答案详解

第七章　立体几何与空间向量

第1课时　基本立体图形、简单几何体的表面积与体积

梳理·必备知识

1.(1)平行　全等　平行　相似　平行且相等　一点　一点　平行四边形　三角形　梯形　(2)直棱柱　斜棱柱　正棱柱　平行六面体　(4)垂直　一点　一点　矩形　等腰三角形　等腰梯形　圆　矩形　扇形　扇环

2.(1)斜二测画法　(2)垂直　分别平行于坐标轴　不变　一半

3.$2\pi rl$　πrl　$\pi(r_1+r_2)l$

4.Sh　$\frac{1}{3}Sh$　$4\pi R^2$　$\frac{4}{3}\pi R^3$

激活·基本技能

一、(1)×　(2)×　(3)×　(4)×

二、1.**B**　[设球的半径为R,则$S=4\pi R^2=16\pi$,解得$R=2$,则球的体积$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{32}{3}\pi$.]

2.**C**　[由几何体的结构特征知,剩下的几何体为五棱柱.]

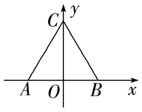
3.**B**　[设圆锥的底面圆的半径为r,母线长为l,因为侧面展开图是一个半圆,所以$\pi l=2\pi r$,即$l=2r$,所以$\pi r^2+\pi rl=\pi r^2+\pi r\cdot 2r=3\pi r^2=12\pi$,解得$r=2$.]

4.1∶47　[设长方体相邻三条棱的长分别为a,b,c,截出的棱锥的体积$V_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a\times\frac{1}{2}b\times\frac{1}{2}c=\frac{1}{48}abc$,剩下的几何体的体积$V_2=abc-\frac{1}{48}abc=\frac{47}{48}abc$,所以$V_1:V_2=1:47$.]

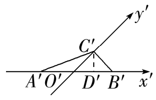
考点一

考向1　**典例1**　**D**　[选项A,有一个面是多边形,其余各面都是有一个公共顶点的三角形,由这些面所围成的多面体叫做棱锥,即其余各面的三角形必须有公共的顶点,故A错误;选项B,棱台是由棱锥被平行于棱锥底面的平面所截而得的,而有两个面平行且相似,其余各面都是梯形的多面体有可能不是棱台,因为它的侧棱延长后不一定交于一点,故B错误;选项C,当棱锥的各个侧面的共顶点的角之和是360°时,各侧面构成平面图形,故这个棱锥不可能为六棱锥,故C错误;选项D,若每个侧面都是长方形,则说明侧棱与底面垂直,又底面也是长方形,符合长方体的定义,故D正确.故选D.]

考向2　**典例2**　**D**　[**法一**:如图①②所示的实际图形和直观图,



图①



图②

由图②可知,$A'B'=AB=a$,$O'C'=\frac{1}{2}OC=\frac{\sqrt{3}}{4}a$,

在图②中作$C'D'\perp A'B'$于D',

则$C'D'=\frac{\sqrt{2}}{2}O'C'=\frac{\sqrt{6}}{8}a$,

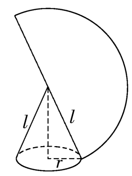
所以$S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}A'B'\times C'D'=\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{6}}{8}a=\frac{\sqrt{6}}{16}a^2$.

故选D.

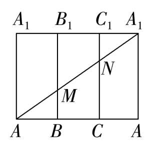
法二:$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times a\times a\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$,

又$S_{直观图}=\frac{\sqrt{2}}{4}S_{原图}=\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{6}}{16}a^2$.故选D.]

考向3　**典例3**　(1)**B**　(2)**A**　[(1)如图,设母线长为l,因为圆锥底面周长即为侧面展开图半圆的弧长,圆锥的母线长即为侧面展开图半圆的半径,则有$2\pi\cdot\sqrt{2}=\pi\cdot l$,解得$l=2\sqrt{2}$,所以该圆锥的母线长为$2\sqrt{2}$.故选B.

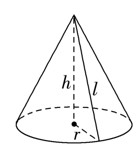


(2)正三棱柱的侧面展开图是如图所示的矩形,矩形的长为$3b$,宽为a,则其对角线AA_1的长为最短路程.因此蚂蚁爬行的最短路程为$\sqrt{a^2+9b^2}$.故选A.]



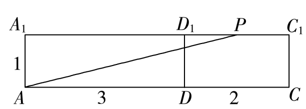
跟进训练

1.(1)**BCD**　(2)**B**　(3)$\sqrt{13}$　[(1)A选项,直角三角形绕斜边所在直线旋转一周得到的旋转体不是圆锥,故A不正确;B选项,以等腰三角形底边上的中线所在直线为轴,将三角形旋转一周形成的曲面围成的几何体是圆锥,故B正确;C选项,因为圆锥的母线长都相等,所以经过圆锥任意两条母线的截面是等腰三角形,故C正确;D选项,如图所示,圆锥侧面的母线长l有可能大于圆锥底面圆半径r的2倍(即直径),故D正确.故选BCD.

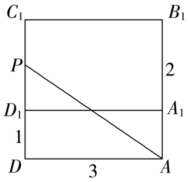


(2)因为圆锥的母线长为1,其侧面展开图是一个圆心角为120°的扇形,所以圆锥的底面周长为$1\times\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$,所以底面半径为$\frac{1}{3}$,高为$\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,所以轴截面面积为$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{9}$.故选B.

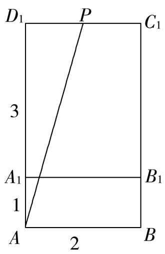
(3)如图所示,当质点经过棱DD_1时,$AP=\sqrt{AA_1^2+A_1P^2}=\sqrt{1^2+(3+1)^2}=\sqrt{17}$.



如图所示，当质点经过棱 A_1D_1 时，$AP=\sqrt{AD^2+DP^2}=\sqrt{3^2+(1+1)^2}=\sqrt{13}$.

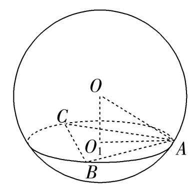


如图所示，当质点经过棱 A_1B_1 时，$AP=\sqrt{AD_1^2+D_1P^2}=\sqrt{(1+3)^2+1^2}=\sqrt{17}$.所以最短路程为 $\sqrt{13}$.



考点二

考向1　典例4　(1)**A**　(2)**AB**　[(1)如图所示，设球 O 的半径为 R，$\odot O_1$ 的半径为 r，因为$\odot O_1$ 的面积为 4π，所以 $4\pi=\pi r^2$，解得 $r=2$，又 $AB=BC=AC=OO_1$，所以 $\frac{AB}{\sin 60^\circ}=2r$，解得 $AB=2\sqrt{3}$，故 $OO_1=2\sqrt{3}$，所以 $R^2=OO_1^2+r^2=(2\sqrt{3})^2+2^2=16$，所以球 O 的表面积 $S=4\pi R^2=64\pi$.故选 A.



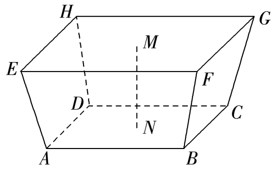
(2)如果是绕直角边所在直线旋转，则形成圆锥，圆锥底面半径为1，高为1，母线就是直角三角形的斜边，长为$\sqrt{2}$，所以所形成的几何体的表面积 $S=\pi\times1\times\sqrt{2}+\pi\times1^2=(\sqrt{2}+1)\pi$.

如果绕斜边所在直线旋转，则形成的是上、下两个圆锥，圆锥的底面半径是直角三角形斜边上的高$\frac{\sqrt{2}}{2}$，两个圆锥的母线都是直角三角形的直角边，母线长是1，所以形成的几何体的表面积 $S'=2\times\pi\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times1=\sqrt{2}\pi$.综上可知，形成几何体的表面积是$(\sqrt{2}+1)\pi$或$\sqrt{2}\pi$.故选 AB.]

考向2　典例5　(1)**C**　(2)**CD**　(3)1

[(1)如图，依题意可知棱台的高为 $MN=157.5-148.5=9$(m)，所以增加的水量即为棱台的体积 V.

棱台下底面面积 $S=140.0\ \text{km}^2=140\times10^6\ \text{m}^2$，上底面面积 $S'=180.0\ \text{km}^2=180\times10^6\ \text{m}^2$，



$\therefore V=\frac{1}{3}h(S+S'+\sqrt{SS'})=$

$\frac{1}{3}\times9\times(140\times10^6+180\times10^6+\sqrt{140\times180\times10^{12}})$

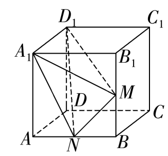
$=3\times(320+60\sqrt{7})\times10^6\approx(96+18\times2.65)\times10^7=1.437\times10^9\approx1.4\times10^9(\text{m}^3)$.

故选 C.

(2)设 $AB=ED=2FB=2$，则 $V_1=\frac{1}{3}\times2\times2=\frac{4}{3}$，$V_2=\frac{1}{3}\times2\times1=\frac{2}{3}$.连接 BD 交 AC 于 M，连接 EM，FM(图略)，则 $FM=\sqrt{3}$，$EM=\sqrt{6}$，$EF=3$，故 $S_{\triangle EMF}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$V_3=\frac{1}{3}S_{\triangle EMF}\times AC=2$，$V_3=V_1+V_2$，$2V_3=3V_1$，故选 CD.

(3)如图，由正方体棱长为 2，

得 $S_{\triangle A_1MN}=2\times2-2\times\frac{1}{2}\times2\times1-\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{3}{2}$，

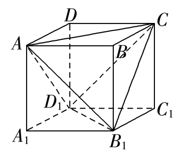


又易知 D_1A_1 为三棱锥 D_1-A_1MN 的高，且 $D_1A_1=2$，

$\therefore V_{A_1\text{-}D_1MN}=V_{D_1\text{-}A_1MN}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle A_1MN}\cdot D_1A_1=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times2=1.$]

跟进训练

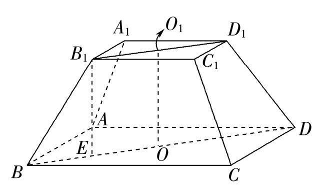
2.(1)**B**　(2)$\frac{7\sqrt{6}}{6}$　(3)$\frac{\sqrt{2}}{3}$　[(1)如图，三棱锥 A-B_1CD_1 是由正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 截去四个小三棱锥 A-$A_1B_1D_1$，C-$B_1C_1D_1$，B_1-ABC，D_1-ACD 得到，又 $V_{ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1}=2^3=8$，



$V_{A\text{-}A_1B_1D_1}=V_{C\text{-}B_1C_1D_1}=V_{B_1\text{-}ABC}=V_{D_1\text{-}ACD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2^3=\frac{4}{3}$，

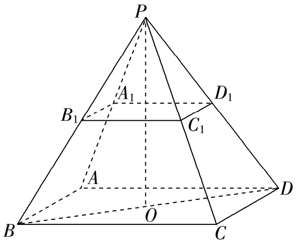
所以 $V_{A\text{-}B_1CD_1}=8-4\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$.

(2)**法一**：如图所示，设点 O_1，O 分别为正四棱台 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 上、下底面的中心，连接 B_1D_1，BD，

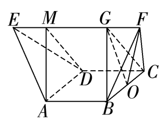


则点 O_1，O 分别为 B_1D_1，BD 的中点，连接 O_1O，则 O_1O 即是正四棱台 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的高，过点 B_1 作 $B_1E\perp BD$，垂足为 E，则 $B_1E=O_1O$.因为 $AB=2$，$A_1B_1=1$，所以 $OB=\sqrt{2}$，$O_1B_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $BE=OB-OE=OB-O_1B_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $AA_1=\sqrt{2}$，所以 $BB_1=\sqrt{2}$，$B_1E=\sqrt{BB_1^2-BE^2}=\sqrt{2-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以 $O_1O=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以 $V_{\text{正四棱台}ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1}=\frac{1}{3}\times(2^2+1^2+\sqrt{2^2\times1^2})\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{7\sqrt{6}}{6}$.

法二：如图，将正四棱台 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 补形成正四棱锥 $P\text{-}ABCD$，因为 $AB=2$，$A_1B_1=1$，$AB/\!/A_1B_1$，所以 A_1，B_1，C_1，D_1 分别为 PA，PB，PC，PD 的中点，又 $A_1A=\sqrt{2}$，所以 $PA=2\sqrt{2}$，即 $PB=2\sqrt{2}$. 连接 BD，记 BD 的中点为 O，连接 PO，则 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，易知 $BO=\sqrt{2}$，所以 $PO=\sqrt{PB^2-BO^2}=\sqrt{6}$，所以正四棱台 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的高为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以 $V_{正四棱台ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1}=\frac{1}{3}\times(2^2+1^2+\sqrt{2^2\times1^2})\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{7\sqrt{6}}{6}$.（或者 $V_{四棱锥P\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}\times2^2\times\sqrt{6}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$，$V_{四棱锥P\text{-}A_1B_1C_1D_1}=\frac{1}{8}V_{四棱锥P\text{-}ABCD}$，所以 $V_{正四棱台ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1}=V_{四棱锥P\text{-}ABCD}-V_{四棱锥P\text{-}A_1B_1C_1D_1}=\frac{7}{8}V_{四棱锥P\text{-}ABCD}=\frac{7}{8}\times\frac{4\sqrt{6}}{3}=\frac{7\sqrt{6}}{6}$）



(3)如图，过 BC 作与 EF 垂直的截面 BCG，作平面 $ADM/\!/$平面 BCG，取 BC 的中点 O，连接 GO，FO，由题意可得 $FO=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$FG=\frac{1}{2}$，所以 $GO=\sqrt{FO^2-FG^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，



所以 $S_{\triangle BCG}=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$V_1=V_{BCG\text{-}ADM}=S_{\triangle BCG}\cdot AB=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$V_2=2V_{F\text{-}BCG}=2\times\frac{1}{3}S_{\triangle BCG}\cdot GF=2\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{12}$，所以 $V=V_1+V_2=\frac{\sqrt{2}}{3}$.］

第2课时　球的切、接、截问题

考点一

考向1　典例1　(1)**A**　(2)14π　［(1)在底面$\triangle ABC$中，由正弦定理得底面$\triangle ABC$所在的截面圆的半径为 $r=\frac{BC}{2\sin\angle BAC}=\frac{2}{2\sin\frac{3\pi}{4}}=\sqrt{2}$，

则直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的外接球的半径为 $R=\sqrt{r^2+\left(\frac{AA_1}{2}\right)^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$，

则直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的外接球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3=4\sqrt{3}\pi$. 故选 A.

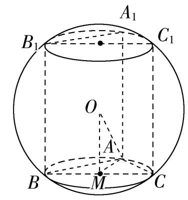
(2)长方体外接球直径长等于长方体体对角线长，即 $2R=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$，所以球的表面积 $S=4\pi R^2=14\pi$.］

拓展变式

$\frac{13}{2}$　［如图所示，过球心作平面 ABC 的垂线，则垂足为 BC 的中点 M.

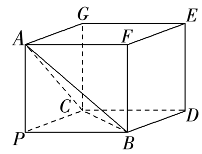
又 $AM=\frac{1}{2}BC=\frac{5}{2}$，$OM=\frac{1}{2}AA_1=6$，

所以球 O 的半径 $R=OA=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+6^2}=\frac{13}{2}$.］



考向2　典例2　**A**　［由题意，得正三棱台上、下底面的外接圆的半径分别为 $\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times3\sqrt{3}=3$，$\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times4\sqrt{3}=4$. 设该棱台上、下底面的外接圆的圆心分别为 O_1，O_2，则 $O_1O_2=1$，其外接球的球心 O 在直线 O_1O_2 上. 设球 O 的半径为 R，当球心 O 在线段 O_1O_2 上时，$R^2=3^2+OO_1^2=4^2+(1-OO_1)^2$，解得 $OO_1=4$（舍去）；当球心 O 不在线段 O_1O_2 上时，$R^2=4^2+OO_2^2=3^2+(1+OO_2)^2$，解得 $OO_2=3$，所以 $R^2=25$，所以该球的表面积为 $4\pi R^2=100\pi$. 故选 A.］

考向3　典例3　(1)**B**　(2)**B**　(3)2　［(1)$\because AB=\sqrt{5}$，$BC=\sqrt{7}$，$AC=2$，$\therefore PA=1$，$PC=\sqrt{3}$，$PB=2$. 以 PA，PB，PC 为过同一顶点的三条棱，作长方体，如图所示，则长方体的外接球同时也是三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的外接球.



$\because$长方体的体对角线长为 $\sqrt{1+3+4}=2\sqrt{2}$，

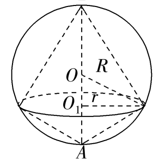
$\therefore$球的直径为 $2\sqrt{2}$，半径 $R=\sqrt{2}$，

因此，三棱锥 $P\text{-}ABC$ 外接球的体积是 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times(\sqrt{2})^3=\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$. 故选 B.

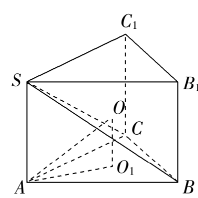
(2)如图，设球 O 的半径为 R，由题意，$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{32\pi}{3}$，可得 $R=2$，则球 O 的直径为 4，

$\because$两个圆锥的高之比为 $1:3$，$\therefore AO_1=1$，$BO_1=3$，由直角三角形中的射影定理可得：$r^2=1\times3$，即 $r=\sqrt{3}$.

$\therefore$这两个圆锥的体积之和为 $V=\frac{1}{3}\pi\times(\sqrt{3})^2\times(1+3)=4\pi$. 故选 B.



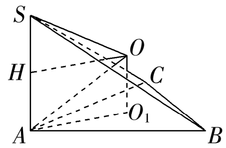
(3)**法一**：如图，设$\triangle ABC$的外接圆圆心为 O_1，连接 O_1A，因为$\triangle ABC$是边长为 3 的等边三角形，所以其外接圆半径 $r=O_1A=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times3=\sqrt{3}$.



将三棱锥 $S\text{-}ABC$ 补形为正三棱柱 $SB_1C_1\text{-}ABC$，由题意知 SA 为侧棱，设球心为 O，连接 OO_1，OA，则 $OO_1\perp$平面 ABC，且 $OO_1=\frac{1}{2}SA$.

又球的半径 $R=OA=2$，$OA^2=OO_1^2+O_1A^2$，所以 $4=\frac{1}{4}SA^2+3$，得 $SA=2$.

法二：如图，设$\triangle ABC$的外接圆圆心为 O_1，连接 O_1A，因为$\triangle ABC$是边长为 3 的等边三角形，所以其外接圆半径 $r=O_1A=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times3=\sqrt{3}$.



设三棱锥 S-ABC 的外接球球心为 O，连接 OO_1，则 $OO_1\perp$平面 ABC. 又 $SA\perp$平面 ABC，所以 $OO_1\parallel SA$，连接 OS，OA，由题意知 $OS=OA=2$. 过 O 作 SA 的垂线，设垂足为 H，则四边形 AO_1OH 为矩形，所以 $OO_1=AH$，由 $OS=OA$ 可知 H 为 SA 的中点，则 $OO_1=AH=\frac{1}{2}SA$.

所以在 $\mathrm{Rt}\triangle OO_1A$ 中，由勾股定理可得 $OA^2=OO_1^2+O_1A^2$，即 $4=\frac{1}{4}SA^2+3$，得 $SA=2$.]

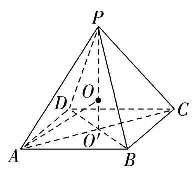
拓展变式

3　[依题意，得该正四棱锥底面对角线的长为 $3\sqrt{2}\times\sqrt{2}=6$，高为 $\sqrt{(3\sqrt{2})^2-\left(\frac{1}{2}\times6\right)^2}=3$，

因此底面中心到各顶点的距离均等于 3，所以该正四棱锥的外接球的球心即为底面正方形的中心，其外接球的半径为 3.]

跟进训练

1.(1)**A**　(2)**D**　(3)61π　[(1)如图所示，设球半径为 R，正四棱锥底面中心为 O'，球心为 O，



∵正四棱锥 P-$ABCD$ 中 $AB=2$，

∴$AO'=\sqrt{2}$.

∵$PO'=4$，∴在 $\mathrm{Rt}\triangle AOO'$ 中，$AO^2=AO'^2+OO'^2$，

∴$R^2=(\sqrt{2})^2+(4-R)^2$，

解得 $R=\frac{9}{4}$，

∴该球的表面积为 $4\pi R^2=4\pi\times\left(\frac{9}{4}\right)^2=\frac{81\pi}{4}$，故选 A.

(2)∵圆柱的表面积 $S_1=2\pi r^2+2\pi rh$，

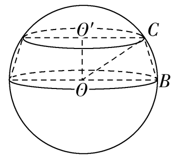
圆柱的外接球的半径为 $\frac{\sqrt{4r^2+h^2}}{2}$，

∴其外接球的表面积 $S_2=4\pi\left(\frac{\sqrt{4r^2+h^2}}{2}\right)^2=\pi(4r^2+h^2)$，

∴$\frac{S_1}{S_2}=\frac{4}{5}=\frac{2\pi r^2+2\pi rh}{\pi(4r^2+h^2)}$，即 $2h^2-5rh+3r^2=0$，

∴$(2h-3r)(h-r)=0$，则 $\frac{r}{h}=\frac{2}{3}$ 或 $\frac{r}{h}=1$，故选 D.

(3)如图所示，圆台下底面半径为 5，球的直径为 10.

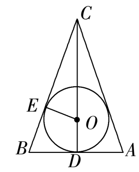


则球心在圆台下底面上，$OC=OB=5$，$O'C=4$，$\angle OO'C=\frac{\pi}{2}$，

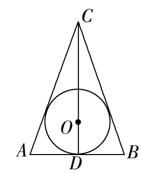
则圆台的高为 3，$V=\frac{1}{3}h(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)=25\pi+16\pi+20\pi=61\pi$.]

考点二

典例 4　$\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$　[**法一**：如图，在圆锥的轴截面 ABC 中，$CD\perp AB$，$BD=1$，$BC=3$，圆 O 内切于$\triangle ABC$，E 为切点，连接 OE，则 $OE\perp BC$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中，$CD=\sqrt{BC^2-BD^2}=2\sqrt{2}$. 易知 $BE=BD=1$，则 $CE=2$. 设圆锥的内切球半径为 R，则 $OC=2\sqrt{2}-R$，在 $\mathrm{Rt}\triangle COE$ 中，$OC^2-OE^2=CE^2$，即 $(2\sqrt{2}-R)^2-R^2=4$，所以 $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$，圆锥内半径最大的球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$.



法二：如图，记圆锥的轴截面为$\triangle ABC$，其中 $AC=BC=3$，$AB=2$，$CD\perp AB$，在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中，$CD=\sqrt{BC^2-BD^2}=2\sqrt{2}$，则 $S_{\triangle ABC}=2\sqrt{2}$. 设$\triangle ABC$的内切圆 O 的半径为 R，则 $R=\frac{2S_{\triangle ABC}}{3+3+2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以圆锥内半径最大的球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$.]



跟进训练

2.(1)**B**　(2)$\frac{6\sqrt{3}}{\pi}$　[(1)要使球的体积最大，必须使球的半径最大. 设球的半径为 R，

∵$\triangle ABC$的内切圆半径为 $\frac{6+8-10}{2}=2$，

∴$R\leqslant2$，由题意易知球与直三棱柱的上、下底面都相切时，球的直径取得最大值为 3，

∴$R\leqslant\frac{3}{2}$，∴$V_{\max}=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{9}{2}\pi$. 故选 B.

(2)设正四面体棱长为 a，则正四面体表面积为 $S_1=4\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times a^2=\sqrt{3}a^2$，其内切球半径为正四面体高的 $\frac{1}{4}$，即 $r=\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{6}}{12}a$，因此内切球表面积为 $S_2=4\pi r^2=\frac{\pi a^2}{6}$，则 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\sqrt{3}a^2}{\frac{\pi}{6}a^2}=\frac{6\sqrt{3}}{\pi}$.]

考点三

典例 5　**C**　[由等边三角形 ABC 的面积为 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$，得 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times AB^2=\frac{9\sqrt{3}}{4}$，得 $AB=3$，则$\triangle ABC$的外接圆半径 $r=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{\sqrt{3}}{3}AB=\sqrt{3}$. 设球的半径为 R，则由球的表面积为 16π，得 $4\pi R^2=16\pi$，得 $R=2$，则球心 O 到平面 ABC 的距离 $d=\sqrt{R^2-r^2}=1$，故选 C.]

跟进训练

3.**A** [设球心为O,半径为R cm,正方体上底面中心为A,上底面一边的中点为B,在Rt$\triangle OAB$中,$OA=R-2$,$AB=4$,$OB=R$,由$R^2=(R-2)^2+4^2$,得$R=5$,$\therefore V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{500\pi}{3}(\text{cm}^3)$.故选A.]

第3课时　空间点、直线、平面之间的位置关系

梳理·必备知识

1.不在一条直线上　两个点　一条　平行
2.这条直线外　相交　平行
3.相交　平行　任何
4.直线在平面内　直线与平面相交　直线与平面平行
5.平行　相交
6.相等或互补
7.(2)$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$

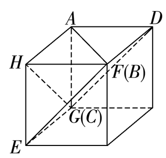
激活·基本技能

一、(1)×　(2)√　(3)×　(4)×

二、1.**D** [$\because$平面α∥平面β,直线a∥平面α,直线b∥平面β,$\therefore a$与b共面时,a与b平行或相交;在a与b相交的条件下,分别把a,b平行移到平面β、平面α内,此时a与b异面.故选D.]

2.**D** [如果两个平面重合,则排除A,B两项;如果两个平面相交,则有一条交线,交线上任取三个点都是两个平面的公共点,故排除C项;而D项中的三点不论共线还是不共线,都一定能找到一个平面过这三个点.故选D.]

3.**D** [把展开图还原成正方体,如图所示.

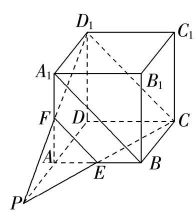


还原后点G与C重合,点B与F重合,由图可知A,B,C选项正确,EF与AB相交,故D错误,故选D.]

4.8　4 [三个平面可将空间分成4,6,7,8部分,所以三个平面最少可将空间分成4部分,最多分成8部分.]

考点一

典例1　**证明**:(1)如图,连接EF,CD_1,A_1B.



$\because E$,F分别是AB,AA_1的中点,
$\therefore EF$∥BA_1.
又$\because A_1B$∥CD_1,$\therefore EF$∥CD_1,
$\therefore E$,C,D_1,F四点共面.
(2)$\because EF$∥CD_1,$EF<CD_1$,
$\therefore CE$与D_1F必相交,设交点为P,
则由$P\in$直线CE,$CE\subset$平面$ABCD$,
得$P\in$平面$ABCD$.
同理$P\in$平面ADD_1A_1.
又平面$ABCD\cap$平面$ADD_1A_1=DA$,
$\therefore P\in$直线DA,$\therefore CE$,D_1F,DA三线共点.

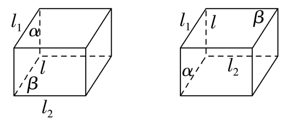
跟进训练

1.**证明**:(1)因为E,F分别为AB,AD的中点,所以EF∥BD.
在$\triangle BCD$中,$\frac{BG}{GC}=\frac{DH}{HC}=\frac{1}{2}$,
所以GH∥BD,所以EF∥GH.
所以E,F,G,H四点共面.
(2)因为$EG\cap FH=P$,$P\in EG$,$EG\subset$平面ABC,
所以$P\in$平面ABC.同理$P\in$平面ADC.
所以P为平面ABC与平面ADC的公共点.
又平面$ABC\cap$平面$ADC=AC$,所以$P\in AC$,
所以P,A,C三点共线.

考点二

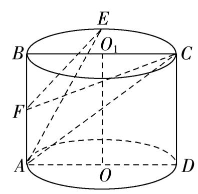
典例2　(1)**D**　(2)**D** [(1)**法一**(反证法):由于l与直线l_1,l_2分别共面,故直线l与l_1,l_2要么都不相交,要么至少与l_1,l_2中的一条相交.若l∥l_1,l∥l_2,则l_1∥l_2,这与l_1,l_2是异面直线矛盾.故l至少与l_1,l_2中的一条相交.故选D.

法二(模型法):如图①,l_1与l_2是异面直线,l_1与l平行,l_2与l相交,故A,B不正确;如图②,l_1与l_2是异面直线,l_1,l_2都与l相交,故C不正确.故选D.



图①　　图②

(2)由题意,圆柱的轴截面$ABCD$为边长为2的正方形,E是$\overset{\frown}{BC}$的中点,F是AB的中点,所以$AC\subset$平面ABC,EF与平面ABC相交,且与AC无交点,所以AC与EF是异面直线;又$CF=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$,$AE=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$,所以$AE\neq CF$.故选D.]

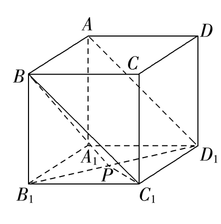


跟进训练

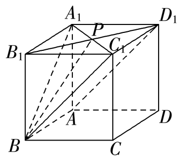
2.(1)**BD**　(2)**C** [(1)图A中,直线GH∥MN;
图B中,G,H,N三点共面,但$M\notin$平面GHN,$N\notin GH$,因此直线GH与MN异面;
图C中,连接MG(图略),GM∥HN,因此GH与MN共面;
图D中,G,M,N共面,但$H\notin$平面GMN,$G\notin MN$,
因此GH与MN异面.
(2)对于A,m,l可能平行,相交或异面,故A错误;对于B,α,β可能相交或平行,故B错误;对于D,α,β平行,不可能垂直,故D错误;由线面平行性质得C正确.故选C.]

考点三

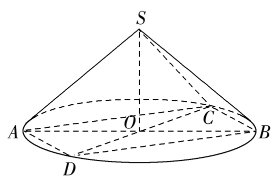
典例3　(1)**D**　(2)**C** [(1)**法一**:如图,连接C_1P,因为$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$是正方体,且P为B_1D_1的中点,所以$C_1P\perp B_1D_1$,又$C_1P\perp BB_1$,所以$C_1P\perp$平面B_1BP.又$BP\subset$平面B_1BP,所以$C_1P\perp BP$.连接BC_1,则AD_1∥BC_1,所以$\angle PBC_1$为直线PB与AD_1所成的角.设正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$的棱长为2,则在直角三角形C_1PB中,$C_1P=\frac{1}{2}B_1D_1=\sqrt{2}$,$BC_1=2\sqrt{2}$,$\sin\angle PBC_1=\frac{PC_1}{BC_1}=\frac{1}{2}$,所以$\angle PBC_1=\frac{\pi}{6}$,故选D.



法二：如图所示，连接 BC_1，A_1B，A_1P，PC_1，则易知 $AD_1 /\!/ BC_1$，所以直线 PB 与 AD_1 所成角等于直线 PB 与 BC_1 所成角，即 $\angle PBC_1$．根据 P 为正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 B_1D_1 的中点，易知 A_1，P，C_1 三点共线，且 P 为 A_1C_1 的中点．易知 $A_1B=BC_1=A_1C_1$，所以 $\triangle A_1BC_1$ 为等边三角形，所以 $\angle A_1BC_1=\frac{\pi}{3}$，又 P 为 A_1C_1 的中点，所以可得 $\angle PBC_1=\frac{1}{2}\angle A_1BC_1=\frac{\pi}{6}$．



(2)如图，连接 AD，BC，AC，SC．因为 O 为 AB，CD 中点，且 $AB=CD$，所以四边形 $ADBC$ 为矩形，所以 $DB /\!/ AC$，所以 $\angle SAC$ 或其补角为异面直线 SA 与 BD 所成的角．



设圆 O 的半径为 1，则 $SA=SC=\sqrt{2}$．

因为 $\angle AOD=\frac{\pi}{3}$，所以 $\angle ADO=\frac{\pi}{3}$．

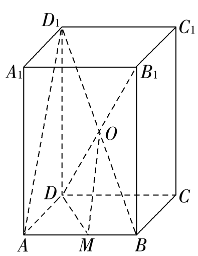
在直角 $\triangle DAC$ 中，$CD=2$，得 $AC=\sqrt{3}$．

所以 $\cos\angle SAC=\frac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

所以异面直线 SA 与 BD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$．故选 C．]

跟进训练

3．(1)**C**　(2)**ACD**　[(1)**法一**(平移法)：如图，连接 BD_1，交 DB_1 于 O，取 AB 的中点 M，连接 DM，OM．易知 O 为 BD_1 的中点，所以 $AD_1 /\!/ OM$，则 $\angle MOD$ 为异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角．因为在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=1$，$AA_1=\sqrt{3}$，$AD_1=\sqrt{AD^2+DD_1^2}=2$，



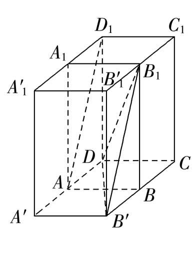
$DM=\sqrt{AD^2+\left(\frac{1}{2}AB\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

$DB_1=\sqrt{AB^2+AD^2+BB_1^2}=\sqrt{5}$，所以 $OM=\frac{1}{2}AD_1=1$，$OD=\frac{1}{2}DB_1=\frac{\sqrt{5}}{2}$，于是在 $\triangle DMO$ 中，由余弦定理，

得 $\cos\angle MOD=\frac{1^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2\times1\times\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，即异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$．故选 C．

法二(补体法)：如图，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的一侧补上一个相同的长方体 $A'B'BA\text{-}A_1'B_1'B_1A_1$．

连接 B_1B'，由长方体性质可知，$B_1B' /\!/ AD_1$，所以 $\angle DB_1B'$ 为异面直线 AD_1 与 DB_1 所成的角或其补角．连接 DB'，由题意，得 $DB'=\sqrt{1^2+(1+1)^2}=\sqrt{5}$，$B'B_1=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$，



$DB_1=\sqrt{1^2+1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{5}$．

在 $\triangle DB'B_1$ 中，由余弦定理，得 $DB'^2=B'B_1^2+DB_1^2-2B'B_1\cdot DB_1\cdot\cos\angle DB_1B'$，即 $5=4+5-2\times2\sqrt{5}\cos\angle DB_1B'$，

$\therefore\cos\angle DB_1B'=\frac{\sqrt{5}}{5}$．故选 C．

(2)对于 A，因为 $SD\perp$ 底面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $SD\perp BC$，则 BC 与 SD 所成角的大小为 $90°$，A 项符合；对于 B，因为底面 $ABCD$ 是正方形，所以 $AB /\!/ CD$，则 AB 与 SC 所成的角为 $\angle SCD=45°$，B 项不符合；对于 C，因为 $AD /\!/ BC$，所以 SB 与 AD 所成的角为 $\angle SBC$，由题知 $\tan\angle SBC=\frac{SC}{BC}=\sqrt{2}>1$，所以 $\angle SBC>45°$，C 项符合；对于 D，因为 $SD\perp$ 底面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $SD\perp AC$，

因为 $ABCD$ 是正方形，所以 $AC\perp BD$，又因为 $SD\cap BD=D$，所以 $AC\perp$ 平面 SBD，

因为 $SB\subset$ 平面 SBD，所以 $AC\perp SB$，则 AC 与 SB 所成角的大小为 $90°$，D 项符合．故选 ACD．]

第 4 课时　空间直线、平面的平行

梳理·必备知识

1．此平面内　$l /\!/ \alpha$　$a\subset\alpha$　$l\not\subset\alpha$　相交　交线　$l /\!/ \alpha$　$l\subset\beta$　$\alpha\cap\beta=b$

2．相交直线　$\alpha /\!/ \beta$　$b /\!/ \beta$　$a\cap b=P$　$a\subset\alpha$　$b\subset\alpha$　相交　交线　$\alpha /\!/ \beta$　$\alpha\cap\gamma=a$　$\beta\cap\gamma=b$

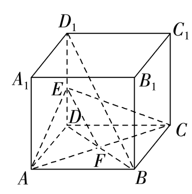
激活·基本技能

一、(1)×　(2)×　(3)√　(4)×

二、1．**D**　[若 $\alpha\cap\beta=l$，$a /\!/ l$，$a\not\subset\alpha$，$a\not\subset\beta$，$a /\!/ \alpha$，$a /\!/ \beta$，故排除 A；若 $\alpha\cap\beta=l$，$a\subset\alpha$，$a /\!/ l$，则 $a /\!/ \beta$，故排除 B；若 $\alpha\cap\beta=l$，$a\subset\alpha$，$a /\!/ l$，$b\subset\beta$，$b /\!/ l$，则 $a /\!/ \beta$，$b /\!/ \alpha$，故排除 C．故选 D．]

2．**D**　[a 可能在经过 b 的平面内，故 A 错误；a 与 α 内的直线平行或异面，故 B 错误；两个平面可能相交，故 C 错误．故选 D．]

3．平行　[如图所示，连接 BD 交 AC 于 F，连接 EF，则 EF 是 $\triangle BDD_1$ 的中位线，



$\therefore EF /\!/ BD_1$，

又 $EF\subset$ 平面 ACE，

$BD_1\not\subset$ 平面 ACE，

$\therefore BD_1 /\!/$ 平面 ACE．]

4．(1)$AC=BD$　(2)$AC=BD$ 且 $AC\perp BD$　[(1)$\because$ 四边形 $EFGH$ 为菱形，$\therefore EF=EH$，$\therefore AC=BD$．

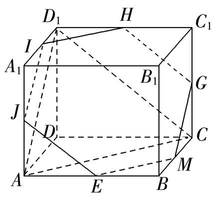
(2)$\because$ 四边形 $EFGH$ 为正方形，$\therefore EF=EH$ 且 $EF\perp EH$，

$\because EF /\!/ AC$，$EH /\!/ BD$，且 $EF=\frac{1}{2}AC$，$EH=\frac{1}{2}BD$，

$\therefore AC=BD$ 且 $AC\perp BD$．]

考点一

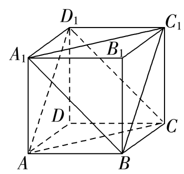
典例 1 **ACD** [如图，M,G,H,I,J 分别是棱 $BC,CC_1,C_1D_1,D_1A_1,A_1A$ 的中点，易证 E 与 M,G,H,I,J 共面，由 $EM/\!/AC$，$AC\subset$ 平面 ACD_1，$EM\not\subset$ 平面 ACD_1，得 $EM/\!/$ 平面 ACD_1，同理 $EJ/\!/$ 平面 ACD_1，



而 EM,EJ 是平面 $EMGHIJ$ 内相交直线，则得平面 $EMGHIJ/\!/$ 平面 ACD_1，$EF/\!/$ 平面 ACD_1，则 $F\in$ 平面 $EMGHIJ$，观察各选项，A,C,D 满足. 故选 ACD.]

拓展变式

AD [如图，由 $A_1B/\!/D_1C$，且 $A_1B\not\subset$ 平面 ACD_1，$D_1C\subset$ 平面 ACD_1，故直线 A_1B 与平面 ACD_1 平行，故 A 正确；



直线 $BB_1/\!/DD_1$，DD_1 与平面 ACD_1 相交，故直线 BB_1 与平面 ACD_1 相交，故 B 错误；

由图，显然平面 A_1DC_1 与平面 ACD_1 相交，故 C 错误；

由 $A_1B/\!/D_1C$，$AC/\!/A_1C_1$，且 $A_1B\cap A_1C_1=A_1$，$AC\cap D_1C=C$，故平面 A_1BC_1 与平面 ACD_1 平行，故 D 正确. 故选 AD.]

跟进训练

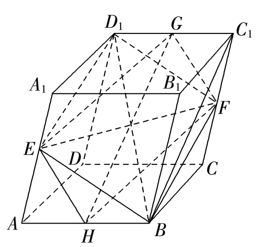
1.(1)**CD** (2)**A** [(1)对于 A，若 $\alpha\cap\beta=n$，$m/\!/n$，则 $m/\!/\alpha$，$m/\!/\beta$，所以 A 错误.

对于 B，若 $m/\!/\alpha$，$n/\!/\alpha$，则 m 与 n 可能是异面直线、相交直线或平行直线，所以 B 错误.

对于 C，若 $m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$，由线面垂直的性质定理知 $m/\!/n$，C 正确.

对于 D，若 $\alpha\perp\gamma$，$\alpha\perp\beta$，则 γ 与 β 可能相交或平行，D 正确. 故选 CD.

(2)取 AB 的中点 H，则 $BH/\!/C_1G$，$BH=C_1G$，从而四边形 BC_1GH 为平行四边形，所以 $BC_1/\!/HG$.



易知 $EH/\!/GF$，$EH=GF$，则四边形 $EGFH$ 为平行四边形，从而 $GH\subset$ 平面 EFG. 又 $BC_1\not\subset$ 平面 EFG，所以 $BC_1/\!/$ 平面 EFG. 易知 $BF/\!/ED_1$，$BF=ED_1$，则四边形 BFD_1E 为平行四边形，从而 BD_1 与 EF 相交，所以直线 BD_1 与平面 EFG 相交. 故选 A.]

考点二

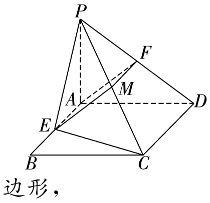
考向 1 **典例 2** **法一**(应用线面平行的判定定理)：

证明：如图，设 M 为 PC 的中点，连接 EM,MF.

$\because E$ 是 AB 的中点，

$\therefore AE/\!/CD$，且 $AE=\dfrac{1}{2}CD$，

又 $\because MF/\!/CD$，且 $MF=\dfrac{1}{2}CD$，



$\therefore AE\underline{/\!/}FM$，$\therefore$ 四边形 $AEMF$ 是平行四边形，

$\therefore AF/\!/EM$.

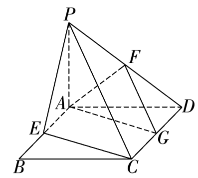
又 $\because AF\not\subset$ 平面 PCE，$EM\subset$ 平面 PCE，

$\therefore AF/\!/$ 平面 PCE.

法二(应用面面平行的性质定理)：

证明：如图，设 G 为 CD 的中点，连接 FG,AG.

$\because F,G$ 分别为 PD,CD 的中点，



$\therefore FG/\!/PC$. 同理 $AG/\!/EC$，

又 $FG\not\subset$ 平面 PCE，$AG\not\subset$ 平面 PCE.

$PC\subset$ 平面 PCE，$EC\subset$ 平面 PCE，

$\therefore FG/\!/$ 平面 PCE，$AG/\!/$ 平面 PCE.

又 $FG,AG\subset$ 平面 AFG，$FG\cap AG=G$，

$\therefore$ 平面 $AFG/\!/$ 平面 PCE. 又 $AF\subset$ 平面 AFG，

$\therefore AF/\!/$ 平面 PCE.

考向 2 **典例 3** **证明**：在直四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$BB_1/\!/CC_1$，$BB_1\subset$ 平面 BB_1D，$CC_1\not\subset$ 平面 BB_1D，

所以 $CC_1/\!/$ 平面 BB_1D.

又 $CC_1\subset$ 平面 CEC_1，平面 $CEC_1\cap$ 平面 $BB_1D=FG$，所以 $CC_1/\!/FG$.

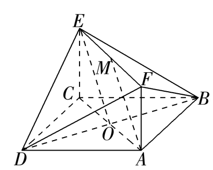
因为 $BB_1/\!/CC_1$，所以 $BB_1/\!/FG$.

而 $BB_1\subset$ 平面 AA_1B_1B，$FG\not\subset$ 平面 AA_1B_1B，

所以 $FG/\!/$ 平面 AA_1B_1B.

跟进训练

2.(1)**证明**：如图，记 AC 与 BD 的交点为 O，连接 OE.



因为 O,M 分别为 AC,EF 的中点，四边形 $ACEF$ 是矩形，

所以四边形 $AOEM$ 是平行四边形，

所以 $AM/\!/OE$.

又因为 $OE\subset$ 平面 BDE，$AM\not\subset$ 平面 BDE，

所以 $AM/\!/$ 平面 BDE.

(2)**解**：$l/\!/m$，证明如下：

由(1)知 $AM/\!/$ 平面 BDE，

又 $AM\subset$ 平面 ADM，平面 $ADM\cap$ 平面 $BDE=l$，

所以 $l/\!/AM$，

同理，$AM/\!/$ 平面 BDE，

又 $AM\subset$ 平面 ABM，平面 $ABM\cap$ 平面 $BDE=m$，

所以 $m/\!/AM$，所以 $l/\!/m$.

考点三

典例 4 **证明**：(1)$\because G,H$ 分别是 A_1B_1,A_1C_1 的中点，

$\therefore GH$ 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中位线，$GH/\!/B_1C_1$.

又 $\because B_1C_1/\!/BC$，

$\therefore GH/\!/BC$，

$\therefore B,C,H,G$ 四点共面.

(2)在 $\triangle ABC$ 中，E,F 分别为 AB,AC 的中点，

$\therefore EF/\!/BC$.

$\because EF\not\subset$ 平面 $BCHG$，$BC\subset$ 平面 $BCHG$，

$\therefore EF/\!/$ 平面 $BCHG$.

$\because A_1G\underline{/\!/}EB$，

$\therefore$ 四边形 A_1EBG 是平行四边形，

则 $A_1E/\!/GB$.

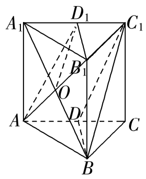
$\because A_1E\not\subset$平面 $BCHG$,$GB\subset$平面 $BCHG$,

$\therefore A_1E\parallel$平面 $BCHG$.

$\because A_1E\cap EF=E$,$\therefore$平面 $EFA_1\parallel$平面 $BCHG$.

拓展变式

1.**解**:如图,连接 A_1B 交 AB_1 于点 O,连接 OD_1.



由平面 $BC_1D\parallel$平面 AB_1D_1,

且平面 $A_1BC_1\cap$平面 $BC_1D=BC_1$,

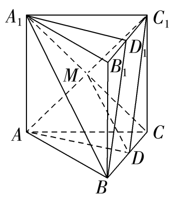
平面 $A_1BC_1\cap$平面 $AB_1D_1=D_1O$,

所以 $BC_1\parallel D_1O$,则$\dfrac{A_1D_1}{D_1C_1}=\dfrac{A_1O}{OB}=1$.

又由题设可得$\dfrac{A_1D_1}{D_1C_1}=\dfrac{DC}{AD}$,

所以$\dfrac{DC}{AD}=1$,即$\dfrac{AD}{DC}=1$.

2.**证明**:如图所示,连接 A_1C 交 AC_1 于点 M,



$\because$四边形 A_1ACC_1 是平行四边形,

$\therefore M$ 是 A_1C 的中点,连接 MD,

$\because D$ 为 BC 的中点,

$\therefore A_1B\parallel DM$.

$\because A_1B\subset$平面 A_1BD_1,$DM\not\subset$平面 A_1BD_1,

$\therefore DM\parallel$平面 A_1BD_1.

又由三棱柱的性质知,D_1C_1 $\underline{\parallel}$ BD,

$\therefore$四边形 BDC_1D_1 为平行四边形,$\therefore DC_1\parallel BD_1$.

又 $DC_1\not\subset$平面 A_1BD_1,

$BD_1\subset$平面 A_1BD_1,$\therefore DC_1\parallel$平面 A_1BD_1.

又$\because DC_1\cap DM=D$,DC_1,$DM\subset$平面 AC_1D,

$\therefore$平面 $A_1BD_1\parallel$平面 AC_1D.

跟进训练

3.**证明**:(1)由题设知 BB_1 $\underline{\parallel}$ DD_1,所以四边形 BB_1D_1D 是平行四边形,所以 $BD\parallel B_1D_1$.

又 $BD\not\subset$平面 CD_1B_1,$B_1D_1\subset$平面 CD_1B_1,

所以 $BD\parallel$平面 CD_1B_1.

因为 A_1D_1 $\underline{\parallel}$ B_1C_1 $\underline{\parallel}$ BC,

所以四边形 A_1BCD_1 是平行四边形,所以 $A_1B\parallel D_1C$.

又 $A_1B\not\subset$平面 CD_1B_1,$D_1C\subset$平面 CD_1B_1,

所以 $A_1B\parallel$平面 CD_1B_1.

又因为 $BD\cap A_1B=B$,BD,$A_1B\subset$平面 A_1BD,

所以平面 $A_1BD\parallel$平面 CD_1B_1.

(2)由(1)知平面 $A_1BD\parallel$平面 CD_1B_1,

又平面 $ABCD\cap$平面 $CD_1B_1=l$,

平面 $ABCD\cap$平面 $A_1BD=BD$,

所以 $l\parallel BD$,

在四棱柱 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中,四边形 BDD_1B_1 为平行四边形,所以 $B_1D_1\parallel BD$,所以 $B_1D_1\parallel l$.

考点四

典例 5　(1)**证明**:因为四边形 $EFGH$ 为平行四边形,

所以 $EF\parallel HG$.

因为 $HG\subset$平面 ABD,$EF\not\subset$平面 ABD,所以 $EF\parallel$平面 ABD.

又因为 $EF\subset$平面 ABC,平面 $ABD\cap$平面 $ABC=AB$,

所以 $EF\parallel AB$.

又因为 $AB\not\subset$平面 $EFGH$,$EF\subset$平面 $EFGH$,

所以 $AB\parallel$平面 $EFGH$.

(2)**解**:设 $EF=x(0<x<4)$,

因为 $EF\parallel AB$,$FG\parallel CD$,所以$\dfrac{CF}{CB}=\dfrac{x}{4}$,

则$\dfrac{FG}{6}=\dfrac{BF}{BC}=\dfrac{BC-CF}{BC}=1-\dfrac{x}{4}$,所以 $FG=6-\dfrac{3}{2}x$.

因为四边形 $EFGH$ 为平行四边形,

所以四边形 $EFGH$ 的周长 $l=2\left(x+6-\dfrac{3}{2}x\right)=12-x$.

又因为 $0<x<4$,所以 $8<l<12$,

即四边形 $EFGH$ 周长的取值范围是$(8,12)$.

跟进训练

4.(1)**证明**:$\because$在四棱锥 P-$ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是平行四边形,M,N,Q 分别为 BC,PA,PB 的中点,

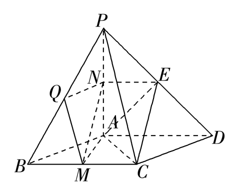
$\therefore NQ\parallel CD$,$MQ\parallel PC$.

$\because NQ\cap MQ=Q$,$CD\cap PC=C$,且 NQ,$MQ\subset$平面 MNQ,CD,$PC\subset$平面 PCD,

$\therefore$平面 $MNQ\parallel$平面 PCD.

(2)**解**:线段 PD 上存在一点 E,使得 $MN\parallel$平面 ACE,且$\dfrac{PE}{PD}=\dfrac{1}{2}$.

证明如下:



取 PD 的中点 E,连接 NE,CE,AE,

$\because N$,E,M 分别是 AP,PD,BC 的中点,

BC $\underline{\parallel}$ AD,

$\therefore NE$ $\underline{\parallel}$ MC,

$\therefore$四边形 $MCEN$ 是平行四边形,

$\therefore MN\parallel CE$.

$\because MN\not\subset$平面 ACE,$CE\subset$平面 ACE,

$\therefore MN\parallel$平面 ACE,且$\dfrac{PE}{PD}=\dfrac{1}{2}$.

第 5 课时　空间直线、平面的垂直

梳理·必备知识

1.(1)任意　(2)相交　$l\perp a$　$l\perp b$　$a\cap b=O$　$a,b\subset\alpha$　平行　$a\perp\alpha$　$b\perp\alpha$　(3)平面上的射影　$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

2.(1)两个半平面　垂直于棱　(2)$[0,\pi]$

3.(1)直二面角　(2)垂线　$l\perp\alpha$　$l\subset\beta$　交线　$\alpha\perp\beta$　$\alpha\cap\beta=a$　$l\perp a$　$l\subset\beta$

4.(1)垂线段　垂线段　(2)任意一点　(3)相等

激活·基本技能

一、(1)×　(2)×　(3)×　(4)×

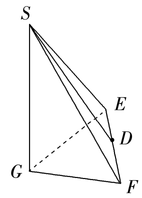
二、1.**D**　[若 $\alpha\perp\beta$,$\alpha\cap\beta=m$,$l\perp m$,则 $l\subset\beta$ 或 $l\parallel\beta$ 或 l 与 β 相交,故 A 不正确;

若$\alpha\cap\beta=m,l\subset\alpha,l\perp m$，则$l$与$\beta$相交但不一定垂直，故B不正确；

若$\alpha\perp\beta,l\subset\alpha$，则$l\subset\beta$或$l\parallel\beta$或$l$与$\beta$相交，故C不正确；

若$\alpha\perp\beta,\alpha\cap\beta=m,l\subset\alpha,l\perp m$，则$l\perp\beta$，由面面垂直的性质定理可知D正确．故选D．]

2．**A** ［四面体S-EFG如图所示：



由$SG\perp GE,SG\perp GF$，

且$GE\cap GF=G$得，

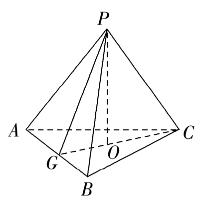
$SG\perp$平面EFG．故选A．］

3．$\frac{1}{3}$ ［连接A_1C_1．$\angle AC_1A_1$为AC_1与平面$A_1B_1C_1D_1$所成的角．

因为$AB=BC=2$，所以$A_1C_1=AC=2\sqrt{2}$，

又$AA_1=1$，所以$AC_1=3$，所以$\sin\angle AC_1A_1=\frac{AA_1}{AC_1}=\frac{1}{3}$．］

4．$\frac{\sqrt{6}}{3}a$ ［设点P在平面ABC上的射影为点O．由$PA=PC=PB$，可知$OA=OB=OC$，即O为$\triangle ABC$的外心．如图，延长CO交AB于点G．因为$\triangle ABC$是正三角形，故CG为$\triangle ABC$边AB上的高，且$CO=2OG$．易知$OG=\frac{1}{3}CG=\frac{\sqrt{3}}{6}a$．



又因为$PA=PB=AB=a$，所以$\triangle ABP$是等边三角形，

所以点P到直线AB的距离为$\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，

则点P到平面ABC的距离$PO=\sqrt{\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{12}a^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$．］

考点一

典例1 **证明**：(1)在四棱锥P-$ABCD$中，

$\because PA\perp$平面$ABCD$，$CD\subset$平面$ABCD$，

$\therefore PA\perp CD$，又$\because AC\perp CD$，且$PA\cap AC=A$，

$\therefore CD\perp$平面PAC．

又$AE\subset$平面PAC，$\therefore CD\perp AE$．

(2)由$PA=AB=BC$，$\angle ABC=60°$，可得$AC=PA$．

$\because E$是PC的中点，$\therefore AE\perp PC$．

由(1)知$AE\perp CD$，且$PC\cap CD=C$，

$\therefore AE\perp$平面PCD．又$PD\subset$平面PCD，

$\therefore AE\perp PD$．

$\because PA\perp$平面$ABCD$，$AB\subset$平面$ABCD$，

$\therefore PA\perp AB$．

又$\because AB\perp AD$，且$PA\cap AD=A$，

$\therefore AB\perp$平面PAD．又$PD\subset$平面PAD，

$\therefore AB\perp PD$．

又$\because AB\cap AE=A$，$\therefore PD\perp$平面ABE．

跟进训练

1．(1)**证明**：$\because$三棱柱ABC-$A_1B_1C_1$是直三棱柱，$AC=BC=1$，$\angle ACB=90°$，

$\therefore A_1C_1=B_1C_1=1$，且$\angle A_1C_1B_1=90°$．

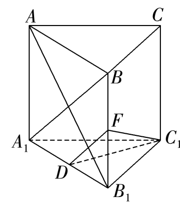
又D是A_1B_1的中点，$\therefore C_1D\perp A_1B_1$．

$\because AA_1\perp$平面$A_1B_1C_1$，$C_1D\subset$平面$A_1B_1C_1$，

$\therefore AA_1\perp C_1D$，又$A_1B_1\cap AA_1=A_1$，

$\therefore C_1D\perp$平面AA_1B_1B．

(2)**解**：选①③能使$AB_1\perp$平面C_1DF．



证明：如图，连接DF，A_1B，

$\therefore DF\parallel A_1B$，

在$\triangle ABC$中，$AC=BC=1$，

$\angle ACB=90°$，则$AB=\sqrt{2}$，

又$AA_1=\sqrt{2}$，

则$A_1B\perp AB_1$，$\therefore DF\perp AB_1$．

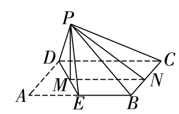
$\because C_1D\perp$平面AA_1B_1B，$AB_1\subset$平面AA_1B_1B，

$\therefore C_1D\perp AB_1$．

$\because DF\cap C_1D=D$，$\therefore AB_1\perp$平面C_1DF．

考点二

典例2 (1)**解**：如图所示，取DE的中点M，连接PM，



由题意知，$PD=PE$，$\therefore PM\perp DE$，

又平面$PDE\perp$平面$BCDE$，平面$PDE\cap$平面$BCDE=DE$，$PM\subset$平面PDE，

$\therefore PM\perp$平面$BCDE$，即PM为四棱锥P-$BCDE$的高．

在等腰直角三角形PDE中，$PE=PD=AD=2$，

$\therefore PM=\frac{1}{2}DE=\sqrt{2}$，

而梯形$BCDE$的面积$S=\frac{1}{2}(BE+CD)\cdot BC=\frac{1}{2}\times(2+4)\times2=6$，$\therefore$四棱锥$P$-$BCDE$的体积$V=\frac{1}{3}PM\cdot S=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times6=2\sqrt{2}$．

(2)**证明**：取BC的中点N，连接PN，MN，则$BC\perp MN$，

$\because PB=PC$，$\therefore BC\perp PN$，

$\because MN\cap PN=N$，MN，$PN\subset$平面PMN，$\therefore BC\perp$平面PMN，

$\because PM\subset$平面PMN，$\therefore BC\perp PM$，由(1)知，$PM\perp DE$，

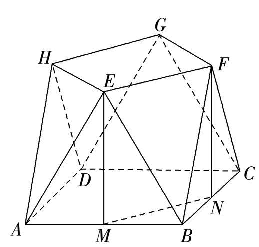
又BC，$DE\subset$平面$BCDE$，且BC与DE是相交的，

$\therefore PM\perp$平面$BCDE$，

$\because PM\subset$平面PDE，$\therefore$平面$PDE\perp$平面$BCDE$．

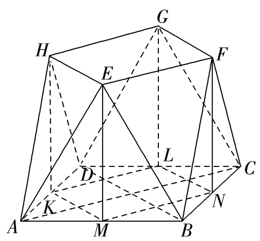
跟进训练

2．(1)**证明**：如图所示，



分别取 AB，BC 的中点 M，N，连接 EM，FN，MN，因为 $\triangle EAB$，$\triangle FBC$ 为全等的正三角形，所以 $EM\perp AB$，$FN\perp BC$，$EM=FN$，又平面 $EAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $EAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$EM\subset$ 平面 EAB，所以 $EM\perp$ 平面 $ABCD$，同理可得 $FN\perp$ 平面 $ABCD$，根据线面垂直的性质定理可知 $EM\parallel FN$，而 $EM=FN$，所以四边形 $EMNF$ 为平行四边形，所以 $EF\parallel MN$，又 $EF\not\subset$ 平面 $ABCD$，$MN\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $EF\parallel$ 平面 $ABCD$.

(2)**解**：如图所示，



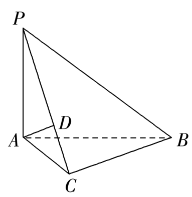
分别取 AD，DC 的中点 K，L，连接 KM，KH，KL，LN，LG，AC，BD.

由(1)知，$EF\parallel MN$ 且 $EF=MN$，同理有 $HE\parallel KM$，$HE=KM$，$HG\parallel KL$，$HG=KL$，$GF\parallel LN$，$GF=LN$，由平面几何知识可知，$BD\perp MN$，$MN\perp MK$，$KM=MN=NL=LK$，所以该几何体的体积等于长方体 $KMNL\text{-}HEFG$ 的体积加上四棱锥 $B\text{-}MNFE$ 体积的 4 倍.

因为 $MN=NL=LK=KM=4\sqrt{2}$，$EM=8\sin 60°=4\sqrt{3}$，点 B 到平面 $MNFE$ 的距离即为点 B 到直线 MN 的距离 d，$d=2\sqrt{2}$，所以该几何体的体积 $V=(4\sqrt{2})^2\times 4\sqrt{3}+4\times\dfrac{1}{3}\times 4\sqrt{2}\times 4\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}=128\sqrt{3}+\dfrac{256\sqrt{3}}{3}=\dfrac{640\sqrt{3}}{3}(\text{cm}^3)$.

考点三

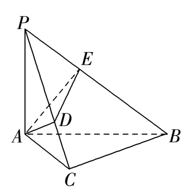
典例3 (1)**证明**：作 $AD\perp PC$ 于 D，因为平面 $PAC\perp$ 平面 PBC，平面 $PAC\cap$ 平面 $PBC=PC$，$AD\subset$ 平面 PAC，则 $AD\perp$ 平面 PBC.



又 $BC\subset$ 平面 PBC，则 $AD\perp BC$，又因为 $PA\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，则 $PA\perp BC$，又 PA，$AD\subset$ 平面 PAC，

$PA\cap AD=A$，则 $BC\perp$ 平面 PAC.

(2)**解**：作 $AD\perp PC$ 于 D，作 $DE\perp PB$ 于 E，连接 AE，由(1)知 $AD\perp$ 平面 PBC，$PB\subset$ 平面 PBC，则 $AD\perp PB$，



又 AD，$DE\subset$ 平面 ADE，$AD\cap DE=D$，则 $PB\perp$ 平面 ADE，又 $AE\subset$ 平面 ADE，则 $PB\perp AE$，则 $\angle AED$ 即为二面角 $A\text{-}PB\text{-}C$ 的平面角.

不妨设 $AC=BC=PA=1$，则 $PC=\sqrt{2}$，$AD=\dfrac{1\times 1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

又由(1)知 $BC\perp$ 平面 PAC，$AC\subset$ 平面 PAC，

则 $BC\perp AC$，则 $AB=\sqrt{2}$，

又 $PA\perp$ 平面 ABC，$AB\subset$ 平面 ABC，则 $PA\perp AB$，则 $PB=\sqrt{3}$，

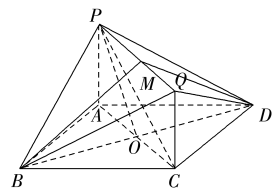
$AE=\dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，则 $\sin\angle AED=\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

则 $\angle AED=\dfrac{\pi}{3}$，即二面角 $A\text{-}PB\text{-}C$ 为 $\dfrac{\pi}{3}$.

跟进训练

3.**解**：(1)连接 BD 交 AC 于 O，

连接 OP，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore BD\perp AC$.

$\because$ 平面 $PACQ\perp$ 平面 $ABCD$，

平面 $PACQ\cap$ 平面 $ABCD=AC$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore BD\perp$ 平面 $PACQ$，

$\therefore\angle BPO$ 即为 BP 与平面 $ACQP$ 所成角.

$\because$ 四边形 $PACQ$ 为矩形，$\therefore PA\perp AC$，

又平面 $PACQ\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PACQ\cap$ 平面 $ABCD=AC$，$PA\subset$ 平面 $PACQ$，

$\therefore PA\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore PA\perp AB$，$\therefore BP=\sqrt{AB^2+PA^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$，

在 $\text{Rt}\triangle POB$ 中，$OB=\sqrt{3}$，$\therefore\sin\angle BPO=\dfrac{OB}{BP}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

故 BP 与平面 $ACQP$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

(2)取 PQ 的中点 M，连接 BM，DM，

由(1)知，$PA\perp$ 平面 $ABCD$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，四边形 $PACQ$ 为矩形，

$\therefore BP=BQ$，$DP=DQ$，

$\therefore BM\perp PQ$，$DM\perp PQ$，

$\therefore\angle BMD$ 即为二面角 $B\text{-}PQ\text{-}D$ 的平面角，

在 $\triangle BDM$ 中，$BD=2\sqrt{3}$，$BM=DM=\sqrt{BP^2-PM^2}=\sqrt{BP^2-\left(\dfrac{1}{2}AC\right)^2}=\sqrt{5-1}=2$，

由余弦定理知，$\cos\angle BMD=\dfrac{BM^2+DM^2-BD^2}{2BM\cdot DM}=\dfrac{4+4-12}{2\times 2\times 2}=-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore\angle BMD=120°$，

故二面角 $B\text{-}PQ\text{-}D$ 的大小为 $120°$，则平面 BPQ 与平面 DPQ 的夹角为 $60°$.

(3)设点 C 到平面 BPQ 的距离为 d，

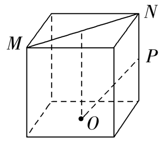
$\because V_{C\text{-}BPQ}=V_{B\text{-}CPQ}$，$\therefore\dfrac{1}{3}d\times\dfrac{1}{2}BM\cdot PQ=\dfrac{1}{3}OB\times\dfrac{1}{2}CQ\cdot PQ$，

$\therefore d\times 2\times 2=\sqrt{3}\times 1\times 2$，$\therefore d=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

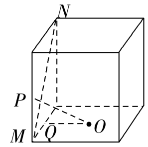
故点 C 到平面 BPQ 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

拓展视野1

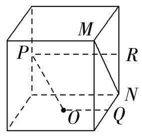
典例1 **BC** [如图所示：



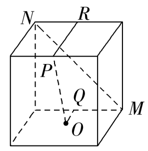
A



B



C



D

选项 A:OP 在上表面的射影与 MN 重合,因此不满足题意.

选项 B:OP 在左侧面的射影为 PQ,P,Q 均为棱中点,$PQ\perp MN$,根据三垂线定理可知满足题意.

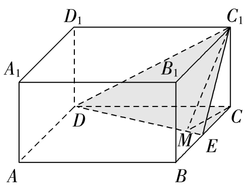
选项 C:OP 在右侧面的射影为 QR,Q,R 均为棱中点,$QR\perp MN$,根据三垂线定理可知满足题意.

选项 D:OP 在后表面的射影为 QR,QR 与 MN 不垂直,因此不满足题意.

综上,故选 BC.]

典例 2 解:过点 C 作 $CM\perp DE$ 垂足为 M,连接 C_1M,

因为 $C_1C\perp$ 平面 $ABCD$,所以 $C_1M\perp DE$(三垂线定理),



故$\angle C_1MC$ 即为二面角 C_1-DE-C 的平面角.

因为 E 为中点且四边形 $ABCD$ 为正方形,

则 $DE\cdot CM=CE\cdot DC$,$DC=2CE=2$,

则 $CM=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$,又 $C_1C=1$,

则 $\tan\angle C_1MC=\dfrac{C_1C}{CM}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

第 6 课时　空间向量的运算及其应用

梳理·必备知识

1.大小　方向　相同　相等　相反　相等　平行　重合　同一个平面

2.(1)$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$　(2)唯一　$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$　(3)$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$

3.(1)$[0,\pi]$　互相垂直

4.$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$　$a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2,a_3=\lambda b_3$　$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$　$\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

5.(1)平行

激活·基本技能

一、(1)√　(2)√　(3)×　(4)×

二、1.**C**　[$\because\boldsymbol{n}_1\neq\lambda\boldsymbol{n}_2$,且 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=-23\neq0$,

$\therefore\alpha,\beta$ 相交但不垂直.]

2.**BD**　[根据题意,依次分析选项:

对于 A 选项,$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{AA_1}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$,A 错误;

对于 B 选项,$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,B 正确;

对于 C 选项,$\overrightarrow{AC_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,则 $|\overrightarrow{AC_1}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=6$,

则 $|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{6}$,C 错误;

对于 D 选项,$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC_1}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=2$,

则 $\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC_1}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC_1}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,D 正确.故选 BD.]

3.$\dfrac{1}{8}$　[$\because P,A,B,C$ 四点共面,$\therefore\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{8}+t=1$,$\therefore t=\dfrac{1}{8}$.]

4.$\sqrt{2}$　[$|\overrightarrow{EF}|^2=\overrightarrow{EF}^2=(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF})^2$

$=\overrightarrow{EC}^2+\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{DF}^2+2(\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DF})$

$=1^2+2^2+1^2+2(1\times2\times\cos120^\circ+0+2\times1\times\cos120^\circ)=2$,

所以$|\overrightarrow{EF}|=\sqrt{2}$,所以 EF 的长为$\sqrt{2}$.]

考点一

典例 1 解:(1)因为 P 是 C_1D_1 的中点,

所以$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1P}=\boldsymbol{a}+\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{D_1C_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

(2)因为 N 是 BC 的中点,

所以$\overrightarrow{A_1N}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

(3)因为 M 是 AA_1 的中点,

所以$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AP}$

$=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\left(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,

又$\overrightarrow{NC_1}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CC_1}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AA_1}$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$,

所以$\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NC_1}=\left(\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\right)+\left(\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{c}\right)$

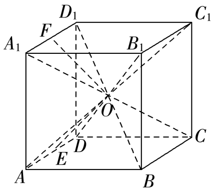
$=\dfrac{3}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\dfrac{3}{2}\boldsymbol{c}$.

跟进训练

1.(1)**A**　(2)$\dfrac{5}{6}$　[(1)设 E,F 分别为 AD 和 A_1D_1 的中点,

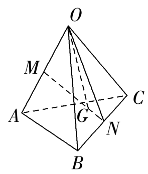
①$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OE}$与$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OD_1}=2\overrightarrow{OF}$不是一对相反向量,错误;

②$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{C_1B}$与$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{B_1C}$不是一对相反向量，错误；③$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OD_1}=-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=-(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$是一对相反向量，



正确；④$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{OC_1}-\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{A_1C_1}$不是一对相反向量，是相等向量，错误. 即正确结论的个数为 1. 故选 A.

(2)连接 ON，设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，



则$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$

$=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，

$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MN}$

$=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)$

$=\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$.

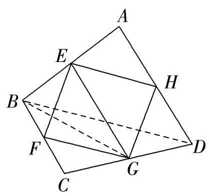
又$\overrightarrow{OG}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，

所以 $x=\frac{1}{6}$，$y=\frac{1}{3}$，$z=\frac{1}{3}$，

因此 $x+y+z=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$.]

考点二

典例 2　**证明：**(1)连接 BG，EG，则$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{EB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})$



$=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EH}$

$=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}$.

由共面向量定理的推论知 E，F，G，H 四点共面.

(2)因为$\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$，所以 $EH\parallel BD$.

又 $EH\subset$平面 $EFGH$，$BD\not\subset$平面 $EFGH$，

所以 $BD\parallel$平面 $EFGH$.

跟进训练

2.(1)**A**　(2)$\frac{2}{13}$　[(1)$\because \boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，$\therefore$设 $\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{a}$，

$\therefore\begin{cases}x(\lambda+1)=6,\\2\mu-1=0,\\2x=2\lambda,\end{cases}$

解得$\begin{cases}\mu=\frac{1}{2},\\\lambda=2,\end{cases}$或$\begin{cases}\mu=\frac{1}{2},\\\lambda=-3.\end{cases}$故选 A.

(2)由题图知，可设$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC_1}(0<\lambda<1)$，

由已知$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=2\overrightarrow{AE}+3\overrightarrow{AF}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$，

所以$\overrightarrow{AM}=2\lambda\overrightarrow{AE}+3\lambda\overrightarrow{AF}+\frac{3\lambda}{2}\overrightarrow{AG}$.

因为 M，E，F，G 四点共面，所以 $2\lambda+3\lambda+\frac{3\lambda}{2}=1$，解得 $\lambda=\frac{2}{13}$.]

考点三

典例 3　(1)**解：**记$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，

则$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\rangle=60°$，

$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}$.

$|\overrightarrow{AC_1}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})$

$=1+1+1+2\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=6$，

$\therefore|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{6}$，即 AC_1 的长为$\sqrt{6}$.

(2)**证明：**$\because\overrightarrow{AC_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，

$\therefore\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{BD}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$

$=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-|\boldsymbol{a}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$

$=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos 60°-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cos 60°=0$.

$\therefore\overrightarrow{AC_1}\perp\overrightarrow{BD}$，$\therefore AC_1\perp BD$.

(3)**解：**$\overrightarrow{BD_1}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，

$\therefore|\overrightarrow{BD_1}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$，

$\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{AC}=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=1$.

$\therefore\cos\langle\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{BD_1}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

$\therefore AC$ 与 BD_1 夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{6}$.

跟进训练

3.**解：**(1)由题意可得$\overrightarrow{AB}=(-2,-1,3)$，$\overrightarrow{AC}=(1,-3,2)$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{-2+3+6}{\sqrt{14}\times\sqrt{14}}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$，所以

$\sin\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以以AB，AC为一组邻边的平行四边形的面积

$S=2\times\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\sin\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=14\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7\sqrt{3}$.

(2)设 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，

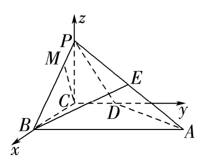
由题意得$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3,\\-2x-y+3z=0,\\x-3y+2z=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=1,\\y=1,\\z=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1,\\y=-1,\\z=-1,\end{cases}$

所以向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为$(1,1,1)$或$(-1,-1,-1)$.

考点四

典例 4　**证明：**(1)由题意知，CB，CD，CP 两两垂直，以 C 为坐标原点，CB 所在直线为 x 轴，CD 所在直线为 y 轴，CP 所在直线为 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $Cxyz$.



$\because PC\perp$平面$ABCD$,

$\therefore \angle PBC$为PB与平面$ABCD$所成的角,

$\therefore \angle PBC=30°$.

$\because PC=2$,$\therefore BC=2\sqrt{3}$,$PB=4$,

$\therefore D(0,1,0)$,$B(2\sqrt{3},0,0)$,$A(2\sqrt{3},4,0)$,$P(0,0,2)$,

$M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{3}{2}\right)$,

$\therefore \overrightarrow{DP}=(0,-1,2)$,$\overrightarrow{DA}=(2\sqrt{3},3,0)$,

$\overrightarrow{CM}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{3}{2}\right)$.

设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面PAD的法向量,

由$\begin{cases}\overrightarrow{DP}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{DA}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-y+2z=0,\\ 2\sqrt{3}x+3y=0,\end{cases}$

令$y=2$,则$\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},2,1)$是平面$PAD$的一个法向量.

$\because \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CM}=-\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times0+1\times\frac{3}{2}=0$,

$\therefore \boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{CM}$. 又$CM\not\subset$平面$PAD$,

$\therefore CM/\!/$平面PAD.

(2)**法一**:由(1)知$\overrightarrow{BA}=(0,4,0)$,$\overrightarrow{PB}=(2\sqrt{3},0,-2)$,

设平面PAB的法向量为$\boldsymbol{m}=(x_0,y_0,z_0)$,

由$\begin{cases}\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}4y_0=0,\\ 2\sqrt{3}x_0-2z_0=0,\end{cases}$

令$x_0=1$,则$\boldsymbol{m}=(1,0,\sqrt{3})$是平面$PAB$的一个法向量.

又$\because$平面PAD的一个法向量$\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},2,1)$,

$\therefore \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1\times(-\sqrt{3})+0\times2+\sqrt{3}\times1=0$,

$\therefore$平面$PAB\perp$平面PAD.

法二:取AP的中点E,连接BE,

则$E(\sqrt{3},2,1)$,$\overrightarrow{BE}=(-\sqrt{3},2,1)$.

$\because PB=AB$,$\therefore BE\perp PA$.

又$\because \overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DA}=(-\sqrt{3},2,1)\cdot(2\sqrt{3},3,0)=0$,

$\therefore \overrightarrow{BE}\perp\overrightarrow{DA}$. $\therefore BE\perp DA$.

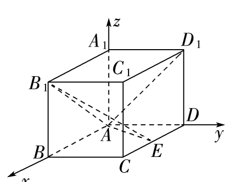
又$PA\cap DA=A$,$\therefore BE\perp$平面PAD.

又$\because BE\subset$平面PAB,

$\therefore$平面$PAB\perp$平面PAD.

跟进训练

4.**解**:以A为原点,$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AA_1}$的方向分别为x轴、y轴、z轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系. 设$AB=a$.



(1)**证明**:$A(0,0,0)$,$D(0,1,0)$,

$D_1(0,1,1)$,$E\left(\frac{a}{2},1,0\right)$,$B_1(a,0,1)$,

故$\overrightarrow{AD_1}=(0,1,1)$,$\overrightarrow{B_1E}=\left(-\frac{a}{2},1,-1\right)$.

因为$\overrightarrow{B_1E}\cdot\overrightarrow{AD_1}=-\frac{a}{2}\times0+1\times1+(-1)\times1=0$,

因此$\overrightarrow{B_1E}\perp\overrightarrow{AD_1}$,

所以$B_1E\perp AD_1$.

(2)存在满足要求的点P,

假设在棱AA_1上存在一点$P(0,0,z_0)$,其中$0<z_0<1$,

使得$DP/\!/$平面B_1AE,此时$\overrightarrow{DP}=(0,-1,z_0)$,

再设平面B_1AE的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.

$\overrightarrow{AB_1}=(a,0,1)$,$\overrightarrow{AE}=\left(\frac{a}{2},1,0\right)$.

因为$\boldsymbol{n}\perp$平面B_1AE,

所以$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB_1}$,$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AE}$,

得$\begin{cases}ax+z=0,\\ \frac{ax}{2}+y=0,\end{cases}$

取$x=1$,则$y=-\frac{a}{2}$,$z=-a$,

则平面B_1AE的一个法向量$\boldsymbol{n}=\left(1,-\frac{a}{2},-a\right)$.

要使$DP/\!/$平面B_1AE,只要$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DP}$,

有$\frac{a}{2}-az_0=0$,

解得$z_0=\frac{1}{2}$.

所以存在点P,满足$DP/\!/$平面B_1AE,此时$AP=\frac{1}{2}$.

第7课时　向量法求空间角

梳理·必备知识

1. $\frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$　2. $\frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{n}|}$　3. $\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$

激活·基本技能

一、(1)×　(2)×　(3)×　(4)√

二、1. **C**　[因为$\boldsymbol{s}_1=(1,0,1)$,$\boldsymbol{s}_2=(-1,2,-2)$,所以$\cos\langle\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}=\frac{-1-2}{\sqrt{2}\times3}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又两直线夹角的取值范围为$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,所以$l_1$和$l_2$夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.]

2. $\frac{\sqrt{15}}{6}$　$\left[\frac{|(0,-1,3)\cdot(2,2,4)|}{\sqrt{1+9}\times\sqrt{4+4+16}}=\frac{\sqrt{15}}{6}.\right]$

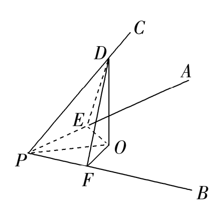
3. $\frac{\pi}{3}$　[设平面α与平面β的夹角为θ,

由$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$可得,

$\overrightarrow{CD}^2=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})^2=\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BD}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=4+1+9+2|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{BD}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD}\rangle=14-12\cos\theta=(2\sqrt{2})^2$.

所以$\cos\theta=\frac{1}{2}$,即平面α与平面β的夹角为$\frac{\pi}{3}$.]

4. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　[过PC上一点D作$DO\perp$平面APB,如图,



则$\angle DPO$就是直线PC与平面PAB所成的角.

因为$\angle APC=\angle BPC=45°$,

所以点O在$\angle APB$的平分线上,即$\angle OPA=30°$.

过点O作$OE\perp PA$于E,$OF\perp PB$于F,

又因为$DO\perp$平面APB,则$DE\perp PA$,$DF\perp PB$.

设$PE=1$,

因为$\angle OPE=30°$,所以$OP=\frac{1}{\cos 30°}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

在$Rt\triangle PED$中,$\angle DPE=45°$,$PE=1$,则$PD=\sqrt{2}$.

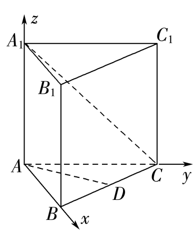
在$Rt\triangle DOP$中,$OP=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,$PD=\sqrt{2}$,则$\cos\angle DPO=\frac{OP}{PD}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

即直线PC与平面PAB所成角的余弦值是$\frac{\sqrt{6}}{3}$.]

考点一

典例1　(1)**B**　(2)$\frac{1}{3}$　[(1)以A为原点,AB,AC,AA_1所在直线分别为x轴、y轴、z轴建立如图所示的空间直角坐标系,则$A(0,0,0)$,$A_1(0,0,\sqrt{2})$,$B(\sqrt{2},0,0)$,$C(0,\sqrt{2},0)$,所以$D\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$,

所以$\overrightarrow{AD}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$,$\overrightarrow{A_1C}=(0,\sqrt{2},-\sqrt{2})$,



所以$\cos\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{A_1C}\rangle=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{A_1C}}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{A_1C}|}=\frac{1}{2}$,所以$\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{A_1C}\rangle=\frac{\pi}{3}$.故选B.

(2)以D为坐标原点,DA,DC,DD_1所在直线分别为x轴、y轴、z轴建立空间直角坐标系(图略).

正方体的棱长为2,则$A_1(2,0,2)$,$D_1(0,0,2)$,$E(0,2,1)$,$A(2,0,0)$.

所以$\overrightarrow{D_1E}=(0,2,-1)$,$\overrightarrow{A_1F}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{A_1A}+\lambda\overrightarrow{AD}=(0,0,-2)+\lambda(-2,0,0)=(-2\lambda,0,-2)$.

则$\cos\langle\overrightarrow{A_1F},\overrightarrow{D_1E}\rangle=\frac{\overrightarrow{A_1F}\cdot\overrightarrow{D_1E}}{|\overrightarrow{A_1F}|\cdot|\overrightarrow{D_1E}|}=\frac{2}{2\sqrt{\lambda^2+1}\cdot\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{2}}{10}$,

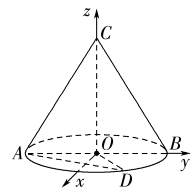
解得$\lambda=\frac{1}{3}$$\left(\lambda=-\frac{1}{3}舍去\right)$.]

跟进训练

1.**A**　[因为$\angle AOD=2\angle BOD$,

且$\angle AOD+\angle BOD=\pi$,所以$\angle BOD=\frac{\pi}{3}$,

连接CO,则$CO\perp$平面ABD,以点O为坐标原点,OB,OC所在直线分别为y轴、z轴建立如图所示的空间直角坐标系,



设圆O的半径为2,则$A(0,-2,0)$,$B(0,2,0)$,$C(0,0,2\sqrt{3})$,$D(\sqrt{3},1,0)$,

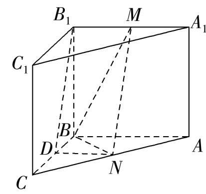
$\overrightarrow{AD}=(\sqrt{3},3,0)$,$\overrightarrow{BC}=(0,-2,2\sqrt{3})$,

设异面直线AD与BC所成的角为θ,

则$\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{|-6|}{2\sqrt{3}\times4}=\frac{\sqrt{3}}{4}$,因此,异面直线$AD$与$BC$所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$.]

考点二

典例2　(1)**证明**:取BC中点D,连接B_1D,DN,在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中,$A_1B_1/\!/AB$,$A_1B_1=AB$.因为M,N,D分别为A_1B_1,AC,BC的中点,所以$B_1M/\!/AB$,$B_1M=\frac{1}{2}AB$,$DN/\!/AB$,



$DN=\frac{1}{2}AB$,即$B_1M/\!/DN$且$B_1M=DN$,

所以四边形B_1MND为平行四边形,因此$B_1D/\!/MN$,

又$MN\not\subset$平面BCC_1B_1,$B_1D\subset$平面BCC_1B_1,所以$MN/\!/$平面BCC_1B_1.

(2)**解**:选条件①.

因为侧面BCC_1B_1为正方形,所以$CB\perp BB_1$,

又因为平面$BCC_1B_1\perp$平面ABB_1A_1,且平面$BCC_1B_1\cap$平面$ABB_1A_1=BB_1$,

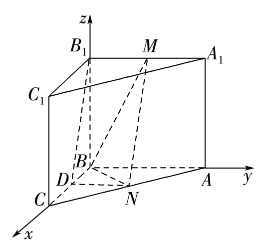
所以$CB\perp$平面ABB_1A_1,而$AB\subset$平面ABB_1A_1,所以$CB\perp AB$,

由(1)得$B_1D/\!/MN$,又因为$AB\perp MN$,所以$AB\perp B_1D$,

而$B_1D\cap CB=D$,所以$AB\perp$平面BCC_1B_1,

在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中,BA,BC,BB_1两两垂直,

故分别以BC,BA,BB_1所在直线为x轴、y轴、z轴,建立如图所示的空间直角坐标系,



因为$AB=BC=BB_1=2$,则$B(0,0,0)$,$N(1,1,0)$,$M(0,1,2)$,$A(0,2,0)$,所以$\overrightarrow{BN}=(1,1,0)$,$\overrightarrow{BM}=(0,1,2)$,$\overrightarrow{AB}=(0,-2,0)$,

设平面BMN的法向量$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

由$\begin{cases}\overrightarrow{BN}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\\overrightarrow{BM}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x+y=0,\\y+2z=0.\end{cases}$令$x=2$,得$\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$.

设直线AB与平面BMN所成角为θ,

则$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AB}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{AB}|}=\frac{|4|}{3\times2}=\frac{2}{3}$,所以直线

AB 与平面 BMN 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$.

选条件②.

取 AB 中点 H，连接 HM,HN，

因为 M,N,H 分别为 A_1B_1,AC,AB 的中点，

所以 $B_1B// MH,CB// NH$，而 $CB\perp BB_1$，故 $NH\perp MH$.

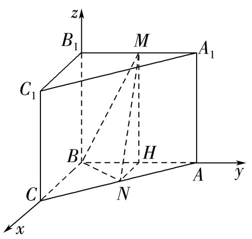
又因为 $AB=BC=2$，所以 $NH=BH=1$.

在 $\triangle MHB$ 和 $\triangle MHN$ 中，$BM=MN,NH=BH$，公共边为 MH，那么 $\triangle MHB\cong\triangle MHN$，

因此 $\angle MHN=\angle MHB=90^\circ$，即 $MH\perp AB$，故 $B_1B\perp AB$.

在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，BA,BC,BB_1 两两垂直，

故分别以 BC,BA,BB_1 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



因为 $AB=BC=BB_1=2$，则 $B(0,0,0)$，$N(1,1,0)$，$M(0,1,2)$，$A(0,2,0)$，所以 $\overrightarrow{BN}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{BM}=(0,1,2)$，$\overrightarrow{AB}=(0,-2,0)$，

设平面 BMN 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{BN}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{BM}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x+y=0,\\ y+2z=0.\end{cases}$ 令 $x=2$，得 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$.

设直线 AB 与平面 BMN 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AB}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{AB}|}=\frac{|4|}{3\times2}=\frac{2}{3}$，所以直线 AB 与平面 BMN 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$.

跟进训练

2. **解**：(1)**证明**：过 A_1 作 $A_1D\perp CC_1$，垂足为 D，

$\because A_1C\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，$\therefore A_1C\perp BC$，

又 $\angle ACB=90^\circ$，$\therefore AC\perp BC$，

$\because A_1C,AC\subset$ 平面 ACC_1A_1，且 $A_1C\cap AC=C$，

$\therefore BC\perp$ 平面 ACC_1A_1，

$\because A_1D\subset$ 平面 ACC_1A_1，$\therefore BC\perp A_1D$，

又 $CC_1,BC\subset$ 平面 BCC_1B_1，且 $CC_1\cap BC=C$，

$\therefore A_1D\perp$ 平面 BCC_1B_1，$\therefore A_1D=1$.

由已知条件易证 $\triangle CA_1C_1$ 是直角三角形，又 $CC_1=AA_1=2$，$A_1D=1$，

$\therefore D$ 为 CC_1 的中点，又 $A_1D\perp CC_1$，

$\therefore A_1C=A_1C_1$，

又在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AC=A_1C_1$，

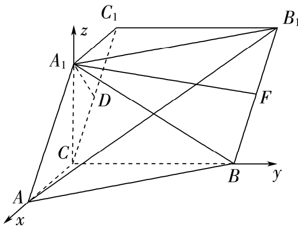
$\therefore A_1C=AC$.

(2)连接 A_1B，由(1)易证 $A_1B=A_1B_1$，故取 BB_1 的中点 F，连接 A_1F，

$\because AA_1$ 与 BB_1 的距离为 2，$\therefore A_1F=2$，

又 $A_1D=1$ 且 $A_1C=AC$，

$\therefore A_1C=A_1C_1=AC=\sqrt{2}$，$AB=A_1B_1=\sqrt{5}$，$BC=\sqrt{3}$.



建立空间直角坐标系 $Cxyz$ 如图所示，

则 $C(0,0,0)$，$A(\sqrt{2},0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$B_1(-\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{2})$，$C_1(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，

$\therefore\overrightarrow{CB}=(0,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{CC_1}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AB_1}=(-2\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{2})$.

设平面 BCC_1B_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}y=0,\\ -\sqrt{2}x+\sqrt{2}z=0,\end{cases}$

取 $x=1$，则 $y=0,z=1$，

$\therefore$ 平面 BCC_1B_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$.

设 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AB_1}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AB_1}|}=\frac{\sqrt{13}}{13}$.

$\therefore AB_1$ 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{13}}{13}$.

考点三

跟进训练

3. **解**：(1)因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PD\perp AD,PD\perp DC$.

在矩形 $ABCD$ 中，$AD\perp DC$，故可以点 D 为坐标原点，建立空间直角坐标系，如图所示.

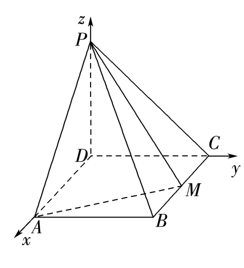
设 $BC=t$，则 $A(t,0,0)$，

$B(t,1,0)$，$M\left(\frac{t}{2},1,0\right)$，

$P(0,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{PB}=(t,1,-1)$，

$\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{t}{2},1,0\right)$.



因为 $PB\perp AM$，所以 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{AM}=-\frac{t^2}{2}+1=0$，得 $t=\sqrt{2}$，

所以 $BC=\sqrt{2}$.

(2)易知 $C(0,1,0)$，由(1)可得 $\overrightarrow{AP}=(-\sqrt{2},0,1)$，$\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1,0\right)$，$\overrightarrow{CB}=(\sqrt{2},0,0)$，$\overrightarrow{PB}=(\sqrt{2},1,-1)$.

设平面 APM 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AP}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AM}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{2}x_1+z_1=0,\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+y_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=\sqrt{2}$，则 $z_1=2,y_1=1$，所以平面 APM 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{2},1,2)$.

设平面 PMB 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CB}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{PB}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\sqrt{2}x_2=0,\\ \sqrt{2}x_2+y_2-z_2=0,\end{cases}$

得 $x_2=0$，令 $y_2=1$，则 $z_2=1$，所以平面 PMB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,1,1)$.

$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{3}{\sqrt{7}\times\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$，

所以平面 APM 与平面 BPM 的夹角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{70}}{14}$.

第 8 课时　向量法求距离及立体几何中的探索性、翻折问题

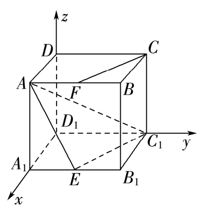
梳理·必备知识

1. $\sqrt{\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})^2}$

激活·基本技能

一、(1)√　(2)×　(3)√　(4)×

二、(1)$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　(2)$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$　[(1)以 D_1 为原点，D_1A_1，D_1C_1，D_1D 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(1,0,1)$，$B(1,1,1)$，$C(0,1,1)$，$C_1(0,1,0)$，$E\left(1,\dfrac{1}{2},0\right)$，$F\left(1,\dfrac{1}{2},1\right)$，

$\therefore\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{AC_1}=(-1,1,-1)$，$\overrightarrow{AE}=\left(0,\dfrac{1}{2},-1\right)$，

$\overrightarrow{EC_1}=\left(-1,\dfrac{1}{2},0\right)$，$\overrightarrow{FC}=\left(-1,\dfrac{1}{2},0\right)$，$\overrightarrow{AF}=\left(0,\dfrac{1}{2},0\right)$，

取 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$，$\boldsymbol{u}=\dfrac{\overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AC_1}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(-1,1,-1)$，则 $\boldsymbol{a}^2=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore$点 B 到直线 AC_1 的距离为

$\sqrt{\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})^2}=\sqrt{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(2)$\because\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{EC_1}=\left(-1,\dfrac{1}{2},0\right)$，$\therefore FC\parallel EC_1$，$\therefore FC\parallel$平面 AEC_1，

$\therefore$点 F 到平面 AEC_1 的距离即为直线 FC 到平面 AEC_1 的距离，

设平面 AEC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC_1}=0,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}\dfrac{1}{2}y-z=0,\\ -x+\dfrac{1}{2}y=0,\end{cases}\therefore\begin{cases}x=z,\\ y=2z,\end{cases}$

取 $z=1$，则 $x=1$，$y=2$，

$\therefore\boldsymbol{n}=(1,2,1)$是平面 AEC_1 的一个法向量.

又$\because\overrightarrow{AF}=\left(0,\dfrac{1}{2},0\right)$，

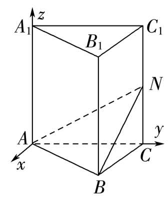
$\therefore$点 F 到平面 AEC_1 的距离为

$$\dfrac{|\overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\left|\left(0,\dfrac{1}{2},0\right)\cdot(1,2,1)\right|}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6},$$

即直线 FC 到平面 AEC_1 的距离为$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.]

考点一

典例 1　**解**：建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$，$B(2\sqrt{3},2,0)$，$C(0,4,0)$，$C_1(0,4,4)$，

$\because N$ 是 CC_1 的中点，$\therefore N(0,4,2)$.

(1)$\overrightarrow{AN}=(0,4,2)$，$\overrightarrow{AB}=(2\sqrt{3},2,0)$，

则$|\overrightarrow{AN}|=2\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{AB}|=4$.

设点 N 到直线 AB 的距离为 d_1，

则 $d_1=\sqrt{|\overrightarrow{AN}|^2-\left(\dfrac{\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right)^2}=\sqrt{20-4}=4$.

(2)设平面 ABN 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AN}$，

得$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2\sqrt{3}x+2y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AN}=4y+2z=0,\end{cases}$

令 $z=2$，则 $y=-1$，$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

即 $\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-1,2\right)$.

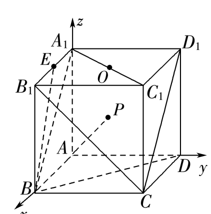
易知$\overrightarrow{C_1N}=(0,0,-2)$，

设点 C_1 到平面 ABN 的距离为 d_2，

则 $d_2=\left|\dfrac{\overrightarrow{C_1N}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\sqrt{3}$.

跟进训练

1. **BCD**　[如图，建立空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$D(0,1,0)$，$A_1(0,0,1)$，$C_1(1,1,1)$，$D_1(0,1,1)$，



$E\left(\dfrac{1}{2},0,1\right)$，所以$\overrightarrow{BA}=(-1,0,0)$，

$\overrightarrow{BE}=\left(-\dfrac{1}{2},0,1\right)$.

设$\angle ABE=\theta$，

则 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BE}|}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BE}|}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

故 A 到直线 BE 的距离 $d_1=|\overrightarrow{BA}|\sin\theta=1\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，故 A 错误.

易知$\overrightarrow{C_1O}=\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1A_1}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$，

平面ABC_1D_1的一个法向量$\overrightarrow{DA_1}=(0,-1,1)$，

则点O到平面ABC_1D_1的距离$d_2=\frac{|\overrightarrow{DA_1}\cdot\overrightarrow{C_1O}|}{|\overrightarrow{DA_1}|}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，故B正确.

$\overrightarrow{A_1B}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{A_1D}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{A_1D_1}=(0,1,0)$.

设平面A_1BD的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0,\end{cases}$所以$\begin{cases}x-z=0,\\y-z=0,\end{cases}$

令$z=1$，得$y=1$，$x=1$，所以$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$.

所以点D_1到平面A_1BD的距离$d_3=\frac{|\overrightarrow{A_1D_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

因为平面A_1BD∥平面B_1CD_1，所以平面A_1BD与平面B_1CD_1间的距离等于点D_1到平面A_1BD的距离，

所以平面A_1BD与平面B_1CD_1间的距离为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，故C正确.

因为$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$，所以$\overrightarrow{AP}=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$，又$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，则$\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{3}{4}$，

所以点P到AB的距离$d=\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-\left(\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{9}{16}+\frac{1}{4}+\frac{4}{9}\right)-\frac{9}{16}}=\frac{5}{6}$，故D正确. 故选BCD.]

考点二

典例2 (1)**证明**：∵四边形$ABCD$为正方形，则$BC\perp AB$，$CD\perp AD$，

∵$PB\perp BC$，$BC\perp AB$，$PB\cap AB=B$，∴$BC\perp$平面PAB，

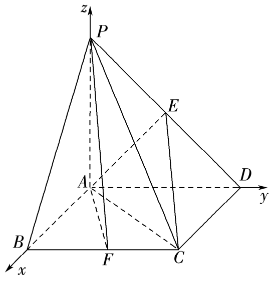
∵$PA\subset$平面PAB，∴$PA\perp BC$.

∵$PD\perp CD$，$CD\perp AD$，$PD\cap AD=D$，∴$CD\perp$平面PAD，

∵$PA\subset$平面PAD，∴$PA\perp CD$，

∵$BC\cap CD=C$，∴$PA\perp$平面$ABCD$.

(2)**解**：∵$PA\perp$平面$ABCD$，$AB\perp AD$，不妨以点A为坐标原点，AB，AD，AP所在直线分别为x轴、y轴、z轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则$A(0,0,0)$，$C(2,2,0)$，$P(0,0,2)$，$E(0,1,1)$.

则$\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{AE}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{PC}=(2,2,-2)$.

设平面ACE的法向量$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=2x+2y=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=y+z=0,\end{cases}$取$y=1$，可得$\boldsymbol{m}=(-1,1,-1)$是平面$ACE$的一个法向量，

设PC与平面ACE所成角为θ，

则$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{PC}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{PC}|}=\frac{2}{\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$，

∴PC与平面ACE所成角的正弦值为$\frac{1}{3}$.

(3)设点$F(2,t,0)(0\leqslant t\leqslant2)$，平面$PAF$的法向量$\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，

$\overrightarrow{AF}=(2,t,0)$，$\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$，

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=2a+tb=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=2c=0,\end{cases}$取$a=t$，则$\boldsymbol{n}=(t,-2,0)$，

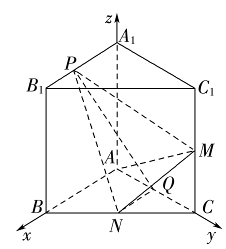
∴点E到平面PAF的距离$d=\frac{|\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{t^2+4}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

∵$t>0$，∴$t=1$.

因此，当点F为线段BC的中点时，点E到平面PAF的距离为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

跟进训练

2.(1)**证明**：如图，以A为坐标原点，AB，AC，AA_1所在的直线分别为x轴、y轴、z轴建立空间直角坐标系，



则$A(0,0,0)$，$A_1(0,0,1)$，$B_1(1,0,1)$，$M\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，$N\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$Q\left(0,\frac{1}{2},0\right)$，

由$\overrightarrow{A_1P}=\lambda\overrightarrow{A_1B_1}=\lambda(1,0,0)=(\lambda,0,0)$，可得点$P(\lambda,0,1)$，所以$\overrightarrow{PN}=\left(\frac{1}{2}-\lambda,\frac{1}{2},-1\right)$，$\overrightarrow{PQ}=\left(-\lambda,\frac{1}{2},-1\right)$.

又$\overrightarrow{AM}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，所以$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{PN}=0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{PQ}=0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$，

所以$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{PN}$，$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{PQ}$，即$AM\perp PN$，$AM\perp PQ$，

又$PN\cap PQ=P$，所以$AM\perp$平面PNQ，

所以无论λ取何值，总有$AM\perp$平面PNQ.

(2)**解**：设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面PMN的法向量，

$\overrightarrow{NM}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{PN}=\left(\frac{1}{2}-\lambda,\frac{1}{2},-1\right)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{NM}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PN}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=0,\\ \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)x+\frac{1}{2}y-z=0,\end{cases}$

得$\begin{cases}y=\frac{1+2\lambda}{3}x,\\ z=\frac{2-2\lambda}{3}x,\end{cases}$

令 $x=3$,所以 $\boldsymbol{n}=(3,1+2\lambda,2-2\lambda)$是平面 PMN 的一个法向量.

取平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$.

假设存在符合条件的点 P,则

$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|2-2\lambda|}{\sqrt{9+(1+2\lambda)^2+(2-2\lambda)^2}}=\frac{1}{2}$,

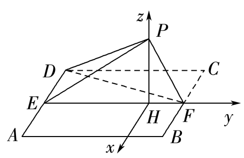
化简得 $4\lambda^2-14\lambda+1=0$,解得 $\lambda=\frac{7-3\sqrt{5}}{4}$或 $\lambda=\frac{7+3\sqrt{5}}{4}$(舍去).

综上,存在点 P,且当 $A_1P=\frac{7-3\sqrt{5}}{4}$时,满足平面 PMN 与平面 ABC 的夹角为 $60°$.

考点三

典例 3　(1)**证明**:由已知可得 $BF\perp PF$,$BF\perp EF$,
$PF\cap EF=F$,$PF,EF\subset$平面 PEF,
所以 $BF\perp$平面 PEF.
又 $BF\subset$平面 $ABFD$,
所以平面 $PEF\perp$平面 $ABFD$.

(2)**解**:如图,作 $PH\perp EF$,垂足为 H.
由(1)得,$PH\perp$平面 $ABFD$.
以 H 为坐标原点,$\overrightarrow{HF}$的方向为 y 轴正方向,建立如图所示的空间直角坐标系 $Hxyz$.



设$|\overrightarrow{BF}|=1$,
由(1)可得,$DE\perp PE$.
又 $DP=2$,$DE=1$,所以 $PE=\sqrt{3}$.
又 $PF=1$,$EF=2$,所以 $PE\perp PF$.

所以 $PH=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$EH=\frac{3}{2}$.

则 $H(0,0,0)$,$P\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$D\left(-1,-\frac{3}{2},0\right)$,

$\overrightarrow{DP}=\left(1,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{HP}=\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

又$\overrightarrow{HP}$为平面 $ABFD$ 的法向量,
设 DP 与平面 $ABFD$ 所成的角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{HP},\overrightarrow{DP}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{DP}|}{|\overrightarrow{HP}||\overrightarrow{DP}|}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

所以 DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$.

跟进训练

3.(1)**证明**:由已知得 $AD\parallel BE$,$CG\parallel BE$,所以 $AD\parallel CG$,故 AD,CG 确定一个平面,从而 A,C,G,D 四点共面.

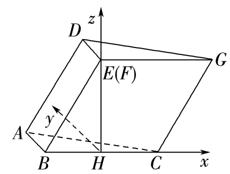
由已知得 $AB\perp BE$,$AB\perp BC$,$BE\cap BC=B$,故 $AB\perp$平面 $BCGE$.

又因为 $AB\subset$平面 ABC,所以平面 $ABC\perp$平面 $BCGE$.

(2)**解**:作 $EH\perp BC$,垂足为 H.因为 $EH\subset$平面 $BCGE$,平面 $BCGE\perp$平面 ABC,所以 $EH\perp$平面 ABC.

由已知,菱形 $BCGE$ 的边长为 2,$\angle EBC=60°$,可求得 $BH=1$,$EH=\sqrt{3}$.

以 H 为坐标原点,$\overrightarrow{HC}$的方向为 x 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系 $Hxyz$,则 $A(-1,1,0)$,$C(1,0,0)$,$G(2,0,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{CG}=(1,0,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AC}=(2,-1,0)$.



设平面 $ACGD$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则

$\begin{cases}\overrightarrow{CG}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x+\sqrt{3}z=0,\\ 2x-y=0.\end{cases}$

所以可取 $\boldsymbol{n}=(3,6,-\sqrt{3})$.

又平面 $BCGE$ 的一个法向量可取 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$,

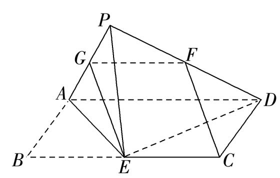
所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因此平面 BCG 与平面 ACG 的夹角为 $30°$.

高考培优 8　立体几何中的动态问题

题型一

典例 1　(1)**ABD**　(2)**ABD**　[(1)取 AP 中点 G,连接 EG,FG,如图,



因 F 为线段 PD 的中点,则有 $GF\parallel AD$,$GF=\frac{1}{2}AD$,又 E 是矩形 $ABCD$ 边 BC 的中点,则 $CE\parallel AD$,$CE=\frac{1}{2}AD$,于是得 $GF\parallel CE$,$GF=CE$,即四边形 $CEGF$ 是平行四边形,则 $CF\parallel EG$,而 $EG\subset$平面 AEP,$CF\not\subset$平面 AEP,

因此,$CF\parallel$平面 AEP,故 A 正确;

在▱$CEGF$ 中,$CF=EG$,在$\triangle PAE$ 中,$PE=PA=AB$,$\angle APE=90°$,即 EG 为已知等腰直角三角形一腰上的中线,则 EG 长是定值,$\angle PEG$ 也是定值,

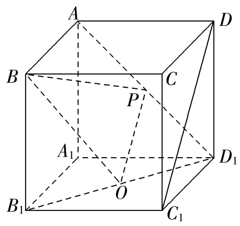
因此,CF 的长度恒定不变,故 B 正确;

由 $CF\parallel EG$ 知,异面直线 CF 与 PE 所成角的大小为$\angle PEG$,故 D 正确;

假设 $AE\perp DP$,因 $AE=DE=\sqrt{2}AB$,则
$AE^2+DE^2=4AB^2=AD^2$,即 $AE\perp DE$,
而 $DP\cap DE=D$,$DP,DE\subset$平面 PDE,则 $AE\perp$平面 PDE,有 $AE\perp PE$,

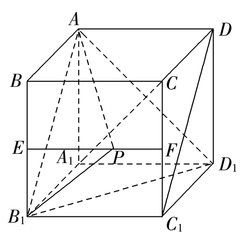
在折叠前后有$\angle PEA=\angle BEA=45°$，与$AE\perp PE$矛盾，即假设是错的，故C不正确.故选ABD.

(2)对于A，如图，P为AD_1中点，取B_1D_1的中点O，连接PO,BO,BP，则$PO/\!/C_1D$，所以$\angle BPO$或其补角即为异面直线BP与C_1D所成的角，易得$BP=\sqrt{6}$，$PO=\sqrt{2}$，$BO=\sqrt{6}$，所以$\cos\angle BPO=\frac{\sqrt{3}}{6}$，故A正确；

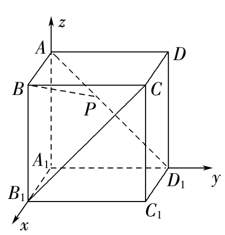


对于B，由条件$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}(\lambda\in[0,1])$，可知点$P$的轨迹为线段$B_1C_1$，因为$B_1C_1/\!/BC$，故$P$到平面$A_1BC$的距离为定值，且三角形$A_1BC$面积为定值，故三棱锥$P$-$A_1BC$体积为定值$\frac{4}{3}$，故B正确；

对于C，由$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}(\lambda\in[0,1])$可知点$P$在线段$EF$上($E$，$F$分别为$BB_1$，$CC_1$中点)，因为$A_1C\perp$平面$AB_1D_1$，若$A_1C\perp$平面$AB_1P$，则平面$AB_1P$即为平面$AB_1D_1$，点$P$即为平面$AB_1D_1$与直线$EF$交点，此交点在$FE$延长线上，故C错误；



对于D，由$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AD_1}(\lambda\in[0,1])$可知点$P$的轨迹为线段$AD_1$.建系如图，得$\overrightarrow{C_1D}=(-2,0,2)$，$B(2,0,2)$，设$P(0,a,2-a)$，$a\in[0,2]$，则$\overrightarrow{BP}=(-2,a,-a)$，所以$\cos\langle\overrightarrow{BP},\overrightarrow{C_1D}\rangle=\frac{4-2a}{2\sqrt{2}\times\sqrt{4+2a^2}}=\frac{2-a}{2\sqrt{2+a^2}}$，令$2-a=x\in[0,2]$，



当$a=2$，即$x=0$时，$\cos\langle\overrightarrow{BP},\overrightarrow{C_1D}\rangle=0$，此时直线$BP$和$C_1D$所成角是$\frac{\pi}{2}$；

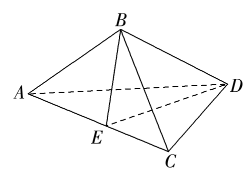
当$a\neq2$，即$x\in(0,2]$时，则$\cos\langle\overrightarrow{BP},\overrightarrow{C_1D}\rangle=\frac{1}{2\sqrt{\frac{6}{x^2}-\frac{4}{x}+1}}$，令$\frac{1}{x}=t\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$，$\cos\langle\overrightarrow{BP},\overrightarrow{C_1D}\rangle=\frac{1}{2\sqrt{6t^2-4t+1}}$，所以当$\frac{1}{x}=t=\frac{1}{2}$，即$a=0$时，$\cos\langle\overrightarrow{BP},\overrightarrow{C_1D}\rangle$取最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，直线$BP$和$C_1D$所成角的最小值为$\frac{\pi}{4}$，故D正确.

故选ABD.]

跟进训练

1.(1)**AB** (2)**BC** [(1)由题知，当平面$BAC\perp$平面ACD时，三棱锥B-ACD的体积最大，此时$V_{B\text{-}ACD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{12}{5}=\frac{24}{5}$，故A正确.

取AC的中点E，连接BE,DE，则$DE=AE=CE=BE=\frac{5}{2}$，所以三棱锥B-ACD的外接球是以点E为球心，$\frac{5}{2}$为半径的球，则该三棱锥外接球的表面积$S=4\pi\times\left(\frac{5}{2}\right)^2=25\pi$，故B正确.



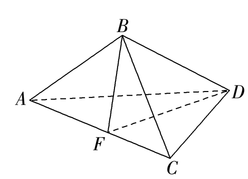
假设$BC\perp AD$，又$BC\perp AB$，$AB\cap AD=A$，$AB,AD\subset$平面BAD，所以$BC\perp$平面BAD.又$BD\subset$平面BAD，所以$BC\perp BD$，

则在$\mathrm{Rt}\triangle BCD$中，斜边CD的长度要大于4，这与$CD=3$矛盾，故C错误.

假设$BD\perp AC$，过点D作$DF\perp AC$于点F，连接BF.

由于$BD\cap DF=D$，$BD,DF\subset$平面BDF，所以$AC\perp$平面BDF.

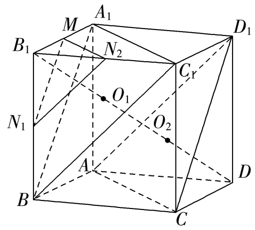
又$BF\subset$平面BDF，所以$AC\perp BF$，所以$BF=\frac{12}{5}=DF$.



又$CF=CF$，$\angle CFB=\angle CFD=90°$，所以$\triangle BCF\cong\triangle DCF$，所以$BC=CD$，这与$BC=4$，$CD=3$矛盾，故D错误.故选AB.

(2)对于A，显然无法找到点N，使得$MN/\!/BC_1$，故A错误；

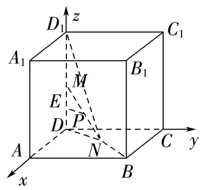
对于B，$V_{M\text{-}A_1BC_1}=V_{B\text{-}A_1MC_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1MC_1}\cdot B_1B=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times3\times3=\frac{9}{4}$，故B正确；对于C，如图所示$N_1$，$N_2$分别为$B_1B$，$B_1C_1$中点，有$MN_1/\!/$平面$A_1BC_1$，$MN_2/\!/$平面$A_1BC_1$，故C正确；



对于D,易证$B_1D\perp$平面A_1BC_1,$B_1D\perp$平面ACD_1,且$B_1O_1=O_1O_2=O_2D=\frac{1}{3}B_1D=\sqrt{3}$,所以有$B_1,A,C,D_1$四点到平面$A_1BC_1$的距离为$\sqrt{3}$,故D错误.故选BC.]

题型二

典例2 ACD [如图所示,对于A,根据正方体的性质可知,$MD\perp$平面$ABCD$,所以$\angle MND$为MN与平面$ABCD$所成的角,所以$\angle MND=\frac{\pi}{4}$,所以$DN=DM=\frac{1}{2}DD_1=\frac{1}{2}\times4=2$,所以点$N$的轨迹为以$D$为圆心,2为半径的圆,故A正确;



对于B,在$\mathrm{Rt}\triangle MDN$中,$DN=\sqrt{MN^2-MD^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$,取$MD$的中点$E$,$MN$的中点$P$,连接$PE$,所以$PE\parallel DN$,且$PE=\frac{1}{2}DN=\sqrt{3}$,因为$DN\perp ED$,所以$PE\perp ED$,即点$P$在过点$E$且与$DD_1$垂直的平面内,又$PE=\sqrt{3}$,所以点$P$的轨迹为以$\sqrt{3}$为半径的圆,其面积为$\pi\cdot(\sqrt{3})^2=3\pi$,故B不正确;

对于C,连接NB,因为$BB_1\perp$平面$ABCD$,所以$BB_1\perp NB$,所以点N到直线BB_1的距离为NB,所以点N到点B的距离等于点N到定直线CD的距离,又B不在直线CD上,所以点N的轨迹为以B为焦点,CD为准线的抛物线,故C正确;

对于D,以D为坐标原点,DA,DC,DD_1所在直线分别为x轴、y轴、z轴建立空间直角坐标系,

则$A(4,0,0)$,$B(4,4,0)$,$D_1(0,0,4)$,设$N(x,y,0)$,

则$\overrightarrow{AB}=(0,4,0)$,$\overrightarrow{D_1N}=(x,y,-4)$,

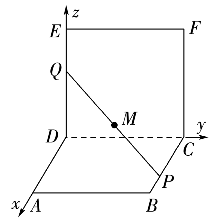
因为D_1N与AB所成的角为$\frac{\pi}{3}$,

所以$|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{D_1N}\rangle|=\cos\frac{\pi}{3}$,

所以$\left|\frac{4y}{4\sqrt{x^2+y^2+16}}\right|=\frac{1}{2}$,整理得$\frac{3y^2}{16}-\frac{x^2}{16}=1$,所以点$N$的轨迹为双曲线,故D正确.]

跟进训练

2.(1)**A** (2)**A** [(1)到平面ABC,ABA_1距离相等的点位于平面ABC_1D_1上;到平面ABC,ADA_1距离相等的点位于平面AB_1C_1D上;到平面ABA_1,ADA_1距离相等的点位于平面ACC_1A_1上;据此可知,满足题意的点位于上述平面ABC_1D_1,平面AB_1C_1D,平面ACC_1A_1的公共点处,结合题意可知,满足题意的点仅有一个.



(2)以DA,DC,DE所在直线分别为x轴、y轴、z轴建立空间直角坐标系,

如图所示,设$P(s,1,0)(0\leqslant s\leqslant1)$,$Q(0,0,t)(0\leqslant t\leqslant1)$,$M(x,y,z)$,由中点坐标公式易知$x=\frac{s}{2}$,$y=\frac{1}{2}$,$z=\frac{t}{2}$,即$s=2x$,$t=2z$.$\because|PQ|=\sqrt{s^2+t^2+1}=\sqrt{2}$,

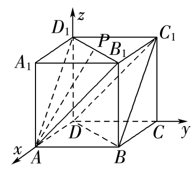
$\therefore s^2+t^2=1$,$\therefore 4x^2+4z^2=1$,$\therefore x^2+z^2=\frac{1}{4}$.又$0\leqslant s\leqslant1$,$0\leqslant t\leqslant1$,$\therefore 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$,$0\leqslant z\leqslant\frac{1}{2}$,

$\therefore PQ$中点M的轨迹方程为$\begin{cases}x^2+z^2=\frac{1}{4}\left(0\leqslant x,z\leqslant\frac{1}{2}\right),\\ y=\frac{1}{2},\end{cases}$

轨迹为垂直于y轴,且距离原点$\frac{1}{2}$的平面内,半径为$\frac{1}{2}$的四分之一圆周,

$\therefore l$的长度为$\frac{1}{4}\times2\pi\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}$.]

题型三



典例3 (1)**C** (2)**C** [(1)如图,以D为坐标原点,DA,DC,DD_1所在直线分别为x轴、y轴、z轴建立如图所示的空间直角坐标系,设正方体棱长为1,

则$D(0,0,0)$,$B(1,1,0)$,$A(1,0,0)$,

设$P(\lambda,\lambda,1)$,$\lambda\in[0,1]$,

$\therefore\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$,$\overrightarrow{AP}=(\lambda-1,\lambda,1)$,

$\therefore\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AP}=2\lambda-1$,$|\overrightarrow{DB}|=\sqrt{2}$,

$|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{2\lambda^2-2\lambda+2}$,

设异面直线AP与BD所成的角为θ,

则$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{DB}||\overrightarrow{AP}|}=\frac{|2\lambda-1|}{2\sqrt{\lambda^2-\lambda+1}}$

$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{(2\lambda-1)^2}{\lambda^2-\lambda+1}}$

$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4-\frac{3}{\lambda^2-\lambda+1}}$

$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4-\frac{3}{\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$,

当$\lambda=\frac{1}{2}$时,$\cos\theta$取得最小值为0,

当$\lambda=0$或1时,$\cos\theta$取得最大值为$\frac{1}{2}$,

$\therefore 0\leqslant\cos\theta\leqslant\frac{1}{2}$,则$\frac{\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$.

(2)因为球的体积为36π,所以球的半径$R=3$,

设正四棱锥的底面边长为$2a$,高为h,

则$l^2=2a^2+h^2$,$3^2=2a^2+(3-h)^2$,

所以 $6h=l^2$，$2a^2=l^2-h^2$，

所以正四棱锥的体积 $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times 4a^2\times h=\frac{2}{3}\times\left(l^2-\frac{l^4}{36}\right)\times\frac{l^2}{6}=\frac{1}{9}\left(l^4-\frac{l^6}{36}\right)$，

所以 $V'=\frac{1}{9}\left(4l^3-\frac{l^5}{6}\right)=\frac{1}{9}l^3\left(\frac{24-l^2}{6}\right)$，

当 $3\leqslant l\leqslant 2\sqrt{6}$ 时，$V'>0$，当 $2\sqrt{6}<l\leqslant 3\sqrt{3}$ 时，$V'<0$，

所以当 $l=2\sqrt{6}$ 时，正四棱锥的体积 V 取最大值，最大值为 $\frac{64}{3}$，

又 $l=3$ 时，$V=\frac{27}{4}$，$l=3\sqrt{3}$ 时，$V=\frac{81}{4}$，

所以正四棱锥的体积 V 的最小值为 $\frac{27}{4}$，

所以该正四棱锥体积的取值范围是 $\left[\frac{27}{4},\frac{64}{3}\right]$.

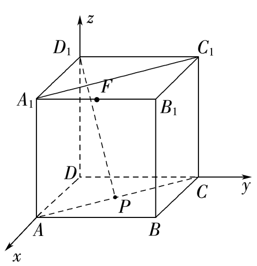
故选 C.]

跟进训练

3.(1)**AC**　(2)$\left[\sqrt{13},\frac{2\sqrt{109}}{5}\right]$　[(1)对于 A，当 P 在平面 BCC_1B_1 上运动时，点 P 到面 AA_1D_1D 的距离不变，$S_{正方形AA_1D_1D}$ 不变，

故四棱锥 $P\text{-}AA_1D_1D$ 的体积不变，故 A 正确；

对于 B，建立如图所示空间直角坐标系，



设 $P(x,2-x,0)$，$0\leqslant x\leqslant 2$，$A_1(2,0,2)$，$D_1(0,0,2)$，$C_1(0,2,2)$，

则 $\overrightarrow{D_1P}=(x,2-x,-2)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(-2,2,0)$，

设 D_1P 与 A_1C_1 所成的角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{D_1P},\overrightarrow{A_1C_1}\rangle|$

$=\frac{|\overrightarrow{D_1P}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}|}{|\overrightarrow{D_1P}|\cdot|\overrightarrow{A_1C_1}|}=\frac{|x-1|}{\sqrt{(x-1)^2+3}}$，

因为 $0\leqslant|x-1|\leqslant 1$，

当 $|x-1|=0$ 时，$\theta=\frac{\pi}{2}$，

当 $0<|x-1|\leqslant 1$ 时，

$\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{D_1P},\overrightarrow{A_1C_1}\rangle|=\frac{|x-1|}{\sqrt{(x-1)^2+3}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{|x-1|^2}}}\leqslant\frac{1}{2}$，

则 $\frac{\pi}{3}\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$.

综上，$\frac{\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 D_1P 与 A_1C_1 所成角的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$，故 B 错误；

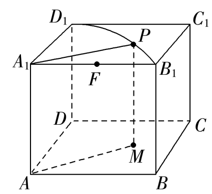
对于 C，因为直线 AP 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$，若点 P 在平面 DCC_1D_1 和平面 BCC_1B_1 内，

因为 $\angle B_1AB=45°$，$\angle D_1AD=45°$ 最大，不成立；

在平面 ADD_1A_1 内，点 P 的轨迹是 $AD_1=2\sqrt{2}$，

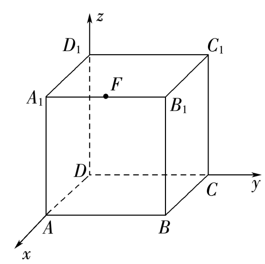
在平面 ABB_1A_1 内，点 P 的轨迹是 $AB_1=2\sqrt{2}$，

在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 时，如图所示：



作 $PM\perp$ 平面 $ABCD$，因为 $\angle PAM=45°$，所以 $PM=AM$，又 $PM=AB$，所以 $AM=AB$，则 $A_1P=A_1B_1$，所以点 P 的轨迹是以 A_1 为圆心，以 2 为半径的四分之一圆，所以点 P 的轨迹长度为 $\frac{1}{4}\times 2\pi\times 2=\pi$，所以点 P 的轨迹总长度为 $\pi+4\sqrt{2}$，故 C 正确；

对于 D，建立如图所示空间直角坐标系，



设 $P(x,y,0)$，$0\leqslant x,y\leqslant 2$，$B_1(2,2,2)$，$D_1(0,0,2)$，$C(0,2,0)$，$F(2,1,2)$，

则 $\overrightarrow{CB_1}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{CD_1}=(0,-2,2)$，$\overrightarrow{FP}=(x-2,y-1,-2)$，

设平面 CB_1D_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{CD_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{CB_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2b+2c=0,\\ 2a+2c=0,\end{cases}$

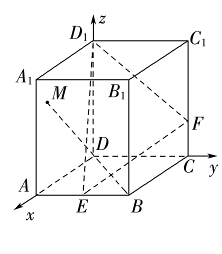
令 $a=1$，则 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$，

因为 $PF\,/\!/$ 平面 B_1CD_1，所以 $\overrightarrow{FP}\cdot\boldsymbol{n}=(x-2)-(y-1)+2=0$，

即 $y=x+1$，所以 $|\overrightarrow{FP}|=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+4}=\sqrt{2x^2-4x+8}=\sqrt{2(x-1)^2+6}\geqslant\sqrt{6}$，当 $x=1$ 时，等号成立，故 D 错误. 故选 AC.

(2)因为 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 是正四棱柱，

以点 D 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，



设 $M(x,0,z)$，$B(2,2,0)$，$D_1(0,0,4)$，$E(2,1,0)$，

因为 $\overrightarrow{C_1F}=3\overrightarrow{FC}$，

所以 F 是 CC_1 四等分点(靠近 C)，

所以 $F(0,2,1)$，

所以 $\overrightarrow{D_1E}=(2,1,-4)$，$\overrightarrow{D_1F}=(0,2,-3)$，

设平面 D_1EF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{D_1E}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{D_1F}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2a+b-4c=0,\\ 2b-3c=0,\end{cases}$

令 $c=2$,则 $a=\frac{5}{2}$,$b=3$,

故 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{5}{2},3,2\right)$,

又$\overrightarrow{MB}=(2-x,2,-z)$,$MB$∥平面 D_1EF,

所以$\overrightarrow{MB}\perp\boldsymbol{n}$,即$\overrightarrow{MB}\cdot\boldsymbol{n}=0$,

所以$\frac{5}{2}(2-x)+6-2z=0$,所以 $z=\frac{11}{2}-\frac{5}{4}x$,

故$|\overrightarrow{MD}|=\sqrt{x^2+z^2}$

$=\sqrt{x^2+\left(\frac{11}{2}-\frac{5}{4}x\right)^2}=\frac{\sqrt{41x^2-220x+484}}{4}$,

因为 $0\leqslant x\leqslant 2$,$0\leqslant z\leqslant 4$,所以 $\frac{11}{2}-\frac{5}{4}x\in[0,4]$,故 $x\in\left[\frac{6}{5},2\right]$,

令 $f(x)=41x^2-220x+484$,

因为二次函数的对称轴为 $x=\frac{220}{2\times 41}=\frac{110}{41}>2$,

所以函数 $f(x)$在 $x\in\left[\frac{6}{5},2\right]$时单调递减,

所以当 $x=\frac{6}{5}$时,$|\overrightarrow{MD}|$取得最大值,

所以$|\overrightarrow{MD}|$的最大值为$\frac{\sqrt{41\times\left(\frac{6}{5}\right)^2-220\times\frac{6}{5}+484}}{4}$

$=\frac{2\sqrt{109}}{5}$,

当 $x=2$ 时,$|\overrightarrow{MD}|$取得最小值,

所以$|\overrightarrow{MD}|$的最小值为$\frac{\sqrt{41\times 2^2-220\times 2+484}}{4}=\sqrt{13}$,

所以$|\overrightarrow{MD}|$的取值范围是$\left[\sqrt{13},\frac{2\sqrt{109}}{5}\right]$.

第八章　解析几何

第1课时　直线的方程

梳理·必备知识

2.(1)x 轴正向　向上　(2)$0°\leqslant\alpha<180°$

3.(1)正切值　$\tan\alpha$　(2)$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

4.$y-y_0=k(x-x_0)$　$y=kx+b$　$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$　$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$　$Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq 0)$

激活·基本技能

一、(1)×　(2)×　(3)√　(4)√

二、1.**C**　[**法一**:由直线上的两点 $A(4,y)$,$B(2,-3)$,得$\overrightarrow{AB}=(-2,-3-y)$,又直线 AB 的一个方向向量为$(-1,-1)$,因此$(-2)\times(-1)-(-3-y)\times(-1)=0$,解得 $y=-1$,故选 C.

法二:由直线的方向向量为$(-1,-1)$得,直线的斜率为$\frac{-1}{-1}=1$,所以$\frac{y-(-3)}{4-2}=1$,解得 $y=-1$.故选 C.]

2.**C**　[由已知得直线 $Ax+By+C=0$ 在 x 轴上的截距$-\frac{C}{A}>0$,在 y 轴上的截距$-\frac{C}{B}>0$,故直线经过第一、二、四象限,不经过第三象限.]

3.-3　[因为 A,B,C 三点共线,所以 $k_{AB}=k_{AC}$,所以$\frac{7-5}{4-3}=\frac{x-5}{-1-3}$,所以 $x=-3$.]

4.$9x-y=0$ 或 $x+y-10=0$　[当纵、横截距为 0 时,直线方程为 $9x-y=0$;

当截距不为 0 时,设直线方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$,则$\frac{1}{a}+\frac{9}{a}=1$,解得 $a=10$,直线方程为 $x+y-10=0$.]

考点一

典例1　(1)**A**　(2)$\frac{5\pi}{14}$　(3)$(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[1,+\infty)$

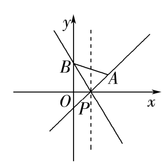
[(1)由题意,在 Rt△BCD 中,$\angle BCD=\frac{\pi}{2}$,$BC=\sqrt{3}AB=\sqrt{3}CD$,

$\therefore\tan\angle CBD=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\therefore\angle CBD=\frac{\pi}{6}$,$\therefore$直线 BC 的倾斜角为$\frac{\pi}{3}$,故 $k_{BC}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.故选 A.

(2)$\because$直线 l 的一个方向向量$\boldsymbol{a}=\left(\sin\frac{\pi}{7},\cos\frac{\pi}{7}\right)$,

$\therefore k=\frac{\cos\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)}=\frac{\sin\frac{5\pi}{14}}{\cos\frac{5\pi}{14}}=\tan\frac{5\pi}{14}$,$\therefore$直线 l 的倾斜角 $\theta=\frac{5\pi}{14}$.

(3)如图,$\because k_{AP}=\frac{1-0}{2-1}=1$,$k_{BP}=\frac{\sqrt{3}-0}{0-1}=-\sqrt{3}$,$\therefore k\in(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[1,+\infty)$.]



跟进训练

1.(1)**AC**　(2)$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$　[(1)如题图,直线 l_1,l_2,l_3 的斜率分别为 k_1,k_2,k_3,倾斜角分别为 α_1,α_2,α_3,则 $k_2>k_3>0$,$k_1<0$,即 $k_1<k_3<k_2$,故$\frac{\pi}{2}>\alpha_2>\alpha_3>0$,且 α_1 为钝角,即 $\alpha_3<\alpha_2<\alpha_1$,故选 AC.

(2)当$-1\leqslant k<0$ 时,$\frac{3\pi}{4}\leqslant\theta<\pi$,

当 $0\leqslant k\leqslant 1$ 时,$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$.

因此 θ 的取值范围是$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$.]

考点二

典例2　**解**:(1)因为直线 BC 经过 $B(2,1)$和 $C(-2,3)$两点,得 BC 的方程为$\frac{y-1}{3-1}=\frac{x-2}{-2-2}$,即 $x+2y-4=0$.

(2)设边 BC 的中点为 $D(x,y)$,则 $x=\frac{2-2}{2}=0,y=\frac{1+3}{2}=2$.
边 BC 的中线 AD 过 $A(-3,0),D(0,2)$两点,所在直线的方程为 $\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$,即 $2x-3y+6=0$.

(3)由(1)知,直线 BC 的斜率 $k_1=-\frac{1}{2}$,则直线 BC 的垂直平分线 DE 的斜率 $k_2=2$.由(2)知,点 D 的坐标为(0,2).
所求直线方程为 $y-2=2(x-0)$,即 $2x-y+2=0$.

跟进训练

2.(1)$2x+3y-5=0$ (2)$x+y-3=0$ 或 $x+2y-4=0$

[(1)联立 $\begin{cases}x+y=2,\\2x-y=1,\end{cases}$ 解得 $x=1,y=1$,
∴直线过点(1,1).
∵直线的方向向量 $\boldsymbol{v}=(-3,2)$,
∴直线的斜率 $k=-\frac{2}{3}$.
则直线的方程为 $y-1=-\frac{2}{3}(x-1)$,即 $2x+3y-5=0$.

(2)由题意可设直线方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.
则 $\begin{cases}a+b=6,\\\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1,\end{cases}$ 解得 $a=b=3$,或 $a=4,b=2$.
故所求直线方程为 $x+y-3=0$ 或 $x+2y-4=0$.]

考点三

典例3 法一:

解:设直线 l 的方程为 $y-1=k(x-2)(k<0)$,
则 $A\left(2-\frac{1}{k},0\right),B(0,1-2k)$,
$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}(1-2k)\cdot\left(2-\frac{1}{k}\right)$
$=\frac{1}{2}\left[4+(-4k)+\left(-\frac{1}{k}\right)\right]\geqslant\frac{1}{2}\times(4+4)=4$,
当且仅当 $-4k=-\frac{1}{k}$,即 $k=-\frac{1}{2}$时,等号成立.
故直线 l 的方程为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$,即 $x+2y-4=0$.

法二:

解:设直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,其中 $a>0,b>0$,
因为直线 l 过点 $M(2,1)$,所以 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$,
则 $1=\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\geqslant2\sqrt{\frac{2}{ab}}$,故 $ab\geqslant8$,
故 $S_{\triangle AOB}$ 的最小值为 $\frac{1}{2}\times ab=\frac{1}{2}\times8=4$,
当且仅当 $\frac{2}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$ 时取等号,
此时 $a=4,b=2$,故直线 l 的方程为 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$,
即 $x+2y-4=0$.

拓展变式

1.**解:**由本例法二知,$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1,a>0,b>0$,
所以 $|OA|+|OB|=a+b=(a+b)\cdot\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)=3+\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}$
$\geqslant3+2\sqrt{2}$,
当且仅当 $a=2+\sqrt{2},b=1+\sqrt{2}$ 时等号成立,
所以当 $|OA|+|OB|$ 取最小值时,直线 l 的方程为 $x+\sqrt{2}y-2-\sqrt{2}=0$.

2.**法一:**

解:由本例法一知 $A\left(\frac{2k-1}{k},0\right),B(0,1-2k)(k<0)$.
所以 $|MA|\cdot|MB|=\sqrt{\frac{1}{k^2}+1}\cdot\sqrt{4+4k^2}$
$=2\times\frac{1+k^2}{|k|}=2\left[(-k)+\frac{1}{(-k)}\right]\geqslant4$.
当且仅当 $-k=-\frac{1}{k}$,
即 $k=-1$ 时取等号.
此时直线 l 的方程为 $x+y-3=0$.

法二:

解:由本例法二知 $A(a,0),B(0,b),a>0,b>0,\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$.
所以 $|MA|\cdot|MB|=|\overrightarrow{MA}|\cdot|\overrightarrow{MB}|=-\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$
$=-(a-2,-1)\cdot(-2,b-1)$
$=2(a-2)+b-1$
$=2a+b-5=(2a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)-5$
$=2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqslant4$,
当且仅当 $a=b=3$ 时取等号,此时直线 l 的方程为 $x+y-3=0$.

跟进训练

3.(1)**法一:**

证明:直线 l 的方程可化为 $k(x+2)+(1-y)=0$,
令 $\begin{cases}x+2=0,\\1-y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-2,\\y=1.\end{cases}$
∴无论 k 取何值,直线 l 总经过定点(-2,1).

法二:

证明:方程 $kx-y+1+2k=0$ 可化为 $y-1=k(x+2)$,显然直线 l 恒过定点(-2,1).

(2)**法一:**

解:由方程知,当 $k\neq0$ 时,直线在 x 轴上的截距为 $-\frac{1+2k}{k}$,在 y 轴上的截距为 $1+2k$,要使直线不经过第四象限,则必须有 $\begin{cases}-\frac{1+2k}{k}\leqslant-2,\\1+2k\geqslant1,\end{cases}$ 解得 $k>0$;
当 $k=0$ 时,直线为 $y=1$,符合题意,
故 k 的取值范围是 $[0,+\infty)$.

法二:

解:直线 l 方程可化为 $y=kx+1+2k$,
∴ $\begin{cases}k>0,\\1+2k>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=0,\\1+2k\geqslant0,\end{cases}$ ∴ $k\in[0,+\infty)$.

(3)**解**:由题意可知 $k\neq0$,再由 l 的方程,得

$A\left(-\frac{1+2k}{k},0\right)$,$B(0,1+2k)$.

依题意得 $\begin{cases}-\frac{1+2k}{k}<0,\\1+2k>0,\end{cases}$ 解得 $k>0$.

$\because S=\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|OB|$

$=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{1+2k}{k}\right|\cdot|1+2k|$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+2k)^2}{k}=\frac{1}{2}\left(4k+\frac{1}{k}+4\right)$

$\geqslant\frac{1}{2}\times(2\times2+4)=4$,

"="成立的条件是 $k>0$ 且 $4k=\frac{1}{k}$,

即 $k=\frac{1}{2}$,

$\therefore S_{\min}=4$,此时直线 l 的方程为 $x-2y+4=0$.

第 2 课时　两条直线的位置关系

梳理·必备知识

1. $k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$　$A_1B_2-A_2B_1=0$ 且 $A_1C_2-A_2C_1\neq0$
   $k_1\cdot k_2=-1$　$A_1A_2+B_1B_2=0$　$k_1\neq k_2$　$A_1B_2-A_2B_1\neq0$

3. (1) $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$　$\sqrt{x^2+y^2}$
   (2) $\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$　(3) $\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

激活·基本技能

一、(1)×　(2)×　(3)√　(4)√

二、1. **C**　[由题意得 $\frac{|a-2+3|}{\sqrt{2}}=1$,即 $|a+1|=\sqrt{2}$,又 $a>0$,

$\therefore a=\sqrt{2}-1$.]

2. **C**　[$\because$ 直线 l 与直线 $2x-y-5=0$ 垂直,
$\therefore$ 设直线 l 的方程为 $x+2y+c=0$,
$\because$ 直线 l 经过点 $(1,-1)$,
$\therefore 1-2+c=0$,即 $c=1$.
$\therefore$ 直线 l 的方程为 $x+2y+1=0$.]

3. -9　[由 $\begin{cases}y=2x,\\x+y=3,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$
所以 $(1,2)$ 满足方程 $mx+2y+5=0$,
即 $m\times1+2\times2+5=0$,所以 $m=-9$.]

4. 2　[由两直线平行可知 $\frac{3}{6}=\frac{4}{m}\neq-\frac{3}{14}(m\neq0)$,即 $m=8$.
$\therefore$ 两直线方程分别为 $3x+4y-3=0$ 和 $3x+4y+7=0$,
则它们之间的距离 $d=\frac{|7+3|}{\sqrt{9+16}}=2$.]

考点一

典例 1　(1)**D**　(2)**A**　(3)**D**　[(1)由已知得 $3(a-1)+a=0$,

解得 $a=\frac{3}{4}$,故选 D.

(2)充分性:当 $a=3$ 时,直线 $ax+y-3=0$ 与 $3x+(a-2)y+4=0$ 即为 $3x+y-3=0$ 与 $3x+y+4=0$,所以两直线平行.故充分性满足.

必要性:直线 $ax+y-3=0$ 与 $3x+(a-2)y+4=0$ 平行,则有 $a(a-2)-3=0$,解得 $a=3$ 或 $a=-1$.

当 $a=3$ 时,直线 $ax+y-3=0$ 与 $3x+(a-2)y+4=0$ 即为 $3x+y-3=0$ 与 $3x+y+4=0$,所以两直线平行,不重合;

当 $a=-1$ 时,直线 $ax+y-3=0$ 与 $3x+(a-2)y+4=0$ 即为 $-x+y-3=0$ 与 $3x-3y+4=0$,所以两直线平行,不重合.

所以 $a=3$ 或 $a=-1$.故必要性不满足.

故"$a=3$"是"直线 $ax+y-3=0$ 与 $3x+(a-2)y+4=0$ 平行"的充分不必要条件.故选 A.

(3) $\because$ 三条直线不能围成一个三角形,

$\therefore$ ①当 $l_1/\!/l_3$ 时,$m=\frac{2}{3}$;

②当 $l_2/\!/l_3$ 时,$m=-\frac{4}{3}$;

③当 l_1,l_2,l_3 交于一点时,也不能围成一个三角形,

由 $\begin{cases}2x-3y+1=0,\\4x+3y+5=0,\end{cases}$ 得交点坐标为 $\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$,代入 $mx-y-1=0$,得 $m=-\frac{2}{3}$.故选 D.]

跟进训练

1. (1)**ABD**　(2) -10　[(1)对于 A,当 $k=0$ 时,直线 $l_2:x=0$,此时直线 l_2 的倾斜角为 $90°$,故选项 A 正确;对于 B,直线 l_1 与 l_2 均过点 $(0,-1)$,所以对任意的 k,l_1 与 l_2 都有公共点,故选项 B 正确;对于 C,当 $k=-\frac{1}{2}$ 时,直线 l_2 为 $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}=0$,即 $x-y-1=0$ 与 l_1 重合,故选项 C 错误;对于 D,直线 l_1 的斜率为 1,若 l_2 的斜率存在,则斜率为 $-\frac{k+1}{k}\neq-1$,所以 l_1 与 l_2 不可能垂直,所以对任意的 k,l_1 与 l_2 都不垂直,故选项 D 正确.故选 ABD.

(2)因为 $l_1/\!/l_2$,所以 $\frac{4-m}{m+2}=-2(m\neq-2)$,解得 $m=-8$(经检验,l_1 与 l_2 不重合).因为 $l_2\perp l_3$,所以 $2\times1+1\times n=0$,即 $n=-2$.所以 $m+n=-10$.]

考点二

典例 2　(1)**B**　(2) $5x+3y-1=0$　(3) $x+3y-5=0$ 或 $x=-1$　[(1)**法一**:由点到直线的距离公式知点 $(0,-1)$ 到直线 $y=k(x+1)$ 的距离 $d=\frac{|k\cdot0+(-1)\cdot(-1)+k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{\frac{k^2+2k+1}{k^2+1}}=\sqrt{1+\frac{2k}{k^2+1}}$.当 $k=0$ 时,$d=1$;

当 $k\neq0$ 时,$d=\sqrt{1+\frac{2k}{k^2+1}}=\sqrt{1+\frac{2}{k+\frac{1}{k}}}$,要使 d 最大,需 $k>0$ 且 $k+\frac{1}{k}$ 最小,$\therefore$ 当 $k=1$ 时,$d_{\max}=\sqrt{2}$,故选 B.

法二:记点 $A(0,-1)$,直线 $y=k(x+1)$ 恒过点 $B(-1,0)$,当 AB 垂直于直线 $y=k(x+1)$ 时,点 $A(0,-1)$ 到直线 $y=k(x+1)$ 的距离最大,且最大值为 $|AB|=\sqrt{2}$,故选 B.

(2)**法一**：先解方程组$\begin{cases}3x+2y-1=0,\\5x+2y+1=0,\end{cases}$得 l_1，l_2 的交点坐标为$(-1,2)$，设垂直于直线 l_3：$3x-5y+6=0$ 的直线 l 的方程为 $5x+3y+c=0$，于是 $-5+6+c=0$，解得 $c=-1$，即直线 l 的方程为 $5x+3y-1=0$.

法二：设经过直线 l_1：$3x+2y-1=0$ 和 l_2：$5x+2y+1=0$ 的交点的直线系方程为 $3x+2y-1+\lambda(5x+2y+1)=0$，即$(3+5\lambda)x+(2+2\lambda)y+\lambda-1=0$，由其垂直于直线 l_3：$3x-5y+6=0$，得 $3(3+5\lambda)-5(2+2\lambda)=0$，得 $\lambda=\frac{1}{5}$，即直线 l 的方程为 $5x+3y-1=0$.

(3)当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y-2=k(x+1)$，即 $kx-y+k+2=0$.

由题意知$\frac{|2k-3+k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|-4k-5+k+2|}{\sqrt{k^2+1}}$，

即$|3k-1|=|-3k-3|$，∴$k=-\frac{1}{3}$，∴直线 l 的方程为 $y-2=-\frac{1}{3}(x+1)$，即 $x+3y-5=0$. 当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=-1$，也符合题意. 即直线 l 的方程为 $x+3y-5=0$ 或 $x=-1$.]

跟进训练

2.(1)**C**　(2)$x+2y-3=0$　[(1)由$\begin{cases}x-y=0,\\x+y=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$所以交点坐标为$(1,1)$，又因为直线平行于向量 $\boldsymbol{v}=(3,2)$，所以所求直线方程为 $y-1=\frac{2}{3}(x-1)$，即 $2x-3y+1=0$. 故选 C.

(2)当 $AB\perp l_1$，且 $AB\perp l_2$ 时，l_1 与 l_2 间的距离最大.

又 $k_{AB}=\frac{-1-1}{0-1}=2$，

所以直线 l_1 的斜率 $k=-\frac{1}{2}$，

则 l_1 的方程是 $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$，即 $x+2y-3=0$.]

考点三

考向 1　典例 3　$x+4y-4=0$　[设 l_1 与 l 的交点为 $A(a,8-2a)$，则由题意知，点 A 关于点 P 的对称点 $B(-a,2a-6)$在 l_2 上，代入 l_2 的方程得 $-a-3(2a-6)+10=0$，解得 $a=4$，即点$A(4,0)$在直线 l 上，所以直线 l 的方程为 $x+4y-4=0$.]

考向 2　典例 4　(1)**C**　(2)$6x-y-6=0$　[(1)设 $A(-4,2)$关于直线 $y=2x$ 的对称点为 $A'(x,y)$，

则$\begin{cases}\frac{y-2}{x+4}\times 2=-1,\\\frac{y+2}{2}=2\times\frac{-4+x}{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}x=4,\\y=-2,\end{cases}$∴$A'(4,-2)$，由题意知，$A'$在直线 BC 上，∴BC 所在直线方程为 $y-1=\frac{-2-1}{4-3}\times(x-3)$，即 $3x+y-10=0$. 联立$\begin{cases}3x+y-10=0,\\y=2x,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2,\\y=4,\end{cases}$则 $C(2,4)$.

(2)设点 $M(-3,4)$关于直线 l：$x-y+3=0$ 的对称点为 $M'(a,b)$，则反射光线所在直线过点 M'，

所以$\begin{cases}\frac{b-4}{a-(-3)}\cdot 1=-1,\\\frac{-3+a}{2}-\frac{b+4}{2}+3=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\b=0.\end{cases}$

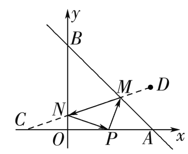
即 $M'(1,0)$.

又反射光线经过点 $N(2,6)$，

所以所求直线的方程为$\frac{y-0}{6-0}=\frac{x-1}{2-1}$，

即 $6x-y-6=0$.]

跟进训练



3.(1)**C**　(2)$\frac{34}{5}$　[(1)直线 AB 的方程为 $x+y=4$，点$P(2,0)$关于直线 AB 的对称点为 $D(4,2)$，关于 y 轴的对称点为 $C(-2,0)$，则光线经过的路程为$|CD|=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$. 故选 C.

(2)由题意可知纸的折痕应是点$(0,2)$与点$(4,0)$连线的中垂线，即直线 $y=2x-3$，它也是点$(7,3)$与点(m,n)连线的中垂线，

于是$\begin{cases}\frac{3+n}{2}=2\times\frac{7+m}{2}-3,\\\frac{n-3}{m-7}=-\frac{1}{2},\end{cases}$

解得$\begin{cases}m=\frac{3}{5},\\n=\frac{31}{5},\end{cases}$故 $m+n=\frac{34}{5}$.]

第 3 课时　圆的方程

梳理·必备知识

1.定点　定长　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$　(a,b)　$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$　$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$

2.(1)$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2$　(2)$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$　(3)$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2$

激活·基本技能

一、(1)√　(2)×　(3)√　(4)√

二、1.**D**　[圆的方程可化为$(x-2)^2+(y+3)^2=13$，所以圆心坐标是$(2,-3)$，半径 $r=\sqrt{13}$.]

2.**A**　[**法一**：AB 的中点坐标为$(0,0)$，

$|AB|=\sqrt{[1-(-1)]^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2}$，所以圆的方程为 $x^2+y^2=2$.

法二：以 AB 为直径的圆的方程为$(x-1)\cdot(x+1)+(y+1)\cdot(y-1)=0$，即 $x^2+y^2=2$.]

3.**C**　[**法一**：设圆心 C 的坐标为(a,b)，半径为 r. 因为圆心 C 在直线 $x+y-2=0$ 上，所以 $b=2-a$. 又$|CA|^2=|CB|^2$，所以$(a-1)^2+(2-a+1)^2=(a+1)^2+(2-a-1)^2$，所以 $a=1$，$b=1$. 所以 $r=2$. 所以方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=4$.

法二：由已知条件得 AB 垂直平分线方程 l_1：$y=x$，

由$\begin{cases}y=x,\\x+y-2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$

∴圆心坐标为$(1,1)$，

∴$r^2=(1-1)^2+[1-(-1)]^2=4$，

∴圆的方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=4$. 故选C.]

4. $x^2+y^2-2x=0$　[设圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

∵圆经过点$(0,0)$，$(1,1)$，$(2,0)$，

∴$\begin{cases}F=0,\\2+D+E+F=0,\\4+2D+F=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}D=-2,\\E=0,\\F=0.\end{cases}$

∴圆的方程为$x^2+y^2-2x=0$.]

考点一

典例1　(1)$(x-2)^2+(y-3)^2=13$或$(x-2)^2+(y-1)^2=5$或$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{65}{9}$或$\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+(y-1)^2=\frac{169}{25}$(从这四个方程中任选一个作答即可)　(2)$(x-1)^2+(y+1)^2=5$

[(1)依题意，设圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

若圆过点$(0,0)$，$(4,0)$，$(-1,1)$，

则$\begin{cases}F=0,\\16+4D+F=0,\\1+1-D+E+F=0,\end{cases}$　解得$\begin{cases}F=0,\\D=-4,\\E=-6,\end{cases}$易得$D^2+E^2-4F>0$，

所以过这三点的圆的方程为$x^2+y^2-4x-6y=0$，即$(x-2)^2+(y-3)^2=13$.

若圆过点$(0,0)$，$(4,0)$，$(4,2)$，

则$\begin{cases}F=0,\\16+4D+F=0,\\16+4+4D+2E+F=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}F=0,\\D=-4,\\E=-2,\end{cases}$易得$D^2+E^2-4F>0$，

所以过这三点的圆的方程为$x^2+y^2-4x-2y=0$，即$(x-2)^2+(y-1)^2=5$.

若圆过点$(0,0)$，$(-1,1)$，$(4,2)$，

则$\begin{cases}F=0,\\1+1-D+E+F=0,\\16+4+4D+2E+F=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}F=0,\\D=-\frac{8}{3},\\E=-\frac{14}{3},\end{cases}$易得$D^2+E^2-4F>0$，

所以过这三点的圆的方程为$x^2+y^2-\frac{8}{3}x-\frac{14}{3}y=0$，即$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{65}{9}$.

若圆过点$(-1,1)$，$(4,0)$，$(4,2)$，

则$\begin{cases}1+1-D+E+F=0,\\16+4D+F=0,\\16+4+4D+2E+F=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}F=-\frac{16}{5},\\D=-\frac{16}{5},\\E=-2,\end{cases}$易得$D^2+E^2-4F>0$，

所以过这三点的圆的方程为$x^2+y^2-\frac{16}{5}x-2y-\frac{16}{5}=0$，即$\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+(y-1)^2=\frac{169}{25}$.

(2)**法一：**

∵点M在直线$2x+y-1=0$上，

∴设点M为$(a,1-2a)$，又因为点$(3,0)$和$(0,1)$均在$\odot M$上，

∴点M到这两点的距离相等且为半径R，

∴$\sqrt{(a-3)^2+(1-2a)^2}=\sqrt{a^2+(-2a)^2}=R$，

$a^2-6a+9+4a^2-4a+1=5a^2$，解得$a=1$，

∴$M(1,-1)$，$R=\sqrt{5}$，

$\odot M$的方程为$(x-1)^2+(y+1)^2=5$.

法二：

由题意可知，M是以$(3,0)$和$(0,1)$为端点的线段的垂直平分线$y=3x-4$与直线$2x+y-1=0$的交点$(1,-1)$. 又圆的半径$R=\sqrt{5}$，所以$\odot M$的方程为$(x-1)^2+(y+1)^2=5$.]

跟进训练

1. (1)**A**　(2)$(-2,-4)$　5　[(1)直径两端点的坐标分别为$(4,0)$，$(0,-6)$，可得直径长为$2\sqrt{13}$，则半径长为$\sqrt{13}$，所以所求圆的方程是$(x-2)^2+(y+3)^2=13$.

(2)由已知方程表示圆，则$a^2=a+2$，

解得$a=2$或$a=-1$.

当$a=2$时，方程不满足表示圆的条件，故舍去.

当$a=-1$时，原方程为$x^2+y^2+4x+8y-5=0$，

化为标准方程为$(x+2)^2+(y+4)^2=25$，

表示以$(-2,-4)$为圆心，半径为5的圆.]

考点二

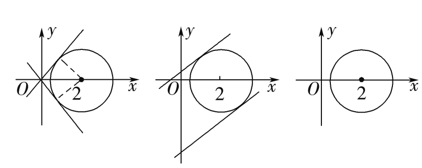
考向1　**典例2**　**解：**原方程可化为$(x-2)^2+y^2=3$，表示以$(2,0)$为圆心，$\sqrt{3}$为半径的圆.

(1)$\frac{y}{x}$的几何意义是圆上一点与原点连线的斜率，

所以设$\frac{y}{x}=k$，即$y=kx$.

当直线$y=kx$与圆相切时，斜率k取最大值或最小值，此时$\frac{|2k-0|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{3}$，解得$k=\pm\sqrt{3}$(如图①).

所以$\frac{y}{x}$的最大值为$\sqrt{3}$，最小值为$-\sqrt{3}$.



图①　　图②　　图③

(2)$y-x$ 可看作直线 $y=x+b$ 在 y 轴上的截距，当直线 $y=x+b$ 与圆相切时，纵截距 b 取得最大值或最小值，此时 $\frac{|2-0+b|}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$，解得 $b=-2\pm\sqrt{6}$(如图②).

所以 $y-x$ 的最大值为 $-2+\sqrt{6}$，最小值为 $-2-\sqrt{6}$.

(3)x^2+y^2 表示圆上的一点与原点距离的平方，由平面几何知识知，x^2+y^2 在原点和圆心连线与圆的两个交点处取得最大值和最小值(如图③).

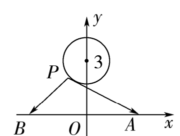
又圆心到原点的距离为 $\sqrt{(2-0)^2+(0-0)^2}=2$，

所以 x^2+y^2 的最大值是 $(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$，最小值是 $(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}$.

考向2　典例3　12　[**法一**：由题意，知 $\overrightarrow{PA}=(2-x,-y)$，$\overrightarrow{PB}=(-2-x,-y)$，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x^2+y^2-4$，由于点 $P(x,y)$ 是圆上的点，故其坐标满足方程 $x^2+(y-3)^2=1$，故 $x^2=-(y-3)^2+1$，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-(y-3)^2+1+y^2-4=6y-12$. 由圆的方程 $x^2+(y-3)^2=1$，易知 $2\leqslant y\leqslant 4$，所以当 $y=4$ 时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的值最大，最大值为 $6\times4-12=12$.

法二：由向量的极化恒等式 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PO}^2-\overrightarrow{AO}^2=\overrightarrow{PO}^2-4$，

由于点 P 在圆：$x^2+(y-3)^2=1$ 上，则当点 P 坐标为 $(0,4)$ 时，$\overrightarrow{PO}^2$ 取得最大值 16，



$\therefore\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最大值为 $16-4=12$.]

跟进训练

2.(1)**C**　(2)**C**　(3)**C**　[(1)将方程 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$ 化为 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$，其表示圆心为 $(2,1)$，半径为 3 的圆. 设 $z=x-y$，数形结合知，只有当直线 $x-y-z=0$ 与圆相切时，z 才能取到最大值，此时 $\frac{|2-1-z|}{\sqrt{2}}=3$，解得 $z=1\pm3\sqrt{2}$，故 $z=x-y$ 的最大值为 $1+3\sqrt{2}$，故选 C.

(2)根据题意，设 A' 与 A 关于 x 轴对称，且 $A(-3,2)$，则 A' 的坐标为 $(-3,-2)$，又由 $|A'C|=\sqrt{25+25}=5\sqrt{2}$，则 A' 到圆 C 上的点的最短距离为 $5\sqrt{2}-1$. 故这束光线从点 $A(-3,2)$ 出发，经 x 轴反射到圆 C：$(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 上的最短路径的长度是 $5\sqrt{2}-1$，故选 C.

(3)将圆 C 的方程 $x^2+y^2-4x+3=0$ 化为 $(x-2)^2+y^2=1$，所以圆心 C 的坐标为 $(2,0)$. 所以 $\overrightarrow{PC}=(2-x,-y)$，而 $\overrightarrow{PO}=(-x,-y)$，所以 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PO}=x^2+y^2-2x$. 因为 $x^2+y^2-4x+3=0$，所以 $x^2+y^2=4x-3$，所以 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PO}=4x-3-2x=2x-3$. 因为 $(x-2)^2+y^2=1$，所以 $1\leqslant x\leqslant 3$. 因此 $-1\leqslant 2x-3\leqslant 3$，从而 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PO}$($O$ 为坐标原点)的取值范围为 $[-1,3]$. 故选 C.]

考点三

典例4　**解**：(1)**法一**(直接法)：设 $C(x,y)$，因为 A,B,C 三点不共线，所以 $y\neq0$.

因为 $AC\perp BC$，所以 $k_{AC}\cdot k_{BC}=-1$.

又 $k_{AC}=\frac{y}{x+1}$，$k_{BC}=\frac{y}{x-3}$，

所以 $\frac{y}{x+1}\cdot\frac{y}{x-3}=-1$，化简得 $x^2+y^2-2x-3=0$.

因此，直角顶点 C 的轨迹方程为 $x^2+y^2-2x-3=0(y\neq0)$.

法二(定义法)：设 AB 的中点为 D，由中点坐标公式得 $D(1,0)$，由直角三角形的性质知 $|CD|=\frac{1}{2}|AB|=2$. 由圆的定义知，动点 C 的轨迹是以 $D(1,0)$ 为圆心，2 为半径的圆(由于 A,B,C 三点不共线，所以应除去与 x 轴的交点).

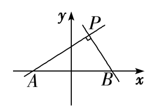
所以直角顶点 C 的轨迹方程为 $(x-1)^2+y^2=4(y\neq0)$.

(2)设 $M(x,y)$，$C(x_0,y_0)$，因为 $B(3,0)$，M 是线段 BC 的中点，由中点坐标公式得 $x=\frac{x_0+3}{2}$，$y=\frac{y_0+0}{2}$，所以 $x_0=2x-3$，$y_0=2y$. 由(1)知，点 C 的轨迹方程为 $(x-1)^2+y^2=4(y\neq0)$，将 $x_0=2x-3$，$y_0=2y$ 代入得 $(2x-4)^2+(2y)^2=4$，即 $(x-2)^2+y^2=1$. 因此动点 M 的轨迹方程为 $(x-2)^2+y^2=1(y\neq0)$.

跟进训练

3.$x^2+y^2=a^2$(答案不唯一)　[如图，若以 AB 所在直线为 x 轴，以线段 AB 的垂直平分线为 y 轴建立平面直角坐标系，则 $A(-a,0)$，$B(a,0)$.

设 $P(x,y)$，因为 $PA\perp PB$，



所以 $\frac{y}{x+a}\cdot\frac{y}{x-a}=-1(x\neq\pm a)$.

化简，得 $x^2+y^2=a^2(x\neq\pm a)$.

当 $x=\pm a$ 时，点 P 与 A 或 B 重合，此时 $y=0$，满足上式. 故点 P 的轨迹方程是 $x^2+y^2=a^2$.]

拓展视野2

典例　(1)**AD**　(2)$[-2\sqrt{2}-1,2\sqrt{2}-1]$　[(1)由题意可设点 $P(x,y)$，由 $A(-2,0)$，$B(4,0)$，$\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{1}{2}$，得

$\frac{\sqrt{(x+2)^2+y^2}}{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}=\frac{1}{2}$，化简得 $x^2+y^2+8x=0$，

即 $(x+4)^2+y^2=16$，故 A 正确；

点 $(1,1)$ 到圆上的点的最大距离 $\sqrt{(-4-1)^2+(0-1)^2}+4<10$，故不存在点 D 符合题意，故 B 错误；

设 $M(x_0,y_0)$，由 $|MO|=2|MA|$，得 $\sqrt{x_0^2+y_0^2}=2\sqrt{(x_0+2)^2+y_0^2}$，又 $(x_0+4)^2+y_0^2=16$，

联立方程消去 y_0 得 $x_0=2$，y_0 无解，故 C 错误；

C 的圆心 $(-4,0)$ 到直线 $3x-4y-13=0$ 的距离为 $d=\frac{|3\times(-4)-13|}{5}=5$，且曲线 C 的半径为 4，则 C 上的点到直线 $3x-4y-13=0$ 的最大距离 $d+r=5+4=9$，故 D 正确. 故选 AD.

(2)设 $P(x,y)$，则 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x-3)^2+y^2}$，整理得 $(x-5)^2+y^2=8$，即动点 P 在以 $(5,0)$ 为圆心，$2\sqrt{2}$ 为半径的圆上运动. 另一方面，由 $|PC|=|PD|$ 知动点 P 在线段

CD 的垂直平分线 $y=a+1$ 上运动，因而问题就转化为直线 $y=a+1$ 与圆 $(x-5)^2+y^2=8$ 有交点. 所以 $|a+1|\leqslant 2\sqrt{2}$. 故实数 a 的取值范围是 $[-2\sqrt{2}-1, 2\sqrt{2}-1]$.]

第4课时　直线与圆、圆与圆的位置关系

梳理·必备知识

1. $<$　$=$　$>$　$>$　$=$　$<$

2. $|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$　$d<|r_1-r_2|$

激活·基本技能

一、(1)×　(2)×　(3)×　(4)√

二、1. **B**　[圆心为 $(0,0)$，到直线 $y=x+1$，即 $x-y+1=0$ 的距离 $d=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，而 $0<\dfrac{\sqrt{2}}{2}<1$，但是圆心不在直线 $y=x+1$ 上，所以直线与圆相交，但直线不过圆心.]

2. **B**　[两圆方程可化为 $x^2+(y-1)^2=1$，$x^2+y^2=4$. 两圆圆心分别为 $O_1(0,1)$，$O_2(0,0)$，半径分别为 $r_1=1$，$r_2=2$. 因为 $|O_1O_2|=1=r_2-r_1$，所以两圆内切.]

3. $\pm\dfrac{\sqrt{10}}{4}$　[圆 $x^2+y^2=4$ 与圆 $x^2+y^2+2ax+4ay-9=0$ 的方程相减即为公共弦所在直线的方程：$2ax+4ay-5=0$，

圆 $x^2+y^2=4$ 的圆心 $(0,0)$ 到公共弦距离 $d=\dfrac{5}{\sqrt{4a^2+16a^2}}$

$=\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{a^2}}$，

则公共弦长度为 $2\sqrt{2}=2\sqrt{4-d^2}$，解得 $a=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.]

4. $5x-12y+45=0$ 或 $x-3=0$　[化 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ 为圆的标准方程得 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$，其圆心 O 为 $(1,2)$，半径为 2，

因为 $|OA|=\sqrt{(3-1)^2+(5-2)^2}=\sqrt{13}>2$，所以点 $A(3,5)$ 在圆外. 显然，当切线斜率不存在时，直线与圆相切，即切线方程为 $x-3=0$；当切线斜率存在时，可设所求切线方程为 $y-5=k(x-3)$，即 $kx-y+5-3k=0$. 又圆心为 $(1,2)$，半径 $r=2$，而圆心到切线的距离 $d=\dfrac{|3-2k|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，

即 $|3-2k|=2\sqrt{k^2+1}$，所以 $k=\dfrac{5}{12}$，此时直线方程为 $5x-12y+45=0$.

故所求切线方程为 $5x-12y+45=0$ 或 $x-3=0$.]

考点一

典例1　(1)**A**　(2)**C**　[(1)**法一**(代数法)：

由 $\begin{cases} mx-y+1-m=0, \\ x^2+(y-1)^2=5, \end{cases}$

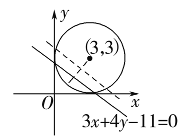
消去 y，整理得 $(1+m^2)x^2-2m^2x+m^2-5=0$，

因为 $\Delta=16m^2+20>0$，所以直线 l 与圆相交.

法二(几何法)：因为圆心 $(0,1)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{m^2+1}}<1<\sqrt{5}$，所以直线 l 与圆相交.

法三(点与圆的位置关系法)：直线 l：$mx-y+1-m=0$ 过定点 $(1,1)$，因为点 $(1,1)$ 在圆 C：$x^2+(y-1)^2=5$ 的内部，所以直线 l 与圆 C 相交.

(2)如图所示，因为圆心 $(3,3)$ 到直线 $3x+4y-11=0$ 的距离为 $\dfrac{|9+12-11|}{5}=2$，又因为圆的半径为 3，所以直线与圆相交，故圆上到直线的距离为 1 的点有 3 个.]



跟进训练

1. (1)**ABD**　(2)$\left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{3}{2}\right]$　[(1)对于 A，∵点 A 在圆 C 上，

∴$a^2+b^2=r^2$，圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=r$，∴直线 l 与圆 C 相切，A 正确.

对于 B，∵点 A 在圆 C 内，∴$a^2+b^2<r^2$，圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}>r$，∴直线 l 与圆 C 相离，B 正确.

对于 C，∵点 A 在圆 C 外，∴$a^2+b^2>r^2$，圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}<r$，∴直线 l 与圆 C 相交，C 错误.

对于 D，∵点 A 在直线 l 上，∴$a^2+b^2=r^2$，圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=r$，∴直线 l 与圆 C 相切，D 正确.

故选 ABD.

(2)因为 $k_{AB}=\dfrac{a-3}{2}$，所以直线 AB 关于 $y=a$ 的对称直线为 $(3-a)x-2y+2a=0$，所以 $\dfrac{|3(a-3)+4+2a|}{\sqrt{4+(3-a)^2}}\leqslant 1$，整理可得 $6a^2-11a+3\leqslant 0$，解得 $\dfrac{1}{3}\leqslant a\leqslant\dfrac{3}{2}$.]

考点二

典例2　**解**：两圆的标准方程分别为 $(x-1)^2+(y-3)^2=11$，

$(x-5)^2+(y-6)^2=61-m$，

圆心分别为 $M(1,3)$，$N(5,6)$，

半径分别为 $\sqrt{11}$ 和 $\sqrt{61-m}$.

(1)当两圆外切时，

$\sqrt{(5-1)^2+(6-3)^2}=\sqrt{11}+\sqrt{61-m}$.

解得 $m=25+10\sqrt{11}$.

(2)**法一**(作差法)：

由 $\begin{cases} x^2+y^2-2x-6y-1=0, \\ x^2+y^2-10x-12y+m=0, \end{cases}$

两式相减得 $8x+6y-1-m=0$.

又两圆相内切，

所以 $\sqrt{61-m}-\sqrt{11}=5$，

所以 $m=25-10\sqrt{11}$.

所以所求公切线方程为 $4x+3y+5\sqrt{11}-13=0$.

法二(直接法)：当两圆内切时，两圆圆心间距离等于两圆半径之差的绝对值.

故有 $\sqrt{61-m}-\sqrt{11}=5$，

解得 $m=25-10\sqrt{11}$.

因为 $k_{MN}=\frac{6-3}{5-1}=\frac{3}{4}$,

所以两圆公切线的斜率是 $-\frac{4}{3}$.

设公切线方程为 $y=-\frac{4}{3}x+b$,

则有 $\frac{\left|\frac{4}{3}\times1+3-b\right|}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+1}}=\sqrt{11}$.

解得 $b=\frac{13}{3}\pm\frac{5}{3}\sqrt{11}$.

容易验证,当 $b=\frac{13}{3}+\frac{5}{3}\sqrt{11}$ 时,直线与圆 $x^2+y^2-10x-12y+m=0$ 相交,舍去.

故所求公切线方程为 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{13}{3}-\frac{5}{3}\sqrt{11}$,即 $4x+3y+5\sqrt{11}-13=0$.

(3)两圆的公共弦所在直线的方程为

$(x^2+y^2-2x-6y-1)-(x^2+y^2-10x-12y+45)=0$,即 $4x+3y-23=0$.

由圆的半径、弦长、弦心距间的关系,求得公共弦的长为 $2\times\sqrt{(\sqrt{11})^2-\left(\frac{|4+3\times3-23|}{\sqrt{4^2+3^2}}\right)^2}=2\sqrt{7}$.

跟进训练

2.(1)**C** (2)[0,3] [(1)圆 C 的圆心为 $(0,-a)$,半径为 a,其圆心到直线 $\sqrt{3}x-y=0$ 的距离为 $\frac{|a|}{\sqrt{3+1}}=\frac{a}{2}$,所截得的弦长为 $2\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{3}a=2\sqrt{3}$,解得 $a=2$.

所以 $C:x^2+(y+2)^2=4$,C 的圆心为 $(0,-2)$,半径为 2.

又 C' 的圆心为 $(1,-1)$,半径为 1,

$|CC'|=\sqrt{(0-1)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{2}$,

故可得 $2-1<|CC'|<2+1$,

则两圆的位置关系是相交.故选 C.

(2)设 $M(x,y)$,因为 $A(0,2)$,$O(0,0)$,

所以 $\overrightarrow{MA}=(-x,2-y)$,$\overrightarrow{MO}=(-x,-y)$.

因为 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MO}=3$,

所以 $(-x)(-x)+(2-y)(-y)=3$,

化简得 $x^2+(y-1)^2=4$,

所以 M 点的轨迹是以(0,1)为圆心,2 为半径的圆.

因为 M 在 $C:(x-a)^2+(y-a+2)^2=1$ 上,

所以两圆必须相交或相切.

所以 $1\leqslant\sqrt{(a-0)^2+[(a-2)-1]^2}\leqslant3$,

解得 $0\leqslant a\leqslant3$.

所以圆心 C 的横坐标 a 的取值范围为[0,3].]

考点三

考向 1 典例 3 解:由题意得圆心 $C(1,2)$,半径 $r=2$.

(1)∵$(\sqrt{2}+1-1)^2+(2-\sqrt{2}-2)^2=4$,

∴点 P 在圆 C 上.

又 $k_{PC}=\frac{2-\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+1-1}=-1$,

∴切线的斜率 $k=-\frac{1}{k_{PC}}=1$.

∴过点 P 的圆 C 的切线的方程是

$y-(2-\sqrt{2})=x-(\sqrt{2}+1)$,即 $x-y+1-2\sqrt{2}=0$.

(2)∵$(3-1)^2+(1-2)^2=5>4$,

∴点 M 在圆 C 外部.

当过点 M 的直线斜率不存在时,直线方程为 $x=3$,

即 $x-3=0$.

又点 $C(1,2)$ 到直线 $x-3=0$ 的距离 $d=3-1=2=r$,

即此时满足题意,所以直线 $x=3$ 是圆 C 的切线.

当切线的斜率存在时,设切线方程为 $y-1=k(x-3)$,

即 $kx-y+1-3k=0$,

则圆心 C 到切线的距离 $d=\frac{|k-2+1-3k|}{\sqrt{k^2+1}}=r=2$,

解得 $k=\frac{3}{4}$.

∴切线方程为 $y-1=\frac{3}{4}(x-3)$,

即 $3x-4y-5=0$.

综上可得,过点 M 的圆 C 的切线的方程为 $x-3=0$ 或 $3x-4y-5=0$.

∵$|MC|=\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$,

∴过点 M 的圆 C 的切线长为 $\sqrt{|MC|^2-r^2}=\sqrt{5-4}=1$.

考向 2 典例 4 (1)**B** (2)4 [(1)当直线 l 的斜率不存在时,直线 l 的方程为 $x=0$,联立方程得

$\begin{cases}x=0,\\x^2+y^2-2x-2y-2=0,\end{cases}$ 得

$\begin{cases}x=0,\\y=1-\sqrt{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0,\\y=1+\sqrt{3},\end{cases}$ ∴$|AB|=2\sqrt{3}$,符合题意.当直线 l 的斜率存在时,设直线 l 的方程为 $y=kx+3$,∵圆 $x^2+y^2-2x-2y-2=0$,即 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$,其圆心为 $C(1,1)$,圆的半径 $r=2$,圆心 $C(1,1)$ 到直线 $y=kx+3$ 的距离 $d=\frac{|k-1+3|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}$,∵$d^2+\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2=r^2$,

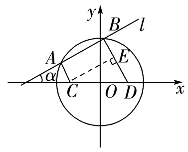
∴$\frac{(k+2)^2}{k^2+1}+3=4$,解得 $k=-\frac{3}{4}$,∴直线 l 的方程为 $y=-\frac{3}{4}x+3$,即 $3x+4y-12=0$.综上,直线 l 的方程为 $3x+4y-12=0$ 或 $x=0$.故选 B.

(2)由直线 $l:mx+y+3m-\sqrt{3}=0$ 知其过定点 $(-3,\sqrt{3})$,圆心 O 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|3m-\sqrt{3}|}{\sqrt{m^2+1}}$.

由 $|AB|=2\sqrt{3}$ 得 $\left(\frac{3m-\sqrt{3}}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2+(\sqrt{3})^2=12$,解得 $m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

又直线 l 的斜率为 $-m=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以直线 l 的倾斜角 $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

画出符合题意的图形如图所示，过点 C 作 $CE\perp BD$，



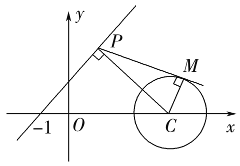
则$\angle DCE=\frac{\pi}{6}$.

在 Rt$\triangle CDE$ 中，可得

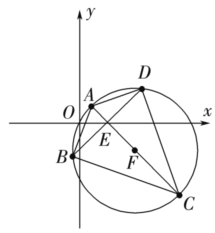
$|CD|=\frac{|AB|}{\cos\alpha}=2\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=4$.］

跟进训练

3.(1)**C**　(2)**D**　(3)**B**　［(1)如图，切线长 $|PM|=\sqrt{|PC|^2-1}$，显然当 $|PC|$ 为 C 到直线 $y=x+1$ 的距离即$\frac{|3+1|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$时，$|PM|$ 最小为 $\sqrt{7}$，故选 C.



(2)将圆的方程化为标准方程得 $(x-2)^2+(y+1)^2=5$，圆心坐标为 $F(2,-1)$，半径 $r=\sqrt{5}$，如图，显然过点 E 的最长弦为过点 E 的直径，即 $|AC|=2\sqrt{5}$，而过点 E 的最短弦为垂直于 EF 的弦，

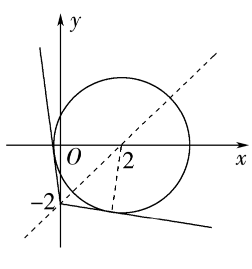


$|EF|=\sqrt{(2-1)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{2}$，

$|BD|=2\sqrt{r^2-|EF|^2}=2\sqrt{3}$，

$\therefore S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}|AC|\times|BD|=2\sqrt{15}$.

(3)如图，由 $x^2+y^2-4x-1=0$ 得 $(x-2)^2+y^2=5$，所以圆心坐标为 $(2,0)$，半径 $r=\sqrt{5}$，所以圆心到点 $(0,-2)$ 的距离为 $\sqrt{(2-0)^2+(0+2)^2}=2\sqrt{2}$，由于圆心与点 $(0,-2)$ 的连线平分角 α，



所以 $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$，所以 $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

所以 $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\times\frac{\sqrt{10}}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{4}$. 故选 B.］

考点四

典例 5　**解**：(1)设 A,B 的坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，

将 $y=kx-2$ 代入 $x^2+y^2=2$，

整理得 $(1+k^2)x^2-4kx+2=0$，

$\therefore x_1+x_2=\frac{4k}{1+k^2}$，$x_1x_2=\frac{2}{1+k^2}$，

$\Delta=(-4k)^2-8(1+k^2)>0$，即 $k^2>1$，

当$\angle AOB$ 为锐角时，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1-2)(kx_2-2)=(1+k^2)x_1x_2-2k(x_1+x_2)+4=\frac{6-2k^2}{1+k^2}>0$，

解得 $k^2<3$，又 $k^2>1$，$\therefore -\sqrt{3}<k<-1$ 或 $1<k<\sqrt{3}$.

故 k 的取值范围为 $(-\sqrt{3},-1)\cup(1,\sqrt{3})$.

(2)由题意知 O,P,C,D 四点共圆且在以 OP 为直径的圆上.

设 $P\left(t,\frac{1}{2}t-2\right)$，以 OP 为直径的圆的方程为 $x(x-t)+y\left(y-\frac{1}{2}t+2\right)=0$，

$\therefore x^2-tx+y^2-\left(\frac{1}{2}t-2\right)y=0$.

又 C,D 在圆 O：$x^2+y^2=2$ 上，

两圆方程作差得 l_{CD}：$tx+\left(\frac{1}{2}t-2\right)y-2=0$，

即 $\left(x+\frac{y}{2}\right)t-2y-2=0$，

由$\begin{cases}x+\frac{y}{2}=0,\\2y+2=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\y=-1,\end{cases}$

$\therefore$直线 CD 过定点$\left(\frac{1}{2},-1\right)$.

跟进训练

4.**解**：(1)设圆心 $C(a,0)\left(a>-\frac{5}{2}\right)$，则$\frac{|4a+10|}{5}=2\Rightarrow a=0$ 或 $a=-5$(舍)，所以圆 C 的方程为 $x^2+y^2=4$.

(2)当直线 $AB\perp x$ 轴时，x 轴平分$\angle ANB$.

当直线 AB 的斜率存在时，设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$，$N(t,0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}x^2+y^2=4,\\y=k(x-1),\end{cases}$得 $(k^2+1)x^2-2k^2x+k^2-4=0$，

所以 $x_1+x_2=\frac{2k^2}{k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{k^2-4}{k^2+1}$.

若 x 轴平分$\angle ANB$，则 $k_{AN}=-k_{BN}\Rightarrow\frac{y_1}{x_1-t}+\frac{y_2}{x_2-t}=0\Rightarrow\frac{k(x_1-1)}{x_1-t}+\frac{k(x_2-1)}{x_2-t}=0\Rightarrow 2x_1x_2-(t+1)(x_1+x_2)+2t=0\Rightarrow\frac{2(k^2-4)}{k^2+1}-\frac{2k^2(t+1)}{k^2+1}+2t=0\Rightarrow t=4$. 所以当点 N 为 $(4,0)$ 时，能使得$\angle ANM=\angle BNM$ 总成立.

综上，存在定点 $N(4,0)$ 满足题意.

第 5 课时　椭圆及其性质

梳理·必备知识

1.常数　焦点　焦距

2.$2a$　$2b$　$2c$　$(0,1)$　a^2-b^2

激活·基本技能

一、(1)×　(2)×　(3)√　(4)√

二、1.**B**　［$\sqrt{x^2+(y+3)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}=4\sqrt{3}$ 表示平面内点 $M(x,y)$ 到点 $(0,-3)$，$(0,3)$ 的距离之和为 $4\sqrt{3}$，而 $3-(-3)=6<4\sqrt{3}$，所以点 M 的轨迹是椭圆，故选 B.］

2.**D**　［把椭圆方程 $16x^2+4y^2=1$ 化为标准方程可得$\frac{x^2}{\frac{1}{16}}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$，所以 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{4}$，$c=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

则长轴长 $2a=1$，焦距 $2c=\frac{\sqrt{3}}{2}$，短轴长 $2b=\frac{1}{2}$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故选 D.］

3.20 [$\triangle AF_1B$ 的周长为 $4a=4\times5=20$.]

4.$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ 或 $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$ [因为 $a=4,e=\frac{3}{4}$,所以 $c=3$,所以 $b^2=a^2-c^2=16-9=7$.因为焦点的位置不确定,所以椭圆的标准方程是 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ 或 $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$.]

考点一

典例1 (1)**D** (2)**BCD** (3)$6+\sqrt{2}$ $6-\sqrt{2}$

[(1)设圆 M 的半径为 r,则 $|MC_1|+|MC_2|=(13-r)+(3+r)=16>8=|C_1C_2|$,所以 M 的轨迹是以 C_1,C_2 为焦点的椭圆,且 $2a=16,2c=8$,故所求的轨迹方程为 $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$.

(2)由椭圆方程知 $a=3,b=2$,所以 $c=\sqrt{5}$,所以 $|PF_1|+|PF_2|=6$,于是 $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $2a+2c=6+2\sqrt{5}$,故A错误;

在 $\triangle PF_1F_2$ 中,由余弦定理可得 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\angle F_1PF_2=(|PF_1|+|PF_2|)^2-2|PF_1||PF_2|-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\angle F_1PF_2$,所以 $20=36-2|PF_1|\cdot|PF_2|-\frac{2}{3}|PF_1||PF_2|$,解得 $|PF_1||PF_2|=6$,故 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin\angle F_1PF_2=\frac{1}{2}\times6\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}$,故B正确;

设点 P 到 x 轴的距离为 d,则 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot d=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}d=2\sqrt{2}$,所以 $d=\frac{2\sqrt{10}}{5}$,故C正确;

$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|\cos\angle F_1PF_2=6\times\frac{1}{3}=2$,故D正确.故选BCD.

(3)椭圆方程可化为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

设 F_1 是椭圆的右焦点,则 $F_1(2,0)$,连接 AF_1,PF_1(图略),

$\therefore|AF_1|=\sqrt{2}$,易知 $|PA|+|PF|=|PA|-|PF_1|+6$.

又 $-|AF_1|\leqslant|PA|-|PF_1|\leqslant|AF_1|$(当 P,A,F_1 三点共线时等号成立),$\therefore6-\sqrt{2}\leqslant|PA|+|PF|\leqslant6+\sqrt{2}$.]

跟进训练

1.(1)**D** (2)8 [(1)由题意得 $|PA|=|PB|$,$\therefore|PA|+|PF|=|PB|+|PF|=r=2\sqrt{3}>|AF|=2$,

$\therefore$点 P 的轨迹是以 A,F 为焦点的椭圆,且 $a=\sqrt{3},c=1$,

$\therefore b=\sqrt{2}$,

$\therefore$动点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$,故选D.

(2)根据椭圆的对称性及 $|PQ|=|F_1F_2|$ 可以得到四边形 PF_1QF_2 为对角线相等的平行四边形,所以四边形 PF_1QF_2 为矩形.设 $|PF_1|=m$,则 $|PF_2|=2a-|PF_1|=8-m$,则 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=m^2+(8-m)^2=2m^2+64-16m=|F_1F_2|^2=4c^2=4(a^2-b^2)=48$,得 $m(8-m)=8$,所以四边形 PF_1QF_2 的面积为 $|PF_1|\times|PF_2|=m(8-m)=8$.]

考点二

典例2 (1)$\frac{y^2}{10}+\frac{x^2}{6}=1$ (2)$\frac{y^2}{20}+\frac{x^2}{4}=1$ (3)$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 或 $\frac{y^2}{\frac{81}{4}}+\frac{x^2}{9}=1$ [(1)设椭圆方程为 $mx^2+ny^2=1(m,n>0,m\neq n)$.

由 $\begin{cases}\left(-\frac{3}{2}\right)^2m+\left(\frac{5}{2}\right)^2n=1,\\3m+5n=1,\end{cases}$

解得 $m=\frac{1}{6},n=\frac{1}{10}$.

$\therefore$椭圆方程为 $\frac{y^2}{10}+\frac{x^2}{6}=1$.

(2)**法一**(定义法):椭圆 $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$ 的焦点为 $(0,-4),(0,4)$,即 $c=4$.

由椭圆的定义知,

$2a=\sqrt{(\sqrt{3}-0)^2+(-\sqrt{5}+4)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-0)^2+(-\sqrt{5}-4)^2}$,

解得 $a=2\sqrt{5}$.

由 $c^2=a^2-b^2$ 可得 $b^2=4$,

$\therefore$所求椭圆的标准方程为 $\frac{y^2}{20}+\frac{x^2}{4}=1$.

法二(待定系数法):$\because$所求椭圆与椭圆 $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$ 的焦点相同,

$\therefore$其焦点在 y 轴上,且 $c^2=25-9=16$.

设它的标准方程为 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

$\because c^2=16$,且 $c^2=a^2-b^2$,

故 $a^2-b^2=16$. ①

又点 $(\sqrt{3},-\sqrt{5})$ 在所求椭圆上,

$\therefore\frac{(-\sqrt{5})^2}{a^2}+\frac{(\sqrt{3})^2}{b^2}=1$,

则 $\frac{5}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1$. ②

由①②得 $b^2=4,a^2=20$,

$\therefore$所求椭圆的标准方程为 $\frac{y^2}{20}+\frac{x^2}{4}=1$.

(3)若焦点在 x 轴上,由题知 $a=3$,因为椭圆的离心率 $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$,所以 $c=\sqrt{5},b=2$,所以椭圆方程是 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.若焦点在 y 轴上,则 $b=3,a^2-c^2=9$,又离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$,解得 $a^2=\frac{81}{4}$,所以椭圆方程是 $\frac{y^2}{\frac{81}{4}}+\frac{x^2}{9}=1$.

综上得,所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 或 $\frac{y^2}{\frac{81}{4}}+\frac{x^2}{9}=1$.]

跟进训练

2.(1)**C**　(2)$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$　[(1)由题意可得 $c=5$,设右焦点为 F',连接 PF'(图略),由 $|OP|=|OF|=|OF'|$ 知,$\angle PFF'=\angle FPO$,$\angle OF'P=\angle OPF'$,所以 $\angle PFF'+\angle OF'P=\angle FPO+\angle OPF'$,所以 $\angle FPO+\angle OPF'=90°$,即 $PF\perp PF'$.

在 $Rt\triangle PFF'$ 中,由勾股定理,

得 $|PF'|=\sqrt{|FF'|^2-|PF|^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$,

由椭圆的定义,得 $|PF|+|PF'|=2a=6+8=14$,则 $a=7$,$a^2=49$,所以 $b^2=a^2-c^2=49-5^2=24$,所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$. 故选 C.

(2)因为椭圆上一点到焦点的最小距离为 $a-c$,

所以 $a-c=2\sqrt{2}-2$.

因为离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

解得 $a=2\sqrt{2}$,$c=2$,则 $b^2=a^2-c^2=4$,

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.]

考点三

考向 1　典例 3　C　[由椭圆的性质知,$a+c=R$,$a-c=r$,解得 $2c=R-r$,故①正确;

由①知 $a=\frac{R+r}{2}$,$c=\frac{R-r}{2}$,

所以 $2b=2\sqrt{a^2-c^2}=2\sqrt{\frac{(R+r)^2}{4}-\frac{(R-r)^2}{4}}=2\sqrt{Rr}$,

若 R 不变,r 越大,$2b$ 越大,轨道Ⅱ的短轴长越大,故②错误;

由①知 $2a=R+r$,故轨道Ⅱ的长轴长为 $R+r$,故③正确;

因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{R-r}{2}}{\frac{R+r}{2}}=\frac{R-r}{R+r}=1-\frac{2r}{R+r}=1-\frac{2}{\frac{R}{r}+1}$,

若 r 不变,R 越大,则 $\frac{2}{\frac{R}{r}+1}$ 越小,

所以 e 越大,轨道Ⅱ的离心率越大,故④正确.

故选 C.]

考向 2　典例 4　(1)**A**　(2)**B**　[(1)在椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$中,

由椭圆的定义可得 $|PF_1|+|PF_2|=2a$,

因为 $|PF_1|=5|PF_2|$,所以 $|PF_2|=\frac{a}{3}$,$|PF_1|=\frac{5a}{3}$,

在 $\triangle PF_1F_2$ 中,$|F_1F_2|=2c$,

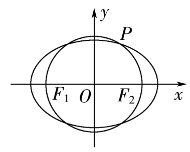
由余弦定理得 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\angle F_1PF_2$,

即 $4c^2=\frac{25a^2}{9}+\frac{a^2}{9}-\frac{5a^2}{9}=\frac{7}{3}a^2$,所以 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{7}{12}$,

所以 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{21}}{6}$.

故选 A.

(2)若椭圆上存在点 P,使得 $PF_1\perp PF_2$,则以原点为圆心,F_1F_2 为直径的圆与椭圆必有交点,如图,



可得 $c\geqslant b$,即 $c^2\geqslant b^2$,所以 $2c^2\geqslant a^2$,即 $e^2\geqslant\frac{1}{2}$,

又 $e<1$,所以 $e\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.]

考向 3　典例 5　(1)**A**　(2)**A**　[(1)由题意知,当 M 在短轴顶点时,$\angle AMB$ 最大.

①如图 1,当焦点在 x 轴上,即 $0<m<3$ 时,

$a=\sqrt{3}$,$b=\sqrt{m}$,$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{m}}\geqslant\tan 60°=\sqrt{3}$,$\therefore 0<m\leqslant 1$.

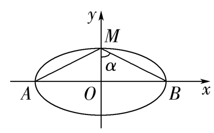


图 1

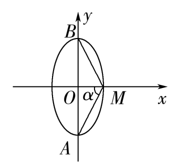


图 2

②如图 2,当焦点在 y 轴上,即 $m>3$ 时,

$a=\sqrt{m}$,$b=\sqrt{3}$,$\tan\alpha=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{3}}\geqslant\tan 60°=\sqrt{3}$,$\therefore m\geqslant 9$.

综上,m 的取值范围是 $(0,1]\cup[9,+\infty)$,故选 A.

(2)**法一**(消元转化法):设点 $P(x,y)$,则根据点 P 在椭圆 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 上可得 $x^2=5-5y^2$. 易知点 $B(0,1)$,所以根据两点间的距离公式得 $|PB|^2=x^2+(y-1)^2=5-5y^2+(y-1)^2=-4y^2-2y+6=\frac{25}{4}-\left(2y+\frac{1}{2}\right)^2$.

当 $2y+\frac{1}{2}=0$,即 $y=-\frac{1}{4}$(满足 $|y|\leqslant 1$)时,$|PB|^2$ 取得最大值 $\frac{25}{4}$,所以 $|PB|_{max}=\frac{5}{2}$. 故选 A.

法二(利用椭圆的参数方程):因为点 P 在椭圆 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 上,所以可设点 $P(\sqrt{5}\cos\theta,\sin\theta)$.

易知点 $B(0,1)$,所以根据两点间的距离公式得 $|PB|^2=(\sqrt{5}\cos\theta)^2+(\sin\theta-1)^2=4\cos^2\theta-2\sin\theta+2=-4\sin^2\theta-2\sin\theta+6=\frac{25}{4}-\left(2\sin\theta+\frac{1}{2}\right)^2$. 易知当 $2\sin\theta+\frac{1}{2}=0$,即 $\sin\theta=-\frac{1}{4}$ 时,$|PB|^2$ 取得最大值 $\frac{25}{4}$,所以 $|PB|_{max}=\frac{5}{2}$. 故选 A.]

跟进训练

3.(1)**C**　(2)**B**　(3)**C**　[(1)设椭圆 C_1 的焦距为 $2c_1$,椭圆 C_2 的焦距为 $2c_2$,则 $c_1^2=4-3=1$,$c_2^2=4-m-(3-m)=1$,$\therefore 2c_1=2c_2$. 故选 C.

(2)由题意,$F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$,因为四边形 F_1F_2PQ 为菱形,所以 $P(2c,\sqrt{3}c)$,

将点 P 坐标代入 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 可得:$\frac{4c^2}{a^2}+\frac{3c^2}{b^2}=1$,整理得 $4c^4-8a^2c^2+a^4=0$,

所以 $4e^4-8e^2+1=0$，因为 $0<e<1$，所以 $e=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 故选 B.

(3)由题意知，$O(0,0)$，$F(-1,0)$，设 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{OP}=(x,y)$，$\overrightarrow{FP}=(x+1,y)$，$\therefore \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}=x(x+1)+y^2=x^2+y^2+x$. 又 $\because \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，$\therefore y^2=3-\frac{3}{4}x^2$，

$\therefore \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}=\frac{1}{4}x^2+x+3=\frac{1}{4}(x+2)^2+2$.

$\because -2\leqslant x\leqslant 2$，

$\therefore$ 当 $x=2$ 时，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$ 有最大值 6. 故选 C.]

拓展视野 3

典例　ABD　[依题意，过椭圆 Γ 的上顶点作 y 轴的垂线，过椭圆 Γ 的右顶点作 x 轴的垂线，则这两条垂线的交点在圆 C 上，所以 $a^2+b^2=\frac{3}{2}a^2$，得 $a^2=2b^2$，所以椭圆 Γ 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 A 正确；因为点 M,P,Q 都在圆 C 上，且 $\angle PMQ=90°$，所以 PQ 为圆 C 的直径，所以 $|PQ|=2\times\sqrt{\frac{3}{2}a^2}=\sqrt{6}a$，所以 $\triangle MPQ$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2}|PQ|\times\sqrt{\frac{3}{2}a^2}=\frac{\sqrt{6}a}{2}\times\sqrt{\frac{3}{2}a^2}=\frac{3}{2}a^2$，故 B 正确；设 $M(x_0,y_0)$，Γ 的左焦点为 $F(-c,0)$，连接 MF(图略)，因为 $c^2=a^2-b^2=\frac{1}{2}a^2$，所以 $|MF|^2=(x_0+c)^2+y_0^2=x_0^2+y_0^2+2x_0c+c^2=\frac{3}{2}a^2+2x_0\times\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{1}{2}a^2=2a^2+\sqrt{2}ax_0$，又 $-\frac{\sqrt{6}}{2}a\leqslant x_0\leqslant\frac{\sqrt{6}}{2}a$，所以 $|MF|^2\geqslant(2-\sqrt{3})a^2$，则 M 到 Γ 的左焦点的距离的最小值为 $\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})a}{2}$，故 C 错误；由直线 PQ 经过坐标原点，易得点 A,B 关于原点对称，设 $A(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，则 $B(-x_1,-y_1)$，$k_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，$k_2=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$，

又 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{2b^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_2^2}{2b^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 所以 $\frac{x_1^2-x_2^2}{2b^2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$，所以 $\frac{y_1^2-y_2^2}{x_1^2-x_2^2}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{1}{2}$，所以 $k_1k_2=-\frac{1}{2}$，故 D 正确. 故选 ABD.]

第 6 课时　直线与椭圆

梳理·必备知识

1. $>$　$=$　$<$

激活·基本技能

一、(1)√　(2)√　(3)×　(4)√

二、1. **A**　[**法一**(通解)：联立直线与椭圆的方程得

$\begin{cases}y=x+1,\\ \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 消去 y 得 $9x^2+10x-15=0$，

$\Delta=100-4\times9\times(-15)>0$，所以直线与椭圆相交.

法二(优解)：直线过点 $(0,1)$，而 $0+\frac{1}{4}<1$，即点 $(0,1)$ 在椭圆内部，所以直线与椭圆相交.]

2. **C**　[由题意得，$a^2=4$，$b^2=1$，所以 $c^2=3$，

所以右焦点坐标为 $(\sqrt{3},0)$，则直线 l 的方程为 $y=x-\sqrt{3}$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}y=x-\sqrt{3},\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 消 y 得，$5x^2-8\sqrt{3}x+8=0$，

$\Delta=(-8\sqrt{3})^2-4\times5\times8=32>0$，

则 $x_1+x_2=\frac{8\sqrt{3}}{5}$，$x_1\cdot x_2=\frac{8}{5}$，

所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{2}\times\sqrt{\left(\frac{8\sqrt{3}}{5}\right)^2-4\times\frac{8}{5}}=\frac{8}{5}$.

即弦 AB 的长为 $\frac{8}{5}$.]

3. **AB**　[由 $\begin{cases}y=kx+2,\\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 得 $(3k^2+2)x^2+12kx+6=0$，

由题意知 $\Delta=144k^2-24(3k^2+2)=0$，解得 $k=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$.]

4. $\sqrt{10}$　$\left(\frac{4\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$　[设直线 l_1：$x-y+m=0$，联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ x-y+m=0,\end{cases}$

整理得 $5x^2+8mx+4m^2-4=0$.

令 $\Delta=64m^2-4\times5(4m^2-4)=0$，解得 $m=\pm\sqrt{5}$.

当 $m=-\sqrt{5}$ 时，直线 l 与直线 l_1 之间的距离 $d=\frac{|-\sqrt{5}+3\sqrt{5}|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{10}$；

当 $m=\sqrt{5}$ 时，直线 l 到直线 l_1 之间的距离 $d=\frac{|\sqrt{5}+3\sqrt{5}|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{10}$.

所以点 P 到直线 l 的最小距离是 $\sqrt{10}$.

此时 $5x^2-8\sqrt{5}x+16=0$，解得 $x=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，

将 $x=\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 代入 $x-y-\sqrt{5}=0$，得 $y=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，

则点 P 的坐标为 $\left(\frac{4\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.]

考点一

典例 1　**解**：将直线 l 的方程与椭圆 C 的方程联立，得方程组

$\begin{cases}y=2x+m, & ①\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1, & ②\end{cases}$

将①代入②，整理得 $9x^2+8mx+2m^2-4=0$.　③

方程③根的判别式 $\Delta=(8m)^2-4\times9\times(2m^2-4)=-8m^2+144$.

(1)当 $\Delta>0$，即 $-3\sqrt{2}<m<3\sqrt{2}$ 时，方程③有两个不同的实数根，可知原方程组有两组不同的实数解. 这时直线 l 与椭圆 C 有两个不重合的公共点.

(2)当 $\Delta=0$，即 $m=\pm3\sqrt{2}$ 时，方程③有两个相同的实数根，可知原方程组有两组相同的实数解. 这时直线 l 与椭圆 C 有两个互相重合的公共点，即直线 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点.

(3)当 $\Delta<0$，即 $m<-3\sqrt{2}$ 或 $m>3\sqrt{2}$ 时，方程③没有实数根，可知原方程组没有实数解. 这时直线 l 与椭圆 C 没有公共点.

跟进训练

1. **BCD**　[联立$\begin{cases}y=x+m,\\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1,\end{cases}$消去 y 得 $4x^2+6mx+3m^2-6=0$，则判别式 $\Delta=12(8-m^2)$.

令 $\Delta=12(8-m^2)\geqslant0$，则有 $|m|\leqslant2\sqrt{2}$，$-2\sqrt{2}\leqslant m\leqslant2\sqrt{2}$，故 A 错误；

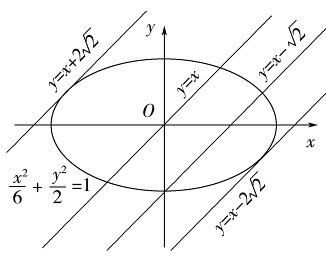
令 $\Delta=12(8-m^2)>0$，则有 $|m|<2\sqrt{2}$，故 B 正确；

令直线 l 与椭圆 C 相切，

则 $\Delta=12(8-m^2)=0$，

即 $m=\pm2\sqrt{2}$，直线 $y=x+3\sqrt{2}$ 与 $y=x-2\sqrt{2}$ 的距离 $d=\dfrac{|3\sqrt{2}-(-2\sqrt{2})|}{\sqrt{2}}=5$，故 C 正确；

如图，直线 $y=x-\sqrt{2}$ 与 $y=x-2\sqrt{2}$ 和 $y=x$ 的距离均为 1，因此，C 上到 l 的距离为 1 的点只有 3 个，故 D 正确. 故选 BCD.



]

考点二

考向 1　典例 2　解：设直线 l 的方程为 $y=-x+m$，由题意知 F_1，F_2 的坐标分别为 $(-1,0)$，$(1,0)$，

所以以线段 F_1F_2 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=1$，由题意知圆心 $(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|-m|}{\sqrt{2}}<1$，得 $|m|<\sqrt{2}$.

$|AB|=2\sqrt{1-d^2}=2\sqrt{1-\dfrac{m^2}{2}}=\sqrt{2}\times\sqrt{2-m^2}$.

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ y=-x+m,\end{cases}$消去 y，得 $7x^2-8mx+4m^2-12=0$，

由题意得 $\Delta=(-8m)^2-4\times7\times(4m^2-12)=336-48m^2=48(7-m^2)>0$，解得 $m^2<7$.

设 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{8m}{7}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{7}$，

$|CD|=\sqrt{2}|x_1-x_2|=\sqrt{2}\times\sqrt{\left(\dfrac{8m}{7}\right)^2-4\times\dfrac{4m^2-12}{7}}$

$=\sqrt{2}\times\sqrt{\dfrac{336-48m^2}{49}}=\dfrac{4\sqrt{6}}{7}\times\sqrt{7-m^2}$

$=\dfrac{8\sqrt{3}}{7}|AB|=\dfrac{8\sqrt{3}}{7}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2-m^2}$，

解得 $m^2=\dfrac{1}{3}<2$，得 $m=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

则直线 l 的方程为 $y=-x\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

考向 2　典例 3　(1)**D**　(2)$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{12}=1$　[(1)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，线段 AB 的中点 $M(x_0,y_0)$.

$\because\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$，$\dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1$，

两式相减可得$\dfrac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}+\dfrac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$，

把 $x_1+x_2=2x_0$，$y_1+y_2=2y_0$，$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\dfrac{y_0}{x_0}=\tan150°=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，代入可得

$\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{3}$. $\therefore e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. 故选 D.

(2)**法一**(直接法)：$\because$椭圆的中心在原点，一个焦点为 $(0,2)$，

$\therefore$设椭圆方程为$\dfrac{y^2}{b^2+4}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(b>0)$，由$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2+4}+\dfrac{x^2}{b^2}=1,\\ y=3x+7\end{cases}$

消去 x，

得 $(10b^2+4)y^2-14(b^2+4)y-9b^4+13b^2+196=0$，

设直线 $y=3x+7$ 与椭圆相交所得弦的端点分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由题意知$\dfrac{y_1+y_2}{2}=1$，

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{14(b^2+4)}{10b^2+4}=2$，解得 $b^2=8$.

$\therefore$所求椭圆方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{12}=1$.

法二(点差法)：$\because$椭圆的中心在原点，一个焦点为 $(0,2)$，

$\therefore$设椭圆的方程为$\dfrac{y^2}{b^2+4}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(b>0)$.

设直线 $y=3x+7$ 与椭圆相交所得弦的端点分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则$\begin{cases}\dfrac{y_1^2}{b^2+4}+\dfrac{x_1^2}{b^2}=1, & ①\\ \dfrac{y_2^2}{b^2+4}+\dfrac{x_2^2}{b^2}=1, & ②\end{cases}$

①−②得$\dfrac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2+4}+\dfrac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{b^2}=0$，即$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\dfrac{b^2+4}{b^2}$，

又$\because$弦 AB 的中点的纵坐标为 1，故横坐标为 -2，

$k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=3$，代入上式得 $3\times\dfrac{2\times1}{2\times(-2)}=-\dfrac{b^2+4}{b^2}$，解得 $b^2=8$，故所求的椭圆方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{12}=1$.]

跟进训练

2. **解**:(1)依题意,椭圆 C 的半焦距 $c=2\sqrt{2}$,而 $b=1$,则 $a^2=b^2+c^2=9$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$.

(2)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

依题意,直线 l 的方程为 $y=x+3$,由 $\begin{cases}y=x+3,\\x^2+9y^2=9\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $5x^2+27x+36=0$,

解得 $x_1=-\frac{12}{5}$,$x_2=-3$,因此,$|AB|=\sqrt{1+1^2}\cdot|x_1-x_2|=\frac{3\sqrt{2}}{5}$,所以弦 AB 的长是 $\frac{3\sqrt{2}}{5}$.

(3)显然,点 $Q\left(1,\frac{1}{2}\right)$在椭圆 C 内,设$E(x_3,y_3)$,$G(x_4,y_4)$,

因为 E,G 在椭圆 C 上,

则 $\begin{cases}x_3^2+9y_3^2=9,\\x_4^2+9y_4^2=9,\end{cases}$ 两式相减得:$(x_3-x_4)(x_3+x_4)+9(y_3-y_4)(y_3+y_4)=0$,

而 Q 是弦 EG 的中点,即 $x_3+x_4=2$ 且 $y_3+y_4=1$,则有$2(x_3-x_4)+9(y_3-y_4)=0$,

于是得直线 l_1 的斜率为 $\frac{y_3-y_4}{x_3-x_4}=-\frac{2}{9}$,直线 l_1 的方程:$y-\frac{1}{2}=-\frac{2}{9}(x-1)$,即 $4x+18y-13=0$,所以直线 l_1 的方程是 $4x+18y-13=0$.

考点三

典例4 **解**:(1)根据题意知椭圆的焦点在 x 轴上,所以设椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,

由$\begin{cases}2a=|EF_1|+|EF_2|=4,\\a^2=b^2+c^2,\\c=1,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=2,\\c=1,\\b=\sqrt{3},\end{cases}$

所以椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)由题意得直线 l 的斜率存在且不为 0,直线 l 的方程为 $y=k(x+1)(k>0)$,

联立$\begin{cases}y=k(x+1),\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$

整理得$\left(\frac{3}{k^2}+4\right)y^2-\frac{6}{k}y-9=0$,

则 $\Delta=\frac{144}{k^2}+144>0$,

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

则 $y_1+y_2=\frac{6k}{3+4k^2}$,$y_1y_2=\frac{-9k^2}{3+4k^2}$,

又$\overrightarrow{AF_1}=2\overrightarrow{F_1B}$,所以 $y_1=-2y_2$,

又 $y_1+y_2=\frac{6k}{3+4k^2}$,所以 $y_1=\frac{12k}{3+4k^2}$,$y_2=\frac{-6k}{3+4k^2}$,代入 $y_1y_2=\frac{-9k^2}{3+4k^2}$,

则 $3+4k^2=8$,解得 $k=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$,

又 $k>0$,所以 $k=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

跟进训练

3. **解**:(1)由 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}}{|\overrightarrow{PF_1}||\overrightarrow{PF_2}|}=\frac{1}{2}$ 知 $\angle F_1PF_2=60°$,

在$\triangle F_1PF_2$ 中,$|PF_2|=2a-4$,$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,由余弦定理得

$4c^2=16+(2a-4)^2-4(2a-4)$,

解得 $a=4$,$c=2$,$b^2=12$,

所以椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

(2)假设存在点 $Q(m,0)$满足条件,设直线 l 方程为 $x=ty+2$,

设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,由$\begin{cases}x=ty+2,\\\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1,\end{cases}$

消去 x 有$(3t^2+4)y^2+12ty-36=0$,

所以 $y_1+y_2=\frac{-12t}{3t^2+4}$,$y_1y_2=\frac{-36}{3t^2+4}$,

$k_{MQ}+k_{NQ}=\frac{y_1}{x_1-m}+\frac{y_2}{x_2-m}$

$=\frac{2ty_1y_2+(2-m)(y_1+y_2)}{(ty_1+2-m)(ty_2+2-m)}$

$=\frac{\frac{-72t}{3t^2+4}-\frac{12(2-m)t}{3t^2+4}}{(ty_1+2-m)(ty_2+2-m)}$,

因为$\angle MQO=\angle NQO$,所以 $k_{MQ}+k_{NQ}=0$,

即$-72t-12(2-m)t=0$,解得 $m=8$,

所以存在 $Q(8,0)$,使得$\angle MQO=\angle NQO$.

第 7 课时 双曲线

梳理・必备知识

1. 绝对值 小于 焦点 焦距

2. $F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$ $F_1(0,-c)$,$F_2(0,c)$ $|F_1F_2|=2c$ $x\leqslant -a$ $x\geqslant a$ 坐标轴 原点 $A_1(-a,0)$,$A_2(a,0)$ $A_1(0,-a)$,$A_2(0,a)$ A_1A_2 $2a$ $2b$ a b $(1,+\infty)$ a^2+b^2

3. $y=\pm x$ $\sqrt{2}$

激活・基本技能

一、(1)× (2)× (3)√ (4)√

二、1. 6 [设双曲线的焦点为 F_1,F_2,$|PF_1|=4$,则$||PF_1|-|PF_2||=2$,故$|PF_2|=6$ 或 2,又双曲线上的点到它的焦点的距离的最小值为 $c-a=\sqrt{17}-1>2$,故$|PF_2|=6$.]

2. 10 $\frac{7}{5}$ $y=\pm\frac{5\sqrt{6}}{12}x$ [双曲线$\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{24}=1$ 中 $a=5$,$b^2=24$,$c^2=25+24=49$,∴实轴长为 $2a=10$,离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{7}{5}$,渐近线方程为 $y=\pm\frac{5\sqrt{6}}{12}x$.]

3. $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{15}=1$　[设双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=\pm1(a>0)$，

把点$A(4,1)$代入，得$a^2=15$(舍负)，

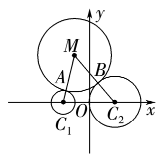
故所求方程为$\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{15}=1$.]

4. $(-2,-1)$　[因为方程$\frac{x^2}{2+m}+\frac{y^2}{m+1}=1$表示双曲线，所以$(2+m)(m+1)<0$，即$-2<m<-1$.]

考点一

典例1　(1)$x^2-\frac{y^2}{8}=1(x\leqslant-1)$　(2)$\frac{3}{4}$

[(1)如图所示，设动圆M与圆C_1及圆C_2分别外切于点A和B.



根据圆与圆外切的条件，得$|MC_1|-|AC_1|=|MA|$，$|MC_2|-|BC_2|=|MB|$.

因为$|MA|=|MB|$，

所以$|MC_1|-|AC_1|=|MC_2|-|BC_2|$，

即$|MC_2|-|MC_1|=|BC_2|-|AC_1|=2$，所以点$M$到两定点$C_1$，$C_2$的距离的差是常数且小于$|C_1C_2|$.

根据双曲线的定义，得动点M的轨迹为双曲线的左支(点M与C_2的距离大，与C_1的距离小)，其中$a=1$，$c=3$，则$b^2=8$.

故点M的轨迹方程为$x^2-\frac{y^2}{8}=1(x\leqslant-1)$.

(2)因为由双曲线的定义有$|PF_1|-|PF_2|=|PF_2|=2a=2\sqrt{2}$，所以$|PF_1|=2|PF_2|=4\sqrt{2}$，所以$\cos\angle F_1PF_2$

$=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}$

$=\frac{(4\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2-4^2}{2\times4\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\frac{3}{4}$.]

拓展变式

解：不妨设点P在双曲线的右支上，

则$|PF_1|-|PF_2|=2a=2\sqrt{2}$，

在$\triangle F_1PF_2$中，由余弦定理，得

$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{1}{2}$，

$\therefore|PF_1|\cdot|PF_2|=8$，

$\therefore S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\sin60^\circ=2\sqrt{3}$.

跟进训练

1. (1)**B**　(2)9　[(1)由于$2b=2$，$e=\frac{c}{a}=3$，$\therefore b=1$，$c=3a$，

$\therefore 9a^2=a^2+1$，$\therefore a=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

由双曲线的定义知，$|AF_2|-|AF_1|=2a=\frac{\sqrt{2}}{2}$，　①

$|BF_2|-|BF_1|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，　②

①+②得$|AF_2|+|BF_2|-(|AF_1|+|BF_1|)=\sqrt{2}$，

又$|AF_1|+|BF_1|=|AB|=8$，

$\therefore|AF_2|+|BF_2|=8+\sqrt{2}$，

则$\triangle ABF_2$的周长为$16+\sqrt{2}$，故选B.

(2)设双曲线的右焦点为F_1，则由双曲线的定义，可知$|PF|=4+|PF_1|$，所以当$|PF_1|+|PA|$最小时满足$|PF|+|PA|$最小. 由双曲线的图象(图略)，可知当点A，P，F_1共线时，满足$|PF_1|+|PA|$最小，$|AF_1|$即$|PF_1|+|PA|$的最小值. 又$|AF_1|=5$，故所求的最小值为9.]

考点二

典例2　(1)**AB**　(2)**D**　(3)$\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{75}=1$　[(1)设双曲线方程为$\frac{x^2}{2m}-\frac{y^2}{m}=1(m\neq0)$，

又$2a=4$，$\therefore a^2=4$，

当$m>0$时，$2m=4$，$m=2$；

当$m<0$时，$-m=4$，$m=-4$.

故所求双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$或$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{8}=1$.

(2)由题意可知$|PF_1|=\frac{4\sqrt{3}c}{3}$，$|PF_2|=\frac{2\sqrt{3}c}{3}$，$2b=2\sqrt{2}$，由双曲线的定义可得$\frac{4\sqrt{3}c}{3}-\frac{2\sqrt{3}c}{3}=2a$，即$c=\sqrt{3}a$. 又$b=\sqrt{2}$，$c^2=a^2+b^2$，$\therefore a=1$，$\therefore$双曲线的标准方程为$x^2-\frac{y^2}{2}=1$，故选D.

(3)设双曲线方程为$mx^2-ny^2=1(mn>0)$.

$\therefore\begin{cases}9m-28n=1,\\72m-49n=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=-\frac{1}{75},\\n=-\frac{1}{25}.\end{cases}$

$\therefore$双曲线方程为$\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{75}=1$.]

跟进训练

2. (1)**C**　(2)**ABC**　(3)$\frac{5y^2}{144}-\frac{5x^2}{36}=1$(答案不唯一，写出一个即可)　[(1)抛物线$y^2=4\sqrt{5}x$的准线方程为$x=-\sqrt{5}$，

则$c=\sqrt{5}$，则$F_1(-\sqrt{5},0)$，$F_2(\sqrt{5},0)$，

不妨设点A为第二象限内的点，联立$\begin{cases}y=-\frac{b}{a}x,\\x=-c,\end{cases}$

可得$\begin{cases}x=-c,\\y=\frac{bc}{a},\end{cases}$即点$A\left(-c,\frac{bc}{a}\right)$，

因为$AF_1\perp F_1F_2$且$\angle F_1F_2A=\frac{\pi}{4}$，则$\triangle F_1F_2A$为等腰直角三角形，且$|AF_1|=|F_1F_2|$，即$\frac{bc}{a}=2c$，可得$\frac{b}{a}=2$，

所以$\begin{cases}\frac{b}{a}=2,\\c=\sqrt{5},\\c^2=a^2+b^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\b=2,\\c=\sqrt{5},\end{cases}$

因此，双曲线的标准方程为$x^2-\frac{y^2}{4}=1$.

(2)由题意可得焦点在x轴上，且$c=5$. A选项，若双曲线的离心率为$\frac{5}{4}$，则$a=4$，所以$b^2=c^2-a^2=9$，此时双曲线的方

程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$，故 A 正确；B 选项，若双曲线过点$\left(5,\frac{9}{4}\right)$，

则$\begin{cases}\frac{25}{a^2}-\frac{\frac{81}{16}}{b^2}=1,\\a^2+b^2=25,\end{cases}$得$\begin{cases}a^2=16,\\b^2=9,\end{cases}$此时双曲线的方程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$，故 B 正确；C 选项，若双曲线的渐近线方程为 $3x\pm4y=0$，可设双曲线的方程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=m(m>0)$，所以 $c^2=16m+9m=25$，解得 $m=1$，所以此时双曲线的方程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$，故 C 正确；D 选项，若双曲线的实轴长为 4，则 $a=2$，所以 $b^2=c^2-a^2=21$，此时双曲线的方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{21}=1$，故 D 错误. 故选 ABC.

(3)由①中心在原点，焦点在 y 轴上知，可设双曲线方程为：$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$.

由②一条渐近线的方程为 $y=2x$ 知，$\frac{a}{b}=2$，即 $a=2b$.

由③知，$2c>10$，即 $c>5$，

则可取 $c=6$.（此处也可取大于 5 的其他数）

又∵$a^2+b^2=c^2$，∴$(2b)^2+b^2=36$，∴$b^2=\frac{36}{5}$.

∴$a^2=4b^2=\frac{144}{5}$，则同时满足性质①②③的一个双曲线的方程为$\frac{5y^2}{144}-\frac{5x^2}{36}=1$.］

考点三

考向 1　典例 3　$y=\pm\sqrt{3}x$　［∵双曲线的方程是$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，

∴双曲线的渐近线为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，

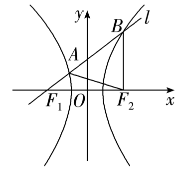
∵离心率为 $e=\frac{c}{a}=2$，可得 $c=2a$，∴$c^2=4a^2$，

即 $a^2+b^2=4a^2$，可得 $b=\sqrt{3}a$，由此可得双曲线的渐近线为 $y=\pm\sqrt{3}x$.］

考向 2　典例 4　(1)**A**　(2)**D**　［(1)设$|PF_2|=m$，$|PF_1|=3m$，则$|F_1F_2|=\sqrt{m^2+9m^2-2\times3m\times m\times\cos 60^\circ}=\sqrt{7}m$，所以 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}=\frac{|F_1F_2|}{|PF_1|-|PF_2|}=\frac{\sqrt{7}m}{2m}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

(2)因为斜率为$\sqrt{2}$的直线与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$恒有两个公共点，所以$\frac{b}{a}>\sqrt{2}$，则 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}>\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$，所以双曲线离心率的取值范围是$(\sqrt{3},+\infty)$，故选 D.］

考向 3　典例 5　(1)**A**　(2)**B**　［(1)因为$F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$，$\frac{x_0^2}{2}-y_0^2=1$，所以$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=(-\sqrt{3}-x_0,-y_0)\cdot(\sqrt{3}-x_0,-y_0)=x_0^2+y_0^2-3<0$，即 $3y_0^2-1<0$，解得$-\frac{\sqrt{3}}{3}<y_0<\frac{\sqrt{3}}{3}$.



(2)如图所示，由双曲线定义可知$|AF_2|-|AF_1|=2a$.

又$|AF_1|=2a$，

所以$|AF_2|=4a$，

因为$\angle F_1AF_2=\frac{2}{3}\pi$，所以 $S_{\triangle AF_1F_2}$

$=\frac{1}{2}|AF_1|\cdot|AF_2|\cdot\sin\angle F_1AF_2$

$=\frac{1}{2}\times2a\times4a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}a^2$.

由双曲线定义可知$|BF_1|-|BF_2|=2a$，

所以$|BF_1|=2a+|BF_2|$，又$|BF_1|=2a+|BA|$，

所以$\triangle BAF_2$ 为等边三角形，边长为 $4a$，

所以 $S_{\triangle ABF_2}=\frac{\sqrt{3}}{4}|AB|^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4a)^2=4\sqrt{3}a^2$，

所以$\frac{S_{\triangle AF_1F_2}}{S_{\triangle ABF_2}}=\frac{2\sqrt{3}a^2}{4\sqrt{3}a^2}=\frac{1}{2}$. 故选 B.］

跟进训练

3. (1)**D**　(2)**ABC**　(3)$(1,2)$　［(1)根据双曲线的离心率 $e=\sqrt{5}=\frac{c}{a}$，得 $c=\sqrt{5}a$，即 $c^2=5a^2$，即 $a^2+b^2=5a^2$，所以 $b^2=4a^2$，$\frac{b^2}{a^2}=4$，所以双曲线的渐近线方程为 $y=\pm2x$，易知渐近线 $y=2x$ 与圆相交.

法一：由$\begin{cases}y=2x,\\(x-2)^2+(y-3)^2=1,\end{cases}$得 $5x^2-16x+12=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{16}{5}$，$x_1x_2=\frac{12}{5}$.

所以$|AB|=\sqrt{1+2^2}|x_1-x_2|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2-4\times\frac{12}{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，故选 D.

法二：圆心$(2,3)$到渐近线 $y=2x$ 的距离 $d=\frac{|2\times2-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以$|AB|=2\sqrt{1-d^2}=2\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，故选 D.

(2)由题意知，$a=4$，$b=3$，所以 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$. 对于 A，双曲线 C 的实轴长为 $2a=8$，故 A 正确；对于 B，双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{3}{4}x$，故 B 正确；对于 C，双曲线 C 的焦点为$(\pm5,0)$，其到渐近线的距离为$\frac{|3\times5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3$，故 C 正确；对于 D，当双曲线的顶点与焦点位于 y 轴的同侧时，该顶点到焦点的距离即双曲线 C 上的点到焦点距离的最小值，为 1，故 D 错误.

(3)若$\triangle ABE$ 是锐角三角形，只需$\angle AEF<45^\circ$，在 $\mathrm{Rt}\triangle AFE$ 中，$|AF|=\frac{b^2}{a}$，$|FE|=a+c$，则$\frac{b^2}{a}<a+c$，即 $b^2<a^2+ac$，即 $2a^2-c^2+ac>0$，则 $e^2-e-2<0$，解得$-1<e<2$，又 $e>1$，则 $1<e<2$.］

考点四

典例 6　(1)2(满足 $1<e\leqslant\sqrt{5}$ 皆可)　[C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,所以 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$,

结合渐近线的特点,只需 $0<\frac{b}{a}\leqslant2$,即 $\frac{b^2}{a^2}\leqslant4$,

可满足条件"直线 $y=2x$ 与 C 无公共点".

所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\leqslant\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$,

又因为 $e>1$,所以 $1<e\leqslant\sqrt{5}$.

故答案为 2(满足 $1<e\leqslant\sqrt{5}$ 皆可).]

(2)**解**:①因为 $|MF_1|-|MF_2|=2<|F_1F_2|=2\sqrt{17}$,

所以点 M 的轨迹 C 是以 F_1,F_2 分别为左、右焦点的双曲线的右支.

设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,半焦距为 c,则

$2a=2,c=\sqrt{17}$,得 $a=1,b^2=c^2-a^2=16$,

所以点 M 的轨迹 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{16}=1(x\geqslant1)$.

②设 $T\left(\frac{1}{2},t\right)$,由题意可知直线 AB,PQ 的斜率均存在且不为 0,设直线 AB 的方程为 $y-t=k_1\left(x-\frac{1}{2}\right)(k_1\neq0)$,直线 PQ 的方程为 $y-t=k_2\left(x-\frac{1}{2}\right)(k_2\neq0)$,

由 $\begin{cases}y-t=k_1\left(x-\frac{1}{2}\right),\\x^2-\frac{y^2}{16}=1,\end{cases}$

得 $(16-k_1^2)x^2-2k_1\left(t-\frac{k_1}{2}\right)x-\left(t-\frac{k_1}{2}\right)^2-16=0$.

设 $A(x_A,y_A),B(x_B,y_B)$,

易知 $16-k_1^2\neq0$,

则 $x_Ax_B=\frac{-\left(t-\frac{k_1}{2}\right)^2-16}{16-k_1^2}$,

$x_A+x_B=\frac{2k_1\left(t-\frac{k_1}{2}\right)}{16-k_1^2}$,

所以 $|TA|=\sqrt{1+k_1^2}\left|x_A-\frac{1}{2}\right|=\sqrt{1+k_1^2}\left(x_A-\frac{1}{2}\right)$,

$|TB|=\sqrt{1+k_1^2}\left|x_B-\frac{1}{2}\right|=\sqrt{1+k_1^2}\left(x_B-\frac{1}{2}\right)$,

则 $|TA|\cdot|TB|=(1+k_1^2)\cdot\left(x_A-\frac{1}{2}\right)\left(x_B-\frac{1}{2}\right)=(1+k_1^2)\cdot\left[x_Ax_B-\frac{1}{2}(x_A+x_B)+\frac{1}{4}\right]=(1+k_1^2)\cdot\left[\frac{-\left(t-\frac{k_1}{2}\right)^2-16}{16-k_1^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2k_1\left(t-\frac{k_1}{2}\right)}{16-k_1^2}+\frac{1}{4}\right]$

$=\frac{(1+k_1^2)(t^2+12)}{k_1^2-16}$.

同理得 $|TP|\cdot|TQ|=\frac{(1+k_2^2)(t^2+12)}{k_2^2-16}$.

因为 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$,

所以 $\frac{(1+k_1^2)(t^2+12)}{k_1^2-16}=\frac{(1+k_2^2)(t^2+12)}{k_2^2-16}$,

所以 $k_2^2-16+k_1^2k_2^2-16k_1^2=k_1^2-16+k_1^2k_2^2-16k_2^2$,即 $k_1^2=k_2^2$,

又 $k_1\neq k_2$,所以 $k_1=-k_2$,即 $k_1+k_2=0$.

故直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和为 0.

跟进训练

4.(1)**B**　(2)**B**　(3)**ABC**　[(1)双曲线的渐近线为 $y=\pm\frac{3}{4}x$,当直线 l 与渐近线平行时,与双曲线只有一个交点.当直线 l 斜率大于零时,要与双曲线左支交于两点,则需直线斜率 $k>\frac{3}{4}$;当直线 l 斜率小于零时,要与双曲线左支交于两点,则需斜率 $k<-\frac{3}{4}$.故选 B.

(2)当直线 l 的倾斜角为 90° 时,$|AB|=\frac{2b^2}{a}=6$,则当直线 l 与双曲线的右支交于 A,B 两点时,满足题意的直线 l 有 1 条;当直线 l 的倾斜角为 0° 时,$|AB|=2<6$,则当直线 l 与双曲线的左、右两支分别交于一点时,还可作出 2 条直线 l,使得 $|AB|=6$.故满足题意的直线 l 有 3 条,故选 B.

(3)对于 A,AB 的最小值为通径 $\frac{2b^2}{a}$,故 A 正确;对于 B,由双曲线的定义得 $|AF_1|+|BF_1|-|AB|=4a$,

得 $|AF_1|+|BF_1|=4a+m$,所以三角形 $\triangle F_1AB$ 的周长 $|AF_1|+|BF_1|+|AB|=4a+2m$,故 B 正确;

对于 C,设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 两式相减

得 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}-\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$,

则 $\frac{1}{a^2}-\frac{(y_1+y_2)}{b^2(x_1+x_2)}\cdot\frac{(y_1-y_2)}{x_1-x_2}=0$,

则 $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\cdot k_{OM}\cdot k=0$,则 $k_{OM}\cdot k=\frac{b^2}{a^2}$,故 C 正确;

对于 D,若直线 AB 的斜率为 $\sqrt{3}$,则 $\frac{b}{a}<\sqrt{3}$,

所以 $b^2<3a^2$,所以 $c^2<4a^2$,所以 $1<e<2$,所以 D 错误.故选 ABC.]

第 8 课时　抛物线

梳理·必备知识

1.相等　焦点　准线

2.$O(0,0)$　$F\left(-\frac{p}{2},0\right)$　$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$　$x=-\frac{p}{2}$　$y=\frac{p}{2}$

激活·基本技能

一、(1)× (2)× (3)× (4)×

二、1. **A** [$\because y=\frac{1}{4}x^2$,$\therefore x^2=4y$,$\therefore$准线方程为 $y=-1$.]

2. **B** [M到准线的距离等于M到焦点的距离,又准线方程为 $y=-\frac{1}{16}$,设$M(x,y)$,则 $y+\frac{1}{16}=1$,$\therefore y=\frac{15}{16}$.]

3. **B** [抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为$F(1,0)$,准线方程为 $x=-1$. 根据题意可得,$|PQ|=|PF|+|QF|=x_1+1+x_2+1=x_1+x_2+2=8$.]

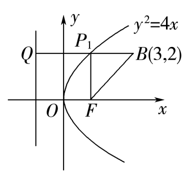
4. $y^2=-8x$ 或 $x^2=-y$ [设抛物线方程为 $y^2=2px(p\neq0)$或 $x^2=2py(p\neq0)$. 将$P(-2,-4)$代入,分别得方程为 $y^2=-8x$ 或 $x^2=-y$.]

考点一

考向1 **典例1** (1)5 $4\sqrt{5}$ (2)4 [(1)由题意得点 $F(1,0)$,设点 $M(x,\pm2\sqrt{x})$,则$|FM|=\sqrt{(x-1)^2+4x}=6$,解得 $x=5$.

易得点 $N(5,0)$,从而 $S_{\triangle FMN}=\frac{1}{2}(x_N-x_F)\cdot MN=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$.

(2)如图,过点 B 作 BQ 垂直准线于点 Q,交抛物线于点 P_1,则 $|P_1Q|=|P_1F|$. 则有$|PB|+|PF|\geqslant|P_1B|+|P_1Q|=|BQ|=4$,即$|PB|+|PF|$的最小值为 4.]



拓展变式

1. **解**:由题意可知点 $B(3,4)$在抛物线的外部.

$\because|PB|+|PF|$的最小值即为B,F两点间的距离,$F(1,0)$,

$\therefore|PB|+|PF|\geqslant|BF|=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$,

即$|PB|+|PF|$的最小值为 $2\sqrt{5}$.

2. **解**:由题意知,抛物线的焦点为 $F(1,0)$.

点 P 到 y 轴的距离 $d_1=|PF|-1$,

所以 $d_1+d_2=d_2+|PF|-1$.

易知 $d_2+|PF|$的最小值为点 F 到直线 l 的距离,

故 $d_2+|PF|$的最小值为$\frac{|1+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$,

所以 d_1+d_2 的最小值为 $3\sqrt{2}-1$.

考向2 **典例2** (1)**C** (2)**B** [(1)设 P 点坐标为(x,y),易知$A(2,0)$,动圆的半径为 r,则根据两圆相外切及直线与圆相切的性质可得,$|PA|=1+r$,$d=r$,

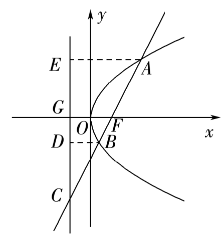
P 在直线的右侧,故 P 到定直线的距离是 $d=x+1$,

所以$|PA|-d=1$,即 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}-(x+1)=1$,化简得 $y^2=8x$. 故选 C.

(2)如图,分别过点 A,B 作准线的垂线,交准线于点 E,D,设准线与 x 轴交于点 G,设$|BF|=a$,则由已知得$|BC|=2a$,由定义得$|BD|=a$,

故$\angle BCD=30°$,

则在 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中,$2|AE|=|AC|$,



又$|AF|=4$,$\therefore|AC|=4+3a$,$|AE|=4$,$\therefore4+3a=8$,从而得 $a=\frac{4}{3}$,$\because AE/\!/FG$,

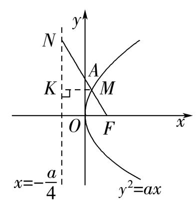
$\therefore\frac{FG}{AE}=\frac{CF}{AC}$,即$\frac{p}{4}=\frac{4}{8}$,$p=2$. $\therefore$抛物线的方程为 $y^2=4x$. 故选 B.]

跟进训练

1. (1)**B** (2)**D** (3)**AC** [(1)抛物线的开口朝下,说明其焦点在 y 轴的负半轴上,则其满足标准方程 $x^2=-2py(p>0)$,又焦点到准线的距离 $p=5$,所以该抛物线的标准方程为 $x^2=-10y$. 故选 B.

(2)依题意,点 F 的坐标为$\left(\frac{a}{4},0\right)$,设点 M 在准线上的射影为 K,如图所示,由抛物线的定义知$|MF|=|KM|$,由$|FM|:|MN|=1:\sqrt{5}$,

则$|KN|:|KM|=2:1$.



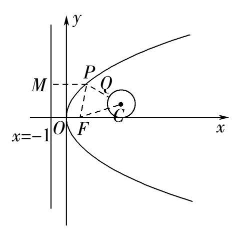
$\because k_{FN}=k_{FA}=\frac{0-2}{\frac{a}{4}-0}=-\frac{8}{a}$,$k_{FN}=-\frac{|KN|}{|KM|}=-2$,

$\therefore-\frac{8}{a}=-2$,解得 $a=4$. 故选 D.

(3)抛物线焦点为 $F(1,0)$,准线为 $x=-1$,作出图象,

对选项 A:由抛物线的性质可知:$|PF|$的最小值为$|OF|=1$,故 A 正确;

对选项 B:注意到 F 是定点,由圆的性质可知:$|QF|$的最小值为 $|CF|-r=\sqrt{10}-1$,故 B 错误;



对选项 C,D:过点 P 作抛物线准线的垂线,垂足为 M,由抛物线定义可知$|PF|=|PM|$,故$|PF|+|PQ|=|PM|+|PQ|$,$|PM|+|PQ|$的最小值为点Q到准线 $x=-1$ 的距离,故最小值为 4,故 C 正确,D 错误. 故选 AC.]

考点二

典例3 (1)**B** (2)$x=-\frac{3}{2}$ (3)2 1 [(1)将直线方程与抛物线方程联立,可得 $y=\pm2\sqrt{p}$,不妨设 $D(2,2\sqrt{p})$,$E(2,-2\sqrt{p})$,由 $OD\perp OE$,可得$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OE}=4-4p=0$,解得 $p=1$,所以抛物线 C 的方程为 $y^2=2x$,其焦点坐标为$\left(\frac{1}{2},0\right)$. 故选 B.

(2)**法一**(解直角三角形):由题易得$|OF|=\frac{p}{2}$,$|PF|=p$,$\angle OPF=\angle PQF$,所以$\tan\angle OPF=\tan\angle PQF$,所以$\frac{|OF|}{|PF|}=$

$\dfrac{|PF|}{|FQ|}$，即$\dfrac{\frac{p}{2}}{p}=\dfrac{p}{6}$，解得 $p=3$，所以 C 的准线方程为 $x=-\dfrac{3}{2}$.

法二(应用射影定理)：由题易得 $|OF|=\dfrac{p}{2}$，$|PF|=p$，$|PF|^2=|OF|\cdot|FQ|$，即 $p^2=\dfrac{p}{2}\times6$，解得 $p=3$ 或 $p=0$(舍去)，所以 C 的准线方程为 $x=-\dfrac{3}{2}$.

(3)由$\dfrac{p}{2}=1$，得 $p=2$. 当直线 l 的斜率不存在时，l：$x=1$，与 $y^2=4x$ 联立解得 $y=\pm2$，此时$|AF|=|BF|=2$，所以$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$；当直线 l 的斜率存在时，设 l：$y=k(x-1)$，代入抛物线方程，得 $k^2x^2-2(k^2+2)x+k^2=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1x_2=1$，$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{|AF|+|BF|}{|AF||BF|}=\dfrac{x_1+x_2+2}{(x_1+1)(x_2+1)}$

$=\dfrac{x_1+x_2+2}{x_1x_2+x_1+x_2+1}=\dfrac{x_1+x_2+2}{1+x_1+x_2+1}=1$.

综上，$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=1$.]

跟进训练

2.(1)**B**　(2)4　(3)$x^2=4y$　[(1)抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点坐标为$\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，它到直线 $y=x+1$ 的距离为 $d=\dfrac{\frac{p}{2}+1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Rightarrow p=2$. 故选 B.

(2)**法一**：抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 $F(1,0)$，准线方程为 $x=-1$. 因为直线 AF 的倾斜角为 $120°$，所以$\angle AFO=60°$. 又 $\tan60°=\dfrac{y_A}{1-(-1)}$，所以 $y_A=2\sqrt{3}$. 因为 $PA\perp l$，所以 $y_P=y_A=2\sqrt{3}$. 将其代入 $y^2=4x$，得 $x_P=3$，所以$|PF|=|PA|=3-(-1)=4$.

法二：抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 $F(1,0)$，准线方程为 $x=-1$. 因为 $PA\perp l$，所以$|PA|=|PF|$. 又因为直线 AF 的倾斜角为 $120°$，所以$\angle AFO=60°$，所以$\angle PAF=60°$，所以$\triangle PAF$ 为等边三角形，所以$|PF|=|AF|=\dfrac{1-(-1)}{\cos\angle AFO}=4$.

(3)由$\triangle FPM$ 为等边三角形，得$|PM|=|PF|$，由抛物线的定义得 PM 垂直于抛物线的准线，设 $P\left(m,\dfrac{m^2}{2p}\right)$，则点 $M\left(m,-\dfrac{p}{2}\right)$，因为焦点 $F\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$，$\triangle FPM$ 是等边三角形，

所以$\begin{cases}\dfrac{m^2}{2p}+\dfrac{p}{2}=4,\\ \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}+\dfrac{p}{2}\right)^2+m^2}=4,\end{cases}$

解得$\begin{cases}m^2=12,\\ p=2,\end{cases}$ 因此抛物线方程为 $x^2=4y$.]

考点三

典例4　(1)3　(2)$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$　[(1)结合图形(图略)分析可知，满足题意的直线共有3条：直线 $x=0$，过点$(0,1)$且平行于 x 轴的直线以及过点$(0,1)$且与抛物线相切的直线(非直线 $x=0$).

(2)当 $k=0$ 时，显然成立.

当 $k\neq0$ 时，设两对称点为 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，BC 的中点为 $M(x_0,y_0)$，由 $y_1^2=2x_1$，$y_2^2=2x_2$，两式相减得$(y_1+y_2)\cdot(y_1-y_2)=2(x_1-x_2)$，则直线 BC 的斜率 $k_{BC}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{2}{y_1+y_2}=\dfrac{2}{2y_0}=\dfrac{1}{y_0}$，由对称性知 $k_{BC}=-\dfrac{1}{k}$，点 M 在直线 $y=k(x-2)$上，所以 $y_0=-k$，$y_0=k(x_0-2)$，所以 $x_0=1$. 由点 M 在抛物线内，得 $y_0^2<2x_0$，即$(-k)^2<2$，所以$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$，且 $k\neq0$.

综上，k 的取值范围为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.]

(3)**解**：设直线 l：$y=\dfrac{3}{2}x+t$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

①由题设得 $F\left(\dfrac{3}{4},0\right)$，故$|AF|+|BF|=x_1+x_2+\dfrac{3}{2}=4$，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{5}{2}$.

由$\begin{cases}y=\dfrac{3}{2}x+t,\\ y^2=3x,\end{cases}$ 可得 $9x^2+12(t-1)x+4t^2=0$，

则 $x_1+x_2=-\dfrac{12(t-1)}{9}$.

从而由$-\dfrac{12(t-1)}{9}=\dfrac{5}{2}$，得 $t=-\dfrac{7}{8}$.

所以 l 的方程为 $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{7}{8}$.

②由$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$得 $y_1=-3y_2$.

由$\begin{cases}y=\dfrac{3}{2}x+t,\\ y^2=3x,\end{cases}$ 得 $y^2-2y+2t=0$.

所以 $y_1+y_2=2$.

从而$-3y_2+y_2=2$，故 $y_2=-1$，$y_1=3$.

代入 C 的方程得 $x_1=3$，$x_2=\dfrac{1}{3}$.

故$|AB|=\dfrac{4\sqrt{13}}{3}$.

跟进训练

3.(1)**B**　(2)**BCD**　[(1)由题设，$x=\dfrac{y}{2}+2$，代入抛物线可得 $y^2-py-4p=0$，

所以 $y_A+y_B=p$，$y_Ay_B=-4p$，则$|AB|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\times\sqrt{p^2+16p}=3\sqrt{5}$，

则 $p^2+16p-36=0$，可得 $p=-18$(舍)或 $p=2$，故 $x_A+x_B=\dfrac{y_A+y_B}{2}+4=5$，

由抛物线定义知：$|AF|+|BF|=x_A+x_B+p=7$. 故选 B.

(2)将点 A 的坐标代入抛物线方程得 $1=2p$，所以抛物线方程为 $x^2=y$，故准线方程为 $y=-\frac{1}{4}$，A 错误；

$k_{AB}=\frac{1-(-1)}{1-0}=2$，所以直线 AB 的方程为 $y=2x-1$，

联立 $\begin{cases}y=2x-1,\\x^2=y,\end{cases}$ 可得 $x^2-2x+1=0$，解得 $x=1$，即直线 AB 与 C 相切于点 A，故 B 正确；

设过 B 的直线为 l，若直线 l 与 y 轴重合，则直线 l 与抛物线 C 只有一个交点，

所以直线 l 的斜率存在，设其方程为 $y=kx-1$，点 $P(x_1,y_1)$，点 $Q(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}y=kx-1,\\x^2=y,\end{cases}$ 得 $x^2-kx+1=0$，

所以 $\begin{cases}\Delta=k^2-4>0,\\x_1+x_2=k,\\x_1x_2=1,\end{cases}$

所以 $k>2$ 或 $k<-2$，$y_1y_2=(x_1x_2)^2=1$，

又 $|OP|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{y_1+y_1^2}$，$|OQ|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\sqrt{y_2+y_2^2}$，所以 $|OP|\cdot|OQ|=\sqrt{y_1y_2(1+y_1)(1+y_2)}=\sqrt{kx_1\cdot kx_2}=|k|>2=|OA|^2$，故 C 正确；

因为 $|BP|=\sqrt{1+k^2}|x_1|$，$|BQ|=\sqrt{1+k^2}|x_2|$，

所以 $|BP|\cdot|BQ|=(1+k^2)|x_1x_2|=1+k^2>5$，而 $|BA|^2=5$，故 D 正确.

故选 BCD.]

(3)**解**：①设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $x_1\neq x_2$，$y_1=\frac{x_1^2}{4}$，$y_2=\frac{x_2^2}{4}$，$x_1+x_2=4$，

于是直线 AB 的斜率 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{4}=1$.

②由 $y=\frac{x^2}{4}$，得 $y'=\frac{x}{2}$.

设 $M(x_3,y_3)$，由题设知 $\frac{x_3}{2}=1$，解得 $x_3=2$，于是 $M(2,1)$.

设直线 AB 的方程为 $y=x+m$，

故线段 AB 的中点为 $N(2,2+m)$，$|MN|=|m+1|$.

将 $y=x+m$ 代入 $y=\frac{x^2}{4}$ 得 $x^2-4x-4m=0$.

当 $\Delta=16(m+1)>0$，即 $m>-1$ 时，$x_{1,2}=2\pm2\sqrt{m+1}$.

从而 $|AB|=\sqrt{2}|x_1-x_2|=4\sqrt{2(m+1)}$.

由题设知 $|AB|=2|MN|$，即 $4\sqrt{2(m+1)}=2(m+1)$，

解得 $m=7$（$m=-1$ 舍去）.

所以直线 AB 的方程为 $y=x+7$.

拓展视野 4

典例 1　BCD　[由 $\begin{cases}x^2=8y,\\y=x+2,\end{cases}$ 消 y 可得 $x^2-8x-16=0$.

令 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=8$，$x_1x_2=-16$，

$\because y=\frac{x^2}{8}$，$\therefore y'=\frac{x}{4}$，$k_{PA}=\frac{x_1}{4}$，

$\therefore$ 直线 PA：$y=\frac{x_1}{4}(x-x_1)+\frac{x_1^2}{8}=\frac{x_1}{4}x-\frac{x_1^2}{8}$，直线 PB：$y=\frac{x_2}{4}x-\frac{x_2^2}{8}$，

联立 $\begin{cases}y=\frac{x_1}{4}x-\frac{x_1^2}{8},\\y=\frac{x_2}{4}x-\frac{x_2^2}{8},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=\frac{x_1+x_2}{2}=4,\\y=\frac{x_1x_2}{8}=-2,\end{cases}$ 即 $P(4,-2)$，故 A 错误；

$x_C=\frac{x_1+x_2}{2}=4$，$\therefore PC\perp x$ 轴，故 B 正确；

$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{x_1x_2}{16}=-1$，$\therefore PA\perp PB$，故 C 正确；$k_{PF}=\frac{-2-2}{4-0}=-1$，$k_{AB}=1$，$k_{PF}\cdot k_{AB}=-1$，$\therefore PF\perp AB$，故 D 正确. 故选 BCD.]

典例 2　解：(1)由题意知 $M(0,-4)$，$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$，圆 M 的半径 $r=1$，所以 $|MF|-r=4$，即 $\frac{p}{2}+4-1=4$，解得 $p=2$.

(2)由(1)知，抛物线方程为 $x^2=4y$，

由题意可知直线 AB 的斜率存在，设 $A\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right)$，$B\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right)$，直线 AB 的方程为 $y=kx+b$，

联立得 $\begin{cases}y=kx+b\\x^2=4y\end{cases}$，消去 y 得 $x^2-4kx-4b=0$，

则 $\Delta=16k^2+16b>0$，　　　（※）

$x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4b$，所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{k^2+b}$.

因为 $x^2=4y$，即 $y=\frac{x^2}{4}$，所以 $y'=\frac{x}{2}$，则抛物线在点 A 处的切线斜率为 $\frac{x_1}{2}$，在点 A 处的切线方程为 $y-\frac{x_1^2}{4}=\frac{x_1}{2}(x-x_1)$，即 $y=\frac{x_1}{2}x-\frac{x_1^2}{4}$，

同理得抛物线在点 B 处的切线方程为 $y=\frac{x_2}{2}x-\frac{x_2^2}{4}$，

联立得 $\begin{cases}y=\frac{x_1}{2}x-\frac{x_1^2}{4},\\y=\frac{x_2}{2}x-\frac{x_2^2}{4},\end{cases}$ 则 $\begin{cases}x=\frac{x_1+x_2}{2}=2k,\\y=\frac{x_1x_2}{4}=-b,\end{cases}$ 即 $P(2k,-b)$.

因为点 P 在圆 M 上，所以 $4k^2+(4-b)^2=1$，　　　①

且 $-1\leqslant2k\leqslant1$，$-5\leqslant-b\leqslant-3$，即 $-\frac{1}{2}\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}$，$3\leqslant b\leqslant5$，满足（※）.

设点 P 到直线 AB 的距离为 d，则 $d=\frac{|2k^2+2b|}{\sqrt{1+k^2}}$，

所以 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=4\sqrt{(k^2+b)^3}$.

由①得，$k^2=\frac{1-(4-b)^2}{4}=\frac{-b^2+8b-15}{4}$，

令 $t=k^2+b$，则 $t=\dfrac{-b^2+12b-15}{4}$，且 $3\leqslant b\leqslant 5$.

因为 $t=\dfrac{-b^2+12b-15}{4}$ 在 $[3,5]$ 上单调递增，所以当 $b=5$ 时，t 取得最大值，$t_{\max}=5$，此时 $k=0$，所以△PAB 面积的最大值为 $20\sqrt{5}$.

第9课时　圆锥曲线中的定点、定值、定直线问题

考点一

跟进训练

1.(1)**解**：因为四点 $M_1\left(4,\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$，$M_2(3,\sqrt{2})$，$M_3\left(-2,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$M_4\left(2,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 中恰有三点在 C 上，而点 $M_3\left(-2,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$M_4\left(2,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 关于原点对称，$\dfrac{\sqrt{2}}{3}<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以点 M_2，M_3，M_4 在曲线上，

代入可得 $\begin{cases}\dfrac{3^2}{a^2}-\dfrac{(\sqrt{2})^2}{b^2}=1,\\ \dfrac{2^2}{a^2}-\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{b^2}=1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a^2=3,\\ b^2=1,\end{cases}$ 所以 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$.

(2)**证明**：当直线 l 的斜率不存在时，得 $P(3,\sqrt{2})$，$Q(3,-\sqrt{2})$，$A(1,\sqrt{2})$，

则直线 AQ 方程为 $y=-\sqrt{2}x+2\sqrt{2}$，过点 $T(2,0)$；

当直线 l 的斜率存在时，设 l 的方程为 $y=k(x-3)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $A(1,y_1)$，联立 $\begin{cases}y=k(x-3),\\ x^2-3y^2=3,\end{cases}$

整理得 $(1-3k^2)x^2+18k^2x-27k^2-3=0$，

$1-3k^2\neq 0$，$x_1+x_2=-\dfrac{18k^2}{1-3k^2}$，$x_1x_2=-\dfrac{27k^2+3}{1-3k^2}$，

则 $k_{QT}=\dfrac{y_2}{x_2-2}$，$k_{AT}=-y_1$，

所以 $k_{QT}-k_{AT}=\dfrac{y_2}{x_2-2}-(-y_1)=\dfrac{y_2+x_2y_1-2y_1}{x_2-2}$，

又 $y_2+x_2y_1-2y_1=k(x_2-3)+k(x_2-2)\cdot(x_1-3)=k[x_1x_2-2(x_1+x_2)+3]$

$=k\left(-\dfrac{27k^2+3}{1-3k^2}+\dfrac{36k^2}{1-3k^2}+3\right)=0$，

所以 $k_{QT}=k_{AT}$，即直线 AQ 过点 $T(2,0)$.

综上，直线 AQ 过定点 $(2,0)$.

考点二

典例2　(1)**证明**：∵k_1，k_2 均存在，∴$x_1x_2\neq 0$.

又 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$，∴$\dfrac{x_1x_2}{4}+y_1y_2=0$，即 $\dfrac{x_1x_2}{4}=-y_1y_2$，

∴$k_1\cdot k_2=\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=-\dfrac{1}{4}$.

(2)**解**：①当直线 PQ 的斜率不存在，即 $x_1=x_2$，$y_1=-y_2$ 时，由 $\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=-\dfrac{1}{4}$，得 $\dfrac{x_1^2}{4}-y_1^2=0$.

又∵点 $P(x_1,y_1)$ 在椭圆上，∴$\dfrac{x_1^2}{4}+y_1^2=1$，

∴$|x_1|=\sqrt{2}$，$|y_1|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

∴$S_{\triangle OPQ}=\dfrac{1}{2}|x_1||y_1-y_2|=1$.

②当直线 PQ 的斜率存在时，设直线 PQ 的方程为 $y=kx+b$.

联立得方程组 $\begin{cases}y=kx+b,\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$

消去 y 并整理得 $(4k^2+1)x^2+8kbx+4b^2-4=0$，

$\Delta=(8kb)^2-4(4k^2+1)(4b^2-4)$

$=16(1+4k^2-b^2)>0$，即 $b^2<1+4k^2$.

∴$x_1+x_2=\dfrac{-8kb}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{4b^2-4}{4k^2+1}$.

∵$\dfrac{x_1x_2}{4}+y_1y_2=0$，∴$\dfrac{x_1x_2}{4}+(kx_1+b)(kx_2+b)=0$，

得 $2b^2-4k^2=1$(满足 $\Delta>0$).

∴$S_{\triangle POQ}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{|b|}{\sqrt{1+k^2}}\cdot|PQ|$

$=\dfrac{1}{2}|b|\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=2|b|\dfrac{\sqrt{4k^2+1-b^2}}{4k^2+1}=1$.

综合①②知△OPQ 的面积 S 为定值1.

跟进训练

2.(1)**解**：设 $Q(4,y_0)$，由 $|QF|=\dfrac{5}{4}|RQ|$，得 $y_0+\dfrac{p}{2}=\dfrac{5}{4}y_0$，即 $y_0=2p$. 将点 $(4,2p)$ 代入抛物线方程，可得 $p=2$. ∴抛物线 E：$x^2=4y$，圆 M 的方程为 $x^2+y^2-2y=0$.

(2)**证明**：抛物线 E：$x^2=4y$ 的焦点 $F(0,1)$，由题可知直线 l 斜率存在，所以设直线 l 的方程为 $y=kx+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

联立 $\begin{cases}x^2=4y,\\ y=kx+1,\end{cases}$ 得 $x^2-4kx-4=0$. 则 $\Delta=16(k^2+1)>0$，且 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4$.

由圆的方程可得圆 M 的圆心坐标为 $M(0,1)$，半径为1，圆心就是焦点. 由抛物线的定义可知 $|AF|=y_1+1$，$|BF|=y_2+1$.

则 $|AC|=|AF|-1=y_1$，$|BD|=|BF|-1=y_2$，$|AC|\cdot|BD|=y_1y_2=(kx_1+1)(kx_2+1)=k^2x_1x_2+k(x_1+x_2)+1=-4k^2+4k^2+1=1$. 即 $|AC|\cdot|DB|$ 是定值1.

考点三

典例3　(1)**解**：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

因为 $F\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$，所以过 F 且斜率为1的直线方程为 $y=x+\dfrac{p}{2}$.

由$\begin{cases}y=x+\dfrac{p}{2},\\x^2=2py,\end{cases}$消去 y 并整理,得 $x^2-2px-p^2=0$,

易知 $\Delta>0$.

则 $x_1+x_2=2p$,$y_1+y_2=x_1+x_2+p=3p$,

所以 $|AB|=y_1+y_2+p=4p=8$,解得 $p=2$.

于是抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$.

(2)**证明**:易知直线 l 的斜率存在,设 l 的方程为 $y=k(x-1)+2$,$Q(x_0,y_0)$,$M\left(x_3,\dfrac{1}{4}x_3^2\right)$,$N\left(x_4,\dfrac{1}{4}x_4^2\right)$.

由$\begin{cases}y=k(x-1)+2,\\x^2=4y,\end{cases}$消去 y 并整理,得 $x^2-4kx+4k-8=0$.

则 $\Delta=(-4k)^2-4(4k-8)=16(k^2-k+2)>0$,$x_3+x_4=4k$,$x_3x_4=4k-8$,

所以 $x_0=\dfrac{x_3+x_4}{2}=2k$,$y_0=k(x_0-1)+2=2k^2-k+2$,

即 $Q(2k,2k^2-k+2)$.

由点 R 在抛物线 C 上,$QR\perp x$ 轴,且$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{RT}$,

得 $R(2k,k^2)$,R 为 QT 的中点,

所以 $T(2k,k-2)$.

因为 $2k-2(k-2)-4=0$,

所以动点 T 在定直线 $x-2y-4=0$ 上.

跟进训练

3.(1)**解**:由题意得$\begin{cases}c^2=2,\\\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1,\\c^2=a^2-b^2,\end{cases}$解得 $a^2=4$,$b^2=2$.

所求椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

(2)**证明**:设点 $Q(x,y)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由题设,$|\overrightarrow{PA}|$,$|\overrightarrow{PB}|$,$|\overrightarrow{AQ}|$,$|\overrightarrow{QB}|$ 均不为 0,且 $|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{AQ}|\cdot|\overrightarrow{PB}|$,又 P,A,Q,B 四点共线,可设$\overrightarrow{PA}=-\lambda\overrightarrow{AQ}$,$\overrightarrow{PB}=\lambda\overrightarrow{BQ}(\lambda\neq0,\pm1)$,于是

$x_1=\dfrac{4-\lambda x}{1-\lambda}$,$y_1=\dfrac{1-\lambda y}{1-\lambda}$, ①

$x_2=\dfrac{4+\lambda x}{1+\lambda}$,$y_2=\dfrac{1+\lambda y}{1+\lambda}$, ②

由于 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$在椭圆上,将①②分别带入 C 的方程$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$,整理得:

$(x^2+2y^2-4)\lambda^2-4(2x+y-2)\lambda+14=0$, ③

$(x^2+2y^2-4)\lambda^2+4(2x+y-2)\lambda+14=0$, ④

由④-③得 $8(2x+y-2)\lambda=0$.

$\because\lambda\neq0$,$\therefore 2x+y-2=0$.

即点 $Q(x,y)$总在直线 $2x+y-2=0$ 上.

拓展视野 5

典例 (1)**解**:由已知得 $F(1,0)$,l 的方程为 $x=1$.

由已知可得,点 A 的坐标为$\left(1,\dfrac{\sqrt2}{2}\right)$或$\left(1,-\dfrac{\sqrt2}{2}\right)$.

所以 AM 的方程为 $y=-\dfrac{\sqrt2}{2}x+\sqrt2$ 或 $y=\dfrac{\sqrt2}{2}x-\sqrt2$.

(2)**证明**:当 l 与 x 轴重合时,$\angle OMA=\angle OMB=0°$.

当 l 与 x 轴垂直时,OM 为 AB 的垂直平分线,所以$\angle OMA=\angle OMB$.

当 l 与 x 轴不重合也不垂直时,设 l 的方程为 $y=k(x-1)(k\neq0)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1<\sqrt2$,$x_2<\sqrt2$,直线 MA,MB 的斜率之和为 $k_{MA}+k_{MB}=\dfrac{y_1}{x_1-2}+\dfrac{y_2}{x_2-2}$.

由 $y_1=kx_1-k$,$y_2=kx_2-k$ 得

$k_{MA}+k_{MB}=\dfrac{2kx_1x_2-3k(x_1+x_2)+4k}{(x_1-2)(x_2-2)}$.

将 $y=k(x-1)$代入$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 得

$(2k^2+1)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$,

所以 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{2k^2+1}$,$x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{2k^2+1}$.

则 $2kx_1x_2-3k(x_1+x_2)+4k$

$=\dfrac{4k^3-4k-12k^3+8k^3+4k}{2k^2+1}=0$.

从而 $k_{MA}+k_{MB}=0$,故 MA,MB 的倾斜角互补.所以$\angle OMA=\angle OMB$.

综上,$\angle OMA=\angle OMB$.

第 10 课时　圆锥曲线中的范围、最值问题

考点一

典例 1 **解**:(1)$\because F(-c,0)$,$A(a,0)$,双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$,以 PF 为直径的圆过点 A,$\therefore PA\perp AF$.不妨取点 P 在 $y=\dfrac{b}{a}x$ 上,设点 $P\left(t,\dfrac{b}{a}t\right)$,$\overrightarrow{AP}=\left(t-a,\dfrac{bt}{a}\right)$,$\overrightarrow{FA}=(a+c,0)$,

$\because PA\perp AF$,则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{FA}=(t-a)(a+c)=0$,可得 $t=a$,则点 $P(a,b)$,

$\because|PO|=2$,则 $a^2+b^2=4$,$\because a=1$,则 $b^2=3$,

$\therefore$双曲线 C 的标准方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2)由题意可知 $B(0,\sqrt3)$,设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,线段 MN 中点$Q(x_0,y_0)$,

联立$\begin{cases}y=kx+m,\\x^2-\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$

消去 y 得$(3-k^2)x^2-2kmx-m^2-3=0$,

依题意$\begin{cases}3-k^2\neq0,\\\Delta=(-2km)^2-4(3-k^2)(-m^2-3)>0,\end{cases}$

即$\begin{cases}3-k^2\neq0,\\3+m^2-k^2>0,\end{cases}$ ①

由根与系数的关系可得 $x_1+x_2=\dfrac{2km}{3-k^2}$,$x_1x_2=-\dfrac{m^2+3}{3-k^2}$,

则 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{km}{3-k^2}$,$y_0=kx_0+m=\dfrac{3m}{3-k^2}$,

$\because|BM|=|BN|$,$\therefore BQ\perp MN$,

$\therefore k_{BQ}=\dfrac{y_0-\sqrt3}{x_0}=\dfrac{\dfrac{3m}{3-k^2}-\sqrt3}{\dfrac{km}{3-k^2}}=-\dfrac{1}{k}$,

$\therefore 3-k^2=\frac{4\sqrt{3}}{3}m$, ②

又 $k^2=3-\frac{4\sqrt{3}}{3}m>0$, ③

由①②③得 $m<-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 或 $0<m<\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

跟进训练

1. **解**:显然直线 $x=0$ 不满足题设条件,故可设直线 l:$y=kx+2$,$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=kx+2,\end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2+16kx+12=0$.

$\because \Delta=(16k)^2-4\times 12(1+4k^2)>0$,

$\therefore k\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$,

$\therefore x_1+x_2=\frac{-16k}{1+4k^2}$,$x_1x_2=\frac{12}{1+4k^2}$,

根据题意,得 $0°<\angle POQ<90°$,即 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}>0$,

$\therefore \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+2)(kx_2+2)=(1+k^2)x_1x_2+2k(x_1+x_2)+4=\frac{12(1+k^2)}{1+4k^2}+2k\cdot\left(\frac{-16k}{1+4k^2}\right)+4=\frac{16-4k^2}{1+4k^2}>0$,解得 $-2<k<2$.

综上得 $k\in\left(-2,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{2},2\right)$.

考点二

考向1　典例2　解:(1)$\because$ 直线 l:$x-y+1=0$ 与抛物线 C:$y^2=2px(p>0)$ 相切,联立 $\begin{cases}x-y+1=0,\\ y^2=2px,\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-2py+2p=0$,从而 $\Delta=4p^2-8p=0$,解得 $p=2$ 或 $p=0$(舍).

$\therefore$ 抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.

(2)由于直线 m 的斜率不为 0,

可设直线 m 的方程为 $ty=x-1$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

联立 $\begin{cases}ty=x-1,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-4ty-4=0$,$\because\Delta>0$,

$\therefore y_1+y_2=4t$,则 $x_1+x_2=4t^2+2$,

$\therefore$ 线段 AB 的中点 M 的坐标为 $(2t^2+1,2t)$.

设点 A 到直线 l 的距离为 d_A,点 B 到直线 l 的距离为 d_B,点 M 到直线 l 的距离为 d,

则 $d_A+d_B=2d=2\cdot\frac{|2t^2-2t+2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\,|t^2-t+1|=2\sqrt{2}\left|\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right|$,$\therefore$ 当 $t=\frac{1}{2}$ 时,A,B 两点到直线 l 的距离之和最小,最小值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

考向2　典例3　解:(1)设 $F(c,0)$,由条件知,$\frac{2}{c}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,得 $c=\sqrt{3}$.

又 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $a=2$,$b^2=a^2-c^2=1$.

故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)当 $l\perp x$ 轴时不合题意,

故设 l:$y=kx-2$,$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$.

将 $y=kx-2$ 代入 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$,

得 $(1+4k^2)x^2-16kx+12=0$.

当 $\Delta=16(4k^2-3)>0$,

即 $k^2>\frac{3}{4}$ 时,$x_{1,2}=\frac{8k\pm 2\sqrt{4k^2-3}}{4k^2+1}$.

从而 $|PQ|=\sqrt{k^2+1}\,|x_1-x_2|$

$=\frac{4\sqrt{k^2+1}\sqrt{4k^2-3}}{4k^2+1}$.

又点 O 到直线 PQ 的距离 $d=\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}$.

所以 $\triangle OPQ$ 的面积 $S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}\cdot d\cdot|PQ|=\frac{4\sqrt{4k^2-3}}{4k^2+1}$.

设 $\sqrt{4k^2-3}=t$,

则 $t>0$,$S_{\triangle OPQ}=\frac{4t}{t^2+4}=\frac{4}{t+\frac{4}{t}}\leqslant 1$.

当且仅当 $t=2$,即 $k=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$ 时等号成立,且满足 $\Delta>0$.

所以当 $\triangle OPQ$ 的面积最大时,l 的方程为 $2y\pm\sqrt{7}x+4=0$.

考向3　典例4　解:(1)因为椭圆 C 的左顶点 $A(-a,0)$,则直线 AM 的斜率为 $\frac{3}{2+a}=\frac{1}{2}$, ①

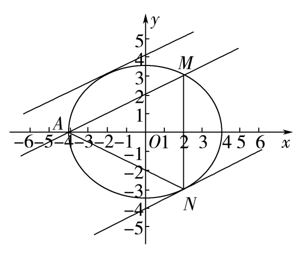
点 M 在椭圆 C 上,则 $\frac{4}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1$, ②

联立①②,解得 $a=4$,$b^2=12$,

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

(2)设与直线 AM 平行的直线的方程为 $x-2y=m(m\neq -4)$,

如图所示,当直线与椭圆相切时,与 AM 距离较远的直线与椭圆的切点为 N,此时 $\triangle AMN$ 的面积取得最大值.



联立直线方程 $x-2y=m$ 与椭圆方程 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$,可得 $16y^2+12my+3m^2-48=0$,

所以 $\Delta=144m^2-4\times 16(3m^2-48)=0$,

即 $m^2=64$,解得 $m=\pm 8$,

与 AM 距离较远的直线方程为 $x-2y=8$,

又直线 AM 的方程为 $x-2y=-4$,

所以点 N 到直线 AM 的距离即两平行直线之间的距离,

利用平行线之间的距离公式可得 $d=\frac{8+4}{\sqrt{1+4}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$,

由两点间的距离公式可得$|AM|=\sqrt{(2+4)^2+3^2}=3\sqrt{5}$.

所以$\triangle AMN$的面积的最大值为$\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times\frac{12\sqrt{5}}{5}=18$.

跟进训练

2.**解**:(1)设$M(x_0,y_0)$是椭圆上一点,

$\therefore|PM|=\sqrt{x_0^2+(y_0-1)^2}$

$=\sqrt{12-12y_0^2+y_0^2-2y_0+1}$

$=\sqrt{-11y_0^2-2y_0+13}\leqslant\sqrt{\frac{144}{11}}=\frac{12\sqrt{11}}{11}$.

(2)设直线AB方程为$y=kx+\frac{1}{2}$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$P(0,1)$,联立$\begin{cases}y=kx+\frac{1}{2},\\x^2+12y^2=12\end{cases}$消去$y$,整理得$(1+12k^2)x^2+12kx-9=0$,$\Delta=144k^2+36(1+12k^2)=36(1+16k^2)>0$,

$\therefore x_1+x_2=-\frac{12k}{1+12k^2}$,$x_1x_2=-\frac{9}{1+12k^2}$,

直线PA的方程为$y=\frac{y_1-1}{x_1}x+1$,联立$\begin{cases}y=\frac{y_1-1}{x_1}x+1,\\y=-\frac{1}{2}x+3\end{cases}$整理得$x_C=\frac{4x_1}{x_1+2y_1-2}=\frac{4x_1}{x_1+2kx_1-1}$,

同理$x_D=\frac{4x_2}{x_2+2kx_2-1}$,

$\therefore|CD|=\sqrt{1+\frac{1}{4}}\cdot\left|\frac{4x_1}{(1+2k)x_1-1}-\frac{4x_2}{(1+2k)x_2-1}\right|$

$=\frac{\sqrt{5}}{2}\left|\frac{4(x_2-x_1)}{(1+2k)^2x_1x_2-(1+2k)(x_1+x_2)+1}\right|$

$=\frac{\sqrt{5}}{2}\left|\frac{4\cdot\frac{6\sqrt{1+16k^2}}{1+12k^2}}{(1+2k)^2\cdot\frac{-9}{1+12k^2}-(1+2k)\cdot\frac{-12k}{1+12k^2}+1}\right|$

$=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{24\sqrt{1+16k^2}}{|24k+8|}=\frac{\frac{3\sqrt{5}}{2}\sqrt{1+16k^2}}{|3k+1|}$,令$3k+1=m(m\neq0)$,

$\therefore|CD|=\frac{3\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt{\frac{25}{9}\left(\frac{1}{m}-\frac{16}{25}\right)^2+\frac{16}{25}}$,

$\therefore$当$m=\frac{25}{16}$,即$k=\frac{3}{16}$时,$|CD|$的最小值为$\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

第11课时　圆锥曲线中的证明、探索性问题

考点一

考向1　典例1　(1)**解**:由题意得

$\begin{cases}c=1,\\\frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\a^2=b^2+c^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2,\\b=\sqrt{3},\end{cases}$椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)**证明**:由题意知直线l的斜率不为0,设直线l的方程为$x=my+1$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$M(x_0,y_0)$,$P(x_3,y_3)$.

由$\begin{cases}x=my+1,\\3x^2+4y^2=12,\end{cases}\Rightarrow3(m^2y^2+2my+1)+4y^2=12$,

即$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$.

$\Delta=144(m^2+1)>0$,$y_1+y_2=-\frac{6m}{3m^2+4}$,$y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$,

$\therefore y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-3m}{3m^2+4}$,$x_0=\frac{4}{3m^2+4}$,

$\therefore k_{OM}=-\frac{3}{4}m$.

直线l_1的方程为$\frac{x_1x}{4}+\frac{y_1y}{3}=1$,　①

直线l_2的方程为$\frac{x_2x}{4}+\frac{y_2y}{3}=1$,　②

②−①$\Rightarrow\frac{y}{3}(y_2-y_1)=\frac{x}{4}(x_1-x_2)$,

$\Rightarrow\frac{y}{x}=\frac{3}{4}\cdot\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}=-\frac{3}{4}m$,

$\therefore\frac{y_3}{x_3}=-\frac{3}{4}m=k_{OP}$,

$\therefore k_{OM}=k_{OP}$,即O,P,M三点共线.

考向2　典例2　(1)**解**:设Γ的标准方程为$x^2=2py$,$p>0$,则$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$.

已知点E在直线$y=\frac{1}{2}x$上,

故可设$E(2a,a)$.

因为E,F关于$M(-1,0)$对称,

所以$\begin{cases}\frac{2a+0}{2}=-1,\\\frac{\frac{p}{2}+a}{2}=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-1,\\p=2.\end{cases}$

所以抛物线Γ的标准方程为$x^2=4y$.

因为圆E与x轴相切,故半径$r=|a|=1$,

所以圆E的标准方程为$(x+2)^2+(y+1)^2=1$.

(2)**证明**:由题意知,直线l的斜率存在,设l的斜率为k,那么其方程为$y=k(x+1)(k\neq0)$.

则$E(-2,-1)$到l的距离$d=\frac{|k-1|}{\sqrt{k^2+1}}$,

因为l与E交于A,B两点,

所以$d^2<r^2$,即$\frac{(k-1)^2}{k^2+1}<1$,

解得$k>0$,

所以$|AB|=2\sqrt{1-d^2}=2\sqrt{\frac{2k}{k^2+1}}$.

由$\begin{cases}x^2=4y,\\y=k(x+1)\end{cases}$消去$y$并整理得,

$x^2-4kx-4k=0$.

$\Delta=16k^2+16k>0$恒成立,设$C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$,

则$x_1+x_2=4k$,$x_1x_2=-4k$,

那么$|CD|=\sqrt{k^2+1}|x_1-x_2|$

$=\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=4\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{k^2+k}$.

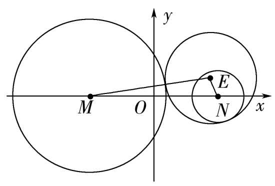
所以$\frac{|CD|^2}{|AB|^2}=\frac{16(k^2+1)(k^2+k)}{\frac{8k}{k^2+1}}$

$=\frac{2(k^2+1)^2(k^2+k)}{k}=\frac{2k(k^2+1)^2(k+1)}{k}>\frac{2k}{k}=2$.

所以$|CD|^2>2|AB|^2$,即$|CD|>\sqrt{2}|AB|$.

跟进训练

1.(1)**解**:如图,



设圆E的圆心$E(x,y)$,半径为r,

则$|EM|=r+\frac{3\sqrt{3}}{2}$,$|EN|=r-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以$|EM|-|EN|=2\sqrt{3}<|MN|$.

由双曲线定义可知,E的轨迹是以M,N为焦点,实轴长为$2\sqrt{3}$的双曲线右支,

所以曲线C的方程为$\frac{x^2}{3}-y^2=1,x\geqslant\sqrt{3}$.

(2)**证明**:设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,直线l的方程为$x=my+2$,

由于直线l与曲线C交于两点,故$-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$,

又$\begin{cases}\frac{x^2}{3}-y^2=1,x\geqslant\sqrt{3},\\x=my+2,\end{cases}$所以$(m^2-3)y^2+4my+1=0$,

故$\begin{cases}y_1+y_2=\frac{-4m}{m^2-3},\\y_1y_2=\frac{1}{m^2-3},\end{cases}$

又$x_1=my_1+2$,$x_2=my_2+2$,$y_1\neq0$,$y_2\neq0$,

$\therefore\frac{1}{k_{AP}}+\frac{1}{k_{BP}}=\frac{my_1+\frac{1}{2}}{y_1}+\frac{my_2+\frac{1}{2}}{y_2}=2m+\frac{1}{2}\cdot\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}=$

$2m+\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{-4m}{m^2-3}}{\frac{1}{m^2-3}}=0$,

即$k_{AP}+k_{BP}=0$,所以$\angle APN=\angle BPN$,得证.

考点二

典例3　**解**:(1)由抛物线C_2经过点$P(2,1)$,得$4=2p$,所以$p=2$,

故抛物线方程为$x^2=4y$.

抛物线C_2:$x^2=4y$的焦点为$F(0,1)$,所以$b=1$.

又椭圆C_1的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,解得$a=2$.

所以椭圆C_1的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)四边形$OCPD$不是平行四边形,理由如下:

将$y=kx+m$代入$x^2=4y$,消去y并整理得:

$x^2-4kx-4m=0$.

由题意知,$\Delta=16k^2+16m>0$,即$m>-k^2$.

设直线PA,PB的斜率分别为k_1,k_2.

因为直线PF平分$\angle APB$,所以$k_1+k_2=0$.

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$\frac{y_1-1}{x_1-2}+\frac{y_2-1}{x_2-2}=0$.

又$x_1^2=4y_1$,$x_2^2=4y_2$,

则$\frac{\frac{x_1^2}{4}-1}{x_1-2}+\frac{\frac{x_2^2}{4}-1}{x_2-2}=\frac{x_1+x_2+4}{4}=0$,

所以$x_1+x_2=-4$,

所以$k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{\frac{x_1^2}{4}-\frac{x_2^2}{4}}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{4}=-1$,

所以直线l:$y=-x+m$且$m>-1$.

由$\begin{cases}y=-x+m,\\\frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$消$y$并整理得$5x^2-8mx+4m^2-4=0$.

由题意知$\Delta=64m^2-4\times5\times(4m^2-4)$

$=16(5-m^2)>0$,

解得$-\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$,所以$-1<m<\sqrt{5}$.

设$C(x_3,y_3)$,$D(x_4,y_4)$,则$x_3+x_4=\frac{8m}{5}$,

$y_3+y_4=-(x_3+x_4)+2m=\frac{2m}{5}$.

若四边形$OCPD$为平行四边形,

则$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$,

即$(2,1)=(x_3+x_4,y_3+y_4)$.

所以$\begin{cases}\frac{8m}{5}=2,\\\frac{2m}{5}=1,\end{cases}$显然方程组无解.

所以四边形$OCPD$不是平行四边形.

跟进训练

2.**解**:(1)由题意得$a=2$.

因为双曲线C的渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{2}x$,

所以有$\frac{2b}{\sqrt{4+b^2}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$,解得$b=\sqrt{3}$.

因此,双曲线C的方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$.

(2)①当直线l的斜率存在时,设直线l的方程为$y=k(x-4)$,

由$\begin{cases}y=k(x-4),\\\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$可得,

$(3-4k^2)x^2+32k^2x-64k^2-12=0$,$k\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\Delta>0$.

设$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

则$x_1+x_2=\frac{-32k^2}{3-4k^2}$,$x_1x_2=\frac{-64k^2-12}{3-4k^2}$,

由直线 AM 方程 $y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$,

令 $x=4$,得点 $E\left(4,\frac{2y_1}{x_1-2}\right)$.

由直线 AN 方程 $y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$,

令 $x=4$,得点 $F\left(4,\frac{2y_2}{x_2-2}\right)$.

则以 EF 为直径的圆的方程为

$(x-4)(x-4)+\left(y-\frac{2y_1}{x_1-2}\right)\left(y-\frac{2y_2}{x_2-2}\right)=0$.

令 $y=0$,则 $(x-4)^2=-\frac{4y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}$.

将 $y_1=k(x_1-4)$,$y_2=k(x_2-4)$代入上式,

得$(x-4)^2=-\frac{4k^2[x_1x_2-4(x_1+x_2)+16]}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$,

可得$(x-4)^2=-\frac{4k^2\left[\frac{-64k^2-12}{3-4k^2}-4\cdot\frac{-32k^2}{3-4k^2}+16\right]}{\frac{-64k^2-12}{3-4k^2}-2\cdot\frac{-32k^2}{3-4k^2}+4}=9$,

解得 $x=1$ 或 $x=7$.

即以 EF 为直径的圆经过点$(1,0)$和$(7,0)$.

②当直线 l 的斜率不存在时,点 E,F 的坐标分别为$(4,3)$,$(4,-3)$,

以 EF 为直径的圆的方程为$(x-4)(x-4)+(y-3)(y+3)=0$,

该圆经过点$(7,0)$和$(1,0)$.

综合①②可得,以 EF 为直径的圆经过定点$(1,0)$和$(7,0)$.

第九章　计数原理、概率、随机变量及其分布

第1课时　两个计数原理、排列与组合

梳理·必备知识

1. $m+n$　$m\times n$

2. 一定的顺序

3. 不同排列　不同组合　$\frac{n!}{(n-m)!}$　$\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$　$n!$　1　1　1

激活·基本技能

一、(1)×　(2)√　(3)√　(4)√

二、1. **C**　[若线路为甲乙丁则有 $3\times2=6$(条),路线为甲丙丁则有 $3\times4=12$(条),故共有 $6+12=18$(条).故选 C.]

2. **A**　[当个位为 0 时,共有 $A_5^2=5\times4=20$(个);当个位不为 0 时,共有 $A_2^1A_4^1A_4^1=2\times4\times4=32$(个),所以综合可得,共有 $20+32=52$(个)偶数.故选 A.]

3. 16　[**法一**:可分两种情况:第一种情况,只有 1 名女生入选,不同的选法有 $C_2^1C_4^2=12$(种);第二种情况,有 2 名女生入选,不同的选法有 $C_2^2C_4^1=4$(种).根据分类加法计数原理知,至少有 1 名女生入选的不同的选法共有 $12+4=16$(种).

法二:从 6 人中任选 3 人,不同的选法共有 $C_6^3=20$(种),从 6 人中任选 3 人都是男生,不同的选法有 $C_4^3=4$(种),所以至少有 1 名女生入选的不同的选法共有 $20-4=16$(种).]

4. 4^5　5^4　[5 名学生参加 4 项体育比赛,每人限报一项,可逐个学生落实,每个学生有 4 种报名方法,共有 4^5 种不同的报名方法.5 名学生争夺 4 项比赛的冠军,可对 4 个冠军逐一落实,每个冠军有 5 种获得的可能性,共有 5^4 种获得冠军的可能情况.]

考点一

典例1　(1)**B**　(2)**A**　(3)180　[(1)由题意可知 $E\to F$ 的最短路径共有 6 种走法,$F\to G$的最短路径共有 3 种走法,由分步乘法计数原理知,最短路径条数为 $6\times3=18$.

(2)**法一**:若 $a_2=2$,则百位数字只能选 1,个位数字可选 1 或 0,凸数为 120 与 121,共 2 个.若 $a_2=3$,则百位数字有两种选择,个位数字有三种选择,则凸数有 $2\times3=6$(个).若 $a_2=4$,满足条件的凸数有 $3\times4=12$(个),…,若 $a_2=9$,满足条件的凸数有 $8\times9=72$(个).

所以所有凸数有 $2+6+12+20+30+42+56+72=240$(个).

法二:可以分两类.①若这个三位数含 0,则 0 必在末位,共有这样的凸数 C_9^2 个;②若这个三位数不含 0,则这样的凸数共有$(C_9^3A_2^2+C_9^2)$个.综上所述,所有凸数共有 $2C_9^2+C_9^3A_2^2=240$(个).

(3)B,E 涂色后,按 A,C 同色和不同色分类计算,所以总方法为 $5\times(4\times3+4\times3\times2)=180$(种).]

拓展变式

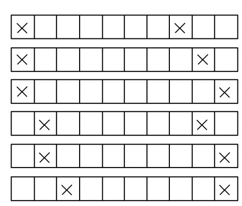
26　[先假设 CD 是通路,则从 E 到 G,向上 3 次,向右 4 次,最短路径有 $C_7^4=35$(条),其中经过 CD 的,即先从 E 到 C,然后 C 到 D,最后 D 到 G 的最短路径有 $3\times3=9$(条),所以当 CD 不通时,最短路径有 $35-9=26$(条).]

跟进训练

1. (1)20　(2)45　(3)1 536　1 530　12　[(1)当十位上的数为 0 时,有 $4\times3=12$(个)凹数;当十位上的数为 1 时,有 $3\times2=6$(个)凹数;当十位上的数为 2 时,有$2\times1=2$(个)凹数,所以凹数的个数为 $12+6+2=20$.

(2)$3\ 600=2^4\times3^2\times5^2$,其中 2^4 的约数有 $1,2,2^2,2^3,2^4$,共 5 个;3^2 的约数有 $1,3,3^2$,共 3 个,5^2 的约数有 $1,5,5^2$,共 3 个,所以3 600 的正约数有 $5\times3\times3=45$(个).

(3)3 种作物任选时,种植第 1 垄有 3 种选择,第 2 垄有 2 种选择,后面的垄只需与前一垄不同即可,共有 $3\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=1\ 536$(种)种植方法.3 种作物都选时,只需排除只用 2 种作物完成种植的情况,共有$1\ 536-3\times2\times1\times1\times1\times1\times1\times1\times1\times1=1\ 530$(种)种植方法.两种作物的间隔不小于 6 垄时,分两步:第一步,先选垄,如图所示,共有 6 种选法;第二步,种植 A,B 两种作物,有 2 种方法.所以根据分步乘法计数原理,可得有 $6\times2=12$(种)种植方法.]



考点二

典例 2　**解**：(1)从 7 人中选 5 人排列，有 $A_7^5=7\times6\times5\times4\times3=2\ 520$(种).

(2)分两步完成，先选 3 人站前排，有 A_7^3 种方法，余下 4 人站后排，有 A_4^4 种方法，共有 $A_7^3A_4^4=5\ 040$(种).

(3)(捆绑法)将女生看作一个整体与 3 名男生一起全排列，有 A_4^4 种方法，再将女生全排列，有 A_4^4 种方法，共有 $A_4^4A_4^4=576$(种).

(4)(插空法)先排女生，有 A_4^4 种方法，再在女生之间及首尾 5 个空位中任选 3 个空位安排男生，有 A_5^3 种方法，共有 $A_4^4A_5^3=1\ 440$(种).

(5)**法一**(特殊元素优先法)：先排甲，有 5 种方法，其余 6 人有 A_6^6 种排列方法，共有 $5\times A_6^6=3\ 600$(种).

法二(特殊位置优先法)：左右两边位置可安排另 6 人中的两人，有 A_6^2 种排法，其他位置有 A_5^5 种排法，共有 $A_6^2A_5^5=3\ 600$(种).

(6)(间接法)7 人全排列，有 A_7^7 种方法，其中甲在最左边时，有 A_6^6 种方法，乙在最右边时，有 A_6^6 种方法，其中都包含了甲在最左边且乙在最右边的情形，有 A_5^5 种方法，故共有 $A_7^7-2A_6^6+A_5^5=3\ 720$(种).

(7)由于甲、乙、丙的顺序一定，则满足条件的站法共有 $\dfrac{A_7^7}{A_3^3}=840$(种).

跟进训练

2.(1)**B**　(2)**D**　(3)8　[(1)因为乙和丙之间恰有 2 人，所以乙丙及中间 2 人占据首四位或尾四位.

①若乙丙及中间 2 人占据首四位，此时还剩末位，故甲在乙丙中间，

排乙丙有 A_2^2 种方法，排甲有 A_2^1 种方法，剩余两个位置两人全排列有 A_2^2 种排法，

所以有 $A_2^2\times A_2^1\times A_2^2=8$(种)方法；

②若乙丙及中间 2 人占据尾四位，此时还剩首位，故甲在乙丙中间，

排乙丙有 A_2^2 种方法，排甲有 A_2^1 种方法，剩余两个位置两人全排列有 A_2^2 种排法，

所以有 $A_2^2\times A_2^1\times A_2^2=8$(种)方法；

由分类加法计数原理可知，一共有 $8+8=16$(种)排法.

故选 B.

(2)由题意，末尾是 2 或 6，不同偶数的个数为 $C_2^1A_5^3=120$；末尾是 4，不同偶数的个数为 $A_5^5=120$，故共有 $120+120=240$(个).故选 D.

(3)先安排甲，其选座方法有 C_4^1 种，由于甲、乙不能相邻，所以乙只能坐甲对面，而丙、丁两位同学坐另两个位置的坐法有 A_2^2 种，所以共有坐法种数为 $C_4^1\cdot A_2^2=4\times2=8$.]

考点三

典例 3　**解**：(1)从余下的 34 种商品中，选取 2 种有 $C_{34}^2=561$(种)，所以某一种假货必须在内的不同取法有 561 种.

(2)从 34 种可选商品中，选取 3 种，有 $C_{34}^3=5\ 984$(种).

所以某一种假货不能在内的不同取法有5 984 种.

(3)从 20 种真货中选取 1 件，从 15 种假货中选取 2 件有 $C_{20}^1C_{15}^2=2\ 100$(种).

所以恰有 2 种假货在内的不同的取法有2 100 种.

(4)选取 2 种假货有 $C_{20}^1C_{15}^2$ 种，选取 3 种假货有 C_{15}^3 种，共有选取方式 $C_{20}^1C_{15}^2+C_{15}^3=2\ 100+455=2\ 555$(种).

所以至少有 2 种假货在内的不同的取法有 2 555 种.

(5)选取 3 种的总数为 C_{35}^3，选取 3 种假货有 C_{15}^3 种，因此共有选取方式 $C_{35}^3-C_{15}^3=6\ 545-455=6\ 090$(种).

所以至多有 2 种假货在内的不同的取法有 6 090 种.

跟进训练

3.(1)**B**　(2)**D**　(3)64　[(1)甲企业有 2 人，其余 5 家企业各有 1 人，共有 7 人，所以从 7 人中任选 3 人共有 C_7^3 种情况，发言的 3 人来自 2 家企业的情况有 $C_2^2C_5^1$ 种，所以发言的 3 人来自 3 家不同企业的可能情况共有 $C_7^3-C_2^2C_5^1=30$(种).故选 B.

(2)根据划左舷中"多面手"人数的多少进行分类：划左舷中没有"多面手"的选派方法有 $C_3^3C_6^3=20$(种)，有一个"多面手"的选派方法有 $C_2^1C_3^2C_5^3=60$(种)，有两个"多面手"的选派方法有 $C_3^1C_4^3=12$(种)，即共有 $20+60+12=92$(种)不同的选派方法.

(3)**法一**：由题意，可分三类：第一类，体育类选修课和艺术类选修课各选修 1 门，有 $C_4^1C_4^1$ 种方案；第二类，在体育类选修课中选修 1 门，在艺术类选修课中选修 2 门，有 $C_4^1C_4^2$ 种方案；第三类，在体育类选修课中选修 2 门，在艺术类选修课中选修 1 门，有 $C_4^2C_4^1$ 种方案.综上，不同的选课方案共有 $C_4^1C_4^1+C_4^1C_4^2+C_4^2C_4^1=64$(种).

法二：若学生从这 8 门课中选修 2 门课，则有 $C_8^2-C_4^2-C_4^2=16$(种)选课方案；若学生从这 8 门课中选修 3 门课，则有 $C_8^3-C_4^3-C_4^3=48$(种)选课方案.综上，不同的选课方案共有 $16+48=64$(种).]

考点四

考向 1　**典例 4**　90　[先把 6 个毕业生平均分成 3 组，有 $\dfrac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}$ 种方法，再将 3 组毕业生分到 3 所学校，有 $A_3^3=6$(种)方法，故 6 个毕业生平均分到 3 所学校，共有 $\dfrac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}\cdot A_3^3=90$(种)分派方法.]

考向 2　**典例 5**　1 560　[把 6 本不同的书分成 4 组，每组至少 1 本的分法有 2 种.

①有 1 组 3 本，其余 3 组每组 1 本，不同的分法共有 $\dfrac{C_6^3C_3^1C_2^1C_1^1}{A_3^3}=20$(种)；

②有 2 组每组 2 本，其余 2 组每组 1 本，不同的分法共有 $\dfrac{C_6^2C_4^2}{A_2^2}\cdot\dfrac{C_2^1C_1^1}{A_2^2}=45$(种).

所以不同的分组方法共有 $20+45=65$(种).

然后把分好的 4 组书分给 4 个人，所以不同的分法共有 $65\times A_4^4=1\ 560$(种).]

考向 3　典例 6　360　[将 6 名教师分组，分三步完成：

第 1 步，在 6 名教师中任取 1 名作为一组，有 C_6^1 种分法；

第 2 步，在余下的 5 名教师中任取 2 名作为一组，有 C_5^2 种分法；

第 3 步，余下的 3 名教师作为一组，有 C_3^3 种分法.

根据分步乘法计数原理，共有 $C_6^1C_5^2C_3^3=60$(种)分法.

再将这 3 组教师分配到 3 所中学，有 $A_3^3=6$(种)分法，

故共有 $60\times6=360$(种)不同的分法.]

考向 4　典例 7　B　[问题可转化为将 9 个完全相同的口罩排成一列，再分成 6 堆，每堆至少 1 个，求其方法数. 事实上，只需在上述 9 个完全相同的口罩所产生的 8 个"空当"中选出 5 个"空当"插入挡板，即产生符合要求的方法数. 故有 $C_8^5=56$(种).]

跟进训练

4. **C**　[1 个路口 3 人，其余路口各 1 人的分配方法有 $C_3^1C_2^2A_3^3$ 种. 1 个路口 1 人，2 个路口各 2 人的分配方法有 $C_3^1C_2^2A_3^3$ 种，由分类加法计数原理知，甲、乙在同一路口的分配方案为 $C_3^1C_2^2A_3^3+C_3^1C_2^2A_3^3=36$(种).]

5. (1)324　(2)432　[(1)要求每个地区至少有一名男性的对立事件是至少有一个地区全是女性的分配方案有 $C_2^1C_3^2\dfrac{C_4^2C_2^1}{A_2^2}A_3^3=6\times6\times6=216$(种)，

每个地区需要一名医生和两名教师的总分配方案有 $A_3^3C_6^2C_4^2C_2^2=6\times15\times6=540$(种)，

所以要求每个地区至少有一名男性的分配方案有 $540-216=324$(种).

(2)有一个地区全是男性的分配方案有

$C_1^1C_3^2\dfrac{C_4^2C_2^1}{A_2^2}A_3^3=3\times6\times6=108$(种)，

所以要求每个地区至少有一名女性的分配方案有 $540-108=432$(种).]

第 2 课时　二项式定理

梳理・必备知识

1. (1)$C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n$　(2)$k+1$

2. $C_n^k=C_n^{n-k}$　递增　递减　$C_n^{\frac{n}{2}}$　$C_n^{\frac{n-1}{2}}$　$C_n^{\frac{n+1}{2}}$

3. (1)2^n　(2)2^{n-1}

激活・基本技能

一、(1)×　(2)×　(3)√　(4)√

二、1. **A**　[$(1-2x)^4$ 展开式中第 3 项的二项式系数为 $C_4^2=6$. 故选 A.]

2. **B**　[$\left(2x-\dfrac{1}{\sqrt[3]{4x}}\right)^6$ 的展开式的中间一项为 $C_6^3(2x)^3\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{4x}}\right)^3=-40x^2$. 故选 B.]

3. **C**　[由题意可得，二项式的展开式满足 $T_{k+1}=C_n^kx^k$，且有 $C_n^3=C_n^7$，因此 $n=10$. 故二项式系数最大的项为 $C_{10}^5x^5=252x^5$. 故选 C.]

4. -15　[$(x+1)^5(x-2)=x(x+1)^5-2(x+1)^5$ 展开式中含有 x^2 的项为 $5x^2-20x^2=-15x^2$. 故 x^2 的系数为 -15.]

考点一

考向 1　典例 1　(1)66　(2)$16\sqrt{2}$　5

[(1)展开式的通项为 $T_{k+1}=C_{12}^k(x^3)^{12-k}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^k=C_{12}^kx^{36-4k}$，由 $36-4k=-4$，得 $4k=40$，得 $k=10$，即 $T_{11}=C_{12}^{10}x^{-4}=\dfrac{66}{x^4}$，即含 $\dfrac{1}{x^4}$ 项的系数为 66.

(2)由题意，$(\sqrt{2}+x)^9$ 的二项展开式的通项为 $T_{k+1}=C_9^k(\sqrt{2})^{9-k}x^k(k=0,1,2,\cdots,9)$，当 $k=0$ 时，可得常数项为 $T_1=C_9^0(\sqrt{2})^9=16\sqrt{2}$；若展开式的系数为有理数，则 $k=1,3,5,7,9$，有 T_2,T_4,T_6,T_8,T_{10} 共 5 个项.]

考向 2　典例 2　(1)**D**　(2)-28　[(1)$(x+1)(x+2)(x+3)\cdot(x+4)$展开式的 x^3 项是 4 个因式中任取 3 个提供 x，另一个因式提供常数项相乘所得积的和，则$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$展开式中的 x^3 项为 $x^3\cdot4+x^3\cdot3+x^3\cdot2+x^3\cdot1=10x^3$，

所以含 x^3 项的系数为 10. 故选 D.

(2)因为$\left(1-\dfrac{y}{x}\right)(x+y)^8=(x+y)^8-\dfrac{y}{x}(x+y)^8$，

所以$\left(1-\dfrac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中含 x^2y^6 的项为 $C_8^6x^2y^6-\dfrac{y}{x}C_8^5x^3y^5=-28x^2y^6$，

所以$\left(1-\dfrac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为 -28.]

考向 3　典例 3　-120　[$\left(x^2-\dfrac{2}{x}+y\right)^6$ 表示 6 个因式 $\left(x^2-\dfrac{2}{x}+y\right)$的乘积，在这 6 个因式中，有 3 个因式提供 y，其余的 3 个因式中有 2 个提供 x^2，剩下一个提供 $-\dfrac{2}{x}$，即可得到 x^3y^3 的系数，即 x^3y^3 的系数是 $C_6^3C_3^2\times(-2)=20\times3\times(-2)=-120$.]

跟进训练

1. (1)**D**　(2)**D**　(3)60　[(1)由题意得$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{10}$ 的展开式的通项公式是 $T_{k+1}=C_{10}^k\cdot x^{10-k}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^k=C_{10}^kx^{10-2k}$，$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{10}$的展开式中含 x^4（当 $k=3$ 时），x^6（当 $k=2$ 时）项的系数分别为 C_{10}^3，C_{10}^2，因此由题意得 $C_{10}^3-aC_{10}^2=120-45a=30$，由此解得 $a=2$，故选 D.

(2)$(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^9=\dfrac{(1+x)^2[1-(1+x)^8]}{1-(1+x)}=\dfrac{(1+x)^{10}-(1+x)^2}{x}$，

所以 x^2 的系数为 $C_{10}^3=120$，故选 D.

(3)**法一：**二项式$\left(2x^3-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 展开式的通项公式 $T_{k+1}=C_6^k(2x^3)^{6-k}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^k=(-1)^k2^{6-k}C_6^kx^{18-4k}$，令 $18-4k=2$，解得 $k=4$，所以 x^2 的系数为$(-1)^4\times2^2\times C_6^4=60$.

法二：将二项式$\left(2x^3-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 看成 6 个多项式$\left(2x^3-\dfrac{1}{x}\right)$相

乘，要想出现 x^2 项，则先在 2 个多项式中分别取 $2x^3$，然后在余下的多项式中都取 $-\frac{1}{x}$，相乘，即 $C_6^2(2x^3)^2\times C_4^4\left(-\frac{1}{x}\right)^4=60x^2$，所以 x^2 的系数为 60.]

考点二

典例 4 (1)**ACD** (2)-3 或 1 [(1)选项 A，由二项式知，$C_{2022}^0+C_{2022}^1+\cdots+C_{2022}^{2022}=2^{2022}$，A 正确；

当 $x=1$ 时，有 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2022}=1$，

当 $x=-1$ 时，

有 $a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{2021}+a_{2022}=3^{2022}$，

选项 B，由上可得 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2021}=\frac{1-3^{2022}}{2}$，B 错误；

选项 C，由上可得 $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2022}=\frac{3^{2022}+1}{2}$，C 正确；

选项 D，令 $x=\frac{1}{2}$ 可得 $a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_{2022}}{2^{2022}}=0$，

又 $a_0=1$，

所以 $\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_{2022}}{2^{2022}}=-1$，D 正确. 故选 ACD.

(2)令 $x=0$，则 $(2+m)^9=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9$，

令 $x=-2$，则 $m^9=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_9$，

又 $(a_0+a_2+\cdots+a_8)^2-(a_1+a_3+\cdots+a_9)^2=(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9)(a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_8-a_9)=3^9$，

$\therefore(2+m)^9\cdot m^9=3^9$，

$\therefore m(2+m)=3$，

$\therefore m=-3$ 或 $m=1$.]

跟进训练

2.(1)**C** (2)**AD** [(1)因为偶数项的二项式系数之和为 $2^{n-1}=128$，所以 $n-1=7$，$n=8$，则展开式共有 9 项，中间项为第 5 项，因为 $(1-2x)^8$ 的展开式的通项 $T_{k+1}=C_8^k(-2x)^k=C_8^k(-2)^kx^k$，所以 $T_5=C_8^4(-2)^4x^4$，其系数为 $C_8^4(-2)^4=1\ 120$.

(2)因为 $(2-x)^8=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$，

令 $x=0$，则 $a_0=2^8$，故 A 正确；

令 $x=1$，则 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8=(2-1)^8=1$，所以 $a_1+a_2+\cdots+a_8=1-2^8$，故 B 错误；

令 $x=-1$，则 $a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_8=3^8$，所以 $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_8|=3^8-2^8$，故 C 错误；

对 $(2-x)^8=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$ 两边对 x 取导得 $-8(2-x)^7=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+8a_8x^7$，再令 $x=1$，得 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+8a_8=-8$，故 D 正确. 故选 AD.]

考点三

考向 1 **典例 5** 7 [$(x+y)^{2m}$ 展开式中二项式系数的最大值为 $a=C_{2m}^m$，$(x+y)^{2m+1}$ 展开式中二项式系数的最大值为 $b=C_{2m+1}^{m+1}$，因为 $15a=8b$，所以 $15C_{2m}^m=8C_{2m+1}^{m+1}$，即 $15\times\frac{(2m)!}{m!\ m!}=8\times\frac{(2m+1)!}{m!\ (m+1)!}$，解得 $m=7$.]

考向 2 **典例 6** $-8\ 064$ $-15\ 360x^4$ [由题意知，$2^{2n}-2^n=992$，即 $(2^n-32)(2^n+31)=0$，故 $2^n=32$，解得 $n=5$. 由二项式系数的性质知，$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^{10}$ 的展开式中第 6 项的二项式系数最大，故二项式系数最大的项为 $T_6=C_{10}^5(2x)^5\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^5=-8\ 064$.

设第 $k+1$ 项的系数的绝对值最大，

则 $T_{k+1}=C_{10}^k\cdot(2x)^{10-k}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^k$

$=(-1)^kC_{10}^k\cdot2^{10-k}\cdot x^{10-2k}$，

令 $\begin{cases}C_{10}^k\cdot2^{10-k}\geqslant C_{10}^{k-1}\cdot2^{10-k+1},\\C_{10}^k\cdot2^{10-k}\geqslant C_{10}^{k+1}\cdot2^{10-k-1},\end{cases}$

得 $\begin{cases}C_{10}^k\geqslant2C_{10}^{k-1},\\2C_{10}^k\geqslant C_{10}^{k+1},\end{cases}$

即 $\begin{cases}11-k\geqslant2k,\\2(k+1)\geqslant10-k,\end{cases}$ 解得 $\frac{8}{3}\leqslant k\leqslant\frac{11}{3}$.

$\because k\in\mathbf{Z}$，$\therefore k=3$.

故系数的绝对值最大的项是第 4 项，

$T_4=-C_{10}^3\cdot2^7\cdot x^4=-15\ 360x^4$.]

跟进训练

3.(1)**C** (2)**A** (3)64 [(1)$\because$ 只有第 5 项的二项式系数最大，

$\therefore n=8$，$\therefore\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$ 的展开式的通项为

$T_{k+1}=(-1)^kC_8^kx^{8-\frac{3}{2}k}(k=0,1,2,\cdots,8)$，

$\therefore$ 展开式中奇数项的二项式系数与项的系数相等，偶数项的二项式系数与项的系数互为相反数，而展开式中第 5 项的二项式系数最大，因此展开式中第 4 项和第 6 项的系数相等且最小，为 $(-1)^3C_8^3=-56$.

(2)令 $x=1$，可得 $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 的展开式中各项系数之和为 2^n，即 $8<2^n<32$，解得 $n=4$，故第 3 项的系数最大，所以展开式中系数最大的项是 $C_4^2(\sqrt{x})^2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2=6\sqrt[3]{x}$.

(3)由题意，$C_n^3>C_n^2$，且 $C_n^3>C_n^4$，

所以 $n=6$，所以令 $x=1$，$(1+x)^6$ 的系数和为 $2^6=64$.]

考点四

典例 7 (1)**B** (2)**B** [(1)因为 $a\in\mathbf{Z}$，且 $0\leqslant a\leqslant13$，

所以 $51^{2023}+a=(52-1)^{2023}+a$，

$=C_{2023}^0 52^{2023}-C_{2023}^1 52^{2022}+C_{2023}^2 52^{2021}-\cdots+C_{2023}^{2022}52-C_{2023}^{2023}+a$，因为 $51^{2023}+a$ 能被 13 整除，结合选项，

所以 $-C_{2023}^{2023}+a=-1+a$ 能被 13 整除，所以 $a=1$.

(2)$1.02^6=(1+0.02)^6=1+C_6^1\times0.02+C_6^2\times0.02^2+C_6^3\times0.02^3+\cdots+0.02^6\approx1+0.12+0.006\approx1.13$.]

跟进训练

4.**C** [$11^n+C_n^1\cdot11^{n-1}+C_n^2\cdot11^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}\cdot11-1$

$=C_n^0\cdot11^n+C_n^1\cdot11^{n-1}+C_n^2\cdot11^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}\cdot11+C_n^n-2=(11+1)^n-2=12^n-2=(13-1)^n-2$

$=C_n^0\cdot13^n-C_n^1\cdot13^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot C_n^{n-1}\cdot13+(-1)^n\cdot C_n^n-2$,因为 n 为奇数,则上式 $=C_n^0\cdot13^n-C_n^1\cdot13^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot C_n^{n-1}\cdot13-3=[C_n^0\cdot13^n-C_n^1\cdot13^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot C_n^{n-1}\cdot13-13]+10$,

所以 $11^n+C_n^1\cdot11^{n-1}+C_n^2\cdot11^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}\cdot11-1$ 除以13的余数是10.]

第3课时　随机事件、频率与概率

梳理·必备知识

1.(1)基本结果　(2)全体样本点

2.(1)样本空间 Ω 的子集

3.$A\subseteq B$　$A\cup B$ 或 $A+B$　$A\cap B$ 或 AB

$A\cap B=\varnothing$　$A\cap B=\varnothing$　$A\cup B=\Omega$

4.(1)发生可能性大小的度量(数值)　(2)缩小　稳定于

激活·基本技能

一、(1)√　(2)√　(3)√　(4)×

二、1.**B**　["至多有一次中靶"的对立事件是"两次都中靶".]

2.**BC**　[由题意知事件 A 包含的样本点:点数为1,3,5;事件 B 包含的样本点:点数为1,2;事件 C 包含的样本点:点数为4,5,6,所以 $\overline{A}B=$"点数为2",故A错误;$\overline{B}C=$"点数为4或5或6",故B正确;$A\overline{B}+\overline{B}C=$"点数为3或4或5或6",故C正确;$A\overline{B}C=$点数为5,故D错误.故选BC.]

3.**A**　[对于A,甲、乙两人各写一个数字,所有可能的结果为(奇,偶),(奇,奇),(偶,奇),(偶,偶),则都是奇数或都是偶数的概率为 $\frac{1}{2}$,故游戏是公平的;

对于B,随着试验次数的增加,频率会越来越接近概率,故事件 A 发生的频率就是事件 A 发生的概率是不正确的;

对于C,从中随机抽出一个球,可能为白球,故错误;

对于D,事件 B 可能发生也可能不发生,故事件 B 是随机事件,故D不正确.

综上可知,正确的为A.故选A.]

4.{(正,正,反),(正,反,正),(反,正,正),(正,反,反),(反,正,反),(反,反,正)}　[试验的样本空间为 $\Omega=${(正,正,正),(正,正,反),(正,反,正),(反,正,正),(正,反,反),(反,正,反),(反,反,正),(反,反,反)},则 $M=${(正,正,反),(正,反,正),(反,正,正),(正,反,反),(反,正,反),(反,反,正)}.]

考点一

典例1　(1)**C**　(2)$\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$　5　[(1)对于事件 A,抛掷一枚均匀的骰子,朝上的面的点数可能是奇数,也可能是偶数,则事件 A 为随机事件;对于事件 B,一年有365天或366天,故367人中至少有2人生日相同,事件 B 为必然事件.故选C.

(2)任选一个数,共有10种不同选法,故样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,其中偶数共有5种,故"它是偶数"这一事件包含的样本点个数为5.]

跟进训练

1.**ABC**　[基本事件即只含有一个样本点的事件,选项A,B,C都只含有一个样本点,是基本事件,D中包含取出标号为1和7,3和5两个样本点,所以D不是基本事件.]

考点二

典例2　(1)**C**　(2)**BC**　[(1)对于A,$\overline{A_1}=\{2,3,4,5,6\}$,$B=\{2,4,6\}$,$B\subseteq\overline{A_1}$,故A错误;

对于B,$A_2+B=\{2\}\cup\{2,4,6\}=\{2,4,6\}\neq\Omega$,故B错误;

对于C,A_3 与 B 不能同时发生,是互斥事件,故C正确;

对于D,$A_4=\{4\}$,$\overline{B}=\{1,3,5\}$,A_4 与 $\overline{B}$ 是互斥但不对立事件,故D错误.故选C.

(2)不妨记两个黑球为 A_1,A_2,两个红球为 B_1,B_2,从中取出2个球,则所有样本点如下:$A_1A_2,A_1B_1,A_1B_2,A_2B_1,A_2B_2,B_1B_2$,恰有一个黑球包括:$A_1B_1,A_1B_2,A_2B_1,A_2B_2$,都是黑球包括 A_1A_2,两个事件没有共同的样本点,故互斥,B正确;

至少一个黑球包括:$A_1A_2,A_1B_1,A_1B_2,A_2B_1,A_2B_2$,都是红球包括 B_1B_2,

两个事件没有共同的样本点,且两者包括的样本点为全部样本点,故对立,C正确.

同理可知A,D都不正确,故选BC.]

跟进训练

2.(1)**C**　(2)**BCD**　[(1)事件 A,B,C 都是随机事件,可能发生,也可能不发生,故A,B选项都不正确;A,B 可能同时发生,故 A,B 不互斥,C选项正确;B 与 C 既不是互斥事件也不是对立事件,D选项错误,因此选项A,B,D错,C正确.

(2)排头只能有一人,因此"甲站排头"与"乙站排头"互斥,而B,C,D中,甲、乙站位不一定在同一位置,可以同时发生,因此它们都不互斥.故选BCD.]

考点三

典例3　**解**:(1)在所给数据中,降水量为110的有3个,为160的有7个,为200的有3个,

故近20年六月份降水量频率分布表为

降水量	70	110	140	160	200	220
频率	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$

(2)由已知可得 $Y=\frac{X}{2}+425$,故 P("发电量低于490或超过530")$=P(Y<490$ 或 $Y>530)=P(X<130$ 或 $X>210)=P(X=70)+P(X=110)+P(X=220)$

$=\frac{1}{20}+\frac{3}{20}+\frac{2}{20}=\frac{3}{10}$.

跟进训练

3.**解**:(1)由试加工产品等级的频数分布表知,

甲分厂加工出来的一件产品为A级品的概率的估计值为 $\frac{40}{100}=0.4$;

乙分厂加工出来的一件产品为A级品的概率的估计值为 $\frac{28}{100}=0.28$.

(2)由数据知甲分厂加工出来的100件产品利润的频数分布

表为

利润/元	65	25	−5	−75
频数	40	20	20	20

因此甲分厂加工出来的 100 件产品的平均利润为 $\frac{65\times40+25\times20-5\times20-75\times20}{100}=15$(元).

由数据知乙分厂加工出来的 100 件产品利润的频数分布表为

利润/元	70	30	0	−70
频数	28	17	34	21

因此乙分厂加工出来的 100 件产品的平均利润为 $\frac{70\times28+30\times17+0\times34-70\times21}{100}=10$(元).

比较甲、乙两分厂加工的产品的平均利润,厂家应选甲分厂承接加工业务.

第4课时　古典概型、概率的基本性质

梳理·必备知识

1.(1)有限个　(2)相等

2.$\frac{n(A)}{n(\Omega)}$

3.$\geqslant$　1　0　$P(A)+P(B)$　$1-P(B)$

激活·基本技能

一、(1)×　(2)×　(3)×　(4)×

二、1.**B**　[$P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.]

2.**D**　[设"该射手在一次射击中命中的环数小于 8 环"为事件 A,则事件 A 的对立事件 $\overline{A}$ 是"该射手在一次射击中命中的环数不小于 8 环".

∵事件 $\overline{A}$ 包括射中 10 环,9 环,8 环,这三个事件是互斥的,

∴$P(\overline{A})=0.2+0.3+0.1=0.6$,

∴$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.6=0.4$,即该射手在一次射击中命中的环数小于 8 环的概率为 0.4.]

3.$\frac{1}{2}$　[$P=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$.]

4.(1)0.4　0.2　(2)0.6　0　[(1)因为 $B\subseteq A$,所以 $P(A\cup B)=P(A)=0.4$,$P(AB)=P(B)=0.2$.

(2)若 A,B 互斥,则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.4+0.2=0.6$,$P(AB)=P(\varnothing)=0$.]

考点一

典例 1　解:(1)由题表知一等品共有 6 个,设"从 10 个零件中,随机抽取 1 个为一等品"为事件 A,则 $P(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

(2)①一等品的编号为 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,从这 6 个一等品中随机抽取 2 个,样本空间 $\Omega=\{(A_1,A_2),(A_1,A_3),(A_1,A_4),(A_1,A_5),(A_1,A_6),(A_2,A_3),(A_2,A_4),(A_2,A_5),(A_2,A_6),(A_3,A_4),(A_3,A_5),(A_3,A_6),(A_4,A_5),(A_4,A_6),(A_5,A_6)\}$,共 15 个样本点.

②将"从一等品中,随机抽取的 2 个零件直径相等"记为事件 B,则 B 包含的样本点有 $(A_1,A_4),(A_1,A_6),(A_4,A_6),(A_2,A_3),(A_2,A_5),(A_3,A_5)$,共 6 个,∴$P(B)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.

跟进训练

1.(1)**D**　(2)**C**　(3)**A**　[(1)从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数,共有 $C_7^2=21$(种)不同的取法,

若两数不互质,不同的取法有:(2,4),(2,6),(2,8),(3,6),(4,6),(4,8),(6,8),共 7 种,

故所求概率 $P=\frac{21-7}{21}=\frac{2}{3}$.

故选 D.

(2)每人有 4 种选择,四人共有 4^4 种选择,

其中恰有两人参加同一项活动共有 $C_4^2C_4^1A_3^2$ 种选择,

所以四人中恰有两人参加同一项活动的概率为 $\frac{C_4^2C_4^1A_3^2}{4^4}=\frac{9}{16}$. 故选 C.

(3)设 6 个主题分别为 A,B,C,D,E,F,甲、乙两位同学所选主题的所有可能情况如表:

甲＼乙	A	B	C	D	E	F
A	(A,A)	(A,B)	(A,C)	(A,D)	(A,E)	(A,F)
B	(B,A)	(B,B)	(B,C)	(B,D)	(B,E)	(B,F)
C	(C,A)	(C,B)	(C,C)	(C,D)	(C,E)	(C,F)
D	(D,A)	(D,B)	(D,C)	(D,D)	(D,E)	(D,F)
E	(E,A)	(E,B)	(E,C)	(E,D)	(E,E)	(E,F)
F	(F,A)	(F,B)	(F,C)	(F,D)	(F,E)	(F,F)

共 36 种情况. 其中甲、乙两位同学抽到不同主题的情况有 30 种,故抽到不同主题的概率为 $\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$,故选 A.]

考点二

考向 1　典例 2　解:(1)$P(A)=\frac{1}{1\,000}$, $P(B)=\frac{10}{1\,000}=\frac{1}{100}$, $P(C)=\frac{50}{1\,000}=\frac{1}{20}$.

故事件 A,B,C 的概率分别为 $\frac{1}{1\,000}$,$\frac{1}{100}$,$\frac{1}{20}$.

(2)1 张奖券中奖包含中特等奖、一等奖、二等奖. 设"1 张奖券中奖"这个事件为 M,则 $M=A\cup B\cup C$.

∵A,B,C 两两互斥,

∴$P(M)=P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{1+10+50}{1\,000}=\frac{61}{1\,000}$,

故 1 张奖券的中奖概率为 $\frac{61}{1\,000}$.

(3)设"1 张奖券不中特等奖且不中一等奖"为事件 N,则事件 N 与"1 张奖券中特等奖或中一等奖"为对立事件,

∴$P(N)=1-P(A\cup B)=1-\left(\frac{1}{1\,000}+\frac{1}{100}\right)=\frac{989}{1\,000}$,

故 1 张奖券不中特等奖且不中一等奖的概率为 $\frac{989}{1\,000}$.

考向2 典例3 (1)0.3 (2)0.96 [(1)因为 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$,

所以 $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.4+0.6-0.7=0.3$.

(2)设 A=“甲熔丝熔断”,B=“乙熔丝熔断”,则“甲、乙两根熔丝至少有一根熔断”为事件 $A\cup B$. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.85+0.74-0.63=0.96$.]

跟进训练

2.(1)**B** [**法一**:A 包含向上一面的点数是1,3,5的情况,B 包含向上一面的点数是1,2,3的情况,所以 $A\cup B$ 包含了向上的点数是1,2,3,5的情况,故 $P(A\cup B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

法二:$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{6}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.]

(2)**解**:设事件 A=“甲跑第一棒”,事件 B=“乙跑第四棒”,则 $P(A)=\frac{1}{4}$,$P(B)=\frac{1}{4}$.

记甲跑第 x 棒,乙跑第 y 棒为 (x,y),

则共有可能结果12种,样本空间 $\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$.

甲跑第一棒且乙跑第四棒只有一种结果,即(1,4),

故 $P(A\cap B)=\frac{1}{12}$.

所以甲跑第一棒或乙跑第四棒的概率 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$.

考点三

典例4 解:(1)根据频率分布直方图知,样本中测试值在区间(0,10]内的频率为 $1-(0.06+0.08+0.02)\times5=1-0.8=0.2$,

以频率为概率,从总体的500名学生中随机抽取1人,估计其测试值在区间(0,10]内的概率为0.2.

(2)由(1)知:样本中听力为优秀的学生人数为 $0.2\times50-4=6$.

∴估计总体中听力为优秀的学生人数为 $500\times\frac{6}{50}=60$.

(3)当 $a_1=1$ 时,序号 a_1,a_2,a_3,a_4 的情况为6种:

分别记为(1,2,3,4),(1,2,4,3),(1,3,2,4),(1,3,4,2),(1,4,2,3),(1,4,3,2),

同理,当 $a_1=2,3,4$ 时,序号 a_1,a_2,a_3,a_4 的情况也分别为6种,

∴序号 a_1,a_2,a_3,a_4 所有的情况总数为24种.

当 $Y=0$ 时,$a_1=1,a_2=2,a_3=3,a_4=4$,

当 $Y=|1-a_1|+|2-a_2|+|3-a_3|+|4-a_4|=2$ 时,a_1,a_2,a_3,a_4 的取值为 $a_1=1,a_2=2,a_3=4,a_4=3$,或 $a_1=1,a_2=3,a_3=2,a_4=4$,或 $a_1=2,a_2=1,a_3=3,a_4=4$,

∴$Y\leqslant2$ 时,序号 a_1,a_2,a_3,a_4 对应的情况为4种,即 $P(Y\leqslant2)=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$.

跟进训练

3.(1)**A** (2)$\frac{1}{2}$ [(1)由题意可知 $\boldsymbol{m}=(a,b)$ 有:(2,1),(2,3),(2,5),(3,1),(3,3),(3,5),(4,1),(4,3),(4,5),(5,1),(5,3),(5,5),共12种情况.

因为 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$,即 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$,所以 $a\times1+b\times(-1)=0$,即 $a=b$,满足条件的有(3,3),(5,5),共2个,

故所求的概率为 $\frac{1}{6}$.故选A.

(2)记事件 A 为“关于 x 的一元二次方程 $x^2+2mx+n^2=0$ 无实数根”.由 $m>0,n>0,\Delta=(2m)^2-4n^2<0$,得 $0<m<n$.取球的基本事件有(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),共12个,其中第一个数表示 m 的取值,第二个数表示 n 的取值,事件 A 包含的基本事件有(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4),共6个,所以事件 A 发生的概率 $P(A)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.]

第5课时 事件的相互独立性、条件概率与全概率公式

梳理·必备知识

1.$P(A)\cdot P(B)$ $P(B)$ $P(A)$

2.(1)$\frac{P(AB)}{P(A)}$ (2)1 $0\leqslant P(B|A)\leqslant1$

$P(B|A)+P(C|A)$ $1-P(B|A)$

3.$P(A)P(B|A)$

4.$\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$

激活·基本技能

一、(1)× (2)× (3)√ (4)√

二、1.**AB** [由于摸球过程是有放回的,所以第一次摸球的结果对第二次摸球的结果没有影响,故事件 A 与 B,A 与 C 均相互独立,且 A 与 B,A 与 C 均有可能同时发生,说明 A 与 B,A 与 C 均不互斥.]

2.**D** [根据题意,在第一次抽到几何题后,还剩4道题,其中有3道代数题,则第二次抽到代数题的概率 $P=\frac{3}{4}$,故选D.]

3.**C** [设甲地降雨为事件 A,乙地降雨为事件 B,则两地恰有一地降雨为 $A\overline{B}+\overline{A}B$,

所以 $P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)$

$=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)=0.2\times0.7+0.8\times0.3=0.38$.]

4.0.957 [设 B=“取到合格品”,A_i=“取到的产品来自第 i 批”$(i=1,2)$,则 $P(A_1)=0.3,P(A_2)=0.7,P(B|A_1)=0.95,P(B|A_2)=0.96$,

由全概率公式得 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=0.3\times0.95+0.7\times0.96=0.957$.]

考点一

考向1 典例1 B [事件甲发生的概率 $P(甲)=\frac{1}{6}$,事件乙发生的概率 $P(乙)=\frac{1}{6}$,事件丙发生的概率 $P(丙)=\frac{5}{6\times6}$

$=\frac{5}{36}$，事件丁发生的概率 $P(丁)=\frac{6}{6\times6}=\frac{1}{6}$. 事件甲与事件丙同时发生的概率为 0，$P(甲丙)\neq P(甲)P(丙)$，故 A 错误；事件甲与事件丁同时发生的概率为 $\frac{1}{6\times6}=\frac{1}{36}$，$P(甲丁)=P(甲)P(丁)$，故 B 正确；事件乙与事件丙同时发生的概率为 $\frac{1}{6\times6}=\frac{1}{36}$，$P(乙丙)\neq P(乙)P(丙)$，故 C 错误；事件丙与事件丁是互斥事件，不是相互独立事件，故 D 错误. 故选 B.]

考向 2　典例 2　解：(1)记"甲队总得分为 3 分"为事件 A，"甲队总得分为 1 分"为事件 B.

甲队得 3 分，即三人都回答正确，

其概率 $P(A)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$，

甲队得 1 分，即三人中只有 1 人回答正确，其余 2 人都回答错误，其概率 $P(B)=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$. 故甲队总得分为 3 分与 1 分的概率分别为 $\frac{8}{27}$，$\frac{2}{9}$.

(2)记"甲队总得分为 2 分"为事件 C，"乙队总得分为 1 分"为事件 D.

甲队得 2 分，即甲队三人中有 2 人回答正确，1 人回答错误，

则 $P(C)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$，

乙队得 1 分，即乙队三人中只有 1 人回答正确，其余 2 人回答错误，

则 $P(D)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{3}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.

由题意得事件 C 与事件 D 相互独立，

则甲队总得分为 2 分且乙队总得分为 1 分的概率为 $P(CD)=P(C)P(D)=\frac{4}{9}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{9}$.

跟进训练

1. (1)**ACD**　(2)**ABD**　[(1)设"从甲袋中摸出一个红球"为事件 A_1，"从乙袋中摸出一个红球"为事件 A_2，

则 $P(A_1)=\frac{1}{3}$，$P(A_2)=\frac{1}{2}$，且 A_1，A_2 相互独立.

2 个球都是红球为 A_1A_2，其概率为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，A 正确；"2 个球不都是红球"是"2 个球都是红球"的对立事件，其概率为 $\frac{5}{6}$，B 错误；2 个球中至少有 1 个红球的概率为 $1-P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=1-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$，C 正确；2 个球中恰有 1 个红球的概率为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，D 正确. 故选 ACD.

(2)对于 A，因为甲队分在第一小组和第二小组的概率相等，且两种情况等可能，所以 $P(M_1)=\frac{1}{2}$，故 A 正确；对于 B，8 支球队抽签分组共有 $C_8^4=70$ 种不同方法，甲、乙两队分在同小组共有 $C_6^2\times A_2^2=30$ 种不同方法，所以甲、乙两队分在同一小组的概率 $P(M_3)=\frac{30}{70}=\frac{3}{7}$，故 B 正确；对于 C，因为 $P(M_1)=P(M_2)=\frac{1}{2}$，所以 $P(M_1)+P(M_2)=1\neq P(M_3)$，故 C 错误；对于 D，因为 $P(M_1M_3)=\frac{C_6^2}{C_8^4}=\frac{3}{14}$，$P(M_1)\cdot P(M_3)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}=\frac{3}{14}$，所以 $P(M_1M_3)=P(M_1)\cdot P(M_3)$，所以事件 M_1 与事件 M_3 相互独立，故 D 正确. 故选 ABD.]

考点二

典例 3　(1)**B**　(2)0.72　[(1)**法一**(定义法)：$P(A)=\frac{C_3^2+C_2^2}{C_5^2}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$，$P(AB)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$. 由条件概率计算公式，得

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{4}$.

法二(缩小样本空间法)：事件 A 包括的基本事件：(1,3)，(1,5)，(3,5)，(2,4)，共 4 个.

事件 AB 发生的结果只有(2,4)一种情形，即 $n(AB)=1$.

故由古典概型得 $P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{1}{4}$.

(2)设"种子发芽"为事件 A，"种子成长为幼苗"为事件 AB(发芽，又成长为幼苗). 出芽后成长为幼苗的概率为 $P(B|A)=0.8$，$P(A)=0.9$，根据条件概率公式得 $P(AB)=P(B|A)\cdot P(A)=0.8\times0.9=0.72$，即这粒种子能成长为幼苗的概率为 0.72.]

(3)**解**：设"摸出第一个球为红球"为事件 A，"摸出第二个球为黄球"为事件 B，"摸出第二个球为黑球"为事件 C.

则 $P(A)=\frac{1}{10}$，$P(AB)=\frac{1\times2}{10\times9}=\frac{1}{45}$，

$P(AC)=\frac{1\times3}{10\times9}=\frac{1}{30}$.

所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{45}}{\frac{1}{10}}=\frac{2}{9}$，

$P(C|A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{10}}=\frac{1}{3}$.

所以 $P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)=\frac{2}{9}+\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$.

所以所求的条件概率为 $\frac{5}{9}$.

跟进训练

2. (1)**A**　(2)**ABC**　(3)$\frac{1}{221}$　$\frac{1}{17}$　[(1)记事件 A 为"甲厂产品"，事件 B 为"合格产品"，则 $P(A)=0.7$，$P(B|A)=0.95$，

$\therefore P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=0.7\times0.95=0.665$.

(2)因为随机事件 A,B 发生的概率分别为 $P(A)=0.3$，$P(B)=0.6$.

对于 A，因为 $P(AB)=0.18=P(A)P(B)=0.3\times0.6$，

所以 A,B 相互独立，故 A 正确；

对于 B，若 A,B 相互独立，则 $P(B|A)=P(B)=0.6$，故 B 正确；

对于 C，若 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(AB)}{0.3}=0.4$，

则 $P(AB)=0.12$，故 C 正确；

对于 D，若 $A\subseteq B$，则 $P(A|B)=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{0.3}{0.6}=0.5$，故 D 错误.

故选 ABC.

(3)由题意，设第一次抽到 A 的事件为 B，第二次抽到 A 的事件为 C，

则 $P(BC)=\frac{4}{52}\times\frac{3}{51}=\frac{1}{221}$，$P(B)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$，

$\therefore P(C|B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{221}}{\frac{1}{13}}=\frac{1}{17}$.

考点三

典例 4 **解**：(1)从甲箱中任取 2 个产品的事件数为 $C_8^2=\frac{8\times7}{2}=28$，

这 2 个产品都是次品的事件数为 $C_3^2=3$.

$\therefore$ 这 2 个产品都是次品的概率为 $\frac{3}{28}$.

(2)设事件 A 为“从乙箱中取出的一个产品是正品”，事件 B_1 为“从甲箱中取出 2 个产品都是正品”，事件 B_2 为“从甲箱中取出 1 个正品、1 个次品”，事件 B_3 为“从甲箱中取出 2 个产品都是次品”，则事件 B_1,B_2,B_3 两两互斥.

$P(B_1)=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{5}{14}$，$P(B_2)=\frac{C_5^1C_3^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}$，$P(B_3)=\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{3}{28}$，

$P(A|B_1)=\frac{2}{3}$，$P(A|B_2)=\frac{5}{9}$，$P(A|B_3)=\frac{4}{9}$，

$\therefore P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)=\frac{5}{14}\times\frac{2}{3}+\frac{15}{28}\times\frac{5}{9}+\frac{3}{28}\times\frac{4}{9}=\frac{7}{12}$.

跟进训练

3.(1)**C** ［设 A=“第一次抽出的是黑球”，B=“第二次抽出的是黑球”，则 $B=AB+\overline{A}B$，由全概率公式知 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$. 由题意得 $P(A)=\frac{b}{a+b}$，$P(B|A)=\frac{b+c}{a+b+c}$，$P(\overline{A})=\frac{a}{a+b}$，$P(B|\overline{A})=\frac{b}{a+b+c}$，所以 $P(B)=\frac{b(b+c)}{(a+b)(a+b+c)}+\frac{ab}{(a+b)(a+b+c)}=\frac{b}{a+b}$. 故选 C.］

(2)**解**：用 A_1,A_2,A_3 表示甲、乙、丙产品，B 表示优质品，

由已知得 $P(A_1)=60\%$，$P(A_2)=20\%$，$P(A_3)=20\%$，

且 $P(B|A_1)=90\%$，$P(B|A_2)=85\%$，$P(B|A_3)=80\%$，

因此由全概率公式有 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=60\%\times90\%+20\%\times85\%+20\%\times80\%=0.87$.

第 6 课时　离散型随机变量的分布列和数字特征

梳理·必备知识

1.(1)唯一　(2)一一列举

2.(2)$\geqslant$　1

4.(1)$x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$　$\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$　均值　数学期望　平均水平　(2)$\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2p_i$　偏离程度　$\sqrt{D(X)}$

5.(1)$aE(X)+b$　(2)$a^2D(X)$

激活·基本技能

一、(1)×　(2)√　(3)√　(4)√

二、1.**D** ［第一枚的点数减去第二枚的点数不小于 5，即只能等于 5. 故选 D.］

2.**ACD** ［由离散型随机变量 X 的分布列的性质得：

$q=1-0.4-0.1-0.2-0.2=0.1$，

$E(X)=0\times0.1+1\times0.4+2\times0.1+3\times0.2+4\times0.2=2$，

$D(X)=(0-2)^2\times0.1+(1-2)^2\times0.4+(2-2)^2\times0.1+(3-2)^2\times0.2+(4-2)^2\times0.2=1.8$，

$\because$ 离散型随机变量 Y 满足 $Y=2X+1$，

$\therefore E(Y)=2E(X)+1=5$，$D(Y)=4D(X)=7.2$. 故选 ACD.］

3.**C** ［甲收益的期望 $E(X)=-1\times0.1+0\times0.3+2\times0.6=1.1$，

方差 $D(X)=(-1-1.1)^2\times0.1+(-1.1)^2\times0.3+(2-1.1)^2\times0.6=1.29$，

乙收益的期望 $E(Y)=0\times0.2+1\times0.5+2\times0.3=1.1$，

方差 $D(Y)=(0-1.1)^2\times0.2+(1-1.1)^2\times0.5+(2-1.1)^2\times0.3=0.49$，

所以 $E(X)=E(Y)$，$D(X)>D(Y)$，则投资股票甲、乙的期望收益相等，投资股票甲比投资股票乙的风险高. 故选 C.］

4.$\frac{91}{6}$ ［因为 $E(X)=\frac{7}{2}$，$D(X)=\frac{35}{12}$，

由 $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2$，

得 $E(X^2)=D(X)+(E(X))^2=\frac{35}{12}+\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{91}{6}$.］

考点一

典例 1　(1)**AB**　(2)$\frac{2}{3}$　$\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$ ［(1)对于选项 A，$\because$ 随机变量 ξ 的分布列为 $P\left(\xi=\frac{k}{5}\right)=ak(k=1,2,3,4,5)$，

$\therefore P\left(\xi=\frac{1}{5}\right)+P\left(\xi=\frac{2}{5}\right)+P\left(\xi=\frac{3}{5}\right)+P\left(\xi=\frac{4}{5}\right)+P(\xi=1)=a+2a+3a+4a+5a=15a=1$，解得 $a=\frac{1}{15}$，故 A 正确；

对于 B，易知 $P\left(\frac{1}{2}<\xi<\frac{4}{5}\right)=P\left(\xi=\frac{3}{5}\right)=3\times\frac{1}{15}=\frac{1}{5}$，故 B 正确；

对于 C，易知 $P\left(\frac{1}{10}<\xi<\frac{1}{2}\right)=P\left(\xi=\frac{1}{5}\right)+P\left(\xi=\frac{2}{5}\right)=$

$\frac{1}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{1}{5}$,故C错误;

对于D,易知$P(\xi=1)=5\times\frac{1}{15}=\frac{1}{3}$,故D错误.故选AB.

(2)因为a,b,c成等差数列,所以$2b=a+c$.又$a+b+c=1$,所以$b=\frac{1}{3}$,所以$P(|X|=1)=a+c=\frac{2}{3}$.又$a=\frac{1}{3}-d,c=\frac{1}{3}+d$,根据分布列的性质,得$0\leqslant\frac{1}{3}-d\leqslant\frac{2}{3}$,$0\leqslant\frac{1}{3}+d\leqslant\frac{2}{3}$,所以$-\frac{1}{3}\leqslant d\leqslant\frac{1}{3}$.]

跟进训练

1.(1)**D**　(2)**D**　[(1)由离散型随机变量分布列的性质得

$$\begin{cases}\frac{1}{2}+1-q+q-q^2=1,\\ 0\leqslant 1-q\leqslant\frac{1}{2},\\ 0\leqslant q-q^2\leqslant\frac{1}{2},\end{cases}\quad \text{解得 } q=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(2)因为$P(X=n)=\frac{a}{n(n+1)}(n=1,2,3,4)$,

所以$\frac{a}{2}+\frac{a}{6}+\frac{a}{12}+\frac{a}{20}=1$,即$a=\frac{5}{4}$,

所以$P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{5}{2}\right)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{5}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{5}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.]

考点二

典例2　解:(1)设甲学校在三个项目中获胜的事件依次为A,B,C,所以甲学校获得冠军的概率为

$P=P(ABC)+P(\bar{A}BC)+P(A\bar{B}C)+P(AB\bar{C})$

$=0.5\times0.4\times0.8+0.5\times0.4\times0.8+0.5\times0.6\times0.8+0.5\times0.4\times0.2$

$=0.16+0.16+0.24+0.04=0.6$.

(2)依题可知,X的可能取值为0,10,20,30,

$P(X=0)=0.5\times0.4\times0.8=0.16$,

$P(X=10)=0.5\times0.4\times0.8+0.5\times0.6\times0.8+0.5\times0.4\times0.2=0.44$,

$P(X=20)=0.5\times0.6\times0.8+0.5\times0.4\times0.2+0.5\times0.6\times0.2=0.34$,

$P(X=30)=0.5\times0.6\times0.2=0.06$.

即X的分布列为

X	0	10	20	30
P	0.16	0.44	0.34	0.06

期望$E(X)=0\times0.16+10\times0.44+20\times0.34+30\times0.06=13$.

跟进训练

2.**解**:(1)设部件1,2,3需要调整分别为事件A,B,C,

由题知$P(A)=0.1,P(B)=0.2,P(C)=0.3$,各部件的状态相互独立,

所以部件1,2都不需要调整的概率$P(\bar{A}\,\bar{B})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})=0.9\times0.8=0.72$,

故部件1,2中至少有1个需要调整的概率为$1-P(\bar{A}\,\bar{B})=0.28$.

(2)X可取0,1,2,3,

$P(X=0)=P(\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})\cdot P(\bar{C})=0.9\times0.8\times0.7=0.504$,

$P(X=1)=P(A\bar{B}\,\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\,\bar{B}C)=0.1\times0.8\times0.7+0.9\times0.2\times0.7+0.9\times0.8\times0.3=0.398$,

$P(X=3)=P(ABC)=0.1\times0.2\times0.3=0.006$,

$P(X=2)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=3)=0.092$,

所以X的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.504	0.398	0.092	0.006

$E(X)=0\times P(X=0)+1\times P(X=1)+2\times P(X=2)+3\times P(X=3)=0.6$.

考点三

典例3　解:(1)$y=\begin{cases}120n-960,n\in[0,16),n\in\mathbf{N},\\ 960,n\in[16,+\infty),n\in\mathbf{N}.\end{cases}$

(2)①由题意可得,X的所有可能取值为720,840,960,对应的概率分别为0.1,0.2,0.7,所以X的分布列为

X	720	840	960
P	0.1	0.2	0.7

$E(X)=720\times0.1+840\times0.2+960\times0.7=912$(元);

$D(X)=(720-912)^2\times0.1+(840-912)^2\times0.2+(960-912)^2\times0.7=6\ 336$.

②当加工17个这种蛋糕时,Y表示日利润(单位:元),则Y的分布列为

Y	660	780	900	1 020
P	0.1	0.2	0.16	0.54

则$E(Y)=660\times0.1+780\times0.2+900\times0.16+1\ 020\times0.54=916.8$(元),$916.8>912$.

从数学期望来看,一天加工17个这种蛋糕的日利润高于一天加工16个这种蛋糕的日利润,所以应加工17个.

跟进训练

3.**解**:(1)第一场比赛,业余队安排乙与甲进行比赛,业余队获胜的概率为$P_1=\frac{1}{3}\times p+\frac{2}{3}\times p\times\frac{1}{3}=\frac{5}{9}p$;

第一场比赛,业余队安排丙与甲进行比赛,业余队获胜的概率为$P_2=p\times\frac{1}{3}+(1-p)\times\frac{1}{3}\times p=-\frac{1}{3}p^2+\frac{2}{3}p$,

因为$\frac{1}{3}<p<\frac{1}{2}$,所以$P_1-P_2=\frac{1}{3}p^2-\frac{1}{9}p=\frac{1}{3}p\left(p-\frac{1}{3}\right)>0$,所以$P_1>P_2$.

所以,业余队第一场应该安排乙与甲进行比赛.

(2)由已知$X=4.5$或3.6.

由(1)知,业余队最优决策是第一场应该安排乙与甲进行比赛.

此时，业余队获胜的概率为 $P_1=\frac{5}{9}p$，

专业队获胜的概率为 $P_3=\frac{2}{3}\times(1-p)+\frac{1}{3}\times(1-p)\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}-\frac{8}{9}p$，

所以非平局的概率为 $P(X=4.5)=P_1+P_3=\frac{8}{9}-\frac{1}{3}p$，

平局的概率为 $P(X=3.6)=1-P_1-P_3=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}p$.

X 的分布列为

X	4.5	3.6
$P(X)$	$\frac{8}{9}-\frac{1}{3}p$	$\frac{1}{9}+\frac{1}{3}p$

X 的数学期望为 $E(X)=4.5\times\left(\frac{8}{9}-\frac{1}{3}p\right)+3.6\times\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}p\right)=4.4-0.3p$，

而 $\frac{1}{3}<p<\frac{1}{2}$，所以 $E(X)$ 的取值范围为 $(4.25,4.3)$.

第 7 课时　二项分布、超几何分布与正态分布

梳理·必备知识

1.(1)两个可能　n 重伯努利试验

(2)$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$　二项分布　$B(n,p)$

(3)$p(1-p)$　np　$np(1-p)$

2.(1)$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$　(2)$\frac{nM}{N}$

3.(2)$X\sim N(\mu,\sigma^2)$　0　1　(3)$x=\mu$　$x=\mu$

(4)0.682 7　0.954 5　0.997 3　(5)μ　σ^2

激活·基本技能

一、(1)√　(2)√　(3)√　(4)×

二、1. **D**　[袋中装有 2 个红球，3 个黄球，有放回地抽取 3 次，每次抽取 1 球，每次取到黄球的概率 $P_1=\frac{3}{5}$，∴3 次中恰有 2 次抽到黄球的概率 $P=C_3^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{54}{125}$.]

2. **A**　[由题意，$E(X)=\frac{10\times20}{50}=4$. 故选 A.]

3. **C**　[∵$\mu=0$，∴$P(\xi>2)=P(\xi<-2)=0.023$，∴$P(-2\leqslant\xi\leqslant2)=1-2\times0.023=0.954$.]

4. $\frac{3}{10}$　[由题意得 $P(X=2)=\frac{C_3^2C_7^2}{C_{10}^4}=\frac{3}{10}$.]

考点一

考向 1　典例 1　解：(1)记"甲射击 4 次，至少有 1 次未击中目标"为事件 A_1，则事件 A_1 的对立事件 $\overline{A_1}$ 为"甲射击 4 次，全部击中目标". 由题意可知，射击 4 次相当于做了 4 重伯努利试验，故 $P(\overline{A_1})=C_4^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$.

所以 $P(A_1)=1-P(\overline{A_1})=1-\frac{16}{81}=\frac{65}{81}$.

所以甲射击 4 次，至少有 1 次未击中目标的概率为 $\frac{65}{81}$.

(2)记"甲射击 4 次，恰好击中目标 2 次"为事件 A_2，"乙射击 4 次，恰好击中目标 3 次"为事件 B_2，

则 $P(A_2)=C_4^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$，

$P(B_2)=C_4^3\times\left(\frac{3}{4}\right)^3\times\left(1-\frac{3}{4}\right)^1=\frac{27}{64}$.

由于甲、乙射击相互独立，

故 $P(A_2B_2)=P(A_2)P(B_2)=\frac{8}{27}\times\frac{27}{64}=\frac{1}{8}$.

所以两人各射击 4 次，甲恰好击中目标 2 次且乙恰好击中目标 3 次的概率为 $\frac{1}{8}$.

(3)记"乙恰好射击 5 次后，被终止射击"为事件 A_3，"乙第 i 次射击未击中"为事件 $D_i(i=1,2,3,4,5)$，

则 $A_3=D_5D_4\overline{D_3}(\overline{D_2}\,\overline{D_1}\cup\overline{D_2}D_1\cup D_2\overline{D_1})$，且 $P(D_i)=\frac{1}{4}$.

由于各事件相互独立，故

$P(A_3)=P(D_5)P(D_4)P(\overline{D_3})P(\overline{D_2}\,\overline{D_1}+\overline{D_2}D_1+D_2\overline{D_1})$

$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)=\frac{45}{1\ 024}$.

所以乙恰好射击 5 次后，被终止射击的概率为 $\frac{45}{1\ 024}$.

考向 2　典例 2　24　[由题意知，

$P(X=k)=C_6^k\cdot0.2^{6-k}\cdot0.8^k$，

要使 $P(X=k)$ 最大，有

$$\begin{cases}C_6^k\cdot0.2^{6-k}\cdot0.8^k\geqslant C_6^{k-1}\cdot0.2^{7-k}\cdot0.8^{k-1},\\C_6^k\cdot0.2^{6-k}\cdot0.8^k\geqslant C_6^{k+1}\cdot0.2^{5-k}\cdot0.8^{k+1},\end{cases}$$

化简得 $\begin{cases}0.8\times\frac{7-k}{k}\geqslant0.2,\\0.2\geqslant0.8\times\frac{6-k}{k+1},\end{cases}$ 解得 $\frac{23}{5}\leqslant k\leqslant\frac{28}{5}$，故 $k=5$.

又 $D(X)=6\times0.8\times0.2=0.96$，

故 $D(kX+1)=D(5X+1)=5^2D(X)=24$.]

考向 3　典例 3　解：(1)设 A_i 表示事件"一个试验组中，服用 M_1 有效的小白鼠有 i 只"，其中 $i=0,1,2$，

B_i 表示事件"一个试验组中，服用 M_2 有效的小白鼠有 i 只"，其中 $i=0,1,2$.

依题意有，$P(A_0)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，$P(A_1)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，

$P(A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

$P(B_0)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$，$P(B_1)=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$，$P(B_2)=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$，

则一个试验组为优类组的概率为

$P=P(B_0\cdot A_1)+P(B_0\cdot A_2)+P(B_1\cdot A_2)=\frac{4}{9}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{9}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{9}\times\frac{1}{4}=\frac{4}{9}$.

(2)由题意可知 $\xi\sim B\left(3,\frac{4}{9}\right)$，$P(\xi=0)=\left(\frac{5}{9}\right)^3=\frac{125}{729}$，

$P(\xi=1)=C_3^1\times\frac{4}{9}\times\left(\frac{5}{9}\right)^2=\frac{100}{243}$，

$P(\xi=2)=C_3^2\times\left(\frac{4}{9}\right)^2\times\frac{5}{9}=\frac{80}{243}$，

$P(\xi=3)=\left(\frac{4}{9}\right)^3=\frac{64}{729}$，

则 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{125}{729}$	$\frac{100}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{64}{729}$

ξ 的数学期望为 $E(\xi)=3\times\frac{4}{9}=\frac{4}{3}$.

跟进训练

1. **解**：(1)依题意，X 的所有可能取值为 0，1，2，3. 则 $P(X=0)=0.2(1-p)^2=0.2p^2-0.4p+0.2$，
$P(X=1)=0.8\times(1-p)^2+0.2\times C_2^1\times p\times(1-p)=0.8(1-p)^2+0.4p(1-p)=0.4p^2-1.2p+0.8$，
$P(X=2)=0.2p^2+0.8\times C_2^1\times p\times(1-p)=0.2p^2+1.6p(1-p)=-1.4p^2+1.6p$，
$P(X=3)=0.8p^2$.
X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$0.2p^2-0.4p+0.2$	$0.4p^2-1.2p+0.8$	$-1.4p^2+1.6p$	$0.8p^2$

$E(X)=0\times(0.2p^2-0.4p+0.2)+1\times(0.4p^2-1.2p+0.8)+2\times(-1.4p^2+1.6p)+3\times0.8p^2=2p+0.8$.
(2)当 $p=0.9$ 时，$E(X)$ 取得最大值.
①一棵树苗 B 最终成活的概率为 $0.9+0.1\times0.75\times0.8=0.96$.
②记 Y 为 n 棵树苗的成活棵数，$M(n)$ 为 n 棵树苗的利润，则 $Y\sim B(n,0.96)$，$E(Y)=0.96n$，$M(n)=300Y-50(n-Y)=350Y-50n$，$E(M(n))=350E(Y)-50n=286n$，
要使 $E(M(n))\geqslant200\ 000$，则有 $n>699$.
所以该农户至少引种 700 棵树苗 B，就可获利不低于 20 万元.

考点二

典例 4 **解**：(1)设有 1 个次品的该箱电子元件能被直接购买为事件 A，则 $P(A)=\frac{C_9^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{10}$.
(2) X 可能的取值为 1，2，3.
则 $P(X=1)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$，
$P(X=2)=\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{8}{45}$，
$P(X=3)=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{28}{45}$.
故 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{28}{45}$

故 $E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{8}{45}+3\times\frac{28}{45}=\frac{109}{45}$.

跟进训练

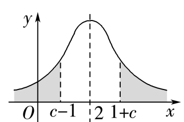
2. **解**：(1) X 可能的取值为 0，1，2，$P(X=k)=\frac{C_2^kC_3^{3-k}}{C_5^3}$，其中 $k=0,1,2$.
分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

故 X 的数学期望 $E(X)=\frac{6}{5}$.
(2)当 $Y=5$ 时知第四、五次取到的是黑球，第三次取到的是白球，前两次不能都取到黑球，
∴所求概率 $P=\left(1-\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\right)\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{252}{3\ 125}$.

考点三

典例 5 (1)**D** (2)2 0.954 5 [(1)对于 A，σ 越小，正态分布的图象越瘦长，总体分布越集中在对称轴附近，故 A 正确. 对于 B，C，由于正态分布图象的对称轴为 $\mu=10$，显然 B，C 正确. D 显然错误. 故选 D.
(2)由 $X\sim N(2,9)$ 可知，正态曲线的图象关于直线 $x=2$ 对称(如图所示)，



又 $P(X>c+1)=P(X<c-1)$，
故有 $2-(c-1)=(c+1)-2$，∴$c=2$.
$P(-4\leqslant X\leqslant8)=P(2-2\times3\leqslant X\leqslant2+2\times3)=0.954\ 5$.]

跟进训练

3. (1)**A** (2)**A** (3)0.158 65 11 [(1)根据正态分布的性质：对称轴方程 $x=\mu$，σ 表示正态曲线的形状. 由题图可得，选 A.
(2)因为零件外径 $X\sim N(10,0.04)$，$\mu=10$，$\sigma=0.2$，所以根据 3σ 原则，外径在 $10-3\times0.2=9.4$(cm)与 $10+3\times0.2=10.6$(cm)之外时为异常. 从上午、下午生产的零件中各随机取一个，测得其外径分别为 10.5 cm 和 9.3 cm，所以可认为上午生产情况正常，下午生产情况异常. 故选 A.
(3)因为数学成绩 X 服从正态分布 $N(100,17.5^2)$，则 $P(100-17.5\leqslant X\leqslant100+17.5)=P(82.5\leqslant X\leqslant117.5)\approx0.682\ 7$，所以此次参加考试的学生成绩低于 82.5 分的概率 $P(X<82.5)=\frac{1-P(82.5\leqslant X\leqslant117.5)}{2}\approx\frac{1-0.682\ 7}{2}=0.158\ 65$.
又 $P(100-17.5\times2\leqslant X\leqslant100+17.5\times2)=P(65\leqslant X\leqslant135)\approx0.954\ 5$，所以数学成绩特别优秀的概率 $P(X>135)=\frac{1-P(65\leqslant X\leqslant135)}{2}\approx\frac{1-0.954\ 5}{2}=0.022\ 75$. 又 $P(X<82.5)=P(X>117.5)=0.158\ 65$，则本次考试数学成绩特别优秀的人数大约是 $\frac{80}{0.158\ 65}\times0.022\ 75\approx11$.]

高考研究在线8 两种视角下探究二项分布概率的最值问题

典例1 解：(1)由频率分布直方图可知，抽取的1 000名市民作答成绩的平均数

$\bar{x}=5\times0.05+15\times0.1+25\times0.2+35\times0.3+45\times0.25+55\times0.1=34$(分).

设1 000名市民作答成绩的中位数为x分，

则$0.05+0.1+0.2+0.03\times(x-30)=0.5$，所以$x=35$，

所以这1 000名市民作答成绩的平均数为34分，中位数为35分.

(2)估计这20名市民的作答成绩在[40,60]的人数为7时概率最大.理由如下：

由已知得$X\sim B(20,0.35)$，

所以$P(X=k)=C_{20}^{k}0.35^{k}(1-0.35)^{20-k}$，$k=0,1,\cdots,20$，

令$\begin{cases}P(X=k)\geqslant P(X=k-1),\\P(X=k)\geqslant P(X=k+1),\end{cases}k=1,2,\cdots,19$，即

$\begin{cases}C_{20}^{k}0.35^{k}(1-0.35)^{20-k}\geqslant C_{20}^{k-1}0.35^{k-1}(1-0.35)^{21-k},\\C_{20}^{k}0.35^{k}(1-0.35)^{20-k}\geqslant C_{20}^{k+1}0.35^{k+1}(1-0.35)^{19-k},\end{cases}$

即$\begin{cases}7(21-k)\geqslant13k,\\13(k+1)\geqslant7(20-k),\end{cases}$解得$6.35\leqslant k\leqslant7.35$，又$k\in\mathbf{N}^{*}$，

$\therefore k=7$，

所以这20名市民的作答成绩在[40,60]的人数为7时$P(X=k)$最大.

典例2 解：(1)20件产品中恰有2件不合格品的概率为$f(p)=C_{20}^{2}p^{2}(1-p)^{18}$.因此

$f'(p)=C_{20}^{2}[2p(1-p)^{18}-18p^{2}(1-p)^{17}]$

$=2C_{20}^{2}p(1-p)^{17}(1-10p)$.

令$f'(p)=0$，得$p=0.1$.当$p\in(0,0.1)$时，$f'(p)>0$；当$p\in(0.1,1)$时，$f'(p)<0$.所以$f(p)$的最大值点为$p_0=0.1$.

(2)由(1)知，$p=0.1$.

①令Y表示余下的180件产品中的不合格品件数，依题意知$Y\sim B(180,0.1)$，$X=20\times2+25Y$，即$X=40+25Y$.

所以$E(X)=E(40+25Y)=40+25E(Y)=490$.

②若对余下的产品作检验，则这一箱产品所需要的检验费为400元.

由于$E(X)>400$，故应该对余下的产品作检验.

跟进训练

解：(1)甲以3∶1获胜，则前三局中甲胜两局败一局，第四局甲必须获胜，

所以$f(p)=C_{3}^{2}\cdot p^{3}\cdot(1-p)=3p^{3}-3p^{4}$，$0<p<1$，

$f'(p)=9p^{2}-12p^{3}=3p^{2}(3-4p)$，

令$f'(p)=0$，得$p=\frac{3}{4}$；

令$f'(p)>0$，得$0<p<\frac{3}{4}$；

令$f'(p)<0$，得$\frac{3}{4}<p<1$.

所以$f(p)$在$\left(0,\frac{3}{4}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{3}{4},1\right)$上单调递减，所以当$p=\frac{3}{4}$时，$f(p)$取得最大值为$\frac{81}{256}$.

(2)由(1)知$p=p_0=\frac{3}{4}$，由题意，知X的所有可能取值为3，4，5，相应的概率为

$P(X=3)=\left(\frac{3}{4}\right)^{3}+\left(\frac{1}{4}\right)^{3}=\frac{27}{64}+\frac{1}{64}=\frac{7}{16}$，

$P(X=4)=C_{3}^{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{3}\times\frac{1}{4}+C_{3}^{1}\times\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{3}=\frac{81}{256}+\frac{9}{256}=\frac{45}{128}$，

$P(X=5)=C_{4}^{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{2}+C_{4}^{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{3}=\frac{81}{512}+\frac{27}{512}=\frac{27}{128}$，

所以X的分布列为

X	3	4	5
P	$\frac{7}{16}$	$\frac{45}{128}$	$\frac{27}{128}$

X的数学期望$E(X)=3\times\frac{7}{16}+4\times\frac{45}{128}+5\times\frac{27}{128}=\frac{483}{128}$.

第十章 统计与成对数据的统计分析

第1课时 随机抽样、统计图表

梳理·必备知识

1.(1)全面调查 抽样调查 个体 样本容量

(2)$\frac{Y_1+Y_2+\cdots+Y_N}{N}$

$\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}$

2.(2)相等 (3)随机数法

3.(1)简单随机 合在一起 层 (2)$\frac{M}{M+N}\bar{x}+\frac{N}{M+N}\bar{y}$

$\frac{m}{m+n}\bar{x}+\frac{n}{m+n}\bar{y}$

4.(1)最大值 最小值 $\frac{极差}{组距}$ 1 $\frac{频率}{组距}$

面积 1 (2)中点 (3)比例 时间

激活·基本技能

一、(1)× (2)√ (3)× (4)√

二、1.**B** [对于A，总体指的是该市参加升学考试的全体学生的数学成绩，故A错误；

对于B，样本是指1 000名学生的数学成绩，故B正确；

对于C，样本量是1 000，故C错误；

对于D，个体指的是每名学生的数学成绩，故D错误.]

2.**A** [根据分层随机抽样原理，被抽取到的男生为60人，女生为40人，

设被抽取到的女生平均身高为x cm，则$\frac{60\times172+40x}{100}=165$，解得$x=154.5$，

所以被抽取的女生平均身高为154.5 cm.

故选A.]

3.扇形　折线　[空气是由多种气体混合而成的,为了直观地介绍空气各成分的百分比,最适合使用的是扇形统计图;要反映 2012～2022 年某地区学生数的变化情况,宜选用折线统计图.]

4.(1)0.004 6　(2)72　[(1)根据频率分布直方图中小长方形的面积和为 1,

得$(0.0024+0.0038+0.0060+x+0.0032)\times50=1$,

解得 $x=0.0046$.

(2)月用电量落在区间[100,250)内的频率为 $f=(0.0038+0.0060+0.0046)\times50=0.72$,

所以在被调查的用户中月用电量落在区间[100,250)内的用户为 $100\times0.72=72$ 户.]

考点一

典例 1　(1)**A**　(2)**C**　[(1)**法一**:在抽样过程中,个体 a 每一次被抽中的概率是相等的,因为总体容量为 10,故个体 a"在第一次被抽到"的概率与"在第二次被抽到"的概率均为$\frac{1}{10}$.故选 A.

法二:在第一次被抽到,显然概率为$\frac{1}{10}$;第二次被抽到,首先第一次不能被抽到,第二次才被抽到,概率为$\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10}$.故选 A.

(2)依次从数表中读出的有效编号为:12,02,01,04,15,20,29,…,

得到选出来的第 7 个个体的编号为 29.故选 C.]

跟进训练

1.(1)**ACD**　(2)抽签法　[(1)对于选项 A:简单随机抽样中总体的个数是有限的,题中是无限的,不是简单随机抽样,故选项 A 不是简单随机抽样;对于选项 B:满足简单随机抽样的定义,从 N 个个体中逐个不放回地抽取 n 个个体($n\leqslant N$),"任意"表示等可能抽取每一个个体,故选项 B 是简单随机抽样;对于选项 C:不是简单随机抽样,原因是简单随机抽样是逐个抽取,而题中是一次性抽取;对于选项 D:不是简单随机抽样,原因是指定个子最高的 5 名同学是 56 名同学中特指的,不存在随机性,不是等可能抽样.故选 ACD.

(2)30 个小球相当于号签,搅拌均匀后逐个不放回地抽取,这是典型的抽签法.]

考点二

考向 1　**典例 2**　**B**　[由扇形图结合分层随机抽样知识易知样本容量为$\frac{80}{40\%}=200$,则样本中高中生的人数为 $200\times25\%=50$,易知总体中高中生的人数为$\frac{50}{1\%}=5000$,结合近视率条形图得该地区高中生近视人数为 $5000\times50\%=2500$.故选 B.]

考向 2　**典例 3**　**A**　[由题意,田径队男、女队员的比例为 48∶36=4∶3,

用分层随机抽样的方法从全体运动员中抽取一个容量为 21 的样本,设男运动员为 $4x$ 名,则女运动员为 $3x$ 名,故 $4x+3x=21$,解得 $x=3$,即男运动员 12 名,女运动员 9 名,

故该田径队运动员的平均身高大约为$\frac{177.5\times12+168.4\times9}{21}=173.6$ (cm).故选 A.]

跟进训练

2.(1)**D**　(2)6　[(1)根据分层随机抽样的定义,高三年级抽取的学生$\frac{800}{1600}\times32=16$ 人,A 错误;分层随机抽样中每个个体被抽取的概率相等,均为$\frac{32}{1600}=\frac{1}{50}$,B,C 错误;平均身高为$\frac{1600}{3500}\times160+\frac{1100}{3500}\times165+\frac{800}{3500}\times170\approx163.9$(cm),D 正确.故选 D.

(2)因为"泥塑"社团的人数占总人数的$\frac{3}{5}$,

故"剪纸"社团的人数占总人数的$\frac{2}{5}$,

所以抽取的 50 人的样本中,"剪纸"社团中的人数为 $50\times\frac{2}{5}=20$.

又"剪纸"社团中高二年级人数比例为$\frac{y}{x+y+z}=\frac{3}{2+3+5}=\frac{3}{10}$,

所以从高二年级"剪纸"社团中应抽取 $20\times\frac{3}{10}=6$ 人.]

考点三

典例 4　(1)**B**　(2)**ABD**　(3)**ABD**　[(1)志愿者的总人数为$\frac{20}{(0.24+0.16)\times1}=50$,

所以第三组人数为 $50\times0.36=18$,有疗效的人数为 $18-6=12$.故选 B.

(2)从题图可知,2 班的植树量少于 1 班,8 班的植树量少于 7 班,故 A 正确;4 班的植树量为 10 棵,11 个班中只有 2 班、3 班、8 班三个班的植树量少于 10 棵且大于 5 棵,其余 7 个班的植树量都超过 10 棵,且有 6 班、7 班、9 班、10 班、11 班五个班的植树量都不少于 15 棵,所以 4 班植树的量低于 11 个班的平均值,故 B 正确;比 6 班植树量多的只有 9 班、10 班、11 班三个班,其余七个班都比 6 班少,故 6 班的植树量不是中位数,故 C 是错误的;1～5 班的植树量的极差在 10 以内,6～11 班的植树量的极差超过了 15,另外从题图明显看出,1～5 班的植树量相对于 6～11 班,波动更小,故 D 正确.故选 ABD.

(3)对于选项 A,芯片、软件行业从业者中"90 后"占总人数的 55%,故选项 A 正确;

对于选项 B,芯片、软件行业中,从事技术、设计岗位的"90 后"占总人数的$(37\%+13\%)\times55\%=27.5\%$,故选项 B 正确;

对于选项 C,芯片、软件行业中,从事技术岗位的"90 后"占总人数的 $37\%\times55\%=20.35\%$,但从事技术岗位的"80 后"占总人数的百分比不知道,无法确定二者人数多少,故选项 C 错误;

对于选项D,芯片、软件行业中,从事市场岗位的“90后”占总人数的 $14\%\times55\%=7.7\%$,“80前”占总人数的 5%,故选项D正确.故选ABD.]

跟进训练

3.(1)**ABC** (2)90 [(1)每周购买新式茶饮的消费者占比为 $1-9.1\%>90\%$,A正确;每天购买新式茶饮的消费者占比为 $5.4\%+16.4\%>20\%$,B正确;月均消费50~200元的消费者占比为 $30.5\%+25.6\%>50\%$,C正确;月均消费超过100元的消费者占比为 $1-14.5\%-30.5\%<60\%$,D错误.故选ABC.

(2)样本中产品净重小于100克的频率为 $(0.050+0.100)\times2=0.3$,频数为36,∴样本总数为 $\frac{36}{0.3}=120$.

∵样本中净重大于或等于98克并且小于104克的产品的频率为 $(0.100+0.150+0.125)\times2=0.75$,∴样本中净重大于或等于98克并且小于104克的产品的个数为 $120\times0.75=90$.]

第2课时 用样本估计总体

梳理·必备知识

1.(1)$p\%$ $(100-p)\%$ (2)小 大 $n\times p\%$ j i $(i+1)$ (3)第25百分位数、第50百分位数、第75百分位数 25 75

2.$\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 最中间的一个数据 最中间两个数据的平均数 多

3.(1)$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\overline{x}^2$ $\sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$

(4)$\frac{m}{m+n}\overline{x}+\frac{n}{m+n}\overline{y}$ $\frac{1}{m+n}\{m[s_1^2+(\overline{x}-\overline{w})^2]+n[s_2^2+(\overline{y}-\overline{w})^2]\}$

激活·基本技能

一、(1)√ (2)× (3)√ (4)√

二、1.**A** [在频率分布直方图中,中位数两侧小矩形的面积和相等,平均数可以用每个小矩形底边中点的横坐标与小矩形的面积之和近似代替,结合两个频率分布直方图得:a 为中位数,b 为平均数,c 为平均数,d 为中位数.故选A.]

2.13.7,14.7,15.3 [将12个数据从小到大排序:13,13.5,13.6,13.8,14,14.6,14.8,15,15.2,15.4,15.7,15.8.

由 $i=12\times25\%=3$,得所给数据的第25百分位数是第3个数据与第4个数据的平均数,即 $\frac{13.6+13.8}{2}=13.7$;

由 $i=12\times50\%=6$,得所给数据的第50百分位数是第6个数据与第7个数据的平均数,即 $\frac{14.6+14.8}{2}=14.7$;

由 $i=12\times75\%=9$,得所给数据的第75百分位数是第9个数据和第10个数据的平均数,即 $\frac{15.2+15.4}{2}=15.3$.]

3.48 4 [设该组数据为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,

则新数据为 $x_1+20,x_2+20,\cdots,x_n+20$,记新数据的平均数为 $\overline{x}'$,

因为 $\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=28$,

所以 $\overline{x}'=\frac{x_1+20+x_2+20+\cdots+x_n+20}{n}=20+28=48$.

因为 $s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$,

所以 $s'^2=\frac{1}{n}\{[x_1+20-(\overline{x}+20)]^2+[x_2+20-(\overline{x}+20)]^2+\cdots+[x_n+20-(\overline{x}+20)]^2\}=s^2=4$.]

4.90.2 4.76 [样本均值 $\overline{a}=\frac{12\times91+8\times89}{12+8}=90.2$,样本方差 $s^2=\frac{12\times[3+(91-90.2)^2]+8\times[5+(89-90.2)^2]}{12+8}=4.76$.]

考点一

典例1 (1)**D** (2)124.44 [(1)由题意,该数据已经从小到大排列,$10\times50\%=5$,$10\times75\%=7.5$,∴第50百分位数为 $\frac{162+163}{2}=162.5$,第75百分位数为165.故选D.

(2)由频率分布直方图可知,分数在120分以下的学生所占的比例为 $(0.01+0.015+0.015+0.03)\times10\times100\%=70\%$,分数在130分以下的学生所占的比例为 $(0.01+0.015+0.015+0.03+0.022\,5)\times10\times100\%=92.5\%$,

因此,第80百分位数一定位于[120,130)内.

因为 $120+\frac{0.80-0.70}{0.925-0.70}\times10\approx124.44$,

所以此班的模拟考试成绩的第80百分位数约为124.44.]

跟进训练

1.(1)**A** (2)**C** [(1)因为 $8\times65\%=5.2$,所以这组数据的第65百分位数是第6项数据4.5,所以应有5个数不大于4.5,则 $x\geqslant4.5$.故选A.

(2)由 $10\times0.01=0.1<0.25$,$10\times0.01+10\times0.02=0.3>0.25$,

故第25百分位数位于[40,50)内,

则第25百分位数为 $40+\frac{0.25-0.1}{0.3-0.1}\times10=47.5$,

可以估计该地区学生每天体育活动时间的第25百分位数约为47.5.故选C.]

考点二

典例2 **解**:(1)由频率分布直方图的性质得:

$(0.005\,0+0.007\,5+x+0.012\,5+0.015\,0)\times20=1$,

解得 $x=0.010\,0$.

(2)由频率分布直方图能求出:

得分落在[0,20]内的参赛选手的人数为 $20\times0.005\,0\times20=2$,

得分落在(20,40]内的参赛选手的人数为 $20\times0.007\,5\times20=3$.

(3)估计所有参赛选手得分的平均数为

$0.005\,0\times20\times10+0.007\,5\times20\times30+0.015\,0\times20\times50+0.012\,5\times20\times70+0.010\,0\times20\times90=56$.

设所有参赛选手得分的中位数为 a，

则 $0.0050\times20+0.0075\times20+0.0150\times(a-40)=0.5$，

解得 $a=\frac{170}{3}$，所有参赛选手得分的众数估计值为 $\frac{40+60}{2}=50$.

跟进训练

2.(1)**C** (2)中位数 [(1)由给定的平均差公式可知：数据越集中于平均值附近，平均差越小. 甲、乙两图的纵坐标表示 $\frac{频率}{组距}$，对应数据落在此处的概率. 甲图中，不同组距区间的概率相差不大，即数据较为均匀地分布在各区间，而乙图数据较为集中地分布在乙图最高处值的区间，在其他区间分布的比较少，故乙图平均差比较小. 故选 C.

(2)因为 7 名获奖者的分数肯定是前 7 名，所以把 13 个不同的分数按从小到大排序，只要知道自己的分数和中位数就可以知道是否获奖了.]

考点三

考向 1 典例 3 BD [依题意，甲队队员体重的平均数 $\overline{x_1}=60$，乙队队员体重的平均数 $\overline{x_2}=68$，而甲、乙两队的队员人数之比为 1∶3，所以甲队队员在所有队员中所占比重为 $\frac{1}{4}$，乙队队员在所有队员中所占比重为 $\frac{3}{4}$，故甲、乙两队全部队员的体重的平均数为：$\overline{x}=60\times\frac{1}{4}+68\times\frac{3}{4}=66$.

甲、乙两队全部队员的体重的方差为：$s^2=\frac{1}{4}\times[200+(60-66)^2]+\frac{3}{4}\times[300+(68-66)^2]=59+228=287$. 故选 BD.]

考向 2 典例 4 解：(1)由题意，求出 z_i 的值如表所示，

试验序号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_i	9	6	8	-8	15	11	19	18	20	12

则 $\overline{z}=\frac{1}{10}\times(9+6+8-8+15+11+19+18+20+12)=11$，

$s^2=\frac{1}{10}\times[(9-11)^2+(6-11)^2+(8-11)^2+(-8-11)^2+(15-11)^2+(11-11)^2+(19-11)^2+(18-11)^2+(20-11)^2+(12-11)^2]=61$.

(2)因为 $2\sqrt{\frac{s^2}{10}}=2\sqrt{6.1}=\sqrt{24.4}$，$\overline{z}=11=\sqrt{121}>\sqrt{24.4}$，

所以可认为甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率有显著提高.

跟进训练

3.(1)**B** (2)**A** (3)4 1.5 [(1)根据题意，数据 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6 中，平均数 $\overline{x}=5$，方差 $s^2=9$，

则 $s^2=\frac{1}{6}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2)-\overline{x}^2=9$，所以 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2=204$，故选 B.

(2)因为某 7 个数的平均数为 4，所以这 7 个数的和为 $4\times7=28$. 因为加入一个新数据 4，所以 $\overline{x}=\frac{28+4}{8}=4$. 又因为这 7 个数的方差为 2，且加入一个新数据 4，所以这 8 个数的方差 $s^2=\frac{7\times2+(4-4)^2}{8}=\frac{7}{4}<2$. 故选 A.

(3)由高中三个年级学生的总样本平均数为 4.1，

可得 $\frac{40\times5+30\cdot\overline{x}_2+30\times3}{40+30+30}=4.1$，解得 $\overline{x}_2=4$.

因为总样本方差为 3.14，

所以 $\frac{40}{100}\times[3.5+(5-4.1)^2]+\frac{30}{100}\times[2+(4-4.1)^2]+\frac{30}{100}\times[s_3^2+(3-4.1)^2]=3.14$，解得 $s_3^2=1.5$.]

第 3 课时 成对数据的统计分析

梳理・必备知识

1.有关系

2.(1)正 负 增加 减少 (2)线性 非线性 一条直线 线性

3.(2) $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$

$\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2}}$ (3)$[-1,1]$ 正 负 1 0

4.(1)因变量 响应变量 自变量 解释变量 a b Y $bx+a$ 0

(2) $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$ $\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}$

5.(1)窄 (2)$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$ 小 (3)好 差

6.(1)$\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ (2)独立

激活・基本技能

一、(1)√ (2)× (3)√ (4)× (5)×

二、1.**D** [观察散点图可知，只有 D 选项的散点图表示的是变量 x 与 y 之间具有负的线性相关关系.]

2.**B** [∵测得 (x,y) 的四组值分别为 $(1,2),(2,0),(4,-4),(-1,6)$，∴$\overline{x}=1.5$，$\overline{y}=1$，$\sum_{i=1}^{4}x_i^2=22$，$\sum_{i=1}^{4}y_i^2=56$，$\sum_{i=1}^{4}x_iy_i=-20$，样本相关系数 $r=\frac{-20-4\times1.5\times1}{\sqrt{(22-4\times1.5^2)(56-4\times1^2)}}=-1$. 故选 B.]

3.60.316 [当 $x=172$ 时，$\hat{y}=0.849\times172-85.712=60.316$.]

4.22.2 0.001 [由 $20+m=40$，得 $m=20$.

由 $20+n=25$，得 $n=5$.

故 $\chi^2=\dfrac{100\times(20\times55-20\times5)^2}{40\times60\times25\times75}\approx22.2>10.828=x_{0.001}$.

所以在犯错误的概率不超过 0.001 的前提下认为患肺癌与吸烟有关.]

考点一

典例1 (1)**AC** (2)**B** [(1)由散点图可知,线性相关系数 r_1 的图象表示 y 与 x 成负相关,故 $-1<r_1<0$,故 A 正确;线性相关系数 r_2 的图象表示 y 与 x 正相关,故 $0<r_2<1$,故 B 错误;∵线性相关系数 r_2 的点较线性相关系数 r_1 的点密集,故 $|r_2|>|r_1|$,故 $r_1+r_2>0$,故 C 正确,D 错误.故选 AC.

(2)因 2009 年之前与 2010 年之后投资额变化较大,故为预测该地 2022 年的环境保护建设投资额,应用 2010 年至 2021 年的数据建立回归模型更可靠,所以 A 错误,B 正确;随年份的增长,投资额总体上在增长,所以投资额与年份正相关,$r>0$,故 C,D 错误.故选 B.]

跟进训练

1.(1)**A** (2)$\dfrac{3}{4}$ [(1)所有样本点均在同一条斜率为负数的直线上,则样本相关系数最小,为-1.

(2)由 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$,得 $r=\dfrac{3}{4}$.]

考点二

考向1 典例2 解:(1)因为 $\bar{t}=4$,$\sum\limits_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})^2=28$,$\sum\limits_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})=42.1$,$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}=8.1$,

所以 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})^2\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}}\approx\dfrac{42.1}{2\times2.65\times8.1}\approx0.98$.

因为交易额 y 与 t 的相关系数近似为 0.98,说明交易额 y 与 t 具有很强的正线性相关关系,

从而可用线性回归模型拟合交易额 y 与 t 的关系.

(2)因为 $\bar{y}=\dfrac{35}{7}=5$,$\sum\limits_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})^2=28$,

所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})^2}=\dfrac{42.1}{28}\approx1.5$,

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}\approx5-1.5\times4=-1$,所以 y 关于 t 的经验回归方程为 $\hat{y}=1.5t-1$,

将 $t=8$ 代入经验回归方程得 $\hat{y}=1.5\times8-1=11$(千万元)$=1.1$(亿元),

所以预测 6 月 8 日的交易额为 1.1 亿元.

考向2 典例3 解:(1)由散点图可知:$\hat{y}=\hat{c}+\dfrac{\hat{d}}{x}$ 更适宜作为 y 关于 x 的经验回归方程类型;

令 $w=\dfrac{1}{x}$,则 $\hat{d}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}(w_i-\bar{w})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{7}(w_i-\bar{w})^2}=\dfrac{2.75}{0.55}=5$,$\hat{c}=\bar{y}-\hat{d}\bar{w}=4.6-5\times0.37=2.75$,

∴y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=2.75+\dfrac{5}{x}$.

(2)设收发 x 千件快递获利 z 千元,则 $z=(t-y)x=\left(\dfrac{59-x^2}{4}-\dfrac{5}{x}-2.75\right)x$

$=-\dfrac{x^3}{4}+12x-5(1\leqslant x\leqslant6)$.

①当 $x=2$ 时,$z=17$,即该网点某天揽收 2 000 件快递可获得的总利润约为 17 000 元.

②$z'=-\dfrac{3}{4}x^2+12$,令 $z'=0$,解得 $x=4$.

∴当 $x\in[1,4)$ 时,$z'>0$;当 $x\in(4,6]$ 时,$z'<0$.

∴z 在$[1,4)$上单调递增,在$(4,6]$上单调递减,

∴当 $x=4$ 时,$z_{\max}=27$,此时 $t=10.75$.

∴单件快递的平均价格 $t=10.75$ 元时,该网点一天内收发快递所获利润的预报值最大.

跟进训练

2.**解**:(1)由题意可知

$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{557}{84}\approx6.6$,

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=33-6.6\times26=-138.6$.

∴y 关于 x 的经验回归方程是 $\hat{y}=6.6x-138.6$.

(2)①用指数回归模型拟合 y 与 x 的关系,决定系数 $R^2=0.967\,2$,

线性回归模型拟合 y 与 x 的关系,决定系数 $R^2=1-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{6}(y_i-\bar{y})^2}=1-\dfrac{236.64}{3\,930}\approx0.939\,8$,且 $0.939\,8<0.967\,2$,

∴用 $\hat{y}=0.06e^{0.230\,3x}$ 比 $\hat{y}=6.6x-138.6$ 拟合效果更好.

②$\hat{y}=0.06e^{0.230\,3x}$ 中,令 $x=35$,

则 $\hat{y}=0.06e^{0.230\,3\times35}=0.06e^{8.060\,5}\approx0.06\times3\,167\approx190$,

故预测温度为 35 ℃时昆虫产卵数约为 190 个.

考点三

典例4 解:(1)根据表中数据,A 家公司共有班次 260 次,准点班次有 240 次,设 A 家公司长途客车准点事件为 M,

则 $P(M)=\dfrac{240}{260}=\dfrac{12}{13}$.

B 家公司共有班次 240 次,准点班次有 210 次,

设 B 家公司长途客车准点事件为 N,

则 $P(N)=\dfrac{210}{240}=\dfrac{7}{8}$.

所以估计 A 家公司长途客车准点的概率为 $\dfrac{12}{13}$,

B 家公司长途客车准点的概率为 $\dfrac{7}{8}$.

(2)补充列联表如下：

运营公司	班次数		合计
	准点	未准点	
A	240	20	260
B	210	30	240
合计	450	50	500

零假设为 H_0：甲、乙两城之间的长途客车是否准点与客车所属公司无关. 根据 2×2 列联表，可得

$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$=\dfrac{500\times(240\times30-210\times20)^2}{260\times240\times450\times50}\approx3.205>2.706=x_{0.1}$.

根据小概率值 $\alpha=0.1$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为甲、乙两城之间的长途客车是否准点与客车所属公司有关.

跟进训练

3. **解**：(1)根据抽查数据，该市 100 天空气中的 $PM_{2.5}$ 浓度不超过 75，且 SO_2 浓度不超过 150 的天数为 32+18+6+8=64，因此，该市一天空气中 $PM_{2.5}$ 浓度不超过 75，且 SO_2 浓度不超过 150 的概率的估计值为 $\dfrac{64}{100}=0.64$.

(2)根据抽查数据，可得 2×2 列联表：

$PM_{2.5}$浓度	SO_2 浓度	
	[0,150]	(150,475]
[0,75]	64	16
(75,115]	10	10

(3)零假设为 H_0：该市一天空气中 $PM_{2.5}$浓度与 SO_2 浓度无关，则

$\chi^2=\dfrac{100\times(64\times10-16\times10)^2}{80\times20\times74\times26}\approx7.484$.

由于 $7.484>6.635=x_{0.01}$，所以依据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，

即认为该市一天空气中 $PM_{2.5}$ 浓度与 SO_2 浓度有关.

第 4 课时　概率、统计的综合问题

考点一

典例 1　**解**：(1)能卖出 3 件水牛奶的概率为 $\dfrac{10}{50}=\dfrac{1}{5}$，能卖出 3 件以下的概率为 $\dfrac{4}{5}$，

∴三天中至少有 2 天能卖出 3 件水牛奶的概率为 $C_3^2\left(\dfrac{1}{5}\right)^2\times\dfrac{4}{5}+C_3^3\left(\dfrac{1}{5}\right)^3=\dfrac{13}{125}$.

(2)①若第一天营业结束后不补货，情况为 $A=\{$销售 0 件$\}$，$B=\{$销售 1 件$\}$，

则 $P(A)=\dfrac{1}{10}$，$P(B)=\dfrac{1}{5}$，

令 $C=\{$第二天货架上有 1 件存货$\}$，

则 $P(C|A)=\dfrac{1}{2}$，$P(C|B)=\dfrac{1}{5}$，

$\therefore P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)=\dfrac{9}{100}$.

②若第一天营业结束后补货，情况为 $D=\{$销售 3 件$\}$，$E=\{$销售 2 件$\}$，则 $P(D)=\dfrac{1}{5}$，$P(E)=\dfrac{1}{2}$，

令 $F=\{$第二天货架上有 1 件存货$\}$，

则 $P(F|D)=\dfrac{1}{2}$，$P(F|E)=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore P(F)=P(D)P(F|D)+P(E)P(F|E)=\dfrac{7}{20}$.

∴第二天营业结束后货架上有 1 件存货的概率为 $\dfrac{9}{100}+\dfrac{7}{20}=\dfrac{11}{25}$.

跟进训练

1. **解**：(1)由 $(0.020+a+0.025+a+0.035)\times10=1$，得 $a=0.010$. $s_1^2>s_2^2$.

(2)甲种无人机中优质率为 0.25+0.1+0.35=0.7，所以甲种无人机中优质产品有 70 架，不是优质产品的有 30 架；乙种无人机中优质率为 0.3+0.2+0.1=0.6，所以乙种无人机中优质产品有 60 架，不是优质产品的有 40 架.

列联表如下：

质量	无人机		合计
	甲	乙	
优质产品	70	60	130
不是优质产品	30	40	70
合计	100	100	200

$\chi^2=\dfrac{200\times(70\times40-60\times30)^2}{130\times70\times100\times100}\approx2.20<3.841=x_{0.05}$，

故依据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，不能推断甲、乙两种无人机的优质率有差异.

(3)计算得：$\bar{x}=5\times0.15+15\times0.25+25\times0.3+35\times0.2+45\times0.1=23.5$，

由条件 $Z\sim N(23.5,142.75)$，

从而 $P(11.6\leqslant Z\leqslant35.4)\approx0.6827$，

故从乙种无人机中随机抽取 1 架，其质量指标值位于[11.6，35.4]的概率是 0.682 7，根据题意得 $X\sim B(10,0.6827)$，

$\therefore E(X)=10\times0.6827=6.827$.

考点二

典例 2　**解**：(1)若一次性购买 5 个甲系列盲盒，得到玩偶的情况总数为 3^5，集齐 A_1，A_2，A_3 玩偶，则有两种情况：

①其中一个玩偶 3 个，其他两个玩偶各 1 个，则有 $C_3^1C_5^3A_2^2$ 种结果.

②若其中两个玩偶各 2 个，另外一个玩偶 1 个，则共有 $C_3^1C_5^1C_4^2$ 种结果.

故 $P(E_5)=\dfrac{C_3^1C_5^3A_2^2+C_3^1C_5^1C_4^2}{3^5}=\dfrac{60+90}{243}=\dfrac{50}{81}$.

若一次性购买 4 个乙系列盲盒，全部为 B_1 与全部为 B_2 的概

率相等,均为$\frac{1}{2^4}$,

故 $P(F_4)=1-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^4}=\frac{7}{8}$.

(2)①由题可知:$Q_1=\frac{2}{3}$,

当 $n\geqslant 2$ 时,$Q_n=\frac{1}{4}Q_{n-1}+\frac{1}{2}(1-Q_{n-1})=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}Q_{n-1}$,则

$Q_n-\frac{2}{5}=-\frac{1}{4}\left(Q_{n-1}-\frac{2}{5}\right)$,$Q_1-\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$,即$\left\{Q_n-\frac{2}{5}\right\}$是

以$\frac{4}{15}$为首项,以$-\frac{1}{4}$为公比的等比数列.

所以 $Q_n-\frac{2}{5}=\frac{4}{15}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$,

即 $Q_n=\frac{2}{5}+\frac{4}{15}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

②因为每天购买盲盒的 100 人都已购买过很多次,

所以对于每一个人来说,某一天来购买盲盒时,

可看作 $n\to+\infty$,所以,其购买甲系列的概率近似于$\frac{2}{5}$,

假设用 ξ 表示一天中购买甲系列盲盒的人数,

则 $\xi\sim B\left(100,\frac{2}{5}\right)$,所以 $E(\xi)=100\times\frac{2}{5}=40$,

即购买甲系列的人数的期望为 40,

所以该柜台应准备甲系列盲盒 40 个,乙系列盲盒 60 个.

跟进训练

2.**解**:(1)由题意可知 X 所有可能的取值为$-1,0,1$.

$P(X=-1)=(1-\alpha)\beta$;

$P(X=0)=\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)$;

$P(X=1)=\alpha(1-\beta)$.

则 X 的分布列为

X	-1	0	1
P	$(1-\alpha)\beta$	$\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)$	$\alpha(1-\beta)$

(2)$\because\alpha=0.5,\beta=0.8$,

$\therefore a=0.5\times0.8=0.4,b=0.5\times0.8+0.5\times0.2=0.5,c=0.5\times0.2=0.1$.

①**证明**:$\because p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}(i=1,2,\cdots,7)$,

即 $p_i=0.4p_{i-1}+0.5p_i+0.1p_{i+1}(i=1,2,\cdots,7)$,

整理可得:$5p_i=4p_{i-1}+p_{i+1}(i=1,2,\cdots,7)$,

$\therefore p_{i+1}-p_i=4(p_i-p_{i-1})(i=1,2,\cdots,7)$,

又$\because p_1-p_0=p_1\neq0$,

$\therefore\{p_{i+1}-p_i\}(i=0,1,2,\cdots,7)$是以 p_1 为首项,4 为公比的等比数列.

②由①知:$p_{i+1}-p_i=(p_1-p_0)\cdot4^i=p_1\cdot4^i$,

$\therefore p_8-p_7=p_1\cdot4^7,p_7-p_6=p_1\cdot4^6,\cdots,p_1-p_0=p_1\cdot4^0$.

作和可得:$p_8-p_0=p_1\cdot(4^0+4^1+\cdots+4^7)=\frac{1-4^8}{1-4}p_1=\frac{4^8-1}{3}p_1=1$,$\therefore p_1=\frac{3}{4^8-1}$,

$\therefore p_4=p_4-p_0=p_1\cdot(4^0+4^1+4^2+4^3)=\frac{1-4^4}{1-4}p_1=\frac{4^4-1}{3}\times\frac{3}{4^8-1}=\frac{1}{4^4+1}=\frac{1}{257}$,

p_4 表示最终认为甲药更有效的概率.由计算结果可以看出,在甲药治愈率为 0.5,乙药治愈率为 0.8 时,认为甲药更有效的概率为 $p_4=\frac{1}{257}\approx0.003\ 9$,此时得出错误结论的概率非常小,说明这种实验方案合理.

考点三

跟进训练

3.**解**:(1)$E(X)=0\times0.4+1\times0.3+2\times0.2+3\times0.1=1$.

(2)**法一**(常规求导):

$p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3-x=0,x>0$,

令 $f(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3-x,f'(x)=p_1+2p_2x+3p_3x^2-1$,

$f''(x)=2p_2+6p_3x\geqslant0$,$\therefore f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

当 $E(X)=p_1+2p_2+3p_3\leqslant1$ 时,注意到 $x\in(0,1]$时,

$f'(x)\leqslant f'(1)=p_1+2p_2+3p_3-1\leqslant0$,

$\therefore f(x)$在$(0,1]$上单调递减,注意到 $f(1)=0$,$\therefore x=1$,即 $p=1$.

当 $E(X)=p_1+2p_2+3p_3>1$ 时,注意到$f'(0)=p_1-1<0$,

$f'(1)=p_1+2p_2+3p_3-1>0$,

$\therefore$存在唯一的 $x_0\in(0,1)$使 $f'(x_0)=0$,且当 $0<x<x_0$ 时,$f'(x)<0,f(x)$单调递减,

当 $x_0<x<1$ 时,$f'(x)>0,f(x)$单调递增,

注意到 $f(0)=p_0>0,f(1)=0$,$\therefore f(x_0)<f(1)=0$.

$\therefore f(x)$在$(0,x_0)$上有一个零点 x_1,另一个零点为 1,$\therefore p=x_1<1$.

法二(巧妙因式分解):

由题意知 $p_0+p_1+p_2+p_3=1,E(X)=p_1+2p_2+3p_3$,

由 $p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3=x\Rightarrow p_0+p_2x^2+p_3x^3-(1-p_1)x=0$,

$\therefore p_0+p_2x^2+p_3x^3-(p_0+p_2+p_3)x=0\Rightarrow p_0(1-x)+p_2x(x-1)+p_3x(x-1)(x+1)=0$,

$(x-1)[p_3x^2+(p_2+p_3)x-p_0]=0$,

令 $f(x)=p_3x^2+(p_2+p_3)x-p_0$,$f(x)$的对称轴为 $x=-\frac{p_2+p_3}{2p_3}<0$,

注意到 $f(0)=-p_0<0,f(1)=2p_3+p_2-p_0=p_1+2p_2+3p_3-1=E(X)-1$,

当 $E(X)\leqslant1,f(1)\leqslant0$,$f(x)$的正实根 $x_0\geqslant1$,原方程的最小正实根 $p=1$,

当 $E(X)>1,f(1)>0$,$f(x)$的正实根 $x_0<1$,原方程的最小正实根 $p=x_0<1$.

(3)当 1 个微生物个体繁殖下一代的期望小于等于 1 时,这种微生物经过多代繁殖后临近灭绝;当 1 个微生物个体繁殖下一代的期望大于 1 时,这种微生物经过多代繁殖后还有继续繁殖的可能.

高考研究在线 9　从高考概率与统计试题探寻高考改革动向

命题点一

典例 1　**解**:(1)平均年龄 $\overline{x}=(5\times0.001+15\times0.002+25\times0.012+35\times0.017+45\times0.023+55\times0.020+65\times0.017+75\times0.006+85\times0.002)\times10=47.9$(岁).

(2)设 $A=\{$一人患这种疾病的年龄在区间$[20,70)\}$,则 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-(0.001+0.002+0.006+0.002)\times10=1-0.11=0.89$.

(3)设 $B=\{$任选一人年龄位于区间$[40,50)\}$,$C=\{$任选一人患这种疾病$\}$,则由条件概率公式,

得 $P(C|B)=\dfrac{P(BC)}{P(B)}=\dfrac{0.1\%\times0.023\times10}{16\%}=0.001\ 437\ 5\approx0.001\ 4$.

跟进训练

1.**解**:(1)由题知 40～50 岁年龄组的频率为

$1-(0.010+0.015+0.020+0.025)\times10=0.30$,

故该组 100 名志愿者的平均年龄

$\overline{x}=10\times(25\times0.015+35\times0.025+45\times0.030+55\times0.020+65\times0.010)=43.5$(岁).

由直方图知前三组频率之和为 0.7,第四组频率为 0.2,

故第 75 百分位数应在第四组,则第 75 百分位数为 $50+\dfrac{0.75-0.7}{0.9-0.7}\times10=52.5$(岁).

(2)由题知 A,B,C 三人被分配到试验组的概率相同,设为 $p\left(p>\dfrac{1}{2}\right)$,

则分配到对照组的概率为 $1-p$,

用 A,B,C 分别表示 A,B,C 被分配到试验组,$\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 分别表示 A,B,C 被分配到对照组.

设 p_1 表示 A,B 两人恰有一人被分配到试验组的概率,由于三人的分组相互独立,

则 $p_1=P(A\cdot\overline{B})+P(\overline{A}\cdot B)=2p(1-p)=\dfrac{12}{25}$,

因为 $p>\dfrac{1}{2}$,解得 $p=\dfrac{3}{5}$,

故试验组人数为 $100\times\dfrac{3}{5}=60$(人).

设 p_2 表示三人中至少有两人被分配到试验组的概率,

则 $p_2=P(ABC)+P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)$

$=\left(\dfrac{3}{5}\right)^3+3\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{81}{125}$.

命题点二

典例 2　**解**:(1)零假设 H_0:患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯无差异.

$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$=\dfrac{200\times(40\times90-60\times10)^2}{50\times150\times100\times100}$

$=24>6.635=x_{0.010}$,

依据小概率值 $\alpha=0.010$ 的独立性检验,推断 H_0 不成立,即认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异.

(2)①$R=\dfrac{\dfrac{P(B|A)}{P(\overline{B}|A)}}{\dfrac{P(B|\overline{A})}{P(\overline{B}|\overline{A})}}=\dfrac{P(B|A)\cdot P(\overline{B}|\overline{A})}{P(\overline{B}|A)\cdot P(B|\overline{A})}$,

由题意知,证明 $\dfrac{P(B|A)\cdot P(\overline{B}|\overline{A})}{P(\overline{B}|A)\cdot P(B|\overline{A})}=\dfrac{P(A|B)\cdot P(\overline{A}|\overline{B})}{P(\overline{A}|B)\cdot P(A|\overline{B})}$ 即可,

左边$=\dfrac{\dfrac{P(AB)}{P(A)}\cdot\dfrac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{A})}}{\dfrac{P(A\overline{B})}{P(A)}\cdot\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}}$

$=\dfrac{P(AB)\cdot P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(A\overline{B})\cdot P(\overline{A}B)}$,

右边$=\dfrac{\dfrac{P(AB)}{P(B)}\cdot\dfrac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{B})}}{\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(B)}\cdot\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}}$

$=\dfrac{P(AB)\cdot P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{A}B)\cdot P(A\overline{B})}$,

左边=右边,故 $R=\dfrac{P(A|B)}{P(\overline{A}|B)}\cdot\dfrac{P(\overline{A}|\overline{B})}{P(A|\overline{B})}$.

②由已知 $P(A|B)=\dfrac{40}{100}$,$P(A|\overline{B})=\dfrac{10}{100}$,

又 $P(\overline{A}|B)=\dfrac{60}{100}$,$P(\overline{A}|\overline{B})=\dfrac{90}{100}$,

所以 $R=\dfrac{P(A|B)}{P(\overline{A}|B)}\cdot\dfrac{P(\overline{A}|\overline{B})}{P(A|\overline{B})}=6$.

跟进训练

2.**解**:(1)由条件概率公式可得 $P(A_2|\overline{A_1})=\dfrac{P(\overline{A_1}A_2)}{P(\overline{A_1})}=\dfrac{\dfrac{4\times3}{7\times6}}{\dfrac{4}{7}}=\dfrac{1}{2}$,所以在第一次摸到蓝球的条件下,第二次摸到红球的概率为 $\dfrac{1}{2}$.

(2)①由条件概率乘法公式

$P(A_3|A_1A_2)=\dfrac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)}$,可得

$P(A_1A_2A_3)=P(A_1A_2)P(A_3|A_1A_2)$,

由 $P(A_2|A_1)=\dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}$,可得 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)$,

所以 $P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)$.

②由①可得 $P(A_3)=P(A_1A_2A_3)+P(\overline{A_1}A_2A_3)+P(A_1\overline{A_2}A_3)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)$

$=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A_1}A_2)+P(A_1)P(\overline{A_2}|A_1)P(A_3|A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A_1}\,\overline{A_2})$

$=\dfrac{3}{7}\times\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{4}{7}\times\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{7}\times\dfrac{4}{6}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{4}{7}\times\dfrac{3}{6}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{7}$,所以 $P(A_3)=\dfrac{3}{7}$.