参考答案

专题一　三角形

第1讲　利用三角形三边之间的关系计算

例一　解：∵△ABC 的三边长分别为 3，5，a，

∴$\begin{cases}a>5-3,\\a<5+3.\end{cases}$

解得 $2<a<8$.

则 $a-2>0$，$a-1>0$，$a-8<0$.

∴$|a-2|-|a-1|+|a-8|$

$=a-2-(a-1)+[-(a-8)]$

$=a-2-a+1-a+8$

$=7-a$.

【点拨】在解本题时，需要运用三角形三边之间的关系，即三角形的任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边，也可以转化为三角形中任意一边大于其他两边之差且小于其他两边之和.

变式训练一

解：（1）∵a，b，c 为△ABC 的三边长，

∴$\begin{cases}a-b<c,\\a+b>c,\end{cases}$

即$\begin{cases}a-b-c<0,\\a+b-c>0.\end{cases}$

则 $b-c+a>0$.

∴$|a-b-c|-|b-c+a|$

$=-(a-b-c)-(b-c+a)$

$=-a+b+c-b+c-a$

$=-2a+2c$.

（2）当 $a=2$，$c=3$ 时，

原式 $=-2\times2+2\times3=2$.

例二　解：（1）∵m 为正数，

∴$2m+1-(m-2)=2m+1-m+2=m+3>0$.

∴$2m+1>m-2$.

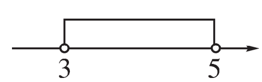
∵△ABC 的三边长分别为 $m-2$，$2m+1$，8，

∴$\begin{cases}2m+1-(m-2)<8,\\8<2m+1+(m-2).\end{cases}$

解得 $3<m<5$.

∴m 的取值范围为 $3<m<5$.

在数轴上表示如下图所示.



（2）由（1），得 m 的取值范围为 $3<m<5$.

∵△ABC 的三边均为整数，

∴$m=4$.

∵$(m-2)+(2m+1)+8=m-2+2m+1+8=3m+7$，

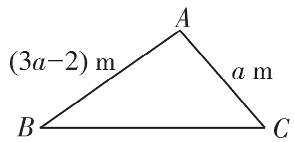
∴△ABC 的周长为 $3\times4+7=19$.

【点拨】本题求解的关键是结合数轴，从 m 的取值范围内找出 m 的值. 在求△ABC 的周长时，先化简再代值，体

现了整体思想在解题中的优越性.

变式训练二

1. 解：（1）根据题意画△ABC（如下图）.



∵第二条边的长为（$3a-2$）m，

∴第三条边的长为 $50-a-(3a-2)=(52-4a)$(m).

（2）不能. 理由如下：

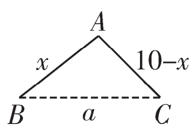
当 $a=10$ 时，三条边的长分别为 10 m，28 m，12 m.

∵$10+12<28$，

∴不能构成三角形，

即第一条边的长不能为 10 m.

2. 解：如下图，设 $AB=x$ cm（$x\geqslant 5$），则 $AC=(10-x)$cm.



由三角形的三边关系，得

$x-(10-x)<a<x+10-x$.

∴$2x-10<a<10$.

∵$x\geqslant 5$，

∴$2x-10\geqslant 0$.

∴a 的最大取值范围为 $0<a<10$.

又 a 为正整数，

∴a 的最大值为 9.

例三　解：能. 理由如下：

由题意，知四边形 $ABCD$ 的边长分别为 $BC=8$ cm，$CD=6$ cm，$AB=4$ cm，$AD=5$ cm，

∵$BC-AB<AC<BC+AB$，

$CD-AD<AC<CD+AD$，

∴$4<AC<12$，$1<AC<11$.

∴$4<AC<11$.

同理 $2<BD<9$.

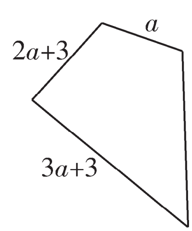
∴一根 3 cm 长的木条，能把这个四边形木框固定.

【点拨】此题主要考查三角形三边的关系，正确得出 AC，BD 的取值范围是解决本题的关键.

变式训练三

1. D　**【解析】**在△ABC 中，∵两边长分别为 8，9，∴$1<x<17$. ∵在△BCD 中，两边长分别为 5，18，∴$13<x<23$. 综上，x 的取值范围为 $13<x<17$. ∴x 的值可能是 14. 故选 D.

2. 解：（1）画出四边形的示意图如下.



依题意，得

第二条边长为$(2a+3)$cm，

第三条边长为 $a+2a+3=(3a+3)$cm.

又四边形的周长是 48 cm，

∴第四条边的长为

$48-a-(2a+3)-(3a+3)$

$=48-a-2a-3-3a-3$

$=(42-6a)$(cm).

(2) 不能. 理由如下:

当 $a=3$ 时,四边形的四条边的边长分别为 3 cm,9 cm,12 cm,24 cm.

∵$3+9+12=24$,

∴它们是在同一条直线上的四条线段,不能构成四边形.

例四 **解:**∵BD 为△ABC 的中线,

∴$AD=CD$.

设 $AD=CD=x$ cm,

则 $AB=AC=x+x=2x$(cm).

∵BD 将△ABC 的周长分为 12 cm 与 15 cm 两部分,分两种情况讨论:

①当 $BC+CD=15$ cm 时,

则 $AB+AD=12$ cm.

即 $\begin{cases} BC+x=15, \\ 2x+x=12. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=4, \\ BC=11. \end{cases}$

则 $2x=2\times4=8$.

此时△ABC 的三边长为 $AB=AC=8$ cm,$BC=11$ cm.

∵$AB+AC=8+8=16$(cm),

16 cm>11 cm$=BC$,

∴符合三角形三边之间的关系.

②当 $BC+CD=12$ cm 时,

则 $AB+AD=15$ cm.

即 $\begin{cases} BC+x=12, \\ 2x+x=15. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=5, \\ BC=7. \end{cases}$

则 $2x=2\times5=10$.

此时△ABC 的三边长为 $AB=AC=10$ cm,$BC=7$ cm.

∵$AB+BC=10+7=17$(cm),

17 cm>10 cm$=AC$,

∴符合三角形三边之间的关系.

综上所述,△ABC 的三边长为:$AB=AC=8$ cm,$BC=11$ cm;或 $AB=AC=10$ cm,$BC=7$ cm.

【点拨】本题求解的技巧是利用数形结合的方法,先根据题意以“数”解“形”,在图形上确定三角形周长被中线分成的两部分;再以“形”助“数”,因为题中 BD 将△ABC 周长分为 12 cm 与 15 cm 两部分,但并没有定哪部分为 12 cm,所以需要分类讨论.

变式训练四

解:∵AD 是 BC 边上的中线,

∴$BD=CD$.

设 $BD=CD=x$,$AB=y$,

则 $AC=2BC=4x$.

∵AD 把△ABC 的周长分为 40 与 60 两部分,分两种情况讨论:

①当 $AC+CD=60$ 时,

则 $AB+BD=40$.

即 $\begin{cases} 4x+x=60, \\ y+x=40. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=12, \\ y=28. \end{cases}$

则 $AB=28$,

$BC=BD+CD=2x=2\times12=24$,

$AC=4x=4\times12=48$.

$\because BC+AB=24+28=52>AC$,

$\therefore$符合三角形三边之间的关系.

②当 $AC+CD=40$ 时，

则 $AB+BD=60$.

即$\begin{cases}4x+x=40,\\ y+x=60.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=8,\\ y=52.\end{cases}$

则 $AB=52$,

$BC=2x=16$.

$AC=4x=4\times8=32$.

$\because AC+BC=32+16=48<AB$,

$\therefore$不符合三角形三边之间的关系.

综上所述，BC 的长为 24.

培优精练

1. **解**：（1）设第三根木棒的长度为 x m，

根据三角形三边之间的关系，得

$5-3<x<5+3$.

解得 $2<x<8$.

结合表格可知，x 可以取 3，4，5，6，共 4 种.

所以小明的爷爷可以选择规格为 3 m，4 m，5 m，6 m 的木棒.

（2）由表格中的数据可知，在长度为 3 m，4 m，5 m，6 m 的木棒中，长度为 3 m 的价格最低.

所以小明的爷爷选择规格为 3 m 的木棒最省钱.

2. **解**：（1）$\because a=m^2+n^2$，$b=m^2$，$c=mn$，且 $m>n>0$，

$\therefore m^2+n^2>m^2>mn$.

$\therefore a>b>c$.

（2）$\because m>n>0$，

$\therefore mn>n^2$.

$\therefore m^2+mn>m^2+n^2$，

即 $b+c>a$.

由（1），得 $a>b>c$.

$\therefore$以 a，b，c 为三边长的三角形一定存在.

3. **证明**：在$\triangle ABD$ 中，

$AB+AD>BD$.

在$\triangle PDC$ 中，$CD+PD>PC$.

$\therefore AB+AD+CD+PD>BD+PC$.

$\therefore AB+AC>BD-PD+PC$.

$\therefore AB+AC>BP+PC$.

名卷压轴题

解：（1）$\because\triangle BDE$ 的周长 $=BE+BD+DE$，

四边形 $ACDE$ 的周长 $=AE+AC+DC+DE$，

$\therefore BE+BD+DE=AE+AC+DC+DE$.

$\because D$ 为 BC 的中点，

$\therefore BD=DC$.

$\therefore BE=AE+AC$，

即 $AB-AE=AE+AC$.

$\because AB=10$ cm，$AC=6$ cm，

$\therefore 10-AE=AE+6$.

$\therefore AE=2$ cm.

（2）$\triangle ABC$ 的周长被 DE 分成的两部分的差是 2，分两种情况讨论：

①当 $BE+BD=AE+AC+CD+2$ 时，

$\because BE=AB-AE$，$BD=CD$，

$\therefore AB-AE=AE+AC+2$，

即 $10-AE=AE+6+2$.

$\therefore AE=1$ cm.

②当 $BE+BD+2=AE+AC+CD$ 时，

$\because BE=AB-AE$，$BD=CD$，

$\therefore AB-AE+2=AE+AC$，

即 $10-AE+2=AE+6$.

$\therefore AE=3$ cm.

综上所述，$AE=1$ cm 或 $AE=3$ cm.

第 2 讲　与三角形有关的角

例一　解：（1）在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=180^\circ-\angle B-\angle C=180^\circ-30^\circ-64^\circ=86^\circ$.

$\because AE$ 平分 $\angle BAC$，

$\therefore \angle CAE=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times86^\circ=43^\circ$.

$\because AD\perp BC$，

$\therefore \angle ADC=90^\circ$.

$\therefore \angle CAD=180^\circ-\angle ADC-\angle C=180^\circ-90^\circ-64^\circ=26^\circ$.

$\therefore \angle DAE=\angle CAE-\angle CAD=43^\circ-26^\circ=17^\circ$.

（2）$\because AD\perp BC$，

$\therefore \angle CAD=90^\circ-\angle C$.

$\because AE$ 平分 $\angle BAC$，

$\therefore \angle CAE=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle B-\angle C)$.

$\therefore \angle DAE=\angle CAE-\angle CAD=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle B-\angle C)-(90^\circ-\angle C)=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)=\frac{1}{2}\times50^\circ=25^\circ$.

【点拨】本题运用了数形结合的方法，根据题目中已知的图形，利用三角形内角和定理、角平分线与高的定义等，得到各角之间的数量关系，由此把图形问题转化为计算角的度数问题．本题还运用了整体处理思想，把 $\angle C-\angle B$ 看作一个整体，并利用三角形内角和定理把 $\angle DAE$ 用关于 $\angle C-\angle B$ 的代数式表示，由此即可顺利求得 $\angle DAE$.

变式训练一

解：$\because AC\perp BC$ 于点 C，

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

$\therefore \angle ABC=90^\circ-\angle A=90^\circ-20^\circ=70^\circ$.

$\therefore \angle ABE=180^\circ-\angle ABC=180^\circ-70^\circ=110^\circ$.

$\because AB\parallel DF$，

$\therefore \angle CEF=\angle ABE$.

$\therefore \angle CEF=110^\circ$.

例二　（1）**解：**$\because$ 三个内角的平分线交于点 O，

$\therefore \angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，

$\angle OAC=\frac{1}{2}\angle BAC$，

$\angle OCA=\frac{1}{2}\angle ACB$.

$\therefore \angle OAC+\angle OCA=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ACB)=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ABC)=90^\circ-$

$\frac{1}{2}\angle ABC=90°-\angle OBC=90°-\angle OBD$.

∴ $\angle AOC=180°-(\angle OAC+\angle OCA)=180°-(90°-\angle OBD)=90°+\angle OBD$.

∵ $\angle ODC=\angle AOC$,

$\angle ODC=\angle BOD+\angle OBD$,

∴ $\angle BOD+\angle OBD=90°+\angle OBD$.

∴ $\angle BOD=90°$.

（2）①**证明：**∵ BF 平分 $\angle ABE$,

∴ $\angle EBF=\frac{1}{2}\angle ABE=\frac{1}{2}(180°-\angle ABC)=90°-\frac{1}{2}\angle ABC=90°-\angle OBD$.

由（1）可知，$\angle ODB=90°-\angle OBD$.

∴ $\angle EBF=\angle ODB$.

∴ $BF/\!/OD$.

②**解：**∵ BF 平分 $\angle ABE$,

$\angle ABE=\angle BAC+\angle ACB$,

∴ $\angle EBF=\frac{1}{2}\angle ABE=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ACB)$.

∵三个内角的平分线交于点 O,

∴ $\angle BCF=\frac{1}{2}\angle ACB$.

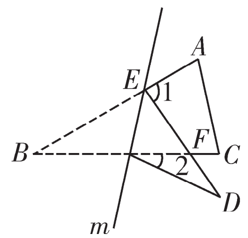
∵ $\angle F=\angle EBF-\angle BCF=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ACB)-\frac{1}{2}\angle ACB=\frac{1}{2}\angle BAC$.

∴ $\angle BAC=2\angle F=2\times 50°=100°$.

【点拨】本题求解主要根据三角形内角和定理、角平分线的定义以及三角形的外角等于不相邻的两个内角之和，把图形中各角之间的关系转化为角的度数之间的数量关系，由此列出算式计算或证明.

变式训练二

解：设直线 m 与 AB 相交于点 E，ED 与 BC 相交于点 F，如下图所示.



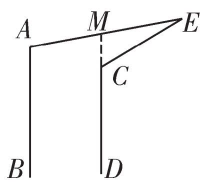
由翻折可知，$\angle D=\angle B=30°$.

∵ $\angle 2=25°$,

∴ $\angle EFB=\angle 2+\angle D=25°+30°=55°$.

∴ $\angle 1=\angle B+\angle EFB=30°+55°=85°$.

例三 （1）$\angle DCE=\angle E+\angle A$ **【解析】**在图1中延长 DC 交 AE 于点 M，如下图所示.

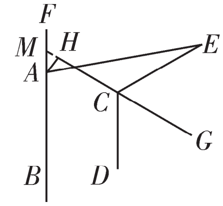


∵ $AB/\!/CD$，∴ $\angle A=\angle DME$.

∵ $\angle DCE=\angle E+\angle DME$,

∴ $\angle DCE=\angle E+\angle A$.

（2）**解：**在图2中延长 GH 交 BF 于点 M，如下图所示.



设 $\angle DCG=\angle ECG=\alpha$,

则$\angle DCE=2\alpha$.

∵$AB\parallel CD$,

∴$\angle AMG=\angle DCG=\alpha$.

由（1）得，$\angle DCE=\angle E+\angle BAE$.

∵$\angle E=20^\circ$,

∴$2\alpha=20^\circ+\angle BAE$,

即$\angle BAE=2\alpha-20^\circ$.

∵$\angle BAE+\angle MAE=180^\circ$,

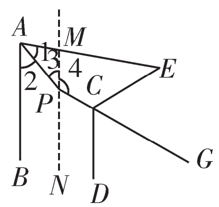
∴$\angle MAE=180^\circ-\angle BAE=180^\circ-(2\alpha-20^\circ)=200^\circ-2\alpha$.

∵AH平分$\angle FAE$,

∴$\angle MAH=\angle HAE=\frac{1}{2}\angle MAE=\frac{1}{2}(200^\circ-2\alpha)=100^\circ-\alpha$.

∴$\angle AHC=\angle AMG+\angle MAH=\alpha+(100^\circ-\alpha)=100^\circ$.

（3）**证明：**在图 3 中过点 P 作 $MN\parallel AB$ 交 AE 于点 M，如下图所示.



∵$\angle E+2\angle APC=360^\circ$,

$\angle E+\angle APC+\angle EAP+\angle ECP=360^\circ$,

∴$\angle APC=\angle EAP+\angle ECP=\angle 1+\angle ECP$.

∵$MN\parallel AB$,

∴$\angle 2=\angle 3$.

∵AP平分$\angle EAB$,

∴$\angle 1=\angle 2$.

∴$\angle 1=\angle 3$.

∵$\angle APC=\angle 3+\angle 4=\angle 1+\angle 4$.

∴$\angle 4=\angle ECP$.

∵$\angle ECP+\angle ECG=180^\circ$,

∴$\angle 4+\angle ECG=180^\circ$.

∵$\angle 4+\angle NPG=180^\circ$,

∴$\angle NPG=\angle ECG=\angle GCD$.

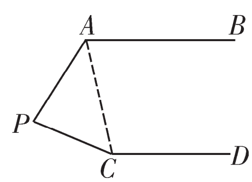
∴$MN\parallel CD$.

∴$AB\parallel CD$.

【点拨】本题求解需要通过作辅助线构造三角形，为利用三角形内角和定理进行计算提供条件，再利用三角形内角和定理及角平分线的定义把图形中各角之间的位置关系转化为各角之间的数量关系.

变式训练三

C **【解析】**连接 AC，如下图所示.



∵$AB\parallel CD$，∴$\angle BAC+\angle DCA=180^\circ$. ∵$\angle P+\angle PAC+\angle PCA=180^\circ$，∴$\angle BAP+\angle P+\angle DCP=\angle BAC+\angle DCA+\angle P+\angle PAC+\angle PCA=180^\circ+180^\circ=360^\circ$. 故选 C.

培优精练

1. C **【解析】**①图形中，根据同角的余角相等可得$\angle\alpha=\angle\beta$；②图形中，$\angle\alpha>\angle\beta$；③图形中，$\angle\alpha<\angle\beta$；④图形中，$\angle\alpha=\angle\beta=45^\circ$. 所以$\angle\alpha=\angle\beta$的是①④. 故选 C.

2. （1）**解**：∵ $\angle ACB=40^\circ$，

∴ $\angle ACD=180^\circ-\angle ACB=180^\circ-40^\circ=140^\circ$.

∵ $\angle B=30^\circ$，

∴ $\angle EAC=\angle B+\angle ACB=30^\circ+40^\circ=70^\circ$.

∵ CE 是 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle ACD$ 的平分线，

∴ $\angle ACE=\frac{1}{2}\angle ACD=\frac{1}{2}\times140^\circ=70^\circ$.

∴ $\angle E=180^\circ-\angle EAC-\angle ACE=180^\circ-70^\circ-70^\circ=40^\circ$.

（2）**证明**：∵ CE 平分 $\angle ACD$，

∴ $\angle ACE=\angle DCE$.

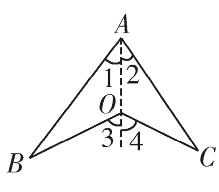
∵ $\angle DCE=\angle B+\angle E$，

∴ $\angle ACE=\angle B+\angle E$.

∵ $\angle BAC=\angle ACE+\angle E$，

∴ $\angle BAC=\angle B+\angle E+\angle E=\angle B+2\angle E$.

3. （1）**证明**：在图 1 中连接 AO 并延长，如下图所示.



∵ $\angle 3$ 是 $\triangle ABO$ 的外角，

∴ $\angle 3=\angle 1+\angle B$. ①

∵ $\angle 4$ 是 $\triangle AOC$ 的外角，

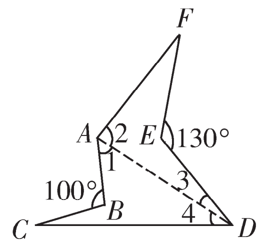
∴ $\angle 4=\angle 2+\angle C$. ②

①+②，得

$\angle 3+\angle 4=\angle 1+\angle B+\angle 2+\angle C$，

即 $\angle BOC=\angle A+\angle B+\angle C$.

（2）**解**：在图 2 中连接 AD，如下图所示.



由（1），得 $\angle F+\angle 2+\angle 3=\angle DEF$，③

$\angle 1+\angle 4+\angle C=\angle ABC$. ④

③+④，得

$\angle F+\angle 2+\angle 3+\angle 1+\angle 4+\angle C=\angle DEF+\angle ABC=130^\circ+100^\circ=230^\circ$，

即 $\angle BAF+\angle C+\angle CDE+\angle F=230^\circ$.

名卷压轴题

（1）①$20^\circ$　**【解析】**∵ $\angle MON=40^\circ$，OE 平分 $\angle MON$，∴ $\angle AOB=\angle BON=\frac{1}{2}\angle MON=\frac{1}{2}\times40^\circ=20^\circ$.

∵ $AB/\!/ON$，∴ $\angle ABO=\angle BON=20^\circ$.

②$120^\circ$　**【解析】**∵ $\angle BAD=\angle ABD$，∴ $\angle BAD=\angle ABD=\angle ABO=20^\circ$. ∵ $\angle MAB=\angle MON=40^\circ$，∴ $\angle OAC=180^\circ-\angle BAD-\angle MAB=180^\circ-20^\circ-40^\circ=120^\circ$，即 $x=120^\circ$.

③$60^\circ$　**【解析】**∵ $\angle ABO=20^\circ$，$\angle BAD=\angle BDA$，∴ $\angle BAD=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ABO)=\frac{1}{2}\times(180^\circ-20^\circ)=80^\circ$. ∵ $\angle MAB=\angle MON=40^\circ$，∴ $\angle OAC=180^\circ-\angle BAD-\angle MAB=$

$180°-80°-40°=60°$，即 $x=60°$.

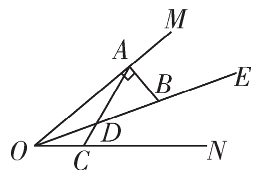
（2）**解：**$\because BA\perp OM$，

$\therefore \angle ABO=180°-\angle AOB-\angle BAO=180°-20°-90°=70°$.

分四种情况：

①当点 D 在线段 OB 上时，

若 $\angle BAD=\angle ABD$，如下图所示.

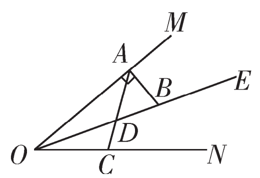


则 $\angle OAC=\angle OAB-\angle BAD=\angle OAB-\angle ABO=90°-70°=20°$，

即 $x=20°$.

②当点 D 在线段 OB 上时，

若 $\angle BAD=\angle BDA$，如下图所示.

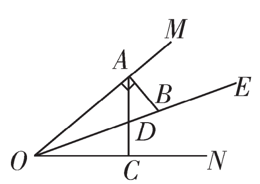


则 $\angle OAC=\angle OAB-\angle BAD=90°-\frac{1}{2}(180°-70°)=35°$，

即 $x=35°$.

③当点 D 在线段 OB 上时，

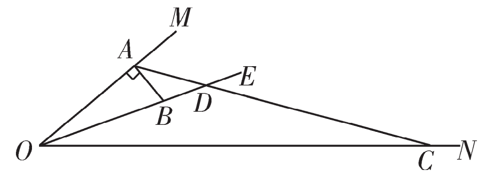
若 $\angle ADB=\angle ABD$，如下图所示.



则 $\angle OAC=\angle OAB-\angle BAD=90°-(180°-2\angle ABO)=90°-(180°-140°)=50°$，

即 $x=50°$.

④当点 D 在射线 BE 上时，如下图所示.



$\because \angle ABE=180°-\angle ABO=180°-70°=110°$，且三角形的内角和为 $180°$，

$\therefore$ 在 $\triangle ADB$ 中只能 $\angle BAD=\angle ADB$.

则 $\angle OAC=\angle OAB+\angle BAD=90°+\frac{1}{2}\angle ABO=90°+\frac{1}{2}\times70°=125°$，

即 $x=125°$.

综上所述，存在这样的 x 的值，使得 $\triangle ADB$ 中有两个相等的角，且 x 的值为 $20°$ 或 $35°$ 或 $50°$ 或 $125°$.

第 3 讲　利用方程或不等式解决多边形问题

例一　解：设多边形的每个内角为 x，

则与其相邻的外角为 $\frac{1}{8}x$.

根据题意，得 $x+\frac{1}{8}x=180°$.

解得 $x=160°$.

$\therefore \frac{1}{8}x=\frac{1}{8}\times160°=20°$.

$\therefore$ 这个多边形的边数为 $\frac{360}{20}=18$.

$\therefore 180°\times(18-2)=2\,880°$.

即这个多边形的每个内角均为 $160°$，其内角和为 $2\,880°$.

【点拨】本题的求解关键是根据多边形的内角与外角的关系，列出关于内角

度数的一元一次方程，从而把图形问题转化为方程问题，通过解方程，解决问题.

变式训练一

1. **解：**图 1 中根据三角形外角的性质，得 $x+65°=x+(x-5°)$.
解得 $x=70°$.
图 2 中，∵四边形的内角和是 360°，
∴$x+(x+10°)+60°+90°=360°$.
解得 $x=100°$.

2. **解：**∵五边形五个内角的度数之比是 2∶4∶5∶4∶3，
设五边形的五个内角分别是 $2x$，$4x$，$5x$，$4x$，$3x$.
根据题意，得
$2x+4x+5x+4x+3x=(5-2)\times 180°$.
解得 $x=30°$.
∴$2x=60°$，$3x=90°$，$4x=120°$，$5x=150°$.
∴这个五边形中最大内角的度数为 150°.

例二　**解：**∵两个多边形的边数之比为 2∶5，
∴可设这两个多边形的边数分别是 $2x$ 和 $5x$.
根据题意，得 $(2x-2)\times 180°+(5x-2)\times 180°=1\,800°$.
解得 $x=2$.
∴$2x=4$，$5x=10$，
即这两个多边形的边数分别为 4 和 10.
(2) 边数为 4 的多边形，其内角和为 $(4-2)\times 180°=360°$.
边数为 10 的多边形，其内角和为 $(10-2)\times 180°=1\,440°$.
即这两个多边形的内角和分别为 360° 和 1 440°.

【点拨】本题根据两个多边形的所有内角之和为 1 800°得到关于多边形边数的方程，解方程可求得多边形的边数，再利用多边形的内角和公式 $(n-2)\times 180°$ 求各自的内角和.

变式训练二

解：(1) 设该多边形的边数为 m，
根据题意，得 $(m-2)\times 180°=5\times 360°$.
解得 $m=12$.
即这个多边形的边数是 12.
(2) 设该多边形的边数为 n，
根据题意，得 $(n-2)\times 180°=1\,440°$.
解得 $n=10$.
∵多边形的各边长相等且周长是 100，
∴该多边形的边长为 $100\div 10=10$.

例三　**解：**假设这种多边形存在，则锯去一个角后，根据不同的锯法，可能会出现三种情况：
设原来木板是 n 边形.
①当不过木板的任意一个顶点锯去一个角时，如图 1 所示，

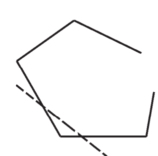


图 1

则锯去一个角后木板变为（$n+1$）边形.

根据题意，得（$n+1-2$）$\times 180^\circ=1\ 620^\circ$.

解得 $n=10$.

∴原木板是十边形.

②当只过木板的一个顶点锯去一个角时，如图 2 所示，

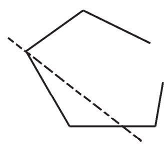


图 2

则锯去一个角后木板的边数仍为 n 条.

根据题意，得$(n-2)\times 180^\circ=1\ 620^\circ$.

解得 $n=11$.

∴原木板是十一边形.

③当过木板的两个顶点（或沿多边形的任意一条对角线）锯去一个角时，如图 3 所示，

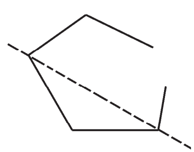


图 3

则锯去一个角后木板的边数变为（$n-1$）条.

根据题意，得（$n-1-2$）$\times 180^\circ=1\ 620^\circ$.

解得 $n=12$.

∴原木板是十二边形.

综上所述，小明说的这种多边形存在，这块木板是十边形或十一边形或十二边形.

【点拨】本题根据多边形的内角和公式列出关于边数 n 的方程，把多边形"存在性"问题转化为判定所列方程的解是否符合题意. 注意结合图形，分不同的情况讨论锯去一个角的情况.

变式训练三

解：（1）设这个外角的度数是 x，

根据题意，得$(5-2)\times 180^\circ-(180^\circ-x)+x=600^\circ$.

解得 $x=120^\circ$.

即这个外角的度数是 120°.

（2）存在. 理由如下：

设边数为 n，这个外角的度数是 y，

根据题意，得$(n-2)\times 180^\circ-(180^\circ-y)+y=600^\circ$.

整理，得 $y=570^\circ-90^\circ n$.

∵$0<y<180^\circ$，

∴$0<570^\circ-90^\circ n<180^\circ$.

解得 $4\dfrac{1}{3}<n<6\dfrac{1}{3}$.

∵n 为正整数，

∴$n=5$ 或 $n=6$.

当 $n=6$ 时，$y=30^\circ$.

故存在符合题意的其他多边形，这个多边形的边数为 6，这个外角的度数为 30°.

培优精练

1. 解：（1）∵淇淇每次前进的路程相等，向右转过的角度相同，且直到他第一次回到出发点 A 为止，

∴淇淇所经过的路线正好构成一个外

角是 20° 的正多边形.

∴正多边形的边数为 $360\div20=18$.

∵$18\times10=180$（m），

∴淇淇一共走了 180 m.

（2）由（1）知，这个多边形的边数为 18.

∴这个多边形的内角和为 $(18-2)\times180^\circ=2\ 880^\circ$.

2. （1）$\angle1=\angle2$　**【解析】**∵$AB\perp DE$，$BC\perp EF$，∴$\angle1+\angle BMF=90^\circ$，$\angle2+\angle AME=90^\circ$. ∵$\angle BMF=\angle AME$，∴$\angle1=\angle2$.

（2）$\angle1+\angle2=180^\circ$　**【解析】**∵$AB\perp DE$，$BC\perp EF$，∴$\angle1+\angle2+90^\circ+90^\circ=360^\circ$. ∴$\angle1+\angle2=360^\circ-90^\circ-90^\circ=180^\circ$.

（3）一个角的两边与另一个角的两边分别垂直，那么这两个角相等或互补.

（4）**解：**设一个角的度数为 α，则另一个角的度数为 $3\alpha-40^\circ$，分两种情况：

①当两个角的位置如图 1 所示时，

根据题意，得 $\alpha=3\alpha-40^\circ$.

解得 $\alpha=20^\circ$.

则 $3\alpha-40^\circ=20^\circ$.

②当两个角的位置如图 2 所示时，

根据题意，得 $\alpha+3\alpha-40^\circ=180^\circ$.

解得 $\alpha=55^\circ$.

则 $3\alpha-40^\circ=125^\circ$.

综上所述，这两个角的度数为 20°，20°或 55°，125°.

3. （1）70°　**【解析】**在四边形 $ABCD$ 中，∵$\angle A=140^\circ$，$\angle D=80^\circ$，∴$\angle B+\angle C=360^\circ-(\angle A+\angle D)=360^\circ-(140^\circ+80^\circ)=140^\circ$. ∵$\angle B=\angle C$，∴$\angle C=\frac{1}{2}\times140^\circ=70^\circ$.

（2）**解：**∵$BE\parallel AD$，

∴$\angle ABE+\angle A=180^\circ$.

∴$\angle ABE=180^\circ-\angle A=180^\circ-140^\circ=40^\circ$.

∵$\angle ABC$ 的平分线 BE 交 CD 于点 E，

∴$\angle ABC=2\angle ABE=2\times40^\circ=80^\circ$.

$$\begin{aligned}\therefore\angle C&=360^\circ-(\angle A+\angle D+\angle ABC)\\&=360^\circ-(140^\circ+80^\circ+80^\circ)\\&=60^\circ.\end{aligned}$$

（3）**解：**在四边形 $ABCD$ 中，

∵$\angle A=140^\circ$，$\angle D=80^\circ$，

∴$\angle ABC+\angle BCD=360^\circ-(\angle A+\angle D)=360^\circ-(140^\circ+80^\circ)=140^\circ$.

∵$\angle ABC$ 和 $\angle BCD$ 的平分线交于点 E，

∴$\angle EBC+\angle ECB=\frac{1}{2}\times140^\circ=70^\circ$.

∴$\angle BEC=180^\circ-(\angle EBC+\angle ECB)=180^\circ-70^\circ=110^\circ$.

名卷压轴题

（1）1　2　3　**【解析】**∵三角形中至多有一个钝角，∴三角形中角度等于 135°的内角个数的最大值为 1. ∵四边形的内角和为 360°，∴四边形中角度等于 135°的内角个数的最大值为 2.

∵五边形的内角和为540°，∴五边形中角度等于135°的内角个数的最大值为3.

(2)**解**：由(1)猜想：凸n边形中角度等于135°的内角个数的最大值为$n-2$，即$m=n-2$.

(3)**解**：取$n=7$时，

∵七边形的内角和为$(7-2)\times180°=900°$，且$6<\frac{900}{135}<7$，

∴七边形中角度等于135°的内角个数的最大值为6.

∴上面(2)中的猜想不成立.

设凸n边形中最多有m个内角等于135°，则每个135°内角的外角都等于45°.

∵凸n边形的n个外角和为360°，

又$\frac{360}{45}=8$，

∴只有当$n=8$时，m才有最大值8.

讨论$n\neq8$时的情况：

①当$n>8$时，显然，m的最大值是7；

②当$n=3$，4，5时，m的最大值分别为1，2，3；

③当$n=6$，7时，m的最大值分别为5，6.

综上所述，当$3\leqslant n\leqslant5$时，凸n边形最多有$(n-2)$个内角等于135°；当$6\leqslant n\leqslant7$时，凸n边形最多有$(n-1)$个内角等于135°；当$n=8$时，凸n边形最多有8个内角等于135°；当$n>8$时，凸n边形最多有7个内角等于135°.

◎三角形　新题型探究

例题　(1)②　**【解析】**①∵$1+2<4$，∴4 cm，2 cm，1 cm不能构成三角形，则不能组成“不均衡三角形”；

②∵$18-13>13-9$，∴13 cm，18 cm，9 cm能组成“不均衡三角形”；

③∵$19=19$，∴19 cm，20 cm，19 cm不能组成“不均衡三角形”；

④∵$9-8<8-6$，∴9 cm，8 cm，6 cm不能组成“不均衡三角形”.

(2)**解**：分三种情况：

①当边长为16的边为最长边时，

∵$2x+2>2x-6$，

∴$16-(2x+2)>2x+2-(2x-6)$.

解得$x<3$.

∵$2x-6>0$，

∴$x>3$.

故不符合题意，舍去.

②当边长为16的边既不是最长边也不是最短边时，

∵$2x+2>2x-6$，

∴$2x+2>16>2x-6$.

解得$7<x<11$.

根据题意，得

$2x+2-16>16-(2x-6)$.

解得$x>9$.

∴$9<x<11$.

∵x为整数，

∴$x=10$.

经检验，当$x=10$时，三边分别为22，

16，14，可构成三角形，符合题意.

③当边长为16的边为最短边时，

则 $2x+2>2x-6>16$.

解得 $x>11$.

根据题意，得

$2x+2-(2x-6)>2x-6-16$.

解得 $x<15$.

∴$11<x<15$.

∵x 为整数，

∴$x=12$ 或 $x=13$ 或 $x=14$.

经检验，均符合题意.

综上所述，x 的值为10或12或13或14.

【点拨】本题在解题时需要注意两点：一是在（1）中深刻理解“不均衡三角形”的定义，弄清楚“不均衡三角形”属于特殊的三角形，所以组成“不均衡三角形”的前提是能构成三角形. 二是在（2）中根据“不均衡三角形”中各边之间的关系列出关于 x 的不等式.

变式训练

（1）225°　**【解析】**∵$\angle 1$，$\angle 2$ 互为组角，且 $\angle 1=135°$，∴$\angle 2=360°-\angle 1=360°-135°=225°$.

（2）**解：**钝角 $\angle BCD=\angle A+\angle B+\angle D$. 理由如下：

∵优角 $\angle BCD$ 与钝角 $\angle BCD$ 互为组角，

∴优角 $\angle BCD=360°-$钝角 $\angle BCD$.

∵四边形 $ABCD$ 的内角和是 $360°$，

∴优角 $\angle BCD=360°-(\angle A+\angle B+\angle D)$.

∴钝角 $\angle BCD=\angle A+\angle B+\angle D$.

（3）2α　**【解析】**由（2）得，在镖形 $ABOC$ 中，钝角 $\angle BOC=\angle A+\angle B+\angle C$. 在镖形 $FDOE$ 中，钝角 $\angle DOE=\angle D+\angle E+\angle F$. ∵钝角 $\angle BOC=$钝角 $\angle DOE=\alpha$，∴$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=2\alpha$.

（4）**解：**∵$\angle APD$，$\angle AQB$ 的平分线交于点 M，

∴$\angle AQM=\angle BQM$，

$\angle APM=\angle DPM$.

由（2）中的结论可知在镖形 $APMQ$ 中，有 $\angle A+\angle AQM+\angle APM=$钝角 $\angle PMQ$.

在镖形 $APCQ$ 中，有 $\angle A+2\angle AQM+2\angle APM=$钝角 $\angle QCP$.

∴钝角 $\angle QCP+\angle A=2\angle PMQ$.

∵$\angle A+\angle QCP=180°$，

∴$\angle PMQ=\frac{1}{2}\times 180°=90°$，

即 $PM\perp QM$.

培优精练

（1）三角形内角和等于180°　**【解析】**上述证明过程中所使用的一个定理是：三角形内角和等于180°.

（2）**解：**$\angle Q=\frac{1}{2}\angle A$. 理由如下：

∵$\triangle ABC$ 的内角平分线 BQ 与外角平分线 CQ 相交于点 Q，

∴$\angle QBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，

$\angle QCD=\frac{1}{2}\angle ACD$.

$\because \angle ACD=\angle A+\angle ABC$,

$\angle QCD=\angle QBC+\angle Q$,

$\therefore \frac{1}{2}(\angle A+\angle ABC)=\angle QCD=\angle QBC+\angle Q=\frac{1}{2}\angle ABC+\angle Q$.

$\therefore \angle Q=\frac{1}{2}\angle A$.

专题二　全等三角形

第1讲　利用三角形全等进行计算或证明

例一　(1) **解：**$\because \triangle ABC\cong\triangle DBC$，$\angle BAC=35^\circ$，

$\therefore \angle CDB=\angle BAC=35^\circ$，

$\angle ACB=\angle DCB=\frac{1}{2}\angle ACD=\frac{1}{2}\times 76^\circ=38^\circ$.

$\therefore \angle CBD=180^\circ-\angle CDB-\angle DCB=180^\circ-35^\circ-38^\circ=107^\circ$.

(2) **证明：**$\because \triangle ABC\cong\triangle DBC$，

$\therefore AC=DC$，$AB=DB$，

$\angle ACB=\angle DCB$.

在$\triangle ACE$和$\triangle DCE$中，

$$\begin{cases}CE=CE,\\ \angle ACE=\angle DCE,\\ AC=DC,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ACE\cong\triangle DCE$（SAS）.

$\therefore AE=DE$.

在$\triangle ABE$和$\triangle DBE$中，

$$\begin{cases}AB=DB,\\ BE=BE,\\ AE=DE,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle DBE$（SSS）.

【点拨】本题考查的是全等三角形的判定与性质．掌握全等三角形的对应边相等，对应角相等是解题的关键．

变式训练一

1. 60°　**【解析】**$\because \triangle ADF\cong\triangle BCE$，

$\therefore \angle A=\angle B=32^\circ$，$\angle F=\angle E=28^\circ$.

$\therefore \angle MDC=\angle A+\angle F=32^\circ+28^\circ=60^\circ$．同理$\angle MCD=60^\circ$．$\therefore \angle DMC=180^\circ-60^\circ-60^\circ=60^\circ$.

2. (1) **证明：**$\because \angle 1=\angle 2$，

$\therefore \angle 1+\angle AED=\angle 2+\angle AED$.

$\therefore \angle AEC=\angle BED$.

在$\triangle AEC$和$\triangle BED$中，

$$\begin{cases}\angle A=\angle B,\\ AE=BE,\\ \angle AEC=\angle BED,\end{cases}$$

$\therefore \triangle AEC\cong\triangle BED$（ASA）.

(2) **解：**$\because \triangle AEC\cong\triangle BED$，

$\therefore EC=ED$，$\angle C=\angle BDE$.

在$\triangle EDC$中，$\because EC=ED$，$\angle 1=40^\circ$，

$\therefore \angle C=\angle EDC=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle 1)=\frac{1}{2}\times(180^\circ-40^\circ)=70^\circ$.

$\therefore \angle BDE=\angle C=70^\circ$.

$\therefore \angle ADB=180^\circ-\angle BDE-\angle EDC=180^\circ-70^\circ-70^\circ=40^\circ$.

例二　(1) **证明：**$\because BF\parallel AE$，

$\therefore \angle EAM=\angle FBM$.

在$\triangle AME$和$\triangle BMF$中，

$$\begin{cases}\angle EAM=\angle FBM,\\ \angle AME=\angle BMF,\\ EM=FM,\end{cases}$$

$\therefore \triangle AME\cong\triangle BMF$（AAS）.

$\therefore AE=BF$.

（2）**解：** 由（1）知，$\triangle AME\cong\triangle BMF$.

$\therefore AE=BF$，$EM=FM$，$\angle BFM=\angle AEM=\angle AEC=90^\circ$.

$\therefore \angle AEC=\angle BFD=90^\circ$.

在$\triangle AEC$和$\triangle BFD$中，

$$\begin{cases}\angle AEC=\angle BFD,\\ AE=BF,\\ \angle CAE=\angle DBF,\end{cases}$$

$\therefore \triangle AEC\cong\triangle BFD$（ASA）.

$\therefore CE=DF$.

$\therefore CE-CF=DF-CF$，

即$EF=CD=4$.

$\therefore EM=\frac{1}{2}EF=\frac{1}{2}\times 4=2$.

【点拨】 本题欲求EM的长，则需要探寻EM与已知条件$CD=4$的关系．通过观察可知，如果能证明$\triangle AEC\cong\triangle BFD$，则可得$CE=DF$，由此把全等三角形这个“形”转化为线段相等这个“数”，进而可得$EF=CD$．结合$EM=FM$，则可得$EM=\frac{1}{2}EF=\frac{1}{2}CD$，问题即可解决.

变式训练二

1. 解： $\because \angle AEC=\angle BAC=\alpha$，

$\therefore \angle ACE+\angle CAE=180^\circ-\angle AEC=180^\circ-\alpha$，$\angle BAD+\angle CAE=180^\circ-\angle BAC=180^\circ-\alpha$.

$\therefore \angle ACE=\angle BAD$.

在$\triangle BAD$和$\triangle ACE$中，

$$\begin{cases}\angle ADB=\angle AEC,\\ \angle BAD=\angle ACE,\\ AB=CA,\end{cases}$$

$\therefore \triangle BAD\cong\triangle ACE$（AAS）.

$\therefore AE=BD=3$.

$\because DE=10$，

$\therefore AD=DE-AE=10-3=7$.

$\therefore CE=AD=7$.

2. 解： $\because BE\perp CE$，$AD\perp CE$，

$\therefore \angle E=\angle ADC=\angle ACB=90^\circ$.

$\because \angle ECA+\angle BCE=90^\circ$，

$\angle ECA+\angle CAD=90^\circ$，

$\therefore \angle BCE=\angle CAD$.

在$\triangle BEC$和$\triangle CDA$中，

$$\begin{cases}\angle BCE=\angle CAD,\\ \angle E=\angle ADC,\\ BC=CA,\end{cases}$$

$\therefore \triangle BEC\cong\triangle CDA$（AAS）.

$\therefore CE=AD=5$ cm，$BE=CD$.

又$DE=3$ cm，

$\therefore BE=CD=CE-DE=5-3=2$（cm）.

例三　证明： $\because D$是BC的中点，

$\therefore CD=DB$.

$\because AF /\!/ BC$，

$\therefore \angle AFE=\angle DBE$.

在$\triangle AFE$和$\triangle DBE$中，

$\begin{cases}\angle AFE=\angle DBE,\\ \angle AEF=\angle DEB,\\ AE=DE,\end{cases}$

$\therefore \triangle AFE\cong\triangle DBE$（AAS）.

$\therefore AF=DB$.

$\therefore AF=CD$.

【点拨】在证明两条线段相等时，可把这两条线段看作某两个三角形的对应边．只要能证明这两个三角形全等，根据全等三角形对应边相等的性质，即可得到这两条线段相等.

变式训练三

1. （1）**证明：**$\because DB\perp BC$，$CF\perp AE$，

$\therefore \angle DCB+\angle D=\angle DCB+\angle AEC=90°$.

$\therefore \angle D=\angle AEC$.

在$\triangle DBC$和$\triangle ECA$中，

$\begin{cases}\angle D=\angle AEC,\\ \angle DBC=\angle ECA=90°,\\ BC=CA,\end{cases}$

$\therefore \triangle DBC\cong\triangle ECA$（AAS）.

$\therefore AE=CD$.

（2）**解：**由（1）可知$\triangle DBC\cong\triangle ECA$.

$\therefore BD=CE$.

$\because AE$是BC边上的中线，

$\therefore BD=CE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AC$.

又$AC=12$ cm，

$\therefore BD=6$ cm.

2. **证明：**（1）$\because AD /\!/ BC$，

$\therefore \angle ADB=\angle CBD$.

在$\triangle ABD$和$\triangle CDB$中，

$\begin{cases}\angle ADB=\angle CBD,\\ \angle BAD=\angle DCB,\\ BD=DB,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle CDB$（AAS）.

$\therefore AD=CB$.

（2）$\because \angle ADB=\angle CBD$，

$\therefore 180°-\angle ADB=180°-\angle CBD$，

即$\angle ADE=\angle CBF$.

在$\triangle ADE$和$\triangle CBF$中，

$\begin{cases}DE=BF,\\ \angle ADE=\angle CBF,\\ AD=CB,\end{cases}$

$\therefore \triangle ADE\cong\triangle CBF$（SAS）.

$\therefore \angle E=\angle F$.

$\therefore AE /\!/ CF$.

例四　（1）**证明：**在$\triangle ABC$和$\triangle EDC$中，

$\begin{cases}AC=EC,\\ \angle ACB=\angle ECD,\\ BC=DC,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle EDC$（SAS）.

$\therefore \angle A=\angle E$.

$\therefore AB /\!/ DE$.

（2）**证明：**$\because AB /\!/ DE$，

$\therefore \angle B=\angle D$.

在$\triangle DCQ$和$\triangle BCP$中，

$\begin{cases}\angle D=\angle B,\\ DC=BC,\\ \angle DCQ=\angle BCP,\end{cases}$

$\therefore \triangle DCQ \cong \triangle BCP$（ASA）.

$\therefore CP=CQ$.

（3）**解**：由（2）可知当线段 PQ 经过点 C 时，$\triangle DCQ \cong \triangle BCP$.

$\therefore DQ=BP$.

分两种情况：

①当点 P 从点 A 向点 B 运动时，$AP=3t$ cm，

则 $BP=AB-AP=(8-3t)$ cm，

$DQ=t$ cm.

$\therefore t=8-3t$.

解得 $t=2$.

②当点 P 从点 B 返回点 A 时，

则 $BP=3t-AB=(3t-8)$ cm，

$DQ=t$ cm.

$\therefore t=3t-8$.

解得 $t=4$.

经检验，均符合题意.

$\therefore$当 t 的值为 2 或 4 时，线段 PQ 经过点 C.

【点拨】本题第（3）问求解的关键有两点：一是化动为静，即利用（2）的结论得到 $DQ=BP$，则动点问题转化为我们所熟悉的两条线段相等的问题. 二是用关于 t 的代数式表示 BP 的长度. 观察图形，可知当点 P 从点 A 向点 B 运动时，BP 的长度从 8 cm 逐渐减小到 0 cm；点 P 从点 B 返回到点 A 时，BP 的长度从 0 cm 逐渐增加到 8 cm. 因此需要分情况讨论.

变式训练四

解：（1）$\triangle BPE$ 与 $\triangle CQP$ 全等. 理由如下：

根据题意，得 $BP=CQ=5\times 1=5$（cm）.

$\therefore CP=BC-BP=15-5=10$（cm）.

$\because E$ 为 AB 的中点，

$\therefore BE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 20=10$（cm）.

$\therefore BE=CP$.

在 $\triangle BPE$ 和 $\triangle CQP$ 中，

$$\begin{cases} BE=CP, \\ \angle B=\angle C, \\ BP=CQ, \end{cases}$$

$\therefore \triangle BPE \cong \triangle CQP$（SAS）.

（2）设点 P 的运动时间为 t s，点 Q 的运动速度是 x cm/s，

则 $BP=5t$ cm，$CQ=xt$ cm.

$\therefore CP=BC-BP=(15-5t)$ cm.

$\because \angle B=\angle C$，$BE=10$ cm，

分两种情况：

①当 $\triangle BPE \cong \triangle CPQ$ 时，

则 $BP=CP$，$BE=CQ$.

即 $5t=15-5t$，$10=xt$.

解得 $t=\frac{3}{2}$，$x=\frac{20}{3}$.

②当 $\triangle BPE \cong \triangle CQP$ 时，

则 $BP=CQ$，$BE=CP$.

即 $5t=xt$，$10=15-5t$.

解得 $t=1$，$x=5$.

此时点 Q 的运动速度与点 P 的运动速度相等，不符合题意.

综上所述，点 Q 的运动速度为 $\frac{20}{3}$ cm/s.

培优精练

1. B 【解析】还需要加上条件 $BD=AC$. ∵在△BDA 和△ACB 中，

$\begin{cases} BA=AB, \\ \angle 2=\angle 1, \\ BD=AC, \end{cases}$ ∴ △BDA ≌ △ACB (SAS). 故选 B.

2. 110° 【解析】∵ $BC\ /\!/\ DE$, ∴$\angle ABC=\angle D$. ∵$AB=ED$，$BC=DB$，∴ △ABC ≌ △EDB（SAS）. ∴ $\angle CBE=\angle E=\angle A=30^\circ$. ∴$\angle ABF=\angle ABC+\angle CBE=\angle D+\angle CBE=50^\circ+30^\circ=80^\circ$. ∴$\angle BFG=\angle A+\angle ABF=30^\circ+80^\circ=110^\circ$.

3. **证明：**（1）∵AE 平分$\angle BAD$，

∴$\angle BAE=\angle FAE$.

在△ABE 和△AFE 中，

$\begin{cases} AB=AF, \\ \angle BAE=\angle FAE, \\ AE=AE, \end{cases}$

∴△ABE≌△AFE（SAS）.

（2）由（1）知，△ABE≌△AFE.

∴$BE=FE$，$\angle AEB=\angle AEF$.

∵ $\angle AED=90^\circ$，

∴ $\angle AEB+\angle CED=180^\circ-\angle AED=180^\circ-90^\circ=90^\circ$.

∵ $\angle AEF+\angle DEF=90^\circ$，

∴ $\angle CED=\angle DEF$.

∵点 E 为 BC 的中点，

∴$BE=CE$.

∴$CE=FE$.

在△ECD 和△EFD 中，

$\begin{cases} CE=FE, \\ \angle CED=\angle FED, \\ DE=DE, \end{cases}$

∴△ECD≌△EFD（SAS）.

∴$CD=FD$.

∵$AD=AF+FD$，$AB=AF$，

∴$AD=AB+CD$.

名卷压轴题

解：∵$AB=AC$，∴$\angle B=\angle C$.

①当△BPD≌△CQP 时，

$BD=CP$.

∵D 为 AB 的中点，

∴$BD=\frac{1}{2}AB=6$ cm.

∴$CP=BD=6$ cm.

∴$BP=BC-CP=8-6=2$（cm）.

∵点 P 在线段 BC 上以 2 cm/s 的速度由点 B 向点 C 运动，

∴运动时间为$\frac{BP}{2}=\frac{2}{2}=1$（s）.

∵$CQ=BP=2$ cm，

∴点 Q 的运动速度为 $v=2\div 1=2$（cm/s）.

②当△BDP≌△CQP 时，

$BP=CP$，$BD=CQ$.

∵D 为 AB 的中点，

∴$BD=6$ cm.

∴$CQ=BD=6$ cm.

∵$BC=8$ cm，

$\therefore BP=4$ cm.

$\therefore$运动时间为$\frac{BP}{2}=\frac{4}{2}=2$（s）.

$\therefore$点 Q 的运动速度为 $v=6\div 2=3$（cm/s）.

综上所述，当 v 为 2 或 3 时，$\triangle BPD$ 与$\triangle CQP$ 全等.

第 2 讲　利用直角三角形全等进行计算或证明

例一　解：图中有 6 对全等的直角三角形，即：①$\triangle ADO\cong\triangle AEO$；②$\triangle DOC\cong\triangle EOB$；③$\triangle ADB\cong\triangle AEC$；④$\triangle BCE\cong\triangle CBD$；⑤$\triangle COM\cong\triangle BOM$；⑥$\triangle ACM\cong\triangle ABM$.

理由如下：

$\because$线段 BD，CE 均为$\triangle ABC$ 的高，

$\therefore \angle ADO=\angle AEO=90°$.

则$\triangle ADO$ 与$\triangle AEO$ 均为直角三角形.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADO$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle AEO$ 中，

$\begin{cases}OA=OA,\\OD=OE,\end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ADO\cong\mathrm{Rt}\triangle AEO$（HL）.

$\therefore \angle DAO=\angle EAO$，$AD=AE$.

在$\triangle DOC$ 和$\triangle EOB$ 中，

$\begin{cases}\angle CDO=\angle BEO,\\OD=OE,\\\angle COD=\angle BOE,\end{cases}$

$\therefore \triangle DOC\cong\triangle EOB$（ASA）.

$\therefore CD=BE$，$OC=OB$.

$\therefore CD+AD=BE+AE$，即 $AC=AB$.

在$\triangle ADB$ 和$\triangle AEC$ 中，

$\begin{cases}AD=AE,\\\angle BAD=\angle CAE,\\AB=AC,\end{cases}$

$\therefore \triangle ADB\cong\triangle AEC$（SAS）.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle CBD$ 中，

$\begin{cases}BC=CB,\\BE=CD,\end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BCE\cong\mathrm{Rt}\triangle CBD$（HL）.

$\because AM\perp BC$，

$\therefore \angle OMC=\angle OMB=\angle AMC=\angle AMB=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle COM$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BOM$ 中，

$\begin{cases}OC=OB,\\OM=OM,\end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle COM\cong\mathrm{Rt}\triangle BOM$（HL）.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACM$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ABM$ 中，

$\begin{cases}AC=AB,\\AM=AM,\end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ACM\cong\mathrm{Rt}\triangle ABM$（HL）.

【点拨】先观察图中三角形的形状，猜想有可能全等的三角形，然后寻找判定其全等相对应的条件，进而证明其全等.

变式训练一

证明：$\because \angle BAD=\angle BCD=90°$，

$\therefore \triangle ABD$ 和$\triangle CBD$ 都是直角三角形.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle CBD$ 中，

$\begin{cases}BD=BD,\\AB=CB,\end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABD\cong\mathrm{Rt}\triangle CBD$（HL）.

$\therefore AD=CD$.

∵$AE\perp EF$ 于点 E，$CF\perp EF$ 于点 F，

∴$\angle E=\angle F=90°$.

∴$\triangle ADE$ 和$\triangle CDF$ 都是直角三角形.

在 Rt$\triangle ADE$ 和 Rt$\triangle CDF$ 中，

$\begin{cases}AD=CD,\\AE=CF,\end{cases}$

∴Rt$\triangle ADE\cong$Rt$\triangle CDF$（HL）.

例二 （1）**证明：**∵$EF\perp BC$ 于点 F，

∴$\angle EFD=90°$.

在$\triangle ADC$ 和$\triangle EDF$ 中，

$\begin{cases}\angle ADC=\angle EDF,\\\angle C=\angle EFD,\\AD=ED,\end{cases}$

∴$\triangle ADC\cong\triangle EDF$（AAS）.

（2）**解：**∵$\triangle ADC\cong\triangle EDF$，

∴$DF=DC=4$.

∵$EF\perp BC$ 于点 F，

∴$\triangle DEF$ 和$\triangle BEF$ 都是直角三角形.

在 Rt$\triangle DEF$ 和 Rt$\triangle BEF$ 中，

$\begin{cases}DE=BE,\\EF=EF,\end{cases}$

∴Rt$\triangle DEF\cong$Rt$\triangle BEF$（HL）.

∴$DF=BF$.

∴$DC=BF=DF=4$.

∴$BC=CD+DF+BF=3\times4=12$.

【点拨】本题求解的技巧是运用数形结合的方法，在（1）中利用“AAS”证明$\triangle ADC\cong\triangle EDF$. 在（2）中求 BC 的长时，通过观察猜想 $CD=DF=BF$，把求 BC 的长转化为利用“HL”证明 Rt$\triangle DEF\cong$Rt$\triangle BEF$.

变式训练二

1. **解：**∵$AE\perp BD$，$CF\perp BD$，

∴$\angle AEB=\angle CFD=90°$.

∵$BF=DE$，

∴$BF+EF=DE+EF$，即 $BE=DF$.

在 Rt$\triangle AEB$ 和 Rt$\triangle CFD$ 中，

$\begin{cases}AB=CD,\\BE=DF,\end{cases}$

∴Rt$\triangle AEB\cong$Rt$\triangle CFD$（HL）.

∴$CD=AB=\frac{5}{12}$.

2. （1）**证明：**∵$AB\perp BE$ 于点 B，$DE\perp BE$ 于点 E，

∴$\angle ABC=\angle BED=90°$.

在$\triangle ABC$ 和$\triangle BED$ 中，

$\begin{cases}AB=BE,\\\angle ABC=\angle BED,\\BC=ED,\end{cases}$

∴$\triangle ABC\cong\triangle BED$（SAS）.

（2）**解：**∵$\triangle ABC\cong\triangle BED$，

∴$\angle DBE=\angle CAB$.

∵$\angle ABC=90°$，

∴$\angle CAB+\angle ACB=90°$.

∴$\angle DBE+\angle ACB=90°$.

∴$\angle BFC=180°-(\angle DBE+\angle ACB)=180°-90°=90°$.

例三 （1）**证明：**∵$BD\perp DE$ 于点 D，$CE\perp DE$ 于点 E，

∴$\angle ADB=\angle AEC=90°$.

在 Rt$\triangle ABD$ 和 Rt$\triangle CAE$ 中，

$\begin{cases}AB=CA,\\AD=CE,\end{cases}$

∴Rt△ABD≌Rt△CAE（HL）.

∴$\angle BAD=\angle ACE$，

$\angle ABD=\angle CAE$.

∵$\angle BAD+\angle ABD=90^\circ$，

∴$\angle BAD+\angle CAE=90^\circ$.

∴ $\angle BAC=180^\circ-(\angle BAD+\angle CAE)=90^\circ$.

∴$AB\perp AC$.

（2）**解**：$AB\perp AC$. 理由如下：

与（1）同理，得 Rt△ABD≌Rt△CAE（HL）.

∴$\angle BAD=\angle ACE$，

$\angle ABD=\angle CAE$.

∵$\angle CAE+\angle ACE=90^\circ$，

∴$\angle CAE+\angle BAD=90^\circ$，

即$\angle BAC=90^\circ$.

∴$AB\perp AC$.

【点拨】 第（2）小问与第（1）小问的区别只是点 B，C 与直线 DE 的位置关系不同，因此两问的解题思路应该有类似之处，为此类比（1）的证明方法即可完成（2）的求解.

变式训练三

1.（1）**证明**：∵$\angle A=\angle B=90^\circ$，

∴△ADE 和△BEC 都是直角三角形.

在 Rt△ADE 和 Rt△BEC 中，

$\begin{cases}AE=BC,\\DE=EC,\end{cases}$

∴Rt△ADE≌Rt△BEC（HL）.

∴$AD=BE$.

（2）**解**：△CDE 是等腰直角三角形.

理由如下：

∵Rt△ADE≌Rt△BEC，

∴$\angle ADE=\angle BEC$.

∵$\angle ADE+\angle AED=90^\circ$，

∴$\angle BEC+\angle AED=90^\circ$.

∴ $\angle DEC=180^\circ-(\angle BEC+\angle AED)=180^\circ-90^\circ=90^\circ$.

∴△CDE 是直角三角形.

又 $CE=DE$，

∴△CDE 是等腰直角三角形.

2. **解**：$AD=A'D'$

Rt△ABC≌Rt△$A'B'C'$

证明：在 Rt△ADC 和 Rt△$A'D'C'$中，

$\begin{cases}AD=A'D',\\AC=A'C',\end{cases}$

∴Rt△ADC≌Rt△$A'D'C'$（HL）.

∴$CD=C'D'$.

∵AD 与 $A'D'$分别为 BC，$B'C'$边上的中线，

∴点 D 和点 D'分别是 BC，$B'C'$的中点.

∴$BC=2CD$，$B'C'=2C'D'$.

∴$BC=B'C'$.

在 Rt△ABC 和 Rt△$A'B'C'$中，

$\begin{cases}AC=A'C',\\\angle C=\angle C'=90^\circ,\\BC=B'C',\end{cases}$

∴Rt△ABC≌Rt△$A'B'C'$（SAS）.

培优精练

1. **解**：$CE=DF$. 理由如下：

在 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle BAD$ 中，

$\begin{cases} BC=AD, \\ AB=BA, \end{cases}$

$\therefore$ Rt$\triangle ABC \cong$ Rt$\triangle BAD$（HL）.

$\therefore AC=BD$，$\angle BAC=\angle ABD$.

在$\triangle ACE$ 和$\triangle BDF$ 中，

$\begin{cases} \angle EAC=\angle FBD, \\ \angle AEC=\angle BFD, \\ AC=BD, \end{cases}$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BDF$（AAS）.

$\therefore CE=DF$.

2. 解：图中共有 3 对全等三角形．分别是：① Rt $\triangle BDE \cong$ Rt $\triangle CDF$；②$\triangle ADE \cong \triangle ADF$；③ $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.

理由如下：

$\because DE \perp AB$，$DF \perp AC$，

$\therefore \angle BED=\angle CFD=90°$.

又 D 是 BC 的中点，

$\therefore BD=CD$.

在 Rt$\triangle BDE$ 和 Rt$\triangle CDF$ 中，

$\begin{cases} BD=CD, \\ BE=CF, \end{cases}$

$\therefore$ Rt$\triangle BDE \cong$ Rt$\triangle CDF$（HL）.

$\therefore DE=DF$.

在 Rt$\triangle ADE$ 和 Rt$\triangle ADF$ 中，

$\begin{cases} DE=DF, \\ AD=AD, \end{cases}$

$\therefore$ Rt$\triangle ADE \cong$ Rt$\triangle ADF$（HL）.

$\therefore AE=AF$.

$\therefore AE+BE=AF+CF$，即 $AB=AC$.

在$\triangle ABD$ 和$\triangle ACD$ 中，

$\begin{cases} AB=AC, \\ AD=AD, \\ BD=CD, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$（SSS）.

3. 证明：$\because CD \perp AB$ 于点 D，$C'D' \perp A'B'$于点 D'，

$\therefore \angle CDB=\angle C'D'B'=90°$.

在 Rt$\triangle DCB$ 和 Rt$\triangle D'C'B'$中，

$\begin{cases} CD=C'D', \\ BC=B'C', \end{cases}$

$\therefore$ Rt$\triangle DCB \cong$ Rt$\triangle D'C'B'$（HL）.

$\therefore \angle B=\angle B'$.

在 Rt$\triangle ACB$ 和 Rt$\triangle A'C'B'$中，

$\begin{cases} \angle B=\angle B', \\ BC=B'C', \\ \angle ACB=\angle A'C'B', \end{cases}$

$\therefore$ Rt$\triangle ACB \cong$ Rt$\triangle A'C'B'$（ASA）.

名卷压轴题

解：两位同学说的都不正确.

分三种情况：

①当边长分别为 3，4 的两条边都是直角边时，两个直角三角形一定全等，如图 1 和图 2 中的三角形.

②当边长为 3 的边是直角边、边长为 4 的边是斜边时，两个直角三角形一定全等，如图 3 和图 4 中的三角形.

③当其中一个三角形中边长为 4 的边是直角边，而另一个三角形中边长为 4 的边是斜边时，两个直角三角形一定不全等，如图 1 和图 3 中的三角形.

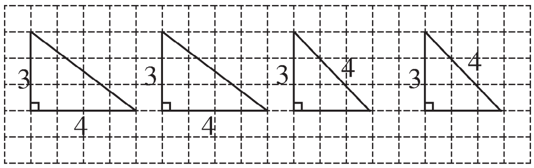


图 1　　图 2　　图 3　　图 4

第3讲　利用角平分线的性质进行计算或证明

例一　解：（1）∵$\angle B=50°$，$\angle C=62°$，

∴$\angle BAC=180°-\angle B-\angle C=180°-50°-62°=68°$.

∵AD 是$\triangle ABC$ 的角平分线，

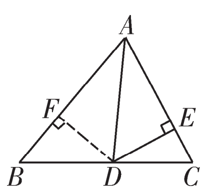
∴$\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times 68°=34°$.

∵$DE\perp AC$，

∴$\angle AED=90°$.

∴$\angle ADE=90°-\angle CAD=90°-34°=56°$.

（2）过点 D 作 $DF\perp AB$ 于点 F，如下图所示.



∵AD 平分$\angle BAC$，$DF\perp AB$，$DE\perp AC$，

∴$DF=DE=3$，

即点 D 到 AB 的距离为 3.

【点拨】本题第（1）小问中，根据与角平分线有关的图形，把角平分线的定义转化为角的和差运算，经过计算求得$\angle ADE$ 的度数. 第（2）小问中根据与角平分线的性质有关的数量关系，构造满足角平分线的性质的基本图形，由此得到 $DF=DE=3$，进而得到答案.

变式训练一

（1）**证明：**∵AD 平分$\angle BAC$，$\angle C=90°$，$DE\perp AB$ 于点 E，

∴$DE=CD$.

在 Rt$\triangle CDF$ 和 Rt$\triangle EDB$ 中，

$\begin{cases}DF=DB,\\CD=ED,\end{cases}$

∴Rt$\triangle CDF\cong$Rt$\triangle EDB$（HL）.

（2）**解：**∵Rt$\triangle CDF\cong$Rt$\triangle EDB$，

∴$CF=EB$.

设 $CF=x$，

则 $EB=x$，$AE=AB-EB=12-x$.

由（1）知，$CD=DE$.

在 Rt$\triangle ACD$ 和 Rt$\triangle AED$ 中，

$\begin{cases}AD=AD,\\CD=ED,\end{cases}$

∴Rt$\triangle ACD\cong$Rt$\triangle AED$（HL）.

∴$AC=AE=12-x$.

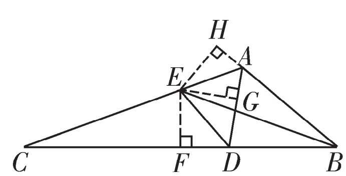
∵$AC=AF+CF=8+x$，

∴$8+x=12-x$.

解得 $x=2$.

∴$CF=2$.

例二　证明：过点 E 作 $EH\perp AB$ 于点 H，$EF\perp BC$ 于点 F，$EG\perp AD$ 于点 G，如下图所示.



∵AD 平分$\angle BAC$，$\angle BAC=120°$，

∴$\angle BAD=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times 120°=60°$.

∵$\angle CAH=180°-\angle BAC=180°-120°=60°$，

∴$\angle CAH=\angle CAD$.

∴AE 平分$\angle DAH$.

∴$EH=EG$.

∵BE 平分$\angle ABC$，

∴$EH=EF$.

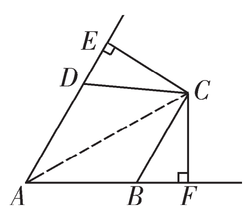
∴$EF=EG$.

∴点 E 到 AD，CD 的距离相等.

【点拨】作辅助线 EH，EF，EG 的目的是构造满足角平分线的性质的基本图形. 把证明点 E 到 AD，CD 的距离相等的问题转化为在图形中证明 $EF=EG$.

变式训练二

1. **证明：**连接 AC，如下图所示.



在$\triangle ABC$ 和$\triangle ADC$ 中，

$\begin{cases} AB=AD, \\ BC=DC, \\ AC=AC, \end{cases}$

∴$\triangle ABC\cong\triangle ADC$（SSS）.

∴$\angle BAC=\angle DAC$.

∴AC 是$\angle BAD$ 的平分线.

又∵$CE\perp AD$，$CF\perp AB$，

∴$CE=CF$.

2. **证明：**∵AD 平分$\angle BAC$ 交 BC 于点 D，$DE\perp AB$ 于点 E，$\angle C=90°$，

∴$CD=ED$.

在 Rt$\triangle ACD$ 和 Rt$\triangle AED$ 中，

$\begin{cases} CD=ED, \\ AD=AD, \end{cases}$

∴Rt$\triangle ACD\cong$Rt$\triangle AED$（HL）.

∴$AC=AE$.

在 Rt$\triangle FCD$ 和 Rt$\triangle BED$ 中，

$\begin{cases} CD=ED, \\ FD=BD, \end{cases}$

∴Rt$\triangle FCD\cong$Rt$\triangle BED$（HL）.

∴$FC=BE$.

∴$AE-BE=AC-FC=AF$.

例三　（1）**证明：**∵$BC\perp AC$，$CD\perp CE$，

∴$\angle ACB=\angle DCE=90°$.

∴$\angle BCD+\angle ACD=\angle ACE+\angle ACD=90°$.

∴$\angle BCD=\angle ACE$.

在$\triangle BCD$ 和$\triangle ACE$ 中，

$\begin{cases} BC=AC, \\ \angle BCD=\angle ACE, \\ CD=CE, \end{cases}$

∴$\triangle BCD\cong\triangle ACE$（SAS），

即$\triangle ACE\cong\triangle BCD$.

（2）**证明：**∵$\triangle BCD\cong\triangle ACE$，

∴$\angle CBD=\angle CAE$.

∵$\angle BGC=\angle AGF$，

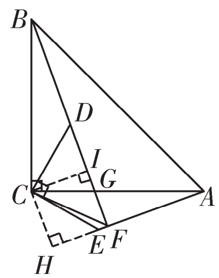
∴$\angle CAE+\angle AGF=\angle CBD+$

$\angle BGC=90°$.

$\therefore \angle AFB=90°$.

$\therefore BF\perp AE$.

(3) **解**：过点 C 作 $CH\perp AE$，交 AE 的延长线于点 H，$CI\perp BF$ 于点 I，如下图所示.



$\because \triangle BCD\cong\triangle ACE$,

$\therefore AE=BD$，$S_{\triangle ACE}=S_{\triangle BCD}$.

$\therefore \frac{1}{2}AE\cdot CH=\frac{1}{2}BD\cdot CI$.

$\therefore CH=CI$.

$\therefore CF$ 平分 $\angle BFH$.

$\because BF\perp AE$,

$\therefore \angle BFH=90°$.

$\therefore \angle CFE=\frac{1}{2}\angle BFH=\frac{1}{2}\times 90°=45°$.

【点拨】本题第（2）（3）小问都利用了第（1）小问中 $\triangle ACE\cong\triangle BCD$ 的结论，减少了不必要的步骤. 第（3）小问求解的关键是得到 CF 平分 $\angle BFH$，因此作辅助线 CH，CI，构造满足角平分线的性质的基本图形，把证明 CF 平分 $\angle BFH$ 转化为证明 $CH=CI$.

变式训练三

解：(1) $\because \angle C=90°$，$\angle CED=35°$,

$\therefore \angle CDE=90°-\angle CED=90°-35°=55°$.

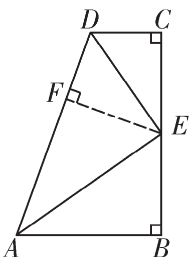
$\because DE$ 平分 $\angle ADC$,

$\therefore \angle ADC=2\angle CDE=2\times 55°=110°$.

$\because \angle B=90°$,

$\therefore \angle DAB=360°-\angle C-\angle B-\angle ADC=360°-90°-90°-110°=70°$.

(2) 过点 E 作 $EF\perp AD$ 于点 F，如下图所示.



$\because DE$ 平分 $\angle ADC$,

$\therefore EC=EF$.

$\because E$ 为 BC 的中点，

$\therefore BE=EC=EF$.

$\therefore AE$ 平分 $\angle DAB$.

$\because \angle DAB=70°$,

$\therefore \angle EAB=\frac{1}{2}\angle DAB=\frac{1}{2}\times 70°=35°$.

例四　解：$\because BD$ 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 D，$DE\perp AB$，$DF\perp BC$,

$\therefore DE=DF$.

$\because AB=6$，$BC=8$，$S_{\triangle ABC}=28$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}AB\cdot DE+\frac{1}{2}BC\cdot DF=\frac{1}{2}DE\cdot(AB+BC)=28$,

即 $\frac{1}{2}DE\cdot(6+8)=28$.

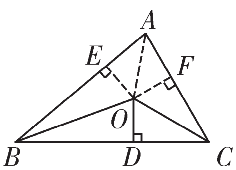
解得 $DE=4$.

【点拨】从图形上看，在满足角平分线

的性质的图形中有垂线段出现，而三角形的面积公式中会出现底与高的乘积，因此可以列出关于三角形的高的方程，解方程则求得三角形的高，即 DE 的长.

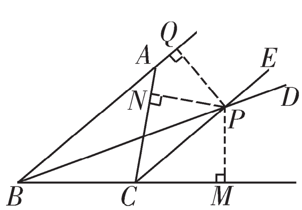
变式训练四

1. C　**【解析】**连接 OA，过点 O 作 $OE\perp AB$ 于点 E，$OF\perp AC$ 于点 F，如下图.



$\because$ BO，CO 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$，$\therefore OE=OD=4$，$OF=OD=4$. $\therefore$ $\triangle ABC$ 的面积 $=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\cdot OE\cdot AB+\frac{1}{2}\cdot OD\cdot BC+\frac{1}{2}\cdot OF\cdot AC=\frac{1}{2}\times4\times(AB+BC+AC)=\frac{1}{2}\times4\times21=42$.

2. **证明：**过点 P 分别作 AB，BC，CA 所在直线的垂线，垂足分别是 Q，M，N，如下图所示.



$\therefore$垂线段 PQ，PM，PN 即为点 P 到 $\triangle ABC$ 三边所在直线的距离.

$\because$点 P 是 $\angle ABC$ 的平分线 BD 上的一点，

$\therefore PM=PQ$.

$\because$点 P 是 $\angle ACM$ 的平分线 CE 上的一点，

$\therefore PM=PN$.

$\therefore PQ=PM=PN$.

$\therefore$点 P 到 $\triangle ABC$ 三边所在直线的距离相等.

培优精练

1. B　**【解析】**根据角平分线的性质，只有角平分线上的点，到角的两边的距离才相等. 观察图形可知，点 Q 在 $\angle AOB$ 的角平分线上. $\therefore$ 点 Q 到 $\angle AOB$ 两边的距离相等.

2. 8　**【解析】**根据垂线段最短，当 $DP\perp BC$ 时，DP 的长度最小. $\because$ $BD\perp CD$，即 $\angle BDC=90^\circ$，又 $\angle A=90^\circ$，$\therefore$ $\angle A=\angle BDC$. 又 $\angle ADB=\angle C$，$\therefore$ $\angle ABD=\angle CBD$. 又 $DA\perp BA$，$DP\perp BC$，$\therefore$ $DP=AD=8$.

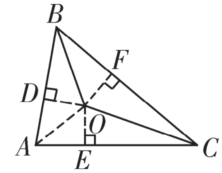
3. **解：**(1) $\because BO$，CO 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$，

又 $\angle ABC=60^\circ$，$\angle ACB=40^\circ$，

$\therefore\angle OBC=30^\circ$，$\angle OCB=20^\circ$.

$\therefore$ $\angle BOC=180^\circ-(\angle OBC+\angle OCB)=180^\circ-(30^\circ+20^\circ)=130^\circ$.

(2) 过点 O 作 $OD\perp AB$ 于点 D，$OE\perp AC$ 于点 E，$OF\perp BC$ 于点 F，连接 AO，如下图所示.



则点 O 到直线 AB 的距离为 OD，

即 $OD=2$.

∵ $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线相交于点 O，

∴ $OE=OF=OD=2$.

∵ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}$

$=\frac{1}{2}\times 2\times AB+\frac{1}{2}\times 2\times AC+\frac{1}{2}\times 2\times BC$

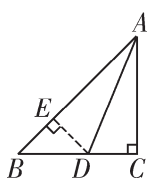
$=AB+AC+BC$，

又 $\triangle ABC$ 的周长为 16，

∴ $S_{\triangle ABC}=16$.

名卷压轴题

（1）**证明：** 过点 D 作 $DE\perp AB$ 于点 E，如下图所示.



∵ AD 为 $\angle BAC$ 的平分线，$CD\perp AC$，$DE\perp AB$，

∴ $DE=CD$.

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 和 $\text{Rt}\triangle AED$ 中，

$\begin{cases} AD=AD, \\ CD=ED, \end{cases}$

∴ $\text{Rt}\triangle ACD\cong\text{Rt}\triangle AED$（HL）.

∴ $AC=AE$.

∵ $\angle ACB=2\angle B=90^\circ$，

∴ $\angle B=\frac{1}{2}\times 90^\circ=45^\circ$.

∵ $\angle BED=90^\circ$，

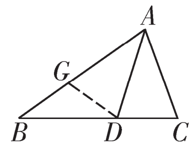
∴ $\angle B=\angle BDE=45^\circ$.

∴ $BE=DE=CD$.

∴ $AB=AE+BE=AC+CD$.

（2）**解：** $AB=AC+CD$. 理由如下：

在 AB 上截取 $AG=AC$，如下图所示.



∵ AD 为 $\angle BAC$ 的平分线，

∴ $\angle DAG=\angle CAD$.

在 $\triangle ADG$ 和 $\triangle ADC$ 中，

$\begin{cases} AG=AC, \\ \angle DAG=\angle DAC, \\ AD=AD, \end{cases}$

∴ $\triangle ADG\cong\triangle ADC$（SAS）.

∴ $\angle AGD=\angle ACD=\angle ACB$，$GD=CD$.

∵ $\angle ACB=2\angle B$，

∴ $\angle AGD=2\angle B$.

又∵ $\angle AGD=\angle B+\angle BDG$，

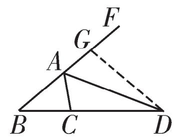
∴ $\angle B=\angle BDG$.

∴ $BG=GD=CD$.

∴ $AB=AG+BG=AC+CD$.

（3）**解：** $AB=CD-AC$. 理由如下：

在 AF 上截取 $AG=AC$，如下图所示.



∵ AD 为 $\angle CAF$ 的平分线，

∴ $\angle DAG=\angle DAC$.

在 $\triangle ADG$ 和 $\triangle ADC$ 中，

$\begin{cases} AG=AC, \\ \angle DAG=\angle DAC, \\ AD=AD, \end{cases}$

∴$\triangle ADG\cong\triangle ADC$（SAS）.

∴$GD=CD$，$\angle AGD=\angle ACD$.

∴$\angle DGF=\angle ACB$.

∵$\angle ACB=2\angle B$，

∴$\angle DGF=2\angle B$.

又∵$\angle DGF=\angle B+\angle BDG$，

∴$\angle B=\angle BDG$.

∴$BG=GD=CD$.

∵$AB=BG-AG$，

∴$AB=CD-AC$.

◎全等三角形　新题型探究

例题　（1）26°　**【解析】**∵$\angle DAE=\angle BAC$，∴$\angle DAE+\angle CAD=\angle BAC+\angle CAD$. ∴$\angle CAE=\angle BAD$.

在$\triangle BAD$和$\triangle CAE$中，

$\begin{cases}AB=AC,\\ \angle BAD=\angle CAE,\\ AD=AE,\end{cases}$∴$\triangle BAD\cong\triangle CAE$（SAS）. ∴$\angle ACE=\angle ABD=\frac{1}{2}(180°-\angle BAC)=\frac{1}{2}\times(180°-26°)=77°$. ∵$AB=AC$，∴$\angle ACB=\angle ABC=77°$. ∴$\angle DCE=180°-\angle ACB-\angle ACE=180°-77°-77°=26°$.

（2）**解：**①当点D在BC的延长线上移动时，α与β之间的数量关系是$\alpha=\beta$. 理由如下：

∵$\angle DAE=\angle BAC$，

∴$\angle DAE+\angle CAD=\angle BAC+\angle CAD$.

∴$\angle CAE=\angle BAD$.

在$\triangle BAD$和$\triangle CAE$中，

$\begin{cases}AB=AC,\\ \angle BAD=\angle CAE,\\ AD=AE,\end{cases}$

∴$\triangle BAD\cong\triangle CAE$（SAS）.

∴$\angle ABD=\angle ACE$.

∵$AB=AC$，

∴$\angle ABC=\angle ACB=\frac{1}{2}(180°-\angle BAC)=\frac{1}{2}(180°-\alpha)$.

∴$\angle DCE=180°-\angle ACB-\angle ACE=180°-\frac{1}{2}(180°-\alpha)-\frac{1}{2}(180°-\alpha)=\alpha$.

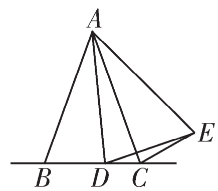
∵$\angle DCE=\beta$，

∴$\alpha=\beta$.

②分三种情况：

ⅰ当点D在线段BC上时，$\alpha+\beta=180°$. 理由如下：

如下图所示，



同理可证$\triangle BAD\cong\triangle CAE$（SAS）.

∴$\angle ADB=\angle AEC$，

$\angle ABD=\angle ACE$.

∵$\angle ADC+\angle ADB=180°$，

∴$\angle ADC+\angle AEC=180°$.

∵四边形$ADCE$的内角和为360°，

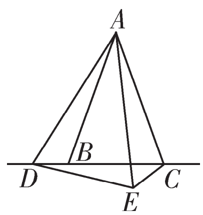
∴$\angle DAE+\angle DCE=180°$.

∵$\angle DAE=\angle BAC=\alpha$，$\angle DCE=\beta$，

$\therefore \alpha+\beta=180^\circ$.

ⅱ当点 D 在线段 BC 的反向延长线上时，$\alpha=\beta$. 理由如下：

如下图所示，



同理可证$\triangle BAD\cong\triangle CAE$（SAS）.

$\therefore \angle ABD=\angle ACE$.

$\because \angle ACE=\angle ACD+\angle DCE$,

$\angle ABD=\angle ACD+\angle BAC$,

$\therefore \angle ACD+\angle DCE=\angle ACD+\angle BAC$.

$\therefore \angle DCE=\angle BAC$.

$\because \angle BAC=\alpha$，$\angle DCE=\beta$,

$\therefore \alpha=\beta$.

ⅲ当点 D 在线段 BC 的延长线上时，由①可得 $\alpha=\beta$.

综上所述，当点 D 在直线 BC 上移动时，$\alpha=\beta$ 或 $\alpha+\beta=180^\circ$.

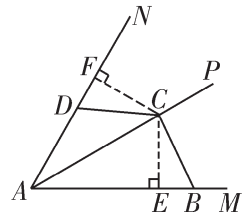
【点拨】本题的解题技巧是运用类比的方法. 由于（2）是在（1）的基础上变化而来的，$\angle BAC$ 的度数由 26° 变为 α，因此可利用（1）的解题过程去探究.（2）中的②在①的基础上，点 D 的位置范围扩大了，因此需分三种情况进行讨论.

变式训练

（1）$DC=BC$.

（2）$DC=BC$ 仍然成立. 理由如下：

在图 2 中，过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E，作 $CF\perp AD$ 于点 F，如下图所示.



$\because \angle ABC+\angle ADC=180^\circ$,

$\angle CDF+\angle ADC=180^\circ$,

$\therefore \angle ABC=\angle CDF$.

$\because AC$ 平分 $\angle MAN$，$CE\perp AB$，$CF\perp AD$,

$\therefore CE=CF$.

在$\triangle BCE$ 和$\triangle DCF$ 中，

$$\begin{cases}\angle ABC=\angle CDF,\\ \angle BEC=\angle DFC=90^\circ,\\ CE=CF,\end{cases}$$

$\therefore \triangle BCE\cong\triangle DCF$（AAS）.

$\therefore DC=BC$.

培优精练

（1）$\angle BAE+\angle DAF=\angle EAF$

【解析】在$\triangle ABE$ 和$\triangle ADG$ 中，

$\begin{cases}AB=AD,\\ \angle B=\angle ADG=90^\circ,\\ BE=DG,\end{cases}$ $\therefore$ $\triangle ABE\cong\triangle ADG$（SAS）. $\therefore \angle BAE=\angle DAG$，$AE=AG$. $\because EF=BE+DF$，$DG=BE$，$\therefore EF=DG+DF=GF$. 在$\triangle AEF$ 和$\triangle AGF$ 中，

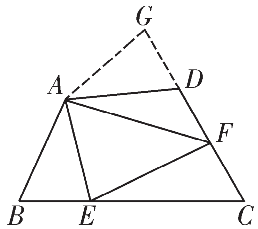
$\begin{cases}AE=AG,\\ AF=AF,\\ EF=GF,\end{cases}$ $\therefore \triangle AEF\cong\triangle AGF$（SSS）.

$\therefore \angle EAF=\angle GAF=\angle DAG+$

$\angle DAF=\angle BAE+\angle DAF$.

(2) **解**：成立. 理由如下：

反向延长 DF 到点 G，使 $DG=BE$，连接 AG，如下图所示.



∵ $\angle B+\angle ADF=180°$，

$\angle ADG+\angle ADF=180°$，

∴ $\angle B=\angle ADG$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADG$ 中，

$\begin{cases} AB=AD, \\ \angle B=\angle ADG, \\ BE=DG, \end{cases}$

∴ $\triangle ABE\cong\triangle ADG$ (SAS).

∴ $\angle BAE=\angle DAG$，

$AE=AG$.

∴ $EF=BE+DF=DG+DF=GF$.

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AGF$ 中，$\begin{cases} AE=AG, \\ AF=AF, \\ EF=GF, \end{cases}$

∴ $\triangle AEF\cong\triangle AGF$ (SSS).

∴ $\angle EAF=\angle GAF=\angle DAG+\angle DAF=\angle BAE+\angle DAF$.

专题三 轴对称

第 1 讲 线段垂直平分线的性质的应用

例一 **解**：(1) ∵ $\angle ABC=20°$，$\angle ACB=65°$，

∴ $\angle BAC=180°-\angle ABC-\angle ACB=180°-20°-65°=95°$.

∵ DE，FG 分别为 AB，AC 的垂直平分线，

∴ $AD=BD$，$AF=CF$，

$\angle BAD=\angle ABC=20°$，

$\angle CAF=\angle ACB=65°$.

∴ $\angle DAF=\angle BAC-\angle BAD-\angle CAF=95°-20°-65°=10°$.

(2) 由 (1) 可知，$AD=BD$，$AF=CF$.

∴ $\triangle DAF$ 的周长为 $AD+DF+AF=BD+DF+CF=BC=50$.

【点拨】本题 (1) 中主要考查了线段的垂直平分线的性质，掌握线段的垂直平分线上的点到线段的两个端点的距离相等是解题关键. 在 (2) 中利用了整体思想求三角形的周长，把线段 AD，AF 分别转化为 BD，CF，则 $\triangle DAF$ 的周长转化为线段 BC 的长.

变式训练一

解：∵ BC 的垂直平分线交 AB 于点 D，

∴ $BD=CD$.

∵ $\triangle ACD$ 的周长是 14，

∴ $AD+AC+CD=14$，

即 $AC+AD+BD=AC+AB=14$.

∴ $\begin{cases} AC+AB=14, \\ AB-AC=2. \end{cases}$

解得 $AB=8$，$AC=6$.

例二 **证明**：(1) ∵ BD 垂直平分线

段 AC，

$\therefore AB=BC$，$\angle BAC=\angle ACB$.

$\because AF\parallel BC$，

$\therefore \angle CAF=\angle ACB$.

$\therefore \angle CAF=\angle BAC$.

$\therefore AC$ 平分 $\angle EAF$.

（2）$\because BD$ 垂直平分线段 AC，

$\therefore AD=CD$，$\angle CAD=\angle ACD$.

$\because \angle ACD$ 是 $\triangle ACE$ 的一个外角，

$\therefore \angle ACD=\angle E+\angle CAE$.

$\because \angle CAD=\angle DAF+\angle CAF$，

$\therefore \angle E+\angle CAE=\angle DAF+\angle CAF$.

又 $\because \angle CAE=\angle CAF$，

$\therefore \angle DAF=\angle E$.

【点拨】 本题考查的是线段的垂直平分线的性质、三角形的外角性质，掌握线段的垂直平分线上的点到线段的两个端点的距离相等是解题的关键.

变式训练二

解： $\because OE$ 垂直平分 AD，

$\therefore OA=OD$.

$\therefore \angle OAE=\angle ODE$.

$\because \angle BAD=\angle CDA$，

$\therefore \angle BAD-\angle OAE=\angle CDA-\angle ODE$，

即 $\angle BAO=\angle CDO$.

在 $\triangle ABO$ 和 $\triangle DCO$ 中，

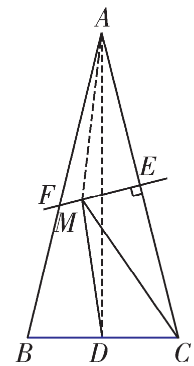
$$\begin{cases}\angle BAO=\angle CDO,\\ OA=OD,\\ \angle AOB=\angle COD,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABO\cong\triangle DCO$（ASA）.

$\therefore OB=OC$.

$\therefore$ 点 O 在线段 BC 的垂直平分线上.

例三　解： 连接 AD，AM，如下图所示.



$\because$ 点 D 是边 BC 的中点，

$\therefore BD=CD$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中，$\begin{cases}AB=AC,\\ AD=AD,\\ BD=CD,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACD$（SSS）.

$\therefore \angle ABD=\angle ACD$，

$\angle ADB=\angle ADC$.

又 $\because \angle ADB+\angle ADC=180^\circ$，

$\therefore \angle ADB=\angle ADC=90^\circ$，

即 $AD\perp BC$.

$\because \triangle ABC$ 的面积是 16，$BC=4$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times 4\cdot AD=16$.

解得 $AD=8$.

$\because EF$ 是线段 AC 的垂直平分线，

$\therefore AM=CM$.

$\therefore CM+DM=AM+DM\geqslant AD$.

$\therefore$ 当点 M 在线段 AD 上时，$CM+DM=AD$，此时 $CM+MD$ 取最小值.

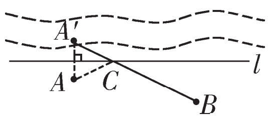
$\therefore \triangle CDM$ 的周长 $=(CM+DM)+CD\geqslant AD+\frac{1}{2}BC=8+\frac{1}{2}\times 4=8+2=10$.

∴$\triangle CDM$ 的周长的最小值为 10.

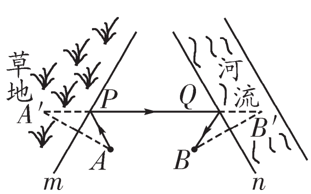
【点拨】本题运用线段垂直平分线的性质，得到 $CM+DM=AM+DM$，把 $\triangle CDM$ 的周长的最小值转化为线段 AD 与 CD 的和.

变式训练三

1. **解**：如下图，作点 A 关于直线 l 的对称点 A'，连接 $A'B$ 与直线 l 交于点 C，（或作点 B 关于直线 l 的对称点 B'，连接 AB' 与直线 l 交于点 C）则 C 点为所求.

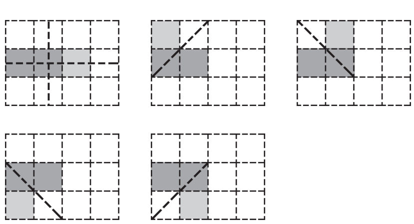


2. **解**：如下图，作点 A 关于直线 m 的对称点 A'，作点 B 关于直线 n 的对称点 B'，连接 $A'B'$ 分别与直线 m，n 交于点 P，Q，则点 P 为牧马人到达草地的地方，点 Q 为牧马人到达河边的地方，牧马人按照 $A \to P \to Q \to B$ 的路线走可使其所走路程最短.

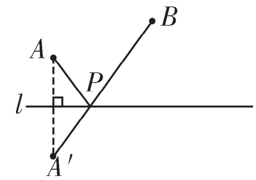


培优精练

1. **解**：方法不唯一，下列 5 种方法仅供参考.



2. **解**：如图，作点 A 关于直线 l 的对称点 A'，连接 $A'B$ 与直线 l 交于点 P，（或作点 B 关于直线 l 的对称点 B'，连接 AB' 与直线 l 交于点 P）则点 P 满足 $PA+PB$ 的值最小.



3. **解**：(1) ∵ AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$DE \perp AB$，$DF \perp AC$，

∴$DE=DF$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AED$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle AFD$ 中，

$$\begin{cases} AD=AD, \\ DE=DF, \end{cases}$$

∴$\mathrm{Rt}\triangle AED \cong \mathrm{Rt}\triangle AFD$（HL）.

∴$AE=AF$.

又∵$DE=DF$，

∴直线 AD 是线段 EF 的垂直平分线，即 AD 垂直平分 EF.

(2) ∵$DE=DF$，

∴$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AB\times ED+\frac{1}{2}AC\times DF=\frac{1}{2}DE\times(AB+AC)=\frac{1}{2}DE\times(6+4)=10$.

解得 $DE=2$.

名卷压轴题

证明：(1) ∵$\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$，

∴$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 都是直角三角形.

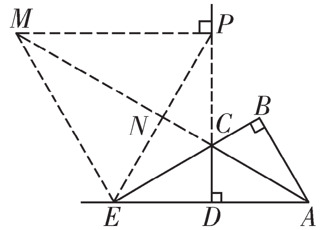
在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，

$\begin{cases}BC=CD,\\AC=AC,\end{cases}$

∴Rt△ABC≌Rt△ADC（HL）.

∴$\angle ACB=\angle ACD$，$\angle BAC=\angle DAC$.

（2）如下图.



∵$AC=CE$，$\angle ADC=90°$，

∴Rt△ACD≌Rt△ECD（HL）.

∴$\angle CAD=\angle CED$.

∵$\angle ABE=90°$，

∴$\angle AEB=\angle BAC=\angle CAE=\frac{1}{3}\times 90°=30°$.

∵$AE\perp DP$，$MP\perp PD$，

∴$AE/\!/MP$.

∴$\angle PMC=\angle MAE=\angle CAE=30°$.

∵$ME/\!/AB$，

∴$\angle MEB=\angle ABC=90°$.

$\angle EMA=\angle BAC=30°$.

在△MPC和△MEC中，

$\begin{cases}\angle PMC=\angle EMA,\\\angle MPC=\angle MEC,\\MC=MC,\end{cases}$

∴△MPC≌△MEC（AAS）.

∴$MP=ME$.

在△MPN和△MEN中，

$\begin{cases}MP=ME,\\\angle PMN=\angle EMC,\\MN=MN,\end{cases}$

∴△MPN≌△MEN（SAS）.

∴$PN=EN$，$\angle MNP=\angle MNE$.

∵$\angle MNP+\angle MNE=180°$，

∴$\angle MNP=\angle MNE=90°$.

∴AM垂直平分PE.

第 2 讲　图形的轴对称与点的坐标变化

例一　D　**【解析】**∵点$A(a-2，3-b)$和点$B(b+1，-3+2a)$关于y轴对称，

∴$\begin{cases}a-2=-(b+1),\\3-b=-3+2a.\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=5,\\b=-4.\end{cases}$

∴$ab=5\times(-4)=-20$.

【点拨】本题根据点A与点B关于y轴对称，得点A与点B横坐标互为相反数，纵坐标相等，列出关于a，b的方程组，解之可求得a，b的值.

变式训练一

1. D　**【解析】**观察可知，点A的坐标为$(-5，4)$. ∵点A与点A'关于y轴对称，∴点A与点A'的横坐标互为相反数，纵坐标相等. 则点A'的坐标为（5，4）. 故选 D.

2. **解：**（1）∵点M，N关于x轴对称，

∴$\begin{cases}2a-b=2b-1,\\5+a-a+b=0.\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-8,\\b=-5.\end{cases}$

∴$2a-b=2\times(-8)-(-5)=-11$，

$5+a=5+(-8)=-3$，

$2b-1=2\times(-5)-1=-11$，

$-a+b=-(-8)+(-5)=3$.

∴点 $M(-11,\ -3)$，$N(-11,\ 3)$.

(2) ∵点 M，N 关于 y 轴对称，

∴$\begin{cases}2a-b+2b-1=0,\\5+a=-a+b.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=-1,\\b=3.\end{cases}$

∴$2a-b=2\times(-1)-3=-5$，

$5+a=5+(-1)=4$，

$2b-1=2\times3-1=5$，

$-a+b=-(-1)+3=4$.

∴点 $M(-5,\ 4)$，$N(5,\ 4)$.

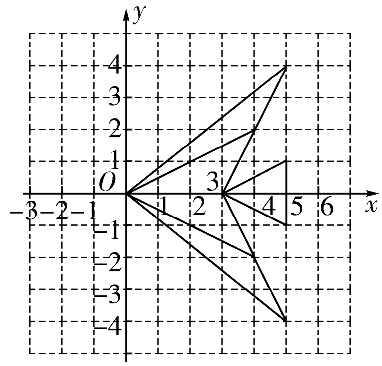
例二 C **【解析】**∵点 A 的坐标为 $(-2,\ 3)$，∴点 A 关于 x 轴对称的点的坐标为 $(-2,\ -3)$，点 A 关于 y 轴对称的点的坐标为 $(2,\ 3)$，故选项 C 正确.

【点拨】本题观察直角坐标系中点 A 的位置，得到与点 A 关于坐标轴对称的点的坐标，即可选出正确答案.

变式训练二

C **【解析】**观察可知，点 A 与点 B 的纵坐标相同，∴点 A，B 关于 y 轴或与 y 轴平行的直线成轴对称，由此排除 A，D. ∵点 A，B 到 y 轴的距离分别为 2，0，由此排除 B. ∵点 A，B 到直线 $x=1$ 的距离均为 1，∴点 A 与点 B 关于直线 $x=1$ 对称. 故选 C.

例三 **解：**(1) 根据画图方法，可知各点关于 x 轴的对称点依次为：$(0,\ 0)$，$(5,\ -4)$，$(3,\ 0)$，$(5,\ -1)$，$(5,\ 1)$，$(3,\ 0)$，$(4,\ 2)$，$(0,\ 0)$，顺次连接各点，则得到符合题意的图形(如图所示).



(2) 观察可知，这两个成轴对称的图形的公共部分是指由点 $(0,\ 0)$，$(4,\ 2)$，$(3,\ 0)$，$(5,\ 1)$，$(5,\ -1)$，$(3,\ 0)$，$(4,\ -2)$，$(0,\ 0)$ 顺次连接而成的图形，且这个图形是一个以 x 轴为对称轴的轴对称图形.

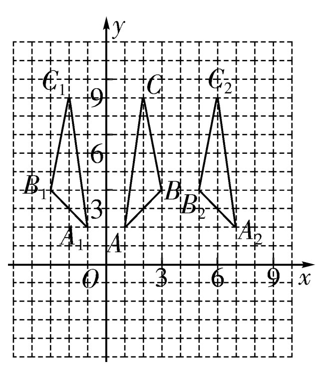
∴公共部分的图形面积为：$2\times\left(\frac{1}{2}\times3\times2+\frac{1}{2}\times2\times1\right)=2\times(3+1)=8$.

【点拨】通过观察得到两图形的公共部分是一个以 x 轴为对称轴的轴对称图形. 根据各顶点的坐标，则求得所对应的三角形的底和高，然后利用三角形的面积公式求相应的图形面积.

变式训练三

1. 解：(1) 如下图所示，$\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求.

(2) 如下图所示，$\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求.



2. 解：(1) ∵$A(-4,5)$，$C(-1,3)$，

∴建立的平面直角坐标系如下图所示.

(2) 如下图所示，$\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求，点 B_1 的坐标为$(2,1)$.

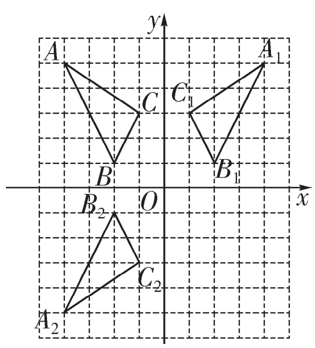
(3) 如下图所示，$\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求.

∵$\triangle ABC$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 关于 x 轴对称，

∴它们的面积相等.

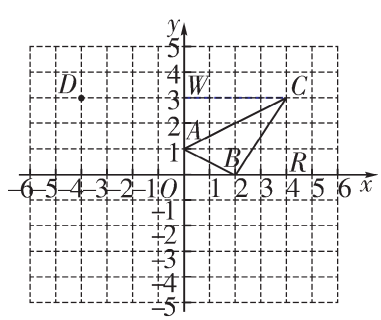
∵结合网格图可知 $S_{\triangle ABC}=3\times4-\frac{1}{2}\times1\times2-\frac{1}{2}\times2\times3-\frac{1}{2}\times2\times4=12-1-3-4=4$，

∴$\triangle A_2B_2C_2$ 的面积为 4.



培优精练

1. 解：(1) 画出的$\triangle ABC$ 如下图所示.



∵$A(0,1)$，$B(2,0)$，$C(4,3)$，

∴$CW=4$，$CR=3$，$AW=3-1=2$，$AO=1$，$OB=2$，$BR=4-2=2$.

∴$\triangle ABC$ 的面积为：$S_{\text{长方形}CWOR}-S_{\triangle AOB}-S_{\triangle BRC}-S_{\triangle CWA}=3\times4-\frac{1}{2}\times1\times2-\frac{1}{2}\times2\times3-\frac{1}{2}\times2\times4=4$.

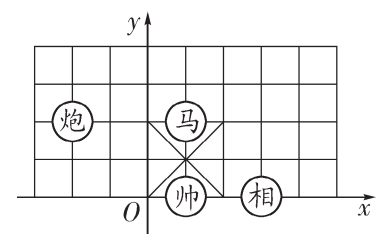
(2) ∵点 D 与点 C 关于 y 轴对称，$C(4,3)$，

∴点 D 的坐标为$(-4,3)$.

2. (1) **解：**∵帅位于点$(1,0)$上，相位于点$(3,0)$上，

∴y 轴为帅左边相距 1 个格的格线，x 轴为帅所在的格线.

画出的平面直角坐标系如下图所示：



(2) $(-2,2)$　2　**【解析】**观察(1)中的坐标系，得炮位于点$(-2,2)$，马与帅的距离是 2.

(3) **解：**根据轴对称的性质，炮移动到关于 y 轴对称的点的位置，应该在马的右侧 1 个单位处且与马在同一条横格线上，

∴移动后炮的位置是$(2,2)$.

3. (1) $(-4,3)$　$(3,0)$　**【解析】**观察图形，得 $A(-4,3)$，$B(3,0)$.

(2) **解：**观察可知，点 C 的坐标为$(-2,5)$，

∴顶点 C 关于 y 轴对称的点 C' 的坐标为(2，5).

(3) **解：** 直线 $x=-1$ 上各点到 y 轴的距离均为1.

设顶点 B 关于直线 $x=-1$（直线上各点的横坐标均为 -1）的对称点为 $D(m, n)$.

∵顶点 B 在 x 轴上，

∴点 D 也在 x 轴上.

∴$n=0$.

∵点 B 与点 D 关于直线 $x=-1$（直线上各点的横坐标均为 -1）对称，

∴$3-(-1)=-1-m$.

解得 $m=-5$.

∴顶点 B 关于直线 $x=-1$ 的对称点的坐标为$(-5, 0)$.

名卷压轴题

解： (1) ∵EF 与 CD 关于 y 轴对称，点 $E(-m, a+1)$，$F(-m, 1)$，

∴$C(m, a+1)$，$D(m, 1)$.

设 CD 与直线 l 之间的距离为 x，

∵CD 与 MN 关于直线 l 对称，l 与 y 轴之间的距离为 a，

∴MN 与 y 轴之间的距离为 $a-x$.

∵$x=m-a$，

∴点 M 的横坐标为 $a-(m-a)=2a-m$.

∴$M(2a-m, a+1)$，$N(2a-m, 1)$.

(2) 能重合．理由如下：

∵$EM=2a-m-(-m)=2a=OA$，

$EF=a+1-1=a=OB$，

且 $EF\parallel y$ 轴 $\parallel OB$，$EM\parallel x$ 轴 $\parallel OA$，

∴$\angle MEF=\angle AOB=90°$.

在$\triangle ABO$ 和$\triangle MFE$ 中，

$$\begin{cases} OA=EM, \\ \angle AOB=\angle MEF, \\ OB=EF, \end{cases}$$

∴$\triangle ABO\cong\triangle MFE$ (SAS).

∴$\triangle ABO$ 与$\triangle MFE$ 通过平移能重合.

平移方案：将$\triangle ABO$ 向上平移$(a+1)$个单位长度后，再向左平移 m 个单位长度，即可重合.（平移方案不唯一）

第3讲　利用等腰三角形的性质进行计算或证明

例一　解： (1) ∵$AB=AC$，$\angle A=50°$，

∴$\angle ABC=\angle C=\frac{1}{2}(180°-\angle A)=\frac{1}{2}(180°-50°)=65°$.

∵DE 垂直平分 AB，

∴$AD=BD$.

∴$\angle ABD=\angle A=50°$.

∴$\angle CBD=\angle ABC-\angle ABD=65°-50°=15°$.

(2) ∵DE 垂直平分 AB，

∴$AD=BD$.

∴$BD+CD=AD+CD=AC$.

又∵$AB=AC=7$，$\triangle CBD$ 的周长为12，

∴$BC=\triangle CBD$ 的周长$-(BD+CD)=12-7=5$.

【点拨】 因为等腰三角形两条腰相等，

两个底角相等，所以本题求解的关键是把“边相等”转化为“角相等”.

变式训练一

解：（1）∵$AB=AC$，

∴$\angle ABC=\angle ACB$.

∵$\angle CAD=\angle ABC$，

∴$\angle CAD=\angle ACB$.

∴$AD\parallel BC$.

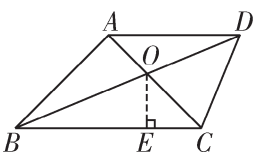
∴$\angle ADB=\angle CBD$.

∵$AB=AD$，

∴$\angle ADB=\angle ABD$.

∴$\angle ABD=\angle CBD=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\times 45^\circ=22.5^\circ$.

（2）过点 O 作 $OE\perp BC$ 于点 E，如下图所示.



∵$\angle CAD=\angle ABC=45^\circ$，

∴$\angle ACB=\angle ABC=45^\circ$.

∴$\angle BAC=180^\circ-\angle ABC-\angle ACB=180^\circ-45^\circ-45^\circ=90^\circ$.

由（1）可知，BD 平分$\angle ABC$.

∴$OE=OA=1$，

即点 O 到直线 BC 的距离为 1.

例二　证明：（1）∵$\triangle ABC$ 为等边三角形，

∴$AC=BC$，$\angle A=\angle ACB=60^\circ$.

∵D 为 AC 的中点，

∴$CD=AD=\frac{1}{2}AC$.

∵$CE=\frac{1}{2}BC$，

∴$CD=CE$.

∴$\angle E=\angle CDE$.

∵$\angle ACB=\angle E+\angle CDE=60^\circ$，

∴$\angle E=\angle CDE=\frac{1}{2}\angle ACB=\frac{1}{2}\times 60^\circ=30^\circ$.

∴$\angle ADF=\angle CDE=30^\circ$.

∵$\angle A=60^\circ$，

∴$\angle AFD=180^\circ-\angle A-\angle ADF=180^\circ-60^\circ-30^\circ=90^\circ$.

∴$AD=2AF$.

（2）∵$\triangle ABC$ 为等边三角形，D 为 AC 的中点，

∴BD 平分$\angle ABC$.

∵$\angle ABC=60^\circ$，

∴$\angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\times 60^\circ=30^\circ$.

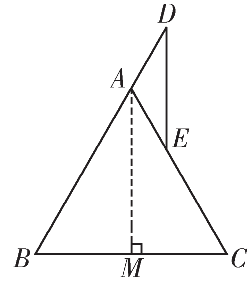
由（1），得$\angle E=30^\circ$.

∴$\angle ABD=\angle E$.

【点拨】本题的求解主要是综合运用等边三角形和等腰三角形的性质，而证明$\triangle AFD$ 是含 30°角的直角三角形是解本题的关键．根据“30°角所对的直角边等于斜边的一半”，即可求解.

变式训练二

证明：过点 A 作 $AM\perp BC$ 于点 M，如下图所示.



$\because AB=AC$,

$\therefore \angle BAC=2\angle BAM$.

$\because AD=AE$,

$\therefore \angle D=\angle AED$.

$\therefore \angle BAC=\angle D+\angle AED=2\angle D$.

$\therefore 2\angle BAM=2\angle D$.

$\therefore \angle BAM=\angle D$.

$\therefore DE /\!/ AM$.

$\because AM\perp BC$,

$\therefore DE\perp BC$.

例三 （1）**证明**：$\because AB=AC$,

$\therefore \angle B=\angle C$.

$\because FE\perp BC$,

$\therefore \angle F+\angle C=90^\circ$,

$\angle BDE+\angle B=90^\circ$.

$\therefore \angle F=\angle BDE$.

又$\because \angle BDE=\angle ADF$,

$\therefore \angle F=\angle ADF$.

$\therefore AF=AD$.

$\therefore \triangle ADF$ 是等腰三角形.

（2）**解**：$\because DE\perp BC$,

$\therefore \angle DEB=90^\circ$.

$\because \angle B=60^\circ$,

$\therefore \angle BDE=30^\circ$.

又$\because BD=4$,

$\therefore BE=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times 4=2$.

$\because AB=AC$，$\angle B=60^\circ$.

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形.

$\therefore BC=AB=AD+BD=2+4=6$.

$\therefore CE=BC-BE=6-2=4$.

【点拨】 本题综合运用了等腰三角形的性质，等边三角形的性质等. 求解的技巧是运用数形结合的方法，把等腰三角形（包括等边三角形）中“形”的关系转化为边或角之间的数量关系.

变式训练三

证明：（1）$\because \angle ACB=90^\circ$,

且 $DE\perp AB$,

$\therefore \angle EDB=\angle ACB=90^\circ$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle EBC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle EBD$ 中，

$$\begin{cases} BC=BD, \\ BE=BE, \end{cases}$$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle EBC\cong \mathrm{Rt}\triangle EBD$（HL）.

$\therefore \angle CBE=\angle DBE$.

$\because BD=BC$,

$\therefore \triangle BDC$ 是等腰三角形.

$\therefore BF\perp CD$，$CF=DF$.

$\therefore BE$ 垂直平分 CD.

（2）$\because$ 点 D 是 AB 的中点，$\angle ACB=90^\circ$,

易证 $CD=\frac{1}{2}AB=BD$.

又$\because BD=BC$,

$\therefore CD=BD=BC$.

$\therefore \triangle CBD$ 是等边三角形.

培优精练

1. **证明**：（1）在 $\mathrm{Rt}\triangle OEC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle OFB$ 中，

$$\begin{cases} OE=OF, \\ OC=OB, \end{cases}$$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle OEC\cong \mathrm{Rt}\triangle OFB$（HL）.

$\therefore \angle C=\angle B$.

$\therefore AB=AC$.

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形.

（2）在 $Rt\triangle OEC$ 和 $Rt\triangle OFB$ 中，

$\begin{cases} OE=OF, \\ OC=OB, \end{cases}$

$\therefore Rt\triangle OEC \cong Rt\triangle OFB$（HL）.

$\therefore \angle OBF=\angle OCE$.

$\because OB=OC$，

$\therefore \angle OBC=\angle OCB$.

$\therefore \angle OBF+\angle OBC=\angle OCE+\angle OCB$，

即 $\angle ABC=\angle ACB$.

$\therefore AB=AC$.

2. 当点 M，N 在边 BC 上运动时，可以得到以 MN 为底边的等腰三角形.

设点 M，N 运动 x s 时，M，N 两点重合，

则 $x\times1+10=2x$，解得 $x=10$.

可知 10 s 时 M，N 两点重合，恰好在点 C 处，此后点 N 运动到点 M 前面.

如下图所示，假设 $\triangle AMN$ 是等腰三角形，

$\therefore AN=AM$.

$\therefore \angle AMN=\angle ANM$.

$\therefore \angle AMC=\angle ANB$.

$\because AB=AC$，

$\therefore \angle C=\angle B$.

在 $\triangle ACM$ 和 $\triangle ABN$ 中，

$\begin{cases} \angle C=\angle B, \\ \angle AMC=\angle ANB, \\ AC=AB, \end{cases}$

$\therefore \triangle ACM \cong \triangle ABN$（AAS）.

$\therefore CM=BN$.

设当点 M，N 在边 BC 上运动，运动的时间为 t s 时，$\triangle AMN$ 是等腰三角形，

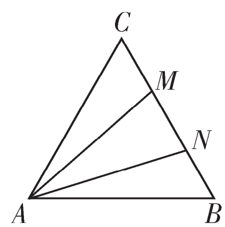
$\therefore CM=(t-10)$ cm，

$NB=(30-2t)$ cm.

$\therefore t-10=30-2t$. 解得 $t=\frac{40}{3}$.

经检验符合题意.

$\therefore$ 当点 M，N 在边 BC 上运动时，能得到以 MN 为底边的等腰 $\triangle AMN$，此时点 M，N 的运动时间为 $\frac{40}{3}$ s.



3. （1）**解：** $\triangle AMN$ 是等腰三角形. 理由如下：

$\because AB=AC$，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB$.

$\because MN\parallel BC$，

$\therefore \angle AMN=\angle ABC$，

$\angle ANM=\angle ACB$.

$\therefore \angle AMN=\angle ANM$.

$\therefore AM=AN$.

$\therefore \triangle AMN$ 是等腰三角形.

（2）①**证明：** $\because BP$ 平分 $\angle ABC$，

$\therefore \angle PBM=\angle PBC$.

$\because MN\parallel BC$，

$\therefore \angle MPB=\angle PBC$.

$\therefore \angle PBM=\angle MPB$.

$\therefore MB=MP$.

$\therefore \triangle BPM$ 是等腰三角形.

②**解**：$\because CP$ 平分 $\angle ACB$，

$\therefore \angle PCB=\angle PCN$.

$\because MN /\!/ BC$，

$\therefore \angle NPC=\angle PCB$.

$\therefore \angle NCP=\angle NPC$.

$\therefore NP=NC$.

由①知，$MP=MB$，

$\therefore \triangle AMN$ 的周长 $=AM+MP+NP+AN=AM+MB+NC+AN=AB+AC$.

$\because \triangle ABC$ 的周长为 a，$BC=b$（$a>2b$），

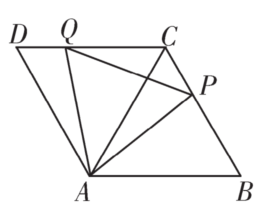
$\therefore AB+AC=a-b$.

$\therefore \triangle AMN$ 的周长为 $a-b$.

名卷压轴题

（1）4　【**解析**】设点 P，Q 从出发到相遇所用时间是 t s，根据题意，得 $t+2t=AC+AB+BC=12$，解得 $t=4$.

（2）**解**：如下图，若 $\triangle APQ$ 是等边三角形，此时点 P 在 BC 上，点 Q 在 CD 上.



$\because \triangle APQ$，$\triangle ADC$ 均是等边三角形，

$\therefore AQ=AP$，$AD=AC$，

$\angle QAP=\angle DAC=60°$.

$\therefore \angle QAP-\angle QAC=\angle DAC-\angle QAC$.

$\therefore \angle CAP=\angle DAQ$.

在 $\triangle ADQ$ 和 $\triangle ACP$ 中，

$$\begin{cases} AD=AC, \\ \angle DAQ=\angle CAP, \\ AQ=AP, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADQ \cong \triangle ACP$（SAS）.

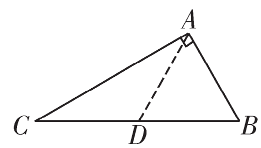
$\therefore CP=DQ$，

即 $t-4=12-2t$.

解得 $t=\dfrac{16}{3}$.

◎轴对称　新题型探究

例题　（1）是　【**解析**】如图，取 BC 的中点 D，连接 AD.



$\because \angle A=90°$，$\angle B=60°$，$\therefore \angle C=90°-\angle B=90°-60°=30°$. $\therefore AB=\dfrac{1}{2}BC=CD=BD$. $\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形. $\therefore AD=BD=CD$. $\therefore \triangle ACD$ 是等腰三角形. $\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABC$ 是“钻石三角形”.

（2）**解**：$\because \triangle ABC$ 是“钻石三角形”，直线 BD 是 $\triangle ABC$ 的“钻石分割线”，

$\therefore \triangle BCD$ 与 $\triangle ABD$ 是等腰三角形.

$\because \angle A>\angle B>\angle C$，

$\therefore BC>AC>AB$.

$\therefore$ 在 $\triangle BCD$ 中，BC 最长，不可能为腰.

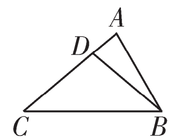
$\therefore CD=BD$.

设$\angle C=x$，

则$\angle CBD=\angle C=x$，$\angle ADB=\angle C+\angle CBD=x+x=2x$.

分三种情况：

①在$\triangle ABD$中，当$AB=BD$时，如下图所示.



$\therefore \angle A=\angle ADB=2x$.

$\therefore \angle ABC=180^\circ-\angle A-\angle C=180^\circ-2x-x=180^\circ-3x$，

即$3\angle C+\angle ABC=180^\circ$.

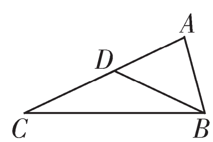
$\because \angle A>\angle ABC>\angle C$，

$\therefore 2x>180^\circ-3x>x$.

解得$36^\circ<x<45^\circ$，

即$36^\circ<\angle C<45^\circ$.

②在$\triangle ABD$中，当$AB=AD$时，如下图所示.



$\because AB=AD$，$BD=CD$，

$\therefore \angle ADB=\angle ABD=2\angle C=2x$.

$\therefore \angle ABC=\angle ABD+\angle CBD=2x+x=3x$，

即$\angle ABC=3\angle C$.

$\therefore \angle A=180^\circ-\angle ABC-\angle C=180^\circ-3x-x=180^\circ-4x$.

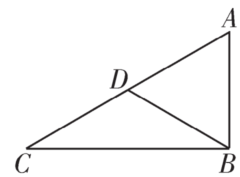
$\because \angle A>\angle ABC>\angle C$，

$\therefore 180^\circ-4x>3x>x$.

解得$0^\circ<x<\frac{180^\circ}{7}$，

即$0^\circ<\angle C<\frac{180^\circ}{7}$.

③在$\triangle ABD$中，当$AD=BD$时，如下图所示.



$\therefore \angle A=\angle ABD=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle CBD-\angle C)=\frac{1}{2}(180^\circ-x-x)=\frac{1}{2}(180^\circ-2x)=90^\circ-x$.

$\therefore \angle ABC=180^\circ-\angle A-\angle C=180^\circ-(90^\circ-x)-x=90^\circ$.

$\therefore AC$是最长边，这与BC是最长边矛盾，不合题意，舍去.

综上所述，$3\angle C+\angle ABC=180^\circ$，且$36^\circ<\angle C<45^\circ$或$\angle ABC=3\angle C$，且$0^\circ<\angle C<\frac{180^\circ}{7}$.

【点拨】本题运用了转化的思想方法，根据新定义把“钻石三角形”转化为我们所熟悉的三角形，然后按照我们所学过的知识求解. 本题还运用了数形结合的方法，把“钻石三角形”中的图形信息转化为边、角之间的数量关系.

变式训练

证明：$\because AE=BE$，

$\therefore \angle BAE=\angle ABE$.

$\because$四边形$ABCD$是“互补等对边四边形”，

$\therefore AD=BC$.

在$\triangle ABD$和$\triangle BAC$中，

$\begin{cases} AD=BC, \\ \angle BAE=\angle ABE, \\ AB=AB, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle BAC$（SAS）.

$\therefore \angle ABD=\angle BAC$，

$\angle ADB=\angle BCA$.

$\because \angle ADB+\angle BCA=180^\circ$，

$\therefore \angle ADB=\angle BCA=90^\circ$.

$\because$ 在等腰$\triangle ABE$中，$\angle BAE=\angle ABE=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle E)=90^\circ-\frac{1}{2}\angle E$，

$\therefore \angle ABD=90^\circ-\angle BAE=90^\circ-\left(90^\circ-\frac{1}{2}\angle E\right)=\frac{1}{2}\angle E$.

$\therefore \angle ABD=\angle BAC=\frac{1}{2}\angle E$.

培优精练

证明：（1）$\because DE$是AB的垂直平分线，

$\therefore AD=BD$.

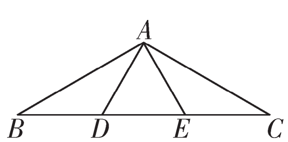
$\therefore \triangle ABD$是等腰三角形.

又$\because \angle C=90^\circ$，

$\therefore \triangle ACD$是直角三角形.

$\therefore AD$是$\triangle ABC$的一条“等直分割线段”.

（2）画出的三角形如下图所示，其中AD，AE是$\triangle ABC$的两条“等直分割线段”.



$\therefore AD=BD$，$\angle CAD=90^\circ$，$\angle BAE=90^\circ$，$AE=CE$.

$\therefore \angle B=\angle BAD$，$\angle C=\angle CAE$.

$\because \angle BAE=\angle BAD+\angle DAE=90^\circ$，$\angle CAD=\angle CAE+\angle DAE=90^\circ$.

$\therefore \angle BAD=\angle CAE$.

$\therefore \angle B=\angle C$.

$\therefore \triangle ABC$是等腰三角形.

专题四　整式的乘法与因式分解

第1讲　利用整式的乘法求图形的面积

例一　解：（1）（方法一）扩大部分场地（阴影部分）的面积为$(a+b+b)(b+b)-(a+b)b=(ab+3b^2)$（$m^2$）.

（方法二）扩大部分场地（阴影部分）的面积为$b(a+b)+b(b+b)=(ab+3b^2)$（m^2）.

（2）当$a=10$，$b=3$时，$ab+3b^2=10\times3+3\times3^2=57$（$m^2$）.

故阴影部分的面积是57 m^2.

【点拨】观察图形发现，大长方形的面积－小长方形的面积＝阴影部分的面积，由此利用长方形的面积公式，把图形的面积问题转化为整式的乘法问题，体现了数形结合的思想. 阴影部分的面积也可以是两个小长方形的面积之和.

变式训练一

解：（1）$a^2+6^2-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}(a+6)\times6=$

$\frac{1}{2}a^2-3a+18$.

(2) 当 $a=4$ 时，

$\frac{1}{2}a^2-3a+18=\frac{1}{2}\times4^2-3\times4+18=8-12+18=14$.

例二　(1) ① $m^2+12m+27$　$m^2+10m+24$　**【解析】**由长方形的面积公式计算，得

$S_{甲}=(m+9)(m+3)=m^2+12m+27$,

$S_{乙}=(m+6)(m+4)=m^2+10m+24$.

② $>$　**【解析】**$S_{甲}-S_{乙}=(m^2+12m+27)-(m^2+10m+24)=m^2+12m+27-m^2-10m-24=2m+3$,

$\because m>0$, $\therefore 2m+3>0$. $\therefore S_{甲}>S_{乙}$.

(2) **解：**① 乙的周长为 $2(m+6)+2(m+4)=4m+20$,

∵正方形纸片的周长与乙的周长相等，

∴正方形的边长为$\frac{4m+20}{4}=m+5$.

② $S_{正}-S_{乙}=(m+5)^2-(m^2+10m+24)=m^2+10m+25-m^2-10m-24=1$,

∴$S_{正}$ 与 $S_{乙}$ 的差是定值.

故小方同学的发现是正确的.

【点拨】本题求解的关键是熟练掌握长方形、正方形的周长公式与面积公式，由此进行由形到数的转化，根据长方形面积公式得到整式的乘法，根据正方形的面积公式得到整式的乘方，进而利用整式的运算展开本题的求解过程.

变式训练二

解：(1) 休息区域的面积为

$(6m+5n)^2-(2m+3n)(m+2n)$

$=36m^2+60mn+25n^2-(2m^2+4mn+3mn+6n^2)$

$=36m^2+60mn+25n^2-2m^2-4mn-3mn-6n^2$

$=(34m^2+53mn+19n^2)(\text{m}^2)$.

(2) 休息区域的面积为

$(6m+5n)^2-[(2m+3n)+(2m+n)]\cdot[(m+2n)+(3m+n)]$

$=36m^2+60mn+25n^2-(4m+4n)\cdot(4m+3n)$

$=36m^2+60mn+25n^2-(16m^2+12mn+16mn+12n^2)$

$=36m^2+60mn+25n^2-16m^2-12mn-16mn-12n^2$

$=(20m^2+32mn+13n^2)(\text{m}^2)$.

培优精练

1. A　**【解析】**按以下三种方法分割图形，得到 4 种表示法：

(方法一) 如图 1，则阴影部分的面积为 $at+(b-t)t$，故①正确；

(方法二) 如图 2，则阴影部分的面积为 $at+bt-t^2$，故②正确；

(方法三) 如图 3，则阴影部分的面积为 $ab-(a-t)(b-t)$，故③正确；

(方法四) 如图 2，则阴影部分的面积为 $(a-t)t+(b-t)t+t^2$，故④正确.

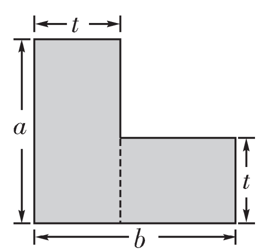


图 1

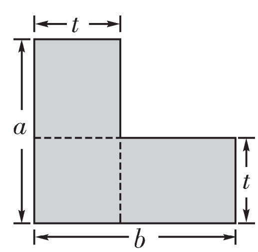


图 2

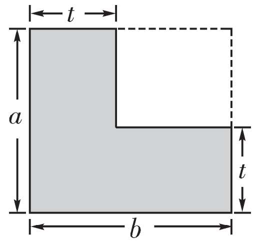


图 3

2. 解：（1）$S=\frac{1}{2}ab+a\cdot 2a+\frac{1}{2}(a+2a)b=(2a^2+2ab)(\text{cm}^2)$.

（2）当 $a=2$，$b=3$ 时，

$S=2\times 2^2+2\times 2\times 3=20$（$\text{cm}^2$）.

3. 解：（1）$4x\cdot 4y-(4y-y-2y)\cdot(4x-x-2x)=16xy-xy=15xy$（$\text{m}^2$）.

（2）卧室和客厅的面积之和为 $2y\cdot(4x-2x)+2x\cdot 4y=4xy+8xy=12xy$（$\text{m}^2$），

把 $x=3$，$y=2.5$ 代入 $12xy$ 中，得 $12\times 3\times 2.5=90$（m^2）.

即至少需要购买 90 平方米的木地板.

名卷压轴题

解：（1）根据题意，得

$S_{阴影A}=(60-3y)(x-2y)=(60x-120y-3xy+6y^2)$（$\text{cm}^2$），

$S_{阴影B}=3y[x-(60-3y)]=(3xy-180y+9y^2)$（$\text{cm}^2$），

$\therefore S_{阴影A}-S_{阴影B}=60x-120y-3xy+6y^2-(3xy-180y+9y^2)=60x-120y-3xy+6y^2-3xy+180y-9y^2=(60x-3y^2-6xy+60y)$（$\text{cm}^2$）.

[说明：$\because 60x-3y^2-6xy+60y=6x(10-y)+3y(20-y)$，

又 $0<y\leqslant 10$，$x>0$，

$\therefore 6x(10-y)\geqslant 0$，$3y(20-y)>0$.

$\therefore 60x-3y^2-6xy+60y>0$.]

（2）不会. 理由如下：

当 $y=10$ 时，$60x-3y^2-6xy+60y=60x-3\times 10^2-60x+60\times 10=300$，

∴当 $y=10$ 时，阴影 A 与阴影 B 的面积之差不会随着 x 的变化而变化.

第 2 讲　利用图形的面积验证整式的乘法与因式分解

例一　A　**【解析】**用两种不同的方法计算大长方形的面积. 直接利用长方形的面积公式求大长方形的面积为 $(a+3b)(a+b)$. 分别求各小长方形、小正方形的面积，相加得到大长方形的面积为 $a\cdot a+4\cdot a\cdot b+3\cdot b\cdot b=a^2+4ab+3b^2$. ∵大长方形的面积不变，∴ $(a+3b)(a+b)=a^2+4ab+3b^2$. 故选 A.

【点拨】本题求解的关键是观察图形，由此得到大长方形是由 4 个小长方形与 4 个小正方形组成，因此得到两种计算大长方形面积的算式，建立等式.

变式训练一

B　**【解析】**图 1 中阴影部分的面积为 $(a-x)(b-x)$，图 2 中阴影部分的面积为 $ab-ax-bx+x^2$，∴ $(a-x)(b-x)=ab-ax-bx+x^2$. 故选 B.

例二　A　**【解析】**计算大正方形 $ABCD$

的面积可以是$(a+b)^2$，也可以是四部分的面积之和，即$a^2+2ab+b^2$，因此$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. 故选 A.

【点拨】本题求解利用了数形结合的方法，即利用大正方形的组成特点，得到两种计算大正方形面积的算式，两者相等，验证了两数和的完全平方公式.

变式训练二

解：（1）$S_1=a^2-b^2$，

$S_2=\frac{1}{2}(2a+2b)(a-b)$

$=(a+b)(a-b)$.

（2）$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

（3）①由（2），得

原式$=\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\left(x^2+\frac{1}{4}\right)=x^4-\frac{1}{16}$.

②$107\times93$

$=(100+7)(100-7)$

$=100^2-7^2$

$=10\ 000-49$

$=9\ 951$.

例三 （1）**解：**图中所有裁剪线（虚线部分）长度之和为$2(m+2n)+2(2m+n)=6m+6n=6(m+n)$（cm）.

（2）$(m+2n)(2m+n)$ **【解析】**$2m^2+5mn+2n^2$表示2块边长为m的大正方形的面积$+5$块长为m，宽为n的小长方形的面积$+2$块边长为n的小正方形的面积. 由图可知恰好是长方形纸板的面积，因此$2m^2+5mn+2n^2$可以因式分解为$(m+2n)(2m+n)$.

（3）**解：**依题意，得

$2m^2+2n^2=58$，$mn=10$.

$\therefore m^2+n^2=29$.

$\because (m+n)^2=m^2+2mn+n^2$，

$\therefore (m+n)^2=29+2\times10=49$.

【点拨】本题求解的技巧有两点：一是利用数形结合的方法，通过观察图形，根据图形信息列出整式的算式；二是利用了整体思想求整式的值. 按照常规思路，需先求出m，n的值，显然此路不通，为此把$m+n$看作一个整体，巧妙利用乘法公式变形，体现了整体思想在解题中的优越性.

变式训练三

1. 解：（1）$AG=AD-DG=(a-b)$（cm）.

（2）$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. 理由如下：

$\because BM=b$ cm$=EF$，

$MN=(a-b)$ cm$=EC$，

$\therefore$矩形$BMNH$与矩形$EFHC$的面积相等.

$\therefore$阴影部分的面积$=S_{ABCD}-S_{DEFG}=(a^2-b^2)$（cm²）.

又阴影部分的面积$=AM\cdot AG=(a+b)(a-b)$（cm²），

$\therefore a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

（3）由题意，得$a-b=16$， ①

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=960$.

$\therefore a+b=60.$ ②

由①②可解得 $a=38$，$b=22$.

故 a 的值为 38，b 的值为 22.

2. (1) $(a+2b)(2a+b)$ 【解析】观察图形，可以发现代数式 $2a^2+5ab+2b^2$ 表示 2 块边长为 a cm 的大正方形的面积 +5 块长为 a cm，宽为 b cm 的小长方形的面积 +2 块边长为 b cm 的小正方形的面积，恰好是这块大长方形纸板的面积，因此可以因式分解为 $(a+2b)(2a+b)$.

(2) **解：** 由题意，得

$$\begin{cases}2(a^2+b^2)=242,\\ 2(a+2b+b+2a)=78.\end{cases}$$

化简，得 $\begin{cases}a^2+b^2=121,\\ a+b=13.\end{cases}$

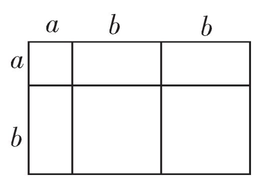
$\therefore (a+b)^2-2ab=121.$

$\therefore ab=24.$

$\therefore 5ab=5\times24=120.$

$\therefore$ 空白部分的面积为 120 cm^2.

例四 解： (1) 画出示意图如下：



拼成的大长方形的长，宽分别为 $(a+2b)$，$(a+b)$.

$\therefore a^2+3ab+2b^2=(a+2b)(a+b).$

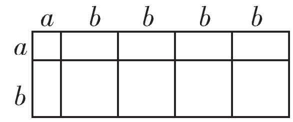
【点拨】 本题考查了因式分解的运用，在结合图形解决问题的同时渗透了整体代入的思想，使复杂问题简单化.

变式训练四

解： (1) $\because (2a+b)(a+2b)=2a^2+5ab+2b^2$，

故需要 C 类图形 2 张.

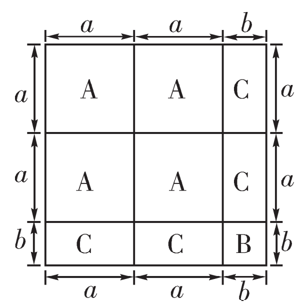
(2) 画出的长方形如下图：



$\therefore a^2+5ab+4b^2=(a+4b)(a+b).$

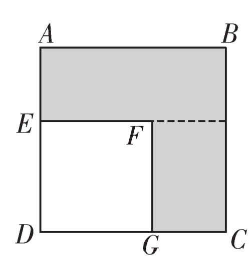
培优精练

1. D 【解析】画出拼接后的大正方形如下图所示. 由图可知，需取 C 纸片 4 张.



2. 13 【解析】设正方形 A 的边长为 a，正方形 B 的边长为 b，由图甲，得 $a^2-b^2-2(a-b)b=1$，即 $a^2+b^2-2ab=1$. 由图乙，得 $(a+b)^2-a^2-b^2=12$，即 $2ab=12$. $\therefore a^2+b^2=2ab+1=12+1=13.$

3. **解：** (1) 如下图所示，



$\because AB=a$，$EF=DE=b$，

$\therefore AG=EC=a-b$.

则图中阴影部分的面积 $=AB\cdot AE+GF\cdot GC=a\cdot(a-b)+b\cdot(a-b)$.

又图中阴影部分的面积 $=S_{\text{正方形}ABCD}-S_{\text{正方形}DEFG}=a^2-b^2$，

$\therefore a^2-b^2=a\cdot(a-b)+b\cdot(a-b)=(a+b)(a-b)$.

即 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

（2）根据题意，得 $a-b=16$，　①

$\because a^2-b^2=(a+b)(a-b)=960$，

$\therefore a+b=\dfrac{960}{a-b}=\dfrac{960}{16}=60$.　②

联立①②，得 $\begin{cases}a-b=16,\\a+b=60,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=38,\\b=22.\end{cases}$

$\therefore a$ 的值为 38，b 的值为 22.

名卷压轴题

解：（1）设 $m=2\,020-x$，$n=x-2\,022$，

则 $m+n=-2$，$m^2+n^2=10$.

$\because (m+n)^2=m^2+2mn+n^2$，

$\therefore 10+2mn=(-2)^2$.

解得 $mn=-3$.

$\therefore (2\,020-x)(x-2\,022)=-3$.

（2）设正方形 $ABCD$ 的边长为 x，

则 $AE=AD-DE=x-k$，

$AG=AB-BG=x-k-1$.

$\therefore AE-AG=x-k-(x-k-1)=1$.

$\because$ 长方形 $AEFG$ 的面积是 $\dfrac{21}{16}$，

$\therefore AE\cdot AG=\dfrac{21}{16}$.

$\because (AE-AG)^2=AE^2-2AE\cdot AG+AG^2$，

$\therefore 1^2=AE^2-2\times\dfrac{21}{16}+AG^2$.

$\therefore AE^2+AG^2=1+\dfrac{21}{8}=\dfrac{29}{8}$.

$\because (AE+AG)^2=AE^2+2AE\cdot AG+AG^2$，

$\therefore (AE+AG)^2=\dfrac{29}{8}+2\times\dfrac{21}{16}=\dfrac{25}{4}$.

解得 $AE+AG=\dfrac{5}{2}$.

$$\begin{aligned}\therefore S_{\text{阴影部分}}&=S_{\text{正方形}GFIH}-S_{\text{正方形}AGJK}\\&=AE^2-AG^2\\&=(AE+AG)(AE-AG)\\&=\frac{5}{2}\times1=\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

◎整式的乘法与因式分解　新题型探究

例题　（1）2　4　6　**【解析】**$\because 2^2=4$，$2^4=16$，$2^6=64$，$\therefore \log_2 4=2$，$\log_2 16=4$，$\log_2 64=6$.

（2）**解：**$\because \log_2 4=2$，$\log_2 16=4$，$\log_2 64=6$，

$\therefore \log_2 4+\log_2 16=\log_2 64$.

（3）**解：**$\log_a M+\log_a N=\log_a(MN)$.

理由如下：

设 $\log_a M=p$，$\log_a N=q$，则

$M=a^p$，$N=a^q$.

$\therefore MN=a^p\cdot a^q=a^{p+q}$.

$\therefore \log_a(MN)=p+q$.

$\therefore \log_a M+\log_a N=\log_a(MN)$.

【点拨】本题的解题技巧是深刻理解“对数”的定义，然后把“对数”转化为我们所熟悉的幂的乘方运算，进而利用幂的乘方进行求解.

变式训练

解：(1) $12※3=10^{12}\times10^{3}=10^{15}$，

$2*5=10^{2}\times10^{5}=10^{7}$.

(2) 不相等. 理由如下：

$\because (a※b)※c=(10^{a}\times10^{b})※c=10^{a+b}※c=10^{10^{a+b}}\times10^{c}=10^{10^{a+b}+c}$，

$a※(b※c)=a※(10^{b}\times10^{c})=a※10^{b+c}=10^{a}\times10^{10^{b+c}}=10^{a+10^{b+c}}$，

又 $a\neq b\neq c$，

$\therefore (a※b)※c\neq a※(b※c)$.

培优精练

解：(1) ①设 $5-x=a$，$x-2=b$，

则 $(5-x)(x-2)=ab=2$，

$a+b=(5-x)+(x-2)=3$.

$\therefore (5-x)^2+(x-2)^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2\times2=5$.

②设 $9+x=a$，$2+x=b$，

则 $(9+x)(2+x)=ab=4$，

$a-b=(9+x)-(2+x)=7$.

$\therefore (9+x)^2+(2+x)^2=a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=7^2+2\times4=57$.

(2) 设 $AC=CD=a$，$BC=CF=b$，

则 $AB=AC+BC=a+b=6$，

$a^2+b^2=18$.

$\because a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$，

$\therefore 18=36-2ab$.

$\therefore ab=9$.

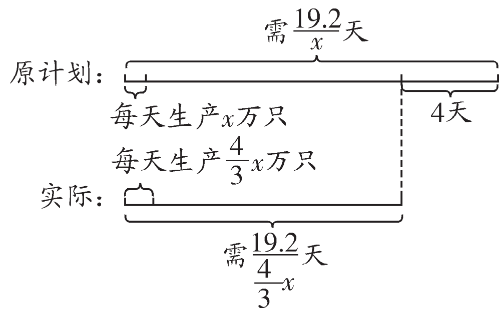
$\therefore S_{阴影}=\frac{1}{2}AC\cdot CF=\frac{1}{2}ab=\frac{9}{2}$.

专题五　分式

列分式方程解决实际问题

例一　解：设原计划每天生产 x 万只口罩.

根据题意，画出如下线段图.



则 $\frac{19.2}{x}-\frac{19.2}{\frac{4x}{3}}=4$.

解得 $x=1.2$.

经检验，$x=1.2$ 是原方程的解.

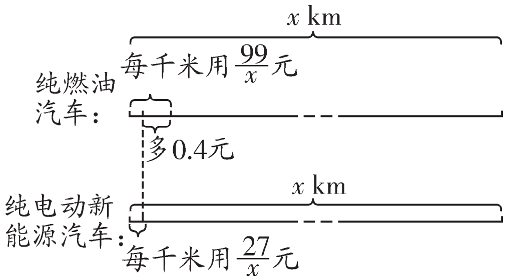
故该厂原计划每天生产 1.2 万只口罩.

【点拨】根据题干条件画出线段图，从图上找出等量关系，再列出分式方程，注意在利用分式方程解决实际问题时，需要检验. 检验的目的有两个，一是看所得的解是否为增根；二是看所得的解是否符合实际问题的意义.

变式训练一

解：设从 A 地到 B 地的路程为 x km.

根据题意，画出如下线段图.



则 $\frac{99}{x}-\frac{27}{x}=0.4$.

解得 $x=180$.

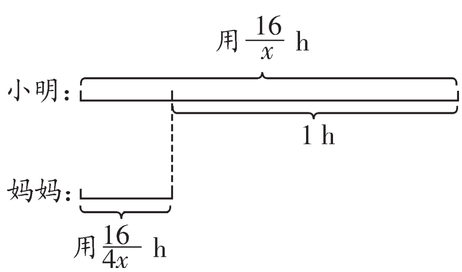
经检验，$x=180$ 是原方程的解.

又 $\frac{27}{180}=0.15$（元）.

故纯电动的新能源汽车每行驶 1 km 所需的电费是 0.15 元.

例二　**解：**设小明骑自行车的平均速度为 x km/h，则妈妈开车的平均速度为 $4x$ km/h.

根据题意，画出如下线段图.



则 $\frac{16}{x}=\frac{16}{4x}+1$.

解得 $x=12$.

经检验，$x=12$ 是原方程的解，且符合题意.

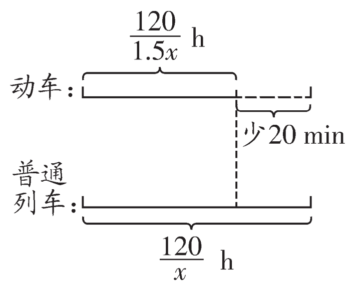
则 $4x=4\times12=48$.

故妈妈开车的平均速度为 48 km/h.

【点拨】本题求解的技巧有两点：一是根据题意画出线段图，然后根据线段图找等量关系，列出分式方程；二是设间接未知数. 一般情况下，求什么则设什么，称为直接设未知数法，但有时设间接未知数求解会简化运算.

变式训练二

解：设该次普通列车的平均速度为 x km/h，则该次动车的平均速度为 $1.5x$ km/h. 根据题意，画出线段图如下.



根据题意，得

$\frac{120}{x}=\frac{120}{1.5x}+\frac{20}{60}$.

解得 $x=120$.

经检验，$x=120$ 是原分式方程的解.

故该次普通列车行驶的平均速度为 120 km/h.

培优精练

1. $\frac{5}{3v}$　**【解析】**根据 $t=\frac{s}{v}$，得上坡时间为 $t_1=\frac{1}{v}$ h，下坡时间为 $t_2=\frac{2}{3v}$ h.

∴小丽从甲地到乙地所花费的时间为

$\frac{1}{v}+\frac{2}{3v}=\frac{3}{3v}+\frac{2}{3v}=\frac{5}{3v}$（h）.

2. **解：**设该矩形草坪边 BC 的长为 x m，则边 AB 的长为 $\frac{12}{x}$ m.

根据题意，得 $x+2\cdot\frac{12}{x}=10$.

解得 $x_1=4$，$x_2=6$.

经检验 $x_1=4$，$x_2=6$ 均是原方程的解.

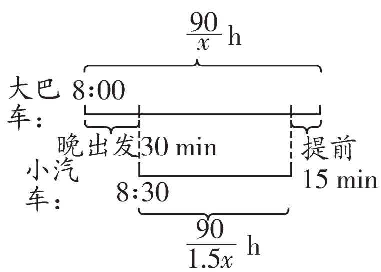
∵$6>5$，

∴$x_2=6$ 不合题意，舍去.

故该矩形草坪边 BC 的长为 4 m.

3. 解：设大巴车的平均速度为 x km/h，则小汽车的平均速度为 $1.5x$ km/h.

根据题意，画出线段图如下.



根据题意，得

$\frac{90}{x}=\frac{90}{1.5x}+\frac{30}{60}+\frac{15}{60}$.

解得 $x=40$.

经检验 $x=40$ 是原方程的解.

∴$1.5x=1.5\times40=60$.

故大巴车的平均速度为 40 km/h，小汽车的平均速度为 60 km/h.

名卷压轴题

解：（1）设每个船模器材的价格为 x 元，则每个航模器材的价格为$(x+120)$元.

根据题意，得$\frac{28\ 800}{x}=\frac{3}{2}\times\frac{24\ 000}{x+120}$.

解得 $x=480$.

经检验，$x=480$ 是原方程的解，且符合题意.

则 $x+120=480+120=600$（元）.

故每个船模器材的价格为 480 元，去年采购的航模器材的价格为 600 元.

（2）设最多可购买 a 个航模器材，则购买$(50-a)$个船模器材.

根据题意，得 $480\times(1+5\%)\times(50-a)+600\times(1-10\%)a\leqslant\frac{1}{2}(28\ 800+24\ 000)$.

解得 $a\leqslant\frac{100}{3}$.

∵a 为整数，

∴a 的最大值为 33.

故最多可购买 33 个航模器材.

◎分式　新题型探究

例题　（1）减小　减小　**【解析】**∵当 $x>0$ 时，$\frac{1}{x}$随着 x 的增大而减小，

∴随着 x 的增大，$1+\frac{1}{x}$的值减小.

∵当 $x<0$ 时，$\frac{2}{x}$随着 x 的增大而减小，且$\frac{x+2}{x}=1+\frac{2}{x}$，∴随着 x 的增大，$\frac{x+2}{x}$的值减小.

（2）**解：**∵$\frac{2x+2}{x-1}=\frac{2x-2+2+2}{x-1}=\frac{2(x-1)+4}{x-1}=2+\frac{4}{x-1}$，

且当 $x>1$ 时，$\frac{4}{x-1}$的值无限接近 0，

∴$\frac{2x+2}{x-1}$的值无限接近 2.

（3）**解：**∵$\frac{5x-2}{x-3}=\frac{5x-15+15-2}{x-3}=$

$\frac{5(x-3)+13}{x-3}=5+\frac{13}{x-3}$，

又∵$0\leqslant x\leqslant 2$，

∴$-3\leqslant x-3\leqslant -1$.

∴$-13\leqslant \frac{13}{x-3}\leqslant -\frac{13}{3}$.

∴$-8\leqslant 5+\frac{13}{x-3}\leqslant \frac{2}{3}$，

即$-8\leqslant \frac{5x-2}{x-3}\leqslant \frac{2}{3}$.

【点拨】根据分式中某个字母的变化情况，猜想分式的值的变化情况，若猜想比较困难，则可通过代入几个特殊值帮助完成猜想.

变式训练

（1）①$x(x-3)$　去分母　等式的两边同时乘同一个不为 0 的整式，等式仍然成立

②**解：**缺失的步骤为：

检验当$x=3$时，$x(x-3)=0$，

∴$x=3$不是原方程的解，原方程无解.

不能缺失的理由为：分式方程可能产生增根，因此求出分式方程的解后必须代回原分式方程进行检验，判断是否为原分式方程的解.

（2）**解：**根据题中的新定义化简所求方程，得$\frac{2}{x-1}-\frac{1}{1-x}=1$.

去分母，得$2+1=x-1$.

解得$x=4$.

当$x=4$时，$x-1=3\neq 0$，

∴$x=4$是分式方程的解.

故x的值为 4.

培优精练

（1）25%　**【解析】**∵$80-60=20$（g），∴盐的质量分数为$\frac{20}{80}\times 100\%=25\%$.

（2）**解：**设需蒸发m g 水，

根据题意，得

$\frac{5}{50-m}\times 100\%=2\times\frac{5}{50}\times 100\%$.

解得$m=25$.

经检验，$m=25$是原方程的解.

∴要使该容器内盐的质量分数提高到原来的 2 倍，需要蒸发 25 g 水.

（3）**解：**盐的质量分数变大了. 理由如下：

∵原来盐的质量分数为$\frac{b}{a}\times 100\%$，

加盐后盐的质量分数为$\frac{b+c}{a+c}\times 100\%$，

∴加入盐后盐的质量分数－原来盐的质量分数$=\frac{b+c}{a+c}\times 100\%-\frac{b}{a}\times 100\%=\frac{c(a-b)}{a(a+c)}$.

∵$a>0$，$c>0$，且$a>b$，

∴$a+c>0$，$a-b>0$.

∴$\frac{c(a-b)}{a(a+c)}>0$.

∴加盐后盐的质量分数大于原来盐的质量分数，即盐的质量分数变大了.