参考答案

第十一章　数的开方

例一　C　**【解析】**∵$n+q=0$，∴n 和 q 互为相反数，0 在线段 NQ 的中点处. ∴绝对值最小的是点 M 表示的数 m. 故选 C.

【点拨】本题主要考查了实数与数轴. 解题的关键是结合数轴的特点，利用数形结合的思想解答.

变式训练一

1. D　**【解析】**∵正方形的对角线长为$\sqrt{2}$，∴1 和 A 之间的距离为$\sqrt{2}$. ∴点 A 表示的数是 $1-\sqrt{2}$. 故选 D.

2. $\sqrt{7}$　**【解析】**由图可知，$1<$被覆盖的数<3. ∵ $-\sqrt{3}$、$\sqrt{7}$、$\sqrt{13}$中只有$\sqrt{7}$在此范围内，∴被墨迹覆盖的数是$\sqrt{7}$.

例二　解：∵数轴上表示 1、$\sqrt{2}$的对应点分别为 A、B，

∴$AB=\sqrt{2}-1$.

∵点 B 关于点 A 的对称点为 C，

∴$AC=AB=\sqrt{2}-1$.

∴点 C 表示的数为$1-(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2}$.

【点拨】本题主要考查的知识点为：数轴上两点间的距离等于右边的数减去左边的数. 知道两点间的距离，求较小的数，就用较大的数减去两点间的距离.

变式训练二

1. C　**【解析】**∵表示 2、$\sqrt{5}$的对应点分别为 C、B，∴$CB=\sqrt{5}-2$. ∵点 C 是 AB 的中点，∴$AC=CB=\sqrt{5}-2$. ∴点 A 表示的数是 $2-(\sqrt{5}-2)=4-\sqrt{5}$. 故选 C.

2. $\sqrt{2}-3$　**【解析】**设点 A 表示的数为 x，则 $x-2+5=\sqrt{2}$，解得 $x=\sqrt{2}-3$. ∴点 A 表示的数为$\sqrt{2}-3$.

例三　解：∵$b<c<0<a$，

且 $|b|>|a|$，$|b|>|c|$，

∴$a+b<0$，$b-c<0$.

∴原式$=a-(a+b)-a+b-c=a-a-b-a+b-c=-a-c$.

【点拨】本题主要考查了实数与数轴的关系. 掌握算术平方根的性质以及绝对值的性质，并根据性质化简是解本题的关键.

变式训练三

1. 解：由数轴可知，$a>\sqrt{2}$，$0>b>-\sqrt{2}$.

∴$a-\sqrt{2}>0$，$b+\sqrt{2}>0$，$a-$

$b>0$.

∴原式 $=(a-\sqrt{2})+(b+\sqrt{2})-(a-b)=a-\sqrt{2}+b+\sqrt{2}-a+b=2b$.

2. 解：由实数 a、b、c 在数轴上的位置可得，$b<0<a<c$，且 $|b|<|c|$.

∴$a-c<0$，$a+c>0$，$b+c>0$.

∴原式 $=c-(c-a)+(a+c)-(b+c)$

$=c-c+a+a+c-b-c$

$=2a-b$.

培优精练

1. B　【解析】∵$2<\sqrt{5}<3$，∴$0<3-\sqrt{5}<1$. ∴表示数 $3-\sqrt{5}$ 的点 P 应落在线段 OB 上. 故选 B.

2. $4-\sqrt{3}$　【解析】由题意，得点 B 表示的数是 $\sqrt{3}-2$. 则 $MB=1-(\sqrt{3}-2)=3-\sqrt{3}$. ∵$MC=MB=3-\sqrt{3}$，∴点 C 表示的数为 $1+(3-\sqrt{3})=4-\sqrt{3}$.

3. 解：（1）∵点 A、B 分别表示数 1、$\sqrt{3}$，

∴$AB=\sqrt{3}-1$.

∵$CO=AB=\sqrt{3}-1$，

∴点 C 表示的数为 $\sqrt{3}-1$，

即 $x=\sqrt{3}-1$.

（2）∵$x=\sqrt{3}-1$，

∴ $(x-\sqrt{3})^2=(\sqrt{3}-1-\sqrt{3})^2=(-1)^2=1$.

∴$\sqrt[3]{1}=1$.

故 $(x-\sqrt{3})^2$ 的立方根为 1.

4. 解：由实数 a、b、c 在数轴上的位置可得，$c<b<0<a$，且 $|a|>|b|$，

则 $a+b>0$，$a-c>0$.

∴原式 $=a+(-b)+(a+b)-(a-c)$

$=a-b+a+b-a+c$

$=a+c$.

名卷压轴题

（1）4　16　0　$\frac{1}{9}$

a　3　5　1　2　$-a$　$|a|$

（2）解：观察数轴可知，$-2<a<-1$，$0<b<1$，且 $|a|>|b|$.

则 $a-b<0$，$a+b<0$.

∴原式 $=|a|-|b|-|a-b|+|a+b|$

$=-a-b+a-b-a-b$

$=-a-3b$.

◎数的开方　新题型探究

例题　3　4　5

（1）n

（2）解：$\sqrt{2+6+10+14+\cdots+22}$

$=\sqrt{2\times(1+3+5+7+\cdots+11)}$

$=\sqrt{2\times6^2}$

$=\sqrt{72}$.

【点拨】本题主要考查了算术平方根. 熟练掌握算术平方根、从特殊到一般的数学思想是解决本题的关键.

变式训练

(1) $1+2+3+4+5$　225　**【解析】**$\because\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3}=1+2+3+4+5=15$，$\therefore 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=(1+2+3+4+5)^2=225$.

(2) $\frac{n(n+1)}{2}$　**【解析】**由 (1) 可得,$\sqrt{1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3+n^3}=1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

(3) **解**：由 (2) 可得，

$11^3+12^3+13^3+\cdots+19^3+20^3$

$=1^3+2^3+3^3+\cdots+19^3+20^3-(1^3+2^3+3^3+\cdots+9^3+10^3)$

$=\left(\frac{20\times21}{2}\right)^2-\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2$

$=44\ 100-3\ 025$

$=41\ 075$.

培优精练

(1) **证明**：$\because\sqrt{2\times8}=4$，$\sqrt{2\times50}=10$，$\sqrt{8\times50}=20$，4、10、20 都是整数，

$\therefore$ 2、8、50 这三个数是“老根数”.

4 是“最小算术平方根”，20 是“最大算术平方根”.

(2) **解**：①当 $a<16$ 时，则“最大算术平方根”是$\sqrt{16\times36}=24$，

“最小算术平方根”是$\sqrt{a\times16}$.

故$2\sqrt{a\times16}=24$.

则$\sqrt{a\times16}=12$，$a\times16=144$，

解得 $a=9$；

②当 $16<a<36$ 时，“最大算术平方根”是$\sqrt{a\times36}$，

“最小算术平方根”是$\sqrt{a\times16}$.

故 $2\sqrt{16\times a}=\sqrt{36\times a}$，

解得 $a=0$（舍去）;

③当 $a>36$ 时，

“最大算术平方根”是$\sqrt{36\times a}$，

“最小算术平方根”是$\sqrt{16\times36}=24$，

故 $2\times24=\sqrt{36\times a}$，

则 $48=\sqrt{36\times a}$，$36a=48^2$，

解得$a=64$.

综上所述，a 的值为 9 或 64.

第十二章　整式的乘除

第 1 讲　幂的运算与整式的乘法

例一　A　**【解析】**根据图 2 的面积，得 $(a+3b)(a+b)=a^2+4ab+3b^2$. 故选 A.

【点拨】本类型题从图形的面积入手，从多种角度表示同一个图形

的面积，得出等量关系从而验证多项式的乘法运算.

变式训练一

D　**【解析】**图中阴影部分的面积可以表示为$(m-a)(m-b)$，也可以表示为$m^2-(a+b)m+ab$，$\therefore$可得代数恒等式$(m-a)(m-b)=m^2-(a+b)m+ab$. 故选 D.

例二　**解**：(1)（方法一）扩大部分场地（阴影部分）的面积为$(a+b+b)(b+b)-(a+b)b=(ab+3b^2)$($\mathrm{m}^2$).

（方法二）扩大部分场地（阴影部分）的面积为$b(a+b)+b(b+b)=(ab+3b^2)$(m^2).

(2) 当$a=10$，$b=3$时，

$ab+3b^2=10\times3+3\times3^2=57$($\mathrm{m}^2$).

故阴影部分的面积是 57 m^2.

【点拨】本题用代数式表示长方形的长与宽，从而把求图形的面积问题转化为整式的乘法问题，体现了数形结合的思想.

变式训练二

1. 解：(1) 阴影部分的面积为$a^2+6^2-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}(a+6)\times6=\frac{1}{2}a^2-3a+18$.

(2) 当$a=4$时，

$\frac{1}{2}a^2-3a+18=\frac{1}{2}\times4^2-3\times4+18=8-12+18=14$.

2. 解：$\because (2a+b)(a+b)=2a^2+2ab+ab+b^2=2a^2+3ab+b^2$，

易知 1 张 A 类卡片的面积为ab，1 张B类卡片的面积为b^2，1 张C类卡片的面积为a^2，

$\therefore A$、B、C 三类卡片分别需要 3 张、1 张、2 张.

例三　(1) ①$m^2+12m+27$　$m^2+10m+24$　**【解析】**由长方形的面积公式计算，得$S_{甲}=(m+9)(m+3)=m^2+12m+27$，$S_{乙}=(m+6)(m+4)=m^2+10m+24$.

②$>$　**【解析】**$S_{甲}-S_{乙}=(m^2+12m+27)-(m^2+10m+24)=m^2+12m+27-m^2-10m-24=2m+3$，$\because m>0$，$\therefore 2m+3>0$.

$\therefore S_{甲}>S_{乙}$.

(2) **解**：①乙的周长为$2(m+6)+2(m+4)=4m+20$，

$\because$正方形纸片的周长与乙的周长相等，

$\therefore$正方形的边长为$\frac{4m+20}{4}=m+5$.

②小方同学的发现是正确的. 理由如下：

$\because S_{正}-S_{乙}=(m+5)^2-(m^2+10m+24)=m^2+10m+25-m^2-10m-24=1$，

$\therefore S_{正}$与$S_{乙}$的差是定值.

【点拨】本题考查列代数式、多项式乘多项式等知识，而这些知识的考查又建立在理解各个图形的周长和面积的关系上，因此数形结合的思想可以更好地帮助我们解题.

变式训练三

解：(1) 休息区域的面积为

$(6m+5n)^2-(2m+3n)(m+2n)$

$=36m^2+60mn+25n^2-(2m^2+4mn+3mn+6n^2)$

$=36m^2+60mn+25n^2-2m^2-4mn-3mn-6n^2$

$=(34m^2+53mn+19n^2)(\mathrm{m}^2)$.

(2) 扩大游泳池后休息区域的面积为$(6m+5n)^2-[(2m+3n)+(2m+n)][(m+2n)+(3m+n)]$

$=36m^2+60mn+25n^2-(4m+4n)(4m+3n)$

$=36m^2+60mn+25n^2-(16m^2+12mn+16mn+12n^2)$

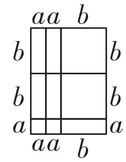
$=36m^2+60mn+25n^2-16m^2-12mn-16mn-12n^2$

$=(20m^2+32mn+13n^2)(\mathrm{m}^2)$.

例四 (1) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ 【解析】根据题意，大正方形的面积为 $(a+b+c)(a+b+c)=(a+b+c)^2$，各部分的面积之和为 $a^2+2ab+b^2+2bc+2ac+c^2$，∴等式为 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

(2) 解：由 (1) 可得，$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2ab-2ac-2bc=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)=11^2-2\times38=45$.

(3) 解：如下图所示（答案不唯一）.



【点拨】本题主要考查了多项式相乘的几何背景. 根据矩形的面积公式分整体与部分两种思路表示出面积，然后再根据同一个图形的面积相等即可解答.

变式训练四

解：(1) 由图 2 可知，大长方形的面积为$(2m+n)(m+2n)$ cm^2，

图 2 中各部分的面积之和为 $(2m^2+5mn+2n^2)$ cm^2，

则得到的一个代数恒等式为 $(2m+n)(m+2n)=2m^2+5mn+2n^2$.

(2) 由题意可知，$mn=10$，$2m^2+2n^2=58$.

由图 2 可知，所有裁剪线（虚线部分）的总长为 $6(m+n)$.

∵ $(m+n)^2=m^2+n^2+2mn=\frac{1}{2}\times58+2\times10=29+20=49$，

∴$m+n=7$.

∴所有裁剪线（虚线部分）的总长为 $6(m+n)=6\times7=42$ (cm).

培优精练

1. 解：（1）小明家需要地板的面积为 $3x\cdot 4y+5x\cdot 4y+4y(2x+5x)+2x\cdot 2y+5x\cdot 4y=84xy$（$m^2$）.

（2）当 $x=1.1$，$y=1$ 时，$84xy=84\times 1.1\times 1=92.4$（$m^2$），

$92.4\times 320=29\ 568$（元）.

故小明爸爸买地板需要 29 568 元.

2. 解：$S_1=(AB-a)\cdot a+(CD-b)\cdot(AD-a)=(AB-a)\cdot a+(AB-b)\cdot(AD-a)$，

$S_2=AB\cdot(AD-a)+(a-b)\cdot(AB-a)$，

$\therefore S_2-S_1=AB\cdot(AD-a)+(a-b)\cdot(AB-a)-(AB-a)\cdot a-(AB-b)\cdot(AD-a)$

$=(AD-a)\cdot(AB-AB+b)+(AB-a)\cdot(a-b-a)$

$=b\cdot AD-ab-b\cdot AB+ab$

$=b(AD-AB)$.

$\because S_2-S_1=3b$，$AD=10$，

$\therefore b(10-AB)=3b$.

$\therefore AB=7$.

3. 解：（1）根据题意，得

$S_{阴影A}=(60-3y)(x-2y)=(60x-120y-3xy+6y^2)(cm^2)$，

$S_{阴影B}=3y[x-(60-3y)]=(3xy-180y+9y^2)(cm^2)$，

$\therefore S_{阴影A}-S_{阴影B}=60x-120y-3xy+6y^2-(3xy-180y+9y^2)=60x-120y-3xy+6y^2-3xy+180y-9y^2=(60x-3y^2-6xy+60y)(cm^2)$.

[说明：$\because 60x-3y^2-6xy+60y=6x(10-y)+3y(20-y)$，

又 $0<y\leqslant 10$，$x>0$，

$\therefore 6x(10-y)\geqslant 0$，

$3y(20-y)>0$.

$\therefore 60x-3y^2-6xy+60y>0$.]

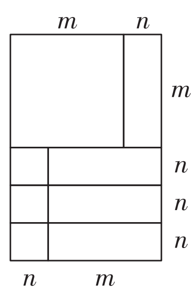
（2）不会. 理由如下：

当 $y=10$ 时，$60x-3y^2-6xy+60y=60x-3\times 10^2-60x+60\times 10=300$，

$\therefore$ 当 $y=10$ 时，阴影 A 与阴影 B 的面积之差不会随着 x 的变化而变化.

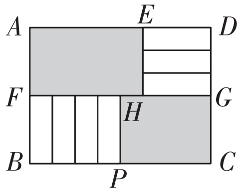
4.（1）正方形 $M'H'F'D'$　$2a^2+ab-b^2$　**【解析】**长方形 $A'B'N'M'$ 的面积 = 长方形 $E'B'C'F'$ 的面积 + 长方形 $A'E'F'D'$ 的面积 − 长方形 $H'N'C'F'$ 的面积 − 正方形 $M'H'F'D'$ 的面积，即 $(2a-b)(a+b)=2a^2+2ab-ab-b^2=2a^2+ab-b^2$.

（2）**解：**答案不唯一，可如下：



名卷压轴题

解：设左上角阴影部分的长为 AE，宽为 $AF=3b$，右下角阴影部分的长为 PC，宽为 $CG=a$，如下图所示.



$\because AD=BC$，

又 $AD=AE+ED=AE+a$，

$BC=BP+PC=4b+PC$，

$\therefore AE+a=4b+PC$，

即 $AE-PC=4b-a$.

$\therefore$阴影部分的面积之差 $S=AE\cdot AF-PC\cdot CG=3bAE-aPC=3b(PC+4b-a)-aPC=(3b-a)PC+12b^2-3ab=(3b-a)(BC-4b)+12b^2-3ab=(3b-a)BC+ab$.

$\because$当 BC 的长度变化时，按照同样的放置方式，S 始终保持不变，

$\therefore 3b-a=0$，即 $a=3b$.

第 2 讲　乘法公式与因式分解

例一　A　**【解析】**根据图形可知，第一个图形中阴影部分的面积为 a^2-b^2，第二个图形中阴影部分的面积为$(a+b)(a-b)$，即$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. 故选 A.

【点拨】本题主要考查了平方差公式的几何背景. 表示出 2 个图形中阴影部分的面积是解本题的关键.

变式训练一

1. 图 1、图 2、图 3、图 4　**【解析】**

图 1 中，拼接前阴影部分的面积为 a^2-b^2，拼接后是一个长为$(a+b)$、宽为$(a-b)$ 的长方形，因此面积为 $(a+b)(a-b)$，

$\therefore a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. 因此图 1 可以验证平方差公式.

图 2 中，拼接前阴影部分的面积为 a^2-b^2，拼接后是一个底为$(a+b)$、高为$(a-b)$ 的平行四边形，因此面积为$(a+b)(a-b)$，

$\therefore a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. 因此图 2可以验证平方差公式.

图 3 中，拼接前阴影部分的面积为 a^2-b^2，拼接后是一个长为$(a+b)$、宽为$(a-b)$ 的长方形，因此面积为 $(a+b)(a-b)$，

$\therefore a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. 因此图 3可以验证平方差公式.

图 4 中，拼接前阴影部分的面积为 a^2-b^2，拼接后是一个底为$(a+b)$、高为$(a-b)$ 的平行四边形，因此面积为 $(a+b)(a-b)$，

$\therefore a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. 因此图 4可以验证平方差公式.

2. (1) $a-b$　(2) $b(a-b)$

(3) $(a-b)^2$　$a^2-b^2-2b(a-b)$

（或 a^2+b^2-2ab）

（4）**解**：由图中面积关系可得代数恒等式为 $(a-b)^2=a^2-b^2-2b(a-b)$[或 $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$].

例二　解：（1）$S_1=a^2-b^2$，

$S_2=\frac{1}{2}(2a+2b)(a-b)$

$=(a+b)(a-b)$.

（2）$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

（3）①由（2），得

原式 $=\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\left(x^2+\frac{1}{4}\right)=x^4-\frac{1}{16}$.

②$107\times93$

$=(100+7)\times(100-7)$

$=100^2-7^2$

$=10\,000-49$

$=9\,951$.

【点拨】由于平方差公式中出现两数的平方，而数的平方可以表示为正方形的面积，所以想到了图 1 的面积表示平方差公式. 图 2 把它转化为等腰梯形出现两数之和与两数之差，从而验证平方差公式. 在解题时注意抓住平方差公式的结构特征，再结合图形利用等面积法是关键.

变式训练二

（1）a^2-b^2　$(a+b)(a-b)$

【解析】　图 1 中阴影部分的面积是两个正方形的面积之差，即 a^2-b^2；图 2 中阴影部分是长为 $(a+b)$、宽为 $(a-b)$ 的长方形，因此面积为 $(a+b)(a-b)$.

（2）$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

【解析】由两个图形中阴影部分的面积相等可得，$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

（3）2^{32}　**【解析】**原式 $=(2-1)\times(2+1)\times(2^2+1)\times(2^4+1)\times(2^8+1)\times(2^{16}+1)+1$

$=(2^2-1)\times(2^2+1)\times(2^4+1)\times(2^8+1)\times(2^{16}+1)+1$

$=(2^4-1)\times(2^4+1)\times(2^8+1)\times(2^{16}+1)+1$

$=(2^8-1)\times(2^8+1)\times(2^{16}+1)+1$

$=(2^{16}-1)\times(2^{16}+1)+1$

$=2^{32}-1+1$

$=2^{32}$.

例三　（1）$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

【解析】阴影部分的面积等于两个正方形的面积之和，或者用边长为 $(a+b)$ 的大正方形的面积减去两个长方形的面积，即 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$.

（2）**解**：∵大正方形的面积等于小正方形的面积加上 4 个长方形的面积，

∴ $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$.

（3）**解**：根据图 3 可得，阴影部分

的面积 $=a^2+b^2-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}(a+b)b$

$=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}ab$

$=\frac{1}{2}(a^2+b^2)-\frac{1}{2}ab$

$=\frac{1}{2}[(a+b)^2-2ab]-\frac{1}{2}ab$

$=\frac{1}{2}(a+b)^2-\frac{3}{2}ab$,

当 $a+b=10$，$ab=24$ 时，

原式 $=\frac{1}{2}\times10^2-\frac{3}{2}\times24$

$=50-36$

$=14$.

【点拨】本题主要考查了完全平方公式的几何背景．灵活运用完全平方和、差公式之间的转化关系是解题的关键．

变式训练三

解：$\because S=\frac{1}{2}(a-b)\cdot a+\frac{1}{2}(a-b)b=\frac{1}{2}(a-b)(a+b)$，

$\therefore S^2=\frac{1}{4}(a-b)^2(a+b)^2$.

$\because a-b=2$，

$\therefore (a-b)^2=a^2-2ab+b^2=4$.

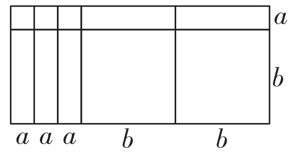
又 $a^2+b^2=7$，

$\therefore 2ab=3$.

$\therefore (a+b)^2=a^2+2ab+b^2=7+3=10$.

$\therefore S^2=\frac{1}{4}\times4\times10=10$.

例四 （1）**解：**画图如下：



$3a^2+5ab+2b^2=(3a+2b)(a+b)$.

（2）①③ **【解析】**$\because m=a+b$，$n=b-a$，$\therefore m^2+n^2=(a+b)^2+(b-a)^2=2(a^2+b^2)$，故①正确；$m\cdot n=(a+b)(b-a)=b^2-a^2$，故②错误；$m^2-n^2=(a+b)^2-(b-a)^2=4ab$，故③正确．

【点拨】本题主要考查了分解因式、长方形的面积、平方差公式、完全平方公式的应用．观察图形并理解题意是解本题的关键．

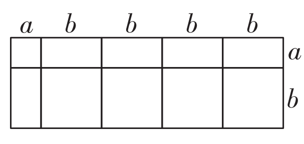
变式训练四

解：（1）$\because (2a+b)(a+2b)=2a^2+5ab+2b^2$，

又 1 个 C 类图形的面积为 b^2，

$\therefore$ 需要 C 类图形 2 个．

（2）画出的长方形如下图：



$\therefore a^2+5ab+4b^2=(a+4b)(a+b)$.

培优精练

1. A **【解析】**由题意可得，$(x+y)^2=144$，$(x-y)^2=4$，$\therefore x+y=12$，$x-y=2$．故 B、C 选项

正确；∴$x=7$，$y=5$．∴$xy=7\times5=35$，故 D 选项正确；∵$x^2+y^2=7^2+5^2=74\neq100$，故选项 A 错误．故选 A.

2. （1）a^2　$2ab$　b^2　$(a+b)^2$

（2）$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

（3）**解**：$99^2+198+1=99^2+2\times99\times1+1^2=(99+1)^2=10\ 000$.

3. （1）a^2-b^2

（2）$a+b$　$a-b$　$(a+b)(a-b)$

（3）$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

（4）**解**：原式$=(2^2-1)\times(2^2+1)\times(2^4+1)\times(2^8+1)\times(2^{16}+1)\times(2^{32}+1)+1$

$=(2^4-1)\times(2^4+1)\times(2^8+1)\times(2^{16}+1)\times(2^{32}+1)+1$

$=(2^8-1)\times(2^8+1)\times(2^{16}+1)\times(2^{32}+1)+1$

$=(2^{16}-1)\times(2^{16}+1)\times(2^{32}+1)+1$

$=(2^{32}-1)\times(2^{32}+1)+1$

$=2^{64}$

∵观察规律发现 2^n 的个位数字按 2、4、8、6 每 4 个一组循环，且 $64\div4=16$，

∴2^{64}的个位数字是 6.

名卷压轴题

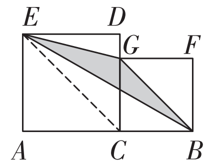
（1）$4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$

（2）7　【**解析**】由（1）中公式可得，$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$.

∴ $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=4^2-4\times\frac{9}{4}=7$.

（3）$(a+3b)(a+b)=a^2+4ab+3b^2$

（4）**解**：图 4 中，连接 EC，如下图所示.



在正方形 $ACDE$ 和正方形 $BCGF$ 中，

$\angle ECD=\angle CGB=45°$，

∴$EC\parallel BG$.

设 EC、BG 之间的距离为 h，

∵$S_{\triangle BEG}=\frac{1}{2}BG\cdot h$，

$S_{\triangle BGC}=\frac{1}{2}BG\cdot h$，

∴ $S_{\triangle BEG}=S_{\triangle BGC}=\frac{1}{2}BC\cdot CG=\frac{1}{2}BC^2$.

当 $BC=1$ 时，$S_1=\frac{1^2}{2}$，

当 $BC=2$ 时，$S_2=\frac{2^2}{2}$，

…

当 $BC=n$ 时，$S_n=\frac{n^2}{2}$，

∴$S_{2\,021}-S_{2\,020}$

$=\frac{2\,021^2}{2}-\frac{2\,020^2}{2}$

$=\frac{(2\,021+2\,020)\times(2\,021-2\,020)}{2}$

$=\frac{4\,041}{2}$.

◎整式的乘除　新题型探究

例题　(1) $\frac{2}{3}$　1 **【解析】**∵6 可以分解成 1×6，2×3，又 $6-1>3-2$，∴ 2×3 是 6 的最佳分解. ∴$f(6)=\frac{2}{3}$. ∵9 可以分解成 1×9，3×3，又 $9-1>3-3$，∴3×3 是 9 的最佳分解. ∴$f(9)=\frac{3}{3}=1$.

(2) **解**：设交换 t 的个位上的数字与十位上的数字得到的新数为 t'，则 $t'=10b+a$.

根据题意，得 $t'-t=(10b+a)-(10a+b)=9(b-a)=54$.

∴$b=a+6$.

∵$1\leqslant a\leqslant b\leqslant9$，$a$、$b$ 为正整数，

∴a、b 的值分别为 1、7 或 2、8 或 3、9.

∴满足条件的两位正整数 t 为 17、28、39.

∵$f(17)=\frac{1}{17}$，$f(28)=\frac{4}{7}$，

$f(39)=\frac{3}{13}$，

又$\frac{4}{7}>\frac{3}{13}>\frac{1}{17}$，

∴$f(t)$ 的最大值为$\frac{4}{7}$.

【点拨】本题主要考查了实数的运算. 理解最佳分解的定义，并将其转化为实数的运算是解题的关键.

变式训练

(1) $-\mathrm{i}$　1　**【解析】**∵$\mathrm{i}^2=-1$，∴$\mathrm{i}^3=\mathrm{i}^2\cdot\mathrm{i}=-1\cdot\mathrm{i}=-\mathrm{i}$. ∴$\mathrm{i}^4=\mathrm{i}^2\cdot\mathrm{i}^2=(-1)\times(-1)=1$.

(2) **解**：∵$(2+\mathrm{i})^2=\mathrm{i}^2+4\mathrm{i}+4=-1+4\mathrm{i}+4=3+4\mathrm{i}$，

∴ $(2+\mathrm{i})^2$ 的共轭复数是$3-4\mathrm{i}$.

(3) **解**：∵ $(a+\mathrm{i})(b+\mathrm{i})=ab-1+(a+b)\mathrm{i}=1+3\mathrm{i}$，

∴$ab-1=1$，$a+b=3$.

∴$a=1$，$b=2$ 或 $a=2$，$b=1$.

当 $a=1$，$b=2$ 时，$a^2+b^2(\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4+\cdots+\mathrm{i}^{2\,020})=1+4(-1-\mathrm{i}+1+\mathrm{i}+\cdots+1+\mathrm{i}-1-\mathrm{i}+1)=1-4\mathrm{i}$.

当 $a=2$，$b=1$ 时，$a^2+b^2(\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4+\cdots+\mathrm{i}^{2\,020})=4+1(-1-\mathrm{i}+1+\mathrm{i}+\cdots+1+\mathrm{i}-1-\mathrm{i}+1)=4-\mathrm{i}$.

故 $a^2+b^2(\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4+\cdots+\mathrm{i}^{2\,020})$的值为 $1-4\mathrm{i}$ 或 $4-\mathrm{i}$.

培优精练

解：(1) 第一次操作只能得到 $1\times4+1+4=9$；

∵要求最大新数，

∴第二次操作取 4 和 9，

得到 $4\times9+4+9=49$.

同理，第三次操作取 9 和 49，就得到扩充三次的最大新数为 $9\times49+9+49=499$.

(2) 能. 理由如下：

$\because c=ab+a+b=(a+1)(b+1)-1$，

$\therefore c+1=(a+1)(b+1)$.

取数 a、c 可得新数 $d=(a+1)(c+1)-1=(a+1)(a+1)(b+1)-1=(a+1)^2(b+1)-1$，

即 $d+1=(a+1)^2(b+1)$.

取数 b、c 可得新数 $e=(b+1)(c+1)-1=(b+1)^2(a+1)-1$，

即 $e+1=(b+1)^2(a+1)$.

设扩充后的新数为 x，

则总可以表示为 $x+1=(a+1)^m\cdot(b+1)^n$（m、n 为正整数），

当 $a=1$，$b=4$ 时，$x+1=2^m\times5^n$.

$\because 1\,999+1=2^4\times5^3$，

故1 999能通过上述规则扩充得到.

第十三章　全等三角形

第1讲　三角形全等的判定与性质（一）

例一　D　**【解析】**根据题意知，BC 边为公共边. 选项 A，由“SSS”可以判定 $\triangle ABC\cong\triangle DCB$；选项 B，由“SAS”可以判定 $\triangle ABC\cong\triangle DCB$；选项 C，由 $BO=CO$ 可以推知 $\angle ACB=\angle DBC$，再由“AAS”可以判定 $\triangle ABC\cong\triangle DCB$；选项 D 不能判定 $\triangle ABC\cong\triangle DCB$. 故选 D.

【点拨】本题主要考查了三角形全等的判定方法. 判定两个三角形全等的一般方法有“SSS”“SAS”“ASA”“AAS”“HL”.

变式训练一

1. B　**【解析】**还需要加上条件 $BD=AC$. $\because$ 在 $\triangle BDA$ 和 $\triangle ACB$ 中，$\begin{cases}AB=AB,\\ \angle1=\angle2,\\ BD=AC,\end{cases}$ $\therefore\triangle BDA\cong\triangle ACB$（SAS）. 故选B.

2. 2　**【解析】**可以选取①②③为条件，④为结论. $\because\angle A'CA=\angle B'CB$，$\therefore\angle A'CA+\angle ACB'=\angle B'CB+\angle ACB'$，即 $\angle A'CB'=\angle ACB$. $\because BC=B'C$，$AC=A'C$，$\therefore\triangle ABC\cong\triangle A'B'C$（SAS）. $\therefore AB=A'B'$. 即根据条件①②③，可得出结论④.

可以选取①②④为条件，③为结论. $\because BC=B'C$，$AC=A'C$，$AB=A'B'$，$\therefore\triangle ABC\cong\triangle A'B'C$（SSS）. $\therefore\angle ACB=\angle A'CB'$. $\therefore\angle ACB-\angle ACB'=\angle A'CB'-\angle ACB'$，即 $\angle B'CB=\angle A'CA$.

即根据条件①②④，可得出结论③.

若选取②③④为条件，则符合“SSA”，不能证明三角形全等，不能得出结论①.

若选取①③④为条件，则符合“SSA”，不能证明三角形全等，不

能得出结论②．故可以构成正确的组合的个数是 2.

例二 （1）**解：** $\triangle ABF$ 与 $\triangle CDE$ 全等．理由如下：

$\because DE\perp AC$，$BF\perp AC$，

$\therefore \angle AFB=\angle CED=90^\circ$.

$\because AE=CF$，

$\therefore AE+EF=CF+EF$，即 $AF=CE$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中，

$$\begin{cases}AB=CD,\\AF=CE,\\\angle AFB=\angle CED=90^\circ,\end{cases}$$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABF\cong\mathrm{Rt}\triangle CDE$（HL）.

（2）**证明：** 由（1）知，$\mathrm{Rt}\triangle ABF\cong\mathrm{Rt}\triangle CDE$.

$\therefore BF=DE$.

在 $\triangle DEG$ 和 $\triangle BFG$ 中，

$$\begin{cases}\angle GED=\angle GFB=90^\circ,\\\angle DGE=\angle BGF,\\DE=BF,\end{cases}$$

$\therefore \triangle DEG\cong\triangle BFG$（AAS）.

$\therefore EG=FG$.

【点拨】 本题主要考查了全等三角形的判定与性质、垂直的定义．证明三角形全等是解本题的关键.

变式训练二

1. （1）**证明：** $\because \angle 1=\angle 2$，

$\therefore \angle 1+\angle AED=\angle 2+\angle AED$，即 $\angle AEC=\angle BED$.

在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle BED$ 中，

$$\begin{cases}\angle A=\angle B,\\AE=BE,\\\angle AEC=\angle BED,\end{cases}$$

$\therefore \triangle AEC\cong\triangle BED$（ASA）.

（2）**解：** $\because \triangle AEC\cong\triangle BED$，

$\therefore EC=ED$，$\angle C=\angle BDE$.

在 $\triangle EDC$ 中，

$\because EC=ED$，$\angle 1=40^\circ$，

$\therefore \angle C=\angle EDC=70^\circ$.

$\therefore \angle BDE=\angle C=70^\circ$.

2. （1）**证明：** $\because BD\perp BC$，$CF\perp AE$，

$\therefore \angle DCB+\angle D=\angle DCB+\angle AEC=90^\circ$.

$\therefore \angle D=\angle AEC$.

在 $\triangle DBC$ 和 $\triangle ECA$ 中，

$$\begin{cases}\angle D=\angle AEC,\\\angle DBC=\angle ECA=90^\circ,\\BC=CA,\end{cases}$$

$\therefore \triangle DBC\cong\triangle ECA$（AAS）.

$\therefore CD=AE$.

（2）**解：** 由（1）可知，$\triangle DBC\cong\triangle ECA$.

$\therefore BD=CE$.

$\because AE$ 是 BC 边上的中线，$AC=BC$，

$\therefore BD=CE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AC$.

又 $AC=12\ \mathrm{cm}$，

$\therefore BD=6\ \mathrm{cm}$.

例三 （1）**证明：** $\because BD\perp MN$，

$\therefore \angle BDA=90^\circ$.

$\therefore \angle BAD+\angle ABD=90^\circ$.

又∵$\angle BAC=90°$，

∴$\angle BAD+\angle CAE=90°$.

∴$\angle ABD=\angle CAE$.

（2）**证明：** 在$\triangle BAD$和$\triangle ACE$中，

$$\begin{cases}\angle BDA=\angle AEC,\\ \angle ABD=\angle CAE,\\ AB=CA,\end{cases}$$

∴$\triangle BAD\cong\triangle ACE$（AAS）.

∴$BD=AE$，$AD=CE$.

∵$DE=AE+AD$，

∴$DE=BD+CE$.

（3）**解：** $DE=CE-BD$. 理由如下：

同（2）可证，$\triangle BAD\cong\triangle ACE$，

∴$BD=AE$，$AD=CE$.

又$DE=AD-AE$，

∴$DE=CE-BD$.

【点拨】本题是三角形的综合问题，解题的关键是掌握全等三角形的判定与性质、垂直的定义及直角三角形的性质等知识点.

变式训练三

13　**【解析】**∵$ABCD$是正方形，∴$AB=AD$，$\angle BAF+\angle DAE=90°$. ∵$BF\perp a$于点$F$，$DE\perp a$于点$E$，∴$\angle AFB=\angle DEA=90°$. 又∵$\angle BAF+\angle FBA=90°$，∴$\angle FBA=\angle EAD$. 在$\triangle AFB$和$\triangle DEA$中，$\begin{cases}\angle AFB=\angle DEA=90°,\\ \angle FBA=\angle EAD,\\ AB=DA,\end{cases}$ ∴$\triangle AFB\cong\triangle DEA$（AAS）. ∴$AF=DE$，$BF=AE$. ∵$DE=8$，$BF=5$，∴$EF=AF+AE=DE+BF=8+5=13$.

例四　解： ①当$\triangle ABC\cong\triangle PQA$时，

$AP=AC=8$ cm.

∵点P的运动速度为2 cm/s，

∴$8\div2=4$（s）.

②当$\triangle ABC\cong\triangle QPA$时，

$AP=BC=4$ cm.

∵点P的运动速度为2 cm/s，

∴$4\div2=2$（s）.

综上所述，若$\triangle ABC$与$\triangle PQA$全等，则点P的运动时间为4 s或2 s.

【点拨】本题主要考查了全等三角形的性质. 掌握全等三角形的对应边相等、全等三角形的对应角相等是解本题的关键，注意分类讨论思想的应用.

变式训练四

解：（1）$\triangle BPD\cong\triangle CQP$. 理由如下：

∵$t=1$ s，

∴$BP=CQ=2\times1=2$（cm）.

∵$AB=12$ cm，点D为AB的中点，

∴$BD=6$ cm.

∵$PC=BC-BP$，$BC=8$ cm，

∴$PC=8-2=6$（cm）.

∴$BD=PC$.

$\because AB=AC$，

$\therefore \angle B=\angle C$.

在$\triangle BPD$和$\triangle CQP$中，

$\begin{cases} BP=CQ, \\ \angle B=\angle C, \\ BD=CP, \end{cases}$

$\therefore \triangle BPD \cong \triangle CQP$.

(2) $\because$点Q的运动速度与点P的运动速度不相等，

$\therefore BP \neq CQ$.

又$\because \triangle BPD$与$\triangle CQP$全等，$\angle B=\angle C$，

$\therefore \triangle BPD \cong \triangle CPQ$.

$\therefore BP=CP=\frac{1}{2}BC=4$ cm，

$CQ=BD=\frac{1}{2}AB=6$ cm.

$\therefore$点P、Q的运动时间为$4\div 2=2$ (s).

$\therefore$点Q的运动速度为$6\div 2=3$ (cm/s).

培优精练

1. C 【解析】$\because BE\perp AC$，$AD\perp BC$，$\therefore \angle AEB=\angle ADC=\angle BDF=90^\circ$. $\because \angle AFE=\angle BFD$，$\angle FBD+\angle BFD=90^\circ$，$\angle AFE+\angle DAC=90^\circ$，$\therefore \angle DAC=\angle FBD$. 在$\triangle BDF$和$\triangle ADC$中，$\begin{cases} \angle FBD=\angle CAD, \\ BD=AD, \\ \angle BDF=\angle ADC, \end{cases}$ $\therefore \triangle BDF \cong \triangle ADC$ (ASA). $\therefore DF=DC$. $\therefore AF+CD=AF+DF=AD=5$. 故选C.

2. ①②③④ 【解析】$\because \angle E=\angle F=90^\circ$，$\angle B=\angle C$，$AE=AF$，$\therefore \triangle AEB \cong \triangle AFC$ (AAS). $\therefore BE=CF$，故②正确. $\because \angle 1=\angle EAB-\angle CAB$，$\angle 2=\angle FAC-\angle CAB$. 又$\because \angle EAB=\angle FAC$，$\therefore \angle 1=\angle 2$，故①正确. $\because \angle B=\angle C$，$AC=AB$，$\angle CAN=\angle BAM$，$\therefore \triangle ACN \cong \triangle ABM$ (ASA)，故③正确. $\because \triangle AFC \cong \triangle AEB$，$\therefore AC=AB$. 易证$\triangle AEM \cong \triangle AFN$ (ASA)，$\therefore AM=AN$. $\therefore AC-AM=AB-AN$，即$CM=BN$. 在$\triangle CMD$和$\triangle BND$中，$\begin{cases} \angle C=\angle B, \\ \angle CDM=\angle BDN, \\ CM=BN, \end{cases}$ $\therefore \triangle CMD \cong \triangle BND$ (AAS). $\therefore CD=BD$，故④正确. $\therefore$正确的结论为①②③④.

3. (1) 90° 【解析】$\because \angle BAC=\angle DAE$，$\therefore \angle BAC-\angle DAC=\angle DAE-\angle DAC$. $\therefore \angle BAD=\angle CAE$. 在$\triangle ABD$和$\triangle ACE$中，$\begin{cases} AB=AC, \\ \angle BAD=\angle CAE, \\ AD=AE, \end{cases}$ $\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS). $\therefore \angle B=\angle ACE$. $\therefore \angle B+\angle ACB=\angle ACE+\angle ACB$.

$\therefore \angle BCE=\angle B+\angle ACB$.

$\because \angle BAC=90^\circ$，$\therefore \angle B+\angle ACB=90^\circ$. $\therefore \angle BCE=90^\circ$.

（2）**解**：$\alpha+\beta=180^\circ$. 理由如下：

$\because \angle BAC=\angle DAE$，

$\therefore \angle BAD+\angle DAC=\angle CAE+\angle DAC$.

$\therefore \angle BAD=\angle CAE$.

在$\triangle ABD$和$\triangle ACE$中，

$$\begin{cases}AB=AC,\\ \angle BAD=\angle CAE,\\ AD=AE,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACE$（SAS）.

$\therefore \angle B=\angle ACE$.

$\therefore \angle B+\angle ACB=\angle ACE+\angle ACB$.

$\because \angle ACE+\angle ACB=\angle BCE=\beta$，

$\therefore \angle B+\angle ACB=\beta$.

又$\alpha+\angle B+\angle ACB=180^\circ$，

$\therefore \alpha+\beta=180^\circ$.

名卷压轴题

解：①当点P在线段BC上，$AC=PB$时，$\triangle ACB\cong\triangle PBN$.

$\because AC=2$ cm，

$\therefore PB=2$ cm.

$\therefore CP=BC-PB=6-2=4$（cm）.

$\therefore$点P的运动时间为$\frac{CP}{1}=\frac{4}{1}=4$（s）.

②当点P在线段BC上，$AC=BN$时，$\triangle ACB\cong\triangle NBP$.

$\therefore BC=PB=6$ cm.

$\therefore CP=0$ cm.

$\therefore$点P的运动时间为0 s.

③当点P在BQ上，$AC=BP$时，$\triangle ACB\cong\triangle PBN$.

$\therefore AC=PB$.

$\because AC=2$ cm，

$\therefore BP=2$ cm.

$\therefore CP=BC+BP=6+2=8$（cm）.

$\therefore$点P的运动时间为$\frac{CP}{1}=\frac{8}{1}=8$（s）.

④当点P在BQ上，$AC=NB$时，$\triangle ACB\cong\triangle NBP$.

$\therefore BC=BP$.

$\because BC=6$ cm，

$\therefore BP=6$ cm.

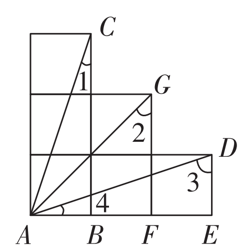
$\therefore CP=BC+BP=6+6=12$（cm）.

$\therefore$点P的运动时间为$\frac{CP}{1}=\frac{12}{1}=12$（s）.

综上所述，点P运动的时间为0 s或4 s或8 s或12 s.

第2讲　三角形全等的判定与性质（二）

例一　**解**：如下图，在$\triangle ABC$和$\triangle DEA$中，



$\begin{cases} AB=DE, \\ \angle ABC=\angle DEA=90^\circ, \\ BC=EA, \end{cases}$

∴$\triangle ABC\cong\triangle DEA$（SAS）.

∴$\angle 1=\angle 4$.

∵$\angle 3+\angle 4=90^\circ$，

∴$\angle 1+\angle 3=90^\circ$.

在$\triangle AFG$中，

$AF=FG$，$\angle AFG=90^\circ$，

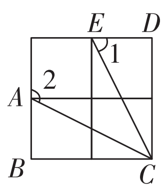
∴$\angle 2=45^\circ$.

∴$\angle 1+\angle 2+\angle 3=90^\circ+45^\circ=135^\circ$.

【点拨】本题需充分应用全等三角形的性质，转换角度，即可求解.

变式训练一

1. B　**【解析】**如下图，由题意，得$AB=ED$，$\angle B=\angle D=90^\circ$，$BC=DC$，∴$\triangle ABC\cong\triangle EDC$（SAS）. ∴$\angle BAC=\angle 1$. ∴$\angle 1+\angle 2=\angle BAC+\angle 2=180^\circ$.



2. 解：如图，在$\triangle ACB$和$\triangle NBF$中，$\begin{cases} AB=NF, \\ \angle BAC=\angle FNB=90^\circ, \\ AC=NB, \end{cases}$

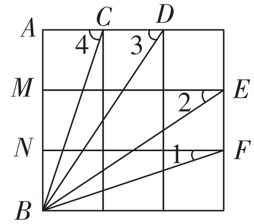
∴$\triangle ACB\cong\triangle NBF$（SAS）.

∴$\angle ABC=\angle NFB=\angle 1$.

∴$\angle ABC+\angle 4=\angle 1+\angle 4=90^\circ$.

同理$\angle 2+\angle 3=90^\circ$.

∴$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=90^\circ+90^\circ=180^\circ$.



例二　（1）**证明：**∵E是边AC的中点，∴$AE=CE$.

∵$CF\parallel AB$，

∴$\angle A=\angle ECF$，$\angle ADE=\angle F$.

在$\triangle ADE$和$\triangle CFE$中，

$\begin{cases} \angle A=\angle ECF, \\ \angle ADE=\angle F, \\ AE=CE, \end{cases}$

∴$\triangle ADE\cong\triangle CFE$（AAS）.

（2）**解：**∵$CE=5$，E是边AC的中点，

∴$AE=CE=5$.

∴$AC=10$.

∴$AB=AC=10$.

∴$AD=AB-BD=10-2=8$.

∵$\triangle ADE\cong\triangle CFE$，

∴$CF=AD=8$.

【点拨】“X形”是最重要的几何模型之一，在证明三角形全等时有着重要的应用. 本题运用了基本的“X形”全等，主要考查了全等三角形的判定及性质、平行线的性质等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识.

变式训练二

1. 证明：（1）$\because AC /\!/ FD$，

$\therefore \angle CAO=\angle FDO$.

在$\triangle ACO$和$\triangle DFO$中，

$$\begin{cases}\angle CAO=\angle FDO,\\ OA=OD,\\ \angle AOC=\angle DOF,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ACO\cong\triangle DFO$（ASA）.

（2）$\because \triangle ACO\cong\triangle DFO$，

$\therefore OC=OF$.

又 $BF=CE$，

$\therefore BF+FO=CE+OC$.

$\therefore BO=EO$.

在$\triangle ABO$和$\triangle DEO$中，

$$\begin{cases}BO=EO,\\ \angle AOB=\angle DOE,\\ OA=OD,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABO\cong\triangle DEO$（SAS）.

$\therefore \angle B=\angle E$.

$\therefore AB /\!/ DE$.

2. （1）**解：**$CD /\!/ BF$. 理由如下：

$\because E$是AD的中点，

$\therefore AE=DE$.

$\because E$是CF的中点，

$\therefore CE=EF$.

在$\triangle DEC$和$\triangle AEF$中，

$$\begin{cases}DE=AE,\\ \angle DEC=\angle AEF,\\ EC=EF,\end{cases}$$

$\therefore \triangle DEC\cong\triangle AEF$（SAS）.

$\therefore \angle DCE=\angle F$.

$\therefore CD /\!/ BF$.

（2）**证明：**在$\triangle BFE$和$\triangle BCE$中，

$$\begin{cases}BF=BC,\\ EF=EC,\\ BE=BE,\end{cases}$$

$\therefore \triangle BFE\cong\triangle BCE$（SSS）.

$\therefore \angle BEF=\angle BEC$.

$\because \angle BEF+\angle BEC=180^\circ$，

$\therefore \angle BEF=\angle BEC=\frac{1}{2}\times180^\circ=90^\circ$.

$\therefore BE\perp CF$.

例三　证明：（1）$\because \angle CAB=\angle CBA=45^\circ$，

$\therefore \angle ACB=180^\circ-\angle CAB-\angle CBA=90^\circ$.

$\therefore \angle CEA+\angle CAE=90^\circ$.

$\because CN\perp AE$，

$\therefore \angle COE=90^\circ$.

$\therefore \angle CEA+\angle BCN=90^\circ$.

$\therefore \angle BCN=\angle CAE$.

（2）（方法一）如图 1，延长 CN 至F，使 $CF=AE$，连接 BF.

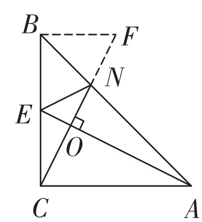


图 1

在$\triangle CAE$和$\triangle BCF$中，

$$\begin{cases}AC=CB,\\ \angle BCN=\angle CAE,\\ AE=CF,\end{cases}$$

$\therefore\triangle CAE\cong\triangle BCF$（SAS）.

$\therefore\angle CBF=\angle ACE=90^\circ$，$CE=BF$.

$\because\angle CBA=45^\circ$，

$\therefore\angle FBN=45^\circ=\angle EBN$.

$\because E$为BC的中点，

$\therefore CE=BE=BF$.

在$\triangle EBN$和$\triangle FBN$中，

$$\begin{cases}BE=BF,\\ \angle EBN=\angle FBN,\\ BN=BN,\end{cases}$$

$\therefore\triangle EBN\cong\triangle FBN$（SAS）.

$\therefore NE=NF$.

$\therefore AE=CF=CN+NF=CN+EN$.

（方法二）如图2，在AE上截取$AF=CN$.

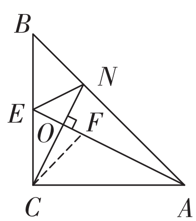


图2

在$\triangle ACF$和$\triangle CBN$中，

$$\begin{cases}AF=CN,\\ \angle CAF=\angle BCN,\\ AC=CB,\end{cases}$$

$\therefore\triangle ACF\cong\triangle CBN$（SAS）.

$\therefore CF=BN$，$\angle ACF=\angle B=45^\circ$.

$\therefore\angle ECF=45^\circ=\angle B$.

在$\triangle BEN$和$\triangle CEF$中，

$$\begin{cases}BE=CE,\\ \angle B=\angle ECF,\\ BN=CF,\end{cases}$$

$\therefore\triangle BEN\cong\triangle CEF$（SAS）.

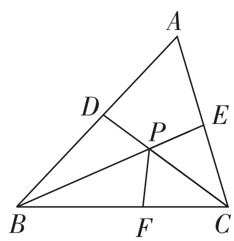
$\therefore EN=EF$.

$\therefore AE=AF+EF=CN+EN$.

【点拨】本题主要考查了全等三角形的判定和性质的应用．注意：无论是截长还是补短，构造出全等三角形是解本题的关键.

变式训练三

证明：在BC上截取$BF=BD$，连接PF，如下图.



$\because\angle A=60^\circ$，$BE$、$CD$分别平分$\angle ABC$、$\angle ACB$，

$\therefore\angle PBC+\angle PCB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=\frac{1}{2}\times(180^\circ-60^\circ)=60^\circ$.

$\therefore\angle DPB=\angle EPC=\angle PBC+\angle PCB=60^\circ$，

$\angle BPC=180^\circ-(\angle PBC+\angle PCB)=120^\circ$.

在$\triangle DBP$和$\triangle FBP$中，

$$\begin{cases}BD=BF,\\ \angle DBP=\angle FBP,\\ BP=BP,\end{cases}$$

$\therefore \triangle DBP \cong \triangle FBP$（SAS）.

$\therefore \angle DPB = \angle BPF = 60°$.

$\therefore \angle CPF = \angle BPC - \angle BPF = 120° - 60° = 60°$.

在$\triangle CEP$和$\triangle CFP$中，

$\begin{cases} \angle ECP = \angle FCP, \\ PC = PC, \\ \angle EPC = \angle FPC, \end{cases}$

$\therefore \triangle CEP \cong \triangle CFP$（ASA）.

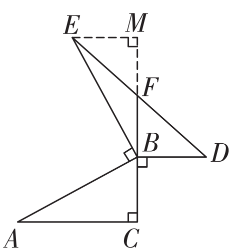
$\therefore FC = EC$.

$\therefore BD + EC = BF + FC$.

$\because BF + FC = BC$,

$\therefore BD + CE = BC$.

例四　证明：（1）如下图，过点E作$EM \perp CF$交CF的延长线于点M.



$\because BE \perp AB$,

$\therefore \angle EBM + \angle ABC = 180° - 90° = 90°$.

$\because \angle C = 90°$,

$\therefore \angle A + \angle ABC = 180° - 90° = 90°$.

$\therefore \angle EBM = \angle A$.

在$\triangle ABC$和$\triangle BEM$中，

$\begin{cases} \angle A = \angle EBM, \\ \angle C = \angle M = 90°, \\ AB = BE, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle BEM$（AAS）.

$\therefore BC = EM$.

$\because BD = BC$,

$\therefore BD = EM$.

在$\triangle EMF$和$\triangle DBF$中，

$\begin{cases} \angle M = \angle DBF = 90°, \\ \angle EFM = \angle DFB, \\ EM = DB, \end{cases}$

$\therefore \triangle EMF \cong \triangle DBF$（AAS）.

$\therefore EF = DF$.

$\therefore$点F是ED的中点.

（2）$\because \triangle ABC \cong \triangle BEM$，$\triangle EMF \cong \triangle DBF$，

$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BEM}$，$S_{\triangle EMF} = S_{\triangle DBF}$.

$\because$点F是ED的中点，

$\therefore S_{\triangle BEF} = S_{\triangle EMF} = S_{\triangle DBF}$.

$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BEM} = S_{\triangle EMF} + S_{\triangle EFB} = 2S_{\triangle BEF}$.

【点拨】本题主要考查了全等三角形的判定与性质、同角的余角相等、三角形的中线把三角形分成面积相等的两个三角形等知识.作辅助线构造出全等三角形是解本题的关键.

变式训练四

证明：（方法一）如图1，作$BF \perp DE$于点F，$CG \perp DE$于点G.

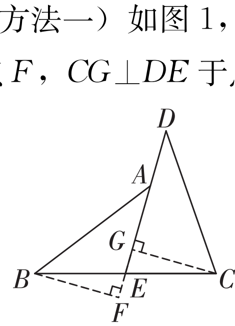


图 1

$\therefore \angle F=\angle CGE=90^{\circ}$.

在$\triangle BFE$和$\triangle CGE$中，

$\begin{cases}\angle BEF=\angle GEC,\\ \angle BFE=\angle CGE,\\ BE=CE,\end{cases}$

$\therefore \triangle BFE\cong\triangle CGE$（AAS）.

$\therefore BF=CG$.

在$\triangle ABF$和$\triangle DCG$中，

$\begin{cases}\angle F=\angle DGC=90^{\circ},\\ \angle BAF=\angle CDG,\\ BF=CG,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABF\cong\triangle DCG$（AAS）.

$\therefore AB=DC$.

（方法二）如图 2，作 $CF\parallel AB$，交 DE 的延长线于点 F.

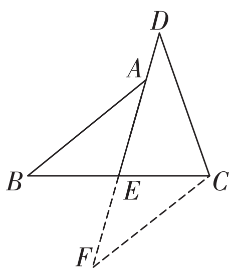


图 2

$\therefore \angle F=\angle BAE$.

$\because \angle BAE=\angle CDE$,

$\therefore \angle F=\angle CDE$.

$\therefore CF=CD$.

在$\triangle ABE$和$\triangle FCE$中，

$\begin{cases}\angle BAE=\angle F,\\ \angle AEB=\angle FEC,\\ BE=CE,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle FCE$（AAS）.

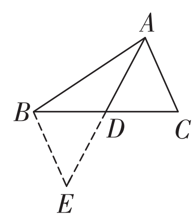
$\therefore AB=FC$.

$\therefore AB=DC$.

培优精练

1. A　**【解析】**在$\triangle ABC$中，$AD\perp BC$，$CE\perp AB$，$\therefore \angle AEH=\angle ADB=90^{\circ}$，$\angle EAH+\angle AHE=90^{\circ}$，$\angle DHC+\angle BCH=90^{\circ}$. $\because \angle AHE=\angle DHC$，$\therefore \angle EAH=\angle BCH$. 在$\triangle BCE$和$\triangle HAE$中，$\begin{cases}\angle BEC=\angle HEA,\\ \angle BCE=\angle HAE,\\ BE=HE=3,\end{cases}$ $\therefore \triangle BCE\cong\triangle HAE$（AAS）. $\therefore AE=CE$. $\because EH=EB=3$，$AE=4$，$\therefore CH=CE-EH=AE-EH=4-3=1$. 故选 A.

2. $1<AD<4$　**【解析】**延长 AD 至 E，使 $DE=AD$，连接 BE，如下图.



在$\triangle ADC$和$\triangle EDB$中，

$\begin{cases}AD=ED,\\ \angle ADC=\angle EDB,\\ DC=DB,\end{cases}$

$\therefore \triangle ADC\cong\triangle EDB$. $\therefore BE=AC=3$. 在$\triangle ABE$中，$AB-BE<AE<AB+BE$，即 $2<AE<8$，$\therefore 1<$

$AD<4$.

3. **证明**：(1) ∵$BD\perp AC$，$CE\perp AB$，

∴$\angle BEC=\angle BDC=90°$.

∴$\angle ABD+\angle BAC=90°$，

$\angle ACE+\angle BAC=90°$.

∴$\angle ABD=\angle ACE$.

在$\triangle ABP$和$\triangle QCA$中，

$$\begin{cases}BP=CA,\\ \angle ABD=\angle ACE,\\ AB=QC,\end{cases}$$

∴$\triangle ABP\cong\triangle QCA$（SAS）.

∴$AP=QA$.

(2) 由 (1) 可得$\angle CAQ=\angle P$.

∵$BD\perp AC$，

∴$\angle P+\angle CAP=90°$.

∴$\angle CAQ+\angle CAP=90°$，

即$\angle QAP=90°$.

∴$AP\perp AQ$.

名卷压轴题

(1) $(10-2t)$　**【解析】**∵点 P 从点 B 出发，以 2 cm/s 的速度沿 BC 向点 C 运动，点 P 的运动时间为 t s，∴$BP=2t$ cm.

则 $PC=BC-BP=(10-2t)$ cm.

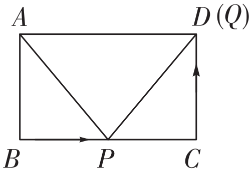
(2) **解**：当$\triangle ABP\cong\triangle DCP$时，

则 $BP=CP=\frac{1}{2}BC=5$ cm.

则 $t=\frac{BP}{2}=2.5$（s）.

故当 $t=2.5$ 时，$\triangle ABP\cong\triangle DCP$.

(3) **解**：存在. ① 如图，当$\triangle ABP\cong\triangle QCP$时，



则 $BA=CQ$，$PB=PC$.

∴$BP=PC=\frac{1}{2}BC=5$ cm.

则 $t=\frac{BP}{2}=\frac{5}{2}=2.5$（s）.

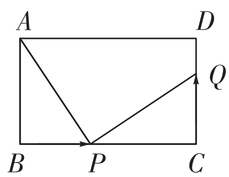
∵$AB=6$ cm，

∴$CQ=AB=6$ cm.

∴$v\times2.5=6$.

解得 $v=2.4$.

② 如下图，当$\triangle ABP\cong\triangle PCQ$时，



则 $BP=CQ$，$AB=PC$.

∵$AB=6$ cm，

∴$PC=6$ cm.

∴$BP=BC-PC=10-6=4$（cm）.

∴$t=\frac{BP}{2}=\frac{4}{2}=2$（s）.

∴$CQ=BP=4$ cm.

则 $v\times2=4$.

解得 $v=2$.

综上所述，当 v 的值为 2.4 或 2 时，$\triangle ABP$与$\triangle PQC$全等.

第 3 讲　等腰三角形

例一　$50°$　**【解析】**$\because \angle A=10°$，$AB=BC$，$\therefore \angle ACB=\angle A=10°$，$\angle CBD=\angle A+\angle ACB=10°+10°=20°$. $\because BC=CD$，$\therefore \angle CDB=\angle CBD=20°$. $\therefore \angle ECD=\angle A+\angle CDB=30°$. $\because CD=DE$，$\therefore \angle DEC=\angle ECD=30°$. $\therefore \angle EDF=\angle A+\angle AED=40°$. $\because DE=EF$，$\therefore \angle EFD=\angle EDF=40°$. $\therefore \angle FEM=\angle A+\angle EFD=10°+40°=50°$.

【点拨】本题综合考查了等腰三角形的性质、三角形外角的性质. 熟练应用这些性质是解答本题的关键.

变式训练一

1. C　**【解析】**设$\angle DCE=x$，$\angle ACD=y$，则$\angle ACE=x+y$，$\angle BCE=90°-\angle ACE=90°-x-y$. $\because AE=AC$，$\therefore \angle AEC=\angle ACE=x+y$. $\because BD=BC$，$\therefore \angle BDC=\angle BCD=90°-\angle ACD=90°-y$. 在$\triangle DCE$中，$\because \angle DCE+\angle CDE+\angle DEC=180°$，$\therefore x+(90°-y)+(x+y)=180°$. 解得$x=45°$. $\therefore \angle DCE=45°$. 故选 C.

2. $20°$　**【解析】**设$\angle A=x$，$\because AA_1=A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_7A_8=A_8A$，$\therefore \angle A=\angle AA_2A_1=\angle AA_7A_8=x$，$\angle A_2A_1A_3=\angle A_2A_3A_1=2x$，$\angle A_3A_2A_4=\angle A_2A_4A_3=3x$，$\angle A_4A_3A_5=\angle A_4A_5A_3=4x$. 同理$\angle AA_4A_5=\angle A_4A_6A_5=4x$. 在$\triangle AA_4A_5$中，$\angle A+\angle AA_4A_5+\angle AA_5A_4=180°$，即$x+4x+4x=180°$，解得$x=20°$，即$\angle A=20°$.

3. **解：**$\because AB=AC$，$AD=BD$，$AC=CD$，

$\therefore \angle B=\angle C=\angle BAD$，

$\angle ADC=\angle DAC$.

设$\angle B=x$，

则$\angle ADC=\angle B+\angle BAD=2x$.

$\therefore \angle DAC=\angle ADC=2x$.

在$\triangle ABC$中，

$\angle B+\angle C+\angle BAC=x+x+x+2x=180°$，

解得$x=36°$.

$\therefore \angle B=36°$.

例二　(1) **证明：**$\because \triangle ABC$和$\triangle EDC$都是等边三角形，

$\therefore BC=AC$，$CD=CE$，

$\angle ACB=\angle DCE=60°$.

$\therefore \angle ACB-\angle DCA=\angle DCE-\angle DCA$，

即$\angle BCD=\angle ACE$.

在$\triangle ACE$和$\triangle BCD$中，

$$\begin{cases}AC=BC,\\ \angle ACE=\angle BCD,\\ CE=CD,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCD$（SAS）.

（2）**解**：$AE \parallel BC$．理由如下：

$\because \triangle ACE \cong \triangle BCD$，

$\therefore \angle CAE = \angle CBD$.

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$.

$\therefore \angle CAE = \angle ACB$.

$\therefore AE \parallel BC$.

【点拨】本题主要考查了三角形全等的性质和判定、等边三角形的性质．熟练掌握全等三角形和平行线的判定方法是解本题的关键．

变式训练二

1.（1）**证明**：$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore BC = AB$，$\angle A = \angle EBC = 60°$.

在$\triangle BCE$ 和$\triangle ABF$ 中，

$$\begin{cases} BC = AB, \\ \angle EBC = \angle FAB, \\ BE = AF, \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle ABF$（SAS）.

$\therefore CE = BF$.

（2）**解**：$\because$由（1）知，$\triangle BCE \cong \triangle ABF$，

$\therefore \angle BCE = \angle ABF$.

$\therefore \angle PBC + \angle PCB = \angle PBC + \angle ABF = \angle ABC = 60°$，

即$\angle PBC + \angle PCB = 60°$.

$\therefore \angle BPC = 180° - 60° = 120°$.

2.（1）**证明**：$\because \triangle BDC$ 是等腰三角形，且$\angle BDC = 120°$，

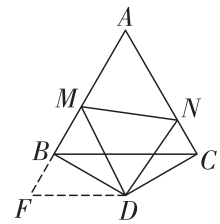
$\therefore \angle BCD = \angle DBC = 30°$.

$\because \triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形，

$\therefore \angle ABC = \angle BAC = \angle BCA = 60°$.

$\therefore \angle DBA = \angle DCA = 60° + 30° = 90°$.

延长 AB 至 F，使 $BF = CN$，连接 DF，如下图.



在$\triangle BDF$ 和$\triangle CDN$ 中，

$$\begin{cases} BF = CN, \\ \angle FBD = \angle NCD = 90°, \\ DB = DC, \end{cases}$$

$\therefore \triangle BDF \cong \triangle CDN$（SAS）.

$\therefore \angle BDF = \angle CDN$，

$BF = CN$，$DF = DN$.

$\because \angle MDN = 60°$，

$\therefore \angle BDM + \angle CDN = \angle BDC - \angle MDN = 120° - 60° = 60°$.

$\therefore \angle BDM + \angle BDF = 60°$，

即$\angle FDM = 60°$.

在$\triangle DMN$ 和$\triangle DMF$ 中，

$$\begin{cases} DM = DM, \\ \angle MDN = \angle MDF, \\ DN = DF, \end{cases}$$

$\therefore \triangle DMN \cong \triangle DMF$（SAS）.

$\therefore MN = MF = MB + BF = BM + NC$.

（2）**解**：由（1），得 $MN=MB+NC$.

∵等边△ABC 的边长为 3，

∴△AMN 的周长为 $AM+AN+MN=AM+MB+NC+AN=AB+AC=6$.

例三　解：△AFC 是等腰三角形. 理由如下：

∵在△ABD 和△CBE 中，

$$\begin{cases}\angle BAD=\angle BCE,\\ \angle B=\angle B,\\ BD=BE,\end{cases}$$

∴△ABD≌△CBE（AAS）.

∴$AB=CB$.

∵$BE=BD$，

∴$AB-BE=CB-BD$，

即 $AE=CD$.

在△AEF 和△CDF 中，

$$\begin{cases}\angle AFE=\angle CFD,\\ \angle EAF=\angle DCF,\\ AE=CD,\end{cases}$$

∴△AEF≌△CDF（AAS）.

∴$AF=CF$.

∴△AFC 是等腰三角形.

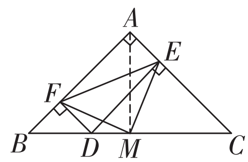
【点拨】本题主要考查了全等三角形的判定与性质及等腰三角形的判定等知识. 利用全等三角形来得出对应边相等是解本题的关键.

变式训练三

1. C　**【解析】**∵ $\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，∴ $\angle ACD+\angle BCD=90°$，$\angle ACD+\angle A=90°$. ∴ $\angle BCD=\angle A$. ∵ CE 平分 $\angle ACD$，∴ $\angle ACE=\angle DCE$. 又∵ $\angle BEC=\angle A+\angle ACE$，$\angle BCE=\angle BCD+\angle DCE$，∴ $\angle BEC=\angle BCE$. ∴$BC=BE$. 故选 C.

2. 解：△MEF 是等腰直角三角形. 证明如下：

连接 AM，如下图.



∵M 是 BC 的中点，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，

∴$AM=\frac{1}{2}BC=BM$，

AM 平分 $\angle BAC$.

∴ $\angle MAC=\angle MAB=\frac{1}{2}\angle BAC=45°$.

∵ $AB\perp AC$，$DE\perp AC$，$DF\perp AB$，

∴$DE\parallel AB$，$DF\parallel AC$.

∵ $\angle BAC=90°$，

∴四边形 $DFAE$ 为长方形.

∴$DF=AE$.

∵$DF\perp BF$，$\angle B=45°$，

∴ $\angle BDF=\angle B=45°$.

∴$BF=FD$.

∴$AE=BF$.

在△AEM 和△BFM 中，

$\begin{cases}AM=BM,\\ \angle MAE=\angle B,\\ AE=BF,\end{cases}$

$\therefore \triangle AEM\cong\triangle BFM$（SAS）.

$\therefore EM=FM$，$\angle AME=\angle BMF$.

$\because \angle AMF+\angle BMF=90^\circ$，

$\therefore \angle AME+\angle AMF=\angle EMF=90^\circ$.

$\therefore \triangle MEF$ 是等腰直角三角形.

例四　解：（1）$CE=CF$. 理由如下：

$\because CD\perp AB$，

$\therefore \angle CDB=90^\circ=\angle ACB$.

$\therefore \angle ACD+\angle DCB=90^\circ=\angle DCB+\angle B$.

$\therefore \angle B=\angle ACD$.

$\because AF$ 平分 $\angle CAB$，

$\therefore \angle CAF=\angle BAF$.

$\because \angle CEF=\angle CAF+\angle ACD$，$\angle CFE=\angle BAF+\angle B$，

$\therefore \angle CEF=\angle CFE$.

$\therefore CE=CF$.

（2）$\because AD=\frac{1}{4}AB$，$CF=\frac{1}{3}CB$，$S_{\triangle ABC}=24$，

$\therefore S_{\triangle ACD}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}=6$，

$S_{\triangle ACF}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=8$.

$\therefore S_{\triangle CEF}-S_{\triangle ADE}=(S_{\triangle ACF}-S_{\triangle AEC})-(S_{\triangle ACD}-S_{\triangle AEC})=S_{\triangle ACF}-S_{\triangle ACD}=8-6=2$.

（3）$BI=CF$. 理由如下：

$\because \triangle ADE$ 沿 AB 向右平移到 $\triangle GHI$ 的位置，

$\therefore AE=GI$，$\angle EAD=\angle IGH$.

$\because AF$ 平分 $\angle CAB$，

$\therefore \angle CAF=\angle EAD$.

$\therefore \angle CAF=\angle IGH$.

在 $\triangle EAC$ 和 $\triangle IGB$ 中，

$\begin{cases}\angle ACD=\angle B,\\ \angle CAF=\angle IGH,\\ AE=GI,\end{cases}$

$\therefore \triangle EAC\cong\triangle IGB$（AAS）.

$\therefore CE=BI$.

$\because CE=CF$，

$\therefore BI=CF$.

【点拨】本题属于几何变换综合题，考查了等腰三角形的性质、平移的性质、余角的性质、全等三角形的判定和性质. 证明 $\triangle EAC\cong\triangle IGB$ 是解第（3）问的关键.

变式训练四

解：（1）设 $\angle EDC=x$，$\angle B=\angle C=y$，

则 $\angle AED=\angle EDC+\angle C=x+y$.

$\because AD=AE$，

$\therefore \angle ADE=\angle AED=x+y$.

则 $\angle ADC=\angle ADE+\angle EDC=x+y+x=2x+y$.

$\because \angle ADC=\angle B+\angle BAD$，

$\therefore 2x+y=y+30^\circ$.

解得 $x=15^\circ$.

∴$\angle EDC$的度数是15°.

(2) $\triangle ADE$是等腰直角三角形. 证明如下：

∵$\angle BAD=30^\circ$，$\angle B=30^\circ$，

∴$\angle ADC=60^\circ$.

∵$\angle EDC=15^\circ$，

∴$\angle ADE=45^\circ$.

∵$AD=AE$，

∴$\angle AED=45^\circ$.

∴$\angle DAE=90^\circ$.

∴$\triangle ADE$是等腰直角三角形.

(3) $\triangle ADE$是等边三角形. 证明如下：

∵$\angle BAD=30^\circ$，$\angle B=45^\circ$，

∴$\angle ADC=75^\circ$.

∵$\angle EDC=15^\circ$，

∴$\angle ADE=60^\circ$.

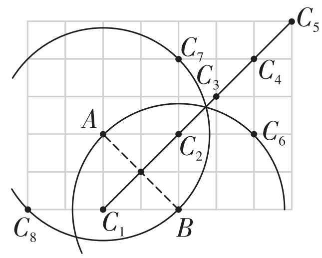
∵$AD=AE$，

∴$\angle AED=60^\circ$.

∴$\triangle ADE$是等边三角形.

培优精练

1. C 【解析】当AB为底时，作AB的垂直平分线，如图. 可找出格点C有5个；当AB为腰时，分别以A、B点为圆心，以AB为半径作弧，如下图. 可找出格点C有3个. ∴这样的点C有8个. 故选C.



2. (1) 小 【解析】点D从点B向点C的运动过程中，$\angle BDA$逐渐变小.

(2) 110°或80° 【解析】分三种情况：①当$AD=AE$时，∴$\angle ADE=\angle AED=40^\circ$. ∵$\angle AED$是$\triangle DEC$的外角，∴$\angle AED>\angle C$，此种情况不存在；②当$DA=DE$时，∵$\angle ADE=40^\circ$，∴$\angle DAE=\angle DEA=70^\circ$. ∵$\angle C=40^\circ$，∴$\angle BDA=\angle DAE+\angle C=110^\circ$. ③当$EA=ED$时，∴$\angle EAD=\angle ADE=40^\circ$. ∵$\angle C=40^\circ$，∴$\angle BDA=\angle EAD+\angle C=80^\circ$. 综上所述，$\angle BDA$的度数是$110^\circ$或$80^\circ$.

3. (1) **证明：**∵$\triangle ABC$是等边三角形，

∴$\angle BAC=\angle ACB=60^\circ$.

∴$\angle BAD+\angle CAD=60^\circ$.

∵$DE=DA$，

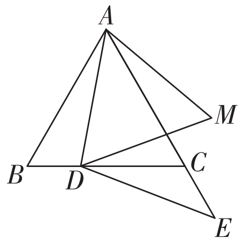
∴$\angle CAD=\angle E$.

∴$\angle BAD+\angle E=60^\circ$.

∵$\angle EDC+\angle E=\angle ACB=60^\circ$，

∴$\angle BAD=\angle EDC$.

(2) ①**解：** 补充完整的图 2 如下图所示.



②**证明：** ∵△ABC 是等边三角形，

∴ $\angle B=60^\circ$.

由对称性，得 $\angle EDC=\angle MDC$.

由 (1) 知，$\angle EDC=\angle BAD$.

∴ $\angle MDC=\angle BAD$.

∴ $\angle ADC=\angle B+\angle BAD=\angle B+\angle MDC$.

∴ $\angle ADC-\angle MDC=\angle B$.

∴ $\angle ADM=\angle B=60^\circ$.

由对称性，得 $DM=DE$.

∵ $DE=DA$，

∴ $DA=DM$.

∴△ADM 是等边三角形.

∴ $DA=AM$.

名卷压轴题

(1) **证明：** 延长 BC 至 H，使 $EH=BE$，连接 HF，如图 1.

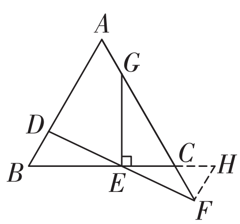


图 1

∵△ABC 为等边三角形，

∴ $\angle ABC=\angle ACB=60^\circ$.

∴ $\angle FCH=\angle ACB=60^\circ$.

在△BED 和△HEF 中，

$$\begin{cases} DE=FE, \\ \angle BED=\angle HEF, \\ BE=HE, \end{cases}$$

∴△BED≌△HEF (SAS).

∴ $BD=HF$，

$\angle H=\angle ABC=60^\circ$.

∴△FCH 为等边三角形.

∴ $CF=HF$.

∴ $BD=CF$.

(2) **解：** △DEG 为等边三角形.

理由如下：

∵ $DF\perp AB$，$\angle ABC=60^\circ$，

∴ $\angle BED=30^\circ$.

∴ $\angle DEG=180^\circ-30^\circ-90^\circ=60^\circ$.

∴ $\angle GEF=180^\circ-60^\circ=120^\circ$.

∵ $EG\perp BC$，$\angle ACB=60^\circ$，

∴ $\angle EGC=30^\circ$.

∵ $\angle EFG=60^\circ-30^\circ=30^\circ$，

∴ $\angle EGC=\angle EFG=30^\circ$.

∴ $EG=EF$.

∵ $DE=FE$，

∴ $EG=DE$.

∴△DEG 为等边三角形.

(3) **解：** $AD=CG$. 证明如下：

在 BE 上截取 $KE=EC$，连接 KG，如图 2.

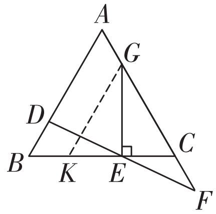


图 2

在△GEC和△GEK中，

$$\begin{cases}GE=GE,\\ \angle GEC=\angle GEK,\\ EC=EK,\end{cases}$$

∴△GEC≌△GEK（SAS）.

∴$GC=GK$，

$\angle KGE=\angle EGC=30°$.

∴$\angle KGC=60°$.

∴△KGC为等边三角形.

∴$CG=KC=2EC$.

由（1）知，$AB=BC$，$BD=CH$，$BE=EH$，

∴$AD=AB-BD=BC-CH=(BE+EC)-(BE-EC)=2EC$.

∴$AD=CG$.

第 4 讲　线段的垂直平分线与角的平分线

例一　$10°$　**【解析】**∵$\angle A+\angle B+\angle ACB=180°$，∴$\angle ACB=180°-90°-40°=50°$. ∵$MN$是线段$AC$的垂直平分线，∴$DC=DA$. ∴$\angle DCA=\angle A=40°$. ∴$\angle BCD=\angle BCA-\angle DCA=50°-40°=10°$.

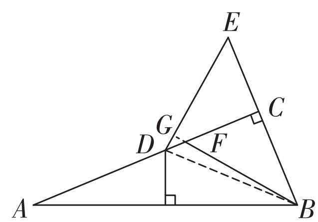
【点拨】本题主要考查了线段垂直平分线的性质定理、等腰三角形的性质. 观察图形，得到各角之间的关系是解本题的关键.

变式训练一

1. A　**【解析】**∵点P关于OA的对称点Q落在线段MN上，点P关于OB的对称点R落在MN的延长线上，∴$PM=MQ$，$PN=NR$. ∵$PM=1.8$ cm，$PN=3$ cm，$MN=3.2$ cm，∴$NR=3$ cm，$MQ=1.8$ cm. ∴$NQ=MN-MQ=3.2-1.8=1.4$（cm）. 则线段QR的长为$NR+NQ=3+1.4=4.4$（cm）. 故选 A.

2. **解：**$DE=BF$，$DE\perp BF$. 理由如下：

如下图，连接BD，延长BF交DE于点G.



∵点D在线段AB的垂直平分线上，

∴$AD=BD$.

∴$\angle ABD=\angle A=22.5°$.

在Rt△ABC中，

∵$\angle ACB=90°$，$\angle A=22.5°$，

∴$\angle ABC=67.5°$.

∴$\angle CBD=\angle ABC-\angle ABD=45°$.

$\therefore \triangle BCD$ 为等腰直角三角形.

$\therefore BC=DC$.

在$\triangle ECD$和$\triangle FCB$中,

$$\begin{cases} CE=CF, \\ \angle DCE=\angle BCF, \\ CD=CB, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ECD \cong \triangle FCB$ (SAS).

$\therefore DE=BF$, $\angle CED=\angle CFB$.

$\because \angle CFB+\angle CBF=90^\circ$,

$\therefore \angle CED+\angle CBF=90^\circ$.

$\therefore \angle EGB=90^\circ$, 即 $DE\perp BF$.

例二 (1) **证明:** $\because AD$ 平分$\angle BAC$, $\angle C=90^\circ$, $DE\perp AB$ 于点 E,

$\therefore DE=DC$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CDF$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle EDB$ 中,

$$\begin{cases} DF=DB, \\ DC=DE, \end{cases}$$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle CDF \cong \mathrm{Rt}\triangle EDB$ (HL).

$\therefore CF=EB$.

(2) **解:** 设 $CF=x$,

则 $AE=12-x$.

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$, $DE\perp AB$, $\angle C=90^\circ$,

$\therefore CD=DE$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle AED$ 中,

$$\begin{cases} AD=AD, \\ CD=ED, \end{cases}$$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ACD \cong \mathrm{Rt}\triangle AED$ (HL).

$\therefore AC=AE$, 即 $8+x=12-x$.

解得 $x=2$, 即 $CF=2$.

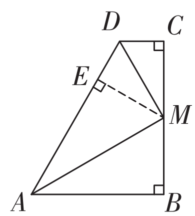
【点拨】本题主要考查了角平分线的性质. 熟知角平分线上的点到角两边的距离相等是解答本题的关键.

变式训练二

1. B **【解析】**$\because BD:CD=3:2$, $BC=30$, $\therefore CD=\dfrac{2}{3+2}\times 30=12$.

由角平分线上的点到角两边的距离相等, 得点 D 到 AB 的距离为 12. 故选 B.

2. **证明:** 过 M 作 $ME\perp AD$, 如下图.



$\because MC\perp DC$, $ME\perp DA$, DM 平分$\angle ADC$,

$\therefore ME=MC$.

$\because M$ 为 BC 的中点,

$\therefore MB=MC$.

又$\because ME=MC$,

$\therefore ME=MB$.

又$\because ME\perp AD$, $MB\perp AB$,

$\therefore AM$ 平分$\angle DAB$.

例三 **证明:** $\because \angle BCE+\angle ACE=90^\circ$, $\angle ACE+\angle CAE=90^\circ$,

$\therefore \angle BCE=\angle CAE$.

$\because AC\perp BC$, $BF\parallel AC$,

$\therefore BF\perp BC$.

$\therefore \angle ACD=\angle CBF=90^\circ$.

在$\triangle ACD$和$\triangle CBF$中，

$$\begin{cases}\angle CAD=\angle BCF,\\ AC=CB,\\ \angle ACD=\angle CBF,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD\cong\triangle CBF$（ASA）.

$\therefore CD=BF$.

$\because CD=BD=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore BF=BD$.

$\therefore \triangle BFD$为等腰直角三角形.

$\because \angle ACB=90^\circ$，$CA=CB$，

$\therefore \angle ABC=45^\circ$.

$\because \angle FBD=90^\circ$，

$\therefore \angle ABF=45^\circ$.

$\therefore \angle ABC=\angle ABF$，

即BA是$\angle FBD$的平分线.

$\because \triangle BDF$是等腰三角形，

$\therefore AB$垂直平分DF.

【点拨】本题主要考查了三角形全等的判定和线段垂直平分线的判定. 熟练掌握等腰三角形的性质是解决本题的关键.

变式训练三

1. 证明：（1）$\because AB/\!/CD$，

$\therefore \angle BAC=\angle DCA$.

$\because \angle BAE=\angle DCF$，

$\therefore \angle BAC-\angle BAE=\angle DCA-\angle DCF$，

即$\angle EAM=\angle FCM$.

$\therefore AE/\!/CF$.

（2）$\because AM$平分$\angle FAE$，

$\therefore \angle FAM=\angle EAM$.

$\because \angle EAM=\angle FCM$，

$\therefore \angle FAM=\angle FCM$.

$\therefore \triangle FAC$是等腰三角形.

又$\because AM=CM$，

$\therefore FM\perp AC$，即FE垂直平分AC.

2. （1）**证明：**$\because$点E是$\angle AOB$的平分线上一点，$EC\perp OB$，$ED\perp OA$，垂足分别是C、D，

$\therefore DE=CE$，$\angle ODE=\angle OCE=90^\circ$.

在$Rt\triangle ODE$和$Rt\triangle OCE$中，

$$\begin{cases}DE=CE,\\ OE=OE,\end{cases}$$

$\therefore Rt\triangle ODE\cong Rt\triangle OCE$（HL）.

$\therefore OD=OC$.

（2）**证明：**$\because OD=OC$，

$\therefore \triangle OCD$为等腰三角形.

又$\because OE$是$\angle AOB$的平分线，

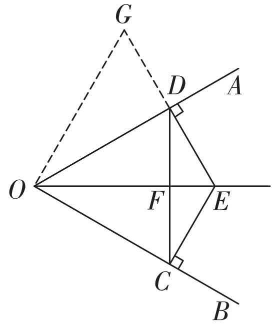
$\therefore OE$是CD的垂直平分线.

（3）**解：**$OE=4EF$. 证明如下：

$\because OE$是$\angle AOB$的平分线，$\angle AOB=60^\circ$，

$\therefore \angle AOE=\angle BOE=30^\circ$.

延长ED至点G，使$DG=ED$，如图所示.



易证 Rt$\triangle GOD\cong$Rt$\triangle EOD$，

$\therefore \angle GOD=\angle EOD=30^\circ$，

$OG=OE$.

$\therefore \angle GOE=60^\circ$.

$\therefore \triangle GOE$ 为等边三角形.

$\therefore OE=GE=2DE$.

$\because ED\perp OA$，

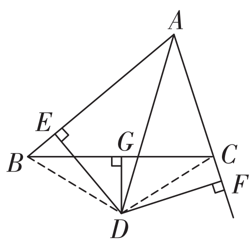
$\therefore \angle OED=60^\circ$.

$\therefore \angle EDF=30^\circ$.

同理可证，$DE=2EF$.

$\therefore OE=4EF$.

例四　(1) **证明：**连接 BD、CD，如下图.



$\because AD$ 平分 $\angle BAC$，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，

$\therefore DE=DF$，

$\angle BED=\angle CFD=90^\circ$.

$\because DG\perp BC$ 且平分 BC，

$\therefore BD=CD$.

在 Rt$\triangle BED$ 和 Rt$\triangle CFD$ 中，

$\begin{cases} BD=CD, \\ DE=DF, \end{cases}$

$\therefore$ Rt$\triangle BED\cong$Rt$\triangle CFD$ (HL).

$\therefore BE=CF$.

(2) **解：**在$\triangle AED$ 和$\triangle AFD$ 中，

$\begin{cases} \angle AED=\angle AFD=90^\circ, \\ \angle EAD=\angle FAD, \\ AD=AD, \end{cases}$

$\therefore \triangle AED\cong\triangle AFD$ (AAS).

$\therefore AE=AF$.

设 $BE=x$，则 $CF=x$.

$\because AB=5$，$AC=3$，$AE=AB-BE$，$AF=AC+CF$，

$\therefore 5-x=3+x$.

解得 $x=1$.

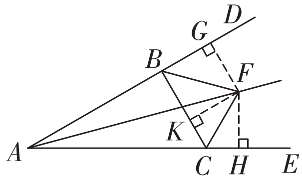
$\therefore BE=1$，$AE=AB-BE=5-1=4$.

【点拨】本题主要考查了角平分线的性质、线段垂直平分线的性质以及全等三角形的判定与性质. 解题的关键是准确作出辅助线，利用方程思想与数形结合思想求解.

变式训练四

1. 解：(1) 点 F 在$\angle BAC$ 的平分线上. 理由如下：

过点 F 作 $FG\perp AD$ 于点 G，作 $FH\perp AE$ 于点 H，作 $FK\perp BC$ 于点 K，如图所示.



$\because BF$ 平分 $\angle DBC$，

$\therefore FG=FK$.

$\because CF$ 平分 $\angle ECB$，

$\therefore FH=FK$.

$\therefore FG=FH$.

$\therefore$ 点 F 在 $\angle BAC$ 的平分线上.

（2）$\angle BFC=90^\circ-\frac{1}{2}\angle BAC$. 理由如下：

设 $\angle ABC=x$，$\angle ACB=y$，

则 $\angle DBC=\angle BAC+y$，

$\angle ECB=\angle BAC+x$.

$\because$ BF、CF 分别是 $\angle DBC$、$\angle ECB$ 的平分线，

$\therefore \angle FBC+\angle FCB$

$=\frac{\angle BAC+y}{2}+\frac{\angle BAC+x}{2}$

$=\frac{2\angle BAC+x+y}{2}$

$=\frac{2\angle BAC+180^\circ-\angle BAC}{2}$

$=90^\circ+\frac{1}{2}\angle BAC$.

$\therefore \angle BFC=180^\circ-(\angle FBC+\angle FCB)$

$=180^\circ-\left(90^\circ+\frac{1}{2}\angle BAC\right)$

$=90^\circ-\frac{1}{2}\angle BAC$.

2. （1）等边三角形

【解析】$\because AM=AN$，$\angle MAN=120^\circ$，$\therefore \angle M=\angle N=30^\circ$. $\because BE$ 是线段 AM 的垂直平分线，$\therefore AB=BM$. $\therefore \angle MAB=\angle M=30^\circ$. $\therefore \angle CBA=\angle M+\angle MAB=30^\circ+30^\circ=60^\circ$. 同理，$CA=NC$. $\therefore \angle NAC=\angle N=30^\circ$. $\therefore \angle BCA=\angle N+\angle NAC=30^\circ+30^\circ=60^\circ$. $\because \angle BAC=\angle MAN-\angle MAB-\angle NAC=120^\circ-30^\circ-30^\circ=60^\circ$. $\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形.

（2）**解：**$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

证明如下：

$\because AM=AN$，

$\therefore \angle M=\angle N$.

$\because \angle MAB=\angle M$，

$\angle ABC=\angle M+\angle MAB=2\angle M$，

$\angle NAC=\angle N$，

$\angle ACB=\angle N+\angle NAC=2\angle N$，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB$.

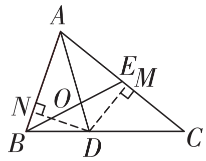
$\therefore AB=AC$.

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形.

培优精练

1. A **【解析】**在 $\triangle ABC$ 中，MP 和 NQ 分别垂直平分 AB 和 AC，$\therefore AP=BP$，$AQ=CQ$. $\because BC=12$，$\therefore \triangle APQ$ 的周长 $=AP+PQ+AQ=BP+PQ+CQ=BC=12$. 故选 A.

2. 10　【解析】过点 D 作 $DM\perp AC$ 于点 M，$DN\perp AB$ 于点 N，如下图.



$\because AD$ 平分 $\angle BAC$，$DM\perp AC$，$DN\perp AB$，$\therefore DM=DN$. $\therefore S_{\triangle ABD}:S_{\triangle ADC}=BD:DC=AB:AC=2:3$. 设 $\triangle ABC$ 的面积为 S，则 $S_{\triangle ADC}=\frac{3}{5}S$，$S_{\triangle BEC}=\frac{1}{2}S$. $\because\triangle OAE$ 的面积比 $\triangle BOD$ 的面积大 1，$\therefore\triangle ADC$ 的面积比 $\triangle BEC$ 的面积大 1. $\therefore\frac{3}{5}S-\frac{1}{2}S=1$. $\therefore S=10$.

故 $\triangle ABC$ 的面积为 10.

3. **证明：**(1) $\because AE\perp BD$，

$\therefore\angle AEB=90^\circ=\angle C$.

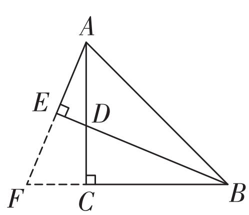
$\because\angle EAC+\angle ADE=90^\circ$，

$\angle DBC+\angle BDC=90^\circ$，

又 $\because\angle ADE=\angle BDC$，

$\therefore\angle EAC=\angle DBC$.

(2) 延长 AE、BC 相交于点 F，如下图.



在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle BCD$ 中，

$$\begin{cases}\angle FAC=\angle DBC,\\ AC=BC,\\ \angle ACF=\angle BCD,\end{cases}$$

$\therefore\triangle ACF\cong\triangle BCD$ (ASA).

$\therefore AF=BD$.

$\because BD=2AE$，

$AE+EF=AF=BD$，

$\therefore AE=FE$，即 E 为 AF 的中点.

$\because BE\perp AF$，

$\therefore BA=BF$.

$\therefore\triangle ABF$ 是等腰三角形.

$\therefore BD$ 平分 $\angle ABC$.

名卷压轴题

证明：(1) $\because\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC$，

$\therefore\angle B=\angle ACB=45^\circ$.

$\because FC\perp BC$，

$\therefore\angle BCF=90^\circ$.

$\therefore\angle ACF=90^\circ-45^\circ=45^\circ$.

$\therefore\angle B=\angle ACF$.

$\because\angle BAC=90^\circ$，$FA\perp AE$，

$\therefore\angle BAE+\angle CAE=90^\circ$，

$\angle CAF+\angle CAE=90^\circ$.

$\therefore\angle BAE=\angle CAF$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACF$ 中，

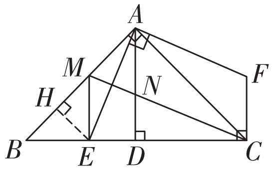
$$\begin{cases}\angle BAE=\angle CAF,\\ AB=AC,\\ \angle B=\angle ACF,\end{cases}$$

$\therefore\triangle ABE\cong\triangle ACF$ (ASA).

$\therefore BE=CF$.

(2) ①如图，过点 E 作 $EH\perp AB$

于点 H.



$\because \angle B=45^\circ$,

则$\triangle BEH$ 是等腰直角三角形.

$\therefore HE=BH$，$\angle BEH=45^\circ$.

$\because AE$ 平分$\angle BAD$，$AD\perp BC$，

$\therefore DE=HE$.

$\therefore DE=BH=HE$.

$\because BM=2DE$，

$\therefore BM=2BH=BH+HM$.

$\therefore BH=HM$.

$\therefore HE=HM$.

$\therefore \triangle HEM$ 是等腰直角三角形.

$\therefore \angle MEH=45^\circ$.

$\therefore \angle BEM=45^\circ+45^\circ=90^\circ$.

$\therefore ME\perp BC$.

②由题意，得 $\angle CAE=\angle DAC+\angle DAE=45^\circ+\frac{1}{2}\times 45^\circ=67.5^\circ$.

$\therefore \angle CEA=180^\circ-45^\circ-67.5^\circ=67.5^\circ$.

$\therefore \angle CAE=\angle CEA=67.5^\circ$.

$\therefore AC=CE$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACM$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ECM$ 中，

$$\begin{cases} CM=CM, \\ AC=EC, \end{cases}$$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ACM\cong \mathrm{Rt}\triangle ECM$（HL）.

$\therefore \angle ACM=\angle ECM$.

$\therefore CM$ 平分$\angle ACE$.

◎全等三角形　新题型探究

例题　解：（1）作出示意图，如图 1 或图 2.

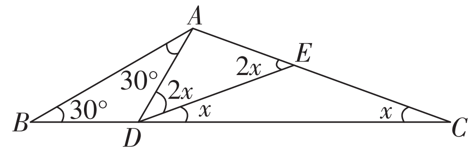


图 1

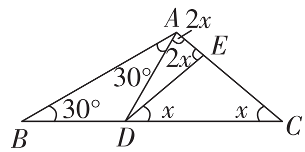


图 2

如图 1，当 $AD=AE$ 时，

则 $2x+x=30^\circ+30^\circ$，

$\therefore x=20^\circ$.

如图 2，当 $AD=DE$ 时，

则 $30^\circ+30^\circ+2x+x=180^\circ$.

$\therefore x=40^\circ$.

当 $AE=DE$ 时，

则$\angle EAD=\angle ADE$.

$\because \angle AED=2x$，

$\therefore \angle EAD=90^\circ-x$.

$\therefore 30^\circ+30^\circ+90^\circ-x+x=180^\circ$.

此方程无解.

$\therefore$此种情况不成立.

$\therefore x$ 的所有可能值是 20°或 40°.

【点拨】本题主要考查了学生对新知识的理解能力及动手操作能力，是一道非常锻炼学生能力的题目.

变式训练

（1）是　**【解析】**如图 3，$\because$沿

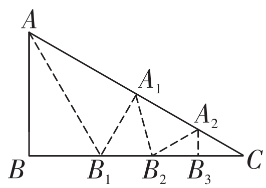
$\angle BAC$ 的平分线 AB_1 折叠，$\therefore \angle B = \angle AA_1B_1 = \angle A_1B_1C + \angle C$. $\because \angle B = 2\angle C$，$\therefore \angle A_1B_1C = \angle C$. ∵将余下部分沿 $\angle B_1A_1C$ 的平分线 A_1B_2 折叠，$\therefore \angle B_1A_1B_2 = \angle B_2A_1C$. 在 $\triangle A_1B_1B_2$ 和 $\triangle A_1CB_2$ 中，

$$\begin{cases} \angle B_1A_1B_2 = \angle B_2A_1C, \\ \angle A_1B_1B_2 = \angle C, \\ A_1B_2 = A_1B_2, \end{cases}$$

$\therefore \triangle A_1B_1B_2 \cong \triangle A_1CB_2$（AAS）.

∴点 B_1 与点 C 重合. 故 $\angle BAC$ 是 $\triangle ABC$ 的"好角".

（2）$\angle B = 3\angle C$　**【解析】**如下图.



∵根据折叠的性质知，$\angle B = \angle AA_1B_1$，$\angle C = \angle A_2B_2C$，$\angle A_1B_1C = \angle A_1A_2B_2$，

$\therefore \angle A_1A_2B_2 = \angle C + \angle A_2B_2C = 2\angle C$. $\because \angle BAC + \angle B + \angle AA_1B_1 - \angle A_1B_1C = \angle BAC + 2\angle B - 2\angle C = 180°$. 根据三角形 ABC 的内角和定理知，$\angle BAC + \angle B + \angle C = 180°$. $\therefore \angle B = 3\angle C$.

培优精练

解：（1）$AF = BD$. 证明如下：

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore BC = AC$，$\angle BCA = 60°$.

$\because \triangle DCF$ 是等边三角形，

$\therefore DC = FC$，$\angle DCF = 60°$.

$\therefore \angle BCA - \angle DCA = \angle DCF - \angle DCA$，

即 $\angle BCD = \angle ACF$.

在 $\triangle BCD$ 和 $\triangle ACF$ 中，

$$\begin{cases} BC = AC, \\ \angle BCD = \angle ACF, \\ DC = FC, \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCD \cong \triangle ACF$（SAS）.

$\therefore BD = AF$.

（2）$AF + BF' = AB$. 证明如下：

由（1）知，

$\triangle BCD \cong \triangle ACF$（SAS）.

$\therefore BD = AF$.

同理可得，

$\triangle BCF' \cong \triangle ACD$（SAS）.

$\therefore BF' = AD$.

$\therefore AF + BF' = BD + AD = AB$.

第十四章　勾股定理

第 1 讲　勾股定理

例一　B　**【解析】**由勾股定理，得 $BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. $\because S_{\triangle ABC} = 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 1 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 5$，$\therefore \frac{1}{2} BC \cdot AD = 5$.

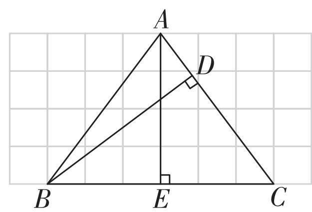
$\therefore \frac{5}{2} AD = 5$. $\therefore AD = 2$. 故选 B.

【点拨】本题主要考查了勾股定理

和三角形的面积公式. 解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答.

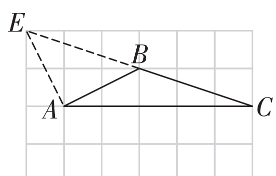
变式训练一

1. B　**【解析】**过 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E，如下图所示.



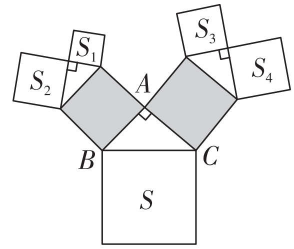
$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times BC\times AE=\frac{1}{2}\times BD\times AC$，又 $\because AE=4$，$AC=\sqrt{4^2+3^2}=5$，$BC=6$，$\therefore \frac{1}{2}\times 6\times 4=\frac{1}{2}\times BD\times 5$. 解得 $BD=\frac{24}{5}$. 故选 B.

2. $135°$　**【解析】**延长 CB 到点 E，连接 AE，如下图所示.



由勾股定理，得 $AE=AB=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$BC=BE=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$. $\therefore AE^2+AB^2=5+5=10=BE^2$. $\therefore \triangle EAB$ 是等腰直角三角形. $\therefore \angle EBA=\angle AEB=45°$. $\therefore \angle ABC=180°-45°=135°$.

例二　A　**【解析】**如图所示.

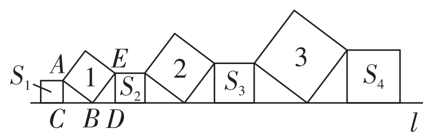


由题意，得 $AB^2=S_1+S_2=4+9=13$，$AC^2=S_3+S_4=8+10=18$. $\therefore BC^2=AB^2+AC^2=13+18=31$. $\therefore S=BC^2=31$. 故选 A.

【点拨】本题主要考查了正方形的性质、勾股定理等几何知识点及其应用问题. 解题的关键是牢固掌握勾股定理.

变式训练二

4　**【解析】**如下图所示.

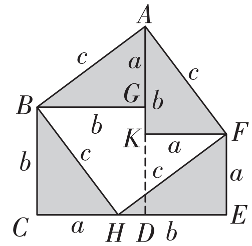


$\because AB=BE$，$\angle ACB=\angle BDE=90°$. $\therefore \angle ABC+\angle BAC=90°$.

$\because \angle ABC+\angle EBD=90°$，$\therefore \angle BAC=\angle EBD$. $\therefore \triangle ABC\cong\triangle BED$（AAS）.

$\therefore BC=ED$. $\because AB^2=AC^2+BC^2$，$\therefore AB^2=AC^2+ED^2=S_1+S_2$，即 $S_1+S_2=1$. 同理，$S_3+S_4=3$. 则 $S_1+S_2+S_3+S_4=1+3=4$.

例三　**证明：**如下图.



$\because S_{五边形ABCEF}=S_{正方形BCDG}+S_{正方形DEFK}+S_{Rt\triangle AKF}+S_{Rt\triangle ABG}=S_{正方形ABHF}+S_{Rt\triangle BCH}+S_{Rt\triangle EFH}$，

即 $b^2+a^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab=c^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab$.

$\therefore a^2+b^2=c^2$.

【点拨】本题主要考查了用面积法来证明勾股定理，体现了数形结合思想在数学中的应用.

变式训练三

D　**【解析】**A、B、C 选项都可以利用图形面积得出 a、b、c 的关系，即可证明勾股定理，故 A、B、C 选项不符合题意；D 选项不能利用图形面积证明勾股定理.故选 D.

例四　（1）等边　**【解析】**$\because$ 在 $\triangle ADC$ 中，$AD=DC$，$\therefore \triangle ADC$ 是等腰三角形. 又 $\because \angle ADC=60°$，$\therefore \triangle ADC$ 是等边三角形.

（2）①**证明：**$\because$ 由（1）知，$\triangle ADC$ 是等边三角形，

$\therefore DC=AC$，$\angle DCA=60°$.

又 $\because \triangle BCE$ 是等边三角形，

$\therefore CB=CE$，$\angle BCE=60°$.

$\therefore \angle DCA+\angle ACB=\angle ECB+\angle ACB$，即 $\angle DCB=\angle ACE$.

$\therefore \triangle BDC \cong \triangle EAC$（SAS）.

$\therefore BD=EA$.

②**解：**理由如下：

$\because \triangle BCE$ 是等边三角形，

$\therefore BC=BE$，$\angle CBE=60°$.

$\therefore \angle ABE=\angle ABC+\angle CBE=30°+60°=90°$.

在 $Rt\triangle ABE$ 中，由勾股定理，得 $EA^2=AB^2+BE^2$.

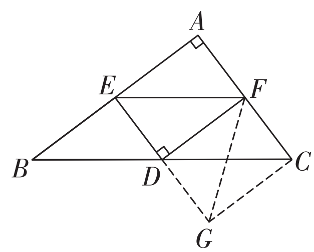
又 $\because BD=EA$，

$\therefore BD^2=AB^2+BC^2$.

【点拨】本题主要考查了等边三角形的判定、全等三角形的判定与性质以及勾股定理. 解答本题的关键是抓住图中长度与角度之间的关系.

变式训练四

证明：延长 ED 到 G，使 $DG=DE$，连接 FG、CG，如下图所示.



在 $\triangle EDF$ 和 $\triangle GDF$ 中，

$\begin{cases} DF=DF, \\ \angle EDF=\angle GDF=90°, \\ DE=DG, \end{cases}$

$\therefore \triangle EDF \cong \triangle GDF$（SAS）.

$\therefore EF=GF$.

又 $\because D$ 为斜边 BC 的中点，

$\therefore BD=DC$.

在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle CDG$ 中，

$\begin{cases} BD=CD, \\ \angle BDE=\angle CDG, \\ DE=DG, \end{cases}$

$\therefore \triangle BDE \cong \triangle CDG$（SAS）.

$\therefore BE=CG$，$\angle B=\angle BCG$.

$\therefore AB /\!/ CG$.

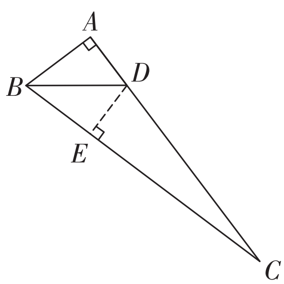
$\therefore \angle GCA=180^\circ-\angle A=180^\circ-90^\circ=90^\circ$.

在 Rt$\triangle FCG$ 中，由勾股定理，得 $FG^2=CF^2+CG^2=CF^2+BE^2$.

$\therefore EF^2=FG^2=BE^2+CF^2$.

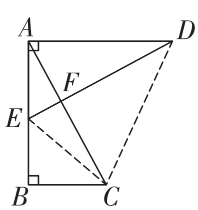
培优精练

1. B　**【解析】**过 D 作 $DE\perp BC$ 于点 E，如下图所示.



$\because \angle A=90^\circ$，$BD$ 平分 $\angle ABC$，$\therefore AD=DE$. $\because$ 在 Rt$\triangle ABD$ 中，$\angle A=90^\circ$，$AB=4$，$BD=5$，由勾股定理，得 $AD=3$. $\therefore DE=3$，即点 D 到 BC 的距离是 3. 故选 B.

2. **证明：**连接 EC、CD，如下图所示.



由题意知 Rt$\triangle ABC\cong$Rt$\triangle DAE$，

$\therefore \angle ACB=\angle AED$，

$\angle ABC=\angle BAD=90^\circ$.

$\therefore \angle BAC+\angle ACB=90^\circ=\angle BAC+\angle AED$.

$\therefore \angle AFE=90^\circ$.

$\therefore AC\perp DE$.

$\because S_{梯形ABCD}=\frac{1}{2}(BC+AD)\times AB=\frac{ac+c^2}{2}$，

又$\because S_{四边形AECD}=S_{\triangle AEC}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\times DE=\frac{1}{2}b^2$，

$\therefore S_{\triangle BEC}=S_{梯形ABCD}-S_{四边形AECD}=\frac{ac+c^2}{2}-\frac{1}{2}b^2=\frac{1}{2}BE\times BC=\frac{1}{2}ac-\frac{1}{2}a^2$.

$\therefore c^2+a^2=b^2$.

3. （1）24　**【解析】**$\because \triangle DEF$ 为直角三角形，$\therefore DF^2=DE^2+EF^2=9+15=24$. 则正方形 M 的面积 $=DF^2=24$.

（2）直角　**【解析】**$\because DE^2+EF^2=36+64=100$，$DF^2=100$，$\therefore DF^2=DE^2+EF^2$. $\therefore \triangle DEF$ 为直角三角形.

（3）**解：**$S_1+S_2=S_3$.

理由如下：

$\because \triangle ABC$ 为直角三角形，

$\therefore AB^2=AC^2+BC^2$.

又∵ $S_1+S_2=\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{AC}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{BC}{2}\right)^2=\frac{\pi}{8}\times(AC^2+BC^2)=\frac{\pi AB^2}{8}$，

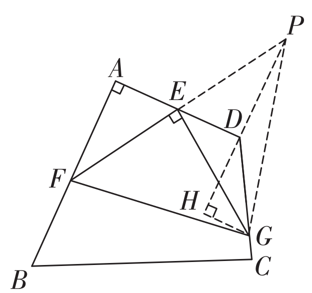
$S_3=\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{AB}{2}\right)^2=\frac{\pi AB^2}{8}$，

∴ $S_1+S_2=S_3$.

4. (1) $1<AD<4$　**【解析】**∵ AD 为 BC 边上的中线，∴ $BD=CD$. 在 $\triangle EDB$ 和 $\triangle ADC$ 中，

$\begin{cases}BD=CD,\\ \angle BDE=\angle ADC,\\ DE=DA,\end{cases}$ ∴ $\triangle EDB\cong\triangle ADC$ (SAS). ∴ $BE=AC=3$. 在 $\triangle ABE$ 中，$AB=5$，∴ $AB-BE<AE<AB+BE$，即 $5-3<AE<5+3$. ∴ $2<AE<8$. ∵ $AE=2AD$，∴ $1<AD<4$.

(2) **解：** 延长 FE 至 P，使 $EP=FE$，连接 DP、PG，如下图所示.



在 $\triangle FEA$ 和 $\triangle PED$ 中，

$\begin{cases}AE=DE,\\ \angle AEF=\angle PED,\\ FE=PE,\end{cases}$

∴ $\triangle FEA\cong\triangle PED$ (SAS).

∴ $PD=AF=4$，

$\angle PDE=\angle FAE=90^\circ$.

∵ $EF\perp EG$，$FE=EP$，

∴ $FG=PG$.

延长 PD，过 G 作 $GH\perp PD$ 于点 H，如上图所示.

∵ $\angle EDG=120^\circ$，$\angle EDH=90^\circ$，

∴ $\angle HDG=120^\circ-90^\circ=30^\circ$.

∵ $DG=2\sqrt{3}$，

易证 $HG=\frac{1}{2}DG=\sqrt{3}$.

∴ $DH=\sqrt{DG^2-HG^2}=\sqrt{12-3}=3$.

∴ $PG=\sqrt{PH^2+HG^2}=\sqrt{(4+3)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{52}$.

∴ $GF=PG=\sqrt{52}$.

名卷压轴题

(1) $\sqrt{47}$　**【解析】**∵大正方形的面积为 25，小正方形的面积为 3，∴ $a^2+b^2=25$，$(b-a)^2=3$. ∴ 4 个直角三角形的面积 $=4\times\frac{1}{2}ab=2ab=25-3=22$. ∴ $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=25+22=47$. ∵ $b>a>0$，∴ $a+b=\sqrt{47}$.

(2) **解：** ∵ 四边形 $EFGH$ 为正方形，

∴ $\angle AEM=\angle HEF=\angle FGH=\angle CGP=90^\circ$，$EM\parallel PF$，

$AF \parallel CH$.

$\therefore \angle EAM = \angle GCP$.

$\because$ "赵爽弦图"是由四个全等的直角三角形与中间的小正方形 $EFGH$ 拼成的一个大正方形 $ABCD$,

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AED \cong \mathrm{Rt}\triangle CGB$.

$\therefore AE = CG$.

在$\triangle AEM$和$\triangle CGP$中,

$$\begin{cases} \angle AEM = \angle CGP, \\ AE = CG, \\ \angle EAM = \angle GCP, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEM \cong \triangle CGP$（ASA）.

$\therefore S_{\triangle AEM} = S_{\triangle CGP}$, $EM = GP$.

$\therefore S_{\triangle AFP} - S_{\triangle CGP} = S_{\triangle AFP} - S_{\triangle AEM} = S_{梯形FPME} = \frac{1}{2}(EM + PF) \cdot EF = \frac{1}{2}(PG + PF) \cdot EF = \frac{1}{2}FG \cdot EF = \frac{1}{2}S_{正方形EFGH}$.

$\because S_{正方形EFGH} = 3$,

$\therefore S_{\triangle AFP} - S_{\triangle CGP} = \frac{3}{2}$.

第 2 讲　勾股定理的应用（一）

例一　解: 设 $BC = x$ m,

则 $AC = x$ m, $OC = (25 - x)$ m.

由勾股定理，得

$BC^2 = OB^2 + OC^2$,

即 $x^2 = 5^2 + (25 - x)^2$.

解得 $x = 13$.

故机器人行走的路程 BC 是 13 m.

【点拨】本题主要考查了勾股定理的应用. 掌握直角三角形中两条直角边的平方和等于斜边的平方是解本题的关键.

变式训练一

解: 如下图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 中,

$\because \angle ACB = 90^\circ$, $BC = 0.7$ m, $AC = 2.4$ m,

$\therefore AB^2 = 0.7^2 + 2.4^2 = 6.25$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle A'BD$ 中,

$\because \angle A'DB = 90^\circ$, $A'D = 2$ m,

$BD^2 + A'D^2 = A'B^2 = AB^2$,

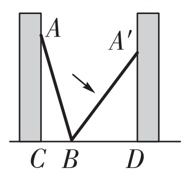
$\therefore BD^2 + 2^2 = 6.25$.

$\therefore BD^2 = 2.25$. $\because BD > 0$,

$\therefore BD = 1.5$ m.

$\therefore CD = BC + BD = 0.7 + 1.5 = 2.2$ (m),

即小巷的宽度为 2.2 m.



例二　解:（1）$\because AC = 600$ km, $BC = 800$ km, $AB = 1\,000$ km,

$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2$.

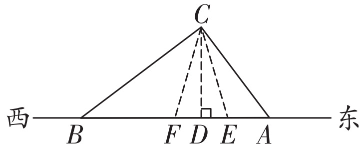
$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

则 $\angle ACB = 90^\circ$.

（2）海港 C 受台风影响. 理由如下:

过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D，如图

所示.



∵△ABC是直角三角形，

∴$AC\times BC=CD\times AB$.

∴$600\times 800=1\ 000\times CD$.

∴$CD=480$ km.

∵以台风中心为圆心，周围500 km以内称为受影响区域，

$480<500$，

∴海港C受台风影响.

（3）当$EC=500$ km，$FC=500$ km时，台风正好影响C港口，

∵$ED=\sqrt{EC^2-CD^2}=\sqrt{500^2-480^2}=140$（km），

∴$EF=2ED=280$ km.

∵台风中心的移动速度为28 km/h，

∴$280\div 28=10$（h）.

故台风影响该海港的时间为10 h.

【点拨】本题主要考查了勾股定理在实际生活中的运用. 解答此类题目的关键是构造出直角三角形，再利用勾股定理解答.

变式训练二

解：根据题意，得$AC=30$ m，$AB=50$ m，$\angle C=90°$.

在Rt△ACB中，根据勾股定理，得$BC^2=AB^2-AC^2=50^2-30^2=40^2$.

∴$BC=40$ m，

即小汽车2 s行驶了40 m.

故该辆小汽车1 h行驶$40\div 2\times 3\ 600=72\ 000$（m），

即小汽车行驶的速度为72 km/h.

∵$72>60$，

∴这辆小汽车超速了.

又∵$72-60=12$（km/h），

∴小汽车超速12 km/h.

例三 解：（1）由翻折的性质，得$AF=AD=BC=10$ cm.

在Rt△ABF中，

$BF=\sqrt{AF^2-AB^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$ cm，

∴$CF=BC-BF=10-6=4$（cm）.

故CF的长为4 cm.

（2）设$CE=x$ cm，

则$DE=EF=(8-x)$ cm.

在Rt△ECF中，

$EF^2=CE^2+CF^2$，

即$(8-x)^2=x^2+4^2$.

解得$x=3$.

故CE的长为3 cm.

【点拨】本题主要考查了翻折变换和勾股定理的应用. 解决此类问题，应结合题意，可以实际操作图形的折叠，找到图形间的关系.

变式训练三

1. D **【解析】**设$FC'=x$，则$FD=$

$9-x$. $\because BC=6$，四边形 $ABCD$ 为长方形，点 C' 为 AD 的中点，$\therefore AD=BC=6$，$C'D=3$. 在 $Rt\triangle FC'D$ 中，$\angle D=90°$，$FC'=x$，$FD=9-x$，$C'D=3$，$\therefore FC'^2=FD^2+C'D^2$，即 $x^2=(9-x)^2+3^2$. 解得 $x=5$. 故选 D.

2. 解：（1）$\because$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中，

$AC=5$，$BC=12$，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=13$.

$\because$ 将直角边 AC 沿直线 AD 翻折，使它落在斜边 AB 上，且与 AE 重合，

$\therefore AE=AC=5$.

$\therefore EB=AB-AE=13-5=8$.

（2）设 $CD=x$，

由翻折的性质，得 $DE=CD=x$，$\angle AED=\angle C=90°$.

$\therefore \angle BED=90°$，$BD=BC-CD=12-x$.

在 $Rt\triangle BDE$ 中，

$BD^2=DE^2+EB^2$，

即 $(12-x)^2=x^2+8^2$.

解得 $x=\frac{10}{3}$.

$\therefore CD=\frac{10}{3}$.

（3）$\because DE=CD=\frac{10}{3}$，$EB=8$，$\angle BED=90°$，

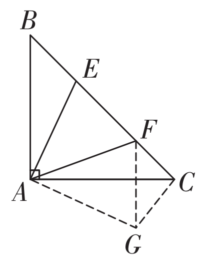
$\therefore S_{\triangle DEB}=\frac{1}{2}DE\cdot EB=\frac{1}{2}\times\frac{10}{3}\times 8=\frac{40}{3}$.

例四　解： $EF^2=BE^2+CF^2$.

理由如下：

$\because \angle BAC=90°$，$AB=AC$，

$\therefore$ 将 $\triangle ABE$ 绕点 A 顺时针旋转 $90°$ 到 $\triangle ACG$，连接 FG，如下图.



$\therefore AG=AE$，$CG=BE$，$\angle ACG=\angle B$，$\angle EAG=90°$.

$\therefore \angle FCG=\angle ACB+\angle ACG=\angle ACB+\angle B=90°$.

$\therefore GF^2=CF^2+CG^2=CF^2+BE^2$.

又 $\because \angle EAF=45°$，$\angle EAG=90°$，

$\therefore \angle GAF=90°-45°=45°$.

在 $\triangle AGF$ 和 $\triangle AEF$ 中，

$$\begin{cases}AG=AE,\\ \angle GAF=\angle EAF,\\ AF=AF,\end{cases}$$

$\therefore \triangle AGF\cong\triangle AEF$（SAS）.

$\therefore GF=EF$.

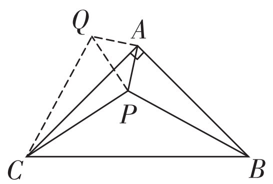
$\therefore EF^2=BE^2+CF^2$.

【点拨】本题主要考查了旋转的性质：旋转前后的两个图形全等，对应点与旋转中心的连线段的夹

角等于旋转角，对应点到旋转中心的距离相等，也考查了勾股定理以及三角形全等的判定与性质.

变式训练四

B 【解析】将$\triangle ABP$绕点A顺时针旋转90°得到$\triangle ACQ$，连接PQ，如下图所示.

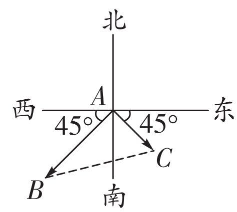


则$AQ=AP=1$，$CQ=PB=3$，$\angle QAC=\angle PAB$，$\angle PAQ=\angle CAB=90^\circ$. $\therefore PQ^2=AQ^2+AP^2=2$，且$\angle QPA=45^\circ$. 在$\triangle CPQ$中，$\because PC^2+PQ^2=7+2=9=CQ^2$，$\therefore\angle QPC=90^\circ$. $\therefore\angle CPA=\angle QPA+\angle QPC=45^\circ+90^\circ=135^\circ$. 故选B.

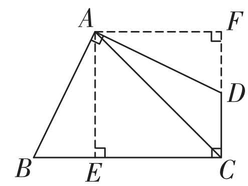
培优精练

1. D 【解析】设水池的深度为x dm，由题意，得$x^2+5^2=(x+1)^2$. 解得$x=12$. 故这个水池的深度是12 dm，故选D.

2. D 【解析】如图，连接BC. $\because$两艘轮船行驶的方向分别是西南方向和东南方向，$\therefore\angle BAC=90^\circ$. 1.5 h后，两艘轮船分别行驶了$24\times1.5=36$ (n mile)，$18\times1.5=27$ (n mile). 即$AB=36$ n mile，$AC=27$ n mile. 根据勾股定理，得$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{36^2+27^2}=45$ (n mile). 故选D.



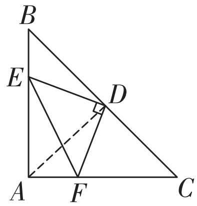
3. $\sqrt{40}$ 【解析】过A作$AE\perp BC$于点E，作$AF\perp CD$，交CD的延长线于点F，如下图.



则$\angle AEC=\angle F=\angle ECF=90^\circ$. $\therefore$四边形$AECF$为长方形. $\therefore\angle EAF=90^\circ$. $\because\angle BAD=90^\circ$，$\therefore\angle BAE+\angle EAD=\angle FAD+\angle EAD=90^\circ$. $\therefore\angle BAE=\angle FAD$. 在$\triangle ABE$和$\triangle ADF$中，$\begin{cases}\angle AEB=\angle F=90^\circ,\\ \angle BAE=\angle FAD,\\ AB=AD,\end{cases}$ $\therefore\triangle ABE\cong\triangle ADF$ (AAS). $\therefore AE=AF$，$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ADF}$. $\therefore$四边形$AECF$是正方形. $\therefore S_{\text{四边形}ABCD}=S_{\text{正方形}AECF}=20\ \text{cm}^2$. $\therefore AE^2=CE^2=20$. $\therefore AC^2=AE^2+CE^2=40$. $\therefore AC=\sqrt{40}$ cm.

名卷压轴题

证明：（1）连接 AD，如下图.



∵$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，

$AB=AC$，

∴$\angle C=\angle B=45°$.

∵D 为 BC 的中点，

∴$AD\perp BC$，$AD=BD=DC$，

AD 平分$\angle BAC$.

∴$\angle DAC=\angle BAD=45°=\angle B$，$\angle ADC=90°$.

∵$DE\perp DF$，

∴$\angle EDF=90°$.

∴$\angle ADF+\angle FDC=90°$，

$\angle FDC+\angle BDE=90°$.

∴$\angle BDE=\angle ADF$.

在$\triangle BDE$ 和$\triangle ADF$ 中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle DAF,\\ BD=AD,\\ \angle BDE=\angle ADF,\end{cases}$$

∴$\triangle BDE\cong\triangle ADF$（ASA）.

∴$DE=DF$.

（2）∵$\triangle BDE\cong\triangle ADF$，

∴$BE=AF$.

∵$\angle EDF=\angle ADC=90°$.

∴$\angle EDA+\angle ADF=\angle ADF+\angle FDC=90°$.

∴$\angle EDA=\angle FDC$.

在$\triangle ADE$ 和$\triangle CDF$ 中，

$$\begin{cases}\angle EDA=\angle FDC,\\ \angle EAD=\angle C=45°,\\ DE=DF,\end{cases}$$

∴$\triangle ADE\cong\triangle CDF$（AAS）.

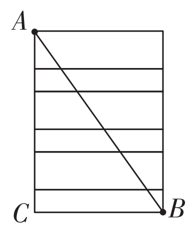
∴$AE=CF$.

∴$EF^2=AE^2+AF^2=CF^2+BE^2$，

即 $BE^2+CF^2=EF^2$.

第 3 讲　勾股定理的应用（二）

例一　解：将台阶阶梯展开成一个长方形，如下图所示.



由题意，得$\angle C=90°$，$AC=3\times 25+3\times 15=120$（cm），$BC=90$ cm，

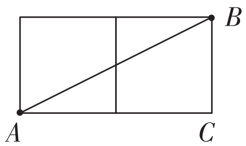
在$\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{120^2+90^2}=150$（cm）.

故这只蚂蚁从点 A 出发，沿着台阶面爬行到点 B，最短路程是 150 cm.

【点拨】本题主要考查了对勾股定理、平面展开——最短路径问题等知识点的理解和掌握. 能根据题意求出直角三角形 ABC 的斜边 AB 的长是解本题的关键.

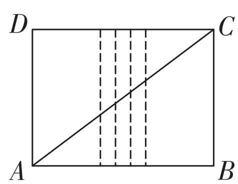
变式训练一

1. C　**【解析】**将正方体的前侧面和右侧面展开成一个长方形，如下图所示.



在直角$\triangle ABC$中，$\because \angle ACB=90°$，$AC=2$，$BC=1$，$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$. 故选C.

2. 30　**【解析】**由题意可知，将长方体木块沿与AD边平行的棱展开，然后拼接到草地中间，如下图所示.

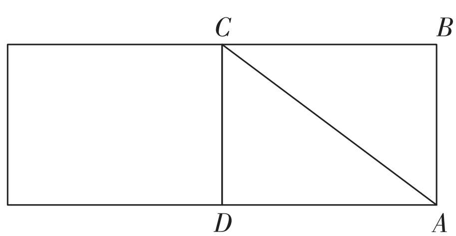


则$AB=20+2\times2=24$（m），$BC=18$ m.

在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$AC=\sqrt{24^2+18^2}=30$（m）.

故蚂蚁从点A处爬过木块到达点C处需要爬行的最短路程是30 m.

例二　B　**【解析】**将圆柱体的侧面展开，如下图所示.

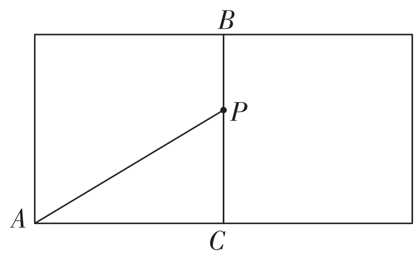


$\because$底面圆周长为8 cm，$\therefore AD=BC=4$ cm. 又$\because AB=3$ cm，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$（cm）. $\therefore$蚂蚁爬行的最短路程为5 cm. 故选B.

【点拨】本题主要考查了平面展开——最短路径问题. 解题的关键是会将圆柱的侧面展开，并利用勾股定理解答.

变式训练二

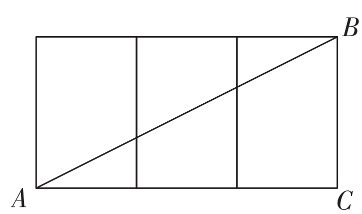
D　**【解析】**将圆柱体的侧面展开，连接AP，如下图所示. 则AP就是蚂蚁爬行的最短路线长.



则$\angle C=90°$，$AC=\frac{1}{2}\times10=5$（dm）. $\because BC=5$ dm，$PC=\frac{3}{5}BC$，$\therefore PC=\frac{3}{5}\times5=3$（dm）.

在$\mathrm{Rt}\triangle PAC$中，$PA=\sqrt{AC^2+PC^2}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$（dm）. 故蚂蚁爬行的最短路线长为$\sqrt{34}$ dm.

例三　**解：**将圆柱的侧面展开，如下图所示.



由题意，得 $AC=3\times4=12$ cm，$BC=6$ cm.

在 Rt△ABC 中，

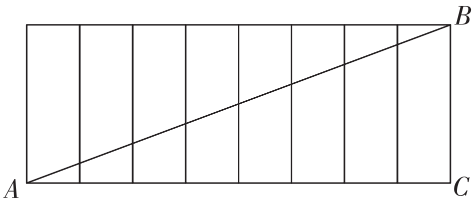
$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{12^2+6^2}=\sqrt{180}$（cm）.

故这根棉线的长度最短是 $\sqrt{180}$ cm.

【点拨】本题主要考查了圆柱体的计算、平面展开——路径最短问题. 圆柱的侧面展开图是一个长方形，此长方形的长等于圆柱底面周长，宽等于圆柱的高. 解题的关键是把圆柱的侧面展开成长方形，“化曲面为平面”，用勾股定理解决.

变式训练三

解：从点 A 开始经过 4 个侧面缠绕 2 圈到达点 B，相当于把长方体的侧面展开后，每个侧面铺 2 次，如下图所示.



展开后 $AC=1\times8=8$（cm），$BC=3$ cm.

在 Rt△ABC 中，由勾股定理，得 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{8^2+3^2}=\sqrt{73}$（cm）.

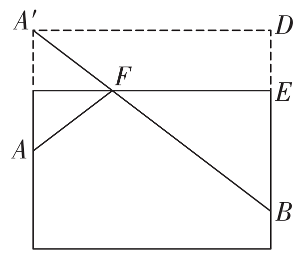
故这根细线最短是 $\sqrt{73}$ cm.

例四　解：如下图，将杯子侧面展开，作 A 关于 EF 的对称点 A'，连接$A'B$，则 $A'B$ 即为最短距离.

在直角△$A'DB$ 中，$A'D=24\times\frac{1}{2}=12$（cm），$DB=DE+BE=3+8-2=9$（cm）.

由勾股定理，得 $A'B=\sqrt{A'D^2+DB^2}=\sqrt{12^2+9^2}=15$（cm）.

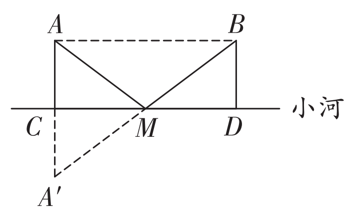
则蚂蚁从外壁 A 处到内壁 B 处的最短距离为 15 cm.



【点拨】本题主要考查了平面展开——最短路径问题. 将图形展开，利用轴对称的性质和勾股定理进行计算是解本题的关键.

变式训练四

解：(1) 如下图，点 M 即为所求.



理由如下：

作 A 关于直线 CD 的对称点 A'，连接 $A'B$ 与 CD 相交于点 M，如上图.

∵$MA=MA'$，

$\therefore MA+MB=MA'+MB$.

$\because$两点之间线段最短，

$\therefore$ 当 A'、M、B 三点共线时，$MA+MB$ 的值最小.

此时 $MA+MB$ 的最小值为 $A'B$.

(2) $\because AC=BD=3$ m，且 $AC \parallel BD$，$AC\perp CD$，

$\therefore$四边形 $ACDB$ 是长方形.

$\therefore AB=CD=8$ m，$\angle A'AB=90°$.

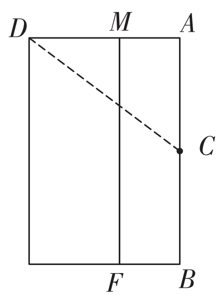
$\because AA'=2AC=6$ m，

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle AA'B$ 中，$A'B=\sqrt{AA'^2+AB^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$（m）.

$\therefore$最短路程是 10 m.

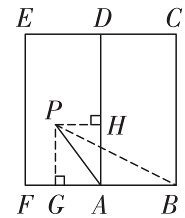
培优精练

1. 25　【解析】将长方体的前侧面和右侧面展开，如下图所示，连接 DC，则 DC 的长就是从 D 处爬到 C 处的最短路程.



在 $\mathrm{Rt}\triangle DAC$ 中，$AD=AM+DM=8+12=20$（cm），$AC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times30=15$（cm）. 由勾股定理，得 $DC=\sqrt{AD^2+AC^2}=\sqrt{20^2+15^2}=25$（cm），即从 D 处爬到 C 处的最短路程是 25 cm.

2. $\sqrt{8\,000}$ cm　【解析】将长方形 $ADEF$ 沿 AD 放平到地面上，如下图，过点 P 作 $PG\perp BF$ 于点 G，作 $PH\perp AD$ 于点 H，连接 PB.

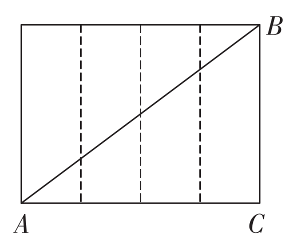


$\because AG=PH=30$ cm，$AP=AB=50$ cm，$\therefore PG=\sqrt{PA^2-AG^2}=\sqrt{50^2-30^2}=40$（cm），$BG=AB+AG=50+30=80$（cm）.

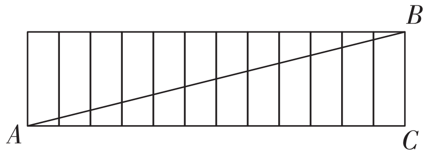
$\therefore PB=\sqrt{GB^2+GP^2}=\sqrt{80^2+40^2}=\sqrt{8\,000}$（cm）.

故这只蚂蚁爬行的最短路程为 $\sqrt{8\,000}$ cm.

3. (1) 5　【解析】将长方体的侧面展开，如下图所示. $\because$从点 A 开始经过 4 个侧面缠绕 1 圈到达点 B，$\therefore AC=4\times1=4$（cm），$BC=3$ cm. $\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$（cm）. 故所用细线最短需要 5 cm.

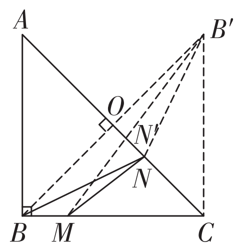


（2）$\sqrt{153}$　**【解析】**从点 A 开始经过 4 个侧面缠绕 3 圈到达点 B，相当于把长方体的侧面展开后，每个侧面铺 3 次，如下图所示.



在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AC=1\times 12=12$（cm），$BC=3$ cm，∴ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{12^2+3^2}=\sqrt{153}$（cm）. 故所用细线最短需要 $\sqrt{153}$ cm.

4. 解：过点 B 作 $BO\perp AC$ 于点 O，延长 BO 到 B'，使 $OB'=OB$，连接 MB'，交 AC 于点 N'，连接 NB'、CB'，如下图所示. 此时 $BN+MN=B'N+MN\geqslant B'M$，当 B'、N、M 三点共线时，$BN+MN$ 取得最小值为 $B'M$.



∵ $BO\perp AC$，$AB=BC$，$\angle ABC=90°$，

∴ $\angle CBO=\frac{1}{2}\times 90°=45°$.

∵ $BO=OB'$，$BO\perp AC$，

∴ $CB'=CB$.

∴ $\angle CB'B=\angle OBC=45°$.

∴ $\angle B'CB=90°$.

∴ $CB'\perp BC$.

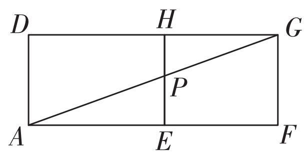
在 Rt$\triangle B'MC$ 中，$B'C=BC=8$，$MC=BC-BM=8-2=6$，

∴ $B'M=\sqrt{B'C^2+MC^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$.

故 $BN+MN$ 的最小值为 10.

名卷压轴题

解：（1）将长方体的面 $ADHE$ 与面 $EFGH$ 展开到一个平面上，如下图.



当 A、P、G 三点共线时，$S_{甲}$ 的最小值为 AG.

∵ $AE=6$ cm，$EF=AB=5$ cm，$FG=BC=4$ cm，

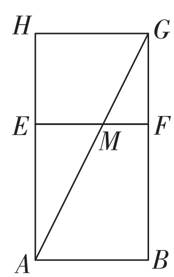
∴ $AF=AE+EF=6+5=11$（cm）.

在 Rt$\triangle AFG$ 中，

$AG=\sqrt{AF^2+FG^2}=\sqrt{11^2+4^2}=\sqrt{137}$（cm），

即 $S_{甲}$ 的最小值为 $\sqrt{137}$ cm.

将长方体的面 $ABFE$ 与面 $EFGH$ 展开在同一个平面上，如下图.



当 A、M、G 三点共线时，$S_{乙}$ 取得最小值为 AG.

$\because FG=4$ cm，$BF=AE=6$ cm，

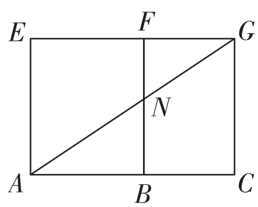
$\therefore BG=FG+BF=4+6=10$（cm）.

在 Rt$\triangle ABG$ 中，

$AG=\sqrt{AB^2+BG^2}=\sqrt{5^2+10^2}=\sqrt{125}$（cm），

即 $S_{乙}$ 的最小值为 $\sqrt{125}$ cm.

将长方体的面 $ABFE$ 与面 $GFBC$ 展开在同一个平面上，如下图.



当 A、N、G 三点共线时，$S_{丙}$ 取得最小值为 AG.

$\because AB=5$ cm，$BC=4$ cm，

$CG=AE=6$ cm，

$\therefore AC=AB+BC=5+4=9$（cm）.

在 Rt$\triangle ACG$ 中，

$AG=\sqrt{AC^2+CG^2}=\sqrt{9^2+6^2}=\sqrt{117}$（cm），

即 $S_{丙}$ 的最小值是 $\sqrt{117}$ cm.

（2）由（1）知，$S_{甲}=\sqrt{137}$ cm，$S_{乙}=\sqrt{125}$ cm，$S_{丙}=\sqrt{117}$ cm，

$\because \sqrt{137}>\sqrt{125}>\sqrt{117}$，

$\therefore$ 蚂蚁丙最先到达，蚂蚁甲最后到达.

◎勾股定理　新题型探究

例题　解：（1）等边三角形是“可爱三角形”. 理由如下：

设等边三角形的边长为 a，

$\because a^2+a^2=2a^2$，

$\therefore$ 等边三角形是“可爱三角形”.

（2）该三角形不是“可爱三角形”. 理由如下：

$\because 2^2=4$，$(\sqrt{17})^2=17$，$3^2=9$，

$\therefore 2^2+(\sqrt{17})^2\neq 2\times 3^2$，

$2^2+3^2\neq 2\times(\sqrt{17})^2$，

$(\sqrt{17})^2+3^2\neq 2\times 2^2$.

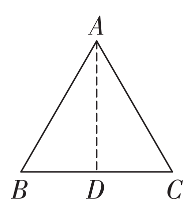
$\therefore$ 该三角形不是“可爱三角形”.

【点拨】 本题主要考查了等边三角形的性质和阅读理解能力. 理解材料中的“可爱三角形”的定义是解本题的关键.

变式训练

解：（1）$\triangle ABC$ 不是“美好三角形”. 理由如下：

如下图，作 BC 边上的中线 AD.



$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，AD 是中线，$AB=BC=AC=2$，

$\therefore AD\perp BC$，$CD=\dfrac{1}{2}BC=1$.

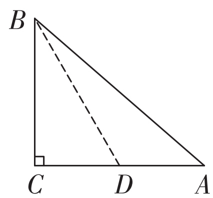
在Rt$\triangle ACD$中，$AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

$\because BC=2$，$\therefore AD<BC$.

同理可证，AB边上的中线小于AB，AC边上的中线小于AC，

$\therefore \triangle ABC$不是“美好三角形”.

（2）①如下图，作AC的中线BD.



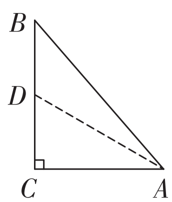
$\because \triangle ABC$是“美好三角形”，

当$BD=AC=6$时，

$CD=\frac{1}{2}AC=3$.

由勾股定理，得$BC=\sqrt{BD^2-CD^2}=\sqrt{6^2-3^2}=\sqrt{27}$.

②如下图，作BC的中线AD.



$\because \triangle ABC$是“美好三角形”，

当$BC=AD$时，

$CD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD$.

由勾股定理，得$CD^2+AC^2=AD^2$.

$\therefore CD^2+6^2=AD^2$，

即$CD^2+6^2=(2CD)^2$.

解得$CD=\sqrt{12}$或$CD=-\sqrt{12}$（舍去）.

$\therefore BC=2CD=2\sqrt{12}$.

综上所述，BC的长为$\sqrt{27}$或$2\sqrt{12}$.

培优精练

解：（1）$\because 9=3\times 3$，$12=4\times 3$，$16\neq 5\times 3$，

$\therefore 9$、12、16不是“派生勾股数”；

$\because 10=5\times 2$，$24=12\times 2$，$26=13\times 2$，

$\therefore 10$、24、26是“派生勾股数”.

（2）把勾股数3、4、5同时乘以3可得9、12、15，

$\because 15-12=3$，

$\therefore 9$、12、15是“新新勾股数”.

把勾股数5、12、13同时乘以3可得15、36、39，

$\because 39-36=3$，

$\therefore 15$、36、39是“新新勾股数”.

把勾股数7、24、25同时乘以3可得21、72、75，

$\because 75-72=3$，

$\therefore 21$、72、75是“新新勾股数”.

把勾股数9、40、41同时乘以3可得27、120、123，

$\because 123-120=3$，

$\therefore 27$、120、123是“新新勾股数”.

把勾股数11、60、61同时乘以3

可得 33、180、183，

∵$183-180=3$，

∴33、180、183 是“新新勾股数”.

综上所述，斜边小于 200 的所有“新新勾股数”有 9、12、15；15、36、39；21、72、75；27、120、123；33、180、183.

第十五章　数据的收集与表示

例一　解：(1) ∵$5\div 0.1=50$（人），

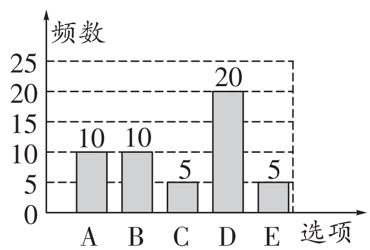
故这次调查抽取的学生有 50 人.

(2) $m=\frac{10}{50}=0.2$，

$n=0.2\times 50=10$，

$p=0.4\times 50=20$.

补全条形统计图如下：



(3) ∵$800\times(0.1+0.4)=800\times 0.5=400$（人），

故估计全校 800 人中，利用手机购物或玩游戏的共有 400 人.

【点拨】本题考查的是条形统计图的综合运用. 读懂统计图和表，从统计图和表中得到必要的信息是解决问题的关键.

变式训练一

A　**【解析】**由统计图，得喜欢老师 B 的人数最多，人数为 25. 故选 A.

例二　(1) 50　**【解析】**设本次共调查了 x 名学生，∵由统计表中的数据可知，喜欢羽毛球的有 10 人. 由扇形统计图可知，喜欢羽毛球的人数是总人数的 20%，

∴$\frac{10}{x}\times 100\%=20\%$，解得 $x=50$.

故本次共调查学生 50 名.

(2) 15　**【解析】**由统计图可知，喜欢篮球的人数占调查总人数的 30%. 又共有 50 人参加调查，∴$a=50\times 30\%=15$.

(3) 36°　**【解析】**由统计表可知，喜欢跳绳的有 5 人. 又本次调查的总人数为 50，∴$\frac{5}{50}=\frac{1}{10}$.

∴“跳绳”对应的扇形的圆心角的度数为$\frac{1}{10}\times 360°=36°$.

【点拨】本题主要考查的是扇形统计图、统计表的知识. 根据扇形统计图中喜欢羽毛球的人数占参加调查总人数的百分比求出参加调查的总人数是解本题的关键.

变式训练二

1. C　**【解析】**对于 A，前年①的收入为$60\,000\times\frac{117}{360}=19\,500$（元），

去年①的收入为$80\,000\times\frac{117}{360}=$

26 000（元），因此选项 A 错误；对于 B，前年③的收入所占比值为 $\frac{360-135-117}{360}\times 100\% = 30\%$，去年③的收入所占比值为 $\frac{360-117-126}{360}\times 100\% = 32.5\%$，故③的收入所占比值去年的比前年的大，因此选项 B 错误；对于 C，去年②的收入为 $80\,000\times\frac{126}{360}=28\,000=2.8$（万元），因此选项 C 正确；对于 D，由前年依据①②③三种农作物每种作物每年的收入占该年年收入的比绘制的扇形统计图可知，前年年收入即为①②③三种农作物的收入，因此选项 D 错误．故选 C.

2. （1）5　**【解析】**参加篮球定时定点投篮训练的人数是 $2+1+4+7+8+2=24$．则训练后篮球定时定点投篮测试中人均进球数为 $\frac{8\times2+7\times1+6\times4+5\times7+4\times8+3\times2}{24}=5$（个）.

（2）10%　40　**【解析】**由扇形统计图可知，选择长跑训练的人数占全班人数的百分比为 $1-60\%-10\%-20\%=10\%$．由（1）知，参加篮球定时定点投篮训练的人数为 24．由扇形统计图可知，其所占全班人数的百分比为 60%，则全班同学的人数为 $24\div60\%=40$.

（3）**解：**设参加训练之前的人均进球数为 x，

由（1）知，训练后篮球定时定点投篮测试中人均进球数为 5，

则 $x(1+25\%)=5$，解得 $x=4$.

故参加训练之前的人均进球数是 4.

例三　4　**【解析】**由折线统计图可知，4 月份出售该种水果每千克赚的钱最多.

【点拨】本题考查的目的是理解并掌握折线统计图的特点及作用，并且能够根据统计图提供的信息解决有关的实际问题.

变式训练三

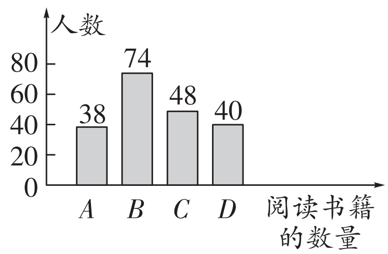
①③　**【解析】**由纵坐标看出 1 月份的增长率是 10%，2 月份的增长率是 5%，3 月份的增长率是 8%，故①说法正确；2 月份比 1 月份增长 5%，故②说法错误；1 月份的增长率是 10%，2 月份的增长率是 5%，3 月份的增长率是 8%，故③说法正确．故答案为①③.

例四　**解：**（1）$38\div19\%=200$（人）.

故本次共调查的教师的人数是 200.

（2）D组的频数为$200-38-74-48=40$，补全条形统计图如下图.

中小学教师每年阅读书籍数量条形统计图



（3）$360°\times\frac{40}{200}=72°$.

【点拨】本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用. 读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键.

变式训练四

B　【解析】甲校喜欢文学类书籍的人数所占百分比为$\frac{120}{120+200+120+160}\times100\%=20\%$. 由扇形统计图可知，乙校喜欢文学类书籍的人数所占百分比为25%. ∴乙校比甲校大. 故选B.

培优精练

1. D　【解析】由题意知，选择鲳鱼的有24人，占总人数的百分比是20%，∴调查总人数为$24\div20\%=120$. 故选择黄鱼的人数为$120\times40\%=48$. 故选D.

2. 150　【解析】∵跳绳次数不少于100次的同学占96%，∴第一组的频率为$1-0.96=0.04$. 又前两组的频率之和是0.12，∴第二组的频率为$0.12-0.04=0.08$. 由统计图可知，第二组的频数为12，∴本次抽调的总人数为$\frac{12}{0.08}=150$.

3. （1）0.3　6　【解析】由题意，得问卷调查的总人数是$\frac{40}{0.4}=100$. ∴$a=\frac{30}{100}=0.3$，$b=100\times0.06=6$.

（2）**解：** 类别为B的学生人数所对应的扇形圆心角的度数是$360°\times0.4=144°$.

（3）**解：** 根据题意，得$1\,000\times0.06=60$（名）.

故该校1 000名学生中，估计类别为D的人数为60.

4. **解：**（1）由题意，得选择交通监督志愿者队伍的人数是$12+15+13+14=54$，

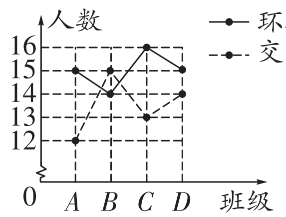
∴选择交通监督志愿者队伍的百分比是$\frac{54}{200}\times100\%=27\%$.

故扇形统计图中交通监督所在扇形的圆心角的度数是$360°\times27\%=97.2°$.

（2）D 班选择环境保护的学生人数是 $200\times30\%-15-14-16=15$.

补全折线统计图如下图所示.

四个班级选择交通监督和环境保护志愿者队伍的学生人数的折线统计图



（3）根据题意，得

$1\,500\times(1-30\%-27\%-5\%)=570$（人），

即估计该校 1 500 名学生中选择文明宣传志愿者队伍的学生人数是 570.

名卷压轴题

解：（1）$a=100-(10+40+30)=20$.

由题意，得 4 款软件总利润为

$1\,200\div40\%=3\,000$（万元）.

$\therefore m=3\,000-(1\,200+560+280)=960$.

（2）网购软件的人均创造利润为

$\dfrac{960}{20\times30\%}=160$（万元），

视频软件的人均创造利润为

$\dfrac{560}{20\times20\%}=140$（万元）.

（3）能．调整方案如下：

设调整后网购软件的研发与维护人数为 x，则视频软件的研发与维护人数为 $10-x$.

根据题意，得$1\,200+280+160x+140(10-x)=3\,000+60$.

解得 $x=9$.

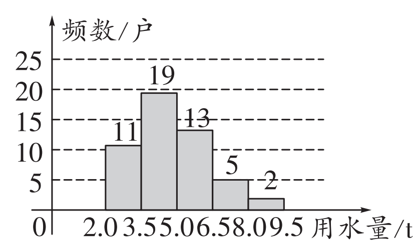
即安排 9 人负责网购软件、安排 1 人负责视频软件，则可以使总利润增加 60 万元.

◎数据的收集与表示

新题型探究

例题　解：（1）补全统计图表如下：

用水量分组	划记	频数
$2.0<x\leqslant3.5$	正正一	11
$3.5<x\leqslant5.0$	正正正止	19
$5.0<x\leqslant6.5$	正正下	13
$6.5<x\leqslant8.0$	正	5
$8.0<x\leqslant9.5$	丅	2
合计		50



（2）根据频数分布直方图可知，用水量在 $3.5<x\leqslant5.0$ 的户数最多，10％的家庭的月均用水量在

$6.5<x\leqslant 8.0$.（答案不唯一）

(3) 要使 60% 的家庭水费不受影响，家庭月均用水量的标准应该定为 5 t.

∵样本中月均用水量小于等于 5 t 的户数占调查总户数的 60%.

【点拨】本题主要考查了频数分布直方图和频数分布表. 掌握频数统计的方法是正确解答的前提.

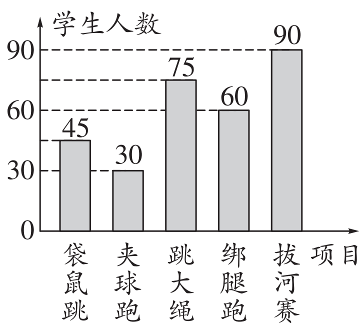
变式训练

解：(1) 由题意，得参加调查的学生人数为 $45\div 15\%=300$.

∴$a=300\times 10\%=30$，

$b=300\times 20\%=60$.

(2) 补全的条形统计图如下图所示.



(3) ∵$2\,500\times 20\%=500$（人），

故估计该校 2 500 名学生中最喜欢绑腿跑的有 500 人.

培优精练

解：(1) 设剪去的小正方形的边长为 x cm，则长方体的长为 $(10-2x)$ cm，宽为 $(10-2x)$ cm，高为 x cm. ∴制作成的无盖长方体盒子的容积为 $x(10-2x)^2$ cm³.

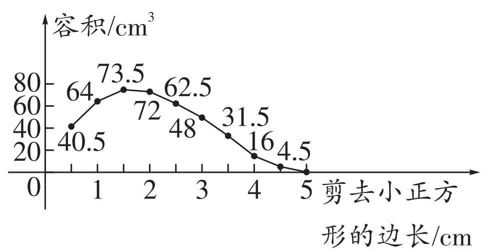
则当 $x=1.5$ 时，$x(10-2x)^2=1.5\times(10-3)^2=73.5$；

当 $x=3$ 时，$x(10-2x)^2=3\times(10-6)^2=48$.

填表如下：

剪去小正方形的边长/cm	0.5	1	1.5	2	2.5
容积/cm³	40.5	64	73.5	72	62.5
剪去小正方形的边长/cm	3	3.5	4	4.5	5
容积/cm³	48	31.5	16	4.5	0

以剪去的小正方形的边长为横轴，容积为纵轴绘制折线统计图如下图所示.



(2) 由表中数据和统计图可知，随着剪去的小正方形的边长的增大，所制成的无盖长方体盒子的容积先增大后减小.

(3) 根据统计图和统计表中的数据可知，当 $x=1.5$ 时，此时无盖长方体盒子的容积最大为 73.5 cm³.