点金训练

教师用书

《点金训练》编写组 编

数学

必修第一册

配人教A版

四川教育出版社

CONTENTS

目录

第一章 集合与常用逻辑用语

1.1 集合的概念 …… 1
第1课时 集合的概念 …… 1
第2课时 集合的表示 …… 4
1.2 集合间的基本关系 …… 9
1.3 集合的基本运算 …… 14
第1课时 并集与交集 …… 14
第2课时 补集及综合应用 …… 18
1.4 充分条件与必要条件 …… 22
1.4.1 充分条件与必要条件 …… 22
1.4.2 充要条件 …… 26
1.5 全称量词与存在量词 …… 30
1.5.1 全称量词与存在量词 …… 30
1.5.2 全称量词命题和存在量词命题的否定 …… 34

第二章 一元二次函数、方程和不等式

2.1 等式性质与不等式性质 …… 38
第1课时 不等关系与比较大小 …… 38
第2课时 不等式的性质 …… 42
2.2 基本不等式 …… 46
第1课时 基本不等式 …… 46
第2课时 基本不等式的应用 …… 50
2.3 二次函数与一元二次方程、不等式 …… 54
第1课时 一元二次不等式的解法 …… 54
第2课时 一元二次不等式的应用 …… 58

第三章 函数的概念与性质

3.1 函数的概念及其表示 …… 62
3.1.1 函数的概念 …… 62
第1课时 函数的概念 …… 62
第2课时 函数概念的应用 …… 66
3.1.2 函数的表示法 …… 70
第1课时 函数的表示法 …… 70
第2课时 分段函数及其应用 …… 74
3.2 函数的基本性质 …… 79
3.2.1 单调性与最大(小)值 …… 79
第1课时 函数的单调性 …… 79
第2课时 函数的最大(小)值 …… 83
3.2.2 奇偶性 …… 88
第1课时 函数的奇偶性 …… 88
第2课时 函数的奇偶性的应用 …… 92
3.3 幂函数 …… 96
3.4 函数的应用(一) …… 101

第四章 指数函数与对数函数

4.1 指数 …… 106
4.1.1 n 次方根与分数指数幂 …… 106
4.1.2 无理数指数幂及其运算性质 …… 110
4.2 指数函数 …… 113
4.2.1 指数函数的概念 …… 113

4.2.2 指数函数的图象和性质 …… 117
第 1 课时 指数函数的图象和性质 …… 117
第 2 课时 指数函数的图象和性质的应用 …… 121
4.3 对数 …… 126
4.3.1 对数的概念 …… 126
4.3.2 对数的运算 …… 129
4.4 对数函数 …… 134
4.4.1 对数函数的概念 …… 134
4.4.2 对数函数的图象和性质 …… 137
第 1 课时 对数函数的图象和性质 …… 137
第 2 课时 对数函数的图象和性质的应用 …… 141
4.4.3 不同函数增长的差异 …… 146
4.5 函数的应用(二) …… 151
4.5.1 函数的零点与方程的解 …… 151
4.5.2 用二分法求方程的近似解 …… 155
4.5.3 函数模型的应用 …… 159

第五章 三角函数

5.1 任意角和弧度制 …… 164
5.1.1 任意角 …… 164
5.1.2 弧度制 …… 169
5.2 三角函数的概念 …… 173
5.2.1 三角函数的概念 …… 173
第 1 课时 三角函数的概念 …… 173
第 2 课时 三角函数的一些简单性质 …… 177
5.2.2 同角三角函数的基本关系 …… 180
5.3 诱导公式 …… 184
第 1 课时 诱导公式二～四 …… 184
第 2 课时 诱导公式五、六 …… 188
5.4 三角函数的图象与性质 …… 192
5.4.1 正弦函数、余弦函数的图象 …… 192
5.4.2 正弦函数、余弦函数的性质 …… 198
第 1 课时 正弦函数、余弦函数的周期性与奇偶性 …… 198
第 2 课时 正弦函数、余弦函数的单调性与最值 …… 203
5.4.3 正切函数的性质与图象 …… 208
5.5 三角恒等变换 …… 214
5.5.1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式 …… 214
第 1 课时 两角差的余弦公式 …… 214
第 2 课时 两角和与差的正弦、余弦、正切公式 …… 218
第 3 课时 二倍角的正弦、余弦、正切公式 …… 223
5.5.2 简单的三角恒等变换 …… 228
第 1 课时 半角公式及应用 …… 228
第 2 课时 三角恒等变换的综合应用 …… 231
5.6 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ …… 237
第 1 课时 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象变换 …… 237
第 2 课时 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的性质 …… 243
5.7 三角函数的应用 …… 249

第一章　集合与常用逻辑用语

1.1　集合的概念

第1课时　集合的概念

学习任务目标

1.通过实例了解集合的含义.
2.理解元素与集合的"属于"与"不属于"关系;熟记常用数集专用符号.
3.理解集合中元素的特性,并能够用其解决有关问题.

问题式预习

知识清单

知识点一　元素与集合的相关概念

(1)元素:一般地,把研究对象统称为元素,常用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.
(2)集合:把一些元素组成的总体叫做集合(简称为集),常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.
(3)集合相等:只要构成两个集合的元素是一样的,就称这两个集合是相等的.
(4)集合中元素的特性:确定性、互异性和无序性.

知识点二　元素与集合的关系

关系	概念	记法	读法
属于	如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于集合 A	$a\in A$	a 属于 A
不属于	如果 a 不是集合 A 中的元素,就说 a 不属于集合 A	$a\notin A$	a 不属于 A

知识点三　常用数集及其记法

数集	意义	符号
非负整数集(或自然数集)	全体非负整数组成的集合	$\mathbf{N}$
正整数集	全体正整数组成的集合	$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$
整数集	全体整数组成的集合	$\mathbf{Z}$
有理数集	全体有理数组成的集合	$\mathbf{Q}$
实数集	全体实数组成的集合	$\mathbf{R}$

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").
(1)某校所有性格开朗的女生能构成一个集合.(　　)
× **解析**:因为"性格开朗"没有明确的划分标准,所以某校所有性格开朗的女生不能构成一个集合.
(2)分别由元素0,1,2和2,0,1组成的两个集合是相等的.(　　)
√ **解析**:只要构成两个集合的元素是一样的,这两个集合就相等,与元素的先后顺序无关.
(3)$a\in A$ 与 $a\notin A$ 这两种情况有且只有一种成立.(　　)
√ **解析**:元素与集合之间是属于或不属于的关系,二者只成立其一.
(4)如果坐标平面内所有的点组成的集合为 B,那么 $1\in B$.(　　)
× **解析**:集合 B 是点集,$1\notin B$.

2.用符号"$\in$"或"$\notin$"填空.
2 __$\in$__ $\mathbf{N}$;-3 __$\notin$__ $\mathbf{N}$;$\sqrt{3}$ __$\notin$__ $\mathbf{Z}$;
$\frac{1}{2}$ __$\in$__ $\mathbf{Q}$;π __$\in$__ $\mathbf{R}$.

3.请思考并回答下列问题:
(1)英文单词book的所有字母能否组成一个集合?若能组成一个集合,则该集合中有几个元素?为什么?
提示:能,因为集合中的元素是确定的(确定性).该集合中有三个元素,因为集合中的元素是互不相同的(互异性).
(2)自然数集与正整数集有何区别?
提示:自然数集包括元素0,而正整数集不包括元素0.

任务型课堂

学习任务一　集合的有关概念

1.下列各组对象中能构成集合的是　(　　)

A.充分接近$\sqrt{3}$的实数

B.数学成绩比较好的同学

C.小于 20 的所有自然数

D.未来世界的高科技产品

C　**解析**:集合中元素的特性:确定性、无序性、互异性.选项 A,B,D 中集合的元素均不满足确定性,只有 C 中的元素是确定的,满足集合的定义.

2.下列各组中集合 P 与 Q 表示同一个集合的是　(　　)

A.P 是由元素 $1,\sqrt{3},\pi$ 构成的集合,Q 是由元素 π,$1,|-\sqrt{3}|$构成的集合

B.P 是由 π 构成的集合,Q 是由 3.141 59 构成的集合

C.P 是由 2,3 构成的集合,Q 是由有序数对(2,3)构成的集合

D.P 是由满足不等式 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 的自然数 x 构成的集合,Q 是方程 $x^2=1$ 的解集

A　**解析**:因为选项 A 中 P,Q 的元素完全相同,所以 P 与 Q 表示同一个集合,而选项 B,C,D 中 P,Q 的元素不相同,所以 P 与 Q 不能表示同一个集合.故选 A.

反思提炼

判断一组对象能否组成集合的策略

(1)注意集合中元素的确定性.看是否具有一个明确的标准,使得对于任何一个对象,都能判断其是否符合此标准.若具有此“标准”,就可以组成集合;否则,不能组成集合.

(2)注意集合中元素的互异性、无序性.

学习任务二　元素与集合的关系

例 1　(1)(多选)集合 M 是由大于-2 且小于 1 的实数构成的,则下列关系正确的是　(　　)

A.$\sqrt{5}\in M$　　B.$0\in M$

C.$1\in M$　　D.$-\dfrac{\pi}{2}\in M$

BD　**解析**:$\sqrt{5}>1$,故 A 错误;$-2<0<1$,故 B 正确;$1\notin M$,故 C 错误;$-2<-\dfrac{\pi}{2}<1$,故 D 正确.

(2)已知集合 A 中的元素 x 满足 $2x+a>0,a\in\mathbf{R}$,若 $1\notin A,2\in A$,则实数 a 的取值范围为________.

$\{a|-4\leqslant a\leqslant -2\}$　**解析**:因为 $1\notin A,2\in A$,所以 $\begin{cases}2\times 1+a\leqslant 0,\\2\times 2+a>0,\end{cases}$即$-4<a\leqslant -2$.

反思提炼

判断元素与集合关系的两种方法

(1)直接法

①使用前提:集合中的元素是直接给出的.

②判断方法:首先明确已知集合是由哪些元素构成的,然后判断所给元素在集合中是否出现.

(2)推理法

①使用前提:集合中的元素不易直接给出.

②判断方法:首先明确已知集合的元素具有什么特征,然后判断所给元素是否满足集合中元素所具有的特征.

探究训练

1.下列元素与集合的关系判断正确的是　(　　)

A.$0\in\mathbf{N}$　　B.$\pi\in\mathbf{Q}$

C.$\sqrt{2}\in\mathbf{Q}$　　D.$-1\notin\mathbf{Z}$

A　**解析**:因为 $0\in\mathbf{N},\pi\notin\mathbf{Q},\sqrt{2}\notin\mathbf{Q},-1\in\mathbf{Z}$,所以只有 A 正确.

2.设集合 B 是小于$\sqrt{11}$的所有实数组成的集合,则 $2\sqrt{3}$______B,$1+\sqrt{2}$______B.(填“$\in$”或“$\notin$”)

$\notin$　$\in$　**解析**:因为 $2\sqrt{3}=\sqrt{12}>\sqrt{11}$,所以 $2\sqrt{3}\notin B$.因为$(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}<3+2\times 4=11$,所以 $1+\sqrt{2}<\sqrt{11}$,所以 $1+\sqrt{2}\in B$.

学习任务三　集合中元素的特性及应用

例 2　已知集合 A 中含有两个元素 1 和 a^2,若 $a\in A$,求实数 a 的值.

解:由题意可知 $a=1$ 或 $a^2=a$.若 $a=1$,则 $a^2=1$,这与 $a^2\neq 1$ 相矛盾,故 $a\neq 1$.若 $a^2=a$,则 $a=0$ 或 $a=1$(舍去).又当 $a=0$ 时,集合 A 中含有元素 1 和 0,满足集合中元素的互异性,符合题意.所以实数 a 的值为 0.

［一题多思］

思考 1. 解答此类问题，利用分类讨论的方法求出字母的值后要注意什么问题？

提示： 不要忘记验证集合中元素的互异性.

思考 2. 在本例中，若把“$a\in A$”去掉，实数 a 的取值范围是怎样的？

提示： 由元素的互异性，得 $a^2\neq 1$，即 $a\neq\pm 1$.

思考 3. 若把本例条件改为“集合 A 中含有两个元素 a 和 a^2”，求实数 a 的取值范围.

提示： 因为集合 A 中有两个元素 a 和 a^2，所以 $a\neq a^2$，解得 $a\neq 0$ 且 $a\neq 1$.

反思提炼

由集合中元素的特性求参数的值(范围)的步骤

(1)根据集合中元素的确定性，求出参数的值(范围)；

(2)根据集合中元素的互异性，对求出的值(范围)进行检验；

(3)写出符合题意的参数的值(范围).

探究训练

已知集合 A 中含有元素 $1,a,a-2$，且 $3\in A$，则实数 a 的值为　　(　　)

A.3　　B.5

C.3 或 5　　D.无解

B　**解析：** 由题意得 $a-2=3$ 或 $a=3$. 当 $a-2=3$，即 $a=5$ 时，集合 A 中的元素为 $1,5,3$，满足题意；当 $a=3$ 时，$a-2=1$，不满足集合中元素的互异性，故舍去. 综上可得，a 的值为 5.

体系构建

- 集合的概念
  - 概念
    - 集合
    - 元素的特性
      - 确定性
      - 互异性
      - 无序性
  - 元素与集合的关系
    - 属于 ∈
    - 不属于 ∉
  - 常用数集
    - **R，Q，N，Z，N*或N+**

课后素养评价(一)

基础性·能力运用

1. 下列各组对象不能构成集合的是　　(　　)

A.拥有手机的人

B.2023 年高考数学难题

C.所有有理数

D.小于 π 的正整数

B　**解析：** 拥有手机的人具有确定性，能构成集合，故 A 正确；数学难题定义不明确，不符合集合的定义，故 B 不正确；有理数具有确定性，能构成集合，故 C 正确；小于 π 的正整数具有确定性，能构成集合，故 D 正确.

2. (多选)下列结论正确的是　　(　　)

A.$\frac{1}{3}\in\mathbf{Z}$　　B.$\sqrt{2}\in\mathbf{R}$

C.$0\in\mathbf{N}^*$　　D.$\pi\notin\mathbf{Q}$

BD　**解析：** 因为 $\frac{1}{3}\notin\mathbf{Z}$，故 A 错误；因为 $\sqrt{2}\in\mathbf{R}$，故 B 正确；因为 $0\notin\mathbf{N}^*$，故 C 错误；又 $\pi\notin\mathbf{Q}$，故 D 正确.

3. 若一个集合中的三个元素 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，则此三角形一定不是　　(　　)

A.锐角三角形　　B.直角三角形

C.钝角三角形　　D.等腰三角形

D　**解析：** 由集合中元素的互异性可知，$\triangle ABC$ 的三边长两两不等，故一定不是等腰三角形.

4. 若 $1\in A$，且集合 A 与集合 B 相等，则 1 ________ B.(填“∈”或“∉”)

∈　**解析：** 由集合相等的定义可知，$1\in B$.

5. 若 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a\neq 0,b\neq 0$，则 $\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}$ 的所有可能取值组成的集合中元素的个数为________，所有元素的和为________.

3　0　**解析：** 当 a,b 同正时，$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}=\frac{a}{a}+\frac{b}{b}=1+1=2$；

当 a,b 同负时，$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}=-1-1=-2$；

当 a,b 异号时，$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}=0$.

所以 $\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}$ 的可能取值所组成的集合中元素共有 3 个，且 3 个元素的和为 $2+(-2)+0=0$.

6. 设 A 表示由 $a^2+2a-3,2,3$ 构成的集合，B 表示由 $2,|a+3|$ 构成的集合. 已知 $5\in A$，且 $5\notin B$，求实数 a 的值.

解： 因为 $5\in A$，所以 $a^2+2a-3=5$，

解得 $a=2$ 或 $a=-4$.

当 $a=2$ 时，$|a+3|=5$；

当 $a=-4$ 时，$|a+3|=1$.

又 $5\notin B$，所以 $a=-4$.

综合性·创新提升

1. 下列结论中正确结论的个数为　　(　　)

①$\mathbf{N}$ 中最小的元素是 1；

②若 $a\in\mathbf{N}$，$b\in\mathbf{N}$，则 $a+b$ 的最小值是 2；

③$|-\sqrt{3}|\in\mathbf{Q}$.

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

A　**解析**：自然数集 $\mathbf{N}$ 中最小的元素是 0，故①不正确；当 $a=b=0$ 时，$a+b$ 的最小值是 0，故②不正确；$|-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$ 是无理数，故③不正确.故选 A.

2.（多选）下列给出的对象构成的集合中的元素个数是有限的是　　(　　)

A.方程 $x^2-6x-16=0$ 的根

B.大于 0 且小于 5 的实数

C.小于 22 的质数

D.倒数等于它本身的实数

ACD　**解析**：方程 $x^2-6x-16=0$ 的根为 $-2,8$；大于 0 且小于 5 的实数有无数个；小于 22 的质数为 $2,3,5,7,11,13,17,19$；倒数等于它本身的实数为 ±1.故选 ACD.

3.（新定义）设集合 A 含有 $-2,1$ 两个元素，集合 B 含有 $-1,2$ 两个元素.定义集合 $A\odot B$：当且仅当 $x_1\in A$，$x_2\in B$ 时，$x_1x_2\in A\odot B$.则 $A\odot B$ 中所有元素之积为　　(　　)

A.-8　　B.-16　　C.8　　D.16

C　**解析**：集合 $A\odot B$ 中有 $-4,-1,2$ 三个元素，故所有元素之积为 8.

4. 已知集合 P 中的元素 x 满足 $x\in\mathbf{N}$，且 $2<x<a$.若集合 P 中恰有三个元素，则整数 $a=$________.

6　**解析**：$x\in\mathbf{N}$，$2<x<a$，且集合 P 中恰有三个元素，结合数轴（图略）知 $a=6$.

5. 若由 $a,\dfrac{b}{a},1$ 组成的集合 A 与由 $a^2,a+b,0$ 组成的集合 B 相等，则 $a^{2\,024}+b^{2\,024}$ 的值为________.

1　**解析**：由已知可得 $a\neq0$，因为两集合相等，又 $1\neq0$，所以 $\dfrac{b}{a}=0$，所以 $b=0$，所以 $a^2=1$，即 $a=\pm1$.

当 $a=1$ 时，集合 A 和集合 B 中的元素都不满足互异性，舍去，当 $a=-1$ 时，$A=\{-1,0,1\}$，$B=\{1,-1,0\}$，满足题意.所以 $a^{2\,024}+b^{2\,024}=1$.

6. 设集合 D 是满足方程 $y=x^2$ 的有序实数对 (x,y) 构成的集合，则 -1________D，$(-1,1)$________D.（填“$\in$”或“$\notin$”）

$\notin$　$\in$　**解析**：由于集合 D 中的元素是有序实数对 (x,y)，而 -1 是数，所以 $-1\notin D$.

又 $(-1)^2=1$，所以 $(-1,1)\in D$.

7. 设 A 是由满足不等式 $x<6$ 的自然数构成的集合.若 $a\in A$ 且 $3a\in A$，求 a 的值.

解：因为 $a\in A$ 且 $3a\in A$，所以 $\begin{cases}a<6,\\3a<6,\end{cases}$ 解得 $a<2$.

又 $a\in\mathbf{N}$，所以 $a=0$ 或 1.

第 2 课时　集合的表示

学习任务目标
1. 掌握集合的两种常用表示方法——列举法和描述法.
2. 通过实例选择自然语言、集合语言描述不同的具体问题，感受集合语言的意义和作用.

问题式预习

知识清单

知识点一　列举法

1. 定义：把集合的所有元素<u>一一列举</u>出来，并用花括号“{　}”括起来表示集合的方法.

2. 形式：$\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$.

知识点二　描述法

1. 定义：一般地，设 A 是一个集合，我们把集合 A 中所有具有<u>共同特征</u> $P(x)$ 的元素 x 所组成的集合表示为<u>$\{x\in A\mid P(x)\}$</u>，这种表示集合的方法称为描述法.

2. 形式：$\{x\in A\mid P(x)\}$.

概念辨析

1. 判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)$\mathbf{Q}$={全体有理数}.　(　　)

×　**解析**:集合的"{　}"已包含所有的意思,{整数}即代表整数集 $\mathbf{Z}$.

(2)大于-2且小于2的整数构成的集合不能用列举法表示.　(　　)

×　**解析**:能,$\{-1,0,1\}$.

(3)集合$\{(0,1)\}$中的元素是0和1.　(　　)

×　**解析**:集合中的元素为$(0,1)$.

(4)$\{x|x>3\}$与$\{y|y>3\}$是相等集合.　(　　)

√　**解析**:都表示由大于3的数构成的集合.

2. 把集合$\{x|x^2-4x+3=0\}$用列举法表示为______.

$\{1,3\}$　**解析**:集合$\{x|x^2-4x+3=0\}$表示由方程$x^2-4x+3=0$的解构成的集合,用列举法表示为$\{1,3\}$.

3. 请思考并回答下列问题:

(1)元素无限的集合不能用列举法表示吗?

提示:不一定,元素无限,但排列又呈现一定的规律,在不至于发生误解的情况下,也可列出几个元素作代表,其他元素用省略号表示,如 $\mathbf{N}$ 可表示为$\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

(2)用描述法表示集合时需要注意哪些问题?

提示:①应先弄清楚集合中元素的属性,是数集、点集还是其他的类型.一般地,数集用一个字母代表其元素,而点集则用一个有序数对来代表其元素.

②若描述部分出现元素记号以外的字母,则需对新字母说明其含义或取值范围.

③应当准确使用"且"和"或",所有描述的内容都要写在集合内.

任务型课堂

学习任务一　用列举法表示集合

1. 方程组$\begin{cases}x-y=3,\\2x+y=6\end{cases}$的解构成的集合为　(　　)

A.$\{x=3,y=0\}$

B.$\{(3,0)\}$

C.$\{3,0\}$

D.$\{0,3\}$

B　**解析**:由$\begin{cases}x-y=3,\\2x+y=6,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=3,\\y=0.\end{cases}$

则方程组$\begin{cases}x-y=3,\\2x+y=6\end{cases}$的解构成的集合是$\{(3,0)\}$.

2. 直线$y=x+2\ 023$与坐标轴的交点所组成的集合用列举法表示为____________________,该集合由________个元素组成.

$\{(0,2\ 023),(-2\ 023,0)\}$　2　**解析**:将$x=0$代入$y=x+2\ 023$,得$y=2\ 023$,即直线$y=x+2\ 023$与y轴的交点是$(0,2\ 023)$;将$y=0$代入$y=x+2\ 023$,得$x=-2\ 023$,即直线$y=x+2\ 023$与x轴的交点是$(-2\ 023,0)$.故直线$y=x+2\ 023$与坐标轴的交点组成的集合是$\{(0,2\ 023),(-2\ 023,0)\}$,共2个元素.

反思提炼

用列举法表示集合的步骤

(1)求出集合的元素;

(2)把元素一一列举出来,中间用","隔开,相同元素只列举一次;

(3)用花括号括起来.

注意:一定要分清集合是数集还是点集.

学习任务二　用描述法表示集合

例1　用描述法表示以下集合:

(1)所有不小于2,且不大于20的实数组成的集合;

(2)平面直角坐标系中第二象限内的点组成的集合;

(3)200以内的正奇数组成的集合;

(4)方程$x^2-5x-6=0$的解组成的集合.

解:(1)集合可表示为$\{x\in\mathbf{R}|2\leqslant x\leqslant 20\}$.

(2)第二象限内的点(x,y)满足$x<0$,且$y>0$,故集合可表示为$\{(x,y)|x<0$,且$y>0\}$.

(3)$\{x|x=2k+1,k\leqslant 99,k\in\mathbf{N}\}$.

(4)$\{x|x^2-5x-6=0\}$.

反思提炼

用描述法表示集合的步骤

(1)弄清元素的形式；

(2)写出代表元素，写在“|”的前面；

(3)确定元素所具有的共同特征，写在“|”的后面；

(4)用花括号把它们括起来.

探究训练

用描述法表示下列集合：

(1)不等式 $2x-7<3$ 的解集 A；

(2)二次函数 $y=x^2+1$ 的值组成的集合 B；

(3)被 3 除余 2 的正整数组成的集合 C；

(4)平面直角坐标系内坐标轴上的点组成的集合 D.

解：(1)解 $2x-7<3$ 得 $x<5$，所以 $A=\{x|x<5\}$.

(2)函数值组成的集合就是 y 的取值集合，

所以 $B=\{y|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$.

(3)被 3 除余 2 的正整数可以表示为 $3n+2(n\in\mathbf{N})$，

所以集合 $C=\{x|x=3n+2,n\in\mathbf{N}\}$.

(4)平面直角坐标系内坐标轴上的点的共同特征是至少有一个坐标为 0，所以 $D=\{(x,y)|xy=0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$.

学习任务三　集合表示法的综合应用

例 2　(1)设集合 $A=\{x|x^2-3x+a=0\}$，若 $4\in A$，用列举法表示集合 A 为________.

$\{-1,4\}$　**解析**：因为 $4\in A$，所以 $16-12+a=0$，所以 $a=-4$，所以 $A=\{x|x^2-3x-4=0\}=\{-1,4\}$.

(2)已知集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R}\}$，若 A 中只有一个元素，求实数 a 的值.

解：当 $a=0$ 时，原方程变为 $2x+1=0$，此时 $x=-\frac{1}{2}$，符合题意；

当 $a\neq0$ 时，方程 $ax^2+2x+1=0$ 为一元二次方程，当 $\Delta=4-4a=0$，即 $a=1$ 时，原方程的解为 $x=-1$，符合题意.

故当 A 中只有一个元素时，a 的值为 0 或 1.

［**一题多思**］

思考 1. 结合本例(1)和(2)，若已知集合是用描述法给出的，需要注意哪些问题？谈谈你的观点.

提示：要弄清集合的代表元素及属性，如本例(1)中集合 A 中的元素就是所给方程的根，由此便把集合的元素或元素个数问题转化为方程的根或根的个数问题.

思考 2. 本例(2)中集合 A 不变，若 A 中至多有一个元素，则 a 的取值范围是怎样的？

提示：A 中至多有一个元素，即 A 中有一个元素或没有元素.

当 A 中只有一个元素时，由例题可知，$a=0$ 或 $a=1$.

当 A 中没有元素时，$\Delta=4-4a<0$，且 $a\neq0$，即 $a>1$.

故当 A 中至多有一个元素时，a 的取值范围为 $\{a|a=0$，或 $a\geq1\}$.

反思提炼

由集合的元素个数求参数问题的关注点

(1)要弄清用描述法给出的集合的代表元素及其属性；

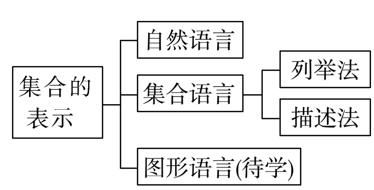
(2)如果所给方程是一元二次方程的形式，要对二次项系数的取值进行分类讨论.

探究训练

已知集合 $A=\{x|x^2-ax+b=0\}$，若 $A=\{2,3\}$，则 $a=$________，$b=$________.

5　6　**解析**：由 $A=\{2,3\}$ 知，方程 $x^2-ax+b=0$ 的两根为 2，3，由根与系数的关系得 $\begin{cases}2+3=a,\\2\times3=b,\end{cases}$ 因此 $a=5,b=6$.

体系构建



课后素养评价(二)

基础性·能力运用

1.集合 $A=\{x\in \mathbf{N}^*\mid x-5<0\}$ 中的元素个数是 (　　)

A.0　　B.4

C.5　　D.6

B　**解析**:$A=\{x\in \mathbf{N}^*\mid x-5<0\}=\{1,2,3,4\}$,故集合 A 中有4个元素.

2.集合 $A=\left\{x\in \mathbf{N}^*\,\middle|\,\frac{6}{3-x}\in \mathbf{N}^*\right\}$ 用列举法可以表示为 (　　)

A.$\{3,6\}$

B.$\{1,2\}$

C.$\{0,1,2\}$

D.$\{-2,-1,0,1,2\}$

B　**解析**:因为 $x\in \mathbf{N}^*$,$\frac{6}{3-x}\in \mathbf{N}^*$,所以 $A=\{1,2\}$.

3.若 $1\in\{x+2,x^2\}$,则实数 x 的值为 (　　)

A.-1

B.1

C.1 或 -1

D.1 或 3

B　**解析**:由 $1\in\{x+2,x^2\}$,可得 $x^2=1$ 或 $x+2=1$.当 $x^2=1$ 时,$x=\pm1$.当 $x=1$ 时,$x+2=3$,满足要求;当 $x=-1$ 时,$-1+2=1$,不满足集合中元素的互异性,舍去.当 $x+2=1$ 时,$x=-1$,舍去.所以 $x=1$.

4.(多选)由大于-3且小于11的偶数所组成的集合是 (　　)

A.$\{-2,0,2,4,6,8,10\}$

B.$\{x\mid -3<2x<11,x\in \mathbf{Z}\}$

C.$\{x\mid -3<x<11,x=2k,k\in \mathbf{N}\}$

D.$\{x\mid -3<x<11,x=2k,k\in \mathbf{Z}\}$

AD　**解析**:选项A是用列举法表示大于-3且小于11的偶数所组成的集合;选项B表示的是所有大于$-\frac{3}{2}$且小于$\frac{11}{2}$的整数;选项C表示的集合中不含有-2这个偶数;选项D表示的是大于-3且小于11的偶数所组成的集合.

5.集合 $A=\left\{1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\frac{1}{9}\right\}$ 用描述法可表示为<u>$\left\{x\,\middle|\,x=\frac{1}{2n-1},n\in \mathbf{N}^*,n\leqslant 5\right\}$</u>.

6.选择适当的方法表示下列集合:

(1)"Welcome"中的所有字母构成的集合;

(2)大于1且小于8的有理数构成的集合;

(3)$\frac{|a|}{a}+\frac{b}{|b|}$($a,b\in \mathbf{R}$,且 $a\neq0,b\neq0$)的值构成的集合.

解:(1)由于"Welcome"中包含的字母有W,e,l,c,o,m共6个元素,因此可以用列举法表示为{W,e,l,c,o,m}.

(2)大于1且小于8的有理数有无数个,用描述法表示为 $\{x\in \mathbf{Q}\mid 1<x<8\}$.

(3)设 $x=\frac{|a|}{a}+\frac{b}{|b|}$,当 $a>0,b>0$ 时,$x=2$;当 $a<0,b<0$ 时,$x=-2$;当 a,b 异号时,$x=0$.故用列举法表示为 $\{-2,0,2\}$.

综合性·创新提升

1.给出下列说法:

①在平面直角坐标系中,第一、三象限内的点组成的集合为 $\{(x,y)\mid xy>0\}$;

②所有奇数组成的集合为 $\{x\mid x=2n+1\}$;

③集合 $\{(x,y)\mid y=1-x\}$ 与 $\{x\mid y=1-x\}$ 是同一集合.

其中正确的有 (　　)

A.1个　　B.2个

C.3个　　D.4个

A　**解析**:①正确;②不正确,应为 $\{x\mid x=2n+1,n\in \mathbf{Z}\}$;③不正确,$\{(x,y)\mid y=1-x\}$ 表示的是点集,而 $\{x\mid y=1-x\}$ 表示的是数集.

2.（多选）已知集合 $A=\{x\mid x=2m-1,m\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$，且 $x_1,x_2\in A$，$x_3\in B$，则（　　）

A.$x_1x_2\in A$　　B.$x_2x_3\in B$

C.$x_1+x_2\in B$　　D.$x_1+x_2+x_3\in A$

ABC　**解析**：由题意易知集合 A 表示奇数集，集合 B 表示偶数集.又由 $x_1,x_2\in A$，$x_3\in B$，可知 x_1,x_2 是奇数，x_3 是偶数.对于 A，两个奇数的积为奇数，所以 $x_1x_2\in A$，故 A 正确；对于 B，一奇一偶两个数的积为偶数，所以 $x_2x_3\in B$，故 B 正确；对于 C，两个奇数的和为偶数，所以 $x_1+x_2\in B$，故 C 正确；对于 D，两个奇数与一个偶数的和为偶数，所以 $x_1+x_2+x_3\in B$，故 D 错误.

3.方程组 $\begin{cases}x+y=0,\\x^2+y^2=2\end{cases}$ 的解集是（　　）

A.$\{(1,-1),(-1,1)\}$

B.$\{(1,1),(-1,1)\}$

C.$\{(1,-1),(-1,-1)\}$

D.$\{1,-1\}$

A　**解析**：由 $x+y=0$，得 $x=-y$，代入 $x^2+y^2=2$，得 $2y^2=2$，解得 $y=\pm1$.

当 $y=1$ 时，$x=-1$；当 $y=-1$ 时，$x=1$.

故方程组的解集是 $\{(1,-1),(-1,1)\}$.

4.（新定义）若一数集的任一元素的倒数仍在该集合中，则称该数集为可倒数集.集合 $A=\{-1,1,2\}$ ________（填“是”或“不是”）可倒数集.试写出一个含三个元素的可倒数集：________.

不是　$\left\{1,2,\frac{1}{2}\right\}$（答案不唯一）　**解析**：由于 2 的倒数 $\frac{1}{2}$ 不在集合 A 中，故集合 A 不是可倒数集.由定义可知，若一个元素 $a\in A$，则 $\frac{1}{a}\in A$.若集合中有三个元素，故必有一个元素 $a=\frac{1}{a}$，即 $a=\pm1$.故可取的集合有 $\left\{1,2,\frac{1}{2}\right\}$，$\left\{-1,3,\frac{1}{3}\right\}$ 等.

5.已知集合 $M=\{x\mid ax^2-2x+2=0,a\in\mathbf{R}\}$.

(1)若集合 M 中至少有一个元素，求实数 a 的取值范围.

(2)是否存在实数 a，使集合 M 与集合 $\{1\}$ 相等？若存在，求出 a 的值；若不存在，说明理由.

解：(1)当 $a=0$ 时，方程化为 $-2x+2=0$，解得 $x=1$，此时 $M=\{1\}$，满足条件.

当 $a\neq0$ 时，方程为一元二次方程，由题意得 $\Delta=4-8a\geqslant0$，即 $a\leqslant\frac{1}{2}$，此时方程有两个相等或两个不等的实数根，满足条件.

综上，当 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，集合 M 中至少有一个元素.

(2)存在.假设存在实数 a，使 $M=\{1\}$，则 $1\in M$，

所以 $a-2+2=0$，即 $a=0$.

当 $a=0$ 时，方程变为 $-2x+2=0$，解得 $x=1$，

故方程 $ax^2-2x+2=0$ 的根为 1，$M=\{1\}$.

所以存在实数 $a=0$，使 $M=\{1\}$.

1.2　集合间的基本关系

学习任务目标

1.理解集合之间的包含与相等的含义,能识别给定集合的子集、真子集.

2.会判断给定集合间的关系,并会用符号和 Venn 图表示.

3.在具体情境中,了解空集的含义.

问题式预习

知识清单

知识点一　子集与真子集

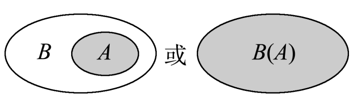
1.子集

(1)定义:一般地,对于两个集合 A,B,如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素,就称集合 A 为集合 B 的子集.

(2)符号:$A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$).

(3)读法:A 包含于 B(或 B 包含 A).

(4)图示:



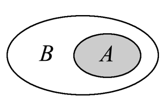
2.真子集

(1)定义:如果集合 $A\subseteq B$,但存在元素 $x\in B$,且 $x\notin A$,就称集合 A 是集合 B 的真子集.

(2)符号:$A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$).

(3)读法:A 真包含于 B(或 B 真包含 A).

(4)图示:



知识点二　空集的概念

(1)定义:一般地,我们把不含任何元素的集合叫做空集.

(2)符号:$\varnothing$.

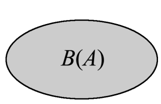
(3)规定:空集是任何集合的子集.

知识点三　集合相等

(1)定义:一般地,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素,那么集合 A 与集合 B 相等,记作 $A=B$.

(2)符号:若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则 $A=B$.

(3)图示:



知识点四　集合间关系的性质

(1)任何一个集合都是它本身的子集,即 $A\subseteq A$.

(2)对于集合 A,B,C,

①若 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$;

②若 $A\subsetneqq B$,$B\subsetneqq C$,则 $A\subsetneqq C$.

(3)若 $A\subseteq B$,$A\neq B$,则 $A\subsetneqq B$.

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)集合$\{0\}$是空集.　(　　)

×　**解析**:$\varnothing$是不含任何元素的集合;$\{0\}$是含有一个元素的集合,$\varnothing\subsetneqq\{0\}$.

(2)空集是任何集合的真子集.　(　　)

×　**解析**:空集是空集的子集,但不是真子集.

(3)若 $A\subsetneqq B$,则 B 中至少有一个元素不属于 A.　(　　)

√　**解析**:由真子集的定义可知此说法正确.

(4)若 $B\subseteq A$,元素 $a\notin A$,则 $a\notin B$.　(　　)

√　**解析**:因为 B 是 A 的子集,所以不属于 A 的元素一定不属于 B.

2.下列四个集合中,是空集的为　(　　)

A.$\{0\}$　　B.$\{x\mid x>8$,且 $x<5\}$

C.$\{x\mid x^2-1=0\}$　　D.$\{x\mid x>4\}$

B　**解析**:满足 $x>8$ 且 $x<5$ 的实数不存在,故$\{x\mid x>8$,且 $x<5\}=\varnothing$.

3.请思考并回答下列问题:

(1)任意两个集合之间是否有包含关系?

提示:不一定,如集合 $A=\{1,3\}$,$B=\{2,3\}$,这两个集合就没有包含关系.

(2)若 $A\subseteq B$,则 A 是 B 中部分元素组成的集合.你认为该说法对吗?

提示:不对.不能把"$A\subseteq B$"理解为"A 是 B 中部分元素组成的集合",因为集合 A 可能是空集,也可能与集合 B 相等.

任务型课堂

学习任务一　集合间关系的判断

1. 下列各个关系式中，正确的是　　(　　)

A. $\varnothing=\{0\}$　　B. $\sqrt{2}\in\mathbf{Q}$

C. $\{3,5\}\neq\{5,3\}$　　D. $\{1\}\subseteq\{x|x^2=x\}$

D　**解析**：因为$\varnothing\subseteq\{0\}$，$\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$，$\{3,5\}=\{5,3\}$，所以A，B，C错误．因为$\{x|x^2=x\}=\{0,1\}$，所以$\{1\}\subseteq\{x|x^2=x\}$．

2.（多选）下列各组集合之间满足$A\subseteq B$的是　(　　)

A. $A=\{-1,1\}$，$B=\{(-1,1)\}$

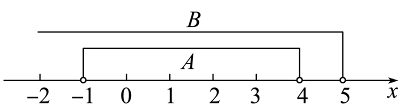
B. $A=\{x|-1<x<4\}$，$B=\{x|x-5<0\}$

C. $A=\{x|x$是正整数$\}$，$B=\{x|x$是非负数$\}$

D. $A=\{x|x=2n-1,n\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{x|x=2n+1,n\in\mathbf{N}^*\}$

BC　**解析**：选项A，集合A是数集，集合B是点集，无包含关系；

选项B，集合$A=\{x|-1<x<4\}$，$B=\{x|x<5\}$，用数轴表示如图所示．

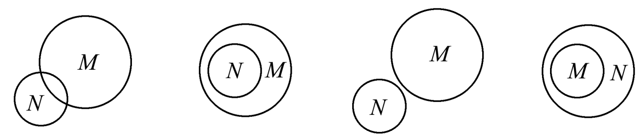


由图可知$A\subseteq B$；

选项C，正整数都是非负数，故$A\subseteq B$；

选项D，$A=\{$正奇数$\}$，$B=\{$不含1的正奇数$\}$，故$B\subseteq A$．

3. 能正确表示集合$M=\{x\in\mathbf{R}|0\leqslant x\leqslant 2\}$和集合$N=\{x\in\mathbf{R}|x^2-x=0\}$之间的关系的Venn图是　　(　　)



A　　B　　C　　D

B　**解析**：解$x^2-x=0$得$x=1$或$x=0$．故$N=\{0,1\}$．易得$N\subsetneqq M$，其对应的Venn图如选项B所示．

反思提炼

判断集合间关系的方法

(1)观察法：将集合的元素一一列举然后观察．

(2)元素特征法：首先确定集合的元素是什么，弄清集合中元素的特征，再利用集合中元素的特征判断集合间的关系．

(3)数形结合法：利用数轴或Venn图．

学习任务二　确定集合的子集、真子集

例1　(1)若$A=\{1,4,x\}$，$B=\{1,x^2\}$，且$B\subseteq A$，则$x=$　　(　　)

A. ±2

B. ±2或0

C. ±2或1或0

D. ±2或±1或0

B　**解析**：因为$B\subseteq A$，所以$x^2=4$或$x^2=x$，所以$x=\pm2$或1或0．根据集合中元素的互异性，得$x=\pm2$或0．

(2)已知集合$A=\{-1,0,1\}$，则含有元素0的集合A的子集的个数为　　(　　)

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

B　**解析**：根据题意，含有元素0的集合A的子集为$\{0\}$，$\{0,1\}$，$\{0,-1\}$，$\{-1,0,1\}$，共4个．

(3)集合$A=\{x|0\leqslant x<3,x\in\mathbf{N}\}$的真子集的个数是　　(　　)

A. 16　　B. 8　　C. 7　　D. 4

C　**解析**：易知集合$A=\{0,1,2\}$，含有3个元素，所以A的真子集有$2^3-1=7$(个)．

反思提炼

集合的子集、真子集个数的判断

若集合A中有$n(n\geqslant1)$个元素，则

(1)A的子集有2^n个；

(2)A的非空子集有(2^n-1)个；

(3)A的非空真子集有(2^n-2)个．

注意：①写集合的子集时勿漏掉空集和它自身；②一个集合的真子集是除了它自身以外的所有子集．

探究训练

1. 集合$\{(1,2),(3,4)\}$的子集个数为　　(　　)

A. 3　　B. 4

C. 15　　D. 16

B　**解析**：集合$\{(1,2),(3,4)\}$中有2个元素，所以其子集个数为$2^2=4$．

2.（多选）若集合M满足$\{1,2\}\subsetneqq M\subseteq\{1,2,3,4\}$，则集合$M$可能为　　(　　)

A. $\{1,2\}$

B. $\{1,2,3\}$

C. $\{1,2,4\}$

D. $\{1,2,3,4\}$

BCD　**解析**：由题意可知$\{1,2\}\subsetneqq M\subseteq\{1,2,3,4\}$，可以确定集合$M$必含有元素1，2，且含有元素3，4中的至少一个，因此依据集合M的元素个数进行分类，含有三个元素：$\{1,2,3\}$，$\{1,2,4\}$；含有四个元素：$\{1,2,3,4\}$．故满足题意的集合M为$\{1,2,3\}$，$\{1,2,4\}$，$\{1,2,3,4\}$．

学习任务三　由集合间关系确定参数的值

例 2　(1)(2023·新高考全国Ⅱ卷)设集合 $A=\{0,-a\}$，$B=\{1,a-2,2a-2\}$，若 $A\subseteq B$，则$a=$ (　　)

A.2　　B.1　　C.$\frac{2}{3}$　　D.-1

B　**解析**：因为 $A\subseteq B$，所以 $a-2=0$ 或 $2a-2=0$.若 $a-2=0$，则 $a=2$，此时 $A=\{0,-2\}$，$B=\{1,0,2\}$，不符合题意；

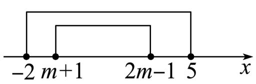
若 $2a-2=0$，则 $a=1$，此时 $A=\{0,-1\}$，$B=\{1,-1,0\}$，符合题意.

因此，$a=1$.故选 B.

(2)已知集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$，集合 $B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围.

解：①若 $B=\varnothing$，则 $m+1>2m-1$，所以 $m<2$.

②若 $B\neq\varnothing$，且 $B\subseteq A$，如图所示.



则$\begin{cases}m+1\geqslant -2,\\2m-1\leqslant 5,\\m+1\leqslant 2m-1,\end{cases}$　解得 $2\leqslant m\leqslant 3$.

所以实数 m 的取值范围是$\{m\mid m\leqslant 3\}$.

[一题多思]

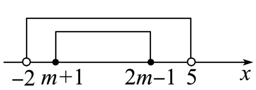
思考 1.在本例(2)中，若把条件“$B\subseteq A$”改为“$A\subseteq B$”，解题过程有何变化？

提示：若 $A\subseteq B$，则集合 B 一定不是空集，不用再讨论第①步.

思考 2.若本例(2)条件“$A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$”改为“$A=\{x\mid -2<x<5\}$”，其他条件不变，求实数 m 的取值范围.

提示：①若 $B=\varnothing$，则 $m+1>2m-1$，所以 $m<2$.

②若 $B\neq\varnothing$，且 $B\subseteq A$，如图所示.



所以$\begin{cases}m+1>-2,\\2m-1<5,\\m+1\leqslant 2m-1,\end{cases}$　解得$\begin{cases}m>-3,\\m<3,\\m\geqslant 2,\end{cases}$　即 $2\leqslant m<3$.

所以实数 m 的取值范围是$\{m\mid m<3\}$.

反思提炼

由集合间的关系确定参数的值的注意事项

(1)弄清“谁是谁的(真)子集”；

(2)注意对含参集合是否为空集的讨论；

(3)不忘验证端点值.

探究训练

1.已知 $M=\{2,a,b\}$，$N=\{2a,2,b^2\}$，若 $M=N$，则 $a+b$的值为________.

1 或$\frac{3}{4}$　**解析**：由 $M=N$，得$\begin{cases}a=2a,\\b=b^2\end{cases}$或$\begin{cases}a=b^2,\\b=2a,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=0,\\b=1\end{cases}$或$\begin{cases}a=0,\\b=0\end{cases}$或$\begin{cases}a=\frac{1}{4},\\b=\frac{1}{2}.\end{cases}$

根据集合中元素的互异性，得$\begin{cases}a=0,\\b=0\end{cases}$不符合题意，

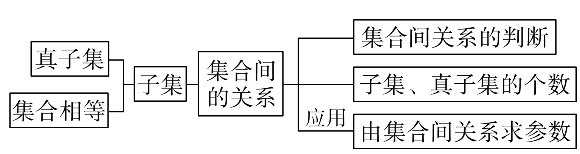
故$\begin{cases}a=0,\\b=1\end{cases}$或$\begin{cases}a=\frac{1}{4},\\b=\frac{1}{2}.\end{cases}$所以 $a+b$ 的值为 1 或$\frac{3}{4}$.

2.已知集合 $A=\{x\mid a-1\leqslant x\leqslant a+2\}$，$B=\{x\mid 3<x<5\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 a 的取值范围为________.

$\{a\mid 3\leqslant a\leqslant 4\}$　**解析**：因为 $B\subseteq A$，

所以$\begin{cases}a-1\leqslant 3,\\a+2\geqslant 5,\end{cases}$解得 $3\leqslant a\leqslant 4$，所以实数 a 的取值范围为$\{a\mid 3\leqslant a\leqslant 4\}$.

体系构建



课后素养评价（三）

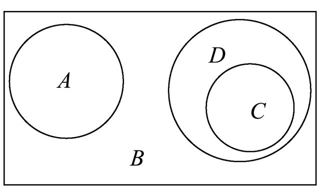
基础性·能力运用

1. 集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid 1\leqslant x<4\}$ 的真子集的个数是（　　）

A.16　B.8　C.7　D.4

C　**解析**：因为 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid 1\leqslant x<4\}=\{1,2,3\}$ 中含有 3 个元素，所以 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid 1\leqslant x<4\}$ 的真子集为 $\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，共 7 个.

2.（跨学科融合）（多选）如图所示的 Venn 图反映的是文学作品、散文、小说、叙事散文这四个文学概念之间的关系，则（　　）



A. A 为小说　B. B 为文学作品

C. C 为散文　D. D 为叙事散文

AB　**解析**：由 Venn 图，得 $A\subsetneqq B$，$C\subsetneqq D\subsetneqq B$，$A$ 与 D 之间无包含关系，A 与 C 之间无包含关系.由“文学作品”“散文”“小说”“叙事散文”四个文学概念之间的关系，可得 A 为“小说”，B 为“文学作品”，C 为“叙事散文”，D 为“散文”.

3. 已知集合 $B=\{2,3,4,5\}$，$C=\{-2,-1,4,5\}$，非空集合 A 满足 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$，则符合条件的集合 A 的个数为（　　）

A.3　B.4　C.7　D.8

A　**解析**：由题意知集合 $B=\{2,3,4,5\}$，$C=\{-2,-1,4,5\}$.因为非空集合 A 满足 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$，所以集合 A 可以为 $\{4\}$ 或 $\{5\}$ 或 $\{4,5\}$.所以符合条件的集合 A 的个数为 3.

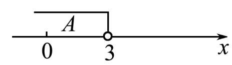
4.（多选）已知集合 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{a,2\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 a 的值可以是（　　）

A.0　B.1　C.2　D.3

AB　**解析**：因为集合 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{a,2\}$，且 $B\subseteq A$，所以 $a=0$ 或 $a=1$.

5. 已知集合 $A=\{x\mid x<3\}$，集合 $B=\{x\mid x<m\}$，且 $A\subseteq B$，则实数 m 满足的条件是________.

$m\geqslant 3$　**解析**：将集合 A 在数轴上表示出来，如图所示.



由图可知，要满足 $A\subseteq B$，则 $m\geqslant 3$.

6. 判断下列集合间的关系：

(1) $A=\{-1,1\}$，$B=\{x\in\mathbf{N}\mid x^2=1\}$；

(2) $P=\{x\mid x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$，$Q=\{x\mid x=2(n-1),n\in\mathbf{Z}\}$；

(3) $A=\{x\mid x-3>2\}$，$B=\{x\mid 2x-5\geqslant 0\}$；

(4) $A=\{x\mid x=a^2+1,a\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x=a^2-4a+5,a\in\mathbf{R}\}$.

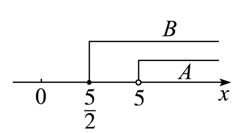
解：(1) 用列举法表示集合 $B=\{1\}$，故 $B\subsetneqq A$.

(2) 因为 Q 中 $n\in\mathbf{Z}$，所以 $n-1\in\mathbf{Z}$，Q 与 P 都表示偶数集，所以 $P=Q$.

(3) 因为 $A=\{x\mid x-3>2\}=\{x\mid x>5\}$，

$B=\{x\mid 2x-5\geqslant 0\}=\left\{x\,\middle|\, x\geqslant\frac{5}{2}\right\}$，

将集合 A，B 在数轴上表示出来.如图所示.



由图可知 $A\subsetneqq B$.

(4) 因为 $A=\{x\mid x=a^2+1,a\in\mathbf{R}\}=\{x\mid x\geqslant 1\}$，$B=\{x\mid x=a^2-4a+5,a\in\mathbf{R}\}=\{x\mid x=(a-2)^2+1,a\in\mathbf{R}\}=\{x\mid x\geqslant 1\}$，所以 $A=B$.

综合性·创新提升

1.（多选）已知集合 $B=\{1,2\}$，$A\subsetneqq B$，则集合 A 可以为（　　）

A. $\varnothing$　B. $\{1\}$

C. $\{2\}$　D. $\{1,2\}$

ABC　**解析**：因为 $A\subsetneqq B$，所以集合 A 是集合 B 的真子集，可以是 $\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$.故选 ABC.

2. 已知集合 $A=\{0,2\}$，$B=\{x\mid ax+2=0\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 a 的值为（　　）

A.-1　　B.1

C.0 或 -1　　D.0 或 1

C　**解析**：因为 $A=\{0,2\}$，$B=\{x\mid ax+2=0\}$，又 $B\subseteq A$，

所以 $B=\varnothing$ 或 $B=\{2\}$ 或 $B=\{0\}$.

当 $B=\varnothing$ 时，则关于 x 的方程 $ax+2=0$ 无解，所以 $a=0$；

当 $B=\{2\}$ 时，则 $x=2$ 是方程 $ax+2=0$ 的根，所以 $2a+2=0$，所以 $a=-1$；

当 $B=\{0\}$ 时，则 $x=0$ 是方程 $ax+2=0$ 的根，所以 a 无解.

综上可得，$a=0$ 或 $a=-1$.

3. 已知集合 $M=\left\{y\,\middle|\,y=\dfrac{2x+1}{3},x\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{y\,\middle|\,y=\dfrac{2}{3}x-1,x\in\mathbf{Z}\right\}$，则集合 M,N 的关系是　（　　）

A.$M=N$

B.$M\subseteq N$

C.$M\supseteq N$

D.$M\cap N=\varnothing$

A　**解析**：因为集合 $M=\left\{y\,\middle|\,y=\dfrac{2x+1}{3},x\in\mathbf{Z}\right\}$，集合 $N=\left\{y\,\middle|\,y=\dfrac{2}{3}x-1,x\in\mathbf{Z}\right\}$

$=\left\{y\,\middle|\,y=\dfrac{2x-3}{3}=\dfrac{2(x-2)+1}{3},x\in\mathbf{Z}\right\}$，

所以 $M=N$.

4. 设 $x,y\in\mathbf{R}$，$A=\{(x,y)\mid y=x\}$，$B=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{x}{y}=1\right\}$，则 A,B 的关系是______.

$B\subsetneqq A$　**解析**：因为 $B=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{x}{y}=1\right\}=\{(x,y)\mid y=x$，且 $y\neq0\}$，所以 $B\subsetneqq A$.

5. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，集合 $A=\{1,a\}$，$B=\{x\mid x(x-a)(x-b)=0\}$.若 $A=B$，则 $a=$________，$b=$________.

0　1　**解析**：$A=\{1,a\}$，解方程 $x(x-a)(x-b)=0$，得 $x=0$ 或 $x=a$ 或 $x=b$.若 $A=B$，则 $a=0$，$b=1$.

6. 已知集合 $M=\{x\mid x^2+2x-a=0\}$.

(1)若 $\varnothing\subsetneqq M$，求实数 a 的取值范围；

(2)若 $N=\{x\mid x^2+x=0\}$ 且 $M\subseteq N$，求实数 a 的取值范围.

解：(1)由题意得，方程 $x^2+2x-a=0$ 有实数解，

所以 $\Delta=2^2-4\times(-a)\geqslant0$，得 $a\geqslant-1$.

所以实数 a 的取值范围是 $\{a\mid a\geqslant-1\}$.

(2)因为 $N=\{x\mid x^2+x=0\}=\{0,-1\}$，且 $M\subseteq N$，

所以当 $M=\varnothing$ 时，$\Delta=2^2-4\times(-a)<0$，得 $a<-1$；

当 $M\neq\varnothing$ 时，

①当 $\Delta=0$ 时，$a=-1$，

此时 $M=\{-1\}$，满足 $M\subseteq N$，符合题意.

②当 $\Delta>0$ 时，$a>-1$，M 中有两个元素.

若 $M\subseteq N$，则 $M=N$，

从而 $\begin{cases}-1+0=-2,\\(-1)\times0=-a,\end{cases}$ 无解.

综上，实数 a 的取值范围为 $\{a\mid a\leqslant-1\}$.

1.3　集合的基本运算

第1课时　并集与交集

学习任务目标

1. 能从教材实例中抽象出两个集合的并集和交集的含义.
2. 掌握有关的术语和符号，并会用它们正确地进行集合间的并集、交集运算.
3. 能用 Venn 图表示两个集合的并集和交集.

问题式预习

知识清单

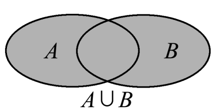
知识点一　并集

(1)概念：

自然语言：一般地，由所有属于集合A或属于集合B的元素组成的集合，称为集合A与B的并集，记作$A\cup B$(读作“A并B”)

符号语言：$A\cup B=\{x|x\in A，或x\in B\}$

图形语言：



(2)性质：$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$.

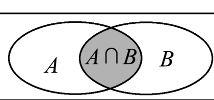
知识点二　交集

(1)概念：

自然语言：一般地，由所有属于集合A且属于集合B的元素组成的集合，称为集合A与B的交集，记作$A\cap B$(读作“A交B”)

符号语言：$A\cap B=\{x|x\in A，且x\in B\}$

图形语言：



(2)性质：$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$.

概念辨析

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)若$A\cup B=A\cup C$，则$B=C$.　(×)

(2)集合A，B中分别有3个元素，则$A\cup B$中必有6个元素.　(×)

(3)若$A\cap B=\varnothing$，则A，B均为空集.　(×)

(4)若$x\in(A\cap B)$，则$x\in(A\cup B)$.　(√)

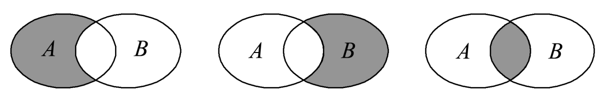
2.设集合$M=\{-1,0,1\}$，$N=\{0,1,2\}$，则$M\cup N=$________，$M\cap N=$________.

$\{-1,0,1,2\}$　$\{0,1\}$　**解析**：因为集合$M=\{-1,0,1\}$，$N=\{0,1,2\}$，所以$M\cup N=\{-1,0,1,2\}$，$M\cap N=\{0,1\}$.

3.请思考并回答下列问题：

(1)你认为“$x\in A$，或$x\in B$”包含哪几种情况？

提示：包含三种情况：$x\in A$，但$x\notin B$；$x\notin A$，但$x\in B$；$x\in A$，且$x\in B$.用 Venn 图表示如下：



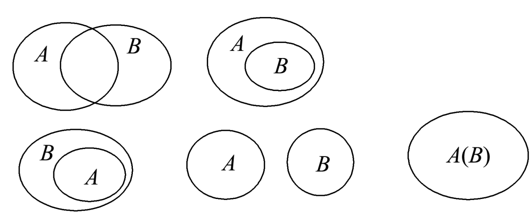
$x\in A$，但$x\notin B$　　$x\in B$，但$x\notin A$　　$x\in A$，且$x\in B$

(2)如果集合A，B没有公共元素，那么它们的交集是什么？如果集合A，B相等呢？

提示：没有公共元素的两个集合的交集是空集，相等的两个集合的交集可以是这两个集合中的任意一个集合.

(3)你能用 Venn 图表示出任意两个非空集合的所有关系吗？

提示：任意两个非空集合的所有关系用 Venn 图表示如下：



任务型课堂

学习任务一　并集的运算

1. 设集合 $A=\{x\in \mathbf{N}^{*} \mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{2,3\}$，则 $A\cup B=$　(　　)

A. $\{-1,0,1,2,3\}$

B. $\{1,2,3\}$

C. $\{-1,2\}$

D. $\{-1,3\}$

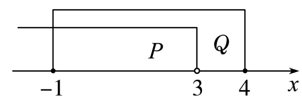
B　**解析**：集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,3\}$，则 $A\cup B=\{1,2,3\}$.

2. 已知集合 $P=\{x \mid x<3\}$，$Q=\{x \mid -1\leqslant x\leqslant 4\}$，那么 $P\cup Q=$　(　　)

A. $\{x \mid -1\leqslant x<3\}$　　B. $\{x \mid -1\leqslant x\leqslant 4\}$

C. $\{x \mid x\leqslant 4\}$　　D. $\{x \mid x\geqslant -1\}$

C　**解析**：在数轴上表示出两个集合，如图所示.



所以 $P\cup Q=\{x \mid x\leqslant 4\}$. 故选 C.

反思提炼

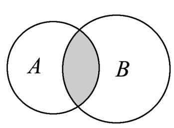
求集合并集的方法

(1) 定义法：若集合是用列举法表示的，可以直接利用并集的定义求解.

(2) 数形结合法：若集合是用描述法表示的由实数组成的数集，则可以借助数轴分析法求解.

学习任务二　交集的运算

例 1　(1) 已知集合 $A=\{x \mid -2<x\leqslant 3\}$，$B=\{-2,0,2,4\}$，则图中阴影部分所表示的集合是________.



$\{0,2\}$　**解析**：题图中阴影部分所表示的集合是 $A\cap B$，又 $A\cap B=\{0,2\}$.

(2) 设集合 $A=\{x \mid 0<x<4, x\in \mathbf{N}\}$，$B=\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 5\right\}$，则 $A\cap B=$________.

$\{1,2,3\}$　**解析**：集合 $A=\{x \mid 0<x<4, x\in \mathbf{N}\}=\{1,2,3\}$，又 $B=\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 5\right\}$，所以 $A\cap B=\{1,2,3\}$.

反思提炼

求集合交集的方法

(1) 对于两个元素个数有限的集合，求交集时逐个挑出两个集合的公共元素即可.

(2) 对于两个不等式的解集，求交集时一般借助数轴，两个集合的交集用两个集合在数轴上所对应部分的公共区域表示，要注意端点值的取舍.

(3) 对于用描述法表示的文字叙述型的集合，求交集(并集)只需将涉及元素用“且”(“或”)连起来即可，要注意文字语言的提炼与简化.

探究训练

设集合 $A=\{x \mid x^2+x=0\}$，$B=\{x \mid x^2-x=0\}$，则 $A\cap B=$　(　　)

A. 0　　B. $\{0\}$

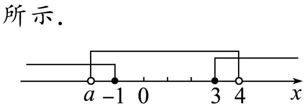
C. $\varnothing$　　D. $\{-1,0,1\}$

B　**解析**：因为 $A=\{x \mid x^2+x=0\}=\{-1,0\}$，$B=\{x \mid x^2-x=0\}=\{0,1\}$，所以 $A\cap B=\{0\}$.

学习任务三　集合交集、并集性质的应用

例 2　(1) 已知集合 $A=\{x \mid x\leqslant -1, 或\ x\geqslant 3\}$，$B=\{x \mid a<x<4\}$，若 $A\cup B=\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是________.

$\{a \mid a\leqslant -1\}$　**解析**：利用数轴，画出满足 $A\cup B=\mathbf{R}$ 的图形，如图所示.



由图可知，$a\leqslant -1$.

(2) 已知集合 $A=\{x \mid 1\leqslant x<5\}$，$B=\{x \mid -a<x\leqslant a+3\}$. 若 $A\cap B=B$，则实数 a 的取值范围为________.

$\{a \mid a\leqslant -1\}$　**解析**：因为 $A\cap B=B$，所以 $B\subseteq A$.

当 $B=\varnothing$ 时，$a+3\leqslant -a$，即 $a\leqslant -\frac{3}{2}$，符合题意；

当 $B\neq\varnothing$ 时，$\begin{cases} a+3>-a, \\ -a\geqslant 1, \\ a+3<5, \end{cases}$　解得 $-\frac{3}{2}<a\leqslant -1$.

所以 a 的取值范围为 $\{a \mid a\leqslant -1\}$.

［一题多思］

思考1. 本例(1)中，若把“$A\cup B=\mathbf{R}$”改为“$A\cap B=\varnothing$”，则实数 a 的取值范围将如何变化？

提示： 当 $a\geqslant 4$ 时，集合 B 为空集，满足题意；

当 $a<4$ 时，集合 B 不是空集，不满足 $A\cap B=\varnothing$.

综上可知，实数 a 的取值范围是 $\{a|a\geqslant 4\}$.

思考2. 本例(1)中，若把“$A\cup B=\mathbf{R}$”改为“$A\cup B=A$”，则实数 a 的取值范围将如何变化？

提示： 当 $a\geqslant 4$ 时，集合 B 为空集，满足题意；

当 $a<4$ 时，若要满足 $A\cup B=A$，必有 $a\geqslant 3$，即 $3\leqslant a<4$.

综上可知，实数 a 的取值范围是 $\{a|a\geqslant 3\}$.

反思提炼

利用集合交集、并集的性质解题的技巧

(1)在进行集合运算时，若条件中出现 $A\cap B=A$ 或 $A\cup B=B$，应转化为 $A\subseteq B$，然后用集合间的关系解决问题，并注意 $A=\varnothing$ 的情况.

(2)集合运算常用的性质：

①$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$；②$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$；③$A\cap B=A\cup B\Leftrightarrow A=B$.

探究训练

已知集合 $A=\{x|x^2-x-2=0\}$，$B=\{x|ax=1\}$.若 $A\cup B=A$，则实数 $a=$（　　）

A.$-\dfrac{1}{2}$或1　　B.$\dfrac{1}{2}$或1

C.$-\dfrac{1}{2}$或1或0　　D.$\dfrac{1}{2}$或-1或0

D　**解析：** 因为 $x^2-x-2=0$ 等价于 $(x-2)(x+1)=0$，

解得 $x=2$ 或 $x=-1$，

所以 $A=\{x|x^2-x-2=0\}=\{-1,2\}$.

因为 $A\cup B=A$，所以 $B\subseteq A$，

当 $B=\varnothing$ 时，成立，此时 $a=0$；

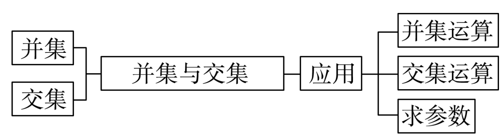
当 $B\neq\varnothing$ 时，$a\neq 0$，解 $ax=1$ 可得 $x=\dfrac{1}{a}$.

因为 $B\subseteq A$，所以 $\dfrac{1}{a}=2$ 或 $\dfrac{1}{a}=-1$，

解得 $a=\dfrac{1}{2}$ 或 $a=-1$.

综上可知，a 的值为 $\dfrac{1}{2}$ 或 -1 或 0.

体系构建



课后素养评价（四）

基础性·能力运用

1. 已知集合 $A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{x|0<x<6,x\in\mathbf{Z}\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A.$\{1,4\}$　　B.$\{1,2,7\}$

C.$\{1,3,5\}$　　D.$\{1,2,3,4,5,7\}$

D　**解析：** 因为 $A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{x|0<x<6,x\in\mathbf{Z}\}=\{1,2,3,4,5\}$，

所以 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,7\}$.

2. 已知集合 $A=\{x|-2<x\leqslant 1\}$，$B=\{x|0<x\leqslant a\}$，若 $A\cup B=\{x|-2<x\leqslant 3\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A.$\{x|-2<x<0\}$　　B.$\{x|0<x\leqslant 1\}$

C.$\{x|1<x\leqslant 3\}$　　D.$\{x|-2<x\leqslant 3\}$

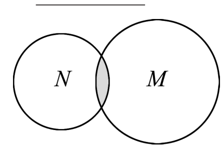
B　**解析：** 因为 $A=\{x|-2<x\leqslant 1\}$，$B=\{x|0<x\leqslant a\}$，$A\cup B=\{x|-2<x\leqslant 3\}$，所以 $a=3$，$B=\{x|0<x\leqslant 3\}$，所以 $A\cap B=\{x|0<x\leqslant 1\}$.

3.（多选）已知集合 $A=\{1,4,a\}$，$B=\{1,2,3\}$，若 $A\cup B=\{1,2,3,4\}$，则实数 a 的值可以是（　　）

A.2　　B.3　　C.4　　D.5

AB　**解析：** 因为集合 $A=\{1,4,a\}$，$B=\{1,2,3\}$，$A\cup B=\{1,2,3,4\}$，所以 a 的取值可以是 2 或 3.

4. 已知集合 $M=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，$N=\{x|x=2k-1,k\in\mathbf{N}^*\}$，Venn 图如图所示，则阴影部分所表示的集合的元素共有________个.



2　**解析：** $M=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，集合 N 是全体正奇数组成的集合，则阴影部分所表示的集合为 $M\cap N=\{1,3\}$，即阴影部分所表示的集合共有 2 个元素.

5. 设集合 $A=\{(x,y)|y=ax+1\}$，$B=\{(x,y)|y=x+b\}$，且 $A\cap B=\{(2,5)\}$，则 $a=$________，$b=$________.

2　3　**解析：** 因为 $A\cap B=\{(2,5)\}$，

所以$\begin{cases}5=2a+1,\\5=2+b,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\b=3.\end{cases}$

6.已知集合 $A=\{x|x\geqslant 3\}$,$B=\{x|1\leqslant x\leqslant 7\}$,$C=\{x|x\geqslant a-1\}$.

(1)求 $A\cap B$,$A\cup B$;

(2)若 $C\cup A=A$,求实数 a 的取值范围.

解:(1)因为 $A=\{x|x\geqslant 3\}$,$B=\{x|1\leqslant x\leqslant 7\}$,

所以 $A\cap B=\{x|3\leqslant x\leqslant 7\}$,$A\cup B=\{x|x\geqslant 1\}$.

(2)因为 $C\cup A=A$,$A=\{x|x\geqslant 3\}$,$C=\{x|x\geqslant a-1\}$,

所以 $C\subseteq A$,所以 $a-1\geqslant 3$,即 $a\geqslant 4$.

所以实数 a 的取值范围是 $\{a|a\geqslant 4\}$.

综合性·创新提升

1.(多选)已知集合 $A=\{x|x^2-x=0\}$,集合 B 中有两个元素,且满足 $A\cup B=\{0,1,2\}$,则集合 B 可以是 (　　)

A.$\{0,1\}$　　B.$\{0,2\}$

C.$\{0,3\}$　　D.$\{1,2\}$

BD　**解析**:因为 $A=\{x|x^2-x=0\}=\{0,1\}$,且满足 $A\cup B=\{0,1,2\}$,所以集合 B 中必有元素 2.

又集合 B 中有两个元素,所以集合 B 可以是 $\{0,2\}$ 或 $\{1,2\}$.

2.(多选)已知集合 $A=\{1,2,3\}$,集合 $B=\{x-y|x\in A,y\in A\}$,则 (　　)

A.$A\cap B=\{1,2\}$

B.$A\cup B=\{-1,0,1,2,3\}$

C.$0\in B$

D.$-1\in B$

ACD　**解析**:因为 $A=\{1,2,3\}$,集合 $B=\{x-y|x\in A,y\in A\}$,所以 $B=\{-2,-1,0,1,2\}$,所以 $A\cap B=\{1,2\}$,所以 A 选项正确;所以 $A\cup B=\{-2,-1,0,1,2,3\}$,所以 B 选项错误;所以 $0\in B$,所以 C 选项正确;所以 $-1\in B$,所以 D 选项正确.

3.(数学文化)中国古代重要的数学著作《孙子算经》下卷有题:今有物,不知其数.三三数之,剩二;五五数之,剩三;七七数之,剩二.问:物几何?其含义可如下表示:已知集合 $A=\{x|x=3n+2,n\in \mathbf{N}^*\}$,$B=\{x|x=5n+3,n\in \mathbf{N}^*\}$,$C=\{x|x=7n+2,n\in \mathbf{N}^*\}$.若 $x\in A\cap B\cap C$,则 x 的值是多少?符合题意的整数 x 的值可以为 (　　)

A.8　　B.127

C.37　　D.23

D　**解析**:因为 $8=7\times 1+1$,则 $8\notin C$,选项 A 不合题意.

$127=3\times 42+1$,则 $127\notin A$,选项 B 不合题意.

$37=3\times 12+1$,则 $37\notin A$,选项 C 不合题意.

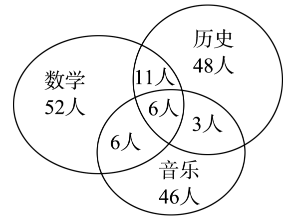
$23=3\times 7+2$,故 $23\in A$;$23=5\times 4+3$,故 $x\in B$;$23=7\times 3+2$,故 $x\in C$,则 $23\in A\cap B\cap C$,选项 D 符合题意.故选 D.

4.已知集合 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{y|y=2x-1,x\in A\}$,则 $A\cap B=$________.

$\{1,3\}$　**解析**:$A\cap B=\{1,2,3\}\cap\{y|y=2x-1,x\in A\}=\{1,2,3\}\cap\{1,3,5\}=\{1,3\}$.

5.某年级先后举办了数学、历史、音乐讲座,其中有 75 人听了数学讲座,68 人听了历史讲座,61 人听了音乐讲座,17 人同时听了数学、历史讲座,12 人同时听了数学、音乐讲座,9 人同时听了历史、音乐讲座,还有 6 人听了全部讲座,则听讲座的有________人.

172　**解析**:由题意,作出 Venn 图,如图所示.



由图可知听讲座的有 $52+48+46+11+6+3+6=172$(人).

6.已知集合 $A=\{x|x^2+4x=0\}$,$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$.

(1)若 $A\cup B=B$,求实数 a 的值;

(2)若 $A\cap B=B$,求实数 a 的取值范围.

解:(1)由题意,知 $A=\{-4,0\}$.

若 $A\cup B=B$,则 $B=A=\{-4,0\}$.

由$\begin{cases}-4+0=-2(a+1),\\(-4)\times 0=a^2-1,\end{cases}$解得 $a=1$.

(2)由题意,知 $A=\{-4,0\}$.

若 $A\cap B=B$,则 $B\subseteq A$.

①若 B 为空集,则 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)=8a+8<0$,解得 $a<-1$;

②若 B 只有一个元素,则 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)=8a+8=0$,解得 $a=-1$.

将 $a=-1$ 代入方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$,得 $x^2=0$,即 $x=0$,则 $B=\{0\}$,符合要求;

③若 $B=A=\{-4,0\}$,由(1)可知 $a=1$.

综上所述,实数 a 的取值范围为 $\{a|a\leqslant -1$ 或 $a=1\}$.

第2课时　补集及综合应用

学习任务目标

1.了解全集的含义及符号表示.
2.理解给定集合中一个子集的补集的含义,并会求给定集合的补集.
3.会用Venn图、数轴进行集合的运算.

问题式预习

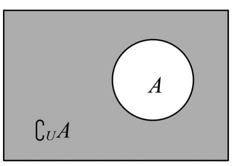
知识清单

知识点一　全集

(1)定义:一般地,如果一个集合含有所研究问题中涉及的所有元素,那么就称这个集合为全集.
(2)记法:通常记作U.

知识点二　补集

(1)自然语言:对于一个集合A,由全集U中不属于集合A的所有元素组成的集合称为集合A相对于全集U的补集,简称为集合A的补集,记作$\complement_U A$.
(2)符号语言:$\complement_U A=\{x\mid x\in U,且x\notin A\}$.
(3)图形语言:



概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").
(1)若在全集U中研究问题,则集合U没有补集.　(　　)
×　**解析**:全集U的补集是空集,即$\complement_U U=\varnothing$.
(2)集合A与集合A在全集U中的补集没有公共元素.　(　　)
√　**解析**:$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$.
(3)在全集U中存在元素x,有$x\notin A$,且$x\notin(\complement_U A)$.　(　　)
×　**解析**:若$x\in U$,则$x\notin A$与$x\notin(\complement_U A)$二者必有一个成立,不能同时成立.
(4)若$3\notin A$,则$3\in\complement_U A$.　(　　)
×　**解析**:若$3\in U$,则必有$3\in\complement_U A$,若$3\notin U$,则$3\notin\complement_U A$.

2.设集合$U=\{1,2,3,4,5,6\}$,$M=\{1,2,4\}$,则$\complement_U M=$________.
$\{3,5,6\}$　**解析**:因为$U=\{1,2,3,4,5,6\}$,$M=\{1,2,4\}$,所以$\complement_U M=\{3,5,6\}$.

3.请思考并回答下列问题:
(1)全集一定是实数集$\mathbf{R}$吗?
提示:不一定.全集因研究问题的不同而不同.
(2)$\complement_U A$包含哪几层含义?
提示:①$A\subseteq U$;②$\complement_U A$是一个集合,且$\complement_U A\subseteq U$;③$\complement_U A$是$U$中所有不属于$A$的元素构成的集合.

任务型课堂

学习任务一　补集的概念与运算

1.(2022·全国乙卷)设全集$U=\{1,2,3,4,5\}$,集合M满足$\complement_U M=\{1,3\}$,则　(　　)
A.$2\in M$
B.$3\in M$
C.$4\notin M$
D.$5\notin M$
A　**解析**:由题知$M=\{2,4,5\}$,对比选项知,A正确,BCD错误.

2.已知全集为U,集合$A=\{0,1,3,5,7\}$,$\complement_U A=\{2,4,6\}$,$\complement_U B=\{0,1,4,6,7\}$,则集合$B=$________.
$\{2,3,5\}$　**解析**:因为$A=\{0,1,3,5,7\}$,$\complement_U A=\{2,4,6\}$,所以$U=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.又$\complement_U B=\{0,1,4,6,7\}$,所以$B=\{2,3,5\}$.

反思提炼

补集运算的原则与方法

(1)原则:从全集U中去掉属于集合A的元素后,由所有剩下的元素组成的集合即为A的补集$\complement_U A$.
(2)方法:①若所给的集合是有关不等式的集合,常借助数轴求解;②若所给的集合是用列举法表示的,则可用Venn图求解.

学习任务二　集合的综合运算

例 1　(1)已知全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x|x\leqslant 0\}$,$B=\{x|x\geqslant 1\}$,则 $\complement_U(A\cup B)=$　　(　　)

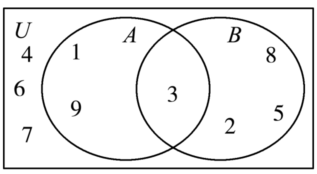
A.$\{x|x\geqslant 0\}$　　B.$\{x|x\leqslant 1\}$

C.$\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$　　D.$\{x|0<x<1\}$

D　**解析**:由题意可知,$A\cup B=\{x|x\leqslant 0$,或 $x\geqslant 1\}$,所以 $\complement_U(A\cup B)=\{x|0<x<1\}$.

(2)已知全集 $U=\{x|x<10,x\in\mathbf{N}^*\}$,$A\subseteq U$,$B\subseteq U$,$(\complement_U B)\cap A=\{1,9\}$,$A\cap B=\{3\}$,$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{4,6,7\}$,求集合 A,B.

解:(方法一:Venn 图法)根据题意作出 Venn 图如图所示.



由图可知 $A=\{1,3,9\}$,$B=\{2,3,5,8\}$.

(方法二:定义法)因为$(\complement_U B)\cap A=\{1,9\}$,$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{4,6,7\}$,所以 $\complement_U B=\{1,4,6,7,9\}$.

又 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,所以 $B=\{2,3,5,8\}$.

因为$(\complement_U B)\cap A=\{1,9\}$,$A\cap B=\{3\}$,

所以 $A=\{1,3,9\}$.

反思提炼

进行集合交、并、补运算的技巧

(1)若所给集合是有限集,则先把集合中的元素一一列举出来,然后结合交集、并集、补集的定义来求解.在解答过程中常常借助于 Venn 图来求解,这样处理起来,相对来说比较直观、形象,且解答时不易出错.

(2)若所给集合是无限集,则常借助数轴,把已知集合及全集分别表示在数轴上,然后进行交、并、补运算.解答过程中要注意边界问题.

探究训练

已知全集 $U=\{1,2,3,4\}$,且 $\complement_U(A\cup B)=\{4\}$,$B=\{1,2\}$,则 $A\cap(\complement_U B)=$　　(　　)

A.$\{3\}$　　B.$\{4\}$

C.$\{3,4\}$　　D.$\varnothing$

A　**解析**:因为全集 $U=\{1,2,3,4\}$,且 $\complement_U(A\cup B)=\{4\}$,所以 $A\cup B=\{1,2,3\}$.

又 $B=\{1,2\}$,所以 $\complement_U B=\{3,4\}$,$A=\{3\}$或$\{1,3\}$或$\{2,3\}$或$\{1,2,3\}$,所以 $A\cap(\complement_U B)=\{3\}$.

学习任务三　求与补集相关的参数问题

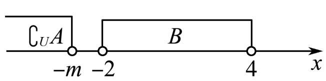
例 2　(1)设 $U=\{0,1,2,3\}$,$A=\{x\in U|x^2+mx=0\}$.若 $\complement_U A=\{1,2\}$,则实数 $m=$________.

-3　**解析**:因为 $\complement_U A=\{1,2\}$,所以 $A=\{0,3\}$.所以 $9+3m=0$,解得 $m=-3$.

(2)设集合 $A=\{x|x+m\geqslant 0\}$,$B=\{x|-2<x<4\}$,全集 $U=\mathbf{R}$,且$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$,求实数 m 的取值范围.

解:(方法一:直接法)由 $A=\{x|x+m\geqslant 0\}=\{x|x\geqslant -m\}$,得 $\complement_U A=\{x|x<-m\}$.

因为 $B=\{x|-2<x<4\}$,$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$,在数轴上画出图形如图所示,

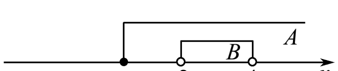


所以 $-m\leqslant -2$,即 $m\geqslant 2$.

所以 m 的取值范围是$\{m|m\geqslant 2\}$.

(方法二:集合间的关系)由$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$ 可知 $B\subseteq A$.

又 $B=\{x|-2<x<4\}$,$A=\{x|x+m\geqslant 0\}=\{x|x\geqslant -m\}$,结合如图所示的数轴,得 $-m\leqslant -2$,即 $m\geqslant 2$.



所以 m 的取值范围是$\{m|m\geqslant 2\}$.

[一题多思]

思考 1.将本例(2)中的条件“$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$”改为“$(\complement_U A)\cap B=B$”,其他条件不变,求 m 的取值范围.

由已知得 $A=\{x|x\geqslant -m\}$,所以 $\complement_U A=\{x|x<-m\}$.又$(\complement_U A)\cap B=B$,所以 $B\subseteq\complement_U A$,$-m\geqslant 4$,解得$m\leqslant -4$.所以 m 的取值范围是$\{m|m\leqslant -4\}$.

思考 2.将本例(2)中的条件“$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$”改为“$(\complement_U B)\cup A=\mathbf{R}$”,其他条件不变,求 m 的取值范围.

由已知得 $A=\{x|x\geqslant -m\}$,$\complement_U B=\{x|x\leqslant -2$,或 $x\geqslant 4\}$.又$(\complement_U B)\cup A=\mathbf{R}$,所以$-m\leqslant -2$,解得 $m\geqslant 2$.所以 m 的取值范围是$\{m|m\geqslant 2\}$.

反思提炼

由集合的补集求参数的方法

(1)由补集求参数问题,若集合中元素个数有限,可利用补集的定义并结合集合知识求解.

(2)与集合交、并、补运算有关的求参数问题,若集合中元素个数无限,一般利用数轴分析求解.

探究训练

已知全集 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$,$A=\{|2a-1|,2\}$,

$\complement_U A=\{5\}$,则实数 $a=$________.

2　**解析**:由题意知,$a^2+2a-3=5$,

解得 $a=-4$ 或 $a=2$.

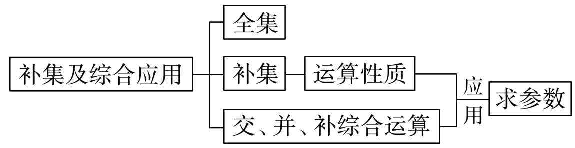
当 $a=-4$ 时,$|2a-1|=9$,

而 $9\notin U$,所以 $a=-4$ 不满足题意,舍去;

当 $a=2$ 时,$|2a-1|=3$,$3\in U$,满足题意.

故实数 a 的值为 2.

体系构建



课后素养评价(五)

基础性·能力运用

1.已知全集 $U=\{x\,|\,-2\leqslant x\leqslant 2\}$,集合 $A=\{x\,|\,-1<x\leqslant 0\}$,则 $\complement_U A=$　(　　)

A.$\{x\,|\,-2\leqslant x\leqslant -1$,或 $0<x\leqslant 2\}$

B.$\{x\,|\,-2\leqslant x\leqslant -1$,或 $0\leqslant x\leqslant 2\}$

C.$\{x\,|\,-1\leqslant x<0\}$

D.$\{x\,|\,-1<x\leqslant 0\}$

A　**解析**:全集 $U=\{x\,|\,-2\leqslant x\leqslant 2\}$,集合 $A=\{x\,|\,-1<x\leqslant 0\}$,则 $\complement_U A=\{x\,|\,-2\leqslant x\leqslant -1$,或 $0<x\leqslant 2\}$.

2.(多选)已知集合 $M=\{-1,0,1\}$,$N=\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 2\}$,则下列结论正确的是　(　　)

A.$M\subseteq N$

B.$N\subseteq M$

C.$M\cup N=\{-1,0,1,2\}$

D.$M\cap(\complement_{\mathbf{R}} N)=\varnothing$

AD　**解析**:因为 $M=\{-1,0,1\}$,$N=\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 2\}$,所以 $M\subseteq N$,所以 A 正确,B 错误;

因为 $M\cup N=\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 2\}$,所以 C 错误;

因为 $M\subseteq N$,所以 $M\cap(\complement_{\mathbf{R}} N)=\varnothing$,所以 D 正确.

3.设全集 $U=\{1,3,5,7,9\}$,集合 $A=\{1,|a-5|,9\}$,$\complement_U A=\{5,7\}$,则实数 a 的值是　(　　)

A.2　　B.8

C.-2 或 8　　D.2 或 8

D　**解析**:因为 $A\cup(\complement_U A)=U$,所以 $|a-5|=3$,所以 $a=2$ 或 $a=8$.

4.设全集为 $\mathbf{R}$,$A=\{x\,|\,3\leqslant x<7\}$,$B=\{x\,|\,2<x<10\}$,则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=$________,$(\complement_{\mathbf{R}} A)\cap B=$________.

$\{x\,|\,x\leqslant 2$,或 $x\geqslant 10\}$　$\{x\,|\,2<x<3$,或 $7\leqslant x<10\}$

解析:由题意知,$A\cup B=\{x\,|\,2<x<10\}$,

所以 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=\{x\,|\,x\leqslant 2$,或 $x\geqslant 10\}$.

又 $\complement_{\mathbf{R}} A=\{x\,|\,x<3$,或 $x\geqslant 7\}$,

所以 $(\complement_{\mathbf{R}} A)\cap B=\{x\,|\,2<x<3$,或 $7\leqslant x<10\}$.

5.设全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x\,|\,x<1\}$,$B=\{x\,|\,x>m\}$.若 $\complement_U A\subseteq B$,则实数 m 的取值范围是 $\underline{\{m\,|\,m<1\}}$.

6.已知集合 $U=\{x\,|\,x\leqslant 4\}$,$A=\{x\,|\,-2<x<3\}$,$B=\{x\,|\,-3\leqslant x\leqslant 2\}$.

求:$A\cap B$;$(\complement_U A)\cup B$;$A\cap(\complement_U B)$;$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$;$\complement_U(A\cap B)$.

解:因为 $U=\{x\,|\,x\leqslant 4\}$,$A=\{x\,|\,-2<x<3\}$,$B=\{x\,|\,-3\leqslant x\leqslant 2\}$,

所以 $A\cap B=\{x\,|\,-2<x\leqslant 2\}$,$\complement_U A=\{x\,|\,x\leqslant -2$,或 $3\leqslant x\leqslant 4\}$,$\complement_U B=\{x\,|\,x<-3$,或 $2<x\leqslant 4\}$,

所以 $(\complement_U A)\cup B=\{x\,|\,x\leqslant 2$,或 $3\leqslant x\leqslant 4\}$,

$A\cap(\complement_U B)=\{x\,|\,2<x<3\}$,

$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\{x\,|\,x\leqslant -2$,或 $2<x\leqslant 4\}$,

$\complement_U(A\cap B)=\{x\,|\,x\leqslant -2$,或 $2<x\leqslant 4\}$.

综合性·创新提升

1.设 $U=\{1,2,3,4,5\}$,若 $A\cap B=\{2\}$,$(\complement_U A)\cap B=\{4\}$,$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{1,5\}$,则下列结论正确的是(　　)

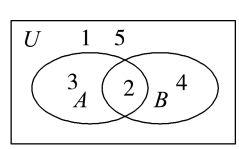
A.$3\notin A$ 且 $3\notin B$

B.$3\in A$ 且 $3\notin B$

C.$3\notin A$ 且 $3\in B$

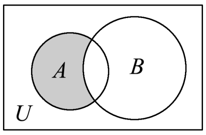
D.$3\in A$ 且 $3\in B$

B　**解析**:由题意,画出 Venn 图如图所示,



所以 $A=\{2,3\}$,$B=\{2,4\}$,故 $3\in A$ 且 $3\notin B$.

2. 如图，全集 $U=\mathbf{N}$，集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{x\in\mathbf{N}|x>3\}$，则阴影部分表示的集合为　　(　　)



A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{0,4,5\}$

C. $\{1,2\}$　　D. $\{1,2,3\}$

D　**解析**：由题中 Venn 图可知阴影部分表示的集合为 $(\complement_U B)\cap A$，又 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{x\in\mathbf{N}|x>3\}$，所以 $\complement_U B=\{x\in\mathbf{N}|x\leqslant 3\}$，所以 $(\complement_U B)\cap A=\{1,2,3\}$。则题图阴影部分表示的集合为 $\{1,2,3\}$。

3. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=\{x|0<x<2\}$，$N=\{y|y=x^2\}$，则 $(\complement_U M)\cap N=$________。

$\{x|x\geqslant 2$，或 $x=0\}$　**解析**：$N=\{y|y=x^2\}=\{y|y\geqslant 0\}$，$\complement_U M=\{x|x\leqslant 0$，或 $x\geqslant 2\}$，则 $(\complement_U M)\cap N=\{x|x\geqslant 2$，或 $x=0\}$。

4.（新定义）设 A,B 是 $\mathbf{R}$ 的两个子集，对于 $x\in\mathbf{R}$，定义：$m=\begin{cases}0,x\notin A,\\1,x\in A,\end{cases}$ $n=\begin{cases}0,x\notin B,\\1,x\in B.\end{cases}$ 若 $A\subseteq B$，则对任意 $x\in\mathbf{R}$，$m(1-n)=$________；若对任意 $x\in\mathbf{R}$，$m+n=1$，则 A,B 的关系为________。

0　$A=\complement_{\mathbf{R}}B$　**解析**：因为 $A\subseteq B$，所以当 $x\notin A$ 时，$m=0$，$m(1-n)=0$；

当 $x\in A$ 时，必有 $x\in B$，即 $m=n=1$，$m(1-n)=0$。

综上，$m(1-n)=0$。

因为对任意 $x\in\mathbf{R}$，$m+n=1$，

所以 m,n 的值一个为 0，另一个为 1，即当 $x\in A$ 时，必有 $x\notin B$，或当 $x\in B$ 时，必有 $x\notin A$，

所以 A,B 的关系为 $A=\complement_{\mathbf{R}}B$。

5. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|x\leqslant -2$，或 $x\geqslant 5\}$，$B=\{x|x\leqslant 2\}$。

(1) 求 $\complement_U(A\cup B)$；

(2) 记 $\complement_U(A\cup B)=D$，$C=\{x|2a-3\leqslant x\leqslant -a\}$，且 $C\cap D=C$，求实数 a 的取值范围。

解：(1) 因为 $A=\{x|x\leqslant -2$，或 $x\geqslant 5\}$，$B=\{x|x\leqslant 2\}$，所以 $A\cup B=\{x|x\leqslant 2$，或 $x\geqslant 5\}$。

又全集 $U=\mathbf{R}$，则 $\complement_U(A\cup B)=\{x|2<x<5\}$。

(2) 由 (1) 得 $D=\{x|2<x<5\}$。

由 $C\cap D=C$ 得 $C\subseteq D$。

① 当 $C=\varnothing$ 时，有 $-a<2a-3$，解得 $a>1$；

② 当 $C\neq\varnothing$ 时，有 $\begin{cases}2a-3\leqslant -a,\\2a-3>2,\\-a<5,\end{cases}$ 解得 $a\in\varnothing$。

综上，a 的取值范围为 $\{a|a>1\}$。

1.4　充分条件与必要条件

1.4.1　充分条件与必要条件

学习任务目标

1.理解充分条件、必要条件的概念,能进行充分条件、必要条件的判断.
2.了解充分条件与判定定理、必要条件与性质定理的关系.
3.能通过充分性、必要性解决简单的问题.

问题式预习

知识清单

知识点一　充分条件与必要条件

一般地,已知命题“若 p,则 q”,有如下结论:

命题真假	真命题	假命题
推出关系	由 p 可以推出 q	由 p 推不出 q
符号表示	$p\Rightarrow q$	$p\nRightarrow q$
条件关系	p 是 q 的充分条件;q 是 p 的必要条件	p 不是 q 的充分条件;q 不是 p 的必要条件

知识点二　定理关系

(1)数学中的每一条判定定理都给出了相应结论成立的一个充分条件.
(2)数学中的每一条性质定理都给出了相应结论成立的一个必要条件.

概念辨析

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).
(1)若“$p\Rightarrow q$”,则 p 的充分条件是 q.　(　　)
×　**解析**:若“$p\Rightarrow q$”,则 p 是 q 的充分条件.
(2)若 q 是 p 的必要条件,则 q 是唯一的.　(　　)
×　**解析**:给定条件 p,由 p 可以推出的结论 q 是不唯一的.
(3)“若 q,则 p”是真命题,则 p 是 q 的必要条件.　(　√　)
(4)“若 p,则 q”为假命题,则 p 不是 q 的充分条件,但 q 可以是 p 的必要条件.　(　　)
×　**解析**:“若 p,则 q”为假命题,则 p 不是 q 的充分条件,q 不是 p 的必要条件.

2.“四边形的四条边相等”是“四边形是正方形”的　(　　)
A.充分条件
B.必要条件
C.充分条件与必要条件
D.无法判断
B　**解析**:因为正方形的四条边相等,但四条边相等的四边形不一定是正方形,所以“四边形的四条边相等”是“四边形是正方形”的必要条件.

3.请思考并回答下列问题:
(1)若 p 是 q 的充分条件,则条件 p 是唯一的吗?
提示:不唯一.如 $1<x<3$ 是 $x>0$ 的充分条件,$x>5$,$2<x<7$ 等都是 $x>0$ 的充分条件.
(2)“p 是 q 的充分条件”“q 是 p 的必要条件”“q 的一个充分条件是 p”“p 的一个必要条件是 q”,说的是同一个意思吗?
提示:是.

任务型课堂

学习任务一　充分条件的判断

1.(多选)下列选项中,p 是 q 的充分条件的是(　　)
A.p:$(x-2)(x-3)=0$,q:$x-2=0$
B.在$\triangle ABC$ 中,p:$\angle B>\angle C$,q:$AC>AB$
C.p:$m>-\frac{1}{4}$,q:方程 $x^2-x-m=0$ 无实根
D.p:$x>2$,q:$x>1$

BD　**解析**:选项 A,因为$(x-2)(x-3)=0$,所以 $x=2$ 或 $x=3$,不能推出 $x-2=0$,所以 p 不是 q 的充分条件.选项 B,在$\triangle ABC$ 中,由大角对大边知,$\angle B>\angle C\Rightarrow AC>AB$,所以 p 是 q 的充分条件.选项 C,因为 $m>-\frac{1}{4}$,所以 $\Delta=1^2+4m>0$,方程 $x^2-x-m=0$ 有两个不相等的实根,所以 p 不是 q 的充分条件.选项 D,设集合 $A=\{x\mid x>2\}$,$B=\{x\mid x>1\}$,所以 $A\subseteq B$,所以 p 是 q 的充分条件.

2.若 $a\in\mathbf{R}$,则“$a=1$”是“$|a|=1$”的　(　　)

A.充分条件

B.必要条件

C.充分条件与必要条件

D.无法判断

A　**解析**:当 $a=1$ 时,$|a|=1$ 成立.但当 $|a|=1$ 时,$a=\pm1$,所以 $a=1$ 不一定成立.

所以“$a=1$”是“$|a|=1$”的充分条件.故选 A.

反思提炼

定义法判断充分条件:分清什么是条件 p,什么是结论 q,若 $p\Rightarrow q$,则 p 是 q 的充分条件.

学习任务二　必要条件的判断

例 1　在下列各题中,q 是 p 的必要条件吗?

(1)p:$|x|=|y|$,q:$x=y$;

(2)p:$\triangle ABC$ 是直角三角形,q:$\triangle ABC$ 是等腰三角形;

(3)p:$x=1$,q:$x-1=\sqrt{x-1}$.

解:(1)若 $|x|=|y|$,则 $x=y$ 或 $x=-y$,

因此 $p\nRightarrow q$,所以 q 不是 p 的必要条件.

(2)直角三角形不一定是等腰三角形,

因此 $p\nRightarrow q$,所以 q 不是 p 的必要条件.

(3)当 $x=1$ 时,$x-1=\sqrt{x-1}=0$,

所以 $p\Rightarrow q$,所以 q 是 p 的必要条件.

反思提炼

(1)定义法判断必要条件:若 $p\Rightarrow q$,则 q 是 p 的必要条件.

(2)集合法判断充分条件、必要条件:设 p 对应的集合为 A,q 对应的集合为 B.若 $A\subseteq B$,则 p 是 q 的充分条件;若 $A\supseteq B$,则 p 是 q 的必要条件.

探究训练

下列“若 p,则 q”形式的命题中,q 是 p 的必要条件的有________.(填序号)

①若 $x=1$,则 $x^2-4x+3=0$;

②若 x 为有理数,则 $\frac{1}{x}$ 为有理数;

③若 $x=y$,则 $x^2=y^2$.

①③　**解析**:①因为命题“若 $x=1$,则 $x^2-4x+3=0$”是真命题,所以 q 是 p 的必要条件.

②当 $x=0$ 时,x 是有理数,但 $\frac{1}{x}$ 无意义,所以 $\frac{1}{x}$ 不是有理数,所以 q 不是 p 的必要条件.

③因为 $x=y$,等号左右两边分别平方后,等式依然成立,所以 $x^2=y^2$,所以 q 是 p 的必要条件.

学习任务三　充分、必要条件的探求与应用

例 2　(1)(多选)$0<x<3$ 的一个充分条件可以是　(　　)

A.$-1<x\leqslant3$

B.$0\leqslant x<3$

C.$0<x\leqslant2$

D.$1<x<2$

CD　**解析**:从集合观点看,求 $0<x<3$ 成立的一个充分条件,就是从 A,B,C,D 中选出集合 $\{x|0<x<3\}$ 的子集.由于 $\{x|0<x\leqslant2\}\subseteq\{x|0<x<3\}$,$\{x|1<x<2\}\subseteq\{x|0<x<3\}$,故选 CD.

(2)已知集合 $P=\{x|-2<x<1\}$,$Q=\{x|3m-2\leqslant x\leqslant5m+2,m\in\mathbf{R}\}$.若 $x\in P$ 的一个必要条件为 $x\in Q$,求实数 m 的取值范围.

解:由题意,得 P 是 Q 的子集,

则 $\begin{cases}3m-2<5m+2,\\3m-2\leqslant-2,\\5m+2\geqslant1,\end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{5}\leqslant m\leqslant0$,

所以实数 m 的取值范围是 $\left\{m\left|-\frac{1}{5}\leqslant m\leqslant0\right.\right\}$.

[一题多思]

思考 1.本例(1)中,若把“充分条件”改为“必要条件”,该如何选择?

提示:从集合观点看,求 $0<x<3$ 成立的一个必要条件,就是从 A,B,C,D 中选出使集合 $\{x|0<x<3\}$ 是它的子集的集合.由于 $\{x|0<x<3\}\subseteq\{x|-1<x\leqslant3\}$,$\{x|0<x<3\}\subseteq\{x|0\leqslant x<3\}$,故选 AB.

思考 2.本例(2)中,若集合 $P=\{x|-2<x<4\}$,集合 Q 不变,$x\in P$ 的一个充分条件为 $x\in Q$,则实数 m 的取值范围是怎样的?

提示:由已知 $x\in P$ 的一个充分条件为 $x\in Q$,则 Q 是 P 的子集.

当 $3m-2>5m+2$,即 $m<-2$ 时,$Q=\varnothing$,满足题意;

当 $3m-2\leqslant5m+2$,即 $m\geqslant-2$ 时,

由题意得 $\begin{cases}3m-2>-2,\\5m+2<4,\end{cases}$ 解得 $0<m<\frac{2}{5}$.

综上,实数 m 的取值范围是

$\left\{m\left|m<-2,或\ 0<m<\frac{2}{5}\right.\right\}$.

反思提炼

充分条件与必要条件的应用技巧

(1)应用:可利用充分性与必要性进行相关问题的求解,特别是求参数的值或取值范围.

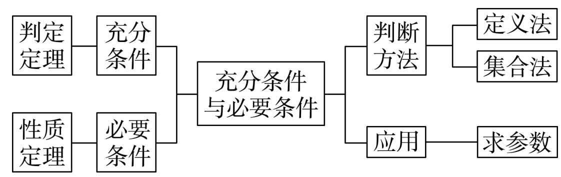
(2)求解步骤:先把 p,q 等价转化,再利用充分条件、必要条件与集合间的包含关系,建立关于参数的不等式(组)进行求解.

探究训练

若"$x>1$"是"$x>a$"的充分条件,则实数 a 的取值范围是________.

$\{a|a\leqslant 1\}$　**解析**:因为 $x>1\Rightarrow x>a$,所以 $a\leqslant 1$.

体系构建



课后素养评价(六)

基础性·能力运用

1."$x<8$"的一个充分条件是　(　　)

A.$x>9$　B.$x<9$

C.$x<7$　D.$x>7$

C　**解析**:根据选项,可知 $x<7\Rightarrow x<8$,所以"$x<7$"是"$x<8$"成立的一个充分条件.

2."$a^2>b^2$"的一个必要条件是　(　　)

A.$a<b$　B.$a>b$

C.$|a|>|b|$　D.$ab>0$

C　**解析**:$a^2>b^2\Rightarrow|a|>|b|$.

3.(多选)若"$-1<x<2$"是"$-2<x<a$"的充分条件,则实数 a 的值可以是　(　　)

A.1　B.2　C.3　D.4

BCD　**解析**:由"$-1<x<2$"是"$-2<x<a$"的充分条件,知 $\{x|-1<x<2\}\subseteq\{x|-2<x<a\}$.所以 $a\geqslant 2$.

所以实数 a 的值可以是 2,3,4.

4.已知 $p:x+y=2$,$q:\begin{cases}x=-1,\\y=3,\end{cases}$则　(　　)

A.p 是 q 的充分条件

B.p 是 q 的必要条件

C.p 既不是 q 的充分条件,也不是 q 的必要条件

D.无法判断

B　**解析**:因为当 $x+y=2$ 时,x,y 可取任意实数,不一定有 $\begin{cases}x=-1,\\y=3,\end{cases}$ 所以 p 不是 q 的充分条件;因为 $\begin{cases}x=-1,\\y=3,\end{cases}$ 所以 $x+y=2$,所以 p 是 q 的必要条件.

5.写出"两个三角形相似"的两个充分条件:

________________________;

________________________.

两个三角形的两角分别相等　两个三角形的三边成比例(答案不唯一)　**解析**:根据题意,写出两条两个三角形相似的判定定理即可.因为如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等,那么这两个三角形相似;如果一个三角形的三条边与另一个三角形的三条边对应成比例,那么这两个三角形相似,所以"两个三角形的两角分别相等""两个三角形的三边成比例"是"两个三角形相似"的充分条件.

6.下列各题中,哪些 p 是 q 的充分条件?哪些 p 是 q 的必要条件?

(1)p:数 a 能被 6 整除,q:数 a 能被 3 整除;

(2)p:a 与 b 互为相反数,q:a 与 b 的绝对值相等;

(3)p:$\triangle ABC$ 有两个角相等,q:$\triangle ABC$ 是正三角形.

解:(1)数 a 能被 6 整除,则一定能被 3 整除,反之不一定成立,即 $p\Rightarrow q$,$q\nRightarrow p$,所以 p 是 q 的充分条件,但 p 不是 q 的必要条件.

(2)若 a 与 b 互为相反数,则 a 与 b 的绝对值相等,反之不一定成立,即 $p\Rightarrow q$,$q\nRightarrow p$,所以 p 是 q 的充分条件,但 p 不是 q 的必要条件.

(3)在$\triangle ABC$ 中,有两个角相等时为等腰三角形,不一定为正三角形,即 $p\nRightarrow q$,但 $q\Rightarrow p$,所以 p 不是 q 的充分条件,但 p 是 q 的必要条件.

综合性·创新提升

1.(数学文化)王昌龄是盛唐著名的边塞诗人,被誉为"七绝圣手",其《从军行》传诵至今."青海长云暗雪山,孤城遥望玉门关.黄沙百战穿金甲,不破楼兰终不还."由此推断,"攻破楼兰"是"返回家乡"的 (　　)

A.必要条件

B.充分条件

C.既是充分条件又是必要条件

D.既不是充分条件也不是必要条件

A　**解析**:返回家乡⇒攻破楼兰.故选 A.

2.(多选)下列条件是"$a+b>0$"的充分条件的是 (　　)

A.$a>0,b>0$

B.$a<0,b<0$

C.$a=3,b=-2$

D.$a>0,b<0$ 且 $|a|>|b|$

ACD　**解析**:A 中,因为 $a>0,b>0\Rightarrow a+b>0$,所以 A 满足题意;

B 中,因为 $a<0,b<0\not\Rightarrow a+b>0$,所以 B 不满足题意;

C 中,因为 $a=3,b=-2\Rightarrow a+b=1>0$,所以 C 满足题意;

D 中,因为 $a>0,b<0$ 且 $|a|>b\Rightarrow a>-b\Rightarrow a+b>0$,所以 D 满足题意.

3.(多选)下列选项正确的是 (　　)

A."$x>2$"是"$|x|>2$"的充分条件

B.在$\triangle ABC$ 中,"$AB^2+AC^2=BC^2$"是"$\triangle ABC$ 为直角三角形"的必要条件

C.若 $a,b\in\mathbf{R}$,则"$a^2+b^2\neq0$"是"a,b 均不为 0"的充分条件

D.若 $a,b\in\mathbf{R}$,则"$a^2+b^2\neq0$"是"a,b 均不为 0"的必要条件

AD　**解析**:对于 A,因为 $x>2\Rightarrow|x|>2$,所以"$x>2$"是"$|x|>2$"的充分条件,选项 A 正确;对于 B,$\angle A$ 不一定为直角,故为充分条件,选项 B 错误;对于 C,D,因为 $a^2+b^2\neq0\not\Rightarrow a,b$ 全不为零,而 a,b 均不为 $0\Rightarrow a^2+b^2\neq0$,所以选项 C 错误,选项 D 正确.

4."$x^2=2x$"是"$x=0$"的________条件,"$x=0$"是"$x^2=2x$"的________条件.(填"充分"或"必要")

必要　充分　**解析**:由于 $x=0\Rightarrow x^2=2x$,所以"$x^2=2x$"是"$x=0$"的必要条件,"$x=0$"是"$x^2=2x$"的充分条件.

5.已知集合 $A=\{1,a\}$,$B=\{1,2,3\}$,则"$a=3$"是"$A\subseteq B$"的________条件.(填"充分"或"必要")

充分　**解析**:当 $A\subseteq B$ 时,$a=2$ 或 $a=3$,所以"$a=3$"是"$A\subseteq B$"的充分条件.

6.已知 p:实数 x 满足 $3a<x<a$,其中 $a<0$;q:实数 x 满足 $-2\leqslant x\leqslant3$.若 q 是 p 的必要条件,求实数 a 的取值范围.

解:p:$3a<x<a$,设集合 $A=\{x\mid 3a<x<a\}$,$a<0$,

q:$-2\leqslant x\leqslant3$,设集合 $B=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant3\}$.

因为 $p\Rightarrow q$,所以 $A\subseteq B$,所以 $\begin{cases}3a\geqslant-2,\\ a\leqslant3,\\ a<0,\end{cases}$ 即 $-\dfrac{2}{3}\leqslant a<0$.

所以 a 的取值范围是 $\left\{a\,\middle|\,-\dfrac{2}{3}\leqslant a<0\right\}$.

1.4.2　充要条件

学习任务目标

1.理解充要条件的含义.
2.会判断一些简单的充要条件.
3.能对充要条件进行证明.

问题式预习

知识清单

知识点一　充要条件

1.定义：如果“若 p，则 q”和它的逆命题“若 q，则 p”均是真命题，即既有 $p \Rightarrow q$，又有 $q \Rightarrow p$，就记作 $p \Leftrightarrow q$.此时 p 既是 q 的充分条件，也是 q 的必要条件，即 p 是 q 的充分必要条件，简称为充要条件.

2.条件与结论的等价性：如果 p 是 q 的充要条件，那么 q 也是 p 的充要条件.

3.概括：如果 $p \Leftrightarrow q$，那么 p 与 q 互为充要条件.

知识点二　命题的条件、结论与充分性、必要性

1.p 是 q 的充分必要条件（充要条件），即 $p \Rightarrow q$，且 $q \Rightarrow p$.
2.p 是 q 的充分不必要条件，即 $p \Rightarrow q$，且 $q \nRightarrow p$.
3.p 是 q 的必要不充分条件，即 $p \nRightarrow q$，且 $q \Rightarrow p$.
4.p 是 q 的既不充分也不必要条件，即 $p \nRightarrow q$，且 $q \nRightarrow p$.

概念辨析

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1) q 是 p 的必要条件时，p 是 q 的充分条件.　（ √ ）

(2) q 不是 p 的必要条件时，$p \nRightarrow q$.　（ √ ）

(3)若 q 是 p 的必要条件，则当 q 成立时，p 也成立.　（ × ）

(4)如果一个命题及其逆命题均正确，那么原命题中的条件是结论的充要条件.　（ √ ）

2.设 p：四边形为菱形，q：四边形的对角线互相垂直，则 p 是 q 的　（　　）

A.充分不必要条件
B.必要不充分条件
C.充要条件
D.既不充分也不必要条件

A　**解析**：因为 $p \Rightarrow q$ 且 $q \nRightarrow p$，所以 p 是 q 的充分不必要条件.

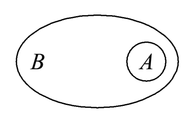
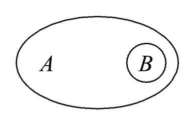
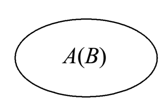
3.请思考并回答下列问题：

(1)“p 是 q 的充要条件”与“p 的充要条件是 q”有区别吗？若有，区别在哪里？

提示：有区别.“p 是 q 的充要条件”说明 p 是条件，q 是结论；“p 的充要条件是 q”说明 q 是条件，p 是结论.

(2)你能用集合的观点理解充分条件与必要条件吗？

提示：$A=\{x \mid x$ 满足条件 $p\}$，$B=\{x \mid x$ 满足条件 $q\}$.

若 $A \subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件；若 $A \subsetneqq B$，则 p 是 q 的充分不必要条件	
若 $B \subseteq A$，则 p 是 q 的必要条件；若 $B \subsetneqq A$，则 p 是 q 的必要不充分条件	
若 $A=B$，则 p，q 互为充要条件	

任务型课堂

学习任务一　充要条件的判定

1.“$a>0$”是“$|a|>0$”的　（　　）

A.充分不必要条件
B.必要不充分条件
C.充要条件
D.既不充分也不必要条件

A　**解析**：因为 $a>0 \Rightarrow |a|>0$，$|a|>0 \Rightarrow a>0$ 或

$a<0$，所以“$|a|>0$”不一定推出“$a>0$”.故“$a>0$”是“$|a|>0$”的充分不必要条件.故选 A.

2. 设集合 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，那么“$m\in A$”是“$m\in B$”的　（　　）

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

B　**解析**：集合 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$，集合 $B=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，则 $B\subsetneqq A$，故由“$m\in A$”得不到“$m\in B$”.反之，由“$m\in B$”可以得到“$m\in A$”.故选 B.

反思提炼

判断充分条件、必要条件及充要条件的三种方法

(1)定义法：直接判断“若 p，则 q”以及“若 q，则 p”的真假.

(2)集合法：利用集合的包含关系进行判断.

(3)传递法：充分条件和必要条件具有传递性，即由 $p_1\Rightarrow p_2\Rightarrow\cdots\Rightarrow p_n$，可得 $p_1\Rightarrow p_n$；充要条件也具有传递性.

学习任务二　充要条件的证明

例 1　求证：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$(a,b,c 是常数，且 $a\neq 0$)有一正实根和一负实根的充要条件是 $ac<0$.

证明：必要性：由于方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$有一正实根和一负实根，设为 x_1,x_2，

所以 $\Delta=b^2-4ac>0$，且 $x_1x_2=\dfrac{c}{a}<0$，

所以 $ac<0$.

充分性：由 $ac<0$ 可推出 $\Delta=b^2-4ac>0$，

故方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$有两个不相等的实根，设为 x_1,x_2，

则 $x_1x_2=\dfrac{c}{a}<0$，

所以方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$有一正一负两实根.

综上，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$(a,b,c 是常数，且 $a\neq 0$)有一正实根和一负实根的充要条件是 $ac<0$.

反思提炼

充要条件的证明策略

要证明 p 是 q 的充要条件，需要从充分性和必要性两个方向进行，即证明命题“若 p，则 q”为真且“若 q，则 p”为真.

注意：证明时一定要分清充分性与必要性的推导方向.

探究训练

函数 $y=x^2+mx+1$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称的充要条件是________.

$m=-2$　**解析**：若函数 $y=x^2+mx+1$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，则 $-\dfrac{m}{2}=1$，即 $m=-2$；反之，若 $m=-2$，则函数 $y=x^2-2x+1$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称.

学习任务三　根据充要条件求参数的取值范围

例 2　已知集合 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$，$B=\{x|1-a\leqslant x\leqslant 1+a\}(a>0)$，是否存在实数 a，使得“$x\in A$”是“$x\in B$”的充要条件？

解：不存在.因为若“$x\in A$”是“$x\in B$”的充要条件，则

$A=B$，所以$\begin{cases}a>0,\\1-a=0,\\1+a=4,\end{cases}$

方程组无解，所以不存在满足条件的实数 a.

[一题多思]

思考 1. 若把本例中“充要条件”改为“充分不必要条件”，实数 a 存在吗？

提示：由题意知，A 是 B 的真子集，

所以 $1-a\leqslant 0$ 且 $1+a\geqslant 4$(两等号不能同时取得).

又 $a>0$，解得 $a\geqslant 3$.

所以实数 a 存在，且 a 的取值集合 $M=\{a|a\geqslant 3\}$.

思考 2. 若把本例中“充要条件”改为“必要不充分条件”，实数 a 存在吗？

提示：由题意知，B 是 A 的真子集，

所以 $1-a\geqslant 0$ 且 $1+a\leqslant 4$(两等号不能同时取得).

又 $a>0$，解得 $0<a\leqslant 1$.

所以实数 a 存在，且 a 的取值集合 $M=\{a|0<a\leqslant 1\}$.

反思提炼

根据充分不必要条件、必要不充分条件及充要条件求参数值(范围)的一般步骤

(1)根据已知将充分不必要条件、必要不充分条件或充要条件转化为集合间的关系；

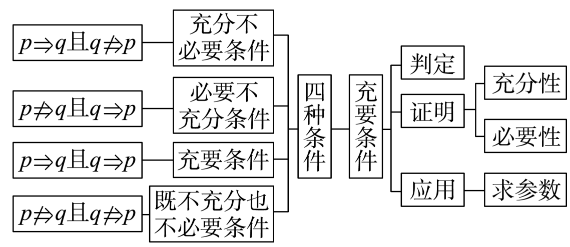
(2)根据集合间的关系构建关于参数的方程(组)或不等式(组)求解.

探究训练

若“$x>2$”是“$x>m$”的必要不充分条件，则实数 m 的取值范围是________.

$\{m|m>2\}$　**解析**：因为“$x>2$”是“$x>m$”的必要不充分条件，所以$\{x|x>m\}$是$\{x|x>2\}$的真子集，即 $m>2$.

体系构建



课后素养评价（七）

基础性·能力运用

1.“$a=b=c(a,b,c\in\mathbf{R})$”是“$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$”的　（　　）

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

C　**解析**：由 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac\Leftrightarrow(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0\Leftrightarrow a=b=c$，故“$a=b=c(a,b,c\in\mathbf{R})$”是“$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$ 成立”的充要条件.

2.若“$x<a$”是“$x\geqslant3$ 或 $x\leqslant-1$”的充分不必要条件，则 a 的取值范围是　（　　）

A.$\{a|a\geqslant3\}$　　B.$\{a|a\leqslant-1\}$

C.$\{a|-1\leqslant a\leqslant3\}$　　D.$\{a|a\leqslant3\}$

B　**解析**：因为“$x<a$”是“$x\geqslant3$ 或 $x\leqslant-1$”的充分不必要条件，故 $a\leqslant-1$.

3.“$ab>4$”是“$a>2$ 且 $b>2$”的　（　B　）

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

4.指出下列各题中 p 是 q 的什么条件.(在“充分不必要条件”“必要不充分条件”“充要条件”“既不充分也不必要条件”中选一个作答)

(1)p:$x-3=0$,q:$(x-2)(x-3)=0$;

(2)p:两个三角形相似,q:两个三角形全等;

(3)p:$a>b$,q:$a+c>b+c$.

解：(1)$x-3=0\Rightarrow(x-2)(x-3)=0$，但$(x-2)(x-3)=0\nRightarrow x-3=0$，故 p 是 q 的充分不必要条件.

(2)两个三角形相似$\nRightarrow$两个三角形全等，但两个三角形全等$\Rightarrow$两个三角形相似，故 p 是 q 的必要不充分条件.

(3)$a>b\Rightarrow a+c>b+c$，且 $a+c>b+c\Rightarrow a>b$，故 p 是 q 的充要条件.

综合性·创新提升

1.下列命题中是真命题的是　（　　）

①“$x>3$”是“$x>4$”的必要条件；

②“$x=1$”是“$x^2=1$”的必要条件；

③“$a=0$”是“$ab=0$”的必要条件.

A.①　　B.①②

C.①③　　D.②③

A　**解析**：$x>4\Rightarrow x>3$，故①是真命题；

$x=1\Rightarrow x^2=1$，但$x^2=1\nRightarrow x=1$，故②是假命题；

$a=0\Rightarrow ab=0$，但 $ab=0\nRightarrow a=0$，故③是假命题.

2.“a,b 中至少有一个不为零”的充要条件是　（　　）

A.$ab=0$　　B.$ab>0$

C.$a^2+b^2=0$　　D.$a^2+b^2>0$

D　**解析**：$a^2+b^2>0$，则 a,b 不同时为零；a,b 中至少有一个不为零，则 $a^2+b^2>0$.

3.“$x<y$”是“$|x|<|y|$”的　（　　）

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

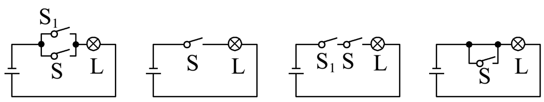
C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

D　**解析**：当 $x=-3,y=1$ 时，$x<y$，但$|x|>|y|$，

故 $x<y$ 推不出 $|x|<|y|$；反之，当 $x=1,y=-3$ 时，$|x|<|y|$，但 $x>y$，故 $|x|<|y|$ 推不出 $x<y$；由充分必要条件的定义，知“$x<y$”是“$|x|<|y|$”的既不充分也不必要条件.

4.(跨学科融合)(多选)已知 p：开关 S 闭合，q：灯泡 L 亮，则 p 是 q 的充分不必要条件的电路图是(　　)



A　　　B　　　C　　　D

AD　**解析**：对于 A，开关 S 闭合，则灯泡 L 亮，反之，灯泡 L 亮，不一定有开关 S 闭合，所以 $p\Rightarrow q$，但 $q\nRightarrow p$，所以 p 是 q 的充分不必要条件；对于 B，$p\Leftrightarrow q$，所以 p 是 q 的充要条件；对于 C，开关 S，S_1 与灯泡 L 串联，所以 $p\nRightarrow q$，$q\Rightarrow p$，所以 p 是 q 的必要不充分条件；对于 D，开关 S 闭合，则灯泡 L 亮，反之，灯泡 L 亮，不一定有开关 S 闭合，所以 $p\Rightarrow q$，但 $q\nRightarrow p$，所以 p 是 q 的充分不必要条件.

5.已知 p：$x^2+x-6=0$，q：$ax+1=0$，若 p 是 q 的必要不充分条件，则实数 a 的值为________.

$-\frac{1}{2}$或$\frac{1}{3}$　**解析**：由 $x^2+x-6=0$，可得 $x=2$ 或 $x=-3$. 对于 $ax+1=0$，当 $a=0$ 时，方程无解；

当 $a\neq 0$ 时，$x=-\frac{1}{a}$.

由题意知 $p\nRightarrow q$，$q\Rightarrow p$，则可得 $a\neq 0$，此时应有 $-\frac{1}{a}=2$ 或 $-\frac{1}{a}=-3$，解得 $a=-\frac{1}{2}$ 或 $a=\frac{1}{3}$.

综上，a 的值为 $-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{3}$.

6.已知 a,b 是正实数，求证：$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}+2=\frac{2}{ab}$ 的充要条件是 $a+b=1$.

证明：必要性：若 $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}+2=\frac{2}{ab}$，

则 $\frac{a(a+1)+b(b+1)+2ab}{ab}=\frac{2}{ab}$，

所以 $a^2+a+b^2+b+2ab=2$，

即 $(a+b)^2+(a+b)-2=0$，

故 $(a+b-1)(a+b+2)=0$.

因为 a,b 是正实数，所以 $a+b+2>0$，

所以 $a+b-1=0$，即 $a+b=1$.

充分性：若 $a+b=1$，

则 $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}+2=\frac{a(a+1)+b(b+1)+2ab}{ab}$

$=\frac{a^2+b^2+2ab+(a+b)}{ab}=\frac{(a+b)^2+(a+b)}{ab}$

$=\frac{1+1}{ab}=\frac{2}{ab}$.

综上，$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}+2=\frac{2}{ab}$ 的充要条件是 $a+b=1$.

1.5　全称量词与存在量词

1.5.1　全称量词与存在量词

学习任务目标

1. 理解全称量词与存在量词的含义,熟悉常见的全称量词和存在量词.
2. 理解全称量词命题和存在量词命题的含义,并能用数学符号表示.
3. 会判断一个命题是全称量词命题还是存在量词命题,并会判断它们的真假.

问题式预习

知识清单

知识点一　全称量词与全称量词命题

1. 定义:短语"所有的""任意一个"在逻辑中通常叫做全称量词,并用符号"$\forall$"表示.含有全称量词的命题,叫做全称量词命题.

2. 表述形式:全称量词命题"对 M 中任意一个 x,$p(x)$成立"可用符号简记为$\forall x\in M,p(x)$.

知识点二　存在量词与存在量词命题

1. 定义:短语"存在一个""至少有一个"在逻辑中通常叫做存在量词,并用符号"$\exists$"表示.含有存在量词的命题,叫做存在量词命题.

2. 表述形式:存在量词命题"存在 M 中的元素 x,$p(x)$成立"可用符号简记为$\exists x\in M,p(x)$.

概念辨析

1. 判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)全称量词表示对象的数量是无限的.　(　　)

×　**解析**:全称量词表示的数量可能是有限的,也可能是无限的,由题目而定.

(2)全称量词命题必须含有全称量词.　(　　)

×　**解析**:有些全称量词命题中的全称量词是省略的,理解时需要把它补充出来.

(3)短语"至少有一个"是存在量词.　(　　)

√　**解析**:"至少有一个"表示存在,是存在量词.

(4)"$2x+3>1$"是存在量词命题.　(　　)

×　**解析**:"$2x+3>1$"不是命题.

2. "三角形内角和等于 360°"是________(填"全称量词"或"存在量词")命题且是________(填"真"或"假")命题.

全称量词　假　**解析**:"三角形内角和都等于 360°"即"所有的三角形内角和都等于 360°",命题含有全称量词"所有的",是全称量词命题.因为三角形内角和等于 180°,所以该命题为假命题.

3. 请思考并回答下列问题:

(1)短语"都不是"是全称量词吗?"不都是"呢?

提示:"都不是"是全称量词,"不都是"不是全称量词.

(2)短语"至多有一个"是存在量词吗?为什么?

提示:不是.因为"至多有一个"的含义是"存在一个或一个也没有",它包含了不存在的情形.

任务型课堂

学习任务一　全称量词命题及其真假的判断

1. (多选)下列命题是全称量词命题且为真命题的是　(　　)

A.一切实数均有相反数

B.$\forall a\in \mathbf{N}$,方程 $ax+1=0$ 都有实数根

C.等腰梯形的对角线相等

D.π 是无理数

AC　**解析**:A,C 选项都是全称量词命题且为真命题;B 选项是全称量词命题,但不是真命题,当 $a=0$ 时,方程没有实数根;D 选项是真命题,但不是全称量词命题.

2. 用符号"$\forall$"表示下列命题,并判断真假:

(1)实数的平方大于或等于 0;

(2)正数的绝对值是它本身.

解:(1)$\forall x\in \mathbf{R},x^2\geqslant 0$,是真命题.

(2)$\forall x>0,|x|=x$,是真命题.

反思提炼

(1)判断一个命题是否为全称量词命题,主要看命题中是否有全称量词.有些命题的全称量词不明显或已省略,要仔细辨别.

(2)要判定一个全称量词命题是真命题,需保证该命题对所有的元素都成立;若能举出一个反例说明命题不成立,则该全称量词命题是假命题.

学习任务二　存在量词命题及其真假的判断

1.(多选)下列命题中,既是存在量词命题又是真命题的有　(　　)

A.至少有一个实数 x,使 $x^3+1=0$

B.所有正方形都是矩形

C.$\exists x\in\mathbf{R}$,使 $x^2-x+\frac{1}{4}\leqslant 0$

D.$\exists x\in\mathbf{R}$,使 $x^2+2x+2=0$

AC　**解析**:对于 A,“至少”是存在量词,存在 $x=-1$,使 $x^3+1=0$,故为真命题;对于 B,“所有”是全称量词,故为全称量词命题;对于 C,“$\exists$”是存在量词,又当 $x=\frac{1}{2}$ 时,$x^2-x+\frac{1}{4}\leqslant 0$ 成立,故为真命题;对于 D,是存在量词命题,但 $x^2+2x+2=(x+1)^2+1\neq 0$,故为假命题.故选 AC.

2.判断下列命题是否为存在量词命题,并判断真假:

(1)$\exists\alpha,\beta\in\mathbf{R}$,$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2$;

(2)某个四边形不是平行四边形;

(3)方程 $3x-2y=10$ 有整数解;

(4)有一个实数 x,使 $x^2+2x+4=0$.

解:(1)是存在量词命题,例如 $\alpha=0$,$\beta=1$,符合题意.真命题.

(2)是存在量词命题,表示为 $\exists x\in\{x\mid x$ 是四边形$\}$,x 不是平行四边形.真命题.

(3)是存在量词命题,可改写为存在一对整数 x,y,使 $3x-2y=10$ 成立.真命题.

(4)是存在量词命题,由于 $\Delta=2^2-4\times 4=-12<0$,因此方程无实根.假命题.

反思提炼

(1)判断一个命题是否为存在量词命题,主要看命题中是否有存在量词.有些命题的存在量词不明显或已省略,要仔细辨别.

(2)要判定一个存在量词命题为真,只要在给定的范围内找到一个元素使命题成立即可,否则命题为假.

学习任务三　全称量词命题与存在量词命题的应用

例　已知集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$,$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$,且 $B\neq\varnothing$.若命题 p:$\forall x\in B$,$x\in A$ 是真命题,求实数 m 的取值范围.

解:若命题 p:“$\forall x\in B$,$x\in A$”是真命题,则 $B\subseteq A$.

因为 $B\neq\varnothing$,所以 $\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1,\\ m+1\geqslant -2,\\ 2m-1\leqslant 5,\end{cases}$ 解得 $2\leqslant m\leqslant 3$.

即 m 的取值范围为 $\{m\mid 2\leqslant m\leqslant 3\}$.

[一题多思]

思考 1.若把本例中命题 p 改为“$\exists x\in A$,$x\in B$”,求 m 的取值范围.

提示:若命题 p 为真命题,则 $A\cap B\neq\varnothing$.

因为 $B\neq\varnothing$,所以 $m\geqslant 2$.

所以 $\begin{cases}-2\leqslant m+1\leqslant 5,\\ m\geqslant 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-2\leqslant 2m-1\leqslant 5,\\ m\geqslant 2,\end{cases}$

解得 $2\leqslant m\leqslant 4$.

所以 m 的取值范围是 $\{m\mid 2\leqslant m\leqslant 4\}$.

思考 2.把本例中的命题 p 改为“$\forall x\in A$,$x\in B$”,是否存在实数 m,使命题 p 是真命题?若存在,求出实数 m 的取值范围;若不存在,说明理由.

提示:不存在.理由如下:

若命题 p:$\forall x\in A$,$x\in B$ 是真命题,

则 $A\subseteq B$,$B\neq\varnothing$.

所以 $\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1,\\ m+1\leqslant -2,\\ 2m-1\geqslant 5,\end{cases}$ 无解.

所以不存在实数 m,使命题 p 是真命题.

反思提炼

依据含量词命题的真假求参数取值范围问题的求解方法

(1)首先,根据全称量词和存在量词的含义透彻地理解题意;

(2)其次,根据含量词命题的真假把命题的真假问题转化为集合间的关系或函数的最值问题,再转化为关于参数的不等式(组)求参数的取值范围.

探究训练

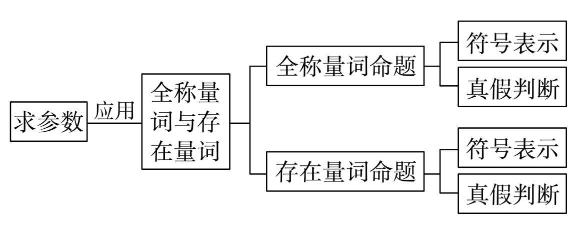
若存在 $x\in\left\{x\,\middle|\,x\geqslant -\frac{1}{2}\right\}$,使 $2x+a<0$,求实数 a 的取值范围.

解:由题意知,当 $x\in\left\{x\,\middle|\,x\geqslant -\frac{1}{2}\right\}$ 时,函数 $y=2x+a$ 的最小值为 $-1+a$,

则 $-1+a<0$,解得 $a<1$.

所以实数 a 的取值范围为 $\{a\mid a<1\}$.

体系构建



课后素养评价(八)

基础性·能力运用

1. 下列命题不是存在量词命题的是 (　　)

A.有的无理数的平方是有理数

B.有的无理数的平方不是有理数

C.对于任意 $x\in\mathbf{Z}$,$2x+1$ 是奇数

D.存在 $x\in\mathbf{R}$,$2x+1$ 是奇数

C　**解析**:A,B,D 中都有存在量词,是存在量词命题,C 中含有量词"任意",为全称量词命题.

2. 下列命题是"$\forall x\in\mathbf{R},x^2>3$"的另一种表述方式的是 (　　)

A.有一个 $x\in\mathbf{R}$,使得 $x^2>3$

B.对有些 $x\in\mathbf{R}$,使得 $x^2>3$

C.任选一个 $x\in\mathbf{R}$,都有 $x^2>3$

D.至少有一个 $x\in\mathbf{R}$,使得 $x^2>3$

C　**解析**:"$\forall$"和"任选一个"都是全称量词.

3. 下列存在量词命题是假命题的是 (　　)

A.存在 $x\in\mathbf{Q}$,使 $2x-x^3=0$

B.存在 $x\in\mathbf{R}$,使 $x^2+x+1=0$

C.有的整数是偶数

D.有的有理数没有倒数

B　**解析**:当 $x=0$ 时,$2x-x^3=0$,故 A 是真命题;对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ 恒成立,故 B 是假命题;2 是整数也是偶数,故 C 是真命题;0 是有理数,但 0 没有倒数,故 D 是真命题.

4. 下列命题中是全称量词命题并且是真命题的是 (　　)

A.$\forall x\in\mathbf{R},x^2+2x+1>0$

B.若 $2x$ 为偶数,则 $x\in\mathbf{N}$

C.所有菱形的四条边都相等

D.π 是无理数

C　**解析**:对于 A,是全称量词命题,当 $x=-1$ 时命题不符合,故不是真命题,故 A 不符合;对于 B,若 $2x$ 为偶数,x 也可以是负整数,故是假命题,也不是全称量词命题,故 B 不符合;对于 C,是全称量词命题,也是真命题,故 C 符合;对于 D,是真命题,但不是全称量词命题,故 D 不符合.

5. (多选)下列命题中,是真命题的是 (　　)

A.空集是任何一个非空集合的真子集

B.$\forall x\in\mathbf{R},4x^2>2x-1+3x^2$

C.$\exists x\in\{-2,-1,0,1,2\},|x-2|<2$

D.$\forall a,b\in\mathbf{R}$,方程 $ax+b=0$ 恰有一解

AC　**解析**:由空集和真子集的定义可以判断 A 正确;将 $4x^2>2x-1+3x^2$ 整理,得 $x^2-2x+1=(x-1)^2>0$,又 $x\in\mathbf{R}$,所以$(x-1)^2\geqslant0$,故 B 错误;当 $x=1$ 时,$x<y$,但$|x-2|=|1-2|<2$,故 C 正确;当 $a=0,b=0$ 时,方程 $ax+b=0$ 有无数多解,故 D 错误.

6. 若命题 $p:\forall x\in\mathbf{R},x^2-2x+m\neq0$ 是真命题,则实数 m 的取值范围是________.

$\{m|m>1\}$　**解析**:命题 $p:\forall x\in\mathbf{R},x^2-2x+m\neq0$ 是真命题,则 $\Delta=4-4m<0$,即 $m>1$.

综合性·创新提升

1. 以下四个命题中既是存在量词命题又是真命题的是 (　　)

A.锐角三角形的内角是锐角或钝角

B.至少有一个实数 x,使 $x^2\leqslant0$

C.两个无理数的和必是无理数

D.存在一个负数 x,使$\frac{1}{x}>2$

B　**解析**:A 中,"锐角三角形的内角是锐角或钝角"是全称量词命题;B 中,当 $x=0$ 时,$x^2=0$,所以选项 B 既是存在量词命题又是真命题;C 中,因为$\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$,所以选项 C 是假命题;D 中,对于任一个负数 x,都有$\frac{1}{x}<0$,所以选项 D 是假命题.

2.(多选)下列命题是真命题的有　　　　(ABD)

A. $\exists x\in\mathbf{R}, x^2-3x+2=0$

B. $\exists x\in\mathbf{Q}, (x+3)(x^2-2)=0$

C. $\forall x\in\mathbf{R}, x^2+2x+1>0$

D. $\forall x\in\mathbf{R}, 2x>2x-1$

3.若命题“$\forall x\in\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}, ax+1>0$”是真命题，则实数 a 的取值范围是$\underline{\left\{a\,\middle|\,a>-\frac{1}{2}\right\}}$.

4.根据下述事实，得到的全称量词命题或存在量词命题为________________.

$1^3+2^3=(1+2)^2$,

$1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$,

$1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2$,

$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=(1+2+3+4+5)^2$,

……

$\forall n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 2, 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$　**解析**：根据已知等式可得，对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 2$，总有 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$，

所以得到如下全称量词命题：$\forall n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 2$，

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$.

5.已知函数 $y_1=x_1^2, y_2=-2x_2-m$.若对 $\forall x_1\in\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，$\exists x_2\in\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，使得 $y_1\geqslant y_2$，则实数 m 的取值范围为________.

$\{m|m\geqslant -4\}$　**解析**：因为 $x_1\in\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，$x_2\in\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，

所以 $y_1\in\{y|0\leqslant y\leqslant 9\}$，$y_2\in\{y|-4-m\leqslant y\leqslant -m\}$.

又因为对 $\forall x_1\in\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，$\exists x_2\in\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，使得 $y_1\geqslant y_2$，

即 y_1 的最小值大于等于 y_2 的最小值，即 $-4-m\leqslant 0$，

所以 $m\geqslant -4$，即实数 m 的取值范围是 $\{m|m\geqslant -4\}$.

6.已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}, x^2-2x+a\geqslant 0$，命题 q：$\exists x\in\mathbf{R}, x^2+x+2a-1=0$，若 p 为真命题，q 为假命题，求实数 a 的取值范围.

解：因为 $x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$，

若 p 是真命题，则 $a-1\geqslant 0$，即 $a\geqslant 1$.

因为 $x^2+x+2a-1=0$，若 q 为假命题，

则 $\Delta=1-4\times(2a-1)=5-8a<0$，即 $a>\frac{5}{8}$.

综上，$a\geqslant 1$.

所以实数 a 的取值范围是 $\{a|a\geqslant 1\}$.

1.5.2　全称量词命题和存在量词命题的否定

学习任务目标

1. 通过实例总结含有一个量词的命题与它们的否定在形式上的变化规律.
2. 能写出全称量词命题与存在量词命题的否定并判断真假.

问题式预习

知识清单

知识点一　全称量词命题的否定

全称量词命题 p	$\forall x\in M,p(x)$
命题 p 的否定	$\exists x\in M,\neg p(x)$
结论	全称量词命题的否定是存在量词命题

知识点二　存在量词命题的否定

存在量词命题 p	$\exists x\in M,p(x)$
命题 p 的否定	$\forall x\in M,\neg p(x)$
结论	存在量词命题的否定是全称量词命题

概念辨析

1. 判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)存在量词命题的否定一定是全称量词命题.(　　)

√　**解析**:因为存在量词命题否定时要把存在量词改为全称量词,所以它的否定一定是全称量词命题.

(2)对全称量词命题或存在量词命题进行否定时,只否定其结论即可.(　　)

×　**解析**:对全称量词命题或存在量词命题进行否定时,除了否定其结论外,还要改变量词.

(3)短语"都是"的否定短语是"都不是".(　　)

×　**解析**:短语"都是"的否定短语是"不都是".

(4)短语"至少有一个"的否定短语是"至多有两个".(　　)

×　**解析**:短语"至少有一个"的否定短语是"一个也没有".

2. 命题"$\exists a\in \mathbf{R}$,使一次函数 $y=x+a$ 的图象经过原点"的否定为<u>$\forall a\in \mathbf{R}$,一次函数 $y=x+a$ 的图象不经过原点</u>.

3. 请思考并回答下列问题:

(1)你能总结一下含有一个量词的命题的否定的方法吗?

提示:改变量词,否定结论.

(2)一般命题的否定与含有一个量词的命题的否定有何区别与联系?

提示:一般命题的否定通常是在条件成立的前提下否定其结论,得到真假性完全相反的两个命题;含有一个量词的命题的否定,是在否定结论 $p(x)$ 的同时,改变量词的属性,即将全称量词改为存在量词,存在量词改为全称量词.

(3)一个命题和它的否定可以同时为真命题吗?

提示:一个命题和它的否定不能同时为真命题,也不能同时为假命题,只能一真一假.

任务型课堂

学习任务一　全称量词命题的否定

1. 命题"$\forall x\in \mathbf{R},-2x+4\leqslant 0$"的否定是________.

$\exists x\in \mathbf{R},-2x+4>0$　**解析**:原命题为全称量词命题,其否定为存在量词命题,既要改变量词又要否定结论,所以其否定为"$\exists x\in \mathbf{R},-2x+4>0$".

2. 写出下列全称量词命题的否定,并判断所得命题的真假:

(1)每一个四边形的四个顶点共圆;

(2)对任意 $x\in \mathbf{Z}$,x^2 的个位数字都不等于 1;

(3)每个三角形至少有两个锐角.

解:(1)该命题的否定:存在一个四边形,它的四个顶点不共圆.真命题.

(2)该命题的否定:存在 $x\in\mathbf{Z}$,x^2 的个位数字等于1.真命题.

(3)该命题的否定:存在一个三角形至多有一个锐角.由三角形的内角和为 $180°$,知该命题为假命题.

反思提炼

求全称量词命题的否定的关注点

(1)两变:一变量词,即把全称量词变为存在量词;二变结论,即否定结论.

(2)一补:对省略全称量词的全称量词命题要补上量词后再进行否定.

学习任务二　存在量词命题的否定

1.命题 p:有些三角形是等腰三角形的否定是(　　)

A.有些三角形不是等腰三角形

B.所有三角形都是等边三角形

C.所有三角形都不是等腰三角形

D.所有三角形都是等腰三角形

C　**解析**:在写命题的否定时,一是更换量词,二是否定结论.更换量词:“有些”改为“所有”,否定结论:“是等腰三角形”改为“不是等腰三角形”,故命题 p 的否定为“所有三角形都不是等腰三角形”.

2.写出下列存在量词命题的否定,并判断其真假:

(1)存在 $x\in\mathbf{R}$,$2x+1\geqslant 0$;

(2)存在 $x\in\mathbf{R}$,$x^2-x+\frac{1}{4}<0$;

(3)有些分数不是有理数.

解:(1)对任意的 $x\in\mathbf{R}$,$2x+1<0$,为假命题.

(2)对任意的 $x\in\mathbf{R}$,$x^2-x+\frac{1}{4}\geqslant 0$.

因为 $x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$,所以是真命题.

(3)所有分数都是有理数,是真命题.

反思提炼

求存在量词命题的否定的关注点

(1)存在量词命题的否定是全称量词命题,写命题的否定时要分别改变其中的量词和结论,即 $\exists x\in M$,$p(x)$ 的否定为 $\forall x\in M$,$\neg p(x)$.

(2)对省略存在量词的存在量词命题可补上量词后再进行否定.

学习任务三　全称量词命题与存在量词命题的否定的应用

例　已知命题 p:存在 $x>1$,使得 $2x+a<3$ 是假命题,求实数 a 的取值范围.

解:命题“存在 $x>1$,使得 $2x+a<3$”是假命题,

所以此命题的否定:“任意 $x>1$,$2x+a\geqslant 3$”是真命题.

因为对任意 $x>1$,都有 $2x+a>2+a$,

所以 $2+a\geqslant 3$,所以 $a\geqslant 1$.

所以实数 a 的取值范围是 $\{a\mid a\geqslant 1\}$.

[**一题多思**]

思考1.当直接判断一个命题的真假困难时,我们可将原命题做怎样的转化?

提示:由于命题与命题的否定只能一真一假,所以当直接判断一个命题的真假困难时,可以转化为判断该命题的否定的真假.

思考2.若把本例中的“假命题”改为“真命题”,则实数 a 的取值范围是怎样的?

提示:由题意知“存在 $x>1$,使得 $2x+a<3$”是真命题,则 $a<3-2x$,故 $a<(3-2x)_{\max}$.

因为 $x>1$,所以 $a<1$.

故实数 a 的取值范围是 $\{a\mid a<1\}$.

思考3.若把本例中的命题 p 改为“存在 $x\in\mathbf{R}$,$ax^2+3x+3\leqslant 0$”,则实数 a 的取值范围是怎样的?

提示:命题 p 的否定为“任意 $x\in\mathbf{R}$,$ax^2+3x+3>0$”,若命题 p 为假命题,则“任意 $x\in\mathbf{R}$,$ax^2+3x+3>0$”为真命题.当 $a=0$ 时,$3x+3>0$ 不恒成立;当 $a\neq 0$ 时,需满足 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=9-12a<0,\end{cases}$ 解得 $a>\frac{3}{4}$.

故实数 a 的取值范围为 $\left\{a\,\middle|\,a>\frac{3}{4}\right\}$.

反思提炼

(1)注意 p 与 $\neg p$ 只能一真一假，解决问题时可以相互转化；

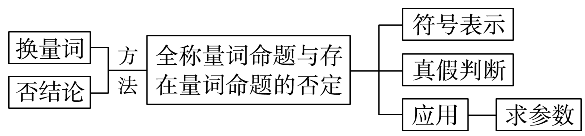
(2)求参数范围问题，往往分离参数，转化成求函数的最值问题.

探究训练

若命题“$\forall x\in\mathbf{R},x^2-2x+m\neq0$”为假命题，求实数 m 的取值范围.

解：由题意可知，原命题的否定：“$\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2-2x+m=0$”为真命题，即关于 x 的方程 $x^2-2x+m=0$ 有实根，所以 $\Delta=4-4m\geqslant0$，解得 $m\leqslant1$.所以实数 m 的取值范围为$\{m|m\leqslant1\}$.

体系构建



课后素养评价（九）

基础性·能力运用

1.设命题 p：$\forall x\in\{x|-1<x<1\},|x|<1$，则命题 p 的否定为（　　）

A. $\exists x\in\{x|-1<x<1\},|x|<1$

B. $\exists x\in\{x|-1<x<1\},|x|\geqslant1$

C. $\forall x\in\{x|-1<x<1\},|x|\geqslant1$

D. $\forall x\notin\{x|-1<x<1\},|x|\geqslant1$

B　**解析**：命题 p 是全称量词命题，其否定为“$\exists x\in\{x|-1<x<1\},|x|\geqslant1$”.

2.已知命题 p：$\exists c>0$，方程 $x^2-x+c=0$ 有解，则 $\neg p$ 为（　　）

A. $\forall c>0$，方程 $x^2-x+c=0$ 无解

B. $\forall c\leqslant0$，方程 $x^2-x+c=0$ 有解

C. $\exists c>0$，方程 $x^2-x+c=0$ 无解

D. $\exists c\leqslant0$，方程 $x^2-x+c=0$ 有解

A　**解析**：命题 p：$\exists c>0$，方程 $x^2-x+c=0$ 有解，则 $\neg p$ 为 $\forall c>0$，方程 $x^2-x+c=0$ 无解.

3.(多选)关于命题 p：$\forall x\in\mathbf{R},x^2+1\neq0$ 的叙述，正确的是（　　）

A. p 的否定：$\exists x\in\mathbf{R},x^2+1=0$

B. p 的否定：$\forall x\in\mathbf{R},x^2+1=0$

C. p 是真命题，p 的否定是假命题

D. p 是假命题，p 的否定是真命题

AC　**解析**：因为命题 p：“$\forall x\in\mathbf{R},x^2+1\neq0$”的否定是“$\exists x\in\mathbf{R},x^2+1=0$”，且 p 为真命题，则 p 的否定是假命题.

4.已知命题 p：$\exists x\in\mathbf{R},x^2+2x+a=0$.

(1)命题 p 的否定为________________；

(2)若命题 p 是真命题，则实数 a 的取值范围是________.

(1) $\forall x\in\mathbf{R},x^2+2x+a\neq0$　(2) $\{a|a\leqslant1\}$

解析：(1)命题“$\exists x\in\mathbf{R},x^2+2x+a=0$”是存在量词命题，其否定为“$\forall x\in\mathbf{R},x^2+2x+a\neq0$”.

(2)因为 $\exists x\in\mathbf{R},x^2+2x+a=0$ 为真命题，所以 $\Delta=4-4a\geqslant0$，

所以 $a\leqslant1$.

综合性·创新提升

1.(多选)下列命题的否定为真命题的是（　　）

A. $\exists x\in\mathbf{Z},1<4x<3$

B. $\exists x\in\mathbf{Z},5x+1=0$

C. $\forall x\in\mathbf{R},x^2-1=0$

D. $\exists x\in\mathbf{R},x^2+3x+2=0$

ABC　**解析**：命题的否定为真命题等价于原命题为假命题.对于A，由 $1<4x<3$，得 $\frac{1}{4}<x<\frac{3}{4}$，这样的

整数不存在，故 A 为假命题，其否定为真命题，A 符合；同理选项 B，C 为假命题，其否定为真命题，B，C 符合；由 $x^2+3x+2=0$，得 $x=-1$ 或 $x=-2$，故 D 为真命题，其否定为假命题，故 D 不符合. 故选 ABC.

2. 命题"$\forall x\in\mathbf{R},\exists n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n\geqslant x^2$"的否定是　　（ D ）

A. $\forall x\in\mathbf{R},\exists n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n<x^2$

B. $\forall x\in\mathbf{R},\forall n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n<x^2$

C. $\exists x\in\mathbf{R},\exists n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n<x^2$

D. $\exists x\in\mathbf{R},\forall n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n<x^2$

3.（数学文化）17 世纪，数学家费马提出猜想："对任意正整数 $n>2$，关于 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解". 经历 300 多年，1995 年数学家安德鲁·怀尔斯给出了证明，使它终成费马大定理，则费马大定理的否定为　　（　　）

A. 对任意正整数 n，关于 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 都没有正整数解

B. 对任意正整数 $n>2$，关于 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 至少存在一组正整数解

C. 存在正整数 $n\leqslant 2$，关于 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 至少存在一组正整数解

D. 存在正整数 $n>2$，关于 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 至少存在一组正整数解

D　**解析**：命题为全称命题，则命题的否定为"存在正整数 $n>2$，关于 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 至少存在一组正整数解".

4. 若命题"$\exists x\in\mathbf{R},x^2-ax+1\leqslant 0$"是假命题，则实数 a 的取值范围是 $\underline{\{a|-2<a<2\}}$.

5. 已知命题 p：$\forall x\in\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，$m\geqslant x$；命题 q：$\exists x\in\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，$m\geqslant x$. 若命题 p 为真命题，命题 q 的否定为假命题，求实数 m 的取值范围.

解：由题意知命题 p,q 都是真命题.

由 $\forall x\in\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，都有 $m\geqslant x$ 成立，

得 $m\geqslant x_{\max}$，即 $m\geqslant 3$.

由 $\exists x\in\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，使 $m\geqslant x$ 成立，

得 $m\geqslant x_{\min}$，即 $m\geqslant 1$.

因为两者同时成立，故实数 m 的取值范围为 $\{m|m\geqslant 3\}\cap\{m|m\geqslant 1\}=\{m|m\geqslant 3\}$.

第二章　一元二次函数、方程和不等式

2.1　等式性质与不等式性质

第1课时　不等关系与比较大小

学习任务目标

1.了解现实世界和日常生活中的等量关系与不等关系.
2.会用不等式(组)表示实际问题中的不等关系.
3.会运用作差法比较两个数或式的大小、证明不等式.

问题式预习

知识清单

知识点一　相等关系与不等关系

类似于多与少、大与小、长与短等问题，反映在数量关系上，就是相等与不等，相等用<u>等式</u>表示，不等用<u>不等式</u>表示.

知识点二　实数 a,b 的大小比较

(1)画数轴比较法

设 a,b 是两个实数，它们在数轴上所对应的点分别是 A,B.那么，当点 A 在点 B 的左边时，<u>$a<b$</u>；当点 A 在点 B 的右边时，<u>$a>b$</u>.

(2)作差比较法

如果 $a-b$ 是正数，那么 <u>$a>b$</u>；如果 $a-b$ 等于 0，那么 <u>$a=b$</u>；如果 $a-b$ 是负数，那么<u>$a<b$</u>.反过来也对.

这个基本事实可以表示为

<u>$a>b$</u>$\Leftrightarrow a-b>0$；

$a=b\Leftrightarrow$<u>$a-b=0$</u>；

$a<b\Leftrightarrow$<u>$a-b<0$</u>.

知识点三　重要不等式

一般地，$\forall a,b\in\mathbf{R}$，有 a^2+b^2<u>$\geqslant$</u>$2ab$，当且仅当 <u>$a=b$</u> 时，等号成立.

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").

(1)a 不小于 b 表示为 $a>b$.　(　　)

×　**解析**：a 不小于 b 应表示为 $a\geqslant b$.

(2)任意两个实数 a,b 之间的大小关系，有且只有 $a>b$，$a<b$ 两种.　(　　)

×　**解析**：任意两个实数 a,b 之间，有且只有 $a>b$，$a=b$，$a<b$ 三种关系中的一种，没有其他大小关系.

(3)若 $x-y<0$，我们就说 x 大于 y.　(　　)

×　**解析**：若 $x-y<0$，则 x 小于 y.

(4)$\forall a,b\in\mathbf{R}$，且 $a\neq b$，有 $a^2+b^2>2ab$.　(　　)

√　**解析**：因为 $a\neq b$，所以 $a^2+b^2>2ab$.

2.设 $m=2a^2+2a+1$，$n=(a+1)^2$，$a\in\mathbf{R}$，则 m,n 的大小关系是________.

$m\geqslant n$　**解析**：$m-n=2a^2+2a+1-(a+1)^2=a^2\geqslant 0$.

3.请思考并回答下列问题：

(1)不等式"$a\leqslant b$"的含义是什么？只有当"$a<b$"与"$a=b$"同时成立时，该不等式才成立吗？

提示：不等式"$a\leqslant b$"应读作"a 小于或者等于 b"，其含义是指"$a<b$ 或者 $a=b$"，等价于"a 不大于 b"，即 $a<b$ 与 $a=b$ 之中至少有一个成立，则 $a\leqslant b$ 成立.

(2)在作差法比较大小的基本事实中，a,b 两数是任意实数吗？

提示：是.

任务型课堂

学习任务一　用不等式(组)表示不等关系

1. 下面表示“a 与 b 的差是非负数”的不等式正确的是（　　）

A.$a-b>0$　　　　B.$a-b<0$

C.$a-b\geqslant 0$　　　　D.$a-b\leqslant 0$

C　**解析**:“a 与 b 的差是非负数”用不等式表示为 $a-b\geqslant 0$.故选 C.

2. 某高速公路要求行驶的车辆的速度 v 的最大值为 120 km/h,同一车道上的车间距 d 不得小于 10 m,用不等式表示为（　　）

A.$v\leqslant 120$ km/h 且 $d\geqslant 10$ m

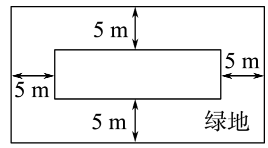
B.$v\leqslant 120$ km/h 或 $d\geqslant 10$ m

C.$v\leqslant 120$ km/h

D.$d\geqslant 10$ m

A　**解析**:v 的最大值为 120 km/h,即 $v\leqslant 120$ km/h,车间距 d 不得小于 10 m,即 $d\geqslant 10$ m.

3. 如图,在一块面积小于 450 m^2 的矩形空地中心位置建造一个仓库,仓库的四周建成绿地,仓库的长 x(单位:m)大于宽 y(单位:m)的 3 倍.试用不等式组表示上面的不等关系.



解:依题意,得$\begin{cases}x>0,\\ y>0,\\ x>3y,\\ (x+10)(y+10)<450.\end{cases}$

反思提炼

将不等关系表示成不等式(组)的思路

(1)读懂题意,找准不等式所涉及的量;

(2)用适当的不等号连接;

(3)同时成立的多个不等关系用不等式组表示.

学习任务二　作差法比较大小

例 1　当 $x<1$ 时,比较 x^3-1 与 $2x^2-2x$ 的大小.

解:$(x^3-1)-(2x^2-2x)=(x-1)(x^2+x+1)-2x(x-1)=(x-1)(x^2-x+1)=(x-1)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$.

因为 $x<1$,所以 $x-1<0$.

又 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}>0$,

所以 $(x-1)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]<0$,即 $x^3-1<2x^2-2x$.

[一题多思]

思考 1. 作差法比较大小的关键是作差后的变形,在变形时,可采用的方法主要有哪些?变形过程中要注意什么问题?

提示:变形时可采用配方、因式分解、通分、分母有理化等方法;变形过程中要注意保持等价性与正确性.

思考 2. 本例中,若 $x>1$,它们的大小关系如何?

提示:$(x^3-1)-(2x^2-2x)=(x-1)(x^2+x+1)-2x(x-1)=(x-1)(x^2-x+1)=(x-1)\cdot\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$.

因为 $x>1$,所以 $x-1>0$.

又 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$,

所以 $(x-1)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]>0$,即 $x^3-1>2x^2-2x$.

思考 3. 若 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq -1$,你能比较 $\frac{1}{1+x}$ 与 $1-x$ 的大小吗?

提示:因为 $\frac{1}{1+x}-(1-x)=\frac{1-(1-x^2)}{1+x}=\frac{x^2}{1+x}$,

当 $x=0$ 时,$\frac{1}{1+x}=1-x$;

当 $1+x<0$,即 $x<-1$ 时,$\frac{x^2}{1+x}<0$,所以 $\frac{1}{1+x}<1-x$;

当 $1+x>0$ 且 $x\neq 0$,即 $-1<x<0$ 或 $x>0$ 时,$\frac{x^2}{1+x}>0$,所以 $\frac{1}{1+x}>1-x$.

反思提炼

作差法比较大小的一般步骤

第一步,作差;

第二步,变形,常采用配方、因式分解等恒等变形手段,将“差”化成“和”或“积”;

第三步，定号，即确定结果是大于 0，等于 0，还是小于 0（不确定的要分情况讨论）；

第四步，得结论.

探究训练

1. 若 $a\neq2$ 且 $b\neq-1$，则 $M=a^2+b^2-4a+2b$ 与 -5 的大小关系是（　　）

A. $M>-5$

B. $M<-5$

C. $M=-5$

D. 不能确定

A　**解析**：$M=(a-2)^2+(b+1)^2-5>-5$. 故选 A.

2. 若实数 $a>b$，则 a^2-ab ________ $ba-b^2$.（填“$>$”或“$<$”）

$>$　**解析**：因为 $(a^2-ab)-(ba-b^2)=(a-b)^2$，且 $a>b$，所以 $(a-b)^2>0$. 所以 $a^2-ab>ba-b^2$.

学习任务三　作差法证明不等式

例 2　已知 $a>b>1$，证明下列不等式：

(1) $\dfrac{b+1}{a+1}>\dfrac{b}{a}$；(2) $a+\dfrac{1}{a}>b+\dfrac{1}{b}$.

证明：(1) $\dfrac{b+1}{a+1}-\dfrac{b}{a}=\dfrac{a(b+1)-b(a+1)}{(a+1)a}=\dfrac{ab+a-ab-b}{(a+1)a}=\dfrac{a-b}{(a+1)a}$.

因为 $a>b>1$，所以 $a-b>0$，$a+1>0$，$a>0$，

所以 $\dfrac{a-b}{(a+1)a}>0$，即 $\dfrac{b+1}{a+1}>\dfrac{b}{a}$.

(2) $a+\dfrac{1}{a}-\left(b+\dfrac{1}{b}\right)=a-b+\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=a-b+\dfrac{b-a}{ab}$

$=(a-b)\left(1-\dfrac{1}{ab}\right)=(a-b)\cdot\dfrac{ab-1}{ab}$.

因为 $a>b>1$，所以 $a-b>0$，$ab>1$，

所以 $(a-b)\cdot\dfrac{ab-1}{ab}>0$，即 $a+\dfrac{1}{a}>b+\dfrac{1}{b}$.

反思提炼

用作差法证明不等式的关键是对差式进行变形，通过配方、通分、因式分解等方法确定差式的符号，从而证明不等式.

探究训练

已知 $a>0$，求证：$a+\dfrac{1}{a}\geqslant2$.

证明：（方法一）利用 $a^2+b^2\geqslant2ab$.

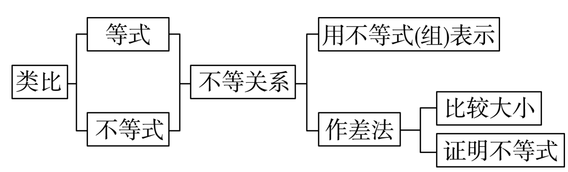
因为 $a>0$，所以 $a+\dfrac{1}{a}=(\sqrt{a})^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\geqslant2\sqrt{a}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{a}}=2$.

当且仅当 $\sqrt{a}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$，即 $a=1$ 时，等号成立.

（方法二）因为 $a+\dfrac{1}{a}-2=(\sqrt{a})^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2-2=\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\geqslant0$，

所以 $a+\dfrac{1}{a}\geqslant2$.

体系构建



课后素养评价（十）

基础性·能力运用

1.（多选）下列说法错误的是（　　）

A. 实数 x 不大于 2 000 可表示为 $x<2\ 000$

B. 小明的身高为 x cm，小华的身高为 y cm，则小明比小华矮可表示为 $x>y$

C. 实数 x 的最小值是 a 可表示为 $x\geqslant a$

D. 实数 y 不超过 a 可表示为 $y\geqslant a$

ABD　**解析**：对于 A，x 应满足 $x\leqslant2\ 000$，故 A 错误；对于 B，x，y 应满足 $x<y$，故 B 错误；C 正确；对于 D，y 与 a 的关系可表示为 $y\leqslant a$，故 D 错误.

2.（多选）使 $m^3>m^2-m+1$ 成立的实数 m 的值可以为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

CD　**解析**：因为 $m^3-(m^2-m+1)=m^3-m^2+m-1=m^2(m-1)+(m-1)=(m-1)(m^2+1)>0$.

又因为 $m^2+1>0$，所以 $m>1$. 故选 CD.

3. 雷电可使周围空气的温度达到 28 000 ℃，比太阳表

面温度的4.5倍还要高.设太阳表面的温度为t ℃,那么t应满足的关系式是________________.

$4.5t<28\ 000$　**解析**:由题意得,太阳表面温度的4.5倍小于雷电的温度,即$4.5t<28\ 000$.

4.已知$a,b\in\mathbf{R}$,且$ab\neq0$,则$ab-a^2$________b^2.(填"<"">"或"=")

<　**解析**:两式作差,得$ab-a^2-b^2=-\left(a-\frac{b}{2}\right)^2-\frac{3}{4}b^2<0$,所以$ab-a^2<b^2$.

综合性·创新提升

1.(新定义)设$a,b\in\mathbf{R}$,定义运算"$\otimes$"和"$\oplus$"如下:$a\otimes b=\begin{cases}a,a\leqslant b,\\b,a>b,\end{cases}$ $a\oplus b=\begin{cases}b,a\leqslant b,\\a,a>b.\end{cases}$若$m\otimes n\geqslant2$,$p\oplus q\leqslant2$,则　(　　)

A.$mn\geqslant4$且$p+q\leqslant4$

B.$m+n\geqslant4$且$pq\leqslant4$

C.$mn\leqslant4$且$p+q\geqslant4$

D.$m+n\leqslant4$且$pq\leqslant4$

A　**解析**:根据题意,由$m\otimes n\geqslant2$知,m与n的最小值大于或等于2;由$p\oplus q\leqslant2$知,p与q的最大值小于或等于2.所以$mn\geqslant4$且$p+q\leqslant4$.

2.已知$0<a_1<1$,$0<a_2<1$,记$M=a_1a_2$,$N=a_1+a_2-1$,则M与N的大小关系是　(　　)

A.$M<N$　　B.$M>N$

C.$M=N$　　D.$M\geqslant N$

B　**解析**:因为$M-N=a_1a_2-(a_1+a_2-1)=a_1a_2-a_1-a_2+1=a_1(a_2-1)-(a_2-1)=(a_1-1)(a_2-1)$,且$0<a_1<1$,$0<a_2<1$,所以$a_1-1<0$,$a_2-1<0$,所以$(a_1-1)(a_2-1)>0$,所以$M>N$.

3.某公司有20名技术人员,计划生产A,B两类电子器件共50件,生产每件电子器件所需人员数和预计产值如下:

产品种类	每件需要人员数	每件产值
A类	$\frac{1}{2}$	7.5万元
B类	$\frac{1}{3}$	6万元

现制订计划欲使总产值最高,则A类产品应生产<u>20</u>件,最高产值为<u>330</u>万元.

4.已知$a=5x^2+y^2+z^2$,$b=2xy+4x+2z-2$,则a,b的大小关系为________.

$a\geqslant b$　**解析**:因为$a-b=5x^2+y^2+z^2-(2xy+4x+2z-2)=4x^2-4x+1+x^2-2xy+y^2+z^2-2z+1=(2x-1)^2+(x-y)^2+(z-1)^2\geqslant0$,所以$5x^2+y^2+z^2\geqslant2xy+4x+2z-2$,即$a\geqslant b$,当且仅当$x=y=\frac{1}{2}$且$z=1$时等号成立.

5.已知$0<a<b$且$a+b=1$,求证:

(1)$a^2+b^2<b$;

(2)$2ab<\frac{1}{2}$.

证明:(1)因为$0<a<b$且$a+b=1$,

则$a^2+b^2-b=a^2+b(b-1)$

$=a^2-ab=a(a-b)<0$,

所以$a^2+b^2<b$.

(2)由$a+b=1$,得$b=1-a$,$a<\frac{1}{2}$,

所以$2ab-\frac{1}{2}=2a(1-a)-\frac{1}{2}$

$=-2a^2+2a-\frac{1}{2}=-2\left(a^2-a+\frac{1}{4}\right)$

$=-2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2<0$,

所以$2ab<\frac{1}{2}$.

第2课时　不等式的性质

学习任务目标

1.梳理等式的性质,掌握不等式的性质.
2.会用不等式的性质解决有关问题.

问题式预习

知识清单

知识点　不等式的性质

(1)性质1:$a>b\Leftrightarrow \underline{b<a}$.
(2)性质2:$a>b,b>c\Rightarrow \underline{a>c}$.
(3)性质3:$a>b\Leftrightarrow a+c>\underline{b+c}$.
(4)性质4:$a>b,c>0\Rightarrow ac>\underline{bc}$;
$a>b,c<0\Rightarrow ac\underline{<}bc$.
(5)性质5:$a>b,c>d\Rightarrow a+c\underline{>}b+d$.
(6)性质6:$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac\underline{>}bd$.
(7)性质7:$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N},n\geqslant 2)$.

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").
(1)若$a>b$,则$ac>bc$.　(　　)
×　**提示**:当$c=0$时,$ac=bc$,故此说法错误.
(2)同向不等式相加与相乘的条件是一致的.　(　　)
×　**提示**:相乘需要看是否满足$\begin{cases}a>b>0,\\c>d>0,\end{cases}$而相加与正、负和零均无关系.
(3)设$a,b\in\mathbf{R}$,且$a>b$,则$a^3>b^3$.　(　√　)
(4)若$a+c>b+d$,则$a>b,c>d$.　(　　)
×　**提示**:取$a=4,c=5,b=6,d=2$,满足$a+c>b+d$,但不满足$a>b$,故此说法错误.

2.若$a>b,c>d$,则下列不等关系中不一定成立的是　(　B　)
A.$a-b>d-c$　　B.$a+d>b+c$
C.$a-c>b-c$　　D.$a-c<a-d$

3.请思考并回答下列问题:
(1)能直接在等式$ax=2$的两边同时除以a,从而得到$x=\dfrac{2}{a}$吗?为什么?
提示:不能.当$a=0$时,$x=\dfrac{2}{a}$没有意义.
(2)在日常生活中,糖水中加些糖后会变得更甜,盐水中加些盐后会变得更咸……此类现象能利用不等式来表示吗?
提示:若$a>b>0,m>0$,则$\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+m}{a+m}$.
(3)不等式的性质应用应注意哪些问题?
提示:①搞清楚它们成立的前提条件,不可强化或弱化成立的条件.
②要注意每条性质是否具有可逆性.

任务型课堂

学习任务一　利用不等式的性质判断真假

1.已知$a>b,c>d$,且c,d均不为0,那么下列不等式一定成立的是　(　　)
A.$ad>bc$　　B.$ac>bd$
C.$a-c>b-d$　　D.$a+c>b+d$
D　**解析**:令$a=2,b=-2,c=3,d=-6$,可排除A,B,C.
由不等式的性质知,D一定成立.

2.若$a<b<0$,则下列结论正确的是　(　　)
A.$a^2<b^2$　　B.$ab<b^2$
C.$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　　D.$ac^2>bc^2$
C　**解析**:对于A选项,当$a=-2,b=-1$时,不成立;对于B选项,等价于$a>b$,不成立;对于C选项,$\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}<0$,故C选项成立;对于D选项,当$c=0$时,不成立.

3.(多选)若$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<0$,则下面四个不等式成立的有　(　　)
A.$|a|>|b|$　　B.$a<b$
C.$a+b<ab$　　D.$a^3>b^3$
CD　**解析**:由$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<0$可得$b<a<0$,从而$|a|<|b|$,A,B均不成立;$a+b<0,ab>0$,则$a+b<ab$,C成立;$a^3>b^3$,D成立.

反思提炼

判断不等式是否成立的技巧

(1)注意不等式成立的条件,不要弱化条件.

(2)解有关不等式的选择题时,可采用特殊值法进行排除,注意取值要遵循以下原则:一是满足题设条件;二是取值要简单,便于验证计算.

学习任务二 利用不等式的性质证明不等式

例1 若$a>b>0,c<d<0,e<0$,求证:$\frac{e}{(a-c)^2}>\frac{e}{(b-d)^2}$.

证明:因为$c<d<0$,所以$-c>-d>0$.

又因为$a>b>0$,所以$a-c>b-d>0$.

所以$(a-c)^2>(b-d)^2>0$.

两边同乘$\frac{1}{(a-c)^2(b-d)^2}$,得$\frac{1}{(a-c)^2}<\frac{1}{(b-d)^2}$.

又$e<0$,所以$\frac{e}{(a-c)^2}>\frac{e}{(b-d)^2}$.

反思提炼

利用不等式的性质证明不等式的注意事项

(1)利用不等式的性质及其推论可以证明一些不等式.解决此类问题时,一定要在理解的基础上,记准、记熟不等式的性质并注意在解题时灵活准确地加以应用.

(2)利用不等式的性质进行推导时,应注意紧扣不等式的性质成立的条件,不可省略条件或跳步推导,更不能随意构造性质与法则.

探究训练

1.已知$a<b<0$,求证:$\frac{b}{a}<\frac{a}{b}$.

证明:因为$a<b<0$,所以$\frac{1}{ab}>0$.

所以$a\cdot\frac{1}{ab}<b\cdot\frac{1}{ab}<0$,即$\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<0$.

所以$-\frac{1}{b}>-\frac{1}{a}>0$.

又因为$-a>-b>0$,

所以$\left(-\frac{1}{b}\right)(-a)>\left(-\frac{1}{a}\right)(-b)$,即$\frac{b}{a}<\frac{a}{b}$.

2.已知$a>b>c>d>0,ad=bc$,求证:$a+d>b+c$.

证明:由$a>b>c>d>0$,得$a-d>b-c>0$,即$(a-d)^2>(b-c)^2$.

又因为$ad=bc$,所以$(a-d)^2+4ad>(b-c)^2+4bc$,即$(a+d)^2>(b+c)^2$,

故$a+d>b+c$.

学习任务三 利用不等式的性质求代数式的取值范围

例2 (1)已知$-1<x<4,2<y<3$,则$x-y$的取值范围为________,$3x+2y$的取值范围为________.

$-4<x-y<2$ $1<3x+2y<18$ **解析:**因为$-1<x<4,2<y<3$,所以$-3<-y<-2$,所以$-4<x-y<2$.

由$-1<x<4,2<y<3$,

得$-3<3x<12,4<2y<6$,

所以$1<3x+2y<18$.

(2)已知$1<a<2,2<b<3$,求$3a-b$与$\frac{a}{b}$的取值范围.

解:因为$1<a<2,2<b<3$,

所以$3<3a<6,-3<-b<-2,\frac{1}{3}<\frac{1}{b}<\frac{1}{2}$,

所以$0<3a-b<4,\frac{1}{3}<\frac{a}{b}<1$.

[一题多思]

思考1.本例(1)中,若把条件改为"$-4\leqslant x-y\leqslant-1,-1\leqslant 4x-y\leqslant 5$",求$9x-y$的取值范围.

提示:令$m=x-y,n=4x-y$,则$z=9x-y=\frac{8}{3}n-\frac{5}{3}m$,得$-1\leqslant z\leqslant 20$.

思考2.本例(2)中,若把条件改为"$-6<a<8,2<b<3$",求$\frac{a}{b}$的取值范围.

提示:因为$2<b<3$,所以$\frac{1}{3}<\frac{1}{b}<\frac{1}{2}$.

又$-6<a<8$,则

①当$0\leqslant a<8$时,$0\leqslant\frac{a}{b}<4$;

②当$-6<a<0$时,$0<-a<6$,所以$0<-\frac{a}{b}<3$,

所以$-3<\frac{a}{b}<0$.

由①②得$-3<\frac{a}{b}<4$.

反思提炼

利用不等式的性质求代数式的取值范围的策略

(1)先建立待求范围的代数式与已知范围的代数式的关系，再利用不等式的性质进行运算，求得范围.

(2)同向不等式具有可加性，但这种变形不是等价变形，如果在解题过程中多次使用这种变形，就有可能扩大代数式的取值范围.

探究训练

1. 已知 $1<a<6$，$3<b<4$，则 $\frac{a}{b}$ 的取值范围是________.

$\frac{1}{4}<\frac{a}{b}<2$　**解析**：因为 $3<b<4$，所以 $\frac{1}{4}<\frac{1}{b}<\frac{1}{3}$.

又因为 $1<a<6$，所以 $\frac{1}{4}<\frac{a}{b}<2$.

2. 已知 $-3\leqslant\alpha\leqslant-1$，$-2\leqslant\beta\leqslant-\frac{1}{2}$，求 $2\alpha-\frac{\beta}{2}$ 与 $\beta-\frac{2\alpha}{3}$ 的取值范围.

解：因为 $-3\leqslant\alpha\leqslant-1$，$-2\leqslant\beta\leqslant-\frac{1}{2}$，

所以 $-6\leqslant2\alpha\leqslant-2$，$\frac{1}{4}\leqslant-\frac{\beta}{2}\leqslant1$，

所以 $-\frac{23}{4}\leqslant2\alpha-\frac{\beta}{2}\leqslant-1$.

又因为 $-3\leqslant\alpha\leqslant-1$，所以 $\frac{2}{3}\leqslant-\frac{2\alpha}{3}\leqslant2$，

所以 $-\frac{4}{3}\leqslant\beta-\frac{2\alpha}{3}\leqslant\frac{3}{2}$.

体系构建

不等式的性质：
- $a>b\Leftrightarrow b<a$
- $a>b,b>c\Rightarrow a>c$
- $a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$
- $a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$；$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$
- $a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$
- $a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$
- $a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N},n\geqslant2)$

应用：
- 判断命题真假
- 证明不等式
- 求代数式的范围

课后素养评价(十一)

基础性·能力运用

1. 与 $a>b$ 等价的不等式是　(　　)

A. $|a|>|b|$　　B. $a^2>b^2$

C. $\frac{a}{b}>1$　　D. $a^3>b^3$

D　**解析**：可利用赋值法.令 $a=1$，$b=-3$，则 A，B，C 都不成立.故选 D.

2. (数学文化)英国数学家雷科德在《砺智石》一书中首先用“=”作为等号，英国数学家哈里奥特首次使用“>”和“<”，不等号的引入对不等式的发展影响深远.若 $a,b,c\in\mathbf{R}$，则下列命题错误的是　(　　)

A. 若 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则 $a>b$

B. 若 $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$，则 $a>b$

C. 若 $b>a>0$，$c>0$，则 $\frac{a+c}{b+c}<\frac{a}{b}$

D. 若 $a>b>0$，$c<d<0$，则 $ac<bd$

C　**解析**：对于 A，因为 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}<0$，且 $a<0$，$b<0$，所以 $ab>0$，则 $b-a<0$，即 $a>b$，A 正确；

对于 B，因为 $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$，且 $c^2>0$，所以 $a>b$，B 正确；

对于 C，$\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+c}=\frac{a(b+c)-b(a+c)}{b(b+c)}=\frac{(a-b)c}{b(b+c)}$.

因为 $b>a>0$，$c>0$，则 $b+c>0$，$a-b<0$，

所以 $\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+c}<0$，即 $\frac{a+c}{b+c}>\frac{a}{b}$，C 错误；

对于 D，因为 $c<d<0$，则 $-c>-d>0$.

又因为 $a>b>0$，则 $-ac>-bd>0$，

所以 $ac<bd$，D 正确.故选 C.

3. 已知 $a+b>0$，$b<0$，那么 a，b，$-a$，$-b$ 的大小关系是　(　　)

A. $a>b>-b>-a$

B. $a>-b>-a>b$

C. $a>-b>b>-a$

D. $a>b>-a>-b$

C　**解析**：由 $a+b>0$ 知，$a>-b$，所以 $-a<b$.

又 $b<0$，所以 $-b>0$，$-a<b<0$，所以 $a>-b>b>-a$.

4. (多选)已知 a，b，c 满足 $c<a<b$，且 $ac<0$，那么下列各式中一定成立的是　(　　)

A. $ac(a-c)>0$

B. $c(b-a)<0$

C. $cb^2<ab^2$

D. $ab>ac$

BCD　**解析**：因为 a，b，c 满足 $c<a<b$，且 $ac<0$，

所以 $c<0$，$a>0$，$b>0$，$a-c>0$，$b-a>0$，

所以 $ac(a-c)<0$，$c(b-a)<0$，$cb^2<ab^2$，$ab>ac$.

综合性·创新提升

1.(多选)设 $a<b<0$,则下列不等式中正确的是　　(　　)

A.$\frac{2}{a}>\frac{2}{b}$　　B.$ac<bc$

C.$|a|>-b$　　D.$\sqrt{-a}>\sqrt{-b}$

ACD　**解析**:由 $a<b<0$,得 $\frac{2}{a}>\frac{2}{b}$ 成立,选项 A 正确;

当 $c>0$ 时,$ac<bc$,其余情况下均不成立,则选项 B 不正确;

$|a|=-a>-b$,则选项 C 正确;

由 $-a>-b>0$,可得 $\sqrt{-a}>\sqrt{-b}$,则选项 D 正确.

2.若 $abcd<0$,且 $a>0$,$b>c$,$d<0$,则　　(　　)

A.$b<0$,$c<0$

B.$b>0$,$c>0$

C.$b>0$,$c<0$

D.$0<c<b$ 或 $c<b<0$

D　**解析**:由 $a>0$,$d<0$,且 $abcd<0$,知 $bc>0$.

又因为 $b>c$,所以 $0<c<b$ 或 $c<b<0$.

3.若 $-1<a+b<3$,$2<a-b<4$,则 b 的取值范围是________.

$\left\{b\,\middle|\,-\frac{5}{2}<b<\frac{1}{2}\right\}$　**解析**:因为 $2<a-b<4$,所以 $-4<b-a<-2$.

又 $-1<a+b<3$,所以 $-5<(a+b)+(b-a)<1$,

即 $-5<2b<1$,则 $-\frac{5}{2}<b<\frac{1}{2}$.

所以 b 的取值范围是 $\left\{b\,\middle|\,-\frac{5}{2}<b<\frac{1}{2}\right\}$.

4.给出以下四个命题:

①$a>b\Rightarrow a^n>b^n(n\in \mathbf{N}^*)$;

②$a>|b|\Rightarrow a^n>b^n(n\in \mathbf{N}^*)$;

③$a<b<0\Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$;

④$a<b<0\Rightarrow \frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$.

其中真命题的序号是________.

②③　**解析**:①取 $a=-1$,$b=-2$,$n=2$,则 $a^n>b^n$ 不成立;

②由 $a>|b|$,得 $a>0$,所以 $a^n>b^n$ 成立;

③由 $a<b<0$,得 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 成立;

④由 $a<b<0$,得 $a-b<0$,且 $a-b>a$,故 $\frac{1}{a-b}<\frac{1}{a}$,④不成立.

5.设 $a>b>c$,求证:$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}>0$.

证明:因为 $a>b>c$,所以 $-c>-b$.

所以 $a-c>a-b>0$,所以 $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a-c}>0$,

所以 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a}>0$.

又 $b-c>0$,所以 $\frac{1}{b-c}>0$.

所以 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}>0$.

2.2 基本不等式

第1课时 基本不等式

学习任务目标

1.了解基本不等式的证明过程.
2.能利用基本不等式比较代数式的大小.
3.能利用基本不等式求最值.

问题式预习

知识清单

知识点一 基本不等式

1.算术平均数与几何平均数

(1)条件:给定两个正数 a,b.

(2)结论:$\frac{a+b}{2}$叫做正数 a,b 的<u>算术</u>平均数;$\sqrt{ab}$叫做正数 a,b 的<u>几何</u>平均数.

2.基本不等式

(1)不等式成立的条件:a,b 都是正数.

(2)结论:$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$.

(3)等号成立的条件:当且仅当 <u>$a=b$</u> 时.

(4)语言描述:两个正数的算术平均数<u>不小于</u>它们的几何平均数.

知识点二 基本不等式与最值

已知 x,y 都是正数,

(1)如果积 xy 等于定值 P,那么当 $x=y$ 时,和 $x+y$ 有最小值 <u>$2\sqrt{P}$</u>;

(2)如果和 $x+y$ 等于定值 S,那么当 $x=y$ 时,积 xy 有最大值 <u>$\frac{1}{4}S^2$</u>.

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)基本不等式$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$中的 a,b 只能是具体的数. ( )

× **解析**:a,b 既可以是具体的某个数,也可以是代数式.

(2)重要不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 与基本不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$成立的条件是相同的. ( )

× **解析**:不同,前者要求 a,b 是实数即可,而后者要求 $a>0,b>0$.

(3)不等式$m^2+1\geqslant 2m$ 中等号成立的条件是 $m=1$. ( )

√ **解析**:当且仅当 $m=1$ 时等号成立.

(4)若 $a+b=2$,则$\sqrt{ab}\leqslant 1$. ( )

× **解析**:若成立,需要增加条件 $a>0,b>0$.如当 $a=-1,b=3$ 时,$a+b=2$,但$\sqrt{ab}$无意义.

2.已知 $x>0,y>0$,且 $x+y=18$,则 xy 的最大值为________.

81 **解析**:因为 $x>0,y>0$,所以 $xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=81$,当且仅当 $x=y=9$ 时,等号成立.

3.请思考并回答下列问题:

(1)基本不等式的常见变形有哪些?

提示:$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$;

$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$.

其中 $a>0,b>0$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

(2)有人把利用基本不等式求最值的条件总结为"一正、二定、三相等",你知道具体的含义吗?

提示:①一正:各项必须为正.

②二定:各项之和或各项之积为定值.

③三相等:必须验证取等号时条件是否具备.

任务型课堂

学习任务一　对基本不等式的理解

1. 不等式 $a^2+1\geqslant 2a$ 中等号成立的条件是　(　　)

A. $a=\pm 1$　　B. $a=1$

C. $a=-1$　　D. $a=0$

B　**解析**：令 $a^2+1=2a$，即 $(a-1)^2=0$，得 $a=1$，即 $a=1$ 时，等号成立.

2. 不等式 $\frac{9}{x-2}+(x-2)\geqslant 6$（其中 $x>2$）中等号成立的条件是　(　　)

A. $x=3$

B. $x=-3$

C. $x=5$

D. $x=-5$

C　**解析**：由基本不等式知等号成立的条件为 $\frac{9}{x-2}=x-2$，即 $x=5$（$x=-1$ 舍去）.

反思提炼

基本不等式的两个关注点

(1) 不等式成立的条件是 a,b 都是正数.

(2)“当且仅当”的含义：当 $a=b$ 时，$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$ 的等号成立，即 $a=b\Rightarrow\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$；仅当 $a=b$ 时，$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 的等号成立，即 $\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}\Rightarrow a=b$.

学习任务二　用基本不等式比较大小

例 1　(1) 设 $s=a+b^2+1$，$t=a+2b$，$a,b\in\mathbf{R}$，则 s 与 t 的大小关系是　(　　)

A. $s\geqslant t$　　B. $s>t$

C. $s\leqslant t$　　D. $s<t$

A　**解析**：因为 $b^2+1\geqslant 2b$，所以 $s=a+b^2+1\geqslant a+2b=t$.

(2) 已知 $a>b>c$，则 $\sqrt{(a-b)(b-c)}$ 与 $\frac{a-c}{2}$ 的大小关系是________.

$\sqrt{(a-b)(b-c)}\leqslant\frac{a-c}{2}$　**解析**：因为 $a>b>c$，所以 $a-b>0$，$b-c>0$，所以 $\frac{a-c}{2}=\frac{(a-b)+(b-c)}{2}\geqslant\sqrt{(a-b)(b-c)}$，当且仅当 $a-b=b-c$ 时，等号成立.

反思提炼

运用基本不等式比较大小的注意点

(1) 要灵活运用基本不等式，特别注意其变形.

(2) 要注意不等式成立的条件，即 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ 成立的条件是 $a>0,b>0$，等号成立的条件是 $a=b$；$a^2+b^2\geqslant 2ab$ 成立的条件是 $a,b\in\mathbf{R}$，等号成立的条件是 $a=b$.

探究训练

若 $0<a<b$，则下列不等式一定成立的是　(　　)

A. $a>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>b$

B. $b>\sqrt{ab}>\frac{a+b}{2}>a$

C. $b>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>a$

D. $b>a>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$

C　**解析**：因为 $0<a<b$，所以 $2b>a+b$，所以 $b>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$.

又因为 $b>a>0$，所以 $ab>a^2$，所以 $\sqrt{ab}>a$.

故 $b>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>a$.

学习任务三　用基本不等式求最值

例 2　(1) 已知 $x>0$，则 $x+\frac{4}{x}$ 的最小值为________.

4　**解析**：因为 $x>0$，所以 $x+\frac{4}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$，当且仅当 $x=\frac{4}{x}$，即 $x=2$ 时，等号成立，因此 $x+\frac{4}{x}$ 的最小值为 4.

(2) 已知 $0<x<\frac{1}{2}$，则 $2x(1-2x)$ 的最大值为______.

$\frac{1}{4}$　**解析**：由题意知 $1-2x>0$，则 $2x(1-2x)\leqslant\left(\frac{2x+1-2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，当且仅当 $2x=1-2x$，即 $x=\frac{1}{4}$ 时，等号成立. 因此 $2x(1-2x)$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$.

[一题多思]

思考1. 本例(1)中,若把“$x>0$”改为“$x<0$”,则 $x+\frac{4}{x}$ 的最值情况如何?

提示: 由题可得 $x+\frac{4}{x}=-\left(-x+\frac{4}{-x}\right)$,

因为 $x<0$,所以 $-x>0$,

故有 $-x+\frac{4}{-x}\geqslant 2\sqrt{(-x)\cdot\left(\frac{4}{-x}\right)}=4$,

所以 $-\left(-x+\frac{4}{-x}\right)\leqslant -4$,当且仅当 $-x=\frac{4}{-x}$,即 $x=-2$ 时,等号成立.

故 $x+\frac{4}{x}$ 的最大值为 -4.

思考2. 本例(2)条件不变,能否求 $\frac{1}{2}x(1-2x)$ 的最大值?

提示: 能.因为 $0<x<\frac{1}{2}$,所以 $1-2x>0$,

所以 $\frac{1}{4}\times 2x(1-2x)\leqslant\frac{1}{4}\times\left(\frac{2x+1-2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$,

当且仅当 $2x=1-2x$,即 $x=\frac{1}{4}$ 时,等号成立.

故 $\frac{1}{2}x(1-2x)$ 的最大值为 $\frac{1}{16}$.

反思提炼

利用基本不等式求最值的方法

(1)知和求积的最值:求解此类问题的关键是明确“和为定值,积有最大值”.但应注意两点:①具备条件——正数;②验证等号成立.

(2)知积求和的最值:明确“积为定值,和有最小值”,直接应用基本不等式求解,但要注意利用基本不等式求最值的条件.

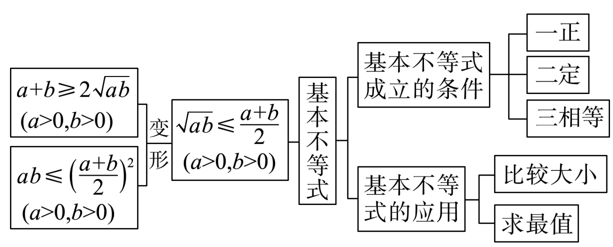
探究训练

若 $0<x<1$,则 $y=\sqrt{x(3-2x)}$ 的取值范围是____________________.

$\left\{y\,\middle|\,0<y\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{4}\right\}$　**解析:** 由 $0<x<1$ 知 $3-2x>0$.

故 $\sqrt{x(3-2x)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2x(3-2x)}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2x+(3-2x)}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$,当且仅当 $2x=3-2x$,即 $x=\frac{3}{4}$ 时,等号成立,所以 $0<\sqrt{x(3-2x)}\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

体系构建



课后素养评价(十二)

基础性·能力运用

1. 若 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $ab>0$,则下列不等式中,恒成立的是(　　)

A.$a^2+b^2>2ab$

B.$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$

C.$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$

D.$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{2}{\sqrt{ab}}$

C　**解析:** 因为 $(a-b)^2\geqslant 0$,所以 $a^2+b^2\geqslant 2ab$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立,A 不正确;取 $a<0,b<0$ 时,$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ 不成立,B 不正确;因为 $ab>0$,所以 $\frac{b}{a},\frac{a}{b}$ 都大于 0,所以 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$,当且仅当 $a=b$ 时,等号成立,C 正确;取 $a<0,b<0$ 时,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{2}{\sqrt{ab}}$ 不成立,D 不正确.

2. 若 $0<a<b$ 且 $a+b=1$,则下列四个数中最大的是(　　)

A.$\frac{1}{2}$　　B.a^2+b^2　　C.$2ab$　　D.a

B　**解析:** 因为 $0<a<b$ 且 $a+b=1$,所以 $a<\frac{1}{2}$,

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab>(a+b)^2-2\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$.

所以 $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2>0$,即 $a^2+b^2>2ab$.

所以 a^2+b^2 最大.

3. 若 $x>0$，则 $2x+\frac{1}{x}$ ________ 2.（填“$=$”“$\geqslant$”“$\leqslant$”“$>$”或“$<$”）

$>$ **解析**：当 $x>0$ 时，$2x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{2}>2$，当且仅当 $2x=\frac{1}{x}$，即 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立.

4. 若 $0<x<4$，则 $y=x(12-3x)$ 的最大值为________.

12 **解析**：因为 $0<x<4$，所以 $12-3x>0$，

所以 $y=x(12-3x)=\frac{1}{3}\times 3x(12-3x)\leqslant\frac{1}{3}\times\left(\frac{3x+12-3x}{2}\right)^2=12$，当且仅当 $3x=12-3x$，即 $x=2$ 时，等号成立.所以 $y=x(12-3x)$ 的最大值为 12.

5. 设 $x,y\in\mathbf{N}^*$，且满足 $x+y=20$，则 xy 的最大值为________.

100 **解析**：因为 $x,y\in\mathbf{N}^*$，

所以 $20=x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$，

所以 $xy\leqslant 100$，

当且仅当 $x=y=10$ 时，等号成立.

6. 已知 $x>0,y>0,xy=4$，求 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值.

解：因为 $xy=4$，且 $x>0,y>0$，所以 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{xy}}=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$，当且仅当 $\frac{2}{x}=\frac{1}{y}$，即 $x=2\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$ 时，等号成立，即 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为 $\sqrt{2}$.

综合性·创新提升

1.（多选）已知 $a>1$，则 $2a+\frac{2}{a-1}$ 的值可以是（　　）

A.5　　B.6

C.7　　D.8

BCD **解析**：因为 $a>1$，所以 $a-1>0$.

$2a+\frac{2}{a-1}=2+2(a-1)+\frac{2}{a-1}\geqslant 2+2\sqrt{2(a-1)\cdot\frac{2}{a-1}}=6$，

当且仅当 $2(a-1)=\frac{2}{a-1}$，即 $a=2$ 时，等号成立，

故 $2a+\frac{2}{a-1}$ 的最小值为 6.

所以 $2a+\frac{2}{a-1}$ 的取值可以是 6，也可以是 7 或 8.

2. 如果 $0<a<b<1$，$P=\frac{a+b}{2}$，$Q=\sqrt{ab}$，$M=\sqrt{a+b}$，那么 P,Q,M 的大小关系是（　　）

A.$P>Q>M$　　B.$M>P>Q$

C.$Q>M>P$　　D.$M>Q>P$

B **解析**：显然 $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$.由题易知 $P>0,M>0$，

$M^2-P^2=a+b-\frac{(a+b)^2}{4}=(a+b)\left(1-\frac{a+b}{4}\right)=(a+b)\cdot\frac{4-(a+b)}{4}$.

因为 $0<a<b<1$，所以 $4-(a+b)>0$，所以 $a+b>\frac{(a+b)^2}{4}$，

即 $\frac{a+b}{2}<\sqrt{a+b}$.所以 $\sqrt{a+b}>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$，即 $M>P>Q$.

3.（多选）若 $a>0,b>0$，且 $a+b=4$，则下列不等式不一定恒成立的是（　　）

A.$\frac{1}{ab}>\frac{1}{2}$　　B.$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqslant 1$

C.$\sqrt{ab}\geqslant 2$　　D.$\frac{1}{a^2+b^2}\leqslant\frac{1}{8}$

ABC **解析**：由 $a+b=4$，可得 $\sqrt{ab}\leqslant 2$，得 $ab\leqslant 4$，所以 $\frac{1}{ab}\geqslant\frac{1}{4}$，故 A，C 不一定恒成立；

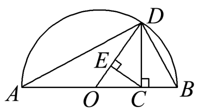
B 中，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{4}{ab}\geqslant 1$，故 B 不一定恒成立；

由 $\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，得 $a^2+b^2\geqslant 2\times\left(\frac{4}{2}\right)^2=8$，所以 $\frac{1}{a^2+b^2}\leqslant\frac{1}{8}$，D 一定恒成立.

4.（数学文化）《几何原本》中的几何代数法（以几何方法研究代数问题）是后世数学家处理问题的重要依据.通过这一方法，很多的代数的公理或定理都能够利用图形进行证明.如图，AB 为半圆 O 的直径，在

AB 上取一点 C，使得 $AC=a$，$BC=b$，过点 C 作 $CD\perp AB$ 交半圆于点 D，连接 OD，作 $CE\perp OD$ 交 OD 于点 E.由 $CD\geqslant DE$ 可以直接证明的不等式为

（　　）



A.$\sqrt{ab}\geqslant\frac{2ab}{a+b}(a>0,b>0)$

B.$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}(a>0,b>0)$

C.$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}(a>0,b>0)$

D.$a^2+b^2\geqslant 2ab(a>0,b>0)$

A　**解析**：由三角形相似，知 $CD^2=DE\cdot OD=AC\cdot BC=ab$，且 $OD=\frac{AC+BC}{2}=\frac{a+b}{2}$，所以 $DE=\frac{CD^2}{OD}=\frac{ab}{\frac{a+b}{2}}=\frac{2ab}{a+b}$.由 $CD\geqslant DE$，得 $\sqrt{ab}\geqslant\frac{2ab}{a+b}$.

5.当 $x>3$ 时，不等式 $x+\frac{1}{x-3}\geqslant a$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是<u>$\{a\mid a\leqslant 5\}$</u>.

6.(1)已知 $a>0$，$b>0$，$P=a^2+b^2-ab$，$Q=ab$，求 $\frac{Q}{P}$ 的最大值；

(2)求 $y=\frac{x^2+6x+12}{x+3}$ 在 $x>-3$ 时的最小值.

解：(1)因为 $a>0$，$b>0$，所以 $\frac{Q}{P}=\frac{ab}{a^2+b^2-ab}=\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}-1}=1$，

当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $a=b$ 时，等号成立.

所以 $\frac{Q}{P}$ 的最大值为 1.

(2)$y=\frac{x^2+6x+12}{x+3}=\frac{(x+3)^2+3}{x+3}$，

因为 $x>-3$，所以 $x+3>0$，

所以原式 $=x+3+\frac{3}{x+3}\geqslant 2\sqrt{3}$，

当且仅当 $x+3=\frac{3}{x+3}$，即 $x=\sqrt{3}-3$ 时，等号成立.

所以 $y=\frac{x^2+6x+12}{x+3}$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$.

第 2 课时　基本不等式的应用

学习任务目标

1.进一步理解运用基本不等式求最值的条件，能够灵活运用基本不等式求最值.

2.能利用基本不等式证明简单的不等式.

3.能够运用基本不等式解决生活中的实际问题.

任务型课堂

学习任务一　基本不等式在实际问题中的应用

例 1　(1)制作一个容积为 4 m^3、高为 1 m 的无盖长方体容器.已知该容器的底面造价是每平方米 20 元，侧面造价是每平方米 10 元，则该容器的最低总造价是

（　　）

A.80 元　　B.120 元

C.160 元　　D.240 元

C　**解析**：设底面相邻两边的长分别为 x m，y m，x，$y>0$，总造价为 T 元，则 $xy\times 1=4$，即 $xy=4$.

所以 $T=4\times 20+(2x+2y)\times 1\times 10=80+20(x+y)\geqslant 80+20\times 2\sqrt{xy}=80+20\times 4=160$，当且仅当 $x=y=2$ 时，等号成立.

故该容器的最低总造价是 160 元.

(2)某幼儿园要用围栏围一个面积为 16 m^2 的矩形游乐园，当这个矩形游乐园的边长为多少时，所用围栏

最省？并求所需围栏的长度.

解:设矩形围栏的长和宽分别为 x m,y m,则围栏的长度为 $2(x+y)$m.

(方法一)由题意可得 $xy=16$,

由 $\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$,可知 $x+y\geqslant2\sqrt{xy}=8$,

所以 $2(x+y)\geqslant16$,当且仅当 $x=y=4$ 时,等号成立.

因此,当这个矩形游乐园是边长为 4 m 的正方形时,所用围栏最省,所需围栏的长度为 16 m.

(方法二)由题意可得 $xy=16$,则 $y=\frac{16}{x}$,

所以 $2(x+y)=2\left(x+\frac{16}{x}\right)\geqslant2\times2\sqrt{x\cdot\frac{16}{x}}=16$,当且仅当 $x=4$ 时,等号成立,此时 $y=4$.

因此,当这个矩形游乐园是边长为 4 m 的正方形时,所用围栏最省,所需围栏的长度为 16 m.

反思提炼

应用基本不等式解决实际问题的思路

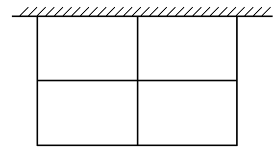
(1)理解题意,设出变量,一般把要求最值的量定为因变量;

(2)建立相应的关系式,把实际问题抽象成数学问题,利用基本不等式求解;

(3)根据实际背景得出答案.

探究训练

如图,动物园要围成大小相同的长方形虎笼四间,一面可利用原有的墙,其他各面用钢筋网围成.现有 36 m长的钢筋网,每间虎笼的长、宽分别设计为多少时,可使每间虎笼面积最大?



解:设每间虎笼长 x m,宽 y m.

由已知可得,$4x+6y=36$,即 $2x+3y=18$.

设每间虎笼面积为 S,则 $S=xy$.

(方法一)因为 $2x+3y\geqslant2\sqrt{2x\cdot3y}=2\sqrt{6xy}$,

所以 $2\sqrt{6xy}\leqslant18$.所以 $xy\leqslant\frac{27}{2}$,即 $S_{\max}=\frac{27}{2}$,当且仅当 $2x=3y$,即 $x=4.5$,$y=3$ 时,等号成立.

故每间虎笼长为 4.5 m,宽为 3 m 时,可使每间虎笼面积最大.

(方法二)由 $2x+3y=18$,得 $x=9-\frac{3}{2}y$.

因为 $x>0$,所以 $0<y<6$,

$S=xy=y\left(9-\frac{3}{2}y\right)=\frac{3}{2}y(6-y)$.

因为 $0<y<6$,所以 $6-y>0$.

所以 $S\leqslant\frac{3}{2}\left[\frac{(6-y)+y}{2}\right]^2=\frac{27}{2}$.

当且仅当 $6-y=y$,即 $y=3$ 时,等号成立,此时 $x=4.5$.

故每间虎笼长为 4.5 m,宽为 3 m 时,可使每间虎笼面积最大.

学习任务二　用基本不等式求较复杂代数式的最值

例 2　(1)设 x,y 为正数,则 $(x+y)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)$ 的最小值为　　(　　)

A.6　　B.9　　C.12　　D.15

B　**解析**:因为 x,y 是正数,所以 $(x+y)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)=5+\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant5+2\sqrt{\frac{4x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=5+4=9$,当且仅当 $y=2x$ 时,等号成立.

(2)已知关于 x 的不等式 $2x+\frac{2}{x-a}\geqslant7$ 在 $x>a$ 时恒成立,则实数 a 的最小值为________.

$\frac{3}{2}$　**解析**:由 $x>a$,知 $x-a>0$,则 $2x+\frac{2}{x-a}=2(x-a)+\frac{2}{x-a}+2a\geqslant2\sqrt{2(x-a)\cdot\frac{2}{x-a}}+2a=4+2a$,当且仅当 $(x-a)^2=1$ 时,等号成立.

由题意可知 $4+2a\geqslant7$,解得 $a\geqslant\frac{3}{2}$,即实数 a 的最小值为 $\frac{3}{2}$.

反思提炼

拼凑法求最值的解题策略

拼凑法求最值,其实质就是先对代数式变形,拼凑出和或积为常数的两项,然后利用基本不等式求最值.

探究训练

设 x,y,z 均为正实数,满足 $x-2y+3z=0$,则 $\frac{y^2}{xz}$ 的最小值为________.

3　**解析**:由已知,得 $y=\frac{x+3z}{2}$.所以 $\frac{y^2}{xz}=\frac{\left(\frac{x+3z}{2}\right)^2}{xz}=\frac{1}{4}\left(\frac{x}{z}+\frac{9z}{x}+6\right)\geqslant\frac{1}{4}\left(2\sqrt{\frac{x}{z}\cdot\frac{9z}{x}}+6\right)=3$,

当且仅当 $x=3z$ 时,等号成立,此时 $y=3z$,因此,$\frac{y^2}{xz}$ 取得最小值 3.

学习任务三 基本不等式的综合应用

例 3 已知 $a>0,b>0$,且 $a+b=1$,求证:$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}\geqslant 8$.

证明:因为 $a>0,b>0,a+b=1$,

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}=\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{ab}=4+2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqslant 4+4\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=8$,当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时,等号成立.所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}\geqslant 8$.

反思提炼

利用基本不等式证明不等式的注意事项

(1)多次使用基本不等式时,要注意等号能否成立;

(2)累加法是不等式证明中的一种常用方法,证明不等式时注意使用;

(3)当不能直接使用基本不等式时,可通过等价变形构造基本不等式模型再使用.

探究训练

已知 $y=-\frac{1}{a}+\frac{2}{x}$,若 $y+2x\geqslant 0$ 在 $x>0$ 时恒成立,则实数 a 的取值范围是________.

$\left\{a \,\middle|\, a<0,\text{或 } a\geqslant\frac{1}{4}\right\}$ **解析**:因为 $y+2x\geqslant 0$ 在 $x>0$ 时恒成立,即 $-\frac{1}{a}+\frac{2}{x}+2x\geqslant 0$ 在 $x>0$ 时恒成立,等价于 $\frac{1}{a}\leqslant 2\left(x+\frac{1}{x}\right)$ 在 $x>0$ 时恒成立.

当 $a<0$ 时,不等式恒成立;

当 $a>0$ 时,因为 $x>0$,所以 $2\left(x+\frac{1}{x}\right)\geqslant 4$,当且仅当 $x=1$ 时,等号成立,所以 $0<\frac{1}{a}\leqslant 4$,解得 $a\geqslant\frac{1}{4}$.

综上所述,$a<0$ 或 $a\geqslant\frac{1}{4}$.

体系构建

$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$ $(a>0,b>0)$ — 基本不等式的综合应用
- 实际应用
- 证明不等式
- 求含条件的不等式的最值

课后素养评价(十三)

基础性·能力运用

1. 已知 $x>0,y>0,x+2y=1$,则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值是 ( )

A.$2\sqrt{2}$　　B.$3+2\sqrt{2}$

C.6　　D.8

B **解析**:因为 $x>0,y>0$,且 $x+2y=1$,

所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+2y)=3+\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 3+2\sqrt{2}$,

当且仅当 $\frac{2y}{x}=\frac{x}{y}$,且 $x+2y=1$,即 $y=\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$,$x=\sqrt{2}-1$ 时取等号.

2.(多选)已知某出租车公司根据之前的市场分析,得出每辆车的运营总利润 y(单位:万元)与运营年数 x 的关系为$y=-x^2+12x-25$,则下列判断正确的是 ( )

A.车辆运营年数越大,利润越高

B.车辆运营 6 年时,总利润最高

C.车辆在前 5 年的平均利润最高

D.车辆每年都能盈利

BC **解析**:由题意,$y=-x^2+12x-25$ 的图象是开口向下的抛物线,故 A 错误;对称轴为直线 $x=6$,故 B 正确;$\frac{y}{x}=-x+12-\frac{25}{x}=-\left(x+\frac{25}{x}\right)+12\leqslant -2\sqrt{x\cdot\frac{25}{x}}+12=2$,当且仅当 $x=\frac{25}{x}$,即 $x=5$ 时,等号成立,故 C 正确;当 $x=1$ 时,$y=-14$,故 D 错误.

3. 设 $x>0,y>0,x+y=1$,且 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant a$ 恒成立,则实数 a 的最小值是 ( )

A.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B.$\sqrt{2}$　　C.2　　D.$2\sqrt{2}$

B **解析**:因为 $x>0,y>0$,所以 $1=x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$,则 $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=1+2\sqrt{xy}\leqslant 1+1=2$,当且仅当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时,等号成立,所以 $a\geqslant\sqrt{2}$.故选 B.

4. 已知 $a>0,b>0,\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=4$,则 $a+b$ 的最小值为________.

1　**解析**：由$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=4$，得$\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}=1$.

所以$a+b=\left(\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}\right)(a+b)=\frac{1}{2}+\frac{b}{4a}+\frac{a}{4b}$

$\geqslant\frac{1}{2}+2\sqrt{\frac{b}{4a}\cdot\frac{a}{4b}}=1$，当且仅当$\frac{b}{4a}=\frac{a}{4b}$，即$a=b=\frac{1}{2}$时，等号成立.

5.(趣味创新)在“$4\times\square+9\times\square=60$”的两个□中，分别填入两个自然数，使它们的倒数和最小，应分别填上______和______.

6　4　**解析**：设两数分别为x，y，即$4x+9y=60$，

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{4x+9y}{60}=\frac{1}{60}\left(13+\frac{4x}{y}+\frac{9y}{x}\right)\geqslant\frac{1}{60}\times\left(13+2\sqrt{\frac{4x}{y}\cdot\frac{9y}{x}}\right)=\frac{5}{12}$，

当且仅当$\frac{4x}{y}=\frac{9y}{x}$，且$4x+9y=60$，即$x=6$且$y=4$时，等号成立，故应分别填上6，4.

综合性·创新提升

1.若$-4<x<1$，则$y=\frac{x^2-2x+2}{2x-2}$　　(　D　)

A.有最小值1　　B.有最大值1

C.有最小值-1　　D.有最大值-1

2.已知$x>0$，$y>0$，且$x+y=8$，则$(1+x)\cdot(1+y)$的最大值为　　(　　)

A.9　　B.16　　C.25　　D.36

C　**解析**：$(1+x)(1+y)\leqslant\left[\frac{(1+x)+(1+y)}{2}\right]^2=\left[\frac{2+(x+y)}{2}\right]^2=25$，当且仅当$x=y=4$时，等号成立.

3.已知不等式$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{a}{y}\right)\geqslant9$对任意正实数$x$，$y$恒成立，则正实数$a$的最小值为　　(　　)

A.8　　B.6　　C.4　　D.2

C　**解析**：$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{a}{y}\right)=1+\frac{ax}{y}+\frac{y}{x}+a$

$\geqslant a+1+2\sqrt{\frac{ax}{y}\cdot\frac{y}{x}}=a+2\sqrt{a}+1$，

当且仅当$\frac{ax}{y}=\frac{y}{x}$时，等号成立.

所以$(\sqrt{a})^2+2\sqrt{a}+1\geqslant9$，所以$\sqrt{a}\geqslant2$，则$a\geqslant4$.

所以a的最小值为4.

4.(数学文化)中国南宋数学家秦九韶提出了“三斜求积术”，即已知三角形三边长求三角形面积的方法.设三角形的三条边长分别为a，b，c，则三角形的面积S可由公式$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$求得，其中$p$为三角形周长的一半，这个公式也被称为海伦—秦九韶公式.现有一个三角形的三边长a，b，c满足$a=6$，$b+c=8$，则此三角形面积的最大值为　　(　　)

A.$3\sqrt{7}$　　B.8　　C.$4\sqrt{7}$　　D.$9\sqrt{3}$

A　**解析**：由题意知，$p=7$，

$S=\sqrt{7(7-a)(7-b)(7-c)}=\sqrt{7(7-b)(7-c)}\leqslant\sqrt{7}\cdot\frac{7-b+7-c}{2}=3\sqrt{7}$，当且仅当$7-b=7-c$，即$b=c=4$时，等号成立，所以，此三角形面积的最大值为$3\sqrt{7}$.

5.当$x>0$时，$\frac{3x}{x^2+4}$的最大值为______.

$\frac{3}{4}$　**解析**：当$x>0$时，$\frac{3x}{x^2+4}=\frac{3}{x+\frac{4}{x}}\leqslant\frac{3}{2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}}=\frac{3}{4}$，当且仅当$x=\frac{4}{x}$，即$x=2$时等号成立，即$\frac{3x}{x^2+4}$的最大值为$\frac{3}{4}$.

6.设$a>b>c$，$n\in\mathbf{N}^*$，则使不等式$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{n}{a-c}$成立的$n$的最大值为______.

4　**解析**：因为$a-b>0$，$a-c>0$，要使原不等式成立，

只需$\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}\geqslant n$成立，

即$\frac{(a-b)+(b-c)}{a-b}+\frac{(a-b)+(b-c)}{b-c}\geqslant n$成立，

也就是$2+\frac{b-c}{a-b}+\frac{a-b}{b-c}\geqslant n$成立.

又$\frac{b-c}{a-b}+\frac{a-b}{b-c}\geqslant2$，当且仅当$b-c=a-b$，

即$a+c=2b$时，等号成立，

所以$n\leqslant4$，所以n有最大值为4.

7.已知$x>0$，$y>0$，且$2x+8y-xy=0$.

(1)xy的最小值为\underline{64}；

(2)$x+y$的最小值为\underline{18}.

2.3　二次函数与一元二次方程、不等式

第1课时　一元二次不等式的解法

学习任务目标

1.能够借助二次函数求解一元二次不等式.
2.理解一元二次方程、二次函数与一元二次不等式之间的关系,并能解决相应的问题.
3.能解决一元二次不等式恒成立问题.

问题式预习

知识清单

知识点一　一元二次不等式、二次函数的零点

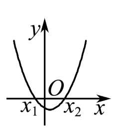
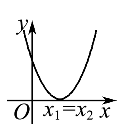
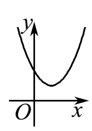
1.一元二次不等式

定义	一般地,我们把只含有一个未知数,并且未知数的最高次数是2的不等式,称为一元二次不等式
一般形式	$ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$,其中 a,b,c 均为常数,$a\neq0$

2.二次函数的零点

一般地,对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$,我们把使 $ax^2+bx+c=0$ 的实数 x 叫做二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的零点.

知识点二　二次函数与一元二次方程、不等式的解的对应关系

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$y=ax^2+bx+c(a>0)$的图象			
$ax^2+bx+c=0(a>0)$的根	有两个不相等的实数根 x_1,$x_2(x_1<x_2)$	有两个相等的实数根 $x_1=x_2=\mathbf{R}$	没有实数根
$ax^2+bx+c>0(a>0)$的解集	$\{x\mid x<x_1$,或 $x>x_2\}$	$\left\{x\,\middle\vert\, x\neq-\frac{b}{2a}\right\}$	$-\frac{b}{2a}$
$ax^2+bx+c<0(a>0)$的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)不等式 $ax^2+x-1<0$ 是关于 x 的一元二次不等式.　(　　)

×　**解析**:当 $a\neq0$ 时,$ax^2+x-1<0$ 是一元二次不等式.

(2)二次函数 $y=x^2-4$ 的零点是$(2,0)$,$(-2,0)$.　(　　)

×　**解析**:应该是2和-2.

(3)若函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$的两个零点分别为1,2,则关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为$\{x|1<x<2\}$.　(　√　)

(4)若关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$没有实数根,则关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为$\mathbf{R}$.　(　　)

×　**解析**:当 $a>0$ 时,解集为$\mathbf{R}$;当 $a<0$ 时,解集为$\varnothing$.

2.不等式 $6x^2+x-2\leqslant0$ 的解集为________.

$\left\{x\,\middle\vert\,-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right\}$　**解析**:因为方程 $6x^2+x-2=0$ 的两根为 $x_1=\frac{1}{2}$,$x_2=-\frac{2}{3}$,所以原不等式的解集为$\left\{x\,\middle\vert\,-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right\}$.

3.请思考并回答下列问题:

(1)当 a 满足什么条件时,不等式$(a+1)x^2+x-2<0$ 是一元二次不等式?

提示:当 $a+1\neq0$,即 $a\neq-1$ 时,不等式$(a+1)x^2+x-2<0$ 是一元二次不等式.

(2)怎样利用数形结合的思想理解三个"二次"之间的关系?

提示:当 $a\neq0$ 时,①方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解 $x=x_0$ 对应函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象上的点$(x_0,0)$;②不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集对应函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象在 x 轴上方时,对应 x 的取值集合;③不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集对应函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象在 x 轴下方时,对应 x 的取值集合.

任务型课堂

学习任务一　简单一元二次不等式的解法

1.不等式 $x^2-2x-5>2x$ 的解集是________.

$\{x|x<-1$,或 $x>5\}$　**解析**:由 $x^2-2x-5>2x$,得 $x^2-4x-5>0$.因为 $x^2-4x-5=0$ 的两根为 $-1,5$,所以 $x^2-4x-5>0$ 的解集为 $\{x|x<-1$,或 $x>5\}$.

2.不等式 $-x^2+6x-10>0$ 的解集为________.

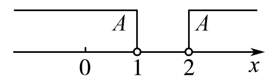
$\varnothing$　**解析**:原不等式可化为 $x^2-6x+10<0$.

因为 $\Delta=36-40=-4<0$,所以方程 $x^2-6x+10=0$ 没有实数根.所以原不等式的解集为 $\varnothing$.

3.已知集合 $A=\{x|3x-2-x^2<0\}$,$B=\{x|x-a<0\}$,且 $B\subseteq A$,则实数 a 的取值范围为________.

$\{a|a\leqslant 1\}$　**解析**:$A=\{x|3x-2-x^2<0\}=\{x|x^2-3x+2>0\}=\{x|x<1$,或 $x>2\}$,$B=\{x|x<a\}$.

如图,因为 $B\subseteq A$,所以 $a\leqslant 1$.



反思提炼

解一元二次不等式的一般步骤

(1)将一元二次不等式化为一端为 0 的形式(习惯上二次项系数大于 0);

(2)求出相应一元二次方程的根,或判断出方程没有实根;

(3)画出相应二次函数的图象,方程有根的将根标在图中;

(4)观察图象位于 x 轴上方或下方的部分,对比不等式中不等号的方向,写出解集.

学习任务二　三个"二次"之间的关系

例 1　(1)若关于 x 的不等式 $x^2+ax+b>0$ 的解集是 $\{x|x<-2$,或 $x>3\}$,则 $a+b=$　(　　)

A.-7　　B.-6

C.-5　　D.1

A　**解析**:依题意,关于 x 的不等式 $x^2+ax+b>0$ 的解集是 $\{x|x<-2$,或 $x>3\}$,所以关于 x 的方程 $x^2+ax+b=0$ 的根为 $x_1=-2$,$x_2=3$,由根与系数的关系可得 $\begin{cases}-2+3=-a,\\-2\times 3=b,\end{cases}$

即 $\begin{cases}a=-1,\\b=-6,\end{cases}$ 所以 $a+b=-7$.

(2)已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x|2<x<3\}$,求关于 x 的不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集.

解:由不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x|2<x<3\}$ 可知 $a<0$,且 2 和 3 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根,由根与系数的关系可知 $\frac{b}{a}=-5$,$\frac{c}{a}=6$,故 $\frac{b}{c}=-\frac{5}{6}$.

又由 $a<0$ 知 $c<0$,

故不等式 $cx^2+bx+a<0$ 可变形为 $x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}>0$,即 $x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}>0$,解得 $x<\frac{1}{3}$ 或 $x>\frac{1}{2}$.

所以不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集为

$\left\{x\middle|x<\frac{1}{3},\text{或 } x>\frac{1}{2}\right\}$.

[一题多思]

思考　若本例(2)中条件不变,如何求关于 x 的不等式 $cx^2-bx+a>0$ 的解集?

提示:由不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x|2<x<3\}$ 可知 $a<0$,且 2 和 3 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根,

由根与系数的关系知 $\frac{b}{a}=-5$,$\frac{c}{a}=6$,

所以 $c<0$,$\frac{b}{c}=-\frac{5}{6}$,

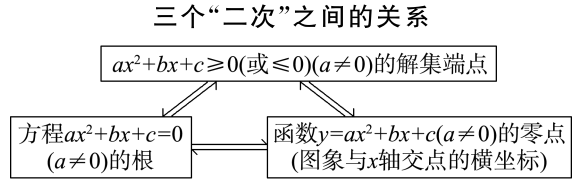
故不等式 $cx^2-bx+a>0$ 可变形为 $x^2-\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}<0$,即 $x^2+\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}<0$,

解得 $-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}$.

故原不等式的解集为 $\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}\right\}$.

反思提炼

三个"二次"之间的关系



注意:不要忽视二次项系数的符号和不等号的方向.

探究训练

若不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集是 $\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}\right.\right\}$，则 $a-b$ 的值为（　　）

A.14　　B.-14

C.10　　D.-10

D　**解析**：由不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集是 $\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}\right.\right\}$，可得 $-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+2=0$ 的两个实数根.所以 $\begin{cases}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{b}{a},\\-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{a},\end{cases}$ 解得 $a=-12$，$b=-2$.所以 $a-b=-12-(-2)=-10$.故选 D.

学习任务三　一元二次不等式恒成立问题

例 2　已知关于 x 的不等式 $(m^2-2m-3)x^2-(m-3)x-1<0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，求实数 m 的取值范围.

解：①当 $m^2-2m-3=0$ 时，解得 $m=3$ 或 $m=-1$.

若 $m=3$，原不等式化为 $-1<0$，恒成立，原不等式的解集为 $\mathbf{R}$.

若 $m=-1$，原不等式化为 $4x-1<0$，得 $x<\frac{1}{4}$，原不等式的解集为 $\left\{x\left|x<\frac{1}{4}\right.\right\}$，不合题意，舍去.

②当 $m^2-2m-3\neq0$ 时，依题意有

$\begin{cases}m^2-2m-3<0,\\\Delta=(m-3)^2+4(m^2-2m-3)<0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}-1<m<3,\\-\frac{1}{5}<m<3,\end{cases}$ 所以 $-\frac{1}{5}<m<3$.

综上所述，m 的取值范围为 $\left\{m\left|-\frac{1}{5}<m\leqslant3\right.\right\}$.

反思提炼

一元二次不等式恒成立的条件

(1) $ax^2+bx+c>0(a\neq0)$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立的充要条件是 $\begin{cases}a>0,\\b^2-4ac<0;\end{cases}$

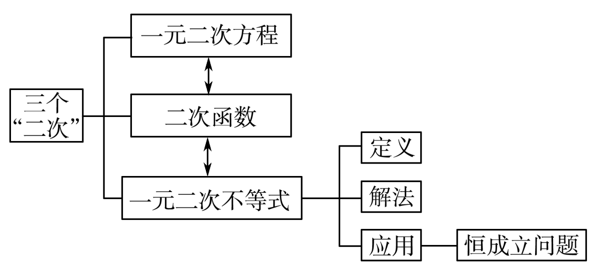
(2) $ax^2+bx+c<0(a\neq0)$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立的充要条件是 $\begin{cases}a<0,\\b^2-4ac<0.\end{cases}$

探究训练

若关于 x 的不等式 $ax^2+2x+a>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是________.

$\{a|a>1\}$　**解析**：当 $a=0$ 时，易知条件不成立；当 $a\neq0$ 时，要使不等式 $ax^2+2x+a>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，必须满足 $\begin{cases}a>0,\\\Delta=4-4a^2<0,\end{cases}$ 解得 $a>1$.

体系构建



课后素养评价（十四）

基础性·能力运用

1. 不等式 $4x^2-12x+9\leqslant0$ 的解集是（　　）

A.$\varnothing$　　B.$\mathbf{R}$

C.$\left\{x\left|x\neq\frac{3}{2}\right.\right\}$　　D.$\left\{\frac{3}{2}\right\}$

D　**解析**：原不等式可化为 $(2x-3)^2\leqslant0$，故 $x=\frac{3}{2}$.故选 D.

2. 设集合 $A=\{x|x^2-5x-6<0\}$，则集合 $A\cap\mathbf{Z}$ 中的元素个数为（　　）

A.6　　B.5　　C.4　　D.3

A　**解析**：由 $x^2-5x-6<0$，解得 $-1<x<6$，即 $A=\{x|-1<x<6\}$，则 $A\cap\mathbf{Z}=\{0,1,2,3,4,5\}$，故 $A\cap\mathbf{Z}$ 中共有 6 个元素.

3.（多选）下列四个不等式中，解集为 $\varnothing$ 的是（　　）

A.$-x^2+x+1\leqslant0$

B.$2x^2-3x+4<0$

C.$x^2+3x+10\leqslant 0$

D.$-x^2+4x-\left(a+\frac{4}{a}\right)>0(a>0)$

BCD　**解析**：对于 A，$-x^2+x+1\leqslant 0$ 可化为 $x^2-x-1\geqslant 0$，其解集不为$\varnothing$；

对于 B，$2x^2-3x+4<0$，$\Delta=9-32<0$，其解集为$\varnothing$；

对于 C，$x^2+3x+10\leqslant 0$，$\Delta=9-40<0$，其解集为$\varnothing$；

对于 D，$-x^2+4x-\left(a+\frac{4}{a}\right)>0$ 可化为 $x^2-4x+\left(a+\frac{4}{a}\right)<0$，$\Delta=16-4\left(a+\frac{4}{a}\right)\leqslant 16-4\times 2\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}}=0$，当且仅当 $a=2$ 时，等号成立，故不等式的解集为$\varnothing$.

4. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R})$ 中，x,y 满足如下表所给的对应关系：

x	1	2	4
y	0	-1	0

则方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根为________，不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为________.

1 和 4　$\{x|1<x<4\}$　**解析**：设函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，

由表中数据知 1 和 4 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根.

又 $x=2$ 时，$y=-1<0$，故此二次函数图象是开口向上的抛物线，并且与 x 轴交于两点 $(1,0)$ 和 $(4,0)$，所以不等式 $y<0$ 的解集为 $\{x|1<x<4\}$.

5. 解下列不等式：

(1)$2+3x-2x^2>0$；

(2)$x(3-x)\leqslant x(x+2)-1$；

(3)$x^2-2x+3>0$.

解：(1)原不等式可化为 $2x^2-3x-2<0$，

所以 $(2x+1)(x-2)<0$，解得 $-\frac{1}{2}<x<2$，

故原不等式的解集是 $\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x<2\right.\right\}$.

(2)原不等式可化为 $2x^2-x-1\geqslant 0$，

所以 $(2x+1)(x-1)\geqslant 0$，解得 $x\leqslant -\frac{1}{2}$ 或 $x\geqslant 1$，

故原不等式的解集为 $\left\{x\left|x\leqslant -\frac{1}{2}，或 x\geqslant 1\right.\right\}$.

(3)因为 $\Delta=(-2)^2-4\times 3=-8<0$，

所以原不等式的解集是 $\mathbf{R}$.

综合性·创新提升

1. (新定义)在 $\mathbf{R}$ 上定义运算“$\odot$”：$a\odot b=ab+2a+b$，则满足 $x\odot(x-2)<0$ 的实数 x 的取值范围为　(　　)

A.$\{x|0<x<2\}$

B.$\{x|-2<x<1\}$

C.$\{x|x<-2，或 x>1\}$

D.$\{x|-1<x<2\}$

B　**解析**：根据给出的定义得 $x\odot(x-2)=x(x-2)+2x+(x-2)=x^2+x-2=(x+2)(x-1)$.

又 $x\odot(x-2)<0$，即 $(x+2)(x-1)<0$，

解得 $-2<x<1$.

故满足条件的实数 x 的取值范围为 $\{x|-2<x<1\}$.

2. 若关于 x 的方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不相等的实数根，则　(　　)

A.$-1<m<1$　　B.$m<-1$ 或 $m>1$

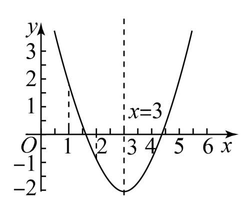
C.$-2<m<2$　　D.$m<-2$ 或 $m>2$

D　**解析**：因为方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不相等的实数根，所以 $\Delta=m^2-4>0$，所以 $m>2$ 或 $m<-2$.

3. (多选)关于 x 的一元二次不等式 $x^2-6x+a\leqslant 0(a\in\mathbf{Z})$ 的解集中有且仅有 3 个整数，则实数 a 的值可以是　(　　)

A.7　　B.8　　C.9　　D.10

AB　**解析**：设函数 $y=x^2-6x+a$，其图象是开口向上，对称轴是直线 $x=3$ 的抛物线，如图所示.



若关于 x 的一元二次不等式 $x^2-6x+a\leqslant 0$ 的解集中有且仅有 3 个整数，则当 $x=2$ 时，$y\leqslant 0$，当 $x=1$ 时，$y>0$，即 $\begin{cases}4-12+a\leqslant 0,\\1-6+a>0,\end{cases}$ 解得 $5<a\leqslant 8$.

又 $a\in\mathbf{Z}$，所以 $a=6,7,8$.

4. 若关于 x 的不等式 $ax^2+3x-1>0$ 的解集是 $\left\{x\left|\frac{1}{2}<x<1\right.\right\}$，则实数 a 的值为______，不等式 $ax^2-3x+a^2+1>0$ 的解集为____________.

-2　$\left\{x\left|-\frac{5}{2}<x<1\right.\right\}$　**解析**：依题意，可知方程 $ax^2+3x-1=0$ 的两个实数根为 $\frac{1}{2}$ 和 1，则由 $\frac{1}{2}+1=-\frac{3}{a}$，$\frac{1}{2}\times1=-\frac{1}{a}$，解得 $a=-2$. 所以不等式 $ax^2-3x+a^2+1>0$ 可化为 $-2x^2-3x+5>0$，即 $2x^2+3x-5<0$.

因为方程 $2x^2+3x-5=0$ 的两根为 $x_1=1$，$x_2=-\frac{5}{2}$，

所以原不等式的解集为 $\left\{x\left|-\frac{5}{2}<x<1\right.\right\}$.

5. 若关于 x 的不等式 $(a^2-1)x^2-(a-1)x-1<0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是________.

$\left\{a\left|-\frac{3}{5}<a\leqslant1\right.\right\}$　**解析**：① 当 $a^2-1\neq0$，即 $a\neq\pm1$ 时，

$\begin{cases}a^2-1<0,\\ \Delta=(a-1)^2+4(a^2-1)<0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{3}{5}<a<1$.

② 当 $a^2-1=0$，即 $a=\pm1$ 时，

若 $a=1$，则原不等式为 $-1<0$，恒成立；

若 $a=-1$，则原不等式为 $2x-1<0$，即 $x<\frac{1}{2}$，不符合题目要求，舍去.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $\left\{a\left|-\frac{3}{5}<a\leqslant1\right.\right\}$.

6. 已知关于 x 的不等式 $2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$.

(1) 若不等式的解集为 $\left\{x\left|-\frac{3}{2}<x<1\right.\right\}$，求实数 k 的值；

(2) 若不等式对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

解：(1) 由关于 x 的不等式 $2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$ 的解集为 $\left\{x\left|-\frac{3}{2}<x<1\right.\right\}$，可知 $-\frac{3}{2}$ 和 1 是方程 $2kx^2+kx-\frac{3}{8}=0$ 的两个实数根，且 $k>0$，由根与系数的关系得 $-\frac{3}{2}\times1=\frac{-\frac{3}{8}}{2k}$，解得 $k=\frac{1}{8}$.

(2) 当 $k=0$ 时，原不等式为 $-\frac{3}{8}<0$ 恒成立，满足题意；

当 $k\neq0$ 时，则有 $\begin{cases}2k<0,\\ \Delta=k^2+3k<0,\end{cases}$ 解得 $-3<k<0$.

综上，实数 k 的取值范围为 $\{k\mid-3<k\leqslant0\}$.

第 2 课时　一元二次不等式的应用

学习任务目标

1. 会求分式不等式的解集.
2. 能利用一元二次不等式解决实际问题.
3. 会利用分类讨论思想解含参数的一元二次不等式.

任务型课堂

学习任务一　分式不等式的解法

解不等式：(1) $\frac{1-x}{3x+5}\geqslant0$；(2) $\frac{x-1}{x+2}>1$.

解：(1) 原不等式可化为 $\frac{x-1}{3x+5}\leqslant0$，

所以 $\begin{cases}(x-1)(3x+5)\leqslant0,\\ 3x+5\neq0,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}-\frac{5}{3}\leqslant x\leqslant1,\\ x\neq-\frac{5}{3},\end{cases}$ 即 $-\frac{5}{3}<x\leqslant1$.

故原不等式的解集为 $\left\{x\left|-\frac{5}{3}<x\leqslant1\right.\right\}$.

(2) 原不等式可化为 $\frac{x-1}{x+2}-1>0$，

所以 $\frac{x-1-(x+2)}{x+2}>0$，即 $\frac{-3}{x+2}>0$，则 $x<-2$.

故原不等式的解集为 $\{x\mid x<-2\}$.

反思提炼

分式不等式的求解策略

(1) 直接法：不等号右边为零的分式不等式，可直接转化为一元二次不等式或一元二次不等式组求解，但要注意分母不为零.

(2)转化法：不等号右边不为零的分式不等式，要先移项、通分，使不等号右边为零，再用直接法求解.

注意：对于不等号右边不为零的分式不等式，求解时一定不要直接去分母.

学习任务二　一元二次不等式的实际应用

例 1　蛋糕厂生产某种蛋糕的成本为 40 元/个，出厂价为 60 元/个，日销售量为1 000 个.为适应市场需求，计划提高蛋糕档次，适度增加成本.若每个蛋糕成本增加的百分率为 $x(0<x<1)$，则每个蛋糕的出厂价相应提高的百分率为 $0.5x$，同时预计日销售量增加的百分率为 $0.8x$.为使日利润有所增加，求 x 的取值范围.

解：设增加成本后的日利润为 y 元.

$y=[60\times(1+0.5x)-40\times(1+x)]\times1\ 000\times(1+0.8x)=2\ 000(-4x^2+3x+10)(0<x<1)$.

要保证日利润有所增加，

则 $y>(60-40)\times1\ 000$，且 $0<x<1$，

即 $\begin{cases}-4x^2+3x>0,\\0<x<1,\end{cases}$ 解得 $0<x<\frac{3}{4}$.

所以，为使日利润有所增加，x 的取值范围为 $\left\{x\middle|0<x<\frac{3}{4}\right\}$.

反思提炼

设 → 阅读理解，认真审题，把握问题中的关键量，找准不等关系，恰当设出未知数

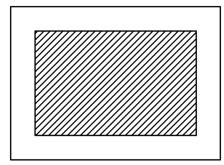
建 → 将文字语言转化为符号语言，用不等式表示不等关系，建立相应的数学模型

解 → 解不等式，得到数学结论，要注意数学模型中元素的实际意义

答 → 回归实际问题，将数学结论还原为实际问题的结果

探究训练

学校要在一块长 40 m、宽 30 m 的矩形空地上进行绿化，四周种植花卉(花卉带的宽度相同)，中间铺设草坪(如图).



要求草坪的面积不少于总面积的一半，求花卉带宽度的取值范围.

解：设花卉带的宽度为 x 米，则草坪的长和宽分别是 $(40-2x)$ 米、$(30-2x)$ 米，

所以 $\begin{cases}(40-2x)(30-2x)\geqslant\frac{1}{2}\times40\times30,\\40-2x>0,\\30-2x>0,\\x>0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x\leqslant5\text{ 或 }x\geqslant30,\\x<20,\\x<15,\\x>0.\end{cases}$ 所以 $0<x\leqslant5$.

故花卉带宽度 x 的取值范围为 $\{x|0<x\leqslant5\}$.

学习任务三　含参数的一元二次不等式的解法

例 2　解关于 x 的不等式 $ax^2-(a+1)x+1<0$.

解：①当 $a=0$ 时，原不等式可化为 $x>1$.

②当 $a\neq0$ 时，原不等式可化为 $(ax-1)(x-1)<0$.

当 $a<0$ 时，原不等式可化为 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)>0$.

因为 $\frac{1}{a}<1$，所以 $x<\frac{1}{a}$ 或 $x>1$.

当 $a>0$ 时，原不等式可化为 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)<0$.

若 $0<\frac{1}{a}<1$，即 $a>1$，则 $\frac{1}{a}<x<1$；

若 $\frac{1}{a}=1$，即 $a=1$，则 $x\in\varnothing$；

若 $\frac{1}{a}>1$，即 $0<a<1$，则 $1<x<\frac{1}{a}$.

综上所述，当 $a<0$ 时，原不等式的解集为 $\left\{x\middle|x<\frac{1}{a},\text{或 }x>1\right\}$；当 $a=0$ 时，原不等式的解集为 $\{x|x>1\}$；当 $0<a<1$ 时，原不等式的解集为 $\left\{x\middle|1<x<\frac{1}{a}\right\}$；当 $a=1$ 时，原不等式的解集为 $\varnothing$；当 $a>1$ 时，原不等式的解集为 $\left\{x\middle|\frac{1}{a}<x<1\right\}$.

[**一题多思**]

思考 1.本例中，若将关于 x 的不等式换为“$ax^2-(a+1)x+1>0(a>0)$”，你能求出不等式的解集吗？

提示：因为 $a>0$，所以原不等式可化为 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)>0$，所以方程 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)=0$ 的两根分别为 $x_1=\frac{1}{a}$，$x_2=1$.

①当$\frac{1}{a}>1$，即$0<a<1$时，解得$x<1$或$x>\frac{1}{a}$；

②当$\frac{1}{a}=1$，即$a=1$时，原不等式即为$(x-1)^2>0$，解得$x\neq1$；

③当$0<\frac{1}{a}<1$，即$a>1$时，解得$x<\frac{1}{a}$或$x>1$.

综上可知，当$0<a<1$时，原不等式的解集为$\left\{x\left|x<1，或x>\frac{1}{a}\right.\right\}$；当$a=1$时，原不等式的解集为$\{x|x\in\mathbf{R}，且x\neq1\}$；当$a>1$时，原不等式的解集为$\left\{x\left|x<\frac{1}{a}，或x>1\right.\right\}$.

思考2.本例中，若将关于x的不等式换为“$ax^2-(a+1)x+1>0(a<0)$”，你能求出不等式的解集吗？

提示：因为$a<0$，所以原不等式可化为$\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)<0$，所以方程$\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)=0$的两根分别为$x_1=\frac{1}{a}$，$x_2=1$.

因为$\frac{1}{a}<1$，所以原不等式的解集为$\left\{x\left|\frac{1}{a}<x<1\right.\right\}$.

反思提炼

解含参数的一元二次不等式的策略

(1)关于不等式类型的讨论：二次项系数$a>0$，$a<0$，$a=0$.

(2)关于不等式对应的方程根的个数的讨论：两根($\Delta>0$)，一根($\Delta=0$)，无根($\Delta<0$).

(3)关于不等式对应的方程根的大小的讨论：$x_1>x_2$，$x_1=x_2$，$x_1<x_2$.

探究训练

解关于x的不等式$x^2+(1-a)x-a<0$.

解：原不等式可化为$(x+1)(x-a)<0$，

所以方程$x^2+(1-a)x-a=0$的两根为$x_1=-1$，$x_2=a$.

又函数$y=x^2+(1-a)x-a$的图象开口向上，

所以当$a<-1$时，原不等式的解集为$\{x|a<x<-1\}$；

当$a=-1$时，原不等式的解集为$\varnothing$；

当$a>-1$时，原不等式的解集为$\{x|-1<x<a\}$.

体系构建

一元二次不等式的应用
- 分式不等式的解法
- 实际应用
- 含参数的一元二次不等式的解法

课后素养评价（十五）

基础性·能力运用

1.关于x的不等式$\frac{-x+1}{x-2}>0$的解集是　　(　　)

A.$\{x|x<-1，或x>2\}$

B.$\{x|-1<x<2\}$

C.$\{x|1<x<2\}$

D.$\{x|x<1，或x>2\}$

C　**解析：**原不等式可化为$\frac{x-1}{x-2}<0$，等价于$(x-1)\cdot(x-2)<0$，其解集为$\{x|1<x<2\}$.

2.设$m+n>0$，则关于x的不等式$(m-x)\cdot(n+x)>0$的解集是　　(　　)

A.$\{x|x<-n，或x>m\}$

B.$\{x|-n<x<m\}$

C.$\{x|x<-m，或x>n\}$

D.$\{x|-m<x<n\}$

B　**解析：**方程$(m-x)(n+x)=0$的两根为m，$-n$，

因为$m+n>0$，所以$m>-n$.结合函数$y=(m-x)(n+x)$的图象(图略)，得不等式的解集是$\{x|-n<x<m\}$.

3.设$a<-1$，则关于x的不等式$a(x-a)\cdot\left(x-\frac{1}{a}\right)<0$的解集为________.

$\left\{x\left|x>\frac{1}{a}，或x<a\right.\right\}$　**解析：**因为$a<-1$，所以$a(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)<0\Leftrightarrow(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)>0$.又由$a<-1$，可得$\frac{1}{a}>a$，所以原不等式的解集为$\left\{x\left|x>\frac{1}{a}，或x<a\right.\right\}$.

4.若关于x的不等式$(mx-1)(x-2)>0$的解集为$\left\{x\left|\frac{1}{m}<x<2\right.\right\}$，则实数$m$的取值范围是________.

$\{m|m<0\}$　**解析：**因为不等式$(mx-1)(x-2)>0$的解集为$\left\{x\left|\frac{1}{m}<x<2\right.\right\}$，

所以方程$(mx-1)(x-2)=0$的两个实数根为$\frac{1}{m}$和2，

且$\begin{cases} m<0, \\ \dfrac{1}{m}<2, \end{cases}$解得 $m<0$.

所以 m 的取值范围是$\{m|m<0\}$.

5.(1)解不等式$\dfrac{2-x}{x+3}>1$；

(2)关于 x 的不等式 $ax-b>0$ 的解集是$\left\{x\,\middle|\,x>\dfrac{1}{2}\right\}$,求关于 x 的不等式$\dfrac{ax-2b}{-x+5}>0$ 的解集.

解:(1)不等式$\dfrac{2-x}{x+3}>1$ 可化为$\dfrac{(2-x)-(x+3)}{x+3}>0$,

化简得$\dfrac{-2x-1}{x+3}>0$,即$\dfrac{2x+1}{x+3}<0$,

等价于$(2x+1)(x+3)<0$,解得$-3<x<-\dfrac{1}{2}$.

所以原不等式的解集为$\left\{x\,\middle|\,-3<x<-\dfrac{1}{2}\right\}$.

(2)因为不等式 $ax-b>0$ 的解集是$\left\{x\,\middle|\,x>\dfrac{1}{2}\right\}$,

所以 $a>0$,且 $a=2b$,

则不等式$\dfrac{ax-2b}{-x+5}>0$ 等价于$\dfrac{x-1}{-x+5}>0$,即$\dfrac{x-1}{x-5}<0$.

所以$(x-1)(x-5)<0$,解得 $1<x<5$.

因此原不等式的解集为$\{x|1<x<5\}$.

综合性·创新提升

1.关于 x 的不等式 $x^2-2ax-8a^2<0(a>0)$的解集为$\{x|x_1<x<x_2\}$,且 $x_2-x_1=15$,则实数 $a=$ (　　)

A.$\dfrac{5}{2}$　　B.$\dfrac{7}{2}$　　C.$\dfrac{15}{4}$　　D.$\dfrac{15}{2}$

A　**解析**:(方法一)$x^2-2ax-8a^2<0$ 可化为$(x+2a)\cdot(x-4a)<0$.

因为 $a>0$ 且解集为$\{x|x_1<x<x_2\}$,所以 $x_1=-2a$,$x_2=4a$.所以 $x_2-x_1=6a=15$.故 $a=\dfrac{5}{2}$.

(方法二)由题意知 x_1,x_2 为方程 $x^2-2ax-8a^2=0$ 的两根,则 $x_1+x_2=2a$,$x_1x_2=-8a^2$.故$(x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(2a)^2-4\times(-8a^2)=36a^2=15^2$,结合 $a>0$ 得 $a=\dfrac{5}{2}$.

2.已知关于 x 的不等式$\dfrac{x+1}{x+a}<2$ 的解集为 P,若 $1\notin P$,则实数 a 的取值范围为 (　　)

A.$\{a|a\geqslant 0$ 或 $a\leqslant -1\}$

B.$\{a|-1\leqslant a\leqslant 0\}$

C.$\{a|a>0$ 或 $a<-1\}$

D.$\{a|-1<a<0\}$

B　**解析**:由题意可得$\dfrac{1+1}{1+a}\geqslant 2$,或式子$\dfrac{1+1}{1+a}$无意义.

化简可得$\dfrac{a}{1+a}\leqslant 0$ 或 $a=-1$.解得$-1\leqslant a\leqslant 0$.

3.(多选)若不等式$x^2+ax+1\geqslant 0$ 对任意 $0<x<\dfrac{1}{2}$ 恒成立,则实数 a 的值可以为 (　　)

A.0　　B.-2　　C.$-\dfrac{5}{2}$　　D.-3

ABC　**解析**:因为 $0<x<\dfrac{1}{2}$,

所以原不等式等价于 $a\geqslant -\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$.

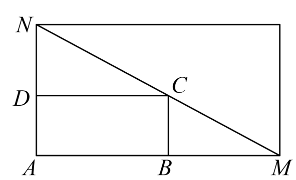
因为 $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$,当且仅当 $x=\dfrac{1}{x}$,即 $x=1$ 时,等号成立,又 $0<x<\dfrac{1}{2}$,所以 $x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{5}{2}$,

所以$-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)<-\dfrac{5}{2}$,所以 $a\geqslant -\dfrac{5}{2}$.

4.如图,有一长 $AM=30$ m、宽 $AN=20$ m 的矩形空地,物业计划将其中的一部分(矩形 $ABCD$)建为仓库,要求顶点 C 在空地的对角线 MN 上,B,D 分别在边 AM,AN 上,其他地方建停车场和路.设 $AB=x$ m.

(1)求仓库占地面积 S(单位:m^2)关于 x 的函数解析式；

(2)若要求仓库占地面积不小于 144 m^2,求 x 的取值范围.



解:(1)由题意知,$\triangle NDC\backsim\triangle NAM$,则$\dfrac{DC}{AM}=\dfrac{ND}{NA}$,即$\dfrac{x}{30}=\dfrac{20-AD}{20}$,解得 $AD=20-\dfrac{2}{3}x$.

所以仓库占地面积 S 关于 x 的函数解析式为

$S=20x-\dfrac{2}{3}x^2(0<x<30)$.

(2)由题意得 $20x-\dfrac{2}{3}x^2\geqslant 144$,即 $x^2-30x+216\leqslant 0$,解得 $12\leqslant x\leqslant 18$.

故 x 的取值范围是$\{x|12\leqslant x\leqslant 18\}$.

第三章　函数的概念与性质

3.1　函数的概念及其表示

3.1.1　函数的概念

第1课时　函数的概念

学习任务目标

1. 在初中用变量之间的依赖关系描述函数的基础上,用集合语言和对应关系刻画函数,建立完整的函数概念.

2. 了解构成函数的三要素.

3. 能构造问题情境描述解析式中变量的关系.

问题式预习

知识清单

知识点一　函数的概念

(1)定义:一般地,设 A,B 是非空的实数集,如果对于集合 A 中的任意一个数 x,按照某种确定的对应关系 f,在集合 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应,那么就称 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数.

(2)记法:$y=f(x)$,$x\in A$.

(3)定义域:x 叫做自变量,x 的取值范围 A 叫做函数的定义域.

(4)值域:与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值,函数值的集合 $\{f(x)|x\in A\}$ 叫做函数的值域.

知识点二　常见函数的定义域和值域

(1)一次函数 $y=ax+b(a\neq0)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$,值域也是 $\mathbf{R}$.对应关系 f 把 $\mathbf{R}$ 中的任意一个数 x,对应到 $\mathbf{R}$ 中唯一确定的数 $ax+b(a\neq0)$.

(2)二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$,值域是 B.当 $a>0$ 时,$B=\left\{y\left|y\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a}\right.\right\}$;当 $a<0$ 时,$B=\left\{y\left|y\leqslant\frac{4ac-b^2}{4a}\right.\right\}$.对应关系 f 把 $\mathbf{R}$ 中的任意一个数 x,对应到 B 中唯一确定的数 $ax^2+bx+c(a\neq0)$.

概念辨析

1. 判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)根据函数的定义,定义域中的任何一个 x 可以对应着值域中不同的 y.(　　)

× **解析**:根据函数的定义,对于定义域中的任意一个数 x,在值域中都有唯一确定的数 y 与之对应.

(2)根据函数的定义,定义域中可以有多个 x 对应着值域中同一个 y.(　　)

√ **解析**:根据函数的定义,对于定义域中的任意一个数 x,在值域中都有唯一确定的数 y 与之对应,所以可以有多个 x 对应同一个 y.

(3)根据函数的定义,定义域中可以存在 x 在值域中没有对应的 y.(　　)

× **解析**:根据函数的定义,对于集合 A 中的任意一个数 x,在集合 B 中都有唯一确定的数 y 与之对应.

2. 函数 $y=x+1$,$x\in\{1,2,3,4,5\}$ 的值域是 $\{2,3,4,5,6\}$.

3. 请思考并回答下列问题:

(1)任何两个集合之间都可以建立函数关系吗?

提示:不是.函数定义中的集合 A,B 必须是两个非空实数集.

(2)对于函数 $f:A\to B$,值域一定是集合 B 吗?

提示:不一定.值域是函数值的集合,是集合 B 的子集,即值域 $\{f(x)|x\in A\}\subseteq B$.

任务型课堂

学习任务一　函数的概念

1. 下列表示 y 关于 x 的函数的是　　(　　)

A. $y=x^2$　　B. $y^2=x$

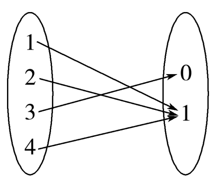
C. $|y|=x$　　D. $|y|=|x|$

A　**解析**:结合函数的定义可知 A 正确.故选 A.

2. 下列对应关系中,$f:A\to B$ 是从 A 到 B 的函数的是　　(　　)

A. $A=\mathbf{R},B=\mathbf{R},f:x\to y=\sqrt{1-x^2}$

B. $A=\{1,2,3,4\},B=\{0,1\}$,对应关系 f 如图:



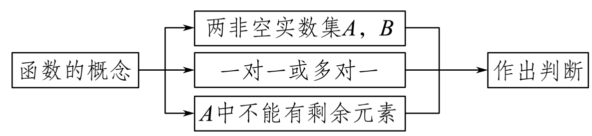
C. $A=\mathbf{R},B=\mathbf{R},f:x\to y=\dfrac{1}{x-2}$

D. $A=\mathbf{Z},B=\mathbf{Z},f:x\to y=\sqrt{2x-1}$

B　**解析**:$x^2+y^2=1$ 可化为 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$,显然对任意 $x\in A$,y 值不唯一,故 A 项不符合.B 项符合函数的定义.$2\in A$,但在集合 B 中找不到与之相对应的数,故 C 项不符合.$-1\in A$,但在集合 B 中找不到与之相对应的数,故 D 项不符合.

反思提炼

1.判断一个对应关系是否为函数的方法



2.根据图形判断对应关系是否为函数的方法

(1)任取一条垂直于 x 轴的直线 l;

(2)在定义域内平行移动直线 l;

(3)若 l 与图形始终有且只有一个交点,则是函数;若 l 与图形没有交点或有两个及两个以上的交点,则不是函数.

学习任务二　函数的三要素

例 1　已知集合 $A=B=\{1,2,3\}$,设 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的函数.

(1)函数的定义域是________.

(2)这样的函数一共有多少个?

(3)函数的值域一共有多少种不同的情况?

解:(1)函数的定义域是 $\{1,2,3\}$.

(2)因为定义域中有三个元素 1,2,3,其中每个元素都可以对应到集合 B 中的三个元素中的任意一个,所以对应关系 f 共有 $3\times3\times3=27$(种),所以从集合 A 到集合 B 的函数共有 27 个.

(3)将(2)中对应关系分为:一对一,多对一(二对一、三对一).

若为一对一,值域有 $\{1,2,3\}$,共 1 种情况;

若为二对一,值域有 $\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$,共 3 种情况;

若为三对一,值域有 $\{1\},\{2\},\{3\}$,共 3 种情况.

所以函数的值域共有 7 种不同的情况.

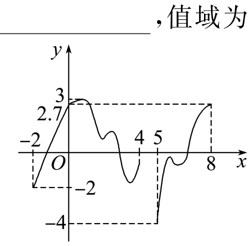
反思提炼

由图象求函数定义域、值域的方法

若函数用图象给出,则图象在 x 轴上的正投影所覆盖的 x 的集合即为定义域,图象在 y 轴上的正投影所覆盖的 y 的集合即为值域.

探究训练

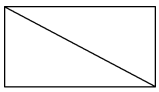
已知函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示,则该函数的定义域为____________,值域为________.



$\{x|-2\leqslant x\leqslant4$,或 $5\leqslant x\leqslant8\}$　$\{y|-4\leqslant y\leqslant3\}$　**解析**:根据 $y=f(x)$ 的函数图象可看出,该函数的定义域为 $\{x|-2\leqslant x\leqslant4$,或 $5\leqslant x\leqslant8\}$,值域为 $\{y|-4\leqslant y\leqslant3\}$.

学习任务 三　根据解析式构建问题情境

例 2　如图所示，已知矩形的面积为 10，借助该图形构建问题情境，使得其中的变量关系能用解析式 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4+100}}{x}$ 来描述.



解：设矩形的长为 x，对角线长为 $f(x)$，那么 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4+100}}{x}$.

其中 x 的取值范围 $A=\{x\mid x>0\}$，$f(x)$ 的取值范围 $B=\{f(x)\mid f(x)\geqslant 2\sqrt{5}\}$，对应关系 f 把每一个矩形的长 x，对应到唯一确定的对角线长 $\dfrac{\sqrt{x^4+100}}{x}$.

反思提炼

关于数学情境的构建

常见的函数模型有一次函数、二次函数、反比例函数等，要熟悉这些函数模型与常见的几何图形、实际问题的联系，根据函数的解析式构建与其相符的问题情境.

探究训练

下列构建的问题情境中的变量关系可以用同一个解析式来描述的是　　　　（ C ）

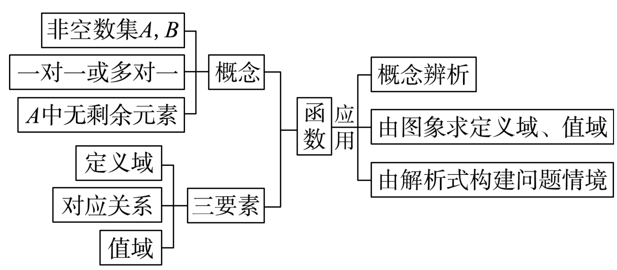
①某商品的售价为 2 元/件，销量为 x（单位：件），销售额为 y（单位：元），那么 $y=2x$.其中，x 的取值范围 $A=\mathbf{N}$，y 的取值范围 $B=\left\{y\,\middle|\,\dfrac{y}{2}\in\mathbf{N}\right\}$.对应关系 f 把商品的每一个销量 x，对应到唯一确定的销售额 $2x$.

②某物体做匀速运动，速度为 2 m/s，运动时间为 x（单位：s），路程为 y（单位：m），那么 $y=2x$.其中，x 的取值范围 $A=\{x\mid x\geqslant 0\}$，y 的取值范围 $B=\{y\mid y\geqslant 0\}$.对应关系 f 把物体的每个运动时间 x，对应到唯一确定的路程 $2x$.

③某品牌汽车的装货量为 2 t/辆，汽车数量为 x（单位：辆），运载量为 y（单位：t），那么 $y=2x$，其中，x 的取值范围 $A=\mathbf{N}$，y 的取值范围 $B=\left\{y\,\middle|\,\dfrac{y}{2}\in\mathbf{N}\right\}$.对应关系 f 把每一个汽车数量 x，对应到唯一确定的运载量 $2x$.

A.①②　　B.②③　　C.①③　　D.①②③

体系构建



课后素养评价（十六）

基础性·能力运用

1.给出下列三个说法：

①若函数的值域只含有一个元素，则定义域也只含有一个元素；②若 $f(x)=5(x\in\mathbf{R})$，则 $f(\pi)=5$ 一定成立；③函数就是两个集合之间的对应关系.

其中正确说法的个数为　　　　（　　）

A.0　　　　B.1

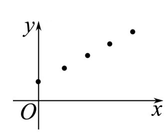
C.2　　　　D.3

B　**解析**：①错误，若函数的值域只含有一个元素，则定义域不一定只含有一个元素；

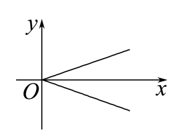
②正确，因为 $f(x)=5$，这个数值不随 x 的变化而变化，所以 $f(\pi)=5$；

③错误，函数是两个非空实数集之间的对应关系.

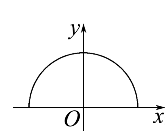
2.（多选）下列各图中，可能是函数图象的是　　　　（　　）



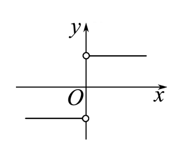
A



B



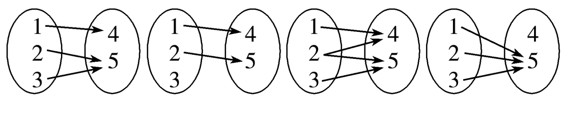
C



D

ACD　**解析**：B 选项，当 $x>0$ 时，每个 x 有两个 y 值与之对应，不是函数，B 错误，其他均符合函数的定义.

3.(多选)下列两个集合的对应关系中,为函数的是 (　　)



A　　　B　　　C　　　D

AD　**解析**:A 项,每一个自变量都有唯一的数与之对应,可以构成函数,A 正确;B 项,自变量 3 没有对应的数,不能构成函数,B 错误;C 项,自变量 2 同时对应了两个数,不能构成函数,C 错误;D 项,每一个自变量都有唯一的数与之对应,可以构成函数,D 正确.

4.已知函数 $f:A\to B$(A,B 为非空数集),定义域为集合 M,值域为集合 N,则 A,B,M,N 的关系是 (　　)

A.$M=A,N=B$　　B.$M\subseteq A,N=B$

C.$M=A,N\subseteq B$　　D.$M\subseteq A,N\subseteq B$

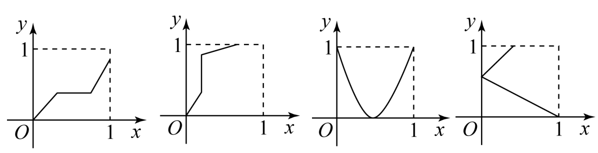
C　**解析**:根据函数的定义,有 $M=A,N\subseteq B$.故选 C.

5.函数 $y=-\dfrac{3}{x}$的定义域为______,值域为______.

$\{x|x\neq0\}$　$\{y|y\neq0\}$　**解析**:画出反比例函数 $y=-\dfrac{3}{x}$的图象(图略),由图象可得,定义域为$\{x|x\neq0\}$,值域为$\{y|y\neq0\}$.

综合性·创新提升

1.下列图形中可以表示以 $M=\{x|0\leqslant x\leqslant1\}$为定义域,以 $N=\{y|0\leqslant y\leqslant1\}$为值域的函数的图象是 (　　)



A　　　B　　　C　　　D

C　**解析**:由函数的定义可知,选项 C 正确.

2.下列集合 M 与 N 的对应关系为函数的是 (　B　)

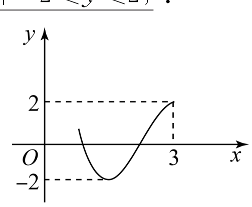
A.$M=\mathbf{R},N=\{y|y>0\},f:x\to y=|x|$

B.$M=\{x|x\geqslant2,x\in\mathbf{N}^*\},N=\{y|y>0,y\in\mathbf{N}^*\}$,
$f:x\to y=x^2-2x+2$

C.$M=\{x|x>0\},N=\mathbf{R},f:x\to y=\pm\sqrt{x}$

D.$M=\mathbf{R},N=\mathbf{R},f:x\to y=\dfrac{1}{x}$

3.函数 $y=f(x)$的部分图象如图所示,则 $f(3)=\underline{2}$,函数值域为$\underline{\{y|-2\leqslant y\leqslant2\}}$.



4.(开放性问题)写出满足下列要求的两个函数.

(1)定义域相同,值域相同,但对应关系不同:______;

$f(x)=x,g(x)=2x+1$(答案不唯一)　**解析**:函数 $f(x)=x,g(x)=2x+1$,定义域和值域都是 $\mathbf{R}$,但对应关系不同.

(2)值域相同,对应关系相同,但定义域不同:______.

$f(x)=x^2,x\in[0,+\infty),g(x)=x^2,x\in(-\infty,0]$(答案不唯一)　**解析**:函数 $f(x)=x^2,x\in[0,+\infty),g(x)=x^2,x\in(-\infty,0]$,值域都是$[0,+\infty)$,但定义域不同.

5.构建一个问题情境,使其中的变量关系能用解析式 $y=(300+10x)(200-4x)$来描述,其中 $1\leqslant x\leqslant50$,$x\in\mathbf{N}^*$.

解:某汽车租赁公司有 200 辆小汽车,若每辆车一天的租金为 300 元,可全部租出;若将每天的租金提高 $10x(1\leqslant x\leqslant50,x\in\mathbf{N}^*)$元,则租出的车辆会相应减少 $4x$ 辆.

设该汽车租赁公司每天的收入为 y 元,则 $y=(300+10x)(200-4x)$,其中 $1\leqslant x\leqslant50,x\in\mathbf{N}^*$.

第 2 课时　函数概念的应用

学习任务目标

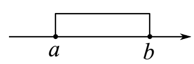
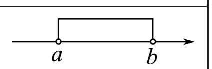
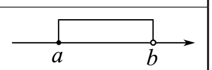
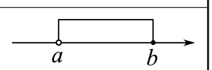
1.能正确使用区间表示数集.
2.能求简单函数的定义域.
3.理解同一函数的概念,会判断两个函数是不是同一函数.

问题式预习

知识清单

知识点一　区间及有关概念

设 a,b 是两个实数,且 $a<b$,规定如下:

区间	类别	含义	数轴表示
$[a,b]$	闭区间	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	
(a,b)	开区间	$\{x\mid a<x<b\}$	
$[a,b)$	半开半闭区间	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$	
$(a,b]$	半开半闭区间	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$	

知识点二　函数的三要素与同一个函数

(1)一个函数的构成要素为定义域、对应关系和值域.
(2)同一个函数:如果两个函数的定义域相同,并且对应关系完全一致,即相同的自变量对应的函数值也相同,那么这两个函数是同一个函数.

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)区间是数集的另外一种表示形式,任何数集都可用区间表示.　(　　)

×　**解析**:只有连续的实数集可用区间表示,单元素集合不能用区间表示.

(2)集合$\{x\mid x<4\}$用区间表示为$[4,-\infty)$.　(　　)

×　**解析**:应表示为$(-\infty,4)$.

(3)已知定义域和对应关系就可以确定一个函数.　(　　)

√　**解析**:只要函数的定义域和对应关系确定了,函数就唯一确定了.

(4)函数 $f(x)=x^2$ 和 $f(x-1)=x^2$ 是同一个函数.　(　　)

×　**解析**:不是,对应关系 f 所施加的对象不同(前者为 x,后者为 $x-1$),因此两者不是同一个函数.

2.若$[a,3a-1]$为一个确定的区间,则 a 的取值范围是________.

$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　**解析**:由题意知 $3a-1>a$,则 $a>\dfrac{1}{2}$.

3.请思考并回答下列问题:

(1)区间的左、右端点的大小关系是怎样的?

提示:区间的左端点必小于右端点.

(2)结合函数的定义,如何才能确定一个函数?

提示:有确定的定义域和对应关系,则此时值域唯一确定.

任务型课堂

学习任务一　已知函数的解析式求定义域

求下列函数的定义域:

(1)$y=(x-1)^0+\sqrt{\dfrac{2}{x+1}}$;

(2)$y=\dfrac{(x+1)^2}{x+1}+\sqrt{1-x}$.

解:(1)要使函数有意义,

则有$\begin{cases}x-1\neq 0,\\ \dfrac{2}{x+1}\geqslant 0,\\ x+1\neq 0,\end{cases}$解得 $x>-1$ 且 $x\neq 1$.

所以这个函数的定义域为$\{x\mid x>-1$,且 $x\neq 1\}$.

(2)要使函数有意义,自变量 x 的取值必须满足$\begin{cases}x+1\neq 0,\\ 1-x\geqslant 0,\end{cases}$解得 $x\leqslant 1$ 且 $x\neq -1$.

所以这个函数的定义域为$\{x\mid x\leqslant 1$,且 $x\neq -1\}$.

[一题多思]

思考　若把(1)中的函数变为"$y=\dfrac{(x-1)^0}{\sqrt{x+1}}$",其定义域是否发生变化?

提示:不变.

反思提炼

求函数定义域的策略

(1)分式：分母不为零；

(2)偶次根式：被开方数大于或等于零；

(3)零次幂：底数不为零；

(4)实际问题：使实际问题有意义.

学习任务二　求函数值

1. 若函数 $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$，则 $f(3)=$________.

$-\frac{1}{8}$　**解析**：$f(3)=\frac{1}{1-9}=-\frac{1}{8}$.

2. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}(x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq-1)$，$g(x)=x^2+2(x\in\mathbf{R})$，求 $f(2)$，$g(2)$，$f(g(2))$的值.

解：因为 $f(x)=\frac{1}{1+x}$，所以 $f(2)=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$.

因为 $g(x)=x^2+2$，所以 $g(2)=2^2+2=6$.

所以 $f(g(2))=f(6)=\frac{1}{1+6}=\frac{1}{7}$.

反思提炼

求函数值的方法

(1)已知函数 $f(x)$的解析式时，只需用 a 替换解析式中的 x 即得 $f(a)$的值.

(2)求 $f(g(a))$的值应遵循由里往外的原则.

学习任务三　同一个函数的判定

例 1　下列各组函数是否为同一个函数？为什么？

(1) $f(x)=|x|$，$\varphi(t)=\sqrt{t^2}$；

(2) $y=\sqrt{x^2}$，$y=(\sqrt{x})^2$；

(3) $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}$ 与 $g(x)=\sqrt{x(x+1)}$；

(4) $f(x)=1$ 与 $g(x)=x^0(x\neq0)$.

解：(1)在定义域 $\mathbf{R}$ 上，$f(x)=|x|$和 $\varphi(t)=\sqrt{t^2}=|t|$的对应关系完全相同，是同一个函数.

(2) $y=\sqrt{x^2}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，两者定义域不同，不是同一个函数.

(3) $f(x)$的定义域为 $[0,+\infty)$，$g(x)$的定义域为 $(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$，不是同一个函数.

(4) $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，$g(x)$的定义域为 $\{x|x\neq0\}$，不是同一个函数.

反思提炼

判断函数是否为同一个函数的方法

(1)先看定义域，若定义域不同，则不是同一个函数；

(2)若定义域相同，再化简函数的解析式，看对应关系是否相同.

探究训练

(多选)下列各组函数是同一个函数的是　　(　　)

A. $f(x)=\sqrt{-2x^3}$ 与 $g(x)=x\sqrt{-2x}$

B. $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$

C. $f(x)=x^0$ 与 $g(x)=\frac{1}{x^0}$

D. $f(x)=x^2-2x-1$ 与 $g(t)=t^2-2t-1$

CD　**解析**：对于选项 A，$f(x)=\sqrt{-2x^3}=|x|\sqrt{-2x}$ 与 $g(x)=x\sqrt{-2x}$ 的对应关系不同，故不是同一个函数；对于选项 B，$g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$ 与 $f(x)=x$ 的对应关系不同，故不是同一个函数；对于选项 C，$f(x)=x^0$ 与 $g(x)=\frac{1}{x^0}$ 的定义域都是 $\{x|x\neq0\}$，且在定义域内有 $f(x)=1$，$g(x)=1$，是同一个函数；对于选项 D，$f(x)=x^2-2x-1$ 与 $g(t)=t^2-2t-1$ 的定义域都是 $\mathbf{R}$，对应关系也相同，而与用什么字母表示无关，故是同一个函数.故选 CD.

学习任务四　复合函数、抽象函数的定义域

例 2　(1)函数 $y=f(x)$的定义域是 $[-1,3]$，则 $f(2x+1)$的定义域为________.

$[-1,1]$　**解析**：令 $-1\leqslant 2x+1\leqslant 3$，解得 $-1\leqslant x\leqslant 1$，所以 $f(2x+1)$的定义域为 $[-1,1]$.

(2)已知函数 $f(x+1)$的定义域为 $(2,4)$，则 $f(x)$的定义域为________.

$(3,5)$　**解析**：因为 $f(x+1)$的定义域为 $(2,4)$，所以 $2<x<4$，则 $3<x+1<5$，即 $f(x)$的定义域为 $(3,5)$.

反思提炼

抽象函数定义域的求解方法

(1)已知 $f(x)$的定义域为 $[a,b]$，求 $f(g(x))$的定义域时，不等式 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 的解集即定义域.

(2)已知 $f(g(x))$的定义域为 $[c,d]$，求 $f(x)$的定义域时，$g(x)$在 $[c,d]$上的范围(值域)即定义域.

探究训练

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$，则函数 $g(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)+f(x-1)$ 的定义域是________.

$(0,2)$　**解析**：由题意知 $\begin{cases}-1<\frac{x}{2}<1,\\ -1<x-1<1,\end{cases}$ 解得 $0<x<2$. 于是函数 $g(x)$ 的定义域为 $(0,2)$.

体系构建

函数概念的应用
- 求定义域
- 求函数值
- 同一个函数的判断

课后素养评价(十七)

基础性·能力运用

1. 函数 $f(x)=\frac{\sqrt{1-3x}}{x}$ 的定义域为　(　　)

A. $\left\{x\middle|x\leqslant\frac{1}{3}\right\}$

B. $\left\{x\middle|x<\frac{1}{3}\right\}$

C. $\left\{x\middle|0<x\leqslant\frac{1}{3}\right\}$

D. $\left\{x\middle|x\leqslant\frac{1}{3}, 且\ x\neq0\right\}$

D　**解析**：要使 $f(x)$ 有意义，需满足 $\begin{cases}1-3x\geqslant0,\\ x\neq0,\end{cases}$ 即 $x\leqslant\frac{1}{3}$ 且 $x\neq0$.

2. (多选)若函数 $f(x)=\frac{5x}{x^2+1}$，且 $f(a)=2$，则实数 a 的值可以为　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1

C. 2　　D. 3

AC　**解析**：由 $f(a)=2$，得 $\frac{5a}{a^2+1}=2$，解得 $a=2$ 或 $a=\frac{1}{2}$.

3. 已知 $2\in(m,3m^2-m]$，则实数 m 的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right]\cup[1,2)$.

4. 已知等腰三角形 ABC 的周长为 10，底边长 y 关于腰长 x 的函数解析式为 $y=10-2x$，则此函数的定义域为________.

$\left(\frac{5}{2},5\right)$　**解析**：因为 $\triangle ABC$ 的底边长大于 0，所以 $y=10-2x>0$，所以 $x<5$.

又两边之和大于第三边，所以 $2x>10-2x$，所以 $x>\frac{5}{2}$.

所以此函数的定义域为 $\left(\frac{5}{2},5\right)$.

5. 已知函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}$ 是同一个函数，则函数 $y=f(x)$ 的定义域是________.

$[-3,1]$　**解析**：由于 $y=f(x)$ 与 $y=\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}$ 是同一个函数，故二者定义域相同. 由 $\begin{cases}x+3\geqslant0,\\ 1-x\geqslant0,\end{cases}$ 得 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-3,1]$.

6. 已知函数 $f(x)=\frac{6}{x-1}-\sqrt{x+4}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的定义域；

(2)求 $f(-1)$，$f(12)$ 的值.

解：(1)根据题意知 $x-1\neq0$ 且 $x+4\geqslant0$，

所以 $x\geqslant-4$ 且 $x\neq1$.

即函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-4,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) $f(-1)=\frac{6}{-2}-\sqrt{-1+4}=-3-\sqrt{3}$，

$f(12)=\frac{6}{11}-\sqrt{12+4}=\frac{6}{11}-4=-\frac{38}{11}$.

综合性·创新提升

1.设函数 $f(x)=ax+b$，若 $f(1)=-2$，$f(-1)=0$，则 ( )

A.$a=1,b=-1$ B.$a=-1,b=-1$

C.$a=-1,b=1$ D.$a=1,b=1$

B **解析**：由 $f(1)=-2$，得 $a+b=-2$；

由 $f(-1)=0$，得 $-a+b=0$.

所以 $a=-1,b=-1$.故选 B.

2.(多选)在下列四组函数中，$f(x)$ 与 $g(x)$ 为同一函数的是 ( )

A.$f(x)=x-1,g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$

B.$f(x)=|x+1|,g(x)=\begin{cases}x+1,x\geqslant-1,\\-1-x,x<-1\end{cases}$

C.$f(x)=1,g(x)=(x+1)^0$

D.$f(x)=\dfrac{(\sqrt{x})^2}{x},g(x)=\dfrac{x}{(\sqrt{x})^2}$

BD **解析**：对于 A，$f(x)=x-1(x\in\mathbf{R})$，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}=x-1(x\neq-1)$，两函数的定义域不同，故不为同一函数；对于 B，$f(x)=|x+1|=\begin{cases}x+1,x\geqslant-1,\\-1-x,x<-1,\end{cases}$ 即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同，对应关系相同，故为同一函数；对于 C，$f(x)=1$，$x\in\mathbf{R}$，$g(x)=(x+1)^0(x\neq-1)$，两函数的定义域不同，故不为同一函数；对于 D，$f(x)=\dfrac{(\sqrt{x})^2}{x}=1(x>0)$，$g(x)=\dfrac{x}{(\sqrt{x})^2}=1(x>0)$，即两函数的定义域相同，对应关系相同，故为同一函数.

3.已知函数 $f(x)$ 的定义域为$[2,8]$，则函数$h(x)=f(2x)+\sqrt{9-x^2}$ 的定义域为 ( )

A.$[4,16]$

B.$(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$

C.$[1,3]$

D.$[3,4]$

C **解析**：由题意可知，函数 $f(x)$ 的定义域为$[2,8]$，则函数$h(x)$的定义域满足$\begin{cases}2\leqslant 2x\leqslant 8,\\9-x^2\geqslant 0,\end{cases}$解得 $1\leqslant x\leqslant 3$，所以函数 $h(x)$ 的定义域为$[1,3]$.

4.(新定义)若一系列函数的解析式相同，值域相同，但定义域不同，则称这些函数为“孪生函数”.函数解析式为 $y=2x^2-1$，值域为$\{1,7\}$的“孪生函数”共有 ( )

A.10 个 B.9 个 C.8 个 D.4 个

B **解析**：由 $2x^2-1=1$，得 $x_1=1,x_2=-1$；由 $2x^2-1=7$，得 $x_3=-2,x_4=2$.所以定义域为 2 个元素的集合有 4 个，定义域为 3 个元素的集合有 4 个，定义域为 4 个元素的集合有 1 个，因此共有 9 个“孪生函数”.

5.已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

(1)求 $f(2)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(3)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)$的值；

(2)求证：$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$是定值.

(1)**解**：因为 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$，

所以 $f(2)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2^2}{1+2^2}+\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=1$，

$f(3)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{3^2}{1+3^2}+\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=1$.

(2)**证明**：$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}=\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{1}{x^2+1}=\dfrac{x^2+1}{x^2+1}=1$.

3.1.2　函数的表示法

第1课时　函数的表示法

学习任务目标

1. 掌握函数的三种表示方法,会根据不同的需要选择恰当的方法表示函数.

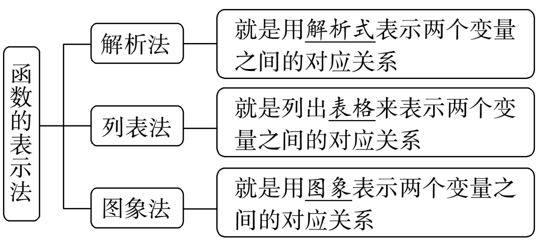
2. 理解函数图象的作用,能作出函数的图象.

3. 掌握求函数解析式的常用方法.

问题式预习

知识清单

知识点　函数的表示法



概念辨析

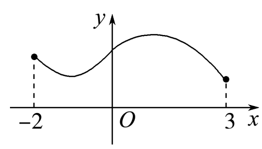
1. 判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)任何一个函数都可以用解析法表示.　(　×　)

(2)函数的图象一定是定义区间上一条连续不断的曲线.　(　×　)

2. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示,则其定义域是________.

$[-2,3]$　**解析:** 由题图可知 $f(x)$ 的定义域为 $[-2,3]$.



3. 请思考并回答下列问题:

(1)任何一个函数都可以用图象法表示吗?

提示: 有些函数是不能画出图象的,如 $f(x)=\begin{cases}1, x\in \mathbf{Q},\\ -1, x\in \complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}.\end{cases}$

(2)函数 $y=2x-1(-1\leqslant x\leqslant 0)$ 的图象是什么形状?

提示: 一条线段.

任务型课堂

学习任务一　函数的表示方法

1. 购买某种饮料 x 听,所需金额为 y 元.若每听2元,用解析法将 y 表示成 $x(x\in\{1,2,3,4\})$ 的函数为　(　　)

A. $y=2x$

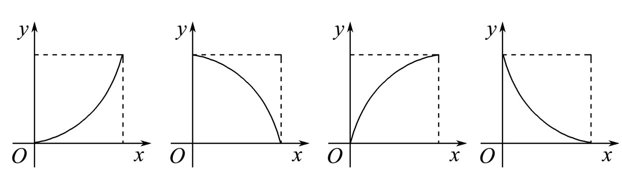
B. $y=2x(x\in \mathbf{R})$

C. $y=2x(x\in\{1,2,3,\cdots\})$

D. $y=2x(x\in\{1,2,3,4\})$

D　**解析:** 题中已给出自变量的取值范围,$x\in\{1,2,3,4\}$.故选D.

2. 某学生离家去学校,一开始跑步前进,跑累了再走完余下的路程.下列图中纵轴表示离学校的距离,横轴表示出发后经过的时间,则较符合该事件的是　(　　)



A　　B　　C　　D

D　**解析:** 结合题意可知,该学生离校的距离先快速减少,又较慢减少,最后到0.故选D.

3.由下表给出函数 $y=f(x)$,则 $f(f(1))=$　(　　)

x	1	2	3	4	5
y	4	5	3	2	1

A.1　　　B.2

C.4　　　D.5

B　**解析**:由题意可知,$f(1)=4$,$f(4)=2$,所以 $f(f(1))=f(4)=2$.故选 B.

反思提炼

理解函数表示法的三个关注点

(1)列表法、图象法、解析法均是函数的表示法,无论用哪种方法表示函数,都必须满足函数概念中的要求;

(2)列表法更直观具体,图象法从形的角度描述函数,解析法从数的角度描述函数;

(3)函数的三种表示法各有优点,许多函数是可以用三种方法表示的,但在实际应用中,仍以解析法为主.

学习任务二　函数的图象及应用

例 1　作出下列函数的图象并求出其值域.

(1)$y=-x$,$x\in\{0,1,-2,3\}$;

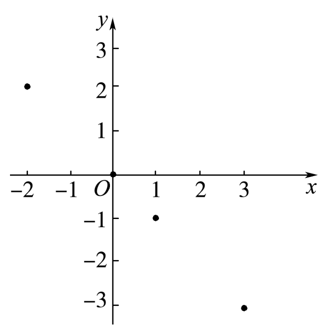
(2)$y=\dfrac{2}{x}$,$x\in[2,+\infty)$;

(3)$y=x^2+2x$,$x\in[-2,2)$.

解:(1)列表:

x	0	1	-2	3
y	0	-1	2	-3

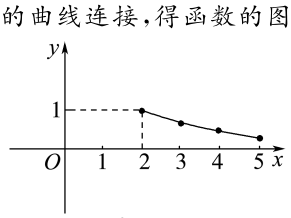
函数图象是由四个点$(0,0)$,$(1,-1)$,$(-2,2)$,$(3,-3)$组成,如图所示,其值域为$\{0,-1,2,-3\}$.



(2)列表:

x	2	3	4	5	…
y	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	…

描点并用光滑的曲线连接,得函数的图象,如图所示.

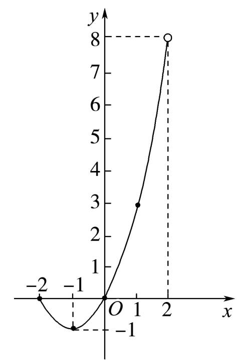


图象是反比例函数 $y=\dfrac{2}{x}$ 图象的一部分,观察图象可知其值域为$(0,1]$.

(3)列表:

x	-2	-1	0	1	2
y	0	-1	0	3	8

描点并用光滑的曲线连接,得函数的图象,如图所示.



图象是抛物线 $y=x^2+2x$ 在 $-2\leqslant x<2$ 之间的部分,由图象可得函数的值域为$[-1,8)$.

反思提炼

作函数图象的注意点

(1)要在函数的定义域内作图.

(2)要标出图象的关键点,例如图象的顶点、端点、与坐标轴的交点等,并明确这些关键点的虚实.

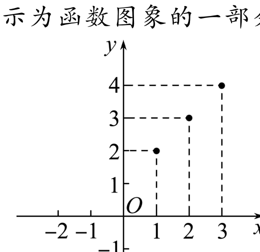
探究训练

作出下列函数的图象:

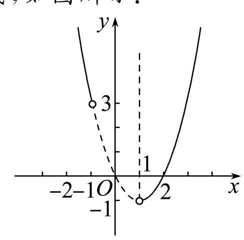
(1)$y=1+x(x\in\mathbf{Z})$;

(2)$y=x^2-2x(x>1$ 或 $x<-1)$.

解:(1)这个函数的图象由一些点组成,这些点都在直线 $y=1+x$ 上,这些点都为整数点(因为 $x\in\mathbf{Z}$,所以 $y\in\mathbf{Z}$),如图所示为函数图象的一部分.



(2)函数 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1(x>1$ 或 $x<-1)$的图象是抛物线 $y=x^2-2x$ 去掉$[-1,1]$之间的部分后剩余的曲线,如图所示.



学习任务三　函数解析式的求法

例 2　(1)如果 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{1-x}$，那么当 $x\neq0$，且 $x\neq1$ 时，$f(x)=$　　(　　)

A.$\frac{1}{x}$　　B.$\frac{1}{x-1}$

C.$\frac{1}{1-x}$　　D.$\frac{1}{x}-1$

B　**解析**：令 $\frac{1}{x}=t$，$t\neq0$，则 $x=\frac{1}{t}$．代入 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{1-x}$，得 $f(t)=\frac{\frac{1}{t}}{1-\frac{1}{t}}=\frac{1}{t-1}$．所以 $f(x)=\frac{1}{x-1}$．故选 B.

(2)已知 $f(x)+2f(-x)=x^2+2x$，则 $f(x)$的解析式为____________.

$f(x)=\frac{1}{3}x^2-2x$　**解析**：以 $-x$ 代替 x 得 $f(-x)+2f(x)=x^2-2x$，与 $f(x)+2f(-x)=x^2+2x$ 联立，解得 $f(x)=\frac{1}{3}x^2-2x$.

［**一题多思**］

思考 1. 应用换元法求函数解析式时，需要注意什么问题？

提示：应用换元法求函数解析式时，务必保证函数在换元前后的等价性.

思考 2. 本例(2)条件若换为“已知 $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=x$（$x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq0$）”，你能求出 $f(x)$的解析式吗？

提示：由 $\begin{cases}2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=x(x\neq0),\\2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{1}{x}(x\neq0),\end{cases}$ 可得 $f(x)=\frac{2x}{3}-\frac{1}{3x}(x\neq0)$.

反思提炼

求函数解析式的四种常用方法

(1)待定系数法：若已知函数 $f(x)$的类型，设出它的一般形式，根据特殊值确定相关的系数即可.

(2)换元法：设 $t=g(x)$，解出 x，代入 $f(g(x))$，求出 $f(t)$的解析式即可.

(3)配凑法：对 $f(g(x))$的解析式进行配凑变形，使它能用 $g(x)$表示出来，再用 x 代替两边所有的 $g(x)$即可.

(4)方程组法：当同一个对应关系中的两个变量互为相反数或互为倒数时，可构造方程组求解.

探究训练

已知函数 $f(x)$是一次函数，且 $f(f(x))=4x+8$，求 $f(x)$.

解：设 $f(x)=ax+b(a\neq0)$，

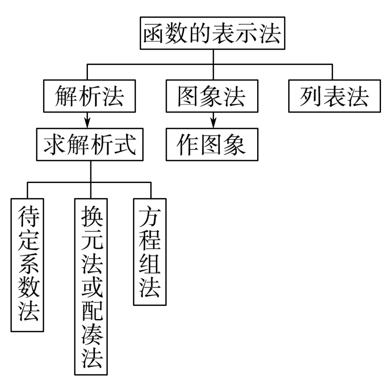
则 $f(f(x))=f(ax+b)=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$.

又 $f(f(x))=4x+8$，所以 $a^2x+ab+b=4x+8$，

即 $\begin{cases}a^2=4,\\ab+b=8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=\frac{8}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2,\\b=-8.\end{cases}$

所以 $f(x)=2x+\frac{8}{3}$ 或 $f(x)=-2x-8$.

体系构建



课后素养评价(十八)

基础性·能力运用

1. 已知函数 $f(x)$ 由下表给出,则 $f(f(3))=$ (　　)

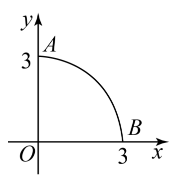
x	1	2	3	4
$f(x)$	3	2	4	1

A.1　　　B.2

C.3　　　D.4

A　**解析**:因为 $f(3)=4$,所以 $f(f(3))=f(4)=1$.

2. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示,其中点 A,B 的坐标分别为$(0,3),(3,0)$,则$f(f(0))=$ (　　)



A.2　　　B.4

C.0　　　D.3

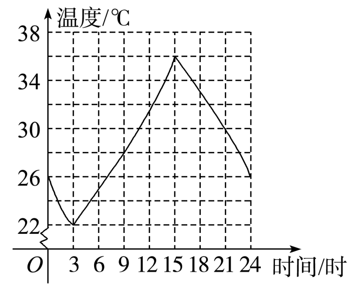
C　**解析**:结合图象可知 $f(0)=3,f(3)=0$,则 $f(f(0))=f(3)=0$.

3. 下列函数中,对任意 x,不满足 $2f(x)=f(2x)$ 的是 (　D　)

A.$f(x)=|x|$　　　B.$f(x)=-2x$

C.$f(x)=x-|x|$　　　D.$f(x)=x-1$

4. (多选)如图是反映某市某一天的温度随时间变化情况的图象.由图象可知,下列说法中正确的是 (　　)



A.这天 15 时的温度最高

B.这天 3 时的温度最低

C.这天的最高温度与最低温度相差 13 ℃

D.这天 21 时的温度是 30 ℃

ABD　**解析**:由图象知,这天 15 时的温度最高,为 36 ℃;3 时的温度最低,为 22 ℃;这天的最高温度与最低温度相差 $36-22=14$(℃);21 时的温度是 30 ℃.只有 C 错误.

5. 已知 $f(x)$为二次函数,且 $f(x+1)+f(x-1)=2x^2-4x$,则 $f(x)=$________.

x^2-2x-1　**解析**:设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$.因为 $f(x+1)+f(x-1)=a(x+1)^2+b(x+1)+c+a(x-1)^2+b(x-1)+c=2ax^2+2bx+2a+2c=2x^2-4x$.

所以 $2a=2,2b=-4,2a+2c=0$.所以 $a=1,b=-2,c=-1$.所以 $f(x)=x^2-2x-1$.

综合性·创新提升

1. 已知函数 $f(2x+1)=3x+2$,且 $f(a)=2$,则实数 a 的值为 (　　)

A.-1　　　B.5

C.1　　　D.8

C　**解析**:由 $3x+2=2$ 得 $x=0$.所以 $a=2\times 0+1=1$.故选 C.

2. (多选)设 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$,则下列结论正确的有 (　　)

A.$f(-x)=-f(x)$　　　B.$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$

C.$f\left(-\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$4　　　D.$f(-x)=f(x)$

BD　**解析**:因为 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$,所以 $f(-x)=\dfrac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2}=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=f(x)$,故 A 错误,D 正确;$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=-f(x)$,$f\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1+\left(-\dfrac{1}{x}\right)^2}{1-\left(-\dfrac{1}{x}\right)^2}=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=-f(x)$,故 B 正确,C 错误.

3. (多选)如果二次函数的图象关于直线 $x=1$ 对称,

且过点(0,0)，则此二次函数的解析式可以是 (　　)

A. $f(x)=x^2-1$

B. $f(x)=-(x-1)^2+1$

C. $f(x)=(x-1)^2+1$

D. $f(x)=(x-1)^2-1$

BD　**解析**：由题意设 $f(x)=a(x-1)^2+b(a\neq0)$，由于点(0,0)在图象上，所以 $a+b=0$，$a=-b$，故符合条件的是选项B,D.

4. 若一个长方体的高为80 cm，长比宽多10 cm，则这个长方体的体积 y（单位：cm^3）与长方体的宽 x（单位：cm）之间的关系式是____________.

$y=80x(x+10)$，$x\in(0,+\infty)$　**解析**：由题意可知，长方体的长为 $(x+10)$cm，从而长方体的体积 $y=80x(x+10)$，$x>0$.

5. 已知 $f(x)=2x+a$，$g(x)=\frac{1}{4}(x^2+3)$.

(1)若 $f(g(1))=5$，则 $a=$________；

(2)若 $g(f(x))=x^2-x+1$，则 $a=$________.

(1)3　(2)-1　**解析**：(1)因为 $g(1)=\frac{1}{4}\times(1+3)=1$，所以 $f(g(1))=f(1)=2+a=5$，所以 $a=3$.

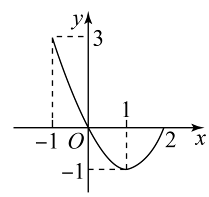
(2)因为 $g(x)=\frac{1}{4}(x^2+3)$，所以 $g(f(x))=\frac{1}{4}[(2x+a)^2+3]=\frac{1}{4}(4x^2+4ax+a^2+3)=x^2+ax+\frac{a^2+3}{4}=x^2-x+1$，解得 $a=-1$.

6. 已知函数 $f(x)=x^2-2x(-1\leqslant x\leqslant2)$.

(1)画出 $f(x)$ 的图象；

(2)根据图象写出 $f(x)$ 的值域.

解：(1) $f(x)$ 的图象如图所示.



(2)观察 $f(x)$ 的图象可知，$f(x)$ 图象上所有点的纵坐标的取值范围是 $[-1,3]$，即 $f(x)$ 的值域是 $[-1,3]$.

第2课时　分段函数及其应用

学习任务目标

1. 了解分段函数的概念，会求分段函数的函数值，能画出分段函数的图象.

2. 能在实际问题中列出分段函数的解析式，并能解决有关问题.

问题式预习

知识清单

知识点　分段函数

(1)定义：在定义域内，对于自变量的不同取值范围，有不同的函数解析式.像这样的函数，通常叫做分段函数.

(2)定义域和值域：分段函数的定义域是各段定义域的并集，其值域是各段值域的并集.

(3)分段函数的图象：画分段函数的图象时，应根据自变量的取值范围及对应解析式画出各段的图象，从而得到分段函数的图象.

概念辨析

1. 判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").

(1)分段函数有几段就是几个函数. (　×　)

(2)分段函数的定义域要分开写成几个集合的形式. (　×　)

(3)函数 $f(x)=\begin{cases}0,x<0,\\1,x\geqslant0\end{cases}$ 不是分段函数. (　×　)

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+5,x\geqslant4,\\x-2,x<4,\end{cases}$ 则 $f(3)$ 的值是 (　　)

A.1　　B.2

C.8　　D.9

A　**解析**：$f(3)=3-2=1$.

3. 请思考并回答下列问题：

(1)你认为分段函数的本质是什么？

提示：分段函数的本质是函数在定义域不同的范围内，有着不同的对应关系.

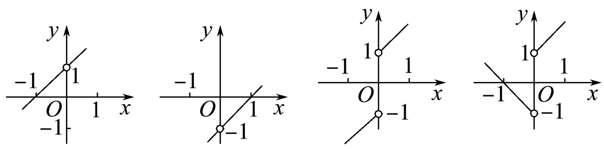
(2)分段函数的图象一定不是连续的曲线吗？

提示：分段函数的图象也可能是连续的，如函数 $y=\begin{cases}-x,x<0,\\x,x\geqslant0\end{cases}$ 的图象.

任务型课堂

学习任务一　分段函数的图象

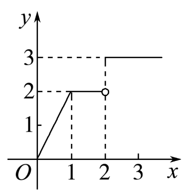
1. 函数 $y=x+\frac{|x|}{x}$ 的图象是　　　　　（　　）



A　　　　B　　　　C　　　　D

C　**解析**：对于 $y=x+\frac{|x|}{x}$，当 $x>0$ 时，$y=x+1$；当 $x<0$ 时，$y=x-1$. 即 $y=\begin{cases}x+1,x>0,\\x-1,x<0,\end{cases}$ 故其图象应为 C.

2. 函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，则其解析式为______.



$f(x)=\begin{cases}2x,0\leqslant x\leqslant 1,\\2,1<x<2,\\3,x\geqslant 2\end{cases}$　**解析**：当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，设 $f(x)=kx$，又函数图象过点 $(1,2)$，故 $k=2$，所以 $f(x)=2x$.

当 $1<x<2$ 时，$f(x)=2$. 当 $x\geqslant 2$ 时，$f(x)=3$.

综上，$f(x)=\begin{cases}2x,0\leqslant x\leqslant 1,\\2,1<x<2,\\3,x\geqslant 2.\end{cases}$

反思提炼

画分段函数图象的方法

(1)整段作图分段取：先不考虑定义域的限制，用虚线分别作出各段图象，再用实线画出定义域内的图象.

(2)端点实虚要明确：一定要明确区间端点是否包含在内，由此确定端点的虚实.

学习任务二　分段函数求值

例 1　已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+1,x\leqslant -2,\\3x+5,-2<x<2,\\2x-1,x\geqslant 2.\end{cases}$

(1)求 $f(-5)$，$f(f(1))$ 的值；

(2)若 $f(a)=3$，求实数 a 的值.

解：(1)由于 $-5\in(-\infty,-2]$，$1\in(-2,2)$，

所以 $f(-5)=-5+1=-4$，

$f(1)=3\times 1+5=8$.

又 $8\in[2,+\infty)$，

所以 $f(f(1))=f(8)=2\times 8-1=15$.

(2)当 $a\leqslant -2$ 时，$f(a)=a+1=3$，

解得 $a=2>-2$，不符合题意，舍去；

当 $-2<a<2$ 时，$f(a)=3a+5=3$，

解得 $a=-\frac{2}{3}\in(-2,2)$，符合题意；

当 $a\geqslant 2$ 时，$f(a)=2a-1=3$，

解得 $a=2\in[2,+\infty)$，符合题意.

综上可得，当 $f(a)=3$ 时，实数 a 的值为 $-\frac{2}{3}$ 或 2.

反思提炼

分段函数求值的关注点

(1)注意所给自变量的值所在的范围，代入相应的解析式求函数值；

(2)多层函数嵌套时，按照“由里到外”的顺序，层层处理；

(3)已知函数值求相应的自变量的值时，应在各段中分别求解.

探究训练

设函数 $f(x)=\begin{cases}1-x^2,x\leqslant 1,\\x^2+x-2,x>1,\end{cases}$ 则 $f\left(\frac{1}{f(2)}\right)$ 的值为________.

$\frac{15}{16}$　**解析**：因为当 $x>1$ 时，$f(x)=x^2+x-2$，所以 $f(2)=2^2+2-2=4$，$\frac{1}{f(2)}=\frac{1}{4}$.

又当 $x\leqslant 1$ 时，$f(x)=1-x^2$，所以 $f\left(\frac{1}{f(2)}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=1-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{15}{16}$.

学习任务三　选择恰当的方法表示函数关系

例 2　水资源问题与每个居民的日常生活密切相关.某地居民生活用水按三档分阶梯计价(如下表所示),水费以年为周期结算,不同周期之间不累计、不结转.

阶梯	年用水量/t	单价/(元/t)
第一阶梯	0～144(含)	3.50
第二阶梯	144～204(含)	7.00
第三阶梯	204 以上	9.00

若该地某家庭一年所缴水费为 756 元,则其一年用水多少吨?

解:设用水量为 x t,

当 $0\leqslant x\leqslant 144$ 时,水费 $f(x)=3.5x$(元);

当 $144<x\leqslant 204$ 时,水费 $f(x)=144\times 3.5+7(x-144)=(7x-504)$(元);

当 $x>204$ 时,水费 $f(x)=144\times 3.5+7\times(204-144)+9(x-204)=(9x-912)$(元).

故水费 $f(x)=\begin{cases}3.5x,0\leqslant x\leqslant 144,\\7x-504,144<x\leqslant 204,\\9x-912,x>204.\end{cases}$

令 $3.5x=756$,解得 $x=216$,不符合题意;

令 $7x-504=756$,解得 $x=180$,$180\in(144,204]$,

所以一年用水 180 t.

反思提炼

用分段函数表示函数关系的方法

(1)当两个变量在不同取值区间有不同的对应关系时,往往需要用分段函数来表示两变量间的对应关系.

(2)写出分段函数的关键是确定分段的各分界点,即明确自变量的取值区间,对每一个区间进行分类讨论,从而写出相应的函数解析式.

探究训练

某工厂一条手机配件生产线的产量 ω(单位:百个)与生产成本 x(单位:百元)满足如下关系:

$$\omega(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+3,0\leqslant x\leqslant 2,\\6-\frac{3}{1+x},2<x\leqslant 5.\end{cases}$$

此外,还需要投入其他成本(如运输、包装成本等)$2x$ 百元.已知这种手机配件的市场售价为 16 元/个(即 16 百元/百个),且始终供不应求.记由这条生产线获得的利润为 $L(x)$(单位:百元).

(1)求 $L(x)$ 的函数解析式.

(2)当投入的生产成本为多少时,由这条生产线获得的利润最大?最大利润是多少?

解:(1)$L(x)=16\omega(x)-2x-x$

$$=\begin{cases}8x^2-3x+48,0\leqslant x\leqslant 2,\\96-\frac{48}{1+x}-3x,2<x\leqslant 5.\end{cases}$$

(2)当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时,$L(x)=8x^2-3x+48$,图象的对称轴方程为 $x=\frac{3}{16}$.

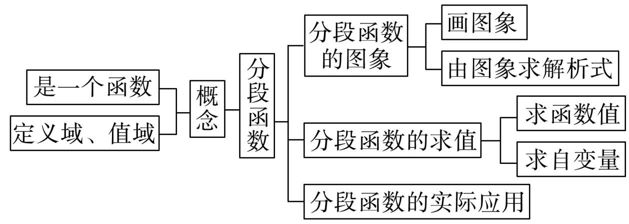
所以 $L(x)_{\max}=L(2)=74$.

当 $2<x\leqslant 5$ 时,$L(x)=99-\left[\frac{48}{x+1}+3(x+1)\right]\leqslant 99-2\sqrt{\frac{48}{x+1}\times 3(x+1)}=75$.

当且仅当 $\frac{48}{x+1}=3(x+1)$,即 $x=3$ 时,等号成立.

因为 $75>74$,所以当投入的生产成本为 300 元时,由这条生产线获得的利润最大,最大利润是 7 500 元.

体系构建



课后素养评价(十九)

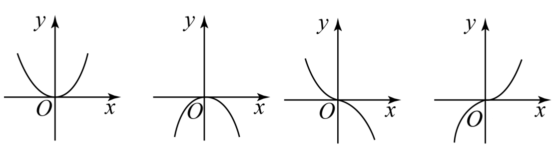
基础性·能力运用

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1,x\leqslant 1,\\ \dfrac{2}{x},x>1,\end{cases}$ 则 $f(f(3))=$　(　　)

A. $\dfrac{1}{5}$　B. 3　C. $\dfrac{2}{3}$　D. $\dfrac{13}{9}$

D　**解析**:因为 $f(3)=\dfrac{2}{3}<1$,所以 $f(f(3))=f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+1=\dfrac{13}{9}$.

2. 下列图形是函数 $y=x|x|$ 的图象的是　(　　)



A　B　C　D

D　**解析**:函数 $y=x|x|=\begin{cases}x^2,x\geqslant 0,\\ -x^2,x<0.\end{cases}$ 故选 D.

3. (多选)设函数 $f(x)=\begin{cases}-x,x\leqslant 0,\\ x^2,x>0,\end{cases}$ 若 $f(a)=4$,则实数 $a=$　(　　)

A. -4　B. 2

C. 4　D. -2

AB　**解析**:由题可得 $\begin{cases}a\leqslant 0,\\ -a=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a>0,\\ a^2=4,\end{cases}$ 解得 $a=-4$ 或 $a=2$.

4. 若函数 $f(x)=\begin{cases}x,x>0,\\ x^2-1,x<0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的定义域为________,值域为________.

$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$　$(-1,+\infty)$　**解析**:定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

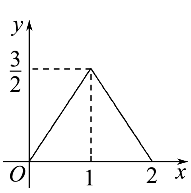
当 $x>0$ 时,$f(x)>0$,当 $x<0$ 时,$f(x)>-1$,所以值域为 $(-1,+\infty)$.

5. 某单位为鼓励职工节约用水,作出了如下规定:每位职工每月用水量不超过 $10\ \mathrm{m}^3$ 的,按每立方米 m 元收费;用水量超过 $10\ \mathrm{m}^3$ 的,超过部分按每立方米 $2m$ 元收费.某职工某月缴水费 $16m$ 元,则该职工这个月实际用水量为________m^3.

13　**解析**:设该单位职工每月应缴水费为 y 元,实际用水量为 $x\ \mathrm{m}^3$,则满足的关系式为 $y=\begin{cases}mx,0\leqslant x\leqslant 10,\\ 2mx-10m,x>10.\end{cases}$ 由 $y=16m$,可知 $x>10$.令 $2mx-10m=16m$,解得 $x=13$.

综合性·创新提升

1. 如图所示的图象对应的函数的解析式为　(　　)



A. $y=\dfrac{3}{2}|x-1|(0\leqslant x\leqslant 2)$

B. $y=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}|x-1|(0\leqslant x\leqslant 2)$

C. $y=\dfrac{3}{2}-|x-1|(0\leqslant x\leqslant 2)$

D. $y=1-|x-1|(0\leqslant x\leqslant 2)$

B　**解析**:当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,设 $y=kx$,由题图知过点 $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$,得 $k=\dfrac{3}{2}$,所以 $y=\dfrac{3}{2}x,0\leqslant x\leqslant 1$;

当 $1<x\leqslant 2$ 时,设 $y=mx+n$,由题图知过点 $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$,$(2,0)$,代入得 $\begin{cases}\dfrac{3}{2}=m+n,\\ 0=2m+n,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m=-\dfrac{3}{2},\\ n=3,\end{cases}$ 所以 $y=-\dfrac{3}{2}x+3,1<x\leqslant 2$.

故函数的解析式为 $y=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}|x-1|(0\leqslant x\leqslant 2)$.

故选 B.

2. (新定义)用 $\max\{a,b\}$ 表示 a,b 中的较大者,若

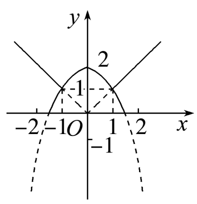
$f(x)=\max\{|x|,2-x^2\}$，则$f(x)$的最小值为　　　　（　　）

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

B　**解析**：令$|x|>2-x^2$，得$x<-1$或$x>1$，故当$x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$时$f(x)=|x|$；

令$|x|\leqslant 2-x^2$，得$-1\leqslant x\leqslant 1$，故当$x\in[-1,1]$时，$f(x)=2-x^2$.

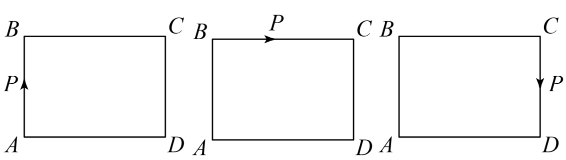
画出函数图象如图所示.



由图可知，$f(x)$的最小值为1.

3. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+1,x\leqslant 0,\\-(x-1)^2,x>0,\end{cases}$使$f(x)\geqslant -1$成立的$x$的取值范围是$\underline{[-4,2]}$.

4. 如图，在矩形$ABCD$中，$AB=6$，$BC=8$，点P从点A出发沿$A\to B\to C\to D$的路线移动.设点P移动的路线长为x，$\triangle PAD$的面积为y.



(1)写出y关于x的函数解析式.

(2)当$x=4$和$x=18$时，求函数值y.

(3)当x取何值时，$y=20$？请说明此时点P在矩形的哪条边上.

解：(1)当点P在线段AB上运动时，$AP=x$.根据三角形的面积公式可得$y=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AP=\frac{1}{2}\times 8\times x=4x$；

当点P在线段BC上运动时，面积不变，$y=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AB=\frac{1}{2}\times 8\times 6=24$；

当点P在线段CD上运动时，$DP=6+8+6-x=20-x$，$AD=8$.根据三角形的面积公式可得$y=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot DP=\frac{1}{2}\times 8\times(20-x)=80-4x$.

所以y与x之间的函数关系式为

$$y=\begin{cases}4x,0\leqslant x\leqslant 6,\\24,6<x\leqslant 14,\\80-4x,14<x\leqslant 20.\end{cases}$$

(2)当$x=4$时，$y=4x=4\times 4=16$；

当$x=18$时，$y=80-4\times 18=8$.

(3)由$y=4x=20$，解得$x=5$，此时点P在线段AB上；

由$y=80-4x=20$，解得$x=15$，此时点P在线段CD上.

3.2　函数的基本性质

3.2.1　单调性与最大(小)值

第 1 课时　函数的单调性

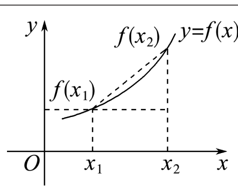
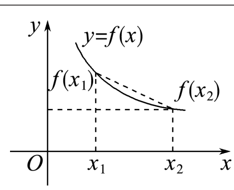
学习任务目标

1. 了解函数单调性、单调区间等概念.
2. 会利用函数图象判断一次函数、二次函数的单调性.
3. 能利用定义判断一些简单函数在给定区间上的单调性,掌握利用定义判断、证明函数单调性的方法.

问题式预习

知识清单

知识点一　函数的单调性

<table>
<tr><td>前提条件</td><td colspan="2">一般地,设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subseteq D$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">条件</td><td colspan="2">如果 $\forall x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,都有</td></tr>
<tr><td>$f(x_1)<f(x_2)$</td><td>$f(x_1)>f(x_2)$</td></tr>
<tr><td>图示</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>结论</td><td>$f(x)$ 在区间 I 上单调递增</td><td>$f(x)$ 在区间 I 上单调递减</td></tr>
<tr><td>特别地</td><td>当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递增时,我们就称它是增函数</td><td>当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递减时,我们就称它是减函数</td></tr>
</table>

知识点二　函数的单调性与单调区间

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调递增或单调递减,那么就说函数 $y=f(x)$ 在这一区间具有(严格的)单调性,区间 I 叫做 $y=f(x)$ 的单调区间.

概念辨析

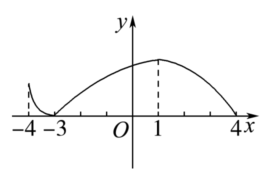
1. 判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)函数在其定义域上都具有单调性.　　(×)

(2)若函数 $y=f(x)$ 在定义域上有 $f(1)<f(2)$,则该函数是单调递增函数.　　(×)

(3)若函数 $y=f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增,则 $f(1)<f(2)$.　　(√)

2. (多选)函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示,则下列区间中,是 $y=f(x)$ 的单调递减区间的有　　(　　)



A. $[-4,1]$

B. $[-4,-3]$

C. $[-3,1]$

D. $[1,4]$

BD　**解析**:根据函数单调性的定义及题图可知,$f(x)$ 在 $[-4,-3]$ 和 $[1,4]$ 上单调递减.故选 BD.

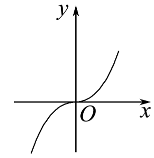
3. 请思考并回答下列问题:

(1)你能举出只有单调递增区间,但在定义域上不是增函数的例子吗?

提示:函数 $y=-\dfrac{1}{x}$.

(2)分段函数有可能在其定义域上是增函数或减函数吗?请举例说明.

提示:有可能.如函数 $y=\begin{cases}x^2,x\geqslant 0,\\-x^2,x<0,\end{cases}$ 图象如图所示,在定义域上是增函数.



任务型课堂

学习任务一　判断函数的单调性

1. 下列函数中,在区间(0,1)上单调递增的是　(　　)

A. $y=|x|$

B. $y=3-x$

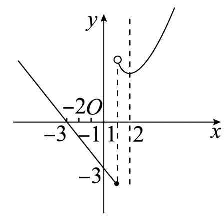
C. $y=\dfrac{1}{x}$

D. $y=-x^2+4$

A　**解析**:因为$-1<0$,所以一次函数$y=3-x=-x+3$在$\mathbf{R}$上单调递减,B不符合.反比例函数$y=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上单调递减,C不符合.二次函数$y=-x^2+4$在$(0,+\infty)$上单调递减,D不符合.

2. 画出函数$f(x)=\begin{cases}-x-3,x\leqslant 1,\\(x-2)^2+3,x>1\end{cases}$的图象,并写出函数的单调区间.

解:$f(x)=\begin{cases}-x-3,x\leqslant 1,\\(x-2)^2+3,x>1\end{cases}$的图象如图所示.



由图象可知,函数的单调递减区间为$(-\infty,1]$和$(1,2]$;单调递增区间为$(2,+\infty)$.

反思提炼

由函数图象求单调区间的关注点

(1)首先确定定义域;

(2)再确定在某区间内,函数的图象由左至右是上升的还是下降的.

注意:当单调性相同的区间多于一个时,用“和”或“,”连接,不能用“$\cup$”连接.

学习任务二　函数单调性的判断与证明

例1　已知函数$f(x)=x+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2}$,当$x\in[1,+\infty)$时,判断$f(x)$的单调性并用定义证明.

解:$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增,证明如下:

$\forall x_1,x_2\in[1,+\infty)$,且$x_1<x_2$,

$f(x_1)-f(x_2)$

$=x_1+\dfrac{1}{2x_1}+\dfrac{1}{2}-\left(x_2+\dfrac{1}{2x_2}+\dfrac{1}{2}\right)$

$=(x_1-x_2)\left(1-\dfrac{1}{2x_1x_2}\right)$

$=\dfrac{(x_1-x_2)(2x_1x_2-1)}{2x_1x_2}$.

因为$1\leqslant x_1<x_2$,

所以$x_1-x_2<0$,$x_1x_2>1$,

所以$2x_1x_2>2>1$,

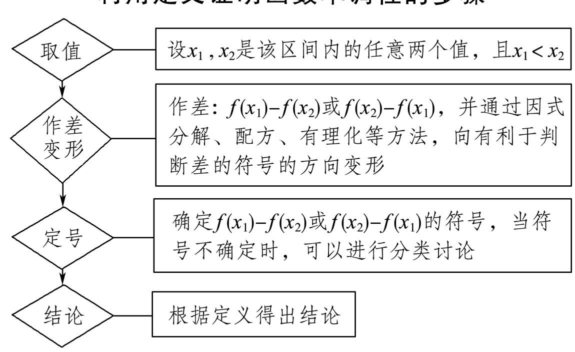
所以$\dfrac{(x_1-x_2)(2x_1x_2-1)}{2x_1x_2}<0$,

即$f(x_1)<f(x_2)$.

所以$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增.

反思提炼

利用定义证明函数单调性的步骤



探究训练

证明:函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$在区间$(2,+\infty)$上单调递减.

证明:$\forall x_1,x_2\in(2,+\infty)$,且$x_1<x_2$,

$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{1}{x_1^2-4}-\dfrac{1}{x_2^2-4}$

$=\dfrac{x_2^2-x_1^2}{(x_1^2-4)(x_2^2-4)}=\dfrac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{(x_1^2-4)(x_2^2-4)}$.

因为$2<x_1<x_2$,

所以$x_2-x_1>0$,$x_1^2>4$,$x_2^2>4$,

所以$f(x_1)-f(x_2)>0$,即$f(x_1)>f(x_2)$.

所以函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$在区间$(2,+\infty)$上单调递减.

学习任务三　函数单调性的应用

例 2　(1)已知函数 $f(x)$在 **R** 上单调递增,若 $f(1-m)<f(m)$,则实数 m 的取值范围是________.

$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　**解析**:由题意知,$1-m<m$,解得 $m>\frac{1}{2}$.所以实数 m 的取值范围是$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

(2)已知函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$,若函数 $f(x)$在区间$(-\infty,4]$上单调递减,则实数 a 的取值范围是________.

$(-\infty,-3]$　**解析**:因为函数 $f(x)$在区间$(-\infty,4]$上单调递减,所以函数 $f(x)$图象的对称轴直线 $x=1-a\geqslant 4$,所以 $a\leqslant -3$.

所以实数 a 的取值范围为$(-\infty,-3]$.

[**一题多思**]

思考 1.如何利用函数的单调性比较两个函数值的大小?

提示:当两个自变量在函数的同一个单调区间上时,比较两个函数值的大小可以转化为比较两个自变量的大小.

思考 2.本例(1)中,若把"函数 $f(x)$在 **R** 上单调递增"改为"函数 $f(x)$在定义域$[-2,2]$上单调递增",其他条件不变,实数 m 的取值范围会有变化吗?

提示:会.由题意知,$\begin{cases}-2\leqslant 1-m\leqslant 2,\\ -2\leqslant m\leqslant 2,\\ 1-m<m,\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{2}<m\leqslant 2$.故此时实数 m 的取值范围是$\left(\frac{1}{2},2\right]$.

反思提炼

由二次函数单调性求参数的策略

(1)若已知函数的单调区间,则图象的对称轴对应单调区间的端点;

(2)若已知函数在某区间上的单调性,则该区间是函数单调区间的子区间.

探究训练

已知函数 $f(x)=-x^2-2(a+1)x+3$.若函数 $f(x)$在区间$(-\infty,3]$上单调递增,则实数 a 的取值范围为________;若函数$f(x)$在$(1,2)$上是单调函数,则实数 a 的取值范围为________.

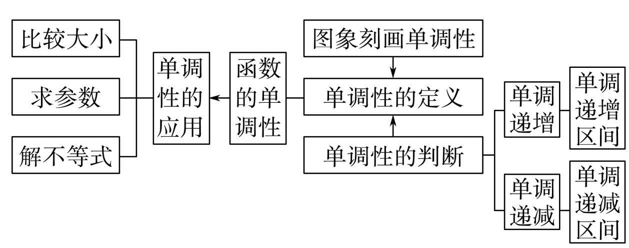
$(-\infty,-4]$　$(-\infty,-3]\cup[-2,+\infty)$　**解析**:因为 $f(x)=-x^2-2(a+1)x+3$ 的图象开口向下,要使 $f(x)$在$(-\infty,3]$上单调递增,只需$-(a+1)\geqslant 3$,即 $a\leqslant -4$.

所以实数 a 的取值范围为$(-\infty,-4]$.

由题意可知$-(a+1)\geqslant 2$ 或$-(a+1)\leqslant 1$,即 $a\leqslant -3$ 或 $a\geqslant -2$.

所以 a 的取值范围为$(-\infty,-3]\cup[-2,+\infty)$.

体系构建



课后素养评价(二十)

基础性·能力运用

1.若函数 $f(x)$在 **R** 上是减函数,则有　(　　)

A.$f(3)<f(5)$　B.$f(3)\leqslant f(5)$

C.$f(3)>f(5)$　D.$f(3)\geqslant f(5)$

C　**解析**:因为 $f(x)$在 **R** 上是减函数,且 $3<5$,所以$f(3)>f(5)$.

2.函数 $f(x)=-x^2+2x+3$ 的单调递减区间是　(　　)

A.$(-\infty,1)$　B.$(1,+\infty)$

C.$(-\infty,2)$　D.$(2,+\infty)$

B　**解析**:易知函数 $f(x)=-x^2+2x+3$ 的图象开口向下,其对称轴为直线 $x=1$,所以该函数的单调递减区间是$(1,+\infty)$.

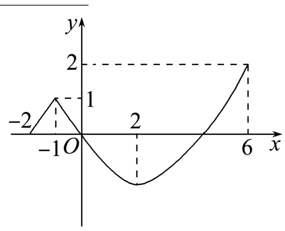
3.(多选)下列函数中,满足对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,都有$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 的是　(　　)

A.$f(x)=-\frac{2}{x}$　B.$f(x)=-3x+1$

C.$f(x)=x^2+4x+3$　D.$f(x)=x-1$

ACD　**解析**：因为对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.对于A，根据反比例函数的性质可知，$f(x)=-\dfrac{2}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，符合题意；对于B，根据一次函数的性质可知，$f(x)=-3x+1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，不符合题意；对于C，根据二次函数的性质可知，$f(x)=x^2+4x+3$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，符合题意；对于D，根据一次函数的性质可知，$f(x)=x-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，符合题意.

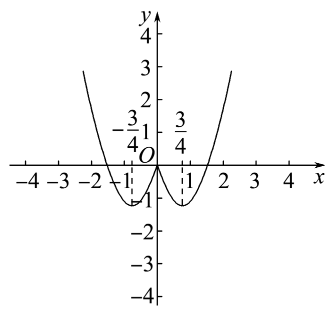
4.已知函数 $y=f(x)(x\in[-2,6])$ 的图象如图所示，则 $y=f(x)$ 的单调递增区间为________，单调递减区间为________.



$[-2,-1]$ 和 $[2,6]$　$[-1,2]$　**解析**：由题图可知 $y=f(x)$ 在 $[-2,6]$ 上的单调递增区间为 $[-2,-1]$ 和 $[2,6]$，单调递减区间为 $[-1,2]$.

5.函数 $f(x)=2x^2-3|x|$ 的单调递减区间是________.

$\left(-\infty,-\dfrac{3}{4}\right],\left[0,\dfrac{3}{4}\right]$　**解析**：函数 $f(x)=2x^2-3|x|=\begin{cases}2x^2-3x,x\geqslant 0,\\2x^2+3x,x<0,\end{cases}$ 图象如图所示.



由图可知，$f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(-\infty,-\dfrac{3}{4}\right],\left[0,\dfrac{3}{4}\right]$.

6.用函数单调性的定义证明：函数 $y=\dfrac{2x}{x+1}$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

证明：$\forall x_1,x_2\in(-1,+\infty)$，且 $x_2<x_1$，

则 $y_1-y_2=\dfrac{2x_1}{x_1+1}-\dfrac{2x_2}{x_2+1}=\dfrac{2(x_1-x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}$.

因为 $x_1-x_2>0,x_1+1>0,x_2+1>0$，

所以 $y_1-y_2>0$，即 $y_1>y_2$.

所以，函数 $y=\dfrac{2x}{x+1}$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

综合性·创新提升

1.已知 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的减函数，且 $f(2a-3)<f(a-2)$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A.$(1,2]$　　B.$(1,3]$

C.$(1,4]$　　D.$(1,+\infty)$

A　**解析**：因为 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的减函数，且 $f(2a-3)<f(a-2)$，

所以 $\begin{cases}-1\leqslant 2a-3\leqslant 1,\\-1\leqslant a-2\leqslant 1,\\2a-3>a-2,\end{cases}$ 解得 $1<a\leqslant 2$.

2.已知函数 $f(x)=x^2-kx-8$ 在 $[1,4]$ 上单调，则实数 k 的取值范围为（　　）

A.$[2,8]$

B.$[-8,-2]$

C.$(-\infty,-8]\cup[-2,+\infty)$

D.$(-\infty,2]\cup[8,+\infty)$

D　**解析**：函数 $f(x)=x^2-kx-8$ 在 $[1,4]$ 上单调，图象的对称轴为直线 $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{k}{2}$，所以作出函数图象(图略).

结合图象得 $\dfrac{k}{2}\leqslant 1$ 或 $\dfrac{k}{2}\geqslant 4$，解得 $k\leqslant 2$ 或 $k\geqslant 8$.

所以实数 k 的取值范围为 $(-\infty,2]\cup[8,+\infty)$.

3.(多选)关于函数 $f(x)=\dfrac{3-x}{x+1}$，下列判断正确的是（　　）

A.$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减

B.$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增

C.$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减

D.$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增

AC　**解析**：根据题意，$f(x)=\dfrac{3-x}{x+1}=-1+\dfrac{4}{x+1}$.

$f(x)$ 的图象由函数 $y=\dfrac{4}{x}$ 的图象向左平移1个单位长度，再向下平移1个单位长度得到，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(-1,+\infty)$ 上单调递减，则A，C正确，B，D错误.

4.(新定义)定义 $\max\{a,b\}=\begin{cases}a,a\geqslant b,\\ b,a<b,\end{cases}$ 则函数 $f(x)=\max\{x^2-x,1-x^2\}$ 的单调递增区间为________________.

$\left[-\frac{1}{2},0\right]$,$[1,+\infty)$ **解析**:由 $x^2-x=1-x^2$,得 $2x^2-x-1=0$,解得 $x=1$ 或 $x=-\frac{1}{2}$.当 $x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-\frac{1}{2}$ 时,$f(x)=\max\{x^2-x,1-x^2\}=x^2-x$;当 $-\frac{1}{2}<x<1$ 时,$f(x)=\max\{x^2-x,1-x^2\}=1-x^2$.结合图象(图略)知此函数的单调递增区间为 $\left[-\frac{1}{2},0\right]$,$[1,+\infty)$.

5.(开放性问题)能说明"若 $f(x)>f(0)$ 对任意的 $x\in(0,2]$ 都成立,则 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上是单调递增的"为假命题的一个函数是________________.

$f(x)=\begin{cases}x^2,0\leqslant x\leqslant1,\\ (x-1)^2,1<x\leqslant2\end{cases}$(答案不唯一) **解析**:这是一道开放性试题,答案不唯一,只要满足 $f(x)>f(0)$ 对任意的 $x\in(0,2]$ 都成立,且函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上不是单调递增的即可.

如 $f(x)=\begin{cases}x^2,0\leqslant x\leqslant1,\\ (x-1)^2,1<x\leqslant2.\end{cases}$

第2课时 函数的最大(小)值

学习任务目标

1.理解函数的最大值和最小值的概念及其几何意义.
2.能借助函数的图象和单调性,求一些简单函数的最值.
3.能利用函数的最值解决有关的实际应用问题.

问题式预习

知识清单

知识点 函数的最大(小)值

最值	最大值	最小值
条件	一般地,设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,如果存在实数 M 满足 $\forall x\in D$,都有	
	$f(x)\leqslant M$	$f(x)\geqslant M$
	$\exists x_0\in D$,使得 $f(x_0)=M$	
结论	M 是函数 $y=f(x)$ 的最大值	M 是函数 $y=f(x)$ 的最小值
几何意义	$f(x)$ 图象上最高点的纵坐标	$f(x)$ 图象上最低点的纵坐标

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)函数 $y=f(x)$ 的最大值是图象最高点的纵坐标. (√)

(2)一个函数可能有多个最小值. ( )

× **解析**:最大(小)值至多有1个.

(3)函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最值不一定是 $f(a)$(或 $f(b)$). ( )

√ **解析**:函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不一定是单调函数,故最值不一定是 $f(a)$(或 $f(b)$).

(4)若一个函数有最大值,则最大值不一定是其值域中的一个元素. ( )

× **解析**:函数的最大(小)值,一定是其值域中的一个元素.

2.设函数 $f(x)=2x-1(x<0)$,则 $f(x)$ ( )

A.有最大值
B.有最小值
C.既有最大值又有最小值
D.既无最大值又无最小值

D **解析**:因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增,所以 $f(x)<f(0)=-1$.故选D.

3.请思考并回答下列问题:

(1)通过以上学习,你能说出函数最大(小)值的几何意义吗?

提示:图象最高(低)点的纵坐标.

(2)如果定义域内的任意 x 都满足 $f(x)\leqslant M(f(x)\geqslant M)$,那么 M 一定是函数 $f(x)$ 的最大(小)值吗?

提示:不一定.只有定义域内存在一点 x_0,使 $f(x_0)=M$ 时,M 才是函数 $f(x)$ 的最大(小)值,否则不是.比如 $f(x)=-x^2\leqslant3$ 成立,但3不是 $f(x)$ 的最大值,0才是它的最大值.

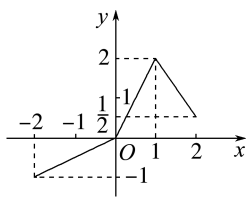
(3)如果函数的值域是确定的,那么它一定有最值吗?

提示:不一定.

任务型课堂

学习任务一 用图象法求函数的最值

1. 函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，则此函数的最小值和最大值分别是 （ ）

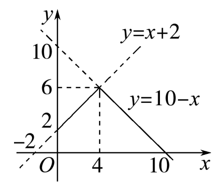


A. $-1,0$ B. $0,2$ C. $-1,2$ D. $\frac{1}{2},2$

C **解析**：由题图可知，$f(x)$ 的最大值为 $f(1)=2$，$f(x)$ 的最小值为 $f(-2)=-1$. 故选 C.

2. 用 $\min\{a,b\}$ 表示 a,b 两个数中的较小者. 设 $f(x)=\min\{x+2,10-x\}(x\geqslant 0)$，则 $f(x)$ 的最大值为________.

6 **解析**：在同一个平面直角坐标系内，画出函数 $y=x+2$ 和 $y=10-x$ 的图象，如图所示.



根据 $\min\{x+2,10-x\}(x\geqslant 0)$ 的含义可知，$f(x)$ 的图象应为图中的实线部分.

解方程 $x+2=10-x$，得 $x=4$，此时 $y=6$.

故两函数图象的交点为 $(4,6)$.

所以 $f(x)=\begin{cases}x+2,0\leqslant x\leqslant 4,\\10-x,x>4,\end{cases}$ 其最大值为交点的纵坐标，所以 $f(x)$ 的最大值为 6.

反思提炼

图象法求函数最值的步骤

(1)作出函数图象；

(2)在图象上找到最高(低)点的纵坐标；

(3)确定函数的最大(小)值.

学习任务二 利用单调性求函数的最值

例 1 (1)函数 $y=x^2-2x,x\in[0,3]$ 的最小值是________，最大值是________.

-1 3 **解析**：因为函数 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1,x\in[0,3]$，

所以当 $x=1$ 时，函数取得最小值为 -1，

当 $x=3$ 时，函数取得最大值为 3.

(2)已知函数 $f(x)=\frac{2x-1}{x+1},x\in[3,5]$，求 $f(x)$ 的最大值和最小值.

解：$\forall x_1,x_2\in[3,5]$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{2x_1-1}{x_1+1}-\frac{2x_2-1}{x_2+1}$

$=\frac{3(x_1-x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}$.

因为 $3\leqslant x_1<x_2\leqslant 5$，

所以 $x_1-x_2<0,x_1+1>0,x_2+1>0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以函数 $f(x)$ 在 $[3,5]$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(3)=\frac{2\times 3-1}{3+1}=\frac{5}{4}$，最大值为 $f(5)=\frac{2\times 5-1}{5+1}=\frac{3}{2}$.

反思提炼

利用函数的单调性求最值的关注点

(1)若函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递增，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值为 $f(b)$，最小值为 $f(a)$.

(2)若函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递减，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值为 $f(a)$，最小值为 $f(b)$.

(3)若函数 $y=f(x)$ 有多个单调区间，则先求出各区间上的最值，再从各区间的最值中找出最大(小)值. 函数的最大(小)值是整个值域范围内的最大(小)值.

探究训练

已知函数 $f(x)=\frac{3}{2x-1}$.

(1)证明：函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减；

证明：$\forall x_1,x_2\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{3}{2x_1-1}-\frac{3}{2x_2-1}$

$=\frac{6(x_2-x_1)}{(2x_1-1)(2x_2-1)}$.

由于 $x_2>x_1>\frac{1}{2}$，

所以 $x_2-x_1>0$，且 $(2x_1-1)(2x_2-1)>0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$.

所以函数 $f(x)=\dfrac{3}{2x-1}$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减.

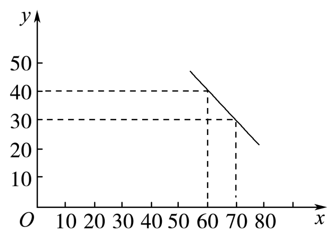
(2)求函数 $f(x)$ 在区间 $[1,5]$ 上的最值.

解:由(1)知,函数 $f(x)$ 在 $[1,5]$ 上单调递减,

因此,函数 $f(x)=\dfrac{3}{2x-1}$ 在区间 $[1,5]$ 上的最大值为 $f(1)=3$,最小值为 $f(5)=\dfrac{1}{3}$.

学习任务三 函数最值的应用

例 2 某公司试销一种成本为 50 元/件的新产品,规定试销时售价不低于成本单价,且不高于 80 元/件.经试销调查,发现销售量 y(单位:件)与售价 x(单位:元/件)之间可近似看作一次函数关系 $y=kx+b$(如图所示).



(1)根据图象,求一次函数 $y=kx+b$ 的解析式.

(2)设公司获得的利润为 S 元(利润=销售额-总成本,销售额=售价×销售量,总成本=成本×销售量).

①试用售价 x 表示利润 S.

②试问售价定为多少时,该公司可获得最大利润?最大利润是多少?此时的销售量是多少?

解:(1)由题图知,当 $x=60$ 时,$y=40$;

当 $x=70$ 时,$y=30$,

代入 $y=kx+b$ 中,得 $\begin{cases}40=60k+b,\\30=70k+b,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=100.\end{cases}$

所以 $y=-x+100(50\leqslant x\leqslant 80)$.

(2)①由题意可知 $S=xy-50y$

$=x(-x+100)-50(-x+100)$

$=-x^2+150x-5\ 000$

$=-(x-75)^2+625(50\leqslant x\leqslant 80)$.

②由①知,当 $x=75$ 时,利润 S 取得最大值 625,所以当售价定为 75 元/件时,可获得最大利润,为 625 元,此时销售量为 25 件.

反思提炼

求解实际应用中的最值问题的步骤

(1)审题:把问题情境"翻译"为数学语言,找出问题中的主要关系.

(2)建模:建立函数解析式,把实际问题转化成函数问题.

(3)求解:选择合适的数学方法求出函数的最值.

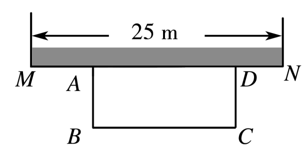
(4)验证:对结果进行验证或评估,最后将结果应用于现实,作出解释.

探究训练

如图,某中学准备在校园里利用院墙的一段,用篱笆围成一个矩形花园 $ABCD$.已知院墙 MN 的长为 25 m,篱笆长为 50 m(篱笆全部用完),设 AB 的长为 x m.

(1)当 AB 的长为多少时,矩形花园的面积为 300 m^2?

(2)若围成的矩形花园 $ABCD$ 的面积为 S m^2,当 x 为何值时,S 有最大值?最大值是多少?



解:(1)因为 $AB=x$ m,所以 $BC=(50-2x)$m.

由题意得,$x(50-2x)=300$,

解得 $x_1=15$,$x_2=10$.

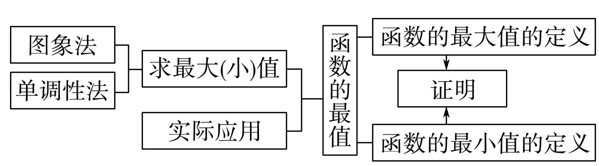
因为 $\begin{cases}0<x<25,\\0<50-2x\leqslant 25,\end{cases}$ 所以 $12.5\leqslant x<25$,所以 $x=15$.

所以,AB 的长为 15 m 时,矩形花园的面积为 300 m^2.

(2)由题意得,$S=x(50-2x)=-2x^2+50x=-2(x-12.5)^2+312.5$,$12.5\leqslant x<25$,

所以当 $x=12.5$ 时,S 取得最大值,最大值为 312.5.

体系构建



课后素养评价(二十一)

基础性·能力运用

1.函数 $y=\dfrac{1}{x-1}$在$[2,3]$上的最小值为　　(　　)

A.2　　B.$\dfrac{1}{2}$

C.$\dfrac{1}{3}$　　D.$-\dfrac{1}{2}$

B　**解析**:函数 $y=\dfrac{1}{x-1}$在$[2,3]$上单调递减,所以当$x=3$时,$y_{\min}=\dfrac{1}{3-1}=\dfrac{1}{2}$.

2.函数 $f(x)=-2x^2+4x$,$x\in[-1,2]$的值域为　　(　　)

A.$[-6,2]$　　B.$[-6,1]$

C.$[0,2]$　　D.$[0,1]$

A　**解析**:函数 $f(x)=-2x^2+4x$ 的图象开口向下,对称轴为直线 $x=1$,

所以 $f(x)$在$[-1,1]$上单调递增,在$[1,2]$上单调递减,

且 $f(1)=2$,$f(-1)=-6$,$f(2)=0$,

所以函数 $f(x)=-2x^2+4x$,$x\in[-1,2]$的值域为$[-6,2]$.

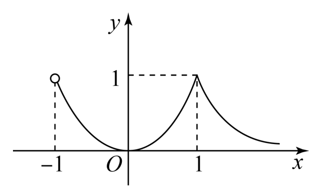
3.(多选)若函数 $y=ax+1$ 在$[1,2]$上的最大值与最小值的差为 2,则实数 a 的值可能是　　(　　)

A.2　　B.-2　　C.1　　D.0

AB　**解析**:由题意知 $a\neq0$,当 $a>0$ 时,$y=ax+1$ 在$[1,2]$上单调递增,有$(2a+1)-(a+1)=2$,解得 $a=2$;当 $a<0$ 时,$y=ax+1$ 在$[1,2]$上单调递减,有$(a+1)-(2a+1)=2$,解得 $a=-2$.综上可知 $a=\pm2$.

4.已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,-1<x\leqslant1,\\ \dfrac{1}{x},x>1,\end{cases}$ 则函数$f(x)$的最大值为______,最小值为________.

1　0　**解析**:作出函数 $f(x)$的图象(如图).



由图象可知,当 $x=1$ 时,$f(x)$取最大值为 $f(1)=1$;当 $x=0$ 时,$f(x)$取最小值 $f(0)=0$.

故 $f(x)$的最大值为 1,最小值为 0.

5.小球以 a m/s 的速度从地面垂直向上运动,t s 时小球距离地面的高度为 x m,x 与 t 的关系为 $x=at-5t^2$.若 3 s 时小球距离地面的高度为 135 m,则可以到达的最大高度为________m.

180　**解析**:由题意,当 $t=3$ 时,$x=135$,代入 $x=at-5t^2$,可得 $135=3a-5\times9$,解得 $a=60$,则 $x=60t-5t^2=-5(t-6)^2+180$,故当 $t=6$ 时,x 取得最大值,最大值为 180.

综合性·创新提升

1.设函数 $f(x)=\dfrac{2x}{x-2}$在区间$[3,4]$上的最大值和最小值分别为 M,m,则 $M+m=$　　(　　)

A.4　　B.6　　C.10　　D.24

C　**解析**:因为 $f(x)=\dfrac{2(x-2)+4}{x-2}=2+\dfrac{4}{x-2}$,所以$f(x)$在$[3,4]$上单调递减.

所以 $m=f(4)=4$,$M=f(3)=6$.

所以 $M+m=6+4=10$.

2.(新定义)(多选)定义一种运算 $\min\{a,b\}=\begin{cases}a,a\leqslant b,\\ b,a>b.\end{cases}$ 设 $f(x)=\min\{4+2x-x^2,|x-t|\}$($t$ 为常数),且 $x\in[-3,3]$,则使函数 $f(x)$ 的最大值为 4 的 t 的值可以是　　(　　)

A.-2　　B.6　　C.4　　D.-4

AC　**解析**:函数 $y=4+2x-x^2$ 在$[-3,3]$上的最大值为 5,

由 $4+2x-x^2=4$,解得 $x=2$ 或 $x=0$,

所以当 $x\in(0,2)$时,$y=4+2x-x^2>4$.

要使函数 $f(x)$的最大值为 4,则根据定义可知,

若 $t<1$,则当 $x=2$ 时,$|2-t|=4$,解得 $t=-2$,符合题意;

若 $t>1$,则当 $x=0$ 时,$|0-t|=4$,解得 $t=4$,符合题意.

综上所述,$t=-2$ 或 $t=4$.

3. 已知函数 $f(x)=x^2-6x+8,x\in[1,a]$,且函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(a)$,则实数 a 的取值范围是________.

$(1,3]$　**解析**:因为函数 $f(x)=x^2-6x+8$ 图象的对称轴为直线 $x=3$,且在区间 $[1,a]$ 上,$f(x)_{\min}=f(a)$,所以 $a\leqslant 3$.又 $a>1$,所以 $1<a\leqslant 3$.

4. 某公司生产的一种产品的成本是2元/件,售价是3元/件,月销售量为10万件.为了获得更好的效益,公司准备拿出一定的资金做广告.根据经验,每月投入的广告费是 x(单位:万元)时,产品的月销售量将是原销售量的 t 倍,且 t 是 x 的二次函数,它们的关系如下表:

x	0	1	2	…
t	1	1.5	1.8	…

(1)求 t 关于 x 的函数解析式;

(2)如果利润等于销售额减去成本费和广告费,试写出月利润 S(单位:万元)关于广告费 x(单位:万元)的函数解析式;

(3)如果投入的月广告费 x 在区间 $[1,2]$ 内,问:当月广告费为多少时,公司可获得最大月利润?最大月利润为多少?

解:(1)设二次函数的解析式为 $t=ax^2+bx+c(a\neq 0)$.

由题表得 $\begin{cases}c=1,\\a+b+c=1.5,\\4a+2b+c=1.8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-0.1,\\b=0.6,\\c=1.\end{cases}$

所以所求函数的解析式为 $t=-0.1x^2+0.6x+1(x\geqslant 0)$.

(2)根据题意得 $S=10t\cdot(3-2)-x$,

整理得 $S=-x^2+5x+10(x\geqslant 0)$,

所以 $S=-x^2+5x+10=-\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{65}{4}$.

(3)因为 $x\in[1,2]$ 时,S 随 x 的增大而增大,

所以当 $x=2$ 时,S 取得最大值为16.

故当月广告费为2万元时,公司可获得最大的月利润为16万元.

3.2.2　奇偶性

第1课时　函数的奇偶性

学习任务目标

1.了解函数奇偶性的概念,掌握判断函数奇偶性的方法.

2.了解奇函数、偶函数图象的特征.

3.会利用函数的奇偶性求函数或参数的值.

问题式预习

知识清单

知识点一　函数的奇偶性

奇偶性	偶函数	奇函数
条件	一般地,设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果 $\forall x\in D$,都有 $-x\in D$	
结论	$f(-x)=\underline{f(x)}$	$f(-x)=\underline{-f(x)}$
图象特点	关于 $\underline{y}$ 轴对称	关于原点对称

知识点二　奇偶函数的运算性质

在公共定义域内,有如下结论:

(1)两个奇函数的和是奇函数,两个奇函数的积是偶函数;

(2)两个偶函数的和、积都是偶函数;

(3)一个奇函数、一个偶函数的积是奇函数.

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)若对于定义域内的任意一个 x,都有 $f(x)+f(-x)=0$,则函数 $f(x)$ 是奇函数.　(　　)

×　**解析**:定义域不一定关于原点对称,即对于定义域内的任意一个 x,$-x$ 不一定在定义域内.

(2)函数 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$,且 $f(-1)=f(1)$,$f(-2)=f(2)$,则 $f(x)$ 是偶函数.　(　　)

×　**解析**:所给关系式 $f(-1)=f(1)$,$f(-2)=f(2)$ 不满足任意性.

(3)函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且 $f(5)=-3$,则 $f(-5)=3$.　(　　)

√　**解析**:因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $f(-5)=-f(5)=3$.

(4)若 $f(x)$ 是偶函数,则必有 $f(x)=f(-x)=f(|x|)$.　(　√　)

2.若函数 $y=f(x)$,$x\in[-1,a](a>-1)$是奇函数,则 $a=$　(　　)

A.-1　　B.0

C.1　　D.无法确定

C　**解析**:因为奇函数的定义域关于原点对称,所以 $a-1=0$,即 $a=1$.

3.请思考并回答下列问题:

(1)偶函数与奇函数的图象具有什么特征?

提示:偶函数的图象关于 y 轴对称,奇函数的图象关于原点对称,反之也成立.

(2)对于奇函数 $f(x)$,一定有 $f(0)=0$ 吗?

提示:不一定.若奇函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 时有意义,则必有 $f(0)=0$.

(3)有没有既是奇函数又是偶函数的函数?

提示:有.若 $f(-x)=-f(x)$,且 $f(-x)=f(x)$,则 $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数,既奇又偶的函数有且只有一类,即 $f(x)=0$,$x\in D$,其中定义域 D 满足:对任意的 $x\in D$,有 $-x\in D$.

任务型课堂

学习任务一　函数奇偶性的判断

1. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-x^3$ 的图象关于　　(　　)

A. y 轴对称

B. x 轴对称

C. 原点对称

D. 直线 $y=x$ 对称

C　**解析**：因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x \mid x\neq0\}$，关于原点对称，$f(-x)=-\dfrac{1}{x}-(-x)^3=-\dfrac{1}{x}+x^3=-\left(\dfrac{1}{x}-x^3\right)=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是奇函数，其图象关于原点对称.

2. 已知函数 $y=f(x)$，$x\in(-a,a)$，$F(x)=f(x)+f(-x)$，则 $F(x)$　　(　　)

A. 是奇函数

B. 是偶函数

C. 既是奇函数又是偶函数

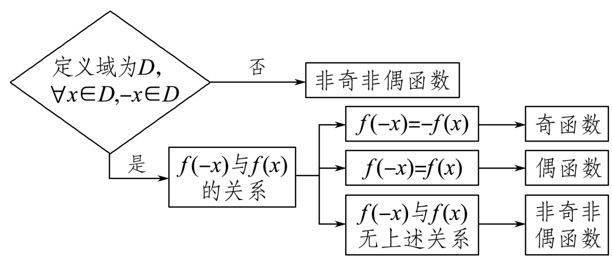
D. 是非奇非偶函数

B　**解析**：显然 $F(x)$ 的定义域为 $(-a,a)$，关于原点对称. $\forall x\in(-a,a)$，都有 $-x\in(-a,a)$，且 $F(-x)=f(-x)+f(x)=F(x)$，所以 $F(x)$ 是偶函数.

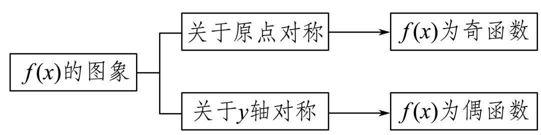
反思提炼

判断函数奇偶性的方法

(1) 定义法：

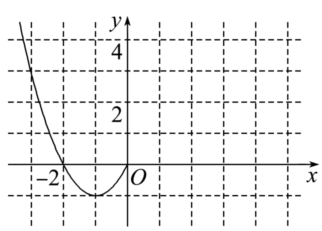


(2) 图象法：



学习任务二　奇函数、偶函数图象的应用

例 1　已知函数 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且当 $x\leqslant0$ 时，$f(x)=x^2+2x$. 现已画出函数 $f(x)$ 在 y 轴左侧的图象，如图所示.

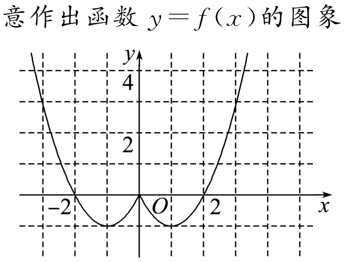


(1) 请补全函数 $y=f(x)$ 的图象；

(2) 根据图象写出函数 $y=f(x)$ 的单调递增区间；

(3) 根据图象写出使 $f(x)<0$ 的 x 的取值集合.

解：(1) 由题意作出函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示.



(2) 由图可知，函数 $y=f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,0)$，$(1,+\infty)$.

(3) 由图可知，使 $f(x)<0$ 的 x 的取值集合为 $\{x \mid -2<x<2$，且 $x\neq0\}$.

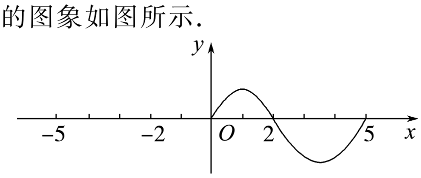
反思提炼

巧用奇函数、偶函数的图象解决问题的依据

根据奇函数、偶函数图象的对称性可以解决诸如求值、比较大小及解不等式等问题. 依据为奇函数 $\Leftrightarrow$ 图象关于原点对称，偶函数 $\Leftrightarrow$ 图象关于 y 轴对称.

探究训练

已知奇函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-5,5]$，且在区间 $[0,5]$ 上的图象如图所示.

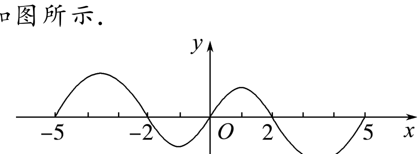


(1) 画出 $y=f(x)$ 在区间 $[-5,0]$ 上的图象；

(2) 写出使 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围.

解：(1) 因为函数 $y=f(x)$ 是奇函数，所以 $y=f(x)$ 在 $[-5,5]$ 上的图象关于原点对称.

由 $y=f(x)$ 在 $[0,5]$ 上的图象，可知它在 $[-5,0]$ 上的图象如图所示.



(2) 由图象可知，使 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围为 $(-2,0)\cup(2,5)$.

学习任务三　利用函数的奇偶性求值

例 2　(1)设 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且当 $x\leqslant 0$ 时,$f(x)=x^2-\frac{1}{2}x$,则 $f(1)=$________.

$-\frac{3}{2}$　**解析**:因为 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $f(1)=-f(-1)=-\frac{3}{2}$.

(2)若 $f(x)=(x+a)(x-4)$为偶函数,则实数 $a=$________.

4　**解析**:(方法一)$f(x)=(x+a)(x-4)=x^2+(a-4)x-4a$,$f(-x)=x^2-(a-4)x-4a$,两式恒相等,则 $a-4=0$,即 $a=4$.

(方法二)$f(x)=(x+a)(x-4)=x^2+(a-4)x-4a$,要使函数为偶函数,只需多项式的奇次项系数为 0,即 $a-4=0$.所以 $a=4$.

反思提炼

利用函数奇偶性求值的常见类型

(1)求参数值:若解析式含参数,则根据 $f(-x)=-f(x)$或 $f(-x)=f(x)$列式,比较系数,利用待定系数法求解;若定义域含参数,则根据定义域区间的端点和为 0 求参数值.

(2)求函数值:利用 $f(-x)=-f(x)$或 $f(-x)=f(x)$求解,有时需要构造奇函数或偶函数以便于求值.

探究训练

1.设函数 $f(x)=\frac{x^2+(a+1)x+a}{x}$为奇函数,则实数 $a=$　(　　)

A.-1　　B.1　　C.0　　D.-2

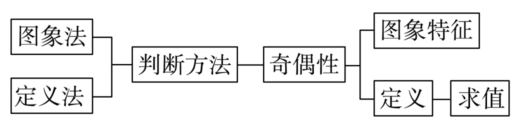
A　**解析**:(方法一)根据题意,知函数 $f(x)=\frac{x^2+(a+1)x+a}{x}$为奇函数,则有 $f(x)+f(-x)=0$,即 $\frac{x^2+(a+1)x+a}{x}+\frac{x^2-(a+1)x+a}{-x}=0$,整理可得$(a+1)x=0$,则有 $a=-1$.

(方法二)因为 $f(x)=\frac{x^2+(a+1)x+a}{x}$是奇函数,且 $y=x$ 是奇函数,所以 $y=x^2+(a+1)x+a$ 是偶函数,则 $a+1=0$,故 $a=-1$.

2.设偶函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x, x\geqslant 0,\\ g(x), x<0,\end{cases}$则 $g(-2)=$______.

6　**解析**:因为 $f(x)$为偶函数,所以 $g(-2)=f(-2)=f(2)=2^2+2=6$.

体系构建



课后素养评价(二十二)

基础性·能力运用

1.函数 $f(x)=3x^2,x\in(-2,2]$　(　　)

A.是奇函数

B.是偶函数

C.既是奇函数又是偶函数

D.是非奇非偶函数

D　**解析**:函数的定义域为$(-2,2]$,不关于原点对称,故此函数既不是奇函数,也不是偶函数.

2.(多选)下列函数中为奇函数的是　(　　)

A.$f(x)=x^3$　　B.$f(x)=x^5$

C.$f(x)=x+\frac{1}{x}$　　D.$f(x)=\frac{1}{x^2}$

ABC　**解析**:选项 ABC 中的函数满足定义域关于原点对称,且 $f(-x)=-f(x)$,由奇函数的定义可知选 ABC.

3.设 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的一个函数,函数 $F(x)=f(x)-f(-x)$,则　(　　)

A.$F(x)$是奇函数

B.$F(x)$是偶函数

C.$F(x)$既是奇函数又是偶函数

D.$F(x)$是非奇非偶函数

A　**解析**:因为函数 $F(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,且$F(-x)=f(-x)-f(x)=-F(x)$,所以函数 $F(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数.

4.若函数 $f(x)=ax^2+bx+3a+b$ 是偶函数,定义域为$[a-1,2a]$,则 $a=$________,$b=$________.

$\frac{1}{3}$　0　**解析**:因为偶函数的定义域关于原点对称,所以 $a-1=-2a$,解得 $a=\frac{1}{3}$.

又函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^2+bx+b+1$ 为偶函数,结合偶函数图象的特点,易得 $b=0$.

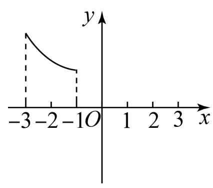
5.函数 $f(x)=x^2+|x|$的图象关于______对称.

y 轴　**解析**:因为 $x\in\mathbf{R}$,定义域关于原点对称,且 $f(-x)=(-x)^2+|-x|=x^2+|x|=f(x)$,所以 $f(x)$为偶函数,图象关于 y 轴对称.

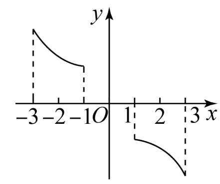
6.定义在$[-3,-1]\cup[1,3]$上的函数 $f(x)$是奇函数,其部分图象如图所示.

(1)请在坐标系中补全函数 $f(x)$的图象;

(2)比较 $f(1)$与 $f(3)$的大小.



解:(1)因为 $f(x)$是奇函数,所以其图象关于原点对称,如图所示.



(2)观察图象,知 $f(3)<f(1)$.

综合性·创新提升

1.设函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$,则下列函数中为奇函数的是 (　　)

A.$f(x-1)-1$　　B.$f(x-1)+1$

C.$f(x+1)-1$　　D.$f(x+1)+1$

B　**解析**:由题意可得 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}=-1+\frac{2}{1+x}$,

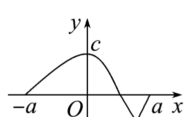
对于 A,$f(x-1)-1=\frac{2}{x}-2$ 不是奇函数;

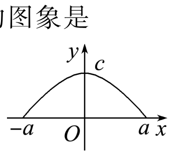
对于 B,$f(x-1)+1=\frac{2}{x}$是奇函数;

对于 C,$f(x+1)-1=\frac{2}{x+2}-2$,定义域不关于原点对称,不是奇函数;

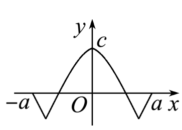
对于 D,$f(x+1)+1=\frac{2}{x+2}$,定义域不关于原点对称,不是奇函数.

2.(数学文化)我国著名数学家华罗庚先生曾说:"数缺形时少直观,形缺数时难入微,数形结合百般好,隔离分家万事休."在数学的学习和研究中,经常用函数的图象来研究函数的性质,也经常用函数的解析式来研究函数图象的特征.若函数$f(x)$在区间$[-a,a]$上的图象如图所示,则函数 $f(|x|)$在区间$[-a,a]$上的图象是 (　　)

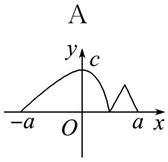




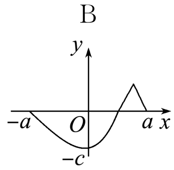
A



B



C



D

B　**解析**:$f(|x|)$是偶函数,当 $x\geq 0$ 时,$f(|x|)=f(x)$,当 $x<0$ 时,$f(|x|)=f(-x)$,则对应的图象是 B.故选 B.

3.设 $f(x)$是定义在 **R** 上的奇函数,当 $x>0$ 时,$f(x)=x^2+1$,则 $f(-2)+f(0)=$________.

-5　**解析**:由题意知 $f(-2)=-f(2)=-(2^2+1)=-5$,$f(0)=0$,所以 $f(-2)+f(0)=-5$.

4.已知函数 $f(x)=ax^3-bx-3$,若 $f(-1)=7$,则 $f(1)=$________.

-13　**解析**:设 $g(x)=ax^3-bx$,则 $g(x)$的定义域为 **R**,关于原点对称,且 $g(-x)=-g(x)$.所以 $g(x)$为奇函数.由 $f(-1)=7$,得 $g(-1)=10$,所以 $g(1)=-10$,从而 $f(1)=g(1)-3=-13$.

5.已知函数 $f(x)=\frac{ax^2+1}{bx+c}$是奇函数,且$f(1)=3$,$f(2)=5$,求 a,b,c 的值.

解:因为函数 $f(x)=\frac{ax^2+1}{bx+c}$是奇函数,

所以 $f(-x)=-f(x)$.

故$\frac{a(-x)^2+1}{b(-x)+c}=-\frac{ax^2+1}{bx+c}$,

即$\frac{ax^2+1}{-bx+c}=-\frac{ax^2+1}{bx+c}$.

所以$-bx+c=-(bx+c)$,即$c=-c$,解得 $c=0$.

所以 $f(x)=\frac{ax^2+1}{bx}$.

而 $f(1)=\frac{a+1}{b}=3$,

所以 $a+1=3b$①.

因为 $f(2)=\frac{4a+1}{2b}=5$,

所以 $4a+1=10b$②.

联立①②,得$\begin{cases}a=\frac{7}{2},\\b=\frac{3}{2}.\end{cases}$

故 $a=\frac{7}{2}$,$b=\frac{3}{2}$,$c=0$.

第2课时　函数的奇偶性的应用

学习任务目标

1.会判断分段函数、抽象函数的奇偶性.

2.掌握用奇偶性求解析式的方法.

3.理解奇偶性对单调性的影响，并能用于比较大小、求最值和解不等式.

任务型课堂

学习任务一　分段函数、抽象函数的奇偶性

1.函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+1,x>0,\\-\frac{1}{2}x^2-1,x<0\end{cases}$　　(　　)

A.是奇函数

B.是偶函数

C.既是奇函数又是偶函数

D.是非奇非偶函数

A　**解析**：函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，关于原点对称.

当 $x>0$ 时，$-x<0$，则 $f(-x)=-\frac{1}{2}(-x)^2-1=-\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)=-f(x)$；

当 $x<0$ 时，$-x>0$，则 $f(-x)=\frac{1}{2}(-x)^2+1=\frac{1}{2}x^2+1=-\left(-\frac{1}{2}x^2-1\right)=-f(x)$.

综上可知，函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+1,x>0,\\-\frac{1}{2}x^2-1,x<0\end{cases}$ 是奇函数.

2.已知 $f(x)$是奇函数，$g(x)$是偶函数，且$f(-1)+g(1)=2$，$f(1)+g(-1)=4$，则$g(1)=$________.

3　**解析**：由题意知 $f(-1)+g(1)=-f(1)+g(1)=2$，$f(1)+g(-1)=f(1)+g(1)=4$，两式相加，解得 $g(1)=3$.

反思提炼

1.分段函数奇偶性的判断方法

(1)图象法：画出图象，根据图象的对称性判断.

(2)定义法：利用奇函数、偶函数的定义，分段判断，要注意每段函数的定义域.

2.抽象函数奇偶性的判断方法

赋值法：先根据函数的结构特点赋值，利用奇函数、偶函数的定义判断.

学习任务二　利用奇偶性求解析式

例1　(1)若 $f(x)$是定义在 **R** 上的偶函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-2x+3$，则当 $x<0$ 时，$f(x)=$________.

x^2+2x+3　**解析**：当 $x<0$ 时，$-x>0$，$f(-x)=(-x)^2-2(-x)+3=x^2+2x+3$.

由于 $f(x)$是定义在 **R** 上的偶函数，故 $f(x)=f(-x)$，所以 $f(x)=x^2+2x+3$，即当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2+2x+3$.

(2)设 $f(x)$是偶函数，$g(x)$是奇函数，且$f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$，求函数 $f(x)$，$g(x)$的解析式.

解：因为 $f(x)$是偶函数，$g(x)$是奇函数，

所以 $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=-g(x)$.

又 $f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$①，

用$-x$ 代替 x，

得 $f(-x)+g(-x)=\frac{1}{-x-1}$，

所以 $f(x)-g(x)=\frac{1}{-x-1}$②.

联立①②解得 $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$，$g(x)=\frac{x}{x^2-1}$.

[一题多思]

思考1.在本例(1)中，若把“偶函数”改为“奇函数”，其他条件不变，你能求出 $f(x)$的解析式吗？

提示：当 $x<0$ 时，$-x>0$，$f(-x)=(-x)^2-2(-x)+3=x^2+2x+3$.

由于 $f(x)$是奇函数，故 $f(x)=-f(-x)$，所以 $f(x)=-x^2-2x-3$，

即当 $x<0$ 时，$f(x)=-x^2-2x-3$.

又因为 $f(x)$是定义在 **R** 上的奇函数，所以 $f(0)=0$.

故 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3,x>0,\\0,x=0,\\-x^2-2x-3,x<0.\end{cases}$

思考2. 本例(2)中，若把“$f(x)$是偶函数，$g(x)$是奇函数”改为“$f(x)$是奇函数，$g(x)$是偶函数”，还能求出$f(x)$，$g(x)$的解析式吗？

提示： 因为$f(x)$是奇函数，$g(x)$是偶函数，

所以$f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=g(x)$.

又$f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$①，

用$-x$代替上式中的x，

得$f(-x)+g(-x)=\frac{1}{-x-1}$，

即$f(x)-g(x)=\frac{1}{x+1}$②.

联立①②得$f(x)=\frac{x}{x^2-1}$，$g(x)=\frac{1}{x^2-1}$.

反思提炼

利用函数奇偶性求解析式的方法

(1)“求谁设谁”，即在哪个区间上求解析式，就应在哪个区间上设自变量x；

(2)利用函数$f(x)$在已知区间上的解析式，并结合$f(x)$的奇偶性求出$-f(x)$或$f(-x)$，从而得出$f(x)$的解析式.

探究训练

已知$y=f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，且当$x<0$时，$f(x)=x^3-1$，则$x>0$时，函数$f(x)$的解析式为________.

$f(x)=x^3+1$　**解析：** 因为$y=f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，所以$f(-x)=-f(x)$. 当$x>0$时，$-x<0$，所以$f(x)=-f(-x)=x^3+1$.

学习任务三　函数单调性与奇偶性的应用

例2　(1)已知定义在$\mathbf{R}$上的奇函数$f(x)$在$(-\infty,0]$上单调递增，若$f(a)>f(3)$，则实数a的取值范围是________.

$(3,+\infty)$　**解析：** 由题意可知，函数$f(x)$是$\mathbf{R}$上的增函数，所以$a>3$.

(2)定义在$[-2,2]$上的偶函数$f(x)$在$[0,2]$上单调递减，若$f(1-m)<f(m)$，则实数m的取值范围是________.

$\left[-1,\frac{1}{2}\right)$　**解析：** 因为$f(x)$是定义在$[-2,2]$上的偶函数，且$f(x)$在$[0,2]$上单调递减，因此$f(1-m)<f(m)$，等价于$f(|1-m|)<f(|m|)$，所以$\begin{cases}-2\leqslant 1-m\leqslant 2,\\ -2\leqslant m\leqslant 2,\\ |1-m|>|m|,\end{cases}$ 解得$-1\leqslant m<\frac{1}{2}$.

反思提炼

利用函数的奇偶性、单调性解不等式的方法

(1)若$f(x)$为奇函数，则在连续的区间上，由$f(a)$，$f(b)$的大小关系，利用单调性可直接得到a，b的大小关系.

(2)若$f(x)$为偶函数，则在连续的区间上，由$f(a)$，$f(b)$的大小关系，可得出$|a|$，$|b|$的大小关系.

注意： 解不等式不能忽视函数的定义域，解出的自变量的范围要与定义域求交集.

探究训练

设偶函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，当$x\in(-\infty,0]$时，$f(x)$是单调递增的，则$f\left(\frac{5}{2}\right)$，$f(-\sqrt{6})$，$f(\pi)$的大小关系是　　(　　)

A. $f(\pi)>f(-\sqrt{6})>f\left(\frac{5}{2}\right)$

B. $f(-\sqrt{6})>f(\pi)>f\left(\frac{5}{2}\right)$

C. $f(-\sqrt{6})>f\left(\frac{5}{2}\right)>f(\pi)$

D. $f(\pi)>f\left(\frac{5}{2}\right)>f(-\sqrt{6})$

C　**解析：** 根据偶函数的性质可知，$f(-\sqrt{6})=f(\sqrt{6})$，当$x\in[0,+\infty)$时，$f(x)$是单调递减的. 因为$\sqrt{6}<\frac{5}{2}<\pi$，所以$f(\sqrt{6})>f\left(\frac{5}{2}\right)>f(\pi)$，即$f(-\sqrt{6})>f\left(\frac{5}{2}\right)>f(\pi)$.

体系构建

- 奇偶性的应用
  - 求值
    - 求函数数值
    - 求参数值
  - 求函数解析式
  - 综合应用
    - 比较大小
    - 解不等式

课后素养评价（二十三）

基础性·能力运用

1. 函数 $f(x)=\begin{cases}x-x^2, x>0,\\ x^2+x, x<0\end{cases}$　(　　)

A.是奇函数

B.是偶函数

C.既是奇函数又是偶函数

D.是非奇非偶函数

A　**解析**：函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，

当 $x>0$ 时，$-x<0$，$f(-x)=x^2-x=-(x-x^2)=-f(x)$；

当 $x<0$ 时，$-x>0$，$f(-x)=-x-x^2=-(x^2+x)=-f(x)$.

综上，$f(-x)=-f(x)$.所以函数 $f(x)$ 为奇函数.

2. 下列函数中，既是偶函数又在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是　(　　)

A.$y=x^3$　　B.$y=|x|+1$

C.$y=-x^2+1$　　D.$y=x-\frac{1}{x}$

B　**解析**：$y=x^3$ 在定义域 **R** 上是奇函数，故 A 不符合；$y=-x^2+1$ 在定义域 **R** 上是偶函数，但在 $(0,+\infty)$ 上是单调递减的，故 C 不符合；$y=x-\frac{1}{x}$ 是奇函数，故 D 不符合；$y=|x|+1$ 是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增的，故 B 符合.

3. 已知 $f(x)$ 是奇函数，且在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(-0.5)$，$f(-1)$，$f(0)$ 的大小关系是　(　　)

A.$f(-0.5)<f(0)<f(-1)$

B.$f(-1)<f(-0.5)<f(0)$

C.$f(0)<f(-0.5)<f(-1)$

D.$f(-1)<f(0)<f(-0.5)$

B　**解析**：因为函数 $f(x)$ 为奇函数，且在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增，所以 $f(-1)<f(-0.5)<f(0)$.

4.（多选）已知函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，则下列说法正确的有　(　　)

A.$f(0)=0$

B.若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有最小值 -3，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上有最大值 3

C.若 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增

D.$f(-1)=f(1)$

AB　**解析**：对于 A，因为 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，故 A 正确；对于 B，若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有最小值 -3，即当 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant-3$，所以当 $x<0$ 时，$-x>0$，所以 $f(-x)\geqslant-3$，因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(x)=-f(-x)\leqslant-(-3)=3$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上有最大值 3，故 B 正确；对于 C，根据奇函数在对称区域内的单调性一致，可知若 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上也单调递减，故 C 错误；对于 D，$f(-1)=-f(1)$，故 D 错误.

5. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)=2x^3+x^2$，则 $f(2)=$________.

12　**解析**：因为 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，所以 $f(2)=-f(-2)$.又因为当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)=2x^3+x^2$，

所以 $f(-2)=2\times(-2)^3+(-2)^2=-16+4=-12$.

所以 $f(2)=-f(-2)=12$.

6. 已知 $f(x)$，$g(x)$ 均为 **R** 上的奇函数，且 $F(x)=af(x)+bg(x)+2$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的最大值为 8，则 $F(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上的最小值为 $\underline{-4}$.

7. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x+\frac{3}{x}-4$.求函数 $f(x)$ 在 **R** 上的解析式.

解：因为函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，所以 $f(0)=0$.

当 $x<0$ 时，则 $-x>0$，$f(-x)=-x-\frac{3}{x}-4$.

又 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(x)=-f(-x)=x+\frac{3}{x}+4(x<0)$.

所以函数 $f(x)$ 在 **R** 上的解析式为

$$f(x)=\begin{cases}x+\frac{3}{x}-4, x>0,\\ 0, x=0,\\ x+\frac{3}{x}+4, x<0.\end{cases}$$

综合性·创新提升

1. 若奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上的解析式为 $f(x)=x(1+x)$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有　（　　）

A. 最大值 $-\frac{1}{4}$　　B. 最大值 $\frac{1}{4}$

C. 最小值 $-\frac{1}{4}$　　D. 最小值 $\frac{1}{4}$

B　**解析**：当 $x>0$ 时，$-x<0$，

所以 $f(-x)=-x(1-x)$. 又 $f(-x)=-f(x)$，

所以 $f(x)=x(1-x)=-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}(x>0)$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有最大值 $\frac{1}{4}$.

2. 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. 若 $x_1<0$ 且 $x_1+x_2>0$，则　（　　）

A. $f(-x_1)>f(-x_2)$

B. $f(-x_1)=f(-x_2)$

C. $f(-x_1)<f(-x_2)$

D. $f(-x_1)$ 与 $f(-x_2)$ 的大小关系不确定

A　**解析**：因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，所以 $f(-x_2)=f(x_2)$.

由题可知 $x_2>-x_1>0$，且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(-x_2)=f(x_2)<f(-x_1)$.

3. 已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则满足 $f(2x-1)<f\left(\frac{1}{3}\right)$ 的 x 的取值范围为（　　）

A. $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$　　B. $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

C. $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$　　D. $\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$

A　**解析**：因为 $f(x)$ 为偶函数，且在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以由 $f(2x-1)<f\left(\frac{1}{3}\right)$，可得 $-\frac{1}{3}<2x-1<\frac{1}{3}$，解得 $\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$.

4. 函数 $f(x)=x^3-3x^2+1$ 图象的对称中心为________.

$(1,-1)$　**解析**：因为 $f(x+1)+1=(x+1)^3-3(x+1)^2+2=x^3+3x^2+3x+1-3x^2-6x-3+2=x^3-3x$.

设 $g(x)=f(x+1)+1=x^3-3x$，所以 $g(x)$ 是奇函数，

即 $y=f(x+1)+1$ 是奇函数，图象关于原点对称.

所以函数 $f(x)=x^3-3x^2+1$ 的图象关于点 $(1,-1)$ 对称.

5. 已知函数 $f(x)$ 对一切 x,y 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

(1) 求证：$f(x)$ 是奇函数；

(2) 若 $f(-3)=a$，试用 a 表示 $f(12)$.

(1) **证明**：由已知 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，

令 $y=-x$，得 $f(0)=f(x)+f(-x)$.

令 $x=y=0$，得 $f(0)=2f(0)$，所以 $f(0)=0$.

所以 $f(x)+f(-x)=0$，即 $f(-x)=-f(x)$，

故 $f(x)$ 是奇函数.

(2) **解**：由(1)知 $f(x)$ 为奇函数，

所以 $f(-3)=-f(3)=a$，

所以 $f(3)=-a$.

又 $f(12)=f(6)+f(6)=2f(3)+2f(3)=4f(3)$，

所以 $f(12)=-4a$.

6. 已知函数 $f(x)=x^2+\frac{a}{2x}(x\neq 0,a\in\mathbf{R})$.

(1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并说明理由；

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是单调递增的，求实数 a 的取值范围.

解：(1) 当 $a=0$ 时，$f(x)=x^2$，

对任意 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

有 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数.

当 $a\neq 0$ 时，$f(x)=x^2+\frac{a}{2x}(x\neq 0)$，

则 $(-1)+f(1)=2\neq 0$，

$f(-1)-f(1)=-a\neq 0$，

所以 $f(-1)\neq -f(1)$，$f(-1)\neq f(1)$.

所以函数 $f(x)$ 是非奇非偶函数.

综上所述，当 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 为偶函数；当 $a\neq 0$ 时，函数 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

(2) $\forall x_1,x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=x_1^2+\frac{a}{2x_1}-x_2^2-\frac{a}{2x_2}$

$=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\left[x_1x_2(x_1+x_2)-\frac{a}{2}\right]$.

要使函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

则 $f(x_1)-f(x_2)<0$ 恒成立.

因为 $x_1-x_2<0$，$x_1x_2>1$，

所以 $x_1x_2(x_1+x_2)-\frac{a}{2}>0$，

即 $a<2x_1x_2(x_1+x_2)$ 恒成立.

又因为 $x_1+x_2>2$，所以 $2x_1x_2(x_1+x_2)>4$，

所以 a 的取值范围是 $(-\infty,4]$.

3.3　幂函数

学习任务目标

1.了解幂函数的概念，会求幂函数的解析式.

2.结合幂函数 $y=x,y=x^2,y=x^3,y=\frac{1}{x},y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图象，掌握它们的性质.

3.能利用幂函数的性质解决简单的问题.

问题式预习

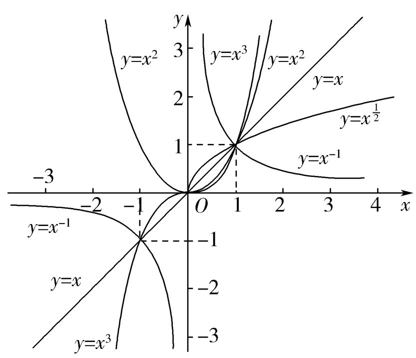
知识清单

知识点一　幂函数的概念

一般地，函数 $y=x^{\alpha}$ 叫做幂函数，其中 x 是自变量，α 是常数.

知识点二　幂函数的图象与性质

1.五个幂函数的图象



2.五个幂函数的性质

函数	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=x^{-1}$
定义域	**R**	**R**	**R**	$[0,+\infty)$	$\{x\mid x\neq 0\}$
值域	**R**	$[0,+\infty)$	**R**	$[0,+\infty)$	$\{y\mid y\neq 0\}$
奇偶性	奇	偶	奇	非奇非偶	奇
单调性	增	在 $[0,+\infty)$ 上增，在 $(-\infty,0]$ 上减	增	增	在 $(0,+\infty)$ 上减，在 $(-\infty,0)$ 上减

概念辨析

1.判断正误（正确的打"√"，错误的打"×"）.

（1）函数 $y=x^0$ 是幂函数.　（　　）

√　**解析**：满足幂函数的特征.

（2）幂函数的图象都过原点.　（　　）

×　**解析**：幂函数 $y=x^{-1}$ 的图象不过原点.

（3）幂函数一定具有奇偶性.　（　　）

×　**解析**：$y=\sqrt{x}$ 是非奇非偶函数.

（4）当 $\alpha>0$ 时，幂函数 $y=x^{\alpha}$ 是增函数.　（　　）

×　**解析**：函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上是单调递减的.

2.已知幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 的图象过点 $(2,4)$，则 $f(4)=$________.

16　**解析**：由 $f(2)=4$ 可知 $2^{\alpha}=4$，即 $\alpha=2$，所以幂函数 $f(x)=x^2$，所以 $f(4)=4^2=16$.

3.请思考并回答下列问题：

（1）幂函数有何特点？函数 $y=2^x$，$y=2x^2$ 是幂函数吗？

提示：幂函数 $y=x^{\alpha}$ 的特征：①x^{α} 的系数是1；②x^{α} 的底数 x 是自变量；③x^{α} 的指数 α 为常数.

函数 $y=2^x$ 不满足②，不是幂函数；函数 $y=2x^2$ 不满足①，不是幂函数.

（2）通过对幂函数 $y=x,y=x^2,y=x^3,y=x^{-1},y=x^{\frac{1}{2}}$ 图象与性质的研究，你能总结一下幂函数的性质吗？

提示：①所有的幂函数在 $(0,+\infty)$ 上都有定义，并且图象都过点 $(1,1)$.

②如果 $\alpha>0$，那么幂函数的图象过原点，并且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增；如果 $\alpha<0$，那么幂函数的图象在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

③在 $(1,+\infty)$ 上，随着指数 α 的逐渐增大，函数图象越来越靠近 y 轴.

任务型课堂

学习任务一　幂函数的概念

1. 下列函数为幂函数的是　　(　　)

A. $y=2x^4$　　B. $y=2x^3-1$

C. $y=\dfrac{2}{x}$　　D. $y=x^2$

D　**解析**：$y=2x^4$ 中，x^4 的系数为 2，故 A 不是幂函数；$y=2x^3-1$ 不是 $y=x^\alpha$ 的形式，故 B 不是幂函数；$y=\dfrac{2}{x}=2x^{-1}$，x^{-1} 的系数为 2，故 C 不是幂函数；只有 D 中的函数 $y=x^2$ 是幂函数.

2. 已知 $f(x)=(m+1)x^{m^2+2}$ 是幂函数，则 $m=$　　(　　)

A. 2　　B. 1

C. 3　　D. 0

D　**解析**：由题意可知 $m+1=1$，即 $m=0$.

3. 若函数 $f(x)$ 是幂函数，且满足 $f(3)=27$，则 $f(-2)$ 的值为________.

-8　**解析**：设 $f(x)=x^\alpha$，因为 $f(3)=27$，所以 $3^\alpha=27$，解得 $\alpha=3$，所以 $f(-2)=(-2)^3=-8$.

反思提炼

幂函数的判断及应用

(1) 判断一个函数是否为幂函数的依据是该函数是否为 $y=x^\alpha$（α 为常数）的形式，需满足：①指数为常数，②底数为自变量，③x^α 的系数为 1. 形如 $y=(3x)^\alpha$，$y=2x^\alpha$，$y=x^\alpha+5$，…的函数都不是幂函数.

(2) 若一个函数为幂函数，则该函数也必具有 $y=x^\alpha$（α 为常数）这一形式.

学习任务二　幂函数的图象及应用

例 1　已知点 $(\sqrt{2},2)$ 与点 $\left(-2,-\dfrac{1}{2}\right)$ 分别在幂函数 $f(x)$，$g(x)$ 的图象上，当 x 满足什么条件时，有：

(1) $f(x)>g(x)$？

(2) $f(x)=g(x)$？

(3) $f(x)<g(x)$？

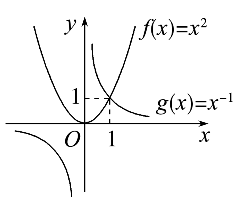
解：设 $f(x)=x^\alpha$，$g(x)=x^\beta$.

因为 $(\sqrt{2})^\alpha=2$，$(-2)^\beta=-\dfrac{1}{2}$，

所以 $\alpha=2$，$\beta=-1$.

所以 $f(x)=x^2$，$g(x)=x^{-1}$.

分别作出它们的图象，如图所示.



由图象知，

(1) 当 $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ 时，$f(x)>g(x)$.

(2) 当 $x=1$ 时，$f(x)=g(x)$.

(3) 当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)<g(x)$.

反思提炼

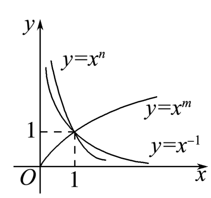
解决幂函数图象问题应掌握的两个方法

(1) 依据图象高低判断指数大小，相关结论为：在 $(0,1)$ 上，指数越大，幂函数图象越靠近 x 轴；在 $(1,+\infty)$ 上，指数越大，幂函数图象越远离 x 轴.

(2) 依据图象确定指数 α 与 0，1 的大小关系时，一般根据幂函数在第一象限内的图象来判断.

探究训练

如图是幂函数 $y=x^m$ 与 $y=x^n$ 在第一象限内的图象，则　　(　　)



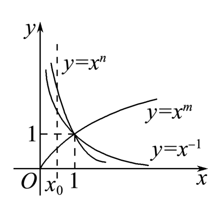
A. $-1<n<0<m<1$

B. $n<-1$，$0<m<1$

C. $-1<n<0$，$m>1$

D. $n<-1$，$m>1$

B　**解析**：在 $(0,1)$ 内取同一值 x_0，作直线 $x=x_0$，与各图象有交点，如图所示.



根据“点低指数大”，得 $0<m<1$，$n<-1$.

学习任务三　幂函数性质的应用

例2　(1)幂函数 $f(x)=(m^2+5m-5)x^{m^2-3m}(m\in\mathbf{Z})$是偶函数,且在$(0,+\infty)$上单调递减,则 m 的值为　(　　)

A.-6　　B.1

C.6　　D.1或-6

B　**解析**:因为幂函数 $f(x)=(m^2+5m-5)\cdot x^{m^2-3m}(m\in\mathbf{Z})$是偶函数,且在$(0,+\infty)$上单调递减,

所以$\begin{cases}m^2+5m-5=1,\\ m^2-3m<0,\end{cases}$且 m^2-3m 为偶数,解得 $m=1$.

当 $m=1$ 时,$m^2-3m=-2$ 满足条件.

(2)已知 $a=2^{\frac{4}{3}}$,$b=3^{\frac{2}{3}}$,$c=25^{\frac{1}{3}}$,则　(　　)

A.$b<a<c$　　B.$a<b<c$

C.$b<c<a$　　D.$c<a<b$

A　**解析**:$a=2^{\frac{4}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$,$b=3^{\frac{2}{3}}$,$c=25^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{2}{3}}$.因为函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$在第一象限内是单调递增的,又 $3<4<5$,所以 $b<a<c$.

(3)已知幂函数 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$.若 $f(10-2a)<f(a+1)$,则实数 a 的取值范围是________.

$(3,5]$　**解析**:$f(x)=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}(x\geqslant0)$,易知 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.又 $f(10-2a)<f(a+1)$,所以

$\begin{cases}a+1\geqslant0,\\ 10-2a\geqslant0,\\ a+1>10-2a,\end{cases}$解得 $3<a\leqslant5$.

［一题多思］

思考1.本例(1)中,若把条件改为"幂函数 $f(x)=x^{m^2-m-3}(m\in\mathbf{N}^*$,且 $m\geqslant2)$为奇函数,且在$(0,+\infty)$上单调递减",你能求出 m 的值吗?

提示:因为幂函数 $f(x)=x^{m^2-m-3}(m\in\mathbf{N}^*$,且 $m\geqslant2)$为奇函数且在$(0,+\infty)$上单调递减,

所以 $m^2-m-3<0$,解得$\frac{1-\sqrt{13}}{2}<m<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

又 $m\in\mathbf{N}^*$,且 $m\geqslant2$,所以 $m=2$.

当 $m=2$ 时,$f(x)=x^{-1}$,为奇函数,故 $m=2$.

思考2.在思考1的条件下,你能比较 $f(-2\ 025)$与 $f(-2\ 024)$的大小吗?

提示:因为 $f(x)$为奇函数,且在$(0,+\infty)$上单调递减,

所以 $f(x)$在$(-\infty,0)$上也单调递减,又因为 $-2\ 024<-2\ 025$,

所以 $f(-2\ 025)>f(-2\ 024)$.

反思提炼

幂函数值大小的比较

(1)比较幂函数值的大小,一般先构造幂函数并明确其单调性,然后由单调性判断幂函数值的大小.当不便于利用单调性时,可先分别与0和1进行比较(这种方法常称为"搭桥法").

(2)解题的一般步骤:

①构造幂函数;

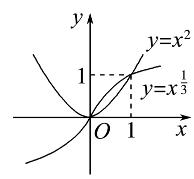
②比较底数的大小;

③由单调性确定幂函数值的大小.

探究训练

1.已知 $x^2>x^{\frac{1}{3}}$,则 x 的取值范围是________.

$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$　**解析**:作出函数 $y=x^2$ 和 $y=x^{\frac{1}{3}}$的图象(如图所示),易得 $x<0$ 或 $x>1$.



2.(1)比较 $2.3^{-0.2}$和 $2.2^{-0.2}$的大小;

(2)比较 $1.2^{\frac{1}{2}}$,$\left(\frac{10}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$,$\sqrt{1.1}$的大小.

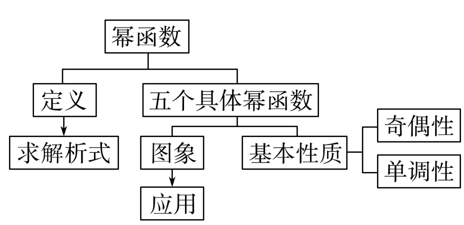
解:(1)因为函数 $f(x)=x^{-0.2}$在$(0,+\infty)$上单调递减,所以 $2.3^{-0.2}<2.2^{-0.2}$.

(2)$\sqrt{1.1}=1.1^{\frac{1}{2}}$.

因为 $y=x^{\frac{1}{2}}$在$[0,+\infty)$上单调递增,且 $1.2>\frac{10}{9}>1.1$,

所以 $1.2^{\frac{1}{2}}>\left(\frac{10}{9}\right)^{\frac{1}{2}}>1.1^{\frac{1}{2}}$,即 $1.2^{\frac{1}{2}}>\left(\frac{10}{9}\right)^{\frac{1}{2}}>\sqrt{1.1}$.

体系构建



课后素养评价(二十四)

基础性·能力运用

1. 在函数 $y=\frac{1}{x^2}$, $y=2x^2$, $y=x^2+x$, $y=1$ 中,幂函数的个数为　　(　　)

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

B　**解析**:$y=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$,是幂函数;

$y=2x^2$ 不是幂函数;

$y=x^2+x$ 是两项和的形式,不是幂函数;

由 $y=1=x^0(x\neq0)$,可以看出,常数函数 $y=1$ 的图象比幂函数 $y=x^0$ 的图象多了一个点(0,1),所以常数函数 $y=1$ 不是幂函数.

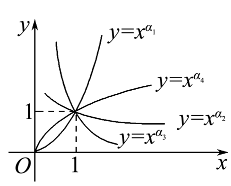
2. 已知函数 $f(x)=(a^2-a-1)x^{\frac{1}{a-2}}$ 为幂函数,则实数 a 的值为　　(　　)

A.-1 或 2　　B.-2 或 1

C.-1　　D.1

C　**解析**:因为 $f(x)=(a^2-a-1)x^{\frac{1}{a-2}}$ 为幂函数,所以 $a^2-a-1=1$,解得 $a=2$ 或 $a=-1$.又 $a-2\neq0$,所以 $a=-1$.

3. 如图是幂函数 $y=x^{\alpha_1}$, $y=x^{\alpha_2}$, $y=x^{\alpha_3}$, $y=x^{\alpha_4}$ 在第一象限的图象,则 $0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,1$ 的大小关系为　　(　　)



A.$\alpha_1<\alpha_3<0<\alpha_4<\alpha_2<1$

B.$0<\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\alpha_4<1$

C.$\alpha_2<\alpha_4<0<\alpha_3<1<\alpha_1$

D.$\alpha_3<\alpha_2<0<\alpha_4<1<\alpha_1$

D　**解析**:取 $x_0\in(0,1)$,作 $x=x_0$(图略),与四个函数图象都有交点,则由“点低指数大”可得 $\alpha_3<\alpha_2<0<\alpha_4<1<\alpha_1$.

4. $2.3^{\frac{3}{4}}$ 和 $2.4^{\frac{3}{4}}$ 的大小关系为________.

$2.4^{\frac{3}{4}}>2.3^{\frac{3}{4}}$　**解析**:设幂函数 $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$,则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调递增的.因为 $2.4>2.3$,所以 $2.4^{\frac{3}{4}}>2.3^{\frac{3}{4}}$.

5. 已知幂函数 $y=f(x)$ 的图象经过点 $\left(2,\frac{1}{8}\right)$.

(1)试求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2)判断函数 $f(x)$ 的奇偶性并写出函数的单调区间.

解:(1)设 $f(x)=x^{\alpha}$,由题意,得 $f(2)=2^{\alpha}=\frac{1}{8}$,即 $\alpha=-3$.

故函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=x^{-3}$.

(2)因为 $f(x)=x^{-3}$,所以要使函数 $f(x)$ 有意义,则 $x\neq0$,即定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,关于原点对称.

因为 $f(-x)=(-x)^{-3}=-x^{-3}=-f(x)$,

所以该幂函数为奇函数.

当 $x>0$ 时,根据幂函数的性质可知,$f(x)=x^{-3}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

因为 $f(x)$ 是奇函数,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也单调递减.

故函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$,无单调递增区间.

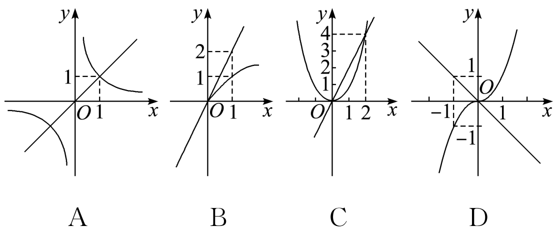
综合性·创新提升

1. 幂函数 $f(x)=x^{m^2+m-2}$ $(0\leqslant m\leqslant3, m\in\mathbf{Z})$ 的图象关于 y 轴对称,且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,则实数 m 的值为　　(　　)

A.0　　B.2　　C.3　　D.2 或 3

D　**解析**:由题意,可得 $m^2+m-2>0$,且 m^2+m-2 为偶数,又因为 $0\leqslant m\leqslant3$, $m\in\mathbf{Z}$,所以 $m=2$ 或 $m=3$.

2. 函数 $y=x^{\alpha}$ 与 $y=\alpha x\left(\alpha\in\left\{-1,\frac{1}{2},2,3\right\}\right)$ 的图象可能是 (　　)



C　**解析**：函数 $y=x^{\alpha}$ 是幂函数，而 $y=\alpha x$ 是一次函数.选项 A，直线对应函数为 $y=x$，曲线对应函数为 $y=x^{-1}$；选项 B，直线对应函数为 $y=2x$，曲线对应函数为 $y=x^{\frac{1}{2}}$；选项 C，直线对应函数为 $y=2x$，曲线对应函数为 $y=x^{2}$；选项 D，直线对应函数为 $y=-x$，曲线对应函数 $y=x^{3}$.故选 C.

3. (开放性问题)写出一个同时具有下列三个性质的函数：$f(x)=$ <u>x^{2}(答案不唯一)</u>.

①$f(x)$为幂函数；②$f(x)$为偶函数；

③$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减.

4. 已知函数 $f(x)=(m^{2}+2m)x^{m^{2}+m-1}$，$m$ 为何值时，函数 $f(x)$分别满足下列条件？

(1)$f(x)$是正比例函数；

(2)$f(x)$是反比例函数；

(3)$f(x)$是幂函数.

解：(1)若函数 $f(x)$为正比例函数，

则 $\begin{cases}m^{2}+m-1=1,\\m^{2}+2m\neq0,\end{cases}$ 所以 $m=1$.

(2)若函数 $f(x)$为反比例函数，

则 $\begin{cases}m^{2}+m-1=-1,\\m^{2}+2m\neq0,\end{cases}$ 所以 $m=-1$.

(3)若函数 $f(x)$为幂函数，

则 $m^{2}+2m=1$，所以 $m=-1\pm\sqrt{2}$.

3.4　函数的应用(一)

学习任务目标

1.了解函数模型(如一次函数、二次函数、幂函数、分段函数等现实生活中普遍使用的函数模型)的广泛应用.

2.能够利用给定的函数模型或建立确定的函数模型解决实际问题.

问题式预习

知识清单

知识点　函数的模型

1.一次函数模型

形如 $y=kx+b$ 的函数模型称为<u>一次函数模型</u>,其中 $k\neq0$.

2.二次函数模型

(1)解析式:$y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$ 或 $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}\ (a\neq0)$.

(2)条件:$a\neq0$.

3.幂函数模型

(1)解析式:$y=ax^{\alpha}+b$(a,b,α 为常数,$a\neq0,\alpha\neq0$ 且 $\alpha\neq1$).

(2)单调性:由解析式中的 α 的取值决定.

概念辨析

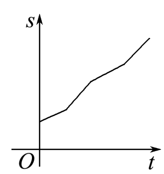
1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)利润=销售单价×销售量.　(　×　)

(2)实际应用问题中自变量的取值范围由所得的函数解析式唯一确定.　(　×　)

(3)解函数应用题的基本步骤可概括为"四步八字",即"审题、建模、解模、还原".　(　√　)

2.一辆汽车在某段时间内的行驶路程 s 关于时间 t 变化的图象如图所示,那么图象所对应的函数模型是　(　　)



A.一次函数模型

B.二次函数模型

C.分段函数模型

D.无法确定

C　**解析**:由题图可知 t 分 4 段,则函数模型为分段函数模型.

3.某人驾驶汽车从 A 地出发,以 80 km/h 的速度行驶2 h到达 B 地,在 B 地停留 2 h,则汽车离开 A 地的距离 y(单位:km)是时间 t(单位:h)的函数,该函数的解析式是 <u>$y=\begin{cases}80t,0\leqslant t\leqslant2,\\160,2<t\leqslant4.\end{cases}$</u>

任务型课堂

学习任务一　一次函数模型

1.一辆匀速行驶的汽车 90 min 行驶的路程为 180 km,则这辆汽车行驶的路程 y(单位:km)关于时间 t(单位:h)的函数解析式是　(　　)

A.$y=2t$　　B.$y=120t$

C.$y=2t(t\geqslant0)$　　D.$y=120t(t\geqslant0)$

D　**解析**:因为 90 min=1.5 h,所以汽车的速度为 $180\div1.5=120$(km/h).所以路程 y 与时间 t 之间的函数解析式是 $y=120t(t\geqslant0)$.

2.某厂每日生产文具盒的总成本 y(单位:元)与日产量 x(单位:套)之间的关系为 $y=6x+30\ 000$,而文具盒的出售价格为每套 12 元.要使该厂不亏本,每日至少生产文具盒　(　　)

A.2 000 套　　B.3 000 套

C.4 000 套　　D.5 000 套

D　**解析**:设利润 $z=12x-(6x+30\ 000)$,所以 $z=6x-30\ 000$.由 $z\geqslant0$,解得 $x\geqslant5\ 000$.故至少日生产文具盒5 000 套.

3.一定范围内,某种产品的购买量 y(单位:t)与价格 x(单元:元/t)之间满足一次函数关系.若购买1 000 t,则价格为 800 元/t;若购买 2 000 t,则价格为 700 元/t.某客户购买 400 t,其价格为________元/t.

860　**解析**:设 $y=kx+b$,由 $\begin{cases}1\ 000=800k+b,\\2\ 000=700k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-10,\\b=9\ 000.\end{cases}$ 所以 $y=-10x+9\ 000$.令 $-10x+9\ 000=400$,解得 $x=860$.

反思提炼

一次函数模型的特点和解题方法

(1)一次函数模型的突出特点是其图象是一条直线.

(2)求解一次函数模型问题时,注意待定系数法的应用,主要步骤是:设元、列式、求解.

学习任务二　二次函数模型

例1　某水果批发商销售每箱进价为40元的苹果,假设每箱售价不得低于50元且不得高于55元.市场调查发现,若每箱以50元的价格销售,平均每天销售90箱,价格每提高1元,平均每天少销售3箱.

(1)求平均每天的销售量y(单位:箱)与销售单价x(单位:元/箱)之间的函数关系式.

(2)求该批发商平均每天的销售利润w(单位:元)与销售单价x(单位:元/箱)之间的函数关系式.

(3)当每箱苹果的售价为多少元时,该批发商可以获得最大日利润?最大日利润是多少?

解:(1)根据题意,得$y=90-3(x-50)$,

即$y=-3x+240(50\leqslant x\leqslant 55,x\in\mathbf{N})$.

(2)$w=(x-40)(-3x+240)=-3x^2+360x-9\ 600(50\leqslant x\leqslant 55,x\in\mathbf{N})$.

(3)因为$w=-3x^2+360x-9\ 600=-3(x-60)^2+1\ 200$,

所以当$x<60$时,w随x的增大而增大.

又$50\leqslant x\leqslant 55,x\in\mathbf{N}$,

所以当$x=55$时,w有最大值,最大值为1 125.

所以当每箱苹果的售价为55元时,该批发商可以获得最大日利润,且最大日利润为1 125元.

反思提炼

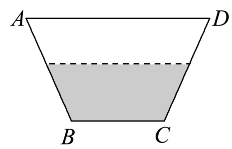
利用二次函数模型求最值的方法

根据实际问题建立函数模型,求出解析式后,可利用配方法、判别式法、换元法以及函数的单调性等方法求最值,从而解决实际问题中的利润最大、用料最省等最值问题.

注意:实际问题中应考虑取得最值时的自变量与实际意义是否相符.

探究训练

如图,某渠道的截面是一个等腰梯形,上底AD的长为一腰长和下底长之和,且两腰AB,CD的长与上底AD的长之和为8 m.设腰长为x m.



(1)求渠道的截面面积S与腰长x的函数关系式.

(2)试问:等腰梯形的腰与上、下底长各为多少米时,截面面积最大?并求出截面面积的最大值.

解:(1)由题可知$AB=CD=x$ m,则上底AD为$(8-2x)$m,下底BC为$(8-3x)$m,

所以由勾股定理得梯形的高为$\frac{\sqrt{3}}{2}x$m.

由$x>0,8-2x>0,8-3x>0$,可得$0<x<\frac{8}{3}$.

所以$S=\frac{1}{2}[(8-2x)+(8-3x)]\times\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{4}(-5x^2+16x)$,

即$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(-5x^2+16x)\left(0<x<\frac{8}{3}\right)$.

(2)因为$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(-5x^2+16x)=-\frac{5\sqrt{3}}{4}\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{16\sqrt{3}}{5}$,

所以当$x=\frac{8}{5}\in\left(0,\frac{8}{3}\right)$时,$S_{\max}=\frac{16\sqrt{3}}{5}(\mathrm{m}^2)$.

此时,腰长$AB=CD=\frac{8}{5}$ m,上底$AD=\frac{24}{5}$ m,下底$BC=\frac{16}{5}$ m,截面面积最大为$\frac{16\sqrt{3}}{5}$ m^2.

学习任务三　幂函数及分段函数模型

例2　在固定压力差(压力差为常数)下,当气体通过圆柱形管道时,其流量速率R(单位:cm^3/s)与管道半径r(单位:cm)的四次方成正比.

(1)写出R关于r的函数解析式;

(2)假设某气体在半径为3 cm的管道中,流量速率为400 cm^3/s,求该气体通过半径为r的管道时,其流量速率R关于r的解析式;

(3)已知(2)中的气体通过的管道半径为5 cm,计算该气体的流量速率.(结果保留整数)

解:(1)由题意,得$R=kr^4$(k是大于0的常数).

(2)由$r=3$ cm,$R=400$ cm^3/s,得$k\cdot 3^4=400$,

所以$k=\frac{400}{81}$,流量速率的解析式为$R=\frac{400}{81}r^4$.

(3)因为$R=\frac{400}{81}r^4$,所以当$r=5$ cm时,

$R=\frac{400}{81}\times 5^4\approx 3\ 086(\mathrm{cm}^3/\mathrm{s})$.

[一题多思]

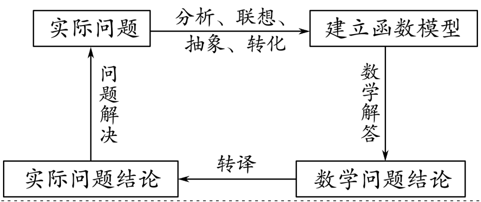
解决函数实际应用问题的关键是将实际问题转化为数学问题，即建立函数模型，通过对函数性质的研究解决数学问题，从而达到解决实际问题的目的.

思考 1. 解决函数实际应用问题的一般步骤是怎样的？

提示： 审题；建模；求解模型；还原(回答实际问题).

思考 2. 你能把解函数应用题的步骤用框图表示吗？

提示：



反思提炼

应用分段函数时的三个注意点

(1)分段函数的“段”一定要分得合理，不重不漏.

(2)分段函数的定义域为对应每一段自变量取值范围的并集.

(3)分段函数的值域求法：逐段求函数的取值范围，然后取并集.

探究训练

已知 A，B 两地相距 150 km，某人驾驶汽车以 60 km/h 的速度从 A 地到 B 地，在 B 地停留1 h 后再以50 km/h的速度返回 A 地.

(1)把汽车与 A 地的距离 y(单位：km)表示为时间 t(单位：h)的函数；

(2)求经过 5 h 时汽车与 A 地的距离.

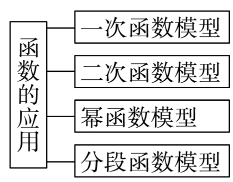
解：(1)开车以 60 km/h 的速度从 A 地到 B 地需要 2.5 h，这时 $y=60t$；当 $2.5<t\leqslant 3.5$ 时，$y=150$；开车以50 km/h的速度返回 A 地需要 3 h，这时 $y=150-50(t-3.5)=-50t+325$.

所求函数的解析式为 $y=\begin{cases}60t,0\leqslant t\leqslant 2.5,\\150,2.5<t\leqslant 3.5,\\-50t+325,3.5<t\leqslant 6.5.\end{cases}$

(2)当 $t=5$ 时，$y=-50\times 5+325=75$，

即经过 5 h 时汽车距离 A 地 75 km.

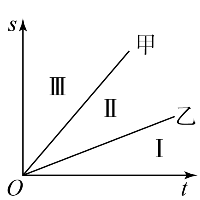
体系构建



课后素养评价(二十五)

基础性·能力运用

1. 甲、乙、丙、丁四辆玩具赛车同时从起点出发并做匀速直线运动，丙车最先到达终点，丁车最后到达终点.若甲、乙两车行驶路程 s 与时间 t 的图象如图所示，则对于丙、丁两车行驶路程 s 与时间 t 的图象所在区域，判断正确的是　(　　)



A.丙在Ⅲ区域，丁在Ⅰ区域

B.丙在Ⅰ区城，丁在Ⅲ区域

C.丙在Ⅱ区域，丁在Ⅰ区域

D.丙在Ⅲ区域，丁在Ⅱ区域

A　**解析：**由题意可得，相同时间内，丙车行驶路程最远，丁车行驶路程最近，即丙在Ⅲ区域，丁在Ⅰ区域.故选 A.

2. 某市生产总值连续两年保持增大，第一年的增长率为 p，第二年的增长率为 q，则该市这两年生产总值的年平均增长率为　(　　)

A.$\dfrac{p+q}{2}$

B.$\dfrac{(p+1)(q+1)-1}{2}$

C.$\sqrt{pq}$

D.$\sqrt{(p+1)(q+1)}-1$

D　**解析：**设年平均增长率为 x，原生产总值为 a，则 $a(1+p)(1+q)=a(1+x)^2$，解得 $x=\sqrt{(1+p)(1+q)}-1$.故选 D.

3. 把长为 12 cm 的细铁丝截成两段，各自围成一个正三角形，那么这两个正三角形面积之和的最小值是________cm².

$2\sqrt{3}$　**解析：**设一个正三角形的边长为 x cm，$0<x<4$，则另一个正三角形的边长为$(4-x)$cm，两个正三角形的面积之和为 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}(4-x)^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-2)^2+2\sqrt{3}\geqslant 2\sqrt{3}$.

所以，这两个正三角形面积之和的最小值是 $2\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

4.某药厂研制出一种新型药剂，投放市场后其广告投入 x（单位：万元）与销售利润 y（单位：万元）存在的关系为 $y=x^{\alpha}$（α 为常数），其中 $x\leqslant 5$.已知去年投入广告费用为 3 万元时，销售利润为27 万元.若今年投入广告费用 5 万元，预计今年销售利润为________万元.

125　**解析**：由已知投入广告费用为 3 万元时，销售利润为 27 万元，代入 $y=x^{\alpha}$ 中，即 $3^{\alpha}=27$，解得 $\alpha=3$，故函数解析式为 $y=x^3$，所以当 $x=5$ 时，$y=125$.

5.某海鲜加工公司生产的一种产品当月产量在 10 t 至 25 t 时，月生产总成本 y（单位：万元）可以看成月产量 x（单位：t）的二次函数；当月产量为 10 t 时，月生产总成本为 20 万元；当月产量为 15 t 时，月生产总成本最低为 17.5 万元.

(1)写出月生产总成本 y 关于月产量 x 的函数解析式；

(2)已知该产品的销售价为 1.6 万元/t，那么月产量为多少时，可获最大利润？（当月生产的产品全部售出）

解：(1)设 $y=a(x-15)^2+17.5(a\neq 0)$，

将 $x=10$，$y=20$ 代入上式，得 $20=25a+17.5$，

解得 $a=0.1$.

所以 $y=0.1(x-15)^2+17.5(10\leqslant x\leqslant 25)$.

(2)设利润为 $Q(x)$，

则 $Q(x)=1.6x-y=1.6x-[0.1(x-15)^2+17.5]=-0.1(x-23)^2+12.9(10\leqslant x\leqslant 25)$.

当 $x=23$ 时，$Q(x)$取得最大值 12.9.

所以当月产量为 23 t 时，可获最大利润 12.9 万元.

综合性·创新提升

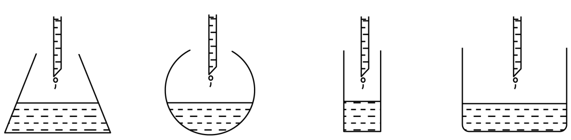
1.某地固定电话市话收费标准：前三分钟0.20 元（不满三分钟按三分钟计算），以后每增加一分钟增收 0.10 元（不满一分钟按一分钟计算），那么某人打市话 550 s，应支付电话费　　（　　）

A.1.00 元　　B.0.90 元

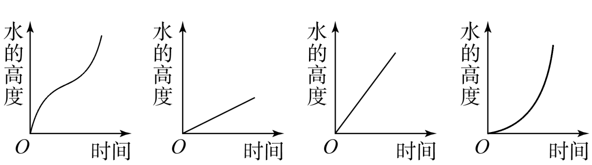
C.1.20 元　　D.0.80 元

B　**解析**：设打市话 x 分钟，应支付 y 元，则 $y=0.20+0.10\times([x]-3)$（$[x]$是不小于 x 的最小整数，$x>0$）.令$x=\dfrac{550}{60}$，故$[x]=10$，则 $y=0.90$.

2.（多选）生活经验告诉我们，当把水注进容器时（设单位时间内进水量相同），容器内水的高度会随着时间的变化而变化，则下列选项中容器与图象匹配正确的是　　（　　）



甲　　乙　　丙　　丁



①　　②　　③　　④

A.甲—③　　B.乙—①

C.丙—④　　D.丁—②

BD　**解析**：甲容器下粗上细，水高变化为逐渐变快，故甲应匹配④；乙容器为球形，水高变化为先逐渐变慢，再逐渐变快，故乙应匹配①；丙、丁容器都是柱形的，水高变化的速度都应是不变的，但丙容器细，丁容器粗，故丙容器水高变化快，丁容器水高变化慢，丙应匹配③，丁应匹配②.故正确匹配的是 BD.

3.某车间分批生产某种产品，每批产品的生产准备费用为 900 元.若每批生产 x 件，则平均仓储时间为$\dfrac{x}{4}$天，且每件产品每天的仓储费用为 1 元.为使平均到每件产品的生产准备费用与仓储费用之和最小，每批应生产产品　　（　B　）

A.30 件　　B.60 件

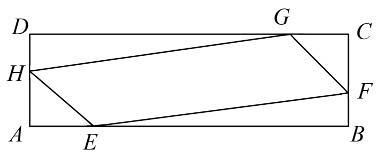
C.80 件　　D.100 件

4.某辆汽车以 x km/h（考虑到高速公路行车安全，要求 $60\leqslant x\leqslant 120$）的速度在高速公路上匀速行驶时，每小时的油耗（所需要的汽油量）为$\dfrac{1}{5}\left(x-k+\dfrac{4\ 500}{x}\right)$ L，其中 k 为常数.若汽车以 120 km/h的速度行驶，每小时的油耗为 11.5 L，则 $k=$________，欲使每小时的油耗不超过9 L，则速度 x 的取值范围为________.

100　[60,100]　**解析**：设每小时的油耗为 y，根据题意得 $y=\dfrac{1}{5}\left(x-k+\dfrac{4\ 500}{x}\right)$，则当 $x=120$ 时，$y=\dfrac{1}{5}\left(120-k+\dfrac{4\ 500}{120}\right)=11.5$，解得 $k=100$，所以 $y=\dfrac{1}{5}\left(x-100+\dfrac{4\ 500}{x}\right)$.

若 $y\leqslant 9$，即 $\frac{1}{5}\left(x-100+\frac{4\,500}{x}\right)\leqslant 9$，解得 $45\leqslant x\leqslant 100$.又因为 $60\leqslant x\leqslant 120$，所以 x 的取值范围为$[60,100]$.

5. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，已知 $AB=13$，$BC=3$，在 AB，AD，CD，CB 上分别截取 AE，AH，CG，CF，且 $AE=AH=CG=CF=x$，则当 $x=$________时，四边形$EFGH$的面积最大，最大面积为________.



3　30　**解析**：设四边形 $EFGH$ 的面积为 S，

则 $S=13\times 3-2\times\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(13-x)(3-x)\right]$

$=-2x^2+16x=-2(x-4)^2+32$，$x\in(0,3]$.

因为 $S=-2(x-4)^2+32$ 在$(0,3]$上单调递增，

所以当 $x=3$ 时，S 有最大值为 30.

6. 经研究发现，学生的注意力与老师的授课时间有关，开始授课后，学生的注意力逐渐集中，到达理想的状态后保持一段时间，随后开始逐渐分散.用 $f(x)$表示学生的注意力，x(单位：min)表示授课时间，实验结果表明 $f(x)$与 x 有如下关系：

$$f(x)=\begin{cases}5x+9,0<x<10,\\59,10\leqslant x\leqslant 16,\\-3x+107,16<x\leqslant 30.\end{cases}$$

(1)开始授课后多少分钟，学生的注意力最集中？能维持多长时间？

(2)若讲解某一道数学题需要 10 min 的时间，老师能否在学生的注意力一直不低于 55 的状态下讲解完这道题？

解：(1)由题意得，当 $0<x<10$ 时，$f(x)=5x+9$，此时函数单调递增；

当 $10\leqslant x\leqslant 16$ 时，函数 $f(x)$取得最大值，此时 $f(x)=59$；

当 $16<x\leqslant 30$ 时，$f(x)=-3x+107$，此时函数单调递减.

所以开始授课后 10 min，学生的注意力最集中，能维持 6 min.

(2)当 $0<x<10$ 时，令 $f(x)\geqslant 55$，即 $5x+9\geqslant 55$，解得$\frac{46}{5}\leqslant x<10$，达到所需注意力的时间共 $10-\frac{46}{5}=\frac{4}{5}$(min)；

当 $10\leqslant x\leqslant 16$ 时，$f(x)=59>55$，达到所需注意力的时间共 6 min；

当 $16<x\leqslant 30$ 时，令 $f(x)\geqslant 55$，即$-3x+107\geqslant 55$，解得 $16<x\leqslant\frac{52}{3}$，则达到所需注意力的时间共$\frac{52}{3}-16=\frac{4}{3}$(min).

因为$\frac{4}{5}+6+\frac{4}{3}=\frac{122}{15}<10$，所以老师不能在学生的注意力一直不低于 55 的状态下讲解完这道题.

第四章　指数函数与对数函数

4.1　指数

4.1.1　n 次方根与分数指数幂

学习任务目标

1.理解根式的概念及分数指数幂的含义.
2.会进行根式与分数指数幂的互化.
3.掌握根式的运算性质和有理数指数幂的运算性质.

问题式预习

知识清单

知识点一　n 次方根

(1)定义：一般地，如果 $x^n=a$，那么 x 叫做 a 的 n 次方根，其中 $n>1$，且 $n\in\mathbf{N}^*$.

(2)性质：

n 是奇数	$a>0$	$x>0$	x 仅有一个值，记为 $\sqrt[n]{a}$
	$a<0$	$x<0$	
n 是偶数	$a>0$	x 有两个值，且互为相反数，记为 $\pm\sqrt[n]{a}$	
	$a<0$	x 不存在	

知识点二　根式

(1)定义：式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式，这里 n 叫做根指数，a 叫做被开方数.

(2)性质：当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；

当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a, a\geqslant 0,\\ -a, a<0.\end{cases}$

知识点三　分数指数幂的意义

分数指数幂	正分数指数幂	$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*,n>1)$
	负分数指数幂	$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*,n>1)$
	0的分数指数幂	0的正分数指数幂等于0，0的负分数指数幂没有意义

知识点四　有理数指数幂的运算性质

(1)$a^ra^s=a^{r+s}(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$；

(2)$(a^r)^s=a^{rs}(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$；

(3)$(ab)^r=a^rb^r(a>0,b>0,r\in\mathbf{Q})$.

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").

(1)实数 a 的偶次方根有两个.　(　　)

×　**解析**：当 $a<0$ 时，没有偶次方根.

(2)0的任何次幂都等于0.　(　　)

×　**解析**：0的0次幂与负实数次幂都没有意义.

(3)$a^{\frac{m}{n}}$ 就是 $\dfrac{m}{n}$ 个 a 相乘.　(　　)

×　**解析**：$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$，不是 $\dfrac{m}{n}$ 个 a 相乘.

(4)$(-2)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[6]{(-2)^2}$.　(　×　)

2.计算：$4^{\frac{1}{2}}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}=$　(　C　)

A.-2　　B.-1　　C.0　　D.1

3.请思考并回答下列问题：

(1)任意实数 a 是否都存在 n 次方根？

提示：不一定.当 n 为奇数时，任意实数 a 都存在 n 次方根，但当 n 为偶数时，a 不一定存在 n 次方根，因为当 $a<0$ 时，a 没有 n 次方根，只有当 $a\geqslant 0$ 时，a 才有 n 次方根.

(2)$(-4)^{\frac{2}{4}}$ 与 $(-4)^{\frac{1}{2}}$ 相等吗？为什么？

提示：不相等.$(-4)^{\frac{2}{4}}=\sqrt[4]{(-4)^2}=[(-4)^2]^{\frac{1}{4}}=2$，而 $(-4)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-4}$ 在实数范围内无意义.

(3)$(\sqrt[n]{a})^n$ 中实数 a 的取值范围是任意实数吗？

提示：不一定，当 n 为大于1的奇数时，$a\in\mathbf{R}$；当 n 为大于1的偶数时，$a\geqslant 0$.

任务型课堂

学习任务一　根式的概念及运算

1. 填空：

(1)16 的平方根为$\underline{\pm 4}$，-27 的 3 次方根为$\underline{-3}$；

(2)已知 $x^7=6$，则 $x=\underline{\sqrt[7]{6}}$；

(3)若 $\sqrt[4]{x-2}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是$\underline{[2,+\infty)}$.

2. 化简：

(1)$\sqrt[5]{(-2)^5}+(\sqrt[5]{-2})^5$；

(2)$\sqrt{(\pi-4)^2}+\sqrt[3]{(\pi-4)^3}$；

(3)$\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+6x+9}$ $(x\leqslant-3)$.

解：(1)原式$=(-2)+(-2)=-4$.

(2)原式$=|\pi-4|+\pi-4=4-\pi+\pi-4=0$.

(3)原式$=\sqrt{(x-1)^2}-\sqrt{(x+3)^2}=|x-1|-|x+3|$.因为 $x\leqslant-3$，所以 $x-1<0$，$x+3\leqslant0$，

所以原式$=-(x-1)+(x+3)=4$.

[一题多思]

思考 1. 本题(1)若改为“$\sqrt[6]{(-2)^6}+(\sqrt[6]{2})^6$”，化简结果与原题相同吗？

提示：不同.$\sqrt[6]{(-2)^6}+(\sqrt[6]{2})^6=|-2|+2=2+2=4$.

思考 2. 本题(3)若把“$x\leqslant-3$”改为“$-3<x<3$”，化简结果会发生怎样的变化？

提示：$\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+6x+9}=\sqrt{(x-1)^2}-\sqrt{(x+3)^2}=|x-1|-|x+3|$，

因为 $-3<x<3$，所以当 $-3<x<1$ 时，

原式$=-(x-1)-(x+3)=-2x-2$；

当 $1\leqslant x<3$ 时，原式$=(x-1)-(x+3)=-4$.

所以原式$=\begin{cases}-2x-2, & -3<x<1,\\ -4, & 1\leqslant x<3.\end{cases}$

反思提炼

根式化简与求值的思路及注意点

思路：首先要分清根式为奇次根式还是偶次根式，然后运用根式的性质进行化简.

注意点：①正确区分$(\sqrt[n]{a})^n$ 与 $\sqrt[n]{a^n}$ 两式；

②运算时注意变式、整体代换，以及平方差、立方差、完全平方、完全立方公式的运用，必要时要进行分类讨论.

学习任务二　根式与分数指数幂的互化

例 1　用分数指数幂表示下列各式$(a>0,b>0)$：

(1)$a^2\sqrt{a}$；(2)$\sqrt{a\sqrt{a}}$；

(3)$\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a^3}$；(4)$(\sqrt[3]{a})^2\cdot\sqrt{ab^3}$；

(5)$\sqrt[4]{b^{-\frac{2}{3}}}$；(6)$\dfrac{1}{\sqrt[4]{(a^3+b^3)^2}}$.

解：(1)原式$=a^2a^{\frac{1}{2}}=a^{2+\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{2}}$.

(2)原式$=\sqrt{a\cdot a^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}=a^{\frac{3}{4}}$.

(3)原式$=a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}=a^{\frac{13}{6}}$.

(4)原式$=(a^{\frac{1}{3}})^2\cdot(ab^3)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}$
$=a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{3}{2}}$.

(5)原式$=b^{\frac{-\frac{2}{3}}{4}}=b^{-\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}}=b^{-\frac{1}{6}}$.

(6)原式$=[(a^3+b^3)^2]^{-\frac{1}{4}}=(a^3+b^3)^{2\times\left(-\frac{1}{4}\right)}=(a^3+b^3)^{-\frac{1}{2}}$.

反思提炼

根式与分数指数幂互化的规律

(1)根指数$\xrightarrow{\text{化为}}$分数指数的分母，被开方数(式)的指数$\xrightarrow{\text{化为}}$分数指数的分子.

(2)在具体计算时，通常会把根式转化成分数指数幂的形式，然后利用有理数指数幂的运算性质解题.

探究训练

用分数指数幂表示下列各式$(a>0,b>0)$：

(1)$\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$；(2)$\sqrt[4]{\dfrac{b^3}{a^2}}$；(3)$a^3\cdot\sqrt[3]{a^2}$.

解：(1)$\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}=\dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}}=a^{-\frac{2}{3}}$.

(2)$\sqrt[4]{\dfrac{b^3}{a^2}}=\left(\dfrac{b^3}{a^2}\right)^{\frac{1}{4}}=b^{\frac{3}{4}}a^{-\frac{2}{4}}=a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}$.

(3)$a^3\cdot\sqrt[3]{a^2}=a^3\cdot a^{\frac{2}{3}}=a^{3+\frac{2}{3}}=a^{\frac{11}{3}}$.

学习任务三　分数指数幂的运算

例2　计算下列各式：

(1) $2\sqrt{3}\times\sqrt[3]{1.5}\times\sqrt[6]{12}$；

(2) $\left(2\dfrac{7}{9}\right)^{0.5}+0.1^{-2}+\left(2\dfrac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}-3\pi^{0}+\dfrac{37}{48}$；

(3) $\dfrac{(3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{4}})\times(-8a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}})}{-4\sqrt[6]{a^{4}}\cdot\sqrt{b^{3}}}(a>0,b>0)$；

(4) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{(\sqrt{4ab^{-1}})^{3}}{0.1^{-2}(a^{3}b^{-3})^{\frac{1}{2}}}(a>0,b>0)$.

解：(1)原式$=2\times3^{\frac{1}{2}}\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\times12^{\frac{1}{6}}=2^{1+\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=2\times3=6$.

(2)原式$=\left(\dfrac{25}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\dfrac{1}{10}\right)^{-2}+\left(\dfrac{64}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}-3\times1+\dfrac{37}{48}=\dfrac{5}{3}+100+\dfrac{9}{16}-3+\dfrac{37}{48}=100$.

(3)原式$=\dfrac{(-24)\times a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}}{(-4)\times a^{\frac{2}{3}}\times b^{\frac{3}{2}}}=6\times a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}\times b^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}=6a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{4}}$.

(4)原式$=4^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{4^{\frac{3}{2}}\cdot a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{-\frac{3}{2}}}{100\times a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{-\frac{3}{2}}}=\dfrac{2\times8}{100}=\dfrac{4}{25}$.

反思提炼

分数指数幂运算的常用技巧

(1)有括号先算括号里的，无括号先进行指数运算.
(2)负指数幂化为正指数幂的倒数.
(3)底数是小数的，化成分数，底数是带分数的，化成假分数，便于用有理数指数幂的运算性质进行运算.

探究训练

计算：

(1) $\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-(-2)^{0}-\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}$；

(2) $2x^{\frac{1}{4}}(-3x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{3}})\div(-6x^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{4}{3}})(x>0,y>0)$；

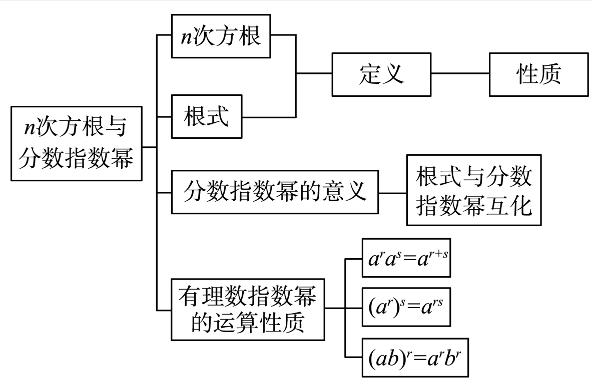
(3) $\dfrac{\sqrt{a^{3}b^{2}\sqrt[3]{ab^{2}}}}{(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}})^{4}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}}(a>0,b>0)$.

解：(1)原式$=\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}-1-\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^{3}\right]^{-\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2}=\dfrac{3}{2}-1-\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9}=\dfrac{1}{2}$.

(2)原式$=[2\times(-3)\div(-6)]x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}=x^{2}y$.

(3)原式$=\dfrac{[a^{3}b^{2}(ab^{2})^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{2}}}{(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}})^{4}\cdot\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{a^{3\times\frac{1}{2}}b^{2\times\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}b^{2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}\times4}b^{\frac{1}{2}\times4}b^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{1}{3}}}=\dfrac{a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{7}{3}}}=ab^{-1}$.

体系构建



课后素养评价(二十六)

基础性·能力运用

1. 若 $a=\sqrt[3]{(3-\pi)^{3}}$，$b=\sqrt[4]{(2-\pi)^{4}}$，则 $a+b$ 的值为（　　）

A.1　　B.5

C.-1　　D.$2\pi-5$

A　**解析**：$a=\sqrt[3]{(3-\pi)^{3}}=3-\pi$，$b=\sqrt[4]{(2-\pi)^{4}}=\pi-2$，所以 $a+b=3-\pi+\pi-2=1$.

2. 化简 $\sqrt[3]{-a}\cdot\sqrt[6]{a}$ 的结果为（　　）

A.$-\sqrt{a}$　　B.$-\sqrt{-a}$

C.$\sqrt{-a}$　　D.$\sqrt{a}$

A　**解析**：显然 $a\geqslant0$，所以 $\sqrt[3]{-a}\cdot\sqrt[6]{a}=-a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{6}}=-a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=-a^{\frac{1}{2}}=-\sqrt{a}$.

3. (多选)下列运算中，一定正确的是（　　）

A.$a^{3}\cdot a^{4}=a^{7}$　　B.$(-a^{2})^{3}=a^{6}$

C.$\sqrt[8]{a^{8}}=a$　　D.$\sqrt[5]{(-\pi)^{5}}=-\pi$

AD　**解析**：对于A，$a^{3}\cdot a^{4}=a^{3+4}=a^{7}$，正确；对于B，$(-a^{2})^{3}=-a^{6}$，错误；对于C，当 $a\geqslant0$ 时，$\sqrt[8]{a^{8}}=a$，当 $a<0$ 时，$\sqrt[8]{a^{8}}=-a$，错误；对于D，$\sqrt[5]{(-\pi)^{5}}=-\pi$，正确.

4. 计算：$2^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{(-4)^{0}}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}-\sqrt{(1-\sqrt{5})^{0}}\cdot8^{\frac{2}{3}}=$ ________.

$2\sqrt{2}-3$　**解析**:原式$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+(\sqrt{2}+1)-(2^{3})^{\frac{2}{3}}$

$=2\sqrt{2}+1-4=2\sqrt{2}-3$.

5. $\frac{(a^{\frac{2}{3}}b^{-1})^{-\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{ab^{5}}}=$________$(a>0,b>0)$.

$\frac{1}{a}$　**解析**:原式$=\frac{a^{\frac{2}{3}\times(-\frac{1}{2})}b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}}=$

$\frac{a^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}}=\frac{a^{-\frac{5}{6}}b^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}}=a^{-\frac{5}{6}-\frac{1}{6}}=a^{-1}=\frac{1}{a}$.

6. 设 $f(x)=\sqrt{x^{2}-4}$,若 $0<a\leqslant1$,求 $f\left(a+\frac{1}{a}\right)$.

解:$f\left(a+\frac{1}{a}\right)=\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^{2}-4}=\sqrt{a^{2}+\frac{1}{a^{2}}-2}=$

$\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^{2}}=\left|a-\frac{1}{a}\right|$.

因为 $0<a\leqslant1$,所以 $a\leqslant\frac{1}{a}$,

故 $f\left(a+\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}-a$.

综合性·创新提升

1. 若 $\sqrt[n]{a^{n}}+(\sqrt[n+1]{a})^{n+1}=0$,$a\neq0$,且 $n\in\mathbf{N}^{*}$,则　(　　)

A. $a>0$,且 n 为偶数

B. $a<0$,且 n 为偶数

C. $a>0$,且 n 为奇数

D. $a<0$,且 n 为奇数

B　**解析**:由题意可得$(\sqrt[n+1]{a})^{n+1}=a$,$\sqrt[n]{a^{n}}=-a$,故 n 为偶数且 $a<0$.

2. 把$\sqrt[3]{-2\sqrt{2}}$化为分数指数幂的形式是　(　　)

A. $2^{\frac{1}{2}}$　　B. $-2^{\frac{1}{2}}$

C. $2^{-\frac{1}{2}}$　　D. $-2^{-\frac{1}{2}}$

B　**解析**:$\sqrt[3]{-2\sqrt{2}}=(-2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}=(-2\times2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=(-2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}=-2^{\frac{1}{2}}$.

3. (多选)下列根式与分数指数幂的互化正确的是　(　　)

A. $-\sqrt[4]{x}=(-x)^{\frac{1}{4}}$

B. $\sqrt[4]{y^{2}}=y^{\frac{1}{2}}(y>0)$

C. $x^{-\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{x}\right)^{3}}(x>0)$

D. $[\sqrt[3]{(-x)^{2}}]^{\frac{3}{4}}=x^{\frac{1}{2}}(x>0)$

BCD　**解析**:$-\sqrt[4]{x}=-x^{\frac{1}{4}}(x\geqslant0)$,而$(-x)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{-x}(x\leqslant0)$,A 项错误;$\sqrt[4]{y^{2}}=y^{\frac{1}{2}}(y>0)$,B 项正确;$x^{-\frac{3}{4}}=\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{x}\right)^{3}}(x>0)$,C 项正确;$[\sqrt[3]{(-x)^{2}}]^{\frac{3}{4}}=x^{2\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}}=x^{\frac{1}{2}}(x>0)$,D 项正确.

4. 若$(1-2x)^{-\frac{3}{4}}$有意义,则 x 的取值范围为________.

$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$　**解析**:将分数指数幂化为根式,可知需满足 $1-2x>0$,解得 $x<\frac{1}{2}$.

5. 已知$\sqrt[4]{(a-1)^{4}}+1=a$,则$\sqrt{(a-1)^{2}}+\sqrt{(1-a)^{2}}+\sqrt[3]{(1-a)^{3}}=$________.

$a-1$　**解析**:由$\sqrt[4]{(a-1)^{4}}+1=a$,

即$|a-1|=a-1$,知 $a\geqslant1$.

所以原式$=(a-1)+(a-1)+(1-a)=a-1$.

6. 化简与计算.

(1)$(m^{\frac{1}{4}}n^{-\frac{3}{8}})^{8}(m>0,n>0)$;

(2)$8^{\frac{2}{3}}-(0.5)^{-3}+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-6}\times\left(\frac{81}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

解:(1)$(m^{\frac{1}{4}}n^{-\frac{3}{8}})^{8}=(m^{\frac{1}{4}})^{8}(n^{-\frac{3}{8}})^{8}=m^{2}n^{-3}=\frac{m^{2}}{n^{3}}$.

(2)$8^{\frac{2}{3}}-(0.5)^{-3}+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-6}\times\left(\frac{81}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$

$=(2^{3})^{\frac{2}{3}}-(2^{-1})^{-3}+(3^{-\frac{1}{2}})^{-6}\times\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{4}\right]^{-\frac{3}{4}}$

$=2^{2}-2^{3}+3^{3}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

$=4-8+27\times\frac{8}{27}$

$=4$.

4.1.2　无理数指数幂及其运算性质

学习任务目标

1.了解幂指数由有理数扩充到无理数的过程.

2.能进行实数指数幂的运算.

问题式预习

知识清单

知识点　无理数指数幂及实数指数幂的运算性质

一般地，无理数指数幂 a^{α}（$a>0$，α 为无理数）是一个确定的<u>实数</u>.整数指数幂的运算性质也适用于实数指数幂，即对于任意实数 r，s，均有下面的运算性质.

(1)$a^{r}a^{s}=a^{r+s}$（$a>0$，r，$s\in\mathbf{R}$）；

(2)$(a^{r})^{s}=\underline{a^{rs}}$（$a>0$，$r$，$s\in\mathbf{R}$）；

(3)$(ab)^{r}=\underline{a^{r}b^{r}}$（$a>0$，$b>0$，$r\in\mathbf{R}$）.

概念辨析

1.判断正误（正确的打"√"，错误的打"×"）.

(1)α，β 是实数，当 $a>0$ 时，$(a^{\alpha})^{\beta}=(a^{\beta})^{\alpha}$.　（ √ ）

(2)当 $a>0$，$b>0$ 时，$(a^{\frac{\pi}{2}}+b^{\frac{\pi}{2}})(a^{\frac{\pi}{2}}-b^{\frac{\pi}{2}})=a^{\pi}-b^{\pi}$.　（ √ ）

(3)当 $a>0$ 时，$(a-a^{-1})^{2}=(a+a^{-1})^{2}-2$.　（ × ）

(4)$(a^{\sqrt{2}})^{2}=a^{2}$.　（ × ）

(5)$(3^{-2})^{\frac{1}{2}}\times(\sqrt{3})^{-2}=\frac{1}{9}$.　（ √ ）

2.填空：

(1)$(3^{-\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}=\underline{\frac{1}{27}}$.

(2)已知 $5^{\alpha}=3$，$5^{\beta}=2$，则

①$5^{\alpha+\beta}=\underline{6}$；②$5^{\alpha-\beta}=\underline{\frac{3}{2}}$；

③$5^{-3\alpha}=\underline{\frac{1}{27}}$；④$5^{\frac{\alpha}{2}}=\underline{\sqrt{3}}$.

3.请思考并回答下列问题：

(1)"因为 $\sqrt{2}$ 是无限不循环小数，所以 $(\pi-1)^{\sqrt{2}}$ 是一个不确定的数"正确吗？

提示：不正确.

(2)除了以上运算性质，实数指数幂的运算还有哪些常用性质？

提示：实数指数幂的运算还有如下两个常用性质：

$a^{r}\div a^{s}=a^{r-s}$（$a>0$，r，$s\in\mathbf{R}$）；

$\left(\frac{a}{b}\right)^{r}=\frac{a^{r}}{b^{r}}$（$a>0$，$b>0$，$r\in\mathbf{R}$）.

任务型课堂

学习任务一　无理数指数幂的运算

计算下列各式：

(1)$(\sqrt{8^{\sqrt{3}}}\times\sqrt[3]{3^{\sqrt{3}}})^{2\sqrt{3}}$；(2)$a^{\frac{\pi}{6}}a^{\frac{7\pi}{6}}a^{-\frac{4\pi}{3}}$（$a>0$）；

(3)$\left(\frac{\pi^{\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{\pi^{\sqrt{3}}}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

解：(1)原式$=(2^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\times3^{\frac{\sqrt{3}}{3}})^{2\sqrt{3}}=2^{9}\times3^{2}=4\ 608$.

(2)原式$=a^{\frac{\pi}{6}+\frac{7\pi}{6}-\frac{4\pi}{3}}=a^{0}=1$.

(3)原式$=\left(\frac{\pi^{\sqrt{3}}}{\pi^{\frac{\sqrt{3}}{3}}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=(\pi^{\frac{2\sqrt{3}}{3}})^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\pi$.

反思提炼

无理数指数幂的运算方法

(1)底数相同时，直接对指数上的无理数进行加减运算；

(2)若式子中含有根式，则先化为分数指数幂再进行运算，一般指数中的根式可以保留.

学习任务二　实数指数幂的化简与求值

例　已知 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$，则 $x^2+x^{-2}=$________.

7　**解析**：将 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$ 两边平方得 $x+x^{-1}+2=5$，则 $x+x^{-1}=3$.将 $x+x^{-1}=3$ 两边平方得 $x^2+x^{-2}+2=9$，所以 $x^2+x^{-2}=7$.

[一题多思]

思考1. 本例中，若已知 $x+x^{-1}=3$，如何求 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$ 的值？

提示：可设 $m=x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$，两边平方后整理得 $m^2=x+x^{-1}+2$，代入 $x+x^{-1}$ 的值即可求得 $m^2=5$.

因为 $m>0$，所以 $m=\sqrt{5}$，即 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$.

思考2. 本例中条件不变，如何求 x^2-x^{-2} 的值？

提示：将 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$ 两边平方得 $x+x^{-1}+2=5$，则 $x+x^{-1}=3$，将 $x+x^{-1}=3$ 两边平方得 $x^2+x^{-2}+2=9$，所以 $x^2+x^{-2}=7$.因为 $(x^2-x^{-2})^2=(x^2+x^{-2})^2-4=49-4=45$，所以 $x^2-x^{-2}=\pm3\sqrt{5}$.

思考3. 本例中，若把条件变为“$x+x^{-1}=7$”，你能求出 x^3+x^{-3} 的值吗？

提示：由 $x+x^{-1}=7$ 两边平方后整理可得 $x^2+x^{-2}=47$，

所以 $x^3+x^{-3}=(x+x^{-1})(x^2+x^{-2}-1)=7\times46=322$.

反思提炼

利用整体代换法求值的关键

(1)整体代换法是数学变形与计算常用的技巧方法，分析观察条件与结论的结构特点，灵活运用恒等式是关键；

(2)利用整体代换法解决分数指数幂的计算问题，常常运用完全平方公式及其变形.

探究训练

1. 已知 $a^m=4$，$a^n=3$，则 $\sqrt{a^{m-2n}}$ 的值为　(　　)

A.$\frac{2}{3}$　　B.6　　C.$\frac{3}{2}$　　D.2

A　**解析**：$\sqrt{a^{m-2n}}=\sqrt{\frac{a^m}{a^{2n}}}=\sqrt{\frac{4}{3^2}}=\frac{2}{3}$.

2. 已知 $x+y=12$，$xy=9$，且 $x<y$，求 $\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$ 的值.

解：$\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}=\frac{(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})^2}{(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})}$

$=\frac{(x+y)-2(xy)^{\frac{1}{2}}}{x-y}$①.

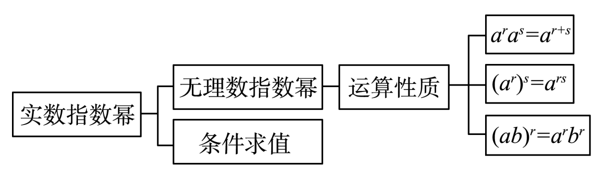
因为 $x+y=12$，$xy=9$②，

所以 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=12^2-4\times9=108$.

因为 $x<y$，所以 $x-y=-6\sqrt{3}$③.

将②③代入①得 $\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}=\frac{12-2\times9^{\frac{1}{2}}}{-6\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

体系构建



课后素养评价(二十七)

基础性·能力运用

1. 下列等式正确的是　(　　)

A.$a^{2\sqrt{2}}a^{3\sqrt{2}}=a^{6\sqrt{2}}$

B.$(-a^2)^3=(-a^3)^2$

C.$(\sqrt{a}-2)^0=1$

D.$(-a^{2\sqrt{2}})^5=-a^{10\sqrt{2}}$

D　**解析**：$a^{2\sqrt{2}}a^{3\sqrt{2}}=a^{5\sqrt{2}}$，故A错误；$(-a^2)^3=-a^{2\times3}=-a^6$，$(-a^3)^2=a^6$，故B错误；当 $a=4$ 时，$(\sqrt{a}-2)^0$ 无意义，故C错误；$(-a^{2\sqrt{2}})^5=-a^{10\sqrt{2}}$，故D正确.

2. 已知 $m>0$，则 $\sqrt{m^{\frac{1}{2}}\sqrt{m^{\frac{5}{2}}\sqrt{m}}}$ 可化为　(　　)

A.$m^{\frac{5}{4}}$　　B.$m^{\frac{5}{2}}$　　C.m　　D.1

C　**解析**：因为 $m>0$，所以原式 $=[(m^{\frac{5}{2}}\cdot m^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\cdot m^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}=(m^{\frac{3}{2}}\cdot m^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=m$.

3. 若 $3^a\cdot9^b=\frac{1}{3}$，则下列等式正确的是　(　　)

A.$a+b=-1$　　B.$a+b=1$

C.$a+2b=-1$　　D.$a+2b=1$

C　**解析**：因为 $3^a\cdot9^b=3^a\cdot3^{2b}=3^{a+2b}=\frac{1}{3}=3^{-1}$，所以 $a+2b=-1$.

4. 已知 $a+\frac{1}{a}=4$，则 $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=$　(　　)

A.2　　B.$\sqrt{2}$　　C.$-\sqrt{2}$　　D.$\pm\sqrt{2}$

D　**解析**：因为 $a+\frac{1}{a}=4$，所以 $(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2=a+$

$\frac{1}{a}-2=4-2=2$,所以 $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{2}$.

5. 计算:$\frac{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\times\sqrt{2^{\sqrt{2}}}}{\sqrt[3]{8^{\sqrt{2}}}}=$________.

1　**解析**:$\frac{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\times\sqrt{2^{\sqrt{2}}}}{\sqrt[3]{8^{\sqrt{2}}}}=\frac{2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{8^{\frac{\sqrt{2}}{3}}}=\frac{2^{\sqrt{2}}}{(2^3)^{\frac{\sqrt{2}}{3}}}=\frac{2^{\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}}}=1$.

6. 若 $10^x=3^{-\frac{1}{8}}$,$10^y=\sqrt[4]{27}$,则 $10^{2x-y}=$________.

$\frac{1}{3}$　**解析**:$10^{2x-y}=(10^x)^2\div 10^y=(3^{-\frac{1}{8}})^2\div\sqrt[4]{27}=3^{-\frac{1}{4}}\div 3^{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$.

综合性·创新提升

1. 已知 $ab=-5$,则 $a\sqrt{-\frac{b}{a}}+b\sqrt{-\frac{a}{b}}$ 的值是　(　　)

A. $2\sqrt{5}$

B. 0

C. $-2\sqrt{5}$

D. $\pm2\sqrt{5}$

B　**解析**:由题易知 $ab<0$,

$a\sqrt{-\frac{b}{a}}+b\sqrt{-\frac{a}{b}}$

$=a\sqrt{-\frac{ab}{a^2}}+b\sqrt{-\frac{ab}{b^2}}$

$=a\sqrt{\frac{5}{a^2}}+b\sqrt{\frac{5}{b^2}}$

$=a\frac{\sqrt{5}}{|a|}+b\frac{\sqrt{5}}{|b|}=0$.

2. 若 $0<a<1$,$b>0$,且 $a^b-a^{-b}=-2$,则 a^b+a^{-b} 的值为　(　　)

A. $2\sqrt{2}$　B. $\pm2\sqrt{2}$　C. $-2\sqrt{2}$　D. $\sqrt{6}$

A　**解析**:$(a^b+a^{-b})^2=(a^b-a^{-b})^2+4a^ba^{-b}=8$,又 $0<a<1$,$b>0$,所以 $a^b+a^{-b}>0$,则 $a^b+a^{-b}=2\sqrt{2}$.

3. $1.5^{-\frac{1}{3}}\times\left(-\frac{7}{6}\right)^0+2^{\frac{\pi}{4}}\times2^{1-\frac{\pi}{4}}+(\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3})^6-\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}}=$________.

110　**解析**:由指数幂的运算法则及根式意义可知,$1.5^{-\frac{1}{3}}\times\left(-\frac{7}{6}\right)^0+2^{\frac{\pi}{4}}\times2^{1-\frac{\pi}{4}}+(\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3})^6-\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}}$

$=\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}+2+2^2\times3^3-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}+2+4\times27-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}=110$.

4. 设 α,β 是方程 $5x^2+10x+1=0$ 的两个根,则 $2^\alpha\cdot2^\beta=$________,$(2^\alpha)^\beta=$________.

$\frac{1}{4}$　$2^{\frac{1}{5}}$　**解析**:利用一元二次方程根与系数的关系,

得 $\alpha+\beta=-2$,$\alpha\beta=\frac{1}{5}$,

则 $2^\alpha\cdot2^\beta=2^{\alpha+\beta}=2^{-2}=\frac{1}{4}$,$(2^\alpha)^\beta=2^{\alpha\beta}=2^{\frac{1}{5}}$.

5. (1)计算:$\frac{1}{\sqrt{2}-1}+(3-2\sqrt{2})^0-\left(\frac{9}{4}\right)^{-0.5}+\sqrt[4]{(\sqrt{2}-\pi)^4}$;

(2)设 $a>0$,化简:$\frac{\sqrt[3]{a^4\cdot\sqrt{a^{-3}}}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^4}a^4}}$;

(3)若 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$,求 $\frac{x+x^{-1}-1}{x^2+x^{-2}-2}$ 的值.

解:(1)原式 $=\sqrt{2}+1+1-\frac{2}{3}+\pi-\sqrt{2}=\pi+\frac{4}{3}$.

(2)原式 $=\frac{a^{\frac{4}{3}}a^{-\frac{1}{2}}}{a^{\frac{2}{3}}a^2}=a^{-\frac{11}{6}}$.

(3)若 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$,

则 $x+x^{-1}=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2-2=4$,$x^2+x^{-2}=(x+x^{-1})^2-2=14$.

故 $\frac{x+x^{-1}-1}{x^2+x^{-2}-2}=\frac{4-1}{14-2}=\frac{1}{4}$.

4.2　指数函数

4.2.1　指数函数的概念

学习任务目标

1.理解指数函数的概念.
2.了解指数函数中底数的限制条件的合理性.
3.会解决简单的指数增长问题.

问题式预习

知识清单

知识点一　指数函数的概念

一般地,函数 $y=a^x$($a>0$,且 $a\neq1$)叫做指数函数,其中指数 x 是自变量,定义域是 $\mathbf{R}$.

知识点二　指数增长模型

在实际问题中,经常会遇到指数增长模型:设原有量为 N,每次的增长率为 p,经过 x 次增长,该量增长到 y,则 $y=N(1+p)^x$($x\in\mathbf{N}$).形如 $y=ka^x$($k\in\mathbf{R}$,且 $k\neq0$;$a>0$,且 $a\neq1$)的函数是刻画指数增长或指数衰减变化规律的非常有用的函数模型.

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)$y=x^5$($x>0$,且 $x\neq1$)是指数函数.　(　　)

×　**解析**:$y=x^5$ 是幂函数.

(2)$y=(-2)^x$ 是指数函数.　(　　)

×　**解析**:指数函数的底数不能为负数.

(3)指数函数的定义域为$(0,+\infty)$.　(　　)

×　**解析**:指数函数的定义域为 $\mathbf{R}$.

(4)$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 是指数衰减型函数模型.　(　√　)

2.某工厂生产某种产品的月产量 y(单位:万件)与月份 x 之间的关系为 $y=a\left(\dfrac{3}{2}\right)^x+b$.现已知该工厂今年1月份、2月份分别生产该产品3万件、5万件,则此工厂3月份生产该产品________万件.

8　**解析**:由已知得 $\begin{cases}\dfrac{3}{2}a+b=3,\\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^2a+b=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\dfrac{8}{3},\\ b=-1.\end{cases}$ 所以 $y=\dfrac{8}{3}\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^x-1$.当 $x=3$ 时,$y=8$.

3.请思考并回答下列问题:

(1)如果原有量为 N,每次衰减率为 p,经过 x 次衰减,该量衰减到 y,那么 y 的表达式是怎样的?

提示:$y=N(1-p)^x$.

(2)将一张报纸连续对折,折叠次数 x 与对应的层数 y 之间存在什么关系?折叠后的面积 S(设原面积为1)与折叠的次数有怎样的关系?

提示:$y=2^x$($x\in\mathbf{N}^*$),$S=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$($x\in\mathbf{N}^*$).

任务型课堂

学习任务一　指数函数的概念

1.下列函数:①$y=2\times3^x$,②$y=3^{x+1}$,③$y=3^x$,④$y=x^3$中,指数函数的个数是　(　　)

A.0　　B.1
C.2　　D.3

B　**解析**:①中,3^x 的系数是2,故①不是指数函数;②中,$y=3^{x+1}$的指数是 $x+1$,故②不是指数函数;③中,$y=3^x$ 是指数函数;④中,底数 x 为自变量,指数为常数,故④不是指数函数.所以指数函数的个数是1.

2.若函数 $y=(a-2)^2a^x$ 是指数函数,则（　　）

A.$a=1$ 或 $a=3$　　B.$a=1$

C.$a=3$　　D.$a>0$ 且 $a\neq1$

C　**解析**:由指数函数的定义知 $\begin{cases}(a-2)^2=1,\\a>0,且\ a\neq1,\end{cases}$ 解得 $a=3$.

3.若函数 $y=(2a-1)^x$(x 是自变量)是指数函数,则实数 a 的取值范围是（　　）

A.$(0,1)\cup(1,+\infty)$

B.$[0,1)\cup(1,+\infty)$

C.$\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$

D.$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

C　**解析**:依题意得 $2a-1>0$,且 $2a-1\neq1$,解得 $a>\frac{1}{2}$,且 $a\neq1$,即实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$.

[一题多思]

思考1.指数函数的解析式具有怎样的结构特征?

提示:指数函数解析式的三个特征:

(1)底数 a 为大于0且不等于1的常数;

(2)指数位置是自变量 x;

(3)a^x 的系数是1.

思考2.从解析式看,指数函数和幂函数的区别是什么?

提示:两者虽然都是幂的形式,但指数函数的自变量在指数位置,而幂函数的自变量在底数位置.

思考3.函数 $y=4^{2x}$ 是指数函数吗?

提示:是.函数 $y=4^{2x}=16^x$ 是指数函数.

反思提炼

判断一个函数是否为指数函数的方法

(1)底数 a 是否满足 $a>0$,且 $a\neq1$.

(2)指数位置是否为自变量 x.

(3)a^x 的系数是否为1.

学习任务二　指数函数解析式的应用

例1　若指数函数 $f(x)$ 的图象过点 $\left(-2,\frac{1}{9}\right)$,则 $f(3)=$________.

27　**解析**:设指数函数 $f(x)=a^x$($a>0$,且 $a\neq1$),因为其图象经过点 $\left(-2,\frac{1}{9}\right)$,所以 $a^{-2}=\frac{1}{9}$,解得 $a=3$.所以 $f(x)=3^x$,则 $f(3)=3^3=27$.

反思提炼

(1)求指数函数的解析式时,一般采用待定系数法,即先设出函数的解析式,然后利用已知条件,求出解析式中的参数,从而得到函数的解析式.掌握指数函数的概念是解决这类问题的关键.

(2)求指数函数的函数值的关键是求出指数函数的解析式.

探究训练

若指数函数 $f(x)$ 满足 $f(2)-f(1)=6$,则 $f(2)=$________.

9　**解析**:设指数函数 $f(x)=a^x$($a>0$,且 $a\neq1$),由 $f(2)-f(1)=6$,得 $a^2-a=6$,解得 $a=3$ 或 $a=-2$(舍去),所以 $f(x)=3^x$,则 $f(2)=3^2=9$.

学习任务三　指数增长模型

例2　据不完全统计,某地在2017年到2022年间,患呼吸道疾病的人数平均每年上升2%.按这个增长率进行研究,设从2017年开始经过 x($x\in\mathbf{N}^*$)年,患呼吸道疾病的人数为 y,若2022年患呼吸道疾病的人数为11万.(参考数据:$1.02^3\approx1.06$,$1.02^5\approx1.1$)

(1)试计算出2017年患呼吸道疾病的人数;

(2)写出 x,y 之间的关系式,并计算2025年患呼吸道疾病的人数.

解:(1)设2017年患呼吸道疾病的人数为 a 万,

则 $a(1+2\%)^5=11$,即 $a\times1.02^5=11$.

所以 $a=\frac{11}{1.02^5}\approx10$.

所以2017年患呼吸道疾病的人数约为10万.

(2)经过1年,患呼吸道疾病的人数为 $10+10\times2\%=10(1+2\%)$,

经过2年,患呼吸道疾病的人数为 $10(1+2\%)+10(1+2\%)\times2\%=10(1+2\%)^2$,

经过3年,患呼吸道疾病的人数为 $10(1+2\%)^2+10(1+2\%)^2\times2\%=10(1+2\%)^3$,

……

经过 x 年,患呼吸道疾病的人数为 $10(1+2\%)^x$.

故 $y=10(1+2\%)^x=10\times1.02^x$($x\in\mathbf{N}^*$).

在2025年,$x=8$,故患呼吸道疾病人数 $y=10\times$

$1.02^8=10\times1.02^5\times1.02^3\approx10\times1.1\times1.06=11.66$(万).
所以 2025 年患呼吸道疾病的人数约为 11.66 万.

反思提炼

函数 $y=ka^x$ 在实际问题中的应用

(1)函数 $y=ka^x$ 是用来刻画指数增长或指数衰减变化规律的非常有用的函数模型,一般当 $k>0$ 时,若 $a>1$,则刻画指数增长变化规律,若 $0<a<1$,则刻画指数衰减变化规律.

(2)解决此类问题可先利用待定系数法,根据条件求出解析式后,利用指数运算解题.

探究训练

某地区植树造林,森林面积在 20 年内增加了 5%.若按此规律,设 2024 年的森林面积为 m,从 2024 年起,经过 x 年后森林面积 y 与 x 的函数关系式为(　　)

A.$y=\dfrac{1.05mx}{20}$

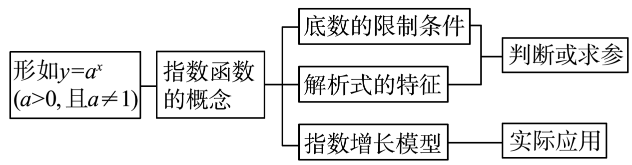
B.$y=\left(1-\dfrac{0.05x}{20}\right)m$

C.$y=m(1+5\%)^{\frac{x}{20}}$

D.$y=[1+(5\%)^x]m$

C　**解析**:设平均每年增加 $a\%$,则 $(1+a\%)^{20}=1+5\%$,所以 $1+a\%=(1+5\%)^{\frac{1}{20}}$.可知,经过 x 年后森林面积 y 与 x 的函数关系式为 $y=m(1+5\%)^{\frac{x}{20}}$.

体系构建



课后素养评价(二十八)

基础性·能力运用

1.下列函数是指数函数的是(　　)

A.$y=\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^x$　　B.$y=(-8)^x$

C.$y=2^{x-1}$　　D.$y=x^2$

A　**解析**:对于 A,函数 $y=\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^x$ 中,$\dfrac{\pi}{2}>1$,是指数函数;对于 B,函数 $y=(-8)^x$ 中,$-8<0$,不是指数函数;对于 C,函数 $y=2^{x-1}=\dfrac{1}{2}\times2^x$,不是指数函数;对于 D,函数 $y=x^2$,是幂函数,不是指数函数.

2.已知指数函数 $f(x)=(a-2)a^x$,则 $f(2)=$(　　)

A.2　　B.3　　C.9　　D.16

C　**解析**:因为函数 $f(x)=(a-2)a^x$ 是指数函数,所以 $a-2=1$,则 $a=3$,所以 $f(x)=3^x$,所以 $f(2)=3^2=9$.

3.某校图书馆的藏书两年内从 5 万册增加到 7.2 万册,则这两年的平均增长率为(　　)

A.10%　　B.12%　　C.20%　　D.25%

C　**解析**:设这两年的平均增长率为 x,则 $5(1+x)^2=7.2$,解得 $x=0.2$ 或 $x=-2.2$(舍).

4.放射性物质的半衰期 T 的含义为每经过时间 T,该物质的质量会衰减为原来的一半.铅制容器中有两种放射性物质 A,B,开始记录时,容器中物质 A 的质量是物质 B 的质量的 2 倍,而 120 h 后两种物质的质量相等.已知物质 A 的半衰期为7.5 h,则物质 B 的半衰期为________h.

8　**解析**:设物质 B 的半衰期为 t,开始记录时,物质 B 的质量为 $m_B=1$,则 $m_A=2$.由 $\dfrac{120}{7.5}=16$,可得 $2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{16}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{120}{t}}$,解得 $t=8$.

5.若函数 $y=(4-3a)^x$ 是指数函数,则实数 a 的取值范围为________.

$(-\infty,1)\cup\left(1,\dfrac{4}{3}\right)$　**解析**:若函数 $y=(4-3a)^x$ 是指数函数,则 $4-3a>0$ 且 $4-3a\neq1$,所以 $a<\dfrac{4}{3}$ 且 $a\neq1$.所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty,1)\cup\left(1,\dfrac{4}{3}\right)$.

6.已知指数函数 $y=f(x)$,且 $f(3)=\pi$,求 $f(0)$,$f(1)$,$f(-3)$的值.

解:设 $f(x)=a^x(a>0$,且 $a\neq1)$,

因为 $f(3)=\pi$,所以 $a^3=\pi$,解得 $a=\pi^{\frac{1}{3}}$,

于是 $f(x)=\pi^{\frac{x}{3}}$.

所以 $f(0)=\pi^0=1$,$f(1)=\pi^{\frac{1}{3}}$,$f(-3)=\pi^{-1}=\dfrac{1}{\pi}$.

综合性·创新提升

1. 若函数 $f(x)=(a-3)\cdot a^{x}$ 是指数函数，则 $f(2)$ 的值为（　　）

A.4　　B.8

C.2　　D.16

D　**解析**：因为函数 $f(x)$ 是指数函数，所以 $a-3=1$，所以 $a=4$. 所以 $f(x)=4^{x}$，$f(2)=4^{2}=16$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}2^{x}, x\leqslant 8,\\ f(x-8), x>8,\end{cases}$ 则 $f(17)=$（　　）

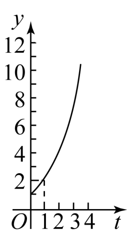
A.2　　B.4

C.8　　D.16

A　**解析**：因为 $f(x)=\begin{cases}2^{x}, x\leqslant 8,\\ f(x-8), x>8,\end{cases}$

所以 $f(17)=f(9)=f(1)=2^{1}=2$. 故选 A.

3.（多选）如图，某湖泊中的蓝藻面积 y（单位：m^2）与时间 t（单位：月）之间的关系满足 $y=a^{t}$，则下列说法正确的是（　　）



A. 每个月蓝藻面积的增长率为 100%

B. 每个月蓝藻增加的面积都相等

C. 第 6 个月时，蓝藻面积就会超过 60 m^2

D. 若蓝藻面积增加到 2 m^2，3 m^2，6 m^2 所经过的时间分别是 t_1，t_2，t_3，则一定有 $t_1+t_2=t_3$

ACD　**解析**：由图可知，函数 $y=a^{t}$ 的图象经过 $(1,2)$，即 $a^{1}=2$，则 $a=2$，所以 $y=2^{t}$，

又 $2^{t+1}-2^{t}=2^{t}$ 不是常数，则蓝藻每个月的面积是上个月的 2 倍，则每个月的增长率为 100%，A 正确，B 错误；当 $t=6$ 时，$y=2^{6}=64>60$，C 正确；

若蓝藻面积增加到 2 m^2，3 m^2，6 m^2 所经过的时间分别是 t_1，t_2，t_3，则 $2^{t_1}=2$，$2^{t_2}=3$，$2^{t_3}=6$，则 $2^{t_1}\cdot 2^{t_2}=2\times 3$，即 $2^{t_1+t_2}=6=2^{t_3}$，所以 $t_1+t_2=t_3$，D 正确. 故选 ACD.

4.（探索创新）已知函数 $y=f(x)$，$x\in\mathbf{R}$，且 $f(0)=2$，$\dfrac{f(0.5)}{f(0)}=2$，$\dfrac{f(1)}{f(0.5)}=2$，…，$\dfrac{f(0.5n)}{f(0.5(n-1))}=2$，$n\in\mathbf{N}$，则函数 $y=f(x)$ 的一个可能的解析式为________.

$f(x)=2\times 4^{x}$（答案不唯一）　**解析**：由题意，得 $\dfrac{f(1)}{f(0)}=4$，$\dfrac{f(2)}{f(0)}=4^{2}$，…，$\dfrac{f(x)}{f(0)}=4^{x}$，所以 $f(x)=2\times 4^{x}$.

5. 地震的震级越大，以地震波的形式从震源释放出的能量就越大，震级 M 与所释放的能量 E 的关系如下：$E=10^{4.8+1.5M}$（单位：J）. 那么，7.5 级地震释放的能量是 5.5 级地震释放的能量的 $\underline{10^{3}}$ 倍.

4.2.2　指数函数的图象和性质

第 1 课时　指数函数的图象和性质

学习任务目标

1. 能画出具体指数函数的图象，探索并理解指数函数的单调性与特殊点.
2. 掌握指数函数的性质，能利用指数函数的单调性比较幂的大小及解不等式.

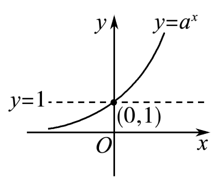
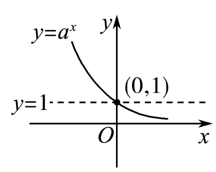
问题式预习

知识清单

知识点　指数函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象和性质

1. 若点 (x,y) 在指数函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象上，则点 $(-x,y)$ 在指数函数 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图象上.反之亦然，即底数互为倒数的两个指数函数的图象关于 y 轴对称.

2. 指数函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象和性质

函数		$y=a^x$	
		$a>1$	$0<a<1$
图象			
定义域		$\mathbf{R}$	
值域		$(0,+\infty)$	
性质	定点	过定点 $(0,1)$，即 $x=0$ 时，$y=1$	
	函数值的变化	当 $x>0$ 时，$y>1$；当 $x<0$ 时，$0<y<1$	当 $x>0$ 时，$0<y<1$；当 $x<0$ 时，$y>1$
	单调性	在 $\mathbf{R}$ 上是增函数	在 $\mathbf{R}$ 上是减函数

概念辨析

1. 判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").

(1) 指数函数的图象一定在 x 轴的上方.　(√)

(2) 当 $a>1$ 时，对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 总有 $a^x>1$.　(×)

(3) 函数 $f(x)=2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.　(×)

2. 若函数 $y=(1-2a)^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，则实数 a 的取值范围为________.

$(-\infty,0)$　**解析**：由题意知，此函数为指数函数，且为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，所以 $1-2a>1$，解得 $a<0$.

3. 请思考并回答下列问题：

(1) 随着底数的变化，指数函数的图象位置有何特点？

提示：当 $0<a<1$ 时，底数越小，图象越靠近 y 轴；当 $a>1$ 时，底数越大，图象越靠近 y 轴.

(2) 函数 $y=a^x$ 与 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象有什么关系？

提示：两函数的图象关于 y 轴对称.

任务型课堂

学习任务一　指数型函数的定义域

1. $y=0.3^{\frac{1}{x-1}}$ 的定义域为________.

$\{x\mid x\neq1\}$　**解析**：由 $x-1\neq0$ 得 $x\neq1$，所以函数的定义域为 $\{x\mid x\neq1\}$.

2. $y=3^{\sqrt{5x-1}}$ 的定义域为________.

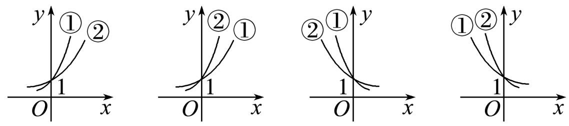
$\left\{x\,\middle|\,x\geqslant\frac{1}{5}\right\}$　**解析**：由 $5x-1\geqslant0$ 得 $x\geqslant\frac{1}{5}$，所以函数的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\geqslant\frac{1}{5}\right\}$.

反思提炼

函数 $y=a^{f(x)}$ 的定义域与 $f(x)$ 的定义域相同.

学习任务二　指数函数图象的简单应用

例1　(1)已知 $1>n>m>0$，则指数函数①$y=m^x$，②$y=n^x$ 的图象为　　(　　)



A　　B　　C　　D

C　**解析**：由于 $0<m<n<1$，所以 $y=m^x$ 与 $y=n^x$ 都是减函数，故排除 A,B，作直线 $x=1$ 与两条曲线相交(图略)，交点在下的曲线是函数 $y=m^x$ 的图象.

(2)函数 $f(x)=a^{2\,024-x}+2\,023(a>0$，且 $a\neq1)$的图象恒过定点　　(　　)

A.(2 023,2 023)

B.(2 024,2 023)

C.(2 023,2 024)

D.(2 024,2 024)

D　**解析**：因为 $f(2\,024)=a^0+2\,023=2\,024$，所以函数的图象恒过定点(2 024,2 024).

反思提炼

1.识别指数函数图象应把握两点：

(1)根据图象"上升"或"下降"确定底数 $a>1$ 或 $0<a<1$；

(2)在 y 轴右侧，指数函数的图象"底大图高".

2.形如 $y=k\cdot a^{x+c}+b(k\neq0,a>0$，且 $a\neq1)$的函数图象过定点的问题的解决办法：

令指数 $x+c=0$，即 $x=-c$，得 $y=k+b$，函数图象过定点 $(-c,k+b)$.

探究训练

已知函数 $y=a^{x-a}+b(a>0$，且 $a\neq1)$的图象恒过定点(2,2)，则 a,b 的值分别为　　(　　)

A.1,2　　B.2,1

C.2,2　　D.1,1

B　**解析**：由于函数 $y=a^{x-a}+b$ 的图象恒过定点(2,2)，所以 $a^{2-a}+b=2$ 恒成立，故 $a=2,b=1$.

学习任务三　利用指数函数的单调性比较大小

例2　比较下列各组数的大小.

(1)$1.5^{2.5}$ 和 $1.5^{3.2}$；

(2)$0.6^{-1.2}$ 和 $0.6^{-1.5}$；

(3)$1.7^{0.2}$ 和 $0.9^{2.1}$；

(4)$a^{1.1}$ 和 $a^{0.3}(a>0$，且 $a\neq1)$.

解：(1)$1.5^{2.5}$，$1.5^{3.2}$ 可看作函数 $y=1.5^x$ 的两个函数值.由于底数 $1.5>1$，所以函数 $y=1.5^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.因为 $2.5<3.2$，所以 $1.5^{2.5}<1.5^{3.2}$.

(2)$0.6^{-1.2}$，$0.6^{-1.5}$ 可看作函数 $y=0.6^x$ 的两个函数值.因为函数 $y=0.6^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，且 $-1.2>-1.5$，所以 $0.6^{-1.2}<0.6^{-1.5}$.

(3)由指数函数的性质得

$1.7^{0.2}>1.7^0=1$，$0.9^{2.1}<0.9^0=1$，

所以 $1.7^{0.2}>0.9^{2.1}$.

(4)当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，此时 $a^{1.1}>a^{0.3}$；

当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，此时 $a^{1.1}<a^{0.3}$.

反思提炼

比较幂的大小的方法

(1)同底数幂比较大小时构造指数函数，根据其单调性比较；

(2)指数相同底数不同时，分别画出以两幂底数为底数的指数函数图象，当 x 取相同幂指数时可观察得出函数值的大小；

(3)底数、指数都不相同时，取与其中一底数相同与另一指数相同的幂与两数比较，或借助"1"与两数比较；

(4)当底数含参数时，要按底数与1的大小关系分类讨论.

探究训练

比较下列各组数的大小：

(1)$0.1^{-0.2}$，$0.1^{0.9}$；

(2)$3^{0.1}$，$\pi^{0.1}$；

(3)$1.4^{0.1}$，$0.9^{0.3}$.

解：(1)因为 $y=0.1^x$ 是减函数，$-0.2<0.9$，

故 $0.1^{-0.2}>0.1^{0.9}$.

(2)因为 $y=x^{0.1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$3<\pi$，

故 $3^{0.1}<\pi^{0.1}$.

(3)因为 $1.4>1$，$0<0.9<1$，所以 $y=1.4^x$ 与 $y=0.9^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上分别为增函数和减函数.因为 $0.1>0$，所以 $1.4^{0.1}>1.4^0=1$.因为 $0.3>0$，所以 $0.9^{0.3}<0.9^0=1$，所以 $1.4^{0.1}>0.9^{0.3}$.

学习任务四　利用指数函数的单调性解不等式

例3　解关于 x 的不等式 $a^{x^2-3x+1}<a^{x+6}(a>0$，且 $a\neq1)$.

解：①当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

所以 $x^2-3x+1>x+6$，

所以 $x^2-4x-5>0$，

解得 $x<-1$ 或 $x>5$.

②当 $a>1$ 时，函数 $f(x)=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

所以 $x^2-3x+1<x+6$，所以 $x^2-4x-5<0$，

解得$-1<x<5$.

综上所述,当$0<a<1$时,解集为$\{x\mid x<-1$或$x>5\}$;当$a>1$时,解集为$\{x\mid -1<x<5\}$.

反思提炼

利用指数函数的单调性解不等式的步骤

(1)将不等式两边都化成底数相同的指数式;

(2)根据底数的取值,利用指数函数的单调性去掉底数;

(3)求由指数构成的不等式的解集.

注意:若底数不确定,则需进行分类讨论.

探究训练

不等式$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1}\leqslant 2$的解集为________.

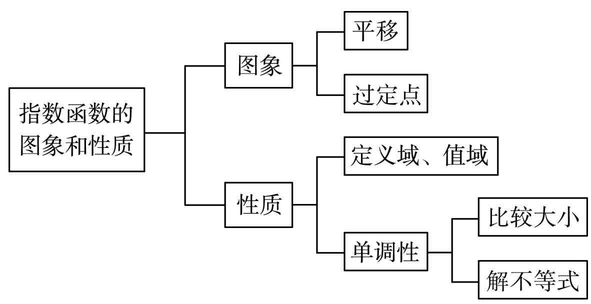
$\{x\mid x\geqslant 0\}$　**解析**:因为$2=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$,所以原不等式可以转化为$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$.

因为$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$在$\mathbf{R}$上是减函数,

所以$3x-1\geqslant -1$,解得$x\geqslant 0$.

故原不等式的解集是$\{x\mid x\geqslant 0\}$.

体系构建



课后素养评价(二十九)

基础性·能力运用

1.函数$y=a^{x-1}+1(a>0$,且$a\neq 1)$的图象必经过一个定点,则这个定点的坐标是　(　　)

A.(0,1)　　B.(1,2)

C.(2,3)　　D.(3,4)

B　**解析**:当$x=1$时,$y=a^{x-1}+1=a^{0}+1=2$,所以函数$y=a^{x-1}+1$的图象过定点(1,2).

2.下列选项正确的是　(　　)

A.$0.6^{2.5}>0.6^{3}$　　B.$1.7^{-\frac{1}{3}}<1.7^{-\frac{1}{2}}$

C.$1.1^{1.5}<0.7^{2.1}$　　D.$2^{\frac{1}{2}}>3^{\frac{1}{2}}$

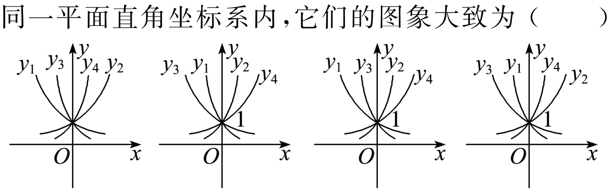
A　**解析**:因为指数函数$y=0.6^{x}$在$\mathbf{R}$上单调递减,且$2.5<3$,所以$0.6^{2.5}>0.6^{3}$,故A正确;

因为指数函数$y=1.7^{x}$在$\mathbf{R}$上单调递增,且$-\frac{1}{3}>-\frac{1}{2}$,所以$1.7^{-\frac{1}{3}}>1.7^{-\frac{1}{2}}$,故B错误;

因为$1.1^{1.5}>1.1^{0}=1,0<0.7^{2.1}<0.7^{0}=1$,所以$1.1^{1.5}>0.7^{2.1}$,故C错误;

因为$(2^{\frac{1}{2}})^{6}=2^{3}=8,(3^{\frac{1}{3}})^{6}=3^{2}=9$,所以$2^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{1}{3}}$,故D错误.

3.已知$y_1=\left(\frac{1}{3}\right)^{x},y_2=3^{x},y_3=10^{-x},y_4=10^{x}$,则在同一平面直角坐标系内,它们的图象大致为　(　　)



A　　B　　C　　D

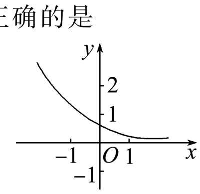
A　**解析**:$y_2=3^{x}$与$y_4=10^{x}$是增函数,$y_1=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$与$y_3=10^{-x}=\left(\frac{1}{10}\right)^{x}$是减函数,在第一象限内作直线$x=1$(图略),该直线与四条曲线交点的纵坐标的大小对应各底数的大小.故选A.

4.(多选)若函数$y=a^{x}+b-1(a>0$,且$a\neq 1)$的图象不经过第二象限,则需同时满足　(　AD　)

A.$a>1$　　B.$0<a<1$

C.$b>0$　　D.$b\leqslant 0$

5.函数$f(x)=a^{x-b}$的图象如图所示,其中a,b为常数,则下列结论正确的是　(　　)



A.$a>1,b<0$

B.$a>1,b>0$

C.$0<a<1,b>0$

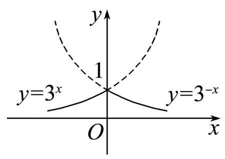
D.$0<a<1,b<0$

D　**解析**:从曲线的变化趋势,可以得到函数$f(x)$为减函数,从而有$0<a<1$;又当$x=0$时,$f(x)<1$,即$a^{-b}<1=a^{0}$,所以$-b>0$,即$b<0$.

6.(新定义)定义运算:$a\otimes b=\begin{cases}b,a\geqslant b,\\a,a<b,\end{cases}$则函数$f(x)=3^{-x}\otimes 3^{x}$的值域为________.

$(0,1]$　**解析**:由题意得$f(x)=\begin{cases}3^{x},x\leqslant 0,\\3^{-x},x>0,\end{cases}$函数

$f(x)$的图象如图所示，



由图可知，$f(x)$的值域为$(0,1]$.

7.比较下列各组数的大小.

(1)$\left(\frac{2}{5}\right)^{0.3}$与$\left(\frac{2}{5}\right)^{\pi}$；(2)$\left(\frac{2}{3}\right)^{3}$与$2^{\frac{3}{2}}$；

(3)$\left(\frac{2}{5}\right)^{0.3}$与$0.3^{\frac{2}{5}}$.

解：(1)因为$0<\frac{2}{5}<1$，所以函数$y=\left(\frac{2}{5}\right)^{x}$在$\mathbf{R}$上单调递减.

又$0.3<\pi$，所以$\left(\frac{2}{5}\right)^{0.3}>\left(\frac{2}{5}\right)^{\pi}$.

(2)因为$\left(\frac{2}{3}\right)^{3}<1$，$2^{\frac{3}{2}}>1$，

所以$\left(\frac{2}{3}\right)^{3}<2^{\frac{3}{2}}$.

(3)函数$y=x^{0.3}$在$(0,+\infty)$上单调递增，

由$\frac{2}{5}>0.3$，可得$\left(\frac{2}{5}\right)^{0.3}>0.3^{0.3}$①.

又函数$y=0.3^{x}$在$(-\infty,+\infty)$上单调递减，

所以$0.3^{0.3}>0.3^{\frac{2}{5}}$②.

由①②知$\left(\frac{2}{5}\right)^{0.3}>0.3^{\frac{2}{5}}$.

综合性·创新提升

1.(多选)已知实数a，b满足等式$2\ 023^{a}=2\ 024^{b}$，下列结论可能成立的是　　(　　)

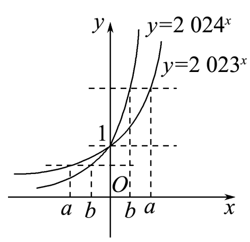
A.$a=b=0$

B.$a<b<0$

C.$0<a<b$

D.$0<b<a$

ABD　**解析**：如图，观察易知，$a<b<0$或$0<b<a$或$a=b=0$.



2.已知$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的函数，且$y=f(x+1)$是偶函数，当$x\geqslant1$时，$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-1$，则$f\left(\frac{2}{3}\right)$，$f\left(\frac{3}{2}\right)$，$f\left(\frac{1}{3}\right)$的大小关系是　　(　　)

A.$f\left(\frac{2}{3}\right)>f\left(\frac{3}{2}\right)>f\left(\frac{1}{3}\right)$

B.$f\left(\frac{2}{3}\right)>f\left(\frac{1}{3}\right)>f\left(\frac{3}{2}\right)$

C.$f\left(\frac{3}{2}\right)>f\left(\frac{2}{3}\right)>f\left(\frac{1}{3}\right)$

D.$f\left(\frac{1}{3}\right)>f\left(\frac{3}{2}\right)>f\left(\frac{2}{3}\right)$

A　**解析**：函数$y=f(x+1)$是偶函数，所以$f(-x+1)=f(x+1)$，即函数$f(x)$的图象关于直线$x=1$对称.

所以$f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{4}{3}\right)$，$f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{5}{3}\right)$.

当$x\geqslant1$时，$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-1$单调递减，

由$\frac{4}{3}<\frac{3}{2}<\frac{5}{3}$，可得$f\left(\frac{4}{3}\right)>f\left(\frac{3}{2}\right)>f\left(\frac{5}{3}\right)$，

即$f\left(\frac{2}{3}\right)>f\left(\frac{3}{2}\right)>f\left(\frac{1}{3}\right)$.故选A.

3.不等式$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-8}-2^{-2x}\geqslant0$的解集是　　(　　)

A.$[-2,4]$

B.$(-\infty,-2]\cup[4,+\infty)$

C.$[-4,2]$

D.$[-2,0]$

A　**解析**：由原不等式可得$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-8}\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$.

因为函数$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$在$\mathbf{R}$上单调递减，所以$x^2-8\leqslant2x$，即$x^2-2x-8\leqslant0$，解得$-2\leqslant x\leqslant4$.

4.函数$y=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}}$的定义域为________.

$[0,+\infty)$　**解析**：要使函数有意义需满足$1-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\geqslant0$，即$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\leqslant1=\left(\frac{1}{2}\right)^{0}$，解得$x\geqslant0$，因此，函数$y=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}}$的定义域为$[0,+\infty)$.

5.设$y_1=4^{0.9}$，$y_2=8^{0.48}$，$y_3=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1.5}$，则$y_1$，$y_2$，$y_3$的大小关系为__________.

$y_1>y_3>y_2$　**解析**：因为$y_1=4^{0.9}=2^{1.8}$，$y_2=8^{0.48}=2^{1.44}$，$y_3=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1.5}=2^{1.5}$，

且函数$y=2^{x}$在定义域内是增函数，

而$1.8>1.5>1.44$，

所以$2^{1.8}>2^{1.5}>2^{1.44}$，

即$y_1>y_3>y_2$.

6.求下列函数的定义域.

(1)$y=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$($a>0$,且$a\neq1$);

(2)$y=0.3^{\frac{1}{x-1}}$;

(3)$y=3^{\sqrt{5x-1}}$.

解:(1)由$a^x-1\neq0$,得$a^x\neq1$,所以$x\neq0$.

所以函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

(2)由$x-1\neq0$,得$x\neq1$,所以函数的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

(3)由$5x-1\geqslant0$,得$x\geqslant\dfrac{1}{5}$,所以函数的定义域为$\left\{x\middle|x\geqslant\dfrac{1}{5}\right\}$.

7.若函数$f(x)=(k+3)a^x+3-b$($a>1$)是指数函数.

(1)求k,b的值;

(2)解不等式$f(2x-7)>f(4x-3)$.

解:(1)因为函数$f(x)=(k+3)a^x+3-b$($a>1$)是指数函数,

所以$k+3=1$,$3-b=0$,所以$k=-2$,$b=3$.

(2)由(1)得$f(x)=a^x$($a>1$),则函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增.

因为$f(2x-7)>f(4x-3)$,

所以$2x-7>4x-3$,解得$x<-2$.

即不等式的解集为$\{x|x<-2\}$.

第2课时　指数函数的图象和性质的应用

学习任务目标

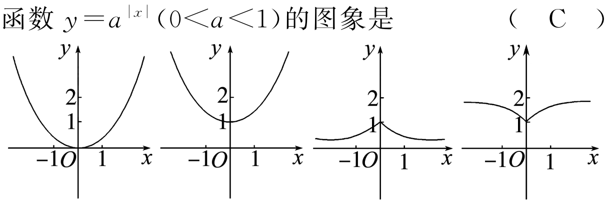
1.掌握指数函数的图象,会利用图象变换解决简单的问题.

2.掌握指数函数的性质,会利用指数函数的性质研究指数型函数的单调性与值域.

任务型课堂

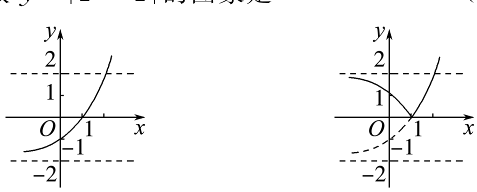
学习任务一　指数型函数的图象

1.函数$y=a^{|x|}$($0<a<1$)的图象是　　(　C　)

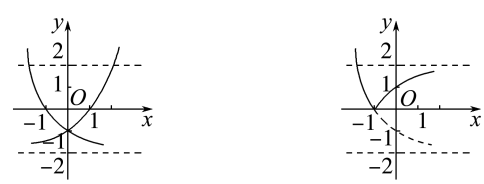


A　　B　　C　　D

2.函数$y=|2^x-2|$的图象是　　(　B　)



A　　B



C　　D

反思提炼

函数图象的翻折变换

$y=|f(x)|$的图象:可将$y=f(x)$的图象在x轴下方的部分关于x轴翻折,其余部分不变

翻折变换

$y=f(|x|)$的图象:可先作出$y=f(x)$在y轴上及y轴右边的图象,再作y轴右边的图象关于y轴对称的图象

学习任务二　指数函数的单调区间

例1　(1)(2023·新高考全国Ⅰ卷)设函数$f(x)=2^{x(x-a)}$在区间$(0,1)$上单调递减,则a的取值范围是　　(　　)

A.$(-\infty,-2]$　　B.$[-2,0)$

C.$(0,2]$　　D.$[2,+\infty)$

D　**解析**:因为函数$y=2^x$在$\mathbf{R}$上单调递增,而函数$f(x)=2^{x(x-a)}$在区间$(0,1)$上单调递减,所以函数$y=x(x-a)=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}$在区间$(0,1)$上单调递减,因此$\dfrac{a}{2}\geqslant1$,解得$a\geqslant2$,所以$a$的取值范围是$[2,+\infty)$.故选D.

(2)已知函数$f(x)=2^{|2x-m|}$(m为常数).若$m=2$,则$f(x)$的单调递增区间为$\underline{[1,+\infty)}$;若$f(x)$在区间$[2,+\infty)$上单调递增,则m的取值范围是$\underline{(-\infty,4]}$.

[一题多思]

思考1.指数型函数$y=a^{f(x)}$($a>0$,且$a\neq1$)是由哪些函数复合而成的?

提示:由两个函数$y=a^u$,$u=f(x)$复合而成.

思考2.指数型函数$y=a^{f(x)}$($a>0$,且$a\neq1$)的单调性是由哪些因素决定的?

提示:一是底数a的大小;二是$f(x)$的单调性.

反思提炼

求复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 的单调区间，首先求出函数的定义域，然后把函数分解成 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，通过考察 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 的单调性，利用“同增异减”原则，求出 $y=f(\varphi(x))$ 的单调性.

探究训练

求下列函数的单调区间.

(1)$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-x^2}$；

(2)$y=4^x-2\times2^x+5$.

解：(1)令 $u(x)=2x-x^2$，则 $u(x)=-(x-1)^2+1$，定义域为 **R**.故 $u(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递增，在 $[1,+\infty)$ 上单调递减.又 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^u$ 为减函数，根据复合函数“同增异减”得 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-x^2}$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递减，在 $[1,+\infty)$ 上单调递增.故函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-x^2}$ 的单调递增区间为 $[1,+\infty)$，单调递减区间为 $(-\infty,1]$.

(2)函数的定义域为 **R**，令 $t=2^x$，$x\in\mathbf{R}$ 时，$t\in(0,+\infty)$.$y=(2^x)^2-2\times2^x+5=t^2-2t+5=(t-1)^2+4$，$t\in(0,+\infty)$.

当 $t\geqslant1$ 时，$2^x\geqslant1$，$x\geqslant0$；当 $0<t\leqslant1$ 时，$0<2^x\leqslant1$，$x\leqslant0$.

因为 $y=(t-1)^2+4$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$t=2^x$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $y=(2^x-1)^2+4$ 的单调递增区间为 $[0,+\infty)$.

同理可得单调递减区间为 $(-\infty,0]$.

学习任务三　指数函数的值域

例 2　求下列函数的值域.

(1)$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x}$；

(2)$y=4^x+2^{x+1}+2$，$0\leqslant x\leqslant2$.

解：(1)令 $u=x^2-2x$，则原函数变为 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^u$.

因为 $u=x^2-2x=(x-1)^2-1$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递减，在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $u=x^2-2x=(x-1)^2-1\geqslant-1$.

又因为 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^u$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^u$，$u\in[-1,+\infty)$ 也单调递减.

所以 $0<\left(\frac{1}{3}\right)^u\leqslant\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$.

所以原函数的值域为 $(0,3]$.

(2)$y=4^x+2^{x+1}+2=(2^x)^2+2\times2^x+2=(2^x+1)^2+1$.

令 $2^x=t$，则 $y=(t+1)^2+1$.

因为 $0\leqslant x\leqslant2$，所以 $1\leqslant2^x\leqslant4$，即 $t\in[1,4]$.

易知 $y=(t+1)^2+1$ 在 $[1,4]$ 上单调递增.

所以 $5\leqslant y\leqslant26$，

即函数 $y=4^x+2^{x+1}+2$ 的值域为 $[5,26]$.

反思提炼

求指数型函数的值域的方法

(1)求函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$ 在给定区间上的值域，直接利用函数的单调性即可；

(2)求函数 $y=a^{f(x)}(a>0$，且 $a\neq1)$ 的值域，需先确定 $f(x)$ 的值域，再根据指数函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$ 的单调性确定函数 $y=a^{f(x)}(a>0$，且 $a\neq1)$ 的值域；

(3)求与指数函数有关的较复杂复合函数值域，一般通过换元法将函数转化为二次函数等便于求最值的函数，再利用指数函数的性质确定新函数中自变量的取值范围，从而得出原函数的值域.

探究训练

若函数 $f(x)=2^x+3$，$x\in[2,3]$，则函数 $f(x)$ 的值域为________.

$[7,11]$　**解析**：函数 $f(x)=2^x+3$，$x\in[2,3]$ 是增函数，又 $2^x\in[4,8]$，故 $f(x)$ 的值域为 $[7,11]$.

体系构建

- 指数函数的图象和性质的应用
  - 图象
    - 翻折变换
  - 单调区间
    - 复合函数的单调性
  - 值域
    - 给定区间上的值域
    - 复合函数的值域

课后素养评价(三十)

基础性·能力运用

1. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$,$x\in\mathbf{R}$,那么 $f(x)$ 是　　(　　)

A.奇函数且在$(0,+\infty)$上单调递增

B.偶函数且在$(0,+\infty)$上单调递增

C.奇函数且在$(0,+\infty)$上单调递减

D.偶函数且在$(0,+\infty)$上单调递减

D　**解析**:由 $x\in\mathbf{R}$,且 $f(-x)=f(x)$ 知 $f(x)$ 是偶函数,当 $x>0$ 时,$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 单调递减.

2. 函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-1}$ 的单调递增区间为　　(　　)

A.$(-\infty,0]$

B.$[0,+\infty)$

C.$(-1,+\infty)$

D.$(-\infty,-1)$

A　**解析**:因为 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-1}$,又函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上单调递减,所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $u(x)=x^2-1$ 的单调递减区间,即$(-\infty,0]$.

3. 若函数 $f(x)=3^{(2a-1)x+3}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数,则实数 a 的取值范围是　　(A)

A.$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$

B.$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

C.$\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$

D.$\left(\frac{1}{2},1\right)$

4. (多选)若函数 $f(x)=a^x(a>0$,且 $a\neq1)$在区间$[-2,2]$上的最大值和最小值的和为$\frac{10}{3}$,则 a 的值可能是　　(　　)

A.$\frac{1}{3}$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{3}$

C.$\sqrt{3}$　　D.3

BC　**解析**:因为 $f(x)=a^x(a>0$,且 $a\neq1)$在区间$[-2,2]$上是单调函数,

所以 $a^{-2}+a^2=\frac{10}{3}$,所以 $3a^4-10a^2+3=0$,所以 $a^2=3$ 或 $a^2=\frac{1}{3}$,即 $a=\sqrt{3}$ 或 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. 函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-x^2}$ 的值域为________.

$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　**解析**:由题意知函数的定义域为 $\mathbf{R}$.

因为 $2x-x^2=-(x-1)^2+1\leqslant1$,

函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 为减函数,

所以$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-x^2}\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{1}{2}$.

故函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-x^2}$ 的值域为$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

6. 已知函数 $f(x)=a^{-x}(a>0$,且 $a\neq1)$满足$f(-2)>f(-3)$,则函数 $g(x)=a^{1-x^2}$ 的单调递增区间是$\underline{[0,+\infty)}$.

7. 已知函数 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{ax^2-4x+3}$.

(1)若 $a=-1$,求函数 $f(x)$的单调递增区间;

(2)如果函数 $f(x)$有最大值 3,求实数 a 的值.

解:(1)当 $a=-1$ 时,$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2-4x+3}$,

令 $g(x)=-x^2-4x+3=-(x+2)^2+7$,

由于 $g(x)$在$(-2,+\infty)$上单调递减,$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数,

所以 $f(x)$在$(-2,+\infty)$上单调递增,

即 $f(x)$的单调递增区间是$(-2,+\infty)$.

(2)令 $h(x)=ax^2-4x+3$,$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{h(x)}$,

由于 $f(x)$有最大值 3,所以 $h(x)$应有最小值-1.

因此必有$\begin{cases}a>0,\\ \frac{12a-16}{4a}=-1,\end{cases}$解得 $a=1$.

即当 $f(x)$有最大值 3 时,实数 a 的值为 1.

综合性·创新提升

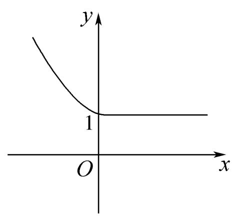
1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}, x\leqslant 0,\\ 1, x>0,\end{cases}$ 则使 $f(x+1)<f(2x)$ 的 x 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,-1]$　　B. $(0,+\infty)$

C. $(-1,0)$　　D. $(-\infty,0)$

D　**解析**：当 $x\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)=2^{-x}$ 是减函数，则 $f(x)\geqslant f(0)=1$。

作出 $f(x)$ 的大致图象，如图所示。



结合图象可知，要使 $f(x+1)<f(2x)$，则需 $\begin{cases}x+1<0,\\ 2x<0,\\ 2x<x+1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\ 2x<0,\end{cases}$ 解得 $x<0$。

2. 函数 $y=\begin{cases}3^{x-1}-2, x\leqslant 1,\\ 3^{1-x}-2, x>1\end{cases}$ 的值域是（　　）

A. $(-2,-1)$　　B. $(-2,+\infty)$

C. $(-\infty,-1]$　　D. $(-2,-1]$

D　**解析**：当 $x\leqslant 1$ 时，$y=3^{x-1}-2$ 单调递增，值域为 $(-2,-1]$；当 $x>1$ 时，$y=3^{1-x}-2=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}-2$ 单调递减，值域为 $(-2,-1)$。所以函数值域为 $(-2,-1]$。

3. 已知函数 $f(x)=2^{|x-1|}$，若 $a<b<1$，且 $a+c>2$，则（　　）

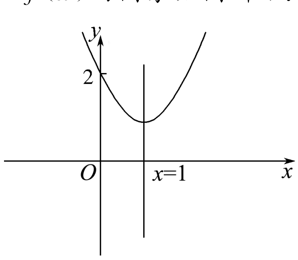
A. $f(a)<f(b)<f(c)$

B. $f(c)<f(b)<f(a)$

C. $f(b)<f(a)<f(c)$

D. $f(a)<f(c)<f(b)$

C　**解析**：作出 $f(x)$ 的图象如图所示。



该函数在区间 $(-\infty,1]$ 上单调递减，在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，且关于直线 $x=1$ 对称。因为 $a<b<1$，且 $a+c>2$，所以 $f(2-a)=f(a)>f(b)$，而 $c>2-a>1$，故 $f(c)>f(2-a)$，所以 $f(b)<f(a)<f(c)$。

4.（数学文化）高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的称号。设 $x\in\mathbf{R}$，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如：$[-3.5]=-4$，$[2.1]=2$，$y=[x]$ 称为高斯函数。已知函数 $f(x)=\frac{2e^x}{1+e^x}+\frac{1}{2}$，$g(x)=[f(x)]$，则下列叙述正确的是（　　）

A. $g(x)$ 是偶函数

B. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

C. $f(x)$ 的值域是 $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$

D. $g(x)$ 的值域是 $\{-1,0,1\}$

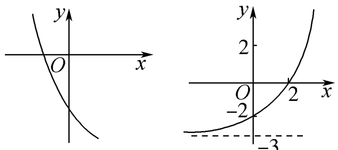
B　**解析**：对于A，根据题意知，$f(x)=\frac{2e^x}{1+e^x}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}-\frac{2}{1+e^x}$。因为 $g(2)=[f(2)]=\left[\frac{5}{2}-\frac{2}{1+e^2}\right]=2$，$g(-2)=[f(-2)]=\left[\frac{2e^{-2}}{1+e^{-2}}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{2}{e^2+1}+\frac{1}{2}\right]=0$，所以 $g(2)\neq g(-2)$，所以函数 $g(x)$ 不是偶函数，故A错误。对于B，因为 $y=1+e^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，所以 $y=\frac{2}{1+e^x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，则 $f(x)=\frac{5}{2}-\frac{2}{1+e^x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，故B正确。对于C，因为 $e^x>0$，所以 $1+e^x>1$，$0<\frac{2}{1+e^x}<2$，$-2<-\frac{2}{1+e^x}<0$，所以 $\frac{1}{2}<f(x)<\frac{5}{2}$，即 $f(x)$ 的值域是 $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$，故C错误。对于D，因为 $f(x)$ 的值域是 $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$，所以 $g(x)$ 的值域是 $\{0,1,2\}$，故D错误。

5. 若函数 $f(x)=\begin{cases}a^x, x>1,\\ \left(4-\frac{a}{2}\right)x+2, x\leqslant 1\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，则实数 a 的取值范围是 $\underline{[4,8)}$。

6. 已知函数 $f(x)=a^x+b\ (a>0$，且 $a\neq 1)$。

(1) 若 $f(x)$ 的图象如图①所示，求 a,b 的取值范围；

(2)若 $f(x)$ 的图象如图②所示，并且 $|f(x)|=m$ 有且仅有一个实数解，求 m 的取值范围.

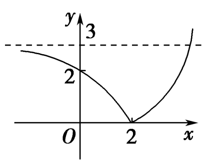


①　　　②

解:(1)由 $f(x)$ 为减函数可知 a 的取值范围为 $(0,1)$.

又 $f(0)=1+b<0$，所以 b 的取值范围为 $(-\infty,-1)$.

(2)$y=|f(x)|$ 的图象如图所示.



由图象可知使 $|f(x)|=m$ 有且仅有一个实数解的 m 的取值范围为 $\{m|m=0$ 或 $m\geqslant 3\}$.

7. 已知函数 $f(x)=\dfrac{a}{2}+\dfrac{2}{2^x+1}$ 是奇函数.

(1)求 a 的值;

(2)判断 $f(x)$ 的单调性，并用定义加以证明;

(3)求 $f(x)$ 的值域.

解:(1)因为 $f(x)$ 为奇函数，

所以 $f(0)=0$，即 $\dfrac{a}{2}+\dfrac{2}{2}=0$，解得 $a=-2$.

此时，$f(x)=-1+\dfrac{2}{2^x+1}=\dfrac{1-2^x}{1+2^x}$.再验证如下:

$$f(x)+f(-x)=\frac{1-2^x}{1+2^x}+\frac{1-2^{-x}}{1+2^{-x}}=\frac{1-2^x}{1+2^x}-\frac{1-2^x}{1+2^x}=0,$$

所以 $f(-x)=-f(x)$，$f(x)$ 为定义域上的奇函数.

(2)$f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数.

证明如下:任取 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{2}{2^{x_1}+1}-\dfrac{2}{2^{x_2}+1}$

$=2\times\dfrac{2^{x_2}-2^{x_1}}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$.

因为 $x_1<x_2$，所以 $f(x_1)>f(x_2)$，所以 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的减函数.

(3)因为 $f(x)=\dfrac{2}{2^x+1}-1$，其中，$2^x+1\in(1,+\infty)$，所以 $\dfrac{2}{2^x+1}\in(0,2)$.

所以 $f(x)\in(-1,1)$.因此 $f(x)$ 的值域为 $(-1,1)$.

4.3　对数

4.3.1　对数的概念

学习任务目标

1.理解对数的概念，掌握对数的性质，能进行简单的对数计算.
2.理解指数式与对数式的等价关系，会进行对数式与指数式的互化.
3.理解常用对数、自然对数的概念及记法.

问题式预习

知识清单

知识点一　对数的有关概念

(1)一般地，如果 $a^x=N(a>0$，且 $a\neq1)$，那么数 x 叫做以 a 为底 N 的对数，记作 $x=\log_a N$，其中 a 叫做对数的底数，N 叫做真数.

(2)常用对数与自然对数

常见的对数：
- 常用对数 —— $\lg N$ —— 以10为底
- 自然对数 —— $\ln N$ —— 以e为底

(3)对数与指数的关系

当 $a>0,a\neq1$ 时，$a^x=N\Leftrightarrow x=\log_a N$.

知识点二　对数的性质

(1)负数和0没有对数，即 $\log_a N$ 中 N 必须大于0.
(2)1的对数为0，即 $\log_a 1=0(a>0$，且 $a\neq1)$.
(3)$\log_a a=1(a>0$，且 $a\neq1)$.
(4)对数恒等式：$a^{\log_a N}=N(a>0$，且 $a\neq1)$.

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").
(1)$(-2)^4=16$ 可化为 $\log_{(-2)}16=4$.　(　×　)
(2)对数的真数必须是非负数.　(　×　)
(3)若 $\log_6 3=m$，则 $6=3^m$.　(　×　)

2.$\ln 1=$0，$\lg 10=$1.

3.请思考并回答下列问题：
(1)如何理解对数的概念？
提示："log"同"+""×""$\sqrt{\ }$"等符号一样，表示一种运算，即已知一个数和它的幂求指数的运算，这种运算叫做对数运算，不过对数运算的符号要写在数的前面.
(2)对数与指数的关系是怎样的？
提示：对数是由指数转化而来，$a^x=N\Leftrightarrow x=\log_a N$，$a,x,N$ 的范围不变，只是位置和名称发生了改变.
(3)式子 $a^b=N$ 都可以直接化为对数式吗？
提示：并非任意式子 $a^b=N$ 都可以直接化为对数式，如 $(-3)^2=9$ 就不能直接写成 $\log_{(-3)}9=2$，只有当 $a>0$，且 $a\neq1$ 时，才有 $a^b=N\Leftrightarrow b=\log_a N$.

任务型课堂

学习任务一　对数的概念

1.使对数 $\log_a(-2a+1)$ 有意义的 a 的取值范围为　(　　)

A.$a>\frac{1}{2}$ 且 $a\neq1$　　B.$0<a<\frac{1}{2}$

C.$a>0$ 且 $a\neq1$　　D.$a<\frac{1}{2}$

B　**解析：**由题意知 $\begin{cases}-2a+1>0,\\a>0,\\a\neq1,\end{cases}$ 解得 $0<a<\frac{1}{2}$.

2.已知 $4^a=2$，$\lg x=a$，则 $x=$________.

$\sqrt{10}$　**解析：**因为 $4^a=2$，所以 $a=\frac{1}{2}$.

又 $\lg x=a$，所以 $x=10^a=\sqrt{10}$.

反思提炼

指数式与对数式互化的思路

(1)指数式化为对数式：将指数式的幂作为真数，指数作为对数，底数不变，写出对数式.
(2)对数式化为指数式：将对数式的真数作为幂，对数作为指数，底数不变，写出指数式.

学习任务二　指数式与对数式的互化求值

例 1　求下列各式中 x 的值.

(1) $\log_x 27=\frac{3}{2}$；(2) $\log_2 x=-\frac{2}{3}$；

(3) $x=\log_{27}\frac{1}{9}$；(4) $x=\log_{\frac{1}{2}}16$.

解：(1)由 $\log_x 27=\frac{3}{2}$，可得 $x^{\frac{3}{2}}=27$，

所以 $x=27^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}=3^2=9$.

(2)由 $\log_2 x=-\frac{2}{3}$，可得 $x=2^{-\frac{2}{3}}$，

所以 $x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.

(3)由 $x=\log_{27}\frac{1}{9}$，可得 $27^x=\frac{1}{9}$，

所以 $3^{3x}=3^{-2}$，所以 $x=-\frac{2}{3}$.

(4)由 $x=\log_{\frac{1}{2}}16$，可得 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=16$，

所以 $2^{-x}=2^4$，所以 $x=-4$.

反思提炼

对数式求值的基本思想和方法

(1)基本思想：在一定条件下求对数式的值，或求对数式中参数的值，要注意利用方程思想求解.

(2)基本方法：①将对数式化为指数式进行计算；②利用幂的运算性质和指数的性质计算.

探究训练

若 $a=\lg 2$，$b=\lg 3$，则 $100^{a-\frac{b}{2}}$ 的值为________.

$\frac{4}{3}$　**解析**：因为 $a=\lg 2$，所以 $10^a=2$.因为 $b=\lg 3$，所以 $10^b=3$，所以 $100^{a-\frac{b}{2}}=\frac{(10^a)^2}{10^b}=\frac{4}{3}$.

学习任务三　应用对数的性质求值

例 2　求下列各式中 x 的值.

(1) $\log_5(\log_3 x)=0$；

(2) $5^{\log_5(2x-1)}=25$.

解：(1)设 $t=\log_3 x$，则 $\log_5 t=0$，所以 $t=1$，

即 $\log_3 x=1$，所以 $x=3$.

(2)因为 $5^{\log_5(2x-1)}=25$，所以 $2x-1=25$，解得 $x=13$.

反思提炼

利用对数的性质求值的方法

(1)求解此类问题时，应根据对数的两个结论 $\log_a 1=0$ 和 $\log_a a=1(a>0$，且 $a\neq 1)$ 进行变形求解，若已知对数值求真数，则可将其化为指数式运算.

(2)已知多重对数式的值，求参数的值，应从外到内，逐层脱去"log"后再求解.

探究训练

求下列各式中 x 的值.

(1) $\log_3(\lg x)=1$；

(2) $\ln[\log_2(\lg x)]=0$.

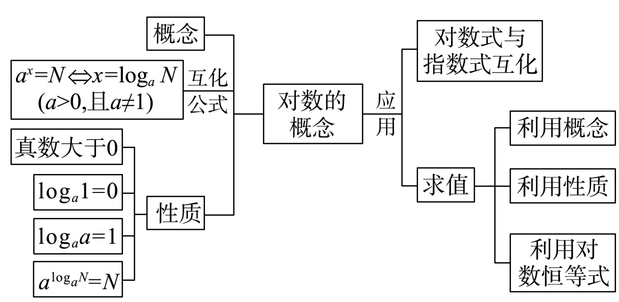
解：(1)因为 $\log_3(\lg x)=1$，所以 $\lg x=3$，

所以 $x=10^3=1\ 000$.

(2)因为 $\ln[\log_2(\lg x)]=0$，所以 $\log_2(\lg x)=1$，

所以 $\lg x=2$，所以 $x=10^2=100$.

体系构建



课后素养评价(三十一)

基础性·能力运用

1.已知 $\log_x 16=2$，则 x 等于　(　　)

A.4　B.±4　C.256　D.2

A　**解析**：由 $\log_x 16=2$，得 $x^2=16=(\pm4)^2$.又 $x>0$，且 $x\neq1$，所以 $x=4$.

2.(多选)下列指数式与对数式互化正确的是　(　　)

A. $e^0=1$ 与 $\ln 1=0$

B. $\log_2 16=4$ 与 $2^4=16$

C. $8^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$ 与 $\log_{\frac{1}{2}}8=-\frac{1}{3}$

D. $\log_7 7=1$ 与 $7^1=7$

ABD　**解析**：$8^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$，则 $\log_8\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$，故 C 错误，其他均对.

3.(多选)下列结论正确的是　(　　)

A.$\log_2 4=2$

B.$-\ln e=1$

C.$3^{\log_3 2}=2$

D.若$\log_x 27=3$,则$x=\pm 3$

AC　**解析**:由对数的运算可得$\log_2 4=2,3^{\log_3 2}=2,-\ln e=-1$,若$\log_x 27=3$,则$x=3$,故AC正确,BD错误.

4.使$\log_{(x-1)}(x+2)$有意义的x的取值范围是________.

$(1,2)\cup(2,+\infty)$　**解析**:要使$\log_{(x-1)}(x+2)$有意义,则$\begin{cases}x-1>0,\\x-1\neq 1,\\x+2>0,\end{cases}$所以$x>1$且$x\neq 2$.

5.若$a=\log_2 3$,则$2^a+2^{-a}=$________.

$\frac{10}{3}$　**解析**:因为$a=\log_2 3$,所以$2^a=2^{\log_2 3}=3$,所以$2^a+2^{-a}=2^a+\frac{1}{2^a}=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$.

6.若$\log_2(\log_x 9)=1$,则$x=$________.

3　**解析**:由$\log_2(\log_x 9)=1$可知$\log_x 9=2$,即$x^2=9$,所以$x=3(x=-3$舍去).

综合性·创新提升

1.方程$2^{\log_3 x}=\frac{1}{4}$的解是　(　　)

A.$x=\frac{1}{9}$　　B.$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

C.$x=\sqrt{3}$　　D.$x=9$

A　**解析**:因为$2^{\log_3 x}=2^{-2}$,

所以$\log_3 x=-2$,所以$x=3^{-2}=\frac{1}{9}$.

2.(多选)以下四个结论中正确的是　(　　)

A.$\ln(\lg 10)=0$

B.$\ln(\ln e)=0$

C.若$e=\ln x$,则$x=e^2$

D.$\ln(\lg 1)=0$

AB　**解析**:因为$\lg 10=\ln e=1,\ln(\lg 10)=\ln 1=0,\ln(\ln e)=\ln 1=0$,所以A,B均正确;C中,若$e=\ln x$,则$x=e^e$,故C错误;D中,$\lg 1=0$,而$\ln 0$没有意义,故D错误.故选AB.

3.设$\log_4 5=2m$,则$4^m=$　(　D　)

A.$\frac{1}{25}$　B.25　C.$\frac{1}{5}$　D.$\sqrt{5}$

4.已知$\log_2[\log_3(\log_4 x)]=0$,且$\log_4(\log_2 y)=1$,则$\sqrt{x}\cdot y^{\frac{3}{4}}$的值为________.

64　**解析**:因为$\log_2(\log_3(\log_4 x))=0$,

所以$\log_3(\log_4 x)=1$,

所以$\log_4 x=3$,所以$x=4^3=64$.

由$\log_4(\log_2 y)=1$,知$\log_2 y=4$,所以$y=2^4=16$.

因此$\sqrt{x}\cdot y^{\frac{3}{4}}=\sqrt{64}\times 16^{\frac{3}{4}}=8\times 8=64$.

5.(跨学科融合)物理学家用声压级来描述声音的大小.把声压$P_0=2\times 10^{-5}$ Pa作为参考声压,把所要测量的声压P与参考声压P_0的比值取常用对数后乘20得到的数值y称为声压级,声压级的单位是分贝(dB).规定:声压级在60 dB以下的地区为无害区,声压级在60～110 dB的地区为过渡区,声压级在110 dB以上的地区为有害区.

(1)根据上述材料,声压级y与声压P的函数关系式为________;

(2)若某地的声压为0.002 Pa,则该地为________(填“无害”“过渡”或“有害”)区.

(1)$y=20\lg\frac{P}{P_0}$　(2)无害　**解析**:(1)根据题意可知,$y=20\lg\frac{P}{P_0}$.(2)声压$P=0.002$,代入可得$y=20\lg\frac{0.002}{2\times 10^{-5}}=40$.因为$40<60$,故属于无害区.

6.利用对数恒等式$a^{\log_a N}=N(a>0$,且$a\neq 1,N>0)$,计算:

(1)$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1+\log_{0.5}4}$;

(2)$2^{3+\log_2 3}+3^{2-\log_3 9}$.

解:(1)$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1+\log_{0.5}4}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}4}$

$=2\times 4$

$=8$.

(2)$2^{3+\log_2 3}+3^{2-\log_3 9}$

$=2^3\times 2^{\log_2 3}+\frac{3^2}{3^{\log_3 9}}$

$=8\times 3+\frac{9}{9}$

$=25$.

4.3.2　对数的运算

学习任务目标

1.理解并掌握对数的运算性质.
2.理解并掌握换底公式.
3.能运用对数的运算性质及换底公式进行化简或求值.

问题式预习

知识清单

知识点一　对数的运算性质

如果 $a>0$，且 $a\neq1$，$M>0$，$N>0$，那么

(1)$\log_a(MN)=\underline{\log_aM+\log_aN}$；

(2)$\log_a\dfrac{M}{N}=\underline{\log_aM-\log_aN}$；

(3)$\log_aM^n=\underline{n\log_aM}(n\in\mathbf{R})$.

知识点二　对数换底公式

若 $a>0$，且 $a\neq1$，$b>0$，$c>0$，且 $c\neq1$，

则有 $\log_ab=\dfrac{\log_cb}{\log_ca}$.

特别地，$\log_ab\cdot\log_ba=\underline{1}$.

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").

(1)积、商的对数可以化为对数的和、差.　(　√　)

(2)$\log_a(xy)=\log_ax\cdot\log_ay$.　(　×　)

(3)$\log_2(-5)^2=2\log_2(-5)$.　(　×　)

(4)若 $a>0$，$b>0$，$c>0$，且 $a\neq1$，$b\neq1$，则 $\log_ab\cdot\log_bc=\log_ac$.　(　√　)

2.$\log_29\times\log_32=$________.

2　**解析**：$\log_29\times\log_32=\dfrac{\lg9}{\lg2}\times\dfrac{\lg2}{\lg3}=2$.

3.请思考并回答下列问题：

(1)可以逆向使用对数运算的性质吗？

提示：逆向仍然成立.

(2)换底公式的作用是什么？

提示：运用换底公式可以改变对数式的底数，把不同底数问题转化为同底数问题来进行化简、计算和证明.

任务型课堂

学习任务一　对数运算性质的应用

例1　计算：

(1)$\log_345-\log_35$；

(2)$\log_2(2^3\times4^5)$；

(3)$\dfrac{\lg\sqrt{27}+\lg8-\lg\sqrt{1\,000}}{\lg1.2}$；

(4)$\log_29\times\log_38$.

解：(1)$\log_345-\log_35=\log_3\dfrac{45}{5}=\log_39=\log_33^2=2$.

(2)$\log_2(2^3\times4^5)=\log_2(2^3\times2^{10})=\log_22^{13}=13\log_22=13$.

(3)原式$=\dfrac{\lg(\sqrt{27}\times8)-\lg10^{\frac{3}{2}}}{\lg\dfrac{12}{10}}$

$=\dfrac{\lg(3^{\frac{3}{2}}\times2^3\div10^{\frac{3}{2}})}{\lg\dfrac{12}{10}}=\dfrac{\lg\left(\dfrac{3\times4}{10}\right)^{\frac{3}{2}}}{\lg\dfrac{12}{10}}$

$=\dfrac{\dfrac{3}{2}\lg\dfrac{12}{10}}{\lg\dfrac{12}{10}}=\dfrac{3}{2}$.

(4)$\log_29\times\log_38=\log_23^2\times\log_32^3$

$=2\log_23\times3\log_32=6\log_23\times\dfrac{1}{\log_23}=6$.

反思提炼

对数式化简与求值的基本原则和方法

(1)基本原则：对数的化简与求值一般是正用或逆用对数运算的性质，对真数进行处理，一般本着便于真数化简的原则进行.

(2)两种常用的方法：①"收"，将同底的两对数的和(差)收成积(商)的对数；②"拆"，将积(商)的对数拆成同底的两对数的和(差).

探究训练

1. 已知 $\lg 2=a$，$\lg 3=b$，则 $\lg\frac{12}{5}=$________.

$b+3a-1$　**解析**：$\lg\frac{12}{5}=\lg 12-\lg 5=\lg(3\times2^2)-(1-\lg 2)=\lg 3+\lg 2^2-1+\lg 2$

$=\lg 3+3\lg 2-1=b+3a-1$.

2. 计算下列各式的值：

(1)$\frac{1}{2}\lg\frac{32}{49}-\frac{4}{3}\lg\sqrt{8}+\lg\sqrt{245}$；

(2)$\lg 25+\frac{2}{3}\lg 8+\lg 5\times\lg 20+(\lg 2)^2$.

解：(1)(方法一)原式$=\frac{1}{2}(5\lg 2-2\lg 7)-\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}\times\lg 2+\frac{1}{2}(2\lg 7+\lg 5)$

$=\frac{5}{2}\lg 2-\lg 7-2\lg 2+\lg 7+\frac{1}{2}\lg 5$

$=\frac{1}{2}\lg 2+\frac{1}{2}\lg 5=\frac{1}{2}(\lg 2+\lg 5)$

$=\frac{1}{2}\lg 10=\frac{1}{2}$.

(方法二)原式$=\lg\frac{4\sqrt{2}}{7}-\lg 4+\lg 7\sqrt{5}$

$=\lg\frac{4\sqrt{2}\times7\sqrt{5}}{7\times4}=\lg(\sqrt{2}\times\sqrt{5})=\lg\sqrt{10}=\frac{1}{2}$.

(2)原式$=2\lg 5+2\lg 2+\lg 5\times(2\lg 2+\lg 5)+(\lg 2)^2$

$=2\lg 10+(\lg 5+\lg 2)^2=2+(\lg 10)^2=2+1=3$.

学习任务二　对数换底公式

例 2　(1)设 $3^a=4^b=36$，则$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$的值为______.

1　**解析**：(方法一)由 $3^a=4^b=36$，得 $a=\log_3 36$，$b=\log_4 36$.

由换底公式得$\frac{1}{a}=\log_{36}3$，$\frac{1}{b}=\log_{36}4$，所以$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=2\log_{36}3+\log_{36}4=\log_{36}36=1$.

(方法二)由 $3^a=4^b=36$，两边取以 6 为底的对数，得 $a\log_6 3=b\log_6 4=\log_6 36=2$，

所以$\frac{2}{a}=\log_6 3$，$\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\log_6 4=\log_6 2$，所以$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\log_6 3+\log_6 2=\log_6 6=1$.

(2)已知 $\log_{18}9=a$，$18^b=5$，求 $\log_{36}45$(用 a，b 表示).

解：因为 $18^b=5$，所以 $\log_{18}5=b$.

(方法一)$\log_{36}45=\frac{\log_{18}45}{\log_{18}36}=\frac{\log_{18}(9\times5)}{\log_{18}\frac{18^2}{9}}$

$=\frac{\log_{18}9+\log_{18}5}{2\log_{18}18-\log_{18}9}=\frac{a+b}{2-a}$.

(方法二)因为$\frac{\lg 9}{\lg 18}=\log_{18}9=a$，

所以 $\lg 9=a\lg 18$，

同理得 $\lg 5=b\lg 18$，

所以 $\log_{36}45=\frac{\lg 45}{\lg 36}=\frac{\lg(9\times5)}{\lg\frac{18^2}{9}}=\frac{\lg 9+\lg 5}{2\lg 18-\lg 9}$

$=\frac{a\lg 18+b\lg 18}{2\lg 18-a\lg 18}=\frac{a+b}{2-a}$.

［一题多思］

思考 1. 利用换底公式进行化简求值的原则和技巧分别是什么？

提示：

原则 → 化异底为同底

技巧 →
- 技巧一：借助运算性质，先利用对数的运算性质进行部分运算，再化成同底对数进行计算
- 技巧二：借助换底公式一次性统一换为常用对数(自然对数)，再化简、求值
- 技巧三：利用对数恒等式或常用结论进行化简求值，可熟记一些常用结论，这样能够提高解题效率

思考 2. 本例(1)条件若变为：已知 $3^a=5^b=c$，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$，你能求 c 的值吗？

提示：因为 $3^a=5^b=c$，所以 $c>0$，所以 $a=\log_3 c$，$b=\log_5 c$，

所以$\frac{1}{a}=\log_c 3$，$\frac{1}{b}=\log_c 5$，所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_c 15$.

由 $\log_c 15=2$，得 $c^2=15$，即 $c=\sqrt{15}$(负值舍去).

思考 3. 本例(2)条件不变，你能用 a，b 表示 $\log_9 15$吗？

提示：因为 $18^b=5$，所以 $\log_{18}5=b$，

所以 $\log_9 15=\frac{\log_{18}15}{\log_{18}9}=\frac{\log_{18}(3\times5)}{\log_{18}9}=\frac{\log_{18}3+\log_{18}5}{a}=\frac{\log_{18}\sqrt{9}+b}{a}=\frac{\log_{18}9^{\frac{1}{2}}+b}{a}=\frac{\frac{1}{2}\log_{18}9+b}{a}=\frac{\frac{1}{2}a+b}{a}=\frac{a+2b}{2a}$.

反思提炼

应用换底公式应注意的两个方面

(1)将不同底的对数化成同底的对数时,要注意换底公式的正用、逆用以及变形应用;

(2)题目中有指数式和对数式时,要注意将指数式与对数式统一成一种形式.

探究训练

1. $\dfrac{\log_8 9}{\log_2 3}$的值是　　(　　)

A.$\dfrac{2}{3}$　　B.$\dfrac{3}{2}$　　C.1　　D.2

A　**解析**:(方法一)将分子、分母利用换底公式转化为常用对数,

即$\dfrac{\log_8 9}{\log_2 3}=\dfrac{\dfrac{\lg 9}{\lg 8}}{\dfrac{\lg 3}{\lg 2}}=\dfrac{2\lg 3}{3\lg 2}\cdot\dfrac{\lg 2}{\lg 3}=\dfrac{2}{3}$.

(方法二)将分子利用换底公式转化为以 2 为底的对数,

即$\dfrac{\log_8 9}{\log_2 3}=\dfrac{\dfrac{\log_2 9}{\log_2 8}}{\log_2 3}=\dfrac{2\log_2 3}{3\log_2 3}=\dfrac{2}{3}$.

2. 计算:

(1)$\log_2 3\times\log_3 5\times\log_5 16$;

(2)$(\log_3 2+\log_9 2)(\log_4 3+\log_8 3)$;

(3)$(\log_2 125+\log_4 25+\log_8 5)\times(\log_5 2+\log_{25} 4+\log_{125} 8)$.

解:(1)原式$=\dfrac{\lg 3}{\lg 2}\times\dfrac{\lg 5}{\lg 3}\times\dfrac{\lg 16}{\lg 5}=\dfrac{\lg 16}{\lg 2}=\dfrac{4\lg 2}{\lg 2}=4$.

(2)原式$=\left(\dfrac{\lg 2}{\lg 3}+\dfrac{\lg 2}{\lg 9}\right)\left(\dfrac{\lg 3}{\lg 4}+\dfrac{\lg 3}{\lg 8}\right)=\left(\dfrac{\lg 2}{\lg 3}+\dfrac{\lg 2}{2\lg 3}\right)\left(\dfrac{\lg 3}{2\lg 2}+\dfrac{\lg 3}{3\lg 2}\right)=\dfrac{3\lg 2}{2\lg 3}\times\dfrac{5\lg 3}{6\lg 2}=\dfrac{5}{4}$.

(3)(方法一)原式$=$

$\left(\log_2 5^3+\dfrac{\log_2 25}{\log_2 4}+\dfrac{\log_2 5}{\log_2 8}\right)\left(\log_5 2+\dfrac{\log_5 4}{\log_5 25}+\dfrac{\log_5 8}{\log_5 125}\right)$

$=\left(3\log_2 5+\dfrac{2\log_2 5}{2\log_2 2}+\dfrac{\log_2 5}{3\log_2 2}\right)\left(\log_5 2+\dfrac{2\log_5 2}{2\log_5 5}+\dfrac{3\log_5 2}{3\log_5 5}\right)$

$=\left(3+1+\dfrac{1}{3}\right)\log_2 5\times(3\log_5 2)$

$=13\log_2 5\times\dfrac{\log_2 2}{\log_2 5}=13$.

(方法二)原式$=\left(\dfrac{\lg 125}{\lg 2}+\dfrac{\lg 25}{\lg 4}+\dfrac{\lg 5}{\lg 8}\right)\left(\dfrac{\lg 2}{\lg 5}+\dfrac{\lg 4}{\lg 25}+\dfrac{\lg 8}{\lg 125}\right)=\left(\dfrac{3\lg 5}{\lg 2}+\dfrac{2\lg 5}{2\lg 2}+\dfrac{\lg 5}{3\lg 2}\right)\left(\dfrac{\lg 2}{\lg 5}+\dfrac{2\lg 2}{2\lg 5}+\dfrac{3\lg 2}{3\lg 5}\right)=\dfrac{13\lg 5}{3\lg 2}\times\dfrac{3\lg 2}{\lg 5}=13$.

学习任务三　对数的实际应用

例 3　射线测厚技术运用的计算公式为 $I=I_0 e^{-\rho\mu t}$,其中 I_0,I 分别为射线穿过被测物前后的强度,e 是自然对数的底数,t 为被测物厚度,ρ 为被测物的密度,μ 是被测物对射线的吸收系数.工业上通常用镅 241(^{241}Am)低能 γ 射线测量钢板的厚度.若这种射线对钢板的半价层厚度为 0.8,钢的密度为 7.6,则钢板对这种射线的吸收系数约为　　(　　)

(注:半价层厚度是指将已知射线强度减弱为一半的某种物质厚度,ln 2≈0.693 1,结果精确到 0.001)

A.0.110　　B.0.112

C.0.114　　D.0.116

C　**解析**:由题意可得,$t=0.8$,$\rho=7.6$,$\dfrac{I}{I_0}=\dfrac{1}{2}$.因为 $I=I_0 e^{-\rho\mu t}$,所以 $\dfrac{1}{2}=e^{-7.6\times0.8\times\mu}$,即 $\mu=\dfrac{\ln 2}{7.6\times0.8}\approx\dfrac{0.693\ 1}{6.08}\approx0.114$.所以这种射线的吸收系数约为0.114.故选 C.

反思提炼

对数在实际中的应用十分广泛,解决此类问题的关键在于理解题意,提炼出对数式,以及认真分析题目中给出的相关数据,将相关数据代入,准确利用对数运算性质、换底公式进行计算,必要时注意指数式与对数式的灵活转化.

探究训练

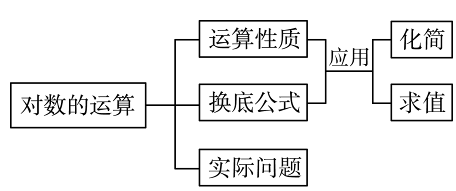
假设在不考虑空气阻力的情况下,火箭的最大速度 v(单位:m/s)和燃料的质量 M(单位:kg)、火箭(除燃料外)的质量 m(单位:kg)满足 $e^v=\left(1+\dfrac{M}{m}\right)^{2\ 000}$(e 为自然对数的底数,ln 3≈1.099).当燃料质量 M 为火箭(除燃料外)质量 m 的两倍时,求火箭的最大速度.

解:由题可得 $v=\ln\left(1+\dfrac{M}{m}\right)^{2\ 000}=2\ 000\cdot\ln\left(1+\dfrac{M}{m}\right)$,

所以 $v=2\ 000\cdot\ln 3\approx2\ 000\times1.099=2\ 198$(m/s).

故当燃料质量 M 为火箭(除燃料外)质量 m 的两倍时,火箭的最大速度为 2 198 m/s.

体系构建



课后素养评价(三十二)

基础性·能力运用

1. 求值：$\lg 4+2\lg 5+\log_2 8+8^{\frac{2}{3}}=$ (　　)

A.8　　B.9

C.10　　D.1

B　**解析**：$\lg 4+2\lg 5+\log_2 8+8^{\frac{2}{3}}=2\lg 2+2\lg 5+3+2^2=2+3+4=9$.

2. 计算：$(\log_5 4)\cdot(\log_{16}25)=$ (　　)

A.2　　B.1

C.$\frac{1}{2}$　　D.$\frac{1}{4}$

B　**解析**：$(\log_5 4)\cdot(\log_{16}25)=\frac{\lg 4}{\lg 5}\times\frac{\lg 25}{\lg 16}=\frac{2\lg 2}{\lg 5}\times\frac{2\lg 5}{4\lg 2}=1$.

3. (多选)下列等式正确的是 (　　)

A.$\sqrt[12]{(-3)^4}=\sqrt[3]{-3}$

B.$2^{1-\log_2 3}=\frac{2}{3}$

C.$\sqrt{\sqrt[3]{9}}=\sqrt[3]{3}$

D.$\log_3(-4)^2=4\log_3 2$

BCD　**解析**：$\sqrt[12]{(-3)^4}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[3]{3}$，A 错误；

$2^{1-\log_2 3}=\frac{2}{2^{\log_2 3}}=\frac{2}{3}$，B 正确；

$\sqrt{\sqrt[3]{9}}=(9^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=(3^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3}$，C 正确；

$\log_3(-4)^2=\log_3 16=\log_3 2^4=4\log_3 2$，D 正确．

故选 BCD.

4. 若 $e^x=2.5$，$\lg 2\approx0.301\ 0$，$\lg e\approx0.434\ 3$，根据指数与对数的关系，估计 x 的值约为 (　　)

A.0.496 1　　B.0.694 1

C.0.916 4　　D.1.469

C　**解析**：因为 $e^x=2.5$，所以 $x=\ln 2.5=\frac{\lg 2.5}{\lg e}=\frac{\lg\frac{5}{2}}{\lg e}=\frac{\lg 5-\lg 2}{\lg e}=\frac{1-2\lg 2}{\lg e}\approx0.916\ 4$.

5. $\lg 0.01+\log_2 16$ 的值是________.

2　**解析**：$\lg 0.01+\log_2 16=-2+4=2$.

6. 计算下列各式的值：

(1)$\dfrac{\lg 3+\frac{2}{5}\lg 9+\frac{3}{5}\lg\sqrt{27}-\lg\sqrt{3}}{\lg 81-\lg 27}$；

(2)$(\log_2 125+\log_4 25+\log_8 5)\cdot(\log_5 2+\log_{25}4+\log_{125}8)$.

解：(1)原式$=\dfrac{\lg 3+\frac{4}{5}\lg 3+\frac{9}{10}\lg 3-\frac{1}{2}\lg 3}{4\lg 3-3\lg 3}=\dfrac{\left(1+\frac{4}{5}+\frac{9}{10}-\frac{1}{2}\right)\lg 3}{(4-3)\lg 3}=\frac{11}{5}$.

(2)(方法一)原式$=$

$$\left(\log_2 5^3+\frac{\log_2 25}{\log_2 4}+\frac{\log_2 5}{\log_2 8}\right)\left(\log_5 2+\frac{\log_5 4}{\log_5 25}+\frac{\log_5 8}{\log_5 125}\right)$$

$$=\left(3\log_2 5+\frac{2\log_2 5}{2\log_2 2}+\frac{\log_2 5}{3\log_2 2}\right)\left(\log_5 2+\frac{2\log_5 2}{2\log_5 5}+\frac{3\log_5 2}{3\log_5 5}\right)$$

$$=\left(3+1+\frac{1}{3}\right)\log_2 5\cdot 3\log_5 2=13\log_2 5\cdot\frac{\log_2 2}{\log_2 5}=13.$$

(方法二)原式

$$=\left(\frac{\lg 125}{\lg 2}+\frac{\lg 25}{\lg 4}+\frac{\lg 5}{\lg 8}\right)\left(\frac{\lg 2}{\lg 5}+\frac{\lg 4}{\lg 25}+\frac{\lg 8}{\lg 125}\right)$$

$$=\left(\frac{3\lg 5}{\lg 2}+\frac{2\lg 5}{2\lg 2}+\frac{\lg 5}{3\lg 2}\right)\left(\frac{\lg 2}{\lg 5}+\frac{2\lg 2}{2\lg 5}+\frac{3\lg 2}{3\lg 5}\right)$$

$$=\left(\frac{13\lg 5}{3\lg 2}\right)\left(\frac{3\lg 2}{\lg 5}\right)=13.$$

综合性·创新提升

1.$(\lg 2)^2+\log_{\sqrt{10}}\sqrt{2}\times\lg 50+\dfrac{2\log_3 5}{\log_3 10}$的值为　(　B　)

A.1　　B.2　　C.-1　　D.-2

2.(数学文化)标准的围棋棋盘共 19 行 19 列,361 个格点,下棋时每个格点上可能出现"黑""白""空"三种情况,因此有 3^{361} 种不同的情况.我国北宋学者沈括在他的著作《梦溪笔谈》中也讨论过这个问题,他分析得出一局围棋不同的变化大约有"连书万字五十二"种,即 $10\ 000^{52}$ 种.下列数据最接近$\dfrac{3^{361}}{10\ 000^{52}}$的是($\lg 3\approx0.477$)　(　　)

A.10^{-37}　　B.10^{-36}

C.10^{-35}　　D.10^{-34}

B　**解析**:根据题意,对$\dfrac{3^{361}}{10\ 000^{52}}$取常用对数得 $\lg\dfrac{3^{361}}{10\ 000^{52}}=\lg 3^{361}-\lg 10\ 000^{52}=361\times\lg 3-52\times4\approx-35.8$,则$\dfrac{3^{361}}{10\ 000^{52}}\approx10^{-35.8}$,选项 B 中的 10^{-36} 与其最接近.

3.若 $2^a=5^b=10$,则 $2^{\frac{a}{b}}=$　(　　)

A.2　　B.4

C.5　　D.10

C　**解析**:因为 $2^a=5^b=10$,所以 $a=\log_2 10$,$b=\log_5 10$,

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{\log_2 10}{\log_5 10}=\dfrac{\lg 5}{\lg 2}=\log_2 5$,则 $2^{\frac{a}{b}}=2^{\log_2 5}=5$.

4.计算:$\dfrac{(1-\log_6 3)^2+\log_6 2\times\log_6 18}{\log_6 4}=$________.

1　**解析**:原式

$=\dfrac{1-2\log_6 3+(\log_6 3)^2+\log_6\dfrac{6}{3}\times\log_6(6\times3)}{\log_6 4}$

$=\dfrac{1-2\log_6 3+(\log_6 3)^2+1-(\log_6 3)^2}{\log_6 4}$

$=\dfrac{2(1-\log_6 3)}{2\log_6 2}=\dfrac{\log_6 6-\log_6 3}{\log_6 2}$

$=\dfrac{\log_6 2}{\log_6 2}=1$.

5.已知 x,y,z 均为正数,$3^x=4^y=6^z$,且 $2x=py$.

(1)求 p 的值;

(2)证明:$\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2y}$.

(1)**解**:设 $3^x=4^y=6^z=k$(显然 $k>0$,且 $k\neq1$),则 $x=\log_3 k$,$y=\log_4 k$,$z=\log_6 k$.

由 $2x=py$,

得 $2\log_3 k=p\log_4 k=p\cdot\dfrac{\log_3 k}{\log_3 4}$.

因为 $\log_3 k\neq0$,

所以 $p=2\log_3 4=4\log_3 2$.

(2)**证明**:$\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\log_6 k}-\dfrac{1}{\log_3 k}$

$=\log_k 6-\log_k 3=\log_k 2=\dfrac{1}{2}\log_k 4=\dfrac{1}{2y}$.

4.4 对数函数

4.4.1 对数函数的概念

学习任务目标

1. 理解对数函数的概念,根据对数函数的定义,能判断一个函数是否为对数函数.
2. 会求对数函数的定义域.
3. 了解对数函数在实际问题中的简单应用.

问题式预习

知识清单

知识点 对数函数的概念

一般地,函数 $y=\log_a x$ $(a>0$,且 $a\neq 1)$ 叫做对数函数,其中 x 是自变量,定义域是 $(0,+\infty)$.

概念辨析

1. 判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)对数函数的定义域为 **R**. (×)

(2)函数 $y=\log_2(2x)$ 是对数函数. (×)

(3) $y=\log_5 x^2$ 的定义域为 **R**. (×)

2. 若函数 $f(x)=(a-1)\log_{(a+1)}x$ 是对数函数,则实数 $a=2$.

3. 请思考并回答下列问题:

(1)函数 $y=\log_2(x+1)$ 是对数函数吗?

提示:不是. 只有形如 $y=\log_a x$ $(a>0$,且 $a\neq 1)$ 的函数才是对数函数.

(2)为什么对数函数的定义域是 $(0,+\infty)$?

提示:因为对数函数是由指数函数变化而来的,对数函数的自变量恰好是指数函数的函数值,因此对数函数的定义域是 $(0,+\infty)$,且对数函数的底数 $a>0$,且 $a\neq 1$.

任务型课堂

学习任务一 对数函数的概念及解析式

1. 给出下列函数:① $y=\log_5 x+1$;② $y=\log_a x^2$ $(a>0$,且 $a\neq 1)$;③ $y=\log_{(\sqrt{3}-1)}x$;④ $y=\log_x\sqrt{3}$ $(x>0$,且 $x\neq 1)$;⑤ $y=\log_{\frac{2}{\pi}}x$.其中是对数函数的为 ( )

A. ③④⑤ B. ②④

C. ①③⑤ D. ③⑤

D **解析**:由对数函数的定义知,③⑤是对数函数.故选 D.

2. 已知对数函数 $f(x)$ 的图象过点 $P(8,3)$,则 $f\left(\frac{1}{32}\right)$ =________.

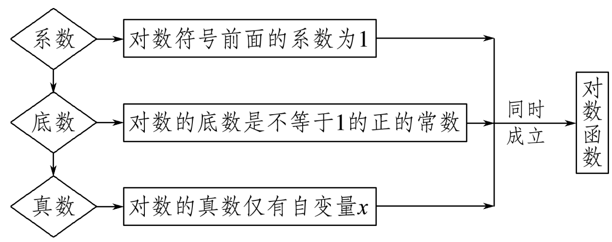
-5 **解析**:设对数函数 $f(x)=\log_a x$ $(a>0$,且 $a\neq 1)$,

因为 $f(x)$ 的图象过点 $P(8,3)$,所以 $3=\log_a 8$,所以 $a^3=8$,$a=2$.

所以 $f(x)=\log_2 x$,则 $f\left(\frac{1}{32}\right)=\log_2\frac{1}{32}=-5$.

反思提炼

判断一个函数是对数函数的方法



学习任务二 与对数函数有关的定义域

例 1 求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\log_5(x-3)+\log_5(x+3)$;

(2) $f(x)=\lg(x-2)+\frac{1}{x-3}$;

(3) $f(x)=\log_{(x+1)}(16-4x)$.

解:(1)由 $\begin{cases}x-3>0,\\x+3>0\end{cases}$ 得 $x>3$.

所以函数 $f(x)=\log_5(x-3)+\log_5(x+3)$ 的定义域为 $(3,+\infty)$.

(2)要使函数有意义,需满足 $\begin{cases}x-2>0,\\x-3\neq 0,\end{cases}$

解得 $x>2$ 且 $x\neq 3$.

所以函数的定义域为 $(2,3)\cup(3,+\infty)$.

(3)要使函数有意义,需满足 $\begin{cases}16-4x>0,\\x+1>0,\\x+1\neq 1,\end{cases}$

解得 $-1<x<0$ 或 $0<x<4$.

所以函数的定义域为 $(-1,0)\cup(0,4)$.

[一题多思]
思考1.求对数型函数的定义域时要注意哪些问题?
提示:真数大于0,底数大于0且不为1.
思考2.本例(1)中,若将函数变为“$f(x)=\log_5[(x-3)(x+3)]$”,其定义域会变化吗?
提示:会变化.定义域为$(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$.

反思提炼

求函数的定义域时应遵循的原则
(1)分母不能为0;
(2)根指数为偶数时,被开方数非负;
(3)对数的真数大于0,底数大于0且不为1.

探究训练

函数$f(x)=\dfrac{1}{\ln(x+1)}+\sqrt{9-x^2}$的定义域为______________.

$(-1,0)\cup(0,3]$　**解析**:由$\begin{cases}x+1>0,\\x+1\neq1,\\9-x^2\geq0,\end{cases}$解得$-1<x<0$或$0<x\leq3$,所以函数$f(x)=\dfrac{1}{\ln(x+1)}+\sqrt{9-x^2}$的定义域为$(-1,0)\cup(0,3]$.

学习任务三　对数函数的实际应用

例2　地震震级是根据测震仪记录的地震波的振幅大小来测定的,一般采用里氏震级标准.震级M_L是由离震中100 km处的标准测震仪所记录的地震波的最大振幅值的对数来表示的.里氏震级的计算公式为$M_L=\lg\left(\dfrac{A_{\max}}{A_0}\right)$,其中$A_0$表示“标准地震”振幅(使用标准地震振幅是为了修正测震仪距离实际震中的距离造成的偏差),$A_{\max}$表示地震波的最大振幅.4.5级地震给人的震感已比较明显,那么6.5级地震的最大振幅是4.5级地震的最大振幅的　(　　)
A.e倍　　B.10倍　　C.100倍　　D.e^2倍

C　**解析**:由于$M_L=\lg\left(\dfrac{A_{\max}}{A_0}\right)$,所以$A_{\max}=A_0 10^{M_L}$,所以6.5级地震的最大振幅与4.5级地震的最大振幅的比值为$\dfrac{A_0 10^{6.5}}{A_0 10^{4.5}}=10^2=100$.

反思提炼

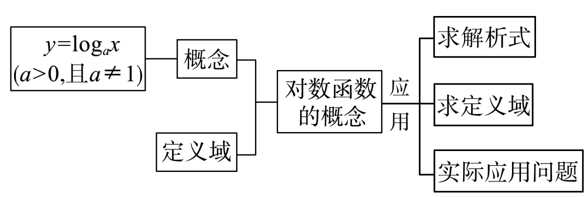
对数函数应用题的解题思路
(1)依题意,找出或建立数学模型;
(2)依实际情况确定解析式中的参数的值;
(3)依题设数据解决数学问题;
(4)得出实际问题的答案.

探究训练

某地为了抑制一种有害昆虫的繁殖,引入了一种以该昆虫为食物的动物.已知该动物的数量y(单位:只)与引入时间x(单位:年)的关系为$y=a\log_2(x+1)$.若该动物在引入一年后的数量为100只,则引入7年后它们的数量为　(　　)
A.300只　　B.400只
C.600只　　D.700只

A　**解析**:将$x=1$,$y=100$代入$y=a\log_2(x+1)$中,得$100=a\log_2(1+1)$,解得$a=100$.
所以$y=100\log_2(x+1)$.
所以当$x=7$时,$y=100\log_2(7+1)=300$.故选A.

体系构建



课后素养评价(三十三)

基础性·能力运用

1.给出下列函数:
①$y=\log_{\frac{2}{3}}x^2$;②$y=\log_3(x-1)$;
③$y=\log_{(x+1)}x$;④$y=\log_\pi x$.
其中是对数函数的有　(　　)
A.1个　　B.2个
C.3个　　D.4个

A　**解析**:①②不是对数函数,因为对数的真数不是只含有自变量x;③不是对数函数,因为对数的底数不是常数;④是对数函数.

2.(多选)下列四组函数中,定义域不相同的是　(　　)
A.$y=\sqrt{x}$和$y=\lg x$
B.$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$和$y=\dfrac{1}{\lg x}$
C.$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$和$y=\lg x$
D.$y=\sqrt{x}$和$y=\dfrac{1}{\lg x}$

ABD　**解析**:A中,$y=\sqrt{x}$的定义域为$[0,+\infty)$,$y=\lg x$的定义域为$(0,+\infty)$,定义域不同;B中,

$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$的定义域为$(0,+\infty)$，$y=\frac{1}{\lg x}$的定义域为$(0,1)\cup(1,+\infty)$，定义域不同；C 中，$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$的定义域为$(0,+\infty)$，$y=\lg x$ 的定义域为$(0,+\infty)$，定义域相同；D 中，$y=\sqrt{x}$的定义域为$[0,+\infty)$，$y=\frac{1}{\lg x}$的定义域为$(0,1)\cup(1,+\infty)$，定义域不同.

3.若函数 $f(x)=(a^2-a+1)\log_{(a+1)}x$ 是对数函数，则实数 $a=$________.

1　**解析**：由题意可知 $a^2-a+1=1$，解得 $a=1$ 或 $a=0$.

又 $a+1>0$，且 $a+1\neq1$，所以 $a=1$.

4.“每天进步一点点”可以用函数来诠释，假如某同学现在的数学水平是 1，以后每天比前一天增加千分之五，经过 y 天之后，该同学的数学水平为 x，则 y 关于 x 的函数解析式是________.

$y=\log_{1.005}x$　**解析**：由题意得 $x=(1+0.005)^y=1.005^y$，化为对数函数得 $y=\log_{1.005}x$.

5.(开放性问题)如果函数 $f(x)$对任意的正实数 a，b，都有 $f(ab)=f(a)+f(b)$，则这样的函数 $f(x)$可以是________.(写出一个即可)

$f(x)=\lg x$(答案不唯一)　**解析**：由题意，函数 $f(x)$对任意的正实数 a，b，都有 $f(ab)=f(a)+f(b)$，可考虑对数函数 $f(x)=\lg x$，满足 $f(ab)=\lg(ab)=\lg a+\lg b=f(a)+f(b)$.

6.求下列函数的定义域：

(1)$y=\log_5(1-x)$；(2)$y=\log_{(3x-1)}5$；

(3)$y=\frac{\ln(4-x)}{x-3}$.

解：(1)要使函数式有意义，需 $1-x>0$，解得 $x<1$，所以函数 $y=\log_5(1-x)$的定义域是$(-\infty,1)$.

(2)要使函数式有意义，需$\begin{cases}3x-1>0,\\3x-1\neq1,\end{cases}$解得 $x>\frac{1}{3}$，且 $x\neq\frac{2}{3}$，

所以函数 $y=\log_{(3x-1)}5$ 的定义域是$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$.

(3)要使函数式有意义，需$\begin{cases}4-x>0,\\x-3\neq0,\end{cases}$解得 $x<4$，且 $x\neq3$，

所以函数 $y=\frac{\ln(4-x)}{x-3}$的定义域是$(-\infty,3)\cup(3,4)$.

综合性·创新提升

1.设 $f(x)$是对数函数，且 $f(\sqrt[3]{4})=-\frac{2}{3}$，那么 $f(\sqrt{2})$等于　　(　　)

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{1}{4}$　　C.$-\frac{1}{2}$　　D.$-\frac{1}{4}$

C　**解析**：设 $f(x)=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$，由 $f(\sqrt[3]{4})=-\frac{2}{3}$，解得 $a=\frac{1}{2}$，所以 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$.

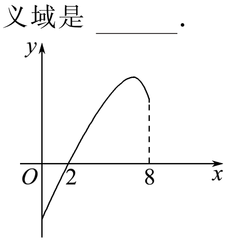
所以 $f(\sqrt{2})=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}=-\frac{1}{2}$.

2.在天文学中，天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述.两颗天体的星等与亮度满足关系式 $m_1-m_2=\frac{1}{2}\lg E_2^5-\frac{1}{2}\lg E_1^5$，其中星等为 m_k 的天体的亮度为 E_k $(k=1,2)$.已知牛郎星的星等是 0.75，织女星的星等是 0，则牛郎星与织女星的亮度的比值为　　(　　)

A.$10^{\frac{3}{10}}$　　B.$10^{-\frac{3}{10}}$　　C.$\lg\frac{3}{10}$　　D.$\lg\frac{10}{3}$

B　**解析**：因为 $m_1-m_2=\frac{1}{2}\lg E_2^5-\frac{1}{2}\lg E_1^5=\frac{5}{2}\lg\frac{E_2}{E_1}=-0.75$(所求为牛郎星的亮度比织女星的亮度，所以牛郎星为 2，织女星为 1)，所以$\frac{E_2}{E_1}=10^{-\frac{3}{10}}$.

3.已知函数 $f(x)$的图象如图所示，则函数 $g(x)=\log_{\sqrt{2}}f(x)$的定义域是______.



$(2,8]$　**解析**：要使函数 $g(x)=\log_{\sqrt{2}}f(x)$有意义，则 $f(x)>0$.

结合图象可知当 $x\in(2,8]$时，$f(x)>0$，

所以函数 $g(x)=\log_{\sqrt{2}}f(x)$的定义域是$(2,8]$.

4.函数 $f(x)=\lg\left(2kx^2-kx+\frac{3}{8}\right)$的定义域为 **R**，则实数 k 的取值范围是________.

$[0,3)$　**解析**：依题意，得 $2kx^2-kx+\frac{3}{8}>0$ 的解集为 **R**，即不等式 $2kx^2-kx+\frac{3}{8}>0$ 恒成立.

当 $k=0$ 时，$\frac{3}{8}>0$ 恒成立，所以 $k=0$ 满足条件；

当 $k\neq0$ 时，则$\begin{cases}k>0,\\\Delta=k^2-4\times2k\times\frac{3}{8}<0,\end{cases}$解得 $0<k<3$.

综上，k 的取值范围是$[0,3)$.

4.4.2　对数函数的图象和性质

第 1 课时　对数函数的图象和性质

学习任务目标

1.掌握对数函数的图象和性质.

2.掌握对数函数图象与性质的简单应用.

3.知道同底的指数函数与对数函数互为反函数.

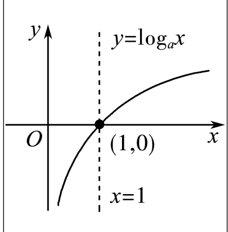
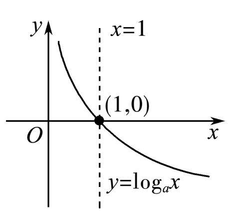
问题式预习

知识清单

知识点一　对数函数的图象与性质

1.因为点(x,y)与点$(x,-y)$关于x轴对称,所以$y=\log_2 x$图象上任意一点(x,y)关于x轴对称的对称点$(x,-y)$都在$y=\log_{\frac{1}{2}}x$的图象上,反之亦然.由此可知,底数互为倒数的两个对数函数的图象关于x轴对称.

2.对数函数的图象与性质

函数	$y=\log_a x$	
	$a>1$	$0<a<1$
图象		
值域	**R**	
定义域	$(0,+\infty)$	
单调性	在$(0,+\infty)$上是增函数	在$(0,+\infty)$上是减函数
共点性	过定点$(1,0)$,即$x=1$时,$y=0$	
函数值的特点	$x\in(0,1)$时,$y\in(-\infty,0)$;$x\in[1,+\infty)$时,$y\in[0,+\infty)$	$x\in(0,1)$时,$y\in(0,+\infty)$;$x\in[1,+\infty)$时,$y\in(-\infty,0]$

知识点二　反函数

一般地,指数函数$y=a^x(a>0$,且$a\neq1)$与对数函数$y=\log_a x(a>0$,且$a\neq1)$互为反函数,它们的定义域与值域正好互换,图象关于直线$y=x$对称.

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)对数函数在其定义域上一定是单调函数.　(√)

(2)对数函数的图象一定在y轴的右侧.　(√)

(3)函数$y=\log_3 x$与$y=x^3$互为反函数.　(×)

(4)若$\log_a 2>\log_a 3$,则$0<a<1$.　(√)

2.函数$y=\lg x$的反函数是________.

$y=10^x$　**解析**:由$y=\lg x$得$x=10^y$.

对换x,y的位置可得$y=\lg x$的反函数为$y=10^x$.

所以与函数$y=\lg x$互为反函数的是$y=10^x$.

3.请思考并回答下列问题:

(1)如何快速画出对数函数的图象?

提示:根据对数函数的性质可知,对数函数$y=\log_a x$的图象恒过点$\left(\frac{1}{a},-1\right)$,$(1,0)$和$(a,1)$,且图象都在第一、四象限内,据此可以快速地画出对数函数$y=\log_a x$的图象.

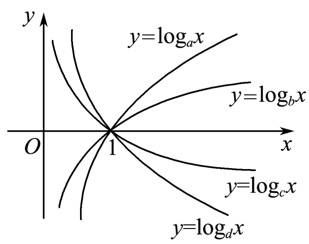
(2)互为反函数的两个函数的单调性相同吗?单调区间呢?

提示:互为反函数的两个函数的单调性相同,但单调区间不一定相同.

任务型课堂

学习任务一　对数函数的图象问题

1. 函数 $y=\log_a x$，$y=\log_b x$，$y=\log_c x$，$y=\log_d x$ 的图象如图所示，则 a,b,c,d 的关系是（　　）



A. $0<a<b<1<d<c$

B. $0<b<a<1<c<d$

C. $0<d<c<1<a<b$

D. $0<c<d<1<a<b$

D　**解析**：由于在第一象限中，随着底数的增大，函数的图象越向 x 轴靠近，所以 $0<c<d<1<a<b$. 故选 D.

2. 函数 $y=\log_a(x+1)-2(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象恒过点________.

$(0,-2)$　**解析**：函数 $y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象恒过点 $(1,0)$. 在 $y=\log_a(x+1)-2$ 中，令 $x+1=1$ 得 $x=0$，此时 $y=\log_a(x+1)-2=-2$. 所以函数 $y=\log_a(x+1)-2$ 的图象恒过点 $(0,-2)$.

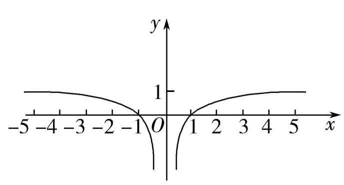
3. 已知 $f(x)=\log_a|x|$ 满足 $f(-5)=1$，试画出函数 $f(x)$ 的图象.

解：因为 $f(x)=\log_a|x|$，

所以 $f(-5)=\log_a 5=1$，即 $a=5$.

所以 $f(x)=\log_5|x|$.

所以 $f(x)$ 是偶函数，其图象如图所示.

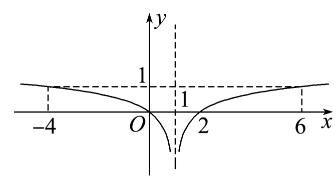


［一题多思］

思考 1. 若本题条件不变，你能画出函数 $g(x)=\log_a|x-1|$ 的图象吗？

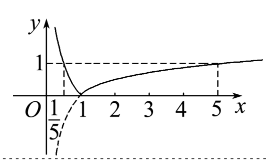
提示：因为 $f(x)=\log_5|x|$，所以 $g(x)=\log_5|x-1|$.

如图，$g(x)$ 的图象是由 $f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度得到的.



思考 2. 若本题条件不变，你能画出函数 $h(x)=|\log_a x|$ 的图象吗？

提示：因为 $a=5$，所以 $h(x)=|\log_5 x|$. $h(x)$ 的图象如图中实线部分所示.



反思提炼

求函数 $y=m+\log_a f(x)(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象所过定点时，只需令 $f(x)=1$ 求出 x 的值，即得定点为 (x,m).

学习任务二　利用对数函数的性质比较大小

比较下列各组中两个值的大小：

(1) $\log_3 1.9$，$\log_3 2$；

(2) $\log_2 3$，$\log_{0.3} 2$；

(3) $\log_a \pi$，$\log_a 3.14(a>0$，且 $a\neq1)$；

(4) $\log_5 0.4$，$\log_6 0.4$.

解：(1) 因为 $y=\log_3 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$1.9<2$，

所以 $\log_3 1.9<\log_3 2$.

(2) 因为 $\log_2 3>\log_2 1=0$，$\log_{0.3} 2<\log_{0.3} 1=0$，

所以 $\log_2 3>\log_{0.3} 2$.

(3) 当 $a>1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

则有 $\log_a \pi>\log_a 3.14$；

当 $0<a<1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

则有 $\log_a \pi<\log_a 3.14$.

综上所述，当 $a>1$ 时，$\log_a \pi>\log_a 3.14$；

当 $0<a<1$ 时，$\log_a \pi<\log_a 3.14$.

(4) 在同一平面直角坐标系中，作出 $y=\log_5 x$，$y=\log_6 x$ 的图象，再作出直线 $x=0.4$（图略），观察图象可得 $\log_5 0.4<\log_6 0.4$.

反思提炼

比较对数值大小时常用的四种方法

(1) 若底数为同一常数，则可由对数函数的单调性直接进行比较；

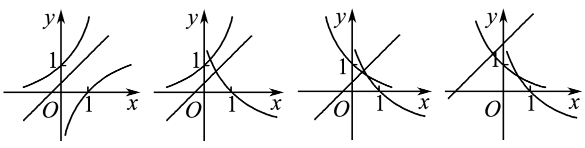
(2) 若底数为同一字母，则根据底数对对数函数单调性的影响，对底数进行分类讨论；

(3)若底数不同，真数相同，则可以先用换底公式化为同底后，再进行比较；

(4)若底数与真数都不同，则常借助1，0等中间量进行比较.

学习任务三　反函数

例　(1)已知$a>0$且$a\neq1$，函数$y=\log_a x$，$y=a^x$，$y=x+a$在同一坐标系中的图象可能是　(　　)



A　　　B　　　C　　　D

C　**解析**：函数$y=a^x$与$y=\log_a x$的图象关于直线$y=x$对称，排除B；当$a>1$时，$y=a^x$与$y=\log_a x$在定义域内都是递增的，$y=x+a$在y轴的截距$a>1$，排除A；当$0<a<1$时，$y=a^x$与$y=\log_a x$在定义域内单调递减，$y=x+a$在y轴的截距$0<a<1$，排除D，故选C.

(2)若函数$f(x)$与$g(x)=a^x$互为反函数，且函数$g(x)$的图象过点$(-2,4)$，则$f(1)+f(2)=$　(　　)

A.-1　　B.0　　C.1　　D.$\frac{1}{4}$

A　**解析**：由题意可得$f(x)=\log_a x$.

因为函数$g(x)$的图象过点$(-2,4)$，所以函数$f(x)$的图象过点$(4,-2)$，即$-2=\log_a 4$，解得$a=\frac{1}{2}$.所以$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$.

所以$f(1)+f(2)=\log_{\frac{1}{2}}1+\log_{\frac{1}{2}}2=0-1=-1$.故选A.

反思提炼

互为反函数的函数的性质

(1)同底数的指数函数与对数函数互为反函数；

(2)互为反函数的两个函数定义域与值域互换；

(3)互为反函数的两个函数的图象关于直线$y=x$对称.

探究训练

1.函数$f(x)=\log_a(3x-2)$($a>0$，且$a\neq1$)的图象过定点　(　　)

A.$\left(0,\frac{2}{3}\right)$　B.$\left(\frac{2}{3},0\right)$　C.$(0,1)$　D.$(1,0)$

D　**解析**：令$3x-2=1$，解得$x=1$，即得函数$y=\log_a(3x-2)$的图象过定点$(1,0)$.

2.已知$a=\log_2 e$，$b=\ln 2$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$，则$a$，$b$，$c$的大小关系为　(　　)

A.$a>b>c$　　B.$b>a>c$

C.$c>b>a$　　D.$c>a>b$

D　**解析**：因为$e=2.718\ 28\cdots>2$，

所以$a=\log_2 e>\log_2 2=1$，$b=\ln 2<\ln e=1$.

因为$c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}=\log_2 3>\log_2 2=1$，

$a=\log_2 e<\log_2 3=c$，所以$c>a>b$.

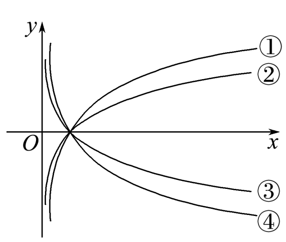
体系构建

- 对数函数的图象和性质
  - 图象
    - 过定点
    - 底数对图象的影响
  - 性质
    - 单调性 — 比较大小
  - 反函数
    - 性质

课后素养评价(三十四)

基础性·能力运用

1.如图，函数$y=\log_2 x$，$y=\log_{0.5}x$，$y=-\log_3 x$的图象依次是　(　　)

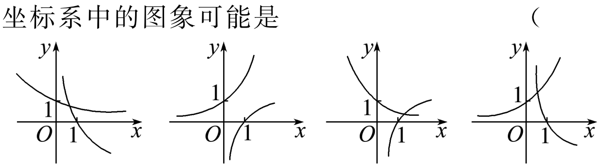


A.①④②　　B.①④③

C.②③①　　D.②③④

B　**解析**：令$y=1$，可得函数$y=\log_2 x$的图象过点$(2,1)$，函数$y=\log_{0.5}x$的图象过点$(0.5,1)$，函数$y=-\log_3 x$的图象过点$\left(\frac{1}{3},1\right)$，所以③是函数$y=-\log_3 x$的图象，④是函数$y=\log_{0.5}x$的图象.因为函数$y=\log_{0.5}x$与$y=\log_2 x$的图象关于$y$轴对称，所以①是函数$y=\log_2 x$的图象.故选B.

2.(多选)已知$a>0$，$b>0$，且$ab=1$，$a\neq1$，则函数$f(x)=a^x$与函数$g(x)=-\log_b x$在同一平面直角坐标系中的图象可能是　(　　)



A　　　B　　　C　　　D

AB　**解析**：因为 $g(x)=-\log_b x=\log_{\frac{1}{b}}x=\log_a x$，所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的单调性相同，结合选项可知A，B正确.

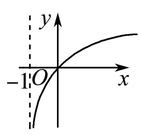
3. 已知实数 $a=\log_2 3$，$b=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$，$c=\log_3\frac{1}{2}$，则（　　）

A.$a>b>c$　　B.$a>c>b$

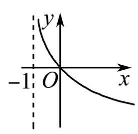
C.$b>c>a$　　D.$c>b>a$

A　**解析**：$a=\log_2 3>1$，$b=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}=\log_3 2\in(0,1)$，$c=\log_3\frac{1}{2}<0$，故 $c<b<a$.

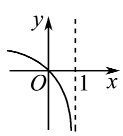
4. 函数 $y=\ln(1-x)$ 的图象大致为（　　）



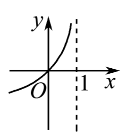
A



B



C



D

C　**解析**：函数的定义域为 $(-\infty,1)$，且在定义域上单调递减，故选C.

5. 若函数 $f(x)=4+\log_a(x-1)$ $(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象过一个定点，则这个定点的坐标是________.

$(2,4)$　**解析**：因为函数 $y=\log_a(x-1)$ $(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象过定点 $(2,0)$，所以函数 $f(x)=4+\log_a(x-1)$ 的图象过定点 $(2,4)$.

6. 若指数函数 $y=a^x$ $(a>0$，且 $a\neq1)$ 的反函数的图象过点 $(9,2)$，则 a 的值为__3__.

7. 若函数 $y=\log_{(3a-1)}x$ 是 $(0,+\infty)$ 上的减函数，则实数 a 的取值范围是________.

$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$　**解析**：由题意可得 $0<3a-1<1$，解得 $\frac{1}{3}<a<\frac{2}{3}$，所以实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

8. 比较下列各组中两个值的大小：

(1) $\ln 0.3$，$\ln 2$；

(2) $\log_a 3.1$，$\log_a 5.2$ $(a>0$，且 $a\neq1)$；

(3) $\log_3 0.2$，$\log_4 0.2$；

(4) $\log_3\pi$，$\log_\pi 3$.

解：(1) 因为函数 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，又 $0.3<2$，所以 $\ln 0.3<\ln 2$.

(2) 当 $a>1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，

又 $3.1<5.2$，所以 $\log_a 3.1<\log_a 5.2$；

当 $0<a<1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，

又 $3.1<5.2$，所以 $\log_a 3.1>\log_a 5.2$.

综上所述，当 $a>1$ 时，$\log_a 3.1<\log_a 5.2$；

当 $0<a<1$ 时，$\log_a 3.1>\log_a 5.2$.

(3) 因为 $0>\log_{0.2}3>\log_{0.2}4$，所以 $\frac{1}{\log_{0.2}3}<\frac{1}{\log_{0.2}4}$，

即 $\log_3 0.2<\log_4 0.2$.

(4) 因为函数 $y=\log_3 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，又 $\pi>3$，

所以 $\log_3\pi>\log_3 3=1$.

同理，$1=\log_\pi\pi>\log_\pi 3$，所以 $\log_3\pi>\log_\pi 3$.

综合性·创新提升

1. 已知 $g(x)$ 是函数 $f(x)=10^x$ 的反函数，则 $g(1)$ 的值为（　　）

A.0　　B.1

C.10　　D.100

A　**解析**：由题意，$g(x)=\lg x$，所以 $g(1)=\lg 1=0$.

2.（多选）下列不等式成立的是（　　）

A.$\log_{0.2}0.3<\log_{0.2}0.4$

B.$2^{0.3}>\log_3 2$

C.$\log_3 e>\ln 3$

D.$\log_2 5>\log_3 5$

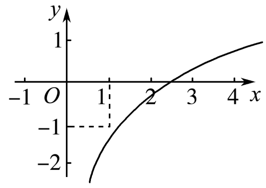
BD　**解析**：因为函数 $y=\log_{0.2}x$ 是减函数，所以 $\log_{0.2}0.3>\log_{0.2}0.4$，故A错误；

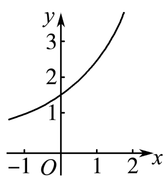
因为 $2^{0.3}>2^0=1$，$\log_3 2<\log_3 3=1$，所以 $2^{0.3}>\log_3 2$，故B正确；

因为 $\log_3 e<\log_3 3=1$，$\ln 3>1$，所以 $\log_3 e<\ln 3$，故C错误；

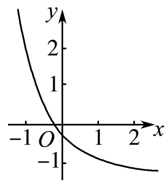
因为 $\log_2 5=\frac{\lg 5}{\lg 2}$，$\log_3 5=\frac{\lg 5}{\lg 3}$，且 $1>\lg 5>\lg 3>\lg 2>0$，所以 $\log_2 5>\log_3 5$，故D正确.

3. 已知函数 $f(x)=\log_a x+b$ 的图象如图所示，那么函数 $g(x)=a^x+b$ 的图象可能为（ D ）

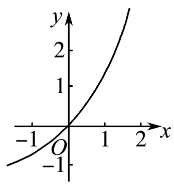




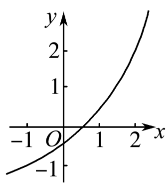
A



B



C



D

4.(新定义)(多选)任取 $x_1,x_2\in[a,b]$,且 $x_1\neq x_2$,若 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的凸函数,下列函数中在其定义域上为凸函数的是　(　BCD　)

A.$y=2^x$　　B.$y=\log_2 x$

C.$y=-x^2$　　D.$y=x^{\frac{1}{2}}$

5.已知函数 $f(x)=\log_2(1+4^x)-x$,则下列说法正确的是　(　D　)

A.函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上为增函数

B.函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$

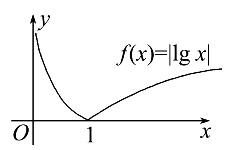
C.函数 $f(x)$ 是奇函数

D.函数 $f(x)$ 是偶函数

6.已知奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.若 $a=-f\left(\log_2\dfrac{1}{5}\right)$,$b=f(\log_2 4.1)$,$c=f(2^{0.8})$,则 a,b,c 的大小关系为 $\underline{c<b<a}$.

7.已知 $f(x)=|\lg x|$,且 $\dfrac{1}{c}>a>b>1$,试借助图象比较 $f(a),f(b),f(c)$ 的大小.

解:先作出函数 $y=\lg x$ 的图象,再将图象位于 x 轴下方的部分以 x 轴为对称轴翻折到 x 轴上方,得到 $f(x)=|\lg x|$ 的图象,如图所示.由图象可知,$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.



由 $\dfrac{1}{c}>a>b>1$,得 $f\left(\dfrac{1}{c}\right)>f(a)>f(b)$.

又 $f\left(\dfrac{1}{c}\right)=\left|\lg\dfrac{1}{c}\right|=|-\lg c|=|\lg c|=f(c)$.

所以 $f(c)>f(a)>f(b)$.

第 2 课时　对数函数的图象和性质的应用

学习任务目标

1.能够利用对数函数的单调性解简单的对数型不等式.

2.能够利用对数函数的性质研究与对数相关的复合函数的单调性、奇偶性等问题.

任务型课堂

学习任务一　解简单的对数不等式

1.已知 $a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$,若 $\log_a m>\log_a 5$,则实数 m 的取值范围是________.

$(0,5)$　**解析**:因为 $0<a<1$,

所以 $f(x)=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

所以 $0<m<5$.所以 m 的取值范围是 $(0,5)$.

2.已知 $\log_a\dfrac{1}{2}>1$,则实数 a 的取值范围为________.

$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　**解析**:由 $\log_a\dfrac{1}{2}>1$ 得 $\log_a\dfrac{1}{2}>\log_a a$.

①当 $a>1$ 时,有 $a<\dfrac{1}{2}$,此时无解;

②当 $0<a<1$ 时,有 $\dfrac{1}{2}<a$,从而 $\dfrac{1}{2}<a<1$.

故 a 的取值范围是 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

反思提炼

解对数型不等式的一般思路

(1)把不等式两边均化为 $\log_a f(x)$ 的形式；

(2)利用单调性，把不等式转化为真数的大小关系，得到新的不等式，要注意底数 a 和 1 的关系；

(3)在真数大于零的前提下，解这个新的不等式；

(4)总结得出原不等式的解集.

学习任务二　简单对数型复合函数的值域

1. 设 $a>1$，函数 $f(x)=\log_a x$ 在区间 $[a,2a]$ 上的最大值与最小值之差为 $\frac{1}{2}$，则 a 等于（　　）

A.4　　B.$2\sqrt{2}$

C.2　　D.$\sqrt{2}$

A　**解析**：因为 $a>1$，所以函数 $f(x)=\log_a x$ 在区间 $[a,2a]$ 上是增函数.

所以 $f(x)_{\max}=f(2a)=\log_a(2a)=1+\log_a 2$，

$f(x)_{\min}=f(a)=\log_a a=1$，

所以 $1+\log_a 2-1=\frac{1}{2}$，解得 $a=4$.

2. 已知函数 $f(x)=3\log_{\frac{1}{3}}x$ 的定义域为 $[3,9]$，则函数 $f(x)$ 的值域是________.

$[-6,-3]$　**解析**：因为 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，

所以，当 $3\leqslant x\leqslant 9$ 时，$\log_{\frac{1}{3}}9\leqslant\log_{\frac{1}{3}}x\leqslant\log_{\frac{1}{3}}3$，

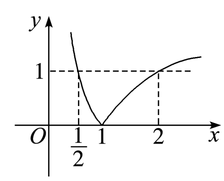
即 $-2\leqslant\log_{\frac{1}{3}}x\leqslant-1$，

所以 $-6\leqslant 3\log_{\frac{1}{3}}x\leqslant-3$，

所以函数 $f(x)$ 的值域是 $[-6,-3]$.

3. 已知函数 $f(x)=|\log_{\frac{1}{2}}x|$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{2},m\right]$，值域为 $[0,1]$，则 m 的取值范围为________.

$[1,2]$　**解析**：作出 $f(x)=|\log_{\frac{1}{2}}x|$ 的图象(如图)，可知 $f\left(\frac{1}{2}\right)=f(2)=1$，$f(1)=0$. 由题意，结合图象知 $1\leqslant m\leqslant 2$.



反思提炼

(1)直接利用对数函数的单调性，可求对数函数 $y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$ 在给定区间上的值域.

(2)求形如 $y=\log_a f(x)(a>0$，且 $a\neq1)$ 的复合函数值域的步骤：①求函数的定义域；②将原函数拆分成 $y=\log_a u(a>0$，且 $a\neq1)$，$u=f(x)$ 两个函数；③由定义域求 u 的取值范围；④利用函数 $y=\log_a u(a>0$，且 $a\neq1)$ 的单调性求值域.

学习任务三　对数型复合函数的单调性及单调区间

例 1　已知函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-ax+a)$ 在区间 $(-\infty,\sqrt{2})$ 上是增函数，求实数 a 的取值范围.

解：令 $g(x)=x^2-ax+a$，$g(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{a}{2}\right]$ 上单调递减.

因为 $0<\frac{1}{2}<1$，所以 $y=\log_{\frac{1}{2}}g(x)$ 是减函数.

已知复合函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-ax+a)$ 在区间 $(-\infty,\sqrt{2})$ 上单调递增，

所以只要 $g(x)$ 在 $(-\infty,\sqrt{2})$ 上单调递减，且 $g(x)>0$ 在 $(-\infty,\sqrt{2})$ 上恒成立，

即 $\begin{cases}\sqrt{2}\leqslant\frac{a}{2},\\(\sqrt{2})^2-\sqrt{2}a+a\geqslant0,\end{cases}$

解得 $2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant2(\sqrt{2}+1)$.

故实数 a 的取值范围是 $[2\sqrt{2},2(\sqrt{2}+1)]$.

反思提炼

与对数相关的复合函数的单调性问题的求解策略

(1)首先求出函数的定义域，再利用判断复合函数单调性的法则“同增异减”求单调区间；

(2)若已知函数在某个区间上的单调性，则该区间为函数相应单调区间的子区间，从而求参数的范围.

注意：函数在某区间上单调，前提是在该区间上有意义，不能忽视其对参数范围的限制.

探究训练

求函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+2x+1)$ 的值域和单调区间.

解：设 $t=-x^2+2x+1$，

则 $t=-(x-1)^2+2$.

因为 $y=\log_{\frac{1}{2}}t$ 为减函数，且 $0<t\leqslant 2$，

所以 $y_{\min}=\log_{\frac{1}{2}}2=-1$，

所以函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+2x+1)$ 的值域为 $[-1,+\infty)$.

令 $-x^2+2x+1>0$，得 $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$，

所以 $t=-x^2+2x+1$ 在 $(1-\sqrt{2},1)$ 上单调递增，在 $(1,1+\sqrt{2})$ 上单调递减.

又 $y=\log_{\frac{1}{2}}t$ 为减函数，

所以函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+2x+1)$ 的单调递增区间为 $(1,1+\sqrt{2})$，单调递减区间为 $(1-\sqrt{2},1)$.

学习任务四　对数型复合函数性质的综合应用

例 2　已知函数 $f(x)=\log_a(x+1)$，$g(x)=\log_a(1-x)$（其中 $a>0$，且 $a\neq 1$）.

(1)求函数 $f(x)+g(x)$ 的定义域；

(2)判断函数 $f(x)-g(x)$ 的奇偶性，并予以证明.

解：(1)由题意得 $\begin{cases}x+1>0,\\1-x>0,\end{cases}$

所以 $-1<x<1$.

所以所求函数的定义域为 $(-1,1)$.

(2)函数 $f(x)-g(x)$ 为奇函数.

证明如下：

令 $H(x)=f(x)-g(x)$，

则 $H(x)=\log_a(x+1)-\log_a(1-x)$

$=\log_a\dfrac{x+1}{1-x}(-1<x<1)$.

因为 $H(-x)=\log_a\dfrac{-x+1}{1+x}=-\log_a\dfrac{x+1}{1-x}$

$=-H(x)$，

所以函数 $H(x)=f(x)-g(x)$ 为奇函数.

反思提炼

解决对数型复合函数问题的关注点

(1)增强定义域意识：求单调区间、证奇偶性、解不等式都要先求定义域.

(2)增强函数性质的应用意识：解对数不等式的关键是将不等式转化为常见的不等式，转化工具就是对数函数的单调性.

探究训练

(2022·全国乙卷)若 $f(x)=\ln\left|a+\dfrac{1}{1-x}\right|+b$ 是奇函数，则 $a=$______，$b=$______.

$-\dfrac{1}{2}$　$\ln 2$　**解析**：若 $a=0$，则 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq 1\}$，不关于原点对称，所以 $a\neq 0$.

若奇函数 $f(x)=\ln\left|a+\dfrac{1}{1-x}\right|+b$ 有意义，则 $x\neq 1$ 且 $a+\dfrac{1}{1-x}\neq 0$，所以 $x\neq 1$ 且 $x\neq 1+\dfrac{1}{a}$.

因为函数 $f(x)$ 为奇函数，定义域关于原点对称，所以 $1+\dfrac{1}{a}=-1$，解得 $a=-\dfrac{1}{2}$.

由 $f(0)=0$，得 $\ln\dfrac{1}{2}+b=0$，所以 $b=\ln 2$.

体系构建

- 对数函数的图象和性质的应用
  - 单调性
    - 解不等式
    - 求值域
    - 复合函数的单调性
  - 性质综合问题
    - 奇偶性

课后素养评价(三十五)

基础性·能力运用

1. 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$　(　　)

A.在 $(0,+\infty)$ 上为增函数

B.在 $(0,+\infty)$ 上为减函数

C.在 $(-\infty,0)$ 上为增函数

D.在 $(-\infty,0)$ 上为减函数

C　**解析**：函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$，定义域为 $(-\infty,0)$，令 $u=-x$，则 $y=\log_{\frac{1}{2}}u$，

因为 $u=-x$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，$y=\log_{\frac{1}{2}}u$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以由复合函数的单调性可知，函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增.

2. 已知函数 $f(x)$ 的图象与 $g(x)=\log_{\frac{1}{4}}x$ 的图象关于 x 轴对称，则不等式 $f(3x)<f(2x+1)$ 的解集为 （　　）

A. $(0,+\infty)$　　B. $(0,1)$

C. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　D. $(-\infty,1)$

B　**解析**：根据题意，$g(x)$ 是在 $(0,+\infty)$ 上的减函数，又 $f(x)$ 与 $g(x)$ 关于 x 轴对称，则 $f(x)=\log_4 x$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数，所以 $0<3x<2x+1$，解得 $0<x<1$.

3. 已知 $y=\log_a(2-ax)$ 的单调递减区间为 $[0,1]$，则 a 的取值范围为 （ B ）

A. $(0,1)$　　B. $(1,2)$

C. $(0,2)$　　D. $[2,+\infty)$

4. 如果 $\log_{\frac{1}{2}}x<\log_{\frac{1}{2}}y<0$，那么 （　　）

A. $y<x<1$　　B. $x<y<1$

C. $1<x<y$　　D. $1<y<x$

D　**解析**：对数函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，则由 $\log_{\frac{1}{2}}x<\log_{\frac{1}{2}}y<0=\log_{\frac{1}{2}}1$，可得 $1<y<x$.

5. 函数 $f(x)=\lg(2+x)+\lg(2-x)$ 是________函数.（填“奇”“偶”或“非奇非偶”）

偶　**解析**：因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|-2<x<2\}$，关于原点对称，又 $f(-x)=\lg[2+(-x)]+\lg[2-(-x)]=\lg(2-x)+\lg(2+x)=f(x)$，所以函数 $f(x)=\lg(2+x)+\lg(2-x)$ 为偶函数.

6. 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(1-x^2)$ 的单调递增区间为________，最小值为________.

$[0,1)$　0　**解析**：要使 $y=\log_{\frac{1}{2}}(1-x^2)$ 有意义，则 $1-x^2>0$.

所以 $x^2<1$. 所以 $-1<x<1$. 因此函数的定义域为 $(-1,1)$.

令 $t=1-x^2$，$x\in(-1,1)$.

当 $x\in(-1,0]$ 时，x 增大，t 增大，$y=\log_{\frac{1}{2}}t$ 减小，所以 $x\in(-1,0]$ 时，$y=\log_{\frac{1}{2}}(1-x^2)$ 单调递减.

同理，当 $x\in[0,1)$ 时，$y=\log_{\frac{1}{2}}(1-x^2)$ 单调递增.

故函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(1-x^2)$ 的单调递增区间为 $[0,1)$，且函数的最小值 $y_{\min}=\log_{\frac{1}{2}}(1-0^2)=0$.

7. 函数 $f(x)=\log_2\sqrt{x}\cdot\log_{\sqrt{2}}(2x)$ 的最小值为________.

$-\frac{1}{4}$　**解析**：显然 $x>0$，所以 $f(x)=\log_2\sqrt{x}\cdot\log_{\sqrt{2}}(2x)=\frac{1}{2}\log_2 x\cdot\log_2(4x^2)=\frac{1}{2}\log_2 x\cdot(\log_2 4+2\log_2 x)=\log_2 x+(\log_2 x)^2=\left(\log_2 x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\geqslant-\frac{1}{4}$，当且仅当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，有 $f(x)_{\min}=-\frac{1}{4}$.

8. 已知函数 $f(x)=\log_2(x+1)-2$.

(1) 若 $f(x)>0$，求 x 的取值范围；

(2) 若 $x\in(-1,3]$，求 $f(x)$ 的值域.

解：(1) 函数 $f(x)=\log_2(x+1)-2\ (x>-1)$，

因为 $f(x)>0$，即 $\log_2(x+1)-2>0$，

所以 $\log_2(x+1)>2$，所以 $x+1>4$，解得 $x>3$.

所以 x 的取值范围是 $(3,+\infty)$.

(2) 因为 $x\in(-1,3]$，所以 $x+1\in(0,4]$，

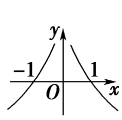
所以 $\log_2(x+1)\in(-\infty,2]$，

所以 $\log_2(x+1)-2\in(-\infty,0]$.

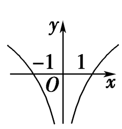
所以 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,0]$.

综合性·创新提升

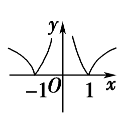
1. 若函数 $y=\log_a(3-ax)$ 为增函数，则函数 $y=\log_a|x|$ 的图象大致是 （　　）



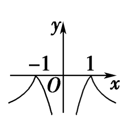
A



B



C



D

A　**解析**：由题可知 $a>0$ 且 $a\neq1$，令 $u=3-ax$，则 $u=3-ax$ 为减函数.

由复合函数 $y=\log_a(3-ax)$ 为增函数可得 $0<a<1$.

当 $x>0$ 时，$y=\log_a|x|=\log_a x$，此时函数 $y=\log_a|x|$ 为减函数. 结合函数 $y=\log_a|x|$ 为偶函数可知，函数 $y=\log_a|x|$ 的图象为选项 A 中的图象.

2. 若函数 $y=\log_a(x^2-ax+1)$ 有最小值，则 a 的取值范围是 （　　）

A. $0<a<1$

B. $0<a<2$，$a\neq1$

C. $1<a<2$

D. $a\geqslant2$

C　**解析**：令 $g(x)=x^2-ax+1\ (a>0$，且 $a\neq1)$，$g(x)$ 开口向上；

①当 $a>1$ 时，$g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒为正；所以 $\Delta=a^2-4<0$，解得 $1<a<2$；

②当 $0<a<1$ 时，x^2-ax+1 不能使函数 $y=\log_a(x^2-ax+1)$ 有最小值，不符合题意.综上所述，$1<a<2$.

3. 函数 $f(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)$　　(　　)

A.是奇函数

B.是偶函数

C.是非奇非偶函数

D.既是奇函数又是偶函数

A　**解析**：易知该函数的定义域为 $\mathbf{R}$，又 $f(x)+f(-x)=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)+\lg(\sqrt{x^2+1}-x)=\lg[(\sqrt{x^2+1}+x)\cdot(\sqrt{x^2+1}-x)]=\lg 1=0$，所以 $f(x)=-f(-x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数.

4.(多选)已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2-x)-\log_2(x+4)$，则下列结论中正确的是　　(　　)

A.$f(x)$ 的定义域是 $[-4,2]$

B.$y=f(x-1)$ 是偶函数

C.$f(x)$ 在区间 $[-1,2)$ 上是增函数

D.$f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称

BCD　**解析**：对于 A，由题意可得函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2-x)-\log_2(x+4)=-\log_2[(2-x)(x+4)]$.由 $2-x>0$，$x+4>0$ 可得 $-4<x<2$，故函数定义域为 $(-4,2)$，故 A 错误；

对于 B，$y=f(x-1)=-\log_2[(3-x)(x+3)]$ 的定义域为 $(-3,3)$，设 $g(x)=-\log_2[(3-x)(x+3)]$，所以 $g(-x)=-\log_2[(3+x)(-x+3)]=g(x)$，即 $y=f(x-1)$ 是偶函数，故 B 正确；

对于 C，$f(x)=-\log_2[(2-x)(x+4)]=-\log_2(-x^2-2x+8)=-\log_2[-(x+1)^2+9]=\log_{\frac{1}{2}}[-(x+1)^2+9]$，

令 $t=-(x+1)^2+9$，可得 $y=\log_{\frac{1}{2}}t$，

因为当 $x\in[-1,2)$ 时，$t=-(x+1)^2+9$ 是减函数，外层函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}t$ 也是减函数，

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,2)$ 上是增函数，故 C 正确；

对于 D，$f(-2-x)=-\log_2[(x+4)(2-x)]=f(x)$，得 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称，故 D 正确.

5. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，$f\left(\frac{1}{3}\right)=0$，则不等式 $f(\log_{\frac{1}{8}}x)>0$ 的解集为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$，不等式 $f(\log_{\frac{1}{8}}x)<0$ 的解集为 $\left(\frac{1}{2},2\right)$.

6. 作出函数 $y=|\log_2 x|+2$ 的图象，并根据图象写出函数的单调区间及值域.

解：先作出函数 $y=\log_2 x$ 的图象，如图 1；再将 $y=\log_2 x$ 在 x 轴下方的图象关于 x 轴对称，翻折到 x 轴上方(原来在 x 轴上方的图象不变)，得到函数 $y=|\log_2 x|$ 的图象，如图 2；然后将 $y=|\log_2 x|$ 的图象向上平移 2 个单位长度，得到函数 $y=|\log_2 x|+2$ 的图象，如图 3.由图 3 得函数 $y=|\log_2 x|+2$ 的单调递增区间是 $[1,+\infty)$，单调递减区间是 $(0,1)$，值域是 $[2,+\infty)$.

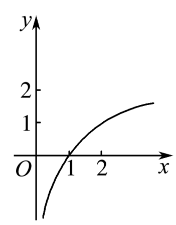


图 1

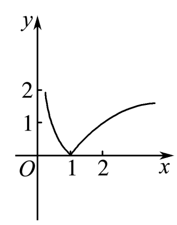


图 2

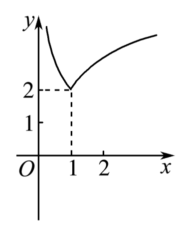


图 3

7. 设函数 $f(x)=(\log_2 x+\log_2 4)\cdot(\log_2 x+\log_2 2)$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{4},4\right]$.

(1)若 $t=\log_2 x$，求 t 的取值范围；

(2)求 $y=f(x)$ 的最大值与最小值，并求出取最值时对应的 x 的值.

解：(1)因为 $t=\log_2 x$ 是增函数，而 $x\in\left[\frac{1}{4},4\right]$，

所以 t 的取值范围为 $\left[\log_2\frac{1}{4},\log_2 4\right]$，即 $t\in[-2,2]$.

(2)记 $t=\log_2 x$，则 $y=f(x)=(\log_2 x+2)(\log_2 x+1)=(t+2)(t+1)(-2\leqslant t\leqslant 2)$.

因为 $y=\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ 在 $\left[-2,-\frac{3}{2}\right]$ 上单调递减，在 $\left[-\frac{3}{2},2\right]$ 上单调递增，

所以，当 $t=\log_2 x=-\frac{3}{2}$，即 $x=2^{-\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时，

$y=f(x)$ 有最小值 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=-\frac{1}{4}$；

当 $t=\log_2 x=2$，即 $x=2^2=4$ 时，

$y=f(x)$ 有最大值 $f(4)=12$.

4.4.3　不同函数增长的差异

学习任务目标

1.理解直线上升、指数爆炸、对数增长的含义.
2.区分指数函数、对数函数以及幂函数增长速度的差异.
3.会选择适当的函数模型分析和解决一些实际问题.

问题式预习

知识清单

知识点　三种常见函数模型的增长差异

函数 / 性质	$y=a^x$ $(a>1)$	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$y=kx$ $(k>0)$
在$(0,+\infty)$上的单调性	增函数	增函数	增函数
图象的变化	随x的增大逐渐变"陡"	随x的增大逐渐趋于平缓	增长速度保持不变
增长速度	$y=a^x(a>1)$的增长快于$y=kx(k>0)$的增长，$y=kx(k>0)$的增长快于$y=\log_a x(a>1)$的增长		
增长结果	总会存在一个x_0，当$x>x_0$时，有$a^x>kx>\log_a x$		

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").

(1)函数$y=\log_{\frac{1}{2}}x$减小的速度越来越慢.(　√　)

(2)对于指数函数$y=a^x(a>1)$，底数a越大，其增长速度越快.(　√　)

(3)不存在一个实数m，使得当$x>m$时，$1.1^x>x^{100}$.(　×　)

(4)当$a>1$，$k>0$时，在区间$(0,+\infty)$内，对任意的x，总有$\log_a x<kx<a^x$成立.(　×　)

2.若$x\in(1,2)$，则下列结论正确的是(　　)

A.$2x>x^{\frac{1}{2}}>\lg x$　　B.$2x>\lg x>x^{\frac{1}{2}}$

C.$x^{\frac{1}{2}}>2x>\lg x$　　D.$x^{\frac{1}{2}}>\lg x>2x$

A　**解析**：因为$x\in(1,2)$，所以$2x>2$，$x^{\frac{1}{2}}\in(1,\sqrt{2})$，$\lg x\in(0,\lg 2)$，所以$2x>x^{\frac{1}{2}}>\lg x$.

3.请思考并回答下列问题：

(1)一次函数增长速度有什么特点？

提示：一次函数增长速度不变，平稳变化.

(2)是不是函数值越大，函数的增长速度越快？

提示：不是.函数值的大小不等同于增长速度快慢，数值大不一定增长速度快，增长速度体现在函数值的变化趋势上.

任务型课堂

学习任务一　几类函数的增长差异

1.下列函数中，增长速度最快的是(　　)

A.$y=2\,024^x$　　B.$y=x^{2\,024}$

C.$y=\log_{2\,024}x$　　D.$y=2\,024x$

A　**解析**：指数函数$y=a^x(a>0$，且$a\neq1)$，在$a>1$时呈爆炸式增长，并且随a值的增大，增长速度越来越快.故选A.

2.三个变量y_1，y_2，y_3随变量x变化的数据如下表：

x	1	5	10	15	20	25	30
y_1	2	32	1 024	32 768	1.05×10^6	3.36×10^7	1.07×10^9
y_2	2	10	20	30	40	50	60
y_3	2	4.322	5.322	5.907	6.322	6.644	6.907

其中关于x呈指数增长的变量是y_1.

[一题多思]

思考1.1题中，若把"最快"改为"最慢"，应该选哪个选项？

提示：C.

思考2.怎样合理选择指数函数与对数函数模型？

提示：当描述增长速度变化很快时，常选用指数函数模型；当要求不断增长，但又不会增长过快，也不会增长很大时，常选用对数函数模型.

反思提炼

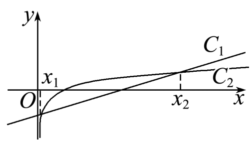
指数函数与对数函数模型的判断方法

(1)根据函数值的变化量的情况对函数模型进行判断.

(2)根据图象判断增长型的指数函数与对数函数模型时,通常是观察函数图象上升的快慢,即随着自变量的增大,图象变“陡”的是指数函数模型,图象趋于平缓的是对数函数模型.

学习任务二　几类函数增长速度的比较

例1　函数 $f(x)=\lg x$,$g(x)=0.3x-1$ 的图象如图所示.



(1)试根据函数的增长差异指出 C_1,C_2 分别对应的函数;

(2)以两图象的交点为分界点,对 $f(x)$,$g(x)$的大小进行比较.

解:(1)C_1 对应的函数为 $g(x)=0.3x-1$;C_2 对应的函数为 $f(x)=\lg x$.

(2)当 $0<x<x_1$ 时,$g(x)>f(x)$;

当 $x_1<x<x_2$ 时,$f(x)>g(x)$;

当 $x>x_2$ 时,$g(x)>f(x)$;

当 $x=x_1$ 或 $x=x_2$ 时,$f(x)=g(x)$.

反思提炼

常见的函数模型及增长特点

(1)线性函数模型

线性函数模型 $y=kx+b(k>0)$的增长特点是“直线上升”,其增长速度不变.

(2)指数函数模型

指数函数模型 $y=a^x(a>1)$的增长特点是随着自变量的增大,函数值增大的速度越来越快,呈爆炸性增长,形象地称为“指数爆炸”.

(3)对数函数模型

对数函数模型 $y=\log_a x(a>1)$的增长特点是随着自变量的增大,函数值增大的速度越来越慢,即增长速度平缓,可称为“对数增长”.

探究训练

下面对函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$,$g(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 与$h(x)=-\dfrac{x}{100}$在区间$(0,+\infty)$上的递减情况说法正确的是　　(　　)

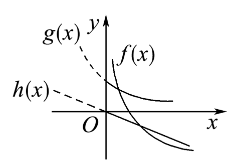
A.$f(x)$递减速度越来越慢,$g(x)$递减速度越来越快,$h(x)$递减速度比较平稳

B.$f(x)$递减速度越来越快,$g(x)$递减速度越来越慢,$h(x)$递减速度越来越快

C.$f(x)$递减速度越来越慢,$g(x)$递减速度越来越慢,$h(x)$递减速度比较平稳

D.$f(x)$递减速度越来越快,$g(x)$递减速度越来越快,$h(x)$递减速度越来越快

C　**解析**:观察函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$,$g(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$,$h(x)=-\dfrac{x}{100}$在区间$(0,+\infty)$上的图象如下图所示:



函数 $f(x)$的图象在区间$(0,1)$上递减较快,但递减速度逐渐变慢;函数 $f(x)$在区间$(1,+\infty)$上递减较慢,且越来越慢.同样,函数 $g(x)$的图象在区间$(0,+\infty)$上递减较慢,且递减速度越来越慢.函数 $h(x)$的图象递减速度比较平稳.

学习任务三　几类函数增长模型的实际应用

例2　某皮鞋厂今年1月份开始投产,并且前4个月的产量分别为1万双、1.2万双、1.3万双、1.37万双.由于产品质量好、款式新颖,前几个月的销售情况良好.为了推销员在推销产品时,接受订单不至于过多或过少,需要估计以后几个月的产量.厂里分析,产量的增加仅依靠工人熟练程度的提高和生产流程的优化.厂里暂时不准备增加设备和工人.针对月份 x 与产量 y(单位:万双)给出三种函数模型:$y=ax+b$,$y=ax^2+bx+c$,$y=ab^x+c$,你认为利用哪一种模型去估算以后几个月的产量最合适?

解:由题意知,将产量随时间变化的离散量分别抽象为$A(1,1)$,$B(2,1.2)$,$C(3,1.3)$,$D(4,1.37)$这4个数据.

①当函数为 $y=ax+b$ 时,将 B,C 两点的坐标代入函数式,

得$\begin{cases}3a+b=1.3,\\2a+b=1.2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=0.1,\\b=1.\end{cases}$

所以 $y=0.1x+1$.

由此可得结论为：在不增加工人和设备的条件下，产量会每月上升 1 000 双，这是不太现实的.

②当函数为 $y=ax^2+bx+c$ 时，将 A,B,C 三点的坐标代入函数式，得$\begin{cases}a+b+c=1,\\4a+2b+c=1.2,\\9a+3b+c=1.3,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-0.05,\\b=0.35,\\c=0.7.\end{cases}$

所以 $y=-0.05x^2+0.35x+0.7$.

由此函数计算 4 月份的产量为 1.3 万双，比实际产量少 700 双，而且由二次函数性质可知，产量自 4 月份开始将每月下降（图象开口向下，对称轴为 $x=3.5$），不符合实际.

③当函数为 $y=ab^x+c$ 时，将 A,B,C 三点的坐标代入函数式，

得$\begin{cases}ab+c=1,①\\ab^2+c=1.2,②\\ab^3+c=1.3.③\end{cases}$

由①，得 $ab=1-c$，代入②③，

得$\begin{cases}b(1-c)+c=1.2,\\b^2(1-c)+c=1.3,\end{cases}$

则$\begin{cases}c=\dfrac{1.2-b}{1-b},\\c=\dfrac{1.3-b^2}{1-b^2},\end{cases}$解得$\begin{cases}b=0.5,\\c=1.4.\end{cases}$

则 $a=\dfrac{1-c}{b}=-0.8$.

所以 $y=-0.8\times0.5^x+1.4$.

把 $x=4$ 代入得 $y=-0.8\times0.5^4+1.4=1.35$.

比较上述三个函数模型的优劣，既要考虑误差最小，又要考虑生产的实际，如：增产的趋势和可能性.经过筛选，以指数函数模型为最佳，一是误差小，二是由于厂房新建，随着工人技术和管理效益逐渐提高，一段时间内产量会明显上升，但经过一段时间之后，如果不更新设备，产量必然趋于稳定，而指数函数模型恰好反映了这种趋势.

因此选用指数函数模型 $y=-0.8\times0.5^x+1.4$.

反思提炼

建立函数模型应遵循的三个原则

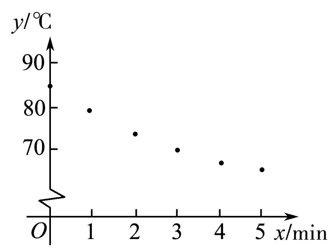
(1)简化原则：建立函数模型，一定要对实际问题进行简化，抓主要因素、主要变量，尽量建立较低阶、较简便的模型.

(2)可推演原则：建立模型，一定要有意义，既能作理论分析，又能计算、推理，且能得出正确结论.

(3)反映性原则：建立模型，应与实际问题具有“相似性”，所得模型的解应具有说明问题的功能，能回到具体问题中解决问题.

探究训练

中国茶文化博大精深，茶水的口感与茶叶类型和水的温度有关.经验表明，某种绿茶用 85 ℃的水泡制，再等到茶水温度降至 60 ℃时饮用，可以产生最佳口感.为分析泡制一杯最佳口感茶水所需时间，某研究人员每隔1 min测量一次茶水的温度，根据所得数据作出如图所示的散点图.观察点的分布情况，下列可以近似地刻画茶水温度 y（单位：℃）随时间 x（单位：min）变化的规律的函数模型是　（　　）



A. $y=mx^2+n(m>0)$

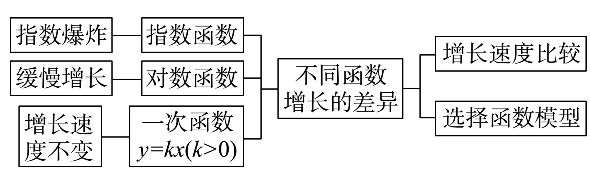
B. $y=mx+n(m>0)$

C. $y=ma^x+n(m>0,a>0,a\neq1)$

D. $y=m\log_a x+n(m>0,a>0,a\neq1)$

C　**解析**：由函数图象，可知符合条件的只有指数函数模型.故选 C.

体系构建



课后素养评价(三十六)

基础性·能力运用

1. 四人赛跑,假设他们跑过的路程 $f_i(x)$(其中 $i\in\{1,2,3,4\}$)和时间 $x(x>1)$的函数关系分别是 $f_1(x)=x^2$,$f_2(x)=4x$,$f_3(x)=\log_2 x$,$f_4(x)=2^x$.如果他们一直跑下去,最终跑在最前面的人对应的函数关系是 (　　)

A. $f_1(x)=x^2$　　B. $f_2(x)=4x$

C. $f_3(x)=\log_2 x$　　D. $f_4(x)=2^x$

D　**解析**:显然四个函数中,指数函数是增长最快的,故最终跑在最前面的人具有的函数关系是 $f_4(x)=2^x$.故选 D.

2. 能使不等式 $\log_2 x<x^2<2^x$ 一定成立的 x 的取值区间是 (　　)

A. $(0,+\infty)$　　B. $(2,+\infty)$

C. $(-\infty,2)$　　D. $(4,+\infty)$

D　**解析**:当 $x>4$ 时,$\log_2 x<x^2<2^x$.故选 D.

3. 在某试验中,测得变量 x 和变量 y 之间的对应数据,如下表.

x	0.50	0.99	2.01	3.98
y	-1.01	0.01	0.98	2.00

则最适合表示 x,y 之间关系的函数是 (　　)

A. $y=2^x$　　B. $y=x^2-1$

C. $y=2x-2$　　D. $y=\log_2 x$

D　**解析**:根据 $x=0.50$,$y=-1.01$,代入计算,可以排除 A;根据 $x=2.01$,$y=0.98$,代入计算,可以排除 B,C;将各数据代入函数 $y=\log_2 x$,可知满足题意.故选 D.

4. 下面对函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ 与 $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在区间 $(0,+\infty)$上的衰减情况的说法中,正确的是 (　　)

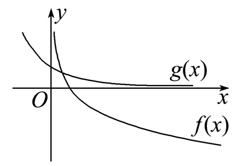
A. $f(x)$的衰减速度越来越慢,$g(x)$的衰减速度越来越快

B. $f(x)$的衰减速度越来越快,$g(x)$的衰减速度越来越慢

C. $f(x)$的衰减速度越来越慢,$g(x)$的衰减速度越来越慢

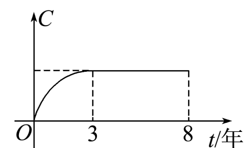
D. $f(x)$的衰减速度越来越快,$g(x)$的衰减速度越来越快

C　**解析**:在平面直角坐标系中画出 $f(x)$与 $g(x)$的图象如图所示.



由图象可判断出衰减情况为 $f(x)$的衰减速度越来越慢,$g(x)$的衰减速度越来越慢.

5. 某工厂 8 年来某种产品的年产量 C 与时间 t(单位:年)的函数关系如图所示.



有以下四种说法:

①前三年产量增长的速度越来越快;②前三年产量增长的速度越来越慢;③第三年后这种产品停止生产;④第三年后年产量保持不变.

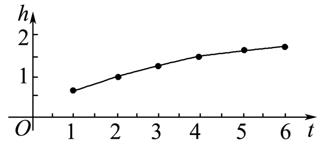
其中正确说法的序号是________.

②④　**解析**:由图可知,前三年产量增长的速度越来越慢,故①错误,②正确;第三年后这种产品的产量保持不变,故③错误,④正确.

6. 某人对一棵松树的生长进行了研究,收集了其高度 h(单位:m)与生长时间 t(单位:年)的相关数据,并准备选择 $h=mt+b$($m\neq0$,b 为常数)与 $h=\log_a(t+1)$($a>0$,且 $a\neq1$)来刻画 h 与 t 的关系.你认为选择哪个函数更合理?请预测第 8 年松树的高度.

t/年	1	2	3	4	5	6
h/m	0.6	1	1.3	1.5	1.6	1.7

解:据表中数据作出散点图如图.



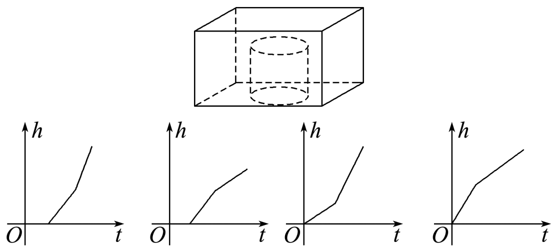
由图可以看出,用一次函数模型不吻合,选用对数型函数比较合理.将(2,1)代入到 $h=\log_a(t+1)$中,得 $1=\log_a 3$,解得 $a=3$,即 $h=\log_3(t+1)$.

当 $t=8$ 时,$h=\log_3(8+1)=2$,

故可预测第 8 年松树的高度为 2 m.

综合性·创新提升

1. 如图，向放在水槽底部的烧杯中注水（流量一定），注满烧杯后，继续注水，直至注满水槽，水槽中水面高度 h 与注水时间 t 之间的函数关系图象大致是（　　）



A　　B　　C　　D

B　**解析**：开始的一段时间，水槽底部没有水，烧杯满了之后水槽中水面上升速度先快后慢，与 B 图象相吻合.

2. 某食品的保鲜时间 y（单位：h）与储存温度 x（单位：℃）满足函数关系 $y=\mathrm{e}^{kx+b}$（$\mathrm{e}=2.718\cdots$ 为自然对数的底数，k，b 为常数）.若该食品在 0 ℃的保鲜时间是 192 h，在 22 ℃的保鲜时间是 48 h，则该食品在 33 ℃的保鲜时间是（ D ）

A.22 h　　B.23 h

C.33 h　　D.24 h

3. 某地区植被被破坏，土地沙漠化越来越严重，最近三年测得沙漠增加量分别为 0.2 万公顷、0.4 万公顷和 0.76 万公顷，则沙漠增加量 y（单位：万公顷）与年数 x 的函数关系可近似表示为（ C ）

A.$y=0.2x$　　B.$y=\dfrac{1}{10}(x^2+2x)$

C.$y=\dfrac{2^x}{10}$　　D.$y=0.2+\log_{16}x$

4. 党的二十大报告强调，要加快建设交通强国、数字中国.专家称数字交通让出行更智能、安全、舒适.数字交通研究中，道路密度是指某路段单位时间内通过的车辆数，车辆密度是指该路段单位长度内的车辆数.现定义交通流量 $F=\dfrac{q}{x}$，其中 x 为道路密度，q 为车辆密度.已知某路段的交通流量 $F=f(x)=\begin{cases}100-45a^x,0<x<40,\\-\dfrac{7}{8}x+120,40\leqslant x\leqslant 80,\end{cases}$其中 $a>0$.当道路密度 $x=2$ 时，交通流量 $F=95$.

(1)求 a 的值；

(2)若交通流量 $F>95$，求道路密度 x 的取值范围；

(3)求车辆密度 q 的最大值.

解：(1)依题意，$100-45a^2=95$，即 $a^2=\dfrac{1}{9}$，

又 $a>0$，所以 $a=\dfrac{1}{3}$.

(2)当 $40\leqslant x\leqslant 80$ 时，$F=f(x)=-\dfrac{7}{8}x+120$ 单调递减，

F 最大为 $f(40)=85$，故 $F>95$ 的解集为空集；

当 $0<x<40$ 时，由 $100-45\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^x>95$，解得 $x>2$，即 $2<x<40$，

所以，若交通流量 $F>95$，则道路密度 x 的取值范围为 $(2,40)$.

(3)依题意，

$$q=F\cdot x=\begin{cases}\left[100-45\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right]\cdot x,0<x<40,\\-\dfrac{7}{8}x^2+120x,40\leqslant x\leqslant 80,\end{cases}$$

所以，当 $0<x<40$ 时，$q<100\cdot x<4\ 000$；

当 $40\leqslant x\leqslant 80$ 时，$q=-\dfrac{7}{8}\left(x-\dfrac{480}{7}\right)^2+\dfrac{28\ 800}{7}\leqslant\dfrac{28\ 800}{7}$.

由于 $40<\dfrac{480}{7}<80$，所以，当 $x=\dfrac{480}{7}$ 时，q 取得最大值 $\dfrac{28\ 800}{7}$.

因为 $\dfrac{28\ 800}{7}>4\ 000$，

所以车辆密度 q 的最大值为 $\dfrac{28\ 800}{7}$.

4.5　函数的应用(二)

4.5.1　函数的零点与方程的解

学习任务目标

1. 理解函数的零点的概念及函数的零点、方程的根与函数图象与 x 轴的交点的关系.

2. 会求函数的零点.

3. 掌握函数零点存在定理并会判断函数零点所在的大致区间及个数.

问题式预习

知识清单

知识点一　函数的零点的概念

对于一般函数 $y=f(x)$,我们把使 $f(x)=0$ 的实数 x 叫做函数 $y=f(x)$的零点.

知识点二　方程、函数、函数图象之间的关系

方程 $f(x)=0$ 有实数解⇔函数 $y=f(x)$有零点⇔函数 $y=f(x)$的图象与 x 轴有公共点.

知识点三　函数零点存在定理

如果函数 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上的图象是一条连续不断的曲线,且有 $f(a)f(b)<0$,那么,函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内至少有一个零点,即存在 $c\in(a,b)$,使得 $f(c)=0$,这个 c 也就是方程 $f(x)=0$ 的解.

概念辨析

1. 判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)函数的零点是一个点.　(×)

(2)所有的函数都有零点.　(×)

(3)若方程 $f(x)=0$ 有两个不等实数解 x_1,x_2,则函数 $y=f(x)$的零点为$(x_1,0),(x_2,0)$.　(×)

(4)函数 $f(x)$的零点是函数 $y=f(x)$的图象与 x 轴交点的横坐标,也是方程 $f(x)=0$ 的实数解.　(√)

2. 以下函数在区间$(0,2)$内必有零点的是　(　　)

A. $y=x-3$　　B. $y=2^x$

C. $y=x^3$　　D. $y=\lg x$

D　**解析**:画出 A,B,C,D 四个选项中的函数的图象(图略)可知,只有 D 选项中 $y=\lg x$ 在区间$(0,2)$上有零点.

3. 请思考并回答下列问题:

(1)函数 $F(x)=f(x)-g(x)$的零点与方程 $f(x)=g(x)$的实数解有什么关系?

提示:函数 $F(x)=f(x)-g(x)$的零点就是方程 $f(x)=g(x)$的实数解,也是函数 $y_1=f(x)$与 $y_2=g(x)$的图象交点的横坐标.

(2)如果函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的图象不连续,但 $f(a)f(b)<0$,那么 $f(x)$在区间(a,b)内是否一定有零点?请举例说明.

提示:不一定.如函数 $y=\dfrac{1}{x}$,有 $f(-1)f(1)=-1\times1<0$,但 $y=\dfrac{1}{x}$在$(-1,1)$内没有零点.

(3)函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有零点,一定有 $f(a)f(b)<0$ 吗?

提示:不一定.例如:函数 $f(x)=|x-1|$在区间$(0,2)$内有 1 个零点,但 $f(0)f(2)=1>0$.

任务型课堂

学习任务一　求函数的零点

求下列函数的零点.

(1)$f(x)=x^3+8$;(2)$f(x)=\dfrac{(x+2)\ln x}{x-3}$;

(3)$f(x)=\begin{cases}2^{-x}-4, x\leqslant0,\\ \lg x, x>0.\end{cases}$

解:(1)令 $x^3+8=0$,得 $x=-2$.

所以函数 $f(x)=x^3+8$ 的零点为 -2.

(2)函数 $f(x)=\frac{(x+2)\ln x}{x-3}$ 的定义域为 $(0,3)\cup(3,+\infty)$.令 $\frac{(x+2)\ln x}{x-3}=0$，得 $x+2=0$ 或 $\ln x=0$，

所以 $x=-2$（舍去）或 $x=1$.

所以函数 $f(x)=\frac{(x+2)\ln x}{x-3}$ 的零点为 1.

(3)当 $x\leqslant 0$ 时，令 $2^{-x}-4=0$，得 $x=-2$，满足要求；

当 $x>0$ 时，令 $\lg x=0$，得 $x=1$，满足要求.

所以函数 $f(x)$ 的零点是 $-2,1$.

反思提炼

求函数零点的两种方法

(1)代数法：求方程 $f(x)=0$ 的实数根，若存在实数根，则函数 $f(x)$ 存在零点，否则函数不存在零点.

(2)几何法：与函数的图象联系起来，图象与 x 轴的交点的横坐标即为函数的零点.

学习任务二　判断函数零点所在的区间

例 1　(1)已知函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-1-\log_2 x$.若 x_0 是方程 $f(x)=0$ 的根，则 $x_0\in$（　　）

A. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{2},1\right)$

C. $\left(1,\frac{3}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{3}{2},2\right)$

B　**解析**：因为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-1-\log_2\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}>0$，$f(1)=\frac{1}{2}-1-\log_2 1=-\frac{1}{2}<0$，所以 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

(2)函数 $f(x)=\ln x-\frac{2}{x}$ 的零点所在的大致区间是（　　）

A. $(1,2)$　　B. $(2,3)$

C. $\left(1,\frac{1}{e}\right)$ 和 $(3,4)$　　D. $(e,+\infty)$

B　**解析**：因为 $f(1)=-2<0$，$f(2)=\ln 2-1<0$，$f(3)=\ln 3-\frac{2}{3}>0$，所以 $f(2)f(3)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(2,3)$ 内有零点.

反思提炼

判断函数零点所在区间的步骤

(1)代入：将区间端点值代入函数解析式，求出函数值.

(2)判号：把所得的函数值相乘，并进行符号判断.

(3)定论：若符号为负且图象连续，则在该区间内至少有一个零点.

探究训练

若 $a<b<c$，则函数 $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$ 的两个零点分别位于区间（　　）

A. (a,b) 和 (b,c) 内

B. $(-\infty,a)$ 和 (a,b) 内

C. (b,c) 和 $(c,+\infty)$ 内

D. $(-\infty,a)$ 和 $(c,+\infty)$ 内

A　**解析**：因为 $a<b<c$，

所以 $f(a)=(a-b)(a-c)>0$，

$f(b)=(b-c)(b-a)<0$，

$f(c)=(c-a)(c-b)>0$，

所以 $f(a)f(b)<0$，$f(b)f(c)<0$，

即函数的两个零点分别位于区间 (a,b) 和 (b,c) 内.

学习任务三　判断函数零点个数

例 2　(1)函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3, x\leqslant 0,\\ -2+\ln x, x>0\end{cases}$ 的零点个数为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

C　**解析**：当 $x\leqslant 0$ 时，令 $x^2+2x-3=0$，解得 $x=-3$ 或 $x=1$（舍去）；

当 $x>0$ 时，令 $-2+\ln x=0$，解得 $x=e^2$.

所以函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3, x\leqslant 0,\\ -2+\ln x, x>0\end{cases}$ 有 2 个零点.故选 C.

(2)函数 $f(x)=2^x+\lg(x+1)-2$ 有______个零点.

1　**解析**：因为 $f(0)=1+0-2=-1<0$，

$f(1)=2+\lg 2-2>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上存在零点.

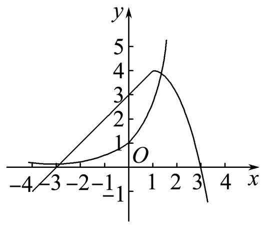
又 $f(x)=2^x+\lg(x+1)-2$ 在 $(-1,+\infty)$ 上为增函数，故 $f(x)$ 有且只有一个零点.

[一题多思]

思考　本例(1)中函数若换为 $f(x)=\begin{cases}x+3, x\leqslant 1,\\ -x^2+2x+3, x>1,\end{cases}$ 则函数 $g(x)=f(x)-e^x$ 有几个零点？

提示：函数 $g(x)=f(x)-e^x$ 的零点个数即为函数 $y=f(x)$ 与 $y=e^x$ 的图象的交点个数.

作出函数图象如图所示.



由图可知,两函数图象有 2 个交点,

即函数 $g(x)=f(x)-e^x$ 有 2 个零点.

反思提炼

判断函数零点个数的四种常用方法

(1)利用函数 $y=f(x)$ 的零点与方程 $f(x)=0$ 的根的关系,方程有几个不同的实数根,函数就有几个零点.

(2)画出函数 $y=f(x)$ 的图象,图象与 x 轴的交点个数即为函数零点的个数.

(3)结合函数单调性,利用函数零点存在定理,可判断 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内零点的个数.

(4)转化成两个函数图象的交点个数问题.

探究训练

判断下列函数的零点的个数.

(1) $f(x)=x^2-\frac{3}{4}x+\frac{5}{8}$;

(2) $f(x)=\ln x+x^2-3$.

解:(1)由 $f(x)=0$,即 $x^2-\frac{3}{4}x+\frac{5}{8}=0$,

得 $\Delta=\left(-\frac{3}{4}\right)^2-4\times\frac{5}{8}=-\frac{31}{16}<0$,

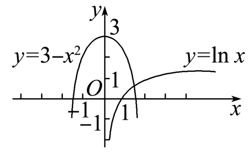
所以方程 $x^2-\frac{3}{4}x+\frac{5}{8}=0$ 没有实数根,

即 $f(x)$ 零点的个数为 0.

(2)(方法一)函数对应的方程为 $\ln x+x^2-3=0$,

所以原函数零点的个数即为函数 $y=\ln x$ 与 $y=3-x^2$ 的图象交点的个数.

在同一平面直角坐标系下,作出两函数的图象如图所示.



由图象知,函数 $y=3-x^2$ 与 $y=\ln x$ 的图象只有一个交点.

从而方程 $\ln x+x^2-3=0$ 有一个根,

即函数 $f(x)=\ln x+x^2-3$ 有一个零点.

(方法二)由于 $f(1)=\ln 1+1^2-3=-2<0$,

$f(2)=\ln 2+2^2-3=\ln 2+1>0$,

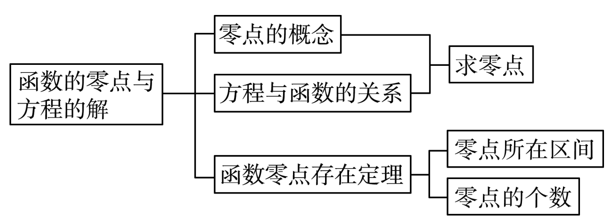
所以 $f(1)f(2)<0$.

又 $f(x)=\ln x+x^2-3$ 的图象在 $(1,2)$ 上是连续的,

所以 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上必有零点.

又 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增的,所以零点只有一个.

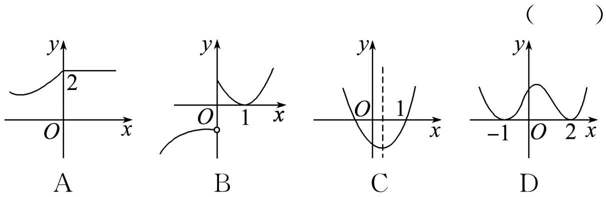
体系构建



课后素养评价(三十七)

基础性·能力运用

1.(多选)下列图象表示的函数中有两个零点的有　(　　)



CD　**解析**:零点是函数图象与 x 轴的交点的横坐标,选项 A 中函数图象与 x 轴没有交点,即函数没有零点;选项 B 中函数图象与 x 轴只有一个交点,即函数只有一个零点;选项 C,D 中函数图象与 x 轴有两个交点,即函数有两个零点.

2.已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-1,x\leqslant 1,\\1+\log_2 x,x>1,\end{cases}$ 则函数 $f(x)$ 的零点为　(　　)

A. $\frac{1}{2}$,0　　B. -2,0

C. $\frac{1}{2}$　　D. 0

D　**解析**:当 $x\leqslant 1$ 时,令 $2^x-1=0$,得 $x=0$.

当 $x>1$ 时,令 $1+\log_2 x=0$,得 $x=\frac{1}{2}$,此时无解.

综上所述,函数 $f(x)$ 的零点为 0.

3. 函数 $f(x)=x-\dfrac{4}{x}$ 的零点有　　　(C)

A.0 个　　B.1 个

C.2 个　　D.无数个

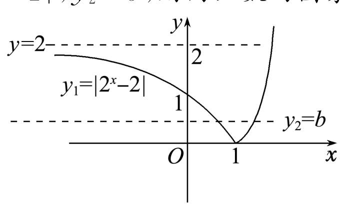
4. 设函数 $f(x)=2^{1-x}-4$, $g(x)=1-\log_2(x+3)$,则函数 $f(x)$ 的零点与 $g(x)$ 的零点之和为 $\underline{-2}$.

5. 若函数 $f(x)=|2^x-2|-b$ 有两个零点,则实数 b 的取值范围是________.

$(0,2)$　**解析:** 因为 $y=f(x)$ 有两个零点,所以 $|2^x-2|-b=0$ 有两个实根,

即 $|2^x-2|=b$ 有两个实根.

令 $y_1=|2^x-2|$, $y_2=b$,则两函数的图象如图所示.



由图可知,当 $b\in(0,2)$ 时,两函数图象有两个交点,即 $f(x)$ 有两个零点.

6. 函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 的零点是 -1 和 2,判断函数 $g(x)=ax^3+bx+4$ 的零点所在的大致区间.

解: 因为 -1 和 2 是函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 的零点,

所以 -1 和 2 是方程 $x^2+ax+b=0$ 的两个实数解,

所以 $-1+2=-a$, $-1\times2=b$,即 $a=-1$, $b=-2$,

所以 $g(x)=-x^3-2x+4$.

因为 $g(1)=1$, $g(2)=-8$, $g(1)g(2)<0$,且 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上连续,

所以 $g(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内有零点.

又因为 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调函数,

所以 $g(x)$ 只有一个零点.

综上可知,函数 $g(x)$ 的零点所在的大致区间为 $(1,2)$.

综合性·创新提升

1. 已知函数 $f(x)=2^x+x^3-8$ 的零点 $x_0\in(m,m+1)$,则整数 m 的值为　　　(C)

A.-1　　B.0　　C.1　　D.2

2. 已知函数 $f(x)$ 的图象是连续不断的,当 $1\leqslant x\leqslant6$,且 $x\in\mathbf{Z}$ 时,x, $f(x)$ 的对应值如下表:

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	15	10	-7	6	-4	-5

则函数 $f(x)$ 在区间 $[1,6]$ 上的零点至少有　　　(　　)

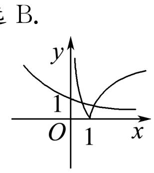
A.2 个　　B.3 个　　C.4 个　　D.5 个

B　**解析:** 由已知数表可知 $f(2)\cdot f(3)=10\times(-7)<0$, $f(3)\cdot f(4)=(-7)\times6<0$, $f(4)\times f(5)=6\times(-4)<0$,故函数 $f(x)$ 在 $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,5)$ 上分别存在零点,故至少有 3 个零点.

3. 函数 $f(x)=2^x|\log_{0.5}x|-1$ 的零点有　　　(　　)

A.1 个　　B.2 个　　C.3 个　　D.4 个

B　**解析:** 函数 $f(x)=2^x|\log_{0.5}x|-1$ 的零点个数 $\Leftrightarrow$ 方程 $|\log_{0.5}x|=\dfrac{1}{2^x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 的根的个数 $\Leftrightarrow$ 函数 $y_1=|\log_{0.5}x|$ 与 $y_2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 的图象的交点个数.作出两个函数的图象如图所示,由图可知两个函数图象有 2 个交点.故选 B.



4. (新定义)对实数 a 和 b,定义运算“$\otimes$”:$a\otimes b=\begin{cases}a, a-b\leqslant1,\\ b, a-b>1.\end{cases}$ 设函数 $f(x)=(x^2-2)\otimes(x-1)$.若函数 $y=f(x)-c$ 恰有两个零点,则实数 c 的取值范围是__________.

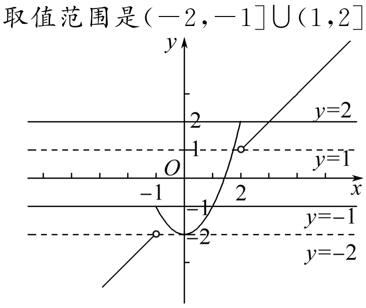
$(-2,-1]\cup(1,2]$　**解析:** 因为 $a\otimes b=\begin{cases}a, a-b\leqslant1,\\ b, a-b>1,\end{cases}$

所以 $f(x)=(x^2-2)\otimes(x-1)$

$=\begin{cases}x^2-2, -1\leqslant x\leqslant2,\\ x-1, x<-1 \text{ 或 } x>2,\end{cases}$

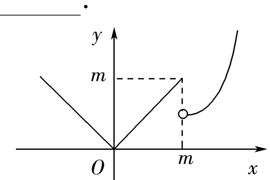
由图可知,当 $-2<c\leqslant-1$ 或 $1<c\leqslant2$ 时,函数 $f(x)$ 与 $y=c$ 的图象有两个公共点,

所以 c 的取值范围是 $(-2,-1]\cup(1,2]$.



5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x|, x\leqslant m,\\ x^2-2mx+4m, x>m,\end{cases}$ 其中 $m>0$.若存在实数 b,使得关于 x 的方程 $f(x)=b$ 有三个不同的根,则 m 的取值范围是________.

$(3,+\infty)$　**解析:** 由题意知方程 $f(x)-b=0$ 有三个不同的根,即直线 $y=b$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象有三个不同的交点.



作出函数 $f(x)=\begin{cases}|x|, x\leqslant m,\\ x^2-2mx+4m, x>m\end{cases}$ 的图象,如图所示.

若存在实数 b,使方程 $f(x)-b=0$ 有三个不同的根,则 $m>-m^2+4m$,即 $m^2-3m>0$.

又因为 $m>0$,所以 $m>3$,即 m 的取值范围为 $(3,+\infty)$.

4.5.2　用二分法求方程的近似解

学习任务目标

1. 通过具体实例理解二分法的概念及其使用条件.
2. 了解二分法是求方程近似解的常用方法,能借助计算器用二分法求方程的近似解.
3. 会用二分法思想解决其他的实际问题.

问题式预习

知识清单

知识点一　二分法的概念

对于在区间$[a,b]$上图象连续不断且$f(a)f(b)<0$的函数$y=f(x)$,通过不断地把它的零点所在区间一分为二,使所得区间的两个端点逐步逼近零点,进而得到零点近似值的方法叫做二分法.

知识点二　用二分法求函数零点近似值的步骤

给定精确度ε,用二分法求函数$y=f(x)$的零点x_0的近似值的一般步骤如下:

(1)确定零点x_0的初始区间$[a,b]$,验证$f(a)f(b)<0$.

(2)求区间(a,b)的中点c.

(3)计算$f(c)$,并进一步确定零点所在的区间:

①若$f(c)=0$(此时$x_0=c$),则c就是函数的零点;

②若$f(a)f(c)<0$(此时$x_0\in(a,c)$),则令$b=c$;

③若$f(c)f(b)<0$(此时$x_0\in(c,b)$),则令$a=c$.

(4)判断是否达到精确度ε:若$|a-b|<\varepsilon$,则得到零点近似值a(或b);否则重复步骤(2)～(4).

以上步骤可借助口诀记忆:定区间,找中点,中值计算两边看;同号去,异号算,零点落在异号间;周而复始怎么办?精确度上来判断.

概念辨析

1. 判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)如果函数零点两侧函数值同号,不适合用二分法求此零点的近似值.　(　√　)

(2)用二分法求函数零点近似值,必须先确定零点所在区间.　(　√　)

(3)用二分法一定能求出函数零点.　(　×　)

(4)用二分法求函数零点近似值,达到精确度后,所得区间内任一数均可视为零点的近似值.(　√　)

2. 用二分法研究函数$f(x)=x^3+x^2-2x-2$的零点时,第一次取的区间为$[1,2]$,则第二次取的区间为$(1,1.5)$.

3. 请思考并回答下列问题:

(1)二分法的基本思想是什么?

提示: 逼近思想和算法思想.

(2)二分法的依据是什么?

提示: 零点存在定理.

(3)函数的零点满足什么条件时,可用二分法求近似值?

提示: 函数的零点为变号零点时可用,函数的零点为不变号零点时不可用.如函数$f(x)=(x-1)^2$的零点就不能用二分法求解.

任务型课堂

学习任务一　二分法的概念及适用条件

1. 下列关于函数$f(x)$,$x\in[a,b]$的命题中,正确的是　(　　)

A.若$x_0\in[a,b]$且满足$f(x_0)=0$,则x_0是$f(x)$的一个零点

B.若x_0是$f(x)$在$[a,b]$上的零点,则可以用二分法求x_0的近似值

C.函数$f(x)$的零点是方程$f(x)=0$的根,但$f(x)=0$的根不一定是函数$f(x)$的零点

D.用二分法求方程的根时,得到的都是近似解

A　**解析:** 对于A,$x_0\in[a,b]$且满足$f(x_0)=0$,则x_0是$f(x)$的一个零点,故A正确;对于B,函数$f(x)$不一定连续,故B错误;对于C,方程$f(x)=0$的根一定是函数$f(x)$的零点,故C错误;对于D,用二分法求方程的根时,得到的根也可能是精确值,故D错误.

2. 已知$f(x)=x^2+6x+c$有零点,但不能用二分法求出,则$c=$________.

9　**解析:** 由题意,得方程$x^2+6x+c=0$的判别式$\Delta=0$,解得$c=9$.

反思提炼

运用二分法求函数的零点应具备的条件

(1)函数图象在零点附近连续不断;

(2)在该零点左右函数值异号.

只有同时满足上述两个条件,才可用二分法求函数零点的近似值.

学习任务二 用二分法求方程的近似解

例1 用二分法求方程 $2x^3+3x-3=0$ 的一个正实数近似解(精确度是0.1).

解:令 $f(x)=2x^3+3x-3$,

经计算,$f(0)=-3<0$,$f(1)=2>0$,$f(0)f(1)<0$,

所以函数 $f(x)$ 在(0,1)内存在零点,

即方程 $2x^3+3x-3=0$ 在(0,1)内有解.

取(0,1)的中点0.5,经计算 $f(0.5)<0$.

又 $f(1)>0$,所以方程 $2x^3+3x-3=0$ 在(0.5,1)内有解.

如此继续下去,得到方程的正实数解所在的区间,如下表:

(a,b)	中点 c	$f(a)$	$f(b)$	$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
(0,1)	0.5	$f(0)<0$	$f(1)>0$	$f(0.5)<0$
(0.5,1)	0.75	$f(0.5)<0$	$f(1)>0$	$f(0.75)>0$
(0.5,0.75)	0.625	$f(0.5)<0$	$f(0.75)>0$	$f(0.625)<0$
(0.625,0.75)	0.687 5	$f(0.625)<0$	$f(0.75)>0$	$f(0.687\ 5)<0$

由于 $|0.687\ 5-0.75|=0.062\ 5<0.1$,

所以方程 $2x^3+3x-3=0$ 的一个精确度为0.1的正实数近似解可取为0.75.

[一题多思]

思考1. 用二分法求方程的近似解,首先要选取计算的初始区间,初始区间应满足哪些条件?

提示:初始区间既要包含所求的根,又要使其长度尽量小.

思考2. 用二分法求方程的近似解时,当选取的区间 $[a,b]$ 满足 $|a-b|<\varepsilon$(ε 为精确度)时,我们如何选择近似解?

提示:区间内的任一数都可以作为方程的近似解,一般取端点作为近似解.

反思提炼

利用二分法求方程的近似解的步骤

(1)构造函数,利用图象确定方程的解所在的大致区间,通常取区间 $(n,n+1)$,$n\in\mathbf{Z}$;

(2)利用二分法求出满足精确度的方程的解所在的区间 M;

(3)区间 M 内的任一实数均是方程的近似解,通常取区间 M 的一个端点.

探究训练

(多选)用二分法求函数 $f(x)=5^x+7x-2$ 的零点近似值,得到数据如下:

x	0.062 5	0.093 75	0.125	0.156 25	0.187 5
$f(x)$	−0.456 7	−0.180 9	0.097 8	0.379 7	0.664 7

根据上述数据,可得 $f(x)=5^x+7x-2$ 的零点近似值(精确度为0.05)可以为 ( )

A.0.625　　B.0.093 75

C.0.125　　D.0.096

BCD **解析**:已知 $f(0.093\ 75)<0$,$f(0.125)>0$,则函数 $f(x)$ 的零点的初始区间为(0.093 75,0.125),所以零点在区间(0.093 75,0.125)上.因为 $|0.125-0.093\ 75|=0.031\ 25<0.05$,所以0.093 75,0.096,0.125都符合题意.

学习任务三 二分法思想的应用

例2 在26枚崭新的金币中,有一枚外表与真金币完全相同的假币(质量轻一点).现在只有一台天平,利用二分法的思想最多称几次就可以发现这枚假币?

解:将26枚金币平均分成两份,放在天平上,假币在轻的那13枚金币里面;将这13枚金币拿出1枚,将剩下的12枚平均分成两份,若天平平衡,则假币一定是拿出的那一枚,若不平衡,则假币一定在轻的那6枚金币里面;将这6枚金币平均分成两份,则假币一定在轻的那3枚金币里面;将这3枚金币任意拿出2枚放在天平上,若平衡,则剩下的那一枚是假币,若不平衡,则轻的那一枚是假币.依据上述分析,最多称4次就可以发现这枚假币.

反思提炼

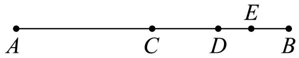
二分法的思想在实际生活中应用十分广泛,二分法不仅可用于线路、水管、煤气管道故障的排查,还能用于实验设计、资料查询、资金分配等.

探究训练

某市A地到B地的输电线路发生故障,这是一条10 km长的线路,每隔50 m有一根电线杆,如何迅速查出故障所在?

解:如图,可首先从中点 C 开始查起,用随身携带的

工具检查，若发现 AC 段正常，则断定故障在 BC 段；



再到 BC 段的中点 D 检查，若 CD 段正常，则故障在 BD 段；再到 BD 段的中点 E 检查……

如此，每检查一次就可以将待查的线路长度缩短一半，经过 7 次查找，即可将故障范围缩小到 50 m～100 m 之间，即可迅速找到故障所在.

体系构建

- 用二分法求方程的近似解
  - 二分法的定义
  - 二分法的步骤
  - 二分法的应用
    - 求方程的近似解
    - 实际应用

课后素养评价(三十八)

基础性·能力运用

1.(多选)下列函数中，能用二分法求函数零点近似值的有　　(　　)

A.$f(x)=3^x-1$

B.$f(x)=x^2-2x+1$

C.$f(x)=\log_4 x$

D.$f(x)=e^{x+1}-2$

ACD　**解析**：根据题意，依次分析选项：对于 A，$f(x)=3^x-1$，有 $f(0)=0$，在函数零点两侧的函数值异号，故可以用二分法求函数零点；对于 B，$f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$，且 $f(1)=0$，当 $x<1$ 时，$f(x)>0$，当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，$f(x)$ 在零点两侧的函数值同号，不能用二分法求函数零点；对于 C，$f(x)=\log_4 x$，有 $f(1)=0$，在函数零点两侧的函数值异号，故可以用二分法求函数零点；对于 D，$f(x)=e^{x+1}-2$，有 $f(\ln 2-1)=0$，在函数零点两侧的函数值异号，故可以用二分法求函数零点.

2.用二分法研究函数 $f(x)=x^3+3x-1$ 的零点时，第一次计算，得 $f(0)<0$，$f(0.5)>0$，第二次应计算 $f(x_1)$，则 x_1 等于　　(　　)

A.1　　B.-1

C.0.25　　D.0.75

C　**解析**：因为 $f(0)<0$，$f(0.5)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,0.5)$ 内存在零点，根据二分法第二次应该计算 $f(x_1)$，其中 $x_1=\dfrac{0+0.5}{2}=0.25$.

3.(多选)某同学求函数 $f(x)=\ln x+2x-6$ 的零点时，用计算器算得部分函数值如下所示.

$f(2)\approx-1.307$，$f(3)\approx1.099$，$f(2.5)\approx-0.084$，$f(2.75)\approx0.512$，$f(2.625)\approx0.215$，$f(2.562\ 5)\approx0.066$.

则方程 $\ln x+2x-6=0$ 的近似解(精确度为 0.1)可取为　　(　　)

A.2.52　　B.2.56

C.2.66　　D.2.75

AB　**解析**：由表格函数值在 0 的左右两侧最接近的值，即 $f(2.5)\approx-0.084$，$f(2.562\ 5)\approx0.066$，

可知方程 $\ln x+2x-6=0$ 的近似根在 $(2.5,2.562\ 5)$ 内，

因此选项 A 中 2.52 符合，选项 B 中 2.56 也符合.

4.用二分法求方程 $2^x+3x-7=0$ 在区间 $(1,3)$ 内的近似解，取区间的中点为 $x_0=2$，那么下一个有根的区间是________.

$(1,2)$　**解析**：设 $f(x)=2^x+3x-7$，$f(1)=-2<0$，$f(3)=10>0$，$f(2)=3>0$.因为 $f(1)f(2)<0$，所以 $f(x)$ 的零点所在的区间为 $(1,2)$，所以方程 $2^x+3x-7=0$ 的下一个有根的区间是 $(1,2)$.

综合性·创新提升

1.(多选)若函数 $f(x)$ 的图象是连续的，且函数 $f(x)$ 的唯一零点同在区间 $(0,4)$，$(0,2)$，$\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，$\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{3}{2}\right)$ 内，则下列函数值与 $f(0)$ 符号不同的是　　(　　)

A.$f(4)$　　B.$f(2)$

C.$f(1)$　　D.$f\left(\dfrac{3}{2}\right)$

ABD　**解析**：由二分法的步骤可知：(1)零点在 $(0,4)$ 内，则有 $f(0)\cdot f(4)<0$，不妨设 $f(0)>0$，$f(4)<0$，取中点 2；(2)零点在 $(0,2)$ 内，则有 $f(0)\cdot$

$f(2)<0$,则 $f(0)>0$,$f(2)<0$,取中点 1;(3)零点在(1,2)内,则有 $f(1)\cdot f(2)<0$,则 $f(1)>0$,$f(2)<0$,取中点 $\frac{3}{2}$;(4)零点在 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 内,则有 $f(1)\cdot f\left(\frac{3}{2}\right)<0$,则 $f(1)>0$,$f\left(\frac{3}{2}\right)<0$,取中点 $\frac{5}{4}$;(5)零点在 $\left(\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right)$ 内,则有 $f\left(\frac{5}{4}\right)\cdot f\left(\frac{3}{2}\right)<0$,则 $f\left(\frac{5}{4}\right)>0$,$f\left(\frac{3}{2}\right)<0$,所以与 $f(0)$ 符号不同的是 $f(4)$,$f(2)$,$f\left(\frac{3}{2}\right)$.

2.一块电路板的 AB 段之间有 60 个串联的焊接点,现某个焊接点的焊口脱落造成电路不通,要想用二分法的思想检测出哪处焊口脱落,至少需要检测 (　　)

A.4 次　　B.6 次

C.8 次　　D.30 次

B　**解析**:第一次,可排除 30 个焊接点,从剩余的 30 个中继续二分法;第二次,可排除 15 个焊接点,从剩余的 15 个中继续二分法;第三次,可排除 7 或 8 个焊接点,考虑至多的情况,所以排除 7 个焊接点,从剩余的 8 个中继续二分法;第四次,可排除 4 个焊接点,从剩余的 4 个中继续二分法;第五次,可排除 2 个焊接点,从剩余的 2 个中继续二分法;第六次,可排除 1 个焊接点,找到脱落的焊接点,所以至少需要检测 6 次.

3.(多选)在用二分法求函数 $f(x)$ 的零点近似值时,第一次所取的区间是 $[-2,4]$,则第三次所取的区间可能是 (　　)

A.$\left[1,\frac{5}{2}\right]$　　B.$[-2,1]$

C.$\left[-2,\frac{5}{2}\right]$　　D.$\left[-\frac{1}{2},1\right]$

AD　**解析**:因为第一次所取的区间是 $[-2,4]$,所以第二次所取的区间可能为 $[-2,1]$,$[1,4]$,所以第三次所取的区间可能为 $\left[-2,-\frac{1}{2}\right]$,$\left[-\frac{1}{2},1\right]$,$\left[1,\frac{5}{2}\right]$,$\left[\frac{5}{2},4\right]$.

4.用二分法求函数 $f(x)=\ln x+2x-6$ 在区间(2,3)内的零点近似值,至少经过________次二等分后精确度达到 0.1.

4　**解析**:开区间(2,3)的长度等于 1,每经过一次操作,区间长度变为原来的一半,经过 n 次操作后,区间长度变为 $\frac{1}{2^n}$,故有 $\frac{1}{2^n}\leqslant 0.1$,即 $2^n\geqslant 10$,则 $n\geqslant 4$,所以至少需要操作 4 次.

5.用二分法求方程 $x^2-5=0$ 的一个近似正解.(精确度为 0.1)

解:令 $f(x)=x^2-5$,因为 $f(2.2)=-0.16<0$,$f(2.4)=0.76>0$,所以 $f(2.2)\cdot f(2.4)<0$,即这个函数在区间(2.2,2.4)内有零点 x_0.

取区间(2.2,2.4)的中点 $x_1=2.3$,$f(2.3)=0.29$,因为 $f(2.2)\cdot f(2.3)<0$,所以 $x_0\in(2.2,2.3)$.

再取区间(2.2,2.3)的中点 $x_2=2.25$,$f(2.25)=0.0625$,因为 $f(2.2)\cdot f(2.25)<0$,所以 $x_0\in(2.2,2.25)$.

由于 $|2.25-2.2|=0.05<0.1$,

所以原方程的近似正解可取为 2.25.

4.5.3　函数模型的应用

学习任务目标

1. 会利用已知函数模型解决实际问题.
2. 能建立函数模型解决实际问题.
3. 了解拟合函数模型的方法并能解决实际问题.
4. 认识函数模型的作用,提高数学建模、数据分析的能力.

问题式预习

知识清单

知识点　两个函数模型

两个函数模型	
指数函数模型	$y=ba^x+c$(a,b,c 为常数,$b\neq0,a>0$,且 $a\neq1$)
对数函数模型	$y=m\log_a x+n$(m,a,n 为常数,$m\neq0,a>0$,且 $a\neq1$)

概念辨析

1. 判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)银行利率、细胞分裂等增长率问题可以用指数型函数模型来表述.　(　√　)

(2)在函数建模中,散点图可以帮助我们选择恰当的函数模型.　(　√　)

(3)在函数模型中,定义域只需使函数有意义.　(　×　)

(4)用函数模型预测的结果和实际结果必须相等,否则函数模型就无存在意义了.　(　×　)

2. 物体在空气中冷却,若物体的初始温度为 θ_1℃,空气温度为 θ_0℃,则 t min 后物体的温度 θ(单位:℃)满足 $\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$.若常数 $k=0.05$,空气温度为 30 ℃,某物体的温度从 90 ℃下降到 50 ℃,大约需要的时间为(参考数据:$\ln 3\approx1.1$)　(　D　)

A.16 min　　B.18 min

C.20 min　　D.22 min

3. 思考并回答下列问题:

(1)解决函数实际应用问题的一般步骤是怎样的?

提示:设变量,建立函数模型,求解函数模型,解决实际问题.

(2)用函数模型解决应用问题的注意事项有哪些?

提示:①正确理解题意,选择适当的函数模型;

②要特别关注实际问题中的自变量的取值范围,合理确定函数的定义域;

③在求解函数模型后,必须验证这个数学解对实际问题的合理性.

任务型课堂

学习任务一　已知函数模型解决实际问题

1. 若进行科研实验时,发现某种病毒的总数 y 和天数 t 的函数关系为 $y=2^{t-1}$,且该种病毒的个数超过 10^8 时会发生变异,则该种病毒发生变异前,实验进行的天数最多为($\lg 2\approx0.301\ 0$)　(　　)

A.25　　B.26　　C.27　　D.28

C　**解析:**令 $y=2^{t-1}=10^8$,则 $t-1=\log_2 10^8=8\log_2 10$,即 $t=8\log_2 10+1=8\left(\dfrac{1}{\lg 2}\right)+1\approx27.6$.故该种病毒发生变异前,实验进行的天数最多为 27.故选 C.

2. 我们处在一个有声的世界里,不同场合人们对音量会有不同的要求.音量的单位是分贝(dB).对于一个强度为 I 的声波,其音量的大小 η 可由如下公式计算:$\eta=10\lg\dfrac{I}{I_0}$(其中 I_0 是人耳能听到的声音的最低声波强度).设 $\eta_1=70$ dB 的声波强度为 I_1,$\eta_2=60$ dB 的声波强度为 I_2,则 I_1 是 I_2 的　(　　)

A.$\dfrac{7}{6}$ 倍　　B.10 倍

C.$10^{\frac{7}{6}}$ 倍　　D.$\ln\dfrac{7}{6}$ 倍

B　**解析:**由题意得 $70=10\lg\dfrac{I_1}{I_0}$,则 $I_1=I_0\times10^7$.同理得 $I_2=I_0\times10^6$,所以 $\dfrac{I_1}{I_2}=10$.

反思提炼

利用已知函数模型解决实际问题的解题要点

解决已给出函数模型的实际应用题,关键是考虑该题考查的是哪种函数,并要注意确定定义域,然后结合所给模型,求出函数解析式,最后结合其实际意义解答.

已知函数模型解决实际问题,往往给出的函数解析式中含有参数,需要将题中的数据代入函数解析式,求得函数解析式中的参数,再将问题转化为已知函数解析式求函数值或自变量的值.

学习任务二　建立函数模型解决实际问题

例1　某地下车库在排气扇发生故障的情况下,测得空气中一氧化碳含量达到了危险状态,经抢修,排气扇恢复正常.排气 4 min 后,测得车库内的一氧化碳浓度为 64 μL/L,继续排气 4 min,又测得一氧化碳浓度为 32 μL/L.经检测知该地下车库一氧化碳浓度 y(单位:μL/L)与排气时间 t(单位:min)存在函数关系 $y=c\left(\frac{1}{2}\right)^{mt}$($c,m$ 为常数).

(1)求 c,m 的值;

(2)若地下车库中一氧化碳浓度不高于0.5 μL/L为正常,问:至少排气多少分钟,这个地下车库中的一氧化碳浓度才能达到正常状态?

解:(1)由题意,可得方程组 $\begin{cases}64=c\left(\frac{1}{2}\right)^{4m},\\32=c\left(\frac{1}{2}\right)^{8m},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}c=128,\\m=\frac{1}{4}.\end{cases}$

(2)由(1)知 $y=128\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}t}$,

由题意,可得 $128\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}t}\leqslant 0.5$,

即 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}t}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{8}$,即 $\frac{t}{4}\geqslant 8$,解得 $t\geqslant 32$.

所以至少排气 32 min,这个地下车库中的一氧化碳浓度才能达到正常状态.

[一题多思]

思考1.哪些实际问题可以用指数型函数模型表示?

提示:有关人口增长、银行复利、细胞分裂等增长率问题常可以用指数型函数模型表示,通常可以表示为 $y=N(1+p)^x$(其中 N 为基础数,p 为增长率,x 为时间)的形式.

思考2.涉及较为复杂的指数运算时,我们常会选择怎样的策略?

提示:常常利用等式的两边同时取对数的方法,将指数运算转化为对数运算.

思考3.常见的对数型函数应用题有何特点?解题策略是怎样的?

提示:对数型函数的应用题一般都会给出函数的解析式,其求解策略:首先根据实际情况求出函数解析式中的参数,然后从具体情境中提炼出数据,代入解析式求值,最后根据求出的值回答实际问题.

反思提炼

建立函数模型解决实际问题的关注点

建立模型时主要抓住四个关键:“求什么”“设什么”“列什么”“限制什么”.

“求什么”就是弄清楚要解决什么问题,完成什么任务.

“设什么”就是弄清楚这个问题有哪些因素,谁是核心因素,通常设核心因素为自变量.

“列什么”就是把问题已知条件用所设变量表示出来,可以是方程、函数、不等式等.

“限制什么”主要是指自变量应满足的限制条件,在实际问题中,除了要使函数有意义外,还要考虑自变量的实际含义,如人数不能是负数等.

探究训练

某地 2023 年人均粮食占有量为 460 kg.该地人口平均每年增长 1.2%,粮食总产量平均每年增长 4%,设 x 年后该地人均粮食占有量为 y kg,则 y 关于 x 的解析式为 (　　)

A.$y=460\times\left(\frac{1.04}{1.012}\right)^{x-1}$

B.$y=460\times 1.04^x$

C.$y=\frac{460\times 1.04^x}{1.012}$

D.$y=460\times\left(\frac{1.04}{1.012}\right)^x$

D　**解析**:设该地 2023 年人口量为 M,则该地 2023 年一年的粮食总产量为 $460M$,1 年后,该地粮食总产量为 $460M(1+4\%)$,人口量为 $M(1+1.2\%)$,则人

均粮食占有量为$\frac{460M(1+4\%)}{M(1+1.2\%)}$，2年后，人均粮食占有量为$\frac{460M(1+4\%)^2}{M(1+1.2\%)^2}$，…，$x$年后，人均粮食占有量为$\frac{460M(1+4\%)^x}{M(1+1.2\%)^x}$，即所求解析式为$y=460\times\left(\frac{1.04}{1.012}\right)^x$.

学习任务三　实际问题中函数模型的选择

例2　(1)现测得(x,y)的两组值为$(1,2)$，$(2,5)$.现有两个拟合模型，甲：$y=x^2+1$，乙：$y=3x-1$.若又测得(x,y)的一组值为$(3,10.2)$，则应选用______作为拟合模型较好.(填“甲”或“乙”)

甲　**解析**：运用图象法(图略)，即根据已知的三个点的坐标画出两个函数的图象，根据图象发现选甲拟合度更高.

(2)某地的西红柿从2月1日开始上市，通过市场调查，得到100 kg西红柿的种植成本y(单位：元)与上市时间x(距2月1日的天数，单位：天)的数据如下表：

上市时间x	50	110	250
成本y	150	108	150

①根据上表数据，从下列函数中选取一个函数描述西红柿种植成本y与上市时间x的变化关系：

$y=ax+b$，$y=ax^2+bx+c$，$y=a\cdot b^x$，$y=a\cdot\log_b x$；

②利用①中选取的函数，求西红柿的种植成本y最低时的上市天数x及最低种植成本.

解：①根据表中数据，可判定描述西红柿种植成本y与上市时间x的变化关系的函数不是单调函数，这与函数$y=ax+b$，$y=a\cdot b^x$，$y=a\cdot\log_b x$的单调性都不符，

所以在$a\neq0$的前提下，可选取二次函数$y=ax^2+bx+c$进行描述.

把表格中的点$(50,150)$，$(110,108)$，$(250,150)$代入二次函数$y=ax^2+bx+c$中，

可得$\begin{cases}2\,500a+50b+c=150,\\12\,100a+110b+c=108,\\62\,500a+250b+c=150,\end{cases}$解得$a=\frac{1}{200}$，$b=-\frac{3}{2}$，$c=\frac{425}{2}$.

所以西红柿种植成本y与上市时间x的函数关系是$y=\frac{1}{200}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{425}{2}$.

②由$y=\frac{1}{200}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{425}{2}$，

可得函数的图象开口向上，且对称轴为$x=-\frac{-\frac{3}{2}}{2\times\frac{1}{200}}=150$，

所以，当$x=150$时，西红柿种植成本y最低，

最低成本为$y=\frac{1}{200}\times150^2-\frac{3}{2}\times150+\frac{425}{2}=100$(元).

即西红柿上市150天时，种植成本y最低，为100元.

反思提炼

函数拟合与预测的一般步骤

(1)根据原始数据、表格，绘出散点图；

(2)通过考察散点图，画出拟合直线或拟合曲线；

(3)求出拟合直线或拟合曲线的函数解析式；

(4)利用函数解析式，根据条件对所给问题进行预测，为决策和管理提供依据.

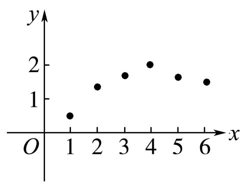
探究训练

某个体经营者根据前六个月试经营A，B两种商品的逐月投资金额(单位：万元)与所获利润(单位：万元)列出下表.

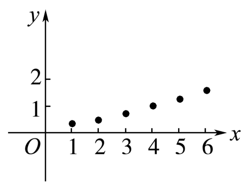
投资金额	1	2	3	4	5	6
销售A种商品所获利润	0.65	1.39	1.85	2	1.84	1.40
销售B种商品所获利润	0.25	0.49	0.76	1	1.26	1.51

该经营者准备第七个月投入12万元经营这两种商品，请你设计一种资金投入方案，使该经营者能获得最大利润，并按你的方案求出该经营者第七个月可获得的最大利润.

解:以投资金额为横坐标,所获利润为纵坐标,在平面直角坐标系中画出散点图,如图所示.



A 种商品



B 种商品

由散点图可以看出,A 种商品所获利润 y 与投资金额 x 之间的变化规律可以用二次函数模型进行拟合.设 $y=a(x-h)^2+b(a\neq0)$,取最高点$(4,2)$,则 $y=a(x-4)^2+2$.再把点$(1,0.65)$代入,得 $0.65=a(1-4)^2+2$,解得 $a=-0.15$,所以 $y=-0.15(x-4)^2+2$.

B 种商品所获利润 y 与投资金额 x 之间的变化规律是线性的,可以用一次函数模型进行拟合.

设 $y=kx+b(k\neq0)$,将点$(1,0.25)$和$(4,1)$代入,得 $\begin{cases}0.25=k+b,\\1=4k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=0.25,\\b=0,\end{cases}$ 所以 $y=0.25x$.

设第七个月投入 A,B 两种商品的资金分别为 x_A,x_B(万元),总利润为 W(万元),那么

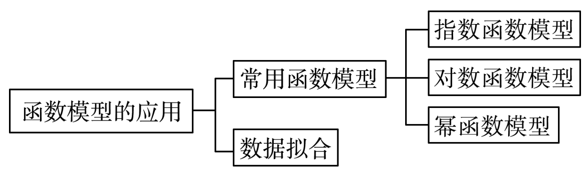
$$\begin{cases}x_A+x_B=12,\\W=y_A+y_B=-0.15(x_A-4)^2+2+0.25x_B,\end{cases}$$

所以 $W=-0.15\left(x_A-\dfrac{19}{6}\right)^2+0.15\times\left(\dfrac{19}{6}\right)^2+2.6(0<x_A<12)$.

当 $x_A=\dfrac{19}{6}\approx3.2$ 时,W 取最大值,约为 4.1 万元,此时 $x_B=8.8$.

即该经营者第七个月把 12 万元中的 3.2 万元投入 A 种商品,8.8 万元投入 B 种商品,可获得最大利润,最大利润约为 4.1 万元.

体系构建



课后素养评价(三十九)

基础性·能力运用

1.有一组试验数据如下:

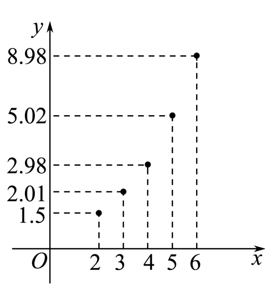
x	2	3	4	5	6
y	1.5	2.01	2.98	5.02	8.98

现准备用下列函数中的一个近似地表示这些数据所满足的规律,其中最合适的一个是　　(　　)

A.$y=3\log_3x$　　B.$y=2^{x-3}+1$

C.$y=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}$　　D.$y=2x-2$

B　**解析**:根据表格中的数据,作出散点图,如图所示.



根据散点图可知,随着 x 的增大,y 的值增大,并且增长速度越来越快,

结合选项:函数 $y=3\log_3x$ 增长速度越来越缓慢,不符合题意;

函数 $y=2^{x-3}+1$ 增长速度越来越快,符合题意;

函数 $y=2x-2$,增长速度不变,不符合题意;

而函数 $y=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}$,当 $x=3$ 时,可得 $y=2.75$;当 $x=4$ 时,可得 $y=4.5$,

此时与真实数据误差较大,所以最合适的一个函数是 $y=2^{x-3}+1$.

2.某股民购进某只股票,在接下来的交易时间内,他的这只股票先经历了 3 次涨停(每次上涨 10%),又经历了 3 次跌停(每次下降 10%),则该股民这只股票的盈亏情况(不考虑其他费用)为　　(　　)

A.略有亏损

B.略有盈利

C.没有盈利也没有亏损

D.无法判断盈亏情况

A　**解析**:由题意可得$(1+10\%)^3(1-10\%)^3=$

$0.970\ 299\approx0.97<1$.因此该股民这只股票的盈亏情况为略有亏损.

3.香农公式:$C=W\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$表示:在受噪声干扰的信道中,最大信息传递速率 C 取决于信道带宽 W、信道内信号的平均功率 S,信道内部的高斯噪声功率 N 的大小,其中$\frac{S}{N}$叫做信噪比.按照香农公式,若不改变带宽 W,而将信噪比$\frac{S}{N}$从 1 000 提升至 2 000,则 C 大约增加了　　(　　)

A.10%　　B.30%

C.50%　　D.100%

A　**解析**:当$\frac{S}{N}=1\ 000$ 时,$C=W\log_2(1+1\ 000)$,当 $\frac{S}{N}=2\ 000$ 时,$C=W\log_2(1+2\ 000)$,则 $\frac{W\log_2(1+2\ 000)-W\log_2(1+1\ 000)}{W\log_2(1+1\ 000)}=\frac{\log_2 2\ 001}{\log_2 1\ 001}-1\approx\frac{1+\log_2 1\ 000}{\log_2 1\ 000}-1=\frac{1}{3}\lg 2$.

又$\frac{1}{4}=\lg 10^{\frac{1}{4}}<\lg 2<\lg 10^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$,根据选项分析$\frac{1}{3}\lg 2\approx0.1$,

所以将信噪比$\frac{S}{N}$从 1 000 提升至 2 000,C 大约增加了 10%.

综合性·创新提升

1.将甲桶中的 a L 水缓慢注入空桶乙中,t min后甲桶中剩余的水量 y(单位:L)符合指数衰减规律,且 $y=a\mathrm{e}^{nt}$.若 5 min 后甲桶和乙桶的水量相等,又过了 m min 后甲桶中的水只有$\frac{a}{8}$ L,则 m 的值为　　(　　)

A.7　　B.8　　C.9　　D.10

D　**解析**:令$\frac{1}{8}a=a\mathrm{e}^{nt}$,即$\frac{1}{8}=\mathrm{e}^{nt}$.由已知得$\frac{1}{2}=\mathrm{e}^{5n}$,故$\frac{1}{8}=\mathrm{e}^{15n}$,比较知 $t=15$,$m=15-5=10$.

2.已知函数 $t=-144\lg\left(1-\frac{N}{100}\right)$可表示打字速度与所需的学习时间之间的关系,其中 N(单位:字/min)表示打字速度,t(单位:h)表示打字速度达到 N 所需的学习时间,则打字速度达到90 字/min的水平,所需的学习时间是　　(　　)

A.144 h　　B.90 h

C.60 h　　D.40 h

A　**解析**:由 $N=90$ 可知,$t=-144\lg\left(1-\frac{90}{100}\right)=144$(h).

3.某工厂产生的废气经过过滤后排放,过滤过程中废气中的污染物数量 P(单位:mg/L)与时间 t(单位:h)之间的关系为 $P=P_0\mathrm{e}^{-kt}$(P_0 为污染物的初始值,k 为常数).若在前 5 h 消除了 20%的污染物,则消除 50%污染物需要(精确到1 h,参考数据:ln 2≈0.69,ln 10≈2.30)　　(　　)

A.13 h　　B.15 h　　C.18 h　　D.20 h

B　**解析**:前 5 h 消除了 20%的污染物,

所以$(1-20\%)P_0=P_0\mathrm{e}^{-5k}$,即 $k=-\frac{\ln 0.8}{5}$.

当污染物减少 50%时,$P=(1-50\%)P_0=0.5P_0$,

所以 $0.5P_0=P_0\mathrm{e}^{\frac{\ln 0.8}{5}t}$.

所以 $t=\frac{5\ln 0.5}{\ln 0.8}=-\frac{5\ln 2}{3\ln 2-\ln 10}\approx-\frac{5\times0.69}{3\times0.69-2.30}=15$.故选 B.

第五章　三角函数

5.1　任意角和弧度制

5.1.1　任意角

学习任务目标

1. 了解角的概念的推广，能正确区分正角、负角和零角.
2. 了解象限角的概念.
3. 理解并掌握终边相同的角的表示方法，并能判断角的终边所在的位置.

问题式预习

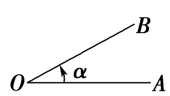
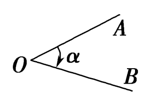
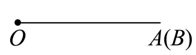
知识清单

知识点一　角的概念

(1)角的概念：角可以看成一条射线绕着它的端点旋转所成的图形.

(2)角的构成：顶点、始边、终边.

(3)分类：按旋转方向可将角分为如下三类：

类型	定义	图示
正角	一条射线绕其端点按逆时针方向旋转形成的角	
负角	一条射线绕其端点按顺时针方向旋转形成的角	
零角	如果一条射线没有做任何旋转，就称它形成了一个零角	

知识点二　角的运算

(1)相等的角：设角 α 由射线 OA 绕端点 O 旋转而成，角 β 由射线 $O'A'$ 绕端点 O' 旋转而成.如果它们的旋转方向相同且旋转量相等，那么就称 $\alpha=\beta$.

(2)相反的角：把射线 OA 绕端点 O 按不同方向旋转相同的量所成的两个角叫做互为相反角.角 α 的相反角记为 $-\alpha$.

(3)角的运算

①角的加法：设 α，β 是任意两个角.我们规定，把角 α 的终边旋转角 β，这时终边所对应的角是 $\alpha+\beta$.

②角的减法：$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$.这样，角的减法可以转化为角的加法.

知识点三　象限角

(1)前提：①角的顶点与坐标原点重合，②角的始边与 x 轴的非负半轴重合.

(2)结论：角的终边（除端点外）在第几象限，就说这个角是第几象限角.如果角的终边在坐标轴上，那么就认为这个角不属于任何一个象限.

知识点四　终边相同的角

所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合 $S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，即任一与角 α 终边相同的角，都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

概念辨析

1. 判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)第一象限角都是锐角.　(　×　)

(2)小于 90° 的角一定是锐角.　(　×　)

(3)终边相同的角不一定相等，但相等的角终边一定相同.　(　√　)

(4)终边相同的角有无数个，它们相差 360° 的整数倍.　(　√　)

2. (多选)与 -457° 角终边相同的角的集合可以表示为　(　BC　)

A. $\{\alpha|\alpha=457^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{\alpha|\alpha=-97^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha|\alpha=263^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha|\alpha=-263^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

3. 请思考并回答下列问题：

(1)如果一个角的终边在坐标轴上，它属于第几象限角？

提示：它不属于任何一个象限.

(2)第一象限角有负角吗？

提示：有.

(3)第二象限角一定大于第一象限角吗？

提示：不一定.

任务型课堂

学习任务一　任意角

1.经过 2 h,钟表的时针和分针转过的角分别是　　(　　)

A.$60°,720°$　　B.$-60°,-720°$

C.$-30°,-360°$　　D.$-60°,720°$

B　**解析**:钟表的时针和分针都是顺时针旋转,因此转过的角都是负的,而$\frac{2}{12}\times360°=60°$,$2\times360°=720°$,故钟表的时针和分针转过的角分别是$-60°$,$-720°$.

2.有下列结论:

①始边相同而终边不同的角一定不相等;

②大于 $90°$的角为钝角;

③钝角比第三象限角小;

④小于 $180°$的角是钝角、直角或锐角.

其中正确的为________.(填序号)

①　**解析**:①始边相同而终边不同的角一定不相等,故①正确;②显然不正确;③钝角大于$-100°$的角,而$-100°$的角是第三象限角,故③不正确;④零角小于 $180°$,但它既不是钝角,也不是直角或锐角,故④不正确.

反思提炼

理解任意角的概念的关键与技巧

(1)关键:①弄清角的始边与终边及旋转方向与大小,②正确理解象限角与锐角、直角、钝角、平角、周角等概念.

(2)技巧:判断命题为真需要证明,而判断命题为假只要举出反例即可.

学习任务二　象限角的判断

例 1　已知 α 是第三象限角,则$\frac{\alpha}{2}$是　　(　　)

A.第二或第四象限角　B.第一或第三象限角

C.第三或第四象限角　D.第一或第四象限角

A　**解析**:因为 α 是第三象限角,所以 $180°+k\cdot360°<\alpha<270°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$,所以 $90°+k\cdot180°<\frac{\alpha}{2}<135°+k\cdot180°(k\in\mathbf{Z})$.当 $k=0$ 时,$90°<\frac{\alpha}{2}<135°$,在第二象限;当 $k=1$ 时,$270°<\frac{\alpha}{2}<315°$,在第四象限.故选 A.

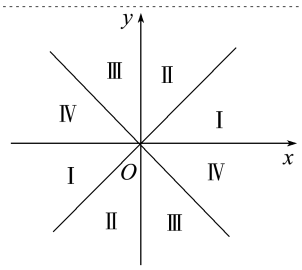
[一题多思]

思考 1.本例中,若 α 是第二象限角,能确定$\frac{\alpha}{2}$的终边所在位置吗?

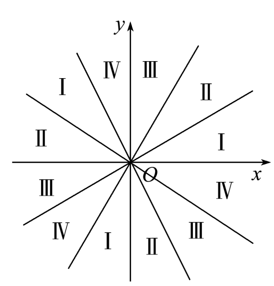
提示:$\frac{\alpha}{2}$的终边位于第一或第三象限.

思考 2.若已知 α 是第几象限角,判断$\frac{\alpha}{2}$,$\frac{\alpha}{3}$的终边所在位置有规律可循吗?

提示:有.将直角坐标系的每个象限二等分,得到 8 个区域.自 x 轴正向按逆时针方向把每个区域依次标上Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,如图所示,图中与角 α 所在象限标号一致的区域,即为$\frac{\alpha}{2}$的终边所在的区域.如 α 是第二象限角,与角 α 所在象限标号一致的区域Ⅱ,即为$\frac{\alpha}{2}$的终边所在的区域,所以$\frac{\alpha}{2}$的终边位于第一或第三象限.



将直角坐标系的每个象限三等分,得到 12 个区域.自 x 轴正向按逆时针方向把每个区域依次标上Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,如图所示,图中与角 α 所在象限标号一致的区域,即为$\frac{\alpha}{3}$的终边所在的区域.如 α 是第三象限角,与角 α 所在象限标号一致的区域Ⅲ,即为$\frac{\alpha}{3}$的终边所在的区域,所以$\frac{\alpha}{3}$的终边位于第一、第三或第四象限.



反思提炼

象限角的判断

(1)象限角的判断关键是看终边在哪个象限.

(2)若已知角 α 是第几象限角,判断$\frac{\alpha}{2}$,$\frac{\alpha}{3}$等是第几象

限角，关键是由 α 的范围求出 $\frac{\alpha}{2}$，$\frac{\alpha}{3}$ 的范围，然后进行分类讨论.

探究训练

1. 已知 α 是第二象限角，则 $180°-\alpha$ 是　　（　　）

A.第一象限角　　B.第二象限角

C.第三象限角　　D.第四象限角

A　**解析**：由 α 是第二象限角，可得 $90°+k\cdot360°<\alpha<180°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$. 所以 $180°-(90°+k\cdot360°)>180°-\alpha>180°-(180°+k\cdot360°)(k\in\mathbf{Z})$，即 $90°-k\cdot360°>180°-\alpha>-k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$，所以 $180°-\alpha$ 是第一象限角.

2. 给出下列四个说法：① $-75°$ 角是第四象限角；② $225°$ 角是第三象限角；③ $475°$ 角是第二象限角；④ $-315°$ 角是第一象限角. 其中正确的有　　（　　）

A.1 个　　B.2 个

C.3 个　　D.4 个

D　**解析**：对于①，$-75°$ 角是第四象限角；对于②，$225°$ 角是第三象限角；对于③，因为 $475°=115°+360°$，所以 $475°$ 角是第二象限角；对于④，因为 $-315°=45°-360°$，所以 $-315°$ 角是第一象限角. 因此，真命题有 4 个. 故选 D.

学习任务三　终边相同的角的表示

例 2　在与 $10\ 030°$ 角终边相同的角中，求满足下列条件的角.

(1)最大的负角；

(2)最小的正角；

(3)在 $360°\sim720°$ 范围内的角.

解：与 $10\ 030°$ 终边相同的角的一般形式为 $\beta=10\ 030°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$.

(1)由 $-360°<10\ 030°+k\cdot360°<0°(k\in\mathbf{Z})$，

得 $-10\ 390°<k\cdot360°<-10\ 030°(k\in\mathbf{Z})$，

解得 $k=-28$.

故所求的最大负角为 $\beta=10\ 030°+(-28)\times360°=-50°$.

(2)由 $0°<10\ 030°+k\cdot360°<360°(k\in\mathbf{Z})$，

得 $-10\ 030°<k\cdot360°<-9\ 670°(k\in\mathbf{Z})$，

解得 $k=-27$.

故所求的最小正角为 $\beta=10\ 030°+(-27)\times360°=310°$.

(3)由 $360°<10\ 030°+k\cdot360°<720°(k\in\mathbf{Z})$，

得 $-9\ 670°<k\cdot360°<-9\ 310°(k\in\mathbf{Z})$，

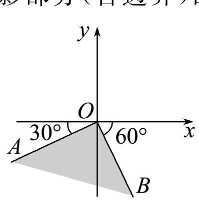
解得 $k=-26$.

故所求的角为 $\beta=10\ 030°+(-26)\times360°=670°$.

例 3　如图，射线 OA，OB 与 x 轴的夹角分别为 $30°$，$60°$.

(1)写出终边分别为射线 OA，OB 的角的集合；

(2)写出终边在阴影部分(含边界)的角的集合.



解：(1)终边为射线 OA 的角的集合是 $\{\alpha\mid\alpha=210°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

终边为射线 OB 的角的集合是 $\{\beta\mid\beta=300°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

(2)终边在阴影部分(含边界)的角的集合是 $\{\varphi\mid210°+k\cdot360°\leqslant\varphi\leqslant300°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

反思提炼

1.终边相同的角的表示

(1)与角 α 终边相同的角都可以表示成 $\alpha+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$ 的形式.

(2)终边相同的角相差 $360°$ 的整数倍.

2.表示终边在某个区域的角的三个步骤

第一步：先按逆时针方向找到区域的起始边界和终止边界.

第二步：由小到大分别标出起始边界和终止边界对应的 $-360°\sim360°$ 范围内的角 α 和角 β，写出最简集合 $\{x\mid\alpha<x<\beta\}$，其中 $\beta-\alpha<360°$.

第三步：起始、终止边界对应角 α，β 分别再加上 $360°$ 的整数倍，即得终边在该区域的角的集合 $\{x\mid\alpha+k\cdot360°<x<\beta+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

探究训练

在 $0°\sim360°$ 范围内，与 $-60°$ 角的终边在同一条直线上的角为________.

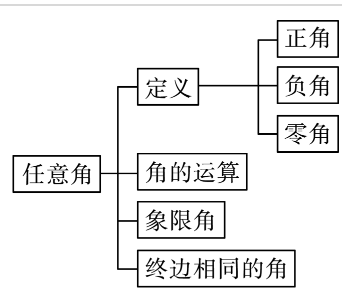
$120°$，$300°$　**解析**：与角 $-60°$ 的终边在同一条直线上的角可表示为 $\beta=-60°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}$.

因为所求角在 $0°\sim360°$ 范围内，所以 $0°\leqslant-60°+k\cdot180°\leqslant360°,k\in\mathbf{Z}$，

解得 $\frac{1}{3}\leqslant k\leqslant\frac{7}{3},k\in\mathbf{Z}$，所以 $k=1$ 或 $k=2$.

当 $k=1$ 时，$\beta=120°$；当 $k=2$ 时，$\beta=300°$.

体系构建



课后素养评价(四十)

基础性·能力运用

1.(多选)下列说法错误的是　(　　)

A.小于 $90°$ 的角是锐角

B.钝角是第二象限角

C.第二象限角大于第一象限角

D.若角 α 与角 β 的终边相同,则 $\alpha=\beta$

ACD　**解析**:大于 $0°$ 而小于 $90°$ 的角为锐角,故 A 错误;钝角是大于 $90°$ 而小于 $180°$ 的角,且位于第二象限,故 B 正确;第二象限的角不一定大于第一象限的角,比如第二象限的角 $120°$ 小于第一象限的角 $390°$,故 C 错误;若角 α 与角 β 的终边相同,则 $\alpha=2k\cdot180°+\beta,k\in\mathbf{Z}$,故 D 错误.

2.下面各组角中,终边相同的是　(　　)

A.$390°,690°$　　B.$-330°,750°$

C.$480°,-420°$　　D.$3\,000°,-840°$

B　**解析**:因为 $-330°=-360°+30°,750°=2\times360°+30°$,

所以 $-330°$ 与 $750°$ 的终边相同.

3.(多选)下列四个角为第二象限角的是　(　　)

A.$-200°$　　B.$100°$

C.$220°$　　D.$420°$

AB　**解析**:$-200°=-360°+160°$,在 $0°\sim360°$ 范围内,与 $-200°$ 终边相同的角为 $160°$,它是第二象限角;$100°$ 为第二象限角;$220°$ 为第三象限角;$420°=360°+60°$,为第一象限角.

4.已知 $\alpha=2\,024°$,若 β 与 α 的终边相同,且 $\beta\in(-360°,0°)$,则 $\beta=$________.

$-136°$　**解析**:因为 $\alpha=2\,024°=360°\times6-136°$,$\beta$ 与 α 的终边相同,又因为 $\beta\in(-360°,0°)$,所以 $\beta=-136°$.

5.角 α 为 $30°$,其终边按逆时针方向旋转 3 周后得到的角的度数为________.

$1\,110°$　**解析**:按逆时针方向旋转得到的角是正角,旋转 3 周得 $30°+3\times360°=1\,110°$.

6.(1)写出与 $-1\,840°$ 角终边相同的角的集合 M;

(2)把 $-1\,840°$ 角写成 $k\cdot360°+\alpha(k\in\mathbf{Z},0°\leqslant\alpha<360°)$ 的形式,并指出其是第几象限角;

(3)若角 α 与 $-1\,840°$ 角终边相同且 $-360°<\alpha<0°$,求角 α.

解:(1)由终边相同的角的概念,得 $M=\{\beta|\beta=n\cdot360°+(-1\,840°),n\in\mathbf{Z}\}=\{\theta|\theta=k\cdot360°-40°,k\in\mathbf{Z}\}$.

(2)因为 $-1\,840°=-6\times360°+320°$,而 $320°$ 是第四象限角,

所以 $-1\,840°$ 是第四象限角.

(3)$M=\{\theta|\theta=k\cdot360°-40°,k\in\mathbf{Z}\}$,又 $\alpha\in M$ 且 $-360°<\alpha<0°$,

所以取 $k=0$,得 $\alpha=-40°$.

综合性·创新提升

1.在 $360°\sim1\,440°$ 范围内与 $-21°16'$ 角终边相同的角有　(　　)

A.1 个　　B.2 个

C.3 个　　D.4 个

C　**解析**:与 $-21°16'$ 终边相同的角可表示为 $\alpha=-21°16'+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$.由 $360°\leqslant-21°16'+k\cdot360°\leqslant1\,440°,k\in\mathbf{Z}$,得 $k=2,3,4$.故选 C.

2.(多选)已知角 α 的终边在第一象限,那么角 $\frac{\alpha}{2}$ 可能是　(　AC　)

A.第一象限角　　B.第二象限角

C.第三象限角　　D.第四象限角

3.已知角 α,β 的终边关于 y 轴对称,若 $\alpha=30°$,则 $\beta=$____________.

$150°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$　**解析**:因为 $30°$ 与 $150°$ 的终

边关于 y 轴对称，所以角 β 的终边与 $150°$ 角的终边相同.

所以 $\beta=150°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$.

4. 已知角 α 与 $180°-\alpha$ 的终边相同，且 $450°<\alpha<720°$，则 $\alpha=$________.

$630°$　**解析**：因为角 α 与 $180°-\alpha$ 的顶点均在原点，始边均在 x 轴的非负半轴上，终边相同，所以 $k\times360°+\alpha=n\times360°+180°-\alpha,k,n\in\mathbf{Z}$，即 $(2k-2n)\times180°+2\alpha=180°,k,n\in\mathbf{Z}$，

即 $\alpha=90°+(n-k)\times180°,k,n\in\mathbf{Z}$. 再结合 $450°<\alpha<720°$，则 $\alpha=3\times180°+90°=630°$.

5. 终边在坐标轴上的角的集合为________.

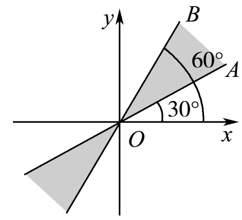
$\{\alpha|\alpha=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$　**解析**：终边在 x 轴上的角的集合为 $\{\alpha|\alpha=2n\cdot90°,n\in\mathbf{Z}\}$，终边在 y 轴上的角的集合为 $\{\alpha|\alpha=(2n+1)\cdot90°,n\in\mathbf{Z}\}$，所以终边在坐标轴上的角的集合为 $\{\alpha|\alpha=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$.

6. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 OA,OB，$\angle AOx=30°,\angle BOx=60°$. 分别写出符合下列条件的角的集合.

(1) 终边为射线 OB；

(2) 终边在直线 OA 上；

(3) 终边在阴影区域内（含边界）.



解：(1) 终边为射线 OB 的角的集合为 $S_1=\{\alpha|\alpha=60°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

(2) 终边在直线 OA 上的角的集合为 $S_2=\{\alpha|\alpha=30°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$.

(3) 终边在第一象限中的阴影部分区域的角的集合为 $\{\alpha|30°+k\cdot360°\leqslant\alpha\leqslant60°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$，

终边在第三象限中的阴影部分区域的角的集合为 $\{\alpha|210°+k\cdot360°\leqslant\alpha\leqslant240°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|30°+180°+k\cdot360°\leqslant\alpha\leqslant60°+180°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|30°+(2k+1)\cdot180°\leqslant\alpha\leqslant60°+(2k+1)\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$.

因此，终边在阴影区域内的角的集合为 $S_3=\{\alpha|30°+k\cdot360°\leqslant\alpha\leqslant60°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|30°+(2k+1)\cdot180°\leqslant\alpha\leqslant60°+(2k+1)\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|30°+k\cdot180°\leqslant\alpha\leqslant60°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$.

5.1.2　弧度制

学习任务目标

1. 了解弧度制的概念.
2. 能进行弧度和角度的互化.
3. 会计算弧长和扇形的面积.

问题式预习

知识清单

知识点一　弧度制的定义

角度制	①定义:用度作为单位来度量角的单位制. ②1 度的角:周角的 $\frac{1}{360}$
弧度制	①定义:以弧度作为单位来度量角的单位制. ②1 弧度的角:长度等于半径长的圆弧所对的圆心角
任意角的弧度数与实数的对应关系	正角的弧度数是一个正数,负角的弧度数是一个负数,零角的弧度数是 0
计算公式	在半径为 r 的圆中,长度为 l 的弧所对的圆心角为 α rad,那么 $\lvert\alpha\rvert=\frac{l}{r}$

知识点二　角度制与弧度制的换算

(1)角度制与弧度制的换算

$180^\circ=\pi$ rad;

$1^\circ=\frac{\pi}{180}$ rad $\approx 0.017\ 45$ rad;

$1\text{ rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ\approx 57.30^\circ$.

(2)一些特殊角的度数与弧度数的对应关系

度	0°	1°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

(3)角的集合与实数集 **R** 之间的关系

$$\begin{array}{|c|}\hline \text{正角}\\ \text{零角}\\ \text{负角}\\ \hline\end{array}\ \begin{array}{c}\rightleftarrows\\ \rightleftarrows\\ \rightleftarrows\end{array}\ \begin{array}{|c|}\hline \text{正实数}\\ 0\\ \text{负实数}\\ \hline\end{array}$$

知识点三　弧度制下的弧长公式和扇形面积公式

设扇形的半径为 R,弧长为 l,面积为 S,$\alpha(0<\alpha<2\pi)$为其圆心角,则

类别	角度制($\alpha=n^\circ$)	弧度制
弧长	$l=\frac{n\pi R}{180}$	$l=\alpha R$
扇形的面积	$S=\frac{n\pi R^2}{360}$	$S=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}\alpha R^2$

概念辨析

1. 判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)1 弧度就是 1° 的圆心角所对的弧.　(×)

(2)"1 弧度的角"的大小和所在圆的半径大小无关.　(√)

(3)160°化为弧度制是$\frac{8}{9}\pi$ rad.　(√)

(4)扇形的半径为 1 cm,圆心角为 30°,则扇形的弧长 $l=r\lvert\alpha\rvert=1\times30=30$(cm).　(×)

2. 已知一个扇形的圆心角为 54°,半径 $r=20$ cm,则该扇形的周长为________cm.

$(40+6\pi)$　**解析**:因为 $1^\circ=\frac{\pi}{180}$ rad,所以 $54^\circ=\frac{\pi}{180}\times54=\frac{3\pi}{10}$,则扇形的弧长 $l=\alpha r=\frac{3\pi}{10}\times20=6\pi$(cm).故扇形的周长为$(40+6\pi)$cm.

3. 请思考并回答下列问题:

(1)$\alpha=\frac{\pi}{6}+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$,$\beta=60^\circ+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,这样表示角可以吗?

提示:不可以.角度制与弧度制是两种不同的度量制度,在表示角时不能混用.

(2)在应用扇形面积公式 $S=\frac{1}{2}\alpha R^2$时,要注意什么问题?

提示:注意 α 的单位是"弧度".

任务型课堂

学习任务一　弧度与角度的互化

1. $-300°$化为弧度是　（　　）

A.$-\frac{4\pi}{3}$　　B.$-\frac{5\pi}{3}$

C.$-\frac{7\pi}{4}$　　D.$-\frac{7\pi}{6}$

B　**解析**：$-300°=-300\times\frac{\pi}{180}=-\frac{5\pi}{3}$.

2. $\frac{8\pi}{5}$化为角度是　（　　）

A.$270°$　　B.$280°$

C.$288°$　　D.$318°$

C　**解析**：$\frac{8\pi}{5}=\frac{8\pi}{5}\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}=288°$.

反思提炼

角度制与弧度制互化的关注点

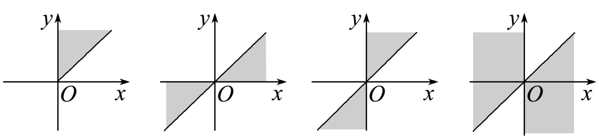
(1)关键：抓住互化公式 π rad$=180°$是关键.

(2)方法：角度数$\times\frac{\pi}{180}=$弧度数；弧度数$\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}=$角度数.

注意：角度化弧度时，应先将分、秒化成度，再化成弧度.

学习任务二　用弧度表示角或范围

例 1　(1)集合$\left\{\alpha\,\middle|\,k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$中的角的终边所在的区域(阴影部分，含边界)是　（　　）



A　　B　　C　　D

C　**解析**：当 $k=2m(m\in\mathbf{Z})$时，$2m\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant2m\pi+\frac{\pi}{2},m\in\mathbf{Z}$；当 $k=2m+1(m\in\mathbf{Z})$时，$2m\pi+\frac{5\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant2m\pi+\frac{3\pi}{2},m\in\mathbf{Z}$.故选 C.

(2)将$-1\ 125°$写成$\alpha+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$的形式，其中$0\leqslant\alpha<2\pi$，并判断它是第几象限角.

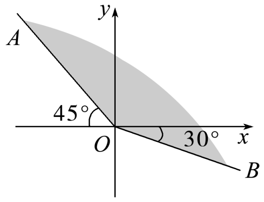
解：$-1\ 125°=-1\ 125\times\frac{\pi}{180}=-\frac{25\pi}{4}=-8\pi+\frac{7\pi}{4}$，

其中$\frac{3\pi}{2}<\frac{7\pi}{4}<2\pi$，所以$\frac{7\pi}{4}$是第四象限角，

所以$-1\ 125°$是第四象限角.

[一题多思]

思考 1.若把本例(1)换为：用弧度制表示终边落在如图所示的阴影部分(包括边界)的角 θ 的集合，你能表示出来吗？



提示：终边落在射线 OA 上的角为 $\theta=135°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$，即 $\theta=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

终边落在射线 OB 上的角为 $\theta=-30°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$，即 $\theta=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

故终边落在阴影部分内(包括边界)的角 θ 的集合为$\left\{\theta\,\middle|\,-\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

思考 2.在本例(2)的条件下，你能在$[-4\pi,4\pi]$范围内找出与 α 终边相同的角的集合吗？

提示：依题意得，与 α 终边相同的角为$\frac{7\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

由$-4\pi\leqslant\frac{7\pi}{4}+2k\pi\leqslant4\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $k=-2,-1,0,1$，

所以所求角的集合为$\left\{-\frac{9\pi}{4},-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\frac{15\pi}{4}\right\}$.

反思提炼

用弧度制表示终边相同的角的两个注意点

(1)用弧度制表示与 α 终边相同的角 $\alpha+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，其中 $2k\pi$ 是 π 的偶数倍，而不是整数倍.

(2)角度制与弧度制不能混用.

探究训练

已知 $\alpha=-800°$.

(1)把 α 改写成$\beta+2k\pi(k\in\mathbf{Z},0\leqslant\beta<2\pi)$的形式，并指出 α 是第几象限角；

(2)求 γ，使 γ 与 α 的终边相同，且 $\gamma\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

解：(1)因为$-800°=-3\times360°+280°$，$280°=\frac{14\pi}{9}$，

且$\frac{14\pi}{9}\in[0,2\pi)$，

所以$\alpha=\frac{14\pi}{9}+(-3)\times2\pi$.

所以α与$\frac{14\pi}{9}$终边相同，是第四象限角.

(2)因为与α终边相同的角可写为$\frac{14\pi}{9}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$的形式，而$\gamma$与$\alpha$的终边相同，

所以$\gamma=\frac{14\pi}{9}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

又$\gamma\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，

所以$-\frac{\pi}{2}<\frac{14\pi}{9}+2k\pi<\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

解得$k=-1$，所以$\gamma=\frac{14\pi}{9}+(-1)\times2\pi=-\frac{4\pi}{9}$.

学习任务三　弧长公式与扇形面积公式的应用

例2　已知扇形的圆心角是α，半径为R，弧长为l.

(1)若$\alpha=60^\circ$，$R=10$ cm，求扇形的弧长l；

(2)若扇形的周长为20 cm，当扇形的圆心角α为多少弧度时，这个扇形的面积最大？

解：(1)$\alpha=60^\circ=\frac{\pi}{3}$，$l=10\times\frac{\pi}{3}=\frac{10\pi}{3}$(cm).

(2)由已知得$l+2R=20$，所以$S=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}(20-2R)R=10R-R^2=-(R-5)^2+25$，

所以当$R=5$ cm时，S取得最大值25 cm^2，此时$l=10$ cm，$\alpha=2$.

反思提炼

扇形的弧长和面积的求解策略

(1)记公式：弧度制下扇形的面积公式是$S=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}\alpha R^2$(其中$l$是扇形的弧长，$R$是扇形的半径，$\alpha$是扇形圆心角的弧度数，$0<\alpha<2\pi$).

(2)找关键：涉及扇形的半径、周长、弧长、圆心角、面积等的计算问题，关键是分析题目中已知哪些量、求哪些量，然后灵活运用弧长公式、扇形面积公式直接求解或列方程(组)求解.

探究训练

1.半径为2 cm的圆上的一段弧的长为6 cm，则此弧所对圆心角的弧度数是　(　　)

A.1.5　　B.2　　C.3　　D.12

C　**解析**：由弧长公式$l=\alpha r$，可得$\alpha=\frac{l}{r}=\frac{6}{2}=3$.

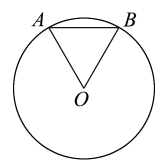
2.已知圆中一条弦的长度等于半径r，求：

(1)这条弦所对劣弧的长；

(2)这条弦和劣弧所组成的弓形的面积.

解：(1)如图，设半径为r的$\odot O$中弦$AB=r$，则$\triangle OAB$为等边三角形，所以$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$.

所以弦AB所对劣弧的长为$\frac{\pi}{3}r$.

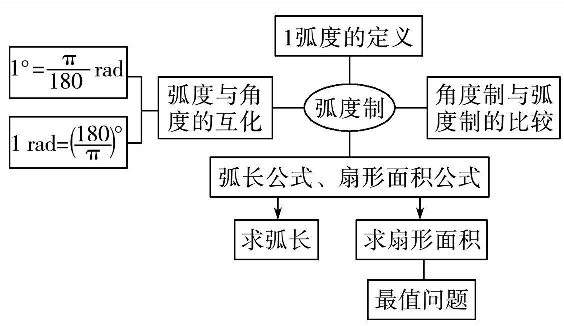


(2)因为$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}OA^2=\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$，

$S_{扇形OAB}=\frac{1}{2}|\alpha|r^2=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times r^2=\frac{\pi}{6}r^2$，

所以$S_{弓形}=S_{扇形OAB}-S_{\triangle AOB}=\frac{\pi}{6}r^2-\frac{\sqrt{3}}{4}r^2=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2$.

体系构建



课后素养评价(四十一)

基础性·能力运用

1.下列结论不正确的是　(　D　)

A.$\frac{\pi}{3}$ rad$=60^\circ$　　B.$10^\circ=\frac{\pi}{18}$ rad

C.$36^\circ=\frac{\pi}{5}$ rad　　D.$\frac{5\pi}{8}$ rad$=115^\circ$

2.在半径为10的圆中，240°的圆心角所对弧长为　(　　)

A.$\frac{40}{3}\pi$　　B.$\frac{20}{3}\pi$

C.$\frac{200}{3}\pi$　　D.$\frac{400}{3}\pi$

A　**解析**：由 $240^\circ=\frac{240}{180}\pi=\frac{4}{3}\pi$，得弧长 $l=|\alpha|\cdot r=\frac{4}{3}\pi\times10=\frac{40}{3}\pi$.

3.(多选)已知扇形的周长是 6 cm，面积是2 cm^2，下列选项可能正确的有　(　　)

A.半径为 2 cm　　B.半径为 1 cm

C.圆心角的弧度数是 1　　D.圆心角的弧度数是 2

ABC　**解析**：设扇形半径为 r cm，圆心角的弧度数为 α.

由题意得 $\begin{cases}2r+\alpha r=6,\\ \frac{1}{2}\alpha r^2=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}r=1,\\ \alpha=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}r=2,\\ \alpha=1.\end{cases}$

可得圆的半径为 1 cm 或 2 cm，圆心角的弧度数是 4 或 1.

4.将 $-\frac{23}{12}\pi$ rad 化成角度应为________.

-345°　**解析**：$-\frac{23}{12}\pi=-\frac{23}{12}\pi\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ=-345^\circ$.

5.在 $(-2\pi,2\pi)$ 内与 $-\frac{58\pi}{7}$ 角终边相同的角是________.

$-\frac{2\pi}{7}$ 或 $\frac{12\pi}{7}$　**解析**：$-\frac{58\pi}{7}=-8\pi-\frac{2\pi}{7}=-10\pi+\frac{12\pi}{7}$，故在 $(-2\pi,2\pi)$ 内与 $-\frac{58\pi}{7}$ 终边相同的角是 $-\frac{2\pi}{7}$ 或 $\frac{12\pi}{7}$.

综合性·创新提升

1.现有两个相互啮合的齿轮，大轮有 64 齿，小轮有 24 齿，当小轮转一周时，大轮转动的弧度是　(　　)

A.$\frac{\pi}{2}$　　B.$\frac{7\pi}{8}$　　C.$\frac{3\pi}{4}$　　D.$\frac{16\pi}{3}$

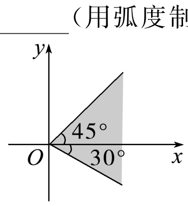
C　**解析**：当小轮转一周时，大轮转动 $\frac{24}{64}$ 周，则大轮转动的弧度是 $\frac{24}{64}\times2\pi=\frac{3\pi}{4}$.

2.一条弧所对的圆心角是 2 rad，它所对的弦长为 2，则这条弧的长是　(　　)

A.$\frac{1}{\sin 1}$　　B.$\frac{1}{\sin 2}$　　C.$\frac{2}{\sin 2}$　　D.$\frac{2}{\sin 1}$

D　**解析**：因为一条弧所对的圆心角是 2 rad，它所对的弦长为 2，所以所在圆的半径为 $r=\frac{1}{\sin 1}$，则这条弧的长 $l=2\times\frac{1}{\sin 1}=\frac{2}{\sin 1}$.

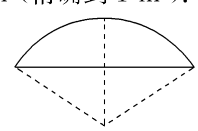
3.终边落在图中阴影部分(包括边界)的角的集合为____________(用弧度制表示).



$\left\{\alpha\,\middle|\,-\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$　**解析**：结合图象，设终边落在阴影部分(包括边界)的角是 α，满足条件的角的集合是

$\left\{\alpha\,\middle|\,-\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

4.(数学文化)《九章算术》是我国古代数学成就的杰出代表作.其中“方田”章给出计算弧田面积所用的经验公式：弧田面积$=\frac{1}{2}$(弦×矢+矢^2).弧田(如图)由圆弧和其所对的弦围成，公式中“弦”指圆弧所对的弦长，“矢”等于半径长与圆心到弦的距离之差.现有圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$、半径为 4 m 的弧田，按照上述经验公式计算，该弧田面积约是________m^2(精确到 1 m^2).



9　**解析**：$\frac{2\pi}{3}=120^\circ$，根据题意，得弦$=2\times4\sin\frac{120^\circ}{2}=4\sqrt{3}$(m)，矢$=4-4\cos\frac{120^\circ}{2}=2$(m)，

因此弧田面积$=\frac{1}{2}\times$(弦×矢+矢^2)$=\frac{1}{2}\times(4\sqrt{3}\times2+2^2)=4\sqrt{3}+2\approx9(m^2)$.

5.(1)已知扇形的面积为 25 cm^2，当扇形的圆心角为多大时，扇形的周长取最小值？

(2)已知扇形的周长为 40 cm，当它的半径和圆心角取什么值时，才能使扇形的面积最大？最大面积是多少？

解：(1)设扇形的半径为 R，弧长为 l，扇形的周长为 y，则 $y=l+2R$.

由题意，得 $\frac{1}{2}lR=25$，则 $l=\frac{50}{R}$，故 $y=\frac{50}{R}+2R(R>0)$.

利用函数单调性的定义，可以证明，当 $0<R\leqslant5$ 时，函数 $y=\frac{50}{R}+2R$ 单调递减；当 $R>5$ 时，函数 $y=\frac{50}{R}+2R$ 单调递增.所以当 $R=5$ 时，y 取最小值 20，此时 $l=10$，$\alpha=\frac{l}{R}=2$，即当扇形的圆心角为 2 时，扇形的周长取最小值.

(2)设扇形的圆心角为 θ，半径为 r，弧长为 l，面积为 S，则 $l+2r=40$，所以 $l=40-2r$，所以 $S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times(40-2r)r=-(r-10)^2+100$.

所以，当半径 $r=10$ cm 时，扇形的面积最大，最大值为 100 cm^2，这时 $\theta=\frac{l}{r}=\frac{40-2\times10}{10}=2$(rad).

5.2　三角函数的概念

5.2.1　三角函数的概念

第 1 课时　三角函数的概念

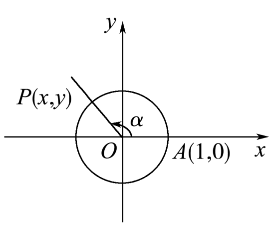
学习任务目标
1.理解任意角的三角函数的定义.
2.会求给定角的三角函数值.
3.掌握任意角的正弦、余弦、正切的定义及应用.

问题式预习

知识清单

知识点一　任意角的三角函数的定义

如图,设 α 是一个任意角,$\alpha\in\mathbf{R}$,它的终边 OP 与单位圆相交于点 $P(x,y)$.



(1)把点 P 的纵坐标 y 叫做 α 的正弦函数,记作 $\underline{\sin\alpha}$,即 $y=\sin\alpha$;

(2)把点 P 的横坐标 x 叫做 α 的余弦函数,记作 $\underline{\cos\alpha}$,即 $x=\cos\alpha$;

(3)把点 P 的纵坐标与横坐标的比值 $\frac{y}{x}$ 叫做 α 的正切,记作 $\underline{\tan\alpha}$,即 $\frac{y}{x}=\tan\alpha(x\neq0)$.

$\frac{y}{x}=\tan\alpha(x\neq0)$ 也是以角为自变量,以单位圆上点的纵坐标与横坐标的比值为函数值的函数,称为正切函数.

我们将正弦函数、余弦函数和正切函数统称为三角函数.

知识点二　三角函数的定义域

函数名	定义域
正弦函数	$\mathbf{R}$
余弦函数	$\mathbf{R}$
正切函数	$\underline{\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})\right\}}$

概念辨析

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)$\sin\alpha$,$\cos\alpha$,$\tan\alpha$ 的值与点 $P(x,y)$ 在角 α 终边上的位置无关.　(　√　)

(2)同一个三角函数值只能有唯一的一个角与之对应.　(　×　)

(3)对于任意一个角 α,都可以求出它的三个三角函数值.　(　×　)

2.已知角 α 的终边与单位圆交于点 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$,则 $\sin\alpha=$________.

$-\frac{1}{2}$　**解析**:由正弦函数的定义得 $\sin\alpha=y=-\frac{1}{2}$.

3.请思考并回答下列问题:

(1)$\sin\alpha$ 表示 sin 与 α 的积吗?

提示:$\sin\alpha$ 表示的是一个比值,不是 sin 与 α 的积.三角函数的记号是一个整体,离开 α 的 sin,cos,tan 是无意义的.

(2)任意角的三角函数的定义中,角的范围是什么?

提示:使函数有意义的实数集.

任务型课堂

学习任务一　利用单位圆求三角函数值

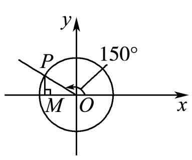
1.如果角 α,β 的终边分别与单位圆交于点 $\left(\frac{12}{13},\frac{5}{13}\right)$ 和 $\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，那么 $\sin\alpha\cos\beta=$（　　）

A.$-\frac{36}{65}$　　B.$-\frac{3}{13}$　　C.$\frac{4}{13}$　　D.$\frac{48}{65}$

B　**解析**：由三角函数的定义可知，$\sin\alpha=\frac{5}{13}$，$\cos\beta=-\frac{3}{5}$，所以 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{5}{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{3}{13}$.

2.已知角 $\alpha=150°$，求 $\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha$.

解：如图，设点 P 是 $150°$ 角的终边与单位圆的交点，故 $\angle POM=30°$.



所以 $PM=\frac{1}{2}$，$OM=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以点 P 的坐标为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，

所以 $\sin150°=\frac{1}{2}$，$\cos150°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $\tan150°=\dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

反思提炼

利用单位圆求三角函数值的方法

(1)确定角的终边与单位圆的交点的坐标 (x,y).

(2)根据三角函数的定义：$\sin\alpha=y$，$\cos\alpha=x$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}(x\neq0)$，求出已知角的三角函数值.

学习任务二　利用角的终边上一点求三角函数值

例　(1)已知角 α 的终边经过点 $P(3,-4)$，则 $\sin\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}=$________.

$\frac{13}{15}$　**解析**：因为角 α 的终边经过点 $P(3,-4)$，所以 $x=3$，$y=-4$，$r=|OP|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$，所以 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，所以 $\sin\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}=-\frac{4}{5}+\frac{5}{3}=\frac{13}{15}$.

(2)已知角 α 的终边上一点 $P(m,\sqrt{3})$，且 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{4}$，求 $\sin\alpha,\tan\alpha$ 的值.

解：由题意得 $x=m$，$y=\sqrt{3}$，

所以 $r=|OP|=\sqrt{m^2+3}$.

所以 $\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{m}{\sqrt{m^2+3}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$，

解得 $m=\sqrt{5}$（负值舍去）.所以 $r=2\sqrt{2}$.

所以 $\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

[一题多思]

思考1.本例(1)中，若已知角 α 的终边经过点 $P(-3a,4a)(a\neq0)$，则 $2\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值为多少？

提示：$r=\sqrt{(-3a)^2+(4a)^2}=5|a|$，

①若 $a>0$，则 $r=5a$，角 α 在第二象限.

$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{4a}{5a}=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-3a}{5a}=-\frac{3}{5}$，

所以 $2\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}=1$.

②若 $a<0$，则 $r=-5a$，角 α 在第四象限.

$\sin\alpha=\frac{4a}{-5a}=-\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{-3a}{-5a}=\frac{3}{5}$，

所以 $2\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{8}{5}+\frac{3}{5}=-1$.

思考2.本例(2)中，若已知角 α 的终边上一点 $P(-\sqrt{3},y)$，$y\neq0$，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}y$，你能求出 $\cos\alpha,\tan\alpha$ 的值吗？

提示：由 $\sin\alpha=\dfrac{y}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+y^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}y$，得 $y^2=5$，所以 $y=\pm\sqrt{5}$.

当 $y=\sqrt{5}$ 时，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$，$\cos\alpha=\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+5^2}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{\sqrt{15}}{3}$；

当 $y=-\sqrt{5}$ 时，$\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{10}}{4}$，$\cos\alpha=\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+5}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

反思提炼

利用角的终边上一点求三角函数值的方法

(1)已知角 α 的终边上一点 $P(x,y)$ 求三角函数值时，先求 $r=|OP|$(O 为原点)，再根据定义 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$，$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}(x\neq0)$确定三角函数值.

(2)若条件中含有参数，要注意对参数进行讨论.

探究训练

1.已知角 θ 的终边经过点$(-4,3)$，则 $\cos\theta=$　(　D　)

A.$\dfrac{4}{5}$　B.$\dfrac{3}{5}$　C.$-\dfrac{3}{5}$　D.$-\dfrac{4}{5}$

2.若 $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且角 α 的终边经过点 $P(x,2)$，则点 P 的横坐标 $x=$　(　　)

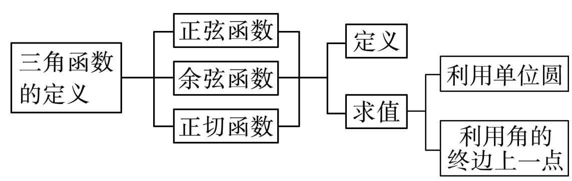
A.$2\sqrt{3}$　B.$\pm2\sqrt{3}$　C.$-2\sqrt{2}$　D.$-2\sqrt{3}$

D　**解析**：由题意得 $r=\sqrt{x^2+2^2}$，

所以 $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2^2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $x=-2\sqrt{3}$(正值舍去).

故选 D.

体系构建



课后素养评价(四十二)

基础性·能力运用

1.已知角 α 的终边经过点 $P\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，则$\cos\alpha$ 等于　(　　)

A.$\dfrac{1}{2}$　B.$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　C.$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　D.$\pm\dfrac{1}{2}$

B　**解析**：由三角函数定义可知，角 α 的终边与单位圆交点的横坐标为角 α 的余弦值，故 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2.已知角 θ 的终边经过点 $M(m,3-m)$，且 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$，则 $m=$　(　　)

A.$\dfrac{1}{2}$　B.1　C.2　D.$\dfrac{5}{2}$

C　**解析**：因为角 θ 的终边经过点 $M(m,3-m)$，且 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}=\dfrac{3-m}{m}$，所以 $m=2$.

3.(多选)已知角 α 终边与单位圆交于点$\left(-\dfrac{1}{2},n\right)$，则符合条件的角 α 可以是　(　　)

A.$-\dfrac{\pi}{3}$　B.$\dfrac{2\pi}{3}$　C.$\dfrac{4\pi}{3}$　D.$\dfrac{7\pi}{3}$

BC　**解析**：在平面直角坐标系中，角 α 以 x 轴正半轴为始边，终边与单位圆(原点为圆心)交于点$\left(-\dfrac{1}{2},n\right)$，可得 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$.

对于 A，当 $\alpha=-\dfrac{\pi}{3}$ 时，$\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\neq-\dfrac{1}{2}$，故错误；

对于 B，当 $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$时，$\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$，故正确；

对于 C，当 $\alpha=\dfrac{4\pi}{3}$时，$\cos\dfrac{4\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$，故正确；

对于 D，当 $\alpha=\dfrac{7\pi}{3}$时，$\cos\dfrac{7\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\neq-\dfrac{1}{2}$，故错误.

4.已知角 α 的终边过点 $P(5,a)$，且 $\tan\alpha=-\dfrac{12}{5}$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值为________.

$-\dfrac{7}{13}$　**解析**：根据三角函数的定义，$\tan\alpha=\dfrac{a}{5}=-\dfrac{12}{5}$，所以 $a=-12$，所以 $P(5,-12)$，$r=13$，所以 $\sin\alpha=-\dfrac{12}{13}$，$\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$，从而 $\sin\alpha+\cos\alpha=-\dfrac{7}{13}$.

5.已知角 α 的终边在直线$\sqrt{3}x+y=0$ 上，求$\sin\alpha$，cos

α，$\tan\alpha$ 的值.

解：直线 $\sqrt{3}x+y=0$，即 $y=-\sqrt{3}x$，经过第二、四象限.

在第二象限取直线上的点 $(-1,\sqrt{3})$，

则 $r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$，

所以 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$，$\tan\alpha=-\sqrt{3}$；

在第四象限取直线上的点 $(1,-\sqrt{3})$，则 $r=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$，

所以 $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\tan\alpha=-\sqrt{3}$.

综上，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$，$\tan\alpha=-\sqrt{3}$ 或 $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\tan\alpha=-\sqrt{3}$.

综合性·创新提升

1. 已知角 α 的终边过点 $M(x,-1)(x<0)$，且 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，则 $x=$　（　　）

A. $-\sqrt{3}$　B. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　C. $-\sqrt{2}$　D. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

C　**解析**：由于角 α 的终边过点 $M(x,-1)(x<0)$，所以 $\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{\sqrt{3}x}{3}$，解得 $x=-\sqrt{2}$.

2.（多选）已知角 θ 的终边经过点 $(-2,-\sqrt{3})$，且 θ 与 α 的终边关于 x 轴对称，则　（　　）

A. $\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

B. α 为钝角

C. $\cos\alpha=-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

D. 点 $(\tan\theta,\tan\alpha)$ 在第四象限

ACD　**解析**：角 θ 的终边经过点 $(-2,-\sqrt{3})$，则 $\sin\theta=\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{(-2)^2+(-\sqrt{3})^2}}=-\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，故 A 正确；因为 θ 与 α 的终边关于 x 轴对称，所以 α 的终边经过点 $(-2,\sqrt{3})$，α 为第二象限角，不一定为钝角，故 B 错误；$\cos\alpha=\dfrac{-2}{\sqrt{(-\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2}}=-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，故 C 正确；

因为 $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}>0$，$\tan\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<0$，所以点 $(\tan\theta,\tan\alpha)$ 在第四象限，故 D 正确.

3.（新定义）（多选）一般地，对任意角 α，设 α 的终边上异于原点的任意一点 P 的坐标为 (x,y)，它与原点的距离是 r. 我们规定：比值 $\dfrac{x}{y}$，$\dfrac{r}{y}$，$\dfrac{r}{x}$ 分别叫做角 α 的余切、余割、正割，分别记作 $\cot\alpha$，$\csc\alpha$，$\sec\alpha$，把 $y=\cot x$，$y=\csc x$，$y=\sec x$ 分别叫做余切函数、余割函数、正割函数，下列叙述正确的有　（　　）

A. $\cot\dfrac{5\pi}{4}=1$

B. $\sin\alpha\cdot\sec\alpha=1$

C. $f(x)=\sec x$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$

D. 设角 α 的终边经过点 $P(2,4)$，则 $\csc\alpha+\sec\alpha=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

ACD　**解析**：$\cot\dfrac{5\pi}{4}=\dfrac{1}{\tan\dfrac{5\pi}{4}}=1$，故 A 正确；$\sin\alpha\cdot\sec\alpha=\sin\alpha\cdot\dfrac{1}{\cos\alpha}=1$ 不一定成立，故 B 不正确；$f(x)=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，则 $\cos x\neq0$，即 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，故 C 正确；

因为角 α 的终边经过点 $P(2,4)$，所以 $r=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，所以 $\csc\alpha=\dfrac{r}{y}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$\sec\alpha=\dfrac{r}{x}=\sqrt{5}$，所以 $\csc\alpha+\sec\alpha=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$，故 D 正确.

4. 已知角 α 的终边上的点 P 与点 $A(a,b)$ 关于 x 轴对称 $(a\neq0,b\neq0)$，角 β 的终边上的点 Q 与点 A 关于直线 $y=x$ 对称，则 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\beta}+\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}+\dfrac{1}{\cos\alpha\sin\beta}=$________.

0　**解析**：由题意可知 $P(a,-b)$，则 $\sin\alpha=\dfrac{-b}{\sqrt{a^2+(-b)^2}}$，

$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+(-b)^2}}$，$\tan\alpha=-\dfrac{b}{a}$.

由题意可知 $Q(b,a)$，则 $\sin\beta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\tan\beta=\dfrac{a}{b}$，

所以 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\beta}+\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}+\dfrac{1}{\cos\alpha\sin\beta}=-1-\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{a^2+b^2}{a^2}=0$.

第 2 课时　三角函数的一些简单性质

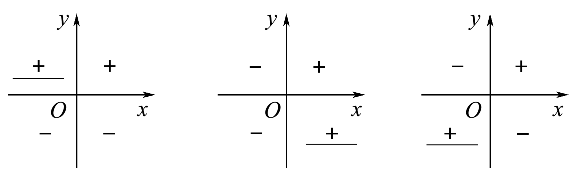
学习任务目标

1. 借助任意角的三角函数的定义理解并掌握正弦、余弦、正切函数的值在各象限内的符号.
2. 通过对任意角的三角函数定义的理解,掌握诱导公式一.

问题式预习

知识清单

知识点一　正弦、余弦、正切函数的值在各象限的符号



sin α　　cos α　　tan α

记忆口诀:"一全正,二正弦,三正切,四余弦".

知识点二　诱导公式一

终边相同的角的同一三角函数的值相等.由此得到一组公式(公式一):

$\sin(\alpha+k\cdot 2\pi)=\underline{\sin\alpha}$,

$\cos(\alpha+k\cdot 2\pi)=\underline{\cos\alpha}$,

$\tan(\alpha+k\cdot 2\pi)=\underline{\tan\alpha}$,其中 $k\in\mathbf{Z}$.

概念辨析

1. 判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)同一个三角函数值能找到无数个角与之对应.　(√)

(2)若 $\sin\alpha\cos\alpha>0$,则角 α 为第一象限角.　(×)

(3)终边相同的角的同一三角函数的值相等.　(√)

(4)$\sin\alpha>0$,则 α 为第一或第二象限角.　(×)

2. 计算:$\sin 405°=\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

3. 请思考并回答下列问题:

(1)判断三角函数值符号的关键是什么?

提示:确定角的终边位置是判断三角函数值符号的关键.

(2)你能谈谈你对诱导公式一的理解吗?

提示:

特点	角可以是任意角,k 为任意整数
实质	终边相同的角的同一三角函数的值相等
结构特征	①公式左、右为同一种三角函数; ②公式左边的角为 $\alpha+k\cdot 2\pi$,右边的角为 α
作用	把求任意角的三角函数值转化为求 $0\sim 2\pi$(或 $0°\sim 360°$)范围内角的三角函数值

任务型课堂

学习任务一　三角函数值符号的判断

1.(多选)已知 $\cos\theta\tan\theta<0$,则角 θ 可能是　(　　)

A.第一象限角

B.第二象限角

C.第三象限角

D.第四象限角

CD　**解析:**因为 $\cos\theta\tan\theta<0$,

所以 $\begin{cases}\cos\theta<0,\\ \tan\theta>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\cos\theta>0,\\ \tan\theta<0.\end{cases}$

由 $\begin{cases}\cos\theta<0,\\ \tan\theta>0\end{cases}$ 得角 θ 为第三象限角;

由 $\begin{cases}\cos\theta>0,\\ \tan\theta<0\end{cases}$ 得角 θ 为第四象限角.

所以角 θ 为第三或第四象限角.

2. 函数 $y=\dfrac{|\cos x|}{\cos x}+\dfrac{\tan x}{|\tan x|}$ 的值域为________.

$\{-2,0,2\}$　**解析:**由题意得 $\cos x\neq 0$ 且 $\tan x\neq 0$,所以角 x 的终边不在 x 轴上,也不在 y 轴上.

当 x 是第一象限角时,$|\cos x|=\cos x$,$|\tan x|=\tan x$,所以 $y=\dfrac{|\cos x|}{\cos x}+\dfrac{\tan x}{|\tan x|}=2$;

当 x 是第二象限角时,$|\cos x|=-\cos x$,$|\tan x|=-\tan x$,所以 $y=\dfrac{|\cos x|}{\cos x}+\dfrac{\tan x}{|\tan x|}=-2$;

当 x 是第三象限角时,$|\cos x|=-\cos x$,$|\tan x|$

$=\tan x$，所以 $y=\dfrac{|\cos x|}{\cos x}+\dfrac{\tan x}{|\tan x|}=0$；

当 x 是第四象限角时，$|\cos x|=\cos x$，$|\tan x|=-\tan x$，所以 $y=\dfrac{|\cos x|}{\cos x}+\dfrac{\tan x}{|\tan x|}=0$.

故所求函数的值域为 $\{-2,0,2\}$.

反思提炼

确定三角函数值符号的关键

由三角函数的定义知 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$，$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}(x\neq0,r>0)$，可知角的三角函数值的符号是由角终边上任意一点 $P(x,y)$ 的坐标确定的，则确定角的终边位置是判断三角函数值符号的关键.

学习任务二 诱导公式一的应用

例 计算下列各式的值.

(1) $\sin(-1\ 395°)\cos 1\ 110°+\cos(-1\ 020°)\cdot\sin 750°$；

(2) $\sin\left(-\dfrac{11\pi}{6}\right)+\cos\dfrac{12\pi}{5}\tan 4\pi$；

(3) $\sin\dfrac{7\pi}{3}\cos\left(-\dfrac{23\pi}{6}\right)+\tan\left(\dfrac{-15\pi}{4}\right)\cos\dfrac{13\pi}{3}$.

解：(1) 原式 $=\sin(-4\times360°+45°)\cos(3\times360°+30°)+\cos(-3\times360°+60°)\sin(2\times360°+30°)=\sin 45°\cdot\cos 30°+\cos 60°\sin 30°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1+\sqrt{6}}{4}$.

(2) 原式 $=\sin\left(-2\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\left(2\pi+\dfrac{2\pi}{5}\right)\tan(4\pi+0)$

$=\sin\dfrac{\pi}{6}+0\times\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{1}{2}$.

(3) 原式 $=\sin\left(2\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(-4\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)+\tan\left(-4\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(4\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{6}+\tan\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{4}$.

反思提炼

利用诱导公式一进行化简、求值的步骤

(1) 定形：将已知的任意角写成 $\alpha+2k\pi$ 的形式，其中 $\alpha\in[0,2\pi)$，$k\in\mathbf{Z}$.

(2) 转化：根据诱导公式，转化为求角 α 的某个三角函数值.

(3) 求值：若角 α 为特殊角，可直接求出该角的三角函数值.

探究训练

计算下列各式的值.

(1) $\tan 405°-\sin 450°+\cos 750°$；

(2) $\sin\dfrac{25\pi}{3}+\tan\left(\dfrac{-15\pi}{4}\right)$.

解：(1) 原式 $=\tan(360°+45°)-\sin(360°+90°)+\cos(2\times360°+30°)$

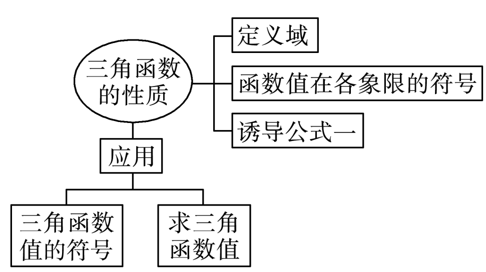
$=\tan 45°-\sin 90°+\cos 30°$

$=1-1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) 原式 $=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+8\pi\right)+\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-4\pi\right)$

$=\sin\dfrac{\pi}{3}+\tan\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$.

体系构建



课后素养评价(四十三)

基础性·能力运用

1. $\sin\dfrac{13\pi}{6}$ 的值是 ( )

A. $-\dfrac{1}{2}$　B. $\dfrac{1}{2}$　C. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

B **解析**：$\sin\dfrac{13\pi}{6}=\sin\left(2\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$.

2. 若 $\sin\theta<\cos\theta$，且 $\sin\theta\cdot\cos\theta<0$，则角 θ 的终边位于 ( )

A. 第一象限　B. 第二象限

C. 第三象限　D. 第四象限

D **解析**：由条件可知 $\sin\theta<0$，$\cos\theta>0$，则 θ 为第四象限角. 故选 D.

3. 点 $P(\cos 2\ 024°,\sin 2\ 024°)$ 所在的象限是 ( )

A. 第一象限　B. 第二象限

C.第三象限　　D.第四象限

C　**解析**：$\cos 2\ 024^\circ=\cos(2\ 024^\circ-6\times360^\circ)=\cos(-136^\circ)<0$，$\sin 2\ 024^\circ=\sin(2\ 024^\circ-6\times360^\circ)=\sin(-136^\circ)<0$，故点 P 在第三象限.

4.（多选）给出下列各三角函数值，其中符号为负的是　（　　）

A.$\sin(-100^\circ)$　　B.$\cos(-220^\circ)$

C.$\tan(-10)$　　D.$\cos 0$

ABC　**解析**：因为 -100° 角是第三象限角，所以 $\sin(-100^\circ)<0$；

因为 -220° 角是第二象限角，所以 $\cos(-220^\circ)<0$；

因为 $-10\in\left(-\dfrac{7}{2}\pi,-3\pi\right)$，所以 -10 是第二象限角，所以 $\tan(-10)<0$；$\cos 0=1>0$.

5.设 α 是第一象限角，且 $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|=\cos\dfrac{\alpha}{2}$，则 $\dfrac{\alpha}{2}$ 的终边所在的象限是　（　　）

A.第一象限　　B.第二象限

C.第三象限　　D.第四象限

A　**解析**：因为 α 是第一象限的角，所以 $\dfrac{\alpha}{2}$ 是第一或第三象限角.

又因为 $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|=\cos\dfrac{\alpha}{2}$，所以 $\dfrac{\alpha}{2}$ 所在的象限是第一象限.

6.求下列各式的值.

(1)$\cos\dfrac{25\pi}{4}+\tan\left(-\dfrac{11\pi}{6}\right)$；

(2)$\sin 810^\circ+\tan 765^\circ-\cos 360^\circ$.

解：(1)原式 $=\cos\left(6\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)+\tan\left(-2\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}+\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$.

(2)原式 $=\sin(90^\circ+2\times360^\circ)+\tan(45^\circ+2\times360^\circ)-\cos 360^\circ=\sin 90^\circ+\tan 45^\circ-1=1+1-1=1$.

综合性·创新提升

1.（多选）已知 $\cos\theta\cdot\tan\theta>0$，则 θ 可能为　（　　）

A.第一象限角　　B.第二象限角

C.第三象限角　　D.第四象限角

AB　**解析**：因为 $\cos\theta\cdot\tan\theta=\sin\theta>0$（$\theta$ 不在 y 轴上），所以 θ 可能为第一、第二象限角.

2.下列各式的符号为正的是　（　　）

A.$\cos 3$　　B.$\sin\dfrac{5\pi}{3}\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

C.$\tan\dfrac{7\pi}{8}$　　D.$\sin 2-\cos 2$

D　**解析**：因为 $\dfrac{\pi}{2}<3<\pi$，所以 $\cos 3<0$，A 不符合题意；

$\sin\dfrac{5\pi}{3}<0$，$\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)>0$，故 $\sin\dfrac{5\pi}{3}\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)<0$，B 不符合题意；

因为 $\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{7\pi}{8}<\pi$，所以 $\tan\dfrac{7\pi}{8}<0$，C 不符合题意；

因为 $\dfrac{\pi}{2}<2<\dfrac{3\pi}{4}$，所以 $\sin 2>\cos 2$，故 $\sin 2-\cos 2>0$，D 符合题意.

3.函数 $y=\sqrt{2\sin x-1}$ 的定义域为 $\underline{\left[\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\right],k\in\mathbf{Z}}$.

4.已知角 α 的终边经过点 $P(3,4)$.

(1)$\tan(-6\pi+\alpha)$ 的值为________；

(2)$\dfrac{\sin(\alpha-4\pi)}{\cos(6\pi+\alpha)}\cdot\sin(\alpha-2\pi)\cdot\cos(2\pi+\alpha)$ 的值为________.

(1)$\dfrac{4}{3}$　(2)$\dfrac{16}{25}$　**解析**：由题意知 $r=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

所以 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{4}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=\dfrac{3}{5}$，$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}=\dfrac{4}{3}$.

(1)$\tan(-6\pi+\alpha)=\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$.

(2)原式 $=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin^2\alpha=\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{16}{25}$.

5.判断下列各式的符号.

(1)$\sin 340^\circ\cos 265^\circ$；

(2)$\sin 4\tan\left(-\dfrac{23\pi}{4}\right)$；

(3)$\dfrac{\sin(\cos\theta)}{\cos(\sin\theta)}$（$\theta$ 为第二象限角）.

解：(1)因为 340° 是第四象限角，265° 是第三象限角，所以 $\sin 340^\circ<0$，$\cos 265^\circ<0$，所以 $\sin 340^\circ\cos 265^\circ>0$.

(2)因为 $\pi<4<\dfrac{3\pi}{2}$，所以 4 是第三象限角.

因为 $-\dfrac{23\pi}{4}=-6\pi+\dfrac{\pi}{4}$，所以 $-\dfrac{23\pi}{4}$ 是第一象限角.

所以 $\sin 4<0$，$\tan\left(-\dfrac{23\pi}{4}\right)>0$.

所以 $\sin 4\tan\left(-\dfrac{23\pi}{4}\right)<0$.

(3)因为 θ 为第二象限角，所以 $0<\sin\theta<1<\dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2}<-1<\cos\theta<0$，所以 $\sin(\cos\theta)<0$，$\cos(\sin\theta)>0$，

所以 $\dfrac{\sin(\cos\theta)}{\cos(\sin\theta)}<0$.

5.2.2　同角三角函数的基本关系

学习任务目标

1.能通过三角函数的定义推导出同角三角函数的基本关系.
2.理解同角三角函数的基本关系式.
3.能运用同角三角函数的基本关系式进行三角函数式的化简、求值和证明.

问题式预习

知识清单

知识点一　同角三角函数的基本关系式

(1)平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

(2)商数关系：$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha\left(\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right)$.

知识点二　同角三角函数基本关系式的变形

(1)$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 的变形：

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$；

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$.

(2)$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right)$的变形：

$\sin\alpha=\cos\alpha\tan\alpha$；

$\cos\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$.

概念辨析

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)对于任意角 α,β,均有 $\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$.　(×)

(2)存在角 α,使得 $\sin\alpha=\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$.　(×)

(3)存在角 α,使得 $\tan\alpha=1,\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.　(√)

2.若 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$,且 α 是第二象限角,则 $\tan\alpha=$　(　　)

A.$-\dfrac{4}{3}$　B.$\dfrac{3}{4}$　C.$\pm\dfrac{3}{4}$　D.$\pm\dfrac{4}{3}$

A　**解析**：因为 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$,且 α 是第二象限角,所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{3}{5}$,所以 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{4}{3}$.故选 A.

3.请思考并回答下列问题：

(1)“$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=1$”“$\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$”成立吗？为什么？

提示：三角函数的基本关系式中的角都是“同一个角”,故$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=1$ 成立,这里的同角是指$\dfrac{\alpha}{2}$,而 $\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$ 不一定成立.

(2)公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 与 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$对任意角都成立吗?

提示：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 对任意角 α 都成立,当 $\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$ 时,$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$成立.

任务型课堂

学习任务 一　利用同角三角函数基本关系式化简

化简：(1)$\dfrac{\sqrt{1+2\sin10^\circ\cos10^\circ}}{\cos10^\circ+\sqrt{1-\cos^2 10^\circ}}$；

(2)$\sin^2\alpha\tan\alpha+\dfrac{\cos^2\alpha}{\tan\alpha}+2\sin\alpha\cos\alpha$.

解：(1)原式$=\dfrac{\sqrt{(\cos10^\circ+\sin10^\circ)^2}}{\cos10^\circ+\sin10^\circ}=\dfrac{|\cos10^\circ+\sin10^\circ|}{\cos10^\circ+\sin10^\circ}=1$.

(2)原式$=\sin^2\alpha\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\cos^2\alpha\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+2\sin\alpha\cos\alpha$

$=\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\dfrac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

反思提炼

利用同角三角函数基本关系式化简的常用方法

(1)当要化简的式子中 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 同时存在时，一般应切化弦.

(2)当含有根号时，应先把被开方式化为完全平方式，再去掉根号.

(3)当含有高次的三角函数式时，可借助于因式分解，或构造平方关系，降幂化简.

学习任务二　利用同角三角函数基本关系式证明

例 1　求证：$\dfrac{1-2\sin 2x\cos 2x}{\cos^2 2x-\sin^2 2x}=\dfrac{1-\tan 2x}{1+\tan 2x}$.

证明：左边 $=\dfrac{\cos^2 2x+\sin^2 2x-2\sin 2x\cos 2x}{\cos^2 2x-\sin^2 2x}$

$=\dfrac{(\cos 2x-\sin 2x)^2}{(\cos 2x-\sin 2x)(\cos 2x+\sin 2x)}$

$=\dfrac{\cos 2x-\sin 2x}{\cos 2x+\sin 2x}=\dfrac{1-\tan 2x}{1+\tan 2x}=$ 右边.

所以原等式成立.

反思提炼

证明恒等式的关注点

(1)实质：清除等式两端的差异，有目的地化简.

(2)基本原则：由繁到简.例如：化切为弦，减少函数名称.

(3)常用方法：从等式的一边开始，推出它等于另一边.

探究训练

已知 $\tan^2\alpha=2\tan^2\beta+1$，求证：$\sin^2\beta=2\sin^2\alpha-1$.

证明：(方法一)因为 $\tan^2\alpha=2\tan^2\beta+1$，

所以 $\tan^2\beta=\dfrac{\tan^2\alpha-1}{2}$①.

因为 $\tan^2\beta=\dfrac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}$，

所以 $\tan^2\beta=\dfrac{\sin^2\beta}{1-\sin^2\beta}$，所以 $\sin^2\beta=\dfrac{\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}$②.

由①②，得 $\sin^2\beta=\dfrac{\dfrac{\tan^2\alpha-1}{2}}{1+\dfrac{\tan^2\alpha-1}{2}}=\dfrac{\tan^2\alpha-1}{\tan^2\alpha+1}=$

$\dfrac{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-1}{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1}=\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=2\sin^2\alpha-1$.

(方法二)因为 $\tan^2\alpha=2\tan^2\beta+1$，

所以 $\tan^2\alpha+1=2(\tan^2\beta+1)$.

所以 $\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2\cdot\dfrac{\sin^2\beta+\cos^2\beta}{\cos^2\beta}$.

所以 $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=\dfrac{2}{\cos^2\beta}$.

所以 $\cos^2\beta=2\cos^2\alpha$.

所以 $1-\sin^2\beta=2(1-\sin^2\alpha)$.

所以 $\sin^2\beta=2\sin^2\alpha-1$.

学习任务三　利用同角三角函数基本关系式求值

例 2　已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$，$\alpha\in(0,\pi)$，求下列各式的值：

(1)$\sin\alpha\cos\alpha$；(2)$\sin\alpha-\cos\alpha$.

解：(1)由 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$，两边平方得 $2\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{24}{25}$，所以 $\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{12}{25}$.

(2)由(1)知 $\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{12}{25}$，所以 $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1+\dfrac{24}{25}=\dfrac{49}{25}$，所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=\pm\dfrac{7}{5}$.

因为 $\sin\alpha\cos\alpha<0$，所以 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$.

所以 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$.所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{7}{5}$.

[一题多思]

思考 1. 本例涉及的三角恒等式有哪些？

提示：

(1)$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$；

(2)$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta$；

(3)$(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2=2$；

(4)$(\sin\theta-\cos\theta)^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2-4\sin\theta\cos\theta$.

思考 2. 已知 $\sin\alpha\cos\alpha$ 的值，能否求 $\sin\alpha\pm\cos\alpha$ 的值？

提示：已知 $\sin\alpha+\cos\alpha$，$\sin\alpha-\cos\alpha$，$\sin\alpha\cos\alpha$ 中的任何一个式子的值，则另外两个式子的值均可求出.

例 3　已知 $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=2$，计算下列各式的值.

(1)$\dfrac{3\sin\alpha-\cos\alpha}{2\sin\alpha+3\cos\alpha}$；

(2)$\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+1$.

解：由 $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=2$，化简得 $\sin\alpha=3\cos\alpha$，

所以 $\tan\alpha=3$.

(1)原式$=\dfrac{3\times 3\cos\alpha-\cos\alpha}{2\times 3\cos\alpha+3\cos\alpha}=\dfrac{8\cos\alpha}{9\cos\alpha}=\dfrac{8}{9}$.

(2)原式$=\dfrac{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}+1$

$=\dfrac{\tan^2\alpha-2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}+1=\dfrac{3^2-2\times 3}{3^2+1}+1=\dfrac{13}{10}$.

反思提炼

三角函数求值问题的解题策略

(1)已知角 α 的某种三角函数值，求角 α 的其余三角函数值时，要注意公式的合理选择与变形；若角的终边所在的象限不确定，应分类讨论.

(2)已知 $\tan\alpha$，求关于 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 的几次齐次式的值，可将分子、分母同除以 $\cos\alpha$ 的 n 次幂，进行弦化切；有时可把分母看作 1，并将 1 用 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ 来代换.

探究训练

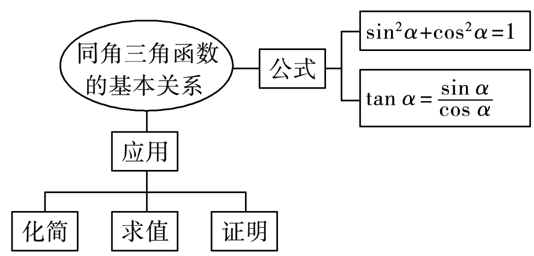
已知 $\tan\alpha=2$，求 $2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha$ 的值.

解：$2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha$

$=\dfrac{2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{2\tan^2\alpha-\tan\alpha+1}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{2\times 4-2+1}{4+1}=\dfrac{7}{5}$.

体系构建



课后素养评价（四十四）

基础性·能力运用

1. 已知 α 是第四象限角，$\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$，则 $\sin\alpha$ 等于　　(　　)

A. $\dfrac{5}{13}$　　B. $-\dfrac{5}{13}$　　C. $\dfrac{5}{12}$　　D. $-\dfrac{5}{12}$

B　**解析**：由条件知 α 是第四象限角，所以 $\sin\alpha<0$，即 $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{12}{13}\right)^2}=-\dfrac{5}{13}$.

2. 已知 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{2}$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $\sin\alpha-2\cos\alpha=$　　(　　)

A. $\sqrt{5}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　C. 1　　D. $-\sqrt{5}$

A　**解析**：因为 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{2}$，

所以 $\begin{cases}\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{1}{2},\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.\end{cases}$

又 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin\alpha-2\cos\alpha=\sqrt{5}$.

3. 已知 $\dfrac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{2}$，则 $\tan\alpha=$　　(　　)

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{3}$ 或 1　　D. $\dfrac{1}{2}$ 或 1

A　**解析**：因为 $\dfrac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $\dfrac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$

$=\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\dfrac{1}{2}$，解得 $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$.

4. 已知 α 是三角形的一个内角，且 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$，那么这个三角形的形状为　　(　　)

A. 锐角三角形　　B. 钝角三角形

C. 等边三角形　　D. 等腰直角三角形

B　**解析**：因为 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$，所以 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\dfrac{4}{9}$，所以 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-\dfrac{5}{18}<0$. 由 α 是三角形的一个内角，知 $\sin\alpha>0$，所以 $\cos\alpha<0$，则 α 为钝角，所以这个三角形为钝角三角形.

5. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，且 α 为第二象限角，则 $\tan\alpha=$________.

$-\dfrac{4}{3}$　**解析**：因为 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，α 为第二象限角，所以 $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$，所以 $\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$.

6. 化简：$(1+\tan^2 15^\circ)\cdot\cos^2 15^\circ=$________.

1　**解析**：$(1+\tan^2 15^\circ)\cos^2 15^\circ=\left(1+\dfrac{\sin^2 15^\circ}{\cos^2 15^\circ}\right)\cdot\cos^2 15^\circ=\dfrac{\cos^2 15^\circ+\sin^2 15^\circ}{\cos^2 15^\circ}\cdot\cos^2 15^\circ=1$.

综合性·创新提升

1. 若 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，且满足 $\frac{6}{\tan\theta}-\tan\theta=1$，则 $\sin\theta+\cos\theta=$　　(　　)

A. $\frac{\sqrt{10}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $-\frac{\sqrt{10}}{5}$

A　**解析**：由 $\frac{6}{\tan\theta}-\tan\theta=1$，得 $(\tan\theta-2)(\tan\theta+3)=0$，因为 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\tan\theta<0$，所以 $\tan\theta=-3$ 或 $\tan\theta=2$（舍去）。由 $\begin{cases}\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-3,\\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1\end{cases}$ 及 $\sin\theta>0$ 得 $\sin\theta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，所以 $\cos\theta=\frac{\sin\theta}{\tan\theta}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{5}$。

2. 若 α 为第二象限角，则 $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}+\frac{2\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$ 的值为　　(C)

A. 3　　B. -3　　C. 1　　D. -1

3.（新定义）设角 α 的终边上任意一点 P 的坐标是 (x,y)，它与原点的距离是 $r(r>0)$，规定：比值 $\frac{y-x}{r}$ 叫做 α 的正余混弦，记作 $\operatorname{sch}\alpha$。若 $\operatorname{sch}\alpha=\frac{1}{5}(0<\alpha<\pi)$，则 $\tan\alpha=$　　(　　)

A. $-\frac{3}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $-\frac{4}{3}$　　D. $\frac{4}{3}$

D　**解析**：因为 $\operatorname{sch}\alpha=\frac{1}{5}(0<\alpha<\pi)=\frac{y-x}{r}=\frac{y-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，所以 $25(y-x)^2=x^2+y^2$，

即 $24\left(\frac{y}{x}\right)^2-50\left(\frac{y}{x}\right)+24=0$，且 $y>x$，解得 $\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{4}{3}$ 或 $\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{3}{4}$（舍去）。

4. 已知 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{8}$，且 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则 $\cos\alpha-\sin\alpha=$ $\underline{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$。

5. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{13}$，$\alpha\in(0,\pi)$，则 $\tan\alpha=$ ________。

$-\frac{12}{5}$　**解析**：（方法一：构建方程组）

因为 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{13}$①，

所以 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{49}{169}$，

即 $2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{120}{169}$。

因为 $\alpha\in(0,\pi)$，所以 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$。

所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{17}{13}$②。

由①②解得 $\sin\alpha=\frac{12}{13}$，$\cos\alpha=-\frac{5}{13}$，

所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{12}{5}$。

（方法二：弦化切）同方法一，求出 $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{60}{169}$，所以 $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=-\frac{60}{169}$，所以 $\frac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=-\frac{60}{169}$，

整理得 $60\tan^2\alpha+169\tan\alpha+60=0$，

解得 $\tan\alpha=-\frac{5}{12}$ 或 $\tan\alpha=-\frac{12}{5}$。

由 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{13}>0$ 知 $|\sin\alpha|>|\cos\alpha|$。

故 $\tan\alpha=-\frac{12}{5}$。

6. 已知 $\frac{4\sin\theta-2\cos\theta}{3\sin\theta+5\cos\theta}=\frac{6}{11}$，求下列各式的值。

(1) $\frac{5\cos^2\theta}{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-3\cos^2\theta}$；

(2) $1-4\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta$。

解：由已知 $\frac{4\sin\theta-2\cos\theta}{3\sin\theta+5\cos\theta}=\frac{6}{11}$，

可得 $\frac{4\tan\theta-2}{3\tan\theta+5}=\frac{6}{11}$，解得 $\tan\theta=2$。

(1) 原式 $=\frac{5}{\tan^2\theta+2\tan\theta-3}=\frac{5}{5}=1$。

(2) 原式 $=\sin^2\theta-4\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta$

$=\frac{\sin^2\theta-4\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$

$=\frac{\tan^2\theta-4\tan\theta+3}{\tan^2\theta+1}=-\frac{1}{5}$。

5.3　诱导公式

第1课时　诱导公式二～四

学习任务目标

1. 理解并掌握诱导公式二、三、四的结构特征及记忆方法.
2. 会运用诱导公式一、二、三、四求三角函数的值及化简与证明简单的三角函数式.

问题式预习

知识清单

知识点　诱导公式二～四

(1)公式二：$\sin(\pi+\alpha)=\underline{-\sin\alpha}$，$\cos(\pi+\alpha)=\underline{-\cos\alpha}$，$\tan(\pi+\alpha)=\underline{\tan\alpha}$.

(2)公式三：$\sin(-\alpha)=\underline{-\sin\alpha}$，$\cos(-\alpha)=\underline{\cos\alpha}$，$\tan(-\alpha)=\underline{-\tan\alpha}$.

(3)公式四：$\sin(\pi-\alpha)=\underline{\sin\alpha}$，$\cos(\pi-\alpha)=\underline{-\cos\alpha}$，$\tan(\pi-\alpha)=\underline{-\tan\alpha}$.

概念辨析

1. 判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1) $\tan 210°=\frac{\sqrt{3}}{3}$.　　(√)

(2)诱导公式中的角 α 一定是锐角.　　(×)

(3)在△ABC 中，$\sin(A+B)=\sin C$.　　(√)

(4) $\sin(\alpha-\pi)=\sin\alpha$.　　(×)

2. 求下列三角函数值.

(1) $\sin 690°=$________；

(2) $\cos\left(-\frac{20\pi}{3}\right)=$________；

(3) $\tan(-1\ 845°)=$________.

(1) $-\frac{1}{2}$　(2) $-\frac{1}{2}$　(3) -1

解析：(1) $\sin 690°=\sin(360°+330°)=\sin 330°=\sin(180°+150°)=-\sin 150°=-\sin(180°-30°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2}$.

(2) $\cos\left(-\frac{20}{3}\pi\right)=\cos\frac{20}{3}\pi=\cos\left(6\pi+\frac{2}{3}\pi\right)=\cos\frac{2}{3}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

(3) $\tan(-1\ 845°)=\tan(-5\times360°-45°)=\tan(-45°)=-\tan 45°=-1$.

3. 请思考并回答下列问题：

(1)诱导公式二～四中的角 α 是任意角吗?

提示：是，但要注意正切函数中要求 $\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.

(2)诱导公式二～四只能用弧度制表示吗?

提示：既可以用弧度制表示，也可以用角度制表示.

任务型课堂

学习任务一　给角求值问题

1. 求下列各三角函数值.

(1) $\cos 210°$；(2) $\sin\frac{11\pi}{4}$；(3) $\sin\left(-\frac{43\pi}{6}\right)$；

(4) $\cos(-1\ 920°)$.

解：(1) $\cos 210°=\cos(180°+30°)=-\cos 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) $\sin\frac{11\pi}{4}=\sin\left(2\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3) $\sin\left(-\frac{43\pi}{6}\right)=-\sin\left(6\pi+\frac{7\pi}{6}\right)=-\sin\frac{7\pi}{6}=-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

(4) $\cos(-1\ 920°)=\cos 1\ 920°=\cos(5\times360°+120°)=\cos 120°=\cos(180°-60°)=-\cos 60°=-\frac{1}{2}$.

2. 求 $\sin\left(2n\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(n\pi+\frac{4\pi}{3}\right)(n\in\mathbf{Z})$的值.

解：分类讨论：

①当 n 为奇数时，原式 $=\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\left(-\cos\frac{4\pi}{3}\right)=$

$\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left[-\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

②当 n 为偶数时，原式 $=\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\cos\frac{4\pi}{3}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cdot\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

反思提炼

利用诱导公式求任意角三角函数值的步骤

(1)“负化正”——用公式一或三将负角化为正角.
(2)“大化小”——用公式一将角化为0°到360°之间的角.
(3)“小化锐”——用公式二或四将大于90°的角转化为锐角.
(4)“锐求值”——得到锐角的三角函数后求值.

学习任务二　利用诱导公式化简

例1　化简下列各式.

(1)$\frac{\tan(2\pi-\alpha)\sin(-2\pi-\alpha)\cos(6\pi-\alpha)}{\cos(\alpha-\pi)\sin(5\pi-\alpha)}$;

(2)$\frac{\cos(\pi+\alpha)\sin(2\pi+\alpha)}{\sin(-\alpha-\pi)\cos(-\pi-\alpha)}$;

(3)$\frac{\sqrt{1+2\sin 290^\circ\cos 430^\circ}}{\sin 250^\circ+\cos 790^\circ}$.

解:(1)原式$=\frac{\frac{\sin(2\pi-\alpha)}{\cos(2\pi-\alpha)}\cdot\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)\sin(\pi-\alpha)}$

$=\frac{-\sin\alpha(-\sin\alpha)\cos\alpha}{\cos\alpha(-\cos\alpha)\sin\alpha}=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\tan\alpha$.

(2)原式$=\frac{-\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{-\sin(\pi+\alpha)\cdot\cos(\pi+\alpha)}$

$=\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=1$.

(3)原式$=\frac{\sqrt{1+2\sin(360^\circ-70^\circ)\cos(360^\circ+70^\circ)}}{\sin(180^\circ+70^\circ)+\cos(720^\circ+70^\circ)}$

$=\frac{\sqrt{1-2\sin 70^\circ\cos 70^\circ}}{-\sin 70^\circ+\cos 70^\circ}=\frac{|\cos 70^\circ-\sin 70^\circ|}{\cos 70^\circ-\sin 70^\circ}$

$=\frac{\sin 70^\circ-\cos 70^\circ}{\cos 70^\circ-\sin 70^\circ}=-1$.

反思提炼

三角函数式化简的常用方法

(1)利用诱导公式，将任意角的三角函数转化为锐角的三角函数.
(2)切化弦：一般需将式中的正切函数转化为正弦、余弦函数.
(3)注意“1”的代换：$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\tan\frac{\pi}{4}$.

探究训练

化简：(1)$\frac{\sin(540^\circ+\alpha)\cdot\cos(-\alpha)}{\tan(\alpha-180^\circ)}$;

(2)$\frac{\sin(2\pi+\alpha)\cos(-\pi+\alpha)}{\cos(-\alpha)\tan\alpha}$.

解:(1)$\frac{\sin(540^\circ+\alpha)\cdot\cos(-\alpha)}{\tan(\alpha-180^\circ)}=\frac{\sin(180^\circ+\alpha)\cdot\cos\alpha}{\tan\alpha}$

$=\frac{-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\tan\alpha}=-\cos^2\alpha$.

(2)$\frac{\sin(2\pi+\alpha)\cos(-\pi+\alpha)}{\cos(-\alpha)\tan\alpha}=\frac{\sin\alpha(-\cos\alpha)}{\cos\alpha\tan\alpha}$

$=-\cos\alpha$.

学习任务三　给值求值问题

例2　(1)若 $\sin(3\pi+\alpha)=-\frac{1}{2}$，则 $\sin\alpha=$________.

$\frac{1}{2}$　**解析**：因为 $\sin(3\pi+\alpha)=-\frac{1}{2}$，且 $\sin(3\pi+\alpha)=\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$，所以 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$.

(2)已知 $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos\left(\alpha+\frac{5\pi}{6}\right)=$________.

$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　**解析**：$\cos\left(\alpha+\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left[\pi-\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]=-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

[一题多思]

思考1. 本例(2)条件不变，能求出 $\cos\left(\frac{7\pi}{6}-\alpha\right)$ 的值吗？

提示：$\cos\left(\frac{7\pi}{6}-\alpha\right)=\cos\left[\pi+\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]=-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

思考2. 本例(2)条件不变，能求出 $\cos\left(\alpha-\frac{13\pi}{6}\right)$ 的值吗？

提示：$\cos\left(\alpha-\frac{13\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{13\pi}{6}-\alpha\right)=\cos\left[2\pi+\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

反思提炼

解决条件求值问题的策略

(1)解决条件求值问题，首先要仔细观察条件与所求式中的角、函数名称及有关运算之间的差异及联系.

(2)可以将已知式进行变形向所求式转化，或将所求式进行变形向已知式转化.

探究训练

1. 已知 $\sin(\pi+\alpha)=\frac{4}{5}$，且 α 是第四象限角，则 $\cos(\alpha-2\pi)$ 的值是　　(　　)

A. $-\frac{3}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\pm\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

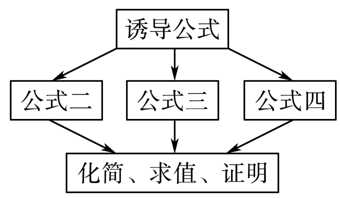
B　**解析**：由 $\sin(\pi+\alpha)=\frac{4}{5}$，得 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$.

因为 $\cos(\alpha-2\pi)=\cos\alpha$，且 α 是第四象限角，所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{3}{5}$.

2. 已知 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{3}$，且 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)=$________.

$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　**解析**：$\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)=\cos\left[\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\pi\right]=-\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$，因为 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\theta-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)>0$，即 $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

体系构建



课后素养评价(四十五)

基础性·能力运用

1. $\cos\left(-\frac{20\pi}{3}\right)$ 的值是　　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

B　**解析**：$\cos\left(-\frac{20\pi}{3}\right)=\cos\left(-6\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

2. 若 $\cos(\pi+\alpha)=-\frac{1}{2}$，$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，则 $\sin(2\pi+\alpha)$ 等于　　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

D　**解析**：由 $\cos(\pi+\alpha)=-\frac{1}{2}$，得 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$. 又 $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，故 $\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.（多选）下列化简正确的是　　(　　)

A. $\tan(\pi+1)=\tan 1$

B. $\frac{\sin(-\alpha)}{\tan(360^\circ-\alpha)}=\cos\alpha$

C. $\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}=\tan\alpha$

D. $\frac{\cos(\pi-\alpha)\tan(-\pi-\alpha)}{\sin(2\pi-\alpha)}=1$

AB　**解析**：对于 A，根据三角函数的诱导公式可知 $\tan(\pi+1)=\tan 1$，故 A 正确；

对于 B，$\frac{\sin(-\alpha)}{\tan(360^\circ-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{-\tan\alpha}=\cos\alpha$，故 B 正确；

对于 C，$\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\tan\alpha$，故 C 错误；

对于 D，$\frac{\cos(\pi-\alpha)\tan(-\pi-\alpha)}{\sin(2\pi-\alpha)}=\frac{(-\cos\alpha)(-\tan\alpha)}{-\sin\alpha}=-1$，故 D 错误.

4. $\sqrt{1-2\sin(\pi+2)\cos(\pi+2)}=\underline{\sin 2-\cos 2}$.

5. 已知 $\tan\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$，则 $\tan\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)=$________.

$-\frac{1}{3}$　**解析**：因为 $\tan\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)=\tan\left[\pi-\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\right]=-\tan\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$. 又 $\tan\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$，所以 $\tan\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)=-\frac{1}{3}$.

6. 化简：$\frac{\cos 210^\circ\cdot\cos(-420^\circ)\cdot\tan 330^\circ}{\tan 390^\circ\cdot\sin 750^\circ\cdot\cos 900^\circ}$.

解:原式$=\dfrac{\cos(180^\circ+30^\circ)\cdot\cos(-360^\circ-60^\circ)\cdot\tan(360^\circ-30^\circ)}{\tan(360^\circ+30^\circ)\cdot\sin(720^\circ+30^\circ)\cdot\cos(720^\circ+180^\circ)}$

$=\dfrac{(-\cos 30^\circ)\cdot\cos 60^\circ\cdot(-\tan 30^\circ)}{\tan 30^\circ\cdot\sin 30^\circ\cdot\cos 180^\circ}$

$=\dfrac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}\times(-1)}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

综合性·创新提升

1. 点 $P(\sin 2\,022^\circ-\cos 2\,022^\circ,\sin 2\,022^\circ\cdot\cos 2\,022^\circ)$ 位于　　(　　)

A.第一象限

B.第二象限

C.第三象限

D.第四象限

A　**解析**:因为 $2\,022^\circ=360^\circ\times5+222^\circ$,$\sin 222^\circ=\sin(180^\circ+42^\circ)=-\sin 42^\circ<0$,$\cos 222^\circ=\cos(180^\circ+42^\circ)=-\cos 42^\circ<0$,$\sin 42^\circ<\cos 42^\circ$,可得 $\sin 222^\circ>\cos 222^\circ$,$\sin 222^\circ\cdot\cos 222^\circ>0$,

所以 $\sin 2\,022^\circ-\cos 2\,022^\circ=\sin 222^\circ-\cos 222^\circ>0$,$\sin 2\,022^\circ\cdot\cos 2\,022^\circ=\sin 222^\circ\cos 222^\circ>0$,

所以 $P(\sin 2\,022^\circ-\cos 2\,022^\circ,\sin 2\,022^\circ\cdot\cos 2\,022^\circ)$ 位于第一象限.

2. 已知 $\cos 31^\circ=a$,则 $\cos 211^\circ\cdot\tan 149^\circ$ 的值是　　(B)

A. $\dfrac{1-a^2}{a}$　　B. $\sqrt{1-a^2}$

C. $\dfrac{a^2-1}{a}$　　D. $-\sqrt{1-a^2}$

3. 已知 $\cos 80^\circ=k$,则 $\cos 620^\circ$ 的值为　　(B)

A. k　　B. $-k$

C. $\pm k$　　D. $\sqrt{1-k^2}$

4. 已知 $\cos(508^\circ-\alpha)=\dfrac{12}{13}$,则 $\cos(212^\circ+\alpha)=$________.

$\dfrac{12}{13}$　**解析**:因为 $\cos(508^\circ-\alpha)=\cos(360^\circ+148^\circ-\alpha)=\cos(148^\circ-\alpha)=\dfrac{12}{13}$,

所以 $\cos(212^\circ+\alpha)=\cos(360^\circ+\alpha-148^\circ)=\cos(\alpha-148^\circ)=\cos(148^\circ-\alpha)=\dfrac{12}{13}$.

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sin \pi x, x<0,\\ f(x-1)-1, x>0,\end{cases}$

则 $f\left(-\dfrac{11}{6}\right)+f\left(\dfrac{11}{6}\right)$ 的值为 $\underline{-2}$.

6. (探索性问题)对于任意角 α 有 $\sin(n\pi+\alpha)=(-1)^n\sin\alpha(n\in\mathbf{Z})$,具体推导过程如下:

当 $n=2k(k\in\mathbf{Z})$ 时,由诱导公式有

$\sin(n\pi+\alpha)=\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha=(-1)^{2k}\sin\alpha(k\in\mathbf{Z})$;

当 $n=2k+1(k\in\mathbf{Z})$ 时,由诱导公式有

$\sin(n\pi+\alpha)=\sin(2k\pi+\pi+\alpha)=-\sin\alpha=(-1)^{2k+1}\sin\alpha(k\in\mathbf{Z})$.

综上,对任意角 α 有 $\sin(n\pi+\alpha)=(-1)^n\cdot\sin\alpha(n\in\mathbf{Z})$.

根据以上推导过程你能推导下列各式的结果吗?

(1) $\cos(n\pi+\alpha)$;

(2) $\sin(n\pi-\alpha)$;

(3) $\cos(n\pi-\alpha)$.

解:(1) $\cos(n\pi+\alpha)=(-1)^n\cos\alpha(n\in\mathbf{Z})$.

①当 $n=2k(k\in\mathbf{Z})$ 时,由诱导公式有

$\cos(n\pi+\alpha)=\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha=(-1)^{2k}\cos\alpha(k\in\mathbf{Z})$;

②当 $n=2k+1(k\in\mathbf{Z})$ 时,由诱导公式有

$\cos(n\pi+\alpha)=\cos(2k\pi+\pi+\alpha)=-\cos\alpha=(-1)^{2k+1}\cdot\cos\alpha(k\in\mathbf{Z})$.

综上,对任意角 α 有 $\cos(n\pi+\alpha)=(-1)^n\cos\alpha(n\in\mathbf{Z})$.

(2) $\sin(n\pi-\alpha)=(-1)^{n-1}\sin\alpha(n\in\mathbf{Z})$.

①当 $n=2k(k\in\mathbf{Z})$ 时,由诱导公式有

$\sin(n\pi-\alpha)=\sin(2k\pi-\alpha)=-\sin\alpha=(-1)^{2k-1}\sin\alpha(k\in\mathbf{Z})$;

②当 $n=2k+1(k\in\mathbf{Z})$ 时,由诱导公式有

$\sin(n\pi-\alpha)=\sin(2k\pi+\pi-\alpha)=\sin\alpha=(-1)^{2k}\sin\alpha(k\in\mathbf{Z})$.

综上,对任意角 α 有 $\sin(n\pi-\alpha)=(-1)^{n-1}\sin\alpha(n\in\mathbf{Z})$.

(3) $\cos(n\pi-\alpha)=(-1)^n\cos\alpha(n\in\mathbf{Z})$.

①当 $n=2k(k\in\mathbf{Z})$ 时,由诱导公式有

$\cos(n\pi-\alpha)=\cos(2k\pi-\alpha)=\cos\alpha=(-1)^{2k}\cos\alpha(k\in\mathbf{Z})$;

②当 $n=2k+1(k\in\mathbf{Z})$ 时,由诱导公式有

$\cos(n\pi-\alpha)=\cos(2k\pi+\pi-\alpha)=-\cos\alpha=(-1)^{2k+1}\cdot\cos\alpha(k\in\mathbf{Z})$.

综上,对任意角 α 有 $\cos(n\pi-\alpha)=(-1)^n\cos\alpha(n\in\mathbf{Z})$.

第2课时 诱导公式五、六

学习任务目标

1.掌握诱导公式五、六的推导,并能应用于解决求值、化简与证明问题.

2.对诱导公式一～六,能做综合归纳,体会出六组公式的共性与个性,培养由特殊到一般的数学推理意识和能力.

问题式预习

知识清单

知识点 诱导公式五、六

(1)公式五:$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\underline{\cos\alpha}$;

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\underline{\sin\alpha}$.

(2)公式六:$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\underline{\cos\alpha}$;

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\underline{-\sin\alpha}$.

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)诱导公式五、六中的角 α 只能是锐角. (×)

(2)$\sin(90^\circ+\alpha)=-\cos\alpha$. (×)

(3)$\cos\alpha=-\sin\alpha$. (×)

2.下列式子与 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$ 的值相等的为 (D)

A.$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ B.$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

C.$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)$ D.$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)$

3.请思考并回答下列问题:

(1)由诱导公式五和诱导公式六还可以推出哪些结论?

提示:$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

(2)有人把诱导公式概括为"奇变偶不变,符号看象限",你能说出你对这句话的理解吗?

提示:①"变"与"不变"是针对互余关系的函数名而言的,正弦变余弦、余弦变正弦.

②"奇""偶"是对 $k\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha(k\in\mathbf{Z})$ 中的整数 k 来讲的.

③"象限"指 $k\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha(k\in\mathbf{Z})$ 中,将 α 看成锐角时,$k\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha(k\in\mathbf{Z})$ 的终边所在的象限,根据"一全正、二正弦、三正切、四余弦"的符号规律确定原函数值的符号.

任务型课堂

学习任务一 利用诱导公式化简与求值

例 1 (1)化简:$\dfrac{\sin\left(\frac{5}{2}\pi+\alpha\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{9}{2}\pi-\alpha\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}=$ ________.

1 **解析:**原式$=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\alpha}=\dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}=1$.

(2)已知 $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{2}$,则 $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$ 的值为 ________.

$\frac{1}{2}$ **解析:**$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{2}$.

[一题多思]

思考1. 本例(2)条件改为"$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{1}{2}$",你能求$\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)$的值吗?

提示: $\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=-\frac{1}{2}$.

思考2. 本例(2)条件增加"α是第三象限角",你能求$\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\alpha\right)$的值吗?

提示: 因为α是第三象限角,所以$-\alpha$是第二象限角.又$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{2}$,所以$\frac{\pi}{3}-\alpha$是第二象限角,所以$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\alpha\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

反思提炼

利用诱导公式化简、求值的策略

(1)已知角求值问题,关键是利用诱导公式把任意角的三角函数值转化成锐角的三角函数值求解,转化过程中注意口诀"奇变偶不变,符号看象限"的应用.

(2)对式子进行化简或求值时,要注意待求式中的角与已知角之间的关系,并结合诱导公式进行转化,特别要注意角的范围.

(3)常见的互余的角:$\frac{\pi}{3}-\alpha$与$\frac{\pi}{6}+\alpha$,$\frac{\pi}{4}+\alpha$与$\frac{\pi}{4}-\alpha$等,常见的互补的角:$\frac{\pi}{6}+\alpha$与$\frac{5\pi}{6}-\alpha$,$\frac{\pi}{3}+\alpha$与$\frac{2\pi}{3}-\alpha$,$\frac{\pi}{4}+\alpha$与$\frac{3\pi}{4}-\alpha$等.

探究训练

已知$\cos(\pi+\alpha)=-\frac{1}{2}$,$\alpha$为第一象限角,则$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=$________.

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **解析:** 由$\cos(\pi+\alpha)=-\frac{1}{2}$,得$\cos\alpha=\frac{1}{2}$.又$\alpha$为第一象限角,所以$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.因此$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

学习任务二 利用诱导公式证明三角函数式

例2 求证:

$$\frac{\tan(2\pi-\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos(6\pi-\alpha)}{\sin\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}=-\tan\alpha.$$

证明: 左边

$$=\frac{\tan(-\alpha)\cdot(-\sin\alpha)\cdot\cos(-\alpha)}{\sin\left[2\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]\cdot\cos\left[2\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}$$

$$=\frac{(-\tan\alpha)\cdot(-\sin\alpha)\cdot\cos\alpha}{\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]\cos\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\sin^2\alpha}{-\cos\alpha\cdot\sin\alpha}=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\tan\alpha=\text{右边}.$$

所以原等式成立.

反思提炼

三角恒等式的证明策略

对于三角恒等式的证明,应遵循化繁为简的原则,从左边推到右边或从右边推到左边,也可以用左右归一、变更论证的方法.常用定义法、切化弦法、拆项拆角法、"1"的代换法、公式变形法,要熟练掌握基本公式,善于从中选择巧妙、简捷的方法.

探究训练

求证:$\frac{2\sin\left(\theta-\frac{3\pi}{2}\right)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)-1}{1-2\sin^2(\pi+\theta)}=\frac{\tan(9\pi+\theta)+1}{\tan(\pi+\theta)-1}$.

证明: 左边$=\frac{-2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\cdot(-\sin\theta)-1}{1-2\sin^2\theta}$

$$=\frac{2\sin\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]\sin\theta-1}{1-2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{-2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin\theta-1}{1-2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{-2\cos\theta\sin\theta-1}{\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}.$$

右边$=\frac{\tan(9\pi+\theta)+1}{\tan(\pi+\theta)-1}=\frac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$.

所以左边=右边,故原式成立.

学习任务三　诱导公式在三角形中的应用

例 3　在$\triangle ABC$中，$\sin\dfrac{A+B-C}{2}=\sin\dfrac{A-B+C}{2}$，试判断$\triangle ABC$的形状．

解：因为$A+B+C=\pi$，

所以$A+B-C=\pi-2C$，$A-B+C=\pi-2B$．

因为$\sin\dfrac{A+B-C}{2}=\sin\dfrac{A-B+C}{2}$，

所以$\sin\dfrac{\pi-2C}{2}=\sin\dfrac{\pi-2B}{2}$，

所以$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-C\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)$，即$\cos C=\cos B$．

又因为B，C为$\triangle ABC$的内角，所以$C=B$，

所以$\triangle ABC$为等腰三角形．

反思提炼

三角形中的诱导公式

在$\triangle ABC$中，有以下结论：

(1)$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$；

(2)$\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C$；

(3)$\tan(A+B)=\tan(\pi-C)=-\tan C$；

(4)$\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)=\cos\dfrac{C}{2}$；

(5)$\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)=\sin\dfrac{C}{2}$．

注意：在$\triangle ABC$中，若$\sin A=\sin B$或$\cos A=\cos B$，均有$A=B$成立．

探究训练

已知任意$\triangle ABC$，给出下列4个式子，其中值为常数的是（　　）

①$\sin(A+B)+\sin C$；

②$\cos(A+B)+\cos C$；

③$\sin(2A+2B)+\sin 2C$；

④$\cos(2A+2B)+\cos 2C$．

A.①②　　B.②③　　C.③④　　D.①④

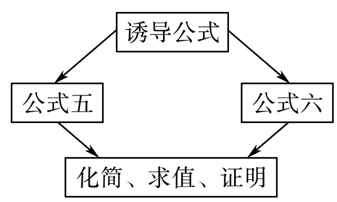
B　**解析**：对于①，$\sin(A+B)+\sin C=\sin(\pi-C)+\sin C=\sin C+\sin C=2\sin C$，故①不正确；

对于②，$\cos(A+B)+\cos C=\cos(\pi-C)+\cos C=-\cos C+\cos C=0$，故②正确；

对于③，$\sin(2A+2B)+\sin 2C=\sin[2(\pi-C)]+\sin 2C=-\sin 2C+\sin 2C=0$，故③正确；

对于④，$\cos(2A+2B)+\cos 2C=\cos[2(\pi-C)]+\cos 2C=\cos 2C+\cos 2C=2\cos 2C$，故④不正确．

体系构建



课后素养评价（四十六）

基础性·能力运用

1.(多选)下面诱导公式使用不正确的是（　　）

A.$\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$

B.$\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

C.$\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta$

D.$\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$

ABD　**解析**：因为$\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta$，所以选项A错误；

因为$\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\theta\right)=\sin\theta$，所以B错误；

因为$\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta$，所以C正确；

因为$\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$，所以D错误．

2.$\cos(\pi-x)+\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)=$（　　）

A.$-2\cos x$

B.0

C.$-2\sin x$

D.$\cos x-\sin x$

A　**解析**：$\cos(\pi-x)+\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\cos x-\cos x=-2\cos x$．

3.已知 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$,则$\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)$的值为 $\underline{\frac{3}{5}}$.

4. 证明:$\frac{\sin(\theta-5\pi)}{\cos(3\pi-\theta)}\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin(\theta-3\pi)}\cdot\frac{\cos(8\pi-\theta)}{\sin(-\theta-4\pi)}=1$.

证明:原式$=\frac{-\sin(5\pi-\theta)}{\cos(\pi-\theta)}\cdot\frac{\sin\theta}{-\sin(3\pi-\theta)}\cdot\frac{\cos\theta}{-\sin(4\pi+\theta)}=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{-\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=1$.

综合性·创新提升

1.已知 $\cos(75^\circ+\alpha)=\frac{1}{3}$,则 $\sin(\alpha-15^\circ)+\cos(105^\circ-\alpha)$的值是 (D)

A.$\frac{1}{3}$ B.$\frac{2}{3}$ C.$-\frac{1}{3}$ D.$-\frac{2}{3}$

2.(多选)已知角 A,B,C 是锐角三角形 ABC 的三个内角,下列结论一定成立的是 ( )

A.$\sin(B+C)=\sin A$

B.$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$

C.$\sin B<\cos A$

D.$\cos(A+B)<\cos C$

ABD **解析**:对于 A,$\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$,正确;

对于 B,$\sin\frac{A+B}{2}=\sin\frac{\pi-C}{2}=\cos\frac{C}{2}$,正确;

对于 C,当 $A=60^\circ,B=45^\circ,C=75^\circ$时,显然 $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{1}{2}=\cos A$,故错误;

对于 D,$\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C$,由 C 为锐角,得 $\cos C>0$,从而 $\cos(A+B)=-\cos C<\cos C$,正确.

3.(探索性问题)若 $S_n=\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{7}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$,则 $S_1,S_2,\cdots,S_{100}$中,正数的个数是 ( )

A.16 B.72 C.86 D.100

C **解析**:$\sin\frac{\pi}{7}>0,\sin\frac{3\pi}{7}>0,\sin\frac{4\pi}{7}>0,\sin\frac{5\pi}{7}>0,\sin\frac{6\pi}{7}>0,\sin\frac{7\pi}{7}=0,\sin\frac{8\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}<0,\sin\frac{9\pi}{7}=-\sin\frac{2\pi}{7}<0,\sin\frac{10\pi}{7}=-\sin\frac{3\pi}{7}<0,\sin\frac{11\pi}{7}=-\sin\frac{4\pi}{7}<0,\sin\frac{12\pi}{7}=-\sin\frac{5\pi}{7}<0,\sin\frac{13\pi}{7}=-\sin\frac{6\pi}{7}<0,\sin\frac{14\pi}{7}=0$.易知 $S_1>0,S_2>0,\cdots,S_7>0,S_8>0,S_9>0,S_{10}>0,S_{11}>0,S_{12}>0,S_{13}=0,S_{14}=0$,在 $S_1,S_2,\cdots,S_{14}$ 中有 12 个正数.又 $14\times7+2=100$,故在 $S_1,S_2,S_3,\cdots,S_{100}$ 中有 $7\times12+2=86$(个)正数.故选 C.

4.设 α 为锐角,$2\tan(\pi-\alpha)-3\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=-5$,$\tan(\pi+\alpha)+6\sin(\pi+\beta)=1$,则 $\sin\alpha=$________.

$\frac{3\sqrt{10}}{10}$ **解析**:由条件可知 $-2\tan\alpha+3\sin\beta=-5$ ①,$\tan\alpha-6\sin\beta=1$②,

①×2+②,可得 $\tan\alpha=3$,则 $\sin\alpha=3\cos\alpha$.

又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,$\alpha$ 为锐角,故可解得 $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

5.已知 $\sin(5\pi-\theta)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\sqrt{7}}{2}$,求$\sin^4\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos^4\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)$的值.

解:因为 $\sin(5\pi-\theta)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\theta\right)=\sin(\pi-\theta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}$,

所以 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}[(\sin\theta+\cos\theta)^2-1]=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2-1\right]=\frac{3}{8}$,

所以 $\sin^4\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos^4\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=\cos^4\theta+\sin^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1-2\times\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{23}{32}$.

5.4　三角函数的图象与性质

5.4.1　正弦函数、余弦函数的图象

学习任务目标

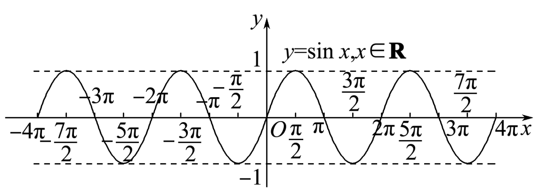
1.了解利用单位圆画正弦曲线的方法.
2.理解正弦曲线与余弦曲线之间的关系，能用“五点法”作出简单的正弦、余弦曲线.
3.会用正弦曲线与余弦曲线解决简单问题.

问题式预习

知识清单

知识点一　正弦曲线

正弦函数 $y=\sin x, x\in\mathbf{R}$ 的图象叫做正弦曲线，是一条“波浪起伏”的连续光滑曲线.



知识点二　正弦函数图象的画法

(1)单位圆法

①利用单位圆画出 $y=\sin x, x\in[0,2\pi]$ 的图象；

②将图象不断向左、右平行移动(每次移动 2π 个单位长度).

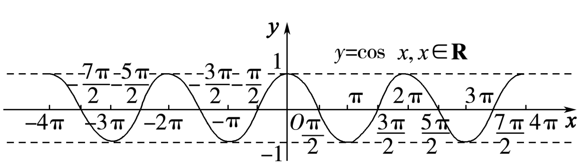
(2)五点法

①描出正弦函数 $y=\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的五个关键点：$(0,0)$，$\left(\frac{\pi}{2},1\right)$，$(\pi,0)$，$\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$，$(2\pi,0)$，用光滑的曲线连接；

②将所得图象不断向左、右平行移动(每次移动 2π 个单位长度).

知识点三　余弦曲线

余弦函数 $y=\cos x, x\in\mathbf{R}$ 的图象叫做余弦曲线.它是与正弦曲线具有相同形状的“波浪起伏”的连续光滑曲线.



知识点四　余弦函数图象的画法

(1)要得到 $y=\cos x$ 的图象，只需把 $y=\sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度即可，这是由于 $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

(2)用“五点法”画余弦函数 $y=\cos x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图象时，所取的五个关键点分别为 $(0,1)$，$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$，$(\pi,-1)$，$\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$，$(2\pi,1)$，再用光滑的曲线连接.

概念辨析

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)正弦函数 $y=\sin x(x\in\mathbf{R})$ 的图象关于 x 轴对称.　　(×)

(2)余弦函数 $y=\cos x$ 的图象与 x 轴有无数个交点.　　(√)

(3)余弦函数 $y=\cos x$ 的图象与 $y=\sin x$ 的图象形状和位置都不一样.　　(×)

(4)将函数 $y=\sin x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度可得到函数 $y=\cos x$ 的图象.　　(×)

2.函数 $y=\cos x, x\in(0,2\pi)$ 的图象与直线 $y=\frac{1}{2}$ 的交点个数为 2.

3.请思考并回答下列问题：

(1)作正弦函数、余弦函数的图象时，为什么函数自变量的取值要用弧度制？

提示：以保证自变量的取值与函数值都为实数.

(2)利用平移法作余弦函数图象的依据是什么？为什么不能利用 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ 来确定平移的方向和距离？

提示：平移法作余弦函数图象主要依据是诱导公式六：$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$.显然在诱导公式五：$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ 中，等号两端 x 的系数符号相反，所以不能利用该公式确定平移的方向和距离.

任务型课堂

学习任务一　对正弦函数、余弦函数图象的认识

1. 对于正弦函数 $y=\sin x$ 的图象，下列说法错误的是　(　　)

A.向左、右无限伸展

B.与 $y=\cos x$ 的图象形状相同，只是位置不同

C.与 x 轴有无数个交点

D.关于 y 轴对称

D　**解析**：画出 $y=\sin x$ 的图象(图略)，由图可知，A，B，C 三个选项说法正确，D 选项说法错误.故选 D.

2. 在同一平面直角坐标系内，函数 $y=\sin x, x\in[0,2\pi]$ 与 $y=\cos x, x\in[2\pi,4\pi]$ 的图象　(　　)

A.重合

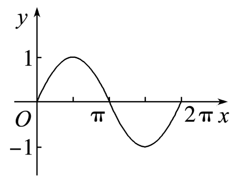
B.形状相同，位置不同

C.关于 y 轴对称

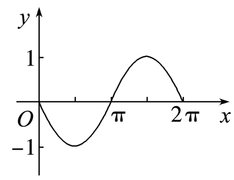
D.形状不同，位置不同

D　**解析**：分别画出 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的图象(图略)，由图可知，$y=\sin x, x\in[0,2\pi]$ 与 $y=\cos x, x\in[2\pi,4\pi]$ 的图象形状不同，位置不同.

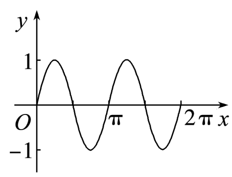
3. 函数 $y=\sin(-x), x\in[0,2\pi]$ 的简图是　(　　)



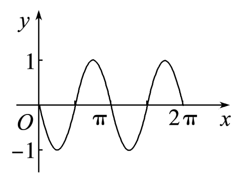
A



B



C



D

B　**解析**：$y=\sin(-x), x\in[0,2\pi]$ 的图象可看作由 $y=\sin x, x\in[0,2\pi]$ 的图象关于 x 轴对称后得到.故选 B.

反思提炼

正弦函数、余弦函数图象的关注点

(1)正弦曲线、余弦曲线的形状相同，只是在直角坐标系中的位置不同，相互可以通过平移得到.

(2)知道正弦曲线、余弦曲线在 $[-2\pi,2\pi]$ 内的特殊点(最高点、最低点及与 x 轴的交点)的坐标，会求特殊点之间的横向距离.

学习任务二　五点法作图

例 1　(1)作出函数 $y=-\sin x(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$ 的简图.

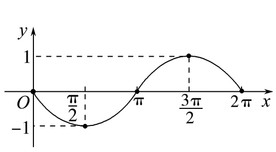
(2)作出函数 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$ 的图象.

(3)用五点法作出函数 $y=1-\cos x(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$ 的简图.

解：(1)列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$-\sin x$	0	-1	0	1	0

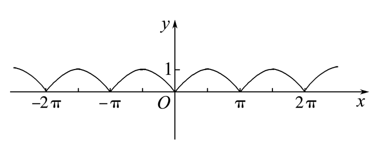
描点并用光滑的曲线连接起来，如图.



(2)将 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$ 化为 $y=|\sin x|$，即

$$y=\begin{cases}\sin x, 2k\pi\leqslant x\leqslant \pi+2k\pi, k\in\mathbf{Z},\\ -\sin x, \pi+2k\pi<x<2\pi+2k\pi, k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

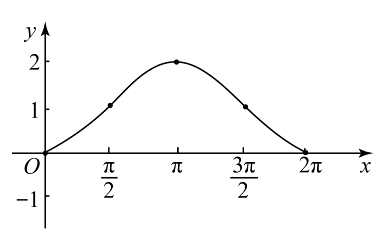
其图象如图.



(3)列表如下：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$1-\cos x$	0	1	2	1	0

描点并用光滑的曲线连接起来，如图.



反思提炼

作形如 $y=a\sin x+b$（或 $y=a\cos x+b$），$x\in[0,2\pi]$的函数图象的三个步骤

列表：在$[0,2\pi]$内先分别找出确定函数图象的五个关键点；在表中列出相应的五点的坐标

↓

描点：根据所列出的五个关键点的坐标，在坐标系中描出相应的点

↓

连线：用光滑的曲线将所描出的五个关键点连接起来，便得到所求函数的图象

探究训练

用五点法作下列函数的图象.

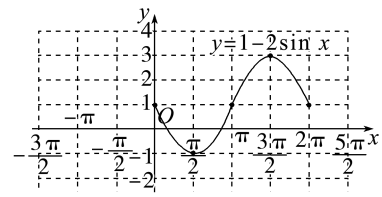
(1) $y=1-2\sin x$，$x\in[0,2\pi]$；

(2) $y=\cos x+\dfrac{1}{2}$，$x\in[-\pi,\pi]$.

解：(1)列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$1-2\sin x$	1	-1	1	3	1

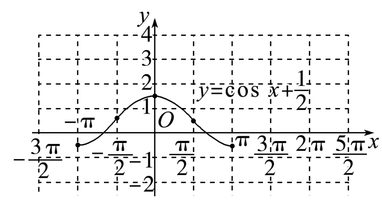
描点并用光滑的曲线连接起来，画图如下.



(2)列表：

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	-1	0	1	0	-1
$\cos x+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

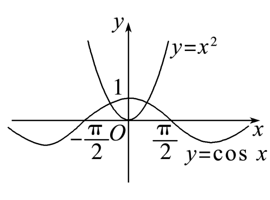
描点并用光滑的曲线连接起来，画图如下.



学习任务三　正弦函数、余弦函数图象的应用

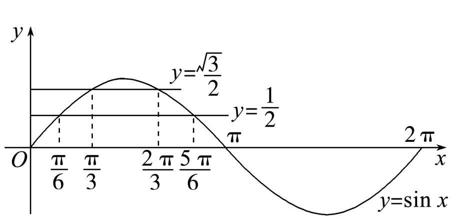
例2　(1)方程 $x^2-\cos x=0$ 的实数解的个数是________，所有的实数解的和为________.

2　0　**解析：**作出函数 $y=\cos x$ 与 $y=x^2$ 的图象，如图所示.由图象可知，两函数图象有两个交点，且两个交点关于 y 轴对称，故原方程有两个实数解，且两个实数解的和为 0.



(2)不等式 $\dfrac{1}{2}<\sin x\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$（$x\in[0,2\pi]$）的解集为________.

$\left\{x\,\middle|\,\dfrac{\pi}{6}<x\leqslant\dfrac{\pi}{3}，或\dfrac{2\pi}{3}\leqslant x<\dfrac{5\pi}{6}\right\}$　**解析：**作出正弦函数 $y=\sin x$ 在$[0,2\pi]$上的图象，作出直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 和 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，如图所示.



由图可知，在$[0,2\pi]$上，当 $\dfrac{\pi}{6}<x\leqslant\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}\leqslant x<\dfrac{5\pi}{6}$ 时，不等式 $\dfrac{1}{2}<\sin x\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 成立.

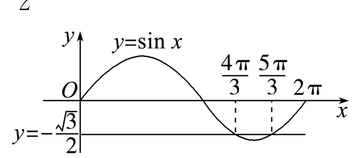
所以原不等式的解集为

$\left\{x\,\middle|\,\dfrac{\pi}{6}<x\leqslant\dfrac{\pi}{3}，或\dfrac{2\pi}{3}\leqslant x<\dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

[一题多思]

思考1.本例(2)中不等式若改为 $\sin x<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$（$x\in[0,2\pi]$），你能求出它的解集吗？

提示：画出函数 $y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$的简图，作出直线 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，如图所示.



当 $\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$x=\dfrac{4\pi}{3}$ 或 $x=\dfrac{5\pi}{3}$，

可知不等式 $\sin x<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 在$[0,2\pi]$上的解集是 $\left(\dfrac{4\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

思考 2.本例(2)中不等式若改为 $\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}(x\in[0,2\pi])$，你能求出它的解集吗？

提示：因为 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$，由余弦曲线(图略)，得 $\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的解集为 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$.

思考 3.本例(2)中不等式不变，若把“$x\in[0,2\pi]$”改为“$x\in\mathbf{R}$”，解集会发生变化吗？

提示：会变化.不等式的解集变为 $\left\{x\,\middle|\,\frac{\pi}{6}+2k\pi<x\leqslant\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ 或 } \frac{2\pi}{3}+2k\pi\leqslant x<\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

反思提炼

利用三角函数图象解 $\sin x>a$(或 $\cos x>a$)的三个步骤

(1)作出 $y=a$，$y=\sin x$(或 $y=\cos x$)的图象；

(2)确定 $\sin x=a$(或 $\cos x=a$)时 x 的值；

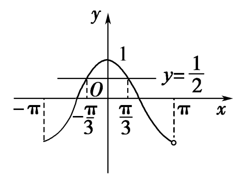
(3)确定 $\sin x>a$(或 $\cos x>a$)的解集.

注意：如果不限定 x 的范围，一般先利用图象求出 $[0,2\pi]$内 x 的取值范围，然后根据终边相同角的同一三角函数值相等，写出不等式的解集.

探究训练

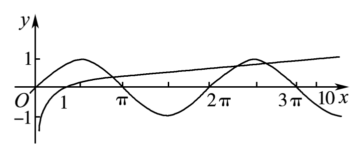
1.若 $x\in[-\pi,\pi)$，则满足 $\cos x\geqslant\frac{1}{2}$ 的 x 的取值范围是________.

$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$　**解析**：作出 $y=\cos x$，$x\in[-\pi,\pi)$的图象，作出直线 $y=\frac{1}{2}$，如图所示，由题意得 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$.



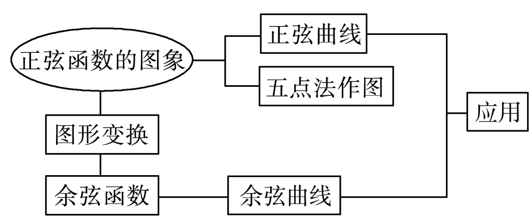
2.方程 $\sin x=\lg x$ 的解的个数是________.

3　**解析**：用五点法画出函数 $y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$的图象，再依次左、右连续平移 2π 个单位长度，得到 $y=\sin x$ 的图象；描出点 $\left(\frac{1}{10},-1\right)$，$(1,0)$，$(10,1)$，并用光滑曲线连接得到 $y=\lg x$ 的图象，如图所示.



由图象可知方程 $\sin x=\lg x$ 的解有 3 个.

体系构建



课后素养评价(四十七)

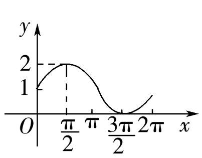
基础性·能力运用

1.利用五点法画 $y=\sin x-1$，$x\in[0,2\pi]$的图象时，第三个点为　　(C)

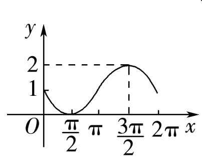
A.$(0,-1)$　　B.$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

C.$(\pi,-1)$　　D.$\left(\frac{3\pi}{2},-2\right)$

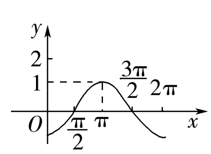
2.函数 $y=1-\sin x(x\in[0,2\pi])$的大致图象是　　(B)



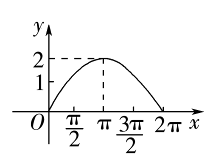
A



B



C



D

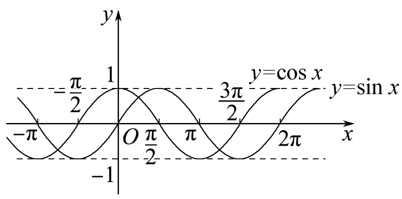
3.(多选)下列区间内 $\cos x>\sin x$成立的是　(　　)

A.$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$　　B.$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$

C.$\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right)$　　D.$\left(\frac{\pi}{4},2\pi\right)$

AC　**解析**：如图，在同一平面直角坐标系中画出正弦、余弦函数的图象，在$(0,2\pi)$上，当 $\cos x=\sin x$ 时，$x=\frac{\pi}{4}$ 或 $x=\frac{5\pi}{4}$，结合图象可知满足 $\cos x>$

$\sin x$的是$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$和$\left(\dfrac{5\pi}{4},2\pi\right)$.



4. 正弦函数 $y=\sin x(x\in[0,2))$的图象与直线 $y=1$ 交点的个数为　　（　　）

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

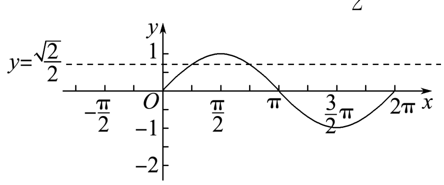
B　**解析**：正弦函数 $y=\sin x(x\in[0,2))$的图象与直线 $y=1$ 交点的个数，就是 $\sin x=1,x\in[0,2)$时解的个数，可知 $x=\dfrac{\pi}{2}$.

5. 已知余弦函数的图象过点$\left(-\dfrac{\pi}{6},m\right)$，则 m 的值为________.

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　**解析**：设余弦函数为 $y=\cos x$，由函数过点$\left(-\dfrac{\pi}{6},m\right)$，可得 $m=\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

6. 不等式 $\sin x\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2},x\in(0,2\pi)$的解集为________.

$\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$　**解析**：因为 $\sin x\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2},x\in(0,2\pi)$，又因为函数 $y=\sin x$ 的图象与直线 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$如图所示.



所以$\dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{3\pi}{4}$，所以不等式 $\sin x\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2},x\in(0,2\pi)$的解集为$\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

7. 下列函数：① $y=\sin x-1$，② $y=|\sin x|$，③ $y=-\cos x$，④ $y=\sqrt{\cos^2 x}$，⑤ $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$ 中，图象与函数 $y=\sin x$ 的图象形状完全相同的有__①③__.

8. 用五点法作出下列函数在$[0,2\pi]$上的图象，并说明它们与 $y=\sin x,x\in[0,2\pi]$的图象的关系.

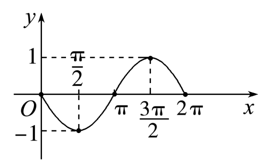
(1) $y=-\sin x$；

(2) $y=\sin x-1$.

解：(1)找五个关键点，列表：

x	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	−1	0
$-\sin x$	0	−1	0	1	0

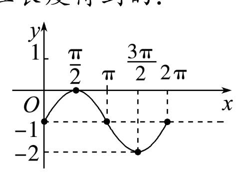
描点，作图，如图所示，函数 $y=-\sin x,x\in[0,2\pi]$的图象与函数 $y=\sin x,x\in[0,2\pi]$的图象关于 x 轴对称.



(2)找五个关键点，列表：

x	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	−1	0
$\sin x-1$	−1	0	−1	−2	−1

描点，作图，如图所示，函数 $y=\sin x-1,x\in[0,2\pi]$的图象是将函数 $y=\sin x,x\in[0,2\pi]$的图象向下平移 1 个单位长度得到的.

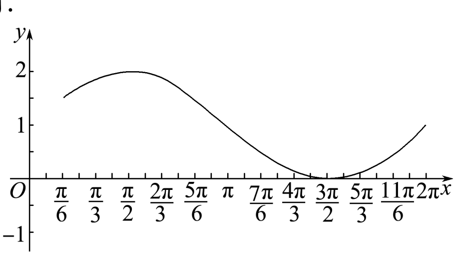


综合性·创新提升

1.（多选）函数 $y=1+\sin x,x\in\left(\dfrac{\pi}{6},2\pi\right)$的图象与直线 $y=t$（t 为常数）的交点可能有　　（　　）

A.0 个　　B.1 个　　C.2 个　　D.3 个

ABC　**解析**：由题意 $y=1+\sin x,x\in\left(\dfrac{\pi}{6},2\pi\right)$的图象如图.



可得当 $t>2$ 或 $t<0$ 时，交点个数为 0；

当 $t=2$ 或 $t=0$ 或 $t\in\left[1,\dfrac{3}{2}\right]$时，交点个数为 1；

当 $t\in\left(\dfrac{3}{2},2\right)$或 $t\in(0,1)$时，交点个数为 2.

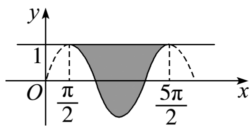
2. 若函数 $y=\sin x,x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2}\right]$的图象与直线 $y=1$ 围成一个封闭图形，则这个封闭图形的面积是　　（　　）

A.2　　B.4

C.2π　　D.4π

C　**解析**：如图，由正弦函数图象的对称性知，所围

成封闭图形的面积是长为$\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=2\pi$,宽为1的矩形的面积,所以$S=2\pi$.故选C.

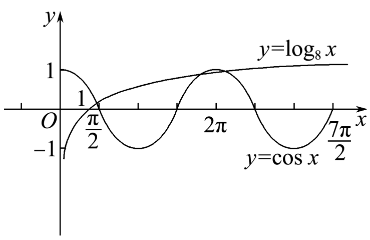


3.方程$\cos x=\log_8 x$的实数解的个数是　　　(　　)

A.4　　　B.3

C.2　　　D.1

B　**解析**:方程$\cos x=\log_8 x$的实数解的个数,即函数$y=\cos x$的图象和函数$y=\log_8 x$的图象交点的个数.如图,数形结合可得函数$y=\cos x$的图象和函数$y=\log_8 x$的图象交点的个数为3.



4.有下列命题:

①函数$y=\sin|x|$的图象与函数$y=\sin x$的图象关于y轴对称;

②函数$y=\cos(-x)$的图象与函数$y=\cos|x|$的图象重合;

③函数$y=|\sin x|$的图象与函数$y=\sin(-x)$的图象关于x轴对称;

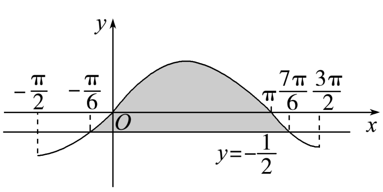
④函数$y=\cos x$的图象与函数$y=\cos(-x)$的图象关于y轴对称.

其中正确命题的序号是__②④__.

5.函数$y=\log_2(2\sin x+1)$的定义域为________.

$\left\{x\left|-\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{7\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$　**解析**:要使函数有意义,则必有$2\sin x+1>0$,即$\sin x>-\frac{1}{2}$.

画出$y=\sin x,x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$的图象如图所示.



当$-\frac{\pi}{6}<x<\frac{7\pi}{6}$时,不等式$\sin x>-\frac{1}{2}$成立,

所以$\sin x>-\frac{1}{2}$的解集为

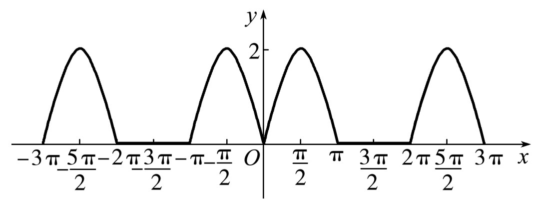
$\left\{x\left|-\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{7\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

可知函数$y=\log_2(2\sin x+1)$的定义域为

$\left\{x\left|-\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{7\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

6.(开放性问题)结合函数$f(x)=\sin|x|+|\sin x|$的图象,你能得到关于函数$f(x)$的哪些结论?

解:作出函数$f(x)$的图象如图中粗实线所示.



由图象可以得到:

①奇偶性:$f(-x)=\sin|-x|+|\sin(-x)|=\sin|x|+|\sin x|=f(x)$,则函数$f(x)$是偶函数;

②对称性:函数图象关于y轴对称;

③单调性:

当$x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$时,$\sin|x|=-\sin x$,$|\sin x|=-\sin x$,

则$f(x)=-\sin x-\sin x=-2\sin x$在$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$上单调递减;

当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$\sin|x|=\sin x$,$|\sin x|=\sin x$,

则$f(x)=\sin x+\sin x=2\sin x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增;

④当$\sin|x|=1$且$|\sin x|=1$时,$f(x)$取得最大值2,

当$x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$时,$f(x)$取得最小值0;

⑤函数的值域为$[0,2]$;

⑥$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上有3个零点,

当$0\leqslant x\leqslant\pi$时,$f(x)=\sin|x|+|\sin x|=\sin x+\sin x=2\sin x$,

由$f(x)=0$,得$2\sin x=0$,得$x=0$或$x=\pi$,

由$f(x)$是偶函数,得在$[-\pi,\pi)$上还有一个零点$x=-\pi$,即函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上有3个零点;

⑦若$g(x)=a$,则$f(x)-g(x)=0$有根的条件为$0\leqslant a\leqslant 2$.(任选几个写出即可)

5.4.2　正弦函数、余弦函数的性质

第1课时　正弦函数、余弦函数的周期性与奇偶性

学习任务目标

1.了解周期函数、周期、最小正周期的定义.
2.会求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 及 $y=A\cos(\omega x+\varphi)(A\neq 0)$ 的周期.
3.掌握函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的奇偶性，会判断简单三角函数的奇偶性.

问题式预习

知识清单

知识点一　周期性

1.函数的周期性

(1)一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个非零常数 T，使得对每一个 $x\in D$，都有 $x+T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做周期函数.非零常数 T 叫做这个函数的周期.

(2)如果在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在一个最小的正数，那么这个最小正数就叫做 $f(x)$ 的最小正周期.

2.正弦函数、余弦函数的周期性

由于 $\sin(x+2k\pi)=\sin x$，$\cos(x+2k\pi)=\cos x(k\in\mathbf{Z})$，故 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 都是周期函数，$2k\pi(k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq 0)$ 都是它们的周期，且它们的最小正周期都是 2π.

知识点二　正弦函数、余弦函数的奇偶性

(1)对于 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$，恒有 $\sin(-x)=-\sin x$，所以正弦函数 $y=\sin x$ 是奇函数，正弦曲线关于原点对称.

(2)对于 $y=\cos x$，$x\in\mathbf{R}$，恒有 $\cos(-x)=\cos x$，所以余弦函数 $y=\cos x$ 是偶函数，余弦曲线关于 y 轴对称.

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").

(1)因为函数 $f(x)=x^2$ 满足 $f(-3+6)=f(-3)$，所以 $f(x)=x^2$ 是以 6 为周期的周期函数.　　(×)

(2)函数 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是偶函数.　　(√)

(3) $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的图象既是中心对称图形又是轴对称图形.　　(√)

(4)周期函数的定义域一定为无限集，且无上下界.　　(√)

2.设函数 $f(x)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x\in\mathbf{R}$，则 $f(x)$ 是　　(A)

A.最小正周期为 π 的奇函数

B.最小正周期为 π 的偶函数

C.最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的奇函数

D.最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的偶函数

3.请思考并回答下列问题：

(1)是不是所有的周期函数都有最小正周期？举例说明.

提示：不是所有的周期函数都有最小正周期.例如，函数 $f(x)=C(C$ 为常数)，$x\in\mathbf{R}$ 是周期函数，但它没有最小正周期.

(2)若 $f\left(\dfrac{1}{2}x+T\right)=f\left(\dfrac{1}{2}x\right)$，则 T 是 $f\left(\dfrac{1}{2}x\right)$ 的周期吗？

提示：不是，$f\left(\dfrac{1}{2}x+T\right)=f\left(\dfrac{1}{2}(x+2T)\right)=f\left(\dfrac{1}{2}x\right)$，$2T$ 是 $f\left(\dfrac{1}{2}x\right)$ 的周期.

任务型课堂

学习任务一　正弦函数、余弦函数的周期性

1.若函数 $y=\cos\left(\frac{k}{4}x+\frac{\pi}{3}\right)(k>0)$ 的最小正周期不大于 2，则正整数 k 的最小值应是（　　）

A.10　　B.11　　C.12　　D.13

D　**解析**：由题易知，$T=\frac{2\pi}{\frac{k}{4}}\leqslant 2$，即 $k\geqslant 4\pi$. 所以正整数 k 的最小值是 13.

2.求下列函数的最小正周期.

(1) $y=\cos 2x$；

(2) $y=3\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$；

(3) $y=|\sin x|(x\in\mathbf{R})$.

解：(1)(方法一)令 $z=2x$，

则 $\cos 2x=\cos z=\cos(z+2\pi)=\cos(2x+2\pi)=\cos[2(x+\pi)]$，

由周期函数的定义可知，原函数的最小正周期为 π.

(方法二)因为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，所以函数 $y=\cos 2x$ 的最小正周期为 π.

(2)(方法一)令 $z=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}$，

则 $3\sin z=3\sin(z+2\pi)=3\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}+2\pi\right)=3\sin\left(\frac{x+4\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$，

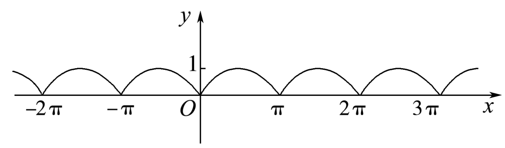
所以由周期函数的定义可知，原函数的最小正周期为 4π.

(方法二)因为 $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$，

所以函数 $y=3\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为 4π.

(3) $y=|\sin x|=\begin{cases}\sin x, 2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi,\\ -\sin x, 2k\pi+\pi<x<2k\pi+2\pi\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$.

其图象如图所示.



所以该函数的最小正周期为 π.

[一题多思]

思考 1.周期函数的周期是唯一的吗？

提示：周期函数的周期不唯一. 若 T 是函数 $f(x)$ 的最小正周期，则 $kT(k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq 0)$ 也是函数 $f(x)$ 的周期.

思考 2. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 和 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 是周期函数吗？他们的最小正周期与解析式中哪个参数有关？

提示：是，最小正周期与 ω 有关，$T=\frac{2\pi}{\omega}$.

思考 3.你能求出函数 $y=\left|\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right|$ 的最小正周期吗？

提示：因为函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 π，且函数 $y=\left|\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right|$ 的图象是将函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象在 x 轴下方的部分对折到 x 轴上方，并且保留 x 轴上方图象而得到的，由此可知所求函数的最小正周期为 $T=\frac{\pi}{2}$.

反思提炼

求三角函数周期的方法

(1)定义法：利用周期函数的定义求解.

(2)公式法：形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)(A,\omega,\varphi$ 是常数，$A\neq 0,\omega\neq 0)$ 的函数，$T=\frac{2\pi}{|\omega|}$.

(3)图象法：通过观察函数图象求其周期.

学习任务二　正弦函数、余弦函数的奇偶性

例 1　判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=|\sin x|+\cos x$；

(2) $f(x)=\cos(2\pi-x)-x^3\cdot\sin x$；

(3) $f(x)=x^2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$；

(4) $f(x)=\sin(\cos x)$.

解：(1)函数的定义域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称.

又 $f(-x)=|\sin(-x)|+\cos(-x)=|\sin x|+\cos x=f(x)$，

所以 $f(x)$ 是偶函数.

(2)函数的定义域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称.

因为 $f(x)=\cos x-x^3\cdot\sin x$，

所以 $f(-x)=\cos(-x)-(-x)^3\cdot\sin(-x)$

$=\cos x-x^3\cdot\sin x=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(3)函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称.

因为 $f(x)=x^2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-x^2\sin x$，

所以 $f(-x)=-(-x)^2\sin(-x)=x^2\sin x=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(4)函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称.

因为 $f(-x)=\sin[\cos(-x)]=\sin(\cos x)=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数.

反思提炼

函数奇偶性的判断方法

(1)判断函数奇偶性应从两个方面入手：

一看函数的定义域；二看 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系.

(2)对于三角函数奇偶性的判断，可根据诱导公式先将函数化简后再判断.

探究训练

判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\sin x\cos x$；

(2) $f(x)=\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{\cos x-1}$.

解：(1)函数的定义域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称.

因为 $f(-x)=\sin(-x)\cos(-x)$

$=-\sin x\cos x=-f(x)$，

所以 $f(x)=\sin x\cos x$ 为奇函数.

(2)由 $\begin{cases}1-\cos x\geqslant 0,\\ \cos x-1\geqslant 0,\end{cases}$ 得 $\cos x=1$，所以函数的定义域为 $\{x\mid x=2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，定义域关于原点对称.

当 $\cos x=1$ 时，$f(x)=0$，$f(-x)=0$，所以 $f(x)=\pm f(-x)$.

所以 $f(x)=\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{\cos x-1}$ 既是奇函数又是偶函数.

学习任务三　正弦函数、余弦函数性质的综合应用

例 2　定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 既是偶函数又是周期函数. 若 $f(x)$ 的最小正周期为 π，且当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)=\sin x$，则 $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=$________.

$\frac{\sqrt{3}}{2}$　**解析**：由题意知 $f(x)=f(x-\pi)$，且 $f(x)=f(-x)$，所以 $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=f\left(\frac{5\pi}{3}-\pi\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}-\pi\right)=f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

[**一题多思**]

思考 1.若将本例中的“偶函数”改为“奇函数”，其他条件不变，结果如何？

提示：$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=f\left(\frac{5\pi}{3}-\pi\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}-\pi\right)=f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

思考 2.若将本例条件改为“函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-f(x)$，且 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$”，你能求出 $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ 的值吗？

提示：因为 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-f(x)$，所以 $f(x+\pi)=-f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 的周期 $T=\pi$.

又 $f(x)$ 是偶函数，因此 $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=f\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$.

反思提炼

1.利用三角函数的性质求参数的值时，先利用诱导公式把函数化为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)(A\neq 0,\omega>0)$ 的形式，再利用三角函数的奇偶性与周期性求参数的值.

注意所给的函数中参数的范围.

2.利用周期函数的性质求函数值时，先把自变量加减整数个周期，将函数化简，再结合函数的奇偶性求解.

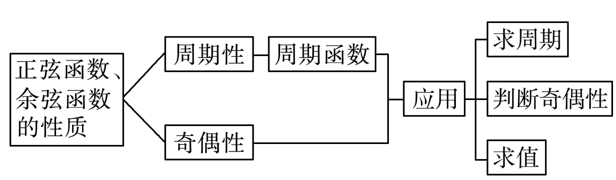
探究训练

函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{2}\right)(\omega\neq 0)$，则 $f(x)$ 是________(填“奇函数”或“偶函数”)，若 $f(x)$ 的周期为 π，则 $\omega=$________.

偶函数　± 2　**解析**：函数定义域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称，且 $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}\cos\omega x$，所以 $f(-x)=-\frac{1}{2}\cos(-\omega x)=-\frac{1}{2}\cos\omega x=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数. 又 $T=\pi$，所以 $\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，所以 $\omega=\pm 2$.

体系构建



课后素养评价(四十八)

基础性·能力运用

1. 函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$,则 ω 的值为 (　　)

A.4　　B.2　　C.1　　D.$\frac{1}{2}$

A　**解析**:因为 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$,又 $T=\frac{2\pi}{\omega}$,所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$.

2. 下列函数中是奇函数且最小正周期是 π 的函数是 (　　)

A.$y=\cos|2x|$　　B.$y=|\sin x|$

C.$y=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)$　　D.$y=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)$

D　**解析**:$y=\cos|2x|$ 是偶函数,$y=|\sin x|$ 是偶函数,$y=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=\cos 2x$ 是偶函数,$y=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)=-\sin 2x$ 是奇函数,根据公式求得其最小正周期 $T=\pi$.

3. 函数 $f(x)=\sqrt{2\sin x-1}$ (　　)

A.是奇函数

B.既是奇函数也是偶函数

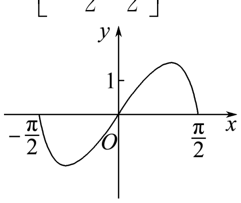
C.是偶函数

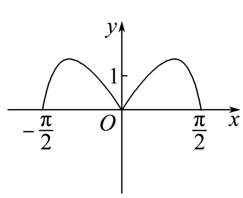
D.是非奇非偶函数

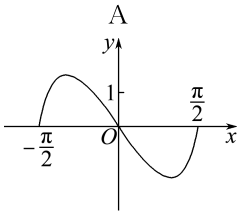
D　**解析**:由 $2\sin x-1\geqslant0$,即 $\sin x\geqslant\frac{1}{2}$,得函数定义域为 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{5}{6}\pi\right](k\in\mathbf{Z})$,此定义域在 x 轴上表示的区间不关于原点对称.

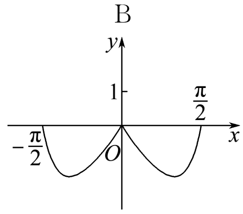
所以该函数不具有奇偶性,为非奇非偶函数.

4. (2022·全国甲卷)函数 $y=(3^x-3^{-x})\cos x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的图象大致为 (　　)


A


B


C


D

A　**解析**:令 $f(x)=(3^x-3^{-x})\cos x$,$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,

则 $f(-x)=(3^{-x}-3^x)\cos(-x)=-(3^x-3^{-x})\cos x=-f(x)$,

所以 $f(x)$ 为奇函数,排除 BD;

又当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时,$3^x-3^{-x}>0$,$\cos x>0$,所以 $f(x)>0$,排除 C.故选 A.

5. (多选)下列关于函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)$ 的说法正确的是 (　　)

A.对任意 φ,$f(x)$ 都是非奇非偶函数

B.存在 φ,使 $f(x)$ 是偶函数

C.存在 φ,使 $f(x)$ 是奇函数

D.对任意 φ,$f(x)$ 都不是偶函数

BC　**解析**:$\varphi=0$ 时,$f(x)=\sin x$ 是奇函数;$\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时,$f(x)=\cos x$ 是偶函数,故 B,C 正确.

6. 函数 $f(x)=\sin\frac{2x}{3}+\cos 3x$ 的最小正周期为 (　　)

A.15π　　B.12π　　C.6π　　D.3π

C　**解析**:由题意函数 $f(x)=\sin\frac{2x}{3}+\cos 3x$ 的最小正周期就是函数 $y=\sin\frac{2x}{3}$ 的最小正周期 $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$ 与函数 $y=\cos 3x$ 的最小正周期 $\frac{2\pi}{3}$ 的最小公倍数,3π 与 $\frac{2\pi}{3}$ 的最小公倍数是 6π.故答案为 6π.

7. 已知 $f(x)$ 是周期为 π 的偶函数,且 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时,$f(x)=1-\sin x$,求 $f\left(\frac{10\pi}{3}\right)$,$f\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$ 的值.

解:因为 $T=\pi$,且 $f(x)$ 为偶函数,

所以 $f\left(\frac{10\pi}{3}\right)=f\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1-\sin\frac{\pi}{3}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$,$f\left(-\frac{25\pi}{6}\right)=f\left(-4\pi-\frac{\pi}{6}\right)=f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1-\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

综合性·创新提升

1.（多选）下列函数是偶函数的是　　（　BC　）

A.$f(x)=\sqrt{x}$

B.$f(x)=|\sin x|$

C.$f(x)=\cos x$

D.$f(x)=e^{x}-e^{-x}$

2. 已知函数 $f(x)=x^3-3\sin x+2$.若 $f(m)=3$,则 $f(-m)=$　　（　　）

A.-3　　B.-1

C.1　　D.2

C　**解析**:因为 $y=x^3$,$y=\sin x$ 是奇函数,$f(x)=x^3-3\sin x+2$,所以 $f(m)+f(-m)=4$.所以 $f(-m)=4-f(m)=1$.故选 C.

3. 若函数 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$是奇函数,则 φ 的值可以是　　（　　）

A.$\frac{5\pi}{6}$　　B.$\frac{\pi}{2}$

C.$-\frac{2\pi}{3}$　　D.$-\frac{\pi}{2}$

C　**解析**:若函数 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$是奇函数,

则 $-\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,$\varphi=\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,当 $k=-1$时,$\varphi=-\frac{2\pi}{3}$.

4. 设 $f(x)$是定义域为 $\mathbf{R}$,最小正周期为$\frac{3\pi}{2}$的函数.若 $f(x)=\begin{cases}\cos x,-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0,\\ \sin x,0<x\leqslant\pi,\end{cases}$则$f\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$的值等于　　（　B　）

A.1　　B.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

C.0　　D.$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$,则“$\omega=2$”是“$f(x)$的最小正周期是 π”的　　（　　）

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

A　**解析**:$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$的最小正周期 $T=\left|\frac{2\pi}{\omega}\right|=\pi$,解得 $\omega=\pm2$.

故“$\omega=2$”是“$f(x)$的最小正周期是 π”的充分不必要条件.故选 A.

6. 设函数 $f(x)=3\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$,$\omega>0$,$x\in(-\infty,+\infty)$,且以$\frac{\pi}{2}$为最小正周期.若$f\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{9}{5}$,则 $\sin\alpha$ 的值为________.

$\pm\frac{4}{5}$　**解析**:因为 $f(x)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$,$\omega>0$,

所以 $\omega=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$.所以 $f(x)=3\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$.

由 $f\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{12}\right)=3\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=3\cos\alpha=\frac{9}{5}$,

得 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

所以 $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\frac{4}{5}$.

7. 已知函数 $f(x)=\frac{\sin^2x+\cos x+1}{\cos x+1}$.

(1)求函数 $f(x)$的定义域并判断函数的奇偶性;

(2)求函数 $f(x)$的最小正周期.

解:(1)由 $\cos x+1\neq0$,得 $x\neq2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以函数 $f(x)$的定义域为$\{x|x\neq2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

$f(x)=\frac{\sin^2x+\cos x+1}{\cos x+1}=\frac{1-\cos^2x+\cos x+1}{\cos x+1}$

$=\frac{-\cos^2x+\cos x+2}{\cos x+1}=\frac{(\cos x+1)(2-\cos x)}{\cos x+1}$

$=2-\cos x$.

因为 $f(-x)=2-\cos(-x)=2-\cos x=f(x)$,故函数$f(x)$为偶函数.

(2)由(1)知 $f(x)=2-\cos x(x\neq2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z})$,所以函数 $f(x)$的最小正周期为 2π.

第 2 课时　正弦函数、余弦函数的单调性与最值

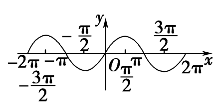
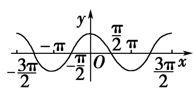
学习任务目标

1.掌握正弦函数、余弦函数的单调性，能利用单调性比较大小.
2.会求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 及 $y=A\cos(\omega x+\varphi)(A\neq 0)$ 的单调区间.
3.掌握正弦函数、余弦函数的最值和值域.

问题式预习

知识清单

知识点　正弦函数、余弦函数的性质

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$
图象		
单调性	在 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上单调递增；在 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上单调递减	在 $[-\pi+2k\pi,2k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上单调递增；在 $[2k\pi,\pi+2k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上单调递减
最值	当 $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\min}=-1$；当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\max}=1$	当 $x=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\min}=-1$；当 $x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\max}=1$
对称性	对称轴：$x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$	对称轴：$x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$
	对称中心：$(k\pi,0),k\in\mathbf{Z}$	对称中心：$\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,0\right),k\in\mathbf{Z}$

概念辨析

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)正弦函数在定义域上是单调函数.　(×)

(2)正弦函数在第一象限是增函数.　(×)

(3)存在实数 x，使得 $\cos x=\sqrt{2}$.　(×)

(4)余弦函数 $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减.　(√)

2.函数 $y=\cos x-1$ 的最小值是　(C)

A.0　　B.1

C.-2　　D.-1

3.请思考并回答下列问题：

(1)正弦函数、余弦函数的单调区间是唯一的吗？

提示：不是，它们都有无数个单调区间.

(2)正(余)弦函数在何时取得最大值和最小值？

提示：对于 $y=\sin x$，当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 时，取得最大值 1；

当 $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 时，取得最小值 -1.

对于 $y=\cos x$，当 $x=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 时，取得最大值 1；

当 $x=\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 时，取得最小值 -1.

任务型课堂

学习任务一　求正弦函数、余弦函数的单调区间

1.函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),x\in\mathbf{R}$　(　　)

A.在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增

B.在 $[0,\pi]$ 上单调递减

C.在 $[-\pi,0]$ 上单调递减

D.在 $[-\pi,\pi]$ 上单调递减

B　**解析**：因为 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$，所以函数在 $[-\pi,0]$ 上单调递增，在 $[0,\pi]$ 上单调递减.

2.求函数 $y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的单调递增区间.

解：令 $2k\pi-\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

即 $2k\pi-\frac{5\pi}{6}\leqslant 2x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $k\pi-\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.

所以函数 $y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$.

［一题多思］

思考1. 本题的函数若换为“$y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$”，你能求其单调递增区间吗？

提示： $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，

令 $z=x-\frac{\pi}{3}$，又 $y=-\sin z$ 的单调递增区间是 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$，

所以令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

得 $\frac{5\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{11\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

所以函数 $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\frac{11\pi}{6}+2k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

思考2. 本题的函数若换为“$y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$”，你能求其在 $[0,2\pi]$ 上的单调递增区间吗？

提示： 由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

得 $2k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$.

故函数 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的单调递增区间是 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{5\pi}{6}\right],k\in\mathbf{Z}$.

又 $x\in[0,2\pi]$，所以 $0\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}$ 或 $\frac{11\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2\pi$.

所以函数 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的单调递增区间为 $\left[0,\frac{5\pi}{6}\right]$ 和 $\left[\frac{11\pi}{6},2\pi\right]$.

反思提炼

求正弦函数、余弦函数的单调区间的两个技巧

(1)数形结合：结合正弦函数、余弦函数的图象，找出它们的单调区间.

(2)整体代换：确定函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A\neq 0)$ 的单调区间时，一般采用“换元法”整体代换，将 $\omega x+\varphi$ 看作一个整体，可令“$z=\omega x+\varphi$”，即通过求 $y=A\sin z$ 的单调区间而求出函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的单调区间.

学习任务二　正弦函数、余弦函数单调性的应用

例1　比较下列各组数的大小.

(1) $\sin\left(-\frac{37}{6}\pi\right)$ 与 $\sin\frac{49}{3}\pi$；

(2) $\cos 870^\circ$ 与 $\sin 980^\circ$.

解： (1) $\sin\left(-\frac{37}{6}\pi\right)=\sin\left(-6\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，

$\sin\frac{49}{3}\pi=\sin\left(16\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}$.

因为 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，

所以 $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)<\sin\frac{\pi}{3}$，

即 $\sin\left(-\frac{37}{6}\pi\right)<\sin\frac{49}{3}\pi$.

(2) $\cos 870^\circ=\cos(720^\circ+150^\circ)=\cos 150^\circ$，

$\sin 980^\circ=\sin(720^\circ+260^\circ)=\sin 260^\circ=\sin(90^\circ+170^\circ)=\cos 170^\circ$.

因为 $0^\circ<150^\circ<170^\circ<180^\circ$，且 $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减，

所以 $\cos 150^\circ>\cos 170^\circ$，即 $\cos 870^\circ>\sin 980^\circ$.

例2　已知 ω 是正数，函数 $f(x)=2\sin\omega x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，求 ω 的取值范围.

解： 由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\omega x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，$\omega>0$，

得 $-\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega},k\in\mathbf{Z}$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[-\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega},\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\right],k\in\mathbf{Z}$.

根据题意，

得 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]\subseteq\left[-\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega},\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\right](k\in\mathbf{Z})$，

从而有 $\begin{cases}-\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\leqslant-\frac{\pi}{3},\\ \frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\geqslant\frac{\pi}{4},\\ \omega>0,k\in\mathbf{Z},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\omega\leqslant\frac{3}{2}-6k,\\ \omega\leqslant 2+8k,\\ \omega>0,k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$

令 $k=0$，得 $0<\omega\leqslant\frac{3}{2}$.

故 ω 的取值范围是 $\left(0,\frac{3}{2}\right]$.

反思提炼

比较三角函数值大小的步骤

(1)异名函数化为同名函数；
(2)利用诱导公式把已知角转化到函数同一单调区间上；
(3)利用函数的单调性比较大小.

探究训练

比较下列各组数的大小.

(1)$\cos\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)$，$\cos\dfrac{13\pi}{7}$；(2)$\sin 194°$，$\cos 160°$.

解：(1)$\cos\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)=\cos\dfrac{\pi}{8}$，$\cos\dfrac{13\pi}{7}=\cos\left(2\pi-\dfrac{\pi}{7}\right)=\cos\dfrac{\pi}{7}$，

因为 $y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上单调递减，

所以 $\cos\dfrac{\pi}{8}>\cos\dfrac{\pi}{7}$，

即 $\cos\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)>\cos\dfrac{13\pi}{7}$.

(2)$\sin 194°=\sin(180°+14°)=-\sin 14°$，$\cos 160°=\cos(180°-20°)=-\cos 20°=-\sin 70°$，因为 $y=\sin x$ 在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递增，所以 $\sin 70°>\sin 14°$，所以$-\sin 70°<-\sin 14°$，即 $\sin 194°>\cos 160°$.

学习任务三　正弦函数、余弦函数的最值和值域

例 3　求下列函数的最大值和最小值.

(1)$y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$；

(2)$y=-2\cos^2 x+2\sin x+3$，$x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$.

解：(1)当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$时，$2x-\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$，

故 $f(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$.

所以 $f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的最大值和最小值分别为 1 和$-\dfrac{1}{2}$.

(2)$y=-2(1-\sin^2 x)+2\sin x+3=2\sin^2 x+2\sin x+1=2\left(\sin x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$.

因为 $x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$，所以$\dfrac{1}{2}\leqslant\sin x\leqslant 1$.

当 $\sin x=1$，即 $x=\dfrac{\pi}{2}$时，$y_{\max}=5$；

当 $\sin x=\dfrac{1}{2}$，即 $x=\dfrac{\pi}{6}$或 $x=\dfrac{5\pi}{6}$时，$y_{\min}=\dfrac{5}{2}$.

反思提炼

三角函数值域(最值)问题的求解方法

(1)形如 $y=a\sin x$(或 $y=a\cos x$)型，可利用正弦函数、余弦函数的有界性求解，注意对 a 正负的讨论.

(2)形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$(或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)+b$)型，可先由定义域求得 $\omega x+\varphi$ 的范围，然后求得 $\sin(\omega x+\varphi)$(或 $\cos(\omega x+\varphi)$)的范围，最后求得值域(最值).

(3)形如 $y=a\sin^2 x+b\sin x+c(a\neq 0)$型，可利用换元思想，设 $t=\sin x$，转化为二次函数 $y=at^2+bt+c$ 求最值.t 的范围需要根据定义域来确定.

探究训练

1. 求函数 $y=3-2\sin\dfrac{1}{2}x$ 的最值及取到最值时自变量 x 的集合.

解：因为$-1\leqslant\sin\dfrac{1}{2}x\leqslant 1$，所以当 $\sin\dfrac{1}{2}x=-1$，即$\dfrac{1}{2}x=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $x=4k\pi-\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$y_{\max}=5$，

此时自变量 x 的集合为$\{x\mid x=4k\pi-\pi,k\in\mathbf{Z}\}$；

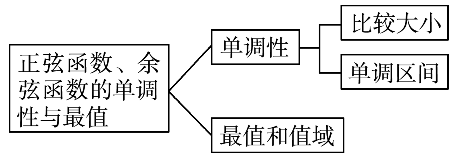
当 $\sin\dfrac{1}{2}x=1$，即$\dfrac{1}{2}x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $x=4k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$y_{\min}=1$，

此时自变量 x 的集合为$\{x\mid x=4k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

2. 求函数 $f(x)=2\sin^2 x+2\sin x-\dfrac{1}{2}$，$x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$的值域.

解：令 $t=\sin x$.因为 $x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$，所以 $t\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，则函数可化为 $y=2t^2+2t-\dfrac{1}{2}=2\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-1$，$t\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.所以当 $t=\dfrac{1}{2}$，即 $x=\dfrac{\pi}{6}$或 $x=\dfrac{5\pi}{6}$时，$y_{\min}=1$；当 $t=1$，即 $x=\dfrac{\pi}{2}$时，$y_{\max}=\dfrac{7}{2}$.故 $f(x)$的值域是$\left[1,\dfrac{7}{2}\right]$.

体系构建



课后素养评价(四十九)

基础性·能力运用

1. 函数 $y=-\cos x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上 ( )

A.单调递增 B.单调递减

C.先减后增 D.先增后减

C **解析**:因为 $y=\cos x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上先增后减,所以 $y=-\cos x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上先减后增.

2.(多选)关于函数 $f(x)=\sin x$ 的性质,下列说法正确的是 ( )

A.函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上的值域是 $\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

B.函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{3\pi}{2}$ 对称

C.函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数

D.函数 $f(x)$ 的图象既关于(0,0)对称,也关于(π,0)对称

BCD **解析**:对于A,函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上的值域是 $\left[\frac{1}{2},1\right]$,故A错误;

对于B,函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{3\pi}{2}$ 对称,故B正确;

对于C,函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 是增函数,故C正确;

对于D,函数 $f(x)$ 的图象既关于(0,0)对称,也关于(π,0)对称,故D正确.

3. 函数 $y=2\sin^2 x+2\cos x-3$ 的最大值是________.

$-\frac{1}{2}$ **解析**:由题意,得 $y=2\sin^2 x+2\cos x-3=2(1-\cos^2 x)+2\cos x-3=-2\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$.

因为 $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$,所以当 $\cos x=\frac{1}{2}$ 时,函数有最大值 $-\frac{1}{2}$.

4. 函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值是________,最大值是________.

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 1 **解析**:因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $2x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$,所以 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$,

所以 $f(x)_{\min}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(x)_{\max}=1$.

5. 求下列函数的单调递增区间.

(1) $y=1-\sin\frac{x}{2}$;

(2) $y=\log_{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$.

解:(1)由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{x}{2}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,得 $4k\pi+\pi\leqslant x\leqslant 4k\pi+3\pi$,$k\in\mathbf{Z}$.

所以 $y=1-\sin\frac{x}{2}$ 的单调递增区间为 $[4k\pi+\pi,4k\pi+3\pi]$,$k\in\mathbf{Z}$.

(2)要求函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$ 的单调递增区间,即求使 $y=\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)>0$ 且单调递减的区间.

所以 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}<2k\pi+\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

整理得 $4k\pi+\frac{5\pi}{3}\leqslant x<4k\pi+\frac{8\pi}{3}$,$k\in\mathbf{Z}$.

所以函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$ 的单调递增区间是 $\left[4k\pi+\frac{5\pi}{3},4k\pi+\frac{8\pi}{3}\right)$,$k\in\mathbf{Z}$.

综合性·创新提升

1. 函数 $y=\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$ 的单调递减区间是 ( )

A. $\left[k\pi-\frac{\pi}{8},k\pi+\frac{3\pi}{8}\right](k\in\mathbf{Z})$

B. $\left[2k\pi-\frac{\pi}{8},2k\pi+\frac{3\pi}{8}\right](k\in\mathbf{Z})$

C. $\left[2k\pi+\frac{3\pi}{8},2k\pi+\frac{7\pi}{8}\right](k\in\mathbf{Z})$

D. $\left[k\pi+\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{7\pi}{8}\right](k\in\mathbf{Z})$

A **解析**:$y=\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$,令

$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $k\pi-\frac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{3\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$，故函数的单调递减区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{8},k\pi+\frac{3\pi}{8}\right](k\in\mathbf{Z})$.

2.（多选）已知函数 $f(x)=\sin\ \omega x\ (\omega>0)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调，则 ω 的值可能为（　　）

A.2　　B.3　　C.4　　D.5

AB　**解析**：因为 $x\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$，$\omega>0$，故可得 $\omega x\in\left(-\frac{\pi}{6}\omega,\frac{\pi}{6}\omega\right)$，又 $y=\sin x$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，

故 $-\frac{\pi}{6}\omega\geqslant 2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{6}\omega\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，解得 $\omega\leqslant -12k+3$ 且 $\omega\leqslant 12k+3$，$k\in\mathbf{Z}$.

又 $\omega>0$，故 $k=0$，$\omega\leqslant 3$.

3.（开放性问题）若函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)+\cos x$ 的最大值为 2，则常数 φ 的一个值为________.

$\frac{\pi}{2}$（答案不唯一）　**解析**：因为 $f(x)=\sin(x+\varphi)+\cos x$ 的最大值为 2，

所以 $\cos x=1$，解得 $x=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

且 $\sin(x+\varphi)=\sin(2k\pi+\varphi)=\sin\varphi=1$，

所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}+2n\pi$，$n\in\mathbf{Z}$，所以 φ 可取 $\frac{\pi}{2}$.

4. 若函数 $y=\cos x$ 在区间 $[-\pi,a]$ 上单调递增，则 a 的取值范围是________.

$(-\pi,0]$　**解析**：因为 $y=\cos x$ 在 $[-\pi,0]$ 上单调递增，又在 $[-\pi,a]$ 上单调递增，所以 $[-\pi,a]\subseteq[-\pi,0]$，所以 $a\leqslant 0$.

又因为 $a>-\pi$，所以 $-\pi<a\leqslant 0$.

故 a 的取值范围是 $(-\pi,0]$.

5. 设函数 $f(x)=a\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+b$.

(1) 若 $a>0$，求 $f(x)$ 的单调递增区间；

(2) 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 时，$f(x)$ 的值域为 $[1,3]$，求 a,b 的值.

解：(1) 令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $k\pi-\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[k\pi-\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{12}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

(2) 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 时，$\frac{\pi}{3}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{5\pi}{6}$，

则 $\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$.

由 $f(x)$ 的值域为 $[1,3]$ 知，

$\begin{cases}a>0,\\a+b=3,\\\frac{1}{2}a+b=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\b=-1;\end{cases}$

或 $\begin{cases}a<0,\\a+b=1,\\\frac{1}{2}a+b=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-4,\\b=5.\end{cases}$

综上，$\begin{cases}a=4,\\b=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-4,\\b=5.\end{cases}$

5.4.3　正切函数的性质与图象

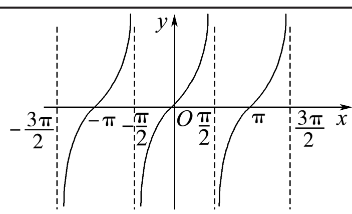
学习任务目标

1. 能够借助单位圆中的正切线画出函数 $y=\tan x$ 的图象.
2. 掌握正切函数的定义域、值域、周期性、奇偶性、单调性.
3. 能利用正切函数的图象及性质解决有关问题.

问题式预习

知识清单

知识点　正切函数 $y=\tan x$ 的图象和性质

图象	
定义域	$\left\{x \middle\vert x\in\mathbf{R}，且\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$
值域	$\mathbf{R}$
奇偶性	奇函数
单调性	在 $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$ 上单调递增
周期性	最小正周期 $T=\pi$
对称性	图象的对称中心为 $\left(\dfrac{k\pi}{2},0\right)(k\in\mathbf{Z})$

概念辨析

1. 判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").

(1)函数 $y=\tan x$ 在其定义域上是增函数.　(×)

(2)函数 $y=\tan x$ 的图象的对称中心是 $(k\pi,0)(k\in\mathbf{Z})$.　(×)

(3)正切函数 $y=\tan x$ 无单调递减区间.　(√)

(4)正切函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增.　(×)

2. 函数 $y=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$ 的定义域是　(　　)

A. $\left\{x\mid x\neq\dfrac{\pi}{4},x\in\mathbf{R}\right\}$

B. $\left\{x\mid x\neq-\dfrac{\pi}{4},x\in\mathbf{R}\right\}$

C. $\left\{x\mid x\neq\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{R}\right\}$

D. $\left\{x\mid x\neq\dfrac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{R}\right\}$

D　**解析：**函数 $y=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=-\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$，令 $x-\dfrac{\pi}{4}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $x\neq\dfrac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以函数的定义域是 $\left\{x\middle\vert x\neq\dfrac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{R}\right\}$.

3. 请思考并回答下列问题：

(1)正切函数与正弦函数、余弦函数的最小正周期相同吗？

提示：不同.

(2)你认为正切函数的周期性和奇偶性对研究它的图象及其他性质会有什么帮助？

提示：可以先考察函数 $y=\tan x$，$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象与性质，然后再根据奇偶性、周期性进行拓展.

(3)正切函数的图象有对称轴吗？

提示：正切函数的图象只有对称中心，没有对称轴，

任务型课堂

学习任务一　正切函数的定义域、值域

1. 函数 $y=\tan\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的定义域为________.

$\left\{x\middle\vert x\neq\dfrac{k\pi}{3}+\dfrac{5\pi}{18},k\in\mathbf{Z}\right\}$　**解析：**要使函数有意义，自变量 x 的取值应满足 $3x-\dfrac{\pi}{3}\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $x\neq\dfrac{k\pi}{3}+\dfrac{5\pi}{18}(k\in\mathbf{Z})$，

所以函数的定义域为 $\left\{x\middle\vert x\neq\dfrac{k\pi}{3}+\dfrac{5\pi}{18},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

2. 当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 时，函数 $f(x)=\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)$ 的值

域为________.

$[-\sqrt{3},0]$　**解析**:由题易知 $f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$ $=-\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

因为 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$,所以 $2x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$,所以 $2x-\frac{\pi}{3}\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$.

所以 $0\leqslant\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\sqrt{3}$.

所以 $-\sqrt{3}\leqslant\tan\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)\leqslant 0$.

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3},0]$.

3. 求函数 $y=-\tan^2x+4\tan x+1, x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 的值域.

解:因为 $-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$,

所以 $-1\leqslant\tan x\leqslant 1$.

令 $t=\tan x$,则 $t\in[-1,1]$,

所以 $y=-t^2+4t+1=-(t-2)^2+5$.

所以,当 $t=-1$,即 $x=-\frac{\pi}{4}$ 时,$y_{\min}=-4$,

当 $t=1$,即 $x=\frac{\pi}{4}$ 时,$y_{\max}=4$.

故所求函数的值域为 $[-4,4]$.

反思提炼

正切型函数的定义域、值域的求解方法

1. 定义域:除了求函数定义域的一般要求外,还要保证 $y=\tan x$ 有意义,即 $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

2. 值域:(1)求函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 的值域时,先求角 $\omega x+\varphi$ 的范围,再利用正切函数的单调性来求解;

(2)求函数 $y=a\tan^2x+b\tan x+c(a\neq 0)$ 的值域时,先换元,再利用二次函数的性质求解.

学习任务二　正切函数的单调性

例1　(1)函数 $y=\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ 的单调递增区间是　(　　)

A. $\left(2k\pi-\frac{2\pi}{3},2k\pi+\frac{4\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$

B. $\left(2k\pi-\frac{5\pi}{3},2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$

C. $\left(4k\pi-\frac{2\pi}{3},4k\pi+\frac{4\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$

D. $\left(k\pi-\frac{5\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$

B　**解析**:解不等式 $k\pi-\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}<k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,可得 $2k\pi-\frac{5\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,

因此,函数 $y=\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ 的单调递增区间是 $\left(2k\pi-\frac{5\pi}{3},2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

(2)下列不等式正确的是　(　　)

A. $\tan\frac{3\pi}{5}>\tan\frac{2\pi}{5}$

B. $\tan 4>\tan 3$

C. $\tan 281^\circ>\tan 665^\circ$

D. $\tan\left(-\frac{13\pi}{4}\right)<\tan\left(-\frac{12\pi}{5}\right)$

B　**解析**:$\tan\frac{3\pi}{5}<0$,$\tan\frac{2\pi}{5}>0$,A 选项错误;因为 $\frac{\pi}{2}<3<\pi$,$\pi<4<\frac{3\pi}{2}$,所以 $\tan 3<0$,$\tan 4>0$,B 选项正确;$\tan 281^\circ=\tan(-79^\circ)$,$\tan 665^\circ=\tan(-55^\circ)$,因为正切函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,所以 $\tan(-79^\circ)<\tan(-55^\circ)$,即 $\tan 281^\circ<\tan 665^\circ$,C 选项错误;$\tan\left(-\frac{13\pi}{4}\right)=\tan\left(-3\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$,$\tan\left(-\frac{12\pi}{5}\right)=\tan\left(-2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=\tan\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$,因为正切函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,所以 $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)>\tan\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$,即 $\tan\left(-\frac{13\pi}{4}\right)>\tan\left(-\frac{12\pi}{5}\right)$,D 选项错误.

反思提炼

正切型函数单调性的运用策略

(1)求 $y=\tan(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的单调区间,把 $\omega x+\varphi$ 看成一个整体,解 $-\frac{\pi}{2}+k\pi<\omega x+\varphi<\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$ 即可.当 $\omega<0$ 时,先用诱导公式把 x 的系数化为正值再求单调区间.

(2)运用正切函数的单调性比较大小的步骤:

①运用函数的周期性或诱导公式将角化到同一单调区间内;

②运用单调性比较大小.

探究训练

1. 函数 $y=2\tan\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)-5$ 的单调递增区间是____________.

$\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3},\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right), k\in\mathbf{Z}$　**解析**:令 $-\frac{\pi}{2}+k\pi<3x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得 $-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}<x<\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.故函数的单调递增区间为 $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3},\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

2.比较大小：$\tan\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)$____$\tan\left(-\dfrac{9\pi}{5}\right)$.

$>$　**解析**：$\tan\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)=-\tan\left(2\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=\tan\dfrac{\pi}{4}$，$\tan\left(-\dfrac{9\pi}{5}\right)=-\tan\left(2\pi-\dfrac{\pi}{5}\right)=\tan\dfrac{\pi}{5}$. 因为 $y=\tan x$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调递增，又因为 $0<\dfrac{\pi}{5}<\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\tan\dfrac{\pi}{5}<\tan\dfrac{\pi}{4}$，所以 $\tan\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)>\tan\left(-\dfrac{9\pi}{5}\right)$.

学习任务三　正切函数性质的综合应用

例 2　（多选）下列关于函数 $y=|\tan x|$ 性质的叙述正确的是　　（　　）

A.周期为 $\dfrac{\pi}{2}$

B.值域为 $[0,+\infty)$

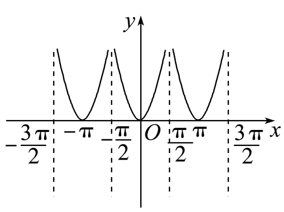
C.偶函数

D.单调递减区间为 $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

BCD　**解析**：由 $y=|\tan x|$，

得 $y=\begin{cases}\tan x, k\pi\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z},\\ -\tan x, -\dfrac{\pi}{2}+k\pi<x<k\pi, k\in\mathbf{Z},\end{cases}$

其图象如图所示.



由图象可知，函数 $y=|\tan x|$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$，值域为 $[0,+\infty)$，是偶函数.

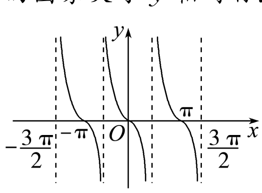
函数 $y=|\tan x|$ 的周期 $T=\pi$，

函数 $y=|\tan x|$ 的单调递增区间为 $\left(k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，单调递减区间为 $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$.

［一题多思］

思考 1.你能画出函数 $y=\tan(-x)$ 的图象吗？它与函数 $y=\tan x$ 的图象有怎样的关系？

提示：$y=\tan(-x)=-\tan x$，其图象如图所示，与函数 $y=\tan x$ 的图象关于 y 轴对称.

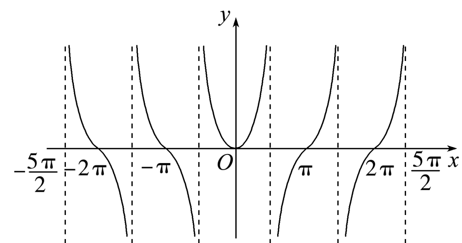


思考 2.若把例题中函数换为“$f(x)=\tan|x|$”，你能判断其周期性、奇偶性，并求其单调递增区间吗？

提示：$f(x)=\tan|x|$ 可化为

$f(x)=\begin{cases}\tan x, x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, x\geqslant 0, k\in\mathbf{Z},\\ -\tan x, x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, x<0, k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$

根据 $y=\tan x$ 的图象，作出 $f(x)=\tan|x|$ 的图象如图所示.



由图象知，$f(x)$ 不是周期函数，是偶函数，单调递增区间为 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\left(k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right)$，$k\in\mathbf{N}$.

反思提炼

解答正切型函数图象与性质问题的注意点

(1)周期性：函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{\pi}{|\omega|}$.

(2)奇偶性：先求函数的定义域 D，判断其是否满足 $\forall x\in D$，$-x\in D$，若不满足，则该函数无奇偶性；若满足，再判断 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系.

(3)对称性：正切函数图象的对称中心是 $\left(\dfrac{k\pi}{2},0\right)(k\in\mathbf{Z})$，不存在对称轴.

探究训练

设函数 $f(x)=\tan\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

(1)求函数 $f(x)$ 的定义域、最小正周期、单调区间及图象的对称中心；

(2)求不等式 $-1\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{3}$ 的解集；

(3)作出函数 $y=f(x)$ 在一个周期内的简图.

解：(1)由 $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $x\neq\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $f(x)$ 的定义域是 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

因为 $\omega=\dfrac{1}{2}$，所以最小正周期 $T=\dfrac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$.

由 $-\dfrac{\pi}{2}+k\pi<\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

得 $-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi<x<\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi\right)$

$(k\in\mathbf{Z})$.

由$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得$x=\frac{2\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

故函数$f(x)$图象的对称中心是$\left(\frac{2\pi}{3}+k\pi,0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$.

(2)由$-1\leqslant\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\sqrt{3}$，

得$-\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

解得$\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{4\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

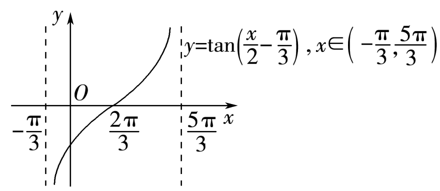
所以不等式$-1\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{3}$的解集是$\left\{x\left|\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{4\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

(3)令$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=0$，则$x=\frac{2\pi}{3}$；

令$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，则$x=\frac{5\pi}{3}$；

令$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}$，则$x=-\frac{\pi}{3}$.

所以函数$y=\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$的图象与$x$轴的一个交点坐标是$\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$，在这个交点左、右两侧相邻的两条渐近线方程分别是$x=-\frac{\pi}{3}$，$x=\frac{5\pi}{3}$.从而得到函数$y=f(x)$在一个周期$\left(-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$内的简图(如图).



体系构建

- 正切函数
  - 正切曲线
  - 性质
    - 奇偶性与周期性
    - 定义域与值域
    - 单调性及应用

课后素养评价(五十)

基础性·能力运用

1.已知函数$f(x)=3\tan\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$，则正数$\omega=$　　(　　)

A.4　　B.3　　C.2　　D.1

C　**解析**：因为$\omega>0$，所以$T=\frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$，所以$\omega=2$.

2.函数$y=3\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的定义域是　　(　　)

A.$\left\{x\left|x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

B.$\left\{x\left|x\neq\frac{k\pi}{2}-\frac{3\pi}{8},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

C.$\left\{x\left|x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

D.$\left\{x\left|x\neq\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

C　**解析**：由$2x+\frac{\pi}{4}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得$x\neq\frac{k}{2}\pi+\frac{\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$.

3.对于函数$y=\tan\frac{x}{2}$，下列判断正确的是　　(　　)

A.最小正周期为2π的奇函数

B.最小正周期为$\frac{\pi}{2}$的奇函数

C.最小正周期为π的偶函数

D.最小正周期为2π的偶函数

A　**解析**：函数$y=\tan\frac{x}{2}$的周期$T=\frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$，再由$\tan\left(-\frac{x}{2}\right)=-\tan\frac{x}{2}$可得，此函数为奇函数.

4.(多选)在下列给出的函数中，以π为周期且在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内单调递减的是　　(　　)

A.$y=\sin\frac{x}{2}$　　B.$y=\cos 2x$

C.$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$　　D.$y=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

BD　**解析**：由函数周期为π可排除选项A.函数$y=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$可变形为$y=-\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$2x\in(0,\pi)$，$x-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$，$2x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$，此时B，D中的函数均是单调递减的，C中的函数不单调.

5.(多选)已知函数$f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-1$，则　　(　　)

A.$f(x)$的最小正周期为π

B.$f(x)$的定义域为$\left\{x\left|x\neq\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

C. $f(x)$的图象关于点$\left(-\frac{\pi}{8},0\right)$对称

D. $f(x)$在$\left(\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}\right)$上单调递增

BD　**解析**：对于A，$f(x)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$，故A错误；对于B，由$2x+\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得$x\neq\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，故B正确；对于C，由$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得$x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，当$k=0$时，所以$f(x)$的图象关于$\left(-\frac{\pi}{8},-1\right)$对称，故C错误；对于D，若$x\in\left(\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}\right)$，则$2x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，所以$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}\right)$上单调递增，故D正确.

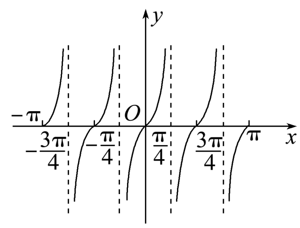
6. 函数$y=\tan^2x-2\tan x+2$的最小值为________.

1　**解析**：$y=\tan^2x-2\tan x+2=(\tan x-1)^2+1$，由于$\tan x\in\mathbf{R}$，所以当$\tan x=1$时，函数取得最小值1.

7. 求函数$y=\tan 2x$的定义域、值域和最小正周期，并作出它在区间$[-\pi,\pi]$内的图象.

解：由$2x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得$x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，即函数的定义域为$\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，

值域为$(-\infty,+\infty)$，最小正周期为$T=\frac{\pi}{2}$，在区间$[-\pi,\pi]$内的图象如图所示.



综合性·创新提升

1. 下列直线与函数$y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象不相交的是　（　　）

A. $x=\frac{\pi}{2}$　　B. $x=-\frac{\pi}{2}$

C. $x=\frac{\pi}{4}$　　D. $x=\frac{\pi}{8}$

D　**解析**：由$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得$x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$. 取$k=0$，可得$x=\frac{\pi}{8}$. 所以与函数$y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象不相交的一条直线的方程是$x=\frac{\pi}{8}$.

2. 已知函数$y=\tan\omega x$在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，则　（　　）

A. $0<\omega\leqslant1$　　B. $-1\leqslant\omega<0$

C. $\omega\geqslant1$　　D. $\omega\leqslant-1$

B　**解析**：因为$y=\tan\omega x$在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内单调递减，所以$\omega<0$且$T=\frac{\pi}{|\omega|}\geqslant\pi$，所以$-1\leqslant\omega<0$.

3. 已知函数$f(x)=x+\tan x+1$. 若$f(a)=2$，则$f(-a)=$　（　　）

A. 0　　B. -1　　C. -2　　D. 3

A　**解析**：设$g(x)=x+\tan x$. 显然$g(x)$为奇函数.

因为$f(a)=g(a)+1=2$，所以$g(a)=1$.

所以$f(-a)=g(-a)+1=-g(a)+1=0$. 故选A.

4. 若函数$f(x)=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，则　（　　）

A. $f(0)>f(-1)>f(1)$

B. $f(0)>f(1)>f(-1)$

C. $f(1)>f(0)>f(-1)$

D. $f(-1)>f(0)>f(1)$

A　**解析**：$f(x)$在$k\pi-\frac{\pi}{2}<x+\frac{\pi}{4}<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，即$k\pi-\frac{3\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$上单调递增. 而$f(0)=\tan\frac{\pi}{4}$，$f(1)=\tan\left(1+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(1+\frac{\pi}{4}-\pi\right)=\tan\left(1-\frac{3\pi}{4}\right)$，$f(-1)=\tan\left(\frac{\pi}{4}-1\right)$.

所以$f(0)>f(-1)>f(1)$.

5.（新定义）我们把正切函数在整个定义域内的图象看作一组“平行曲线”，具有性质：任意两条平行于横轴的直线与两条相邻的“平行曲线”相交，被截得的线段长度相等. 已知函数$f(x)=\tan\left(\omega x+\frac{\pi}{12}\right)$（$\omega$

>0)图象中的两条相邻“平行曲线”与直线 $y=2\,021$相交于 A,B 两点,且$|AB|=2$,则 $f\left(\frac{1}{2}\right)=$ (　　)

A.$\sqrt{3}$　　B.$\sqrt{6}-\sqrt{2}$

C.$\sqrt{2}-3$　　D.$-\sqrt{2}-3$

A　**解析**:由题意知,函数 $f(x)$的最小正周期 $T=|AB|=2$,所以$\frac{\pi}{\omega}=2$,解得 $\omega=\frac{\pi}{2}$,所以 $f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{12}\right)$,所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

6.直线 $y=a$(a 为常数)与函数 $y=\tan 3x$ 的图象相交时,相邻两交点间的距离为________.

$\frac{\pi}{3}$　**解析**:函数 $y=\tan 3x$ 的周期为$\frac{\pi}{3}$,所以 $y=a$(a 为常数)与 $y=\tan 3x$ 的图象相交时,相邻两交点间的距离为$\frac{\pi}{3}$.

7.比较大小(用“$>$”或“$<$”填空):

(1)$\tan\frac{2\pi}{7}$________$\tan\frac{10\pi}{7}$;

(2)$\tan\frac{6\pi}{5}$________$\tan\left(-\frac{13\pi}{5}\right)$.

(1)$<$　(2)$<$　**解析**:(1)$\tan\frac{10\pi}{7}=\tan\frac{3\pi}{7}$,且 $0<\frac{2\pi}{7}<\frac{3\pi}{7}<\frac{\pi}{2}$.又 $y=\tan x$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,

所以 $\tan\frac{2\pi}{7}<\tan\frac{3\pi}{7}$,即 $\tan\frac{2\pi}{7}<\tan\frac{10\pi}{7}$.

(2)$\tan\frac{6\pi}{5}=\tan\frac{\pi}{5}$,$\tan\left(-\frac{13\pi}{5}\right)=\tan\frac{2\pi}{5}$.

因为 $0<\frac{\pi}{5}<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$,又 $y=\tan x$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,

所以 $\tan\frac{\pi}{5}<\tan\frac{2\pi}{5}$,即 $\tan\frac{6\pi}{5}<\tan\left(-\frac{13\pi}{5}\right)$.

8.设函数 $f(x)=\tan(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$,已知函数 $y=f(x)$的图象与 x 轴相邻两个交点的距离为$\frac{\pi}{2}$,且图象关于点$M\left(-\frac{\pi}{8},0\right)$对称.

(1)求 $f(x)$的解析式;

(2)求 $f(x)$的单调区间;

(3)求不等式$-1\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{3}$的解集.

解:(1)由题意知,函数 $f(x)$的最小正周期为 $T=\frac{\pi}{2}$,即$\frac{\pi}{|\omega|}=\frac{\pi}{2}$.

因为 $\omega>0$,所以 $\omega=2$,从而 $f(x)=\tan(2x+\varphi)$.

又因为函数 $y=f(x)$的图象关于点$M\left(-\frac{\pi}{8},0\right)$对称,

所以 $2\times\left(-\frac{\pi}{8}\right)+\varphi=\frac{k\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,

即 $\varphi=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$.

因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$,

故 $f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

(2)令$-\frac{\pi}{2}+k\pi<2x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

得$-\frac{3\pi}{4}+k\pi<2x<k\pi+\frac{\pi}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$,

即$-\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}<x<\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$.

所以函数 $f(x)$的单调递增区间为

$\left(-\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)$,$k\in\mathbf{Z}$,无单调递减区间.

(3)由$-1\leqslant\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{3}$,

得$-\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

即$-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$.

所以不等式$-1\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{3}$的解集为

$\left\{x\middle|-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

5.5　三角恒等变换

5.5.1　两角和与差的正弦、余弦和正切公式

第1课时　两角差的余弦公式

学习任务目标

1.了解两角差的余弦公式的推导过程，知道两角差的余弦公式的意义.
2.熟记两角差的余弦公式的形式及符号特征，并能利用该公式进行求值、计算.

问题式预习

知识清单

知识点　两角差的余弦公式

公式	$C_{(\alpha-\beta)}$：$\cos(\alpha-\beta)=\underline{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$
适用条件	公式中的角 α,β 都是任意角
公式结构	公式右端的两部分为同名三角函数的积，连接符号与左边角的连接符号相反

概念辨析

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)存在角 α,β，使得 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha-\cos\beta$.　(√)

(2)任意角 α,β，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.　(×)

(3)任意角 α,β，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.　(√)

2.$\cos 44^\circ\cos 14^\circ+\sin 44^\circ\sin 14^\circ$的值为　(　　)

A.$\frac{1}{2}$　　B.$-\frac{1}{2}$

C.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D.$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

C　**解析**：原式$=\cos(44^\circ-14^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.请思考并回答下列问题：

(1)两角差的余弦公式中的 α,β 都是任意角吗？

提示：公式中的 α,β 都是任意角，既可以是一个角，也可以是几个角的组合.如 $\cos\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right)$中的 $\frac{x+y}{2}$相当于公式中的 α，$\frac{x-y}{2}$相当于公式中的 β.

(2)有人认为 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha-\cos\beta$，你认为正确吗？

提示：不正确.例如 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$.

任务型课堂

学习任务一　给角求值

(1)$\sin 75^\circ=$________；

(2)$\cos(-15^\circ)=$________；

(3)$\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12}=$______；

(4)$\cos(\alpha+85^\circ)\cos(\alpha-35^\circ)+\sin(\alpha+85^\circ)\cdot\sin(\alpha-35^\circ)=$______；

(5)$\frac{1}{2}\cos 15^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 15^\circ=$______.

(1)$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　(2)$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　(3)0　(4)$-\frac{1}{2}$　(5)$\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析：(1)$\sin 75^\circ=\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)$

$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

(2)原式$=\cos(30^\circ-45^\circ)=\cos 30^\circ\cos 45^\circ+\sin 30^\circ\cdot\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

(3)原式$=\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{7\pi}{12}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$.

(4)原式$=\cos[(\alpha+85^\circ)-(\alpha-35^\circ)]=\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$.

(5) $\frac{1}{2}\cos 15°+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 15°$

$=\cos 60°\cos 15°+\sin 60°\sin 15°$

$=\cos(60°-15°)=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

反思提炼

利用两角差的余弦公式求值的一般思路

(1)把非特殊角转化为两个特殊角的差,正用公式直接求值;

(2)利用诱导公式,构造两角差的余弦公式中等号的右边的形式,然后逆用公式求值.

学习任务二　给值求值

例 1　(1)已知 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{12}{13}$,$\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$,求 $\cos\alpha$ 的值.

(2)设 $\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=-\frac{1}{9}$,$\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\frac{2}{3}$,其中 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,求 $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ 的值.

解:(1)因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$,所以 $\frac{\pi}{3}+\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,

所以 $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}$

$=-\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=-\frac{5}{13}$.

因为 $\alpha=\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\frac{\pi}{3}$,

所以 $\cos\alpha=\cos\left[\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\frac{\pi}{3}\right]$

$=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cos\frac{\pi}{3}+\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\frac{\pi}{3}$

$=-\frac{5}{13}\times\frac{1}{2}+\frac{12}{13}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{12\sqrt{3}-5}{26}$.

(2)因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\alpha-\frac{\beta}{2}\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$,$\frac{\alpha}{2}-\beta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}=\sqrt{1-\frac{1}{81}}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$,

$\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

所以 $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)\right]$

$=\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)$

$=-\frac{1}{9}\times\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{4\sqrt{5}}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{7\sqrt{5}}{27}$.

[一题多思]

思考 1. 本例(1)中若条件改为“已知 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$,且 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$”,则 $\cos\alpha$ 的值是多少?

提示:因为 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$,且 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$,所以 $\frac{\pi}{2}<\alpha+\frac{\pi}{4}<\pi$,

所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$,

所以 $\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

思考 2. 结合本例及以上思考,你能总结一下“拆角或凑角”问题的类型与方法吗?

提示:(1)已知条件中只有一个角,一般用该角与特殊角凑成所求角;(2)已知条件中有两个角,一般利用这两个角凑成所求角;(3)不能直接拼凑时,一般考虑用诱导公式转换.

反思提炼

给值求值问题的解题策略

(1)已知某些角的三角函数值,求另外一些角的三角函数值时,要注意观察已知角与所求式中角的关系,从而进行拆角或凑角.

(2)解题过程中灵活地进行拆角或凑角的变换.常见角的变换有:①$\alpha=(\alpha-\beta)+\beta$;②$\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}$;③$2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$;④$2\beta=(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)$.

探究训练

1. 已知 $\sin\alpha-\sin\beta=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{2}$,则 $\cos(\alpha-\beta)=$　　(　　)

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　B. $-\frac{1}{2}$　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D　**解析**：因为 $\sin\alpha-\sin\beta=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{2}$，所以 $(\sin\alpha-\sin\beta)^2=\frac{7}{4}-\sqrt{3}$，

$(\cos\alpha-\cos\beta)^2=\frac{1}{4}$.

两式相加，得 $2-2\cos(\alpha-\beta)=2-\sqrt{3}$.

所以 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. 已知 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin(\alpha-\beta)=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\cos\beta$ 的值为　　（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

A　**解析**：因为 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$-\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\alpha-\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. 因为 $\sin(\alpha-\beta)=-\frac{\sqrt{10}}{10}<0$，所以 $\alpha-\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，所以 $\cos(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$. 所以 $\cos\beta=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}+\frac{\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

学习任务三　给值求角

例 2　若 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$，且 α,β 均为锐角，$\alpha<\beta$，则 $\alpha+\beta=$________.

$\frac{3\pi}{4}$　**解析**：因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，$\alpha<\beta$，所以 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<0$.

又 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin(\alpha-\beta)=-\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

又因为 $0<2\alpha<\pi$，$\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$，所以 $\sin 2\alpha=\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos[2\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos 2\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin 2\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $0<\alpha+\beta<\pi$，故 $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$.

反思提炼

给值求角问题的解题策略

(1)要求角需先求这个角的三角函数值，然后根据范围得出角的值；

(2)已知一个角的正弦值(余弦值)求余弦值(正弦值)时，要根据角的范围确定其符号.

探究训练

已知 $\cos\alpha=\frac{1}{7}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$，且 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 β 的值为________.

$\frac{\pi}{3}$　**解析**：因为 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\cos\alpha=\frac{1}{7}$，

$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}<0$，

所以 $\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

$\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

因为 $\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$，

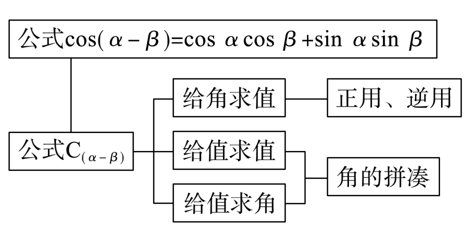
所以 $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]$

$=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$

$=\left(-\frac{11}{14}\right)\times\frac{1}{7}+\frac{5\sqrt{3}}{14}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{1}{2}$.

又因为 $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\beta=\frac{\pi}{3}$.

体系构建



课后素养评价(五十一)

基础性·能力运用

1. $\cos 62^\circ\cos 32^\circ+\sin 32^\circ\sin 118^\circ=$ (　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

A　**解析**:$\cos 62^\circ\cos 32^\circ+\sin 32^\circ\sin 118^\circ=\cos 62^\circ\cdot\cos 32^\circ+\sin 32^\circ\sin 62^\circ=\cos(62^\circ-32^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $\cos 165^\circ$等于 (　C　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　　D. $-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3. 已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$,$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,则 $\cos\left(\frac{7\pi}{4}+\alpha\right)$等于 (　　)

A. $\frac{4\sqrt{2}}{5}$　　B. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

C. $-\frac{4\sqrt{2}}{5}$　　D. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$

B　**解析**:由题意可知 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$,$\cos\left(\frac{7\pi}{4}+\alpha\right)=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$

$=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

4. 若 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$,且 $\sin x=\frac{4}{5}$,则 $2\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+2\cos x$ 的值为________.

$\frac{4\sqrt{3}-3}{5}$　**解析**:因为 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$,$\sin x=\frac{4}{5}$,所以 $\cos x=-\frac{3}{5}$.

所以 $2\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+2\cos x$

$=2\left(\cos x\cos\frac{2\pi}{3}+\sin x\sin\frac{2\pi}{3}\right)+2\cos x$

$=2\left(-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)+2\cos x$

$=\sqrt{3}\sin x+\cos x$

$=\frac{4\sqrt{3}}{5}-\frac{3}{5}$

$=\frac{4\sqrt{3}-3}{5}$.

5. 已知 α,β 为锐角,$\cos\alpha=\frac{1}{7}$,$\sin(\alpha+\beta)=\frac{5\sqrt{3}}{14}$,则 $\beta=$________.

$\frac{\pi}{3}$　**解析**:因为 α 为锐角,且 $\cos\alpha=\frac{1}{7}$,

所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

又 α,β 为锐角,所以 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$.

又 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{5\sqrt{3}}{14}<\sin\alpha$,所以 $\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

所以 $\cos(\alpha+\beta)=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}$

$=-\sqrt{1-\left(\frac{5\sqrt{3}}{14}\right)^2}=-\frac{11}{14}$.

所以 $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=\left(-\frac{11}{14}\right)\times\frac{1}{7}+\frac{5\sqrt{3}}{14}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{1}{2}$.

又 β 为锐角,所以 $\beta=\frac{\pi}{3}$.

综合性·创新提升

1. 已知点 $P(1,\sqrt{2})$是角 α 终边上一点,则$\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$等于 (　A　)

A. $\frac{3+\sqrt{6}}{6}$　　B. $\frac{3-\sqrt{6}}{6}$

C. $-\frac{3+\sqrt{6}}{6}$　　D. $\frac{\sqrt{6}-3}{6}$

2. 已知 $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$,$Q(\cos\beta,\sin\beta)$,则$|PQ|$的最大值为 (　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. 4　　D. $2\sqrt{2}$

B　**解析**:因为 $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$,$Q(\cos\beta,\sin\beta)$,

所以$|PQ|^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$

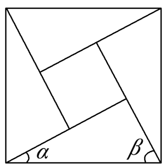
$=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta+\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta$

$=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(\cos^2\beta+\sin^2\beta)-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$

$=2-2\cos(\alpha-\beta)$.

所以 $|PQ|=\sqrt{2-2\cos(\alpha-\beta)}$. 因为 $\cos(\alpha-\beta)\in[-1,1]$，所以 $|PQ|\in[0,2]$. 故选 B.

3.（数学文化）《周髀算经》中给出了弦图，弦图（如图）是由四个全等的直角三角形和中间一个小正方形拼成的一个大的正方形. 若弦图中直角三角形的两锐角分别为 α,β，且小正方形与大正方形面积之比为 1∶25，则 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值为（　　）



A. $\frac{24}{25}$　　B. 1

C. $\frac{7}{25}$　　D. 0

A　**解析**：设大正方形的边长为 1，由小正方形与大正方形面积之比为 1∶25，则小正方形的边长为 $\frac{1}{5}$，可得 $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{1}{5}$①，$\sin\beta-\cos\beta=\frac{1}{5}$②.

由题图可得 $\cos\alpha=\sin\beta$，$\sin\alpha=\cos\beta$，①×②可得 $\frac{1}{25}=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\sin^2\beta+\cos^2\beta-\cos(\alpha-\beta)=1-\cos(\alpha-\beta)$，解得 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{24}{25}$.

4. 若 $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{5}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$，则 $\tan\alpha\tan\beta=$________.

$\frac{1}{2}$　**解析**：$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}$，又 $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{5}$，所以 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{2}{5}$，$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{5}$，两式相除可得 $\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{2}$.

5. 已知 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$B(\cos\beta,\sin\beta)$，其中 α,β 为锐角，且 $|AB|=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

(1) 求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值；

(2) 若 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，求 $\cos\beta$ 的值.

解：(1) 由 $|AB|=\frac{\sqrt{10}}{5}$，

得 $\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

所以 $2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=\frac{2}{5}$.

所以 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}$.

(2) 因为 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}$，$\alpha,\beta$ 为锐角，

所以 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\sin(\alpha-\beta)=\pm\frac{3}{5}$.

当 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$ 时，$\cos\beta=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]$

$=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{24}{25}$.

当 $\sin(\alpha-\beta)=-\frac{3}{5}$ 时，$\cos\beta=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)=0$.

因为 β 为锐角，所以 $\cos\beta=\frac{24}{25}$.

第 2 课时　两角和与差的正弦、余弦、正切公式

学习任务目标

1. 能利用两角差的余弦公式，推导出两角和的余弦公式及两角和与差的正弦、正切公式.
2. 会用两角和与差的正弦、余弦、正切公式进行简单的三角函数的求值、化简、计算等.
3. 灵活运用两角和与差的正弦、余弦、正切公式，了解公式的正用、逆用以及角的变换的常用方法.

问题式预习

知识清单

知识点一　两角和的余弦公式

公式	$\cos(\alpha+\beta)=\underline{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$
简记符号	$\underline{C_{(\alpha+\beta)}}$
使用条件	α,β 为<u>任意角</u>

知识点二　两角和与差的正弦公式

(1) 两角和的正弦公式：$\sin(\alpha+\beta)=\underline{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$.（$S_{(\alpha+\beta)}$）

(2) 两角差的正弦公式：$\sin(\alpha-\beta)=\underline{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$.（$S_{(\alpha-\beta)}$）

知识点三　两角和与差的正切公式

名称	简记符号	公式	使用条件
两角和的正切	$T_{(\alpha+\beta)}$	$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$	$\alpha,\beta,\alpha+\beta$均不等于$k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$
两角差的正切	$T_{(\alpha-\beta)}$	$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$	$\alpha,\beta,\alpha-\beta$均不等于$k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$

概念辨析

1. 判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$一定不成立.(　×　)

(2) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha-\sin\beta$恒成立.(　×　)

(3) 存在$\alpha,\beta\in\mathbf{R}$,使$\tan(\alpha+\beta)=\tan\alpha+\tan\beta$成立.(　√　)

(4) 对任意的$\alpha,\beta\in\mathbf{R}$,$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$都成立.(　×　)

2. 若$\tan\alpha=3$,$\tan\beta=\dfrac{4}{3}$,则$\tan(\alpha-\beta)$等于(　　)

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $-\dfrac{1}{3}$　　C. 3　　D. -3

A　**解析:** 因为$\tan\alpha=3$,$\tan\beta=\dfrac{4}{3}$,所以$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{3-\frac{4}{3}}{1+3\times\frac{4}{3}}=\dfrac{1}{3}$.

3. 请思考并回答下列问题:

(1) 两角和与差的正弦、余弦公式中的角α,β都是任意角吗?

提示: 是.

(2) 在两角和与差的正切公式中,$\alpha,\beta,\alpha\pm\beta$的取值是任意的吗?

提示: 在两角和与差的正切公式中,$\alpha,\beta,\alpha\pm\beta$都不能等于$k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

任务型课堂

学习任务一　给角求值

1. $\sin 245^\circ\sin 125^\circ+\sin 155^\circ\sin 35^\circ$的值是(　　)

A. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

B　**解析:** 原式$=-\sin 65^\circ\sin 55^\circ+\sin 25^\circ\sin 35^\circ$

$=-\cos 25^\circ\cos 35^\circ+\sin 25^\circ\sin 35^\circ$

$=-\cos(35^\circ+25^\circ)=-\cos 60^\circ=-\dfrac{1}{2}$.

2. $\dfrac{2\sin 40^\circ+\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$的值为________.

$\sqrt{3}$　**解析:** 原式$=\dfrac{2\sin(60^\circ-20^\circ)+\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$

$=\dfrac{2\sin 60^\circ\cos 20^\circ-2\cos 60^\circ\sin 20^\circ+\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$

$=\dfrac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ-2\times\frac{1}{2}\sin 20^\circ+\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$

$=\dfrac{\sqrt{3}\cos 20^\circ-\sin 20^\circ+\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\sqrt{3}$.

3. 求值:

(1) $\dfrac{1-\tan 15^\circ}{1+\tan 15^\circ}$;

(2) $\tan 23^\circ+\tan 37^\circ+\sqrt{3}\tan 23^\circ\tan 37^\circ$.

解: (1) $\dfrac{1-\tan 15^\circ}{1+\tan 15^\circ}=\dfrac{\tan 45^\circ-\tan 15^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 15^\circ}=\tan(45^\circ-15^\circ)=\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) 因为$\tan 23^\circ+\tan 37^\circ=\tan 60^\circ(1-\tan 23^\circ\cdot\tan 37^\circ)$,

所以原式$=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan 23^\circ\tan 37^\circ+\sqrt{3}\tan 23^\circ\tan 37^\circ=\sqrt{3}$.

[一题多思]

思考1. 本题(1)若变为“$\dfrac{1-\tan 15^\circ}{\sqrt{3}+\tan 60^\circ\tan 15^\circ}$”,你能直接求出它的值吗?

提示: 原式$=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1-\tan 15^\circ}{1+\tan 15^\circ}=\dfrac{\tan 45^\circ-\tan 15^\circ}{\sqrt{3}(1+\tan 45^\circ\tan 15^\circ)}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan(45^\circ-15^\circ)=\dfrac{\tan 30^\circ}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$.

思考2. 本题(2)若变为“$(1+\tan 18^\circ)(1+\tan 27^\circ)$”,其值是多少?

提示: 原式$=1+(\tan 18^\circ+\tan 27^\circ)+\tan 18^\circ\tan 27^\circ=1+\tan 45^\circ(1-\tan 18^\circ\tan 27^\circ)+\tan 18^\circ\tan 27^\circ=1+\tan 45^\circ=2$.

思考 3. 结合本题与以上思考，你能总结出公式$T_{(\alpha\pm\beta)}$的逆用及变形应用的解题策略吗？

提示：(1)"1"的代换：在$T_{(\alpha\pm\beta)}$中，如果分子中出现"1"，常利用$1=\tan\frac{\pi}{4}$来代换，以达到化简求值的目的，如$\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$；$\frac{\sqrt{3}\tan\alpha+\sqrt{3}}{1-\tan\alpha}=\sqrt{3}\cdot\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

(2)整体意识：若化简的式子中出现了"$\tan\alpha\pm\tan\beta$"及"$\tan\alpha\tan\beta$"，常考虑公式$\tan(\alpha\pm\beta)$的变形.

反思提炼

解决给角求值问题的策略

(1)非特殊角的三角函数式求值问题，若三角函数式的形式与和角公式或差角公式相符，则利用公式整体变形后求值，否则先进行局部的变形.

(2)三角函数式变形的一般途径有：将非特殊角化为特殊角的和或差的形式，构造可正负相消的项并消项求值，变换分子、分母的形式进行约分.解题时要注意逆用公式或利用公式的变形.

学习任务二　给值求值

例 1　(1)已知$\tan(\alpha+\beta)=\frac{2}{5}$，$\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$，那么$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$等于　(　　)

A.$\frac{13}{18}$　　B.$\frac{13}{22}$

C.$\frac{3}{22}$　　D.$\frac{3}{18}$

C　**解析：**$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left[(\alpha+\beta)-\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{\frac{2}{5}-\frac{1}{4}}{1+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}}=\frac{3}{22}$.

(2)已知$\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{5}{13}$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)=\frac{3}{5}$，且$0<\alpha<\frac{\pi}{4}<\beta<\frac{3\pi}{4}$，求$\cos(\alpha+\beta)$.

解：因为$0<\alpha<\frac{\pi}{4}<\beta<\frac{3\pi}{4}$，

所以$\frac{3\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}+\alpha<\pi$，$-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}-\beta<0$.

又因为$\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{5}{13}$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)=\frac{3}{5}$，

所以$\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)=-\frac{12}{13}$，$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)=-\frac{4}{5}$.

所以$\cos(\alpha+\beta)=\sin\left[\frac{\pi}{2}+(\alpha+\beta)\right]$

$=\sin\left[\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)\right]$

$=\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)$

$=\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}-\left(-\frac{12}{13}\right)\times\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{33}{65}$.

反思提炼

角的拼凑问题的解题策略

(1)当已知角有两个时，一般将所求式中的角表示为两个已知角的和或差的形式.

(2)当已知角只有一个时，一般将所求式中的角表示为已知角和特殊角的和或差的形式，有时也利用诱导公式把所求式中的角变成已知角.

探究训练

已知$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\tan(\alpha-\beta)=-\frac{1}{3}$，求$\cos\beta$的值.

解：因为$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，所以$\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

因为$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\alpha-\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

又因为$\tan(\alpha-\beta)=-\frac{1}{3}<0$，所以$\alpha-\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$.

所以$\cos(\alpha-\beta)=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\sin(\alpha-\beta)=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

所以$\cos\beta=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}+\frac{3}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{9\sqrt{10}}{50}$.

学习任务三　给值求角

例 2　已知 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$，且 α 和 β 均为钝角，求 $\alpha+\beta$ 的值.**解**：因为 α 和 β 均为钝角，

所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\times\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 α 和 β 均为钝角，所以 $\pi<\alpha+\beta<2\pi$，所以 $\alpha+\beta=\frac{7\pi}{4}$.

反思提炼

给值求角问题的关注点

(1)解题步骤：

①求出角的某个三角函数值；

②确定角的范围(范围过大或过小，会使求出的角不合题意或漏解)，根据范围找出角.

(2)选取三角函数的原则：

①已知正切函数值，选正切函数；

②已知正弦或余弦函数值，选正弦或余弦函数；若角的范围是 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，选正弦或余弦函数均可；若角的范围是 $(0,\pi)$，选余弦函数较好；若角的范围是 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，选正弦函数较好.

探究训练

已知 $\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，若 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 是方程 $x^2-4\sqrt{3}x+5=0$ 的两个根，则 $\alpha+\beta=$　　(　　)

A. $-\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$　　B. $-\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

C　**解析**：因为 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 是方程 $x^2-4\sqrt{3}x+5=0$ 的两个根，所以 $\tan\alpha+\tan\beta=4\sqrt{3}$，$\tan\alpha\tan\beta=5$.

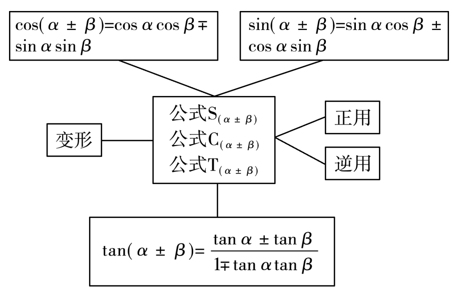
所以 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 均为正数.

又 $\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

所以 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{4\sqrt{3}}{1-5}=-\sqrt{3}$.

又 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$，所以 $\alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$.故选 C.

体系构建



课后素养评价(五十二)

基础性·能力运用

1. $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{5\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{7\pi}{8}=$　　(　　)

A. 1　　B. -1　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

B　**解析**：$\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{5\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{7\pi}{8}=-\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}-\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=-\sin\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$.

2.(多选)化简 $\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha$ 的结果可以是　(　　)

A. $\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$　　B. $2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$

C. $\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$　　D. $2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$

BD　**解析**：$\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha=2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)$

$=2\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$.

3.已知 α,β 均为锐角，且 $(1-\sqrt{3}\tan\alpha)(1-\sqrt{3}\tan\beta)=4$，则 $\alpha+\beta=$　　(　　)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$　　C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

B　**解析**：由 $(1-\sqrt{3}\tan\alpha)(1-\sqrt{3}\tan\beta)=4$，得 $1-\sqrt{3}\tan\beta-\sqrt{3}\tan\alpha+3\tan\alpha\tan\beta=4$，所以 $-\sqrt{3}(\tan\beta+\tan\alpha)=3(1-\tan\alpha\tan\beta)$，所以 $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\frac{3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$，即 $\tan(\alpha+\beta)=-\sqrt{3}$.

因为 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$，

所以 $\alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$.

4. 若 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{6}$，则 $\tan\alpha=$________.

$\frac{7}{5}$　**解析**：$\tan\alpha=\tan\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right]$

$=\dfrac{\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\frac{1}{6}+1}{1-\frac{1}{6}}=\frac{7}{5}$.

5. 已知 $\frac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{12}{13}$，$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$，求 $\sin 2\alpha$ 的值.

解：因为 $\frac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，

所以 $0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{4}$，$\pi<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$.

又 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{12}{13}$，$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$，

所以 $\sin(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$，

$\cos(\alpha+\beta)=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}$

$=-\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$.

所以 $\sin 2\alpha=\sin[(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)]$

$=\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)$

$=\frac{5}{13}\times\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{12}{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{56}{65}$.

综合性·创新提升

1. 已知 $\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$，则 $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=$　（　　）

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\pm\sqrt{2}$　　D. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

D　**解析**：因为 $\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\theta+\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\theta=\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1$，

所以 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\pm\sqrt{1-\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$，

则 $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.（2022·新高考全国Ⅱ卷）若 $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta$，则　（　　）

A. $\tan(\alpha-\beta)=1$　　B. $\tan(\alpha+\beta)=1$

C. $\tan(\alpha-\beta)=-1$　　D. $\tan(\alpha+\beta)=-1$

C　**解析**：由已知得 $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=2(\cos\alpha-\sin\alpha)\sin\beta$，

即 $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=0$，

即 $\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\beta)=0$，所以 $\tan(\alpha-\beta)=-1$.

3.（数学与生活）图 1 是第七届国际数学教育大会的会徽图案，它是由一串直角三角形组合而成的（如图 2），其中 $OA_1=A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_7A_8=1$，则 $\sin\angle A_6OA_8=$　（　　）

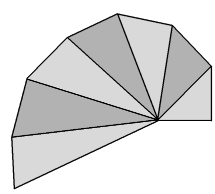


图1

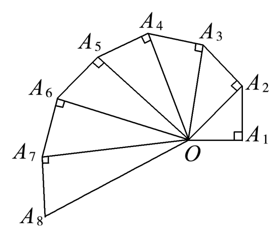


图2

A. $\frac{7\sqrt{2}+2\sqrt{21}}{28}$　　B. $\frac{7\sqrt{2}-2\sqrt{21}}{28}$

C. $\frac{14\sqrt{3}+1}{28}$　　D. $\frac{14\sqrt{3}-1}{28}$

A　**解析**：因为 $OA_1=A_1A_2=1$，且 $\triangle OA_1A_2$ 是直角三角形，

所以 $OA_2=\sqrt{2}$. 同理得 $OA_6=\sqrt{6}$，$OA_7=\sqrt{7}$，$OA_8=\sqrt{8}$，所以 $\sin\angle A_6OA_7=\frac{1}{\sqrt{7}}$，$\cos\angle A_6OA_7=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$，

$\sin\angle A_7OA_8=\frac{1}{\sqrt{8}}$，$\cos\angle A_7OA_8=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}$，

所以 $\sin\angle A_6OA_8=\sin(\angle A_6OA_7+\angle A_7OA_8)=\frac{1}{\sqrt{7}}\times\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}\times\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{7\sqrt{2}+2\sqrt{21}}{28}$.

4. 已知 $0<\beta<\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{3}{5}$，$\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)=\frac{5}{13}$，则 $\sin(\alpha+\beta)=$ $\underline{\frac{56}{65}}$.

5. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求 $f(x)$ 的最小正周期和最大值；

（2）讨论 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上的单调性.

解：（1）$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

因此 $f(x)$的最小正周期为 π,最大值为$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

(2)当 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$时,$0\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\pi$,

从而当 $0\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}$,即 $\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}$时,$f(x)$单调递增;

当$\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\pi$,即$\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$时,$f(x)$单调递减.

综上可知,$f(x)$在$\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{12}\right]$上单调递增;在$\left[\frac{5\pi}{12},\frac{2\pi}{3}\right]$上单调递减.

第 3 课时　二倍角的正弦、余弦、正切公式

学习任务目标

1.会推导二倍角的正弦、余弦、正切公式.

2.能够灵活运用二倍角公式解决求值、化简和证明等问题.

问题式预习

知识清单

知识点一　倍角公式

(1)$S_{2\alpha}$:$\sin 2\alpha=\underline{2\sin\alpha\cos\alpha}$;

(2)$C_{2\alpha}$:$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\underline{1-2\sin^2\alpha}$;

(3)$T_{2\alpha}$:$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

知识点二　倍角公式常用变形

(1)$\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}=\underline{\cos\alpha}$,$\frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}=\underline{\sin\alpha}$;

(2)$(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=\underline{1\pm\sin 2\alpha}$;

(3)$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$,$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.　　(√)

(2)$\cos 4\alpha=\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha$.　　(√)

(3)对任意角 α,$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.　　(×)

2.求值:$\frac{1}{2}-\cos^2\frac{\pi}{8}=$________.

$-\frac{\sqrt{2}}{4}$　**解析**:原式$=-\frac{1}{2}\left(2\cos^2\frac{\pi}{8}-1\right)=-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

3.请思考并回答下列问题:

(1)你是怎样理解"二倍角"的?

提示:二倍角是相对的,如 4α 是 2α 的二倍角,α 是$\frac{\alpha}{2}$的二倍角等,"倍"是描述两个数量之间关系的,这里蕴含着换元思想.

(2)和角公式与二倍角公式之间有什么样的联系?

提示:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{matrix}S_{2\alpha}\\ C_{2\alpha}\end{matrix}} \arrow[d, "\text{相除}"'] & \boxed{\begin{matrix}S_{(\alpha+\beta)}\\ C_{(\alpha+\beta)}\end{matrix}} \arrow[l, "\beta=\alpha"'] \arrow[d, "\text{相除}"] \\
\boxed{T_{2\alpha}} & \boxed{T_{(\alpha+\beta)}} \arrow[l, "\beta=\alpha"']
\end{tikzcd}$$

任务型课堂

学习任务一　给角求值

求下列各式的值.

(1)$\sin^2\frac{5\pi}{12}-\cos^2\frac{5\pi}{12}$;(2)$1-2\sin^2 750°$;

(3)$\frac{2\tan 150°}{1-\tan^2 150°}$;(4)$\cos 20°\cos 40°\cos 80°$.

解:(1)原式$=-\left(\cos^2\frac{5\pi}{12}-\sin^2\frac{5\pi}{12}\right)=-\cos\frac{5\pi}{6}=-\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2)原式$=\cos(2\times750^\circ)=\cos 1\ 500^\circ=\cos(4\times360^\circ+60^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$.

(3)原式$=\tan(2\times150^\circ)=\tan 300^\circ=\tan(360^\circ-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$.

(4)原式$=\frac{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ}$

$=\frac{2\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{4\sin 20^\circ}=\frac{2\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{8\sin 20^\circ}$

$=\frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ}=\frac{1}{8}$.

反思提炼

解决给角求值问题的策略

(1)注意观察式子的结构特点及角之间是否存在特殊的倍数关系,灵活正用或逆用二倍角公式.

(2)结合诱导公式恰当变换函数名称,灵活处理系数,构造二倍角公式的形式.

学习任务二　给值求值

例1　(1)已知$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$,则$\sin 2\theta$的值为________.

$-\frac{7}{9}$　**解析**:$\sin 2\theta=-\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\left[1-2\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]=2\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-1=-\frac{7}{9}$.

(2)已知α为第二象限角,$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$,则$\cos 2\alpha$的值为________.

$-\frac{\sqrt{5}}{3}$　**解析**:因为$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+\sin 2\alpha=\frac{1}{3}$,则$\sin 2\alpha=-\frac{2}{3}$.

因为α为第二象限角,所以$\cos\alpha<0$,$\sin\alpha>0$.

又$(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=1-\sin 2\alpha=\frac{5}{3}$,从而$\cos\alpha-\sin\alpha=-\sqrt{\frac{5}{3}}=-\frac{\sqrt{15}}{3}$,

因此$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

[一题多思]

思考1.本例(1)中,若已知$\tan\theta=\frac{3}{4}$,如何求$\sin 2\theta$的值?

提示:$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{2\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{24}{25}$.

思考2.本例(1)中,若已知$\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{5}{13}$,$0<x<\frac{\pi}{4}$,如何求$\frac{\cos 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$的值?

提示:因为$0<x<\frac{\pi}{4}$,$\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{5}{13}$,所以$\frac{\pi}{4}-x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$,$\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{12}{13}$.

利用诱导公式,得$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{12}{13}$.

所以原式$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{24}{13}$.

反思提炼

解决给值求值问题的策略

(1)有目的地将已知式或未知式化简,使两者关系明朗化.

(2)寻找角之间的关系,看是否适合相关公式的使用条件,注意常见角的变换和角之间的二倍关系.

(3)注意诱导公式在角的变换中的应用.

探究训练

已知$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$,$\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\frac{3\pi}{2}$,求$\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$的值.

解:因为$\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\frac{3\pi}{2}$,所以$\frac{3\pi}{4}\leqslant\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{7\pi}{4}$.

因为$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}>0$,所以$\frac{3\pi}{2}<\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{7\pi}{4}$.

所以$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$,

所以$\cos 2\alpha=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=2\times\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{3}{5}=-\frac{24}{25}$,

$\sin 2\alpha=-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=1-2\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1-2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{7}{25}$.

所以$\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{24}{25}-\frac{7}{25}\right)=-\frac{31\sqrt{2}}{50}$.

学习任务三　化简与证明

例2　化简：(1) $\dfrac{1}{1-\tan\theta}-\dfrac{1}{1+\tan\theta}$；

(2) $\dfrac{\sin 2\theta}{(\sin\theta+\cos\theta-1)(\sin\theta-\cos\theta+1)}$；

(3) $\dfrac{\sin\theta+\sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta}$.

解：(1)原式 $=\dfrac{(1+\tan\theta)-(1-\tan\theta)}{(1-\tan\theta)(1+\tan\theta)}=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\tan 2\theta$.

(2)原式 =

$$\frac{\sin 2\theta}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin 2\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{\sin 2\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta}$$

$$=\frac{4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}.$$

(3)原式 $=\dfrac{\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta+2\cos^2\theta}$

$=\dfrac{\sin\theta(1+2\cos\theta)}{\cos\theta(1+2\cos\theta)}$

$=\tan\theta$.

反思提炼

1.化简问题的解题策略

(1)着手点：从"幂"的差异、"名"的差异、"角"的差异这三个方面，结合所给"形"的特征入手解决.

(2)化简方法：①弦切互化，异名化同名，异角化同角；②降幂或升幂；③利用重要结论：$(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=1\pm\sin 2\theta$.

2.证明三角恒等式的方法

(1)从复杂的一边入手，通过化简，证明其等于另一边；(2)比较法：左边－右边＝0，$\dfrac{左边}{右边}=1$；(3)分析法：从要证明的等式出发，一步步寻找等式成立的条件.

探究训练

求证：$\dfrac{1+\sin 4\theta-\cos 4\theta}{2\tan\theta}=\dfrac{1+\sin 4\theta+\cos 4\theta}{1-\tan^2\theta}$.

证明：原式等价于 $1+\sin 4\theta-\cos 4\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\cdot(1+\sin 4\theta+\cos 4\theta)$，

即 $1+\sin 4\theta-\cos 4\theta=\tan 2\theta(1+\sin 4\theta+\cos 4\theta)$①.

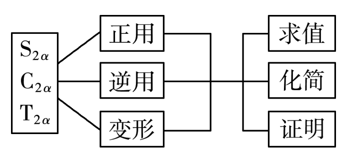
而①式右边 $=\tan 2\theta(1+\cos 4\theta+\sin 4\theta)$

$=\dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}(2\cos^2 2\theta+2\sin 2\theta\cos 2\theta)$

$=\sin 4\theta+1-\cos 4\theta=$ 左边，

所以①式成立，原式得证.

体系构建



课后素养评价(五十三)

基础性·能力运用

1.已知角 α 满足 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，则 $\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)=$　　(　　)

A. $-\dfrac{3}{4}$　　B. $\dfrac{3}{4}$

C. $-\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

D　**解析**：$\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=1-2\times\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)^2=\dfrac{1}{4}$.

2.(多选)下列计算正确的是　　(　　)

A. $\dfrac{\tan 15^\circ+1}{\tan 15^\circ-1}=-\sqrt{3}$

B. $\cos^4 22.5^\circ-\sin^4 22.5^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\sin 15^\circ\sin 45^\circ\sin 75^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

D. $\tan 37°+\tan 23°+\sqrt{3}\tan 37°\tan 23°=1$

ABC **解析**：$\frac{\tan 15°+1}{\tan 15°-1}=-\frac{\tan 15°+\tan 45°}{1-\tan 15°\tan 45°}=-\tan 60°=-\sqrt{3}$，A 正确；

$\cos^4 22.5°-\sin^4 22.5°=(\cos^2 22.5°+\sin^2 22.5°)(\cos^2 22.5°-\sin^2 22.5°)=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$，B 正确；

$\sin 15°\sin 45°\sin 75°=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 15°\cos 15°=\frac{\sqrt{2}}{4}\sin 30°=\frac{\sqrt{2}}{8}$，C 正确；

$\sqrt{3}=\tan(37°+23°)=\frac{\tan 37°+\tan 23°}{1-\tan 37°\tan 23°}$，则 $\tan 37°+\tan 23°+\sqrt{3}\tan 37°\tan 23°=\sqrt{3}$，D 错误.

3. 设 $\sin 2\alpha=-\sin\alpha$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $\tan 2\alpha$ 的值是________.

$\sqrt{3}$ **解析**：因为 $\sin 2\alpha=-\sin\alpha$，所以 $2\sin\alpha\cos\alpha=-\sin\alpha$. 由 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 知 $\sin\alpha\neq 0$，所以 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，所以 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$，所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\alpha=-\sqrt{3}$，所以 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times(-\sqrt{3})}{1-(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{3}$.

4. 已知等腰三角形底角的正弦值为 $\frac{4}{5}$，则顶角的余弦值是________.

$\frac{7}{25}$ **解析**：设等腰三角形的底角为 α，则顶角为 $\pi-2\alpha$.

所以 $\cos(\pi-2\alpha)=-\cos 2\alpha=-(1-2\sin^2\alpha)=2\sin^2\alpha-1=2\times\left(\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{7}{25}$.

综合性·创新提升

1.（2023·新高考全国Ⅰ卷）已知 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$，$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{6}$，则 $\cos(2\alpha+2\beta)=$ （　　）

A. $\frac{7}{9}$　　B. $\frac{1}{9}$　　C. $-\frac{1}{9}$　　D. $-\frac{7}{9}$

B **解析**：因为 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$，且 $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{6}$，所以 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$，

则 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{2}{3}$.

所以 $\cos(2\alpha+2\beta)=\cos 2(\alpha+\beta)=1-2\sin^2(\alpha+\beta)=1-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$.

2.（多选）已知函数 $f(x)=\sin x|\cos x|$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$，则以下结论正确的是 （　　）

A. $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称

B. $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递减

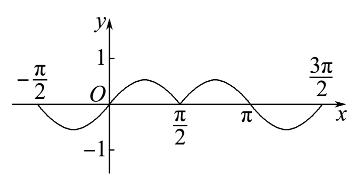
C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称

D. $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$

BCD **解析**：当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)=\sin x|\cos x|=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$，

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)=\sin x|\cos x|=-\sin x\cos x=-\frac{1}{2}\sin 2x$，

作出函数 $f(x)$ 的图象如图.



则函数关于 y 轴不对称，故 A 错误；

区间 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 的中点坐标为 $\frac{3\pi}{4}$，区间 $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ 的中点坐标为 $\frac{5\pi}{4}$，

所以 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递减，故 B 正确；

由题图知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，故 C 正确；

当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x\in[-\pi,\pi]$，当 $2x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{2}$，故 D 正确.

3.（数学与生活）黄金分割是指将整体一分为二，较大部

分与整体的比值等于较小部分与较大部分的比值，这一比值约为 0.618，这一比值也可以表示为 $a=2\cos 72°$，则 $\frac{1-2\sin^2 27°}{a\sqrt{4-a^2}}=$ （ ）

A. 2 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

C **解析**：$\frac{1-2\sin^2 27°}{a\sqrt{4-a^2}}=\frac{\cos 54°}{2\cos 72°\sqrt{4-4\cos^2 72°}}$

$=\frac{\cos 54°}{2\cos 72°\sqrt{4\sin^2 72°}}=\frac{\cos 54°}{4\cos 72°\sin 72°}=\frac{\cos 54°}{2\sin 144°}=\frac{\sin 36°}{2\sin 36°}=\frac{1}{2}$.

4. 已知 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=2$，则 $\tan\left(2\alpha+\frac{7\pi}{12}\right)$ $=$________.

$-\frac{1}{7}$ **解析**：因为 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=2$，

所以 $\tan\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{1-\tan^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{4}{3}$.

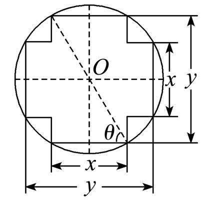
所以 $\tan\left(2\alpha+\frac{7\pi}{12}\right)=\tan\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{\tan\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\tan\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{7}$.

5. 如图，在直径为 1 的圆 O 中，作一关于圆心对称、邻边互相垂直的十字形，其中 $y>x>0$.

(1) 用 θ 表示十字形的面积 S.

(2) 当 θ 为何值时，十字形的面积最大？最大面积是多少？



解：(1) 由题意得 $S=2xy-x^2(y>x>0)$.

又圆 O 的直径为 1，则 $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$.

因为 $0<x<y$，所以 $0<\cos\theta<\sin\theta$. 所以 $\tan\theta>1$.

从而 $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

故 $S=2xy-x^2=2\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta\left(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$.

(2) $S=2\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta=\sin 2\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta-\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(2\theta-\varphi)-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，

其中 $\tan\varphi=\frac{1}{2}$，$\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

当 $\sin(2\theta-\varphi)=1$，即 $2\theta-\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，S 最大.

所以当 $\theta=\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}$，其中 $\tan\varphi=\frac{1}{2}$，$\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，十字形的面积最大，最大面积为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

5.5.2　简单的三角恒等变换

第1课时　半角公式及应用

学习任务目标

1.能通过二倍角公式推导出半角的正弦、余弦、正切公式.

2.能利用三角恒等变换对三角函数式进行化简、求值以及证明.

问题式预习

知识清单

知识点一　降幂公式

$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$，$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$，

$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

知识点二　半角公式

$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$，$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$，

$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

概念辨析

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)$\sin 15^\circ=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}$.　(×)

(2)对于$\forall\alpha\in\mathbf{R}$，$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sin\alpha$都不成立.　(×)

(3)存在$x\in\mathbf{R}$，使得$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\cos\alpha$.　(√)

2.已知$2\pi<\theta<4\pi$，且$\sin\theta=-\frac{3}{5}$，$\cos\theta<0$，则$\tan\frac{\theta}{2}$ = ________.

-3　**解析**:由题意知θ为第三象限角，所以$\cos\theta=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}$，所以$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{-\frac{3}{5}}{1-\frac{4}{5}}=-3$.

3.请思考并回答下列问题:

(1)你是怎样理解“半角”的?

提示:不能仅限于$\frac{\alpha}{2}$是α的一半,其他如α是2α的一半，$\frac{\alpha}{4}$是$\frac{\alpha}{2}$的一半，$\frac{3\alpha}{2}$是3α的一半等,半角是相对而言的,描述的是两个角之间的数量关系,这里面蕴含着换元思想.

(2)半角公式中的±号能不能去掉?

提示:不能去掉,若没有给出决定符号的条件,则在根号前保留±两个符号;若给出α的具体范围,则先求$\frac{\alpha}{2}$的所在范围,然后根据$\frac{\alpha}{2}$所在的范围选用符号.

任务型课堂

学习任务一　应用半角公式求值

1.已知$\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$450^\circ<\alpha<540^\circ$，则$\tan\frac{\alpha}{2}$的值为________.

2　**解析**:由题意得$\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{1}{5}$，

即$1-\sin\alpha=\frac{1}{5}$，得$\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

因为$450^\circ<\alpha<540^\circ$，

所以$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，

所以$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{\frac{4}{5}}=2$.

2.已知$\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，求$\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$，$\tan\frac{\alpha}{2}$的值.

解:因为$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，$\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，所以$\cos\alpha=$

$-\frac{3}{5}$，且$\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}$，

所以 $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=-2$.

反思提炼

利用半角公式求值的思路

涉及半角的正切值时，常利用 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$计算；涉及半角的正弦、余弦值时，常利用$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$，$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$计算.

学习任务二　三角函数式的化简

例 1　化简：$\left(\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}-\tan\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=$________.

2　**解析**：原式$=\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)\cdot\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

$=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2.$

反思提炼

化简问题中的“三变”

(1)变角：寻找式子中各角之间的联系，通过拆、凑等手段消除角之间的差异，合理选择联系它们的公式.

(2)变名：观察三角函数种类的差异，尽量统一函数的名称，如统一为弦或统一为切.

(3)变式：分析式子的结构形式的差异，选择适当的变形途径.如升幂、降幂、配方、开方等.

探究训练

化简：$\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=$　　(　　)

A.$\sin\alpha$　　B.$\cos\alpha$

C.$\tan\alpha$　　D.$-\sin\alpha$

C　**解析**：$\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+(2\cos^2\alpha-1)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$.

学习任务三　三角函数式的证明

例 2　求证：$\tan\frac{3x}{2}-\tan\frac{x}{2}=\frac{2\sin x}{\cos x+\cos 2x}$.

证明：左边$=\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}}-\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$

$=\frac{\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$=\frac{\sin x}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin x}{\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}\right)}$

$=\frac{2\sin x}{\cos 2x+\cos x}=$右边.

所以原等式成立.

反思提炼

三角恒等式证明的思路

通过观察分析等式两端的结构，从两端角的差异、三角函数名称及结构的差异入手，寻求证明途径，或消除等式两端的差异，达到形式上的统一.

探究训练

1.设 α 为第四象限角，若$\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=\frac{13}{5}$，则 $\tan 2\alpha=$________.

$-\frac{3}{4}$　**解析**：因为 $\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos^2\alpha+(2\cos^2\alpha-1)\sin\alpha=4\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin\alpha=4\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)-\sin\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$，所以$\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=\frac{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{\sin\alpha}=3-4\sin^2\alpha=\frac{13}{5}$.又 α 为第四象限角，所以 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\cos\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，于是 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{1}{3}$.所以 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times\left(-\frac{1}{3}\right)}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{3}{4}$.

2.证明：$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$.

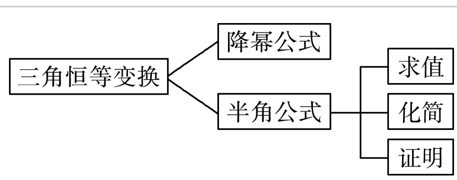
证明：$\cos 3\theta=\cos(2\theta+\theta)$

$=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta$

$=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta$

$=4\cos^3\theta-3\cos\theta$.

体系构建



课后素养评价（五十四）

基础性·能力运用

1. 已知 $\cos x=\frac{2}{3}$，且 x 为第四象限角，则 $\tan\frac{x}{2}=$　（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

B　**解析**：因为 $\cos x=\frac{2}{3}$，且 x 为第四象限角，所以 $\sin x=-\sqrt{1-\cos^2 x}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$，则 $\tan\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

2. 已知 $\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{7}{25}$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)=$　（　　）

A. $\frac{3}{5}$　　B. $-\frac{3}{5}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $-\frac{4}{5}$

A　**解析**：因为 $\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)-1=-\frac{7}{25}$，所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)=\pm\frac{3}{5}$.

又 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3}{5}$.

3. 若 $\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，$\sin 2\theta=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，则 $\sin\theta=$　（　　）

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{7}}{4}$　　D. $\frac{3}{4}$

D　**解析**：（方法一）由 $\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 可得 $2\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，所以 $\cos 2\theta=-\sqrt{1-\sin^2 2\theta}=-\frac{1}{8}$，$\sin\theta=\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}=\frac{3}{4}$.

（方法二）由 $\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 及 $\sin 2\theta=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，可得 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{1+\sin 2\theta}=\sqrt{1+\frac{3\sqrt{7}}{8}}=\sqrt{\frac{16+6\sqrt{7}}{16}}=\sqrt{\frac{9+6\sqrt{7}+7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}+\frac{3}{4}$.

而当 $\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$\sin\theta>\cos\theta$.

结合选项即可得 $\sin\theta=\frac{3}{4}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

4. 若 θ 是第二象限角，且 $25\sin^2\theta+\sin\theta-24=0$，则 $\cos\frac{\theta}{2}=$________.

$\pm\frac{3}{5}$　**解析**：由 $25\sin^2\theta+\sin\theta-24=0$，且 θ 是第二象限角，

得 $\sin\theta=\frac{24}{25}$ 或 $\sin\theta=-1$（舍去），故 $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\frac{7}{25}$.

由 $\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}$，得 $\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{9}{25}$. 又 $\frac{\theta}{2}$ 是第一、三象限角，所以 $\cos\frac{\theta}{2}=\pm\frac{3}{5}$.

5. 计算：$\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}=\underline{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$.

6. 求证：$\frac{\sin A+2\sin 3A+\sin 5A}{\sin 3A+2\sin 5A+\sin 7A}=\frac{\sin 3A}{\sin 5A}$.

证明：左边 $=\frac{(\sin A+\sin 5A)+2\sin 3A}{(\sin 3A+\sin 7A)+2\sin 5A}$

$=\frac{2\sin 3A\cos 2A+2\sin 3A}{2\sin 5A\cos 2A+2\sin 5A}$

$=\frac{2\sin 3A(\cos 2A+1)}{2\sin 5A(\cos 2A+1)}=\frac{\sin 3A}{\sin 5A}=$右边，

所以原等式成立.

综合性·创新提升

1. 已知 $\sin\theta=\frac{3}{5}$，$\frac{5\pi}{2}<\theta<3\pi$，那么 $\tan\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}$ 的值为　（ B ）

A. $\frac{\sqrt{10}}{10}-3$　　B. $3-\frac{\sqrt{10}}{10}$

C. $-3-\frac{\sqrt{10}}{10}$　　D. $3+\frac{\sqrt{10}}{10}$

2. 设 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 6^\circ-\frac{1}{2}\sin 6^\circ$，$b=\frac{2\tan 27^\circ}{1-\tan^2 27^\circ}$，$c=\sqrt{\frac{1-\cos 110^\circ}{2}}$，则有　（　　）

A. $c<b<a$　　B. $a<b<c$

C. $a<c<b$　　D. $b<c<a$

C　**解析**:由题意得,$a=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 6°-\frac{1}{2}\sin 6°=\sin(60°-6°)=\sin 54°$,$b=\frac{2\tan 27°}{1-\tan^2 27°}=\tan 54°$,$c=\sqrt{\frac{1-\cos 110°}{2}}=\sin 55°$,

因为 $\tan 54°>\tan 45°=1$,$\sin 54°<\sin 55°<1$,所以 $a<c<b$.

3. 函数 $y=\frac{\cos 2x+\sin 2x}{\cos 2x-\sin 2x}$ 的最小正周期为________.

$\frac{\pi}{2}$　**解析**:$y=\frac{\cos 2x+\sin 2x}{\cos 2x-\sin 2x}=\frac{1+\tan 2x}{1-\tan 2x}$

$=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan 2x}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan 2x}=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,

故函数的最小正周期是 $T=\frac{\pi}{2}$.

4. 若 $\tan\frac{\theta}{2}=2$,则 $\sin 2\theta+\cos 2\theta=$________.

$-\frac{31}{25}$　**解析**:$\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{4}{1-4}=-\frac{4}{3}$,

则 $\sin 2\theta+\cos 2\theta=2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$=\frac{2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

$=\frac{2\tan\theta+1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{-\frac{8}{3}+1-\frac{16}{9}}{1+\frac{16}{9}}=-\frac{31}{25}$.

5.(新定义)当 $\alpha\neq(2k+1)\pi$,$k\in\mathbf{Z}$ 时,等式 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ 恒成立,我们把这个恒等式叫"半角公式".

(1)证明上述半角公式;

(2)若 α,β 都是锐角,$\cos\alpha=\frac{4}{5}$,$\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$,试求 $\tan\frac{\beta}{2}$ 的值.

(1)**证明**:右边 $=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1+2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

$=\tan\frac{\alpha}{2}=$ 左边.

(2)**解**:因为 α,β 都是锐角,由 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$,得 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

因为 $0<\alpha+\beta<\pi$,$\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$,所以 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{12}{13}$,

所以 $\sin\beta=\sin(\alpha+\beta-\alpha)=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha=\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}-\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}=\frac{33}{65}$,

所以 $\cos\beta=\sqrt{1-\left(\frac{33}{65}\right)^2}=\frac{56}{65}$,

所以 $\tan\frac{\beta}{2}=\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}=\frac{\frac{33}{65}}{1+\frac{56}{65}}=\frac{33}{121}=\frac{3}{11}$.

第 2 课时　三角恒等变换的综合应用

学习任务目标

1. 了解三角恒等变换的特点、变换技巧,掌握三角恒等变换的基本思想方法.

2. 能利用三角恒等变换对三角函数式进行化简、求值以及解决三角恒等式的证明和一些简单的应用问题.

问题式预习

知识清单

知识点　辅助角公式

$a\sin x+b\cos x=$ $\underline{\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)}$,其中 $\tan\theta=\frac{b}{a}$.

概念辨析

1.(多选)$\sin x-\cos x=$　　(　　)

A. $\sqrt{2}\sin(x-45°)$　　B. $-\sqrt{2}\cos(x-45°)$

C. $\sqrt{2}\sin(x+45°)$　　D. $-\sqrt{2}\cos(x+45°)$

AD　**解析**:$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$

$=-\sqrt{2}(\cos 45°\cos x-\sin 45°\sin x)$

$=-\sqrt{2}\cos(x+45°)$

$=\sqrt{2}\sin(x-45°)$.

2.函数 $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$ 的最小正周期为　(　　)

A.$\frac{\pi}{2}$　　B.π

C.2π　　D.4π

B　**解析**:$f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$

$=2\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)$

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

因为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$,所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π.故选 B.

3.请思考并回答下列问题:

(1)根据两角和、差的正弦公式,你能把式子 $\sin x\pm\cos x$,$\sin x\pm\sqrt{3}\cos x$,$\cos x\pm\sqrt{3}\sin x$ 进行化简吗?

提示:$\sin x\pm\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)$,$\sin x\pm\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x\pm\frac{\pi}{3}\right)$,$\cos x\pm\sqrt{3}\sin x=2\sin\left(\frac{\pi}{6}\pm x\right)$.

(2)由辅助角公式,你能得到函数 $y=a\sin x+b\cos x$ 的最值吗?

提示:最大值为 $\sqrt{a^2+b^2}$,最小值为 $-\sqrt{a^2+b^2}$.

任务型课堂

学习任务一　利用辅助角公式研究三角函数的性质

1.函数 $f(x)=2\cos^2\frac{x}{2}+\sin x$ 的最小正周期是______.

2π　**解析**:$f(x)=2\cos^2\frac{x}{2}+\sin x=1+\cos x+\sin x=1+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,所以 $T=\frac{2\pi}{1}=2\pi$.

2.已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$ $(x\in\mathbf{R})$.

(1)求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2)求使函数 $f(x)$ 取得最大值的 x 的集合.

解:(1)因为 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$

$=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\right]+1$

$=2\sin\left[\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]+1=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$,

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)当 $f(x)$ 取得最大值时,$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1$,

则 $2x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

即 $x=k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.

所以所求 x 的集合为 $\left\{x\,\middle|\,x=k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

[一题多思]

思考1.辅助角公式的作用是什么?

提示:作用是把三角函数式化为一个角的三角函数,从而可以更方便地研究三角函数的图象和性质.

思考2.在本题中,若把函数换为“$f(x)=\sin^2 x-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right),x\in\mathbf{R}$”,则 $f(x)$ 的最小正周期是多少?你能求出 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值吗?

提示:(1)由已知,得 $f(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$,

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$,所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减,在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增,

且 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{4}$,$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$,$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$,最小值为 $-\frac{1}{2}$.

反思提炼

研究三角函数的性质，如单调性、最值等，通常是把复杂的三角函数式通过恰当的三角变换，转化为简单的三角函数式，再研究转化后的函数的性质.在这个过程中通常利用辅助角公式，将 $y=a\sin x+b\cos x$ 转化为 $y=A\sin(x+\varphi)$ 或 $y=A\cos(x+\varphi)$ 的形式，以便研究函数的性质.

学习任务二　利用三角恒等变换证明、求值

例 1　(1)计算：$\sin^2\frac{5\pi}{24}-\sin^2\frac{\pi}{24}=$________.

$\frac{\sqrt{2}}{4}$　**解析**：由 $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$，

得 $\sin^2\frac{5\pi}{24}-\sin^2\frac{\pi}{24}=\sin\left(\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{24}-\frac{\pi}{24}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(2)求证：$\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$.

证明：因为 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，

所以 $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta$

$=\cos^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\cos^2\alpha)\sin^2\beta$

$=\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta$

$=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

反思提炼

角的三种变换

(1)配角变换：

$\alpha=2\cdot\frac{\alpha}{2}$，$\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$，$\alpha=\beta-(\beta-\alpha)$，$\alpha=\frac{1}{2}[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]$，$\beta=\frac{1}{2}[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]$，$\frac{\pi}{4}+\alpha=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$等.

(2)辅助角变换：

$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$，其中 $\tan\varphi=\frac{b}{a}$.

(3)常值代换：

$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$，$1=\sin 90°=\tan 45°$，$\frac{1}{2}=\sin 30°$，$\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30°$等.

探究训练

$\frac{\tan 12°-\sqrt{3}}{\sin 6°\sin 84°}+32\cos^2 12°$的值为　(　　)

A.4　　B.8

C.16　　D.32

C　**解析**：原式$=\frac{\tan 12°-\tan 60°}{\sin 6°\cos 6°}+16(2\cos^2 12°-1)+16$

$=\frac{\frac{\sin 12°}{\cos 12°}-\frac{\sin 60°}{\cos 60°}}{\frac{1}{2}\sin 12°}+16\cos 24°+16$

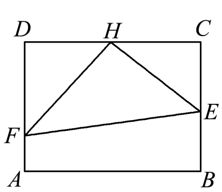
$=\frac{\sin 12°\cos 60°-\cos 12°\sin 60°}{\frac{1}{2}\sin 12°\cos 12°\cos 60°}+16\cos 24°+16$

$=\frac{\sin(12°-60°)}{\frac{1}{8}\sin 24°}+16\cos 24°+16$

$=\frac{-2\sin 24°\cos 24°}{\frac{1}{8}\sin 24°}+16\cos 24°+16=16$.

学习任务三　三角恒等变换在实际生活中的应用

例 2　某高校教学楼前现有一块矩形草坪 $ABCD$.已知草坪长 $AB=100$ m，宽 $BC=50\sqrt{3}$ m.该高校计划在这块草坪内铺设三条小路 HE，HF 和 EF，并要求 H 是 CD 的中点，点 E 在边 BC 上，点 F 在边 AD 上，且$\angle EHF$ 为直角，如图所示.设$\angle CHE=x$(单位：rad).



(1)试将三条路的全长(即$\triangle HEF$ 的周长)L(单位：m)表示成 x 的函数，并求出此函数的定义域.

(2)这三条路的铺设预算费用均为 400 元/m，试问如何设计才能使铺路的总费用最低？求出最低总费用.(结果保留整数)

可能用到的参考值：$\sqrt{3}\approx1.732$，$\sqrt{2}\approx1.414$.

解：(1)在 Rt$\triangle CHE$ 中，因为 $CH=50$ m，$\angle C=90°$，$\angle CHE=x$，所以 $HE=\frac{50}{\cos x}$.

在 Rt$\triangle HDF$ 中，$HD=50$ m，$\angle D=90°$，$\angle DFH=x$，所以 $HF=\frac{50}{\sin x}$.

又$\angle EHF=90°$，所以 $EF=\frac{50}{\sin x\cos x}$.

所以三条路的全长（即$\triangle HEF$的周长）$L=\dfrac{50(\sin x+\cos x+1)}{\sin x\cos x}$.

当点F与点A重合时，角x最小，求得此时$x=\dfrac{\pi}{6}$；

当点E与点B重合时，角x最大，求得此时$x=\dfrac{\pi}{3}$.

故此函数的定义域为$\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$.

(2)由题意知，要求最低铺路总费用，只要求出$\triangle HEF$的周长L的最小值即可.

由(1)得$L=\dfrac{50(\sin x+\cos x+1)}{\sin x\cos x}$，$x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$.设$\sin x+\cos x=t$，则$\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$.

所以$L=\dfrac{50(t+1)}{\dfrac{t^2-1}{2}}=\dfrac{100}{t-1}$.

由$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$，得$\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$.

从而$\sqrt{2}+1\leqslant\dfrac{1}{t-1}\leqslant\sqrt{3}+1$.

所以当$x=\dfrac{\pi}{4}$，即$CE=50$ m时，$L_{\min}=100(\sqrt{2}+1)$m.

此时，铺路总费用最低为$400\times100(\sqrt{2}+1)\approx96\ 560$(元).

所以，当$CE=DF=50$ m时，铺路总费用最低，最低总费用为96 560元.

反思提炼

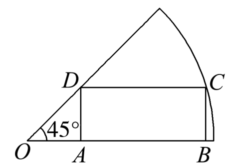
三角恒等变换的实际应用问题的关注点

(1)关键：合理引入辅助角α，确定各量之间的关系，将实际问题转化为三角函数问题.

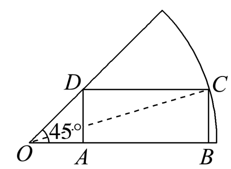
(2)注意：①充分借助平面几何性质，寻找数量关系；②注意实际问题中变量(角α)的范围；③重视三角函数有界性的影响.

探究训练

如图，某工人要从一块圆心角为45°的扇形木板中割出一块长方形木板.已知长方形的一边在扇形的半径上，且长方形内接于扇形.若扇形的半径长为1 m，求割出的长方形木板的最大面积.



解：如图，连接OC.



设$\angle COB=\theta$，则$0°<\theta<45°$，$OC=1$.

因为$AB=OB-OA=\cos\theta-AD=\cos\theta-\sin\theta$，

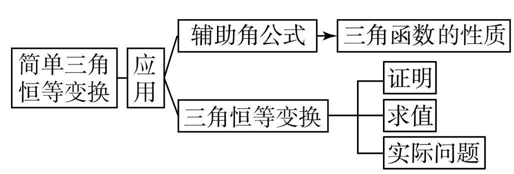
所以$S_{长方形ABCD}=AB\cdot BC=(\cos\theta-\sin\theta)\cdot\sin\theta$

$=-\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{2}(1-\cos2\theta)+\dfrac{1}{2}\sin2\theta$

$=\dfrac{1}{2}(\sin2\theta+\cos2\theta)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(2\theta-45°)-\dfrac{1}{2}$.

当$2\theta-45°=0°$，即$\theta=22.5°$时，$S_{(长方形ABCD)\max}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}(\mathrm{m}^2)$.所以割出的长方形木板的最大面积为$\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\ \mathrm{m}^2$.

体系构建



课后素养评价(五十五)

基础性·能力运用

1.函数$f(x)=\sin x-\cos x$的图象　　(　　)

A.关于直线$x=\dfrac{\pi}{4}$对称

B.关于直线$x=-\dfrac{\pi}{4}$对称

C.关于直线$x=\dfrac{\pi}{2}$对称

D.关于直线$x=-\dfrac{\pi}{2}$对称

B　解析：函数 $f(x)=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，所以由 $x-\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得到 $x=k\pi+\frac{3\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，则当 $k=-1$ 时，函数的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{4}$ 对称.

2. 函数 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x(x\in[-\pi,0])$ 的单调递增区间是　(　　)

A. $\left[-\pi,-\frac{5\pi}{6}\right]$　B. $\left[-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right]$

C. $\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$　D. $\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$

D　解析：因为 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，所以由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得到 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{5\pi}{6}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

令 $k=0$ 得单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$.

因为 $x\in[-\pi,0]$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$. 故选 D.

3. 化简：$\dfrac{\sqrt{1-2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}}{\sin 10^\circ-\sqrt{1-\sin^2 10^\circ}}=$________.

-1　解析：$\dfrac{\sqrt{1-2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}}{\sin 10^\circ-\sqrt{1-\sin^2 10^\circ}}=\dfrac{|\sin 10^\circ-\cos 10^\circ|}{\sin 10^\circ-\cos 10^\circ}=\dfrac{\cos 10^\circ-\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ-\cos 10^\circ}=-1$.

4. 若 $3\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sqrt{3}\sin(x+\varphi)$，$\varphi\in(-\pi,\pi)$，则 $\varphi=$________.

$-\frac{\pi}{6}$　解析：因为 $3\sin x-\sqrt{3}\cos x$

$=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)$

$=2\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，

所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 因为 $\varphi\in(-\pi,\pi)$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

5. 已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x+2\cos^2 x-1$.

(1)求 $f(x)$ 的最小正周期；

(2)求 $f(x)$ 的单调递增区间；

(3)求 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)$ 的最大值和最小值.

解：$f(x)=2\sin x\cos x+2\cos^2 x-1=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

(1) $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2) $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

得 $k\pi-\frac{3\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{\pi}{8}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

(3)因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，

所以 $2x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$.

当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{8}$ 时，$f(x)$ 取到最大值为 $\sqrt{2}$；

当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 取到最小值为 -1.

综合性·创新提升

1. $(2\sqrt{3}\cos 20^\circ-\tan 70^\circ)\cos 10^\circ=$　(　　)

A. $\sqrt{3}$　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　C. $\frac{1}{2}$　D. 1

C　解析：$(2\sqrt{3}\cos 20^\circ-\tan 70^\circ)\cos 10^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{3}\sin 40^\circ-\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}\cdot\cos 10^\circ$

$=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^\circ+\frac{3}{2}\sin 10^\circ-\cos(30^\circ-10^\circ)}{\sin 20^\circ}\cdot\cos 10^\circ$

$=\dfrac{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{\sin 20^\circ}=\dfrac{1}{2}$.

2. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x(\omega>0)$ 在 $[0,\pi]$ 上有两个零点，则 ω 的取值范围为　(　　)

A. $\left(\frac{11}{6},\frac{17}{6}\right)$　　B. $\left[\frac{11}{6},\frac{17}{6}\right)$

C. $\left(\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)$　　D. $\left[\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)$

B　**解析**：$f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，因为 $x\in[0,\pi]$，所以 $\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\omega\pi+\frac{\pi}{6}\right]$.要使函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有两个零点，则 $2\pi\leqslant\omega\pi+\frac{\pi}{6}<3\pi$，

解得 $\frac{11}{6}\leqslant\omega<\frac{17}{6}$.所以 ω 的取值范围为 $\left[\frac{11}{6},\frac{17}{6}\right)$.

3. 已知正实数 a,b 满足 $\dfrac{a\sin\frac{\pi}{5}+b\cos\frac{\pi}{5}}{a\cos\frac{\pi}{5}-b\sin\frac{\pi}{5}}=\tan\frac{8\pi}{15}$，则 $\frac{b}{a}$ 的值为________.

$\sqrt{3}$　**解析**：由题设得 $\dfrac{\sin\frac{\pi}{5}+\frac{b}{a}\cos\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}-\frac{b}{a}\sin\frac{\pi}{5}}=\dfrac{\sin\frac{8}{15}\pi}{\cos\frac{8}{15}\pi}\Rightarrow$

$$\frac{b}{a}=\frac{\sin\frac{8}{15}\pi\cdot\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{8}{15}\pi\cdot\sin\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{8}{15}\pi\cdot\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{8}{15}\pi\cdot\sin\frac{\pi}{5}}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{8}{15}\pi-\frac{\pi}{5}\right)}{\cos\left(\frac{8}{15}\pi-\frac{\pi}{5}\right)}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}.$$

4. 已知函数 $f(x)=\sin x\tan x$.给出下列结论：

①函数 $f(x)$ 是偶函数；②函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递增；③函数 $f(x)$ 的最小正周期是 2π；④函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\pi$ 对称.

其中正确结论的序号是________.（写出所有正确结论的序号）

①③④　**解析**：对于 $f(x)=\sin x\tan x$，其定义域为 $\left\{x\middle|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$，关于原点对称，

且 $f(-x)=\sin(-x)\tan(-x)=\sin x\tan x=f(x)$，

所以函数 $f(x)$ 是偶函数，故①正确；

当 $x=-\frac{\pi}{3}$ 时，$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$，

当 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时，$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

$-\frac{\pi}{3}<-\frac{\pi}{6}$，而 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)>f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，故②错误；

因为 $f(2\pi+x)=\sin(x+2\pi)\tan(x+2\pi)=\sin x\tan x$，

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期是 2π，故③正确；

因为 $f(\pi-x)=\sin(\pi-x)\tan(\pi-x)=-\sin x\tan x$，

$f(\pi+x)=\sin(\pi+x)\tan(\pi+x)=-\sin x\tan x$，

所以 $f(\pi-x)=f(\pi+x)$，即函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\pi$ 对称，故④正确.

所以正确结论的序号是①③④.

5. 已知函数 $f(x)=2\sin x+3\cos x$，$x_1,x_2\in\mathbf{R}$，则 $f(x_1)-f(x_2)$ 的最大值是________.

$2\sqrt{13}$　**解析**：因为 $f(x)=2\sin x+3\cos x=\sqrt{13}\sin(x+\varphi)\left(其中\ \tan\varphi=\frac{3}{2}\right)$，

所以 $f(x)_{\max}=\sqrt{13}$，$f(x)_{\min}=-\sqrt{13}$.

因为 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，所以 $f(x_1)-f(x_2)$ 的最大值为 $f(x_1)_{\max}-f(x_2)_{\min}=\sqrt{13}-(-\sqrt{13})=2\sqrt{13}$.

5.6 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$

第 1 课时 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象变换

学习任务目标

1.理解 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$中 ω,φ,A 的意义.

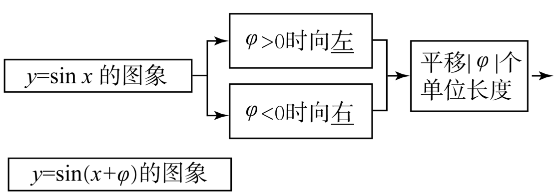
2.掌握 $y=\sin x$ 与 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$图象间的变换关系,并能正确地指出其变换步骤.

问题式预习

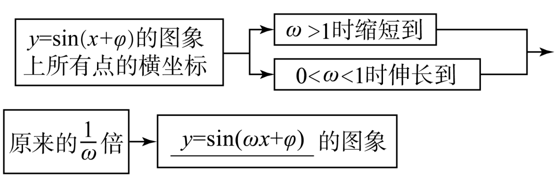
知识清单

知识点一 A,ω,φ 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$图象的影响

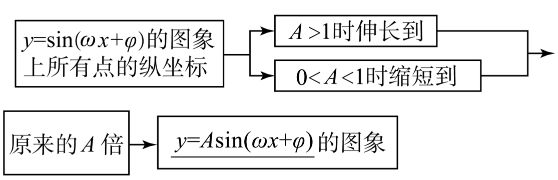
(1)φ 对函数 $y=\sin(x+\varphi)$图象的影响:



(2)ω 对函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$图象的影响:



(3)A 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$图象的影响:



知识点二 由函数 $y=\sin x$ 的图象到函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$的图象的变换过程

$y=\sin x$ 的图象 $\xrightarrow[\text{平移}|\varphi|\text{个单位长度}]{\text{向左}(\varphi>0)\text{或向右}(\varphi<0)}$ $y=\sin(x+\varphi)$的图象 $\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{所有点的横坐标变为原来的}\frac{1}{\omega}\text{倍}}$ $y=\sin(\omega x+\varphi)$的图象 $\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{所有点的纵坐标变为原来的 }A\text{ 倍}}$ $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象.

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)把函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度,得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象. (×)

(2)要得到函数 $y=\sin\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象,可把函数 $y=\sin(-x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度. (×)

(3)把函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标变为原来的 2 倍,得到 $y=\sin 2x$ 的图象. (×)

(4)函数 $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象是由函数 $y=\cos x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度得到的. (√)

2.将函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x$ 的图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍(横坐标不变),再向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后得到函数 $g(x)$的图象,则 $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=$3.

3.请思考并回答下列问题:

(1)ω 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象有何影响?

提示:$\omega(\omega>0)$影响函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的周期.

(2)在函数图象的变换过程中,一定是先平移再伸缩吗?如果先伸缩,那么平移的长度一样吗?

提示:平移变换与伸缩变换没有先后顺序,但是两种不同顺序的变换下的平移的长度不一样,先伸缩时的需平移$\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$个单位长度.

任务型课堂

学习任务一　三角函数图象的平移变换

1.要得到函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，只需将 $y=\sin x$ 的图象　（　　）

A.向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

B.向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

C.向上平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

D.向下平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

B　**解析：**函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，可以看作是把正弦曲线 $y=\sin x$ 上所有的点向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度而得到的.

［一题多思］

思考1.函数 $y=\sin x$ 的图象可以看作是由 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象经过怎样的变换而得到的？

提示：函数 $y=\sin x$ 的图象可以看作是由 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度而得到的.

思考2.函数 $y=\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ 的图象可以看作是由 $y=\sin(-x)$ 的图象经过怎样的变换而得到的？

提示：因为 $y=\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sin\left[-\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]$，故 $y=\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ 的图象是由 $y=\sin(-x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到的.

思考3.函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象经过怎样的变换，可以得到 $y=\cos x$ 的图象？

提示：因为 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，故只需将函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度即可得到 $y=\cos x$ 的图象.

2.要得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，只需将 $y=\sin 2x$ 的图象　（　　）

A.向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

B.向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

C.向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

D.向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

C　**解析：**因为 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，所以把 $y=\sin 2x$ 图象上的所有点向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，就得到 $y=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

3.若把函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $m(m>0)$ 个单位长度后，得到 $y=\sin x$ 的图象，则 m 的最小值为　（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{5\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

C　**解析：**由题设，$y=\sin\left(x-m+\frac{\pi}{3}\right)=\sin x$，所以 $\frac{\pi}{3}-m=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则 $m=\frac{\pi}{3}-2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

又 $m>0$，所以 m 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$.

反思提炼

图象平移变换的关注点

(1)解题关键：确定平移方向和平移的量.

(2)平移方法：

①由 $y=\sin x$ 的图象平移得到 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象时，若 $\varphi>0$，则左移 φ 个单位长度；若 $\varphi<0$，则右移 $|\varphi|$ 个单位长度.

②由 $y=\sin\omega x(\omega>0)$ 的图象平移得到 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象时，若 $\varphi>0$，则左移 $\frac{\varphi}{\omega}$ 个单位长度；若 $\varphi<0$，则右移 $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$ 个单位长度.

学习任务二　三角函数图象的伸缩变换

1.要得到 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 的图象,则 (　　)

A.只需将函数 $y=\sin x$ 的图象向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度

B.只需将函数 $y=\sin x$ 的图象上每一点的纵坐标不变,横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$

C.只需将函数 $y=\sin x$ 的图象上每一点的纵坐标不变,横坐标伸长到原来的 2 倍

D.只需将函数 $y=\sin x$ 的图象上每一点的纵坐标伸长到原来的 2 倍,横坐标也伸长到原来的 2 倍

C　**解析**:因为 $\omega=\frac{1}{2}<1$,故将函数 $y=\sin x$ 图象上每一点的纵坐标不变,横坐标扩大到原来的 2 倍即可.

2.下列变换中,正确的是 (　A　)

A.将 $y=\sin 2x$ 图象上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变),即可得到 $y=\sin x$ 的图象

B.将 $y=\sin 2x$ 图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标不变),即可得到 $y=\sin x$ 的图象

C.将 $y=-\sin 2x$ 图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$,纵坐标变为原来的相反数,即可得到 $y=\sin x$ 的图象

D.将 $y=-3\sin 2x$ 图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$,纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$,且变为相反数,即可得到 $y=\sin x$ 的图象

3.函数 $y=\cos x$ 图象上各点的纵坐标不变,横坐标变为原来的 2 倍,得到图象的解析式为 $y=\cos\omega x$,则 ω 的值为________.

$\frac{1}{2}$　**解析**:函数 $y=\cos x$ 的图象上的点 $\xrightarrow[\text{原来的 2 倍}]{\text{纵坐标不变,横坐标变为}}$ $y=\cos\frac{1}{2}x$ 的图象,所以 $\omega=\frac{1}{2}$.

反思提炼

图象伸缩变换的关注点

(1)两个弄清:弄清是横向还是纵向,弄清是伸长还是缩短.

(2)伸缩规律:由 $y=\sin x$ 的图象伸缩得到 $y=\sin\omega x(\omega>0)$ 的图象时,所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍;由 $y=\sin x$ 的图象伸缩得到 $y=A\sin x(A>0)$ 的图象时,所有点的纵坐标变为原来的 A 倍.

学习任务三　三角函数图象变换的综合应用

例　(1)将函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象先向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,然后将所得图象上所有的点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变),则所得到的图象对应的函数解析式为 (　　)

A.$y=-\cos x$　　B.$y=\sin 4x$

C.$y=\sin x$　　D.$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

C　**解析**:$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象 $\xrightarrow{\text{向左平移}\frac{\pi}{6}\text{个单位长度}}$ $y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\sin 2x$ 的图象 $\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标伸长到原来的 2 倍}}$ $y=\sin x$ 的图象.

(2)把函数 $y=f(x)$ 的图象上的各点向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,然后把横坐标伸长到原来的 2 倍,再把纵坐标缩短到原来的 $\frac{2}{3}$,所得图象的解析式是 $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$,求函数 $f(x)$ 的解析式.

解:$y=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象 $\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{纵坐标伸长到原来的}\frac{3}{2}\text{倍}}$ $y=3\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象 $\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标缩短到原来的}\frac{1}{2}}$ $y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象 $\xrightarrow{\text{向左平移}\frac{\pi}{6}\text{个单位长度}}$ $y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=3\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=3\cos x$ 的图象.

所以 $f(x)=3\cos x$.

反思提炼

三角函数图象变换的关注点

(1)步骤:先用诱导公式将不同名三角函数化为同名三角函数,再根据平移、伸缩变换,得出最终结果.

(2)注意:由 $y=\sin x$ 的图象能经过图象变换得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的图象,若先平移,则

平移$|\varphi|$个单位长度；若先伸缩再平移，则平移$\left|\dfrac{\varphi}{\omega}\right|$个单位长度.

探究训练

1. 将函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再将所得图象向右平移$\dfrac{\pi}{4}$个单位长度得曲线 C，则曲线 C 对应的函数解析式是________.

$y=\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)$　**解析**：$y=\sin x$ 的图象$\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍}}y=\sin\dfrac{x}{2}$的图象$\xrightarrow{\text{向右平移}\frac{\pi}{4}\text{个单位长度}}y=\sin\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)$的图象.

2. 如何由函数 $y=\sin x$ 的图象得到函数 $y=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$的图象？

解：（方法一）$y=\sin x$ 的图象$\xrightarrow{\text{向右平移}\frac{\pi}{3}\text{个单位长度}}$

$y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$的图象$\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{将各点的横坐标缩短到原来的}\frac{1}{2}}$

$y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$的图象$\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{将各点的纵坐标伸长到原来的 3 倍}}$

$y=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$的图象.

（方法二）$y=\sin x$ 的图象$\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{将各点的横坐标缩短到原来的}\frac{1}{2}}$

$y=\sin 2x$ 的图象$\xrightarrow{\text{向右平移}\frac{\pi}{6}\text{个单位长度}}$

$y=\sin 2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$的图象$\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{将各点的纵坐标伸长到原来的 3 倍}}$

$y=3\sin 2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$的图象.

体系构建

- 函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$
  - ω，φ，A对图象的影响
  - 图象变换
    - 平移变换
    - 伸缩变换
    - 综合问题

课后素养评价（五十六）

基础性·能力运用

1. 将函数 $y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$的图象向右平移$\dfrac{1}{4}$个周期后，所得图象对应的函数为　　（　　）

A. $y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

B. $y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

C. $y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

D. $y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

D　**解析**：函数 $y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，

将图象向右平移$\dfrac{1}{4}$个周期，即向右平移$\dfrac{\pi}{4}$个单位长度后，

得到的图象对应的函数为 $y=2\sin\left[2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

2.（多选）要得到函数 $y=\sin x$ 的图象，可以将函数 $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{5}\right)$的图象上所有的点　　（　　）

A. 先向右平移$\dfrac{\pi}{5}$个单位长度，再把所得各点的横坐标缩短到原来的$\dfrac{1}{2}$（纵坐标不变）

B. 先向左平移$\dfrac{\pi}{10}$个单位长度，再把所得各点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变）

C. 先把横坐标缩短到原来的$\dfrac{1}{2}$（纵坐标不变），再把所得各点向右平移$\dfrac{\pi}{10}$个单位长度

D. 先把横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再把所得各点向左平移$\dfrac{\pi}{5}$个单位长度

BD　**解析**：只需将函数 $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{5}\right)$的图象上所有的点，横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），可得 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{5}\right)$的图象，再向左平移$\dfrac{\pi}{5}$个单位长度，可得函数 $y=\sin x$ 的图象，故 D 正确；

又 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{10}\right)\right]$，所以将函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{10}\right)\right]$ 的图象上所有的点，先向左平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度，得到函数 $y=\sin 2x$ 的图象，再把所得各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，可得函数 $y=\sin x$ 的图象，故 B 正确.

3. 为了得到函数 $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，需将函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上所有点的　　(　　)

A. 纵坐标变为原来的 3 倍，横坐标不变

B. 横坐标变为原来的 3 倍，纵坐标不变

C. 横坐标变为原来的 $\frac{1}{3}$，纵坐标不变

D. 纵坐标变为原来的 $\frac{1}{3}$，横坐标不变

C　**解析**：只需将函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{3}$，纵坐标不变，便得到函数 $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象.

4. 将函数 $y=3\sin 2x$ 的图象向左平移 $\varphi\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 个单位长度，所得图象关于 y 轴对称，则 $\varphi=$________.

$\frac{\pi}{4}$　**解析**：$y=3\sin[2(x+\varphi)]=3\sin(2x+2\varphi)$ 为偶函数，所以 $2\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$. 又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

5. 将函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象上所有点的横坐标保持不变，纵坐标________（填“伸长”或“缩短”）为原来的________倍，将会得到函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象.

伸长　3　**解析**：$A=3>0$，故将函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象上所有点的横坐标保持不变，纵坐标伸长为原来的 3 倍即可得到函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象.

6. 已知函数 $y=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+2$.

(1)求函数的最小正周期及单调递增区间；

(2)函数的图象可由 $y=\sin x$ 的图象经过怎样的变换而得到？

解：(1) $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$，

得 $k\pi-\frac{3\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{8}, k\in\mathbf{Z}$.

所以函数的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{3\pi}{8}, k\pi+\frac{\pi}{8}\right], k\in\mathbf{Z}$.

(2) $y=\sin x$ 的图象 $\xrightarrow{\text{向左平移}\frac{\pi}{4}\text{个单位长度}}$ $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象 $\xrightarrow{\text{各点横坐标缩短到原来的}\frac{1}{2}\text{(纵坐标不变)}}$ $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象 $\xrightarrow{\text{各点纵坐标伸长到原来的}\sqrt{2}\text{倍(横坐标不变)}}$ $y=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象 $\xrightarrow{\text{向上平移 2 个单位长度}}$ $y=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+2$ 的图象.

综合性·创新提升

1. 要得到函数 $y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，只需将函数 $y=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$ 的图象　　(　　)

A. 向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度

B. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

C. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

D. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

B　**解析**：只需将 $y=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，就可得到 $y=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象.

2. (2022·全国甲卷)将函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到曲线 C. 若 C 关于 y 轴对称，则 ω 的最小值是　　(　　)

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

C 解析:由题意知,曲线 C 为 $y=\sin\left[\omega\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(\omega x+\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$,又 C 关于 y 轴对称,则 $\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $\omega=\frac{1}{3}+2k,k\in\mathbf{Z}$.又 $\omega>0$,故当 $k=0$ 时,ω 的最小值为 $\frac{1}{3}$.故选 C.

3. 把函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\pi)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,再将图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变),所得图象的函数解析式为 $y=\sin x$,则 ( )

A. $\omega=2,\varphi=\frac{\pi}{6}$　　B. $\omega=2,\varphi=-\frac{\pi}{3}$

C. $\omega=\frac{1}{2},\varphi=\frac{\pi}{6}$　　D. $\omega=\frac{1}{2},\varphi=-\frac{\pi}{3}$

B **解析**:将 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标不变)所得图象的函数解析式为 $y=\sin 2x$,再将此函数图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度可得 $y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]$ 的图象,即 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.所以 $\omega=2,\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

4. (多选)将函数 $y=\sin(2x+\varphi)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后,得到一个奇函数的图象,则 φ 的值可能为 ( )

A. $\frac{5\pi}{4}$　　B. $\frac{3\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $-\frac{\pi}{4}$

BD **解析**:函数 $y=\sin(2x+\varphi)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后,得到的函数图象对应解析式为 $y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)+\varphi\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$.

因为函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$ 是奇函数,则 $\frac{\pi}{4}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,即 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$.当 $k=1$ 时,$\varphi=\frac{3\pi}{4}$,当 $k=0$ 时,$\varphi=-\frac{\pi}{4}$,选项 B,D 满足,A,C 不满足.

5. 为得到函数 $y=\cos x$ 的图象,可以把 $y=\sin x$ 的图象向右平移 φ 个单位长度,那么 φ 的最小正值是________.

$\frac{3}{2}\pi$ **解析**:$y=\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$,向右平移 φ 个单位长度后得 $y=\cos\left(x-\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\varphi+\frac{\pi}{2}=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以 $\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.所以 φ 的最小正值是 $\frac{3}{2}\pi$.

6. 函数 $y=\cos(2x+\varphi)(-\pi\leqslant\varphi<\pi)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后,与函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象重合,则 $\varphi=$ $\underline{\frac{5\pi}{6}}$.

7. 已知函数 $f(x)=2\sin\omega x(\cos\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x)-\sqrt{3}(\omega>0)$ 的最小正周期为 π.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2)将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,再向上平移 2 个单位长度,得到函数 $g(x)$ 的图象,求函数 $g(x)$ 在区间 $[0,5\pi]$ 上所有零点的和.

解:(1) $f(x)=2\sin\omega x(\cos\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x)-\sqrt{3}=\sin 2\omega x+2\sqrt{3}\cdot\frac{1-\cos 2\omega x}{2}-\sqrt{3}=2\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$,因为函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$,所以 $\omega=1$,所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,解得 $k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$,所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right],k\in\mathbf{Z}$.

(2)将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,可得 $y=2\sin 2x$ 的图象;

再向上平移 2 个单位长度,得到函数 $g(x)=2\sin 2x+2$ 的图象.

令 $g(x)=0$,得 $\sin 2x=-1$,所以 $2x=2k\pi-\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,即 $x=k\pi-\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$.

函数 $g(x)$ 在区间 $[0,5\pi]$ 上所有零点的和为 $\frac{3\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}+\frac{11\pi}{4}+\frac{15\pi}{4}+\frac{19\pi}{4}=\frac{55\pi}{4}$.

第 2 课时　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的性质

学习任务目标

1.会用“五点法”画函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象.

2.能根据 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的部分图象,确定其解析式.

3.掌握函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$的性质,并能熟练运用.

问题式预习

知识清单

知识点一　用“五点法”作 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$在一个周期内的图象的步骤

第一步:列表.

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{\pi}{2\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{\pi}{\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{3\pi}{2\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$
y	0	A	0	$-A$	0

第二步:在平面直角坐标系中描出各点.

第三步:用光滑的曲线连接这些点,形成图象.

知识点二　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$的性质

定义域	$\mathbf{R}$	
值域	$[-A,A]$	
周期性	$T=\frac{2\pi}{\omega}$	
对称性	图象的对称中心:$\left(\frac{k\pi-\varphi}{\omega},0\right)(k\in\mathbf{Z})$	
	图象的对称轴:$x=\frac{\pi}{2\omega}+\frac{k\pi-\varphi}{\omega}(k\in\mathbf{Z})$	
奇偶性	当 $\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$时是奇函数; 当 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$时是偶函数	

概念辨析

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

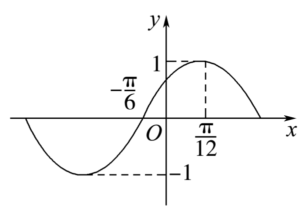
(1)函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象既是中心对称图形,又是轴对称图形.　　(√)

(2)在函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象中,相邻的两条对称轴的距离为 1 个周期.　　(×)

(3)函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象的对称轴方程为 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.　　(√)

(4)函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象的对称中心是 $\left(-k\pi+\frac{\pi}{3},0\right)(k\in\mathbf{Z})$.　　(×)

2.已知某函数的部分图象如图所示,则该函数的解析式为　　(　　)



A.$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$　　B.$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

C.$y=\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$　　D.$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

D　**解析**:由题图可知函数的周期 $T=4\times\left[\frac{\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\pi$,所以 $\omega=2$.又因为函数图象过点$\left(\frac{\pi}{12},1\right)$,所以 $\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi\right)=1$,解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.故选 D.

3.请思考并回答下列问题:

(1)确定函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的解析式,就要确定函数中的哪些参数的值?

提示:A,ω,φ 的值.其中 A 影响的是函数的最大、最小值,ω 影响的是函数的周期.

(2)你能用正弦函数 $y=\sin x$ 的性质类比得到函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的性质吗?

提示:可以,利用整体代换的思想,当 $A>0,\omega>0$ 时,用 $\omega x+\varphi$ 整体代换正弦函数中的 x 即可.

任务型课堂

学习任务一　用“五点法”画 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象

例 1　已知函数 $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，$x\in\mathbf{R}$.

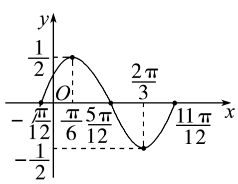
(1)用“五点法”作出它在一个周期内的简图；

(2)该函数的图象可由 $y=\sin x(x\in\mathbf{R})$ 的图象经过怎样的平移和伸缩变换得到？

解：(1)列表：

$2x+\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$
y	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0

描点、连线，如图所示.



(2)将函数 $y=\sin x$ 的图象先向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，再保持纵坐标不变，把横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，再保持横坐标不变，把纵坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，得到函数 $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象.

反思提炼

用“五点法”作函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的关注点

(1)实质：利用函数的三个零点，两个最值点画出函数在一个周期内的图象.

(2)步骤：

第一步：列表.

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{\pi}{2\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{\pi}{\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{3\pi}{2\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$
y	0	A	0	$-A$	0

第二步：在平面直角坐标系中描出各点.

第三步：用光滑的曲线连接这些点，形成图象.

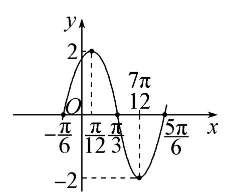
探究训练

用“五点法”作出函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的简图，并指出该函数的单调区间.

解：列表如下：

$2x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
y	0	2	0	-2	0

描点、连线，如图所示.



由图象知，在一个周期内，函数在 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递减，

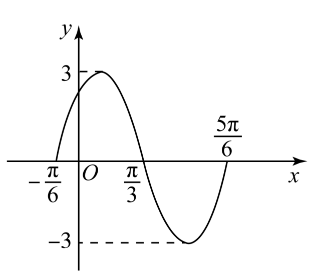
在 $\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递增.

又因为函数的最小正周期为 π，

所以函数的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$，单调递增区间为 $\left[-\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

学习任务二　由图象求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的解析式

例 2　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象的一部分如图所示，求此函数的解析式.



解：(方法一)由题图可知 $A=3$，

$T=\frac{5\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，

所以 $y=3\sin(2x+\varphi)$.

因为点 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 在函数图象上，

所以 $0=3\sin\left(-\frac{\pi}{6}\times 2+\varphi\right)$.

所以 $-\frac{\pi}{6}\times 2+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $\varphi=\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

所以 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

(方法二)由题图知 $A=3$.

因为图象过点$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$和$\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$,

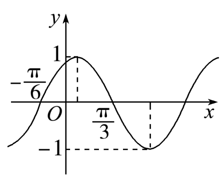
所以$\begin{cases}\frac{5\pi\omega}{6}+\varphi=2\pi,\\ \frac{\pi\omega}{3}+\varphi=\pi,\end{cases}$解得$\begin{cases}\varphi=\frac{\pi}{3},\\ \omega=2.\end{cases}$

所以 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

(方法三)由题图可得 $A=3$,$T=\pi$,点$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$在图象上,可知函数图象由 $y=3\sin 2x$ 向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度而得到,故所求函数为 $y=3\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$,即 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

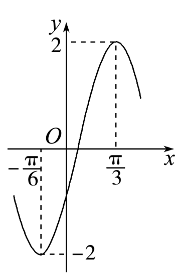
[**一题多思**]

思考 1.本例中函数的图象若换为下图,则 φ 的值是多少?



提示:由题图可知 $A=1$,$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}$,故 $T=\pi$,$\omega=2$,$y=\sin(2x+\varphi)$.由图象可知当 $x=\dfrac{-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{12}$时,$\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi\right)=1$,且$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

思考 2.本例中函数的图象若换为下图,你能求出该函数的解析式吗?



提示:由题图可知 $A=2$,$T=2\times\left[\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\pi$,所以 $\omega=2$,故 $y=2\sin(2x+\varphi)$.由函数图象经过点$\left(\frac{\pi}{3},2\right)$,得 $2\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=2$,所以 $2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$.因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.所以函数的解析式为 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

反思提炼

已知图象求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$的解析式的方法

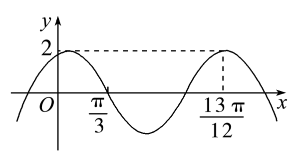
方法一:若从图象可确定最值和周期,则可直接确定函数解析式 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$中的参数 A 和 ω,再选取“第一个零点”(五点法作图中的第一个点的横坐标)的数据代入“$\omega x+\varphi=0$”(要注意正确判断哪一个点是“第一个零点”)求得 φ.

方法二:通过将若干特殊点的坐标代入函数解析式,可以求得待定系数 A,ω,φ.这里需要注意的是,要认清所选择的点属于五个点中的哪一点,并能正确代入.

方法三:根据图象的变换规律确定相关的参数的值.

探究训练

已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$的部分图象如图所示,则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=$________.



$-\sqrt{3}$　**解析:**设函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$的周期为 T.由题图可知,$\frac{3}{4}T=\frac{13\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}$,所以 $T=\pi$.

又 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$,所以$|\omega|=2$.

不妨设 $\omega>0$,则 $f(x)=2\cos(2x+\varphi)$.

将$\left(\frac{13\pi}{12},2\right)$代入 $f(x)$中,可得 $f\left(\frac{13\pi}{12}\right)=2\cos\left(2\times\frac{13\pi}{12}+\varphi\right)=2$,所以 $\cos\left(\frac{13\pi}{6}+\varphi\right)=1$,所以 $\frac{13\pi}{6}+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,所以 $\varphi=2k\pi-\frac{13\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.取 $k=1$,得 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$,所以 $f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.所以 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\left(2\times\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\frac{5\pi}{6}=2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sqrt{3}$.

学习任务三　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 性质的应用

例 3　设函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)(-\pi<\varphi<0)$，函数 $y=f(x)$ 的图象的一条对称轴是直线 $x=\frac{\pi}{8}$.

(1)求 φ 的值；

(2)求函数 $y=f(x)$ 的单调区间及最值.

解：(1)由 $2x+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$，

得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}, k\in\mathbf{Z}$.

令 $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}=\frac{\pi}{8}, k\in\mathbf{Z}$，

得 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{4}, k\in\mathbf{Z}$.

因为 $-\pi<\varphi<0$，所以 $\varphi=-\frac{3\pi}{4}$.

(2)由(1)知，$f(x)=\sin\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)$.

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{3\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

得 $k\pi+\frac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$，

故函数的单调递增区间是 $\left[k\pi+\frac{\pi}{8}, k\pi+\frac{5\pi}{8}\right](k\in\mathbf{Z})$.

同理可得函数的单调递减区间是 $\left[k\pi+\frac{5\pi}{8}, k\pi+\frac{9\pi}{8}\right](k\in\mathbf{Z})$.

当 $2x-\frac{3\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

即 $x=k\pi+\frac{5\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$ 时，函数取得最大值 1；

当 $2x-\frac{3\pi}{4}=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

即 $x=k\pi+\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$ 时，函数取得最小值 -1.

反思提炼

利用函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的性质解决问题时，注意整体思想的应用，视"$\omega x+\varphi$"为一个整体，结合正弦函数 $y=\sin x$ 的性质灵活应用.

探究训练

已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{5}{4}$.

(1)求 $f(x)$ 的最小正周期及单调递增区间；

(2)求 $f(x)$ 的图象的对称轴和对称中心；

(3)求 $f(x)$ 的最小值及取得最小值时 x 的取值集合.

解：(1)函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

得 $k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{3}, k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$.

(2)令 $2x+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，则 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $f(x)$ 图象的对称轴为 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.

令 $2x+\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $f(x)$ 图象的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}, \frac{5}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

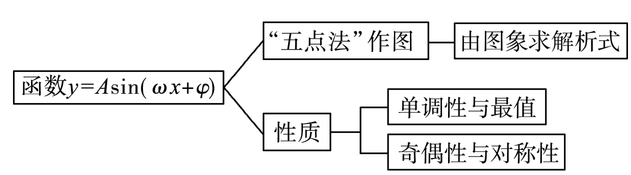
(3)当 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-1$，

即 $2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，$x=k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$ 时，

$f(x)$ 取得最小值为 $\frac{3}{4}$，

此时 x 的取值集合是 $\left\{x \middle| x=k\pi-\frac{\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

体系构建



课后素养评价(五十七)

基础性·能力运用

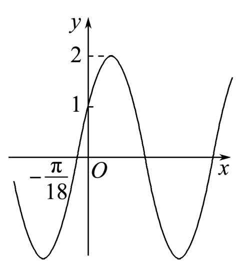
1. 函数 $y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的一个对称中心是 (　　)

A. $(0,0)$　　B. $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$

C. $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$　　D. $(3,0)$

C　**解析**：由 $x+\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.令 $k=0$，得 $x=-\frac{\pi}{3}$，故 $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$ 是函数 $y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的一个对称中心.

2. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,|\omega|<4,0<\varphi<\pi)$ 的部分图象如图所示，则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=$ (　　)



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\sqrt{3}$　　D. -1

C　**解析**：由题设图象知，$A=2$，$f\left(-\frac{\pi}{18}\right)=0$，$2\sin\left(-\frac{\pi}{18}\omega+\varphi\right)=0$，由五点法作图可知 $-\frac{\pi}{18}\omega+\varphi=0$，又 $2\sin(0+\varphi)=1$，即 $\varphi=\frac{\pi}{6}$ 或 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$.又 $|\omega|<4$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.所以 $\omega=3$，

故函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$.

则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-2\cos\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3}$.

3.（多选）把函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\varphi(0<\varphi<\pi)$ 个单位长度可以得到函数 $g(x)$ 的图象.若函数 $g(x)$ 的图象关于 y 轴对称，则 φ 的值可能为 (　BC　)

A. $\frac{5\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{5\pi}{6}$　　D. $\frac{11\pi}{12}$

4. 若函数 $f(x)=3\sin(\omega x+\varphi)$ 对任意 x 都有 $f\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$，则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=$________.

-3 或 3　**解析**：由 $f\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ 知，直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)$ 图象的对称轴，所以 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=3$ 或 -3.

综合性·创新提升

1.（多选）设函数 $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，则下列结论正确的是 (　　)

A. $f(x)$ 的一个周期为 -2π

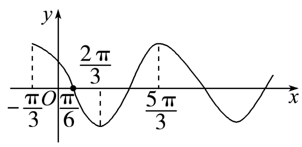
B. $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{8\pi}{3}$ 对称

C. $f(x+\pi)$ 的一个零点为 $x=\frac{\pi}{6}$

D. $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减

ABC　**解析**：因为 $T=2\pi$，故 -2π 也是 $f(x)$ 的一个周期，故 A 正确；$f\left(\frac{8\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{8\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 3\pi=-1$，故 B 正确；由 $f(x+\pi)=\cos\left(x+\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$，得 $x+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，当 $k=0$ 时，$x=\frac{\pi}{6}$，故 C 正确；函数 $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象可由 $y=\cos x$ 的图

象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度得到，如图可知，$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上先递减后递增，故D错误.



2.已知函数$f(x)=2\sin(2x+\varphi)+b(0<\varphi<\pi)$有相邻的两个零点$\frac{\pi}{12}$和$\frac{3\pi}{4}$，则$b=$　　（　D　）

A.1　　B.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C.$-\frac{1}{2}$　　D.-1

3.（开放性问题）同时具有性质①最小正周期是π，②图象关于直线$x=\frac{\pi}{3}$对称，③在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增的一个函数是________.

$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$（答案不唯一）　**解析**：设$y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$，

由①知$T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，得$\omega=2$.由②③知当$x=\frac{\pi}{3}$时，$y$取得最大值，故$y=A\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=A$，

所以$\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即$\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，$\varphi$可取$-\frac{\pi}{6}$，此时$y=A\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

故函数可为$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，答案不唯一.

4.将函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$的图象上每一点的横坐标缩短为原来的一半，纵坐标不变，再向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到$y=\sin x$的图象.

(1)求函数$f(x)$的解析式；

(2)当$x\in[0,3\pi]$时，方程$f(x)=m$有唯一实数根，求m的取值范围.

解：(1)将$y=\sin x$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象；新图象上每一点的纵坐标不变，横坐标变为原来的2倍，可得$f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象.

所以$f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$.

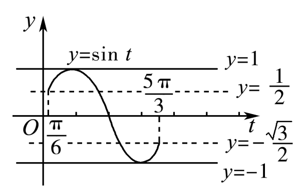
(2)因为$x\in[0,3\pi]$，所以$\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{3}\right]$，

所以$\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)\in[-1,1]$.

因为当$x\in[0,3\pi]$时，方程$f(x)=m$有唯一实数根，

所以函数$f(x)$的图象和直线$y=m$只有一个交点.

令$t=\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}$，作出函数$y=\sin t,t\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{3}\right]$的图象，如图所示.



故方程$f(x)=m$有唯一实数根时，m的取值范围为$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)\cup\{1,-1\}$.

5.7　三角函数的应用

学习任务目标

1.了解 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象的物理意义,能指出简谐运动中的振幅、周期、相位、初相.

2.会用三角函数解决一些简单的实际问题.

3.体会三角函数是描述周期变化现象的重要函数模型.

问题式预习

知识清单

知识点一　描述简谐运动 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$,$x\in[0,+\infty)$($A>0$,$\omega>0$)的物理量

物理量	定义	意义
振幅	A 就是这个简谐运动的振幅	做简谐运动的物体离开平衡位置的最大距离
周期	这个简谐运动的周期是 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$	做简谐运动的物体往复运动一次所需要的时间
频率	这个简谐运动的频率由公式 $f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega}{2\pi}$给出	做简谐运动的物体在单位时间内往复运动的次数
相位和初相	$\omega x+\varphi$ 称为相位;$x=0$ 时的相位 φ 称为初相	

知识点二　利用三角函数模型解决实际问题的一般步骤

第一步:阅读理解,审清题意.

读题要做到逐字逐句,读懂题中的文字,理解题目所反映的实际背景,在此基础上分析出已知什么、求什么,从中提炼出相应的数学问题.

第二步:收集、整理数据,建立数学模型.

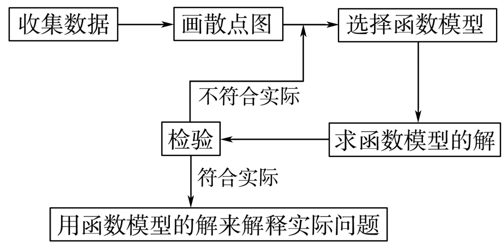
根据收集到的数据找出变化规律,运用已掌握的三角函数知识、物理知识及其他相关知识建立关系式,将实际问题转化为一个与三角函数有关的数学问题,即建立三角函数模型,从而实现实际问题的数学化.

第三步:利用所学的三角函数知识对得到的三角函数模型予以解答.

第四步:将所得结论"翻译"成实际问题的答案.

知识点三　三角函数模型的建立程序

三角函数模型的建立程序如图所示:



概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)函数 $y=-2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{5}\right)$表示的简谐运动的振幅是$-2$.　　(×)

(2)函数 $y=\dfrac{3}{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$表示的简谐运动的初相是$\dfrac{\pi}{4}$.　　(×)

(3)函数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$的图象的对称轴方程是 $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.　　(√)

2.电流强度 I(单位:A)随时间 t(单位:s)变化的关系式是 $I=5\sin\left(100\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right)$,则当 $t=\dfrac{1}{200}$时,电流强度为　　(　　)

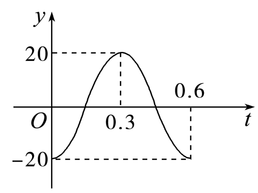
A.5 A　　B.2.5 A

C.2 A　　D.-5 A

B　**解析:**当 $t=\dfrac{1}{200}$ s 时,代入关系式得,$I=5\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)=2.5$(A).

3.请思考并回答下列问题:

(1)一个弹簧振子做简谐运动,在完成一次全振动的过程中,根据时间 t(单位:s)与位移 y(单位:mm)之间的对应数据绘制成的简图如图所示.



若用函数 $y=A\sin(\omega t+\varphi)$ 来刻画位移 y 随时间 t 的变化规律，你能写出 y 关于 t 的函数解析式吗？

提示：$y=20\sin\left(\frac{10\pi}{3}t-\frac{\pi}{2}\right)$.

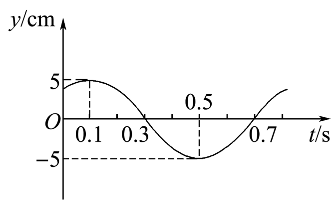
(2)解决三角函数的实际问题时，要注意哪些问题？

提示：①自变量的取值范围；
②数形结合思想的运用；
③认真审题，选择适当的三角函数模型；
④涉及较复杂的数据时，计算要精确.

任务型课堂

学习任务一　三角函数模型在物理中的应用

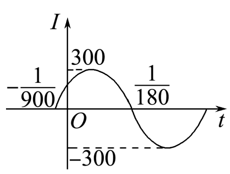
1. 如图是一个质点做简谐运动的图象，则下列判断正确的是　　(D)



A.该简谐运动的周期为 0.7 s
B.该简谐运动的振幅为 −5 cm
C.该质点在 0.1 s 和 0.5 s 时的速度最大
D.该质点在 0.3 s 和 0.7 s 时的加速度为零

2. 已知电流强度 I(单位:A)与时间 t(单位:s)的关系为 $I=A\sin(\omega t+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$.

(1)若下图所示的是 $I=A\sin(\omega t+\varphi)$ 在一个周期内的图象，根据图中数据求出 I 关于 t 的函数解析式；



(2)如果在任意一段 $\frac{1}{150}$ s 的时间内，电流强度都能取得最大值和最小值，那么 ω 的最小正整数值是多少？

解：(1)由题图知 $A=300$，设 $t_1=-\frac{1}{900}$，$t_2=\frac{1}{180}$，

则周期 $T=2\times(t_2-t_1)=2\times\left(\frac{1}{180}+\frac{1}{900}\right)=\frac{1}{75}$.

所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=150\pi$.又当 $t=\frac{1}{180}$ 时，$I=0$，

即 $\sin\left(150\pi\times\frac{1}{180}+\varphi\right)=0$，而 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

故所求的解析式为 $I=300\sin\left(150\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$.

(2)依题意，周期 $T\leqslant\frac{1}{150}$，即 $\frac{2\pi}{\omega}\leqslant\frac{1}{150}(\omega>0)$，

所以 $\omega\geqslant300\pi>942$.

又 $\omega\in\mathbf{N}^*$，故所求最小正整数 $\omega=943$.

反思提炼

利用三角函数处理物理学问题的策略

(1)常涉及的物理学问题有单摆、光波、电流、机械波等，其共同的特点是具有周期性.

(2)明确物理概念的意义，此类问题往往涉及诸如频率、振幅等概念，因此要熟知其意义并与对应的三角函数知识结合解题.

学习任务二　三角函数模型在生活中的应用

例　某实验室一天的温度 y(单位:℃)与时间 t(单位:h)近似满足函数关系 $y=10-2\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)$，$t\in[0,24]$.

(1)求实验室这一天的最大温差；

(2)若要求实验室温度不高于 11 ℃，则在哪段时间实验室需要降温？

解：(1)因为 $y=10-2\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)$，$t\in[0,24]$，

所以 $\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{7\pi}{3}$，$-1\leqslant\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant1$.

当 $t=2$ 时，$\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)=1$；

当 $t=14$ 时，$\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)=-1$，

所以 y 在 $[0,24]$ 上的最大值为 12，最小值为 8.

故实验室这一天的最高温度为 12 ℃，最低温度为 8 ℃，最大温差为 4 ℃.

(2)依题意，得当 $y>11$ 时实验室需要降温.

令 $10-2\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)>11$，

即 $\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)<-\frac{1}{2}$.

又 $0\leqslant t\leqslant 24$，所以 $\frac{7\pi}{6}<\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}<\frac{11\pi}{6}$，

即 $10<t<18$.

故在 10 时至 18 时实验室需要降温.

[一题多思]

思考 1. 现实世界中有很多周期现象，在研究具体问题时，我们一般如何做？

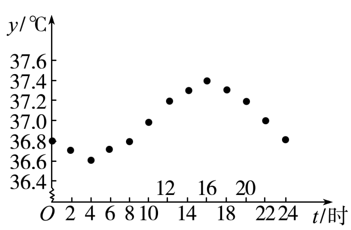
提示： 我们可以利用收集到的数据，首先画出相应的散点图，观察散点图，然后进行函数拟合获得具体的函数模型，最后利用这个函数模型来解决相应的实际问题.

思考 2. 下表给出了某人在一天中的体温的变化情况：

时间/时	0	2	4	6	8	10	12
体温/℃	36.8	36.7	36.6	36.7	36.8	37.0	37.2
时间/时	14	16	18	20	22	24	
体温/℃	37.3	37.4	37.3	37.2	37.0	36.8	

你能选用一个函数来近似描述体温与时间之间的关系吗？

提示： 散点图如图所示.



设 t 时的体温 $y=A\sin(\omega t+\varphi)+c(A>0,\omega>0)$.

由题表知 $y_{\max}=37.4$，$y_{\min}=36.6$，则 $c=\frac{37.4+36.6}{2}=37$，$A=\frac{37.4-36.6}{2}=0.4$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{24}=\frac{\pi}{12}$.

由 $0.4\sin\left(\frac{\pi}{12}\times 16+\varphi\right)+37=37.4$，得 $\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)=1$，即 $\frac{4\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $\varphi=2k\pi-\frac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$. 取 $\varphi=-\frac{5\pi}{6}$，

故可用函数 $y=0.4\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{5\pi}{6}\right)+37$ 来近似描述.

反思提炼

解三角函数应用问题的基本步骤

审清题意 → 读懂题目中的文字、图象、符号等语言，理解所反映的实际问题的背景，得出相应的数学问题

↓

建立函数模型 → 整理数据，引入变量，找出变化规律，运用已掌握的三角函数知识、物理知识及其他相关知识建立关系式，即建立三角函数模型

↓

解答函数模型 → 利用所学的三角函数知识解答得到的三角函数模型，求得结果

↓

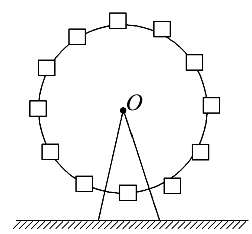
得出结论 → 将所得结论"翻译"成实际问题的答案

探究训练

如图，游乐场中的摩天轮匀速转动，每转一圈需要 12 min，其轴心 O 距离地面 40.5 米，半径为40 m. 如果某人从最低处登上摩天轮，那么其与地面的距离将随时间的变化而变化，以其登上摩天轮的时刻开始计时，请解答下列问题：

(1) 求出此人与地面的距离 y(单位：m)与时间 t(单位：min)的函数关系式；

(2) 当此人第 4 次距离地面 60.5 m 时，用了多长时间？



解： (1) 由已知可设 $y=40.5-40\cos\omega t$，$t\geqslant 0$，$\omega>0$.

由周期为 12 min，可知 $\frac{2\pi}{\omega}=12$，即 $\omega=\frac{\pi}{6}$.

所以 $y=40.5-40\cos\frac{\pi}{6}t(t\geqslant 0)$.

(2) 设转第 1 圈时，第 t_0 min 时距离地面 60.5 m.

由 $60.5=40.5-40\cos\frac{\pi}{6}t_0$，得 $\cos\frac{\pi}{6}t_0=-\frac{1}{2}$，

所以 $\frac{\pi}{6}t_0=\frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{6}t_0=\frac{4\pi}{3}$，解得 $t_0=4$ 或 $t_0=8$，

所以 $t=8$ 时，第 2 次距地面 60.5 m.

故第 4 次距离地面 60.5 m 时，用了 $12+8=20$(min).

体系构建

三角函数模型的应用
- 物理中的应用
  - 单摆
  - 电流
  - 光波、机械波
- 实际生活中的应用

课后素养评价（五十八）

基础性·能力运用

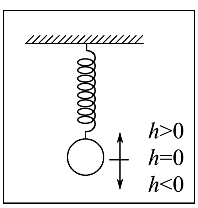
1. 简谐运动 $y=4\sin\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的相位与初相分别是　（　　）

A. $5x-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}$　　B. $5x-\frac{\pi}{3},4$

C. $5x-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3}$　　D. $4,\frac{\pi}{3}$

C　**解析**：相位是 $5x-\frac{\pi}{3}$，当 $x=0$ 时的相位为初相，即 $-\frac{\pi}{3}$.

2. 如图，弹簧挂着的一个小球做上下运动，小球在 t s 时相对于平衡位置的高度 h（单位：cm）由如下关系式确定：$h=2\sin\left(\frac{\pi}{6}t+\varphi\right)$，$t\in[0,+\infty)$，$\varphi\in(-\pi,\pi)$. 已知当 $t=2$ 时，小球处于平衡位置，并开始向下运动，则 $t=0$ 时 h 的值为　（　　）



A. -2　　B. 2　　C. $-\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}$

D　**解析**：因为当 $t=2$ 时，小球处于平衡位置，并开始向下移动，

故 $\frac{\pi}{3}+\varphi=\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\varphi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

又 $\varphi\in(-\pi,\pi)$，所以 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$，$h=2\sin\left(\frac{\pi}{6}t+\frac{2\pi}{3}\right)$.

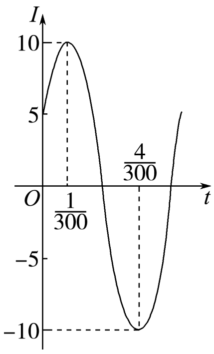
故当 $t=0$ 时，$h=2\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}$.

3. 商场人流量被定义为每分钟通过入口的人数. 某天某商场第 t min 的人流量 $F(t)$ 满足函数 $F(t)=50+4\sin\frac{t}{2}(t\geqslant 0)$，则人流量增加时，$t$ 的取值范围是　（ C ）

A. $[0,5]$　　B. $[5,10]$

C. $[10,15]$　　D. $[15,20]$

4.（多选）电流强度 I（单位：A）随时间 t（单位：s）变化的函数 $I=A\sin(\omega t+\varphi)\left(A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象如图所示，则下列说法正确的是　（ ABD ）



A. 最大电流强度为 10 A

B. $\omega=100\pi,\varphi=\frac{\pi}{6}$

C. 当 $t=\frac{1}{100}$ 时，$I=5$

D. 当 $t=\frac{1}{100}$ 时，$I=-5$

5. 一根细线的一端固定，另一端悬挂一个小球，当小球来回摆动时，相对于平衡位置的位移 s（单位：cm）与时间 t（单位：s）之间的函数关系是 $s=6\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$.

(1) 画出函数的图象.

(2) ①当小球开始摆动（即 $t=0$）时，相对于平衡位置的位移是多少？

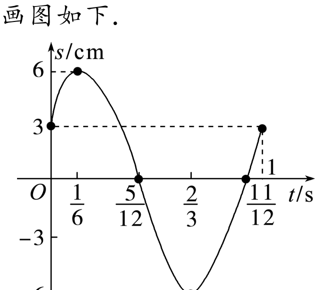
②小球摆动时，离开平衡位置的最大距离是多少？

③小球来回摆动一次需要多少时间？

解：(1) 列表：

$2\pi t+\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$
t	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{12}$	1
s	3	6	0	-6	0	3

描点、连线，画图如下.



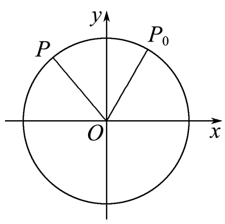
(2) ①当小球开始摆动（即 $t=0$）时，离开平衡位置为 3 cm.

②小球摆动时，离开平衡位置的最大距离是 6 cm.

③周期 $T=\frac{2\pi}{2\pi}=1(\text{s})$，所以小球来回摆动一次需要 1 s.

综合性·创新提升

1. 为了研究钟表秒针针尖的运动变化规律，建立如图所示的平面直角坐标系，设秒针针尖在时间 t(单位:s)时的位置为点 $P(x,y)$.若初始位置为点 $P_0\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$(规定此时 $t=0$)，秒针沿顺时针方向转动，则点 P 的纵坐标 y 与时间 t 的函数关系式可能为　　(　　)



A. $y=2\sin\left(-\frac{\pi}{30}t+\frac{\pi}{3}\right)$

B. $y=-\sin\left(\frac{\pi}{60}t-\frac{\pi}{3}\right)$

C. $y=\sin\left(-\frac{\pi}{30}t+\frac{\pi}{6}\right)$

D. $y=\cos\left(\frac{\pi}{30}t+\frac{\pi}{6}\right)$

D　**解析**:因为函数的周期为 $T=60$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{30}$.

设函数解析式为 $y=\sin\left(-\frac{\pi}{30}t+\varphi\right)$(顺时针走动为负方向)，

因为初始位置为 $P_0\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，即 $t=0$ 时，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 φ 可取 $\frac{\pi}{3}$.

所以函数解析式为 $y=\sin\left(-\frac{\pi}{30}t+\frac{\pi}{3}\right)$，由诱导公式可得函数解析式为 $y=\cos\left(\frac{\pi}{30}t+\frac{\pi}{6}\right)$.

2. 由于潮汐，某港口一天 24 h 的海水深度 H(单位:m)随时间 t(单位:h，$0\leqslant t<24$)的变化近似满足关系式 $H(t)=12+4\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{2\pi}{3}\right)$，则该港口一天内水深不小于 10 m 的时长为　　(　　)

A. 12 h　　B. 14 h

C. 16 h　　D. 18 h

C　**解析**:由题意，$H(t)=12+4\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{2\pi}{3}\right)\geqslant 10$，

即 $\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{2\pi}{3}\right)\geqslant-\frac{1}{2}$.

因为 $0\leqslant t<24$，所以 $-\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{12}t-\frac{2\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}$.

由正弦函数图象与性质可知，$-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{12}t-\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{7\pi}{6}$，

解得 $6\leqslant t\leqslant 22$.

所以该港口一天内水深不小于 10 m 的时长为 $22-6=16$(h).

3. 以一年为一个周期调查某商品的出厂价格及该商品在商店的销售价格时发现:该商品的出厂价格是在 6 元基础上按月份呈正弦曲线波动的.已知 3 月份出厂价格最高为 8 元，7 月份出厂价格最低为 4 元.该商品在商店的销售价格是在 8 元基础上按月份呈正弦曲线波动的，已知 5 月份销售价格最高为 10 元，9 月份销售价格最低为 6 元.假设某商店每月购进这种商品 m 件，且当月售完，估计盈利最大的月份是________.

6 月　**解析**:由已知条件可得，出厂价格的函数关系式为 $y_1=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)+6$，销售价格的函数关系式为 $y_2=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{3\pi}{4}\right)+8$.

所以利润的函数关系式为 $y=m(y_2-y_1)=m\left[2\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{3\pi}{4}\right)+8-2\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)-6\right]$

$=-2\sqrt{2}m\sin\frac{\pi}{4}x+2m$.当 $x=6$ 时，$y=2m+2\sqrt{2}m=(2+2\sqrt{2})m$，即 6 月份的盈利最大.

4. (数学与生活)某“花式风筝冲浪”集训队在某海滨浴场进行集训，工作人员观测到一天中该海滨浴场的水深 y(单位:m)随着时间 t($0\leqslant t\leqslant 24$，单位:时)呈周期性变化，某天各时刻的水深数据如下表:

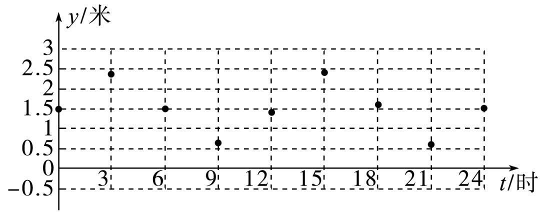
t	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y	1.5	2.4	1.5	0.6	1.4	2.4	1.6	0.6	1.5

(1)根据表中数据画出散点图.观察散点图，从①$y=A\sin(\omega t+\varphi)$，②$y=A\cos(\omega t+\varphi)+b$，③$y=-A\sin\omega t+b$($A>0$，$\omega>0$，$-\pi<\varphi<0$)中选择一个合适的函数模型进行拟合，并求出函数解析式.

(2)为保证队员安全，规定在一天中 5～18 时且水深不低于 1.05 m 的时候进行训练，根据(1)中选择的函数解析式，试问:这一天什么时间段组织训练，

才能确保集训队员的安全?

解:(1)根据表中近似数据画出散点图,如图所示.



依题意,选② $y=A\cos(\omega t+\varphi)+b$ 作为函数模型,

由散点图得 $A=\frac{2.4-0.6}{2}=\frac{9}{10}$,$b=\frac{2.4+0.6}{2}=\frac{3}{2}$,$T=12$,

所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{6}$,

所以 $y=\frac{9}{10}\cos\left(\frac{\pi}{6}t+\varphi\right)+\frac{3}{2}$.

又因为函数图象过点(3,2.4),

即 $2.4=\frac{9}{10}\cos\left(\frac{\pi}{6}\times3+\varphi\right)+\frac{3}{2}$,

所以 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=1$,

所以 $\sin\varphi=-1$.

又因为 $-\pi<\varphi<0$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$,

所以 $y=\frac{9}{10}\cos\left(\frac{\pi}{6}t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{3}{2}=\frac{9}{10}\sin\frac{\pi}{6}t+\frac{3}{2}$.

(2)由(1)知,$y=\frac{9}{10}\sin\frac{\pi}{6}t+\frac{3}{2}$,

令 $y\geqslant1.05$,即 $\frac{9}{10}\sin\frac{\pi}{6}t+\frac{3}{2}\geqslant1.05$,所以 $\sin\frac{\pi}{6}t\geqslant-\frac{1}{2}$,

所以 $2k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{6}t\leqslant2k\pi+\frac{7\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$,所以 $12k-1\leqslant t\leqslant12k+7$.

又因为 $5\leqslant t\leqslant18$,所以 $5\leqslant t\leqslant7$ 或 $11\leqslant t\leqslant18$,

所以这一天5时至7时以及11时至18时组织训练,才能确保集训队员的安全.