# 答案详解

## 第一章 集合、常用逻辑用语、不等式

### 第1课时 集合

**梳理·必备知识**

1.(2)$\in$ $\notin$ (3)描述法 (4)$\mathbf{N}^*$(或$\mathbf{N}_+$) **Z** **Q** **R**

2.(1)任意一个元素 $B\supseteq A$ (2)$x\notin A$ $A\subsetneqq B$ $B\subsetneqq A$
(3)$B\subseteq A$ (4)子集 真子集

3.$\{x|x\in A,或 x\in B\}$ $\{x|x\in A,且 x\in B\}$ $\{x|x\in U,且 x\notin A\}$ $A$ $A$ $A$ $\varnothing$ ($\complement_U A$) ($\complement_U A$)

**激活·基本技能**

一、(1)× (2)× (3)× (4)×

二、1. **A** [全集$U=\{x|x>0\}$,集合$A=\{x|x>4\}$,则$\complement_U A=\{x|0<x\leqslant 4\}$,故选A.]

2. **AD**

3. **AD** [在阴影部分区域内任取一个元素$x$,则$x\in A\cap B$或$x\in B\cap C$,故阴影部分所表示的集合为$B\cap(A\cup C)$或$(A\cap B)\cup(B\cap C)$. 故选AD.]

4. $\{x|x\leqslant 2或 x\geqslant 10\}$ $\{x|2<x<3或7\leqslant x<10\}$ [因为$A=\{x|3\leqslant x<7\}$,$B=\{x|2<x<10\}$,所以$A\cup B=\{x|2<x<10\}$,$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|x<3或x\geqslant 7\}$,所以$\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=\{x|x\leqslant 2或x\geqslant 10\}$,$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{x|2<x<3或7\leqslant x<10\}$.]

**考点一**

**典例1** (1)**C** (2)$-\dfrac{3}{2}$ (3)$\{0,1\}$(或$\{-1,1\}$)

[(1)因为$A=\{1,2,3\}$,
所以$B=\{(2,1),(3,1),(3,2),(1,2),(1,3),(2,3)\}$,$B$中含6个元素. 故选C.

(2)由题意得$m+2=3$或$2m^2+m=3$,
则$m=1$或$m=-\dfrac{3}{2}$.
当$m=1$时,$m+2=3$且$2m^2+m=3$,根据集合中元素的互异性可知不满足题意;
当$m=-\dfrac{3}{2}$时,$m+2=\dfrac{1}{2}$,而$2m^2+m=3$,符合题意,故$m=-\dfrac{3}{2}$.

(3)由题意,不妨设$S=\{a,b\}$,根据题意有$a^2,ab,b^2\in S$,
所以$a^2,ab,b^2$必有两个是相等的,
若$a^2=b^2$,则$a=-b$,故$ab=-a^2$,又$a^2=a$,或$a^2=b=-a$,
所以$a=0$(舍去)或$a=1$或$a=-1$,此时$S=\{-1,1\}$;
若$a^2=ab$,则$a=0$,此时$b^2=b$,故$b=1$,此时$S=\{0,1\}$,
若$b^2=ab$,则$b=0$,此时$a^2=a$,故$a=1$,此时$S=\{0,1\}$,
综上,$S=\{0,1\}$或$S=\{-1,1\}$.]

**跟进训练**

1.(1)**C** (2)$\left\{0,\dfrac{1}{4}\right\}$ [(1)$\because \dfrac{4}{x-2}\in\mathbf{Z}$,$\therefore x-2$的取值有$-4,-2,-1,1,2,4$,$\therefore x$的值分别为$-2,0,1,3,4,6$,
又$x\in\mathbf{N}$,故$x$的值为$0,1,3,4,6$.
故集合$A$中有5个元素.

(2)依题意知,方程$kx^2+x+1=0$有且仅有一个实数根,

$\therefore k=0$或$\begin{cases}k\neq 0,\\ \Delta=1-4k=0,\end{cases}$

$\therefore k=0$或$k=\dfrac{1}{4}$,$\therefore k$的取值集合为$\left\{0,\dfrac{1}{4}\right\}$.]

**考点二**

**典例2** (1)**D** (2)$-2$ (3)$[-1,+\infty)$ [(1)因为$P=\{y|y=x^2+1\}=\{y|y\geqslant 1\}$,$M=\{x|y=x^2+1\}=\mathbf{R}$,所以$P\subsetneqq M$.

(2)$\because\{1,m,m+n\}=\left\{0,n,\dfrac{n}{m}\right\}$,且$m\neq 0$,

$\therefore m+n=0$,即$m=-n$,于是$\dfrac{n}{m}=-1$.

$\therefore$由两集合相等,得$m=-1$,$n=1$,

$\therefore m-n=-2$.

(3)$\because B\subseteq A$,①当$B=\varnothing$时,$2m-1>m+1$,解得$m>2$,

②当$B\neq\varnothing$时,$\begin{cases}2m-1\leqslant m+1,\\2m-1\geqslant -3,\\m+1\leqslant 4,\end{cases}$ 解得$-1\leqslant m\leqslant 2$.

综上,实数$m$的取值范围是$[-1,+\infty)$.]

**跟进训练**

2.(1)**C** (2)**B** [(1)**法一**:$\because A=\{1,2\}$,$B=\{1,2,3,4,5\}$,且$A\subsetneqq C\subseteq B$,$\therefore$集合$C$的所有可能为$\{1,2,3\}$,$\{1,2,4\}$,$\{1,2,5\}$,$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,5\}$,$\{1,2,4,5\}$,$\{1,2,3,4,5\}$,共7个.

**法二**:由题意知,$\{1,2\}\subsetneqq C\subseteq\{1,2,3,4,5\}$,
$\therefore$集合$C$中必有除1,2外的3,4,5中至少一个元素,故共有$2^3-1=7$个集合$C$. 故选C.

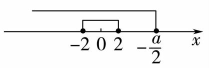
(2)依题意,有$a-2=0$或$2a-2=0$. 当$a-2=0$时,解得$a=2$,此时$A=\{0,-2\}$,$B=\{1,0,2\}$,不满足$A\subseteq B$;当$2a-2=0$时,解得$a=1$,此时$A=\{0,-1\}$,$B=\{-1,0,1\}$,满足$A\subseteq B$. 所以$a=1$,故选B.]

**考点三**

**考向1** **典例3** (1)**C** (2)**D** [(1)由题意知,$A\cap B=\{0,1\}$. 故选C.

(2)因为$A=\{1,2,3,4,5,9\}$,$B=\{x|\sqrt{x}\in A\}$,
所以$B=\{1,4,9,16,25,81\}$,则$A\cap B=\{1,4,9\}$,
$\complement_A(A\cap B)=\{2,3,5\}$. 故选D.]

**考向2** **典例4** **D** [集合$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$,$B=\left\{x\left|x\leqslant-\dfrac{a}{2}\right.\right\}$,由$A\cup B=B$可得$A\subseteq B$,作出数轴如图.




可知$-\frac{a}{2}\geqslant 2$，即$a\leqslant -4$.]

**跟进训练**

3.(1)**A**　(2)5　[(1)由题意，$M\cup N=\{x|x<2\}$，又$U=\mathbf{R}$，所以$\complement_U(M\cup N)=\{x|x\geqslant 2\}$，故选 A.

(2)由$A\cap B=A$，则$A\subseteq B$，

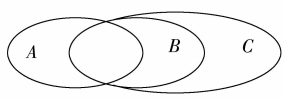
由$|x-3|\leqslant m$，得$-m+3\leqslant x\leqslant m+3$，

故有$\begin{cases}4\leqslant m+3,\\-2\geqslant -m+3,\end{cases}$即$\begin{cases}m\geqslant 1,\\m\geqslant 5,\end{cases}$即$m\geqslant 5$，

即$m$的最小值为5.]

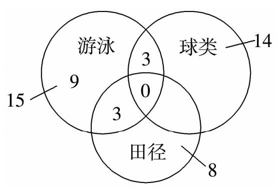
**考点四**

**典例5**　(1)**D**　[因为非空集合$A$，$B$，$C$满足：$(A\cap B)\subseteq C$，$(A\cap C)\subseteq B$，作出符合题意的三个集合之间关系的 Venn 图，如图所示，




所以$A\cap B=A\cap C$. 故选 D.]

(2)**解**：如图.

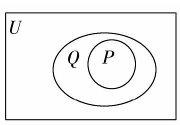



设同时参加田径和球类比赛的有$x$人，则$28=15+8+14-3-3-x$，解得$x=3$，即同时参加田径和球类比赛的有3人.

由图可知，只参加游泳一项比赛的有9人.

**跟进训练**

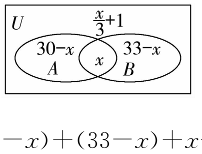
4.(1)**B**　(2)**D**　[(1)如图所示，




$P$，$Q$满足$(\complement_U P)\cup Q=\mathbf{R}$，即$P\subseteq Q$，故选 B.

(2)记赞成 A 的学生组成集合 A，赞成 B 的学生组成集合 B，50 名学生组成全集$U$，则集合$A$有30个元素，集合$B$有33个元素.

设对 A，B 都赞成的学生人数为$x$，则集合$\complement_U(A\cup B)$的元素个数为$\frac{x}{3}+1$，如图，




由 Venn 图可知，$(30-x)+(33-x)+x+\left(\frac{x}{3}+1\right)=50$，

即$14-\frac{2x}{3}=0$，解得$x=21$，

所以对 A，B 都赞成的学生有21人.

故选 D.]

## 第2课时　常用逻辑用语

**梳理·必备知识**

1.(1)充分　必要　(2)充分不必要　(3)$p\nRightarrow q$且$q\Rightarrow p$

(4)$p\Leftrightarrow q$　(5)既不充分也不必要

2.(1)$\forall$　(2)$\exists$

3.$\forall x\in M$，$p(x)$　$\exists x\in M$，$p(x)$　$\exists x\in M$，$\neg p(x)$　$\forall x\in M$，$\neg p(x)$

**激活·基本技能**

一、(1)√　(2)√　(3)×　(4)√

二、1.**ABD**　[A：由$a=b$有$ac=bc$，当$ac=bc$不一定有$a=b$，必要性不成立，假命题；

B：当$a=1>b=-2$时$a^2<b^2$，充分性不成立，假命题；

C：$a<5$不一定$a<3$，但$a<3$必有$a<5$，故“$a<5$”是“$a<3$”的必要条件，真命题；

D：$a+5$是无理数，则$a$是无理数，若$a$是无理数也有$a+5$是无理数，故为充要条件，假命题. 故选 ABD.]

2.**ACD**

3.$\exists x,y\in\mathbf{R}$，$x+y>1$　$\forall x,y\in\mathbf{R}$，$x+y\leqslant 1$　假

4.$[3,+\infty)$

**考点一**

**考向1　典例1　C**　[若$\{a_n\}$为等差数列，设其公差为$d$，则$a_n=a_1+(n-1)d$，所以$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，所以$\frac{S_n}{n}=a_1+(n-1)\cdot\frac{d}{2}$，所以$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=a_1+(n+1-1)\cdot\frac{d}{2}-\left[a_1+(n-1)\cdot\frac{d}{2}\right]=\frac{d}{2}$为常数，所以$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，即甲$\Rightarrow$乙；若$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，设其公差为$t$，则$\frac{S_n}{n}=\frac{S_1}{1}+(n-1)t=a_1+(n-1)t$，所以$S_n=na_1+n(n-1)t$，所以当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=na_1+n(n-1)t-[(n-1)a_1+(n-1)(n-2)t]=a_1+2(n-1)t$，当$n=1$时，$S_1=a_1$也满足上式，所以$a_n=a_1+2(n-1)t$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，$a_{n+1}-a_n=a_1+2(n+1-1)t-[a_1+2(n-1)t]=2t$为常数，所以$\{a_n\}$为等差数列，即乙$\Rightarrow$甲. 所以甲是乙的充要条件，故选 C.]

**考向2　典例2　A**　[对于 A，$\ln x>\ln y\Leftrightarrow x>y>0$，$\therefore$“$\ln x>\ln y$”是“$x>y$”的充分不必要条件，故 A 正确；对于 B，$x^2>y^2\Leftrightarrow|x|>|y|$，$\therefore$“$x^2>y^2$”是“$x>y$”的既不充分也不必要条件，故 B 错误；对于 C，$x^3>y^3\Leftrightarrow x>y$，$\therefore$“$x^3>y^3$”是“$x>y$”的充要条件，故 C 错误；对于 D，$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}\Leftrightarrow\begin{cases}xy>0,\\y<x,\end{cases}$或$\begin{cases}x<0,\\y>0,\end{cases}$$\therefore$“$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$”是“$x>y$”的既不充分也不必要条件，故 D 错误. 故选 A.]

**考向3　典例3　解**：由$x^2-8x-20\leqslant 0$，得$-2\leqslant x\leqslant 10$，

$\therefore A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 10\}$.

由$x\in A$是$x\in B$的必要条件，知$B\subseteq A$.

则$\begin{cases}1-m\leqslant 1+m,\\1-m\geqslant -2,\\1+m\leqslant 10,\end{cases}$　$\therefore 0\leqslant m\leqslant 3$.

$\therefore$当$0\leqslant m\leqslant 3$时，$x\in A$是$x\in B$的必要条件，

即所求$m$的取值范围是$[0,3]$.

**拓展变式**

**解**:由原题知 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 10\}$,$\because x\in A$ 是 $x\in B$ 的充分条件,$\therefore A\subseteq B$,

$\therefore\begin{cases}1-m\leqslant 1+m,\\1-m\leqslant -2,\\1+m\geqslant 10,\end{cases}$ 解得 $m\geqslant 9$.

故 $m$ 的取值范围是 $[9,+\infty)$.

**跟进训练**

1.(1)**D** (2)**D** (3)$ac<0$ [(1)$\ln(x+1)<0$ 等价于 $0<x+1<1$,即 $-1<x<0$,因为 $-1<x<0$ 可以推出 $x<0$,而 $x<0$ 不能推出 $-1<x<0$,所以 $x<0$ 是 $-1<x<0$ 的必要不充分条件,所以"$\ln(x+1)<0$"的一个必要不充分条件是"$x<0$".

(2)由 $x^2-3x+2\leqslant 0$,得 $1\leqslant x\leqslant 2$,

由 $x^2-4x+4-m^2\leqslant 0$,得 $2-|m|\leqslant x\leqslant 2+|m|$,

若 $p$ 是 $q$ 的充分不必要条件,

则 $\begin{cases}2-|m|\leqslant 1,\\2+|m|>2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2-|m|<1,\\2+|m|\geqslant 2,\end{cases}$

解得 $|m|\geqslant 1$,所以 $m\leqslant -1$ 或 $m\geqslant 1$.

故选 D.

(3)$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有一个正根和一个负根的充要条件是 $\begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0,\\\dfrac{c}{a}<0,\end{cases}$ 即 $ac<0$.]

**考点二**

**考向1 典例4** (1)**C** (2)存在一个奇数,它的立方不是奇数 [(1)因为命题 $p$ 的否定为"$\exists x<0,x+2>2^x$",所以命题 $p$ 为"$\forall x<0,x+2\leqslant 2^x$".故选 C.

(2)命题的否定为:存在一个奇数,它的立方不是奇数.]

**考向2 典例5 B** [对于 $p$ 而言,取 $x=-1$,则有 $|x+1|=0<1$,故 $p$ 是假命题,$\neg p$ 是真命题;对于 $q$ 而言,取 $x=1$,则有 $x^3=1^3=1=x$,故 $q$ 是真命题,$\neg q$ 是假命题.综上,$\neg p$ 和 $q$ 都是真命题.故选 B.]

**考向3 典例6** $(-4,0)$ [**法一**:若 $p$ 为真命题,即 $\exists x\in\mathbf{R}$,$x^2-mx-m\leqslant 0$,$\therefore\Delta=m^2+4m\geqslant 0$,$\therefore m\geqslant 0$ 或 $m\leqslant -4$,

$\therefore$ 当 $p$ 为假命题时,$-4<m<0$.

**法二**:$\because p$ 为假命题,

$\therefore\neg p$:$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2-mx-m>0$ 为真命题,

即 $\Delta=m^2+4m<0$,$\therefore -4<m<0$.]

**跟进训练**

2.(1)**B** (2)1 [(1)全称量词命题的否定是存在量词命题,所以 $\neg p$:$\exists x\geqslant 0$,$e^x<1$,故选 B.

(2)因为函数 $y=\tan x$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上是增函数,所以 $y_{\max}=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$.依题意知,$m\geqslant y_{\max}$,即 $m\geqslant 1$.所以 $m$ 的最小值为 1.]

## 第3课时 不等式的性质与一元二次不等式

**梳理·必备知识**

1.$>$ $=$ $<$

2.$b<a$ $a>c$ $a+c>b+c$ $ac>bc$ $ac<bc$ $a+c>b+d$ $ac>bd$

3.$\{x|x<x_1$ 或 $x>x_2\}$ $\{x|x_1<x<x_2\}$ $\varnothing$ $\varnothing$

**激活·基本技能**

一、(1)× (2)√ (3)√ (4)×

二、1.**C** [由方程 $(x-1)(x-3)=0$,可得方程的两根为 $x_1=1$,$x_2=3$,结合一元二次不等式的解法,可得不等式 $(x-1)\cdot(x-3)>0$ 的解集为 $\{x|x<1$ 或 $x>3\}$,故选 C.]

2.**A** [向糖水中加入 $m$ g 水,糖水的浓度变为 $\dfrac{a}{b+m}$,此时浓度变小,糖水变淡,即 $\dfrac{a}{b+m}<\dfrac{a}{b}$,故选 A.]

3.(1)$<$ (2)$<$ (3)$>$

4.$(-6,5)$ [$\because -3<b<5$,$\therefore -5<-b<3$,

又 $-1<a<2$,$\therefore -6<a-b<5$.]

**考点一**

**典例1 B** [**法一**(作差法):

$a-b=\dfrac{\ln 3}{3}-\dfrac{\ln 4}{4}=\dfrac{4\ln 3-3\ln 4}{12}=\dfrac{\ln 81-\ln 64}{12}>0$,

$b-c=\dfrac{\ln 4}{4}-\dfrac{\ln 5}{5}=\dfrac{5\ln 4-4\ln 5}{20}=\dfrac{\ln 1\,024-\ln 625}{20}>0$,

所以 $a>b>c$.

**法二**(作商法):

易知 $a,b,c$ 都是正数,$\dfrac{b}{a}=\dfrac{3\ln 4}{4\ln 3}=\log_{81}64<1$,所以 $a>b$;$\dfrac{b}{c}=\dfrac{5\ln 4}{4\ln 5}=\log_{625}1\,024>1$,所以 $b>c$.即 $c<b<a$.

**法三**(单调性法):

对于函数 $y=f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$,$y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

易知当 $x>e$ 时,函数 $f(x)$ 单调递减.

因为 $e<3<4<5$,

所以 $f(3)>f(4)>f(5)$,即 $c<b<a$.]

**跟进训练**

1.(1)**B** (2)$a^ab^b>a^bb^a$ [(1)$p-q=\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}-a-b=\dfrac{b^2-a^2}{a}+\dfrac{a^2-b^2}{b}=(b^2-a^2)\cdot\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$

$=\dfrac{(b^2-a^2)(b-a)}{ab}=\dfrac{(b-a)^2(b+a)}{ab}$,

因为 $a<0,b<0$,所以 $a+b<0,ab>0$.

又 $(b-a)^2\geqslant 0$,所以 $p-q\leqslant 0$.

综上,$p\leqslant q$.

(2)因为 $\dfrac{a^ab^b}{a^bb^a}=\dfrac{a^{a-b}}{b^{a-b}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}$,

又 $a>b>0$,故 $\dfrac{a}{b}>1$,$a-b>0$,

所以 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}>1$,即 $\dfrac{a^ab^b}{a^bb^a}>1$,

又 $a^bb^a>0$,所以 $a^ab^b>a^bb^a$.]

**考点二**

**典例2** (1)**B** (2)**ABD** [(1)对于 A,若 $a>b>0$,则当 $c=0$ 时,显然 $ac^2>bc^2$ 不成立,故 A 错误;

对于 B,若 $a>b>0$,则 $a^2>b^2$ 成立,故 B 正确;

对于 C,若 $a<b<0$,则 $a^2>b^2$,故 C 错误;

对于 D,若 $a<b<0$,则 $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b-a}{ab}>0$,

所以$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$,故D错误.故选B.

(2)因为$-1<2x-y<4$,所以$-2<4x-2y<8$.因为$-3<x+2y<2$,所以$-5<5x<10$,则$-1<x<2$,故A正确;

因为$-3<x+2y<2$,所以$-6<2x+4y<4$.

因为$-1<2x-y<4$,所以$-4<-2x+y<1$,

所以$-10<5y<5$,所以$-2<y<1$,故B正确;

因为$-3<x+2y<2$,$-1<2x-y<4$,

所以$-\frac{9}{5}<\frac{3}{5}(x+2y)<\frac{6}{5}$,$-\frac{1}{5}<\frac{1}{5}(2x-y)<\frac{4}{5}$,

则$-2<x+y<2$,故C错误;

因为$-3<x+2y<2$,$-1<2x-y<4$,

所以$-\frac{2}{5}<-\frac{1}{5}(x+2y)<\frac{3}{5}$,$-\frac{3}{5}<\frac{3}{5}(2x-y)<\frac{12}{5}$,则$-1<x-y<3$,故D正确.故选ABD.]

**跟进训练**

2.(1)**ABD**　(2)$(-24,45)$　$\left(\frac{1}{3},4\right)$

[(1)对于A,若$ac^2>bc^2$,因为$c^2>0$,所以$a>b$,故A正确;对于B,若$bc-ad\geqslant0$,$bd>0$,则$\frac{bc-ad}{bd}\geqslant0$,化为$\frac{c}{d}\geqslant\frac{a}{b}$,可得$\frac{a+b}{b}\leqslant\frac{c+d}{d}$,故B正确;对于C,若$a<b<0$,所以$a^2>b^2>0$,$ab>0$,则$\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=\frac{b^2-a^2}{ab}<0$,故$\frac{b}{a}<\frac{a}{b}$,故C错误;对于D,若$a>b$,$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$,则$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}>0$,所以$ab<0$,所以$a>0$,$b<0$,故D正确.

(2)因为$15<b<36$,所以$-36<-b<-15$.

又$12<a<60$,

所以$12-36<a-b<60-15$,

所以$-24<a-b<45$,

即$a-b$的取值范围是$(-24,45)$.

因为$\frac{1}{36}<\frac{1}{b}<\frac{1}{15}$,所以$\frac{12}{36}<\frac{a}{b}<\frac{60}{15}$,即$\frac{1}{3}<\frac{a}{b}<4$,

所以$\frac{a}{b}$的取值范围是$\left(\frac{1}{3},4\right)$.]

**考点三**

**典例3**　(1)$\{x|-2\leqslant x<-1$或$2<x\leqslant3\}$　[原不等式等价于$\begin{cases}x^2-x-2>0,\\x^2-x-2\leqslant4,\end{cases}$即$\begin{cases}x^2-x-2>0,\\x^2-x-6\leqslant0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x>2\text{或}x<-1,\\-2\leqslant x\leqslant3.\end{cases}$

故原不等式的解集为$\{x|-2\leqslant x<-1$或$2<x\leqslant3\}$.]

(2)**解**:原不等式可化为$(x-a)(x-1)<0$.

当$a>1$时,原不等式的解集为$\{x|1<x<a\}$;

当$a=1$时,原不等式的解集为$\varnothing$;

当$a<1$时,原不等式的解集为$\{x|a<x<1\}$.

**拓展变式**

**解**:原不等式可化为$(ax-1)(x-1)<0$.

因为$a>0$,所以$a\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)<0$.

所以,当$a>1$时,解得$\frac{1}{a}<x<1$;

当$a=1$时,解集为$\varnothing$;

当$0<a<1$时,解得$1<x<\frac{1}{a}$.

综上,当$0<a<1$时,不等式的解集为$\left\{x\,\middle|\,1<x<\frac{1}{a}\right\}$;

当$a=1$时,不等式的解集为$\varnothing$;

当$a>1$时,不等式的解集为$\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{a}<x<1\right\}$.

**跟进训练**

3.(1)**B**　(2)$\{x\,|\,x\geqslant3$或$x\leqslant2\}$　[(1)$\frac{1-x}{2+x}\geqslant0$等价于$\begin{cases}(1-x)(2+x)\geqslant0,\\2+x\neq0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-1)(x+2)\leqslant0,\\x+2\neq0,\end{cases}$

$\therefore -2<x\leqslant1$,即解集为$(-2,1]$.故选B.

(2)由题意,知$-\frac{1}{2}$,$-\frac{1}{3}$是方程$ax^2-bx-1=0$的两个根,且$a<0$,

所以$\begin{cases}-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{b}{a},\\-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{-1}{a},\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-6,\\b=5.\end{cases}$故不等式$x^2-bx-a\geqslant0$为$x^2-5x+6\geqslant0$,解得$x\geqslant3$或$x\leqslant2$.]

(3)**解**:$\Delta=a^2-4$.

①当$\Delta=a^2-4\leqslant0$,即$-2\leqslant a\leqslant2$时,原不等式无解.

②当$\Delta=a^2-4>0$,即$a>2$或$a<-2$时,方程$x^2+ax+1=0$的两根为$x_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}$,$x_2=\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}$,

则原不等式的解集为$\left\{x\,\middle|\,\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}<x<\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right\}$.

综上所述,当$-2\leqslant a\leqslant2$时,原不等式无解.

当$a>2$或$a<-2$时,原不等式的解集为

$\left\{x\,\middle|\,\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}<x<\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right\}$.

## 第4课时　基本不等式

**梳理·必备知识**

1.(1)$a>0$,$b>0$　(2)$a=b$　(3)$\frac{a+b}{2}$　$\sqrt{ab}$

2.(1)$2\sqrt{p}$　(2)$\frac{q^2}{4}$

**激活·基本技能**

一、(1)×　(2)×　(3)×　(4)×

二、1.**C**　[$xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=81$,当且仅当$x=y=9$时,等号成立.故选C.]

2.**D**　[$\because x>2$,

$\therefore x+\frac{1}{x-2}=x-2+\frac{1}{x-2}+2\geqslant2\sqrt{(x-2)\cdot\frac{1}{x-2}}+2=4$,

当且仅当$x-2=\frac{1}{x-2}$,即$x=3$时,等号成立.故选D.]

3.**BC**　[当$\frac{b}{a}<0$时,A不成立;当$ab<0$时,D不成立.]

4. 15　$\frac{15}{2}$　[设矩形的长为 $x$ m,宽为 $y$ m.则 $x+2y=30(0<x\leqslant18)$,所以 $S=xy=\frac{1}{2}x\cdot2y\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{x+2y}{2}\right)^2=\frac{225}{2}$,当且仅当 $x=2y$,即 $x=15,y=\frac{15}{2}$ 时取等号.]

## 考点一

**考向1　典例1**　(1)**D**　(2)5　(3)$2\sqrt{3}+2$　[(1)$y=x(3-2x)\leqslant\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2x+3-2x}{2}\right)^2=\frac{9}{8}$.当且仅当 $2x=3-2x$,即 $x=\frac{3}{4}$ 时等号成立.

(2)$\because x>\frac{5}{4}$,$\therefore 4x-5>0$,

$\therefore f(x)=4x-2+\frac{1}{4x-5}=4x-5+\frac{1}{4x-5}+3\geqslant2+3=5$,当且仅当 $4x-5=\frac{1}{4x-5}$,即 $x=\frac{3}{2}$ 时取等号.

(3)因为 $x>1$,所以 $x-1>0$,则

$y=\frac{x^2+2}{x-1}=\frac{(x^2-2x+1)+(2x-2)+3}{x-1}$

$=\frac{(x-1)^2+2(x-1)+3}{x-1}$

$=(x-1)+\frac{3}{x-1}+2\geqslant2\sqrt{3}+2$.

当且仅当 $x-1=\frac{3}{x-1}$,即 $x=\sqrt{3}+1$ 时,取等号.]

**考向2　典例2**　9　[$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=\left(1+\frac{a+b}{a}\right)\left(1+\frac{a+b}{b}\right)=\left(2+\frac{b}{a}\right)\left(2+\frac{a}{b}\right)=5+2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqslant5+4=9$.当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时,等号成立.]

**拓展变式**

(1)4　(2)$\frac{11}{4}+\frac{\sqrt{10}}{2}$　[(1)因为 $a>0,b>0,a+b=1$,

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=4$,即 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 4,当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时等号成立.

(2)由 $4a+b=4$ 得 $a+\frac{b}{4}=1$,

$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=\left(1+\frac{a+\frac{b}{4}}{a}\right)\left(1+\frac{a+\frac{b}{4}}{b}\right)=\left(2+\frac{b}{4a}\right)\left(\frac{5}{4}+\frac{a}{b}\right)=\frac{5}{2}+\frac{2a}{b}+\frac{5b}{16a}+\frac{1}{4}\geqslant\frac{11}{4}+2\sqrt{\frac{5}{8}}=\frac{11}{4}+\frac{\sqrt{10}}{2}$.当且仅当 $4\sqrt{2}a=\sqrt{5}b$ 时,等号成立.]

**考向3　典例3**　6　[**法一**(换元消元法):

由已知得 $x+3y=9-xy$,$\because x>0,y>0$,

$\therefore x+3y\geqslant2\sqrt{3xy}$,$\therefore 3xy\leqslant\left(\frac{x+3y}{2}\right)^2$,

当且仅当 $x=3y$,即 $x=3,y=1$ 时取等号,

$\therefore x+3y+\frac{1}{3}\left(\frac{x+3y}{2}\right)^2\geqslant9$,

即 $(x+3y)^2+12(x+3y)-108\geqslant0$,

令 $x+3y=t$,则 $t>0$ 且 $t^2+12t-108\geqslant0$,

解得 $t\geqslant6$,即 $x+3y$ 的最小值为 6.

**法二**(代入消元法):

由 $x+3y+xy=9$,得 $x=\frac{9-3y}{1+y}$,

$\therefore x+3y=\frac{9-3y}{1+y}+3y=\frac{9-3y+3y(1+y)}{1+y}$

$=\frac{9+3y^2}{1+y}=\frac{3(1+y)^2-6(1+y)+12}{1+y}$

$=3(1+y)+\frac{12}{1+y}-6$

$\geqslant2\sqrt{3(1+y)\cdot\frac{12}{1+y}}-6$

$=12-6=6$,

当且仅当 $3(1+y)=\frac{12}{1+y}$,即 $x=3,y=1$ 时等号成立,

$\therefore x+3y$ 的最小值为 6.]

**跟进训练**

1. (1)**BC**　(2)4　[(1)由 $x^2+y^2-xy=1$,可得 $(x+y)^2-3xy=1$,而 $xy\leqslant\frac{(x+y)^2}{4}$,

即 $1=(x+y)^2-3xy\geqslant(x+y)^2-\frac{3(x+y)^2}{4}=\frac{(x+y)^2}{4}$,

$\therefore(x+y)^2\leqslant4$,$\therefore -2\leqslant x+y\leqslant2$,故 A 错误,B 正确;

由 $x^2+y^2-xy=1$,得 $x^2+y^2-1=xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}$,

$\therefore x^2+y^2\leqslant2$,故 C 正确,D 错误,故选 BC.

(2)令 $x-1=m,2y-1=n$,

则 $m>0,n>0$ 且 $m+n=x-1+2y-1=1$,

$\therefore\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2y-1}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)(m+n)$

$=2+\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\geqslant2+2=4$,

当且仅当 $\frac{n}{m}=\frac{m}{n}$,即 $m=n=\frac{1}{2},x=\frac{3}{2},y=\frac{3}{4}$ 时取等号.

$\therefore\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2y-1}$ 的最小值为 4.]

## 考点二

**典例4**　**解**:(1)由题意知,当 $m=0$ 时,$x=1$,

所以 $1=3-k\Rightarrow k=2$,

所以 $x=3-\frac{2}{m+1}$,每万件产品的销售价格为 $1.5\times\frac{8+16x}{x}$(万元),

所以明年的利润 $y=1.5x\times\frac{8+16x}{x}-8-16x-m=4+8x-m=4+8\left(3-\frac{2}{m+1}\right)-m=-\left[\frac{16}{m+1}+(m+1)\right]+29(m\geqslant0)$.

(2)因为 $m\geqslant0$ 时,$\frac{16}{m+1}+(m+1)$

$\geqslant2\sqrt{\frac{16}{m+1}\cdot(m+1)}=2\sqrt{16}=8$,

所以 $y\leqslant-8+29=21$,

当且仅当 $\frac{16}{m+1}=m+1$，即 $m=3$ 时，$y_{\max}=21$.

故该厂家明年的促销费用投入3万元时，厂家的利润最大，为21万元.

**跟进训练**

2.(1)**B**　(2)30　[(1)由题意得，

$$N=\frac{1\,000v}{0.7v+0.3v^2+30}=\frac{1\,000}{0.7+0.3v+\frac{30}{v}}$$

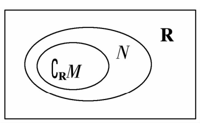
$$\leqslant\frac{1\,000}{0.7+2\sqrt{0.3v\times\frac{30}{v}}}\approx149$$，当且仅当 $0.3v=\frac{30}{v}$，即 $v=10$ 时取等号，所以该道路的"道路容量"的最大值约为149. 故选B.

(2)由题意得，一年购买 $\frac{600}{x}$ 次，则总运费与总存储费用之和为 $6\cdot\frac{600}{x}+4x=4\left(\frac{900}{x}+x\right)\geqslant8\sqrt{\frac{900}{x}\cdot x}=240$(万元)，当且仅当 $x=30$ 时取等号，故总运费与总存储费用之和最小时，$x$ 的值是30.]

## 高考研究在线1　预备知识在高考中的五大创新命题点

### 命题点一

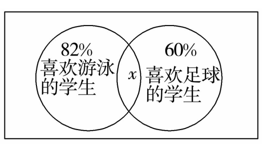
**典例1**　(1)**D**　(2)**C**　[(1)由题意知，$\complement_{\mathbf{R}}M\subseteq N$，其Venn图如图所示，




∴只有 $\complement_{\mathbf{R}}N\subseteq M$ 正确. 故选D.

(2)设既喜欢足球又喜欢游泳的学生所占比例为 $x$.

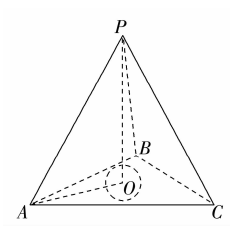
由Venn图可知，$82\%-x+60\%=96\%$，




解得 $x=46\%$，故选C.]

### 命题点二

**典例2**　**B**　[如图，过点 $P$ 作 $PO\perp$ 平面 $ABC$，$O$ 为垂足，则由题意知，$AO=2\sqrt{3}$，$PA=6$，所以 $PO=2\sqrt{6}$，当 $AO$ 上存在一点 $Q$ 使得 $PQ=5$，此时 $QO=1$，则动点 $Q$ 在以 $QO$ 为半径，$O$ 为圆心的圆上及圆内，所以 $T$ 表示的区域的面积为 $\pi$. 故选B.



]

### 命题点三

**典例3**　**A**　[因为 $1\times3>0$，$1+3\neq2$，又四个命题三真一假，故甲、乙必有一个是假命题，若甲为假命题，易知符合题意，若乙为假命题推出矛盾. 故选A. ]

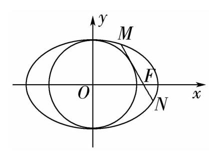
### 命题点四

**典例4**　**ABD**　[对于选项A，∵$a^2+b^2\geqslant2ab$，∴$2(a^2+b^2)\geqslant a^2+b^2+2ab=(a+b)^2=1$，∴$a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$，A正确；对于选项B，易知 $0<a<1$，$0<b<1$，∴$-1<a-b<1$，∴$2^{a-b}>2^{-1}=\frac{1}{2}$，B正确；对于选项C，令 $a=\frac{1}{4}$，$b=\frac{3}{4}$，则 $\log_2\frac{1}{4}+\log_2\frac{3}{4}=-2+\log_2\frac{3}{4}<-2$，C错误；对于选项D，∵$\sqrt{2}=\sqrt{2(a+b)}$，∴$[\sqrt{2(a+b)}]^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant0$，∴$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$，D正确. 故选ABD.]

### 命题点五

**典例5**　(1)**解**：由题意知 $\begin{cases}c=\sqrt{2},\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3},\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{3},\\ b=1,\end{cases}$ 故椭圆 $C$ 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

(2)**证明**：证必要性，如图，当 $M,N,F$ 三点共线时，设直线 $MN$ 的方程为 $x=my+\sqrt{2}$，




圆心 $O(0,0)$ 到 $MN$ 的距离 $d=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+1}}=1\Rightarrow m^2=1$，

联立 $\begin{cases}x=my+\sqrt{2},\\ x^2+3y^2=3\end{cases}\Rightarrow(m^2+3)y^2+2\sqrt{2}my-1=0\Rightarrow4y^2+2\sqrt{2}my-1=0$，$\Delta=8m^2+16$，∴$y_1+y_2=-\frac{\sqrt{2}m}{2}$，$y_1y_2=-\frac{1}{4}$，

$|MN|=\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{\sqrt{8m^2+16}}{4}=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{24}}{4}=\sqrt{3}$，必要性成立.

证充分性，当 $|MN|=\sqrt{3}$ 时，设直线 $MN$ 的方程为 $x=ty+m$，

此时圆心 $O(0,0)$ 到 $MN$ 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{t^2+1}}=1$，$m^2-t^2=1$，

联立 $\begin{cases}x=ty+m,\\ x^2+3y^2=3\end{cases}\Rightarrow(t^2+3)y^2+2tmy+m^2-3=0$，

$\Delta=4t^2m^2-4(t^2+3)(m^2-3)=12(t^2-m^2+3)=24$，$y_1+y_2=-\frac{2tm}{t^2+3}$，$y_1y_2=\frac{m^2-3}{t^2+3}$，

且 $|MN|=\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{\sqrt{24}}{t^2+3}=\sqrt{3}\Rightarrow t^2=1$，∴$m^2=2$，

∵$MN$ 与曲线 $x^2+y^2=b^2(x>0)$ 相切，

∴$m>0$，$m=\sqrt{2}$，

∴直线 $MN$ 的方程为 $x=ty+\sqrt{2}$，$MN$ 恒过点 $F(\sqrt{2},0)$，

∴$M,N,F$ 三点共线，充分性得证，证毕.

# 第二章　函数的概念与性质

## 第1课时　函数的概念及其表示

**梳理·必备知识**

1.实数集　任意一个数 $x$　唯一　$x$　$\{f(x)|x\in A\}$

2.定义域　对应关系

3.解析法　图象法　列表法

4.不同　不同的式子

**激活·基本技能**

一、(1)×　(2)×　(3)×　(4)×

二、1.**A**　[$f(f(-1))=f(2)=16$.故选A.]

2.**B**　[函数 $f(x)=|x-1|=\begin{cases}x-1,x\geqslant1,\\1-x,x<1.\end{cases}$

结合选项可知,选项B正确.故选B.]

3.**AC**　[$f(x)=\sqrt{-x^3}$ 与 $g(x)=x\sqrt{-x}$ 的值域不同;$f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$ 的对应关系不同,故BD错误,AC正确.]

4.$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$　1　[要使函数 $f(x)$ 有意义,必须使 $x\neq0$,

故 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

由 $f(a)=2$ 得 $a+\frac{1}{a}=2$,解得 $a=1$.]

**考点一**

**典例1**　(1)**B**　(2)$[1,3]$　[(1)要使函数 $f(x)$ 有意义,则 $\begin{cases}x-1>0,\\2x-x^2>0,\end{cases}$ 解得 $1<x<2$.

所以函数 $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x-1}}+\ln(2x-x^2)$ 的定义域为 $(1,2)$.故选B.

(2)∵$f(x)$ 的定义域为 $[0,2]$,∴$0\leqslant x-1\leqslant2$,即 $1\leqslant x\leqslant3$,

∴函数 $f(x-1)$ 的定义域为 $[1,3]$.]

**拓展变式**

$[2,4]$　[∵$f(x+1)$ 的定义域为 $[0,2]$,

∴$0\leqslant x\leqslant2$,

∴$1\leqslant x+1\leqslant3$,∴$1\leqslant x-1\leqslant3$,∴$2\leqslant x\leqslant4$,

∴$f(x-1)$ 的定义域为 $[2,4]$.]

**跟进训练**

1.(1)**C**　(2)$[0,4]$　[(1)由条件可知 $\begin{cases}0\leqslant3x\leqslant6,\\x-2\neq0,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant x<2$,所以函数 $g(x)$ 的定义域为 $[0,2)$,故选C.

(2)由题意可得 $mx^2+mx+1\geqslant0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

当 $m=0$ 时,$1\geqslant0$ 恒成立;

当 $m\neq0$ 时,则 $\begin{cases}m>0,\\\Delta=m^2-4m\leqslant0,\end{cases}$ 解得 $0<m\leqslant4$.

综上可得 $0\leqslant m\leqslant4$.]

**考点二**

**典例2**　**解**:(1)(换元法)设 $1-\sin x=t,t\in[0,2]$,

则 $\sin x=1-t$.

∵$f(1-\sin x)=\cos^2x=1-\sin^2x$,

∴$f(t)=1-(1-t)^2=2t-t^2,t\in[0,2]$.

即 $f(x)=2x-x^2,x\in[0,2]$.

(2)(配凑法)∵$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$,

∴$f(x)=x^2-2$, $x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

(3)(待定系数法)设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$,

由 $f(0)=2$,得 $c=2$,

$f(x+1)-f(x)=a(x+1)^2+b(x+1)+2-ax^2-bx-2=x-1$,即 $2ax+a+b=x-1$,

所以 $\begin{cases}2a=1,\\a+b=-1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\b=-\frac{3}{2}.\end{cases}$

所以 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2$.

(4)(构造法)∵$2f(x)+f(-x)=3x$,　①

∴将 $x$ 用 $-x$ 替换,

得 $2f(-x)+f(x)=-3x$,　②

由①②解得 $f(x)=3x$.

**跟进训练**

2.(1)$x^2-4x+3(x\geqslant1)$　(2)$-\frac{2x}{3}-\frac{4}{3x}$　(3)$4x+1$

[(1)**法一**(换元法):令 $t=\sqrt{x}+1$,则 $t\geqslant1,x=(t-1)^2$,

代入原式有 $f(t)=(t-1)^2-2(t-1)=t^2-4t+3$,

所以 $f(x)=x^2-4x+3(x\geqslant1)$.

**法二**(配凑法):$f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}+1-4\sqrt{x}-4+3=(\sqrt{x}+1)^2-4(\sqrt{x}+1)+3$,

因为 $\sqrt{x}+1\geqslant1$,所以 $f(x)=x^2-4x+3(x\geqslant1)$.

(2)因为 $f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=2x$,　①

以 $\frac{1}{x}$ 代替①中的 $x$,得 $f\left(\frac{1}{x}\right)-2f(x)=\frac{2}{x}$,　②

①+②×2得 $-3f(x)=2x+\frac{4}{x}$,

所以 $f(x)=-\frac{2x}{3}-\frac{4}{3x}$.

(3)∵$f(x)$ 为单调递增的一次函数,∴设 $f(x)=ax+b,a>0$,

故 $f(f(x))=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b=16x+5$,∴$a^2=16,ab+b=5$,解得 $a=4,b=1$ 或 $a=-4,b=-\frac{5}{3}$(不合题意,舍去).因此 $f(x)=4x+1$.]

**考点三**

**考向1**　**典例3**　(1)$\frac{1}{\mathrm{e}}$　(2)2　[(1)∵$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x+1},x\leqslant0,\\f(x-4),x>0,\end{cases}$

∴$f(2\ 022)=f(2\ 018)=f(2\ 014)=\cdots=f(2)=f(-2)=\mathrm{e}^{-2+1}=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

(2)因为 $\sqrt{6}>2$,所以 $f(\sqrt{6})=6-4=2$,

所以 $f(f(\sqrt{6}))=f(2)=1+a=3$,解得 $a=2$.]

**考向2**　**典例4**　(1)**D**　(2)$\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$　[(1)由分段函数的结构知,$f(x)$ 的定义域是 $(-1,+\infty)$,所以 $a>0$.

①当 $0<a<1$ 时，$-1<a-1<0$，则 $f(a)=f(a-1)$ 可化为 $2a=\sqrt{a}$，解得 $a=\frac{1}{4}$，

$\therefore f\left(\frac{1}{a}\right)=f(4)=8$；

②当 $a\geqslant 1$ 时，$a-1\geqslant 0$，则 $f(a)=f(a-1)$ 可化为 $2a=2(a-1)$，方程无解. 故选 D.

(2)当 $x\leqslant 0$ 时，$x+1\leqslant 1$，$f(x)<f(x+1)\Leftrightarrow x^2-1<(x+1)^2-1$，解得 $-\frac{1}{2}<x\leqslant 0$.

当 $0<x\leqslant 1$ 时，$x+1>1$，此时 $f(x)=x^2-1\leqslant 0$，$f(x+1)=\log_2(x+1)>0$.

$\therefore 0<x\leqslant 1$ 恒成立；

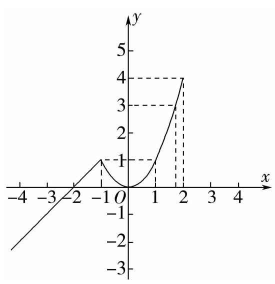
当 $x>1$ 时，$f(x)<f(x+1)$ 恒成立.

综上知，$f(x)<f(x+1)$ 的解集为 $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$.］

**跟进训练**

3.(1)**B**　(2)**B**

［(1)因为 $f(x)=\begin{cases}x+2,x\leqslant -1,\\x^2,-1<x<2,\end{cases}$ 函数图象如图所示：



由图可知 $f(0)=0$，故 A 错误；$f(x)$ 的值域为 $(-\infty,4)$，故 B 正确；由 $f(x)<1$ 解得 $x$ 的取值范围为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)$，故 C 错误；$f(x)=3$，即 $\begin{cases}x^2=3,\\-1<x<2,\end{cases}$ 解得 $x=\sqrt{3}$，故 D 错误；

故选 B.

(2)当 $a>2$，$x>2$ 时，$f(x)=x|x-a|-2a^2=\begin{cases}x^2-ax-2a^2,x\geqslant a,\\-x^2+ax-2a^2,2<x<a,\end{cases}$

当 $2<x<a$ 时，$f(x)=-x^2+ax-2a^2$，此时 $\Delta=a^2-4\times 2a^2=-7a^2<0$，

所以 $f(x)<0$，不满足当 $x>2$ 时，$f(x)>0$，故 $a>2$ 不符合题意；

当 $0<a\leqslant 2$，$x>2$ 时，$f(x)=x|x-a|-2a^2=x^2-ax-2a^2=(x-2a)(x+a)>0$，解得 $x>2a$，

由于 $x>2$ 时，$f(x)>0$，故 $2a\leqslant 2$，解得 $0<a\leqslant 1$；

当 $a=0$，$x>2$ 时，$f(x)=x^2>0$ 恒成立，符合题意；

当 $a<0$，$x>2$ 时，$f(x)=x|x-a|-2a^2=x^2-ax-2a^2=(x-2a)(x+a)>0$，解得 $x>-a$，

由于 $x>2$ 时，$f(x)>0$，

故 $-a\leqslant 2$，解得 $-2\leqslant a<0$.

综上，$-2\leqslant a\leqslant 1$.

故选 B.］

## 第 2 课时　函数的单调性与最值

**梳理 · 必备知识**

1.(1)$f(x_1)<f(x_2)$　$f(x_1)>f(x_2)$　(2)单调递增　单调递减　区间 $I$

2.$f(x)\leqslant M$　$f(x_0)=M$　$f(x)\geqslant M$　$f(x_0)=M$

**激活 · 基本技能**

一、(1)×　(2)×　(3)×　(4)√

二、1.**C**

2.$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$　［因为函数 $y=(2k+1)x+b$ 在 **R** 上是减函数，所以 $2k+1<0$，即 $k<-\frac{1}{2}$.］

3.$(-\infty,2]$　［由题意知，$[2,+\infty)\subseteq[m,+\infty)$，$\therefore m\leqslant 2$.］

4.$-\frac{2}{5}$　$-2$　［可判断函数 $f(x)=\frac{2}{1-x}$ 在区间 $[2,6]$ 上单调递增，所以 $f(x)_{max}=f(6)=-\frac{2}{5}$，$f(x)_{min}=f(2)=-2$.］

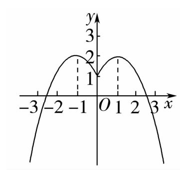
**考点一**

**典例 1**　(1)**A**　(2)$(-\infty,-1]$ 和 $[0,1]$　［(1)由 $-x^2+x+6>0$，得 $-2<x<3$，故函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,3)$，令 $t=-x^2+x+6$，则 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}t$，易知其为减函数，由复合函数的单调性法则可知，本题等价于求函数 $t=-x^2+x+6$ 在 $(-2,3)$ 上的单调递减区间. 利用二次函数的性质可得 $t=-x^2+x+6$ 在定义域 $(-2,3)$ 上的单调递减区间为 $\left(\frac{1}{2},3\right)$. 故选 A.

(2)$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+1,x\geqslant 0,\\-x^2-2x+1,x<0\end{cases}$

$=\begin{cases}-(x-1)^2+2,x\geqslant 0,\\-(x+1)^2+2,x<0.\end{cases}$

画出函数图象如图所示，



可知单调递增区间为 $(-\infty,-1]$ 和 $[0,1]$.］

(3)**解：法一**(定义法)：设 $-1<x_1<x_2<1$，

$f(x)=a\left(\frac{x-1+1}{x-1}\right)=a\left(1+\frac{1}{x-1}\right)$，

$f(x_1)-f(x_2)=a\left(1+\frac{1}{x_1-1}\right)-a\left(1+\frac{1}{x_2-1}\right)=\frac{a(x_2-x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$，由于 $-1<x_1<x_2<1$，

所以 $x_2-x_1>0$，$x_1-1<0$，$x_2-1<0$，

故当 $a>0$ 时，$f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减；

当 $a<0$ 时，$f(x_1)-f(x_2)<0$，

即 $f(x_1)<f(x_2)$，函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递增.

**法二**(导数法)：$f'(x)=\frac{(ax)'(x-1)-ax(x-1)'}{(x-1)^2}$

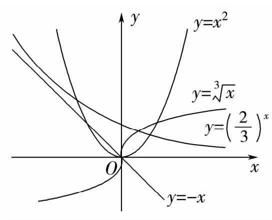
$=\frac{a(x-1)-ax}{(x-1)^2}=-\frac{a}{(x-1)^2}$.

当 $a>0$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减；

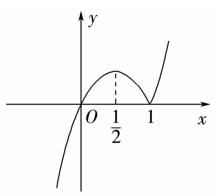
当 $a<0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递增.

**跟进训练**

1.(1)**D** (2)$\left[\frac{1}{2},1\right]$ $\left[\frac{1}{2},2\right]$(答案不唯一) [(1)如图，在坐标系中分别画出A,B,C,D四个选项中函数的大致图象，即可快速直观判断D项符合题意.故选D.




(2)$f(x)=\begin{cases}x^2-x,x\geqslant1,\\-x^2+x,x<1.\end{cases}$ 画出 $f(x)$ 的大致图象(如图所示)，由图知 $f(x)$ 的单调递减区间是 $\left[\frac{1}{2},1\right]$.




当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)=x(x-1)=x^2-x$；当 $x<1$ 时，$f(x)=x(1-x)=-x^2+x$，$\therefore f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递减. 令 $f(x)=0$，解得 $x=1$ 或 $x=0$；令 $f(x)=2$，解得 $x=2$，$\therefore$ 只需 $I=[a,2]$，$0\leqslant a<1$ 或 $I=(b,2]$，$0\leqslant b<1$ 时，$f(x)$ 在 $I$ 上不单调且函数值的集合为 $[0,2]$.]

(3)**解**：函数 $f(x)=ax^2+\frac{1}{x}(1<a<3)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增.

**法一**：设 $1\leqslant x_1<x_2\leqslant2$，则 $f(x_2)-f(x_1)=ax_2^2+\frac{1}{x_2}-ax_1^2-\frac{1}{x_1}=(x_2-x_1)\left[a(x_1+x_2)-\frac{1}{x_1x_2}\right]$，

由 $1\leqslant x_1<x_2\leqslant2$，得 $x_2-x_1>0$，$2<x_1+x_2<4$，$1<x_1x_2<4$，$-1<-\frac{1}{x_1x_2}<-\frac{1}{4}$.

又因为 $1<a<3$，

所以 $2<a(x_1+x_2)<12$，得 $a(x_1+x_2)-\frac{1}{x_1x_2}>0$，

从而 $f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x_2)>f(x_1)$，

故当 $a\in(1,3)$ 时，$f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递增.

**法二**：$f'(x)=2ax-\frac{1}{x^2}=\frac{2ax^3-1}{x^2}$，

因为 $1\leqslant x\leqslant2$，所以 $1\leqslant x^3\leqslant8$，又 $1<a<3$，

所以 $2ax^3-1>0$，所以 $f'(x)>0$，所以函数 $f(x)=ax^2+\frac{1}{x}$(其中 $1<a<3$)在 $[1,2]$ 上单调递增.

**考点二**

**考向1 典例2 D** [因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称. 由此可得 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)$. 当 $x_2>x_1>1$ 时，$[f(x_2)-f(x_1)](x_2-x_1)<0$ 恒成立，知 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

因为 $1<2<\frac{5}{2}<\mathrm{e}$，所以 $f(2)>f\left(\frac{5}{2}\right)>f(\mathrm{e})$，所以 $b>a>c$.]

**考向2 典例3** $(-\sqrt{5},-2)\cup(2,\sqrt{5})$ [因为函数 $f(x)=\ln x+2^x$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(1)=\ln1+2=2$，所以由 $f(x^2-4)<2$ 得 $f(x^2-4)<f(1)$，所以 $0<x^2-4<1$，解得 $-\sqrt{5}<x<-2$ 或 $2<x<\sqrt{5}$.]

**考向3 典例4** (1)**B** (2)$(1,2]$ [(1)因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x+\ln(x+1)$ 单调递增，

则需满足 $\begin{cases}-\frac{-2a}{2\times(-1)}\geqslant0,\\-a\leqslant\mathrm{e}^0+\ln1,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant a\leqslant0$，

即 $a$ 的取值范围是 $[-1,0]$. 故选B.

(2)由题意，得 $1^2+\frac{1}{2}a-2\leqslant0$，则 $a\leqslant2$，又 $y=a^x-a(x>1)$ 是增函数，故 $a>1$，所以 $a$ 的取值范围为 $(1,2]$.]

**跟进训练**

2.(1)**D** (2)**AB** [(1)由题意得 $0\leqslant2x-1<\frac{1}{3}$，解得 $\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{2}{3}$.

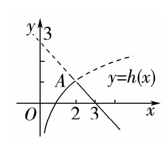
(2)由函数 $f(x)$ 满足 $f(-2-x)=f(x)$，则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称，又 $x_1,x_2\in[-1,+\infty)$，$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0(x_1\neq x_2)$，则函数 $f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上为减函数. 对于选项A，因为 $|-3-(-1)|>|0-(-1)|$，所以 $f(0)>f(-3)$，即A正确；对于选项B，由已知有 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上为增函数，在 $[-1,+\infty)$ 上为减函数，即 $f(x)_{\max}=f(-1)$，即B正确；对于选项C，$a^2-a+1=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$，又 $f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上为减函数，所以 $f(a^2-a+1)\leqslant f\left(\frac{3}{4}\right)$，即C错误；对于选项D，若 $f(m)<f(2)$，则 $|m-(-1)|>|2-(-1)|$，则 $m<-4$ 或 $m>2$，即D错误. 故选AB.]

**考点三**

**典例5** (1)3 (2)1 [(1)$\because f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x-\log_2(x+2)$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调递减，

$\therefore f(x)_{\max}=f(-1)=3-\log_21=3$.

(2)**法一**(图象法)：在同一坐标系中，作函数 $f(x)$，$g(x)$ 的图象，依题意，$h(x)$ 的图象为如图所示的实线部分.




易知点 $A(2,1)$ 为图象的最高点，

因此 $h(x)$ 的最大值为 $h(2)=1$.

法二(单调性法):依题意,

$h(x)=\begin{cases}\log_2 x,0<x\leqslant 2,\\ -x+3,x>2.\end{cases}$

当 $0<x\leqslant 2$ 时,$h(x)=\log_2 x$ 是增函数,

当 $x>2$ 时,$h(x)=3-x$ 是减函数,

因此 $h(x)$ 在 $x=2$ 时取得最大值 $h(2)=1$.]

**跟进训练**

3.(1)**B**　(2)**D**　[(1)**法一**:设 $\sqrt{1-2x}=t$,则 $t\geqslant 0$,$x=\dfrac{1-t^2}{2}$,

所以 $y=1+\dfrac{1-t^2}{2}-t=\dfrac{1}{2}(-t^2-2t+3)=-\dfrac{1}{2}(t+1)^2+2$.

因为 $t\geqslant 0$,所以 $y\leqslant\dfrac{3}{2}$.

所以函数 $y=1+x-\sqrt{1-2x}$ 的值域为 $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$.

**法二**:因为 $y=1+x-\sqrt{1-2x}$ 在定义域 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$ 上单调递增,所以 $y=1+x-\sqrt{1-2x}$ 的值域为 $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$.

(2)当 $x>0$ 时,$f(x)=x+\dfrac{1}{x}+a\geqslant 2+a$,当且仅当 $x=\dfrac{1}{x}$,即 $x=1$ 时,等号成立,故当 $x=1$ 时取得最小值 $2+a$.

∵$f(x)$ 的最小值为 $f(0)$,

∴当 $x\leqslant 0$ 时,$f(x)=(x-a)^2$ 单调递减,故 $a\geqslant 0$,

此时的最小值为 $f(0)=a^2$,故 $2+a\geqslant a^2$,得 $-1\leqslant a\leqslant 2$.

又 $a\geqslant 0$,得 $0\leqslant a\leqslant 2$.故选 D.]

## 第 3 课时　函数的奇偶性、周期性与对称性

**梳理·必备知识**

1.$f(-x)=f(x)$　$y$ 轴　$f(-x)=-f(x)$　原点

2.(1)$f(x+T)=f(x)$　(2)最小　最小正数

**激活·基本技能**

一、(1)×　(2)√　(3)√　(4)√

二、1.**BC**

2.$\dfrac{1}{2}$　[∵$f(x)$ 的周期为 2,∴$f(2\ 023)=f(1)=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$.]

3.$-1$　$-2^{-x}-2x+1$　[∵$f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数,

∴$f(0)=0$,即 $1+a=0$,∴$a=-1$.

∴当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=2^x-2x-1$,设 $x<0$,则 $-x>0$,

∴$f(-x)=2^{-x}-2(-x)-1=2^{-x}+2x-1$,

又 $f(x)$ 为奇函数,∴$f(-x)=-f(x)$,

∴$-f(x)=2^{-x}+2x-1$,∴$f(x)=-2^{-x}-2x+1$.]

4.$(-2,0)\cup(2,5]$　[由题图可知,当 $0<x<2$ 时,$f(x)>0$;当 $2<x\leqslant 5$ 时,$f(x)<0$,又 $f(x)$ 是奇函数,∴当 $-2<x<0$ 时,$f(x)<0$,当 $-5\leqslant x<-2$ 时,$f(x)>0$.

综上,$f(x)<0$ 的解集为 $(-2,0)\cup(2,5]$.]

### 考点一

考向 1　典例 1　**解**:(1)由 $\begin{cases}3-x^2\geqslant 0,\\ x^2-3\geqslant 0,\end{cases}$ 得 $x^2=3$,解得 $x=\pm\sqrt{3}$,

即函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$,

从而 $f(x)=\sqrt{3-x^2}+\sqrt{x^2-3}=0$.

因此 $f(-x)=-f(x)$ 且 $f(-x)=f(x)$,

∴函数 $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数.

(2)由 $\begin{cases}1-x^2>0,\\ |x-2|\neq 2,\end{cases}$ 得定义域为 $(-1,0)\cup(0,1)$,

∴$x-2<0$,∴$|x-2|-2=-x$,∴$f(x)=\dfrac{\lg(1-x^2)}{-x}$.

又∵$f(-x)=\dfrac{\lg[1-(-x)^2]}{x}$

$=-\dfrac{\lg(1-x^2)}{-x}=-f(x)$,

∴函数 $f(x)$ 为奇函数.

(3)显然函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,

∵当 $x<0$ 时,$-x>0$,

则 $f(-x)=-(-x)^2-x=-x^2-x=-f(x)$;

当 $x>0$ 时,$-x<0$,

则 $f(-x)=(-x)^2-x=x^2-x=-f(x)$.

综上可知:对于定义域内的任意 $x$,总有 $f(-x)=-f(x)$ 成立,∴函数 $f(x)$ 为奇函数.

(4)显然函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**,

$f(-x)=\log_2[-x+\sqrt{(-x)^2+1}]=\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)$

$=\log_2(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1}$

$=-\log_2(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)$,

故 $f(x)$ 为奇函数.

考向 2　典例 2　(1)**D**　(2)**D**　(3)$(-2,-1)\cup(1,2)$

[(1)∵当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=e^x-1$,设 $x<0$,则 $-x>0$,

∴$f(-x)=e^{-x}-1$.

又∵$f(x)$ 为奇函数,

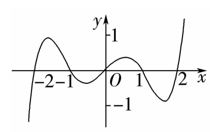
∴$f(x)=-f(-x)=-e^{-x}+1$.故选 D.

(2)**法一**:$f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$,因为 $f(x)$ 是偶函数,所以 $f(x)=f(-x)$,即 $\dfrac{xe^x}{e^{ax}-1}=\dfrac{-xe^{-x}}{e^{-ax}-1}$,即 $e^{(1-a)x}-e^x=-e^{(a-1)x}+e^{-x}$,即 $e^{(1-a)x}+e^{(a-1)x}=e^x+e^{-x}$,所以 $a-1=\pm 1$,解得 $a=0$(舍去)或 $a=2$,故选 D.

**法二**:$f(x)=\dfrac{xe^x}{e^{ax}-1}=\dfrac{x}{e^{(a-1)x}-e^{-x}}$,$f(x)$ 是偶函数,又 $y=x$ 是奇函数,所以 $y=e^{(a-1)x}-e^{-x}$ 是奇函数,故 $a-1=1$,即 $a=2$,故选 D.

(3)∵$xf(x)<0$,∴$x$ 和 $f(x)$ 异号,

由于 $f(x)$ 为奇函数,补齐函数的图象如图.




当 $x\in(-2,-1)\cup(0,1)\cup(2,+\infty)$ 时,$f(x)>0$,

当 $x\in(-\infty,-2)\cup(-1,0)\cup(1,2)$ 时,$f(x)<0$,

∴不等式 $xf(x)<0$ 的解集为 $(-2,-1)\cup(1,2)$.]

**跟进训练**

1.(1)**AD**　(2)**C**　[(1)因为函数 $f(x)$,$g(x)$ 分别是定义在 **R** 上的偶函数、奇函数,且满足 $f(x)+2g(x)=e^x$,　①

所以 $f(-x)+2g(-x)=e^{-x}$,

即 $f(x)-2g(x)=e^{-x}$.　②

联立①② $\begin{cases}f(x)+2g(x)=e^{x},\\ f(x)-2g(x)=e^{-x},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2},\\ g(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{4},\end{cases}$

所以 $f(-2)=\dfrac{e^{-2}+e^{2}}{2}$，$f(-3)=\dfrac{e^{-3}+e^{3}}{2}$，$g(-1)=\dfrac{e^{-1}-e}{4}<0$，所以 $g(-1)<f(-2)$，$g(-1)<f(-3)$，故选 AD.

(2)依题意，令 $g(x)=x(e^{x}+e^{-x})$，

显然函数 $g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则 $g(-x)=-x(e^{-x}+e^{x})=-g(x)$，即函数 $g(x)$ 是奇函数，

因此，函数 $g(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值与最小值的和为 0，而 $f(x)=g(x)+1$，

则有 $M=g(x)_{\max}+1$，$N=g(x)_{\min}+1$，

于是得 $M+N=g(x)_{\max}+1+g(x)_{\min}+1=2$，

所以 $M+N$ 的值为 2.]

### 考点二

**典例** 3 (1)**A** (2)**D** (3)1 [(1)由 $f(x-2)=f(x+2)$，知 $y=f(x)$ 的周期 $T=4$，

又 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

$\therefore f\left(\dfrac{13}{2}\right)=f\left(8-\dfrac{3}{2}\right)=f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{9}{4}$.

(2)依题意，定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=f(x)-2$，所以 $f(x+1)+2(x+1)=f(x)+2x$，所以 $y=f(x)+2x$ 是周期为 1 的周期函数. 故选 D.

(3)因为 $f(x+2)=-\dfrac{1}{f(x)}$，

所以 $f(x+4)=-\dfrac{1}{f(x+2)}=f(x)$，

所以函数 $y=f(x)$ 的周期 $T=4$.

$f(17)=f(4\times4+1)=f(1)=1$.]

**跟进训练**

2.(1)4 (2)$x^2-6x+8$ (3)0 [(1)$\because f(x+2)=-f(x)$，

$\therefore f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$.

$\therefore f(x)$ 是周期为 4 的周期函数.

(2)当 $x\in[-2,0]$ 时，$-x\in[0,2]$，由已知得

$f(-x)=2(-x)-(-x)^2=-2x-x^2$.

又 $f(x)$ 是奇函数，$\therefore f(-x)=-f(x)=-2x-x^2$.

$\therefore f(x)=x^2+2x$.

又当 $x\in[2,4]$ 时，$x-4\in[-2,0]$，

$\therefore f(x-4)=(x-4)^2+2(x-4)$.

又 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，

$\therefore f(x)=f(x-4)=(x-4)^2+2(x-4)=x^2-6x+8$.

即当 $x\in[2,4]$ 时，$f(x)=x^2-6x+8$.

(3)$\because f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(2)=0$，$f(3)=-1$，

且 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，

$\therefore f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=f(4)+f(5)+f(6)+f(7)=\cdots=f(2\,020)+f(2\,021)+f(2\,022)+f(2\,023)=0$.

$\therefore f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(2\,023)=0$.]

### 考点三

**典例** 4 (1)**ACD** (2)**C** [(1)对于 A，$f(x)$ 是奇函数，故图象关于原点对称，将 $f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度得到 $f(x-1)$ 的图象，故 $f(x-1)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，正确；对于 B，若对 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x+1)=f(x-1)$，得 $f(x+2)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是一个周期为 2 的周期函数，不能说明其图象关于直线 $x=1$ 对称，错误；对于 C，若函数 $f(x+1)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称，则 $f(x)$ 的图象关于 $y$ 轴对称，故为偶函数，正确；对于 D，由 $f(x+1)+f(1-x)=2$ 得 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,1)$ 对称，正确. 故选 ACD.

(2)由对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)+f(5-x)=-1$，

可知函数的图象关于点 $\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ 对称，

又 $y=\dfrac{1-x}{2x-5}=\dfrac{-x+1}{2x-5}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\frac{3}{2}}{2x-5}$，

所以函数 $y=\dfrac{1-x}{2x-5}$ 图象的中心对称点为 $\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$，

所以两个函数图象的交点成对出现，

且每对交点都关于点 $\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ 对称，

则 $x_1+x_n=x_2+x_{n-1}=\cdots=\dfrac{5}{2}\times2=5$，$y_1+y_n=y_2+y_{n-1}=\cdots=-\dfrac{1}{2}\times2=-1$，

所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i+y_i)=5\times\dfrac{n}{2}+(-1)\times\dfrac{n}{2}=2n$. 故选 C.]

**跟进训练**

3.(1)**B** (2)**A** (3)$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$(答案不唯一) [(1)由 $f(x+2)$ 是偶函数，知函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，函数 $y=|x^2-4x-5|=|(x-2)^2-9|$，其图象也关于直线 $x=2$ 对称，所以函数 $y=|x^2-4x-5|$ 与函数 $y=f(x)$ 图象的交点也关于直线 $x=2$ 对称，

当 $n$ 为偶数时，其和为 $4\times\dfrac{n}{2}=2n$；当 $n$ 为奇数时，

其和为 $4\times\dfrac{n-1}{2}+2=2n$. 故选 B.

(2)函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称，则必有 $f(3-x)=f(x+3)$，所以 $f(0)=f(6)$，$f(1)=f(5)$，$f(2)=f(4)$，又因为 $f(x)$ 满足 $f(2-x)=2-f(x)$，取 $x=1$，所以，$f(1)=2-f(1)$，$f(1)=1$，则 $f(1)=f(5)=1$，取 $x=5$，则 $f(-3)=2-f(5)=1$，A 正确. 故选 A.

(3)要使对称中心为 $\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$，可将任何奇函数的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度即可，如将 $y=\sin x$ 向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度可得 $f(x)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.]

## 第 4 课时　函数性质的综合应用

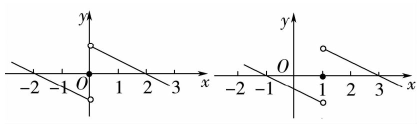
### 考点一

**典例** 1 (1)**D** (2)**AC** [(1)因为函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，则 $f(0)=0$.

又 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,且 $f(2)=0$,

画出函数 $f(x)$的大致图象如图①所示,

则函数 $f(x-1)$的大致图象如图②所示.




图①　　　　图②

当 $x\leqslant 0$ 时,要满足 $xf(x-1)\geqslant 0$,

则 $f(x-1)\leqslant 0$,得 $-1\leqslant x\leqslant 0$.

当 $x>0$ 时,要满足 $xf(x-1)\geqslant 0$,

则 $f(x-1)\geqslant 0$,得 $1\leqslant x\leqslant 3$.

故满足 $xf(x-1)\geqslant 0$ 的 $x$ 的取值范围是$[-1,0]\cup[1,3]$.

故选 D.

(2)函数 $f(x)$为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且为减函数,

偶函数 $g(x)$在区间$[0,+\infty)$上的图象与$f(x)$的图象重合,

由 $a>b>0$,得 $f(a)<f(b)<0$,$f(a)=g(a)$,$f(b)=g(b)$;

对于 A,$f(b)-f(-a)<g(a)-g(-b)\Leftrightarrow f(b)+f(a)-g(a)+g(b)=2f(b)<0$(因为 $f(a)=g(a)$在 $a>0$ 上成立),所以 A 正确;

对于 B,$f(b)-f(-a)>g(a)-g(-b)\Leftrightarrow f(b)+f(a)-g(a)+g(b)=2f(b)>0$,这与 $f(b)<0$ 矛盾,所以 B 错误;

对于 C,$f(a)+f(-b)<g(b)-g(-a)\Leftrightarrow f(a)-f(b)-g(b)+g(a)=2[f(a)-f(b)]<0$,这与 $f(a)<f(b)$符合,所以 C 正确;

对于 D,$f(a)+f(-b)>g(b)-g(-a)\Leftrightarrow f(a)-f(b)-g(b)+g(a)=2[f(a)-f(b)]>0$,这与 $f(a)<f(b)$矛盾,所以 D 错误.]

**跟进训练**

1.(1)**C**　(2)**D**　[(1)因为 $f(x+2)$的图象向右平移 2 个单位长度得到 $f(x)$的图象,且 $f(x+2)$的图象关于 $y$ 轴对称,

所以 $f(x)$的图象关于直线 $x=2$ 对称.

由 $f(x)$在$(2,+\infty)$上单调递减可得 $f(x)$在$(-\infty,2)$上单调递增,由 $f(\ln x)<f(1)$,所以 $\ln x<1$ 或 $\ln x>3$,解得 $0<x<e$ 或 $x>e^3$.

(2)因为$\forall x,y\in\mathbf{R}$,$f(x+y)=f(x)+f(y)$,

所以,令 $x=y=0$ 得 $f(0)=f(0)+f(0)$,即 $f(0)=0$.

令 $y=-x$,得 $f(0)=f(x)+f(-x)=0$,

即 $f(-x)=-f(x)$,

所以函数 $f(x)$为奇函数.

设 $x_1>x_2>0$,则 $x_1=x_2+(x_1-x_2)$,所以 $f(x_1)=f(x_2)+f(x_1-x_2)$,

即 $f(x_1)-f(x_2)=f(x_1-x_2)$,

因为$\forall x>0$,$f(x)>0$,$x_1-x_2>0$,

所以 $f(x_1-x_2)>0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$,

所以函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,

所以函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

综上,$f(x)$是奇函数且单调递增.

故选 D.]

**考点二**

**典例 2**　(1)**D**　(2)**C**　[(1)由于 $f(x+1)$为奇函数,所以函数 $f(x)$的图象关于点$(1,0)$对称,即有 $f(x)+f(2-x)=0$,所以 $f(1)+f(2-1)=0$,得 $f(1)=0$,即 $a+b=0$.　①

由于 $f(x+2)$为偶函数,所以函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=2$ 对称,即有$f(x)-f(4-x)=0$,所以 $f(0)+f(3)=-f(2)+f(1)=-4a-b+a+b=-3a=6$.　②

根据①②可得 $a=-2$,$b=2$,所以当 $x\in[1,2]$时,$f(x)=-2x^2+2$.

根据函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=2$ 对称,且关于点$(1,0)$对称,可得函数 $f(x)$的周期为 4,所以 $f\left(\frac{9}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{3}{2}\right)=2\times\left(\frac{3}{2}\right)^2-2=\frac{5}{2}$.

(2)因为 $f(x)$为偶函数,$f(x+2)-f(x)=f(1)$,

所以 $f(-1+2)-f(-1)=f(1)$,解得$f(1)=0$,

所以 $f(x+2)=f(x)$,那么 $f(x)$的周期为 2,

所以 $f(100)=f(0)=8$,$f(99)=f(1)=0$,

$f(99)+f(100)=8$,故 A,B,D 错误.

故选 C.]

**跟进训练**

2.**B**　[由 $f(x+8)+f(x)=0$,得 $f(x+8)=-f(x)$,所以 $f(x+16)=-f(x+8)=f(x)$,故函数 $y=f(x)$是以 16 为周期的周期函数.在 $f(x+8)+f(x)=0$ 中,令 $x=0$,得 $f(8)+f(0)=0$,因为函数 $y=f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $f(0)=0$.故$f(8)=0$.故 $f(2\,024)=f(16\times126+8)=f(8)=0$.又在 $f(x+8)+f(x)=0$ 中,令 $x=-3$,得 $f(5)+f(-3)=0$,得 $f(5)=-f(-3)=f(3)=5$,则$f(2\,019)=f(16\times126+3)=f(3)=5$,所以 $f(2\,019)+f(2\,024)=5$.故选 B.]

**考点三**

**典例 3**　(1)**B**　(2)**A**　[(1)根据题意,函数$f(x-1)(x\in\mathbf{R})$是偶函数,则函数 $f(x)$图象的对称轴为 $x=-1$,则有 $f(x)=f(-2-x)$,又由函数 $f(x)$的图象关于点$(1,0)$对称,则 $f(x)=-f(2-x)$,则有 $f(-2-x)=-f(2-x)$,则 $f(x+4)=-f(x)$,则有$f(x+8)=-f(x+4)=f(x)$,则函数 $f(x)$是周期为 8 的周期函数,又 $f(1)=0$,则 $a-1=0$,即 $a=1$,则当 $x\in[-1,1]$时,$f(x)=x-1$,$f(-1)=-2$,则 $f(2\,023)=f(-1+253\times8)=f(-1)=-2$.故选 B.

(2)函数 $f(x)$的图象关于点$(-2,0)$对称,

$\therefore f(x-4)=-f(-x)$,又 $f(x)$为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

所以$-f(-x)=f(x)$,所以 $f(x-4)=f(x)$,即函数 $f(x)$的周期是 4,则 $f(11)=f(-1)$,$f(12)=f(0)$,$f(21)=f(1)$,$\because f(x)$为奇函数,且在$[0,2)$上单调递增,

则 $f(x)$在$(-2,2)$上单调递增,$\therefore f(-1)<f(0)<f(1)$,

即 $f(11)<f(12)<f(21)$.]

**跟进训练**

3.**B**　[因为 $g(x)$的图象关于直线 $x=2$ 对称,则

$g(x+2)=g(2-x)$,

又 $g(2-x)=|-x|f(2-x)=|x|f(2-x)$,

且 $g(x+2)=|x|f(x+2)$,

所以 $|x|f(2-x)=|x|f(2+x)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,所以 $f(2-x)=f(2+x)$,因为 $f(-1)=-1$ 且 $f(x)$ 为奇函数,所以 $f(3)=f(2+1)=f(2-1)=-f(-1)=1$,

因此,$g(3)=|3-2|f(3)=f(1)=1$.故选 B.]

**考点四**

**典例 4** **ACD** [$f(x)$的图象关于直线 $x=-3$ 对称,

则 $f(-x)=f(x-6)$,

又 $f(x+3)=f(x-3)$,则 $f(x)$的周期 $T=6$,

$\therefore f(-x)=f(x-6)=f(x)$,

$\therefore f(x)$为偶函数,故 A 正确;

当 $x\in[0,3]$时,$f(x)=4^x+2x-11$ 单调递增,

$\because T=6$,故 $f(x)$在$[-6,-3]$上也单调递增,故 B 错误;

$\because f(x)$的图象关于直线 $x=-3$ 对称且 $T=6$,

$\therefore f(x)$的图象关于直线 $x=3$ 对称,故 C 正确;

$f(100)=f(16\times 6+4)=f(4)=f(-2)=f(2)=9$,故 D 正确.]

**跟进训练**

4.①②④ [在 $f(x+1)=f(x-1)$中,令 $x-1=t$,

则有 $f(t+2)=f(t)$,

因此 2 是函数 $f(x)$的周期,故①正确;

当 $x\in[0,1]$时,$f(x)=2^x$ 单调递增,

根据函数的奇偶性知,$f(x)$在$[-1,0]$上单调递减,根据函数的周期性知,函数 $f(x)$在$(1,2)$上单调递减,在$(2,3)$上单调递增,故②正确;

由②知,$f(x)$在$[0,2]$上的最大值 $f(x)_{\max}=f(1)=2$,$f(x)$的最小值 $f(x)_{\min}=f(0)=f(2)=2^0=1$ 且 $f(x)$是周期为 2 的周期函数,$\therefore f(x)$的最大值是 2,最小值是 1,故③错误;

$f(x)$为偶函数,$\therefore f(-x)=f(x)$,又 $T=2$,$\therefore f(x)=f(x+2)$,$\therefore f(-x)=f(x+2)$,故 $f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称,故④正确.]

## 第 5 课时 幂函数与二次函数

**梳理·必备知识**

1.(1)$y=x^{\alpha}$ (3)(1,1) (0,0) (1,1) 奇函数 偶函数

2.(1)$ax^2+bx+c(a\neq 0)$ $(m,n)$ 零点

(2)$\left[\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)$ $\left(-\infty,\frac{4ac-b^2}{4a}\right]$ $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

$b=0$ $b\neq 0$ 减 增 增 减

**激活·基本技能**

一、(1)× (2)√ (3)√ (4)×

二、1.**C** [由题意知$\begin{cases}a>0,\\ \Delta<0,\end{cases}$即$\begin{cases}a>0,\\ 1-20a<0,\end{cases}$

解得 $a>\frac{1}{20}$.]

2.$(-\infty,30]\cup[120,+\infty)$ [依题意知,$\frac{k}{6}\geqslant 20$ 或 $\frac{k}{6}\leqslant 5$,解得 $k\geqslant 120$ 或 $k\leqslant 30$.]

3.$y=x^{-\frac{1}{2}}$ $(0,+\infty)$ [设 $y=f(x)=x^{\alpha}$,因为图象过点$\left(4,\frac{1}{2}\right)$,代入解析式得 $\alpha=-\frac{1}{2}$,则 $y=x^{-\frac{1}{2}}$,由幂函数的性质可知函数 $y=x^{-\frac{1}{2}}$ 在$(0,+\infty)$上单调递减.]

4.$c<b<a$ [由指数函数、幂函数的单调性可知 $0.3^{0.4}<0.3^{0.3}$,$0.4^{0.3}>0.3^{0.3}$,即 $c<b<a$.]

**考点一**

**典例 1** (1)**D** (2)2 (3)$\left[-1,\frac{2}{3}\right)$

[(1)幂函数 $y=x^{\alpha}$,当 $\alpha>0$ 时,$y=x^{\alpha}$ 在$(0,+\infty)$上为增函数,且 $0<\alpha<1$ 时,图象上凸,所以 $0<m<1$;当 $\alpha<0$ 时,$y=x^{\alpha}$ 在$(0,+\infty)$上为减函数,不妨令 $x=2$,根据图象可得 $2^{-1}<2^n$,所以 $-1<n<0$.综上所述,选 D.

(2)由幂函数定义,知 $m^2-3m+3=1$,

解得 $m=1$ 或 $m=2$,

当 $m=1$ 时,$f(x)=x$ 的图象不关于 $y$ 轴对称,舍去,

当 $m=2$ 时,$f(x)=x^2$ 的图象关于 $y$ 轴对称,因此 $m=2$.

(3)易知函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为$[0,+\infty)$,在定义域内为增函数,

所以$\begin{cases}a+1\geqslant 0,\\ 3-2a\geqslant 0,\\ a+1<3-2a,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant a<\frac{2}{3}$.]

**跟进训练**

1.**B** [对于 A,$y=x^{-1}$ 是奇函数,值域是$\{y|y\in\mathbf{R}$,且 $y\neq 0\}$,在$(-\infty,0)$上单调递减,三个性质中有两个不正确;对于 B,$y=x^{-2}$ 是偶函数,值域是$\{y|y\in\mathbf{R}$,且 $y>0\}$,在$(-\infty,0)$上单调递增,三个性质中有两个正确,符合条件;同理可判断 C,D 中的函数不符合条件.]

**考点二**

**典例 2** **解**:$f(x)=x^2-tx-1=\left(x-\frac{t}{2}\right)^2-1-\frac{t^2}{4}$.

(1)依题意,$-1<\frac{t}{2}<2$,解得 $-2<t<4$,

$\therefore$ 实数 $t$ 的取值范围是$(-2,4)$.

(2)①当 $\frac{t}{2}\geqslant 2$,即 $t\geqslant 4$ 时,$f(x)$在$[-1,2]$上单调递减,

$\therefore f(x)_{\min}=f(2)=3-2t$.

②当 $-1<\frac{t}{2}<2$,即 $-2<t<4$ 时,$f(x)_{\min}=f\left(\frac{t}{2}\right)=-1-\frac{t^2}{4}$.

③当 $\frac{t}{2}\leqslant -1$,即 $t\leqslant -2$ 时,$f(x)$在$[-1,2]$上单调递增,

$\therefore f(x)_{\min}=f(-1)=t$.

综上,$g(t)=\begin{cases}t,t\leqslant -2,\\ -1-\frac{t^2}{4},-2<t<4,\\ 3-2t,t\geqslant 4.\end{cases}$

**拓展变式**

**解**:$\because f(-1)=t$,$f(2)=3-2t$,

$\therefore f(x)_{\max}=\max\{f(-1),f(2)\}$.

又 $f(2)-f(-1)=3-3t$,当 $t\geqslant1$ 时,$f(2)-f(-1)\leqslant0$,

∴$f(2)\leqslant f(-1)$,

∴$f(x)_{\max}=f(-1)=t$;

当 $t<1$ 时,$f(2)-f(-1)>0$,∴$f(2)>f(-1)$,

∴$f(x)_{\max}=f(2)=3-2t$,

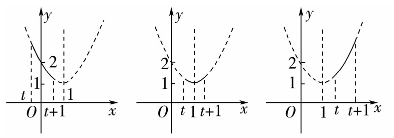
综上,$G(t)=\begin{cases}t,t\geqslant1,\\3-2t,t<1.\end{cases}$

**跟进训练**

2.**解**:$f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$,$x\in[t,t+1]$,$t\in\mathbf{R}$,函数图象的对称轴为 $x=1$.

当 $t+1\leqslant1$,即 $t\leqslant0$ 时,函数图象如图①所示,函数 $f(x)$ 在区间$[t,t+1]$上为减函数,所以最小值为 $f(t+1)=t^2+1$.

当 $t<1<t+1$,即 $0<t<1$ 时,函数图象如图②所示,在对称轴 $x=1$ 处取得最小值,最小值为 $f(1)=1$.



图①　　　图②　　　图③

当 $t\geqslant1$ 时,函数图象如图③所示,函数$f(x)$在区间$[t,t+1]$上为增函数,

所以最小值为 $f(t)=t^2-2t+2$.

综上可知,当 $t\leqslant0$ 时,$f(x)_{\min}=t^2+1$;当 $0<t<1$ 时,$f(x)_{\min}=1$;当 $t\geqslant1$ 时,$f(x)_{\min}=t^2-2t+2$.

**考点三**

**典例 3**　**解**:(1)由题意得 $\Delta=(2a)^2-4(-a+2)\leqslant0$,即 $a^2+a-2\leqslant0$,解得$-2\leqslant a\leqslant1$,所以实数 $a$ 的取值范围是$[-2,1]$.

(2)因为对于$\forall x\in[-1,1]$,$f(x)\geqslant0$ 恒成立,所以 $f(x)_{\min}\geqslant0$,$x\in[-1,1]$.函数$f(x)$图象的对称轴方程为 $x=-a$.

①当$-a\leqslant-1$,即 $a\geqslant1$ 时,$f(x)$在区间$[-1,1]$上单调递增,则 $f(x)_{\min}=f(-1)=3-3a\geqslant0$,得 $a\leqslant1$,所以 $a=1$.

②当$-1<-a<1$,即$-1<a<1$ 时,$f(x)_{\min}=f(-a)=-a^2-a+2\geqslant0$,得$-2\leqslant a\leqslant1$,所以$-1<a<1$.

③当$-a\geqslant1$,即 $a\leqslant-1$ 时,$f(x)$在区间$[-1,1]$上单调递减,则 $f(x)_{\min}=f(1)=a+3\geqslant0$,得 $a\geqslant-3$,所以$-3\leqslant a\leqslant-1$.

综上可得,实数 $a$ 的取值范围是$[-3,1]$.

(3)若$\exists x\in[-1,1]$,$f(x)\geqslant0$ 成立,则 $f(x)_{\max}\geqslant0$,$x\in[-1,1]$.函数 $f(x)$图象的对称轴方程为 $x=-a$.

①当$-a\leqslant0$,即 $a\geqslant0$ 时,$f(x)_{\max}=f(1)=a+3\geqslant0$,得 $a\geqslant-3$,所以 $a\geqslant0$.

②当$-a>0$,即 $a<0$ 时,$f(x)_{\max}=f(-1)=3-3a\geqslant0$,得 $a\leqslant1$,所以 $a<0$.

综上可得,实数 $a$ 的取值范围是 $\mathbf{R}$.

(4)因为对于$\forall a\in[-1,1]$,$f(x)>0$,令$g(a)=(2x-1)a+x^2+2$,则 $g(a)>0$ 在$[-1,1]$上恒成立,

所以$\begin{cases}g(-1)=x^2-2x+3>0,\\g(1)=x^2+2x+1>0.\end{cases}$解得 $x\neq-1$,故实数 $x$ 的取值范围是$\{x|x\neq-1\}$.

**跟进训练**

3.**解**:(1)要使 $mx^2-mx-1<0$ 恒成立,

若 $m=0$,显然$-1<0$,满足题意;

若 $m\neq0$,得$\begin{cases}m<0,\\\Delta=m^2+4m<0,\end{cases}$

即$-4<m<0$.∴$-4<m\leqslant0$.

∴所求 $m$ 的取值范围是$(-4,0]$.

(2)要使 $f(x)<-m+5$ 在 $x\in[1,3]$时恒成立,

即 $m\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}m-6<0$ 在 $x\in[1,3]$时恒成立.

**法一**:令 $g(x)=m\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}m-6$,$x\in[1,3]$.

当 $m>0$ 时,$g(x)$在$[1,3]$上单调递增,

所以 $g(x)_{\max}=g(3)$,即 $7m-6<0$,

所以 $m<\frac{6}{7}$,所以 $0<m<\frac{6}{7}$;

当 $m=0$ 时,$-6<0$ 恒成立;

当 $m<0$ 时,$g(x)$在$[1,3]$上单调递减,

所以 $g(x)_{\max}=g(1)=m-6<0$,

所以 $m<6$,所以 $m<0$.

综上所述,$m$ 的取值范围是$\left(-\infty,\frac{6}{7}\right)$.

**法二**:因为 $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$,

又因为 $m(x^2-x+1)-6<0$ 在 $x\in[1,3]$时恒成立,

所以 $m<\frac{6}{x^2-x+1}$在 $x\in[1,3]$时恒成立.

令 $y=\frac{6}{x^2-x+1}$,

因为函数 $y=\frac{6}{x^2-x+1}=\frac{6}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$在$[1,3]$上的最小值为$\frac{6}{7}$,所以只需 $m<\frac{6}{7}$即可.

所以 $m$ 的取值范围是$\left(-\infty,\frac{6}{7}\right)$.

## 第 6 课时　指数与指数函数

**梳理·必备知识**

1.(1)$x$　(2)根式　(3)$a$　$a$

2.$\sqrt[n]{a^m}$　$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$　0

3.$a^{r+s}$　$a^{rs}$　$a^rb^r$

4.(1)指数 $x$　$a$　(3)$(0,+\infty)$　$(0,1)$　1　$y>1$　$0<y<1$　$y>1$　$0<y<1$　增　减

**激活·基本技能**

一、(1)×　(2)×　(3)×

二、1.**B**　[原式$=(\sqrt[3]{5^2})^{\frac{3}{4}}=(5^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}=5^{\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$.]

2.**C**　[依题意可知 $a^2=\frac{1}{3}$,解得 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以 $f(x)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^x$,所以 $f(-1)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-1}=\sqrt{3}$.]

3. **BCD** ［因为 $y=1.7^x$ 为增函数，所以 $1.7^{2.5}<1.7^3$，故 A 错误；$2^{-\frac{4}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 为减函数，所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}=2^{-\frac{4}{3}}$，故 B 正确；因为 $1.7^{0.3}>1$，而 $0.9^{3.1}\in(0,1)$，所以 $1.7^{0.3}>0.9^{3.1}$，故 C 正确；$y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ 为减函数，所以 $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}<\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$，又 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$，所以 $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}<\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$. 故 D 正确.］

4. $\frac{3}{4}$ ［因为 $f(x)$ 的图象过原点，所以 $f(0)=a\left(\frac{1}{2}\right)^0+b=0$，即 $a+b=0$. 又因为 $f(x)$ 的图象无限接近直线 $y=1$，但又不与该直线相交，所以 $b=1$，$a=-1$，所以 $f(x)=-\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}+1$，所以 $f(-2)=-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=\frac{3}{4}$.］

### 考点一

**典例 1** (1)**ABD** (2)$\frac{8}{5}$ ［(1)因为 $a+a^{-1}=3$，所以 $a^2+a^{-2}=(a+a^{-1})^2-2=9-2=7$，故选项 A 正确；因为 $a+a^{-1}=3$，所以 $a^3+a^{-3}=(a+a^{-1})(a^2-1+a^{-2})=(a+a^{-1})\cdot[(a+a^{-1})^2-3]=3\times6=18$，故选项 B 正确；因为 $a+a^{-1}=3$，所以 $(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2=a+a^{-1}+2=5$，且 $a>0$，所以 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$，故选项 C 错误；因为 $a^3+a^{-3}=18$，且 $a>0$，所以 $\left(a\sqrt{a}+\frac{1}{a\sqrt{a}}\right)^2=a^3+a^{-3}+2=20$，所以 $a\sqrt{a}+\frac{1}{a\sqrt{a}}=2\sqrt{5}$，故选项 D 正确.

(2)原式 $=\frac{2\cdot4^{\frac{3}{2}}a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{3}{2}}}{10a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{3}{2}}}=\frac{8}{5}$.］

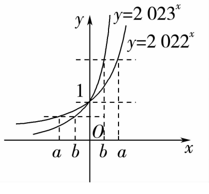
**跟进训练**

1. (1)**B** (2)$-\frac{167}{9}$ ［(1)由题意得 $\sqrt[4]{9x^8y^4}=9^{\frac{1}{4}}(x^8)^{\frac{1}{4}}\cdot(y^4)^{\frac{1}{4}}=\sqrt{3}x^2|y|=\sqrt{3}x^2y$.

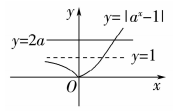
(2)原式 $=\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}+500^{\frac{1}{2}}-\frac{10(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}+1=\frac{4}{9}+10\sqrt{5}-10\sqrt{5}-20+1=-\frac{167}{9}$.］

### 考点二

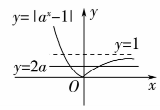
**典例 2** (1)**ABD** (2)$\left(0,\frac{1}{2}\right)$ ［(1)如图，观察易知，$a<b<0$ 或 $0<b<a$ 或 $a=b=0$，故选 ABD.




(2)$y=|a^x-1|$ 的图象是由 $y=a^x$ 的图象先向下平移 1 个单位长度，再将 $x$ 轴下方的图象沿 $x$ 轴翻折到 $x$ 轴上方得到的. 当 $a>1$ 时，如图①，两个图象只有一个交点，不合题意；当 $0<a<1$ 时，如图②，要使两个图象有两个交点，则 $0<2a<1$，得 $0<a<\frac{1}{2}$. 综上可知，$a$ 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.




图①



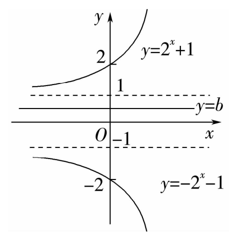

图②

］

**跟进训练**

2. (1)**B** (2)$[-1,1]$ ［(1)指数函数 $y=\left(\frac{b}{a}\right)^x$ 图象位于 $x$ 轴上方，据此可区分两函数图象. 二次函数 $y=ax^2-bx=(ax-b)x$，有零点 $\frac{b}{a}$，0. A，B 选项中，指数函数 $y=\left(\frac{b}{a}\right)^x$ 在 **R** 上单调递增，故 $\frac{b}{a}>1$，故 A 错误，B 正确. C，D 选项中，指数函数 $y=\left(\frac{b}{a}\right)^x$ 在 **R** 上单调递减，故 $0<\frac{b}{a}<1$，故 C，D 错误. 故选 B.

(2)曲线 $|y|=2^x+1$ 与直线 $y=b$ 的图象如图所示，由图象可得：如果曲线 $|y|=2^x+1$ 与直线 $y=b$ 没有公共点，则 $b$ 应满足的条件是 $b\in[-1,1]$.




］

### 考点三

**考向 1** **典例 3** (1)**B** (2)**B** ［(1)因为 $y=2^x$ 在 **R** 上单调递增，$y=x^{\frac{1}{4}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $c=4^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{3}{4}}=a=8^{\frac{1}{4}}<9^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{1}{2}}=b$. 故选 B.

(2)设函数 $f(x)=2^x-5^{-x}$，易知 $f(x)$ 为增函数.
又 $f(-y)=2^{-y}-5^y$，由已知得 $f(x)\leqslant f(-y)$，
所以 $x\leqslant -y$，所以 $x+y\leqslant0$.］

**考向 2** **典例 4** (1)$\frac{1}{2}$ (2)$(-3,1)$

［(1)当 $a<1$ 时，$4^{1-a}=2^1$，解得 $a=\frac{1}{2}$；

当 $a>1$ 时，$2^{a-(1-a)}=4^{a-1}$ 无解，故 $a$ 的值为 $\frac{1}{2}$.

(2)当 $a<0$ 时，原不等式化为 $\left(\frac{1}{2}\right)^a-7<1$，

则 $2^{-a}<8$，解得 $a>-3$，所以 $-3<a<0$.

当 $a\geqslant0$ 时，则 $\sqrt{a}<1$，$0\leqslant a<1$.

综上，实数 $a$ 的取值范围是 $(-3,1)$.］

**考向 3** **典例 5** (1)1 (2)$(-\infty,4]$ (3)$(1,+\infty)$

［(1)**法一**(定义法)：因为 $f(x)=x^3(a\cdot2^x-2^{-x})$ 的定义域为 **R**，且是偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$ 对任意的 $x\in$ **R** 恒成立，所以 $(-x)^3(a\cdot2^{-x}-2^x)=x^3(a\cdot2^x-2^{-x})$ 对任意的 $x\in$ **R** 恒成立，所以 $x^3(a-1)\cdot(2^x+2^{-x})=0$ 对任意的 $x\in$ **R** 恒成立，所以 $a=1$.

**法二**(取特殊值检验法):因为 $f(x)=x^3(a\cdot 2^x-2^{-x})$ 的定义域为 **R**,且是偶函数,所以 $f(-1)=f(1)$,所以 $-\left(\frac{a}{2}-2\right)=2a-\frac{1}{2}$,解得 $a=1$,经检验,$f(x)=x^3(2^x-2^{-x})$ 为偶函数,所以 $a=1$.

**法三**(转化法):由题意知 $f(x)=x^3(a\cdot 2^x-2^{-x})$ 的定义域为 **R**,且是偶函数.设 $g(x)=x^3$,$h(x)=a\cdot 2^x-2^{-x}$,因为 $g(x)=x^3$ 为奇函数,所以 $h(x)=a\cdot 2^x-2^{-x}$ 为奇函数,所以 $h(0)=a\cdot 2^0-2^{-0}=0$,解得 $a=1$,经检验,$f(x)=x^3(2^x-2^{-x})$ 为偶函数,所以 $a=1$.

(2)令 $t=|2x-m|$,则 $t=|2x-m|$ 在区间 $\left[\frac{m}{2},+\infty\right)$ 上单调递增,在区间 $\left(-\infty,\frac{m}{2}\right]$ 上单调递减.而 $y=2^t$ 是增函数,所以要使函数 $f(x)=2^{|2x-m|}$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增,则有 $\frac{m}{2}\leqslant 2$,即 $m\leqslant 4$,所以 $m$ 的取值范围是 $(-\infty,4]$.

(3)原不等式可化为 $a>-4^x+2^{x+1}$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,
令 $t=2^x$,则 $t>0$,$\therefore y=-4^x+2^{x+1}=-t^2+2t=-(t-1)^2+1\leqslant 1$,当 $t=1$ 时,$y_{\max}=1$,$\therefore a>1$.]

**跟进训练**

3.(1)**A**　(2)$(-\infty,-1]$　[(1)函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-(x-1)^2}$ 是由函数 $y=\mathrm{e}^u$ 和 $u=-(x-1)^2$ 复合而成的复合函数,$y=\mathrm{e}^u$ 为 **R** 上的增函数,$u=-(x-1)^2$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,所以由复合函数的单调性可知,$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.易知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,所以 $c=f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=f\left(2-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$,又 $\frac{\sqrt{2}}{2}<2-\frac{\sqrt{6}}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}<1$,所以 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<f\left(2-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)<f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,所以 $b>c>a$,故选 A.

(2)$\because y=\left(\frac{1}{3}\right)^t$ 是减函数,且 $f(x)$ 的值域是 $\left(0,\frac{1}{9}\right]$,

$\therefore t=ax^2+2x+3$ 有最小值 2,则 $a>0$ 且 $\frac{12a-2^2}{4a}=2$,解之得 $a=1$,因此 $t=x^2+2x+3$ 的单调递减区间是 $(-\infty,-1]$,故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,-1]$.]

## 第 7 课时　对数与对数函数

**梳理·必备知识**

1.$x=\log_a N$　$a$　$N$　10　$\lg N$　e　$\ln N$

2.(1)0　1　(2)$\log_a M+\log_a N$　$\log_a M-\log_a N$　$n\log_a M$　(3)$N$

3.(1)$y=\log_a x$　$(0,+\infty)$　(2)$(0,+\infty)$　$(1,0)$　$y>0$　$y<0$　$y<0$　$y>0$　增　减

4.$y=x$

**激活·基本技能**

一、(1)×　(2)×　(3)√　(4)√

二、1.$\left(\frac{1}{2},1\right]$　[由 $\log_{\frac{2}{3}}(2x-1)\geqslant 0$,得 $0<2x-1\leqslant 1$.

$\therefore \frac{1}{2}<x\leqslant 1$.

$\therefore$ 函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{2}{3}}(2x-1)}$ 的定义域是 $\left(\frac{1}{2},1\right]$.]

2.(1)<　(2)=

3.$\frac{5}{6}$　$\left[(\log_4 3+\log_8 3)\cdot\log_3 2=\left(\frac{\lg 3}{2\lg 2}+\frac{\lg 3}{3\lg 2}\right)\cdot\frac{\lg 2}{\lg 3}=\frac{5}{6}.\right]$

4.$\left(0,\frac{2}{3}\right)\cup(1,+\infty)$　[当 $a>1$ 时,满足条件;

当 $0<a<1$ 时,由 $\begin{cases}0<a<1,\\ \log_a\frac{2}{3}<\log_a a,\end{cases}$ 得 $0<a<\frac{2}{3}$,

综上,$a\in\left(0,\frac{2}{3}\right)\cup(1,+\infty)$.]

**考点一**

**典例 1**　(1)**C**　(2)4　[(1)$\because 2^a=5^b=10$,

$\therefore \log_2 10=a$,$\log_5 10=b$,

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{\log_2 10}+\frac{1}{\log_5 10}=\lg 2+\lg 5=\lg 10=1$.

(2)原式 $=2\lg 5+\lg(5\times 10)+\lg 2\cdot\lg(5\times 10^2)+(\lg 2)^2$
$=2\lg 5+\lg 5+1+\lg 2\cdot(\lg 5+2)+(\lg 2)^2$
$=3\lg 5+1+\lg 2\cdot\lg 5+2\lg 2+(\lg 2)^2$
$=3\lg 5+2\lg 2+1+\lg 2(\lg 5+\lg 2)$
$=3\lg 5+2\lg 2+1+\lg 2$
$=3(\lg 5+\lg 2)+1$
$=4$.]

**跟进训练**

1.(1)**C**　(2)5　(3)64　[(1)$2^a=5$,$8^b=3$,$2^{a-3b}=\frac{2^a}{2^{3b}}=\frac{2^a}{8^b}=\frac{5}{3}$,$4^{a-3b}=(2^{a-3b})^2=\frac{25}{9}$,故选 C.

(2)原式 $=\frac{\lg 3}{\lg 2}\cdot\frac{3\lg 2}{\lg 3}+(3^{\frac{1}{2}})^{\log_3 4}=3+3^{\log_3 2}=3+2=5$.

(3)由题意 $\frac{1}{\log_8 a}-\frac{1}{\log_a 4}=\frac{3}{\log_2 a}-\frac{1}{2}\log_2 a=-\frac{5}{2}$,整理得 $(\log_2 a)^2-5\log_2 a-6=0$,

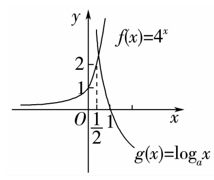
解得 $\log_2 a=-1$ 或 $\log_2 a=6$.又 $a>1$,

所以 $\log_2 a=6=\log_2 2^6$,故 $a=2^6=64$.]

**考点二**

**典例 2**　(1)**AD**　(2)**B**　[(1)易知 $g(x)=\log_a|x|$ 为偶函数.当 $0<a<1$ 时,$f(x)=a^{x-2}$ 单调递减,$g(x)=\log_a|x|$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,此时 A 选项符合题意.当 $a>1$ 时,$f(x)=a^{x-2}$ 单调递增,$g(x)=\log_a|x|$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,此时 D 选项符合题意.故选 AD.

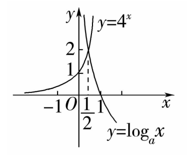
(2)构造函数 $f(x)=4^x$ 和 $g(x)=\log_a x$,当 $a>1$ 时,不满足条件;当 $0<a<1$ 时,画出两个函数大致的图象,如图所示,由题意可知 $f\left(\frac{1}{2}\right)<g\left(\frac{1}{2}\right)$,




即 $2<\log_a\frac{1}{2}$,则 $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $a$ 的取值范围为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.]

**拓展变式**

$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ ［若方程 $4^x=\log_a x$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 上有解，则函数 $y=4^x$ 的图象和函数 $y=\log_a x$ 的图象在 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 上有交点.




由图象可知 $\begin{cases}0<a<1,\\ \log_a\frac{1}{2}\leqslant 2,\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.］

**跟进训练**

2.(1)**D** (2)**BC** ［(1)$f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\ln\frac{1}{1-x}=-\ln(1-x)$，其定义域为 $(-\infty,1)$，为增函数，故选 D.

(2)由图象可知函数为减函数，所以 $0<a<1$，令 $y=0$ 得 $\log_a(x+c)=0$，

$x+c=1$，$x=1-c$. 由图象知 $0<1-c<1$，$\therefore 0<c<1$.］

**考点三**

**考向 1　典例 3**　(1)**C**　(2)**C**　［(1)$\because a=\log_5 2<\log_4 2=\frac{1}{2}=c$，$b=\log_8 3>\log_9 3=\frac{1}{2}=c$，故 $a<c<b$，故选 C.

(2)根据不等式的性质和对数的换底公式可得 $\frac{1}{\log_2 a}<\frac{1}{\log_2 b}<\frac{1}{\log_2 c}<0$，即 $\log_2 c<\log_2 b<\log_2 a<0$，可得 $c<b<a<1$. 故选 C.］

**考向 2　典例 4**　(1)**C**　(2)**C**　［(1)因为 $\log_{\frac{1}{2}}a=-\log_2 a$，所以 $f(\log_2 a)+f(\log_{\frac{1}{2}}a)=f(\log_2 a)+f(-\log_2 a)=2f(\log_2 a)$，原不等式变为 $2f(\log_2 a)\leqslant 2f(1)$，即 $f(\log_2 a)\leqslant f(1)$. 又因为 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数，且在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $|\log_2 a|\leqslant 1$，即 $-1\leqslant\log_2 a\leqslant 1$，解得 $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 2$，故选 C.

(2)由题意可得 $\begin{cases}a>0,\\ \log_2 a>-\log_2 a,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0,\\ \log_{\frac{1}{2}}(-a)>\log_2(-a),\end{cases}$

解得 $a>1$ 或 $-1<a<0$.

故选 C.］

**考向 3　典例 5**　(1)**A**　(2)**ACD**　(3)2　［(1)令函数 $g(x)=x^2-2ax+1+a=(x-a)^2+1+a-a^2$，则对称轴为 $x=a$，要使函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递减，则有 $\begin{cases}g(1)>0,\\ a\geqslant 1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2-a>0,\\ a\geqslant 1,\end{cases}$ 解得 $1\leqslant a<2$，即 $a\in[1,2)$.

(2)令 $\frac{2x+1}{2x-1}>0$，解得 $x>\frac{1}{2}$ 或 $x<-\frac{1}{2}$，

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，

又 $f(-x)=\ln\frac{-2x+1}{-2x-1}=\ln\frac{2x-1}{2x+1}=\ln\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{-1}=-\ln\frac{2x+1}{2x-1}=-f(x)$，

$\therefore f(x)$ 为奇函数，故 A 正确；B 错误.

又 $f(x)=\ln\frac{2x+1}{2x-1}=\ln\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)$，

令 $t=1+\frac{2}{2x-1}$，$t>0$ 且 $t\neq 1$，则 $y=\ln t$，

又 $t=1+\frac{2}{2x-1}$ 在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减，且 $y=\ln t$ 为增函数，$\therefore f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减，故 C 正确；

由 C 分析可得 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，故 D 正确.

(3)由题意知 $f(x)$ 的定义域为 **R**，函数 $f(x)=\ln(e^{ax}+1)-x$ 是偶函数，则 $f(-x)=\ln(e^{-ax}+1)+x=f(x)=\ln(e^{ax}+1)-x$，

即 $\ln\left(\frac{e^{ax}+1}{e^{-ax}+1}\right)=2x$，化简得 $\ln e^{ax}=2x$，解得 $a=2$.］

**跟进训练**

3.(1)**A**　(2)**BD**　(3)4　(4)5　［(1)由对数运算公式得 $\frac{1}{a}=\log_2 6=1+\log_2 3$，$\frac{1}{b}=\log_4 12=1+\log_4 3$，$\frac{1}{c}=\log_6 18=1+\log_6 3$，易知 $\log_2 3>\log_4 3>\log_6 3>0$，即 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>\frac{1}{c}>1$，故 $c>b>a$.

(2)$f(x)=\ln(x-2)+\ln(6-x)=\ln[(x-2)(6-x)]$，定义域为 $(2,6)$. 令 $t=(x-2)\cdot(6-x)$，则 $y=\ln t$. 因为二次函数 $t=(x-2)(6-x)$ 的图象的对称轴为直线 $x=4$，又 $f(x)$ 的定义域为 $(2,6)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=4$ 对称，且在 $(2,4)$ 上单调递增，在 $(4,6)$ 上单调递减，当 $x=4$ 时，$t$ 有最大值，所以 $f(x)_{\max}=\ln(4-2)+\ln(6-4)=2\ln 2$，故选 BD.

(3)设 $g(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$，则 $f(x)=g(x)+2$，显然有 $g(-x)=-g(x)$，即 $g(x)$ 为奇函数，则 $g(-x)+g(x)=0$，所以 $f(\lg 3)+f\left(\lg\frac{1}{3}\right)=f(\lg 3)+f(-\lg 3)=g(\lg 3)+2+g(-\lg 3)+2=4$.

(4)由题意得 $\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 9,\\ 1\leqslant x^2\leqslant 9,\end{cases}$

$\therefore 1\leqslant x\leqslant 3$，$\therefore g(x)$ 的定义域为 $[1,3]$，

$g(x)=[f(x)]^2+f(x^2)$

$=(1+\log_3 x)^2+1+\log_3 x^2$

$=(\log_3 x)^2+4\log_3 x+2$，

设 $t=\log_3 x$，则 $0\leqslant t\leqslant 1$，

则 $y=t^2+4t+2=(t+2)^2-2$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，

$\therefore$ 当 $t=0$，即 $x=1$ 时，$g(x)_{\min}=g(1)=2$，

当 $t=1$，即 $x=3$ 时，$g(x)_{\max}=g(3)=7$，

$\therefore g(x)_{\max}-g(x)_{\min}=5$.］

## 高考培优 1　指数式、对数式、幂式的大小比较

**题型一**

**典例 1**　(1)**B**　(2)**A**　［(1)因为 $y=4.2^x$ 在 **R** 上单调递增，且 $-0.3<0<0.3$，

所以 $0<4.2^{-0.3}<4.2^{0}<4.2^{0.3}$，

所以 $0<4.2^{-0.3}<1<4.2^{0.3}$，即 $0<a<1<b$.

因为 $y=\log_{4.2}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $0<0.2<1$，

所以 $\log_{4.2}0.2<\log_{4.2}1=0$，即 $c<0$，

所以 $b>a>c$.

故选 B.

(2) $\because \log_5 1<\log_5 2<\log_5\sqrt{5}$，$\therefore 0<a<\frac{1}{2}$.

$\because b=\frac{1}{\log_{0.1}0.7}=\log_{0.7}0.1>\log_{0.7}0.7=1$，

$\therefore b>1$，$\because 0.7^{1}<0.7^{0.3}<0.7^{0}$，$\therefore 0.7<c<1$，$\therefore a<c<b$. 故选 A.]

**跟进训练**

1. (1)**C**　(2)**B**　[(1) $a=2^{0.1}>2^{0}=1$，

$\because 4>3>2=4^{\frac{1}{2}}$，$\therefore 1>b=\log_4 3>\log_4 4^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$，

$\because 2<5^{\frac{1}{2}}$，$\therefore c=\log_5 2<\log_5 5^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$，

$\therefore a>b>c$，故选 C.

(2) 因为 $a=\sqrt{3}$，$b=2^{\frac{3}{4}}$，所以 $a^4=9$，$b^4=8$，可知 $a>b$，

又由 $b^4-\left(\frac{3}{2}\right)^4=8-\frac{81}{16}=\frac{47}{16}>0$，可得 $b>\frac{3}{2}$，又由 $e^2<8$，可得 $e<2\sqrt{2}=2^{\frac{3}{2}}$，所以 $\log_2 e<\frac{3}{2}$，即 $c<\frac{3}{2}$，故有 $a>b>c$. 故选 B.]

**题型二**

**典例 2**　**A**　[**法一**(特值法)：取 $z=1$，则由 $2^x=3^y=5$ 得 $x=\log_2 5$，$y=\log_3 5$，所以 $2x=\log_2 25<\log_2 32=5z$，$3y=\log_3 125<\log_3 243=5z$，所以 $5z$ 最大. 取 $y=1$，则由 $2^x=3$ 得 $x=\log_2 3$，所以 $2x=\log_2 9>3y$. 综上可得，$3y<2x<5z$. 故选 A.

**法二**(设元法)：设 $2^x=3^y=5^z=k$，则 $x=\log_2 k$，$y=\log_3 k$，$z=\log_5 k$，所以 $\frac{1}{2x}=\log_k 2^{\frac{1}{2}}$，$\frac{1}{3y}=\log_k 3^{\frac{1}{3}}$，$\frac{1}{5z}=\log_k 5^{\frac{1}{5}}$. 又易知 $k>1$，$5^{\frac{1}{5}}<2^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{1}{3}}$，所以 $\log_k 5^{\frac{1}{5}}<\log_k 2^{\frac{1}{2}}<\log_k 3^{\frac{1}{3}}$，即 $0<\frac{1}{5z}<\frac{1}{2x}<\frac{1}{3y}$，所以 $3y<2x<5z$. 故选 A.]

**跟进训练**

2. **ACD**　[**法一**(特值法)：取 $x=2$，则由 $\log_2 x=\log_3 y=\log_5 z$ 得 $y=3$，$z=5$，此时易知 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}$，选项 C 正确；取 $x=4$，则由 $\log_2 x=\log_3 y=\log_5 z$ 得 $y=9$，$z=25$，此时易知 $\frac{x}{2}<\frac{y}{3}<\frac{z}{5}$，选项 A 正确；取 $x=\sqrt{2}$，则由 $\log_2 x=\log_3 y=\log_5 z$ 得 $y=\sqrt{3}$，$z=\sqrt{5}$，此时易知 $\frac{z}{5}<\frac{y}{3}<\frac{x}{2}$，选项 D 正确.

**法二**(设元法)：设 $\log_2 x=\log_3 y=\log_5 z=k$，则 $x=2^k$，$y=3^k$，$z=5^k$，所以 $\frac{x}{2}=2^{k-1}$，$\frac{y}{3}=3^{k-1}$，$\frac{z}{5}=5^{k-1}$. 又易知 $k>0$，若 $k=1$，则 $\frac{x}{2}=1$，$\frac{y}{3}=1$，$\frac{z}{5}=1$，所以 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}$，所以选项 C 正确；若 $0<k<1$，则根据函数 $f(t)=t^{k-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减可得 $2^{k-1}>3^{k-1}>5^{k-1}$，所以 $\frac{z}{5}<\frac{y}{3}<\frac{x}{2}$，所以选项 D 正确；若 $k>1$，则根据函数 $f(t)=t^{k-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增可得 $2^{k-1}<3^{k-1}<5^{k-1}$，所以 $\frac{x}{2}<\frac{y}{3}<\frac{z}{5}$，所以选项 A 正确.]

**题型三**

**典例 3**　(1)**D**　(2)**B**　[(1) $\frac{a}{6\pi}=\frac{\ln 2}{2}$，$\frac{b}{6\pi}=\frac{\ln 3}{3}$，$\frac{c}{6\pi}=\frac{\ln \pi}{\pi}$，

$\because 6\pi>0$，

$\therefore a,b,c$ 的大小比较可以转化为 $\frac{\ln 2}{2}$，$\frac{\ln 3}{3}$，$\frac{\ln \pi}{\pi}$ 的大小比较.

设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x=e$ 时，$f'(x)=0$，

当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$，当 $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，$\because e<3<\pi<4$，

$\therefore \frac{\ln 3}{3}>\frac{\ln \pi}{\pi}>\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln 2}{2}$，$\therefore b>c>a$，故选 D.

(2) 令 $f(x)=2^x+\log_2 x$，因为 $y=2^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$y=\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)=2^x+\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 又 $2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b=2^{2b}+\log_2 b<2^{2b}+\log_2 2b$，所以 $f(a)<f(2b)$，所以 $a<2b$. 故选 B.]

**跟进训练**

3. (1)**A**　(2)①③④　[(1) 由 $2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$，得 $2^x-3^{-x}<2^y-3^{-y}$，即 $2^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x<2^y-\left(\frac{1}{3}\right)^y$. 设 $f(x)=2^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x$，则 $f(x)<f(y)$. 因为函数 $y=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，$y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，所以 $f(x)=2^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，则由 $f(x)<f(y)$，得 $x<y$，所以 $y-x>0$，所以 $y-x+1>1$，所以 $\ln(y-x+1)>0$，故选 A.

(2) 构造函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，导函数为 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

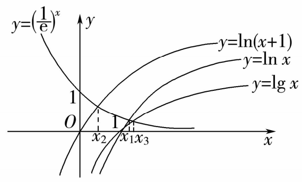
当 $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，可得当 $x=e$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{e}$.

$\ln 3<\sqrt{3}\ln 2\Leftrightarrow 2\ln\sqrt{3}<\sqrt{3}\ln 2\Leftrightarrow\frac{\ln\sqrt{3}}{\sqrt{3}}<\frac{\ln 2}{2}$，由 $\sqrt{3}<2<e$ 可得 $f(\sqrt{3})<f(2)$，故①正确；

$\ln\pi<\sqrt{\frac{\pi}{e}}\Leftrightarrow\frac{\ln\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}<\frac{\ln\sqrt{e}}{\sqrt{e}}$，由 $\sqrt{e}<\sqrt{\pi}<e$，可得 $f(\sqrt{e})<f(\sqrt{\pi})$，故②错误；由 $f(\sqrt{16})<f(\sqrt{15})$ 可推导出 $\frac{\ln\sqrt{16}}{\sqrt{16}}<\frac{\ln\sqrt{15}}{\sqrt{15}}$，即 $\frac{2\ln 2}{4}<\frac{\ln\sqrt{15}}{\sqrt{15}}$，所以 $\frac{\ln 2}{2}<\frac{\ln\sqrt{15}}{\sqrt{15}}$，可得 $f(2)<f(\sqrt{15})$，即 $2^{\sqrt{15}}<15$，故③正确；$3e\ln 2<4\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{\ln 8}{8}<\frac{\sqrt{2}}{2e}<\frac{1}{e}$，由 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{e}$，可知④正确.]

**题型四**

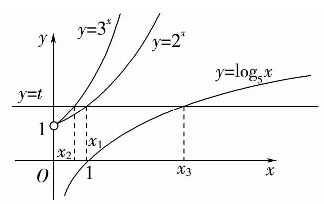
**典例4** (1)**D** (2)**C** [(1)画出函数 $y=\left(\frac{1}{e}\right)^x$，$y=\ln x$，$y=\ln(x+1)$，$y=\lg x$ 的图象，如图所示，




由图象可知 $x_2<x_1<x_3$.

(2)因为 $x,y,z$ 均为大于 0 的实数，

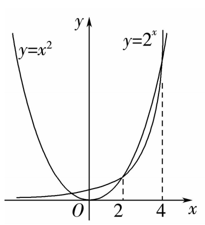
所以令 $2^x=3^y=\log_5 z=t>1$，进而将问题转化为函数 $y=2^x$，$y=3^x$，$y=\log_5 x$ 与直线 $y=t>1$ 的交点的横坐标 $x_1,x_2,x_3$ 的大小关系，故作出各函数图象，如图，由图可知 $x_3>x_1>x_2$，即 $z>x>y$. 故选 C.



]

**跟进训练**

4.**ABD** [作出 $y=2^x$ 和 $y=x^2$ 的图象，如图所示，由图象可得，当 $x\in(0,2)$ 时，$2^x>x^2$，当 $x\in(2,4)$ 时，$x^2>2^x$，




$1.9^2<2^{1.9}$，$2^{2.9}<2.9^2$，故 A，B 正确.

令 $f(x)=\frac{2^x}{2^x-1}$，则 $f(x)=1+\frac{1}{2^x-1}$，$f(x)$在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $\frac{2^{\ln 2}}{2^{\ln 2}-1}>\frac{2^{\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}}-1}$，故 C 错误.

$\log_7 4-\log_{12} 7=\log_7 4-\frac{1}{\log_7 12}=\frac{\log_7 4\cdot\log_7 12-1}{\log_7 12}<\frac{\left(\frac{\log_7 4+\log_7 12}{2}\right)^2-1}{\log_7 12}=\frac{\left(\frac{\log_7 48}{2}\right)^2-1}{\log_7 12}<0$，所以 $\log_7 4<\log_{12} 7$，故 D 正确. 故选 ABD.]

## 第 8 课时 函数的图象

**梳理 · 必备知识**

2.(1)$f(x+h)$ $f(x-h)$ (2)$-f(x)$ $f(-x)$ $-f(-x)$ $\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$

(3)$f(ax)$ $af(x)$ (4)$|f(x)|$ $f(|x|)$

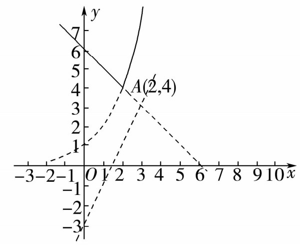
**激活 · 基本技能**

一、(1)× (2)√ (3)× (4)×

二、1.**C** [∵$f(x)=\frac{1}{x}+x$ 是奇函数，∴图象关于原点对称.]

2.**C** [其图象是由 $y=x^2$ 图象中 $x<0$ 的部分和 $y=x-1$ 图象中 $x\geqslant 0$ 的部分组成.]

3.**C** [画出 $y=\max\{2^x,2x-3,6-x\}$ 的示意图，如图所示. $y$ 的最小值为 $2^2=6-2=4$，故选 C.

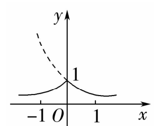


]

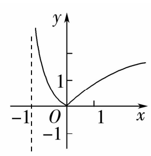
4.$e^{-x+1}$ [$f(x)=e^{-x}$，∴$g(x)=e^{-(x-1)}=e^{-x+1}$.]

**考点一**

**典例1** **解**：(1)先作出 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象，保留 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 图象中 $x\geqslant 0$ 的部分，再作出 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象中 $x>0$ 部分关于 $y$ 轴的对称部分，即得 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ 的图象，如图①实线部分所示.



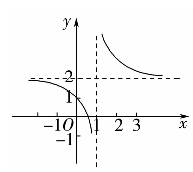

图①



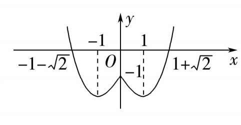

图②

(2)将函数 $y=\log_2 x$ 的图象向左平移一个单位长度，再将 $x$ 轴下方的部分沿 $x$ 轴翻折上去，即可得到函数 $y=|\log_2(x+1)|$ 的图象，如图②.

(3)∵$y=\frac{2x-1}{x-1}=2+\frac{1}{x-1}$，故函数图象可由 $y=\frac{1}{x}$ 的图象向右平移 1 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度得到，如图③.




图③




图④

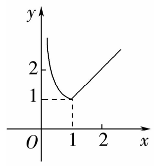
(4)∵$y=\begin{cases}x^2-2x-1,x\geqslant 0,\\x^2+2x-1,x<0,\end{cases}$且函数为偶函数，先用描点法作出$[0,+\infty)$上的图象，再根据对称性作出$(-\infty,0)$上的图象，如图④.

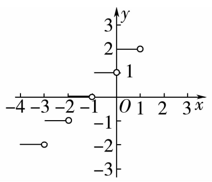
**跟进训练**

1.**解**：(1)$y=10^{|\lg x|}=\begin{cases}x,x\geqslant 1,\\\frac{1}{x},0<x<1,\end{cases}$其图象如图①所示.

(2)$f(x)=[x]+2=\begin{cases}\cdots\\-2,-4\leqslant x<-3,\\-1,-3\leqslant x<-2,\\0,-2\leqslant x<-1,\\1,-1\leqslant x<0,\\2,0\leqslant x<1,\\\cdots\end{cases}$

函数部分图象如图②所示.


图①


图②

**考点二**

**典例 2** (1)**A** (2)**B** [(1)设 $f(x)=\frac{x^3-x}{x^2+1}$,则 $f(1)=0$,故排除 B;

设 $h(x)=\frac{2x\cos x}{x^2+1}$,当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$0<\cos x<1$,

所以 $h(x)=\frac{2x\cos x}{x^2+1}<\frac{2x}{x^2+1}\leqslant 1$,故排除 C;

设 $g(x)=\frac{2\sin x}{x^2+1}$,则 $g(3)=\frac{2\sin 3}{10}>0$,故排除 D.

故选 A.

(2)**法一**(图象变换法):作出函数 $y=f(x)$关于 $y$ 轴对称的图象得到函数 $y=f(-x)$的图象,再把得到的图象向右平移 2 个单位长度,得到函数 $y=f(2-x)$的图象,再作出与此图象关于 $x$ 轴对称的图象,得到 $y=-f(2-x)$的图象,故选 B.

**法二**(特殊值验证):当 $x=0$ 时,$-f(2-x)=-f(2)=-1$;当 $x=1$ 时,$-f(2-x)=-f(1)=-1$.

观察各选项可知,故选 B.]

**跟进训练**

2.(1)**B** (2)**D** (3)**C** [(1)易知函数 $f(x)$的定义域为$\{x|x\neq 0$ 且 $x\neq\pm 1\}$,因为 $f(-x)=\frac{1}{(-x-1)\ln|-x|}=-\frac{1}{(x+1)\ln|x|}$,所以函数 $f(x)$为非奇非偶函数,排除 A,

易知当 $x>1$ 时,$f(x)>0$,故排除 C;因为 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3\ln 2}$,$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\ln 2}$,所以 $f\left(-\frac{1}{2}\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)$,所以排除 D. 故选 B.

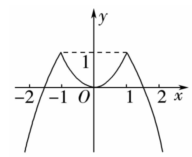
(2)**法一**:由题图可知函数 $f(x)$的图象关于 $y$ 轴对称,所以函数 $f(x)$是偶函数. 对于 A,$f(x)=\frac{5(e^x-e^{-x})}{x^2+2}$,定义域为 $\mathbf{R}$,$f(-x)=\frac{5(e^{-x}-e^x)}{x^2+2}=-f(x)$,所以函数 $f(x)=\frac{5(e^x-e^{-x})}{x^2+2}$是奇函数,所以排除 A;对于 B,$f(x)=\frac{5\sin x}{x^2+1}$,定义域为 $\mathbf{R}$,$f(-x)=\frac{5\sin(-x)}{x^2+1}=-\frac{5\sin x}{x^2+1}=-f(x)$,所以函数 $f(x)=\frac{5\sin x}{x^2+1}$是奇函数,所以排除 B;对于 C,$f(x)=\frac{5(e^x+e^{-x})}{x^2+2}$,定义域为 $\mathbf{R}$,$f(-x)=\frac{5(e^{-x}+e^x)}{x^2+2}=f(x)$,所以函数 $f(x)=\frac{5(e^x+e^{-x})}{x^2+2}$是偶函数,又 $x^2+2>0$,$e^x+e^{-x}>0$,所以 $f(x)>0$ 恒成立,不符合题意,所以排除 C;分析知,选项 D 符合题意,故选 D.

**法二**:由题图可知函数 $f(x)$的图象关于 $y$ 轴对称,所以函数 $f(x)$是偶函数. 因为 $y=x^2+2$ 是偶函数,$y=e^x-e^{-x}$是奇函数,所以 $f(x)=\frac{5(e^x-e^{-x})}{x^2+2}$是奇函数,故排除 A;因为 $y=x^2+1$ 是偶函数,$y=\sin x$ 是奇函数,所以 $f(x)=\frac{5\sin x}{x^2+1}$是奇函数,故排除 B;因为 $x^2+2>0$,$e^x+e^{-x}>0$,所以 $f(x)=\frac{5(e^x+e^{-x})}{x^2+2}>0$ 恒成立,不符合题意,故排除 C. 分析知,选项 D 符合题意,故选 D.

(3)由 $f(x)=\frac{ax+b}{(x+c)^2}$及图象可知,$x\neq -c$,$-c>0$,则 $c<0$;当 $x=0$ 时,$f(0)=\frac{b}{c^2}>0$,所以 $b>0$;当 $y=0$ 时,$ax+b=0$,所以 $x=-\frac{b}{a}>0$,所以 $a<0$. 故 $a<0$,$b>0$,$c<0$. 故选 C.]

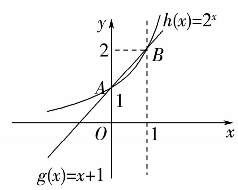
**考点三**

**考向 1 典例 3 ABD**



[根据函数 $f(x)=2-x^2$ 与 $g(x)=x^2$,画出函数$F(x)=\min\{f(x),g(x)\}$的图象,如图. 由图象可知,函数 $F(x)=\min\{f(x),g(x)\}$的图象关于 $y$ 轴对称,所以 A 项正确;函数 $F(x)$的图象与 $x$ 轴有 3 个交点,所以方程 $F(x)=0$ 有 3 个解,所以 B 项正确;函数$F(x)$在$(-\infty,-1]$上单调递增,在$[-1,0]$上单调递减,在$[0,1]$上单调递增,在$[1,+\infty)$上单调递减,所以 C 项错误,D 项正确.]

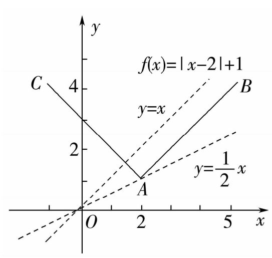
**考向 2 典例 4 D** [$f(x)>0\Leftrightarrow 2^x>x+1$,在同一平面直角坐标系中画出$h(x)=2^x$,$g(x)=x+1$ 的图象,如图所示,两图象交点坐标为$A(0,1)$和 $B(1,2)$,



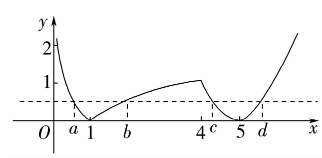

观察图象可知不等式 $f(x)>0$ 的解集为$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$,故选 D.]

**考向 3 典例 5** (1)$\left(\frac{1}{2},1\right)$ (2)(24,25)

[(1)先作出函数$f(x)=|x-2|+1$的图象,如图所示,当直线 $g(x)=kx$ 与直线 $AB$ 平行时,斜率为 1,当直线$g(x)=kx$ 过点 $A$ 时,斜率为$\frac{1}{2}$,故 $f(x)=g(x)$有两个不相等的实根时,$k$ 的取值范围为$\left(\frac{1}{2},1\right)$.




(2)作出函数 $f(x)$的大致图象如图所示.



因为 $a,b,c,d$ 互不相同,不妨设 $a<b<c<d$,且 $f(a)=f(b)=f(c)=f(d)$,则有$-\log_4 a=\log_4 b$,即 $\log_4 a+\log_4 b=$

0,可得 $ab=1$,则 $abcd=cd$.

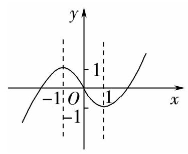
由 $c+d=10$,且 $c<d$,可得 $cd<\left(\frac{c+d}{2}\right)^2=25$,且 $cd=c(10-c)=-(c-5)^2+25$,

当 $c=4$ 时,$d=6$,此时 $cd=24$,但 $c$ 取不到 4,

故 $abcd$ 的取值范围是(24,25).]

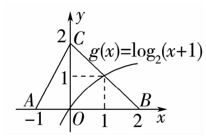
**跟进训练**

3.(1)**C** (2)**C** (3)(0,1] [(1)$f(x)=\begin{cases}x^2-2x,x\geqslant0,\\-x^2-2x,x<0,\end{cases}$画出函数 $f(x)$ 的图象,如图.



观察图象可知,函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称,故函数 $f(x)$ 为奇函数,且在(−1,1)上单调递减.

(2)令 $y=g(x)=\log_2(x+1)$,作出函数 $g(x)$ 的图象,如图所示.

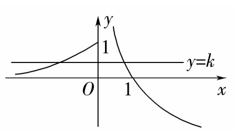



由$\begin{cases}x+y=2,\\y=\log_2(x+1),\end{cases}$

得$\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

所以结合图象知不等式 $f(x)\geqslant\log_2(x+1)$ 的解集为 $\{x|-1<x\leqslant1\}$.

(3)作出函数 $y=f(x)$ 与 $y=k$ 的图象,如图所示,




由图可知 $k\in(0,1]$.]

## 第 9 课时 函数的零点与方程的解

**梳理·必备知识**

1.(1)$f(x)=0$ (2)零点 $x$ 轴 (3)连续不断 $f(a)f(b)<0$ $(a,b)$ $f(c)=0$

2.连续不断 $f(a)f(b)<0$ 零点

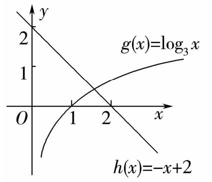
**激活·基本技能**

一、(1)× (2)× (3)√ (4)×

二、1.**A** [根据二分法的概念可知选项 A 中函数不能用二分法求零点.]

2.**B** [**法一**(定理法):函数 $f(x)=\log_3x+x-2$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,并且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,图象是一条连续曲线.由题意知 $f(1)=-1<0$,$f(2)=\log_32>0$,$f(3)=2>0$,根据函数零点存在定理可知,函数 $f(x)=\log_3x+x-2$ 有唯一零点,且零点在区间(1,2)内.

**法二**(图象法):函数 $f(x)$ 的零点所在的区间转化为函数 $g(x)=\log_3x$,$h(x)=-x+2$ 图象交点的横坐标所在的范围.作出两个函数的图象如图所示,可知 $f(x)$ 的零点所在的区间为(1,2).故选 B.




]

3.**BCD** [由所给的函数值表知,$f(1)f(2)>0$,$f(2)f(3)<0$,$f(5)f(6)<0$,$f(5)f(7)<0$,∴函数 $f(x)$ 必有零点的区间为(2,3),(5,6),(5,7),故选 BCD.]

4.$-2$,e [由题意得$\begin{cases}x\leqslant0,\\x^2+x-2=0\end{cases}$或$\begin{cases}x>0,\\-1+\ln x=0,\end{cases}$解得 $x=-2$ 或 $x=\mathrm{e}$.]

**考点一**

**典例 1** (1)**D** (2)**B** [(1)**法一**(定理法):$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

$f'(x)=\frac{1}{3}-\frac{1}{x}=\frac{x-3}{3x}$,令 $f'(x)>0\Rightarrow x>3$,$f'(x)<0\Rightarrow0<x<3$,

∴$f(x)$ 在(0,3)上单调递减,在 $(3,+\infty)$ 上单调递增,

又 $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\frac{1}{3\mathrm{e}}+1>0$,$f(1)=\frac{1}{3}>0$,

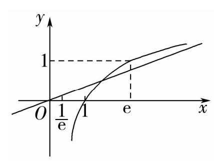
∴$f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},1\right)$ 内无零点.

又 $f(\mathrm{e})=\frac{\mathrm{e}}{3}-1<0$,∴$f(x)$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 内有零点.

**法二**(图象法):令 $f(x)=0$ 得 $\frac{1}{3}x=\ln x$.

其中 $y=\ln x$ 过原点的切线方程为 $y=\frac{1}{\mathrm{e}}x$,∵$\frac{1}{\mathrm{e}}>\frac{1}{3}$,

∴作出函数 $y=\frac{1}{3}x$ 和 $y=\ln x$ 的图象,如图,显然 $y=f(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},1\right)$ 内无零点,在区间 $(1,\mathrm{e})$ 内有零点.

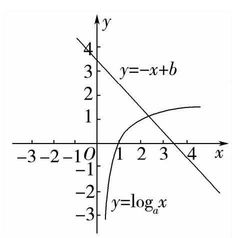


(2)设 $h(x)=2\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}-5$,$y=\mathrm{e}^x$ 是 **R** 上的增函数,$y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 和 $(-\infty,0)$ 上都是减函数,因此 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上都是增函数,只考虑在 $(0,+\infty)$ 上的情形即可,$h(1)=2\mathrm{e}-1-5=2\mathrm{e}-6<0$,$h(2)=2\mathrm{e}^2-\frac{1}{2}-5=2\mathrm{e}^2-\frac{11}{2}>0$,所以$h(x)$在(1,2)上有零点.所以函数 $f(x)=2\mathrm{e}^x$ 的图象与函数 $g(x)=\frac{1}{x}+5$ 的图象交点所在的区间可能为(1,2).故选 B.]

**跟进训练**

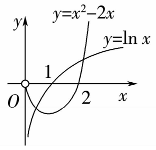
1.(1)**A** (2)2 [(1)函数 $y=f(x)$ 是图象开口向上的二次函数,最多有两个零点,由于 $a<b<c$,则 $a-b<0$,$a-c<0$,$b-c<0$,因此 $f(a)=(a-b)(a-c)>0$,$f(b)=(b-c)\cdot(b-a)<0$,$f(c)=(c-a)(c-b)>0$.所以 $f(a)f(b)<0$,$f(b)f(c)<0$,即 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 和区间 $(b,c)$ 内各有一个零点.

(2)对于函数 $y=\log_ax$,当 $x=2$ 时,可得 $y<1$,当 $x=3$ 时,可得 $y>1$,在同一坐标系中画出函数 $y=\log_ax$,$y=-x+b$ 的图象,判断出两个函数图象的交点的横坐标在(2,3)内,所以函数 $f(x)$ 的零点 $x_0\in(n,n+1)$ 时,$n=2$.]



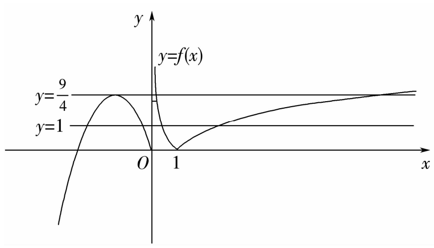
### 考点二

**典例2**　(1)**B**　(2)**B**　[(1)当 $x>0$ 时,如图所示,作出函数 $y=\ln x$ 和 $y=x^2-2x$ 的图象,由图知,当 $x>0$ 时,$f(x)$ 有 2 个零点;当 $x\leqslant 0$ 时,令 $f(x)=0$,得 $x=-\dfrac{1}{4}$.




综上,$f(x)$ 有 3 个零点,故选 B.

(2)根据题意,令 $4[f(x)]^2-13f(x)+9=0$,得 $f(x)=1$ 或 $f(x)=\dfrac{9}{4}$.作出 $f(x)$ 的简图:




由图象可得当 $f(x)=1$ 或 $f(x)=\dfrac{9}{4}$ 时,分别有 4 个和 3 个交点,故关于 $x$ 的函数 $y=4[f(x)]^2-13f(x)+9$ 的零点的个数为 7.故选 B.]

**跟进训练**

2.(1)**B**　(2)①②④　[(1)令 $f(x)=x^2-x=0$,则 $x=0$ 或 $x=1$,所以 $f(0)=0$,$f(1)=0$,

因为函数的最小正周期为 2,

所以 $f(2)=0$,$f(3)=0$,$f(-2)=0$,

$f(-1)=0$,$f(-3)=0$.

所以函数 $y=f(x)$ 的图象在区间 $[-3,3]$ 上与 $x$ 轴的交点个数为 7.

(2)将 $f(x)=|\lg x|-kx-2$ 的零点问题转化成两个函数 $y_1=|\lg x|$,$y_2=kx+2$ 图象的交点问题.

对于①,当 $k=0$ 时,$|\lg x|=2$,两函数图象有两个交点,①正确;

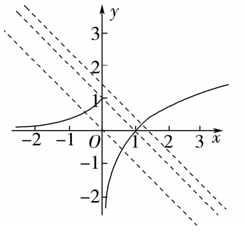
对于②,存在 $k<0$,使 $y_1=|\lg x|$ 与 $y_2=kx+2$ 相切,②正确;

对于③,若 $k<0$,$y_1=|\lg x|$ 与 $y_2=kx+2$ 最多有 2 个交点,③错误;

对于④,当 $k>0$ 时,过点 $(0,2)$ 存在函数 $g(x)=\lg x(x>1)$ 图象的切线,此时共有两个交点,当直线斜率稍微小于相切时的斜率时,就会有 3 个交点,故④正确.]

### 考点三

**考向1**　**典例3**　$[-1,+\infty)$　[函数 $g(x)=f(x)+x+a$ 存在 2 个零点,即关于 $x$ 的方程 $f(x)=-x-a$ 有 2 个不同的实根,即函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=-x-a$ 有 2 个交点,作出直线 $y=-x-a$ 与函数 $f(x)$ 的图象,如图所示,由图可知,$-a\leqslant 1$,解得 $a\geqslant -1$.




]

**考向2**　**典例4**　(1)**D**　(2)$\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$　[(1)由题意知方程 $ax=x^2+1$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},3\right)$ 上有解,即 $a=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},3\right)$ 上有解,

设 $t=x+\dfrac{1}{x}$,$x\in\left(\dfrac{1}{2},3\right)$,则 $t$ 的取值范围是 $\left[2,\dfrac{10}{3}\right)$.所以实数 $a$ 的取值范围是 $\left[2,\dfrac{10}{3}\right)$.

(2)依题意,结合函数 $f(x)$ 的图象分析可知,$m$ 需满足

$\begin{cases}m\neq 2,\\ f(-1)\cdot f(0)<0,\\ f(1)\cdot f(2)<0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m\neq 2,\\ (2m-1)(2m+1)<0,\\ (4m-1)(8m-7)<0,\end{cases}$

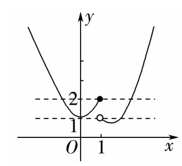
解得 $\dfrac{1}{4}<m<\dfrac{1}{2}$.]

**跟进训练**

3.(1)**C**　(2)**C**　[(1)由题意,知函数 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增,又函数的一个零点在区间 $(1,2)$ 内,

所以 $\begin{cases}f(1)<0,\\ f(2)>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-a<0,\\ 3-a>0,\end{cases}$ 解得 $0<a<3$,故选 C.

(2)作出函数 $f(x)$ 的图象如图,




因为关于 $x$ 的方程 $f(x)=2a$ 恰有两个不同的实根,

所以 $y=2a$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象恰有两个交点,结合图象,

得 $2a>2$ 或 $\dfrac{3}{4}<2a\leqslant 1$.解得 $a>1$ 或 $\dfrac{3}{8}<a\leqslant\dfrac{1}{2}$.]

## 第10课时　函数模型的应用

**梳理·必备知识**

1.递增　递增　越快　越慢　$y$ 轴　$x$ 轴

**激活·基本技能**

一、(1)×　(2)×　(3)√　(4)×

二、1.**B**　[当 $x\in(4,+\infty)$ 时,易知增长速度由大到小依次为 $g(x)>f(x)>h(x)$.故选 B.]

2.**C**　[设该死亡生物体内原有的碳 14 的含量为 1,则经过 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 个“半衰期”后的含量为 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$,由 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n<\dfrac{1}{1\ 000}$,得 $n\geqslant 10$.所以,若某死亡生物体内的碳 14 用一般的放射性探测器探测不到,则它至少需要经过 10 个“半衰期”.]

3.**C**　[由题图可知,$y=a^t$ 过点 $(1,2)$,则 $2=a^1$,即 $a=2$,

所以池塘里浮萍的面积 $y$(单位:$m^2$)与时间 $t$(单位:月)的关系为 $y=2^t$,

当 $t=5$ 时,$y=2^5=32<50$,故 A 错误;

当 $t=1$ 时,$y=2$,当 $t=2$ 时,$y=2^2=4$,当 $t=3$ 时,$y=2^3=8$,

所以第一个月浮萍增加的面积为 2 $m^2$,第二个月浮萍增加的面积为 $4-2=2(m^2)$,第三个月浮萍增加的面积为 $8-4=4(m^2)$,故 B 错误;

浮萍面积每月增长率为 $\dfrac{2^{t+1}-2^t}{2^t}=1$,故 C 正确;

因为 $2^{t_1}=2$,$2^{t_2}=3$,$2^{t_3}=6$,所以 $2^{t_1}\cdot 2^{t_2}=2^{t_3}$,即 $t_1+t_2=t_3$,故 D 错误.故选 C.]

4. $y=\begin{cases}0.5x,0\leqslant x\leqslant 100,\\0.4x+10,x>100\end{cases}$ [由题意可得 $y=\begin{cases}0.5x,0\leqslant x\leqslant 100,\\0.4x+10,x>100.\end{cases}$]

**考点一**

**典例1** (1)**B** (2)**B** [(1)由图可知水深 $h$ 越大，水的体积 $v$ 就越大，故函数 $v=f(h)$ 是个增函数，故排除A,C项，由鱼缸形状可知，下面细中间粗，上面较细，所以随着水深的增加，体积的变化的速度是先慢后快再慢的，所以B正确. 故选B.

(2)由函数图象可知符合条件的只有指数型函数模型，并且 $m>0,0<a<1,n>0$.]

**跟进训练**

1.② $\frac{10}{3}$ [由散点图的走势，知模型①不合适.

曲线过点 $\left(4,\frac{7}{3}\right)$，则后三个模型的解析式分别为② $y=\frac{1}{3}+\log_2 t$；③ $y=\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}$；④ $y=\sqrt{t}+\frac{1}{3}$，当 $t=1$ 时，代入④中，得 $y=\frac{4}{3}$，与散点图不符，易知拟合最好的是②.

将 $t=8$ 代入②式，得 $y=\frac{1}{3}+\log_2 8=\frac{10}{3}$.]

**考点二**

**典例2** 解：(1)由题意得当 $0<x<40$ 时，$S(x)=500x-(10x^2+100x)-3\ 000=-10x^2+400x-3\ 000$，

当 $x\geqslant 40$ 时，$S(x)=500x-\left(501x+\frac{10\ 000}{x}-4\ 500\right)-3\ 000=1\ 500-x-\frac{10\ 000}{x}$，

所以 $S(x)=\begin{cases}-10x^2+400x-3\ 000,0<x<40,\\1\ 500-x-\frac{10\ 000}{x},x\geqslant 40.\end{cases}$

(2)由(1)得当 $0<x<40$ 时，$S(x)=-10x^2+400x-3\ 000$，当 $x=20$ 时，$S(x)_{\max}=1\ 000$，

当 $x\geqslant 40$ 时，$S(x)=1\ 500-x-\frac{10\ 000}{x}=1\ 500-\left(x+\frac{10\ 000}{x}\right)$，

$\because x+\frac{10\ 000}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{10\ 000}{x}}=200$，当且仅当 $x=\frac{10\ 000}{x}$，

即 $x=100$ 时等号成立，$\therefore S(x)\leqslant 1\ 500-200=1\ 300$，

$\therefore x=100$ 时，$S(x)_{\max}=1\ 300$，

$\because 1\ 300>1\ 000$，$\therefore x=100$ 时，即明年产量为100百辆时，企业所获利润最大，最大利润为1 300万元.

**跟进训练**

2.33 [依题意得，$\begin{cases}10\%=m\cdot a^{10},\\20\%=m\cdot a^{20}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^{10}=2,\\m=\frac{1}{20},\end{cases}$

故 $a=2^{\frac{1}{10}}$，故 $h=\frac{1}{20}\cdot 2^{\frac{t}{10}}$，

令 $h=\frac{1}{2}$，$\therefore 2^{\frac{t}{10}}=10$，$\therefore \frac{t}{10}\lg 2=1$，故 $t\approx\frac{10}{0.3}\approx 33$.]

**考点三**

**典例3** 解：(1)设年增长率为 $x$，则 $a(1+x)^{10}=2a$，即 $(1+x)^{10}=2$，解得 $x=2^{\frac{1}{10}}-1$，因此，森林面积的年增长率为 $2^{\frac{1}{10}}-1$.

(2)设已植树造林 $n$ 年，则 $a\cdot 2^{\frac{n}{10}}=\sqrt{2}a$，

即 $2^{\frac{n}{10}}=2^{\frac{1}{2}}$，$\therefore \frac{n}{10}=\frac{1}{2}$，解得 $n=5$，

因此，该地已经植树造林5年.

(3)设至少需要植树造林 $m$ 年，则 $a\cdot 2^{\frac{m}{10}}\geqslant 6a$，可得 $2^{\frac{m}{10}}\geqslant 6$，

所以 $\frac{m}{10}\geqslant\log_2 6=\frac{\lg 6}{\lg 2}=\frac{\lg 2+\lg 3}{\lg 2}=1+\frac{\lg 3}{\lg 2}$，

$\therefore m\geqslant 10+\frac{10\lg 3}{\lg 2}\approx 10+\frac{10\times 0.477\ 1}{0.301\ 0}\approx 25.9$.

因此，至少需要植树造林26年.

**跟进训练**

3.①13 ②36 [①若某家庭某月分类投放120 kg垃圾，则该家庭月底的积分为 $120+10=130$(分)，

故该家庭该月积分能兑换 $130\times 0.1=13$(元)；

②设每个家庭每月分类投放的垃圾为 $t$ kg，每个家庭月底积分能兑换的金额为 $f(t)$ 元.

当 $0\leqslant t<100$ 时，$f(t)=0.1t<0.34t\times 0.4=0.136t$ 恒成立；

当 $t\geqslant 100$ 时，$f(t)=0.1t+0.1x\leqslant 0.34t\times 0.4$，可得 $x\leqslant(0.36t)_{\min}=36$. 故 $x$ 的最大值为36.]

## 高考研究在线2 高考试题中的抽象函数

**命题点一**

**典例1** **BC** [因为 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right)$，$g(2+x)$ 均为偶函数，

所以 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right)=f\left(\frac{3}{2}+2x\right)$，

即 $f\left(\frac{3}{2}-x\right)=f\left(\frac{3}{2}+x\right)$，$g(2+x)=g(2-x)$，

所以 $f(3-x)=f(x)$，$g(4-x)=g(x)$，则 $f(-1)=f(4)$，故C正确；

函数 $f(x)$，$g(x)$ 的图象分别关于直线 $x=\frac{3}{2}$，$x=2$ 对称，

又 $g(x)=f'(x)$，且函数 $f(x)$ 可导，所以 $g\left(\frac{3}{2}\right)=0$，$g(3-x)=-g(x)$，

所以 $g(4-x)=g(x)=-g(3-x)$，

所以 $g(x+2)=-g(x+1)=g(x)$，

所以 $g\left(-\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{3}{2}\right)=0$，

$g(-1)=g(1)=-g(2)$，故B正确，D错误；

若函数 $f(x)$ 满足题设条件，则函数 $f(x)+C$($C$ 为常数)也满足题设条件，所以无法确定 $f(x)$ 的函数值，故A错误.

故选BC.]

**跟进训练**

1.**AD** [$\because f(3-x)$，$g\left(\frac{5}{2}-2x\right)$ 均为奇函数，

$\therefore f(3+x)=-f(3-x)$，$g\left(\frac{5}{2}+2x\right)=-g\left(\frac{5}{2}-2x\right)$，

$\therefore f(x)$的图象关于点$(3,0)$对称，$g(x)$的图象关于点$\left(\frac{5}{2},0\right)$对称；$\therefore$A正确；$\because g(x)=f'(x)$，$\therefore g(x)$的图象关于直线$x=3$对称，B错误；$\therefore g(x)$的周期为2，

$\therefore g(5)=-g(0)$，$g(8)=g(0)$，

$\therefore g(5)=-g(8)$，D正确；$\because f(3+x)=-f(3-x)$，

$\therefore f\left(\frac{5}{2}\right)=-f\left(\frac{7}{2}\right)$，C错误．故选AD．]

2．**ABD**　[令$x=\frac{1}{2}$，$y=0$，则有$f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)\times f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)[1+f(0)]=0$，

又$f\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$，故$1+f(0)=0$，即$f(0)=-1$．

令$x=\frac{1}{2}$，$y=-\frac{1}{2}$，则有$f\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(-\frac{1}{2}\right)=4\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，

即$f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$，由$f(0)=-1$，

可得$f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，

又$f\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$，故$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，故A正确；

令$y=-\frac{1}{2}$，则有$f\left(x-\frac{1}{2}\right)+f(x)f\left(-\frac{1}{2}\right)=4x\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，

即$f\left(x-\frac{1}{2}\right)=-2x$，故函数$f\left(x-\frac{1}{2}\right)$是奇函数，

有$f\left(x+1-\frac{1}{2}\right)=-2(x+1)=-2x-2$，

即$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=-2x-2$，

即函数$f\left(x+\frac{1}{2}\right)$是减函数，

令$x=1$，有$f\left(\frac{1}{2}\right)=-2\times 1=-2$，

故B正确，C错误，D正确．

故选ABD．]

**命题点二**

典例2　**A**　[令$y=1$得$f(x+1)+f(x-1)=f(x)\cdot f(1)=f(x)\Rightarrow f(x+1)=f(x)-f(x-1)$，

故$f(x+2)=f(x+1)-f(x)$，

$f(x+3)=f(x+2)-f(x+1)$，

消去$f(x+2)$和$f(x+1)$得到$f(x+3)=-f(x)$，故$f(x)$的周期为6；

令$x=1$，$y=0$得$f(1)+f(1)=f(1)\cdot f(0)\Rightarrow f(0)=2$，

$f(2)=f(1)-f(0)=1-2=-1$，

$f(3)=f(2)-f(1)=-1-1=-2$，

$f(4)=f(3)-f(2)=-2-(-1)=-1$，

$f(5)=f(4)-f(3)=-1-(-2)=1$，

$f(6)=f(5)-f(4)=1-(-1)=2$，

故$\sum\limits_{k=1}^{22}f(k)=3[f(1)+f(2)+\cdots+f(6)]+f(19)+f(20)+f(21)+f(22)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=1+(-1)+(-2)+(-1)=-3$，即$\sum\limits_{k=1}^{22}f(k)=-3$．故选A．]

**跟进训练**

3．$\frac{1}{4}$　[取$x=1$，$y=0$得$4f(1)f(0)=f(1)+f(1)$，

$\because f(1)=\frac{1}{4}$，$\therefore f(0)=\frac{1}{2}$．

取$x=n$，$y=1$，有$f(n)=f(n+1)+f(n-1)$，

同理$f(n+1)=f(n+2)+f(n)$．

联立得$f(n+2)=-f(n-1)$，

所以$f(n)=-f(n+3)=f(n+6)$，

所以函数是周期函数，周期$T=6$，

故$f(2\,023)=f(1)=\frac{1}{4}$．]

# 第三章　一元函数的导数及其应用

## 第1课时　导数的概念及运算

**梳理·必备知识**

1．(1)导数　瞬时变化率　$f'(x_0)$　$y'|_{x=x_0}$

2．斜率　$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

3．0　$\alpha x^{\alpha-1}$　$\cos x$　$-\sin x$　$a^x\ln a$　$e^x$　$\frac{1}{x\ln a}$　$\frac{1}{x}$

4．(1)$f'(x)\pm g'(x)$　(2)$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(3)$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

(4)$cf'(x)$

5．(1)$f(g(x))$　(2)$y'_u\cdot u'_x$

**激活·基本技能**

一、(1)×　(2)×　(3)×　(4)×

二、1．**C**　[$h'(t)=-9.8t+8$，$\therefore h'(0.5)=-9.8\times 0.5+8=3.1$．]

2．**C**　[由导数的几何意义知，$0<f'(3)<f(3)-f(2)<f'(2)$，故选C．]

3．$-\frac{2}{3}$　[因为$f'(x)=-\frac{2}{3-2x}-2\sin 2x$，所以$f'(0)=-\frac{2}{3}$．]

4．$y=(e-1)x+2$　[$\because f'(x)=e^x-\frac{1}{x^2}$，

$\therefore f'(1)=e-1$，

又$f(1)=e+1$，$\therefore$切点为$(1,e+1)$，切线斜率$k=f'(1)=e-1$，即切线方程为$y-(e+1)=(e-1)(x-1)$，即$y=(e-1)x+2$．]

**考点一**

典例1　(1)**ABC**　(2)$\overline{v}_1>\overline{v}_2>\overline{v}_3$

[(1)$-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$表示在$[a,b]$上割线斜率的相反数，$-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$越大治理能力越强．

对于A，在$[t_1,t_2]$这段时间内，甲企业对应图象的割线斜率的相反数大，故甲企业的污水治理能力比乙企业强，正确；

对于B,要比较 $t_2$ 时刻的污水治理能力,即看在 $t_2$ 时刻两曲线的切线斜率,切线斜率的相反数越大,污水治理能力越强,故在 $t_2$ 时刻,甲企业的污水治理能力比乙企业强,正确;

对于C,在 $t_3$ 时刻,甲、乙两企业的污水排放量都在污水达标排放量以下,正确;

对于D,甲在$[t_1,t_2]$这段时间内的污水治理能力最强,错误.

(2)$\because \overline{v}_1=\dfrac{s(t_1)-s(0)}{t_1-0}=k_{OA}$,$\overline{v}_2=\dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}=k_{AB}$,$\overline{v}_3=\dfrac{s(t_3)-s(t_2)}{t_3-t_2}=k_{BC}$,由图象得 $k_{OA}>k_{AB}>k_{BC}$,$\therefore \overline{v}_1>\overline{v}_2>\overline{v}_3$.]

**跟进训练**

1.**BD** [对于A,设 $\tan\alpha=\dfrac{r(1)-r(0)}{1-0}$,

$\tan\theta=\dfrac{r(2)-r(1)}{2-1}$,

由图得 $\alpha>\theta$,所以 $\tan\alpha>\tan\theta$,

所以$\dfrac{r(1)-r(0)}{1-0}>\dfrac{r(2)-r(1)}{2-1}$,所以该选项错误;

对于B,由题图得图象上点的切线的斜率越来越小,

根据导数的几何意义得 $r'(1)>r'(2)$,所以该选项正确;

对于C,设 $V_1=0$,$V_2=3$,$\therefore r\left(\dfrac{V_1+V_2}{2}\right)=r\left(\dfrac{3}{2}\right)$,$\dfrac{r(V_1)+r(V_2)}{2}=\dfrac{r(3)}{2}$,因为$r\left(\dfrac{3}{2}\right)-r(0)>r(3)-r\left(\dfrac{3}{2}\right)$,所以$r\left(\dfrac{3}{2}\right)>\dfrac{r(3)}{2}$,所以该选项错误;

对于D,$\dfrac{r(V_2)-r(V_1)}{V_2-V_1}$表示 $A(V_1,r(V_1))$,$B(V_2,r(V_2))$两点连线的斜率,$r'(V_0)$表示 $C(V_0,r(V_0))$处切线的斜率,由于 $V_0\in(V_1,V_2)$,所以可以平移直线 $AB$ 使之和曲线相切,切点就是点 $C$,所以该选项正确.故选BD.]

### 考点二

**典例2** (1)**ACD** (2)$\dfrac{\pi^2}{36}+\dfrac{2\pi}{3}$ [(1)对于A,$\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)'=-\dfrac{1}{\ln^2 x}\cdot(\ln x)'=-\dfrac{1}{x\ln^2 x}$;对于B,$(x^2e^x)'=(x^2+2x)e^x$;对于C,令$f(x)=\sqrt{2x+1}=(2x+1)^{\frac{1}{2}}$,$\therefore f'(x)=\dfrac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}}\times2=(2x+1)^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$;对于D,$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)'=1+\dfrac{1}{x^2}$.故选ACD.

(2)$f'(x)=2x+f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\cos x$,

$\therefore f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{1}{2}f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$,

$\therefore f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{4\pi}{3}$,$\therefore f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi^2}{36}+\dfrac{2\pi}{3}$.]

**跟进训练**

2.(1)**AC** (2)3 [(1)若 $f(x)=x^2$,则 $f'(x)=2x$,令 $x^2=2x$,得 $x=0$ 或 $x=2$,方程显然有解,故A符合要求;若 $f(x)=e^{-x}$,则$f'(x)=-e^{-x}$,令 $e^{-x}=-e^{-x}$,此方程无解,故B不符合要求;若 $f(x)=\ln x$,则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$,令 $\ln x=\dfrac{1}{x}$,在同一直角坐标系内作出函数 $y=\ln x$ 与 $y=\dfrac{1}{x}$的图象(作图略),可得两函数的图象有一个交点,所以方程 $f(x)=f'(x)$存在实数解,故C符合要求;若 $f(x)=\tan x$,则 $f'(x)=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$,令 $\tan x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$,化简得 $\sin x\cos x=1$,变形可得 $\sin 2x=2$,无解,故D不符合要求.故选AC.

(2)$f'(x)=ae^{ax}+\dfrac{1}{x+1}$,$\therefore f'(0)=a+1=4$,$\therefore a=3$.]

### 考点三

**考向1 典例3** **C** [由题意可知 $y'=\dfrac{e^x(x+1)-e^x\cdot1}{(x+1)^2}=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$,则曲线 $y=\dfrac{e^x}{x+1}$在点$\left(1,\dfrac{e}{2}\right)$处的切线斜率 $k=y'|_{x=1}=\dfrac{e}{4}$,所以曲线 $y=\dfrac{e^x}{x+1}$在点$\left(1,\dfrac{e}{2}\right)$处的切线方程为 $y-\dfrac{e}{2}=\dfrac{e}{4}(x-1)$,即 $y=\dfrac{e}{4}x+\dfrac{e}{4}$,故选C.]

**考向2 典例4** $(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$ [$\because y=(x+a)e^x$,

$\therefore y'=(x+1+a)e^x$,

设切点为$(x_0,y_0)$,则 $y_0=(x_0+a)e^{x_0}$,切线斜率 $k=(x_0+1+a)e^{x_0}$,

切线方程为 $y-(x_0+a)e^{x_0}=(x_0+1+a)\cdot e^{x_0}(x-x_0)$,

$\because$切线过原点,$\therefore -(x_0+a)e^{x_0}=(x_0+1+a)e^{x_0}(-x_0)$,

整理得 $x_0^2+ax_0-a=0$,

$\because$切线有两条,$\therefore \Delta=a^2+4a>0$,解得 $a<-4$ 或 $a>0$,

$\therefore a$ 的取值范围是$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$.]

**跟进训练**

3.(1)0 (2)$[2,+\infty)$ [(1)由题图可知曲线 $y=f(x)$在 $x=3$ 处切线的斜率等于$-\dfrac{1}{3}$,$\therefore f'(3)=-\dfrac{1}{3}$.

$\because g(x)=xf(x)$,$\therefore g'(x)=f(x)+xf'(x)$,

$\therefore g'(3)=f(3)+3f'(3)$,又由题图可知 $f(3)=1$,

$\therefore g'(3)=1+3\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=0$.

(2)直线 $2x-y=0$ 的斜率 $k=2$,

又曲线 $y=f(x)$存在与直线 $2x-y=0$ 平行的切线,

$\therefore f'(x)=\dfrac{1}{x}+4x-a=2$ 在$(0,+\infty)$内有解,

则 $a=4x+\dfrac{1}{x}-2$,$x>0$.

又 $4x+\dfrac{1}{x}\geqslant2\sqrt{4x\cdot\dfrac{1}{x}}=4$,当且仅当 $x=\dfrac{1}{2}$时取"=".

$\therefore a\geqslant4-2=2$.

$\therefore$实数 $a$ 的取值范围是$[2,+\infty)$.]

### 考点四

**典例5** **解**:(1)由题意知,$f(-1)=-1-(-1)=0$,$f'(x)=3x^2-1$,$f'(-1)=3-1=2$,则 $y=f(x)$在点$(-1,0)$处的切线方程为 $y=2(x+1)$,

即 $y=2x+2$，设该切线与 $g(x)$ 切于点 $(x_2,g(x_2))$，$g'(x)=2x$，则 $g'(x_2)=2x_2=2$，解得 $x_2=1$，则 $g(1)=1+a=2+2$，解得 $a=3$.

(2) $f'(x)=3x^2-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线方程为 $y-(x_1^3-x_1)=(3x_1^2-1)(x-x_1)$，整理得 $y=(3x_1^2-1)x-2x_1^3$，

设该切线与曲线 $y=g(x)$ 切于点 $(x_2,g(x_2))$，$g'(x)=2x$，则 $g'(x_2)=2x_2$，则切线方程为 $y-(x_2^2+a)=2x_2(x-x_2)$，整理得 $y=2x_2x-x_2^2+a$，

则 $\begin{cases}3x_1^2-1=2x_2,\\-2x_1^3=-x_2^2+a,\end{cases}$ 整理得 $a=x_2^2-2x_1^3=\left(\dfrac{3x_1^2}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2-2x_1^3=\dfrac{9}{4}x_1^4-2x_1^3-\dfrac{3}{2}x_1^2+\dfrac{1}{4}$，

令 $h(x)=\dfrac{9}{4}x^4-2x^3-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{4}$，则 $h'(x)=9x^3-6x^2-3x=3x(3x+1)(x-1)$，令 $h'(x)>0$，解得 $-\dfrac{1}{3}<x<0$ 或 $x>1$，

令 $h'(x)<0$，解得 $x<-\dfrac{1}{3}$ 或 $0<x<1$，则 $x$ 变化时，$h'(x)$，$h(x)$ 的变化情况如下表：

| $x$ | $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)$ | $-\dfrac{1}{3}$ | $\left(-\dfrac{1}{3},0\right)$ | 0 | $(0,1)$ | 1 | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $h(x)$ | 单调递减 | $\dfrac{5}{27}$ | 单调递增 | $\dfrac{1}{4}$ | 单调递减 | $-1$ | 单调递增 |

则 $h(x)$ 的值域为 $[-1,+\infty)$，故 $a$ 的取值范围为 $[-1,+\infty)$.

**跟进训练**

4. (1) $\ln 2$　(2) $y=ex$ 或 $y=x+1$

[(1)由 $y=e^x+x$ 得 $y'=e^x+1$，则 $y'|_{x=0}=e^0+1=2$，

故曲线 $y=e^x+x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=2x+1$.

由 $y=\ln(x+1)+a$ 得 $y'=\dfrac{1}{x+1}$，

设切线与曲线 $y=\ln(x+1)+a$ 的切点为 $(x_0,\ln(x_0+1)+a)$，

由两曲线有公切线得 $y'=\dfrac{1}{x_0+1}=2$，解得 $x_0=-\dfrac{1}{2}$，则切点为 $\left(-\dfrac{1}{2},a+\ln\dfrac{1}{2}\right)$，

切线方程为 $y=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+a+\ln\dfrac{1}{2}=2x+1+a-\ln 2$.

根据两切线重合，得 $a-\ln 2=0$，解得 $a=\ln 2$.

(2)设 $l$ 与 $f(x)=e^x$ 的切点为 $(x_1,e^{x_1})$，与 $g(x)=\ln x+2$ 的切点为 $(x_2,\ln x_2+2)$.

因为 $f'(x)=e^x$，$g'(x)=\dfrac{1}{x}$，

所以 $l$：$y=e^{x_1}\cdot x-x_1\cdot e^{x_1}+e^{x_1}$，

$y=\dfrac{1}{x_2}\cdot x+\ln x_2+1$.

所以 $\begin{cases}e^{x_1}=\dfrac{1}{x_2},\\(1-x_1)e^{x_1}=\ln x_2+1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=0,\\x_2=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=1,\\x_2=\dfrac{1}{e}.\end{cases}$

所以直线 $l$ 的方程为 $y=x+1$ 或 $y=ex$.]

## 第2课时　导数与函数的单调性

**梳理·必备知识**

1. 单调递增　单调递减　常数函数

2. 定义域　零点

**激活·基本技能**

一、(1)√　(2)√　(3)×　(4)√

二、1. **C**　[由 $f'(x)$ 的图象知，

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)>0$，∴ $f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(0,x_1)$ 时，$f'(x)<0$，∴ $f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

∴ $f(x)$ 单调递增.]

2. **D**　[因为 $f'(x)=-\sin x-1<0$ 在 $(0,\pi)$ 上恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上是减函数，故选 D.]

3. $(0,1)$　[函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x>0\}$，由 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}<0$，得 $0<x<1$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$.]

4. 3　[$f'(x)=3x^2-a\geqslant 0$，即 $a\leqslant 3x^2$，

又因为 $x\in[1,+\infty)$，所以 $a\leqslant 3$，

即 $a$ 的最大值是 3.]

**考点一**

**典例1**　解：(1)由题意知 $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\ln x-k}{e^x}(x>0)$，

又 $f'(1)=\dfrac{1-k}{e}=0$，所以 $k=1$.

(2)由(1)得 $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\ln x-1}{e^x}(x>0)$.

设 $h(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x-1(x>0)$，则 $h'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

由 $h(1)=0$ 知，当 $0<x<1$ 时，$h(x)>0$，

所以 $f'(x)>0$；

当 $x>1$ 时，$h(x)<0$，所以 $f'(x)<0$.

综上，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,1)$，单调递减区间是 $(1,+\infty)$.

**跟进训练**

1. **B**　[对于 A，$f(x)=\sin 2x$ 的单调递增区间是 $\left[k\pi-\dfrac{\pi}{4},k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$；对于 B，$f'(x)=e^x(x+1)$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数；对于 C，$f'(x)=3x^2-1$，令 $f'(x)>0$，得 $x>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

或 $x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以函数 $f(x)=x^3-x$ 在 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 和 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 上单调递增；对于 D，$f'(x)=-1+\frac{1}{x}=-\frac{x-1}{x}$，令 $f'(x)>0$，得 $0<x<1$，所以函数 $f(x)=-x+\ln x$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增. 综上所述，应选 B.]

## 考点二

**典例 2** **解**：函数的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=ax-(a+1)+\frac{1}{x}$

$=\frac{ax^2-(a+1)x+1}{x}$

$=\frac{(ax-1)(x-1)}{x}$.

①当 $0<a<1$ 时，$\frac{1}{a}>1$，

∴$x\in(0,1)\cup\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，

$x\in\left(1,\frac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)<0$，

∴函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，

在 $\left(1,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减；

②当 $a=1$ 时，$\frac{1}{a}=1$，∴$f'(x)\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

∴函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

③当 $a>1$ 时，$0<\frac{1}{a}<1$，

∴$x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)\cup(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

$x\in\left(\frac{1}{a},1\right)$ 时，$f'(x)<0$，

∴函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

在 $\left(\frac{1}{a},1\right)$ 上单调递减.

综上，当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(1,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减；

当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},1\right)$ 上单调递减.

**拓展变式**

**解**：当 $a>0$ 时，讨论同例题解析；

当 $a\leqslant 0$ 时，$ax-1<0$，

∴$x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，

∴函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减；

当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(1,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减；

当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},1\right)$ 上单调递减.

**跟进训练**

2. **解**：$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{a}{x}=-\frac{x^2-ax+1}{x^2}$.

设 $y=x^2-ax+1$，其图象过定点 $(0,1)$，开口向上，对称轴为 $x=\frac{a}{2}$，

①当 $\frac{a}{2}\leqslant 0$，即 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

②当 $\frac{a}{2}>0$，即 $a>0$ 时，

令 $x^2-ax+1=0$，$\Delta=a^2-4$，

(i)当 $\Delta\leqslant 0$，即 $0<a\leqslant 2$ 时，$f'(x)\leqslant 0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

故 $0<a\leqslant 2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

(ii)当 $\Delta>0$，即 $a>2$ 时，令 $f'(x)=0$，得

$x=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ 或 $x=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$.

当 $x\in\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)\cup\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$，$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$ 上单调递增.

## 考点三

**考向 1** **典例 3** (1)**D** (2)**B** [(1)由题意得 $0<a<5$，$0<b<4$，$0<c<3$.

令 $f(x)=\frac{e^x}{x}(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上为减函数，在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，因为 $ae^5=5e^a$，所以 $\frac{e^5}{5}=\frac{e^a}{a}$，

即 $f(5)=f(a)$，而 $0<a<5$，

故 $0<a<1$. 同理 $0<b<1$，$0<c<1$，$f(4)=f(b)$，$f(3)=f(c)$.

因为 $f(5)>f(4)>f(3)$，所以 $f(a)>f(b)>f(c)$，

所以 $0<a<b<c<1$. 故选 D.

(2)由题意知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=-x+\sin x=-f(x)$，得 $f(x)$ 为奇函数，且 $f'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

由 $f(2m+1)+f(1-m)>0$ 得 $f(2m+1)>f(m-1)$，即 $2m+1>m-1$. 解得 $m>-2$. 故选 B.］

**考向 2 典例 4** **解**：(1) $g(x)=2x+\ln x-\dfrac{a}{x}(x>0)$，$g'(x)=2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^2}(x>0)$.

∵函数 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，

∴$g'(x)\geqslant 0$ 在 $[1,2]$ 上恒成立，

即 $2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^2}\geqslant 0$ 在 $[1,2]$ 上恒成立，

∴$a\geqslant -2x^2-x$ 在 $[1,2]$ 上恒成立，

∴$a\geqslant(-2x^2-x)_{\max}$，$x\in[1,2]$.

在 $[1,2]$ 上，$(-2x^2-x)_{\max}=-3$，

∴$a\geqslant -3$.

∴实数 $a$ 的取值范围是 $[-3,+\infty)$.

(2) $g(x)$ 在 $[1,2]$ 上存在单调递增区间，

则 $g'(x)>0$ 在 $[1,2]$ 上有解，

即 $a>-2x^2-x$ 在 $[1,2]$ 上有解，

∴$a>(-2x^2-x)_{\min}$，

又 $(-2x^2-x)_{\min}=-10$，∴$a>-10$.

∴实数 $a$ 的取值范围为 $(-10,+\infty)$.

**拓展变式**

**解**：(1)依题意 $g'(x)=2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^2}$ 在 $[1,2]$ 上满足 $g'(x)\leqslant 0$ 恒成立，∴当 $x\in[1,2]$ 时，$a\leqslant -2x^2-x$ 恒成立，

令 $t=-2x^2-x=-2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{1}{8}$，

∵该函数在 $[1,2]$ 上是减函数，∴当 $x=2$ 时，

$t=-2x^2-x$ 取得最小值 $-10$.

∴$a\leqslant -10$，即实数 $a$ 的取值范围为 $(-\infty,-10]$.

(2)∵函数 $g(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上不单调，

∴$g'(x)=0$ 在区间 $(1,2)$ 内有解，

则 $a=-2x^2-x=-2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{1}{8}$ 在 $(1,2)$ 内有解，

易知函数 $y=-2x^2-x$ 在 $(1,2)$ 上是减函数，

∴$y=-2x^2-x$ 的值域为 $(-10,-3)$，

因此实数 $a$ 的取值范围为 $(-10,-3)$.

**跟进训练**

3. (1)**A** (2) $(0,27)$ ［(1)因为 $f(x)=x\sin x$，所以 $f(-x)=(-x)\cdot\sin(-x)=x\sin x=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$. 又当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)=\sin x+x\cos x>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，所以 $f\left(\dfrac{\pi}{5}\right)<f(1)<f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$，即 $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)>f(1)>f\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$. 故选 A.

(2)**法一**(间接法)：若 $f(x)=x^3-kx$ 在 $(-3,1)$ 上是单调递增函数，则 $f'(x)=3x^2-k\geqslant 0$ 在 $(-3,1)$ 上恒成立，

即 $k\leqslant 3x^2$ 在 $(-3,1)$ 上恒成立，故 $k\leqslant 0$.

若 $f(x)=x^3-kx$ 在 $(-3,1)$ 上是单调递减函数，则 $f'(x)=3x^2-k\leqslant 0$ 在 $(-3,1)$ 上恒成立，

即 $k\geqslant 3x^2$ 在 $(-3,1)$ 上恒成立，故 $k\geqslant 27$.

所以当函数 $f(x)=x^3-kx$ 在 $(-3,1)$ 上是单调函数时，实数 $k$ 的取值范围是 $k\leqslant 0$ 或 $k\geqslant 27$，

当函数 $f(x)=x^3-kx$ 在 $(-3,1)$ 上不是单调函数时，实数 $k$ 的取值范围是 $0<k<27$.

**法二**(直接法)：由奇函数 $f(x)=x^3-kx$ 得 $f'(x)=3x^2-k$. 当 $k\leqslant 0$ 时，$f'(x)=3x^2-k\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，不满足题意；

当 $k>0$ 时，由 $f'(x)=3x^2-k<0$，得 $-\sqrt{\dfrac{k}{3}}<x<\sqrt{\dfrac{k}{3}}$，在 $\left(-\sqrt{\dfrac{k}{3}},\sqrt{\dfrac{k}{3}}\right)$ 上 $f(x)$ 是减函数.

由 $f'(x)=3x^2-k>0$，得 $x<-\sqrt{\dfrac{k}{3}}$ 或 $x>\sqrt{\dfrac{k}{3}}$. 在 $\left(-\infty,-\sqrt{\dfrac{k}{3}}\right)$，$\left(\sqrt{\dfrac{k}{3}},+\infty\right)$ 上 $f(x)$ 是增函数.

要满足函数 $f(x)=x^3-kx$ 在 $(-3,1)$ 上不是单调函数，由对称性得，$-\sqrt{\dfrac{k}{3}}>-3$，所以 $k<27$.

综上所述，实数 $k$ 的取值范围是 $(0,27)$.］

## 高考培优 2 构造函数妙解题

### 题型一

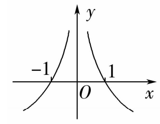
**考向 1 典例 1** $(-\infty,-3)\cup(0,3)$ ［借助导数的运算法则，$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0\Leftrightarrow[f(x)g(x)]'>0$，所以函数 $y=f(x)\cdot g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增. 又由题意知函数 $y=f(x)g(x)$ 为奇函数，所以其图象关于原点对称，且过点 $(-3,0)$，$(0,0)$，$(3,0)$. 数形结合(图略)可求得不等式 $f(x)g(x)<0$ 的解集是 $(-\infty,-3)\cup(0,3)$.］

**跟进训练**

1. **A** ［设函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，∵$F(-x)=\dfrac{f(-x)}{g(-x)}=\dfrac{-f(x)}{g(x)}=-F(x)$，∴函数 $F(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x<0$ 时，$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)>0$，且 $f(3)=0$，∴当 $x<0$ 时，$F'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}>0$，$F(3)=0$，∴$F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为增函数，且 $F(-3)=0$，∴当 $x\in(-3,0)$ 时，$F(x)>0$，此时，$f(x)g(x)>0$；

∵函数 $F(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，∴当 $x\in(3,+\infty)$ 时，$F(x)>0$，此时，$f(x)g(x)>0$. 综上，不等式 $f(x)g(x)>0$ 的解集是 $(-3,0)\cup(3,+\infty)$. 故选 A.］

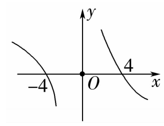
**考向 2 典例 2** (1) $(-1,0)\cup(0,1)$ (2) $(-\infty,-4)\cup(0,4)$ ［(1)构造 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$，则 $F'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot x-2f(x)}{x^3}$，




当 $x>0$ 时，$xf'(x)-2f(x)<0$，可以推出当 $x>0$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. ∵$f(x)$ 为偶函数，$y=x^2$ 为偶函数，∴$F(x)$ 为偶函数，∴$F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增. 根据 $f(-1)=0$ 可得 $F(-1)=0$，根据函数的单调性、奇偶性

可得函数图象如图所示，根据图象可知 $f(x)>0$ 的解集为 $(-1,0)\cup(0,1)$.

(2)构造 $F(x)=xf(x)$，则 $F'(x)=f(x)+xf'(x)$，当 $x<0$ 时，$f(x)+xf'(x)<0$，可以推出当 $x<0$ 时，$F'(x)<0$，



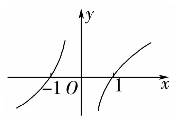

$\therefore F(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减.

$\because f(x)$为偶函数，$y=x$ 为奇函数，

$\therefore F(x)$为奇函数，$\therefore F(x)$在$(0,+\infty)$上也单调递减. 根据 $f(-4)=0$ 可得 $F(-4)=0$，根据函数的单调性、奇偶性可得函数图象如图所示，根据图象可知 $xf(x)>0$ 的解集为 $(-\infty,-4)\cup(0,4)$.]

**跟进训练**

2. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ [构造$F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，则 $F'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}$，当 $x<0$ 时，$xf'(x)-f(x)>0$，可以推出当 $x<0$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增. $\because f(x)$为偶函数，$y=x$ 为奇函数，$\therefore F(x)$为奇函数，




$\therefore F(x)$在$(0,+\infty)$上也单调递增. 根据 $f(1)=0$ 可得 $F(1)=0$，根据函数的单调性、奇偶性可得函数图象如图所示，根据图象可知 $f(x)>0$ 的解集为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.]

**考向** 3　**典例** 3　**B**　[构造函数 $g(t)=\dfrac{f(t)}{e^t}-1$，则 $g(2)=\dfrac{f(2)}{e^2}-1=0$.

$\because g'(t)=\dfrac{f'(t)-f(t)}{e^t}<0$，$\therefore$函数 $g(t)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

$\because f(t)<e^t$，$\therefore \dfrac{f(t)}{e^t}-1<0$，即$\dfrac{f(t)}{e^t}-1<g(2)$，

即 $g(t)<g(2)$，$\therefore t>2$，故选 B.]

**跟进训练**

3. $(0,+\infty)$　[构造 $F(x)=\dfrac{f(x)}{e^{2x}}$，

则 $F'(x)=\dfrac{e^{2x}f'(x)-2e^{2x}f(x)}{e^{4x}}=\dfrac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}$，

$\because$函数 $f(x)$满足 $f'(x)-2f(x)>0$，

则 $F'(x)>0$，$F(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

又$\because f(0)=1$，则 $F(0)=1$，$\therefore f(x)>e^{2x}\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{e^{2x}}>1\Leftrightarrow F(x)>F(0)$，根据单调性得 $x>0$.]

## 题型二

**考向** 1　**典例** 4　**C**　[因为对任意 $x\in(-\pi,0)$，$f'(x)\sin x<f(x)\cos x$ 恒成立，即对任意 $x\in(-\pi,0)$，$f'(x)\sin x-f(x)\cos x<0$ 恒成立，

又 $x\in(-\pi,0)$时，$\sin x<0$，

所以$\left[\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]'=\dfrac{f'(x)\sin x-f(x)\cos x}{\sin^2 x}<0$，

所以 $y=\dfrac{f(x)}{\sin x}$在$(-\pi,0)$上单调递减，

因为$-\dfrac{5\pi}{6}<-\dfrac{3\pi}{4}$，

所以$\dfrac{f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}{\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}>\dfrac{f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$，

即$\dfrac{f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}{-\frac{1}{2}}>\dfrac{f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$，

所以$\sqrt{2}f\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)<f\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)$，故选 C.]

**跟进训练**

4. **D**　[$f(x)<f'(x)\tan x\Leftrightarrow f'(x)\sin x-f(x)\cos x>0$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{\sin x}$，

则 $F'(x)=\dfrac{f'(x)\sin x-f(x)\cos x}{\sin^2 x}>0$，

即函数 $F(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上是增函数，

A 项，$F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)<F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$，

即$\dfrac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\pi}{4}}<\dfrac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}$，

$\therefore\sqrt{3}f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)<\sqrt{2}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$，故 A 项错误；

B 项，$F(1)>F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，即$\dfrac{f(1)}{\sin 1}>\dfrac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\pi}{6}}$，

$\therefore f(1)>2f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\sin 1$，故 B 项错误；

C 项，$F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)<F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，

即$\dfrac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\pi}{6}}<\dfrac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\pi}{4}}$，

$\therefore\sqrt{2}f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)<f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，故 C 项错误；

D 项，$F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)<F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$，

即$\dfrac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\pi}{6}}<\dfrac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}$，

$\therefore\sqrt{3}f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)<f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$，故选 D.]

**考向** 2　**典例** 5　**B**　[$b-c=\ln 1.02-\sqrt{1.04}+1$，设 $f(x)=\ln(x+1)-\sqrt{1+2x}+1$，

则 $b-c=f(0.02)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{2\sqrt{1+2x}}=\dfrac{\sqrt{1+2x}-(x+1)}{\sqrt{1+2x}\cdot(x+1)}$，当 $x\geqslant 0$ 时，$x+1=\sqrt{(x+1)^2}\geqslant\sqrt{1+2x}$，故当 $x\geqslant 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{\sqrt{1+2x}-(x+1)}{\sqrt{1+2x}\cdot(x+1)}\leqslant 0$，所以$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减，所以 $f(0.02)<f(0)=0$，即 $b<c$.

$a-c=2\ln 1.01-\sqrt{1.04}+1$，设 $g(x)=2\ln(x+1)-\sqrt{1+4x}+1$，则 $a-c=g(0.01)$，$g'(x)=\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{4}{2\sqrt{1+4x}}=\dfrac{2[\sqrt{1+4x}-(x+1)]}{(x+1)\sqrt{1+4x}}$，当 $0\leqslant x<2$ 时，$\sqrt{4x+1}\geqslant\sqrt{(x+1)^2}=x+1$，故当 $0\leqslant x<2$ 时，$g'(x)\geqslant 0$，所以 $g(x)$ 在 $[0,2)$ 上单调递增，所以 $g(0.01)>g(0)=0$，故 $c<a$，从而有 $b<c<a$，故选 B.]

**跟进训练**

5. **D**　[$\because a=2e^{-0.2}$，$b=e^{0.2}$，$\therefore \ln a=-0.2+\ln 2$，$\ln b=0.2$，

$\therefore \ln a-\ln b=-0.4+\ln 2>-0.4+\ln\sqrt{e}=-0.4+0.5=0.1>0$，$\therefore \ln a>\ln b$，$\therefore a>b$.

设 $f(x)=e^x-(x+1)$，$\therefore f'(x)=e^x-1$，

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，$\therefore f(x)\geqslant f(0)=1-(0+1)=0$，$\therefore f(0.2)>0$，即 $e^{0.2}-(0.2+1)>0$，即 $e^{0.2}>1.2$，

$\therefore b>c$，$\therefore a>b>c$. 故选 D.]

**考向 3　典例 6**　(1)**ACD**　(2)**D**　[(1)令 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，当 $0<x<e$ 时，$g'(x)>0$，当 $x>e$ 时，$g'(x)<0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减. $\because 2<e$，$\therefore g(2)<g(e)$，即 $\dfrac{\ln 2}{2}<\dfrac{\ln e}{e}=\dfrac{1}{e}$，$\therefore \ln 2<\dfrac{2}{e}$，故 A 错误.

$\because e<3<\pi$，$\therefore g(e)>g(3)>g(\pi)$，即 $\dfrac{\ln e}{e}=\dfrac{1}{e}>\dfrac{\ln 3}{3}>\dfrac{\ln\pi}{\pi}$，

$\therefore \ln 3<\dfrac{3}{e}$，$\ln\pi<\dfrac{\pi}{e}$，$\dfrac{\ln 3}{\ln\pi}>\dfrac{3}{\pi}$，故 B 正确，C，D 错误. 故选 ACD.

(2)对于 A，B，令 $f(x)=e^x-\ln x$，则 $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$，

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$ 单调递增，且 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}-2<0$，$f'\left(\dfrac{2}{3}\right)=e^{\frac{2}{3}}-\dfrac{3}{2}=\sqrt[3]{e^2}-\sqrt[3]{1.5^3}>\sqrt[3]{7.29}-\sqrt[3]{1.5^3}>0$，故存在 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right)$，使得 $f'(x_0)=0$，则当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f(x)=e^x-\ln x$ 单调递减，当 $x\in(x_0,1)$ 时，$f(x)=e^x-\ln x$ 单调递增，由于 $0<a<b<1$，此时 $f(a)=e^a-\ln a$，$f(b)=e^b-\ln b$ 大小关系不确定，故 A，B 均错误；

对于 C，D，设 $g(x)=\dfrac{e^x}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$，

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)=\dfrac{e^x}{x}$ 单调递减，

所以当 $0<a<b<1$ 时，$g(a)>g(b)$，即 $\dfrac{e^a}{a}>\dfrac{e^b}{b}$，即 $be^a>ae^b$，故 C 错误，D 正确. 故选 D.]

**跟进训练**

6. (1)**B**　(2)**B**　[(1)原不等式可转化为 $\dfrac{1+\ln x_1}{x_1}<\dfrac{1+\ln x_2}{x_2}$，

令 $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$，则 $f'=\dfrac{-\ln x}{x^2}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减.

由于 $0<x_1<x_2\leqslant a$ 时有 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,a]$ 上单调递增，

所以 $0<a\leqslant 1$，

所以 $a$ 的最大值为 1.

故选 B.

(2)由 $ae^{a+1}+b<b\ln b$，可得 $ae^{a+1}<b\ln b-b=b(\ln b-1)=b\ln\dfrac{b}{e}$，

即 $e^a\ln e^a<\dfrac{b}{e}\ln\dfrac{b}{e}$，

设 $f(x)=x\ln x$，可得 $f(e^a)<f\left(\dfrac{b}{e}\right)$，

因为 $a>0$，可得 $e^a>1$，

又因为 $b(\ln b-1)>0$，$b>0$，所以 $\ln b>1$，即 $b>e$，所以 $\dfrac{b}{e}>1$，当 $x>1$ 时，$f'(x)=\ln x+1>0$，可得函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，所以 $e^a<\dfrac{b}{e}$，即 $b>e^{a+1}$. 故选 B.]

## 第 3 课时　函数的极值与最大(小)值

**梳理·必备知识**

1. (1) $f'(x)<0$　$f'(x)>0$　$a$　(2) $f'(x)>0$　$f'(x)<0$　$b$

(3)极值点　极值

2. (1)连续不断　(2)极值　端点处的函数值 $f(a)$，$f(b)$

**激活·基本技能**

一、(1)√　(2)×　(3)×　(4)×

二、1. **A**　[由题意知在 $x=-1$ 处 $f'(-1)=0$，且其两侧导数符号为左负右正，$f(x)$ 在 $x=-1$ 左减右增，$f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极小值. 故选 A.]

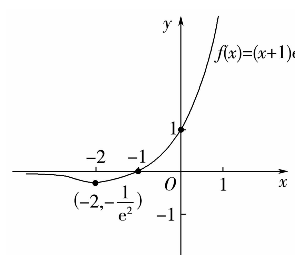
2. **C**　[因为 $f(x)=(x+1)e^x$，所以 $f'(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$.

令 $f'(x)>0$，解得 $x>-2$；令 $f'(x)<0$，解得 $x<-2$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增.

方程 $f(x)=a(a\in\mathbf{R})$ 有 2 个解时，只需函数 $y=a$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象有两个交点.

如图所示：




要满足题意，实数 $a$ 的范围为 $\left(-\dfrac{1}{e^2},0\right)$. 故选 C.]

3. **C**　[函数 $f(x)=x(x-c)^2$ 的导数为 $f'(x)=3x^2-4cx+c^2$.

由题意知，$f(x)$ 在 $x=2$ 处的导数值为 $12-8c+c^2=0$，解得 $c=2$ 或 6.

又函数 $f(x)=x(x-c)^2$ 在 $x=2$ 处有极小值，故导数在 $x=$

2 处左侧为负,右侧为正.当 $c=2$ 时,$f(x)=x(x-2)^2$ 的导数在 $x=2$ 处左侧为负,右侧为正,即在 $x=2$ 处有极小值.而当 $c=6$ 时,$f(x)=x(x-6)^2$ 在 $x=2$ 处有极大值.故 $c=2$.]

4.4 [$f'(x)=x^2-4$,$x\in[0,3]$,当 $x\in[0,2)$ 时,$f'(x)<0$,当 $x\in(2,3]$ 时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $[0,2)$ 上单调递减,在 $(2,3]$ 上单调递增.又 $f(0)=m$,$f(3)=-3+m$.所以在 $[0,3]$ 上,$f(x)_{\max}=f(0)=4$,所以 $m=4$.]

**考点一**

**考向 1 典例 1 BD** [由题图可知,当 $x<-2$ 时,$f'(x)>0$;当 $-2<x<1$ 时,$f'(x)<0$;当 $1<x<2$ 时,$f'(x)<0$;当 $x>2$ 时,$f'(x)>0$.由此可以得到函数 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处取得极大值,在 $x=2$ 处取得极小值.]

**考向 2 典例 2 解:**(1)当 $a=\frac{1}{2}$ 时,$f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x$,定义域为 $(0,+\infty)$,且 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=\frac{2-x}{2x}$.

令 $f'(x)=0$,解得 $x=2$.

于是当 $x$ 变化时,$f'(x)$,$f(x)$ 的变化情况如下表.

| $x$ | $(0,2)$ | 2 | $(2,+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − |
| $f(x)$ | 单调递增 | $\ln 2-1$ | 单调递减 |

故 $f(x)$ 在定义域上的极大值为 $f(2)=\ln 2-1$,无极小值.

(2)函数的定义域为 $(0,+\infty)$,$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$.

若 $a\leqslant 0$,$f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,

即函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,此时函数 $f(x)$ 在定义域上无极值点;

若 $a>0$,当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 时,$f'(x)>0$,

当 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时,$f'(x)<0$,

故函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{a}$ 处有极大值.

综上可知,当 $a\leqslant 0$ 时,函数 $f(x)$ 无极值点;

当 $a>0$ 时,函数 $f(x)$ 有一个极大值点,且为 $x=\frac{1}{a}$.

**考向 3 典例 3** (1)**B** [$f(x)=\frac{1}{3}x^3+(a+1)x^2-(a^2+a-3)x\Rightarrow f'(x)=x^2+2(a+1)x-(a^2+a-3)$,由题意可知,$f'(1)=0\Rightarrow f'(1)=1+2(a+1)-(a^2+a-3)=0\Rightarrow a=3$ 或 $a=-2$.

当 $a=3$ 时,$f'(x)=x^2+2(a+1)x-(a^2+a-3)=x^2+8x-9=(x+9)(x-1)$,

当 $x>1$ 或 $x<-9$ 时,$f'(x)>0$,函数单调递增;当 $-9<x<1$ 时,$f'(x)<0$,函数单调递减,显然 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极值点.

当 $a=-2$ 时,$f'(x)=x^2+2(a+1)x-(a^2+a-3)=x^2-2x+1=(x-1)^2\geqslant 0$,所以函数是 **R** 上的增函数,没有极值,不符合题意,舍去,故选 B.]

(2)**解:**①当 $a=1$,$b=-2$ 时,$f(x)=\ln x-\frac{2}{x}-x$,其中 $x>0$,$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-1$.

设切点为 $(x_0,y_0)$,$\because$ 切线斜率为 2,$\therefore f'(x_0)=2$,$\therefore \frac{1}{x_0}+\frac{2}{x_0^2}-1=2$.

解得 $x_0=1$,$x_0=-\frac{2}{3}$(舍去).

当 $x_0=1$ 时,$y_0=f(1)=\ln 1-2-1=-3$.

$\therefore$ 切线方程为 $y-(-3)=2(x-1)$,

即 $2x-y-5=0$.

②$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}-1$,$\because x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点,$\therefore f'(1)=a-b-1=0$,$\therefore a=b+1$,

$\therefore f'(x)=-\frac{x^2-(b+1)x+b}{x^2}=-\frac{(x-1)(x-b)}{x^2}$.

(i)若 $b\leqslant 0$,此时 $x-b>0$,令 $f'(x)=0$,得 $x=1$.

当 $0<x<1$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增;当 $x>1$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,

此时 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值,舍去.

(ii)若 $b=1$,$f'(x)=-\frac{(x-1)^2}{x^2}\leqslant 0$,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,$f(x)$ 不存在极值,舍去.

(iii)若 $0<b<1$,当 $0<x<b$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减;

当 $b<x<1$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增;

当 $x>1$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,

此时 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值,舍去.

(iv)若 $b>1$,当 $0<x<1$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减;

当 $1<x<b$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增;当 $x>b$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,

此时 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值,符合题意.

综上所述,$b$ 的取值范围为 $(1,+\infty)$.

**跟进训练**

1.(1)18 [函数 $f(x)=x^3-3ax+2$ 的导数 $f'(x)=3x^2-3a$,由题意得,$f'(2)=0$,即 $12-3a=0$,解得 $a=4$.

$\therefore f(x)=x^3-12x+2$,$\therefore f'(x)=3x^2-12=3(x-2)(x+2)$,由 $f'(x)>0$,得 $x>2$ 或 $x<-2$,即函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递增;

由 $f'(x)<0$,得 $-2<x<2$,函数 $f(x)$ 在 $(-2,2)$ 上单调递减;

故 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值,$x=-2$ 处取得极大值,

且 $f(-2)=-8+24+2=18$.即 $f(x)_{极大值}=18$.]

(2)**解:**$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}-a$,令 $g(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}-a$,则 $g'(x)=\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$.因为对于 $\forall x\in(-2,-1)$,$g'(x)=\frac{e^x[(x-1)^2+1]}{x^3}<0$ 恒成立,所以 $g(x)$ 在 $(-2,-1)$ 上单调递减.即 $f'(x)$ 在 $(-2,-1)$ 上单调递减,因为 $f(x)$ 在 $(-2,-1)$ 上有极大值,所以 $y=f'(x)$ 在 $(-2,-1)$ 上存在

“左正右负”变号零点．由零点存在定理只需$\begin{cases}f'(-2)>0,\\f'(-1)<0,\end{cases}$

即$\begin{cases}-\dfrac{3}{4e^2}-a>0,\\-\dfrac{2}{e}-a<0,\end{cases}$所以$-\dfrac{2}{e}<a<-\dfrac{3}{4e^2}$．所以函数$f(x)$在$(-2,-1)$上有极大值时，$a$的取值范围为$\left(-\dfrac{2}{e},-\dfrac{3}{4e^2}\right)$．

**考点二**

**典例4　解：**(1)易知$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

当$a=-1$时，$f(x)=-x+\ln x$，

$f'(x)=-1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1-x}{x}$，

令$f'(x)=0$，得$x=1$．

当$0<x<1$时，$f'(x)>0$；当$x>1$时，$f'(x)<0$．

$\therefore f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减．

$\therefore f(x)_{\max}=f(1)=-1$．

$\therefore$当$a=-1$时，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上的最大值为$-1$．

(2)$f'(x)=a+\dfrac{1}{x}$，$x\in(0,e]$，$\dfrac{1}{x}\in\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$．

①若$a\geqslant-\dfrac{1}{e}$，则$f'(x)\geqslant0$，从而$f(x)$在$(0,e]$上单调递增，

$\therefore f(x)_{\max}=f(e)=ae+1\geqslant0$，不符合题意．

②若$a<-\dfrac{1}{e}$，令$f'(x)>0$得$a+\dfrac{1}{x}>0$，结合$x\in(0,e]$，解得$0<x<-\dfrac{1}{a}$；

令$f'(x)<0$得$a+\dfrac{1}{x}<0$，结合$x\in(0,e]$，解得$-\dfrac{1}{a}<x\leqslant e$．

从而$f(x)$在$\left(0,-\dfrac{1}{a}\right)$上单调递增，在$\left(-\dfrac{1}{a},e\right]$上单调递减，

$\therefore f(x)_{\max}=f\left(-\dfrac{1}{a}\right)=-1+\ln\left(-\dfrac{1}{a}\right)$．

令$-1+\ln\left(-\dfrac{1}{a}\right)=-3$，即$a=-e^2$．

$\because -e^2<-\dfrac{1}{e}$，$\therefore a=-e^2$．

**跟进训练**

2.**解：**$f(x)=e^x-ax$的定义域为$\mathbf{R}$，$f'(x)=e^x-a$，

若$a\leqslant0$，则$f'(x)>0$，此时$f(x)$无最小值，故$a>0$．

当$x<\ln a$时，$f'(x)<0$，故$f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上单调递减，

当$x>\ln a$时，$f'(x)>0$，故$f(x)$在$(\ln a,+\infty)$上单调递增，

故$f(x)_{\min}=f(\ln a)=a-a\ln a$．

$g(x)=ax-\ln x$的定义域为$(0,+\infty)$，

$g'(x)=a-\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax-1}{x}$．

当$0<x<\dfrac{1}{a}$时，$g'(x)<0$，故$g(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$上单调递减，

当$x>\dfrac{1}{a}$时，$g'(x)>0$，故$g(x)$在$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增，

故$g(x)_{\min}=g\left(\dfrac{1}{a}\right)=1-\ln\dfrac{1}{a}$．

因为$f(x)=e^x-ax$和$g(x)=ax-\ln x$有相同的最小值，

故$1-\ln\dfrac{1}{a}=a-a\ln a$，整理得到$\dfrac{a-1}{1+a}=\ln a$，其中$a>0$，

设$m(a)=\dfrac{a-1}{1+a}-\ln a$，$a>0$，则$m'(a)=\dfrac{2}{(1+a)^2}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{-a^2-1}{a(1+a)^2}<0$，

故$m(a)$在$(0,+\infty)$上单调递减，而$m(1)=0$，

故$m(a)=0$的唯一解为$a=1$，故$\dfrac{a-1}{1+a}=\ln a$的解为$a=1$．

综上，$a=1$．

## 第4课时　利用导数证明不等式

**考点一**

**典例1　证明：**$x^2-x+\dfrac{1}{x}+2\ln x-f(x)$

$=x(x-1)-\dfrac{x-1}{x}-2(x-1)\ln x$

$=(x-1)\cdot\left(x-\dfrac{1}{x}-2\ln x\right)$，

令$g(x)=x-\dfrac{1}{x}-2\ln x$，

则$g'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}\geqslant0$，

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，又$g(1)=0$，

所以当$0<x<1$时，$g(x)<0$，

当$x>1$时，$g(x)>0$，

所以$(x-1)\left(x-\dfrac{1}{x}-2\ln x\right)\geqslant0$，

即$f(x)\leqslant x^2-x+\dfrac{1}{x}+2\ln x$．

**跟进训练**

1.**证明：**令$g(x)=x^2e^{2x-2}+2x^2-8x+5$，$x\in[0,2]$，

则$g'(x)=2e^{2x-2}(x^2+x)+4x-8$，$x\in[0,2]$．

令$h(x)=g'(x)$，则$h'(x)=2e^{2x-2}(2x^2+4x+1)+4>0$，

所以$g'(x)$在$[0,2]$上单调递增，且$g'(1)=0$，

所以$g(x)$在$[0,1)$上单调递减，在$(1,2]$上单调递增，

所以$g(x)$的最小值为$g(1)=0$，所以$g(x)\geqslant0$，

即$x^2e^{2x-2}\geqslant-2x^2+8x-5$．

**考点二**

**典例2**　(1)**解：**函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=ae^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{be^{x-1}(x-1)}{x^2}$，

依题意得$\begin{cases}f(1)=2,\\f'(1)=e,\end{cases}$解得$a=1$，$b=2$．

(2)**证明：**由(1)知$f(x)=e^x\ln x+\dfrac{2e^{x-1}}{x}$，从而$f(x)>1$等价于$x\ln x>xe^{-x}-\dfrac{2}{e}$．

构造函数$g(x)=x\ln x(x>0)$，则$g'(x)=1+\ln x$，所以当$x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$时，$g'(x)<0$，当$x\in\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$时，$g'(x)>0$，故$g(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$上单调递减，在$\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$上单调递增，从

而 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$. 构造函数 $h(x)=xe^{-x}-\frac{2}{e}(x>0)$，则 $h'(x)=e^{-x}(1-x)$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值为 $h(1)=-\frac{1}{e}$.

综上，当 $x>0$ 时，$g(x)>h(x)$，即 $f(x)>1$.

**跟进训练**

2.(1)**解**：函数 $f(x)=x\ln x-ax$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

当 $a=-1$ 时，$f(x)=x\ln x+x$，$f'(x)=\ln x+2$.

由 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{e^2}$.

当 $x\in\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in\left(\frac{1}{e^2},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{e^2},+\infty\right)$ 上单调递增. 因此 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{e^2}$ 处取得最小值，即 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{e^2}\right)=-\frac{1}{e^2}$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无最大值.

(2)**证明**：当 $x>0$ 时，$\ln x+1>\frac{1}{e^{x+1}}-\frac{2}{e^2x}$ 等价于 $x(\ln x+1)>\frac{x}{e^{x+1}}-\frac{2}{e^2}$.

由(1)知 $a=-1$ 时，$f(x)=x\ln x+x$ 的最小值是 $-\frac{1}{e^2}$，当且仅当 $x=\frac{1}{e^2}$ 时取等号.

设 $G(x)=\frac{x}{e^{x+1}}-\frac{2}{e^2}$，$x\in(0,+\infty)$，

则 $G'(x)=\frac{1-x}{e^{x+1}}$，易知 $G(x)_{\max}=G(1)=-\frac{1}{e^2}$，

当且仅当 $x=1$ 时取到，

从而可知对一切 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f(x)>G(x)$，

即 $\ln x+1>\frac{1}{e^{x+1}}-\frac{2}{e^2x}$.

**考点三**

**跟进训练**

3.(1)**解**：因为函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，

所以当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，

所以当 $0<x<1$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，

当 $x>1$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增.

所以 $f(x)\geqslant f(1)=0$，即函数 $f(x)$ 的最小值为 0.

(2)**证明**：当 $x\in(0,\pi)$ 时，要证明 $e^x>(1-\ln x)\sin x$，

只要证 $\frac{e^x}{\sin x}>1-\ln x$，

由(1)可知 $\ln x+\frac{1}{x}-1\geqslant0$，即 $\frac{1}{x}\geqslant1-\ln x$，

所以要证 $\frac{e^x}{\sin x}>1-\ln x$，只需证 $\frac{e^x}{\sin x}>\frac{1}{x}$，

即证 $xe^x-\sin x>0$.

令 $h(x)=xe^x-\sin x$，则 $h'(x)=(x+1)e^x-\cos x$，

当 $0<x<\pi$ 时，

$h'(x)=(x+1)e^x-\cos x>e^0-1=0$，

所以函数 $h(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增，

所以当 $0<x<\pi$ 时，$h(x)>h(0)=0$，

即 $xe^x-\sin x>0$，

所以当 $x\in(0,\pi)$ 时，不等式 $e^x>(1-\ln x)\cdot\sin x$ 成立.

## 第 5 课时　利用导数解决恒(能)成立问题

**考点一**

**典例 1　法一**(函数最值法)：

**解**：$x^2f(x)+a\geqslant2-e$，即 $x\ln x-ax+a+e-2\geqslant0$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立.

令 $h(x)=x\ln x-ax+a+e-2$，

则 $h'(x)=\ln x+1-a$.

令 $h'(x)=0$，得 $x=e^{a-1}$.

当 $x\in(0,e^{a-1})$ 时，$h'(x)<0$；

当 $x\in(e^{a-1},+\infty)$ 时，$h'(x)>0$.

所以 $h(x)$ 的最小值是 $h(e^{a-1})=a+e-2-e^{a-1}$.

令 $t(a)=a+e-2-e^{a-1}$，则 $t'(a)=1-e^{a-1}$.

令 $t'(a)=0$ 得 $a=1$.

当 $a\in[0,1)$ 时，$t'(a)>0$，$t(a)$ 在 $[0,1)$ 上单调递增；

当 $a\in(1,+\infty)$ 时，$t'(a)<0$，$t(a)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

所以当 $a\in[0,1)$ 时，$h(x)$ 的最小值为 $t(a)\geqslant t(0)=e-2-\frac{1}{e}>0$；

当 $a\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)$ 的最小值为 $t(a)\geqslant t(2)=0$.

故 $a\in[0,2]$.

**法二**(分离参数法)：

**解**：原不等式恒成立可转化为 $x\ln x+e-2\geqslant a(x-1)(*)$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立.

当 $x\in(0,1)$ 时，分离变量可得

$a\geqslant\frac{x\ln x+e-2}{x-1}$.

令 $g(x)=x\ln x$，

先求出函数 $g(x)=x\ln x$ 的最小值.

求得 $g'(x)=\ln x+1$.

当 $x\in(0,e^{-1})$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(e^{-1},+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

所以 $g(x)_{\min}=g(e^{-1})=-e^{-1}$.

因为此时 $(x\ln x)_{\min}=-e^{-1}$，

所以 $x\ln x+e-2\geqslant-e^{-1}+e-2>0$.

又因为 $x\in(0,1)$，所以 $\frac{x\ln x+e-2}{x-1}<0$，

而 $a\geqslant0$，所以 $a\geqslant\frac{x\ln x+e-2}{x-1}$ 显然成立.

当 $x=1$ 时，代入$(*)$式验证 $e-2\geqslant0$ 显然成立.

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$(*)$式分离变量可变为 $a\leqslant\frac{x\ln x+e-2}{x-1}$.

若令 $t(x)=\dfrac{x\ln x+e-2}{x-1}$，此时只需当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$a\leqslant t(x)_{\min}$.

求得 $t'(x)=\dfrac{x-\ln x-(e-1)}{(x-1)^2}$，

易得 $t'(e)=0$.

下证 $x=e$ 是 $t'(x)=\dfrac{x-\ln x-(e-1)}{(x-1)^2}$ 在 $(1,+\infty)$ 上的唯一零点.

令 $h(x)=x-\ln x-(e-1)$，则 $h'(x)=1-\dfrac{1}{x}$.

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 单调递增.

即 $x=e$ 是 $t'(x)=\dfrac{x-\ln x-(e-1)}{(x-1)^2}$ 的唯一零点.

当 $x\in(1,e)$ 时，$t'(x)<0$，$t(x)$ 单调递减；

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$t'(x)>0$，$t(x)$ 单调递增.

所以 $a\leqslant t(x)_{\min}=t(e)=2$，故 $a\in[0,2]$.

**法三(数形结合)：**

**解**：通过变形原不等式恒成立等价于证明 $x\ln x\geqslant a(x-1)+(2-e)$，$x\in(0,+\infty)$.

若令 $g(x)=x\ln x$，$h(x)=a(x-1)+(2-e)$，

则只需证明函数 $g(x)$ 的图象在直线 $h(x)$ 的上方.

首先分析 $g(x)=x\ln x$ 的图象.

由法二可知：当 $x\in(0,e^{-1})$ 时，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(e^{-1},+\infty)$ 时，$g(x)$ 单调递增，

且 $g(x)_{\min}=g(e^{-1})=-e^{-1}$.

其次分析 $h(x)=a(x-1)+(2-e)$ 的图象.

因为 $a\geqslant0$，所以 $h(x)$ 表示过定点 $(1,2-e)$ 的非减函数，

且 $g(x)_{\min}=-e^{-1}>2-e$.

两个函数的图象大致如图 1 所示：

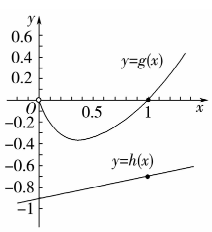



图 1

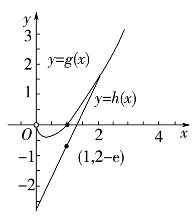



图 2

所以如果能说明当 $g(x)$ 和 $h(x)$ 相切时二者只有一个切点，如图 2，就能求出 $a$ 的最大值.

设 $g(x)$ 和 $h(x)$ 相切于点 $P(x_0,y_0)$，

则可得 $\begin{cases}a(x_0-1)+2-e=x_0\ln x_0, & ①\\ a=g'(x_0)=\ln x_0+1. & ②\end{cases}$

消去 $\ln x_0$ 得 $2-e=a-e^{a-1}$.　　③

易得 $a=2$ 为③式的解.

令 $t(a)=a-e^{a-1}+e-2$，$t'(a)=1-e^{a-1}$.

当 $t'(a)=0$ 时，$a=1$.

当 $a\in[0,1)$ 时，$t'(a)>0$，$t(a)$ 单调递增；

当 $a\in(1,+\infty)$ 时，$t'(a)<0$，$t(a)$ 单调递减.

因为 $t(0)=-e^{-1}+e-2>0$ 且 $t(1)=e-2>0$，

所以函数 $t(a)$ 在区间 $[0,1]$ 上无零点，

又 $t(2)=0$，所以函数 $t(a)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上有且仅有一个零点，$a=2$.

综上所述，$a\in[0,2]$.

**跟进训练**

1. **解**：(1) $f'(x)=ae^x-1$，

当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)\leqslant0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x>-\ln a$，令 $f'(x)<0$，得 $x<-\ln a$，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减，在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增.

综上可得，当 $a\leqslant0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减，在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增.

(2)**证明**：由(1)得当 $a>0$ 时，函数 $f(x)=a(e^x+a)-x$ 的最小值为 $f(-\ln a)=a(e^{-\ln a}+a)+\ln a=1+a^2+\ln a$，

令 $g(a)=1+a^2+\ln a-2\ln a-\dfrac{3}{2}=a^2-\ln a-\dfrac{1}{2}$，$a\in(0,+\infty)$，

所以 $g'(a)=2a-\dfrac{1}{a}$，

令 $g'(a)>0$，得 $a>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

令 $g'(a)<0$，得 $0<a<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

所以函数 $g(a)$ 在 $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以函数 $g(a)$ 的最小值为 $g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}=\ln\sqrt{2}>0$，

所以当 $a>0$ 时，$f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$ 成立.

## 考点二

**典例 2　解**：依题意，只需 $[f(x_0)-g(x_0)]_{\min}<0$，$x_0\in[1,e]$ 即可.

令 $h(x)=f(x)-g(x)=x-a\ln x+\dfrac{a+1}{x}$，$x\in[1,e]$，

则 $h'(x)=1-\dfrac{a}{x}-\dfrac{a+1}{x^2}$

$=\dfrac{x^2-ax-(a+1)}{x^2}=\dfrac{[x-(a+1)](x+1)}{x^2}$.

令 $h'(x)=0$，得 $x=a+1$.

①当 $a+1\leqslant1$，即 $a\leqslant0$ 时，$h'(x)\geqslant0$，$h(x)$ 单调递增，$h(x)_{\min}=h(1)=a+2<0$，得 $a<-2$；

②当 $1<a+1<e$，即 $0<a<e-1$ 时，

$h(x)$ 在 $[1,a+1)$ 上单调递减，在 $(a+1,e]$ 上单调递增，

故 $h(x)_{\min}=h(a+1)=(a+1)-a\ln(a+1)+1=a[1-\ln(a+1)]+2>2$，与 $h(x)<0$ 不符，故舍去.

③当 $a+1\geqslant e$，即 $a\geqslant e-1$ 时，$h(x)$ 在 $[1,e]$ 上单调递减，则

$h(x)_{\min}=h(\mathrm{e})=\mathrm{e}-a+\frac{a+1}{\mathrm{e}}<0$,得 $a>\frac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}-1}>\mathrm{e}-1$ 成立.

综上所述,$a$ 的取值范围为$(-\infty,-2)\cup\left(\frac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}-1},+\infty\right)$.

**跟进训练**

2.**解**:(1)因为 $f'(x)=a-\mathrm{e}^x$,$x\in\mathbf{R}$.

当 $a\leqslant0$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;

当 $a>0$ 时,令 $f'(x)=0$,得 $x=\ln a$.

由 $f'(x)>0$,得 $f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,\ln a)$;

由 $f'(x)<0$,得 $f(x)$的单调递减区间为$(\ln a,+\infty)$.

综上所述,当 $a\leqslant0$ 时,$f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,+\infty)$,无单调递增区间;

当 $a>0$ 时,$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,\ln a)$,单调递减区间为$(\ln a,+\infty)$.

(2)因为$\exists x\in(0,+\infty)$,使不等式 $f(x)-g(x)+\mathrm{e}^x\leqslant0$ 成立,

所以$\exists x\in(0,+\infty)$,使得 $ax\leqslant\frac{\ln x}{x}$,即 $a\leqslant\frac{\ln x}{x^2}$.

则问题转化为 $a\leqslant\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)_{\max}$,设 $h(x)=\frac{\ln x}{x^2}$,由 $h'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$,令 $h'(x)=0$,得 $x=\sqrt{\mathrm{e}}$.

当 $x$ 在区间$(0,+\infty)$内变化时,$h'(x)$,$h(x)$随 $x$变化的变化情况如下表:

| $x$ | $(0,\sqrt{\mathrm{e}})$ | $\sqrt{\mathrm{e}}$ | $(\sqrt{\mathrm{e}},+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ |
| $h(x)$ | 单调递增 | $\frac{1}{2\mathrm{e}}$ | 单调递减 |

由上表可知,当 $x=\sqrt{\mathrm{e}}$时,函数 $h(x)$有极大值,即最大值,为$\frac{1}{2\mathrm{e}}$,所以 $a\leqslant\frac{1}{2\mathrm{e}}$.

故 $a$ 的取值范围是$\left(-\infty,\frac{1}{2\mathrm{e}}\right]$.

**考点三**

**典例3** **解**:(1)存在 $x_1,x_2\in[0,2]$,使得$g(x_1)-g(x_2)\geqslant M$成立,等价于$[g(x_1)-g(x_2)]_{\max}\geqslant M$成立.

$g'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$,

令 $g'(x)=0$,得 $x=0$ 或 $x=\frac{2}{3}$,

$\because g\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{85}{27}$,$g(0)=-3$,$g(2)=1$,

$\therefore$当 $x\in[0,2]$时,$g(x)_{\max}=g(2)=1$,

$g(x)_{\min}=g\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{85}{27}$,

$\therefore M\leqslant1-\left(-\frac{85}{27}\right)=\frac{112}{27}$,

$\therefore$满足条件的最大整数 $M$ 为 4.

(2)对任意的 $s,t\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,都有 $f(s)\geqslant g(t)$,

则 $f(x)_{\min}\geqslant g(x)_{\max}$.

由(1)知当 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$时,$g(x)_{\max}=g(2)=1$,

$\therefore$当 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$时,$f(x)=\frac{a}{x}+x\ln x\geqslant1$ 恒成立,

即 $a\geqslant x-x^2\ln x$ 恒成立.

令 $h(x)=x-x^2\ln x$,$x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,

$\therefore h'(x)=1-2x\ln x-x$,

令 $\varphi(x)=1-2x\ln x-x$,

$\therefore \varphi'(x)=-3-2\ln x<0$,

$h'(x)$在$\left[\frac{1}{2},2\right]$上单调递减,

又 $h'(1)=0$,

$\therefore$当 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$时,$h'(x)\geqslant0$,当 $x\in[1,2]$时,$h'(x)\leqslant0$,

$\therefore h(x)$在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上单调递增,在$[1,2]$上单调递减,

$\therefore h(x)_{\max}=h(1)=1$,

故 $a\geqslant1$.

$\therefore$实数 $a$ 的取值范围是$[1,+\infty)$.

**跟进训练**

3.**解**:(1)令 $f(x)=g(x)$,得$\frac{1}{2}x^2+x-\ln(x+1)=-a$,设 $h(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\ln(x+1)$,因为当 $x\in[0,2]$时,$h'(x)=x+1-\frac{1}{x+1}=\frac{x^2+2x}{x+1}>0$,所以 $h(x)$在$[0,2]$上单调递增,由此可得$h(x)$在$[0,2]$上的取值范围是$[0,4-\ln 3]$,若存在 $x_0\in[0,2]$,使得 $f(x_0)>g(x_0)$成立,即 $h(x_0)>-a$ 有解,则 $h(x)_{\max}>-a$,所以 $a>\ln 3-4$.

(2)$f(x)$在$[0,2]$上的取值范围为$[0,4]$,$g(x)$在$[0,2]$上的取值范围为$[-a,\ln 3-a]$,若对任意的 $x_1,x_2\in[0,2]$,恒有 $f(x_1)>g(x_2)$,则 $f(x)_{\min}>g(x)_{\max}$,即 $0>\ln 3-a$,所以 $a>\ln 3$.

(3)若对任意的 $x_2\in[0,2]$,存在 $x_1\in[0,2]$,使得 $f(x_1)>g(x_2)$成立,则 $f(x)_{\max}>g(x)_{\max}$,所以 $4>\ln 3-a$,所以 $a>-4+\ln 3$.

## 第 6 课时　利用导数解决函数的零点问题

**考点一**

**典例1** **解**:$f(x)$在$(0,\pi)$内有且只有两个零点.证明如下:

因为 $f'(x)=\sin x+x\cos x$,当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$f'(x)>0$.

又 $f(x)=x\sin x-\frac{3}{2}$,从而有 $f(0)=-\frac{3}{2}<0$,$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi-3}{2}>0$,

且 $f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上的图象是连续不断的,

所以 $f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内至少存在一个零点.

又 $f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,故 $f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内有且只有一个零点.

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时,令 $g(x)=f'(x)=\sin x+x\cos x$.

由 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1>0$，$g(\pi)=-\pi<0$，且 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上的图象是连续不断的，

知存在 $m\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，使得 $g(m)=0$.

由 $g'(x)=2\cos x-x\sin x$，

知 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，有 $g'(x)<0$，

从而 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 内单调递减.

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},m\right)$ 时，$g(x)>g(m)=0$，

即 $f'(x)>0$，

从而 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},m\right)$ 内单调递增，

故当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},m\right)$ 时，$f(x)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi-3}{2}>0$，

故 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},m\right)$ 上无零点；

当 $x\in(m,\pi)$ 时，有 $g(x)<g(m)=0$，

即 $f'(x)<0$，从而 $f(x)$ 在 $(m,\pi)$ 内单调递减.

又 $f(m)>0$，$f(\pi)<0$，且 $f(x)$ 在 $(m,\pi)$ 上的图象是连续不断的，从而 $f(x)$ 在 $(m,\pi)$ 内有且仅有一个零点.

综上所述，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内有且只有两个零点.

**跟进训练**

1. **解**：由 $y=f(x)-2=0$ 得 $\ln x=-kx$，

因为 $x>0$，所以 $k=\frac{\ln x}{-x}$，

令 $h(x)=\frac{\ln x}{-x}(x>0)$，则 $h'(x)=-\frac{1-\ln x}{x^2}$，

当 $x>\mathrm{e}$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

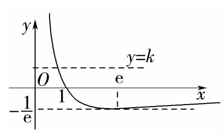
当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

所以 $h(x)\geqslant h(\mathrm{e})=-\frac{1}{\mathrm{e}}$，

当 $x>\mathrm{e}$ 时，$\frac{\ln x}{x}>0$，所以 $\frac{\ln x}{-x}<0$，

当 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$-\frac{-\ln \mathrm{e}}{\frac{1}{\mathrm{e}}}>0$，

所以 $h(x)=\frac{\ln x}{-x}(x>0)$ 的图象如图所示，




所以当 $k<-\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$y=f(x)-2$ 无零点；

当 $k=-\frac{1}{\mathrm{e}}$ 或 $k\geqslant0$ 时，$y=f(x)-2$ 只有一个零点；

当 $-\frac{1}{\mathrm{e}}<k<0$ 时，$y=f(x)-2$ 有两个零点.

**考点二**

**典例 2**　**解**：(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，

当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln(1+x)+\frac{x}{\mathrm{e}^x}$，$f(0)=0$，所以切点为 $(0,0)$. $f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1-x}{\mathrm{e}^x}$，$f'(0)=2$，所以切线斜率为 2，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=2x$.

(2) $f(x)=\ln(1+x)+\frac{ax}{\mathrm{e}^x}$，

$f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{a(1-x)}{\mathrm{e}^x}=\frac{\mathrm{e}^x+a(1-x^2)}{(1+x)\mathrm{e}^x}$，

设 $g(x)=\mathrm{e}^x+a(1-x^2)$，

①若 $a>0$，当 $x\in(-1,0)$ 时，$g(x)=\mathrm{e}^x+a(1-x^2)>0$，即 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，$f(x)<f(0)=0$，

故 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上没有零点，不合题意.

②若 $-1<a<0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，则 $g'(x)=\mathrm{e}^x-2ax>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)>g(0)=1+a>0$，即 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)>f(0)=0$，

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上没有零点，不合题意.

③若 $a<-1$，

(i) 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)=\mathrm{e}^x-2ax>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$g(0)=1+a<0$，$g(1)=\mathrm{e}>0$，

所以存在 $m\in(0,1)$，使得 $g(m)=0$，

即 $f'(m)=0$，

当 $x\in(0,m)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(m,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以当 $x\in(0,m)$ 时，$f(x)<f(0)=0$，

当 $x\to+\infty$，$f(x)\to+\infty$，

所以 $f(x)$ 在 $(m,+\infty)$ 上有唯一零点，在 $(0,m)$ 上没有零点，

即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点.

(ii) 当 $x\in(-1,0)$ 时，$g(x)=\mathrm{e}^x+a(1-x^2)$，

设 $h(x)=g'(x)=\mathrm{e}^x-2ax$，

$h'(x)=\mathrm{e}^x-2a>0$，

所以 $g'(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，

$g'(-1)=\frac{1}{\mathrm{e}}+2a<0$，$g'(0)=1>0$，

所以存在 $n\in(-1,0)$，使得 $g'(n)=0$，

当 $x\in(-1,n)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

当 $x\in(n,0)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，$g(x)<g(0)=1+a<0$，

又 $g(-1)=\frac{1}{\mathrm{e}}>0$，

所以存在 $t\in(-1,n)$，使得 $g(t)=0$，即 $f'(t)=0$，

当 $x\in(-1,t)$ 时，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(t,0)$ 时，$f(x)$ 单调递减，又 $x\to-1$，$f(x)\to-\infty$，

而 $f(0)=0$，所以当 $x\in(t,0)$ 时，$f(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-1,t)$ 上有唯一零点，在 $(t,0)$ 上无零点，

即 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上有唯一零点，

所以 $a<-1$，符合题意.

④当 $a=0$ 时，$f(x)=\ln(1+x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，不合题意.

⑤当 $a=-1$ 时，$f'(x)=\dfrac{e^x+x^2-1}{(1+x)\cdot e^x}$，

令 $k(x)=e^x+x^2-1$，则 $k'(x)=e^x+2x$，

当 $x>0$ 时，$k'(x)>0$，$k(x)$单调递增，

$k(x)>k(0)=0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

$f(x)>f(0)=0$，不合题意.

所以若 $f(x)$在区间$(-1,0)$，$(0,+\infty)$各恰有一个零点，则 $a$ 的取值范围为$(-\infty,-1)$.

**跟进训练**

2.**解**：(1)$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=2ae^{2x}+(a-2)e^x-1=(ae^x-1)(2e^x+1)$.

(ⅰ)若 $a\leqslant0$，则 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递减.

(ⅱ)若 $a>0$，则由 $f'(x)=0$ 得 $x=-\ln a$.

当 $x\in(-\infty,-\ln a)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(-\ln a,+\infty)$时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$在$(-\infty,-\ln a)$上单调递减，在$(-\ln a,+\infty)$上单调递增.

(2)(ⅰ)若 $a\leqslant0$，由(1)知，$f(x)$至多有一个零点.

(ⅱ)若 $a>0$，由(1)知，当 $x=-\ln a$ 时，$f(x)$取得最小值，最小值为 $f(-\ln a)=1-\dfrac{1}{a}+\ln a$.

①当 $a=1$ 时，由于 $f(-\ln a)=0$，故 $f(x)$只有一个零点；

②当 $a\in(1,+\infty)$时，由于 $1-\dfrac{1}{a}+\ln a>0$，

即 $f(-\ln a)>0$，故 $f(x)$没有零点；

③当 $a\in(0,1)$时，$1-\dfrac{1}{a}+\ln a<0$，即 $f(-\ln a)<0$.

又 $f(-2)=ae^{-4}+(a-2)e^{-2}+2>-2e^{-2}+2>0$，故 $f(x)$在$(-\infty,-\ln a)$上有一个零点.

设正整数 $n_0$ 满足 $n_0>\ln\left(\dfrac{3}{a}-1\right)$，

则 $f(n_0)=e^{n_0}(ae^{n_0}+a-2)-n_0>e^{n_0}-n_0>2^{n_0}-n_0>0$.

由于 $\ln\left(\dfrac{3}{a}-1\right)>-\ln a$，

因此 $f(x)$在$(-\ln a,+\infty)$上有一个零点.

综上，$a$ 的取值范围为$(0,1)$.

## 高考培优3　极值点偏移问题

**典例**　**法一**(对称化构造法)：

**证明**：由题意知，函数 $f(x)$有两个零点 $x_1$，$x_2(x_1\neq x_2)$，

即 $f(x_1)=f(x_2)=0$，易知 $\ln x_1$，$\ln x_2$ 是方程 $x=ae^x$ 的两个不相等的根.

设 $t_1=\ln x_1$，$t_2=\ln x_2$，$g(x)=xe^{-x}$，

则 $g(t_1)=g(t_2)$，故要证 $x_1x_2>e^2$，

即证 $\ln x_1+\ln x_2>2$，即证 $t_1+t_2>2$.

下证：$t_1+t_2>2$.

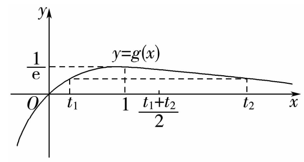
$g'(x)=(1-x)e^{-x}$，易得 $g(x)$在$(-\infty,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，

所以函数 $g(x)$在 $x=1$ 处取得极大值(也是最大值)$g(1)=\dfrac{1}{e}$.

当 $x\to-\infty$时，$g(x)\to-\infty$；

当 $x\to+\infty$时，$g(x)\to0$ 且 $g(x)>0$.

由 $g(t_1)=g(t_2)$，$t_1\neq t_2$，不妨设 $t_1<t_2$，作出函数 $g(x)$的图象，如图所示，由图知必有 $0<t_1<1<t_2$，




令 $F(x)=g(1+x)-g(1-x)$，$x\in(0,1]$，

则 $F'(x)=\dfrac{x}{e^{x+1}}(e^{2x}-1)>0$，

所以 $F(x)$在$(0,1]$上单调递增，

所以 $F(x)>0$ 对任意的 $x\in(0,1]$恒成立，

即 $g(1+x)>g(1-x)$对任意的 $x\in(0,1]$恒成立，由 $0<t_1<1<t_2$，得 $1-t_1\in(0,1)$，

所以 $g(1+1-t_1)=g(2-t_1)>g[1-(1-t_1)]=g(t_1)=g(t_2)$，

即 $g(2-t_1)>g(t_2)$，

又 $2-t_1\in(1,2)$，$t_2\in(1,+\infty)$，且 $g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，

所以 $2-t_1<t_2$，所以 $t_1+t_2>2$，即 $x_1x_2>e^2$.

**法二**(比值代换法)：

**证明**：不妨设 $x_1>x_2>0$，

因为 $\ln x_1-ax_1=0$，$\ln x_2-ax_2=0$，

所以 $\ln x_1+\ln x_2=a(x_1+x_2)$，$\ln x_1-\ln x_2=a(x_1-x_2)$，所以$\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=a$，

欲证 $x_1x_2>e^2$，即证 $\ln x_1+\ln x_2>2$.

因为 $\ln x_1+\ln x_2=a(x_1+x_2)$，所以即证 $a>\dfrac{2}{x_1+x_2}$，

所以原问题等价于证明$\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\dfrac{2}{x_1+x_2}$，

即 $\ln\dfrac{x_1}{x_2}>\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}$，

令 $t=\dfrac{x_1}{x_2}(t>1)$，则不等式变为 $\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}$.

令 $h(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}$，$t>1$，

所以 $h'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

所以 $h(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以 $h(t)>h(1)=\ln1-0=0$，

即 $\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}>0(t>1)$，

因此原不等式 $x_1x_2>e^2$ 得证.

**跟进训练**

**法一**：

**证明**：由题意知 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{(e^x+x)(x-1)}{x^2}$，可得函数 $f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增.

由题知，$f(x)$的一个零点小于1，一个零点大于1，

不妨设$0<x_1<1<x_2$，要证$x_1x_2<1$，即证$x_1<\frac{1}{x_2}$，

因为$x_1,\frac{1}{x_2}\in(0,1)$，即证$f(x_1)>f\left(\frac{1}{x_2}\right)$，

因为$f(x_1)=f(x_2)$，即证$f(x_2)>f\left(\frac{1}{x_2}\right)$，

即证$\frac{e^x}{x}-\ln x+x-xe^{\frac{1}{x}}-\ln x-\frac{1}{x}>0,x\in(1,+\infty)$，

即证$\frac{e^x}{x}-xe^{\frac{1}{x}}-2\left[\ln x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]>0$，

下面证明当$x>1$时，$\frac{e^x}{x}-xe^{\frac{1}{x}}>0,\ln x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)<0$.

设$g(x)=\frac{e^x}{x}-xe^{\frac{1}{x}},x>1$，

则$g'(x)=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^x-\left[e^{\frac{1}{x}}+xe^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]$

$=\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)e^x-e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{e^x}{x}-e^{\frac{1}{x}}\right)$

$=\frac{x-1}{x}\left(\frac{e^x}{x}-e^{\frac{1}{x}}\right)$，

设$\varphi(x)=\frac{e^x}{x}(x>1)$，

$\varphi'(x)=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^x=\frac{x-1}{x^2}e^x>0$，

所以$\varphi(x)>\varphi(1)=e$，而$e^{\frac{1}{x}}<e$，

所以$\frac{e^x}{x}-e^{\frac{1}{x}}>0$，所以$g'(x)>0$，

所以$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

即$g(x)>g(1)=0$，所以$\frac{e^x}{x}-xe^{\frac{1}{x}}>0$.

令$h(x)=\ln x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right),x>1$，

$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{2x-x^2-1}{2x^2}=\frac{-(x-1)^2}{2x^2}<0$，

所以$h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，

即$h(x)<h(1)=0$，

所以$\ln x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)<0$.

综上，$\frac{e^x}{x}-xe^{\frac{1}{x}}-2\left[\ln x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]>0$，所以$x_1x_2<1$.

**法二：**

**证明：**$f(x)=\frac{e^x}{x}-\ln x+x-a=e^{x-\ln x}+x-\ln x-a$，

令$t=x-\ln x$，则$g(t)=e^t+t-a$，易知$g(t)$单调递增，

所以$g(t)$有且仅有一个零点$t_0$，

又$f(x)$有两个零点$x_1,x_2$，

所以$x-\ln x=t_0$有两个实根$x_1$和$x_2$，

所以$\begin{cases}x_1-\ln x_1=t_0,\\x_2-\ln x_2=t_0,\end{cases}$

由对数均值不等式得$\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=1<\frac{x_1+x_2}{2}$，

所以$x_1x_2<1$.

## 高考研究在线3　泰勒公式与超越不等式在导数中的应用

**命题点一**

**典例1**　(1)**C**　(2)**A**　[(1)**法一**(构造法)：构造函数$f(x)=\ln x+\frac{1}{x},x>0$，则$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2},x>0$，

当$f'(x)=0$时，$x=1$，

$\therefore 0<x<1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

$x>1$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

$\therefore f(x)$在$x=1$处取最小值$f(1)=1$，

$\therefore \ln x>1-\frac{1}{x}$，

$\therefore \ln 0.9>1-\frac{1}{0.9}=-\frac{1}{9}$，$\therefore -\ln 0.9<\frac{1}{9}$，$\therefore c<b$.

$\because -\ln 0.9=\ln\frac{10}{9}>1-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$，

$\therefore \frac{10}{9}>e^{0.1}$，$\therefore 0.1e^{0.1}<\frac{1}{9}$，$\therefore a<b$.

$\because 0.1e^{0.1}>0.1\times1.1=0.11$，

而$-\ln 0.9=\ln\frac{10}{9}<\frac{1}{2}\left(\frac{10}{9}-\frac{9}{10}\right)=\frac{19}{180}<0.11$，

$\therefore a>c$，$\therefore c<a<b$. 故选C.

**法二**(利用不等式)：由不等式$\ln x<\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)(x>1)$，

得$-\ln 0.9=\ln\frac{10}{9}<\frac{1}{2}\left(\frac{10}{9}-\frac{9}{10}\right)=\frac{19}{180}<0.11$，

又因为$e^{0.1}>0.1+1=1.1$，所以$a=0.1e^{0.1}>0.11$，

所以$c<a$；

由$e^x\geqslant x+1$，得$e^{-x}>-x+1(0<x<1)$，得$e^x<\frac{1}{1-x}$，所以$e^{0.1}<\frac{1}{1-0.1}=\frac{1}{0.9}$，

所以$a=0.1e^{0.1}<\frac{0.1}{0.9}=\frac{1}{9}$. 所以$a<b$，

综上$c<a<b$. 故选项C正确.

**法三**(泰勒公式)：设$x=0.1$，则

$a=xe^x=0.1\left(1+0.1+\frac{0.01}{2}+\frac{0.001}{6}+\cdots\right)$，

$b=\frac{x}{1-x}=0.1(1+0.1+0.01+0.001+\cdots)$，

$c=-\ln(1-x)=0.1+\frac{0.01}{2}+\frac{0.001}{3}+\cdots$，

$\therefore c<a<b$. 故选C.

(2)**法一**(构造法)：设$f(x)=\cos x+\frac{1}{2}x^2-1(0<x<1)$，则

$f'(x)=x-\sin x$，

设$g(x)=x-\sin x(0<x<1)$，$g'(x)=1-\cos x>0$，

故$g(x)$在$(0,1)$上单调递增，即$g(x)>g(0)=0$，

即$f'(x)>0$，故$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，

所以$f\left(\frac{1}{4}\right)>f(0)=0$，可得$\cos\frac{1}{4}>\frac{31}{32}$，故$b>a$，

利用不等式可得$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$\tan x>x$，

$\therefore \tan\frac{1}{4}>\frac{1}{4}$,即$\frac{\sin\frac{1}{4}}{\cos\frac{1}{4}}>\frac{1}{4}$,

$\therefore 4\sin\frac{1}{4}>\cos\frac{1}{4}$,故 $c>b$.

综上,$c>b>a$,故选 A.

**法二(泰勒公式)**:

设 $x=0.25$,则

$a=1-\frac{x^2}{2}=1-\frac{0.25^2}{2}$,

$b=\cos x=1-\frac{0.25^2}{2}+\frac{0.25^4}{4!}+\cdots$,

$c=\frac{\sin x}{x}=1-\frac{0.25^2}{3!}+\frac{0.25^4}{5!}+\cdots$,

$\therefore a<b<c$. 故选 A.]

**跟进训练**

1.(1)**B** (2)**D** [(1)**法一(构造法)**:令 $f(x)=e^x-(1+x)$,

令 $f'(x)=e^x-1=0$,得 $x=0$,

当 $x\in(-\infty,0)$时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,

当 $x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,

所以 $f(0.02)>f(0)=0$,

从而 $e^{0.02}>1+0.02=1.02>1>\ln 2.02$. 故选 B.

**法二(泰勒公式)**:设 $x=0.02$,则

$a=e^{0.02}=1+0.02+\frac{0.02^2}{2}+\cdots$,

显然 $a>b>1>c$. 故选 B.

(2)**法一(构造法)**:令 $f(x)=e^x-x-1$,则 $f'(x)=e^x-1$,

当 $x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,

故 $f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数,

故 $f(0.1)>f(0)$,

即 $e^{0.1}-0.1-1>0$,

故 $a=e^{0.1}-1>0.1$.

令 $g(x)=\sin x-x$,则 $g'(x)=\cos x-1<0$ 在$(0,1)$上恒成立,

故 $g(x)=\sin x-x$ 在$(0,1)$上单调递减,

故 $g(0.1)<g(0)$,即 $\sin 0.1-0.1<0$,

即 $b=\sin 0.1<0.1$.

令 $h(x)=\ln(x+1)-\sin x$,

则 $h'(x)=\frac{1}{x+1}-\cos x=\frac{1-(x+1)\cos x}{x+1}$,

令 $m(x)=1-(x+1)\cos x$,

则 $m'(x)=-\cos x+(x+1)\sin x$,

易知 $m'(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$上是增函数,

且 $m'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(1+\frac{\pi}{6}\right)\frac{1}{2}=\frac{-6\sqrt{3}+6+\pi}{12}<0$,

故 $m'(x)<0$ 在$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$上恒成立,

故 $m(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$上是减函数,

又 $m(0)=1-1=0$,

故 $m(x)<0$ 在$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$上恒成立,

故 $h'(x)<0$ 在$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$上恒成立,

故 $h(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$上是减函数,

故 $h(0.1)<h(0)=0$,

即 $\ln 1.1-\sin 0.1<0$,即 $c<b$,故 $c<b<a$,故选 D.

**法二(泰勒公式)**:设 $x=0.1$,则

$a=e^{0.1}-1=0.1+\frac{0.1^2}{2}+\cdots$,

$b=\sin 0.1=0.1-\frac{0.1^3}{6}+\cdots$,

$c=\ln 1.1=0.1-\frac{0.1^2}{2}+\cdots$,

故 $c<b<a$,故选 D.]

## 命题点二

**典例 2** (1)**解**:$f(x)\leqslant 0\Rightarrow \ln x-kx+1\leqslant 0\Rightarrow k\geqslant\frac{\ln x+1}{x}$,

令 $g(x)=\frac{\ln x+1}{x}$,$x>0$,则 $g'(x)=\frac{1-\ln x-1}{x^2}=\frac{-\ln x}{x^2}$,

当 $0<x<1$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增,当 $x>1$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,

$\therefore g(x)_{\max}=g(1)=1$,

$\therefore k\geqslant 1$.

(2)**证明**:由(1)知,$k=1$ 时,有不等式 $\ln x\leqslant x-1$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$恒成立,

当且仅当 $x=1$ 时,取“=”,

$\therefore x\in(1,+\infty)$,$\ln x<x-1$ 恒成立,

令 $x=1+\frac{1}{n^2}(n>1$,且 $n\in\mathbf{N}^*)$,

则 $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-1}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$,

$\therefore \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$

$=\frac{2}{3}$,

即 $\ln\left[\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right]<\frac{2}{3}(n\in\mathbf{N}^*,n>1)$,

$\therefore \left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<e^{\frac{2}{3}}(n\in\mathbf{N}^*,n>1)$.

**跟进训练**

2.(1)**解**:$a=1\Rightarrow f(x)=xe^x-e^x=(x-1)e^x\Rightarrow f'(x)=xe^x$,

当 $x\in(-\infty,0)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;

当 $x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.

(2)**解**:令 $g(x)=f(x)+1=xe^{ax}-e^x+1(x>0)\Rightarrow g(x)<g(0)=0$ 对$\forall x>0$ 恒成立.

又 $g'(x)=e^{ax}+axe^{ax}-e^x\Rightarrow g'(0)=0$，

令 $h(x)=g'(x)\Rightarrow h'(x)=ae^{ax}+a(e^{ax}+axe^{ax})-e^x=a(2e^{ax}+axe^{ax})-e^x$，

则 $h'(0)=2a-1$.

①若 $h'(0)=2a-1>0$，

即 $a>\frac{1}{2}$，$h'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g'(x)}{x}>0$，

所以 $\exists x_0>0$，使得当 $x\in(0,x_0)$ 时，有 $\frac{g'(x)}{x}>0\Rightarrow g'(x)>0$

$\Rightarrow g(x)$ 单调递增 $\Rightarrow g(x_0)>g(0)=0$，矛盾.

②若 $h'(0)=2a-1\leqslant 0$，即 $a\leqslant\frac{1}{2}$，$g'(x)=e^{ax}+axe^{ax}-e^x=e^{ax+\ln(1+ax)}-e^x\leqslant e^{\frac{1}{2}x+\ln(1+\frac{1}{2}x)}-e^x<e^{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x}-e^x=0\Rightarrow$

$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$g(x)<g(0)=0$，符合题意.

综上所述，实数 $a$ 的取值范围是 $a\leqslant\frac{1}{2}$.

(3)**证明**：构造函数 $m(t)=2\ln t-\left(t-\frac{1}{t}\right)$，$t>1$，

则 $m'(t)=\frac{2}{t}-1-\frac{1}{t^2}=-\left(\frac{1}{t}-1\right)^2<0$，

∴函数 $m(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

∴$m(t)<m(1)=0$，

即 $t-\frac{1}{t}>2\ln t(t>1)$.

令 $t=\sqrt{1+\frac{1}{n}}\Rightarrow\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}>2\ln\sqrt{1+\frac{1}{n}}\Rightarrow$

$\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\Rightarrow\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k^2+k}}$

$>\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)$，

即 $\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln(n+1)$，证毕.

# 第四章　三角函数与解三角形

## 第1课时　任意角和弧度制、三角函数的概念

**梳理·必备知识**

1.(1)端点　(2)正角　负角　零角　象限角　(3)$-\alpha$　(4)$\alpha+k\cdot 360°$，$k\in\mathbf{Z}$

2.(1)半径长　(2)$\frac{\pi}{180}$　$\left(\frac{180}{\pi}\right)°$　$\alpha R$　$\frac{1}{2}\alpha R^2$

3.(1)单位圆　$y$　$x$　$\frac{y}{x}$　(2)$\frac{y}{r}$　$\frac{x}{r}$　$\frac{y}{x}$

**激活·基本技能**

一、(1)×　(2)×　(3)×　(4)√

二、1.**C**

2.**BCD**　[$-\frac{3\pi}{4}$是第三象限角，故A错误；$\frac{4\pi}{3}=\pi+\frac{\pi}{3}$，从而$\frac{4\pi}{3}$是第三象限角，故B正确；$-400°=-360°-40°$，是第四象限角，故C正确；$-315°=-360°+45°$，是第一象限角，故D正确.]

3.$\frac{10\pi}{9}$　$\frac{5\pi}{9}$　[单位圆的半径 $r=1$，$200°$的弧度数是 $200\times\frac{\pi}{180}=\frac{10\pi}{9}$，由弧度数的定义得 $\frac{10\pi}{9}=\frac{l}{r}$，所以 $l=\frac{10\pi}{9}$，$S_{扇形}=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times\frac{10\pi}{9}\times 1=\frac{5\pi}{9}$.]

4.$-\frac{3\sqrt{13}}{13}$　$\frac{2\sqrt{13}}{13}$　$-\frac{3}{2}$　[因为 $x=2$，$y=-3$，所以点 $P$ 到原点的距离 $r=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$. 于是 $\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-3}{\sqrt{13}}=-\frac{3\sqrt{13}}{13}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}=-\frac{3}{2}$.]

**考点一**

**典例1**　(1)**C**　(2)二或第四　第一或第二象限或 $y$ 轴的非负半轴上　[(1)由定义知终边相同的角的表达式中不能同时出现角度和弧度，可表示为 $\frac{\pi}{4}+2k\pi$ 或 $k\cdot 360°+45°(k\in\mathbf{Z})$.

(2)∵$\alpha$是第三象限角，即 $2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\frac{3}{2}\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

∴$k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{3}{4}\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$4k\pi+2\pi<2\alpha<4k\pi+3\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

当 $k$ 为偶数时，$\frac{\alpha}{2}$为第二象限角；当 $k$ 为奇数时，$\frac{\alpha}{2}$为第四象限角，而 $2\alpha$ 的终边在第一或第二象限或 $y$ 轴的非负半轴上.]

**跟进训练**

1.(1)**C**　(2)$-675°$，$-315°$　[(1)当 $k=2n(n\in\mathbf{Z})$ 时，$2n\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant 2n\pi+\frac{\pi}{2}(n\in\mathbf{Z})$，此时 $\alpha$ 的终边在 $\frac{\pi}{4}\sim\frac{\pi}{2}$ 内；当 $k=2n+1(n\in\mathbf{Z})$ 时，$2n\pi+\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant 2n\pi+\pi+\frac{\pi}{2}(n\in\mathbf{Z})$，此时 $\alpha$ 的终边在 $\pi+\frac{\pi}{4}\sim\pi+\frac{\pi}{2}$ 内，结合选项知选C.

(2)所有与$45°$角终边相同的角表示为 $\beta=45°+k\cdot 360°(k\in\mathbf{Z})$.

令 $-720°<45°+k\cdot 360°<0°(k\in\mathbf{Z})$，得 $-765°<k\cdot 360°<-45°(k\in\mathbf{Z})$，解得 $-\frac{765}{360}<k<-\frac{45}{360}(k\in\mathbf{Z})$，从而 $k=-2$ 或 $k=-1$，代入得 $\beta=-675°$ 或 $\beta=-315°$.]

**考点二**

**典例2**　**解**：(1)因为 $\alpha=60°=\frac{\pi}{3}$，

所以 $l=\alpha R=\frac{\pi}{3}\times 10=\frac{10\pi}{3}$(cm).

(2)由题意得 $\begin{cases}2R+\alpha\cdot R=10,\\ \frac{1}{2}\alpha\cdot R^2=4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}R=1,\\ \alpha=8\end{cases}$(舍去)或 $\begin{cases}R=4,\\ \alpha=\frac{1}{2}.\end{cases}$

故扇形的圆心角为$\frac{1}{2}$.

(3)由已知得 $l+2R=20$.

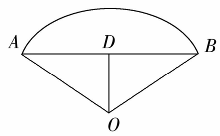
**法一：**$S=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}(20-2R)R=10R-R^2=-(R-5)^2+25$.

所以，当 $R=5$ cm 时，$S$ 取得最大值，且最大值为 25 $cm^2$，此时 $l=10$ cm，$\alpha=2$.

**法二：**$S=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{4}l(2R)\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{l+2R}{2}\right)^2=25$，当且仅当 $l=2R=10$，即 $R=5$ 时，$S_{\max}=25$，此时 $\alpha=2$.

**跟进训练**

2.**C** ［设扇形的弧长为 $l$，半径为 $r$，如图，取 $AB$ 的中点 $D$，因为圆心角 $\alpha$ 为 $\frac{2\pi}{3}$，所以 $\angle BOD=\frac{\pi}{3}$，




所以弦 $AB=2AD=2r\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}r$.

又 $\overset{\frown}{AB}=\frac{2\pi}{3}r$，故弦 $AB$ 的长与 $\overset{\frown}{AB}$ 的长的比值为 $\frac{\sqrt{3}r}{\frac{2\pi}{3}r}=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$，故选 C.］

**考点三**

**典例 3** (1)**D** (2)$-\frac{\sqrt{6}}{4}$ $\frac{\sqrt{15}}{3}$ 或 $-\frac{\sqrt{15}}{3}$ ［(1)**法一：**由题意，知 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $-\pi+4k\pi<2\alpha<4k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\cos 2\alpha\leqslant0$ 或 $\cos 2\alpha>0$，$\sin 2\alpha<0$，故选 D.

**法二：**当 $\alpha=-\frac{\pi}{4}$ 时，$\cos 2\alpha=0$，$\sin 2\alpha=-1$，排除 A，B，C，故选 D.

(2)设 $P(x,y)$，由题设知 $x=-\sqrt{3}$，$y=m$，所以 $r^2=|OP|^2=(-\sqrt{3})^2+m^2$（$O$ 为原点），即 $r=\sqrt{3+m^2}$，所以 $\sin\alpha=\frac{m}{r}=\frac{\sqrt{2}m}{4}=\frac{m}{2\sqrt{2}}$，所以 $r=\sqrt{3+m^2}=2\sqrt{2}$，即 $3+m^2=8$，解得 $m=\pm\sqrt{5}$. 当 $m=\sqrt{5}$ 时，$r=2\sqrt{2}$，$x=-\sqrt{3}$，$y=\sqrt{5}$，所以 $\cos\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$，$\tan\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{3}$；当 $m=-\sqrt{5}$ 时，$r=2\sqrt{2}$，$x=-\sqrt{3}$，$y=-\sqrt{5}$，所以 $\cos\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$，$\tan\alpha=\frac{\sqrt{15}}{3}$.］

**跟进训练**

3.(1)**AB** (2)$-4$ 或 $-2$ ［(1)由题意知 $\sin\alpha<0$，$\cos\alpha>0$，$\tan\alpha<0$.

选项 A，$\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}>0$；选项 B，$\cos\alpha-\sin\alpha>0$；

选项 C，$\sin\alpha\cos\alpha<0$；选项 D，$\sin\alpha+\cos\alpha$ 符号不确定. 故选 AB.

(2)设 $\alpha$ 终边上任意一点为 $P(-4a,3a)$，$r=|5a|$. 当 $a>0$ 时，$r=5a$，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，

$\therefore 5\sin\alpha+5\cos\alpha+4\tan\alpha=3-4-3=-4$；

当 $a<0$ 时，$r=-5a$，$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，

$\therefore 5\sin\alpha+5\cos\alpha+4\tan\alpha=-3+4-3=-2$.

综上可知，$5\sin\alpha+5\cos\alpha+4\tan\alpha=-4$ 或 $-2$.］

## 第 2 课时 同角三角函数的基本关系式与诱导公式

**梳理·必备知识**

1.(1)1 (2)$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right)$

2.$\cos\alpha$ $-\cos\alpha$ $-\tan\alpha$

**激活·基本技能**

一、(1)× (2)× (3)× (4)√

二、1.**D** ［因为 $\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\pi$，所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{1}{2}$.］

2.$-\frac{2}{7}$ ［原式 $=\frac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+2}=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+2}=-\frac{2}{7}$.］

3.$-\sin^2\alpha$ ［原式 $=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot(-\sin\alpha)\cdot\cos\alpha=-\sin^2\alpha$.］

4.$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ ［因为 $\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\frac{\pi}{2}$，

所以 $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{2}$.

$\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\alpha\right)=\sin\left[\pi-\left(\frac{2}{3}\pi+\alpha\right)\right]$

$=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{2}$.］

**考点一**

**考向 1** **典例 1** (1)**C** (2)**A** ［(1)因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，所以 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，所以 $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，故选 C.

(2)由 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2$，得 $\sin\alpha=2\cos\alpha$.

代入 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 得 $\cos^2\alpha=\frac{1}{5}$.

又 $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，所以 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{3\sqrt{5}}{5}$，

故选 A.］

**考向 2** **典例 2** **解：**由已知得 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$.

(1)$\frac{\sin\alpha-3\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha-3}{\tan\alpha+1}=-\frac{5}{3}$.

(2)$\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+2$

$=\frac{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}+2$

$=\frac{\tan^2\alpha+\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}+2$

$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}+2=\frac{13}{5}$.

**考向** 3　**典例** 3　**解**:(1)由 $\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$,

平方得 $\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=\frac{1}{25}$,

整理得 $2\sin x\cos x=-\frac{24}{25}$.

$\therefore(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x=\frac{49}{25}$.

由 $x\in(-\pi,0)$,知 $\sin x<0$,

又 $\sin x+\cos x>0$,

$\therefore\cos x>0$,则 $\sin x-\cos x<0$,

故 $\sin x-\cos x=-\frac{7}{5}$.

(2)$\frac{\sin 2x+2\sin^2 x}{1-\tan x}=\frac{2\sin x(\cos x+\sin x)}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}$

$=\frac{2\sin x\cos x(\cos x+\sin x)}{\cos x-\sin x}$

$=\frac{-\frac{24}{25}\times\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}}=-\frac{24}{175}$.

**跟进训练**

1.(1)**C**　(2)$-\frac{12}{5}$　[(1)将式子进行齐次化处理得:

$\frac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}$

$=\frac{\sin\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}$

$=\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$=\frac{\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\tan^2\theta+\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

$=\frac{4-2}{1+4}=\frac{2}{5}$.故选 C.

(2)**法一**:由 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{13}$,得 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{60}{169}$,

因为 $\theta\in(0,\pi)$,所以 $\sin\theta>0$,$\cos\theta<0$,

所以 $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}=\frac{17}{13}$,

联立$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{13},\\ \sin\theta-\cos\theta=\frac{17}{13},\end{cases}$

解得$\begin{cases}\sin\theta=\frac{12}{13},\\ \cos\theta=-\frac{5}{13},\end{cases}$

所以 $\tan\theta=-\frac{12}{5}$.

**法二**:因为 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{13}$,

所以 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{60}{169}$,

由根与系数的关系,知 $\sin\theta$,$\cos\theta$ 是方程 $x^2-\frac{7}{13}x-\frac{60}{169}=0$ 的两根,所以 $x_1=\frac{12}{13}$,$x_2=-\frac{5}{13}$.

又 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{60}{169}<0$,$\theta\in(0,\pi)$,

所以 $\sin\theta>0$,$\cos\theta<0$.

所以 $\sin\theta=\frac{12}{13}$,$\cos\theta=-\frac{5}{13}$.

所以 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{12}{5}$.

**法三**:由 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{13}$,得 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{60}{169}$,

所以$\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=-\frac{60}{169}$.

齐次化切,得$\frac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=-\frac{60}{169}$,

即 $60\tan^2\theta+169\tan\theta+60=0$,

解得 $\tan\theta=-\frac{12}{5}$或 $\tan\theta=-\frac{5}{12}$.

又 $\theta\in(0,\pi)$,$\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{13}>0$,$\sin\theta\cos\theta=-\frac{60}{169}<0$,

所以 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$,所以 $\tan\theta=-\frac{12}{5}$.]

**考点二**

**典例** 4　(1)**D**　(2)0　[(1)因为$\frac{7\pi}{10}-\alpha+\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\pi}{2}$,

所以$\frac{7\pi}{10}-\alpha=\frac{\pi}{2}-\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)$,

所以 $\sin\left(\frac{7\pi}{10}-\alpha\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)\right]=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{5}{13}$,故选 D.

(2)因为$(105^\circ-\alpha)+(75^\circ+\alpha)=180^\circ$,

$(15^\circ-\alpha)+(\alpha+75^\circ)=90^\circ$,

所以 $\cos(105^\circ-\alpha)=\cos[180^\circ-(75^\circ+\alpha)]$

$=-\cos(75^\circ+\alpha)=-\frac{1}{3}$,

$\sin(15^\circ-\alpha)=\sin[90^\circ-(\alpha+75^\circ)]=\cos(75^\circ+\alpha)=\frac{1}{3}$.

所以 $\cos(105^\circ-\alpha)+\sin(15^\circ-\alpha)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0$.]

**跟进训练**

2.(1)**B**　(2)$\frac{1}{2}$　[(1)$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$.故选 B.

(2)因为 $f(\alpha)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(-\pi-\alpha)\tan(\pi-\alpha)}$

$=\frac{-\sin\alpha(-\cos\alpha)}{(-\cos\alpha)\left(-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}=\cos\alpha$,

所以 $f\left(-\frac{25\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{25\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.]

**考点三**

**典例** 5　**解**:假设存在角 $\alpha$,$\beta$ 满足条件.

由已知条件可得

$\begin{cases}\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\beta, & ①\\ \sqrt{3}\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\beta, & ②\end{cases}$

由①$^2$+②$^2$,得 $\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha=2$.

$\therefore\sin^2\alpha=\frac{1}{2}$,$\therefore\sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,$\therefore\alpha=\pm\frac{\pi}{4}$.

当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时,由②式知 $\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

又 $\beta\in(0,\pi)$,$\therefore\beta=\frac{\pi}{6}$,此时①式成立;

当 $\alpha=-\frac{\pi}{4}$ 时,由②式知 $\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

又 $\beta\in(0,\pi)$,$\therefore\beta=\frac{\pi}{6}$,此时①式不成立,故舍去.

$\therefore$存在 $\alpha=\frac{\pi}{4}$,$\beta=\frac{\pi}{6}$ 满足条件.

**跟进训练**

3.(1)**C** (2)$-\frac{2\sqrt{6}}{5}$ [(1)由条件得 $\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}$

$=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}$,

又因为 $\alpha$ 为锐角,所以 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$,

即 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right]$,所以有 $\alpha-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$,解得 $\alpha=\frac{\pi}{4}$.故选 C.

(2)由已知 $-270°<\alpha<-90°$ 可得 $143°<53°-\alpha<323°$,所以 $\cos(53°-\alpha)=-\sqrt{1-\sin^2(53°-\alpha)}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$,所以 $\sin(37°+\alpha)=\sin[90°-(53°-\alpha)]=\cos(53°-\alpha)=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$.]

## 第3课时 两角和与差的正弦、余弦和正切公式

**梳理·必备知识**

1.(1)$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ (2)$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

(3)$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ (4)$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

(5)$\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ (6)$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

2.(2)$2\cos^2\alpha-1$ $1-2\sin^2\alpha$ (3)$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

**激活·基本技能**

一、(1)√ (2)× (3)× (4)×

二、1.**C** [$\because\alpha$ 是第三象限角,

$\therefore\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{3}{5}$,

$\therefore\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$.]

2.**D** [$\sin 20°\cos 10°-\cos 160°\sin 10°$

$=\sin 20°\cos 10°+\cos 20°\sin 10°$

$=\sin(20°+10°)=\sin 30°=\frac{1}{2}$.

故选 D.]

3.$\frac{\sqrt{3}}{3}$ [$\frac{1-\tan 15°}{1+\tan 15°}=\frac{\tan 45°-\tan 15°}{1+\tan 45°\tan 15°}$

$=\tan(45°-15°)=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$.]

4.$\sqrt{3}$ [$\because\tan 60°=\tan(10°+50°)=\frac{\tan 10°+\tan 50°}{1-\tan 10°\tan 50°}$,

$\therefore\tan 10°+\tan 50°=\tan 60°(1-\tan 10°\tan 50°)$

$=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan 10°\tan 50°$,

$\therefore$原式$=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan 10°\tan 50°+\sqrt{3}\tan 10°\tan 50°=\sqrt{3}$.]

**考点一**

**典例1** 解:(1)因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

故 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

(2)由(1)知 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{4}{5}$,

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2=\frac{3}{5}$,所以 $\cos\left(\frac{5\pi}{6}-2\alpha\right)$

$=\cos\frac{5\pi}{6}\cos 2\alpha+\sin\frac{5\pi}{6}\sin 2\alpha=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$.

**跟进训练**

1.(1)**A** (2)**A** [(1)由题 $\theta\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$,$\tan 2\theta=-4\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$,

得 $\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{-4(\tan\theta+1)}{1-\tan\theta}$,即 $-4(\tan\theta+1)^2=2\tan\theta$,

则 $(2\tan\theta+1)(\tan\theta+2)=0$,所以 $\tan\theta=-2$ 或 $\tan\theta=-\frac{1}{2}$,

因为 $\theta\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$,所以 $\tan\theta\in(-1,0)$,所以 $\tan\theta=-\frac{1}{2}$,

所以 $\frac{1+\sin 2\theta}{2\cos^2\theta+\sin 2\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{\tan^2\theta+1+2\tan\theta}{2+2\tan\theta}=\frac{\frac{1}{4}+1-1}{2+(-1)}=\frac{1}{4}$.

故选 A.

(2)因为 $\cos(\alpha+\beta)=m$,

所以 $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=m$,

而 $\tan\alpha\tan\beta=2$,所以 $\sin\alpha\sin\beta=2\cos\alpha\cos\beta$,

故 $\cos\alpha\cos\beta-2\cos\alpha\cos\beta=m$,即 $\cos\alpha\cos\beta=-m$,

从而 $\sin\alpha\sin\beta=-2m$，故 $\cos(\alpha-\beta)=-3m$.
故选 A.］

**考点二**

**考向1 典例2 BD** ［选项 A 中，$\cos 82°\sin 52°-\sin 82°\cos 52°=\sin(52°-82°)=\sin(-30°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2}$，故 A 错误；选项 B 中，$\sin 15°\sin 30°\sin 75°=\frac{1}{2}\sin 15°\cos 15°=\frac{1}{4}\sin 30°=\frac{1}{8}$，故 B 正确；选项 C 中，$\frac{\tan 48°+\tan 72°}{1-\tan 48°\tan 72°}=\tan(48°+72°)=\tan 120°=-\sqrt{3}$，故 C 错误；选项 D 中，$\cos^2 15°-\sin^2 15°=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 D 正确.］

**考向2 典例3** (1)2 (2)**AD** ［(1)$\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$，所以 $1-\tan\alpha\tan\beta=\tan\alpha+\tan\beta$，
所以 $1+\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta=2$，
即 $(1+\tan\alpha)\cdot(1+\tan\beta)=2$.
(2)由题意知，$\sin\gamma=\sin\beta-\sin\alpha$，$\cos\gamma=\cos\alpha-\cos\beta$，
将两式分别平方后相加，
得 $1=(\sin\beta-\sin\alpha)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2$
$=2-2(\sin\beta\sin\alpha+\cos\beta\cos\alpha)$，
$\therefore\cos(\beta-\alpha)=\frac{1}{2}$，即选项 A 正确，B 错误；
$\because\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，
$\therefore\sin\gamma=\sin\beta-\sin\alpha>0$，$\therefore\beta>\alpha$，而 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，
$\therefore 0<\beta-\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\beta-\alpha=\frac{\pi}{3}$，即选项 D 正确，C 错误.］

**跟进训练**

2.(1)**B** (2)**D** ［(1)由 $\tan A\tan B=\tan A+\tan B+1$，可得 $\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-1$，
即 $\tan(A+B)=-1$，又 $A+B\in(0,\pi)$，
所以 $A+B=\frac{3\pi}{4}$，则 $C=\frac{\pi}{4}$，$\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
(2)$a=\cos 50°\cos 127°+\cos 40°\cos 37°$
$=\cos 50°\cos 127°+\sin 50°\sin 127°$
$=\cos(50°-127°)=\cos(-77°)=\cos 77°=\sin 13°$，
$b=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 56°-\cos 56°)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 56°-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 56°=\sin(56°-45°)=\sin 11°$，
$c=\frac{1-\tan^2 39°}{1+\tan^2 39°}=\frac{1-\frac{\sin^2 39°}{\cos^2 39°}}{1+\frac{\sin^2 39°}{\cos^2 39°}}=\cos^2 39°-\sin^2 39°=\cos 78°=\sin 12°$.
因为当 $0°\leqslant x\leqslant 90°$ 时，函数 $y=\sin x$ 单调递增，
所以 $\sin 13°>\sin 12°>\sin 11°$，所以 $a>c>b$.］

**考点三**

**典例4 C** ［因为 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin(\beta-\alpha)=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，且 $\alpha,\beta$ 均为锐角，所以 $-\frac{\pi}{2}<\beta-\alpha<\frac{\pi}{2}$. 又 $\sin(\beta-\alpha)<0$，所以 $-\frac{\pi}{2}<\beta-\alpha<0$，所以 $\cos(\beta-\alpha)>0$.
所以 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos(\beta-\alpha)=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，
所以 $\sin\beta=\sin[\alpha+(\beta-\alpha)]=\sin\alpha\cdot\cos(\beta-\alpha)+\cos\alpha\cdot\sin(\beta-\alpha)=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}+\frac{\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{25\sqrt{2}}{50}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，
所以 $\beta=\frac{\pi}{4}$. 故选 C.］

**跟进训练**

3.(1)**B** (2)**C** ［(1)依题意，得
$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3},\\ \cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{6},\end{cases}$ 所以 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$，所以
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$，所以
$\cos(2\alpha+2\beta)=1-2\sin^2(\alpha+\beta)=1-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$，故选 B.
(2)由 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 是方程 $x^2-4\sqrt{3}x+5=0$ 的两根可得
$\tan\alpha+\tan\beta=4\sqrt{3}$，$\tan\alpha\cdot\tan\beta=5$.
所以 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 均为正数，
又 $\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，故 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，
所以 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{4\sqrt{3}}{1-5}=-\sqrt{3}$.
又 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$. 故 $\alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$.
故选 C.］

## 第 4 课时　简单的三角恒等变换

**梳理·必备知识**

1.(1)$\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$　(2)$\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

**激活·基本技能**

一、(1)× (2)√ (3)×

二、1.**BD** ［$\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha$
$=2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)$
$=2\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}\right)$
$=2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$
$=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$.］

2.**C** ［$\because\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，
$\therefore\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\sqrt{5}-2$.］

3.$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　$-\frac{\sqrt{5}}{5}$　［$\because\theta\in\left(\frac{5\pi}{2},3\pi\right)$，且 $\sin\theta=\frac{4}{5}$.
$\therefore\cos\theta=-\frac{3}{5}$，$\frac{\theta}{2}\in\left(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$，

$\therefore\sin\dfrac{\theta}{2}=-\sqrt{\dfrac{1+\frac{3}{5}}{2}}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\cos\dfrac{\theta}{2}=-\sqrt{\dfrac{1-\frac{3}{5}}{2}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.]

4.$80^\circ$ [因为等式$(\tan 10^\circ-\sqrt{3})\cdot\sin\theta=-2\cos 40^\circ$可以转化为

$$\sin\theta=\frac{-2\cos 40^\circ}{\tan 10^\circ-\sqrt{3}}=\frac{-2\cos 40^\circ\cdot\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ-\sqrt{3}\cos 10^\circ}$$
$$=\frac{-2\cos 40^\circ\cdot\cos 10^\circ}{2\left(\frac{1}{2}\sin 10^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^\circ\right)}$$
$$=\frac{-2\cos 40^\circ\cdot\cos 10^\circ}{-2\sin 50^\circ}=\cos 10^\circ=\sin 80^\circ.$$

又因为所求的$\theta$是锐角,故答案为$80^\circ$.]

**考点一**

**典例1** 解:(1)原式$=\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$

$$=\frac{\sin[\alpha+(\alpha+\beta)]-2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$$
$$=\frac{\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)+\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$$
$$=\frac{\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$$
$$=\frac{\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]}{\sin\alpha}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

(2)因为$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$,

所以$(1+\cos\alpha)\tan\dfrac{\alpha}{2}=\sin\alpha$.

又因为$\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$,且$1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$,

所以原式$=\dfrac{-\sin\alpha-\sin\alpha}{\sqrt{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}=\dfrac{-2\sin\alpha}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$

$$=-\frac{2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}.$$

因为$0<\alpha<\pi$,所以$0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$.

所以$\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$.

所以原式$=-2\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

**跟进训练**

1.$-\cos\theta$ [原式$=\dfrac{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}}$

$$=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\left(\sin^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)}{\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}$$
$$=\frac{-\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\theta}{\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}.$$

因为$0<\theta<\pi$,所以$0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$,

所以$\cos\dfrac{\theta}{2}>0$,

所以原式$=-\cos\theta$.]

**考点二**

**考向1** **典例2** (1)$-\dfrac{1}{8}$ (2)$\sqrt{6}$

[(1)$\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 100^\circ$

$$=-\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ$$
$$=-\frac{\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}$$
$$=-\frac{\frac{1}{2}\sin 40^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}$$
$$=-\frac{\frac{1}{4}\sin 80^\circ\cdot\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=-\frac{\frac{1}{8}\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ}$$
$$=-\frac{\frac{1}{8}\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=-\frac{1}{8}.$$

(2)原式$=\left(2\sin 50^\circ+\sin 10^\circ\cdot\dfrac{\cos 10^\circ+\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}\right)\cdot\sqrt{2}\sin 80^\circ=\left(2\sin 50^\circ+2\sin 10^\circ\cdot\dfrac{\frac{1}{2}\cos 10^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}\right)\cdot\sqrt{2}\cos 10^\circ=2\sqrt{2}[\sin 50^\circ\cdot\cos 10^\circ+\sin 10^\circ\cdot\cos(60^\circ-10^\circ)]=2\sqrt{2}\sin(50^\circ+10^\circ)=2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$.]

**考向2** **典例3** (1)**B** (2)$\dfrac{24}{13}$ [(1)由$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$得$\dfrac{\pi}{6}<\alpha+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{2\pi}{3}$,

$\therefore\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\therefore\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$,

$\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=2\cos^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)-1=2\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2-1=-\dfrac{7}{9}$,

$\therefore\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{12}\right)=\sin\left[\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{\pi}{4}\right]$

$$=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{4}-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{4}$$

$=\left(-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}\right)\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\dfrac{7}{9}\right)\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{7\sqrt{2}-8}{18}$,故选B.

(2)**法一**(先化简后求值):

$$\frac{\cos 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)}$$
$$=\sqrt{2}(\cos x+\sin x)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$$

由$0<x<\dfrac{\pi}{4}$得$0<\dfrac{\pi}{4}-x<\dfrac{\pi}{4}$,

$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$,

$\therefore$ 原式 $=2\times\frac{12}{13}=\frac{24}{13}$.

**法二**(先局部后整体):

$\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{5}{13}$,

由 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 得 $0<\frac{\pi}{4}-x<\frac{\pi}{4}$,

$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$,

$\therefore \cos 2x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$

$=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

$=2\times\frac{5}{13}\times\frac{12}{13}=\frac{120}{169}$.

$\therefore \frac{\cos 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=\frac{120}{169}\times\frac{13}{5}=\frac{24}{13}$.]

**考向** 3　**典例** 4　(1)$\frac{\pi}{4}$　(2)$-\frac{3\pi}{4}$　[(1)由 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,$0<\beta<\frac{\pi}{2}$,得 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$,$\therefore\cos(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha-\beta)}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

$\because \sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$\therefore \cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$\therefore \sin\beta=\sin[\alpha-(\alpha-\beta)]=\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又$\because$角 $\beta$ 是锐角,$\therefore\beta=\frac{\pi}{4}$.

(2)$\because \tan\alpha=\tan[(\alpha-\beta)+\beta]=\frac{\tan(\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan\beta}$

$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{7}}=\frac{1}{3}>0$,$\therefore 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

又$\because \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}>0$,$\therefore 0<2\alpha<\frac{\pi}{2}$,

$\therefore \tan(2\alpha-\beta)=\frac{\tan 2\alpha-\tan\beta}{1+\tan 2\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{1}{7}}=1$.

$\because \tan\beta=-\frac{1}{7}<0$,$\therefore\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$,$-\pi<2\alpha-\beta<0$,

$\therefore 2\alpha-\beta=-\frac{3\pi}{4}$.]

**跟进训练**

2.(1)**B**　(2)**A**　(3)$\frac{1}{7}$　$\frac{\pi}{3}$　[(1)$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{3}{5}$. 故选 B.

(2)$\frac{\cos 10^\circ}{2\sin 10^\circ}-2\cos 10^\circ=\frac{\cos 10^\circ-4\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{2\sin 10^\circ}$

$=\frac{\cos 10^\circ-2\sin 20^\circ}{2\sin 10^\circ}$

$=\frac{\cos 10^\circ-2\sin(30^\circ-10^\circ)}{2\sin 10^\circ}$

$=\frac{\cos 10^\circ-(\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ)}{2\sin 10^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选 A.

(3)因为 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{7}}{7}$,所以 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{1}{7}$.

又因为 $\alpha,\beta$ 均为锐角,$\sin\beta=\frac{3\sqrt{3}}{14}$,

所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{21}}{7}$,$\cos\beta=\frac{13}{14}$,因此 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$,所以 $\sin(2\alpha-\beta)=\sin 2\alpha\cos\beta-\cos 2\alpha\sin\beta=\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{13}{14}-\frac{1}{7}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $\alpha$ 为锐角,所以 $0<2\alpha<\pi$.

又 $\cos 2\alpha>0$,所以 $0<2\alpha<\frac{\pi}{2}$,

又 $\beta$ 为锐角,所以 $-\frac{\pi}{2}<2\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$,

又 $\sin(2\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $2\alpha-\beta=\frac{\pi}{3}$.]

## 第 5 课时　三角函数的图象与性质

**梳理·必备知识**

2.$[-1,1]$　$[-1,1]$　$2\pi$　$\pi$　奇函数　偶函数　$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$,$k\in\mathbf{Z}$　$[-\pi+2k\pi,2k\pi]$,$k\in\mathbf{Z}$　$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$,$k\in\mathbf{Z}$　$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$,$k\in\mathbf{Z}$　$[2k\pi,\pi+2k\pi]$,$k\in\mathbf{Z}$　$(k\pi,0)$,$k\in\mathbf{Z}$　$\left(k\pi+\frac{\pi}{2},0\right)$,$k\in\mathbf{Z}$　$\left(\frac{k\pi}{2},0\right)$,$k\in\mathbf{Z}$　$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$　$x=k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$

**激活·基本技能**

一、(1)×　(2)×　(3)×　(4)×

二、1.**A**　[$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$,$A=2-1=1$,故选 A.]

2.**C**　[要使函数有意义,则 $2x+\frac{\pi}{4}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,即 $x\neq\frac{k}{2}\pi+\frac{\pi}{8}$,$k\in\mathbf{Z}$,所以函数的定义域为$\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{k}{2}\pi+\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}\right\}$.]

3.**B**　[函数 $y=4\sin x$ 在$\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$和$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上单调递减,在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增. 故选 B.]

4.5　$\frac{3\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$　[函数 $y=3-2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的最大值

为 $3+2=5$，此时 $x+\frac{\pi}{4}=\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $x=\frac{3}{4}\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.］

**考点一**

**典例1** （1）$\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,\text{且 }x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$

（2）2　（3）$\left[\frac{7}{8},2\right]$　［（1）要使函数有意义，必须有 $\begin{cases}\tan x-1\neq0,\\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z},\end{cases}$

即 $\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z},\\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$

故函数的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,\text{且 }x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

（2）由题意知，$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，当 $x\in[0,\pi]$ 时，$x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，

$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，于是 $f(x)\in[-\sqrt{3},2]$，故 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值为 2.

（3）因为 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，所以 $\sin x\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

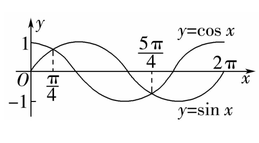
又 $y=3-\sin x-2\cos^2x=3-\sin x-2(1-\sin^2x)=2\left(\sin x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$，

所以当 $\sin x=\frac{1}{4}$ 时，$y_{\min}=\frac{7}{8}$，当 $\sin x=-\frac{1}{2}$ 或 $\sin x=1$ 时，$y_{\max}=2$. 即函数的值域为 $\left[\frac{7}{8},2\right]$.］

**跟进训练**

1.（1）$\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$　（2）$\left[-\frac{1+2\sqrt{2}}{2},1\right]$

［（1）要使函数有意义，必须使 $\sin x-\cos x\geqslant0$. 利用图象，在同一坐标系中画出 $[0,2\pi]$ 上 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的图象，如图所示.




在 $[0,2\pi]$ 内，满足 $\sin x=\cos x$ 的 $x$ 为 $\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$，再结合正弦、余弦函数的最小正周期是 $2\pi$，所以原函数的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant2k\pi+\frac{5\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

（2）设 $t=\sin x-\cos x$，则 $t^2=\sin^2x+\cos^2x-2\sin x\cdot\cos x$，$\sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$，且 $-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$.

$\therefore y=-\frac{t^2}{2}+t+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(t-1)^2+1,t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

当 $t=1$ 时，$y_{\max}=1$；当 $t=-\sqrt{2}$ 时，$y_{\min}=-\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore$ 函数的值域为 $\left[-\frac{1+2\sqrt{2}}{2},1\right]$.］

**考点二**

**典例2** （1）**ABC**　（2）**BD**　（3）$-\frac{9}{2}-3\sqrt{3}$　［（1）A 项，$y=\cos|2x|=\cos 2x$，最小正周期为 $\pi$；

B 项，由图象知 $y=|\sin x|$ 的最小正周期为 $\pi$；

C 项，$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$；

D 项，$y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期 $T=\frac{\pi}{2}$.

（2）对于 B，$f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，B 正确；

对于 A，由于 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\pi$ 对称，且最小正周期是 $\pi$，因此 $f(x)$ 的图象也关于直线 $x=0$ 对称，故 $f(x)$ 是偶函数，A 错误；

对于 C，因为 $f(x)$ 是偶函数，且最小正周期是 $\pi$，则 $f(x)=2\cos 2x$ 或 $f(x)=-2\cos 2x$，根据 $0<\varphi<\pi$ 可得解析式为前者. 当 $x=-2\pi$ 时，$f(x)=2\cos 4\pi=2\neq0$，

$\therefore(-2\pi,0)$ 不是 $f(x)$ 的对称中心，C 错误；

对于 D，由于 $(2,3)\subseteq\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递增，D 正确. 故选 BD.

（3）$\because f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，

$\therefore\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，则 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，则 $f(x)=-A\sin\omega x$.

当 $x=3$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $-3$，

故 $A=3,\sin 3\omega=1$，$\therefore 3\omega=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

$\therefore\omega$ 的最小正数值为 $\frac{\pi}{6}$，

$\therefore f(x)=-3\sin\frac{\pi}{6}x$，

$\therefore f(x)$ 的周期为 12，

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(12)=0$，

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\ 023)$

$=168\times0+f(1)+f(2)+\cdots+f(7)=-\frac{9}{2}-3\sqrt{3}$.］

**跟进训练**

2.（1）**B**　（2）**A**　（3）$\cos 3x$（答案不唯一）　［（1）由题意可知：$x_1$ 为 $f(x)$ 的最小值点，$x_2$ 为 $f(x)$ 的最大值点，则 $|x_1-x_2|_{\min}=\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，即 $T=\pi$，

且 $\omega>0$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$. 故选 B.

（2）由函数的最小正周期 $T$ 满足 $\frac{2\pi}{3}<T<\pi$，得 $\frac{2\pi}{3}<\frac{2\pi}{\omega}<\pi$，解得 $2<\omega<3$，

又因为函数图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$ 对称，所以 $\frac{3\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，且 $b=2$，

所以 $\omega=-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}k,k\in\mathbf{Z}$，所以 $\omega=\frac{5}{2}$，$f(x)=$

$\sin\left(\frac{5}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)+2$,

所以 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{\pi}{4}\right)+2=1$.

故选 A.

(3)因为对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=f\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$,

所以函数的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称.

又由于函数为偶函数,

所以函数的解析式可以为 $f(x)=\cos 3x$.

以下验证 $f(x)=\cos 3x$ 符合题意.

因为 $f(-x)=\cos(-3x)=\cos 3x=f(x)$,

所以函数 $f(x)$ 是偶函数.

令 $3x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,$\therefore x=\frac{k\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$,

所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称.]

**考点三**

**考向1** **典例3** (1)$\left[0,\frac{5\pi}{12}\right]$和$\left[\frac{11\pi}{12},\pi\right]$ (2)$\left[k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$,$k\in\mathbf{Z}$ $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi\right]$,$k\in\mathbf{Z}$ [(1)$f(x)=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[-\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right]=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$,

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,

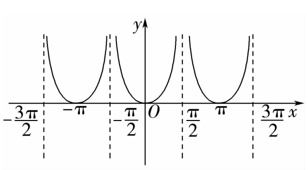
得 $k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$.

故所求函数的单调递减区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$.

令 $A=\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right],k\in\mathbf{Z}$, $B=[0,\pi]$,$\therefore A\cap B=\left[0,\frac{5\pi}{12}\right]\cup\left[\frac{11\pi}{12},\pi\right]$,

$\therefore f(x)$在$[0,\pi]$上的单调递减区间为$\left[0,\frac{5\pi}{12}\right]$和$\left[\frac{11\pi}{12},\pi\right]$.

(2)作出函数 $y=|\tan x|$ 的图象,如图.




观察图象可知,函数 $y=|\tan x|$ 的单调递增区间为$\left[k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}\right),k\in\mathbf{Z}$;单调递减区间为$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.]

**考向2** **典例4** **D** [**法一**(反子集法):$\because x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,$\therefore \omega x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi\omega}{2}+\frac{\pi}{4},\pi\omega+\frac{\pi}{4}\right)$.

$\because f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减,

$\therefore\begin{cases}\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}\geqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z},\\ \pi\omega+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z},\end{cases}$

解得$\begin{cases}\omega\geqslant 4k+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z},\\ \omega\leqslant 2k+\frac{5}{4},k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$

又 $\omega>0,k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore k=0$,此时 $\frac{1}{2}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{4}$,故选 D.

**法二**(子集法):由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant\omega x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$,得 $\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{4\omega}\leqslant x\leqslant\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{5\pi}{4\omega},k\in\mathbf{Z}$,

因为 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减,

所以$\begin{cases}\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{4\omega}\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \frac{2k\pi}{\omega}+\frac{5\pi}{4\omega}\geqslant\pi,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}\omega\geqslant 4k+\frac{1}{2},\\ \omega\leqslant 2k+\frac{5}{4}.\end{cases}$

因为 $k\in\mathbf{Z},\omega>0$,所以 $k=0$,

所以 $\frac{1}{2}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{4}$,即 $\omega$ 的取值范围为$\left[\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right]$. 故选 D.]

**跟进训练**

3.(1)**D** (2)$\frac{7\pi}{5}$ [(1)因为函数 $f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$的图象的两个相邻对称中心之间的距离为$\frac{\pi}{2}$,所以最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\times\frac{\pi}{2}=\pi$,解得 $\omega=2$,所以 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$. 令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,得 $k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$,所以 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的单调递减区间为$\left[k\pi+\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{5\pi}{6}\right],k\in\mathbf{Z}$,结合各选项知,$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的一个单调递减区间为$\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$.

(2)**法一**:令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x+\frac{\pi}{10}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,即 $2k\pi+\frac{2\pi}{5}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{7\pi}{5},k\in\mathbf{Z}$,所以函数 $f(x)$ 在区间$\left[\frac{2\pi}{5},\frac{7\pi}{5}\right]$上单调递减,所以 $a$ 的最大值为$\frac{7\pi}{5}$.

**法二**:因为 $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant a$,所以 $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\leqslant x+\frac{\pi}{10}\leqslant a+\frac{\pi}{10}$,

又 $f(x)$在$\left[\frac{\pi}{2},a\right]$上单调,

$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}<a+\frac{\pi}{10}\leqslant\frac{3\pi}{2}$,即 $\frac{\pi}{2}<a\leqslant\frac{7\pi}{5}$,所以 $a$ 的最大值为$\frac{7\pi}{5}$.]

## 第 6 课时 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$

**梳理·必备知识**

1. $\frac{2\pi}{\omega}$ $\omega x+\varphi$ $\varphi$

3. $|\varphi|$ $\frac{1}{\omega}$ $A$ $\frac{1}{\omega}$ $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$ $A$

**激活·基本技能**

一、(1)× (2)× (3)√ (4)√

二、1. **C** ［由题意知 $A=2$，$f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega}{2\pi}=\dfrac{1}{4\pi}$，初相为 $-\dfrac{\pi}{3}$.］

2. **A** ［$y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\sin\left[2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$.］

3. **D** ［因为变换前后，两个函数的初相相同，所以只需使 $y=3\cos\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)$ 图象上的所有点的纵坐标保持不变，将横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{3}$，即可得到函数 $y=3\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{8}\right)$ 的图象，故选 D.］

4. $y=5\sin\left(\dfrac{\pi}{8}x+\dfrac{3\pi}{4}\right)+10$，$x\in[6,14]$ ［从题图中可以看出，6～14 时的图象是函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ 的半个周期，则 $\begin{cases}A+b=15,\\-A+b=5,\end{cases}$

所以 $A=\dfrac{1}{2}\times(15-5)=5$，$b=\dfrac{1}{2}\times(15+5)=10$.

又 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\pi}{\omega}=14-6$，所以 $\omega=\dfrac{\pi}{8}$.

又 $\dfrac{\pi}{8}\times10+\varphi=2\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$，

所以 $y=5\sin\left(\dfrac{\pi}{8}x+\dfrac{3\pi}{4}\right)+10$，$x\in[6,14]$.］

### 考点一

**典例 1** 解：(1)因为函数 $f(x)$ 的最小正周期是 $\pi$，所以 $\omega=2$.

又因为当 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 2，所以 $A=2$，

同时 $2\times\dfrac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

$\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，

因为 $-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，

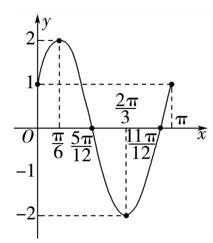
所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

(2)因为 $x\in[0,\pi]$，所以 $2x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{13\pi}{6}\right]$.

列表如下：

| $2x+\dfrac{\pi}{6}$ | $\dfrac{\pi}{6}$ | $\dfrac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\dfrac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ | $\dfrac{13\pi}{6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | $\dfrac{\pi}{6}$ | $\dfrac{5\pi}{12}$ | $\dfrac{2\pi}{3}$ | $\dfrac{11\pi}{12}$ | $\pi$ |
| $f(x)$ | 1 | 2 | 0 | $-2$ | 0 | 1 |

描点、连线得图象，如图：




(3)将 $y=\sin x$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象，再将 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$（纵坐标不变），得到函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象，再将 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象上所有点的纵坐标伸长为原来的 2 倍（横坐标不变），得到 $y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象.

(4)因为 $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{2}\right)=2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，将 $y=\cos x$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象，再将 $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$（纵坐标不变），得到函数 $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象，再将 $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象上所有点的纵坐标伸长为原来的 2 倍（横坐标不变），得到 $y=2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象，即为 $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象.

**跟进训练**

1. (1)**B** (2)**C** ［(1)由已知的函数 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 逆向变换，

第一步：向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)$ 的图象，

第二步：图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，得到 $y=\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{12}\right)$ 的图象，

即为 $y=f(x)$ 的图象，所以 $f(x)=\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{12}\right)$. 故选 B.

(2)由题意知：曲线 $C$ 为 $y=\sin\left[\omega\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{\pi}{3}\right]=\sin\left(\omega x+\dfrac{\omega\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$，又 $C$ 关于 $y$ 轴对称，则 $\dfrac{\omega\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=\dfrac{1}{3}+2k$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $\omega>0$，故当 $k=0$ 时，$\omega$ 的最小值为 $\dfrac{1}{3}$. 故选 C.］

### 考点二

**典例 2** (1)**BC** (2)$-\sqrt{3}$ ［(1)由题图知 $\dfrac{T}{2}=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，得 $T=\pi$，即 $\dfrac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，所以 $\omega=\pm2$，

当 $\omega=2$ 时，图象过点 $\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$，

由“五点法”，结合图象可得 $\varphi+\dfrac{\pi}{3}=\pi$，即 $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$，

所以 $\sin(\omega x+\varphi)=\sin\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$，故 A 错误；

由 $\sin\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\sin\left[\pi-\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)\right]=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)$ 知 B

正确；

由 $\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 知 C 正确；

由 $\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left[\pi+\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)\right]=-\cos\left(\frac{5\pi}{6}-2x\right)$ 知 D 错误.

当 $\omega=-2$ 时，$y=\sin(-2x+\varphi)$ 过 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$，

则 $\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=0$，取 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

$\therefore y=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[-\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{2}\right]$

$=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，可得 B，C 正确.

综上可知，故选 BC.

(2)由题意得，$A=\sqrt{3}$，$T=4=\frac{2\pi}{\omega}$，$\omega=\frac{\pi}{2}$.

又因为 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)$ 为奇函数，

所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，由 $0<\varphi<\pi$，取 $k=0$，则 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，

所以 $f(x)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $f(1)=-\sqrt{3}$.]

**跟进训练**

2.(1)**B**　(2)$\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$　[(1)由图象知 $\pi<T<2\pi$，即 $\pi<\frac{2\pi}{|\omega|}<2\pi$，所以 $1<|\omega|<2$.

因为图象过点 $\left(-\frac{4\pi}{9},0\right)$，所以 $\cos\left(-\frac{4\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6}\right)=0$，

所以 $-\frac{4\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $\omega=-\frac{9}{4}k-\frac{3}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.

因为 $1<|\omega|<2$，故 $k=-1$，得 $\omega=\frac{3}{2}$，

所以 $f(x)=\cos\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$.

(2)因为函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的最小正周期是 $\pi$，所以 $\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，$\therefore\omega=2$.

函数的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得到曲线

$y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\varphi\right]$，

因为曲线 $y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\varphi\right]$ 关于原点对称，

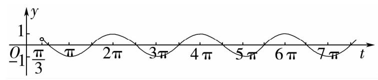
所以 $-\frac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，$\therefore\varphi=\frac{2\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

$\because 0<\varphi<\pi$，$\therefore\varphi=\frac{2\pi}{3}$，因此 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$.]

**考点三**

**典例 3**　(1)**CD**　(2)**AC**　[(1)因为 $x\in(0,2\pi)$，所以 $\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},2\pi\omega+\frac{\pi}{3}\right)$.

设 $t=\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},2\pi\omega+\frac{\pi}{3}\right)$，画出 $y=\cos t$ 的图象如图所示.

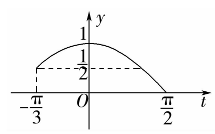



由图象可知，若 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上有且仅有 3 个极小值点，则 $5\pi<2\pi\omega+\frac{\pi}{3}\leqslant7\pi$，故 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上可能有 5，6 或 7 个零点，故 A 错误；$f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上可能有 2 或 3 个极大值点，故 B 错误；由 $5\pi<2\pi\omega+\frac{\pi}{3}\leqslant7\pi$，可得 $\frac{7}{3}<\omega\leqslant\frac{10}{3}$，故 D 正确；当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 时，$\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{3}\right)$. 因为 $\frac{7}{3}<\omega\leqslant\frac{10}{3}$，所以 $\frac{13\pi}{18}<\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{8\pi}{9}$，故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减，故 C 正确.

(2)$2\sqrt{3}\cos^2x-\sin 2x=\sqrt{3}-m$ 整理可得 $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{m}{2}$，

令 $t=2x+\frac{\pi}{6}$，因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right]$，则 $t\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$.

所以 $\cos t=-\frac{m}{2}$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ 上有且只有一个解，即 $y=\cos t$ 的图象和直线 $y=-\frac{m}{2}$ 只有 1 个交点.




由图可知，$-\frac{m}{2}=1$ 或 $0\leqslant-\frac{m}{2}<\frac{1}{2}$，解得 $m=-2$ 或 $-1<m\leqslant0$. 故选 AC.]

**跟进训练**

3.(1)**BCD**　(2)3　[(1)对于 A，因为 $f(2\pi-x)=-\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x=-f(x)$，则 $f(x)$ 的图象关于 $(\pi,0)$ 对称，不关于 $x=\pi$ 对称，A 错误；对于 B，因为 $y=\sin x$ 与 $y=\frac{1}{2}\sin 2x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上都是增函数，则 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上是增函数，B 正确；对于 C，因为 $f(-x)=-\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x=-f(x)$，即 $f(x)$ 是奇函数，又 $y=\sin x$ 与 $y=\frac{1}{2}\sin 2x$ 的最小正周期分别为 $2\pi$ 与 $\pi$，则 $f(x)$ 的最小正周期为 $2\pi$，当 $x\in(0,\pi)$ 时，$f'(x)=\cos x+\cos 2x=2\cos^2x+\cos x-1$，令 $f'(x)=0$，得 $\cos x=\frac{1}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{3}$. 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上递增，在 $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ 上递减，

因此，$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，由 $f(x)$ 是

奇函数得$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$，由$f(x)$的正周期为$2\pi$，则$f(x)$在$\mathbf{R}$上的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$，C正确；对于D，由选项C得，$f(x)_{\max}=f\left(\frac{\pi}{3}+2k_1\pi\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，$f(x)_{\min}=f\left(-\frac{\pi}{3}+2k_2\pi\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$，$k_1,k_2\in\mathbf{Z}$，

又$f(x_1)f(x_2)=-\frac{27}{16}=-\frac{3\sqrt{3}}{4}\times\frac{3\sqrt{3}}{4}$，则$\left|x_1-x_2\right|=\left|\left(\frac{\pi}{3}+2k_1\pi\right)-\left(-\frac{\pi}{3}+2k_2\pi\right)\right|=\left|\frac{2\pi}{3}+2\left(k_1-k_2\right)\pi\right|$，

所以当$k_1-k_2=0$时，$|x_1-x_2|_{\min}=\frac{2\pi}{3}$，D正确．故选BCD．

(2)因为$f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$，

所以最小正周期$T=\frac{2\pi}{\omega}$，因为$f(T)=\cos\left(\omega\cdot\frac{2\pi}{\omega}+\varphi\right)=\cos(2\pi+\varphi)=\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又$0<\varphi<\pi$，所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$，即$f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，

又$x=\frac{\pi}{9}$为$f(x)$的零点，所以$\frac{\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得$\omega=3+9k,k\in\mathbf{Z}$，

因为$\omega>0$，所以当$k=0$时$\omega_{\min}=3$．]

**考点四**

**典例4　解：**(1)连接$AB,OA,OB$(图略)，当$t=\frac{\pi}{4}$时，$\angle xOA=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$，$\angle xOB=\frac{\pi}{2}$，所以$\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$．

又$OA=1,OB=2$，所以$AB^2=1^2+2^2-2\times1\times2\cos\frac{2\pi}{3}=7$，

即$A,B$两点间的距离为$\sqrt{7}$．

(2)依题意，$y_1=\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$，$y_2=-2\sin 2t$，

所以$y=\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)-2\sin 2t=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2t-\frac{3}{2}\sin 2t=\sqrt{3}\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$，

即函数解析式为$y=\sqrt{3}\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)(t>0)$，

当$t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$2t+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$，

所以$\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-1,\frac{1}{2}\right)$，

故当$t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$y\in\left[-\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$．

**跟进训练**

4．(1)**B**　(2)$60\sin\alpha$　$225\sqrt{3}$　[(1)根据题意设$H(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+B(\omega>0,0\leqslant t\leqslant30)$，

因为摩天轮最高点距离地面高度为120 m，转盘直径为110 m，所以，该摩天轮最低点距离地面高度为10 m，

所以$\begin{cases}A+B=120,\\-A+B=10,\end{cases}$解得$A=55,B=65$，

因为开启后按逆时针方向匀速旋转，

旋转一周需要30 min，

所以，$T=\frac{2\pi}{\omega}=30$，解得$\omega=\frac{\pi}{15}$，

因为$t=0$时，$H(0)=10$，故$10=55\sin\varphi+65$，

即$\sin\varphi=-1$，解得$\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$．

所以，$H(t)=55\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)+65(0\leqslant t\leqslant30)$．故选B．

(2)在$\mathrm{Rt}\triangle PAQ$中，$\angle PAB=\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，$AP=60$，

$\therefore PQ=AP\sin\alpha=60\sin\alpha$，

在$\mathrm{Rt}\triangle PAR$中，可得$PR=60\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$，

由题可知$\angle QPR=\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}\cdot PQ\cdot PR\cdot\sin\angle QPR$

$=\frac{1}{2}\times60\sin\alpha\times60\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\times\sin\frac{2\pi}{3}$

$=900\sqrt{3}\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$

$=450\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\right)$

$=450\sqrt{3}\left[\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\right]$，

又$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，$2\alpha+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，

$\therefore$当$2\alpha+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即$\alpha=\frac{\pi}{6}$时，$\triangle PQR$的面积有最大值$225\sqrt{3}$，

即三角形绿地的最大面积是$225\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$．]

## 高考培优4　三角函数中$\omega$的范围问题

**题型一**

**典例1**　(1)**B**　(2)**A**　[(1)由题意，至少出现50次最大值即至少需要$49\frac{1}{4}$个周期，所以$\frac{197}{4}T=\frac{197}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}\leqslant1$，所以$\omega\geqslant\frac{197}{2}\pi$．

(2)因为对称中心到对称轴的最短距离是$\frac{T}{4}$，两条对称轴间的最短距离是$\frac{T}{2}$，所以对称中心$\left(\frac{\pi}{12},0\right)$到对称轴$x=\frac{\pi}{3}$间的距离用周期可表示为$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}=\frac{T}{4}+\frac{kT}{2}(k\in\mathbf{N}$，$T$为最小正周期)，解得$(2k+1)T=\pi$，又$T=\frac{2\pi}{\omega}$，所以$(2k+1)\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，则$\omega=2(2k+1)$，当$k=0$时，$\omega=2$最小．故选A．]

**跟进训练**

1．(1)**A**　(2)2或3　[(1)因为$0\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$，且$\omega>0$，所以$\frac{\pi}{3}\leqslant\omega x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3}$，又$f(x)$在$\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$上恰有两个零点，所以$\frac{2\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3}\geqslant2\pi$且$\frac{2\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3}<3\pi$，解得$\frac{5}{2}\leqslant\omega<4$．故选A．

(2)由题意得$1<\frac{\pi}{k}<2,k\in\mathbf{N}$，

$\therefore \frac{\pi}{2}<k<\pi, k\in \mathbf{N}, \therefore k=2$ 或 3.]

**题型二**

**典例 2**　**ACD**　[由题意得 $\begin{cases}\frac{3\pi}{2}\omega=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z},\\ \frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2\omega},\end{cases}$

即 $\begin{cases}\omega=\frac{2}{3}k+\frac{1}{3}, k\in \mathbf{Z},\\ 0<\omega\leqslant 2\end{cases}\Rightarrow\omega=\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}$.

故选 ACD.]

**跟进训练**

2.9　[设函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T$,

由 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2, f(\pi)=0$,

结合正弦函数图象的特征可知 $\frac{T}{4}+\frac{kT}{2}=\frac{3\pi}{4}, k\in \mathbf{N}$,

故 $T=\frac{3\pi}{1+2k}, k\in \mathbf{N}$.

又因为 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ 上单调,

所以 $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{T}{2}$, 故 $T\geqslant\frac{\pi}{6}$,

所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}\leqslant 12$, 即 $\frac{2(1+2k)}{3}\leqslant 12$,

所以 $k\leqslant\frac{17}{2}, k\in \mathbf{N}$, 所以 $k=0,1,2,\cdots,8$, 符合条件的 $\omega$ 的值有 9 个.]

**题型三**

**典例 3**　(1)**A**　(2)$\left(\frac{9}{8}, \frac{13}{8}\right]$　[(1)**法一**:因为 $\omega>0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内有且仅有一个极大值点等价于函数 $y=\sin x$ 在 $\left(\frac{\pi}{6}, \omega\pi+\frac{\pi}{6}\right)$ 内有且仅有一个极大值点.

若 $y=\sin x$ 在 $\left(\frac{\pi}{6}, \omega\pi+\frac{\pi}{6}\right)$ 内有且仅有一个极大值点, 则 $\frac{\pi}{2}<\omega\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{2}$, 解得 $\frac{1}{3}<\omega\leqslant\frac{7}{3}$.

故选 A.

**法二**:令 $\omega x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$, 可得 $f(x)$ 的极大值点为 $x=\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{3\omega}$, 其中 $k\in \mathbf{Z}$.

由 $\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{3\omega}\in(0,\pi), k\in \mathbf{Z}$, 可得 $-\frac{1}{6}<k<\frac{\omega}{2}-\frac{1}{6}, k\in \mathbf{Z}$,

由题设可知这个范围的整数 $k$ 有且仅有一个, 因此 $0<\frac{\omega}{2}-\frac{1}{6}\leqslant 1$, 于是正数 $\omega$ 的取值范围为 $\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right]$, 选项 A 正确.

故选 A.

(2)令 $t=\omega x+\frac{\pi}{4}$, 因为 $x\in(0, 2\pi)$, $\omega>0$, 所以 $t\in\left(\frac{\pi}{4}, 2\omega\pi+\frac{\pi}{4}\right)$, 结合 $y=\sin t$ 的图象得 $\frac{5\pi}{2}<2\omega\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{7\pi}{2}$, 解得 $\frac{9}{8}<\omega\leqslant\frac{13}{8}$.]

**跟进训练**

3.(1)**B**　(2)**ACD**　[(1)由题意, 函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$, 因为 $x\in\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$, 可得 $\frac{\pi}{6}<\omega x+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{6}(1+\omega)$, 要使得曲线 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 上仅有一条对称轴及一个对称中心, 则满足 $\pi<\frac{\pi}{6}(1+\omega)\leqslant\frac{3\pi}{2}$, 解得 $5<\omega\leqslant 8$, 所以 $\omega$ 的取值范围为 $(5,8]$.

(2)设 $f(x)$ 的最小正周期为 $T$, 则由题意可得 $\frac{T}{2}\geqslant\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, 即 $T\geqslant\pi$. 由 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调, 且 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, 得 $f(x)$ 的一个零点为 $\frac{-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}}{2}=-\frac{\pi}{12}$. 因为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$, 所以有以下三种情况: ① $T=\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$, 则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{12}{7}$; ② $\frac{3T}{4}=\frac{\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}}{2}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{5\pi}{6}$, 则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{9}{5}$; ③ $\frac{T}{4}=\frac{5\pi}{6}$, 则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{3}{5}$. 故选 ACD.]

## 第 7 课时　正弦定理、余弦定理

**梳理·必备知识**

1. $b^2+c^2-2bc\cos A$　$c^2+a^2-2ca\cos B$　$a^2+b^2-2ab\cos C$

$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$　$\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$　$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

2.(2)$\frac{1}{2}ac\sin B$　$\frac{1}{2}bc\sin A$

**激活·基本技能**

一、(1)×　(2)√　(3)√　(4)×

二、1. **D**　[由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 得 $b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2=\sqrt{2}$.]

2. **A**　[由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$, 得 $b^2=4+16-8=12$, 所以 $b=2\sqrt{3}$.]

3. 30°　[由正弦定理得 $\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{\sqrt{2}\sin 45^\circ}{2}=\frac{1}{2}$,

因为 $b>c, B=45^\circ$, 所以 $C=30^\circ$.]

4. $\frac{3}{4}$　$\frac{15\sqrt{7}}{4}$　[依题意得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3}{4}$,

所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{7}}{4}$,

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{15\sqrt{7}}{4}$.]

**考点一**

**典例 1**　**解**:(1)由 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$, 得

$\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A=1$, 即 $\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=1$,

由于 $A\in(0,\pi)$, 所以 $A+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$, 故 $A+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$,

所以 $A=\frac{\pi}{6}$.

(2)由题设条件和正弦定理得

$\sqrt{2}\sin B\sin C=2\sin C\sin B\cos B$,

又 $B,C\in(0,\pi)$,则 $\sin B\sin C\neq0$,所以 $\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $B=\frac{\pi}{4}$,所以 $C=\pi-A-B=\frac{7\pi}{12}$.

$\sin C=\sin(\pi-A-B)=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$,

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,可得 $\frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{b}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{c}{\sin\frac{7\pi}{12}}$,解得 $b=2\sqrt{2}$,$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$,

故△$ABC$ 的周长为 $2+\sqrt{6}+3\sqrt{2}$.

**跟进训练**

1.(1)**D** [由正弦定理及 $b\sin 2A=a\sin B$,得 $2\sin B\cdot\sin A\cos A=\sin A\sin B$,

又 $\sin A\neq0$,$\sin B\neq0$,则 $\cos A=\frac{1}{2}$.又 $c=2b$,所以由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+4b^2-4b^2\times\frac{1}{2}=3b^2$,得 $\frac{a}{b}=\sqrt{3}$.故选 D.]

(2)选择①:

**解**:由 $\frac{a+b}{c-b}=\frac{\sin C}{\sin A-\sin B}$,得 $(a+b)(\sin A-\sin B)=\sin C(c-b)$,

由正弦定理,得 $(a+b)(a-b)=c(c-b)$,

整理得 $a^2=b^2+c^2-bc$,

所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$,

又 $0<A<\pi$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

由正弦定理得 $a=4\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}=6$,

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-bc=(b-c)^2+bc=16+bc=36$,

所以 $bc=20$,

所以△$ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ah$,

所以 $h=\frac{bc\sin A}{a}=\frac{20\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{6}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

选择②:

**解**:由 $\cos A=\sqrt{3}\sin A-1$,

得 $\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$,

即 $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

因为 $A\in(0,\pi)$,所以 $A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

由正弦定理得 $a=4\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}=6$,

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-bc=(b-c)^2+bc=16+bc=36$,

所以 $bc=20$,

所以△$ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ah$,

所以 $h=\frac{bc\sin A}{a}=\frac{20\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{6}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

选择③:

**解**:因为 $\sqrt{3}\cos\frac{A}{2}=\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$,

又 $\cos\frac{A}{2}\neq0$,所以 $\sin\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,因此 $A=\frac{2\pi}{3}$.

由正弦定理得 $a=4\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{3}=6$,

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2+bc=(b-c)^2+3bc=16+3bc=36$,所以 $bc=\frac{20}{3}$,

所以△$ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ah$,

所以 $h=\frac{bc\sin A}{a}=\frac{\frac{20}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{6}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$.

**考点二**

**考向1　典例2　解**:(1)根据正弦定理,

由 $b\sin C+a\sin A=b\sin B+c\sin C$,

可得 $bc+a^2=b^2+c^2$,

即 $bc=b^2+c^2-a^2$,

由余弦定理可得,$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$,

因为 $A$ 为三角形内角,所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)因为 $D$ 是线段 $BC$ 的中点,$c=2$,$AD=\sqrt{13}$,

所以 $\angle ADB+\angle ADC=\pi$,

则 $\cos\angle ADB+\cos\angle ADC=0$,

所以 $\frac{AD^2+BD^2-AB^2}{2AD\cdot BD}+\frac{AD^2+DC^2-AC^2}{2AD\cdot DC}=0$,

即 $\frac{13+\frac{a^2}{4}-2^2}{2\sqrt{13}\cdot\frac{a}{2}}+\frac{13+\frac{a^2}{4}-b^2}{2\sqrt{13}\cdot\frac{a}{2}}=0$,

整理得 $a^2=2b^2-44$,

又 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+4-2b$,

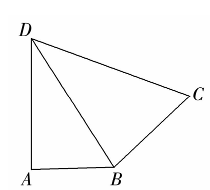
所以 $b^2+4-2b=2b^2-44$,

解得 $b=6$ 或 $b=-8$(舍),

因此 $a^2=2b^2-44=28$,

所以 $a=2\sqrt{7}$.

**考向2　典例3　解**:(1)连接 $BD$,如图.



在 Rt△$ABD$ 中，$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=2$，

且 $\tan\angle ADB=\frac{AB}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\angle ADB\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\angle ADB=\frac{\pi}{6}$.

在△$BCD$ 中，由余弦定理得

$\cos\angle BDC=\frac{BD^2+CD^2-BC^2}{2\cdot BD\cdot CD}=\frac{4+4-2}{2\times2\times2}=\frac{3}{4}$，

所以 $\sin\angle BDC=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

所以 $\sin\angle ADC=\sin\left(\angle BDC+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sin\angle BDC\cos\frac{\pi}{6}+\cos\angle BDC\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{21}+3}{8}$.

(2)在△$BCD$ 中，由余弦定理得 $BD^2=CD^2+BC^2-2CD\cdot BC\cdot\cos\frac{\pi}{4}$，

即 $CD^2-2CD-2=0$，

解得 $CD=1+\sqrt{3}$ 或 $CD=1-\sqrt{3}$(舍去)，

所以四边形 $ABCD$ 的面积 $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD+\frac{1}{2}BC\cdot CD\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{3}+\frac{1}{2}$.

**跟进训练**

2.**解**：(1)在△$ABD$ 中，由余弦定理得

$AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos B=AD^2$，

整理得 $BD^2-12BD+32=0$，所以 $BD=8$ 或 $BD=4$.

当 $BD=4$ 时，$\cos\angle ADB=\frac{16+49-81}{2\times4\times7}=-\frac{2}{7}$，

则 $\angle ADB>\frac{\pi}{2}$，不符合题意，舍去；

当 $BD=8$ 时，$\cos\angle ADB=\frac{64+49-81}{2\times8\times7}=\frac{2}{7}$，

则 $\angle ADB<\frac{\pi}{2}$，符合题意，所以 $BD=8$.

(2)在△$ABD$ 中，由余弦定理得

$\cos\angle BAD=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}=\frac{9^2+7^2-8^2}{2\times9\times7}=\frac{11}{21}$，

所以 $\sin\angle BAD=\frac{8\sqrt{5}}{21}$，

又 $\sin\angle ADB=\frac{3\sqrt{5}}{7}$，

所以 $\sin C=\sin(\angle ADB-\angle CAD)$

$=\sin(\angle ADB-\angle BAD)$

$=\sin\angle ADB\cos\angle BAD-\cos\angle ADB\sin\angle BAD$

$=\frac{3\sqrt{5}}{7}\times\frac{11}{21}-\frac{2}{7}\times\frac{8\sqrt{5}}{21}=\frac{17\sqrt{5}}{147}$，

在△$ACD$ 中，由正弦定理得 $\frac{CD}{\sin\angle CAD}=\frac{AD}{\sin C}$，

即 $CD=\frac{AD}{\sin C}\cdot\sin\angle CAD=\frac{7}{\frac{17\sqrt{5}}{147}}\times\frac{8\sqrt{5}}{21}=\frac{392}{17}$.

**考点三**

**典例 4**　**A**　[**法一**(化角为边)：因为 $b\cos C+c\cos B=b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{2a^2}{2a}=a$，所以 $a\sin A=a$，即 $\sin A=1$，故 $A=\frac{\pi}{2}$，因此△$ABC$ 是直角三角形.

**法二**(化边为角)：因为 $b\cos C+c\cos B=a\sin A$，

所以 $\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin^2 A$，

即 $\sin(B+C)=\sin^2 A$，所以 $\sin A=\sin^2 A$，

故 $\sin A=1$，即 $A=\frac{\pi}{2}$，因此△$ABC$ 是直角三角形.

**法三**(射影定理)：$b\cos C+c\cos B=a=a\sin A$，∴$\sin A=1$，故 $A=\frac{\pi}{2}$，因此△$ABC$ 是直角三角形.]

**拓展变式**

**解**：由 $\frac{a}{b}=\frac{\cos B}{\cos A}$，得 $\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\cos B}{\cos A}$，

所以 $\sin A\cos A=\cos B\sin B$，

所以 $\sin 2A=\sin 2B$.

因为 $A,B$ 为△$ABC$ 的内角，

所以 $2A=2B$ 或 $2A=\pi-2B$，

所以 $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$，

所以△$ABC$ 为等腰三角形或直角三角形.

**跟进训练**

3.**ACD**　[∵$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C>0$，

∴$A,B,C$ 均为锐角，∴选项 A 正确.

∵$c=a\cos B+b\cos A$，又 $c-a\cos B=(2a-b)\cos A$，

∴$a\cos B+b\cos A-a\cos B=2a\cos A-b\cos A$，

∴$(b-a)\cos A=0$，∴$b=a$ 或 $\cos A=0$，即 $b=a$ 或 $A=\frac{\pi}{2}$.

∴△$ABC$ 是等腰三角形或直角三角形，

∴选项 B 错误.

由 $b\cos C+c\cos B=b$ 及正弦定理，

可知 $\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin B$，

∴$\sin A=\sin B$，∴$A=B$，∴选项 C 正确.

由已知和正弦定理，易知 $\tan A=\tan B=\tan C$，∴选项 D 正确.]

## 高考培优 5　与三角形有关的范围(最值)问题

**题型一**

**典例 1**　**解**：(1)由正弦定理，得 $2\sin B\sin A=\sqrt{3}\sin A$，

故 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由题意得 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2)由 $A+B+C=\pi$，得 $C=\frac{2\pi}{3}-A$.

由△$ABC$ 是锐角三角形，得 $A\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$.

由 $\cos C=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=-\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A$，得

$\cos A+\cos B+\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{1}{2}\cos A+\frac{1}{2}=\sin\Big(A+$

$\left.\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\in\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2},\frac{3}{2}\right]$.

故 $\cos A+\cos B+\cos C$ 的取值范围是$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2},\frac{3}{2}\right]$.

**跟进训练**

1. $60°$ $(2,+\infty)$ [由已知得$\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)=\frac{1}{2}ac\sin B$,所以$\frac{\sqrt{3}(a^2+c^2-b^2)}{2ac}=\sin B$,由余弦定理得$\sqrt{3}\cos B=\sin B$,所以 $\tan B=\sqrt{3}$,所以 $B=60°$,又 $C>90°$,$B=60°$,所以 $A<30°$,且 $A+C=120°$,所以$\frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{\sin(120°-A)}{\sin A}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2\tan A}$. 又 $A<30°$,所以 $0<\tan A<\frac{\sqrt{3}}{3}$,即$\frac{1}{\tan A}>\sqrt{3}$,所以$\frac{c}{a}>\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$.]

**题型二**

**典例2** **解**:(1)由正弦定理和已知条件得

$BC^2-AC^2-AB^2=AC\cdot AB$. ①

由余弦定理得

$BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cos A$. ②

由①②得 $\cos A=-\frac{1}{2}$.

因为 $0<A<\pi$,所以 $A=\frac{2\pi}{3}$.

(2)**法一**(基本不等式法):由余弦定理得 $BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cos A=AC^2+AB^2+AC\cdot AB=9$,

即 $(AC+AB)^2-AC\cdot AB=9$.

$\because AC\cdot AB\leqslant\left(\frac{AC+AB}{2}\right)^2$(当且仅当 $AC=AB$ 时取等号),

$\therefore 9=(AC+AB)^2-AC\cdot AB\geqslant(AC+AB)^2-\left(\frac{AC+AB}{2}\right)^2=\frac{3}{4}(AC+AB)^2$,

解得 $AC+AB\leqslant2\sqrt{3}$(当且仅当 $AC=AB$ 时取等号),

$\therefore\triangle ABC$ 周长 $L=AC+AB+BC\leqslant3+2\sqrt{3}$,

$\therefore\triangle ABC$ 周长的最大值为 $3+2\sqrt{3}$.

**法二**(三角函数法):由正弦定理及(1)得

$\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}=2\sqrt{3}$,

从而 $AC=2\sqrt{3}\sin B$,

$AB=2\sqrt{3}\sin(\pi-A-B)=3\cos B-\sqrt{3}\sin B$.

故 $BC+AC+AB=3+\sqrt{3}\sin B+3\cos B$

$=3+2\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)$.

又 $0<B<\frac{\pi}{3}$,

所以当 $B=\frac{\pi}{6}$ 时,$\triangle ABC$ 周长取得最大值 $3+2\sqrt{3}$.

**跟进训练**

2. **解**:(1)$\because a^2+b^2-c^2=\frac{4\sqrt{3}}{3}S_{\triangle ABC}$,

$\therefore 2ab\cos C=\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}ab\sin C$,$\therefore\tan C=\sqrt{3}$,

由 $C$ 为三角形内角得 $C=\frac{\pi}{3}$.

(2)由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=2$,

$\therefore a=2\sin A$,$\therefore 2a-4\sin B=4\sin A-4\sin B$

$=4\sin A-4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=4\sin\left(A-\frac{\pi}{3}\right)$,

由 $0<A<\frac{2\pi}{3}$得$-\frac{\pi}{3}<A-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}$,

$\therefore-\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\left(A-\frac{\pi}{3}\right)<\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore-2\sqrt{3}<4\sin\left(A-\frac{\pi}{3}\right)<2\sqrt{3}$.

故 $2a-4\sin B$ 的取值范围为$(-2\sqrt{3},2\sqrt{3})$.

**题型三**

**典例3** **解**:(1)由题设及正弦定理得

$\sin A\sin\frac{A+C}{2}=\sin B\sin A$.

因为 $\sin A\neq0$,所以 $\sin\frac{A+C}{2}=\sin B$.

由 $A+B+C=180°$,可得 $\sin\frac{A+C}{2}=\cos\frac{B}{2}$,

故 $\cos\frac{B}{2}=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$.

因为 $\cos\frac{B}{2}\neq0$,故 $\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$,所以 $B=60°$.

(2)由题设及(1)知$\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a$.

由(1)知 $A+C=120°$.

由正弦定理得 $a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{\sin(120°-C)}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\frac{1}{2}$.

由于$\triangle ABC$ 为锐角三角形,故 $0°<A<90°$,$0°<C<90°$. 结合 $A+C=120°$,得 $30°<C<90°$,故$\frac{1}{2}<a<2$,从而$\frac{\sqrt{3}}{8}<S_{\triangle ABC}<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因此,$\triangle ABC$ 面积的取值范围是$\left(\frac{\sqrt{3}}{8},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

**跟进训练**

3. $(1+\sqrt{3},4+2\sqrt{3})$ [因为 $c=2$,$A=\frac{\pi}{3}$,

则由正弦定理,可得 $a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{\sin C}$,$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)}{\sin C}$,

所以 $a+b=\frac{\sqrt{3}}{\sin C}+\frac{\sqrt{3}\cos C+\sin C}{\sin C}$

$=1+\frac{\sqrt{3}(1+\cos C)}{\sin C}=1+\frac{2\sqrt{3}\cos^2\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=1+\frac{\sqrt{3}}{\tan\frac{C}{2}}$,

由$\triangle ABC$ 是锐角三角形,可得 $0<C<\frac{\pi}{2}$,$0<\frac{2\pi}{3}-C<\frac{\pi}{2}$,

则$\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{2}$，

所以$\frac{\pi}{12}<\frac{C}{2}<\frac{\pi}{4}$，$2-\sqrt{3}<\tan\frac{C}{2}<1$.

所以$1+\sqrt{3}<a+b<4+2\sqrt{3}$.］

**题型四**

**跟进训练**

4.**D**　［$A=\frac{\pi}{3}$，由正弦定理可得

$\frac{b^2+c^2}{a^2}=\frac{\sin^2B+\sin^2C}{\sin^2A}$

$=\frac{4}{3}(\sin^2B+\sin^2C)$

$=\frac{4}{3}\left[\sin^2B+\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)\right]$

$=\frac{4}{3}\left[\frac{1-\cos 2B}{2}+\frac{1-\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2B\right)}{2}\right]$

$=\frac{4}{3}\left[1+\frac{1}{2}\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)\right]$，

因为$\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2},\\0<\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2},\end{cases}$

所以$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{6}<2B-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，

所以$\frac{1}{2}<\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，

$\frac{5}{3}<\frac{4}{3}\left[1+\frac{1}{2}\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)\right]\leqslant 2$，

即$\frac{b^2+c^2}{a^2}$的取值范围是$\left(\frac{5}{3},2\right]$.］

## 第8课时　正弦定理、余弦定理的应用举例

**梳理·必备知识**

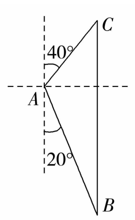
仰角　俯角　方位角　$[0,2\pi)$

**激活·基本技能**

一、(1)√　(2)×　(3)√　(4)√

二、1.**D**

2.**D**　［记轮船航行到某处的位置为$A$，灯塔的位置为$B$，20分后轮船的位置为$C$，如图所示.则$AB=10$，$AC=6$，$\angle CAB=120°$，所以$BC^2=10^2+6^2-2\times10\times6\times\left(-\frac{1}{2}\right)=196$，所以$BC=14$.故20分后，轮船与灯塔的距离为14海里.故选D.］




3.**D**　［**法一**：设$AB=x$，则$BC=x$.

$\therefore BD=10+x$.

$\therefore\tan\angle ADB=\frac{AB}{DB}=\frac{x}{10+x}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解得$x=5(\sqrt{3}+1)$.

∴点$A$离地面的高$AB$等于$5(\sqrt{3}+1)$ m.

**法二**：∵$\angle ACB=45°$，

$\therefore\angle ACD=135°$，

$\therefore\angle CAD=180°-135°-30°=15°$.

由正弦定理，得$AC=\frac{CD}{\sin\angle CAD}\cdot\sin\angle ADC=\frac{10}{\sin 15°}\cdot\sin 30°$

$=\frac{20}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$.

$\therefore AB=AC\sin 45°=5(\sqrt{3}+1)$m.］

4.200　［在Rt△$ABC$中，$\angle ACB=45°$.

设$AB=h$，则$BC=h$，

在Rt△$ABD$中，$\angle ADB=30°$，所以$BD=\sqrt{3}h$.

在△$BCD$中，$\angle CBD=30°$，$CD=200$ m，

由余弦定理可得$40\ 000=h^2+3h^2-2h\cdot\sqrt{3}h\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$h=200$，所以塔高$AB=200$ m.］

**考点一**

**典例1**　**解**：在△$ABC$中，因为$\angle CAB=75°$，$\angle CBA=45°$，

所以$\angle ACB=180°-75°-45°=60°$，

又因为$AB=1\ 000$，所以由正弦定理，得

$\frac{AC}{\sin 45°}=\frac{1\ 000}{\sin 60°}$，即$AC=\frac{1\ 000\sin 45°}{\sin 60°}=\frac{1\ 000\sqrt{6}}{3}$.

在△$ABD$中，因为$\angle DAB=30°$，$\angle DBA=60°$，

所以$\angle ADB=180°-30°-60°=90°$，

又因为$AB=1\ 000$，所以由正弦定理，得

$\frac{AD}{\sin 60°}=\frac{1\ 000}{\sin 90°}$，即$AD=\frac{1\ 000\sin 60°}{\sin 90°}=500\sqrt{3}$.

在△$ACD$中，因为$AD=500\sqrt{3}$，$AC=\frac{1\ 000\sqrt{6}}{3}$，

且$\angle CAD=75°-30°=45°$，由余弦定理，得

$CD=\sqrt{AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cos 45°}$

$=\sqrt{(500\sqrt{3})^2+\left(\frac{1\ 000\sqrt{6}}{3}\right)^2-2\times500\sqrt{3}\times\frac{1\ 000\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$=\frac{500\sqrt{15}}{3}$，

即$C$，$D$两点间的距离为$\frac{500\sqrt{15}}{3}$m.

**跟进训练**

1.**解**：(1)在△$ABD$中，∵$\angle DAC=75°$，$\angle CAB=45°$，

$\therefore\angle DAB=120°$，

又$\angle DBA=30°$，$\therefore\angle ADB=30°$，

∴△$ABD$为等腰三角形，$\therefore AB=AD=50$ m.

由余弦定理可得

$BD^2=50^2+50^2-2\times50\times50\cos 120°=50^2\times3$，

$\therefore BD=50\sqrt{3}$ m.

在△$ABC$中，$\angle CAB=45°$，

$\angle ABC=\angle ABD+\angle CBD=30°+75°=105°$，

$\therefore\angle ACB=30°$，

由正弦定理可得$\frac{50}{\sin 30°}=\frac{BC}{\sin 45°}$.

$\therefore BC=50\sqrt{2}$ m.

(2)在△$BCD$中，$\angle DBC=75°$，$BC=50\sqrt{2}$ m，$BD=50\sqrt{3}$ m，根据余弦定理可得$CD=\sqrt{BD^2+BC^2-2BD\cdot BC\cos\angle DBC}$

$=25(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ m.

**考点二**

**典例 2** **解**:由题意,$\angle BCD=\alpha,\angle BDC=\beta,CD=s$,

$\therefore\angle CBD=\pi-\alpha-\beta$,

$\therefore$在$\triangle BCD$中,由正弦定理得,

$\dfrac{BC}{\sin\angle CDB}=\dfrac{CD}{\sin\angle CBD}$,

$\therefore\dfrac{BC}{\sin\beta}=\dfrac{s}{\sin(\pi-\alpha-\beta)}=\dfrac{s}{\sin(\alpha+\beta)}$,

解得$BC=\dfrac{s\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$,

$\because$在点$C$测得塔顶$A$的仰角为$\theta$,

$\therefore\angle ACB=\theta$,

$\therefore AB=BC\tan\theta=\dfrac{s\cdot\tan\theta\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

$\therefore$塔高$AB$为$\dfrac{s\cdot\tan\theta\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

**跟进训练**

2.$100\sqrt{6}$ [由题意,在$\triangle ABC$中,$\angle BAC=30^\circ,\angle ABC=180^\circ-75^\circ=105^\circ$,故$\angle ACB=45^\circ$.

又$AB=600$ m,

故由正弦定理得$\dfrac{600}{\sin 45^\circ}=\dfrac{BC}{\sin 30^\circ}$,

解得$BC=300\sqrt{2}$ m.

在Rt$\triangle BCD$中,$CD=BC\cdot\tan 30^\circ=300\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$=100\sqrt{6}$(m).]

**考点三**

**典例 3** **解**:(1)由题意,在$\triangle ABC$中,$\angle ABC=180^\circ-75^\circ+15^\circ=120^\circ,AB=2\sqrt{3}-2,BC=4$,

根据余弦定理得

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\angle ABC$

$=(2\sqrt{3}-2)^2+4^2+(2\sqrt{3}-2)\times4=24$,

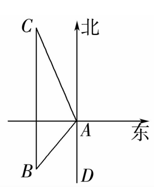
所以$AC=2\sqrt{6}$.

(2)在$\triangle ABC$中,根据正弦定理得$\sin\angle BAC=\dfrac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

所以$\angle CAB=45^\circ$.

**跟进训练**

3.**解**:如图,设缉私艇在$C$处截住走私船,$D$为岛$A$正南方向上一点,缉私艇的速度为$x$ n mile/h,




结合题意知$BC=0.5x,AC=5,\angle BAC=180^\circ-38^\circ-22^\circ=120^\circ$.

由余弦定理可得$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos 120^\circ$,

所以$BC^2=49$,所以$BC=0.5x=7$,

解得$x=14$.

又由正弦定理得

$\sin\angle ABC=\dfrac{AC\cdot\sin\angle BAC}{BC}=\dfrac{5\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{7}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$,

所以$\angle ABC=38^\circ$,

又$\angle BAD=38^\circ$,所以$BC/\!/AD$,

故缉私艇以 14 n mile/h 的速度向正北方向行驶,恰好用 0.5 h截住该走私船.

## 高考研究在线 4 三角函数中的“结构不良”试题

**命题点一**

**典例 1** **AD** [由题意得,$f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}+\varphi\right)=0$,

所以$\dfrac{4\pi}{3}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,即$\varphi=-\dfrac{4\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

又$0<\varphi<\pi$,所以$k=2$时,$\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$.

故$f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

选项 A:$x\in\left(0,\dfrac{5\pi}{12}\right)$时,$2x+\dfrac{2\pi}{3}\in\left(\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{3\pi}{2}\right)$,由$y=\sin u$图象知$y=f(x)$是单调递减的;

选项 B:$x\in\left(-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{11\pi}{12}\right)$时,$2x+\dfrac{2\pi}{3}\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2}\right)$,由$y=\sin u$图象知$y=f(x)$只有 1 个极值点,由$2x+\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{3\pi}{2}$可解得极值点;

选项 C:$x=\dfrac{7\pi}{6}$时,$\because f\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)=\sin\left(2\times\dfrac{7\pi}{6}+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\sin 3\pi$,

$\therefore$直线$x=\dfrac{7\pi}{6}$不是对称轴;

选项 D:由$f'(x)=2\cos\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=-1$得$\cos\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$,

解得$2x+\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$或$2x+\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

从而得$x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$或$x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

所以函数$y=f(x)$的图象在点$\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$处的切线斜率为$k=f'(0)=2\cos\dfrac{2\pi}{3}=-1$,

切线方程为$y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-(x-0)$,即$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-x$.故选 AD.]

**跟进训练**

1.**BCD** [$\because f(x)=\cos\left(\omega x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\omega x(\omega>0)$,

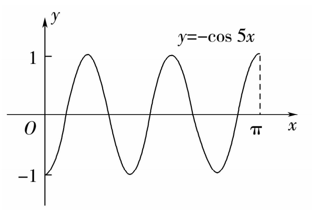
$\therefore g(x)=\sin\left[\omega\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$,且$g(0)=-1$,

$\therefore-\dfrac{\pi}{2}\omega=\left(2k-\dfrac{1}{2}\right)\pi(k\in\mathbf{Z})$,即$\omega=1-4k$,为奇数,

$\therefore g(x)=\sin\left[\omega\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]=-\cos\omega x$为偶函数,故 A 错误;

由以上分析可知$\omega$为奇数,$\therefore g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(-\dfrac{\pi\omega}{2}\right)=0$,故 B 正确;

由以上分析可知，当 $\omega=5$ 时，$g(x)=\sin\left(5x-\frac{5\pi}{2}\right)=-\cos 5x$，$T=\frac{2\pi}{5}$，由图象可知 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有 4 个极值点，故 C 正确；




$\because g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{5}\right]$ 上单调递增，所以 $\frac{\pi}{5}-0\leqslant\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}$，

解得 $0<\omega\leqslant5$，又 $\because\omega=1-4k$，

$\therefore\omega$ 的最大值为 5，故 D 正确.

故选 BCD.]

**命题点二**

**典例 2**　**解**：(1) $\because c=2b\cos B$，

由正弦定理可得 $\sin C=2\sin B\cos B$，

即 $\sin C=\sin 2B$，

$\therefore C=2B$ 或 $C+2B=\pi$.

$\because C=\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore$ 当 $C=2B$ 时，$B=\frac{\pi}{3}$，即 $C+B=\pi$，不符合题意，

$\therefore C+2B=\pi$，

$\therefore 2B=\frac{\pi}{3}$，即 $B=\frac{\pi}{6}$.

(2)选①：$c=\sqrt{2}b$.

由正弦定理可得 $\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$，

与已知条件 $c=\sqrt{2}b$ 矛盾，故 $\triangle ABC$ 不存在.

选②：周长为 $4+2\sqrt{3}$.

$\because C=\frac{2\pi}{3}$，$B=\frac{\pi}{6}$，$\therefore A=\frac{\pi}{6}$，

由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，

即 $\frac{a}{\frac{1}{2}}=\frac{b}{\frac{1}{2}}=\frac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$，

$\therefore a=R$，$b=R$，$c=\sqrt{3}R$，

$\therefore a+b+c=(2+\sqrt{3})R=4+2\sqrt{3}$，

$\therefore R=2$，即 $a=2$，$b=2$，$c=2\sqrt{3}$，

$\therefore\triangle ABC$ 存在且唯一确定.

设 $BC$ 的中点为 $D$，$\therefore CD=1$，

在 $\triangle ACD$ 中，运用余弦定理，得

$AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cdot\cos C$，

即 $AD^2=4+1-2\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7$，

$\therefore AD=\sqrt{7}$，

$\therefore$ 边 $BC$ 上的中线的长度为 $\sqrt{7}$.

选③：面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

$\because A=B=\frac{\pi}{6}$，$\therefore a=b$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}a^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，解得 $a=\sqrt{3}$，

$\therefore\triangle ABC$ 存在且唯一确定.

设 $BC$ 的中点为 $D$，在 $\triangle ACD$ 中，运用余弦定理，得

$AD^2=AC^2+CD^2-2\times AC\times CD\times\cos\frac{2\pi}{3}=3+\frac{3}{4}+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{21}{4}$，

$\therefore AD=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

$\therefore$ 边 $BC$ 上的中线的长度为 $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

**跟进训练**

2.**解**：选条件①.

由 $C=\frac{\pi}{6}$ 和余弦定理得 $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

由 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$ 及正弦定理得 $a=\sqrt{3}b$.

于是 $\frac{3b^2+b^2-c^2}{2\sqrt{3}b^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由此可得 $b=c$.

由① $ac=\sqrt{3}$，解得 $a=\sqrt{3}$，$b=c=1$.

因此，选条件①时问题中的三角形存在，此时 $c=1$.

选条件②.

由 $C=\frac{\pi}{6}$ 和余弦定理得 $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$ 及正弦定理得 $a=\sqrt{3}b$.

于是 $\frac{3b^2+b^2-c^2}{2\sqrt{3}b^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由此可得 $b=c$，$B=C=\frac{\pi}{6}$，$A=\frac{2\pi}{3}$，

由② $c\sin A=3$，所以 $c=b=2\sqrt{3}$，$a=6$.

因此，选条件②时问题中的三角形存在，此时 $c=2\sqrt{3}$.

选条件③.

由 $C=\frac{\pi}{6}$ 和余弦定理得 $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

由 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$ 及正弦定理得 $a=\sqrt{3}b$.

于是 $\frac{3b^2+b^2-c^2}{2\sqrt{3}b^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由此可得 $b=c$.

由③ $c=\sqrt{3}b$，与 $b=c$ 矛盾.

因此，选条件③时问题中的三角形不存在.

**命题点三**

**典例 3**　**解**：(1) $\because 2\sin C=3\sin A$，

$\therefore$ 根据正弦定理可得 $2c=3a$，

$\because b=a+1$，$c=a+2$，$\therefore a=4$，$b=5$，$c=6$，

在 $\triangle ABC$ 中，运用余弦定理可得

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\times4\times5}=\frac{1}{8}$，

$\because\sin^2C+\cos^2C=1$，

$\therefore \sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 4\times 5\times \frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$.

(2)$\because c>b>a$,

$\therefore \triangle ABC$为钝角三角形时,角$C$必为钝角,

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$=\frac{a^2+(a+1)^2-(a+2)^2}{2a(a+1)}<0$,

$\therefore a^2-2a-3<0$,

$\because a>0$, $\therefore 0<a<3$,

$\because$三角形的任意两边之和大于第三边,

$\therefore a+b>c$,即$a+a+1>a+2$,即$a>1$,

$\therefore 1<a<3$,$\because a$为正整数,

$\therefore a=2$.

**跟进训练**

3.**解**:(1)由题意可知$\angle BDC$为锐角,

$\because \cos\angle BDC=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\therefore \sin\angle BDC=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

在$\triangle BCD$中,由正弦定理可知$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{CD}{\sin\angle DBC}$,

即$\frac{BC}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{4}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$,解得$BC=2\sqrt{3}$.

(2) $\because \triangle BCD$为锐角三角形,$\therefore \angle BCD$为锐角,

$\therefore \angle ACB$为锐角.

在$\triangle ABC$中,$\because BC<AC$,

$\therefore \angle BAC<\angle ABC$.

若$\triangle ABC$为钝角三角形,则$\angle ABC$为钝角,

$\cos\angle ABC<0$,所以$AB^2+BC^2<AC^2$.

$\because BC=2\sqrt{3}, AB=m, AC=2\sqrt{3}+\frac{m}{3}$,

$\therefore m^2+(2\sqrt{3})^2<\left(2\sqrt{3}+\frac{m}{3}\right)^2$,

即$2m^2-3\sqrt{3}m<0$,$\therefore 0<m<\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$\because m\in \mathbf{N}^*$,$\therefore m=1$或2,所以存在$m=1$或2,使得$\triangle ABC$为钝角三角形.

# 第五章　平面向量、复数

## 第1课时　平面向量的概念及线性运算

**梳理·必备知识**

1.(1)方向　模　(2)0　(3)1个单位　(4)相同　相反　平行　(5)相同　(6)相反

2.相同　相反

3.$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$

**激活·基本技能**

一、(1)×　(2)×　(3)×　(4)√

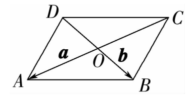
二、1.**D**　[$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,故D错误.]

2.$\frac{1}{2}$　[$\because \lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$共线,

$\therefore$存在实数$\mu$使得$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mu(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$,

$\therefore \begin{cases}\lambda=\mu,\\ 2\mu=1,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}\lambda=\frac{1}{2},\\ \mu=\frac{1}{2}.\end{cases}$]

3.$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$　$-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$　[如图,



$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.]

4.8　2　[$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=3+5=8$,

当且仅当$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$同向时取等号,所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|_{\max}=8$.

又$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\geqslant||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||=|3-5|=2$,

当且仅当$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$反向时取等号,所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|_{\min}=2$.]

**考点一**

**典例1**　(1)**BC**　(2)**C**　[(1)两个向量的长度相等,但它们的方向不一定相同,故A不正确;

$\because \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,$\therefore |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$且$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DC}$,又$A,B,C,D$是不共线的四点,$\therefore$四边形$ABCD$为平行四边形,反之,若四边形$ABCD$为平行四边形,则$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$,$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DC}$且$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{DC}$方向相同,因此$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,故B正确;

$\because \boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,$\therefore \boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$的长度相等且方向相同,又$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,$\therefore \boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$的长度相等且方向相同,$\therefore \boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{c}$的长度相等且方向相同,故$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$,故C正确;

当$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$且方向相反时,即使$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,也不能得到$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,故$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$且$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$不是$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$的充要条件,而是必要不充分条件,故D不正确.故选BC.

(2)因为向量$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$的方向与向量$\boldsymbol{a}$方向相同,向量$\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$的方向与向量$\boldsymbol{b}$方向相同,且$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$,所以向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{b}$方向相同,故可排除选项A,B,D.当$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$时,$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{2\boldsymbol{b}}{|2\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$,故$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$是$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$成立的充分条件.]

**跟进训练**

1.**D**　[根据相等向量的定义,分析可得$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{BC}$不平行,$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{BD}$不平行,所以$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$均错误,$\overrightarrow{PE}$与$\overrightarrow{PF}$平行,但方向相反,故不相等,只有$\overrightarrow{EP}$与$\overrightarrow{PF}$方向相同,且大小都等于线段$EF$长度的一半,所以$\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{PF}$.]

**考点二**

**考向1**　**典例2**　**ABC**　[$\because AB\parallel CD, AB\perp AD, AB=2AD=2DC$,$\therefore \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,A正确;

$\because \overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{EC}$,$\therefore \overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,$\therefore \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,又$F$为$AE$的中点,$\therefore \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,B正确;

$\therefore\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,C 正确；

$\therefore\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,D 错误.故选 ABC.]

**考向 2　典例 3**　**A**　[由题意,知$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,又$\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$,所以$\lambda=-\frac{1}{6}$,$\mu=\frac{1}{2}$,则$\lambda+\mu=\frac{1}{3}$.]

**跟进训练**

2.(1)**B**　(2)2　[(1)因为点 $D$ 在边 $AB$ 上,$BD=2DA$,所以$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DA}$,即$\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=2(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD})$,所以$\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{CD}-2\overrightarrow{CA}=3\boldsymbol{n}-2\boldsymbol{m}=-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$.故选 B.

(2)由题意得$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,

因为$\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AF}$,

所以$\overrightarrow{AB}=\left(x+\frac{y}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{x}{2}+y\right)\overrightarrow{AD}$,

所以$\begin{cases}x+\frac{y}{2}=1,\\ \frac{x}{2}+y=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\frac{4}{3},\\ y=-\frac{2}{3},\end{cases}$所以 $x-y=2$.]

**考点三**

**典例 4**　(1)**证明**:$\because\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CD}=3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,

$\therefore\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}+3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

$=2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=5(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=5\overrightarrow{AB}$.

$\therefore\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BD}$共线.

又$\because$它们有公共点 $B$,$\therefore A,B,D$ 三点共线.

(2)**解**:$\because k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 共线,

$\therefore$存在实数 $\lambda$,使 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})$,

即 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda k\boldsymbol{b}$,$\therefore(k-\lambda)\boldsymbol{a}=(\lambda k-1)\boldsymbol{b}$.

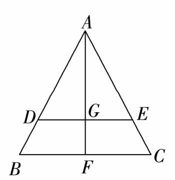
$\because\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个不共线的非零向量,

$\therefore k-\lambda=\lambda k-1=0$,$\therefore k^2-1=0$,$\therefore k=\pm1$.

**跟进训练**

3.(1)**B**　(2)3　[(1)由$\overrightarrow{CB}=\lambda\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}$得$\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{PB}=\lambda\overrightarrow{PA}$,$\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{PA}$,则$\overrightarrow{CP}$,$\overrightarrow{PA}$为共线向量,又$\overrightarrow{CP}$,$\overrightarrow{PA}$有一个公共点 $P$,所以 $C,P,A$ 三点共线,即点 $P$ 在边 $AC$ 所在直线上.

(2)如图,设 $F$ 为 $BC$ 中点,




则$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,

又$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{\mu}\overrightarrow{AE}$,$\therefore\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3\lambda}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3\mu}\overrightarrow{AE}$,

又 $G,D,E$ 三点共线,$\therefore\frac{1}{3\lambda}+\frac{1}{3\mu}=1$,即$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=3$.]

## 第 2 课时　平面向量基本定理及坐标表示

**梳理·必备知识**

1.(1)不共线　有且只有　(2)不共线

2.(1)$(x_1+x_2,y_1+y_2)$　$(x_1-x_2,y_1-y_2)$　$(\lambda x_1,\lambda y_1)$　$\sqrt{x_1^2+y_1^2}$　(2)$(x_2-x_1,y_2-y_1)$　$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

3.$x_1y_2-x_2y_1=0$

**激活·基本技能**

一、(1)×　(2)×　(3)×　(4)√

二、1.**D**　[$\because\boldsymbol{a}=(1,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-1)$,

$\therefore\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,$\frac{3}{2}\boldsymbol{b}=\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$,

$\therefore\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2},\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)=(-1,2)$,故选 D.]

2.**D**　[由题意可知$\overrightarrow{P_1P_2}=(3,-3)$.

若$\overrightarrow{P_1P}=\frac{1}{3}\overrightarrow{P_1P_2}$,则点 $P$ 坐标为(2,2)；

若$\overrightarrow{P_1P}=\frac{2}{3}\overrightarrow{P_1P_2}$,则点 $P$ 坐标为(3,1),

故选 D.]

3.(1,5)　[设 $D(x,y)$,则由$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,得$(4,1)=(5-x,6-y)$,

即$\begin{cases}4=5-x,\\1=6-y,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=5.\end{cases}$]

4.$\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$　[由题意可知$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}$,

$\therefore\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})$,

$\therefore\frac{4}{3}\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$,则$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$.]

**考点一**

**典例 1**　**解**:(1)由题意知,$A$ 是 $BC$ 的中点,且$\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$,由向量加法的平行四边形法则,

得$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}$,

所以$\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}-\frac{5}{3}\boldsymbol{b}$.

(2)由题意知,$\overrightarrow{EC}/\!/\overrightarrow{DC}$,故设$\overrightarrow{EC}=x\overrightarrow{DC}$.

因为$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OE}=(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\lambda\boldsymbol{a}=(2-\lambda)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{DC}=2\boldsymbol{a}-\frac{5}{3}\boldsymbol{b}$,

所以$(2-\lambda)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=x\left(2\boldsymbol{a}-\frac{5}{3}\boldsymbol{b}\right)$.

因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线,由平面向量基本定理,

得$\begin{cases}2-\lambda=2x,\\-1=-\frac{5}{3}x,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\frac{3}{5},\\ \lambda=\frac{4}{5}.\end{cases}$

故$\lambda=\frac{4}{5}$.

**跟进训练**

1.(1)**B** (2)$\frac{1}{2}$ [(1)由向量共线的充要条件可得,当点 $P$ 在线段 $AB$ 上时,存在唯一的一对有序实数 $u,v$,使得$\overrightarrow{OP}=u\overrightarrow{OA}+v\overrightarrow{OB}$成立,且 $u+v=1$.

可以证明点 $P$ 位于阴影区域内的充要条件是$\overrightarrow{OP}=u\overrightarrow{OA}+v\overrightarrow{OB}$,且 $u>0,v>0,u+v>1$.

∵$1+2>1$,∴点 $P$ 位于阴影区域内,故①正确;同理③正确;而②④错误.故选 B.

(2)由题图可设$\overrightarrow{CG}=x\overrightarrow{CE}(x>0)$,

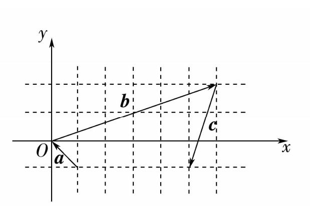
则$\overrightarrow{CG}=x(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE})=x\left(\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right)=\frac{x}{2}\overrightarrow{CD}+x\overrightarrow{CB}$.

因为$\overrightarrow{CG}=\lambda\overrightarrow{CD}+\mu\overrightarrow{CB}$,$\overrightarrow{CD}$与$\overrightarrow{CB}$不共线,

所以$\lambda=\frac{x}{2}$,$\mu=x$,所以$\frac{\lambda}{\mu}=\frac{1}{2}$.]

**考点二**

**典例 2** (1)**D** [如图,以 $O$ 为坐标原点,建立平面直角坐标系,设每个小正方形边长为 1,可得 $\boldsymbol{a}=(-1,1)$,$\boldsymbol{b}=(6,2)$,$\boldsymbol{c}=(-1,-3)$.




∵$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$,

∴$\begin{cases}-1=-\lambda+6\mu,\\-3=\lambda+2\mu,\end{cases}$解得 $\lambda=-2,\mu=-\frac{1}{2}$.

∴$\frac{\lambda}{\mu}=4$.故选 D.]

(2)**解**:由已知得 $\boldsymbol{a}=(5,-5)$,$\boldsymbol{b}=(-6,-3)$,$\boldsymbol{c}=(1,8)$.

①$3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}=3(5,-5)+(-6,-3)-3(1,8)=(15-6-3,-15-3-24)=(6,-42)$.

②设 $O$ 为原点,∵$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}=3\boldsymbol{c}$,

∴$\overrightarrow{OM}=3\boldsymbol{c}+\overrightarrow{OC}=(3,24)+(-3,-4)=(0,20)$.

∴$M(0,20)$.又∵$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OC}=-2\boldsymbol{b}$,

∴$\overrightarrow{ON}=-2\boldsymbol{b}+\overrightarrow{OC}=(12,6)+(-3,-4)=(9,2)$,

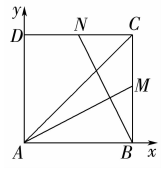
∴$N(9,2)$,∴$\overrightarrow{MN}=(9,-18)$.

**跟进训练**

2.(1)**A** (2)$\frac{8}{5}$ [(1)$\overrightarrow{AB}=(-3,-2)=\overrightarrow{DC}$,

∴$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(5,-1)$,则 $D(6,1)$.故选 A.

(2)**法一**:以 $AB,AD$ 所在直线分别为 $x$ 轴、$y$ 轴,建立平面直角坐标系,如图所示,设正方形的边长为 1,则$\overrightarrow{AM}=\left(1,\frac{1}{2}\right)$,




$\overrightarrow{BN}=\left(-\frac{1}{2},1\right)$,$\overrightarrow{AC}=(1,1)$,

∵$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{BN}=\left(\lambda-\frac{1}{2}\mu,\frac{\lambda}{2}+\mu\right)$,

∴$\begin{cases}\lambda-\frac{1}{2}\mu=1,\\\frac{\lambda}{2}+\mu=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=\frac{6}{5},\\\mu=\frac{2}{5},\end{cases}$

∴$\lambda+\mu=\frac{8}{5}$.

**法二**:由$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{BN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,得$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{BN}=\left(\lambda-\frac{\mu}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{\lambda}{2}+\mu\right)\overrightarrow{AD}$,

又$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,

∴$\begin{cases}\lambda-\frac{\mu}{2}=1,\\\frac{\lambda}{2}+\mu=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=\frac{6}{5},\\\mu=\frac{2}{5}.\end{cases}$∴$\lambda+\mu=\frac{8}{5}$.]

**考点三**

**考向 1 典例 3 解**:(1)∵$\boldsymbol{a}=(1,0)$,$\boldsymbol{b}=(2,1)$,

∴$k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=k(1,0)-(2,1)=(k-2,-1)$,

$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(1,0)+2(2,1)=(5,2)$,

∵$k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 共线,

∴$2(k-2)-(-1)\times5=0$,

∴$k=-\frac{1}{2}$.

(2)$\overrightarrow{AB}=2(1,0)+3(2,1)=(8,3)$,

$\overrightarrow{BC}=(1,0)+m(2,1)=(2m+1,m)$.

∵$A,B,C$ 三点共线,

∴$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{BC}$,∴$8m-3(2m+1)=0$,

∴$m=\frac{3}{2}$.

**考向 2 典例 4** (3,3) [**法一**:由 $O,P,B$ 三点共线,可设$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OB}=(4\lambda,4\lambda)$,则$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(4\lambda-4,4\lambda)$.

又$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-2,6)$,由$\overrightarrow{AP}$与$\overrightarrow{AC}$共线,得$(4\lambda-4)\times6-4\lambda\times(-2)=0$,

解得 $\lambda=\frac{3}{4}$,所以$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}=(3,3)$,

所以点 $P$ 的坐标为(3,3).

**法二**:设点 $P(x,y)$,则$\overrightarrow{OP}=(x,y)$,因为$\overrightarrow{OB}=(4,4)$且$\overrightarrow{OP}$与$\overrightarrow{OB}$共线,所以$\frac{x}{4}=\frac{y}{4}$,即 $x=y$.

又$\overrightarrow{AP}=(x-4,y)$,$\overrightarrow{AC}=(-2,6)$,且$\overrightarrow{AP}$与$\overrightarrow{AC}$共线,

所以$(x-4)\times6-y\times(-2)=0$,

解得 $x=y=3$,

所以点 $P$ 的坐标为(3,3).]

**跟进训练**

3.(1)**A** (2)$\frac{8}{5}$ [(1)因为$|OC|=2$,$\angle AOC=\frac{\pi}{4}$,$C$ 为第一象限内一点,所以 $C(\sqrt{2},\sqrt{2})$,又$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$,

所以$(\sqrt{2},\sqrt{2})=\lambda(1,0)+\mu(0,1)=(\lambda,\mu)$,

所以 $\lambda=\mu=\sqrt{2}$,$\lambda+\mu=2\sqrt{2}$.

(2)因为 $\boldsymbol{a}=(2,5)$,$\boldsymbol{b}=(\lambda,4)$,$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,

所以 $8-5\lambda=0$,解得 $\lambda=\frac{8}{5}$.]

## 第3课时 平面向量的数量积及其应用

**梳理·必备知识**

1.$[0,\pi]$ $\theta=\frac{\pi}{2}$ $\theta=0$ $\theta=\pi$

2.$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 0

3.投影 投影向量 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta\,\boldsymbol{e}$

5.(1)$x_1x_2+y_1y_2$ (2)$\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ (3)$\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

(4)$x_1x_2+y_1y_2=0$

**激活·基本技能**

一、(1)× (2)√ (3)× (4)×

二、1.**A** [$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{5^2+12^2}=13$.

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times5+4\times12=63$.

设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\theta$,所以$\cos\theta=\frac{63}{5\times13}=\frac{63}{65}$.]

2.$-\frac{3}{4}\boldsymbol{e}$ [向量$\boldsymbol{b}$在向量$\boldsymbol{a}$上的投影向量为$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\boldsymbol{e}=-\frac{3}{4}\boldsymbol{e}$.]

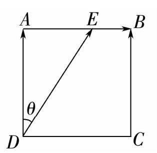
3.$2\sqrt{3}$ [$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos60°=1$,$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{b}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$.]

4.8 [取$AB$的中点$M$,连接$CM$(图略),则$CM\perp AB$,$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AM}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=8$.]

### 考点一

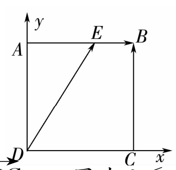
**典例1** (1)**B** (2)1 1 [(1)由题意知,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-1,1)$,所以$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=(0,1)\cdot(-1,1)=1$.故选B.

(2)**法一**(投影法):设向量$\overrightarrow{DE}$,$\overrightarrow{DA}$的夹角为$\theta$,则$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DA}=|\overrightarrow{DE}|\cdot|\overrightarrow{DA}|\cos\theta$,由图可知,$|\overrightarrow{DE}|\cos\theta=|\overrightarrow{DA}|$,所以原式等于$|\overrightarrow{DA}|^2=1$,要使$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}$最大,只要使向量$\overrightarrow{DE}$在向量$\overrightarrow{DC}$上的投影达到最大即可,因为$\overrightarrow{DE}$在向量$\overrightarrow{DC}$上的投影达到最大为$|\overrightarrow{DC}|=1$,所以$(\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC})_{\max}=|\overrightarrow{DC}|^2=1$.




**法二**(基向量法):因为$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}$且$\overrightarrow{DA}\perp\overrightarrow{AE}$,所以$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE})\cdot\overrightarrow{DA}=|\overrightarrow{DA}|^2=1$,$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AE}|=|\overrightarrow{AE}|$,所以要使$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}$最大,只要$|\overrightarrow{AE}|$最大即可,显然随着$E$点在$AB$边上移动,$|\overrightarrow{AE}|_{\max}=1$,故$(\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC})_{\max}=1$.

**法三**(坐标法):以$D$为坐标原点,$\overrightarrow{DC}$与$\overrightarrow{DA}$所在直线分别为$x$,$y$轴,建立平面直角坐标系,如图所示,可知$E(x,1)$,$0\leqslant x\leqslant1$,所以$\overrightarrow{DE}=(x,1)$,$\overrightarrow{CB}=(0,1)$,可得$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}=1$.因为$\overrightarrow{DC}=(1,0)$,所以$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}=x$,因为$0\leqslant x\leqslant1$,所以$(\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC})_{\max}=1$.]




**跟进训练**

1.(1)**B** (2)**C** [(1)因为$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$是两个互相垂直的单位向量,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,且$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,

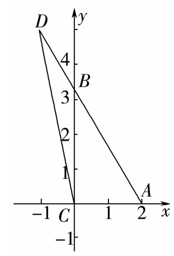
所以$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2|\boldsymbol{b}|^2=-2$,

所以向量$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$在向量$\boldsymbol{b}$上的投影向量为

$\frac{(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=-2\boldsymbol{b}$.故选B.

(2)**法一**(基向量法):由$\angle C=\frac{\pi}{2}$,$AB=4$,$AC=2$,得$CB=2\sqrt{3}$,$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$,$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{3}{2}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}^2=18$,故选C.

**法二**(坐标法):如图,以$C$为坐标原点,$CA$,$CB$所在的直线分别为$x$轴、$y$轴,建立平面直角坐标系,则$C(0,0)$,$A(2,0)$,$B(0,2\sqrt{3})$.由题意得$\angle CBA=\frac{\pi}{6}$,又$\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$,所以$D(-1,3\sqrt{3})$,则$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB}=(-1,3\sqrt{3})\cdot(0,2\sqrt{3})=18$,故选C.]




### 考点二

**考向1 典例2** (1)**B** (2)$\sqrt{3}$ [(1)因为$(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{b}$,所以$(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=0$,

即$\boldsymbol{b}^2=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,又因为$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=2$,

所以$1+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=1+6\boldsymbol{b}^2=4$,从而$|\boldsymbol{b}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.故选B.

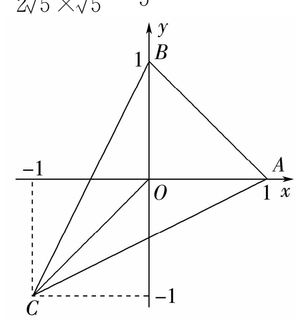
(2)由$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$,得$\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=3$,即$2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-3$.由$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,得$\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$,整理得,$\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,所以$\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-3)=0$,所以$\boldsymbol{b}^2=3$,所以$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$.]

**考向2 典例3** (1)**D** (2)$\left(-\infty,-\frac{9}{2}\right)\cup\left(-\frac{9}{2},3\right)$

[(1)∵$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,∴$\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,等式两边同时平方得$2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+1+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,∴$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

**法一**(运用两向量的夹角公式求解) ∵$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$,∴$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2+5\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}^2=4$,且$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|=|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$,$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$,∴$\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|\cdot|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|}=\frac{4}{5}$,故选D.

**法二**(数形结合法) 如图,令$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,∴$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$,而$|AB|=\sqrt{2}$,$|AC|=|BC|=\sqrt{5}$,在$\triangle ABC$中,由余弦定理得$\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=\cos\langle\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\rangle=\cos\angle ACB=\frac{5+5-2}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$,故选D.



**法三**(坐标法)　如图(图同法二),令向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的起点均为 $O$,终点分别为 $A,B$,以$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$分别为 $x$ 轴、$y$ 轴的正方向建立平面直角坐标系,则 $\boldsymbol{a}=(1,0)$,$\boldsymbol{b}=(0,1)$,$\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-1,-1)$,$\therefore\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=(2,1)$,$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=(1,2)$,则 $\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=\dfrac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}||\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|}=\dfrac{2+2}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$,故选 D.

(2)因为 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为钝角,

所以$(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}<0$,即$(2k-3,-6)\cdot(2,1)<0$,

所以 $4k-6-6<0$,所以 $k<3$.若 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 反向共线,则 $\dfrac{2k-3}{2}=-6$,解得 $k=-\dfrac{9}{2}$,此时夹角不是钝角,综上所述,$k$ 的取值范围是$\left(-\infty,-\dfrac{9}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{9}{2},3\right)$.]

**考向** 3　**典例** 4　(1)**D**　(2)$\dfrac{7}{12}$　[(1)因为 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})$,所以 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})=0$,所以 $\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,即 $4+x^2-4x=0$,故 $x=2$.故选 D.

(2)因为$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$,所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

又$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$,

所以$(\lambda\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0$,

即$(\lambda-1)\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\lambda\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2=0$,

所以$(\lambda-1)|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos 120^\circ-9\lambda+4=0$.

所以$(\lambda-1)\times2\times3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)-9\lambda+4=0$.解得 $\lambda=\dfrac{7}{12}$.]

**跟进训练**

2.(1)**BC**　(2)**C**　[(1)$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$,故 A 错误;

因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是单位向量,所以$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+1+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$,得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直,故 B 正确;

$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$,故 D 错误;

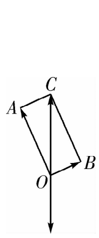
$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\dfrac{\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{1\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\dfrac{\pi}{4}$,故 C 正确.故选 BC.

(2)由已知有 $\boldsymbol{c}=(3+t,4)$,$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$,故$\dfrac{9+3t+16}{5|\boldsymbol{c}|}=\dfrac{3+t}{|\boldsymbol{c}|}$,解得 $t=5$.故选 C.]

**考点三**

**典例** 5　(1)160　$80\sqrt{3}$　(2)$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

[(1)根据题意,$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=-\boldsymbol{G}$,如图所示:$\angle CAO=90^\circ$,$\angle AOC=30^\circ$,$AC=80$,




$\therefore OC=160$,$OA=80\sqrt{3}$,

$\therefore\boldsymbol{G}$ 的大小为 160 N,$\boldsymbol{F}_2$ 的大小为 $80\sqrt{3}$ N.

(2)$\because M$ 为 $BC$ 的中点,$\therefore\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,

$\therefore|\overrightarrow{MA}|^2=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=\dfrac{1}{4}(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})=\dfrac{1}{4}(1+9+2\times1\times3\cos 60^\circ)=\dfrac{13}{4}$,$\therefore|\overrightarrow{MA}|=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.]

**跟进训练**

3.(1)**B**　(2)**AD**　[(1)由题意得$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{7}$,由平行四边形的两条对角线的平方和等于四边的平方和,得

$BD^2+AC^2=2(AB^2+AD^2)$,

$\therefore BD^2+(\sqrt{7})^2=2(2^2+1^2)=10$,$\therefore BD=\sqrt{3}$,故选 B.

(2)对于 A,由$\boldsymbol{G}=-(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)$为定值,所以$|\boldsymbol{G}|^2=|\boldsymbol{F}_1|^2+|\boldsymbol{F}_2|^2+2|\boldsymbol{F}_1||\boldsymbol{F}_2|\cos\theta=2|\boldsymbol{F}_1|^2(1+\cos\theta)$,解得$|\boldsymbol{F}_1|^2=\dfrac{|\boldsymbol{G}|^2}{2(1+\cos\theta)}$.由题意知 $\theta\in(0,\pi)$时,$y=\cos\theta$ 单调递减,所以$|\boldsymbol{F}_1|^2$ 单调递增,即 $\theta$ 越大越费力,$\theta$ 越小越省力,A 正确;对于 B,由题意知,$\theta$ 的取值范围是$(0,\pi)$,故 B 错误;对于 C,当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$时,$|\boldsymbol{F}_1|^2=\dfrac{|\boldsymbol{G}|^2}{2}$,所以$|\boldsymbol{F}_1|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|\boldsymbol{G}|$,故 C 错误;对于 D,当 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$时,$|\boldsymbol{F}_1|^2=|\boldsymbol{G}|^2$,所以$|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{G}|$,故 D 正确.故答案为 AD.]

## 高考培优 6　极化恒等式的应用

**题型一**

**典例** 1　(1)**A**　(2)$\dfrac{7}{8}$　[(1)因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{4}[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2]=\dfrac{1}{4}\times(10-6)=1$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$.

(2)设$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{DF}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{BD}|^2=9\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}^2=4$,$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=|\overrightarrow{FD}|^2-|\overrightarrow{BD}|^2=\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}^2=-1$,解得 $\boldsymbol{b}^2=\dfrac{5}{8}$,$\boldsymbol{a}^2=\dfrac{13}{8}$,$\therefore\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=|\overrightarrow{ED}|^2-|\overrightarrow{BD}|^2=4\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}^2=\dfrac{7}{8}$.]

**跟进训练**

1.22　[取 $AB$ 的中点 $E$,则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PE}^2-\overrightarrow{AE}^2=2$,

所以$\overrightarrow{PE}^2=18$,因为$\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$,$|\overrightarrow{CD}|=8$,

所以$|\overrightarrow{PD}|=2$,$|\overrightarrow{AE}|=4$,延长 $AD$,$EP$ 交于点 $F$,

故 $DP$ 为$\triangle FAE$ 的中位线,

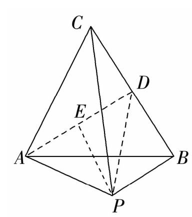
所以$\overrightarrow{AP}^2=\dfrac{\overrightarrow{AF}^2+\overrightarrow{AE}^2-2\overrightarrow{PE}^2}{2}=40$,

即$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AE}\cdot\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AP}^2-\overrightarrow{PE}^2=22$.]

**题型二**

**典例** 2　**B**　[**法一**(极化恒等式):结合题意画出图形,如图①所示,设 $BC$ 的中点为 $D$,$AD$ 的中点为 $E$,连接 $AD$,$PE$,$PD$,则有$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PD}$,

则$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=2(\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{EA})\cdot(\overrightarrow{PE}-\overrightarrow{EA})=2(\overrightarrow{PE}^2-\overrightarrow{EA}^2)$.而$\overrightarrow{EA}^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$,

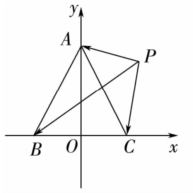


图①

当点 $P$ 与点 $E$ 重合时,$\overrightarrow{PE}^2$ 有最小值 0,故此时$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$取得最小值,最小值为$-2\overrightarrow{EA}^2=-2\times\dfrac{3}{4}=-\dfrac{3}{2}$.

**法二**(坐标法):如图②,以等边三角形 $ABC$ 的底边 $BC$ 所在直线为 $x$ 轴,以边 $BC$ 的垂直平分线为 $y$ 轴建立平面直角坐

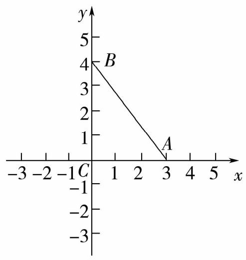
标系，则 $A(0,\sqrt{3})$，$B(-1,0)$，$C(1,0)$，设 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{PA}=(-x,\sqrt{3}-y)$，$\overrightarrow{PB}=(-1-x,-y)$，$\overrightarrow{PC}=(1-x,-y)$，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=(-x,\sqrt{3}-y)\cdot(-2x,-2y)=2x^2+2\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$，当 $x=0$，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 取得最小值，最小值为 $-\frac{3}{2}$. 故选 B.]



图②

**跟进训练**

2. (1)**D**　(2) $-\frac{1}{16}$　[(1)建立如图所示坐标系，由题易知，$C(0,0)$，$A(3,0)$，$B(0,4)$，

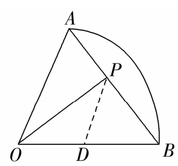



$\because PC=1$，$\therefore$ 设 $P(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in[0,2\pi]$，

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(3-\cos\theta,-\sin\theta)\cdot(-\cos\theta,4-\sin\theta)=-3\cos\theta-4\sin\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta=1-5\sin(\theta+\varphi)\in[-4,6]$，其中 $\sin\varphi=\frac{3}{5}$，$\cos\varphi=\frac{4}{5}$，

故选 D.

(2)**法一**(极化恒等式法)：如图①，取 $OB$ 的中点 $D$，连接 $PD$，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BP}=PD^2-OD^2=PD^2-\frac{1}{4}$，即求 $PD$ 的最小值.

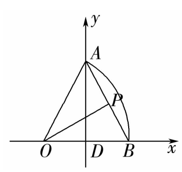


图①

由图可知，当 $PD\perp AB$ 时，$PD_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BP}$ 的最小值是 $-\frac{1}{16}$.

**法二**(坐标法)：以 $OB$ 所在的直线为 $x$ 轴，过点 $A$ 且垂直于 $OB$ 的直线为 $y$ 轴，建立如图②所示的平面直角坐标系，



图②

则 $A\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$O\left(-\frac{1}{2},0\right)$，$B\left(\frac{1}{2},0\right)$，

可得直线 $AB$ 的方程为 $2x+\frac{2\sqrt{3}}{3}y=1$，

设 $P\left(x,\frac{\sqrt{3}}{2}(1-2x)\right)$，

则 $\overrightarrow{OP}=\left(x+\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}(1-2x)\right)$，$\overrightarrow{BP}=\left(x-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}(1-2x)\right)$，

所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BP}=4x^2-3x+\frac{1}{2}=4\left(x-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{1}{16}$，

当 $x=\frac{3}{8}$ 时，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BP}$ 取得最小值 $-\frac{1}{16}$.]

## 第 4 课时　复数

**梳理·必备知识**

1. (1) $a$　$b$　(2) $=$　$\neq$　(3) $a=c$ 且 $b=d$　(4) $a=c$ 且 $b=-d$　(5) $|z|$　$|a+bi|$　$\sqrt{a^2+b^2}$

2. $Z(a,b)$

3. (1) $(a+c)+(b+d)i$　$(a-c)+(b-d)i$　$(ac-bd)+(ad+bc)i$　$\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

**激活·基本技能**

一、(1)×　(2)×　(3)×　(4)×

二、1. **A**　[因为 $z$ 为纯虚数，

所以 $\begin{cases}x^2-1=0,\\x-1\neq 0,\end{cases}$ 所以 $x=-1$.]

2. **D**　[$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=-1-3i+(-2-i)=-3-4i$.]

3. 二　[由题意可得 $\bar{z}=\frac{1-i}{i}=\frac{(1-i)(-i)}{i\cdot(-i)}=-i(1-i)=-1-i$，所以 $z=-1+i$. 故复数 $z$ 对应的点在第二象限.]

4. 5　[$z_1=-2+i$，$z_2=1+2i$，$z_1\cdot z_2=(-2+i)(1+2i)=-4-3i$. 所以 $|z_1\cdot z_2|=5$.]

### 考点一

**典例 1**　(1)**ABC**　(2)**BC**　[(1) $z=\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$，对于 A 选项，$z$ 的虚部为 $-1$，故 A 正确；

对于 B 选项，模长 $|z|=\sqrt{2}$，故 B 正确；

对于 C 选项，因为 $z^2=(1-i)^2=-2i$，故 $z^2$ 为纯虚数，故 C 正确；

对于 D 选项，$z$ 的共轭复数为 $1+i$，故 D 错误.

故选 ABC.

(2)对于 A 选项，设复数 $z=0$，$z+\bar{z}=0$，$z$ 不为纯虚数，故 A 错误；对于 B 选项，设复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}\in\mathbf{R}$，所以 $b=0$，即 $z\in\mathbf{R}$，故 B 正确；

对于 C 选项，设复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi\geqslant 0$，所以 $ab=0$ 且 $a^2-b^2\geqslant 0$，所以 $b=0$，即 $z\in\mathbf{R}$，故 C 正确；

对于 D 选项，设复数 $z_1=1$，$z_2=i$，满足 $z_1^2+z_2^2=0$，但 $z_1=z_2=0$ 不成立，故 D 错误.

故选 BC.]

**跟进训练**

1. (1)**C**　(2)**D**　[(1) $\because(a+i)(1-ai)=a+i-a^2i-ai^2=2a+(1-a^2)i=2$，

$\therefore 2a=2$ 且 $1-a^2=0$，解得 $a=1$，故选 C.

(2) $\frac{m^2+i}{1+mi}=\frac{(m^2+i)(1-mi)}{(1+mi)(1-mi)}=\frac{m^2+m+(1-m^3)i}{1+m^2}$，

因为此复数为纯虚数，所以 $\begin{cases}m^2+m=0,\\1-m^3\neq 0,\end{cases}$ 解得 $m=-1$ 或 0，

故选 D.]

### 考点二

**典例 2**　(1)**D**　(2)**C**　(3)**C**　[(1) $(2+2i)(1-2i)=2-4i+2i-4i^2=6-2i$，故选 D.

(2)因为 $\frac{z}{z-1}=\frac{z-1+1}{z-1}=1+\frac{1}{z-1}=1+i$，所以 $z=1+\frac{1}{i}=1-i$. 故选 C.

(3)根据题意，$(1+2i)^2+p(1+2i)+q=0\Rightarrow(2p+4)i+p+q-3=0$，所以$\begin{cases}2p+4=0,\\p+q-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=-2,\\q=5,\end{cases}$所以 $p+qi=-2+5i$. 故选 C.]

**跟进训练**

2.(1)**C** (2)$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 1 [(1)因为 $z=2-i$，所以 $z(\bar{z}+i)=(2-i)\cdot(2+2i)=6+2i$，故选 C.

(2)$z=\frac{i^{2\,023}}{1-i}=\frac{-i}{1-i}=\frac{1-i}{2}$，

$|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$z+\bar{z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i=1$.]

**考点三**

**典例 3** (1)**A** (2)**ACD** (3)$2\sqrt{3}$

[(1)因为$(1+3i)(3-i)=3-i+9i-3i^2=6+8i$，所以该复数在复平面内对应的点为(6,8)，位于第一象限，故选 A.

(2)复数 $z_0=1+2i$ 在复平面内对应的点为 $P_0(1,2)$，A 正确；复数 $z_0$ 的共轭复数对应的点与点 $P_0$ 关于实轴对称，B 错误；设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$，代入 $|z-1|=|z-i|$，得 $|(x-1)+yi|=|x+(y-1)i|$，

即 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$，整理得 $y=x$，

即点 $Z$ 在直线 $y=x$ 上，C 正确；

易知点 $P_0$ 到直线 $y=x$ 的垂线段的长度即为 $P_0$，$Z$ 之间距离的最小值，结合点到直线的距离公式可知，最小值为 $\frac{|1-2|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 D 正确. 故选 ACD.

(3)**法一**(代数法)：设 $z_1-z_2=a+bi$，$a,b\in\mathbf{R}$，因为 $z_1+z_2=\sqrt{3}+i$，所以 $2z_1=(\sqrt{3}+a)+(1+b)i$，$2z_2=(\sqrt{3}-a)+(1-b)i$.

因为 $|z_1|=|z_2|=2$，所以 $|2z_1|=|2z_2|=4$，

所以 $\sqrt{(\sqrt{3}+a)^2+(1+b)^2}=4$， ①

$\sqrt{(\sqrt{3}-a)^2+(1-b)^2}=4$， ②

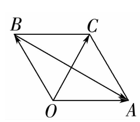
①$^2$+②$^2$，得 $a^2+b^2=12$.

所以 $|z_1-z_2|=\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{3}$.

**法二**(几何法)：设复数 $z_1$，$z_2$ 在复平面内分别对应向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，则 $z_1+z_2$ 对应向量 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

由题意知 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=2$，

如图所示，以 $OA$，$OB$ 为邻边作平行四边形 $OACB$，




则 $z_1-z_2$ 对应向量 $\overrightarrow{BA}$，且 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{OC}|=2$，

可得 $|\overrightarrow{BA}|=2|\overrightarrow{OA}|\sin 60°=2\sqrt{3}$.

故 $|z_1-z_2|=|\overrightarrow{BA}|=2\sqrt{3}$.]

**跟进训练**

3.(1)**A** (2)**C** [(1)由已知可得复数 $z$ 在复平面内对应的点的坐标为 $(m+3,m-1)$，所以$\begin{cases}m+3>0,\\m-1<0,\end{cases}$解得 $-3<m<1$，故选 A.

(2)设 $z=a+bi$，$a,b\in\mathbf{R}$.

则 $|z-1+\sqrt{3}i|=3$ 表示复平面内点 $Z(a,b)$ 到点 $(1,-\sqrt{3})$ 的距离为 3，则 $|z|$ 的最大值为点 $(1,-\sqrt{3})$ 到 $(0,0)$ 的距离加上 3.

即 $|z|_{\max}=\sqrt{1+3}+3=5$. 故选 C.]

# 第六章 数列

## 第 1 课时 数列的概念与简单表示法

**梳理·必备知识**

1.确定的顺序

2.有限 无限 > <

3.列表法 图象法 解析式法(通项公式法) (1)$a_n$ (2)一个式子

4.(1)$a_1+a_2+\cdots+a_n$ (2)$S_1$ $S_n-S_{n-1}$

**激活·基本技能**

一、(1)× (2)× (3)× (4)√

二、1.**B** [由 $a_1=-1$，代入检验可知选 B.]

2.**D** [由题意得，令 $n=1$，可得 $a_2=1+\frac{1}{a_1}=2$；

令 $n=2$，可得 $a_3=1+\frac{1}{a_2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$；

令 $n=3$，可得 $a_4=1+\frac{1}{a_3}=1+\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{5}{3}$；

令 $n=4$，可得 $a_5=1+\frac{1}{a_4}=1+\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{8}{5}$.

故选 D.]

3.$\begin{cases}2,n=1,\\2n-1,n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*\end{cases}$ [当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2$.

当 $n\geqslant2$ 时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+1-[(n-1)^2+1]=2n-1$.

显然当 $n=1$ 时，不满足上式，

故 $a_n=\begin{cases}2,n=1,\\2n-1,n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*.\end{cases}$]

4.$n^2$ [由题图可知，从中间一行向上、向下每经过一行，小正方形数量减少 1 个，直至减少到 1，所以 $a_n=n+2(n-1)+2(n-2)+\cdots+2\times1$，

所以 $a_n=n+2\cdot\frac{[1+(n-1)](n-1)}{2}=n^2$.]

**考点一**

**典例 1** (1)$4n-5$ (2)$\begin{cases}2,n=1,\\\frac{2^{n-1}}{n},n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*\end{cases}$ [(1)$a_1=S_1=2-3=-1$，当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n^2-3n)-[2(n-1)^2-3(n-1)]=4n-5$，由于 $a_1$ 也适合此等式，∴$a_n=4n-5$.

(2)当 $n=1$ 时，$a_1=2^1=2$，$\because a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=2^n$，①

故 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}=2^{n-1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，②

由①－②得 $na_n=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$，$\therefore a_n=\dfrac{2^{n-1}}{n}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$.

显然当 $n=1$ 时不满足上式，$\therefore a_n=\begin{cases}2,n=1,\\ \dfrac{2^{n-1}}{n},n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*.\end{cases}$]

**跟进训练**

1.(1)**BCD**　(2)$-2^{n-1}$　[(1)$\because a_{n+1}=S_n\cdot S_{n+1}=S_{n+1}-S_n$，

两边同除以 $S_{n+1}\cdot S_n$，得 $\dfrac{1}{S_{n+1}}-\dfrac{1}{S_n}=-1$.

$\therefore\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$是以－1为首项，－1为公差的等差数列，

即 $\dfrac{1}{S_n}=-1+(n-1)\times(-1)=-n$，$\therefore S_n=-\dfrac{1}{n}$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n-1}=\dfrac{1}{n(n-1)}$，

又 $a_1=-1$ 不适合上式，$\therefore a_n=\begin{cases}-1,n=1,\\ \dfrac{1}{n(n-1)},n\geqslant 2.\end{cases}$ 故选BCD.

(2)当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2a_1+1$，$\therefore a_1=-1$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n=2a_n+1$，①

$S_{n-1}=2a_{n-1}+1$.②

①－②得 $S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$，即 $a_n=2a_n-2a_{n-1}$，即 $a_n=2a_{n-1}(n\geqslant 2)$，$\therefore\{a_n\}$是首项 $a_1=-1$，公比 $q=2$ 的等比数列.

$\therefore a_n=a_1\cdot q^{n-1}=-2^{n-1}$.]

**考点二**

**考向**1　**典例**2　$a_n=\dfrac{n^2+n}{2}$　[由题意得 $a_2-a_1=2$，$a_3-a_2=3$，…，$\therefore a_n-a_{n-1}=n(n\geqslant 2)$.

以上各式相加，得

$a_n-a_1=2+3+\cdots+n=\dfrac{(n-1)(2+n)}{2}=\dfrac{n^2+n-2}{2}$.

$\because a_1=1$，$\therefore a_n=\dfrac{n^2+n}{2}(n\geqslant 2)$.

$\because$当 $n=1$ 时也满足此式，$\therefore a_n=\dfrac{n^2+n}{2}$.]

**考向**2　**典例**3　$a_n=\dfrac{1}{n}$　[$\because a_n=\dfrac{n-1}{n}a_{n-1}(n\geqslant 2)$，

$\therefore a_{n-1}=\dfrac{n-2}{n-1}a_{n-2}$，$a_{n-2}=\dfrac{n-3}{n-2}a_{n-3}$，…，$a_2=\dfrac{1}{2}a_1$.

以上 $(n-1)$ 个式子相乘，得

$a_n=a_1\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n-1}{n}=\dfrac{a_1}{n}=\dfrac{1}{n}$.

当 $n=1$ 时，$a_1=1$，符合上式，

$\therefore a_n=\dfrac{1}{n}$.]

**考向**3　**典例**4　$a_n=2\cdot 3^{n-1}-1$　[$\because a_{n+1}=3a_n+2$，

$\therefore a_{n+1}+1=3(a_n+1)$，

$\therefore\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=3$，

$\therefore$数列$\{a_n+1\}$为等比数列，公比 $q=3$，

又 $a_1+1=2$，$\therefore a_n+1=2\cdot 3^{n-1}$，

$\therefore a_n=2\cdot 3^{n-1}-1$.]

**考向**4　**典例**5　$\dfrac{2}{n}$　[$\because a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}$，$a_1=2$，$\therefore a_n\neq 0$，

$\therefore\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{2}$，即 $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2}$，

又 $a_1=2$，则 $\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是以 $\dfrac{1}{2}$ 为首项，$\dfrac{1}{2}$ 为公差的等差数列.

$\therefore\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_1}+(n-1)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{n}{2}$，$\therefore a_n=\dfrac{2}{n}$.]

**跟进训练**

2.(1)$4-\dfrac{1}{n}$　(2)$2^{\frac{n^2-n+2}{2}}$　(3)$\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\cdot 2^n$

[(1)$\because a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，

$\therefore$当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n-a_{n-1}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$，

$a_{n-1}-a_{n-2}=\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n-1}$，

…，

$a_2-a_1=1-\dfrac{1}{2}$，

以上各式相加得 $a_n-a_1=1-\dfrac{1}{n}$，又 $a_1=3$，

$\therefore a_n=4-\dfrac{1}{n}(n\geqslant 2)$，$a_1=3$ 适合上式，

$\therefore a_n=4-\dfrac{1}{n}$.

(2)$\because\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2^n$，

$\therefore$当 $n\geqslant 2$ 时，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2^{n-1}$，$\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=2^{n-2}$，

…，

$\dfrac{a_3}{a_2}=2^2$，$\dfrac{a_2}{a_1}=2$，

$\therefore a_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot a_1$

$=2^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot\cdots\cdot 2^2\cdot 2\cdot 2$

$=2^{1+2+3+\cdots+(n-1)}\cdot 2$

$=2^{\frac{(n-1)\cdot n}{2}+1}=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}$，

又 $a_1=2$ 满足上式，

$\therefore a_n=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}$.

(3)$\because a_{n+1}=2a_n+2^{n+1}$，$\therefore$两边同除以 $2^{n+1}$，

得 $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+1$.

又 $a_1=1$，

$\therefore\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$是首项为 $\dfrac{1}{2}$，公差为1的等差数列，

$\therefore\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{1}{2}+(n-1)\times 1=n-\dfrac{1}{2}$，

即 $a_n=\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot 2^n$.]

**考点三**

**考向1　典例6　B**　[由题意得 $a_2=1-\frac{1}{a_1}=5,a_3=1-\frac{1}{a_2}=\frac{4}{5},a_4=1-\frac{1}{a_3}=-\frac{1}{4}$,

则数列$\{a_n\}$的周期为3,则 $a_{2\,022}=a_{674\times 3}=a_3=\frac{4}{5}$.故选B.]

**考向2　典例7　D**　[因为 $a_{n+1}-a_n=\frac{3n+3+k}{2^{n+1}}-\frac{3n+k}{2^n}=\frac{3-3n-k}{2^{n+1}}$,由数列$\{a_n\}$为递减数列知,

对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,$a_{n+1}-a_n=\frac{3-3n-k}{2^{n+1}}<0$,

所以 $k>3-3n$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立,所以 $k\in(0,+\infty)$.]

**考向3　典例8　B**　[结合 $f(x)=(x+1)\left(\frac{10}{11}\right)^x$ 的单调性,

设数列$\{a_n\}$的最大项为 $a_n$,所以 $\begin{cases}a_n\geqslant a_{n+1},\\a_n\geqslant a_{n-1},\end{cases}$

所以 $\begin{cases}(n+1)\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^n\geqslant(n+2)\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^{n+1},\\(n+1)\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^n\geqslant n\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^{n-1},\end{cases}$

解不等式组可得 $9\leqslant n\leqslant 10$.

所以数列$\{a_n\}$的最大项为 $a_9$ 或 $a_{10}$.]

**跟进训练**

3.(1)**C**　(2)**A**　(3)**C**　[(1)因为 $a_1=2,a_{n+1}=\frac{1+a_n}{1-a_n}$,所以 $a_2=\frac{1+a_1}{1-a_1}=-3$,同理可得 $a_3=-\frac{1}{2},a_4=\frac{1}{3},a_5=2,a_6=-3,a_7=-\frac{1}{2},a_8=\frac{1}{3},\cdots$,可得 $a_{n+4}=a_n$,则 $a_{2\,023}=a_{505\times 4+3}=a_3=-\frac{1}{2}$.故选C.

(2)若数列$\{a_n\}$为递增数列,则有 $a_{n+1}-a_n>0$,

$\therefore(n+1)^2-2\lambda(n+1)-n^2+2\lambda n=2n+1-2\lambda>0$,

即 $2n+1>2\lambda$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立,

于是有 $\lambda<\left(\frac{2n+1}{2}\right)_{\min}=\frac{3}{2}$,

$\because$由 $\lambda<1$ 可推出 $\lambda<\frac{3}{2}$,但反过来,由 $\lambda<\frac{3}{2}$ 不能得到 $\lambda<1$,

因此"$\lambda<1$"是"数列$\{a_n\}$为递增数列"的充分不必要条件.故选A.

(3)由 $a_{n+1}-a_n=2n,a_1=28$,可得 $a_n=n^2-n+28$,$\therefore\frac{a_n}{n}=n+\frac{28}{n}-1$,

设 $f(x)=x+\frac{28}{x}$,可知 $f(x)$在$(0,2\sqrt{7})$上单调递减,在$(2\sqrt{7},+\infty)$上单调递增,

又 $n\in\mathbf{N}^*$,且 $\frac{a_5}{5}=\frac{48}{5}<\frac{a_6}{6}=\frac{29}{3}$,故选C.]

## 第2课时　等差数列

**梳理·必备知识**

1.(1)同一个常数　公差　(2)A　$a+b$

2.(1)$a_1+(n-1)d$

**激活·基本技能**

一、(1)×　(2)√　(3)√　(4)×

二、1.**A**　[$\because a_4+a_8=2a_6=10,\therefore a_6=5$,

又 $a_{10}=6$,$\therefore$公差 $d=\frac{a_{10}-a_6}{10-6}=\frac{6-5}{4}=\frac{1}{4}$.故选A.]

2.**B**　[设等差数列$\{a_n\}$的公差为 $d$,

**法一:**由 $S_5=5a_3=30$,得 $a_3=6$,又 $a_6=2$,$\therefore S_8=\frac{8(a_1+a_8)}{2}=\frac{8(a_3+a_6)}{2}=\frac{8\times(6+2)}{2}=32$.

**法二:**由 $\begin{cases}a_1+5d=2,\\5a_1+\frac{5\times 4}{2}d=30,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a_1=\frac{26}{3},\\d=-\frac{4}{3}.\end{cases}$

$\therefore S_8=8a_1+\frac{8\times 7}{2}d=8\times\frac{26}{3}-28\times\frac{4}{3}=32$.]

3.**B**　[**法一:**由题意知,$S_5,S_{10}-S_5,S_{15}-S_{10}$成等差数列,即 $7,14,S_{15}-21$ 成等差数列,

$\therefore S_{15}-21+7=28$,

$\therefore S_{15}=42$,故选B.

**法二:**$\because\{a_n\}$为等差数列,$\therefore\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$也为等差数列,

$\therefore\frac{2S_{10}}{10}=\frac{S_5}{5}+\frac{S_{15}}{15}$,

$\therefore S_{15}=42$,故选B.]

4.820　[设第 $n$ 排的座位数为 $a_n(n\in\mathbf{N}^*)$,数列$\{a_n\}$为等差数列,其公差 $d=2$,则 $a_n=a_1+(n-1)d=a_1+2(n-1)$.由已知 $a_{20}=60$,得 $60=a_1+2\times(20-1)$,解得 $a_1=22$,则剧场总共的座位数为 $\frac{20(a_1+a_{20})}{2}=\frac{20\times(22+60)}{2}=820$.]

**考点一**

**典例1**　(1)**ABC**　(2)**B**　(3)4　[(1)$S_4=\frac{4\times(a_1+a_4)}{2}=0$,

$\therefore a_1+a_4=a_2+a_3=0$,A正确;

$a_5=a_1+4d=5$,　①

$a_1+a_4=a_1+a_1+3d=0$,　②

联立①②得 $\begin{cases}d=2,\\a_1=-3,\end{cases}$ $\therefore a_n=-3+(n-1)\times 2=2n-5$,B正确,D错误;

$S_n=-3n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2-4n$,C正确.故选ABC.

(2)设等差数列$\left\{\frac{2}{a_n+1}\right\}$的公差为 $d$,且 $a_1=1,a_3=-\frac{1}{3}$,所以 $\frac{2}{a_1+1}=1,\frac{2}{a_3+1}=3$.

所以 $3=1+2d$,解得 $d=1$.

所以 $\frac{2}{a_n+1}=1+n-1=n$,所以 $a_n=\frac{2}{n}-1$.

那么 $a_{2\,023}=\frac{2}{2\,023}-1=-\frac{2\,021}{2\,023}$.

(3)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 $d$,又 $a_1\neq0$,$a_2=3a_1$,所以 $d=2a_1$,

则$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{10a_1+\frac{10\times9}{2}d}{5a_1+\frac{5\times4}{2}d}=\frac{10a_1+90a_1}{5a_1+20a_1}=4$.]

**跟进训练**

1.(1)**C**　(2)2　(3)84　[(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 $d$,首项为 $a_1$,

$\because\begin{cases}S_4=24,\\S_9=99,\end{cases}\therefore\begin{cases}4a_1+6d=24,\\9a_1+36d=99,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=3,\\d=2,\end{cases}$则 $a_7=a_1+6d=15$.

(2)由 $2S_3=3S_2+6$ 可得 $2(a_1+a_2+a_3)=3\cdot(a_1+a_2)+6$,化简得 $2a_3=a_1+a_2+6$,

即 $2(a_1+2d)=2a_1+d+6$,解得 $d=2$.

(3)依题意,冬至日晷长为 13.5 尺,记为 $a_1=13.5$,芒种日晷长为 2.5 尺,记为 $a_{12}=2.5$,因相邻两个节气的日晷长变化量相同,则从冬至日晷长到芒种日晷长的各数据依次排成一列得等差数列$\{a_n\}$,$n\in\mathbf{N}^*$,$n\leqslant12$,

数列$\{a_n\}$的公差 $d=\frac{a_{12}-a_1}{12-1}=\frac{2.5-13.5}{12-1}=-1$,

因夏至与芒种相邻,且夏至日晷长最短,则夏至的日晷长为 $a_{12}+d=1.5$,

又大雪与冬至相邻,且冬至日晷长最长,

则大雪的日晷长为 $a_1+d=12.5$,

显然夏至到大雪的日晷长依次排成一列为递增的等差数列,首项为 1.5 尺,末项为 12.5 尺,共 12 项,

所以一年中夏至到大雪的日晷长的和为$\frac{1.5+12.5}{2}\times12=84$(尺).]

## 考点二

**典例 2**　①③⇒②.

**证明:**已知$\{a_n\}$是等差数列,$a_2=3a_1$.

设数列$\{a_n\}$的公差为 $d$,则 $a_2=3a_1=a_1+d$,得 $d=2a_1$,

所以 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=n^2a_1$.

因为数列$\{a_n\}$的各项均为正数,所以 $\sqrt{S_n}=n\sqrt{a_1}$,所以 $\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}=(n+1)\sqrt{a_1}-n\sqrt{a_1}=\sqrt{a_1}$(常数),所以数列$\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列.

①②⇒③.

**证明:**已知$\{a_n\}$是等差数列,$\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列.

设数列$\{a_n\}$的公差为 $d$,

则 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{1}{2}n^2d+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$.

因为数列$\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列,所以数列$\{\sqrt{S_n}\}$的通项公式是关于 $n$ 的一次函数,则 $a_1-\frac{d}{2}=0$,即 $d=2a_1$,所以 $a_2=a_1+d=3a_1$.

②③⇒①.

**证明:**已知数列$\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列,$a_2=3a_1$.

所以 $S_1=a_1$,$S_2=a_1+a_2=4a_1$.

设数列$\{\sqrt{S_n}\}$的公差为 $d$,$d>0$,则 $\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}=\sqrt{4a_1}-\sqrt{a_1}=d$,

得 $a_1=d^2$,所以 $\sqrt{S_n}=\sqrt{S_1}+(n-1)d=nd$,所以 $S_n=n^2d^2$,

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2d^2-(n-1)^2d^2=2d^2n-d^2(n\geqslant2)$,当 $n=1$ 时,也满足,所以 $a_n=2d^2n-d^2=d^2+(n-1)\cdot2d^2$,所以数列$\{a_n\}$是等差数列.

**跟进训练**

2.(1)**证明:**因为 $b_n$ 是数列$\{S_n\}$的前 $n$ 项积,

所以 $n\geqslant2$ 时,$S_n=\frac{b_n}{b_{n-1}}$,

代入$\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$ 可得$\frac{2b_{n-1}}{b_n}+\frac{1}{b_n}=2$,

整理可得 $2b_{n-1}+1=2b_n$,即 $b_n-b_{n-1}=\frac{1}{2}(n\geqslant2)$.

又$\frac{2}{S_1}+\frac{1}{b_1}=\frac{3}{b_1}=2$,所以 $b_1=\frac{3}{2}$,

故$\{b_n\}$是以$\frac{3}{2}$为首项,$\frac{1}{2}$为公差的等差数列.

(2)**解:**由(1)可知,$b_n=\frac{n+2}{2}$,则$\frac{2}{S_n}+\frac{2}{n+2}=2$,所以 $S_n=\frac{n+2}{n+1}$.

当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=\frac{3}{2}$,

当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n+2}{n+1}-\frac{n+1}{n}=-\frac{1}{n(n+1)}$.

故 $a_n=\begin{cases}\frac{3}{2},n=1,\\-\frac{1}{n(n+1)},n\geqslant2.\end{cases}$

## 考点三

**考向 1**　**典例 3**　**D**　[根据等差数列的性质,得 $a_1+a_9=a_3+a_7$,由 $S_9=1$,根据等差数列的求和公式,

得 $S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=\frac{9(a_3+a_7)}{2}=1$,故 $a_3+a_7=\frac{2}{9}$.

故选 D.]

**考向 2**　**典例 4**　(1)**A**　(2)①$\frac{11}{19}$　②$\frac{17}{22}$　[(1)因为等差数列中,$S_4$,$S_8-S_4$,$S_{12}-S_8$,$S_{16}-S_{12}$成等差数列,设 $S_4=x$,因为$\frac{S_4}{S_8}=\frac{1}{3}$,故 $S_8=3x$,

所以 $x$,$2x$,$S_{12}-3x$,$S_{16}-S_{12}$成等差数列,所以 $S_{16}=10x$,则$\frac{S_8}{S_{16}}=\frac{3}{10}$.故选 A.

(2)①若$\frac{a_n}{b_n}=\frac{2n-1}{3n+1}$,则$\frac{S_{11}}{T_{11}}=\frac{11a_6}{11b_6}=\frac{2\times6-1}{3\times6+1}=\frac{11}{19}$;

②若$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n-1}{3n+1}=\frac{2n^2-n}{3n^2+n}$,则可设 $S_n=(2n^2-n)k$,$T_n=(3n^2+n)k$.

所以 $a_5=S_5-S_4=45k-28k=17k$，$b_4=T_4-T_3=52k-30k=22k$，所以 $\frac{a_5}{b_4}=\frac{17}{22}$.]

**跟进训练**

3.(1)**C** (2)**C** (3)8 092 [(1)因为 $a_3+a_7=2a_5=6$，所以 $a_5=3$，所以 $a_5+a_{12}=3+17=20$，

所以 $S_{16}=\frac{(a_1+a_{16})\times16}{2}=8(a_5+a_{12})=160$.

故选 C.

(2)$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是两个等差数列，且$\frac{a_k}{b_k}(1\leqslant k\leqslant5)$是常值，由于 $a_1=288$，$a_5=96$，

故 $a_3=\frac{a_1+a_5}{2}=192$，由于 $\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{288}{192}=\frac{3}{2}$，所以 $b_3=128$. 故选 C.

(3)由等差数列的性质可得$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$也为等差数列，

设其公差为 $d$，则 $\frac{S_{2\,020}}{2\,020}-\frac{S_{2\,014}}{2\,014}=6d=6$，所以 $d=1$，

所以$\frac{S_{2\,023}}{2\,023}=\frac{S_1}{1}+2\,022d=-2\,018+2\,022=4$，所以 $S_{2\,023}=8\,092$.]

**考点四**

**典例5** **法一**(函数法)：

**解**：因为 $a_1=20$，$S_{10}=S_{15}$，

所以 $10\times20+\frac{10\times9}{2}d=15\times20+\frac{15\times14}{2}d$，

所以 $d=-\frac{5}{3}$.

$S_n=20n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{5}{6}n^2+\frac{125}{6}n$

$=-\frac{5}{6}\left(n-\frac{25}{2}\right)^2+\frac{3\,125}{24}$.

因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以当 $n=12$ 或 13 时，$S_n$ 有最大值，且最大值为 $S_{12}=S_{13}=130$.

**法二**(邻项变号法)：

**解**：因为 $a_1=20$，$S_{10}=S_{15}$，

所以 $10\times20+\frac{10\times9}{2}d=15\times20+\frac{15\times14}{2}d$，所以 $d=-\frac{5}{3}$.

$a_n=20+(n-1)\times\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{5}{3}n+\frac{65}{3}$.

因为 $a_1=20>0$，$d=-\frac{5}{3}<0$，

所以数列$\{a_n\}$是递减数列.

由 $a_n=-\frac{5}{3}n+\frac{65}{3}\leqslant0$，得 $n\geqslant13$，即 $a_{13}=0$.

当 $n\leqslant12$ 时，$a_n>0$；当 $n\geqslant14$ 时，$a_n<0$.

所以当 $n=12$ 或 13 时，$S_n$ 取得最大值，

且最大值为 $S_{12}=S_{13}=12\times20+\frac{12\times11}{2}\times\left(-\frac{5}{3}\right)=130$.

**法三**(图象法)：

**解**：因为等差数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和 $S_n$ 是关于 $n$ 的二次函数，且 $S_{10}=S_{15}$，

又 $\frac{10+15}{2}=12.5$，所以 $n=12$ 或 13 时，$S_n$ 取得最大值.

因为 $a_1=20$，

所以 $10\times20+\frac{10\times9}{2}d=15\times20+\frac{15\times14}{2}d$，

所以 $d=-\frac{5}{3}$.

所以 $S_{12}=S_{13}=12\times20+\frac{12\times11}{2}\times\left(-\frac{5}{3}\right)=130$，所以最大值为 $S_{12}=S_{13}=130$.

**法四**(性质法)：

**解**：由 $S_{10}=S_{15}$ 得 $S_{15}-S_{10}=a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}=0$，所以 $5a_{13}=0$，即 $a_{13}=0$.

又 $d=\frac{a_{13}-a_1}{13-1}=-\frac{5}{3}$，

所以当 $n=12$ 或 13 时，$S_n$ 有最大值.

且最大值为 $S_{12}=S_{13}=12\times20+\frac{12\times11}{2}\times\left(-\frac{5}{3}\right)=130$.

**跟进训练**

4.(1)**BD** [因为等差数列$\{a_n\}$是递减数列，

所以 $a_{n+1}-a_n<0$，所以 $d<0$，故 A 错误；

因为 $S_7=S_8$，所以 $a_8=S_8-S_7=0$，故 B 正确；

因为 $S_{15}=\frac{15(a_1+a_{15})}{2}=15a_8=0$，故 C 错误；

由题意得$\begin{cases}a_7>0,\\a_8=0,\\a_9<0,\end{cases}$所以 $S_7=S_8\geqslant S_n(n\in\mathbf{N}^*)$，故 D 正确. 故选 BD.]

(2)**解**：选①. 设数列$\{a_n\}$的公差为 $d$，由 $a_5=6$，$a_1+S_3=50$，得$\begin{cases}a_1+4d=6,\\4a_1+3d=50,\end{cases}$

解得 $a_1=14$，$d=-2$，

即 $a_n=14-2(n-1)=16-2n$.

**法一**：当 $a_n\geqslant0$ 时，有 $16-2n\geqslant0$，得 $n\leqslant8$，

∴当 $n\leqslant7$ 时，$a_n>0$；$n=8$ 时，$a_n=0$；$n\geqslant9$ 时，$a_n<0$，

∴$n=7$ 或 $n=8$ 时，$S_n$ 取最大值.

**法二**：$S_n=-n^2+15n$，该函数图象的对称轴为 $n=7.5$，

∴$n=7$ 或 $n=8$ 时，$S_n$ 取最大值.

选②. 由 $S_{12}-S_9>0$，得 $a_{12}+a_{11}+a_{10}>0$，

由等差中项的性质有 $3a_{11}>0$，即 $a_{11}>0$，

由 $a_2+a_{21}<0$，得 $a_2+a_{21}=a_{11}+a_{12}<0$，

∴$a_{12}<0$，故 $d=a_{12}-a_{11}<0$，

∴当 $n\leqslant11$ 时，$a_n>0$，$n\geqslant12$ 时，$a_n<0$，故 $n=11$ 时，$S_n$ 取最大值.

选③. 由 $S_9>0$，得 $S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=\frac{9\times2a_5}{2}>0$，

可得 $a_5>0$，

由 $S_{10}<0$，得 $S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=\frac{10(a_5+a_6)}{2}<0$，可得 $a_5+a_6<0$，∴$a_6<0$，故 $d=a_6-a_5<0$，

∴当 $n\leqslant5$ 时，$a_n>0$，$n\geqslant6$ 时，$a_n<0$，故 $n=5$ 时，$S_n$ 取最

大值.

## 第3课时　等比数列

**梳理·必备知识**

1.(1)2　同一个常数　公比　$\frac{a_{n+1}}{a_n}$　(2)$G$

2.(1)$a_1q^{n-1}$　(2)$na_1$　$\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$　$\frac{a_1-a_nq}{1-q}$

3.(1)$a_p\cdot a_q$

**激活·基本技能**

一、(1)×　(2)×　(3)√　(4)×　(5)×

二、1.**C**　[∵$a_5^2=a_3a_7=2\times8=16$,∴$a_5=\pm4$.

又∵$a_5=a_3q^2>0$,∴$a_5=4$.]

2.**D**　[由$S_3=a_1+a_2+a_3=a_3(q^{-2}+q^{-1}+1)$,得$q^{-2}+q^{-1}+1=3$,即$2q^2-q-1=0$,解得$q=1$或$q=-\frac{1}{2}$.

∴$a_2=\frac{a_3}{q}=\frac{3}{2}$或$-3$.

故选D.]

3.1,3,9或9,3,1　[设这三个数为$\frac{a}{q}$,$a$,$aq$,

则$\begin{cases}a+\frac{a}{q}+aq=13,\\a\cdot\frac{a}{q}\cdot aq=27,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=3,\\q=\frac{1}{3}\end{cases}$或$\begin{cases}a=3,\\q=3,\end{cases}$

∴这三个数为1,3,9或9,3,1.]

4.752　[设球每次着地后跳回的高度构成数列$\{a_n\}$,则数列$\{a_n\}$为等比数列,$a_1=128$,$q=\frac{1}{2}$,

$$S_5=\frac{128\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]}{1-\frac{1}{2}}=248,$$

共经过的路程为$256+2S_5=752$(m).]

### 考点一

**典例1**　(1)**D**　(2)**B**　[(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q$,$q\neq0$,

若$q=1$,则$a_2-a_5=0$,与题意矛盾,

所以$q\neq1$,

则$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=168,\\a_2-a_5=a_1q-a_1q^4=42,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=96,\\q=\frac{1}{2},\end{cases}$

所以$a_6=a_1q^5=3$.

故选D.

(2)**法一**:设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q$,

则由$\begin{cases}a_5-a_3=a_1q^4-a_1q^2=12,\\a_6-a_4=a_1q^5-a_1q^3=24,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\q=2,\end{cases}$

所以$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=2^n-1$,$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$,所以$\frac{S_n}{a_n}=\frac{2^n-1}{2^{n-1}}=2-2^{1-n}$,故选B.

**法二**:设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q$,因为$\frac{a_6-a_4}{a_5-a_3}=\frac{a_4(1-q^2)}{a_3(1-q^2)}=\frac{a_4}{a_3}=\frac{24}{12}=2$,所以$q=2$,所以$\frac{S_n}{a_n}=\frac{\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}}{a_1q^{n-1}}=\frac{2^n-1}{2^{n-1}}=2-2^{1-n}$,故选B.]

**跟进训练**

1.(1)**AB**　(2)63　[(1)∵$a_{n+1}=2a_n+1$,

∴$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$,

又$a_1+1=2$,∴数列$\{a_n+1\}$是以2为首项,2为公比的等比数列,故B正确;$a_n+1=2^n$,∴$a_n=2^n-1$,故C错误;$a_3=7$,故A正确;$S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2$,故D错误.故选AB.

(2)设正项递增的等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>1)$,

因为$a_2a_4=a_3^2=16$,所以$a_3=4$.

又因为$2a_3+2=a_2+a_4$,可得$\frac{4}{q}+4q=2\times4+2=10$,解得$q=2$或$q=\frac{1}{2}$(舍去).又由$a_3=a_1q^2=4$,解得$a_1=1$,所以$S_6=\frac{1-2^6}{1-2}=63$.]

### 考点二

**典例2**　(1)**AD**　[对于A,由$\frac{a_na_{n+1}}{a_{n-1}a_n}=q^2(n\geqslant2)$知数列$\{a_na_{n+1}\}$是公比为$q^2$的等比数列;

对于B,当$q=-1$时,数列$\{a_n+a_{n+1}\}$的项中有0,不是等比数列;

对于C,当$q=1$时,数列$\{a_n-a_{n+1}\}$的项中有0,不是等比数列;

对于D,$\frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{q}$,所以数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是公比为$\frac{1}{q}$的等比数列.]

(2)**证明**:①依题意$\begin{cases}2a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2}b_n,\\2b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+b_n,\end{cases}$

两式相加,得$a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{3}{4}(a_n+b_n)$.

又∵$a_1+b_1=\frac{3}{2}\neq0$,

∴$\{a_n+b_n\}$是首项为$\frac{3}{2}$,公比为$\frac{3}{4}$的等比数列,

两式相减,得$a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n-b_n)$.

又∵$a_1-b_1=\frac{1}{2}\neq0$,

∴$\{a_n-b_n\}$是首项为$\frac{1}{2}$,公比为$\frac{1}{4}$的等比数列.

②由①得，$a_n+b_n=\frac{3}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$，　①

$a_n-b_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$，　②

①+②得，$a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n$，

故 $S_n=\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{3}{4}\left(1-\frac{3^n}{4^n}\right)}{1-\frac{3}{4}}=\frac{10}{3}-\frac{1}{3\times4^n}-\frac{3^{n+1}}{4^n}<\frac{10}{3}$.

**跟进训练**

2.(1)**B**　[若 $a,b,c,d$ 为 $1,-1,1,-1$，则 $a+b,b+c,c+d$ 不为等比数列，①不符合；

由 $a,b,c,d$ 必非零且公比为 $q$，可知 $ab,bc,cd$ 也非零且公比为 $q^2$，②符合；

若 $a,b,c,d$ 为 $1,1,1,1$，则 $a-b,b-c,c-d$ 不为等比数列，③不符合.故选 B.]

(2)**解**：①由题意可得 $\begin{cases}a_1q^3=9a_1q,\\ \frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=13,\\ q>0,且 q\neq1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=1,\\ q=3,\end{cases}$

所以 $a_n=3^{n-1}$，$S_n=\frac{1-3^n}{1-3}=\frac{3^n-1}{2}$.

②假设存在常数 $\lambda$，使得数列 $\{S_n+\lambda\}$ 是等比数列.

因为 $S_1+\lambda=\lambda+1,S_2+\lambda=\lambda+4,S_3+\lambda=\lambda+13$，

所以 $(\lambda+4)^2=(\lambda+1)(\lambda+13)$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，此时 $S_n+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times3^n$，则 $\frac{S_{n+1}+\frac{1}{2}}{S_n+\frac{1}{2}}=3$.

故存在常数 $\lambda=\frac{1}{2}$，使得数列 $\left\{S_n+\frac{1}{2}\right\}$ 是等比数列.

**考点三**

**典例 3**　(1)**C**　(2)**A**　(3)2　[(1)由等比数列的性质可得 $a_2a_3a_4=a_3^3=1,a_6a_7a_8=a_7^3=64$，$\therefore a_3=1,a_7=4$，$\therefore a_5^2=a_3a_7=4$，又 $a_5$ 与 $a_3$ 和 $a_7$ 同号，$\therefore a_5=2$.故选 C.

(2)因为 $S_n$ 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，$S_2=4,S_4=6$，

由等比数列的性质，可知 $S_2,S_4-S_2,S_6-S_4$ 成等比数列，

所以 $4,2,S_6-6$ 成等比数列，

所以 $2^2=4(S_6-6)$，解得 $S_6=7$.故选 A.

(3)由题意得 $\begin{cases}S_{奇}+S_{偶}=-240,\\ S_{奇}-S_{偶}=80,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}S_{奇}=-80,\\ S_{偶}=-160,\end{cases}$

所以 $q=\frac{S_{偶}}{S_{奇}}=\frac{-160}{-80}=2$.]

**跟进训练**

3.(1)**BD**　(2)$\frac{1}{2}$　15　[(1)由题意知，递增的等比数列包括两种情况：$a_1>0$ 时 $q>1$ 和 $a_1<0$ 时 $0<q<1$.故 $q>0$，$a_1(q-1)>0$，故选 BD.

(2)因为 $a_1+a_2=48$，所以由 $a_4+a_5=6$，

可得 $q^3(a_1+a_2)=6,q^3=\frac{1}{8},q=\frac{1}{2}$.

由 $a_1+a_2=48$，可得 $a_1+\frac{1}{2}a_1=48\Rightarrow a_1=32$，

所以 $a_n=32\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{6-n}$，

$\log_2(a_1a_2a_3\cdots a_n)=\log_2(2^5\cdot2^4\cdot\cdots\cdot2^{6-n})=\log_2 2^{\frac{(5+6-n)n}{2}}=\frac{n(11-n)}{2}$，

因为 $\frac{n(11-n)}{2}=-\frac{1}{2}\left(n-\frac{11}{2}\right)^2+\frac{121}{8}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

所以 $n=5$ 或 6 时，$\frac{n(11-n)}{2}$ 有最大值，最大值为 15.]

## 第 4 课时　数列求和

**激活·基本技能**

一、(1)√　(2)√　(3)×　(4)√

二、1.**B**　[$\because a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，$\therefore S_5=a_1+a_2+\cdots+a_5=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.]

2.**D**　[$S_{100}=(-1+3)+(-5+7)+\cdots+(-197+199)=2\times50=100$.]

3.**C**　[$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$=(2^1+2\times1-1)+(2^2+2\times2-1)+(2^3+2\times3-1)+\cdots+(2^n+2n-1)=(2+2^2+\cdots+2^n)+2(1+2+3+\cdots+n)-n$

$=\frac{2(1-2^n)}{1-2}+2\times\frac{n(n+1)}{2}-n$

$=2(2^n-1)+n^2+n-n=2^{n+1}+n^2-2$.]

4.$\begin{cases}\frac{1-a^n}{(1-a)^2}-\frac{na^n}{1-a},a\neq1,\\ \frac{n(n+1)}{2},a=1\end{cases}$　[记 $S_n=1+2a+3a^2+\cdots+na^{n-1}$，

当 $a=1$ 时，$S_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$；

当 $a\neq1$ 时，$aS_n=a+2a^2+3a^3+\cdots+(n-1)a^{n-1}+na^n$，

$(1-a)S_n=1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-1}-na^n$.

所以 $S_n=\frac{1-a^n}{(1-a)^2}-\frac{na^n}{1-a}$，

原式 $=\begin{cases}\frac{1-a^n}{(1-a)^2}-\frac{na^n}{1-a},a\neq1,\\ \frac{n(n+1)}{2},a=1.\end{cases}$]

**考点一**

**考向 1**　**典例 1**　(1)**证明**：由题意可知，$b_1=a_1=1$，

$b_{n+1}=a_{2n+1}=2a_{2n}=2(a_{2n-1}+1)=2a_{2n-1}+2=2b_n+2$，

故 $b_{n+1}+2=2(b_n+2)$，即 $\frac{b_{n+1}+2}{b_n+2}=2$，

故 $\{b_n+2\}$ 是以 $b_1+2=3$ 为首项，以 $q=2$ 为公比的等比数列，且 $b_n+2=3\cdot2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

故 $b_n=3\cdot2^{n-1}-2$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(2)**解**:由(1)知,$b_n=3\cdot 2^{n-1}-2,n\in\mathbf{N}^*$,即 $a_{2n-1}=3\cdot 2^{n-1}-2,n\in\mathbf{N}^*$,

由 $a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1,n\text{为奇数},\\2a_n,n\text{为偶数}\end{cases}(n\in\mathbf{N}^*)$,

故 $a_{2n}=a_{2n-1}+1,n\in\mathbf{N}^*$,

故数列$\{a_n\}$的前$2n$项和 $S_{2n}=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n})$

$=2(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})+n$

$=2[3(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})-2n]+n$

$=6\times\dfrac{1-2^n}{1-2}-3n=6(2^n-1)-3n$.

**考向2　典例2　解**:(1)设数列$\{a_n\}$的公差为$d$,由 $S_5=5a_3=25$ 得 $a_3=a_1+2d=5$,

又 $a_5=9=a_1+4d$,所以 $d=2,a_1=1$,

所以 $a_n=2n-1,S_n=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$.

(2)结合(1)知 $b_n=(-1)^n n^2$,

当$n$为偶数时,

$T_n=(b_1+b_2)+(b_3+b_4)+(b_5+b_6)+\cdots+(b_{n-1}+b_n)$

$=(-1^2+2^2)+(-3^2+4^2)+(-5^2+6^2)+\cdots+[-(n-1)^2+n^2]$

$=(2-1)(2+1)+(4-3)(4+3)+(6-5)\cdot(6+5)+\cdots+[n-(n-1)][n+(n-1)]$

$=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

当$n$为奇数时,$n-1$为偶数,

$T_n=T_{n-1}+(-1)^n\cdot n^2=\dfrac{(n-1)n}{2}-n^2=-\dfrac{n(n+1)}{2}$.

综上可知,$T_n=\dfrac{(-1)^n n(n+1)}{2}$.

**跟进训练**

1.**解**:(1)设等比数列$\{a_n\}$的首项为$a_1$,公比为$q(q>1)$.由题设得 $a_1q+a_1q^3=20,a_1q^2=8$.

解得 $q=\dfrac{1}{2}$(舍去),$q=2$.由题设得 $a_1=2$.

所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^n$.

(2)由题设及(1)知 $b_1=0$,且当 $2^n\leqslant m<2^{n+1}$ 时,$b_m=n$.

所以 $S_{100}=b_1+(b_2+b_3)+(b_4+b_5+b_6+b_7)+\cdots+(b_{32}+b_{33}+\cdots+b_{63})+(b_{64}+b_{65}+\cdots+b_{100})=0+1\times2+2\times2^2+3\times2^3+4\times2^4+5\times2^5+6\times(100-63)=480$.

**考点二**

**考向1　典例3**　(1)**解**:$\because a_1=1,\therefore S_1=a_1=1,\therefore\dfrac{S_1}{a_1}=1$,

又$\because\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$是公差为$\dfrac{1}{3}$的等差数列,

$\therefore\dfrac{S_n}{a_n}=1+\dfrac{1}{3}(n-1)=\dfrac{n+2}{3}$,

$\therefore S_n=\dfrac{(n+2)a_n}{3}$,

$\therefore$当$n\geqslant2$时,$S_{n-1}=\dfrac{(n+1)a_{n-1}}{3}$,

$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{(n+2)a_n}{3}-\dfrac{(n+1)a_{n-1}}{3}$,

整理得$(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}$,

即$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n+1}{n-1}(n\geqslant2)$,

$\therefore a_n=a_1\times\dfrac{a_2}{a_1}\times\dfrac{a_3}{a_2}\times\cdots\times\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$

$=\dfrac{3}{1}\times\dfrac{4}{2}\times\dfrac{5}{3}\times\cdots\times\dfrac{n}{n-2}\times\dfrac{n+1}{n-1}=\dfrac{n(n+1)}{2}(n\geqslant2)$,

显然对于$n=1$也成立,

$\therefore\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

(2)**证明**:由(1)知 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$,$\therefore\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$,

$\therefore\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=2\left[\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]=2\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)<2$.

**考向2　典例4**　$\sqrt{n}$　$2\sqrt{2}-1$　[$\triangle OA_nA_{n+1}$是以$\angle OA_nA_{n+1}$为直角的直角三角形,由勾股定理可得 $a_{n+1}^2=a_n^2+1$,所以数列$\{a_n^2\}(n\in\mathbf{N}^*,1\leqslant n\leqslant8)$为等差数列,且首项为 $a_1^2=1$,公差为 $d=1$,所以 $a_n^2=n$,

因为 $a_n>0$,所以 $a_n=\sqrt{n}$.

则 $b_n=\dfrac{1}{a_n+a_{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$=\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}$

$=-\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$,

因此,数列$\{b_n\}$的前7项和为 $S_7=(-1+\sqrt{2})+(-\sqrt{2}+\sqrt{3})+\cdots+(-\sqrt{7}+\sqrt{8})=2\sqrt{2}-1$.]

**考向3　典例5　解**:(1)当$n\geqslant2$时,$a_n=S_{n-1}+1$,

又 $a_{n+1}=S_n+1$,

所以 $a_{n+1}-a_n=S_n-S_{n-1}=a_n$,

即 $a_{n+1}=2a_n(n\geqslant2)$,

在 $a_{n+1}=S_n+1$ 中,令$n=1$,可得 $a_2=a_1+1$,

因为 $a_1=1$,所以 $a_2=2a_1=2$,

故$\{a_n\}$是首项为1,公比为2的等比数列,

其通项公式为 $a_n=2^{n-1}$,

所以 $S_n=a_{n+1}-1=2^n-1$.

(2)因为 $b_n=\dfrac{S_{n+1}-S_n}{S_nS_{n+1}}=\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n+1}}=\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$,

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}\right)=1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$.

故 $T_n=1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$.

**考向4　典例6**　(1)**解**:由 $S_n^2-(n^2+n-1)S_n-(n^2+n)=0$,

得$[S_n-(n^2+n)](S_n+1)=0$.

由于$\{a_n\}$是正项数列,所以$S_n>0$,$S_n=n^2+n$.

于是$a_1=S_1=2$,当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-(n-1)^2-(n-1)=2n$.当$n=1$时,也满足此式.

综上,数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n$.

(2)**证明**:由于$a_n=2n$,

故$b_n=\frac{n+1}{(n+2)^2a_n^2}=\frac{n+1}{4n^2(n+2)^2}=\frac{1}{16}\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]$.

$T_n=\frac{1}{16}\left[1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]=\frac{1}{16}\left[1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]<\frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)=\frac{5}{64}$.

**跟进训练**

2.**解**:(1)由题意得当$n=1$时,$a_2=b_1=6$,

故$a_n=6+2(n-2)=2n+2$,

由于$b_1+\frac{b_2}{2}+\frac{b_3}{3}+\cdots+\frac{b_n}{n}=a_{n+1}$,　①

当$n\geqslant2$时,$b_1+\frac{b_2}{2}+\frac{b_3}{3}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{n-1}=a_n$,　②

①−②得$\frac{b_n}{n}=a_{n+1}-a_n=2$,所以$b_n=2n$.

所以$b_n=\begin{cases}6,n=1,\\2n,n\geqslant2.\end{cases}$

(2)当$n=1$时,$S_1=\frac{1}{a_1b_1}=\frac{1}{4\times6}=\frac{1}{24}$.

当$n\geqslant2$时,$\frac{1}{a_nb_n}=\frac{1}{2n(2n+2)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

则$S_n=\frac{1}{24}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{1}{24}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{2n-1}{12(n+1)}$,

当$n=1$时满足上式,故$S_n=\frac{2n-1}{12(n+1)}$.

**考点三**

**典例7　解**:(1)当$n=1$时,$2S_1=a_1$,即$2a_1=a_1$,所以$a_1=0$.

当$n\geqslant2$时,由$2S_n=na_n$,得$2S_{n-1}=(n-1)a_{n-1}$,

两式相减得$2a_n=na_n-(n-1)a_{n-1}$,

即$(n-1)a_{n-1}=(n-2)a_n$,

当$n=2$时,可得$a_1=0$,

故当$n\geqslant3$时,$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n-2}$,

则$\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_3}{a_2}=\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-2}{n-3}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{1}$,

整理得$\frac{a_n}{a_2}=n-1$,

因为$a_2=1$,所以$a_n=n-1(n\geqslant3)$.

当$n=1$,$n=2$时,均满足上式,所以$a_n=n-1$.

(2)令$b_n=\frac{a_{n+1}}{2^n}=\frac{n}{2^n}$,

则$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}+b_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}$,　①

$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$,　②

由①−②得$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{2+n}{2^{n+1}}$,即$T_n=2-\frac{2+n}{2^n}$.

**跟进训练**

3.**解**:(1)当$n=1$时,$4S_1=4a_1=3a_1+4$,解得$a_1=4$.

当$n\geqslant2$时,$4S_{n-1}=3a_{n-1}+4$,所以$4S_n-4S_{n-1}=4a_n=3a_n-3a_{n-1}$,即$a_n=-3a_{n-1}$,

而$a_1=4\neq0$,故$a_n\neq0$,故$\frac{a_n}{a_{n-1}}=-3$,

所以数列$\{a_n\}$是以4为首项,−3为公比的等比数列,所以$a_n=4\times(-3)^{n-1}$.

(2)因为$b_n=(-1)^{n-1}n\times4\times(-3)^{n-1}=4n\cdot3^{n-1}$,

所以$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=4\times3^0+8\times3^1+12\times3^2+\cdots+4n\cdot3^{n-1}$,

故$3T_n=4\times3^1+8\times3^2+12\times3^3+\cdots+4n\cdot3^n$,

两式相减得$-2T_n=4+4\times3^1+4\times3^2+\cdots+4\times3^{n-1}-4n\cdot3^n=4+4\times\frac{3(1-3^{n-1})}{1-3}-4n\cdot3^n=4+2\times3\times(3^{n-1}-1)-4n\cdot3^n=(2-4n)\cdot3^n-2$,

$\therefore T_n=(2n-1)\cdot3^n+1$.

## 高考培优7　数列的综合应用

**题型一**

**典例1　解**:(1)由题意,$b_1=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{20}\right)=\frac{2}{25}$,

$a_1=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{25}+5\times\frac{1}{5}\right)=\frac{9}{50}$.

$\because b_{n+1}=\frac{a_n+4b_n}{5}$,$a_{n+1}=\frac{1}{6}(5a_n+b_{n+1})=\frac{26a_n+4b_n}{30}$,

$\therefore a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{2}{3}(a_n-b_n)$,$\therefore\{a_n-b_n\}$是等比数列.

(2)由(1)知$a_n-b_n=\frac{1}{10}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$,

$\therefore\frac{1}{10}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}<1\%$,$\therefore n-1>\frac{1}{\lg3-\lg2}\approx5.7$,

$\therefore n\geqslant7$,故至少操作7次.

(3)$\because b_{n+1}=\frac{1}{5}\left[b_n+\frac{1}{10}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+4b_n\right]$,

$\therefore b_{n+1}-b_n=\frac{3}{100}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$,

$\therefore b_n=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_n-b_{n-1})$

$=\frac{2}{25}+\frac{3}{100}\times\left[\frac{2}{3}+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]$

$=-\frac{9}{100}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{7}{50}$.

$\therefore a_n=b_n+\frac{1}{10}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{3}{50}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{7}{50}$.

**跟进训练**

1.**解**:(1)2025年投入1 000万元,第$n$年投入为1 000×

$\left(1-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$万元，

所以 $n$ 年内的总投入为

$S_n=1\,000+1\,000\left(1-\frac{1}{5}\right)+\cdots+1\,000\left(1-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

$=\frac{1000\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]}{1-\frac{4}{5}}$

$=5\,000\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]$，

2025 年旅游业收入为 500 万元，第 2 年旅游业收入为 $500\times\left(1+\frac{1}{4}\right)$万元，

第 $n$ 年旅游业收入为 $500\times\left(1+\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ 万元.

所以 $n$ 年内的旅游业总收入为

$T_n=500+500\times\left(1+\frac{1}{4}\right)+\cdots+500\times\left(1+\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$=\frac{500\left[1-\left(\frac{5}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{5}{4}}$

$=2\,000\times\left[\left(\frac{5}{4}\right)^n-1\right]$.

(2)设至少到第 $n$ 年，旅游业的总收入才能超过总投入，由此 $T_n-S_n>0$，

即 $2\,000\times\left[\left(\frac{5}{4}\right)^n-1\right]-5\,000\times\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]>0$，

化简得 $5\times\left(\frac{4}{5}\right)^n+2\times\left(\frac{5}{4}\right)^n-7>0$，

设 $x=\left(\frac{4}{5}\right)^n$，代入上式得 $5x^2-7x+2>0$，解此不等式，得 $x<\frac{2}{5}$ 或 $x>1$(舍去).

即 $\left(\frac{4}{5}\right)^n<\frac{2}{5}$，则 $n\lg\frac{4}{5}<\lg\frac{2}{5}$，$n>\frac{\lg\frac{2}{5}}{\lg\frac{4}{5}}=\frac{\lg 2-\lg 5}{\lg 4-\lg 5}=\frac{2\lg 2-1}{3\lg 2-1}\approx 4.1$，由此得 $n\geqslant 5$.

即至少到 2029 年，旅游业的总收入才能超过总投入.

## 题型二

**考向 1　典例 2**　(1)解：$\because 4S_n=a_na_{n+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

$\therefore 4a_1=a_1\cdot a_2$，又 $a_1=2$，$\therefore a_2=4$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$4S_{n-1}=a_{n-1}a_n$，得 $4a_n=a_na_{n+1}-a_{n-1}a_n$.

由题意知 $a_n\neq 0$，$\therefore a_{n+1}-a_{n-1}=4$.

当 $n=2k+1$，$k\in\mathbf{N}^*$ 时，$a_{2k+2}-a_{2k}=4$，即 $a_2,a_4,\cdots,a_{2k}$ 是首项为 4，公差为 4 的等差数列，

$\therefore a_{2k}=4+(k-1)\times 4=4k=2\times 2k$；

当 $n=2k$，$k\in\mathbf{N}^*$ 时，$a_{2k+1}-a_{2k-1}=4$，

即 $a_1,a_3,\cdots,a_{2k-1}$ 是首项为 2，公差为 4 的等差数列，

$\therefore a_{2k-1}=2+(k-1)\times 4=4k-2=2(2k-1)$.

综上可知，$a_n=2n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(2)证明：$\because \frac{1}{a_n^2}=\frac{1}{4n^2}>\frac{1}{4n(n+1)}$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

$\therefore T_n=\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}$

$>\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{4n+4}$.

又$\because \frac{1}{a_n^2}=\frac{1}{4n^2}<\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

$\therefore T_n=\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}<\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)<\frac{1}{2}$.

即得 $\frac{n}{4n+4}<T_n<\frac{1}{2}$.

**考向 2　典例 3**　解：(1)因为 $4S_{n+1}=3S_n-9$，

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$4S_n=3S_{n-1}-9$，

两式相减可得 $4a_{n+1}=3a_n$，即$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{4}$.

当 $n=1$ 时，$4S_2=4\left(-\frac{9}{4}+a_2\right)=-\frac{27}{4}-9$，解得 $a_2=-\frac{27}{16}$，

所以$\frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{4}$.

所以数列$\{a_n\}$是首项为$-\frac{9}{4}$，公比为$\frac{3}{4}$的等比数列，

所以 $a_n=-\frac{9}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=-\frac{3^{n+1}}{4^n}$.

(2)因为 $3b_n+(n-4)a_n=0$，

所以 $b_n=(n-4)\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

所以 $T_n=-3\times\frac{3}{4}-2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2-1\times\left(\frac{3}{4}\right)^3+0\times\left(\frac{3}{4}\right)^4+\cdots+(n-4)\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$，　①

且$\frac{3}{4}T_n=-3\times\left(\frac{3}{4}\right)^2-2\times\left(\frac{3}{4}\right)^3-1\times\left(\frac{3}{4}\right)^4+0\times\left(\frac{3}{4}\right)^5+\cdots+(n-5)\times\left(\frac{3}{4}\right)^n+(n-4)\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$，　②

①－②得$\frac{1}{4}T_n=-3\times\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^n-(n-4)\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}=-\frac{9}{4}+\frac{\frac{9}{16}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{3}{4}}-(n-4)\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}=-n\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$，

所以 $T_n=-4n\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$.

因为 $T_n\leqslant\lambda b_n$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，

所以$-4n\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\leqslant\lambda(n-4)\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$ 恒成立，

即$-3n\leqslant\lambda(n-4)$恒成立，

当$n<4$时，$\lambda\leqslant\frac{-3n}{n-4}=-3-\frac{12}{n-4}$，此时$\lambda\leqslant1$；

当$n=4$时，$-12\leqslant0$恒成立；

当$n>4$时，$\lambda\geqslant\frac{-3n}{n-4}=-3-\frac{12}{n-4}$，此时$\lambda\geqslant-3$.

所以$-3\leqslant\lambda\leqslant1$.

**跟进训练**

2.(1)**解**：①**证明**：由题意知$a_n\neq0$，由数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\frac{3a_n}{2a_n+1}$，可得$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{3a_n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{2}{3}$，可得$\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{2}{3}-1=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$，

因为$a_1=\frac{3}{5}$，所以$\frac{1}{a_1}-1=\frac{2}{3}$，

所以数列$\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$是首项为$\frac{2}{3}$，公比为$\frac{1}{3}$的等比数列.

②由①可得$\frac{1}{a_n}-1=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$，

所以$\frac{1}{a_n}=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+1$，

设数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前$n$项和为$S_n$，

则$S_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}$

$=2\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)+n$

$=2\times\frac{\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}+n=n+1-\frac{1}{3^n}$，

由$S_n<100$，得$n+1-\frac{1}{3^n}<100$，又$n\in\mathbf{N}^*$，$99+1-\frac{1}{3^{99}}<100$，$100+1-\frac{1}{3^{100}}>100$，

所以满足$S_n<100$的最大整数$n$的值为99.

(2)**解**：①由题意，得$\frac{S_n}{n}=n+4$，即$S_n=n^2+4n$，故当$n\geqslant2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+4n-(n-1)^2-4(n-1)=2n+3$，

$\because n=1$时，$a_1=S_1=5$，符合上式，

$\therefore a_n=2n+3$，$n\in\mathbf{N}^*$.

又$b_{n+2}-2b_{n+1}+b_n=0$，

$\therefore\{b_n\}$为等差数列，$\therefore\frac{11(b_4+b_8)}{2}=154$，

$\because b_4=8$，$\therefore b_8=20$，$\therefore d=\frac{20-8}{8-4}=3$，

$\therefore b_n=b_4+3(n-4)=3n-4$，

即$b_n=3n-4$，$n\in\mathbf{N}^*$.

②$c_n=\frac{3}{2(a_n-2)(2b_n+5)}$

$=\frac{3}{2[(2n+3)-2][2\cdot(3n-4)+5]}$

$=\frac{3}{2(2n+1)(6n-3)}$

$=\frac{1}{2(2n+1)(2n-1)}$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$.

$\therefore T_n=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{4n+2}$.

$\because T_{n+1}-T_n=\frac{n+1}{4n+6}-\frac{n}{4n+2}=\frac{1}{(4n+6)(2n+1)}>0$，

$\therefore T_n$单调递增，故$(T_n)_{\min}=\frac{1}{6}$，

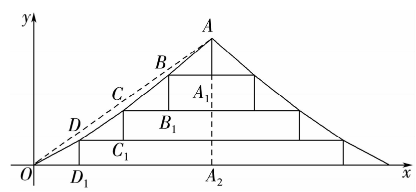
令$\frac{1}{6}>\frac{k}{75}$，得$k<12\frac{1}{2}$，$\therefore k_{\max}=12$.

$\therefore$使不等式$T_n>\frac{k}{75}$对一切$n\in\mathbf{N}^*$都成立的最大正整数$k$的值为12.

## 高考研究在线5　传统文化中的数列建模与创新应用

**命题点一**

**典例1**　(1)**D**　(2)5　$240\left(3-\frac{n+3}{2^n}\right)$　[(1)如图，连接$OA$，延长$AA_1$与$x$轴交于点$A_2$，则$OA_2=4OD_1$. 因为$k_1,k_2,k_3$成公差为0.1的等差数列，所以$k_1=k_3-0.2$，$k_2=k_3-0.1$，所以$CC_1=DC_1(k_3-0.2)$，$BB_1=CB_1(k_3-0.1)$，$AA_1=k_3BA_1$，即$CC_1=OD_1(k_3-0.2)$，$BB_1=OD_1(k_3-0.1)$，$AA_1=k_3OD_1$. 又$\frac{DD_1}{OD_1}=0.5$，所以$DD_1=0.5OD_1$，所以$AA_2=0.5OD_1+OD_1(k_3-0.2)+OD_1(k_3-0.1)+k_3OD_1=OD_1\cdot(3k_3+0.2)$，所以$\tan\angle AOA_2=\frac{AA_2}{OA_2}=\frac{OD_1(3k_3+0.2)}{4OD_1}=0.725$，解得$k_3=0.9$，故选D.




(2)依题意得，$S_1=120\times2=240$；$S_2=60\times3=180$；

当$n=3$时，共可以得到5 dm×6 dm，$\frac{5}{2}$ dm×12 dm，10 dm×3 dm，20 dm×$\frac{3}{2}$ dm四种规格的图形，且$5\times6=30$，$\frac{5}{2}\times12=30$，$10\times3=30$，$20\times\frac{3}{2}=30$，所以$S_3=30\times4=120$；

当$n=4$时，共可以得到5 dm×3 dm，$\frac{5}{2}$ dm×6 dm，$\frac{5}{4}$ dm×12 dm，10 dm×$\frac{3}{2}$ dm，20 dm×$\frac{3}{4}$ dm五种规格的图形，所以对折4次共可以得到不同规格图形的种数为5，且$5\times3=15$，$\frac{5}{2}\times6=15$，$\frac{5}{4}\times12=15$，$10\times\frac{3}{2}=15$，$20\times\frac{3}{4}=15$，所以$S_4=15\times5=75$；

……

所以可归纳 $S_k=\frac{240}{2^k}\times(k+1)=\frac{240(k+1)}{2^k}$.

所以 $\sum_{k=1}^{n}S_k=240\left(1+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{n+1}{2^n}\right)$，①

所以 $\frac{1}{2}\times\sum_{k=1}^{n}S_k=240\left(\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)$，②

由①－②得，

$\frac{1}{2}\times\sum_{k=1}^{n}S_k=240\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)$

$=240\left(1+\frac{\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)=240\left(\frac{3}{2}-\frac{n+3}{2^{n+1}}\right)$，

所以 $\sum_{k=1}^{n}S_k=240\left(3-\frac{n+3}{2^n}\right)(\mathrm{dm}^2)$.]

**跟进训练**

1. $\frac{15}{16}\pi R^2$　$\pi R^2\left(n+\frac{1}{2^n}-1\right)$　[因为 $S_1=\frac{\pi R^2}{2}$，$S_2=\frac{3\pi R^2}{4}$，

所以 $S_k=\pi R^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)$

$=\pi R^2\cdot\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\pi R^2\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$，

所以 $S_4=\pi R^2\left(1-\frac{1}{2^4}\right)=\frac{15}{16}\pi R^2$.

$\sum_{k=1}^{n}S_k=\pi R^2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right]$

$=\pi R^2\left[n-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)\right]$

$=\pi R^2\left[n-\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}\right]$

$=\pi R^2\left(n+\frac{1}{2^n}-1\right)$.]

## 命题点二

**跟进训练**

2. **解**：(1)由题意知 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{b_{n+2}}{b_n}$，

因为 $b_1=1$，且 $\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=4$.

因为 $a_1=1$，所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 4 的等比数列，所以 $S_n=\frac{1\times(1-4^n)}{1-4}=\frac{1}{3}\times(4^n-1)$.

(2)因为 $b_1=1$，且 $\{b_n\}$ 是公差为 2 的等差数列，所以 $b_n=2n-1$，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{b_{n+2}}{b_n}=\frac{2n+3}{2n-1}$，

所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{2n+1}{2n-3}$，$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\frac{2n-1}{2n-5}$，…，$\frac{a_2}{a_1}=\frac{5}{1}$，

所以 $\frac{a_n}{a_1}=\frac{(2n+1)(2n-1)}{3\times1}$.

因为 $a_1=1$，所以 $a_n=\frac{1}{3}\times(4n^2-1)$.

## 命题点三

**典例 3**　**解**：(1)$\because a_1=1$，

$\therefore b_1=a_2=a_1+1=2$.

$b_2=a_4=a_3+1=a_2+2+1=a_2+3=5$.

又 $\because b_n=a_{2n}$，

$\therefore b_{n+1}=a_{2n+2}=a_{2n+1}+1=a_{2n}+2+1=a_{2n}+3$，

$\therefore b_{n+1}=b_n+3$，

$\therefore b_{n+1}-b_n=3$，

$\therefore\{b_n\}$ 是首项为 2，公差为 3 的等差数列，

$\therefore b_n=2+(n-1)\times3=3n-1$.

(2)由(1)可知 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}$

$=b_1+b_2+\cdots+b_{10}=\frac{10\times(2+29)}{2}=155$.

$\therefore a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}=a_2-1+a_4-1+\cdots+a_{20}-1=155-10=145$.

$\therefore S_{20}=155+145=300$.

**跟进训练**

3. **解**：(1)因为 $a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, n\text{ 为奇数},\\ a_n+2, n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 且 $b_n=a_{2n-1}$，所以 $a_2=a_1+1=2$，$b_1=a_1=1$，$b_2=a_3=a_2+2=4$，

所以 $b_{n+1}=a_{2n+1}=a_{2n}+2=a_{2n-1}+1+2=a_{2n-1}+3=b_n+3$，

$\therefore b_{n+1}-b_n=3$，

$\therefore\{b_n\}$ 是以 1 为首项，3 为公差的等差数列，所以 $b_n=3n-2$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(2)设 $\left\{\frac{a_n}{1\,011}\right\}$ 的前 2 022 项和为 $S_{2\,022}$，则 $S_{2\,022}=\frac{1}{1\,011}[(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2\,021})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2\,022})]$

$=\frac{1}{1\,011}\{(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{1\,011})+[(b_1+1)+(b_2+1)+(b_3+1)+\cdots+(b_{1\,011}+1)]\}$

$=\frac{2(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{1\,011})+1\,011}{1\,011}$

$=\frac{\frac{2(b_1+b_{1011})\times1\,011}{2}+1\,011}{1\,011}=1+3\times1\,011-2+1$

$=3\,033$.