，$g(2+x)=g(2-x)$，

所以 $f(3-x)=f(x)$，$g(4-x)=g(x)$，则 $f(-1)=f(4)$，故C正确；

函数 $f(x)$，$g(x)$ 的图象分别关于直线 $x=\frac{3}{2}$，$x=2$ 对称，

又 $g(x)=f'(x)$，且函数 $f(x)$ 可导，所以 $g\left(\frac{3}{2}\right)=0$，$g(3-x)=-g(x)$，

所以 $g(4-x)=g(x)=-g(3-x)$，

所以 $g(x+2)=-g(x+1)=g(x)$，

所以 $g\left(-\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{3}{2}\right)=0$，

$g(-1)=g(1)=-g(2)$，故B正确，D错误；

若函数 $f(x)$ 满足题设条件，则函数 $f(x)+C$(C 为常数)也满足题设条件，所以无法确定 $f(x)$ 的函数值，故A错误.

故选BC.]

跟进训练

1.**AD** [$\because f(3-x)$，$g\left(\frac{5}{2}-2x\right)$ 均为奇函数，

$\therefore f(3+x)=-f(3-x)$，$g\left(\frac{5}{2}+2x\right)=-g\left(\frac{5}{2}-2x\right)$，

$\therefore f(x)$的图象关于点$(3,0)$对称，$g(x)$的图象关于点$\left(\frac{5}{2},0\right)$对称；$\therefore$A 正确；$\because g(x)=f'(x)$，$\therefore g(x)$的图象关于直线$x=3$对称，B 错误；$\therefore g(x)$的周期为 2，

$\therefore g(5)=-g(0),g(8)=g(0)$，

$\therefore g(5)=-g(8)$，D 正确；$\because f(3+x)=-f(3-x)$，

$\therefore f\left(\frac{5}{2}\right)=-f\left(\frac{7}{2}\right)$，C 错误. 故选 AD.]

2. **ABD**　[令 $x=\frac{1}{2}$，$y=0$，则有 $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)\times f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)[1+f(0)]=0$，

又 $f\left(\frac{1}{2}\right)\neq0$，故 $1+f(0)=0$，即 $f(0)=-1$.

令 $x=\frac{1}{2}$，$y=-\frac{1}{2}$，则有 $f\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(-\frac{1}{2}\right)=4\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，

即 $f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$，由 $f(0)=-1$，

可得 $f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，

又 $f\left(\frac{1}{2}\right)\neq0$，故 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，故 A 正确；

令 $y=-\frac{1}{2}$，则有 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)+f(x)f\left(-\frac{1}{2}\right)=4x\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，

即 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)=-2x$，故函数 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)$是奇函数，

有 $f\left(x+1-\frac{1}{2}\right)=-2(x+1)=-2x-2$，

即 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=-2x-2$，

即函数 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)$是减函数，

令 $x=1$，有 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-2\times1=-2$，

故 B 正确，C 错误，D 正确.

故选 ABD.]

命题点二

典例 2　**A**　[令 $y=1$ 得 $f(x+1)+f(x-1)=f(x)\cdot f(1)=f(x)\Rightarrow f(x+1)=f(x)-f(x-1)$，

故 $f(x+2)=f(x+1)-f(x)$，

$f(x+3)=f(x+2)-f(x+1)$，

消去 $f(x+2)$和 $f(x+1)$得到 $f(x+3)=-f(x)$，故 $f(x)$的周期为 6；

令 $x=1$，$y=0$ 得 $f(1)+f(1)=f(1)\cdot f(0)\Rightarrow f(0)=2$，

$f(2)=f(1)-f(0)=1-2=-1$，

$f(3)=f(2)-f(1)=-1-1=-2$，

$f(4)=f(3)-f(2)=-2-(-1)=-1$，

$f(5)=f(4)-f(3)=-1-(-2)=1$，

$f(6)=f(5)-f(4)=1-(-1)=2$，

故 $\sum\limits_{k=1}^{22}f(k)=3[f(1)+f(2)+\cdots+f(6)]+f(19)+f(20)+f(21)+f(22)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=1+(-1)+(-2)+(-1)=-3$，即 $\sum\limits_{k=1}^{22}f(k)=-3$. 故选 A.]

跟进训练

3. $\frac{1}{4}$　[取 $x=1$，$y=0$ 得 $4f(1)f(0)=f(1)+f(1)$，

$\because f(1)=\frac{1}{4}$，$\therefore f(0)=\frac{1}{2}$.

取 $x=n$，$y=1$，有 $f(n)=f(n+1)+f(n-1)$，

同理 $f(n+1)=f(n+2)+f(n)$.

联立得 $f(n+2)=-f(n-1)$，

所以 $f(n)=-f(n+3)=f(n+6)$，

所以函数是周期函数，周期 $T=6$，

故 $f(2\,023)=f(1)=\frac{1}{4}$.]

第三章　一元函数的导数及其应用

第 1 课时　导数的概念及运算

梳理·必备知识

1.(1)导数　瞬时变化率　$f'(x_0)$　$y'|_{x=x_0}$

2.斜率　$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

3.0　$\alpha x^{\alpha-1}$　$\cos x$　$-\sin x$　$a^x\ln a$　e^x　$\frac{1}{x\ln a}$　$\frac{1}{x}$

4.(1)$f'(x)\pm g'(x)$　(2)$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(3)$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

(4)$cf'(x)$

5.(1)$f(g(x))$　(2)$y'_u\cdot u'_x$

激活·基本技能

一、(1)×　(2)×　(3)×　(4)×

二、1. **C**　[$h'(t)=-9.8t+8$，$\therefore h'(0.5)=-9.8\times0.5+8=3.1$.]

2. **C**　[由导数的几何意义知，$0<f'(3)<f(3)-f(2)<f'(2)$，故选 C.]

3. $-\frac{2}{3}$　[因为 $f'(x)=-\frac{2}{3-2x}-2\sin 2x$，所以 $f'(0)=-\frac{2}{3}$.]

4. $y=(e-1)x+2$　[$\because f'(x)=e^x-\frac{1}{x^2}$，

$\therefore f'(1)=e-1$，

又 $f(1)=e+1$，$\therefore$切点为$(1,e+1)$，切线斜率 $k=f'(1)=e-1$，即切线方程为 $y-(e+1)=(e-1)(x-1)$，即 $y=(e-1)x+2$.]

考点一

典例 1　(1)**ABC**　(2)$\overline{v}_1>\overline{v}_2>\overline{v}_3$

[(1)$-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$表示在$[a,b]$上割线斜率的相反数，$-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$越大治理能力越强.

对于 A，在$[t_1,t_2]$这段时间内，甲企业对应图象的割线斜率的相反数大，故甲企业的污水治理能力比乙企业强，正确；

对于 B，要比较 t_2 时刻的污水治理能力，即看在 t_2 时刻两曲线

的切线斜率，切线斜率的相反数越大，污水治理能力越强，故在t_2时刻，甲企业的污水治理能力比乙企业强，正确；

对于C，在t_3时刻，甲、乙两企业的污水排放量都在污水达标排放量以下，正确；

对于D，甲在$[t_1,t_2]$这段时间内的污水治理能力最强，错误.

(2)$\because \overline{v}_1=\frac{s(t_1)-s(0)}{t_1-0}=k_{OA}$，$\overline{v}_2=\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}=k_{AB}$，$\overline{v}_3=\frac{s(t_3)-s(t_2)}{t_3-t_2}=k_{BC}$，由图象得$k_{OA}>k_{AB}>k_{BC}$，$\therefore \overline{v}_1>\overline{v}_2>\overline{v}_3$.］

跟进训练

1. **BD**　［对于A，设$\tan\alpha=\frac{r(1)-r(0)}{1-0}$，

$\tan\theta=\frac{r(2)-r(1)}{2-1}$，

由图得$\alpha>\theta$，所以$\tan\alpha>\tan\theta$，

所以$\frac{r(1)-r(0)}{1-0}>\frac{r(2)-r(1)}{2-1}$，所以该选项错误；

对于B，由题图得图象上点的切线的斜率越来越小，

根据导数的几何意义得$r'(1)>r'(2)$，所以该选项正确；

对于C，设$V_1=0$，$V_2=3$，$\therefore r\left(\frac{V_1+V_2}{2}\right)=r\left(\frac{3}{2}\right)$，$\frac{r(V_1)+r(V_2)}{2}=\frac{r(3)}{2}$，因为$r\left(\frac{3}{2}\right)-r(0)>r(3)-r\left(\frac{3}{2}\right)$，所以$r\left(\frac{3}{2}\right)>\frac{r(3)}{2}$，所以该选项错误；

对于D，$\frac{r(V_2)-r(V_1)}{V_2-V_1}$表示$A(V_1,r(V_1))$，$B(V_2,r(V_2))$两点连线的斜率，$r'(V_0)$表示$C(V_0,r(V_0))$处切线的斜率，由于$V_0\in(V_1,V_2)$，所以可以平移直线$AB$使之和曲线相切，切点就是点$C$，所以该选项正确.故选BD.］

考点二

典例2　(1)**ACD**　(2)$\frac{\pi^2}{36}+\frac{2\pi}{3}$　［(1)对于A，$\left(\frac{1}{\ln x}\right)'=-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot(\ln x)'=-\frac{1}{x\ln^2 x}$；对于B，$(x^2e^x)'=(x^2+2x)e^x$；对于C，令$f(x)=\sqrt{2x+1}=(2x+1)^{\frac{1}{2}}$，$\therefore f'(x)=\frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}}\times2=(2x+1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$；对于D，$\left(x-\frac{1}{x}\right)'=1+\frac{1}{x^2}$.故选ACD.

(2)$f'(x)=2x+f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x$，

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2}f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$，

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4\pi}{3}$，$\therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi^2}{36}+\frac{2\pi}{3}$.］

跟进训练

2. (1)**AC**　(2)3　［(1)若$f(x)=x^2$，则$f'(x)=2x$，令$x^2=2x$，得$x=0$或$x=2$，方程显然有解，故A符合要求；若$f(x)=e^{-x}$，则$f'(x)=-e^{-x}$，令$e^{-x}=-e^{-x}$，此方程无解，故B不符合要求；若$f(x)=\ln x$，则$f'(x)=\frac{1}{x}$，令$\ln x=\frac{1}{x}$，在同一直角坐标系内作出函数$y=\ln x$与$y=\frac{1}{x}$的图象(作图略)，可得两函数的图象有一个交点，所以方程$f(x)=f'(x)$存在实数解，故C符合要求；若$f(x)=\tan x$，则$f'(x)=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}$，令$\tan x=\frac{1}{\cos^2 x}$，化简得$\sin x\cos x=1$，变形可得$\sin 2x=2$，无解，故D不符合要求.故选AC.

(2)$f'(x)=ae^{ax}+\frac{1}{x+1}$，$\therefore f'(0)=a+1=4$，

$\therefore a=3$.］

考点三

考向1　**典例3**　**C**　［由题意可知$y'=\frac{e^x(x+1)-e^x\cdot1}{(x+1)^2}=\frac{xe^x}{(x+1)^2}$，则曲线$y=\frac{e^x}{x+1}$在点$\left(1,\frac{e}{2}\right)$处的切线斜率$k=y'|_{x=1}=\frac{e}{4}$，所以曲线$y=\frac{e^x}{x+1}$在点$\left(1,\frac{e}{2}\right)$处的切线方程为$y-\frac{e}{2}=\frac{e}{4}(x-1)$，即$y=\frac{e}{4}x+\frac{e}{4}$，故选C.］

考向2　**典例4**　$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$　［$\because y=(x+a)e^x$，

$\therefore y'=(x+1+a)e^x$，

设切点为(x_0,y_0)，则$y_0=(x_0+a)e^{x_0}$，切线斜率$k=(x_0+1+a)e^{x_0}$，

切线方程为$y-(x_0+a)e^{x_0}=(x_0+1+a)\cdot e^{x_0}(x-x_0)$，

$\because$切线过原点，$\therefore -(x_0+a)e^{x_0}=(x_0+1+a)e^{x_0}(-x_0)$，

整理得$x_0^2+ax_0-a=0$，

$\because$切线有两条，$\therefore \Delta=a^2+4a>0$，解得$a<-4$或$a>0$，

$\therefore a$的取值范围是$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$.］

跟进训练

3. (1)0　(2)$[2,+\infty)$　［(1)由题图可知曲线$y=f(x)$在$x=3$处切线的斜率等于$-\frac{1}{3}$，$\therefore f'(3)=-\frac{1}{3}$.

$\because g(x)=xf(x)$，$\therefore g'(x)=f(x)+xf'(x)$，

$\therefore g'(3)=f(3)+3f'(3)$，

又由题图可知$f(3)=1$，

$\therefore g'(3)=1+3\times\left(-\frac{1}{3}\right)=0$.

(2)直线$2x-y=0$的斜率$k=2$，

又曲线$y=f(x)$存在与直线$2x-y=0$平行的切线，

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}+4x-a=2$在$(0,+\infty)$内有解，

则$a=4x+\frac{1}{x}-2$，$x>0$.

又$4x+\frac{1}{x}\geqslant2\sqrt{4x\cdot\frac{1}{x}}=4$，当且仅当$x=\frac{1}{2}$时取“=”.

$\therefore a\geqslant4-2=2$.

$\therefore$实数a的取值范围是$[2,+\infty)$.］

考点四

典例5　**解**：(1)由题意知，$f(-1)=-1-(-1)=0$，$f'(x)=3x^2-1$，$f'(-1)=3-1=2$，则$y=f(x)$在点$(-1,0)$处的切线方程为$y=2(x+1)$，

即 $y=2x+2$，设该切线与 $g(x)$ 切于点 $(x_2,g(x_2))$，$g'(x)=2x$，则 $g'(x_2)=2x_2=2$，解得 $x_2=1$，则 $g(1)=1+a=2+2$，解得 $a=3$.

(2) $f'(x)=3x^2-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线方程为 $y-(x_1^3-x_1)=(3x_1^2-1)(x-x_1)$，整理得 $y=(3x_1^2-1)x-2x_1^3$，

设该切线与曲线 $y=g(x)$ 切于点 $(x_2,g(x_2))$，$g'(x)=2x$，则 $g'(x_2)=2x_2$，则切线方程为 $y-(x_2^2+a)=2x_2(x-x_2)$，整理得 $y=2x_2x-x_2^2+a$，

则 $\begin{cases}3x_1^2-1=2x_2,\\-2x_1^3=-x_2^2+a,\end{cases}$ 整理得 $a=x_2^2-2x_1^3=\left(\frac{3x_1^2}{2}-\frac{1}{2}\right)^2-2x_1^3=\frac{9}{4}x_1^4-2x_1^3-\frac{3}{2}x_1^2+\frac{1}{4}$，

令 $h(x)=\frac{9}{4}x^4-2x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}$，则 $h'(x)=9x^3-6x^2-3x=3x(3x+1)(x-1)$，令 $h'(x)>0$，解得 $-\frac{1}{3}<x<0$ 或 $x>1$，

令 $h'(x)<0$，解得 $x<-\frac{1}{3}$ 或 $0<x<1$，则 x 变化时，$h'(x)$，$h(x)$ 的变化情况如下表：

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3},0\right)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	单调递减	$\frac{5}{27}$	单调递增	$\frac{1}{4}$	单调递减	-1	单调递增

则 $h(x)$ 的值域为 $[-1,+\infty)$，故 a 的取值范围为 $[-1,+\infty)$.

跟进训练

4. (1) $1-\ln 2$　(2) $y=\mathrm{e}x$ 或 $y=x+1$

[(1) 设 $y=kx+b$ 与 $y=\ln x+2$ 和 $y=\ln(x+1)$ 的切点分别为 $(x_1,\ln x_1+2)$ 和 $(x_2,\ln(x_2+1))$. 则切线方程分别为 $y-\ln x_1-2=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$，$y-\ln(x_2+1)=\frac{1}{x_2+1}(x-x_2)$，

化简得 $y=\frac{1}{x_1}x+\ln x_1+1$，$y=\frac{1}{x_2+1}x-\frac{x_2}{x_2+1}+\ln(x_2+1)$，依题意，

$\begin{cases}\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2+1},\\ \ln x_1+1=-\frac{x_2}{x_2+1}+\ln(x_2+1),\end{cases}$

解得 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{1}{2}$，

从而 $b=\ln x_1+1=1-\ln 2$.

(2) 设 l 与 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 的切点为 (x_1,e^{x_1})，与 $g(x)=\ln x+2$ 的切点为 $(x_2,\ln x_2+2)$.

因为 $f'(x)=\mathrm{e}^x$，$g'(x)=\frac{1}{x}$，

所以 l：$y=\mathrm{e}^{x_1}\cdot x-x_1\cdot\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_1}$，

$y=\frac{1}{x_2}\cdot x+\ln x_2+1$.

所以 $\begin{cases}\mathrm{e}^{x_1}=\frac{1}{x_2},\\(1-x_1)\mathrm{e}^{x_1}=\ln x_2+1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=0,\\x_2=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=1,\\x_2=\frac{1}{\mathrm{e}}.\end{cases}$

所以直线 l 的方程为 $y=x+1$ 或 $y=\mathrm{e}x$.]

第2课时　导数与函数的单调性

梳理·必备知识

1. 单调递增　单调递减　常数函数

2. 定义域　零点

激活·基本技能

一、(1)√　(2)√　(3)×　(4)√

二、1. **C**　[由 $f'(x)$ 的图象知，

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)>0$，

∴ $f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(0,x_1)$ 时，$f'(x)<0$，∴ $f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

∴ $f(x)$ 单调递增.]

2. **D**　[因为 $f'(x)=-\sin x-1<0$ 在 $(0,\pi)$ 上恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上是减函数，故选 D.]

3. $(0,1)$　[函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x>0\}$，由 $f'(x)=1-\frac{1}{x}<0$，得 $0<x<1$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$.]

4. 3　[$f'(x)=3x^2-a\geqslant 0$，即 $a\leqslant 3x^2$，

又因为 $x\in[1,+\infty)$，所以 $a\leqslant 3$，即 a 的最大值是 3.]

考点一

典例1　解：(1) 由题意知 $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}-\ln x-k}{\mathrm{e}^x}$ $(x>0)$，

又 $f'(1)=\frac{1-k}{\mathrm{e}}=0$，所以 $k=1$.

(2) 由 (1) 得 $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}-\ln x-1}{\mathrm{e}^x}$ $(x>0)$.

设 $h(x)=\frac{1}{x}-\ln x-1$ $(x>0)$，则 $h'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

由 $h(1)=0$ 知，当 $0<x<1$ 时，$h(x)>0$，

所以 $f'(x)>0$；

当 $x>1$ 时，$h(x)<0$，所以 $f'(x)<0$.

综上，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,1)$，单调递减区间是 $(1,+\infty)$.

跟进训练

1. **B**　[对于 A，$f(x)=\sin 2x$ 的单调递增区间是 $\left[k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$；对于 B，$f'(x)=\mathrm{e}^x(x+1)$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数；对于 C，$f'(x)=3x^2-1$，令 $f'(x)>0$，得 $x>\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以函数 $f(x)=x^3-x$ 在 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 和

$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$上单调递增；对于 D，$f'(x)=-1+\frac{1}{x}=-\frac{x-1}{x}$，令 $f'(x)>0$，得 $0<x<1$，所以函数 $f(x)=-x+\ln x$ 在区间$(0,1)$上单调递增. 综上所述，应选 B.］

考点二

典例 2　解：函数的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=ax-(a+1)+\frac{1}{x}$

$=\frac{ax^2-(a+1)x+1}{x}$

$=\frac{(ax-1)(x-1)}{x}$.

①当 $0<a<1$ 时，$\frac{1}{a}>1$，

$\therefore x\in(0,1)\cup\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，

$x\in\left(1,\frac{1}{a}\right)$时，$f'(x)<0$，

$\therefore$函数 $f(x)$在$(0,1)$和$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增，

在$\left(1,\frac{1}{a}\right)$上单调递减；

②当 $a=1$ 时，$\frac{1}{a}=1$，$\therefore f'(x)\geqslant0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立，

$\therefore$函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

③当 $a>1$ 时，$0<\frac{1}{a}<1$，

$\therefore x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)\cup(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，

$x\in\left(\frac{1}{a},1\right)$时，$f'(x)<0$，

$\therefore$函数 $f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$和$(1,+\infty)$上单调递增，

在$\left(\frac{1}{a},1\right)$上单调递减.

综上，当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$在$(0,1)$和$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(1,\frac{1}{a}\right)$上单调递减；

当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$和$(1,+\infty)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{a},1\right)$上单调递减.

拓展变式

解：当 $a>0$ 时，讨论同例题解析；

当 $a\leqslant0$ 时，$ax-1<0$，

$\therefore x\in(0,1)$时，$f'(x)>0$，$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)<0$，

$\therefore$函数 $f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减.

综上，当 $a\leqslant0$ 时，函数 $f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减；

当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$在$(0,1)$和$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(1,\frac{1}{a}\right)$上单调递减；

当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$和$(1,+\infty)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{a},1\right)$上单调递减.

跟进训练

2. **解**：$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{a}{x}=-\frac{x^2-ax+1}{x^2}$.

设 $y=x^2-ax+1$，其图象过定点$(0,1)$，开口向上，对称轴为 $x=\frac{a}{2}$，

①当$\frac{a}{2}\leqslant0$，即 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

②当$\frac{a}{2}>0$，即 $a>0$ 时，

令 $x^2-ax+1=0$，$\Delta=a^2-4$，

(i)当 $\Delta\leqslant0$，即 $0<a\leqslant2$ 时，$f'(x)\leqslant0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上是减函数.

故 $0<a\leqslant2$ 时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上是减函数.

(ii)当 $\Delta>0$，即 $a>2$ 时，令 $f'(x)=0$，得

$x=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$或 $x=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$.

当 $x\in\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)\cup\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$时，$f'(x)<0$；

当 $x\in\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$在$\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$，$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$上单调递减，在$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$上单调递增.

考点三

考向 1　典例 3　(1)**D**　(2)**B**　［(1)由题意得 $0<a<5$，$0<b<4$，$0<c<3$.

令 $f(x)=\frac{e^x}{x}(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，

故 $f(x)$在$(0,1)$上为减函数，在$(1,+\infty)$上为增函数，因为 $ae^5=5e^a$，所以$\frac{e^5}{5}=\frac{e^a}{a}$，

即 $f(5)=f(a)$，而 $0<a<5$，

故 $0<a<1$. 同理 $0<b<1$，$0<c<1$，$f(4)=f(b)$，$f(3)=f(c)$.

因为 $f(5)>f(4)>f(3)$，所以 $f(a)>f(b)>f(c)$，

所以 $0<a<b<c<1$. 故选 D.

(2)由题意知 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=-x+\sin x=-f(x)$，得 $f(x)$为奇函数，且 $f'(x)=1-\cos x\geqslant0$，所以 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增.

由 $f(2m+1)+f(1-m)>0$ 得 $f(2m+1)>f(m-1)$，

即 $2m+1>m-1$. 解得 $m>-2$. 故选 B.］

考向 2　典例 4　**解**:(1)$g(x)=2x+\ln x-\frac{a}{x}(x>0)$, $g'(x)=2+\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}(x>0)$.

∵函数 $g(x)$在$[1,2]$上单调递增,

∴$g'(x)\geqslant 0$ 在$[1,2]$上恒成立,

即 $2+\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}\geqslant 0$ 在$[1,2]$上恒成立,

∴$a\geqslant -2x^2-x$ 在$[1,2]$上恒成立,

∴$a\geqslant(-2x^2-x)_{\max}$,$x\in[1,2]$.

在$[1,2]$上,$(-2x^2-x)_{\max}=-3$,

∴$a\geqslant -3$.

∴实数 a 的取值范围是$[-3,+\infty)$.

(2)$g(x)$在$[1,2]$上存在单调递增区间,

则 $g'(x)>0$ 在$[1,2]$上有解,

即 $a>-2x^2-x$ 在$[1,2]$上有解,

∴$a>(-2x^2-x)_{\min}$,

又$(-2x^2-x)_{\min}=-10$,∴$a>-10$.

∴实数 a 的取值范围为$(-10,+\infty)$.

拓展变式

解:(1)依题意 $g'(x)=2+\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}$在$[1,2]$上满足 $g'(x)\leqslant 0$ 恒成立,∴当 $x\in[1,2]$时,$a\leqslant -2x^2-x$ 恒成立,

令 $t=-2x^2-x=-2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$,

∵该函数在$[1,2]$上是减函数,∴当 $x=2$ 时,

$t=-2x^2-x$ 取得最小值-10.

∴$a\leqslant -10$,即实数 a 的取值范围为$(-\infty,-10]$.

(2)∵函数 $g(x)$在区间$[1,2]$上不单调,

∴$g'(x)=0$ 在区间$(1,2)$内有解,

则 $a=-2x^2-x=-2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$在$(1,2)$内有解,

易知函数 $y=-2x^2-x$ 在$(1,2)$上是减函数,

∴$y=-2x^2-x$ 的值域为$(-10,-3)$,

因此实数 a 的取值范围为$(-10,-3)$.

跟进训练

3.(1)**A**　(2)(0,27)　[(1)因为 $f(x)=x\sin x$,所以 $f(-x)=(-x)\cdot\sin(-x)=x\sin x=f(x)$,所以函数 $f(x)$是偶函数,所以$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.又当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$f'(x)=\sin x+x\cos x>0$,所以函数 $f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,所以$f\left(\frac{\pi}{5}\right)<f(1)<f\left(\frac{\pi}{3}\right)$,即 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)>f(1)>f\left(\frac{\pi}{5}\right)$.故选 A.

(2)**法一**(间接法):若 $f(x)=x^3-kx$ 在$(-3,1)$上是单调递增函数,则 $f'(x)=3x^2-k\geqslant 0$ 在$(-3,1)$上恒成立,

即 $k\leqslant 3x^2$ 在$(-3,1)$上恒成立,故 $k\leqslant 0$.

若 $f(x)=x^3-kx$ 在$(-3,1)$上是单调递减函数,则 $f'(x)=3x^2-k\leqslant 0$ 在$(-3,1)$上恒成立,

即 $k\geqslant 3x^2$ 在$(-3,1)$上恒成立,故 $k\geqslant 27$.

所以当函数 $f(x)=x^3-kx$ 在$(-3,1)$上是单调函数时,实数 k 的取值范围是 $k\leqslant 0$ 或 $k\geqslant 27$,

当函数 $f(x)=x^3-kx$ 在$(-3,1)$上不是单调函数时,实数 k 的取值范围是 $0<k<27$.

法二(直接法):由奇函数 $f(x)=x^3-kx$ 得 $f'(x)=3x^2-k$.

当 $k\leqslant 0$ 时,$f'(x)=3x^2-k\geqslant 0$,$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,不满足题意;

当 $k>0$ 时,由 $f'(x)=3x^2-k<0$,得$-\sqrt{\frac{k}{3}}<x<\sqrt{\frac{k}{3}}$,在$\left(-\sqrt{\frac{k}{3}},\sqrt{\frac{k}{3}}\right)$上 $f(x)$是减函数.

由 $f'(x)=3x^2-k>0$,得 $x<-\sqrt{\frac{k}{3}}$ 或 $x>\sqrt{\frac{k}{3}}$.在$\left(-\infty,-\sqrt{\frac{k}{3}}\right)$,$\left(\sqrt{\frac{k}{3}},+\infty\right)$上 $f(x)$是增函数.

要满足函数 $f(x)=x^3-kx$ 在$(-3,1)$上不是单调函数,由对称性得,$-\sqrt{\frac{k}{3}}>-3$,所以 $k<27$.

综上所述,实数 k 的取值范围是$(0,27)$.]

高考培优 2　构造函数妙解题

题型一

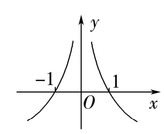
考向 1　典例 1　$(-\infty,-3)\cup(0,3)$　[借助导数的运算法则,$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0\Leftrightarrow[f(x)g(x)]'>0$,所以函数 $y=f(x)\cdot g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增.又由题意知函数 $y=f(x)g(x)$为奇函数,所以其图象关于原点对称,且过点$(-3,0)$,$(0,0)$,$(3,0)$.数形结合(图略)可求得不等式 $f(x)g(x)<0$ 的解集是$(-\infty,-3)\cup(0,3)$.]

跟进训练

1.**A**　[设函数 $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$,∵$F(-x)=\frac{f(-x)}{g(-x)}=\frac{-f(x)}{g(x)}=-F(x)$,∴函数 $F(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,当 $x<0$ 时,$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)>0$,且 $f(3)=0$,∴当 $x<0$ 时,$F'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}>0$,$F(3)=0$,∴$F(x)$在$(-\infty,0)$上为增函数,且$F(-3)=0$,∴当 $x\in(-3,0)$时,$F(x)>0$,此时,$f(x)g(x)>0$;

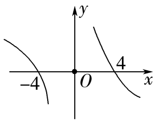
∵函数 $F(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,∴当 $x\in(3,+\infty)$时,$F(x)>0$,此时,$f(x)g(x)>0$.综上,不等式 $f(x)g(x)>0$ 的解集是$(-3,0)\cup(3,+\infty)$.故选 A.]

考向 2　典例 2　(1)$(-1,0)\cup(0,1)$　(2)$(-\infty,-4)\cup(0,4)$　[(1)构造 $F(x)=\frac{f(x)}{x^2}$,则 $F'(x)=\frac{f'(x)\cdot x-2f(x)}{x^3}$,



当 $x>0$ 时,$xf'(x)-2f(x)<0$,可以推出当 $x>0$ 时,$F'(x)<0$,$F(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.∵$f(x)$为偶函数,$y=x^2$为偶函数,∴$F(x)$为偶函数,∴$F(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增.根据 $f(-1)=0$ 可得 $F(-1)=0$,根据函数的单调性、奇偶性可得函数图象如图所示,根据图象可知 $f(x)>0$ 的解集为$(-1,0)\cup(0,1)$.

(2)构造 $F(x)=xf(x)$，则 $F'(x)=f(x)+xf'(x)$，当 $x<0$ 时，$f(x)+xf'(x)<0$，可以推出当 $x<0$ 时，$F'(x)<0$，



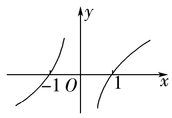
∴$F(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减.

∵$f(x)$为偶函数，$y=x$ 为奇函数，

∴$F(x)$为奇函数，∴$F(x)$在$(0,+\infty)$上也单调递减. 根据 $f(-4)=0$ 可得 $F(-4)=0$，根据函数的单调性、奇偶性可得函数图象如图所示，根据图象可知 $xf(x)>0$ 的解集为$(-\infty,-4)\cup(0,4)$.]

跟进训练

2.$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ [构造$F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，则 $F'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}$，当 $x<0$ 时，$xf'(x)-f(x)>0$，可以推出当 $x<0$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增. ∵$f(x)$为偶函数，$y=x$ 为奇函数，∴$F(x)$为奇函数，



∴$F(x)$在$(0,+\infty)$上也单调递增. 根据 $f(1)=0$ 可得 $F(1)=0$，根据函数的单调性、奇偶性可得函数图象如图所示，根据图象可知 $f(x)>0$ 的解集为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.]

考向 3　典例 3　**B**　[构造函数 $g(t)=\dfrac{f(t)}{e^t}-1$，则 $g(2)=\dfrac{f(2)}{e^2}-1=0$.

∵$g'(t)=\dfrac{f'(t)-f(t)}{e^t}<0$，∴函数 $g(t)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

∵$f(t)<e^t$，∴$\dfrac{f(t)}{e^t}-1<0$，即$\dfrac{f(t)}{e^t}-1<g(2)$，

即 $g(t)<g(2)$，∴$t>2$，故选 B.]

跟进训练

3.$(0,+\infty)$　[构造 $F(x)=\dfrac{f(x)}{e^{2x}}$，

则 $F'(x)=\dfrac{e^{2x}f'(x)-2e^{2x}f(x)}{e^{4x}}=\dfrac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}$，

∵函数 $f(x)$满足 $f'(x)-2f(x)>0$，

则 $F'(x)>0$，$F(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

又∵$f(0)=1$，则 $F(0)=1$，∴$f(x)>e^{2x}\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{e^{2x}}>1\Leftrightarrow F(x)>F(0)$，根据单调性得 $x>0$.]

题型二

考向 1　典例 4　**C**　[因为对任意 $x\in(-\pi,0)$，$f'(x)\sin x<f(x)\cos x$ 恒成立，即对任意 $x\in(-\pi,0)$，$f'(x)\sin x-f(x)\cos x<0$ 恒成立，

又 $x\in(-\pi,0)$时，$\sin x<0$，

所以$\left[\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]'=\dfrac{f'(x)\sin x-f(x)\cos x}{\sin^2 x}<0$，

所以 $y=\dfrac{f(x)}{\sin x}$在$(-\pi,0)$上单调递减，

因为$-\dfrac{5\pi}{6}<-\dfrac{3\pi}{4}$，

所以$\dfrac{f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}{\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}>\dfrac{f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$，

即$\dfrac{f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}{-\frac{1}{2}}>\dfrac{f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$，

所以$\sqrt{2}f\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)<f\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)$，故选 C.]

跟进训练

4.**D**　[$f(x)<f'(x)\tan x\Leftrightarrow f'(x)\sin x-f(x)\cos x>0$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{\sin x}$，

则 $F'(x)=\dfrac{f'(x)\sin x-f(x)\cos x}{\sin^2 x}>0$，

即函数 $F(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上是增函数，

A 项，$F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)<F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$，

即$\dfrac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\pi}{4}}<\dfrac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}$，

∴$\sqrt{3}f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)<\sqrt{2}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$，故 A 项错误；

B 项，$F(1)>F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，即$\dfrac{f(1)}{\sin 1}>\dfrac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\pi}{6}}$，

∴$f(1)>2f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\sin 1$，故 B 项错误；

C 项，$F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)<F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，

即$\dfrac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\pi}{6}}<\dfrac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\pi}{4}}$，

∴$\sqrt{2}f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)<f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，故 C 项错误；

D 项，$F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)<F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$，

即$\dfrac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\pi}{6}}<\dfrac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}$，

∴$\sqrt{3}f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)<f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$，故选 D.]

考向 2　典例 5　**B**　[$b-c=\ln 1.02-\sqrt{1.04}+1$，设 $f(x)=\ln(x+1)-\sqrt{1+2x}+1$，

则 $b-c=f(0.02)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{2\sqrt{1+2x}}=\dfrac{\sqrt{1+2x}-(x+1)}{\sqrt{1+2x}\cdot(x+1)}$，当 $x\geqslant 0$ 时，$x+1=\sqrt{(x+1)^2}\geqslant\sqrt{1+2x}$，故当 $x\geqslant 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{\sqrt{1+2x}-(x+1)}{\sqrt{1+2x}\cdot(x+1)}\leqslant 0$，所以$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减，所以 $f(0.02)<f(0)=0$，即 $b<c$.

$a-c=2\ln 1.01-\sqrt{1.04}+1$,设 $g(x)=2\ln(x+1)-\sqrt{1+4x}+1$,则 $a-c=g(0.01)$,$g'(x)=\frac{2}{x+1}-\frac{4}{2\sqrt{1+4x}}=\frac{2[\sqrt{1+4x}-(x+1)]}{(x+1)\sqrt{1+4x}}$,当 $0\leqslant x<2$ 时,$\sqrt{4x+1}\geqslant\sqrt{(x+1)^2}=x+1$,故当 $0\leqslant x<2$ 时,$g'(x)\geqslant 0$,所以 $g(x)$在$[0,2)$上单调递增,所以 $g(0.01)>g(0)=0$,故 $c<a$,从而有 $b<c<a$,故选 B.]

跟进训练

5.**D** [$\because a=2e^{-0.2}$,$b=e^{0.2}$,

$\therefore \ln a=-0.2+\ln 2$,$\ln b=0.2$,

$\therefore \ln a-\ln b=-0.4+\ln 2>-0.4+\ln\sqrt{e}=-0.4+0.5=0.1>0$,

$\therefore \ln a>\ln b$,$\therefore a>b$.

设 $f(x)=e^x-(x+1)$,$\therefore f'(x)=e^x-1$,

当 $x>0$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$单调递增,当 $x<0$ 时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$单调递减,$\therefore f(x)\geqslant f(0)=1-(0+1)=0$,$\therefore f(0.2)>0$,即 $e^{0.2}-(0.2+1)>0$,即 $e^{0.2}>1.2$,

$\therefore b>c$,$\therefore a>b>c$.故选 D.]

考向 3　典例 6　(1)**ACD**　(2)**D**　[(1)令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$,则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,当 $0<x<e$ 时,$g'(x)>0$,当 $x>e$ 时,$g'(x)<0$,

$\therefore g(x)$在$(0,e)$上单调递增,在$(e,+\infty)$上单调递减.$\because 2<e$,$\therefore g(2)<g(e)$,即$\frac{\ln 2}{2}<\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$,$\therefore \ln 2<\frac{2}{e}$,故 A 错误.

$\because e<3<\pi$,$\therefore g(e)>g(3)>g(\pi)$,即$\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}>\frac{\ln 3}{3}>\frac{\ln\pi}{\pi}$,

$\therefore \ln 3<\frac{3}{e}$,$\ln\pi<\frac{\pi}{e}$,$\frac{\ln 3}{\ln\pi}>\frac{3}{\pi}$,故 B 正确,C,D 错误.故选 ACD.

(2)对于 A,B,令 $f(x)=e^x-\ln x$,则 $f'(x)=e^x-\frac{1}{x}$,

当 $0<x<1$ 时,$f'(x)=e^x-\frac{1}{x}$单调递增,且 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}-2<0$,$f'\left(\frac{2}{3}\right)=e^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{2}=\sqrt[3]{e^2}-\sqrt[3]{1.5^3}>\sqrt[3]{7.29}-\sqrt[3]{1.5^3}>0$,故存在 $x_0\in\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$,使得 $f'(x_0)=0$,则当 $x\in(0,x_0)$时,$f(x)=e^x-\ln x$ 单调递减,当 $x\in(x_0,1)$时,$f(x)=e^x-\ln x$ 单调递增,由于 $0<a<b<1$,此时 $f(a)=e^a-\ln a$,$f(b)=e^b-\ln b$ 大小关系不确定,故 A,B 均错误;

对于 C,D,设 $g(x)=\frac{e^x}{x}$,则 $g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$,

当 $0<x<1$ 时,$g'(x)<0$,故 $g(x)=\frac{e^x}{x}$单调递减,

所以当 $0<a<b<1$ 时,$g(a)>g(b)$,即$\frac{e^a}{a}>\frac{e^b}{b}$,即 $be^a>ae^b$,故 C 错误,D 正确.故选 D.]

跟进训练

6.(1)**B**　(2)**B**　[(1)原不等式可转化为$\frac{1+\ln x_1}{x_1}<\frac{1+\ln x_2}{x_2}$,

令 $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$,则 $f'=\frac{-\ln x}{x^2}$,

当 $x\in(0,1)$时,$f'(x)>0$,则 $f(x)$单调递增;当 $x\in(1,+\infty)$时,$f'(x)<0$,则 $f(x)$单调递减.

由于 $0<x_1<x_2\leqslant a$ 时有 $f(x_1)<f(x_2)$,

所以函数 $f(x)$在$(0,a]$上单调递增,

所以 $0<a\leqslant 1$,

所以 a 的最大值为 1.

故选 B.

(2)由 $ae^{a+1}+b<b\ln b$,可得 $ae^{a+1}<b\ln b-b=b(\ln b-1)=b\ln\frac{b}{e}$,

即 $e^a\ln e^a<\frac{b}{e}\ln\frac{b}{e}$,

设 $f(x)=x\ln x$,可得 $f(e^a)<f\left(\frac{b}{e}\right)$,

因为 $a>0$,可得 $e^a>1$,

又因为 $b(\ln b-1)>0$,$b>0$,所以 $\ln b>1$,即 $b>e$,所以$\frac{b}{e}>1$,当 $x>1$ 时,$f'(x)=\ln x+1>0$,可得函数 $f(x)$在$(1,+\infty)$上为增函数,所以 $e^a<\frac{b}{e}$,即 $b>e^{a+1}$.故选 B.]

第 3 课时　函数的极值与最大(小)值

梳理・必备知识

1.(1)$f'(x)<0$　$f'(x)>0$　a　(2)$f'(x)>0$　$f'(x)<0$　b　(3)极值点　极值

2.(1)连续不断　(2)极值　端点处的函数值 $f(a)$,$f(b)$

激活・基本技能

一、(1)√　(2)×　(3)×　(4)×

二、1.**A**　[由题意知在 $x=-1$ 处 $f'(-1)=0$,且其两侧导数符号为左负右正,$f(x)$在 $x=-1$ 左减右增,$f(x)$在 $x=-1$ 处取得极小值.故选 A.]

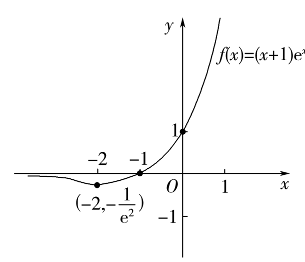
2.**C**　[因为 $f(x)=(x+1)e^x$,所以 $f'(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$.

令 $f'(x)>0$,解得 $x>-2$;令 $f'(x)<0$,解得 $x<-2$,

所以函数 $f(x)$在$(-\infty,-2)$上单调递减,在$(-2,+\infty)$上单调递增.

方程 $f(x)=a(a\in\mathbf{R})$有 2 个解时,只需函数 $y=a$ 与函数 $y=f(x)$的图象有两个交点.

如图所示:



要满足题意,实数 a 的范围为$\left(-\frac{1}{e^2},0\right)$.故选 C.]

3.**C**　[函数 $f(x)=x(x-c)^2$的导数为 $f'(x)=3x^2-4cx+c^2$.由题意知,$f(x)$在 $x=2$ 处的导数值为 $12-8c+c^2=0$,解得 $c=2$ 或 6.

又函数 $f(x)=x(x-c)^2$ 在 $x=2$ 处有极小值，故导数在 $x=2$ 处左侧为负，右侧为正．当 $c=2$ 时，$f(x)=x(x-2)^2$ 的导数在 $x=2$ 处左侧为负，右侧为正，即在 $x=2$ 处有极小值．而当 $c=6$ 时，$f(x)=x(x-6)^2$ 在 $x=2$ 处有极大值．故 $c=2$．]

4.4 [$f'(x)=x^2-4$，$x\in[0,3]$，当 $x\in[0,2)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(2,3]$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,2)$ 上单调递减，在 $(2,3]$ 上单调递增．又 $f(0)=m$，$f(3)=-3+m$．所以在 $[0,3]$ 上，$f(x)_{\max}=f(0)=4$，所以 $m=4$．]

考点一

考向 1　典例 1　BD　[由题图可知，当 $x<-2$ 时，$f'(x)>0$；当 $-2<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $1<x<2$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$．由此可以得到函数 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处取得极大值，在 $x=2$ 处取得极小值．]

考向 2　典例 2　解：(1) 当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x$，定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=\frac{2-x}{2x}$．

令 $f'(x)=0$，解得 $x=2$．

于是当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表．

x	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递增	$\ln 2-1$	单调递减

故 $f(x)$ 在定义域上的极大值为 $f(2)=\ln 2-1$，无极小值．

(2) 函数的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$．

若 $a\leqslant 0$，$f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

即函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，此时函数 $f(x)$ 在定义域上无极值点；

若 $a>0$，当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)>0$，

当 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，

故函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{a}$ 处有极大值．

综上可知，当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 无极值点；

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 有一个极大值点，且为 $x=\frac{1}{a}$．

考向 3　典例 3　(1) B　[$f(x)=\frac{1}{3}x^3+(a+1)x^2-(a^2+a-3)x\Rightarrow f'(x)=x^2+2(a+1)x-(a^2+a-3)$，由题意可知，$f'(1)=0\Rightarrow f'(1)=1+2(a+1)-(a^2+a-3)=0\Rightarrow a=3$ 或 $a=-2$．

当 $a=3$ 时，$f'(x)=x^2+2(a+1)x-(a^2+a-3)=x^2+8x-9=(x+9)(x-1)$，

当 $x>1$ 或 $x<-9$ 时，$f'(x)>0$，函数单调递增；当 $-9<x<1$ 时，$f'(x)<0$，函数单调递减，显然 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极值点．

当 $a=-2$ 时，$f'(x)=x^2+2(a+1)x-(a^2+a-3)=x^2-2x+1=(x-1)^2\geqslant 0$，所以函数是 **R** 上的增函数，没有极值，不符合题意，舍去，故选 B．]

(2) **解：**$\because g(x)=\ln x-mx+\frac{m}{x}$，$x>0$，

$\therefore g'(x)=\frac{1}{x}-m-\frac{m}{x^2}=\frac{x-mx^2-m}{x^2}=-\frac{mx^2-x+m}{x^2}$，

令 $h(x)=mx^2-x+m$，要使 $g(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，

则方程 $mx^2-x+m=0$ 有两个不相等的正数根 x_1，x_2．

$\because \frac{1}{2m}>0$，$\therefore h(0)=m>0$，

故只需满足 $\begin{cases} h(0)>0, \\ \frac{1}{2m}>0, \\ h\left(\frac{1}{2m}\right)<0 \end{cases}$ 即可，解得 $0<m<\frac{1}{2}$．

故 m 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$．

跟进训练

1. (1) 18　[函数 $f(x)=x^3-3ax+2$ 的导数 $f'(x)=3x^2-3a$，由题意得，$f'(2)=0$，即 $12-3a=0$，解得 $a=4$．

$\therefore f(x)=x^3-12x+2$，$\therefore f'(x)=3x^2-12=3(x-2)(x+2)$，由 $f'(x)>0$，得 $x>2$ 或 $x<-2$，即函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递增；

由 $f'(x)<0$，得 $-2<x<2$，函数 $f(x)$ 在 $(-2,2)$ 上单调递减；

故 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值，$x=-2$ 处取得极大值，

且 $f(-2)=-8+24+2=18$．即 $f(x)_{极大值}=18$．]

(2) **解：**$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}-a$，令 $g(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}-a$，则 $g'(x)=\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$．因为对于 $\forall x\in(-2,-1)$，$g'(x)=\frac{e^x[(x-1)^2+1]}{x^3}<0$ 恒成立，所以 $g(x)$ 在 $(-2,-1)$ 上单调递减．即 $f'(x)$ 在 $(-2,-1)$ 上单调递减，因为 $f(x)$ 在 $(-2,-1)$ 上有极大值，所以 $y=f'(x)$ 在 $(-2,-1)$ 上存在"左正右负"变号零点．由零点存在定理只需 $\begin{cases} f'(-2)>0, \\ f'(-1)<0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -\frac{3}{4e^2}-a>0, \\ -\frac{2}{e}-a<0, \end{cases}$ 所以 $-\frac{2}{e}<a<-\frac{3}{4e^2}$．所以函数 $f(x)$ 在 $(-2,-1)$ 上有极大值时，a 的取值范围为 $\left(-\frac{2}{e},-\frac{3}{4e^2}\right)$．

考点二

典例 4　解：(1) 易知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

当 $a=-1$ 时，$f(x)=-x+\ln x$，

$f'(x)=-1+\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x}$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$．

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$．

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减．

$\therefore f(x)_{\max}=f(1)=-1$．

$\therefore$ 当 $a=-1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值为 -1．

(2) $f'(x)=a+\frac{1}{x}$，$x\in(0,e]$，$\frac{1}{x}\in\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$．

①若 $a\geqslant-\frac{1}{e}$,则 $f'(x)\geqslant0$,从而 $f(x)$在$(0,e]$上单调递增,

$\therefore f(x)_{\max}=f(e)=ae+1\geqslant0$,不符合题意.

②若 $a<-\frac{1}{e}$,令 $f'(x)>0$ 得 $a+\frac{1}{x}>0$,结合 $x\in(0,e]$,解得 $0<x<-\frac{1}{a}$;

令 $f'(x)<0$ 得 $a+\frac{1}{x}<0$,结合 $x\in(0,e]$,解得 $-\frac{1}{a}<x\leqslant e$.

从而 $f(x)$在$\left(0,-\frac{1}{a}\right)$上单调递增,在$\left(-\frac{1}{a},e\right]$上单调递减,

$\therefore f(x)_{\max}=f\left(-\frac{1}{a}\right)=-1+\ln\left(-\frac{1}{a}\right)$.

令$-1+\ln\left(-\frac{1}{a}\right)=-3$,即 $a=-e^2$.

$\because -e^2<-\frac{1}{e}$,$\therefore a=-e^2$.

跟进训练

2.**解**:$f(x)=e^x-ax$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$f'(x)=e^x-a$,

若 $a\leqslant0$,则 $f'(x)>0$,此时 $f(x)$无最小值,故 $a>0$.

当 $x<\ln a$ 时,$f'(x)<0$,故 $f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上单调递减,

当 $x>\ln a$ 时,$f'(x)>0$,故 $f(x)$在$(\ln a,+\infty)$上单调递增,

故 $f(x)_{\min}=f(\ln a)=a-a\ln a$.

$g(x)=ax-\ln x$ 的定义域为$(0,+\infty)$,

$g'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}$.

当 $0<x<\frac{1}{a}$时,$g'(x)<0$,故 $g(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递减,

当 $x>\frac{1}{a}$时,$g'(x)>0$,故 $g(x)$在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增,

故 $g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{a}\right)=1-\ln\frac{1}{a}$.

因为 $f(x)=e^x-ax$ 和 $g(x)=ax-\ln x$ 有相同的最小值,

故 $1-\ln\frac{1}{a}=a-a\ln a$,整理得到$\frac{a-1}{1+a}=\ln a$,其中 $a>0$,

设 $m(a)=\frac{a-1}{1+a}-\ln a$,$a>0$,则 $m'(a)=\frac{2}{(1+a)^2}-\frac{1}{a}=\frac{-a^2-1}{a(1+a)^2}<0$,

故 $m(a)$在$(0,+\infty)$上单调递减,而 $m(1)=0$,

故 $m(a)=0$ 的唯一解为 $a=1$,故$\frac{a-1}{1+a}=\ln a$ 的解为 $a=1$.

综上,$a=1$.

第4课时　利用导数证明不等式

考点一

典例1　**证明**:$x^2-x+\frac{1}{x}+2\ln x-f(x)$

$=x(x-1)-\frac{x-1}{x}-2(x-1)\ln x$

$=(x-1)\cdot\left(x-\frac{1}{x}-2\ln x\right)$,

令 $g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$,

则 $g'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{(x-1)^2}{x^2}\geqslant0$,

所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,又 $g(1)=0$,

所以当 $0<x<1$ 时,$g(x)<0$,

当 $x>1$ 时,$g(x)>0$,

所以$(x-1)\left(x-\frac{1}{x}-2\ln x\right)\geqslant0$,

即 $f(x)\leqslant x^2-x+\frac{1}{x}+2\ln x$.

跟进训练

1.**证明**:令 $g(x)=x^2e^{2x-2}+2x^2-8x+5$,$x\in[0,2]$,

则 $g'(x)=2e^{2x-2}(x^2+x)+4x-8$,$x\in[0,2]$.

令 $h(x)=g'(x)$,则 $h'(x)=2e^{2x-2}(2x^2+4x+1)+4>0$,

所以 $g'(x)$在$[0,2]$上单调递增,且 $g'(1)=0$,

所以 $g(x)$在$[0,1)$上单调递减,在$(1,2]$上单调递增,

所以 $g(x)$的最小值为 $g(1)=0$,所以 $g(x)\geqslant0$,

即 $x^2e^{2x-2}\geqslant-2x^2+8x-5$.

考点二

典例2　(1)**解**:函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,

$f'(x)=ae^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)+\frac{be^{x-1}(x-1)}{x^2}$,

依题意得$\begin{cases}f(1)=2,\\f'(1)=e,\end{cases}$解得 $a=1$,$b=2$.

(2)**证明**:由(1)知 $f(x)=e^x\ln x+\frac{2e^{x-1}}{x}$,从而 $f(x)>1$ 等价于 $x\ln x>xe^{-x}-\frac{2}{e}$.

构造函数 $g(x)=x\ln x(x>0)$,则 $g'(x)=1+\ln x$,所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$时,$g'(x)<0$,当 $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$时,$g'(x)>0$,故 $g(x)$在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上单调递增,从而 $g(x)$在$(0,+\infty)$上的最小值为 $g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$.构造函数 $h(x)=xe^{-x}-\frac{2}{e}(x>0)$,则 $h'(x)=e^{-x}(1-x)$,所以当 $x\in(0,1)$时,$h'(x)>0$,当 $x\in(1,+\infty)$时,$h'(x)<0$,故 $h(x)$在$(0,+\infty)$上的最大值为 $h(1)=-\frac{1}{e}$.

综上,当 $x>0$ 时,$g(x)>h(x)$,即 $f(x)>1$.

跟进训练

2.(1)**解**:函数 $f(x)=x\ln x-ax$ 的定义域为$(0,+\infty)$.

当 $a=-1$ 时,$f(x)=x\ln x+x$,$f'(x)=\ln x+2$.

由 $f'(x)=0$,得 $x=\frac{1}{e^2}$.

当 $x\in\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$时,$f'(x)<0$;

当 $x\in\left(\frac{1}{e^2},+\infty\right)$时,$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$在$\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{1}{e^2},+\infty\right)$上单调递增.因此 $f(x)$在 $x=\frac{1}{e^2}$处取得最小值,即 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{e^2}\right)=-\frac{1}{e^2}$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上无最大值.

(2)**证明**:当 $x>0$ 时,$\ln x+1>\frac{1}{e^{x+1}}-\frac{2}{e^2x}$ 等价于 $x(\ln x+1)>\frac{x}{e^{x+1}}-\frac{2}{e^2}$.

由(1)知 $a=-1$ 时,$f(x)=x\ln x+x$ 的最小值是 $-\frac{1}{e^2}$,当且仅当 $x=\frac{1}{e^2}$ 时取等号.

设 $G(x)=\frac{x}{e^{x+1}}-\frac{2}{e^2}$,$x\in(0,+\infty)$,

则 $G'(x)=\frac{1-x}{e^{x+1}}$,易知 $G(x)_{\max}=G(1)=-\frac{1}{e^2}$,

当且仅当 $x=1$ 时取到,

从而可知对一切 $x\in(0,+\infty)$,都有 $f(x)>G(x)$,

即 $\ln x+1>\frac{1}{e^{x+1}}-\frac{2}{e^2x}$.

考点三

跟进训练

3.(1)**解**:因为函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$,

所以当 $0<x<1$ 时,$f'(x)<0$,

当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,

所以当 $0<x<1$ 时,函数 $f(x)$ 单调递减,

当 $x>1$ 时,函数 $f(x)$ 单调递增.

所以 $f(x)\geqslant f(1)=0$,即函数 $f(x)$ 的最小值为 0.

(2)**证明**:当 $x\in(0,\pi)$ 时,要证明 $e^x>(1-\ln x)\sin x$,

只要证 $\frac{e^x}{\sin x}>1-\ln x$,

由(1)可知 $\ln x+\frac{1}{x}-1\geqslant0$,即 $\frac{1}{x}\geqslant1-\ln x$,

所以要证 $\frac{e^x}{\sin x}>1-\ln x$,只需证 $\frac{e^x}{\sin x}>\frac{1}{x}$,

即证 $xe^x-\sin x>0$.

令 $h(x)=xe^x-\sin x$,则 $h'(x)=(x+1)e^x-\cos x$,

当 $0<x<\pi$ 时,

$h'(x)=(x+1)e^x-\cos x>e^0-1=0$,

所以函数 $h(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增,

所以当 $0<x<\pi$ 时,$h(x)>h(0)=0$,

即 $xe^x-\sin x>0$,

所以当 $x\in(0,\pi)$ 时,不等式 $e^x>(1-\ln x)\cdot\sin x$ 成立.

第5课时 利用导数解决恒(能)成立问题

考点一

典例1 **法一**(函数最值法):

解:$x^2f(x)+a\geqslant2-e$,即 $x\ln x-ax+a+e-2\geqslant0$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立.

令 $h(x)=x\ln x-ax+a+e-2$,

则 $h'(x)=\ln x+1-a$.

令 $h'(x)=0$,得 $x=e^{a-1}$.

当 $x\in(0,e^{a-1})$ 时,$h'(x)<0$;

当 $x\in(e^{a-1},+\infty)$ 时,$h'(x)>0$.

所以 $h(x)$ 的最小值是 $h(e^{a-1})=a+e-2-e^{a-1}$.

令 $t(a)=a+e-2-e^{a-1}$,则 $t'(a)=1-e^{a-1}$.

令 $t'(a)=0$ 得 $a=1$.

当 $a\in[0,1)$ 时,$t'(a)>0$,$t(a)$ 在 $[0,1)$ 上单调递增;

当 $a\in(1,+\infty)$ 时,$t'(a)<0$,$t(a)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

所以当 $a\in[0,1)$ 时,$h(x)$ 的最小值为 $t(a)\geqslant t(0)=e-2-\frac{1}{e}>0$;

当 $a\in(1,+\infty)$ 时,$h(x)$ 的最小值为 $t(a)\geqslant t(2)=0$.

故 $a\in[0,2]$.

法二(分离参数法):

解:原不等式恒成立可转化为 $x\ln x+e-2\geqslant a(x-1)$(*)对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立.

当 $x\in(0,1)$ 时,分离变量可得

$a\geqslant\frac{x\ln x+e-2}{x-1}$.

令 $g(x)=x\ln x$,

先求出函数 $g(x)=x\ln x$ 的最小值.

求得 $g'(x)=\ln x+1$.

当 $x\in(0,e^{-1})$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减;

当 $x\in(e^{-1},+\infty)$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增.

所以 $g(x)_{\min}=g(e^{-1})=-e^{-1}$.

因为此时 $(x\ln x)_{\min}=-e^{-1}$,

所以 $x\ln x+e-2\geqslant-e^{-1}+e-2>0$.

又因为 $x\in(0,1)$,所以 $\frac{x\ln x+e-2}{x-1}<0$,

而 $a\geqslant0$,所以 $a\geqslant\frac{x\ln x+e-2}{x-1}$ 显然成立.

当 $x=1$ 时,代入(*)式验证 $e-2\geqslant0$ 显然成立.

当 $x\in(1,+\infty)$ 时,(*)式分离变量可变为 $a\leqslant\frac{x\ln x+e-2}{x-1}$.

若令 $t(x)=\frac{x\ln x+e-2}{x-1}$,此时只需当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$a\leqslant t(x)_{\min}$.

求得 $t'(x)=\frac{x-\ln x-(e-1)}{(x-1)^2}$,

易得 $t'(e)=0$.

下证 $x=e$ 是 $t'(x)=\frac{x-\ln x-(e-1)}{(x-1)^2}$ 在 $(1,+\infty)$ 上的唯一零点.

令 $h(x)=x-\ln x-(e-1)$,则 $h'(x)=1-\frac{1}{x}$.

当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$h'(x)>0$,

所以 $h(x)$ 单调递增.

即 $x=e$ 是 $t'(x)=\frac{x-\ln x-(e-1)}{(x-1)^2}$ 的唯一零点.

当 $x\in(1,e)$ 时,$t'(x)<0$,$t(x)$ 单调递减;

当 $x\in(e,+\infty)$ 时,$t'(x)>0$,$t(x)$ 单调递增.

所以 $a\leqslant t(x)_{\min}=t(e)=2$,故 $a\in[0,2]$.

法三(数形结合):

解:通过变形原不等式恒成立等价于证明 $x\ln x\geqslant a(x-1)+(2-e)$,$x\in(0,+\infty)$.

若令 $g(x)=x\ln x,h(x)=a(x-1)+(2-\mathrm{e})$，

则只需证明函数 $g(x)$ 的图象在直线 $h(x)$ 的上方.

首先分析 $g(x)=x\ln x$ 的图象.

由法二可知：当 $x\in(0,\mathrm{e}^{-1})$ 时，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(\mathrm{e}^{-1},+\infty)$ 时，$g(x)$ 单调递增，

且 $g(x)_{\min}=g(\mathrm{e}^{-1})=-\mathrm{e}^{-1}$.

其次分析 $h(x)=a(x-1)+(2-\mathrm{e})$ 的图象.

因为 $a\geqslant0$，所以 $h(x)$ 表示过定点 $(1,2-\mathrm{e})$ 的非减函数，

且 $g(x)_{\min}=-\mathrm{e}^{-1}>2-\mathrm{e}$.

两个函数的图象大致如图 1 所示：

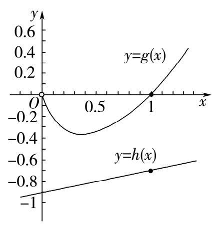


图 1

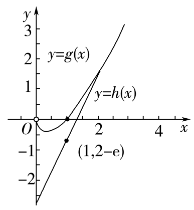


图 2

所以如果能说明当 $g(x)$ 和 $h(x)$ 相切时二者只有一个切点，如图 2，就能求出 a 的最大值.

设 $g(x)$ 和 $h(x)$ 相切于点 $P(x_0,y_0)$，

则可得 $\begin{cases}a(x_0-1)+2-\mathrm{e}=x_0\ln x_0, & ①\\ a=g'(x_0)=\ln x_0+1. & ②\end{cases}$

消去 $\ln x_0$ 得 $2-\mathrm{e}=a-\mathrm{e}^{a-1}$.　③

易得 $a=2$ 为③式的解.

令 $t(a)=a-\mathrm{e}^{a-1}+\mathrm{e}-2,t'(a)=1-\mathrm{e}^{a-1}$.

当 $t'(a)=0$ 时，$a=1$.

当 $a\in[0,1)$ 时，$t'(a)>0,t(a)$ 单调递增；

当 $a\in(1,+\infty)$ 时，$t'(a)<0,t(a)$ 单调递减.

因为 $t(0)=-\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}-2>0$ 且 $t(1)=\mathrm{e}-2>0$，

所以函数 $t(a)$ 在区间 $[0,1]$ 上无零点，

又 $t(2)=0$，所以函数 $t(a)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上有且仅有一个零点，$a=2$.

综上所述，$a\in[0,2]$.

跟进训练

1.**解**：(1) $f'(x)=a\mathrm{e}^x-1$，

当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)\leqslant0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x>-\ln a$，令 $f'(x)<0$，得 $x<-\ln a$，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减，在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增.

综上可得，当 $a\leqslant0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减，在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增.

(2)**证明**：由(1)得当 $a>0$ 时，函数 $f(x)=a(\mathrm{e}^x+a)-x$ 的最小值为 $f(-\ln a)=a(\mathrm{e}^{-\ln a}+a)+\ln a=1+a^2+\ln a$，

令 $g(a)=1+a^2+\ln a-2\ln a-\dfrac{3}{2}=a^2-\ln a-\dfrac{1}{2},a\in(0,+\infty)$，

所以 $g'(a)=2a-\dfrac{1}{a}$，

令 $g'(a)>0$，得 $a>\dfrac{\sqrt2}{2}$；

令 $g'(a)<0$，得 $0<a<\dfrac{\sqrt2}{2}$.

所以函数 $g(a)$ 在 $\left(0,\dfrac{\sqrt2}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{\sqrt2}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以函数 $g(a)$ 的最小值为 $g\left(\dfrac{\sqrt2}{2}\right)=\left(\dfrac{\sqrt2}{2}\right)^2-\ln\dfrac{\sqrt2}{2}-\dfrac{1}{2}=\ln\sqrt2>0$，

所以当 $a>0$ 时，$f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$ 成立.

考点二

典例 2　解：依题意，只需 $[f(x_0)-g(x_0)]_{\min}<0,x_0\in[1,\mathrm{e}]$ 即可.

令 $h(x)=f(x)-g(x)=x-a\ln x+\dfrac{a+1}{x},x\in[1,\mathrm{e}]$，

则 $h'(x)=1-\dfrac{a}{x}-\dfrac{a+1}{x^2}$

$=\dfrac{x^2-ax-(a+1)}{x^2}=\dfrac{[x-(a+1)](x+1)}{x^2}$.

令 $h'(x)=0$，得 $x=a+1$.

①当 $a+1\leqslant1$，即 $a\leqslant0$ 时，$h'(x)\geqslant0,h(x)$ 单调递增，$h(x)_{\min}=h(1)=a+2<0$，得 $a<-2$；

②当 $1<a+1<\mathrm{e}$，即 $0<a<\mathrm{e}-1$ 时，

$h(x)$ 在 $[1,a+1)$ 上单调递减，在 $(a+1,\mathrm{e}]$ 上单调递增，

故 $h(x)_{\min}=h(a+1)=(a+1)-a\ln(a+1)+1=a[1-\ln(a+1)]+2>2$，与 $h(x)<0$ 不符，故舍去.

③当 $a+1\geqslant\mathrm{e}$，即 $a\geqslant\mathrm{e}-1$ 时，$h(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上单调递减，则 $h(x)_{\min}=h(\mathrm{e})=\mathrm{e}-a+\dfrac{a+1}{\mathrm{e}}<0$，得 $a>\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}-1}>\mathrm{e}-1$ 成立.

综上所述，a 的取值范围为 $(-\infty,-2)\cup\left(\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}-1},+\infty\right)$.

跟进训练

2.**解**：(1)因为 $f'(x)=a-\mathrm{e}^x,x\in\mathbf{R}$.

当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)<0,f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln a$.

由 $f'(x)>0$，得 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,\ln a)$；

由 $f'(x)<0$，得 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(\ln a,+\infty)$.

综上所述，当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,+\infty)$，无单调递增区间；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,\ln a)$，单调递减区间为 $(\ln a,+\infty)$.

(2)因为 $\exists x\in(0,+\infty)$，使不等式 $f(x)-g(x)+\mathrm{e}^x\leqslant0$ 成立，

所以 $\exists x\in(0,+\infty)$，使得 $ax\leqslant\dfrac{\ln x}{x}$，即 $a\leqslant\dfrac{\ln x}{x^2}$.

则问题转化为 $a\leqslant\left(\dfrac{\ln x}{x^2}\right)_{\max}$，设 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$，由 $h'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$，令 $h'(x)=0$，得 $x=\sqrt{\mathrm{e}}$.

当 x 在区间 $(0,+\infty)$ 内变化时，$h'(x)$，$h(x)$ 随 x 变化的变化情况如下表：

x	$(0,\sqrt{e})$	$\sqrt{e}$	$(\sqrt{e},+\infty)$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	单调递增	$\frac{1}{2e}$	单调递减

由上表可知，当 $x=\sqrt{e}$ 时，函数 $h(x)$ 有极大值，即最大值，为 $\frac{1}{2e}$，所以 $a\leqslant\frac{1}{2e}$.

故 a 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{1}{2e}\right]$.

考点三

典例 3 解：(1) 存在 $x_1,x_2\in[0,2]$，使得 $g(x_1)-g(x_2)\geqslant M$ 成立，等价于 $[g(x_1)-g(x_2)]_{\max}\geqslant M$ 成立.

$g'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$，

令 $g'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=\frac{2}{3}$，

$\because g\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{85}{27}$，$g(0)=-3$，$g(2)=1$，

$\therefore$ 当 $x\in[0,2]$ 时，$g(x)_{\max}=g(2)=1$，

$g(x)_{\min}=g\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{85}{27}$，

$\therefore M\leqslant 1-\left(-\frac{85}{27}\right)=\frac{112}{27}$，

$\therefore$ 满足条件的最大整数 M 为 4.

(2) 对任意的 $s,t\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，都有 $f(s)\geqslant g(t)$，

则 $f(x)_{\min}\geqslant g(x)_{\max}$.

由(1)知当 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ 时，$g(x)_{\max}=g(2)=1$，

$\therefore$ 当 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ 时，$f(x)=\frac{a}{x}+x\ln x\geqslant 1$ 恒成立，

即 $a\geqslant x-x^2\ln x$ 恒成立.

令 $h(x)=x-x^2\ln x$，$x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，

$\therefore h'(x)=1-2x\ln x-x$，

令 $\varphi(x)=1-2x\ln x-x$，

$\therefore \varphi'(x)=-3-2\ln x<0$，

$h'(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上单调递减，

又 $h'(1)=0$，

$\therefore$ 当 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 时，$h'(x)\geqslant 0$，当 $x\in[1,2]$ 时，$h'(x)\leqslant 0$，

$\therefore h(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上单调递增，在 $[1,2]$ 上单调递减，

$\therefore h(x)_{\max}=h(1)=1$，

故 $a\geqslant 1$.

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

跟进训练

3. **解：**(1) 令 $f(x)=g(x)$，得 $\frac{1}{2}x^2+x-\ln(x+1)=-a$，设 $h(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\ln(x+1)$，因为当 $x\in[0,2]$ 时，$h'(x)=x+1-\frac{1}{x+1}=\frac{x^2+2x}{x+1}>0$，所以 $h(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增，由此可得 $h(x)$ 在 $[0,2]$ 上的取值范围是 $[0,4-\ln 3]$，若存在 $x_0\in[0,2]$，使得 $f(x_0)>g(x_0)$ 成立，即 $h(x_0)>-a$ 有解，则 $h(x)_{\max}>-a$，所以 $a>\ln 3-4$.

(2) $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的取值范围为 $[0,4]$，$g(x)$ 在 $[0,2]$ 上的取值范围为 $[-a,\ln 3-a]$，若对任意的 $x_1,x_2\in[0,2]$，恒有 $f(x_1)>g(x_2)$，则 $f(x)_{\min}>g(x)_{\max}$，即 $0>\ln 3-a$，所以 $a>\ln 3$.

(3) 若对任意的 $x_2\in[0,2]$，存在 $x_1\in[0,2]$，使得 $f(x_1)>g(x_2)$ 成立，则 $f(x)_{\max}>g(x)_{\max}$，所以 $4>\ln 3-a$，所以 $a>-4+\ln 3$.

第 6 课时　利用导数解决函数的零点问题

考点一

典例 1 解：$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内有且只有两个零点. 证明如下：

因为 $f'(x)=\sin x+x\cos x$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$.

又 $f(x)=x\sin x-\frac{3}{2}$，从而有 $f(0)=-\frac{3}{2}<0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi-3}{2}>0$，

且 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的图象是连续不断的，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内至少存在一个零点.

又 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内有且只有一个零点.

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，令 $g(x)=f'(x)=\sin x+x\cos x$.

由 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1>0$，$g(\pi)=-\pi<0$，且 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上的图象是连续不断的，

知存在 $m\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，使得 $g(m)=0$.

由 $g'(x)=2\cos x-x\sin x$，

知 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，有 $g'(x)<0$，

从而 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 内单调递减.

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},m\right)$ 时，$g(x)>g(m)=0$，

即 $f'(x)>0$，

从而 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},m\right)$ 内单调递增，

故当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},m\right)$ 时，$f(x)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi-3}{2}>0$，

故 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},m\right)$ 上无零点；

当 $x\in(m,\pi)$ 时，有 $g(x)<g(m)=0$，

即 $f'(x)<0$，从而 $f(x)$ 在 (m,π) 内单调递减.

又 $f(m)>0$，$f(\pi)<0$，且 $f(x)$ 在 (m,π) 上的图象是连续不断的，从而 $f(x)$ 在 (m,π) 内有且仅有一个零点.

综上所述，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内有且只有两个零点.

跟进训练

1.**解**:由 $y=f(x)-2=0$ 得 $\ln x=-kx$,

因为 $x>0$,所以 $k=\frac{\ln x}{-x}$,

令 $h(x)=\frac{\ln x}{-x}(x>0)$,则 $h'(x)=-\frac{1-\ln x}{x^2}$,

当 $x>e$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$ 单调递增,

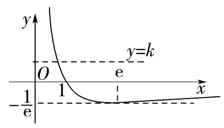
当 $0<x<e$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$ 单调递减,

所以 $h(x)\geqslant h(e)=-\frac{1}{e}$,

当 $x>e$ 时,$\frac{\ln x}{x}>0$,所以$\frac{\ln x}{-x}<0$,

当 $x=\frac{1}{e}$ 时,$-\frac{-\ln e}{\frac{1}{e}}>0$,

所以 $h(x)=\frac{\ln x}{-x}(x>0)$的图象如图所示,



所以当 $k<-\frac{1}{e}$ 时,$y=f(x)-2$ 无零点;

当 $k=-\frac{1}{e}$ 或 $k\geqslant 0$ 时,$y=f(x)-2$ 只有一个零点;

当$-\frac{1}{e}<k<0$ 时,$y=f(x)-2$ 有两个零点.

考点二

典例 2　**解**:(1)$f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$,

当 $a=1$ 时,$f(x)=\ln(1+x)+\frac{x}{e^x}$,$f(0)=0$,所以切点为$(0,0)$. $f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1-x}{e^x}$,$f'(0)=2$,所以切线斜率为 2,

所以曲线 $y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为 $y=2x$.

(2)$f(x)=\ln(1+x)+\frac{ax}{e^x}$,

$f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{a(1-x)}{e^x}=\frac{e^x+a(1-x^2)}{(1+x)e^x}$,

设 $g(x)=e^x+a(1-x^2)$,

①若 $a>0$,当 $x\in(-1,0)$时,$g(x)=e^x+a(1-x^2)>0$,即 $f'(x)>0$,

所以 $f(x)$在$(-1,0)$上单调递增,$f(x)<f(0)=0$,

故 $f(x)$在$(-1,0)$上没有零点,不合题意.

②若$-1<a<0$,当 $x\in(0,+\infty)$时,则$g'(x)=e^x-2ax>0$,

所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,所以$g(x)>g(0)=1+a>0$,即 $f'(x)>0$,

所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,$f(x)>f(0)=0$,

故 $f(x)$在$(0,+\infty)$上没有零点,不合题意.

③若 $a<-1$,

(i)当 $x\in(0,+\infty)$时,$g'(x)=e^x-2ax>0$,所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,

$g(0)=1+a<0$,$g(1)=e>0$,

所以存在 $m\in(0,1)$,使得 $g(m)=0$,

即 $f'(m)=0$,

当 $x\in(0,m)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,

当 $x\in(m,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,

所以当 $x\in(0,m)$时,$f(x)<f(0)=0$,

当 $x\to+\infty$,$f(x)\to+\infty$,

所以 $f(x)$在$(m,+\infty)$上有唯一零点,在$(0,m)$上没有零点,

即 $f(x)$在$(0,+\infty)$上有唯一零点.

(ii)当 $x\in(-1,0)$时,$g(x)=e^x+a(1-x^2)$,

设 $h(x)=g'(x)=e^x-2ax$,

$h'(x)=e^x-2a>0$,

所以 $g'(x)$在$(-1,0)$上单调递增,

$g'(-1)=\frac{1}{e}+2a<0$,$g'(0)=1>0$,

所以存在 $n\in(-1,0)$,使得 $g'(n)=0$,

当 $x\in(-1,n)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,

当 $x\in(n,0)$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增,$g(x)<g(0)=1+a<0$,

又 $g(-1)=\frac{1}{e}>0$,

所以存在 $t\in(-1,n)$,使得 $g(t)=0$,即$f'(t)=0$,

当 $x\in(-1,t)$时,$f(x)$单调递增,当 $x\in(t,0)$时,$f(x)$单调递减,又 $x\to-1$,$f(x)\to-\infty$,

而 $f(0)=0$,所以当 $x\in(t,0)$时,$f(x)>0$,

所以 $f(x)$在$(-1,t)$上有唯一零点,在$(t,0)$上无零点,

即 $f(x)$在$(-1,0)$上有唯一零点,

所以 $a<-1$,符合题意.

④当 $a=0$ 时,$f(x)=\ln(1+x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增,不合题意.

⑤当 $a=-1$ 时,$f'(x)=\frac{e^x+x^2-1}{(1+x)\cdot e^x}$,

令 $k(x)=e^x+x^2-1$,则 $k'(x)=e^x+2x$,

当 $x>0$ 时,$k'(x)>0$,$k(x)$单调递增,

$k(x)>k(0)=0$,即 $f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,

$f(x)>f(0)=0$,不合题意.

所以若 $f(x)$在区间$(-1,0)$,$(0,+\infty)$各恰有一个零点,则 a 的取值范围为$(-\infty,-1)$.

跟进训练

2.**解**:(1)因为 $f'(x)=x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$,

令 $f'(x)=0$,得 $x_1=-1$,$x_2=-2$,

当 x 变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如表所示:

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

由表可知,函数 $f(x)$的极大值为 $f(-2)=-\frac{2}{3}$,

极小值为 $f(-1)=-\frac{5}{6}$.

(2)由(1)知 $g(x)=x^2+3x+2+ke^x-1=x^2+3x+1+ke^x$,

由题知需 $x^2+3x+1+ke^x=0$ 有三个不同的解,即 $k=-\frac{x^2+3x+1}{e^x}$有三个不同的解.

设 $h(x)=-\dfrac{x^2+3x+1}{e^x}$,

则 $h'(x)=\dfrac{x^2+x-2}{e^x}=\dfrac{(x+2)(x-1)}{e^x}$,

当 $x\in(-\infty,-2)$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$ 单调递增,

当 $x\in(-2,1)$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$ 单调递减,

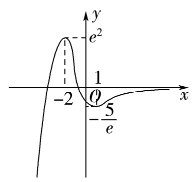
当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$ 单调递增,

又当 $x\to-\infty$ 时,$h(x)\to-\infty$,

当 $x\to+\infty$ 时,$h(x)\to0$ 且 $h(x)<0$,

且 $h(-2)=e^2$,$h(1)=-\dfrac{5}{e}$.

作出函数 $h(x)$ 的简图如图,



数形结合可知,$-\dfrac{5}{e}<k<0$.

高考培优 3　极值点偏移问题

典例　法一(对称化构造法):

证明:由题意知,函数 $f(x)$ 有两个零点 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$,

即 $f(x_1)=f(x_2)=0$,易知 $\ln x_1,\ln x_2$ 是方程 $x=ae^x$ 的两个不相等的根.

设 $t_1=\ln x_1,t_2=\ln x_2,g(x)=xe^{-x}$,

则 $g(t_1)=g(t_2)$,故要证 $x_1x_2>e^2$,

即证 $\ln x_1+\ln x_2>2$,即证 $t_1+t_2>2$.

下证:$t_1+t_2>2$.

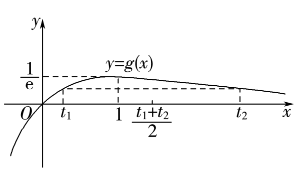
$g'(x)=(1-x)e^{-x}$,易得 $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,

所以函数 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值(也是最大值) $g(1)=\dfrac{1}{e}$.

当 $x\to-\infty$ 时,$g(x)\to-\infty$;

当 $x\to+\infty$ 时,$g(x)\to0$ 且 $g(x)>0$.

由 $g(t_1)=g(t_2)$,$t_1\neq t_2$,不妨设 $t_1<t_2$,作出函数 $g(x)$ 的图象,如图所示,由图知必有 $0<t_1<1<t_2$,



令 $F(x)=g(1+x)-g(1-x)$,$x\in(0,1]$,

则 $F'(x)=\dfrac{x}{e^{x+1}}(e^{2x}-1)>0$,

所以 $F(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增,

所以 $F(x)>0$ 对任意的 $x\in(0,1]$ 恒成立,

即 $g(1+x)>g(1-x)$ 对任意的 $x\in(0,1]$ 恒成立,由 $0<t_1<1<t_2$,得 $1-t_1\in(0,1)$,

所以 $g(1+1-t_1)=g(2-t_1)>g[1-(1-t_1)]=g(t_1)=g(t_2)$,

即 $g(2-t_1)>g(t_2)$,

又 $2-t_1\in(1,2)$,$t_2\in(1,+\infty)$,且 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,

所以 $2-t_1<t_2$,所以 $t_1+t_2>2$,即 $x_1x_2>e^2$.

法二(比值代换法):

证明:不妨设 $x_1>x_2>0$,

因为 $\ln x_1-ax_1=0$,$\ln x_2-ax_2=0$,

所以 $\ln x_1+\ln x_2=a(x_1+x_2)$,$\ln x_1-\ln x_2=a(x_1-x_2)$,所以 $\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=a$,

欲证 $x_1x_2>e^2$,即证 $\ln x_1+\ln x_2>2$.

因为 $\ln x_1+\ln x_2=a(x_1+x_2)$,所以即证 $a>\dfrac{2}{x_1+x_2}$,

所以原问题等价于证明 $\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\dfrac{2}{x_1+x_2}$,

即 $\ln\dfrac{x_1}{x_2}>\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}$,

令 $t=\dfrac{x_1}{x_2}(t>1)$,则不等式变为 $\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}$.

令 $h(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}$,$t>1$,

所以 $h'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$,

所以 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $h(t)>h(1)=\ln1-0=0$,

即 $\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}>0(t>1)$,

因此原不等式 $x_1x_2>e^2$ 得证.

跟进训练

法一:

证明:由题意知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,$f'(x)=\dfrac{(e^x+x)(x-1)}{x^2}$,可得函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

由题知,$f(x)$ 的一个零点小于 1,一个零点大于 1,

不妨设 $0<x_1<1<x_2$,要证 $x_1x_2<1$,即证 $x_1<\dfrac{1}{x_2}$,

因为 $x_1,\dfrac{1}{x_2}\in(0,1)$,即证 $f(x_1)>f\left(\dfrac{1}{x_2}\right)$,

因为 $f(x_1)=f(x_2)$,即证 $f(x_2)>f\left(\dfrac{1}{x_2}\right)$,

即证 $\dfrac{e^x}{x}-\ln x+x-xe^{\frac{1}{x}}-\ln x-\dfrac{1}{x}>0$,$x\in(1,+\infty)$,

即证 $\dfrac{e^x}{x}-xe^{\frac{1}{x}}-2\left[\ln x-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\right]>0$,

下面证明当 $x>1$ 时,$\dfrac{e^x}{x}-xe^{\frac{1}{x}}>0$,$\ln x-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)<0$.

设 $g(x)=\dfrac{e^x}{x}-xe^{\frac{1}{x}}$,$x>1$,

则 $g'(x)=\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)e^x-\left[e^{\frac{1}{x}}+xe^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\right]$

$=\dfrac{1}{x}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)e^x-e^{\frac{1}{x}}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{e^x}{x}-e^{\frac{1}{x}}\right)$

$=\dfrac{x-1}{x}\left(\dfrac{e^x}{x}-e^{\frac{1}{x}}\right)$,

设 $\varphi(x)=\frac{e^x}{x}(x>1)$，

$\varphi'(x)=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^x=\frac{x-1}{x^2}e^x>0$，

所以 $\varphi(x)>\varphi(1)=e$，而 $e^{\frac{1}{x}}<e$，

所以 $\frac{e^x}{x}-e^{\frac{1}{x}}>0$，所以 $g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

即 $g(x)>g(1)=0$，所以 $\frac{e^x}{x}-xe^{\frac{1}{x}}>0$.

令 $h(x)=\ln x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$，$x>1$，

$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{2x-x^2-1}{2x^2}=\frac{-(x-1)^2}{2x^2}<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

即 $h(x)<h(1)=0$，

所以 $\ln x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)<0$.

综上，$\frac{e^x}{x}-xe^{\frac{1}{x}}-2\left[\ln x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]>0$，所以 $x_1x_2<1$.

法二：

证明：$f(x)=\frac{e^x}{x}-\ln x+x-a=e^{x-\ln x}+x-\ln x-a$，

令 $t=x-\ln x$，则 $g(t)=e^t+t-a$，易知 $g(t)$ 单调递增，

所以 $g(t)$ 有且仅有一个零点 t_0，

又 $f(x)$ 有两个零点 x_1，x_2，

所以 $x-\ln x=t_0$ 有两个实根 x_1 和 x_2，

所以 $\begin{cases}x_1-\ln x_1=t_0,\\x_2-\ln x_2=t_0,\end{cases}$

由对数均值不等式得 $\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=1<\frac{x_1+x_2}{2}$，

所以 $x_1x_2<1$.

高考研究在线 3　泰勒公式与超越不等式在导数中的应用

命题点一

典例 1　(1)**C**　(2)**A**　[(1)**法一**（构造法）：构造函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$，$x>0$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$，$x>0$，

当 $f'(x)=0$ 时，$x=1$，

$\therefore 0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

$x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处取最小值 $f(1)=1$，

$\therefore \ln x>1-\frac{1}{x}$，

$\therefore \ln 0.9>1-\frac{1}{0.9}=-\frac{1}{9}$，$\therefore -\ln 0.9<\frac{1}{9}$，$\therefore c<b$.

$\because -\ln 0.9=\ln\frac{10}{9}>1-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$，

$\therefore \frac{10}{9}>e^{0.1}$，$\therefore 0.1e^{0.1}<\frac{1}{9}$，$\therefore a<b$.

$\because 0.1e^{0.1}>0.1\times1.1=0.11$，

而 $-\ln 0.9=\ln\frac{10}{9}<\frac{1}{2}\left(\frac{10}{9}-\frac{9}{10}\right)=\frac{19}{180}<0.11$，

$\therefore a>c$，$\therefore c<a<b$. 故选 C.

法二（利用不等式）：由不等式 $\ln x<\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)(x>1)$，

得 $-\ln 0.9=\ln\frac{10}{9}<\frac{1}{2}\left(\frac{10}{9}-\frac{9}{10}\right)=\frac{19}{180}<0.11$，

又因为 $e^{0.1}>0.1+1=1.1$，所以 $a=0.1e^{0.1}>0.11$，

所以 $c<a$；

由 $e^x\geqslant x+1$，得 $e^{-x}>-x+1(0<x<1)$，得 $e^x<\frac{1}{1-x}$，所以 $e^{0.1}<\frac{1}{1-0.1}=\frac{1}{0.9}$，

所以 $a=0.1e^{0.1}<\frac{0.1}{0.9}=\frac{1}{9}$. 所以 $a<b$，

综上 $c<a<b$. 故选项 C 正确.

法三（泰勒公式）：设 $x=0.1$，则

$a=xe^x=0.1\left(1+0.1+\frac{0.01}{2}+\frac{0.001}{6}+\cdots\right)$，

$b=\frac{x}{1-x}=0.1(1+0.1+0.01+0.001+\cdots)$，

$c=-\ln(1-x)=0.1+\frac{0.01}{2}+\frac{0.001}{3}+\cdots$，

$\therefore c<a<b$. 故选 C.

(2)**法一**（构造法）：设 $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}x^2-1(0<x<1)$，则

$f'(x)=x-\sin x$，

设 $g(x)=x-\sin x(0<x<1)$，$g'(x)=1-\cos x>0$，

故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，即 $g(x)>g(0)=0$，

即 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

所以 $f\left(\frac{1}{4}\right)>f(0)=0$，可得 $\cos\frac{1}{4}>\frac{31}{32}$，故 $b>a$，

利用不等式可得 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\tan x>x$，

$\therefore \tan\frac{1}{4}>\frac{1}{4}$，即 $\frac{\sin\frac{1}{4}}{\cos\frac{1}{4}}>\frac{1}{4}$，

$\therefore 4\sin\frac{1}{4}>\cos\frac{1}{4}$，故 $c>b$.

综上，$c>b>a$，故选 A.

法二（泰勒公式）：

设 $x=0.25$，则

$a=1-\frac{x^2}{2}=1-\frac{0.25^2}{2}$，

$b=\cos x=1-\frac{0.25^2}{2}+\frac{0.25^4}{4!}+\cdots$，

$c=\frac{\sin x}{x}=1-\frac{0.25^2}{3!}+\frac{0.25^4}{5!}+\cdots$，

$\therefore a<b<c$. 故选 A.]

跟进训练

1. (1)**B**　(2)**D**　[(1)**法一**（构造法）：令 $f(x)=e^x-(1+x)$，

令 $f'(x)=e^x-1=0$，得 $x=0$，

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(0.02)>f(0)=0$，
从而 $e^{0.02}>1+0.02=1.02>1>\ln 2.02$. 故选 B.
法二(泰勒公式)：设 $x=0.02$，则
$a=e^{0.02}=1+0.02+\frac{0.02^2}{2}+\cdots$，
显然 $a>b>1>c$. 故选 B.
(2)**法一**(构造法)：令 $f(x)=e^x-x-1$，则 $f'(x)=e^x-1$，
当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，
故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，
故 $f(0.1)>f(0)$，
即 $e^{0.1}-0.1-1>0$，
故 $a=e^{0.1}-1>0.1$.
令 $g(x)=\sin x-x$，则 $g'(x)=\cos x-1<0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，
故 $g(x)=\sin x-x$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，
故 $g(0.1)<g(0)$，即 $\sin 0.1-0.1<0$，
即 $b=\sin 0.1<0.1$.
令 $h(x)=\ln(x+1)-\sin x$，
则 $h'(x)=\frac{1}{x+1}-\cos x=\frac{1-(x+1)\cos x}{x+1}$，
令 $m(x)=1-(x+1)\cos x$，
则 $m'(x)=-\cos x+(x+1)\sin x$，
易知 $m'(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上是增函数，
且 $m'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(1+\frac{\pi}{6}\right)\frac{1}{2}=\frac{-6\sqrt{3}+6+\pi}{12}<0$，
故 $m'(x)<0$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上恒成立，
故 $m(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上是减函数，
又 $m(0)=1-1=0$，
故 $m(x)<0$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上恒成立，
故 $h'(x)<0$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上恒成立，
故 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上是减函数，
故 $h(0.1)<h(0)=0$，
即 $\ln 1.1-\sin 0.1<0$，即 $c<b$，故 $c<b<a$，故选 D.
法二(泰勒公式)：设 $x=0.1$，则
$a=e^{0.1}-1=0.1+\frac{0.1^2}{2}+\cdots$，
$b=\sin 0.1=0.1-\frac{0.1^3}{6}+\cdots$，
$c=\ln 1.1=0.1-\frac{0.1^2}{2}+\cdots$，
故 $c<b<a$，故选 D.]

命题点二

典例 2 (1)**解**：$f(x)\leqslant 0\Rightarrow \ln x-kx+1\leqslant 0\Rightarrow k\geqslant\frac{\ln x+1}{x}$，
令 $g(x)=\frac{\ln x+1}{x}$，$x>0$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x-1}{x^2}=\frac{-\ln x}{x^2}$，
当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，
$\therefore g(x)_{\max}=g(1)=1$，
$\therefore k\geqslant 1$.
(2)**证明**：由(1)知，$k=1$ 时，有不等式 $\ln x\leqslant x-1$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，
当且仅当 $x=1$ 时，取“=”，
$\therefore x\in(1,+\infty)$，$\ln x<x-1$ 恒成立，
令 $x=1+\frac{1}{n^2}(n>1$，且 $n\in\mathbf{N}^*)$，
则 $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-1}$
$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$，
$\therefore \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<\frac{1}{2^2}$
$+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$
$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$
$=\frac{2}{3}$，
即 $\ln\left[\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right]<\frac{2}{3}(n\in\mathbf{N}^*,n>1)$，
$\therefore \left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<e^{\frac{2}{3}}(n\in\mathbf{N}^*,n>1)$.

跟进训练

2.(1)**解**：$a=1\Rightarrow f(x)=xe^x-e^x=(x-1)e^x\Rightarrow f'(x)=xe^x$，
当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；
当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.
(2)**解**：令 $g(x)=f(x)+1=xe^{ax}-e^x+1(x>0)\Rightarrow g(x)<g(0)=0$ 对 $\forall x>0$ 恒成立.
又 $g'(x)=e^{ax}+axe^{ax}-e^x\Rightarrow g'(0)=0$，
令 $h(x)=g'(x)\Rightarrow h'(x)=ae^{ax}+a(e^{ax}+axe^{ax})-e^x=a(2e^{ax}+axe^{ax})-e^x$，
则 $h'(0)=2a-1$.
①若 $h'(0)=2a-1>0$，
即 $a>\frac{1}{2}$，$h'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g'(x)}{x}>0$，
所以 $\exists x_0>0$，使得当 $x\in(0,x_0)$ 时，有 $\frac{g'(x)}{x}>0\Rightarrow g'(x)>0$
$\Rightarrow g(x)$ 单调递增 $\Rightarrow g(x_0)>g(0)=0$，矛盾.
②若 $h'(0)=2a-1\leqslant 0$，即 $a\leqslant\frac{1}{2}$，$g'(x)=e^{ax}+axe^{ax}-e^x=e^{ax+\ln(1+ax)}-e^x\leqslant e^{\frac{1}{2}x+\ln(1+\frac{1}{2}x)}-e^x<e^{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x}-e^x=0\Rightarrow g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$g(x)<g(0)=0$，符合题意.
综上所述，实数 a 的取值范围是 $a\leqslant\frac{1}{2}$.
(3)**证明**：构造函数 $m(t)=2\ln t-\left(t-\frac{1}{t}\right)$，$t>1$，
则 $m'(t)=\frac{2}{t}-1-\frac{1}{t^2}=-\left(\frac{1}{t}-1\right)^2<0$，

∴函数 $m(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

∴$m(t)<m(1)=0$，

即 $t-\frac{1}{t}>2\ln t(t>1)$.

令 $t=\sqrt{1+\frac{1}{n}}\Rightarrow\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}>2\ln\sqrt{1+\frac{1}{n}}\Rightarrow$

$\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\Rightarrow\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k^2+k}}$

$>\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)$，

即 $\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln(n+1)$，证毕.

第四章　三角函数与解三角形

第1课时　任意角和弧度制、三角函数的概念

梳理·必备知识

1.(1)端点　(2)正角　负角　零角　象限角　(3)$-\alpha$　(4)$\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$

2.(1)半径长　(2)$\frac{\pi}{180}$　$\left(\frac{180}{\pi}\right)°$　αR　$\frac{1}{2}\alpha R^2$

3.(1)单位圆　y　x　$\frac{y}{x}$　(2)$\frac{y}{r}$　$\frac{x}{r}$　$\frac{y}{x}$

激活·基本技能

一、(1)×　(2)×　(3)×　(4)√

二、1. **C**

2. **BCD**　[$-\frac{3\pi}{4}$是第三象限角，故A错误；$\frac{4\pi}{3}=\pi+\frac{\pi}{3}$，从而$\frac{4\pi}{3}$是第三象限角，故B正确；$-400°=-360°-40°$，是第四象限角，故C正确；$-315°=-360°+45°$，是第一象限角，故D正确.]

3. $\frac{10\pi}{9}$　$\frac{5\pi}{9}$　[单位圆的半径 $r=1$，$200°$的弧度数是 $200\times\frac{\pi}{180}=\frac{10\pi}{9}$，由弧度数的定义得 $\frac{10\pi}{9}=\frac{l}{r}$，所以 $l=\frac{10\pi}{9}$，$S_{扇形}=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times\frac{10\pi}{9}\times1=\frac{5\pi}{9}$.]

4. $-\frac{3\sqrt{13}}{13}$　$\frac{2\sqrt{13}}{13}$　$-\frac{3}{2}$　[因为 $x=2,y=-3$，所以点 P 到原点的距离 $r=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$. 于是 $\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-3}{\sqrt{13}}=-\frac{3\sqrt{13}}{13}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}=-\frac{3}{2}$.]

考点一

典例1　(1)**C**　(2)二或第四　第一或第二象限或 y 轴的非负半轴上　[(1)由定义知终边相同的角的表达式中不能同时出现角度和弧度，可表示为 $\frac{\pi}{4}+2k\pi$ 或 $k\cdot360°+45°(k\in\mathbf{Z})$.

(2)∵α 是第三象限角，即 $2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\frac{3}{2}\pi,k\in\mathbf{Z}$，

∴$k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{3}{4}\pi,k\in\mathbf{Z}$，$4k\pi+2\pi<2\alpha<4k\pi+3\pi,k\in\mathbf{Z}$.

当 k 为偶数时，$\frac{\alpha}{2}$为第二象限角；当 k 为奇数时，$\frac{\alpha}{2}$为第四象限角，而 2α 的终边在第一或第二象限或 y 轴的非负半轴上.]

跟进训练

1.(1)**C**　(2)$-675°,-315°$　[(1)当 $k=2n(n\in\mathbf{Z})$ 时，$2n\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant2n\pi+\frac{\pi}{2}(n\in\mathbf{Z})$，此时 α 的终边在 $\frac{\pi}{4}\sim\frac{\pi}{2}$ 内；当 $k=2n+1(n\in\mathbf{Z})$ 时，$2n\pi+\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant2n\pi+\pi+\frac{\pi}{2}(n\in\mathbf{Z})$，此时 α 的终边在 $\pi+\frac{\pi}{4}\sim\pi+\frac{\pi}{2}$ 内，结合选项知选C.

(2)所有与 $45°$ 角终边相同的角表示为 $\beta=45°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$.

令 $-720°<45°+k\cdot360°<0°(k\in\mathbf{Z})$，得 $-765°<k\cdot360°<-45°(k\in\mathbf{Z})$，解得 $-\frac{765}{360}<k<-\frac{45}{360}(k\in\mathbf{Z})$，从而 $k=-2$ 或 $k=-1$，代入得 $\beta=-675°$ 或 $\beta=-315°$.]

考点二

典例2　解：(1)因为 $\alpha=60°=\frac{\pi}{3}$，

所以 $l=\alpha R=\frac{\pi}{3}\times10=\frac{10\pi}{3}(\text{cm})$.

(2)由题意得 $\begin{cases}2R+\alpha\cdot R=10,\\\frac{1}{2}\alpha\cdot R^2=4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}R=1,\\\alpha=8\end{cases}$（舍去）或 $\begin{cases}R=4,\\\alpha=\frac{1}{2}.\end{cases}$

故扇形的圆心角为$\frac{1}{2}$.

(3)由已知得 $l+2R=20$.

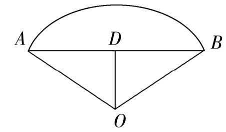
法一：$S=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}(20-2R)R=10R-R^2=-(R-5)^2+25$.

所以，当 $R=5$ cm 时，S 取得最大值，且最大值为 $25\ \text{cm}^2$，此时 $l=10$ cm，$\alpha=2$.

法二：$S=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{4}l(2R)\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{l+2R}{2}\right)^2=25$，当且仅当 $l=2R=10$，即 $R=5$ 时，$S_{\max}=25$，此时 $\alpha=2$.

跟进训练

2. **C**　[设扇形的弧长为 l，半径为 r，如图，取 AB 的中点 D，因为圆心角 α 为$\frac{2\pi}{3}$，



所以$\angle BOD=\frac{\pi}{3}$，

所以弦 $AB=2AD=2r\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}r$.

又$\overset{\frown}{AB}=\frac{2\pi}{3}r$，所以弦 AB 的长与$\overset{\frown}{AB}$的长的比为$\frac{\sqrt{3}r}{\frac{2\pi}{3}r}=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$，

故选C.]

考点三

典例3 (1)**D** (2)$-\frac{\sqrt{6}}{4}$ $\frac{\sqrt{15}}{3}$或$-\frac{\sqrt{15}}{3}$ [(1)**法一**:由题意,知$-\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<2k\pi(k\in \mathbf{Z})$,所以$-\pi+4k\pi<2\alpha<4k\pi(k\in \mathbf{Z})$,所以$\cos 2\alpha\leqslant 0$或$\cos 2\alpha>0$,$\sin 2\alpha<0$,故选D.

法二:当$\alpha=-\frac{\pi}{4}$时,$\cos 2\alpha=0$,$\sin 2\alpha=-1$,排除A,B,C,故选D.

(2)设$P(x,y)$,由题设知$x=-\sqrt{3}$,$y=m$,所以$r^2=|OP|^2=(-\sqrt{3})^2+m^2$($O$为原点),即$r=\sqrt{3+m^2}$,所以$\sin\alpha=\frac{m}{r}=\frac{\sqrt{2}m}{4}=\frac{m}{2\sqrt{2}}$,所以$r=\sqrt{3+m^2}=2\sqrt{2}$,即$3+m^2=8$,解得$m=\pm\sqrt{5}$.当$m=\sqrt{5}$时,$r=2\sqrt{2}$,$x=-\sqrt{3}$,$y=\sqrt{5}$,所以$\cos\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$,$\tan\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{3}$;当$m=-\sqrt{5}$时,$r=2\sqrt{2}$,$x=-\sqrt{3}$,$y=-\sqrt{5}$,所以$\cos\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$,$\tan\alpha=\frac{\sqrt{15}}{3}$.]

跟进训练

3.(1)**AB** (2)-4或-2 [(1)由题意知$\sin\alpha<0$,$\cos\alpha>0$,$\tan\alpha<0$.

选项A,$\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}>0$;选项B,$\cos\alpha-\sin\alpha>0$;

选项C,$\sin\alpha\cos\alpha<0$;选项D,$\sin\alpha+\cos\alpha$符号不确定.故选AB.

(2)设α终边上任意一点为$P(-4a,3a)$,$r=|5a|$.当$a>0$时,$r=5a$,$\sin\alpha=\frac{3}{5}$,$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$,$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$,

$\therefore 5\sin\alpha+5\cos\alpha+4\tan\alpha=3-4-3=-4$;

当$a<0$时,$r=-5a$,$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$,$\cos\alpha=\frac{4}{5}$,$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$,

$\therefore 5\sin\alpha+5\cos\alpha+4\tan\alpha=-3+4-3=-2$.

综上可知,$5\sin\alpha+5\cos\alpha+4\tan\alpha=-4$或$-2$.]

第2课时 同角三角函数的基本关系式与诱导公式

梳理·必备知识

1.(1)1 (2)$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right)$

2.$\cos\alpha$ $-\cos\alpha$ $-\tan\alpha$

激活·基本技能

一、(1)× (2)× (3)× (4)√

二、1.**D** [因为$\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\pi$,所以$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$,所以$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{1}{2}$.]

2.$-\frac{2}{7}$ [原式$=\frac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+2}=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+2}=-\frac{2}{7}$.]

3.$-\sin^2\alpha$ [原式$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot(-\sin\alpha)\cdot\cos\alpha=-\sin^2\alpha$.]

4.$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ [因为$\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\frac{\pi}{2}$,

所以$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{2}$.

$\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\alpha\right)=\sin\left[\pi-\left(\frac{2}{3}\pi+\alpha\right)\right]$

$=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{2}$.]

考点一

考向1 **典例1** (1)**C** (2)**A** [(1)因为$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,$\sin\alpha=\frac{3}{5}$,所以$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$,所以$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$,故选C.

(2)由$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2$,得$\sin\alpha=2\cos\alpha$.

代入$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$得$\cos^2\alpha=\frac{1}{5}$.

又$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$,所以$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$,

$\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

所以$\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{3\sqrt{5}}{5}$,

故选A.]

考向2 **典例2** **解**:由已知得$\tan\alpha=\frac{1}{2}$.

(1)$\frac{\sin\alpha-3\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha-3}{\tan\alpha+1}=-\frac{5}{3}$.

(2)$\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+2$

$=\frac{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}+2$

$=\frac{\tan^2\alpha+\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}+2$

$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}+2=\frac{13}{5}$.

考向3 **典例3** **解**:(1)由$\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$,

平方得$\sin^2x+2\sin x\cos x+\cos^2x=\frac{1}{25}$,

整理得$2\sin x\cos x=-\frac{24}{25}$.

$\therefore(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x=\frac{49}{25}$.

由$x\in(-\pi,0)$,知$\sin x<0$,

又$\sin x+\cos x>0$,

$\therefore\cos x>0$,则$\sin x-\cos x<0$,

故$\sin x-\cos x=-\frac{7}{5}$.

(2)$\frac{\sin 2x+2\sin^2x}{1-\tan x}=\frac{2\sin x(\cos x+\sin x)}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}$

$=\frac{2\sin x\cos x(\cos x+\sin x)}{\cos x-\sin x}$

$=\frac{-\frac{24}{25}\times\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}}=-\frac{24}{175}$.

跟进训练

1.(1)**C**　(2)$-\frac{12}{5}$　[(1)将式子进行齐次化处理得：

$\frac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}$

$=\frac{\sin\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}$

$=\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$=\frac{\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\tan^2\theta+\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

$=\frac{4-2}{1+4}=\frac{2}{5}$.故选C.

(2)**法一**：由$\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{13}$，得$\sin\theta\cos\theta=-\frac{60}{169}$，

因为$\theta\in(0,\pi)$，所以$\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$，

所以$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}=\frac{17}{13}$，

联立$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{13},\\ \sin\theta-\cos\theta=\frac{17}{13},\end{cases}$

解得$\begin{cases}\sin\theta=\frac{12}{13},\\ \cos\theta=-\frac{5}{13},\end{cases}$

所以$\tan\theta=-\frac{12}{5}$.

法二：因为$\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{13}$，

所以$\sin\theta\cos\theta=-\frac{60}{169}$，

由根与系数的关系，知$\sin\theta$，$\cos\theta$是方程$x^2-\frac{7}{13}x-\frac{60}{169}=0$的两根，所以$x_1=\frac{12}{13}$，$x_2=-\frac{5}{13}$.

又$\sin\theta\cos\theta=-\frac{60}{169}<0$，$\theta\in(0,\pi)$，

所以$\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$.

所以$\sin\theta=\frac{12}{13}$，$\cos\theta=-\frac{5}{13}$.

所以$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{12}{5}$.

法三：由$\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{13}$，得$\sin\theta\cos\theta=-\frac{60}{169}$，

所以$\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=-\frac{60}{169}$.

齐次化切，得$\frac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=-\frac{60}{169}$，

即$60\tan^2\theta+169\tan\theta+60=0$，

解得$\tan\theta=-\frac{12}{5}$或$\tan\theta=-\frac{5}{12}$.

又$\theta\in(0,\pi)$，$\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{13}>0$，$\sin\theta\cos\theta=-\frac{60}{169}<0$，

所以$\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$，所以$\tan\theta=-\frac{12}{5}$.]

考点二

典例4　(1)**D**　(2)0　[(1)因为$\frac{7\pi}{10}-\alpha+\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\pi}{2}$，

所以$\frac{7\pi}{10}-\alpha=\frac{\pi}{2}-\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)$，

所以$\sin\left(\frac{7\pi}{10}-\alpha\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)\right]=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{5}{13}$，故选D.

(2)因为$(105°-\alpha)+(75°+\alpha)=180°$，

$(15°-\alpha)+(\alpha+75°)=90°$，

所以$\cos(105°-\alpha)=\cos[180°-(75°+\alpha)]$

$=-\cos(75°+\alpha)=-\frac{1}{3}$，

$\sin(15°-\alpha)=\sin[90°-(\alpha+75°)]=\cos(75°+\alpha)=\frac{1}{3}$.

所以$\cos(105°-\alpha)+\sin(15°-\alpha)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0$.]

跟进训练

2.(1)**B**　(2)$\frac{1}{2}$　[(1)$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$.故选B.

(2)因为$f(\alpha)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(-\pi-\alpha)\tan(\pi-\alpha)}$

$=\frac{-\sin\alpha(-\cos\alpha)}{(-\cos\alpha)\left(-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}=\cos\alpha$，

所以$f\left(-\frac{25\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{25\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.]

考点三

典例5　**解**：假设存在角α，β满足条件.

由已知条件可得

$\begin{cases}\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\beta, & ①\\ \sqrt{3}\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\beta, & ②\end{cases}$

由①^2+②^2，得$\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha=2$.

$\therefore\sin^2\alpha=\frac{1}{2}$，$\therefore\sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore\alpha=\pm\frac{\pi}{4}$.

当$\alpha=\frac{\pi}{4}$时，由②式知$\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又$\beta\in(0,\pi)$，$\therefore\beta=\frac{\pi}{6}$，此时①式成立；

当$\alpha=-\frac{\pi}{4}$时，由②式知$\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又$\beta\in(0,\pi)$，$\therefore\beta=\frac{\pi}{6}$，此时①式不成立，故舍去.

$\therefore$存在$\alpha=\frac{\pi}{4}$，$\beta=\frac{\pi}{6}$满足条件.

跟进训练

3.(1)**C**　(2)$-\frac{2\sqrt{6}}{5}$　[(1)由条件得$\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}$

$=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}$，

又因为 α 为锐角，所以 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$，

即 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right]$，所以有 $\alpha-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$，解得 $\alpha=\frac{\pi}{4}$. 故选 C.

(2)由已知 $-270^\circ<\alpha<-90^\circ$ 可得 $143^\circ<53^\circ-\alpha<323^\circ$，所以 $\cos(53^\circ-\alpha)=-\sqrt{1-\sin^2(53^\circ-\alpha)}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$，所以 $\sin(37^\circ+\alpha)=\sin[90^\circ-(53^\circ-\alpha)]=\cos(53^\circ-\alpha)=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$.]

第 3 课时　两角和与差的正弦、余弦和正切公式

梳理·必备知识

1. (1) $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$　(2) $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
(3) $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$　(4) $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
(5) $\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$　(6) $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

2. (2) $2\cos^2\alpha-1$　$1-2\sin^2\alpha$　(3) $\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

激活·基本技能

一、(1)√　(2)×　(3)×　(4)×

二、1. **C**　[∵α 是第三象限角，

∴$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{3}{5}$，

∴$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$.]

2. **D**　[$\sin 20^\circ\cos 10^\circ-\cos 160^\circ\sin 10^\circ$
$=\sin 20^\circ\cos 10^\circ+\cos 20^\circ\sin 10^\circ$
$=\sin(20^\circ+10^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$.
故选 D.]

3. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　[$\frac{1-\tan 15^\circ}{1+\tan 15^\circ}=\frac{\tan 45^\circ-\tan 15^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 15^\circ}$
$=\tan(45^\circ-15^\circ)=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$.]

4. $\sqrt{3}$　[∵$\tan 60^\circ=\tan(10^\circ+50^\circ)=\frac{\tan 10^\circ+\tan 50^\circ}{1-\tan 10^\circ\tan 50^\circ}$，
∴$\tan 10^\circ+\tan 50^\circ=\tan 60^\circ(1-\tan 10^\circ\tan 50^\circ)$
$=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan 10^\circ\tan 50^\circ$，
∴原式$=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan 10^\circ\tan 50^\circ+\sqrt{3}\tan 10^\circ\tan 50^\circ=\sqrt{3}$.]

考点一

典例 1　解：(1)因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

故 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha$
$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

(2)由(1)知 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{4}{5}$，

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2=\frac{3}{5}$，所以 $\cos\left(\frac{5\pi}{6}-2\alpha\right)=\cos\frac{5\pi}{6}\cos 2\alpha+\sin\frac{5\pi}{6}\sin 2\alpha=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$.

跟进训练

1. (1) **A**　(2) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　[(1)由题 $\theta\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$，$\tan 2\theta=-4\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，

得 $\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{-4(\tan\theta+1)}{1-\tan\theta}$，即 $-4(\tan\theta+1)^2=2\tan\theta$，

则 $(2\tan\theta+1)(\tan\theta+2)=0$，所以 $\tan\theta=-2$ 或 $\tan\theta=-\frac{1}{2}$，

因为 $\theta\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$，所以 $\tan\theta\in(-1,0)$，所以 $\tan\theta=-\frac{1}{2}$，

所以 $\frac{1+\sin 2\theta}{2\cos^2\theta+\sin 2\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{\tan^2\theta+1+2\tan\theta}{2+2\tan\theta}=\frac{\frac{1}{4}+1-1}{2+(-1)}=\frac{1}{4}$.

故选 A.

(2)因为 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha=\sqrt{3}\cos\alpha$，所以 $-\sin\alpha=\sqrt{3}\cos\alpha$，故 $\tan\alpha=-\sqrt{3}$，所以 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.]

考点二

考向 1　**典例 2**　**BD**　[选项 A 中，$\cos 82^\circ\sin 52^\circ-\sin 82^\circ\cos 52^\circ=\sin(52^\circ-82^\circ)=\sin(-30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$，故 A 错误；选项 B 中，$\sin 15^\circ\sin 30^\circ\sin 75^\circ=\frac{1}{2}\sin 15^\circ\cos 15^\circ=\frac{1}{4}\sin 30^\circ=\frac{1}{8}$，故 B 正确；选项 C 中，$\frac{\tan 48^\circ+\tan 72^\circ}{1-\tan 48^\circ\tan 72^\circ}=\tan(48^\circ+72^\circ)=\tan 120^\circ=-\sqrt{3}$，故 C 错误；选项 D 中，$\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 D 正确.]

考向 2　**典例 3**　(1)2　(2)**AD**　[(1) $\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$，所以 $1-\tan\alpha\tan\beta=\tan\alpha+\tan\beta$，

所以 $1+\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta=2$，

即 $(1+\tan\alpha)\cdot(1+\tan\beta)=2$.

(2)由题意知，$\sin\gamma=\sin\beta-\sin\alpha$，$\cos\gamma=\cos\alpha-\cos\beta$，

将两式分别平方后相加，

得 $1=(\sin\beta-\sin\alpha)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2$

$=2-2(\sin\beta\sin\alpha+\cos\beta\cos\alpha)$，

$\therefore\cos(\beta-\alpha)=\frac{1}{2}$，即选项 A 正确，B 错误；

$\because\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore\sin\gamma=\sin\beta-\sin\alpha>0$，$\therefore\beta>\alpha$，而 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore 0<\beta-\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\beta-\alpha=\frac{\pi}{3}$，即选项 D 正确，C 错误.]

跟进训练

2.(1)**B**　(2)**D**　[(1)由 $\tan A\tan B=\tan A+\tan B+1$，可得 $\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-1$，

即 $\tan(A+B)=-1$，又 $A+B\in(0,\pi)$，

所以 $A+B=\frac{3\pi}{4}$，则 $C=\frac{\pi}{4}$，$\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)$a=\cos 50^\circ\cos 127^\circ+\cos 40^\circ\cos 37^\circ$

$=\cos 50^\circ\cos 127^\circ+\sin 50^\circ\sin 127^\circ$

$=\cos(50^\circ-127^\circ)=\cos(-77^\circ)=\cos 77^\circ=\sin 13^\circ$，

$b=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 56^\circ-\cos 56^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 56^\circ-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 56^\circ=\sin(56^\circ-45^\circ)=\sin 11^\circ$，

$c=\frac{1-\tan^2 39^\circ}{1+\tan^2 39^\circ}=\frac{1-\frac{\sin^2 39^\circ}{\cos^2 39^\circ}}{1+\frac{\sin^2 39^\circ}{\cos^2 39^\circ}}=\cos^2 39^\circ-\sin^2 39^\circ=\cos 78^\circ=\sin 12^\circ$.

因为当 $0^\circ\leqslant x\leqslant 90^\circ$ 时，函数 $y=\sin x$ 单调递增，

所以 $\sin 13^\circ>\sin 12^\circ>\sin 11^\circ$，所以 $a>c>b$.]

考点三

典例 4　**C**　[因为 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin(\beta-\alpha)=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，且 α,β 均为锐角，所以 $-\frac{\pi}{2}<\beta-\alpha<\frac{\pi}{2}$. 又 $\sin(\beta-\alpha)<0$，所以 $-\frac{\pi}{2}<\beta-\alpha<0$，所以 $\cos(\beta-\alpha)>0$.

所以 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos(\beta-\alpha)=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

所以 $\sin\beta=\sin[\alpha+(\beta-\alpha)]=\sin\alpha\cdot\cos(\beta-\alpha)+\cos\alpha\cdot\sin(\beta-\alpha)=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}+\frac{\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{25\sqrt{2}}{50}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\beta=\frac{\pi}{4}$. 故选 C.]

跟进训练

3.(1)**B**　(2)**C**　[(1)依题意，得

$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3},\\ \cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{6},\end{cases}$ 所以 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$，所以

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$，所以

$\cos(2\alpha+2\beta)=1-2\sin^2(\alpha+\beta)=1-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$，故选 B.

(2)由 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 是方程 $x^2-4\sqrt{3}x+5=0$ 的两根可得 $\tan\alpha+\tan\beta=4\sqrt{3}$，$\tan\alpha\cdot\tan\beta=5$.

所以 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 均为正数，

又 $\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，故 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{4\sqrt{3}}{1-5}=-\sqrt{3}$.

又 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$. 故 $\alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$.

故选 C.]

第 4 课时　简单的三角恒等变换

梳理·必备知识

1.(1)$\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$　(2)$\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

激活·基本技能

一、(1)×　(2)√　(3)×

二、1.**BD**　[$\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha$

$=2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)$

$=2\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$

$=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$.]

2.**C**　[$\because\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\sqrt{5}-2$.]

3.$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　$-\frac{\sqrt{5}}{5}$　[$\because\theta\in\left(\frac{5\pi}{2},3\pi\right)$，且 $\sin\theta=\frac{4}{5}$.

$\therefore\cos\theta=-\frac{3}{5}$，$\frac{\theta}{2}\in\left(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$，

$\therefore\sin\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.]

4.80°　[因为等式 $(\tan 10^\circ-\sqrt{3})\cdot\sin\theta=-2\cos 40^\circ$ 可以转化为

$\sin\theta=\frac{-2\cos 40^\circ}{\tan 10^\circ-\sqrt{3}}=\frac{-2\cos 40^\circ\cdot\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ-\sqrt{3}\cos 10^\circ}$

$=\frac{-2\cos 40^\circ\cdot\cos 10^\circ}{2\left(\frac{1}{2}\sin 10^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^\circ\right)}$

$=\frac{-2\cos 40^\circ\cdot\cos 10^\circ}{-2\sin 50^\circ}=\cos 10^\circ=\sin 80^\circ$.

又因为所求的 θ 是锐角，故答案为 80°.]

考点一

典例 1　**解**：(1)原式 $=\frac{\sin(2\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$

$=\frac{\sin[\alpha+(\alpha+\beta)]-2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$

$=\frac{\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)+\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$

$=\frac{\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$

$=\frac{\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]}{\sin\alpha}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

(2)因为 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$,

所以$(1+\cos\alpha)\tan\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha$.

又因为 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$,且 $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$,

所以原式$=\frac{-\sin\alpha-\sin\alpha}{\sqrt{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{-2\sin\alpha}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$

$=-\frac{2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$.

因为 $0<\alpha<\pi$,所以 $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$.

所以 $\sin\frac{\alpha}{2}>0$.

所以原式$=-2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.

跟进训练

1. $-\cos\theta$ [原式$=\frac{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}}$

$=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\left(\sin^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)}{\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}$

$=\frac{-\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\theta}{\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}$.

因为 $0<\theta<\pi$,所以 $0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$,

所以 $\cos\frac{\theta}{2}>0$,

所以原式$=-\cos\theta$.]

考点二

考向1 典例2 (1)$-\frac{1}{8}$ (2)$\sqrt{6}$

[(1)$\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 100^\circ$

$=-\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ$

$=-\frac{\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}$

$=-\frac{\frac{1}{2}\sin 40^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}$

$=-\frac{\frac{1}{4}\sin 80^\circ\cdot\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=-\frac{\frac{1}{8}\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ}$

$=-\frac{\frac{1}{8}\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=-\frac{1}{8}$.

(2)原式$=\left(2\sin 50^\circ+\sin 10^\circ\cdot\frac{\cos 10^\circ+\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}\right)\cdot\sqrt{2}\sin 80^\circ=\left(2\sin 50^\circ+2\sin 10^\circ\cdot\frac{\frac{1}{2}\cos 10^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}\right)\cdot\sqrt{2}\cos 10^\circ=2\sqrt{2}[\sin 50^\circ\cdot\cos 10^\circ+\sin 10^\circ\cdot\cos(60^\circ-10^\circ)]=2\sqrt{2}\sin(50^\circ+10^\circ)=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$.]

考向2 典例3 (1)**B** (2)$\frac{24}{13}$ [(1)由 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 得 $\frac{\pi}{6}<\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$,

$\therefore\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\therefore\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$,

$\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-1=2\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2-1=-\frac{7}{9}$,

$\therefore\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left[\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{4}\right]$

$=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{4}-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{4}$

$=\left(-\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\frac{7}{9}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}-8}{18}$,故选 B.

(2)**法一**(先化简后求值):

$\frac{\cos 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)}$

$=\sqrt{2}(\cos x+\sin x)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

由 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 得 $0<\frac{\pi}{4}-x<\frac{\pi}{4}$,

$\therefore\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$,

$\therefore$原式$=2\times\frac{12}{13}=\frac{24}{13}$.

法二(先局部后整体):

$\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{5}{13}$,

由 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 得 $0<\frac{\pi}{4}-x<\frac{\pi}{4}$,

$\therefore\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$,

$\therefore\cos 2x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$

$=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

$=2\times\frac{5}{13}\times\frac{12}{13}=\frac{120}{169}$.

$\therefore\frac{\cos 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=\frac{120}{169}\times\frac{13}{5}=\frac{24}{13}$.]

考向 3　**典例** 4　(1)$\frac{\pi}{4}$　(2)$-\frac{3\pi}{4}$　[(1)由$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,$0<\beta<\frac{\pi}{2}$,得$-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$,$\therefore\cos(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha-\beta)}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

$\because\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$\therefore\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$\therefore\sin\beta=\sin[\alpha-(\alpha-\beta)]=\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.又$\because$角$\beta$是锐角,$\therefore\beta=\frac{\pi}{4}$.

(2)$\because\tan\alpha=\tan[(\alpha-\beta)+\beta]=\frac{\tan(\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan\beta}$

$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{7}}=\frac{1}{3}>0$,$\therefore 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

又$\because\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}>0$,$\therefore 0<2\alpha<\frac{\pi}{2}$,

$\therefore\tan(2\alpha-\beta)=\frac{\tan 2\alpha-\tan\beta}{1+\tan 2\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{1}{7}}=1$.

$\because\tan\beta=-\frac{1}{7}<0$,$\therefore\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$,$-\pi<2\alpha-\beta<0$,

$\therefore 2\alpha-\beta=-\frac{3\pi}{4}$.]

跟进训练

2.(1)**B**　(2)**A**　(3)$\frac{1}{7}$　$\frac{\pi}{3}$　[(1)$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{3}{5}$.

故选 B.

(2)$\frac{\cos 10^\circ}{2\sin 10^\circ}-2\cos 10^\circ=\frac{\cos 10^\circ-4\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{2\sin 10^\circ}$

$=\frac{\cos 10^\circ-2\sin 20^\circ}{2\sin 10^\circ}$

$=\frac{\cos 10^\circ-2\sin(30^\circ-10^\circ)}{2\sin 10^\circ}$

$=\frac{\cos 10^\circ-(\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ)}{2\sin 10^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选 A.

(3)因为$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{7}}{7}$,所以$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{1}{7}$.

又因为α,β均为锐角,$\sin\beta=\frac{3\sqrt{3}}{14}$,

所以$\sin\alpha=\frac{\sqrt{21}}{7}$,$\cos\beta=\frac{13}{14}$,因此$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$,所以$\sin(2\alpha-\beta)=\sin 2\alpha\cos\beta-\cos 2\alpha\sin\beta=\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{13}{14}-\frac{1}{7}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为α为锐角,所以$0<2\alpha<\pi$.

又$\cos 2\alpha>0$,所以$0<2\alpha<\frac{\pi}{2}$,

又β为锐角,所以$-\frac{\pi}{2}<2\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$,

又$\sin(2\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$2\alpha-\beta=\frac{\pi}{3}$.]

第 5 课时　三角函数的图象与性质

梳理・必备知识

2.$[-1,1]$　$[-1,1]$　2π　π　奇函数　偶函数　$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$,$k\in\mathbf{Z}$　$[-\pi+2k\pi,2k\pi]$,$k\in\mathbf{Z}$　$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$,$k\in\mathbf{Z}$　$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$,$k\in\mathbf{Z}$　$[2k\pi,\pi+2k\pi]$,$k\in\mathbf{Z}$　$(k\pi,0)$,$k\in\mathbf{Z}$　$\left(k\pi+\frac{\pi}{2},0\right)$,$k\in\mathbf{Z}$　$\left(\frac{k\pi}{2},0\right)$,$k\in\mathbf{Z}$　$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$　$x=k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$

激活・基本技能

一、(1)×　(2)×　(3)×　(4)×

二、1.**A**　[$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$,$A=2-1=1$,故选 A.]

2.**C**　[要使函数有意义,则$2x+\frac{\pi}{4}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,即$x\neq\frac{k}{2}\pi+\frac{\pi}{8}$,$k\in\mathbf{Z}$,所以函数的定义域为$\left\{x\middle|x\neq\frac{k}{2}\pi+\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}\right\}$.]

3.**B**　[函数$y=4\sin x$在$\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$和$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上单调递减,在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增.故选 B.]

4.5　$\frac{3\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$　[函数$y=3-2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的最大值为$3+2=5$,此时$x+\frac{\pi}{4}=\pi+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,即$x=\frac{3}{4}\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.]

考点一

典例 1　(1)$\left\{x\middle|x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,\text{且 }x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$

(2)$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　(3)$\left[\frac{7}{8},2\right]$　[(1)要使函数有意义,必须有$\begin{cases}\tan x-1\neq 0,\\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z},\end{cases}$

即$\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z},\\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$

故函数的定义域为$\left\{x\middle|x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,\text{且 }x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2)$\because y=\sin x-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x=\frac{3}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$,

$\therefore$函数$y=\sin x-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$的值域为$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$.

(3)因为 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$,所以 $\sin x\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

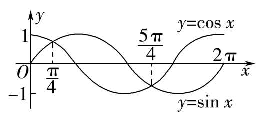
又 $y=3-\sin x-2\cos^2x=3-\sin x-2(1-\sin^2x)=2\left(\sin x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$,

所以当 $\sin x=\frac{1}{4}$ 时,$y_{\min}=\frac{7}{8}$,当 $\sin x=-\frac{1}{2}$ 或 $\sin x=1$ 时,$y_{\max}=2$.即函数的值域为$\left[\frac{7}{8},2\right]$.]

跟进训练

1.(1)$\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$　(2)$\left[-\frac{1+2\sqrt{2}}{2},1\right]$

[(1)要使函数有意义,必须使 $\sin x-\cos x\geqslant 0$.利用图象,在同一坐标系中画出$[0,2\pi]$上 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的图象,如图所示.



在$[0,2\pi]$内,满足 $\sin x=\cos x$ 的 x 为$\frac{\pi}{4}$,$\frac{5\pi}{4}$,再结合正弦、余弦函数的最小正周期是 2π,所以原函数的定义域为$\left\{x\left|2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

(2)设 $t=\sin x-\cos x$,则 $t^2=\sin^2x+\cos^2x-2\sin x\cdot\cos x$,$\sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$,且$-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$.

$\therefore y=-\frac{t^2}{2}+t+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(t-1)^2+1$,$t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

当 $t=1$ 时,$y_{\max}=1$;当 $t=-\sqrt{2}$ 时,$y_{\min}=-\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore$函数的值域为$\left[-\frac{1+2\sqrt{2}}{2},1\right]$.]

考点二

典例 2　(1)**ABC**　(2)**BD**　(3)$-\frac{9}{2}-3\sqrt{3}$　[(1)A 项,$y=\cos|2x|=\cos 2x$,最小正周期为 π;

B 项,由图象知 $y=|\sin x|$的最小正周期为 π;

C 项,$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$;

D 项,$y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$的最小正周期 $T=\frac{\pi}{2}$.

(2)对于 B,$f(x)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$,B 正确;

对于 A,由于 $f(x)$的图象关于直线 $x=\pi$ 对称,且最小正周期是 π,因此 $f(x)$的图象也关于直线 $x=0$ 对称,故$f(x)$是偶函数,A 错误;

对于 C,因为 $f(x)$是偶函数,且最小正周期是 π,则 $f(x)=2\cos 2x$ 或 $f(x)=-2\cos 2x$,根据 $0<\varphi<\pi$ 可得解析式为前者.当 $x=-2\pi$ 时,$f(x)=2\cos 4\pi=2\neq 0$,

$\therefore(-2\pi,0)$不是 $f(x)$的对称中心,C 错误;

对于 D,由于$(2,3)\subseteq\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递增,D 正确.故选 BD.

(3)$\because f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数,

$\therefore\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,则 $\varphi=\frac{\pi}{2}$,则 $f(x)=-A\sin\omega x$.

当 $x=3$ 时,$f(x)$取得最小值-3,

故 $A=3$,$\sin 3\omega=1$,$\therefore 3\omega=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

$\therefore\omega$ 的最小正数值为$\frac{\pi}{6}$,

$\therefore f(x)=-3\sin\frac{\pi}{6}x$,

$\therefore f(x)$的周期为 12,

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(12)=0$,

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\,023)$

$=168\times 0+f(1)+f(2)+\cdots+f(7)=-\frac{9}{2}-3\sqrt{3}$.]

跟进训练

2.(1)**A**　(2)$\cos 3x$(答案不唯一)　[(1)由函数的最小正周期 T 满足$\frac{2\pi}{3}<T<\pi$,得$\frac{2\pi}{3}<\frac{2\pi}{\omega}<\pi$,解得 $2<\omega<3$,

又因为函数图象关于点$\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$对称,所以$\frac{3\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}=k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,且 $b=2$,

所以 $\omega=-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}k$,$k\in\mathbf{Z}$,所以 $\omega=\frac{5}{2}$,$f(x)=\sin\left(\frac{5}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)+2$,

所以 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{\pi}{4}\right)+2=1$.

故选 A.

(2)因为对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有$f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=f\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$,

所以函数的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$对称.

又由于函数为偶函数,

所以函数的解析式可以为 $f(x)=\cos 3x$.

以下验证 $f(x)=\cos 3x$ 符合题意.

因为 $f(-x)=\cos(-3x)=\cos 3x=f(x)$,

所以函数 $f(x)$是偶函数.

令 $3x=k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,$\therefore x=\frac{k\pi}{3}$,$k\in\mathbf{Z}$,

所以函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$对称.]

考点三

考向 1　典例 3　(1)$\left[0,\frac{5\pi}{12}\right]$和$\left[\frac{11\pi}{12},\pi\right]$　(2)$\left[k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$,$k\in\mathbf{Z}$　$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi\right]$,$k\in\mathbf{Z}$　[(1)$f(x)=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\left[-\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right]=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$,

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,

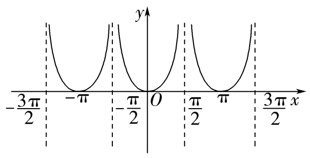
得 $k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{12}$,$k\in\mathbf{Z}$.

故所求函数的单调递减区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$.

令 $A=\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right],k\in\mathbf{Z}$，$B=[0,\pi]$，$\therefore A\cap B=\left[0,\frac{5\pi}{12}\right]\cup\left[\frac{11\pi}{12},\pi\right]$，

$\therefore f(x)$在$[0,\pi]$上的单调递减区间为$\left[0,\frac{5\pi}{12}\right]$和$\left[\frac{11\pi}{12},\pi\right]$.

(2)作出函数 $y=|\tan x|$的图象，如图.



观察图象可知，函数 $y=|\tan x|$的单调递增区间为$\left[k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}\right),k\in\mathbf{Z}$；单调递减区间为$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.］

考向 2　典例 4　D　［**法一**(反子集法)：$\because x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\therefore\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi\omega}{2}+\frac{\pi}{4},\pi\omega+\frac{\pi}{4}\right)$.

$\because f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减，

$\therefore\begin{cases}\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}\geqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z},\\ \pi\omega+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z},\end{cases}$

解得$\begin{cases}\omega\geqslant4k+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z},\\ \omega\leqslant2k+\frac{5}{4},k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$

又 $\omega>0,k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore k=0$，此时$\frac{1}{2}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{4}$，故选 D.

法二(子集法)：由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant\omega x+\frac{\pi}{4}\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，得$\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{4\omega}\leqslant x\leqslant\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{5\pi}{4\omega},k\in\mathbf{Z}$，

因为 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减，

所以$\begin{cases}\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{4\omega}\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \frac{2k\pi}{\omega}+\frac{5\pi}{4\omega}\geqslant\pi,\end{cases}$解得$\begin{cases}\omega\geqslant4k+\frac{1}{2},\\ \omega\leqslant2k+\frac{5}{4}.\end{cases}$

因为 $k\in\mathbf{Z},\omega>0$，所以 $k=0$，

所以$\frac{1}{2}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{4}$，即 ω 的取值范围为$\left[\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right]$. 故选 D.］

跟进训练

3. (1)**D**　(2)$\frac{7\pi}{5}$　［(1)因为函数 $f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$的图象的两个相邻对称中心之间的距离为$\frac{\pi}{2}$，所以最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\times\frac{\pi}{2}=\pi$，解得 $\omega=2$，所以 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$. 令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant2x-\frac{\pi}{6}\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，得 $k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的单调递减区间为$\left[k\pi+\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{5\pi}{6}\right],k\in\mathbf{Z}$，结合各选项知，$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的一个单调递减区间为$\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$.

(2)**法一**：令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x+\frac{\pi}{10}\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，即 $2k\pi+\frac{2\pi}{5}\leqslant x\leqslant2k\pi+\frac{7\pi}{5},k\in\mathbf{Z}$，所以函数 $f(x)$在区间$\left[\frac{2\pi}{5},\frac{7\pi}{5}\right]$上单调递减，所以 a 的最大值为$\frac{7\pi}{5}$.

法二：因为$\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant a$，所以$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\leqslant x+\frac{\pi}{10}\leqslant a+\frac{\pi}{10}$，

又 $f(x)$在$\left[\frac{\pi}{2},a\right]$上单调，

$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}<a+\frac{\pi}{10}\leqslant\frac{3\pi}{2}$，即$\frac{\pi}{2}<a\leqslant\frac{7\pi}{5}$，所以 a 的最大值为$\frac{7\pi}{5}$.］

第 6 课时　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$

梳理·必备知识

1. $\frac{2\pi}{\omega}$　$\omega x+\varphi$　φ

3. $|\varphi|$　$\frac{1}{\omega}$　A　$\frac{1}{\omega}$　$\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$　A

激活·基本技能

一、(1)×　(2)×　(3)√　(4)√

二、1. **C**　［由题意知 $A=2$，$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{4\pi}$，初相为$-\frac{\pi}{3}$.］

2. **A**　［$y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]$.］

3. **D**　［因为变换前后，两个函数的初相相同，所以只需使 $y=3\cos\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$图象上的所有点的纵坐标保持不变，将横坐标缩短到原来的$\frac{1}{3}$，即可得到函数 $y=3\cos\left(3x+\frac{\pi}{8}\right)$的图象，故选 D.］

4. $y=5\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{3\pi}{4}\right)+10,x\in[6,14]$　［从题图中可以看出，6～14 时的图象是函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ 的半个周期，则$\begin{cases}A+b=15,\\ -A+b=5,\end{cases}$

所以 $A=\frac{1}{2}\times(15-5)=5$，$b=\frac{1}{2}\times(15+5)=10$.

又$\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\omega}=14-6$，所以 $\omega=\frac{\pi}{8}$.

又$\frac{\pi}{8}\times10+\varphi=2\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z},0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{3\pi}{4}$，

所以 $y=5\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{3\pi}{4}\right)+10,x\in[6,14]$.］

考点一

典例 1　**解**：(1)因为函数 $f(x)$的最小正周期是 π，所以 $\omega=2$.

又因为当 $x=\frac{\pi}{6}$时，$f(x)$取得最大值 2，所以 $A=2$，

同时 $2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

$\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，

因为$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$,

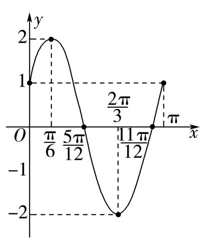
所以$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

(2)因为$x\in[0,\pi]$,所以$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{13\pi}{6}\right]$.

列表如下:

$2x+\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
$f(x)$	1	2	0	-2	0	1

描点、连线得图象,如图:



(3)将$y=\sin x$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度,得到函数$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象,再将$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$(纵坐标不变),得到函数$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象,再将$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象上所有点的纵坐标伸长为原来的2倍(横坐标不变),得到$y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象.

(4)因为$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$,将$y=\cos x$的图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度,得到函数$y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象,再将$y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$(纵坐标不变),得到函数$y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象,再将$y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象上所有点的纵坐标伸长为原来的2倍(横坐标不变),得到$y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象,即为$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象.

跟进训练

1.(1)**B** (2)**C** [(1)由已知的函数$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$逆向变换,

第一步:向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度,得到$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$的图象,

第二步:图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍,纵坐标不变,得到$y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$的图象,

即为$y=f(x)$的图象,所以$f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$.故选B.

(2)由题意知:曲线C为$y=\sin\left[\omega\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(\omega x+\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$,又C关于y轴对称,则$\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得$\omega=\frac{1}{3}+2k,k\in\mathbf{Z}$,又$\omega>0$,故当$k=0$时,$\omega$的最小值为$\frac{1}{3}$.故选C.]

考点二

典例2 (1)**BC** (2)$-\sqrt{3}$ [(1)由题图知$\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,

得$T=\pi$,即$\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$,所以$\omega=\pm2$,

当$\omega=2$时,图象过点$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$,

由“五点法”,结合图象可得$\varphi+\frac{\pi}{3}=\pi$,即$\varphi=\frac{2\pi}{3}$,

所以$\sin(\omega x+\varphi)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$,故A错误;

由$\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left[\pi-\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$知B正确;

由$\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$知C正确;

由$\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left[\pi+\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)\right]=-\cos\left(\frac{5\pi}{6}-2x\right)$知D错误.

当$\omega=-2$时,$y=\sin(-2x+\varphi)$过$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$,

则$\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=0$,取$\varphi=\frac{\pi}{3}$.

$\therefore y=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[-\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,可得B,C正确.

综上可知,故选BC.

(2)由题意得,$A=\sqrt{3}$,$T=4=\frac{2\pi}{\omega}$,$\omega=\frac{\pi}{2}$.

又因为$f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)$为奇函数,

所以$\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,由$0<\varphi<\pi$,取$k=0$,则$\varphi=\frac{\pi}{2}$,

所以$f(x)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)$,所以$f(1)=-\sqrt{3}$.]

跟进训练

2.(1)**B** (2)$\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$ [(1)由图象知$\pi<T<2\pi$,即$\pi<\frac{2\pi}{|\omega|}<2\pi$,所以$1<|\omega|<2$.

因为图象过点$\left(-\frac{4\pi}{9},0\right)$,所以$\cos\left(-\frac{4\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6}\right)=0$,

所以$-\frac{4\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in \mathbf{Z}$,

所以$\omega=-\frac{9}{4}k-\frac{3}{4},k\in \mathbf{Z}.$

因为$1<|\omega|<2$,故$k=-1$,得$\omega=\frac{3}{2}$,

所以$f(x)=\cos\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$.

(2)因为函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$的最小正周期是$\pi$,所以$\pi=\frac{2\pi}{\omega}$,$\therefore\omega=2$.

函数的图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度后得到曲线

$y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\varphi\right]$,

因为曲线$y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\varphi\right]$关于原点对称,

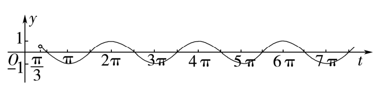
所以$-\frac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi(k\in \mathbf{Z})$,$\therefore\varphi=\frac{2\pi}{3}+k\pi(k\in \mathbf{Z})$.

$\because 0<\varphi<\pi$,$\therefore\varphi=\frac{2\pi}{3}$,因此$f(x)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$.]

考点三

典例3 (1)**CD** (2)**AC** [(1)因为$x\in(0,2\pi)$,所以$\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},2\pi\omega+\frac{\pi}{3}\right)$.

设$t=\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},2\pi\omega+\frac{\pi}{3}\right)$,画出$y=\cos t$的图象如图所示.

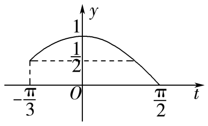


由图象可知,若$f(x)$在$(0,2\pi)$上有且仅有3个极小值点,则$5\pi<2\pi\omega+\frac{\pi}{3}\leqslant 7\pi$,故$f(x)$在$(0,2\pi)$上可能有5,6或7个零点,故A错误;$f(x)$在$(0,2\pi)$上可能有2或3个极大值点,故B错误;由$5\pi<2\pi\omega+\frac{\pi}{3}\leqslant 7\pi$,可得$\frac{7}{3}<\omega\leqslant\frac{10}{3}$,故D正确;当$x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$时,$\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{3}\right)$. 因为$\frac{7}{3}<\omega\leqslant\frac{10}{3}$,所以$\frac{13\pi}{18}<\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{8\pi}{9}$,故$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$上单调递减,故C正确.

(2)$2\sqrt{3}\cos^2x-\sin 2x=\sqrt{3}-m$整理可得$\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{m}{2}$,

令$t=2x+\frac{\pi}{6}$,因为$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right]$,则$t\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$.

所以$\cos t=-\frac{m}{2}$在区间$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$上有且只有一个解,即$y=\cos t$的图象和直线$y=-\frac{m}{2}$只有1个交点.



由图可知,$-\frac{m}{2}=1$或$0\leqslant-\frac{m}{2}<\frac{1}{2}$,解得$m=-2$或$-1<m\leqslant 0$. 故选AC.]

跟进训练

3.(1)**BCD** (2)3 [(1)对于A,因为$f(2\pi-x)=-\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x=-f(x)$,则$f(x)$的图象关于$(\pi,0)$对称,不关于$x=\pi$对称,A错误;对于B,因为$y=\sin x$与$y=\frac{1}{2}\sin 2x$在$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$上都是增函数,则$f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$上是增函数,B正确;对于C,因为$f(-x)=-\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x=-f(x)$,即$f(x)$是奇函数,又$y=\sin x$与$y=\frac{1}{2}\sin 2x$的最小正周期分别为$2\pi$与$\pi$,则$f(x)$的最小正周期为$2\pi$,当$x\in(0,\pi)$时,$f'(x)=\cos x+\cos 2x=2\cos^2x+\cos x-1$,令$f'(x)=0$,得$\cos x=\frac{1}{2}$,即$x=\frac{\pi}{3}$. 当$x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$时,$f'(x)>0$,当$x\in\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$时,$f'(x)<0$,则$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$上递增,在$\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$上递减,

因此,$f(x)$在$[0,\pi]$上的最大值为$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$,由$f(x)$是奇函数得$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$,由$f(x)$的正周期为$2\pi$,则$f(x)$在$\mathbf{R}$上的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$,C正确;对于D,由选项C得,$f(x)_{\max}=f\left(\frac{\pi}{3}+2k_1\pi\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$,$f(x)_{\min}=f\left(-\frac{\pi}{3}+2k_2\pi\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$,$k_1,k_2\in \mathbf{Z}$,

又$f(x_1)f(x_2)=-\frac{27}{16}=-\frac{3\sqrt{3}}{4}\times\frac{3\sqrt{3}}{4}$,则$|x_1-x_2|=\left|\left(\frac{\pi}{3}+2k_1\pi\right)-\left(-\frac{\pi}{3}+2k_2\pi\right)\right|=\left|\frac{2\pi}{3}+2(k_1-k_2)\pi\right|$,

所以当$k_1-k_2=0$时,$|x_1-x_2|_{\min}=\frac{2\pi}{3}$,D正确. 故选BCD.

(2)因为$f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$,

所以最小正周期$T=\frac{2\pi}{\omega}$,因为$f(T)=\cos\left(\omega\cdot\frac{2\pi}{\omega}+\varphi\right)=\cos(2\pi+\varphi)=\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

又$0<\varphi<\pi$,所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$,即$f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$,

又$x=\frac{\pi}{9}$为$f(x)$的零点,所以$\frac{\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in \mathbf{Z}$,解得$\omega=3+9k,k\in \mathbf{Z}$,

因为$\omega>0$,所以当$k=0$时$\omega_{\min}=3$.]

考点四

典例4 **解**:(1)连接AB,OA,OB(图略),当$t=\frac{\pi}{4}$时,$\angle xOA=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$,$\angle xOB=\frac{\pi}{2}$,所以$\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$.

又 $OA=1,OB=2$,所以 $AB^2=1^2+2^2-2\times1\times2\cos\frac{2\pi}{3}=7$,

即 A,B 两点间的距离为$\sqrt{7}$.

(2)依题意,$y_1=\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$,$y_2=-2\sin 2t$,

所以 $y=\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)-2\sin 2t=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2t-\frac{3}{2}\sin 2t$

$=\sqrt{3}\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$,

即函数解析式为 $y=\sqrt{3}\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)(t>0)$,

当 $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时,$2t+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$,

所以 $\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-1,\frac{1}{2}\right)$,

故当 $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时,$y\in\left[-\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

跟进训练

4.(1)**B** (2)$60\sin\alpha$ $225\sqrt{3}$ [(1)根据题意设 $H(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+B(\omega>0,0\leqslant t\leqslant30)$,

因为摩天轮最高点距离地面高度为 120 m,转盘直径为 110 m,所以,该摩天轮最低点距离地面高度为 10 m,

所以$\begin{cases}A+B=120,\\-A+B=10,\end{cases}$解得 $A=55,B=65$,

因为开启后按逆时针方向匀速旋转,

旋转一周需要 30 min,

所以,$T=\frac{2\pi}{\omega}=30$,解得 $\omega=\frac{\pi}{15}$,

因为 $t=0$ 时,$H(0)=10$,故 $10=55\sin\varphi+65$,

即 $\sin\varphi=-1$,解得 $\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

所以,$H(t)=55\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)+65(0\leqslant t\leqslant30)$. 故选 B.

(2)在 $\mathrm{Rt}\triangle PAQ$ 中,$\angle PAB=\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$,$AP=60$,

$\therefore PQ=AP\sin\alpha=60\sin\alpha$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle PAR$ 中,可得 $PR=60\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$,

由题可知$\angle QPR=\frac{2\pi}{3}$,

$\therefore S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}\cdot PQ\cdot PR\cdot\sin\angle QPR$

$=\frac{1}{2}\times60\sin\alpha\times60\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\times\sin\frac{2\pi}{3}$

$=900\sqrt{3}\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$

$=450\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\right)$

$=450\sqrt{3}\left[\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\right]$,

又 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$,$2\alpha+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$,

$\therefore$当 $2\alpha+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,即 $\alpha=\frac{\pi}{6}$时,$\triangle PQR$ 的面积有最大值 $225\sqrt{3}$,

即三角形绿地的最大面积是 $225\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$.]

高考培优 4 三角函数中 ω 的范围问题

题型一

典例 1 (1)**B** (2)**A** [(1)由题意,至少出现 50 次最大值即至少需要 $49\frac{1}{4}$个周期,所以$\frac{197}{4}T=\frac{197}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}\leqslant1$,所以 $\omega\geqslant\frac{197}{2}\pi$.

(2)因为对称中心到对称轴的最短距离是$\frac{T}{4}$,两条对称轴间的最短距离是$\frac{T}{2}$,所以对称中心$\left(\frac{\pi}{12},0\right)$到对称轴 $x=\frac{\pi}{3}$间的距离用周期可表示为$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}=\frac{T}{4}+\frac{kT}{2}$($k\in\mathbf{N}$,$T$ 为最小正周期),解得$(2k+1)T=\pi$,又 $T=\frac{2\pi}{\omega}$,所以$(2k+1)\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,则 $\omega=2(2k+1)$,当 $k=0$ 时,$\omega=2$ 最小. 故选 A.]

跟进训练

1.(1)**A** (2)2 或 3 [(1)因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$,且 $\omega>0$,所以$\frac{\pi}{3}\leqslant\omega x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3}$,又 $f(x)$在$\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$上恰有两个零点,所以$\frac{2\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3}\geqslant2\pi$ 且$\frac{2\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3}<3\pi$,解得$\frac{5}{2}\leqslant\omega<4$. 故选 A.

(2)由题意得 $1<\frac{\pi}{k}<2,k\in\mathbf{N}$,

$\therefore\frac{\pi}{2}<k<\pi,k\in\mathbf{N}$,$\therefore k=2$ 或 3.]

题型二

典例 2 **ACD** [由题意得$\begin{cases}\frac{3\pi}{2}\omega=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z},\\\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2\omega},\end{cases}$

即$\begin{cases}\omega=\frac{2}{3}k+\frac{1}{3},k\in\mathbf{Z},\\0<\omega\leqslant2\end{cases}\Rightarrow\omega=\frac{1}{3},1,\frac{5}{3}$.

故选 ACD.]

跟进训练

2.9 [设函数 $f(x)$的最小正周期为 T,

由 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$,$f(\pi)=0$,

结合正弦函数图象的特征可知$\frac{T}{4}+\frac{kT}{2}=\frac{3\pi}{4},k\in\mathbf{N}$,

故 $T=\frac{3\pi}{1+2k},k\in\mathbf{N}$.

又因为 $f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$上单调,

所以$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{T}{2}$,故 $T\geqslant\frac{\pi}{6}$,

所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}\leqslant12$,即$\frac{2(1+2k)}{3}\leqslant12$,

所以 $k\leqslant\frac{17}{2},k\in\mathbf{N}$,所以 $k=0,1,2,\cdots,8$,符合条件的 ω 的值有 9 个.]

题型三

典例3　(1)**A**　(2)$\left(\frac{9}{8},\frac{13}{8}\right]$　[(1)**法一**:因为$\omega>0$,所以函数$f(x)$在$(0,\pi)$内有且仅有一个极大值点等价于函数$y=\sin x$在$\left(\frac{\pi}{6},\omega\pi+\frac{\pi}{6}\right)$内有且仅有一个极大值点.

若$y=\sin x$在$\left(\frac{\pi}{6},\omega\pi+\frac{\pi}{6}\right)$内有且仅有一个极大值点,则$\frac{\pi}{2}<\omega\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{2}$,解得$\frac{1}{3}<\omega\leqslant\frac{7}{3}$.

故选A.

法二:令$\omega x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,可得$f(x)$的极大值点为$x=\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{3\omega}$,其中$k\in\mathbf{Z}$.

由$\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{3\omega}\in(0,\pi)$,$k\in\mathbf{Z}$,可得$-\frac{1}{6}<k<\frac{\omega}{2}-\frac{1}{6}$,$k\in\mathbf{Z}$,

由题设可知这个范围的整数k有且仅有一个,因此$0<\frac{\omega}{2}-\frac{1}{6}\leqslant 1$,于是正数$\omega$的取值范围为$\left(\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right]$,选项A正确.故选A.

(2)令$t=\omega x+\frac{\pi}{4}$,因为$x\in(0,2\pi)$,$\omega>0$,所以$t\in\left(\frac{\pi}{4},2\omega\pi+\frac{\pi}{4}\right)$,结合$y=\sin t$的图象得$\frac{5\pi}{2}<2\omega\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{7\pi}{2}$,解得$\frac{9}{8}<\omega\leqslant\frac{13}{8}$.]

跟进训练

3.(1)**B**　(2)**ACD**　[(1)由题意,函数$f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$,因为$x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$,可得$\frac{\pi}{6}<\omega x+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{6}(1+\omega)$,要使得曲线$f(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$上仅有一条对称轴及一个对称中心,则满足$\pi<\frac{\pi}{6}(1+\omega)\leqslant\frac{3\pi}{2}$,解得$5<\omega\leqslant 8$,所以$\omega$的取值范围为$(5,8]$.

(2)设$f(x)$的最小正周期为T,则由题意可得$\frac{T}{2}\geqslant\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)$,即$T\geqslant\pi$.由$f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$上单调,且$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$,得$f(x)$的一个零点为$\frac{-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}}{2}=-\frac{\pi}{12}$.因为$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$,所以有以下三种情况:①$T=\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$,则$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{12}{7}$;②$\frac{3T}{4}=\frac{\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}}{2}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{5\pi}{6}$,则$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{9}{5}$;③$\frac{T}{4}=\frac{5\pi}{6}$,则$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{3}{5}$.故选ACD.]

第7课时　正弦定理、余弦定理

梳理·必备知识

1.$b^2+c^2-2bc\cos A$　$c^2+a^2-2ca\cos B$　$a^2+b^2-2ab\cos C$

$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$　$\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$　$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

2.(2)$\frac{1}{2}ac\sin B$　$\frac{1}{2}bc\sin A$

激活·基本技能

一、(1)×　(2)√　(3)√　(4)×

二、1.**D**　[由$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$得$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2=\sqrt{2}$.]

2.**A**　[由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,得$b^2=4+16-8=12$,所以$b=2\sqrt{3}$.]

3.30°　[由正弦定理得$\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{\sqrt{2}\sin 45^\circ}{2}=\frac{1}{2}$,因为$b>c$,$B=45^\circ$,所以$C=30^\circ$.]

4.$\frac{3}{4}$　$\frac{15\sqrt{7}}{4}$　[依题意得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3}{4}$,

所以$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{7}}{4}$,

所以$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{15\sqrt{7}}{4}$.]

考点一

典例1　**解**:(1)由余弦定理知$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

又$\frac{b^2+c^2-a^2}{\cos A}=2$,所以$2bc=2$,故$bc=1$.

(2)由正弦定理及$\frac{a\cos B-b\cos A}{a\cos B+b\cos A}-\frac{b}{c}=1$,

得$\frac{\sin A\cos B-\sin B\cos A}{\sin A\cos B+\sin B\cos A}-\frac{\sin B}{\sin C}=1$,

化简得$\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}-\frac{\sin B}{\sin C}=1$.

$\because A+B=\pi-C$,$\therefore\sin(A+B)=\sin C$,

$\therefore\sin(A-B)-\sin B=\sin C=\sin(A+B)$,

$\therefore\sin A\cos B-\cos A\sin B-\sin B=\sin A\cos B+\cos A\sin B$,

$\therefore -2\cos A\sin B=\sin B$.

$\because B\in(0,\pi)$,$\therefore\sin B\neq 0$,$\therefore\cos A=-\frac{1}{2}$.

$\because A\in(0,\pi)$,$\therefore\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由(1)知$bc=1$,故$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

跟进训练

1.(1)**D**　[由正弦定理及$b\sin 2A=a\sin B$,得$2\sin B\cdot\sin A\cos A=\sin A\sin B$,

又$\sin A\neq 0$,$\sin B\neq 0$,则$\cos A=\frac{1}{2}$.又$c=2b$,所以由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+4b^2-4b^2\times\frac{1}{2}=3b^2$,得$\frac{a}{b}=\sqrt{3}$.故选D.]

(2)选择①:

解:由$\frac{a+b}{c-b}=\frac{\sin C}{\sin A-\sin B}$,得$(a+b)(\sin A-\sin B)=\sin C(c-b)$,

由正弦定理,得$(a+b)(a-b)=c(c-b)$,

整理得$a^2=b^2+c^2-bc$,

所以$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$,

又$0<A<\pi$,所以$A=\frac{\pi}{3}$.

由正弦定理得$a=4\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}=6$,

由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-bc=(b-c)^2+bc=16+bc=36$,

所以$bc=20$,

所以$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ah$,

所以$h=\frac{bc\sin A}{a}=\frac{20\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{6}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

选择②:

解:由$\cos A=\sqrt{3}\sin A-1$,

得$\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$,

即$\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

因为$A\in(0,\pi)$,所以$A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$,所以$A=\frac{\pi}{3}$.

由正弦定理得$a=4\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}=6$,

由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-bc=(b-c)^2+bc=16+bc=36$,

所以$bc=20$,

所以$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ah$,

所以$h=\frac{bc\sin A}{a}=\frac{20\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{6}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

选择③:

解:因为$\sqrt{3}\cos\frac{A}{2}=\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$,

又$\cos\frac{A}{2}\neq0$,所以$\sin\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,因此$A=\frac{2\pi}{3}$.

由正弦定理得$a=4\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{3}=6$,

由余弦定理得$a^2=b^2+c^2+bc=(b-c)^2+3bc=16+3bc=36$,所以$bc=\frac{20}{3}$,

所以$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ah$,

所以$h=\frac{bc\sin A}{a}=\frac{\frac{20}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{6}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$.

考点二

考向1 典例2 解:(1)根据正弦定理,

由$b\sin C+a\sin A=b\sin B+c\sin C$,

可得$bc+a^2=b^2+c^2$,

即$bc=b^2+c^2-a^2$,

由余弦定理可得,$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$,

因为A为三角形内角,所以$A=\frac{\pi}{3}$.

(2)因为D是线段BC的中点,$c=2$,$AD=\sqrt{13}$,

所以$\angle ADB+\angle ADC=\pi$,

则$\cos\angle ADB+\cos\angle ADC=0$,

所以$\frac{AD^2+BD^2-AB^2}{2AD\cdot BD}+\frac{AD^2+DC^2-AC^2}{2AD\cdot DC}=0$,

即$\frac{13+\frac{a^2}{4}-2^2}{2\sqrt{13}\cdot\frac{a}{2}}+\frac{13+\frac{a^2}{4}-b^2}{2\sqrt{13}\cdot\frac{a}{2}}=0$,

整理得$a^2=2b^2-44$,

又$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+4-2b$,

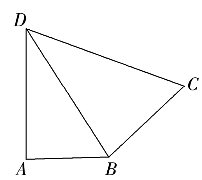
所以$b^2+4-2b=2b^2-44$,

解得$b=6$或$b=-8$(舍),

因此$a^2=2b^2-44=28$,

所以$a=2\sqrt{7}$.

考向2 典例3 解:(1)连接BD,如图.



在$Rt\triangle ABD$中,$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=2$,

且$\tan\angle ADB=\frac{AB}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\angle ADB\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

所以$\angle ADB=\frac{\pi}{6}$.

在$\triangle BCD$中,由余弦定理得

$\cos\angle BDC=\frac{BD^2+CD^2-BC^2}{2\cdot BD\cdot CD}=\frac{4+4-2}{2\times2\times2}=\frac{3}{4}$,

所以$\sin\angle BDC=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

所以$\sin\angle ADC=\sin\left(\angle BDC+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sin\angle BDC\cos\frac{\pi}{6}+\cos\angle BDC\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{21}+3}{8}$.

(2)在$\triangle BCD$中,由余弦定理得$BD^2=CD^2+BC^2-2CD\cdot BC\cdot\cos\frac{\pi}{4}$,

即$CD^2-2CD-2=0$,

解得$CD=1+\sqrt{3}$或$CD=1-\sqrt{3}$(舍去),

所以四边形$ABCD$的面积$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD+\frac{1}{2}BC\cdot CD\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{3}+\frac{1}{2}$.

跟进训练

2.**解**:(1)在$\triangle ABD$中,由余弦定理得

$AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos B=AD^2$,

整理得$BD^2-12BD+32=0$,所以$BD=8$或$BD=4$.

当 $BD=4$ 时，$\cos\angle ADB=\frac{16+49-81}{2\times4\times7}=-\frac{2}{7}$，

则$\angle ADB>\frac{\pi}{2}$，不符合题意，舍去；

当 $BD=8$ 时，$\cos\angle ADB=\frac{64+49-81}{2\times8\times7}=\frac{2}{7}$，

则$\angle ADB<\frac{\pi}{2}$，符合题意，所以 $BD=8$.

(2)在$\triangle ABD$ 中，由余弦定理得

$\cos\angle BAD=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}$

$=\frac{9^2+7^2-8^2}{2\times9\times7}=\frac{11}{21}$，

所以 $\sin\angle BAD=\frac{8\sqrt{5}}{21}$，

又 $\sin\angle ADB=\frac{3\sqrt{5}}{7}$，

所以 $\sin C=\sin(\angle ADB-\angle CAD)$

$=\sin(\angle ADB-\angle BAD)$

$=\sin\angle ADB\cos\angle BAD-\cos\angle ADB\sin\angle BAD$

$=\frac{3\sqrt{5}}{7}\times\frac{11}{21}-\frac{2}{7}\times\frac{8\sqrt{5}}{21}=\frac{17\sqrt{5}}{147}$，

在$\triangle ACD$ 中，由正弦定理得$\frac{CD}{\sin\angle CAD}=\frac{AD}{\sin C}$，

即 $CD=\frac{AD}{\sin C}\cdot\sin\angle CAD=\frac{7}{\frac{17\sqrt{5}}{147}}\times\frac{8\sqrt{5}}{21}=\frac{392}{17}$.

考点三

典例 4　**A**　［**法一**(化角为边)：因为 $b\cos C+c\cos B=b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{2a^2}{2a}=a$，所以 $a\sin A=a$，即 $\sin A=1$，故 $A=\frac{\pi}{2}$，因此$\triangle ABC$ 是直角三角形.

法二(化边为角)：因为 $b\cos C+c\cos B=a\sin A$，

所以 $\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin^2 A$，

即 $\sin(B+C)=\sin^2A$，所以 $\sin A=\sin^2 A$，

故 $\sin A=1$，即 $A=\frac{\pi}{2}$，因此$\triangle ABC$ 是直角三角形.

法三(射影定理)：$b\cos C+c\cos B=a=a\sin A$，$\therefore\sin A=1$，故 $A=\frac{\pi}{2}$，因此$\triangle ABC$ 是直角三角形.］

拓展变式

解：由$\frac{a}{b}=\frac{\cos B}{\cos A}$，得$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\cos B}{\cos A}$，

所以 $\sin A\cos A=\cos B\sin B$，

所以 $\sin 2A=\sin 2B$.

因为 A，B 为$\triangle ABC$ 的内角，

所以 $2A=2B$ 或 $2A=\pi-2B$，

所以 $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$，

所以$\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形.

跟进训练

3. **ACD**　［$\because\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C>0$，

$\therefore A$，B，C 均为锐角，$\therefore$选项 A 正确.

$\because c=a\cos B+b\cos A$，又 $c-a\cos B=(2a-b)\cos A$，

$\therefore a\cos B+b\cos A-a\cos B=2a\cos A-b\cos A$，

$\therefore(b-a)\cos A=0$，$\therefore b=a$ 或 $\cos A=0$，即 $b=a$ 或 $A=\frac{\pi}{2}$.

$\therefore\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形，

$\therefore$选项 B 错误.

由 $b\cos C+c\cos B=b$ 及正弦定理，

可知 $\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin B$，

$\therefore\sin A=\sin B$，$\therefore A=B$，$\therefore$选项 C 正确.

由已知和正弦定理，易知 $\tan A=\tan B=\tan C$，$\therefore$选项 D 正确.］

高考培优 5　与三角形有关的范围(最值)问题

题型一

典例 1　**解**：(1)由正弦定理，得 $2\sin B\sin A=\sqrt{3}\sin A$，

故 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由题意得 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2)由 $A+B+C=\pi$，得 $C=\frac{2\pi}{3}-A$.

由$\triangle ABC$ 是锐角三角形，得 $A\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$.

由 $\cos C=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=-\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A$，得

$\cos A+\cos B+\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{1}{2}\cos A+\frac{1}{2}=\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\in\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2},\frac{3}{2}\right]$.

故 $\cos A+\cos B+\cos C$ 的取值范围是$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2},\frac{3}{2}\right]$.

跟进训练

1. 60°　$(2,+\infty)$　［由已知得$\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)=\frac{1}{2}ac\sin B$，所以$\frac{\sqrt{3}(a^2+c^2-b^2)}{2ac}=\sin B$，由余弦定理得$\sqrt{3}\cos B=\sin B$，所以 $\tan B=\sqrt{3}$，所以 $B=60^\circ$，又 $C>90^\circ$，$B=60^\circ$，所以 $A<30^\circ$，且 $A+C=120^\circ$，所以$\frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{\sin(120^\circ-A)}{\sin A}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2\tan A}$. 又 $A<30^\circ$，所以 $0<\tan A<\frac{\sqrt{3}}{3}$，即$\frac{1}{\tan A}>\sqrt{3}$，所以$\frac{c}{a}>\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$.］

题型二

典例 2　**解**：(1)由正弦定理和已知条件得

$BC^2-AC^2-AB^2=AC\cdot AB$.　①

由余弦定理得

$BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cos A$.　②

由①②得 $\cos A=-\frac{1}{2}$.

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$.

(2)**法一**(基本不等式法)：由余弦定理得 $BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cos A=AC^2+AB^2+AC\cdot AB=9$，

即$(AC+AB)^2-AC\cdot AB=9$.

$\because AC\cdot AB\leqslant\left(\dfrac{AC+AB}{2}\right)^2$(当且仅当 $AC=AB$ 时取等号),

$\therefore 9=(AC+AB)^2-AC\cdot AB\geqslant(AC+AB)^2-\left(\dfrac{AC+AB}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}(AC+AB)^2$,

解得 $AC+AB\leqslant 2\sqrt{3}$(当且仅当 $AC=AB$ 时取等号),

$\therefore\triangle ABC$ 周长 $L=AC+AB+BC\leqslant 3+2\sqrt{3}$,

$\therefore\triangle ABC$ 周长的最大值为 $3+2\sqrt{3}$.

法二(三角函数法):由正弦定理及(1)得

$\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin A}=2\sqrt{3}$,

从而 $AC=2\sqrt{3}\sin B$,

$AB=2\sqrt{3}\sin(\pi-A-B)$

$=3\cos B-\sqrt{3}\sin B$.

故 $BC+AC+AB=3+\sqrt{3}\sin B+3\cos B$

$=3+2\sqrt{3}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

又 $0<B<\dfrac{\pi}{3}$,

所以当 $B=\dfrac{\pi}{6}$ 时,$\triangle ABC$ 周长取得最大值 $3+2\sqrt{3}$.

跟进训练

2.**解**:(1)$\because a^2+b^2-c^2=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}S_{\triangle ABC}$,

$\therefore 2ab\cos C=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{1}{2}ab\sin C$,$\therefore\tan C=\sqrt{3}$,

由 C 为三角形内角得 $C=\dfrac{\pi}{3}$.

(2)由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}=2$,

$\therefore a=2\sin A$,

$\therefore 2a-4\sin B=4\sin A-4\sin B$

$=4\sin A-4\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)$

$=4\sin\left(A-\dfrac{\pi}{3}\right)$,

由 $0<A<\dfrac{2\pi}{3}$ 得 $-\dfrac{\pi}{3}<A-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{3}$,

$\therefore -\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\sin\left(A-\dfrac{\pi}{3}\right)<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore -2\sqrt{3}<4\sin\left(A-\dfrac{\pi}{3}\right)<2\sqrt{3}$.

故 $2a-4\sin B$ 的取值范围为 $(-2\sqrt{3},2\sqrt{3})$.

题型三

典例 3 **解**:(1)由题设及正弦定理得

$\sin A\sin\dfrac{A+C}{2}=\sin B\sin A$.

因为 $\sin A\neq 0$,所以 $\sin\dfrac{A+C}{2}=\sin B$.

由 $A+B+C=180^\circ$,可得 $\sin\dfrac{A+C}{2}=\cos\dfrac{B}{2}$,

故 $\cos\dfrac{B}{2}=2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}$.

因为 $\cos\dfrac{B}{2}\neq 0$,故 $\sin\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{2}$,所以 $B=60^\circ$.

(2)由题设及(1)知 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$.

由(1)知 $A+C=120^\circ$.

由正弦定理得 $a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}=\dfrac{\sin(120^\circ-C)}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\dfrac{1}{2}$.

由于 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,故 $0^\circ<A<90^\circ$,$0^\circ<C<90^\circ$. 结合 $A+C=120^\circ$,得 $30^\circ<C<90^\circ$,故 $\dfrac{1}{2}<a<2$,从而 $\dfrac{\sqrt{3}}{8}<S_{\triangle ABC}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因此,$\triangle ABC$ 面积的取值范围是 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{8},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

跟进训练

3.$(1+\sqrt{3},4+2\sqrt{3})$ [因为 $c=2$,$A=\dfrac{\pi}{3}$,

则由正弦定理,可得 $a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin C}$,$b=\dfrac{c\sin B}{\sin C}=\dfrac{2\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-C\right)}{\sin C}$,

所以 $a+b=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin C}+\dfrac{\sqrt{3}\cos C+\sin C}{\sin C}$

$=1+\dfrac{\sqrt{3}(1+\cos C)}{\sin C}=1+\dfrac{2\sqrt{3}\cos^2\dfrac{C}{2}}{2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}}=1+\dfrac{\sqrt{3}}{\tan\dfrac{C}{2}}$,

由 $\triangle ABC$ 是锐角三角形,可得 $0<C<\dfrac{\pi}{2}$,$0<\dfrac{2\pi}{3}-C<\dfrac{\pi}{2}$,

则 $\dfrac{\pi}{6}<C<\dfrac{\pi}{2}$,

所以 $\dfrac{\pi}{12}<\dfrac{C}{2}<\dfrac{\pi}{4}$,$2-\sqrt{3}<\tan\dfrac{C}{2}<1$.

所以 $1+\sqrt{3}<a+b<4+2\sqrt{3}$.]

题型四

跟进训练

4.**D** [$A=\dfrac{\pi}{3}$,由正弦定理可得

$\dfrac{b^2+c^2}{a^2}=\dfrac{\sin^2 B+\sin^2 C}{\sin^2 A}$

$=\dfrac{4}{3}(\sin^2 B+\sin^2 C)$

$=\dfrac{4}{3}\left[\sin^2 B+\sin^2\left(\dfrac{2\pi}{3}-B\right)\right]$

$=\dfrac{4}{3}\left[\dfrac{1-\cos 2B}{2}+\dfrac{1-\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}-2B\right)}{2}\right]$

$=\dfrac{4}{3}\left[1+\dfrac{1}{2}\sin\left(2B-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$,

因为 $\begin{cases}0<B<\dfrac{\pi}{2},\\ 0<\dfrac{2\pi}{3}-B<\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$

所以 $\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$,$\dfrac{\pi}{6}<2B-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$,

所以$\frac{1}{2}<\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，

$\frac{5}{3}<\frac{4}{3}\left[1+\frac{1}{2}\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)\right]\leqslant 2$，

即$\frac{b^2+c^2}{a^2}$的取值范围是$\left(\frac{5}{3},2\right]$.］

第8课时　正弦定理、余弦定理的应用举例

梳理·必备知识

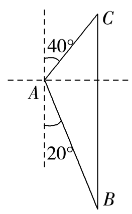
仰角　俯角　方位角　$[0,2\pi)$

激活·基本技能

一、(1)√　(2)×　(3)√　(4)√

二、1. **D**

2. **D**　［记轮船航行到某处的位置为A，灯塔的位置为B，20分后轮船的位置为C，如图所示. 则$AB=10$，$AC=6$，$\angle CAB=120°$，所以$BC^2=10^2+6^2-2\times10\times6\times\left(-\frac{1}{2}\right)=196$，所以$BC=14$. 故20分后，轮船与灯塔的距离为14海里. 故选D.］



3. **D**　［**法一**：设$AB=x$，则$BC=x$.

$\therefore BD=10+x$.

$\therefore \tan\angle ADB=\frac{AB}{DB}=\frac{x}{10+x}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解得$x=5(\sqrt{3}+1)$.

$\therefore$点A离地面的高AB等于$5(\sqrt{3}+1)$ m.

法二：$\because \angle ACB=45°$，

$\therefore \angle ACD=135°$，

$\therefore \angle CAD=180°-135°-30°=15°$.

由正弦定理，得$AC=\frac{CD}{\sin\angle CAD}\cdot\sin\angle ADC=\frac{10}{\sin 15°}\cdot\sin 30°=\frac{20}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$.

$\therefore AB=AC\sin 45°=5(\sqrt{3}+1)$m.］

4. 200　［在Rt$\triangle ABC$中，$\angle ACB=45°$.

设$AB=h$，则$BC=h$，

在Rt$\triangle ABD$中，$\angle ADB=30°$，所以$BD=\sqrt{3}h$.

在$\triangle BCD$中，$\angle CBD=30°$，$CD=200$ m，

由余弦定理可得$40\,000=h^2+3h^2-2h\cdot\sqrt{3}h\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$h=200$，所以塔高$AB=200$ m.］

考点一

典例1　**解**：在$\triangle ABC$中，因为$\angle CAB=75°$，$\angle CBA=45°$，

所以$\angle ACB=180°-75°-45°=60°$，

又因为$AB=1\,000$，所以由正弦定理，得

$\frac{AC}{\sin 45°}=\frac{1\,000}{\sin 60°}$，即$AC=\frac{1\,000\sin 45°}{\sin 60°}=\frac{1\,000\sqrt{6}}{3}$.

在$\triangle ABD$中，因为$\angle DAB=30°$，$\angle DBA=60°$，

所以$\angle ADB=180°-30°-60°=90°$，

又因为$AB=1\,000$，所以由正弦定理，得

$\frac{AD}{\sin 60°}=\frac{1\,000}{\sin 90°}$，即$AD=\frac{1\,000\sin 60°}{\sin 90°}=500\sqrt{3}$.

在$\triangle ACD$中，因为$AD=500\sqrt{3}$，$AC=\frac{1\,000\sqrt{6}}{3}$，

且$\angle CAD=75°-30°=45°$，由余弦定理，得

$CD=\sqrt{AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cos 45°}$

$=\sqrt{(500\sqrt{3})^2+\left(\frac{1\,000\sqrt{6}}{3}\right)^2-2\times500\sqrt{3}\times\frac{1\,000\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$=\frac{500\sqrt{15}}{3}$，

即C，D两点间的距离为$\frac{500\sqrt{15}}{3}$m.

跟进训练

1. **解**：(1)在$\triangle ABD$中，$\because \angle DAC=75°$，$\angle CAB=45°$，

$\therefore \angle DAB=120°$，

又$\angle DBA=30°$，$\therefore \angle ADB=30°$，

$\therefore \triangle ABD$为等腰三角形，$\therefore AB=AD=50$ m.

由余弦定理可得

$BD^2=50^2+50^2-2\times50\times50\cos 120°=50^2\times3$，

$\therefore BD=50\sqrt{3}$ m.

在$\triangle ABC$中，$\angle CAB=45°$，

$\angle ABC=\angle ABD+\angle CBD=30°+75°=105°$，

$\therefore \angle ACB=30°$，

由正弦定理可得$\frac{50}{\sin 30°}=\frac{BC}{\sin 45°}$.

$\therefore BC=50\sqrt{2}$ m.

(2)在$\triangle BCD$中，$\angle DBC=75°$，$BC=50\sqrt{2}$ m，$BD=50\sqrt{3}$ m，根据余弦定理可得$CD=\sqrt{BD^2+BC^2-2BD\cdot BC\cos\angle DBC}$

$=25(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ m.

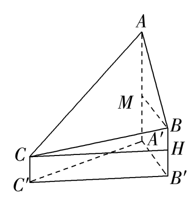
考点二

典例2　**B**　［过C作$CH\perp BB'$于H，过B作$BM\perp AA'$于M，则$\angle BCH=15°$，$BH=100$，$\angle ABM=45°$，$CH=C'B'$，$A'B'=BM=AM$，$BB'=MA'$，$\angle C'A'B'=75°$，

$\therefore \tan\angle BCH=\tan 15°=\tan(45°-30°)=\frac{\tan 45°-\tan 30°}{1+\tan 45°\tan 30°}=2-\sqrt{3}$，

$\sin 75°=\sin(45°+30°)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)$.

则在Rt$\triangle BCH$中，$CH=\frac{BH}{\tan\angle BCH}=100(2+\sqrt{3})$，



$\therefore C'B'=100(2+\sqrt{3})$.

在$\triangle A'B'C'$中，由正弦定理知，

$A'B'=\frac{C'B'}{\sin\angle C'A'B'}\cdot\sin\angle A'C'B'=100(\sqrt{3}+1)$，

$\therefore AM=100(\sqrt{3}+1)$，

$\therefore AA'-CC'=AM+BH=100(\sqrt{3}+1)+100\approx373$，故选B.］

跟进训练

2. $100\sqrt{6}$　［由题意，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=30°$，$\angle ABC=180°-75°=105°$，故$\angle ACB=45°$.

又 $AB=600$ m,

故由正弦定理得$\frac{600}{\sin 45°}=\frac{BC}{\sin 30°}$,

解得 $BC=300\sqrt{2}$ m.

在 Rt△BCD 中,$CD=BC\cdot\tan 30°=300\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}$

$=100\sqrt{6}$(m).]

考点三

典例 3 **解**:(1)由题意,在△ABC 中,$\angle ABC=180°-75°+15°$

$=120°$,$AB=2\sqrt{3}-2$,$BC=4$,

根据余弦定理得

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\angle ABC$

$=(2\sqrt{3}-2)^2+4^2+(2\sqrt{3}-2)\times 4=24$,

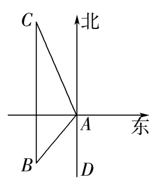
所以 $AC=2\sqrt{6}$.

(2)在△ABC 中,根据正弦定理得 $\sin\angle BAC=\frac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以$\angle CAB=45°$.

跟进训练

3.**解**:如图,设缉私艇在 C 处截住走私船,D 为岛 A 正南方向上一点,缉私艇的速度为 x n mile/h,



结合题意知 $BC=0.5x$,$AC=5$,$\angle BAC=180°-38°-22°=120°$.

由余弦定理可得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos 120°$,

所以 $BC^2=49$,所以 $BC=0.5x=7$,

解得 $x=14$.

又由正弦定理得

$\sin\angle ABC=\frac{AC\cdot\sin\angle BAC}{BC}=\frac{5\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{7}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$,

所以$\angle ABC=38°$,

又$\angle BAD=38°$,所以 $BC\parallel AD$,

故缉私艇以 14 n mile/h 的速度向正北方向行驶,恰好用 0.5 h截住该走私船.

高考研究在线 4 三角函数中的“结构不良”试题

命题点一

典例 1 **AD** [由题意得,$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)=0$,

所以$\frac{4\pi}{3}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,即 $\varphi=-\frac{4\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

又 $0<\varphi<\pi$,所以 $k=2$ 时,$\varphi=\frac{2\pi}{3}$.

故 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$.

选项 A:$x\in\left(0,\frac{5\pi}{12}\right)$时,$2x+\frac{2\pi}{3}\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right)$,由 $y=\sin u$ 图象知 $y=f(x)$是单调递减的;

选项 B:$x\in\left(-\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$时,$2x+\frac{2\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right)$,由 $y=\sin u$ 图象知 $y=f(x)$只有 1 个极值点,由 $2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$可解得极值点;

选项 C:$x=\frac{7\pi}{6}$时,$\because f\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\sin\left(2\times\frac{7\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin 3\pi$,

∴直线 $x=\frac{7\pi}{6}$不是对称轴;

选项 D:由 $f'(x)=2\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=-1$ 得 $\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$,

解得 $2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 或 $2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

从而得 $x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 或 $x=\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

所以函数 $y=f(x)$的图象在点$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$处的切线斜率为 $k=f'(0)=2\cos\frac{2\pi}{3}=-1$,

切线方程为 $y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-(x-0)$,即 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}-x$.故选 AD.]

跟进训练

1.**BCD** [$\because f(x)=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\omega x(\omega>0)$,

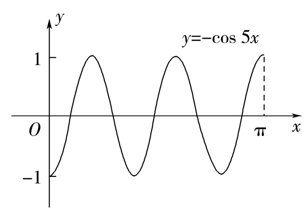
$\therefore g(x)=\sin\left[\omega\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]$,且 $g(0)=-1$,

$\therefore -\frac{\pi}{2}\omega=\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi(k\in\mathbf{Z})$,即 $\omega=1-4k$,为奇数,

$\therefore g(x)=\sin\left[\omega\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]=-\cos\omega x$ 为偶函数,故 A 错误;

由以上分析可知 ω 为奇数,$\therefore g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(-\frac{\pi\omega}{2}\right)=0$,故 B 正确;

由以上分析可知,当 $\omega=5$ 时,$g(x)=\sin\left(5x-\frac{5\pi}{2}\right)=-\cos 5x$,$T=\frac{2\pi}{5}$,由图象可知 $g(x)$在$(0,\pi)$上有 4 个极值点,故 C 正确;



$\because g(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{5}\right]$上单调递增,所以$\frac{\pi}{5}-0\leqslant\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}$,

解得 $0<\omega\leqslant 5$,又$\because\omega=1-4k$,

∴ω 的最大值为 5,故 D 正确.

故选 BCD.]

命题点二

典例 2 **解**:(1)$\because c=2b\cos B$,

由正弦定理可得 $\sin C=2\sin B\cos B$,

即 $\sin C=\sin 2B$,

$\therefore C=2B$ 或 $C+2B=\pi$.

$\because C=\frac{2\pi}{3}$,

$\therefore$当 $C=2B$ 时,$B=\frac{\pi}{3}$,即 $C+B=\pi$,不符合题意,

$\therefore C+2B=\pi$,

$\therefore 2B=\frac{\pi}{3}$,即 $B=\frac{\pi}{6}$.

(2)选①:$c=\sqrt{2}b$.

由正弦定理可得$\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$,

与已知条件 $c=\sqrt{2}b$ 矛盾,故$\triangle ABC$ 不存在.

选②:周长为 $4+2\sqrt{3}$.

$\because C=\frac{2\pi}{3}$,$B=\frac{\pi}{6}$, $\therefore A=\frac{\pi}{6}$,

由正弦定理可得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,

即$\frac{a}{\frac{1}{2}}=\frac{b}{\frac{1}{2}}=\frac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$,

$\therefore a=R$,$b=R$,$c=\sqrt{3}R$,

$\therefore a+b+c=(2+\sqrt{3})R=4+2\sqrt{3}$,

$\therefore R=2$,即 $a=2$,$b=2$,$c=2\sqrt{3}$,

$\therefore\triangle ABC$ 存在且唯一确定.

设 BC 的中点为 D,

$\therefore CD=1$,

在$\triangle ACD$ 中,运用余弦定理,得

$AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cdot\cos C$,

即 $AD^2=4+1-2\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7$,

$\therefore AD=\sqrt{7}$,

$\therefore$边 BC 上的中线的长度为$\sqrt{7}$.

选③:面积为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

$\because A=B=\frac{\pi}{6}$, $\therefore a=b$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}a^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$,解得 $a=\sqrt{3}$,

$\therefore\triangle ABC$ 存在且唯一确定.

设 BC 的中点为 D,在$\triangle ACD$ 中,运用余弦定理,得

$AD^2=AC^2+CD^2-2\times AC\times CD\times\cos\frac{2\pi}{3}=3+\frac{3}{4}+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{21}{4}$,

$\therefore AD=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

$\therefore$边 BC 上的中线的长度为$\frac{\sqrt{21}}{2}$.

跟进训练

2.**解**:选条件①.

由 $C=\frac{\pi}{6}$和余弦定理得$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

由 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$ 及正弦定理得 $a=\sqrt{3}b$.

于是$\frac{3b^2+b^2-c^2}{2\sqrt{3}b^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,由此可得 $b=c$.

由①$ac=\sqrt{3}$,解得 $a=\sqrt{3}$,$b=c=1$.

因此,选条件①时问题中的三角形存在,此时 $c=1$.

选条件②.

由 $C=\frac{\pi}{6}$和余弦定理得$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$ 及正弦定理得 $a=\sqrt{3}b$.

于是$\frac{3b^2+b^2-c^2}{2\sqrt{3}b^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,由此可得 $b=c$,$B=C=\frac{\pi}{6}$,$A=\frac{2\pi}{3}$,

由②$c\sin A=3$,所以 $c=b=2\sqrt{3}$,$a=6$.

因此,选条件②时问题中的三角形存在,此时 $c=2\sqrt{3}$.

选条件③.

由 $C=\frac{\pi}{6}$和余弦定理得$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

由 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$ 及正弦定理得 $a=\sqrt{3}b$.

于是$\frac{3b^2+b^2-c^2}{2\sqrt{3}b^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,由此可得 $b=c$.

由③$c=\sqrt{3}b$,与 $b=c$ 矛盾.

因此,选条件③时问题中的三角形不存在.

命题点三

典例 3　解:(1)$\because 2\sin C=3\sin A$,

$\therefore$根据正弦定理可得 $2c=3a$,

$\because b=a+1$,$c=a+2$,

$\therefore a=4$,$b=5$,$c=6$,

在$\triangle ABC$ 中,运用余弦定理可得

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\times4\times5}=\frac{1}{8}$,

$\because\sin^2C+\cos^2C=1$,

$\therefore\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times4\times5\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$.

(2)$\because c>b>a$,

$\therefore\triangle ABC$ 为钝角三角形时,角 C 必为钝角,

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$=\frac{a^2+(a+1)^2-(a+2)^2}{2a(a+1)}<0$,

$\therefore a^2-2a-3<0$,

$\because a>0$, $\therefore 0<a<3$,

$\because$三角形的任意两边之和大于第三边,

$\therefore a+b>c$,即 $a+a+1>a+2$,即 $a>1$,

$\therefore 1<a<3$,$\because a$ 为正整数,

$\therefore a=2$.

跟进训练

3.**解**:(1)由题意可知$\angle BDC$ 为锐角,

$\because\cos\angle BDC=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\therefore\sin\angle BDC=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

在$\triangle BCD$中,由正弦定理可知$\dfrac{BC}{\sin\angle BDC}=\dfrac{CD}{\sin\angle DBC}$,

即$\dfrac{BC}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\dfrac{4}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$,解得$BC=2\sqrt{3}$.

(2)$\because\triangle BCD$为锐角三角形,$\therefore\angle BCD$为锐角,

$\therefore\angle ACB$为锐角.

在$\triangle ABC$中,$\because BC<AC$,

$\therefore\angle BAC<\angle ABC$.

若$\triangle ABC$为钝角三角形,则$\angle ABC$为钝角,

$\cos\angle ABC<0$,所以$AB^2+BC^2<AC^2$.

$\because BC=2\sqrt{3},AB=m,AC=2\sqrt{3}+\dfrac{m}{3}$,

$\therefore m^2+(2\sqrt{3})^2<\left(2\sqrt{3}+\dfrac{m}{3}\right)^2$,

即$2m^2-3\sqrt{3}m<0$,

$\therefore 0<m<\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

$\because m\in\mathbf{N}^*$,$\therefore m=1$或2,所以存在$m=1$或2,使得$\triangle ABC$为钝角三角形.

第五章　平面向量、复数

第1课时　平面向量的概念及线性运算

梳理·必备知识

1.(1)方向　模　(2)0　(3)1个单位　(4)相同　相反　平行　(5)相同　(6)相反

2.相同　相反

3.$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$

激活·基本技能

一、(1)×　(2)×　(3)×　(4)√

二、1.**D**　[$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,故D错误.]

2.$\dfrac{1}{2}$　[$\because\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$共线,

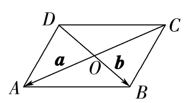
$\therefore$存在实数μ使得$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mu(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$,

$\therefore\begin{cases}\lambda=\mu,\\2\mu=1,\end{cases}\therefore\begin{cases}\lambda=\dfrac{1}{2},\\\mu=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$]

3.$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$　$-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$　[如图,

$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.]



4.8　2　[$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=3+5=8$,

当且仅当$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$同向时取等号,所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|_{\max}=8$.

又$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\geqslant||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||=|3-5|=2$,

当且仅当$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$反向时取等号,所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|_{\min}=2$.]

考点一

典例1　(1)**BC**　(2)**C**　[(1)两个向量的长度相等,但它们的方向不一定相同,故A不正确;

$\because\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,$\therefore|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$且$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DC}$,又$A,B,C,D$是不共线的四点,$\therefore$四边形$ABCD$为平行四边形,反之,若四边形$ABCD$为平行四边形,则$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$,$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DC}$且$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{DC}$方向相同,因此$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,故B正确;

$\because\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,$\therefore\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的长度相等且方向相同,又$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,$\therefore\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$的长度相等且方向相同,$\therefore\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$的长度相等且方向相同,故$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$,故C正确;

当$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$且方向相反时,即使$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,也不能得到$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,故$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$且$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$不是$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$的充要条件,而是必要不充分条件,故D不正确.故选BC.

(2)因为向量$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$的方向与向量$\boldsymbol{a}$方向相同,向量$\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$的方向与向量$\boldsymbol{b}$方向相同,且$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$,所以向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{b}$方向相同,故可排除选项A,B,D.当$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$时,$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{2\boldsymbol{b}}{|2\boldsymbol{b}|}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$,故$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$是$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$成立的充分条件.]

跟进训练

1.**D**　[根据相等向量的定义,分析可得$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{BC}$不平行,$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{BD}$不平行,所以$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$均错误,$\overrightarrow{PE}$与$\overrightarrow{PF}$平行,但方向相反,故不相等,只有$\overrightarrow{EP}$与$\overrightarrow{PF}$方向相同,且大小都等于线段$EF$长度的一半,所以$\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{PF}$.]

考点二

考向1　**典例2**　**ABC**　[$\because AB\parallel CD,AB\perp AD,AB=2AD=2DC$,$\therefore\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,A正确;

$\because\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{EC}$,$\therefore\overrightarrow{BE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,$\therefore\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\left(-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,又$F$为$AE$的中点,$\therefore\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,B正确;

$\therefore\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,C正确;

$\therefore\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BC}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\left(-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,D错误.故选ABC.]

考向2　**典例3**　**A**　[由题意,知$\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM})=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,又$\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$,所以$\lambda=-\dfrac{1}{6},\mu=\dfrac{1}{2}$,则$\lambda+\mu=\dfrac{1}{3}$.]

跟进训练

2.(1)**B**　(2)2　[(1)因为点D在边AB上,$BD=2DA$,所以$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DA}$,即$\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=2(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD})$,所以$\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{CD}-2\overrightarrow{CA}=3\boldsymbol{n}-2\boldsymbol{m}=-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$.故选B.

(2)由题意得$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,

因为$\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AF}$,

所以$\overrightarrow{AB}=\left(x+\frac{y}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{x}{2}+y\right)\overrightarrow{AD}$,

所以$\begin{cases}x+\frac{y}{2}=1,\\ \frac{x}{2}+y=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\frac{4}{3},\\ y=-\frac{2}{3},\end{cases}$所以 $x-y=2$.]

考点三

典例 4 (1)**证明**:∵$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CD}=3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,

∴$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}+3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

$=2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=5(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=5\overrightarrow{AB}$.

∴$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BD}$共线.

又∵它们有公共点 B,∴A,B,D 三点共线.

(2)**解**:∵$k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 共线,

∴存在实数 λ,使 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})$,

即 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda k\boldsymbol{b}$,∴$(k-\lambda)\boldsymbol{a}=(\lambda k-1)\boldsymbol{b}$.

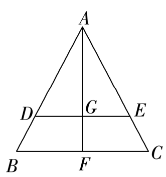
∵$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是两个不共线的非零向量,

∴$k-\lambda=\lambda k-1=0$,∴$k^2-1=0$,∴$k=\pm1$.

跟进训练

3.(1)**B** (2)3 [(1)由$\overrightarrow{CB}=\lambda\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}$得$\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{PB}=\lambda\overrightarrow{PA}$,$\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{PA}$,则$\overrightarrow{CP}$,$\overrightarrow{PA}$为共线向量,又$\overrightarrow{CP}$,$\overrightarrow{PA}$有一个公共点 P,所以 C,P,A 三点共线,即点 P 在边 AC 所在直线上.

(2)如图,设 F 为 BC 中点,



则$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,

又$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{\mu}\overrightarrow{AE}$,∴$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3\lambda}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3\mu}\overrightarrow{AE}$,

又 G,D,E 三点共线,∴$\frac{1}{3\lambda}+\frac{1}{3\mu}=1$,即$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=3$.]

第 2 课时 平面向量基本定理及坐标表示

梳理·必备知识

1.(1)不共线 有且只有 (2)不共线

2.(1)(x_1+x_2,y_1+y_2) (x_1-x_2,y_1-y_2) $(\lambda x_1,\lambda y_1)$ $\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ (2)(x_2-x_1,y_2-y_1) $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

3.$x_1y_2-x_2y_1=0$

激活·基本技能

一、(1)× (2)× (3)× (4)√

二、1.**D** [∵$\boldsymbol{a}=(1,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-1)$,

∴$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,$\frac{3}{2}\boldsymbol{b}=\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$,

∴$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2},\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)=(-1,2)$,故选 D.]

2.**D** [由题意可知$\overrightarrow{P_1P_2}=(3,-3)$.

若$\overrightarrow{P_1P}=\frac{1}{3}\overrightarrow{P_1P_2}$,则点 P 坐标为$(2,2)$;

若$\overrightarrow{P_1P}=\frac{2}{3}\overrightarrow{P_1P_2}$,则点 P 坐标为$(3,1)$,

故选 D.]

3.$(1,5)$ [设 $D(x,y)$,则由$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,得$(4,1)=(5-x,6-y)$,

即$\begin{cases}4=5-x,\\ 1=6-y,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\ y=5.\end{cases}$]

4.$\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$ [由题意可知$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}$,

∴$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})$,

∴$\frac{4}{3}\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$,则$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$.]

考点一

典例 1 **解**:(1)由题意知,A 是 BC 的中点,且$\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$,由向量加法的平行四边形法则,

得$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}$,

所以$\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}-\frac{5}{3}\boldsymbol{b}$.

(2)由题意知,$\overrightarrow{EC}\,/\!/\,\overrightarrow{DC}$,故设$\overrightarrow{EC}=x\overrightarrow{DC}$.

因为$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OE}=(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\lambda\boldsymbol{a}=(2-\lambda)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{DC}=2\boldsymbol{a}-\frac{5}{3}\boldsymbol{b}$,

所以$(2-\lambda)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=x\left(2\boldsymbol{a}-\frac{5}{3}\boldsymbol{b}\right)$.

因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线,由平面向量基本定理,

得$\begin{cases}2-\lambda=2x,\\ -1=-\frac{5}{3}x,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\frac{3}{5},\\ \lambda=\frac{4}{5}.\end{cases}$

故$\lambda=\frac{4}{5}$.

跟进训练

1.(1)**B** (2)$\frac{1}{2}$ [(1)由向量共线的充要条件可得,当点 P 在线段 AB 上时,存在唯一的一对有序实数 u,v,使得$\overrightarrow{OP}=u\overrightarrow{OA}+v\overrightarrow{OB}$成立,且 $u+v=1$.

可以证明点 P 位于阴影区域内的充要条件是$\overrightarrow{OP}=u\overrightarrow{OA}+v\overrightarrow{OB}$,且 $u>0$,$v>0$,$u+v>1$.

∵$1+2>1$,∴点 P 位于阴影区域内,故①正确;同理③正确;而②④错误.故选 B.

(2)由题图可设$\overrightarrow{CG}=x\overrightarrow{CE}(x>0)$,

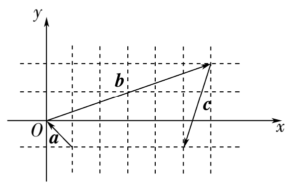
则$\overrightarrow{CG}=x(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE})=x\left(\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right)=\frac{x}{2}\overrightarrow{CD}+x\overrightarrow{CB}$.

因为$\overrightarrow{CG}=\lambda\overrightarrow{CD}+\mu\overrightarrow{CB}$,$\overrightarrow{CD}$与$\overrightarrow{CB}$不共线,

所以$\lambda=\frac{x}{2}$,$\mu=x$,所以$\frac{\lambda}{\mu}=\frac{1}{2}$.]

考点二

典例 2 (1)**D** [如图,以 O 为坐标原点,建立平面直角坐标系,设每个小正方形边长为 1,可得 $\boldsymbol{a}=(-1,1)$,$\boldsymbol{b}=(6,2)$,$\boldsymbol{c}=(-1,-3)$.



$\because \boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$,

$\therefore \begin{cases}-1=-\lambda+6\mu,\\-3=\lambda+2\mu,\end{cases}$ 解得 $\lambda=-2,\mu=-\dfrac{1}{2}$.

$\therefore \dfrac{\lambda}{\mu}=4$. 故选 D.]

(2)**解**:由已知得 $\boldsymbol{a}=(5,-5)$,$\boldsymbol{b}=(-6,-3)$,$\boldsymbol{c}=(1,8)$.

①$3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}=3(5,-5)+(-6,-3)-3(1,8)=(15-6-3,-15-3-24)=(6,-42)$.

②设 O 为原点,$\because \overrightarrow{CM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}=3\boldsymbol{c}$,

$\therefore \overrightarrow{OM}=3\boldsymbol{c}+\overrightarrow{OC}=(3,24)+(-3,-4)=(0,20)$.

$\therefore M(0,20)$. 又$\because \overrightarrow{CN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OC}=-2\boldsymbol{b}$,

$\therefore \overrightarrow{ON}=-2\boldsymbol{b}+\overrightarrow{OC}=(12,6)+(-3,-4)=(9,2)$,

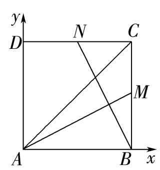
$\therefore N(9,2)$,$\therefore \overrightarrow{MN}=(9,-18)$.

跟进训练

2. (1)**A** (2)$\dfrac{8}{5}$ [(1)$\overrightarrow{AB}=(-3,-2)=\overrightarrow{DC}$,

$\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(5,-1)$,则 $D(6,1)$. 故选 A.

(2)**法一**:以 AB,AD 所在直线分别为 x 轴、y 轴,建立平面直角坐标系,如图所示,设正方形的边长为 1,则 $\overrightarrow{AM}=\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$,



$\overrightarrow{BN}=\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$,$\overrightarrow{AC}=(1,1)$,

$\because \overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{BN}=\left(\lambda-\dfrac{1}{2}\mu,\dfrac{\lambda}{2}+\mu\right)$,

$\therefore \begin{cases}\lambda-\dfrac{1}{2}\mu=1,\\\dfrac{\lambda}{2}+\mu=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\dfrac{6}{5},\\\mu=\dfrac{2}{5},\end{cases}$

$\therefore \lambda+\mu=\dfrac{8}{5}$.

法二:由 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{BN}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,得 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{BN}=\left(\lambda-\dfrac{\mu}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\left(\dfrac{\lambda}{2}+\mu\right)\overrightarrow{AD}$,

又 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,

$\therefore \begin{cases}\lambda-\dfrac{\mu}{2}=1,\\\dfrac{\lambda}{2}+\mu=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\dfrac{6}{5},\\\mu=\dfrac{2}{5}.\end{cases}$ $\therefore \lambda+\mu=\dfrac{8}{5}$.]

考点三

考向 1 **典例 3** **解**:(1)$\because \boldsymbol{a}=(1,0)$,$\boldsymbol{b}=(2,1)$,

$\therefore k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=k(1,0)-(2,1)=(k-2,-1)$,

$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(1,0)+2(2,1)=(5,2)$,

$\because k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 共线,

$\therefore 2(k-2)-(-1)\times 5=0$,

$\therefore k=-\dfrac{1}{2}$.

(2)$\overrightarrow{AB}=2(1,0)+3(2,1)=(8,3)$,

$\overrightarrow{BC}=(1,0)+m(2,1)=(2m+1,m)$.

$\because A,B,C$ 三点共线,

$\therefore \overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{BC}$,$\therefore 8m-3(2m+1)=0$,

$\therefore m=\dfrac{3}{2}$.

考向 2 **典例 4** (3,3) [**法一**:由 O,P,B 三点共线,可设 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OB}=(4\lambda,4\lambda)$,则 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(4\lambda-4,4\lambda)$.

又 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-2,6)$,由 $\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 共线,得 $(4\lambda-4)\times 6-4\lambda\times(-2)=0$,

解得 $\lambda=\dfrac{3}{4}$,所以 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OB}=(3,3)$,

所以点 P 的坐标为 (3,3).

法二:设点 $P(x,y)$,则 $\overrightarrow{OP}=(x,y)$,因为 $\overrightarrow{OB}=(4,4)$ 且 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 共线,所以 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{4}$,即 $x=y$.

又 $\overrightarrow{AP}=(x-4,y)$,$\overrightarrow{AC}=(-2,6)$,且 $\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 共线,

所以 $(x-4)\times 6-y\times(-2)=0$,解得 $x=y=3$,

所以点 P 的坐标为 (3,3).]

跟进训练

3. (1)**A** (2)$\dfrac{8}{5}$ [(1)因为 $|OC|=2$,$\angle AOC=\dfrac{\pi}{4}$,$C$ 为第一象限内一点,所以 $C(\sqrt{2},\sqrt{2})$,又 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$,

所以 $(\sqrt{2},\sqrt{2})=\lambda(1,0)+\mu(0,1)=(\lambda,\mu)$,

所以 $\lambda=\mu=\sqrt{2}$,$\lambda+\mu=2\sqrt{2}$.

(2)因为 $\boldsymbol{a}=(2,5)$,$\boldsymbol{b}=(\lambda,4)$,$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,

所以 $8-5\lambda=0$,解得 $\lambda=\dfrac{8}{5}$.]

第 3 课时 平面向量的数量积及其应用

梳理·必备知识

1. $[0,\pi]$ $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ $\theta=0$ $\theta=\pi$

2. $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 0

3. 投影 投影向量 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta\,\boldsymbol{e}$

5. (1)$x_1x_2+y_1y_2$ (2)$\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ (3)$\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

(4)$x_1x_2+y_1y_2=0$

激活·基本技能

一、(1)× (2)√ (3)× (4)×

二、1. **A** [$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{5^2+12^2}=13$.

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times 5+4\times 12=63$.

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,所以 $\cos\theta=\dfrac{63}{5\times 13}=\dfrac{63}{65}$.]

2. $-\frac{3}{4}\boldsymbol{e}$　[向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\boldsymbol{e}=-\frac{3}{4}\boldsymbol{e}$.]

3. $2\sqrt{3}$　[$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60°=1$，$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{b}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$.]

4. 8　[取 AB 的中点 M，连接 CM(图略)，则 $CM\perp AB$，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. 所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AM}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=8$.]

考点一

典例 1　(1)13　$\left(\frac{52}{25},\frac{39}{25}\right)$　(2)1　1

[(1)因为向量 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1)$，

所以 $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2=-2(1,0)+7(0,1)=(-2,7)$，

$\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2=4(1,0)+3(0,1)=(4,3)$，

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2\times4+7\times3=13$，

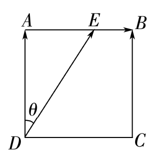
由 $\boldsymbol{a}=(-2,7)$，$\boldsymbol{b}=(4,3)$ 可得 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4+49}=\sqrt{53}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{16+9}=5$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{13}{\sqrt{53}\times5}$，

向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为：

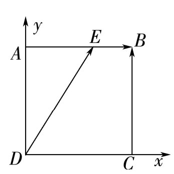
$|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\sqrt{53}\times\frac{13}{\sqrt{53}\times5}\times\frac{\boldsymbol{b}}{5}=\frac{13}{25}\boldsymbol{b}=\frac{13}{25}(4\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)=\frac{52}{25}\boldsymbol{e}_1+\frac{39}{25}\boldsymbol{e}_2=\left(\frac{52}{25},\frac{39}{25}\right)$.

(2)**法一**(投影法)：设向量 $\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{DA}$ 的夹角为 θ，则 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DA}=|\overrightarrow{DE}|\cdot|\overrightarrow{DA}|\cos\theta$，由图可知，$|\overrightarrow{DE}|\cos\theta=|\overrightarrow{DA}|$，所以原式等于 $|\overrightarrow{DA}|^2=1$，要使 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}$ 最大，只要使向量 $\overrightarrow{DE}$ 在向量 $\overrightarrow{DC}$ 上的投影达到最大即可，因为 $\overrightarrow{DE}$ 在向量 $\overrightarrow{DC}$ 上的投影达到最大为 $|\overrightarrow{DC}|=1$，所以 $(\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC})_{max}=|\overrightarrow{DC}|^2=1$.



法二(基向量法)：因为 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}$ 且 $\overrightarrow{DA}\perp\overrightarrow{AE}$，所以 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE})\cdot\overrightarrow{DA}=|\overrightarrow{DA}|^2=1$，$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AE}|=|\overrightarrow{AE}|$，所以要使 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}$ 最大，只要 $|\overrightarrow{AE}|$ 最大即可，显然随着 E 点在 AB 边上移动，$|\overrightarrow{AE}|_{max}=1$，故 $(\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC})_{max}=1$.

法三(坐标法)：以 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DC}$ 与 $\overrightarrow{DA}$ 所在直线分别为 x，y 轴，建立平面直角坐标系，如图所示，可知 $E(x,1)$，$0\leqslant x\leqslant1$，所以 $\overrightarrow{DE}=(x,1)$，$\overrightarrow{CB}=(0,1)$，可得 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}=1$. 因为 $\overrightarrow{DC}=(1,0)$，所以 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}=x$，因为 $0\leqslant x\leqslant1$，所以 $(\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC})_{max}=1$.]



跟进训练

1. (1)**B**　(2)**C**　[(1)因为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个互相垂直的单位向量，

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，

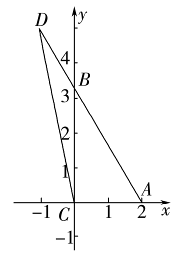
所以 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2|\boldsymbol{b}|^2=-2$，

所以向量 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为

$\frac{(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=-2\boldsymbol{b}$. 故选 B.

(2)**法一**(基向量法)：由 $\angle C=\frac{\pi}{2}$，$AB=4$，$AC=2$，得 $CB=2\sqrt{3}$，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{3}{2}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}^2=18$，故选 C.

法二(坐标法)：如图，以 C 为坐标原点，CA，CB 所在的直线分别为 x 轴、y 轴，建立平面直角坐标系，则 $C(0,0)$，$A(2,0)$，$B(0,2\sqrt{3})$. 由题意得 $\angle CBA=\frac{\pi}{6}$，又 $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$，所以 $D(-1,3\sqrt{3})$，则 $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB}=(-1,3\sqrt{3})\cdot(0,2\sqrt{3})=18$，故选 C.]



考点二

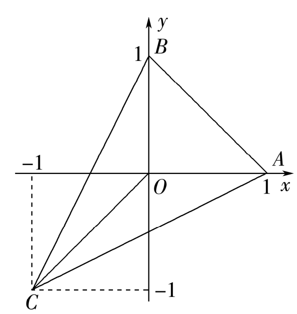
考向 1　**典例 2**　$3\sqrt{2}$　[由 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=5$ 得 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=25$，即 $\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=25$，结合 $|\boldsymbol{a}|=3$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，得 $3^2-2\times1+|\boldsymbol{b}|^2=25$，所以 $|\boldsymbol{b}|=3\sqrt{2}$.]

考向 2　**典例 3**　(1)**D**　(2)$\left(-\infty,-\frac{9}{2}\right)\cup\left(-\frac{9}{2},3\right)$

[(1)$\because\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，$\therefore\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，等式两边同时平方得 $2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+1+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

法一(运用两向量的夹角公式求解)　$\because\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\therefore(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2+5\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}^2=4$，且 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|=|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$，$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$，$\therefore\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|\cdot|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|}=\frac{4}{5}$，故选 D.

法二(数形结合法)　如图，令 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，$\therefore\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，而 $|AB|=\sqrt{2}$，$|AC|=|BC|=\sqrt{5}$，在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=\cos\langle\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\rangle=\cos\angle ACB=\frac{5+5-2}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$，故选 D.



法三(坐标法)　如图(图同法二)，令向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的起点均为 O，终点分别为 A，B，以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 分别为 x 轴、y 轴的正方向建立平面直角坐标系，则 $\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(0,1)$，$\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-1,-1)$，$\therefore\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=(1,2)$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=$

$\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}||\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|}=\frac{2+2}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$,故选 D.

(2)因为 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为钝角,

所以 $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}<0$,即 $(2k-3,-6)\cdot(2,1)<0$,

所以 $4k-6-6<0$,所以 $k<3$. 若 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 反向共线,则 $\frac{2k-3}{2}=-6$,解得 $k=-\frac{9}{2}$,此时夹角不是钝角,综上所述,k 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{9}{2}\right)\cup\left(-\frac{9}{2},3\right)$.]

考向3 **典例4** (1)**D** (2)$\frac{7}{12}$ [(1)**法一**:由题意,得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$. 对于 A,$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}^2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}\neq0$,故 A 不符合题意;对于 B,$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=1+1=2\neq0$,故 B 不符合题意;对于 C,$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}\neq0$,故 C 不符合题意;对于 D,$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=1-1=0$,所以 $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$. 故选 D.

法二:不妨设 $\boldsymbol{a}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\boldsymbol{b}=(1,0)$,则 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=\left(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,\sqrt{3})$,$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(0,\sqrt{3})$,易知,只有 $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$,即 $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$,故选 D.

(2)因为 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$,所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

又 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$,

所以 $(\lambda\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0$,

即 $(\lambda-1)\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\lambda\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2=0$,

所以 $(\lambda-1)|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos 120^\circ-9\lambda+4=0$.

所以 $(\lambda-1)\times2\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)-9\lambda+4=0$. 解得 $\lambda=\frac{7}{12}$.]

跟进训练

2.(1)**BC** (2)**C** [(1)$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$,故 A 错误;

因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是单位向量,所以 $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+1+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$,得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直,故 B 正确;

$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$,故 D 错误;

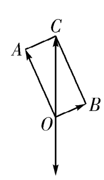
$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{1\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$,故 C 正确. 故选 BC.

(2)由已知有 $\boldsymbol{c}=(3+t,4)$,$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$,故 $\frac{9+3t+16}{5|\boldsymbol{c}|}=\frac{3+t}{|\boldsymbol{c}|}$,解得 $t=5$. 故选 C.]

考点三

典例5 (1)160 $80\sqrt{3}$ (2)$\frac{\sqrt{13}}{2}$

[(1)根据题意,$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=-\boldsymbol{G}$,如图所示:$\angle CAO=90^\circ$,$\angle AOC=30^\circ$,$AC=80$,



$\therefore OC=160$,$OA=80\sqrt{3}$,

$\therefore\boldsymbol{G}$ 的大小为 160 N,$\boldsymbol{F}_2$ 的大小为 $80\sqrt{3}$ N.

(2)$\because M$ 为 BC 的中点,$\therefore\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,

$\therefore|\overrightarrow{MA}|^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})=\frac{1}{4}(1+9+2\times1\times3\cos 60^\circ)=\frac{13}{4}$,$\therefore|\overrightarrow{MA}|=\frac{\sqrt{13}}{2}$.]

跟进训练

3.(1)**B** (2)**AD** [(1)由题意得 $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{7}$,由平行四边形的两条对角线的平方和等于四边的平方和,得

$BD^2+AC^2=2(AB^2+AD^2)$,

$\therefore BD^2+(\sqrt{7})^2=2(2^2+1^2)=10$,$\therefore BD=\sqrt{3}$,故选 B.

(2)对于 A,由 $\boldsymbol{G}=-(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)$ 为定值,所以 $|\boldsymbol{G}|^2=|\boldsymbol{F}_1|^2+|\boldsymbol{F}_2|^2+2|\boldsymbol{F}_1||\boldsymbol{F}_2|\cos\theta=2|\boldsymbol{F}_1|^2(1+\cos\theta)$,解得 $|\boldsymbol{F}_1|^2=\frac{|\boldsymbol{G}|^2}{2(1+\cos\theta)}$. 由题意知 $\theta\in(0,\pi)$ 时,$y=\cos\theta$ 单调递减,所以 $|\boldsymbol{F}_1|^2$ 单调递增,即 θ 越大越费力,θ 越小越省力,A 正确;对于 B,由题意知,θ 的取值范围是 $(0,\pi)$,故 B 错误;对于 C,当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时,$|\boldsymbol{F}_1|^2=\frac{|\boldsymbol{G}|^2}{2}$,所以 $|\boldsymbol{F}_1|=\frac{\sqrt{2}}{2}|\boldsymbol{G}|$,故 C 错误;对于 D,当 $\theta=\frac{2\pi}{3}$ 时,$|\boldsymbol{F}_1|^2=|\boldsymbol{G}|^2$,所以 $|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{G}|$,故 D 正确.

故答案为 AD.]

高考培优6 极化恒等式的应用

题型一

典例1 (1)**A** (2)$\frac{7}{8}$ [(1)因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{4}[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2]=\frac{1}{4}\times(10-6)=1$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$.

(2)设 $\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{DF}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{BD}|^2=9\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}^2=4$,$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=|\overrightarrow{FD}|^2-|\overrightarrow{BD}|^2=\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}^2=-1$,解得 $\boldsymbol{b}^2=\frac{5}{8}$,$\boldsymbol{a}^2=\frac{13}{8}$,$\therefore\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=|\overrightarrow{ED}|^2-|\overrightarrow{BD}|^2=4\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}^2=\frac{7}{8}$.]

跟进训练

1.22 [取 AB 的中点 E,则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PE}^2-\overrightarrow{AE}^2=2$,

所以 $\overrightarrow{PE}^2=18$,因为 $\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$,$|\overrightarrow{CD}|=8$,

所以 $|\overrightarrow{PD}|=2$,$|\overrightarrow{AE}|=4$,延长 AD,EP 交于点 F,

故 DP 为 $\triangle FAE$ 的中位线,

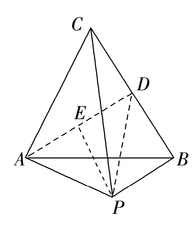
所以 $\overrightarrow{AP}^2=\frac{\overrightarrow{AF}^2+\overrightarrow{AE}^2-2\overrightarrow{PE}^2}{2}=40$,

即 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AE}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AP}^2-\overrightarrow{PE}^2=22$.]

题型二

典例2 **B** [**法一**(极化恒等式):结合题意画出图形,如图①所示,设 BC 的中点为 D,AD 的中点为 E,连接 AD,PE,PD,则有 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PD}$,

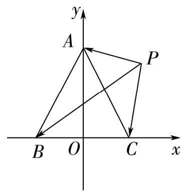
则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=2(\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{EA})\cdot(\overrightarrow{PE}-\overrightarrow{EA})=2(\overrightarrow{PE}^2-\overrightarrow{EA}^2)$. 而 $\overrightarrow{EA}^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$,



图①

当点 P 与点 E 重合时，$\overrightarrow{PE}^2$ 有最小值 0，故此时$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$取得最小值，最小值为$-2\overrightarrow{EA}^2=-2\times\frac{3}{4}=-\frac{3}{2}$.

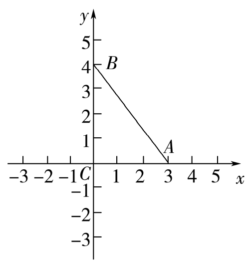
法二(坐标法)：如图②，以等边三角形 ABC 的底边 BC 所在直线为 x 轴，以边 BC 的垂直平分线为 y 轴建立平面直角坐标系，则 $A(0,\sqrt{3})$，$B(-1,0)$，$C(1,0)$，设$P(x,y)$，则$\overrightarrow{PA}=(-x,\sqrt{3}-y)$，$\overrightarrow{PB}=(-1-x,-y)$，$\overrightarrow{PC}=(1-x,-y)$，所以$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=(-x,\sqrt{3}-y)\cdot(-2x,-2y)=2x^2+2\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$，当 $x=0$，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$取得最小值，最小值为$-\frac{3}{2}$. 故选 B.]



图②

跟进训练

2.(1)**D**　(2)$-\frac{1}{16}$　[(1)建立如图所示坐标系，由题易知，$C(0,0)$，$A(3,0)$，$B(0,4)$，

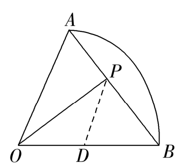


$\because PC=1$，$\therefore$设 $P(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in[0,2\pi]$，

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(3-\cos\theta,-\sin\theta)\cdot(-\cos\theta,4-\sin\theta)=-3\cos\theta-4\sin\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta=1-5\sin(\theta+\varphi)\in[-4,6]$，其中$\sin\varphi=\frac{3}{5}$，$\cos\varphi=\frac{4}{5}$，

故选 D.

(2)**法一**(极化恒等式法)：如图①，取 OB 的中点 D，连接 PD，则$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BP}=PD^2-OD^2=PD^2-\frac{1}{4}$，即求 PD 的最小值.

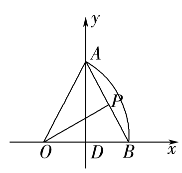


图①

由图可知，当 $PD\perp AB$ 时，$PD_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

则$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BP}$的最小值是$-\frac{1}{16}$.

法二(坐标法)：以 OB 所在的直线为 x 轴，过点 A 且垂直于OB 的直线为 y 轴，建立如图②所示的平面直角坐标系，



图②

则 $A\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$O\left(-\frac{1}{2},0\right)$，$B\left(\frac{1}{2},0\right)$，

可得直线 AB 的方程为 $2x+\frac{2\sqrt{3}}{3}y=1$，

设 $P\left(x,\frac{\sqrt{3}}{2}(1-2x)\right)$，

则$\overrightarrow{OP}=\left(x+\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}(1-2x)\right)$，$\overrightarrow{BP}=\left(x-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}(1-2x)\right)$，

所以$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BP}=4x^2-3x+\frac{1}{2}=4\left(x-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{1}{16}$，

当 $x=\frac{3}{8}$时，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BP}$取得最小值$-\frac{1}{16}$.]

第 4 课时　复数

梳理 · 必备知识

1.(1)a　b　(2)$=$　$\neq$　(3)$a=c$ 且 $b=d$　(4)$a=c$ 且 $b=-d$　(5)$|z|$　$|a+bi|$　$\sqrt{a^2+b^2}$

2.$Z(a,b)$

3.(1)$(a+c)+(b+d)\mathrm{i}$　$(a-c)+(b-d)\mathrm{i}$　$(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}$　$\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}$

激活 · 基本技能

一、(1)×　(2)×　(3)×　(4)×

二、1.**A**　[因为 z 为纯虚数，

所以$\begin{cases}x^2-1=0,\\x-1\neq0,\end{cases}$所以 $x=-1$.]

2.**D**　[$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=-1-3\mathrm{i}+(-2-\mathrm{i})=-3-4\mathrm{i}$.]

3.二　[由题意可得$\bar{z}=\frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\frac{(1-\mathrm{i})(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})}=-\mathrm{i}(1-\mathrm{i})=-1-\mathrm{i}$，所以 $z=-1+\mathrm{i}$. 故复数 z 对应的点在第二象限.]

4.5　[$z_1=-2+\mathrm{i}$，$z_2=1+2\mathrm{i}$，$z_1\cdot z_2=(-2+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})=-4-3\mathrm{i}$. 所以$|z_1\cdot z_2|=5$.]

考点一

典例 1　(1)**ABC**　(2)**BC**　[(1)$z=\frac{2}{1+\mathrm{i}}=\frac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=1-\mathrm{i}$，对于 A 选项，$z$ 的虚部为-1，故 A 正确；

对于 B 选项，模长$|z|=\sqrt{2}$，故 B 正确；

对于 C 选项，因为 $z^2=(1-\mathrm{i})^2=-2\mathrm{i}$，故 z^2 为纯虚数，故 C 正确；

对于 D 选项，z 的共轭复数为 $1+\mathrm{i}$，故 D 错误. 故选 ABC.

(2)对于 A 选项，设复数 $z=0$，$z+\bar{z}=0$，z 不为纯虚数，故 A 错误；对于 B 选项，设复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+b\mathrm{i}}=\frac{a-b\mathrm{i}}{a^2+b^2}\in\mathbf{R}$，所以 $b=0$，即 $z\in\mathbf{R}$，故 B 正确；

对于 C 选项，设复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $z^2=(a+b\mathrm{i})^2=a^2-b^2+2ab\mathrm{i}\geqslant0$，所以 $ab=0$ 且 $a^2-b^2\geqslant0$，所以 $b=0$，即 $z\in\mathbf{R}$，故 C 正确；

对于 D 选项，设复数 $z_1=1$，$z_2=\mathrm{i}$，满足 $z_1^2+z_2^2=0$，但 $z_1=z_2=0$ 不成立，故 D 错误. 故选 BC.]

跟进训练

1.(1)**C**　(2)**D**　[(1)$\because(a+\mathrm{i})(1-a\mathrm{i})=a+\mathrm{i}-a^2\mathrm{i}-a\mathrm{i}^2=2a+(1-a^2)\mathrm{i}=2$，

$\therefore 2a=2$ 且 $1-a^2=0$，解得 $a=1$，故选 C.

(2)$\frac{m^2+\mathrm{i}}{1+m\mathrm{i}}=\frac{(m^2+\mathrm{i})(1-m\mathrm{i})}{(1+m\mathrm{i})(1-m\mathrm{i})}=\frac{m^2+m+(1-m^3)\mathrm{i}}{1+m^2}$，

因为此复数为纯虚数，所以$\begin{cases}m^2+m=0,\\1-m^3\neq0,\end{cases}$解得 $m=-1$ 或 0，

故选 D.]

考点二

典例 2　(1)**D**　(2)**B**　(3)**C**　[(1)$(2+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})=2-4\mathrm{i}+2\mathrm{i}-4\mathrm{i}^2=6-2\mathrm{i}$，故选 D.

(2)$z=\frac{2+i}{1+i^2+i^5}=\frac{2+i}{1-1+i}=\frac{-i(2+i)}{-i^2}=1-2i$，所以 $\bar{z}=1+2i$，故选 B.

(3)根据题意，$(1+2i)^2+p(1+2i)+q=0\Rightarrow(2p+4)i+p+q-3=0$，所以 $\begin{cases}2p+4=0,\\p+q-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=-2,\\q=5,\end{cases}$ 所以 $p+qi=-2+5i$. 故选 C.]

跟进训练

2. (1)**C** (2)$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 1 [(1)因为 $z=2-i$，所以 $z(\bar{z}+i)=(2-i)\cdot(2+2i)=6+2i$，故选 C.

(2)$z=\frac{i^{2\,023}}{1-i}=\frac{-i}{1-i}=\frac{1-i}{2}$，

$|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$z+\bar{z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i=1$.]

考点三

典例 3 (1)**A** (2)**ACD** (3)$2\sqrt{3}$

[(1)因为 $(1+3i)(3-i)=3-i+9i-3i^2=6+8i$，所以该复数在复平面内对应的点为(6,8)，位于第一象限，故选 A.

(2)复数 $z_0=1+2i$ 在复平面内对应的点为 $P_0(1,2)$，A 正确；复数 z_0 的共轭复数对应的点与点 P_0 关于实轴对称，B 错误；设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$，代入 $|z-1|=|z-i|$，得 $|(x-1)+yi|=|x+(y-1)i|$，

即 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$，整理得 $y=x$，

即点 Z 在直线 $y=x$ 上，C 正确；

易知点 P_0 到直线 $y=x$ 的垂线段的长度即为 P_0，Z 之间距离的最小值，结合点到直线的距离公式可知，最小值为 $\frac{|1-2|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 D 正确. 故选 ACD.

(3)**法一**(代数法)：设 $z_1-z_2=a+bi$，$a,b\in\mathbf{R}$，因为 $z_1+z_2=\sqrt{3}+i$，所以 $2z_1=(\sqrt{3}+a)+(1+b)i$，$2z_2=(\sqrt{3}-a)+(1-b)i$.

因为 $|z_1|=|z_2|=2$，所以 $|2z_1|=|2z_2|=4$，

所以 $\sqrt{(\sqrt{3}+a)^2+(1+b)^2}=4$， ①

$\sqrt{(\sqrt{3}-a)^2+(1-b)^2}=4$， ②

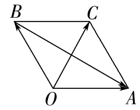
$①^2+②^2$，得 $a^2+b^2=12$.

所以 $|z_1-z_2|=\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{3}$.

法二(几何法)：设复数 z_1,z_2 在复平面内分别对应向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，则 z_1+z_2 对应向量 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

由题意知 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=2$，

如图所示，以 OA，OB 为邻边作平行四边形 $OACB$，



则 z_1-z_2 对应向量 $\overrightarrow{BA}$，且 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{OC}|=2$，

可得 $|\overrightarrow{BA}|=2|\overrightarrow{OA}|\sin 60°=2\sqrt{3}$.

故 $|z_1-z_2|=|\overrightarrow{BA}|=2\sqrt{3}$.]

跟进训练

3. (1)**A** (2)**C** [(1)由已知可得复数 z 在复平面内对应的点的坐标为 $(m+3,m-1)$，所以 $\begin{cases}m+3>0,\\m-1<0,\end{cases}$ 解得 $-3<m<1$，故选 A.

(2)设 $z=a+bi$，$a,b\in\mathbf{R}$.

则 $|z-1+\sqrt{3}i|=3$ 表示复平面内点 $Z(a,b)$ 到点 $(1,-\sqrt{3})$ 的距离为 3，则 $|z|$ 的最大值为点 $(1,-\sqrt{3})$ 到 $(0,0)$ 的距离加上 3.

即 $|z|_{\max}=\sqrt{1+3}+3=5$. 故选 C.]

第六章　数列

第 1 课时　数列的概念与简单表示法

梳理·必备知识

1. 确定的顺序

2. 有限　无限　>　<

3. 列表法　图象法　解析式法(通项公式法)　(1)a_n　(2)一个式子

4. (1)$a_1+a_2+\cdots+a_n$　(2)S_1　S_n-S_{n-1}

激活·基本技能

一、(1)×　(2)×　(3)×　(4)√

二、1. **B** [由 $a_1=-1$，代入检验可知选 B.]

2. **D** [由题意得，令 $n=1$，可得 $a_2=1+\frac{1}{a_1}=2$；

令 $n=2$，可得 $a_3=1+\frac{1}{a_2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$；

令 $n=3$，可得 $a_4=1+\frac{1}{a_3}=1+\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{5}{3}$；

令 $n=4$，可得 $a_5=1+\frac{1}{a_4}=1+\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{8}{5}$.

故选 D.]

3. $\begin{cases}2,n=1,\\2n-1,n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*\end{cases}$ [当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2$.

当 $n\geqslant 2$ 时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+1-[(n-1)^2+1]=2n-1$.

显然当 $n=1$ 时，不满足上式，

故 $a_n=\begin{cases}2,n=1,\\2n-1,n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*.\end{cases}$]

4. n^2 [由题图可知，从中间一行向上、向下每经过一行，小正方形数量减少 1 个，直至减少到 1，所以 $a_n=n+2(n-1)+2(n-2)+\cdots+2\times 1$，

所以 $a_n=n+2\cdot\frac{[1+(n-1)](n-1)}{2}=n^2$.]

考点一

典例 1 (1)$4n-5$ (2)$\begin{cases}2,n=1,\\\frac{2^{n-1}}{n},n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*\end{cases}$ [(1)$a_1=S_1=2-3=-1$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n^2-3n)-[2(n-1)^2-3(n-1)]=4n-5$，由于 a_1 也适合此等式，$\therefore a_n=4n-5$.

(2)当 $n=1$ 时，$a_1=2^1=2$，∵ $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=2^n$， ①

故 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}=2^{n-1}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$，②

由①－②得 $na_n=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$，∴ $a_n=\frac{2^{n-1}}{n}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$.

显然当 $n=1$ 时不满足上式，∴ $a_n=\begin{cases}2,n=1,\\ \frac{2^{n-1}}{n},n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*.\end{cases}$]

跟进训练

1.(1)**BCD**　(2) -2^{n-1}　[(1)∵ $a_{n+1}=S_n\cdot S_{n+1}=S_{n+1}-S_n$，两边同除以 $S_{n+1}\cdot S_n$，得 $\frac{1}{S_{n+1}}-\frac{1}{S_n}=-1$.

∴ $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是以 -1 为首项，-1 为公差的等差数列，

即 $\frac{1}{S_n}=-1+(n-1)\times(-1)=-n$，∴ $S_n=-\frac{1}{n}$.

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n(n-1)}$，

又 $a_1=-1$ 不适合上式，∴ $a_n=\begin{cases}-1,n=1,\\ \frac{1}{n(n-1)},n\geqslant2.\end{cases}$ 故选 BCD.

(2)当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2a_1+1$，∴ $a_1=-1$.

当 $n\geqslant2$ 时，$S_n=2a_n+1$， ①

$S_{n-1}=2a_{n-1}+1$. ②

①－②得 $S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$，即 $a_n=2a_n-2a_{n-1}$，即 $a_n=2a_{n-1}(n\geqslant2)$，∴ $\{a_n\}$ 是首项 $a_1=-1$，公比 $q=2$ 的等比数列.

∴ $a_n=a_1\cdot q^{n-1}=-2^{n-1}$.]

考点二

考向1　典例2　$a_n=\frac{n^2+n}{2}$　[由题意得 $a_2-a_1=2,a_3-a_2=3,\cdots,$ ∴ $a_n-a_{n-1}=n(n\geqslant2)$.

以上各式相加，得

$a_n-a_1=2+3+\cdots+n=\frac{(n-1)(2+n)}{2}=\frac{n^2+n-2}{2}$.

∵ $a_1=1$，∴ $a_n=\frac{n^2+n}{2}(n\geqslant2)$.

∵当 $n=1$ 时也满足此式，∴ $a_n=\frac{n^2+n}{2}$.]

考向2　典例3　$a_n=\frac{1}{n}$　[∵ $a_n=\frac{n-1}{n}a_{n-1}(n\geqslant2)$，

∴ $a_{n-1}=\frac{n-2}{n-1}a_{n-2}$，$a_{n-2}=\frac{n-3}{n-2}a_{n-3}$，…，$a_2=\frac{1}{2}a_1$.

以上 $(n-1)$ 个式子相乘，得

$a_n=a_1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{a_1}{n}=\frac{1}{n}$.

当 $n=1$ 时，$a_1=1$，符合上式，

∴ $a_n=\frac{1}{n}$.]

考向3　典例4　$a_n=2\cdot3^{n-1}-1$　[∵ $a_{n+1}=3a_n+2$，

∴ $a_{n+1}+1=3(a_n+1)$，

∴ $\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=3$，

∴数列 $\{a_n+1\}$ 为等比数列，公比 $q=3$，

又 $a_1+1=2$，∴ $a_n+1=2\cdot3^{n-1}$，

∴ $a_n=2\cdot3^{n-1}-1$.]

考向4　典例5　$\frac{2}{n}$　[∵ $a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$，$a_1=2$，∴ $a_n\neq0$，

∴ $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2}$，即 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}$，

又 $a_1=2$，则 $\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2}$，

∴ $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项，$\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列.

∴ $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)\times\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$，∴ $a_n=\frac{2}{n}$.]

跟进训练

2.(1) $4-\frac{1}{n}$　(2) $2^{\frac{n^2-n+2}{2}}$　(3) $\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot2^n$

[(1)∵ $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

∴当 $n\geqslant2$ 时，$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$，

$a_{n-1}-a_{n-2}=\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}$，

…，

$a_2-a_1=1-\frac{1}{2}$，

以上各式相加得 $a_n-a_1=1-\frac{1}{n}$，又 $a_1=3$，

∴ $a_n=4-\frac{1}{n}(n\geqslant2)$，$a_1=3$ 适合上式，

∴ $a_n=4-\frac{1}{n}$.

(2)∵ $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2^n$，

∴当 $n\geqslant2$ 时，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2^{n-1}$，$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=2^{n-2}$，

…，

$\frac{a_3}{a_2}=2^2$，$\frac{a_2}{a_1}=2$，

∴ $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1$

$=2^{n-1}\cdot2^{n-2}\cdot\cdots\cdot2^2\cdot2\cdot2$

$=2^{1+2+3+\cdots+(n-1)}\cdot2$

$=2^{\frac{(n-1)\cdot n}{2}+1}=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}$，

又 $a_1=2$ 满足上式，

∴ $a_n=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}$.

(3)∵ $a_{n+1}=2a_n+2^{n+1}$，∴两边同除以 2^{n+1}，

得 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+1$.

又 $a_1=1$，

∴ $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$，公差为1的等差数列，

∴ $\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}+(n-1)\times1=n-\frac{1}{2}$，

即 $a_n=\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot2^n$.]

考点三

考向1　典例6　B　[由题意得 $a_2=1-\frac{1}{a_1}=5,a_3=1-\frac{1}{a_2}=\frac{4}{5},a_4=1-\frac{1}{a_3}=-\frac{1}{4}$，

则数列$\{a_n\}$的周期为3，则 $a_{2\,022}=a_{674\times3}=a_3=\frac{4}{5}$. 故选B.]

考向2　典例7　D　[因为 $a_{n+1}-a_n=\frac{3n+3+k}{2^{n+1}}-\frac{3n+k}{2^n}=\frac{3-3n-k}{2^{n+1}}$，由数列$\{a_n\}$为递减数列知，

对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+1}-a_n=\frac{3-3n-k}{2^{n+1}}<0$，

所以 $k>3-3n$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，所以 $k\in(0,+\infty)$.]

考向3　典例8　B　[结合 $f(x)=(x+1)\left(\frac{10}{11}\right)^x$ 的单调性，

设数列$\{a_n\}$的最大项为 a_n，所以 $\begin{cases}a_n\geqslant a_{n+1},\\a_n\geqslant a_{n-1},\end{cases}$

所以 $\begin{cases}(n+1)\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^n\geqslant(n+2)\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^{n+1},\\(n+1)\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^n\geqslant n\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^{n-1},\end{cases}$

解不等式组可得 $9\leqslant n\leqslant10$.

所以数列$\{a_n\}$的最大项为 a_9 或 a_{10}.]

跟进训练

3.(1)**C**　(2)**A**　(3)**C**　[(1)因为 $a_1=2,a_{n+1}=\frac{1+a_n}{1-a_n}$，所以 $a_2=\frac{1+a_1}{1-a_1}=-3$，同理可得 $a_3=-\frac{1}{2},a_4=\frac{1}{3},a_5=2,a_6=-3,a_7=-\frac{1}{2},a_8=\frac{1}{3},\cdots$，可得 $a_{n+4}=a_n$，则 $a_{2\,023}=a_{505\times4+3}=a_3=-\frac{1}{2}$. 故选C.

(2)若数列$\{a_n\}$为递增数列，则有 $a_{n+1}-a_n>0$，

$\therefore(n+1)^2-2\lambda(n+1)-n^2+2\lambda n=2n+1-2\lambda>0$，

即 $2n+1>2\lambda$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立，

于是有 $\lambda<\left(\frac{2n+1}{2}\right)_{\min}=\frac{3}{2}$，

$\because$由 $\lambda<1$ 可推出 $\lambda<\frac{3}{2}$，但反过来，由 $\lambda<\frac{3}{2}$ 不能得到 $\lambda<1$，

因此“$\lambda<1$”是“数列$\{a_n\}$为递增数列”的充分不必要条件. 故选A.

(3)由 $a_{n+1}-a_n=2n,a_1=28$，可得 $a_n=n^2-n+28$，$\therefore\frac{a_n}{n}=n+\frac{28}{n}-1$，

设 $f(x)=x+\frac{28}{x}$，可知 $f(x)$在$(0,2\sqrt{7})$上单调递减，在$(2\sqrt{7},+\infty)$上单调递增，

又 $n\in\mathbf{N}^*$，且 $\frac{a_5}{5}=\frac{48}{5}<\frac{a_6}{6}=\frac{29}{3}$，故选C.]

第2课时　等差数列

梳理·必备知识

1.(1)同一个常数　公差　(2)A　$a+b$

2.(1)$a_1+(n-1)d$

激活·基本技能

一、(1)×　(2)√　(3)√　(4)×

二、1.**A**　[$\because a_4+a_8=2a_6=10$，$\therefore a_6=5$，

又 $a_{10}=6$，$\therefore$公差 $d=\frac{a_{10}-a_6}{10-6}=\frac{6-5}{4}=\frac{1}{4}$. 故选A.]

2.**B**　[设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

法一：由 $S_5=5a_3=30$，得 $a_3=6$，又 $a_6=2$，$\therefore S_8=\frac{8(a_1+a_8)}{2}=\frac{8(a_3+a_6)}{2}=\frac{8\times(6+2)}{2}=32$.

法二：由 $\begin{cases}a_1+5d=2,\\5a_1+\frac{5\times4}{2}d=30,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a_1=\frac{26}{3},\\d=-\frac{4}{3}.\end{cases}$

$\therefore S_8=8a_1+\frac{8\times7}{2}d=8\times\frac{26}{3}-28\times\frac{4}{3}=32$.]

3.**B**　[**法一**：由题意知，$S_5,S_{10}-S_5,S_{15}-S_{10}$成等差数列，

即 $7,14,S_{15}-21$ 成等差数列，

$\therefore S_{15}-21+7=28$，

$\therefore S_{15}=42$，故选B.

法二：$\because\{a_n\}$为等差数列，$\therefore\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$也为等差数列，

$\therefore\frac{2S_{10}}{10}=\frac{S_5}{5}+\frac{S_{15}}{15}$，

$\therefore S_{15}=42$，故选B.]

4.820　[设第 n 排的座位数为 $a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，数列$\{a_n\}$为等差数列，其公差 $d=2$，则 $a_n=a_1+(n-1)d=a_1+2(n-1)$. 由已知 $a_{20}=60$，得 $60=a_1+2\times(20-1)$，解得 $a_1=22$，则剧场总共的座位数为 $\frac{20(a_1+a_{20})}{2}=\frac{20\times(22+60)}{2}=820$.]

考点一

典例1　(1)**ABC**　(2)**B**　(3)4　[(1)$S_4=\frac{4\times(a_1+a_4)}{2}=0$，

$\therefore a_1+a_4=a_2+a_3=0$，A正确；

$a_5=a_1+4d=5$，　①

$a_1+a_4=a_1+a_1+3d=0$，　②

联立①②得 $\begin{cases}d=2,\\a_1=-3,\end{cases}$ $\therefore a_n=-3+(n-1)\times2=2n-5$，B正确，D错误；

$S_n=-3n+\frac{n(n-1)}{2}\times2=n^2-4n$，C正确. 故选ABC.

(2)设等差数列$\left\{\frac{2}{a_n+1}\right\}$的公差为 d，且 $a_1=1,a_3=-\frac{1}{3}$，所以 $\frac{2}{a_1+1}=1,\frac{2}{a_3+1}=3$.

所以 $3=1+2d$，解得 $d=1$.

所以 $\frac{2}{a_n+1}=1+n-1=n$，所以 $a_n=\frac{2}{n}-1$.

那么 $a_{2\,023}=\frac{2}{2\,023}-1=-\frac{2\,021}{2\,023}$.

(3)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,又$a_1\neq0$,$a_2=3a_1$,所以$d=2a_1$,

则$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{10a_1+\frac{10\times9}{2}d}{5a_1+\frac{5\times4}{2}d}=\frac{10a_1+90a_1}{5a_1+20a_1}=4$.]

跟进训练

1.(1)**C**　(2)2　(3)84　[(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,首项为a_1,

$\because\begin{cases}S_4=24,\\S_9=99,\end{cases}\therefore\begin{cases}4a_1+6d=24,\\9a_1+36d=99,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=3,\\d=2,\end{cases}$则$a_7=a_1+6d=15$.

(2)由$2S_3=3S_2+6$可得$2(a_1+a_2+a_3)=3\cdot(a_1+a_2)+6$,化简得$2a_3=a_1+a_2+6$,

即$2(a_1+2d)=2a_1+d+6$,解得$d=2$.

(3)依题意,冬至日晷长为13.5尺,记为$a_1=13.5$,芒种日晷长为2.5尺,记为$a_{12}=2.5$,因相邻两个节气的日晷长变化量相同,则从冬至日晷长到芒种日晷长的各数据依次排成一列得等差数列$\{a_n\}$,$n\in\mathbf{N}^*$,$n\leqslant12$,

数列$\{a_n\}$的公差$d=\frac{a_{12}-a_1}{12-1}=\frac{2.5-13.5}{12-1}=-1$,

因夏至与芒种相邻,且夏至日晷长最短,则夏至的日晷长为$a_{12}+d=1.5$,

又大雪与冬至相邻,且冬至日晷长最长,

则大雪的日晷长为$a_1+d=12.5$,

显然夏至到大雪的日晷长依次排成一列为递增的等差数列,首项为1.5尺,末项为12.5尺,共12项,

所以一年中夏至到大雪的日晷长的和为$\frac{1.5+12.5}{2}\times12=84$(尺).]

考点二

典例2　①③⇒②.

证明:已知$\{a_n\}$是等差数列,$a_2=3a_1$.

设数列$\{a_n\}$的公差为d,则$a_2=3a_1=a_1+d$,得$d=2a_1$,

所以$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=n^2a_1$.

因为数列$\{a_n\}$的各项均为正数,所以$\sqrt{S_n}=n\sqrt{a_1}$,所以$\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}=(n+1)\sqrt{a_1}-n\sqrt{a_1}=\sqrt{a_1}$(常数),所以数列$\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列.

①②⇒③.

证明:已知$\{a_n\}$是等差数列,$\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列.

设数列$\{a_n\}$的公差为d,

则$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{1}{2}n^2d+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$.

因为数列$\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列,所以数列$\{\sqrt{S_n}\}$的通项公式是关于n的一次函数,则$a_1-\frac{d}{2}=0$,即$d=2a_1$,所以$a_2=a_1+d=3a_1$.

②③⇒①.

证明:已知数列$\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列,$a_2=3a_1$.

所以$S_1=a_1$,$S_2=a_1+a_2=4a_1$.

设数列$\{\sqrt{S_n}\}$的公差为d,$d>0$,则$\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}=\sqrt{4a_1}-\sqrt{a_1}=d$,

得$a_1=d^2$,所以$\sqrt{S_n}=\sqrt{S_1}+(n-1)d=nd$,所以$S_n=n^2d^2$,

所以$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2d^2-(n-1)^2d^2=2d^2n-d^2(n\geqslant2)$,

当$n=1$时,也满足,所以$a_n=2d^2n-d^2=d^2+(n-1)\cdot2d^2$,所以数列$\{a_n\}$是等差数列.

跟进训练

2.(1)**证明**:因为b_n是数列$\{S_n\}$的前n项积,

所以$n\geqslant2$时,$S_n=\frac{b_n}{b_{n-1}}$,

代入$\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$可得$\frac{2b_{n-1}}{b_n}+\frac{1}{b_n}=2$,

整理可得$2b_{n-1}+1=2b_n$,即$b_n-b_{n-1}=\frac{1}{2}(n\geqslant2)$.

又$\frac{2}{S_1}+\frac{1}{b_1}=\frac{3}{b_1}=2$,所以$b_1=\frac{3}{2}$,

故$\{b_n\}$是以$\frac{3}{2}$为首项,$\frac{1}{2}$为公差的等差数列.

(2)**解**:由(1)可知,$b_n=\frac{n+2}{2}$,则$\frac{2}{S_n}+\frac{2}{n+2}=2$,所以$S_n=\frac{n+2}{n+1}$.

当$n=1$时,$a_1=S_1=\frac{3}{2}$,

当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n+2}{n+1}-\frac{n+1}{n}=-\frac{1}{n(n+1)}$.

故$a_n=\begin{cases}\frac{3}{2},n=1,\\-\frac{1}{n(n+1)},n\geqslant2.\end{cases}$

考点三

考向1　典例3　**B**　[因为$2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}(n\geqslant2)$,所以$\{a_n\}$是等差数列,由等差数列性质可得$a_2+a_4+a_6=3a_4=12$,$a_1+a_3+a_5=3a_3=9$,所以$a_1+a_6=a_3+a_4=3+4=7$.]

考向2　典例4　(1)**A**　(2)①$\frac{11}{19}$　②$\frac{17}{22}$　[(1)因为等差数列中,S_4,S_8-S_4,$S_{12}-S_8$,$S_{16}-S_{12}$成等差数列,设$S_4=x$,因为$\frac{S_4}{S_8}=\frac{1}{3}$,故$S_8=3x$,

所以x,$2x$,$S_{12}-3x$,$S_{16}-S_{12}$成等差数列,所以$S_{16}=10x$,则$\frac{S_8}{S_{16}}=\frac{3}{10}$.故选A.

(2)①若$\frac{a_n}{b_n}=\frac{2n-1}{3n+1}$,则$\frac{S_{11}}{T_{11}}=\frac{11a_6}{11b_6}=\frac{2\times6-1}{3\times6+1}=\frac{11}{19}$;

②若$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n-1}{3n+1}=\frac{2n^2-n}{3n^2+n}$,则可设$S_n=(2n^2-n)k$,$T_n=(3n^2+n)k$.

所以$a_5=S_5-S_4=45k-28k=17k$,$b_4=T_4-T_3=52k-30k=22k$,所以$\frac{a_5}{b_4}=\frac{17}{22}$.]

跟进训练

3.(1)**C** (2)**C** (3)8 092 [(1)因为 $a_3+a_7=2a_5=6$,所以 $a_5=3$,所以 $a_5+a_{12}=3+17=20$,

所以 $S_{16}=\frac{(a_1+a_{16})\times16}{2}=8(a_5+a_{12})=160$.

故选 C.

(2)$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是两个等差数列,且$\frac{a_k}{b_k}(1\leqslant k\leqslant5)$是常值,由于 $a_1=288$,$a_5=96$,

故 $a_3=\frac{a_1+a_5}{2}=192$,由于$\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{288}{192}=\frac{3}{2}$,所以 $b_3=128$.故选 C.

(3)由等差数列的性质可得$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$也为等差数列,

设其公差为 d,则$\frac{S_{2\,020}}{2\,020}-\frac{S_{2\,014}}{2\,014}=6d=6$,所以 $d=1$,

所以$\frac{S_{2\,023}}{2\,023}=\frac{S_1}{1}+2\,022d=-2\,018+2\,022=4$,所以 $S_{2\,023}=8\,092$.]

考点四

典例5 **法一**(函数法):

解:因为 $a_1=20$,$S_{10}=S_{15}$,

所以 $10\times20+\frac{10\times9}{2}d=15\times20+\frac{15\times14}{2}d$,

所以 $d=-\frac{5}{3}$.

$S_n=20n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{5}{6}n^2+\frac{125}{6}n$

$=-\frac{5}{6}\left(n-\frac{25}{2}\right)^2+\frac{3\,125}{24}$.

因为 $n\in\mathbf{N}^*$,所以当 $n=12$ 或 13 时,S_n 有最大值,且最大值为 $S_{12}=S_{13}=130$.

法二(邻项变号法):

解:因为 $a_1=20$,$S_{10}=S_{15}$,

所以 $10\times20+\frac{10\times9}{2}d=15\times20+\frac{15\times14}{2}d$,所以 $d=-\frac{5}{3}$.

$a_n=20+(n-1)\times\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{5}{3}n+\frac{65}{3}$.

因为 $a_1=20>0$,$d=-\frac{5}{3}<0$,

所以数列$\{a_n\}$是递减数列.

由 $a_n=-\frac{5}{3}n+\frac{65}{3}\leqslant0$,得 $n\geqslant13$,即 $a_{13}=0$.

当 $n\leqslant12$ 时,$a_n>0$;当 $n\geqslant14$ 时,$a_n<0$.

所以当 $n=12$ 或 13 时,S_n 取得最大值,

且最大值为 $S_{12}=S_{13}=12\times20+\frac{12\times11}{2}\times\left(-\frac{5}{3}\right)=130$.

法三(图象法):

解:因为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 是关于 n 的二次函数,且 $S_{10}=S_{15}$,

又$\frac{10+15}{2}=12.5$,所以 $n=12$ 或 13 时,S_n 取得最大值.

因为 $a_1=20$,

所以 $10\times20+\frac{10\times9}{2}d=15\times20+\frac{15\times14}{2}d$,

所以 $d=-\frac{5}{3}$.

所以 $S_{12}=S_{13}=12\times20+\frac{12\times11}{2}\times\left(-\frac{5}{3}\right)=130$,所以最大值为 $S_{12}=S_{13}=130$.

法四(性质法):

解:由 $S_{10}=S_{15}$ 得 $S_{15}-S_{10}=a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}=0$,所以 $5a_{13}=0$,即 $a_{13}=0$.

又 $d=\frac{a_{13}-a_1}{13-1}=-\frac{5}{3}$,

所以当 $n=12$ 或 13 时,S_n 有最大值.

且最大值为 $S_{12}=S_{13}=12\times20+\frac{12\times11}{2}\times\left(-\frac{5}{3}\right)=130$.

跟进训练

4.(1)**BD** [因为等差数列$\{a_n\}$是递减数列,

所以 $a_{n+1}-a_n<0$,所以 $d<0$,故 A 错误;

因为 $S_7=S_8$,所以 $a_8=S_8-S_7=0$,故 B 正确;

因为 $S_{15}=\frac{15(a_1+a_{15})}{2}=15a_8=0$,故 C 错误;

由题意得$\begin{cases}a_7>0,\\a_8=0,\\a_9<0,\end{cases}$所以 $S_7=S_8\geqslant S_n(n\in\mathbf{N}^*)$,故 D 正确.故选 BD.]

(2)**解**:选①.设数列$\{a_n\}$的公差为 d,由 $a_5=6$,$a_1+S_3=50$,得$\begin{cases}a_1+4d=6,\\4a_1+3d=50,\end{cases}$

解得 $a_1=14$,$d=-2$,

即 $a_n=14-2(n-1)=16-2n$.

法一:当 $a_n\geqslant0$ 时,有 $16-2n\geqslant0$,得 $n\leqslant8$,

∴当 $n\leqslant7$ 时,$a_n>0$;$n=8$ 时,$a_n=0$;$n\geqslant9$ 时,$a_n<0$,

∴$n=7$ 或 $n=8$ 时,S_n 取最大值.

法二:$S_n=-n^2+15n$,该函数图象的对称轴为 $n=7.5$,

∴$n=7$ 或 $n=8$ 时,S_n 取最大值.

选②.由 $S_{12}-S_9>0$,得 $a_{12}+a_{11}+a_{10}>0$,

由等差中项的性质有 $3a_{11}>0$,即 $a_{11}>0$,

由 $a_2+a_{21}<0$,得 $a_2+a_{21}=a_{11}+a_{12}<0$,

∴$a_{12}<0$,故 $d=a_{12}-a_{11}<0$,

∴当 $n\leqslant11$ 时,$a_n>0$,$n\geqslant12$ 时,$a_n<0$,故 $n=11$ 时,S_n 取最大值.

选③.由 $S_9>0$,得 $S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=\frac{9\times2a_5}{2}>0$,

可得 $a_5>0$,

由 $S_{10}<0$,得 $S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=\frac{10(a_5+a_6)}{2}<0$,可得 $a_5+a_6<0$,

∴$a_6<0$,故 $d=a_6-a_5<0$,

∴当 $n\leqslant5$ 时,$a_n>0$,$n\geqslant6$ 时,$a_n<0$,故 $n=5$ 时,S_n 取最大值.

第 3 课时 等比数列

梳理·必备知识

1.(1)2 同一个常数 公比 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ (2)G

2.(1)a_1q^{n-1}　(2)na_1　$\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$　$\frac{a_1-a_nq}{1-q}$

3.(1)$a_p\cdot a_q$

激活·基本技能

一、(1)×　(2)×　(3)√　(4)×　(5)×

二、1.**C**　[$\because a_5^2=a_3a_7=2\times8=16,\therefore a_5=\pm4$.

又$\because a_5=a_3q^2>0,\therefore a_5=4$.]

2.**D**　[由$S_3=a_1+a_2+a_3=a_3(q^{-2}+q^{-1}+1)$,得$q^{-2}+q^{-1}+1=3$,即$2q^2-q-1=0$,

解得$q=1$或$q=-\frac{1}{2}$.

$\therefore a_2=\frac{a_3}{q}=\frac{3}{2}$或$-3$.故选D.]

3.1,3,9 或 9,3,1　[设这三个数为$\frac{a}{q}$,a,aq,

则$\begin{cases}a+\frac{a}{q}+aq=13,\\ a\cdot\frac{a}{q}\cdot aq=27,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=3,\\ q=\frac{1}{3}\end{cases}$或$\begin{cases}a=3,\\ q=3,\end{cases}$

∴这三个数为1,3,9或9,3,1.]

4.752　[设球每次着地后跳回的高度构成数列$\{a_n\}$,则数列$\{a_n\}$为等比数列,$a_1=128$,$q=\frac{1}{2}$,

$S_5=\frac{128\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]}{1-\frac{1}{2}}=248$,

共经过的路程为$256+2S_5=752$(m).]

考点一

典例1　(1)**D**　(2)**B**　[(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,$q\neq0$,

若$q=1$,则$a_2-a_5=0$,与题意矛盾,

所以$q\neq1$,

则$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=168,\\ a_2-a_5=a_1q-a_1q^4=42,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=96,\\ q=\frac{1}{2},\end{cases}$

所以$a_6=a_1q^5=3$.

故选D.

(2)**法一**:设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,

则由$\begin{cases}a_5-a_3=a_1q^4-a_1q^2=12,\\ a_6-a_4=a_1q^5-a_1q^3=24,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=1,\\ q=2,\end{cases}$

所以$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=2^n-1$,$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$,所以$\frac{S_n}{a_n}=\frac{2^n-1}{2^{n-1}}=2-2^{1-n}$,故选B.

法二:设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,因为$\frac{a_6-a_4}{a_5-a_3}=\frac{a_4(1-q^2)}{a_3(1-q^2)}=\frac{a_4}{a_3}=\frac{24}{12}=2$,所以$q=2$,所以$\frac{S_n}{a_n}=\frac{\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}}{a_1q^{n-1}}=\frac{2^n-1}{2^{n-1}}=2-2^{1-n}$,故选B.]

跟进训练

1.(1)**AB**　(2)63　[(1)$\because a_{n+1}=2a_n+1$,

$\therefore a_{n+1}+1=2(a_n+1)$,

又$a_1+1=2$,∴数列$\{a_n+1\}$是以2为首项,2为公比的等比数列,故B正确;$a_n+1=2^n$,$\therefore a_n=2^n-1$,故C错误;$a_3=7$,故A正确;$S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2$,故D错误.故选AB.

(2)设正项递增的等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>1)$,

因为$a_2a_4=a_3^2=16$,所以$a_3=4$.

又因为$2a_3+2=a_2+a_4$,可得$\frac{4}{q}+4q=2\times4+2=10$,解得$q=2$或$q=\frac{1}{2}$(舍去).又由$a_3=a_1q^2=4$,解得$a_1=1$,所以$S_6=\frac{1-2^6}{1-2}=63$.]

考点二

典例2　(1)**AD**　[对于A,由$\frac{a_na_{n+1}}{a_{n-1}a_n}=q^2(n\geqslant2)$知数列$\{a_na_{n+1}\}$是公比为$q^2$的等比数列;对于B,当$q=-1$时,数列$\{a_n+a_{n+1}\}$的项中有0,不是等比数列;对于C,当$q=1$时,数列$\{a_n-a_{n+1}\}$的项中有0,不是等比数列;对于D,$\frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{q}$,所以数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是公比为$\frac{1}{q}$的等比数列.]

(2)**证明**:①依题意$\begin{cases}2a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2}b_n,\\ 2b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+b_n,\end{cases}$

两式相加,得$a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{3}{4}(a_n+b_n)$.

又$\because a_1+b_1=\frac{3}{2}\neq0$,

$\therefore\{a_n+b_n\}$是首项为$\frac{3}{2}$,公比为$\frac{3}{4}$的等比数列,

两式相减,得$a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n-b_n)$.

又$\because a_1-b_1=\frac{1}{2}\neq0$,

$\therefore\{a_n-b_n\}$是首项为$\frac{1}{2}$,公比为$\frac{1}{4}$的等比数列.

②由①得,$a_n+b_n=\frac{3}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$,　①

$a_n-b_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$,　②

①+②得,$a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n$,

故 $S_n=\dfrac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}+\dfrac{\frac{3}{4}\left(1-\frac{3^n}{4^n}\right)}{1-\frac{3}{4}}=\dfrac{10}{3}-\dfrac{1}{3\times 4^n}-\dfrac{3^{n+1}}{4^n}$

$<\dfrac{10}{3}$.

跟进训练

2.(1)**B** [若 a,b,c,d 为 $1,-1,1,-1$,则 $a+b,b+c,c+d$ 不为等比数列,①不符合;

由 a,b,c,d 必非零且公比为 q,可知 ab,bc,cd 也非零且公比为 q^2,②符合;

若 a,b,c,d 为 $1,1,1,1$,则 $a-b,b-c,c-d$ 不为等比数列,③不符合.故选 B.]

(2)**解**:①由题意可得$\begin{cases}a_1q^3=9a_1q,\\ \dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=13,\\ q>0,且\ q\neq 1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\ q=3,\end{cases}$

所以 $a_n=3^{n-1}$,$S_n=\dfrac{1-3^n}{1-3}=\dfrac{3^n-1}{2}$.

②假设存在常数 λ,使得数列$\{S_n+\lambda\}$是等比数列.

因为 $S_1+\lambda=\lambda+1$,$S_2+\lambda=\lambda+4$,$S_3+\lambda=\lambda+13$,

所以$(\lambda+4)^2=(\lambda+1)(\lambda+13)$,解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$,此时$S_n+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\times 3^n$,则$\dfrac{S_{n+1}+\frac{1}{2}}{S_n+\frac{1}{2}}=3$.

故存在常数 $\lambda=\dfrac{1}{2}$,使得数列$\left\{S_n+\dfrac{1}{2}\right\}$是等比数列.

考点三

典例 3 (1)**C** (2)**A** (3)2 [(1)由等比数列的性质可得 $a_2a_3a_4=a_3^3=1$,$a_6a_7a_8=a_7^3=64$,$\therefore a_3=1$,$a_7=4$,$\therefore a_5^2=a_3a_7=4$,又 a_5 与 a_3 和 a_7 同号,$\therefore a_5=2$.故选 C.

(2)因为 S_n 为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和,$S_2=4$,$S_4=6$,

由等比数列的性质,可知 S_2,S_4-S_2,S_6-S_4 成等比数列,

所以 $4,2,S_6-6$ 成等比数列,

所以 $2^2=4(S_6-6)$,解得 $S_6=7$.故选 A.

(3)由题意得$\begin{cases}S_{奇}+S_{偶}=-240,\\ S_{奇}-S_{偶}=80,\end{cases}$

解得$\begin{cases}S_{奇}=-80,\\ S_{偶}=-160,\end{cases}$

所以 $q=\dfrac{S_{偶}}{S_{奇}}=\dfrac{-160}{-80}=2$.]

跟进训练

3.(1)**BD** (2)$\dfrac{1}{2}$ 15 [(1)由题意知,递增的等比数列包括两种情况:$a_1>0$ 时 $q>1$ 和 $a_1<0$ 时 $0<q<1$.故 $q>0$,$a_1(q-1)>0$,故选 BD.

(2)因为 $a_1+a_2=48$,所以由 $a_4+a_5=6$,

可得 $q^3(a_1+a_2)=6$,$q^3=\dfrac{1}{8}$,$q=\dfrac{1}{2}$.

由 $a_1+a_2=48$,可得 $a_1+\dfrac{1}{2}a_1=48\Rightarrow a_1=32$,

所以 $a_n=32\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{6-n}$,

$\log_2(a_1a_2a_3\cdots a_n)=\log_2(2^5\cdot 2^4\cdot\cdots\cdot 2^{6-n})=\log_2 2^{\frac{(5+6-n)n}{2}}$

$=\dfrac{n(11-n)}{2}$,

因为$\dfrac{n(11-n)}{2}=-\dfrac{1}{2}\left(n-\dfrac{11}{2}\right)^2+\dfrac{121}{8}$,$n\in\mathbf{N}^*$,

所以 $n=5$ 或 6 时,$\dfrac{n(11-n)}{2}$有最大值,最大值为 15.]

第 4 课时　数列求和

激活·基本技能

一、(1)√ (2)√ (3)× (4)√

二、1.**B** [$\because a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$,$\therefore S_5=a_1+a_2+\cdots+a_5=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$.]

2.**D** [$S_{100}=(-1+3)+(-5+7)+\cdots+(-197+199)=2\times 50=100$.]

3.**C** [$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$=(2^1+2\times1-1)+(2^2+2\times2-1)+(2^3+2\times3-1)+\cdots+(2^n+2n-1)=(2+2^2+\cdots+2^n)+2(1+2+3+\cdots+n)-n$

$=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}+2\times\dfrac{n(n+1)}{2}-n$

$=2(2^n-1)+n^2+n-n=2^{n+1}+n^2-2$.]

4.$\begin{cases}\dfrac{1-a^n}{(1-a)^2}-\dfrac{na^n}{1-a},a\neq 1,\\ \dfrac{n(n+1)}{2},a=1\end{cases}$ [记 $S_n=1+2a+3a^2+\cdots+na^{n-1}$,

当 $a=1$ 时,$S_n=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$;

当 $a\neq 1$ 时,$aS_n=a+2a^2+3a^3+\cdots+(n-1)a^{n-1}+na^n$,

$(1-a)S_n=1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-1}-na^n$.

所以 $S_n=\dfrac{1-a^n}{(1-a)^2}-\dfrac{na^n}{1-a}$,

原式$=\begin{cases}\dfrac{1-a^n}{(1-a)^2}-\dfrac{na^n}{1-a},a\neq 1,\\ \dfrac{n(n+1)}{2},a=1.\end{cases}$]

考点一

考向 1 **典例** 1 (1)**证明**:由题意可知,$b_1=a_1=1$,

$b_{n+1}=a_{2n+1}=2a_{2n}=2(a_{2n-1}+1)=2a_{2n-1}+2=2b_n+2$,

故 $b_{n+1}+2=2(b_n+2)$,即$\dfrac{b_{n+1}+2}{b_n+2}=2$,

故$\{b_n+2\}$是以 $b_1+2=3$ 为首项,以 $q=2$ 为公比的等比数列,且 $b_n+2=3\cdot 2^{n-1}$,$n\in\mathbf{N}^*$,

故 $b_n=3\cdot 2^{n-1}-2$,$n\in\mathbf{N}^*$.

(2)**解**:由(1)知,$b_n=3\cdot 2^{n-1}-2$,$n\in\mathbf{N}^*$,即 $a_{2n-1}=3\cdot 2^{n-1}-2$,$n\in\mathbf{N}^*$,

由 $a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1,n\ 为奇数,\\ 2a_n,n\ 为偶数\end{cases}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$,

故 $a_{2n}=a_{2n-1}+1$,$n\in\mathbf{N}^*$,

故数列$\{a_n\}$的前$2n$项和$S_{2n}=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n})$

$=2(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})+n$

$=2[3(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})-2n]+n$

$=6\times\frac{1-2^n}{1-2}-3n=6(2^n-1)-3n$.

考向2　典例2　解:(1)设数列$\{a_n\}$的公差为d,由$S_5=5a_3=25$得$a_3=a_1+2d=5$,

又$a_5=9=a_1+4d$,所以$d=2,a_1=1$,

所以$a_n=2n-1,S_n=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$.

(2)结合(1)知$b_n=(-1)^n n^2$,

当n为偶数时,

$T_n=(b_1+b_2)+(b_3+b_4)+(b_5+b_6)+\cdots+(b_{n-1}+b_n)$

$=(-1^2+2^2)+(-3^2+4^2)+(-5^2+6^2)+\cdots+[-(n-1)^2+n^2]$

$=(2-1)(2+1)+(4-3)(4+3)+(6-5)\cdot(6+5)+\cdots+[n-(n-1)][n+(n-1)]$

$=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

当n为奇数时,$n-1$为偶数,

$T_n=T_{n-1}+(-1)^n\cdot n^2=\frac{(n-1)n}{2}-n^2=-\frac{n(n+1)}{2}$.

综上可知,$T_n=\frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$.

跟进训练

1.**解**:(1)设等比数列$\{a_n\}$的首项为a_1,公比为$q(q>1)$.由题设得$a_1q+a_1q^3=20,a_1q^2=8$.

解得$q=\frac{1}{2}$(舍去),$q=2$.由题设得$a_1=2$.

所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^n$.

(2)由题设及(1)知$b_1=0$,且当$2^n\leqslant m<2^{n+1}$时,$b_m=n$.

所以$S_{100}=b_1+(b_2+b_3)+(b_4+b_5+b_6+b_7)+\cdots+(b_{32}+b_{33}+\cdots+b_{63})+(b_{64}+b_{65}+\cdots+b_{100})=0+1\times2+2\times2^2+3\times2^3+4\times2^4+5\times2^5+6\times(100-63)=480$.

考点二

考向1　典例3　(1)**解**:$\because a_1=1,\therefore S_1=a_1=1,\therefore\frac{S_1}{a_1}=1$,

又$\because\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是公差为$\frac{1}{3}$的等差数列,

$\therefore\frac{S_n}{a_n}=1+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{n+2}{3}$,

$\therefore S_n=\frac{(n+2)a_n}{3}$,

$\therefore$当$n\geqslant2$时,$S_{n-1}=\frac{(n+1)a_{n-1}}{3}$,

$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{(n+2)a_n}{3}-\frac{(n+1)a_{n-1}}{3}$,

整理得$(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}$,

即$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}(n\geqslant2)$,

$\therefore a_n=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\frac{a_n}{a_{n-1}}$

$=\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-2}\times\frac{n+1}{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}(n\geqslant2)$,

显然对于$n=1$也成立,

$\therefore\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

(2)**证明**:由(1)知$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$,$\therefore\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

$\therefore\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<2$.

考向2　典例4　$\sqrt{n}$　$2\sqrt{2}-1$　[$\triangle OA_nA_{n+1}$是以$\angle OA_nA_{n+1}$为直角的直角三角形,由勾股定理可得$a_{n+1}^2=a_n^2+1$,所以数列$\{a_n^2\}(n\in\mathbf{N}^*,1\leqslant n\leqslant8)$为等差数列,且首项为$a_1^2=1$,公差为$d=1$,所以$a_n^2=n$,

因为$a_n>0$,所以$a_n=\sqrt{n}$.

则$b_n=\frac{1}{a_n+a_{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}$

$=-\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$,

因此,数列$\{b_n\}$的前7项和为$S_7=(-1+\sqrt{2})+(-\sqrt{2}+\sqrt{3})+\cdots+(-\sqrt{7}+\sqrt{8})=2\sqrt{2}-1$.]

考向3　典例5　解:(1)当$n\geqslant2$时,$a_n=S_{n-1}+1$,

又$a_{n+1}=S_n+1$,

所以$a_{n+1}-a_n=S_n-S_{n-1}=a_n$,

即$a_{n+1}=2a_n(n\geqslant2)$,

在$a_{n+1}=S_n+1$中,令$n=1$,可得$a_2=a_1+1$,

因为$a_1=1$,所以$a_2=2a_1=2$,

故$\{a_n\}$是首项为1,公比为2的等比数列,

其通项公式为$a_n=2^{n-1}$,

所以$S_n=a_{n+1}-1=2^n-1$.

(2)因为$b_n=\frac{S_{n+1}-S_n}{S_nS_{n+1}}=\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$,

所以$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}$.

故$T_n=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}$.

考向4　典例6　(1)**解**:由$S_n^2-(n^2+n-1)S_n-(n^2+n)=0$,得$[S_n-(n^2+n)](S_n+1)=0$.

由于$\{a_n\}$是正项数列,所以$S_n>0,S_n=n^2+n$.

于是$a_1=S_1=2$,当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-(n-1)^2-(n-1)=2n$.当$n=1$时,也满足此式.

综上,数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n$.

(2)**证明**:由于$a_n=2n$,

故$b_n=\frac{n+1}{(n+2)^2a_n^2}=\frac{n+1}{4n^2(n+2)^2}=\frac{1}{16}\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]$.

$T_n=\frac{1}{16}\left[1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]=\frac{1}{16}\left[1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]<\frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)=\frac{5}{64}$.

跟进训练

2.**解**:(1)由题意得当 $n=1$ 时,$a_2=b_1=6$,

故 $a_n=6+2(n-2)=2n+2$,

由于 $b_1+\frac{b_2}{2}+\frac{b_3}{3}+\cdots+\frac{b_n}{n}=a_{n+1}$, ①

当 $n\geqslant2$ 时,$b_1+\frac{b_2}{2}+\frac{b_3}{3}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{n-1}=a_n$, ②

①−②得 $\frac{b_n}{n}=a_{n+1}-a_n=2$,

所以 $b_n=2n$.

所以 $b_n=\begin{cases}6,n=1,\\2n,n\geqslant2.\end{cases}$

(2)当 $n=1$ 时,$S_1=\frac{1}{a_1b_1}=\frac{1}{4\times6}=\frac{1}{24}$.

当 $n\geqslant2$ 时,$\frac{1}{a_nb_n}=\frac{1}{2n(2n+2)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

则 $S_n=\frac{1}{24}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{1}{24}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{2n-1}{12(n+1)}$,

当 $n=1$ 时满足上式,故 $S_n=\frac{2n-1}{12(n+1)}$.

考点三

典例 7 解:(1)当 $n=1$ 时,$2S_1=a_1$,即 $2a_1=a_1$,所以 $a_1=0$.

当 $n\geqslant2$ 时,由 $2S_n=na_n$,得 $2S_{n-1}=(n-1)a_{n-1}$,

两式相减得 $2a_n=na_n-(n-1)a_{n-1}$,

即 $(n-1)a_{n-1}=(n-2)a_n$,

当 $n=2$ 时,可得 $a_1=0$,

故当 $n\geqslant3$ 时,$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n-2}$,

则 $\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_3}{a_2}=\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-2}{n-3}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{1}$,

整理得 $\frac{a_n}{a_2}=n-1$,

因为 $a_2=1$,所以 $a_n=n-1(n\geqslant3)$.

当 $n=1,n=2$ 时,均满足上式,所以 $a_n=n-1$.

(2)令 $b_n=\frac{a_{n+1}}{2^n}=\frac{n}{2^n}$,

则 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}+b_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}$, ①

$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$, ②

由①−②得 $\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{2+n}{2^{n+1}}$,即 $T_n=2-\frac{2+n}{2^n}$.

跟进训练

3.(1)**解**:设 $\{a_n\}$ 的公比为 q,则 $a_n=q^{n-1}$.

因为 $a_1,3a_2,9a_3$ 成等差数列,所以 $1+9q^2=2\times3q$,解得 $q=\frac{1}{3}$,

故 $a_n=\frac{1}{3^{n-1}}$,$b_n=\frac{n}{3^n}$.

(2)**证明**:由(1)知 $S_n=\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$,

$T_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^n}$, ①

$\frac{1}{3}T_n=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{3^4}+\cdots+\frac{n-1}{3^n}+\frac{n}{3^{n+1}}$, ②

①−②得 $\frac{2}{3}T_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}$,

即 $\frac{2}{3}T_n=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{n}{3^{n+1}}$,

整理得 $T_n=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\times3^n}$,

则 $2T_n-S_n=2\left(\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\times3^n}\right)-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)=-\frac{n}{3^n}<0$,

故 $T_n<\frac{S_n}{2}$.

高考培优 7 数列的综合应用

题型一

典例 1 解:(1)由题意,$b_1=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{20}\right)=\frac{2}{25}$,

$a_1=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{25}+5\times\frac{1}{5}\right)=\frac{9}{50}$.

$\because b_{n+1}=\frac{a_n+4b_n}{5}$,$a_{n+1}=\frac{1}{6}(5a_n+b_{n+1})=\frac{26a_n+4b_n}{30}$,

$\therefore a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{2}{3}(a_n-b_n)$,$\therefore\{a_n-b_n\}$ 是等比数列.

(2)由(1)知 $a_n-b_n=\frac{1}{10}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$,

$\therefore\frac{1}{10}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}<1\%$,$\therefore n-1>\frac{1}{\lg3-\lg2}\approx5.7$,

$\therefore n\geqslant7$,故至少操作 7 次.

(3)$\because b_{n+1}=\frac{1}{5}\left[b_n+\frac{1}{10}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+4b_n\right]$,

$\therefore b_{n+1}-b_n=\frac{3}{100}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$,

$\therefore b_n=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_n-b_{n-1})$

$=\frac{2}{25}+\frac{3}{100}\times\left[\frac{2}{3}+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]$

$=-\frac{9}{100}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{7}{50}$.

$\therefore a_n=b_n+\frac{1}{10}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{3}{50}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{7}{50}$.

跟进训练

1.**解**:(1)2024 年投入 1 000 万元,第 n 年投入为 $1\ 000\times\left(1-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$万元,

所以 n 年内的总投入为

$S_n=1\ 000+1\ 000\left(1-\frac{1}{5}\right)+\cdots+1\ 000\left(1-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

$=\dfrac{1000\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]}{1-\frac{4}{5}}$

$=5\ 000\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]$,

2024 年旅游业收入为 500 万元,第 2 年旅游业收入为 $500\times\left(1+\frac{1}{4}\right)$万元,

第 n 年旅游业收入为 $500\times\left(1+\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ 万元.

所以 n 年内的旅游业总收入为

$T_n=500+500\times\left(1+\frac{1}{4}\right)+\cdots+500\times\left(1+\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$=\dfrac{500\left[1-\left(\frac{5}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{5}{4}}$

$=2\ 000\times\left[\left(\frac{5}{4}\right)^n-1\right]$.

(2)设至少到第 n 年,旅游业的总收入才能超过总投入,由此 $T_n-S_n>0$,

即 $2\ 000\times\left[\left(\frac{5}{4}\right)^n-1\right]-5\ 000\times\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]>0$,

化简得 $5\times\left(\frac{4}{5}\right)^n+2\times\left(\frac{5}{4}\right)^n-7>0$,

设 $x=\left(\frac{4}{5}\right)^n$,代入上式得 $5x^2-7x+2>0$,解此不等式,得 $x<\frac{2}{5}$或 $x>1$(舍去).

即$\left(\frac{4}{5}\right)^n<\frac{2}{5}$,则 $n\lg\frac{4}{5}<\lg\frac{2}{5}$,$n>\dfrac{\lg\frac{2}{5}}{\lg\frac{4}{5}}=\dfrac{\lg 2-\lg 5}{\lg 4-\lg 5}=\dfrac{2\lg 2-1}{3\lg 2-1}\approx4.1$,由此得 $n\geqslant5$.

即至少到 2028 年,旅游业的总收入才能超过总投入.

题型二

考向 1 典例 2 (1)**解**:$\because 4S_n=a_na_{n+1}$,$n\in\mathbf{N}^*$,

$\therefore 4a_1=a_1\cdot a_2$,又 $a_1=2$,$\therefore a_2=4$.

当 $n\geqslant2$ 时,$4S_{n-1}=a_{n-1}a_n$,得 $4a_n=a_na_{n+1}-a_{n-1}a_n$.

由题意知 $a_n\neq0$,$\therefore a_{n+1}-a_{n-1}=4$.

当 $n=2k+1$,$k\in\mathbf{N}^*$ 时,$a_{2k+2}-a_{2k}=4$,即 $a_2,a_4,\cdots,a_{2k}$ 是首项为 4,公差为 4 的等差数列,

$\therefore a_{2k}=4+(k-1)\times4=4k=2\times2k$;

当 $n=2k$,$k\in\mathbf{N}^*$ 时,$a_{2k+1}-a_{2k-1}=4$,

即 $a_1,a_3,\cdots,a_{2k-1}$ 是首项为 2,公差为 4 的等差数列,

$\therefore a_{2k-1}=2+(k-1)\times4=4k-2=2(2k-1)$.

综上可知,$a_n=2n$,$n\in\mathbf{N}^*$.

(2)**证明**:$\because \frac{1}{a_n^2}=\frac{1}{4n^2}>\frac{1}{4n(n+1)}$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

$\therefore T_n=\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}$

$>\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{4n+4}$.

又$\because \frac{1}{a_n^2}=\frac{1}{4n^2}<\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$,

$\therefore T_n=\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}<\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)<\frac{1}{2}$.

即得$\frac{n}{4n+4}<T_n<\frac{1}{2}$.

考向 2 典例 3 解:(1)因为 $4S_{n+1}=3S_n-9$,

所以当 $n\geqslant2$ 时,$4S_n=3S_{n-1}-9$,

两式相减可得 $4a_{n+1}=3a_n$,即$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{4}$.

当 $n=1$ 时,$4S_2=4\left(-\frac{9}{4}+a_2\right)=-\frac{27}{4}-9$,解得 $a_2=-\frac{27}{16}$,

所以$\frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{4}$.

所以数列$\{a_n\}$是首项为$-\frac{9}{4}$,公比为$\frac{3}{4}$的等比数列,

所以 $a_n=-\frac{9}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=-\frac{3^{n+1}}{4^n}$.

(2)因为 $3b_n+(n-4)a_n=0$,

所以 $b_n=(n-4)\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

所以 $T_n=-3\times\frac{3}{4}-2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2-1\times\left(\frac{3}{4}\right)^3+0\times\left(\frac{3}{4}\right)^4+\cdots+(n-4)\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$, ①

且$\frac{3}{4}T_n=-3\times\left(\frac{3}{4}\right)^2-2\times\left(\frac{3}{4}\right)^3-1\times\left(\frac{3}{4}\right)^4+0\times\left(\frac{3}{4}\right)^5+\cdots+(n-5)\times\left(\frac{3}{4}\right)^n+(n-4)\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$, ②

①-②得$\frac{1}{4}T_n=-3\times\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^n-(n-4)\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}=-\frac{9}{4}+\dfrac{\frac{9}{16}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{3}{4}}-(n-4)$

$\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}=-n\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$,

所以 $T_n=-4n\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$.

因为 $T_n\leqslant\lambda b_n$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立,

所以 $-4n\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\leqslant\lambda(n-4)\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$ 恒成立,

即 $-3n\leqslant\lambda(n-4)$ 恒成立,

当 $n<4$ 时,$\lambda\leqslant\frac{-3n}{n-4}=-3-\frac{12}{n-4}$,此时 $\lambda\leqslant1$;

当 $n=4$ 时,$-12\leqslant0$ 恒成立;

当 $n>4$ 时,$\lambda\geqslant\frac{-3n}{n-4}=-3-\frac{12}{n-4}$,此时 $\lambda\geqslant-3$.

所以 $-3\leqslant\lambda\leqslant1$.

跟进训练

2.(1)**解**:①设等差数列$\{a_n\}$的公差为 $d(d\neq0)$,

$$\therefore\begin{cases}a_1+2d=5a_1+\frac{5(5-1)}{2}d, & \text{(i)}\\(a_1+d)(a_1+3d)=4a_1+\frac{4(4-1)}{2}d, & \text{(ii)}\end{cases}$$

由(i)得 $a_1+2d=0\Rightarrow a_1=-2d$,代入(ii)得$(-d)\cdot d=-8d+6d\Rightarrow d^2-2d=0$,

$\because d\neq0$,$\therefore d=2$,$\therefore a_1=-4$,

$\therefore a_n=-4+2(n-1)=2n-6$.

②$S_n=-4n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot2=n^2-5n$,

由 $S_n>a_n\Rightarrow n^2-5n>2n-6$,$\therefore n^2-7n+6>0$,解得 $n<1$ 或 $n>6$,又 $n\in\mathbf{N}^*$.

所以 n 的最小值为 7.

(2)**解**:①由题意,得$\frac{S_n}{n}=n+4$,即 $S_n=n^2+4n$,故当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+4n-(n-1)^2-4(n-1)=2n+3$,

$\because n=1$ 时,$a_1=S_1=5$,符合上式,

$\therefore a_n=2n+3$,$n\in\mathbf{N}^*$.

又 $b_{n+2}-2b_{n+1}+b_n=0$,

$\therefore\{b_n\}$为等差数列,$\therefore\frac{11(b_4+b_8)}{2}=154$,

$\because b_4=8$,$\therefore b_8=20$,$\therefore d=\frac{20-8}{8-4}=3$,

$\therefore b_n=b_4+3(n-4)=3n-4$,

即 $b_n=3n-4$,$n\in\mathbf{N}^*$.

②$c_n=\frac{3}{2(a_n-2)(2b_n+5)}$

$=\frac{3}{2[(2n+3)-2][2\cdot(3n-4)+5]}$

$=\frac{3}{2(2n+1)(6n-3)}$

$=\frac{1}{2(2n+1)(2n-1)}$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$.

$\therefore T_n=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{4n+2}$.

$\because T_{n+1}-T_n=\frac{n+1}{4n+6}-\frac{n}{4n+2}=\frac{1}{(4n+6)(2n+1)}>0$,

$\therefore T_n$ 单调递增,故$(T_n)_{\min}=\frac{1}{6}$,

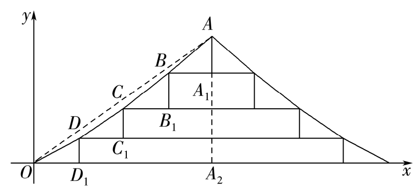
令$\frac{1}{6}>\frac{k}{75}$,得 $k<12\frac{1}{2}$,$\therefore k_{\max}=12$.

$\therefore$使不等式 $T_n>\frac{k}{75}$对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立的最大正整数 k 的值为 12.

高考研究在线 5　传统文化中的数列建模与创新应用

命题点一

典例 1　(1)**D**　(2)5　$240\left(3-\frac{n+3}{2^n}\right)$　[(1)如图,连接 OA,延长 AA_1 与 x 轴交于点 A_2,则 $OA_2=4OD_1$.因为 k_1,k_2,k_3 成公差为 0.1 的等差数列,所以 $k_1=k_3-0.2$,$k_2=k_3-0.1$,所以 $CC_1=DC_1(k_3-0.2)$,$BB_1=CB_1(k_3-0.1)$,$AA_1=k_3BA_1$,即 $CC_1=OD_1(k_3-0.2)$,$BB_1=OD_1(k_3-0.1)$,$AA_1=k_3OD_1$.又$\frac{DD_1}{OD_1}=0.5$,所以 $DD_1=0.5OD_1$,所以 $AA_2=0.5OD_1+OD_1(k_3-0.2)+OD_1(k_3-0.1)+k_3OD_1=OD_1\cdot(3k_3+0.2)$,所以 $\tan\angle AOA_2=\frac{AA_2}{OA_2}=\frac{OD_1(3k_3+0.2)}{4OD_1}=0.725$,解得 $k_3=0.9$,故选 D.



(2)依题意得,$S_1=120\times2=240$;$S_2=60\times3=180$;

当 $n=3$ 时,共可以得到 5 dm×6 dm,$\frac{5}{2}$ dm×12 dm,10 dm×3 dm,20 dm×$\frac{3}{2}$ dm四种规格的图形,且 $5\times6=30$,$\frac{5}{2}\times12=30$,$10\times3=30$,$20\times\frac{3}{2}=30$,所以 $S_3=30\times4=120$;

当 $n=4$ 时,共可以得到 5 dm×3 dm,$\frac{5}{2}$ dm×6 dm,$\frac{5}{4}$ dm×12 dm,10 dm×$\frac{3}{2}$ dm,20 dm×$\frac{3}{4}$ dm 五种规格的图形,所以对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数为 5,且 $5\times3=15$,$\frac{5}{2}\times6=15$,$\frac{5}{4}\times12=15$,$10\times\frac{3}{2}=15$,$20\times\frac{3}{4}=15$,所以 $S_4=15\times5=75$;

……

所以可归纳 $S_k=\frac{240}{2^k}\times(k+1)=\frac{240(k+1)}{2^k}$.

所以$\sum_{k=1}^{n}S_k=240\left(1+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{n+1}{2^n}\right)$，　①

所以$\frac{1}{2}\times\sum_{k=1}^{n}S_k=240\left(\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)$，　②

由①－②得，

$\frac{1}{2}\times\sum_{k=1}^{n}S_k=240\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)$

$=240\left(1+\frac{\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)=240\left(\frac{3}{2}-\frac{n+3}{2^{n+1}}\right)$，

所以$\sum_{k=1}^{n}S_k=240\left(3-\frac{n+3}{2^n}\right)(\mathrm{dm}^2)$.]

跟进训练

1. $\frac{15}{16}\pi R^2$　$\pi R^2\left(n+\frac{1}{2^n}-1\right)$　[因为$S_1=\frac{\pi R^2}{2}$，$S_2=\frac{3\pi R^2}{4}$，

所以$S_k=\pi R^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)$

$=\pi R^2\cdot\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\pi R^2\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$，

所以$S_4=\pi R^2\left(1-\frac{1}{2^4}\right)=\frac{15}{16}\pi R^2$.

$\sum_{k=1}^{n}S_k=\pi R^2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right]$

$=\pi R^2\left[n-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)\right]$

$=\pi R^2\left[n-\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}\right]$

$=\pi R^2\left(n+\frac{1}{2^n}-1\right)$.]

命题点二

典例2　**ACD**　[对于A，$\omega(n)=a_0+a_1+\cdots+a_k$，$2n=a_0\cdot2^1+a_1\cdot2^2+\cdots+a_{k-1}\cdot2^k+a_k\cdot2^{k+1}$，

$\therefore\omega(2n)=a_0+a_1+\cdots+a_k=\omega(n)$，故A正确；

对于B，取$n=2$知，$2n+3=7=1\cdot2^0+1\cdot2^1+1\cdot2^2$，

$\therefore\omega(7)=3$，而$2=0\cdot2^0+1\cdot2^1$，$\omega(2)=0+1=1$，$\omega(7)=3\neq\omega(2)+1$，故B错误；

对于C，$8n+5=a_0\cdot2^3+a_1\cdot2^4+\cdots+a_k\cdot2^{k+3}+5$

$=1\cdot2^0+1\cdot2^2+a_0\cdot2^3+a_1\cdot2^4+\cdots+a_k\cdot2^{k+3}$，

$\therefore\omega(8n+5)=1+1+a_0+a_1+\cdots+a_k=a_0+a_1+\cdots+a_k+2$，

$4n+3=a_0\cdot2^2+a_1\cdot2^3+\cdots+a_k\cdot2^{k+2}+3$

$=1\cdot2^0+1\cdot2^1+a_0\cdot2^2+a_1\cdot2^3+\cdots+a_k\cdot2^{k+2}$，

$\therefore\omega(4n+3)=1+1+a_0+a_1+\cdots+a_k=a_0+a_1+\cdots+a_k+2$，$\therefore\omega(8n+5)=\omega(4n+3)$，故C正确；

对于D，$2^n-1=2^0+2^1+\cdots+2^{n-1}=1\cdot2^0+1\cdot2^1+\cdots+1\cdot2^{n-1}$，$\therefore\omega(2^n-1)=n$，故D正确．故选ACD.]

跟进训练

2. **ABD**　[$\varphi(5)=4$，$\varphi(8)=4$，$\therefore\varphi(5)=\varphi(8)$，故A正确；

$\because2$为质数，$\therefore$在不超过2^n的正整数中，所有偶数的个数为2^{n-1}，$\therefore\varphi(2^n)=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$，$\{\varphi(2^n)\}$为等比数列，故B正确；

$\because$与3^n互质的数为$1,2,4,5,7,8,10,11,\cdots,3^n-2,3^n-1$，共有$(3-1)\cdot3^{n-1}=2\cdot3^{n-1}$个，$\therefore\varphi(3^n)=2\cdot3^{n-1}$，

又$\because\varphi(6^n)=\varphi(2^n)\varphi(3^n)=2\cdot6^{n-1}$，

$\therefore\{\varphi(6^n)\}$是递增数列，故C错误；

$\varphi(6^n)=2\cdot6^{n-1}$，记$\left\{\frac{n}{\varphi(6^n)}\right\}$的前$n$项和为$S_n$，则$S_n=\frac{1}{2\times6^0}+\frac{2}{2\times6^1}+\cdots+\frac{n}{2\times6^{n-1}}$，

$\frac{1}{6}S_n=\frac{1}{2\times6^1}+\frac{2}{2\times6^2}+\cdots+\frac{n}{2\times6^n}$，

$\therefore\frac{5}{6}S_n=\frac{1}{2\times6^0}+\frac{1}{2\times6^1}+\frac{1}{2\times6^2}+\cdots+\frac{1}{2\times6^{n-1}}-\frac{n}{2\times6^n}$

$=\frac{\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{6^n}\right)}{1-\frac{1}{6}}-\frac{n}{2\times6^n}$

$=\frac{3}{5}-\frac{3}{5\times6^n}-\frac{n}{2\times6^n}$，

$\therefore S_n=\frac{18}{25}-\frac{18}{25\times6^n}-\frac{3n}{5\times6^n}<\frac{18}{25}$，

$\therefore$数列$\left\{\frac{n}{\varphi(6^n)}\right\}$的前$n$项和小于$\frac{18}{25}$，故D正确．

故选ABD.]

命题点三

跟进训练

3. **解**：(1)因为$a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1,n\text{为奇数},\\a_n+2,n\text{为偶数},\end{cases}$且$b_n=a_{2n-1}$，所以

$a_2=a_1+1=2$，$b_1=a_1=1$，$b_2=a_3=a_2+2=4$，

所以$b_{n+1}=a_{2n+1}=a_{2n}+2=a_{2n-1}+1+2=a_{2n-1}+3=b_n+3$，

$\therefore b_{n+1}-b_n=3$，

$\therefore\{b_n\}$是以1为首项，3为公差的等差数列，所以$b_n=3n-2$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(2)设$\left\{\frac{a_n}{1\,011}\right\}$的前2 022项和为$S_{2\,022}$，则$S_{2\,022}=\frac{1}{1\,011}[(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2\,021})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2\,022})]$

$=\frac{1}{1\,011}\{(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{1\,011})+[(b_1+1)+(b_2+1)+(b_3+1)+\cdots+(b_{1\,011}+1)]\}$

$=\frac{2(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{1\,011})+1\,011}{1\,011}$

$=\frac{\frac{2(b_1+b_{1011})\times1\,011}{2}+1\,011}{1\,011}=1+3\times1\,011-2+1$

$=3\,033$.