winshare文轩教育
四川教育出版社

扫码查看本书
配套资源包

赠 品

6662025015016

教师用书 点金训练 数学 必修第二册 配人教A版

四川教育出版社

点金训练

教师用书

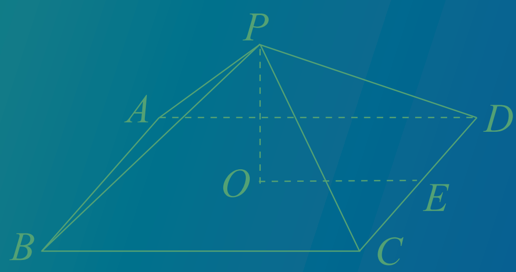
数学

必修第二册

配人教A版

《点金训练》编写组 编

DIANJIN XUNLIAN
—— SHUXUE ——
JIAOSHI YONGSHU



四川教育出版社

点金训练

教师用书

数学

必修第二册

配人教A版

《点金训练》编写组 编

四川教育出版社

CONTENTS

目录

第六章　平面向量及其应用

第七章　复数

第八章　立体几何初步

第九章　统计

第十章　概率

第六章　平面向量及其应用

6.1　平面向量的概念

学习任务目标

1. 能结合物理中的力、位移、速度等具体背景认识向量，掌握向量与数量的区别.
2. 会用有向线段、字母表示向量，了解有向线段与向量的联系与区别.
3. 理解向量的模、零向量、单位向量、平行向量、相等向量、共线向量等概念，会在图形中进行辨识.

问题式预习

知识清单

1. 向量的概念

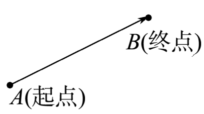
(1)向量：把既有大小又有方向的量叫做向量.

(2)数量：把只有大小没有方向的量称为数量.

2. 向量的表示及向量的模

(1)有向线段

①有向线段是具有方向的线段，如图所示，通常在有向线段的终点处画上箭头表示它的方向. 以 A 为起点、B 为终点的有向线段记作$\overrightarrow{AB}$.



②有向线段包含三个要素：起点、方向、长度. 知道了有向线段的起点、方向和长度，它的终点就唯一确定了.

(2)向量的表示

几何表示：向量可以用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 来表示，把这个向量记作向量 $\overrightarrow{AB}$，此时有向线段的方向表示向量的方向

字母表示：通常在印刷时用黑体小写字母$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，…表示向量，书写时用$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，…表示向量，也可以用表示向量的有向线段的起点和终点字母表示，例如$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$

(3)向量的模及两个特殊向量

①向量的长度(模)

向量$\overrightarrow{AB}$的大小称为向量$\overrightarrow{AB}$的长度(或称模)，记作$|\overrightarrow{AB}|$.

②两个特殊向量

零向量：长度为 0 的向量叫做零向量，记作 $\mathbf{0}$，零向量的方向是任意的；零向量的起点与终点是同一点，故不能用有向线段表示出来.

单位向量：长度等于 1 个单位长度的向量，叫做单位向量.

3. 相等向量与共线向量

(1)相等向量

①定义：长度相等且方向相同的向量叫做相等向量. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

②表示：任意两个相等的非零向量，都可用同一条有向线段表示，并且与有向线段的起点无关；同时，两条方向相同且长度相等的有向线段表示同一个向量，因为向量完全由它的模和方向确定.

(2)平行向量

①定义：方向相同或相反的非零向量叫做平行向量，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

②规定：零向量与任意向量平行，即对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，都有 $\mathbf{0}\parallel\boldsymbol{a}$.

③共线向量：任一组平行向量都可以平移到同一条直线上，因此，平行向量也叫做共线向量.

概念辨析

1. 判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").

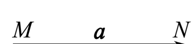
(1)单位向量都是相等向量.　(×)

(2)平行向量方向一定相同.　(×)

(3)不相等的向量一定不平行.　(×)

(4)共线向量一定在一条直线上.　(×)

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 如图所示，关于向量 $\boldsymbol{a}$，下列说法不正确的是　(D)



A. 也可以用$\overrightarrow{MN}$表示

B. 方向是由 M 指向 N

C. 起点是 M

D. 终点是 M

3. 已知点 O 固定，且$|\overrightarrow{OA}|=2$，则所有满足条件的点 A 构成的图形是　(C)

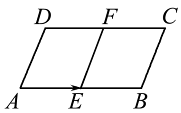
A. 一个点

B. 一条直线

C.一个圆

D.不能确定

4.如图,在平行四边形 $ABCD$ 中,点 E,F 分别是 AB,CD 的中点,在以 A,B,C,D,E,F 为起点和终点的所有有向线段表示的向量中,与 $\overrightarrow{AE}$ 相等的向量的个数为 ( )



A.1　　B.2　　C.3　　D.4

C　**解析**:因为点 E,F 分别是 AB,CD 的中点,所以图中与 $\overrightarrow{AE}$ 相等的向量为 $\overrightarrow{DF}$,$\overrightarrow{EB}$,$\overrightarrow{FC}$,共 3 个.

5.请思考并回答问题:

(1)两个向量能比较大小吗?

提示:向量有方向和大小,而方向是不能比较大小的,因此向量不能比较大小.

(2)向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{BA}$ 是相等向量吗?

提示:不是.向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{BA}$ 的大小相等,但是方向相反,所以这两个向量不是相等向量.

任务型课堂

学习任务一　向量的概念

1.下列说法中,正确的是 ( )

A.数量可以比较大小,向量也可以比较大小

B.方向不同的向量不能比较大小,但方向相同的向量可以比较大小

C.向量的大小与方向有关

D.向量的模可以比较大小

D　**解析**:不管向量的方向如何,它们都不能比较大小,故 A,B 不正确;向量的大小即为向量的模,指的是有向线段的长度,与方向无关,故 C 不正确;向量的模是数量,可以比较大小,故 D 正确.

2.下列说法正确的是 ( )

A.零向量没有方向

B.若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

C.单位向量都相等

D.若两个相等向量的起点相同,则终点也相同

D　**解析**:选项 A 不正确,零向量不是没有方向,只是方向不确定.选项 B 不正确,$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 只是说明这两个向量的模相等,但其方向未必相同.选项 C 不正确,单位向量只是模为 1 个单位长度,而对方向没要求.选项 D 正确,相等向量的模相等,方向相同,故当它们的起点相同时,其终点必相同.

3.(多选题)下列说法错误的有 ( )

A.向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{BA}$ 的长度相等

B.两个有共同起点,且长度相等的向量,它们的终点相同

C.单位向量只有 1 个

D.若两个单位向量平行,则这两个单位向量相等

BCD　**解析**:两个有共同起点,且长度相等的向量,它们的方向不一定相同,所以终点也不一定相同;单位向量的模都是 1,但方向不确定;两个平行的单位向量的方向可能相反,此时不相等.故 B,C,D 都错误,A 正确.

反思提炼

1.判定一个量为向量的两个关键条件

(1)有大小;(2)有方向.

两个条件缺一不可.

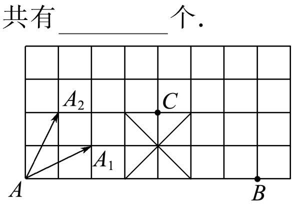
2.理解零向量和单位向量应注意的问题

(1)零向量的方向是任意的,所有的零向量的长度都相等.

(2)单位向量不一定相等,它们可能有不同.

学习任务二　向量的几何表示

例 1　(1)中国象棋中规定:马走"日"字.下图表示中国象棋的半个棋盘,若马在 A 处,则可跳到 A_1 处,也可跳到 A_2 处,用向量 $\overrightarrow{AA_1}$,$\overrightarrow{AA_2}$ 表示马走了"一步".若马在 B 处或 C 处,则以 B,C 为起点表示马走了"一步"的向量共有________个.



11　**解析**:表示马在 B 处走了"一步"的向量如图 1 所示,共 3 个;表示马在 C 处走了"一步"的向量如图 2 所示,共 8 个.

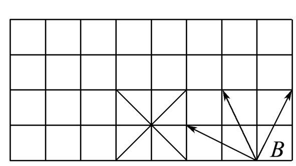


图 1

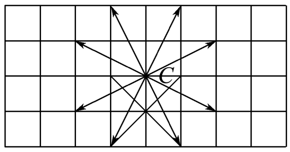


图 2

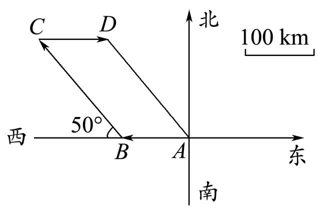
综上,若马在 B 处或 C 处,则以 B,C 为起点表示马走了“一步”的向量共有 11 个.

(2)一辆汽车从点 A 出发向西行驶了 100 km 到达点 B,然后又改变方向,向西偏北 50° 的方向行驶了 200 km 到达点 C,最后又改变方向,向东行驶了 100 km 到达点 D.

①作出向量$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CD}$;

②求$|\overrightarrow{AD}|$.

解:①向量$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CD}$如图所示.



②由题意,可知$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$方向相反,长度相等,

故$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$平行.

因为在四边形 $ABCD$ 中,$AB/\!/CD$ 且 $AB=CD$,

所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

所以$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,

所以$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|=200$ km.

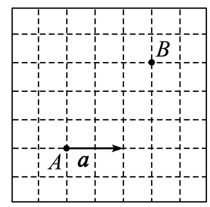
反思提炼

作向量的方法

准确画出向量的方法是先确定向量的起点,再确定向量的方向,然后根据向量的大小确定向量的终点.

探究训练

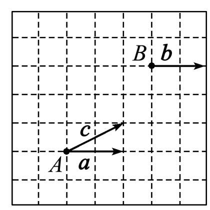
在如图的方格纸上,已知向量 $\boldsymbol{a}$,每个小正方形的边长为 1.



(1)试以 B 为起点画一个向量 $\boldsymbol{b}$,使 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$;

(2)在图中画一个以 A 为起点的向量 $\boldsymbol{c}$,使得 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{5}$,并说出向量 $\boldsymbol{c}$ 的终点的轨迹是什么.

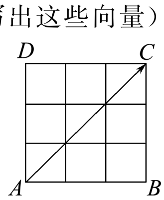
解:(1)根据相等向量的定义,向量 $\boldsymbol{b}$ 应与向量 $\boldsymbol{a}$ 平行,且长度相等.所作向量 $\boldsymbol{b}$ 如图中所示.



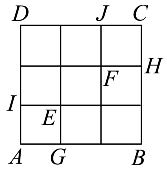
(2)所作向量 $\boldsymbol{c}$ 如图中所示(向量 $\boldsymbol{c}$ 不唯一).由平面几何知识可知,所有这样的向量 $\boldsymbol{c}$ 的终点的轨迹是以点 A 为圆心,$\sqrt{5}$为半径的圆.

学习任务 三　相等向量与共线向量

例 2　如图,四边形 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形,利用各边三等分点将四边形分成九个小正方形后,共有 16 个格点,从中选取两个格点作为向量的起点和终点,则与$\overrightarrow{AC}$平行且长度为 $2\sqrt{2}$ 的向量有哪些?(在图中标出相关字母,写出这些向量)



解:如图所示.满足与$\overrightarrow{AC}$平行且长度为 $2\sqrt{2}$ 的向量有$\overrightarrow{AF}$,$\overrightarrow{FA}$,$\overrightarrow{EC}$,$\overrightarrow{CE}$,$\overrightarrow{GH}$,$\overrightarrow{HG}$,$\overrightarrow{IJ}$,$\overrightarrow{JI}$,共 8 个.

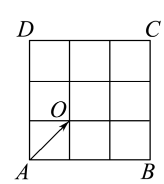


[一题多思]

思考 1.本例中,与向量$\overrightarrow{AC}$同向且长度为 $2\sqrt{2}$ 的向量有多少个?

解:与向量$\overrightarrow{AC}$同向且长度为 $2\sqrt{2}$ 的向量的个数是与向量$\overrightarrow{AC}$平行且长度为 $2\sqrt{2}$ 的向量的个数的一半,故共有 4 个.

思考 2.本例中,与下图中向量$\overrightarrow{AO}$相等的向量有多少个?



解:题图中每个小正方形的对角线所在的向量中,与向量$\overrightarrow{AO}$方向相同的向量与其相等,共有 8 个.

反思提炼

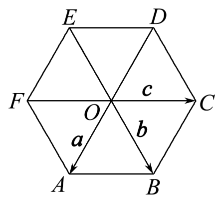
相等向量与共线向量的探求方法

(1)寻找相等向量:先找与表示已知向量的有向线段的长度相等的向量,再确定哪些是同向共线的.

(2)寻找共线向量:先找与表示已知向量的有向线段平行或共线的线段,再构造同向与反向的向量,注意不要漏掉以表示已知向量的有向线段的终点为起点,起点为终点的向量.

探究训练

如图，O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，且 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$. 在以 O,A,B,C,D,E,F 为起点和终点的所有向量中：



(1)与 $\boldsymbol{a}$ 的长度相等、方向相反的向量有哪些？

(2)与 $\boldsymbol{a}$ 共线的向量有哪些？

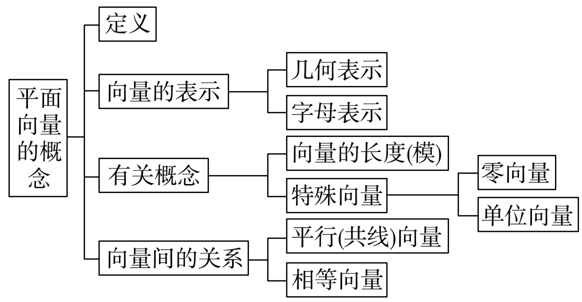
(3)请一一列出分别与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 相等的向量.

解：(1)与 $\boldsymbol{a}$ 的长度相等、方向相反的向量有 $\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{FE}$.

(2)与 $\boldsymbol{a}$ 共线的向量有 $\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{FE}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{DO}$，$\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{AD}$.

(3)与 $\boldsymbol{a}$ 相等的向量有 $\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{DO}$，$\overrightarrow{CB}$；与 $\boldsymbol{b}$ 相等的向量有 $\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{EO}$，$\overrightarrow{FA}$；与 $\boldsymbol{c}$ 相等的向量有 $\overrightarrow{FO}$，$\overrightarrow{ED}$，$\overrightarrow{AB}$.

体系构建



课后素养评价（一）

基础性·能力运用

1. 下列说法中，正确说法的个数是（　　）

(1)温度、速度、位移、功这些物理量是向量；

(2)零向量没有方向；

(3)单位向量的长度大于零向量的长度；

(4)与非零向量共线的单位向量是唯一的.

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

B　**解析**：(1)温度与功没有方向，不是向量，故(1)错误；

(2)零向量的方向是任意的，故(2)错误；

(3)单位向量的长度为 1，大于零向量的长度 0，故(3)正确；

(4)与非零向量共线的单位向量有两个，且方向相反，故(4)错误. 故选 B.

2. 给出下列命题：

①$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{BA}$的模相等；②方向不同的两个向量一定不共线；③$\mathbf{0}=0$；④$\overrightarrow{AB}>\overrightarrow{CD}$.

其中真命题的个数是（　　）

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

B　**解析**：①正确，$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{BA}$是方向相反、模相等的两个向量；②错误，向量共线包括反向共线；③错误，$\mathbf{0}$ 是一个向量，而 0 为实数，$|\mathbf{0}|=0$；④错误，向量不能比较大小. 故选 B.

3.（多选题）下列说法正确的是（　　）

A.长度相等的向量是相等向量

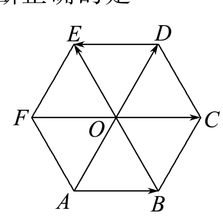
B.单位向量的模为 1

C.零向量的模为 0

D.共线向量是在同一条直线上的向量

BC　**解析**：对于 A，长度相等、方向相同的向量叫做相等向量，故 A 错误；对于 B，单位向量的模为 1，故 B 正确；对于 C，零向量的模为 0，故 C 正确；对于 D，方向相同或相反的向量叫做共线向量，它们不一定在同一条直线上，故 D 错误. 故选 BC.

4.（多选题）如图，已知正六边形 $ABCDEF$，点 O 为其中心，则下列判断正确的是（　　）



A.$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$

B.$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DE}$

C.$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BE}|$

D.$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{FC}$

ABC　**解析**：由正六边形的结构特征及性质可知，$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{OC}$方向相同，长度相等，所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$，故 A 正确；$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{DE}$方向相反，所以$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DE}$，故 B 正确；$|\overrightarrow{AD}|=2BC=2CD=|\overrightarrow{BE}|$，故 C 正确；$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{FC}$不共线，所以不相等，故 D 错误. 故选 ABC.

综合性·创新提升

1. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 不相等，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 一定　(　　)

A.不共线

B.长度不相等

C.不都是单位向量

D.不都是零向量

D　**解析**：若向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 不相等，则说明向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的方向和长度至少有一个不同，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 有可能共线，有可能长度相等，也有可能都是单位向量，但 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 一定不都是零向量.故选 D.

2. 下列说法错误的是　(　　)

A.任一非零向量都可以平行移动

B.若 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是单位向量，则 $|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|$

C.$|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{DC}|$

D.若 $|\overrightarrow{AB}|>|\overrightarrow{CD}|$，则 $\overrightarrow{AB}>\overrightarrow{CD}$

D　**解析**：非零向量是自由向量，可以自由平行移动，故 A 正确；由单位向量的定义可知，$|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|$，故 B 正确；因为 $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{DC}$，所以 $|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{DC}|$，故 C 正确；两个向量不能比较大小，故 D 错误.

故选 D.

3. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与任意向量 $\boldsymbol{b}$ 都平行，则 $\boldsymbol{a}=$________.

$\mathbf{0}$　**解析**：因为零向量与任意向量都平行，所以 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$.

4. 在四边形 $ABCD$ 中，若 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$，且 $|\overrightarrow{AB}|\neq|\overrightarrow{CD}|$，则四边形 $ABCD$ 为________.

梯形　**解析**：在四边形 $ABCD$ 中，因为 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$，所以 $AB\parallel CD$.又 $|\overrightarrow{AB}|\neq|\overrightarrow{CD}|$，所以四边形 $ABCD$ 为梯形.

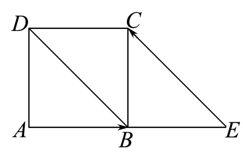
5. 如图所示，四边形 $ABCD$ 为正方形，四边形 $BDCE$ 为平行四边形.在以图中线段的端点为起点和终点的向量中：

(1)与 $\overrightarrow{AB}$ 模相等的向量有多少个？

(2)与 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量有哪些？

(3)与 $\overrightarrow{AB}$ 共线的向量有哪些？

(4)请列出与 $\overrightarrow{EC}$ 相等的向量.



解：(1)因为四边形 $ABCD$ 为正方形，$BDCE$ 为平行四边形，所以 $AB=BE=BC=AD=DC$，

所以与 $\overrightarrow{AB}$ 模相等的向量有 $\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CB}$，共 9 个.

(2)与 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量有 $\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{DC}$.

(3)与 $\overrightarrow{AB}$ 共线的向量有 $\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{AE}$.

(4)因为四边形 $BDCE$ 为平行四边形，所以 $CE\parallel DB$，且 $CE=DB$，所以与 $\overrightarrow{EC}$ 相等的向量为 $\overrightarrow{BD}$.

6.2 平面向量的运算

6.2.1 向量的加法运算

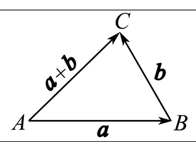
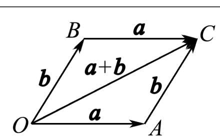
学习任务目标

1. 理解并掌握向量加法的概念.
2. 掌握向量加法的三角形法则和平行四边形法则.
3. 了解向量加法的交换律和结合律.

问题式预习

知识清单

1. 向量加法的定义及运算法则

定义	求两个向量和的运算,叫做向量的加法	
三角形法则	前提	已知非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$
	作法	在平面内任取一点 A,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$
	结论	向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
	图形	
平行四边形法则	前提	已知不共线的两个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$
	作法	在平面内任取一点 O,以点 O 为起点作 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$ 分别等于两个已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,以 OA,OB 为邻边作▱$OACB$
	结论	以 O 为起点的向量 $\overrightarrow{OC}$(OC 是▱$OACB$ 的对角线)就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和
	图形	
规定	零向量与任一向量 $\boldsymbol{a}$,都有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$	

2. 向量的三角不等式

一般地,我们有 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$,当且仅当 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量或 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是方向相同的非零向量时,等号成立.

3. 向量加法的运算律

交换律	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$
结合律	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

概念辨析

1. 判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)任意两个向量的和仍然是一个向量. (√)

(2)对于任意两个向量,都可利用平行四边形法则求出它们的和向量. (×)

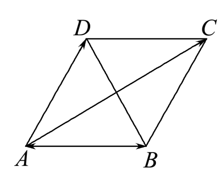
(3)如果 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是共线的非零向量,那么 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向必与 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 之一的方向相同. (×)

(4)若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. (×)

2. 已知非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$,则向量 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$,$\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$,$\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})$,$\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$中,与向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 相等的向量的个数为 (D)

A.2　　B.3　　C.4　　D.5

3. 如图所示,在平行四边形 $ABCD$ 中,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,则 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=$ (B)



A.$\boldsymbol{a}$　　B.$\boldsymbol{b}$　　C.$\boldsymbol{0}$　　D.$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

4. 请思考并回答问题:

两个向量相加就是两个向量的模相加吗?

提示: 不是,向量的相加满足三角形法则,而模相加是数量的加法.

任务型课堂

学习任务一　向量加法运算及其几何意义

1.(1)如图 1,已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,求作向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

(2)如图 2,已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$,求作向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

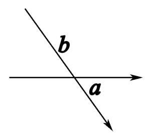


图 1

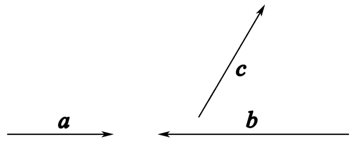
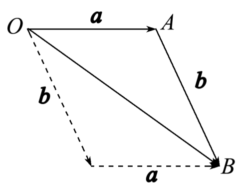
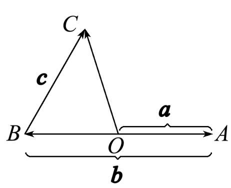


图 2

解:(1)在平面内任意取一点 O,作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.如图所示.



(2)在平面内任意取一点 O,作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$,则$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.如图所示.



2.(1)如图 1 所示,已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,求作向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

(2)如图 2 所示,已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$,求作向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

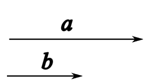


图 1

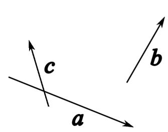
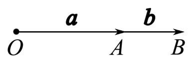
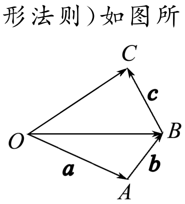


图 2

解:(1)如图所示,首先在平面内任取一点 O,作向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,然后作向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,则向量$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即为所求.

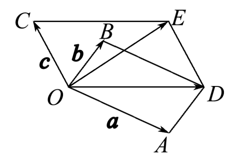


(2)(方法一:三角形法则)如图所示,



首先在平面内任取一点 O,作向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,再作向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,则得向量$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.然后作向量$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$,则向量$\overrightarrow{OC}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,即为所求.

(方法二:平行四边形法则)如图所示,



首先在平面内任取一点 O,作向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,

以 OA,OB 为邻边作▱$OADB$,连接 OD,

则$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

再以 OD,OC 为邻边作▱$ODEC$,连接 OE,

则$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,即为所求.

反思提炼

1.向量加法的三角形法则

(1)适用条件:任意两个非零向量,包括共线的非零向量和不共线的非零向量.

(2)“首尾相接”:构造三角形时,第一个向量的终点与第二个向量的起点重合.

(3)“首指尾为和”:以第一个向量的起点为起点并以第二个向量的终点为终点的向量即为两向量的和.

(4)可拓展到多个向量求和.

2.向量加法的平行四边形法则

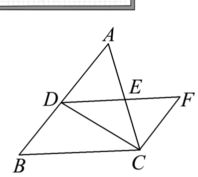
(1)适用条件:仅适用于不共线的两个向量.

(2)“共起点”:构造平行四边形时,两个向量的起点相同,该起点也是和向量的起点.

(3)“共点对角线为和”:平行四边形过两个向量公共起点的对角线对应的向量就是两已知向量的和向量.

学习任务二　向量加法运算律的应用

例 1　如图,在△ABC 中,D,E 分别是 AB,AC 上的点,F 为线段 DE 延长线上一点,$DE\parallel BC$,$AB\parallel CF$,连接 CD,化简下列各式(在横线上只填一个向量):



(1)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DF}=$________;

(2)$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{FC}=$________;

(3)$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FC}=$________.

(1)$\overrightarrow{AC}$　(2)$\overrightarrow{AB}$　(3)$\overrightarrow{AC}$　**解析**：如题图，由已知得四边形 $DFCB$ 为平行四边形，由向量加法的运算法则可知：

(1)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$；

(2)$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}$；

(3)$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AC}$.

[一题多思]

思考1. 在本例条件下，求$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CF}$.

解：因为 $BC\parallel DF$，$BD\parallel CF$，所以四边形 $BCFD$ 是平行四边形，所以$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CD}$.

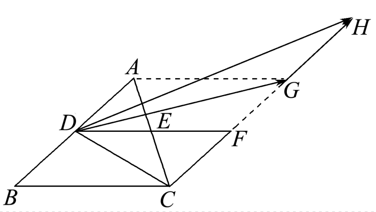
思考2. 在本例图形中求作向量$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CF}$.

解：过点 A 作 $AG\parallel DF$ 交 CF 的延长线于点 G，连接 DG，

则$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DG}$.作$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{CF}$，连接 DH，

则 $\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CF}$，

如图所示.



反思提炼

向量运算化简的两种方法

(1)代数法：借助向量加法的交换律和结合律，将向量转化为“首尾相接”，向量的和即为第一个向量的起点指向最后一个向量终点的向量.

(2)几何法：通过作图，根据向量加法的三角形法则或平行四边形法则化简.

探究训练

1. 化简：

(1)$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}$；

(2)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FA}$.

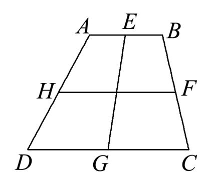
解：(1)$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\mathbf{0}$.

(2)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FA}=\mathbf{0}$.

2. 如图，E，F，G，H 分别是梯形 $ABCD$ 的边 AB，BC，CD，DA 的中点，化简下列各式：

(1)$\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{CB}$；

(2)$\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EB}$.



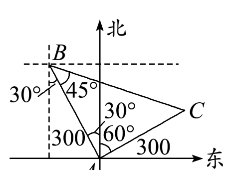
解：(1)$\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{GE}$.

(2)$\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AE}=\mathbf{0}$.

学习任务 三　向量加法的实际应用

例2　一架执行任务的飞机从 A 地沿北偏西 $30°$的方向飞行 300 km 后到达 B 地，然后向 C 地飞行，已知 C 地在 A 地北偏东 $60°$的方向上，且 A，C 两地相距 300 km，求飞机从 B 地到 C 地飞行的方向及 B，C 间的距离.

解：如图所示，



由题意知，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$，$\angle BAC=90°$，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=300$ km，所以$|\overrightarrow{BC}|=300\sqrt{2}$ km.

由$\angle ABC=45°$可知，C 地在 B 地的南偏东 $75°$的方向上.

故飞机从 B 地到 C 地飞行的方向是南偏东 $75°$，B，C 两地间的距离为 $300\sqrt{2}$ km.

反思提炼

应用向量解决实际问题的基本步骤

(1)表示：用向量表示有关量，将所要解答的问题转化为向量问题.

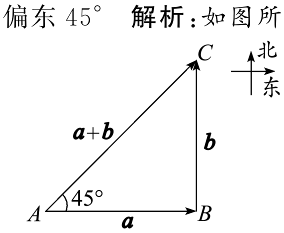
(2)运算：应用向量加法的平行四边形法则或三角形法则，将有关向量进行运算，解答向量问题.

(3)还原：根据向量的运算结果，结合向量共线、相等等概念回答原问题.

探究训练

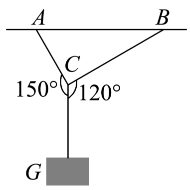
1. 若 $\boldsymbol{a}$ 表示“向东走 8 km”，$\boldsymbol{b}$ 表示“向北走8 km”，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$________，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向是________.

$8\sqrt{2}$ km　北偏东 $45°$　**解析**：如图所示，



设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，且△$ABC$ 为等腰直角三角形，所以 $|\overrightarrow{AC}|=8\sqrt{2}$ km，$\angle BAC=45°$.

2. 如图，用两根绳子把重 10 N 的物体 G 吊在水平杆子 AB 上，$\angle ACG=150°$，$\angle BCG=120°$，求 A 处和 B 处所受力的大小.（绳子的质量忽略不计）

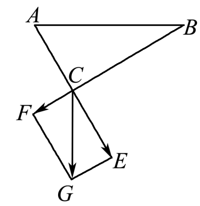


解：如图所示，设$\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{CF}$分别表示 A，B 处所受的力，10 N的重力用$\overrightarrow{CG}$表示，则$\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CG}$.易得$\angle ECG=180°-150°=30°$，$\angle FCG=180°-120°=60°$.

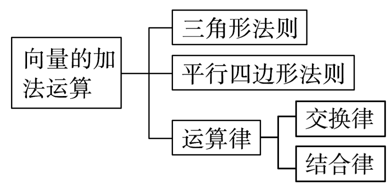
所以$|\overrightarrow{CE}|=|\overrightarrow{CG}|\cdot\cos 30°=10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$，

$|\overrightarrow{CF}|=|\overrightarrow{CG}|\cdot\cos 60°=10\times\frac{1}{2}=5$.

所以 A 处所受力的大小为 $5\sqrt{3}$ N，B 处所受力的大小为 5 N.



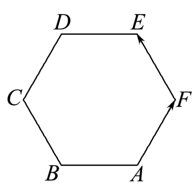
体系构建



课后素养评价（二）

基础性·能力运用

1. 如图，在正六边形 $ABCDEF$ 中，$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}=$（　　）



A.$\overrightarrow{AE}$　　B.$\overrightarrow{BE}$

C.$\mathbf{0}$　　D.$\overrightarrow{CF}$

A　**解析**：由向量加法的三角形法则，得$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AE}$.故选 A.

2. 在矩形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}$等于（　　）

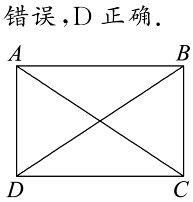
A.$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$

B.$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}$

C.$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}$

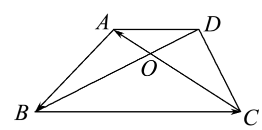
D.$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$

D　**解析**：如图，$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$，故 A，B，C 错误，D 正确.



故选 D.

3. 如图所示，四边形 $ABCD$ 是梯形，$AD\parallel BC$，O 为对角线 AC 与 BD 的交点，则$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=$（　　）



A.$\overrightarrow{CD}$　　B.$\overrightarrow{OC}$

C.$\overrightarrow{DA}$　　D.$\overrightarrow{CO}$

B　**解析**：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$.故选 B.

4. $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{OM}=$（　　）

A.$\overrightarrow{BC}$　　B.$\overrightarrow{AB}$　　C.$\overrightarrow{AC}$　　D.$\overrightarrow{AM}$

C　**解析**：$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.故选 C.

5. 在△ABC 中，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$，则△$ABC$ 是（　　）

A.直角三角形

B.等边三角形

C.钝角三角形

D.等腰直角三角形

B　**解析**：因为$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$，所以$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}|$，故△$ABC$ 是等边三角形.故选 B.

综合性·创新提升

1.已知 O 是△ABC 所在平面内一点,且$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$,那么 ( )

A.点 O 在△ABC 的内部

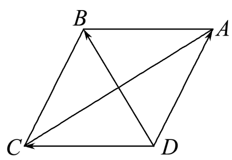
B.点 O 在△ABC 的边 AB 上

C.点 O 在边 AB 所在的直线上

D.点 O 在△ABC 的外部

D **解析**:因为$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$,所以四边形 $OACB$ 为平行四边形,点 O 在△ABC 的外部.故选 D.

2.如图,在四边形 $ABCD$ 中,$DA=DB=DC$,且$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$,则∠$ABC$=________.



120° **解析**:因为$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$,所以由向量的加法的几何意义,可知四边形 $ABCD$ 是平行四边形.又因为 $DA=DB=DC$,所以四边形 $ABCD$ 是菱形,且∠$DAB=60°$,所以∠$ABC=120°$.

3.设$|\boldsymbol{a}|=8$,$|\boldsymbol{b}|=12$,则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$的最大值与最小值分别为________.

12,4 **解析**:因为$|\boldsymbol{a}|=8$,$|\boldsymbol{b}|=12$,则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=20$,当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向共线时取等号,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|=4$,当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向共线时取等号,所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$的最大值与最小值分别为12,4.

4.在四边形 $ABCD$ 中,对角线 AC,BD 交于点 O 且$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=1$,$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\mathbf{0}$,$\cos\angle DAB=\frac{1}{2}$.求$|\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}|$与$|\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}|$.

解:因为$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\mathbf{0}$,

所以$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OC}|$,$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OD}|$,

所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

由$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=1$,知四边形 $ABCD$ 为菱形.

又 $\cos\angle DAB=\frac{1}{2}$,$\angle DAB\in(0,\pi)$,

所以∠$DAB=60°$,所以△ABD 为正三角形.

因为 O 为对角线的交点,所以 $AO=AB\cdot\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以$|\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{AO}|=\sqrt{3}$,$|\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{AB}|=1$.

6.2.2 向量的减法运算

学习任务目标

1.理解相反向量的概念.

2.理解向量减法的几何意义.

3.能用向量的加法和减法解决相关问题.

问题式预习

知识清单

1.相反向量

(1)定义:与向量 $\boldsymbol{a}$ 长度相等,方向相反的向量,叫做 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量,记作$-\boldsymbol{a}$.

(2)性质:

①$-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$.

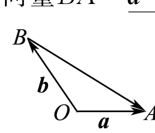
②$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$.

③如果 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 互为相反向量,那么 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$.

2.向量的减法

(1)定义:向量 $\boldsymbol{a}$ 加上 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量,叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差,即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.求两个向量差的运算叫做向量的减法.

(2)作法:已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,在平面内任取一点 O,作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则向量$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,如图.



概念辨析

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)两个相等向量之差等于 $\mathbf{0}$.　(√)

(2)两个相反向量之差等于 $\mathbf{0}$.　(×)

(3)两个向量的差仍是一个向量.　(√)

(4)向量的减法实质上是向量加法的逆运算.　(√)

2.化简 $\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{MN}$ 所得的结果是　(　　)

A.$\overrightarrow{MP}$　　B.$\overrightarrow{NP}$　　C.$\mathbf{0}$　　D.$\overrightarrow{MN}$

C　**解析**:$\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MN}=\mathbf{0}$.故选 C.

3.请思考并回答问题:

(1)若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是不共线的向量,则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 与 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的几何意义是什么?

提示:作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 表示以 OA,OB 为邻边的▱$OACB$ 的对角线 OC 的长度;$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 表示另一对角线 AB 的长度.

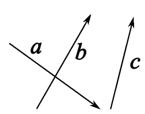
(2)在 $||a|-|b||\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$ 中,等号何时成立?

提示:当向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线时,$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$;当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线且同向时,前一个等号成立;当向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线且反向时,后一个等号成立.

任务型课堂

学习任务一　向量减法的几何意义及应用

例 1　如图,已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共线,求作向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.



解:(方法一)如图 1,在平面内任取一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.再作 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,则 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

(方法二)如图 2,在平面内任取一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.再作 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{c}$,则 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

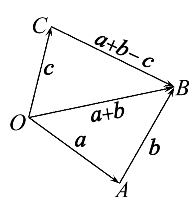


图 1

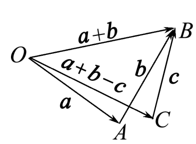
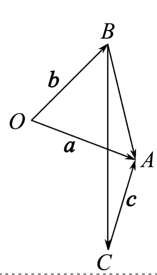


图 2

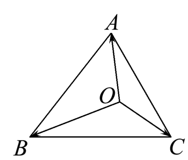
[一题多思]

思考 1.若本例条件不变,求作向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

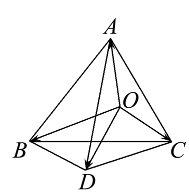
解:如图,在平面内任取一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.再作 $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{c}$,则 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.



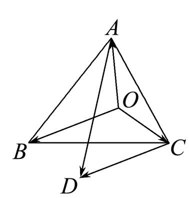
思考 2.如图,O 为△ABC 内一点,$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$.求作向量 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$.



解:(方法一)如图,以 $\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$ 为邻边作▱$OBDC$,连接 OD,AD,则 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$.



(方法二)作 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,连接 AD,则 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$.



反思提炼

求作两个向量的差向量时,若两个向量有共同起点,则直接连接两个向量的终点,由减向量的终点指向被减向量的终点的向量即为差向量;若两个向量的起点不重合,则先通过平移使它们的起点重合,再作差向量.

探究训练

1.(多选题)若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量,则下列命题正确的是 ( )

A.若 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同

B.若 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反

C.若 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$

D.若 $||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同

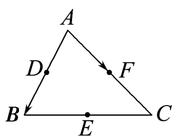
ABD **解析**:当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相同时,有 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$,$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相反时,有 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$,故 A,B,D 均正确.

2.若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相反,且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ =________.

2 **解析**:因为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相反,且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$.

学习任务二 向量减法的运算及简单应用

例 2 (1)如图,D,E,F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB,BC,CA 的中点,则 $\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{DB}=$ ( )



A.$\overrightarrow{FD}$ B.$\overrightarrow{FC}$

C.$\overrightarrow{FE}$ D.$\overrightarrow{BE}$

D **解析**:由题图可知,$\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BE}$.

(2)化简下列各式:

①$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}$;

②$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})$;

③$(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})-(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DO}-\overrightarrow{OB})$.

解:①$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$.

②(方法一)原式 $=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})-(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})$

$=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}=\mathbf{0}$.

(方法二)原式 $=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

$=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD})$

$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\mathbf{0}$.

③$(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})-(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DO}-\overrightarrow{OB})$

$=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA})-(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BC}=\mathbf{0}$.

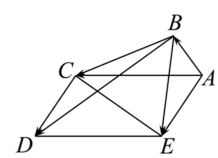
反思提炼

向量减法运算的常用方法

常用方法:
- 可以通过相反向量,把向量的减法运算转化为加法运算
- 运用向量减法的三角形法则,此时要注意两个向量要有共同的起点
- 引入点 O,逆用向量减法的三角形法则,将各向量起点统一

探究训练

如图所示,在五边形 $ABCDE$ 中,若四边形 $ACDE$ 是平行四边形,且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{c}$,则用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示下列向量.



(1)$\overrightarrow{CD}=$________;(2)$\overrightarrow{BC}=$________;

(3)$\overrightarrow{BE}=$________;(4)$\overrightarrow{BD}=$________.

(1)$\boldsymbol{c}$ (2)$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ (3)$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ (4)$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$ **解析**:因为四边形 $ACDE$ 是平行四边形,所以 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$.

学习任务三 向量加、减法运算的综合应用

例 3 (1)已知 O 是四边形 $ABCD$ 所在平面内任意一点,$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$,且 $|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}|$,则四边形 $ABCD$ 一定为 ( )

A.菱形 B.任意四边形

C.矩形 D.平行四边形

D **解析**:由 $|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}|$ 知,$|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{DC}|$,且 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$,所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

(2)若 $|\overrightarrow{AB}|=8$,$|\overrightarrow{AC}|=5$,则 $|\overrightarrow{BC}|$ 的取值范围是 ( )

A.$[3,8]$ B.$(3,8)$

C.$[3,13]$ D.$(3,13)$

C **解析**:由于 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$,则有 $||\overrightarrow{AB}|-|\overrightarrow{AC}||\leqslant|\overrightarrow{BC}|\leqslant|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|$,即 $3\leqslant|\overrightarrow{BC}|\leqslant13$.

反思提炼

1.用已知向量表示其他向量的三个关注点

(1)搞清楚图形中的相等向量、相反向量、共线向量以及围成一个三角形的三个向量之间的关系,确定已知向量与被表示向量的转化渠道.

(2)注意综合应用向量加法、减法的几何意义以及向量加法的结合律、交换律来分析解决问题.

(3)注意在封闭图形中利用向量加法的多边形法则.例如,在四边形 $ABCD$ 中,$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\mathbf{0}$.

2.平行四边形中有关向量的结论

平行四边形中有关向量的以下结论,在解题中可以直接使用:

(1)对角线的平方和等于四边的平方和,即 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)$.

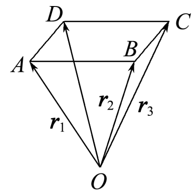
(2)若$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,则以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 对应线段为邻边的平行四边形为矩形.

探究训练

1.在平行四边形 $ABCD$ 中,若$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|$,则四边形 $ABCD$ 的形状为________.

矩形　**解析**:因为$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$,所以$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{DB}|$.由对角线相等的平行四边形是矩形可知,四边形 $ABCD$ 是矩形.

2.如图所示,以点 O 为起点,以平行四边形 $ABCD$ 的顶点 A,B,C 为终点的向量分别是 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3$,求$\overrightarrow{OD}$.



解:因为$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}$,$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$,所以$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$.

体系构建

相反向量 → 向量的减法 → 向量减法的几何意义

课后素养评价(三)

基础性·能力运用

1.$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}$化简后等于　(　　)

A.$\overrightarrow{BC}$　　B.$\overrightarrow{CB}$　　C.$\overrightarrow{BD}$　　D.$\overrightarrow{DB}$

B　**解析**:因为$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CB}$.故选 B.

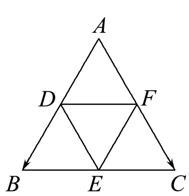
2.已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向,则下列等式成立的是(　　)

A.$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$　　B.$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$

C.$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$　　D.$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$

A　**解析**:因为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{b}$ 同向,所以易知$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.故选 A.

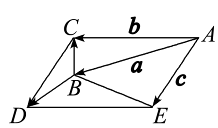
3.如图所示,D,E,F 分别是$\triangle ABC$ 的边 AB,BC,CA 的中点,则$\overrightarrow{FC}-\overrightarrow{DB}=$　(　　)



A.$\overrightarrow{FD}$　　B.$\overrightarrow{FC}$　　C.$\overrightarrow{FE}$　　D.$\overrightarrow{BE}$

D　**解析**:因为 D,E,F 分别是$\triangle ABC$ 的边 AB,BC,CA 的中点,所以 $DF\parallel BC$ 且 $DF=\frac{1}{2}BC$,所以$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EC}$,$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}$,因此,$\overrightarrow{FC}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EC}$.故选 D.

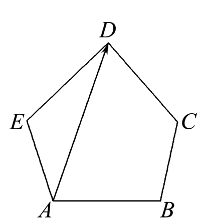
4.如图所示,四边形 $ACDE$ 是平行四边形,B 是该平行四边形内一点,且$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{c}$,试用向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示向量$\overrightarrow{CD}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{BD}$.



解:因为四边形 $ACDE$ 是平行四边形,所以$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,故$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$.

综合性·创新提升

1.(多选题)如图,在五边形 $ABCDE$ 中,下列运算的结果为$\overrightarrow{AD}$的是　(　　)



A.$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}$

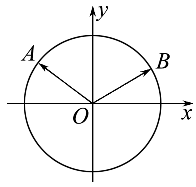
B.$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}$

C.$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}$

D.$\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{ED}$

AB　**解析**:对于 A,$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$,A 正确;对于 B,$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AD}$,B 正确;对于 C,$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}$,C 不正确;对于 D,$\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DE}\neq\overrightarrow{AD}$,D 不正确.故选 AB.

2.如图所示,单位圆上有动点 A,B,当$|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$取得最大值时,$|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$等于　(　　)



A.0　　B.-1

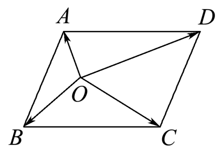
C.1　　D.2

D　**解析**：因为$|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{BA}|$，$A$，$B$是单位圆上的动点，所以$|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$的最大值为2，此时$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$反向.故选D.

3. 若$|\overrightarrow{AB}|=7$，$|\overrightarrow{AC}|=4$，则$|\overrightarrow{BC}|$的取值范围是________.

[3,11]　**解析**：由题意知$|\overrightarrow{AB}|=7$，$|\overrightarrow{AC}|=4$，且$|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|$，当$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$同向时，$|\overrightarrow{BC}|$取得最小值，此时$|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|=||\overrightarrow{AC}|-|\overrightarrow{AB}||=|4-7|=3$；当$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$反向时，$|\overrightarrow{BC}|$取得最大值，此时$|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|=||\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{AB}||=|4+7|=11$；当$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$不共线时，$3<|\overrightarrow{BC}|<11$，故$|\overrightarrow{BC}|$的取值范围是[3,11].故选C.

4. 如图所示，已知O为平行四边形$ABCD$内一点，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，求$\overrightarrow{OD}$.



解：因为$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$，

且在平行四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，

所以$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$，

所以$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$.

6.2.3　向量的数乘运算

第1课时　向量的数乘运算

学习任务目标

1. 了解向量数乘的概念，并理解这种运算的几何意义.

2. 理解并掌握向量数乘的运算律，会运用向量数乘的运算律进行向量的线性运算.

问题式预习

知识清单

1. 向量的数乘运算

一般地，我们规定实数λ与向量$\boldsymbol{a}$的积是一个向量，这种运算叫做向量的数乘，记作$\lambda\boldsymbol{a}$，它的长度与方向规定如下：

(1)$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

(2)$\lambda\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$的方向

$\begin{cases}\text{当}\lambda>0\text{时，与}\boldsymbol{a}\text{的方向相同；}\\\text{当}\lambda<0\text{时，与}\boldsymbol{a}\text{的方向相反.}\end{cases}$

特别地，当$\lambda=0$时，$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，当$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$时，$\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$.

2. 向量数乘的运算律

设λ，μ为实数，那么

(1)$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2)$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

(3)$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

特别地，我们有$(-\lambda)\boldsymbol{a}=-(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(-\boldsymbol{a})$，$\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$.

3. 向量的线性运算

向量的加、减、数乘运算统称为向量的线性运算.向量线性运算的结果仍是向量.对于任意向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，以及任意实数λ，μ_1，μ_2，恒有$\lambda(\mu_1\boldsymbol{a}\pm\mu_2\boldsymbol{b})=\lambda\mu_1\boldsymbol{a}\pm\lambda\mu_2\boldsymbol{b}$.

概念辨析

1. 判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)实数λ与向量$\boldsymbol{a}$的积还是向量.　(√)

(2)对于非零向量$\boldsymbol{a}$，向量$-6\boldsymbol{a}$与向量$2\boldsymbol{a}$的方向相反.　(√)

(3)向量$-8\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$的模是向量$4\boldsymbol{a}$的模的2倍.　(√)

2. $3(2\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})$等于　(　　)

A.$5\boldsymbol{a}+7\boldsymbol{b}$

B.$5\boldsymbol{a}-7\boldsymbol{b}$

C.$6\boldsymbol{a}+12\boldsymbol{b}$

D.$6\boldsymbol{a}-12\boldsymbol{b}$

D　**解析**：原式$=3\times2\boldsymbol{a}-3\times4\boldsymbol{b}=6\boldsymbol{a}-12\boldsymbol{b}$.

3.请思考并回答问题：

(1)实数与向量可以相乘，那么能否相加或相减？

提示：不能.

(2)设 m 为实数，若 $m\boldsymbol{a}-m\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则必有 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 成立吗？设 m,n 为实数，向量 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，若 $m\boldsymbol{a}-n\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则必有 $m=n$ 成立吗？

提示：不一定成立.成立.

任务型课堂

学习任务一　向量数乘的概念

1.若 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，且向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同，则下列关系式正确的是　（　　）

A.$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}$　　B.$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{a}$

C.$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$　　D.$\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{b}$

A　**解析**：因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相同，且 $|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{a}|=1$，所以 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}$.

2.设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，λ 是非零实数，则下列结论正确的是　（　　）

A.$\boldsymbol{a}$ 与 $-\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向相反

B.$|\lambda\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{a}|$

C.$\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda^2\boldsymbol{a}$ 的方向相同

D.$|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda\boldsymbol{a}$

C　**解析**：当 $\lambda>0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $-\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向相反；当 $\lambda<0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $-\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向相同，故 A 不正确.当 $|\lambda|\geqslant1$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{a}|$；当 $|\lambda|<1$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{a}|$，故 B 不正确.因为 $\lambda^2>0$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda^2\boldsymbol{a}$ 的方向相同，故 C 正确.$|\lambda\boldsymbol{a}|$ 是实数，$\lambda\boldsymbol{a}$ 是向量，二者不相等，故 D 不正确.

学习任务二　向量的线性运算

例 1　化简下列各式：

(1)$3(6\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-9\left(\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}\right)$；

(2)$\frac{1}{2}\left[(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})-\left(\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)\right]-2\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{3}{8}\boldsymbol{b}\right)$；

(3)$2(5\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-3(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-7\boldsymbol{a}$.

解：(1)原式 $=18\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-9\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=9\boldsymbol{a}$.

(2)原式 $=\frac{1}{2}\left(2\boldsymbol{a}+\frac{3}{2}\boldsymbol{b}\right)-\boldsymbol{a}-\frac{3}{4}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\frac{3}{4}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-\frac{3}{4}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

(3)原式 $=10\boldsymbol{a}-8\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}-3\boldsymbol{a}+9\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}-7\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

反思提炼

向量线性运算的基本方法

向量的线性运算形式上类似于实数加减法与乘法满足的运算法则，实数运算中去括号、移项、合并同类项等变形手段在向量的线性运算中均可使用.

探究训练

1.设向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$，求 $\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right)-\left(\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}\right)+(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

解：原式 $=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\left(\frac{1}{3}-1-1\right)\boldsymbol{a}+\left(-1+\frac{2}{3}+2\right)\boldsymbol{b}=-\frac{5}{3}\boldsymbol{a}+\frac{5}{3}\boldsymbol{b}=-\frac{5}{3}(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})+\frac{5}{3}(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})=-\frac{5}{3}\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}$.

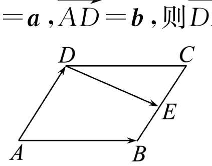
2.已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，且 $5\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}$，$3\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$，求 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$.

解：联立方程组 $\begin{cases}5\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a},\\3\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}\boldsymbol{x}=\frac{1}{11}\boldsymbol{a}+\frac{2}{11}\boldsymbol{b},\\\boldsymbol{y}=\frac{3}{11}\boldsymbol{a}-\frac{5}{11}\boldsymbol{b}.\end{cases}$

学习任务三　用已知向量表示其他向量

例 2　(1)如图所示，在平行四边形 $ABCD$ 中，E 是 BC 的中点，若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{DE}=$　（　　）



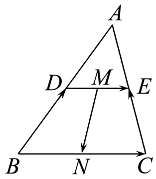
A.$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$　　B.$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

C.$\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　D.$\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

D　**解析**：$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}+\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

(2)如图所示，D,E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB,AC 的

中点，M,N 分别是 DE,BC 的中点，已知 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 分别表示 $\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{MN}$.



解：由题意可知，DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线，

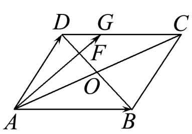
所以 $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，即 $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$.

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

［一题多思］

思考.本例(1)中，设 AC 与 BD 相交于点 O，F 是线段 OD 的中点，AF 的延长线交 DC 于点 G，如图所示，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AG}$.



解：因为 $DG\parallel AB$，所以 $\triangle DFG\backsim\triangle BFA$.

又因为 $DF=\frac{1}{2}OD=\frac{1}{4}BD$，

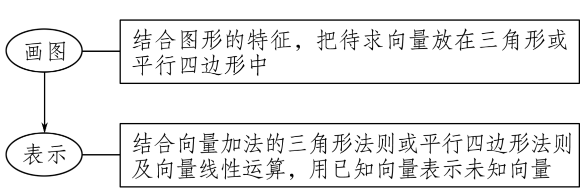
所以 $\frac{DG}{AB}=\frac{DF}{BF}=\frac{1}{3}$，

所以 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{a}$.

反思提炼

用已知向量表示其他向量的两种方法

(1)直接法



(2)方程法

当直接表示比较困难时，可以首先利用向量加法的三角形法则和平行四边形法则建立关于所求向量和已知向量的等量关系，然后解关于所求向量的方程(组).

提醒：用已知向量表示未知向量的关键是弄清楚向量长度之间的数量关系.

探究训练

1.(2022·新高考全国Ⅰ卷)在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上，$BD=2DA$.记 $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{n}$，则 $\overrightarrow{CB}=$ （　　）

A.$3\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}$　　B.$-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$

C.$3\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$　　D.$2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$

B　**解析**：因为点 D 在边 AB 上，$BD=2DA$，所以 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DA}$，即 $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=2(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD})$，

所以 $\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{CD}-2\overrightarrow{CA}=3\boldsymbol{n}-2\boldsymbol{m}=-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$.故选 B.

2.已知点 P 在 $\triangle ABC$ 所在平面内，若 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AP}$，则 $\overrightarrow{PB}=$ （　　）

A.$-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

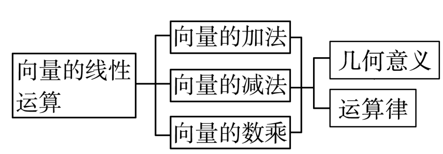
B.$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

C.$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

D.$-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

C　**解析**：由 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AP}$，得 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，所以 $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

体系构建



课后素养评价(四)

基础性·能力运用

1. $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})+2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$等于　　(　　)

A.$2\boldsymbol{a}$　　B.$3\boldsymbol{a}$　　C.$-\boldsymbol{b}$　　D.$\boldsymbol{0}$

B　**解析**:依题意得$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})+2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{a}$.故选 B.

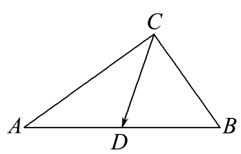
2. 已知$\lambda\in\mathbf{R}$,下列结论正确的是　　(　　)

A.$|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$　　B.$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\boldsymbol{a}$

C.$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$　　D.$|\lambda\boldsymbol{a}|>0$

C　**解析**:向量$\lambda\boldsymbol{a}$,当$\lambda>0$时,$\lambda\boldsymbol{a}$方向与$\boldsymbol{a}$方向相同,长度等于$\lambda|\boldsymbol{a}|$;当$\lambda<0$时,$\lambda\boldsymbol{a}$方向与$\boldsymbol{a}$方向相反,长度等于$|\lambda||\boldsymbol{a}|$.所以$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$,所以 C 正确.

3. 如图所示,在$\triangle ABC$中,D为AB的中点,则$2\overrightarrow{CD}=$　　(　　)



A.$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$　　B.$\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$

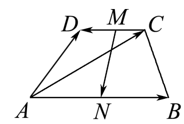
C.$2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$　　D.$2\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$

A　**解析**:因为在$\triangle ABC$中,D为AB的中点,所以$2\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{BC}$.故选 A.

4. 点C在线段AB上,且$\overrightarrow{AC}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.若$\overrightarrow{AC}=\mu\overrightarrow{BC}$,则$\mu=$________.

$-\frac{2}{3}$　**解析**:由$\overrightarrow{AC}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{5}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})$,可得$\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$,即$\overrightarrow{AC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$,所以$\mu=-\frac{2}{3}$.

5. 如图,四边形$ABCD$是一个梯形,$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$且$|\overrightarrow{AB}|=2|\overrightarrow{CD}|$,$M$,$N$分别是$DC$,$AB$的中点,已知$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{e}_2$,试用$\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$表示下列向量.



(1)$\overrightarrow{AC}=$________;

(2)$\overrightarrow{MN}=$________.

(1)$\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1$　(2)$\frac{1}{4}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$　**解析**:因为$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$,$|\overrightarrow{AB}|=2|\overrightarrow{CD}|$,所以$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

(1)$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1$.

(2)$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN}$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$=-\frac{1}{4}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1$

$=\frac{1}{4}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$.

综合性·创新提升

1. 已知平面内四个不同的点A,B,C,D满足$\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}$,则$\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|}=$　　(　　)

A.$\frac{2}{3}$　　B.$\frac{3}{2}$　　C.2　　D.3

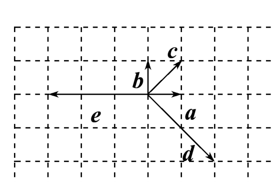
D　**解析**:因为$\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}$,所以$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=2(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB})-2\overrightarrow{DC}$,即$3\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$,所以$3|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}|$,所以$\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|}=3$.故选 D.

2. 已知等边三角形ABC的边长为 2,D为BC中点,则$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}|=$　　(　　)

A.$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　B.$2\sqrt{3}$　　C.$3\sqrt{3}$　　D.$4+\sqrt{3}$

C　**解析**:因为等边三角形ABC的边长为 2,D为BC中点,所以$AD=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$,$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$,所以$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}|=|3\overrightarrow{AD}|=3|\overrightarrow{AD}|=3\sqrt{3}$.故选 C.

3. 如图,已知向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{d}$,$\boldsymbol{e}$的起点相同,则$\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{e}=$　　(　　)



A.$-\boldsymbol{b}$

B.$\boldsymbol{b}$

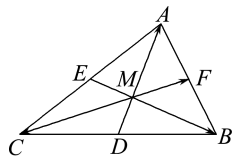
C.$-6\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

D.$6\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

D　**解析**:由题图得 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{e}=-3\boldsymbol{a}$,

所以 $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{e}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.故选 D.

4.如图,在△ABC 中,D,E,F 分别是边 BC,CA,AB 的中点,M 是△ABC 的重心.若$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\lambda\overrightarrow{MF}$,则 $\lambda=$________.



4　**解析**:因为 F 为 AB 的中点,

所以$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MF}$.因为 M 是△ABC 的重心,

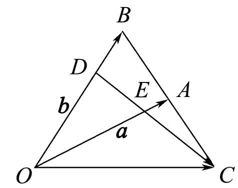
所以$|\overrightarrow{MC}|=2|\overrightarrow{MF}|$,

所以$\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MF}$,

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MF}-(-2\overrightarrow{MF})=4\overrightarrow{MF}$,

故 $\lambda=4$.

5.如图,在△OAB 中,延长 BA 到点 C,使 $AC=BA$,在 OB 上取点 D,使 $DB=\frac{1}{3}OB$,DC 与 OA 交点为 E.设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,用 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{DC}$.



解:因为 $AC=BA$,所以 A 是 BC 的中点,

所以$\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$,

所以$\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

所以$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}-\frac{5}{3}\boldsymbol{b}$.

第 2 课时　向量共线定理

学习任务目标

1.理解并掌握向量共线定理.

2.会用向量共线定理处理向量共线、点共线问题.

问题式预习

知识清单

向量共线定理

设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量,如果有一个实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,那么 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 是共线向量.

反之,如果 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 是共线向量,那么有且只有一个实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

实质:向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是:存在唯一一个实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\underline{\lambda\boldsymbol{a}}$.

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)若向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线,则存在唯一的实数 λ 使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.　(×)

(2)若 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.　(√)

(3)若 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.　(×)

2.已知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,且方向相同,若$|\boldsymbol{a}|=8|\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}=$________$\boldsymbol{b}$.

8　**解析**:因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,且方向相同,所以 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ $(\lambda>0)$,所以$|\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{b}|=\lambda|\boldsymbol{b}|$.又$|\boldsymbol{a}|=8|\boldsymbol{b}|$,所以 $\lambda=8$.

3.请思考并回答问题:

若向量 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量,则向量$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$与 $\boldsymbol{a}$ 有什么关系?

提示:共线.

任务型课堂

学习任务一　向量共线的判断

1. 下列选项中，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不一定共线的是（　　）

A. $\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_2-10\boldsymbol{e}_1$

B. $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{e}_1-\frac{2}{5}\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1-\frac{1}{10}\boldsymbol{e}_2$

C. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_1$

D. $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$

C　**解析**：对于 A，$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{a}$；对于 B，$\boldsymbol{b}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}$；对于 D，$\boldsymbol{b}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}$. 只有 C 中，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不一定共线.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，则四边形 $ABCD$ 是（　　）

A. 梯形

B. 平行四边形

C. 矩形

D. 菱形

A　**解析**：因为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})-(4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(5\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})=-8\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{BC}$，所以 $\overrightarrow{AD}\parallel\overrightarrow{BC}$ 且 $|\overrightarrow{AD}|\neq|\overrightarrow{BC}|$. 所以四边形 $ABCD$ 是梯形.

3.（多选题）若非零向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=-6\boldsymbol{e}$，则下列说法正确的是（　　）

A. $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$

B. 向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向相反

C. $|\boldsymbol{a}|=3|\boldsymbol{b}|$

D. $\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{a}$

ABD　**解析**：因为 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=-6\boldsymbol{e}$，所以 $\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{a}$，D 正确；由共线向量定理知，A 正确；$-3<0$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反，B 正确；由上可知，$|\boldsymbol{b}|=3|\boldsymbol{a}|$，C 错误. 故选 ABD.

反思提炼

1. 由向量共线定理知，只要找到一个实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，即可得到 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}$. 当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时，λ 为任意实数.

2. 对任意两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，若存在 λ，μ 不全为 0 的实数对 (λ,μ)，使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则向量 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

学习任务二　利用向量共线定理求参数

例 1　(1) 已知向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线，$\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$. 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则 $k=$（　　）

A. ±1　　B. 1

C. -1　　D. 0

A　**解析**：因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，所以 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，即 $k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2)$.

所以 $\begin{cases}k=\lambda,\\ k\lambda=1,\end{cases}$ 解得 $k=\pm1$.

(2) 已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，其中 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线，向量 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{e}_1-9\boldsymbol{e}_2$，问：是否存在实数 λ，μ，使 $\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线？

解：$\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\lambda(2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2)+\mu(2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)=(2\lambda+2\mu)\boldsymbol{e}_1+(-3\lambda+3\mu)\boldsymbol{e}_2$. 假设存在实数 λ，μ，使 $\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，则应存在实数 k，使 $\boldsymbol{d}=k\boldsymbol{c}$，即 $(2\lambda+2\mu)\boldsymbol{e}_1+(-3\lambda+3\mu)\boldsymbol{e}_2=2k\boldsymbol{e}_1-9k\boldsymbol{e}_2$，所以 $(2\lambda+2\mu-2k)\boldsymbol{e}_1=(-9k+3\lambda-3\mu)\boldsymbol{e}_2$.

又因为 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线，

所以 $\begin{cases}2\lambda+2\mu-2k=0,\\ -9k+3\lambda-3\mu=0,\end{cases}$

解得 $\lambda=-2\mu$.

故存在实数 λ，μ，只要满足 $\lambda=-2\mu$，就能使 $\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线.

反思提炼

判断、证明向量共线的思路

根据向量共线定理寻求唯一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$. 而已知向量共线求 λ，常将向量共线的条件转化为相应向量系数相等求解. 若两向量不共线，则必有两向量的系数为零，利用待定系数法建立方程（组），解方程（组）从而求得 λ 的值.

探究训练

已知 A，B，P 三点共线，O 为直线外任意一点，若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，求 $x+y$ 的值.

解：因为 A，B，P 三点共线，所以向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AP}$ 在同一直线上. 由向量共线定理可知，必定存在实数 λ，使 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$，即 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$，所以 $\overrightarrow{OP}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$.

故 $x=1-\lambda$，$y=\lambda$，即 $x+y=1$.

学习任务三 证明三点共线

例2 已知非零向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线.如果 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CD}=3(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)$，求证：$A,B,D$ 三点共线.

证明：因为 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2=5(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=5\overrightarrow{AB}$，

所以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}$ 共线，且有公共点 B，所以 A,B,D 三点共线.

反思提炼

证明或判断三点共线的方法

(1)一般来说，要判断 A,B,C 三点是否共线，只需看是否存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$（或 $\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ 等）即可.

(2)利用结论：若已知点 O，则 A,B,C 三点共线 $\Leftrightarrow$ 存在实数 x,y，使 $\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$，且 $x+y=1$.

探究训练

1. 已知 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则 （　　）

A. A,B,C 三点共线　　B. A,B,D 三点共线

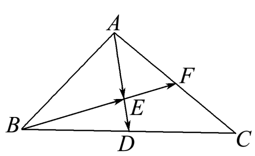
C. A,C,D 三点共线　　D. B,C,D 三点共线

B　**解析**：$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=-2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}+3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}$，又 $\overrightarrow{BD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 有公共点 B，所以 A,B,D 三点共线.

2. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，D,F 分别是边 BC,AC 的中点，$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$.

(1)用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BF}$；

(2)求证：B,E,F 三点共线.



(1)**解**：如图，延长 AD 到点 G，使 $DG=AD$，连接 BG,CG，则四边形 $ABGC$ 是平行四边形，

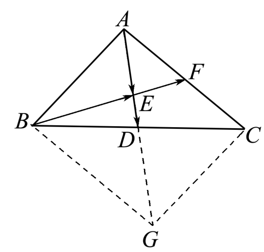
所以 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

因为 $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

所以 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.



(2)**证明**：由(1)知 $\overrightarrow{BE}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}=-\frac{1}{3}(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，

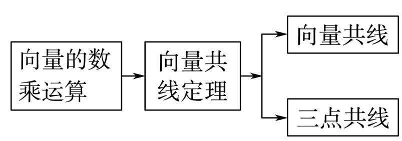
$\overrightarrow{BF}=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，

所以 $\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BF}$.

又因为 $\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BF}$ 有公共点 B，

所以 B,E,F 三点共线.

体系构建



课后素养评价（五）

基础性·能力运用

1. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个不共线的向量，且向量 $m\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+(2-m)\boldsymbol{b}$ 共线，则实数 m 的值为 （　　）

A. -1 或 3　　B. $\sqrt{3}$

C. -1 或 4　　D. 3 或 4

A　**解析**：因为向量 $m\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+(2-m)\boldsymbol{b}$ 共线，且向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个不共线的向量，所以 $m=\frac{-3}{2-m}$，解得 $m=-1$ 或 $m=3$.故选A.

2. 点 C 在线段 AB 上，且 $|\overrightarrow{AC}|=\frac{3}{4}|\overrightarrow{CB}|$，若 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}$，则 $\lambda=$ （　　）

A.$\frac{1}{3}$　　B.$-\frac{3}{4}$

C.$\frac{7}{4}$　　D.$-\frac{7}{4}$

D　**解析**：不妨设$|\overrightarrow{CB}|=4a$，则$|\overrightarrow{AC}|=\frac{3}{4}|\overrightarrow{CB}|=3a$.因为点 C 在线段 AB 上，则$\overrightarrow{AB}=-\frac{7}{4}\overrightarrow{BC}$.故选 D.

3.已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{e}$ 是单位向量，且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{e}$，则下列结论正确的是　（　）

A.$\boldsymbol{e}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$　　B.$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}$

C.$\boldsymbol{a}=-|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}$　　D.$\boldsymbol{a}=\pm|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}$

D　**解析**：当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$无意义，A 错误，B，C，D 均正确；当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，由 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{e}$ 得 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 同向或反向，知 B，C 不全面，D 正确.故选 D.

4.(多选题)已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，在下列四个条件中，一定可以使 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线的是　（　）

A.$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{e}$ 且 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{e}$

B.存在相异实数 λ，μ，使 $\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

C.$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$(其中实数 x，y 满足 $x+y=0$)

D.已知梯形 $ABCD$，其中$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}$

AB　**解析**：由 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=-2(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$ 得到 $\boldsymbol{b}=-4\boldsymbol{a}$，故 A 可以；$\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，$\lambda\boldsymbol{a}=\mu\boldsymbol{b}$，故 B 可以；$x=y=0$，有 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，但 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 不一定共线，故 C 不可以；在梯形 $ABCD$ 中，没有说明哪组对边平行，故 D 不可以.故选 AB.

5.已知向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，其中 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}=6\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$ 的关系是　（　）

A.不共线　　B.共线

C.相等　　D.无法确定

B　**解析**：因为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$，因此 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}=6\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$ 的关系是共线.故选 B.

6.若$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=5$，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反，则 $\boldsymbol{a}=$______.(用 $\boldsymbol{b}$ 表示)

$-\frac{3}{5}\boldsymbol{b}$　**解析**：由$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=5$，得$|\boldsymbol{a}|=\frac{3}{5}|\boldsymbol{b}|$，又 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反，所以 $\boldsymbol{a}=-\frac{3}{5}\boldsymbol{b}$.

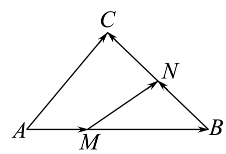
7.设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不平行，向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 平行，则实数 $\lambda=$________.

$\frac{1}{2}$　**解析**：因为向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 平行，所以 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$，即$\begin{cases}\lambda=k,\\1=2k,\end{cases}$解得 $\lambda=k=\frac{1}{2}$.

8.如图，在$\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$.

(1)用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{MN}$；

(2)若 P 为$\triangle ABC$ 内部的一点，且$\overrightarrow{AP}=\frac{5}{12}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$.求证：$M$，$P$，$N$ 三点共线.



(1)**解**：$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{a}=\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

(2)**证明**：因为 P 为$\triangle ABC$ 内部一点，且$\overrightarrow{AP}=\frac{5}{12}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$，

则$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{5}{12}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$，

所以$\overrightarrow{MP}$与$\overrightarrow{MN}$共线且有公共点 M，

所以 M，P，N 三点共线.

综合性·创新提升

1.已知四边形 $ABCD$ 是菱形，点 P 在对角线 AC 上(不包括端点 A，C)，则$\overrightarrow{AP}=$　（　）

A.$\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$，$\lambda\in(0,1)$

B.$\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$，$\lambda\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

C.$\lambda(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})$，$\lambda\in(0,1)$

D.$\lambda(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})$，$\lambda\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

A　**解析**：由 P 是对角线 AC 上的一点(不含 A，C)，设$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda\in(0,1)$.于是$\overrightarrow{AP}=\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$，$\lambda\in(0,1)$.故选 A.

2.下列各组向量中，能推出 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 的是　（　）

①$\boldsymbol{a}=-3\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}$；

②$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\dfrac{\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2}{2}-\boldsymbol{e}_1$；

③$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\dfrac{\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2}{2}$.

A.①

B.①②

C.②③

D.①②③

B **解析**：①中 $\boldsymbol{a}=-\dfrac{3}{2}\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$；②中 $\boldsymbol{b}=\dfrac{\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2}{2}-\boldsymbol{e}_1=\dfrac{\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1}{2}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$；③中 $\boldsymbol{b}=\dfrac{3\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2}{2}=\dfrac{3}{2}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$，若 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 共线，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，若 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线.故选 B.

3.已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 中任意两个都不共线，但 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，且 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，则向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=$（　　）

A.$\boldsymbol{a}$　　B.$\boldsymbol{b}$

C.$\boldsymbol{c}$　　D.$\boldsymbol{0}$

D **解析**：因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，

所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mu\boldsymbol{a}$，

两式相减，得 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{c}-\mu\boldsymbol{a}$，

移项得$(1+\lambda)\boldsymbol{c}=(1+\mu)\boldsymbol{a}$.

因为向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}$ 不共线，所以 $1+\lambda=0$，$1+\mu=0$，

即 $\lambda=-1$，$\mu=-1$，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

故选 D.

4.已知 P 是△ABC 所在平面内的一点，若$\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{PB}=\lambda\overrightarrow{PA}$，其中 $\lambda\in\mathbf{R}$，则点 P 一定在（　　）

A.边 AC 所在的直线上

B.边 BC 所在的直线上

C.边 AB 所在的直线上

D.△ABC 的内部

A **解析**：因为$\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{PA}$，

所以$\overrightarrow{CP}\parallel\overrightarrow{PA}$，所以点 P 在边 AC 所在的直线上.

故选 A.

5.已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，若非零向量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，则 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 必定________.

共线 **解析**：因为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，所以存在 λ_1，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{b}$.又因为非零向量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，所以存在 λ_2，使得 $\boldsymbol{c}=\lambda_2\boldsymbol{a}$.所以 $\boldsymbol{c}=\lambda_2\boldsymbol{a}=\lambda_1\lambda_2\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 必定共线.

6.设$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$不共线，且$\overrightarrow{OC}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$($a$，$b\in\mathbf{R}$).

(1)若 $a=\dfrac{1}{3}$，$b=\dfrac{2}{3}$，求证：A，B，C 三点共线.

(2)若 A，B，C 三点共线，则 $a+b$ 是否为定值？说明理由.

(1)**证明**：当 $a=\dfrac{1}{3}$，$b=\dfrac{2}{3}$ 时，

$\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}$，

所以$\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})$，

即 $2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$，

所以$\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{CA}$共线.又$\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{CA}$有公共点 C，

所以 A，B，C 三点共线.

(2)**解**：$a+b$ 为定值 1.理由如下：

因为 A，B，C 三点共线，所以$\overrightarrow{AC}\parallel\overrightarrow{AB}$.

不妨设$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$($\lambda\in\mathbf{R}$)，

所以$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$，

即$\overrightarrow{OC}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$.

又$\overrightarrow{OC}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$，且$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$不共线，

则$\begin{cases}a=1-\lambda,\\b=\lambda,\end{cases}$

所以 $a+b=1$(定值).

6.2.4　向量的数量积

第1课时　向量的数量积

学习任务目标

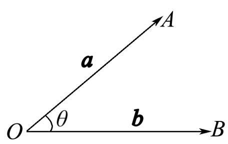
1. 了解平面向量数量积的物理背景.
2. 掌握平面向量数量积的定义，理解投影向量.
3. 会用两个向量的数量积求两个向量的夹角.

问题式预习

知识清单

1. 向量的夹角

(1)夹角：已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$(如图)，O 是平面上的任意一点，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则$\angle AOB=\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.



①当 $\theta=0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向；

②当 $\theta=\pi$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向.

(2)垂直：如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 $\dfrac{\pi}{2}$，我们说 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

2. 向量的数量积

条件	非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ
结论	数量 $\vert\boldsymbol{a}\vert\vert\boldsymbol{b}\vert\cos\theta$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(或内积)
记法	记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\vert\boldsymbol{a}\vert\vert\boldsymbol{b}\vert\cos\theta$
规定	零向量与任一向量的数量积为 0

3. 投影向量

(1)如图 1，设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}$，我们考虑如下的变换：过$\overrightarrow{AB}$的起点 A 和终点 B，分别作$\overrightarrow{CD}$所在直线的垂线，垂足分别为 A_1，B_1，得到$\overrightarrow{A_1B_1}$，我们称上述变换为向量 $\boldsymbol{a}$ 向向量 $\boldsymbol{b}$ 投影，$\overrightarrow{A_1B_1}$叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量.

(2)如图 2，在平面内任取一点 O，作$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{ON}=\boldsymbol{b}$. 过点 M 作直线 ON 的垂线，垂足为 M_1，则$\overrightarrow{OM_1}$就是向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量. 设与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量为 $\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，那么$\overrightarrow{OM_1}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta\,\boldsymbol{e}$.

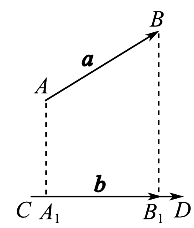


图 1

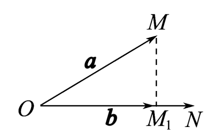


图 2

4. 向量数量积的重要性质

设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是非零向量，它们的夹角是 θ，$\boldsymbol{e}$ 是与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量，则

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$.

(2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

(3)当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；当 a 与 b 反向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$. 特别地，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ 或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

(4) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

概念辨析

1. 判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").

(1)向量数量积的运算结果是向量.　(×)

(2)向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量是数量.　(×)

2. 若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于　(　　)

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. $1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 2

A　**解析**：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60°=\dfrac{1}{2}$.

3. 已知 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，则 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为________.

$\boldsymbol{a}$　**解析**：$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为 $|\boldsymbol{b}|\cos\dfrac{\pi}{3}\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=2\times\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

4.请思考并回答问题:

(1)向量的夹角与两条直线的夹角有何区别?

提示:两直线的夹角的范围为$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,向量的夹角相当于从一点出发的两条射线的夹角,范围为$[0,\pi]$.

(2)非零向量的数量积是否可为正数、负数或零,数量积的符号由什么来决定?

提示:由这两个非零向量的夹角θ决定,当$0°\leqslant\theta<90°$时,数量积为正数;当$\theta=90°$时,数量积为零;当$90°<\theta\leqslant 180°$时,数量积为负数.

任务型课堂

学习任务一 向量数量积的有关概念及基本运算

1.在等腰直角三角形ABC中,若$\angle C=90°$,$AC=\sqrt{2}$,则$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$的值等于 ( )

A.-2 B.2

C.$-2\sqrt{2}$ D.$2\sqrt{2}$

B **解析**:$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos\angle ABC=2\times\sqrt{2}\times\cos 45°=2$.

2.已知$|\boldsymbol{a}|=4$,$\boldsymbol{e}$为单位向量,$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{e}$的夹角为$\frac{2\pi}{3}$,则向量$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{e}$上的投影向量是________.

$-2\boldsymbol{e}$ **解析**:由题意可知,向量$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{e}$上的投影向量为$|\boldsymbol{a}|\cos\frac{2\pi}{3}\boldsymbol{e}=-2\boldsymbol{e}$.

3.已知$|\boldsymbol{a}|=4$,$|\boldsymbol{b}|=5$,根据下列条件,分别求向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的数量积.

(1)$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$;

(2)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$;

(3)$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$60°$.

解:(1)若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向,则夹角$\theta=0°$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 0°=4\times5\times1=20$;若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$反向,则$\theta=180°$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 180°=4\times5\times(-1)=-20$.

故当$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=20$或$-20$.

(2)当$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$时,$\theta=90°$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 90°=0$.

(3)当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$60°$时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos 60°=4\times5\times\frac{1}{2}=10$.

反思提炼

1.投影向量是向量,已知向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为θ,则$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影向量为$|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\theta\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

2.**求向量数量积的步骤**

(1)求$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角θ,其中$\theta\in[0,\pi]$;

(2)分别求$|\boldsymbol{a}|$和$|\boldsymbol{b}|$;

(3)求数量积,即$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

提醒:计算向量的数量积的关键是确定两个向量的夹角,条件是两个向量的起点必须重合,否则,要通过平移使得两个向量符合该条件.

学习任务二 与向量的模有关的问题

例1 (1)已知单位向量$\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$的夹角为α,且$\cos\alpha=\frac{1}{3}$,若向量$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$,则$|\boldsymbol{a}|=$________.

3 **解析**:由题意知$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=|\boldsymbol{e}_1||\boldsymbol{e}_2|\cos\alpha=1\times1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$,则$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}^2=(3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)^2=9\boldsymbol{e}_1^2-12\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+4\boldsymbol{e}_2^2=9$,所以$|\boldsymbol{a}|=3$.

(2)已知向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$45°$,且$|\boldsymbol{a}|=1$,$|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$,则$|\boldsymbol{b}|=$________.

$\sqrt{2}$ **解析**:因为$|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$,所以$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=4\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=10$.又因为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$45°$且$|\boldsymbol{a}|=1$,所以$4\times1^2+4\times1\times|\boldsymbol{b}|\times\frac{\sqrt{2}}{2}+|\boldsymbol{b}|^2=10$,整理得$|\boldsymbol{b}|^2+2\sqrt{2}|\boldsymbol{b}|-6=0$,解得$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$或$|\boldsymbol{b}|=-3\sqrt{2}$(舍去).

反思提炼

求向量的模的常见思路及方法

(1)求向量的模一般转化为求模的平方,即利用性质$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$来求向量的模,实现实数运算与向量运算的相互转化,从而$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$.

(2)一些常见的等式应熟记,如$(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\pm2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$,$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$等.

探究训练

1.已知$|\boldsymbol{a}|=2$,向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$的夹角是$\frac{\pi}{3}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=2$,则$|\boldsymbol{c}|$=________.

2　**解析**:因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cos\frac{\pi}{3}=2\times|\boldsymbol{c}|\times\frac{1}{2}=2$,所以$|\boldsymbol{c}|=2$.

2.已知$x=1$是方程$x^2+|\boldsymbol{a}|x+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$的根,且$\boldsymbol{a}^2=4$,$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$120°$.求向量$\boldsymbol{b}$的模.

解:因为$\boldsymbol{a}^2=4$,所以$|\boldsymbol{a}|^2=4$,即$|\boldsymbol{a}|=2$.

将$x=1$代入原方程可得$1+2\times1+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,

所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3$.

设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为θ,则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=2|\boldsymbol{b}|\cdot\cos120°=-3$,解得$|\boldsymbol{b}|=3$.

学习任务三　向量的夹角

例2　(1)已知$\boldsymbol{e}_1$与$\boldsymbol{e}_2$是两个互相垂直的单位向量,若向量$\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$与$k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$的夹角为锐角,则$k$的取值范围为________.

$(0,1)\cup(1,+\infty)$　**解析**:因为$\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$与$k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$的夹角为锐角,所以$(\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2)\cdot(k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=k\boldsymbol{e}_1^2+k\boldsymbol{e}_2^2+(k^2+1)\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=2k>0$,所以$k>0$.当$k=1$时,$\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2=k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$,它们的夹角为0,不符合题意,舍去.综上,$k$的取值范围为$(0,1)\cup(1,+\infty)$.

(2)已知非零向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$与$7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$互相垂直,$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$与$7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$互相垂直,求$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角.

解:由已知条件得

$$\begin{cases}(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0,\\(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0,\end{cases}$$

即$\begin{cases}7\boldsymbol{a}^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15\boldsymbol{b}^2=0①,\\7\boldsymbol{a}^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8\boldsymbol{b}^2=0②,\end{cases}$

②－①得$23\boldsymbol{b}^2-46\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,所以$2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^2$③.

将③代入①得$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$,所以$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,

所以$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^2}{|\boldsymbol{b}|^2}=\frac{1}{2}$.

因为$\theta\in[0,\pi]$,所以$\theta=\frac{\pi}{3}$.

[一题多思]

思考1.将本例(1)中的条件“锐角”改为“钝角”,其他条件不变,求k的取值范围.

解:因为$\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$与$k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$的夹角为钝角,所以$(\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2)\cdot(k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=k\boldsymbol{e}_1^2+k\boldsymbol{e}_2^2+(k^2+1)\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=2k<0$,所以$k<0$.

当$k=-1$时,$\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$与$k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$方向相反,它们的夹角为$\pi$,不符合题意,舍去.

综上,k的取值范围是$(-\infty,-1)\cup(-1,0)$.

思考2.将本例(1)中的条件“锐角”改为“$\frac{\pi}{3}$”,求k的值.

解:由已知得$|\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2|=\sqrt{\boldsymbol{e}_1^2+2k\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+k^2\boldsymbol{e}_2^2}=\sqrt{1+k^2}$,$|k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2|=\sqrt{k^2\boldsymbol{e}_1^2+2k\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_2^2}=\sqrt{k^2+1}$,$(\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2)\cdot(k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=k\boldsymbol{e}_1^2+k\boldsymbol{e}_2^2+(k^2+1)\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=2k$,则$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{(\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2)\cdot(k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)}{|\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2||k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2|}=\frac{2k}{1+k^2}=\frac{1}{2}$,整理得$k^2-4k+1=0$,解得$k=2\pm\sqrt{3}$.

思考3.将本例(2)改为:已知$|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=2$,向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角为$60°$,$\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{d}=m\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$,当$m$为何值时,$\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{d}$垂直?

解:由已知得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times2\times\cos60°=3$.由$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$,得$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=(3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})\cdot(m\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=3m\boldsymbol{a}^2+(5m-9)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15\boldsymbol{b}^2=27m+3(5m-9)-60=42m-87=0$,所以$m=\frac{29}{14}$.故当$m=\frac{29}{14}$时,$\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{d}$垂直.

反思提炼

求向量的夹角的方法

(1)求出$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,$|\boldsymbol{a}|$,$|\boldsymbol{b}|$,代入公式$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$求解.

(2)用同一个量表示$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,$|\boldsymbol{a}|$,$|\boldsymbol{b}|$,代入公式$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$求解.

(3)借助向量运算的几何意义,数形结合求夹角.

探究训练

1.向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=4$,且$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$,则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角的大小为　(　　)

A.$\frac{\pi}{6}$　　B.$\frac{\pi}{4}$　　C.$\frac{\pi}{3}$　　D.$\frac{\pi}{2}$

C　**解析**:设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为θ,因为$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=4$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$,所以$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{2}{1\times4}=\frac{1}{2}$.

又因为θ的取值范围为$[0,\pi]$,

所以$\theta=\frac{\pi}{3}$.故选C.

2. 已知 E,F,G,H 分别是四边形 $ABCD$ 的边 AB，BC，CD，DA 的中点.若 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=0$，则四边形 $EFGH$ 是 （　　）

A.梯形　　B.正方形

C.菱形　　D.矩形

D　**解析**：连接 AC，BD（图略），由题意可知 $EF\parallel AC$，$GH\parallel AC$，所以 $EF\parallel GH$.

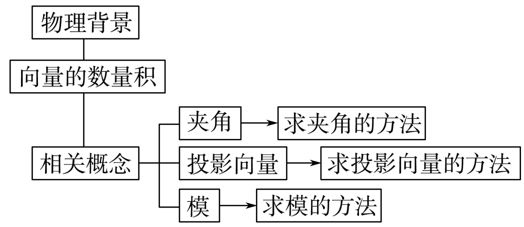
同理可得 $EH\parallel FG$，所以四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

又因为 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=0$，即 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，

所以 $AC\perp BD$，

所以 $EF\perp GF$，所以平行四边形 $EFGH$ 为矩形.

体系构建



课后素养评价（六）

基础性·能力运用

1. 在等边三角形 ABC 中，$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角为 （　　）

A.$60°$　　B.$-60°$

C.$120°$　　D.$150°$

C　**解析**：由向量的夹角的定义，可知$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角为 $180°-\angle B=120°$.故选 C.

2. 在$\triangle ABC$ 中，若$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}<0$，则此三角形为 （　　）

A.钝角三角形　　B.直角三角形

C.锐角三角形　　D.等腰三角形

A　**解析**：因为$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos A<0$，所以 $\cos A<0$，所以 A 是钝角，则$\triangle ABC$ 是钝角三角形.故选 A.

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$，$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 （　　）

A.$\boldsymbol{b}$　　B.$\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　C.$\boldsymbol{a}$　　D.$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$

A　**解析**：由题意知，$|\boldsymbol{a}|=2$ 且向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$，所以向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\boldsymbol{b}$.故选 A.

4. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$ （　　）

A.$\sqrt{13}$　　B.1

C.5　　D.$\sqrt{11}$

A　**解析**：因为 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$.故选 A.

5. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为________.

$\frac{\pi}{6}$　**解析**：由题意得，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{3}$，

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{2^2-1}{2\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.又 $\theta\in[0,\pi]$，所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$.

综合性·创新提升

1. 已知 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是单位向量，且 $\boldsymbol{e}_1\perp\boldsymbol{e}_2$，则下列结论正确的是 （　　）

A.$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2$

B.$|\boldsymbol{e}_1|+|\boldsymbol{e}_2|=1$

C.$(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)^2=2$

D.$|\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2|=2$

C　**解析**：因为 $\boldsymbol{e}_1\perp\boldsymbol{e}_2$，所以 $\boldsymbol{e}_1\neq\boldsymbol{e}_2$，故 A 错误；因为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是单位向量，所以 $|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$，$|\boldsymbol{e}_1|+|\boldsymbol{e}_2|=2$，故 B 错误；$(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)^2=\boldsymbol{e}_1^{\,2}+\boldsymbol{e}_2^{\,2}+2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=1+1+0=2$，故 C 正确；$|\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2|=\sqrt{(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)^2}=\sqrt{\boldsymbol{e}_1^{\,2}+\boldsymbol{e}_2^{\,2}-2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2}=\sqrt{2}$，故 D 错误.故选 C.

2. 已知平面上三点 A,B,C，满足 $|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{BC}|=4$，$|\overrightarrow{CA}|=5$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$的值等于 （　　）

A.-7　　B.7　　C.25　　D.-25

D　**解析**：由条件知$\angle ABC=90^\circ$，所以原式

$=0+4\times5\cos(180^\circ-C)+5\times3\cos(180^\circ-A)$

$=-20\cos C-15\cos A$

$=-20\times\frac{4}{5}-15\times\frac{3}{5}=-16-9=-25$.故选 D.

3.在边长为 3 的等边三角形 ABC 中，$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DB}$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=$________.

3　**解析**：由题意可得$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\rangle=\frac{\pi}{3}$，$|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{CD}|=2$，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\rangle=3\times2\times\frac{1}{2}=3$.

4.已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 为 45°，且$|\boldsymbol{a}|=2$，$\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4$，则$|\boldsymbol{b}|=$________.

$2\sqrt{2}$　**解析**：因为$|\boldsymbol{a}|=2$，$\theta=45^\circ$，

所以由 $\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4$，

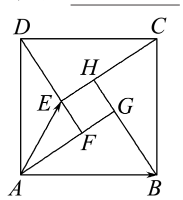
得$|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos45^\circ+|\boldsymbol{b}|^2=4$，

即 $4-2\sqrt{2}|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|^2=4$，

解得$|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{2}$或$|\boldsymbol{b}|=0$.

因为 $\boldsymbol{b}$ 是非零向量，所以$|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{2}$.

5.赵爽是我国古代著名的数学家，他在为《周髀算经》作注解时，给出了“赵爽弦图”：四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形.如图，正方形 $ABCD$ 的边长为$\sqrt{13}$，正方形 $EFGH$ 的边长为 1，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$的值为________.



4　**解析**：设 $AF=x$，则 $BG=x$，$AG=x+1$.

在 Rt△AGB 中，$AG^2+BG^2=AB^2$，整理得$(x+1)^2+x^2=(\sqrt{13})^2$，即 $x^2+x-6=0$，

解得 $x=2$ 或 $x=-3$(舍).

所以 $AF=BG=2$，$AG=3$.

在 Rt△AFE 中，$AE=\sqrt{AF^2+FE^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$\cos\angle EAF=\frac{AF}{AE}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\angle EAF=\frac{EF}{AE}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

在 Rt△AGB 中，$\cos\angle GAB=\frac{AG}{AB}=\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$，$\sin\angle GAB=\frac{BG}{AB}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$，

所以 $\cos\angle EAB=\cos(\angle EAF+\angle GAB)$

$=\cos\angle EAF\cos\angle GAB-\sin\angle EAF\sin\angle GAB$

$=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{13}}{13}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{2\sqrt{13}}{13}=\frac{4\sqrt{65}}{65}$，

所以$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\angle EAB=\sqrt{5}\times\sqrt{13}\times\frac{4\sqrt{65}}{65}=4$.

6.在△ABC 中，已知$|\overrightarrow{AB}|=5$，$|\overrightarrow{BC}|=4$，$|\overrightarrow{AC}|=3$，求：

(1)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$；

(2)设与$\overrightarrow{AB}$同方向的单位向量为 $\boldsymbol{e}$，求$\overrightarrow{AC}$在$\overrightarrow{AB}$上的投影向量.

解：因为$|\overrightarrow{AB}|=5$，$|\overrightarrow{BC}|=4$，$|\overrightarrow{AC}|=3$，所以△ABC 为直角三角形，且 $C=90^\circ$.

所以 $\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}$，$\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{5}$.

(1)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-5\times4\times\frac{4}{5}=-16$.

(2)设$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{AB}$的夹角为 θ，则$\overrightarrow{AC}$在$\overrightarrow{AB}$上的投影向量为$|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\theta\,\boldsymbol{e}=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\boldsymbol{e}=\frac{3\times5\times\frac{3}{5}\boldsymbol{e}}{5}=\frac{9}{5}\boldsymbol{e}$.

第2课时　向量的数量积的运算律

学习任务目标

1.能通过向量数量积的定义掌握向量数量积的运算律.

2.能利用运算律进行向量数量积的运算.

问题式预习

知识清单

1.向量数量积的运算律

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

(2)$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\underline{\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}=\underline{\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})}(\lambda\in\mathbf{R})$.

(3)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\underline{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}$.

2.向量的数量积与实数乘法运算性质的比较

实数 a,b,c	向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$
$a\neq0,a\cdot b=0\Rightarrow b=0$	$\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\not\Rightarrow\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$
$a\cdot b=b\cdot c(b\neq0)$ $\Rightarrow a=c$	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0})\not\Rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$
$\lvert a\cdot b\rvert=\lvert a\rvert\cdot\lvert b\rvert$	$\lvert\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\rvert\leqslant\lvert\boldsymbol{a}\rvert\cdot\lvert\boldsymbol{b}\rvert$
满足乘法结合律	不满足乘法结合律

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$. (×)

(2)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$. (√)

(3)$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$. (√)

2.已知$|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=2$,则$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$(　　)

A.2

B.3

C.5

D.-5

C　**解析**:因为$|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=2$,

所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=9-4=5$.

3.请思考并回答问题:

(1)若$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$均为非零向量,且$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$,能否得到$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$?

提示:不能.

(2)对于向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$能否成立?

提示:不成立.

任务型课堂

学习任务一　向量数量积的运算律

例1　(多选题)设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$是任意的非零向量,且它们两两不共线,给出下列结论,正确的是(　　)

A.$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$

B.$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$不与$\boldsymbol{c}$垂直

C.$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$

D.$(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=9|\boldsymbol{a}|^2-4|\boldsymbol{b}|^2$

ACD　**解析**:根据数量积的分配律知A正确;因为$[(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=0$,所以$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$垂直,B错误;因为$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$不共线,所以$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$成立,C正确;D正确.故选ACD.

反思提炼

向量的数量积$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$与实数$a,b$的乘积$a\cdot b$有联系,同时也有许多不同之处.例如,由$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$并不能得出$\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$或$\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$,而且向量的数量积不满足乘法结合律.

探究训练

1.已知向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=1,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$,则$\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$(　　)

A.4　　B.3　　C.2　　D.0

B　**解析**:$\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2|\boldsymbol{a}|^2-(-1)=2+1=3$.故选B.

2.给出下列结论：

①若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$；

②$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2$；

③$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|^2$.

其中正确的是________.(填序号)

②　**解析**:由向量数量积的性质和运算律知,①③错误,②正确.

学习任务二　向量的夹角与向量垂直问题

例 2　(1)设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,$|3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$,则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为　(　　)

A.$\frac{\pi}{3}$　　B.$\frac{\pi}{6}$

C.$\frac{\pi}{4}$　　D.$\frac{2\pi}{3}$

A　**解析**:设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ.

由题意得 $(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})^2=7$,

所以 $9|\boldsymbol{a}|^2+4|\boldsymbol{b}|^2-12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=7$.

又 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$.

所以 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=\frac{1}{2}$,即 $\cos\theta=\frac{1}{2}$.

又因为 $\theta\in[0,\pi]$,所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

(2)已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$,且 $|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,当向量 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角时,求 λ 的取值范围.

解:因为 $|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$,

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 120°=1\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$.

因为向量 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角,

所以 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})<0$,且两向量不共线.

又 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}^2+(\lambda^2+1)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{b}^2$,

所以 $\lambda-(\lambda^2+1)+4\lambda<0$,

解得 $\lambda<\frac{5-\sqrt{21}}{2}$ 或 $\lambda>\frac{5+\sqrt{21}}{2}$.

当 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 共线时,存在 $t\in\mathbf{R}$,使得 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=t(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,

所以 $\begin{cases}1=t\lambda,\\ \lambda=t,\end{cases}$ 解得 $\lambda=\pm1$.

综上所述,λ 的取值范围为

$(-\infty,-1)\cup\left(-1,-\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)\cup\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2},+\infty\right)$.

反思提炼

两个向量的夹角与其数量积的关系

(1)向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不同向共线.

(2)向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不反向共线.

(3)向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

探究训练

已知 $|\boldsymbol{a}|=1$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$,$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}$.

(1)求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角；

(2)求 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值.

解:(1)由题意可得 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=\frac{1}{2}$,又 $|\boldsymbol{a}|=1$,所以 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\frac{1}{2}}{1\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又因为 $\theta\in[0,\pi]$,所以 $\theta=\frac{\pi}{4}$,即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$.

(2)由 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=1-2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,得 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=1+2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$,

得 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

设 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为 α,则 $\cos\alpha=\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

学习任务三　向量数量积的综合应用

例 3　(1)在 $\triangle ABC$ 中,满足 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$,$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}$,若 M 是 BC 的中点,O 是线段 AM 上任意一点,则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$ 的最小值为________.

$-\frac{1}{2}$　**解析**:因为 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}$,所以 $|\overrightarrow{AM}|=1$.设 $|\overrightarrow{OA}|=x$,则 $|\overrightarrow{OM}|=1-x$,而 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OM}$,所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

$=2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}=2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OM}|\cos\pi=-2x(1-x)=2x^2-2x=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$,当且仅当 $x=\frac{1}{2}$ 时,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$ 取得最小值 $-\frac{1}{2}$.

(2)已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是非零向量,$f(x)=(x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(x\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

①若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,判断函数 $f(x)$ 的奇偶性;

②若 $f(x)$ 为奇函数,证明:$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

①**解**:$f(x)=(x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(x\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=x^2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}^2)x-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,所以 $f(x)=(\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}^2)x$.

当 $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$ 时,$f(x)$ 为奇函数;

当 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 时,$f(x)$ 既是奇函数又是偶函数.

②**证明**:因为 $f(x)$ 为奇函数,所以 $f(-x)=-f(x)$ 对于 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,且 $f(0)=0$.由①得 $-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,此时 $f(x)$ 为奇函数,故 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

反思提炼

平面向量的综合应用

平面向量的代数与几何双重身份必然使其成为知识的交汇点.平面向量作为一种运算工具,经常与函数、不等式等知识结合,当平面向量给出的形式中含有未知数时,由向量平行或垂直的条件可以得到关于该未知数的关系式.在此基础上,可以求解有关函数、不等式的综合问题.

探究训练

1.若 O 为 $\triangle ABC$ 的内心,且满足 $(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0$,则 $\triangle ABC$ 的形状是为 ( )

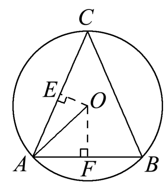
A.等腰三角形　　B.等边三角形

C.直角三角形　　D.以上都不对

A **解析**:因为 $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$,所以由 $(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0$,得 $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AC}^2=0$,所以 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$,故 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

2. $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O,$AB=2$,$AC=3$,求 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}$.

解:$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$.如图,过点 O 作 $OE\perp AC$ 于点 E,作 $OF\perp AB$ 于点 F,



则 $\overrightarrow{AO}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影向量为 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AO}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.根据数量积的定义,得 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=\frac{1}{2}\times9-\frac{1}{2}\times4=\frac{5}{2}$.

体系构建

- 交换律、数乘结合律、分配律 — 向量数量积的运算律 — 求向量的模、求向量的夹角、判断向量垂直

课后素养评价(七)

基础性·能力运用

1.已知 $|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$,则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$ ( )

A.$\sqrt{3}-1$　　B.1　　C.2　　D.$\sqrt{3}+1$

C **解析**:因为 $|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+1\times2\times\frac{1}{2}=2$.故选 C.

2.已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$,且 $|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,则 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$ ( )

A.4　　B.12　　C.2　　D.$2\sqrt{3}$

C **解析**:因为向量 $|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,它们的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{2\pi}{3}=-1$,所以 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{4\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{4+(-4)+4}=\sqrt{4}=2$.故选 C.

3.已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$,则 $\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}=$ ( )

A.$\sqrt{3}$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C.$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D.$\frac{\sqrt{3}}{3}$

C　**解析**:因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{b}^2$,

$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{b}^2}$,

$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{b}^2}$.

所以 $\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{b}^2=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{b}^2}\cdot\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{b}^2}\cdot\cos 120°$,

化简得 $\frac{3}{2}\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{b}^2=0$.所以 $\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.故选 C.

4. 在△ABC 中,M 是边 BC 的中点,$AM=3$,$BC=10$,则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$________.

-16　**解析**:$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})=\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}$

$=|\overrightarrow{AM}|^2+(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})\cdot\overrightarrow{AM}+|\overrightarrow{MB}||\overrightarrow{MC}|\cos\pi$

$=9-25=-16$.

5. 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=4$,且 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\geqslant 4$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 的取值范围是________.

$\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]$　**解析**:因为 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

$=2\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2$

$=2\times 9-3|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta-2\times 16$

$=-14-3\times 3\times 4\cos\theta\geqslant 4$,

所以 $\cos\theta\leqslant-\frac{1}{2}$,所以 $\theta\in\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]$.

6. 已知 $|\boldsymbol{a}|=4$,$|\boldsymbol{b}|=3$,$(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=13$.

(1)求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角;

(2)若 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\boldsymbol{c}$,求 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ 的值.

解:(1)因为 $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=4|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3|\boldsymbol{b}|^2=64-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-27=13$,

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6$,所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$,所以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=60°$.

(2)因为 $\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$,

所以 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{2}{3}\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}^2=4+6=10$.

综合性·创新提升

1. 在平行四边形 $ABCD$ 中,$|\overrightarrow{AB}|=4$,$|\overrightarrow{AD}|=3$,N 为 DC 的中点,$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MC}$,则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NM}=$(　　)

A.2　　B.5　　C.6　　D.8

C　**解析**:$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM})\cdot(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CM})$

$=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2-\frac{2}{9}\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{2}\times 4^2-\frac{2}{9}\times 3^2=6$.故选 C.

2. 若向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=$(　　)

A.4　　B.3

C.2　　D.0

D　**解析**:因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$,所以 $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$,

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$,$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$,

所以 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0+0=0$.故选 D.

3. 已知△ABC 满足 $\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$,则△$ABC$ 是(　　)

A.等边三角形　　B.锐角三角形

C.直角三角形　　D.钝角三角形

C　**解析**:由题意,得 $\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$,所以 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$,所以 $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$,所以△$ABC$ 是直角三角形.故选 C.

4. 已知 $\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$ 是互相垂直的单位向量,$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 为锐角,则实数 λ 的取值范围是(　　)

A.$(-\infty,-2)\cup\left(-2,\frac{1}{2}\right)$

B.$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

C.$\left(-2,\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$

D.$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$

A　**解析**:因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 为锐角,

所以 $\cos\theta>0$ 且 $\cos\theta\neq 1$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$ 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向不同,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1-2\lambda>0$,且 $\boldsymbol{a}\neq m\boldsymbol{b}(m>0)$,

解得 $\lambda\in(-\infty,-2)\cup\left(-2,\frac{1}{2}\right)$.故选 A.

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$,且 $|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,则向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量是________.

$\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$　**解析**:因为向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$,且 $|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 120°=1\times 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$,则 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=-1+2^2=3$,所以向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量是 $\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$.

6.已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$，则向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为________.

$\frac{3\pi}{4}$ **解析**：因为 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}|+2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$.又 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，

所以 $2+2\times\sqrt{2}\times1\times\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$，所以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{3\pi}{4}$.

7.已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{d}=m\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，当 m 为何值时，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 垂直？

解：由已知得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times1\times\cos60^\circ=1$.

若 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$，则 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=0$.

所以 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})\cdot(m\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$

$=m\boldsymbol{a}^2+(5m-2)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-10\boldsymbol{b}^2$

$=4m+5m-2-10=9m-12=0$，

所以 $m=\frac{4}{3}$.

故当 $m=\frac{4}{3}$ 时，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 垂直.

6.3 平面向量基本定理及坐标表示

6.3.1 平面向量基本定理

学习任务目标

1.理解平面向量基本定理的内容，了解基底的含义.

2.会应用平面向量基本定理解决有关平面向量的综合问题.

问题式预习

知识清单

平面向量基本定理

(1)定理：如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个<u>不共线</u>向量，那么对于这一平面内的<u>任一</u>向量 $\boldsymbol{a}$，有且只有一对实数 λ_1,λ_2，使 $\boldsymbol{a}=$<u>$\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$</u>.

(2)基底：若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线，我们把<u>$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$</u>叫做表示这一平面内<u>所有</u>向量的一个基底.

拓展：①$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线的向量，$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$的选取不唯一，即一个平面可以有多个基底.

②基底$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$确定后，实数 λ_1,λ_2 是唯一确定的.

概念辨析

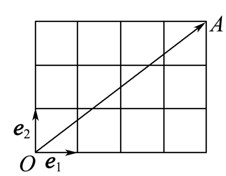
1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)平面内任意两个向量都可以作为表示平面内所有向量的一个基底. (×)

(2)零向量可以作为基向量. (×)

(3)若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量，则 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$($\lambda_1,\lambda_2$ 为实数)可以表示该平面内的所有向量. (√)

2.如图所示，方格纸上的向量 $\overrightarrow{OA}$ 可用向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 表示为________.



$4\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$ **解析**：由图可知，$\overrightarrow{OA}=4\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$.

3.请思考并回答问题：

(1)平面的基底是唯一的吗？

提示：不是.平面内任意不共线的两个向量都可以构成基底，基底一旦确定，平面内任一向量都可以用这一基底唯一表示.

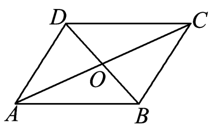
(2)如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是共线向量，那么向量 $\boldsymbol{a}$ 能否用 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 表示，为什么？

提示：不一定，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 共线时，可以表示，否则不能表示.

任务型课堂

学习任务一　对基底概念的理解

1.(多选题)如图,设 O 是平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线的交点,给出下列向量组,其中可以作为表示该平面内所有向量的基底的是　　(　　)



A.$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{AB}$　　B.$\overrightarrow{DA}$与$\overrightarrow{BC}$

C.$\overrightarrow{CA}$与$\overrightarrow{DC}$　　D.$\overrightarrow{OD}$与$\overrightarrow{OB}$

AC　**解析**:选项 B 中,$\overrightarrow{DA}$与$\overrightarrow{BC}$共线;选项 D 中,$\overrightarrow{OD}$与$\overrightarrow{OB}$共线;选项 A,C 中,两向量均不共线.由基底的定义可知选项 A,C 正确.

2.如果$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$是表示平面内所有向量的一个基底,那么　　(　　)

A.若实数 m,n 使得 $m\boldsymbol{e}_1+n\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}$,则 $m=n=0$

B.空间任一向量 $\boldsymbol{a}$ 可以表示为 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$,其中 λ_1,λ_2 为实数

C.对于实数 $m,n,m\boldsymbol{e}_1+n\boldsymbol{e}_2$ 不一定在此平面内

D.对于平面内的某一向量 $\boldsymbol{a}$,存在两对以上的实数 m,n,使 $\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{e}_1+n\boldsymbol{e}_2$

A　**解析**:选项 B 中,应为“平面内任一向量”;选项 C 中,$m\boldsymbol{e}_1+n\boldsymbol{e}_2$ 一定在此平面内;选项 D 中,m,n 应是唯一的.

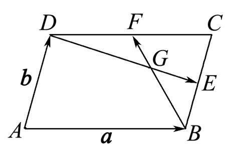
反思提炼

判断基底的方法

根据平面向量基底的定义知判断两个向量能否作为表示平面内所有向量的一个基底,可转化为判断这两个向量是否共线.若不共线,则它们能作为一个基底;若共线,则它们不能作为一个基底.

学习任务二　用基底表示向量

例 1　如图,在▱$ABCD$ 中,E,F 分别为边 BC,DC 的中点,DE 与 BF 交于点 G.若$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{DE}$,$\overrightarrow{BF}$.



解:$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$.

[一题多思]

思考 1.若本例中条件不变,试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{AG}$.

解:由平面几何的知识可知,$\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BF}$,

故$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BF}=\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\left(\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)=\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$.

思考 2.在本例中,若$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{x}$,$\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{y}$,试用 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 表示$\overrightarrow{DE}$,$\overrightarrow{BF}$.

解:依题意 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=2\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=2\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$,$\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$.

故$\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-\frac{1}{4}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\frac{1}{4}\boldsymbol{x}+\frac{3}{4}\boldsymbol{y}$,$\overrightarrow{BF}=\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-\frac{1}{4}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\frac{1}{4}\boldsymbol{x}-\frac{3}{4}\boldsymbol{y}$.

思考 3.在本例中,若$\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{e}$,$\overrightarrow{BF}=\boldsymbol{f}$,试用 $\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}$ 表示$\overrightarrow{DB}$.

解:$\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}$,$\overrightarrow{BF}=\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{f}$,

解得 $\boldsymbol{a}=\frac{4}{3}\boldsymbol{e}+\frac{2}{3}\boldsymbol{f}$,$\boldsymbol{b}=\frac{2}{3}\boldsymbol{e}+\frac{4}{3}\boldsymbol{f}$,

所以$\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\frac{4}{3}\boldsymbol{e}+\frac{2}{3}\boldsymbol{f}-\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{e}+\frac{4}{3}\boldsymbol{f}\right)=\frac{2}{3}\boldsymbol{e}-\frac{2}{3}\boldsymbol{f}$.

反思提炼

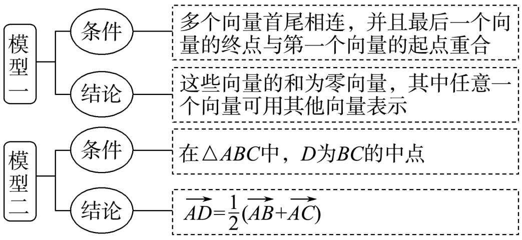
用基底表示向量的依据和两个“模型”

(1)依据:

①向量加法的三角形法则和平行四边形法则;

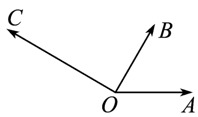
②向量减法的几何意义,向量数乘的几何意义.

(2)模型:



探究训练

1.如图,$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$,$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{3}$,$\angle AOB=60°$,$OB\perp OC$.设$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$,则 ( )

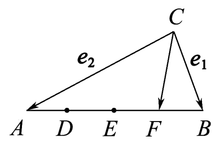


A.$x=-2,y=-1$　　B.$x=-2,y=1$

C.$x=2,y=-1$　　D.$x=2,y=1$

B **解析**:过点 C 作 $CD\parallel OB$ 交 AO 的延长线于点 D,连接 BC(图略).由$|\overrightarrow{OB}|=1$,$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{3}$,$\angle AOB=60°$,$OB\perp OC$ 知,$\angle COD=30°$.在 $\mathrm{Rt}\triangle OCD$ 中,可得$OD=2CD=2$,则$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}=-2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$,所以 $x=-2$,$y=1$.

2.如图,在$\triangle ABC$ 中,点 D,E,F 是边 AB 的四等分点.设$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{e}_1$,$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{e}_2$,试以$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$为基底表示$\overrightarrow{CF}$.



解:$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$.

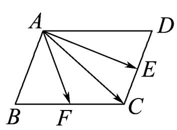
因为点 D,E,F 是边 AB 的四等分点,

所以$\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)$,所以$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}$

$=\boldsymbol{e}_2+\frac{3}{4}(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)=\frac{3}{4}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{4}\boldsymbol{e}_2$.

学习任务三　平面向量基本定理的应用

例 2 (1)如图,在平行四边形 $ABCD$ 中,E 和 F 分别是边 CD 和 BC 的中点.若$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AE}+\mu\overrightarrow{AF}$,其中$\lambda,\mu\in\mathbf{R}$,则 $\lambda+\mu=$________.

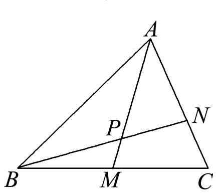


$\frac{4}{3}$ **解析**:设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.又因为$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,

所以$\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})$,即 $\lambda=\mu=\frac{2}{3}$,

所以 $\lambda+\mu=\frac{4}{3}$.

(2)如图,在$\triangle ABC$ 中,点 M 是边 BC 的中点,点 N 在边 AC 上,且 $AN=2NC$,AM 与 BN 相交于点 P,求 $AP:PM$ 与 $BP:PN$.



解:设$\overrightarrow{BM}=\boldsymbol{e}_1$,$\overrightarrow{CN}=\boldsymbol{e}_2$,

则$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=-3\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1$,

$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$.

因为 A,P,M 和 B,P,N 分别共线,

所以存在实数 λ,μ 使得$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AM}=-\lambda\boldsymbol{e}_1-3\lambda\boldsymbol{e}_2$,

$\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{BN}=2\mu\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2$.

故$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{AP}=(\lambda+2\mu)\boldsymbol{e}_1+(3\lambda+\mu)\boldsymbol{e}_2$.

而$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$,

由平面向量基本定理,

得$\begin{cases}\lambda+2\mu=2,\\3\lambda+\mu=3,\end{cases}$

解得$\begin{cases}\lambda=\frac{4}{5},\\\mu=\frac{3}{5}.\end{cases}$

所以$\overrightarrow{AP}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AM}$,$\overrightarrow{BP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BN}$,

所以 $AP:PM=4:1$,$BP:PN=3:2$.

反思提炼

1.设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是同一平面内的两个不共线向量,若 $x_1\boldsymbol{a}+y_1\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{a}+y_2\boldsymbol{b}$,则$\begin{cases}x_1=x_2,\\y_1=y_2.\end{cases}$

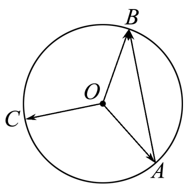
2.重要结论:设$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$是表示平面内所有向量的一个基底.

当 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2=\mathbf{0}$ 时	恒有 $\lambda_1=\lambda_2=0$
若 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$	当 $\lambda_2=0$ 时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 共线
	当 $\lambda_1=0$ 时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 共线
	当 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 时,$\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$

探究训练

已知单位圆 O 中的三条半径 OA,OB,OC,它们两两之间的夹角为 $120°$,求证:$AB\perp OC$.

证明:如图,



$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$,且$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{OB}$与$\overrightarrow{OC}$的夹角都是 $120°$,

所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OC}$

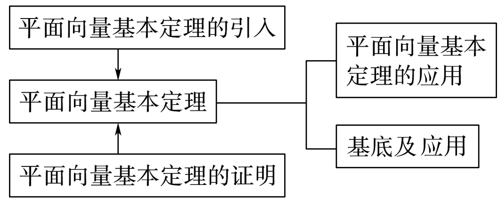
$=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$

$=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\cos 120°-|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|\cos 120°$

$=0$,

所以$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{OC}$,即 $AB\perp OC$.

体系构建



课后素养评价(八)

基础性·能力运用

1. 给出下列三种说法:

①一个平面内只有一组不共线的向量可作为表示该平面内所有向量的基底;②一个平面内有无数组不共线向量可作为表示该平面内所有向量的基底;③零向量不可作为基底中的向量.

其中,正确的说法有　(　　)

A.①②　　B.②③

C.①③　　D.①②③

B　**解析**:只要两个平面向量不共线就可以作为基底,所以①错误,②③正确.故选 B.

2. 设$\{e_1,e_2\}$是表示平面内所有向量的一个基底,则下面四组向量中,不能作为基底的是　(　　)

A.$\{\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\}$和$\{\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2\}$

B.$\{2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2\}$和$\{4\boldsymbol{e}_1-6\boldsymbol{e}_2\}$

C.$\{\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2\}$和$\{2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\}$

D.$\{\boldsymbol{e}_2\}$和$\{\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\}$

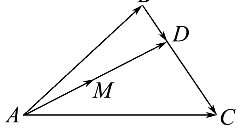
B　**解析**:不共线的向量可以作为基底,所以不能作为基底的便是共线向量,显然选项 B 中,$4\boldsymbol{e}_1-6\boldsymbol{e}_2=2(2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2)$,所以 $2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$ 和 $4\boldsymbol{e}_1-6\boldsymbol{e}_2$ 共线.故选 B.

3. 在$\triangle ABC$中,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,若$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$,$M$ 为线段 AD 的中点,则$\overrightarrow{AM}=$　(　　)

A.$\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{6}\boldsymbol{b}$　　B.$\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$

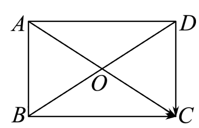
C.$\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{6}\boldsymbol{b}$　　D.$\frac{1}{6}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$

A　**解析**:如图所示,



可知 $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,所以$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{6}\boldsymbol{b}$.故选 A.

4. 如图所示,在矩形 $ABCD$ 中,$\overrightarrow{BC}=5\boldsymbol{e}_1$,$\overrightarrow{DC}=3\boldsymbol{e}_2$,则$\overrightarrow{OC}$等于　(　　)

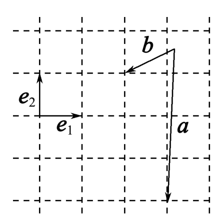


A.$\frac{1}{2}(5\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)$　　B.$\frac{1}{2}(5\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2)$

C.$\frac{1}{2}(3\boldsymbol{e}_2-5\boldsymbol{e}_1)$　　D.$\frac{1}{2}(5\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_1)$

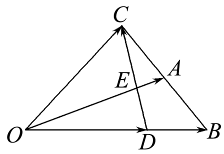
A　**解析**:$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC})=\frac{1}{2}(5\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)$.故选 A.

5. 如图,方格纸上的向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 用向量 $\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$ 表示为________.



$\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$　**解析**:不妨令 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{CA}$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{CB}$,则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BA}$,由平行四边形法则可知$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$.

6. 如图,点 B 与点 C 关于点 A 对称,点 D 在线段 OB 上,$\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{DB}$,$DC$ 和 OA 交于点 E.设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{DC}$.



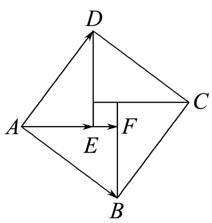
解:因为点 B 与点 C 关于点 A 对称,所以 A 是 BC 的中点.因为 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,所以 $2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$,即 $2\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\overrightarrow{OC}$,所以 $\overrightarrow{OC}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$.

又因为 $\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{DB}$,所以 $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}-\frac{5}{3}\boldsymbol{b}$.

综上,$\overrightarrow{OC}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{DC}=2\boldsymbol{a}-\frac{5}{3}\boldsymbol{b}$.

综合性·创新提升

1. 我国东汉末数学家赵爽在《周髀算经》注文中利用一幅“弦图”给出了勾股定理的证明,后人称其为“赵爽弦图”,它是由四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形.如图所示,在“赵爽弦图”中,已知 $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{EF}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,则 $\overrightarrow{AE}=$ ( )



A. $\frac{12}{25}\boldsymbol{a}+\frac{9}{25}\boldsymbol{b}$　　B. $\frac{16}{25}\boldsymbol{a}+\frac{12}{25}\boldsymbol{b}$

C. $\frac{4}{5}\boldsymbol{a}+\frac{3}{5}\boldsymbol{b}$　　D. $\frac{3}{5}\boldsymbol{a}+\frac{4}{5}\boldsymbol{b}$

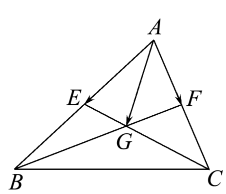
A　**解析**:因为 $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{EF}$,

所以 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}(-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD})$,

所以 $\frac{4}{3}\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$,整理,得 $\overrightarrow{AE}=\frac{12}{25}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{12}{25}\boldsymbol{a}+\frac{9}{25}\boldsymbol{b}$.

故选 A.

2. 如图,在△ABC 中,E 为边 AB 的中点,F 为边 AC 的中点,BF 交 CE 于点 G.若 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AF}$,则 xy 等于 ( )



A. $\frac{2}{9}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{4}{9}$　　D. $\frac{4}{3}$

C　**解析**:由题意知,G 是△ABC 的重心,延长 AG 与边 BC 交于点 D(图略),

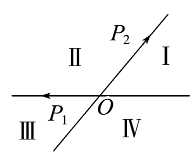
所以 $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

又因为 E 为边 AB 的中点,F 为边 AC 的中点,故 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AE}$,$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AF}$,

则 $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$,即 $x=y=\frac{2}{3}$,

所以 $xy=\frac{4}{9}$.故选 C.

3. 如图,平面内的两条相交直线 OP_1 和 OP_2 将该平面分割成四个部分Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ(不包括边界).若 $\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OP_1}+b\overrightarrow{OP_2}$,且点 P 落在第Ⅲ部分,则实数 a,b 满足 ( )



A. $a>0,b>0$

B. $a>0,b<0$

C. $a<0,b>0$

D. $a<0,b<0$

B　**解析**:因为 $\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OP_1}+b\overrightarrow{OP_2}$,点 P 落在第Ⅲ部分,则根据实数与向量的积的定义及平行四边形法则知 $a\overrightarrow{OP_1}$ 与 $\overrightarrow{OP_1}$ 方向相同,$b\overrightarrow{OP_2}$ 与 $\overrightarrow{OP_2}$ 方向相反,所以 $a>0,b<0$.

故选 B.

4.(多选题)已知 D,E,F 分别为△ABC 的边 BC,CA,AB 的中点,且 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$,给出下列结论,其中正确的结论为 ( )

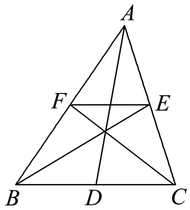
A. $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

B. $\overrightarrow{BE}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

C. $\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

D. $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$

ABC　**解析**:如图所示,



$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$,A 正确;

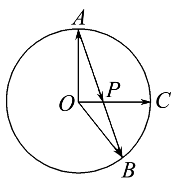
$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,B 正确;

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}(-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$,C 正确;

$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$,D 不正确.

故选 ABC.

5. 如图,点 A,B,C 是圆 O 上三点,线段 OC 与线段 AB 交于圆内一点 P.若$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+2m\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$,则 $\lambda=$________.



$\frac{2}{3}$　**解析**:因为$\overrightarrow{OP}$与$\overrightarrow{OC}$共线,所以存在实数 μ,使$\overrightarrow{OP}=\mu\overrightarrow{OC}=m\mu\overrightarrow{OA}+2m\mu\overrightarrow{OB}$.

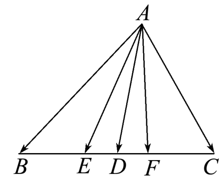
因为$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$,

所以$\overrightarrow{AP}=m\mu\overrightarrow{OA}+2m\mu\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(m\mu-1)\overrightarrow{OA}+2m\mu\overrightarrow{OB}=\lambda\overrightarrow{AB}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=-\lambda\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$.

因为$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$不共线,所以$\begin{cases}m\mu-1=-\lambda,\\2m\mu=\lambda,\end{cases}$解得 $\lambda=\frac{2}{3}$.

6. 在$\triangle ABC$ 中,已知 D 为边 BC 的中点,E,F 为边 BC 的三等分点.若$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,用 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AE}$,$\overrightarrow{AF}$.

解:如图所示,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,



故$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$;

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$;

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$.

7. 设 $\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$ 是不共线的非零向量,且 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$.

(1)证明:$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$可以作为一个基底;

(2)以$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$为基底,求向量 $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ 的分解式;

(3)若 $4\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$,求 λ,μ 的值.

(1)**证明**:若 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 共线,则存在 $\lambda\in\mathbf{R}$,使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,

则 $\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)$.

由 $\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$ 不共线,得$\begin{cases}\lambda=1,\\3\lambda=-2,\end{cases}$所以 λ 不存在.

故 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线,$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$可以作为一个基底.

(2)**解**:设 $\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}(m,n\in\mathbf{R})$,

则 $3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2=m(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)+n(\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)=(m+n)\boldsymbol{e}_1+(-2m+3n)\boldsymbol{e}_2$,

所以$\begin{cases}m+n=3,\\-2m+3n=-1,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=2,\\n=1.\end{cases}$

所以 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

(3)**解**:由 $4\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$,

得 $4\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)+\mu(\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)=(\lambda+\mu)\boldsymbol{e}_1+(-2\lambda+3\mu)\boldsymbol{e}_2$.

所以$\begin{cases}\lambda+\mu=4,\\-2\lambda+3\mu=-3,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=3,\\\mu=1.\end{cases}$

故所求 λ,μ 的值分别为 3 和 1.

6.3.2 平面向量的正交分解及坐标表示
6.3.3 平面向量加、减运算的坐标表示

学习任务目标

1.了解平面向量的正交分解,掌握向量的坐标表示.
2.会用坐标表示平面向量的加、减运算.

问题式预习

知识清单

1.平面向量的正交分解及坐标表示

(1)平面向量的正交分解

把一个向量分解为两个互相垂直的向量,叫做把向量作正交分解.

(2)平面向量的坐标表示

①向量的直角坐标

在平面直角坐标系中,设与 x 轴、y 轴方向相同的两个单位向量分别为 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,取$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$作为基底.对于平面内的任意一个向量 $\boldsymbol{a}$,由平面向量基本定理可知,有且只有一对实数 x,y,使得 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$.这样,平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$ 都可由 x,y 唯一确定,我们把有序数对(x,y)叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

②向量的坐标表示

在向量 $\boldsymbol{a}$ 的直角坐标中,x 叫做 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的坐标,y 叫做 $\boldsymbol{a}$ 在 y 轴上的坐标,$\boldsymbol{a}=(x,y)$叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示.

③在向量的直角坐标中,$\boldsymbol{i}=(1,0)$,$\boldsymbol{j}=(0,1)$,$\boldsymbol{0}=(0,0)$.

2.平面向量的坐标运算

(1)设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$.

运算	数学公式	文字语言表述
向量加法	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$	两个向量和的坐标分别等于这两个向量相应坐标的和
向量减法	$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$	两个向量差的坐标分别等于这两个向量相应坐标的差

(2)已知点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,那么向量$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$,即任意一个向量的坐标等于表示此向量的有向线段的终点的坐标减去起点的坐标.

概念辨析

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)若 O 为坐标原点,且$\overrightarrow{OA}=(2,-1)$,则点 A 的坐标为$(2,-1)$. (√)

(2)若点 A 的坐标为$(2,-1)$,则以 A 为终点的向量的坐标为$(2,-1)$. (×)

(3)对于平面直角坐标系中一个确定的向量,其坐标是唯一的. (√)

2.已知$\overrightarrow{MN}=(2,3)$,则点 N ( )

A.在第一象限　　B.在第二象限

C.在第三象限　　D.位置不确定

D　**解析**:因为点 M 的位置不确定,所以点 N 的位置也不确定.故选 D.

3.已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,4)$,$\boldsymbol{b}=(-1,1)$,则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=$ ( )

A.$(3,7)$　　B.$(3,9)$

C.$(3,3)$　　D.$(3,5)$

C　**解析**:因为 $\boldsymbol{a}=(2,4)$,$\boldsymbol{b}=(-1,1)$,所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2-(-1),4-1)=(3,3)$.故选 C.

4.请思考并回答问题:

(1)如果 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$,那么能不能说向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为(x,y),即 $\boldsymbol{a}=(x,y)$?

提示:不能.当 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$ 分别是与 x 轴、y 轴方向相同的两个单位向量时,才能把(x,y)叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标,记作 $\boldsymbol{a}=(x,y)$.

(2)向量的终点坐标与此向量的坐标在形式上完全相同吗?

提示:不一定.

任务型课堂

学习任务一　平面向量的坐标表示

例1　(1)四边形 $ABCD$ 为平行四边形，已知 $A(5,-1)$，$B(-1,7)$，$C(1,2)$，则顶点 D 的坐标为(　　)

A.$(-7,0)$　　B.$(7,6)$

C.$(6,7)$　　D.$(7,-6)$

D　**解析**：设 $D(x,y)$，因为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，所以 $(x-5,y+1)=(2,-5)$，所以 $x=7$，$y=-6$.

(2)设 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 分别为 x 轴、y 轴正方向的单位向量，已知 O 为原点，$\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OB}=4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$，则 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为________.

$(2,2)$　**解析**：由已知得 $\overrightarrow{OA}=(2,0)$，$\overrightarrow{OB}=(4,2)$，所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,2)$.

反思提炼

求向量的坐标的方法

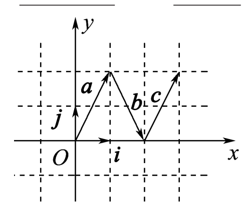
(1)定义法：根据平面向量坐标的定义得 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=(x,y)$，其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 分别为与 x 轴、y 轴方向相同的两个单位向量.

(2)平移法：把向量的起点移至原点，终点坐标即为向量的坐标.

(3)作差法：先求出这个向量的起点和终点的坐标，再用终点坐标减去起点坐标即得该向量的坐标.

探究训练

在如图所示的网格中，每个小正方形的边长为1，向量 $\boldsymbol{a}=$<u>$(1,2)$</u>，$\boldsymbol{b}=$<u>$(1,-2)$</u>，$\boldsymbol{c}=$<u>$(1,2)$</u>.(用坐标表示)



学习任务二　平面向量加法、减法运算的坐标表示

例2　(1)已知点 $B(1,0)$ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点，向量 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均以原点 O 为起点，且 $\boldsymbol{b}=(-3,4)$，$\boldsymbol{c}=(-1,1)$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的关系为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点坐标为________.

$(3,-3)$　**解析**：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=(-3,4)-(-1,1)=(-2,3)$.

设 $\boldsymbol{a}$ 的起点为 $A(x,y)$，

则 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=(1-x,-y)$，

所以 $\begin{cases}1-x=-2,\\-y=3,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=3,\\y=-3,\end{cases}$

故起点 A 的坐标为 $(3,-3)$.

(2)已知 $A(1,-2)$，$B(2,1)$，$C(3,2)$ 和 $D(-2,3)$，试用坐标表示 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}$.

解：因为 $\overrightarrow{AD}=(-3,5)$，$\overrightarrow{BD}=(-4,2)$，$\overrightarrow{CD}=(-5,1)$，

所以 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=(-3,5)+(-4,2)+(-5,1)=(-12,8)$.

反思提炼

向量加减坐标运算方法

利用向量的加减坐标运算解题，主要是利用坐标形式下向量加法和减法的运算法则，然后根据“两个向量相等当且仅当两向量的坐标对应相等”这一原则，化归为方程(组)进行求解.

探究训练

已知点 $A(-1,2)$，$B(2,8)$ 及 $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.求点 C，D 和 $\overrightarrow{CD}$ 的坐标.

解：因为 $A(-1,2)$，$B(2,8)$，

所以 $\overrightarrow{AB}=(2,8)-(-1,2)=(3,6)$，故 $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=(1,2)$，$\overrightarrow{DA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=(1,2)$.

则 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=(-1,2)+(1,2)=(0,4)$，$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{DA}=(-1,2)-(1,2)=(-2,0)$，

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=(-2,0)-(0,4)=(-2,-4)$.

所以点 C，D，$\overrightarrow{CD}$ 的坐标分别为 $(0,4)$，$(-2,0)$ 和 $(-2,-4)$.

学习任务三 平面向量坐标运算的应用

例3 已知平面内三个点为 $A(3,7)$，$B(4,6)$，$C(1,-2)$，若以点 A,B,C,D 为顶点的四边形是平行四边形，求点 D 的坐标.

解：(1)当四边形为▱$ABCD$ 时，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.设点 D 的坐标为(x,y)，则有$(4,6)-(3,7)=(1,-2)-(x,y)$，

解得$\begin{cases}x=0,\\y=-1,\end{cases}$ 所以 $D(0,-1)$；

(2)当四边形为▱$ABDC$ 时，同(1)可得 $D(2,-3)$；

(3)当四边形为▱$ADBC$ 时，同(1)可得 $D(6,15)$.

综上可知，点 D 的坐标可能为$(0,-1)$，$(2,-3)$或$(6,15)$.

[一题多思]

思考1.将本例变为：已知平行四边形 $OABC$，其中 O 为坐标原点，已知点 $A(2,1)$，$B(1,3)$，则点 C 的坐标为________.

$(-1,2)$ **解析**：设点 C 的坐标为(x,y)，则由已知得$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$，所以$(x,y)=(-1,2)$.

思考2.将本例变为：在平面直角坐标系 xOy 中，四边形 $ABCD$ 的边 $AB\parallel DC$，$AD\parallel BC$.已知点 $A(-2,0)$，$B(6,8)$，$C(8,6)$，则点 D 的坐标为________.

$(0,-2)$ **解析**：(方法一)由题意知，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.设点 D 的坐标为(x,y)，则$(6,8)-(-2,0)=(8,6)-(x,y)$，所以 $x=0$，$y=-2$，即点 D 的坐标为$(0,-2)$.

(方法二)由题意知，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，即$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$，所以$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=(8,6)+(-2,0)-(6,8)=(0,-2)$，即点 D 的坐标为$(0,-2)$.

反思提炼

坐标形式下向量相等的条件及其应用

(1)条件：相等向量的对应坐标相等.

(2)应用：利用坐标形式下向量相等的条件，可以建立相等关系，由此可求某些参数的值.

探究训练

在△ABC 中，已知 $A(7,8)$，$B(3,5)$，$C(4,3)$，M,N,D 分别是 AB,AC,BC 的中点，且 MN 与 AD 交于点 F，求$\overrightarrow{DF}$的坐标.

解：因为 $A(7,8)$，$B(3,5)$，$C(4,3)$，所以$\overrightarrow{AB}=(3-7,5-8)=(-4,-3)$，$\overrightarrow{AC}=(4-7,3-8)=(-3,-5)$.

因为 D 是 BC 的中点，所以$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(-4-3,-3-5)=\frac{1}{2}(-7,-8)=\left(-\frac{7}{2},-4\right)$.

因为 M,N 分别为 AB,AC 的中点，易知 F 为 AD 的中点，所以$\overrightarrow{DF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{7}{2},-4\right)=\left(\frac{7}{4},2\right)$.

体系构建

平面向量的坐标表示与加、减运算
- 正交分解 — 坐标表示
- 加、减运算 — 点的坐标与向量的坐标

课后素养评价(九)

基础性·能力运用

1.若点 $A(1,-1)$，$B(-1,2)$，则$\overrightarrow{AB}=$ （　　）

A.$(2,-3)$　　B.$(-2,3)$

C.$(0,1)$　　D.$(2,1)$

B **解析**：因为 $A(1,-1)$，$B(-1,2)$，所以$\overrightarrow{AB}=(-1,2)-(1,-1)=(-2,3)$.故选 B.

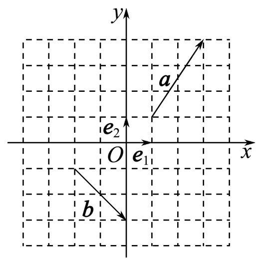
2.已知向量 $\boldsymbol{a}$ 在射线 $y=x(x\geqslant 0)$上，且起点为坐标原点 O，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，与 x 轴、y 轴方向相同的两个单位向量分别为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$，以$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$为基底，向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 （　　）

A.$(1,1)$　　B.$(-1,-1)$

C.$(\sqrt{2},\sqrt{2})$　　D.$(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$

A **解析**：由题意，$\boldsymbol{a}=(\sqrt{2}\cos 45^\circ)\boldsymbol{i}+(\sqrt{2}\sin 45^\circ)\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}=(1,1)$.故选 A.

3.如图所示，$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$为单位正交基底，则向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的坐标分别是 （　　）



A.(3,4),(2,−2)

B.(2,3),(−2,−3)

C.(2,3),(2,−2)

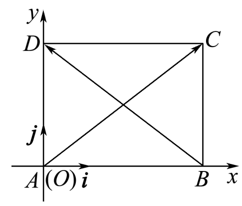
D.(3,4),(−2,−3)

C　**解析**:根据平面直角坐标系,可知 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$,所以 $\boldsymbol{a}=(2,3)$,$\boldsymbol{b}=(2,-2)$.故选 C.

4.已知 O 是坐标原点,点 A 在第二象限,$|\overrightarrow{OA}|=6$,$\angle xOA=150°$,则向量$\overrightarrow{OA}$的坐标为________.

$(-3\sqrt{3},3)$　**解析**:设点 $A(x,y)$,则 $x=|\overrightarrow{OA}|\cos 150°=6\cos 150°=-3\sqrt{3}$,$y=|\overrightarrow{OA}|\cdot\sin 150°=6\sin 150°=3$,即 $A(-3\sqrt{3},3)$,所以$\overrightarrow{OA}=(-3\sqrt{3},3)$.

5.已知长方形 $ABCD$,$AB=4$,$AD=3$,建立如图所示的平面直角坐标系,$\boldsymbol{i}$ 是与 x 轴同向的单位向量,$\boldsymbol{j}$ 是与 y 轴同向的单位向量,试求$\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{BD}$的坐标.



解:由长方形 $ABCD$ 知,$CB\parallel y$ 轴,$CD\parallel x$ 轴,因为 $AB=4$,$AD=3$,所以$\overrightarrow{AC}=4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$,所以$\overrightarrow{AC}=(4,3)$.

又$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,所以$\overrightarrow{BD}=-4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$,所以$\overrightarrow{BD}=(-4,3)$.

综合性·创新提升

1.在平行四边形 $ABCD$ 中,$\overrightarrow{AB}=(3,7)$,$\overrightarrow{AD}=(-2,3)$,则$\overrightarrow{AC}$的坐标为　　(　　)

A.(1,5)　　B.(5,4)

C.(1,10)　　D.(−2,7)

C　**解析**:根据向量加法的平行四边形法则,得$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=(3,7)+(-2,3)=(1,10)$.故选 C.

2.若向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-1)$,$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{c}=$　　(　　)

A.(−2,−2)　　B.(−2,2)

C.(−2,4)　　D.(4,−2)

C　**解析**:因为向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-1)$,所以 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=(1,1)-3(1,-1)=(-2,4)$.故选 C.

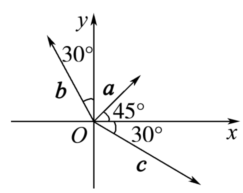
3.已知四边形 $ABCD$ 为平行四边形,其中 $A(5,-1)$,$B(-1,7)$,$C(1,2)$,则顶点 D 的坐标为　　(　　)

A.(−7,6)　　B.(7,6)

C.(6,7)　　D.(7,−6)

D　**解析**:设 $D(x,y)$,由$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,得$(x-5,y+1)=(2,-5)$,所以 $x=7$,$y=-6$,所以 $D(7,-6)$.故选 D.

4.在平面直角坐标系中,向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 的方向如图所示,且$|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=3$,$|\boldsymbol{c}|=4$,求向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 的坐标.



解:设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$,$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2)$,

则 $a_1=|\boldsymbol{a}|\cos 45°=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$,

$a_2=|\boldsymbol{a}|\sin 45°=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$,

$b_1=|\boldsymbol{b}|\cos 120°=3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}$,

$b_2=|\boldsymbol{b}|\sin 120°=3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$,

$c_1=|\boldsymbol{c}|\cos(-30°)=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$,

$c_2=|\boldsymbol{c}|\sin(-30°)=4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-2$.

所以 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{2},\sqrt{2})$,$\boldsymbol{b}=\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$,$\boldsymbol{c}=(2\sqrt{3},-2)$.

6.3.4 平面向量数乘运算的坐标表示

学习任务目标

1.会用坐标表示数乘向量.

2.能根据平面向量的坐标,判断两个向量是否共线.

3.掌握三点共线的判断方法.

问题式预习

知识清单

1.向量数乘运算的坐标表示

实数与向量的积的坐标等于用这个实数乘原来向量的相应坐标,已知 $\boldsymbol{a}=(x,y)$,则 $\lambda\boldsymbol{a}=\underline{(\lambda x,\lambda y)}$.

2.两个向量共线的坐标表示

(1)设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,其中 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$.$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是存在实数λ,使$\underline{\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}}$.

(2)如果用坐标表示,可写为$(x_1,y_1)=\lambda(x_2,y_2)$,消去λ,得向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$($\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$)共线的充要条件是 $\underline{x_1y_2-x_2y_1=0}$.

(3)中点坐标公式

若点 P_1,P_2 的坐标分别为(x_1,y_1),(x_2,y_2),线段 P_1P_2 的中点 P 的坐标为(x,y),则 $\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2}{2},\\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}.\end{cases}$ 此公式为线段 P_1P_2 的中点坐标公式.

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)向量(1,2)与向量(4,8)共线. (√)

(2)向量(2,3)与向量(-4,-6)反向. (√)

(3)如果 $x_1y_2-x_2y_1=0$,那么向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$与向量 $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$共线. (√)

2.若向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,0)$,则 $3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 的坐标是 (C)

A.(5,3)　　B.(4,3)

C.(8,3)　　D.(0,-1)

3.已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,4)$,$\boldsymbol{b}=(1,-2)$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的关系是 ( )

A.不共线　　B.相等

C.方向相同　　D.方向相反

D **解析**:因为 $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线且方向相反.故选 D.

4.请思考并回答问题:

(1)向量(共线)平行的用途是什么?

略.

(2)当两个向量共线时,如何利用向量的坐标运算求点的坐标?

提示:当两个向量共线时,利用向量的坐标运算可求点的坐标.比如 A,B,P 三点共线,且$|\overrightarrow{AP}|=3|\overrightarrow{PB}|$,如果知道点 A,B 的坐标就可以求出点 P 的坐标.

任务型课堂

学习任务一 数乘向量的坐标表示

例 1 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$,$\boldsymbol{b}=(2,1)$.求:

(1)$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$;(2)$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$;(3)$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$.

解:(1)$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=2(-1,2)+3(2,1)=(-2,4)+(6,3)=(4,7)$.

(2)$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=(-1,2)-3(2,1)=(-1,2)-(6,3)=(-7,-1)$.

(3)$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(-1,2)-\frac{1}{3}(2,1)=\left(-\frac{1}{2},1\right)-\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{7}{6},\frac{2}{3}\right)$.

反思提炼

用坐标进行平面向量的线性运算的方法

(1)若已知向量的坐标,则直接应用两个向量和、差及

向量数乘运算的法则进行.

(2)若已知有向线段两端点的坐标,则可先求出向量的坐标,然后再进行向量的坐标运算.

(3)向量在坐标形式下的线性运算可完全类比数的运算进行.

探究训练

1.已知向量 $\boldsymbol{a}=(4,2)$,$\boldsymbol{b}=(-2,3)$,则 $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=$ (　　)

A.$(2,-13)$　　B.$(2,-5)$

C.$(13,2)$　　D.$(2,13)$

D　**解析**:$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=2(4,2)+3(-2,3)=(8,4)+(-6,9)=(2,13)$.

2.已知向量$\overrightarrow{AB}=(2,4)$,$\overrightarrow{AC}=(0,2)$,则$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=$ (　　)

A.$(-2,-2)$　　B.$(2,2)$

C.$(1,1)$　　D.$(-1,-1)$

D　**解析**:$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(-2,-2)=(-1,-1)$.

3.已知 $A(-2,4)$,$B(3,-1)$,$C(-3,-4)$,$\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CA}$,$\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{CB}$,则点 M 的坐标为________,$\overrightarrow{MN}$的坐标为________.

$(0,20)$　$(9,-18)$　**解析**:设点 M 的坐标为(x,y),所以$\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CA}=3(1,8)=(3,24)=(x+3,y+4)$,所以$\begin{cases}x+3=3,\\y+4=24,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=0,\\y=20.\end{cases}$所以点 M 的坐标为$(0,20)$.

因为$\overrightarrow{CN}=2(6,3)=(12,6)$,所以$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{CM}=(12,6)-(3,24)=(9,-18)$.

学习任务二　向量共线的证明与判定

例 2　已知点 A,B,C 的坐标分别为$(-1,0)$,$(3,-1)$,$(1,2)$,$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$,求证:$\overrightarrow{EF}/\!/\overrightarrow{AB}$.

证明:设 $E(x_1,y_1)$,$F(x_2,y_2)$.

由题意知$\overrightarrow{AC}=(2,2)$,$\overrightarrow{BC}=(-2,3)$,$\overrightarrow{AB}=(4,-1)$,

所以$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$,$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\left(-\frac{2}{3},1\right)$,

即$(x_1,y_1)-(-1,0)=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$,$(x_2,y_2)-(3,-1)=\left(-\frac{2}{3},1\right)$.

所以$(x_1,y_1)=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$,$(x_2,y_2)=\left(\frac{7}{3},0\right)$,所以$\overrightarrow{EF}=(x_2,y_2)-(x_1,y_1)=\left(\frac{8}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

因为 $4\times\left(-\frac{2}{3}\right)-(-1)\times\frac{8}{3}=0$,所以$\overrightarrow{EF}/\!/\overrightarrow{AB}$.

反思提炼

向量共线的判定方法

(1)利用向量共线定理,由 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$推出 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

(2)利用向量共线的坐标表达式 $x_1y_2-x_2y_1=0$($\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$)直接判断 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行.

探究训练

已知 $A(2,1)$,$B(0,4)$,$C(1,3)$,$D(5,-3)$,判断$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$是否共线.如果共线,它们的方向是相同还是相反?

解:$\overrightarrow{AB}=(0,4)-(2,1)=(-2,3)$,$\overrightarrow{CD}=(5,-3)-(1,3)=(4,-6)$.

(方法一)因为$(-2)\times(-6)-3\times4=0$,所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$共线.通过观察可知,$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$方向相反.

(方法二)因为$\overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{AB}$,所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$共线且方向相反.

学习任务三　向量共线的应用

例 3　(1)已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$,$\boldsymbol{b}=(3,4)$.若$(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})/\!/(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})$,则 $k=$________.

$-\frac{1}{3}$　**解析**:$3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(0,-10)$,$\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}=(1+3k,-2+4k)$,因为$(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})/\!/(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})$,所以 $0\times(-2+4k)-(-10)\times(1+3k)=0$,解得 $k=-\frac{1}{3}$.

(2)已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,0)$,$\boldsymbol{b}=(2,1)$.若$\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$,且 A,B,C 三点共线,则实数 $m=$________.

$\frac{3}{2}$　**解析**:$\overrightarrow{AB}=2(1,0)+3(2,1)=(8,3)$,$\overrightarrow{BC}=(1,0)+m(2,1)=(2m+1,m)$.因为 A,B,C 三点共线,所以$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{BC}$,

所以 $8m-3(2m+1)=0$，解得 $m=\frac{3}{2}$.

反思提炼

利用向量平行的条件处理求值问题的思路

(1)利用向量共线定理 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ 列方程组求解.

(2)利用向量共线的坐标表示直接求解.

提醒：当两个向量中存在零向量时，无法利用坐标表示求值.

探究训练

1. 已知非零向量 $\boldsymbol{a}=(m^2-1,m+1)$ 与向量 $\boldsymbol{b}=(1,-2)$ 平行，则实数 m 的值为______.

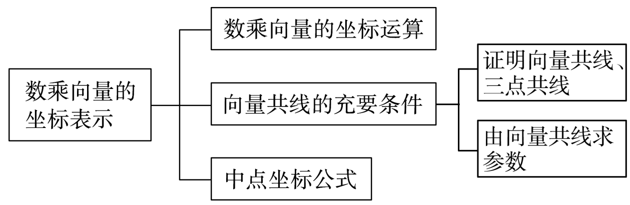
$\frac{1}{2}$ **解析**：因为非零向量 $\boldsymbol{a}=(m^2-1,m+1)$ 与向量 $\boldsymbol{b}=(1,-2)$ 平行，所以 $-2(m^2-1)-1\times(m+1)=0$，且 $m\neq-1$，所以 $m=\frac{1}{2}$.

2. 已知 $A(1,-3)$，$B\left(8,\frac{1}{2}\right)$，$C(9,1)$，求证：$A,B,C$ 三点共线.

证明：$\overrightarrow{AB}=\left(8-1,\frac{1}{2}+3\right)=\left(7,\frac{7}{2}\right)$，$\overrightarrow{AC}=(9-1,1+3)=(8,4)$，

因为 $7\times4-\frac{7}{2}\times8=0$，所以 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{AC}$. 又因为 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 有公共点 A，所以 A,B,C 三点共线.

体系构建



课后素养评价（十）

基础性·能力运用

1. 设 x 为实数，若向量 $\boldsymbol{a}=(2,3)$，$\boldsymbol{b}=(x,-6)$，且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则 x 的值为（　　）

A. $-\frac{9}{2}$　　B. -4

C. $\frac{3}{2}$　　D. 4

B **解析**：因为向量 $\boldsymbol{a}=(2,3)$，$\boldsymbol{b}=(x,-6)$，且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，所以 $2\times(-6)-3x=0$，解得 $x=-4$. 故选 B.

2. 已知 $A(-2,1)$，$B(3,-2)$ 两点，且 $\overrightarrow{AP}=4\overrightarrow{PB}$，则点 P 的坐标为（　　）

A. $\left(2,\frac{7}{5}\right)$　　B. $\left(\frac{7}{5},2\right)$

C. $\left(2,-\frac{7}{5}\right)$　　D. $\left(-\frac{7}{5},2\right)$

C **解析**：设 $P(x,y)$，由题可知 $\overrightarrow{AP}=(x+2,y-1)$，$\overrightarrow{PB}=(3-x,-2-y)$. 因为 $\overrightarrow{AP}=4\overrightarrow{PB}$，所以 $\begin{cases}x+2=4(3-x),\\y-1=4(-2-y),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=-\frac{7}{5}.\end{cases}$ 故选 C.

3. （多选题）若向量 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},1)$，$\boldsymbol{b}=(0,-2)$，则与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 共线的向量可以是（　　）

A. $(\sqrt{2},-\sqrt{6})$　　B. $(-1,-\sqrt{3})$

C. $(-\sqrt{3},-1)$　　D. $(-1,\sqrt{3})$

AD **解析**：因为 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},-3)$，所以 $\sqrt{3}\times\sqrt{3}-(-1)\times(-3)=0$，所以 $(-1,\sqrt{3})$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 是共线向量.

同理 $\sqrt{3}\times(-\sqrt{6})-(-3)\times\sqrt{2}=0$，所以 $(\sqrt{2},-\sqrt{6})$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 是共线向量. 故选 AD.

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(m,4)$，且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，那么 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 等于（　　）

A. $(4,0)$　　B. $(0,4)$

C. $(3,-6)$　　D. $(-3,6)$

C **解析**：因为 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，所以可设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，则 $\begin{cases}1=m\lambda,\\-2=4\lambda,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=-\frac{1}{2},\\m=-2,\end{cases}$

所以 $\boldsymbol{b}=(-2,4)$，所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,-2)-(-2,4)=(3,-6)$.

故选 C.

5. 若 $\boldsymbol{a}=(3,4)$，$\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}$，且 $\boldsymbol{b}$ 的起点为 $(1,2)$，终点为 $(x,3x)$，则 $\boldsymbol{b}=$________.

$\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$ **解析**：因为 $\boldsymbol{b}=(x-1,3x-2)$，且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，所以 $3(3x-2)-4(x-1)=0$，解得 $x=\frac{2}{5}$.

所以 $\boldsymbol{b}=\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$.

6.若 $A(3,-6),B(-5,2),C(6,y)$三点共线,则 $y=$________.

-9　**解析**:$\overrightarrow{AB}=(-8,8),\overrightarrow{AC}=(3,y+6)$.因为 A,B,C 三点共线,即$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{AC}$,

所以$-8(y+6)-8\times3=0$,解得 $y=-9$.

综合性·创新提升

1.(多选题)下列两个向量,不能构成表示平面内所有向量的一个基底的是　(　　)

A.$\boldsymbol{e}_1=(1,2),\boldsymbol{e}_2=(4,-2)$

B.$\boldsymbol{e}_1=(1,2),\boldsymbol{e}_2=(0,0)$

C.$\boldsymbol{e}_1=(1,2),\boldsymbol{e}_2=(2,4)$

D.$\boldsymbol{e}_1=(1,2),\boldsymbol{e}_2=(2,1)$

BC　**解析**:A,D 选项,$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不平行,可以作为基底;B 选项,零向量和任意向量平行,所以 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不能作为基底;C 选项,$2\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2$,所以 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 平行,不能作为基底.故选 BC.

2.已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,k),\boldsymbol{b}=(2,3),\boldsymbol{c}=(-2,2)$,且 $\boldsymbol{c}//(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,则 $k=$　(　　)

A.4　　B.-4　　C.2　　D.-2

A　**解析**:向量 $\boldsymbol{a}=(1,k),\boldsymbol{b}=(2,3),\boldsymbol{c}=(-2,2)$,则有 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-1,k-3)$.由 $\boldsymbol{c}//(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,得$-2(k-3)-2\times(-1)=0$,解得 $k=4$.故选 A.

3.(多选题)已知向量$\overrightarrow{OA}=(1,-3),\overrightarrow{OB}=(2,-1),\overrightarrow{OC}=(m+1,m-2)$,若以点 A,B,C 为顶点能构成三角形,则实数 m 可以是　(　　)

A.-2　　B.$\frac{1}{2}$　　C.1　　D.-1

ABD　**解析**:因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,-1)-(1,-3)=(1,2),\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(m+1,m-2)-(1,-3)=(m,m+1)$.假设 A,B,C 三点共线,则 $1\times(m+1)-2m=0$,即 $m=1$.所以只要 $m\neq1$,以 A,B,C 三点为顶点即可构成三角形.故选 ABD.

4.已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,-2),\boldsymbol{b}=(1,-m),\boldsymbol{c}=(2,1)$,$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线,则 $m=$________.

3　**解析**:由题知 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(-2,-m+2)$,因为 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线,所以 $2\times(-m+2)-(-2)\times1=0$,解得 $m=3$.

5.若$\overrightarrow{AB}=(3,-6),B(-2,3)$,则线段 AB 的靠近 B 的三等分点 P 的坐标为________.

$(-3,5)$　**解析**:令 $P(x,y)$,则$\overrightarrow{PB}=(-2-x,3-y)$,而$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{PB}$,所以$(3,-6)=3(-2-x,3-y)$,

即$\begin{cases}-6-3x=3,\\9-3y=-6,\end{cases}$可得$\begin{cases}x=-3,\\y=5,\end{cases}$所以 $P(-3,5)$.

6.设向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2),\boldsymbol{b}=(1,-1),\boldsymbol{c}=(4,-5)$.

(1)求$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$;

(2)若 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b},\lambda,\mu\in\mathbf{R}$,求 $\lambda+\mu$ 的值;

(3)若$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b},\overrightarrow{CD}=4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$,求证:$A,C,D$ 三点共线.

解:(1)$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(-1,2)+(2,-2)=(1,0)$,

$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+0^2}=1$.

(2)由题意得$(4,-5)=\lambda(-1,2)+\mu(1,-1)$,所以$\begin{cases}-\lambda+\mu=4,\\2\lambda-\mu=-5,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=-1,\\\mu=3,\end{cases}$所以 $\lambda+\mu=2$.

(3)因为$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,所以$\overrightarrow{CD}=4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{AC}$,所以$\overrightarrow{CD}$与$\overrightarrow{AC}$共线.又$\overrightarrow{CD}$与$\overrightarrow{AC}$有公共点 C,所以 A,C,D 三点共线.

6.3.5 平面向量数量积的坐标表示

学习任务目标

1.理解两个向量数量积的坐标表示的推导过程,能运用数量积的坐标表示进行向量数量积的运算.

2.能根据向量的坐标计算向量的模,并推导平面内两点间的距离公式.

3.能根据向量的坐标求向量的夹角及判定两个向量垂直.

问题式预习

知识清单

1.向量数量积的坐标表示

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\underline{x_1x_2+y_1y_2}$,即两个向量的数量积等于<u>它们对应坐标的乘积的和</u>.

2.用平面向量的坐标表示公式

(1)向量模的坐标表示

若 $\boldsymbol{a}=(x,y)$,则 $|\boldsymbol{a}|^2=\underline{x^2+y^2}$,或 $|\boldsymbol{a}|=\underline{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(2)两向量垂直的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是非零向量,$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\underline{x_1x_2+y_1y_2=0}$.

(3)两向量夹角的余弦公式

设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量,$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,根据向量数量积的定义及坐标表示可得 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\underline{\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}}$.

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)两个非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,满足 $x_1y_2-x_2y_1=0$,则向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $0°$.(×)

(2)已知向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2-y_1y_2=0$.(×)

(3)若两个向量的数量积小于零,则两个向量的夹角一定为钝角.(×)

2.若向量 $\boldsymbol{a}=(4,2)$,$\boldsymbol{b}=(6,m)$,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 m 的值是 ( )

A.12　　B.3　　C.-3　　D.-12

D **解析**:因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,所以 $4\times6+2m=0$,解得 $m=-12$.

3.已知 $\boldsymbol{a}=(3,4)$,$\boldsymbol{b}=(5,12)$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值为________.

$\frac{63}{65}$ **解析**:因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times5+4\times12=63$,$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{5^2+12^2}=13$,所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{63}{5\times13}=\frac{63}{65}$.

4.请思考并回答问题:

(1)已知向量 $\boldsymbol{a}=(x,y)$,你知道与 $\boldsymbol{a}$ 共线的单位向量的坐标是什么吗?与 $\boldsymbol{a}$ 垂直的单位向量的坐标又是什么?

提示:设与 $\boldsymbol{a}$ 共线的单位向量为 $\boldsymbol{a}_0$,则 $\boldsymbol{a}_0=\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$,其中正、负号分别表示与 $\boldsymbol{a}$ 同向和反向.

易知 $\boldsymbol{b}=(-y,x)$ 与 $\boldsymbol{a}=(x,y)$ 垂直,所以与 $\boldsymbol{a}$ 垂直的单位向量 $\boldsymbol{b}_0$ 的坐标为 $\pm\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$,其中正、负号表示不同的方向.

(2)非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$ 的夹角 θ 的范围与坐标运算的数量积的关系是什么?

提示:当 θ 为锐角或零角时,$x_1x_2+y_1y_2>0$;当 θ 为直角时,$x_1x_2+y_1y_2=0$;当 θ 为钝角或平角时,$x_1x_2+y_1y_2<0$.

任务型课堂

学习任务一　向量数量积的坐标表示

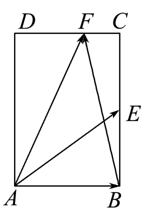
例 1　(1)若向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，则 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=$　(　　)

A.10　　B.-10

C.3　　D.-3

B　**解析**：因为 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(4,-3)$，$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=(-1,2)$，所以 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=4\times(-1)+(-3)\times2=-10$.

(2)如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=\sqrt{2}$，$BC=2$，点 E 为边 BC 的中点，点 F 在边 CD 上.若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=$________.



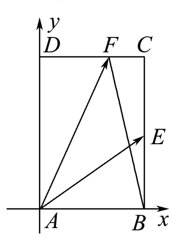
$\sqrt{2}$　**解析**：如图，以 A 为坐标原点，直线 AB 为 x 轴、直线 AD 为 y 轴，建立平面直角坐标系，则 $B(\sqrt{2},0)$，$D(0,2)$，$C(\sqrt{2},2)$，$E(\sqrt{2},1)$.

设 $F(x,2)$，因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=\sqrt{2}x+0=\sqrt{2}x=\sqrt{2}$，所以 $x=1$.

所以 $F(1,2)$，

所以 $\overrightarrow{BF}=(1-\sqrt{2},2)$，

所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=\sqrt{2}(1-\sqrt{2})+1\times2=\sqrt{2}$.



反思提炼

向量数量积的坐标表示的注意点

(1)注意向量数量积的坐标表示要与向量共线的坐标表示区分开，前者是“对应坐标相乘后相加”，后者是“交错相乘差为零”.

(2)注意向量数量积的定义和几何意义的应用.

(3)注意利用向量数量积的坐标表示建立方程求参数的值.

探究训练

1.在平面直角坐标系 xOy 中，已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\overrightarrow{AB}=(1,-2)$，$\overrightarrow{AD}=(2,1)$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=$　(　　)

A.5　　B.4　　C.3　　D.2

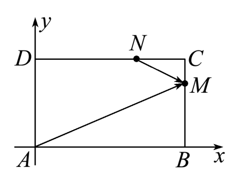
A　**解析**：由 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=(1,-2)+(2,1)=(3,-1)$，得 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times3+1\times(-1)=5$.

2.已知在矩形 $ABCD$ 中，$|\overrightarrow{AB}|=6$，$|\overrightarrow{AD}|=4$，若点 M,N 满足 $\overrightarrow{BM}=3\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{NC}$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NM}$ 等于　(　　)

A.20　　B.15

C.9　　D.6

C　**解析**：因为四边形 $ABCD$ 为矩形，建立如图所示的平面直角坐标系，则 $A(0,0)$，$M(6,3)$，$N(4,4)$，



所以 $\overrightarrow{AM}=(6,3)$，$\overrightarrow{NM}=(2,-1)$，所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NM}=6\times2+3\times(-1)=9$.

学习任务二　平面向量的模

例 2　(1)平面向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，$\boldsymbol{a}=(2,0)$，$|\boldsymbol{b}|=1$，则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$　(　　)

A.$\sqrt{3}$　　B.$2\sqrt{3}$

C.4　　D.12

B　**解析**：因为 $\boldsymbol{a}=(2,0)$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，

所以 $|\boldsymbol{a}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times1\times\cos60°=1$.

所以 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2}=2\sqrt{3}$.

(2)已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\theta,\sin\theta)$，向量 $\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},0)$，则 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的最大值为________.

$2+\sqrt{3}$　**解析**：因为 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2\cos\theta-\sqrt{3},2\sin\theta)$，

所以 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(2\cos\theta-\sqrt{3})^2+(2\sin\theta)^2}$

$=\sqrt{4\cos^2\theta-4\sqrt{3}\cos\theta+3+4\sin^2\theta}$

$=\sqrt{7-4\sqrt{3}\cos\theta}$，

当且仅当 $\cos\theta=-1$ 时，$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的最大值为 $2+\sqrt{3}$.

反思提炼

求向量的模的两种基本策略

(1)字母表示下的运算.

利用$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}^2$将向量模的运算转化为向量与向量的数量积.

(2)坐标表示下的运算.

若$\boldsymbol{a}=(x,y)$,则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2=x^2+y^2$.于是有$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

探究训练

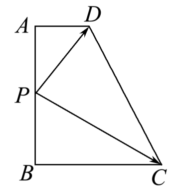
1. 已知向量$\boldsymbol{a}=(2,1)$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=5\sqrt{2}$,则$|\boldsymbol{b}|$等于 (　　)

A.$\sqrt{5}$　　B.$\sqrt{10}$

C.5　　D.25

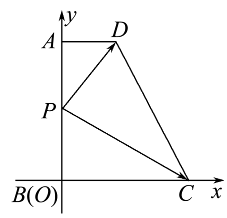
C　**解析**:因为$\boldsymbol{a}=(2,1)$,所以$\boldsymbol{a}^2=5$.又$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=5\sqrt{2}$,所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=50$,即$5+2\times10+\boldsymbol{b}^2=50$,所以$\boldsymbol{b}^2=25$,所以$|\boldsymbol{b}|=5$.

2. 如图,在直角梯形$ABCD$中,$AD\parallel BC$,$AB\perp BC$,$AD=1$,$AB=BC=2$,P是线段AB上的动点,则$|\overrightarrow{PC}+4\overrightarrow{PD}|$的最小值为 (　　)



A.$3\sqrt{5}$　　B.6　　C.$2\sqrt{5}$　　D.4

B　**解析**:如图,以点B为坐标原点,建立平面直角坐标系,



设$BP=x(0\leqslant x\leqslant2)$.又$AD=1$,$AB=BC=2$,所以$P(0,x)$,$C(2,0)$,$D(1,2)$,所以$\overrightarrow{PC}=(2,-x)$,$\overrightarrow{PD}=(1,2-x)$,$4\overrightarrow{PD}=(4,8-4x)$,所以$\overrightarrow{PC}+4\overrightarrow{PD}=(6,8-5x)$.因为$|\overrightarrow{PC}+4\overrightarrow{PD}|=\sqrt{36+(8-5x)^2}\geqslant6$,所以当$8-5x=0$,即$x=\frac{8}{5}$时,$|\overrightarrow{PC}+4\overrightarrow{PD}|$的最小值为6.故选B.

学习任务三　平面向量的夹角和垂直问题

例3　设平面向量$\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)(0°\leqslant\alpha\leqslant90°)$,$\boldsymbol{b}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(1)求$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角θ;

(2)求证:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$垂直.

(1)**解**:由题意知,$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=1$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$,则$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}{1\times1}=-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\cos(120°-\alpha)$.因为$0°\leqslant\alpha\leqslant90°$,所以$30°\leqslant120°-\alpha\leqslant120°$.又$0°\leqslant\theta\leqslant180°$,所以$\theta=120°-\alpha$,即$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$120°-\alpha$.

(2)**证明**:因为$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\left(\cos\alpha-\frac{1}{2},\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\cos\alpha+\frac{1}{2},\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\cos\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\cos\alpha+\frac{1}{2}\right)+\left(\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\cos^2\alpha-\frac{1}{4}+\sin^2\alpha-\frac{3}{4}=1-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=0$,

所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

反思提炼

利用数量积的坐标表示求两向量夹角的步骤

(1)利用平面向量数量积的坐标表示求出两个向量的数量积;

(2)利用坐标运算计算出这两个向量的模;

(3)由公式$\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$直接求出$\cos\theta$的值;

(4)在$[0,\pi]$内,由$\cos\theta$的值求出夹角θ.

探究训练

1. 已知$|\boldsymbol{a}|=1$,$\boldsymbol{b}=(0,2)$,且$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$,则向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$夹角的大小为 (　　)

A.$\frac{\pi}{6}$　　B.$\frac{\pi}{4}$　　C.$\frac{\pi}{3}$　　D.$\frac{\pi}{2}$

C　**解析**:设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为θ.

因为$|\boldsymbol{a}|=1$,$\boldsymbol{b}=(0,2)$,且$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$,

所以$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{1\times\sqrt{0+2^2}}=\frac{1}{2}$.

又因为$\theta\in[0,\pi]$,所以$\theta=\frac{\pi}{3}$.

所以向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$夹角的大小为$\frac{\pi}{3}$.

2.已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,\lambda)$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(4,0)$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为（　　）

A.$\boldsymbol{a}$　　B.$-\boldsymbol{a}$　　C.$2\boldsymbol{a}$　　D.$-2\boldsymbol{a}$

B　**解析**：因为 $\boldsymbol{a}=(-2,\lambda)$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(4,0)$，所以 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=(2,\lambda)$.因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $-2\times2+\lambda^2=0$，解得 $\lambda=\pm2$，所以 $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{2}$，所以向量 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为 $\frac{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\times\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{-8}{2\sqrt{2}}\times\frac{\boldsymbol{a}}{2\sqrt{2}}=-\boldsymbol{a}$.故选 B.

3.设向量 $\boldsymbol{a}=(3,3)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$.若 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})$，则实数 $\lambda=$________.

±3　**解析**：因为 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})$，所以 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\lambda^2\boldsymbol{b}^2=0$，即 $18-2\lambda^2=0$，解得 $\lambda=\pm3$.

体系构建

- 平面向量数量积的坐标表示
  - 向量的模的公式
  - 两向量垂直的条件
  - 两向量夹角的余弦值

课后素养评价（十一）

基础性·能力运用

1.已知向量 $\overrightarrow{AB}=(m,4)$，$\overrightarrow{AC}=(2,-3)$，且 $AB\perp AC$，则 $m=$（　　）

A.4　　B.5　　C.6　　D.7

C　**解析**：因为 $AB\perp AC$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2m-12=0$，解得 $m=6$.故选 C.

2.若向量 $\boldsymbol{a}=(2,0)$，$\boldsymbol{b}=(1,1)$，则下列结论正确的是（　　）

A.$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$　　B.$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$

C.$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$　　D.$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$

C　**解析**：选项 A，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times1+0\times1=2$，故 A 错误；选项 B，$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，故 B 错误；选项 C，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=1\times1-1\times1=0$，故 C 正确；选项 D，因为 $1\times2\neq1\times0$，所以两向量不平行，故 D 错误.故选 C.

3.若向量 $\boldsymbol{a}=(-4,3)$，$\boldsymbol{b}=(5,6)$，则 $3|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于（　　）

A.23　　B.57　　C.63　　D.83

D　**解析**：$3|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times[(-4)^2+3^2]-4\times(-4\times5+3\times6)=83$.故选 D.

4.若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,-1)$，$\boldsymbol{a}=(1,2)$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角等于（　　）

A.45°　　B.60°　　C.120°　　D.135°

D　**解析**：根据题意，设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,-1)$，$\boldsymbol{a}=(1,2)$，则 $\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}=(1,-3)$，可得 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$，$\cos\theta=\frac{1\times1-2\times3}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.又因为 $0°\leqslant\theta\leqslant180°$，所以 $\theta=135°$.

5.已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,k)$，$\boldsymbol{b}=(2,2)$，且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，那么 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________.

4　**解析**：依题意得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,k+2)$，由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，得 $3\times k-1\times(k+2)=0$，解得 $k=1$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2+2k=4$.

6.已知向量 $\boldsymbol{a}=(4,3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$.

(1)求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值；

(2)若 $(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\perp(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，求实数 λ 的值.

解：(1)设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ.

因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4\times(-1)+3\times2=2$，

$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$，

$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$，

所以 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{2}{5\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{25}$.

(2)因为 $\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}=(4+\lambda,3-2\lambda)$，$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(7,8)$，$(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\perp(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，

所以 $(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=7(4+\lambda)+8(3-2\lambda)=0$，

所以 $\lambda=\frac{52}{9}$.

综合性·创新提升

1. 若向量 $\boldsymbol{a}=(x,2)$，$\boldsymbol{b}=(-3,5)$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是钝角，则实数 x 的取值范围是 ( )

A. $\left(-\infty,\frac{10}{3}\right)$　B. $\left(-\infty,\frac{10}{3}\right]$

C. $\left(\frac{10}{3},+\infty\right)$　D. $\left[\frac{10}{3},+\infty\right)$

C　**解析**：由题意可得 $-3x+10<0$ 且 $5x+6\neq 0$，解得 $x>\frac{10}{3}$. 故选 C.

2.（多选题）若向量 $\boldsymbol{a}=(3,11)$，$\boldsymbol{b}=(-1,-4)$，$\boldsymbol{c}=(1,3)$，则 ( )

A. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-47$　B. $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(5,19)$

C. $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\perp\boldsymbol{c}$　D. $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\parallel\boldsymbol{b}$

ABD　**解析**：由题意得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3-44=-47$，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(3+2,11+8)=(5,19)$. 因为 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(0,-1)$，$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}=0\times1-1\times3=-3\neq0$，所以 $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不垂直. 因为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=(3-1,11-3)=(2,8)=-2\boldsymbol{b}$，所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\parallel\boldsymbol{b}$. 故选 ABD.

3. 已知 O 为坐标原点，向量 $\overrightarrow{OA}=(2,2)$，$\overrightarrow{OB}=(4,1)$，在 x 轴上有一点 P，使得 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ 有最小值，则点 P 的坐标是 ( )

A. $(-3,0)$　B. $(2,0)$

C. $(3,0)$　D. $(4,0)$

C　**解析**：设点 P 的坐标为 $(x,0)$，则 $\overrightarrow{AP}=(x-2,-2)$，$\overrightarrow{BP}=(x-4,-1)$.

所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(x-2)(x-4)+(-2)\times(-1)=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$，

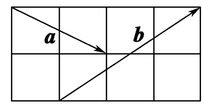
故当 $x=3$ 时，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ 有最小值 1.

此时点 P 的坐标为 $(3,0)$. 故选 C.

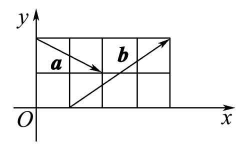
4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(x,1)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量的坐标为______.

$\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$　**解析**：因为 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(x,1)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x+2=0$，所以 $x=-2$，故 $\boldsymbol{b}=(-2,1)$，所以与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量为 $\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

5. 在 2×4 的方格纸中，起点和终点均在格点的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 如图所示，则向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值是________.



$-\frac{4\sqrt{65}}{65}$　**解析**：不妨设每个小正方形的边长为 1，建立如图所示的平面直角坐标系，



则 $\boldsymbol{a}=(2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(3,2)$. 所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(5,1)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-1,-3)$，

所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-5-3=-8$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{26}$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$.

所以向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角余弦值为 $\frac{-8}{\sqrt{26}\times\sqrt{10}}=-\frac{4\sqrt{65}}{65}$.

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$，θ 为向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角.

(1) 求 $\cos\theta$ 的值；

(2) 若 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，求实数 λ 的值.

解：(1) 由 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$，可得 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，所以 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

(2) 由 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2,-1)$，$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\lambda+\lambda)+(-1+2)=(\lambda-1,\lambda+2)$，

可得 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}$，$|\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\lambda-1)^2+(\lambda+2)^2}=\sqrt{2\lambda^2+2\lambda+5}$，

则 $\sqrt{2\lambda^2+2\lambda+5}=\sqrt{5}$，

解得 $\lambda=0$ 或 $\lambda=-1$.

即实数 λ 的值为 0 或 -1.

6.4　平面向量的应用

6.4.1　平面几何中的向量方法
6.4.2　向量在物理中的应用举例

学习任务目标

1. 会用向量方法解决平面几何中的相关问题.
2. 会用向量方法解决物理中的力学问题.
3. 会用向量方法解决物理中的速度问题.

问题式预习

知识清单

1. 用向量解决常见平面几何问题的技巧

问题类型	知识点	公式表示
线平行、点共线等问题	向量共线定理	$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$，其中 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$
垂直问题	数量积的运算性质	$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\underline{x_1x_2+y_1y_2=0}$，其中 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为非零向量
夹角问题	数量积的定义	$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert}$（$\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角），其中 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为非零向量
长度问题	数量积的性质	$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}=\sqrt{x^2+y^2}$，其中 $\boldsymbol{a}=(x,y)$，$\boldsymbol{a}$ 为非零向量

2. 向量在物理中的应用举例

(1)向量的线性运算在物理中的应用

①用向量解决力的问题，通常把向量的起点平移到同一个作用点上.

②用向量解决涉及速度、位移等物理量的合成与分解问题时，实质就是进行向量的线性运算.

(2)向量的数量积在物理中的应用

物理上力做的功就是力在物体前进方向上的分力与物体位移的乘积，即 $\underline{W=\lvert\boldsymbol{F}\rvert\lvert\boldsymbol{s}\rvert\cos\langle\boldsymbol{F},\boldsymbol{s}\rangle}$，功是一个实数，它可正可负，也可以为零.力做的功涉及两个向量的模及这两个向量的夹角，它的实质就是向量 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的数量积.

概念辨析

1. 判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)功是力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的数量积.　(√)

(2)力的合成与分解体现了向量的加、减法运算.　(√)

(3)某轮船需横渡长江，船速为 $\boldsymbol{v}_1$，水速为 $\boldsymbol{v}_2$，若要使轮船最快到达江的另一岸，则需保持船头方向与江岸垂直.　(√)

2. 已知力 $\boldsymbol{F}$ 的大小 $\lvert\boldsymbol{F}\rvert=10$，在 $\boldsymbol{F}$ 的作用下物体产生的位移 $\boldsymbol{s}$ 的大小 $\lvert\boldsymbol{s}\rvert=14$，$\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角为 60°，则 $\boldsymbol{F}$ 做的功为　(　　)

A. 7　　B. 10

C. 14　　D. 70

D　**解析**：$\boldsymbol{F}$ 做的功为 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=\lvert\boldsymbol{F}\rvert\lvert\boldsymbol{s}\rvert\cos 60^\circ=10\times14\times\dfrac{1}{2}=70$.

3. 请思考并回答问题：

(1)用向量证明平面几何问题，常有哪两种方法?

提示：向量的线性运算法；向量的坐标运算法.

(2)如何利用向量研究力、速度、加速度、功等物理问题?

提示：力、速度、加速度、位移的合成都是向量的加法，因而它们符合向量加法的三角形法则和平行四边形法则；物体在力的作用下产生位移，功是力与位移的数量积.

任务型课堂

学习任务一 向量在物理中的应用

例 1 (1)船在静水中的速度为 $\boldsymbol{v}_1$，水速为 $\boldsymbol{v}_2$，则船逆水行驶的速度为 ( )

A.$\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$ B.$\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1$

C.$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$ D.$|\boldsymbol{v}_1|-|\boldsymbol{v}_2|$

C **解析**：由题易知，选项 C 正确.

(2)已知三个力 $\boldsymbol{f}_1=(-2,-1)$，$\boldsymbol{f}_2=(-3,2)$，$\boldsymbol{f}_3=(4,-3)$同时作用于某物体上一点，为使物体保持平衡，在该点处再加上一个力 $\boldsymbol{f}_4$，则 $\boldsymbol{f}_4$ 的大小为________.

$\sqrt{5}$ **解析**：由物理知识知，$\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{f}_3+\boldsymbol{f}_4=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{f}_4=-(\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{f}_3)=(1,2)$，故 $|\boldsymbol{f}_4|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

(3)已知两恒力 $\boldsymbol{F}_1=(3,4)$，$\boldsymbol{F}_2=(6,-5)$作用于同一质点，质点由点 $A(20,15)$移动到点 $B(7,0)$，求 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 分别对质点所做的功.(力的单位：N，位移单位：m)

解：设物体在力 $\boldsymbol{F}$ 作用下的位移为 $\boldsymbol{s}$，则所做的功为 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$.

因为$\overrightarrow{AB}=(7,0)-(20,15)=(-13,-15)$，所以 $W_1=\boldsymbol{F}_1\cdot\overrightarrow{AB}=(3,4)\cdot(-13,-15)=3\times(-13)+4\times(-15)=-99(\mathrm{J})$，

$W_2=\boldsymbol{F}_2\cdot\overrightarrow{AB}=(6,-5)\cdot(-13,-15)=6\times(-13)+(-5)\times(-15)=-3(\mathrm{J})$.

[一题多思]

思考 1. 本例(3)条件不变，求 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 的合力 $\boldsymbol{F}$ 对质点所做的功.

解：$W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}=(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)\cdot\overrightarrow{AB}=[(3,4)+(6,-5)]\cdot(-13,-15)=(9,-1)\cdot(-13,-15)=9\times(-13)+(-1)\times(-15)=-117+15=-102(\mathrm{J})$.

思考 2. 本例(3)条件变为"两个恒力 $\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{F}_2=4\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}$ 作用于同一质点，该质点从点 $A(20,15)$移动到点 $B(7,0)$(其中 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 分别是与 x 轴、y 轴方向相同的单位向量)"，求 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 分别对该质点做的功.

解：由题意，$\overrightarrow{AB}=(7,0)-(20,15)=(-13,-15)$，$\boldsymbol{F}_1=(1,1)$，$\boldsymbol{F}_2=(4,-5)$.

$\boldsymbol{F}_1$ 做的功 $W_1=\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{s}=\boldsymbol{F}_1\cdot\overrightarrow{AB}=(1,1)\cdot(-13,-15)=-28(\mathrm{J})$，

$\boldsymbol{F}_2$ 做的功 $W_2=\boldsymbol{F}_2\cdot\boldsymbol{s}=\boldsymbol{F}_2\cdot\overrightarrow{AB}=(4,-5)\cdot(-13,-15)=23(\mathrm{J})$.

反思提炼

用向量解决物理问题的一般步骤

(1)问题的转化，即把物理问题转化为数学问题；

(2)模型的建立，即建立以向量为载体的数学模型；

(3)参数的获得，即求出数学模型的有关解——理论参数值；

(4)问题的答案，即回到问题的初始状态，解释相关的物理现象.

探究训练

1. 若向量$\overrightarrow{OF_1}=(2,2)$，$\overrightarrow{OF_2}=(-2,3)$分别表示两个力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，则$|\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2|$为 ( )

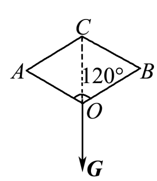
A.$(0,5)$ B.$(4,-1)$

C.$2\sqrt{2}$ D.5

D **解析**：因为 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=\overrightarrow{OF_1}+\overrightarrow{OF_2}=(0,5)$，所以$|\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2|=\sqrt{0^2+5^2}=5$.

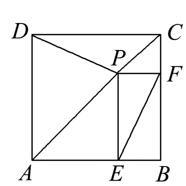
2. 用两条成 120°角的等长绳子悬挂一个灯具，已知灯具所受重力为 10 N，则每根绳子的拉力大小为________N.

10 **解析**：如图，由题意，得$\angle AOC=\angle BOC=60°$，$|\overrightarrow{OC}|=10$，则$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=10$，即每根绳子的拉力大小为 10 N.

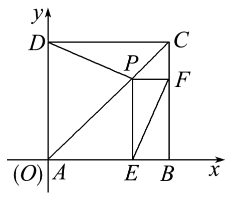


学习任务二 利用向量证明平面几何问题

例 2 如图，在正方形 $ABCD$ 中，P 为对角线 AC 上任一点，$PE\perp AB$，$PF\perp BC$，垂足分别为 E，F，连接 DP，EF，求证：$DP\perp EF$.



证明:设正方形 $ABCD$ 的边长为 1,建立如图所示的平面直角坐标系.



设 $P(x,x)$,则 $D(0,1)$,$E(x,0)$,$F(1,x)$,

所以$\overrightarrow{DP}=(x,x-1)$,$\overrightarrow{EF}=(1-x,x)$.

因为$\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{EF}=x(1-x)+x(x-1)=0$,

所以$\overrightarrow{DP}\perp\overrightarrow{EF}$,即 $DP\perp EF$.

反思提炼

用向量证明平面几何问题的两种基本思路

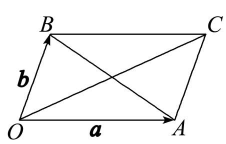
(1)利用向量的线性运算解决平面几何问题,基本步骤为:①选取基底;②用基底表示相关向量;③利用向量的线性运算或数量积找出相应关系;④把几何问题向量化.

(2)利用向量的坐标运算解决平面几何问题,基本步骤为:①建立适当的平面直角坐标系;②把相关向量坐标化;③利用向量的坐标运算找出相应关系;④把几何问题向量化.

探究训练

1. 试用向量方法证明平行四边形对角线的平方和等于其各边平方的和.

证明:如图所示,在平行四边形 $OACB$ 中,设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,



则$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

因为$\overrightarrow{OC}^2=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$,

$\overrightarrow{BA}^2=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$,

所以 $OC^2+BA^2=2|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{b}|^2$.

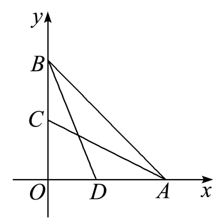
因为 $OA=BC=|\boldsymbol{a}|$,$OB=AC=|\boldsymbol{b}|$,

所以 $OC^2+BA^2=OA^2+BC^2+OB^2+AC^2$,

即平行四边形对角线的平方和等于其各边平方的和.

2. 求等腰直角三角形中两直角边上的中线所成的钝角的余弦值.

解:如图所示,分别以等腰直角三角形的两条直角边为 x 轴、y 轴建立平面直角坐标系.



设 $A(2a,0)$,$B(0,2a)$,则 $D(a,0)$,$C(0,a)$,从而可求得$\overrightarrow{AC}=(-2a,a)$,$\overrightarrow{BD}=(a,-2a)$.

不妨设$\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{BD}$的夹角为 θ,

则 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|}$

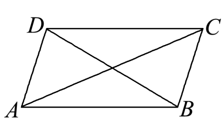
$=\dfrac{(-2a,a)\cdot(a,-2a)}{\sqrt{5}a\cdot\sqrt{5}a}$

$=\dfrac{-4a^2}{5a^2}=-\dfrac{4}{5}$,

所以所求钝角的余弦值为$-\dfrac{4}{5}$.

学习任务三　平面几何中的长度问题

例 3　如图,在平行四边形 $ABCD$ 中,$AD=1$,$AB=2$,对角线 $BD=2$,求对角线 AC 的长.



解:设$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

因为$|\overrightarrow{BD}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{1+4-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{5-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=2$,

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}$.

又因为$|\overrightarrow{AC}|^2=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=1+4+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6$,

所以$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{6}$,即 $AC=\sqrt{6}$.

反思提炼

利用向量法解决平面几何中的长度问题的策略

向量法求平面几何中的长度问题,即向量长度的求解,可以利用图形特点选择基底,转化为向量的数量积,用公式$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}^2$ 求解;也可以建立坐标系,确定相应向量的坐标,代入公式求解,若 $\boldsymbol{a}=(x,y)$,则$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

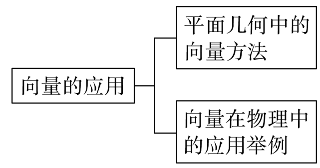
探究训练

在△ABC 中,已知 $A(4,1)$,$B(7,5)$,$C(-4,7)$,则边 BC 上的中线 AD 的长是　(　　)

A.$2\sqrt{5}$　B.$\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$　C.$3\sqrt{5}$　D.$\dfrac{7\sqrt{5}}{2}$

B　**解析**：因为 BC 的中点为 $D\left(\frac{3}{2},6\right)$，$\overrightarrow{AD}=\left(-\frac{5}{2},5\right)$，所以 $|\overrightarrow{AD}|=\frac{5\sqrt{5}}{2}$，即 $AD=\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

体系构建



课后素养评价（十二）

基础性·能力运用

1.在平面四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}=(-2,3)$，$\overrightarrow{BD}=(6,4)$，则该四边形的面积为　（　　）

A.$\sqrt{52}$　　B.$2\sqrt{52}$

C.13　　D.26

C　**解析**：因为 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-12+12=0$，所以 $AC\perp BD$，所以四边形 $ABCD$ 面积为 $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}|=\frac{1}{2}\times\sqrt{4+9}\times\sqrt{36+16}=13$.故选 C.

2.在四边形 $ABCD$ 中，若 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\mathbf{0}$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，则四边形为　（　　）

A.正方形　　B.矩形

C.等腰梯形　　D.菱形

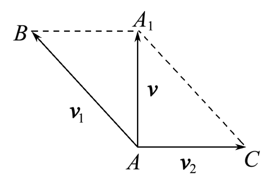
D　**解析**：由 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\mathbf{0}$，可得 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，即 $AB\perp\!\!\!\perp CD$，则四边形 $ABCD$ 为平行四边形.又由 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，可得 $AC\perp BD$，则平行四边形 $ABCD$ 为菱形.故选 D.

3.一艘船从河岸边出发向河对岸航行.已知船的速度 $\boldsymbol{v}_1=(m,8)$，水流速度 $\boldsymbol{v}_2=(6,0)$，那么当航程最短时船实际航行的速度大小为　（　　）

A.5　　B.10

C.8　　D.$6\sqrt{2}$

B　**解析**：如图所示，



A_1 是河对岸一点，且 AA_1 与河岸垂直，那么当这艘船实际沿 AA_1 的方向行驶时，航程最短，此时，$|\boldsymbol{v}|=|\overrightarrow{AA_1}|=8$，$|\boldsymbol{v}_2|=|\overrightarrow{AC}|=6$，$|\boldsymbol{v}_1|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{8^2+6^2}=10$，所以当航程最短时船实际航行的速度大小为 10.故选 B.

4.一物体在力 $\boldsymbol{F}_1=(3,-4)$，$\boldsymbol{F}_2=(2,-5)$，$\boldsymbol{F}_3=(3,1)$的共同作用下从点 $A(1,1)$移动到点 $B(0,5)$.在这个过程中三个力的合力所做的功等于________.

-40　**解析**：因为 $\boldsymbol{F}_1=(3,-4)$，$\boldsymbol{F}_2=(2,-5)$，$\boldsymbol{F}_3=(3,1)$，所以合力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=(8,-8)$，$\overrightarrow{AB}=(-1,4)$，则 $\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}=-1\times8-8\times4=-40$，即三个力的合力所做的功为$-40$.

综合性·创新提升

1.某人在高为 h m 的地方水平抛出一石块，速度为 $\boldsymbol{v}$，则石块的水平位移的大小是　（　　）

A.$\boldsymbol{v}\sqrt{\frac{2h}{g}}$　　B.$|\boldsymbol{v}|\sqrt{\frac{2h}{g}}$

C.$\boldsymbol{v}\sqrt{2hg}$　　D.$|\boldsymbol{v}|\sqrt{2hg}$

B　**解析**：设石子的落地时间为 t，则 $\frac{1}{2}gt^2=h$，解得 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$，所以石子落地点与抛出点的水平位移的大小 $|\boldsymbol{s}|=|\boldsymbol{v}|t=|\boldsymbol{v}|\sqrt{\frac{2h}{g}}$.故选 B.

2.已知△ABC，向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 满足 $\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，且 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}=\frac{1}{2}$，则△$ABC$ 的形状是　（　　）

A.无法确定的

B.直角三角形

C.等腰三角形

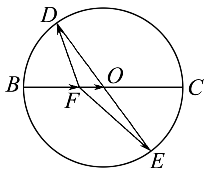
D.等边三角形

C　**解析**：由 $\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，得角 A 的平分线垂直于 BC，所以 $AB=AC$.

设$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CA}$的夹角为θ,则$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}=\cos\theta=\dfrac{1}{2}$.

又$\theta\in(0,\pi)$,所以$\theta=\dfrac{\pi}{3}$,$\angle BAC=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$.故$\triangle ABC$为等腰三角形.故选C.

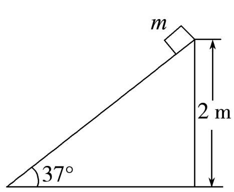
3. 如图,BC,DE是半径为1的圆O的两条直径,$\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FO}$,则$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{FE}$的值是　(　　)



A.$-\dfrac{3}{4}$　　B.$-\dfrac{8}{9}$　　C.$-\dfrac{1}{4}$　　D.$-\dfrac{4}{9}$

B　**解析**:因为⊙O的半径为1,$\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FO}$,所以$|\overrightarrow{FO}|=\dfrac{1}{3}$.又$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OD}$,$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OE}$,且$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OE}$,所以$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{FE}=(\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OD})\cdot(\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OE})=\overrightarrow{FO}^2-\overrightarrow{OD}^2=\dfrac{1}{9}-1=-\dfrac{8}{9}$.故选B.

4. 如图,在倾斜角为37°(sin 37°的值取0.6),高为2 m的斜面上,质量为5 kg的物体m沿斜面下滑至底部,物体m受到的摩擦力是它对斜面压力的0.5倍,则斜面对物体m的支持力所做的功为______J,重力对物体m所做的功为_________J.(g取9.8 m/s²)



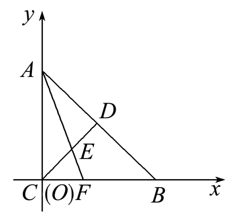
0　98　**解析**:物体m的位移大小为$|\boldsymbol{s}|=\dfrac{2}{\sin 37°}=\dfrac{10}{3}$(m),则支持力对物体$m$所做的功为$W_1=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos 90°=0$(J);重力对物体$m$所做的功为$W_2=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{G}||\boldsymbol{s}|\cos 53°=5\times9.8\times\dfrac{10}{3}\times0.6=98$(J).

5. 在Rt△ABC中,$\angle C=90°$,设$AC=m$,$BC=n$.

(1)若D为斜边AB的中点,求证:$CD=\dfrac{1}{2}AB$;

(2)若E为CD的中点,连接AE并延长交BC于点F,求AF的长度(用m,n表示).

(1)**证明**:以C为坐标原点,以边CB,CA所在的直线分别为x轴、y轴建立平面直角坐标系,如图所示,则$A(0,m)$,$B(n,0)$.



因为D为斜边AB的中点,所以$D\left(\dfrac{n}{2},\dfrac{m}{2}\right)$,

所以$|\overrightarrow{CD}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{n^2+m^2}$.

因为$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{m^2+n^2}$,

所以$|\overrightarrow{CD}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$,即$CD=\dfrac{1}{2}AB$.

(2)**解**:因为E为CD的中点,所以$E\left(\dfrac{n}{4},\dfrac{m}{4}\right)$.

设$F(x,0)$,则$\overrightarrow{AE}=\left(\dfrac{n}{4},-\dfrac{3m}{4}\right)$,$\overrightarrow{AF}=(x,-m)$.

因为A,E,F三点共线,所以$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AE}$.

即$(x,-m)=\lambda\left(\dfrac{n}{4},-\dfrac{3m}{4}\right)$,

则$\begin{cases}x=\dfrac{n}{4}\lambda,\\-m=-\dfrac{3}{4}m\lambda,\end{cases}$

故$\lambda=\dfrac{4}{3}$,$x=\dfrac{n}{3}$,

所以$F\left(\dfrac{n}{3},0\right)$,

所以$|\overrightarrow{AF}|=\dfrac{1}{3}\sqrt{n^2+9m^2}$,

即$AF=\dfrac{1}{3}\sqrt{n^2+9m^2}$.

6.4.3 余弦定理、正弦定理

第1课时 余弦定理

学习任务目标

1.掌握余弦定理的两种表示形式及证明余弦定理的向量方法，并会运用余弦定理解决两类基本的解三角形问题.

2.利用向量的数量积推出余弦定理及其推论，并通过实践掌握运用余弦定理解决两类基本的解三角形问题的方法.

问题式预习

知识清单

1.余弦定理

在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别是a,b,c，则有

余弦定理	语言叙述	三角形中任何一边的平方，等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍
	公式表达	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$， $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$， $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$
	推论	$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$， $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$， $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

2.解三角形

一般地，三角形的三个角A,B,C和它们的对边a,b,c叫做三角形的元素.已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做解三角形.

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").

(1)余弦定理不适用于直角三角形. (×)

(2)在$\triangle ABC$中，已知两边及夹角时，$\triangle ABC$不一定唯一. (×)

(3)当$b^2+c^2-a^2>0$时，$\triangle ABC$为锐角三角形. (×)

(4)若$\triangle ABC$为锐角三角形，则$b^2+c^2-a^2>0$. (√)

2.$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$a=\sqrt{5}$，$c=2$，$\cos A=\frac{2}{3}$，则$b=$ ( )

A.$\sqrt{2}$ B.$\sqrt{3}$

C.2 D.3

D **解析**：由余弦定理得$5=b^2+4-2\times b\times 2\times\frac{2}{3}$，解得$b=3$(负值舍去).

3.请思考并回答问题：

(1)在三角形的三条边和三个内角六个元素中，你认为已知哪些元素利用余弦定理可求得其他元素？

提示：已知两边及一角；已知三条边.这两种类型的三角形都可用余弦定理求得其他元素.

(2)已知$\triangle ABC$的三边长分别为a,b,c，如何判断$\triangle ABC$的形状？

提示：不妨设$a\leqslant b\leqslant c$，则当$a^2+b^2<c^2$时，$\triangle ABC$为钝角三角形；当$a^2+b^2=c^2$时，$\triangle ABC$为直角三角形；当$a^2+b^2>c^2$时，$\triangle ABC$为锐角三角形.

任务型课堂

学习任务一 已知两边及一角解三角形

例1 在$\triangle ABC$中，已知$b=3$，$c=3\sqrt{3}$，$B=30°$，求角A,C和边a.

解：由余弦定理得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，即$3^2=a^2+(3\sqrt{3})^2-2a\times 3\sqrt{3}\times\cos 30°$，

所以$a^2-9a+18=0$，解得$a=3$或$a=6$.

当$a=3$时，$A=30°$，所以$C=120°$.

当 $a=6$ 时，由余弦定理的推论得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3^2+(3\sqrt{3})^2-6^2}{2\times3\times3\sqrt{3}}=0$，所以 $A=90°$. 又 $B=30°$，所以 $C=60°$.

综上可得 $a=3, A=30°, C=120°$ 或 $a=6, A=90°, C=60°$.

[一题多思]

思考. 若将本例中“$c=3\sqrt{3}$”改为“$c=2\sqrt{3}$”“$B=30°$”改为“$A=30°$”，求角 B,C 和边 a.

解：直接运用余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=3^2+(2\sqrt{3})^2-2\times3\times2\sqrt{3}\times\cos 30°=3$，

从而 $a=\sqrt{3}$，

所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{(\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-3^2}{2\times\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

因为 $b<c$，所以 $B<C$. 又 $A+B+C=180°$，

所以 $B=60°, C=180°-A-B=180°-30°-60°=90°$.

反思提炼

已知两边及一角解三角形的步骤

(1)用余弦定理列出关于第三边的等量关系式建立方程，运用解方程的方法求出此边长；

(2)再用余弦定理及其推论以及三角形内角和定理求出其他两角.

探究训练

1. 在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$a=4, b=4, C=30°$，则 $c^2=$　　(　　)

A. $32-16\sqrt{3}$　　B. 16

C. $32+16\sqrt{3}$　　D. 48

A　**解析**：由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=4^2+4^2-2\times4\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=32-16\sqrt{3}$.

2. 在△ABC 中，$\cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$BC=1$，$AC=5$，则 $AB=$　　(　　)

A. $4\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{30}$

C. $\sqrt{29}$　　D. $2\sqrt{5}$

A　**解析**：因为 $\cos C=2\cos^2\frac{C}{2}-1=2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-1=-\frac{3}{5}$，所以 $AB^2=BC^2+AC^2-2BC\cdot AC\cdot\cos C=1+25-2\times1\times5\times\left(-\frac{3}{5}\right)=32$，所以 $AB=4\sqrt{2}$.

学习任务二　已知三边关系解三角形

例 2　在△ABC 中，已知 $a=2\sqrt{6}, b=6+2\sqrt{3}, c=4\sqrt{3}$，求 A,B,C 的大小.

解：根据余弦定理的推论，得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(6+2\sqrt{3})^2+(4\sqrt{3})^2-(2\sqrt{6})^2}{2\times(6+2\sqrt{3})\times4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $A\in(0,\pi)$，

所以 $A=\frac{\pi}{6}$.

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(2\sqrt{6})^2+(6+2\sqrt{3})^2-(4\sqrt{3})^2}{2\times2\sqrt{6}\times(6+2\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{4}$.

所以 $B=\pi-A-C=\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}$.

所以 $A=\frac{\pi}{6}, B=\frac{7\pi}{12}, C=\frac{\pi}{4}$.

反思提炼

已知三角形的三边解三角形的方法

(1)利用余弦定理的推论求出两个角，最后利用三角形的内角和定理求出第三个角.

(2)若已知三角形三边的比例关系，则常根据比例的性质引入参数 k，从而转化为已知三边求解.

探究训练

1. △ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 若 $b^2=ac$，$c=2a$，则 $\cos C=$　　(　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{3}{4}$　　D. $-\frac{3}{4}$

B　**解析**：由题意，得 $b^2=ac=2a^2$，即 $b=\sqrt{2}a$，

所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+2a^2-4a^2}{2a\times\sqrt{2}a}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

2. 在△ABC 中，$a=7, b=4\sqrt{3}, c=\sqrt{13}$，则△$ABC$ 的最小角为　　(　　)

A.$\frac{\pi}{3}$　　B.$\frac{\pi}{6}$

C.$\frac{\pi}{4}$　　D.$\frac{\pi}{12}$

B　**解析**：由三角形的边角关系可知，角 C 为 $\triangle ABC$ 的最小角，则 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{7^2+(4\sqrt{3})^2-(\sqrt{13})^2}{2\times7\times4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{6}$.

故选 B.

3.在$\triangle ABC$ 中，已知 $a=5$，$b=3$，角 C 的余弦值是方程 $5x^2+7x-6=0$ 的根，则第三边 c 的长为________.

4　**解析**：$5x^2+7x-6=0$ 可化为 $(5x-3)(x+2)=0$，

所以 $x_1=\frac{3}{5}$，$x_2=-2$（舍去），所以 $\cos C=\frac{3}{5}$.

根据余弦定理得，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=5^2+3^2-2\times5\times3\times\frac{3}{5}=16$，所以 $c=4$，即第三边 c 的长为 4.

学习任务三　判断三角形的形状

例 3　在$\triangle ABC$ 中，若 $b^2\sin^2C+c^2\sin^2B=2bc\cos B\cdot\cos C$，试判断$\triangle ABC$ 的形状.

解：将已知等式变形为 $b^2(1-\cos^2C)+c^2(1-\cos^2B)=2bc\cos B\cos C$.

由余弦定理并整理得 $b^2+c^2-b^2\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2-c^2\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2=2bc\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

所以 $b^2+c^2=\frac{[(a^2+b^2-c^2)+(a^2+c^2-b^2)]^2}{4a^2}=\frac{4a^4}{4a^2}=a^2$.

所以$\triangle ABC$ 是直角三角形且 $A=90^\circ$.

反思提炼

判断三角形的形状应围绕三角形的边角关系进行思考，可用余弦定理将已知条件转化为边边关系，通过因式分解、配方等方式得出边的相应关系，从而确定三角形的形状.

探究训练

在$\triangle ABC$ 中，已知 $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，且 $\sin A=2\sin B\cdot\cos C$，试确定$\triangle ABC$ 的形状.

解：因为 $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，所以 $a^2=b^2+c^2-bc$.

又因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，所以 $2\cos A=1$，

即 $\cos A=\frac{1}{2}$.又 $A\in(0,\pi)$，所以$\angle A=60^\circ$.

又 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin B\cos C$，

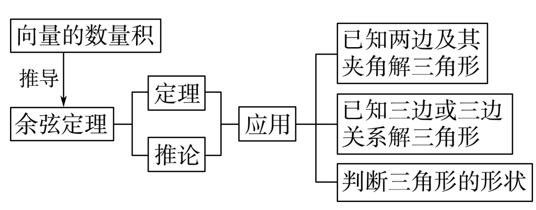
所以 $\sin B\cos C-\cos B\sin C=\sin(B-C)=0$，所以 $B=C$.

又因为 $B+C=180^\circ-A=120^\circ$，

所以 $A=B=C=60^\circ$.

故$\triangle ABC$ 是等边三角形.

体系构建



课后素养评价(十三)

基础性·能力运用

1.在△ABC中,角A,B,C的对边分别是a,b,c,已知$A=\frac{\pi}{3}$,$a=\sqrt{3}$,$b=1$,则$c=$　(　　)

A.1　　B.2

C.$\sqrt{3}-1$　　D.$\sqrt{3}$

B　**解析**:由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,将$A=\frac{\pi}{3}$,$a=\sqrt{3}$,$b=1$代入,得$3=1^2+c^2-2c\cos\frac{\pi}{3}$,则有$c^2-c-2=0$,且$c>0$,解得$c=2$.故选B.

2.在△ABC中,已知$b^2=ac$且$c=2a$,则$\cos B=$　(　　)

A.$\frac{1}{4}$　　B.$\frac{3}{4}$

C.$\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D.$\frac{\sqrt{2}}{3}$

B　**解析**:因为$b^2=ac$,$c=2a$,所以$b^2=2a^2$,所以$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+4a^2-2a^2}{2a\times 2a}=\frac{3}{4}$.故选B.

3.在△ABC中,内角A,B,C所对的边分别为a,b,c,已知$b^2+c^2-a^2=\sqrt{2}bc$,则角A为　(　　)

A.$\frac{\pi}{6}$　　B.$\frac{\pi}{4}$

C.$\frac{\pi}{3}$　　D.$\frac{\pi}{2}$

B　**解析**:因为$b^2+c^2-a^2=\sqrt{2}bc$,所以$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{2}bc}{2bc}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.又$A\in(0,\pi)$,所以$A=\frac{\pi}{4}$.故选B.

4.(多选题)在△ABC中,$AB=5$,$BC=7$,$AC=8$,则　(　　)

A.△ABC为锐角三角形

B.$A=30°$

C.$\cos B=\frac{1}{7}$

D.$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=5$

AC　**解析**:依题设可知,三角形最大角的余弦值$\cos B=\frac{5^2+7^2-8^2}{2\times5\times7}=\frac{1}{7}$,所以△$ABC$为锐角三角形,选项A,C正确;又因为$\cos A=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\times5\times8}=\frac{1}{2}$,所以$A=60°$,选项B错误;$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cdot\cos(180°-B)=-5$,选项D错误.故选AC.

5.在△ABC中,已知$a=\sqrt{6}$,$b=2$,$c=\sqrt{3}+1$,则$A=$________.

60°　**解析**:由余弦定理得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2^2+(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{6})^2}{2\times2\times(\sqrt{3}+1)}=\frac{1}{2}$.

又$0°<A<180°$,所以$A=60°$.

6.在△ABC中,角A,B,C的对边分别为a,b,c.若$a=3$,$b=2$,$\cos(A+B)=\frac{1}{3}$,则$c=$________.

$\sqrt{17}$　**解析**:由三角形内角和定理,可知$\cos C=-\cos(A+B)=-\frac{1}{3}$.

又由余弦定理得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=9+4-2\times3\times2\times\left(-\frac{1}{3}\right)=17$,所以$c=\sqrt{17}$.

7.在△ABC中,内角A,B,C所对的边分别为a,b,c,已知$4a^2=bc\cos A+ac\cos B$.

(1)求$\frac{a}{c}$的值;

(2)若$a=1$,$\cos B=\frac{3}{4}$,D是AC的中点,求BD的长.

解:(1)根据余弦定理,可得$4a^2=bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,即$8a^2=b^2+c^2-a^2+a^2+c^2-b^2$,即$4a^2=c^2$,所以$\frac{a}{c}=\frac{1}{2}$.

(2)由(1)可知$\frac{a}{c}=\frac{1}{2}$,所以$c=2$.

因为D是AC的中点,所以$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,

则$|\overrightarrow{BD}|^2=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{4}\times2^2+\frac{1}{4}\times1^2+\frac{1}{2}\times2\times1\times\frac{3}{4}=2$,

所以$BD=\sqrt{2}$.

综合性·创新提升

1.(多选题)在$\triangle ABC$中,已知$A=30°$,且$3a=\sqrt{3}b=12$,则c的值为 ( )

A.2 B.4

C.6 D.8

BD **解析**:由$3a=\sqrt{3}b=12$,得$a=4$,$b=4\sqrt{3}$.又$A=30°$,利用余弦定理可得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,即$16=48+c^2-12c$,整理得$c^2-12c+32=0$,解得$c=4$或$c=8$.故选BD.

2.已知$\triangle ABC$的面积为S,内角A,B,C的对边分别是a,b,c,且$a^2+4S=c^2+b^2$,则角A的大小为 ( )

A.$\frac{\pi}{4}$ B.$\frac{\pi}{3}$

C.$\frac{2\pi}{3}$ D.$\frac{3\pi}{4}$

A **解析**:因为$a^2+4S=c^2+b^2$,所以$a^2+4\times\frac{1}{2}bc\sin A=b^2+c^2$,则$\sin A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos A$,所以$\tan A=1$.又$A\in(0,\pi)$,则$A=\frac{\pi}{4}$.故选A.

3.在$\triangle ABC$中,内角A,B,C的对边分别为a,b,c.若$A=\frac{2\pi}{3}$,$bc=3$,且$b+c=\frac{\sqrt{5}}{2}a$,则$a=$ ( )

A.$2\sqrt{3}$ B.$3\sqrt{3}$

C.$2\sqrt{2}$ D.$3\sqrt{2}$

A **解析**:由余弦定理可得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc-2bc\cos\frac{2\pi}{3}=(b+c)^2-bc=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2-3$,

解得$a=2\sqrt{3}$.故选A.

4.在钝角三角形ABC中,角A,B,C所对的边分别为a,b,c.若$a=1$,$b=2$,则最大边c的取值范围是 ( )

A.$(\sqrt{5},+\infty)$ B.$(2,\sqrt{5})$

C.$(\sqrt{5},2\sqrt{2})$ D.$(\sqrt{5},3)$

D **解析**:因为$\triangle ABC$是钝角三角形,$a=1$,$b=2$,且c是最大边,由余弦定理可得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$,于是可得$c^2>a^2+b^2=5$,且$c>0$,解得$c>\sqrt{5}$.又$c<a+b=3$,所以边$c$的取值范围是$(\sqrt{5},3)$.故选D.

5.若$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边a,b,c满足$(a+b)^2-c^2=4$,且$C=60°$,则$ab=$________.

$\frac{4}{3}$ **解析**:因为$C=60°$,所以由余弦定理得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos 60°$,即$c^2=a^2+b^2-ab$①.

又因为$(a+b)^2-c^2=4$,所以$c^2=a^2+b^2+2ab-4$②.

联立①②,得$-ab=2ab-4$,所以$ab=\frac{4}{3}$.

6.在$\triangle ABC$中,若$AB=\sqrt{5}$,$AC=5$,且$\cos C=\frac{9}{10}$,则$BC=$________.

4或5 **解析**:由余弦定理得$(\sqrt{5})^2=5^2+BC^2-2\times5\times BC\times\frac{9}{10}$,所以$BC^2-9BC+20=0$,所以$BC=4$或5.

7.在$\triangle ABC$中,内角A,B,C所对的边分别为a,b,c,已知向量$\boldsymbol{m}=(1,\cos A-1)$,$\boldsymbol{n}=(\cos A,1)$满足$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$.

(1)求A的大小;

(2)若$a=\sqrt{3}$,$bc=2$,求$\triangle ABC$的周长.

解:(1)因为向量$\boldsymbol{m}=(1,\cos A-1)$,$\boldsymbol{n}=(\cos A,1)$满足$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$,

所以$1\times\cos A+(\cos A-1)\times1=2\cos A-1=0$,

所以$\cos A=\frac{1}{2}$.

又$0°<A<180°$,所以$A=60°$.

(2)在$\triangle ABC$中,由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$及$a=\sqrt{3}$,$bc=2$,得$3=b^2+c^2-2$,

所以$b^2+c^2=5$,所以$(b+c)^2=b^2+c^2+2bc=5+4=9$,所以$b+c=3$,

所以$\triangle ABC$的周长为$a+b+c=3+\sqrt{3}$.

第 2 课时　正弦定理

学习任务目标

1. 掌握正弦定理的内容及其证明方法.

2. 会运用正弦定理与三角形内角和定理解三角形.

问题式预习

知识清单

1.正弦定理

文字语言	在一个三角形中,各边和它所对角的<u>正弦</u>的比相等
符号语言	在△ABC 中,角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,则 $\underline{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}}$

2.正弦定理的常见变形

(1)$a=2R\sin A$,$b=2R\sin B$,$c=2R\sin C$(R 为△ABC 外接圆的半径).

(2)$\sin A=\frac{a}{2R}$,$\sin B=\frac{b}{2R}$,$\sin C=\frac{c}{2R}$(R 为△ABC 外接圆的半径).

(3)三角形的边长之比等于对应角的正弦之比,即 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$.

(4)$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

(5)$a\sin B=b\sin A$,$a\sin C=c\sin A$,$b\sin C=c\sin B$.

3.利用正弦定理可以解决的两类问题

(1)已知<u>两角</u>和一边,解三角形;

(2)已知两边和其中一边的<u>对角</u>,解三角形.

概念辨析

1. 判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)正弦定理对任意的三角形都成立.　(√)

(2)在△ABC 中,等式 $b\sin C=c\sin B$ 恒成立.　(√)

(3)在△ABC 中,已知 a,b,A,则能求出唯一的角 B.　(×)

(4)任意给出三角形的三个元素,都能求出其余元素.　(×)

(5)在△ABC 中,若 $A>B$,则必有 $\sin A>\sin B$.　(　　)

√　**提示:**$A>B\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow\sin A>\sin B$.

(6)在△ABC 中,$\frac{a+b-c}{\sin A+\sin B-\sin C}=\frac{a}{\sin A}$.　(　　)

√　**提示:**设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,则 $a=2R\sin A$,$b=2R\sin B$,$c=2R\sin C$,可知结论正确.

2. 在△ABC 中,$a=3$,$b=5$,$\sin A=\frac{1}{3}$,则 $\sin B=$　(　　)

A.$\frac{1}{5}$　　B.$\frac{5}{9}$　　C.$\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D.1

B　**解析:**由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,得 $\frac{3}{\frac{1}{3}}=\frac{5}{\sin B}$,即 $\sin B=\frac{5}{9}$.故选 B.

3. 请思考并回答问题:

在△ABC 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,那么 $a:b:c=A:B:C$ 对吗?

提示:不对.根据正弦定理可以得到 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$.

任务型课堂

学习任务一 已知两角及一边解三角形

1.在△ABC中，$A=60°$，$B=75°$，$a=10$，则c等于（　　）

A.$5\sqrt{2}$　　B.$10\sqrt{2}$

C.$\frac{10\sqrt{6}}{3}$　　D.$5\sqrt{6}$

C　**解析**：由$A+B+C=180°$，得$C=45°$.

由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，则$\frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，

解得$c=\frac{10\sqrt{6}}{3}$.

2.设△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c.若$a=\sqrt{3}$，$\sin B=\frac{1}{2}$，$C=\frac{\pi}{6}$，则$b=$________.

1　**解析**：因为$\sin B=\frac{1}{2}$，且$B\in(0,\pi)$，

所以$B=\frac{\pi}{6}$或$B=\frac{5\pi}{6}$.又$C=\frac{\pi}{6}$，

所以$B=\frac{\pi}{6}$，$A=\pi-B-C=\frac{2\pi}{3}$.

又$a=\sqrt{3}$，由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

则$\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{b}{\sin\frac{\pi}{6}}$，

解得$b=1$.

3.已知△ABC的外接圆半径是2 cm，$A=60°$，则边BC的长为________.

$2\sqrt{3}$ cm　**解析**：因为$\frac{BC}{\sin A}=2R$，

所以$BC=2R\sin A=4\sin 60°=2\sqrt{3}$(cm).

反思提炼

已知两角及一边解三角形的方法

(1)若所给边是已知角的对边，则先由正弦定理求另一边，再由三角形的内角和定理求第三个角，最后由正弦定理求第三边.

(2)若所给边不是已知角的对边，则先由三角形内角和定理求第三个角，再由正弦定理求另外两边.

学习任务二 已知两边及其中一边的对角解三角形

例1　在△ABC中，已知$c=\sqrt{6}$，$A=45°$，$a=2$，解三角形.

解：因为$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，所以$\sin C=\frac{c\sin A}{a}=\frac{\sqrt{6}\sin 45°}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为$0°<C<180°$，

所以$C=60°$或$C=120°$.

当$C=60°$时，$B=75°$，$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{\sqrt{6}\sin 75°}{\sin 60°}=\sqrt{3}+1$；

当$C=120°$时，$B=15°$，$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{\sqrt{6}\sin 15°}{\sin 120°}=\sqrt{3}-1$.

综上，$b=\sqrt{3}+1$，$B=75°$，$C=60°$或$b=\sqrt{3}-1$，$B=15°$，$C=120°$.

［一题多思］

思考. 若把本例中的条件“$A=45°$”改为“$C=45°$”，试判断角A有几个值.

解：因为$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

所以$\sin A=\frac{a\sin C}{c}=\frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

因为$c=\sqrt{6}>2=a$，所以$C>A$.

所以A为小于45°的锐角，且正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，这样的角A只有一个值.

反思提炼

已知三角形的两边和其中一边的对角解三角形的方法

(1)由正弦定理求出另一边对角的正弦值.

(2)如果已知的角为大边所对的角时，那么由三角形中大边对大角、大角对大边的法则能判断另一边所对的角为锐角，由正弦值可求唯一的锐角.

(3)如果已知的角为小边所对的角时，那么不能判断另一边所对的角为锐角，这时由正弦值可得到两个角，要进行分类讨论.

探究训练

1. 在$\triangle ABC$中，$AB=2$，$AC=3$，$B=60^\circ$，则$\cos C$等于为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

B　**解析**：由正弦定理，得$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}$，即$\frac{2}{\sin C}=\frac{3}{\sin 60^\circ}$，解得$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 因为$AB<AC$，所以$C<B$，所以$\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

2. 在$\triangle ABC$中，已知$a=2$，$c=\sqrt{6}$，$C=\frac{\pi}{3}$，求A，B，b.

解：因为$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，所以$\frac{2}{\sin A}=\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，解得$\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又因为$a<c$，$C=\frac{\pi}{3}$，所以$A=\frac{\pi}{4}$，

所以$B=\pi-A-C=\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{12}$.

所以$\sin B=\sin(A+C)$

$=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

所以$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}+1$.

学习任务三　判断三角形的形状

例 2　在$\triangle ABC$中，若$\sin A=2\sin B\cos C$，且$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$，试判断$\triangle ABC$的形状.

解：因为$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$，所以由正弦定理可得$a^2=b^2+c^2$，所以$A=90^\circ$，$B+C=90^\circ$.

由$\sin A=2\sin B\cos C$，得$\sin 90^\circ=2\sin B\cos(90^\circ-B)$，所以$\sin^2 B=\frac{1}{2}$.

因为B是锐角，所以$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$B=45^\circ$，$C=45^\circ$.

所以$\triangle ABC$是等腰直角三角形.

[一题多思]

思考. 若本例中的条件"$\sin A=2\sin B\cos C$"改为"$\sin^2 A=2\sin B\sin C$"，试判断$\triangle ABC$的形状.

解：由$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$，得$a^2=b^2+c^2$，所以$A=90^\circ$.

因为$\sin^2 A=2\sin B\sin C$，所以$a^2=2bc$，所以$b^2+c^2=2bc$，所以$b=c$，

所以$\triangle ABC$是等腰直角三角形.

反思提炼

判断三角形形状的方法及注意事项

(1)利用余弦定理、正弦定理把已知条件转化为边(或角)的关系，通过因式分解、配方等方法得出边(或角)的相应关系，从而判断三角形的形状.

(2)统一成边(或角)的关系后，等式两边不要轻易约分，否则可能会漏解.

探究训练

在$\triangle ABC$中，已知$3b=2\sqrt{3}a\sin B$，且$\cos B=\cos C$，角A是锐角，则$\triangle ABC$的形状是（　　）

A. 直角三角形

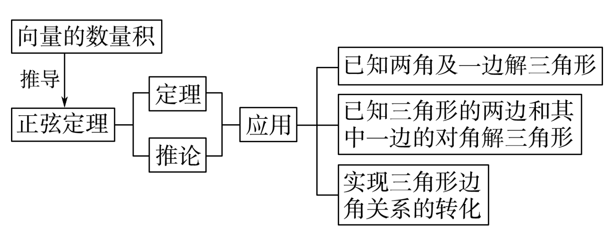
B. 等腰三角形

C. 等腰直角三角形

D. 等边三角形

D　**解析**：由$3b=2\sqrt{3}a\sin B$，得$\frac{b}{\sin B}=\frac{2\sqrt{3}a}{3}$，又$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$，所以$\frac{a}{\sin A}=\frac{2\sqrt{3}a}{3}$，即$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 又角$A$是锐角，所以$A=60^\circ$. 又$\cos B=\cos C$，且$B$，$C$都为三角形的内角，所以$B=C$. 故$\triangle ABC$是等边三角形. 故选D.

体系构建



课后素养评价(十四)

基础性·能力运用

1. 设△ABC的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c.若$A+B=\frac{5\pi}{6}$,$a=3$,$c=4$,则$\sin A=$ (　　)

A.$\frac{4}{5}$　　B.$\frac{3}{8}$　　C.$\frac{3}{4}$　　D.$\frac{2}{3}$

B　**解析**:因为$A+B=\frac{5\pi}{6}$,所以$C=\frac{\pi}{6}$.由$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,得$\frac{3}{\sin A}=8$,所以$\sin A=\frac{3}{8}$.故选B.

2. 在△ABC中,$a=b\sin A$,则△ABC一定是 (　　)

A.锐角三角形　　B.直角三角形

C.钝角三角形　　D.等腰三角形

B　**解析**:由题意有$\frac{a}{\sin A}=b=\frac{b}{\sin B}$,则$\sin B=1$,即角$B$为直角,故△$ABC$是直角三角形.故选B.

3. 已知△ABC中,$b=4\sqrt{3}$,$c=2$,$C=30°$,那么此三角形 (　　)

A.有一解

B.有两解

C.无解

D.解的个数不确定

C　**解析**:由正弦定理和已知条件,得$\frac{4\sqrt{3}}{\sin B}=\frac{2}{\sin 30°}$,所以$\sin B=\sqrt{3}>1$,所以此三角形无解.故选C.

4. 在△ABC中,$AB=\sqrt{6}$,$A=75°$,$B=45°$,则$AC=$________.

2　**解析**:由正弦定理,得$\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$,所以$\frac{AC}{\sin 45°}=\frac{AB}{\sin[180°-(75°+45°)]}$,

即$AC=\frac{AB}{\sin 60°}\times\sin 45°=\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$.

5. 在△ABC中,已知$a=2$,$A=60°$,则△ABC的外接圆的直径为________.

$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　**解析**:△ABC外接圆的直径$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{2}{\sin 60°}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

6. 在△ABC中,内角A,B,C的对边分别为a,b,c,且$b\sin A=\sqrt{3}a\cos B$.

(1)求角B的大小;

(2)若$b=3$,$\sin C=2\sin A$,求a,c的值.

解:(1)由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2R$,$R$为△$ABC$外接圆的半径.又$b\sin A=\sqrt{3}a\cos B$,

所以$2R\sin B\sin A=\sqrt{3}\cdot 2R\sin A\cos B$.

又$\sin A\neq 0$,

所以$\sin B=\sqrt{3}\cos B$,即$\tan B=\sqrt{3}$.

又因为$0<B<\pi$,所以$B=\frac{\pi}{3}$.

(2)由$\sin C=2\sin A$及$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,得$c=2a$.

由$b=3$及余弦定理得$9=a^2+c^2-ac$,

所以$a^2+4a^2-2a^2=9$,解得$a=\sqrt{3}$(负值舍去),故$c=2\sqrt{3}$.

综合性·创新提升

1. 已知△ABC的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c,若$2c\cos A=a\cos B+b\cos A$,则$A=$ (　　)

A.$\frac{\pi}{6}$　　B.$\frac{\pi}{4}$　　C.$\frac{\pi}{3}$　　D.$\frac{2\pi}{3}$

C　**解析**:在△ABC中,由$2c\cos A=a\cos B+b\cos A$及正弦定理,得$2\sin C\cos A=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin(A+B)=\sin C$,而$0<C<\pi$,$\sin C>0$,因此$\cos A=\frac{1}{2}$.又$0<A<\pi$,所以$A=\frac{\pi}{3}$.故选C.

2. 已知a,b,c分别为△ABC的三个内角A,B,C的对边,$C=\frac{\pi}{4}$,$c=\sqrt{2}$,$a=x$,若满足条件的三角形有两个,则x的取值范围是 (　　)

A.$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　　B.$(\sqrt{2},2)$

C.$(1,2)$　　D.$(1,\sqrt{2})$

B 解析：在$\triangle ABC$中，根据正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，即$\frac{x}{\sin A}=\frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{\pi}{4}}$，所以$\sin A=\frac{1}{2}x$。由题意，可得当$A\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$时，满足条件的$\triangle ABC$有两个，所以$\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{1}{2}x<1$，解得$\sqrt{2}<x<2$，则$x$的取值范围是$(\sqrt{2},2)$。故选B.

3.$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c。已知$\sin B+\sin A(\sin C-\cos C)=0$，$a=2$，$c=\sqrt{2}$，则$C=$ ( )

A.$\frac{\pi}{12}$ B.$\frac{\pi}{6}$ C.$\frac{\pi}{4}$ D.$\frac{\pi}{3}$

B 解析：由题意得$\sin(A+C)+\sin A(\sin C-\cos C)=0$，

$\sin A\cos C+\cos A\sin C+\sin A\sin C-\sin A\cos C=0$，

即$\sin C(\sin A+\cos A)=\sqrt{2}\sin C\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=0$，

又$\sin C\neq0$，$A\in(0,\pi)$，所以$A=\frac{3\pi}{4}$。

由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，即$\frac{2}{\sin\frac{3\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{\sin C}$，

则$\sin C=\frac{1}{2}$，得$C=\frac{\pi}{6}$或$C=\frac{5\pi}{6}$（舍）。故选B.

4.在$\triangle ABC$中，$AB=\sqrt{3}$，$AC=1$，$B=30°$，则$\triangle ABC$的面积等于________.

$\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\frac{\sqrt{3}}{4}$ 解析：由正弦定理得$\sin C=\frac{AB\cdot\sin B}{AC}=\frac{\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$。又因为$0°<C<180°$，所以$C=60°$或$120°$，所以$A=90°$或$30°$。

因为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A$，所以$\triangle ABC$的面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\frac{\sqrt{3}}{4}$。

5.在$\triangle ABC$中，若$b=5$，$B=\frac{\pi}{4}$，$\tan A=2$，则$\sin A=$________，$a=$________.

$\frac{2\sqrt{5}}{5}$ $2\sqrt{10}$ 解析：由$\tan A=2$，得$\sin A=2\cos A$，所以$\sin^2A=4\cos^2A=4-4\sin^2A$，

所以$\sin A=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$。

因为A为$\triangle ABC$的内角，所以$\sin A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$。

由正弦定理得$a=\frac{b}{\sin B}\cdot\sin A=2\sqrt{10}$。

6.在锐角三角形ABC中，角A,B,C的对边分别是a,b,c，且$(b-c)(\sin B-\sin C)=a\sin A-b\sin C$.

(1)求角A的大小；

(2)求$\sin B+\sin C$的取值范围.

解：(1)因为$(b-c)(\sin B-\sin C)=a\sin A-b\sin C$，所以由正弦定理可得$(b-c)(b-c)=a^2-bc$，即$b^2+c^2-a^2=bc$。

由余弦定理可得

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$。

又$A\in(0,\pi)$，所以$A=\frac{\pi}{3}$。

(2)由$A+B+C=\pi$，$A=\frac{\pi}{3}$，得$C=\frac{2\pi}{3}-B$。

在锐角三角形ABC中，有$\begin{cases}0<\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2},\\0<B<\frac{\pi}{2},\end{cases}$解得$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$，

所以$\sin C=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)=\sin\left[\pi-\left(B+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)$，

所以$\sin B+\sin C=\sin B+\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B=\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$。

因为$B\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，从而$B+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，

所以$\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，

所以$\sin B+\sin C\in\left(\frac{3}{2},\sqrt{3}\right]$。

故$\sin B+\sin C$的取值范围为$\left(\frac{3}{2},\sqrt{3}\right]$。

第3课时　余弦定理、正弦定理应用举例

学习任务目标

1.进一步熟悉余弦定理、正弦定理.

2.了解常用的测量中的相关术语.

3.能运用余弦定理、正弦定理等知识和方法解决有关距离、高度、角度的实际问题.

问题式预习

知识清单

1.基线的概念与选择原则

(1)定义

在测量过程中，我们把根据测量的需要而确定的线段叫做基线.

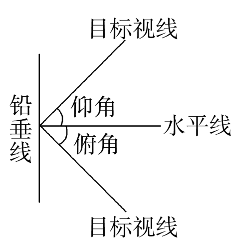
(2)性质

为使测量具有较高的精确度，应根据实际需要选取合适的基线长度.一般来说，基线越长，测量的精确度越高.

2.测量过程中有关角的概念

(1)仰角和俯角

与视线在同一铅垂平面内的水平线和视线的夹角中，视线在水平线上方的叫做仰角，视线在水平线下方的叫做俯角，如图所示.



(2)方位角

指从正北方向线顺时针转到目标方向线的水平夹角，如点 B 的方位角为 α（如图1所示）.

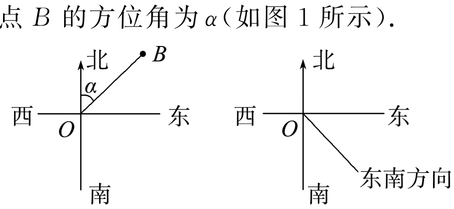


图1　　　图2

(3)方位角的其他表示——方向角

①正南方向：指从原点 O 出发的经过目标的射线与正南方向线重合，即目标在正南方向线上.依此可类推正北方向、正东方向和正西方向.

②东南方向：指经过目标的射线是正东方向线和正南方向线的夹角的平分线（如图2所示）.

概念辨析

1.判断正误（正确的打"√"，错误的打"×"）.

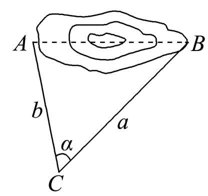
(1)从 A 处望 B 处的仰角为 α，从 B 处望 A 处的俯角为 β，则 α,β 的关系为 $\alpha=\beta$.　　(√)

(2)俯角是铅垂线与视线所成的角，其范围为 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.　　(×)

(3)若点 P 在点 Q 的北偏东 $44°$，则点 Q 在点 P 的东偏北 $46°$.　　(×)

(4)方位角的范围是 $(0,\pi)$，方向角的范围是 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.　　(×)

2.如图，要测量一水塘两侧 A,B 两点间的距离，其方法是先选定适当的位置 C，用经纬仪测出角 α，再分别测出 AC,BC 的长 b,a，则可求出 A,B 两点间的距离.若测得 $AC=400\ \mathrm{m}$，$BC=600\ \mathrm{m}$，$\angle ACB=60°$，则 A,B 两点间的距离为________m.



$200\sqrt{7}$　**解析**：在△ABC 中，由余弦定理得

$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\angle ACB$，

所以 $AB^2=400^2+600^2-2\times400\times600\cos60°=280\ 000$.

所以 $AB=200\sqrt{7}$ m，

即 A,B 两点间的距离为 $200\sqrt{7}$ m.

3.请思考并回答问题：

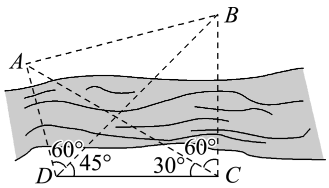
如何测出两个不能到达的点之间的距离？

提示：利用测角仪和皮尺测量相关的角、边，利用正弦定理、余弦定理求出两点间的距离.

任务型课堂

学习任务一　测量距离问题

例 1　如图，A，B 两点都在河的对岸（不可到达），若在河岸选取相距 20 m 的 C，D 两点，测得 $\angle BCA=60°$，$\angle ACD=30°$，$\angle CDB=45°$，$\angle BDA=60°$，那么 A，B 两点间的距离是多少？



解：在 $\triangle ACD$ 中，由正弦定理得 $AC=\dfrac{20\sin(45°+60°)}{\sin[180°-(30°+45°+60°)]}=\dfrac{20\sin 105°}{\sin 45°}=\dfrac{20\sin 75}{\sin 45°}=10(1+\sqrt{3})(\mathrm{m})$，

在 $\triangle BCD$ 中，$\angle BCD=30°+60°=90°$，$\angle BDC=45°$，所以 $\triangle BCD$ 为等腰直角三角形，$BC=CD=20$ m.

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\angle BCA}=10\sqrt{6}(\mathrm{m})$.

所以 A，B 两点间的距离为 $10\sqrt{6}$ m.

反思提炼

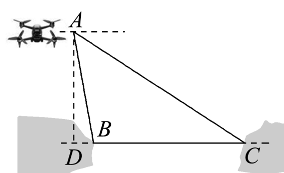
三角形中与距离有关的问题的求解策略

(1)解决与距离有关的问题，若所求的线段在一个三角形中，则直接利用正弦定理、余弦定理求解即可；若所求的线段在多个三角形中，则要根据条件选择适当的三角形，再利用正弦定理、余弦定理求解.

(2)解决与距离有关的问题的关键是将问题转化为求三角形中的边，分析所解三角形中已知哪些元素，还需要求出哪些元素，灵活应用正弦定理、余弦定理来解决.

探究训练

如图，从无人机 A 上测得正前方的峡谷的两岸 B，C 的俯角分别为 75°，30°，若无人机的高度 AD 是 $15(\sqrt{3}+1)$，则此时峡谷的宽度 BC 是　　(　　)



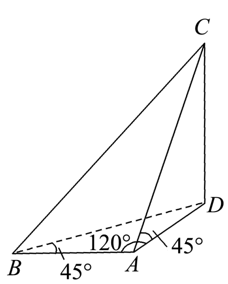
A.60　　　　B.$60(\sqrt{3}+1)$

C.30　　　　D.$30(\sqrt{3}+1)$

A　**解析**：由已知得 $\angle ACB=30°$，$\angle ABD=75°$，得到 $CD=\dfrac{15(\sqrt{3}+1)}{\tan 30°}=15(3+\sqrt{3})$，$BD=\dfrac{15(\sqrt{3}+1)}{\tan 75°}=15(\sqrt{3}-1)$，所以 $BC=CD-BD=60$.故选 A.

学习任务二　测量高度问题

例 2　如图，A，B 是水平面内的两个点，相距 800 m，在点 A 测得山顶 C 的仰角为 45°，$\angle BAD=120°$，又在点 B 测得 $\angle ABD=45°$，其中山脚 D 在水平面内，求山高 CD.



解：在 $\triangle ABD$ 中，$\angle BDA=180°-45°-120°=15°$，

由 $\dfrac{AB}{\sin 15°}=\dfrac{AD}{\sin 45°}$，得 $AD=\dfrac{AB\cdot\sin 45°}{\sin 15°}=\dfrac{800\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=800(\sqrt{3}+1)(\mathrm{m})$.

因为山脚 D 在水平面内，所以 $\angle CDA=90°$，又 $\angle CAD=45°$，所以 $CD=AD=800(\sqrt{3}+1)\mathrm{m}$，

即山的高度 $CD=800(\sqrt{3}+1)\mathrm{m}$.

反思提炼

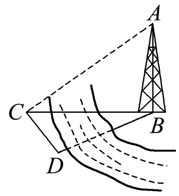
测量高度问题的解题思路

对于底部不能到达或者无法直接测量的物体的高度问题，先用正弦定理或余弦定理计算出物体的顶部或底部到一个可到达的点之间的距离，然后转化为解三角形问题.这类物体高度的求解一般在与地面垂直的竖直平面内构造三角形或者在空间中构造三棱锥，再依据条件，利用正弦定理、余弦定理解其中的一个或者几个三角形，从而求出物体的高度.

探究训练

如图，在测量河对岸的塔高 AB 时，可以选与塔底 B 在同一水平面内的两点 C 与 D.现测得 $\angle BCD=\alpha$，

$\angle BDC=\beta$，$CD=s$，并在点 C 测得塔顶 A 的仰角为 θ，求塔高 AB.



解：在△BCD 中，$\angle CBD=\pi-(\alpha+\beta)$，

由正弦定理得 $\dfrac{BC}{\sin\angle BDC}=\dfrac{CD}{\sin\angle CBD}$，

所以 $BC=\dfrac{CD\sin\angle BDC}{\sin\angle CBD}=\dfrac{s\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

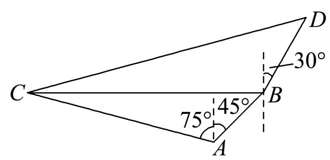
在 Rt△ABC 中，

$AB=BC\tan\angle ACB=\dfrac{s\cdot\sin\beta\tan\theta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

学习任务三 测量角度问题

例 3 在海岸 A 处，发现在北偏东 45°的方向，距 A 处$(\sqrt{3}-1)$n mile 的 B 处有一艘走私船，在 A 处北偏西 75°的方向，距离 A 处 2 n mile 的 C 处的缉私船奉命以 $10\sqrt{3}$ n mile/h 的速度追截走私船.此时，走私船正以 10 n mile/h 的速度从 B 处向北偏东 30°的方向逃窜，问：缉私船沿什么方向能最快追上走私船？

解：设缉私船用 t h 在 D 处追上走私船，画出如图的示意图，则有 $CD=10\sqrt{3}t$，$BD=10t$.



在△ABC 中，因为 $AB=\sqrt{3}-1$，$AC=2$，$\angle BAC=120°$，

所以由余弦定理，得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC=(\sqrt{3}-1)^2+2^2-2\times(\sqrt{3}-1)\times2\times\cos 120°=6$，

所以 $BC=\sqrt{6}$.

由正弦定理，得 $\sin\angle ABC=\dfrac{AC}{BC}\cdot\sin\angle BAC=\dfrac{2}{\sqrt{6}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$\angle ABC=45°$，即 BC 与正北方向成 90°角，所以$\angle CBD=90°+30°=120°$.

在△BCD 中，由正弦定理，得 $\sin\angle BCD=\dfrac{BD\cdot\sin\angle CBD}{CD}=\dfrac{10t\sin 120°}{10\sqrt{3}t}=\dfrac{1}{2}$，

所以$\angle BCD=30°$，即缉私船沿北偏东 60°的方向能最快追上走私船.

反思提炼

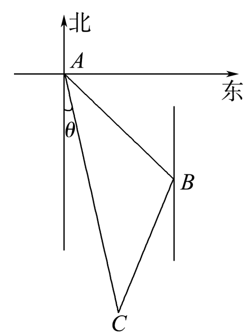
解决测量角度问题的常用方法与注意点

(1)测量角度问题的关键是弄清题意，画出图形，并在图形中标出有关的角和距离，再用正弦定理或余弦定理解三角形，最后将结果转化为实际问题的解.

(2)求角的度数时，多用余弦定理.因为余弦函数在$(0,\pi)$上是单调递减的，而正弦函数不单调，一个正弦值可能对应两个角.若角在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$内，则用正弦定理、余弦定理皆可.

探究训练

如图，甲船在 A 处；乙船在 A 处南偏东 45°，距 A 有 9 n mile的 B 处，并以 20 n mile/h 的速度沿南偏西 15°的方向行驶.若甲船沿南偏东 θ 的方向，以 28 n mile/h的速度行驶，恰好能在 C 处追上乙船.甲船用多少小时追上乙船？并求 $\sin\theta$ 的值.(结果保留根号)



解：设甲船用 t 小时在 C 处追上乙船，则在△ABC 中，$AC=28t$ n mile，$BC=20t$ n mile，$AB=9$ n mile，$\angle ABC=180°-15°-45°=120°$，

由余弦定理得

$(28t)^2=81+(20t)^2-2\times9\times20t\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，

即 $128t^2-60t-27=0$，

解得 $t=\dfrac{3}{4}$或 $t=-\dfrac{9}{32}$(舍去).

所以甲船用$\dfrac{3}{4}$ h 在 C 处追上乙船.

此时 $AC=21$ n mile，$BC=15$ n mile.

根据正弦定理，

得 $\sin\angle BAC=\dfrac{BC\cdot\sin\angle ABC}{AC}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$，

则 $\cos\angle BAC=\sqrt{1-\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{14}\right)^2}=\dfrac{11}{14}$.

又因为$\angle ABC=120°$，所以$\angle BAC$为锐角，$\theta=45°-\angle BAC$，

所以$\sin\theta=\sin(45°-\angle BAC)$

$=\sin 45°\cos\angle BAC-\cos 45°\sin\angle BAC$

$=\dfrac{11\sqrt{2}-5\sqrt{6}}{28}$.

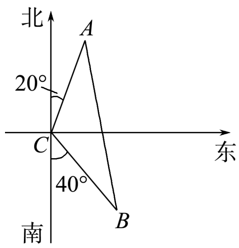
体系构建

- 正弦定理、余弦定理应用举例
  - 距离问题
  - 高度问题
  - 角度问题

课后素养评价(十五)

基础性·能力运用

1. 如图，已知两座灯塔A和B与海洋观察站C的距离都等于30 km，灯塔A在观察站C北偏东20°的方向，灯塔B在观察站C南偏东40°的方向，则灯塔A与灯塔B的距离为　　(　　)

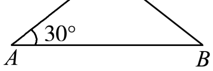


A.30 km　　B.$30\sqrt{2}$ km

C.$3\sqrt{3}$ km　　D.$30\sqrt{3}$ km

D　**解析**：由题意可知$AC=BC=30$，$\angle ACB=120°$，则$AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos 120°}=\sqrt{30^2+30^2-2\times30\times30\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=30\sqrt{3}$. 故选D.

2. 学校体育馆的屋架为等腰三角形，如图，测得AC的长度为4 m，$\angle A=30°$，则其跨度$AB=$　　(　　)



A.12 m　　B.8 m

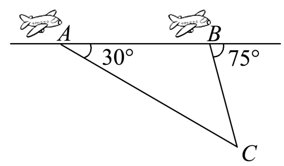
C.$3\sqrt{3}$ m　　D.$4\sqrt{3}$ m

D　**解析**：由题意知，$\angle A=\angle B=30°$，

所以$\angle C=180°-30°-30°=120°$.

由正弦定理，得$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}$，即$AB=\dfrac{AC\cdot\sin C}{\sin B}=\dfrac{4\cdot\sin 120°}{\sin 30°}=4\sqrt{3}$. 故选D.

3. 如图，已知飞机的航线AB和地面目标C在同一铅垂平面内，在A处测得目标C的俯角为30°，飞行26 km到达B处，测得目标C的俯角为75°，此时B处与地面目标C的距离为　　(　　)



A.$13\sqrt{6}$ km　　B.$5\sqrt{2}$ km

C.5 km　　D.$13\sqrt{2}$ km

D　**解析**：由题知，在$\triangle ABC$中，$\angle A=30°$，$\angle ABC=180°-75°=105°$，所以$\angle C=180°-30°-105°=45°$. 由正弦定理可知$\dfrac{BC}{\sin 30°}=\dfrac{AB}{\sin 45°}$，所以$BC=\dfrac{AB}{\sin 45°}\cdot\sin 30°=\dfrac{26}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\dfrac{1}{2}=13\sqrt{2}$(km). 故选D.

4. 如图，八卦桥(图1)是洛南县地标性建筑之一，它是一个八边形人行天桥，桥的中心处建有一座五层高的宝塔，晚上宝塔上的霓虹灯流光溢彩非常美丽. 若某同学为了测量宝塔的高度，在塔底部同一水平线上选取了C，D两点，测得塔的仰角分别为45°和60°，C，D间的距离是12 m(图2). 则宝塔的高度AB是(结果保留根号)　　(　　)

图1

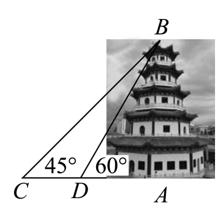


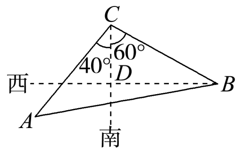
图2

A.$6\sqrt{3}$ m　　B.$12\sqrt{2}$ m

C.$(12+6\sqrt{3})$ m　　D.$(18+6\sqrt{3})$ m

D　**解析**：设宝塔的高度$AB=x$ m，因为$\angle ACB=45°$，$AB\perp AC$，故$AC=x$ m，而$CD=12$ m，故$AD=(x-12)$ m. 又$\angle ADB=60°$，所以$\tan\angle ADB=\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{x}{x-12}=\sqrt{3}$，解得$x=18+6\sqrt{3}$，即宝塔的高度$AB$是$(18+6\sqrt{3})$ m. 故选D.

5. 如图,两座灯塔 A 和 B 与河岸观察站 C 的距离相等,灯塔 A 在观察站南偏西 $40°$,灯塔 B 在观察站南偏东 $60°$,则灯塔 A 在灯塔 B 的 ( )

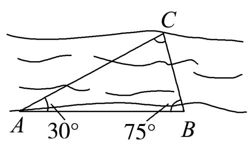


A.北偏东 $10°$　　B.北偏西 $10°$

C.南偏东 $80°$　　D.南偏西 $80°$

D　**解析**:由条件及题图可知,$\angle A=\angle CBA=40°$,又 $\angle BCD=60°$,所以 $\angle CBD=30°$,所以 $\angle DBA=10°$,因此灯塔 A 在灯塔 B 南偏西 $80°$.故选 D.

6. 如图,为了测定河的宽度,在河的一侧岸边选定两点 A,B,望对岸标记物 C,测得 $\angle CAB=30°$,$\angle CBA=75°$,$AB=120$ m,则河的宽度为________m.



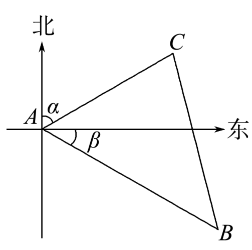
60　**解析**:由题意知,$\angle ACB=180°-30°-75°=75°$,所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.河宽即边 AB 上的高,这与边 AC 上的高相等,过点 B 作 $BD\perp AC$ 于点 D(图略),

所以 $BD=120\cdot\sin 30°=60$(m),

所以河宽为 60 m.

7. 已知某飞船着陆地点在搜救队 A 组北偏东 $60°$方向 60 km 处,搜救队 B 组位于 A 组东偏南 $30°$方向 80 km处,则搜救队 B 组距着陆点________km.

$20\sqrt{13}$　**解析**:记着陆点为点 C,如图,



$AB=80$ km,$AC=60$ km,$\alpha=60°$,$\beta=30°$,所以 $\angle BAC=60°$.

在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理得

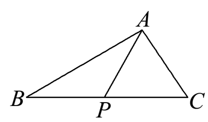
$$\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{1}{2},$$

解得 $BC=20\sqrt{13}$.

8. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,P 是边 BC 上的一点,$\angle APC=60°$,$AB=2\sqrt{3}$,$AP+BP=4$.

(1)求 BP 的长;

(2)若 $AC=\frac{5\sqrt{3}}{4}$,求 $\cos\angle ACP$ 的值.



解:(1)由已知,得 $\angle APB=120°$,

又 $AB=2\sqrt{3}$,$AP+BP=4$,

在 $\triangle ABP$ 中,由余弦定理,

得 $(2\sqrt{3})^2=BP^2+(4-BP)^2-2\times BP\times(4-BP)\times\cos 120°$,

整理,得 $BP^2-4BP+4=0$,解得 $BP=2$.

(2)由(1)知,$AP=2$,

所以在 $\triangle ACP$ 中,由正弦定理,得

$$\frac{AC}{\sin 60°}=\frac{AP}{\sin\angle ACP},$$

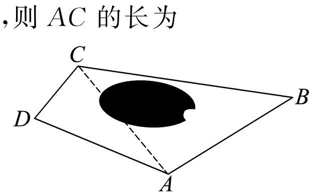
解得 $\sin\angle ACP=2\times\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5\sqrt{3}}{4}}=\dfrac{4}{5}$.

因为 $2<\frac{5\sqrt{3}}{4}$,所以 $AP<AC$,从而 $\angle ACP<\angle APC$,即 $\angle ACP$ 是锐角,

所以 $\cos\angle ACP=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$.

综合性·创新提升

1. 如图,为了测量 A,C 两点间的距离,选取同一平面内 B,D 两点,测出四边形 $ABCD$ 各边的长度(单位:km),$AB=5$,$BC=8$,$CD=3$,$DA=5$,且 $\angle B$ 与 $\angle D$ 互补,则 AC 的长为 ( )



A.7 km　　B.8 km　　C.9 km　　D.6 km

A　**解析**:在 $\triangle ABC$ 及 $\triangle ACD$ 中,由余弦定理得 $8^2+5^2-2\times8\times5\times\cos(\pi-D)=AC^2=3^2+5^2-2\times3\times5\times\cos D$,解得 $\cos D=-\frac{1}{2}$,所以 $AC=\sqrt{49}=7$.

2. 老虎甲在 A 地发现野鹿乙在北偏东 $15°$方向上的 B 地,立刻以 $10\sqrt{3}$ m/s 的速度进行追捕,与此同时,野鹿乙以 $10\sqrt{2}$ m/s 的速度往北偏东 $75°$方向逃跑.假设甲、乙都是匀速直线运动,且 $AB=500(\sqrt{6}-$

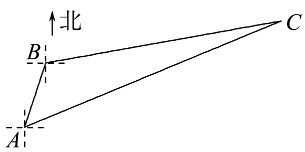
$\sqrt{2}$）m，则甲能够一次性捕获乙的最短时间为（　　）

A.60 s　　B.80 s

C.100 s　　D.120 s

C　**解析**：如图，设甲最快捕获乙的地点是点 C，时间为 t（单位：s），则 $AC=10\sqrt{3}t$ m，$BC=10\sqrt{2}t$ m. 由题意得 $B=180°-75°+15°=120°$，则 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B$，即 $3t^2=2\ 500(8-4\sqrt{3})+2t^2+50(2\sqrt{3}-2)t$，解方程得 $t=100$ 或 $t=-100(2-\sqrt{3})$（舍去）.

故选 C.



3.（多选题）某货轮在 A 处时，灯塔 B 在北偏东 75°方向，距离为 $12\sqrt{6}$ n mile；灯塔 C 在北偏西 30°方向，距离为 $8\sqrt{3}$ n mile.货轮由 A 处沿正北方向航行到 D 处时，灯塔 B 在南偏东 60°方向，则下列说法正确的是（　　）

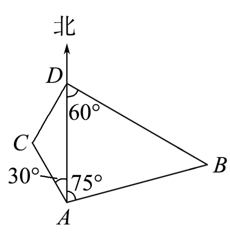
A.A 处与 D 处之间的距离是 24 n mile

B.灯塔 C 与 D 处之间的距离是 8 n mile

C.灯塔 C 在 D 处的西偏南 60°方向

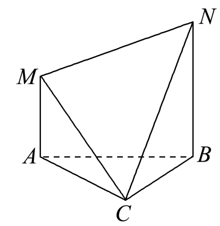
D.D 处在灯塔 B 的北偏西 30°方向

AC　**解析**：如图，在△ABD 中，由已知得∠$ADB=60°$，∠$DAB=75°$，



则∠$B=45°$，$AB=12\sqrt{6}$.由正弦定理得 $AD=\dfrac{AB\sin\angle B}{\sin\angle ADB}=\dfrac{12\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=24$，所以 A 处与 D 处之间的距离为 24 n mile，故 A 正确；在△ADC 中，由余弦定理得 $CD^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cdot\cos 30°$，又 $AC=8\sqrt{3}$，解得 $CD=8\sqrt{3}$，所以灯塔 C 与 D 处之间的距离为 $8\sqrt{3}$ n mile，故 B 错误；因为 $AC=CD=8\sqrt{3}$，所以∠$CDA=∠CAD=30°$，灯塔 C 在 D 处的南偏西 30°，故 C 正确；灯塔 B 在 D 的南偏东 60°，D 在灯塔 B 的北偏西 60°，故 D 错误.故选 AC.

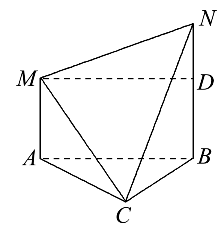
4.某数学兴趣小组欲测量一下校内旗杆顶部 M 和教学楼顶部 N 之间的距离.已知旗杆 AM 高 15 m，教学楼 BN 高 21 m，在与 A，B 同一水平面的 C 处测得旗杆顶部 M 的仰角为 30°，教学楼顶部 N 的仰角为 60°，∠$ACB=120°$，则 M，N 之间的距离为（　　）



A.$\sqrt{511}$ m　　B.$\sqrt{1\ 137}$ m

C.$\sqrt{1\ 143}$ m　　D.$\sqrt{1\ 173}$ m

D　**解析**：如图，由题意，过点 M 作 $MD\perp BN$ 于点 D，则 $MD=AB$.



在△ACM 中，$AM=15$，∠$ACM=30°$，所以 $AC=\sqrt{3}AM=15\sqrt{3}$.

在△BCN 中，$BN=21$，∠$BCN=60°$，所以 $BC=\dfrac{BN}{\sqrt{3}}=7\sqrt{3}$，$BD=AM=15$，$DN=BN-BD=6$.

在△ACB 中，∠$ACB=120°$，由余弦定理得

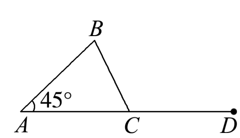
$AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\angle ACB}$

$=\sqrt{(15\sqrt{3})^2+(7\sqrt{3})^2-2\times15\sqrt{3}\times7\sqrt{3}\cos\angle120°}$

$=\sqrt{1\ 137}$，所以 $DM=AB=\sqrt{1\ 137}$.

在 Rt△DMN 中，∠$MDN=90°$，由勾股定理得 $MN=\sqrt{DM^2+DN^2}=\sqrt{(\sqrt{1\ 137})^2+6^2}=\sqrt{1\ 173}$.故选 D.

5.一次机器人足球比赛中，甲队 1 号机器人由点 A 开始做匀速直线运动，到达点 B 时，发现足球在点 D 处正以 2 倍于自己的速度向点 A 做匀速直线运动，如图所示，已知 $AB=4\sqrt{2}$ dm，$AD=17$ dm，∠$BAC=45°$.若忽略机器人原地旋转所需的时间，则该机器人最快可在距点 A ________ dm 的点 C 处截住足球.



7　**解析**：设机器人最快可在点 C 处截住足球，

由题意知点 C 在线段 AD 上,设 $BC=x$ dm.

则 $CD=2x$ dm,

$AC=AD-CD=(17-2x)$ dm.

在$\triangle ABC$ 中,由余弦定理得

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$,

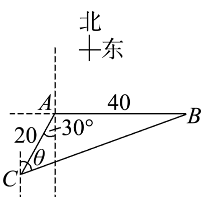
即 $x^2=(4\sqrt{2})^2+(17-2x)^2-8\sqrt{2}\times(17-2x)\times\cos 45°$,

解得 $x_1=5,x_2=\dfrac{37}{3}$.

所以 $AC=17-2x=7$ 或 $AC=-\dfrac{23}{3}$(舍去).

所以该机器人最快可在线段 AD 上距点 A 7 dm 的点 C 处截住足球.

6. 如图所示,位于 A 处的信息中心获悉:在其正东方向相距 40 n mile 的 B 处有一艘渔船遇险,在原地等待营救.信息中心立即把消息告知在其南偏西 30°相距 20 n mile 的 C 处的乙船,现乙船朝北偏东 θ 的方向沿直线 CB 前往 B 处救援,则 $\cos\theta$ 的值为________.



$\dfrac{\sqrt{21}}{14}$ **解析**:由题图知,在$\triangle ABC$ 中,$AB=40,AC=20,\angle BAC=120°$.

由余弦定理得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos 120°=2\ 800$,

所以 $BC=20\sqrt{7}$.

由正弦定理,得

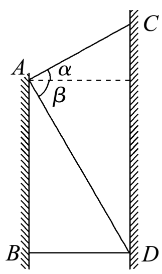
$\sin\angle ACB=\dfrac{AB}{BC}\cdot\sin\angle BAC=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

由$\angle BAC=120°$,知$\angle ACB$ 为锐角,

故 $\cos\angle ACB=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

故 $\cos\theta=\cos(\angle ACB+30°)=\cos\angle ACB\cos 30°-\sin\angle ACB\sin 30°=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

7. 如图,线段 AB,CD 分别表示甲、乙两楼,$AB\perp BD,CD\perp BD$.从甲楼顶部 A 处测得乙楼顶部 C 处的仰角为 $\alpha=30°$,测得乙楼底部 D 的俯角 $\beta=60°$.已知甲楼高 $AB=24$ m,求乙楼高 CD.



解:过 A 作 $AE\perp CD$(图略),垂足为 E,$ED=AB=24$ m,

则 $AE=\dfrac{ED}{\tan 60°}=\dfrac{24}{\sqrt{3}}=8\sqrt{3}$(m).

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中,$CE=AE\cdot\tan 30°=8\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=8$(m),

所以 $CD=CE+ED=8+24=32$(m).

第七章　复数

7.1　复数的概念

7.1.1　数系的扩充和复数的概念

学习任务目标

1. 了解数系的扩充与引进复数的必要性.
2. 理解复数的有关概念及复数的代数形式.(数学抽象)
3. 掌握复数相等的充要条件及其应用.

问题式预习

知识清单

1.复数的概念及其表示

(1)我们把形如 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 的数叫做复数,其中 i 叫做虚数单位,$i^2=-1$.

全体复数所构成的集合 $\mathbf{C}=\{a+bi\mid a,b\in\mathbf{R}\}$ 叫做复数集.

(2)复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 中的 a 与 b 分别叫做复数 z 的实部与虚部.

2.复数相等的充要条件

在复数集 $\mathbf{C}=\{a+bi\mid a,b\in\mathbf{R}\}$ 中任取两个数 $a+bi,c+di(a,b,c,d\in\mathbf{R})$,规定:$a+bi$ 与 $c+di$ 相等当且仅当 $a=c$ 且 $b=d$.

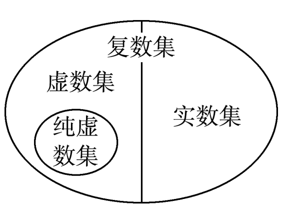
3.复数的分类

(1)对于复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,当且仅当 $b=0$ 时,它是实数;当且仅当 $a=b=0$ 时,它是实数 0;当 $b\neq0$ 时,它叫做虚数;当 $a=0$ 且 $b\neq0$ 时,它叫做纯虚数.

复数的分类情况如下:

$$z=a+bi\ (a,b\in\mathbf{R})\begin{cases}\text{实数}(b=0),\\ \text{虚数}(b\neq0)\begin{cases}\text{非纯虚数}(a\neq0),\\ \text{纯虚数}(a=0).\end{cases}\end{cases}$$

(2)复数分类的集合表示:



概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)实数是复数.　(√)

(2)虚数是复数.　(√)

(3)实数集和虚数集的交集不是空集.　(×)

(4)实数集和虚数集的并集是复数集.　(√)

2. $3i^2+7i$ 的实部为______,虚部为________.

-3　7　**解析**:$3i^2+7i=-3+7i$,实部为 -3,虚部为 7.

3.已知复数 $z=m+(m^2-1)i(m\in\mathbf{R})$ 满足 $z<0$,则 $m=$________.

-1　**解析**:因为 $z<0$,所以 z 为实数且小于 0,所以 $\begin{cases}m^2-1=0,\\ m<0,\end{cases}$ 解得 $m=-1$.

4.请思考并回答问题:

(1)两个复数一定能比较大小吗?

提示:两个复数若不全是实数,则不能比较大小.

(2)复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 的虚部 b 可以为零吗?

提示:可以.

任务型课堂

学习任务一 复数的概念

1.若复数 z 的实部和虚部之和为 3,则复数 z 可能为 ( )

A.$3-i$

B.$3+i$

C.$-1+4i$

D.$1+3i$

C **解析**:选项 C 中,复数 $-1+4i$ 的实部和虚部分别为 -1 和 4,故二者之和为 3.故选 C.

2.已知复数 $z=a^2-(2-b)i$ 的实部和虚部分别是 2 和 3,则实数 a,b 的值分别是 ( )

A.$\sqrt{2}$,1

B.$\sqrt{2}$,5

C.$\pm\sqrt{2}$,5

D.$\pm\sqrt{2}$,1

C **解析**:令 $\begin{cases}a^2=2,\\-2+b=3,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=\pm\sqrt{2},\\b=5.\end{cases}$

3.给出下列命题:①若 $z\in\mathbf{C}$,则 $z^2\geqslant0$;②$2i-1$ 的虚部是 $2i$;③$2i$ 的实部是 0.其中真命题的个数为 ( )

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

B **解析**:对于①,当 $z\in\mathbf{R}$ 时,$z^2\geqslant0$ 成立;否则不成立,如 $z=i$,$z^2=-1<0$,①为假命题.对于②,$2i-1=-1+2i$,其虚部为 2,不是 $2i$,②为假命题.对于③,$2i=0+2i$,其实部是 0,③为真命题.

反思提炼

判断与复数有关的命题是否正确的方法

(1)举反例:判定一个命题为假,只要举一个反例即可,所以解答这种类型的题时,可按照“先特殊,后一般,先否定,后肯定”的方法进行解答.

(2)化代数形式:确定复数的实部、虚部时,不但要把复数化为 $a+bi$ 的形式,更要注意只有这里的 a,b 均为实数时,才能确定复数的实部、虚部.

学习任务二 复数的分类

例 1 当实数 m 为何值时,复数 $z=\dfrac{m^2-m-6}{m+3}+(m^2+5m+6)i$ 分别是:(1)虚数?(2)纯虚数?

解:(1)由题意得复数 z 是虚数,则 $\begin{cases}m^2+5m+6\neq0,\\m+3\neq0,\end{cases}$ 解得 $m\neq-3$ 且 $m\neq-2$.

所以当 $m\neq-3$ 且 $m\neq-2$ 时,复数 z 是虚数.

(2)由题意得复数 z 是纯虚数,则 $\begin{cases}\dfrac{m^2-m-6}{m+3}=0,\\m^2+5m+6\neq0,\end{cases}$ 解得 $m=3$.

所以当 $m=3$ 时,复数 z 是纯虚数.

[一题多思]

思考 1.本例中条件不变,当 m 为何值时,z 为实数?

解:当 $\begin{cases}m+3\neq0,\\m^2+5m+6=0,\end{cases}$ 即 $m=-2$ 时,z 是实数.

思考 2.本例中条件不变,当 m 为何值时,$z=0$?

解:因为 $z=0$,所以 $\begin{cases}\dfrac{m^2-m-6}{m+3}=0,\\m^2+5m+6=0,\end{cases}$ 解得 $m=-2$.

反思提炼

1.利用复数的分类求参数时,应将复数化为代数形式 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$.

2.要注意确定使实部、虚部有意义的条件,再结合实部与虚部的取值求解.

3.要特别注意复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 为纯虚数的充要条件是 $a=0$ 且 $b\neq0$.

探究训练

1.复数 $z=a^2-b^2+(a+|a|)i(a,b\in\mathbf{R})$ 为实数的充要条件是 ( )

A.$|a|=|b|$　　B.$a<0$ 且 $a=-b$

C.$a>0$ 且 $a\neq b$　　D.$a\leqslant0$

D **解析**:复数 z 为实数的充要条件是 $a+|a|=0$,故 $a\leqslant0$.

2.若复数 $(a^2-3a+2)+(a-1)i$ 是纯虚数,则实数 a 的值为________.

2 **解**:因为复数 $(a^2-3a+2)+(a-1)i$ 是纯虚数,

所以 $\begin{cases}a^2-3a+2=0,\\a-1\neq0,\end{cases}$ 解得 $a=2$.

学习任务三　复数相等条件的应用

例2　(1)已知 $x^2-y^2+2xyi=2i$,求实数 x,y 的值;

(2)关于 x 的方程 $3x^2-\frac{a}{2}x-1=(10-x-2x^2)i$ 有实根,求实数 a 的值.

解:(1)因为 $x^2-y^2+2xyi=2i$,所以 $\begin{cases}x^2-y^2=0,\\2xy=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1,\\y=-1.\end{cases}$

(2)设方程的实数根为 $x=m$,则 $3m^2-\frac{a}{2}m-1=(10-m-2m^2)i$,

所以 $\begin{cases}3m^2-\frac{a}{2}m-1=0,\\10-m-2m^2=0,\end{cases}$ 解得 $a=11$ 或 $a=-\frac{71}{5}$.

反思提炼

复数相等问题的解题技巧

(1)必须已知复数的代数形式才可以根据实部与实部相等,虚部与虚部相等列方程组求解.

(2)根据复数相等的条件,将复数问题转化为实数问题,为应用方程思想提供了条件,同时这也是复数问题实数化思想的体现.

(3)如果两个复数都是实数,那么可以比较大小,否则是不能比较大小的.

探究训练

1.若 $xi-i^2=y+2i$,$x,y\in\mathbf{R}$,则复数 $x+yi=$(　　)

A.$-2+i$　　B.$2+i$

C.$1-2i$　　D.$1+2i$

B　**解析**:由 $i^2=-1$,得 $xi-i^2=1+xi$.由题意得 $1+xi=y+2i$,根据复数相等的充要条件得 $x=2$,$y=1$,故 $x+yi=2+i$.

2.若复数 $z=(m+1)+(m^2-9)i<0$,则实数 m 的值等于________.

-3　**解析**:因为 $z<0$,所以 $\begin{cases}m^2-9=0,\\m+1<0,\end{cases}$ 解得 $m=-3$.

3.已知 $A=\{1,2,(a^2-3a-1)+(a^2-5a-6)i\}$,$B=\{-1,3\}$,$A\cap B=\{3\}$,求实数 a 的值.

解:由题意,得 $(a^2-3a-1)+(a^2-5a-6)i=3$,

所以 $\begin{cases}a^2-5a-6=0,\\a^2-3a-1=3,\end{cases}$ 解得 $a=-1$.

体系构建

- 复数与复数集
  - 复数的定义 — 实部、虚部
  - 复数相等
  - 复数的分类

课后素养评价(十六)

基础性·能力运用

1.设 $z=6-2i$,则复数 z 的虚部为(　　)

A.-2　　B.2

C.$-2i$　　D.$2i$

A　**解析**:复数 z 的虚部为 -2.故选A.

2.若复数 $z=m^2+m-2-(m-1)i$ 是纯虚数,$m\in\mathbf{R}$,i是虚数单位,则(　　)

A.$m\neq1$ 且 $m\neq-2$

B.$m=1$

C.$m=-2$

D.$m=1$ 或 $m=-2$

C　**解析**:由复数 $z=m^2+m-2-(m-1)i$ 是纯虚数,得 $\begin{cases}m^2+m-2=0,\\m-1\neq0,\end{cases}$ 解得 $m=-2$.故选C.

3.适合 $x-3i=(8x-y)i$ 的实数 x,y 的值分别为(　　)

A.0,3　　B.0,-3

C.5,3　　D.3,0

A　**解析**:根据复数相等的定义,得 $\begin{cases}x=0,\\-3=8x-y,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=3.\end{cases}$ 故选A.

4.如果 $(m^2-1)+(m^2-2m)i>0$,那么实数 m 的值为________.

2　**解析**:因为当复数是实数时,才能比较大小,

则 $\begin{cases}m^2-1>0,\\m^2-2m=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m>1\text{ 或 }m<-1,\\m=0\text{ 或 }m=2\end{cases}\Rightarrow m=2$.

所以当 $m=2$ 时,

$(m^2-1)+(m^2-2m)i>0$.

5.若复数 $z=m^2-1+(m^2-m-2)i$ 为实数,则实数 m 的值为________.

-1 或 2　**解析**:因为复数 $z=m^2-1+(m^2-m-2)i$ 为实数,

所以 $m^2-m-2=0$,

解得 $m=-1$ 或 $m=2$.

6.实数 x 分别取何值时,复数 $z=\frac{x^2-x-6}{x+3}+(x^2-2x-15)\mathrm{i}$ 是:(1)实数?(2)虚数?(3)纯虚数?

解:(1)当 x 满足 $\begin{cases}x^2-2x-15=0,\\x+3\neq0,\end{cases}$ 即 $x=5$ 时,z 是实数.

(2)当 x 满足 $\begin{cases}x^2-2x-15\neq0,\\x+3\neq0,\end{cases}$

即 $x\neq-3$ 且 $x\neq5$ 时,z 是虚数.

(3)当 x 满足 $\begin{cases}x^2-x-6=0,\\x+3\neq0,\\x^2-2x-15\neq0,\end{cases}$

即 $x=-2$ 或 $x=3$ 时,z 是纯虚数.

综合性·创新提升

1.(交汇创新)"$a=0$"是"复数 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 是纯虚数"的　　(　　)

A.必要不充分条件

B.充分不必要条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

A　**解析**:复数 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 是纯虚数,则 $a=0$ 且 $b\neq0$,所以"$a=0$"是"复数 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 是纯虚数"的必要不充分条件.故选 A.

2.已知 $z_1=-4a+1+(2a^2+3a)\mathrm{i}$,$z_2=2a+(a^2+a)\mathrm{i}$,其中 $a\in\mathbf{R}$,$z_1>z_2$,则 a 的值为　　(　　)

A.0　　B.-1　　C.$-\frac{3}{2}$　　D.$\frac{1}{6}$

A　**解析**:由 $z_1>z_2$,得 $\begin{cases}2a^2+3a=0,\\a^2+a=0,\\-4a+1>2a,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=0\text{ 或 }a=-\frac{3}{2},\\a=0\text{ 或 }a=-1,\\a<\frac{1}{6},\end{cases}$ 解得 $a=0$.

3.(多选题)对于复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$,下列结论正确的是　　(　　)

A.若 $a=0$,则 $a+b\mathrm{i}$ 为纯虚数

B.若 $a-b\mathrm{i}=3+2\mathrm{i}$,则 $a=3,b=2$

C.若 $b=0$,则 $a+b\mathrm{i}$ 为实数

D.z 为虚数时,$b\neq0$

CD　**解析**:因为复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$,所以当 $a=0$ 且 $b\neq0$ 时,复数为纯虚数,故 A 错误;当 $b=0$ 时,复数为实数,故 C 正确;z 为虚数时,$b\neq0$,故 D 正确;对于 B,$a-b\mathrm{i}=3+2\mathrm{i}$,则 $\begin{cases}a=3,\\-b=2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=3,\\b=-2,\end{cases}$ 故 B 错误.

4.已知 $x,y\in\mathbf{R}$,若 $(x-2)+y\mathrm{i}=-1+\mathrm{i}$,则 $x+y=$________.

2　**解析**:由题意,得 $\begin{cases}x-2=-1,\\y=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$ 所以 $x+y=2$.

5.(开放性问题)已知复数 $z=(a^2+5a+6)+(a+2)\mathrm{i}$(其中 i 为虚数单位,$a\in\mathbf{R}$)为纯虚数,写出关于复数 z 的一个正确结论:______.

$z=-\mathrm{i}$(答案不唯一)　**解析**:由题得 $\begin{cases}a^2+5a+6=0,\\a+2\neq0,\end{cases}$ 解得 $a=-3$,故 $z=-\mathrm{i}$.

6.(1)若 $(4x-2y)\mathrm{i}=x+1$,求实数 x,y 的值;

(2)若不等式 $m^2-(m^2-2m)\mathrm{i}<9+\frac{m-2}{m}\mathrm{i}$ 成立,求实数 m 的值.

解:(1)由两个复数相等的充要条件可得 $\begin{cases}0=x+1,\\4x-2y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1,\\y=-2,\end{cases}$

即实数 x,y 的值分别为 $-1,-2$.

(2)依题意可得 $\begin{cases}m^2-2m=0,\\\frac{m-2}{m}=0,\\m^2<9,\end{cases}$

即 $\begin{cases}m=0\text{ 或 }m=2,\\m=2,m\neq0,\\-3<m<3,\end{cases}$

解得 $m=2$,即实数 m 的值等于 2.

7.1.2　复数的几何意义

学习任务目标

1.理解复数的几何意义，会求一个复数的模.(直观想象)

2.理解复数、复平面内的点、向量的一一对应关系.

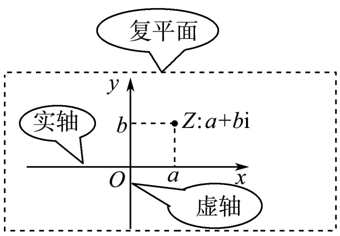
问题式预习

知识清单

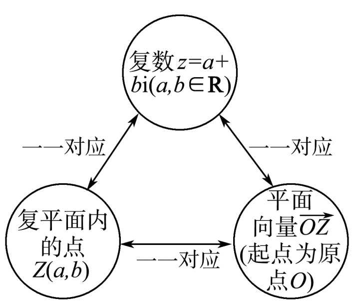
1.复平面与复数的几何意义

(1)复平面

建立直角坐标系来表示复数的平面叫做复平面，x 轴叫做实轴，y 轴叫做虚轴.实轴上的点都表示实数；除了原点外，虚轴上的点都表示纯虚数.



(2)复数的几何意义



2.复数的模

向量$\overrightarrow{OZ}$的模叫做复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的模或绝对值，记作$|z|$或$|a+b\mathrm{i}|$.即$|z|=|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2}$，其中 $a,b\in\mathbf{R}$.

如果 $b=0$，那么 $z=a+b\mathrm{i}$ 是一个实数 a，它的模就等于$|a|$(a 的绝对值).

3.共轭复数

(1)定义：一般地，当两个复数的实部相等，虚部互为相反数时，这两个复数叫做互为共轭复数.虚部不等于 0 的两个共轭复数也叫做共轭虚数.

(2)表示方法：复数 z 的共轭复数用 $\overline{z}$ 表示，即如果 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，那么 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$.

概念辨析

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)在复平面内，实数对应的点都在实轴上.　(√)

(2)在复平面内，虚轴上的点所对应的复数都是纯虚数.　(×)

(3)复数的模一定是正实数.　(×)

(4)两个共轭复数的和是实数.　(√)

2.复数 $z=(a^2-2a)+(a^2-a-2)\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$对应的点在虚轴上，则　(　　)

A.$a\neq2$ 或 $a\neq1$

B.$a\neq2$ 或 $a\neq-1$

C.$a=2$ 或 $a=0$

D.$a=0$

C　**解析**：由题意知 $a^2-2a=0$，解得 $a=0$ 或 $a=2$.故选 C.

3.请思考并回答问题：

(1)复数模的几何意义是什么?

提示：设复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则复数 z 的模 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，它的几何意义是复平面内的点(a,b)到原点的距离.

(2)有些同学说：实轴上的点表示实数，虚轴上的点表示虚数，这句话对吗?

提示：不对.实轴上的点都表示实数；除了原点外，虚轴上的点都表示纯虚数.原点对应的有序实数对为$(0,0)$，它所确定的复数是 $z=0+0\mathrm{i}=0$，表示的是实数.

任务型课堂

学习任务一 复数与复平面内点的关系

例 1 (1)在复平面内,复数 $3-4\mathrm{i}$,$-1+2\mathrm{i}$ 对应的点分别是 A,B,则线段 AB 的中点 C 对应的复数为 ( )

A.$-2+2\mathrm{i}$ B.$2-2\mathrm{i}$

C.$-1+\mathrm{i}$ D.$1-\mathrm{i}$

D **解析**:因为复数 $3-4\mathrm{i}$,$-1+2\mathrm{i}$ 对应的点分别为 $A(3,-4)$,$B(-1,2)$,所以线段 AB 的中点 C 的坐标为 $(1,-1)$,即线段 AB 的中点 C 对应的复数为 $1-\mathrm{i}$.

(2)已知复数 $z=(a^2-1)+(2a-1)\mathrm{i}$,其中 $a\in\mathbf{R}$.当复数 z 在复平面内对应的点 Z 分别满足下列条件时,求 a 的值(或取值范围).

①在实轴上;②在第三象限.

解:①若对应的点在实轴上,则有 $2a-1=0$,解得 $a=\frac{1}{2}$.

②若 z 对应的点在第三象限,则有 $\begin{cases}a^2-1<0,\\2a-1<0,\end{cases}$

解得 $-1<a<\frac{1}{2}$,故 a 的取值范围是 $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$.

反思提炼

利用复数与点的对应关系解题的步骤

(1)找对应关系:复数的几何意义即复数 $z=a+b\mathrm{i}$ $(a,b\in\mathbf{R})$ 可以用复平面内的点 $Z(a,b)$ 来表示,这是解决此类问题的根据.

(2)列出方程(组):此类问题可通过建立复数的实部与虚部应满足的等量关系,解方程(组)或不等式(组)求解.

探究训练

1.复数 $z=-1-2\mathrm{i}$(i 为虚数单位)在复平面内对应的点位于 ( )

A.第一象限

B.第二象限

C.第三象限

D.第四象限

C **解析**:在复平面内,复数 $z=-1-2\mathrm{i}$ 对应的点为 $Z(-1,-2)$,位于第三象限.

2.在复平面内,若表示复数 $z=m^2-1+\frac{1}{m}\mathrm{i}$ 的点在第四象限,则实数 m 的取值范围是 ( )

A.$(-\infty,-1)$

B.$(1,+\infty)$

C.$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

D.$(-1,1)$

A **解析**:因为表示复数 $z=m^2-1+\frac{1}{m}\mathrm{i}$ 的点在第四象限,所以 $\begin{cases}m^2-1>0,\\\frac{1}{m}<0,\end{cases}$ 解得 $m<-1$.故选 A.

学习任务二 复数与复平面内向量的关系

例 2 (1)向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 对应的复数是 $5-4\mathrm{i}$,向量 $\overrightarrow{OZ_2}$ 对应的复数是 $-5+4\mathrm{i}$,其是 O 为原点,则 $\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}$ 对应的复数是 ( )

A.$-10+8\mathrm{i}$ B.$10-8\mathrm{i}$

C.0 D.$10+8\mathrm{i}$

C **解析**:由复数的几何意义,得 $\overrightarrow{OZ_1}=(5,-4)$,$\overrightarrow{OZ_2}=(-5,4)$,

所以 $\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}=(5,-4)+(-5,4)=(0,0)$,

所以 $\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}$ 对应的复数为 0.

(2)设 O 是原点,向量 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$ 对应的复数分别为 $2-3\mathrm{i}$,$-3+2\mathrm{i}$,那么向量 $\overrightarrow{BA}$ 对应的复数是 ( )

A.$-5+5\mathrm{i}$ B.$-5-5\mathrm{i}$

C.$5+5\mathrm{i}$ D.$5-5\mathrm{i}$

D **解析**:由复数的几何意义,

得 $\overrightarrow{OA}=(2,-3)$,$\overrightarrow{OB}=(-3,2)$,

则 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=(2,-3)-(-3,2)=(5,-5)$,

所以向量 $\overrightarrow{BA}$ 对应的复数是 $5-5\mathrm{i}$.

反思提炼

复数与平面向量的对应关系

(1)根据复数与平面向量的对应关系可知,当平面向量的起点在原点时,向量的终点对应的复数即为向量对应的复数,反之复数对应的点确定后,从原点引出的指向该点的有向线段即表示复数对应的向量.

(2)解决复数与平面向量一一对应的问题时,一般以复数与复平面内的点一一对应为工具,实现复数、复平面内的点、向量之间的转化.

探究训练

1.在复平面内,O是原点,向量$\overrightarrow{OA}$对应的复数为$2+\mathrm{i}$.若点A关于实轴的对称点为点B,则向量$\overrightarrow{OB}$对应的复数为________.

$2-\mathrm{i}$　**解析**:因为复数$2+\mathrm{i}$表示的点$A(2,1)$关于实轴对称的点为$B(2,-1)$,
所以$\overrightarrow{OB}$对应的复数为$2-\mathrm{i}$.

2.已知复数$z_1=-1+2\mathrm{i}$,$z_2=1-\mathrm{i}$,$z_3=3-2\mathrm{i}$,它们在复平面内所对应的点分别是A,B,C.若$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}(x,y\in\mathbf{R})$,则$x+y$的值是________.

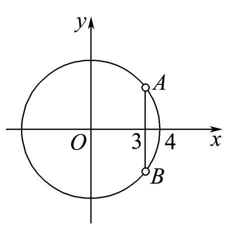
5　**解析**:由复数的几何意义知,$3-2\mathrm{i}=x(-1+2\mathrm{i})+y(1-\mathrm{i})$,所以$3-2\mathrm{i}=(y-x)+(2x-y)\mathrm{i}$.
由复数相等的充要条件可得
$\begin{cases}y-x=3,\\2x-y=-2,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=4,\end{cases}$所以$x+y=5$.

学习任务三　复数的模及应用

例3　(1)已知复数$z=3+a\mathrm{i}$,且$|z|<4$,则实数a的取值范围是________.

$(-\sqrt{7},\sqrt{7})$　**解析**:(方法一)因为$z=3+a\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$,所以$|z|=\sqrt{3^2+a^2}$.由已知得$3^2+a^2<4^2$,所以$a^2<7$,所以$a$的取值范围是$(-\sqrt{7},\sqrt{7})$.

(方法二)利用复数的几何意义,由$|z|<4$知,z在复平面内对应的点在以原点O为圆心,4为半径的圆内(不包括边界).



由$z=3+a\mathrm{i}$知z对应的点在直线$x=3$上,所以线段AB(除去端点)为动点Z的集合.由图可知$-\sqrt{7}<a<\sqrt{7}$.

(2)若$|z-1|=|z+1|$,则复数z在复平面内对应的点组成什么图形?

解:因为$|z-1|=|z+1|$,所以复数z在复平面内对应的点Z到$(1,0)$和$(-1,0)$的距离相等,即点Z在以$(1,0)$和$(-1,0)$为端点的线段的中垂线上,所以复数z在复平面内对应的点组成一条直线.

反思提炼

复数的模的计算

(1)计算复数的模时,应先确定复数的实部和虚部,再利用模长公式计算.虽然两个虚数不能比较大小,但它们的模可以比较大小.

(2)设出复数的代数形式,利用模的定义将问题转化为实数问题求解.

探究训练

1.若复数z对应的点在直线$y=2x$上,且$|z|=\sqrt{5}$,则复数$z=$　(　　)

A.$1+2\mathrm{i}$　　B.$-1-2\mathrm{i}$

C.$\pm1\pm2\mathrm{i}$　　D.$1+2\mathrm{i}$或$-1-2\mathrm{i}$

D　**解析**:依题意可设复数$z=a+2a\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$,由$|z|=\sqrt{5}$,得$\sqrt{a^2+4a^2}=\sqrt{5}$,解得$a=\pm1$,故$z=1+2\mathrm{i}$或$z=-1-2\mathrm{i}$.

2.设复数z满足$|z+1|=|z-\mathrm{i}|$,z在复平面内对应的点为(x,y),则　(　　)

A.$x=0$　　B.$y=0$

C.$x-y=0$　　D.$x+y=0$

D　**解析**:复数z满足$|z+1|=|z-\mathrm{i}|$,所以$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$,化简得$x+y=0$.故选D.

学习任务四　共轭复数及应用

1.(多选题)下列说法正确的是　(　　)

A.复数和其共轭复数是成对出现的

B.实数不存在共轭复数

C.互为共轭复数的两个复数在复平面内对应的点关于虚轴对称

D.复数和其共轭复数的模相等

AD　**解析**:根据共轭复数的定义可知A正确;根据共轭复数的定义可知,实数的共轭复数是它本身,故B错误;互为共轭复数的两个复数在复平面内对应的点关于实轴对称,故C错误;根据复数模的定义可知D正确.

2.设$z=-3+2\mathrm{i}$,则在复平面内$\bar{z}$对应的点位于为　(　　)

A.第一象限　　B.第二象限

C.第三象限　　D.第四象限

C　**解析**:由已知可得,$\bar{z}=-3-2\mathrm{i}$,故$\bar{z}$对应的点为$(-3,-2)$,位于第三象限.

3.若$z=a-\mathrm{i}(a\in\mathbf{R}$,且$a>0)$的模为$\sqrt{2}$,则$a=$________,复数$z$的共轭复数$\bar{z}=$________.

1　$1+\mathrm{i}$　**解析**:因为$\sqrt{a^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$,且$a>0$,所以$a=1$,则$z=1-\mathrm{i}$,所以$\bar{z}=1+\mathrm{i}$.

反思提炼

共轭复数的注意点

(1)结构特点:实部相等,虚部互为相反数.

(2)几何意义:在复平面内两个共轭复数的对应点关于实轴对称.

体系构建

复数的模 ← 复数 $z=a+bi\ (a,b\in\mathbf{R})$ → 复平面内的点 (a,b)

复数 $z=a+bi\ (a,b\in\mathbf{R})$ → 平面向量 $\overrightarrow{OZ}$

复数 $z=a+bi\ (a,b\in\mathbf{R})$ → 共轭复数

课后素养评价(十七)

基础性·能力运用

1. 若复数 $a+(a-1)\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点位于第一象限,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $a<1$ B. $a>0$

C. $a>1$ D. $0<a<1$

C **解析**:由题意可得 $\begin{cases}a>0,\\a-1>0,\end{cases}$ 解得 $a>1$.故选 C.

2. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$,i 是虚数单位,若 $a+2\mathrm{i}$ 与 $1+b\mathrm{i}$ 互为共轭复数,则 $b=$ ( )

A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

D **解析**:因为 $a+2\mathrm{i}$ 与 $1+b\mathrm{i}$ 互为共轭复数,所以 $\begin{cases}a=1,\\b=-2.\end{cases}$ 故选 D.

3. (2023·北京)在复平面内,复数 z 对应的点的坐标是 $(-1,\sqrt{3})$,则 z 的共轭复数 $\bar{z}=$ ( )

A. $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ B. $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

C. $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ D. $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

D **解析**:z 在复平面对应的点是 $(-1,\sqrt{3})$,根据复数的几何意义,得 $z=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$,由共轭复数的定义,可知 $\bar{z}=-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$.故选 D.

4. 下列关于复数的说法,正确的是 ( )

A. 复数 i 是最小的纯虚数

B. 在复数范围内,模为 1 的复数有 $1,-1,\mathrm{i}$ 和 $-\mathrm{i}$,共四个

C. i 与 $-\mathrm{i}$ 是一对共轭复数

D. 虚轴上的点都表示纯虚数

C **解析**:虚数不能比较大小,故 A 错误;对于复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$,但凡满足 $a^2+b^2=1$,其模均为 1,显然不仅四个,比如 $a=\frac{1}{2}$,$b=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时,$|z|=1$,故 B 错误;由共轭复数的定义可知 C 正确;原点 $(0,0)$ 也在虚轴上,但不表示纯虚数,故 D 错误.故选 C.

5. 已知 $3-4\mathrm{i}=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$,则 $|1-5\mathrm{i}|$,$|x-y\mathrm{i}|$,$|y+2\mathrm{i}|$ 的大小关系为__________.

$|y+2\mathrm{i}|<|x-y\mathrm{i}|<|1-5\mathrm{i}|$ **解析**:由 $3-4\mathrm{i}=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$,得 $x=3$,$y=-4$.

而 $|1-5\mathrm{i}|=\sqrt{1+(-5)^2}=\sqrt{26}$,

$|x-y\mathrm{i}|=|3+4\mathrm{i}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$,

$|y+2\mathrm{i}|=|-4+2\mathrm{i}|=\sqrt{(-4)^2+2^2}=\sqrt{20}$.

因为 $\sqrt{20}<5<\sqrt{26}$,所以 $|y+2\mathrm{i}|<|x-y\mathrm{i}|<|1-5\mathrm{i}|$.

6. 复数 $4+3\mathrm{i}$ 与 $-2-5\mathrm{i}$ 分别对应向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$,试求向量 $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ 对应的复数.

解:由题意得 $\overrightarrow{OA}=(4,3)$,$\overrightarrow{OB}=(-2,-5)$,

所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-6,-8)$,

所以 $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(3,4)$.

所以向量 $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ 对应的复数是 $3+4\mathrm{i}$.

综合性·创新提升

1. 设复数 z 在复平面内对应的点为 $(0,a)$,若 $|z|=2$,则实数 $a=$ ( )

A. $2\mathrm{i}$ B. $\sqrt{2}\mathrm{i}$

C. ±2 D. $\pm\sqrt{2}$

C **解析**:因为复数 z 在复平面内对应的点为 $(0,a)$,所以 $z=a\mathrm{i}$.因为 $|z|=2$,所以 $\sqrt{a^2}=2$,解得 $a=\pm2$.故选 C.

2. 已知复数 $z=\sqrt{3}\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta(\theta\in\mathbf{R}$,i 为虚数单位),则 $|z|$ 的最大值为 ( )

A. 2 B. $\sqrt{2}$

C. 3 D. $\sqrt{3}$

D **解析**:由题意得 $|z|=\sqrt{(\sqrt{3}\cos\theta)^2+\sin^2\theta}=\sqrt{3\cos^2\theta+(1-\cos^2\theta)}=\sqrt{2\cos^2\theta+1}\leqslant\sqrt{3}$,当 $\cos\theta=\pm1$ 时,等号成立,故 $|z|_{\max}=\sqrt{3}$.故选 D.

3. 已知复数 $z=3-i+(1+ai)^2(a\in\mathbf{R})$ 在复平面内对应的点在实轴上，则 $|z|$ 的值是 ( )

A.3　　B.4

C.5　　D.$\frac{15}{4}$

D **解析**：由题意知，$z=3-i+(1+ai)^2=(4-a^2)+(2a-1)i$，所以复数 z 在复平面内对应的点的坐标为 $(4-a^2,2a-1)$. 又该点在实轴上，所以 $2a-1=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$，

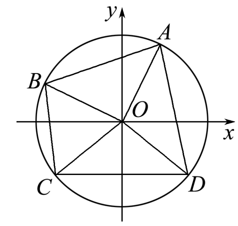
所以 $z=\frac{15}{4}$，则 $|z|=\frac{15}{4}$. 故选 D.

4. 在复平面内，$\overrightarrow{AB}$ 对应的复数是 $1-i$，$\overrightarrow{AD}$ 对应的复数是 $1+i$，则 $\overrightarrow{DB}$ 对应的复数的模为________.

2 **解析**：由题意可知，$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$，则 $\overrightarrow{DB}$ 对应的复数是 $(1-i)-(1+i)=-2i$，则 $\overrightarrow{DB}$ 对应的复数的模为 $\sqrt{0^2+(-2)^2}=2$.

5.（交汇创新）已知复数 $z_1=1+2i$，$z_2=-2+i$，$z_3=-\sqrt{3}-\sqrt{2}i$，$z_4=\sqrt{3}-\sqrt{2}i$，设 z_1,z_2,z_3,z_4 在复平面内对应的点分别是 A,B,C,D，则 $\angle ABC+\angle ADC=$________.

$180°$ **解析**：依题意，点 $A(1,2)$，$B(-2,1)$，$C(-\sqrt{3},-\sqrt{2})$，$D(\sqrt{3},-\sqrt{2})$，记原点为 O，则有 $|OA|=|OB|=|OC|=|OD|=\sqrt{5}$，则点 A,B,C,D 在以点 O 为圆心，$\sqrt{5}$ 为半径的圆上，如图.



故四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形，所以 $\angle ABC+\angle ADC=180°$.

6. 实数 x 取何值时，复平面内对应复数 $z=x^2+x-6+(x^2-2x-15)i$ 的点 Z 分别满足下列条件？

(1) 位于第三象限；

(2) 位于第四象限；

(3) 位于直线 $x-y-3=0$ 上.

解：因为 x 是实数，所以 x^2+x-6，$x^2-2x-15$ 也是实数.

(1) 当实数 x 满足 $\begin{cases}x^2+x-6<0,\\x^2-2x-15<0,\end{cases}$ 即 $-3<x<2$ 时，点 Z 位于第三象限.

(2) 当实数 x 满足 $\begin{cases}x^2+x-6>0,\\x^2-2x-15<0,\end{cases}$

即 $2<x<5$ 时，点 Z 位于第四象限.

(3) 当实数 x 满足 $(x^2+x-6)-(x^2-2x-15)-3=0$，

即 $3x+6=0$，也即 $x=-2$ 时，

点 Z 位于直线 $x-y-3=0$ 上.

7.2 复数的四则运算

7.2.1 复数的加、减运算及其几何意义

学习任务目标

1. 掌握复数代数形式的加、减运算法则.

2. 理解复数代数形式的加、减运算的几何意义.

3. 能够利用复数代数形式的加、减运算法则及几何意义解决问题.

问题式预习

知识清单

1. 复数代数形式的加、减运算

(1) 运算法则

设 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di(a,b,c,d\in\mathbf{R})$，

则 $z_1+z_2=\underline{(a+c)+(b+d)i}$，

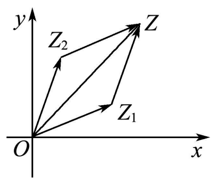
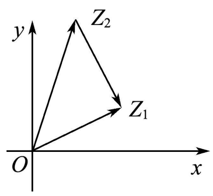
$z_1-z_2=\underline{(a-c)+(b-d)i}$.

(2) 加法运算律

对任意 $z_1,z_2,z_3\in\mathbf{C}$，有 $z_1+z_2=\underline{z_2+z_1}$，$(z_1+z_2)+z_3=\underline{z_1+(z_2+z_3)}$.

2. 复数加、减运算的几何意义

设复数 z_1,z_2 对应的向量分别为 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$.

复数加法的几何意义	$\overrightarrow{OZ}$是以$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$为邻边的平行四边形的对角线，复数z_1+z_2是$\overrightarrow{OZ}$所对应的复数	
复数减法的几何意义	复数z_1-z_2是从向量$\overrightarrow{OZ_2}$的终点指向向量$\overrightarrow{OZ_1}$的终点的向量$\overrightarrow{Z_2Z_1}$所对应的复数	

概念辨析

1. 判断正误(正确的打"√"，错误的打"×")．

(1)两个虚数的和或差可能是实数． (√)

(2)在进行复数的加法运算时，实部与实部相加得实部，虚部与虚部相加得虚部． (√)

(3)复数的减法不满足结合律，即$(z_1-z_2)-z_3=z_1-(z_2+z_3)$可能不成立． (×)

2. 已知复数$z+3i-3=3-3i$，则$z=$ ( )

A.0　　B.6i

C.6　　D.$6-6i$

D　**解析**：因为$z+3i-3=3-3i$，所以$z=(3-3i)-(3i-3)=6-6i$.

3. 已知向量$\overrightarrow{OZ_1}$对应的复数为$2-3i$，向量$\overrightarrow{OZ_2}$对应的复数为$3-4i$，则向量$\overrightarrow{Z_1Z_2}$对应的复数为________.

$1-i$　**解析**：因为$\overrightarrow{Z_1Z_2}=\overrightarrow{OZ_2}-\overrightarrow{OZ_1}=(3,-4)-(2,-3)=(1,-1)$，所以$\overrightarrow{z_1z_2}$对应的复数为$1-i$.

4. 请思考并回答问题：

两个复数的和是什么数，这个数唯一确定吗？

提示：两个复数的和是复数，这个数是唯一确定的.

任务型课堂

学习任务一　复数的加、减运算

1. 已知复数$z_1=3+4i$，$z_2=3-4i$，则$z_1+z_2=$ ( )

A.8i　　B.6

C.$6+8i$　　D.$6-8i$

B　**解析**：$z_1+z_2=3+4i+3-4i=6$.

2. 设$z_1=2+bi$，$z_2=a+i$，$a,b\in\mathbf{R}$，当$z_1+z_2=0$时，复数$a+bi=$ ( )

A.$1+i$　　B.$2+i$

C.3　　D.$-2-i$

D　**解析**：由题意得$z_1+z_2=a+2+(b+1)i=0$，

所以$\begin{cases}2+a=0,\\b+1=0,\end{cases}$得$\begin{cases}a=-2,\\b=-1.\end{cases}$所以$a+bi=-2-i$.

3. 计算：$(2-3i)-(-4+2i)=$________.

$6-5i$　**解析**：$(2-3i)-(-4+2i)=(2+4)+(-3-2)i=6-5i$.

4. 已知复数$z_1=(a^2-2)+(a-4)i$，$z_2=a-(a^2-2)i(a\in\mathbf{R})$，且$z_1-z_2$为纯虚数，则$a=$________.

-1　**解析**：由题意知$z_1-z_2=(a^2-a-2)+(a-4+a^2-2)i(a\in\mathbf{R})$为纯虚数，

所以$\begin{cases}a^2-a-2=0,\\a^2+a-6\neq 0,\end{cases}$

解得$a=-1$.

反思提炼

复数加、减运算的思路

两个复数相加(减)，就是把两个复数的实部相加(减)，虚部相加(减).复数的减法是加法的逆运算，减去一个复数，也可以看成是加上这个复数的相反数.当多个复数相加(减)时，可将这些复数的所有实部相加(减)，所有虚部相加(减).

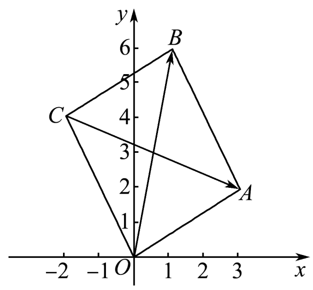
学习任务二　复数加、减运算的几何意义及应用

例1　(1)若复数z_1,z_2满足$|z_1|=|z_2|=1$，$|z_1+z_2|=\sqrt{2}$，则$|z_1-z_2|=$________.

$\sqrt{2}$　**解析**：由$|z_1|=|z_2|=1$，$|z_1+z_2|=\sqrt{2}$知，z_1，z_2，z_1+z_2对应的点是一个边长为1的正方形的三个顶点，所求$|z_1-z_2|$是这个正方形的一条对角线的长，所以$|z_1-z_2|=\sqrt{2}$.

(2)如图所示，平行四边形$OABC$的顶点O，A，C对应的复数分别为0，$3+2i$，$-2+4i$.求：

①$\overrightarrow{AO}$对应的复数，$\overrightarrow{BC}$对应的复数；
②$\overrightarrow{CA}$对应的复数；
③$\overrightarrow{OB}$对应的复数及$\overrightarrow{OB}$的模.



解：①因为$\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{OA}$，
所以$\overrightarrow{AO}$对应的复数为$-3-2i$.
因为$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}$，所以$\overrightarrow{BC}$对应的复数为$-3-2i$.
②因为$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$，
所以$\overrightarrow{CA}$对应的复数为$(3+2i)-(-2+4i)=5-2i$.
③因为$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$，
所以$\overrightarrow{OB}$所对应的复数为$(3+2i)+(-2+4i)=1+6i$，
$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{1^2+6^2}=\sqrt{37}$.

反思提炼

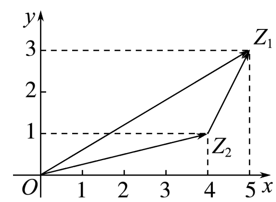
运用复数加、减运算的几何意义应注意的问题

(1)向量加法运算的平行四边形法则和三角形法则是复数加、减运算的几何意义的依据.
(2)利用向量加法“首尾相接”和向量减法“指向被减向量”的特点，在三角形内可求得第三个向量及其对应的复数.
(3)注意向量$\overrightarrow{AB}$对应的复数是z_B-z_A(终点对应的复数减去起点对应的复数).

探究训练

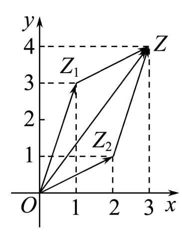
1.设$\overrightarrow{OZ_1}$及$\overrightarrow{OZ_2}$分别与复数$z_1=5+3i$及复数$z_2=4+i$对应，计算z_1-z_2，并在复平面内作出$\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}$.

解：$z_1-z_2=(5+3i)-(4+i)=(5-4)+(3-1)i=1+2i$.作图如图所示.



2.设$\overrightarrow{OZ_1}$及$\overrightarrow{OZ_2}$分别与复数$z_1=1+3i$及复数$z_2=2+i$对应，计算z_1+z_2，并在复平面内作出$\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}$.

解：$z_1+z_2=(1+3i)+(2+i)=(1+2)+(3+1)i=3+4i$.作图如图所示.



学习任务三　复数模的最值问题

例2　如果复数z满足$|z+i|+|z-i|=2$，那么$|z+i+1|$的最小值是　(　　)

A.1　　B.$\frac{1}{2}$

C.2　　D.$\sqrt{5}$

A　**解析**：设复数$z,-i,i,-1-i$在复平面内对应的点分别为Z,Z_1,Z_2,Z_3.因为$|z+i|+|z-i|=2$，$|Z_1Z_2|=2$，所以点Z的集合为线段Z_1Z_2，所以点Z在线段Z_1Z_2上移动，$|Z_1Z_3|_{\min}=1$，
所以$|z+i+1|_{\min}=1$.

反思提炼

$|z_1-z_2|$表示复平面内z_1,z_2对应的两点间的距离.利用此性质，可把复数的模的问题转化为复平面内两点间的距离问题，从而利用数形结合思想，把复数问题转化为几何图形问题求解.

探究训练

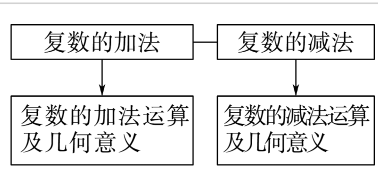
$\triangle ABC$的三个顶点所对应的复数分别为z_1,z_2,z_3，复数z满足$|z-z_1|=|z-z_2|=|z-z_3|$，则z对应的点是$\triangle ABC$的　(　　)

A.外心　　B.内心

C.重心　　D.垂心

A　**解析**：由复数的模及复数减法运算的几何意义，结合条件可知复数z的对应点P到$\triangle ABC$的顶点A,B,C的距离相等，所以点P为$\triangle ABC$的外心.

体系构建



课后素养评价(十八)

基础性·能力运用

1. 若复数 $z_1=2+3i$，$z_2=3+i$，则 $z_1-z_2=$　(　　)

A. $-1+2i$　　B. $1+2i$

C. $-1-2i$　　D. $1-2i$

A　**解析**：因为 $z_1=2+3i$，$z_2=3+i$，所以 $z_1-z_2=-1+2i$. 故选 A.

2. i 为虚数单位，若 $1+z=2+3i$，则复数 z 的虚部为　(　　)

A. 1　　B. 3

C. i　　D. 3i

B　**解析**：因为 $1+z=2+3i$，则 $z=2-1+3i=1+3i$，故复数 z 的虚部为 3. 故选 B.

3. 复数 $6+5i$ 与 $-3+4i$ 分别对应向量$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$，则对应向量$\overrightarrow{BA}$的复数为　(　　)

A. $3+9i$　　B. $2+8i$

C. $-9-i$　　D. $9+i$

D　**解析**：复数 $6+5i$ 与 $-3+4i$ 分别表示向量$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$，因为$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$，所以表示向量$\overrightarrow{BA}$的复数为 $(6+5i)-(-3+4i)=9+i$. 故选 D.

4. 复数 z 在复平面内对应的点为 $(2,-1)$，则复数 $z-3=$　(　　)

A. $1+i$　　B. $1-i$

C. $-1+i$　　D. $-1-i$

D　**解析**：复数 z 在复平面内对应的点为 $(2,-1)$，则 $z=2-i$，所以 $z-3=-1-i$. 故选 D.

5. 已知复数 z 满足 $z-(1+i)=1-i$（i 为虚数单位），则复数 z 的模为________.

2　**解析**：由题意 $z=1-i+1+i=2$，所以 $|z|=2$.

6. 在复平面内对应复数 z 的点为 Z，且 $|z+i|\leqslant 1$，则点 Z 所组成图形的面积为________.

π　**解析**：$|z+i|\leqslant 1$ 的解集对应的点组成的图形是以 $(0,-1)$ 为圆心，1 为半径的圆及其内部，其面积 $S=\pi\times 1^2=\pi$.

综合性·创新提升

1. 若 $(-3a+bi)-(2b+ai)=3-5i$，$a,b\in\mathbf{R}$，则 $a+b=$　(　　)

A. $\frac{7}{5}$　　B. $-\frac{11}{5}$　　C. $-\frac{18}{5}$　　D. 5

B　**解析**：因为 $(-3a+bi)-(2b+ai)=(-3a-2b)+(b-a)i=3-5i$，所以 $\begin{cases}-3a-2b=3,\\ b-a=-5,\end{cases}$ 解得 $a=\frac{7}{5}$，$b=-\frac{18}{5}$. 故有 $a+b=-\frac{11}{5}$.

2. 若复数 z 满足 $z+2\overline{z}=2+i$，其中 i 为虚数单位，则 $z=$　(　　)

A. $3-2i$　　B. $2+3i$

C. $\frac{2}{3}-i$　　D. $\frac{2}{3}+i$

C　**解析**：设复数 $z=x+yi$，则 $\overline{z}=x-yi$（$x,y\in\mathbf{R}$），则 $z+2\overline{z}=x+yi+2x-2yi=3x-yi=2+i$，则 $x=\frac{2}{3}$，$y=-1$，所以 $z=\frac{2}{3}-i$. 故选 C.

3.（交汇创新）（多选题）已知复数 $z_1=1-i$，$z_2=2-i$，$z_3=2+2i$ 在复平面内对应的点分别为 A,B,C，且 O 为原点，则　(　　)

A. z_1+z_2 的虚部为 $-2i$

B. z_2-z_3 为纯虚数

C. $OA\perp OC$

D. 以 OA,OB,OC 为三边长的三角形为钝角三角形

BCD　**解析**：对于 A 项，因为 $z_1+z_2=3-2i$，所以 z_1+z_2 的虚部为 -2，所以 A 错误；对于 B 项，因为 $z_2-z_3=-3i$，所以 z_2-z_3 为纯虚数，所以 B 正确；对于 C 项，因为 $\overrightarrow{OA}=(1,-1)$，$\overrightarrow{OC}=(2,2)$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0$，所以 $OA\perp OC$，所以 C 正确；对于 D 项，由已知可得 $OA=|z_1|=\sqrt{2}$，$OB=|z_2|=\sqrt{5}$，$OC=|z_3|=2\sqrt{2}$，且 $OA^2+OB^2=7<8=OC^2$，所以 $OA^2+OB^2-OC^2<0$，所以 D 正确. 故选 BCD.

4. 复数 $z_1=a+4i$，$z_2=3+bi$（$a,b\in\mathbf{R}$），若它们的和 z_1+z_2 为实数，差 z_1-z_2 为纯虚数，则 $|a+bi|=$________.

5　**解析**：由题设 $z_1+z_2=a+4i+3+bi=(a+3)+(b+4)i$ 为实数，得 $b=-4$. 由 $z_1-z_2=(a-3)+(4-b)i$ 为纯虚数，得 $a=3$，所以 $|a+bi|=|3-4i|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$.

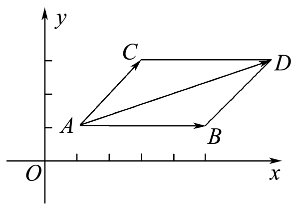
5. 已知复数 z_1,z_2 满足 $z_1-2z_2=5+i$，$2z_1+z_2=3i$，则 $z_1=$________.

$1+\frac{7}{5}i$　**解析**：由题意得 $z_1-2z_2+2(2z_1+z_2)=5z_1=5+i+6i=5+7i$，

所以 $z_1=1+\dfrac{7}{5}\mathrm{i}$.

6. 在复平面内，A，B，C 分别对应复数 $z_1=1+\mathrm{i}$，$z_2=5+\mathrm{i}$，$z_3=3+3\mathrm{i}$，以 AB，AC 为邻边作一个平行四边形 $ABDC$，求点 D 对应的复数 z_4 及 AD 的长.

解：作出示意图如图. $\overrightarrow{AC}$ 对应复数 z_3-z_1，$\overrightarrow{AB}$ 对应复数 z_2-z_1，$\overrightarrow{AD}$ 对应复数 z_4-z_1.



由复数加减运算的几何意义，及 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，得 $z_4-z_1=(z_2-z_1)+(z_3-z_1)$，

所以 $z_4=z_2+z_3-z_1=(5+\mathrm{i})+(3+3\mathrm{i})-(1+\mathrm{i})=7+3\mathrm{i}$. 所以 AD 的长为 $|\overrightarrow{AD}|=|z_4-z_1|=|(7+3\mathrm{i})-(1+\mathrm{i})|=|6+2\mathrm{i}|=2\sqrt{10}$.

7.2.2　复数的乘、除运算

学习任务目标

1. 掌握复数乘、除运算法则，能进行复数的乘、除运算.

2. 掌握 i 幂值的周期性，能进行相关运算.

问题式预习

知识清单

1. 复数的乘法及其运算律

(1) 复数代数形式的乘法法则

设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$ $(a,b,c,d\in\mathbf{R})$ 是任意两个复数，则 $z_1z_2=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=\underline{(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}}$.

(2) 复数乘法的运算律

对于任意 z_1，z_2，$z_3\in\mathbf{C}$，有

交换律	$z_1z_2=\underline{z_2z_1}$
结合律	$(z_1z_2)z_3=\underline{z_1(z_2z_3)}$
乘法对加法的分配律	$z_1(z_2+z_3)=\underline{z_1z_2+z_1z_3}$

2. 复数除法的法则

$(a+b\mathrm{i})\div(c+d\mathrm{i})=\dfrac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\underline{\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}}$ $(a,b,c,d\in\mathbf{R}$，且 $c+d\mathrm{i}\neq0)$.

概念辨析

1. 判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1) 复数加减乘除混合运算的法则是先乘除，再加减.　(√)

(2) 若 z_1，$z_2\in\mathbf{C}$，且 $z_1^2+z_2^2=0$，则 $z_1=z_2$.　(×)

(3) $\dfrac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$.　(√)

(4) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$.　(×)

2. 已知复数 $z=2+\mathrm{i}$，则 $z\cdot\overline{z}=$　(　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. 3　　D. 5

D　**解析**：(方法一) 因为 $z=2+\mathrm{i}$，所以 $\overline{z}=2-\mathrm{i}$，所以 $z\cdot\overline{z}=(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=5$.

(方法二) 因为 $z=2+\mathrm{i}$，所以 $z\cdot\overline{z}=|z|^2=5$.

3. $(1+\mathrm{i})^2-\dfrac{2-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=$________.

$-\dfrac{3}{5}+\dfrac{14}{5}\mathrm{i}$　**解析**：$(1+\mathrm{i})^2-\dfrac{2-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=2\mathrm{i}-\dfrac{(2-\mathrm{i})^2}{5}=-\dfrac{3}{5}+\dfrac{14}{5}\mathrm{i}$.

4. 请思考并回答问题：

怎样进行复数的乘法运算？

提示：两个复数相乘，类似于两个多项式相乘，只要把结果中的 i^2 换成 -1，并且把实部与虚部分别合并即可，三个或三个以上的复数相乘，可按照从左到右的顺序或利用结合律运算.

任务型课堂

学习任务一 复数的乘法运算

1.(2022·新高考全国Ⅱ卷)$(2+2i)(1-2i)=$ ( )

A.$-2+4i$　　B.$-2-4i$

C.$6+2i$　　D.$6-2i$

D **解析**:$(2+2i)(1-2i)=2+4-4i+2i=6-2i$.故选D.

2.计算:$(1-i)^2-(2-3i)(2+3i)=$ ( )

A.$2-13i$　　B.$13+2i$

C.$13-13i$　　D.$-13-2i$

D **解析**:$(1-i)^2-(2-3i)(2+3i)=1-2i+i^2-(4-9i^2)=-13-2i$.故选D.

3.(2023·全国甲卷(理))若复数$(a+i)(1-ai)=2$,$a\in\mathbf{R}$,则$a=$ ( )

A.-1　　B.0

C.1　　D.2

C **解析**:因为$(a+i)(1-ai)=a-a^2i+i+a=2a+(1-a^2)i=2$,

所以$\begin{cases}2a=2,\\1-a^2=0,\end{cases}$解得$a=1$.故选C.

反思提炼

对复数乘法的两点说明

(1)复数的乘法运算与多项式乘法运算类似,可仿照多项式乘法进行运算,但乘后要将i^2换成-1,并把含i和不含i的分开整理.

(2)多项式乘法的运算律在复数乘法中仍然成立,乘法公式也适用.

学习任务二 复数的除法运算

例1 (1)(2023·新高考全国Ⅰ卷)已知$z=\dfrac{1-i}{2+2i}$,则$z-\overline{z}=$ ( )

A.$-i$　　B.i　　C.0　　D.1

A **解析**:因为$z=\dfrac{1-i}{2+2i}=\dfrac{(1-i)(1-i)}{2(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{4}=-\dfrac{1}{2}i$,所以$\overline{z}=\dfrac{1}{2}i$,所以$z-\overline{z}=-i$.

(2)计算:$\dfrac{(1+i)^7}{1-i}+\dfrac{(1-i)^7}{1+i}-\dfrac{(3-4i)(2+2i)^3}{4+3i}$.

解:原式$=\dfrac{(1+i)^8}{(1-i)(1+i)}+\dfrac{(1-i)^8}{(1-i)(1+i)}-\dfrac{(4-3i)(3-4i)(2+2i)^3}{(4-3i)(4+3i)}=\dfrac{(2i)^4}{2}+\dfrac{(-2i)^4}{2}-\dfrac{(-25i)(-16+16i)}{25}=8+8-16i-16=-16i$.

反思提炼

1.复数除法运算的步骤

(1)将除式写为分式;

(2)将分子、分母同乘分母的共轭复数;

(3)将分子、分母分别进行乘法运算,并将其化简.

2.i幂值的周期性规律要记熟,如$i^{4n+m}=i^m$,$i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=0(n,m\in\mathbf{N}^*)$.

3.记住以下结果,可提高运算速度.

(1)$(1+i)^2=2i$;

(2)$(1-i)^2=-2i$;

(3)$\dfrac{1}{i}=-i$;

(4)$\dfrac{1-i}{1+i}=-i$;

(5)$\dfrac{1+i}{1-i}=i$.

探究训练

1.已知复数z的共轭复数为$\overline{z}$,若$\overline{z}(1-i)=2i$(i为虚数单位),则$z=$ ( )

A.i　　B.$-1+i$

C.$-1-i$　　D.$-i$

C **解析**:由已知可得$\overline{z}=\dfrac{2i}{1-i}=\dfrac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-1+i$,则$z=-1-i$.故选C.

2.(2023·全国甲卷)$\dfrac{5(1+i^3)}{(2+i)(2-i)}=$ ( )

A.-1　　B.1　　C.$1-i$　　D.$1+i$

C **解析**:$\dfrac{5(1+i^3)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{5(1-i)}{5}=1-i$.

3.(2021·新高考全国Ⅱ卷)复数$\dfrac{2-i}{1-3i}$在复平面内对应的点所在的象限为 ( )

A.第一象限　　B.第二象限

C.第三象限　　D.第四象限

A **解析**:$\dfrac{2-i}{1-3i}=\dfrac{(2-i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\dfrac{5+5i}{10}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$.故选A.

学习任务三　实系数一元二次方程在复数范围内根的问题

例 2　已知 $1+i$ 是方程 $x^2+bx+c=0$ 的一个根(b,c 为实数).

(1)求 b,c 的值;

(2)试判断 $1-i$ 是否是方程的根.

解:(1)因为 $1+i$ 是方程 $x^2+bx+c=0$ 的根,所以 $(1+i)^2+b(1+i)+c=0$,即 $(b+c)+(2+b)i=0$.

所以 $\begin{cases}b+c=0,\\2+b=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}b=-2,\\c=2.\end{cases}$

(2)由(1)知方程为 $x^2-2x+2=0$,把 $x=1-i$ 代入方程左边得 $(1-i)^2-2(1-i)+2=0$,显然方程成立,所以 $1-i$ 是方程的根.

反思提炼

在复数范围内,实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 根的求解方法

(1)求根公式法($\Delta=b^2-4ac$)

①当 $\Delta\geqslant0$ 时,$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;

②当 $\Delta<0$ 时,$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{-(b^2-4ac)}\,i}{2a}$.

(2)利用复数相等的定义求解

设方程的根为 $x=m+ni(m,n\in\mathbf{R})$,将此代入方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$,化简后利用复数相等的定义求解.

探究训练

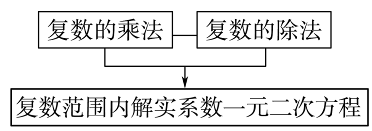
1.在复数范围内一元二次方程 $x^2-2x+5=0$ 的解是__________.

$1\pm2i$　**解析**:因为 $\Delta=(-2)^2-4\times1\times5=-16<0$,所以方程的根为 $x=\dfrac{2\pm\sqrt{16}\,i}{2}=1\pm2i$,即方程的两根分别为 $1+2i$ 和 $1-2i$.

2.若 $1-i$ 是实系数一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的一个根,则 $pq=$________.

-4　**解析**:因为 $1-i$ 是实系数一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的一个根,所以 $(1-i)^2+p(1-i)+q=0$,即 $1-2i+i^2+p-pi+q=0$,整理得 $(p+q)-(p+2)i=0$,所以 $\begin{cases}p+q=0,\\p+2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=-2,\\q=2,\end{cases}$ 则 $pq=-4$.

体系构建



课后素养评价(十九)

基础性·能力运用

1.复数 $z=(7+i)(5-i)$ 的实部为　(　　)

A.-2　　B.2

C.34　　D.36

D　**解析**:因为 $z=(7+i)(5-i)=35-7i+5i-i^2=36-2i$,所以 z 的实部为 36.故选 D.

2.$(1+i)^4+i^{57}=$　(　　)

A.$4+i$　　B.$-4+i$

C.$4-i$　　D.$-4-i$

B　**解析**:$(1+i)^4+i^{57}=[(1+i)^2]^2+i^{1+14\times4}=(2i)^2+i=-4+i$.故选 B.

3.复数 $\dfrac{1+3i}{2-i}=$　(　　)

A.$-1-i$　　B.$1-i$

C.$-\dfrac{1}{5}-\dfrac{7}{5}i$　　D.$-\dfrac{1}{5}+\dfrac{7}{5}i$

D　**解析**:$\dfrac{1+3i}{2-i}=\dfrac{(1+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{2+i+6i+3i^2}{4-i^2}=\dfrac{-1+7i}{5}=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{7}{5}i$.故选 D.

4.已知复数 z 满足 $z=\dfrac{1+i}{i}$(i 为虚数单位),则 $|z|=$　(　　)

A.$\sqrt{2}$　　B.$\sqrt{3}$

C.$\sqrt{6}$　　D.$\sqrt{5}$

A　**解析**:依题意,$z=\dfrac{(1+i)(-i)}{i(-i)}=1-i$,所以 $|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.故选 A.

5.设复数 $z=i^{2\,023}-2i$,则 z 的虚部是　(　　)

A.3　　B.2　　C.-3　　D.-2

C　**解析**：$z=i^{4\times505+3}-2i=i^3-2i=-i-2i=-3i$，所以 z 的虚部为 -3.

故选 C.

6.已知复数 $z\cdot(1-2i)$ 在复平面内对应点的坐标为 $(3,1)$，则 $z=$　　（　　）

A.$\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i$　　B.$\frac{1}{5}+i$

C.$\frac{1}{5}-i$　　D.$\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i$

A　**解析**：由已知复数 $z\cdot(1-2i)$ 在复平面内对应点的坐标为 $(3,1)$，则 $z\cdot(1-2i)=3+i$，所以 $z=\frac{3+i}{1-2i}=\frac{(3+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{1+7i}{5}=\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i$.故选 A.

7.已知 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $2+ai$，$b+i$（i 是虚数单位）是实系数一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根，求 p,q 的值.

解：由一元二次方程根与系数的关系可得

$\begin{cases}(2+ai)+(b+i)=-p,\\(2+ai)(b+i)=q,\end{cases}$

即 $\begin{cases}p=-(2+b)-(a+1)i,\\q=2b-a+(2+ab)i.\end{cases}$

因为 p,q 均为实数，所以 $\begin{cases}-(a+1)=0,\\2+ab=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=2,\end{cases}$ 从而有 $\begin{cases}p=-4,\\q=5.\end{cases}$

综合性·创新提升

1.（多选题）设复数 $z=\frac{2}{1-i}$，则下列命题中正确的是　　（　　）

A.$|z|=\sqrt{2}$

B.$\overline{z}=1-i$

C.z 在复平面内对应的点在第一象限

D.z 的虚部为 2

ABC　**解析**：由题意可得 $z=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+i$.对于 A，$|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，故 A 正确；对于 B，$\overline{z}=1-i$，故 B 正确；对于 C，$z$ 在复平面内对应的点 $(1,1)$ 在第一象限，故 C 正确；对于 D，z 的虚部为 1，故 D 错误.故选 ABC.

2.已知复数 $z_1=1+3i$，$z_2=3+i$，则 $\frac{z_1}{z_2}$ 在复平面内对应的点位于第________象限.

一　**解析**：因为复数 $z_1=1+3i$，$z_2=3+i$，所以 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+3i}{3+i}=\frac{(1+3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{6+8i}{10}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$，在复平面内对应的点为 $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，则点 $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ 位于第一象限.

3.已知复数 z 满足 $(1-i)^2z=4+2i^{2\,023}$，则 $|z|=$________.

$\sqrt{5}$　**解析**：因为 $(1-i)^2=1+i^2-2i=-2i$，$i^{2\,023}=(i^4)^{505}\cdot i^3=-i$，所以 $z=\frac{4-2i}{-2i}=1+2i$，故 $|z|=|1+2i|=\sqrt{5}$.

4.已知 i 为虚数单位，若复数 z 满足 $z+\overline{z}=(z-\overline{z})i=2$，则 $z(2+i)=$________.

$3-i$　**解析**：设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\overline{z}=a-bi$，所以 $z+\overline{z}=2a$，$z-\overline{z}=2bi$.因为 $z+\overline{z}=(z-\overline{z})i=2$，所以 $2a=2bi^2=2$，所以 $a=1$，$b=-1$，所以 $z=1-i$，则 $z(2+i)=(1-i)(2+i)=3-i$.

5.设复数 z_1，z_2 在复平面内的对应点分别为 A，B，点 A 与点 B 关于 x 轴对称.若 $z_1(1-i)=3-i$，则 $|z_2|=$________.

$\sqrt{5}$　**解析**：因为 $z_1(1-i)=3-i$，所以 $z_1=\frac{3-i}{1-i}=\frac{(3-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=2+i$.

因为点 A 与点 B 关于 x 轴对称，所以 z_1 与 z_2 互为共轭复数，

所以 $z_2=\overline{z_1}=2-i$，所以 $|z_2|=\sqrt{5}$.

6.已知 z 为复数，$z+2i$ 和 $\frac{z}{2-i}$ 均为实数，其中 i 是虚数单位.

(1)求复数 z 和 $|z|$；

(2)若复数 $z_1=\overline{z}+\frac{1}{m-1}-\frac{7}{m+2}i$ 在复平面内对应的点位于第四象限，求实数 m 的取值范围.

解：(1)设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，

则 $z+2i=a+(b+2)i$ 为实数，

所以 $b+2=0$，即 $b=-2$.

又 $\frac{z}{2-i}=\frac{a+bi}{2-i}=\frac{(a+bi)(2+i)}{5}$

$=\frac{2a-b}{5}+\frac{a+2b}{5}i$ 为实数，

所以 $\frac{a+2b}{5}=0$，所以 $a=-2b$.

又 $b=-2$，所以 $a=4$，

所以 $z=4-2\mathrm{i}$，

所以 $|z|=\sqrt{4^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$.

(2) $z_1=\bar{z}+\dfrac{1}{m-1}-\dfrac{7}{m+2}\mathrm{i}$

$=4+\dfrac{1}{m-1}+\left(2-\dfrac{7}{m+2}\right)\mathrm{i}$

$=\dfrac{4m-3}{m-1}+\dfrac{2m-3}{m+2}\mathrm{i}$.

因为 z_1 在复平面内对应的点位于第四象限，

所以 $\begin{cases}\dfrac{4m-3}{m-1}>0,\\ \dfrac{2m-3}{m+2}<0,\end{cases}$

解得 $-2<m<\dfrac{3}{4}$ 或 $1<m<\dfrac{3}{2}$，

所以实数 m 的取值范围为 $\left(-2,\dfrac{3}{4}\right)\cup\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$.

7.3* 复数的三角表示

7.3.1 复数的三角表示式
7.3.2 复数乘、除运算的三角表示及其几何意义

学习任务目标

1. 了解复数的三角形式以及复数的辐角、辐角的主值等基本概念.
2. 能将复数的三角形式与代数形式进行转化.
3. 会在三角形式下进行复数的乘、除运算(数学运算)，了解三角形式下复数乘、除运算的几何意义.

问题式预习

知识清单

1. 复数的三角表示式

一般地，任何一个复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 都可以表示成 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的形式，其中，r 是复数 z 的模；θ 是以 x 轴的非负半轴为始边，向量所在射线(射线 OZ)为终边的角，叫做复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的辐角. $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 叫做复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的三角表示式，简称三角形式.

2. 辐角主值

任何一个不为零的复数的辐角有无限多个值，且这些值相差 2π 的整数倍.规定在 $0\leqslant\theta<2\pi$ 范围内的辐角 θ 的值为辐角的主值.通常记作 $\arg z$，即 $0\leqslant\arg z<2\pi$.

复数的代数形式可以转化为三角形式，三角形式也可以转化为代数形式.

3. 复数乘法运算的三角表示

两个复数相乘，积的模等于各复数的模的积，积的辐角等于各复数的辐角的和.即 $r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]$.

4. 复数乘法运算三角表示的几何意义

复数 z_1，z_2 对应的向量为 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$，把向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕点 O 按逆时针方向旋转角 θ_2(如果 $\theta_2<0$，就要把 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕点 O 按顺时针方向旋转角 $|\theta_2|$)，再把它的模变为原来的 r_2 倍，得到向量 $\overrightarrow{OZ}$，$\overrightarrow{OZ}$ 表示的复数就是积 $z_1\cdot z_2$.

5. 复数除法运算的三角表示

两个复数相除，商的模等于被除数的模除以除数的模所得的商，商的辐角等于被除数的辐角减去除数的辐角所得的差. 即 $\dfrac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]$.

概念辨析

1. 判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").

(1) 任何一个不为 0 的复数的辐角有无限多个. (√)

(2) 复数 0 的辐角是任意的. (√)

2. 复数 $-2\left(\cos\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$ 辐角的主值是 (　　)

A.$\frac{\pi}{5}$　　B.$\frac{4\pi}{5}$　　C.$\frac{6\pi}{5}$　　D.$\frac{9\pi}{5}$

C　**解析**：因为$-2\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)=2\cos\frac{6}{5}\pi+i\sin\frac{6}{5}\pi$，所以辐角的主值为$\frac{6}{5}\pi$.故选C.

3.计算：$12\left(\cos\frac{7\pi}{3}+i\sin\frac{7\pi}{3}\right)\div\left[6\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)\right]=$________.

$-\sqrt{3}+i$　**解析**：原式$=2\left[\cos\left(\frac{7\pi}{3}-\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{3}-\frac{3\pi}{2}\right)\right]$

$=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}+i$.

4.请思考并回答问题：

(1)两个复数积的辐角主值是否等于复数辐角主值的和？

提示：不一定.

(2)你能根据复数的三角形式来解释$i^2=-1$的几何意义吗？

提示：i本身可以用坐标平面内y轴上的点(0,1)表示，所以$i=\cos 90°+i\sin 90°$.而$i^2=i\times i=(\cos 90°+i\sin 90°)(\cos 90°+i\sin 90°)=\cos(90°+90°)+i\sin(90°+90°)$表示把$y$轴上的点(0,1)绕原点逆时针转90度，就变为$x$轴上的点$(-1,0)$，所以$i^2=-1$.

任务型课堂

学习任务一　复数的代数形式与三角形式的互化

例1　(1)下列复数是三角形式的是　　(　　)

A.$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

B.$-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

C.$\frac{1}{2}\left(\sin\frac{3\pi}{4}+i\cos\frac{3\pi}{4}\right)$

D.$\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5}$

D　**解析**：选项A，$\cos\frac{\pi}{4}$与$i\sin\frac{\pi}{4}$之间用"－"连接，不符合用"＋"连接的要求；选项B，$-\frac{1}{2}<0$不符合$r\geqslant 0$的要求；选项C，$\sin\frac{3}{4}\pi+i\cos\frac{3}{4}\pi$中的三角函数式不符合要求.故A，B，C均不是复数的三角形式.故选D.

(2)复数$2\sqrt{3}+2i$的三角形式为__________.

$4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$　**解析**：设复数的辐角主值为θ，则$\tan\theta=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以$\theta=\frac{\pi}{6}$.又因为$r=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$，所以复数$2\sqrt{3}+2i$的三角形式为$4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

反思提炼

将复数的代数形式转化为三角形式的步骤

(1)先求复数的模；

(2)确定辐角所在的象限；

(3)根据象限求出辐角；

(4)写出复数的三角形式.

探究训练

1.复数$z=i\sin 10°$的三角形式是　　(　　)

A.$\cos 10°+i\sin 10°$

B.$i\sin 10°$

C.$\sin 10°(\cos 90°+i\sin 90°)$

D.$\sin 10°(\cos 0°+i\sin 0°)$

C　**解析**：$z=i\sin 10°=\sin 10°(0+i)=\sin 10°\cdot(\cos 90°+i\sin 90°)$.

2.将复数$\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$表示成代数形式.

解：$\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left[\cos\left(\pi+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}\left(-\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=1-i$.

学习任务二　复数三角形式的有关概念

例 2　(1)复数$\sqrt{3}-i$的辐角主值为　　(　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{5\pi}{6}$

C. $\frac{7\pi}{6}$　　D. $\frac{11\pi}{6}$

D　**解析：**因为$\sqrt{3}-i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$，且$\frac{11\pi}{6}\in[0,2\pi)$，所以$\sqrt{3}-i$的辐角主值为$\frac{11\pi}{6}$.

(2)已知$z=1+i$，求复数$\omega=\frac{z^2-3z+6}{z+1}$的模和辐角主值，并写出复数$\omega$的三角形式.

解：因为$z=1+i$，所以$\omega=\frac{z^2-3z+6}{z+1}=\frac{(1+i)^2-3(1+i)+6}{1+i+1}=\frac{3-i}{2+i}=1-i$，所以$|\omega|=\sqrt{2}$.因为$1-i$在复平面内对应的点在第四象限，设辐角主值为$\theta$，易知$\tan\theta=-1$，所以$\omega$的辐角主值为$\frac{7\pi}{4}$，则复数$\omega$的三角形式为$\omega=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$.

反思提炼

明确复数三角形式的相关概念是准确解答此类问题的基础，另外掌握复数三角形式的乘、除运算法则是关键.

探究训练

已知$z=1+\cos\theta+i\sin\theta(\pi<\theta<2\pi)$，求$\arg z$.

解：$z=1+\cos\theta+i\sin\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}+i2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$=-2\cos\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)\right]$.

因为$\pi<\theta<2\pi$，所以$\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\pi$，

所以$\cos\frac{\theta}{2}<0$，$\frac{3\pi}{2}<\pi+\frac{\theta}{2}<2\pi$，所以$\arg z=\pi+\frac{\theta}{2}$.

学习任务三　复数三角形式的乘法运算及几何意义

例 3　已知复数$z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$，$z_2=\frac{3}{4}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$，求$z_1z_2$.

解：z_1z_2

$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\times\frac{3}{4}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$=2\times\frac{3}{4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$=\frac{3}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i$.

反思提炼

应先将复数化为三角形式，再按复数三角形式的乘法运算法则进行运算，要注意辐角主值的范围.

探究训练

已知$z_1=4+4i$的辐角主值为θ_1，$z_2=-1-i$的辐角主值为θ_2，求$\theta_1+\theta_2$的值.

解：因为$z_1=4+4i=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$，

$z_2=-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$，

所以z_1z_2

$=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]$

$=8\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}\right)\right]$

$=8\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$，

所以$\theta_1+\theta_2=\frac{3\pi}{2}$.

学习任务 四 复数三角形式的除法运算及几何意义

例 4 计算：$\dfrac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{3}}$.

解：$\dfrac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{3}}$

$=\dfrac{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}}$

$=\dfrac{2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\right]}{\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}}$

$=\dfrac{2\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}}$

$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

反思提炼

注意先将复数化为三角形式，再按复数三角形式的除法法则进行运算，当不要求把计算结果化为代数形式时，也可以用三角形式表示.

探究训练

计算：$2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\div\left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]$.

解：原式$=2\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]\div\left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=-2\mathrm{i}$.

体系构建

- 复数的三角表示式
  - 辐角 — 辐角的主值
  - 三角形式与代数形式互化
- 复数乘、除运算的三角表示
  - 乘法法则
  - 除法法则
  - 几何意义

课后素养评价（二十）

基础性·能力运用

1.若 $a<0$，则 a 的三角形式为（　　）

A.$a(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0)$

B.$a(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$

C.$-a(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$

D.$-a(\cos\pi-\mathrm{i}\sin\pi)$

C　**解析**：因为 $a<0$，所以辐角主值为 π，故其三角形式为 $-a(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$.故选 C.

2.复数$(\sin 10^\circ+\mathrm{i}\cos 10^\circ)(\sin 10^\circ+\mathrm{i}\cos 10^\circ)$的三角形式是（　　）

A.$\sin 30^\circ+\mathrm{i}\cos 30^\circ$

B.$\cos 160^\circ+\mathrm{i}\sin 160^\circ$

C.$\cos 30^\circ+\mathrm{i}\sin 30^\circ$

D.$\sin 160^\circ+\mathrm{i}\cos 160^\circ$

B　**解析**：$(\sin 10^\circ+\mathrm{i}\cos 10^\circ)(\sin 10^\circ+\mathrm{i}\cos 10^\circ)=(\cos 80^\circ+\mathrm{i}\sin 80^\circ)(\cos 80^\circ+\mathrm{i}\sin 80^\circ)=\cos 160^\circ+\mathrm{i}\sin 160^\circ$.故选 B.

3.若$|z|=2$，$\arg z=\frac{\pi}{3}$，则复数 $z=$______.

$1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$　**解析**：由题意知，$z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

4.设复数 $z_1=1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$，$z_2=\sqrt{3}+\mathrm{i}$，则复数$\frac{z_1}{z_2}$的辐角的主值是________.

$\frac{\pi}{6}$　**解析**：由题知，$z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$，

$z_2=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$，

所以复数$\dfrac{z_1}{z_2}$的辐角的主值为$\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$.

5. 复数 $10\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$表示成代数形式为________.

$-5\sqrt{3}-5i$　**解析**：$10\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)=10\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)=-5\sqrt{3}-5i$.

6. 将复数 $1+i$ 对应的向量顺时针旋转 $45°$，则所得向量对应的复数为________.

$\sqrt{2}$　**解析**：$1+i=\sqrt{2}(\cos 45°+i\sin 45°)$，由题意知，$(1+i)[\cos(-45°)+i\sin(-45°)]=\sqrt{2}(\cos 45°+i\sin 45°)[\cos(-45°)+i\sin(-45°)]=\sqrt{2}(\cos 0°+i\sin 0°)=\sqrt{2}$.

7. 计算：$(\cos 40°+i\sin 40°)\div(\cos 10°+i\sin 10°)=$________.

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$　**解析**：$(\cos 40°+i\sin 40°)\div(\cos 10°+i\sin 10°)=\cos(40°-10°)+i\sin(40°-10°)=\cos 30°+i\sin 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

综合性·创新提升

1. 向量$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$分别对应非零复数 z_1，z_2，若$\overrightarrow{OZ_1}\perp\overrightarrow{OZ_2}$，则$\dfrac{z_1}{z_2}$是　　(　　)

A.负实数

B.纯虚数

C.正实数

D.虚数 $a+bi(a,b\in\mathbf{R},a\neq 0)$

B　**解析**：设复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$. 由于$\overrightarrow{OZ_1}\perp\overrightarrow{OZ_2}$，所以$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\pm 90°)+i\sin(\pm 90°)]=\pm\dfrac{r_1}{r_2}i$，即$\dfrac{z_1}{z_2}$为纯虚数.故选 B.

2. 已知复数$-3+4i$ 的辐角主值为 α，复数 $3-4i$ 的辐角的主值为 β，则 $\alpha-\beta=$________.

$-\pi$　**解析**：由题意知$\dfrac{-3+4i}{3-4i}=-\dfrac{3-4i}{3-4i}=-1$，又由题意知$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\dfrac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$，所以$-\dfrac{3\pi}{2}<\alpha-\beta<-\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\alpha-\beta=-\pi$.

3. 复数 $z=(a+i)^2$ 的辐角主值为$\dfrac{3\pi}{2}$，则实数 $a=$________.

-1　**解析**：由于复数 z 的辐角主值为$\dfrac{3\pi}{2}$，故 $z=(a+i)^2=a^2-1+2ai=r\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)=-ir$，所以 $a^2-1=0$，$2a=-r$，故 $a=-1$.

4. 若复数 z 满足$\left|\dfrac{z-1}{z}\right|=\dfrac{1}{2}$，$\arg\left(\dfrac{z-1}{z}\right)=\dfrac{\pi}{3}$，则 z 的代数形式是________.

$1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$　**解析**：设$\dfrac{z-1}{z}=z_0$，则$|z_0|=\dfrac{1}{2}$，$\arg z_0=\dfrac{\pi}{3}$，

所以 $z_0=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}i$，

所以$\dfrac{z-1}{z}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}i$，解得 $z=1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$.

5. 设复平面内的点 A，B 分别对应非零复数 z_1，z_2，且 $z_1^2+z_1z_2+z_2^2=0$，试判断$\triangle AOB$(O 为原点)的形状.

解：因为 $z_2\neq 0$，由条件得$\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2+\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)+1=0$，

解得$\dfrac{z_1}{z_2}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\left(\pm\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{2\pi}{3}\right)$，所以$\angle AOB=\dfrac{2\pi}{3}$.

又因为$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=1$，所以$|z_1|=|z_2|$.

综上可知，$\triangle AOB$ 是顶角为$\dfrac{2\pi}{3}$的等腰三角形.

第八章 立体几何初步

8.1 基本立体图形

第1课时 棱柱、棱锥、棱台

学习任务目标

1.了解空间几何体的概念，了解空间几何体的分类.

2.了解棱柱、棱锥、棱台的定义，知道这三种几何体的结构特征，能够识别和区分给出的几何体.（数学抽象）

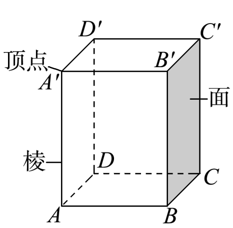
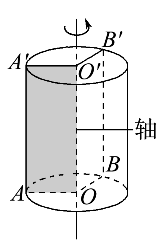
问题式预习

知识清单

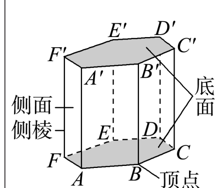
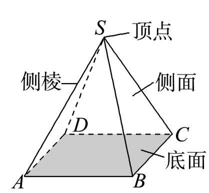
1.空间几何体的定义

空间中的物体都占据着空间的一部分，如果只考虑这些物体的形状和大小，而不考虑其他因素，那么由这些物体抽象出来的空间图形就叫做空间几何体.

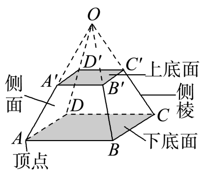
2.空间几何体的分类

类别	多面体	旋转体
定义	一般地，由若干个平面多边形围成的几何体叫做多面体	一条平面曲线（包括直线）绕它所在平面内的一条定直线旋转所形成的曲面叫做旋转面，封闭的旋转面围成的几何体叫做旋转体
图形		
相关概念	面：围成多面体的各个多边形； 棱：两个面的公共边； 顶点：棱与棱的公共点	轴：形成旋转体所绕的定直线

3.多面体

多面体	定义	图形及表示	相关概念
棱柱	一般地，有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的多面体叫做棱柱	如图的棱柱可记作： 棱柱 $ABCDEF-A'B'C'D'E'F'$	底面：这两个互相平行的面； 侧面：除底面外的其余各面； 侧棱：相邻侧面的公共边； 顶点：侧面与底面的公共顶点
棱锥	一般地，有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形，由这些面所围成的多面体叫做棱锥	如图的棱锥可记作： 棱锥 $S-ABCD$	底面：多边形面； 侧面：有公共顶点的各个三角形面； 侧棱：相邻侧面的公共边； 顶点：各侧面的公共顶点

续表

多面体	定义	图形及表示	相关概念
棱台	用一个<u>平行于棱锥底面</u>的平面去截棱锥，底面和截面之间那部分多面体叫做棱台	 如图的棱台可记作：棱台 <u>$ABCD$-$A'B'C'D'$</u>	上底面：原棱锥的<u>截面</u>； 下底面：原棱锥的<u>底面</u>； 侧面：除底面外的其余各面； 侧棱：相邻侧面的公共边； 顶点：侧面与上(下)底面的公共顶点

概念辨析

1. 判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)多面体是由平面多边形和圆面围成的.　(×)

(2)旋转体是由“平面图形”旋转而形成的，这个平面图形可以是平面多边形，也可以是圆或直线或其他曲线.　(√)

(3)棱柱的侧面都是平行四边形.　(√)

(4)有一个面是多边形，其余各面都是三角形的几何体叫棱锥.　(×)

(5)用一个平面去截棱锥，底面和截面之间的部分叫棱台.　(×)

2. 有两个面平行的多面体不可能是　(　　)

A.棱柱　　B.棱锥

C.棱台　　D.以上都错

B　**解析**：棱柱和棱台的上、下底面是平行的，而棱锥的任意两面均不平行.

3. 请思考并回答问题：

(1)面数最少的多面体是什么？

提示：四面体.

(2)把棱台的各侧棱延长，交于一点吗？

提示：交于一点.

任务型课堂

学习任务一　棱柱的结构特征

例1　下列说法中，正确的是　(　　)

A.棱柱中所有的侧棱都相交于一点

B.棱柱中互相平行的两个面叫做棱柱的底面

C.棱柱的侧面是平行四边形，而底面不是平行四边形

D.棱柱的侧棱相等，侧面是平行四边形

D　**解析**：A选项不符合棱柱的特点；B选项中，如图1，构造四棱柱 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$，令四边形 $ABCD$ 是梯形，可知平面 ABB_1A_1 // 平面 DCC_1D_1，但这两个面不是棱柱的底面；C选项中，如图2，底面 $ABCD$ 可以是平行四边形；D选项是棱柱的特点.故选D.

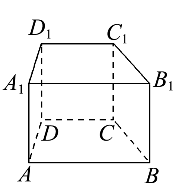


图1

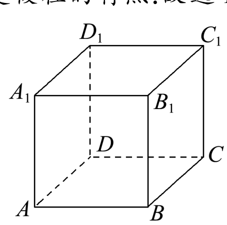


图2

反思提炼

棱柱结构特征问题的解题策略

(1)解棱柱概念辨析问题应紧扣棱柱的定义：

①两个面互相平行；

②其余各面是平行四边形；

③相邻两个四边形的公共边互相平行.

求解时，首先看是否有两个面平行，再看是否满足其他特征.

(2)多注意观察一些实物模型和图片便于用反例排除.

探究训练

(多选题)下列关于棱柱的说法正确的是　(　　)

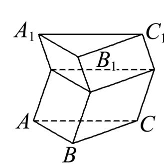
A.所有的棱柱两个底面都平行

B.所有的棱柱一定有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且相邻两个四边形的公共边互相平行

C.有两个面互相平行，其余各面都是四边形的几何体一定是棱柱

D.棱柱至少有五个面

ABD　**解析**：对于ABD，显然是正确的；对于C，棱柱的定义是这样的：有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的多面体叫做棱柱，显然题中漏掉了“并且相邻两个四边形的公共边都互相平行”这一条件，因此所围成的几何体不一定是棱柱.如图所示的几何体就不是棱柱，所以C错误.故选ABD.



学习任务二 棱锥、棱台的结构特征

例 2 (多选题)下列说法中,正确的是 ( )

A.棱锥的各个侧面都是三角形

B.四面体的任何一个面都可以作为棱锥的底面

C.棱锥的侧棱平行

D.有一个面是多边形,其余各面是三角形的几何体是棱锥

AB **解析**:由棱锥的定义知,棱锥的各个侧面都是三角形,故 A 正确;

四面体就是由四个三角形所围成的几何体,因此四面体的任何一个面都可以作为三棱锥的底面,故 B 正确;

棱锥的侧棱交于一点,不平行,故 C 错误;

棱锥的侧面是有一个公共顶点的三角形,故 D 错误.

反思提炼

判断棱锥、棱台结构特征的两个方法

(1)举反例法:

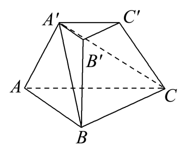
结合棱锥、棱台的定义举反例直接判断关于棱锥、棱台结构特征的某些说法不正确.

(2)直接法:

几何体	棱锥	棱台
定底面	只有一个面是多边形,此面即为底面	有两个互相平行的面,这两个面即为底面
看侧棱	相交于一点	延长后相交于一点

探究训练

如图,在三棱台 $A'B'C'\text{-}ABC$ 中,截去三棱锥 $A'\text{-}ABC$,则剩余部分是 ( )



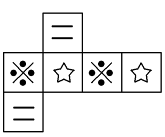
A.三棱锥　　B.四棱锥

C.三棱柱　　D.三棱台

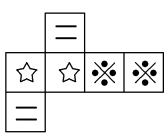
B **解析**:根据棱锥的结构特征可知剩余部分是四棱锥.故选 B.

学习任务三 多面体的表面展开与折叠

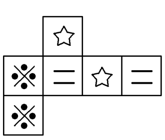
例 3 (1)某同学制作了一个对面图案均相同的正方体礼品盒,如图所示,则这个正方体礼品盒的平面展开图可能为 ( )



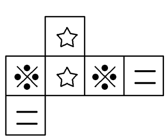
A



B



C



D

A **解析**:由选项验证可知选 A.

(2)如图是三个几何体的平面展开图,请问各是什么几何体?

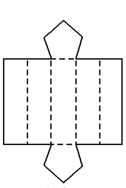


图 1

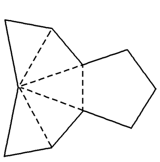


图 2

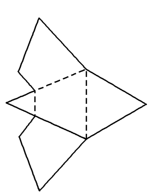


图 3

解:题图 1 中,有 5 个平行四边形,而且还有两个全等的五边形,符合棱柱特点;题图 2 中,有 5 个三角形,且具有共同的顶点,还有一个五边形,符合棱锥特点;题图 3 中,有 3 个梯形,且其腰的延长线交于一点,还有两个相似的三角形,符合棱台的特点.故原几何体分别为五棱柱、五棱锥、三棱台,如图所示,图 1 为五棱柱,图 2 为五棱锥,图 3 为三棱台.

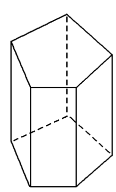


图 1

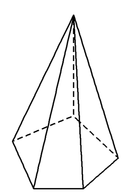


图 2

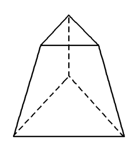
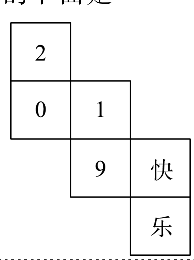


图 3

[**一题多思**]

思考 1.将本例(1)改为:水平放置的正方体的六个面分别用前面、后面、上面、下面、左面、右面表示,如图是一个正方体的平面展开图(图中数字写在正方体的外表面上).若图中“0”上方的“2”在正方体的上面,则这个正方体的下面是 ( )

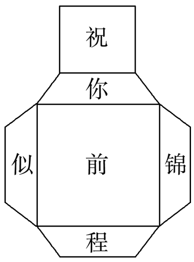


A.1　　　　　　　　B.9

C.快　　　　　　　　D.乐

B　**解析**:将图形折成正方体知选 B.

思考 2.将本例(2)改为:一个几何体的平面展开图如图所示.



(1)该几何体是哪种几何体?

(2)该几何体中与“祝”字面相对的是哪个面?与“你”字面相对的是哪个面?

解:(1)该几何体是四棱台.

(2)与“祝”字面相对的面是“前”字面,与“你”字面相对的面是“程”字面.

反思提炼

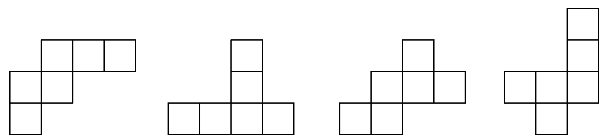
多面体展开图问题的解题策略

(1)绘制展开图:绘制多面体的表面展开图要结合多面体的几何特征,常常给多面体的顶点标上字母,先把多面体的底面画出来,然后依次画出各侧面,便可得到其表面展开图.

(2)由展开图复原几何体:若是给出多面体的表面展开图,来判断是由哪一种多面体展开的,则可把(1)中过程逆推.同一个几何体的表面展开图可能不唯一,也就是说,一个多面体可能有多个表面展开图.

探究训练

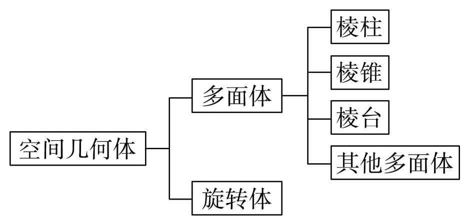
下列四个平面图形中,每个小四边形都是正方形,其中可以沿相邻正方形的公共边折叠围成一个正方体的是　　(　　)



A　　　B　　　C　　　D

C　**解析**:将四个选项中的平面图形折叠,只有 C 选项可以围成正方体.

体系构建



课后素养评价(二十一)

基础性·能力运用

1.若一个几何体的棱数是奇数,则这个几何体可能是　　(　　)

A.三棱锥

B.三棱柱

C.四棱锥

D.四棱柱

B　**解析**:三棱锥有 6 条棱,三棱柱有 9 条棱,四棱锥有 8 条棱,四棱柱有 12 条棱.故选 B.

2.下列说法正确的是　　(　　)

A.棱台的侧棱长都相等

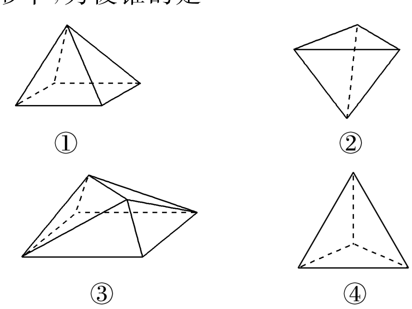
B.棱锥被平面截成的两部分是棱锥和棱台

C.棱柱的侧棱都相等,侧面都是全等的平行四边形

D.棱台的两个底面相似

D　**解析**:由棱台的定义知棱台的侧棱长不一定都相等,而棱台的两个底面相似,所以 A 不正确,D 正确;若平面沿棱锥的高去截,则棱锥被平面截成的两部分可能都是棱锥,B 不正确;棱柱的侧棱都相等且相互平行,且侧面是平行四边形,但侧面并不一定全等,C 不正确.故选 D.

3.下列图形中,为棱锥的是　　(　　)



A.①③　　　　　　B.①③④

C.①②④　　　　　D.①②

C　**解析**:根据棱锥的定义和结构特征可以判断,①②④是棱锥,③不是棱锥.故选 C.

4.给出下列关于棱柱的说法:

①所有的面都是平行四边形;

②每一个面都不会是三角形;

③两底面互相平行,各侧棱也互相平行;

④被平面截成的两部分可以都是棱柱.

其中正确说法的序号是________.

③④ **解析**:三棱柱底面为三角形,故①②错;③④正确.

综合性·创新提升

1.(易错题)下列说法正确的是 ( )

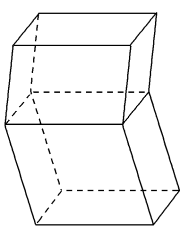
A.用一个平面去截棱锥,棱锥底面和截面之间的部分是棱台

B.上下底面全等,其余各面都是平行四边形的多面体是棱柱

C.棱台的底面是两个相似的正方形

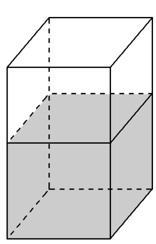
D.棱台的侧棱延长后必交于一点

D **解析**:A 中,要用"平行于底面"的平面去截棱锥,棱锥底面与截面间的部分才叫棱台,如果截棱锥的平面不与底面平行,棱锥底面与截面间的部分只能叫多面体,故 A 错误;B 中,如图所示几何体,



上、下底面全等,其余各面都是平行四边形,但不是棱柱,故 B 错误;C 中,棱台的底面不一定是两个相似的正方形,只需是相似多边形即可,故 C 错误;D 中,由棱台的定义知棱台的侧棱延长后必交于一点,故 D 正确.故选 D.

2.将如图所示装有水的长方体水槽底面一边固定后倾斜一个小角度,则倾斜后水槽中的水形成的几何体是 ( )



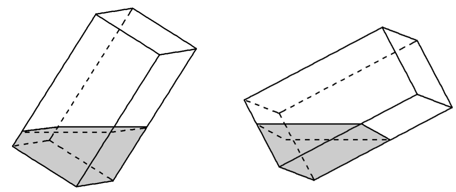
A.棱柱

B.棱台

C.棱柱与棱锥的组合体

D.不能确定

A **解析**:如图所示,因为有水的部分始终有两个平面平行,而其余各面都是平行四边形,因此是棱柱.故选 A.



3.图 1 是一个小正方体的表面展开图,小正方体从如图 2 所示的位置依次翻到第 1 格、第 2 格、第 3 格、第 4 格、第 5 格,这时小正方体朝上一面的字是________.

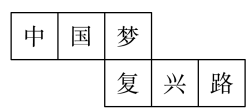


图1

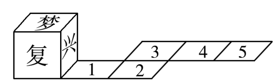


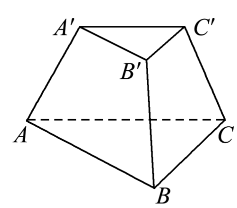
图2

路 **解析**:由题图 1 可知,"国"和"兴"相对,"梦"和"中"相对,"复"和"路"相对;

由题图 2 可得,与第 1,2,3,4,5 格对应的面的字分别是"兴""梦""路""国""复",

所以到第 5 格时,小正方体朝上一面的字是"路".

4.如图所示的是一个三棱台 $ABC\text{-}A'B'C'$,试用两个平面把这个三棱台分成三部分,使每一部分都是一个三棱锥.



解:过 A',B,C 三点作一个平面,再过 A',B,C' 作一个平面,就把三棱台 $ABC\text{-}A'B'C'$ 分成三部分,三部分分别是棱锥 $A'\text{-}ABC$,棱锥 $B\text{-}A'B'C'$,棱锥 $A'\text{-}BCC'$.(答案不唯一)

第 2 课时　圆柱、圆锥、圆台、球

学习任务目标

1.掌握圆柱、圆锥、圆台、球的结构特征.(直观想象)

2.会用圆柱、圆锥、圆台、球的结构特征描述简单组合体的结构特征.

3.理解圆柱、圆锥、圆台的关系.

问题式预习

知识清单

1.圆柱

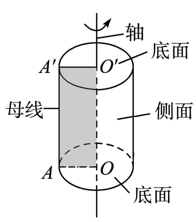
(1)定义

以矩形的一边所在直线为旋转轴,其余三边旋转一周形成的面所围成的旋转体叫做圆柱.

(2)相关概念

旋转轴叫做圆柱的轴;垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做圆柱的底面;平行于轴的边旋转而成的曲面叫做圆柱的侧面;无论旋转到什么位置,平行于轴的边都叫做圆柱侧面的母线.

(3)图形



(4)表示法

圆柱用表示它的轴的字母表示,图中的圆柱表示为圆柱 $O'O$.

2.圆锥

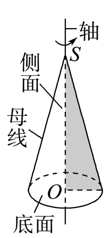
(1)定义

以直角三角形的一条直角边所在直线为旋转轴,其余两边旋转一周形成的面所围成的旋转体叫做圆锥.

(2)相关概念

旋转轴叫做圆锥的轴;垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做圆锥的底面;直角三角形的斜边旋转而成的曲面叫做圆锥的侧面;无论旋转到什么位置,不垂直于轴的边都叫做圆锥侧面的母线.

(3)图形



(4)表示法

圆锥用表示它的轴的字母表示,图中的圆锥表示为圆锥 SO.

3.圆台

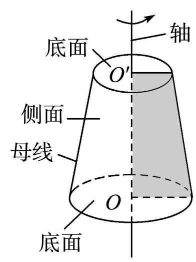
(1)定义

用平行于圆锥底面的平面去截圆锥,底面与截面之间的部分叫做圆台.

(2)相关概念

与圆柱和圆锥一样,圆台也有轴、底面、侧面、母线.

(3)图形



(4)表示法

圆台用表示它的轴的字母表示,图中的圆台表示为圆台 $O'O$.

4.球

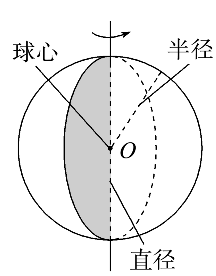
(1)定义

半圆以它的直径所在直线为旋转轴,旋转一周形成的曲面叫做球面,球面所围成的旋转体叫做球体,简称球.

(2)相关概念

半圆的圆心叫做球的球心;连接球心和球面上任意一点的线段叫做球的半径;连接球面上两点并且经过球心的线段叫做球的直径.

(3)图形



(4)表示法

球常用表示球心的字母来表示，图中的球表示为球 O.

5.简单组合体

(1)概念：由简单几何体组合而成的几何体叫做简单组合体.现实世界中的物体大多是由具有柱体、锥体、台体、球等结构特征的物体组合而成.

(2)基本形式：一种是由简单几何体拼接而成，另一种是由简单几何体截去或挖去一部分而成.

概念辨析

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)直角三角形绕一边所在直线旋转得到的旋转体是圆锥. (×)

(2)夹在圆柱的两个平行截面间的几何体是一圆柱. (×)

(3)圆锥截去一个小圆锥后剩余部分是圆台. (√)

(4)半圆旋转一周形成球. (×)

2.圆锥的侧面展开图是 ( )

A.三角形 B.长方形

C.正方形 D.扇形

D **解析**：利用圆锥的形成过程，可得圆锥的侧面展开图是扇形.故选 D.

3.下面几何体的截面一定是圆面的是 ( )

A.圆台 B.球

C.圆柱 D.棱柱

B **解析**：截面可以从各个不同的部位截取，截得的截面都是圆面的几何体只有球.

4.请思考并回答问题：

(1)用平面去截圆锥一定会得到一个圆锥和一个圆台吗？

提示：不一定.只有当平面与圆锥的底面平行时，才能截得一个圆锥和一个圆台.

(2)圆台的两条母线所在的直线一定相交吗？

提示：一定相交.由于圆台是由圆锥截得，因此两条母线所在的直线一定相交.

(3)球能否由圆面旋转而成？

提示：能.圆面以直径所在的直线为旋转轴，旋转半周形成的旋转体即为球.

任务型课堂

学习任务一 旋转体的结构特征

1.下列命题正确的有 ( )

①在圆柱的上、下两底面的圆周上各取一点，则这两点的连线是圆柱的母线；

②圆锥的顶点与底面圆周上任意一点的连线是圆锥的母线；

③在圆台上、下两底面的圆周上各取一点，则这两点的连线是圆台的母线；

④圆柱的任意两条母线相互平行.

A.①② B.②③

C.①③ D.②④

D **解析**：①以所取的两点与圆柱上、下底面的圆心为顶点的四边形不一定是矩形，若不是矩形，则与圆柱母线定义不符合；③所取两点连线的延长线不一定与轴交于一点，不符合圆台母线的定义；②④分别符合圆锥的定义、圆柱母线的性质.

2.(多选题)用一个平面去截一个几何体，得到的截面是三角形，这个几何体可能是 ( )

A.圆柱 B.圆锥

C.球体 D.棱台

BD **解析**：无论怎样截圆柱和球，截面不可能是三角形，截圆锥和棱台，截面可以是三角形.故选 BD.

3.下列说法中，正确说法的序号有________.

①直线绕直线旋转形成柱面；

②曲线平移一定形成曲面；

③直角梯形绕一边所在直线旋转一周形成圆台；

④半圆面绕直径所在直线旋转一周形成球.

④ **解析**：①错误，当两直线相交时，形不成柱面；②错误，也可能形成平面；③错误，若绕底边所在直线旋转一周，则形成圆柱和圆锥的组合体；④正确，由球的定义知，正确.

反思提炼

1.解答第 1 题这类题的关键在于准确理解旋转体的母线的概念.

2.圆锥、圆台的母线是非常重要的概念，应熟练掌握；圆柱、圆锥、圆台的母线实质上就是矩形、直角三角形、直角梯形在绕轴旋转的过程中，特定的一条边在所经过的每一个位置时的这条边本身.因此，圆锥的母线交于顶点，圆柱的母线相互平行，圆台的母线延长后也相交于一点.

学习任务二　组合体的结构特征

例 1　描述下列各图所示几何体的结构特征.

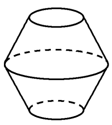


图 1

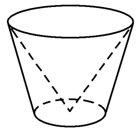


图 2

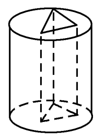


图 3

解:题图 1 所示的几何体是由两个同底的圆台拼接而成的组合体;题图 2 所示的几何体是由一个圆台挖去一个同底的圆锥得到的组合体;题图 3 所示的几何体是在一个圆柱中间挖去一个三棱柱后得到的组合体.

反思提炼

判断组合体是由哪些简单几何体组成的技巧

(1)准确理解简单几何体(柱、锥、台、球)的结构特征.

(2)掌握简单组合体的两种基本构成方式.

(3)若用分割的方法,则需要根据几何体的结构特征恰当地作出辅助线(或面).

探究训练

下列组合体是由哪些几何体组成的?

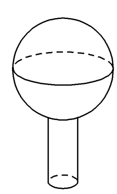


图 1

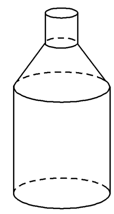


图 2

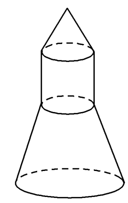


图 3

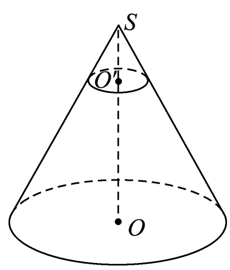
解:(1)由两个几何体组合而成,分别为球、圆柱.

(2)由三个几何体组合而成,分别为圆柱、圆台、圆柱.

(3)由三个几何体组合而成,分别为圆锥、圆柱、圆台.

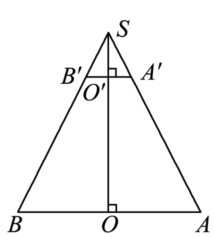
学习任务三　旋转体的有关计算

例 2　如图,用一个平行于圆锥 SO 底面的平面截这个圆锥,截得的圆台上、下底面的面积之比为 $1:16$,截去的圆锥的母线长是 3 cm,求圆台 $O'O$ 的母线长.



解:设圆台的母线长为 l cm.由截得的圆台上、下底面的面积之比为 $1:16$,可设截得的圆台上、下底面的半径分别为 r cm,$4r$ cm.

过轴 SO 作截面,如图所示,



则$\triangle SO'A' \backsim \triangle SOA$,$SA'=3$ cm,

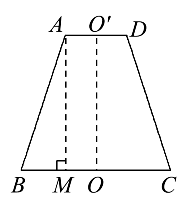
所以$\dfrac{SA'}{SA}=\dfrac{O'A'}{OA}$,所以$\dfrac{3}{3+l}=\dfrac{r}{4r}=\dfrac{1}{4}$,解得 $l=9$.

故圆台 $O'O$ 的母线长为 9 cm.

[一题多思]

思考 1.本例的条件换为"圆台两底面半径分别是 2 cm 和 5 cm,母线长是 $3\sqrt{10}$ cm",则它的轴截面的面积是________ cm^2.

63　**解析**:画出轴截面,如图,过点 A 作 $AM\perp BC$ 于点 M,



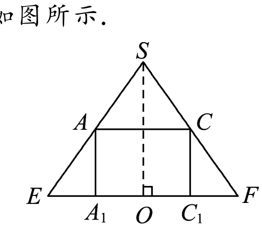
则 $BM=5-2=3(cm)$,

$AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=9(cm)$,

所以 $S_{梯形ABCD}=\dfrac{(4+10)\times 9}{2}=63(cm^2)$.

思考 2.已知圆锥底面半径为 1 cm,高为$\sqrt{2}$ cm,求这个圆锥的内接正方体的棱长.

解:设圆锥的轴截面为$\triangle SEF$,正方体的对角面为矩形 ACC_1A_1,如图所示.



设正方体的棱长为 x cm,则 $AA_1=x$ cm,$A_1C_1=\sqrt{2}x$ cm.

作 $SO\perp EF$ 于点 O,则 $SO=\sqrt{2}$ cm,$OE=1$ cm.

因为$\triangle EAA_1 \backsim \triangle ESO$,

所以$\dfrac{AA_1}{SO}=\dfrac{EA_1}{EO}$,即$\dfrac{x}{\sqrt{2}}=\dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}x}{1}$,

解得 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,即这个内接正方体的棱长为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ cm.

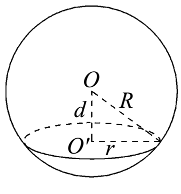
反思提炼

用平行于底面的平面去截柱、锥、台等几何体，注意抓住截面的性质（与底面相似），同时结合旋转体的经过旋转轴的截面（轴截面）的几何性质，利用相似三角形的相似比，建立相关几何变量的方程（组）而得解.

探究训练

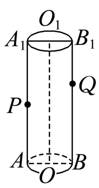
1. 已知球的半径为 10 cm，若它的一个截面圆的面积为 $36\pi\ \text{cm}^2$，则球心与截面圆圆心的距离是________cm.

8 **解析**：如图，

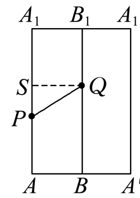


设截面圆的半径为 r，球心与截面圆圆心之间的距离为 d，球的半径为 R. 由已知得 $R=10$ cm. 由 $\pi r^2=36\pi$，得 $r=6$，所以 $d=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{100-36}=8$(cm).

2. 如图，已知圆柱的高为 80 cm，底面半径为 10 cm，轴截面 ABB_1A_1 上有 P，Q 两点，且 $PA=40$ cm，$B_1Q=30$ cm，若一只蚂蚁沿着侧面从点 P 爬到点 Q，问：蚂蚁爬过的最短路径长是多少？



解：将圆柱的侧面沿母线 AA_1 展开，得到如图所示的矩形，



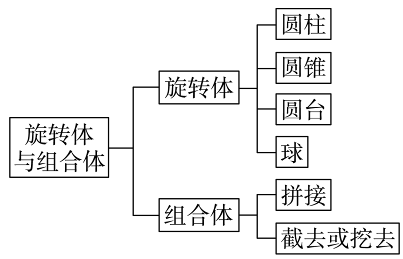
所以 $A_1B_1=\dfrac{1}{2}\cdot 2\pi r=\pi r=10\pi$(cm).

过点 Q 作 $QS\perp AA_1$ 于点 S，

在 Rt$\triangle PQS$ 中，$PS=80-40-30=10$(cm)，$QS=A_1B_1=10\pi$(cm)，

所以 $PQ=\sqrt{PS^2+QS^2}=10\sqrt{\pi^2+1}$(cm). 故蚂蚁爬过的最短路径长是 $10\sqrt{\pi^2+1}$ cm.

体系构建



课后素养评价（二十二）

基础性·能力运用

1.（多选题）下列命题正确的有（　　）

A. 圆柱的轴截面是过母线的截面中面积最大的截面

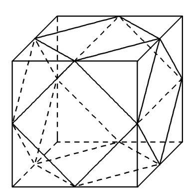
B. 圆柱不是旋转体

C. 半圆绕直径所在直线旋转半周得到一个球

D. 圆台的轴截面是等腰梯形

AD **解析**：圆柱的纵截面是矩形，矩形的长是圆柱的高，矩形的宽是圆内的弦，轴截面的宽是过圆心的直径，故圆柱的轴截面是过母线的截面中面积最大的截面，故 A 正确；根据旋转体的概念可知圆柱是旋转体，故 B 错误；半圆围绕直径旋转半周得到半个球，故 C 错误；圆台的上下底面是平行且不相等的圆，且母线等长，所以其轴截面是等腰梯形，故 D 正确. 故选 AD.

2.（与生活实践结合）（多选题）某广场设置了一些石凳供大家休息，如图，每个石凳都是由正方体截去八个相同的正三棱锥得到的几何体，则下列结论正确的是（　　）



A. 该几何体的面是等边三角形或正方形

B. 该几何体恰有 12 个面

C. 该几何体恰有 24 条棱

D. 该几何体恰有 12 个顶点

ACD **解析**：据图可得该几何体的面是等边三角形或正方形，A 正确；该几何体恰有 14 个面，B 不正确；该几何体恰有 24 条棱，C 正确；该几何体恰有 12 个顶点，D 正确. 故选 ACD.

3. 用长为 4、宽为 2 的矩形作侧面围成一个圆柱，此圆柱轴截面的面积为________.

$\frac{8}{\pi}$　**解析**:设圆柱底面半径为 r,母线长为 l.若底面周长为 4,由 $2\pi r=4$,得 $r=\frac{2}{\pi}$,所以轴截面面积 $S=2rl=\frac{4}{\pi}\times2=\frac{8}{\pi}$;若底面周长为 2,由 $2\pi r=2$,得 $r=\frac{1}{\pi}$,所以轴截面面积 $S=2rl=\frac{2}{\pi}\times4=\frac{8}{\pi}$.

4.一个圆台的母线长为 5,上、下底面的直径长分别为 2,8,则圆台的高为________.

4　**解析**:由题意得,圆台的轴截面为等腰梯形,其中上底长为 2,下底长为 8,腰长为 5,所以高 $h=\sqrt{5^2-\left(\frac{8-2}{2}\right)^2}=4$.

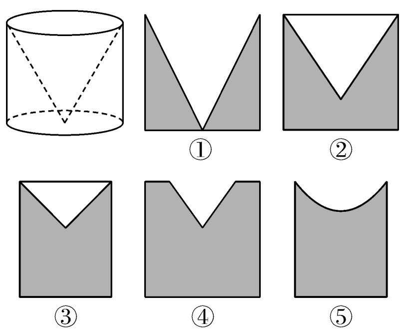
综合性·创新提升

1.底面半径为 2 且水平放置的圆锥被过高的中点且平行于底面的平面所截,则截面圆的面积为(　　)

A.π　　B.2π　　C.3π　　D.4π

A　**解析**:由相似三角形的性质可知截面圆的半径为 1,所以截面圆的面积 $S=\pi$.故选 A.

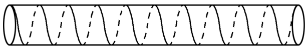
2.如图的几何体由一个圆柱挖去一个以圆柱的上底面为底面,下底面圆心为顶点的圆锥而得.现用一个竖直的平面去截这个几何体,则截面图形可能是(　　)



A.①②　　B.①③　　C.①④　　D.①⑤

D　**解析**:由题图知,当截面过旋转轴时,截面图形是①;当截面不过旋转轴时,截面图形是⑤.故选 D.

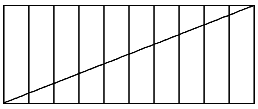
3.(创新题)如图在一根长 11 cm,底面周长为 6 cm 的圆柱表面用一根细铁丝缠绕,形成 10 圈的螺旋.若铁丝的两端恰好落在圆柱的同一条母线上,则铁丝长度的最小值为(　　)



A.61 cm　　B.$\sqrt{157}$ cm

C.$\sqrt{2\ 021}$ cm　　D.$\sqrt{1\ 037}$ cm

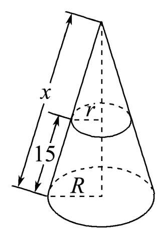
A　**解析**:因为圆柱形柱体的高为 11,外圆周长 6,又铁丝在柱体上缠绕 10 圈,且铁丝的两个端点落在圆柱的同一条母线上,所以我们可以得到展开后的平面图形如图所示.



其中每一个小矩形的宽为圆柱的外圆周长 6,高为圆柱的高 11,则大矩形的对角线即为铁丝长度的最小值.此时铁丝长度的最小值为 $\sqrt{11^2+60^2}=61$.故选 A.

4.把一个圆锥截成圆台,已知圆台的上、下底面面积之比是 1∶16,圆台的母线长为 15,则圆锥的母线长为________.

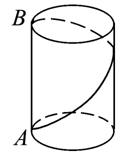
20　**解析**:因为圆台的上、下底面面积之比是1∶16,所以上、下底面半径之比为 1∶4.如图,设圆台的上底面半径 r,则下底面半径 $R=4r$.



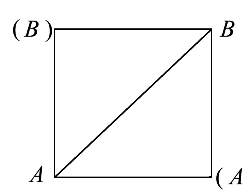
设圆锥的母线长为 x.由相似三角形可得 $\frac{r}{R}=\frac{1}{4}=\frac{x-15}{x}$,解得 $x=20$.

故得圆锥的母线长为 20.

5.如图所示的是底面半径为 1,高为 2 的圆柱,AB 为圆柱的一条母线,在点 A 有一只蚂蚁.现在这只蚂蚁要围绕圆柱由点 A 爬到点 B,则蚂蚁爬行的最短距离是____________.



$2\sqrt{\pi^2+1}$　**解析**:沿 AB 将圆柱的侧面展开,如图所示,



其中蚂蚁爬行的最短距离为 AB 的长度,且 $AB=\sqrt{(2\pi)^2+2^2}=2\sqrt{\pi^2+1}$.

8.2 立体图形的直观图

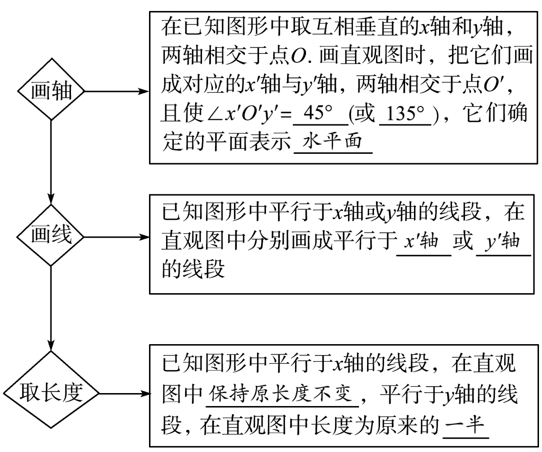
学习任务目标

1. 了解斜二测画法的概念.
2. 会用斜二测画法画出一些简单平面图形和立体图形的直观图.(直观想象)
3. 了解空间图形的不同表示形式及不同形式间的联系.

问题式预习

知识清单

1. 用斜二测画法画水平放置的平面图形的直观图



2. 立体图形直观图的画法

画几何体的直观图时，与画平面图形的直观图相比，只是多画一个与 x 轴、y 轴都垂直的 z 轴，并且使平行于 z 轴的线段的平行性和长度都不变.

概念辨析

1. 判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").

(1)长度相等的线段，在直观图中长度仍相等. ( )

× 提示：平行于 x 轴的线段长度不变，平行于 y 轴的线段长度变为原来的一半.

(2)若两条线段平行，则在直观图中对应的线段仍平行. ( )

√ 提示：斜二测画法保持了原图形的平行性、共线性和平行线段的长度比.

(3)若两条线段垂直，则在直观图中对应的线段也互相垂直. ( )

× 提示：如在原平面直角坐标系 Oxy 中，两坐标轴的夹角为 $90°$，对应直观图中的 $\angle x'O'y'$ 为 $45°$ 或 $135°$.

2. 在直角坐标系中，一个平面图形中的一条线段 AB 的实际长度为 4 cm，若 $AB\parallel x$ 轴，则画出直观图后对应线段 $A'B'=$4cm，若 $AB\parallel y$ 轴，则画出直观图后对应线段 $A'B'=$2cm.

3. 请思考并回答问题：

(1)相等的角在直观图中还相等吗？

提示：不一定相等.例如正方形的直观图为平行四边形.

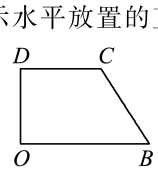
(2)空间几何体的直观图唯一吗？

提示：不唯一.作直观图时，由于选轴的不同，画出的直观图也不同.

任务型课堂

学习任务一　画水平放置的平面图形的直观图

例 1　画出如图所示水平放置的直角梯形的直观图.



解：①在已知的直角梯形 $OBCD$ 中，以底边 OB 所在直线为 x 轴，垂直于 OB 的腰 OD 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系，如图 1.画出相应的 x' 轴和 y' 轴，使 $\angle x'O'y'=45°$，如图 2.

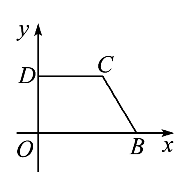


图 1

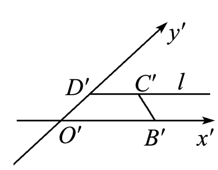


图 2

②在 x' 轴上取 $O'B'=OB$，在 y' 轴上取 $O'D'=\frac{1}{2}OD$，过点 D' 作 x' 轴的平行线 l，在 l 上沿 x' 轴的正方向取点 C'，使得 $D'C'=DC$.如图 2.

③连接 $B'C'$，并擦去 x' 轴与 y' 轴及其他一些辅助线，所得四边形 $O'B'C'D'$ 就是直角梯形 $OBCD$ 的直观图.如图 3.

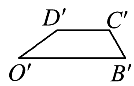


图 3

反思提炼

画水平放置的平面图形的直观图的注意点

在画水平放置的平面图形的直观图时，选取适当的直角坐标系是关键，一般要使平面多边形尽可能多的顶点落在坐标轴上，以便于画点.原图中不平行于坐标轴的线段可以通过作平行于坐标轴的线段来得到其对应线段.

探究训练

画一个锐角为 45°，相邻两边长分别为 3 cm 和 4 cm 的平行四边形的直观图.

解：(1)画轴.如图 1，在一个含 45°，相邻两边长分别为 3 cm 和 4 cm 的平行四边形 $ABCD$ 中，建立平面直角坐标系 Oxy，再建立坐标系 $O'x'y'$，其中 $\angle x'O'y'=45°$.

(2)描点.如图 2，在 x' 轴上截取 $O'A'=OA$，$O'B'=OB$，在 y 轴上截取 $O'D'=\dfrac{1}{2}OD$，过点 D' 作 $D'C'\parallel x'$ 轴，且 $D'C'=DC$.

(3)连线.连接 $B'C'$，$A'D'$，如图 2.

(4)成图.如图 3，四边形 $A'B'C'D'$ 即为一个锐角为 45°的平行四边形 $ABCD$ 的直观图.

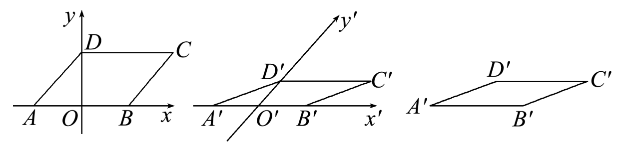


图 1　图 2　图 3

学习任务二　画空间几何体的直观图

例 2　有一个正六棱锥(底面为正六边形，侧面为全等的等腰三角形的棱锥)，底面边长为 3，高为 3.画出这个正六棱锥的直观图.

解：①先画出水平放置的边长为 3 的正六边形的直观图 $A'B'C'D'E'F'$，如图 1 所示；

②过正六边形的中心 O' 建立 z' 轴，在 z' 轴上截取 $O'V'=3$，画出正六棱锥的顶点 V'，如图 2 所示；

③连接 $V'A'$，$V'B'$，$V'C'$，$V'D'$，$V'E'$，$V'F'$，如图 3 所示；

④擦去辅助线，遮挡部分用虚线表示，即得到正六棱锥的直观图 $V'\text{-}A'B'C'D'E'F'$，如图 4 所示.

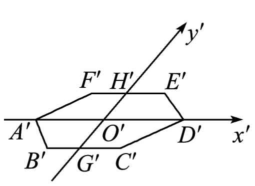


图 1

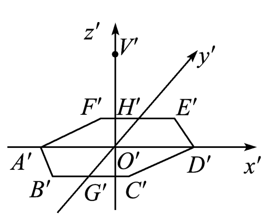


图 2

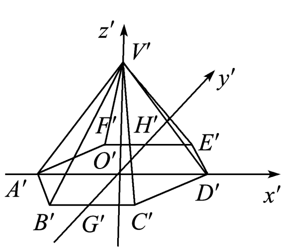


图 3

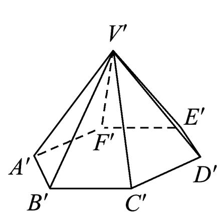


图 4

反思提炼

画空间几何体的直观图的注意点

(1)对于一些常见几何体(柱、锥、台、球)的直观图，应该记住它们的大致形状，以便较快且准地画出.

(2)画空间几何体的直观图时，比画平面图形的直观图多画了一个 z' 轴，z' 轴用来确定竖直方向的线段.

(3)z' 轴方向上的线段，方向与长度都与原图保持一致.

探究训练

画出一个底面是正方形，侧棱均相等的四棱锥的直观图.

解：(1)画轴.画 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴，$\angle xOy=45°$(或 135°)，$\angle xOz=90°$，如图 1.

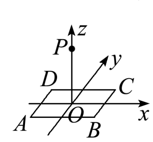


图 1

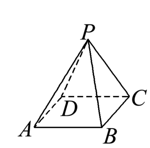


图 2

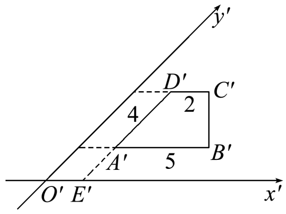
(2)画底面.以 O 为中心在 Oxy 平面内，画出正方形的直观图 $ABCD$，如图 1.

(3)画顶点.在 Oz 轴上截取 OP，使 OP 的长度等于原四棱锥的高，如图 1.

(4)成图.顺次连接 PA，PB，PC，PD，并擦去辅助线，将被遮住的部分改为虚线，得四棱锥的直观图，如图 2.

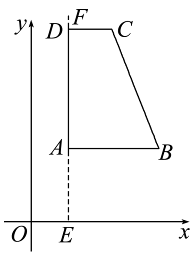
学习任务三 直观图的还原与计算问题

例 3 如图是水平放置的四边形 $ABCD$ 的直观图 $A'B'C'D'$，则原四边形 $ABCD$ 的面积是 ( )



A.14　　B.$10\sqrt{2}$　　C.28　　D.$14\sqrt{2}$

C **解析**：因为 $A'D' \parallel y'$ 轴，$A'B' \parallel C'D'$，$A'B' \neq C'D'$，所以原图形是一个直角梯形，如图．又 $A'D'=4$，所以原直角梯形的上、下底及高分别是 2，5，8，故其面积 $S=\frac{1}{2}\times(2+5)\times 8=28$．



反思提炼

1.由直观图还原平面图形的关键点

(1)平行于 x' 轴的线段长度不变，平行于 y' 轴的线段长度扩大为原来的 2 倍；

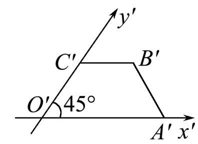
(2)对于所在两边不与 x' 轴、y' 轴平行的顶点，可通过作 x' 轴、y' 轴的平行线确定其在原直角坐标系 xOy 中的位置．

2.直观图与原图形面积之间的关系

若一个平面多边形的面积为 S，其直观图的面积为 S'，则有 $S'=\frac{\sqrt{2}}{4}S$ 或 $S=2\sqrt{2}S'$．利用这一公式可由原图形面积求其直观图面积或由直观图面积求原图形面积．

探究训练

一梯形的直观图是一个如图所示的等腰梯形 $O'A'B'C'$，且梯形 $O'A'B'C'$ 的面积为 $\sqrt{2}$，则原梯形的面积为 ( )

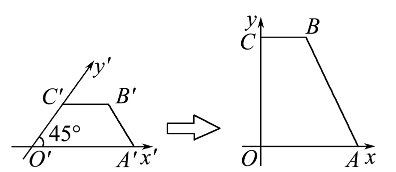


A.2　　B.$\sqrt{2}$

C.$2\sqrt{2}$　　D.4

D **解析**：如图，由斜二测画法原理知，原梯形与直观图中的梯形上、下底边的长度是一样的，原梯形的高 OC 是直观图中 $O'C'$ 长度的 2 倍．

因为 $O'C'$ 的长度是直观图中梯形的高的 $\sqrt{2}$ 倍，所以原梯形的高 OC 的长度是直观图中梯形的高的 $2\sqrt{2}$ 倍．故其面积是梯形 $O'A'B'C'$ 面积的 $2\sqrt{2}$ 倍．又梯形 $O'A'B'C'$ 的面积为 $\sqrt{2}$，所以原梯形的面积是 4．



体系构建

- 直观图
  - 斜二测画法
  - 平面图形的直观图
  - 空间几何体的直观图

课后素养评价(二十三)

基础性·能力运用

1.(多选题)对于用斜二测画法画水平放置的图形的直观图,下列描述正确的是 ( )

A.梯形的直观图仍然是一个梯形

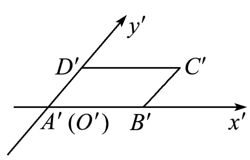
B.$90°$的角的直观图会变为$45°$的角

C.与y轴平行的线段长度变为原来的一半

D.由于选轴的不同,所得的直观图可能不同

ACD **解析**:对于A,根据斜二测画法特点知,相交直线的直观图仍是相交直线,平行直线的直观图仍是平行直线,因此梯形的直观图仍是一个梯形,故A正确;对于B,$90°$的角的直观图会变为$45°$或$135°$的角,故B错误;C,D显然正确.故选ACD.

2.如图所示的为一个平面图形的直观图,则它的实际形状为 ( )



A.平行四边形

B.梯形

C.菱形

D.矩形

D **解析**:由直观图还原为原图得一个角为直角的平行四边形,即矩形.故选D.

3.一个建筑物上部为四棱锥,下部为长方体,且四棱锥的底面与长方体的上底面重合.已知长方体的长、宽、高分别为20 cm,5 cm,10 cm,四棱锥的高为8 cm.若按$5:1$的比例画出它的直观图,那么直观图中,长方体的长、宽、高和棱锥的高可分别为 ( )

A.4 cm,1 cm,2 cm,1.6 cm

B.4 cm,0.5 cm,2 cm,0.8 cm

C.4 cm,0.5 cm,2 cm,1.6 cm

D.4 cm,0.5 cm,1 cm,0.8 cm

C **解析**:原图形中平行于x轴、z轴的线段在直观图中分别平行于x'轴、z'轴,且长度不变;原图形中平行于y轴的线段在直观图中平行于y'轴,且长度变为原来的一半.故选C.

4.用斜二测画法画出水平放置的长为6、宽为4的矩形水平放置的直观图,则该直观图的面积为 ( )

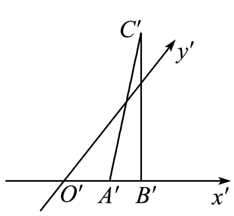
A.12　　B.24

C.$6\sqrt{2}$　　D.$12\sqrt{2}$

C **解析**:因为原矩形的面积$S=6\times4=24$,所以其直观图的面积为$24\times\frac{\sqrt{2}}{4}=6\sqrt{2}$.故选C.

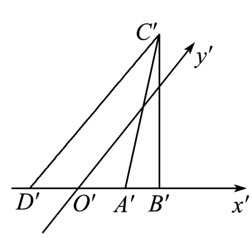
综合性·创新提升

1.如图所示,$\triangle A'B'C'$表示水平放置的$\triangle ABC$在斜二测画法下的直观图,$A'B'$在x'轴上,$B'C'$与x'轴垂直,且$B'C'=3$,则$\triangle ABC$的边AB上的高为 ( )



A.$6\sqrt{2}$　　B.$3\sqrt{3}$　　C.$3\sqrt{2}$　　D.3

A **解析**:过点C'作$C'D'\parallel y'$轴,交x'轴于点D',则$\angle C'D'B'=45°$.因为在$Rt\triangle B'C'D'$中,$B'C'=3$,所以$C'D'=3\sqrt{2}$.所以$\triangle ABC$的边AB上的高$CD=2C'D'=6\sqrt{2}$.故选A.



2.已知正三角形ABC的边长为a,那么$\triangle ABC$的直观图$\triangle A'B'C'$的面积为 ( )

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$

C. $\frac{\sqrt{6}}{8}a^2$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{16}a^2$

D　**解析**:如图,图1和图2分别是正三角形 ABC 的原图和直观图.由图2可知,$A'B'=AB=a$,$O'C'=\frac{1}{2}OC=\frac{\sqrt{3}}{4}a$.在图2中作 $C'D'\perp A'B'$ 于点 D',则 $C'D'=\frac{\sqrt{2}}{2}O'C'=\frac{\sqrt{6}}{8}a$.

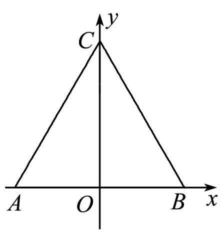


图1

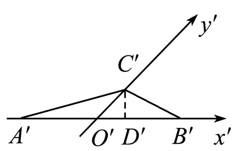
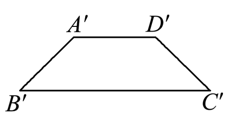


图2

所以 $S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}A'B'\cdot C'D'=\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{6}}{8}a=\frac{\sqrt{6}}{16}a^2$.故选D.

3. 如图所示,一个水平放置的平面图形的直观图是一个底角为45°、腰和上底的长均为1的等腰梯形,则这个平面图形的面积是　　(　　)

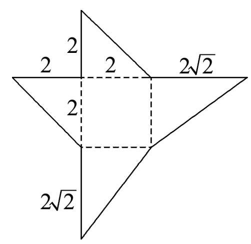


A. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

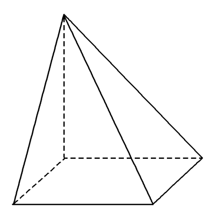
C. $1+\sqrt{2}$　　D. $2+\sqrt{2}$

D　**解析**:由题图可知,原平面图形为直角梯形,其上底长为1,下底长为 $1+2\times1\times\cos 45°=1+\sqrt{2}$,高为2,所以其面积 $S=\frac{(1+1+\sqrt{2})\times2}{2}=2+\sqrt{2}$.故选D.

4. 如图为一几何体的展开图,沿图中虚线折叠可将其还原为立体图形,请画出该几何体的直观图.



解:由题设中所给的展开图可以得出,此几何体是一个四棱锥,其底面是一个边长为2的正方形,垂直于底面的侧棱长为2,其直观图如图所示.



8.3　简单几何体的表面积与体积

8.3.1　棱柱、棱锥、棱台的表面积和体积

学习任务目标

1. 了解棱柱、棱锥、棱台的表面积与体积的计算公式.
2. 理解并掌握侧面展开图与几何体的表面积之间的关系.
3. 能利用计算公式求几何体的表面积与体积.(数学运算)

问题式预习

知识清单

1. 棱柱、棱锥、棱台的表面积

多面体的表面积就是围成多面体<u>各个面</u>的面积的和.棱柱、棱锥、棱台的表面积就是围成它们的<u>各个面</u>的面积的和.

2. 棱柱、棱锥、棱台的体积

几何体	体积	说明
正方体	$V_{正方体}=\underline{a^3}$	a 是正方体的棱长
长方体	$V_{长方体}=\underline{abc}$	a,b,c 分别是长方体的长、宽、高
棱柱	$V_{棱柱}=\underline{Sh}$	S 为棱柱的底面积，h 为棱柱的高
棱锥	$V_{棱锥}=\underline{\frac{1}{3}Sh}$	S 为棱锥的底面积，h 为棱锥的高
棱台	$V_{棱台}=\underline{\frac{1}{3}h(S'+\sqrt{S'S}+S)}$	S',S 分别为棱台的上、下底面面积，h 为棱台的高

概念辨析

1. 已知一个三棱锥的每一个面都是边长为 1 的正三角形，则此三棱锥的表面积为 (　　)

A. 4　　B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C. $2\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}$

D　**解析**：因为三棱锥的每个面(正三角形)的面积都为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$，所以此三棱锥的表面积为 $4\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$.故选 D.

2. 棱台的上、下底面面积分别是 2，4，高为 3，则棱台的体积等于________.

$6+2\sqrt{2}$　**解析**：$V_{台体}=\frac{1}{3}\times(2+4+\sqrt{2\times4})\times3=6+2\sqrt{2}$.

3. 请思考并回答问题：

(1)对于三棱锥而言，若取不同的面作为底面，其体积会改变吗?

提示：三棱锥的任何一个面都可以作为它的底面，体积不发生变化.

(2)简单组合体分割成几个几何体，其表面积不变吗? 其体积呢?

提示：表面积会变大，体积不变.

任务型课堂

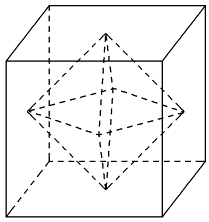
学习任务一　棱柱、棱锥、棱台的侧面积和表面积

1. 若正方体的棱长为 $\sqrt{2}$，则以该正方体各个面的中心为顶点的凸多面体的表面积为 (　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{6}$

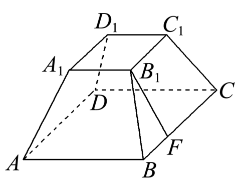
B　**解析**：所求凸多面体的表面积是两个底面边长为 1，高为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的四棱锥的侧面积之和.如图，四棱锥的侧棱长 $l=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$，

所以以该正方体各个面的中心为顶点的凸多面体的表面积为 $S=8\times\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$.故选 B.



2.已知四棱台的上、下底面分别是边长为 4 和 8 的正方形,侧面是腰长为 8 的等腰梯形,则该四棱台的表面积为________cm^2.

$80+48\sqrt{15}$ **解析:**如图,在四棱台 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,过点 B_1 作 $B_1F\perp BC$,垂足为 F.



在 $Rt\triangle B_1FB$ 中,$BF=\frac{1}{2}\times(8-4)=2$,$B_1B=8$,

所以 $B_1F=\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15}$,

所以 $S_{梯形BB_1C_1C}=\frac{1}{2}\times(8+4)\times2\sqrt{15}=12\sqrt{15}$.

故四棱台的侧面积 $S_{侧}=4\times12\sqrt{15}=48\sqrt{15}$,

所以四棱台的表面积 $S_{表}=48\sqrt{15}+4\times4+8\times8=80+48\sqrt{15}$.

反思提炼

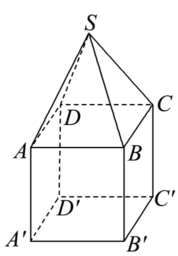
棱柱、棱锥、棱台表面积的求法

(1)多面体的表面积是各个面的面积之和.

(2)棱柱、棱锥、棱台的表面积等于它们的侧面积与各自底面面积的和.

学习任务二 棱柱、棱锥、棱台的体积

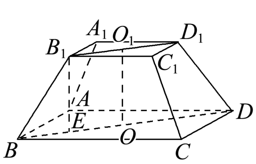
例 1 (1)如图,某几何体下面部分为正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$,上面部分为正四棱锥 $S\text{-}ABCD$.若几何体的高为 5,棱 $AB=2$,则该几何体的体积为________.



12 **解析:**已知 $V_{正方体}=2^3=8$,$V_{正四棱锥S\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}\times2^2\times(5-2)=4$,所以几何体的体积 $V=V_{正方体}+V_{正四棱锥S\text{-}ABCD}=12$.

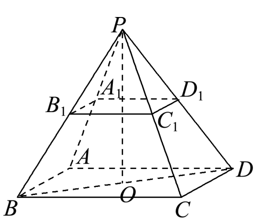
(2)(2023·新高考全国Ⅰ卷)在正四棱台 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=2$,$A_1B_1=1$,$AA_1=\sqrt{2}$,则该棱台的体积为________.

$\frac{7\sqrt{6}}{6}$ **解析:**(方法一)如图所示,



设点 O_1,O 分别为正四棱台 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 上、下底面的中心,连接 B_1D_1,BD,则点 O_1,O 分别为 B_1D_1,BD 的中点.连接 O_1O,则 O_1O 为正四棱台 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的高,过点 B_1 作 $B_1E\perp BD$,垂足为 E,则 $B_1E=O_1O$.因为 $AB=2$,$A_1B_1=1$,所以 $OB=\sqrt{2}$,$O_1B_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $BE=OB-OE=OB-O_1B_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$.又因为 $BB_1=AA_1=\sqrt{2}$,所以 $B_1E=\sqrt{BB_1^2-BE^2}=\sqrt{2-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,所以 $O_1O=\frac{\sqrt{6}}{2}$,所以 $V_{正四棱台ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1}=\frac{1}{3}\times(2^2+1^2+\sqrt{2^2\times1^2})\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{7\sqrt{6}}{6}$.

(方法二)如图,将正四棱台 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 补形成正四棱锥 $P\text{-}ABCD$.



因为 $AB=2$,$A_1B_1=1$,$AB\parallel A_1B_1$,所以 A_1,B_1,C_1,D_1 分别为 PA,PB,PC,PD 的中点.又因为 $A_1A=\sqrt{2}$,所以 $PA=2\sqrt{2}$,即 $PB=2\sqrt{2}$.连接 BD,取 BD 的中点为 O,连接 PO,则 PO 为正四棱锥的高,易知 $BO=\sqrt{2}$,所以 $PO=\sqrt{PB^2-BO^2}=\sqrt{6}$,所

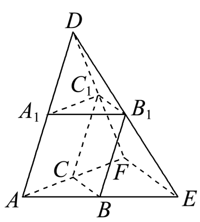
以正四棱台 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的高为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以 $V_{正四棱台ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1}=\frac{1}{3}\times(2^2+1^2+\sqrt{2^2\times1^2})\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{7\sqrt{6}}{6}$.

反思提炼

计算棱柱、棱锥、棱台的体积，关键是根据条件找出相应的底面面积和高，要充分运用多面体的有关截面，将空间问题转化为平面问题.

探究训练

1. 如图，在三棱锥 $D\text{-}AEF$ 中，A_1,B_1,C_1 分别是 DA,DE,DF 的中点，B,C 分别是 AE,AF 的中点.设三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的体积为 V_1，三棱锥 $D\text{-}AEF$ 的体积为 V_2，则 $V_1:V_2=$　　(　　)



A.$\frac{3}{8}$　　B.$\frac{3}{4}$

C.$\frac{1}{4}$　　D.$\frac{1}{2}$

A　**解析**：设三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 和三棱锥 $D\text{-}AEF$ 的高分别为 $h,2h$，利用体积公式可得三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的体积 $V_1=S_{\triangle ABC}\cdot h=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC\cdot h$，

三棱锥 $D\text{-}AEF$ 的体积 $V_2=\frac{1}{3}S_{\triangle AEF}\cdot 2h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot AE\cdot AF\cdot\sin\angle BAC\cdot 2h=\frac{4}{3}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC\cdot h$，则体积之比 $V_1:V_2=\frac{1}{2}:\frac{4}{3}=\frac{3}{8}$.

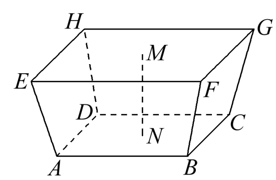
故选 A.

2.(2022·新高考全国Ⅰ卷)南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库.已知该水库水位为海拔 148.5 m 时，相应水面的面积为 140.0 km^2；水位为海拔 157.5 m 时，相应水面的面积为 180.0 km^2.将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔 148.5 m上升到 157.5 m 时，增加的水量约为($\sqrt{7}\approx2.65$)　　(　　)

A.1.0×10^9 m^3　　B.1.2×10^9 m^3

C.1.4×10^9 m^3　　D.1.6×10^9 m^3

C　**解析**：如图，依题意可知棱台的高为 $MN=157.5-148.5=9$(m)，所以增加的水量即为棱台的体积 V.

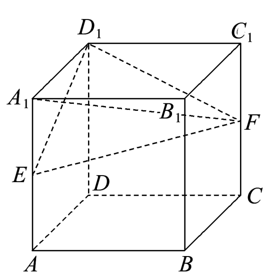


已知棱台上底面面积 $S=140.0\ km^2=140\times10^6\ m^2$，下底面面积 $S'=180.0\ km^2=180\times10^6\ m^2$，所以 $V=\frac{1}{3}h(S+S'+\sqrt{SS'})=\frac{1}{3}\times9\times(140\times10^6+180\times10^6+\sqrt{140\times180\times10^{12}})=3\times(320+60\sqrt{7})\times10^6\approx(96+18\times2.65)\times10^7=1.437\times10^9\approx1.4\times10^9(m^3)$.

故选 C.

学习任务三　用等积法与割补法求几何体的体积

例 2　(1)如图，已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，E 为 AA_1 的中点，F 为 CC_1 上一点，则三棱锥 $A_1\text{-}D_1EF$ 的体积为________.



$\frac{1}{12}a^3$　**解析**：$V_{三棱锥A_1\text{-}D_1EF}=V_{三棱锥F\text{-}A_1D_1E}$.

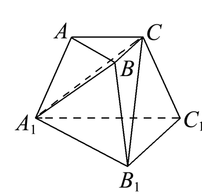
因为 $S_{\triangle A_1D_1E}=\frac{1}{2}EA_1\cdot A_1D_1=\frac{1}{4}a^2$，

三棱锥 $F\text{-}A_1D_1E$ 的高为 $CD=a$，

所以 $V_{三棱锥F\text{-}A_1D_1E}=\frac{1}{3}\times a\times\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{12}a^3$，

所以 $V_{三棱锥A_1\text{-}D_1EF}=\frac{1}{12}a^3$.

(2)如图，在三棱台 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AB:A_1B_1=1:2$，求三棱锥 $A_1\text{-}ABC$，三棱锥 $B\text{-}A_1B_1C$，三棱锥 $C\text{-}A_1B_1C_1$ 的体积之比.



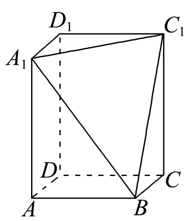
解：设棱台的高为 h，$S_{\triangle ABC}=S$，则 $S_{\triangle A_1B_1C_1}=4S$，所

以 $V_{A_1\text{-}ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h=\frac{1}{3}Sh$，$V_{C\text{-}A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1B_1C_1}\cdot h=\frac{4}{3}Sh$. 又 $V_{台}=\frac{1}{3}h(S+4S+\sqrt{S\cdot 4S})=\frac{7}{3}Sh$，所以 $V_{B\text{-}A_1B_1C}=V_{台}-V_{A_1\text{-}ABC}-V_{C\text{-}A_1B_1C_1}=\frac{7}{3}Sh-\frac{Sh}{3}-\frac{4Sh}{3}=\frac{2}{3}Sh$，

所以 $V_{A_1\text{-}ABC}:V_{B\text{-}A_1B_1C}:V_{C\text{-}A_1B_1C_1}=1:2:4$.

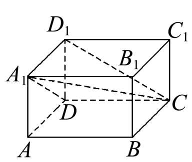
［一题多思］

思考 1. 将本例（1）变为：如图，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=2$，过 A_1，C_1，B 三点的平面截去长方体的一个角后，得到如图所示的几何体 $ABCD\text{-}A_1C_1D_1$，且这个几何体的体积为 10，则 $AA_1=$________.



3　**解析**：由题意知 $V_{ABCD\text{-}A_1C_1D_1}=V_{ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1}-V_{B\text{-}A_1B_1C_1}=2\times 2\times AA_1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times AA_1=\frac{10}{3}AA_1=10$，所以 $AA_1=3$.

思考 2. 将本例（1）变为：如图，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，截下一个棱锥 $C\text{-}A_1DD_1$，求棱锥 $C\text{-}A_1DD_1$ 的体积与剩余部分的体积之比.



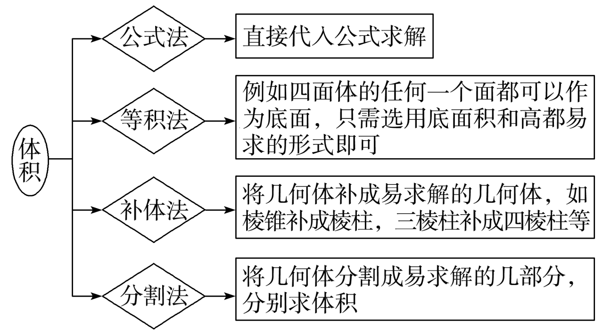
解：设矩形 ADD_1A_1 的面积为 S，$AB=h$，所以 $V_{ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1}=V_{ADD_1A_1\text{-}BCC_1B_1}=Sh$.

易知棱锥 $C\text{-}A_1DD_1$ 的底面积为 $\frac{1}{2}S$，高为 h，所以三棱锥 $C\text{-}A_1DD_1$ 的体积为 $V_{C\text{-}A_1DD_1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}Sh=\frac{1}{6}Sh$，剩余部分的体积为 $Sh-\frac{1}{6}Sh=\frac{5}{6}Sh$.

所以棱锥 $C\text{-}A_1DD_1$ 的体积与剩余部分的体积之比为 $1:5$.

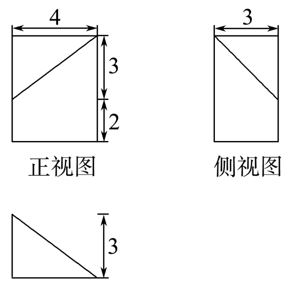
反思提炼

求几何体体积的常用方法



探究训练

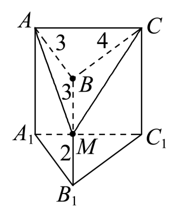
若某几何体的三视图（单位：cm）如图所示，则此几何体的体积等于________cm^3.



正视图　侧视图

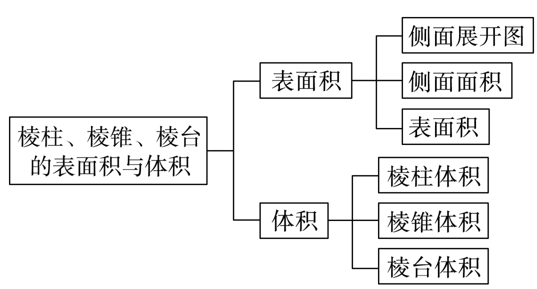
俯视图

24　**解析**：由三视图可知原几何体如图所示.



所以 $V=V_{ABC\text{-}A_1B_1C_1}-V_{M\text{-}ABC}=S_{\triangle ABC}\times 5-\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\times 3=\frac{1}{2}\times 3\times 4\times 5-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 3\times 4\times 3=30-6=24(cm^3)$.

体系构建



课后素养评价(二十四)

基础性·能力运用

1.(多选题)三棱柱的底面是正三角形,侧棱垂直于底面,它的侧面展开图是长、宽分别为6和4的矩形,则它的体积可能为 ( )

A.$\frac{8\sqrt{3}}{3}$ B.$4\sqrt{3}$

C.$\frac{2\sqrt{3}}{9}$ D.$\frac{\sqrt{3}}{3}$

AB **解析**:因为正三棱柱的侧面展开图是边长分别为6和4的矩形,所以有以下两种情况:

①6是下底面的周长,4是三棱柱的高,此时,下底面的边长为2,面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$,所以三棱柱的体积为$4\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

②4是下底面的周长,6是三棱柱的高,此时,下底面的边长为$\frac{4}{3}$,面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{4\sqrt{3}}{9}$,所以三棱柱的体积为$\frac{4\sqrt{3}}{9}\times 6=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.故选AB.

2.某六棱柱的底面是边长为2的正六边形,侧面是矩形,侧棱长为4,则其表面积为 ( )

A.$12+12\sqrt{3}$ B.$48+12\sqrt{3}$

C.$64+6\sqrt{3}$ D.$72+6\sqrt{3}$

B **解析**:由题意,知该六棱柱的侧面面积为$4\times 2\times 6=48$,上、下底面的面积均为$\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=6\sqrt{3}$,所以六棱柱的表面积等于$48+12\sqrt{3}$.故选B.

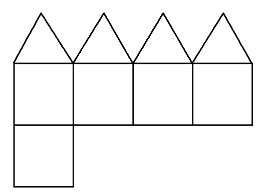
3.(开放性问题)某几何体为棱柱或棱锥,且每个面均为边长是2的正三角形或正方形,给出下面4个值:①$4\sqrt{3}$;②24;③$4+4\sqrt{3}$;④$12+2\sqrt{3}$.则该几何体的表面积可能是其中的 ( )

A.①②③ B.①③④

C.①②④ D.①②③④

D **解析**:当该几何体为正四面体时,其表面积为$4\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=4\sqrt{3}$;当该几何体为正四棱锥时,其表面积为$4\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2+2^2=4+4\sqrt{3}$;当该几何体为正三棱柱时,其表面积为$2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2+3\times 2^2=12+2\sqrt{3}$;当该几何体为正方体时,其表面积为$6\times 2^2=24$.故选D.

4.已知一个空间几何体的所有棱长均为1 cm,其表面展开图如图所示,则该空间几何体的体积$V=$________cm^3.



$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$ **解析**:由题图知,原几何体是由一个正方体与一个正四棱锥组成,四棱锥的高为$\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{1+1}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$(cm),所以该空间几何体的体积$V=1^3+\frac{1}{3}\times 1\times 1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$($cm^3$).

5.若正四棱锥的底面边长为$2\sqrt{2}$ cm,体积为8 cm^3,则它的侧面面积为________cm^2.

$4\sqrt{22}$ **解析**:因为该正四棱锥的底面边长为$2\sqrt{2}$ cm,体积为8 cm^3,所以该四棱锥的高为3 cm,所以侧面等腰三角形的高为$\sqrt{3^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{11}$(cm),故$S_{侧}=4\times\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{11}=4\sqrt{22}$($cm^2$).

综合性·创新提升

1.(多选题)用平行于棱锥底面的平面去截棱锥,得到上、下两个几何体,且上、下两个几何体的高之比为1∶2,则关于上、下两个几何体的说法正确的是 ( )

A.侧面积之比为1∶4

B.侧面积之比为1∶8

C.体积之比为1∶27

D.体积之比为1∶26

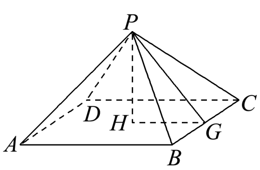
BD **解析**:依题意知,上面部分为小棱锥,下面部分为棱台,所以小棱锥与原棱锥的底面边长之比为

1∶3,高之比为1∶3,所以小棱锥与原棱锥的侧面积之比为1∶9,体积之比为1∶27,即小棱锥与棱台的侧面积之比为1∶8,体积之比为1∶26.故选BD.

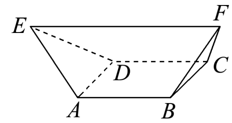
2.(生活中的立体几何)位于徐州园博园中心位置的国际馆(一云落雨),使用现代科技雾化“造云”,打造温室客厅.如图,这个国际馆中3个展馆的顶部均采用正四棱锥这种经典几何体形式,表达了理性主义与浪漫主义的对立与统一.其中最大的是3号展馆,若其顶部所对应的正四棱锥底面边长为19.2 m,高为9 m,则该正四棱锥的侧面面积与底面面积之比约为(参考数据:$\sqrt{173.16}\approx 13.16$)( )

A.2 B.1.71 C.1.37 D.1

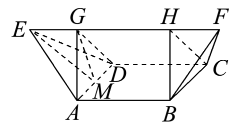
C **解析**:如图,设H为底面正方形$ABCD$的中心,G为BC的中点,连接PH,HG,PG,则$PH\perp HG$,$PG\perp BC$,所以$PG=\sqrt{PH^2+HG^2}=\sqrt{9^2+9.6^2}=\sqrt{173.16}\approx 13.16$,则$\dfrac{4S_{\triangle PBC}}{S_{正方形ABCD}}=\dfrac{4\times\frac{1}{2}\times BC\times PG}{AB\times BC}=\dfrac{2PG}{AB}\approx\dfrac{26.32}{19.2}\approx 1.37$.故选C.



3.如图,在多面体$ABCDEF$中,四边形$ABCD$是边长为1的正方形,且$\triangle ADE$,$\triangle BCF$均为正三角形,$EF/\!/AB$,$EF=2$,则该多面体的体积为________.



$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ **解析**:如图,分别过A,B作EF的垂线,垂足分别为G,H,连接DG,CH,则原几何体分割为两个三棱锥和一个直三棱柱.



由题意知三棱锥$E\text{-}ADG$的高为$\dfrac{1}{2}$,棱柱高为1,$AG=\sqrt{1^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.取$AD$的中点$M$,则$MG=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$S_{\triangle AGD}=\dfrac{1}{2}\times 1\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$,所以$V=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\times 1+2\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

4.长方体的体对角线长为8,若长、宽、高分别是a,b,c,且$a+b+c=14$,则长方体的表面积为________.

132 **解析**:由题意得$\begin{cases}a+b+c=14①,\\a^2+b^2+c^2=64②,\end{cases}$

①^2-②,得$2(ab+bc+ca)=14^2-64=132$,

所以长方体的表面积$S_{表}=2(ab+bc+ca)=132$.

8.3.2　圆柱、圆锥、圆台、球的表面积和体积

学习任务目标

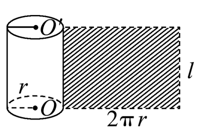
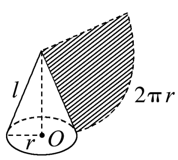
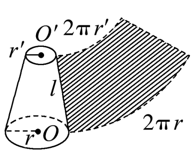
1.会计算圆柱、圆锥、圆台、球的表面积和体积.(数学运算)

2.理解并掌握侧面展开图与几何体的表面积之间的关系,并能利用计算公式求几何体的表面积与体积.

问题式预习

知识清单

1.圆柱、圆锥、圆台的表面积

几何体	图形	表面积公式
圆柱		底面积:$S_{底}=\pi r^2$ 侧面积:$S_{侧}=2\pi rl$ 表面积:$S=2\pi r(r+l)$
圆锥		底面积:$S_{底}=\pi r^2$ 侧面积:$S_{侧}=\pi rl$ 表面积:$S=\pi r(r+l)$
圆台		上底面面积:$S_{上底}=\pi r'^2$ 下底面面积:$S_{下底}=\pi r^2$ 侧面积:$S_{侧}=\pi(r'l+rl)$ 表面积:$S=$ $\pi(r'^2+r^2+r'l+rl)$

2.圆柱、圆锥、圆台的体积

几何体	体积公式	说明
圆柱	$V_{圆柱}=Sh=\pi r^2h$	圆柱底面半径为 r,底面积为 S,高为 h
圆锥	$V_{圆锥}=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\pi r^2h$	圆锥底面半径为 r,底面积为 S,高为 h
圆台	$V_{圆台}=\frac{1}{3}(S+\sqrt{SS'}+S')h=\frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2)$	圆台上底面半径为 r',上底面面积为 S',下底面半径为 r,下底面面积为 S,高为 h

3.球的表面积和体积公式

(1)球的表面积 $S_{球}=4\pi R^2$(R 为球的半径).

(2)球的体积 $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$(R 为球的半径).

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)圆锥的侧面展开图为扇形,其中扇形的弧长为圆锥底面圆的周长.　(√)

(2)若圆柱的底面圆的直径与圆柱的高相等,则圆柱的侧面展开图是正方形.　(×)

(3)求圆台的表面积和体积时,可用"还台为锥"的思想方法.　(√)

2.一个高为 2 的圆柱,底面周长为 2π.该圆柱的表面积为________.

6π　**解析**:由底面周长为 2π,得底面半径为 1,$S_{底}=2\pi r^2=2\pi$,$S_{侧}=2\pi r\cdot h=4\pi$,所以 $S_{表}=S_{底}+S_{侧}=6\pi$.

3.若圆锥的底面半径为 3,母线长为 5,则圆锥的体积是________.

12π　**解析**:由题意得圆锥的高 $h=4$,所以 $V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi\times 3^2\times 4=12\pi$.

4.请思考并回答问题:

求圆柱、圆锥、圆台的表面积时,要求的关键量是什么?

提示:求圆柱、圆锥的表面积时,关键是求其母线长与底面的半径;求圆台的表面积时,关键是求其母线长与上、下底面的半径.

任务型课堂

学习任务一 圆柱、圆锥、圆台的表面积

例 1 (1)已知一个圆锥的轴截面是等边三角形，其面积为$\sqrt{3}$，则这个圆锥的侧面积为________.

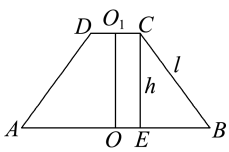
2π **解析**：由题意知，圆锥的母线长 $l=2$，底面半径为 1，所以侧面积为 $\pi\times1\times2=2\pi$.

(2)圆台的上、下底面半径和高的比为 $1:4:4$，若母线长为 10，则圆台的表面积为________.

168π **解析**：圆台的轴截面如图所示，设上底面半径为 r，下底面半径为 R，高为 h，则它的母线长为 $l=\sqrt{h^2+(R-r)^2}=\sqrt{(4r)^2+(3r)^2}=5r=10$，

所以 $r=2$，$R=8$.

故 $S_{侧}=\pi(R+r)l=\pi(8+2)\times10=100\pi$，$S_{表}=S_{侧}+\pi r^2+\pi R^2=100\pi+4\pi+64\pi=168\pi$.



反思提炼

求圆柱、圆锥、圆台的表面积的基本步骤

(1)得到空间几何体的平面展开图.

(2)依次求出各个平面图形的面积.

(3)将各平面图形的面积相加.

探究训练

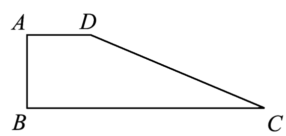
1. 已知圆柱的上、下底面的中心分别为 O_1，O_2，过直线 O_1O_2 的平面截该圆柱所得的截面是面积为 8 的正方形，则该圆柱的表面积为 ( )

A. $12\sqrt{2}\pi$ B. 12π

C. $8\sqrt{2}\pi$ D. 10π

B **解析**：因为过直线 O_1O_2 的平面截该圆柱所得的截面是面积为 8 的正方形，所以圆柱的高为 $2\sqrt{2}$，底面直径为 $2\sqrt{2}$，所以该圆柱的表面积为 $2\times\pi\times(\sqrt{2})^2+2\pi\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=12\pi$.

2. 如图，已知直角梯形 $ABCD$，$BC\parallel AD$，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=5$，$BC=16$，$AD=4$.求该直角梯形以 AB 所在直线为轴旋转一周所得几何体的表面积.



解：该直角梯形以 AB 所在直线为轴旋转一周所得几何体为圆台，其上底面半径是 4，下底面半径是 16，母线 $DC=\sqrt{5^2+(16-4)^2}=13$.故该几何体的表面积为 $\pi(4+16)\times13+\pi\times4^2+\pi\times16^2=532\pi$.

学习任务二 圆柱、圆锥、圆台的体积

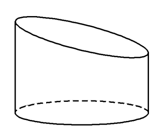
例 2 (1)圆锥的轴截面是等腰直角三角形，侧面积是 $16\sqrt{2}\pi$，则圆锥的体积是 ( )

A. $\frac{64\pi}{3}$ B. $\frac{128\pi}{3}$

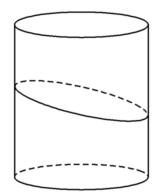
C. 64π D. $128\sqrt{2}\pi$

A **解析**：设圆锥的底面半径为 r，母线长为 l，因为圆锥的轴截面是等腰直角三角形，所以 $2r=\sqrt{l^2+l^2}$，即 $l=\sqrt{2}r$.由题意得，侧面积 $S_{侧}=\pi rl=\sqrt{2}\pi r^2=16\sqrt{2}\pi$，所以 $r=4$，所以 $l=4\sqrt{2}$，高 $h=\sqrt{l^2-r^2}=4$，所以圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\pi\times4^2\times4=\frac{64\pi}{3}$.故选 A.

(2)如图，一个底面半径为 2 的圆柱被一平面所截，截得的几何体的最短和最长母线长分别为 2 和 3，则该几何体的体积为________.



10π **解析**：用一个完全相同的几何体把题中几何体补成一个圆柱，如图，则圆柱的体积为 $\pi\times2^2\times5=20\pi$，故所求几何体的体积为 10π.



反思提炼

圆柱、圆锥、圆台的体积求法

(1)公式法：根据几何体的结构特征，确定底面积和高，代入体积公式直接求解.

(2)分割法：将几何体分割成易求解的几部分，分别求体积.

(3)补体法：将几何体补成易求解的几何体，先求再减.

探究训练

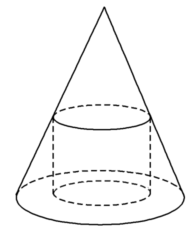
1. 已知某圆台的上、下底面面积分别是 π，4π，侧面积是 6π，则这个圆台的体积是________.

$\frac{7\sqrt{3}}{3}\pi$　**解析**：设圆台的上、下底面半径分别为 r 和 R，母线长为 l，高为 h，则 $S_上=\pi r^2=\pi$，$S_下=\pi R^2=4\pi$，所以 $r=1$，$R=2$. 又 $S_侧=\pi(r+R)l=6\pi$，解得 $l=2$，所以 $h=\sqrt{2^2-(2-1)^2}=\sqrt{3}$，所以 $V=\frac{1}{3}\pi\times(1^2+2^2+1\times2)\times\sqrt{3}=\frac{7\sqrt{3}}{3}\pi$.

2. 如图，一个圆锥的底面半径为 2 cm，高为 6 cm，其中有一个高为 x cm 的内接圆柱.

(1)试用 x 表示圆柱的侧面积；

(2)当 x 为何值时，圆柱的侧面积最大？



解：(1)设圆柱的半径为 r，由题意得 $\frac{x}{6}=\frac{2-r}{2}$，所以 $r=2-\frac{x}{3}$，故 $S_{圆柱侧}=2\pi rx=2\pi\left(2-\frac{x}{3}\right)x=4\pi x-\frac{2\pi}{3}x^2$，$x\in(0,6)$.

(2)由(1)知 $S_{圆柱侧}=4\pi x-\frac{2\pi}{3}x^2=-\frac{2\pi}{3}(x-3)^2+6\pi$，所以当 $x=3$ 时，$S_{圆柱侧}$ 有最大值 6π，所以当圆柱的高为 3 cm 时，它的侧面积最大为 $6\pi\ \text{cm}^2$.

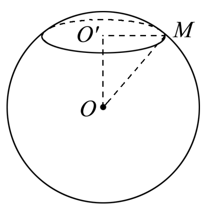
学习任务 三　球的表面积和体积

例 3　(1)平面 α 截球 O 所得圆的半径为 1，球心 O 到平面 α 的距离为 $\sqrt{2}$，则此球的体积为　(　　)

A. $\sqrt{6}\pi$　　B. $4\sqrt{3}\pi$

C. $4\sqrt{6}\pi$　　D. $6\sqrt{3}\pi$

B　**解析**：如图，设截面圆的圆心为 O'，



M 为截面圆的圆周上任一点，则 $OO'=\sqrt{2}$，$O'M=1$，所以 $OM=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1}=\sqrt{3}$，即球的半径为 $\sqrt{3}$. 所以 $V=\frac{4}{3}\pi\times(\sqrt{3})^3=4\sqrt{3}\pi$.

(2)一球与棱长为 2 的正方体的各个面都相切，则该球的体积为________.

$\frac{4}{3}\pi$　**解析**：由题意可知球是正方体的内切球，因此球的半径为 1，其体积为 $\frac{4}{3}\pi$.

[一题多思]

思考 1. 将本例(2)变为：长方体过一个顶点的三条棱的长分别是 $\sqrt{3}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$，这个长方体它的八个顶点都在同一个球面上，这个球的表面积是　(　　)

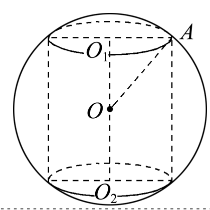
A. 12π　　B. 18π

C. 36π　　D. 6π

A　**解析**：由题意可知，该长方体的体对角线即为球的直径，其长度为 $2\sqrt{3}$，从而球的半径为 $\sqrt{3}$，球的表面积为 12π.

思考 2. 将本例(2)变为：圆柱内接于球，圆柱的底面半径为 3，高为 8，则球的表面积为________.

100π　**解析**：如图，由条件知，$O_1A=3$，$OO_1=4$，所以 $OA=5$，所以球的表面积为 100π.



反思提炼

1. 设球的截面圆上有一点 A，球心为 O，截面圆心为 O_1，则 $\triangle AO_1O$ 是以 O_1 为直角顶点的直角三角形，解答球的截面问题时，常用该直角三角形求解，也常作过球心和截面圆心的轴截面求解.

2. 常见的与球有关的切、接问题的解题策略

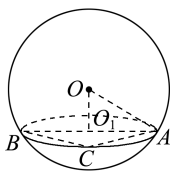
(1)处理几何体外接球或内切球的相关问题时，要注意球心的位置与几何体的关系，一般情况下，由于球的对称性，球心总在几何体的特殊位置，比如中心、对角线的中点等.

(2)解决此类问题的实质就是根据几何体的相关数据求出球的直径或半径，关键是根据"切点"和"接点"，作出轴截面图，把空间问题转化为平面问题来计算.

探究训练

1. 已知球心到过球面上 A，B，C 三点的截面的距离等于球的半径的 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 倍，且 $AC=8$，$BC=6$，$AB=10$，则球的表面积是________，体积是________.

400π　$\frac{4\ 000}{3}\pi$　**解**：如图，设球的半径为 R，球心为 O，截面圆心为 O_1，则 $OO_1=\frac{\sqrt{3}}{2}R$.

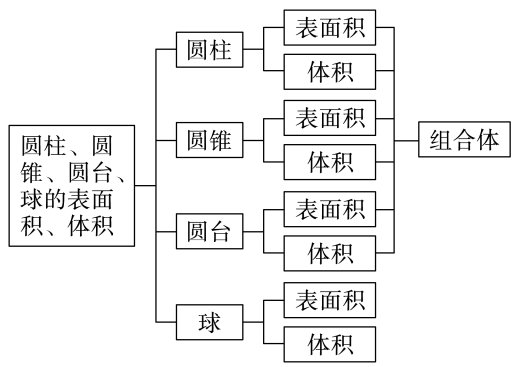


在△ABC 中，因为 $AC^2+BC^2=AB^2$，所以∠$ACB=90°$，所以 O_1 是 AB 的中点，即 $O_1A=5$.又因为 $OO_1^2+O_1A^2=OA^2$，所以 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2+5^2=R^2$，所以 $R^2=100$，即 $R=10$.所以球的表面积 $S_{球}=4\pi R^2=4\pi\times10^2=400\pi$，球的体积 $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times10^3=\frac{4\ 000}{3}\pi$.

2. 若三棱锥的三个侧面两两垂直，且侧棱长均为 $\sqrt{3}$，则其外接球的体积是________.

$\frac{9\pi}{2}$　**解析**：三棱锥的三个侧面两两垂直，且侧棱长均为 $\sqrt{3}$，则可将三棱锥补形成正方体（图略）.从而其外接球的直径为 3，半径为 $\frac{3}{2}$，故所求外接球的体积 $V=\frac{4\pi}{3}\times\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{9\pi}{2}$.

▶ 体系构建



课后素养评价（二十五）

基础性·能力运用

1. 直径为 6 的球的表面积和体积分别是（　　）

A. 144π，144π

B. 144π，36π

C. 36π，144π

D. 36π，36π

D　**解析**：由题意知半径 $R=3$，所以 $S_{表}=4\pi R^2=36\pi$，$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4\pi}{3}\times3^3=36\pi$.

故选 D.

2. 表面积为 16π 的球的内接圆柱的轴截面为正方形，则该内接圆柱的体积为（　　）

A. $4\sqrt{2}\pi$　　B. $2\sqrt{2}\pi$

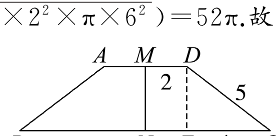
C. 16π　　D. 8π

A　**解析**：由题意可知，$4\pi R^2=16\pi$，$R=2$，即球的半径 $R=2$.设圆柱的底面圆半径为 r，则 $\sqrt{(2r)^2+(2r)^2}=2R$，得 $r=\sqrt{2}$.所以 $V_{圆柱}=\pi r^2\cdot2r=2\pi\cdot2\sqrt{2}=4\sqrt{2}\pi$.故选 A.

3. 圆台上底面半径为 2，下底面半径为 6，母线长为 5，则圆台的体积为（　　）

A. 40π　　B. 52π　　C. 50π　　D. $\frac{212}{3}\pi$

B　**解析**：作出圆台的轴截面如图所示，上底面半径 $MD=2$，下底面半径 $NC=6$，过 D 作 $DE\perp NC$，垂足为 E，则 $EC=6-2=4$，$CD=5$.故 $DE=3$，即圆台的高为 3.所以圆台的体积为 $V=\frac{1}{3}\times3\times(\pi\times2^2+\pi\times6^2+\sqrt{\pi\times2^2\times\pi\times6^2})=52\pi$.故选 B.



4. 已知圆锥的高为 4，体积为 4π，则底面半径为________.

$\sqrt{3}$　**解析**：设底面半径为 r，则 $\frac{1}{3}\pi r^2\times4=4\pi$，解得 $r=\sqrt{3}$，即底面半径为 $\sqrt{3}$.

5. 一个球与一个正三棱柱的三个侧面和两个底面都相切.已知这个球的体积是$\frac{32\pi}{3}$,那么这个三棱柱的体积是________.

$48\sqrt{3}$　**解析**:设球的半径为R.由$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{32\pi}{3}$,得$R=2$.

所以正三棱柱的高$h=4$.

设正三棱柱的底面边长为a,则$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=2$,得$a=4\sqrt{3}$.

所以$V_{三棱锥}=\frac{1}{2}\times(4\sqrt{3})^2\times\sin 60°\times 4=48\sqrt{3}$.

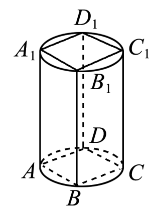
6. 已知圆柱有一个内接长方体,长方体的体对角线长是$10\sqrt{2}$ cm,圆柱的侧面展开图为矩形,此矩形的面积是100π cm²,则圆柱的底面半径为______cm,高为______cm.

5　10　**解析**:设圆柱的底面半径为r cm,高为h cm.如图,圆柱的轴截面是个长方形,且长方形的对角线长等于它的内接长方体的体对角线长.

由题意得$\begin{cases}(2r)^2+h^2=(10\sqrt{2})^2,\\2\pi rh=100\pi,\end{cases}$

解得$\begin{cases}r=5,\\h=10.\end{cases}$

即圆柱的底面半径为5 cm,高为10 cm.



综合性·创新提升

1. (数学文化)如图,西周琱生簋(guǐ)是贵族琱生为其祖先制作的宗庙祭祀时使用的青铜器.该青铜器可看成由上、下两部分组成,其中上面的部分可看作圆台,下面的部分可看作圆柱,且圆台和圆柱的高之比约为3∶5,圆台的上底面与圆柱的底面完全重合,圆台上、下底面直径之比约为4∶5,则圆台与圆柱的体积之比约为　　(　　)

A.81∶80　　B.61∶80

C.8∶9　　D.2∶1

B　**解析**:依题意,不妨令圆台上底面半径为4,下底面半径为5,高为3,圆柱的高为5,则圆台的体积为$V_1=\frac{1}{3}\times(25\pi+16\pi+\sqrt{25\pi\times16\pi})\times3=61\pi$,圆柱的体积为$V_2=16\pi\times5=80\pi$,故$V_1∶V_2=61∶80$.故选B.

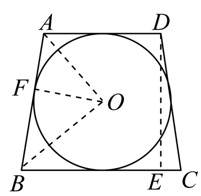
2. 若球的外切圆台的上、下底面半径分别为r,R,则球的表面积为　　(　　)

A.$4\pi(r+R)^2$　　B.$4\pi r^2R^2$

C.$4\pi Rr$　　D.$\pi(R+r)^2$

C　**解析**:如图,过点D作$DE\perp BC$交BC于点E,过O作$OF\perp AB$于点F,连接OA,OB.设球的半径为r_1,则在$\mathrm{Rt}\triangle CDE$中,$DE=2r_1$,$CE=R-r$,在$\mathrm{Rt}\triangle AFO$中,$OF=r_1$,$OA=\sqrt{r^2+r_1^2}$,所以$AF=r$,同理可得$BF=R$,所以$AB=R+r$,即$DC=R+r$.由勾股定理得$DE^2=DC^2-CE^2$,即$(2r_1)^2=(R+r)^2-(R-r)^2$,解得$r_1=\sqrt{Rr}$.

故球的表面积$S_球=4\pi r_1^2=4\pi Rr$.故选C.



3. 已知圆台的上、下底面半径分别为10和20,它的侧面展开图的扇环的圆心角为180°,则这个圆台的侧面积为　　(　　)

A.600π　　B.300π

C.900π　　D.450π

A　**解析**:设圆台的母线为l,扇环所在的小圆的半径为x.

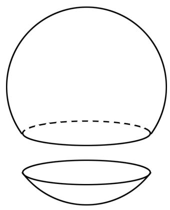
由题意得$\begin{cases}2\pi\times20=\pi(l+x),\\2\pi\times10=\pi x,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=20,\\l=20.\end{cases}$

所以$S_{圆台侧}=\pi(r+r')l=\pi(20+10)\times20=600\pi$.

故选A.

4. (新定义)一个球被一个平面截下的一部分叫做球缺.截面叫做球缺的底面,球垂直于截面的直径被截下的部分叫做球缺的高,球缺曲面部分的面积$S=$

$2\pi RH$,其中 R 为球的半径,H 为球缺的高.如图,若一个半径为 R 的球被平面所截获得两个球缺,其高之比为 $\frac{H_1}{H_2}=2$,则表面积(包括底面)之比 $\frac{S_1}{S_2}=$ ( )



A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{8}{5}$

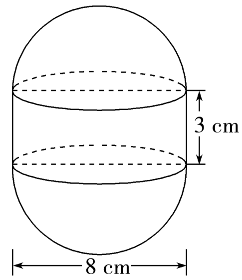
C. $\frac{20}{11}$　　D. $\frac{10}{3}$

B **解析**:因为 $\frac{H_1}{H_2}=2$,$H_1+H_2=2R$,所以 $H_1=\frac{4}{3}R$, $H_2=\frac{2}{3}R$, 所以 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{2\pi R\cdot\frac{4}{3}R+\pi\left[R^2-\left(\frac{1}{3}R\right)^2\right]}{2\pi R\cdot\frac{2}{3}R+\pi\left[R^2-\left(\frac{1}{3}R\right)^2\right]}=\frac{8}{5}$.故选 B.

5. 如图,某种水箱用的“浮球”,是由两个半球和一个圆柱筒组成.已知球的直径为 8 cm,圆柱筒高为 3 cm.

(1)求这种“浮球”的体积;

(2)要在这样的 3 000 个“浮球”的表面涂一层胶,如果每平方厘米需要涂胶 0.1 g,共需胶多少克?



解:(1)由题意得该几何体由两个半球和一个圆柱筒组成,

球的体积 $V_1=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4\pi}{3}\times 4^3=\frac{256}{3}\pi(\text{cm}^3)$,

圆柱体积 $V_2=\pi R^2\cdot h=\pi\times 4^3\times 3=48\pi(\text{cm}^3)$,

所以浮球的体积 $V=V_1+V_2=\frac{400}{3}\pi(\text{cm}^3)$.

(2)由题意得上、下半球的表面积之和 $S_1=4\pi R^2=4\pi\times 4^2=64\pi(\text{cm}^2)$,

圆柱侧面积 $S_2=2\pi Rh=2\pi\times 4\times 3=24\pi(\text{cm}^2)$,

所以 1 个浮球的表面积 $S=64\pi+24\pi=88\pi(\text{cm}^2)$,

3 000 个浮球的表面积为 $3\ 000\times 88\pi=264\ 000\pi(\text{cm}^2)$,

因为每平方厘米需要涂胶 0.1 g,

所以共需胶 $264\ 000\pi\times 0.1=26\ 400\pi(\text{g})$.

8.4　空间点、直线、平面之间的位置关系

8.4.1　平面

学习任务目标

1. 了解平面的概念，会用图形与字母表示平面.
2. 能用符号语言描述空间中的点、直线、平面之间的位置关系.
3. 能用图形、文字、符号三种语言描述三个基本事实，理解三个基本事实的地位与作用.（直观想象）

问题式预习

知识清单

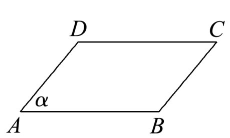
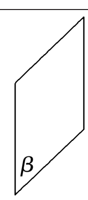
1. 平面

(1)平面的概念

①平面是最基本的几何概念，对它加以描述而不定义.

②几何中的平面的特征：无限延展、不计大小、不计厚薄等.

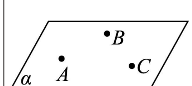
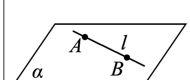
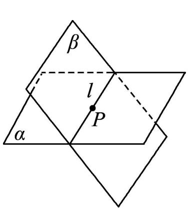
(2)平面的画法

<table>
<tr><td rowspan="2">画法</td><td colspan="2">我们常用矩形的直观图，即平行四边形表示平面</td></tr>
<tr><td>当平面水平放置时，常把平行四边形的一边画成横向</td><td>当平面竖直放置时，常把平行四边形的一边画成竖向</td></tr>
<tr><td>图示</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>表示方法</td><td colspan="2">①用希腊字母 α,β,γ 等表示平面，如平面 α，平面 β，平面 γ；
②用代表平面的平行四边形的四个顶点的大写英文字母表示平面，如平面 $ABCD$；
③用代表平面的平行四边形的相对的两个顶点的大写英文字母表示平面，如平面 AC，平面 BD</td></tr>
</table>

2. 点、直线、平面之间的基本关系的符号表示

文字语言	符号语言
点 A 在直线 l 上	$A\in l$
点 A 在直线 l 外	$A\notin l$
点 A 在平面 α 内	$A\in\alpha$
点 A 在平面 α 外	$A\notin\alpha$
直线 l 在平面 α 内	$l\subset\alpha$
直线 l 在平面 α 外	$l\not\subset\alpha$
平面 α,β 相交于 l	$\alpha\cap\beta=l$

3. 平面的基本性质及其推论

名称	内容	图形	符号
基本事实1	过不在一条直线上的三个点，有且只有一个平面		A,B,C 三点不共线⇒存在唯一的平面 α 使 $A,B,C\in\alpha$
基本事实2	如果一条直线上的两个点在一个平面内，那么这条直线在这个平面内		$A\in l,B\in l$，且 $A\in\alpha,B\in\alpha\Rightarrow l\subset\alpha$
基本事实3	如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线		$P\in\alpha$，且 $P\in\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=l$，且 $P\in l$

名称	内容
推论1	经过一条直线和这条直线外一点，有且只有一个平面

续表

名称	内容
推论 2	经过两条相交直线，有且只有一个平面
推论 3	经过两条平行直线，有且只有一个平面

概念辨析

1. 判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1) $A,B,C\in\alpha$，$A,B,C\in\beta$，且 A,B,C 不共线 $\Rightarrow\alpha$ 与 β 重合. （√）

(2) 梯形一定是平面图形. （√）

(3) 三个平面可以将空间分为 4 部分或 6 部分或 8 部分. （×）

(4) 空间中有四个点，如果其中任意三个点都不在同一直线上，那么过其中三个点的平面有四个. （×）

2. 若直线 $a\subset$ 平面 α，直线 $b\subset\alpha$，点 $M\in a$，点 $N\in b$，$M\in$ 直线 l，$N\in l$，则 （　　）

A. $l\subset\alpha$

B. $l\not\subset\alpha$

C. $l\cap\alpha=M$

D. $l\cap\alpha=N$

A　**解析**：因为 $a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，且 $M\in a$，$N\in b$，所以 $M\in\alpha$，$N\in\alpha$，又因为 $M\in l$，$N\in l$，所以 $l\subset\alpha$.

3. 请思考并回答问题：

(1) 几何里的“平面”有边界吗？用什么图形来表示？

提示：没有.平行四边形.

(2) 三个基本事实的作用各是什么？

提示：基本事实 1 作用：①确定平面的依据，②判定点线共面；基本事实 2 作用：①确定直线在平面内的依据，②判定点在平面内；基本事实 3 的作用：①判定两平面相交的依据，②判定点在直线上.

任务型课堂

学习任务一　立体几何中三种语言的转换

1. 若点 A 在直线 a 上，而直线 a 在平面 α 内，点 B 在平面 α 内，则可以表示为 （　　）

A. $A\subset a$，$a\subset\alpha$，$B\in\alpha$

B. $A\in a$，$a\subset\alpha$，$B\in\alpha$

C. $A\subset a$，$a\in\alpha$，$B\subset\alpha$

D. $A\in a$，$a\in\alpha$，$B\in\alpha$

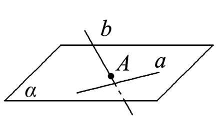
B　**解析**：点 A 在直线 a 上，而直线 a 在平面 α 内，点 B 在平面 α 内，表示为 $A\in a$，$a\subset\alpha$，$B\in\alpha$.

2. 将下列符号语言转换为图形语言.

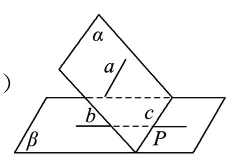
(1) $a\subset\alpha$，$b\cap\alpha=A$，$A\notin a$；

(2) $\alpha\cap\beta=c$，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a\parallel c$，$b\cap c=P$.

解：(1)



(2)



反思提炼

三种语言转换的注意点

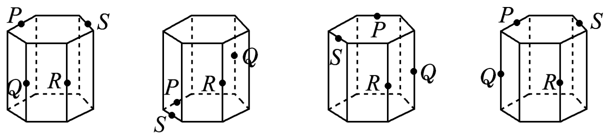
(1) 用文字语言、符号语言表示一个图形时，首先仔细观察图形中有几个平面、几条直线、几个点且相互之间的位置关系如何，试着先用文字语言进行描述，再用符号语言表示.

(2) 区分符号的用法，如点与直线的位置关系只能用“$\in$”或“$\notin$”，直线与平面的位置关系只能用“$\subset$”或“$\not\subset$”.

(3) 由符号语言或文字语言画相应的图形时，要注意把被遮挡的线段画成虚线.

学习任务二　点、线共面问题

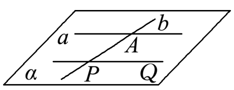
例1　(1)(多选题)下列各正六棱柱中，P,Q,R,S 分别是所在棱的中点，则这四个点共面的图形是(　　)



A　　　　B　　　　C　　　　D

ABC　**解析**：在选项 A,B,C 的图形中，由棱柱、正六边形、中位线的性质知，均有 $PS\parallel QR$，即在此三个图形中 P,Q,R,S 四点共面.故选 ABC.

(2)如图，已知 $a\subset\alpha,b\subset\alpha,a\cap b=A,P\in b,PQ\parallel a$，求证：$PQ\subset\alpha$.



证明：因为 $PQ\parallel a$，所以 PQ 与 a 确定一个平面 β，所以直线 $a\subset\beta$，点 $P\in\beta$.

因为 $P\in b,b\subset\alpha$，所以 $P\in\alpha$.

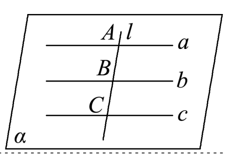
又因为 $a\subset\alpha,P\notin a$，所以 α 与 β 重合，所以 $PQ\subset\alpha$.

[**一题多思**]

将本例(2)中的两条平行线改为三条，求证：和同一条直线相交的三条平行直线一定在同一平面内.

已知：$a\parallel b\parallel c,l\cap a=A,l\cap b=B,l\cap c=C$.求证：$a,b,c$ 和 l 共面.

证明：如图，因为 $a\parallel b$，



所以 a 与 b 确定一个平面 α.

因为 $l\cap a=A,l\cap b=B$，

所以 $A\in\alpha,B\in\alpha$，且 $A\in l,B\in l$，所以 $l\subset\alpha$.

因为 $b\parallel c$，所以 b 与 c 确定一个平面 β，同理 $l\subset\beta$.

因为平面 α 与 β 都包含 l 和 b，且 $b\cap l=B$，

由基本事实1的推论知，经过两条相交直线有且只有一个平面，

所以平面 α 与平面 β 重合，所以 a,b,c 和 l 共面.

反思提炼

证明点、线共面的常用方法

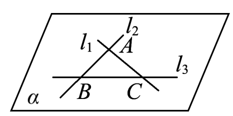
(1)先由部分点、线确定一个面，再证其余的点、线都在这个平面内，即用“纳入法”.

(2)先由其中一部分点、线确定一个平面 α，其余点、线确定另一个平面 β，再证平面 α 与 β 重合，即用“同一法”.

探究训练

证明：两两相交且不过同一点的三条直线共面.

解：已知：如图，$l_1\cap l_2=A,l_2\cap l_3=B,l_1\cap l_3=C$.



求证：直线 l_1,l_2,l_3 在同一平面内.

证明：因为 $l_1\cap l_2=A$，所以 l_1 和 l_2 在同一平面 α 内.

因为 $l_2\cap l_3=B$，所以 $B\in l_2$.

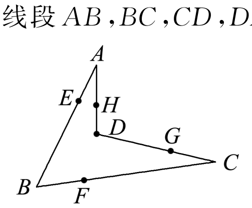
又因为 $l_2\subset\alpha$，所以 $B\in\alpha$.同理可证 $C\in\alpha$.

又因为 $B\in l_3,C\in l_3$，所以 $l_3\subset\alpha$.

所以直线 l_1,l_2,l_3 在同一平面内.

学习任务三　多线共点、多点共线问题

例2　(1)如图所示，A,B,C,D 为不共面的四点，E,F,G,H 分别在线段 AB,BC,CD,DA 上.



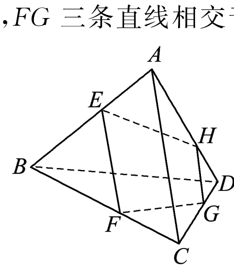
①若 $EH\cap FG=P$，则点 P 在直线______上；

②若 $EF\cap GH=Q$，则点 Q 在直线______上.

①BD　②AC　**解析**：①若 $EH\cap FG=P$，则点 $P\in$ 平面 ABD，$P\in$ 平面 BCD.因为平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=BD$，所以 $P\in BD$.

②若 $EF\cap GH=Q$，则点 $Q\in$ 平面 ABC，$Q\in$ 平面 ACD.因为平面 $ABC\cap$ 平面 $ACD=AC$，所以 $Q\in AC$.

(2)如图所示，在空间四边形 $ABCD$ 中，E,F 分别是 AB 和 CB 上的点，G,H 分别是 CD 和 AD 上的点，且四边形 $EFGH$ 为梯形，$HG\parallel EF$，$HG:EF=1:3$.求证：EH,BD,FG 三条直线相交于同一点.



证明：延长 EH,FG 交于点 O(图略).

因为 $HG\parallel EF,HG:EF=1:3$，

所以 EH 与 FG 共面，且 EH 与 FG 不平行.

又因为 $O\in EH,EH\subset$ 平面 ABD，所以 $O\in$ 平

面 ABD.

因为 $O\in FG$，$FG\subset$ 平面 BCD，所以 $O\in$ 平面 BCD.

因为平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=BD$，

所以 $O\in BD$，

所以 EH，BD，FG 三条直线相交于同一点 O.

反思提炼

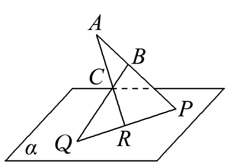
点共线与线共点的证明方法

(1)点共线：证明多点共线通常用基本事实3，即两相交平面交线的唯一性.通过证明点分别在两个平面内，证明点在相交平面的交线上；也可选择其中两点确定一条直线，然后证明其他点也在这条直线上.

(2)三线共点：证明三线共点，可把其中一条直线作为分别过其余两条直线的两个平面的交线，然后再证这两条直线的交点在此直线上；此外，还可先将其中一条直线看作某两个平面的交线，证明该交线与另两条直线分别交于两点，再证这两点重合，从而证得三线共点.

探究训练

如图，已知△ABC 在平面 α 外，$AB\cap\alpha=P$，$AC\cap\alpha=R$，$BC\cap\alpha=Q$.求证：P，Q，R 三点共线.



证明：(方法一)因为 $AB\cap\alpha=P$，所以 $P\in AB$，$P\in$ 平面 α.

又 $AB\subset$ 平面 ABC，所以 $P\in$ 平面 ABC.

所以由基本事实3可知，点 P 在平面 ABC 与平面 α 的交线上，

同理可证 Q，R 也在平面 ABC 与平面 α 的交线上.

所以 P，Q，R 三点共线.

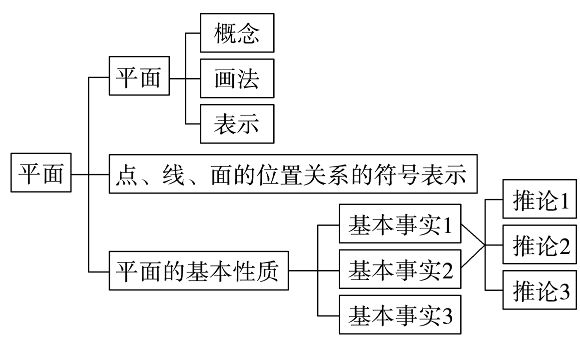
(方法二)因为 $AP\cap AR=A$，所以直线 AP 与直线 AR 确定平面 APR.

又因为 $AB\cap\alpha=P$，$AC\cap\alpha=R$，所以平面 $APR\cap$ 平面 $\alpha=PR$.

因为 $B\in$ 平面 APR，$C\in$ 平面 APR，所以 $BC\subset$ 平面 APR.

又因为 $Q\in BC$，所以 $Q\in$ 平面 APR.又 $Q\in\alpha$，所以 $Q\in PR$，所以 P，Q，R 三点共线.

体系构建



课后素养评价(二十六)

基础性·能力运用

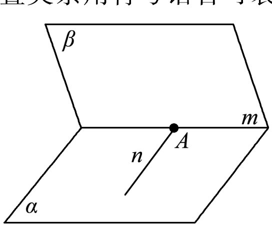
1. 下列说法中，正确说法的个数为 ( )

①三角形一定是平面图形；②若四边形的两条对角线相交于一点，则该四边形是平面图形；③一个平面的面积为6 cm^2.

A.0 B.1 C.2 D.3

C **解析**：①②正确，③不正确.故选C.

2. 如图所示的位置关系用符号语言可表示为 ( )



A.$\alpha\cap\beta=m$，$n\subset\alpha$，$m\cap n=A$

B.$\alpha\cap\beta=m$，$n\in\alpha$，$m\cap n=A$

C.$\alpha\cap\beta=m$，$n\subset\alpha$，$A\subset m$，$A\subset n$

D.$\alpha\cap\beta=m$，$n\in\alpha$，$A\in m$，$A\in n$

A **解析**：点可看成元素，直线与平面均为点的集合，因此 $n\subset\alpha$，$A\in m$，$A\in n$，$m\cap n=A$，$\alpha\cap\beta=m$.故选A.

3. 下列图形中，不一定是平面图形的是 ( )

A.三角形 B.菱形

C.梯形 D.四边相等的四边形

D **解析**：三角形的三个顶点不共线，因此三角形一定是平面图形；菱形有两组对边平行，梯形有一组对边平行，故为平面图形；四边相等的四边形可能为空间四边形.故选D.

4. 给出以下三个命题：

①不共面的四点中，任意三点不共线；

②若 A，B，C，D 共面，A，B，C，E 共面，则 A，B，C，D，E 共面；

③首尾依次相接的四条线段一定共面.

其中正确命题的个数是 ( )

A.0 B.1 C.2 D.3

B　**解析**：若存在三点共线，则四点一定共面，故①正确；对于②，若 A,B,C 三点共线，如图 1 所示，A,B,C,D,E 不共面，故②不正确；对于③，如图 2 所示的 AB,BC,CD,DA 顺次首尾相连，但四条线段不共面，故③不正确.故选 B.

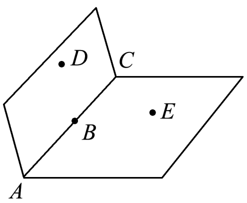


图 1

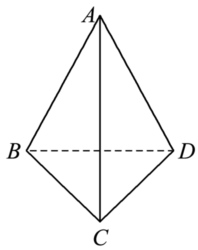
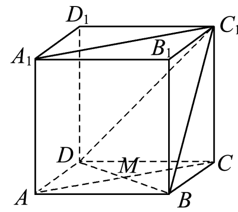


图 2

5.如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 A_1C 与平面 BDC_1 的交线是________.

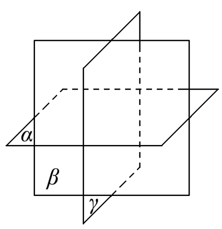


C_1M　**解析**：因为 $C_1\in$ 平面 A_1C，且 $C_1\in$ 平面 BDC_1，同时 $M\in$ 平面 A_1C，且 $M\in$ 平面 BDC_1，所以平面 A_1C 与平面 BDC_1 的交线是 C_1M.

综合性·创新提升

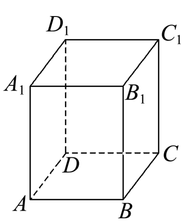
1.(生活中的立体几何)一个西瓜切 3 刀，最多能切出________块.

8　**解析**：根据题意可知，把切的每一刀看成一个平面.如图，利用平面的基本性质和位置关系可知，先竖着沿 β,γ 两个不重合的平面切两刀到底，再横着沿平面 α 切一刀贯通，



这样可实现块数的倍增，此时得到的块数最多，为 8 块.

2.如图，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱中，既与 AB 共面，又与 CC_1 共面的棱有________条.



5　**解析**：由题图可知，既与 AB 共面又与 CC_1 共面的棱有 CD,BC,BB_1,AA_1,C_1D_1，共 5 条.

3.已知平面 α 与平面 β，平面 γ 都相交，则这三个平面的交线可能有________条.

1 或 2 或 3　**解析**：当 β 与 γ 相交时，若 α 过 β 与 γ 的交线，有 1 条交线；若 α 不过 β 与 γ 的交线，有 3 条交线.当 β 与 γ 平行时，有 2 条交线.

4.若线段 AB 所在直线与平面 α 相交，P 为直线 AB 外的任一点，且 $P\notin\alpha$，直线 AP,BP 与 α 分别交于 A',B'.求证：不论点 P 在什么位置，直线 $A'B'$ 必过一定点.

证明：因为 $AP\cap BP=P$，

所以 AP,BP 确定平面 β.

又因为 $A'\in AP$，所以 $A'\in\beta$.

同理可得 $B'\in\beta$.

因为 $A'\in\alpha,B'\in\alpha$，所以 $\alpha\cap\beta=A'B'$.

设 $AB\cap\alpha=O$，则 $O\in\alpha,O\in\beta$.

所以 $O\in A'B'$.

即直线 $A'B'$ 过定点 O(AB 与平面 α 的交点).

8.4.2 空间点、直线、平面之间的位置关系

学习任务目标

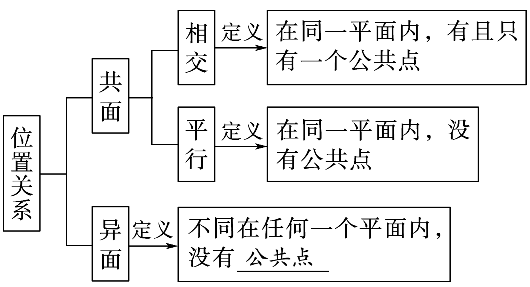
1.了解直线与直线之间的位置关系，理解异面直线的概念.
2.了解直线与平面之间的三种位置关系，并能判断直线与平面的位置关系.
3.了解平面与平面之间的两种位置关系，并能判断两个平面的位置关系.
4.会用符号语言和图形语言表示直线与平面、平面与平面之间的位置关系.(直观想象)

问题式预习

知识清单

1.空间中直线与直线的位置关系

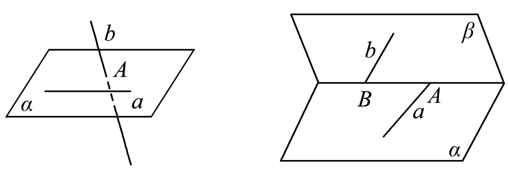
(1)空间中直线与直线的位置关系



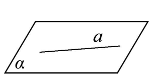
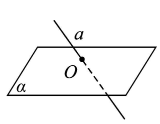
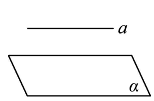
(2)异面直线

①定义：把不同在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线.

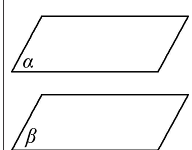
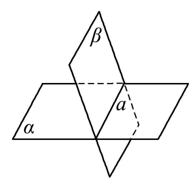
②画法：(通常用平面衬托)



2.空间中直线与平面的位置关系

位置关系	直线 a 在平面 α 内	直线 a 在平面 α 外	
		直线 a 与平面 α 相交	直线 a 与平面 α 平行
公共点个数	无数	1	0
图形表示			
符号表示	$a\subset\alpha$	$a\cap\alpha=O$	$a\parallel\alpha$

3.空间中平面与平面的位置关系

位置关系	两个平面平行	两个平面相交
公共点	没有公共点	有一条公共直线
图形表示		
符号表示	$\alpha\parallel\beta$	$\alpha\cap\beta=a$

概念辨析

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)若直线 a 与直线 b 异面，直线 b 与直线 c 异面，则 a 与 c 异面. (×)

(2)若两条不同直线不是异面直线，则必相交或平行. (√)

(3)若直线 l 上有无数个点不在平面 α 内，则 $l\parallel\alpha$. (×)

(4)若两个平面都平行于同一条直线，则这两个平面平行. (×)

2.若直线 $l\parallel$ 平面 α，直线 $a\subset\alpha$，则 ( )

A.$l\parallel a$

B.l 与 a 异面

C.l 与 a 相交

D.l 与 a 没有公共点

D **解析**：若直线 $l\parallel$ 平面 α，直线 $a\subset\alpha$，则 $l\parallel a$ 或 l 与 a 异面，故 l 与 a 没有公共点.故选 D.

3.请思考并回答问题：

(1)分别位于两个平行平面内的两条直线有什么位置关系？

提示：因为分别位于两个平行平面内的直线一定无公共点，所以它们的位置关系是平行或异面.

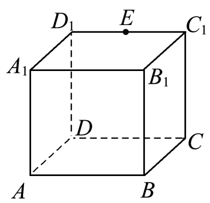
(2)若直线 l 在平面 α 外，则 l 与平面 α 就没有公共点吗？

提示：不一定.直线 l 在平面 α 外包括两种情况：当直线 l 与平面 α 平行时，没有公共点；当直线 l 与平面 α 相交时，有一个公共点.

任务型课堂

学习任务一　空间中两条直线位置关系的判定

如图，在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，判断下列直线间的位置关系：



(1)直线 A_1B 与直线 D_1C 的位置关系是<u>平行</u>；

(2)直线 A_1B 与直线 B_1C 的位置关系是<u>异面</u>；

(3)直线 D_1D 与直线 CE(E 为线段 C_1D_1 的中点)的位置关系是<u>相交</u>；

(4)直线 AB 与直线 B_1C 的位置关系是<u>异面</u>.

反思提炼

判断空间中两条直线位置关系的方法

(1)建立空间观念，全面考虑两条直线平行、相交和异面三种位置关系.特别关注异面直线.

(2)重视正方体等常见几何体模型的应用，会举例说明两条直线的位置关系.

学习任务二　空间中直线与平面的位置关系

1.下列命题中，正确命题的个数是　　(　　)

①如果 a,b 是两条直线，$a\parallel b$，那么 a 平行于经过 b 的任何一个平面；

②如果直线 a 和平面 α 满足 $a\parallel\alpha$，那么 a 与平面 α 内的任何一条直线平行；

③如果直线 a,b 和平面 α 满足 $a\parallel\alpha,b\parallel\alpha$，那么 $a\parallel b$；

④如果直线 a,b 和平面 α 满足 $a\parallel b,a\parallel\alpha,b\not\subset\alpha$，那么 $b\parallel\alpha$；

⑤如果平面 α 的同侧有两点 A,B 到平面 α 的距离相等，那么 $AB\parallel\alpha$.

A.0　　B.2　　C.1　　D.3

B　**解析**：如图，在长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 中，$AA'\parallel BB'$，AA'在过 BB'的平面 AB'内，故命题①不正确；$AA'\parallel$平面 $B'C$，$BC\subset$平面 $B'C$，但 AA'不平行于 BC，故命题②不正确；$AA'\parallel$平面 $B'C$，$A'D'\parallel$平面 $B'C$，但 AA'与$A'D'$相交，故命题③不正确；④中，假设 b 与 α 相交，因为 $a\parallel b$，所以 a 与 α 相交，这与 $a\parallel\alpha$ 矛盾，故 $b\parallel\alpha$，即命题④正确；命题⑤显然正确.故选 B.

2.直线 a 在平面 γ 外，则　　(　　)

A.$a\parallel\gamma$

B.a 与 γ 至少有一个公共点

C.$a\cap\gamma=A$

D.a 与 γ 至多有一个公共点

D　**解析**：直线 a 在平面 γ 外，包括直线 a 与平面 γ 相交或平行两种情况，故 a 与 γ 至多有一个公共点.

3.三棱台的一条侧棱所在直线与其对面所在的平面之间的关系是　　(　　)

A.相交

B.平行

C.直线在平面内

D.平行或直线在平面内

A　**解析**：因为棱台延长各侧棱可恢复成棱锥的形状，所以三棱台的一条侧棱所在直线与其对面所在的平面相交.故选 A.

反思提炼

直线与平面的位置关系的判定

直线与平面的位置关系有三种，即直线在平面内，直线与平面相交，直线与平面平行.

(1)判定直线在平面内，需找到直线上两点在平面内，根据基本事实 2 知直线在平面内.

(2)判定直线与平面相交，据定义只需判定直线与平面有且只有一个公共点.

(3)判定直线与平面平行，可根据定义判断直线与平面没有公共点，也可以排除直线与平面相交及直线在平面内两种情况，从而判定直线与平面平行.

学习任务三　空间中平面与平面的位置关系

例　(多选题)给出下列四个命题，其中错误的命题是　　(　　)

A.若平面 α 内有两条直线和平面 β 平行，则这两个平面平行

B.若平面 α 内有无数条直线和平面 β 平行，则 α 与 β 平行

C.若平面 α 内$\triangle ABC$ 的三个顶点到平面 β 的距离相等，则 α 与 β 平行

D.若两个不重合的平面有无数个公共点，则这两个平面相交

ABC　**解析**：如图1，平面α内有无数条直线与平面β平行，但α与β相交；如图2，$\triangle ABC$的三个顶点到β的距离相等，但α与β相交.故A，B，C均错.

不重合的两个平面，若它们有公共点，则它们有无数个公共点，且都在它们的交线上，故D正确.

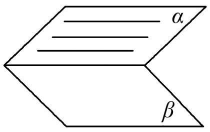


图1

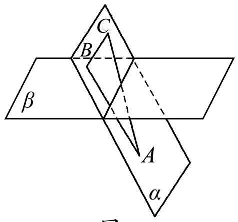


图2

反思提炼

平面与平面的位置关系的判定

平面与平面的位置关系有两种，即相交与平行.

(1)判定两个平面相交，只需找到两个平面的一个公共点，就可根据基本事实3得知，两个不重合的平面是相交的.

(2)判定两个平面平行，可根据定义判定两个平面没有公共点，也可以排除两个平面相交和重合的情况，从而判定两个平面平行.

探究训练

1.下列说法正确的是　(　　)

A.两个平面可以只有一个交点

B.一条直线与一个平面最多有一个公共点

C.两个平面有一个公共点，则它们相交或重合

D.两个平面有三个公共点，则它们一定重合

C　**解析**：两个平面有公共点，包括两个平面重合或相交.

2.如果在两个平面内各有一条直线，这两条直线互相平行，那么这两个平面　(　　)

A.平行

B.相交

C.平行或相交

D.不相交

C　**解析**：根据题意作图判断，图1、图2分别为两个平面平行、相交的情形.

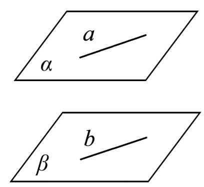


图1

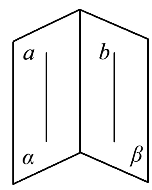
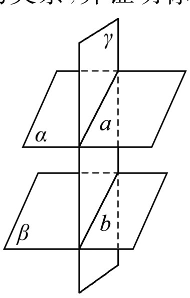


图2

学习任务四　空间中直线、平面位置关系的综合应用

1.如图，平面α，β，γ满足$\alpha /\!/ \beta$，$\alpha \cap \gamma = a$，$\beta \cap \gamma = b$，判断a与b，a与β的关系，并证明你的结论.



解：$a /\!/ b$，$a /\!/ \beta$.证明如下：由$\alpha \cap \gamma = a$知，$a \subset \alpha$且$a \subset \gamma$.

由$\beta \cap \gamma = b$知，$b \subset \beta$且$b \subset \gamma$.

因为$\alpha /\!/ \beta$，$a \subset \alpha$，$b \subset \beta$，所以a，b无公共点.

又因为$a \subset \gamma$，且$b \subset \gamma$，所以$a /\!/ b$.

因为$\alpha \cap \gamma = a$，所以$a \subset \alpha$.

因为$\alpha /\!/ \beta$，所以a与β无公共点，所以$a /\!/ \beta$.

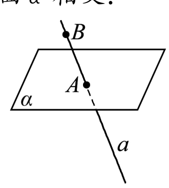
2.已知平面α，β，直线a，b，且$\alpha /\!/ \beta$，$a \subset \alpha$，$b \subset \beta$，则直线a与直线b具有怎样的位置关系？

解：平面α与β平行时，平面α内的直线a与平面β内的直线b有且只有两种位置关系：平行或异面.因为$\alpha /\!/ \beta$，所以α与β没有公共点，所以直线a与直线b也没有公共点.

3.证明：如果一条直线经过平面内一点，又经过平面外一点，那么这条直线和平面相交.

解：已知：如图，$A \in \alpha$，$A \in a$，$B \notin \alpha$，$B \in a$.

求证：直线a和平面α相交.



证明：根据已知，a和平面α有公共点A，

所以a不平行于平面α.

假设直线a和平面α不相交，则$a \subset \alpha$.

因为$B \in a$，所以$B \in \alpha$，与已知$B \notin \alpha$矛盾.

所以假设不成立.所以直线a和平面α相交.

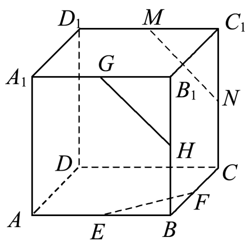
体系构建

- 空间点、直线、平面之间的位置关系
  - 线线
    - 共面
      - 相交
      - 平行
    - 异面
  - 线面
    - 线在面内
    - 线在面外
      - 平行
      - 相交
  - 面面
    - 相交
    - 平行

课后素养评价(二十七)

基础性·能力运用

1.(多选题)正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 如图所示，E，F，G，H，M，N 分别是所在棱的中点，则下列结论正确的是　(ABC)



A.GH 和 MN 是平行直线

B.MN 和 EF 是相交直线

C.GH 和 EF 是异面直线

D.AA_1 和 EF 是相交直线

2.如果一条直线与两个平行平面中的一个平行，那么这条直线与另一个平面的位置关系是　(D)

A.平行

B.相交

C.直线在平面内

D.平行或直线在平面内

3.在四棱台 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 ABB_1A_1 与平面 DCC_1D_1 的位置关系是　(　　)

A.相交

B.平行

C.不确定

D.异面

A　**解析**：由棱台的定义可知，平面 ABB_1A_1 与平面 DCC_1D_1 一定相交.故选 A.

4.在正方体的六个面所在平面中，互相平行的平面有　(　　)

A.1 组　　B.2 组

C.3 组　　D.1 组或 3 组

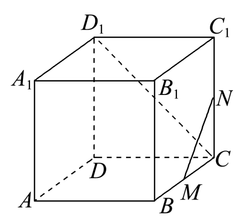
C　**解析**：结合正方体的特征可知互相平行的平面有 3 组.

5.在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别是棱 BC，CC_1 的中点，则直线 MN 与 D_1C 的位置关系是________.

异面　**解析**：如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别是棱 BC，CC_1 的中点.

因为 $MN\cap$ 平面 $DCC_1D_1=N$，$D_1C\subset$ 平面 DCC_1D_1，$N\notin D_1C$，

所以直线 MN 与 D_1C 的位置关系是异面.

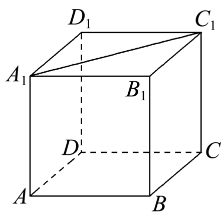


6.过平面 α 外一点 M，作直线 $l\parallel\alpha$，则这样的直线有________条.

无数　**解析**：过点 M 作一个平面 β，使得 $\beta\parallel\alpha$，则平面 β 中过点 M 的所有直线都与 α 平行.

综合性·创新提升

1.(动态问题)正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 如图所示，点 P 是线段 A_1C_1 上的动点，下列与直线 BP 始终异面的是　(　　)



A.DD_1

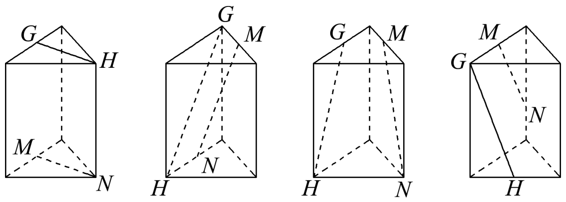
B.AC

C.AD_1

D.B_1C

B　**解析**：由正方体的性质易知当点 P 为 A_1C_1 的中点时，此时 $P\in B_1D_1$，而 $DD_1\parallel BB_1$，所以 B，D，D_1，B_1 四点共面，则 BP，DD_1 在平面 BDD_1B_1 上，故 A 不符合题意；因为 $AA_1\parallel CC_1$，所以 A，C，C_1，A_1 四点共面，易知 $P\in$ 平面 ACC_1A_1，而 $B\notin$ 平面 ACC_1A_1，故 B 符合题意；当 P 与 C_1 重合时，易知 $AB\parallel D_1C_1$，$AB=D_1C_1$，则四边形 ABC_1D_1 是平行四边形，则此时 $AD_1\parallel BP$，故 C 不符合题意；当 P 与 C_1 重合时，显然 B_1C，BP 相交，故 D 不符合题意.故选 B.

2.(多选题)如图，G，H，M，N 分别是正三棱柱的顶点或所在棱的中点，则表示直线 GH，MN 是异面直线的图形有　(　　)



A　　B　　C　　D

BD　**解析**:选项 A 中,$GH /\!/ MN$;

选项 B 中,G,H,N 三点共面,但 $M\notin$ 平面 GHN,因此直线 GH 与 MN 异面;

选项 C 中,连接 GM,$GM /\!/ HN$,因此 GH 与 MN 共面;

选项 D 中,G,M,N 三点共面,但 $H\notin$ 平面 GMN,因此 GH 与 MN 异面.故选 BD.

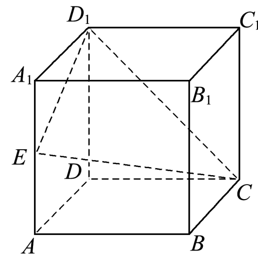
3.若 a,b 是两条异面直线,且 $a /\!/$ 平面 α,则 b 与 α 的位置关系是 $b\subset\alpha$,或 $b /\!/ \alpha$,或 b 与 α 相交.

4.平面 $\alpha\cap\beta=c$,直线 $a /\!/ \alpha$,a 与 β 相交,则 a 与 c 的位置关系是________.

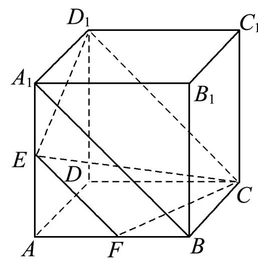
异面　**解析**:因为 $a /\!/ \alpha$,$c\subset\alpha$,所以 a 与 c 无公共点,不相交.若 $a /\!/ c$,则直线 $a /\!/ \beta$ 或 $a\subset\beta$,这与"a 与 β 相交"矛盾,

所以 a 与 c 异面.

5.如图,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,E 是 AA_1 的中点,画出过点 D_1,C,E 的平面与平面 ABB_1A_1 的交线,并说明理由.



解:如图,取 AB 的中点 F,连接 EF,A_1B,CF.



因为 E 是 AA_1 的中点,所以 $EF /\!/ A_1B$.

在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$A_1D_1 /\!/ BC$,$A_1D_1=BC$,所以四边形 A_1BCD_1 是平行四边形.

所以 $A_1B /\!/ CD_1$,所以 $EF /\!/ CD_1$.

所以 E,F,C,D_1 四点共面.

因为 $E\in$ 平面 ABB_1A_1,$E\in$ 平面 D_1CE,

$F\in$ 平面 ABB_1A_1,$F\in$ 平面 D_1CE,

所以平面 $ABB_1A_1\cap$ 平面 $D_1CE=EF$.

所以过点 D_1,C,E 的平面与平面 ABB_1A_1 的交线为 EF.

8.5　空间直线、平面的平行

8.5.1　直线与直线平行

学习任务目标
理解并掌握基本事实 4 和等角定理,并能解决有关问题.(逻辑推理)

问题式预习

知识清单

1.基本事实 4

文字表述:平行于同一条直线的两条直线平行.这一性质通常叫做平行线的传递性.

符号表述:$\left.\begin{matrix} a /\!/ b \\ b /\!/ c \end{matrix}\right\}\Rightarrow a /\!/ c$.

2.空间等角定理

如果空间中两个角的两条边分别对应平行,那么这两个角相等或互补.

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)如果两条直线同时和第三条直线平行,那么这两条直线互相平行.　(√)

(2)分别和两条异面直线平行的两条直线平行.　(×)

(3)如果两条相交直线与另两条直线相交直线分别平行,那么这两组直线所成的锐角(或直角)相等.　(√)

2.已知 a，b 是异面直线，直线 c∥直线 a，那么 c 与 b（　　）

A.一定是异面直线

B.一定是相交直线

C.不可能是平行直线

D.不可能是相交直线

C　**解析**：假设 c 与 b 平行，由于 $c\parallel a$，根据基本事实可知 $a\parallel b$，与 a，b 是异面直线矛盾，故 c 与 b 不可能是平行直线.

3.已知 $\angle BAC=30°$，$AB\parallel A'B'$，$AC\parallel A'C'$，则 $\angle B'A'C'=$（　　）

A.30°

B.150°

C.30°或 150°

D.大小无法确定

C　**解析**：当 $\angle B'A'C'$ 与 $\angle BAC$ 的两边方向分别相同或相反时，$\angle B'A'C'=30°$，当一组边的方向相同，一组边的方向相反时，$\angle B'A'C'=150°$.

4.请思考并回答问题：

(1)如果两条直线和第三条直线成等角，那么这两条直线平行吗？

提示：不一定，这两条直线可能相交、平行或异面.

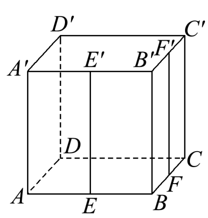
(2)同一平面内，一个角的两条边与另一个角的两条边分别平行，那么这两个角相等或互补，空间中是否有类似的规律？

提示：有，如果空间中两个角的两条边分别平行，那么这两个角相等或互补.

任务型课堂

学习任务一　基本事实 4 的应用

例 1　如图，在正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，E，F，E'，F' 分别是 AB，BC，$A'B'$，$B'C'$ 的中点.求证：$EE'\parallel FF'$.



证明：在正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，$AB\underline{\parallel}A'B'$.因为 E，E' 分别是 AB，$A'B'$ 的中点，所以 $BE\parallel B'E'$，且 $BE=B'E'$，

所以四边形 $EBB'E'$ 是平行四边形，

所以 $EE'\parallel BB'$.

同理可证 $FF'\parallel BB'$.

所以 $EE'\parallel FF'$.

［一题多思］

思考.在本例中，若 M，N 分别是 $A'D'$，$C'D'$ 的中点，求证：四边形 $ACNM$ 是梯形.

证明：连接 $A'C'$(图略).在正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，易知 $MN\parallel A'C'$，且 $MN=\frac{1}{2}A'C'$.

又因为 $A'C'\parallel AC$，且 $A'C'=AC$，所以 $MN\parallel AC$，且 $MN=\frac{1}{2}AC$.

所以四边形 $ACNM$ 是梯形.

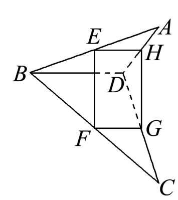
反思提炼

利用基本事实 4 证明两条直线平行的方法

首先寻找第三条直线，然后证明这两条直线都与所找的第三条直线平行，最后根据基本事实 4，证明这两条直线平行.

探究训练

(多选题)如图，设 E，F，G，H 依次是空间四边形 $ABCD$ 的边 AB，BC，CD，DA 上除端点外的点，$\frac{AE}{AB}=\frac{AH}{AD}=\lambda$，$\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\mu$，则下列结论中正确的有（　　）



A.当 $\lambda=\mu$ 时，四边形 $EFGH$ 是平行四边形

B.当 $\lambda\neq\mu$ 时，四边形 $EFGH$ 是梯形

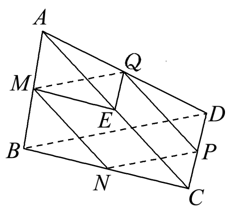
C.当 $\lambda\neq\mu$ 时，四边形 $EFGH$ 一定不是平行四边形

D.当 $\lambda=\mu$ 时，四边形 $EFGH$ 是梯形

ABC　**解析**：由 $\frac{AE}{AB}=\frac{AH}{AD}=\lambda$，得 $EH\parallel BD$，且 $\frac{EH}{BD}=\lambda$.同理得 $FG\parallel BD$，且 $\frac{FG}{BD}=\mu$.当 $\lambda=\mu$ 时，$EH\underline{\parallel}FG$.当 $\lambda\neq\mu$ 时，$EH\parallel FG$，但 $EH\neq FG$，故 A，B，C 都正确，只有 D 错误.

学习任务二 等角定理的应用

例2 (1)(多选题)如图所示，在四面体 $ABCD$ 中，M,N,P,Q,E 分别是 AB,BC,CD,AD,AC 的中点，则下列说法正确的是 ( )



A.四边形 $MNPQ$ 是菱形

B.$\angle QME=\angle DBC$

C.$\triangle BCD\backsim\triangle MEQ$

D.四边形 $MNPQ$ 为矩形

BC **解析**：由题易知 $MQ\parallel BD$，$MQ=\frac{1}{2}BD$，$NP\parallel BD$，$NP=\frac{1}{2}BD$，

所以 $MQ\parallel NP$，$MQ=NP$，所以四边形 $MNPQ$ 为平行四边形，但不能确定是否为菱形或矩形，故 A，D 不正确.

在$\triangle ABC$ 中，由 M,E 分别为 AB,AC 的中点，得 $ME\parallel BC$，同理可得 $MQ\parallel BD$，

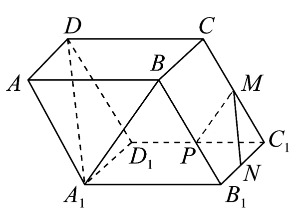
所以由题图及等角定理知，$\angle QME=\angle DBC$，故 B 正确；

由 B 项得$\angle QME=\angle DBC$，同理，可知$\angle QEM=\angle DCB$，$\angle MQE=\angle BDC$，

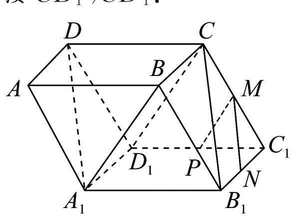
所以$\triangle BCD\backsim\triangle MEQ$，故 C 正确.

故选 BC.

(2)在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M,N,P 分别是 CC_1,B_1C_1,C_1D_1 的中点.求证：$\angle NMP=\angle BA_1D$.



证明：如图，连接 CB_1，CD_1.



因为 $CD\parallel A_1B_1$，$CD=A_1B_1$，

所以四边形 A_1B_1CD 是平行四边形，

所以 $A_1D\parallel B_1C$.

因为 M,N 分别是 CC_1,B_1C_1 的中点，

所以 $NM\parallel B_1C$，所以 $NM\parallel A_1D$.

因为 $BC\parallel A_1D_1$，$BC=A_1D_1$，所以四边形 A_1BCD_1 是平行四边形，

所以 $A_1B\parallel CD_1$.

因为 M,P 分别是 CC_1,C_1D_1 的中点，

所以 $PM\parallel CD_1$，

所以 $PM\parallel A_1B$，

所以$\angle NMP$ 和$\angle BA_1D$ 的两边分别平行且方向相反，

所以$\angle NMP=\angle BA_1D$.

反思提炼

等角定理的应用

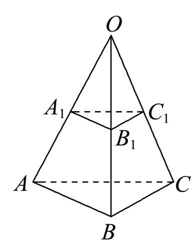
(1)根据空间中相应的定理证明角的两边分别平行，即先证明线线平行.

(2)根据角的方向判定两角相等或互补.

探究训练

如图，OA,OB,OC 为不共面的三条线段，点 A_1,B_1,C_1 分别是 OA,OB,OC 上的点，且 $\frac{OA_1}{OA}=\frac{OB_1}{OB}=\frac{OC_1}{OC}$ 成立.

求证：$\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle ABC$.



证明：在$\triangle OAB$ 中，因为 $\frac{OA_1}{OA}=\frac{OB_1}{OB}$，

所以 $A_1B_1\parallel AB$.

同理可证 $A_1C_1\parallel AC$，$B_1C_1\parallel BC$.

所以$\angle C_1A_1B_1=\angle CAB$，$\angle A_1B_1C_1=\angle ABC$，

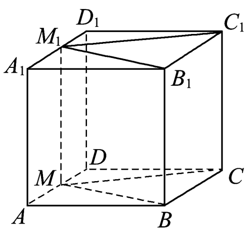
所以$\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle ABC$.

学习任务三　基本事实 4、等角定理的综合应用

例 3　如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M，M_1 分别是棱 AD 和 A_1D_1 的中点.求证：

(1)四边形 BB_1M_1M 为平行四边形；

(2)$\angle BMC=\angle B_1M_1C_1$.



证明：(1)在正方形 ADD_1A_1 中，M，M_1 分别为棱 AD，A_1D_1 的中点，所以 $MM_1 \underline{\underline{\parallel}} AA_1$.

又因为 $AA_1 \underline{\underline{\parallel}} BB_1$，

所以 $MM_1 \parallel BB_1$，且 $MM_1=BB_1$，

所以四边形 BB_1M_1M 为平行四边形.

(2)由(1)知四边形 BB_1M_1M 为平行四边形，

所以 $B_1M_1 \parallel BM$.

同理可得四边形 CC_1M_1M 为平行四边形，

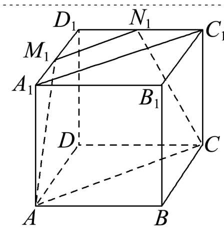
所以 $C_1M_1 \parallel CM$.

由平面几何知识可知，$\angle BMC$ 和 $\angle B_1M_1C_1$ 都是锐角，所以 $\angle BMC=\angle B_1M_1C_1$.

[一题多思]

思考.在本例中，若 N_1 是 D_1C_1 的中点，求证：四边形 M_1N_1CA 是等腰梯形.

证明：如图所示，连接 A_1C_1，



因为 M_1，N_1 分别是 A_1D_1，D_1C_1 的中点，所以 $M_1N_1 \parallel A_1C_1$，且 $M_1N_1=\dfrac{1}{2}A_1C_1$.

由正方体的性质可知，$A_1C_1 \parallel AC$，且 $A_1C_1=AC$，

所以 $M_1N_1 \parallel AC$，且 $M_1N_1=\dfrac{1}{2}AC$ 又易知 $\mathrm{Rt}\triangle AA_1M_1 \cong \mathrm{Rt}\triangle CC_1N_1$，则 $AM_1=CN_1$，所以四边形 M_1N_1CA 是等腰梯形.

反思提炼

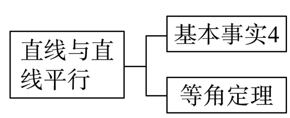
关于证明空间中两直线平行的说明

(1)辅助线：常见的辅助线作法是构造三角形的中位线、平行四边形的对边.

(2)证明依据：三角形中位线定理，平行四边形的性质，平行线分线段成比例定理的逆定理，基本事实 4，几何体中相对的棱、对角线等的平行关系.

(3)用途：根据两平行直线确定一个平面，可以证明共面问题；与等角定理结合可证明角相等.

体系构建



课后素养评价(二十八)

基础性·能力运用

1.(交汇创新)“两条直线没有公共点”是“两条直线平行”的　(　　)

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

B　**解析**：两条直线没有公共点⇔两条直线平行或异面，所以，“两条直线没有公共点”是“两条直线平行”的必要不充分条件.故选 B.

2.(多选题)已知 $AB \parallel PQ$，$BC \parallel QR$，$\angle ABC=30^\circ$，则 $\angle PQR$ 等于　(　　)

A.30°　　B.60°

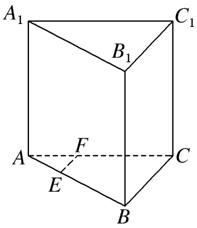
C.150°　　D.120°

AC　**解析**：$\angle ABC$ 的两边与 $\angle PQR$ 的两边分别平行，但方向不能确定是否相同，所以 $\angle PQR=30^\circ$ 或 150°.故选 AC.

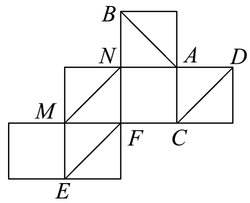
3.如图，在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，E，F 分别是 AB，AC 上的点，且 $AE : EB=AF : FC$，则 EF 与 B_1C_1 的位置关系是________.

平行　**解析**：在 $\triangle ABC$ 中，因为 $AE : EB=AF :$

FC，所以 $EF\parallel BC$. 又在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$BC\parallel B_1C_1$，所以 $EF\parallel B_1C_1$.



第 3 题图



第 4 题图

4. 一个正方体纸盒展开后如图所示，关于原正方体纸盒中的位置关系，有如下结论：

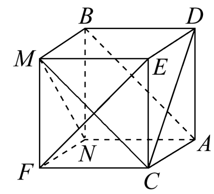
①$AB\parallel CM$；

②EF 与 MN 是异面直线；

③$MN\parallel CD$.

其中正确结论的序号为________.

①② **解析**：把正方体表面展开图还原为正方体，如图所示，EF 与 MN 是异面直线，$AB\parallel CM$，MN 与 CD 是异面直线，只有①②正确.

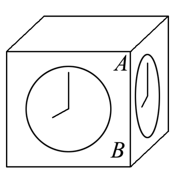


综合性·创新提升

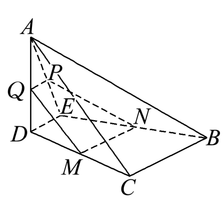
1.（生活中的立体几何）如图，上海海关大楼的钟楼可以看作一个正四棱柱，且钟楼的四个侧面均有时钟悬挂，在 0 时到 12 时时针与分针的转动中(包括 0 时，但不包括 12 时)，相邻两面时钟的时针相互平行的情况的次数为（　）

A.0　　B.2　　C.4　　D.12

B **解析**：如图，依题意可得 0 时或 6 时时针均与棱 AB 平行，所以此时两时针平行，3 时或 9 时时针均与棱 AB 垂直，但此时两时针不平行，其余时刻时针与棱 AB 成相同的角(不包括 12 点)，但是两时针不同在任何一个平面，故两时针不平行；所以在 0 点到 12 点时针与分针的转动中(包括 0 点，但不包括 12 点)，相邻两面时钟的时针两两相互平行的情况的次数为 2. 故选 B.



2.（多选题）如图，在四棱锥 $A\text{-}BCDE$ 中，底面四边形 $BCDE$ 为梯形，$BC\parallel DE$. 设 CD，BE，AE，AD 的中点分别为 M，N，P，Q，则（　）



A.$PQ=\frac{1}{2}MN$

B.$PQ\parallel MN$

C.M，N，P，Q 四点共面

D.四边形 $MNPQ$ 是梯形

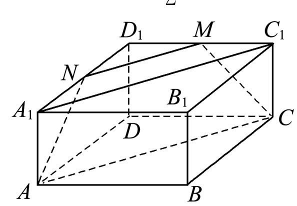
BCD **解析**：由题意知 $PQ=\frac{1}{2}DE$，且 $DE\neq MN$，所以 $PQ\neq\frac{1}{2}MN$，故 A 不正确；因为 $PQ\parallel DE$，$DE\parallel MN$，所以 $PQ\parallel MN$，又 $PQ\neq MN$，所以 B，C，D 正确.

3. 在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，高 AA_1 为 1，M，N 分别是边 C_1D_1 与 A_1D_1 的中点.

(1)求证：四边形 $MNAC$ 是等腰梯形；

(2)求四边形 $MNAC$ 的面积.

(1)**证明**：连接 A_1C_1，则 MN 是 $\triangle A_1C_1D_1$ 的中位线，如图所示，则有 $MN \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}A_1C_1$.



又 $A_1C_1 \mathrel{\underline{\parallel}} AC$，所以 $MN \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AC$.

所以 M，N，A，C 共面，且四边形 $MNAC$ 为梯形.

因为 $\mathrm{Rt}\triangle AA_1N\cong\mathrm{Rt}\triangle CC_1M$，

所以 $AN=CM$，

所以梯形 $MNAC$ 为等腰梯形.

(2)**解**：由题意，得 $AN^2=A_1A^2+A_1N^2=1+1=2$，$AC=2\sqrt{2}$，$MN=\sqrt{2}$，

则梯形 $MNAC$ 的高

$$h=\sqrt{AN^2-\left[\frac{1}{2}(AC-MN)\right]^2}=\frac{\sqrt{6}}{2},$$

所以 $S_{梯形MNAC}=\frac{1}{2}(AC+MN)\times h=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2}+\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

8.5.2　直线与平面平行

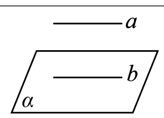
学习任务目标

1.理解并掌握直线与平面平行的判定定理，明确定理中“平面外”三个字的重要性.
2.能利用直线与平面平行的判定定理证明线面平行.(逻辑推理)
3.理解并能证明直线与平面平行的性质定理，明确定理的条件.
4.能利用直线与平面平行的性质定理解决有关的问题.

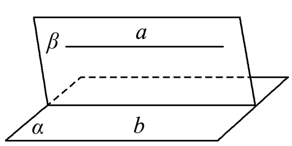
问题式预习

知识清单

1.直线与平面平行的判定

文字语言	如果平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，那么该直线与此平面平行
图形语言	
符号语言	$a\not\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，且 $a/\!/b\Rightarrow a/\!/\alpha$

2.直线与平面平行的性质定理

文字语言	一条直线与一个平面平行，如果过该直线的平面与此平面相交，那么该直线与交线平行
图形语言	
符号语言	$a/\!/\alpha$，$a\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=b\Rightarrow a/\!/b$

概念辨析

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)若直线 l 上有两点到平面 α 的距离相等，则 $l/\!/$平面 α.　(×)

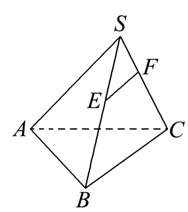
(2)若直线 l 与平面 α 平行，则 l 与平面 α 内的任意一条直线平行.　(×)

(3)如果两条平行线中的一条直线与一个平面平行，那么另一条也与这个平面平行.　(×)

(4)若直线 $l/\!/$平面 α，且 $b\subset\alpha$，则 $l/\!/b$.　(×)

(5)若直线 a，b 和平面 α 满足 $a/\!/\alpha$，$b/\!/\alpha$，则 $a/\!/b$.　(×)

2.如图，在三棱锥 S-ABC 中，E，F 分别是 SB，SC 上的点，且 $EF/\!/$平面 ABC，则　(　　)



A.EF 与 BC 相交

B.$EF/\!/BC$

C.EF 与 BC 异面

D.以上均有可能

B　**解析**：因为平面 $SBC\cap$平面 $ABC=BC$，$EF\subset$平面 SBC，$EF/\!/$平面 ABC，所以 $EF/\!/BC$.

3.请思考并回答问题：

(1)如果直线 l 与平面 α 内的一条直线平行，那么一定有直线 l 与平面 α 平行吗？

提示：不一定.要强调直线 l 在平面 α 外.

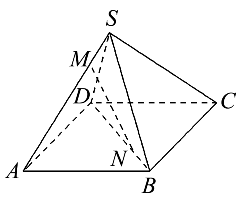
(2)如果直线 l 与平面 α 内无数条直线都平行，那么直线 l 和平面 α 之间具有什么样的位置关系？

提示：直线 l 与平面 α 平行或直线 l 在平面 α 内.

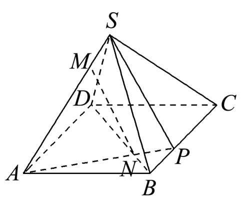
任务型课堂

学习任务一 直线与平面平行的判定

例 1 如图，S 是平行四边形 $ABCD$ 所在平面外一点，M，N 分别是 SA，BD 上的点，且 $\frac{AM}{SM}=\frac{DN}{NB}$.求证：$MN$∥平面 SBC .



证明：如图，连接 AN 并延长交 BC 于点 P，连接 SP.



因为 AD∥BC，所以$\frac{DN}{NB}=\frac{AN}{NP}$.

因为$\frac{AM}{SM}=\frac{DN}{NB}$，所以$\frac{AM}{SM}=\frac{AN}{NP}$，所以 MN∥SP.

又因为 $MN\not\subset$平面 SBC，$SP\subset$平面 SBC，所以 MN∥平面 SBC.

［一题多思］

思考.本例中，若 M，N 分别是 SA，BD 的中点，试证明：MN∥平面 SBC.

证明：连接 AC（图略），

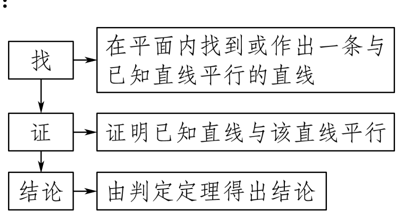
由平行四边形的性质可知，AC 必过 BD 的中点 N，所以在△SAC 中，M，N 分别是 SA，AC 的中点，所以 MN∥SC.

又因为 $SC\subset$平面 SBC，$MN\not\subset$平面 SBC，所以 MN∥平面 SBC.

反思提炼

证明线面平行的思路及步骤

证明直线与平面平行，可以用定义，也可以用判定定理，但说明直线与平面没有公共点比较难，所以更常用的是判定定理.用判定定理证明直线与平面平行的步骤如下：



探究训练

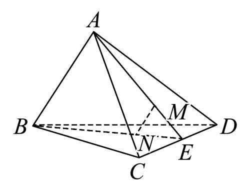
1.在四面体 A-BCD 中，M，N 分别是△ACD 和△BCD 的重心，则四面体的四个面中与 MN 平行的是________.

平面 ABD 与平面 ABC **解析**：如图所示，取 CD 的中点 E，则 $EM:MA=1:2$，$EN:BN=1:2$，所以 MN∥AB.

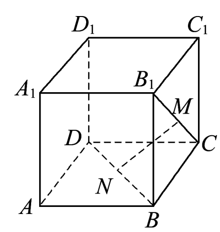
又 $MN\not\subset$平面 ABD，$MN\not\subset$平面 ABC，

$AB\subset$平面 ABD，$AB\subset$平面 ABC，

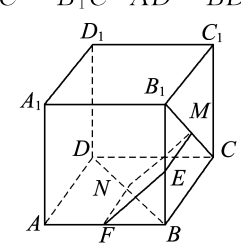
所以 MN∥平面 ABD，MN∥平面 ABC.



2.如图，在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，点 N 在 BD 上，点 M 在 B_1C 上，且 $CM=DN$.求证：MN∥平面 AA_1B_1B.



证明：如图，作 ME∥BC 交 BB_1 于点 E，作 NF∥AD 交 AB 于点 F，连接 EF，则 $EF\subset$平面 AA_1B_1B，且$\frac{ME}{BC}=\frac{B_1M}{B_1C}$，$\frac{NF}{AD}=\frac{BN}{BD}$.



因为在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，

$B_1C=BD$，又 $CM=DN$，所以 $B_1M=BN$，

所以$\frac{ME}{BC}=\frac{B_1M}{B_1C}=\frac{BN}{BD}=\frac{FN}{AD}$.

又 $AD=BC$，所以 $EM=FN$.

又 EM∥BC∥AD∥FN，

所以四边形 $MEFN$ 为平行四边形，

所以 MN∥EF.

因为 $MN\not\subset$平面 AA_1B_1B，$EF\subset$平面 AA_1B_1B，

所以 MN∥平面 AA_1B_1B.

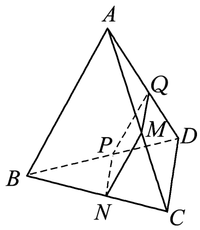
学习任务二　直线与平面平行的性质定理的应用

例 2　如图，用平行于四面体 $ABCD$ 的一组对棱 AB，CD 的平面截此四面体，截面为四边形 $MNPQ$.

(1)求证：四边形 $MNPQ$ 是平行四边形；

(2)求证：$\dfrac{BP}{PD}=\dfrac{AM}{MC}$；

(3)若添加条件：$AB\perp CD$，$AB=10$，$CD=8$，且 $BP:PD=1:1$，求四边形 $MNPQ$ 的面积.



(1)**证明**：因为 $AB\parallel$ 平面 $MNPQ$，平面 $ABC\cap$ 平面 $MNPQ=MN$，且 $AB\subset$ 平面 ABC，

所以由线面平行的性质定理知，$AB\parallel MN$.

同理 $AB\parallel PQ$，所以 $MN\parallel PQ$.

同理可得 $MQ\parallel NP$.

所以四边形 $MNPQ$ 是平行四边形.

(2)**证明**：由(1)知，$PQ\parallel AB$，所以 $\dfrac{BP}{PD}=\dfrac{AQ}{QD}$.

因为 $QM\parallel DC$，所以 $\dfrac{AQ}{QD}=\dfrac{AM}{MC}$.所以 $\dfrac{BP}{PD}=\dfrac{AM}{MC}$.

(3)**解**：由(1)知，四边形 $MNPQ$ 是平行四边形.

因为 $AB\perp CD$，所以 $PQ\perp QM$，

所以四边形 $MNPQ$ 是矩形.

因为 $BP:PD=1:1$，所以 $PQ=5$，$QM=4$，

所以四边形 $MNPQ$ 的面积为 $5\times4=20$.

反思提炼

利用线面平行的性质定理解题的步骤

找面 → 找一个与平面相交且过该直线的平面

↓

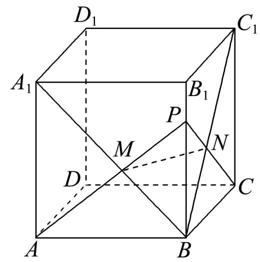
定线 → 确定两平面的交线

↓

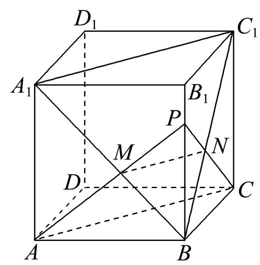
结论 → 由性质定理列条件，下结论

探究训练

如图，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 $P\in BB_1$（P 不与 B，B_1 重合），$PA\cap A_1B=M$，$PC\cap BC_1=N$，连接 MN.求证：$MN\parallel$ 平面 $ABCD$.



证明：如图，连接 AC，A_1C_1，



在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1\parallel CC_1$，且 $AA_1=CC_1$，

所以四边形 ACC_1A_1 是平行四边形，

所以 $AC\parallel A_1C_1$.

因为 $AC\not\subset$ 平面 A_1BC_1，$A_1C_1\subset$ 平面 A_1BC_1，

所以 $AC\parallel$ 平面 A_1BC_1.

因为 $AC\subset$ 平面 PAC，平面 $A_1BC_1\cap$ 平面 $PAC=MN$，所以 $AC\parallel MN$.

因为 $MN\not\subset$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $MN\parallel$ 平面 $ABCD$.

体系构建

直线与平面平行：

- 定义
- 判定定理 → 应用
- 性质定理 → 应用

课后素养评价（二十九）

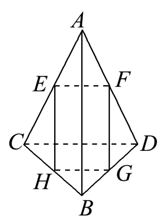
基础性·能力运用

1. 若平面 α 截三棱锥所得截面为平行四边形，则该三棱锥与平面 α 平行的棱有（　　）

A.0 条　　B.1 条

C.2 条　　D.1 条或 2 条

C　**解析**：如图所示，四边形 $EFGH$ 为平行四边形，则 $EF\parallel GH$．因为 $EF\not\subset$ 平面 BCD，$GH\subset$ 平面 BCD，所以 $EF\parallel$ 平面 BCD．因为 $EF\subset$ 平面 ACD，平面 $BCD\cap$ 平面 $ACD=CD$，所以 $EF\parallel CD$．因为 $EF\subset$ 平面 $EFGH$，$CD\not\subset$ 平面 $EFGH$，所以 $CD\parallel$ 平面 $EFGH$．同理可得 $AB\parallel$ 平面 $EFGH$．故选 C.



2. 已知直线 $a\parallel$ 平面 α，直线 $b\subset$ 平面 α，则（　　）

A.$a\parallel b$　　B.a 与 b 异面

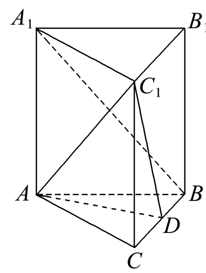
C.a 与 b 相交　　D.a 与 b 无公共点

D　**解析**：直线 $a\parallel$ 平面 α，则 a 与平面 α 没有公共点．又 $b\subset$ 平面 α，所以 a 与 b 无公共点．故选 D.

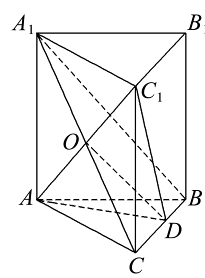
3. 在空间四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 AB 和 BC 上的点．若 $AE:EB=CF:FB=1:3$，则直线 AC 与平面 DEF 的位置关系是________.

平行　**解析**：因为 $AE:EB=CF:FB=1:3$，所以 $EF\parallel AC$．又因为 $AC\not\subset$ 平面 DEF，$EF\subset$ 平面 DEF，所以 $AC\parallel$ 平面 DEF.

4. 如图，在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，D 为 BC 的中点，连接 AD，DC_1，A_1B，AC_1，求证：$A_1B\parallel$ 平面 ADC_1.



证明：如图，连接 A_1C，设 $A_1C\cap AC_1=O$，再连接 OD.



由题意知，四边形 A_1ACC_1 是平行四边形，所以 O 是 A_1C 的中点．又 D 是 BC 的中点，因此 OD 是 $\triangle A_1CB$ 的中位线，即 $OD\parallel A_1B$．又 $A_1B\not\subset$ 平面 ADC_1，$OD\subset$ 平面 ADC_1，所以 $A_1B\parallel$ 平面 ADC_1.

综合性·创新提升

1. 如图 1，在梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$CD=2AB$，E，F 分别为 AD，CD 的中点，以 AF 为折痕把 $\triangle ADF$ 折起，使点 D 不落在平面 $ABCF$ 内（如图 2），那么在以下 3 个结论中，正确结论的个数是（　　）

①$AF\parallel$ 平面 BCD；②$BE\parallel$ 平面 CDF；③$CD\parallel$ 平面 BEF.

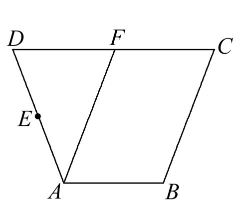


图 1

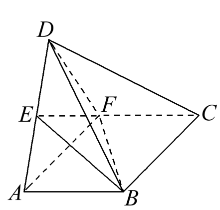


图 2

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

C　**解析**：如图所示，对于①，由题意得 $AB\parallel CF$，$AB=CF$，所以四边形 $ABCF$ 是平行四边形，

所以 $AF\parallel BC$，

因为 $AF\not\subset$ 平面 BCD，$BC\subset$ 平面 BCD，

所以 $AF\parallel$ 平面 BCD，故①正确；

对于②，取 DF 中点 G，连接 EG，CG，

因为 E 是 AD 中点，$AF\parallel BC$，$AF=BC$，

所以 $EG=\dfrac{1}{2}BC$，$EG\parallel BC$，

所以四边形 $BCGE$ 为梯形，

所以直线 BE 与直线 CG 相交，

所以 BE 与平面 CDF 相交，故②错误；

对于③，连接 AC，交 BF 于点 O，连接 OE，

因为四边形 $ABCF$ 是平行四边形，

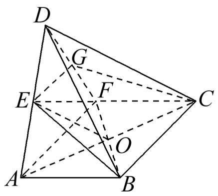
所以 O 是 AC 中点，

所以 $OE /\!/ CD$，

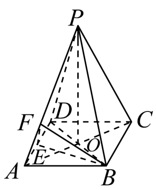
因为 $OE\subset$平面 BEF，$CD\not\subset$平面 BEF，

所以 $CD /\!/$ 平面 BEF，故③正确.

故选 C.



2. 如图，已知四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面是平行四边形，AC 交 BD 于点 O，E 为 AD 的中点，F 在 PA 上，$AP=\lambda AF$，$PC /\!/$ 平面 BEF，则 λ 的值为　(　　)

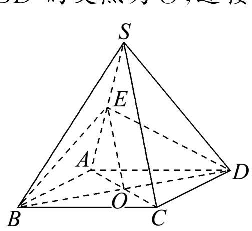


A.1　　B.$\frac{3}{2}$　　C.2　　D.3

D　**解析**：设 AO 交 BE 于点 G，连接 FG(图略).因为 O，E 分别是 BD，AD 的中点，所以 $\frac{AG}{AO}=\frac{2}{3}$，$\frac{AG}{AC}=\frac{1}{3}$.因为 $PC /\!/$ 平面 BEF，平面 $BEF\cap$平面 $PAC=GF$，所以 $GF /\!/ PC$，所以 $\frac{AF}{AP}=\frac{AG}{AC}=\frac{1}{3}$，即 $\lambda=3$.故选 D.

3. 若在四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，E 是 SA 上的一点，当点 E 满足条件________时，$SC /\!/$ 平面 EBD.

E 为 SA 的中点　**解析**：当 E 为 SA 的中点时，连接 AC，设 AC 与 BD 的交点为 O，连接 EO.



因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

所以 O 是 AC 的中点.

又 E 是 SA 的中点，

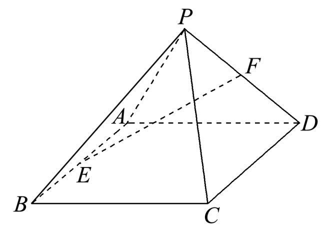
所以 OE 是$\triangle SAC$ 的中位线.

所以 $OE /\!/ SC$.

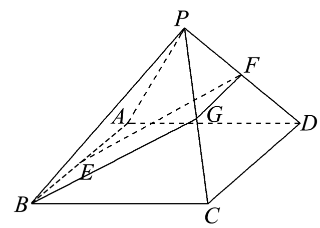
因为 $SC\not\subset$平面 EBD，$OE\subset$平面 EBD，

所以 $SC /\!/$ 平面 EBD.

4. 如图，已知四棱锥 $P\text{-}ABCD$，底面 $ABCD$ 为正方形，E，F 分别为 AB，PD 的中点.求证：$EF /\!/$ 平面 PBC.



证明：如图，取 PC 的中点 G，连接 FG，BG.



因为 F，G 分别为 PD，PC 的中点，

所以 $FG /\!/ CD$，且 $FG=\frac{1}{2}DC$.

因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $AB \underline{/\!/} CD$.

又因为 E 为 AB 的中点，

所以 $BE \underline{/\!/} \frac{1}{2}DC$，

所以 $BE /\!/ FG$，且 $BE=FG$，

所以四边形 $BEFG$ 为平行四边形，

所以 $EF /\!/ BG$.

因为 $EF\not\subset$平面 PBC，$BG\subset$平面 PBC，

所以 $EF /\!/$ 平面 PBC.

8.5.3 平面与平面平行

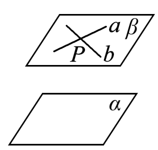
学习任务目标

1. 理解并掌握平面与平面平行的判定定理,明确定理中“相交”两字的重要性.
2. 能利用平面与平面平行的判定定理证明面面平行.(逻辑推理)
3. 理解并能证明平面与平面平行的性质定理.
4. 能利用平面与平面平行的性质定理解决有关的问题.

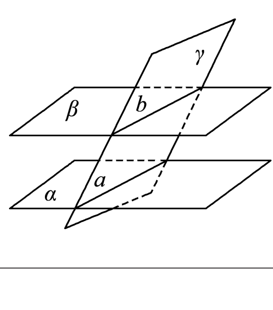
问题式预习

知识清单

1. 平面与平面平行的判定定理

文字语言	如果一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行,那么这两个平面平行
图形语言	
符号语言	$a\subset\beta,b\subset\beta,a\cap b=P,a\parallel\alpha,b\parallel\alpha\Rightarrow\beta\parallel\alpha$

2. 平面与平面平行的性质定理

文字语言	两个平面平行,如果另一个平面与这两个平面相交,那么两条交线平行
图形语言	
符号语言	$\alpha\parallel\beta,\alpha\cap\gamma=a,\beta\cap\gamma=b\Rightarrow a\parallel b$

概念辨析

1. 判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)若一个平面内有无数条直线都与另一个平面平行,则这两个平面平行. (×)

(2)若一个平面内任何一条直线都平行于另一个平面,则这两个平面平行. (√)

(3)若直线 $a\subset$平面 α,平面 $\alpha\parallel$平面 β,则 $a\parallel$平面 β. (√)

(4)若平面 $\alpha\parallel$平面 β,$l\subset$平面 β,$m\subset$平面 α,则 $l\parallel m$. (×)

2. 已知直线 a,b,平面 α,β,若 $a\parallel\alpha,b\parallel\beta,\alpha\parallel\beta$,则 a 与 b 的位置关系是 ( )

A. 平行　　B. 异面

C. 相交　　D. 平行或异面或相交

D　**解析**:a 与 b 的关系是平行、相交或异面.

3. 请思考并回答问题:

(1)平面平行有传递性吗?

提示:有.α,β,γ 为三个不重合的平面,若 $\alpha\parallel\beta,\beta\parallel\gamma$,则 $\alpha\parallel\gamma$.

(2)两个平面平行,其中一个平面内的直线一定平行于另一个平面吗?

提示:一定平行.因为两个平面平行,所以两个平面无公共点,则其中一个平面内的直线必和另一个平面无公共点,因而它们平行.

任务型课堂

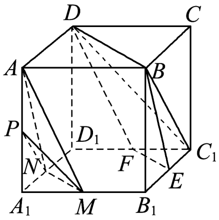
学习任务一　平面与平面平行的判定定理的应用

例1　如图,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,M,E,F,N 分别是 $A_1B_1,B_1C_1,C_1D_1,D_1A_1$ 的中点.

(1)求证:E,F,B,D 四点共面;

(2)求证:平面 $MAN\parallel$平面 $EFDB$;

(3)设 P 是棱 AA_1 的中点,求证:平面 $PMN\parallel$平面 C_1BD.



证明:(1)连接 B_1D_1(图略).

因为 E,F 分别是 B_1C_1,C_1D_1 的中点,

所以 $EF/\!/B_1D_1$.

因为 $BD/\!/B_1D_1$,

所以 $BD/\!/EF$.

所以 E,F,B,D 四点共面.

(2)由题意知 $MN/\!/B_1D_1,B_1D_1/\!/BD$,

所以 $MN/\!/BD$.

因为 $MN\not\subset$平面 $EFDB$,$BD\subset$平面 $EFDB$,

所以 $MN/\!/$平面 $EFDB$.

连接 MF(图略).

因为 M,F 分别是 A_1B_1,C_1D_1 的中点,

所以 $MF \perp\!\!\!\!= AD$,

所以四边形 $ADFM$ 是平行四边形,所以 $AM/\!/DF$.

因为 $AM\not\subset$平面 $EFDB$,$DF\subset$平面 $EFDB$,

所以 $AM/\!/$平面 $EFDB$.又 $AM\cap MN=M$,

所以平面 $MAN/\!/$平面 $EFDB$.

(3)连接 AB_1(图略).

因为 P,M 分别是 AA_1,A_1B_1 的中点,

所以 $PM/\!/AB_1$.

又 $AB_1/\!/C_1D$,所以 $PM/\!/C_1D$.

又 $PM\not\subset$平面 C_1BD,$C_1D\subset$平面 C_1BD,

所以 $PM/\!/$平面 C_1BD.

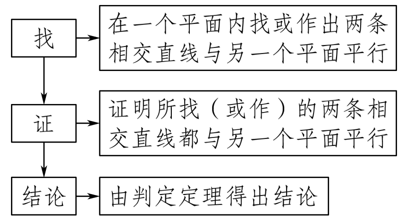
同理可证,$MN/\!/$平面 C_1BD.

又 $PM\cap MN=M$,

所以平面 $PMN/\!/$平面 C_1BD.

反思提炼

证明两个平面平行,可以用定义,也可以用判定定理.但用定义证明时,需说明两个平面没有公共点,这一点不容易做到(可用反证法),所以通常用判定定理证明两个平面平行,其步骤如下:

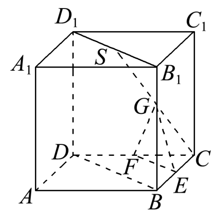


探究训练

如图,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,S 是 B_1D_1 的中点,E,F,G 分别是 BC,DC 和 SC 的中点,求证:

(1)$EG/\!/$平面 BDD_1B_1;

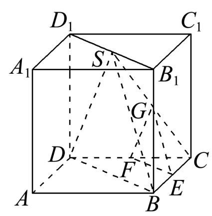
(2)平面 $EFG/\!/$平面 BDD_1B_1.



证明:(1)如图,连接 SB.

因为 E,G 分别是 BC,SC 的中点,所以 $EG/\!/SB$.

又因为 $SB\subset$平面 BDD_1B_1,$EG\not\subset$平面 BDD_1B_1,所以 $EG/\!/$平面 BDD_1B_1.



(2)连接 SD.

因为 F,G 分别是 DC,SC 的中点,所以 $FG/\!/SD$.

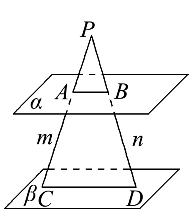
又因为 $SD\subset$平面 BDD_1B_1,$FG\not\subset$平面 BDD_1B_1,所以 $FG/\!/$平面 BDD_1B_1.

又 $EG/\!/$平面 BDD_1B_1,且 $EG\subset$平面 EFG,$FG\subset$平面 EFG,$EG\cap FG=G$,

所以平面 $EFG/\!/$平面 BDD_1B_1.

学习任务二　平面与平面平行的性质定理的应用

例 2　如图,已知平面 $\alpha/\!/\beta$,$P\notin\alpha$ 且 $P\notin\beta$,过点 P 的直线 m 与 α,β 分别交于 A,C,过点 P 的直线 n 与 α,β 分别交于 B,D,且 $PA=6$,$AC=9$,$PD=8$,求 BD 的长.



解:因为 $AC\cap BD=P$,

所以经过直线 AC 与 BD 可确定平面 PCD.

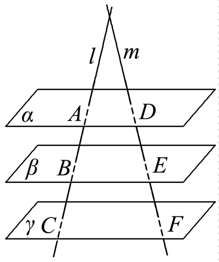
因为 $\alpha/\!/\beta$,$\alpha\cap$平面 $PCD=AB$,$\beta\cap$平面 $PCD=CD$,所以 $AB/\!/CD$.

所以 $\dfrac{PA}{AC}=\dfrac{PB}{BD}$,即 $\dfrac{6}{9}=\dfrac{8-BD}{BD}$,

所以 $BD=\dfrac{24}{5}$.

［一题多思］

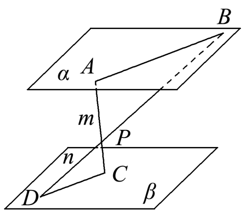
思考1.将本例改为:如图,已知平面 $\alpha /\!/ \beta /\!/ \gamma$,两条相交直线 l,m 分别与平面 α,β,γ 相交于点 A,B,C 与 D,E,F.已知 $AB=6$,$\dfrac{DE}{DF}=\dfrac{2}{5}$,则 $AC=$________.



15 **解析**:由题可知 $\dfrac{DE}{DF}=\dfrac{AB}{AC}$,

所以 $AC=\dfrac{DF}{DE}\cdot AB=\dfrac{5}{2}\times 6=15$.

思考2.将本例改为:点 P 在平面 α,β 之间(如图),其他条件不变,试求 BD 的长.

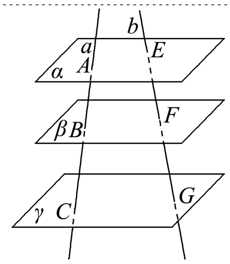


解:根据本例的证明,可证 $AB /\!/ CD$.

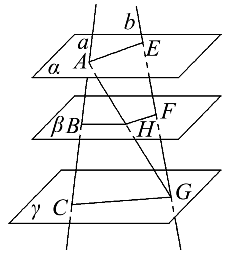
所以 $\dfrac{PA}{PC}=\dfrac{PB}{PD}$,即 $\dfrac{6}{3}=\dfrac{BD-8}{8}$,所以 $BD=24$.

思考3.将本例改为:如图,已知三个平面 α,β,γ 满足 $\alpha /\!/ \beta /\!/ \gamma$,直线 a 与这三个平面依次交于点 A,B,C,直线 b 与这三个平面依次交于点 E,F,G.

求证:$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{EF}{FG}$.



证明:如图,连接 AG 交平面 β 于点 H,连接 BH,FH,AE,CG.



因为 $\beta /\!/ \gamma$,平面 $ACG\cap\beta=BH$,平面 $ACG\cap\gamma=CG$,所以 $BH /\!/ CG$.

同理 $AE /\!/ HF$,所以 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AH}{HG}=\dfrac{EF}{FG}$.

反思提炼

应用平面与平面平行的性质定理解题的基本步骤

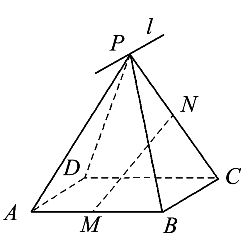
定条件	审题，确定有平面与平面平行
找平面	找(或作)第三个平面与已知两个平面相交
定交线	确定交线的位置
得平行	得两条交线相互平行

学习任务 三 平面与平面平行的综合应用

例3 如图,已知 P 是▱$ABCD$ 所在平面外一点,M,N 分别是 AB,PC 的中点,平面 $PBC\cap$平面 $PAD=l$.

(1)求证:$l /\!/ BC$.

(2)判断直线 MN 与平面 PAD 是否平行?试证明你的结论.

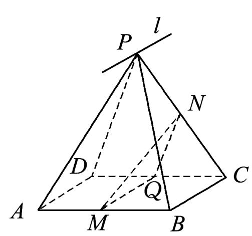


(1)**证明**:因为 $BC /\!/ AD$,$BC\not\subset$平面 PAD,$AD\subset$平面 PAD,所以 $BC /\!/$平面 PAD.

又因为 $BC\subset$平面 PBC,平面 $PBC\cap$平面 $PAD=l$,所以 $l /\!/ BC$.

(2)**解**:平行.证明如下:

如图,取 DC 的中点 Q,连接 MQ,NQ.



因为 N 是 PC 的中点,所以 $QN \underline{/\!/} \dfrac{1}{2}PD$.

因为 $QN\not\subset$平面 PAD,$PD\subset$平面 PAD,所以 $QN /\!/$平面 PAD.

同理可得 $MQ /\!/$平面 PAD,又因为 $MQ\cap QN=Q$,所以平面 $PAD /\!/$平面 NMQ.

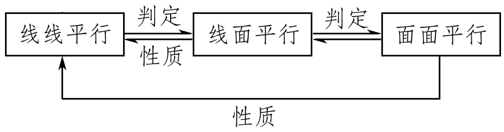
因为 $MN\subset$平面 NMQ,

所以 $MN /\!/$平面 PAD.

反思提炼

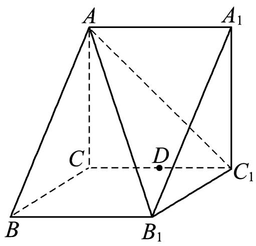
常见的平行关系有线线平行、线面平行和面面平行,

这三种平行关系不是孤立存在的，而是可以相互转化的，它们的联系如下：



探究训练

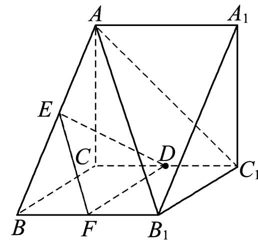
如图，在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，平面 ABC // 平面 $A_1B_1C_1$.若 D 是棱 CC_1 的中点，在棱 AB 上是否存在一点 E，使 DE // 平面 AB_1C_1？给出你的结论并证明.



解：当 E 为棱 AB 的中点时，DE // 平面 AB_1C_1.

证明如下：

如图所示，取 BB_1 的中点 F，连接 EF，FD，DE.



因为 D，E，F 分别为 CC_1，AB，BB_1 的中点，

所以 EF // AB_1.

因为 $AB_1 \subset$ 平面 AB_1C_1，$EF \not\subset$ 平面 AB_1C_1，

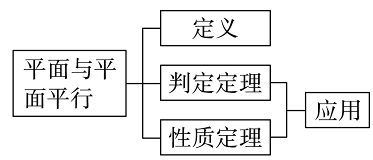
所以 EF // 平面 AB_1C_1.

同理可证 FD // 平面 AB_1C_1.

因为 $EF \cap FD = F$，所以平面 EFD // 平面 AB_1C_1.

因为 $DE \subset$ 平面 EFD，所以 DE // 平面 AB_1C_1.

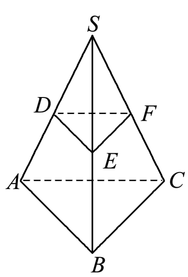
体系构建



课后素养评价(三十)

基础性·能力运用

1.(多选题)如图，D，E，F 分别为三棱锥 $S\text{-}ABC$ 的棱 SA，SB，SC 的中点，则　　(　　)



A.DE // 平面 ABC

B.EF // 平面 ABC

C.平面 DEF // 平面 ABC

D.SA // BC

ABC　**解析**：由线面平行、面面平行的判定定理可知，A，B，C 都正确，显然 SA 与 BC 为异面直线，不平行.故选 ABC.

2.在正方体 $EFGH\text{-}E_1F_1G_1H_1$ 中，下列四对截面中，互相平行的一对是　　(　　)

A.平面 E_1FG_1 与平面 EGH_1

B.平面 FHG_1 与平面 F_1H_1G

C.平面 F_1H_1H 与平面 FHE_1

D.平面 E_1HG_1 与平面 EH_1G

A　**解析**：在正方体 $EFGH\text{-}E_1F_1G_1H_1$ 中，E_1G_1 // EG，$E_1G_1 \not\subset$ 平面 EGH_1，$EG \subset$ 平面 EGH_1，所以 E_1G_1 // 平面 EGH_1.因为 G_1F // EH_1，$G_1F \not\subset$ 平面 EGH_1，$EH_1 \subset$ 平面 EGH_1，所以 G_1F // 平面 EGH_1.又因为 $E_1G_1 \cap G_1F = G_1$，且 $E_1G_1 \subset$ 平面 E_1FG_1，$G_1F \subset$ 平面 E_1FG_1，所以由面面平行的判定定理可知，平面 E_1FG_1 // 平面 EGH_1，故 A 符合题意，选项 B，C，D 中的平面都是相交的，不符合题意.故选 A.

3.平面 α 与平面 β 平行的条件可以是　　(　　)

A.α 内有无穷多条直线都与 β 平行

B.直线 a // α，a // β，且直线 a 既不在 α 内也不在 β 内

C.直线 $a \subset \alpha$，直线 $b \subset \beta$，且 b // α，a // β

D.α 内的任何直线都与 β 平行

D　**解析**：A 项中，当这无穷多条直线互相平行时，不能作为 α // β 的条件，B，C 中，两平面相交时，也存在这样的直线 a，b，D 项正确.故选 D.

4.下列命题中，错误的是　　(　　)

A.平行于同一直线的两个平面互相平行

B.平行于同一平面的两个平面互相平行

C.若一条直线与两个平行平面中的一个相交，则这条直线与另一个平面也相交

D.夹在两平行平面间的平行线段相等

A **解析**：平行于同一直线的两平面可能平行，也可能相交，故 A 不正确.故选 A.

5.在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M 是棱 CD 上的动点，则直线 MC_1 与平面 AA_1B_1B 的位置关系是 （　　）

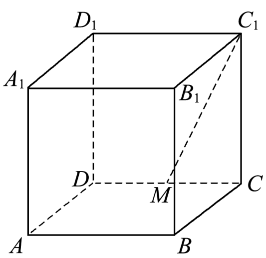
A.相交

B.平行

C.异面

D.相交或平行

B **解析**：如图，$MC_1\subset$平面 DD_1C_1C，而平面 $AA_1B_1B\parallel$平面 DD_1C_1C，故 $MC_1\parallel$平面 AA_1B_1B.故选 B.



6.a,b,c 为三条不重合的直线，α,β,γ 为三个不重合的平面，现给出六个命题：

①$\left.\begin{matrix}a\parallel c\\ b\parallel c\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\parallel b$；②$\left.\begin{matrix}a\parallel \gamma\\ b\parallel \gamma\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\parallel b$；

③$\left.\begin{matrix}\alpha\parallel c\\ \beta\parallel c\end{matrix}\right\}\Rightarrow \alpha\parallel \beta$；④$\left.\begin{matrix}\alpha\parallel \gamma\\ \beta\parallel \gamma\end{matrix}\right\}\Rightarrow \alpha\parallel \beta$；

⑤$\left.\begin{matrix}\alpha\parallel c\\ a\parallel c\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\parallel \alpha$；⑥$\left.\begin{matrix}a\parallel \gamma\\ \alpha\parallel \gamma\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\parallel \alpha$.

其中正确的是________.（填序号）

①④ **解析**：①是基本事实 4，正确；

②中 a,b 还可能异面或相交；

③中 α,β 还可能相交；

④是平面平行的传递性，正确；

⑤⑥忽略了 $a\subset\alpha$ 的情形.

7.若 $\alpha\parallel\beta$，$a\subset\alpha$，给出下列四个命题：

①a 与 β 内所有直线平行；

②a 与 β 内的无数条直线平行；

③a 与 β 有且仅有一个公共点；

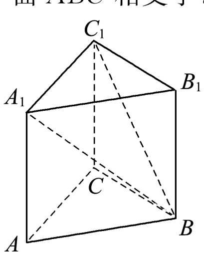
④a 与 β 无公共点.

其中正确的是________.（填序号）

②④ **解析**：由于平面 $\alpha\parallel\beta$，且 $a\subset\alpha$，则 $a\parallel$平面 β.由线面平行的性质，得到 a 与平面 β 内的无数条直线平行，故①错误，②正确.由于 $a\parallel$平面 β，则 a 与平面 β 无公共点，故③错误，④正确.

综合性·创新提升

1.（多选题）如图，在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，过 A_1，B，C_1 的平面与平面 ABC 相交于 l，则 （AB）



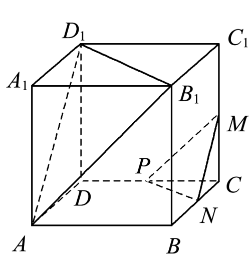
A.$l\parallel AC$

B.$l\parallel$平面 $A_1C_1B_1$

C.l 与 A_1B_1 共面

D.l 与 B_1C_1 共面

2.如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M,N,P 分别为 CC_1,BC,DC 的中点，则下列命题错误的是 （　　）



A.$MN\parallel AD_1$

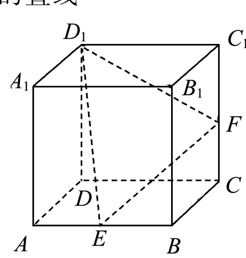
B.PM 与 AA_1 是异面直线

C.平面 $AB_1D_1\parallel$平面 MNP

D.$MN\parallel$平面 $A_1B_1C_1D_1$

D **解析**：因为直线 MN 与直线 B_1C_1 相交，所以 MN 与平面$A_1B_1C_1D_1$相交，故 D 错误.故选 D.

3.如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别为棱 AB,CC_1 的中点，在平面 ADD_1A_1 内且与平面 D_1EF 平行的直线 （D）



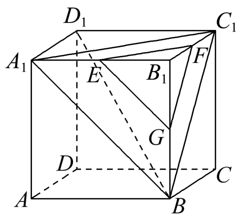
A.不存在　　B.有 1 条

C.有 2 条　　D.有无数条

4.如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E,F,G 分别是 A_1B_1,B_1C_1,BB_1 的中点，给出下列 5 个推断：

①FG∥平面 AA_1D_1D；
②EF∥平面 BC_1D_1；
③FG∥平面 BC_1D_1；
④平面 EFG∥平面 BC_1D_1；
⑤平面 EFG∥平面 A_1C_1B.

其中正确推断的序号是________.



①③⑤　**解析**：对于①，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，因为平面 BB_1C_1C ∥ 平面 AA_1D_1D，且 $FG\subset$平面 BB_1C_1C，所以 FG∥平面 AA_1D_1D，故①正确；

对于②，因为 E，F 是 A_1B_1，B_1C_1 的中点，所以 EF∥A_1C_1，因为 A_1C_1 与平面 BC_1D_1 相交，故 EF 与平面 BC_1D_1 不平行，故②错误；

对于③，因为 F，G 是 B_1C_1，BB_1 的中点，所以 FG∥BC_1，因为 $FG\not\subset$平面 BC_1D_1，$BC_1\subset$平面 BC_1D_1，所以 FG∥平面 BC_1D_1，故③正确；

对于④，由②得 EF 与平面 BC_1D_1 不平行，则平面 EFG 与平面 BC_1D_1 不平行，故④错误；

对于⑤，由②得 EF∥A_1C_1，

因为 $EF\not\subset$平面 A_1C_1B，$A_1C_1\subset$平面 A_1C_1B，

所以 EF∥平面 A_1C_1B，

由③得 FG∥BC_1，

因为 $FG\not\subset$平面 A_1C_1B，$BC_1\subset$平面 A_1C_1B，

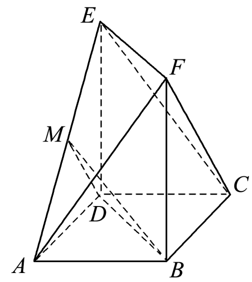
所以 FG∥平面 A_1C_1B，

因为 $EF\cap FG=F$，

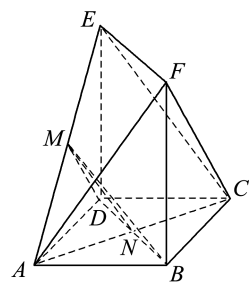
所以平面 EFG∥平面 A_1C_1B，故⑤正确.

故答案为①③⑤.

5. 如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是正方形，$AB=2$，$DE=BF=4$，BF∥DE，M 为棱 AE 的中点.求证：平面 BMD∥平面 EFC.



证明：如图，连接 AC 交 BD 于 N，连接 MN.在正方形 $ABCD$ 中，易知 N 为 AC 的中点.又 M 为 AE 中点，则 MN∥EC.



因为 $MN\not\subset$平面 EFC，$EC\subset$平面 EFC，

所以 MN∥平面 EFC.

因为 BF∥DE，$BF=DE=4$，

所以四边形 $BDEF$ 为平行四边形，所以 BD∥EF.

因为 $BD\not\subset$平面 EFC，$EF\subset$平面 EFC，

所以 BD∥平面 EFC.

又因为 $MN\cap BD=N$，MN，$BD\subset$平面 BMD，所以平面 BMD∥平面 EFC.

8.6 空间直线、平面的垂直

8.6.1 直线与直线垂直

学习任务目标

1.理解异面直线所成的角的概念,会求两条异面直线所成的角,能用异面直线所成的角刻画两条异面直线的位置关系.

2.知道空间两条直线所成角的取值范围是$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,能通过两条直线所成的角判定两条直线垂直.(直观想象)

问题式预习

知识清单

异面直线所成的角

(1)定义:已知两条异面直线a,b,经过空间任一点O分别作直线$a'\parallel a$,$b'\parallel b$,我们把直线a'与b'所成的角叫做异面直线a与b所成的角(或夹角).

(2)如果两条异面直线所成的角是直角,那么我们就说这两条异面直线互相垂直.直线a与直线b垂直,记作$a\perp b$.

(3)当两条直线a,b相互平行时,我们规定它们所成的角为$0°$.所以空间两条直线所成角α的取值范围是$0°\leqslant\alpha\leqslant 90°$.

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)异面直线所成的角的大小与平移两直线所过公共点O的位置有关,即点O位置不同时,这一角的大小也不同. (×)

(2)异面直线a与b所成的角可以是$0°$. (×)

(3)如果两条平行直线中的一条与某一条直线垂直,那么另一条直线也与这条直线垂直. (√)

2.若空间中三条直线a,b,c满足$a\perp b$,$b\perp c$,则直线a与c的位置关系为 (D)

A.平行　　B.相交

C.异面　　D.不确定

3.请思考并回答问题:

(1)若两条直线垂直,则它们一定相交吗?

提示:不一定,当两条异面直线所成的角为$90°$时,两条直线异面垂直,不一定相交.

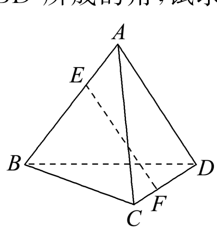
(2)两条异面直线所成的角α的取值范围是什么?

提示:$0°<\alpha\leqslant 90°$.

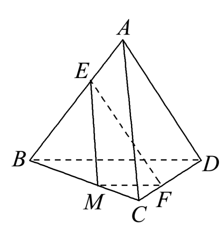
任务型课堂

学习任务一 异面直线所成的角

例1 如图,在三棱锥A-BCD中,$AC\perp BD$,E在棱AB上,F在棱CD上,并使$AE:EB=CF:FD=m$($m>0$),设α为异面直线EF和AC所成的角,β为异面直线EF和BD所成的角,试求$\alpha+\beta$的值.



解:如图,过点F作$MF\parallel BD$,交BC于点M,连接ME.



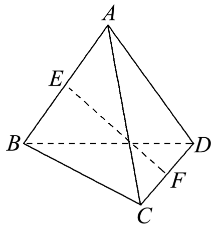
因为$CF:FD=m$,所以$CM:MB=m$.

又因为$AE:EB=m$,所以$CM:MB=AE:EB$,所以$EM\parallel AC$,所以$\alpha=\angle MEF$,$\beta=\angle MFE$.

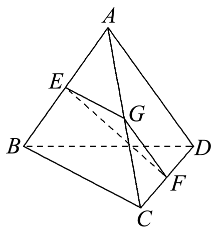
因为$AC\perp BD$,所以$\angle EMF=90°$,所以$\alpha+\beta=90°$.

[一题多思]

思考. 将本例变为:如图所示,点 A 是平面 BCD 外一点,$AD=BC=2$,E,F 分别是 AB,CD 的中点,且 $EF=\sqrt{2}$,求异面直线 AD 与 BC 所成的角.



解:如图,设 G 是 AC 的中点,连接 EG,FG.



因为 E,F 分别是 AB,CD 的中点,

所以 $EG /\!/ BC$,且 $EG=\frac{1}{2}BC=1$,$FG /\!/ AD$,且 $FG=\frac{1}{2}AD=1$.又 $EF=\sqrt{2}$,所以 $EG^2+FG^2=EF^2$.由勾股定理的逆定理可得$\angle EGF=90°$.

所以异面直线 AD 与 BC 所成的角为 $90°$.

反思提炼

作异面直线所成的角,可通过多种方法平移完成,主要有三种方法:

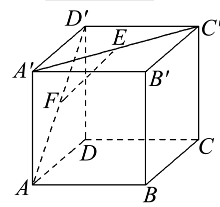
①直接平移法(可利用图中已有的平行线);

②中位线平移法;

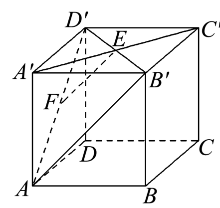
③补形平移法(在已知图形中,补作一个相同的几何体,以便找到平行线).

探究训练

如图,在正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$中,E,F 分别为正方形 $A'B'C'D'$ 与正方形 $AA'D'D$ 的中心,则 EF 与 CD 所成角的度数是________.

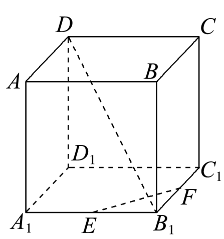


45°　**解析:**如图,连接 $B'D'$,AB',则 E 为 $B'D'$的中点,$EF /\!/ AB'$.又 $CD /\!/ AB$,所以$\angle B'AB$ 为异面直线 EF 与 CD 所成的角,即$\angle B'AB=45°$.



学习任务二　直线与直线垂直的判定

例 2　如图,在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F 分别是 A_1B_1,B_1C_1 的中点,求证:$DB_1\perp EF$.



证明:(方法一)如图 1,连接 A_1C_1,B_1D_1,并设它们相交于点 O,取 DD_1 的中点 G,连接 OG,A_1G,GC_1,则 $OG /\!/ B_1D$,$EF /\!/ A_1C_1$,

所以$\angle GOA_1$ 为异面直线 DB_1 与 EF 所成的角或其补角.

因为 $GA_1=GC_1$,O 为 A_1C_1 的中点,

所以 $GO\perp A_1C_1$.

所以$\angle GOA_1=90°$,所以 $DB_1\perp EF$.

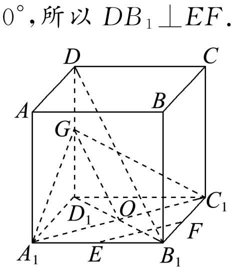


图 1

(方法二)如图 2,连接 A_1D,取 A_1D 的中点 H,连接 HE,则 $HE /\!/ DB_1$,且 $HE=\frac{1}{2}DB_1$.于是$\angle HEF$ 为异面直线 DB_1 与 EF 所成的角或其补角.

连接 HF,设 $AA_1=1$,则 $EF=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$HE=\frac{\sqrt{3}}{2}$,取 A_1D_1 的中点 I,连接 IF,IH,则 $HI\perp IF$,所以 $HF^2=HI^2+IF^2=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$,所以 $HF^2=EF^2+HE^2$,所以$\angle HEF=90°$,所以 $DB_1\perp EF$.

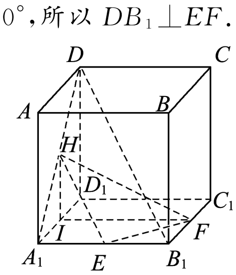


图 2

(方法三)如图 3,在原正方体的右侧补上一个大小相同的正方体,连接 B_1Q,则 $B_1Q /\!/ EF$.

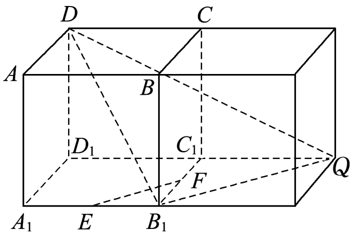


图 3

于是$\angle DB_1Q$为异面直线DB_1与EF所成的角或其补角.

通过计算，不难得到$B_1D^2+B_1Q^2=DQ^2$，

所以$\angle DB_1Q=90°$，所以$DB_1\perp EF$.

反思提炼

证明线线垂直的常用方法

(1)利用勾股定理的逆定理.

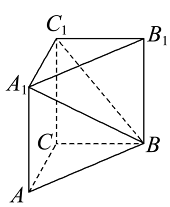
(2)利用等腰三角形底边上的中线就是底边上的高线.

(3)利用平行转化，即$a/\!/b$，$b\perp c$，则$a\perp c$.

探究训练

1. 在三棱柱$ABC\text{-}A_1B_1C_1$中，三个侧面都是矩形，且$AC\perp BC$，求证：$AC\perp BC_1$.

证明：如图，连接A_1B.设$A_1C_1=a$，$B_1C_1=b$，$AA_1=h$，



由题意得$\angle BB_1C_1=\angle A_1AB=90°$，

所以$BC_1^2=b^2+h^2$，$AB^2=a^2+b^2$，

$A_1B^2=a^2+b^2+h^2$，

所以$A_1B^2=A_1C_1^2+BC_1^2$，所以$\angle A_1C_1B=90°$.

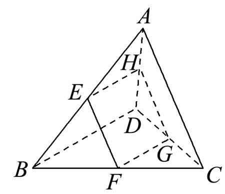
所以$A_1C_1\perp BC_1$.

又因为$AC/\!/A_1C_1$，所以$\angle A_1C_1B$就是异面直线AC与BC_1所成的角或其补角，所以$AC\perp BC_1$.

2. 如图，已知E，F，G，H分别是空间四边形$ABCD$的边AB，BC，CD，DA的中点.

(1)求证：E，F，G，H四点共面；

(2)若四边形$EFGH$是矩形，求证：$AC\perp BD$.



证明：(1)在$\triangle ABD$中，因为E，H分别是AB，AD的中点，

所以$EH/\!/BD$.同理$FG/\!/BD$，则$EH/\!/FG$.

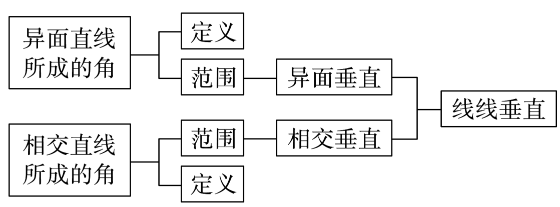
故E，F，G，H四点共面.

(2)由(1)知$EH/\!/BD$，同理$AC/\!/GH$.

又因为四边形$EFGH$是矩形，所以$EH\perp GH$.

所以$AC\perp BD$.

体系构建



课后素养评价(三十一)

基础性·能力运用

1. 空间四边形的两条对角线相互垂直，顺次连接四边中点所得四边形一定是 (　　)

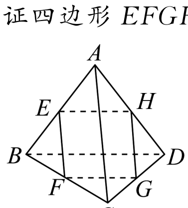
A.空间四边形

B.矩形

C.菱形

D.正方形

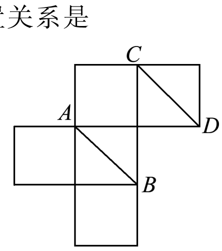
B　**解析**：如图，易证四边形$EFGH$为平行四边形.



因为$EF/\!/AC$，$FG/\!/BD$，

所以$\angle EFG$或其补角为AC与BD所成的角.而AC与BD所成的角为$90°$，所以$\angle EFG=90°$，故四边形$EFGH$为矩形.故选B.

2. 如图，将无盖正方体纸盒展开，直线AB，CD在原正方体中的位置关系是 (　　)



A.平行

B.相交且垂直

C.异面

D.相交且成60°角

D　**解析**:将平面图形还原为无盖正方体,可知AB与CD相交且成60°.故选D.

3.已知在正四棱台$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中,$AB=3A_1B_1=3$.若异面直线AA_1与BC所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{6}$,则正四棱台$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$的体积为________.

$\frac{26}{3}$　**解析**:如图,在正四棱台$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中,$BC/\!/AD$,

所以$\angle A_1AD$为异面直线AA_1与BC所成的角.

又$AB=3A_1B_1=3$,所以$AD=3$,$A_1D_1=1$,

且$\cos\angle A_1AD=\dfrac{\frac{3-1}{2}}{AA_1}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$,所以$AA_1=\sqrt{6}$.

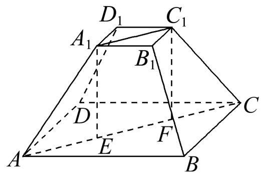
连接A_1C_1,AC,过点A_1作$A_1E\perp AC$于点E,过点C_1作$C_1F\perp AC$于点F,

由题意可得$AC=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$,$A_1C_1=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,

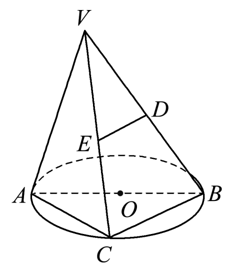
所以$AE=CF=\dfrac{AC-A_1C_1}{2}=\sqrt{2}$,则$A_1E=\sqrt{AA_1^2-AE^2}=\sqrt{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2}=2$,

即正四棱台$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$的高$h=2$,

所以棱台的体积$V=\frac{1}{3}\times(3^2+1^2+\sqrt{3^2\times1^2})\times2=\frac{26}{3}$.



4.如图所示,AB是圆O的直径,点C是弧AB的中点,V是圆O所在平面外一点,D,E分别是VB,VC的中点,则异面直线DE与AB所成的角为____________.



45°　**解析**:因为D,E分别是VB,VC的中点,所以$BC/\!/DE$.因此$\angle ABC$是异面直线DE与AB所成的角.又因为AB是圆O的直径,点C是$\overset{\frown}{AB}$的中点,所以$\triangle ABC$是以$\angle ACB$为直角的等腰直角三角形,于是$\angle ABC=45°$,故异面直线DE与AB所成的角为45°.

综合性·创新提升

1.若空间中四条两两不同的直线l_1,l_2,l_3,l_4,满足$l_1\perp l_2$,$l_2\perp l_3$,$l_3\perp l_4$,则下列结论一定正确的是 (D)

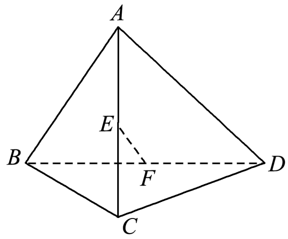
A.$l_1\perp l_4$

B.$l_1/\!/l_4$

C.l_1与l_4既不垂直也不平行

D.l_1与l_4的位置关系不确定

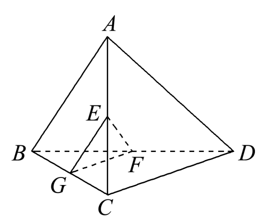
2.如图,在四面体$A\text{-}BCD$中,E,F分别是AC,BD的中点.若$AB=2$,$CD=4$,EF与CD所成角的度数为30°,则EF与AB所成角的度数为　(　　)



A.90°　　B.45°

C.60°　　D.30°

A　**解析**:如图,取BC的中点G,连接EG,FG.



因为E,F分别是AC,BD的中点,

则有$EG/\!/AB$,$FG/\!/CD$,

则EF与AB所成角为$\angle FEG$,EF与CD所成角为$\angle EFG$.

由$AB=2$,$CD=4$,EF与CD所成角的度数为30°,

所以$EG=1$,$FG=2$,$\angle EFG=30°$.

由正弦定理可得$\dfrac{EG}{\sin\angle EFG}=\dfrac{FG}{\sin\angle FEG}$,

所以$\sin\angle FEG=1$,

所以$\angle FEG=90°$.故选A.

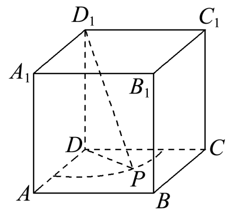
3.(创新开放思维)在棱长为1的正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中,P为底面$ABCD$内(包括边界)的动

点，满足直线 D_1P 与直线 CC_1 所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$，则线段 DP 扫过的面积的大小为（　　）

A.$\frac{\pi}{12}$　　B.$\frac{\pi}{6}$

C.$\frac{\pi}{3}$　　D.$\frac{\pi}{2}$

A　**解析**：在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，易得 $DD_1 /\!/ CC_1$.要使直线 D_1P 与直线 CC_1 所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$，只需直线 D_1P 与直线 DD_1 所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$，所以 D_1P 绕 DD_1 以 $\frac{\pi}{6}$ 夹角旋转得圆锥的一部分，如图所示，易知 DD_1 为圆锥的高，$DD_1=1$，且 $\triangle DD_1P$ 为直角三角形.



所以 $\tan\angle DD_1P=\frac{DP}{DD_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即 $DP=\frac{\sqrt{3}}{3}$.所以点 P 的轨迹是以 D 为圆心，$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 为半径的四分之一圆，故线段 DP 扫过的面积的大小为 $\frac{1}{4}\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{\pi}{12}$.故选 A.

8.6.2　直线与平面垂直

第 1 课时　直线与平面垂直的判定

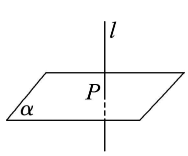
学习任务目标

1.理解并掌握直线与平面垂直的定义，明确定义中“任意”两个字的重要性.
2.掌握直线与平面垂直的判定定理，并能解决有关线面垂直的问题.（逻辑推理）
3.了解直线和平面所成的角的含义，并知道其求法.

问题式预习

知识清单

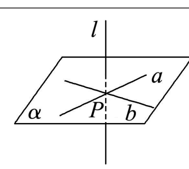
1.直线与平面垂直的定义

定义	一般地，如果直线 l 与平面 α 内的任意一条直线都垂直，我们就说直线 l 与平面 α 互相垂直
记法	$l\perp\alpha$
有关概念	直线 l 叫做平面 α 的垂线，平面 α 叫做直线 l 的垂面，直线与平面垂直时，它们唯一的公共点 P 叫做垂足
画法	画直线与平面垂直时，通常把直线画成与表示平面的平行四边形的一边垂直
图示	

续表

性质	过一点垂直于已知平面的直线有且只有一条
垂线段与点面距	过一点作垂直于已知平面的直线，则该点与垂足间的线段，叫做这个点到该平面的垂线段，垂线段的长度叫做这个点到该平面的距离

2.直线与平面垂直的判定定理

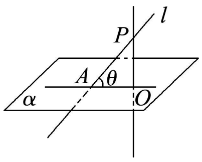
文字语言	如果一条直线与一个平面内的两条相交直线垂直，那么该直线与此平面垂直
图形语言	
符号语言	$l\perp a$，$l\perp b$，$a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，$a\cap b=P\Rightarrow l\perp\alpha$

3.直线与平面所成的角

(1)斜线:一条直线 l 与一个平面 α 相交,但不与这个平面垂直,这条直线叫做这个平面的斜线.

(2)斜足:斜线和平面的交点叫做斜足.

(3)射影:过斜线上斜足以外的一点 P 向平面 α 引垂线 PO,过垂足 O 和斜足 A 的直线 AO 叫做斜线在这个平面上的射影.



(4)直线与平面所成的角

①定义:平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的角,叫做这条直线和这个平面所成的角.

②规定:一条直线垂直于平面,我们说它们所成的角是 $90°$;一条直线和平面平行,或在平面内,我们说它们所成的角是$0°$.

直线与平面所成的角 θ 的取值范围是$0°\leqslant\theta\leqslant90°$.

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)若一条直线垂直于平面内的无数条直线,则这条直线和这个平面垂直.　(×)

(2)若一条直线垂直于平面内的两条直线,则这条直线与平面垂直.　(×)

(3)若一条直线垂直于梯形的两腰所在的直线,则这条直线垂直于梯形的两底边所在的直线.　(√)

(4)若直线 l 与平面 α 所成的角为 $0°$,则 $l\parallel\alpha$.(×)

2.若三条直线 OA,OB,OC 两两垂直,则直线 OA 垂直于　(　　)

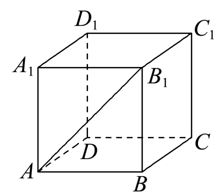
A.平面 OAB　　B.平面 OAC

C.平面 OBC　　D.平面 ABC

C　**解析**:由线面垂直的判定定理知 OA 垂直于平面 OBC.

3.如图,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,直线 AB_1 与平面 $ABCD$ 所成的角等于________.

$45°$　**解析**:如图所示,因为在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$B_1B\perp$平面 $ABCD$,所以 AB 即为 AB_1 在平面 $ABCD$ 上的射影,$\angle B_1AB$ 即为直线 AB_1 与平面 $ABCD$ 所成的角.由题意知$\angle B_1AB=45°$,故所求角为 $45°$.



4.请思考并回答问题:

如果两条平行直线中一条垂直于一个平面,那么另一条也垂直于这个平面吗?

提示:垂直.

任务型课堂

学习任务一　对线面垂直的定义及判定定理的理解

1.直线 $l\perp$平面 α,直线 $m\subset\alpha$,则 l 与 m 不可能　(　　)

A.平行　　B.相交

C.异面　　D.垂直

A　**解析**:因为直线 $l\perp$平面 α,所以 l 与 α 相交.又因为 $m\subset\alpha$,所以 l 与 m 相交或异面.由直线与平面垂直的定义,可知 $l\perp m$.故 l 与 m 不可能平行.故选 A.

2.(多选题)设 l,m 是两条不同的直线,α 是一个平面.下列命题正确的是　(　　)

A.若 $l\perp m$,$m\subset\alpha$,则 $l\perp\alpha$

B.若 $l\perp\alpha$,$l\parallel m$,则 $m\perp\alpha$

C.若 $l\parallel\alpha$,$m\subset\alpha$,则 $l\parallel m$

D.若 $l\parallel\alpha$,$m\perp\alpha$,则 $l\perp m$

BD　**解析**:根据两条平行线中的一条直线垂直于一个平面,则另一条直线也垂直于这个平面,可知选项 B 正确.根据线面平行的性质与线面垂直的性质,易知选项 D 正确.

反思提炼

1.对线面垂直定义的理解

(1)直线和平面垂直的定义是描述性定义,对直线的任意性要注意理解.实际上,"任意一条"与"所有"表达相同的含义.当直线与平面垂直时,该直线就垂直于这个平面内的所有直线.由此可知,如果一条直线与一个平面内的一条直线不垂直,那么这条直线就一定不与这个平面垂直.

(2)由定义可得线面垂直$\Rightarrow$线线垂直,即若 $a\perp\alpha$,$b\subset\alpha$,则 $a\perp b$.

2.理解线面垂直的判定定理

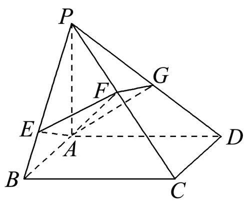
不能用一条直线与平面内的两条平行直线垂直来判断此直线与平面垂直.实际上,由基本事实 4 可知,平行具有"传递性",因此如果一条直线与平面内的一条直线垂直,那么它与这个平面内平行于这条直线的所有直线都垂直,但不能保证与其他直线垂直.

学习任务二 线面垂直判定定理的应用

例1 如图,在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,$PA\perp$平面 $ABCD$,底面 $ABCD$ 为矩形,$AE\perp PB$ 于点 E,$AF\perp PC$ 于点 F.

(1)求证:$PC\perp$平面 AEF;

(2)设平面 AEF 交 PD 于点 G,求证:$AG\perp PD$.



证明:(1)因为 $PA\perp$平面 $ABCD$,$BC\subset$平面 $ABCD$,所以 $PA\perp BC$.

又 $AB\perp BC$,$PA\cap AB=A$,所以 $BC\perp$平面 PAB.

因为 $AE\subset$平面 PAB,所以 $AE\perp BC$.

又 $AE\perp PB$,$PB\cap BC=B$,所以 $AE\perp$平面 PBC.

因为 $PC\subset$平面 PBC,所以 $AE\perp PC$.

又因为 $AF\perp PC$,$AE\cap AF=A$,

所以 $PC\perp$平面 AEF.

(2)由(1)知 $PC\perp$平面 AEF,

所以 $PC\perp AG$.

同理 $CD\perp$平面 PAD,又 $AG\subset$平面 PAD,

所以 $CD\perp AG$.

又 $PC\cap CD=C$,

所以 $AG\perp$平面 PCD.

因为 $PD\subset$平面 PCD,所以 $AG\perp PD$.

[一题多思]

思考1.若本例中,底面 $ABCD$ 是菱形,H 是线段 AC 上任意一点,其他条件不变,求证:$BD\perp FH$.

证明:因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $BD\perp AC$.

又 $PA\perp$平面 $ABCD$,$BD\subset$平面 $ABCD$,

所以 $BD\perp PA$.

因为 $PA\subset$平面 PAC,$AC\subset$平面 PAC,且 $PA\cap AC=A$,

所以 $BD\perp$平面 PAC.

因为 $FH\subset$平面 PAC,所以 $BD\perp FH$.

思考2.若本例中 $PA=AD$,G 是 PD 的中点,其他条件不变,求证:$PC\perp$平面 AFG.

证明:因为 $PA\perp$平面 $ABCD$,$DC\subset$平面 $ABCD$,所以 $DC\perp PA$.

又因为 $ABCD$ 是矩形,所以 $DC\perp AD$.

又 $PA\cap AD=A$,PA,$AD\subset$平面 PAD,所以 $DC\perp$平面 PAD.

又 $AG\subset$平面 PAD,所以 $AG\perp DC$.

因为 $PA=AD$,G 是 PD 的中点,所以 $AG\perp PD$.

又 $DC\cap PD=D$,所以 $AG\perp$平面 PCD.

因为 $PC\subset$平面 PCD,所以 $PC\perp AG$.

又因为 $AF\perp PC$,$AG\cap AF=A$,

所以 $PC\perp$平面 AFG.

反思提炼

利用判定定理证明线面垂直的步骤

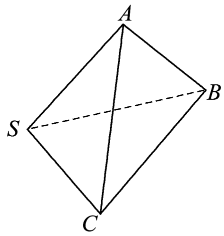
(1)在这个平面内找两条直线,使该直线和这两条直线垂直;

(2)确定这个平面内的两条直线是相交直线;

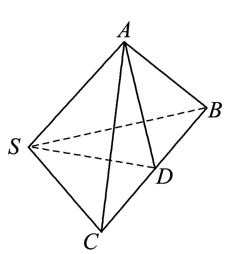
(3)根据线面垂直的判定定理得出结论.

学习任务三 直线与平面所成的角

例2 如图,在三棱锥 $A\text{-}SBC$ 中,$\angle BSC=90°$,$\angle ASB=\angle ASC=60°$,$SA=SB=SC$.求直线 AS 与平面 SBC 所成的角.



解:如图,因为 $\angle ASB=\angle ASC=60°$,$SA=SB=SC$,所以等边 $\triangle ASB$ 与等边 $\triangle ASC$ 全等,所以 $AB=AC$.



取 BC 的中点 D,连接 AD,SD,则 $AD\perp BC$.设 $SA=a$,则在 $\mathrm{Rt}\triangle BSC$ 中,$BC=\sqrt{2}a$,$CD=SD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中,$AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,

则 $AD^2+SD^2=SA^2$,所以 $AD\perp SD$.

又 $BC\cap SD=D$,

所以 $AD\perp$平面 SBC.

所以$\angle ASD$ 即为直线 AS 与平面 SBC 所成的角.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADS$ 中,$SD=AD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,

所以$\angle ASD=45°$,

即直线 AS 与平面 SBC 所成的角为 $45°$.

反思提炼

求直线与平面所成的角的步骤

- 作图 → 作(或找)出斜线在平面上的射影,将空间角转化为平面角,过斜线上斜足以外的一点作平面的垂线,再过垂足和斜足作直线,注意斜线上点的选取以及垂足的位置要与问题中已知量有关,才能便于计算
- 定角 → 证明某平面角就是斜线与平面所成的角
- 计算 → 通常在垂线段、斜线和射影所围成的直角三角形中计算

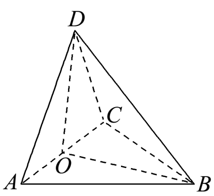
探究训练

1. 把正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起,当以 A,B,C,D 四点为顶点的棱锥体积最大时,直线 BD 和平面 ABC 所成的角的大小为　　(　　)

A.$90°$　　B.$60°$

C.$45°$　　D.$30°$

C　**解析**:如图,点 O 为 AC 中点,以 A,B,C,D 四点为顶点的棱锥体积最大时,$DO\perp$平面 ABC,所以$\angle DBO$ 为直线 BD 和平面 ABC 所成的角.在 $\mathrm{Rt}\triangle DOB$ 中,$OD=OB$,所以直线 BD 和平面 ABC 所成的角为 $45°$.



2. (2022·全国甲卷(理))在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,已知 B_1D 与平面 $ABCD$ 和平面 AA_1B_1B 所成的角均为 $30°$,则　　(　　)

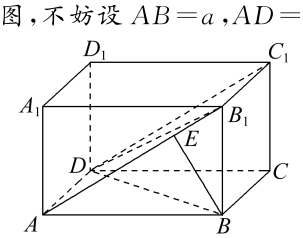
A.$AB=2AD$

B.AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为 $30°$

C.$AC=CB_1$

D.B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 $45°$

D　**解析**:如图,不妨设 $AB=a,AD=b,AA_1=c$.



依题意以及长方体的结构特征可知,B_1D 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle B_1DB$,B_1D 与平面 AA_1B_1B 所成的角为$\angle DB_1A$,所以 $\sin 30°=\dfrac{c}{B_1D}=\dfrac{b}{B_1D}$,即 $b=c$,$B_1D=2c=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$,解得 $a=\sqrt{2}c$.

对于 A,$AB=a,AD=b,AB=\sqrt{2}AD$,A 错误;

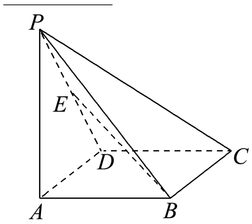
对于 B,过 B 作 $BE\perp AB_1$ 于点 E,易知 $BE\perp$平面 AB_1C_1D,所以 AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为$\angle BAE$,因为 $\tan\angle BAE=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,所以$\angle BAE\neq 30°$,B 错误;

对于 C,$AC=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3}c$,$CB_1=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{2}c$,$AC\neq CB_1$,C 错误;

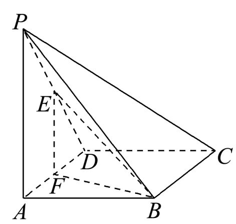
对于 D,B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角为$\angle DB_1C$,$\sin\angle DB_1C=\dfrac{CD}{B_1D}=\dfrac{a}{2c}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,而 $0°<\angle DB_1C<90°$,所以$\angle DB_1C=45°$,D 正确.

故选 D.

3. 如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为矩形,侧棱 $PA\perp$底面 $ABCD$.若 $AB=\sqrt{3}$,$BC=1$,$PA=2$,E 为 PD 的中点,则直线 BE 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为________.



$\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$　**解析**:如图,取 AD 的中点 F,连接 EF,BF.因为 E,F 分别是 PD,AD 的中点,所以 $EF\parallel PA$.



因为 $PA\perp$平面 $ABCD$,

所以 $EF\perp$平面 $ABCD$,即$\angle EBF$ 为直线 BE 与平面 $ABCD$ 所成的角.

在$\triangle EBF$ 中,$EF=\dfrac{1}{2}PA=1$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中,$AF=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{2}$,

$BF=\sqrt{AF^2+AB^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$,

所以 $\tan\angle EBF=\dfrac{EF}{BF}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$,

即直线 BE 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为$\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$.

体系构建

- 直线与平面垂直
  - 定义
  - 判定定理
  - 直线与平面所成的角
    - 定义
    - 范围

课后素养评价(三十二)

基础性·能力运用

1.若直线 l 与平面 α 所成的角为 $70°$,直线 $l // m$,则 m 与 α 所成的角等于 ( )

A.$20°$　　B.$70°$

C.$90°$　　D.$110°$

B **解析**:因为 $l // m$,所以直线 l 与平面 α 所成的角等于 m 与 α 所成的角.又直线 l 与平面 α 所成的角为 $70°$,所以 m 与 α 所成的角为 $70°$.故选 B.

2.(动态开放问题)已知 α,β,γ 是三个不同的平面,l,m,n 是三条不同的直线,且 $\alpha\cap\beta=l$,$m,n\subset\gamma$.在下列条件中,能推出 $l\perp\gamma$ 的是 ( )

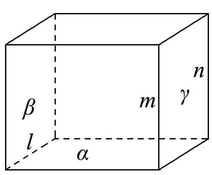
A.$n\perp l,m\perp l$

B.$m\perp l,n\perp\alpha$

C.$n\perp\alpha,m\perp\alpha$

D.$m\perp\alpha,n\perp\beta$

D **解析**:如图,当 $m // n$ 时,由 $n\perp l,m\perp l$ 推不出 $l\perp\gamma$,即 A 错误;同理可知,BC 错误;

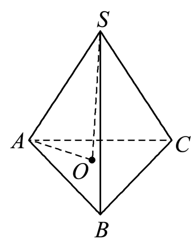


若 $m\perp\alpha,n\perp\beta$,可知 m 与 n 交于一点,且 $n\perp l,m\perp l$,所以 $l\perp\gamma$,即 D 正确.

故选 D.

3.已知正三棱锥 $S\text{-}ABC$ 的所有棱长都相等,则 SA 与平面 ABC 所成角的余弦值为________.

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ **解析**:如图,设$\triangle ABC$ 的中心为 O,连接 SO,AO.由题意得 $SO\perp$平面 ABC,则$\angle SAO$ 为 SA 与底面 ABC 所成的角.

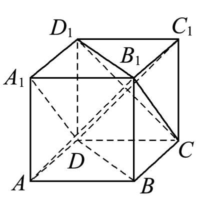


设正三棱锥的棱长为 a,在 $\mathrm{Rt}\triangle SOA$ 中,$AO=\frac{2}{3}a\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{3}a$,$SA=a$,

所以 $\cos\angle SAO=\frac{AO}{SA}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

综合性·创新提升

1.(多选题)若正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 如图所示,则下列结论错误的是 ( )



A.$BD //$平面 CB_1D_1

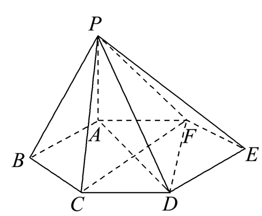
B.$AC_1\perp$平面 DBB_1D_1

C.$AC_1\perp$平面 CB_1D_1

D.异面直线 AD 与 CB_1 所成的角为 $60°$

BD **解析**:易知 B 选项错误;对于选项 D,因为 $B_1C // A_1D$,所以$\angle A_1DA$ 即为 AD 与 CB_1 所成的角,此角为 $45°$.故 D 错.

2.(多选题)如图,在六棱锥 $P\text{-}ABCDEF$ 中,底面 $ABCDEF$ 为正六边形,$PA\perp$平面 ABC,则下列结论不正确的是 ( )



A.$PA\perp CD$

B.$DF\perp$平面 PAF

C.$CB\perp$平面 PCD

D.$CF\perp$平面 PAD

CD **解析**:A 项,在正六边形 $ABCDEF$ 中,因为 $PA\perp$平面 ABC,所以 $PA\perp$平面 $ABCDEF$.

因为 $CD\subset$平面 $ABCDEF$,

所以 $PA\perp CD$,故 A 正确.

B 项,在正六边形 $ABCDEF$ 中,$DF\perp AF$,

又因为 $PA\perp$平面 ABC,

$DF\subset$平面 ABC,

所以 $PA\perp DF$.

因为 $PA\cap AF=A$，

$PA,AF\subset$平面 PAF，

所以 $DF\perp$平面 PAF，故 B 正确.

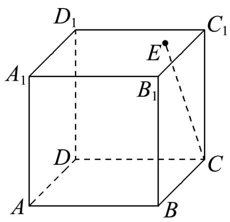
C 项，在正六边形 $ABCDEF$ 中，

$BC/\!/AD$，

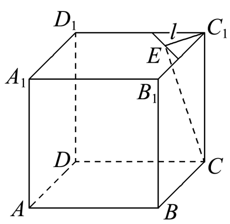
易知 AD 与平面 PCD 不垂直，故 C 错误.

D 项，因为 CF 与 AD 成 60° 角，所以 CF 与平面 PAD 不垂直，故 D 错误.故选 CD.

3.(生活中的立体几何)如图，一块正方体木料的上底面有一点 E，经过点 E 在上底面上画一条直线与 CE 垂直，写出作该直线的方法：________.



在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 中，画出经过点 E 与 C_1E 垂直的直线　**解析**：如图，设在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 中，经过点 E 与 CE 垂直的直线为 l.

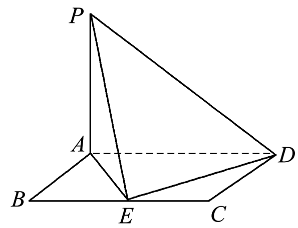


由 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，可知 $CC_1\perp$平面 $A_1B_1C_1D_1$，又 $l\subset$平面 $A_1B_1C_1D_1$，所以 $CC_1\perp l$.又 $CE\perp l$，CC_1，$CE\subset$平面 CC_1E，且 $CC_1\cap CE=C$，所以 $l\perp$平面 CC_1E.因为 $C_1E\subset$平面 CC_1E，则 $l\perp C_1E$，所以在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 中，画出经过点 E 与 C_1E 垂直的直线即可.

4.已知四边形 $ABCD$ 是矩形，$PA\perp$平面 $ABCD$，$AB=2$，$PA=AD=4$，E 为 BC 的中点.

(1)求证：$DE\perp$平面 PAE；

(2)求直线 DP 与平面 PAE 所成的角.



(1)**证明**：在矩形 $ABCD$ 中，

因为 E 为 BC 的中点，

所以 $AE=DE=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

又 $AD=4$，

所以 $AD^2=AE^2+DE^2$，

所以 $AE\perp DE$.

因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，$DE\subset$平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp DE$.

又 $PA\cap AE=A$，$PA\subset$平面 PAE，$AE\subset$平面 PAE，所以 $DE\perp$平面 PAE.

(2)**解**：由(1)知$\angle DPE$ 为 DP 与平面 PAE 所成的角.

在 $\text{Rt}\triangle PAD$ 中，$PD=4\sqrt{2}$，

在 $\text{Rt}\triangle DCE$ 中，$DE=2\sqrt{2}$，

在 $\text{Rt}\triangle DEP$ 中，$PD=2DE$，所以$\angle DPE=30^\circ$.

所以直线 DP 与平面 PAE 所成的角为 30°.

第2课时 直线与平面垂直的性质

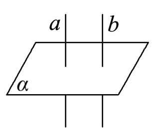
学习任务目标

1. 掌握线面垂直的性质定理.
2. 能利用线面垂直的性质定理解决一些垂直和平行的证明问题.(逻辑推理)
3. 了解直线到平面的距离、两个平行平面间的距离的概念.

问题式预习

知识清单

1. 直线与平面垂直的性质定理

文字语言	垂直于同一个平面的两条直线<u>平行</u>
图形语言	
符号语言	$\left.\begin{matrix}a\perp\alpha\\ b\perp\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow \underline{a\parallel b}$

2. 直线与平面的距离

一条直线与一个平面平行时,这条直线上<u>任意一点</u>到这个平面的距离,叫做这条直线到这个平面的距离.

3. 两个平行平面间的距离

如果两个平面平行,那么其中一个平面内的任意一点到另一个平面的距离都<u>相等</u>,我们把它叫做这两个平行平面间的距离.

概念辨析

1. 判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)垂直于同一直线的两个平面平行. (√)

(2)到已知平面距离相等的两条直线平行. (×)

2. $\triangle ABC$ 所在的平面为 α,直线 $l\perp AB$,$l\perp AC$,直线 $m\perp BC$,$m\perp AC$,则直线 l,m 的位置关系是 ( )

A. 相交　B. 异面　C. 平行　D. 不确定

C　**解析**:因为 $l\perp AB$,$l\perp AC$,$AB\cap AC=A$,所以 $l\perp$ 平面 ABC.又 $m\perp BC$,$m\perp AC$,$BC\cap AC=C$,所以 $m\perp$ 平面 ABC.由直线与平面垂直的性质定理知 $l\parallel m$.

3. 若直线 $a\perp b$,且 $a\perp$ 平面 α,则 b 与 α 的位置关系是________.

$b\parallel\alpha$ 或 $b\subset\alpha$　**解析**:若 b 在平面 α 外,则在 α 内能找到和 b 平行的直线,此时 $b\parallel\alpha$,否则 b 在平面 α 内.

4. 请思考并回答问题:

同一个平面的两条垂线一定共面吗?

提示:一定共面.由线面垂直的性质定理可知这两条直线是平行的,故在同一个平面.

任务型课堂

学习任务一　对直线与平面垂直的性质定理的理解

1. 已知 m,n 为两条不同的直线,α,β 为两个不同的平面,给出下列命题:

①$\left\{\begin{matrix}m\perp\alpha,\\ m\perp n\end{matrix}\right.\Rightarrow n\parallel\alpha$;②$\left\{\begin{matrix}m\perp\beta,\\ n\perp\beta\end{matrix}\right.\Rightarrow m\parallel n$;

③$\left\{\begin{matrix}m\perp\alpha,\\ m\perp\beta\end{matrix}\right.\Rightarrow\alpha\parallel\beta$;④$\left\{\begin{matrix}m\subset\alpha,\\ n\subset\beta,\\ \alpha\parallel\beta\end{matrix}\right.\Rightarrow m\parallel n$.

其中正确命题的序号是 ( )

A. ②③　B. ③④　C. ①②　D. ①②③④

A　**解析**:①中 n 可能与 α 平行或 n 在平面 α 内;②③正确;④直线 m,n 平行或异面.故选A.

2. 已知 l,m,n 是三条不同的直线,α 是平面.下列命题中,正确命题的个数为 ( )

①若 $l\parallel m$,$m\parallel n$,$l\perp\alpha$,则 $n\perp\alpha$;

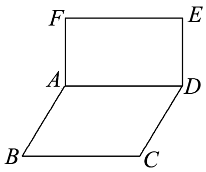
②若 $l\parallel m$,$m\perp\alpha$,$n\perp\alpha$,则 $l\parallel n$;

③若 $l\parallel\alpha$,$l\perp m$,则 $m\perp\alpha$.

A. 1　B. 2　C. 3　D. 0

B　**解析**:对于①,因为 $l\parallel m$,$m\parallel n$,所以 $l\parallel n$.又 $l\perp\alpha$,所以 $n\perp\alpha$,故①正确.对于②,因为 $m\perp\alpha$,$n\perp\alpha$,所以 $m\parallel n$.又 $l\parallel m$,所以 $l\parallel n$,故②正确.对于③,因为 $l\parallel\alpha$,$l\perp m$,所以 $m\parallel\alpha$ 或 $m\subset\alpha$ 或 $m\perp\alpha$ 或 m 与 α 斜交,故③错误.

3. 如图,已知 $AF\perp$ 平面 $ABCD$,$DE\perp$ 平面 $ABCD$,且 $AF=DE$,$AD=6$,则 $EF=$________.



6　**解析**:因为 $AF\perp$ 平面 $ABCD$,$DE\perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $AF\parallel DE$.

因为 $AF=DE$,所以四边形 $ADEF$ 是平行四边形.

所以 $EF=AD=6$.

反思提炼

直线与平面垂直的性质定理的认识

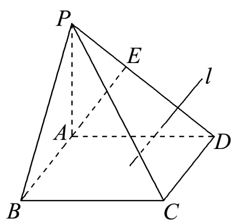
(1)该定理考查的是在直线与平面垂直的条件下,可得出什么结论.

(2)定理给出了判定两条直线平行的另一种方法(只需判定这两条直线都与同一个平面垂直).

(3)定理揭示了空间中"平行"与"垂直"关系的内在联系,提供了"平行"与"垂直"关系相互转化的依据.

学习任务二　直线与平面垂直的性质定理的应用

例 1　如图,四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,$PA\perp$ 平面 $ABCD$,且四边形 $ABCD$ 为矩形,$AE\perp PD$ 于点 E,$l\perp$ 平面 PCD,求证:$l\parallel AE$.



证明:因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$,$CD\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PA\perp CD$.又 $CD\perp AD$,$PA\cap AD=A$,

所以 $CD\perp$ 平面 PAD.

因为 $AE\subset$ 平面 PAD,所以 $AE\perp CD$.

又 $AE\perp PD$,$PD\cap CD=D$,所以 $AE\perp$ 平面 PCD.

因为 $l\perp$ 平面 PCD,所以 $l\parallel AE$.

反思提炼

证明线线平行的常用方法

(1)利用线线平行的定义:证两线共面且无公共点;

(2)利用三线平行的基本事实:证两线同时平行于第三条直线;

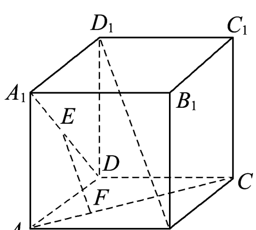
(3)利用线面平行的性质定理:把证线线平行转化为证线面平行;

(4)利用线面垂直的性质定理:把证线线平行转化为证线面垂直;

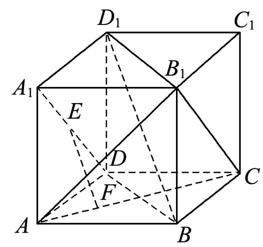
(5)利用面面平行的性质定理:把证线线平行转化为证面面平行.

探究训练

1. 如图,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,EF 与直线 AC,A_1D 都垂直相交.求证:$EF\parallel BD_1$.



证明:如图,连接 AB_1,B_1C,BD,B_1D_1.



因为 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$,$AC\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $DD_1\perp AC$.

又 $AC\perp BD$,$BD\cap DD_1=D$,

所以 $AC\perp$ 平面 BDD_1B_1.

因为 $BD_1\subset$ 平面 BDD_1B_1,

所以 $AC\perp BD_1$.

同理 $BD_1\perp B_1C$.

因为 $AC\cap B_1C=C$,AC,$B_1C\subset$ 平面 AB_1C,

所以 $BD_1\perp$ 平面 AB_1C.

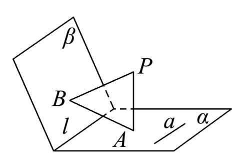
因为 $EF\perp A_1D$,且 $A_1D\parallel B_1C$,

所以 $EF\perp B_1C$.

又 $EF\perp AC$,$AC\cap B_1C=C$,

所以 $EF\perp$ 平面 AB_1C.所以 $EF\parallel BD_1$.

2. 如图,$\alpha\cap\beta=l$,$PA\perp\alpha$,$PB\perp\beta$,垂足分别为 A,B,$a\subset\alpha$,$a\perp AB$.求证:$a\parallel l$.



证明:因为 $PA\perp\alpha$,$l\subset\alpha$,所以 $PA\perp l$.同理 $PB\perp l$.

因为 $PA\cap PB=P$,所以 $l\perp$ 平面 PAB.

因为 $PA\perp\alpha$,$a\subset\alpha$,所以 $PA\perp a$.

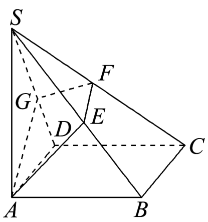
因为 $a\perp AB$,$PA\cap AB=A$,

所以 $a\perp$ 平面 PAB,

所以 $a\parallel l$.

学习任务三 线面垂直的判定与性质的综合应用

例 2 如图,四边形 $ABCD$ 为正方形,$SA\perp$平面 $ABCD$,过点 A 且垂直于 SC 的平面分别交 SB,SC,SD 于点 E,F,G.求证:$AE\perp SB$.



证明:因为 $SA\perp$平面 $ABCD$,$BC\subset$平面 $ABCD$,所以 $SA\perp BC$.

因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $AB\perp BC$.

因为 $SA\cap AB=A$,所以 $BC\perp$平面 SAB.

因为 $AE\subset$平面 SAB,所以 $BC\perp AE$.

因为 $SC\perp$平面 $AGFE$,$AE\subset$平面 $AGFE$,所以 $SC\perp AE$.

又因为 $BC\cap SC=C$,所以 $AE\perp$平面 SBC.

因为 $SB\subset$平面 SBC,所以 $AE\perp SB$.

[一题多思]

思考 1.本例条件不变,将“求证:$AE\perp SB$”改为“判断在 S,A,B,C,D,E,F,G 中,任意两点的连线中与 SC 垂直的直线有多少条”,结论如何?

解:因为 $SC\perp$平面 $AGFE$,所以 A,G,F,E 中的任何两点连线都与 SC 垂直,所以此时共有 6 条直线与 SC 垂直.连接 AC,BD(图略),又因为 $ABCD$ 为正方形,所以 $AC\perp BD$.又 $SA\perp$平面 $ABCD$,所以 $SA\perp BD$.因为 $AC\cap SA=A$,所以 $BD\perp$平面 SAC,所以 $BD\perp SC$.根据题意其他的线与 SC 均不垂直,所以与 SC 垂直的直线共有 7 条.

思考 2.本例中“过点 A 且垂直于 SC 的平面分别交 SB,SC,SD 于点 E,F,G”改为“过点 A 作 $AF\perp SC$ 于点 F,过点 F 作 $EF\perp SC$ 交 SB 于点 E”,如何证明 $AE\perp SB$?

证明:连接 AE(图略),因为 $SA\perp$平面 $ABCD$,所以 $SA\perp BC$.

因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $AB\perp BC$.

因为 $SA\cap AB=A$,所以 $BC\perp$平面 SAB.

因为 $AE\subset$平面 SAB,所以 $BC\perp AE$.

又因为 $AF\perp SC$,$EF\perp SC$ 且 $AF\cap EF=F$,

所以 $SC\perp$平面 AEF.

因为 $AE\subset$平面 AEF,所以 $SC\perp AE$.

又因为 $BC\cap SC=C$,所以 $AE\perp$平面 SBC.

因为 $SB\subset$平面 SBC,所以 $AE\perp SB$.

反思提炼

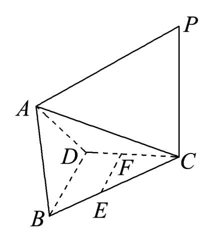
证明线线、线面垂直的策略

(1)证明线线垂直,一般通过证明一条直线垂直于经过另一条直线的平面,为此分析题设,观察图形找到是哪条直线垂直于经过哪条直线的平面.

(2)证明直线和平面垂直,就是要证明这条直线垂直于平面内的两条相交直线,这一点在解题时一定要体现出来.

探究训练

如图,$PA\perp$平面 ABD,$PC\perp$平面 BCD,E,F 分别为 BC,CD 上的点,且 $EF\perp AC$.求证:$\dfrac{CF}{CD}=\dfrac{CE}{CB}$.



证明:因为 $PA\perp$平面 ABD,$PC\perp$平面 BCD,

$BD\subset$平面 ABD,BD,$EF\subset$平面 BCD,

所以 $PA\perp BD$,$PC\perp BD$,$PC\perp EF$.

又 $PA\cap PC=P$,所以 $BD\perp$平面 PAC.

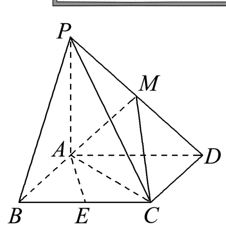
又 $EF\perp AC$,$PC\cap AC=C$,

所以 $EF\perp$平面 PAC,

所以 $EF\parallel BD$,所以$\dfrac{CF}{CD}=\dfrac{CE}{CB}$.

学习任务四 距离问题

例 3 如图,在四棱锥 P-$ABCD$ 中,$PA\perp$菱形 $ABCD$ 所在的平面,$\angle ABC=60°$,E 是 BC 的中点,M 是 PD 的中点.



(1)求证:$AE\perp$平面 PAD;

(2)若 $AB=AP=2$,求点 P 到平面 AMC 的距离.

(1)**证明:**因为四边形 $ABCD$ 为菱形,$\angle ABC=60°$,

所以$\triangle ABC$ 为正三角形.

因为 E 是 BC 的中点,所以 $AE\perp BC$.

因为 $AD\parallel BC$,所以 $AE\perp AD$.

因为 $PA\perp$平面 $ABCD$,$AE\subset$平面 $ABCD$,

所以 $PA\perp AE$.

又因为 $PA\cap AD=A$，所以 $AE\perp$ 平面 PAD.

(2)**解**：因为 $CE\parallel AD$，$AD\subset$ 平面 PAM，$CE\not\subset$ 平面 PAM，所以 $CE\parallel$ 平面 PAM.

因为 $AB=AP=2$，所以 $AD=2$，$AE=\sqrt{3}$.

由(1)知 $AE\perp$ 平面 PAD，所以 E 到平面 PAD 的距离为 AE，

所以 $V_{P\text{-}AMC}=V_{C\text{-}PAM}=V_{E\text{-}PAM}=\frac{1}{3}S_{\triangle PAM}\cdot AE=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

设点 P 到平面 AMC 的距离为 h，

即 $\frac{1}{3}S_{\triangle AMC}\cdot h=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

易知 $PD=2\sqrt{2}$，$PM=\sqrt{2}$，$PC=2\sqrt{2}$，$CD=2$，

所以在 $\triangle PCD$ 和 $\triangle PCM$ 中，由余弦定理的推论得 $\frac{8+8-4}{2\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\frac{8+2-CM^2}{2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$，解得 $CM=2$.

在 $\triangle AMC$ 中，$AM=\sqrt{2}$，$AC=CM=2$，

所以易求得 $S_{\triangle AMC}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，所以 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{7}}{2}h=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $h=\frac{2\sqrt{21}}{7}$，即点 P 到平面 AMC 的距离为 $\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

反思提炼

(1)从平面外一点作这个平面的垂线，点与垂足间的距离就是点到这个平面的距离.当该点到已知平面的垂线不易作出时，可利用线面平行、面面平行的性质转化为过与已知平面等距离的点作垂线，然后计算.

(2)利用中点转化：如果条件中具有中点条件，将一个点到平面的距离，借助中点(等分点)，转化为另一点到平面的距离.

(3)通过换底转化：一是直接换底，以方便求几何体的高；二是将底面扩展(分割)，以方便求底面积和高.

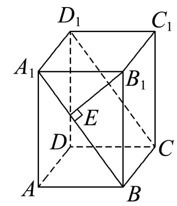
探究训练

已知在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，棱 $AA_1=12$，$AB=5$.

(1)求点 B_1 到平面 A_1BCD_1 的距离；

(2)求 B_1C_1 到平面 A_1BCD_1 的距离.

解：(1)如图，过点 B_1 作 $B_1E\perp A_1B$ 于点 E.



由题意知 $BC\perp$ 平面 A_1ABB_1，且 $B_1E\subset$ 平面 A_1ABB_1，所以 $BC\perp B_1E$.

因为 $BC\cap A_1B=B$，$BC\subset$ 平面 A_1BCD_1，$A_1B\subset$ 平面 A_1BCD_1，所以 $B_1E\perp$ 平面 A_1BCD_1，

所以线段 B_1E 的长即为所求.

在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1B_1B$ 中，

$B_1E=\frac{A_1B_1\cdot BB_1}{A_1B}=\frac{5\times12}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{60}{13}$，

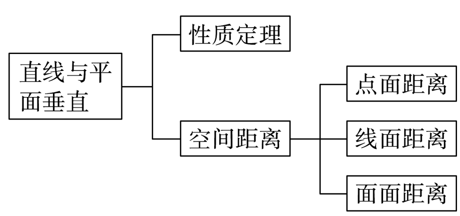
所以点 B_1 到平面 A_1BCD_1 的距离为 $\frac{60}{13}$.

(2)因为 $B_1C_1\parallel BC$，且 $B_1C_1\not\subset$ 平面 A_1BCD_1，$BC\subset$ 平面 A_1BCD_1，所以 $B_1C_1\parallel$ 平面 A_1BCD_1.

所以点 B_1 到平面 A_1BCD_1 的距离即为所求，

所以直线 B_1C_1 到平面 A_1BCD_1 的距离为 $\frac{60}{13}$.

体系构建



课后素养评价(三十三)

基础性·能力运用

1. 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 l（与直线 BB_1 不重合）$\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，则 （　　）

A. $B_1B\perp l$

B. $B_1B\parallel l$

C. B_1B 与 l 异面但不垂直

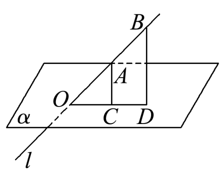
D. B_1B 与 l 相交但不垂直

B　**解析**：因为 $B_1B\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，又因为 $l\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，所以 $l\parallel B_1B$. 故选 B.

2. 已知直线 $l\cap$ 平面 $\alpha=O$，$A\in l$，$B\in l$，$A\notin\alpha$，$B\notin\alpha$，且 $OA=AB$. 若 $AC\perp$ 平面 α，垂足为 C，$BD\perp$ 平面 α，垂足为 D，$AC=1$，则 $BD=$ （　　）

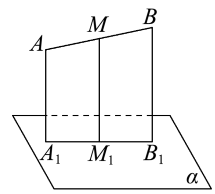
A. 2　　B. 1　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

A　**解析**：如图，因为 $AC\perp$ 平面 α，$BD\perp$ 平面 α，所以 $AC\parallel BD$，所以 $\frac{OA}{OB}=\frac{AC}{BD}$. 因为 $OA=AB$，所以 $\frac{OA}{OB}=\frac{1}{2}$. 因为 $AC=1$，所以 $BD=2$. 故选 A.



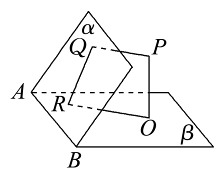
3. 点 A，B 在平面 α 的同侧，A，B 到 α 的距离分别为 3 和 5，则线段 AB 的中点到 α 的距离为________.

4　**解析**：如图，设 AB 的中点为 M，分别过 A，M，B 向 α 作垂线，垂足分别为 A_1，M_1，B_1，则由线面垂直的性质可知，$AA_1\parallel MM_1\parallel BB_1$. 四边形 AA_1B_1B 为直角梯形，$AA_1=3$，$BB_1=5$，MM_1 为其中位线，所以 $MM_1=\frac{1}{2}(AA_1+BB_1)=\frac{1}{2}\times(3+5)=4$.



4. 已知 $\alpha\cap\beta=AB$，$PQ\perp\alpha$，垂足为 Q，$PO\perp\beta$，垂足为 O，$OR\perp\alpha$，垂足为 R，求证：$QR\perp AB$.

证明：如图，因为 $\alpha\cap\beta=AB$，所以 $AB\subset\alpha$，$AB\subset\beta$.



因为 $PO\perp\beta$，所以 $PO\perp AB$.

因为 $PQ\perp\alpha$，所以 $PQ\perp AB$.

因为 $PO\cap PQ=P$，$PO\subset$ 平面 PQO，$PQ\subset$ 平面 PQO，所以 $AB\perp$ 平面 PQO.

因为 $OR\perp\alpha$，所以 $PQ\parallel OR$.

所以 PQ 与 OR 确定平面 $PQRO$.

又因为 $QR\subset$ 平面 $PQRO$，所以 $QR\perp AB$.

综合性·创新提升

1. 空间四边形 $ABCD$ 的四边相等，则它的两条对角线 AC，BD 的关系是 （　　）

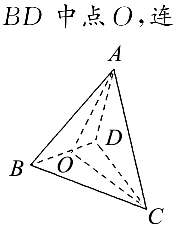
A. 垂直且相交

B. 相交但不一定垂直

C. 垂直但不相交

D. 不垂直也不相交

C　**解析**：如图，取 BD 中点 O，连接 AO，CO，



则 $BD\perp AO$，$BD\perp CO$，$AO\cap CO=O$，AO，$CO\subset$ 平面 AOC，所以 $BD\perp$ 平面 AOC. 因为 $AC\subset$ 平面 AOC，所以 $BD\perp AC$. 又 BD，AC 异面，所以 BD，AC 不相交. 故选 C.

2. 三棱锥的三条侧棱长度相等，则顶点在底面的射影为底面三角形的 （　　）

A. 内心　　B. 重心

C. 外心　　D. 垂心

C　**解析**：如图，设点 P 在平面 ABC 内的射影为 O，连接 OA，OB，OC，OP.

因为三棱锥的三条侧棱长度相等，所以 $PA=PB=PC$.

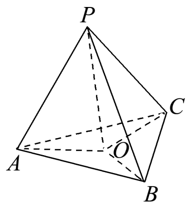
因为 $PO\perp$ 底面 ABC，

所以 $PO\perp OA$，$PO\perp OB$，$PO\perp OC$，

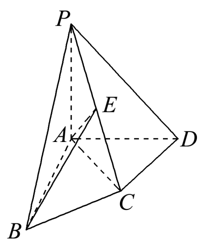
所以 $\mathrm{Rt}\triangle POA\cong\mathrm{Rt}\triangle POB\cong\mathrm{Rt}\triangle POC$，

所以 $OA=OB=OC$，

故顶点 P 在底面的射影为底面三角形的外心.



3. 如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AB\perp AD$，$AC\perp CD$，$\angle ABC=60°$，$PA=AB=BC$，E 是 PC 的中点.则有



(1)CD________AE；

(2)PD________平面 ABE.(填“$\perp$”或“$/\!/$”)

(1)$\perp$　(2)$\perp$　**解析**：(1)在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp CD$.又因为 $AC\perp CD$，且 $PA\cap AC=A$，所以 $CD\perp$ 平面 PAC.而 $AE\subset$ 平面 PAC，所以 $CD\perp AE$.

(2)由 $PA=AB=BC$，$\angle ABC=60°$，可得 $AC=PA$.

因为 E 是 PC 的中点，所以 $AE\perp PC$.

由(1)知 $AE\perp CD$，且 $PC\cap CD=C$，所以 $AE\perp$ 平面 PCD.

又 $PD\subset$ 平面 PCD，所以 $AE\perp PD$.

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB$.

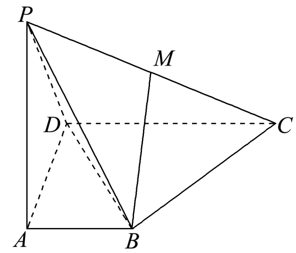
又因为 $AB\perp AD$，且 $PA\cap AD=A$，所以 $AB\perp$ 平面 PAD.而 $PD\subset$ 平面 PAD，所以 $AB\perp PD$.

又 $AB\cap AE=A$，所以 $PD\perp$ 平面 ABE.

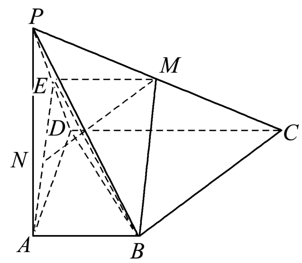
4. 如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$AB\perp AD$，$CD\perp AD$，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=AD=CD=2AB=2$，M 为 PC 的中点.

(1)求证：$BM/\!/$ 平面 PAD.

(2)平面 PAD 内是否存在一点 N，使 $MN\perp$ 平面 PBD？若存在，确定点 N 的位置；若不存在，请说明理由.



(1)**证明**：如图，取 PD 的中点 E，连接 EM，AE，



则有 $EM \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}CD$.而 $AB \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}CD$，所以 $EM \underline{\underline{/\!/}} AB$.

所以四边形 $ABME$ 是平行四边形，所以 $BM/\!/AE$.

因为 $AE\subset$ 平面 PAD，$BM\not\subset$ 平面 PAD，

所以 $BM/\!/$ 平面 PAD.

(2)**解**：当 N 为 AE 的中点时，$MN\perp$ 平面 PBD.

理由如下：

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB$.

又因为 $AB\perp AD$，$PA\cap AD=A$，$PA\subset$ 平面 PAD，$AD\subset$ 平面 PAD，所以 $AB\perp$ 平面 PAD.因为 $PD\subset$ 平面 PAD，所以 $AB\perp PD$.

因为 $PA=AD$，E 是 PD 的中点，所以 $AE\perp PD$.

又因为 $AB\cap AE=A$，$AB\subset$ 平面 $ABME$，$AE\subset$ 平面 $ABME$，所以 $PD\perp$ 平面 $ABME$.

连接 BE，作 $MN\perp BE$，交 AE 于点 N.因为 $MN\subset$ 平面 $ABME$，所以 $MN\perp PD$.

又因为 $PD\cap BE=E$，$PD\subset$ 平面 PBD，$BE\subset$ 平面 PBD，

所以 $MN\perp$ 平面 PBD.

易知 $\triangle BME\backsim\triangle MEN$，$BM=\sqrt{2}$，$EM=AB=1$，

所以 $\frac{BM}{ME}=\frac{EM}{NE}$，即 $NE=\frac{EM^2}{BM}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 $AE=\sqrt{2}$，所以 N 为 AE 的中点.

8.6.3 平面与平面垂直

第1课时 平面与平面垂直的判定

学习任务目标

1.了解二面角及平面角的概念.
2.掌握两个平面互相垂直的定义和画法.
3.理解并掌握平面与平面垂直的判定定理,并能解决有关问题.(逻辑推理)

问题式预习

知识清单

1.二面角

(1)二面角的定义

从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角.这条直线叫做二面角的棱,这两个半平面叫做二面角的面.

图1所示二面角记作:二面角 α-l-β 或二面角 α-AB-β 或二面角 P-l-Q 或二面角 P-AB-Q.

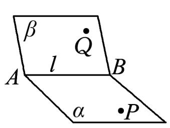


图1

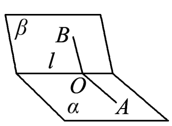


图2

(2)二面角的平面角

如图2,在二面角 α-l-β 的棱 l 上任取一点 O,以点 O 为垂足,在半平面 α 和 β 内分别作垂直于棱 l 的射线 OA 和 OB,则射线 OA 和 OB 构成的 $\angle AOB$ 叫做二面角的平面角.

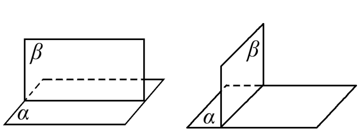
(3)二面角的大小

二面角的大小可以用它的平面角来度量.平面角是直角的二面角叫做直二面角.二面角的平面角 α 的取值范围是 $0^\circ\leqslant\alpha\leqslant180^\circ$.

2.平面与平面垂直

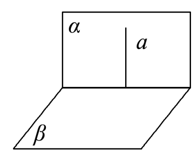
(1)定义:一般地,两个平面相交,如果它们所成的二面角是直二面角,就说这两个平面互相垂直.

(2)画法:



记作:$\alpha\perp\beta$.

(3)面面垂直的判定定理

文字语言	如果一个平面过另一个平面的垂线,那么这两个平面垂直
符号语言	$a\subset\alpha$,$a\perp\beta\Rightarrow\alpha\perp\beta$
图形语言	

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)平面 α 和 β 分别过两条互相垂直的直线,则 $\alpha\perp\beta$. (×)

(2)若平面 α 内的一条直线垂直于平面 β 内的两条平行线,则 $\alpha\perp\beta$. (×)

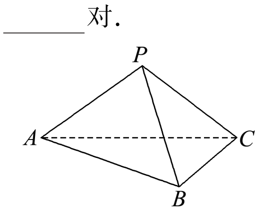
(3)异面直线 a,b 分别和两个平面垂直,则 a,b 所成的角与这两个平面所成的二面角相等或互补. (√)

2.直线 $l\perp$平面 α,$l\subset$平面 β,则 α 与 β 的位置关系是 ( )

A.平行　　B.可能重合
C.相交且垂直　　D.相交但不垂直

C **解析**:由面面垂直的判定定理,得 α 与 β 垂直.故选C.

3.如图,在三棱锥 P-ABC 中,已知 $PA\perp PB$,$PB\perp PC$,$PC\perp PA$,则在三棱锥 P-ABC 的四个面中,互相垂直的面有______对.



3　**解析**：平面 $PAB\perp$ 平面 PAC，平面 $PAB\perp$ 平面 PBC，平面 $PAC\perp$ 平面 PBC.

4.请思考并回答问题：

(1)二面角与平面几何中的角有什么区别？

提示：平面几何中的角是从一点出发的两条射线组成的图形；二面角是从一条直线出发的两个半平面所组成的图形.

(2)二面角的平面角的大小，与角的顶点在棱上的位置有关系吗？为什么？

提示：无关.根据等角定理即可推知.

任务型课堂

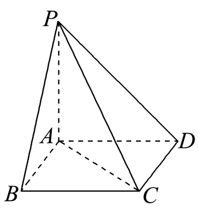
学习任务一　求二面角的大小

例 1　如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，且 $PA=AB$.求：

(1)二面角 A-PD-C 的平面角的度数；

(2)二面角 B-PA-D 的平面角的度数；

(3)二面角 B-PA-C 的平面角的度数.



解：(1)因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp CD$.

又四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $CD\perp AD$.

因为 $PA\cap AD=A$，所以 $CD\perp$ 平面 PAD.

又 $CD\subset$ 平面 PCD，

所以平面 $PAD\perp$ 平面 PCD.

所以二面角 A-PD-C 的平面角的度数为 $90°$.

(2)因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $AB\perp PA$，$AD\perp PA$.

所以 $\angle BAD$ 为二面角 B-PA-D 的平面角.

又四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $\angle BAD=90°$，

所以二面角 B-PA-D 的平面角的度数为 $90°$.

(3)因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $AB\perp PA$，$AC\perp PA$.

所以 $\angle BAC$ 为二面角 B-PA-C 的平面角.

又四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $\angle BAC=45°$，

所以二面角 B-PA-C 的平面角的度数为 $45°$.

反思提炼

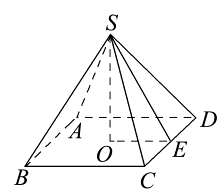
求二面角的常用方法

二面角的大小用它的平面角来度量.平面角的作法常见的有定义法和垂面法.注意利用等腰三角形和特殊平行四边形的性质.

探究训练

已知正四棱锥(底面为正方形各侧面为全等的等腰三角形)的体积为 12，底面对角线的长为 $2\sqrt{6}$，求侧面与底面所成的二面角的度数.

解：如图所示，设正四棱锥为 S-$ABCD$，高为 h，底面边长为 a，



则 $2a^2=(2\sqrt{6})^2$，所以 $a^2=12$.

又因为 $\frac{1}{3}a^2h=12$，所以 $h=\frac{36}{a^2}=3$.

如图，设 O 为 S 在底面上的射影，作 $OE\perp CD$ 于点 E，连接 SE，可知 $SE\perp CD$，则 $\angle SEO$ 为所求二面角的平面角.

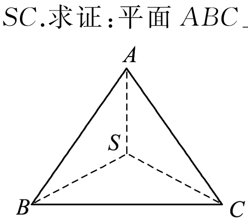
在 Rt$\triangle SOE$ 中，$\tan\angle SEO=\frac{h}{\frac{a}{2}}=\frac{3\times2}{\sqrt{12}}=\frac{2\times3}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}$，

所以 $\angle SEO=60°$.

所以侧面与底面所成二面角的度数为 $60°$.

学习任务二　证明两个平面垂直

例 2　如图，已知 $\angle BSC=90°$，$\angle BSA=\angle CSA=60°$，$SA=SB=SC$.求证：平面 $ABC\perp$ 平面 SBC.



证明：因为 $\angle BSA=\angle CSA=60°$，$SA=SB=SC$，所以 $\triangle ASB$ 和 $\triangle ASC$ 都是等边三角形，则有 $SA=SB=SC=AB=AC$，则 $\triangle ABC$ 和 $\triangle SBC$ 为共底边 BC 的等腰三角形.设 $SA=SB=SC=AB=AC=a$.

取 BC 的中点 D，连接 AD，SD(图略)，

则 $AD\perp BC$，$SD\perp BC$，

所以$\angle ADS$为二面角$A\text{-}BC\text{-}S$的平面角.

在$Rt\triangle BSC$中,因为$SB=SC=a$.

所以$SD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,$BD=\frac{BC}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

在$Rt\triangle ABD$中,$AD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

在$\triangle ADS$中,因为$SD^2+AD^2=SA^2$,所以$\angle ADS=90^\circ$,即二面角$A\text{-}BC\text{-}S$为直二面角.

故平面$ABC\perp$平面SBC.

反思提炼

证明平面与平面垂直的方法

(1)利用定义:证明二面角的平面角为直角.

基本步骤是:

①找出两相交平面所成二面角的平面角;

②证明这个平面角是直角;

③根据定义,这两个相交平面互相垂直.

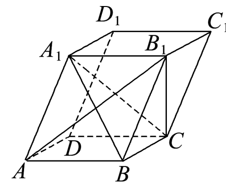
(2)利用面面垂直的判定定理:要证面面垂直,只需证线面垂直,即在其中一个平面内寻找一条直线与另一个平面垂直.

探究训练

如图,在平行六面体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中,$AA_1=AB$,$AB_1\perp B_1C_1$.求证:

(1)AB∥平面A_1B_1C;

(2)平面$ABB_1A_1\perp$平面A_1BC.



证明:(1)在平行六面体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中,易知$AB\parallel A_1B_1$.

因为$AB\not\subset$平面A_1B_1C,$A_1B_1\subset$平面A_1B_1C,

所以$AB\parallel$平面A_1B_1C.

(2)在平行六面体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中,四边形ABB_1A_1为平行四边形.

因为$AA_1=AB$,所以四边形ABB_1A_1为菱形,

所以$AB_1\perp A_1B$.

因为$AB_1\perp B_1C_1$,$BC\parallel B_1C_1$,所以$AB_1\perp BC$.

因为$A_1B\cap BC=B$,$A_1B\subset$平面A_1BC,$BC\subset$平面A_1BC,

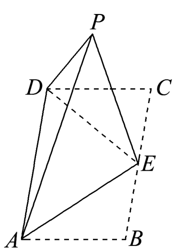
所以$AB_1\perp$平面A_1BC.

因为$AB_1\subset$平面ABB_1A_1,

所以平面$ABB_1A_1\perp$平面A_1BC.

学习任务三 折叠问题

例3 如图,在矩形$ABCD$中,$AB=\sqrt{2}$,$BC=2$,E为BC的中点,把$\triangle ABE$和$\triangle CDE$分别沿AE,DE折起,使点B与点C重合于点P.



(1)求证:平面$PDE\perp$平面PAD;

(2)求二面角$P\text{-}AD\text{-}E$的大小.

(1)**证明**:因为四边形$ABCD$为矩形,

所以$AB\perp BE$,所以$AP\perp PE$.

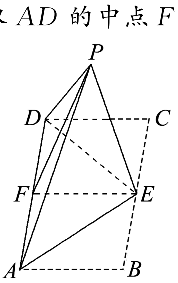
同理$DP\perp PE$.

因为$AP\cap DP=P$,所以$PE\perp$平面PAD.

又$PE\subset$平面PDE,

所以平面$PDE\perp$平面PAD.

(2)**解**:如图所示,取AD的中点F,连接PF,EF,



则易知$PF\perp AD$,$EF\perp AD$,

所以$\angle PFE$就是二面角$P\text{-}AD\text{-}E$的平面角.

又$PE\perp$平面PAD,$PF\subset$平面PAD,所以$PE\perp PF$.

因为$EF=AB=\sqrt{2}$,$PE=CE=BE=\frac{1}{2}BC=1$,

所以$PF=\sqrt{(\sqrt{2})^2-1}=1$,

所以$\cos\angle PFE=\frac{PF}{EF}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以二面角$P\text{-}AD\text{-}E$的大小为45°.

反思提炼

求解折叠问题的基本方法

(1)根据题中条件画出立体图形.

(2)比较翻折前后的图形,弄清楚哪些量和位置关系在翻折过程中不变,哪些已发生改变.

(3)将不变的条件集中到立体图形中,将问题归结为一个条件与结论明朗化的立体几何问题.

探究训练

如图1所示,在直角梯形$ABCD$中,$AB\perp BC$,$BC\parallel AD$,$AD=2AB=4$,$BC=3$,E为AD的中点,$EF\perp BC$,垂足为F.沿EF将四边形$ABFE$折起,连接AD,AC,BC,得到如图2所示的六面体$ABCDEF$.已知折起后AB的中点M到点D的距离为3.

(1)求证:平面$ABFE\perp$平面$CDEF$;

(2)求六面体 $ABCDEF$ 的体积.

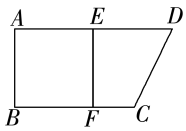


图 1

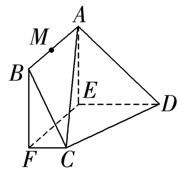


图 2

(1)**证明**:取 EF 的中点 N,连接 MN,DN,MD(图略).

根据题意可知,四边形 $ABFE$ 是边长为 2 的正方形.

又 M,N 分别为 AB,EF 的中点,

所以 $MN\perp EF$,$MN=2$.

由题意得 $DN=\sqrt{DE^2+EN^2}=\sqrt{5}$,又 $MD=3$,

所以 $MN^2+DN^2=2^2+(\sqrt{5})^2=9=MD^2$,

所以 $MN\perp DN$.

又因为 $EF\cap DN=N$,所以 $MN\perp$ 平面 $CDEF$.

又 $MN\subset$ 平面 $ABFE$,所以平面 $ABFE\perp$ 平面 $CDEF$.

(2)**解**:连接 CE(图略),则 $V_{六面体ABCDEF}=V_{四棱锥C\text{-}ABFE}+V_{三棱锥A\text{-}CDE}$.

由(1)知 $MN\perp$ 平面 $CDEF$,

又 $MN/\!/BF/\!/AE$,所以 $BF\perp$ 平面 $CDEF$,$AE\perp$ 平面 $CDEF$,所以 $BF\perp CF$.

又 $CF\perp EF$,$BF\cap EF=F$,

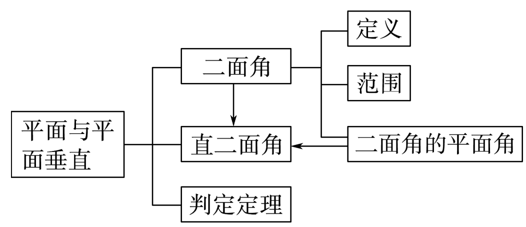
所以 $CF\perp$ 平面 $ABFE$,

所以 $V_{四棱锥C\text{-}ABFE}=\dfrac{1}{3}S_{正方形ABFE}\cdot CF=\dfrac{4}{3}$,

$V_{三棱锥A\text{-}CDE}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle CDE}\cdot AE=\dfrac{4}{3}$,

所以 $V_{六面体ABCDEF}=\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{3}$.

体系构建



课后素养评价(三十四)

基础性·能力运用

1. 下列命题正确的是 ( )

A.若平面 α 和 β 分别过两条互相垂直的直线,则 $\alpha\perp\beta$

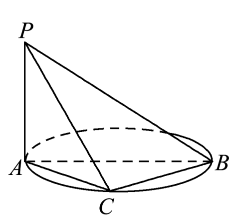
B.若平面 α 内的一条直线垂直于平面 β 内的两条平行直线,则 $\alpha\perp\beta$

C.若平面 α 内的一条直线垂直于平面 β 内的两条相交直线,则 $\alpha\perp\beta$

D.若平面 α 内的一条直线垂直于平面 β 内的无数条直线,则 $\alpha\perp\beta$

C **解析**:当平面 α 和 β 分别过两条互相垂直且异面的直线时,平面 α 和 β 有可能平行,故 A 错;由直线与平面垂直的判定定理知,B,D 错,C 正确.故选 C.

2. 如图,AB 是圆的直径,PA 垂直于圆所在的平面,C 是圆上一点(不同于 A,B)且 $PA=AC$,则二面角 $P\text{-}BC\text{-}A$ 的大小为 ( )



A.60°　　B.30°　　C.45°　　D.15°

C **解析**:因为 $PA\perp$ 平面 ABC,所以 $PA\perp BC$.

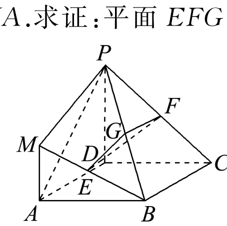
易得 $BC\perp AC$,$PA\cap AC=A$,

所以 $BC\perp$ 平面 PAC,

所以 $BC\perp PC$,所以 $\angle PCA$ 为二面角 $P\text{-}BC\text{-}A$ 的平面角.

在 Rt$\triangle PAC$ 中,$PA=AC$,所以 $\angle PCA=45°$.故选 C.

3. 如图,四边形 $ABCD$ 是正方形,$MA\perp$ 平面 $ABCD$,$PD/\!/MA$,E,G,F 分别为 MB,PB,PC 的中点,且 $AD=PD=2MA$.求证:平面 $EFG\perp$ 平面 PDC.



证明:因为 $MA\perp$ 平面 $ABCD$,$PD/\!/MA$,

所以 $PD\perp$ 平面 $ABCD$.

又 $BC\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $PD\perp BC$.

因为四边形 $ABCD$ 为正方形,所以 $BC\perp DC$.

又 $PD\cap DC=D$,所以 $BC\perp$ 平面 PDC.

在 $\triangle PBC$ 中,G,F 分别为 PB,PC 的中点,

所以 $GF/\!/BC$,所以 $GF\perp$ 平面 PDC.

又 $GF\subset$ 平面 EFG,

所以平面 $EFG\perp$ 平面 PDC.

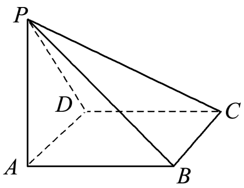
综合性·创新提升

1.过正方形 $ABCD$ 的顶点 A 作线段 $AP\perp$ 平面 $ABCD$，且 $AP=AB$，则平面 ABP 与平面 CDP 所成的锐二面角的度数是（　　）

A.30°　　B.45°

C.60°　　D.90°

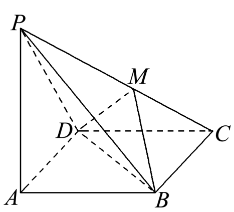
B　**解析**：如图，因为平面 ABP 与平面 CDP 的一个公共点为 P，结合题意可知它们的交线即所成二面角的棱过点 P 且与 AB 平行.因为 $PA\perp AB$，$AB\perp AD$，$PA\cap AD=A$，所以 $AB\perp$ 平面 PAD，所以 $PD\perp AB$.因为 PA，PD 均垂直于所求二面角的棱，即$\angle APD$ 为所求二面角的平面角，大小为 45°.



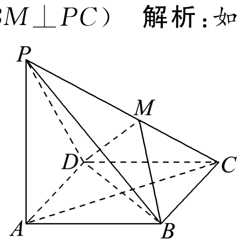
2.（创新开放思维）设 α,β,γ 为三个不同的平面，m,n 为两条不同的直线，给出下列条件：①$m\perp\alpha$，$m\subset\beta$；②$\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$；③$m\perp\alpha$，$m/\!/\beta$；④$m/\!/\alpha$，$n/\!/\beta$，$m\perp n$.其中能使 $\alpha\perp\beta$ 成立的条件是________.（填序号）

①③　**解析**：对于①，若 $m\perp\alpha$，$m\subset\beta$，根据面面垂直的判定定理可知 $\alpha\perp\beta$，正确.对于②，若 $\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则 α,β 可能平行、相交，不一定垂直，错误.对于③，若 $m/\!/\beta$，则 β 内存在一条直线 $m'/\!/m$.因为 $m\perp\alpha$，所以 $m'\perp\alpha$，所以 $\alpha\perp\beta$，正确.对于④，若 $m/\!/\alpha$，$n/\!/\beta$，$m\perp n$，α,β 可能平行、相交，不一定垂直，错误.综上可得，能使 $\alpha\perp\beta$ 成立的条件是①③.

3.（探索性问题）如图所示，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，且底面各边都相等，M 是 PC 上的一动点，当点 M 满足________时，平面 $MBD\perp$ 平面 PCD.（填写一个你认为是正确的条件即可）

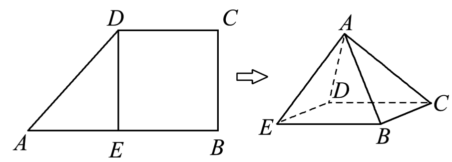


$DM\perp PC$（或 $BM\perp PC$）　**解析**：如图，连接 AC.



因为底面 $ABCD$ 各边都相等，所以 $AC\perp BD$.因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp BD$.又 $AC\cap PA=A$，AC，$PA\subset$ 平面 PAC，所以 $BD\perp$ 平面 PAC.因为 $PC\subset$ 平面 PAC，所以 $BD\perp PC$.所以当 $DM\perp PC$（或 $BM\perp PC$）时，PC 与平面 MBD 内的两条相交直线垂直，即有 $PC\perp$ 平面 MBD.而 $PC\subset$ 平面 PCD，所以平面 $MBD\perp$ 平面 PCD.

4.如图，E 是直角梯形 $ABCD$ 底边 AB 的中点，$AB=2DC=2BC$.将$\triangle ADE$ 沿 DE 折起形成四棱锥 A-$BCDE$.



(1)求证：$DE\perp$ 平面 ABE；

(2)若二面角 A-DE-B 为 60°，求二面角 A-DC-B 的正切值.

(1)**证明**：在直角梯形 $ABCD$ 中，因为 $DC/\!/BE$，且 $DC=BE$，

所以四边形 $BCDE$ 为平行四边形.

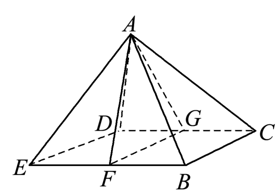
又$\angle B=90^\circ$，从而 $DE\perp EB$，$DE\perp EA$.

又 $EB\cap EA=E$，$EB\subset$ 平面 ABE，$EA\subset$ 平面 ABE，所以 $DE\perp$ 平面 ABE.

(2)**解**：由(1)知，$\angle AEB$ 即二面角 A-DE-B 的平面角，故$\angle AEB=60^\circ$.

又因为 $AE=EB$，所以$\triangle AEB$ 为等边三角形.

设 BE 的中点为 F，CD 的中点为 G，连接 AF，FG，AG.



从而 $AF\perp BE$，$FG/\!/DE$，所以 $AF\perp CD$，$FG\perp CD$.

又 $AF\cap FG=F$，$AF\subset$ 平面 AFG，$FG\subset$ 平面 AFG，

所以 $CD\perp$ 平面 AFG，因此 $CD\perp AG$.

所以$\angle FGA$ 即为所求二面角 A-CD-B 的平面角.

因为 $DE\perp$ 平面 ABE，从而 $FG\perp$ 平面 ABE.

因为 $AF\subset$ 平面 ABE，所以 $FG\perp AF$.

设 $AB=2DC=2BC=2$，所以 $AF=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$FG=1$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AFG$ 中，可求得 $\tan\angle FGA=\frac{AF}{FG}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

即二面角 A-DC-B 的正切值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

第 2 课时　平面与平面垂直的性质

学习任务目标

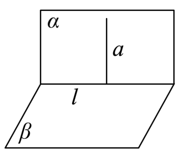
1.理解平面与平面垂直的性质定理及其简单应用.(逻辑推理)

2.掌握平面与平面垂直的性质定理的综合应用.

问题式预习

知识清单

平面与平面垂直的性质定理

文字语言	两个平面垂直,如果一个平面内有一直线垂直于这两个平面的交线,那么这条直线与另一个平面垂直
图形语言	
符号语言	$\left.\begin{array}{l}\alpha\perp\beta\\ \alpha\cap\beta=l\\ a\subset\alpha\\ a\perp l\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp\beta$

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)如果两个平面垂直,那么一个平面内的直线一定垂直于另一个平面.　(×)

(2)如果两个平面垂直,那么经过第一个平面内一点垂直于第二个平面的直线在第一个平面内.　(√)

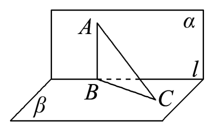
(3)若平面 $\alpha\perp$ 平面 β,平面 $\beta\perp$ 平面 γ,则平面 $\alpha\perp$ 平面 γ.　(×)

2.已知直线 m,n 和平面 α,β,若 $\alpha\perp\beta$,$\alpha\cap\beta=m$,$n\subset\alpha$,要使 $n\perp\beta$,则应增加的条件是　(　　)

A.$m/\!/n$　　B.$n\perp m$　　C.$n/\!/\alpha$　　D.$n\perp\alpha$

B　**解析**:根据平面与平面垂直的性质定理判断.已知直线 m,n 和平面 α,β,若 $\alpha\perp\beta$,$\alpha\cap\beta=m$,$n\subset\alpha$,则应增加条件 $n\perp m$,才能使 $n\perp\beta$.

3.如图,平面 $\alpha\perp$ 平面 β,$\alpha\cap\beta=l$,点 $A\in$ 平面 α,$AB\perp l$,垂足为 B,点 $C\in$ 平面 β.若 $AB=3$,$BC=4$,则 $AC=$________.



5　**解析**:因为平面 $\alpha\perp$ 平面 β,$\alpha\cap\beta=l$,$AB\subset$ 平面 α,$AB\perp l$,

所以 $AB\perp$ 平面 β.因为 $BC\subset$ 平面 β,所以 $AB\perp BC$,

所以 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

4.请思考并回答问题:

(1)如果 $\alpha\perp\beta$,那么 α 内的任意直线必垂直于 β 内的无数条直线吗?

提示:正确.若设 $\alpha\cap\beta=l$,$b\subset\beta$,$b\perp l$,则 $b\perp\alpha$,故 β 内与 b 平行的无数条直线均垂直于 α 内的任意直线.

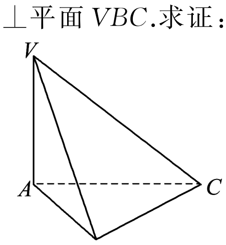
(2)如果 $\alpha\perp\beta$,过 β 内的任意一点作 α 与 β 交线的垂线,那么这条直线必垂直于 α 吗?

提示:错误.垂直于交线的直线必须在平面 β 内才与平面 α 垂直,否则不垂直.

任务型课堂

学习任务一　面面垂直的性质定理的应用

例 1　如图,已知 V 是 $\triangle ABC$ 外一点,$VA\perp$ 平面 ABC,平面 $VAB\perp$ 平面 VBC.求证:$AB\perp BC$.



证明:在平面 VAB 内,过点 A 作 $AD\perp VB$ 于点 D(图略).因为平面 $VAB\perp$ 平面 VBC,且交线为 VB,

所以 $AD\perp$ 平面 VBC,所以 $AD\perp BC$.

因为 $VA\perp$ 平面 ABC,所以 $VA\perp BC$.

因为 $AD\cap VA=A$,且 $VA\subset$ 平面 VAB,$AD\subset$ 平面 VAB,所以 $BC\perp$ 平面 VAB.

因为 $AB\subset$ 平面 VAB,所以 $AB\perp BC$.

反思提炼

1.平面与平面垂直的转化

在运用面面垂直的性质定理时,若没有与交线垂直的直线,一般需作辅助线,基本作法是在其中一个平面内过一点作交线的垂线,这样便把面面垂直问题转化为线面垂直问题,进而转化为线线垂直问题.

2.平面与平面垂直的其他性质

(1)如果两个平面垂直,那么经过第一个平面内一点垂直于第二个平面的直线在第一个平面内.

(2)如果两个平面垂直,那么与其中一个平面平行的平面垂直于另一个平面.

(3)如果两个平面垂直,那么其中一个平面的垂线平行于另一个平面或在另一个平面内.

探究训练

设平面$\alpha\perp$平面β,点P在平面α内,过点P作平面β的垂线a,试判断直线a与平面α的位置关系.

解:设$\alpha\cap\beta=c$,过点P在平面α内作直线$b\perp c$(图略).

根据平面与平面垂直的性质定理有$b\perp\beta$.

因为过一点有且只有一条直线与平面β垂直,所以直线a与直线b重合,因此$a\subset\alpha$.

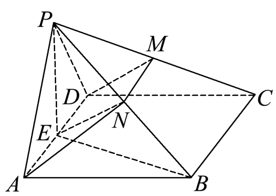
学习任务二 垂直关系的综合应用

例2 如图,在四棱锥P-$ABCD$中,侧面PAD是正三角形,底面$ABCD$是边长为2的菱形,平面PAD与平面$ABCD$垂直,$\angle BAD=60°$,N是PB的中点,过A,D,N三点的平面交PC于M,E为AD的中点.

求证:(1)$EN\parallel$平面PDC;

(2)$BC\perp$平面PEB;

(3)平面$PBC\perp$平面$ADMN$.



证明:(1)因为$AD\parallel BC$,$BC\subset$平面PBC,$AD\not\subset$平面PBC,所以$AD\parallel$平面PBC.

又因为平面$ADMN\cap$平面$PBC=MN$,

所以$AD\parallel MN$.

又因为$BC\parallel AD$,所以$MN\parallel BC$.

又因为N是PB的中点,所以点M为PC的中点,

所以$MN\parallel BC$且$MN=\dfrac{1}{2}BC$.

又因为E为AD的中点,所以$MN\parallel DE$且$MN=DE$,所以四边形$DENM$为平行四边形,所以$EN\parallel DM$.

因为$DM\subset$平面PDC,$EN\not\subset$平面PDC,

所以$EN\parallel$平面PDC.

(2)因为四边形$ABCD$是边长为2的菱形,且$\angle BAD=60°$,E为AD的中点,所以$BE\perp AD$.

又因为侧面PAD是正三角形,所以$PE\perp AD$.

因为$PE\cap BE=E$,所以$AD\perp$平面PEB.

又因为$AD\parallel BC$,所以$BC\perp$平面PEB.

(3)由(2)知$AD\perp$平面PEB,又$PB\subset$平面PEB,所以$AD\perp PB$.

又因为$PA=AB$,N为PB的中点,所以$AN\perp PB$.

因为$AN\cap AD=A$,所以$PB\perp$平面$ADMN$.

又因为$PB\subset$平面PBC,所以平面$PBC\perp$平面$ADMN$.

反思提炼

1.在证明垂直的过程中要注意线线垂直、线面垂直、面面垂直的相互转化.因此,判定定理与性质定理的合理应用是证明垂直的关键.

2.空间问题转化成平面问题是解决立体几何问题的一个基本原则.解题时,要通过几何图形自身的特点,如等腰三角形和等边三角形的“三线合一”,三角形的中位线定理,菱形的对角线互相垂直等,得出一些题目所需要的条件.对于一些较复杂的问题,注意应用转化思想解决问题.

探究训练

1.如图1,在平面四边形$ABCD$中,$AB=BC=CD=a$,$\angle B=90°$,$\angle BCD=135°$.沿对角线AC将四边形折成直二面角,连接BD,如图2.

(1)求证:平面$ABD\perp$平面BCD;

(2)求二面角B-AD-C的大小.

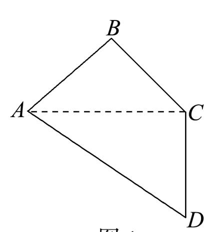


图1

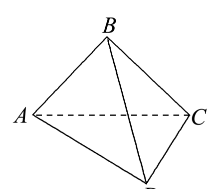


图2

(1)**证明**:由题意得$\angle ACD=135°-45°=90°$,

所以$CD\perp AC$.

已知二面角B-AC-D是直二面角,且平面$ABC\cap$平面$ADC=AC$,过点B作$BO\perp AC$,垂足为O,如图,

所以 $BO\perp$平面 ACD.

又因为 $CD\subset$平面 ACD,所以 $BO\perp CD$.

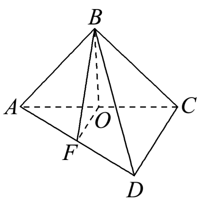
又因为 $AC\cap BO=O$,所以 $CD\perp$平面 ABC.

因为 $AB\subset$平面 ABC,所以 $AB\perp CD$.

因为$\angle ABC=90^{\circ}$,所以 $AB\perp BC$.

又 $BC\cap CD=C$,所以 $AB\perp$平面 BCD.

因为 $AB\subset$平面 ABD,所以平面 $ABD\perp$平面 BCD.



(2)**解**:如图所示,由 $AB=BC$ 知,O 为 AC 的中点,过点 O 作 $OF\perp AD$,垂足为 F,连接 BF.

由(1)知 $BO\perp$平面 ACD,所以 $BO\perp AD$,$BO\perp OF$.

因为 $BO\cap OF=O$,所以 $AD\perp$平面 BOF.

又因为 $BF\subset$平面 BOF,所以 $AD\perp BF$.

所以$\angle BFO$ 是二面角 B-AD-C 的平面角.

因为 $AB=BC=CD=a$,$\angle ABC=90^{\circ}$,

所以 $AC=\sqrt{2}a$,所以 $BO=AO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

由(1)知 $AC\perp CD$,所以 $AD=\sqrt{3}a$.

因为$\triangle AOF\backsim\triangle ADC$,所以$\dfrac{OF}{DC}=\dfrac{AO}{AD}$,

所以 $OF=\dfrac{a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{3}a}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}a$.

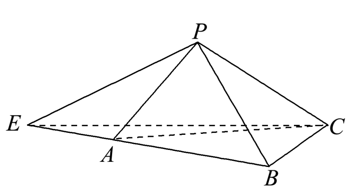
在 $\mathrm{Rt}\triangle BOF$ 中,$\tan\angle BFO=\dfrac{BO}{OF}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{6}}{6}a}=\sqrt{3}$,

所以$\angle BFO=60^{\circ}$,即二面角 B-AD-C 的大小为 60°.

2.如图,在三棱锥 P-ABC 中,$PA\perp$平面 PBC,$PA=PB=2$,$PC=4$,$BC=2\sqrt{3}$.

(1)求证:平面 $PAB\perp$平面 ABC;

(2)点 E 为 BA 的延长线上一点,若二面角 P-EC-B 的大小为 30°,求 BE 的长.



(1)**证明**:因为 $PA\perp$平面 PBC,

所以 $PA\perp PC$,$PA\perp PB$,$PA\perp BC$.

经计算,得 $AC=2\sqrt{5}$,$AB=2\sqrt{2}$,

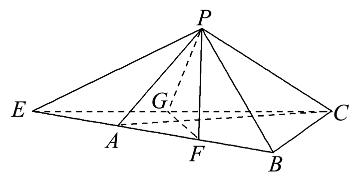
所以 $AB^2+BC^2=AC^2$,所以$\angle ABC=90^{\circ}$.

故 $BC\perp AB$.

因为 $PA\cap AB=A$,所以 $BC\perp$平面 PAB.

又因为 $BC\subset$平面 ABC,所以平面 $PAB\perp$平面 ABC.

(2)**解**:如图,取 AB 的中点为 F,连接 PF.



因为 $PA=PB$,所以 $PF\perp AB$.

由(1)知平面 $PAB\perp$平面 ABC,

又平面 $PAB\cap$平面 $ABC=AB$,$PF\subset$平面 PAB,

所以 $PF\perp$平面 ABC,$PF\perp EC$.

过点 F 作 $FG\perp EC$ 于点 G,连接 PG.

因为 $PF\perp EC$,$PF\cap FG=F$,

所以 $EC\perp$平面 FPG.

因为 $PG\subset$平面 FPG,

所以 $EC\perp PG$.

于是$\angle PGF$ 是二面角 P-EC-B 的平面角,

即$\angle PGF=30^{\circ}$.

又 $PF=\sqrt{PA^2-AF^2}=\sqrt{PA^2-\left(\frac{1}{2}AB\right)^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$,$PF\perp FG$,

所以 $FG=\sqrt{6}$.

设 $BE=x(x>2\sqrt{2})$,由(1)知 $BC\perp AB$,

所以$\triangle EFG\backsim\triangle ECB$,得$\dfrac{FG}{CB}=\dfrac{EF}{EC}$.

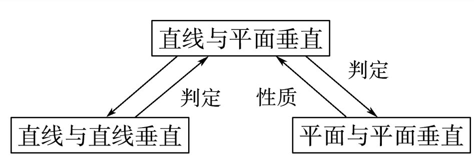
所以$\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+12}}$,

即 $x^2-4\sqrt{2}x-8=0$,

解得 $x=2\sqrt{2}+4$($x=2\sqrt{2}-4$ 舍去).

所以 $BE=2\sqrt{2}+4$.

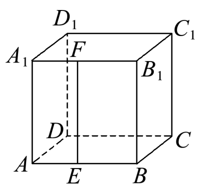
体系构建



课后素养评价(三十五)

基础性·能力运用

1. 如图,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AB 上任取一点 E,作 $EF\perp A_1B_1$ 于点 F,则 EF 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的关系是 ( )



A.平行

B.$EF\subset$平面 $A_1B_1C_1D_1$

C.相交但不垂直

D.垂直

D **解析**:由题意可得,在正方体中,平面 $ABB_1A_1\perp$平面 $A_1B_1C_1D_1$,所以根据面面垂直的性质定理可知,EF 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 相交且垂直.故选 D.

2. 已知平面 $\alpha\perp$平面 β,直线 $l\perp$平面 α,则 l 与 β 的位置关系是 ( )

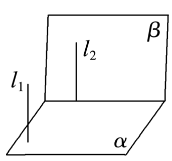
A.垂直

B.平行

C.$l\subset\beta$

D.平行或 $l\subset\beta$

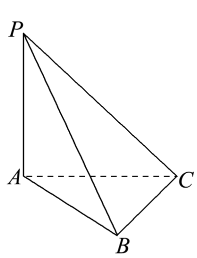
D **解析**:如图,$l/\!/\beta$ 或 $l\subset\beta$.故选 D.



3. (数学文化题)《九章算术》中提及的"鳖臑"即四个面均为直角三角形的三棱锥,则"鳖臑"中相互垂直的平面有 ( )

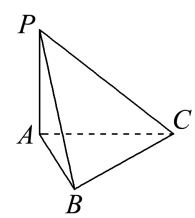
A.4 对 B.3 对 C.2 对 D.1 对

B **解析**:根据题意,"鳖臑"如图所示,其中 $PA\perp AB$,$PA\perp AC$,$AB\perp BC$,$PB\perp BC$.



由 $PA\perp AB$,$PA\perp AC$,且 $AB\cap AC=A$,得 $PA\perp$平面 ABC.又 $PA\subset$平面 PAB,$PA\subset$平面 PAC,所以平面 $PAB\perp$平面 ABC,平面 $PAC\perp$平面 ABC.由 $BC\perp AB$,$BC\perp PB$,且 $AB\cap PB=B$,得 $BC\perp$平面 PAB.又 $BC\subset$平面 PBC,所以平面 $PBC\perp$平面 PAB.所以"鳖臑"中相互垂直的平面有 3 对.故选 B.

4. (多选题)如图,在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中,平面 $PAB\perp$平面 ABC,平面 $PAC\perp$平面 ABC,则 ( )



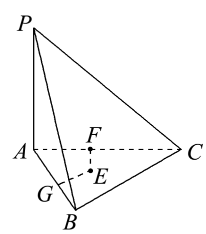
A.$AP\perp AC$

B.$AP\perp AB$

C.$AP\perp$平面 ABC

D.AP 与 BC 所成的角为 45°

ABC **解析**:如图所示,在$\triangle ABC$ 中,任取一点 E,作 $EF\perp AC$ 于 F,$EG\perp AB$ 于 G.



因为平面 $PAB\perp$平面 ABC,平面 $PAC\perp$平面 ABC,

平面 $PAB\cap$平面 $ABC=AB$,平面 $PAC\cap$平面 $ABC=AC$,

所以 $EG\perp$平面 PAB,$EF\perp$平面 PAC.

由于 $PA\subset$平面 PAB,$PA\subset$平面 PAC,

所以 $EG\perp PA$,$EF\perp PA$.又 $EF\cap EG=E$,

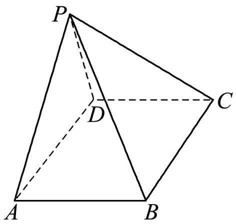
所以 $PA\perp$平面 ABC.

又 $AB,AC,BC\subset$平面 ABC,

所以 $PA\perp AC$,$PA\perp AB$,$PA\perp BC$.

故 A,B,C 正确,D 错误.故选 ABC.

5.(多选题)如图,在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为矩形,平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$,则　(　　)



A.平面 $PAB\perp$平面 PAD

B.平面 $PAD\perp$平面 PDC

C.$AB\perp PD$

D.平面 $PAD\perp$平面 PBC

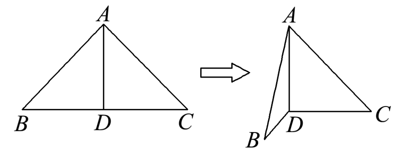
ABC　**解析**:因为平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$,四边形 $ABCD$ 为矩形,所以 $AD\perp AB$,所以 $AB\perp$平面 PAD.

所以 $AB\perp PD$.又 $AB\subset$平面 PAB,所以平面 $PAB\perp$平面 PAD.故 A,C 正确.

同理可证平面 $PAD\perp$平面 PDC.故 B 正确.

D 显然不正确.故选 ABC.

6.如图,$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形,$\angle BAC=90°$,$AB=AC=1$,将$\triangle ABC$ 沿斜边 BC 上的高 AD 折叠,使平面 $ABD\perp$平面 ACD,则折叠后 $BC=$________.



1　**解析**:由题意知,$BD\perp AD$,$CD\perp AD$,

所以$\angle BDC$ 为二面角 $B\text{-}AD\text{-}C$ 的平面角.由于平面 $ABD\perp$平面 ACD,所以$\angle BDC=90°$.

连接 BC(图略),则 $BC=\sqrt{BD^2+DC^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$.

综合性·创新提升

1.已知 m,n 是两条不重合的直线,α,β 是两个不重合的平面,下面四个结论中正确的是　(　　)

A.若 $m\subset\alpha$,$n\subset\beta$,$m\perp n$,则 $\alpha\perp\beta$

B.若 $m/\!/\alpha$,$m\perp n$,则 $n\perp\alpha$

C.若 $m\perp n$,$m\perp\beta$,则 $n/\!/\beta$

D.若 $m\perp\alpha$,$m/\!/n$,$n\perp\beta$,则 $\alpha/\!/\beta$

D　**解析**:A 中,$m\subset\alpha$,$n\subset\beta$,$m\perp n$,可得 α 与 β 相交或平行,故 A 错;B 中,$m/\!/\alpha$,$m\perp n$,可得 $n\perp\alpha$ 或 $n\subset\alpha$ 或 $n/\!/\alpha$ 或 n 与 α 斜交,故 B 错;C 中,$m\perp n$,$m\perp\beta$,则 $n/\!/\beta$ 或 $n\subset\beta$,故 C 错;D 中,$m\perp\alpha$,$m/\!/n$,则 $n\perp\alpha$,又 $n\perp\beta$,则 $\alpha/\!/\beta$,故 D 正确.

故选 D.

2.已知平面 α,β,γ,则下列命题中正确的是　(　　)

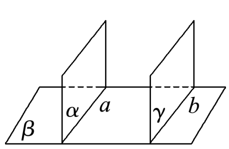
A.若 $\alpha\perp\beta$,$\beta\perp\gamma$,则 $\alpha/\!/\gamma$

B.若 $\alpha/\!/\beta$,$\beta\perp\gamma$,则 $\alpha\perp\gamma$

C.若 $\alpha\cap\beta=a$,$\beta\cap\gamma=b$,$\alpha\perp\beta$,$\beta\perp\gamma$,则 $a\perp b$

D.若 $\alpha\perp\beta$,$\alpha\cap\beta=a$,$a\perp b$,则 $b\perp\alpha$

B　**解析**:A 中,α,γ 可以相交;C 中,如图,a 与 b 不一定垂直;D 中,b 仅垂直于α 内的一条直线 a,不能判定 $b\perp\alpha$.故选 B.



3.已知平面 $\alpha\perp$平面 β,$\alpha\cap\beta=l$,点 $A\in\alpha$,$A\notin l$,直线 $AB/\!/l$,直线 $AC\perp l$,直线 $m/\!/\alpha$,$m/\!/\beta$,则下列四种位置关系中,不一定成立的是　(　　)

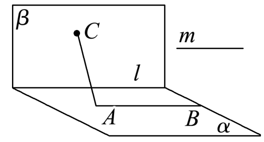
A.$AB/\!/m$

B.$AC\perp m$

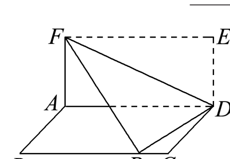
C.$AB/\!/\beta$

D.$AC\perp\beta$

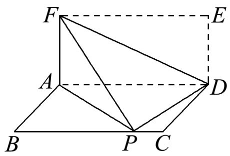
D　**解析**:如图,$AB/\!/l/\!/m$,A 正确;$AC\perp l$,$m/\!/l\Rightarrow AC\perp m$,B 正确;$AB/\!/l\Rightarrow AB/\!/\beta$,C 正确.故选 D.



4.(创新解法)如图,已知矩形 $ABCD$ 与矩形 $ADEF$ 所在平面互相垂直,$AB=1$,若将$\triangle DEF$ 沿着直线 FD 翻折,使得点 E 落在边 BC 上(即点 P),则当 AD 取最小值时,边 AF 的长是________.



$\sqrt{2}$ **解析**：如图，连接 AP，

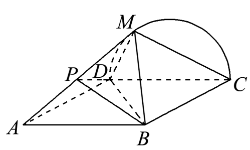


因为矩形 $ABCD$ 与 $ADEF$ 所在平面互相垂直，即平面 $ABCD\perp$平面 $ADEF$，又平面 $ABCD\cap$平面 $ADEF=AD$，$AF\perp AD$，$AF\subset$平面 $ADEF$，所以 $AF\perp$平面 $ABCD$，所以 $AF\perp DP$.又 $DP\perp FP$，且 $AF\cap FP=F$，AF，$FP\subset$平面 AFP，所以 $DP\perp$平面 AFP.因为 $AP\subset$平面 AFP，所以 $AP\perp DP$，所以$\triangle ABP\backsim\triangle PCD$.设 $PC=x$，$AD=BC=a$，所以 $\dfrac{AB}{BP}=\dfrac{PC}{CD}$，得 $\dfrac{1}{a-x}=\dfrac{x}{1}$，所以 $a=x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$，当且仅当 $x=\dfrac{1}{x}$，即 $x=1$ 时取等号，此时 $DP=\sqrt{2}$，所以 $AF=\sqrt{2}$.

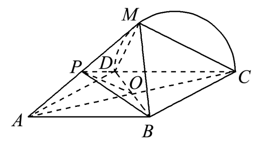
5.如图，平行四边形 $ABCD$ 所在平面与半圆弧 CD 所在平面垂直，M 是$\overset{\frown}{CD}$上异于 C，D 的点，P 为线段 AM 的中点，$AB=\sqrt{3}$，$BD=2$，$\angle ABD=30°$.

求证：(1)$MC\parallel$平面 PBD；

(2)平面 $AMD\perp$平面 BMC.



证明：(1)如图所示，连接 AC 交 BD 于点 O，连接 PO，易得 O 为 AC 中点.



又 P 为线段 AM 的中点，则 $OP\parallel CM$.

又 $OP\subset$平面 PBD，$MC\not\subset$平面 PBD，则 $MC\parallel$平面 PBD.

(2)由余弦定理，得 $AD^2=AB^2+DB^2-2AB\cdot DB\cdot\cos\angle ABD$，

即 $AD^2=1$，则 $AD^2+AB^2=BD^2$，则 $AB\perp AD$，

所以平行四边形 $ABCD$ 为矩形，

则 $AD\perp DC$.

又平面 $ABCD\perp$平面 CMD，平面 $ABCD\cap$平面 $CMD=CD$，$AD\subset$平面 $ABCD$，

则 $AD\perp$平面 CMD.

又 $CM\subset$平面 CMD，则 $AD\perp CM$.

又 M 是半圆弧 CD 上的点，则 $CM\perp MD$.

又 $MD\cap AD=D$，MD，$AD\subset$平面 AMD，则 $CM\perp$平面 AMD.

又 $CM\subset$平面 BMC，则平面 $AMD\perp$平面 BMC.

第九章　统计

9.1　随机抽样

9.1.1　简单随机抽样

第1课时　简单随机抽样

学习任务目标

1.了解全面调查与抽样调查的异同.(数学抽象)

2.通过实例,了解简单随机抽样的含义及解决问题的过程.(数学抽象)

3.掌握简单随机抽样中的抽签法、随机数法的一般步骤.(数据分析)

问题式预习

知识清单

1.全面调查和抽样调查

调查方式	全面调查	抽样调查
定义	对每一个调查对象都进行调查的方法,称为全面调查,又称普查	根据一定目的,从总体中抽取一部分个体进行调查,并以此为依据对总体的情况作出估计和推断的调查方法,称为抽样调查
相关概念	总体:调查对象的全体. 个体:组成总体的每一个调查对象	样本:从总体中抽取的那部分个体. 样本量:样本中包含的个体数

2.简单随机抽样的概念

放回简单随机抽样	不放回简单随机抽样
一般地,设一个总体含有 N(N 为正整数)个个体,从中逐个抽取 $n(1\leqslant n<N)$个个体作为样本	
如果抽取是放回的,且每次抽取时总体内的各个个体被抽到的概率都相等,我们把这样的抽样方法叫做放回简单随机抽样	如果抽取是不放回的,且每次抽取时总体内未进入样本的各个个体被抽到的概率都相等,我们把这样的抽样方法叫做不放回简单随机抽样

续表

放回简单随机抽样	不放回简单随机抽样
简单随机抽样:放回简单随机抽样和不放回简单随机抽样统称为简单随机抽样.通过简单随机抽样获得的样本称为简单随机样本	

3.实现简单随机抽样的方法

(1)抽签法

先把总体中的个体进行编号,然后把所有编号写在外观、质地等无差别的小纸片(也可以是卡片、小球等)上作为号签,并将这些小纸片放在一个不透明的盒里,充分搅拌.最后从盒中不放回地逐个抽取号签,使与号签上的编号对应的个体进入样本,直到抽足样本所需要的个体数.

(2)随机数法

①先把总体中的个体进行编号,用随机数工具产生与总体中个体数量相等的整数随机数,把产生的随机数作为抽中的编号,并剔除重复的编号,直到抽足样本所需要的个体数.

②产生随机数的方法:用随机试验生成随机数;用信息技术生成随机数.

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)在简单随机抽样中,某一个个体被抽到的可能性与抽取次序有关,第一次抽到的可能性最大. (×)

(2)抽签法中,多人参与抽签,先抽的人抽中某个号签的可能性更大. (×)

(3)抽签法适用于总体中个体数较少的情况,随机数法适用于总体中个体数较多的情况. (√)

(4)在使用随机数法时,各个个体的编号位数要相同. (√)

2.(多选题)下列调查,适合抽样调查的是 (ACD)

A.调查黄河的水质情况

B.调查某化工厂周围5个村庄是否受到污染

C.调查某药品生产厂家生产的一批药品的质量情况

D.针对环保问题进行某一项民意调查

3.请思考并回答问题:

(1)总体与个体、样本与样本容量有什么区别?

提示:总体是调查对象的全体,个体是组成总体的每一个调查对象.样本是总体中抽取的那部分个体,样本容量是样本中包含的个体数.

(2)你认为抽签法有什么优点和缺点?

提示:抽签法的优点是简单易行,当总体中个体数不多时较为方便,缺点是当总体中个体数较多时不便操作.

任务型课堂

学习任务一 简单随机抽样的判断

1.在下列5个抽样中,简单随机抽样的个数是( )

①从无数个个体中抽取50个个体作为样本;

②仓库中有1万支奥运火炬,从中一次性抽取100支火炬进行质量检查;

③某连队从200名党员官兵中,挑选出50名最优秀的官兵参加抗震救灾工作;

④一彩民选号,从装有36个大小、形状都相同的号签的盒子中不放回地抽出6个号签;

⑤箱子里共有100个零件,从中选出10个零件进行质量检验,在抽样操作中,从中任意取出1个零件进行质量检验后,再把它放回箱子里.

A.0 B.1

C.2 D.3

C **解析:**根据简单随机抽样的特点逐个判断.因为简单随机抽样要求被抽取样本的总体的个数是有限的,所以①不是简单随机抽样.②不是简单随机抽样,虽然"一次性抽取"和"逐个抽取"不影响个体被抽到的可能性,但简单随机抽样要求的是"逐个抽取".③不是简单随机抽样,因为50名官兵是从中挑出来的,是最优秀的,每个个体被抽到的可能性不同,所以不符合简单随机抽样中"等可能抽样"的要求.④是简单随机抽样,因为总体中的个体数是有限的,并且是从总体中逐个进行抽取的,所以是不放回、等可能的抽样.⑤是简单随机抽样.综上,④⑤是简单随机抽样.

2.下列问题中,最适合用简单随机抽样方法抽样的是 ( )

A.某电影院有32排座位,每排有40个座位,座位号是1～40,有一次报告会坐满了听众,报告会结束后为听取意见,要留下32名听众进行座谈

B.从10台冰箱中抽出3台进行质量检测

C.某学校有在编人员160人,其中行政人员16人,教师112人,后勤人员32人,教育部门为了解在编人员对学校机构改革的意见,要从中抽取一个容量为20的样本

D.某乡耕地有山地800公顷,丘陵1 200公顷,平地2 400公顷,洼地400公顷,现抽取耕地48公顷来估计全乡耕地平均每公顷的产量

B **解析:**A项的总体量较大,用简单随机抽样的方法比较麻烦;B项的总体量较少,样本量也较少,适合用简单随机抽样的方法;C项由于学校各类人员对这一问题的看法可能差异很大,不宜采用简单随机抽样的方法;D项的总体量较大,且各类耕地的差别很大,也不宜采用简单随机抽样的方法.

反思提炼

简单随机抽样必须具备下列4个特征

(1)被抽取的总体中的个体数 N 是有限的.

(2)抽取的样本是从总体中逐个抽取的.

(3)简单随机抽样是一种放回或不放回抽样.

(4)简单随机抽样是一种等可能的抽样.

如果4个特点有一个不满足,就不是简单随机抽样.

学习任务二　抽签法的应用

例1　某市环保局有各县报送的空气质量材料15份.为了了解全市的空气质量,要从中抽取一个容量为5的样本,试确定用何种方法抽取,请具体实施操作.

解:总体量小,样本量也小,可用抽签法.

步骤如下:

(1)将15份材料用随机方式编号,号码是01,02,03,…,15;

(2)将15个号码分别写在15张相同的小纸条上,揉成小团,制成号签;

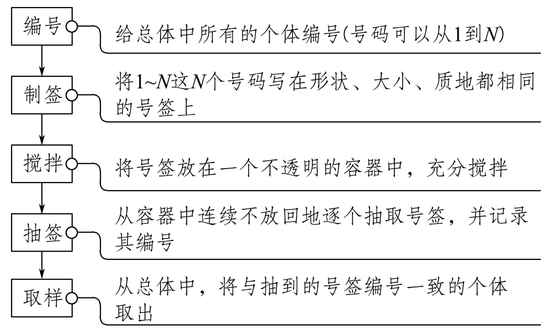
(3)把号签放入一个不透明的容器中,搅拌均匀;

(4)从容器中不放回地逐个抽取5个号签,并记录上面的号码;

(5)找出与所抽号码对应的5份材料,组成样本.

反思提炼

抽签法的五个步骤



探究训练

某校高一年级有43名足球运动员,要从中抽出5人调查学习负担情况,用抽签法设计一个抽样方案.

解:第一步:编号,把43名运动员编号为1～43;

第二步:制签,做好外观、质地相同的号签,分别写上这43个数;

第三步:搅拌,将这些号签放在暗箱中,进行充分搅拌;

第四步:抽签入样,每次从中抽取一个,连续抽取5次(不放回抽取),从而得到容量为5的简单随机样本.

学习任务三　随机数法及其综合应用

例2　某公司要检查某个时间段生产的某种袋装牛奶的质量是否达标,现从500袋这种牛奶中抽取10袋进行检验.

(1)利用随机数法抽取样本时,应如何操作?

(2)如果用随机试验生成部分随机数如下所示,据此写出应抽取的袋装牛奶的编号.

162,277,943,949,545,354,821,737,932,354,873,520,964,384,263,491,648,642,175,331,572,455,068,877,047,447,672,172,065,025,834,216,337,663,013,785,916,955,567,199,810,507,175,128,673,580,667.

解:(1)第一步,将500袋牛奶编号为001,002,…,500;

第二步,用随机数工具产生1～500范围内的随机数;

第三步,把产生的随机数作为抽中的编号,使编号对应的袋装牛奶进入样本;

第四步,重复上述过程,直到产生不同的编号个数等于样本所需要的数量.

(2)应抽取的袋装牛奶的编号为162,277,354,384,263,491,175,331,455,068.

探究训练

总体由编号为01,02,…,19,20的20个个体组成,利用下面的随机数表选取5个个体,选取方法:从随机数表第1行的第5列和第6列数字开始由左到右一次选取两个数字,则选出来的第5个个体的编号为 (　　)

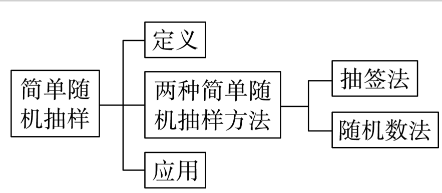
7816	6572	0802	6314	0702	4369
9728	0198	3204	9234	4935	8200
3623	4869	6938	7481		

A.08　　　　B.07

C.02　　　　D.01

D　**解析**:从随机数表第1行的第5列和第6列数字开始由左到右一次选取两个数字开始向右读,第一个数为65,不符合条件,第二个数为72,不符合条件,第三个数为08,符合条件,以下符合条件的数字依次为02,14,07,01,故第5个个体的编号为01.故选D.

体系构建



课后素养评价(三十六)

基础性·能力运用

1.(多选题)从某年级的500名学生中抽取60名学生进行体重的统计分析,下列说法正确的是 ( )

A.500名学生的体重是总体

B.每个学生是个体

C.抽取的60名学生的体重是一个样本

D.抽取的60名学生的体重是样本量

AC **解析**:由题意可知在此抽样调查中,总体是500名学生的体重,所以A正确;个体是每个学生的体重,所以B错误;样本是抽取的60名学生的体重,所以C正确;其中样本容量为60,所以D错误.故选AC.

2.高一某班有30位同学,把他们依次编号为01,02,…,29,30,现利用下面的随机数表选取6位同学组建"文明校园督查组".选取方法是从随机数表第1行第5列的数字开始,由左到右每次选取两个数字,则选出来的第6位同学的编号为 ( )

41792 71635 86089 32157 95620

92109 29145 74955 82835 98378

83513 47870 20799 32122

A.29 B.21 C.14 D.09

A **解析**:从随机数表第1行第5列的数字开始,由左到右依次选取两个数字分别为27,16,35(舍去),86(舍去),08,93(舍去),21,57(舍去),95(舍去),62(舍去),09,21(舍去),09(舍去),29.故最终取得的第6个数字为29.故选A.

3.用抽签法进行抽样有以下几个步骤:①制签;②抽签;③将签摇匀;④编号;⑤将抽取的号码对应的个体取出,组成样本.这些步骤的正确顺序为________.(填序号)

④①③②⑤ **解析**:由抽签法的步骤知,正确顺序为④①③②⑤.

综合性·创新提升

1.用简单随机抽样方法从含有10个个体的总体中抽取一个容量为3的样本,其中某一个体"第一次被抽到"的可能性、"第二次被抽到"的可能性分别是 ( )

A.$\frac{1}{10},\frac{1}{10}$ B.$\frac{3}{10},\frac{1}{5}$

C.$\frac{1}{5},\frac{3}{10}$ D.$\frac{3}{10},\frac{3}{10}$

A **解析**:简单随机抽样中每个个体被抽取的机会均等,都为$\frac{1}{10}$.故选A.

2.下列调查适合用抽样调查的是________.(填序号)

①了解某电视机厂生产的电视机的质量;

②语文老师要检查某个学生作文中的错别字;

③某部门要了解某个湖泊的水质情况;

④调查某市高中生对健康知识的了解情况.

①③④ **解析**:①某电视机厂生产的电视机很多,普查费时费力,且具有破坏性,应采用抽样调查;②错别字是必须纠正的,应采用普查;③湖水不能全部分析,应采用抽样调查;④高中生较多,调查结果不需要非常精确,应采用抽样调查.

3.一名交警在路上随机观测了6辆车的行驶速度,然后做出了一份调查报告,结果如下表:

车序号	1	2	3	4	5	6
速度/(km/h)	66	65	71	54	69	58

(1)交警采取的是________调查方式.

(2)为了强调调查目的,这次调查的样本是________,个体是________.

(1)抽样 (2)6辆车的行驶速度 每一辆车的行驶速度 **解析**:(1)此种调查是抽样调查,调查对象是车的行驶速度.

(2)这次调查的样本是6辆车的行驶速度,个体是每一辆车的行驶速度.

4.利用简单随机抽样的方法,从n个个体($n>13$)中抽取13个个体,若第二次抽取时,余下的每个个体被抽到的概率为$\frac{1}{3}$,则在整个抽样过程中,每个个体被抽到的可能性为________.

$\frac{13}{37}$ **解析**:第二次抽取时,余下的每个个体被抽取到的概率为$\frac{1}{3}$,则$\frac{13-1}{n-1}=\frac{1}{3}$,即$n-1=36$,得$n=37$.所以在整个抽样过程中,每个个体被抽取到的概率为$\frac{13}{37}$.

第 2 课时　平均数

学习任务目标

1. 了解总体均值、样本均值的定义和计算公式.(数学运算)
2. 能用样本均值估计总体均值.(数据分析)

问题式预习

知识清单

1. 总体均值:一般地,总体中有 N 个个体,它们的变量值分别为 Y_1, Y_2, …, Y_N,则称 $\overline{Y}=\dfrac{Y_1+Y_2+\cdots+Y_N}{N}=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}Y_i$ 为总体均值,又称总体平均数.
2. 总体均值加权平均数的形式:如果总体的 N 个变量值中,不同的值共有 $k(k\leqslant N)$ 个,不妨记为 Y_1, Y_2, …, Y_k,其中 Y_i 出现的频数为 $f_i(i=1,2,\cdots,k)$,则总体均值还可以写成加权平均数的形式 $\overline{Y}=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{k}f_iY_i$.
3. 如果从总体中抽取一个容量为 n 的样本,它们的变量值分别为 y_1, y_2, …, y_n,则称 $\overline{y}=\dfrac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$ 为样本均值,又称样本平均数.

概念辨析

1. 判断正误(正确的打"√",错误的打"×").
   (1)样本均值就是总体均值.　(×)
   (2)样本量越大,样本均值越接近总体均值.　(√)
   (3)一个样本数据为 13,14,19,x,23,27,28,31,若其平均数为 22,则 $x=21$.　(√)
   (4)若两组数 x_1, x_2, …, x_n 和 y_1, y_2, …, y_n 的平均数分别为 $\overline{x}$ 和 $\overline{y}$,则数据 x_1+y_1, x_2+y_2, …, x_n+y_n 的平均数是 $\overline{x}+\overline{y}$.　(√)
2. 用抽签法抽取一个样本量为 5 的样本,它们的变量值分别为 2,4,5,7,9,则该样本的平均数为(　　)
   A.4.5　　B.4.8　　C.5.4　　D.6
   C　**解析**:$\overline{x}=\dfrac{2+4+5+7+9}{5}=5.4$.
3. 请思考并回答问题:
   样本均值与总体均值有什么关系?
   提示:(1)在简单随机抽样中,我们常用样本均值去估计总体均值;
   (2)总体均值是一个确定的数,样本均值具有随机性;
   (3)一般情况,样本容量越大,估计的总体均值越准确.

任务型课堂

学习任务一　总体均值、样本均值的计算

例 1　某歌手参加比赛,9 名评委的评分结果为 87,91,90,87,90,94,99,$90+x$,91,其中 $90+x$ 是模糊成绩.若去掉一个最高分,去掉一个最低分,剩余 7 个分数的平均数为 91,则 $90+x$ 是多少?

解:去掉的最低分为 87,最高分为 99,剩余 7 个数为 87,90,90,91,91,$90+x$,94.由 7 个剩余分数的平均数为 91,得 $87+90+90+91+91+90+x+94=91\times7$,解得 $x=4$,所以所求的分数是 94.

[一题多思]

思考 1. 将本例中剩余的 7 个评分结果记为 x_1, x_2, …, x_7,则 $2x_1-90$, $2x_2-90$, …, $2x_7-90$ 的平均数是多少?

解:$\dfrac{1}{7}\times(2x_1-90+2x_2-90+\cdots+2x_7-90)$

$=\dfrac{1}{7}\times[2(x_1+x_2+\cdots+x_7)-90\times7]$

$=2\times\dfrac{1}{7}\times(x_1+x_2+\cdots+x_7)-90$

$=2\times\dfrac{1}{7}\times91\times7-90=2\times91-90=92$.

思考 2. 根据思考 1,想一想:若 x_1, x_2, x_3, …, x_n 的平均数为 $\overline{x}$,则 ax_1+b, ax_2+b, ax_3+b, …, ax_n+b 的平均数是多少?

解:$a\overline{x}+b$.

反思提炼

利用公式求平均数的注意点

平均数反映了一组数据的整体水平,平均数的大小与一组数据中每个数据均有联系,任何一个数据的变动都会引起平均数的变动.所以求平均数时,要将每个数据准确代入.

探究训练

随机抽取的某商场4月某5天的营业额(单位:万元)分别为3.4,2.9,3.0,3.1,2.6,则这个商场4月的营业额大约是多少万元?

解:因为 $\overline{x}=\frac{1}{5}\times(3.4+2.9+3.0+3.1+2.6)=3$,所以这个商场4月的营业额大约是 $3\times30=90$(万元).

学习任务二 用样本均值估计总体均值

例2 某校为调查全校学生的睡眠时间,从全体学生中用随机数法抽取了一个容量为100的简单随机样本,他们的日睡眠时间(单位:h)情况如下表:

日睡眠时间/h	[6,6.5)	[6.5,7)	[7,7.5)	[7.5,8)	[8,8.5)	[8.5,9)	合计
人数	5	17	33	37	6	2	100

试计算这100名学生的日平均睡眠时间并由此估计该校学生的日平均睡眠时间.

解:以日睡眠时间区间的中点值为代表值,则这100名学生的日平均睡眠时间为

$$\frac{1}{100}\times(5\times6.25+17\times6.75+33\times7.25+37\times7.75+6\times8.25+2\times8.75)=\frac{1}{100}\times739=7.39(\text{h}).$$

所以估计该校学生的日平均睡眠时间为7.39 h.

反思提炼

1.计算数据的加权平均数,需理解组中值的意义和数据的“权”的意义.

2.用样本的平均数估计总体的平均数,体现了重要的统计思想.

探究训练

1.用简单随机抽样的方法抽取某小区20户家庭的日均用电量(单位:kW·h),统计如下:

日均用电量/(kW·h)	4	5	6	7	8	10
户数	1	2	4	6	5	2

根据样本数据估计,该小区200户家庭日均用电量的平均数 ( )

A.一定为7 kW·h

B.一定高于8 kW·h

C.一定低于7 kW·h

D.约为7 kW·h

D **解析**:因为抽取的20户家庭的日均用电量的平均数为 $\frac{4\times1+5\times2+6\times4+7\times6+8\times5+10\times2}{20}=7$(kW·h),所以可以估计该小区200户家庭的日均用电量的平均数约为7 kW·h.故选D.

2.某灯泡厂为检测一批灯泡的使用寿命,从中随机抽查了20只灯泡,它们的使用寿命(单位:h)如下所示:

624 847 1 205 698 1 845 2 457 618

1 325 1 908 2 426 2 018 2 248 2 465

2 576 987 737 1 628 1 998 2 543 2 007

由这些样本数据,估计这批灯泡的平均使用寿命.

解:抽出的20只灯泡的使用寿命组成一个样本,可以用样本的平均使用寿命来估计这批灯泡的平均使用寿命.

根据题中数据,可得样本的平均值为1 658 h.

因此可以估计这批灯泡的平均使用寿命是1 658 h.

体系构建

总体均值

样本均值

用样本均值估计总体均值的方法

课后素养评价(三十七)

基础性·能力运用

1.从全校 2 000 名小学女生中用随机数法抽取 300 名调查其身高,得到样本的平均数为 148.3 cm,则可以推测该校小学女生的平均身高 (　　)

A.一定为 148.3 cm

B.高于 148.3 cm

C.低于 148.3 cm

D.约为 148.3 cm

D　**解析**:由抽样调查的意义可以知道该校女生的平均身高约为 148.3 cm.故选 D.

2.若数据 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的平均数为 5,则数据 $2x_1-1,2x_2-1,\cdots,2x_6-1$ 的平均数为 (　　)

A.10　　B.9　　C.8　　D.6

B　**解析**:由已知条件得$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_6}{6}=5$,

则新数据的平均数为

$\frac{(2x_1-1)+(2x_2-1)+\cdots+(2x_6-1)}{6}$

$=\frac{2(x_1+x_2+\cdots+x_6)-6}{6}$

$=2\times\frac{x_1+x_2+\cdots+x_6}{6}-1$

$=2\times5-1=9$.故选 B.

3.某工厂抽取 50 个机械零件检验其直径大小,得到如下数据:

直径/cm	12	13	14
频数	12	34	4

则这 50 个零件的直径的平均数为________cm.

12.84　**解析**:设这 50 个零件的直径的平均数为 $\overline{y}$,

则 $\overline{y}=\frac{12\times12+13\times34+14\times4}{50}=12.84(\text{cm})$.

4.某展览馆在全年中随机抽取的 22 天里每天进馆参观的人数如下:180,158,170,185,189,180,184,185,140,179,192,185,190,165,182,170,190,183,175,180,185,147.可估计全年中该展览馆平均每天的参观人数为________.

177　**解析**:根据题意,可用样本均值近似估计总体均值 $\overline{x}=\frac{1}{22}\times(180+158+170+185+189+180+184+185+140+179+192+185+190+165+182+170+190+183+175+180+185+147)=177$.

综合性·创新提升

1.一位学生在计算 20 个数据的平均数时,错把 68 输成 86,那么由此求出的平均数与实际平均数的差为 (　　)

A.-0.9　　B.0.9　　C.3.4　　D.4.3

B　**解析**:设 20 个数分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_{20}$,且 x_{20} 为输错的数据,

则求出的平均数为$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{19}+86}{20}$,

实际平均数为$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{19}+68}{20}$,

所以求出的平均数与实际平均数的差为$\frac{86-68}{20}=0.9$.故选 B.

2.在一次射击训练中,某小组的成绩如下表所示.

环数	7	8	9
人数	2		3

已知该小组的平均成绩为 8.1 环,那么成绩为 8 环的人数是 (　　)

A.5　　B.6　　C.4　　D.7

A　**解析**:设成绩为 8 环的人数为 x,则有$\frac{7\times2+8x+9\times3}{x+2+3}=8.1$,解得 $x=5$.故选 A.

3.某种作物甲、乙两个品种连续 5 年每年的单位面积平均产量如下(单位:t/km^2):

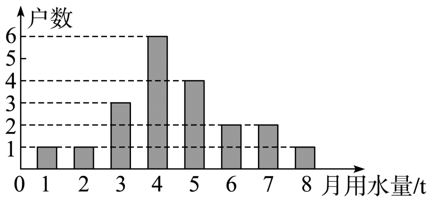
品种	第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年
甲	9.8	9.9	10.1	10	10.2
乙	9.4	10.3	10.8	9.7	9.8

则甲、乙两个品种 5 年的单位面积年平均产量分别为________________.

10 t/km^2,10 t/km^2　**解析**:$\overline{x}_甲=\frac{1}{5}\times(9.8+9.9+10.1+10+10.2)=10(t/km^2)$,$\overline{x}_乙=\frac{1}{5}\times(9.4+10.3+10.8+9.7+9.8)=10(t/km^2)$,

即甲、乙两个品种 5 年的单位面积年平均产量都为10 t/km^2.

4. 为宣传节约用水，小明随机调查了某小区部分家庭5月份的用水情况，并将收集的数据整理成如下统计图.



(1)小明一共调查了多少户家庭?

(2)求所调查家庭5月份用水量的平均数.

(3)若该小区有400户家庭，请你估计这个小区5月份的用水量.

解:(1)$1+1+3+6+4+2+2+1=20$(户),

所以小明一共调查了20户家庭.

(2)$\frac{1}{20}\times(1\times1+2\times1+3\times3+4\times6+5\times4+6\times2+7\times2+8\times1)=4.5$(t),

故所调查家庭5月份用水量的平均数为4.5 t.

(3)$400\times4.5=1\ 800$(t),

估计这个小区5月份的用水量为1 800 t.

9.1.2 分层随机抽样

学习任务目标

1. 理解分层随机抽样的特点和适用范围.(数学抽象)

2. 了解分层随机抽样的必要性，掌握各层样本量比例分配的方法.(数据分析)

3. 结合具体实例，掌握分层随机抽样的样本均值的计算.(数据分析)

问题式预习

知识清单

1.分层随机抽样的定义

一般地，按一个或多个变量把总体划分成若干个子总体，每个个体属于且仅属于一个子总体，在每个子总体中独立地进行简单随机抽样，再把所有子总体中抽取的样本合在一起作为总样本，这样的抽样方法称为分层随机抽样，每一个子总体称为层.

2.比例分配

在分层随机抽样中，如果每层样本量都与层的大小成比例，那么称这种样本量的分配方式为比例分配.

3.分层随机抽样的均值

在分层随机抽样中，如果层数分为2层，第1层和第2层包含的个体数分别为M和N，抽取的样本量分别为m和n，第1层和第2层的样本平均数分别为$\overline{x}$和$\overline{y}$，则样本平均数$\overline{\omega}=\frac{M}{M+N}\overline{x}+\frac{N}{M+N}\overline{y}=\frac{m}{m+n}\overline{x}+\frac{n}{m+n}\overline{y}$.

概念辨析

1. 判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").

(1)分层随机抽样中最核心的数据就是抽样比$k=\frac{\text{样本量}}{\text{总体量}}$. (√)

(2)分层随机抽样时，虽然从各层抽取的样本量不一定一样，但是对每一个个体都是公平的. (√)

(3)分层随机抽样有时也需要剔除若干个个体，对这些个体来说是不公平的. (×)

(4)在统计实践中选择哪种抽样方法关键是看总体量的大小. (×)

2. 某单位有职工160人，其中业务员104人，管理人员32人，后勤服务人员24人，现用比例分配的分层随机抽样的方法从中抽取一个容量为20的样本，则抽取的管理人员有 ( )

A.3人 B.4人 C.7人 D.12人

B **解析**:由题意得$\frac{20}{160}=\frac{1}{8}$，设抽取的管理人员有$x$人，则$\frac{x}{32}=\frac{1}{8}$，得$x=4$.故选B.

3. 请思考并回答问题:

(1)分层随机抽样的总体具有什么特征?

提示:分层随机抽样的总体按一个或多个变量划分成若干个子总体，并且每一个个体属于且仅属于一个子总体.

(2)在分层随机抽样中，总体的个体数、样本容量、各层的个体数、各层抽取的样本数这四者之间有什么关系?

提示:设总体的个体数为N，样本容量为n，第i($i=1,2,3,\cdots,k$)层的个体数为N_i，各层抽取的样本的容量为n_i，则$\frac{n_i}{N_i}=\frac{n}{N}$.这四者中，已知其中三个可以求出另外一个.

任务型课堂

学习任务一　对分层随机抽样概念的理解

1.在 100 个零件中,有一级品 20 个,二级品 30 个,三级品 50 个,从中抽取 20 个作为样本.

方法 1:采用简单随机抽样的方法,将零件编号 00,01,02,…,99,用抽签法抽取 20 个.

方法 2:采用分层随机抽样的方法,从一级品中随机抽取 4 个,从二级品中随机抽取 6 个,从三级品中随机抽取 10 个.

对于上述问题,下列说法正确的是　(　　)

①不论采用哪种抽样方法,这 100 个零件中每一个零件被抽到的可能性都是$\frac{1}{5}$;

②采用不同的方法,这 100 个零件中每一个零件被抽到的可能性各不相同;

③在上述两种抽样方法中,方法 2 抽到的样本比方法 1 抽到的样本更能反映总体特征.

A.①②　　B.①③

C.①②③　　D.②③

B　**解析**:根据两种抽样方法的特点知,不论哪种抽样方法,总体中每个个体入样的可能性都相等,都是$\frac{n}{N}$,故①正确,②错误.因为总体中有差异较明显的三个层(一级品、二级品和三级品),所以方法 2 抽到的样本更有代表性,故③正确.故选 B.

2.为了了解某地区的中小学生视力情况,拟从该地区的中小学生中抽取部分学生进行调查,事先已了解到该地区小学、初中、高中三个学段学生的视力情况有较大差异,而男女生视力情况差异不大.在下面的抽样方法中,最合理的抽样方法是　(　　)

A.随机数法

B.按性别分层随机抽样

C.按学段分层随机抽样

D.抽签法

C　**解析**:该地区小学、初中、高中三个学段学生的视力情况有较大差异,而男女生视力情况差异不大,因此按学段分层随机抽样抽出的样本更具有代表性,比较合理.故选 C.

反思提炼

分层随机抽样的特点

(1)适用于总体由有明显差异的几部分组成的情况.

(2)样本能更充分地反映总体的情况.

(3)等可能抽样,每个个体被抽到的可能性都相等.

学习任务二　用分层随机抽样抽取样本

例 1　为了对某课题进行研究,分别从 A,B,C 三所高校中用分层随机抽样的方法抽取若干名教授组成研究小组,其中高校 A 有 m 名教授,高校 B 有 72 名教授,高校 C 有 n 名教授(其中 $0<m\leqslant 72\leqslant n$).

(1)若 A,B 两所高校中共抽取 3 名教授,B,C 两所高校中共抽取 5 名教授,求 m 和 n;

(2)若高校 B 中抽取的教授人数是高校 A 和 C 中抽取的教授人数的$\frac{2}{3}$,求三所高校教授的总人数.

解:(1)因为 $0<m\leqslant 72\leqslant n$,A,B 两所高校中共抽取 3 名教授,所以高校 B 中抽取 2 名教授,高校 A 中抽取 1 名教授,高校 C 中抽取 3 名教授,所以$\frac{1}{m}=\frac{2}{72}=\frac{3}{n}$,

解得 $m=36$,$n=108$.

(2)因为高校 B 中抽取的教授人数是高校 A 和 C 中抽取的教授人数的$\frac{2}{3}$,

所以$\frac{2}{3}(m+n)=72$,解得 $m+n=108$.

所以 $m+n+72=180$,

所以三所高校教授的总人数为 180.

反思提炼

分层随机抽样满足“$\frac{每层抽取的个体数}{本层的个体数}=\frac{样本量}{总体量}$”,即“$\frac{n_1}{N_1}=\frac{n_2}{N_2}=\cdots=\frac{n}{N}$ 或 $n_1:n_2:\cdots:n=N_1:N_2:\cdots:N$”,据此在已知每层的个体数或数量比、样本量、总体量中的两个时,就可以求出第三个.

探究训练

1.某企业共有职工 150 人,其中高级职称 15 人,中级职称 45 人,初级职称 90 人.现采用分层随机抽样的方法抽取容量为 30 的样本,则抽取的高级、中级、初级职称的人数分别为　(　　)

A.5,10,15　　B.3,9,18

C.3,10,17　　D.5,9,16

B　**解析**:高级、中级、初级职称的人数所占的比例

分别为$\frac{15}{150}=\frac{1}{10}$,$\frac{45}{150}=\frac{3}{10}$,$\frac{90}{150}=\frac{3}{5}$,则所抽取的高级、中级、初级职称的人数分别为$30\times\frac{1}{10}=3$,$30\times\frac{3}{10}=9$,$30\times\frac{3}{5}=18$.故选B.

2.某学校有在职人员160人,其中行政人员有16人,教师有112人,后勤人员有32人.教育部门为了了解在职人员对学校机构改革的意见,要从中抽取一个容量为20的样本,请利用分层随机抽样的方法抽取,写出抽样过程.

解:抽样过程如下:

第一步,按工作性质将学校在职人员分层:行政人员、教师、后勤人员.

第二步,确定抽样比,样本量与总体量的比为$\frac{20}{160}=\frac{1}{8}$.

第三步,确定分别从三类人员中抽取的人数,从行政人员中抽取$16\times\frac{1}{8}=2$(人);从教师中抽取$112\times\frac{1}{8}=14$(人);从后勤人员中抽取$32\times\frac{1}{8}=4$(人).

第四步,采用简单随机抽样的方法,抽取行政人员2人,教师14人,后勤人员4人.

第五步,把抽取的个体组合在一起构成所需样本.

学习任务三 分层随机抽样下的总体平均数的估计

例2 某学校有高中学生500人,其中男生320人,女生180人,为了了解该校全体高中学生的身高信息,按照比例分配的分层随机抽样方法抽取了男生32人,女生18人.通过计算得到男生身高的样本平均数为173.5 cm,女生身高的样本平均数为163.8 cm,估计该校全体高中学生身高的平均数为________cm.(保留一位小数)

170.0 **解析**:样本平均数为$\frac{32}{32+18}\times173.5+\frac{18}{32+18}\times163.8\approx170.0$(cm).因为采用了比例分配的分层随机抽样方法,所以估计该校全体高中学生身高的平均数为170.0 cm.

反思提炼

1.进行分层随机抽样的相关计算时,常用到的两个关系:

(1)$\frac{\text{样本量}\ n}{\text{总体量}\ N}=\frac{\text{该层抽取的个体数}}{\text{该层的个体数}}$;

(2)总体中某两层的个体数之比等于样本中这两层抽取的个体数之比.

2.总体的平均数和各层的样本平均数的关系:

$$\overline{w}=\frac{m}{m+n}\overline{x}+\frac{n}{m+n}\overline{y}=\frac{M}{M+N}\overline{x}+\frac{N}{M+N}\overline{y}.$$

探究训练

1.为深入学习宣传贯彻党的二十大精神,某学校团委举办了党史知识竞赛(满分100分),其中高一、高二、高三年级参赛选手的人数分别为1 200,900,900.现用分层随机抽样的方法从三个年级中抽取样本,经计算可得高一、高二年级参赛选手成绩的样本平均数分别为85,90,全校参赛选手成绩的样本平均数为88,则高三年级参赛选手成绩的样本平均数为 ( )

A.87 B.89 C.90 D.91

C **解析**:由分层随机抽样定义可知,高一、高二、高三年级参赛选手的样本数之比为1 200∶900∶900=4∶3∶3.

设高三年级参赛选手成绩的样本平均数为x,

则$\frac{85\times4+90\times3+3x}{4+3+3}=88$,解得$x=90$.

所以高三年级参赛选手成绩的样本平均数为90.故选C.

2.某公司由1 000人组成,按收入情况分成两层.第一层为高收入层,有20人;第二层为低收入层,有980人.从第一层随机抽取2人,其上月收入为12 000元和16 000元;从第二层随机抽取8人,其上月收入分别为2 200元、2 300元、1 800元、3 200元、4 000元、3 400元、2 800元和3 600元.试估计上月这1 000人的平均月收入.

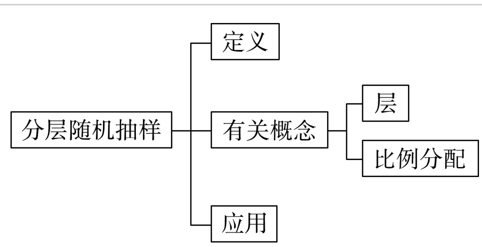
解:分别计算出这两层的样本平均数$\overline{x}_1=14\ 000$(元),$\overline{x}_2=2\ 912.5$(元),

以两层的样本平均数分别估计两层的总体平均数,

可得总体平均数为$\frac{20\times\overline{x}_1+980\times\overline{x}_2}{1\ 000}=\frac{20\times14\ 000+980\times2\ 912.5}{1\ 000}=3\ 134.25$(元).

所以估计上月这1 000人的平均月收入为3 134.25元.

体系构建



课后素养评价(三十八)

基础性·能力运用

1.某学校有学生 1 000 人,其中男生 600 人,女生 400 人,用分层随机抽样的方法从中选择的 200 人中,女生有 (　　)

A.70 人　　B.80 人

C.90 人　　D.100 人

B　**解析**:由题意可得女生人数为 $200\times\frac{400}{1\ 000}=80$.故选 B.

2.(数学文化题)我国古代数学专著《九章算术》中有一衰分问题:“今有北乡算八千七百五十八,西乡算七千二百三十六,南乡算八千三百五十六.凡三乡发徭三百七十八人.欲以算数多少衰出之,问各几何?”其意为现在北乡人口为 8 758 人,西乡人口为 7 236 人,南乡人口为 8 356 人.要从这三个乡抽取 378 人服役,则各乡应抽取多少人?若把此问题看成抽样问题,则应该采用的抽样方法是 (　　)

A.抽签法

B.分层随机抽样

C.随机数表法

D.系统抽样

B　**解析**:由题意可知三个乡的人数是不相同的,因此要从这三个乡抽取 378 人服役,为保证公平性,应按各乡人数的比例进行抽取,故应该采用的抽样方法是分层随机抽样.故选 B.

3.有两种糖块,A 种糖块 18 元/kg,B 种糖块 24 元/kg,超市计划把 A,B 两种糖块按照 1∶2 的比例混合出售,则合理的价格应为 (　　)

A.18 元/kg　　B.24 元/kg

C.21 元/kg　　D.22 元/kg

D　**解析**:由题意可得合理价格为 $\frac{1}{1+2}\times18+\frac{2}{1+2}\times24=22$(元/kg).故选 D.

4.(多选题)港珠澳大桥是中国境内连接香港、珠海和澳门的桥隧工程,因其超大的建筑规模、空前的施工难度和顶尖的建造技术而闻名世界.港珠澳大桥为中国内地前往中国香港的游客提供了便捷的交通,某旅行社分年龄段统计了港珠澳大桥建成以后,由港珠澳大桥实现中国内地前往中国香港的旅客人数,已知老、中、青旅客的人数比为 5∶2∶3,现使用分层随机抽样的方法从这些旅客中随机抽取 n 名.若抽到青年旅客 60 人,则下列说法正确的是 (　　)

A.抽到老年旅客 150 人

B.抽到中年旅客 40 人

C.$n=200$

D.被抽到的老年旅客和中年旅客人数之和超过 200

BC　**解析**:因为老、中、青旅客的人数比为 5∶2∶3,抽到青年旅客 60 人,

所以 $\frac{60}{n}=\frac{3}{5+2+3}$,解得 $n=200$,

所以抽到老年旅客 $200\times\frac{5}{5+2+3}=100$(人),

抽到中年旅客 $200\times\frac{2}{5+2+3}=40$(人),$100+40=140<200$.故选 BC.

5.(1)从 10 台电冰箱中抽取 3 台进行质量检验.

(2)某社区有 1 200 户家庭,其中高收入家庭 420 户,中等收入家庭 470 户,低收入家庭 310 户.为了调查该社区购买力的某项指标,要从所有家庭中抽取一个容量为 120 的样本.

(3)某学校有 160 名教职工,其中教师 120 名,行政人员 16 名,后勤人员 24 名.为了了解教职工对学校在校务公开方面的意见,拟抽取一个容量为 20 的样本.

以上问题中,宜采用的抽样方法分别为

(1)________;(2)________;

(3)________.

(1)抽签法　(2)分层随机抽样　(3)分层随机抽样

解析:

题号	判断	原因分析
(1)	抽签法	总体容量较小,宜采用抽签法
(2)	分层随机抽样	该社区中家庭收入层次明显,宜采用分层随机抽样
(3)	分层随机抽样	由于学校各类人员对这一问题的看法可能差异较大,故宜采用分层随机抽样

6.某校 500 名学生中,O 型血的有 200 人,A 型血的有 125 人,B 型血的有 125 人,AB 型血的有 50 人.为了研究血型与色弱的关系,需从中抽取一个容量

为 20 的样本.按照分层随机抽样的方法抽取样本，各种血型的人分别抽多少？

解：因为 $\frac{20}{500}=\frac{1}{25}$，所以 $200\times\frac{1}{25}=8$（人），$125\times\frac{1}{25}=5$（人），$50\times\frac{1}{25}=2$（人）.

故 O 型血的抽 8 人，A 型血的抽 5 人，B 型血的抽 5 人，AB 型血的抽 2 人.

综合性·创新提升

1. 某高中共有学生 2 000 名，各年级男、女生人数如下表.

性别	高一年级	高二年级	高三年级
女生	373	x	y
男生	377	370	z

已知在全校学生中随机抽取 1 名，抽到高二年级女生的可能性是 0.19.现用分层随机抽样的方法在全校抽取 64 名学生，则应在高三年级抽取的学生人数为（　　）

A.24　　B.18　　C.16　　D.12

C　**解析**：由题意可知 $x=2\ 000\times0.19=380$，
所以高一、高二年级男、女生共有 1 500 人，
所以高三年级共有学生 500 人，
所以应在高三年级抽取的学生人数为 $\frac{64}{2\ 000}\times500=16$.故选 C.

2. 比例分配的分层随机抽样是将总体分成若干个互不交叉的层，然后按照固定的比例，从各层独立地抽取一定数量的个体，组成一个样本的抽样方法.在《九章算术》第三章"衰分"中有如下问题："今有甲持钱五百六十，乙持钱三百五十，丙持钱一百八十，凡三人俱出关，关税百钱.欲以钱数多少衰出之，问各几何？"其译文为：今有甲持 560 钱，乙持 350 钱，丙持 180 钱，甲、乙、丙三人一起出关，关税共 100 钱，要按照各人带钱多少的比例进行交税，问，三人各应付多少税？则下列说法错误的是（　　）

A.甲应付税 $51\frac{41}{109}$ 钱

B.乙应付税 $32\frac{24}{109}$ 钱

C.丙应付税 $16\frac{56}{109}$ 钱

D.甲付的税钱最多，丙付的税钱最少

B　**解析**：由比例分配的分层随机抽样方法可知，抽样比为 $\frac{100}{560+350+180}=\frac{10}{109}$，

则甲应付税 $\frac{10}{109}\times560=51\frac{41}{109}$（钱）；

乙应付税 $\frac{10}{109}\times350=32\frac{12}{109}$（钱）；

丙应付税 $\frac{10}{109}\times180=16\frac{56}{109}$（钱）.故选 B.

3. $\overline{x}$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_{100}$ 的平均数，a 是 $x_1,x_2,\cdots,x_{40}$ 的平均数，b 是 $x_{41},x_{42},\cdots,x_{100}$ 的平均数，则下列各式正确的是（　　）

A.$\overline{x}=a+b$　　B.$\overline{x}=\frac{3a+2b}{5}$

C.$\overline{x}=\frac{2a+3b}{5}$　　D.$\overline{x}=\frac{a+b}{2}$

C　**解析**：由题意可得 $x_1+x_2+\cdots+x_{100}=100\overline{x}$，$x_1+x_2+\cdots+x_{40}=40a$，$x_{41}+x_{42}+\cdots+x_{100}=60b$，所以 $100\overline{x}=40a+60b$，所以 $\overline{x}=\frac{2a+3b}{5}$.故选 C.

4. 某公司生产三种型号的轿车，产量分别为 1 200 辆、6 000 辆和 2 000 辆.为检验该公司的产品质量，现用分层随机抽样的方法抽取 46 辆进行检验，这三种型号的轿车依次应抽取的辆数为________.

6，30，10　**解析**：设三种型号的轿车依次抽取 x,y,z 辆，则有 $\begin{cases}\frac{x}{1\ 200}=\frac{y}{6\ 000}=\frac{z}{2\ 000},\\ x+y+z=46,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=6,\\ y=30,\\ z=10.\end{cases}$

5. 高一和高二两个年级的同学参加了数学竞赛，高一年级有 450 人，高二年级有 350 人，通过分层随机抽样的方法抽取了 160 位同学的竞赛成绩，得到两个年级的竞赛成绩的平均数分别为 80 分和 90 分，则：

(1)高一、高二年级的样本量分别为________；

(2)高一和高二两个年级数学竞赛成绩的平均数约为________.

(1)90，70　(2)84.375 分　**解析**：(1)由题意可得高一年级的样本量为 $\frac{160}{450+350}\times450=90$，高二年级的样本量为 $\frac{160}{450+350}\times350=70$.

(2)高一和高二两个年级数学竞赛成绩的平均数约为 $\frac{90}{90+70}\times80+\frac{70}{90+70}\times90=84.375$（分）.

6. 为了了解某区科级干部"消防安全知识"的了解情况，按照分层随机抽样的方法，从全区 320 名正科

级干部和 1 280 名副科级干部中抽取 40 名科级干部预测全区科级干部"消防安全知识"的了解情况.现将这 40 名科级干部分为正科级干部组和副科级干部组,利用同一份试卷分别进行测试.两组的测试成绩统计如下表:

分组	人数	平均成绩
正科级干部组	a	80
副科级干部组	b	70

(1)求 a,b 的值;

(2)求这 40 名科级干部测试成绩的平均数 $\overline{x}$.

解:(1)样本量与总体量的比为 $\frac{40}{320+1\ 280}=\frac{1}{40}$,

则抽取的正科级干部人数 $a=320\times\frac{1}{40}=8$,

副科级干部人数 $b=1\ 280\times\frac{1}{40}=32$.

(2)这 40 名科级干部测试成绩的平均数 $\overline{x}=\frac{80\times8+70\times32}{40}=72$.

9.1.3　获取数据的途径

学习任务目标

1.知道获取数据的基本途径包括:统计报表和年鉴、社会调查、试验设计、普查和抽样调查、互联网等.(数据分析)

2.了解数据的随机性.

问题式预习

知识清单

获取数据的基本途径

获取数据的基本途径	适用类型	注意问题
通过调查获取数据	对于有限总体问题,我们一般通过<u>抽样调查</u>或普查的方法获取数据	要充分有效地利用背景信息选择或创建更好的抽样方法,并有效避免抽样过程中的人为错误
通过试验获取数据	没有现存的数据可以查询	严格控制试验环境,通过精心的设计安排试验,以提高数据质量
通过观察获取数据	自然现象	要通过长久的持续观察获取数据
通过查询获得数据	众多专家研究过,其收集的样本观测数据有所存储	必须根据问题背景知识"清洗"数据,去伪存真

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)要了解一批节能灯的使用寿命,可以采用普查的方式.　(×)

(2)农科院了解小麦新品种的产量可以通过查询获取数据.　(×)

(3)普查获取的数据更加全面、系统,抽样调查比普查更方便、快捷.　(√)

2.小明从网上查询得到某地区 10 户居民从事某副业的家庭年收入(单位:万元)如下表所示:

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
年收入	1.2	1.3	1.8	2.0	4.6	1.7	0.9	2.1	1.0	1.6

根据以上数据,我们认为有一个数据是不准确的,需要核实或剔除,这个数据是________.

4.6　**解析**:由于编号为 5 的数据为 4.6,明显高于其他数据,所以这个数据可能是不准确的.

3.请思考并回答问题:

利用统计报表和年鉴属于哪种获取数据的途径?

提示:属于通过查询获得数据的途径.

任务型课堂

学习任务一 获取数据途径的选择

1. 下列数据一般通过试验获取的是 （　　）

A.1988 年济南市的降雨量

B.2020 年新生儿人口数量

C.某学校高一年级同学的数学测试成绩

D.某种特效中成药的配方

D　**解析**：某种特效中成药的配方的数据只能通过试验获得.

2. “中国天眼”为 500 米口径球面射电望远镜，是具有我国自主知识产权、世界最大单口径、最灵敏的射电望远镜.建造“中国天眼”的目的是 （　　）

A.通过调查获取数据

B.通过试验获取数据

C.通过观察获取数据

D.通过查询获得数据

C　**解析**：“中国天眼”主要是通过观察获取数据.

反思提炼

调查方法的选取

选择全面调查还是抽样调查，要根据所要考察的对象的特征灵活选用.一般来说，对于具有破坏性的调查、无法进行全面调查、全面调查的意义或价值不大时，应选择抽样调查，对于精确度要求高的调查，事关重大的调查往往选用全面调查.

学习任务二 获取数据途径的方法的设计与分析

1. 简单设计一份问卷，调查高一学生对各学科的态度.

解：请按自己的感受把下面这些学科的序号填在空格里.

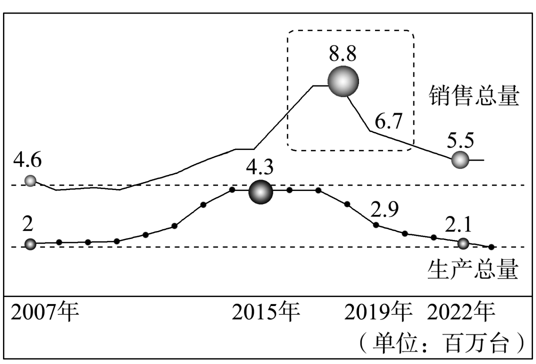
①语文　②数学　③外语　④物理　⑤化学

⑥生物　⑦历史　⑧地理　⑨政治　⑩体育

⑪艺术(音乐、美术)　⑫技术

我喜欢的学科	
我感觉压力最大的学科	
我不喜欢的学科	
我觉得有用的学科	
我觉得内容多的学科	
我觉得内容少的学科	

2. 为了了解我国某种家电的产销情况，小张在某网站上下载了下图：



(1)小张获取数据的途径是什么？

(2)由图可知，这种家电的销售总量在 2018 年达到最大值，你认为这种这电销售总量从 2019 年开始出现下滑的主要原因是什么？

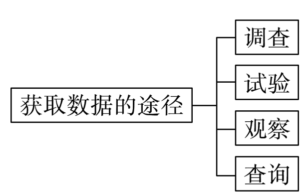
解：(1)小张获取数据的途径是通过查询获得数据.

(2)从 2019 年开始，这种家电销售总量开始出现下滑的主要原因是市场的饱和(答案不唯一).

反思提炼

在统计活动中，尤其是大型的统计活动中，为避免一些外界因素的干扰，通常需要确定调查的对象、调查的方法和策略，需要认真安排前期的准备工作，精心设计收集数据的方法，然后对数据进行统计分析，得出推断.

体系构建



课后素养评价(三十九)

基础性·能力运用

1. 为了研究近年来我国高等教育发展状况,小明需要获取近年来我国大学生入学人数的相关数据,他获取这些数据的途径最好是 ( )

A.通过调查获取数据

B.通过试验获取数据

C.通过观察获取数据

D.通过查询获得数据

D **解析**:因为近年来我国大学生入学人数的相关数据有所存储,所以小明获取这些数据的途径最好是通过查询获得数据.

2. 影响获取数据可靠程度的因素不包括 (D)

A.获取方法设计

B.所用专业测量设备的精度

C.调查人员的认真程度

D.数据的大小

3. 为了了解某年级同学每天参加体育锻炼的时间,比较恰当的收集数据的方法是 ( )

A.查阅资料 B.问卷调查

C.做试验 D.以上均不对

B **解析**:问卷调查能达到目的,比较适合.故选 B.

4. 下列情况应通过试验获取数据的是 ( )

A.了解某市中小学生每天的运动时间

B.了解某地的降水规律

C.检测针对某种病毒的新药的疗效

D.调查某地 2019 年的交通事故情况

C **解析**:选项 A 需要通过调查获取数据,选项 B 需要观察获取数据,选项 C 需要通过试验获取数据,选项 D 应通过查询获取数据.

综合性·创新提升

1. (多选题)以下情况是通过查询获得数据的是 ( )

A.某领导想了解 A 市的大气环境质量,向当地有关部门咨询该市的 PM2.5 的浓度

B.张三利用互联网了解到,2022 年某市居民平均寿命达到 82.2 岁

C.某中学为了了解学生对课堂禁用手机的认同度,进行了问卷调查

D.从某公司员工年度报告中获知员工的工作情况

ABD **解析**:A,B,D 都是通过查询获取的数据,C 是通过调查获取的数据.

2. 以下数据是观测数据还是试验数据?

(1)据第七次人口普查结果,全国人口约为 141 178 万;

(2)为研究某种药对于预防心脏病的作用,20 000 人每隔一天服用一次该药,另外 20 000 人服用另一种药剂,五年后的数据显示,该药使得心肌梗死风险大幅降低;

(3)2023 年的某项调查显示,日均使用某社交软件时间在 4 h 以上的人数超过 30%.

答案:(1)观测数据.

(2)试验数据.

(3)观测数据.

3. 某中学举办了全校精神文明擂台赛.为了解这次比赛在全校师生中产生的影响,分别在全校 500 名教职员工、3 000 名初中生、4 000 名高中生中做问卷调查.如果要在所有答卷中抽出 120 份用于评估,应怎样设计抽取才能得到比较客观的评估结论?

解:由于这次活动对教职员工、初中生和高中生产生的影响不会相同,所以应当采取分层随机抽样的方法进行抽样.

因为样本量为 120,总体个数为 $500+3\ 000+4\ 000=7\ 500$,则抽样比为 $\frac{120}{7\ 500}=\frac{2}{125}$,

$500\times\frac{2}{125}=8$,$3\ 000\times\frac{2}{125}=48$,$4\ 000\times\frac{2}{125}=64$,

所以在教职员工答卷、初中生答卷、高中生答卷中抽取的个体数分别是 8,48,64.

分层随机抽样的步骤是:

(1)分层:分为教职员工答卷、初中生答卷、高中生答卷,共三层;

(2)确定每层抽取个体的个数:在教职员工答卷、初中生答卷、高中生答卷中抽取的个体数分别是 8,48,64;

(3)各层分别按简单随机抽样的方法抽取样本;

(4)综合每层抽样,组成样本.

这样便完成了整个抽样过程,就能得到比较客观的评估结论.

9.2 用样本估计总体

9.2.1 总体取值规律的估计

学习任务目标

1.理解用样本的频率分布估计总体分布的方法.
2.会列频率分布表,会画频率分布直方图.(数据分析)
3.能够利用图表解决实际问题.

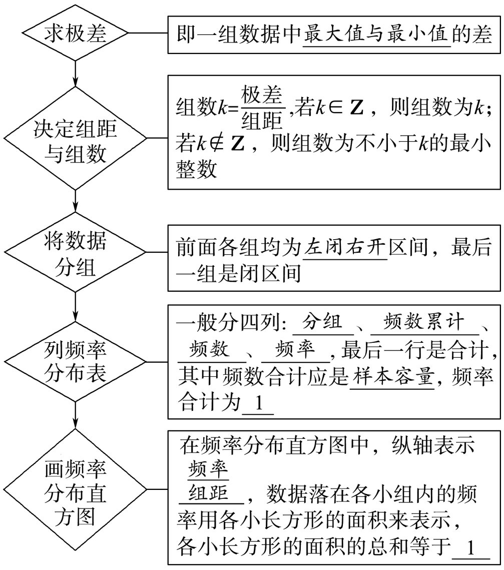
问题式预习

知识清单

1.频率分布表与频率分布直方图

(1)频数指某组中包含的个体数,各组频数和等于样本容量;频率$=\dfrac{\text{频数}}{\text{样本容量}}$,各组频率和等于1.

(2)绘制频率分布直方图的步骤



2.统计图表

统计图表	主要应用
扇形图	直观描述各类数据占总数的比例
条形图和直方图	直观描述不同类别或分组数据的频数和频率
折线图	描述数据随时间的变化趋势

概念辨析

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)频率分布直方图中小长方形的高表示该组的个体在样本中出现的频率与组距的比值. (√)

(2)一般样本容量越大,所分组数越多;样本容量越小,所分组数越少. (√)

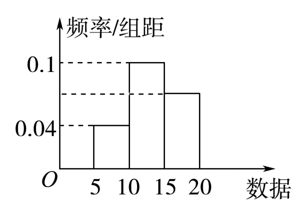
(3)频率分布直方图的横轴表示样本数据,纵轴表示频率. (×)

2.从一群学生中抽取一个一定容量的样本对他们的学习成绩进行分析.已知不超过70分的人数为8,其频率为0.4,则这个样本的容量是 ( )

A.20 B.40
C.70 D.80

A **解析**:由已知不超过70分的人数为8,频率为0.4,则样本量$n=\dfrac{8}{0.4}=20$.故选A.

3.如图所示的是一个容量为100的样本数据的频率分布直方图,则由图中的数据可知,样本数据落在[15,20]内的频数为 ( )



A.20 B.30
C.40 D.50

B **解析**:样本数据落在[15,20]内的频数为$100\times[1-5\times(0.04+0.1)]=30$.

4.请思考并回答问题:

(1)为什么对样本数据进行分组?

提示:不分组很难看出样本中的数字所包含的信息,分组后,可计算出频率,从而估计总体的分布特征.

(2)频率分布直方图与频数分布直方图有什么区别?

提示:频率分布直方图的纵轴是$\dfrac{\text{频率}}{\text{组距}}$,而频数分布直方图的纵轴是频数.

任务型课堂

学习任务一　频率分布直方图的绘制

例 1　某省为了了解和掌握 2023 年高考考生的实际答卷情况，随机地取出了 100 名考生的数学成绩(单位：分)，数据如下：

135	98	102	110	99	121	110	96
100	103	125	97	117	113	110	92
102	109	104	112	105	124	87	131
97	102	123	104	104	128	109	123
111	103	105	92	114	108	104	102
129	126	97	100	115	111	106	117
104	109	111	89	110	121	80	120
121	104	108	118	129	99	90	99
121	123	107	111	91	100	99	101
116	97	102	108	101	95	107	101
102	108	117	99	118	106	119	97
126	108	123	119	98	121	101	113
102	103	104	108				

(1)列出频率分布表；

(2)画出频率分布直方图；

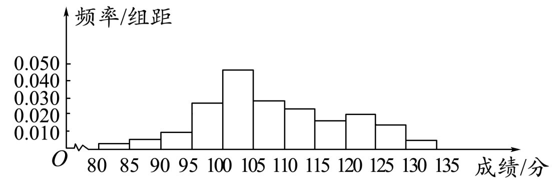
(3)估计该省考生数学成绩在[100，120)内的比例.

解：这 100 个数据中，最大值为 135，最小值为 80，极差为 135－80＝55.取组距为 5，则组数为$\frac{55}{5}=11$.

(1)列出频率分布表如下：

分组	频数	频率
[80,85)	1	0.01
[85,90)	2	0.02
[90,95)	4	0.04
[95,100)	14	0.14
[100,105)	24	0.24
[105,110)	15	0.15
[110,115)	12	0.12
[115,120)	9	0.09
[120,125)	11	0.11
[125,130)	6	0.06
[130,135]	2	0.02
合计	100	1.00

(2)根据频率分布表中的有关信息画出频率分布直方图，如图所示.



(3)从频率分布表中可知，这 100 名考生的数学成绩在[100，120)内的频率为 0.24＋0.15＋0.12＋0.09＝0.60，据此估计该省考生数学成绩在[100，120)内的比例为 60%.

[一题多思]

思考 1.(变条件)有一容量为 200 的样本，数据的分组以及各组的频数如下：

[－20，－15)，7；[－15，－10)，11；[－10，－5)，15；[－5，0)，40；[0，5)，49；[5，10)，41；[10，15)，20；[15，20]，17.

(1)列出样本数据的频率分布表；

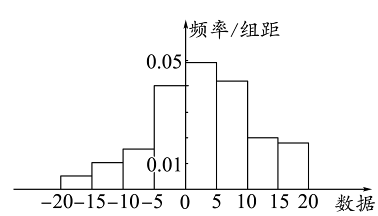
(2)画出频率分布直方图；

(3)求样本数据不足 0 的频率.

解：(1)频率分布表如下：

分组	频数	频率
[－20，－15)	7	0.035
[－15，－10)	11	0.055
[－10，－5)	15	0.075
[－5，0)	40	0.200
[0，5)	49	0.245
[5，10)	41	0.205
[10，15)	20	0.100
[15，20]	17	0.085
合计	200	1.000

(2)频率分布直方图如图所示.



(3)样本数据不足 0 的频率为 0.035＋0.055＋0.075＋0.200＝0.365.

思考 2.根据本例(1)所得的频率分布表，请估计该省考生数学成绩的及格率(90 分以上为及格).

解:由表可得,及格(即90分以上)的频率为0.04+0.14+0.24+0.15+0.12+0.09+0.11+0.06+0.02=0.97,

估计该省考生数学成绩的及格率为97%.

反思提炼

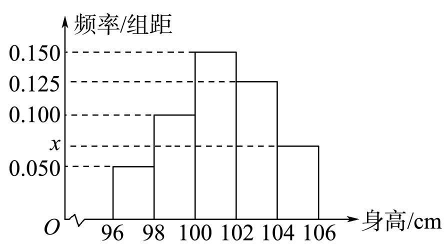
绘制频率分布直方图应注意的问题

(1)在列出频率分布表后,画频率分布直方图的关键就是确定小长方形的高.一般地,频率分布直方图中两坐标轴上的单位长度是不一致的,合理的定高方法是"找一个恰当的单位长度"(没有统一规定),然后以各组的"$\frac{\text{频率}}{\text{组距}}$"来定高.

(2)在频率分布直方图中,各个小长方形的面积等于相应各组的频率,小长方形的高与频数成正比,各组频数之和等于样本容量,频率之和为1.

学习任务二 频率分布直方图的应用

例2 某幼儿园根据部分同年龄段女童的身高数据绘制了如图所示的频率分布直方图,其中身高(单位:cm)的变化范围是[96,106],样本数据分组为[96,98),[98,100),[100,102),[102,104),[104,106].



(1)求出x的值;

(2)已知样本中身高小于100 cm的人数是36,求出样本容量N的数值;

(3)根据频率分布直方图提供的数据,求出样本中身高大于或等于98 cm并且小于104 cm的学生数.

解:(1)由于频率分布直方图以面积的形式反映了数据落在各个小组内的频率大小,且频率之和等于1,

所以$0.050\times2+0.100\times2+0.150\times2+0.125\times2+2x=1$,

所以$x=0.075$.

(2)样本中身高小于100 cm的频率为$(0.050+0.100)\times2=0.3$,

所以样本容量$N=\frac{36}{0.3}=120$.

(3)样本中身高大于或等于98 cm并且小于104 cm的频率为$(0.100+0.150+0.125)\times2=0.75$,

所以对应学生数为$120\times0.75=90$.

反思提炼

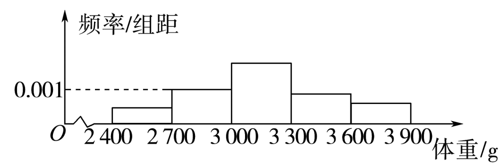
应用频率分布直方图的几类常见问题

(1)求频数、频率.对于这类问题,要注意读懂图表所提供的信息,然后根据频数、频率的定义求解.

(2)填表、补图、估算.读懂分布表、直方图,活用公式:组距$\times\frac{\text{频率}}{\text{组距}}$=频率;$\frac{\text{频数}}{\text{相应频率}}$=样本量.

探究训练

1. 统计了一些新生婴儿的体重,其频率分布直方图如图所示,则新生婴儿的体重(单位:g)在[2 700,3 000)内的频率为 ( )



A.0.001　　B.0.01

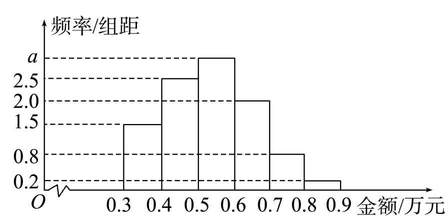
C.0.003　　D.0.3

D **解析**:因为组距$=3\ 000-2\ 700=300$,

且$\frac{\text{频率}}{\text{组距}}=0.001$,

所以频率$=0.001\times300=0.3$.

2. 某电子商务公司对10 000名网络购物者2023年度的消费情况进行统计,发现消费金额(单位:万元)都在区间[0.3,0.9]内,其频率分布直方图如图所示.



(1)频率分布直方图中的a=________;

(2)在这些购物者中,消费金额在区间[0.5,0.9]内的购物者的人数为________.

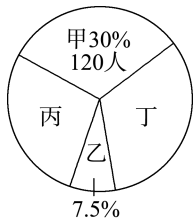
(1)3.0 (2)6 000 **解析**:(1)由$0.1\times1.5+0.1\times2.5+0.1a+0.1\times2.0+0.1\times0.8+0.1\times0.2=1$,解得$a=3.0$.

(2)区间[0.3,0.5)内的频率为$0.1\times1.5+0.1\times2.5=0.4$,故[0.5,0.9]内的频率为$1-0.4=0.6$.

因此,消费金额在区间[0.5,0.9]内的购物者的人数为$0.6\times10\ 000=6\ 000$.

学习任务三 折线图、条形图、扇形图及应用

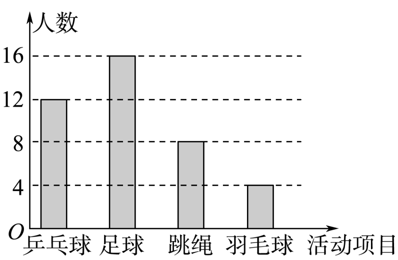
例 3 (1)如图是甲、乙、丙、丁四组人数的扇形统计图的部分结果,根据扇形统计图的情况可以知道丙、丁两组的人数和为 ( )



A.250 B.150 C.400 D.300

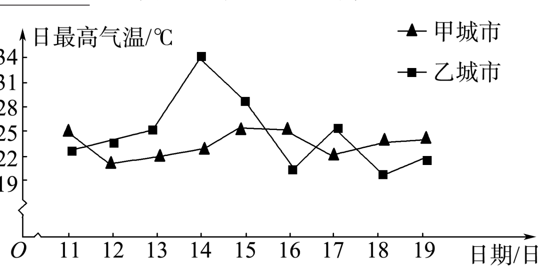
A **解析**:甲组人数是 120,占 30%,则总人数是 400.故乙组人数是 400×7.5%=30,丙、丁两组的人数和为 400−120−30=250.

(2)某班计划开展一些课外活动,全班有 40 名学生报名参加,他们就乒乓球、足球、跳绳、羽毛球 4 项活动的参加人数做了统计,绘制了如图所示的条形统计图,那么参加羽毛球活动的人数的频率是________.



0.1 **解析**:参加羽毛球活动的人数是 4,则频率是 $\frac{4}{40}=0.1$.

(3)甲、乙两个城市 11 日至 19 日每天的最高气温统计图如图所示,则这 9 天里,日最高气温比较稳定的是________(选填"甲"或"乙")城市.



甲 **解析**:这 9 天里,乙城市的日最高气温的最大值约为 35 ℃,最小值约为 20 ℃;甲城市的日最高气温的最大值约为 25 ℃,最小值约为 21 ℃.故甲城市日最高气温较稳定.

反思提炼

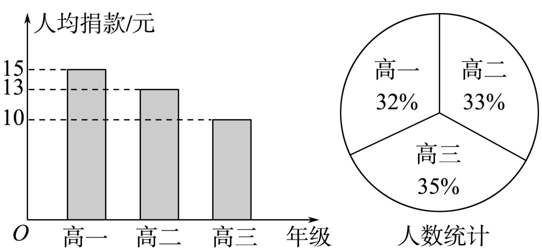
1.条形图中,用一个单位长度表示一定的数量或频率,将数量的多少或频率的大小画成长短不同的矩形条.条形图能清楚地表示出每个类别的具体数目或频率.

2.扇形图中,整个圆的面积表示总数(100%),圆内的扇形面积表示各个部分所占总数的百分数.

3.在画折线图时,要注意明确横轴、纵轴的实际含义.

探究训练

如图是根据某中学为地震灾区捐款的情况而制作的统计图.已知该校在校学生 3 000 人,根据统计图计算,该校共捐款________元.



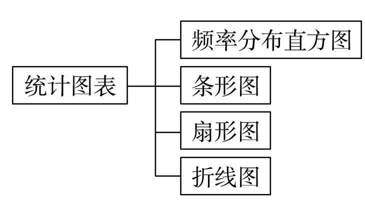
37 770 **解析**:根据扇形统计图,得高一人数为 3 000×32%=960,共捐款 960×15=14 400(元);

高二人数为 3 000×33%=990,共捐款 990×13=12 870(元);

高三人数为 3 000×35%=1 050,共捐款 1 050×10=10 500(元).

所以该校学生共捐款 14 400+12 870+10 500=37 770(元).

体系构建



课后素养评价（四十）

基础性·能力运用

1.已知样本数据：10，8，6，10，13，8，10，12，11，7，8，9，11，9，12，9，10，11，12，11，那么频率为 0.2 的数据范围是 （　　）

A.5.5～7.5

B.7.5～9.5

C.9.5～11.5

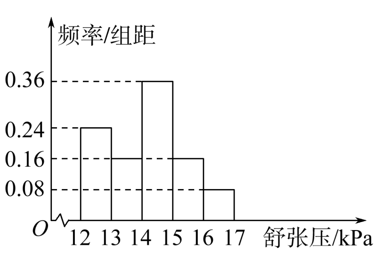
D.11.5～13.5

D　**解析**：列出频率分布表，依次对照就可以找到答案，频率分布表如下：

分组	频数	频率
5.5～7.5	2	0.1
7.5～9.5	6	0.3
9.5～11.5	8	0.4
11.5～13.5	4	0.2
合计	20	1.0

从表中可以看出频率为 0.2 的范围是 11.5～13.5.故选 D.

2.（2022·天津）为研究某药品的疗效，选取若干名志愿者进行临床试验，所有志愿者的舒张压数据（单位：kPa）的分组区间为[12，13)，[13，14)，[14，15)，[15，16)，[16，17]，将其按从左到右的顺序分别编号为第一组、第二组……第五组，根据试验数据制成如图的频率分布直方图.已知第一组与第二组共有 20 人，第三组中没有疗效的有 6 人，则第三组中有疗效的人数为 （　　）



A.8　　　　B.12

C.16　　　　D.18

B　**解析**：志愿者的总人数为 $\frac{20}{(0.24+0.16)\times 1}=50$，所以第三组人数为 $50\times 0.36=18$，则其中有疗效的人数为 $18-6=12$.故选 B.

3.小波一星期的总开支情况如图 1 所示，一星期的食品开支情况如图 2 所示，则小波一星期购买鸡蛋的开支占总开支的百分比为 （　　）

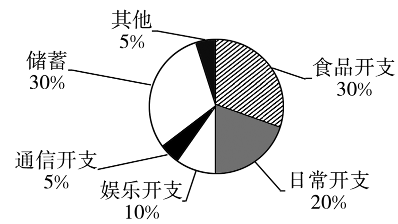


图 1

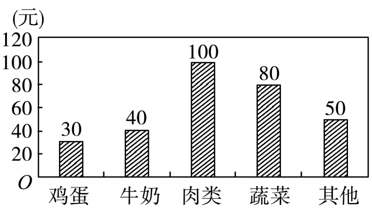


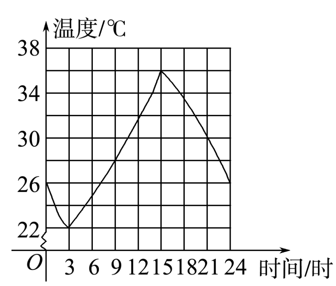
图 2

A.30%　　　　B.10%

C.3%　　　　D.不能确定

C　**解析**：由图 2 知小波一星期的食品开支为 300 元，其中鸡蛋开支为 30 元，占食品开支的 10%.而食品开支占总开支的 30%，所以小波一星期的鸡蛋开支占总开支的百分比为 3%.故选 C.

4.（多选题）下图反映了某市某一天的温度随时间变化的情况.由图可知，下列说法中正确的是 （　　）



A.这天 15 时的温度最高

B.这天 3 时的温度最低

C.这天的最高温度与最低温度相差 13 ℃

D.这天 21 时的温度是 30 ℃

ABD　**解析**：由题图可知，在 15 时温度最高为 36 ℃，A 正确；在 3 时温度最低为 22 ℃，B 正确；最高温度为 36 ℃，最低温度为 22 ℃，所以这天的最高温度与最低温度相差 14 ℃，C 错误；这天 21 时的

温度是 30 ℃，D 正确.故选 ABD.

5.如图，一个频数分布表（样本量为 50）不小心被损坏了一部分，只记得样本中数据在$[20,60)$内的频率为 0.6，则估计样本在$[40,50)$，$[50,60)$内的数据个数之和是________.

分组	[10,20)	[20,30)	[30,40)
频数	3	4	5

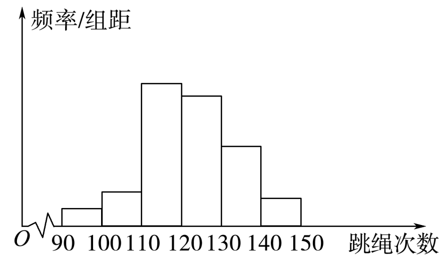
21　**解析**：根据题意，设分布在$[40,50)$，$[50,60)$内的数据个数分别为 x，y.

因为样本中数据在$[20,60)$内的频率为 0.6，样本量为 50，

所以$\frac{4+5+x+y}{50}=0.6$，解得 $x+y=21$.

即样本在$[40,50)$，$[50,60)$内的数据个数之和为 21.

6.为了了解高一学生的体能情况，某校抽取部分学生进行一分钟跳绳次数测试，将所得数据整理后，画出频率分布直方图（如图），图中从左到右各小矩形面积之比为 $2:4:17:15:9:3$，第二小组频数为 12.



(1)第二小组的频率是多少？样本量是多少？

(2)若次数在 110 以上（含 110 次）为达标，试估计该学校全体高一学生的达标率.

解：(1)由于频率分布直方图以面积的形式反映了数据落在各小组内的频率大小，因此第二小组的频率为

$\frac{4}{2+4+17+15+9+3}=0.08$.

又第二小组的频率$=\frac{第二小组的频数}{样本量}$，

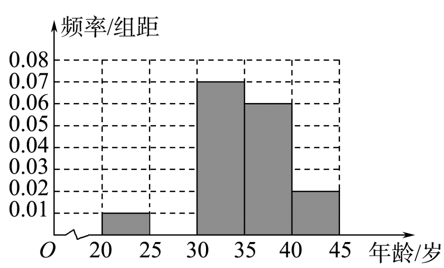
所以样本量$=\frac{第二小组的频数}{第二小组的频率}=\frac{12}{0.08}=150$.

(2)由题意估计该学校高一学生的达标率为

$\frac{17+15+9+3}{2+4+17+15+9+3}\times 100\%=88\%$.

综合性·创新提升

1.（多选题）为组织好市运会，组委会征集了 800 名志愿者，现对他们的年龄进行抽样统计后，得到如图所示的频率分布直方图，但是年龄在$[25,30)$内的数据不慎丢失，则　　（　　）



A.年龄在$[25,30)$内的这组对应小长方形的高度为 0.04

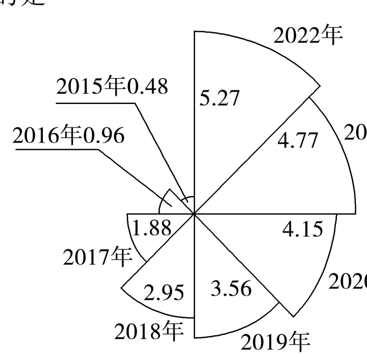
B.年龄在$[25,30)$内的这组对应小长方形的高度为 0.2

C.这 800 名志愿者中年龄在$[25,35)$内的人数约为 400

D.这 800 名志愿者中年龄在$[25,35)$内的人数约为 440

AD　**解析**：年龄在$[25,30)$内对应小长方形的高度为$\frac{1}{5}\times[1-(5\times 0.01+5\times 0.07+5\times 0.06+5\times 0.02)]=0.04$.年龄在$[25,35)$内的频率为 $0.04\times 5+0.07\times 5=0.55$，故所求人数约为 $0.55\times 800=440$.故选 AD.

2.南丁格尔玫瑰图是由近代护理学和护士教育创始人弗洛伦斯·南丁格尔设计的，图中每个扇形圆心角都是相等的，半径长短表示数量大小.某机构统计了近几年中国知识付费用户数量（单位：亿人次），并绘制成南丁格尔玫瑰图如下，根据此图，下列说法错误的是　　（　　）



A.2015 年至 2022 年，知识付费用户数量逐年增加

B.2016 年至 2022 年，知识付费用户数量逐年增加量在 2018 年时最多

C.2022 年知识付费用户数量超过 2015 年知识付费

用户数量的10倍

D.2016年至2022年,知识付费用户数量的逐年增加量逐年递增

D **解析**:对于A,由图可知,2015年至2022年,知识付费用户数量逐年增加,故A正确.

对于B,D,知识付费用户数量的逐年增加量分别为:

2016年,$0.96-0.48=0.48$,

2017年,$1.88-0.96=0.92$,

2018年,$2.95-1.88=1.07$,

2019年,$3.56-2.95=0.61$,

2020年,$4.15-3.56=0.59$,

2021年,$4.77-4.15=0.62$,

2022年,$5.27-4.77=0.5$,

可知知识付费用户数量逐年增加量在2018年时最多,故B正确,D错误.

对于C,由$5.27>0.48\times10$,即2022年知识付费用户数量超过2015年知识付费用户数量的10倍,故C正确.故选D.

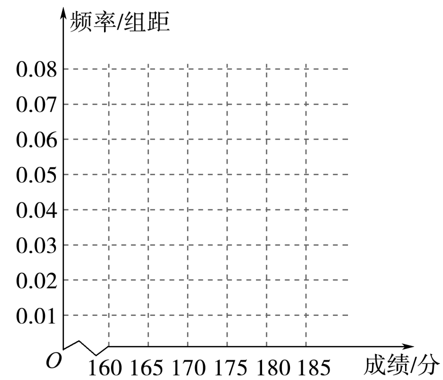
3. 在样本数据的频率分布直方图中,共有5个小长方形,已知中间一个小长方形面积是其余4个小长方形面积之和的$\frac{1}{3}$,且中间一组的频数为10,则样本容量是________.

40 **解析**:设中间小长方形的面积为x,样本容量为n.由题意得$x=\frac{1}{3}(1-x)$,解得$x=\frac{1}{4}$,即中间一组的频率为$\frac{1}{4}$,所以$\frac{10}{n}=\frac{1}{4}$,解得$n=40$.

4. 某高校在一次选拔考试后随机抽取100名学生的笔试成绩(满分200分),按成绩分组,得到的频率分布表如下:

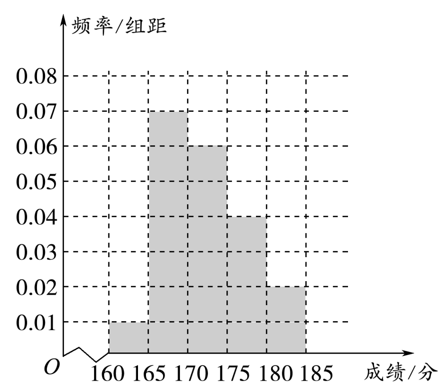
组号	分组	频数	频率
第1组	[160,165)	5	0.05
第2组	[165,170)	①	0.35
第3组	[170,175)	30	②
第4组	[175,180)	20	0.20
第5组	[180,185]	10	0.10
合计		100	1.00

(1)请先求出频率分布表中①②处应填写的数据,并完成如图所示的频率分布直方图;



(2)现高校决定在笔试成绩高的第3,4,5组中用比例分配的分层随机抽样的方法抽取6名学生进行问卷调查,求第3,4,5组各应抽取多少名学生.

解:(1)由题意可知,第2组的频数为$0.35\times100=35$,第3组的频率为$\frac{30}{100}=0.30$,故①处应填35,②处应填0.30.频率分布直方图如图所示.



(2)第3,4,5组共有60名学生,利用比例分配的分层随机抽样在这60名学生中抽取6名学生时,第3组应抽取$6\times\frac{30}{60}=3$(名)学生,第4组应抽取$6\times\frac{20}{60}=2$(名)学生,第5组应抽取$6\times\frac{10}{60}=1$(名)学生,所以第3,4,5组应抽取的学生人数分别为3,2,1.

9.2.2 总体百分位数的估计

学习任务目标

1.结合实例,能用样本估计百分位数.(数据分析)

2.理解百分位数的统计含义.

问题式预习

知识清单

1.第 p 百分位数的概念

一般地,一组数据的第 p 百分位数是这样一个值,它使得这组数据中至少有 $p\%$ 的数据小于或等于这个值,且至少有 $(100-p)\%$ 的数据大于或等于这个值.

2.计算第 p 百分位数的步骤

第 1 步,按从小到大排列原始数据.

第 2 步,计算 $i=n\times p\%$.

第 3 步,若 i 不是整数,而大于 i 的比邻整数为 j,则第 p 百分位数为第 j 项数据;若 i 是整数,则第 p 百分位数为第 i 项与第 $(i+1)$ 项数据的平均数.

3.四分位数

第 25 百分位数,第 50 百分位数,第 75 百分位数这三个分位数把一组由小到大排列后的数据分成四等份,因此称为四分位数.

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)若一组样本数据的 10%分位数是 23,则在这组数据中有 10%的数据大于 23. (×)

(2)50%分位数就是中位数. (√)

(3)若一组样本数据的 24%分位数是 24,则在这组数据中至少有 76%的数据大于或等于 24. (√)

2.数据 12,14,15,17,19,23,27,30 的第 70 百分位数是 ( )

A.14　　B.17　　C.19　　D.23

D **解析**:因为 $8\times70\%=5.6$,所以第 70 百分位数是第 6 项数据 23.

3.请思考并回答问题:

(1)通过样本数据求得的第 p 百分位数 a 一定能保证总体中有 $p\%$ 的数据不超过 a 吗?

提示:不一定.

(2)"这次数学测试成绩的第 70 百分位数是 85 分"这句话是什么意思?

提示:有至少 70%的同学数学测试成绩小于或等于 85 分,有至少 30%的同学数学测试成绩大于或等于 85 分.

任务型课堂

学习任务一 百分位数的计算

1.以下数据为参加数学竞赛决赛的 15 人的成绩(单位:分):78,70,72,86,88,79,80,81,94,84,56,98,83,90,91,则这 15 人成绩的第 80 百分位数是 ( )

A.90　　B.90.5

C.91　　D.91.5

B **解析**:把成绩按从小到大的顺序排列为

56,70,72,78,79,80,81,83,84,86,88,90,91,94,98.

因为 $15\times80\%=12$,所以这 15 人成绩的第 80 百分位数是 $\dfrac{90+91}{2}=90.5$.

2.求下列数据的四分位数.

13,15,12,27,22,24,28,30,31,18,19,20.

解:把这 12 个数据按从小到大的顺序排列为

12,13,15,18,19,20,22,24,27,28,30,31,

因为 $12\times25\%=3$,$12\times50\%=6$,$12\times75\%=9$,

所以这组数据的第 25 百分位数为 $\frac{15+18}{2}=16.5$,

第 50 百分位数为 $\frac{20+22}{2}=21$,

第 75 百分位数为 $\frac{27+28}{2}=27.5$.

反思提炼

百分位数的注意点

(1)数据需按照从小到大的顺序排列;

(2)一组数据的百分位数既可能是这组数据中的数,也可能不是这组数据中的数;

(3)一组数据的某些百分位数可能是同一个数.

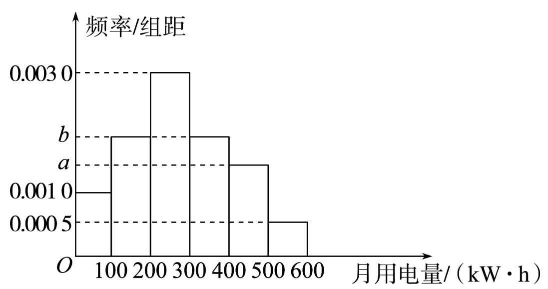
学习任务二 百分位数的综合应用

例 某市为了鼓励市民节约用电,实行"阶梯式"电价,将该市每户居民的月用电量划分为三档,月用电量不超过 200 kW·h 的部分按0.5 元/(kW·h)收费,超过 200 kW·h 但不超过 400 kW·h 的部分按 0.8 元/(kW·h)收费,超过 400 kW·h 的部分按 1.0元/(kW·h)收费.

(1)求某户居民用电费用 y(单位:元)关于月用电量 x(单位:kW·h)的函数解析式;

(2)为了了解居民的用电情况,通过抽样获得了今年 1 月份 100 户居民每户的用电量,统计分析后得到如图所示的频率分布直方图.若这 100 户居民中,今年 1 月份用电费用不超过 260 元的占 80%,求 a,b 的值;

(3)根据(2)中求得的数据计算用电量的 75%分位数.



解:(1)当 $0\leqslant x\leqslant200$ 时,$y=0.5x$;

当 $200<x\leqslant400$ 时,$y=0.5\times200+0.8\times(x-200)=0.8x-60$;

当 $x>400$ 时,$y=0.5\times200+0.8\times200+1.0\times(x-400)=x-140$.

所以 y 关于 x 的函数解析式为

$$y=\begin{cases}0.5x,0\leqslant x\leqslant200,\\0.8x-60,200<x\leqslant400,\\x-140,x>400.\end{cases}$$

(2)由(1)可知,当 $y=260$ 时,$x=400$,即用电量不超过 400 kW·h 的占 80%.

结合频率分布直方图可知

$$\begin{cases}0.001\ 0\times100+2b\times100+0.003\ 0\times100=0.8,\\100a+0.000\ 5\times100=0.2,\end{cases}$$

解得 $a=0.001\ 5$,$b=0.002\ 0$.

(3)设 75%分位数为 m.

因为用电量低于 300 kW·h 的占 $(0.001\ 0+0.002\ 0+0.003\ 0)\times100=60\%$,

用电量不超过 400 kW·h 的占 80%,

所以用电量的 75%分位数 m 在[300,400)内,

所以 $0.6+(m-300)\times0.002=0.75$,

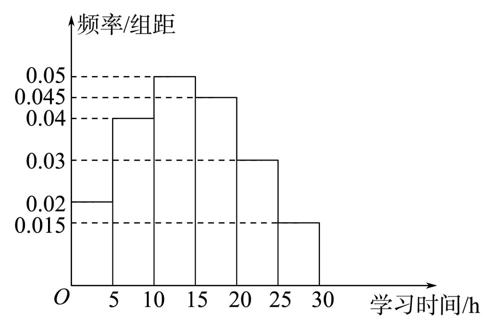
解得 $m=375$,即用电量的 75%分位数为 375 kW·h.

反思提炼

根据频率分布直方图计算样本数据的百分位数,首先要理解频率分布直方图中各组数据频率的计算方法,其次估计百分位数在哪一组,应运用方程的思想方法,设出百分位数,解方程可得.

探究训练

为了解学生的周末学习时间(单位:h),高一年级某班班主任对本班 40 名学生某周末的学习时间进行了调查,将所得数据整理绘制成如图所示的频率分布直方图,根据直方图所提供的信息,回答下列问题.



(1)求该班学生周末的学习时间不少于 20 h 的人数;

(2)估计这 40 名学生周末学习时间的 25%分位数;

(3)如果用该班学生周末的学习时间作为样本去推断该校高一年级全体学生周末的学习时间,这样推断是否合理?说明理由.

解:(1)由题图可知,该班学生周末的学习时间不少于 20 h 的频率为 $(0.03+0.015)\times5=0.225$,

则 40 名学生中周末的学习时间不少于 20 h 的人数为 $40\times0.225=9$.

(2)由题图知,学习时间少于 5 h 的频率为 $0.02\times5=0.1<0.25$,

学习时间少于 10 h 的频率为 $0.1+0.04\times5=0.3>0.25$,

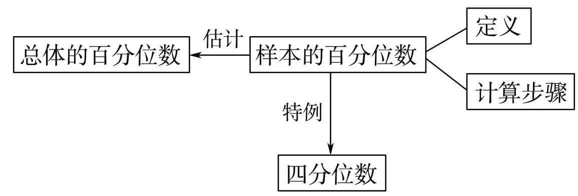
所以 25%分位数在(5,10)内.

因为 $5+5\times\dfrac{0.25-0.1}{0.04\times5}=8.75$,

所以这 40 名学生周末学习时间的 25%分位数为 8.75 h.

(3)不合理.样本的选取集中在一个班,不具有代表性.

▶体系构建



课后素养评价(四十一)

基础性·能力运用

1. 数据 13.27‰,14.57‰,13.03‰,13.83‰,11.99‰,13.57‰,12.64‰,10.86‰,10.41‰,8.52‰的 60%分位数是　(　　)

A.13.57‰　B.13.03‰　C.13.27‰　D.13.15‰

D　**解析**:由题意将数据从小到大排列为 8.52‰,10.41‰,10.86‰,11.99‰,12.64‰,13.03‰,13.27‰,13.57‰,13.83‰,14.57‰,而 $10\times60\%=6$,所以这组数据的 60%分位数为第 6 个和第 7 个数的平均数,即 $\dfrac{13.03‰+13.27‰}{2}=13.15‰$.故选 D.

2. 某校调查了某班 30 名同学所穿的鞋的尺码,调查数据如下表所示:

码号	33	34	35	36	37
人数	7	6	14	1	2

则这组数据的第 25 百分位数是　(　　)

A.33　B.34　C.35　D.36

B　**解析**:因为 $30\times25\%=7.5$,所以这组数据的第 25 百分位数为 34.故选 B.

3. (生活中的百分位数)下表是某公司技术部职工的月固定工资统计表:

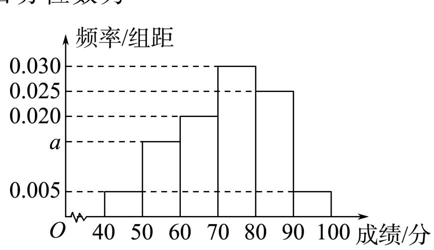
职工	总工程师	工程师	技术员 A	技术员 B	技术员 C	技术员 D	技术员 E	见习技术员
固定工资/元	9 000	7 000	4 000	3 200	2 600	2 000	1 500	1 000

由该表能判断出该部门职工固定工资的 75%分位数是________元.

5 500　**解析**:由 $8\times75\%=6$,得该公司职工固定工资的 75%分位数为表中从右到左的第 6 个数与第 7 个数的平均数,即为 $\dfrac{4\ 000+7\ 000}{2}=5\ 500$.

综合性·创新提升

1. 为更好地满足民众个性化、多元化、便利化的消费需求,丰富购物体验和休闲业态,某市积极打造夜间经济.为不断创建、优化夜间经济发展环境,推动消费升级,有关部门对某热门夜市开展"服务满意度调查",随机选取了 100 名顾客进行问卷调查,对夜市服务进行评分(满分 100 分),根据评分情况绘制了如图所示的频率分布直方图,估计这组数据的第 55 百分位数为　(　　)



A.65　B.72

C.72.5　D.75

D　**解析**:由题中频率分布直方图知[70,80),[80,90),[90,100]三个区间的频率和为 $(0.030+0.025+0.005)\times10=0.6$,所以第 55 百分位数所在区间为[70,80),设其为 x,则 $\dfrac{x-70}{10}=\dfrac{0.15}{0.3}$,解得 $x=75$.故选 D.

2. 数据 3.2,3.4,3.8,4.2,4.3,4.5,x,6.6 的第 65 百分位数是 4.5,则实数 x 的取值范围是　(　　)

A.$[4.5,+\infty)$　B.$[4.5,6.6)$

C.$(4.5,+\infty)$　D.$(4.5,6.6]$

A　**解析**:因为 $8\times65\%=5.2$,所以这组数据的第 65 百分位数是第 6 个数据 4.5,则 $x\geqslant4.5$.故选 A.

3. 从某珍珠公司生产的产品中,任意抽取12颗珍珠,得到它们的质量(单位:g)如下:7.9,9.0,8.9,8.6,8.4,8.5,8.5,8.5,9.9,7.8,8.3,8.0.

(1)分别求出这组数据的第25,75,95百分位数;

(2)请你找出质量较小的前15%的珍珠的质量;

(3)若用第25,50,95百分位数把公司生产的珍珠划分为次品、合格品、优等品和特优品,依照这个样本的数据,给出该公司珍珠等级的划分标准.

解:(1)将所有数据从小到大排列,得

7.8,7.9,8.0,8.3,8.4,8.5,8.5,8.5,8.6,8.9,9.0,9.9.

共有12个数据,

$12\times25\%=3$,$12\times75\%=9$,$12\times95\%=11.4$,

则第25百分位数是$\frac{8.0+8.3}{2}=8.15$,

第75百分位数是$\frac{8.6+8.9}{2}=8.75$,

第95百分位数是第12个数据,为9.9.

(2)共有12个数据,$12\times15\%=1.8$,则第15百分位数是第2个数据,为7.9.

即质量较小的前15%的产品有2个,它们的质量分别为7.8 g,7.9 g.

(3)由(1)可知样本数据的第25百分位数是8.15 g,第50百分位数为8.5 g,第95百分位数是9.9 g,所以质量小于或等于8.15 g的珍珠为次品,质量大于8.15 g且小于或等于8.5 g的珍珠为合格品,质量大于8.5 g且小于或等于9.9 g的珍珠为优等品,质量大于9.9 g的珍珠为特优品.

9.2.3 总体集中趋势的估计

学习任务目标

1. 结合实例,能用样本估计总体的集中趋势参数(平均数、中位数、众数).(数据分析)

2. 理解集中趋势参数的统计含义.(数学抽象)

问题式预习

知识清单

1. 众数、中位数和平均数

(1)定义

①众数:一组数据中出现次数最多的数.

②中位数:一组数据按从大到小或者从小到大的顺序排列后,处于中间位置的数.如果个数是偶数,那么取中间两个数据的平均数.

③平均数:一组数据的和除以数据个数所得到的数.

(2)众数、中位数和平均数的比较

名称	优点	缺点
平均数	与中位数相比,平均数反映出样本数据中的更多信息,对样本中的极端值更加敏感	任何一个数据的改变都会引起平均数的改变.数据越“离群”,对平均数的影响越大
中位数	不受少数几个极端数据(即排序靠前或靠后的数据)的影响	对极端值不敏感
众数	体现了样本数据的最大集中点	众数只能传递数据中的信息的很少一部分,对极端值不敏感

2. 众数、中位数、平均数与频率分布直方图的关系

(1)平均数:在频率分布直方图中,样本平均数可以用每个小矩形底边中点的横坐标与小矩形的面积的乘积之和近似代替.

(2)中位数:在频率分布直方图中,中位数左边和右边的直方图的面积应该相等.

(3)众数:众数是频率分布直方图中最高小矩形底边的中点所对应的数据.

概念辨析

1. 判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)一个样本的众数、平均数和中位数都是唯一的. (×)

(2)若改变一组数据中的一个数,则这组数据的平均数、中位数、众数都会发生改变. (×)

2.七位评委为某跳水运动员打出的分数如下：84，79，86，87，84，93，84，则这组分数的中位数和众数分别是　　（　　）

A.84，85

B.84，84

C.85，84

D.85，85

B　**解析**：把七位评委打出的分数按从小到大的顺序排列为 79，84，84，84，86，87，93，可知众数是 84，中位数是 84.

3.请思考并回答问题：

(1)中位数一定是样本数据中的一个数吗？

提示：不一定.一组数据按从大到小或从小到大的顺序排列后，如果有奇数个数据，那么处于中间位置的数是中位数；如果有偶数个数据，那么中间两个数据的平均数是中位数.

(2)一组数据的众数可以有几个？中位数是否也具有相同的结论？

提示：一组数据的众数可能有一个，也可能有多个，中位数只有唯一一个.

任务型课堂

学习任务一　平均数、中位数和众数的计算

1.某班甲、乙两名同学在 5 次阶段性检测中的数学成绩(百分制)如下所示，

甲的成绩：75，83，85，85，92；

乙的成绩：74，84，84，85，98.

甲、乙两名同学成绩的中位数分别为 x_1，x_2，成绩的平均数分别为 y_1，y_2，则下列结论正确的是　　（　　）

A.$x_1<x_2$，$y_1<y_2$

B.$x_1<x_2$，$y_1>y_2$

C.$x_1>x_2$，$y_1>y_2$

D.$x_1>x_2$，$y_1<y_2$

D　**解析**：由题意可得 $x_1=85$，$x_2=84$，故 $x_1>x_2$. 而甲的成绩的平均数 $y_1=\frac{1}{5}\times(75+83+85+85+92)=84$，乙的成绩的平均数 $y_2=\frac{1}{5}\times(74+84+84+85+98)=85$，故 $y_1<y_2$.故选 D.

2.在一次中学生田径运动会上，参加男子跳高的 17 名运动员的成绩(单位：m)如表所示：

成绩	1.50	1.60	1.65	1.70	1.75	1.80	1.85	1.90
人数	2	3	2	3	4	1	1	1

分别求这些运动员成绩的众数、中位数与平均数.

解：在 17 个数据中，1.75 出现了 4 次，出现的次数最多，即这组数据的众数是 1.75.表里的 17 个数据可看成是按从小到大的顺序排列的，其中第 9 个数据 1.70 是最中间的一个数据，即这组数据的中位数是 1.70.

这组数据的平均数 $\overline{x}=\frac{1}{17}\times(1.50\times2+1.60\times3+1.65\times2+1.70\times3+1.75\times4+1.80\times1+1.85\times1+1.90\times1)\approx1.69$(m).

故 17 名运动员成绩的众数、中位数、平均数依次为 1.75 m，1.70 m，1.69 m.

反思提炼

平均数、众数、中位数的求法

平均数一般是根据公式来计算的.求众数、中位数时，可先将这组数据按从小到大或从大到小的顺序排列，再根据各自的定义求得.

学习任务二　平均数、中位数和众数的应用

例 1　某校在一项体育考试中，甲、乙两班学生的成绩统计如下：

成绩/分		50	60	70	80	90	100
人数	甲班	1	6	12	11	15	5
	乙班	3	5	15	3	13	11

选用平均数、众数与中位数评估这两个班的成绩.

解：甲班成绩的平均数为 79.6 分，乙班成绩的平均数为 80.2 分，从平均数看成绩较好的是乙班.

甲班成绩的众数为 90 分，乙班成绩的众数为 70 分，从众数看成绩较好的是甲班.

按从高到低(或从低到高)的顺序排列之后，甲班成绩

的第25个和第26个数据都是80,所以中位数是80分.同理乙班成绩的中位数也是80分.但是甲班成绩在中位数以上(含中位数)的学生有31人,占全班学生的62%,而乙班有27人,占全班学生的54%.所以从中位数看成绩较好的是甲班.

反思提炼

众数、中位数、平均数的意义

(1)样本的众数、中位数和平均数常用来表示样本数据的"中心值",其中众数和中位数不受少数几个极端值的影响,但只能表达样本数据中的少量信息,平均数代表了数据更多的信息,但受样本中每个数据的影响,越极端的数据对平均数的影响越大.

(2)当一组数据中有不少数据重复出现时,其众数往往更能反映问题,当一组数据中个别数据较大时,可用中位数描述其集中趋势.

探究训练

某部门的人员及月工资构成如下:

人员	经理	管理人员	高级技工	工人	学徒	合计
月工资/元	22 000	2 500	2 200	2 000	1 000	—
人数	1	6	5	10	1	23
合计	22 000	15 000	11 000	20 000	1 000	69 000

(1)指出这个表格中月工资的众数、中位数、平均数.

(2)这个表格中,平均数能客观地反映该部门人员的月工资水平吗?为什么?

解:(1)由表格可知,众数为2 000元.

把23个数据按从小到大(或从大到小)的顺序排列,排在中间的数应是第12个数,其值为2 200,故中位数为2 200元.

平均数为69 000÷23=3 000(元).

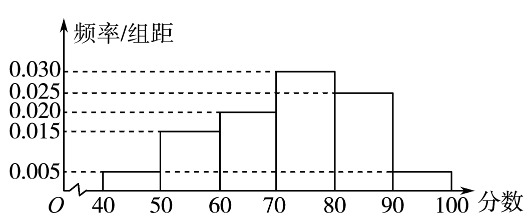
(2)不能.理由如下:虽然平均数为3 000元,但由表格中所列出的数据可见,只有经理的工资在平均数以上,其余人的工资都在平均数以下,故用平均数不能客观真实地反映该部门人员的月工资水平.

学习任务三 根据频率分布直方图求平均数、中位数和众数

例2 某校从参加高二年级学业水平测试的学生中抽出80名学生,其数学成绩(均为整数)的频率分布直方图如图所示.

(1)求这次测试中数学成绩的众数;

(2)求这次测试中数学成绩的中位数.



解:(1)由题图知众数为$\frac{70+80}{2}=75$.

(2)由题图,设中位数为x.由于前三个矩形面积之和为0.4,第四个矩形面积为0.3,$0.3+0.4>0.5$,因此中位数位于第四组区间内.由题意得$0.4+0.03\times(x-70)=0.5$,所以$x\approx73.3$.

反思提炼

根据频率分布直方图求平均数、中位数和众数时的注意点

(1)在频率分布直方图中,我们无法知道每组内的数据是如何分布的.此时,通常假设它们在组内均匀分布,这样就可以获得样本的平均数、中位数和众数的近似值,进而估计总体的平均数、中位数和众数.

(2)在频率分布直方图中计算中位数的步骤.

①确定中位数所在的组.②使用公式计算中位数:中位数$=L+\frac{(0.5-B)}{N}\times C$.在这个公式中,$L$是中位数所在组的下限;$N$是中位数所在组的频率;$B$是中位数所在组之前的累积频率;$C$是频率分布直方图的组距.

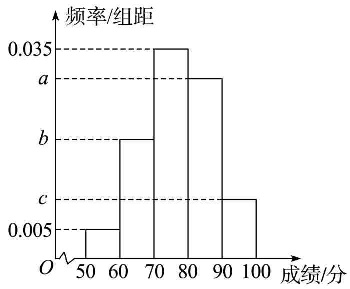
(3)用频率分布直方图求得的众数、中位数不一定是样本中具体的数.

探究训练

某学校对该校120名老师进行消防和卫生安全知识考试,并将考试成绩(百分制)按照[50,60),[60,70),…,[90,100]分成5组,制成如图所示的频率分布直方图.已知$a+c=2b$,成绩在[90,100]的人数为12.

(1)求图中a,b,c的值;

(2)若考试成绩的平均数、中位数均超过75,则认为该学校老师消防和卫生安全意识良好,试判断该学校老师的消防和卫生安全意识是否良好.



解:(1)因为成绩在$[90,100]$的人数为 12,

所以$[90,100]$的频率为$\frac{12}{120}=0.1$,

所以 $c=\frac{0.1}{10}=0.01$.

因为$(a+c+b+0.005+0.035)\times10=1$,所以 $a+c+b=0.06$.

又 $a+c=2b$,

所以 $b=0.02,a=0.03$.

(2)成绩的平均数为 $55\times0.05+65\times0.2+75\times0.35+85\times0.3+95\times0.1=77>75$.

设成绩的中位数为 m,

由 $10\times0.005+10\times0.02=0.25<0.5$,

$10\times0.005+10\times0.02+10\times0.035=0.6>0.5$,

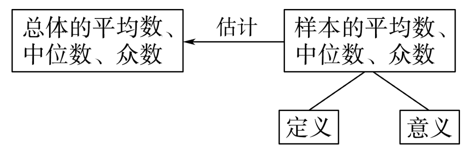
可知 m 在$[70,80)$内.

由 $0.25+(m-70)\times0.035=0.5$,

解得 $m\approx77.1>75$.

所以该学校老师的消防和卫生安全意识良好.

体系构建



课后素养评价(四十二)

基础性·能力运用

1. 从某班所有同学中随机抽取 10 人,获得他们某学年参加社区服务次数的数据如下:4,4,4,7,7,8,8,9,9,10,对于这组数据,下列说法正确的是 ( )

A.众数是 7

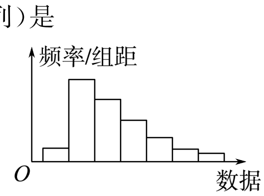
B.平均数是 7

C.第 75 百分位数是 8.5

D.中位数是 8

B **解析**:由题意可知,众数是 4,A 错误;中位数为$\frac{7+8}{2}=7.5$,D 错误;平均数为$\frac{1}{10}\times(4+4+4+7+7+8+8+9+9+10)=7$,B 正确;因为 $10\times75\%=7.5$,所以第 75 百分位数为第 8 个数 9,C 错误.故选 B.

2. 众数、平均数、中位数都描述了数据的集中趋势,它们的大小关系和数据分布的形态有关.在如图所示的分布形态中,平均数、众数和中位数的大小关系(由小到大排列)是 ( )



A.众数<中位数<平均数

B.平均数<众数<中位数

C.中位数<平均数<众数

D.众数<平均数<中位数

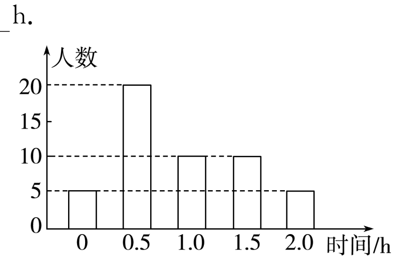
A **解析**:众数是最高矩形的中点横坐标,因此众数在第二列的中点处.因为直方图第二、三列所占数据较多,且在右边拖尾,所以平均数大于中位数.又由直方图中小长方形面积可知中位数位于第三列的位置,因此有众数<中位数<平均数.故选 A.

3. 一组数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数是 30,则数据 $2x_1+1,2x_2+1,\cdots,2x_n+1$ 的平均数是________.

61 **解析**:因为样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数是 30,所以$\sum_{i=1}^{n}x_i=30n$,

所以数据 $2x_1+1,2x_1+1,\cdots,2x_n+1$ 的平均数 $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2x_i+1)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i+1=61$.

4. 某学校为了了解学生课外阅读情况,随机调查了 50 名学生,得到他们在某天内课外阅读所用时间的数据,将结果用条形统计图表示如下.根据条形统计图估计该校全体学生这一天课外阅读的平均时间为________h.



0.9 **解析**:由条形统计图可得,这 50 名学生这一天

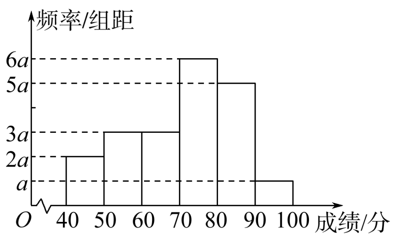
课外阅读的平均时间为

$\frac{5\times0+20\times0.5+10\times1.0+10\times1.5+5\times2.0}{50}=0.9(\text{h})$,

因此估计该校全体学生这一天课外阅读的平均时间为 0.9 h.

综合性·创新提升

1.(多选题)为了加深师生对校史的了解,激发广大师生知史爱校的热情,某校举办了“学校史、育文化”校史知识竞赛,并将 1 000 名师生的竞赛成绩(满分 100 分,成绩取整数)整理成如图所示的频率分布直方图,则下列说法正确的是 ( )



A.a 的值为 0.005

B.估计成绩低于 60 分的有 25 人

C.估计这组数据的众数为 75

D.估计这组数据的第 85 百分位数为 86

ACD **解析**:对于 A,由$(a+2a+3a+3a+5a+6a)\times10=1$,得 $a=0.005$,故 A 正确;

对于 B,估计成绩低于 60 分的有 $1\,000\times(2a+3a)\times10=50\,000a=250$(人),故 B 错误;

对于 C,由众数的定义知,估计这组数据的众数为 75,故 C 正确;

对于 D,设这组数据的第 85 百分位数为 m,则$(90-m)\times5\times0.005+0.005\times10=1-85\%=0.15$,解得 $m=86$,故 D 正确.故选 ACD.

2.某企业有 3 个分厂生产同一种电子产品,第一、二、三分厂的产量之比为1∶2∶1,用分层随机抽样的方法(每个分厂的产品为一层)从 3 个分厂生产的电子产品中共抽取 100 件做使用寿命的测试,由所得的测试结果算得从第一、二、三分厂取出的产品的使用寿命的平均数分别为 980 h,1 020 h,1 032 h,则抽取的 100 件产品的使用寿命的平均数为________h.

1 013 **解析**:由题知,第一、二、三分厂取出的产品数量分别为 $100\times\frac{1}{4}=25$(件),$100\times\frac{2}{4}=50$(件),$100\times\frac{1}{4}=25$(件).故这 100 件产品的使用寿命的平均数为$\frac{980\times25+1\,020\times50+1\,032\times25}{100}=1\,013(\text{h})$.

3.已知甲、乙两组数据按从小到大的顺序排列后如下所示:

甲:27,m,39;

乙:n,32,34,38.

若这两组数据的中位数相同,平均数也相同,则$\frac{m}{n}$=________.

$\frac{33}{28}$ **解析**:因为两组数据的中位数相同,所以 $m=\frac{32+34}{2}=33$.由于两组数据的平均数相同,所以$\frac{1}{3}\times(27+33+39)=\frac{1}{4}\times(n+32+34+38)$,解得 $n=28$.故$\frac{m}{n}=\frac{33}{28}$.

9.2.4　总体离散程度的估计

学习任务目标

1.结合实例,能用样本估计总体的离散程度参数(标准差、方差、极差).(数据分析)

2.理解离散程度参数的统计意义.(数学抽象)

问题式预习

知识清单

1.方差和标准差

(1)数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方差为 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\overline{x}^2$,标准差为 $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$.

(2)总体方差和标准差

①总体方差和标准差:如果总体中所有个体的变量值分别为 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_N$,总体平均数为 $\overline{Y}$,则称 $S^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(Y_i-\overline{Y})^2$ 为总体方差,$S=\sqrt{S^2}$ 为总体标准差.

②总体方差的加权形式:如果总体的 N 个变量值中,不同的值共有 $k(k\leqslant N)$ 个,不妨记为 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_k$,其中 Y_i 出现的频数为 $f_i(i=1,2,\cdots,k)$,则总体方差为 $S^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}f_i(Y_i-\overline{Y})^2$.

(3)样本方差和标准差

如果一个样本中个体的变量值分别为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$,样本平均数为 $\overline{y}$,则称 $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$ 为样本方差,$s=\sqrt{s^2}$ 为样本标准差.

(4)标准差的意义

标准差刻画了数据的离散程度或波动幅度,标准差越大,数据的离散程度越大;标准差越小,数据的离散程度越小.

2.分层随机抽样的方差

设样本容量为 n,平均数为 $\overline{x}$,其中两层的个体数量分别为 n_1,n_2,两层的平均数分别为 $\overline{x}_1,\overline{x}_2$,方差分别为 s_1^2,s_2^2,则这个样本的方差为 $s^2=\frac{n_1}{n}[s_1^2+(\overline{x}_1-\overline{x})^2]+\frac{n_2}{n}[s_2^2+(\overline{x}_2-\overline{x})^2]$.

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)极差对一组数据中的极端值非常敏感.　(√)

(2)方差与原始数据的单位一致.　(×)

(3)标准差、方差越小,数据的离散程度越大,即数据离平均数波动的幅度越大.　(×)

(4)平均数和标准差一起能反映数据取值的更多信息.　(√)

2.在高一期中考试中,甲、乙两个班的数学成绩统计如下表:

班级	人数	平均分数	方差
甲	20	$\overline{x}_{甲}$	2
乙	30	$\overline{x}_{乙}$	3

其中 $\overline{x}_{甲}=\overline{x}_{乙}$,则两个班数学成绩的方差为(　　)

A.3　　B.2　　C.2.6　　D.2.5

C　**解析**:由题意可知两个班的数学成绩的平均数 $\overline{x}=\overline{x}_{甲}=\overline{x}_{乙}$,则两个班数学成绩的方差为 $s^2=\frac{20}{20+30}[2+(\overline{x}_{甲}-\overline{x})^2]+\frac{30}{20+30}[3+(\overline{x}_{乙}-\overline{x})^2]=\frac{20}{20+30}\times2+\frac{30}{20+30}\times3=2.6$.

3.请思考并回答问题:

怎样理解方差和标准差?

提示:(1)标准差、方差描述了一组数据围绕平均数波动的大小.标准差、方差越大,数据的离散程度越大;标准差、方差越小,数据的离散程度越小.

(2)标准差、方差的取值范围:$[0,+\infty)$.

标准差、方差为0时,样本各数据全相等,表明数据没有波动幅度,数据没有离散性.

(3)标准差的平方称为方差,有时用方差代替标准差测量样本数据的离散程度.方差与标准差的测量效果是一致的,在实际应用中一般多采用标准差.

(4)标准差的单位与样本数据一致.

任务型课堂

学习任务一 方差与标准差的计算

1. 已知一个样本中的数据为1,2,3,4,5,则该样本的标准差为 ( )

A.1 B.$\sqrt{2}$ C.$\sqrt{3}$ D.2

B **解析**:因为样本容量 $n=5$,所以 $\overline{x}=\frac{1}{5}\times(1+2+3+4+5)=3$,

所以 $s^2=\frac{1}{5}\times[(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2]=2$,

所以 $s=\sqrt{2}$.

2. 已知某7个数的平均数为4,方差为2.现加入一个新数据4,此时这8个数的平均数为 $\overline{x}$,方差为 s^2,则 ( )

A.$\overline{x}=4,s^2<2$

B.$\overline{x}=4,s^2>2$

C.$\overline{x}>4,s^2<2$

D.$\overline{x}>4,s^2>2$

A **解析**:因为这7个数的平均数为4,所以这7个数的和为 $4\times7=28$.

因为加入一个新数据4,所以 $\overline{x}=\frac{28+4}{8}=4$.

因为这7个数的方差为2,且加入一个新数据4,

所以这8个数的方差 $s^2=\frac{7\times2+(4-4)^2}{8}=\frac{7}{4}<2$.

故选A.

3. 抽样统计甲、乙两位运动员的5次训练成绩,结果如下:

运动员	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次
甲	87	91	90	89	93
乙	89	90	91	88	92

则成绩较为稳定的那位运动员成绩的方差为________.

2 **解析**:$\overline{x}_甲=\frac{1}{5}\times(87+91+90+89+93)=90$,

$\overline{x}_乙=\frac{1}{5}\times(89+90+91+88+92)=90$,

$s_甲^2=\frac{1}{5}\times[(87-90)^2+(91-90)^2+(90-90)^2+(89-90)^2+(93-90)^2]=4$,

$s_乙^2=\frac{1}{5}\times[(89-90)^2+(90-90)^2+(91-90)^2+(88-90)^2+(92-90)^2]=2$.

故成绩较为稳定的那位运动员为乙,其成绩的方差为2.

反思提炼

计算方差、标准差的步骤

(1)计算样本的平均数 $\overline{x}$;

(2)计算每个样本数据与样本平均数的差 $x_i-\overline{x}(i=1,2,\cdots,n)$;

(3)计算 $(x_i-\overline{x})^2(i=1,2,\cdots,n)$;

(4)计算 $(x_i-\overline{x})^2(i=1,2,\cdots,n)$ 这 n 个数据的平均数,即得样本方差 s^2;

(5)计算方差的算术平方根,即得样本的标准差 s.

学习任务二 分层随机抽样的方差

例1 某学校统计教师职称及年龄,中级职称教师的人数为50,其平均年龄为38岁,方差是2;高级职称的教师中,3人58岁,5人40岁,2人38岁.求该校中级职称和高级职称教师年龄的平均数和方差.

解:由已知条件可知,高级职称教师的平均年龄 $\overline{x}_高=\frac{3\times58+5\times40+2\times38}{3+5+2}=45$(岁),方差 $s_高^2=\frac{1}{3+5+2}\times[3\times(58-45)^2+5\times(40-45)^2+2\times(38-45)^2]=73$,

该校中级职称和高级职称教师的平均年龄

$\overline{x}=\frac{50}{50+10}\times38+\frac{10}{50+10}\times45\approx39$(岁).

该校中级职称和高级职称教师的年龄的方差

$s^2=\frac{50}{50+10}\times[2+(38-39)^2]+\frac{10}{50+10}\times[73+(45-39)^2]\approx20.67$.

反思提炼

计算分层随机抽样中的方差 s^2 的步骤

(1)分别计算分层随机抽样中两层样本数据的均值 $\overline{x},\overline{y}$,方差 s_x^2,s_y^2,求出它们的数据个数之比 $\frac{n}{m}$;

(2)总体均值 $\overline{z}=\frac{n}{n+m}\overline{x}+\frac{m}{n+m}\overline{y}$;

(3)总体方差 $s^2=\frac{n}{n+m}[s_x^2+(\overline{z}-\overline{x})^2]+\frac{m}{n+m}[s_y^2+(\overline{z}-\overline{y})^2]$.

探究训练

某次数学学科竞赛 A,B 两个班分别报名了 10 人和 30 人,A 班的平均成绩为 130 分,方差为 115,B 班的平均成绩为 110 分,方差为 215.求在这次竞赛中两个班全体报名学生成绩的平均数和方差.

解:依题意 $\overline{x}_A=130,s_A^2=115,\overline{x}_B=110,s_B^2=215$,

所以 $\overline{x}=\frac{10}{10+30}\times130+\frac{30}{10+30}\times110=115$(分),

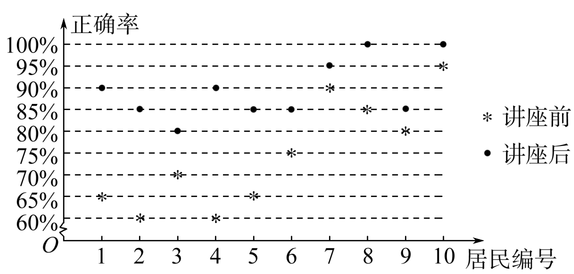
所以全体报名学生成绩的平均数为 115 分.

全体报名学生成绩的方差 $s^2=\frac{10}{10+30}\times[115+(130-115)^2]+\frac{30}{10+30}\times[215+(110-115)^2]$

$=85+180=265$.

学习任务三　方差、标准差与统计图表的综合应用

例 2　(1)(2022·全国甲卷(理))某社区通过公益讲座以普及社区居民的垃圾分类知识.为了解讲座效果,随机抽取 10 位社区居民,让他们在讲座前和讲座后各回答一份垃圾分类知识问卷,这 10 位社区居民在讲座前和讲座后问卷答题的正确率如下图,则　(　　)



A.讲座前问卷答题的正确率的中位数小于 70%

B.讲座后问卷答题的正确率的平均数大于 85%

C.讲座前问卷答题的正确率的标准差小于讲座后问卷答题的正确率的标准差

D.讲座后问卷答题的正确率的极差大于讲座前问卷答题的正确率的极差

B　**解析**:讲座前中位数为 $\frac{70\%+75\%}{2}>70\%$,所以 A 错误;

讲座后问卷答题的正确率只有一个是 80%,4 个 85%,剩下全部大于等于 90%,所以讲座后问卷答题的正确率的平均数大于 85%,所以 B 正确;

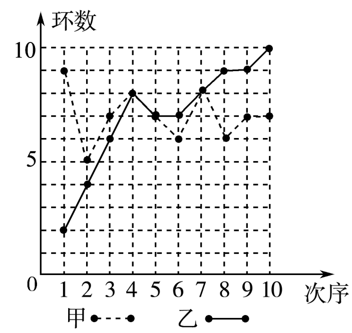
因为讲座前问卷答题的正确率更加分散,所以讲座前问卷答题的正确率的标准差大于讲座后问卷答题的正确率的标准差,所以 C 错误;

讲座后问卷答题的正确率的极差为 $100\%-80\%=20\%$,

讲座前问卷答题的正确率的极差为 $95\%-60\%=35\%>20\%$,所以 D 错误.

故选 B.

(2)甲、乙两人在相同条件下各射击 10 次,每次中靶环数情况如图所示.



①请填写下表(写出计算过程):

选手	平均数	方差	命中 9 环及 9 环以上的次数
甲			
乙			

②从下列三个不同的角度对这次射击结果进行分析:

从平均数和方差相结合看(分析谁的成绩更稳定);

从平均数和命中 9 环及 9 环以上的次数相结合看(分析谁的成绩好些);

从折线图上两人射击命中环数的走势看(分析谁更有潜力).

解:由题图知,甲射击 10 次中靶环数分别为 9,5,7,8,7,6,8,6,7,7,

将它们由小到大排列为 5,6,6,7,7,7,7,8,8,9.

乙射击 10 次中靶环数分别为 2,4,6,8,7,7,8,9,9,10,

将它们由小到大排列为 2,4,6,7,7,8,8,9,9,10.

①$\overline{x}_甲=\frac{1}{10}\times(5+6\times2+7\times4+8\times2+9)=7$(环),

$\overline{x}_乙=\frac{1}{10}\times(2+4+6+7\times2+8\times2+9\times2+10)=7$(环),

$s_甲^2=\frac{1}{10}\times[(5-7)^2+(6-7)^2\times2+(7-7)^2\times4+(8-7)^2\times2+(9-7)^2]=\frac{1}{10}\times(4+2+0+2+4)=1.2$,

$s_{乙}^{2}=\frac{1}{10}\times[(2-7)^{2}+(4-7)^{2}+(6-7)^{2}+(7-7)^{2}\times 2+(8-7)^{2}\times 2+(9-7)^{2}\times 2+(10-7)^{2}]=\frac{1}{10}\times(25+9+1+0+2+8+9)=5.4.$

填表如下：

选手	平均数	方差	命中9环及9环以上的次数
甲	7	1.2	1
乙	7	5.4	3

②因为平均数相同，$s_{甲}^{2}<s_{乙}^{2}$，所以甲的成绩比乙稳定.

因为平均数相同，甲命中9环及9环以上的次数比乙少，

所以乙的成绩比甲好些.

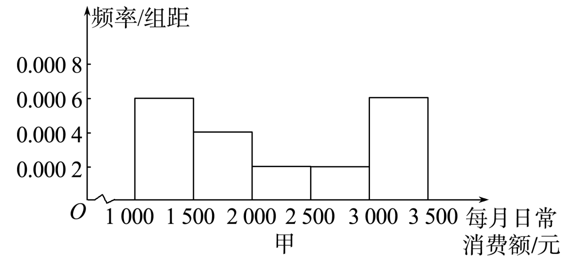
甲成绩在平均数上下波动；而乙成绩处于上升趋势，从第三次以后就没有比甲低的情况发生，所以乙更有潜力.

反思提炼

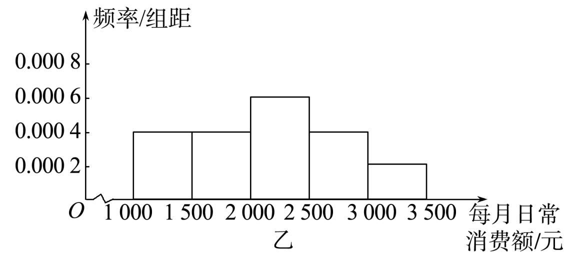
在实际问题中，仅靠平均数不能完全表达数据的信息，还要研究方差，方差描述了数据相对平均数的离散程度.在平均数相同的情况下，方差越大，离散程度越大，数据波动性越大，稳定性越差；方差越小，数据越集中，越稳定.

探究训练

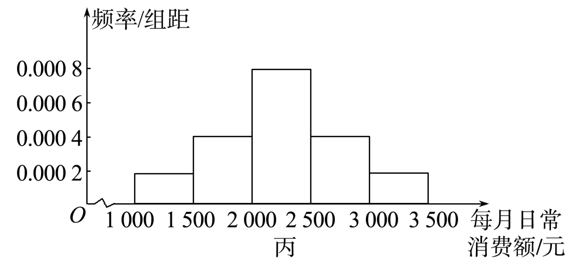
为了解本市居民的生活成本，甲、乙、丙三名同学利用假期分别对三个社区进行了“家庭每月日常消费额”的调查，他们将所调查得到的数据分别绘制成如图所示的频率分布直方图，记甲、乙、丙所调查数据的标准差分别为 s_1，s_2，s_3，则它们的大小关系为________.（用“＞”连接）



甲



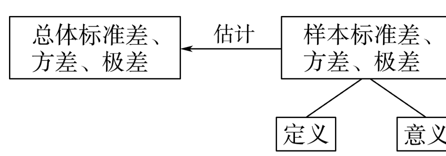
乙



丙

$s_1>s_2>s_3$ **解析**：根据频率分布直方图知，甲的数据绝大部分都处在两端，离平均值较远，表现的最分散，标准差最大；乙的数据分布均匀，不如甲中数据偏离平均值大，标准差比甲的小；丙的数据大部分都在平均值左右，数据表现的最集中，方差最小，故 $s_1>s_2>s_3$.

体系构建



课后素养评价（四十三）

基础性·能力运用

1.已知数据2，8，3，7，a，6的平均数是5，则这组数据的标准差为（　　）

A.$\frac{28}{5}$　　B.$\frac{14}{3}$　　C.$\frac{\sqrt{7}}{3}$　　D.$\frac{\sqrt{42}}{3}$

D　**解析**：由题意得$\frac{2+8+3+7+a+6}{6}=5$，解得$a=4$，故这组数据的方差为$\frac{1}{6}\times[(2-5)^{2}+(8-5)^{2}+(3-5)^{2}+(7-5)^{2}+(4-5)^{2}+(6-5)^{2}]=\frac{14}{3}$，故标准差为$\sqrt{\frac{14}{3}}=\frac{\sqrt{42}}{3}$.故选D.

2.高三学生小李在一年的五次数学模拟考试中的成绩（单位：分）为x，y，105，109，110.已知该同学五次数学成绩数据的平均数为108，方差为35.2，则$|x-y|$的值为（　　）

A.15　　B.16

C.17　　D.18

D　**解析**：由题意，得 $\frac{x+y+105+109+110}{5}=108$①，

$\frac{9+1+4+(x-108)^2+(y-108)^2}{5}=35.2$②.

由①②，解得 $\begin{cases}x=99,\\y=117\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=117,\\y=99.\end{cases}$ 所以 $|x-y|=18$.故选 D.

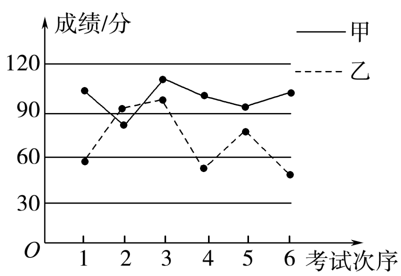
3.(决策问题)甲、乙、丙、丁四位同学近五次数学测验成绩统计如下表所示，如果从这四位同学中选出一位同学参加数学竞赛，那么应选________.

项目	甲	乙	丙	丁
平均分	85	90	90	85
方差	50	42	50	42

乙　**解析**：根据题意，可得 $\overline{x}_{乙}=\overline{x}_{丙}>\overline{x}_{甲}=\overline{x}_{丁}$，所以四位同学中，乙、丙的平均成绩较好.又由 $s_{乙}^2<s_{丙}^2$，所以乙同学的成绩更加稳定，所以选择乙同学参加此次数学竞赛.

综合性·创新提升

1.甲、乙两名同学 6 次考试的成绩统计如图，甲、乙两组数据的平均数分别为 m_1,m_2，标准差分别为 n_1,n_2，则　　(　　)



A.$m_1<m_2,n_1<n_2$

B.$m_1<m_2,n_1>n_2$

C.$m_1>m_2,n_1<n_2$

D.$m_1>m_2,n_1>n_2$

C　**解析**：由题中甲、乙两名同学 6 次考试的成绩统计图知，甲组数据靠上，乙组数据靠下，甲组数据相对集中，乙组数据相对分散.又甲、乙两组数据的平均数分别为 m_1,m_2，标准差分别为 n_1,n_2，得 $m_1>m_2,n_1<n_2$.故选 C.

2.若 40 个数据的平方和是 56，平均数是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，则这组数据的方差是________.

0.9　**解析**：设这 40 个数据为 $x_i(i=1,2,\cdots,40)$，平均数为 $\overline{x}$，则方差 $s^2=\frac{1}{40}\times[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_{40}-\overline{x})^2]=\frac{1}{40}\times[x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{40}^2+40\overline{x}^2-2\overline{x}(x_1+x_2+\cdots+x_{40})]=\frac{1}{40}\times\left[56+40\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times40\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right]=\frac{1}{40}\times(56+20-40)=0.9$.

3.(实际应用问题)为探究某药物对小鼠的生长抑制作用，将 20 只小鼠均分为两组：对照组(不加药物)和实验组(加药物).测得 20 只小鼠体重(单位：g)如下.

对照组：20.1　20.4　20.1　20.0　20.1　20.3　20.6　20.5　20.4　20.5

实验组：19.8　20.3　20.0　20.2　19.9　19.8　20.0　20.1　20.2　19.7

对照组和实验组的小鼠体重的样本平均数分别记为 $\overline{x}$ 和 $\overline{y}$，样本方差分别记为 s_1^2 和 s_2^2.

(1)求 $\overline{x},\overline{y},s_1^2,s_2^2$；

(2)判断该药物对小鼠的生长是否有显著的抑制作用(若 $\overline{x}-\overline{y}\geqslant2\sqrt{s_1^2+s_2^2}$，则认为该药物对小鼠的生长有显著的抑制作用，否则不认为有显著的抑制作用).

解：(1)$\overline{x}=(20.1+20.4+20.1+20.0+20.1+20.3+20.6+20.5+20.4+20.5)\div10=20.3$，

$\overline{y}=(19.8+20.3+20.0+20.2+19.9+19.8+20.0+20.1+20.2+19.7)\div10=20$，

$s_1^2=(0.2^2+0.1^2+0.2^2+0.3^2+0.2^2+0+0.3^2+0.2^2+0.1^2+0.2^2)\div10=0.04$，

$s_2^2=(0.2^2+0.3^2+0+0.2^2+0.1^2+0.2^2+0+0.1^2+0.2^2+0.3^2)\div10=0.036$.

(2)依题意，$\overline{x}-\overline{y}=0.3=2\sqrt{0.0225}$，$2\sqrt{s_1^2+s_2^2}=2\sqrt{0.036+0.04}=2\sqrt{0.076}$，故 $\overline{x}-\overline{y}<2\sqrt{s_1^2+s_2^2}$，所以该药物对小鼠的生长没有显著的抑制作用.

第十章 概率

10.1 随机事件与概率

10.1.1 有限样本空间与随机事件

学习任务目标

1.了解样本点和样本空间.
2.了解随机事件发生的不确定性.
3.会初步列举出重复试验的结果.

问题式预习

知识清单

1.随机试验及其特点

(1)随机试验的定义:我们把对随机现象的实现和对它的观察称为随机试验,简称试验,常用字母 E 表示.

(2)随机试验的特点:

①试验可以在相同条件下重复进行;

②试验的所有可能结果是明确可知的,并且不止一个;

③每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个,但事先不能确定出现哪一个结果.

2.样本点和样本空间

名称	定义	字母表示
样本点	我们把随机试验 E 的每个可能的基本结果称为样本点	用 ω 表示样本点
样本空间	全体样本点的集合称为试验 E 的样本空间	用 Ω 表示样本空间
有限样本空间	如果一个随机试验有 n 个可能结果 ω_1, ω_2, $\cdots$, ω_n,则称样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ 为有限样本空间	$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$

3.三种事件的定义

随机事件	我们将样本空间 Ω 的子集称为随机事件,简称事件,并把只包含一个样本点的事件称为基本事件.随机事件一般用大写字母 A,B,C,$\cdots$表示.在每次试验中,当且仅当 A 中某个样本点出现时,称为事件 A 发生
必然事件	Ω 作为自身的子集,包含了所有的样本点,在每次试验中总有一个样本点发生,所以 Ω 总会发生,我们称 Ω 为必然事件
不可能事件	空集$\varnothing$不包含任何样本点,在每次试验中都不会发生,我们称$\varnothing$为不可能事件

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)对于随机试验,当在同样的条件下重复进行试验时,每次试验的所有可能结果是不知道的. (×)

(2)连续抛掷两次硬币,该试验的样本空间 $\Omega=\{$正正,反反,正反$\}$. (×)

(3)已知一个盒中装有 4 个白球和 5 个黑球,从中任意取 1 个球,"该球是白球或黑球"是必然事件. (√)

(4)某人射击一次,"中靶"是随机事件. (√)

2.从有两个小孩的家庭中随机选择一个,记录两个小孩的性别,则样本空间 Ω 是 ( )

A.{(男,女),(男,男),(女,女)}

B.{(男,女),(女,男)}

C.{(男,男),(男,女),(女,男),(女,女)}

D.{(男,男),(女,女)}

C　**解析**:两个小孩有大、小之分,所以(男,女)与(女,男)是不同的样本点.故选 C.

3.在 5 件同类产品中,有 3 件正品,2 件次品,从中任意抽出 3 件,下列是必然事件的是　(　　)

A.3 件都是次品

B.3 件都是正品

C.至少有 1 件是次品

D.至少有 1 件是正品

D　**解析**:由于只有 2 件次品,故抽出的 3 件产品不可能都是次品,即至少有 1 件是正品.

4.请思考并回答问题:

(1)事件的分类是确定的吗?

提示:事件的分类是相对于条件来讲的,在条件变化时,必然事件、随机事件和不可能事件可以相互转化.

(2)必然事件与不可能事件具有随机性吗?

提示:必然事件与不可能事件不具有随机性.为了统一处理,将必然事件和不可能事件作为随机事件的两个极端情形.

任务型课堂

学习任务一　事件类型的判断

1.下列事件中的随机事件为　(　　)

A.若 a,b,c 都是实数,则 $a(bc)=(ab)c$

B.任意画一个三角形,其内角和是 360°

C.抛掷一枚硬币,反面向上

D.在标准大气压下,温度达到 60 ℃时水沸腾

C　**解析**:A 中的等式是实数乘法的结合律,对任意实数 a,b,c 是恒成立的,故 A 是必然事件.三角形的内角和为 180°,故 B 是不可能事件.抛掷一枚硬币时,在没得到结果之前,并不知道会是正面向上还是反面向上,故 C 是随机事件.在标准大气压的条件下,只有温度达到 100 ℃时,水才会沸腾;当温度是 60 ℃时,水是绝对不会沸腾的,故 D 是不可能事件.

2.指出下列事件是必然事件、不可能事件,还是随机事件.

(1)在标准大气压下,温度低于 0 ℃时,冰融化;

(2)某个数的绝对值小于 0;

(3)掷一枚硬币,正面朝上;

(4)某地 12 月 12 日下雨;

(5)如果 $a>b$,那么 $a-b>0$;

(6)导体通电后发热;

(7)没有水分,种子发芽;

(8)三角形的内角和为 180°;

(9)某人购买 5 注彩票,均未中奖.

解:(5)(6)(8)无论在什么条件下都一定会发生,所以是必然事件.(1)(2)(7)一定不会发生,所以是不可能事件.(3)(4)(9)有可能发生也有可能不发生,所以是随机事件.

反思提炼

判断事件类型的角度

(1)看条件:看试验是在什么条件下进行的.三种事件都是相对于一定条件而言的,随着条件的变化,试验的结果也可能会发生相应的改变.

(2)看结果:事件是按照发生与否的标准分类的,一定发生的是必然事件,不一定发生的是随机事件,一定不发生的是不可能事件.

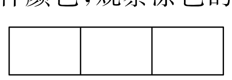
学习任务二　随机试验的样本空间

例　写出下列试验的样本空间:

(1)同时掷三枚骰子,记录三枚骰子出现的点数之和;

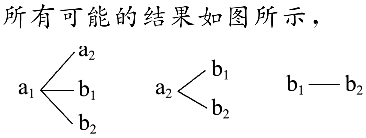
(2)从含有两件正品 a_1,a_2 和两件次品 b_1,b_2 的四件产品中任取两件,观察取出产品的情况;

(3)用红、黄、蓝三种颜色给图中三个矩形随机涂色,每个矩形只涂一种颜色,观察涂色的情况.



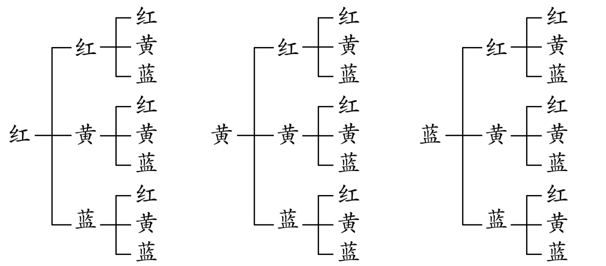
解:(1)该试验的样本空间 $\Omega_1=\{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18\}$.

(2)该试验所有可能的结果如图所示,



因此,该试验的样本空间为 $\Omega_2=\{(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(b_1,b_2)\}$.

(3)该试验所有可能结果如图所示,

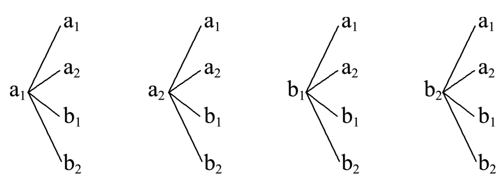


此试验的样本空间为 Ω_3＝{(红，红，红)，(红，红，黄)，(红，红，蓝)，(红，黄，红)，(红，黄，黄)，(红，黄，蓝)，(红，蓝，红)，(红，蓝，黄)，(红，蓝，蓝)，(黄，红，红)，(黄，红，黄)，(黄，红，蓝)，(黄，黄，红)，(黄，黄，黄)，(黄，黄，蓝)，(黄，蓝，红)，(黄，蓝，黄)，(黄，蓝，蓝)，(蓝，红，红)，(蓝，红，黄)，(蓝，红，蓝)，(蓝，黄，红)，(蓝，黄，黄)，(蓝，黄，蓝)，(蓝，蓝，红)，(蓝，蓝，黄)，(蓝，蓝，蓝)}.

[一题多思]

思考.本例(2)中“任取两件”改为“连续取两次，每次任取一件，且每次取出后又放回”，此时样本空间又是什么？

解：该试验所有可能的结果如图所示.



所以样本空间为 Ω_4＝{(a_1,a_1)，(a_1,a_2)，(a_1,b_1)，(a_1,b_2)，(a_2,a_1)，(a_2,a_2)，(a_2,b_1)，(a_2,b_2)，(b_1,a_1)，(b_1,a_2)，(b_1,b_1)，(b_1,b_2)，(b_2,a_1)，(b_2,a_2)，(b_2,b_1)，(b_2,b_2)}.

反思提炼

书写试验结果时的注意事项

(1)准确理解随机试验的条件、结果等有关定义，并由此判断事件的类型，指出试验结果.

(2)在写试验结果时，一般采用列举法，首先明确事件发生的条件，然后根据日常生活经验，按一定次序列举，确保所列结果不重不漏.

探究训练

1.“连续抛掷两枚质地均匀的骰子，记录朝上的点数”，该试验的样本点共有（　　）

A.6 个　　B.12 个

C.24 个　　D.36 个

D　**解析：**该试验的全部样本点为(1,1)，(1,2)，(1,3)，(1,4)，(1,5)，(1,6)，(2,1)，(2,2)，(2,3)，(2,4)，(2,5)，(2,6)，(3,1)，(3,2)，(3,3)，(3,4)，(3,5)，(3,6)，(4,1)，(4,2)，(4,3)，(4,4)，(4,5)，(4,6)，(5,1)，(5,2)，(5,3)，(5,4)，(5,5)，(5,6)，(6,1)，(6,2)，(6,3)，(6,4)，(6,5)，(6,6)，共 36 个.

2.下列随机试验中，一次试验各指什么？试写出试验的所有结果.

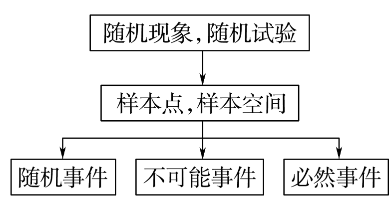
(1)抛掷两枚质地均匀的硬币，观察落地时哪一面朝上；

(2)从集合 $A=\{a,b,c,d\}$ 中任取 3 个元素组成集合 A 的子集.

解：(1)一次试验是指“抛掷两枚质地均匀的硬币一次”，试验的可能结果有 4 个，分别为(正，反)，(正，正)，(反，反)，(反，正).

(2)一次试验是指“从集合 A 中一次性选取 3 个元素组成集合 A 的一个子集”，试验的结果共有 4 个，分别为 $\{a,b,c\}$，$\{a,b,d\}$，$\{a,c,d\}$，$\{b,c,d\}$.

体系构建



课后素养评价(四十四)

基础性·能力运用

1.先后抛掷均匀的五角、一元硬币各一枚，观察落地后硬币的正反面情况，则下列事件包含 3 个样本点的是（　　）

A.至少一枚硬币正面向上

B.只有一枚硬币正面向上

C.两枚硬币都是正面向上

D.两枚硬币一枚正面向上，另一枚反面向上

A　**解析：**“至少一枚硬币正面向上”包括“五角向上，一元向下”“五角向下，一元向上”“五角、一元都向上”三个样本点.故选 A.

2. 将一枚质地均匀的硬币向上抛掷 10 次，其中“正面朝上恰好有 5 次”是　　（　　）

A. 必然事件　　B. 随机事件

C. 不可能事件　　D. 无法确定

B　**解析**：“正面朝上恰好有 5 次”是可能发生也可能不发生的事件，故该事件为随机事件. 故选 B.

3. 从 1，2，3，…，10 这 10 个数中，任取 3 个数，那么“这 3 个数的和不大于 9”这一事件包含的样本点的个数是　　（　　）

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

D　**解析**：由题意可得样本空间为{(1，2，3)，(1，2，4)，(1，2，5)，(1，2，6)，(1，3，4)，(1，3，5)，(2，3，4)}，样本点个数为 7. 故选 D.

4. 甲、乙两人做出拳游戏(锤、剪、布).

(1)写出这个游戏对应的样本空间；

(2)求这个游戏的样本点总数；

(3)设事件 A 表示甲赢，写出事件 A 的集合表示；

(4)设事件 B={(锤，锤)，(剪，剪)，(布，布)}，写出事件 B 表示的含义.

解：(1)用(锤，剪)表示甲出锤，乙出剪，其他样本点用类似方法表示，则这个游戏对应的样本空间 Ω={(锤，剪)，(锤，布)，(锤，锤)，(剪，锤)，(剪，剪)，(剪，布)，(布，锤)，(布，剪)，(布，布)}.

(2)这个游戏的样本点总数为 9.

(3)事件 A={(锤，剪)，(剪，布)，(布，锤)}.

(4)事件 B 表示“平局”.

综合性·创新提升

1. 从含有 10 件正品、2 件次品的 12 件产品中任意抽取 3 件，下列事件为必然事件的是　　（　　）

A. 3 件都是正品

B. 3 件都是次品

C. 至少有 1 件次品

D. 至少有 1 件正品

D　**解析**：从 10 件正品、2 件次品中任意抽取 3 件，3 件都是正品是随机事件；3 件都是次品是不可能事件；至少有 1 件次品是随机事件. 因为只有 2 件次品，所以从中任意抽取 3 件必然会抽到正品，即至少有 1 件是正品是必然事件. 故选 D.

2. 袋子中只有黑白两球时，有放回地摸取三次，观察黑白球的出现情况，则该试验样本空间的所有样本点的个数为　　（　　）

A. 4　　B. 5

C. 6　　D. 8

D　**解析**：三次摸取球的所有样本点为(黑，黑，黑)，(黑，黑，白)，(黑，白，黑)，(白，黑，黑)，(黑，白，白)，(白，黑，白)，(白，白，黑)，(白，白，白)，共 8 个. 故选 D.

3. 从含有两件正品 a_1，a_2 和一件次品 b 的三件产品中每次任取一件，每次取出后不放回，连续取两次.

(1)写出这个试验的样本空间；

(2)设 A 为“取出的两件产品中恰有一件次品”，写出事件 A 的集合表示；

(3)把“每次取出后不放回”这一条件换成“每次取出后放回”，其余不变，请你回答上述两个问题.

解：(1)这个试验的样本空间 Ω={(a_1，a_2)，(a_1，b)，(a_2，b)，(a_2，a_1)，(b，a_1)，(b，a_2)}.

(2)A={(a_1，b)，(a_2，b)，(b，a_1)，(b，a_2)}.

(3)①这个试验的样本空间 Ω={(a_1，a_1)，(a_1，a_2)，(a_1，b)，(a_2，a_1)，(a_2，a_2)，(a_2，b)，(b，a_1)，(b，a_2)，(b，b)}.

②A={(a_1，b)，(a_2，b)，(b，a_1)，(b，a_2)}.

10.1.2 事件的关系和运算

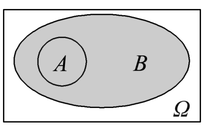
学习任务目标

1. 了解随机事件的并、交与互斥的含义.
2. 能结合实例进行随机事件的并、交运算.

问题式预习

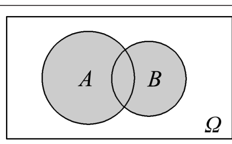
知识清单

1. 事件的关系

定义	一般地,若事件 A 发生,则事件 B 一定发生,我们就称事件 B 包含事件 A(或事件 A 包含于事件 B)
含义	A 发生导致 B 发生
符号表示	$B\supseteq A$(或 $A\subseteq B$)
图形表示	
特殊情形	如果事件 B 包含事件 A,事件 A 也包含事件 B,即 $B\supseteq A$ 且 $A\supseteq B$,则称事件 A 与事件 B 相等,记作 $A=B$

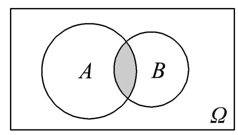
2. 事件的运算

(1)并事件(和事件)

定义	一般地,事件 A 与事件 B 至少有一个发生,这样的一个事件中的样本点或者在事件 A 中,或者在事件 B 中,我们称这个事件为事件 A 与事件 B 的并事件(或和事件)
含义	A 与 B 至少有一个发生
符号表示	$A\cup B$(或 $A+B$)
图形表示	

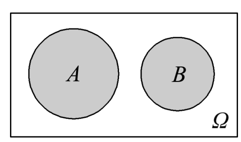
(2)交事件(积事件)

续表

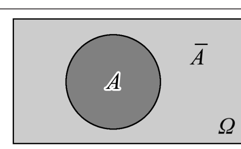
定义	一般地,事件 A 与事件 B 同时发生,这样的一个事件中的样本点既在事件 A 中,也在事件 B 中,我们称这样的一个事件为事件 A 与事件 B 的交事件(或积事件)
含义	A 与 B 同时发生
符号表示	$A\cap B$(或 AB)
图形表示	

3. 互斥与对立

(1)互斥(互不相容)

定义	一般地,如果事件 A 与事件 B 不能同时发生,也就是说 $A\cap B$ 是一个不可能事件,即 $A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互斥(或互不相容)
含义	A 与 B 不能同时发生
符号表示	$A\cap B=\varnothing$
图形表示	

(2)互为对立

定义	一般地,如果事件 A 与事件 B 在任何一次试验中有且仅有一个发生,即 $A\cup B=\Omega$,且 $A\cap B=\varnothing$,那么称事件 A 与事件 B 互为对立.事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$
含义	A 与 B 有且仅有一个发生
符号表示	$A\cup B=\Omega$,且 $A\cap B=\varnothing$
图形表示	

概念辨析

1. 判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)任何一个随机事件都包含于样本空间 Ω. (√)

(2)事件 A 与事件 B 至少有一个发生用 AB 表示. (×)

(3)事件 $A+B$ 发生包含两种情况:A 发生 B 不发生,A 不发生 B 发生. (×)

(4)互斥的事件一定是对立事件. (×)

(5)事件 A 与其对立事件 $\overline{A}$,可类比集合 A 与其在全集 U 中的补集 $\complement_U A$. (√)

2. 一个人打靶时连续射击两次,则与事件"至少有一次中靶"互斥的是 (　　)

A.至多有一次中靶　　B.两次都中靶

C.只有一次中靶　　D.两次都不中靶

D　**解析**:事件"至少有一次中靶"包括"中靶一次"和"中靶两次"两种情况,由互斥事件的定义,可知"两次都不中靶"与之互斥.

3. 请思考并回答问题:

(1)掷一枚骰子一次,记事件 $A=\{$出现点数大于 $4\}$,事件 $B=\{$出现点数为 $5\}$,则事件 B 发生时,事件 A 一定发生吗?

提示:因为 $5>4$,所以事件 B 发生时事件 A 一定发生.

(2)判断两个事件是对立事件的条件是什么?

提示:一看两个事件是否互斥;二看两个事件是否必有一个发生.两个事件同时满足这两个条件,则是对立事件;否则不是.

任务型课堂

学习任务一　事件关系的判断

1. 同时掷两枚硬币,"都是正面向上"为事件 A,"至少有一枚正面向上"为事件 B,则有 (　　)

A.$A\subseteq B$

B.$A\supseteq B$

C.$A=B$

D.A 与 B 之间没有关系

A　**解析**:由事件的包含关系知 $A\subseteq B$.

2. 把红、蓝、黑、白 4 张纸牌随机地分给甲、乙、丙、丁 4 个人,每人分得 1 张,事件"甲分得红牌"与事件"乙分得红牌"是 (　　)

A.对立事件

B.互斥但不对立事件

C.不可能事件

D.以上说法都不对

B　**解析**:因为只有 1 张红牌,所以这两个事件不可能同时发生,所以它们是互斥事件.但这两个事件加起来并不是全体事件,例如红牌可以分给丙、丁两人,所以它们不是对立事件.

3. 从装有两个红球和两个白球的口袋内任取两个球,判断下面给出的每对事件是否是互斥事件,是否是对立事件,并说明理由.

(1)"至少有一个白球"与"都是白球";

(2)"至少有一个白球"与"至少有一个红球";

(3)"恰有一个白球"与"恰有两个白球";

(4)"至少有一个白球"与"都是红球".

解:(1)既不互斥又不对立."至少有一个白球"包含"一白一红"和"两白",与"都是白球"的事件有相交的部分.

(2)既不互斥又不对立.因为这两种情况可能同时发生,例如"两个球一白一红".

(3)是互斥事件但不是对立事件.因为这两种情况不能同时发生,但是试验结果并不仅仅有这两种可能,还有第三种可能"全部为红球",所以不是对立事件.

(4)既是互斥事件,也是对立事件.首先,"至少有一个白球"和"两者都是红球"不能同时发生,即互斥.从两个红球和两个白球中取两个,共有"红红""红白""白白"三种情形,"至少有一个白球"就是"红白""白白",仅剩下"红红"的情形,所以除了"至少有一个白球",就是"两个红球",故为对立事件.

所以是互斥事件的是(3)(4),是对立事件的是(4).

反思提炼

判断事件间关系的方法

(1)要考虑试验的前提条件,无论是包含、相等,还是互斥、对立,其发生的条件都是一样的.

(2)考虑事件间是否有交事件,可考虑利用 Venn 图分析,对较难判断关系的,也可列出全部结果,再进行分析.

学习任务二 事件的运算

例1 盒子里有6个红球,4个白球,现从中任取3个球,设事件$A=\{$取出的3个球中有1个红球、2个白球$\}$,事件$B=\{$取出的3个球中有2个红球、1个白球$\}$,事件$C=\{$取出的3个球中至少有1个红球$\}$,事件$D=\{$取出的3个球中既有红球又有白球$\}$.

(1)事件D与A,B是什么样的运算关系?

(2)事件C与A的交事件是什么?

解:(1)对于事件D,可能的结果为:1个红球、2个白球,或2个红球、1个白球,故$D=A\cup B$.

(2)对于事件C,可能的结果为:1个红球、2个白球,2个红球、1个白球,3个红球,故$C\cap A=A$.

[一题多思]

思考.在本例中,设事件$E=\{$取出的3个球全为红球$\}$,事件$F=\{$取出的3个球中至少有一个白球$\}$,那么事件C与A,B,E是什么运算关系?C与F的交事件是什么?

解:由事件C包括的可能结果有1个红球2个白球,2个红球1个白球,3个红球三种情况,故$A\subseteq C$,$B\subseteq C$,$E\subseteq C$,$C=A\cup B\cup E$.而事件F包括的可能结果有1个白球2个红球,2个白球1个红球,3个白球,所以$C\cap F=\{$1个红球、2个白球,2个红球、1个白球$\}=D$.

反思提炼

事件的混合运算的方法

(1)利用事件间运算的定义.列出同一条件下的试验的所有样本点,分析并利用这些样本点进行事件间的运算.

(2)利用Venn图.借助集合间运算的思想,分析同一条件下的试验的所有样本点,把这些样本点在图中列出,进行运算.

探究训练

在掷骰子的试验中,可以定义许多事件.例如,事件$C_1=\{$出现1点$\}$,事件$C_2=\{$出现2点$\}$,事件$C_3=\{$出现3点$\}$,事件$C_4=\{$出现4点$\}$,事件$C_5=\{$出现5点$\}$,事件$C_6=\{$出现6点$\}$,事件$D_1=\{$出现的点数不大于1$\}$,事件$D_2=\{$出现的点数大于3$\}$,事件$D_3=\{$出现的点数小于5$\}$,事件$E=\{$出现的点数小于7$\}$,事件$F=\{$出现的点数为偶数$\}$,事件$G=\{$出现的点数为奇数$\}$,请根据上述定义的事件,解答下列问题:

(1)请列举出基本事件与其他事件满足的包含关系、相等关系;

(2)利用和事件的定义,判断上述事件是哪些基本事件的和事件.

解:(1)因为事件C_1,C_2,C_3,C_4发生,则事件D_3必发生,所以$C_1\subseteq D_3$,$C_2\subseteq D_3$,$C_3\subseteq D_3$,$C_4\subseteq D_3$.同理可得,事件E包含事件C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6;事件D_2包含事件C_4,C_5,C_6;事件F包含事件C_2,C_4,C_6;事件G包含事件C_1,C_3,C_5.

易知事件C_1与事件D_1相等,即$C_1=D_1$.

(2)因为事件$D_2=\{$出现的点数大于3$\}=\{$出现4点或5点或6点$\}$,

所以$D_2=C_4\cup C_5\cup C_6$(或$D_2=C_4+C_5+C_6$).

同理可得$D_3=C_1+C_2+C_3+C_4$,$E=C_1+C_2+C_3+C_4+C_5+C_6$,$F=C_2+C_4+C_6$,$G=C_1+C_3+C_5$.

学习任务三 互斥事件与对立事件的判断

例2 某小组有3名男生和2名女生,从中任选2名同学参加演讲比赛,判断下列每对事件是不是互斥事件,如果是,再判断它们是不是对立事件.

(1)“恰有1名男生”与“恰有2名男生”;

(2)“至少有1名男生”与“全是男生”;

(3)“至少有1名男生”与“全是女生”;

(4)“至少有1名男生”与“至少有1名女生”.

解:判断两个事件是否互斥,就要考察它们是否能同时发生;判断两个互斥事件是否对立,就要考察它们是否有且只有一个发生.

从3名男生和2名女生中任选2人有如下3种结果:2名男生,2名女生,1男1女.

(1)因为“恰有1名男生”与“恰有2名男生”不可能同时发生,所以它们是互斥事件.当恰有2名女生时,它们都不发生,所以它们不是对立事件.

(2)因为恰有2名男生时“至少有1名男生”与“全是男生”可能同时发生,所以它们不是互斥事件.

(3)因为“至少有1名男生”与“全是女生”不可能同时发生,所以它们是互斥事件.由于它们有且只有一个发生,所以它们是对立事件.

(4)因为选出的是1名男生1名女生时“至少有1名男生”与“至少有1名女生”同时发生,所以它们不是互斥事件.

反思提炼

互斥事件与对立事件的判断方法

(1)利用基本概念:判断两个事件是否为互斥事件,注意看它们能否同时发生.若不同时发生,则这两个事件是互斥事件;若能同时发生,则这两个事件不是互斥事件.

(2)判断两个事件是否为对立事件,主要看是否同时满足两个条件:一是不能同时发生;二是必有一个发生.如果这两个条件同时成立,那么这两个事件就是对立事件,只要有一个条件不成立,那么这两个事件就不是对立事件.两个事件是对立事件则必是互斥事件.

探究训练

从 40 张扑克牌(红桃、黑桃、方块、梅花每种花色点数 1～10 各 10 张)中任意抽取 1 张,判断下列给出的每对事件是否互斥,是否为对立事件,并说明理由.

(1)"抽出红桃"与"抽出黑桃";

(2)"抽出红花色牌"与"抽出黑花色牌";

(3)"抽出牌的点数为 5 的倍数"与"抽出牌的点数大于 9".

解:(1)两事件互斥,但不是对立事件.理由是:

从 40 张扑克牌中任意抽取 1 张,"抽出红桃"和"抽出黑桃"是不可能同时发生的,所以互斥.同时,不能保证其中必有一个发生,因为还可能抽出"方块"或者"梅花",所以二者不是对立事件.

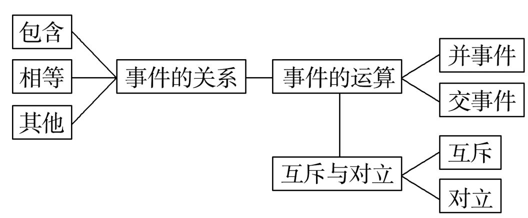
(2)两事件互斥,且是对立事件.理由是:

从 40 张扑克牌中任意抽取 1 张,"抽出红花色牌"与"抽出黑花色牌"两个事件不可能同时发生,且必有其中一个发生,因此它们互斥,且是对立事件.

(3)两事件不互斥,且不是对立事件.理由是:

从 40 张扑克牌中任意抽取 1 张,"抽出牌的点数为 5 的倍数"与"抽出牌的点数大于 9"这两个事件可能同时发生,如抽出牌的点数为 10,因此,二者不互斥,当然不可能是对立事件.

体系构建



课后素养评价(四十五)

基础性·能力运用

1. 如果事件 A,B 互斥,那么　　(B)

A. $A\cup B$ 是必然事件

B. A 的对立事件与 B 的对立事件的和事件是必然事件

C. A 的对立事件与 B 的对立事件是互斥事件

D. A 的对立事件与 B 的对立事件不是互斥事件

2. (多选题)某小组有三名男生和两名女生,从中任选两名去参加比赛,则下列各对事件是互斥事件的有　　(　　)

A. "恰有一名男生"和"全是男生"

B. "至少有一名男生"和"至少有一名女生"

C. "至少有一名男生"和"全是男生"

D. "至少有一名男生"和"全是女生"

AD　**解析**:A 是互斥事件,恰有一名男生的实质是选出的两名同学中有一名男生和一名女生,它与全是男生不可能同时发生;B 不是互斥事件;C 不是互斥事件;D 是互斥事件,至少有一名男生与全是女生不可能同时发生.故选 AD.

3. 打靶 3 次,事件 A_i="击中 i 次",其中 $i=0,1,2,3$.如果 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$,那么 A 表示________.

至少击中 1 次　**解析**:根据并事件的定义可知,$A_1\cup A_2\cup A_3$ 表示 A_1,A_2,A_3 至少有一个发生,所以 A 表示至少击中 1 次.

4. 一个射手进行一次射击,下列事件哪些是互斥事件?哪些是对立事件?

事件 A:命中环数大于 7 环;事件 B:命中环数为 10 环;事件 C:命中环数小于 6 环;事件 D:命中环数为 6,7,8,9 或 10 环.

解:$A\cap B=\{10\text{ 环}\}\neq\varnothing$,故 A 与 B 不是互斥事件,更不是对立事件.

显然 $A\cap C=\varnothing$,"大于 7 环"与"小于 6 环"是不可能同时发生的,故 A 与 C 是互斥事件,又 $A\cup C\neq\Omega$,即 A 与 C 不是必有一个发生,还可能有 6 环或 7 环,因此 A 与 C 不是对立事件.

$A\cap D=\{8\text{ 环},9\text{ 环},10\text{ 环}\}\neq\varnothing$,故 A 与 D 不是互斥事件.

显然 $B\cap C=\varnothing$，所以 B 与 C 是互斥事件，又因为 $B\cup C\neq\Omega$，因此 B 与 C 不是对立事件.

$B\cap D=\{10$ 环$\}\neq\varnothing$，因此 B 与 D 不是互斥事件.

显然 $C\cap D=\varnothing$，因此 C 与 D 是互斥事件.又 $C\cup D=\Omega$，即 C,D 必有一个发生，因此 C 与 D 还是对立事件.

综合性·创新提升

1.（多选题）对空中飞行的飞机连续射击两次，每次发射一枚炮弹，设事件 $A=$“两弹都击中飞机”，事件 $B=$“两弹都没击中飞机”，事件 $C=$“恰有一弹击中飞机”，事件 $D=$“至少有一弹击中飞机”，下列关系正确的是（　　）

A.$A\subseteq D$　　B.$B\cap D=\varnothing$

C.$A\cup C=D$　　D.$A\cup C=B\cup D$

ABC　**解析**：“恰有一弹击中飞机”指第一枚击中第二枚没击中或第一枚没击中第二枚击中，“至少有一弹击中”包含两种情况：一种是恰有一弹击中，一种是两弹都击中.所以 $A\cup C\neq B\cup D$，所以 A，B，C 正确，D 错误.故选 ABC.

2.（多选题）将《红楼梦》《水浒传》《西游记》《三国演义》四本书随机地分发给甲、乙、丙三人，每人至少分得一本，则下列说法不正确的是（　　）

A.事件“甲分得一本”与事件“丙分得两本”为互斥事件

B.事件“乙分得《三国演义》”与事件“丙分得《水浒传》”为对立事件

C.事件“甲分得两本”与事件“乙分得两本”为对立事件

D.事件“甲分得《红楼梦》”与事件“乙分得《红楼梦》”为互斥事件

ABC　**解析**：对于 A，事件“甲分得一本”与事件“丙分得两本”能同时发生，故 A 错误；

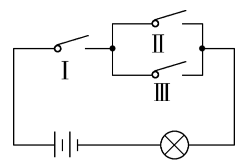
对于 B，事件“乙分得《三国演义》”与事件“丙分得《水浒传》”能同时发生，不是对立事件，故 B 错误；

对于 C，事件“甲分得两本”与事件“乙分得两本”不能同时发生，是互斥事件，但两个事件的并集不等于总的样本空间，故不是对立事件，故 C 错误；

对于 D，事件“甲分得《红楼梦》”与事件“乙分得《红楼梦》”不能同时发生，故是互斥事件，故 D 正确.

故选 ABC.

3.（学科间融合）电路如图所示.用 A 表示事件“灯泡变亮”，用 B,C,D 分别表示“开关Ⅰ闭合”“开关Ⅱ闭合”“开关Ⅲ闭合”，则 $A=$________.（用 B,C,D 间的运算关系式表示）



$B\cap(C\cup D)$（或 $(BC)\cup(BD)$）　**解析**：电灯变亮必须开关Ⅰ闭合，开关Ⅱ和开关Ⅲ中至少有一个闭合，因此 $A=B\cap(C\cup D)$.

4.从装有 5 个红球、5 个白球的袋中任意取出 3 个球，判断下列每对事件是不是互斥事件，是不是对立事件.

(1)“取出 3 个红球”与“取出 3 个球中至少有 1 个白球”；

(2)“取出 2 个红球和 1 个白球”与“取出 3 个红球”；

(3)“取出 3 个红球”与“取出的球中至少有 1 个红球”.

解：(1)是互斥事件，也是对立事件.因为两个事件不会同时发生，也不会同时不发生.

(2)是互斥事件，但不是对立事件.因为两个事件不会同时发生，但可以同时不发生.

(3)两个事件不是互斥事件，也不是对立事件.因为两个事件可以同时发生.

10.1.3　古典概型

学习任务目标

1.理解古典概型的定义.(数学抽象)

2.会应用古典概型的概率公式解决实际问题.(数学建模)

问题式预习

知识清单

1.古典概型

如果某些试验具有如下共同特征：

(1)有限性:样本空间的样本点只有有限个;

(2)等可能性:每个样本点发生的可能性相等.

我们将具有以上两个特征的试验称为古典概型试验,其数学模型称为古典概率模型,简称古典概型.

2.古典概型的概率公式

一般地,设试验 E 是古典概型,样本空间 Ω 包含 n 个样本点,事件 A 包含其中的 k 个样本点,则定义事件 A 的概率 $P(A)=\frac{k}{n}=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$.其中,$n(A)$ 和 $n(\Omega)$分别表示事件 A 和样本空间 Ω 包含的样本点个数.

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)任何一个事件都是一个样本点.　(×)

(2)在古典概型中,每一个样本点出现的可能性相等.　(√)

(3)古典概型中的任何两个样本点都是互斥的.　(√)

2.下列试验中是古典概型的是　(　　)

A.任意抛掷两枚均匀的正方体骰子,所得点数之和作为样本点

B.口袋里有 2 个白球和 2 个黑球,这 4 个球除颜色外完全相同,从中任取一球观察其颜色

C.向一圆面内随机地投一个点,观察该点落在圆内的位置

D.射击运动员进行射击试验,试验结果为命中 10 环,命中 9 环……命中 0 环

B　**解析**:古典概型要求所有结果出现的可能性都相等,强调所有结果,即每一结果出现的概率都相同,A 中尽管点数之和只有有限个取值:2,3,…,12,但它们不是等可能性的;B 中摸到白球与黑球的概率相同,均为 $\frac{1}{2}$;C 中的样本点有无限个;D 中由于受射击运动员水平的影响,命中 10 环,命中 9 环……命中 0 环的可能性不相等.

3.从 1,2,3,4 这四个数中随机地一次取两个数,则其中一个数是另一个数的两倍的概率为________.

$\frac{1}{3}$　**解析**:从 1,2,3,4 中一次随机地取两个数,此试验的样本空间包含(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)共 6 个样本点.其中一个数是另一个数的两倍的有(1,2),(2,4)共 2 个样本点,所以所求概率为 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

4.请思考并回答问题:

(1)若一次试验的样本空间的样本点的个数是有限个,则该试验是古典概型吗?

提示:不一定,还要看每个样本点发生的可能性是否相等,若相等才是,否则不是.

(2)"在区间[2,8]上任取一个数,这个数恰好大于 3 的概率是多少?"这个概率模型属于古典概型吗?

提示:不属于,因为在区间[2,8]上任取一个数,其试验结果有无限个,故其样本点有无限个,所以不是古典概型.

任务型课堂

学习任务一　古典概型的定义

1.下列试验中是古典概型的是　　　（　　）

A.任意抛掷两枚均匀的骰子，所得的点数之积作为样本点

B.为求任意的一个正整数平方的个位数字是1的概率，将取出的正整数作为样本点

C.从甲地到乙地共n条路线，随机选择其中一条路线

D.抛掷一枚均匀的硬币，首次出现正面时已抛掷的次数为样本点

C　**解析**：A中尽管点数之积只有有限个取值：1，2，3，…，36，但它们不是等可能性的，故A不是古典概型.对于B，尽管各个正整数被取到是等可能性的，但正整数有无限个，故B不是古典概型.对于C，由于只有n个等可能的结果，故是古典概型.对于D，抛掷次数可能是无限次，故D不是古典概型.

2.向一个圆面内随机地投射一个点，如果该点落在圆内任意一点都是等可能的，你认为这是古典概型吗？为什么？

解：试验的所有可能结果是圆面内所有的点，所有可能结果数是无限的，虽然每一个试验结果出现的可能性相同，但这个试验不满足古典概型的第一个条件.故试验不是古典概型.

3.将一枚质地均匀的骰子先后抛掷两次，观察出现的点数，则：

(1)一共有几个样本点？

(2)"出现的点数之和大于8"包含几个样本点？

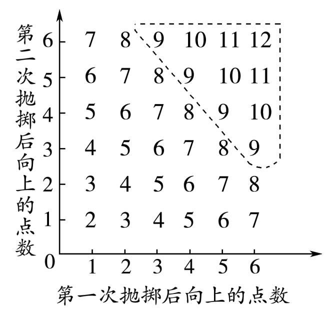
解：方法一(列举法)：

(1)用(x,y)表示结果，其中x表示骰子第1次出现的点数，y表示骰子第2次出现的点数，则试验的样本空间$\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$，共36个样本点.

(2)"出现的点数之和大于8"包含以下10个样本点：(3,6)，(4,5)，(4,6)，(5,4)，(5,5)，(5,6)，(6,3)，(6,4)，(6,5)，(6,6).

方法二(列表法)：

如图所示，坐标平面内的数表示相应两次抛掷后出现的点数的和，样本点与所列数一一对应.

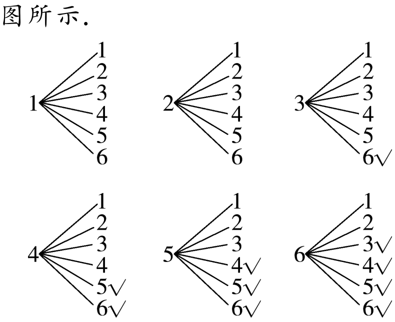


(1)由此可知，一共有36个样本点.

(2)"出现点数之和大于8"包含10个样本点(已用虚线圈出).

方法三(画树状图法)：

一枚骰子先后抛掷两次的所有可能结果用树状图表示.如图所示.



(1)由图知，共有36个样本点.

(2)"出现点数之和大于8"包含10个样本点(已用"√"标出).

反思提炼

1.判断一个随机试验是不是古典概型，只要看以下两个特征是否同时满足：

(1)有限性：样本空间的样本点是有限个；

(2)等可能性：每个样本点出现的可能性相等.

两个特征同时满足的才是古典概型.

2.常见的具备等可能性的提示信息有"随机抽取""任选""质地均匀""完全相同"等.

学习任务二　利用古典概型公式求概率

例1　口袋内有红、白、黄三个小球，除颜色外完全相同，求：

(1)从中任意摸出两个小球，摸出的是红球和白球的概率；

(2)从袋中任意摸出一个后放回，再任意摸出一个，两次摸出的球是一红一白的概率.

解：(1)任意摸出两个小球的样本空间为{(红，白)，(红，黄)，(白，黄)}，共3个样本点，所以摸出的是红

球和白球的概率为$\frac{1}{3}$.

(2)样本空间为{(红,红),(红,白),(红,黄),(白,红),(白,白),(白,黄),(黄,红),(黄,白),(黄,黄)},共9个样本点.而事件“摸出一红一白”包括(红,白),(白,红)2个样本点,所以两次摸出的球是一红一白的概率为$\frac{2}{9}$.

[一题多思]

思考1.保持本例前提条件不变,若从袋中任意摸出一个后放回,再任意摸出一个,求第一次摸出红球、第二次摸出白球的概率.

解:有放回地取球.样本空间为{(红,红),(红,白),(红,黄),(白,白),(白,红),(白,黄),(黄,红),(黄,白),(黄,黄)}.第一次摸出红球、第二次摸出白球,只包含(红,白)一个样本点,故所求概率为$\frac{1}{9}$.

思考2.保持本例前提条件不变,若从袋中先后无放回地摸两次,一次任意摸出一球,求第一次摸出红球、第二次摸出白球的概率.

解:无放回地取球.样本空间为{(红,白),(红,黄),(白,红),(白,黄),(黄,红),(黄,白)}.所以第一次摸出红球、第二次摸出白球的概率是$\frac{1}{6}$.

反思提炼

使用古典概型概率公式应注意:首先确定是否为古典概型;其次弄清楚事件A是什么,包含的样本点有哪些.

探究训练

1.(2022·新高考全国Ⅰ卷)从2至8的7个整数中随机取2个不同的数,则这2个数互质的概率为 ( )

A.$\frac{1}{6}$ B.$\frac{1}{3}$ C.$\frac{1}{2}$ D.$\frac{2}{3}$

D **解析:**从7个整数中随机取2个不同的数,共有21种取法,取得的2个数互质的情况有(2,3),(2,5),(2,7),(3,4),(3,5),(3,7),(3,8),(4,5),(4,7),(5,6),(5,7),(5,8),(6,7),(7,8),共14种,根据古典概型的概率公式,得这2个数互质的概率为$\frac{14}{21}=\frac{2}{3}$.故选D.

2.(2023·全国甲卷)某校文艺部有4名学生,其中高一、高二年级各2名.从这4名学生中随机选2名组织校文艺汇演,则这2名学生来自不同年级的概率为 ( )

A.$\frac{1}{6}$ B.$\frac{1}{3}$ C.$\frac{1}{2}$ D.$\frac{2}{3}$

D **解析:**记高一年级2名学生分别为a_1,a_2,高二年级2名学生分别为b_1,b_2,则从这4名学生中随机选2名组织校文艺汇演的样本点有(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(b_1,b_2),共6个,其中这2名学生来自不同年级的样本点有(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_1),(a_2,b_2),共4个,所以这2名学生来自不同年级的概率为$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

学习任务三 较复杂古典概型的概率计算

例2 小李在做一份问卷调查,共有5道题,其中有两种题型,一种是选择题,共3道,另一种是填空题,共2道.

(1)小李从中任选2道题解答,每一次选1题(不放回),求所选的题不是同一种题型的概率;

(2)小李从中任选2道题解答,每一次选1题(有放回),求所选的题不是同一种题型的概率.

解:将3道选择题编号为1,2,3,将2道填空题编号为4,5.

(1)从5道题中任选2道题解答,每一次选1题(不放回),则样本空间$\Omega_1=${(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)},共20个样本点,且这些样本点发生的可能性是相等的.

所选的题不是同一种题型所包含的样本点有(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),共12个,

所以所选的题不是同一种题型的概率为$\frac{12}{20}=0.6$.

(2)从5道题中任选2道题解答,每一次选1题(有放回),则样本空间$\Omega_2=${(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)},共25个样本点,且这些样本点发生的可能性是相等的.

由(1)知所选题不是同一种题型的样本点共12个,

所以所选的题不是同一种题型的概率为$\frac{12}{25}=0.48$.

反思提炼

关于有放回和不放回抽样的两点注意

(1)关于不放回抽样,计算样本点个数时,既可以看作是有顺序的,也可以看作是无顺序的,其最后结果是一致的.但不论选择哪一种方式,观察的角度必须一致,否则会产生错误.

(2)关于有放回抽样,应注意在连续取出两次的过程

中，因为先后顺序不同，所以(a,b)，(b,a)不是同一个样本点.

探究训练

一个袋中装有四个外观、质地完全相同的球，球的编号分别为1，2，3，4.

(1)从袋中随机取两个球，求取出的球的编号之和不大于4的概率；

(2)先从袋中随机取一个球，记该球的编号为m，将球放回袋中，然后再从袋中随机取一个球，记该球的编号为n，求$n<m+2$的概率.

解：(1)从袋中随机取两个球，所有可能的结果有1和2，1和3，1和4，2和3，2和4，3和4，共6个.

从袋中取出的两个球的编号之和不大于4的结果有1和2，1和3，共2个，

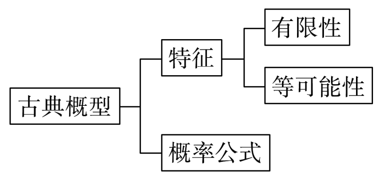
因此所求事件的概率$P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

(2)先从袋中随机取一个球，记下编号为m，放回后，再从袋中随机取一个球，记下编号为n，所有可能的结果(m,n)有(1,1)，(1,2)，(1,3)，(1,4)，(2,1)，(2,2)，(2,3)，(2,4)，(3,1)，(3,2)，(3,3)，(3,4)，(4,1)，(4,2)，(4,3)，(4,4)，共16个.

又其中$n<m+2$的结果有(1,1)，(1,2)，(2,1)，(2,2)，(2,3)，(3,1)，(3,2)，(3,3)，(3,4)，(4,1)，(4,2)，(4,3)，(4,4)，共13个.

所以$n<m+2$的概率$P_1=\frac{13}{16}$.

体系构建



课后素养评价（四十六）

基础性·能力运用

1. 下列概率模型属于古典概型的是（　　）

A.在平面直角坐标系内，从横坐标和纵坐标都是整数的所有点中任取一点

B.某射手射击一次，可能命中0环，1环，2环……10环

C.某小组有男生5人，女生3人，从中任选1人做演讲

D.一只使用中的灯泡的寿命长短

C　**解析**：因为所有横坐标和纵坐标都是整数的点有无限多个，不满足有限性，故A不属于；因为命中0环，1环，2环……10环的概率不一定相同，不满足等可能性，故B不属于；因为满足有限性，且任选1人与学生的性别无关，是等可能的，故C属于；因为灯泡的寿命是任何一个非负实数，有无限多种可能，不满足有限性，故D不属于.故选C.

2. 一个大箱子内放有5本科学杂志和7本文学杂志，小张先从箱内随机抽取1本（不放回），小李再从箱内随机抽取1本，已知小张抽取的是文学杂志，则小李抽取的是科学杂志的概率为（　　）

A.$\frac{5}{12}$　B.$\frac{1}{2}$　C.$\frac{5}{11}$　D.$\frac{6}{11}$

C　**解析**：小张抽取文学杂志后，剩下5本科学杂志和6本文学杂志，则小李抽取的是科学杂志的概率为$\frac{5}{11}$.故选C.

3. 从1，2，3，4这4个数中随机选取2个数，则选取的2个数之积大于4的概率为（　　）

A.$\frac{1}{6}$　B.$\frac{1}{3}$　C.$\frac{1}{2}$　D.$\frac{2}{3}$

C　**解析**：该试验的样本空间为$\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$，共包含6个样本点，事件“选取的2个数之积大于4”包含的样本点有(2,3)，(2,4)，(3,4)，共3个，所以选取的2个数之积大于4的概率为$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.故选C.

4. 仁、义、礼、智、信为儒家“五常”.孔子提出仁、义、礼，孟子延伸为仁、义、礼、智，董仲舒扩充为仁、义、礼、智、信.将“仁”“义”“礼”排成一排，其中“义”不在首位的概率为（　　）

A.$\frac{1}{3}$　B.$\frac{2}{3}$　C.$\frac{2}{5}$　D.$\frac{1}{2}$

B　**解析**：将“仁”“义”“礼”排成一排的所有可能出现的结果有仁义礼，仁礼义，义仁礼，义礼仁，礼仁义，礼义仁，共6种.“义”不在首位有仁义礼，仁礼义，礼仁义，礼义仁，共4种可能.由古典概型，得“义”不在首位的概率为$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.故选B.

5. 杭州亚运会的三个吉祥物分别取名为“琮琮”“宸宸”“莲莲”，如图.现将三张分别印有“琮琮”“宸宸”“莲莲”图案的卡片（卡片的形状、大小和质地完全

相同)放入盒子中.若从盒子中依次有放回地取出两张卡片,则一张为“琮琮”、一张为“宸宸”的概率是 (　　)

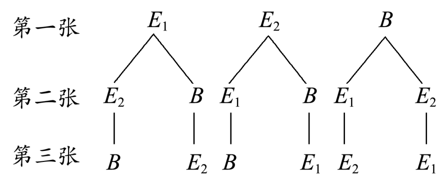
A.$\frac{2}{3}$　　B.$\frac{1}{3}$

C.$\frac{1}{9}$　　D.$\frac{2}{9}$

D　**解析**:记印有“琮琮”“宸宸”“莲莲”图案的卡片分别为A,B,C,(x,y)代表依次摸出的卡片,$x,y\in\{A,B,C\}$,则所有可能的情况有(A,A),(A,B),(A,C),(B,A),(B,B),(B,C),(C,A),(C,B),(C,C),共9种.其中一张为“琮琮”、一张为“宸宸”的情况有(A,B),(B,A),共2种,所以从盒子中依次有放回地取出两张卡片,一张为“琮琮”、一张为“宸宸”的概率是$\frac{2}{9}$.故选D.

6.三张卡片上分别写有字母E,E,B,将三张卡片随机排成一行,恰好排成BEE的概率为________.

$\frac{1}{3}$　**解析**:记写有E的两张卡片分别为E_1,E_2,画树状图如下:



故样本空间$\Omega=\{E_1E_2B,E_1BE_2,E_2E_1B,E_2BE_1,BE_1E_2,BE_2E_1\}$,共6个样本点.记事件$A$为“恰好排成$BEE$”,则$A=\{BE_1E_2,BE_2E_1\}$,共包含2个样本点,故$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

7.从长度分别为2,3,4,5的四条线段中任意取出三条,则以这三条线段为边可以构成三角形的概率是________.

$\frac{3}{4}$　**解析**:此试验的样本空间$\Omega=\{(2,3,4),(2,3,5),(2,4,5),(3,4,5)\}$,共有4个样本点.设事件$A$=“可构成三角形”,则$A=\{(2,3,4),(2,4,5),(3,4,5)\}$,共有3个样本点,故$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{3}{4}$.

综合性·创新提升

1.某班准备到郊外野营,为此向商店订了帐篷,如果下雨与不下雨是等可能的,能否准时收到帐篷也是等可能的,只要帐篷如期运到,他们就不会淋雨.下列说法正确的是 (　　)

A.一定不会淋雨　　B.淋雨概率为$\frac{3}{4}$

C.淋雨概率为$\frac{1}{2}$　　D.淋雨概率为$\frac{1}{4}$

D　**解析**:用A,B分别表示下雨和不下雨,用a,b表示帐篷运到和运不到,则所有可能情形为$(A,a),(A,b),(B,a),(B,b)$,则当(A,b)发生时就会被雨淋到,所以淋雨的概率为$\frac{1}{4}$.故选D.

2.党的二十大报告内涵丰富,鼓舞人心.某学校党支部评选了5份优秀学习报告心得体会(其中教师2份,学生3份),现从中随机抽取2份参展,则参展的优秀学习报告心得体会中,学生、教师各一份的概率是 (　　)

A.$\frac{1}{20}$　　B.$\frac{3}{5}$　　C.$\frac{3}{10}$　　D.$\frac{9}{10}$

B　**解析**:在5份优秀报告中,设教师的报告为a_1,a_2,学生的报告为b_1,b_2,b_3,从中随机抽取2份的样本空间$\Omega=\{(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3),(b_1,b_2),(b_1,b_3),(b_2,b_3)\}$,共10个样本点,

学生、教师各一份的样本点有$(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3)$,共6个,所以随机抽取2份,学生、教师各一份的概率为$\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.故选B.

3.先后抛掷两枚均匀的正方体骰子(它们的六个面的点数分别为1,2,3,4,5,6),骰子朝上的面的点数分别为x,y,则$\log_{2x}y=1$的概率为 (　　)

A.$\frac{1}{6}$　　B.$\frac{5}{36}$　　C.$\frac{1}{12}$　　D.$\frac{1}{2}$

C　**解析**:样本空间样本点的个数为36.

由$\log_{2x}y=1$,得$2x=y$,其中$x,y\in\{1,2,3,4,5,6\}$,所以$\begin{cases}x=1,\\y=2\end{cases}$或$\begin{cases}x=2,\\y=4\end{cases}$或$\begin{cases}x=3,\\y=6,\end{cases}$故事件“$\log_{2x}y=1$”包含3个样本点,所求的概率为$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.故选C.

4.某车间共有6名工人,他们某日加工零件个数的茎叶图如图所示,其中茎为十位数,叶为个位数,日加

工零件个数大于样本平均数的工人为优秀工人.从该车间6名工人中,任选2人,则至少有1名优秀工人的概率为________.

1	7 9
2	0 1 5
3	0

$\frac{3}{5}$ **解析**:由茎叶图可知6名工人日加工的零件个数分别为17,19,20,21,25,30,故平均数为$\frac{1}{6}\times(17+19+20+21+25+30)=22$.因为日加工零件个数大于22的为25,30,所以优秀工人有2人.

从该车间6名工人中,任选2人共有15种选法:(17,19),(17,20),(17,21),(17,25),(17,30),(19,20),(19,21),(19,25),(19,30),(20,21),(20,25),(20,30),(21,25),(21,30),(25,30).

其中至少有1名优秀工人共有9种选法:(17,25),(17,30),(19,25),(19,30),(20,25),(20,30),(21,25),(21,30),(25,30).所以至少有1名优秀工人的概率为$\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.

5.一叠卡片共有10张,正面分别写有数字1～10,将它们背面朝上洗匀后,任意抽出一张卡片,则P(抽到卡片上的数字大于6)=________,P(抽到卡片上的数字大于7小于9)=________,P(抽到卡片上的数字为偶数)=________.

$\frac{2}{5}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{2}$ **解析**:从10张卡片中任抽一张有10种抽法,即10个样本点,

其中抽到卡片上的数字大于6包含4个样本点.

因为抽到每一张卡片的可能性都相等,

所以P(抽到卡片上的数字大于6)$=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

同理可得P(抽到卡片上的数字大于7小于9)$=\frac{1}{10}$,

P(抽到卡片上的数字为偶数)$=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

6.某小组共有A,B,C,D,E五位同学,他们的身高(单位:m)及体重指标(单位:kg/m^2)如表所示:

项目	A	B	C	D	E
身高	1.69	1.73	1.75	1.79	1.82
体重指标	19.2	25.1	18.5	23.3	20.9

(1)从该小组身高低于1.80 m的同学中任选2人,求选到的2人身高都在1.78 m以下的概率;

(2)从该小组同学中任选2人,求选到的2人身高都在1.70 m以上且体重指标都在[18.5,23.9)内的概率.

解:(1)从身高低于1.80 m的同学中任选2人,样本空间$\Omega=\{$(A,B),(A,C),(A,D),(B,C),(B,D),(C,D)$\}$,共6个样本点.

选到的2人身高都在1.78 m以下的事件包含样本点(A,B),(A,C),(B,C),共3个.

因此选到的2人身高都在1.78 m以下的概率为$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

(2)从该小组同学中任选2人,样本空间$\Omega=\{$(A,B),(A,C),(A,D),(A,E),(B,C),(B,D),(B,E),(C,D),(C,E),(D,E)$\}$,共10个样本点.

选到的2人身高都在1.70 m以上且体重指标都在[18.5,23.9)内的事件含有的样本点有(C,D),(C,E),(D,E),共3个.

因此选到的2人身高都在1.70 m以上且体重指标都在[18.5,23.9)内的概率为$\frac{3}{10}$.

7.投掷一枚质地均匀的骰子2次,观察出现的点数,并记第一次出现的点数为a,第二次出现的点数为b.

(1)写出试验的样本空间;

(2)若向量$\boldsymbol{m}=(a,b)$,$\boldsymbol{n}=(2,1)$,求$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\geqslant 10$的概率.

解:(1)试验的样本空间为$\Omega=\{(a,b)\mid 1\leqslant a\leqslant 6,1\leqslant b\leqslant 6,a,b\in\mathbf{Z}\}$.

(2)向量$\boldsymbol{m}=(a,b)$,$\boldsymbol{n}=(2,1)$,

则$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=2a+b$,

则满足$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\geqslant 10$,即$2a+b\geqslant 10$的样本点有(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5),(3,4),(4,4),(5,4),(6,4),(4,3),(5,3),(6,3),(4,2),(5,2),(6,2),(5,1),(6,1),共21个,

由(1)可知样本空间中的样本点共36个,

故所求概率为$\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$.

10.1.4 概率的基本性质

学习任务目标

1.通过实例,理解概率的性质.(逻辑推理)
2.掌握随机事件概率的运算法则.(数学运算)

问题式预习

知识清单

概率的基本性质

性质1:对任意的事件 A,都有 $P(A)\geqslant 0$.

性质2:必然事件的概率为1,不可能事件的概率为0,即 $P(\Omega)=1$,$P(\varnothing)=0$.

性质3:如果事件 A 与事件 B 互斥,那么 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

性质4:如果事件 A 与事件 B 互为对立事件,那么 $P(B)=1-P(A)$,$P(A)=1-P(B)$.

性质5:如果 $A\subseteq B$,那么 $P(A)\leqslant P(B)$.

性质6:设 A,B 是一个随机试验中的两个事件,我们有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

概念辨析

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)任意事件 A 发生的概率 $P(A)$ 总满足 $0<P(A)<1$. (×)

(2)若事件 A 为随机事件,则 $0<P(A)<1$. (×)

(3)事件 A 与 B 的和事件的概率一定大于事件 A 的概率. (×)

(4)事件 A 与 B 互斥,则有 $P(A)=1-P(B)$. (×)

2.若事件 A 与 B 互斥,且 $P(A)=0.1$,则 $P(B)$ 的取值范围是 ( )

A.$[0,0.9]$　　B.$[0.1,0.9]$

C.$(0,0.9]$　　D.$[0,1]$

A **解析**:由于事件 A 与 B 互斥,则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.1+P(B)$.又 $0\leqslant P(A\cup B)\leqslant 1$,$0\leqslant P(B)\leqslant 1$,所以 $0\leqslant P(B)\leqslant 0.9$.故选A.

3.请思考并回答问题:

设事件 A 发生的概率为 $P(A)$,事件 B 发生的概率为 $P(B)$,那么事件 $A\cup B$ 发生的概率是 $P(A)+P(B)$ 吗?

提示:不一定.当事件 A 与 B 互斥时,$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$;当事件 A 与 B 不互斥时,$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

任务型课堂

学习任务一 概率的基本性质

1.随机事件 A 发生的概率 $P(A)$ 的取值范围是 ( )

A.$P(A)>0$　　B.$P(A)<1$

C.$0<P(A)<1$　　D.$0\leqslant P(A)\leqslant 1$

D **解析**:必然事件的概率是1,不可能事件的概率是0,必然事件和不可能事件是随机事件的两种极端情况,因此随机事件发生的概率的取值范围是 $[0,1]$.

2.从一批羽毛球产品中任取一个,其质量小于4.8 g的概率为0.3,质量小于4.85 g的概率为0.32,那么质量(单位:g)在 $[4.8,4.85]$ 范围内的概率是 ( )

A.0.62　　B.0.38　　C.0.02　　D.0.68

C **解析**:设"质量小于4.8 g"为事件 A,"质量小于4.85 g"为事件 B,"质量在区间 $[4.8,4.85]$ 内"为事件 C,则 $A\cup C=B$,且 A,C 为互斥事件,所以 $P(B)=P(A\cup C)=P(A)+P(C)$.

所以 $P(C)=P(B)-P(A)=0.32-0.3=0.02$.

3.若 $P(A\cup B)=1$,则互斥事件 A 与 B 的关系是 ( )

A.A,B 没有关系

B.A,B 是对立事件

C.A,B 不是对立事件

D.以上都不对

B **解析**:由题意,事件 A 与 B 互斥,则 $P(A\cup B)$

$=P(A)+P(B)=1$,所以 A,B 是对立事件.故选 B.

反思提炼

(1)由于事件的样本点个数总是小于或等于试验的样本空间中样本点的个数,所以任何事件的概率都在 $[0,1]$ 范围内.

(2)使用概率的性质时,要注意每一条性质使用的条件,不能断章取义.

学习任务二 互斥、对立事件的概率

例1 一名射击运动员在一次射击中射中10环、9环、8环、7环、7环以下的概率分别为0.24,0.28,0.19,0.16,0.13.计算这名射击运动员在一次射击中:

(1)射中10环或9环的概率;

(2)至少射中7环的概率.

解:设"射中10环""射中9环""射中8环""射中7环""射中7环以下"分别为事件 A,B,C,D,E.由题意可知它们之间两两互斥,且 $P(A)=0.24$,$P(B)=0.28$,$P(C)=0.19$,$P(D)=0.16$,$P(E)=0.13$.

(1)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.24+0.28=0.52$.

所以射中10环或9环的概率为0.52.

(2)设事件 $F=$"至少射中7环",则事件 F 与事件 E 是对立事件,所以 $P(F)=1-P(E)=1-0.13=0.87$.

所以至少射中7环的概率为0.87.

[**一题多思**]

思考.在本例条件下,求射中环数小于8环的概率.

解:事件"射中环数小于8环"包含事件 D 与事件 E,

则 $P(D\cup E)=P(D)+P(E)=0.16+0.13=0.29$.

反思提炼

1. 只有当 A,B 互斥时,公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ 才成立;只有当 A,B 互为对立事件时,公式 $P(A)=1-P(B)$ 才成立.

2. 涉及对立事件时,概率的求法有两种:一是直接求解,将所求事件分解为一些互斥事件的和,运用互斥事件的概率的加法公式计算;二是间接求解,先找出所求事件的对立事件,再用公式 $P(A)=1-P(\overline{A})$ 求解.

探究训练

一盒中装有大小和质地均相同的12个小球,其中5个红球,4个黑球,2个白球,1个绿球.从中随机取出1球,求:

(1)取出的小球是红球或黑球的概率;

(2)取出的小球是红球或黑球或白球的概率.

解:记事件 $A=$"任取1球为红球",$B=$"任取1球为黑球",$C=$"任取1球为白球",$D=$"任取1球为绿球",

则 $P(A)=\frac{5}{12}$,$P(B)=\frac{4}{12}$,$P(C)=\frac{2}{12}$,$P(D)=\frac{1}{12}$.

(1)由于事件 A,B 互斥,故取出的小球为红球或黑球的概率为 $P(A)+P(B)=\frac{5}{12}+\frac{4}{12}=\frac{3}{4}$.

(2)"任取1球,取出的小球是红球或黑球或白球"的对立事件是"任取1球为绿球",

故取出的小球是红球或黑球或白球的概率为 $1-P(D)=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$.

学习任务三 概率性质的综合应用

例2 袋中装有除颜色外完全相同的红球、黑球、黄球、绿球共12个,从中任取一球,得到红球的概率是 $\frac{1}{3}$,得到黑球或黄球的概率是 $\frac{5}{12}$,得到黄球或绿球的概率也是 $\frac{5}{12}$.

(1)从中任取一球,试分别求得到黑球、黄球、绿球的概率;

(2)从中任取一球,求得到的球既不是红球也不是绿球的概率.

解:(1)从袋中任取一球,记"得到红球""得到黑球""得到黄球""得到绿球"分别为事件 A,B,C,D,

则 $P(A)=\frac{1}{3}$,$P(B\cup C)=P(B)+P(C)=\frac{5}{12}$,

$P(C\cup D)=P(C)+P(D)=\frac{5}{12}$,

$P(B\cup C\cup D)=P(B)+P(C)+P(D)=1-P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

联立 $\begin{cases}P(B)+P(C)=\frac{5}{12},\\P(C)+P(D)=\frac{5}{12},\\P(B)+P(C)+P(D)=\frac{2}{3},\end{cases}$

解得$\begin{cases}P(B)=\dfrac{1}{4},\\ P(C)=\dfrac{1}{6},\\ P(D)=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$

故从中任取一球得到黑球、黄球、绿球的概率分别为$\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{4}$.

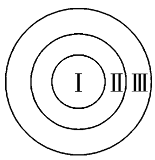
(2)事件“得到红球或绿球”可表示为事件$A\cup D$，由(1)及互斥事件的概率加法公式得$P(A\cup D)=P(A)+P(D)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{12}$，

故得到的球既不是红球也不是绿球的概率为

$1-P(A\cup D)=1-\dfrac{7}{12}=\dfrac{5}{12}$.

探究训练

1. 如图所示，靶子由一个中心圆面Ⅰ和两个同心圆环Ⅱ，Ⅲ构成，射手命中Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ的概率分别为0.35，0.30，0.25，则不中靶的概率是________.



0.10　**解析**：设“射手命中圆面Ⅰ”为事件A，“命中圆环Ⅱ”为事件B，“命中圆环Ⅲ”为事件C，“不中靶”为事件D，则事件A,B,C,D彼此互斥，故射手中靶的概率为$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=0.35+0.30+0.25=0.90$.因为“中靶”和“不中靶”是对立事件，所以不中靶的概率为$P(D)=1-P(A\cup B\cup C)=1-0.90=0.10$.

2. 在数学考试中，小明的成绩(均为整数值)在90分(含90分)以上的概率是0.18，在80分到89分(包括80分和89分，下同)的概率是0.51，在70分到79分的概率是0.15，在60分到69分的概率是0.09，在60分以下的概率是0.07.计算：

(1)小明在数学考试中取得80分以上的成绩的概率；

(2)小明数学考试及格的概率.

解：记小明的成绩“在90分(含90分)以上”“在80分到89分”“在70分到79分”“在60分到69分”“在60分以下”分别为事件A,B,C,D,E，这些事件彼此互斥.

(1)根据互斥事件的概率加法公式，得小明的成绩在80分以上的概率为$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.18+0.51=0.69$.

(2)(方法一)小明数学考试及格的概率是$P(A\cup B\cup C\cup D)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=0.18+0.51+0.15+0.09=0.93$.

(方法二)由题可知，“小明数学考试及格”的对立事件为事件E，所以小明数学考试及格的概率是$1-P(E)=1-0.07=0.93$.

体系构建

概率的基本性质
- 性质1 非负性
- 性质2 不可能事件、必然事件的概率
- 性质3 互斥事件的概率
- 性质4 对立事件的概率
- 性质5 具备包含关系的事件的概率
- 性质6 任意两个事件的并事件的概率

课后素养评价(四十七)

基础性·能力运用

1. 已知随机事件A和B互斥，且$P(A)=0.4$，$P(A\cup B)=0.6$，则事件B的对立事件发生的概率为(　　)

A.0.2　　B.0.4　　C.0.6　　D.0.8

D　**解析**：根据题意，因为$P(A)=0.4$，事件A和B互斥，所以$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.6$，所以$P(B)=0.6-0.4=0.2$，所以事件B的对立事件发生的概率为$1-0.2=0.8$.故选D.

2. 已知随机事件A,B满足$P(A)=0.6$，$P(\overline{B})=0.3$，如果$A\subseteq B$，那么$P(A\cap B)=$(　　)

A.0.18　　B.0.42　　C.0.6　　D.0.7

C　**解析**：由于$A\subseteq B$，所以$P(A\cap B)=P(A)=0.6$.故选C.

3. 已知随机事件A和B互斥，A和C对立，且$P(A\cup B)=0.5$，$P(B)=0.2$，则$P(C)=$(　　)

A.0.8　　B.0.7

C.0.6　　D.0.5

B　**解析**：由随机事件A和B互斥，可知$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.又$P(A\cup B)=0.5$，$P(B)=0.2$，所以$P(A)=0.3$.又A和C对立，可得$P(A)+P(C)=1$，解得$P(C)=0.7$.故选B.

综合性·创新提升

1.某产品分为优质品、合格品、次品三个等级,生产中出现合格品的概率为0.25,出现次品的概率为0.03.在该产品中任抽一件,则抽得优质品的概率是 ( )

A.0.28　　B.0.72

C.0.75　　D.0.97

B **解析**:根据题意,对该产品抽查一次抽得优质品的概率 $P=1-0.25-0.03=0.72$.故选B.

2.已知随机事件 A,B 满足 $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$,某人猜测事件 $\overline{A}\cap\overline{B}$ 发生,则此人猜测正确的概率为( )

A.1　　B.$\frac{1}{2}$

C.$\frac{1}{4}$　　D.0

C **解析**:因为事件 $\overline{A}\cap\overline{B}$ 与事件 $A\cup B$ 是对立事件,随机事件 A,B 满足条件 $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$,所以事件 $\overline{A}\cap\overline{B}$ 发生的概率为 $P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.故选C.

3.已知电话响第一声时被接的概率为 $\frac{1}{10}$,响第二声时被接的概率为 $\frac{3}{10}$,响第三声时被接的概率为 $\frac{2}{5}$,响第四声时被接的概率为 $\frac{1}{10}$,则电话在响前四声内被接的概率为 ( )

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{9}{10}$

C.$\frac{3}{10}$　　D.$\frac{4}{5}$

B **解析**:设"电话响第一声被接"为事件 A,"电话响第二声被接"为事件 B,"电话响第三声被接"为事件 C,"电话响第四声被接"为事件 D,则 A,B,C,D 两两互斥,从而 $P(A+B+C+D)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}+\frac{2}{5}+\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$.故选B.

4.(交汇创新)若 A,B 互为对立事件,$P(A)=\frac{1}{a}$,$P(B)=\frac{2}{b}$,且 $a>0,b>0$,则 $2a+b$ 的最小值是________.

8 **解析**:因为 A,B 互为对立事件,则 $P(A)+P(B)=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$,且 $a>0,b>0$,可得 $2a+b=\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)(2a+b)=4+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\geqslant 4+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}=8$,当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$,即 $a=2,b=4$ 时,等号成立,所以 $2a+b$ 的最小值是8.

5.某市各种血型的人所占比例如下:

血型	A	B	AB	O
该血型的人所占比例(%)	28	29	8	35

已知同种血型的人之间可以输血,O型血可以输血给任意一种血型的人,其他不同血型的人不能互相输血.小明是B型血,若小明因病需要输血,则:

(1)在该市任找一个人,可以给小明输血的概率是多少?

(2)在该市任找一个人,不能给小明输血的概率是多少?

解:(1)对任一个人,其血型为A,B,AB,O的事件分别记为 A,B,C,D,它们是两两互斥的.

由已知,得 $P(A)=0.28,P(B)=0.29,P(C)=0.08,P(D)=0.35$.

因为B型血、O型血可以输给B型血的人,故"可以给小明输血"为事件 $B\cup D$,

根据互斥事件的概率加法公式,有

$P(B\cup D)=P(B)+P(D)=0.29+0.35=0.64$.

(2)(方法一)由于A型血、AB型血不能输给B型血的人,故"不能给小明输血"为事件 $A\cup C$,

且 $P(A\cup C)=P(A)+P(C)=0.28+0.08=0.36$.

(方法二)因为任找一个人,其血要么可以输给小明,要么不可以输给小明,两者为对立事件,所以不能输血给小明的概率为 $1-P(B\cup D)=1-0.64=0.36$.

10.2　事件的相互独立性

学习任务目标
1.理解两个事件相互独立的概念.(数学抽象) 2.会判断两个事件是否为相互独立事件.(逻辑推理) 3.能进行一些与独立事件有关的概率的计算.(数学运算)

问题式预习

知识清单

1.相互独立事件的定义

对任意两个事件 A 与 B,如果 $P(AB)=P(A)P(B)$成立,则称事件 A 与事件 B 相互独立,简称为独立.

2.相互独立事件的有关结论

(1)若 A 与 B 是相互独立事件,则 A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 B,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$也相互独立.

(2)必然事件 Ω、不可能事件$\varnothing$都与任意事件相互独立.

概念辨析

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)不可能事件与任何一个事件相互独立.　(√)

(2)必然事件与任何一个事件相互独立.　(√)

(3)“$P(AB)=P(A)P(B)$”是“事件 A,B 相互独立”的充要条件.　(√)

(4)如果两个事件相互独立,那么它们的对立事件也是相互独立的.　(√)

2.在一段时间内,甲去某地的概率是$\dfrac{1}{4}$,乙去此地的概率是$\dfrac{1}{5}$.假定两人的行动相互之间没有影响,那么在这段时间内,至少有1人去此地的概率是　(　　)

A.$\dfrac{3}{20}$　B.$\dfrac{1}{5}$　C.$\dfrac{2}{5}$　D.$\dfrac{9}{20}$

C　**解析**:设“甲去此地”为事件 A,“乙去此地”为事件 B.

方法一(相互独立事件的概率公式):

则至少1人去此地的概率 $P=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)+P(A)P(B)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{2}{5}$.

方法二(对立事件):至少1人去此地的概率 $P=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-\dfrac{3}{4}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{2}{5}$.

3.请思考并回答问题:

互斥的事件相互独立吗?

提示:(1)对事件 A,B,若 $P(A)\neq0$ 且 $P(B)\neq0$,A,B 互斥,则 A,B 一定不相互独立.

(2)若事件 A,B 中至少有一个为不可能事件,即至少有一个的概率为0,则 A,B 既相互独立又彼此互斥.

任务型课堂

学习任务一　事件的相互独立性的判断

例1　判断下列事件是否为相互独立事件.

(1)甲组有3名男生、2名女生,乙组2名男生、3名女生,现从甲、乙两组各选1名同学参加演讲比赛,“从甲组中选出1名男生”与“从乙组中选出1名女生”.

(2)容器内盛有除颜色外完全相同的5个白球和3个黄球,“从8个球中任意取出1个,取出的是白球”与“从剩下的7个球中任意取出1个,取出的是白球”.

解:(1)“从甲组中选出1名男生”这一事件是否发生,对“从乙组中选出1名女生”这一事件是否发生没有影响,所以它们是相互独立事件.

(2)“从8个球中任意取出1个,取出的是白球”的概率为$\dfrac{5}{8}$,若这一事件发生了,则“从剩下的7个球中任

意取出1个,取出的是白球”的概率为$\frac{4}{7}$;若前一事件没有发生,则后一事件发生的概率为$\frac{5}{7}$.因此,前一事件是否发生,对后一事件发生的概率有影响,所以二者不是相互独立事件.

反思提炼

两个事件是否相互独立的判断

(1)直接法:由事件本身的性质直接判断两个事件发生是否相互影响.

(2)公式法:若$P(AB)=P(A)P(B)$,则事件A,B为相互独立事件.

探究训练

1.若$P(AB)=\frac{1}{9}$,$P(\overline{A})=\frac{2}{3}$,$P(B)=\frac{1}{3}$,则事件$A$与$B$的关系是 ( )

A.事件A与B互斥

B.事件A与B对立

C.事件A与B相互独立

D.事件A与B既互斥又相互独立

C **解析**:因为$P(\overline{A})=\frac{2}{3}$,所以$P(A)=\frac{1}{3}$.

又$P(B)=\frac{1}{3}$,$P(AB)=\frac{1}{9}$,

所以有$P(AB)=P(A)P(B)$,所以事件A与B相互独立但不互斥.

2.从一幅不含大小王的52张扑克牌中任抽一张,记事件A为“抽得K”,记事件B为“抽得红花色牌”,记事件C为“抽到J”.判断下列每对事件是否相互独立.为什么?

(1)A与B;(2)A与C.

解:(1)$P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$,$P(B)=\frac{26}{52}=\frac{1}{2}$,

事件AB为“既抽得K,又抽得红花色牌”,即“抽得红桃K或方块K”,故$P(AB)=\frac{2}{52}=\frac{1}{26}$.

因为$P(AB)=P(A)P(B)$,所以事件A与B相互独立.

(2)事件A与事件C是互斥的,因此事件A与C不是相互独立事件.

学习任务二 事件相互独立性的应用

例2 在某校运动会中,甲、乙、丙三支足球队进行单循环赛(即每两队比赛一场),共赛三场,每场比赛胜者得3分,负者得0分,没有平局.在每一场比赛中,甲胜乙的概率为$\frac{1}{3}$,甲胜丙的概率为$\frac{1}{4}$,乙胜丙的概率为$\frac{1}{3}$.

(1)求甲队获第一名且丙队获第二名的概率;

(2)求在该次比赛中甲队至少得3分的概率.

解:(1)“设甲队获第一名且丙队获第二名”为事件A,

则$P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{18}$.

(2)甲队至少得3分有两种情况:两场只胜一场;两场都胜.设事件B为“甲两场只胜一场”,事件C为“甲两场都胜”,则事件“甲队至少得3分”为$B\cup C$.

由题可知B与C互斥,

则$P(B\cup C)=P(B)+P(C)=\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

反思提炼

与相互独立事件有关的概率问题求解策略

1.明确“至少有一个发生”“至多有一个发生”“恰好有一个发生”“都发生”“都不发生”“不都发生”等词语的意义.

2.一般地,已知两个事件A,B,它们的概率分别为$P(A)$,$P(B)$,那么:

(1)A,B中至少有一个发生为事件$A+B$.

(2)A,B都发生为事件AB.

(3)A,B都不发生为事件$\overline{A}\,\overline{B}$.

(4)A,B恰有一个发生为事件$A\overline{B}+\overline{A}B$.

(5)A,B中至多有一个发生为事件$A\overline{B}+\overline{A}B+\overline{A}\,\overline{B}$.

探究训练

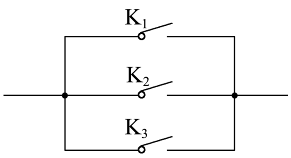
红队队员甲、乙、丙与蓝队队员A,B,C进行围棋比赛,甲对A、乙对B、丙对C各一盘.已知甲胜A、乙胜B、丙胜C的概率分别为0.6,0.5,0.5,假设各盘比赛的结果相互独立,求红队至少两名队员获胜的概率.

解:记“甲胜A”“乙胜B”“丙胜C”分别为事件D,E,F,则“甲不胜A”“乙不胜B”“丙不胜C”分别为事件$\overline{D}$,$\overline{E}$,$\overline{F}$.根据各盘比赛的结果相互独立,可得红队至少两名队员获胜的概率为

$P=P(DE\overline{F})+P(D\overline{E}F)+P(\overline{D}EF)+P(DEF)=P(D)P(E)P(\overline{F})+P(D)P(\overline{E})P(F)+P(\overline{D})\cdot P(E)P(F)+P(D)P(E)P(F)=0.6\times0.5\times(1-0.5)+0.6\times(1-0.5)\times0.5+(1-0.6)\times0.5\times0.5+0.6\times0.5\times0.5=0.55$.

学习任务三 相互独立事件概率的综合应用

例 3 如图,在一段线路中并联着 3 个自动控制的常开开关,只要其中有 1 个开关能够闭合,线路就能正常工作.假定在某段时间内每个开关能够闭合的概率都是 0.7,计算在这段时间内线路正常工作的概率.



解:设 A="K_1 闭合",B="K_2 闭合",C="K_3 闭合".由题意,这段时间内 3 个开关是否能够闭合相互之间没有影响,

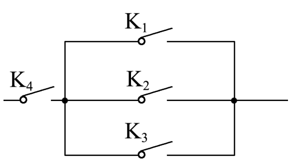
根据相互独立事件的定义,这段时间内 3 个开关都不能闭合的概率是 $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=(1-P(A))(1-P(B))(1-P(C))=(1-0.7)\times(1-0.7)\times(1-0.7)=0.027$.

所以这段时间内至少有 1 个开关能够闭合,从而使线路能正常工作的概率是

$1-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-0.027=0.973$.

[一题多思]

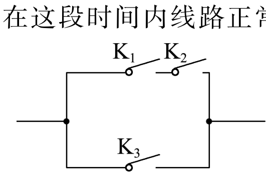
思考 1.如图,在本例的线路图中添加第四个开关 K_4 与其他三个开关串联,在这段时间内此开关能够闭合的概率也是 0.7,计算在这段时间内线路正常工作的概率.



解:记这段时间内"开关 K_4 能够闭合"为事件 D,所以这段时间内线路正常工作的概率为

$(1-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}))P(D)=0.973\times0.7=0.681\ 1$.

思考 2.将本例变为:如图,两个开关串联再与第三个开关并联,在某段时间内每个开关能够闭合的概率都是 0.7,计算在这段时间内线路正常工作的概率.



解:(方法一)由题可知,这段时间内线路正常工作的概率为 $P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)+P(\overline{A}\,\overline{B}C)+P(ABC)+P(AB\overline{C})=P(A)P(\overline{B})P(C)+P(\overline{A})\cdot P(B)P(C)+P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)+P(A)P(B)\cdot P(C)+P(A)P(B)P(\overline{C})=0.847$.

(方法二)要使这段时间内线路正常工作只要排除 K_3 断开,并且 K_1 与 K_2 至少有 1 个断开的情况即可,所以这段时间内线路正常的概率为 $1-P(\overline{C})\cdot(1-P(AB))=1-0.3\times(1-0.7^2)=0.847$.

反思提炼

求较为复杂事件的概率的方法

(1)列出题中涉及的各事件,并且用适当的符号表示;
(2)理清事件之间的关系(两事件是互斥还是对立,或者是相互独立),列出关系式;
(3)根据事件之间的关系准确选取概率公式进行计算;
(4)当直接计算符合条件的事件的概率较复杂时,可先间接地计算其对立事件的概率,再求出符合条件的事件的概率.

探究训练

某项选拔共有三轮考核,每轮设有一个问题,能正确回答问题者进入下一轮考核,否则被淘汰.已知某选手能正确回答第一、二、三轮问题的概率分别为 $\frac{4}{5}$,$\frac{3}{5}$,$\frac{2}{5}$,且各轮问题能否正确回答互不影响.求该选手被淘汰的概率.

解:记"该选手能正确回答第 i 轮的问题"为事件 A_i $(i=1,2,3)$,则 $P(A_1)=\frac{4}{5}$,$P(A_2)=\frac{3}{5}$,$P(A_3)=\frac{2}{5}$.

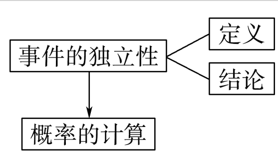
(方法一)该选手被淘汰的概率为

$P(\overline{A_1})+P(A_1\overline{A_2})+P(A_1A_2\overline{A_3})=P(\overline{A_1})+P(A_1)P(\overline{A_2})+P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3})=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{101}{125}$.

(方法二)该选手被淘汰的概率为

$1-P(A_1A_2A_3)=1-\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{101}{125}$.

体系构建



课后素养评价(四十八)

基础性·能力运用

1. 袋内有3个白球和2个黑球,从中不放回地摸球,一次摸一个球,用A表示"第一次摸得白球",用B表示"第二次摸得白球",则A与B ( )

A.是互斥事件

B.是相互独立事件

C.是对立事件

D.不是相互独立事件

D **解析**:根据互斥事件、对立事件和相互独立事件的定义可知,A与B不是相互独立事件.故选D.

2. 在某段时间内,甲地下雨的概率为0.3,乙地下雨的概率为0.4,假设在这段时间内两地是否下雨互相没有影响,则这段时间内,甲、乙两地都不下雨的概率为 ( )

A.0.12　B.0.88　C.0.28　D.0.42

D **解析**:$p=(1-0.3)\times(1-0.4)=0.42$.

3. 甲、乙两人练习射击,命中目标的概率分别为$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{3}$,甲、乙两人各射击一次,有下列说法:

①目标恰好被命中一次的概率为$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$;

②目标恰好被命中两次的概率为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$;

③目标被命中的概率为$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$;

④目标被命中的概率为$1-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$.

其中正确说法的序号是 ( )

A.②③　B.①②③

C.②④　D.①③

C **解析**:设"甲射击一次命中目标"为事件A,"乙射击一次命中目标"为事件B,显然,A,B相互独立,则目标恰好被命中一次的概率为$P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$,故①不正确;目标恰好被命中两次的概率为$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$,故②正确;目标被命中的概率为$P(A\overline{B}\cup\overline{A}B\cup AB)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+P(AB)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$或$1-P(\overline{A}\ \overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$,故③不正确,④正确.故选C.

4. 已知A,B,C为三个相互独立事件,若事件A发生的概率是$\frac{1}{2}$,事件B发生的概率是$\frac{2}{3}$,事件C发生的概率是$\frac{3}{4}$.

(1)求事件A,B,C只发生两个的概率;

(2)求事件A,B,C至多发生两个的概率.

解:(1)记"事件A,B,C只发生两个"为M_1,则事件M_1包括三种两两互斥的情况:$AB\overline{C}$,$A\overline{B}C$,$\overline{A}BC$.由互斥事件概率的加法公式和相互独立事件的概率乘法公式,

得$P(M_1)=P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)=\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{11}{24}$,

所以事件A,B,C只发生两个的概率为$\frac{11}{24}$.

(2)记"事件A,B,C至多发生两个"为M_2,

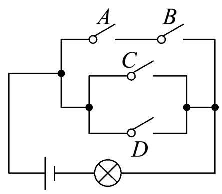
则事件M_2包括两两互斥的三种情况:事件A,B,C一个也不发生,记为M_3,事件A,B,C只发生一个,记为M_4,事件A,B,C只发生两个,即事件M_1,

故$P(M_2)=P(M_3)+P(M_4)+P(M_1)=\frac{1}{24}+\frac{6}{24}+\frac{11}{24}=\frac{3}{4}$.

所以事件A,B,C至多发生两个的概率为$\frac{3}{4}$.

综合性·创新提升

1. 如图,已知电路中 4 个开关闭合的概率都是 $\frac{1}{2}$,且是相互独立的,则灯亮的概率为 ( )



A. $\frac{3}{16}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{13}{16}$ D. $\frac{1}{4}$

C **解析**:记开关 A,B,C,D 闭合分别为事件 A,B,C,D,可用对立事件求解,图中含开关的三条线路同时断开的概率为 $P(\overline{C})P(\overline{D})[1-P(AB)]=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{16}$.

所以灯亮的概率为 $1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$.故选 C.

2. 从某地区的儿童中挑选体操学员,已知儿童体型合格的概率为 $\frac{1}{5}$,身体关节构造合格的概率为 $\frac{1}{4}$.任意挑选一儿童,这两项至少有一项合格的概率是(假定体型与身体关节构造合格与否相互之间没有影响) ( )

A. $\frac{13}{20}$ B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{2}{5}$

D **解析**:设"体型合格"为事件 A,"身体关节构造合格"为事件 B,A 与 B 为相互独立事件,且 $P(A)=\frac{1}{5}$,$P(B)=\frac{1}{4}$,所以两项中至少一项合格的概率 $P=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=1-\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{2}{5}$.故选 D.

3. 甲、乙两个口袋中均装有 1 个黑球和 2 个白球,现同时从甲、乙两口袋中随机地各取一个球放入另一口袋,则甲口袋的三个球中恰有两个白球的概率为 ( )

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{5}{9}$

C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{1}{3}$

B **解析**:由题意可知,若甲口袋的三个球中恰有两个白球,则从甲口袋中取出的球为黑球,乙口袋中取出的球为黑球,或从甲口袋中取出的球为白球,乙口袋中取出的球为白球,所以甲口袋的三个球中恰有两个白球的概率为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{9}$.故选 B.

4. 小明使用密码开保险柜时,忘记了密码的前两位,只记得第一位是 0,9 中的一个数字,第二位是 1,2,3,4,5 中的一个数字,则小明输入一次密码能够成功打开保险柜的概率是 ( )

A. $\frac{1}{15}$ B. $\frac{1}{10}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{2}{5}$

B **解析**:设事件 A 为"选对第一位数字",事件 B 为"选对第二位数字",则 $P(A)=\frac{1}{2}$,$P(B)=\frac{1}{5}$.由题意,A,B 为相互独立事件,故所求概率为 $P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$.故选 B.

5. 某产品的质量检验包括生产过程检验和出货检验两个环节,生产过程检验通过后才能进入出货检验环节,出货检验通过后才是合格产品.每个检验环节有两次机会(第一次检验未通过可修改后进行第二次检验),已知每个产品每个检验环节第一次通过的概率均为 $\frac{2}{3}$,第二次通过的概率均为 $\frac{3}{4}$,且每次检验是否通过相互独立,则每个产品成为合格品的概率为________.

$\frac{121}{144}$ **解析**:每个环节两次检验都不通过的概率为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$,则每个环节通过的概率均为 $1-\frac{1}{12}=$

$\frac{11}{12}$，所以每个产品成为合格品的概率为$\left(\frac{11}{12}\right)^2=\frac{121}{144}$.

6.在一次考试中，某学生语、数、英三科成绩排名全班第一的概率分别为 0.9，0.8，0.85，求在一次考试中，

(1)该学生三科成绩均未获得第一名的概率；

(2)该学生恰有一科成绩未获得第一名的概率.

解：分别记该学生语、数、英考试成绩排名全班第一的事件为 A,B,C，则 A,B,C 两两互相独立，

且 $P(A)=0.9,P(B)=0.8,P(C)=0.85$.

(1)“该学生三科成绩均未获得第一名”可以用$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$表示，

$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})$

$=[1-P(A)][1-P(B)][1-P(C)]$

$=(1-0.9)\times(1-0.8)\times(1-0.85)=0.003$，

即该学生三科成绩均未获得第一名的概率是 0.003.

(2)“该学生恰有一科成绩未获得第一名”可以用$(\overline{A}BC)\cup(A\overline{B}C)\cup(AB\overline{C})$表示.

由于事件 $\overline{A}BC,A\overline{B}C$ 和 $AB\overline{C}$两两互斥，

根据概率加法公式和相互独立事件的概率乘法公式可知，所求的概率为 $P(\overline{A}BC)+P(A\overline{B}C)+P(AB\overline{C})=P(\overline{A})P(B)P(C)+P(A)P(\overline{B})P(C)+P(A)P(B)P(\overline{C})=[1-P(A)]P(B)P(C)+P(A)[1-P(B)]P(C)+P(A)P(B)[1-P(C)]$

$=(1-0.9)\times0.8\times0.85+0.9\times(1-0.8)\times0.85+0.9\times0.8\times(1-0.85)=0.329$，

即该学生恰有一科成绩未获得第一名的概率是 0.329.

7.(决策问题)甲、乙两人进行某项比赛.

(1)若比赛结果有胜利、失败、平局三种，已知甲获胜的概率为 0.4，甲不输的概率为 0.9，求甲、乙两人取得平局的概率.

(2)若比赛结果只有胜利、失败两种，已知甲获胜的概率为 $p\left(0<p<\frac{1}{2}\right)$，对于甲来说，一局定胜负和三局两胜两种比赛方式比较，哪种比赛方式对甲更有利(各局比赛结果相互独立)？说明你的理由.

(说明：“三局两胜”是常见的比赛模式，指先赢得两局者为胜，最多三局结束)

解：(1)甲、乙两人取得平局的概率为 $0.9-0.4=0.5$.

(2)对于甲来说，一局定胜负的情况下，赢得比赛的概率为 p，三局两胜的情况下，赢得比赛的概率为 $p^2+2p^2(1-p)$.

因为 $0<p<\frac{1}{2}$，所以 $p^2+2p^2(1-p)-p=3p^2-2p^3-p=2p^2-2p^3+p^2-p=p(1-p)(2p-1)<0$，

所以 $p^2+2p^2(1-p)<p$，则一局定胜负的比赛方式对甲更有利.

10.3　频率与概率

10.3.1　频率的稳定性
10.3.2　随机模拟

学习任务目标

1. 理解频率的稳定性.(数学抽象)
2. 理解频率与概率的联系.(数学抽象)
3. 能用随机模拟的方法求概率.(数学建模)

问题式预习

知识清单

1.频率的稳定性及其应用

(1)频率的稳定性

在任何确定次数的随机试验中,一个随机事件 A 发生的频率具有随机性.一般地,随着试验次数 n 的增大,频率偏离概率的幅度会缩小,即事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 会逐渐稳定于事件 A 发生的概率 $P(A)$.我们称频率的这个性质为频率的稳定性.

(2)频率稳定性的应用

可以用频率 $f_n(A)$ 估计概率 $P(A)$.

2.随机模拟

(1)产生随机数的常用方法

①用计算器产生;②用计算机产生;③抽签法.

(2)随机模拟方法(蒙特卡洛方法)

利用计算机或计算器产生的随机数来做模拟试验,通过模拟试验得到的频率来估计概率,这种用计算机或计算器模拟试验的方法称为随机模拟方法或蒙特卡洛方法.

概念辨析

1. 判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)小概率事件就是不可能发生的事件,大概率事件就是必然要发生的事件. (×)

(2)某事件发生的概率随着试验次数的变化而变化. (×)

2. 下列方式不能产生随机数的是 (　　)

A.抛掷骰子试验

B.抛硬币

C.使用计算器

D.正方体的六个面上分别写有 1,2,2,3,4,5,抛掷该正方体

D　**解析**:D 项中,出现 2 的概率为 $\frac{2}{6}$,出现 1,3,4,5 的概率均是 $\frac{1}{6}$,故 D 项不能产生随机数.

3. 如果袋中装有数量差别很大而大小、质地相同的白球和黄球若干个,从中任取 1 球,取了 10 次,取出 7 个白球,估计袋中数量较多的是________球.

白　**解析**:取 10 次球有 7 次是白球,则取出白球的频率是 0.7,故可估计袋中数量较多的是白球.

4. 请思考并回答问题:

(1)频率和概率可以相等吗?

提示:可以.

(2)随机事件在一次试验中是否发生与概率的大小有什么关系?

提示:随机事件的概率表明了随机事件发生的可能性的大小,但并不表示一次试验中概率大的事件一定发生,概率小的事件一定不发生.

任务型课堂

学习任务一 频率与概率的区别

例 1 下列说法正确的是 ( )

A.由生物学知道生男生女的概率均约为 0.5,一对夫妇先后生两个小孩,则一定为一男一女

B.一次抽奖活动中,中奖概率为 0.2,则抽 5 张奖票,一定有 1 张中奖

C.10 张奖票中有 1 张中奖票,10 人去摸,则谁先摸谁摸到中奖票的可能性大

D.10 张奖票中有 1 张中奖票,10 人去摸,无论谁先摸,摸到中奖票的概率都是 0.1

D **解析**:一对夫妇生两个小孩可能是(男,男),(男,女),(女,男),(女,女),所以 A 不正确;中奖概率为 0.2 表明中奖的可能性为 0.2,当摸 5 张票时,可能都中奖,也可能中 1 张、2 张、3 张、4 张,或者都不中奖,所以 B 不正确;10 张奖票中有 1 张中奖票,10 人去摸,每人摸到中奖票的可能性是相同的,即无论谁先摸,摸到中奖票的概率都是 0.1,所以 C 不正确,D 正确.

反思提炼

理解概率与频率应关注的三个方面

(1)概率是随机事件发生可能性大小的度量,是随机事件的本质属性.随机事件 A 发生的概率是大量重复试验中事件 A 发生的频率的稳定值.

(2)由频率的定义我们可以知道随机事件 A 在一次试验中发生与否是随机的,但随机性中含有规律性,概率就是其规律性在数量上的反映.

(3)正确理解概率的意义,要清楚概率与频率的区别与联系.对具体的问题要从全局和整体上去看待,而不是局限于某一次试验或某一个具体的事件.

探究训练

“某彩票的中奖概率为$\frac{1}{100}$”意味着 ( )

A.买 100 张彩票就一定能中奖

B.买 100 张彩票能中一次奖

C.买 100 张彩票一次奖也不中

D.购买一张彩票中奖的可能性为$\frac{1}{100}$

D **解析**:某彩票的中奖率为$\frac{1}{100}$,意味着中奖的可能性为$\frac{1}{100}$,可能中奖,也可能不中奖.

学习任务二 利用频率的稳定性估计概率

例 2 某商场设立了一个可以自由转动的转盘,并规定:顾客购物 10 元以上就能获得一次转动转盘的机会,当转盘停止时,指针指向哪一区域就可以获得相应的奖品,下表是活动进行中的一组统计数据.

转动转盘的次数 n	100	150	200	500	800	1 000
指向“铅笔”区域的次数 m	68	111	136	345	564	701
指向“铅笔”区域的频率 $\frac{m}{n}$						

(1)计算并完成表格.

(2)请估计,当 n 很大时,指向“铅笔”区域的频率将会接近多少?

(3)假如你去转动该转盘一次,你获得铅笔的概率约是多少?

解:(1)完成表格如下.

转动转盘的次数 n	100	150	200	500	800	1 000
指向“铅笔”区域的次数 m	68	111	136	345	564	701
指向“铅笔”区域的频率 $\frac{m}{n}$	0.68	0.74	0.68	0.69	0.705	0.701

(2)当 n 很大时,指向“铅笔”区域的频率将会接近 0.7.

(3)获得铅笔的概率约是 0.7.

反思提炼

1. 频率是事件 A 发生的次数 m 与试验总次数 n 的比值.频率本身是随机变量,当 n 很大时,频率总是在一个稳定值附近摆动,这个稳定值就是概率.

2. 解此类题目的步骤:先利用频率的计算公式依次计算频率,然后用频率估计概率.

探究训练

一个地区从某年起几年之内的新生婴儿数及其中的男婴数如下表所示.

时间范围	1 年内	2 年内	3 年内	4 年内
新生婴儿数 n	5 544	9 607	13 520	17 190
男婴数 m	2 883	4 970	6 994	8 892

(1)计算男婴的出生频率;(保留 4 位小数)

(2)这一地区男婴出生的概率约是多少?

解:(1)由题表数据计算,得男婴出生的频率依次约为 0.520 0,0.517 3,0.517 3,0.517 3.

(2)因为这些频率非常接近 0.517 3,所以这一地区男婴出生的概率约为 0.517 3.

学习任务三　利用随机模拟试验估计概率

例 3　盒中有大小、质地相同的 5 个白球、2 个黑球,用随机模拟法求下列事件的概率.

(1)任取一球,得到白球;

(2)任取三球,都是白球.

解:(1)步骤:①利用计算器或计算机可以产生 1 到 7 的整数随机数,用 1,2,3,4,5 表示白球,6,7 表示黑球.每一个数一组,统计组数 n;

②统计这 n 组数中小于 6 的组数 m;

③任取一球,得到白球的概率估计值是 $\frac{m}{n}$.

(2)步骤:①利用计算器或计算机可以产生 1 到 7 的整数随机数,用 1,2,3,4,5 表示白球,6,7 表示黑球.每三个数一组(每组数字不重复),统计组数 a;

②统计这 a 组数中,每个数字均小于 6 的组数 b;

③任取三球,都是白球的概率估计值是 $\frac{b}{a}$.

反思提炼

利用随机模拟试验估计概率的关注点

(1)利用试验的基本事件总数确定将产生的随机数的范围,每个随机数代表一个基本事件.

(2)研究等可能事件的概率时,用按比例分配的方法确定表示各个结果的数字个数及总个数.

(3)当每次的试验结果需要 n 个随机数表示时,要把 n 个随机数作为一组来处理,此时一定要注意每组中的随机数能否重复.

探究训练

某人有 5 把钥匙,其中 2 把能打开锁,现随机地取 1 把钥匙试着开锁,不能开锁就扔掉,第三次才打开锁的概率是多少?如果试过的钥匙又混进去,这个概率又是多少?设计一个随机模拟试验,估计上述概率.

解:用计算器或计算机产生 1 到 5 之间的整数随机数,1,2 表示能打开锁,3,4,5 表示打不开锁.

①三个一组(每组数字不重复),统计总组数 N 及前两个大于 2、第三个是 1 或 2 的组数 N_1,则 $\frac{N_1}{N}$ 即为不能打开锁就扔掉,第三次才打开锁的概率的近似值.

②三个一组(每组数字可重复),统计总组数 M 及前两个大于 2、第三个为 1 或 2 的组数 M_1,则 $\frac{M_1}{M}$ 即为试过的钥匙 c 又混进去,第三次才打开锁的概率的近似值.

体系构建

频率的稳定性 — 频率估计概率

随机模拟试验 — 蒙特卡洛方法

课后素养评价(四十九)

基础性·能力运用

1.下列命题中正确的是 ( )

A.一批产品的次品率为0.05,则从中任意取出的200件产品中必有10件是次品

B.抛100次硬币,结果51次出现正面,则出现正面的概率是0.51

C.随机事件发生的概率就是这个随机事件发生的频率

D.掷骰子100次,得点数为6的结果有20次,则出现6点的频率为0.2

D **解析**:对于A,一批产品的次品率为0.05,则从中任取200件,次品的件数在10件左右,而不一定是10件,A错误;对于B,只能说明这100次试验出现正面朝上的频率为$\frac{51}{100}$,B错误;对于C,根据定义,随机事件的频率只是概率的近似值,C错误;对于D,抛掷骰子100次,得点数是6的结果有20次,则出现6点的频率是$\frac{20}{100}=0.2$,D正确.故选D.

2.某制药厂正在测试一种减肥药的疗效,有100名志愿者服用此药.测试结果为体重减轻的有59人,体重不变的有21人,体重增加的有20人.如果另外有一人服用此药,估计这个人体重减轻的概率为 ( )

A.$\frac{59}{100}$ B.$\frac{21}{100}$ C.$\frac{1}{5}$ D.$\frac{4}{5}$

A **解析**:由题意可知体重减轻的频率为$\frac{59}{100}$,用频率估计概率可知体重减轻的概率为$\frac{59}{100}$.故选A.

3.进入8月份以后,某市持续高温,气象局一般会提前发布高温橙色预警信号(高温橙色预警标准为24 h内最高气温将升至37 ℃以上),在接下来的3天中,每一天最高气温在37 ℃以上的概率是$\frac{3}{5}$.用计算机生成了20组随机数,结果如下:

116 785 812 730 134

452 125 689 024 169

334 217 109 361 908

284 044 147 318 027

若用0,1,2,3,4,5表示发布高温橙色预警,用6,7,8,9表示不发布高温橙色预警,则接下来的3天中恰有2天发布高温橙色预警信号的概率估计是 ( )

A.$\frac{3}{5}$ B.$\frac{1}{2}$

C.$\frac{13}{20}$ D.$\frac{2}{5}$

B **解析**:由题意可知表示接下来的3天中恰有2天发布高温橙色预警信号的随机数有116,812,730,217,109,361,284,147,318,027,共10个,故接下来的3天中恰有2天发布高温橙色预警信号的概率估计是$\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$.故选B.

4.从13张扑克牌中随机抽一张,用随机模拟的方法估计这张牌是7的概率为$\frac{N_1}{N}$,则估计这张牌不是7的概率是________.

$1-\frac{N_1}{N}$ **解析**:这张牌不是7的概率是$1-\frac{N_1}{N}$.

5.(决策问题)春暖花开的时候是放蜂的大好时机,养蜂人甲在某地区放养了100箱小蜜蜂和1箱黑小蜜蜂,养蜂人乙在同一地区放养了1箱小蜜蜂和100箱黑小蜜蜂.某中学生物小组在上述地区捕获了1只黑小蜜蜂,假设每箱中蜜蜂的数量相同,那么,该生物小组的同学认为这只黑小蜜蜂是养蜂人________放养的比较合理.

乙 **解析**:由题意可知,从放养的蜜蜂中捕获一只黑小蜜蜂是甲放养的概率为$\frac{1}{101}$,是乙放养的概率为$\frac{100}{101}$,所以认为这只黑小蜜蜂是养蜂人乙放养的比较合理.

6.袋子中有四个小球,分别写有“幸”“福”“快”“乐”四个字,每次有放回地从中任取一个小球,取到“快”就停

止,用随机模拟的方法估计到第二次停止的概率:先由计算器产生1到4之间取整数值的随机数,且用1,2,3,4表示取出小球上分别写有"幸""福""快""乐"四个字,以每两个随机数为一组,代表两次取球的结果,经随机模拟产生了20组随机数:

13 24 12 32 43

14 24 32 31 21

23 13 32 21 24

42 13 32 21 34

据此估计,到第二次停止的概率为________.

$\frac{1}{4}$ **解析**:由随机模拟产生的随机数可知,第二次停止的有13,43,23,13,13,共5个样本点,故所求的概率 $P=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$.

综合性·创新提升

1. 在检测一批相同规格共500 kg航空用耐热垫片的品质时,随机抽取了280片,检测到有5片非优质品,则这批垫片中非优质品约为 ( )

A.2.8 kg B.8.9 kg

C.10 kg D.28 kg

B **解析**:根据频率估计概率,由题意可得,这批垫片中非优质品约为 $\frac{5}{280}\times500\approx8.9$(kg).故选B.

2. 下列说法正确的是 ( )

A.某人打靶,射击10次,击中7次,那么此人中靶的概率为0.7

B.一位同学做掷硬币试验,掷6次,一定有3次正面朝上

C.某种彩票的回报率为47%,有人花了100元钱买这种彩票,一定会有47元的回报

D.概率等于1的事件不一定为必然事件

D **解析**:选项A,某人打靶,射击10次,击中7次,那么此人中靶的频率为0.7,故错误;

选项B,一位同学做掷硬币试验,掷6次,不一定有3次正面朝上,故错误;

选项C,买这种彩票,中奖或者不中奖都有可能,但事先无法预料,故错误;

选项D,正确,比如说在0和5之间随机取一个数,这个数不等于3.352 64的概率是1,但不是必然事件.故选D.

3. 某射击运动员每次击中目标的概率都是0.8.现采用随机模拟的方法估计该运动员射击4次至少击中3次的概率:先由计算器得出0到9之间取整数值的随机数,指定0,1表示没有击中目标,2,3,4,5,6,7,8,9表示击中目标;因为射击4次,故以每4个随机数为一组,代表射击4次的结果.经随机模拟产生了如下20组随机数:

5727 0293 7140 9857 0347

4373 8636 9647 1417 4698

0371 6233 2616 8045 6011

3661 9597 7424 6710 4281

据此估计,该射击运动员射击4次至少击中3次的概率为 ( )

A.0.7 B.0.75 C.0.8 D.0.85

B **解析**:由题意知模拟射击4次的结果,经随机模拟产生了20组随机数,

在20组随机数中表示射击4次至少击中3次的有:

5727 0293 9857 0347 4373 8636 9647

4698 6233 2616 8045 3661 9597 7424

4281

共15组随机数,

所以所求概率为 $\frac{15}{20}=0.75$.故选B.

4. 在利用整数随机数进行随机模拟试验时,整数 a 到整数 b 之间的每个整数出现的概率等于________.

$\dfrac{1}{b-a+1}$ **解析**:$[a,b]$中共有$(b-a+1)$个整数,每个整数出现的概率相等,所以每个整数出现的概率等于$\dfrac{1}{b-a+1}$.

5.抛掷两枚均匀的正方体骰子,用随机模拟的方法估计朝上的面的点数的和是6的倍数的概率时,用1,2,3,4,5,6分别表示朝上的面的点数是1,2,3,4,5,6.用计算器或计算机分别产生1到6的两组整数随机数,每组各60个,每组第$i(i=1,2,\cdots,60)$个数组成一对,共组成60对数,其中有一对是(1,6),这对数表示的结果是否满足朝上的面的点数的和是6的倍数:________.(填"是"或"否")

否 **解析**:(1,6)表示第一枚骰子朝上的面的点数是1,第二枚骰子朝上的面的点数是6,则朝上的面的点数的和是1+6=7,不是6的倍数.

6.某射击队统计了甲、乙两名运动员在平日训练中击中10环的次数,如下表:

射击次数	10	20	50	100	200	500
甲击中10环的次数	9	17	44	92	179	450
甲击中10环的频率						
乙击中10环的次数	8	19	44	93	177	453
乙击中10环的频率						

(1)分别计算出甲、乙两名运动员击中10环的频率,补全表格;

(2)根据(1)中的数据估计两名运动员击中10环的概率.

解:(1)两名运动员击中10环的频率如下表:

射击次数	10	20	50	100	200	500
甲击中10环的次数	9	17	44	92	179	450
甲击中10环的频率	0.9	0.85	0.88	0.92	0.895	0.9
乙击中10环的次数	8	19	44	93	177	453
乙击中10环的频率	0.8	0.95	0.88	0.93	0.885	0.906

(2)由(1)中的数据可知两名运动员击中10环的频率都集中在0.9附近,所以两人击中10环的概率均约为0.9.