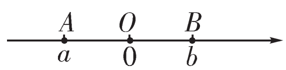
参考答案

专题一　有理数及有理数的运算

第1讲　利用数轴解决与相反数、绝对值有关的问题

例一　-1　1　**【解析】**因为 $a+b=0$，所以 $a=-b$，即 a 与 b 互为相反数. 所以原点 O 为 AB 的中点，如下图.



因为 $AB=2$，所以 $AO=BO=1$. 因为点 A 在原点 O 的左侧，点 B 在原点 O 的右侧，所以点 A 表示的数为 -1，点 B 表示的数为 1.

【点拨】熟练掌握相反数的性质是解决本题的关键. 代数上：互为相反数的两个数之和为 0，和为 0 的两个数互为相反数. 几何上：互为相反数的两个数到原点的距离相等，即原点是表示互为相反数的两个数的点的中点.

变式训练一

1. 解：（1）因为点 A，B 表示的数互为相反数，

所以原点 O 是线段 AB 的中点，如图 1.

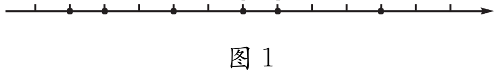


图 1

因为数轴的单位长度为 1，

所以点 A，B，C，D，E 表示的数分别是 -3，3，-1，-6，-5.

（2）如果点 E，C 表示的数互为相反数，那么原点 O 是线段 EC 的中点，即点 A，如图 2.

图 2

因为数轴的单位长度为 1，

所以点 A 表示的数为 0；

点 B 表示的数为 6；

点 C 表示的数为 2；

点 D 表示的数为 -3；

点 E 表示的数为 -2.

所以这五个数的乘积为 $0\times6\times2\times(-3)\times(-2)=0$，

即点 A，B，C，D，E 表示的数的乘积是 0.

2. （1）2　C　**【解析】**因为点 A 表示的数为 -4，点 G 表示的数为 8，所以 $AG=8-(-4)=12$. 因为相邻两点之间的距离都相等，点 A 与点 G 之间间隔为 6 段，所以相邻两点之间的距离为 $12\div6=2$. 因为点 D 与点 A 之间间隔为 3 段，所以点 D 表示的数为 $-4+2\times3=2$. 因为 $-4+2\times2=0$，所以原点与点 A 之间间隔为 2 段，所以原点是点 C.

（2）D　**【解析】**由（1）可知，原点

是点 C. 因为点 B 与点 C 之间间隔 1 段，点 D 与点 C 之间间隔 1 段，所以与点 B 表示的数互为相反数的点是点 D.

(3) **解：** 由 (1) 知，$AG=12$.

①当点 M 在点 A 的左侧时，如图 1.

图 1

因为 $MA+MG=MA+MA+AG=2MA+AG$,

所以 $2MA+12=14$.

所以 $MA=1$.

因为点 A 表示的数为 -4,

所以点 M 表示的数为 $-4-1=-5$.

②当点 M 在线段 AG 上时，如图 2.

图 2

此时 $MA+MG=AG$.

因为 $AG=12<14$,

所以点 M 不可能在线段 AG 上.

③当点 M 在点 G 的右侧时，如图 3.

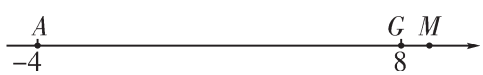


图 3

因为 $MA+MG=MG+GA+MG=2MG+AG$,

所以 $2MG+12=14$.

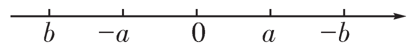
所以 $MG=1$.

因为点 G 表示的数为 8,

所以点 M 表示的数为 $8+1=9$.

综上所述，点 M 表示的数为 -5 或 9.

例二　B　**【解析】** 因为 a 与 $-a$，b 与 $-b$ 互为相反数，所以 a 与 $-a$ 关于原点 O 对称，b 与 $-b$ 关于原点 O 对称. 在数轴上标出 $-a$，$-b$，如下图所示.

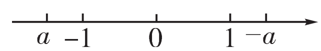


因为数轴上左边的数小于右边的数，所以 $b<-a<a<-b$.

【点拨】 代数上两个数的大小关系在数轴上体现为表示这两个数的点的左右位置关系. 数轴上右边的数比左边的数大. 所以在比较大小时，可以借助数轴，从左往右，依次增大.

变式训练二

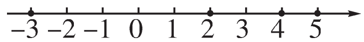
1. A　**【解析】** a 与 $-a$ 互为相反数，到原点的距离相等. 在数轴上标出 $-a$，如下图所示.



所以 $a<1<-a$.

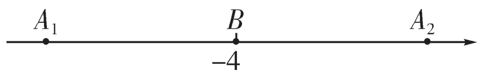
2. C　**【解析】**　由数轴，得 $c<-2$，$0<b<1$，$1<a<2$，所以 $abc<0$，故选项 A 不符合题意；因为 $c<a$，所以 $c-a<0$. 又因为 $b>0$，所以 $(c-a)b<0$，故选项 B 不符合题意；因为 $c<-2$，$0<b<1$，$1<a<2$，所以 $a-b>0$，则 $c(a-b)<0$，故选项 C 符合题意；因为 $c<-2$，$0<b<1$，$1<a<2$，所以 $b+c<0$，则 $(b+c)a<0$，故选项 D 不符合题意. 故选 C.

例三 （1）3　7　**【解析】**画出数轴，如下图所示.



数轴上表示 2 和 5 的两点之间的距离为 $|5-2|=3$. 数轴上表示 -3 和 4 的两点之间的距离为 $|4-(-3)|=7$.

（2）**解**：如图，点 A 可能在点 B 的左侧，也可能在点 B 的右侧.



①当点 A 在点 B 的左侧时，

$AB=|-4-m|=5$. 解得 $m=-9$.

②当点 A 在点 B 的右侧时，

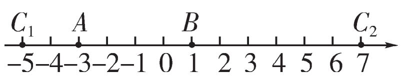
$AB=|m-(-4)|=5$. 解得 $m=1$.

综上所述，m 的值为 -9 或 1.

【点拨】若点 M 表示的数为 m，点 N 表示的数为 n，点 M 在点 N 的右侧（即 $m>n$），则点 M，N 之间的距离 $MN=|m-n|=m-n$.

变式训练三

1. D　**【解析】**因为点 A，B 表示的数分别为 -3，1，若点 B 到点 C 的距离为 6，如下图所示.



①当点 C 在点 B 的左侧时，点 C 表示的数是 $1-6=-5$；

②当点 C 在点 B 的右侧时，点 C 表示的数是 $1+6=7$.

所以点 A 与点 C 的距离 $AC=|-3-(-5)|=2$ 或 $AC=|7-(-3)|=10$. 故选 D.

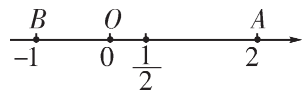
2. 解：（1）$OA=|2-0|=2$.

（2）$OB=|0-(-1)|=1$.

（3）$AB=|2-(-1)|=3$.

（4）线段 AB 的中点表示的数为 $\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$.

表示在数轴上如下图所示.



例四 C　**【解析】**由数轴可知，$b<-1$，$1<a<2$. 所以 $a-b>0$，$a-2<0$，$b+1=b-(-1)<0$. 所以 $|a-b|+|a-2|-|b+1|=a-b+2-a+b+1=3$.

【点拨】$|a|=\begin{cases}a，a>0，\\0，a=0，\\-a，a<0.\end{cases}$ 如果绝对值内为多项式，类似 $|a-b|$，则把绝对值内的部分当作一个整体，根据这个整体的符号的正负情况去绝对值，非负数的绝对值等于它本身，负数的绝对值等于它的相反数.

变式训练四

1. A　**【解析】**由数轴可知，$b<-1$，$1<a<2$，且 $|b|<|a|$. 所以 $a+b>0$，$b+1=b-(-1)<0$. 所以 $|a+b|+|b+1|=a+b-b-1=a-1$. 故选 A.

2. 解：由数轴可知，$b<a<0<c$.

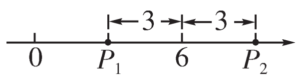
所以 $2a+b<0$，

$2c-b=c+c-b>0$，$c-a>0$.

所以 $|2a+b|-|2c-b|-|c-a|=-(2a+b)-(2c-b)-(c-a)=-2a-b-2c+b-c+a=-a-3c$.

例五 （1）所得距离与这两个数的差的绝对值相等.

（2）$|x+1|$　3 或 9　**【解析】** 由（1）可知，A 与 B 两点之间的距离可以表示为 $|x+1|$. $|x-6|$ 的几何意义：数轴上表示 x 的点与表示 6 的点之间的距离；$|x-6|=3$ 的含义：表示 x 的点到表示 6 的点之间的距离为 3. 分类讨论，该点可能在表示 6 的点的左侧或右侧，如下图.



P_1 表示的数为 $6-3=3$，P_2 表示的数为 $6+3=9$，所以 x 的值为 3 或 9.

（3）数轴上点 B 与表示 3 的点之间的距离　数轴上点 B 与表示 -2 的点之间的距离　**【解析】** $|y-3|$ 的几何意义：数轴上点 B 与表示 3 的点之间的距离. 因为 $|y+2|=|y-(-2)|$，所以 $|y+2|$ 的几何意义：数轴上点 B 与表示 -2 的点之间的距离.

（4）**解：** $|x-2|+|x+1|$ 的几何意义：数轴上表示数 x 的点到表示 2 与 -1 的点的距离之和. 设表示数 -1，2，x 的点分别为 A，B，Q，

则 $|x-2|=BQ$，$|x+1|=AQ$，$|2-(-1)|=3=AB$.

①当点 Q 在线段 AB 的延长线上时，如图 1.

图 1

则 $x>2$.

所以 $|x-2|+|x+1|=BQ+AQ=AB+2BQ>AB$.

即当 $x>2$ 时，$|x-2|+|x+1|>3$.

②当点 Q 在线段 AB 上时，如图 2.

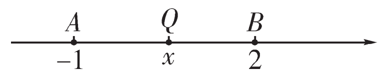


图 2

则 $-1\leqslant x\leqslant 2$.

所以 $|x-2|+|x+1|=BQ+AQ=AB=3$.

所以当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$|x-2|+|x+1|=3$.

③当点 Q 在线段 BA 的延长线上时，如图 3.

图 3

则 $x<-1$.

所以 $|x-2|+|x+1|=BQ+AQ=AB+2AQ>AB$.

所以当 $x<-1$ 时，$|x-2|+|x+1|>3$.

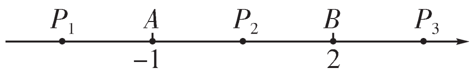
综上所述，$|x-2|+|x+1|$ 的最小值为 3.

【点拨】 借助数轴可以使有关绝对值的

问题转化为数轴上有关距离的问题，反之，数轴上有关距离的问题也可以转化为绝对值问题.

变式训练五

解：记 A，B 两点表示的数分别为 -1，2，点 P 表示的数为 x，如下图所示.



$|x+1|$ 的几何意义为点 P 到点 A 的距离，即 $PA=|x+1|$.

$|x-2|$ 的几何意义为点 P 到点 B 的距离，即 $PB=|x-2|$.

所以 $|x+1|+|x-2|=PA+PB$.

观察数轴可知，当点 P 在点 A 的左侧或点 P 在点 B 的右侧时，$PA+PB>AB$.

当点 P 在线段 AB 上时，$PA+PB=AB=|2-(-1)|=3$，

此时 $-1\leqslant x\leqslant 2$.

培优精练

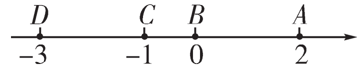
1. C　**【解析】**因为 $a+b=0$，所以原点在 a，b 正中间，如下图所示.

所以 $a<0$，$b>0$，$c>0$，$|a|<|c|$.

所以 $abc<0$，$\dfrac{a}{b}=-1$，$a+c>0$. 故选 C.

2. A　**【解析】**由数轴可知，$0<a<1$. 所以 $a-1<0$. 所以原式 $=1-a+a=1$. 故选 A.

3. C　**【解析】**画出数轴，如下图所示.



A 与 C 之间的距离为 $|2-(-1)|=3$，

A 与 B 之间的距离为 $|2-0|=2$，

B 与 C 之间的距离为 $|0-(-1)|=1$，

B 与 D 之间的距离为 $|0-(-3)|=3$.

所以 B 与 C 之间的距离最小.

4. **解：**因为在数轴上 -2 与 1 所表示的两点之间的距离是 $|1-(-2)|=3$，

所以使得 $|x+2|+|x-1|=3$ 成立的整数是 -2 与 1 之间的所有整数（包括 -2 与 1），

即所有符合条件的整数 x 的取值为 -2，-1，0，1.

名卷压轴题

(1) -1　**【解析】**由题意可知，$OA=|5-0|=5$. 所以 $AB=1.2OA=1.2\times5=6$. 所以 $OB=AB-OA=6-5=1$. 因为点 B 在点 O 的左侧，所以点 B 表示的数为 -1.

(2) 2 或 16　**【解析】**①当点 M 在点 O 的左侧时，如图 1.

图 1

则 $OM=BM+OB=4.5+1=5.5$. 因为点 M 为线段 OC 的中点，所以 $OC=2OM=11$. 所以 $AC=OC+OA=11+5=16$.

②当点 M 在点 O 的右侧时，如图 2.

图 2

则 $OM=BM-OB=4.5-1=3.5$. 因为点 M 为线段 OC 的中点，所以 $OC=2OM=7$. 所以 $AC=OC-OA=7-5=2$.

综上所述，AC 的长为 2 或 16.

(3) **解：**①当点 C 在点 A 的右侧（或重合）时，如图 3.

图 3

则点 C 表示的数为 $5+x$.

因为点 M 为线段 OC 的中点，

所以点 M 表示的数为$\frac{5+x}{2}$.

所以 $BM=\left|\frac{5+x}{2}-(-1)\right|=\frac{7+x}{2}$.

②当点 C 在点 A 的左侧时，则点 C 表示的数为 $5-x$.

因为点 M 为线段 OC 的中点，

所以点 M 表示的数为$\frac{5-x}{2}$.

(i) 若点 M 在点 B 的右侧（或重合），如图 4.

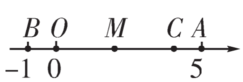


图 4

则 $BM=\left|\frac{5-x}{2}-(-1)\right|=\frac{7-x}{2}$.

(ii) 若点 M 在点 B 的左侧，如图 5.

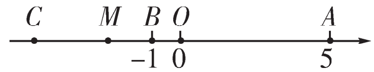
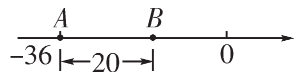


图 5

则 $BM=\left|-1-\frac{5-x}{2}\right|=\frac{x-7}{2}$.

第 2 讲　利用数轴解决与位置有关的实际问题

例一　C　**【解析】**把 A，B 画到数轴上，如下图所示.

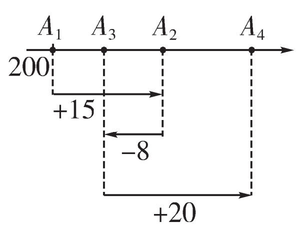


所以 $-36+20=-16$（m），即 B 地的海拔为 -16 m.

【点拨】把高度与数轴上的点一一对应，则利用数轴可以直观地反映出高度的变化特点. 高度上升等价于数轴上的点向正半轴移动，高度下降等价于数轴上的点向负半轴移动.

变式训练一

1. 227　**【解析】**上升 15 m，下降 8 m，上升 20 m 分别记作：$+15$，-8，$+20$. 热气球的位置在数轴上分别对应点：A_1，A_2，A_3，A_4，如下图.



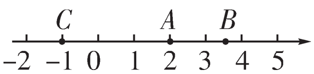
则 $200+15+(-8)+20=200+15-8+20=227$，即这个热气球此时停留

的高度为 227 m.

2. 解：（1）根据题意，得小兵家的位置对应的数为 2，

小颖家的位置对应的数为 $2+1.5=3.5$，

小刚家的位置对应的数为 $3.5-4.5=-1$，如下图所示.



（2）$|2-(-1)|=3$（km）.

所以小兵家与小刚家之间的距离是 3 km.

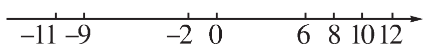
（3）$2+1.5+|-4.5|+1=9$（km），

9 km = 9 000 m，

$9\ 000\div150=60$（min）.

所以小明一共跑了 60 min.

例二　（1）23　**【解析】**画出数轴，如下图所示.



因为销售最多的是超出 12 件，销售最少的是不足 11 件，所以销量最多的一天比销量最少的一天多销售 $12-(-11)=23$（件）.

（2）**解：**$8+12+(-9)+6+(-11)+10+(-2)+7\times100=714$（件）.

即该品牌的衣服上周的销售总量是 714 件.

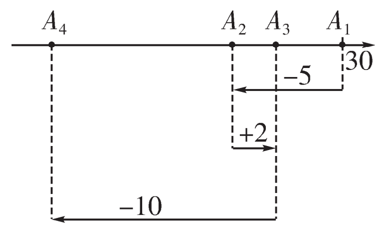
因为 $714\times130=92\ 820$（元），

所以上周销售该品牌的衣服的总利润为 92 820 元.

【点拨】商品销量的超出与不足可以与数轴上的点对应起来，这样可以直观地判断出哪天的销量最多，哪天的销量最少.

变式训练二

1. 17　**【解析】**记此钢笔一月份，二月份，三月份，四月份的价格在数轴上的对应点分别为 A_1，A_2，A_3，A_4，如下图.



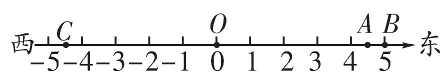
因为 $30-5+2-10=17$（元），所以此钢笔四月份的售价为 17 元/支.

2. 解：$1-2+3-3+1-1.5+1.2-2=-2.3$（kg），

$-2.3+50\times8=397.7$（kg）.

所以王叔叔总共购买苹果 397.7 千克.

例三　**解：**（1）根据题意画出数轴，如下图.



（2）由（1）画出的数轴，得超市 C 在超市 A 的正西方向. 超市 A，C 在数轴上对应的数分别为 4.5 和 −4.5.

所以超市 C 距超市 A 为：

$4.5-(-4.5)=9$（km）.

（3）由（1）可知，超市 C 距离仓库 O

为 4.5 km，

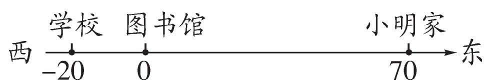
所以配送车这次送货再返回仓库共耗油：$(4.5+0.5+9.5+4.5)\times 0.1=1.9$（L）.

【点拨】此题主要考查正负数和数轴的实际运用. 具有相反意义的两个量，其中一个量用正数表示，则另一个量用负数表示.

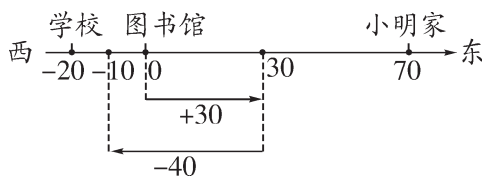
变式训练三

1. 解： 因为学校在图书馆西侧 20 m 处，小明家位于图书馆东侧 70 m 处，

所以小明家、学校在数轴上对应的数分别为 70，-20. 画出数轴，如下图.



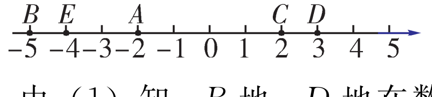
(2) 因为小明从图书馆沿街向东走了 30 m，接着又向西走了 40 m，如下图所示.



则小明所在的位置，对应数轴上的数为 $30-40=-10$.

所以小明此时的位置在图书馆西侧 10 m 处.

2. 解： (1) 根据题意画出数轴，如下图.



(2) 由（1）知，B 地，D 地在数轴上表示的数分别为 -5 和 3.

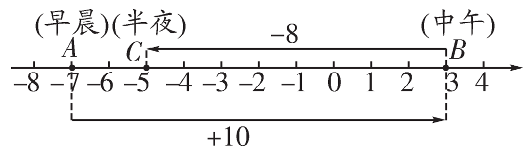
所以 $3-(-5)=8$.

所以 B 地与 D 地之间的距离为 8 km.

(3) 因为 $|-2|+|-3|+|+7|+|+1|+|-7|+|-4|=2+3+7+1+7+4=24$，

所以该快递员一共骑行了 24 千米.

例四　B　**【解析】** 根据题意画出数轴，如下图.

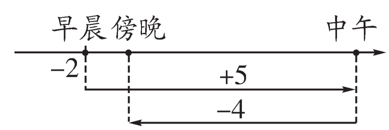


因为 $-7+10-8=-5$，所以昨天半夜的气温是 -5 ℃.

【点拨】生活中的气温与数轴上的点可以一一对应，结合数轴，可以直观地表示气温的变化. 以 m ℃为基础，上升 a ℃相当于 $+a$，上升后的气温为 $(m+a)$ ℃. 同理，下降 a ℃后的气温为 $(m-a)$ ℃.

变式训练四

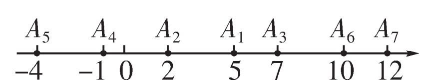
1. 解： 根据题意画出数轴，如下图.



因为 $-2+5-4=-1$，

所以傍晚的气温为 -1 ℃.

2. 解： 记 20 ℃为数轴原点，七次温度值对应的点分别为 A_1，A_2，…，A_7，画出数轴，如下图.



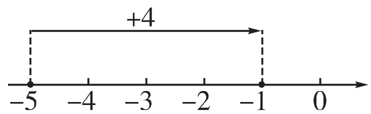
因为 $5-3+5-8-3+14+2=12$，

$20+12=32$，

所以该活化细菌的最佳活化温度为 32 ℃.

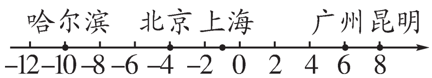
培优精练

1. A 【解析】根据题意画出数轴，如下图.



因为 $-5+4=-1$，所以气温是 -1 ℃.

2. **解：**(1) 在数轴上标出各城市的最低气温如下图所示.



(2) 各城市的最低气温从低到高排列为：

哈尔滨，北京，上海，广州，昆明.

3. **解：** (1) 根据题意画出数轴，如下图.

(2) 因为 $5-2-4+12-6+7-8=4$，

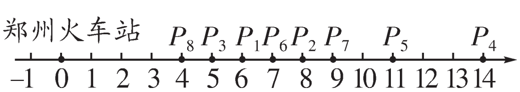
$4+400\times7=2\,804$（个），

所以小王该周实际生产口罩 2 804 个.

名卷压轴题

解： (1) 记郑州火车站为数轴原点，第一次下车记为 P_1，第二次下车记为 P_2，以此类推…

根据题意，画出数轴，如下图.



因为 $6+2-3+9-3-4+2-5=4$，

所以 A 站是燕庄站.

(2) 因为 $(|+6|+|+2|+|-3|+|+9|+|-3|+|-4|+|+2|+|-5|)\times1.3=44.2$（km），

所以小亮在这次志愿者服务期间乘坐地铁行进的路程是 44.2 千米.

第 3 讲　数轴中的动点问题

例一 $3t+3$　$5t+9$　$2t+6$ 【解析】运动 t s 后点 A 表示的数为 $-2-t$，点 B 表示的数为 $1+2t$，点 C 表示的数为 $7+4t$，所以 $AB=1+2t-(-2-t)=3t+3$，$AC=7+4t-(-2-t)=5t+9$，$BC=7+4t-(1+2t)=2t+6$.

【点拨】本题主要考查数轴上点的表示及两点之间的距离. 解题的关键是厘清题意和运用数轴的性质.

变式训练一

1. (1) -3　-1　6 【解析】因为 $|a+3|+(c-6)^2=0$，所以 $a+3=0$，$c-6=0$. 解得 $a=-3$，$c=6$. 因为 b 是最大的负整数，所以 $b=-1$.

(2) **解：**经过 t s，点 A 表示的数为 $-3-2t$，点 B 表示的数为 $-1+t$，点 C 表示的数为 $6+4t$，

则 $AB=-1+t-(-3-2t)=3t+2$，

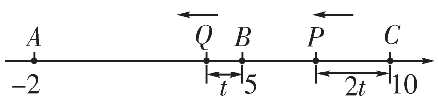
$AC=6+4t-(-3-2t)=6t+9$，

$BC=6+4t-(-1+t)=3t+7$.

2. (1) 4 【解析】因为 $AC=10-$

$(-2)=12$，根据相反数的意义，原点为 AC 的中点，所以 $OA=OC=\frac{1}{2}AC=6$．所以原点在点 A 右侧 6 个单位长度处．所以原点表示的数为 $-2+6=4$．

（2）**解：**①设老鼠与小猫在 t s 时刻在数轴上对应的点分别为点 Q，P，如下图．



由题意，得 $QB=t$，$PC=2t$．

则点 Q 表示的数为 $5-t$，点 P 表示的数为 $10-2t$．

所以老鼠表示的数为 $5-t$，小猫表示的数为 $10-2t$．

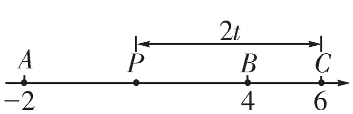
②因为老鼠表示的数为 $5-t$，小猫表示的数为 $10-2t$，点 A 表示的数为 -2，

所以老鼠与点 A 之间的距离为 $|5-t-(-2)|=|7-t|$，

小猫与点 A 之间的距离为 $|10-2t-(-2)|=|12-2t|$，

老鼠与小猫之间的距离为 $|10-2t-(5-t)|=|5-t|$．

例二　解：（1）根据题意画出数轴，如下图．



易知 $PC=2t$．

所以点 P 表示的数为 $6-2t$．

（2）因为点 P 表示的数为 $6-2t$，点 A，B 表示的数分别为 -2，4，

所以 $PA=|6-2t-(-2)|=|8-2t|$，

$PB=|6-2t-4|=|2-2t|$．

因为 $2PA=PB$，

所以 $2|8-2t|=|2-2t|$，

即 $2(8-2t)=2-2t$ 或 $-2(8-2t)=2-2t$．

解得 $t=7$ 或 $t=3$．

所以 3 s 或 7 s 时，$2PA=PB$．

【点拨】动点问题常见处理思路：动点运动距离→动点表示的数（含参代数式）→表示题中涉及的线段长（含参绝对值）→线段满足条件，求解．

变式训练二

1.（1）**解：**因为 A，B 两点表示的数互为相反数，互为相反数的两个数到原点 O 的距离相同，

所以原点 O 为 AB 的中点，如下图．

所以 $AO=\frac{1}{2}AB=6$．

又点 A 在原点 O 的左侧，

所以点 A 表示的数为 -6．

（2）8　**【解析】**由（1）可知，点 B 表示的数为 6，点 C 表示的数为 -2．则 $BC=6-(-2)=8$．因为点 C 是 BQ 的中点，所以 $BQ=2BC=2\times8=16$．所以点 Q 运动的时间为 $16\div2=$

8（s）.

（3）**解：**设 t s 时，$PC=2PB$.

由图可知，t s 时点 P 表示的数为 $-6+t$.

所以 $PC=|-6+t-(-2)|=|t-4|$，

$PB=|-6+t-6|=|t-12|$.

因为 $PC=2PB$，

所以 $|t-4|=2|t-12|$.

解得 $t=20$ 或 $t=\frac{28}{3}$.

即 20 s 或 $\frac{28}{3}$ s 时，$PC=2PB$.

2. （1）-2 **【解析】**因为点 A 表示 -8，点 B 表示 4，所以 $AB=4-(-8)=12$. 因为点 P 为 AB 的中点，所以 $AP=\frac{1}{2}AB=6$. 所以点 P 表示的数为 $-8+6=-2$.

（2）9　1　**【解析】**当 $t=3$ 时，$AP=3\times3=9$，如图 1.

图 1

点 P 表示的数为 $-8+9=1$.

（3）**解：**由（1）知，$AB=12$.

所以 $PB=\frac{1}{6}AB=2$.

①当点 P 在点 B 的左侧时，如图 2.

图 2

因为 $AP=AB-BP=12-2=10$，

所以 $t=\frac{10}{3}$（s）.

②当点 P 在点 B 的右侧时，如图 3.

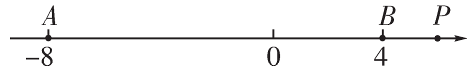


图 3

因为 $AP=AB+BP=12+2=14$，

所以 $t=\frac{14}{3}$（s）.

综上所述，t 的值为$\frac{10}{3}$或$\frac{14}{3}$.

例三　（1）20　2　**【解析】**由题意，知 $AB=24$. 所以点 B 表示的数为 $-4+24=20$. 因为 $BC=3AC$，所以 $4AC=24$. 解得 $AC=6$. 所以点 C 表示的数为 $-4+6=2$.

（2）**解：**当运动时间为 t s 时，点 P 表示的数为 $-4+3t$，点 Q 表示的数为 $20-2t$.

①当点 P 与点 Q 相遇时，如图 1.

图 1

由题意，得 $-4+3t=20-2t$.

解得 $t=\frac{24}{5}$.

所以当 t 为$\frac{24}{5}$时，点 P 与点 Q 相遇.

②分两种情况：（i）当点 P 在点 Q 的左侧时，如图 2.

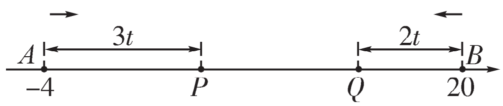


图 2

此时 $PQ=20-2t-(-4+3t)=24-5t=9$.

解得 $t=3$.

(ii) 当点 P 在点 Q 的右侧时，如图 3.

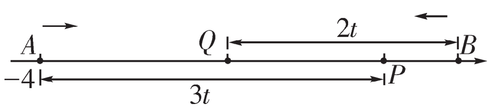


图 3

此时 $PQ=-4+3t-(20-2t)=5t-24=9$.

解得 $t=\frac{33}{5}$.

综上所述，当 t 为 3 或 $\frac{33}{5}$ 时，点 P 与点 Q 之间的距离为 9 个单位长度.

【点拨】对于双动点问题可以从以下几点把握：(1) 画出数轴，结合数轴分析点的运动方向以及点表示的数；(2) 数轴的点表示的数：左边＜右边；(3) 把动点的路程转化为线段长，结合动点的运动方向及初始点表示的数，表示出终点的位置.

变式训练三

1. 解：(1) 因为 $AB=9$，$OB=2OA$，

所以 $OB=6$，$OA=3$.

由图可知，点 A，B 分别在点 O 的右侧和左侧.

所以点 A 表示的数为 3，点 B 表示的数为 -6.

(2) ①运动 t s 后，点 P 表示的数为 $3+2t$，点 Q 表示的数为 $-6+3t$.

因为 M 是线段 AP 的中点，

所以点 M 表示的数为 $\frac{3+3+2t}{2}=3+t$.

BQ 的长度为 $|-6+3t-(-6)|=3t$.

所以 $BN=\frac{2}{3}BQ=2t$.

所以点 N 表示的数为 $-6+2t$.

②由①知，点 M，N 表示的数分别为 $3+t$，$-6+2t$.

所以 $MN=|3+t-(-6+2t)|=|9-t|$.

令 $|9-t|=1$.

解得 $t=8$ 或 $t=10$.

故当 t 为 8 或 10 时，$MN=1$.

2. 解：(1) 因为 A，B 两点在数轴上对应的数分别为 a，b，且点 A 在点 B 的左侧，

又 $|a|=10$，$a+b=80$，$ab<0$，

所以 $a=-10$，$b=90$.

(2) 设经过 x s 时，两只蚂蚁相遇，

所以 $2x+3x=90-(-10)$.

解得 $x=20$.

所以点 C 表示的数为 $-10+3\times20=50$.

所以点 C 表示的数为 50.

例四　解：(1) 因为点 A，B 表示的数互为相反数，

所以原点 O 为 AB 的中点，如图 1.

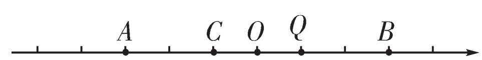


图 1

所以 $AO=BO=\frac{1}{2}AB=6$.

又因为点 A 在原点的左侧，点 B 在原点的右侧，

所以点 A 表示的数为 -6，点 B 表示的数为 6.

因为 $AB=12$，AB 之间有 6 段，

所以每段长度为 $12\div6=2$.

所以 $BC=4\times2=8$.

因为 Q 是 BC 的中点，

所以 $BQ=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times8=4$.

所以点 Q 的运动时间为 $4\div2=2$（s）.

（2）①如图 2.

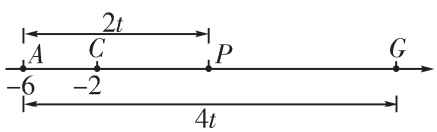


图 2

因为 P，G 两点分别以每秒 2 个单位长度，每秒 4 个单位长度的速度从点 A 同时出发向右运动，

所以 $AP=2t$，$AG=4t$.

又因为点 A 表示的数为 -6，

所以点 P，G 表示的数分别为 $-6+2t$，$-6+4t$.

又点 C 表示的数为 -2，

所以 PC 的中点为 $\frac{-6+2t+(-2)}{2}=-4+t$.

②如图 3.

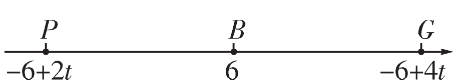


图 3

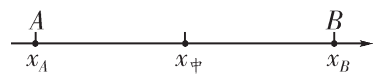
因为点 P，G 表示的数分别为 $-6+2t$，$-6+4t$，点 B 表示的数为 6，B 是线段 PG 的中点，

所以 $6=\frac{(-6+2t)+(-6+4t)}{2}$.

解得 $t=4$.

所以当 $t=4$ 时，点 B 是线段 PG 的中点.

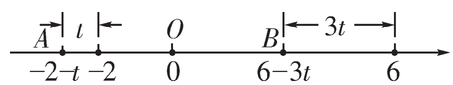
【点拨】中点坐标公式是初中数学中常用的一个公式. 遇到与中点有关的问题时，先求出这两点表示的数，再利用公式表示出中点，如下图.



公式：$x_中=\frac{x_A+x_B}{2}$

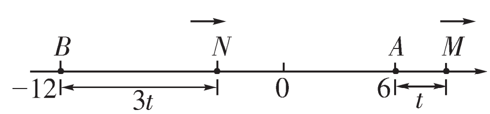
变式训练四

1. 1 **【解析】**设经过 t s 时，点 O 恰好为线段 AB 的中点. 如下图.



此时点 A 表示的数为 $-2-t$，点 B 表示的数为 $6-3t$. 则 $0=(-2-t)+6-3t$，解得 $t=1$.

2. （1）$6+t$ $-12+3t$ **【解析】**根据题意画出数轴，如下图.



则 $BN=3t$，$AM=t$. 所以点 M 表示的数为 $6+t$，点 N 表示的数为 $-12+3t$.

（2）**解：**因为点 N 为 MO 的中点，

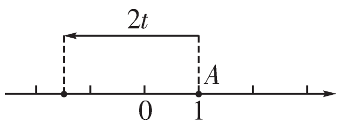
所以 $-12+3t=\frac{6+t}{2}$.

解得 $t=6$.

所以运动 6 s 时，点 N 为 MO 的中点.

培优精练

1. $1-2t$　【解析】如下图.

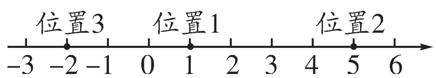


则点 A 表示的数为 $1-2t$.

2. （1）8　【解析】因为点 A 对应的数为 -2，点 B 对应的数为 6，所以线段 AB 的长为 $6-(-2)=8$.

（2）4　$PA=PB$　【解析】当 $t=1$ 时，点 P 对应的有理数为 $2\times1=2$，所以线段 PA 的长是 $2-(-2)=4$，线段 PB 的长是 $6-2=4$. 所以 $PA=PB$.

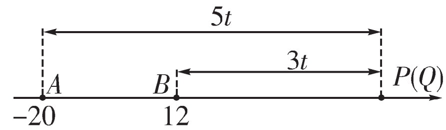
3. -2　【解析】根据题意画数轴，如下图.



则 $1+4-7=-2$.

4. （1）-4　【解析】因为点 A 表示的数为 -20，点 B 表示的数为 12，所以 AB 的中点表示的数是 $\frac{-20+12}{2}=-4$.

（2）**解：**设 t s 后，甲追上乙，如图，设甲，乙运动 t s 时在数轴上对应的点分别为 P，Q.



点 P 表示的数为 $-20+5t$，点 Q 表示的数为 $12+3t$.

当点 P，Q 重合时，甲追上乙.

所以 $-20+5t=12+3t$.

解得 $t=16$.

所以 16 s 后甲追上乙.

5. **解：**（1）设点 P 表示的数是 x，则 $x-(-2)=5-x$.

解得 $x=\frac{3}{2}$.

（2）设点 P 表示的数是 m，

①当点 P 在点 A 的左侧时，如图 1.

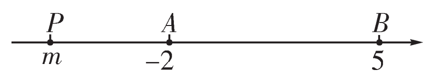


图 1

因为 $PA=-2-m$，$PB=5-m$.

所以 $-2-m+5-m=15$.

解得 $m=-6$.

②当点 P 在点 B 的右侧时，如图 2.

图 2

因为 $PA=m-(-2)=m+2$，

$PB=m-5$，

则 $m+2+m-5=15$.

解得 $m=9$.

③当点 P 在线段 AB 上时，如图 3.

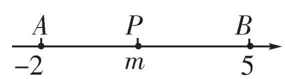


图 3

此时 $PA+PB=AB=5-(-2)=7<15$，不符合题意，舍去.

综上所述，点 P 表示的数是 -6 或 9.

名卷压轴题

解：（1）因为$(a+12)^2+|b+5|=0$，

又 $(a+12)^2\geqslant 0$，$|b+5|\geqslant 0$，

所以 $a+12=0$，$b+5=0$.

解得 $a=-12$，$b=-5$.

又 b 与 c 互为相反数，

所以 $c=5$.

所以 A，B，C 三点表示的数分别为 -12，-5，5.

（2）假设电子蚂蚁爬行到点 P 处，$PB=1$.

根据题意画出数轴，如图 1.

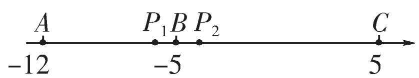


图 1

因为点 B 表示的数为 -5，

所以点 P 表示的数为 $-5-1=-6$ 或 $-5+1=-4$.

①当点 P 表示的数为 -6 时，

$AP=-6-(-12)=6$.

爬行时间为 $6\div 2=3$（s）.

②当点 P 表示的数为 -4 时，

$AP=-4-(-12)=8$.

爬行时间为 $8\div 2=4$（s）.

综上所述，电子蚂蚁爬行的时间为 3 s 或 4 s.

（3）$AC=|-12-5|=17$，

$BC=|5-(-5)|=10$.

①当点 G 在 A，B 之间时，如图 2.

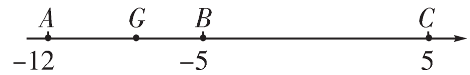


图 2

$GA+GB+GC=AC+GB=17+GB$.

令 $17+GB=20$，解得 $GB=3$.

此时点 G 表示的数为 $-5-3=-8$.

②当点 G 在 B，C 之间时，如图 3.

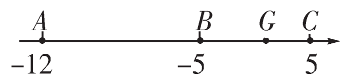


图 3

$GA+GB+GC=AC+GB=17+GB$.

令 $17+GB=20$，

解得 $GB=3$.

此时点 G 表示的数为 $-5+3=-2$.

③当点 G 在点 C 的右侧时，如图 4.

图 4

因为 $GA+GB+GC=GC+AC+GC+BC+GC=3GC+AC+BC=3GC+17+10>20$，

所以此种情况不符合题意，舍去.

综上所述，点 G 表示的数为 -8 或 -2.

◎有理数及有理数的运算　新题型探究

例题　解：（1）在数轴上标出点 D，E，F，G，如图 1.

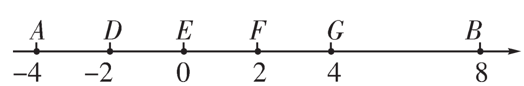


图 1

因为点 A，B 表示的数分别为 -4，8，

所以 $AB=8-(-4)=12$.

因为点 D 表示的数为 -2，

所以 $AD=-2-(-4)=2$，

$BD=8-(-2)=10$.

所以点 D 不是 A，B 两点的“美点”.

因为点 E 表示的数为 0，

所以 $AE=0-(-4)=4$，$BE=8$.

满足 $BE=2AE$.

所以点 E 是 A，B 两点的“美点”.

因为点 F 表示的数为 2，

所以 $AF=2-(-4)=6$，

$BF=8-2=6$.

所以点 F 不是 A，B 两点的“美点”.

因为点 G 表示的数为 4，

所以 $AG=4-(-4)=8$，

$BG=8-4=4$.

满足 $AG=2BG$.

所以点 G 是 A，B 两点的“美点”.

综上所述，点 E，G 是 A，B 两点的“美点”.

(2) 根据题意画出数轴，如图 2.

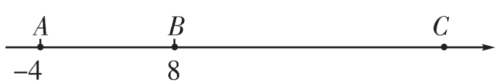


图 2

因为点 A，B 表示的数分别为 -4，8，

所以 $AB=8-(-4)=12$.

因为点 B 是 A，C 两点的“美点”，且点 B 距离点 A 较近，

所以 $BC=2AB=24$.

所以点 C 在数轴上表示的数是 $8+24=32$.

【点拨】 与距离（长度）有关的新题型，结合数轴可以把许多抽象问题具体化，也更容易找出目标点在数轴上表示的数，再利用题目条件中的数量关系，列方程求解.

变式训练

(1) 1 或 4　**【解析】** 如图 1，设 $-\frac{5}{2}$，0，1，4 对应的点分别为 E，F，N，G.

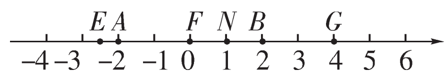


图 1

因为 $AE=-2-\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}$，$BE=2-\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{9}{2}$，所以点 E 不是 A，B 两点的“倍分点”；

同理可得，

$AF=0-(-2)=2$，$BF=2-0=2$，

点 F 不是.

$AN=1-(-2)=3$，$BN=2-1=1$，

点 N 是.

$AG=4-(-2)=6$，$BG=4-2=2$，

点 G 是.

所以点 N，G 是 A，B 两点的“倍分点”.

所以 1 或 4 符合题意.

(2) **解：** 根据题意画出数轴，如图 2.

图 2

设点 P 表示的数为 x，

因为点 P 在点 A，B 之间，

所以 $PA=x+1$，$PB=3-x$.

根据题意，得 $3(x+1)=3-x$.

解得 $x=0$.

所以点 P 表示的数为 0.

培优精练

1. (1) 1　6　**【解析】**在数轴上标出各点，如图 1.

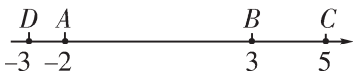


图 1

因为点 D 表示的数为 -3，所以 d_1（点 D，线段 AB）$=DA=-2-(-3)=1$，d_2（点 D，线段 AB）$=DB=3-(-3)=6$.

(2) **解：**根据题意画出数轴，如图 2.

图 2

则 d_2（点 E，线段 AB）$=3-x$，

d_1（点 E，线段 AC）$=-2-x$.

因为 d_2（点 E，线段 AB）是 d_1（点 E，线段 AC）的 3 倍，

所以 $3-x=3(-2-x)$.

解得 $x=-\frac{9}{2}$.

2. (1) $\frac{1}{2}$　$\frac{2}{3}$　**【解析】**由题意，得 $AB=-2-(-4)=2$，$CB=2-(-2)=4$，$AC=2-(-4)=6$. 所以 $AB=\frac{1}{2}CB$，$BC=CB=\frac{2}{3}AC$. 所以点 B 是点 A 到点 C 的"$\frac{1}{2}$倍分点"，点 C 是点 B 到点 A 的"$\frac{2}{3}$倍分点".

(2) **解：**由题意，知 $BM=3CM$.

①若点 M 在点 B 的左侧，如图 1.

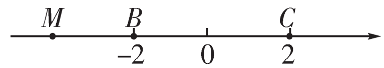


图 1

则 $BM<CM$，不符合题意.

②若点 M 在 B，C 之间，如图 2.

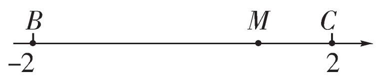


图 2

则 $BM+CM=BC=4$.

因为 $BM=3CM$，

所以 $4CM=4$，$CM=1$.

所以点 M 表示的数为 $2-1=1$.

③若点 M 在点 C 的右侧，如图 3.

图 3

则有 $BC+CM=BM$.

因为 $BM=3CM$，$BC=4$，

所以 $CM=2$.

所以点 M 表示的数为 $2+2=4$.

综上所述，点 M 表示的数为 1 或 4.

(3) **解：**设点 Q 是点 A 到点 D 的"2

倍分点”，则 $AQ=2DQ$.

根据题意画出数轴，如图 4.

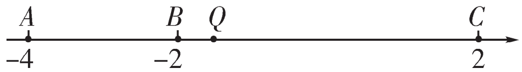


图 4

$AB=-2-(-4)=2$，

$AC=2-(-4)=6$.

点 Q 在线段 BC 上，分两种临界情况：

临界①：当点 Q 在点 B 处时，如图 5.

图 5

则 $AQ=AB=2$，

所以 $DQ=\frac{1}{2}AQ=1$.

因为点 B 表示的数为 -2，

所以此时 $x=-2-1=-3$ 或 $x=-2+1=-1$.

临界②：当点 Q 在点 C 处时，如图 6. 则 $AQ=AC=6$，

图 6

所以 $DQ=\frac{1}{2}AQ=3$.

因为点 C 表示的数为 2，

所以此时 $x=2+3=5$ 或 $x=2-3=-1$.

所以 x 的取值范围为 $-3\leqslant x\leqslant 5$.

专题二　代数式及整式的加减

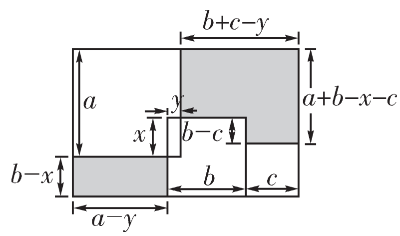
第 1 讲　利用整式的加减求图形的周长或面积

例一　D　**【解析】**由题意，得小长方形的长是宽的 2 倍. 所以小长方形的宽为 $4a\div 4=a$，长为 $2a$. 所以每个小长方形的周长为 $2(a+2a)=6a$.

【点拨】对于多个小长方形拼凑出一个更大的长方形的周长或边长问题，一般通过观察大长方形的长、宽与各个小长方形的长、宽是否存在数量关系，然后利用方程或代数式进行求解.

变式训练一

1. D　**【解析】**设重叠部分的小长方形的长与宽分别为 x，y，在图上依次标出阴影部分的各边的长，如下图.



所以右上角阴影部分的周长与左下角阴影部分的周长之差为 $2(a+b-x-c)+2(b+c-y)-2(b-x)-2(a-y)=2a+2b-2x-2c+2b+2c-2y-2b+2x-2a+2y=2b$. 故选 D.

2. $2a$　$2a$　**【解析】**由图 3 可知，包装盒的长等于宽的 2 倍. 因为包装盒的

宽为 a，所以包装盒的长为 $2a$. 图 2 中阴影部分的周长可以看作一个长，宽分别为 $3a$，$2a$ 的长方形周长与两个长度为 a 的线段长之和，则图 2 中阴影部分的周长 $=2(2a+3a)+2a=12a$. 易知图 3 中阴影部分是一个长为 $4a$，宽为 a 的长方形，所以图 3 中阴影部分的周长 $=2(4a+a)=10a$. 所以所求周长之差 $=12a-10a=2a$.

例二　解：（1）由图可得花圃的长为 $(2a-1-2x)$ m，宽为 $(a-x)$ m.

∴篱笆的总长度为

$2(2a-1-2x)+2(a-x)$

$=4a-2-4x+2a-2x$

$=(6a-6x-2)$（m）.

（2）当 $a=11$，$x=0.8$ 时，

$6a-6x-2$

$=6\times11-6\times0.8-2$

$=59.2$（m）.

所以所用篱笆的总长度是 59.2 m.

【点拨】本题主要考查整式的加减的实际应用，从生活实际中出发，用数学知识解决生活实际中的问题，同时也考查了长方形周长的计算.

变式训练二

1. 解：（1）B 区域的长为 $(a+b)$ m，宽为 $(a-b)$ m.

则 B 区域场地的周长为 $2(a+b+a-b)=4a$（m）.

（2）整个长方形运动场的长为 $a+(a+b)=(2a+b)$（m），

宽为 $a+(a-b)=(2a-b)$（m）.

则整个长方形运动场的周长为 $2(2a+b+2a-b)=8a$（m）.

2. 解：由图知做 1 个 A 型窗框需用 $(3x+2y)$m 新材料，做 1 个 B 型窗框需用 $(2x+3y)$m 新材料.

（1）2 个 A 型窗框和 3 个 B 型窗框共需这种新材料：

$2(3x+2y)+3(2x+3y)$

$=6x+4y+6x+9y$

$=(12x+13y)$（m）.

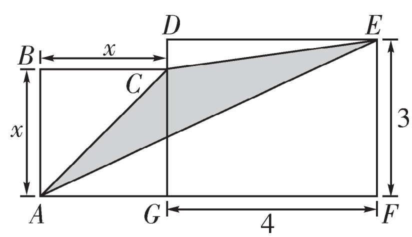
（2）$(2x+3y)-(3x+2y)$

$=2x+3y-3x-2y$

$=y-x$.

所以做 1 个 A 型窗框比做 1 个 B 型窗框少用 $(y-x)$m 这种新材料.

例三　解：（1）标出图中各顶点字母，如下图.



阴影部分的面积为：

$S_{正方形ABCG}+S_{长方形DEFG}-S_{\triangle ABC}-S_{\triangle CDE}-S_{\triangle AEF}$

$=x^2+3\times4-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\times4\times(3-x)-\frac{1}{2}\times3\times(x+4)$

$=x^2+12-\frac{1}{2}x^2-6+2x-\frac{3}{2}x-6$

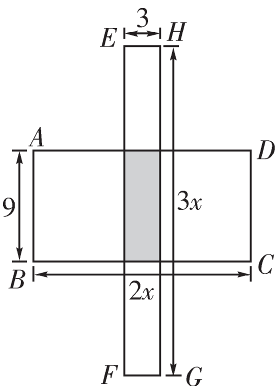
$=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x.$

（2）当 $x=2$ 时，阴影部分的面积为 $\frac{1}{2}\times2^2+\frac{1}{2}\times2=3.$

【点拨】在求一些图形的面积时，如果直接求解比较困难，则可考虑间接求解，即利用其他图形的面积的和差，间接求得所需要的图形的面积，这种方法称为割补法．割补法是解决图形面积问题的一种重要方法．

变式训练三

1. $27x-27$　**【解析】**如图，将图中各顶点标上字母．“中”字形图案的面积$=S_{长方形ABCD}+S_{长方形EFGH}-S_{阴影}$，



即“中”字形图案的面积$=9\times2x+3\times3x-3\times9=18x+9x-27=27x-27.$

2. 解：（1）由图可知，阴影部分的面积$=6\cdot(2a+b)-3a$

$=12a+6b-3a$

$=9a+6b$

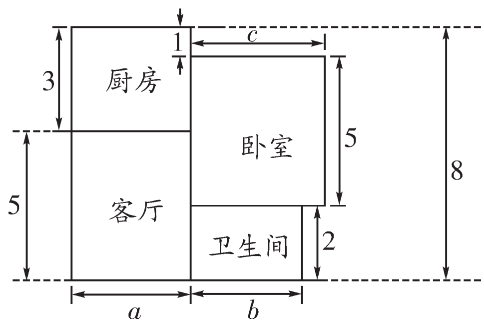
即阴影部分的面积为 $9a+6b.$

（2）因为$|a-4|+(b-2)^2=0$，

所以 $a=4$，$b=2.$

所以阴影部分的面积为 $9\times4+6\times2=36+12=48.$

例四　解：（1）在建筑平面图上标出数据，如下图．



易知厨房的面积为 $3a\ \mathrm{m}^2.$

因为客厅的长为 $1+5-3+2=5$（m），

所以客厅的面积为 $5a\ \mathrm{m}^2.$

因为卧室的面积为 $5c\ \mathrm{m}^2$，

卫生间的面积为 $2b\ \mathrm{m}^2$，

所以这套住房的建筑面积为 $3a+5a+5c+2b=(8a+2b+5c)(\mathrm{m}^2).$

（2）根据题意，得铺设地面瓷砖的总费用为 $200\times(5a+5c)+120\times(3a+2b)=1\ 000a+1\ 000c+360a+240b=(1\ 360a+240b+1\ 000c)$(元)．

【点拨】本题解题的关键是利用图形的长、宽关系表示出客厅的长．

变式训练四

1.（1）$(x-120)\mathrm{m}$

（2）**解：** 当 $x=200$ 时，

丙的长为 $200-120=80$（m），

宽为 $120-80=40$（m）．

所以长方形丙的面积 $S=80\times40=3\,200$（m^2）．

2. **解：**（1）易知这块空地的总面积为 $12\times4x=48x$（m^2）．

绿地的面积为 $48x-6\times2x-\pi\times(2x\div2)^2\div2=\left(36x-\frac{1}{2}\pi x^2\right)$（$m^2$）．

（2）小明同学的设计方案符合学校要求．理由如下：

当 $x=2$，$\pi\approx3$ 时，

$48x=48\times2=96$，

$36x-\frac{1}{2}\pi x^2\approx36\times2-\frac{1}{2}\times3\times2^2=72-6=66$．

因为 $96\times\frac{5}{8}=60<66$，

所以小明同学的设计方案符合学校要求．

培优精练

1. D　**【解析】** 设小长方形的宽为 a，长为 b，则有 $3a+b=n$，即 $b=n-3a$．阴影部分的周长 $=2(m-b)+2(m-3a)+2n=2m-2b+2m-6a+2n=4m-2(n-3a)-6a+2n=4m-2n+6a-6a+2n=4m$．故选 D．

2. A　**【解析】** 设重叠部分的面积为 x，由题意，得 $m=7-x$，$n=3-x$．所以 $m-n=(7-x)-(3-x)=4$．故选 A．

3. （1）$x+2y$　**【解析】** 由图可知编号为 3 的正方形的边长为 $(x+y)$．所以编号为 4 的正方形的边长为 $y+(x+y)=x+2y$．

（2）36　**【解析】** 编号为 5 的正方形的边长为 $y+(x+2y)=x+3y$，编号为 6 的正方形的边长为 $(x+3y)+(y-x)=4y$，编号为 7 的正方形的边长为 $4y-x$，编号为 10 的正方形的边长为 $(4y-x)-x-(x+y)=3y-3x=3(y-x)=3\times2=6$，所以编号为 10 的正方形的面积 $=6\times6=36$．

名卷压轴题

解：（1）大长方形 $ABCD$ 的周长为 $2(3a+2a-b)=10a-2b$．

（2）设图 1 中小长方形的长为 m，宽为 n．

易知大阴影部分的长、宽分别为 $3a-2n$，$2a-b-2n$．

所以大阴影部分的周长为 $2(3a-2n+2a-b-2n)=10a-2b-8n$．

易知小阴影部分的长、宽分别为 $3a-m$，$2a-b-m$，

所以小阴影部分的周长为 $2(3a-m+2a-b-m)=10a-2b-4m$．

由图 2 可知，$m+2n=3a$．

所以两块阴影部分的周长之和为

$$\begin{aligned}&10a-2b-8n+10a-2b-4m\\&=2(10a-2b)-4m-8n\end{aligned}$$

$=2(10a-2b)-4(m+2n)$

$=20a-4b-4\times3a$

$=8a-4b$.

第2讲　利用整式的加减探索图形的变化规律

例一　$4n+2$　**【解析】**通过观察可知，第1个图案有白色地砖6块，第2个图案有白色地砖10块，第3个图案有白色地砖14块……每个图案比前1个图案多4块白色地砖. 所以第n个图案比第1个图案多$(n-1)\times4$块白色地砖. 即第n个图案有$6+(n-1)\times4=(4n+2)$块白色地砖.

【点拨】图形规律的探究，需要注意每个图案的序号与增幅的变化特点，判断增幅是否相同. 若增幅相同，则第n个图案比第1个图案多$(n-1)$个增幅，即第n个图案$=$第1个图案$+(n-1)\times$增幅.

变式训练一

1. $3n+7$　**【解析】**由图可得每增加1个杯子，高度增加3 cm，则n个这种杯子叠放在一起，高度为$10+3(n-1)=(3n+7)$ cm.

2. **解**：由题意，得

1张桌子可坐人数：

$6+2=6+2\times1$，

2张桌子拼在一起可坐人数：

$6+2+2=6+2\times2$，

3张桌子拼在一起可坐人数：

$6+2+2+2=6+2\times3$，

……

以此类推，

n张桌子拼在一起可坐人数为$6+2n$.

例二　934　**【解析】**图案序号为1，2，3，4，…，对应的小圆个数分别是6，10，16，24，…，相邻两项作差（后项－前项)，得4，6，8，…

则第1个图案中小圆个数为6，

第2个图案中小圆个数为$6+4$，

第3个图案中小圆个数为$6+4+6$，

第4个图案中小圆个数为$6+4+6+8$，

……

所以第30个图案中小圆个数为$6+4+6+8+10+\cdots+60$. 因为$4+6+8+10+\cdots+60=\frac{1}{2}(4+60)\times(30-1)=928$.

所以$6+4+6+8+10+\cdots+60=6+928=934$.

即第30个图案中有934个小圆.

【点拨】此题的解题思路是把各图案中小圆个数列出，再利用作差（或多次作差)，探究图案中小圆个数变化的规律. 当增幅为逐渐递增时，可能会用到以下公式：

$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$，

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\frac{1}{2}n(1+2n-1)=n^2$，

$2+4+6+\cdots+2n=\frac{1}{2}n(2+2n)=n(n+$

1).

变式训练二

1. C 【**解析**】第 1 个图案中黑色正方形的个数为 3，第 2 个图案中黑色正方形的个数为 $5=3+2\times1$，第 3 个图案中黑色正方形的个数为 $7=3+2\times2$，……所以第 10 个图案中黑色正方形的个数为 $3+2\times(10-1)=21$. 故选 C.

2. **解：**前 4 个图案中圆的个数依次为：4，8，14，22.

相邻两项作差（后项－前项），得 4，6，8.

则第 1 个图案中圆的个数为 4，

第 2 个图案中圆的个数为 $8=4+4$，

第 3 个图案中圆的个数为 $14=4+4+6$，

第 4 个图案中圆的个数为 $22=4+4+6+8$，

……

观察可知，所加最后 1 个数是图案序号的 2 倍.

所以第 9 个图案中圆的个数为 $4+4+6+\cdots+2\times9=4+\frac{1}{2}(4+18)\times8=92$.

例三 3 4 【**解析**】根据题意，小宇从编号为 2 的顶点开始“移位”，第 1 次“移位”后到达编号为 4 的顶点，第 2 次“移位”后到达编号为 3 的顶点，第 3 次“移位”后到达编号为 1 的顶点，第 4 次“移位”后到达编号为 2 的顶点. 依此类推，每 4 次“移位”后回到出发点. 因为 $181\div4=45\cdots\cdots1$，所以第 181 次“移位”后共回到起点 45 次，再“移位”1 次，到达编号为 4 的顶点.

【**点拨**】此类图形规律变化属于循环型，解决循环型的诀窍是“循环取余”，即先找出循环节长度，然后用目标序号除以循序节的长度，所得余数与循环节中数的序号对应.

变式训练三

1. A 【**解析**】根据数的排列发现：1 在射线 OA 上，2 在射线 OB 上，3 在射线 OC 上，4 在射线 OD 上，5 在射线 OE 上，6 在射线 OF 上，7 在射线 OA 上，…，射线上的数以 6 为周期循环，因为 $2\,023\div6=337\cdots\cdots1$，所以 2 023 与 1 在同一条射线上，即第 2 023 个结点在射线 OA 上.

2. F 【**解析**】因为 $A\to B$（第 1 步）$\to C$（第 2 步）$\to D$（第 3 步）$\to A$（第 4 步）$\to E$（第 5 步）$\to F$（第 6 步）$\to G$（第 7 步）$\to A$（第 8 步）$\to B$（第 9 步）……循环运动，所以 8 步 1 个循环. 因为 $2\,022\div8=252\cdots\cdots6$，所以 252 个循环后余 6 步，即第 2 022 步到达点 F.

例四 (2^n-1) 【**解析**】对折次数为 1，2，3，4，…时，对折后的折痕数分别为 1，3，7，15，…，相邻两项作差（后项－前项），得

2，4，8，…，即 2^1，2^2，2^3，…

第 1 次对折后折痕数：1，

第 2 次对折后折痕数：$1+2^1$，

第 3 次对折后折痕数：$1+2^1+2^2$，

第 4 次对折后折痕数：$1+2^1+2^2+2^3$，

……

所以第 n 次对折后折痕数：$1+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

【点拨】本题是对图形变化规律的考查，观察对折的次数与得到的折痕数的关系是解本题的关键.

变式训练四

$\frac{1}{2^{2\,022}}$　**【解析】**由题意可知，$S_1=\frac{1}{2}$，$S_2=\frac{1}{2^2}$，$S_3=\frac{1}{2^3}$，…，依此规律，得 $S_{2\,022}=\frac{1}{2^{2\,022}}$.

培优精练

1. B　**【解析】**因为翻转 1 次后，数 1 对应的点为 B，翻转 2 次后，数 2 对应的点为 C，翻转 3 次后，数 3 对应的点为 A，翻转 4 次后，数 4 对应的点为 B，…，所以每 3 次为一个循环.

又因为 $2\,020\div3=673\cdots\cdots1$，所以连续翻转 2 020 次后，数 2 020 对应的点为 B. 故选 B.

2. $(3n+1)$　**【解析】**由图可知，第 1 个图案有 $3+1=4$ 个正三角形，第 2 个图案有 $3\times2+1=7$ 个正三角形，第 3 个图案有 $3\times3+1=10$ 个正三角形，…，第 n 个图案有 $3\times n+1=(3n+1)$个正三角形.

3. 解：前 4 个图形的黑色棋子数分别为 3，8，15，24，

即第 1 个图形的黑色棋子数为 $2\times3-3$，

第 2 个图形的黑色棋子数为 $3\times4-4$，

第 3 个图形的黑色棋子为 $4\times5-5$，

第 4 个图形的黑色棋子数为 $5\times6-6$，

……

所以第 n 个图形的黑色棋子数为$(n+1)(n+2)-(n+2)=n^2+2n$.

4. （1）16　23　**【解析】**第 1 个图形中小木棒的根数为 9，第 2 个图形中小木棒的根数为 $9+7=16$，第 3 个图形中小木棒的根数为 $16+7=23$.

填表如下：

图形标号	1	2	3	…
小木棒的根数	9	16	23	…

（2）$(7n+2)$ **【解析】**根据（1）中的规律，可以发现搭第 n 个图形需要小木棒的根数为

$9+7(n-1)=7n+2$.

（3）**解：**当 $n=100$，需要的小木棒的根数为 $7n+2=7\times100+2=702$.

名卷压轴题

（1）100　$\frac{n(n+1)}{2}$　**【解析】**（1）题图 1 中，第 1 层有 1 个小圆圈，第 2 层有 2 个小圆圈，第 3 层有 3 个小圆圈，…，按此规律，第 n 层有 n 个小圆圈. 所以第 100 层有 100 个小圆圈.

因为 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，所以

从第 1 层到第 n 层共有$\frac{n(n+1)}{2}$个小圆圈.

(2) **解**：题图 2 中，第 1 层排 1 个数，

第 2 层排 2 个数，

第 3 层排 3 个数，

按此规律，第 19 层排 19 个数，

所以前 19 层共有 $1+2+3+\cdots+19=\frac{19\times(1+19)}{2}=190$ 个数.

所以第 20 层的第 5 个数为 $190+5=195$.

(3) **解**：题图 3 中，第 n 层放 n 个数，从第 1 个数开始，正、负呈周期变化，绝对值依次增加 2.

则第 20 层最后一个数的绝对值为

$31+(2+3+4+\cdots+20)\times2=449$.

则第 1 层到第 20 层所有数的绝对值之和为 $31+33+35+\cdots+449=50\ 400$.

第 3 讲　利用整式的加减探索数阵的变化规律

例一　解：(1) 四个角上的四个数之和等于中间那个数的 4 倍. 理由如下：

同一行相邻数增幅是 1，同一列相邻数增幅是 7，

因此九宫格中的数如下.

6	7	8
13	14	15
20	21	22

四个角上的四个数之和为 $6+8+20+22=56=4\times14$.

所以四个角上的四个数之和等于中间那个数的 4 倍.

(2) 设九宫格中间那个数为 a，则九宫格中的数如下图.

$a-8$	$a-7$	$a-6$
$a-1$	a	$a+1$
$a+6$	$a+7$	$a+8$

四个角上的四个数之和为 $(a-8)+(a-6)+(a+6)+(a+8)=4a$.

所以四个角上的四个数之和等于中间那个数的 4 倍.

【点拨】这种类型的规律探究，经常需要同一行数对比，同一列数对比，看增幅，然后结合表格中的数同一行推导，同一列推导.

变式训练一

解：由月历观察可知，同一行中，相邻的两个数之间相差 1；

同一列中，相邻两个数之间相差 7.

则 $b=a+1$，$c=a+7$，

$d=(a+7)+1=a+8$.

所以 $S=a+b+c+d=a+(a+1)+(a+7)+(a+8)=4a+16$.

(1) 当 $S=68$ 时，即 $4a+16=68$.

解得 $a=13$.

(2) 不能. 理由如下：

当 $S=52$ 时，即 $4a+16=52$.

解得 $a=9$.

当 $a=9$ 时，$b=10$.

由图可知，此时 a，b 分在两行，不能被框在一个方框里.

所以 S 的值不能为 52.

例二　解：因为每行、每列、每条对角线上的三个数之和都相等，

所以第二行第 1 个数为 $(x+12+3)-(x+10)=5$，

第三行第 2 个数为 $(x+12+3)-(10+3)=x+2$，

第一行第 2 个数为 $(x+12+3)-(12+x+2)=1$，

第一行第 3 个数为 $(x+12+3)-(x+1)=14$.

所以对角线上的三个数之和为 $10+12+14=36$.

因为 $x+12+3=36$，

所以 $x=21$.

【点拨】幻方问题常利用每行、每列、每条对角线上的三个数之和都相等这个条件去表示方格中的各个数. 优先从各行，各列，各条对角线上未知数个数最少的入手.

变式训练二

1. 解：设第一行第 1 个数为 x，第三行第 3 个数为 y，

由题意，得 $x+7+2=15$.

解得 $x=6$.

因为 $x+5+y=15$，

所以 $y=15-(x+5)=15-(6+5)=4$.

又因为 $2+m+y=15$，

所以 $m=15-(2+y)=15-(2+4)=9$.

2. 15　**【解析】**易知 $3S=1+2+3+4+\cdots+9=\frac{1}{2}\times(1+9)\times9=45$.

所以 $S=15$.

解：由第一步可知，每行，每列，每条对角线上的三个数之和均为 15.

含 x 的有：第 2 行，第 2 列，及 2 条对角线，

因此它们之和为 $15\times4=60$.

相当于 1～9 这 9 个数与 3 个 x 的总和，即 $45+3x=60$.

解得 $x=5$.

例三　解：由数表，得

第 1 行第 1 列交叉点上的数是 1，

第 2 行第 2 列交叉点上的数是 3，

第 3 行第 3 列交叉点上的数是 5，

……

所以第 n 行第 n 列交叉点上的数构成一列数：1，3，5，…

相邻两项（后项－前项)，得定值 2.

所以第 n 行与第 n 列交叉点上的数是 $2n-1$.

【点拨】数表类的规律探究方法有：同一行对比，同一列对比，对角线对比，末尾数对比等. 常见对比后的结果大致有以下几类：①1，3，5，7，…，

$2n-1$；②2，4，6，8，…，$2n$；③1，4，9，16，…，n^2；④ 1，2，4，8，…，2^{n-1}.

变式训练三

1. 640 **【解析】**观察数阵可知，第 n 行有 n 个偶数.

第 1 行的第 1 个数是 $2=1\times0+2$，

第 2 行的第 1 个数是 $4=2\times1+2$，

第 3 行的第 1 个数是 $8=3\times2+2$，

……

第 n 行的第 1 个数是 $n(n-1)+2$.

所以第 25 行的第 1 个数是 $25\times(25-1)+2=602$.

所以第 25 行的第 20 个数是 $602+2\times(20-1)=640$.

2. (1) 71 **【解析】**由题意知，第 n 行最后一个数为 n^2，则第 8 行的最后一个数是 64，所以第 9 行第 7 个数是 $64+7=71$.

(2) **解：**由（1）知，第 n 行的最后一个数为 n^2，

则第 n 行的第 1 个数为 $(n-1)^2+1$.

因为 $44^2=1\ 936$，

$45^2=2\ 025$，

$1\ 936<2\ 020<2\ 025$，

所以 2 020 在第 45 行.

又 $2\ 020-1\ 936=84$，

所以 2 020 是表中第 45 行，第 84 个数.

培优精练

1. 110 **【解析】**根据前三个正方形中的数规律可知，右上角位置上的数是连续的奇数，左下角位置上的数是连续的偶数. 所以 $c=9$，$a=10$. 因为 $13=4\times3+1$，$31=6\times5+1$，$57=8\times7+1$，…，以此规律，得 $b=ac+1=10\times9+1=91$. 所以 $a+b+c=10+91+9=110$.

2. **解：**由数阵，得

第 1 行有 1 个数，

前 2 行共有 $1+2=3$ 个数，

前 3 行共有 $1+2+3=6$ 个数，

……

前 n 行共有 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$个数，

故前 25 行共有 $\dfrac{25\times(25+1)}{2}=325$ 个数.

因为数阵中的数是连续的奇数，

故第 25 行第 20 个数是第 $325-5=320$ 个奇数.

所以第 25 行第 20 个数是 $2\times320-1=639$.

3. **解：**观察数表，每一列相邻的两个数，下面的比上面的数大 10，

每一行相邻的两个数，后面的比前面的数大 2.

假设“T”字架框出的五个数中第一个数为 x，

则“T”字架框出的数如下图所示.

x		
$x+10$	$x+12$	$x+14$
$x+20$		

这五个数的和为 $x+(x+10)+(x+12)+(x+14)+(x+20)=5x+56$.

令 $5x+56=426$，

解得 $x=74$.

所以这五个数分别为 74，84，86，88，94.

4. （1）$4x+20$ **【解析】**设框中的第一个数为 x，则其他三个数为 $x+2$，$x+8$，$x+10$，

所以框中四个数的和为

$x+(x+2)+(x+8)+(x+10)=4x+20$.

解：当 $4x+20=200$ 时，得 $x=45$，

故 $x+2=47$，$x+8=53$，

$x+10=55$，

故若框出的四个数的和为 200，这四个数分别是 45，47，53，55.

（2）**解：**不存在这样的四个数，使它们的和为8 096. 理由如下：

由题意，得 $4x+20=8\ 096$，

解得 $x=2\ 019$.

因为$(2\ 019+1)\div 2=1\ 010$，

所以 2 019 是第 1 010 个奇数.

又图中每行有 5 个奇数，

$1\ 010\div 5=202$，

所以第 1 010 个奇数排在第 202 行最后一个位置.

由题意，2 019 不能排在每行第一个和最后一个，与题意矛盾，

故不存在这样的四个数，使它们的和为 8 096.

5. （1）68 **【解析】**因为 $x=17$，所以 $a=5$，$b=15$，$c=19$，$d=29$. 所以 $a+b+c+d=5+15+19+29=68$.

（2）$a+b+c+d=4x$ **【解析】**观察数阵可知，a 比 x 小 12，b 比 x 小 2，c 比 x 大 2，d 比 x 大 12. 所以 $a=x-12$，$b=x-2$，$c=x+2$，$d=x+12$. 所以 $a+b+c+d=(x-12)+(x-2)+(x+2)+(x+12)=4x$.

（3）不能等于 2 035. 理由如下：

因为 $a+b+c+d=4x$，

所以 $M=a+b+c+d+x=5x$.

令 $5x=2\ 035$，解得 $x=407$.

因为数阵每行排 6 个数，

又$(407+1)\div 2\div 6=34$，

所以 407 在第 34 行第 6 列，不符合题意.

所以 M 的值不能等于 2 035.

名卷压轴题

（1）$9x$ **【解析】**补充完题图 1 中三阶幻方中的各数如图所示.

$x+3$	$x-4$	$x+1$
$x-2$	x	$x+2$
$x-1$	$x+4$	$x-3$

则三阶幻方中 9 个数之和 $S=(x+3)+(x-4)+(x+1)+(x-2)+x+(x+2)+(x-1)+(x+4)+(x-3)=9x$.

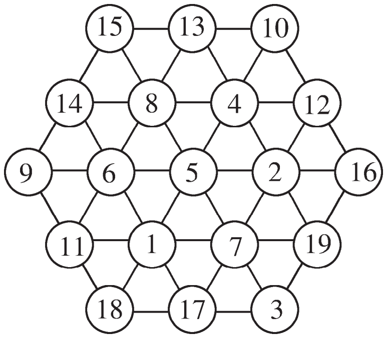
(2)（答案不唯一）

-8	2	0
6	-2	-10
-4	-6	4

(3) 21　**【解析】**第一行数之和为 $x+8+10=x+18$，则第三行第 1 个数为 $(x+18)-(x+2)=16$，第二行第 2 个数为 $(x+18)-(16+10)=x-8$，第二行第 3 个数为 $(x+18)-(2+x-8)=24$，第三行第 2 个数为 $(x+18)-(8+x-8)=18$，第三行第 3 个数为 $(x+18)-(16+18)=x-16$.

所以 $x+(x-8)+(x-16)=x+18$，解得 $x=21$.

(4) **解：**补充完图 4 各圆中的数如下图.（提示：设第一行最后 1 个数为 m，则每一个横或斜方向的线段上圆内的数之和为 $m+28$，以此展开推理）



所以 $x=1$，$y=19$.

◎代数式及整式的加减　新题型探究

例题　(1) $2+4+6+8=4\times5$

(2) $2+4+6+\cdots+2n+(2n+2)=(n+1)(n+2)$　**【解析】**因为第 1 个等式：$2+4=2\times3$，

第 2 个等式：$2+4+6=3\times4$，

第 3 个等式：$2+4+6+8=4\times5$，

……

以此规律，第 n 个等式：$2+4+6+8+\cdots+2n+(2n+2)=(n+1)(n+2)$.

(3) **解：**观察图形可知，等式左边的最后 1 个数即为左侧草垛最底端的小正方形草束的个数.

因为草垛的最底端有 2 022 个小正方形草束，

所以 $2+4+6+\cdots+2\ 020+2\ 022=1\ 011\times1\ 012=1\ 023\ 132$.

即这个草垛共有 1 023 132 个小正方形草束.

【点拨】对于图案的规律探究，可以从每个图案的整体与局部两个角度进行分析. 本题中由于每个小正方形的面积均为 1，因此左侧图案的面积可以看成是每一层的小正方形的面积之和，把左侧图案中阴影部分逆时针旋转 90°后移到右上角，则得到右侧的图案，而右侧图案可以看成一个大矩形，根据矩形的面积公式，可得等式的右边.

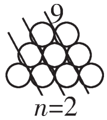
变式训练

（1）$S=3+4+5+6$

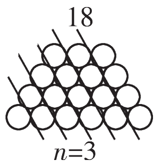
$S=4+5+6+7+8$

（2）**解：**如下图.（方法不唯一）

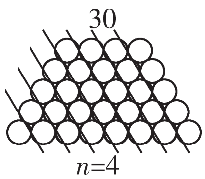
$S=1+2$



$S=1+2+3+3$



$S=1+2+3+4+4+4$



$S=1+2+3+4+5+5+5+5$

培优精练

（1）不满足　**【解析】**因为 $3\triangle 2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}=\frac{4}{9}$，$2\triangle 3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}=\frac{7}{8}$，所以 $3\triangle 2\neq 2\triangle 3$，即运算“△”不满足交换律.

（2）$1-\frac{1}{2^{10}}$　**【解析】**第 1 次分割后空白部分的面积为$\frac{1}{2}$；第 2 次分割后空白部分的面积为$\frac{1}{2^2}$；第 3 次分割后空白部分的面积为$\frac{1}{2^3}$；…，第 10 次分割后空白部分的面积为$\frac{1}{2^{10}}$. 所以 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}=1-\frac{1}{2^{10}}$.

解：易知第 n 次分割后空白部分的面积是$\frac{1}{2^n}$.

所以$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$.

专题三　一元一次方程

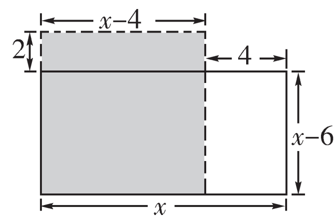
第 1 讲　利用一元一次方程解决图形问题

例一　解：设长方形的长为 x cm，

则正方形的边长为$(x-4)$cm，

长方形的宽为$(x-4-2)=(x-6)$cm.

依题意，画出示意图，如下图.



因为 $2(x+x-6)=36$，

解得 $x=12$.

经检验，符合题意.

所以正方形的边长 $x-4=12-4=8$（cm）.

即正方形的边长为 8 cm.

【点拨】利用一元一次方程解决图形的周长问题：①认真审题：厘清题意，找出题干或图形中的等量关系；②设出未知数：根据题意，巧设未知数；③列出方程：利用等量关系列出方程；④解方程；⑤检验：检验所求出的未知数的值是不是方程的解，是否符合实际.

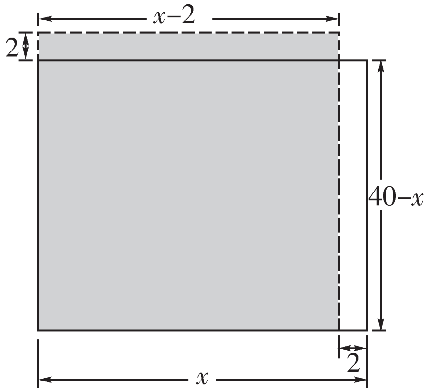
变式训练一

1. 解：设原长方形菜地的长为 x m.

因为原长方形菜地的周长是 80 m，

所以原长方形菜地的宽为 $\frac{1}{2}\times 80-x=(40-x)$m.

依题意，画出示意图，如下图.



因为 $40-x+2=x-2$，

解得 $x=22$.

所以 $40-x=40-22=18$（m）.

则原来长方形菜地的长、宽分别为 22 m，18 m.

2. 解：设养鸡场的宽 $AD=x$ m，

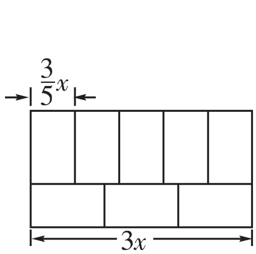
则 $AB=(x+5)$m.

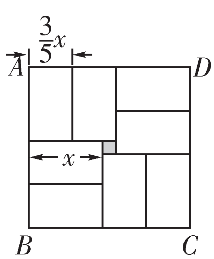
依题意，得 $x+(x-1)+(x+5)=10$.

解得 $x=2$.

即养鸡场的宽 AD 为 2 m.

例二 88 **【解析】**如下图，设小长方形的长为 x，则宽为 $\frac{3}{5}x$.





由题意，得 $2\times\frac{3}{5}x=x+2$.

解得 $x=10$.

则 $\frac{3}{5}x=\frac{3}{5}\times 10=6$.

所以正方形 $ABCD$ 的边长为 $x+2\times\frac{3}{5}x=10+2\times 6=22$.

所以正方形 $ABCD$ 的周长为 $4\times 22=88$.

【点拨】拼接类图形的长度问题，往往需要从图中观察出隐含的等量关系，再选择合适的量设未知数，列方程求解.

变式训练二

1. 解：设小长方形的宽为 x cm.

由图可知，小长方形的长等于小长方形的宽的 3 倍.

所以小长方形的长为 $3x$ cm.

所以大长方形的长为 $x+3x+x=5x$（cm），宽为 $3x$ cm.

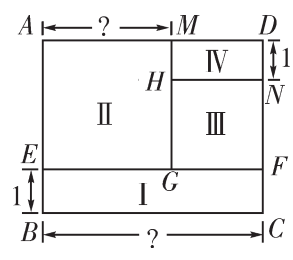
由题意可知，$2(3x+5x)=32$.

解得 $x=2$.

所以 $3x=3\times 2=6$.

则小长方形的长为 6 cm.

2. 解：（1）



因为 $ABCD$ 是长方形，

所以 $CD=AB=m$.

因为图形Ⅰ是长方形，

所以 $CF=BE$.

因为 $BE=DN=1$，

所以 $CF=BE=DN=MH=1$.

所以 $NF=CD-DN-CF=m-1-1=m-2$，

$GF=HG=HN=MD=NF=m-2$，

$AM=AE=MG=MH+HG=1+(m-2)=m-1$.

所以 $BC=AD=AM+MD=(m-1)+(m-2)=2m-3$.

(2) 因为大长方形 $ABCD$ 的周长为 12，

所以 $2(AB+BC)=2(m+BC)=12$.

所以 $BC=6-m$.

设 $AM=AE=x$，

则 $BE=m-x$.

所以 $CF=BE=DN=m-x$.

因为 $CD=AB=m$，

所以 $NF=CD-DN-CF=m-2(m-x)=2x-m$.

因为图形Ⅳ为长方形，

所以 $MD=HN=NF=2x-m$.

所以 $AD=AM+MD=x+(2x-m)=3x-m$.

因为 $AD=BC$，

所以 $3x-m=6-m$.

所以 $x=2$，即 $AE=2$.

所以 $MD=2x-m=4-m$，

$BE=DN=m-x=m-2$.

所以正方形Ⅱ的周长 $=4AE=8$，

长方形Ⅳ的周长 $=2(MD+DN)=2(4-m+m-2)=4$.

例三　27　**【解析】**设小长方形的长为 x cm，则小长方形的宽为 $(7-x)$ cm. 由题意，得 $x+3(7-x)=11$. 解得 $x=5$. 则小长方形的宽为 $7-x=7-5=2$. 所以阴影部分的总面积 $=7\times11-5\times5\times2=27$ (cm^2).

【点拨】本题考查了一元一次方程的应用. 找出隐含的大长方形、小长方形的长与宽的等量关系，并列出一元一次方程是解题的关键.

变式训练三

1. D　**【解析】**设小长方形的宽为 x，则小长方形的长为 $x+3$. 根据题意，得 $2(x+3)+x=12$. 解得 $x=2$. 则小长方形的长为 $x+3=2+3=5$，$AD=3x+3=3\times2+3=9$. 所以阴影部分的总面积为 $9\times12-6\times5\times2=48$.

2. 18.06　**【解析】**设小长方形的长为 x cm，则小长方形的宽为 $(5.7-2x)$ cm. 由题意，得 $2(5.7-2x)+x=4.5$. 解得 $x=2.3$. 则宽为 $5.7-2\times2.3=1.1$ (cm). 所以空白部分的总面积为 $5.7\times4.5-3\times2.3\times1.1=18.06$ (cm^2).

例四　**解：**设每张卡片的长边长为 x cm，依题意，得 $5x=3\times12+3x$.

解得 $x=18$.

则图中小正方形的边长 $=18-12=6$（cm）.

所以图中 3 块阴影部分的总面积为 $3\times6\times6=108$（cm^2）.

【点拨】本题考查了长方形和正方形的性质以及一元一次方程的应用．解题的关键是挖掘出题中隐含的等量关系．

变式训练四

1. B　**【解析】**设标号为①的小正方形的边长为 x，则标号为②，③，④，⑤，⑥的小正方形的边长分别为 x，$2x$，$3x$，$5x$，$8x$．所以大长方形的宽为 $8x$，长为 $13x$．所以大长方形的周长为（$13x+8x$）$\times2=42x$．依题意，得 $42x=84$．解得 $x=2$．则标号为④的小正方形的边长为 $3x=3\times2=6$．所以 $S_{④}=6\times6=36$.

2. (1) $4a+12$　$6a+9$　**【解析】**根据题意，得剪拼后的长方形的长为 $a+(a+3)=2a+3$，宽为 3，则剪拼后的长方形的周长为 $2(2a+3+3)=4a+12$，面积为$(2a+3)\times3=6a+9$.

(2) **解：**由（1）可知，$4a+12=20$.

解得 $a=2$.

(3) **解：**新长方形的长为 $2a+3-2=2a+1$，

新长方形的宽为 $3+1=4$.

根据题意，得（$2a+1$）$\times4=6a+9$.

解得 $a=\frac{5}{2}$.

培优精练

1. C　**【解析】**设原正方形纸片的边长是 x cm，则第一次剪下的长条的长是 x cm，宽是 5 cm；第二次剪下的长条的长是（$x-5$）cm，宽是 6 cm，则 $5x=6(x-5)$，解得 $x=30$．所以这两个剪下的长条的面积之和为 $30\times5\times2=300$（cm^2）．故选 C.

2. **解：**由题意，知长方形 $ABCD$ 的平移距离为 AE，设 $AE=x$，

因为长方形 $ABCD$ 的长为 5，宽为 4，

所以长方形 $ABCD$ 的周长为 $2\times(5+4)=18$.

因为长方形 $CDEF$ 的周长是长方形 $ABCD$ 周长的 $\frac{2}{3}$，

$ED=AD-AE=5-x$，

所以 $2\times(ED+DC)=18\times\frac{2}{3}$，

即 $2\times(5-x+4)=18\times\frac{2}{3}$.

解得 $x=3$.

所以长方形 $ABCD$ 的平移距离为 3.

3. **解：**设剪去的小正方形的边长为 x cm，

根据题意可知，$4\times6x+6\times6=84$.

解得 $x=2$.

∴原正方形纸片的边长为 $2+2+6=8$（cm）.

名卷压轴题

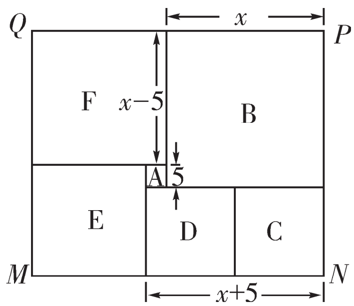
解：（1）如图，因为正方形 B 的边长

为 x m，正方形 A 的边长为 5 m，

则正方形 F 的边长为$(x-5)$m，

正方形 C 的边长为$\frac{1}{2}(x+5)$m，

正方形 E 的边长为$(x-5-5)=(x-10)$m.



由长方形的性质，得 $MQ=PN$.

所以$(x-5)+(x-10)=x+\frac{1}{2}(x+5)$.

解得 $x=35$.

经检验，符合题意.

（2）设余下的工程由乙工程队单独施工，还需要 x 天完成，

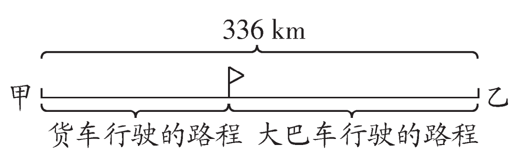
则$\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\right)\times4+\frac{1}{15}x=1$.

解得 $x=5$.

即余下的工程由乙工程队单独施工，还需要 5 天完成.

第 2 讲　利用一元一次方程解决行程问题

例一　解：（1）如下图.



设两车同时相向而行，x h 后相遇.

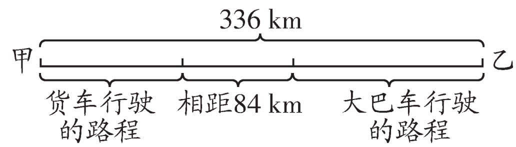
根据题意，得 $72x+96x=336$.

解得 $x=2$.

即两车同时相向而行，2 h 后相遇.

（2）两车相距 84 km，分两种情况：

①在两车相遇之前相距 84 km，如下图.



设 y h 后两车相距 84 km.

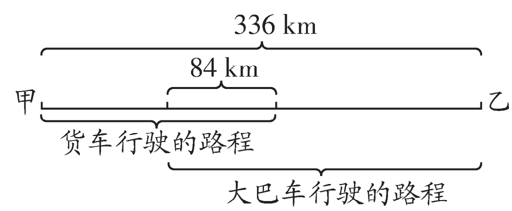
根据题意，得 $72y+96y+84=336$.

解得 $y=1.5$.

由（1）知，两车同时相向而行 2 h 后相遇，$y=1.5<2$，

所以 $y=1.5$ 符合题意.

②在两车相遇之后相距 84 km，如下图.



设 z h 后两车相距 84 km.

根据题意，得 $72z+96z-84=336$.

解得 $z=2.5$.

由（1）知，两车同时相向而行 2 h 后相遇，$z=2.5>2$，

所以 $z=2.5$ 符合题意.

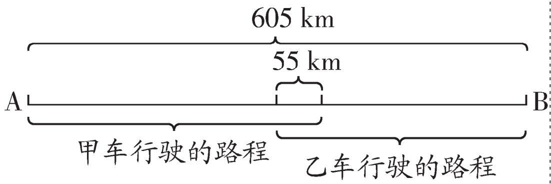
综上所述，两车同时相向而行，1.5 h 或 2.5 h 后相距 84 km.

【点拨】这是典型的相遇问题，画出线

段图可以清晰地找出等量关系. 线段图是解决行程问题的重要工具.

变式训练一

1. 解：设经过 x h，两车相遇后相距 55 km，如下图.



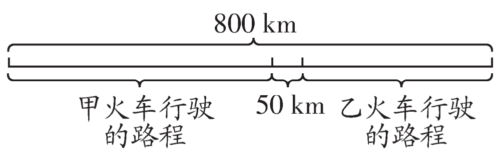
根据题意，得 $60x+50x=605+55$.

解得 $x=6$.

所以经过 6 h，两车相遇后相距 55 km.

2. $\frac{75}{22}$或$\frac{85}{22}$　**【解析】**设经过 x h 后两车相距 50 km. 分两种情况讨论：

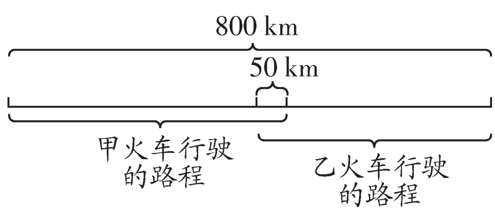
①相遇前两车相距 50 km，如下图.



$120x+100x+50=800$.

解得 $x=\frac{75}{22}$.

②相遇后两车相距 50 km，如下图.

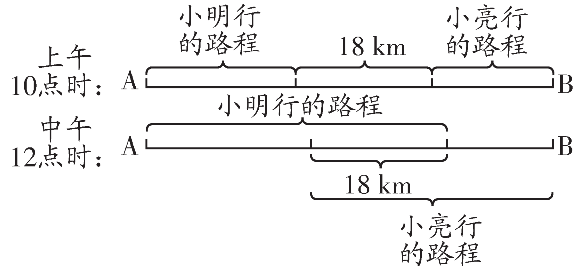


$120x+100x-50=800$.

解得 $x=\frac{85}{22}$.

综上所述，经过$\frac{75}{22}$ h 或$\frac{85}{22}$ h 后两车相距 50 km.

例二　解：(1) 设小亮的速度是 x km/h，则小明的速度是$(x+2)$ km/h，如下图.



由题意，得 $(10-8)\times(x+2)+18+(10-8)\times x=(12-8)\times(x+2)+(12-8)\times x-18$.

解得 $x=8$.

则 $x+2=8+2=10$ (km/h).

所以小亮的速度是 8 km/h，小明的速度是 10 km/h.

(2) A，B 两地之间的这条直路长 $(10-8)\times(10+8)+18=54$ (km).

所以 A，B 两地之间的这条直路长 54 km.

【点拨】行程问题的数量关系，画出线段图能更加直观地寻找题中隐含的等量关系.

变式训练二

设小亮的速度为 x km/h，

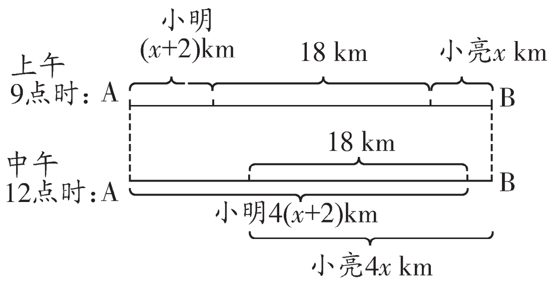
则小明的速度为$(x+2)$ km/h.

上午 9 点时，他们运动时间为 1 h，

小亮与小明的路程分别为 x km，$(x+2)$ km.

从 8 点到 12 点时，他们运动时间为 4 h，小亮的路程为 $4x$ km，小明的路

程为 $4(x+2)$ km，如下图.



依题意，得 $x+2+18+x=4(x+2)+4x-18$.

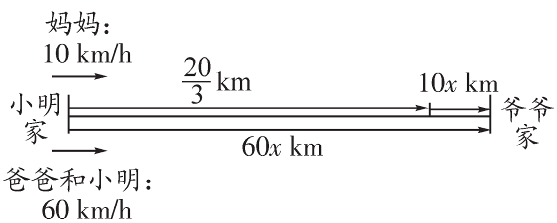
解得 $x=5$.

所以 $x+2=5+2=7$（km/h).

即小明的速度为 7 km/h，小亮的速度为 5 km/h.

例三　解：因为妈妈的速度为 10 km/h，所以 40 min 时，妈妈的骑行路程为 $10\times\frac{40}{60}=\frac{20}{3}$(km).

设爸爸开车到爷爷家的行驶时间为 x h，如下图.



根据题意，得$\frac{20}{3}+10x=60x$.

解得 $x=\frac{2}{15}$.

所以 $60x=60\times\frac{2}{15}=8$（km).

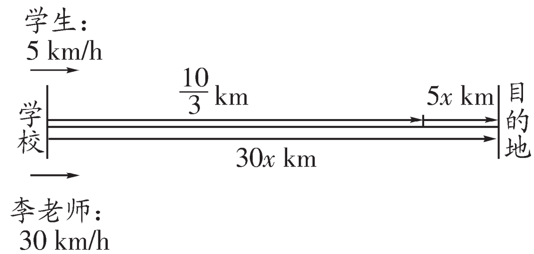
所以小明家到爷爷家的路程为 8 km.

【点拨】本题隐含了两个等量关系：行驶的时间差、路程相等，再结合线段图，便可建立方程，进行求解.

变式训练三

解：因为学生的步行速度为 5 km/h，所以 40 min 时，学生步行的路程为 $5\times\frac{40}{60}=\frac{10}{3}$(km).

设李老师到达目的地所用时间为 x h，如下图.



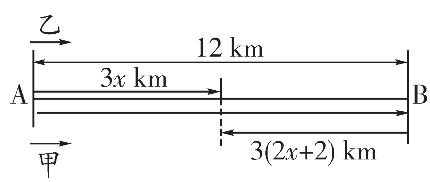
根据题意，得$\frac{10}{3}+5x=30x$.

解得 $x=\frac{2}{15}$.

所以 $30x=30\times\frac{2}{15}=4$（km).

即目的地距学校 4 km.

例四　解：设乙的速度是 x km/h，则甲的速度为$(2x+2)$km/h，如下图.



由题意，得 $3x+3(2x+2)=12\times2$.

解得 $x=2$.

即乙的速度是 2 km/h.

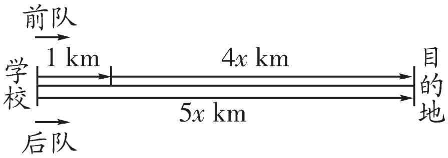
【点拨】本题的解题关键是甲、乙两人的路程之和为 2×12 km. 借助线段图能更直观地理解这一等量关系，然后

根据路程为等量关系，列方程求解.

变式训练四

解:(1) 因为前队的步行速度为 4 km/h，所以前队 15 min 所走的路程为 $4\times\frac{15}{60}=1$(km).

设两队同时到达目的地时，后队的步行时间为 x h，如下图.



根据题意，得 $1+4x=5x$.

解得 $x=1$.

则 $5x=5\times1=5$ (km).

即学校到目的地的距离为 5 km.

(2) 联络员第一次追上前队时所用的时间为 $1\div(10-4)=\frac{1}{6}$ (h).

此时联络员所骑行的距离为 $\frac{1}{6}\times10=\frac{5}{3}$ (km).

此时后队步行的距离为 $\frac{1}{6}\times5=\frac{5}{6}$ (km).

设联络员第一次追上前队后，立刻返回用了 y h 与后队相遇，

则 $5y+10y=\frac{5}{3}-\frac{5}{6}$.

解得 $y=\frac{1}{18}$.

所以联络员离目的地的距离为 $6-\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{18}\times5\right)=\frac{44}{9}$ (km).

培优精练

1. **解:** 设经过 x h，两车相距 30 km，分两种情况讨论:

①相遇前，两车相距 30 km，如图 1.

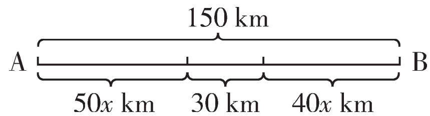


图 1

依题意，得 $50x+40x=150-30$.

解得 $x=\frac{4}{3}$.

②相遇后，两车相距 30 km，如图 2.

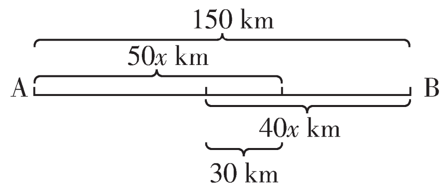


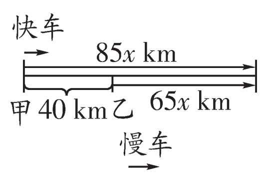
图 2

依题意，得 $50x+40x=150+30$.

解得 $x=2$.

综上所述，经过 $\frac{4}{3}$ h 或 2 h 时，两车相距 30 km.

2. **解:** 设快车 x h 后追上慢车，如下图.



依题意，得 $85x=40+65x$.

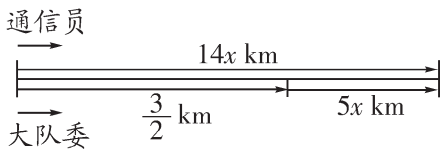
解得 $x=2$.

即快车 2 h 后追上慢车.

3. **解:** 走了 18 min 大队委的步行路程为

$5\times\frac{18}{60}=\frac{3}{2}$（km）.

设通信员需要 x h 可以追上大队委，如下图.



根据题意，得$\frac{3}{2}+5x=14x$.

解得 $x=\frac{1}{6}$.

即通信员需要$\frac{1}{6}$ h 可以追上大队委.

4. 解：（1）设经过 t h 两人相遇，如图 1.

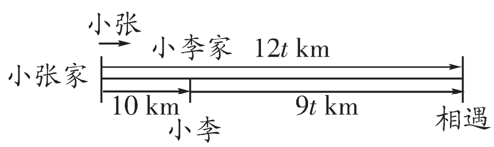


图 1

根据题意，得 $12t=9t+10$.

解得 $t=\frac{10}{3}$.

所以经过$\frac{10}{3}$ h 后两人相遇.

（2）设小张的车速为 x km/h，则相遇时小张所骑行的路程为 $\left(\frac{1}{2}+\frac{40}{60}\right)x$ km，如图 2.

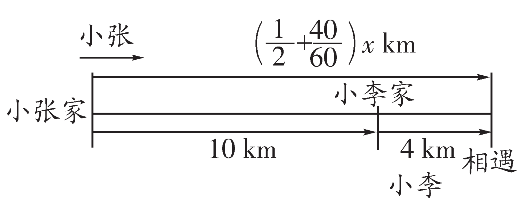


图 2

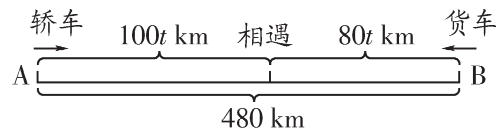
根据题意，得$\left(\frac{1}{2}+\frac{40}{60}\right)x=\frac{1}{2}\times8+10$.

解得 $x=12$.

故小张的车速为 12 km/h.

名卷压轴题

解：（1）设轿车行驶的时间为 t h，如下图.

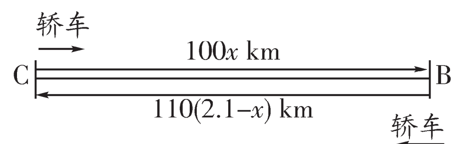


根据题意，得 $100t+80t=480$.

解得 $t=\frac{8}{3}$.

即当两车相遇时，轿车行驶的时间为 $\frac{8}{3}$ h.

（2）设轿车从 C 地行驶到 B 地所需时间为 x h，则轿车从 B 地行驶到 C 地所需时间为（$2.1-x$)h，如下图.



依题意，得 $100x=110\times(2.1-x)$.

解得 $x=1.1$.

则 C 地到 B 地的路程为 $100x=100\times1.1=110$(km)，

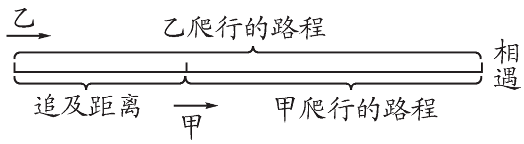
C 地到 A 地的路程为 $480-110=370$（km).

即 C 地到 A 地的路程为 370 km.

◎一元一次方程　新题型探究

例题　解：根据题意，画出线段图，如

下图.



易知第 1 次追及距离为 $3\times10=30$（m).

设第 1 次相遇用时 t_1 min，

则 $8t_1-5t_1=30$.

解得 $t_1=10$.

易知第 2 次追及距离为 $4\times10=40$（m).

设第 1 次相遇后，又过了 t_2 min 第 2 次相遇，

则 $8t_2-5t_2=40$.

解得 $t_2=\frac{40}{3}$.

易知从第 2 次相遇开始，每次相遇的追及距离都是 40 m.

所以从第 2 次相遇开始，每隔 $\frac{40}{3}$ min 甲、乙两只昆虫相遇 1 次.

所以从两只昆虫出发到第 20 次相遇用时为 $10+\frac{40}{3}\times(20-1)=\frac{790}{3}$(min).

所以乙的总爬行路程为 $\frac{790}{3}\times8\div40=52\frac{2}{3}$(圈).

因为 $\frac{2}{3}\times40=\frac{80}{3}$（m)，

$BC+CD=2\times10=20$（m)，

$BC+CD+DA=3\times10=30$（m)，

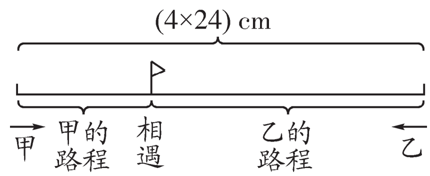
$20<\frac{80}{3}<30$，

所以第 20 次相遇时，在 AD 边上.

【点拨】追及问题的等量关系为：速度快的路程−速度慢的路程=追及距离. 本题分析出第 1 次相遇和第 2 次相遇的追及距离不同，从第 2 次相遇开始以后每次相遇的追及距离都相同是解本题的关键.

变式训练

解：根据题意，画出线段图，如下图.



设过了 x s，甲、乙两动点第 1 次相遇，

根据题意，得 $2x+4x=24\times4$.

解得 $x=16$.

设第 1 次相遇后，又过了 y s，甲、乙两动点第 2 次相遇，

根据题意，得

$(2+1)y+(4+1)y=24\times4$.

解得 $y=12$.

设第 2 次相遇后，又过了 z s，甲、乙两动点第 3 次相遇，

根据题意，得

$(2+1+1)z+(4+1+1)z=24\times4$.

解得 $z=9.6$.

设第 3 次相遇后，又过了 t s，甲、乙两动点第 4 次相遇，

根据题意，得

$(2+1+1+1)t+(4+1+1+1)t=24\times4$.

解得 $t=8$.

设甲按顺时针方向运动为正，逆时针方向运动为负，

因为 $2\times16-(2+1)\times12+(2+1+1)\times9.6-(2+1+1+1)\times8=32-36+38.4-40=-5.6$，

所以第 4 次相遇时甲与最近顶点之间的距离是 5.6 cm.

培优精练

解：设 3 次相遇所需的时间间隔分别为 t_1，t_2，t_3，

第 1 次相遇时，P，Q 两点移动的距离之和为 $4+3+4=11$（cm）.

则 $t_1+2t_1=11$.

解得 $t_1=\frac{11}{3}$.

从第 1 次相遇到第 2 次相遇，P，Q 两点移动的距离之和为 $4+3+4+3=14$（cm）.

则 $t_2+2t_2=14$.

解得 $t_2=\frac{14}{3}$.

易知从第 2 次相遇到第 3 次相遇，P，Q 两点移动的距离之和为 14 cm.

所以 $t_3=t_2=\frac{14}{3}$.

所以到第 3 次相遇时，点 P 移动的总时间为 $\frac{11}{3}+\frac{14}{3}+\frac{14}{3}=13$(s).

即当动点 P 出发后第 13 s 时，P，Q 两点第 3 次相遇.

专题四　几何图形初步

第 1 讲　与线段有关的计算

例一　解：由图可得 $AC=AB-BC=20-4=16$（cm）.

因为点 D 是 AC 的中点，

所以 $AD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times16=8$（cm）.

因为点 E 是 AB 的中点，

所以 $AE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times20=10$（cm）.

所以 $DE=AE-AD=10-8=2$（cm）.

【点拨】本题考查了线段的长度计算，利用了线段的和差，中点的性质进行求解.

变式训练一

1. C　**【解析】**因为 $AB=10$ cm，$BC=4$ cm，所以 $AC=AB+BC=10+4=14$（cm）. 因为 D 是 AC 的中点，所以 $AD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times14=7$（cm）. 因为 M 是 AB 的中点，所以 $AM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times10=5$（cm）. 所以 $MD=AD-AM=7-5=2$（cm）.

2. （1）6　**【解析】**有 AB，AC，AD，BC，BD，CD，共 6 条线段.

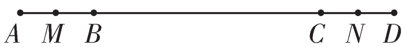
（2）① =　**【解析】**因为 $AB=CD$，所以 $AB+BC=CD+BC$，即 $AC=$

BD.

②**解：**因为 $AD=20$，$BC=12$，

所以 $AB+CD=AD-BC=20-12=8$.

因为 M 是 AB 的中点，N 是 CD 的中点，如下图.



所以 $BM=\frac{1}{2}AB$，$CN=\frac{1}{2}CD$.

所以 $BM+CN=\frac{1}{2}(AB+CD)=\frac{1}{2}\times 8=4$.

所以 $MN=BM+CN+BC=4+12=16$.

例二　解：（1）因为 B，C 两点将线段 AD 分为 $4:5:7$ 三部分，

所以可设 $AB=4x$ cm，

则 $BC=5x$ cm，$CD=7x$ cm.

因为 $CD=21$ cm，

所以 $7x=21$. 解得 $x=3$.

所以 $AD=4x+5x+7x=16x=16\times 3=48$（cm）.

因为 E 是 AD 的中点，

所以 $DE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\times 48=24$（cm）.

所以 $CE=DE-CD=24-21=3$（cm）.

（2）由（1），得 $AB=4x=4\times 3=12$（cm），

$BC=5x=5\times 3=15$（cm），

$CD=21$ cm，$CE=3$ cm.

所以 $BE=BC-CE=15-3=12$（cm）.

所以 $AB:BE=12:12=1$.

【点拨】见比设参在解与比例有关的题目中能大大简化计算. 根据线段示意图中的数量关系列方程也是解此题的关键.

变式训练二

1. 18　**【解析】**设 $MB=2x$ cm，则 $BC=3x$ cm，$CN=4x$ cm. 所以 $MN=MB+BC+CN=2x+3x+4x=9x$（cm）. 因为 P 是 MN 的中点，所以 $PN=\frac{1}{2}MN=\frac{9x}{2}$ cm. 所以 $PC=PN-CN=\frac{9x}{2}-4x=1$. 解得 $x=2$. 所以 $MN=9x=9\times 2=18$（cm）.

2. （1）①$x+5$　**【解析】**因为 $CD=x$，$BD=2CD$，所以 $BD=2x$. 所以 $AB=AD+BD=10+2x$. 因为 E 为 AB 的中点，所以 $AE=BE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}(10+2x)=x+5$.

②**解：**因为 $EC=BE-CD-BD$，

$EC=3CD$，

所以 $3x=(x+5)-x-2x$.

解得 $x=1$.

（2）**解：**因为 $AC=2BC$，

所以 $AB=AC+BC=3BC$.

因为 $BD=2CD$，

所以 $BC=CD+BD=3CD$.

则 $BC=\frac{3}{2}BD$.

所以 $AB=3\times\frac{3}{2}BD=\frac{9}{2}BD$.

所以 $BE=\frac{1}{2}AB=\frac{9}{4}BD$.

因为 $EC=BE-CD-BD$，

$CD=\frac{1}{2}BD$，

所以 $EC=\frac{9}{4}BD-\frac{1}{2}BD-BD=\frac{3}{4}BD$.

所以$\frac{EC}{BD}=\frac{3}{4}$.

例三　**解**：因为点 C 在直线 AB 上，$AC=6$ cm，$BC=4$ cm，

所以 $AC>BC$.

因此分两种情况：

①当点 C 在线段 AB 上时，如图 1.

图 1

因为 $AC=6$ cm，$BC=4$ cm，点 M，N 分别是 AC，BC 的中点，

所以 $MN=MC+CN=\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}(AC+BC)=\frac{1}{2}\times(6+4)=5$（cm）.

②当点 C 在 AB 的延长线上时，如图 2.

图 2

因为 $AC=6$ cm，$BC=4$ cm，点 M，N 分别是 AC，BC 的中点，

所以 $MN=MC-CN=\frac{1}{2}AC-\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}(AC-BC)=\frac{1}{2}\times(6-4)=1$（cm）.

综上所述，MN 的长为 5 cm 或 1 cm

【点拨】利用中点性质转化线段之间的倍分关系是解本题的关键. 当一条直线或线段上的线段的加减运算和倍数运算时，若题中没有给出示意图，则应先明确线段间的相互关系，画出几何图形，特别注意是否有遗漏的情况，再根据题意进行计算.

变式训练三

1. （1）6　**【解析】**图中的线段有 AC，AB，AD，CB，CD，BD 共 6 条.

（2）**解**：因为 B 是 CD 的中点，

$BC=3$ cm，

所以 $CD=2BC=2\times3=6$（cm）.

因为 $AD=13$ cm，

所以 $AC=AD-CD=13-6=7$（cm）.

（3）**解**：分两种情况讨论：

①当点 E 在线段 AC 上时，如图 1，

图 1

因为 $AB=AC+BC=7+3=10$（cm），

$EA=4$ cm，

所以 $BE=AB-AE=10-4=$

6（cm）.

②当点 E 在 CA 的延长线上时，如图 2.

图 2

因为 $AB=10$ cm，$EA=4$ cm，

所以 $BE=AB+EA=10+4=14$（cm）.

综上所述，BE 的长为 6 cm 或 14 cm.

2. **解：**①当点 C 在线段 AB 上时，如图 1.

图 1

因为 $AB=AC+BC$，$BC=\frac{1}{3}AC$，

所以 $AB=3BC+BC=4BC$.

又 $AB=12$ cm，

所以 $BC=3$ cm.

因为 P 是线段 AB 的中点，Q 是线段 BC 的中点，

所以 $PB=\frac{1}{2}AB=6$（cm），

$QB=\frac{1}{2}CB=1.5$（cm）.

则 $PQ=PB-QB=6-1.5=4.5$（cm）.

②当点 C 在线段 AB 的延长线上时，如图 2.

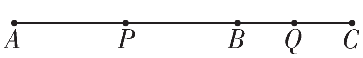


图 2

因为 $AB=AC-BC$，$BC=\frac{1}{3}AC$，

所以 $AB=3BC-BC=2BC$.

又 $AB=12$ cm，

所以 $BC=6$ cm.

因为 P 是线段 AB 的中点，Q 是线段 BC 的中点，

所以 $PB=\frac{1}{2}AB=6$ cm，

$QB=\frac{1}{2}CB=3$ cm.

则 $PQ=PB+QB=6+3=9$（cm）.

综上所述，线段 PQ 的长为 4.5 cm 或 9 cm.

例四　**解：**因为 $AB=3$ cm，$BC=1$ cm，

所以 $AC=AB+BC=3+1=4$（cm）.

因为 D 是线段 AC 的中点，

所以 $AD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times4=2$（cm）.

所以 $DB=AB-AD=3-2=1$（cm）

依题意，得 $AP=2t$ cm.

所以 $DP=AP-AD=(2t-2)$ cm.

因为 $DP=5DB$，

所以 $2t-2=5\times1$.

解得 $t=3.5$.

【点拨】线段上的动点问题，需要把动点的路程转化为对应线段的长．初始点与动点之间的线段长＝动点速度×动点运动时间，当时间未知时，常设时间为未知数，然后充分利用示意图中线段的和、差倍等数量关系，列出代数式或方程求解.

变式训练四

1. 画出示意图，如图所示.

因为 $AB=AC+BC=6+4=10$（cm）.

令点 A 表示的数为 0，

则点 C 表示的数为 6，

点 B 表示的数为 10.

设运动的时间为 t s，

点 P 从 $A\to B$ 用时为 $\frac{10}{2}=5$（s），

点 Q 从 $B\to A$ 用时为 $\frac{10}{1}=10$（s），

所以 $0\leqslant t\leqslant 5$.

易知点 P 表示的数为 $2t$，

点 Q 表示的数为 $10-t$.

当 P 是 CQ 的中点时，$PC=PQ$.

因为 $PC=|2t-6|$，

$PQ=|2t-(10-t)|=|3t-10|$，

①当 $2t-6=3t-10$ 时，

解得 $t=4$.

此时点 C，Q 重合，此种情况不成立.

②当 $2t-6=-(3t-10)$时，

解得 $t=\frac{16}{5}$.

综上所述，点 P 运动了$\frac{16}{5}$ s.

2. 解：因为 $AC=12$ cm，$BC=8$ cm，

所以 $AB=AC+BC=12+8=20$（cm）.

令点 A 表示的数为 0，则点 C 表示的数为 12，点 B 表示的数为 20.

易知 $AP=2x$ cm，$BQ=x$ cm.

点 P 从 $A\to C$ 用时为$\frac{12}{2}=6$（s），

点 Q 从 $B\to C$ 用时为$\frac{8}{1}=8$（s）.

①当点 C 是 PQ 的中点时，如图 1.

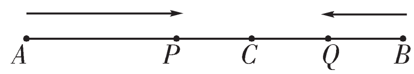


图 1

此时 $PC=AC-AP=(12-2x)$cm，

$CQ=BC-BQ=(8-x)$cm.

因为 $PC=CQ$，

所以 $12-2x=8-x$.

解得 $x=4$.

因为 $4<6$，$4<8$，

所以 $x=4$ 符合题意.

②当点 P 是 CQ 的中点时，如图 2.

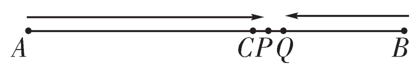


图 2

此时 $PC=AP-AC=(2x-12)$cm，

$PQ=AQ-AP=(AB-BQ)-AP=(20-x)-2x=(20-3x)$cm.

因为 $PC=PQ$，

所以 $2x-12=20-3x$.

解得 $x=6.4$.

因为 $6.4>6$，$6.4<8$，

所以 $x=6.4$ 符合题意.

③当 Q 是 PC 的中点时，如图 3.

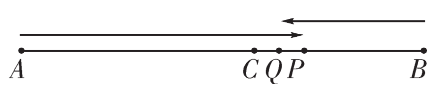


图 3

此时 $QP=AP-AQ=AP-(AB-$

$BQ)=2x-(20-x)=(3x-20)$ cm，

$CQ=AQ-AC=(AB-BQ)-AC=(20-x)-12=(8-x)$ cm.

因为 $QP=CQ$，

所以 $3x-20=8-x$.

解得 $x=7$.

因为 $7>6$，$7<8$，

所以 $x=7$ 符合题意.

综上所述，当 x 为 4 或 6.4 或 7 时，C，P，Q 这三个点中，有一个点恰为另外两点所连线段的中点.

培优精练

1. 22 cm 或 2 cm 【解析】设 $AB=20$ cm，$CD=24$ cm.

分两种情况：

①当点 B，C 重合，点 A，D 分别在点 B 的两侧时，如图 1.

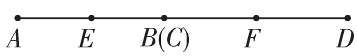


图 1

设 E，F 分别是 AB，CD 的中点，则 $BE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 20=10$（cm），$CF=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}\times 24=12$（cm）. 所以 $EF=EB+CF=10+12=22$（cm）. 此时两根木条的中点之间的距离是 22 cm.

②当点 B，C 重合，点 A，D 在点 B 的同侧时，如图 2.

图 2

设 E，F 分别是 AB，CD 的中点，则 $BE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 20=10$（cm），$CF=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}\times 24=12$（cm）. 所以 $EF=CF-BE=12-10=2$（cm）. 此时两根木条的中点之间的距离是 2 cm.

综上所述，两根木条的中点之间的距离为 22 cm 或 2 cm.

2. **解**：(1) 因为 $(a-15)^2+|2b-9|=0$，

所以 $(a-15)^2=0$，$|2b-9|=0$.

因为 a，b 均为非负数，

所以 $a=15$，$b=4.5$.

(2) 因为 C 是线段 AB 的中点，$AB=a=15$，

所以 $AC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 15=7.5$.

因为 $CE=b=4.5$，

所以 $AE=AC+CE=7.5+4.5=12$.

因为 D 是线段 AE 的中点，

所以 $DE=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}\times 12=6$.

所以 $CD=DE-CE=6-4.5=1.5$.

3. **解**：因为 M 是 AC 的中点，$AC=10$ cm，

所以 $CM=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 10=5$（cm）.

设 $CN=3x$ cm，则 $NB=4x$ cm，

$AB=AC+CN+NB=10+3x+4x=(10+7x)$ cm.

因为 $CN=\frac{1}{4}AB$，

所以 $3x=\frac{1}{4}(10+7x)$.

解得 $x=2$.

所以 $CN=3x=3\times2=6$（cm）.

所以 $MN=CM+CN=5+6=11$（cm）.

4. （1）$2t$　**【解析】**因为点 M 的速度为每秒 2 个单位长度，所以 $AM=2t$.

（2）**解：**根据题意可知 $BN=t$.

当 M，N 两点重合时，$AM=AN$.

因为 $AM=2t$，

$AN=AB+BN=20+t$.

所以 $2t=20+t$.

解得 $t=20$.

因为点 M 从 $A\rightarrow C$ 的运动时间为 $\frac{20+80}{2}=50$（s），

点 N 从 $B\rightarrow C$ 的运动时间为 $\frac{80}{1}=80$（s），

因为 $20<50$，$20<80$，

所以 $t=20$ 符合题意.

故当 t 为 20 时，M，N 两点重合.

（3）**解：**根据题意，得 $AP=\frac{1}{2}AM=\frac{1}{2}\times2t=t$，

$BQ=\frac{1}{2}BN=\frac{1}{2}t$.

由（2）可知，$0\leqslant t\leqslant50$.

所以 $AQ=AB+BQ=20+\frac{1}{2}t$.

所以 $PQ=AQ-AP$ 或 $PQ=AP-AQ$.

即 $5=\left(20+\frac{1}{2}t\right)-t$ 或 $5=t-\left(20+\frac{1}{2}t\right)$.

解得 $t=30$ 或 $t=50$.

故存在时间 t，使 PQ 的长为 5，此时 t 的值为 30 或 50.

名卷压轴题

（1）16　24　**【解析】**因为 $AB=\frac{3}{2}BC$，$AB=AC+BC$，$AC=8$ m，所以 $8+BC=\frac{3}{2}BC$. 解得 $BC=16$. 所以 $AB=\frac{3}{2}\times16=24$（m）.

（2）**解：**机器狗 P 在点 A 与机器猫 Q 的中点处只存在一种情况，即机器狗 P 与机器猫 Q 第一次相遇之前，如图 1.

图 1

因为 $AP=6x$ m，$CQ=2x$ m，

所以 $PQ=AQ-AP=(AC+CQ)-AP=(8+2x)-6x=(8-4x)$ m.

因为 $AP=PQ$，

所以 $6x=8-4x$.

解得 $x=\frac{4}{5}$.

因为机器狗 P 从 $A\rightarrow C$ 的运动时间为 $\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$（s），

所以 $x=\frac{4}{5}$ 符合题意.

即当 x 为 $\frac{4}{5}$ 时，机器狗 P 在点 A 与机器猫 Q 的中点处.

(3) ①第一次相遇前，点 P 在线段 AQ 上，且 $PQ=2$ m 时，如图 2.

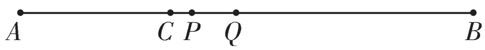


图 2

因为 $AP=6x$ m，$CQ=2x$ m，

所以 $PQ=AQ-AP=(AC+CQ)-AP=(8+2x)-6x=(8-4x)$ m.

因为 $PQ=2$ m，

所以 $8-4x=2$.

解得 $x=\frac{3}{2}$.

经检验，符合题意.

②第一次相遇后，点 P 未到达点 B，在线段 BQ 上，且 $PQ=2$ m 时，如图 3.

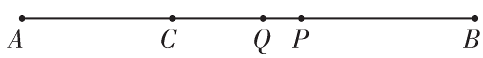


图 3

因为 $AP=6x$ m，$CQ=2x$ m，

所以 $PQ=AP-AQ=AP-(AC+CQ)=6x-(8+2x)=(4x-8)$ m.

因为 $PQ=2$ m，

所以 $4x-8=2$.

解得 $x=\frac{5}{2}$.

经检验，符合题意.

③在第二次相遇前，点 P 到达点 B 并返回，在线段 BQ 上，且 $PQ=2$ m，如图 4.

图 4

因为 $AB+BP=6x$ m，

所以 $24+BP=6x$，

即 $BP=(6x-24)$ m.

因为 $CQ=2x$ m，

所以 $PQ=BC-CQ-BP=16-2x-(6x-24)=(40-8x)$ m.

即 $40-8x=2$.

解得 $x=\frac{19}{4}$.

经检验，符合题意.

综上所述，当 x 的值为 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{19}{4}$ 时，机器狗 P 和机器猫 Q 之间的距离 $PQ=2$ m.

第 2 讲　与角有关的计算

例一　62°　**【解析】**由题意，知 $\angle AOB=2\angle AOC=2\times28^\circ=56^\circ$. 因为 $\angle AOB+\angle BOD=180^\circ$，所以 $\angle BOD=180^\circ-56^\circ=124^\circ$. 所以 $\angle BOE=\frac{1}{2}\angle BOD=\frac{1}{2}\times124^\circ=62^\circ$.

【点拨】结合图形，找出各角之间的数量关系是解本题的关键.

变式训练一

1. B　**【解析】**因为点 O 在直线 AE 上，OC 平分 $\angle AOE$，所以 $\angle AOC=$

$\angle COE=90°$. 因为$\angle BOD$是直角，$\angle 1=25°$，所以$\angle BOC=\angle BOD-\angle 1=90°-25°=65°$. 所以$\angle BOE=\angle COE+\angle BOC=90°+65°=155°$.

2. 解：因为OE平分$\angle AOB$，$\angle AOB=90°$，

所以$\angle BOE=\angle AOE=45°$.

又因为$\angle EOF=60°$，

所以$\angle BOF=\angle EOF-\angle BOE=60°-45°=15°$.

又因为OF平分$\angle BOC$，

所以$\angle BOC=2\angle BOF=2\times15°=30°$.

所以$\angle AOC=\angle AOB+\angle BOC=90°+30°=120°$.

故$\angle AOC=120°$，$\angle BOC=30°$.

例二　解：(1) 设$\angle BOD=x$，

则$\angle AOC=3\angle BOD+10°=3x+10°$.

因为$\angle AOC+\angle COD+\angle BOD=180°$，

所以$(3x+10°)+90°+x=180°$.

解得$x=20°$.

即$\angle BOD=20°$.

(2) 因为OE，OF分别平分$\angle BOD$，$\angle BOC$，

所以$\angle BOE=\frac{1}{2}\angle BOD=\frac{1}{2}\times20°=10°$，

$\angle BOF=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}(\angle BOD+\angle COD)=\frac{1}{2}\times(20°+90°)=55°$.

所以$\angle EOF=\angle BOF-\angle BOE=55°-10°=45°$.

【点拨】本题主要考查的是角的相关计算. 掌握角平分线的性质是解此题的关键.

变式训练二

(1) $\angle BOD$　$\angle BOE$　**【解析】**因为直线AB，CD相交于点O，所以$\angle AOC$的对顶角是$\angle BOD$，$\angle AOE$的邻补角是$\angle BOE$.

(2) **解：**因为$\angle EOC:\angle EOD=2:3$，

所以可设$\angle EOC=2x$，$\angle EOD=3x$.

因为$\angle EOC+\angle EOD=180°$，

所以$2x+3x=180°$. 解得$x=36°$.

所以$\angle EOC=2x=2\times36°=72°$.

因为OA平分$\angle EOC$，

所以$\angle AOE=\frac{1}{2}\angle EOC=\frac{1}{2}\times72°=36°$.

所以$\angle BOE=180°-\angle AOE=180°-36°=144°$.

例三　D　**【解析】**因为$\angle AOB=60°$，$\angle AOC=\frac{1}{3}\angle AOB$，所以$\angle AOC=\frac{1}{3}\times60°=20°$. 分两种情况讨论：

①当OC在$\angle AOB$内部时，如图1.

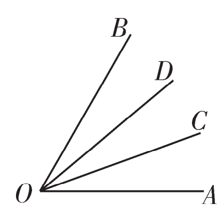


图1

则 $\angle BOC=\angle AOB-\angle AOC=60^\circ-20^\circ=40^\circ$. 因为射线 OD 平分 $\angle BOC$，所以 $\angle COD=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\times 40^\circ=20^\circ$.

②当 OC 在 $\angle AOB$ 外部时，如图 2.

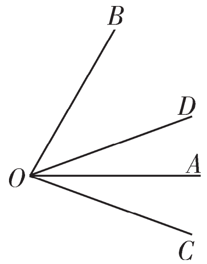


图 2

则 $\angle BOC=\angle AOB+\angle AOC=60^\circ+20^\circ=80^\circ$. 因为射线 OD 平分 $\angle BOC$，所以 $\angle COD=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\times 80^\circ=40^\circ$.

综上所述，$\angle COD$ 的度数为 20°或 40°.

【点拨】此题考查角度的和差计算，角平分线的性质. 根据题意正确画出两种情况的图形是解此题的关键.

变式训练三

1. D **【解析】**①当射线 OC 在 $\angle AOB$ 内部时，如图 1.

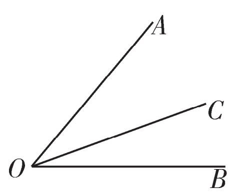


图 1

因为 $\angle AOB=50^\circ$，$\angle BOC=20^\circ$，所以 $\angle AOC=\angle AOB-\angle BOC=50^\circ-20^\circ=30^\circ$.

②当射线 OC 在 $\angle AOB$ 外部时，如图 2.

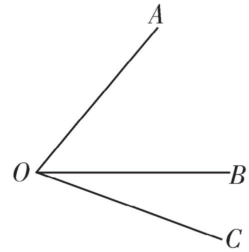


图 2

因为 $\angle AOB=50^\circ$，$\angle BOC=20^\circ$，所以 $\angle AOC=\angle AOB+\angle BOC=50^\circ+20^\circ=70^\circ$.

综上所述，$\angle AOC$ 的度数为 30° 或 70°.

2. 20°或 60° **【解析】**因为射线 OM 是 $\angle AOB$ 的平分线，射线 ON 是 $\angle BOC$ 的平分线，所以 $\angle BOM=\frac{1}{2}\angle AOB$，$\angle BON=\frac{1}{2}\angle BOC$.

分两种情况讨论：

①当射线 OC 在 $\angle AOB$ 的内部时，如图 1.

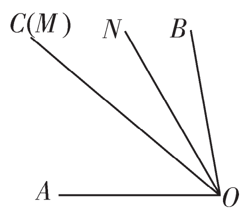


图 1

则 $\angle MON=\angle BOM-\angle BON=\frac{1}{2}(\angle AOB-\angle BOC)=\frac{1}{2}\times(80^\circ-$

$40^\circ)=20^\circ$.

②当射线 OC 在 $\angle AOB$ 的外部时，如图 2.

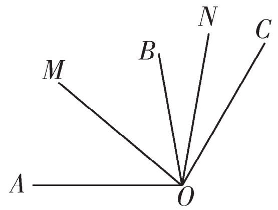


图 2

$\angle MON=\angle BOM+\angle BON=\frac{1}{2}(\angle AOB+\angle BOC)=\frac{1}{2}\times(80^\circ+40^\circ)=60^\circ$.

综上所述，$\angle MON$ 的度数为 20° 或 60°.

例四　解：（1）因为 $\angle AOE+\angle AOF=180^\circ$，$\angle AOE=40^\circ$，

所以 $\angle AOF=180^\circ-\angle AOE=180^\circ-40^\circ=140^\circ$.

又因为 OC 平分 $\angle AOF$，

所以 $\angle FOC=\frac{1}{2}\angle AOF=\frac{1}{2}\times140^\circ=70^\circ$.

所以 $\angle EOD=\angle FOC=70^\circ$.

因为 $\angle BOE=\angle AOB-\angle AOE=90^\circ-40^\circ=50^\circ$，

所以 $\angle BOD=\angle EOD-\angle BOE=70^\circ-50^\circ=20^\circ$.

（2）因为 $\angle AOE+\angle AOF=180^\circ$，$\angle AOE=\alpha$，

所以 $\angle AOF=180^\circ-\angle AOE=180^\circ-\alpha$.

又因为 OC 平分 $\angle AOF$，

所以 $\angle FOC=\frac{1}{2}\angle AOF=\frac{1}{2}(180^\circ-\alpha)=90^\circ-\frac{1}{2}\alpha$.

所以 $\angle EOD=\angle FOC=90^\circ-\frac{1}{2}\alpha$.

因为 $\angle BOE=\angle AOB-\angle AOE=90^\circ-\alpha$，

所以 $\angle BOD=\angle EOD-\angle BOE=\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)-(90^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}\alpha$.

（3）$\angle BOD=\frac{1}{2}\angle AOE$　**【解析】**从（1）和（2）的结果可以看出 $\angle AOE$ 和 $\angle BOD$ 的关系为 $\angle BOD=\frac{1}{2}\angle AOE$.

【点拨】本题考查了邻补角、对顶角、角平分线的性质等知识点，结合图形，充分利用角的和差、倍等关系进行求解.

变式训练四

（1）45°　**【解析】**因为 $\angle AOB=90^\circ$，$\angle BOC=60^\circ$，所以 $\angle AOC=\angle AOB+\angle BOC=90^\circ+60^\circ=150^\circ$. 因为 OM 平分 $\angle AOC$，ON 平分 $\angle BOC$，所以 $\angle MOC=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}\times150^\circ=75^\circ$，$\angle NOC=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\times60^\circ=30^\circ$. 所以 $\angle MON=\angle MOC-\angle NOC=75^\circ-30^\circ=45^\circ$.

（2）**解：**$\angle MON=\frac{1}{2}\alpha$. 理由如下：

因为$\angle AOB=\alpha$，$\angle BOC=60°$，

所以$\angle AOC=\angle AOB+\angle BOC=\alpha+60°$.

因为OM平分$\angle AOC$，ON平分$\angle BOC$，

所以$\angle MOC=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}(\alpha+60°)=\frac{1}{2}\alpha+30°$，

$\angle NOC=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\times60°=30°$.

所以$\angle MON=\angle MOC-\angle NOC=\left(\frac{1}{2}\alpha+30°\right)-30°=\frac{1}{2}\alpha$.

(3) **解**：$\angle MON=\frac{1}{2}\alpha$，与$\beta$的大小无关. 理由如下：

因为$\angle AOB=\alpha$，$\angle BOC=\beta$，

所以$\angle AOC=\angle AOB+\angle BOC=\alpha+\beta$.

因为OM是$\angle AOC$的平分线，ON是$\angle BOC$的平分线，

所以$\angle MOC=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$，

$\angle NOC=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\beta$.

所以$\angle MON=\angle MOC-\angle NOC=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\frac{1}{2}\beta=\frac{1}{2}\alpha$.

即$\angle MON=\frac{1}{2}\alpha$.

培优精练

1. 解：因为$\angle EOC:\angle EOD=4:5$，

所以可设$\angle EOC=4x$，

则$\angle EOD=5x$.

则$4x+5x=180°$. 解得$x=20°$.

所以$\angle EOC=4\times20°=80°$.

因为OA平分$\angle EOC$，

所以$\angle COA=\angle AOE=\frac{1}{2}\angle EOC=\frac{1}{2}\times80°=40°$.

所以$\angle BOE=180°-\angle AOE=180°-40°=140°$.

2. 解：（1）因为OB是$\angle AOC$的平分线，

$\angle AOB=30°$，

所以$\angle AOC=2\angle AOB=2\times30°=60°$.

（2）因为OB是$\angle AOC$的平分线，

$\angle BOC=30°$，

所以$\angle AOC=2\angle BOC=2\times30°=60°$.

所以$\angle COE=\angle AOE-\angle AOC=120°-60°=60°$.

又因为OD是$\angle COE$的平分线，

所以$\angle EOD=\frac{1}{2}\angle COE=\frac{1}{2}\times60°=30°$.

3. 解：（1）因为OE平分$\angle COB$，

所以$\angle COE=\angle BOE=\frac{1}{2}\angle COB$.

因为$OF\perp OE$，

所以$\angle BOF-\angle BOE=\angle EOF=90°$，

即$\angle BOF-\angle COE=90°$.

所以$\angle BOF$的足角是$\angle COE$，$\angle BOE$.

（2）设这个角的度数为x，

①当 $0<x<90°$时，

$90°+x=180°-x$，

解得 $x=45°$.

②当 $90°<x<180°$时，

$x-90°=180°-x$，

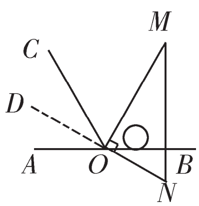
解得 $x=135°$.

即这个角的度数为 45°或 135°.

名卷压轴题

解：（1）直线 ON 平分$\angle AOC$. 理由如下：

设 ON 的反向延长线为 OD，如下图.



因为 OM 平分$\angle BOC$，

所以$\angle MOC=\angle MOB$.

又因为 $OM\perp ON$，

所以$\angle MOD=\angle MON=90°$.

所以$\angle COD=\angle BON$.

因为$\angle AOD=\angle BON$，

所以$\angle COD=\angle AOD$.

所以 OD 平分$\angle AOC$，

即直线 ON 平分$\angle AOC$.

（2）$\angle AOM-\angle NOC=30°$. 理由如下：

因为$\angle BOC=120°$，

所以$\angle AOC=180°-\angle BOC=180°-120°=60°$.

因为$\angle AON=\angle MON-\angle AOM=90°-\angle AOM$，

$\angle AON=\angle AOC-\angle NOC=60°-\angle NOC$，

所以 $90°-\angle AOM=60°-\angle NOC$.

所以$\angle AOM-\angle NOC=30°$.

◎几何图形初步　新题型探究

例题　30°或 15°或 22.5°　**【解析】**

①当$\angle MPQ=2\angle NPQ$ 时，如图 1.

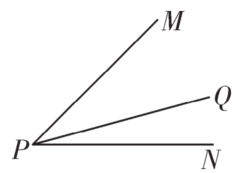


图 1

因为$\angle MPQ+\angle NPQ=\angle MPN$，

所以$\angle MPQ+\frac{1}{2}\angle MPQ=\frac{3}{2}\angle MPQ=45°$. 解得$\angle MPQ=30°$.

②当$\angle NPQ=2\angle MPQ$ 时，如图 2.

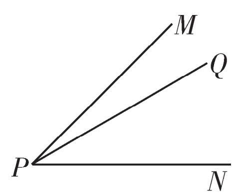


图 2

因为$\angle MPQ+\angle NPQ=\angle MPN$，

所以$\angle MPQ+2\angle MPQ=3\angle MPQ=45°$.

解得$\angle MPQ=15°$.

③当$\angle MPN=2\angle MPQ$ 或$\angle MPN=2\angle NPQ$时，如图 3.

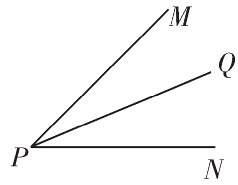


图 3

此时，PQ平分$\angle MPN$. 所以$2\angle MPQ=45°$. 解得$\angle MPQ=22.5°$. 综上所述，$\angle MPQ$的度数为$30°$或$15°$或$22.5°$.

【点拨】 本题主要考查了理解新定义，解题时要注意分情况讨论，画出图形，从图中寻找等量关系.

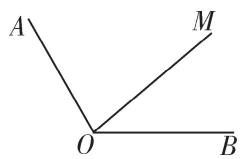
变式训练

（1）是　**【解析】** 因为一个角的平分线平分这个角，且这个角是所分两个角的两倍，所以一个角的角平分线是这个角的“二倍线”.

（2）**解：** 因为$\angle AOB=120°$，

所以OM从$OB\to OA$的旋转时间为$\frac{120°}{10°}=12$（s）.

①若$\angle AOM=2\angle BOM$时，如下图.



因为$\angle AOM+\angle BOM=120°$，

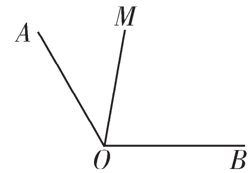
则$3\angle BOM=120°$.

解得$\angle BOM=40°$.

所以$t=\frac{40°}{10°}=4$（s）.

经检验，符合题意.

②若$\angle BOM=2\angle AOM$时，如图.



因为$\angle AOM+\angle BOM=120°$.

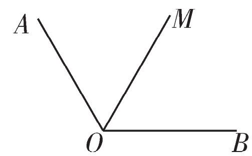
所以$\frac{1}{2}\angle BOM+\angle BOM=120°$.

所以$\angle BOM=80°$.

所以$t=\frac{80°}{10°}=8$（s）.

经检验，符合题意.

③若$\angle AOB=2\angle AOM$或$\angle AOB=2\angle BOM$时，如下图.



此时OM平分$\angle AOB$.

所以$\angle BOM=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times120°=60°$.

所以$t=\frac{60°}{10°}=6$（s）.

综上所述，当t的值为4或8或6时，射线OM是$\angle AOB$的“二倍线”.

培优精练

（1）不是　**【解析】** 因为一个角的平分线平分这个角，所以这个角是所分两个角的2倍. 所以一个角的平分线不是这个角的“和谐线”.

（2）**解：** 因为$\angle AOB=60°$，射线OC是$\angle AOB$的“和谐线”，

分四种情况讨论：

①当$\angle AOB=3\angle AOC=60°$时，

所以$\angle AOC=20°$.

②当$\angle AOB=3\angle BOC=60°$时，

所以$\angle BOC=20°$.

因为$\angle AOC+\angle BOC=\angle AOB=60°$，

所以$\angle AOC=60°-\angle BOC=60°-20°=40°$.

③当$\angle AOC=3\angle BOC$时，

因为$\angle AOC+\angle BOC=\angle AOB=60°$，

所以$\angle AOC+\frac{1}{3}\angle AOC=60°$.

解得$\angle AOC=45°$.

④当$\angle BOC=3\angle AOC$时，

因为$\angle AOC+\angle BOC=\angle AOB=60°$，

所以$\angle AOC+3\angle AOC=60°$.

解得$\angle AOC=15°$.

综上所述，$\angle AOC$的度数为20°或40°或45°或15°.

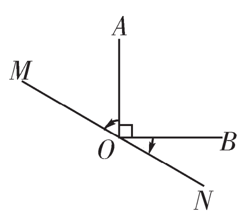
(3) **解：** 因为$360°\div15°=24$ (s)，

$360°\div7.5°=48$ (s)，

所以运动时间t的取值范围为$0\leqslant t\leqslant24$.

易知$\angle AOM=(15t)°$，$\angle BON=(7.5t)°$.

①当OM与ON第一次在一条直线上时，如下图.



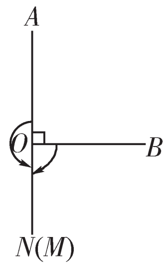
因为$\angle AOM+\angle AOB+\angle BON=180°$，

所以$(15t)°+90°+(7.5t)°=180°$.

解得$t=4$.

经检验，符合题意.

②当OM与ON第二次在一条直线上时，OM与ON重合，如下图.



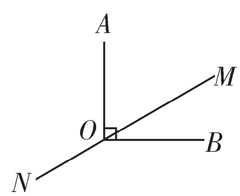
因为$\angle AOM+\angle AOB+\angle BON=360°$，

所以$(15t)°+90°+(7.5t)°=360°$.

解得$t=12$.

经检验，符合题意.

③当OM与ON第三次在一条直线上时，如下图.



因为$\angle AOM+\angle AOB+\angle BON=360°+180°$，

所以$(15t)°+90°+(7.5t)°=540°$.

解得$t=20$.

经检验，符合题意.

综上所述，t的值为4或12或20.