参考答案

第五章　一元一次方程

第 1 讲　一元一次方程的应用（一）

例一　解：（方法一）设长方形花园的宽 $PN=x$ m，

则 $QM=x$ m，$MN=(x+4)$m.

$\therefore x+x+x+4=70$.

解得 $x=22$.

$\therefore MN=22+4=26$（m）.

$\because 26<35$，

$\therefore$能够围成满足要求的花园，花园的长和宽分别为 26 m、22 m.

（方法二）设 $MN=t$ m，

则 $QM=PN=(t-4)$m.

$\therefore t+2(t-4)=70$.

解得 $t=26$.

$\therefore MN=26$ m，

$QM=26-4=22$（cm）

$\because 26<35$，

$\therefore$能够围成满足要求的花园，花园的长和宽分别是 26 m、22 m.

【点拨】这类问题通常会给出边长和围墙总长两类等量关系．我们一般通过边长的等量关系设元并表示出围墙总长，再运用围墙总长相等这一等量关系来建立方程，从而得出结果，即以数为手段，达到以数解形的目的.

变式训练一

1. A　**【解析】**设这个长方形的宽为 $3x$ cm，则这个长方形的长为 $4x$ cm．根据周长公式，得 $2\times(4x+3x)=70$．解得 $x=5$．则这个长方形的宽为 $3\times5=15$（cm）.

2. **解**：设小长方形的宽为 x cm.

由图可知，小长方形的长等于小长方形的宽的 3 倍，

$\therefore$小长方形的长为 $3x$ cm.

$\therefore$大长方形的长为 $x+3x+x=5x$（cm），

宽为 $3x$ cm.

由题意可知，$2(3x+5x)=32$.

解得 $x=2$.

$\therefore 3x=3\times2=6$.

则小长方形的长为 6 cm.

例二　解：设正方形①的面积为 $x\ \mathrm{m}^2$，

则正方形③、④、⑤、⑥、②的面积分别为 $16x\ \mathrm{m}^2$、$16x\ \mathrm{m}^2$、$25x\ \mathrm{m}^2$、$36x\ \mathrm{m}^2$、$(50x-4)\ \mathrm{m}^2$.

$\therefore x+16x+16x+25x+36x+50x-4=572$.

解得 $x=4$.

$\therefore$ 正方形①的面积为 $4\ m^2$.

【点拨】这类型问题是整个大图形被分割成若干个小图形. 每个小图形的面积可以通过数形结合思想设未知量来表示，再利用所有小图形的面积之和等于整个大图形的面积这一等量关系来建立方程，从而解决问题. 这种建立等量关系的方法常被称为等面积法.

变式训练二

1. C　**【解析】**设原正方形纸片的边长是 x cm，则第一次剪下的长条的长是 x cm、宽是 5 cm；第二次剪下的长条的长是 $(x-5)$cm、宽是 6 cm，则 $5x=6(x-5)$，解得 $x=30$. $\therefore$ 剪下的这两个长条的面积之和为 $30\times5\times2=300$（cm^2）. 故选 C.

2. 解：设长方形纸板②的宽为 x cm，则长方形纸板①的宽为 $2x$ cm.

根据题意，得 $4x+2x\times5=14$.

解得 $x=1$.

$\therefore$ 长方形纸板②的宽为 1 cm，长方形纸板①的宽为 2 cm.

设小正方形纸板③的边长为 t cm，

$\therefore$ 大正方形的左边长表示为 $[4+(5-t)]$ cm，

大正方形的下边长表示为 $(1+t+2)$cm.

$\because 4+(5-t)=1+t+2$.

解得 $t=3$.

$\therefore$ 小正方形纸板③的边长为 3 cm.

例三　**解**：设原蓄水池的注水高度为 x m.

则 $2\times2\times x+1.5\times1\times1.2=2\times2\times1.8$.

解得 $x=1.35$.

故原蓄水池的注水高度为 1.35 m.

【点拨】这类型问题是将一个小长方体放入注水的大长方体后，水刚好没有溢出的问题. 实际上是通过设元表示出原有水的体积与放入水中石块的体积之和与整个蓄水池的体积相等这一等量关系来建立方程，从而解决问题. 本题既体现了数学建模思想，也融合了数形结合思想，这种运用体积相等建立等量关系的方法称为等体积法.

变式训练三

1. B　**【解析】**由题意可知，$\pi\times\left(\frac{8}{2}\right)^2x=\pi\times\left(\frac{6}{2}\right)^2\times(x+5)$. 故选 B.

2. 解：由题意，知甲容器中水的体积为 $\pi\times10^2\times20=2\ 000\pi$（$cm^3$），

乙容器的容积为 $\pi\times20^2\times6=2\,400\pi$ (cm^3).

$\because 2\,000\pi<2\,400\pi$,

$\therefore$将甲容器中的水全部倒入乙容器，乙容器中的水不会溢出.

设将甲容器中的水全部倒入乙容器后，乙容器的水深为 h cm,

则 $2\,000\pi=\pi\times20^2\times h$.

解得 $h=5$.

故倒入水后，乙容器的水深为 5 cm.

例四 **解**：设每块地砖的长为 x cm，由图可知，每块地砖的宽为$(60-x)$cm.

根据大长方形对边的长度相等，得

$2x=4(60-x)+x$.

解得 $x=48$.

则每块地砖的宽为 $60-48=12$ (cm).

故拼成的大长方形的周长为 $2\times(2\times48+60)=312$ (cm).

【点拨】本题关键是理解题意，根据题目给出的条件，找到合适的等量关系，利用大长方形的宽为 60 cm 设元，从而列出方程并求解. 这种利用图形中长度相等的等量关系设元建立方程的方法称为等长法，该方法充分体现了数形结合的思想.

变式训练四

1. D **【解析】**设 $AE=x$ cm，则由图可知，$AB=(2x+7.5)$cm，小长方形的长为$(15-3x)$cm. 由 $AB=CD$ 可建立方程，得 $2x+7.5=x+(15-3x)$. 故选 D.

2. **解**：设小长方形花圃的长为 x m，则小长方形花圃的宽为$(10-2x)$m.

由长方形空地的宽为 8 m，可列方程 $x+2(10-2x)=8$.

解得 $x=4$.

则 $10-2x=10-2\times4=2$.

故小长方形花圃的长为 4 m、宽为 2 m.

培优精练

1. **解**：设小路的宽为 x m，则花园的长为$(16-2x)$m、花园的宽为$(12-2x)$m.

根据题意可知，$2\times[(16-2x)+(12-2x)]=\frac{6}{7}\times2\times(16+12)$.

解得 $x=1$.

故小路的宽为 1 m.

2. **解**：设剪去的小正方形的边长为 x cm,

根据题意可知，$4\times6x+6\times6=84$.

解得 $x=2$.

$\therefore$原正方形纸片的边长为 $2+2+$

$6=10$（cm）.

3. **解**：$\because 1\,200\ \text{mL}=1\,200\ \text{cm}^3$，

$\therefore$甲容器的底面积为 $1\,200\div16=75$（cm^2）.

则乙容器的底面积为 $75\times\frac{5}{3}=125$（cm^2）.

设甲容器向乙容器倒入一部分水后，甲、乙两容器内水面的高度为 x cm，

$\therefore 75x+125x=1\,200$.

解得 $x=6$.

则此时水面的高度为 6 cm.

4. （1）$\frac{5}{3}x$ cm　**【解析】**由乙图案可知，大长方形的上面边长为 $5x$ cm，下面边长为小长方形 3 个长之和. 根据长方形对边长度相等，得小长方形的长为$\frac{5}{3}x$ cm.

（2）**解**：根据甲图案可知，

$2x-1=\frac{5}{3}x$.

解得 $x=3$.

则$\frac{5}{3}x=\frac{5}{3}\times3=5$.

故小长方形的长为 5 cm、宽为 3 cm.

名卷压轴题

解：设长方形鸡舍的宽为 x m，则长为 $2x$ m.

①当长方形鸡舍的长与墙平行时，如图 1.

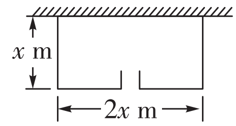


图 1

根据题意，得

$x+x+2x=30+2$.

解得 $x=8$.

则 $2x=16$.

故这个长方形鸡舍的长和宽分别为 16 m、8 m.

②当长方形鸡舍的宽与墙平行时，如图 2.

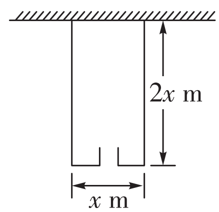


图 2

根据题意，得

$x+2x+2x=30+2$.

解得 $x=6.4$. 则 $2x=12.8$.

故这个长方形鸡舍的长和宽分别为 12.8 m、6.4 m.

综上所述，这个长方形鸡舍的长和宽分别为 16 m、8 m 或 12.8 m、6.4 m.

第 2 讲　一元一次方程的应用（二）

例一　解：(方法一)

设飞机在无风时的飞行速度为

x km/h.

根据题意列出如下表格.

	速度/(km/h)	时间/h	路程/km
顺风	$x+24$	$\frac{17}{6}$	$\frac{17}{6}(x+24)$
逆风	$x-24$	3	$3(x-24)$

根据顺风、逆风的行程相等列出方程，得

$(x+24)\times\frac{17}{6}=(x-24)\times3$.

解得 $x=840$.

故飞机在无风时的飞行速度为 840 km/h.

(方法二)

设两城之间的距离为 y km，根据题意列出如下表格.

	路程/km	时间/h	飞行速度/(km/h)	无风速度/(km/h)
顺风	y	$\frac{17}{6}$	$\frac{y}{\frac{17}{6}}$	$\frac{y}{\frac{17}{6}}-24$
逆风	y	3	$\frac{y}{3}$	$\frac{y}{3}+24$

根据飞机在无风时的速度相等列出方程，得

$\frac{y}{\frac{17}{6}}-24=\frac{y}{3}+24$.

解得 $y=2\ 448$.

故飞机在无风时的飞行速度为

$2\ 448\div3+24=840$ (km/h).

【点拨】行程问题中常常涉及路程、速度、时间三个量，可以借助表格和利用路程或速度或时间之间的等量关系建立方程并求解.

变式训练一

1. 解：（方法一）设预定的时间为 y h，根据题意列出如下表格.

速度/(km/h)	骑行时间/h	路程/km
15	$y-\frac{15}{60}$	$15\left(y-\frac{15}{60}\right)$
9	$y+\frac{15}{60}$	$9\left(y+\frac{15}{60}\right)$

根据路程相等列出方程，得

$15\left(y-\frac{15}{60}\right)=9\left(y+\frac{15}{60}\right)$.

解得 $y=1$.

故从家里到学校的路程为 $15\times\left(1-\frac{15}{60}\right)=\frac{45}{4}$ (km).

（方法二）设从家里到学校的路程为 x km，根据题意列出如下表格.

路程/km	速度/(km/h)	骑行时间/h	预定时间/h
x	15	$\frac{x}{15}$	$\frac{x}{15}+\frac{15}{60}$
x	9	$\frac{x}{9}$	$\frac{x}{9}-\frac{15}{60}$

根据预定时间相等列出方程，得

$\frac{x}{15}+\frac{15}{60}=\frac{x}{9}-\frac{15}{60}$.

解得 $x=\frac{45}{4}$.

故从家里到学校的路程为$\frac{45}{4}$ km.

2. 解：设这架飞机最多飞出 t h 就要返航.

由题意可知，风速为

1 500－1 350＝150（km/h).

则返回时逆风飞行速度为

1 350－150＝1 200（km/h).

根据题意，列出如下表格.

	速度/（km/h）	时间/h	路程/km
顺风	1 500	t	1 500t
逆风	1 200	$6-t$	1 200$(6-t)$

根据路程相等建立方程，得

1 500t＝1 200$(6-t)$.

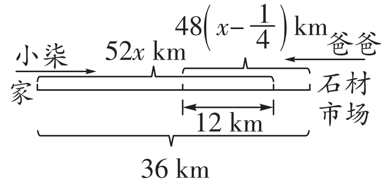
解得 $t=\frac{8}{3}$.

故这架飞机最多飞出 $\frac{8}{3}$ h 就要返航.

例二　解：（方法一）设当两车相遇后相距 12 km 时，小柒已乘车 x h，

则爸爸开车时间为 $x-\frac{15}{60}=\left(x-\frac{1}{4}\right)$h.

根据题意，画出线段图如图所示.



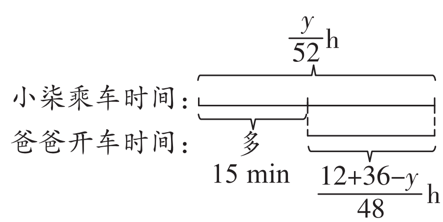
根据图得

$52x+48\left(x-\frac{1}{4}\right)=12+36$.

解得 $x=0.6$.

故当两车相遇后相距 12 km 时，小柒已乘车 0.6 h.

（方法二）设小柒乘车所行路程为 y km，则爸爸开车所行路程为 $(12+36-y)$ km. 小柒乘车的时间可表示为$\frac{y}{52}$ h，爸爸开车的时间可表示为$\frac{12+36-y}{48}$ h，由此可画出线段图如下图所示.



根据图得

$\frac{12+36-y}{48}=\frac{y}{52}-\frac{15}{60}$.

解得 $y=31.2$.

则$\frac{y}{52}=\frac{31.2}{52}=0.6$.

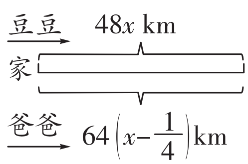
故当两车相遇后相距 12 km 时，小柒已乘车 0.6 h.

【点拨】本例为行程问题中较为典

型的一类——相遇问题，借助线段图能够直观地描述行程问题中距离或时间之间的联系，即以形为手段，以数为目的，实现以形助数，挖掘复杂信息背后的等量关系，列出方程并求解.

变式训练二

1. **解**：设豆豆出发 x h后，爸爸能追上他，则爸爸的乘车时间为 $\left(x-\frac{15}{60}\right)$h，即 $\left(x-\frac{1}{4}\right)$h. 根据题意画出线段图如下图所示.



根据图得

$48x=64\left(x-\frac{1}{4}\right)$.

解得 $x=1$.

∵$48\times1=48$（km）<60 km，

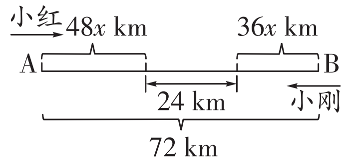
∴两人还没有到公园.

故豆豆出发 1 h 后，爸爸能追上他. 此时两人还没有到公园.

2. **解**：两人相距 24 km，可分为两种情况：

①两人相遇前相距 24 km.

设出发 x h后两人相距 24 km，根据题意画出线段图如图所示.



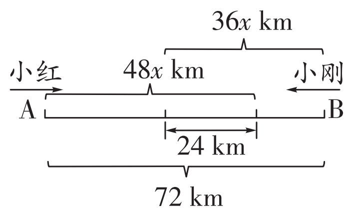
根据图得

$48x+36x=72-24$.

解得 $x=\frac{4}{7}$.

②两人相遇后相距 24 km.

设出发 x h后两人相距 24 km，根据题意画出线段图如下图所示.



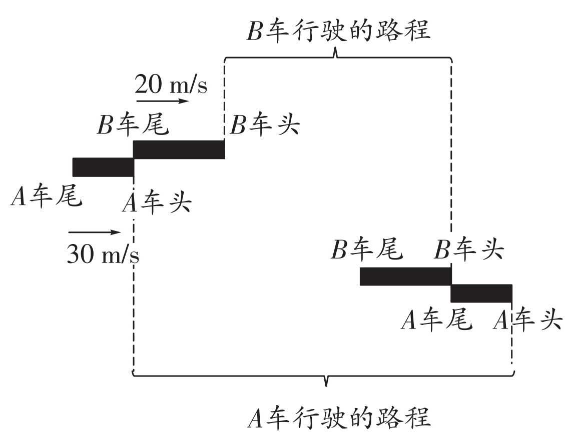
根据图得

$48x+36x=72+24$.

解得 $x=\frac{8}{7}$.

故出发 $\frac{4}{7}$ h 或 $\frac{8}{7}$ h 后两人相距 24 km.

例三 **解**：（1）根据题意画出下图.



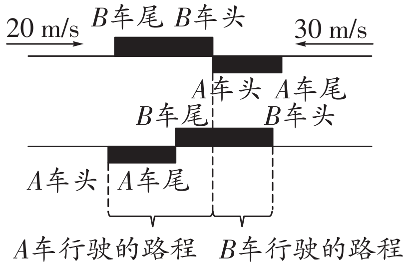
设两车的错车时间为 x s，

由图可知，$30x-20x=300+200$.

解得 $x=50$.

故两车的错车时间为 50 s.

（2）根据题意画出下图.



设两车的错车时间是 y s，由图可知，$30y+20y=300+200$.

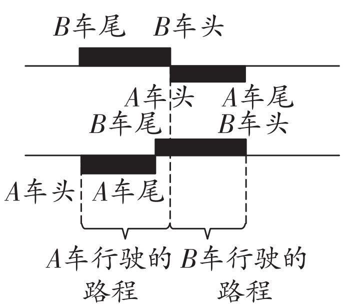
解得 $y=10$.

故两车的错车时间为 10 s.

【点拨】错车问题的关键是借助线段图，直观地分析错车过程，结合相遇问题：速度和×时间＝路程和；结合追及问题：速度差×时间＝路程差，列方程并求解即可解决问题.

变式训练三

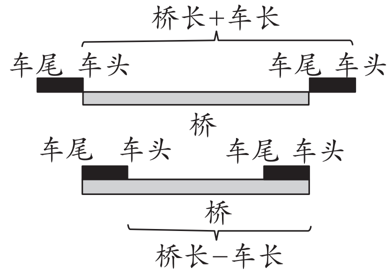
1. 36 m/s、32 m/s　**【解析】**根据题意画出下图.



设 B 火车的速度是 x m/s，则 A 火车的速度是 $(x+4)$ m/s.

根据题意可知，$5(x+x+4)=180+160$. 解得 $x=32$. 则 $x+4=36$. 故 A、B 两火车的速度分别是 36 m/s、32 m/s.

2. 解：根据题意画出下图.



设这列火车的车长为 x m.

1 min＝60 s.

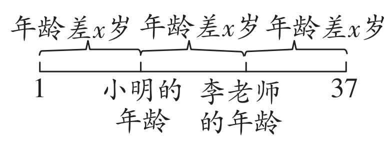
根据题意可知，

$$\frac{1\,000+x}{60}=\frac{1\,000-x}{40}.$$

解得 $x=200$.

故这列火车的车长为 200 m.

例四　解：设小明与李老师的年龄差为 x 岁，根据题意画出线段图如下图所示.



由图可知，$1+3x=37$.

解得 $x=12$.

故李老师现在的年龄为 $1+12+12=25$（岁）.

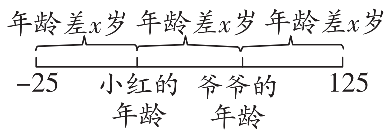
【点拨】解决该类年龄问题的关键是借助线段图挖掘题目中隐含的

年龄差．该类问题体现了以形助数解决问题的优越性．

变式训练四

解：设小红与爷爷的年龄差为 x 岁．

根据题意画出如下线段图．



由图可知，$-25+3x=125$．

解得 $x=50$．

故爷爷现在的年龄为 $-25+50+50=75$（岁）．

培优精练

1. 9 或 25　**【解析】**设 A、B 两地的距离为 x km．①当 C 地在 A、B 两地之间时，如图 1 所示．则 $\frac{x}{7.5+2.5}+\frac{x-12}{7.5-2.5}=5.1$．

解得 $x=25$．

图 1

②当 A 地在 B、C 两地之间时，如图 2 所示．

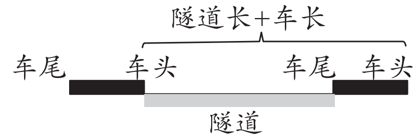
图 2

则 $\frac{x}{7.5+2.5}+\frac{x+12}{7.5-2.5}=5.1$．

解得 $x=9$．

综上所述，A、B 两地的距离为 25 km 或 9 km．

2. **解**：设该列车的车长为 x m，根据题意画出下图．

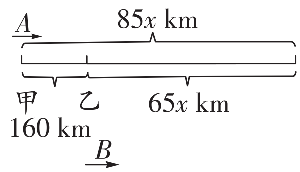


由图可知，$\frac{350+x}{20}=\frac{x}{6}$．

解得 $x=150$．

故该列车的车长为 150 m．

3. **解**：（1）设经过 x h A 车追上 B 车，根据题意画出线段图如下图所示．



由图可知，$85x-65x=160$．

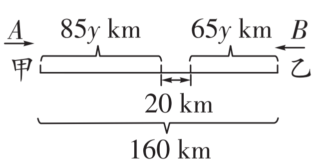
解得 $x=8$．

故经过 8 h A 车追上 B 车．

（2）设经过 y h 两车相距 20 km．

分两种情况讨论：

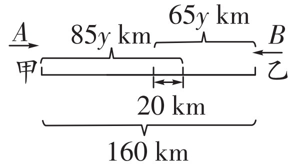
①两车相遇前相距 20 km．



由图可知，$85y+65y=160-20$．

解得 $y=\frac{14}{15}$．

②两车相遇后相距 20 km．



由图可知，

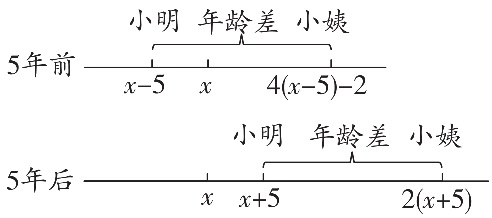
$85y+65y=160+20$.

解得 $y=\frac{6}{5}$.

故经过 $\frac{14}{15}$ h 或 $\frac{6}{5}$ h 两车相距 20 km.

4. 解：设小明现在的年龄为 x 岁.

根据题意画出下图.



5 年前小明的年龄为 $(x-5)$ 岁，

5 年前小姨的年龄为 $[4(x-5)-2]$ 岁；

5 年后小明的年龄为 $(x+5)$ 岁，

5 年后小姨的年龄为 $2(x+5)$ 岁.

则小姨现在的年龄为

$[2(x+5)-5]$ 岁.

∵小姨和小明的年龄差不变，

∴$2(x+5)-(x+5)=[4(x-5)-2]-(x-5)$.

解得 $x=11$.

故小姨现在的年龄为 $2\times(11+5)-5=27$（岁）.

名卷压轴题

解：(1) 设乘出现故障的小汽车的 4 个人步行的距离为 x km，根据题意，得

$\frac{x}{5}=\frac{10+10-x}{60}$.

解得 $x=\frac{20}{13}$.

则这 8 个人全部到达火车站需要

$\frac{20}{13}\div5+\left(10-\frac{20}{13}\right)\div60=\frac{35}{78}$ (h) $=26\frac{12}{13}$ (min).

故这 4 个人步行的距离为 $\frac{20}{13}$ km；这 8 个人全部到达火车站需要 $26\frac{12}{13}$ min.

(2) 当小汽车出现故障时，乘这辆车的 4 个人下车步行，另一辆车将车内的 4 个人送到某个地方后，让他们下车步行，再立即返回接乘出现故障的小汽车而步行的另外 4 个人，使得两批人员最后同时到达火车站. 由题意可得，两批人员步行的距离相同，如下图，设 A 为事故地点，B 为乘出现故障的小汽车的人员再次上车地点，C 为乘无故障汽车人员下车地点，D 为火车站.

因此，设 $AB=CD=y$，根据题意，得

$\frac{y}{5}=\frac{10-y+10-2y}{60}$.

解得 $y=\frac{4}{3}$.

因此这8个人同时到达火车站所需时间为 $\frac{4}{3}\div 5+\left(10-\frac{4}{3}\right)\div 60=\frac{37}{90}$ (h) $=24\frac{2}{3}$ (min).

$\because 24\frac{2}{3}<28$,

$\therefore$ 此方案可行.

第3讲　一元一次方程的应用（三）

例一　B　**【解析】**设先安排 x 人合作. 根据题意列出如下表格.

人数	工效	工时/h	工作量
x	$\frac{1}{10}$	1	$\frac{x}{10}$
$x+1$	$\frac{1}{10}$	2	$\frac{2(x+1)}{10}$

由题意和表格可知,

$\frac{x}{10}+\frac{2(x+1)}{10}=\frac{4}{5}$. 故选 B.

【点拨】本题是典型的工程问题. 工程问题常涉及工效、工时和工作量等数量，利用表格对上述数量关系进行梳理，再结合等量关系，即可建立方程.

变式训练一

1. B　**【解析】**根据题意列出表格如下.

	工效	工时/天	工作量
甲	$\frac{1}{12}$	x	$\frac{x}{12}$
乙	$\frac{1}{12\div 2}$	x	$\frac{x}{12\div 2}$

由题意和表格可知,

$\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{12\div 2}\right)x=1$. 故选 B.

2. B　**【解析】**设原计划每小时生产 x 个零件，则实际每小时生产 $(x+10)$ 个零件，根据题意列出如下表格.

	工效/个	工时/h	工作量/个
原计划	x	15	$15x$
实际	$x+10$	12	$12(x+10)$

由题意和表格可知,

$12(x+10)=15x+70$. 故选 B.

例二　A　**【解析】**根据题意列出如下表格.

成本/元	标价/元	售价/元	利润/元
x	$(1+30\%)\cdot x$	$(1+30\%)x\cdot 90\%$	85

根据题意和表格可知,

$(1+30\%)x\cdot 90\%=x+85$. 故

选 A.

【点拨】本题是打折销售类问题.该类问题常包括成本、标价、售价、利润、利润率等数量.结合题目中这些数量之间的关系整理出表格中的信息，再结合等量关系，即可建立方程，实现以表助数，从而解决问题.

变式训练二

1. C　【解析】根据题意列出表格如下.

成本/元	标价/元	售价/元	利润/元
x	$(1+50\%)x$	$(1+50\%)\cdot x\times80\%$	28

根据题意和表格可知，

$x+28=(1+50\%)x\times80\%$. 故选 C.

2. C　【解析】设售货员可以打 x 折出售此商品，根据题意列出表格如下.

进价/元	标价/元	售价/元	利润/元	利润率
500	750	$750\times\frac{x}{10}$	$500\times5\%$	5%

根据题意和表格可知，

$750\times\frac{x}{10}-500=500\times5\%$.

解得 $x=7$. 故选 C.

例三　(1)　$(7-x)$　　$(x-2)$

【解析】根据题意列出如下表格.

	甲城	乙城	合计/t
A 地	x	$10-x$	10
B 地	$7-x$	$8-(10-x)=x-2$	5
合计/t	7	8	15

(2) **解**：由题意可知，

总运费 $=100x+120(10-x)+110(7-x)+95(x-2)=(-35x+1\,780)$（元）.

(3) 令 $-35x+1\,780=1\,640$，

解得 $x=4$.

$10-x=10-4=6$，

$7-x=7-4=3$，

$x-2=4-2=2$.

故从 A 地调运 4 t 消毒液到甲城，调运 6 t 消毒液到乙城；从 B 地调运 3 t 消毒液到甲城，调运 2 t 消毒液到乙城.

【点拨】本例是分配调运问题，该类问题的难点在于厘清从 A、B 两地调到甲、乙两城的分配方案.直接从题目出发分析较为困难，借助表格梳理题目提供的信息能更顺利地找到等量关系，从而建立方程并求解，即可解决问题.

变式训练三

1. (1) $(12-x)$ $(10-x)$ $(8+x)$

【解析】根据题意列出如下表格.

	甲村	乙村	合计/t
A 学校	x	$12-x$	12
B 学校	$10-x$	$8+x$	18
合计/t	10	20	30

(2) **解**:从 A 学校、B 学校往甲、乙两村调运物资的总运费为

$60x+40(12-x)+70(10-x)+55(8+x)=(5x+1\ 620)$(元).

由题意,得 $5x+1\ 620=1\ 645$.

解得 $x=5$.

故应从 A 学校调动 5 t 物资到甲村.

2. **解**:(1) 设杭州厂运往南昌的机器为 x 台,根据题意列出如下表格.

	南昌	武汉	合计/台
杭州厂	x	$4-x$	4
温州厂	$6-x$	$10-(6-x)$	10
合计/台	6	8	14

总运费 $=300x+500(4-x)+400(6-x)+800[10-(6-x)]=(200x+7\ 600)$(元).

(2) 当总运费为 8 400 元时,

则 $200x+7\ 600=8\ 400$,

解得 $x=4$.

故从杭州厂运往南昌的机器应为 4 台.

(3) 有可能. 当总运费为 7 800 元时,

则 $200x+7\ 600=7\ 800$,

解得 $x=1$.

则 $4-x=4-1=3$,

$6-x=6-1=5$,

$10-(6-x)=10-(6-1)=5$.

符合实际情况.

调运方案为从杭州厂给南昌调运 1 台,给武汉调运 3 台;从温州厂给南昌调运 5 台,给武汉调运 5 台.

例四 (1) 9 500 10 500 **【解析】**根据题意列出如下表格.

住院费用 x/元	$0<x\leqslant 5\ 000$	$5\ 000<x\leqslant 20\ 000$	$x>20\ 000$
每年报销比例	40%	50%	60%

因此张大爷一年的住院费用按标准报销的金额为 $5\ 000\times 40\%+(20\ 000-5\ 000)\times 50\%=2\ 000+15\ 000\times 50\%=2\ 000+7\ 500=9\ 500$(元).

张大爷实际支付的住院费用为

$20\ 000-9\ 500=10\ 500$(元).

(2) **解**:因为王大爷一年内本人实际支付的住院费用为 21 000 元,

所以王大爷当年的住院费用多于 20 000 元.

设王大爷当年的住院费用为 x 元，

则 $5\,000\times(1-40\%)+(20\,000-5\,000)\times(1-50\%)+(x-20\,000)\times(1-60\%)=21\,000$.

解得 $x=46\,250$.

故王大爷当年的住院费用为 46 250元.

【点拨】本例是分段报销类问题，题目叙述较为复杂，可以借助表格整理出相关分段数据，进而建立方程求解问题.

变式训练四

解：（1）王叔叔 2022 年 1 月份应纳税所得额为 $10\,000-5\,000=5\,000$（元）.

则他 1 月份应纳税 $3\,000\times3\%+(5\,000-3\,000)\times10\%=290$（元）.

（2）设小李 1 月份的收入为 x 元.

$\because 3\,000\times3\%+(12\,000-3\,000)\times10\%=990$（元），

$3\,000\times3\%+(12\,000-3\,000)\times10\%+(25\,000-12\,000)\times20\%=3\,590$（元），

又 990 元<3 400 元<3 590（元），

$\therefore 12\,000+5\,000<x<25\,000+5\,000$，

即 $17\,000<x<30\,000$.

$\therefore 990+(x-5\,000-12\,000)\times20\%=3\,400$.

解得 $x=29\,050$.

故小李 1 月份的收入约为29 050元.

培优精练

1. A　**【解析】**根据题意列出如下表格.

	工效	工时	工作量
甲	$\frac{1}{45}$	$x+(10-1)$	$\frac{x+9}{45}$
乙	$\frac{1}{30}$	x	$\frac{x}{30}$

由题意和表格可知，$\frac{x+9}{45}+\frac{x}{30}=1$. 故选 A.

2. A　**【解析】**由题意可知，该品牌冰箱的进价为 $200\div10\%=2\,000$（元）.

设该品牌冰箱的标价为 x 元，则

进价/元	标价/元	售价/元	利润/元	利润率
2 000	x	$80\%x$	200	10%

根据利润＝售价－进价，得 $80\%x-2\,000=200$.

解得 $x=2\,750$.

$\therefore$按标价的九折销售，每台可获利 $90\%\times2\,750-2\,000=475$（元）.

3. **解：**（1）设从 A 仓库往 C 超市运大米 x t.

$\therefore$从 A、B 两仓库运往 C、D 两超市的大米吨数如表所示.

	C 超市	D 超市	合计/t
A 仓库	x	$20-x$	20
B 仓库	$15-x$	$15+x$	30
合计/t	15	35	50

（2）从 A、B 两仓库往 C、D 两超市运输大米的总费用为

$150x+120(20-x)+100(15-x)+90(15+x)=(20x+5\ 250)$（元）.

当 $x=8$ 时，$20x+5\ 250=20\times8+5\ 250=5\ 410$（元）.

故当 $x=8$ 时，从 A、B 两仓库往 C、D 两超市运输大米的总费用为 5 410 元.

（3）由题意，得 $20x+5\ 250=5\ 350$.

解得 $x=5$.

故从 A 仓库往 C 超市运大米 5 t.

4. 解：（1）$10\times1.65=16.5$（元）.

则甲用户 1 月份应缴水费 16.5 元.

（2）$20\times1.65+(30-20)\times2.48+(35-30)\times3.3=74.3$（元）.

则乙用户 1 月份应缴水费 74.3 元.

（3）设丙用户 1 月份共用水 x t.

$\because 67.7>20\times1.65+(30-20)\times2.48=57.8$，

$\therefore x>30$.

根据题意可知，

$57.8+3.3(x-30)=67.7$.

解得 $x=33$.

故丙用户 1 月份共用水 33 t.

名卷压轴题

解：（1）设 2021 年国庆期间该品牌服饰共销售白色有帽款外套 x 件，则销售黑色无帽款外套 $(1\ 200-x)$件.

根据题意列出如下表格.

	单价/（元/件）	数量/件	总收入/元
白色有帽款	50	x	$50x$
黑色无帽款	40	$1\ 200-x$	$40\cdot(1\ 200-x)$

根据题意可知，

$50x+40(1\ 200-x)=52\ 000$.

解得 $x=400$.

故 2021 年国庆期间该品牌服饰共销售白色有帽款外套 400 件.

（2）由（1）可知，黑色无帽款在 2021 年国庆期间的销量为 $1\ 200-400=800$（件）.

根据题意列出如下表格.

	单价/（元/件）	数量/件	总收入/元
白色有帽款	$50(1-5a\%)$	$400\times(1+20\%)$	$50\cdot(1-5a\%)\cdot400\times(1+20\%)$
黑色无帽款	$40-a$	$800\times(1+50\%)$	$(40-a)\cdot800\times(1+50\%)$

则 $50(1-5a\%)\times400\times(1+20\%)+(40-a)\times800\times(1+50\%)=52\,000\times(1+5a\%)$.

解得 $a=4$.

◎一元一次方程　新题型探究

例题　**解**：(1) $\frac{1}{2}x=1$ 是“合并式方程”．理由如下：

由 $\frac{1}{2}x=1$，得 $x=2$.

$\because 2=\frac{1}{2}\times2+1$，

$\therefore \frac{1}{2}x=1$ 是“合并式方程”.

(2) 解 $3x=m+1$，得 $x=\frac{m+1}{3}$.

$\because$ 关于 x 的一元一次方程 $3x=m+1$ 是“合并式方程”，

$\therefore \frac{m+1}{3}=2\times3+m+1$.

$\therefore m=-10$.

【点拨】本题主要考查了解一元一次方程与“合并式方程”的新定义问题．熟练掌握解一元一次方程和理解新定义是解决本题的关键.

变式训练

(1) ②　**【解析】**① $\frac{1}{2}x=-\frac{1}{2}$ 的解是 $x=-1$，

$\because -1\neq-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$，

$\therefore$ ①不是“和解方程”；

② $-3x=\frac{9}{4}$ 的解是 $x=-\frac{3}{4}$，

$\because -\frac{3}{4}=\frac{9}{4}+(-3)$，

$\therefore$ ②是“和解方程”；

③ $5x=-2$ 的解是 $x=-\frac{2}{5}$，

$\because -\frac{2}{5}\neq-2+5$，

$\therefore$ ③不是“和解方程”.

(2) **解**：$\because 2(x+1)=-m$ 的解是 $x=-\frac{m}{2}-1$，

又 $\because 2(x+1)=-m$ 是“和解方程”，

$\therefore -\frac{m}{2}-1=-m-2+2$.

$\therefore m=2$.

(3) **解**：$\because 3x=m+n$ 的解是 $x=\frac{m+n}{3}$，

又 $\because 3x=m+n$ 是“和解方程”，

$\therefore \frac{m+n}{3}=3+m+n$.

又 $\because 3x=m+n$ 的解是 $x=n$，

$\therefore \frac{m+n}{3}=n$.

$\therefore m=-3$，$n=-\frac{3}{2}$.

培优精练

解：(1) 根据题中的新定义，得

原式 $=-4+6=2$.

（2）由题意，得$-6+3x=2x+2-5x-5$.

解得$x=\frac{1}{2}$.

（3）将等式利用题中的新定义化简，得$2x-x=4-2y$，

即$x+2y=4$.

则$2x+4y+1=2(x+2y)+1=8+1=9$.

第六章　一次方程组

第1讲　一次方程组的应用（一）

例一　解：设每头大牛1天需饲料x kg，每头小牛1天需饲料y kg，根据题意列出如下表格.

	大牛1天需要饲料/kg	小牛1天需要饲料/kg	1天共需要饲料/kg
原来	$30x$	$15y$	675
购进后	$(30+12)x$	$(15+5)y$	940

根据题意，得

$$\begin{cases}30x+15y=675,\\(30+12)x+(15+5)y=940.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=20,\\y=5.\end{cases}$

$\therefore x+y=25$.

故养一头大牛和一头小牛一天共需25 kg饲料.

【点拨】本题属于“鸡兔同笼”类问题，即题干中出现至少6个量，且相互之间都有一定关系，处理这类问题时可借助表格清晰地表示出各个量之间的关系，找出等量关系，从而列方程组并求解.

变式训练一

1. D　**【解析】**根据题意列出如下表格.

	大盒装口罩数/只	小盒装口罩数/只	共装口罩数/只
情况一	$2x$	$4y$	88
情况二	$3x$	$2y$	84

根据题意，得$\begin{cases}2x+4y=88,\\3x+2y=84.\end{cases}$

故选D.

2. $\begin{cases}5x+2y=10,\\2x+5y=8\end{cases}$

【解析】根据题意列出如下表格.

	牛值金/两	羊值金/两	共值金/两
第一种	$5x$	$2y$	10
第二种	$2x$	$5y$	8

根据题意，得$\begin{cases}5x+2y=10,\\2x+5y=8.\end{cases}$

例二　解：设去年的总产值为x万元，总支出为y万元，根据题意可列出如下表格.

	总产值/万元	总支出/万元	利润/万元
去年	x	y	300
今年	$(1+20\%)x$	$(1-10\%)y$	810

根据题意，得

$$\begin{cases}x-y=300,\\(1+20\%)x-(1-10\%)y=810.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=1\,800,\\y=1\,500.\end{cases}$

故去年的总产值是1 800万元，总支出是1 500万元.

【点拨】本题属于“增收节支”类问题，这类问题中两次出现的产值、支出、利润之间都存在一定关系，可根据题目先合理设元，再根据题意表示出其他量，依据“利润＝产值－支出”的等量关系列出方程.

变式训练二

1. D　**【解析】**根据题意列出如下表格.

	第一种货物	第二种货物	合计/元
进价/元	x	y	3 000
利润/元	$10\%x$	$11\%y$	315

根据题意，得

$\begin{cases}x+y=3\,000,\\10\%x+11\%y=315.\end{cases}$ 故选D.

2. **解**：设小明家去年种植菠萝的投资为x元，收入为y元．根据题意列出如下表格.

	投资/元	收入/元	利润/元
去年	x	y	8 000
今年	$(1+10\%)x$	$(1+35\%)y$	11 800

根据题意，得

$$\begin{cases}y-x=8\,000,\\(1+35\%)y-(1+10\%)x=\\11\,800.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=4\,000,\\y=12\,000.\end{cases}$

$\therefore (1+10\%)x=4\,400$，

$(1+35\%)y=16\,200$.

故小明家今年种植菠萝的投资为4 400元，收入为16 200元.

例三　**解**：设原两位数十位上的数字是x，个位上的数字是y，根据题意列出如下表格.

	十位	个位	两位数
交换前	x	y	$10x+y$
交换后	y	x	$10y+x$

根据题意，得

$$\begin{cases}10x+y=x+y+9,\\10y+x=10x+y+27.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=1,\\y=4.\end{cases}$

故这个两位数是14.

【点拨】本题考查数字之间的关系，即通过交换数字的位置得到不同的数. 处理这类问题时很容易在交换数字的位置时产生混淆，利用表格法能很好地避免出错.

变式训练三

1. 解：根据题意列出如下表格.

	十位	个位	两位数
交换前	x	y	$10x+y$
交换后	y	x	$10y+x$

根据题意，得

$$\begin{cases} x-y=1, \\ 10x+y+(10y+x)=33. \end{cases}$$

即$\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=3. \end{cases}$解得$\begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$

故这个两位数为 21.

2. 解：设佳佳在 12:00 时看到的两位数十位上的数字为 x，个位上的数字为 y. 根据题意列出如下表格.

时刻	12:00	13:00	14:00
里程表上的数	$10x+y$	$10y+x$	$100x+y$

根据题意，得

$$\begin{cases} x+y=7, \\ 10y+x-(10x+y)=100x+y-(10y+x). \end{cases}$$

解得$\begin{cases} x=1, \\ y=6. \end{cases}$

则 $10x+y=16$.

故佳佳在 12:00 时看到的两位数是 16.

例四 解：（方法一）设有 x 天早晨下雨，这一段时间有 y 天.

根据题意，得

$$\begin{cases} y-x=7, \\ y-(9-x)=6. \end{cases}$$

解得$\begin{cases} x=4, \\ y=11. \end{cases}$

故这段时间有 11 天.

（方法二）设早晴晚雨有 x 天，早雨晚晴有 y 天，早晴晚晴有 z 天. 根据题意列出表格如下.

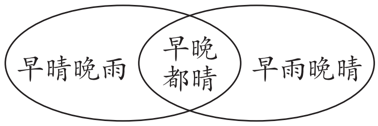
早晨	晴	雨	晴
晚上	雨	晴	晴
天数	x	y	z

根据题意，得$\begin{cases} x+y=9, \\ y+z=6, \\ x+z=7. \end{cases}$

解得$\begin{cases} x=5, \\ y=4, \\ z=2. \end{cases}$

∴这段时间有 $5+4+2=11$（天）.

（方法三）画图来理解.



设早晚都晴有 x 天，则早晴晚雨有$(7-x)$天，早雨晚晴有$(6-x)$天，则下雨的天数为$[(7-x)+(6-x)]$天，根据题意可知，$(7-x)+(6-x)=9$.

解得 $x=2$.

$\therefore 7-x=7-2=5$,

$6-x=6-2=4$.

$\therefore$这段时间有 $5+2+4=11$（天）.

【点拨】本题涉及三个量，每种量对应两种情况，所以如果直接从字面上理解容易混淆. 若用表格分析或画图则可顺利地找出这几个量之间的关系，从而更加直观地发现其中包含的等量关系，列出所对应的方程并求解即可.

变式训练四

解：（方法一）设此旅行团有 x 人单程搭乘缆车，单程步行；去、回均搭乘缆车的有 y 人. 根据题意，得

$$\begin{cases}200x+300y=4\,100, \\ (15-y)+(10-y)=x.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=7, \\ y=9.\end{cases}$

则此旅行团共有 $7+9=16$（人）.

（方法二）可用表格法分析.

设去程乘缆车、回程步行的有 x 人；去程步行、回程乘缆车的有 y 人；去程、回程都乘缆车的有 z 人.

去程	乘缆车	步行	乘缆车
回程	步行	乘缆车	乘缆车
人数	x	y	z

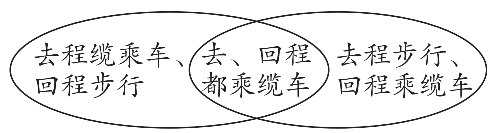
根据题意，得

$$\begin{cases}x+z=15, \\ y+z=10, \\ 200(x+y)+300z=4\,100.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=6, \\ y=1, \\ z=9.\end{cases}$

故此旅行团共有 $6+1+9=16$（人）.

（方法三）画图理解.



设去、回程都乘缆车的有 x 人，则去程乘缆车、回程步行的有$(15-x)$人，去程步行、回程乘缆车的有$(10-x)$人.

根据题意可知，

$300x+200[(15-x)+(10-x)]=4\,100$.

解得 $x=9$.

$\therefore 15-x=15-9=6$,

$10-x=10-9=1$.

∴故此旅行团共有 $9+6+1=16$（人）.

培优精练

1. D 【解析】根据题意列出表格如下.

	马	牛	共价
第一种	$4x$	$6y$	48
第二种	$3x$	$5y$	38

根据题意，得

$\begin{cases}4x+6y=48,\\3x+5y=38.\end{cases}$ 故选 D.

2. $\begin{cases}x-y=400,\\(1+25\%)x-(1-10\%)y=980\end{cases}$

【解析】根据题意列出如下表格.

	总产值/万元	总支出/万元	利润/万元
去年	x	y	400
今年	$(1+25\%)x$	$(1-10\%)y$	980

根据题意，得

$\begin{cases}x-y=400,\\(1+25\%)x-(1-10\%)y=980.\end{cases}$

3. 解：设这个两位数个位上的数字为 x，十位上的数字为 y.

根据题意列出如下表格.

	十位	个位	两位数
交换前	y	x	$10y+x$
交换后	x	y	$10x+y$

由题意，得

$\begin{cases}x-y=5,\\(10y+x)+(10x+y)=143.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=9,\\y=4.\end{cases}$

故这个两位数为 49.

4. 解：（方法一）设有 x 名同学上学步行，全班共有 y 名同学.

根据题意，得

$\begin{cases}y-x=22,\\y-(28-x)=26.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=16,\\y=38.\end{cases}$

故全班共有 38 名同学.

（方法二）用表格法来分析.

设上学步行、放学乘车的有 x 人，上学乘车、放学步行的有 y 人，上学、放学都乘车的有 z 人.

上学	步行	乘车	乘车
放学	乘车	步行	乘车
人数	x	y	z

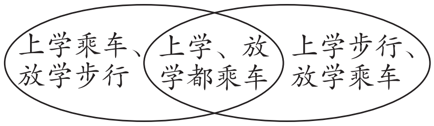
根据题意，得 $\begin{cases}y+z=22,\\x+z=26,\\x+y=28.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=16,\\y=12,\\z=10.\end{cases}$

共有 $16+12+10=38$（人）.

故全班共有 38 名同学.

（方法三）画图理解.



设上学、放学都乘车的有 x 人，则上学乘车、放学步行的有$(22-x)$人，上学步行、放学乘车的有$(26-x)$人. 故上学、放学过程中有一次选择步行的人数有$[(22-x)+(26-x)]$人，可列方程$(22-x)+(26-x)=28$.

解得 $x=10$.

$\therefore 22-x=22-10=12$,

$26-x=26-10=16$.

$\therefore 12+10+16=38$（人）.

故全班共有 38 名同学.

名卷压轴题

解：设 2 路公交车的行驶速度是 x m/min，小刚行走的速度是 y m/min，同向行驶的相邻两车的间距为 s m. 根据题意画出下图.

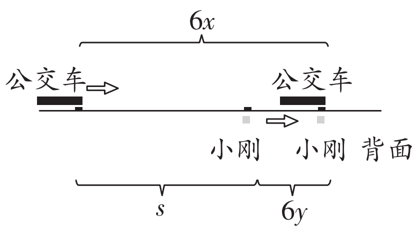


图 1

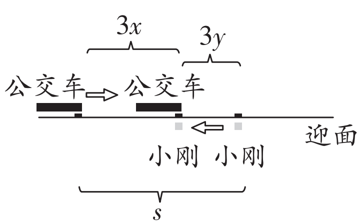


图 2

由图 1 可得：$6x-6y=s$，①

由图 2 可得：$3x+3y=s$. ②

由①②可得 $s=4x$.

$\therefore \frac{s}{x}=4$.

故 2 路公交车总站发车间隔的时间是 4 min.

第 2 讲　一次方程组的应用（二）

例一　**解**：设$\angle COM=x$，

$\angle BON=y$.

根据题意，得$\begin{cases}2x+y=90°,\\ y-x=36°.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=18°,\\ y=54°.\end{cases}$

故$\angle COM=18°$，$\angle BON=54°$.

【点拨】在求两个角的度数时，可将要求的角分别设为未知数，再从题干已知条件与图中隐含的条件中找出等量关系，从而建立方程并求解.

变式训练一

1. 75°　15°　**【解析】**设$\angle COE=x$，$\angle COD=y$.

根据题意，得

$\begin{cases}2x+2y=180°,\\ x-y=60°.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=75°,\\ y=15°.\end{cases}$

故$\angle COE=75°$，$\angle COD=15°$.

2. $83°$　$14°$　**【解析】**设$\angle BOC=\angle MOC=x$，$\angle DON=y$.

∵$\angle AOB$为直角，

∴$\angle AOB=90°$.

∴$\angle AOM=\angle AOB-\angle BOM=90°-2x$.

∵OD平分$\angle CON$，

∴$\angle CON=2y$.

根据题意，得

$$\begin{cases}x+2y=180°,\\ y-(90°-2x)=21°.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=14°,\\ y=83°.\end{cases}$

∴$\angle DON=83°$，$\angle BOC=14°$.

例二　D　**【解析】**设每块长方形地砖的长为x cm、宽为y cm.

根据题意，得$\begin{cases}4y=60,\\ x+y=60.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=45,\\ y=15.\end{cases}$

故每块长方形地砖的面积为$xy=45\times15=675$（cm^2）.

【点拨】解答此类题目可先根据题意合理设元，再观察图形特征.一般情况下，相同的两条边用不同的代数式来表示，找到隐含在图中的两组等量关系，从而列方程并求解.

变式训练二

1. 1 200　**【解析】**设小长方形的长为x cm、宽为y cm.

依题意，得$\begin{cases}x+y=30,\\ 3y=30.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=20,\\ y=10.\end{cases}$

∴这个大长方形的长为$2x=40$.

则这个大长方形的面积是$30\times40=1\,200$（cm^2）.

2. 解：设每个长方形纸片的长为x、宽为y.

根据题意，得$\begin{cases}x-y=4,\\ x-2y=3.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=5,\\ y=1.\end{cases}$

由图3可知，图3中阴影部分是一个正方形，其边长为$x-3y=5-3\times1=2$.

∴图3中阴影部分的面积是$2\times2=4$.

例三　解：(1) 依题意，得

$$\begin{cases}3a+b+10=200,\\ a+3b+30=200.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}a=50,\\ b=40.\end{cases}$

∴图1中的$a=50$ cm、$b=40$ cm.

(2) 将25张标准板材按裁法一裁剪可得A型木板$3\times25=75$（张），

B 型木板 25 张．将 5 张标准板材按裁法二裁剪可得 A 型木板 5 张，B 型木板 $3\times5=15$（张）．

故 A 型木板共有 $75+5=80$（张），B 型木板共有 $25+15=40$（张）．

设可以做竖式无盖礼品盒 x 个，横式无盖礼品盒 y 个．

依题意，得

$$\begin{cases}4x+3y=80,\\x+2y=40.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=8,\\y=16.\end{cases}$

故可以做竖式无盖礼品盒 8 个，横式无盖礼品盒 16 个．

【点拨】解决此类问题的关键是厘清每一类盒子分别需要两种规格的木板的个数，再通过等量关系，建立方程组并求解．

变式训练三

1. **解**：设做成的 A 款盒子有 x 个，B 款盒子有 y 个．

根据题意，得 $\begin{cases}x+2y=140,\\4x+4y=360.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=40,\\y=50.\end{cases}$

故做成的 A 款盒子有 40 个，B 款盒子有 50 个．

2. **解**：（1）第二次记录错误．理由如下：

设做成 x 个竖式纸盒，y 个横式纸盒．

则需要正方形纸板$(x+2y)$张，

需要长方形纸板$(4x+3y)$张．

$\because x+2y+4x+3y=5(x+y)$，

$\therefore$领取的正方形纸板和长方形纸板张数之和应该是 5 的倍数．

$\because 420+1\ 002=1\ 422$，$1\ 422$ 不是 5 的倍数，

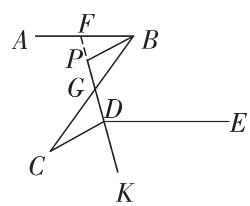
$\therefore$第二次记录错误．

（2）根据题意，得 $\begin{cases}x+2y=560,\\4x+3y=940.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=40,\\y=260.\end{cases}$

故记录正确的那一次，利用领取的纸板做了 40 个竖式纸盒，260 个横式纸盒．

例四 **解**：如下图，延长 KP 交 AB 于点 F，KP 与 BC 交于点 G．



设$\angle ABP=\alpha$，$\angle EDK=\beta$．

$\because AB\parallel DE$，BP 平分 $\angle ABC$，DK 平分$\angle CDE$，

$\therefore \angle ABC=2\alpha$，$\angle CDE=2\beta$．

$\because \angle C+\angle CGD=\angle CDK=\beta$，

$\angle CGD=\angle FGB=180^\circ-2\alpha-\angle BFG$，

$\angle BFG=\angle EDK=\beta$,

$\therefore \angle C=\beta-(180°-2\alpha-\beta)=2\beta+2\alpha-180°$. ①

$\because \angle BPG=\angle FBP+\angle BFG=\alpha+\beta$,

$\therefore \angle C=2\angle BPG-180°$.

$\because \angle BPG-2\angle C=54°$,

$\therefore \alpha+\beta-2\angle C=54°$. ②

联立①②两个方程，可解得

$\angle C=24°$.

【点拨】解答这类题目时要注意，题目一般会告知一个等量关系，而另一个等量关系则隐藏在图形当中，需要通过分析找出角度之间的第二个等量关系，从而建立方程组并求解.

变式训练四

解：设$\angle ABD=\alpha$，$\angle AED=\beta$，

则$\angle DBC=\alpha$，$\angle DEF=2\beta$.

$\because EF\parallel BC$,

$\therefore \angle AHC=\angle AEF$.

$\because \angle A+\angle ABC=\angle AHC$,

$\therefore \angle A+\angle ABC=\angle AEF$.

$\therefore 22°+2\alpha=3\beta$.

$\because \angle D+\angle DBC=\angle DEF$,

$\therefore 20°+\alpha=2\beta$.

联立方程组，得$\begin{cases}22°+2\alpha=3\beta,\\20°+\alpha=2\beta.\end{cases}$

解得$\begin{cases}\alpha=16°,\\\beta=18°.\end{cases}$

$\therefore \angle AGB=180°-\angle A-\angle ABD=180°-22°-16°=142°$.

培优精练

1. A **【解析】**设一个小长方形的长为 x cm、宽为 y cm.

根据题意，得$\begin{cases}x=3y,\\x+2y=60.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=36,\\y=12.\end{cases}$

$\therefore$大长方形的长为 $2x=72$.

$\therefore$大长方形的面积为 $72\times60=4\,320$（cm^2）. 故选 A.

2. A **【解析】**设竖式和横式这两种无盖纸盒分别做了 x 个、y 个.

由题意，得$\begin{cases}4x+3y=m,\\x+2y=n.\end{cases}$

两式相加，得 $m+n=5(x+y)$.

$\because x$、y 都是正整数，

$\therefore m+n$ 是 5 的倍数.

$\because$2 020、2 021、2 022、2 023 四个数中只有 2 020 是 5 的倍数，

$\therefore m+n$ 的值可能是 2 020.

3. 55° **【解析】**设$\angle 1=x$，$\angle 2=y$.

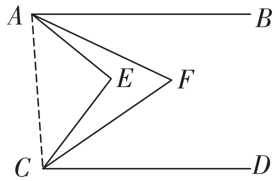
根据题意，得$\begin{cases}x+2y=180°,\\x-y=75°.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=110°,\\y=35°.\end{cases}$

$\because \angle EOF=90°$,

$\therefore \angle COF=90°-\angle 2=55°$.

4. 解：连接 AC，如下图所示.



设$\angle EAF=x$，$\angle ECF=y$，

则$\angle EAB=3x$，$\angle ECD=3y$.

$\because AB /\!/ CD$，

$\therefore \angle BAC+\angle ACD=180°$.

$\therefore \angle CAE+3x+\angle ACE+3y=180°$.

$\therefore \angle CAE+\angle ACE=180°-(3x+3y)$.

$\therefore \angle FAC+\angle FCA=180°-(2x+2y)$.

$\therefore \angle AEC=180°-(\angle CAE+\angle ACE)=180°-[180°-(3x+3y)]=3x+3y=3(x+y)$.

$\because AE \perp CE$，

$\therefore \angle AEC=90°=3(x+y)$.

$\therefore x+y=30°$.

$\therefore \angle AFC=180°-(\angle FAC+\angle FCA)=180°-[180°-(2x+2y)]=2x+2y=2(x+y)=2\times 30°=60°$.

名卷压轴题

解：(1) 设每张长方形卡纸的长为 x cm、宽为 y cm. 根据题意，得

$\begin{cases} 3x=5y, \\ 2y-8=x. \end{cases}$

解得$\begin{cases} x=40, \\ y=24. \end{cases}$

故每张长方形卡纸的长为 40 cm、宽为 24 cm.

(2) 这 16 张卡纸不能满足要求.

理由如下：

设按图 3 方法裁剪的卡纸为 a 张，按图 4 方法裁剪的卡纸为 b 张，则所得侧面有$(5a+3b)$个，底面有 $10b$ 个.

根据题意，得

$2(5a+3b)=3\times 10b$，且 a、b 为整数.

$\therefore 5a=12b$.

$\because a+b=16$，

$\therefore$无整数解.

最小整数解为 $a=12$、$b=5$.

$\therefore a+b=12+5=17$（张），

$17-16=1$（张）.

故至少要增加 1 张卡纸.

◎一次方程组　新题型探究

例题　(1) $\begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases}$

(2) B　**【解析】**满足条件的正整数有 9、6、5、4，共 4 个. 故选 B.

(3) **解**：$\begin{cases} x+2y=9, & ① \\ 2x+ky=10. & ② \end{cases}$

①×2−②，得$(4-k)y=8$.

解得 $y=\dfrac{8}{4-k}$.

∵x、y 是正整数，k 是整数，

∴$4-k=1$ 或 2 或 4 或 8.

∴$k=3$ 或 2 或 0 或 −4.

当 $k=3$ 时，$x=-7$ 不是正整数，

故 $k=2$、0、−4.

【点拨】本题考查了二元一次方程的正整数解. 灵活运用知识点求出特殊解是解此题的关键.

变式训练

解：(1) $\begin{cases} 2x-3y=7, & ① \\ 6x-5y=11. & ② \end{cases}$

将②变形，得 $3(2x-3y)+4y=11$. ③

将①代入③，得 $3\times7+4y=11$，

解得 $y=-\dfrac{5}{2}$.

把 $y=-\dfrac{5}{2}$代入①，得 $x=-\dfrac{1}{4}$.

∴方程组的解为$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{4}, \\ y=-\dfrac{5}{2}. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x-2z+12y=47, & ① \\ 2x+z+8y=36. & ② \end{cases}$

由①，得 $3(x+4y)-2z=47$，③

由②，得 $2(x+4y)+z=36$. ④

由③×2−④×3，得 $z=2$.

培优精练

解：(1) ∵当 $y=x$ 时，$y=5x-6$.

∴$x=5x-6$.

解得 $x=\dfrac{3}{2}$.

∴“雅系二元一次方程”$y=5x-6$ 的“完美值”为 $x=\dfrac{3}{2}$.

(2) ∵$x=-3$ 是“雅系二元一次方程”$y=\dfrac{1}{3}x+m$ 的“完美值”，

∴$-3=\dfrac{1}{3}\times(-3)+m$.

解得 $m=-2$.

(3) 存在 n，使得“雅系二元一次方程”$y=-\dfrac{3}{2}x+n$ 与 $y=3x-n+1$（n 是常数）的“完美值”相同.

理由如下：

由 $x=-\dfrac{3}{2}x+n$，得 $x=\dfrac{2}{5}n$，

由 $x=3x-n+1$，得 $x=\dfrac{n-1}{2}$.

∴$\dfrac{2}{5}n=\dfrac{n-1}{2}$.

解得 $n=5$.

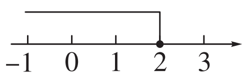
∴$x=2$.

∴n 的值为 5，“完美值”为 $x=2$.

第七章　一元一次不等式

第 1 讲　解一元一次不等式

例一　B　**【解析】**$\because 2x-4\leqslant 0$，$\therefore 2x\leqslant 4$. $\therefore x\leqslant 2$. $\therefore$ 不等式 $2x-4\leqslant 0$ 的解集为 $x\leqslant 2$. 在数轴上表示如下.



故选 B.

【点拨】此题考查一元一次不等式问题，注意空心和实心的不同表示. 不等式的解集在数轴上表示的方法："$>$"为空心圆圈，向右画折线；"$\geqslant$"为实心圆点，向右画折线；"$<$"为空心圆圈，向左画折线；"$\leqslant$"为实心圆点，向左画折线.

变式训练一

1. C　**【解析】**当 $x\leqslant 2$ 时，此不等式的正整数解只有 1、2. 故选 C.

2. B　**【解析】**去分母，得

$2(3x+2)\leqslant 3(x+5)-6$.

去括号，得

$6x+4\leqslant 3x+15-6$.

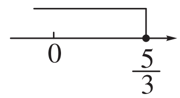
移项，合并同类项，得

$3x\leqslant 5$.

系数化为 1，得

$x\leqslant \frac{5}{3}$.

$\therefore$ 这个不等式的解集在数轴上的表示如下.



例二　-5　**【解析】**由数轴上关于 x 的不等式的解集可知 $x\geqslant -1$. 解不等式 $2x-a\geqslant 3$，得 $x\geqslant \frac{3+a}{2}$.

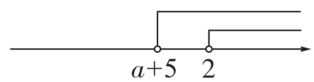
故 $\frac{3+a}{2}=-1$. 解得 $a=-5$.

【点拨】解答此题的关键是把不等式的解集求出来，与数轴上表示的不等式的解集进行对比，根据端点相等建立方程.

变式训练二

1. B　**【解析】**$\because 3x-a\leqslant -1$，$\therefore 3x\leqslant a-1$. 则 $x\leqslant \frac{a-1}{3}$. 由数轴知 $x\leqslant -1$，$\therefore \frac{a-1}{3}=-1$. 解得 $a=-2$. 故选 B.

2. C　**【解析】**解不等式 $2x>4$，得 $x>2$. 解不等式 $x-a>5$，得 $x>a+5$. $\because x>2$ 都是不等式 $x-a>5$ 的解，$\therefore a+5$ 在 2 的左边，如下图.



当 $a+5=2$ 时，也满足题目要求，

$\therefore a+5\leqslant 2$.

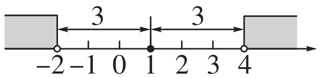
解得 $a\leqslant -3$.

例三 (1) ① $x<-2$

② $-2<x<2$

③ $x>a$ 或 $x<-a$ $\quad -a<x<a$

(2) **解**：在数轴上找出 $|x-1|=3$ 的解，即到 1 的距离为 3 的点对应的数为 -2、4，如下图.



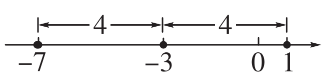
在 -2 的左边或在 4 的右边的 x 值就满足 $|x-1|>3$.

$\therefore |x-1|>3$ 的解集为 $x<-2$ 或 $x>4$.

【点拨】利用绝对值的意义，使用数形结合思想求解，就省去了分段讨论的步骤，达到了化繁为简、化难为易的目的.

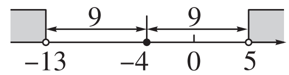
变式训练三

1. 解：(1) 数轴上到 -3 的距离为 4 的点对应的数为 -7、1，如下图.



$\therefore$ 方程 $|x+3|=4$ 的解为 $x=-7$ 或 $x=1$.

(2) 数轴上到 -4 的距离为 9 的点对应的数为 -13、5，$\therefore$ 数轴上到 -4 的距离大于 9 的点对应的数在 -13 的左边和 5 的右边. 如下图.



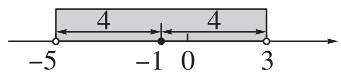
$\therefore$ 原不等式的解集为 $x<-13$ 或 $x>5$.

2. 解：$\because 2|x+1|-3<5$，

$\therefore 2|x+1|<8$.

$\therefore |x+1|<4$.

数轴上到 -1 的距离等于 4 的点对应的数为 -5、3，如下图.



$\therefore$ 数轴上到 -1 的距离小于 4 的点在 -5 与 3 之间.

$\therefore$ 原绝对值不等式的解集是 $-5<x<3$.

例四 **解**：(1) 设 A 型设备的单价是 x 万元，B 型设备的单价是 y 万元，根据题意列出表格如下.

	A 型资金/万元	B 型资金/万元	共需资金/万元
情况一	x	$3y$	230
情况二	$3x$	$2y$	340

依题意，得 $\begin{cases} x+3y=230, \\ 3x+2y=340. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=80, \\ y=50. \end{cases}$

故 A 型设备的单价是 80 万元，B 型设备的单价是 50 万元.

(2) 设购进 A 型设备 m 套，根据题意可列表格如下.

	A 型	B 型	合计
套数/套	m	$50-m$	50
金额/万元	$80m$	$50(50-m)$	$80m+50(50-m)$

依题意，得

$80m+50(50-m)\leqslant 3\ 000$.

解得 $m\leqslant\frac{50}{3}$.

∵m 为正整数，

∴m 的最大值为 16.

故最多可购买 A 型设备 16 套.

【点拨】本题考查了二元一次方程组的应用以及一元一次不等式的应用. 解题的关键是：（1）找准等量关系，正确列出二元一次方程组；（2）根据各数量之间的关系，正确列出一元一次不等式.

变式训练四

解：（1）设该超市打折促销前购买 1 个甲种物品需 x 元，1 个乙种物品需 y 元，根据题意可列表格如下.

	甲种费用/元	乙种费用/元	费用情况
情况一	$15x$	$20y$	共 250 元
情况二	x	y	甲比乙多 5 元

依题意，得$\begin{cases}15x+20y=250,\\x-y=5.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=10,\\y=5.\end{cases}$

故该超市打折促销前购买 1 个甲种物品需 10 元，1 个乙种物品需 5 元.

（2）设需要购买 m 个甲种物品，根据题意可列表格如下.

	甲种物品	乙种物品
数量/个	m	$35-m$
单价/元	$10-2$	$5\times80\%$
总费用/元	$(10-2)m$	$5\times80\%\times(35-m)$

依题意，得$(10-2)m+5\times80\%\times(35-m)\leqslant225$.

解得 $m\leqslant21\frac{1}{4}$.

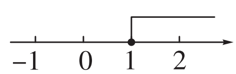
又∵m 为正整数，

∴m 的最大值为 21.

故最多购买 21 个甲种物品.

培优精练

1. D　**【解析】**解不等式 $3x-1\geqslant2x$，得 $x\geqslant1$. 在数轴上的表示如下图.

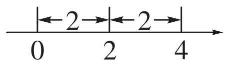


2. D　**【解析】**解不等式，得 $x\leqslant-\frac{11}{3}a+\frac{8}{3}$. 由数轴可得不等式的解集为 $x\leqslant-1$. ∴$-\frac{11}{3}a+\frac{8}{3}=-1$. 解得 $a=1$. 故选 D.

3. （1）$-5<x<5$

（2） $-3<x<-1$ 或 $1<x<3$

（3）**解**：在数轴上找出 $|x-2|<2$ 的解．即到 2 的距离小于 2 的点的集合．因为到 2 的距离等于 2 的点为 0 和 4，如下图．



所以由图可知，在数轴上大于 0 小于 4 的点满足题意．

所以不等式 $|x-2|<2$ 的解集的是 $0<x<4$．

4．解：（1）设该社区种植甲种花卉 1 m^2 需 x 元，种植乙种花卉 1 m^2 需 y 元，根据题意可列表格如下．

	甲种花卉/元	乙种花卉/元	合计/元
情况一	$2x$	$3y$	430
情况二	x	$2y$	260

依题意，得 $\begin{cases}2x+3y=430, \\ x+2y=260.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=80, \\ y=90.\end{cases}$

故该社区种植甲种花卉 1 m^2 需 80 元，种植乙种花卉 1 m^2 需 90 元．

（2）设该社区种植乙种花卉 t m^2，根据题意可列表格如下．

	甲种花卉	乙种花卉	合计
花卉数量/m^2	$75-t$	t	75
所需资金/m^2	$80(75-t)$	$90t$	$80(75-t)+90t$

依题意，得

$80(75-t)+90t\leqslant 6\,300$．

解得 $t\leqslant 30$．

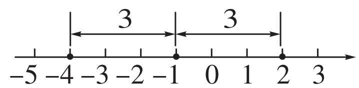
故该社区最多能种植乙种花卉 30 m^2．

名卷压轴题

解：（1）①文字语言：

数轴上什么数到 -4 的距离等于这个数到 2 的距离．

②图形语言：

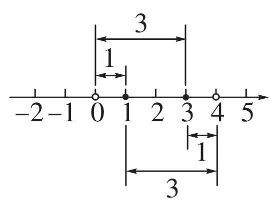


③答案：$x=-1$．

（2）①文字语言：

数轴上什么数到 1 的距离和它到 3 的距离之和大于 4．

②图形语言：



③答案：$x>4$ 或 $x<0$．

第 2 讲　解一元一次不等式组

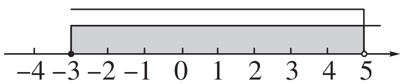
例一　解：$\begin{cases}2x-9<1, & ① \\ 3x-2\leqslant 5x+4. & ②\end{cases}$

解不等式①，得 $x<5$．

解不等式②，得 $x\geqslant -3$．

故原不等式组的解集是 $-3\leqslant x<$

5. 在数轴上的表示如图所示.



【点拨】此题主要考查一元一次不等式组的解法，解此类题目常常要结合数轴来判断. 要注意端点是否取，若取，则该点是实心的，反之，该点是空心的.

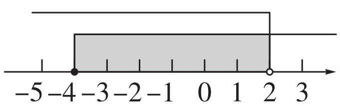
变式训练一

1. A　【解析】$\begin{cases} x-1<1, & ① \\ 2x-4\leqslant 4x+4. & ② \end{cases}$

解不等式①，得 $x<2$.

解不等式②，得 $x\geqslant -4$.

在数轴上表示如下图.

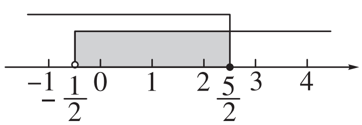


2. 解：∵解不等式①，得 $x>-\dfrac{1}{2}$.

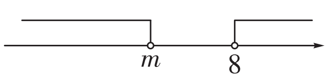
解不等式②，得 $x\leqslant\dfrac{5}{2}$.

∴不等式组的解集为 $-\dfrac{1}{2}<x\leqslant\dfrac{5}{2}$.

在数轴上的表示如下图.



例二　A　【解析】解不等式 $\dfrac{x+1}{3}<\dfrac{x}{2}-1$，得 $x>8$. ∵不等式组无解，在数轴上的表示如下图.

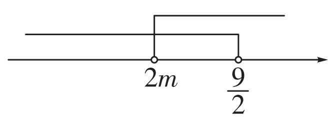


∴$m\leqslant 8$. 故选 A.

【点拨】本题主要考查已知一元一次不等式组无解，求参数的取值范围. 解题步骤如下：①把已知或能算出的解表示在数轴上；②让带字母的解在数轴上移动，找出满足题目要求的大范围；③注意临界点是否可取，可以代入原不等式的解集，验证是否符合题意.

变式训练二

1. B　【解析】解不等式组，得 $\begin{cases} x<\dfrac{9}{2}, \\ x>2m. \end{cases}$ ∵不等式组有解，在数轴上表示如下图.



∴$2m<\dfrac{9}{2}$. 解得 $m<\dfrac{9}{4}$，故选 B.

2. $m\leqslant 8$

【解析】$\begin{cases} \dfrac{3x-1}{2}-\dfrac{4x-2}{3}>1, & ① \\ 2(m-x)\geqslant 6. & ② \end{cases}$

解不等式①，得 $x>5$.

解不等式②，得 $x\leqslant m-3$.

∵不等式组无解，∴$m-3\leqslant 5$.

∴$m\leqslant 8$.

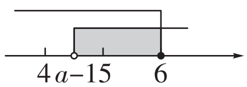
例三　**解**：解 $2x-1\leqslant 11$，

得 $x\leqslant 6$.

解 $x+1>a$，得 $x>a-1$.

故不等式组的解集为 $a-1<x\leqslant 6$.

∵关于 x 的不等式组 $\begin{cases}2x-1\leqslant 11,\\x+1>a\end{cases}$ 恰好只有 2 个整数解，将不等式组的解集在数轴上表示如下图.



∴这两个整数解为 5、6.

∴$4\leqslant a-1<5$.

解得 $5\leqslant a<6$.

【点拨】本题主要考查已知一元一次不等式组的整数解的情况，求参数的取值范围. 解题步骤如下：①把已知或能算出的解表示在数轴上；②让带字母的解在数轴上移动，观察与整数解的关系；③注意临界点是否可取，可以代入原不等式的解集，验证是否符合题意.

变式训练三

1. 解：$\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{x+1}{3}>0, & ①\\ x+\dfrac{5a+4}{3}>\dfrac{4}{3}(x+1)+a. & ②\end{cases}$

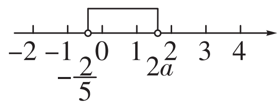
解①，得 $x>-\dfrac{2}{5}$.

解②，得 $x<2a$.

∴不等式组的解集为 $-\dfrac{2}{5}<x<2a$.

∵关于 x 的一元一次不等式组恰有 2 个整数解，

∴将不等式组的解集表示在数轴上如下图.



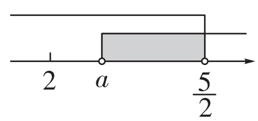
∴整数解为 0 和 1.

∴$1<2a\leqslant 2$. 解得$\dfrac{1}{2}<a\leqslant 1$.

2. 解：解不等式组，得$\begin{cases}x<\dfrac{5}{2},\\x>a.\end{cases}$

∴不等式组的解集是 $a<x<\dfrac{5}{2}$或

当 $a\geqslant\dfrac{5}{2}$时，不等式组无解. ①当 $a\geqslant\dfrac{5}{2}$时，不等式组无解. 则不等式组无整数解满足题意；②当不等式组的解集是 $a<x<\dfrac{5}{2}$时，在数轴上的表示如下图.



∵不等式组无整数解，

∴$a\geqslant 2$.

综上，a 的取值范围为 $a\geqslant 2$.

例四　解：（1）设改造 1 个甲种型号大棚需要 x 万元，改造 1 个乙种型号大棚需要 y 万元，根据题意可列表格如下.

	甲种型号资金/万元	乙种型号资金/万元	数量关系
情况一	$2x$	y	甲比乙多 6 万元
情况二	x	$2y$	甲乙共 48 万元

依题意，得$\begin{cases}2x-y=6,\\x+2y=48.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=12,\\y=18.\end{cases}$

故改造 1 个甲种型号大棚需要 12 万元，改造 1 个乙种型号大棚需要 18 万元.

(2) 设改造 m 个甲种型号大棚，则改造$(8-m)$个乙种型号大棚，根据题意可列表格如下.

	甲种型号	乙种型号	合计
改造时间/天	$5m$	$3(8-m)$	$5m+3(8-m)$
改造资金/万元	$12m$	$18(8-m)$	$12m+18(8-m)$

依题意，得

$\begin{cases}5m+3(8-m)\leqslant 35,\\12m+18(8-m)\leqslant 128.\end{cases}$

解得$\dfrac{8}{3}\leqslant m\leqslant\dfrac{11}{2}$.

$\because m$ 为整数，

$\therefore m=3$、4、5.

当 $m=3$ 时，$8-m=5$；

当 $m=4$ 时，$8-m=4$；

当 $m=5$ 时，$8-m=3$.

$\therefore$共有 3 种改造方案. 方案 1：改造 3 个甲种型号大棚，5 个乙种型号大棚；方案 2：改造 4 个甲种型号大棚，4 个乙种型号大棚；方案 3：改造 5 个甲种型号大棚，3 个乙种型号大棚.

方案 1 所需费用为 $12\times3+18\times5=126$（万元）；

方案 2 所需费用为 $12\times4+18\times4=120$（万元）；

方案 3 所需费用为 $12\times5+18\times3=114$（万元）.

$\because 114<120<126$，

$\therefore$方案 3 改造 5 个甲种型号大棚，3 个乙种型号大棚基地投入资金最少，最少资金是 114 万元.

【点拨】本题考查了二元一次方程组的应用以及一元一次不等式组的应用. 解题的关键是：(1) 找准等量关系，正确列出二元一次方程组；(2) 根据各数量之间的关系，正确列出一元一次不等式组.

变式训练四

解：(1) 设参加此次研学活动的老

师有 x 人，学生有 y 人，根据题意可列表格如下.

	老师带学生数	实际学生数	数量关系
情况一	$14x$	y	余 10 名学生
情况二	$15x$	y	差 6 名学生

依题意，得 $\begin{cases}14x+10=y,\\15x-6=y.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=16,\\y=234.\end{cases}$

故参加此次研学活动的老师有 16 人，学生有 234 人.

(2) ∵ $(234+16)\div 35=7$（辆）……5（人），$16\div 2=8$（辆），

∴共需要租 8 辆客车.

(3) 设租 35 座客车 m 辆，则需租 30 座客车 $(8-m)$ 辆，根据题意可列表格如下.

	甲型客车	乙型客车	合计
载客数/名	$35m$	$30(8-m)$	$35m+30(8-m)$
租金/元	$400m$	$320(8-m)$	$400m+320(8-m)$

依题意，得

$\begin{cases}35m+30(8-m)\geqslant 234+16,\\400m+320(8-m)\leqslant 3\ 000.\end{cases}$

解得 $2\leqslant m\leqslant 5\frac{1}{2}$.

∵ m 为正整数，

∴ $m=2$、3、4、5.

∴共有 4 种租车方案.

设租车总费用为 w 元，则 $w=400m+320(8-m)=80m+2\ 560$，

当 $m=2$ 时，$w=2\ 720$；

当 $m=3$ 时，$w=2\ 800$；

当 $m=4$ 时，$w=2\ 880$；

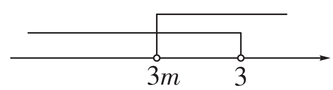
当 $m=5$ 时，$w=2\ 960$.

∴当 $m=2$ 时，w 取得最小值，最小值为 2 720.

∴学校共有 4 种租车方案，最少租车费用是 2 720 元.

培优精练

1. B 【解析】解不等式组，得 $\begin{cases}x<3,\\x>3m.\end{cases}$ 在数轴上的表示如下图.



由不等式组有解，得 $3m<3$.

解得 $m<1$. 故选 B.

2. **解**：解不等式①，

去分母，得 $12-4x>4-x-1$.

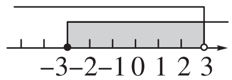
解得 $x<3$.

解不等式②，

去括号，得 $7x+1\geqslant 5x-5$.

解得 $x\geqslant -3$.

∴原不等式组的解集为 $-3\leqslant x<3$，在数轴上的表示如下图.



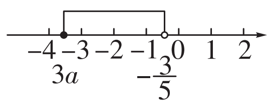
3. 解：解不等式 $4x-3(x+a)\geqslant 0$，得 $x\geqslant 3a$.

解不等式 $\frac{3x+1}{2}-\frac{1}{4}(x-1)<0$，

得 $x<-\frac{3}{5}$.

∵不等式组有 3 个整数解，

∴不等式组的解集为 $3a\leqslant x<-\frac{3}{5}$，在数轴上的表示如下图.



∴不等式组的 3 个整数解为 -3、-2、-1.

∴ $-4<3a\leqslant -3$.

∴ $-\frac{4}{3}<a\leqslant -1$.

∴a 的取值范围为 $-\frac{4}{3}<a\leqslant -1$.

4. 解：(1) 设 1 辆大型渣土运输车一次运输土方 x t，1 辆小型渣土运输车一次运输土方 y t，根据题意可列表格如下.

	大型车辆运输土方/t	小型车辆运输土方/t	合计/t
情况一	$2x$	$3y$	31
情况二	$5x$	$6y$	70

依题意，得 $\begin{cases}2x+3y=31,\\5x+6y=70.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=8,\\y=5.\end{cases}$

故 1 辆大型渣土运输车一次运输土方 8 t，1 辆小型渣土运输车一次运输土方 5 t.

(2) 设该渣土运输公司决定派出大型渣土运输车 m 辆，根据题意可列表格如下.

	大型车辆	小型车辆	合计
车辆数/辆	m	$20-m$	20
运渣吨数/t	$8m$	$5(20-m)$	$8m+5(20-m)$

依题意，得

$\begin{cases}8m+5(20-m)\geqslant 148,\\20-m\geqslant 2.\end{cases}$

解得 $16\leqslant m\leqslant 18$.

∵m 为整数，

∴$m=16$、17、18.

当 $m=16$ 时，$20-m=4$；

当 $m=17$ 时，$20-m=3$；

当 $m=18$ 时，$20-m=2$.

故有三种派车方案.

第一种方案：大型运输车 18 辆，小型运输车 2 辆；

第二种方案：大型运输车 17 辆，

小型运输车 3 辆；

第三种方案：大型运输车 16 辆，小型运输车 4 辆.

名卷压轴题

解：前四次操作的结果分别为

$3x-2$；

$3(3x-2)-2=9x-8$；

$3(9x-8)-2=27x-26$；

$3(27x-26)-2=81x-80$.

由题意，得$\begin{cases}27x-26\leqslant 487,\\81x-80>487.\end{cases}$

解得 $7<x\leqslant 19$.

容易验证，当 $7<x\leqslant 19$ 时，

$3x-2\leqslant 487$，$9x-8\leqslant 487$，

故 x 的取值范围是 $7<x\leqslant 19$.

◎一元一次不等式　新题型探究

例题　**解**：①当$\begin{cases}2k+1>-k+3,\\2k+1\leqslant 3\end{cases}$时，

解得$\frac{2}{3}<k\leqslant 1$. 如图 1.

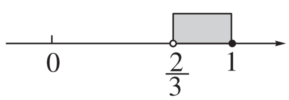


图 1

②当$\begin{cases}2k+1\leqslant -k+3,\\-k+3\leqslant 3\end{cases}$时，

解得 $0\leqslant k\leqslant\frac{2}{3}$. 如图 2.

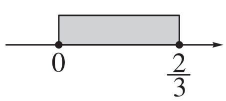


图 2

$\therefore \frac{2}{3}<k\leqslant 1$ 或 $0\leqslant k\leqslant\frac{2}{3}$.

$\because k$ 为正整数，

$\therefore k=1$.

当 $k=1$ 时，关于 x 的方程为

$\frac{2x-1}{3}-\frac{1-x}{6}=1$. 解得 $x=\frac{9}{5}$.

【点拨】本题主要考查对新定义的理解及解一元一次不等式的能力. 读懂新定义能进行分类讨论是前提，根据题意列出不等式组是关键.

变式训练

(1) $-2\,023$　**【解析】**$\because -2\,021>-2\,022>-2\,023$，$\therefore \min\{-2\,021,-2\,022,-2\,023\}=-2\,023$.

(2) **解**：$\because \max\{2, x+1, 2x\}=2x$，

$\therefore\begin{cases}2x\geqslant 2,\\2x\geqslant x+1.\end{cases}$

解得 $x\geqslant 1$.

(3) **解**：①当 $\min\{4, 2x+4, 4-2x\}=4$ 时，

则$\begin{cases}2x+4>4,\\4-2x>4.\end{cases}$此种情况不成立.

②当 $\min\{4, 2x+4, 4-2x\}=2x+4$ 时，

则$\begin{cases}4\geqslant 2x+4,\\4-2x\geqslant 2x+4.\end{cases}$解得 $x\leqslant 0$.

此时 $x+1\leqslant 1<2$，$2x\leqslant 0<2$，

则 $\max\{2, x+1, 2x\}=2$.

$\therefore 2x+4=2$. 解得 $x=-1$.

③当 $\min\{4, 2x+4, 4-2x\}=4-2x$ 时,

则$\begin{cases}4>4-2x,\\2x+4>4-2x.\end{cases}$解得 $x>0$.

此时 $x+1>1$，$2x>0$.

i 当 $\max\{2, x+1, 2x\}=2$ 时，

$\begin{cases}x+1\leqslant 2,\\2x\leqslant 2.\end{cases}$解得 $x\leqslant 1$.

$\therefore 4-2x=2$. $\therefore x=1$.

ii 当 $\max\{2, x+1, 2x\}=x+1$ 时，

则$\begin{cases}2<x+1,\\2x<x+1.\end{cases}$此种情况不成立.

iii 当 $\max\{2, x+1, 2x\}=2x$ 时，

$\begin{cases}2<2x,\\x+1<2x.\end{cases}$解得 $x>1$.

$\therefore 4-2x=2x$. 解得 $x=1$.

此种情况不成立.

综上所述，x 的值为 -1 或 1.

培优精练

（1）是　**【解析】**$\because$不等式 $x\geqslant 2$ 和不等式 $x\leqslant 2$ 有公共整数解 2，$\therefore$不等式 $x\geqslant 2$ 是 $x\leqslant 2$ 的“云不等式”.

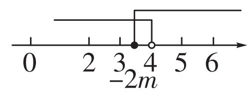
（2）**解**：解不等式 $x+2m\geqslant 0$，

得 $x\geqslant -2m$.

解不等式 $2x-3<x+1$，

得 $x<4$.

$\because$关于 x 的不等式 $x+2m\geqslant 0$ 不是 $2x-3<x+1$ 的“云不等式”，两个不等式的解集在数轴上表示如下.



$\therefore -2m>3$.

解得 $m<-\dfrac{3}{2}$.

故 m 的取值范围是 $m<-\dfrac{3}{2}$.

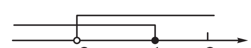
（3）**解**：当 $a>-1$，即 $a+1>0$ 时，解不等式 $x+3>a$，得 $x>a-3$.

解不等式 $ax-1\leqslant a-x$，

得 $x\leqslant 1$.

$\because$这两个不等式互为“云不等式”，

$\therefore$这两个不等式的解集在数轴上表示如下图.



$\therefore a-3<1$.

$\therefore -1<a<4$.

第八章　三角形

第 1 讲　三角形

例一　解：$\because AD$ 是 BC 边上的中线，

$\therefore BD=CD$.

设 $BD=CD=x$ cm，$AB=y$ cm，

则 $AC=2BC=2(x+x)=4x$(cm).

$\because AC>AB$，

$\therefore AC+CD=60$ cm，

$AB+BD=40$ cm，

即 $4x+x=60$，$x+y=40$.

$\therefore x=12$，$y=28$.

$\therefore AC=4\times12=48$（cm），

$AB=28$ cm.

【点拨】本题考查了三角形的中线，熟练掌握三角形的中线与周长的定义是解决本题的关键.

变式训练一

1. 解：$\because CF$、BE 分别是 AB、AC 边上的中线，$AE=2$，$AF=3$，

$\therefore AB=2AF=2\times3=6$，

$AC=2AE=2\times2=4$.

$\because \triangle ABC$ 的周长为 15，

$\therefore BC=15-6-4=5$.

2. 解：$\because E$ 为 AD 的中点，

$\therefore S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times4=2$（$\text{cm}^2$）.

$\because F$ 为 EC 的中点，

$\therefore S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}\times2=1$（$\text{cm}^2$）.

例二 解：（1）$\because AD$ 是 BC 边上的高，$\angle B=44^\circ$，

$\therefore \angle BAD=90^\circ-\angle B=90^\circ-44^\circ=46^\circ$.

又 $\angle C=70^\circ$，

$\therefore \angle BAC=180^\circ-\angle B-\angle C=180^\circ-44^\circ-70^\circ=66^\circ$.

$\because AE$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，

$\therefore \angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAC=33^\circ$.

$\therefore \angle DAE=\angle BAD-\angle BAE=46^\circ-33^\circ=13^\circ$.

（2）$\because \angle BAC=180^\circ-\angle B-\angle C$，$AE$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，

$\therefore \angle EAC=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle B-\angle C)$.

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中，$\angle DAC=90^\circ-\angle C$，

$\therefore \angle DAE=\angle EAC-\angle DAC=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle B-\angle C)-(90^\circ-\angle C)=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$.

【点拨】本题考查了三角形的内角和定理，三角形的角平分线和高的定义，准确识图是解题的关键.

变式训练二

1. 解：$\because DE\parallel BC$，$\angle ACF=140^\circ$，

$\therefore \angle DEC=\angle ACF=140^\circ$.

$\therefore \angle AED=180^\circ-140^\circ=40^\circ$.

又 $\angle ADE=105^\circ$，

$\therefore \angle A=180^\circ-105^\circ-40^\circ=35^\circ$.

2. 解：$\because CD$ 是 AB 上的高.

$\therefore \angle CDB=90^\circ$.

$\because \angle CDB+\angle DBC+\angle DCB=180^\circ$，

$\therefore \angle DBC=180^\circ-90^\circ-45^\circ=45^\circ$，

$\because BE$ 是 AC 上的高，

$\therefore \angle BEC=90^\circ$.

$\therefore \angle EBC=180^\circ-\angle ECB-\angle BEC=180^\circ-67^\circ-90^\circ=23^\circ$.

$\therefore \angle ABE=\angle ABC-\angle EBC=45^\circ-23^\circ=22^\circ$.

$\because \angle BFC=180^\circ-\angle EBC-\angle DCB$，

$\therefore \angle BFC=180^\circ-23^\circ-45^\circ=112^\circ$.

例三　（1）122°　**【解析】**$\because BP$、CP 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$，

$\therefore \angle PBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，

$\angle PCB=\frac{1}{2}\angle ACB$.

$\therefore \angle BPC=180^\circ-(\angle PBC+\angle PCB)=180^\circ-\left(\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle ACB\right)=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=180^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)=180^\circ-90^\circ+\frac{1}{2}\angle A=90^\circ+32^\circ=122^\circ$.

（2）**解**：$\because CE$ 和 BE 分别是 $\angle ACB$ 和 $\angle ABD$ 的平分线，

$\therefore \angle BCE=\frac{1}{2}\angle ACB$，

$\angle DBE=\frac{1}{2}\angle ABD$.

$\because \angle ABD=\angle A+\angle ACB$，

$\therefore \angle DBE=\frac{1}{2}(\angle A+\angle ACB)=\frac{1}{2}\angle A+\angle BCE$.

$\because \angle DBE=\angle E+\angle BCE$，

$\therefore \angle BEC=\angle DBE-\angle BCE=\frac{1}{2}\angle A+\angle BCE-\angle BCE=\frac{1}{2}\angle A=\frac{\alpha}{2}$.

（3）**解**：$\angle BQC=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$.

理由如下：

$\because \angle QBC=\frac{1}{2}(\angle A+\angle ACB)$，

$\angle QCB=\frac{1}{2}(\angle A+\angle ABC)$，

$\therefore \angle BQC=180^\circ-\angle QBC-\angle QCB=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle A+\angle ACB)-\frac{1}{2}(\angle A+\angle ABC)=180^\circ-\frac{1}{2}\angle A-\frac{1}{2}(\angle A+\angle ABC+\angle ACB)=180^\circ-\frac{1}{2}\angle A-90^\circ=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$，

即 $\angle BQC=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$.

【点拨】本题考查了三角形的外角性质与内角和定理，熟记三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和是解本题的关键.

变式训练三

1. 解：∵$AD\perp BC$，

∴$\angle ADC=90^\circ$.

∵$\angle DAC=10^\circ$，

∴$\angle ACB=90^\circ-\angle DAC=90^\circ-10^\circ=80^\circ$.

∵AE是$\angle MAC$的平分线，BF平分$\angle ABC$，

∴$\angle MAE=\frac{1}{2}\angle MAC$，

$\angle ABF=\frac{1}{2}\angle ABC$.

又∵$\angle MAE=\angle ABF+\angle AFB$，

$\angle MAC=\angle ABC+\angle ACB$，

∴$\angle AFB=\angle MAE-\angle ABF=\frac{1}{2}\angle MAC-\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}(\angle MAC-\angle ABC)=\frac{1}{2}\angle ACB=\frac{1}{2}\times80^\circ=40^\circ$.

2. (1) **解**：∵三个内角的平分线交于点O，

∴$\angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，

$\angle OAC=\frac{1}{2}\angle BAC$，

$\angle OCA=\frac{1}{2}\angle ACB$.

∴$\angle OAC+\angle OCA=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ACB)=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ABC)=90^\circ-\frac{1}{2}\angle ABC=90^\circ-\angle OBC=90^\circ-\angle OBD$.

∴$\angle AOC=180^\circ-(\angle OAC+\angle OCA)=180^\circ-(90^\circ-\angle OBD)=90^\circ+\angle OBD$.

∵$\angle ODC=\angle AOC$，

$\angle ODC=\angle BOD+\angle OBD$，

∴$\angle BOD+\angle OBD=90^\circ+\angle OBD$.

∴$\angle BOD=90^\circ$.

(2) ①**证明**：∵BF平分$\angle ABE$，

∴$\angle EBF=\frac{1}{2}\angle ABE=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ABC)=90^\circ-\frac{1}{2}\angle ABC=90^\circ-\angle OBD$.

由(1)可知，$\angle ODB=90^\circ-\angle OBD$.

∴$\angle EBF=\angle ODB$.

∴$BF\parallel OD$.

②**解**：∵BF平分$\angle ABE$，

$\angle ABE=\angle BAC+\angle ACB$，

∴$\angle EBF=\frac{1}{2}\angle ABE=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ACB)$.

∵三个内角的平分线交于点O，

∴$\angle BCF=\frac{1}{2}\angle ACB$.

∵$\angle F=\angle EBF-\angle BCF=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ACB)-\frac{1}{2}\angle ACB=\frac{1}{2}\angle BAC$.

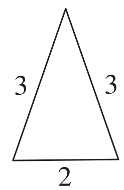
$\therefore \angle BAC=2\angle F=2\times50^\circ=100^\circ$.

例四　解：（1）∵4 只能拆分成 1、1、2 三个正整数的和，$1+1=2$，

∴4 根火柴不能搭成三角形.

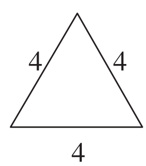
（2）8 根火柴能搭成一种三角形（3，3，2）.

示意图：

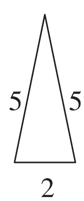


等腰三角形

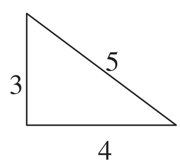
12 根火柴能搭成 3 种不同形状的三角形：（4，4，4），（5，5，2），（3，4，5）. 画出示意图如下：



等边三角形



等腰三角形

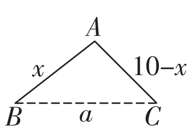


直角三角形

【点拨】解本题的关键是利用三角形两边之和大于第三边.

变式训练四

1. **解：**如下图，设 $AB=x$ cm（$x\geqslant5$），则 $AC=(10-x)$ cm.



由三角形的三边关系，得

$x-(10-x)<a<x+10-x$.

$\therefore 2x-10<a<10$.

$\because x\geqslant5$，

$\therefore 2x-10\geqslant0$.

∴a 的最大取值范围为 $0<a<10$.

又 a 为正整数，

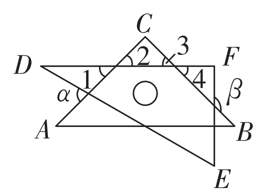
∴a 的最大值为 9.

2. （1）**解：**9 根火柴能搭成 3 种不同形状的三角形，边长分别为（1，4，4），（2，3，4），（3，3，3）.

（2）能　**【解析】**根据三角形的三边关系可得 10 根火柴分成（3，3，4）或（4，4，2），首尾顺次相接能搭成三角形.

培优精练

1. B　**【解析】**如下图，$\because \angle\alpha=\angle1+\angle D$，$\angle\beta=\angle4+\angle F$，



$\therefore \angle\alpha+\angle\beta=\angle1+\angle D+\angle4+\angle F$

$=\angle2+\angle D+\angle3+\angle F$

$=\angle2+\angle3+30^\circ+90^\circ$

$=210^\circ$. 故选 B.

2. **解：**$\because \dfrac{GC}{FG}=\dfrac{2}{1}$，$\dfrac{AG}{GD}=\dfrac{2}{1}$，

$\therefore S_{\triangle CEG}=S_{\triangle AEG}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ACF}$，

$S_{\triangle BFG}=S_{\triangle AGF}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}$.

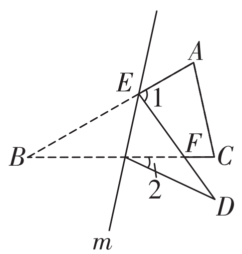
$\because S_{\triangle ACF}=S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 18=9$,

$\therefore S_{\triangle CEG}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACF}=\frac{1}{3}\times 9=3$,

$S_{\triangle BFG}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}=\frac{1}{3}\times 9=3$.

$\therefore S_{阴影}=S_{\triangle CEG}+S_{\triangle BFG}=6$.

3. 解：设直线 m 与 AB 相交于点 E，ED 与 BC 相交于点 F，如下图所示.



由翻折可知，$\angle D=\angle B=30°$.

$\because \angle 2=25°$,

$\therefore \angle EFB=\angle 2+\angle D=25°+30°=55°$.

$\therefore \angle 1=\angle B+\angle EFB=30°+55°=85°$.

4. 证明：在$\triangle ABD$中，

$AB+AD>BD$.

在$\triangle PDC$中，$CD+PD>PC$，

$\therefore AB+AD+CD+PD>BD+PC$.

$\therefore AB+AC>BD-PD+PC$.

$\therefore AB+AC>BP+CP$.

名卷压轴题

解：$\because \angle 2=\angle ABD+\angle BAD=\angle 1+\angle EBC+\angle BAD$，①

$\angle 4=\angle ACB+\angle EBC=\angle 3+\angle ACF+\angle EBC$，②

$\angle 6=\angle BAC+\angle ACF=\angle 5+\angle BAD+\angle ACF$，③

$\therefore$①+②+③，得

$\angle 2+\angle 4+\angle 6=\angle 1+\angle 3+\angle 5+2\angle EBC+2\angle BAD+2\angle ACF$.

$\therefore \angle 2+\angle 4+\angle 6+\angle 1+\angle 3+\angle 5=2\angle 1+2\angle 3+2\angle 5+2\angle EBC+2\angle BAD+2\angle ACF$.

$\therefore \angle 2+\angle 4+\angle 6+\angle 1+\angle 3+\angle 5=2(\angle 1+\angle EBC)+2(\angle 3+\angle ACF)+2(\angle 5+\angle BAD)$,

即 $\angle 2+\angle 4+\angle 6+\angle 1+\angle 3+\angle 5=2\angle ABC+2\angle ACB+2\angle BAC$.

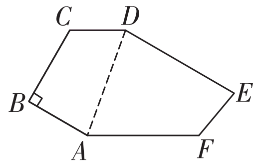
$\therefore \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6=2(\angle ABC+\angle ACB+\angle BAC)=2\times 180°=360°$.

第 2 讲　多边形的内角和与外角和、用正多边形铺设地面

例一　解：连接 AD，如图所示，

在四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD+$

$\angle ADC+\angle B+\angle C=360°$.



$\because AB\perp BC$,

$\therefore \angle B=90°$.

又$\because \angle C=120°$,

$\therefore \angle BAD+\angle ADC=150°$.

$\because CD /\!/ AF$,

$\therefore \angle CDA=\angle DAF$.

$\therefore \angle BAF=\angle BAD+\angle DAF=\angle BAD+\angle ADC=150°$.

在四边形 $ADEF$ 中,

$\angle DAF+\angle EDA+\angle F+\angle E=360°$,

又$\because \angle CDE=\angle BAF$,

$\therefore \angle DAF+\angle EDA=\angle CDA+\angle EDA=\angle CDE=150°$.

$\therefore \angle F+\angle E=210°$.

又$\because \angle E=80°$,

$\therefore \angle F=130°$.

【点拨】本题主要考查了四边形的内角和是 360°的实际运用. 解题的关键是构造四边形利用已知条件结合四边形内角和求解.

变式训练一

1. B **【解析】**根据题意，得 $90°+120°+150°+2x°+x°=(5-2)\times 180°$. 解得 $x=60$. 故选 B.

2. 解：$\because \angle FED=50°$，$\angle FDE=70°$，

$\therefore \angle AED=130°$，$\angle CDE=110°$.

$\because \angle A+\angle B+\angle C+\angle CDE+\angle AED=540°$，且 $\angle C=3\angle A$，$\angle B=2\angle A$，

$\therefore \angle A+2\angle A+3\angle A+110°+130°=540°$.

$\therefore \angle A=50°$.

例二 C **【解析】**$\because$多边形的外角和为 360°，而每一个外角为 24°，

$\therefore$多边形的边数为 $360°\div 24°=15$.

$\therefore$小华一共走的路程为 $15\times 10=150$（m）. 故选 C.

【点拨】本题考查了多边形的外角和. 解决本题的关键是根据多边形的外角和及每一个外角都为 24°求出多边形的边数.

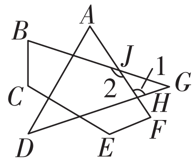
变式训练二

1. A **【解析】**$\because$五边形 $ABCDE$ 的外角和为 360°，又 $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4=70°$，$\therefore \angle 5=360°-4\times 70°=80°$. $\therefore \angle AED=180°-\angle 5=180°-80°=100°$.

2. 50° **【解析】**设五边形 $AOEFG$ 中，$\angle BOD$ 的外角为 $\angle 5$，$\because$五边形 $AOEFG$ 的外角和为 360°，$\therefore \angle 5+230°=360°$. $\therefore \angle 5=130°$. $\therefore \angle BOD=180°-\angle 5=$

$180^\circ-130^\circ=50^\circ$.

例三 C **【解析】**如下图.

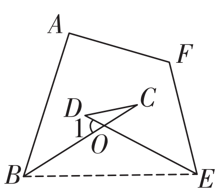


$\because \angle 1$ 是 $\triangle ADH$ 的外角，$\therefore \angle 1=\angle A+\angle D$. $\because \angle 2$ 是 $\triangle JHG$ 的外角，$\therefore \angle 1+\angle G=\angle 2$. 在五边形 $BCEFJ$ 中，$\angle B+\angle C+\angle E+\angle F+\angle 2=540^\circ$. $\therefore \angle B+\angle C+\angle CEF+\angle F+\angle A+\angle D+\angle G=540^\circ$. $\therefore n=540^\circ\div 90^\circ=6$. 故选 C.

【点拨】此题比较复杂，解答此题的关键是利用三角形内角与外角的关系把所求的角的度数归结到三角形或五边形中，再利用五边形的内角和即可解答.

变式训练三

B **【解析】**如下图，连接 BE.

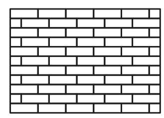


$\because \angle 1=\angle C+\angle D$，$\angle 1=\angle CBE+\angle DEB$，$\therefore \angle C+\angle D=\angle CBE+\angle DEB$. $\because \angle A+\angle ABE+\angle BEF+\angle F=360^\circ$，$\therefore \angle A+\angle ABC+\angle CBE+\angle DEB+\angle DEF+\angle F=360^\circ$. 故 $\angle A+\angle ABC+\angle C+\angle D+\angle DEF+\angle F$ 的度数是 360°. 故选 B.

例四 **解：**(1) 不能全用正五边形的材料密铺地面.

理由如下：$\because$正五边形的每个内角都是 108°，360 不能被 108 整除，$\therefore$不能全用正五边形的材料密铺地面.

(2) 如下图：

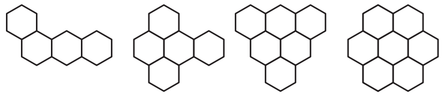


【点拨】解题的关键是明确要进行密铺一定满足顶点处的内角和是 360°.

变式训练四

1. 10 **【解析】**$\because 360\div 5=72$，$\therefore$正五边形的一个内角为 $180^\circ-72^\circ=108^\circ$. $\therefore$中间形成的这个正多边形的一个内角为 $360^\circ-108^\circ-108^\circ=144^\circ$. 则这个正多边形的一个外角为 $180^\circ-144^\circ=36^\circ$. 又$\because 360^\circ\div 36^\circ=10$，则这个正多边形的边数等于 10.

2. 11 **【解析】**如图，要拼接成周长等于 18 的图形，需要 4 或 5 或 6 或 7 个这样的正六边形.



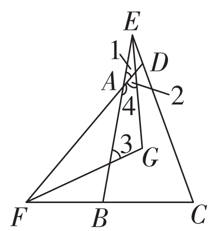
故 $x=4$，$y=7$.

则 $x+y=11$.

培优精练

1. D【解析】∵等边三角形的1个内角的度数是60°，正方形的1个内角的度数是90°，正五边形的1个内角的度数是$\frac{1}{5}\times(5-2)\times 180°=108°$，∴$\angle 1+\angle 2=360°-60°-90°-108°-\angle 3=42°$. 故选D.

2. 解：如下图，



∵$\angle 1=\angle ADC-\angle AED=60°-\angle AED$，

$\angle FAB=\angle EBC-\angle AFB=80°-\angle AFB$，

∴$2\angle 4=360°-\angle 1-\angle FAB=360°-(60°-\angle AED)-(80°-\angle AFB)=220°+\angle AED+\angle AFB$.

∴$\angle 4=110°+\frac{1}{2}\angle AED+\frac{1}{2}\angle AFB$.

∵$\angle 2=\angle ADC-\angle GED=60°-\frac{1}{2}\angle AEC$，

$\angle 3=\angle ABC-\angle GFB=80°-\frac{1}{2}\angle AFB$，

∴$\angle EGF=360°-(\angle 4+\angle 2+\angle 3)=360°-110°-\frac{1}{2}\angle AED-\frac{1}{2}\angle AFB-60°+\frac{1}{2}\angle AED-80°+\frac{1}{2}\angle AFB=360°-110°-60°-80°=110°$.

3. (1) 70°　【解析】在四边形$ABCD$中，∵$\angle A=140°$，$\angle D=80°$，∴$\angle B+\angle C=360°-(\angle A+\angle D)=360°-(140°+80°)=140°$.

∵$\angle B=\angle C$，∴$\angle C=\frac{1}{2}\times 140°=70°$.

(2) **解**：∵$BE\parallel AD$，

∴$\angle ABE+\angle A=180°$.

∴$\angle ABE=180°-\angle A=180°-140°=40°$.

∵$\angle ABC$的平分线BE交CD于点E，

∴$\angle ABC=2\angle ABE=2\times 40°=80°$.

∴$\angle C=360°-(\angle A+\angle D+$

$\angle ABC$）$=360°-(140°+80°+80°)=60°$.

（3）**解**：在四边形 $ABCD$ 中，

∵ $\angle A=140°$，$\angle D=80°$，

∴ $\angle ABC+\angle BCD=360°-(\angle A+\angle D)=360°-(140°+80°)=140°$.

∵ $\angle ABC$ 和 $\angle BCD$ 的平分线交于点 E，

∴ $\angle EBC+\angle ECB=\frac{1}{2}\times 140°=70°$.

∴ $\angle BEC=180°-(\angle EBC+\angle ECB)=180°-70°=110°$.

名卷压轴题

（1）$\angle 1=\angle 2$　**【解析】**∵ $AB\perp DE$，$BC\perp EF$，∴ $\angle 1+\angle BMF=90°$，$\angle 2+\angle AME=90°$. ∵ $\angle BMF=\angle AME$，∴ $\angle 1=\angle 2$.

（2）$\angle 1+\angle 2=180°$　**【解析】**∵ $AB\perp DE$，$BC\perp EF$，∴ $\angle 1+\angle 2+90°+90°=360°$. ∴ $\angle 1+\angle 2=360°-90°-90°=180°$.

（3）一个角的两边与另一个角的两边分别垂直，那么这两个角相等或互补.

（4）**解**：设一个角的度数为 α，则另一个角的度数为 $3\alpha-40°$，分两种情况：

①当两个角的位置如图 1 所示时，根据题意，得 $\alpha=3\alpha-40°$.

解得 $\alpha=20°$.

则 $3\alpha-40°=20°$.

②当两个角的位置如图 2 所示时，根据题意，得 $\alpha+3\alpha-40°=180°$.

解得 $\alpha=55°$.

则 $3\alpha-40°=125°$.

综上所述，这两个角的度数为 20°，20°或 55°，125°.

◎三角形　新题型探究

例题　解：设三角形的三个内角分别为 α、β、γ，（1）由题意，得 $\alpha=2\beta$，且 $\alpha+\beta+\gamma=180°$，

∴当 $\alpha=100°$时，$\beta=50°$，

则 $\gamma=30°$.

∴这个“特征三角形”的最小内角的度数为 30°.

（2）不存在.

理由如下：

∵ $\alpha=2\beta$，且 $\alpha+\beta+\gamma=180°$，

∴当 $\alpha=120°$时，$\beta=60°$，

则 $\gamma=0°$，

此时不能构成三角形.

∴不存在“特征角”为 120°的三角形.

【点拨】本题考查了三角形的内角和定理. 读懂题目信息，理解

"特征角"的定义并求出三角形的三个内角的度数是解题的关键.

变式训练

(1) $225°$　**【解析】**∵ $\angle 1$、$\angle 2$ 互为组角，且 $\angle 1=135°$，∴ $\angle 2=360°-\angle 1=360°-135°=225°$.

(2) **解**：钝角 $\angle BCD=\angle A+\angle B+\angle D$. 理由如下：

∵优角 $\angle BCD$ 与钝角 $\angle BCD$ 互为组角，

∴优角 $\angle BCD=360°-$钝角 $\angle BCD$.

∵四边形 $ABCD$ 的内角和是 $360°$，

∴优角 $\angle BCD=360°-(\angle A+\angle B+\angle D)$.

∴钝角 $\angle BCD=\angle A+\angle B+\angle D$.

(3) 2α　**【解析】**由 (2) 得，在镖形 $ABOC$ 中，钝角 $\angle BOC=\angle A+\angle B+\angle C$. 在镖形 $FDOE$ 中，钝角 $\angle DOE=\angle D+\angle E+\angle F$. ∵钝角 $\angle BOC=$钝角 $\angle DOE=\alpha$，∴ $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=2\alpha$.

(4) **解**：∵ $\angle APD$、$\angle AQB$ 的平分线交于点 M，

∴ $\angle AQM=\angle BQM$，

$\angle APM=\angle DPM$.

由 (2) 中的结论可知在镖形 $APMQ$ 中，有 $\angle A+\angle AQM+\angle APM=\angle 1$.

在镖形 $APCQ$ 中，有 $\angle A+2\angle AQM+2\angle APM=$钝角 $\angle QCP$.

∴钝角 $\angle QCP+\angle A=2\angle 1$.

∵ $\angle A+\angle QCP=180°$，

∴ $\angle 1=90°$，

即 $PM\perp QM$.

培优精练

(1) ②　**【解析】**① ∵ $1+2<4$，∴4 cm、2 cm、1 cm 不能构成三角形，则不能组成"不均衡三角形"；

② ∵ $18-13>13-9$，∴13 cm、18 cm、9 cm 能组成"不均衡三角形"；

③ ∵ $19=19$，∴19 cm、20 cm、19 cm 不能组成"不均衡三角形"；

④ ∵ $9-8<8-6$，∴9 cm、8 cm、6 cm 不能组成"不均衡三角形".

(2) **解**：分三种情况：

①当边长为 16 的边为最长边时，

∵ $2x+2>2x-6$，

∴ $16-(2x+2)>2x+2-(2x-6)$.

解得 $x<3$.

∵ $2x-6>0$，

∴ $x>3$.

故不符合题意，舍去.

②当边长为 16 的边既不是最长边也不是最短边时，

∵ $2x+2>2x-6$，

∴ $2x+2>16>2x-6$.

解得 $7<x<11$.

根据题意，得

$2x+2-16>16-(2x-6)$.

解得 $x>9$.

$\therefore 9<x<11$.

$\because x$ 为整数，

$\therefore x=10$.

经检验，当 $x=10$ 时，三边分别为 22、16、14，可构成三角形，符合题意.

③当边长为 16 的边为最短边时，

则 $2x+2>2x-6>16$.

解得 $x>11$.

根据题意，得

$2x+2-(2x-6)>2x-6-16$.

解得 $x<15$.

$\therefore 11<x<15$.

$\because x$ 为整数，

$\therefore x=12$ 或 $x=13$ 或 $x=14$.

经检验，均符合题意.

综上所述，x 的值为 10 或 12 或 13 或 14.

第九章　轴对称、平移与旋转

第 1 讲　轴对称与平移

例一　10　**【解析】**$\because \triangle ACE$ 是轴对称图形，直线 ED 是它的对称轴，$\therefore AE=CE$. $\therefore AE+BE=CE+BE$. 又$\because \triangle BCE$ 的周长为 18 cm，$BC=8$ cm，$\therefore AE+BE=CE+BE=10$ cm. $\therefore AB=10$ cm.

【点拨】本题主要考查了轴对称图形的性质. 进行线段的等量代换后得到 $AE+BE=CE+BE$ 是解答本题的关键.

变式训练一

1. 20°　**【解析】**$\because \triangle AED$ 是由 $\triangle ABD$ 折叠得到的，$\therefore \angle AED=\angle B=50^{\circ}$. $\because \angle AED$ 是$\triangle AEC$ 的外角，$\therefore \angle AED=\angle CAE+\angle C$. $\therefore \angle CAE=\angle AED-\angle C=50^{\circ}-30^{\circ}=20^{\circ}$.

2. **解**：（1）$\because$ 图案是轴对称图形，AF 为对称轴，$\angle B$ 与 $\angle E$ 是对应角，$\angle B=25^{\circ}$，

$\therefore \angle E=\angle B=25^{\circ}$.

（2）$\because$图案是轴对称图形，AF 为对称轴，AB 与 AE 是对应边，$AE=90$ cm，

$\therefore AB=AE=90$ cm.

（3）$\because$图案是轴对称图形，AF 为对称轴，CF 与 DF 是对应边，$CF=22$ cm.

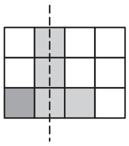
$\therefore DF=CF=22$ cm.

$\because \triangle OCD$ 是等边三角形，

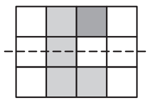
$\therefore OC=OD=CD=CF+DF=22+22=44$（cm）.

∴△OCD 的周长是 $44\times3=132$（cm）.

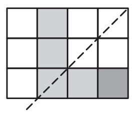
例二　解：如下图所示.



方法一



方法二

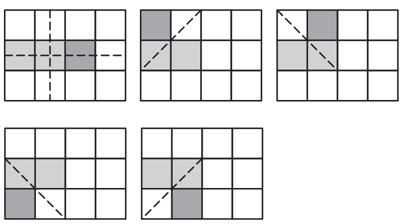


方法三

【点拨】此题主要考查了利用轴对称设计图案. 掌握轴对称图形的定义，寻找对称轴是解题的关键.

变式训练二

解：方法不唯一，下列 5 种方法仅供参考.



例三　6　**【解析】**∵△DEF 是 Rt△ABC沿斜边 AC 的方向平移后得到的，∴ $BC=EF=10$. ∵$BG=4$，∴$CG=BC-BG=10-4=6$.

【点拨】本题考查了平移的性质. 熟练掌握平移的性质是解题的关键.

变式训练三

1. C　**【解析】**∵△ABE 向右平移 2 cm 得到△DCF，∴ $DF=AE$. ∴四边形 $ABFD$ 的周长 $=AB+BE+DF+AD+EF=AB+BE+AE+AD+EF=$△$ABE$ 的周长 $+AD+EF$. ∵平移距离为 2 cm，∴$AD=EF=2$ cm. ∵△ABE 的周长是 16 cm，∴四边形 $ABFD$ 的周长 $=16+2+2=20$（cm）.

2. 解：（1）∵△ABC 沿射线 BC 方向平移，得到△DEF，

∴$AC\parallel DF$，$AD\parallel BF$.

∴$\angle ACB=\angle F$，

$\angle ACB=\angle DAC$.

∴$\angle F=\angle DAC=56^\circ$.

（2）∵△ABC 沿射线 BC 方向平移，得到△DEF，

∴$AD=BE=CF$.

设 $AD=x$ cm.

则 $BE=CF=x$ cm.

∵$AD=2EC$，

∴$CE=\frac{1}{2}x$ cm.

∵$BC=6$ cm，

∴$x+\frac{1}{2}x=6$.

解得 $x=4$，

即 AD 的长为 4 cm.

例四　解：（1）∵点 A'与 A 关于直线 l 对称，

∴$PA=PA'$.

∴$PA+PB=PA'+PB=A'B=a$.

（2）∵点 A'与 A 关于直线 l 对称，

$\therefore MA=MA'$.

$\therefore AM+MB=MA'+MB$.

由（1）可知，$AP+PB=A'B$.

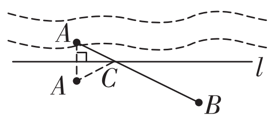
由两点之间线段最短可知，$MA'+MB>A'B$，

即 $AM+MB>AP+PB$.

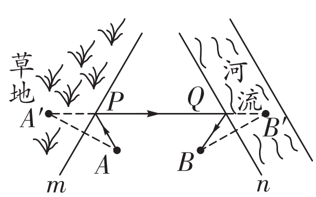
【点拨】本题主要考查的是轴对称的性质和线段的性质. 掌握轴对称的性质是解题的关键.

变式训练四

1. 解：如下图所示，作点 A 关于直线 l 的对称点 A'，连接 $A'B$ 与直线 l 交于点 C，则点 C 为所求.



2. 解：如下图所示，作点 A 关于直线 m 的对称点 A'，作点 B 关于直线 n 的对称点 B'，连接 $A'B'$分别与直线 m、n 交于 P、Q 两点，则点 P 为牧马人到达草地的地方，点 Q 为牧马人到达河边的地方，牧马人按照 $A\to P\to Q\to B$ 的路线走可使其所走路程最短.



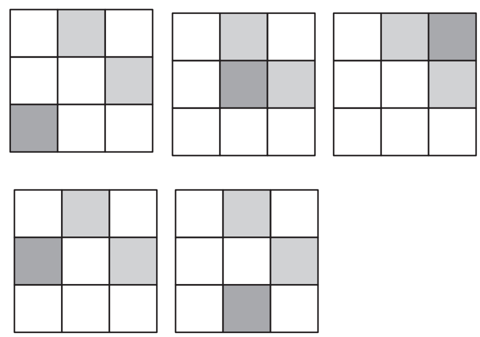
培优精练

1. D　**【解析】**由平移的性质知，$BE=6$，$DE=AB=10$，

$\therefore OE=DE-DO=10-4=6$.

$\therefore S_{四边形ODFC}=S_{梯形ABEO}=\frac{1}{2}(AB+OE)\cdot BE=\frac{1}{2}\times(10+6)\times 6=48$. 故选 D.

2. 5　**【解析】**如下图所示.



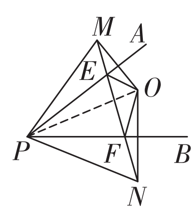
共 5 种.

3. 解：（1）$\because M$、N 分别是点 O 关于直线 PA、PB 的对称点，

$\therefore EM=EO$，$FN=FO$.

$\therefore \triangle OEF$ 的周长 $=OE+OF+EF=EM+EF+FN=MN=6$ cm.

（2）如下图，连接 OP.



$\because M$、N 分别是点 O 关于直线 PA、PB 的对称点，

$\therefore \angle MPA=\angle OPA$，

$\angle NPB=\angle OPB$.

$\therefore \angle MPN = \angle MPO + \angle OPN = 2\angle OPA + 2\angle OPB = 2\angle APB = 2\alpha$.

（3）$\triangle PMN$ 为等边三角形. 理由如下：

$\because \alpha = 30°$，

$\therefore \angle MPN = 60°$.

$\because M$、N 分别是点 O 关于 PA、PB 的对称点，

$\therefore PM = PO$，$PN = PO$.

$\therefore PM = PN$.

$\therefore \triangle PMN$ 是等边三角形.

名卷压轴题

解：如图，作点 P 关于 OA 的对称点 C，作点 P 关于 OB 的对称点 D. 连接 CD，交 OA 于点 E，OB 于点 F，则点 E、F 就是所要求的点.

理由如下：

在 OA、OB 上分别取不同于 E、F 的点 E'、F'，连接 PC、PD、CE'、$E'P$、PF'、DF'、$E'F'$.

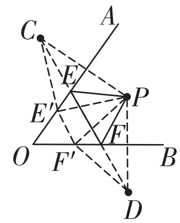
$\because$ 点 C 和点 P 关于 OA 对称，点 D 和点 P 关于 OB 对称，

$\therefore PE = CE$，$CE' = PE'$，$PF = DF$，$PF' = DF'$.

$\therefore PE + EF + PF = CE + EF + DF$，$PE' + PF' + E'F' = CE' + E'F' + DF'$.

$\because CE + EF + DF \leqslant CE' + E'F' + DF'$，

$\therefore PE + EF + PF \leqslant PE' + E'F' + PF'$.



第 2 讲　旋转与中心对称

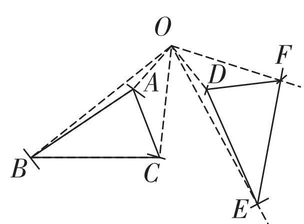
例一　**解**：画法如下：

（1）连接 OA，以点 O 为顶点，在 OA 的右侧画 $\angle DOA = 80°$，并在射线 OD 上截取 $OD = OA$；

（2）连接 OB，以点 O 为顶点，在 OB 的右侧画 $\angle EOB = 80°$，并在射线 OE 上截取 $OE = OB$；

（3）连接 OC，以点 O 为顶点，在 OC 的右侧画 $\angle FOC = 80°$，并在射线 OF 上截取 $OF = OC$；

（4）顺次连接 DE、EF、FD，则 $\triangle DEF$ 即为 $\triangle ABC$ 绕点 O 逆时针旋转 $80°$后得到的三角形，如下图所示.

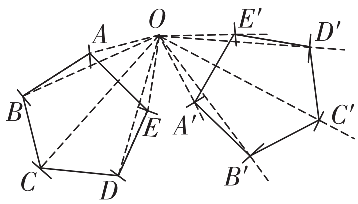


【点拨】本题主要考查了“旋转角相等，旋转前后对应线段相等”

的性质，从而把线段、角之间的数量关系转化为图形之间的关系，为正确画图提供了依据.

变式训练一

解：画出的五边形 $A'B'C'D'E'$，如下图所示.



例二 C 【**解析**】由题意，得 $AB=AB'$，∴ $\angle AB'B=\angle ABB'=67°$. ∴ $\angle B'AB=46°$. ∴ $\angle B'AC=\angle B'AB-\angle BAC=46°-18°=28°$. 故选 C.

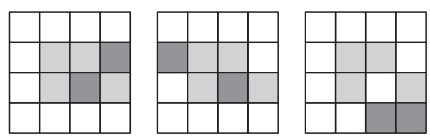
【**点拨**】本题考查了旋转的性质. 掌握旋转前后图形的对应关系是解本题的关键.

变式训练二

1. C 【**解析**】∵ $CC'\parallel AB$，$\angle CAB=70°$，∴ $\angle C'CA=\angle CAB=70°$. 又∵ C、C' 为对应点，B、B' 为对应点，点 A 为旋转中心，∴ $AC=AC'$，即 $\triangle ACC'$ 为等腰三角形. ∴ $\angle BAB'=\angle CAC'=180°-2\angle C'CA=180°-2\times70°=40°$. 故选 C.

2. B 【**解析**】∵ $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 α 得到 $\triangle ADE$，∴ $\angle E=\angle C=36°$，$\angle BAD=\angle CAE=\alpha$，$\angle ADE=\angle B$，$AB=AD$. ∴ $\angle ADB=\angle B=\angle ADE$. 设 $\angle B=x$，则 $\angle ADB=\angle ADE=x$. ∴ $\angle BDE=2x$. ∵ A、B、E 在同一条直线上，∴ 在 $\triangle BDE$ 中，$\angle B+\angle E+\angle BDE=180°$. ∴ $x+36°+2x=180°$. 解得 $x=48°$，即 $\angle ADB=\angle ADE=\angle B=48°$. ∴ 在 $\triangle ABD$ 中，$\angle BAD=180°-\angle ADB-\angle B=180°-48°-48°=84°$，即 $\alpha=84°$. 故选 B.

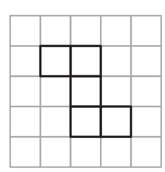
例三 **解**：在每个图中选取 2 个空白小正方形涂上阴影，使每个图的 6 个阴影小正方形组成一个中心对称图形，答案如下图所示.



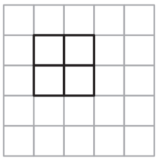
【**点拨**】本题考查中心对称图形等知识. 解题的关键是灵活运用中心对称图形的定义，如果一个图形绕某一点旋转 180°，旋转后的图形能和原图形完全重合，那么这个图形叫做中心对称图形.

变式训练三

解：(1) 如图所示.



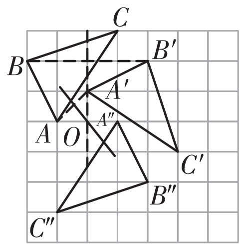
（2）如下图所示.



例四　解：（1）如下图，点 O 即为所求.

（2）如下图，$\triangle A'B'C'$ 即为所求.

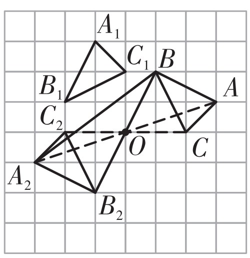
（3）如下图，$\triangle A''B''C''$ 即为所求.



【点拨】本题考查旋转变换、中心对称. 掌握旋转变换的性质，是解题的关键，属于常考题.

变式训练四

解：（1）如下图，$\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求.



（2）$S_{\triangle A_2B_2B}=4\times4-\frac{1}{2}\times4\times3-\frac{1}{2}\times2\times1-\frac{1}{2}\times4\times2=5.$

培优精练

1. 解：（1）∵$\angle B=50^\circ$，$\angle C=60^\circ$，

∴$\angle BAC=70^\circ$.

∵AD 平分 $\angle BAC$，

∴$\angle BAD=\angle CAD=35^\circ$.

（2）∵$\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针方向旋转一个角度后得到 $\triangle ADE$，

∴ $\angle E=\angle C=60^\circ$，旋转角为 $\angle CAE$.

∵$AC\perp DE$，

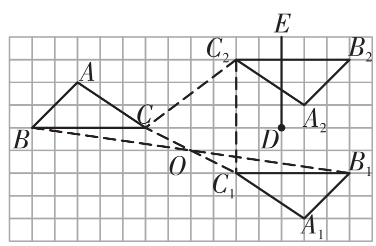
∴$\angle CAE=30^\circ$.

∴旋转角为 30°.

2. 解：（1）如下图，连接 CC_1、BB_1，交于点 O，点 O 即为所求.

（2）如下图所示，$\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求的三角形；

（3）连接 CC_2、C_1C_2，如下图所示. 则 $\triangle CC_1C_2$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times5\times4=10$.



3. 解：（1）∵将 $\triangle CDB$ 绕点 C 顺时针旋转一个角度到 $\triangle CEF$ 的位置，点 F 恰好落在 AC 上，

∴旋转角为 $\angle BCF$，

即旋转角为 90°.

（2）$DE\parallel BC$.

理由如下：∵将$\triangle CDB$绕点C顺时针旋转一个角度到$\triangle CEF$的位置，点F恰好落在AC上，

∴$\angle DCE=\angle BCF=90^\circ$，

$CD=CE$.

∴$\triangle CDE$为等腰直角三角形.

∴$\angle CDE=45^\circ$.

∵CD平分$\angle ACB$交AB于点D，

∴$\angle BCD=45^\circ$.

∴$\angle CDE=\angle BCD$.

∴$DE\parallel BC$.

名卷压轴题

解：(1) ∵$DE\parallel AC$，

∴$\angle ACD=\angle D=30^\circ$.

又∵$\angle BCA=90^\circ$，

∴$\angle BCD=\angle BCA-\angle ACD=90^\circ-30^\circ=60^\circ$，即$\alpha=60^\circ$.

(2) ∵$DE\parallel AB$，

∴$\angle CFA=\angle E=60^\circ$.

又∵$\angle CFA=\angle B+\angle BCE$，

∴$\angle BCE=\angle CFA-\angle B=60^\circ-45^\circ=15^\circ$.

∴$\angle BCD=\angle ECD+\angle BCE=90^\circ+15^\circ=105^\circ$，

即$\alpha=105^\circ$.

(3) 大小不变，其值为105°.

理由如下：

∵$\angle ACD+\angle CAB=\angle D+\angle AFD$，$\angle CAB=45^\circ$，$\angle D=30^\circ$，

∴$\angle AFD-\angle ACD=\angle CAB-\angle D=45^\circ-30^\circ=15^\circ$.

又∵$\angle 1+\angle 2=\angle AFD$，

$\angle 3=90^\circ-\angle ACD$，

∴$\angle 1+\angle 2+\angle 3=\angle AFD+90^\circ-\angle ACD=90^\circ+15^\circ=105^\circ$.

◎轴对称、平移与旋转

新题型探究

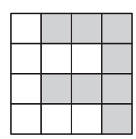
例题　解：(1) 在图4中，阴影部分与空白部分的面积不相等，

∴阴影部分与空白部分不全等.

∴图4的划分方法不正确.

(2) 图5的划分方法与图2小易的划分方法相同. 理由如下：图5经过旋转、翻折后能够与图2重合.

(3) 如下图所示：

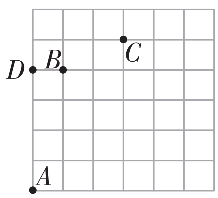


【点拨】本题考查了利用几何变换设计图形. 解决问题的关键是掌握平移、轴对称、旋转几种变换，由一个基本图案可以通过平移、旋转和轴对称以及中心对称等方法变换出一些复合图案.

变式训练

(1) -2　-1　**【解析】**从点 C 按"平移量"$\{-2,\ -1\}$ 可平移至点 B.

(2) **解**：① 如下图，点 D 即为所求.



②$(2+2+3+2)\times2.5=22.5$ (s).

③-1　0　-2　-1　**【解析】**观察点 D 的位置，可以发现点 B 也可按"平移量"$\{-1,\ 0\}$ 直接平移至点 D；点 E 依次按"平移量"$\{2,\ 3\}$、$\{-5,\ 1\}$、$\{1,\ -5\}$ 平移至点 F，可以把点 E 到点 F 所有平移量的横向相加，纵向相加，因此相当于点 E 按"平移量"$\{-2,\ -1\}$ 直接平移至点 F.

培优精练

(1) 旋转

(2) 3　**【解析】**$\because AD=2$，$AC=5$，

$\therefore DC=AC-AD=5-2=3$.

(3) **证明**：$\because$ 把$\triangle ADE$ 沿 DE 翻折，得到$\triangle A'DE$，

$\therefore \angle ADE=\angle A'DE$，

$\angle AED=\angle A'ED$.

在 $\triangle DEA'$ 中，$\angle A'=180^\circ-(\angle A'DE+\angle A'ED)$.

$\because \angle2=180^\circ-\angle A'DA=180^\circ-2\angle A'DE$，

$\angle1=180^\circ-\angle A'EA=180^\circ-2\angle A'ED$，

$\therefore \angle1+\angle2=180^\circ-2\angle A'DE+180^\circ-2\angle A'ED=2(180^\circ-\angle A'ED-\angle A'DE)$.

$\therefore 2\angle A'=\angle1+\angle2$.

(4) 不成立，$\angle2-\angle1=2\angle A'$.

理由如下：

$\because$ 把$\triangle ADE$ 沿 DE 翻折，得到$\triangle A'DE$，

$\therefore \angle ADE=\angle A'DE$，

$\angle AED=\angle A'ED$.

在 $\triangle DEA'$ 中，$\angle A'=180^\circ-(\angle A'DE+\angle A'ED)$，

又$\because \angle2=180^\circ-\angle A'DA=180^\circ-2\angle A'DE$，$\angle1=2\angle A'ED-180^\circ$，

$\therefore \angle2-\angle1=(180^\circ-2\angle A'DE)-(2\angle A'ED-180^\circ)=2(180^\circ-\angle A'DE-\angle A'ED)$.

$\therefore \angle2-\angle1=2\angle A'$.