点金训练

教师用书

《点金训练》编写组 编

数学

选择性必修第二册

配人教A版

四川教育出版社

CONTENTS

目录

第四章 数列

第五章　一元函数的导数及其应用

第四章 数列

单元概览

单元导航

数列是高中数学的重要研究对象,是刻画现实世界中一类具有递推规律的事物的数学模型,在数学领域有着广泛的应用.在整个中学数学教学内容中,数列是一个知识的汇合点,与很多知识都有着密切联系.以前学过的数、式、方程、函数、简易逻辑等知识在这一章均得到了较为充分的应用,而学习数列又为后面学习数列与函数的极限等内容做好铺垫.数列具有承前启后的重要作用.

学习目标

1.理解数列的概念和基本形式,能够分清数列中的项数、首项、公差和公比等概念.

2.掌握数列的表示方法,包括图象法和通项公式法,并能够根据数列的表示方法求出数列的通项公式和前 n 项和公式.

3.能够根据实际生活中的问题抽象出数列模型,并运用所学知识解决实际问题,从而培养数学思维能力和创新能力,在学习数列的过程中体会数学的美妙和实际应用价值.

核心概念

数列是一种特殊的函数,以函数思想为核心,围绕递推规律展开.

通过对数列的学习,可以更加深刻地理解函数,重点培养逻辑思维能力和数学抽象能力.通过对数列的学习,能够理解数列作为特殊函数的本质,提升运用函数思想解决实际问题的能力,发展数学建模素养,从而能够将实际问题转化为数学模型,并运用数列的相关知识进行分析和解决.

学法指导

1.学习数列的概念时,我们要利用生产生活中的实例,感受数列与周围事物的联系,感知数列的项的顺序性,并结合集合定义,明确数列的记法与集合的记法之间的区别,提升数学抽象的核心素养.

2.在等比数列的学习过程中,采用类比的方法,分析等差数列与等比数列在定义、性质、公式、解题方法等方面的异同,培养类比推理能力.

单元主题任务

自然世界呈现各式各样的现象，有些现象与“数”有着紧密联系：树木生长过程中枝丫的数目，果实的个数与排列方式……

这些纷杂的现象背后有规律吗？

观察某株树木的枝丫数，第一年为1，第二年为1，第三年为2，第四年为3，第五年为5，第六年为8，第七年为13，第八年为21，第九年为34，第十年为55，第十一年为89，第十二年为144……

将它们按年份排列起来，就是下面的一列数：

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，….

可以发现，这列数有许多规律.例如，从第三个数开始，每一个数都等于前两个数的和；再如，相邻两个数的比值(前一个数与后一个数之比)越来越接近于某个确定的常数……

上面的研究过程，大致思路是：

(1)首先，用“数”刻画现象中事物的状态；

(2)将这些数按一定的顺序排成一列(与正整数建立对应关系)；

(3)研究这列数的规律，用这些规律刻画并认识事物变化的状态和过程.

仿照这个过程，我们可以进一步去研究自然界、社会生活中的类似现象，探索这些现象背后的规律，以解决具体的实际问题.

(1)在研究过程中，我们应该建立怎样的数学模型来刻画这类现象？

(2)用这些数学模型能够解决哪些问题？

探·究·构·建

4.1 数列的概念

第1课时 数列的概念

学习任务目标
1.理解数列的有关概念与数列的表示方法. 2.掌握数列的分类,了解数列的单调性. 3.理解数列的通项公式,并会用通项公式写出数列的任一项. 4.能根据数列的前几项写出数列的一个通项公式.

问题式预习

【知识清单】

知识点一 数列的概念

数列	按照确定的顺序排列的一列数
项	数列中的每一个数叫做这个数列的项.数列的第一个位置上的数叫做这个数列的第1项,常用符号a_1表示,第二个位置上的数叫做这个数列的第2项,用a_2表示……第n个位置上的数叫做这个数列的第n项,用a_n表示.其中第1项也叫做首项
表示	$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$,简记为$\{a_n\}$

知识点二 数列的分类

分类标准	名称	含义
按项的个数	有穷数列	项数有限的数列
	无穷数列	项数无限的数列
单调性	递增数列	从第2项起,每一项都大于它的前一项的数列
	递减数列	从第2项起,每一项都小于它的前一项的数列
	常数列	各项都相等的数列

知识点三 数列与函数的关系

数列$\{a_n\}$是从正整数集$\mathbf{N}^*$(或它的有限子集$\{1,2,\cdots,n\}$)到实数集$\mathbf{R}$的函数,其自变量是序号n,对应的函数值是数列的第n项a_n,记为$a_n=f(n)$.另一方面,对于函数$y=f(x)$,如果$f(n)(n\in\mathbf{N}^*)$有意义,那么$f(1),f(2),\cdots,f(n),\cdots$构成了一个数列$\{f(n)\}$.

知识点四 数列的通项公式

如果数列$\{a_n\}$的第n项a_n与它的序号n之间的对应关系可以用一个式子来表示,那么这个式子叫做这个数列的通项公式.通项公式就是数列的函数解析式,根据通项公式可以写出数列的各项.

知识点五 数列的简单表示方法

(1)通项公式法:如果数列$\{a_n\}$的第n项a_n与它的序号n之间的对应关系可以用一个式子来表示,那么这个式子叫做这个数列的通项公式.

(2)图象法:数列的图象是以$(n,f(n))$为坐标的一系列孤立的点(无限或有限个).

(3)列表法:列表法就是列出表格来表示数列的序号与项的关系的方法,形式如下表.

序号	1	2	3	4	…	n	…
项	a_1	a_2	a_3	a_4	…	a_n	…

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)数列中的项互换次序后还是原来的数列. (×)

(2)数列可分为递增数列和递减数列两类. (×)

(3)$\{a_n\}$与a_n的意义一样,都表示数列. (×)

2.已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=(-1)^n\cdot(n^2-1)$,则$a_6=$ ( )

A.35 B.-11 C.-35 D.11

A **解析**:$a_6=(-1)^6\times(6^2-1)=35$.故选A.

3.请思考并回答下列问题:

(1)数列的记法和集合的记法有些相似,那么数列与集合的区别是什么?

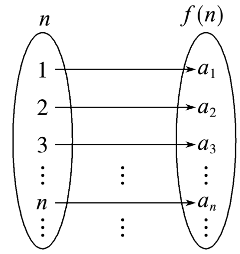
提示:数列中的数讲究顺序,集合中的元素具有无序性;数列中可以出现相同的数,集合中的元素具有互异性;数列是离散的,而集合中的元素并不一定是离散的;数列本质上是函数,而集合不是函数.

(2)数列可以用一群孤立的点表示吗？

提示：可以，数列是特殊的函数，函数可用图象法表示，数列$\{a_n\}$的图象由一群孤立的点$(n,a_n)(n\in \mathbf{N}^*)$组成.

(3)数列的通项公式$a_n=f(n)$与函数解析式$y=f(x)$有什么异同？

提示：如图，数列$\{a_n\}$可以看成以正整数集$\mathbf{N}^*$(或它的有限子集$\{1,2,\cdots,n\}$)为定义域的函数$a_n=f(n)$，当自变量n按照从小到大的顺序依次取值时，所对应的函数值构成数列$\{a_n\}$.不同之处是定义域，数列中的n必须是从1开始且取值为连续的正整数，函数的定义域可以是任意非空数集.



◦ 任务型课堂 ◦

任务1 数列的概念

1. 下列说法正确的是 ( )

A.1,2,3,4,…,n是无穷数列

B.数列3,5,7与数列7,5,3是相同数列

C.同一个数在数列中不能重复出现

D.数列$\{2n+1\}$的第6项是13

D **解析**：数列1,2,3,4,…,n共n项，是有穷数列，A错误.数列中的项是有次序的，B错误.数列中的数可以重复出现，C错误.当$n=6$时，$2\times6+1=13$，D正确.故选D.

2. 下列对象是数列的是________；是有穷数列的是________；是无穷数列的是________.

(1)$\{1,3,5,7,9\}$；(2)4,3,2,1,0；(3)所有无理数；(4)1,2,3,4,…；(5)2,2,2,2,2.

(2)(4)(5) (2)(5) (4) **解析**：(1)是集合，不是数列；(3)不能构成数列，因为没有把所有的无理数按一定顺序排列起来；(2)(4)(5)是数列，其中(4)是无穷数列，(2)(5)是有穷数列.

【探究总结】

1. 判断一组元素能否构成数列的依据

(1)各项是否为“数”；

(2)各数是否按一定顺序排成一列.

2. 数列类型的判断

在判断数列是哪一种类型的数列时，要紧扣概念及数列的特点.例如，判断数列是有穷数列还是无穷数列时，要看项的个数是有限的还是无限的.

任务2 数列的通项公式

探究活动

例1 写出下列数列的一个通项公式：

(1)$\frac{1}{2},2,\frac{9}{2},8,\frac{25}{2},\cdots$；

(2)1,−3,5,−7,9,…；

(3)9,99,999,9 999,…；

(4)$\frac{2^2-1}{1},\frac{3^2-2}{3},\frac{4^2-3}{5},\frac{5^2-4}{7},\cdots$；

(5)$-\frac{1}{1\times2},\frac{1}{2\times3},-\frac{1}{3\times4},\frac{1}{4\times5},\cdots$；

(6)4,0,4,0,4,0,….

解：(1)将各项都统一成分数：$\frac{1}{2},\frac{4}{2},\frac{9}{2},\frac{16}{2},\frac{25}{2},\cdots$，所以它的一个通项公式为$a_n=\frac{n^2}{2}$.

(2)数列各项的绝对值构成数列1,3,5,7,9,…，是连续的正奇数，其通项公式为$A_n=2n-1$.考虑$(-1)^{n+1}$具有转换符号的作用，所以原数列的一个通项公式为$a_n=(-1)^{n+1}(2n-1)$.

(3)各项加1后，分别变为10,100,1 000,10 000,…，此数列的通项公式为$A_n=10^n$，可得原数列的一个通项公式为$a_n=10^n-1$.

(4)数列中每一项均由三部分组成，分母是从1开始的奇数，其通项公式为$A_n=2n-1$；分子的前一部分是从2开始的自然数的平方，其通项公式为$B_n=(n+1)^2$，分子的后一部分是减去一个自然数，减去的自然数的通项公式为$C_n=n$.综合得原数列的一个通项公式为$a_n=\frac{(n+1)^2-n}{2n-1}$.

(5)这个数列的前4项的绝对值都等于序号与序号加1的积的倒数，且奇数项为负，偶数项为正，所以它的一个通项公式为$a_n=(-1)^n\cdot\frac{1}{n(n+1)}$.

(6)由于该数列中奇数项全部都是4，偶数项全部都是0，因此可用分段函数的形式表示通项公式，即$a_n=\begin{cases}4,n\text{ 为奇数},\\0,n\text{ 为偶数}.\end{cases}$该数列也可改写为2+2,2−2,2+2,2−2,2+2,2−2,…，因此其通项公式又可以表示为$a_n=2+2\times(-1)^{n+1}$.

［一题多思］

思考1. 试以本例中(1)(2)为例，说明将数列的前几项进行怎样的处理更有利于写出通项公式.

提示：将数列的前几项统一形式更有利于写出数列的通项公式.

如(1)改写为$\frac{1^2}{2},\frac{2^2}{2},\frac{3^2}{2},\frac{4^2}{2},\frac{5^2}{2},\cdots$,写出$a_n=\frac{n^2}{2}$;

(2)改写为$(-1)^2(2\times1-1),(-1)^3(2\times2-1),(-1)^4(2\times3-1),(-1)^5(2\times4-1),(-1)^6(2\times5-1),\cdots$,写出$a_n=(-1)^{n+1}(2n-1)$.

思考2.在本例(3)的基础上,你能写出数列5,55,555,5 555,…的一个通项公式吗?

提示:易知将数列9,99,999,9 999,…的每一项先除以9,再乘5,可得数列5,55,555,5 555,…,故所求数列的一个通项公式为$a_n=\frac{5}{9}(10^n-1)$.

【探究总结】

根据数列的前几项写出数列的一个通项公式的关键

(1)根据所给数列的前几项求其通项公式时,需仔细观察分析,抓住分式中分子、分母的特征,相邻项的变化特征,拆项后的特征,各项符号特征等,并对此进行归纳、联想.

(2)根据数列的前几项写出数列的一个通项公式运用的是不完全归纳法,它蕴含着"从特殊到一般"的思想.由不完全归纳法得出的结果不一定是可靠的,要注意代值检验,对于符号的正负变化,可用$(-1)^n$或$(-1)^{n+1}$来调整.

应用迁移

写出下列数列的一个通项公式:

(1)3,5,9,17,33,…;

(2)11,102,1 003,10 004,…;

(3)$1\frac{1}{2},2\frac{4}{5},3\frac{9}{10},4\frac{16}{17},\cdots$;

(4)2,-6,12,-20,30,-42,….

解:(1)因为$3=2^1+1,5=2^2+1,9=2^3+1,17=2^4+1,33=2^5+1,\cdots$,所以该数列的一个通项公式为$a_n=2^n+1$.

(2)这个数列可以改写为10+1,100+2,1 000+3,10 000+4,…,所以该数列的一个通项公式是$a_n=10^n+n$.

(3)因为$1\frac{1}{2}=1+\frac{1^2}{1^2+1},2\frac{4}{5}=2+\frac{2^2}{2^2+1},3\frac{9}{10}=3+\frac{3^2}{3^2+1},4\frac{16}{17}=4+\frac{4^2}{4^2+1},\cdots$,所以该数列的一个通项公式为$a_n=n+\frac{n^2}{n^2+1}$.

(4)将数列变形为$1\times2,-2\times3,3\times4,-4\times5,5\times6,-6\times7,\cdots$,

所以该数列的一个通项公式为$a_n=(-1)^{n+1}n(n+1)$.

任务3 数列的函数特性

探究活动

例2 (1)数列$\left\{\frac{2n}{3n+1}\right\}$是　　(　　)

A.递增数列　　B.递减数列

C.摆动数列　　D.常数列

A　**解析:**在数列$\left\{\frac{2n}{3n+1}\right\}$中,设$a_n=\frac{2n}{3n+1}$,

则$a_{n+1}-a_n=\frac{2n+2}{3n+4}-\frac{2n}{3n+1}=\frac{2}{(3n+1)(3n+4)}>0$,

所以$a_n<a_{n+1}$.所以数列$\left\{\frac{2n}{3n+1}\right\}$是递增数列.

(2)在数列$\{a_n\}$中,$a_n=n^2-8n$.

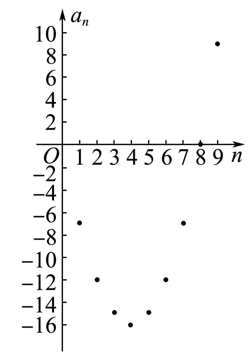
①画出$\{a_n\}$的图象;

②根据图象写出数列$\{a_n\}$的单调性.

解:①列表:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
a_n	−7	−12	−15	−16	−15	−12	−7	0	9	…

描点,画出$\{a_n\}$的图象如图所示.



②数列$\{a_n\}$在$n=1,2,3,4$时是递减的,在$n=4,5,6,7,\cdots$时是递增的.

【探究总结】

数列增减性的判断方法

(1)若已知数列的图象,则可以直接根据图象是上升的还是下降的来判断数列的增减性.

(2)若已知数列的通项公式,则常用作差法或作商法来比较相邻两项的大小.需注意:①作商时,要注意数列中项的正负;②对于通项是多项式的数列,常作差后进行因式分解;③对于通项含有根式的数列,常进行分子或分母有理化.

(3)通过考察函数的单调性来判断数列的增减性.

应用迁移

1.已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^2-5n+4$.

(1)数列$\{a_n\}$中有多少项为负数?

(2)当n为何值时,a_n有最小值?求出最小值.

解:(1)由$n^2-5n+4<0$,得$1<n<4$.

又$n\in\mathbf{N}^*$,所以$n=2$或$n=3$.

所以数列$\{a_n\}$中有2项为负数.

(2)因为 $a_n=n^2-5n+4=\left(n-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$，且 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n=2$ 或 $n=3$ 时，a_n 有最小值 -2.

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=(n+2)\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^n$，求数列 $\{a_n\}$ 中的最大项.

解： 设 $a_n(n\geqslant 2)$ 为数列 $\{a_n\}$ 中的最大项，所以

$$\begin{cases}a_n\geqslant a_{n-1},\\ a_n\geqslant a_{n+1},\end{cases}\text{即}\begin{cases}(n+2)\left(\frac{9}{10}\right)^n\geqslant(n+1)\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1},\\ (n+2)\left(\frac{9}{10}\right)^n\geqslant(n+3)\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1},\end{cases}$$

整理得 $\begin{cases}(n+2)\cdot\frac{9}{10}\geqslant n+1,\\ n+2\geqslant(n+3)\cdot\frac{9}{10},\end{cases}$ 解得 $7\leqslant n\leqslant 8$.

故 $\{a_n\}$ 中的最大项为 $a_7=a_8=\frac{9^8}{10^7}$.

提质归纳

- 数列的概念
  - 数列的有关概念
  - 表示方法
    - 列表
    - 图象
    - 通项公式
      - 概念
      - 数列与函数的关系
  - 分类
    - 项数
      - 有穷数列
      - 无穷数列
    - 单调性
      - 递增数列
      - 递减数列
      - 摆动数列
      - 常数列

课后素养评价（一） 数列的概念

A组 学习·理解

1.（多选）下列关于数列的说法正确的是（　　）

A. 按一定次序排列的一列数叫做数列

B. 若 $\{a_n\}$ 表示数列，则 a_n 表示数列的第 n 项，$a_n=f(n)$ 表示数列的通项公式

C. 同一个数列的通项公式的形式不一定唯一

D. 同一个数列的任意两项均不可能相同

ABC　**解析：** 因为一个数列的每一项的值是可以相等的，如常数列，所以 D 项错误，A，B，C 均正确. 故选 ABC.

2.（多选）下面四个数列中，既是无穷数列又是递增数列的是（　　）

A. $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$

B. $\sin\frac{1}{7}\pi,\sin\frac{2}{7}\pi,\sin\frac{3}{7}\pi,\cdots,\sin\frac{n}{7}\pi,\cdots$

C. $-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\cdots,-\frac{1}{2^{n-1}},\cdots$

D. $1,2,3,\cdots$

CD　**解析：** 选项 C，D 既是无穷数列又是递增数列，而选项 A 是递减数列，选项 B 是摆动数列. 故选 CD.

3. 下列说法正确的是（　　）

A. 数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 是递增数列

B. 数列 $0,1,2,3,\cdots$ 的一个通项公式为 $a_n=n$

C. 数列 $0,0,0,1,\cdots$ 是常数列

D. 数列 $2,4,6,8$ 与数列 $8,6,4,2$ 是相同的数列

A　**解析：** 对于 A，设 $a_n=\frac{n}{n+1}$，则 $a_{n+1}-a_n=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{(n+1)^2-n(n+2)}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}>0$ 对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，所以数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 是递增数列，故 A 正确；

对于 B，当 $n=1$ 时，$a_1=1$ 与第一项为 0 不符，故 B 错误；

对于 C，数列中的项并不完全相同，故 C 错误；

对于 D，根据数列的概念，数列与顺序有关，所以数列 $2,4,6,8$ 与数列 $8,6,4,2$ 不是相同的数列，故 D 错误.

故选 A.

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n^2-18n+5$，则数列 $\{a_n\}$ 的最小项是（　　）

A. 第 4 项

B. 第 5 项

C. 第 6 项

D. 第 4 项或第 5 项

D　**解析：** 因为 $a_n=2n^2-18n+5$，所以设 $f(x)=2x^2-18x+5$，其图象的对称轴为 $x=-\frac{-18}{2\times 2}=\frac{9}{2}$，且开口向上. 又因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $\{a_n\}$ 的最小项为第 4 项或第 5 项. 故选 D.

5.已知数列$\{a_n\}$满足$a_1>0$,对一切$n\in\mathbf{N}^*$,$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$,则数列$\{a_n\}$是　(　　)

A.递增数列　　B.递减数列

C.摆动数列　　D.不确定

B　**解析**:因为$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$,$a_1>0$,则$a_n>0$,所以$a_{n+1}<a_n$,故数列$\{a_n\}$是递减数列.故选B.

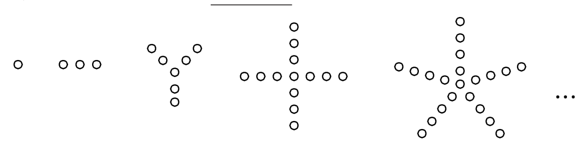
6.若数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=\frac{2n}{n+1}$,则此数列是　(　　)

A.递增数列　　B.递减数列

C.摆动数列　　D.不确定

A　**解析**:因为$a_n=\frac{2n}{n+1}=\frac{2(n+1)-2}{n+1}=2-\frac{2}{n+1}$,所以$a_n-a_{n-1}=\left(2-\frac{2}{n+1}\right)-\left(2-\frac{2}{n}\right)=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}=\frac{2}{n(n+1)}>0(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$.因此数列$\{a_n\}$是递增数列.故选A.

7.观察下列5个图形中小圆圈的个数的变化规律,猜想第n个图形中有______个小圆圈.



①　②　③　④　⑤

n^2-n+1　**解析**:5个图形中小圆圈的个数分别为$1,1\times2+1,2\times3+1,3\times4+1,4\times5+1,\cdots$,故第$n$个图形中小圆圈的个数为$(n-1)\cdot n+1=n^2-n+1$.

8.根据下面的通项公式,写出数列的前5项.

(1)$a_n=\frac{n^2+1}{2n-1}$;

(2)$a_n=(-1)^{n-1}\cdot\frac{2n-1}{3n}$.

解:(1)当$n=1$时,$a_1=\frac{1^2+1}{2\times1-1}=2$;

当$n=2$时,$a_2=\frac{2^2+1}{2\times2-1}=\frac{5}{3}$;

当$n=3$时,$a_3=\frac{3^2+1}{2\times3-1}=2$;

当$n=4$时,$a_4=\frac{4^2+1}{2\times4-1}=\frac{17}{7}$;

当$n=5$时,$a_5=\frac{5^2+1}{2\times5-1}=\frac{26}{9}$.

(2)当$n=1$时,$a_1=(-1)^{1-1}\times\frac{2\times1-1}{3\times1}=\frac{1}{3}$;

当$n=2$时,$a_2=(-1)^{2-1}\times\frac{2\times2-1}{3\times2}=-\frac{1}{2}$;

当$n=3$时,$a_3=(-1)^{3-1}\times\frac{2\times3-1}{3\times3}=\frac{5}{9}$;

当$n=4$时,$a_4=(-1)^{4-1}\times\frac{2\times4-1}{3\times4}=-\frac{7}{12}$;

当$n=5$时,$a_5=(-1)^{5-1}\times\frac{2\times5-1}{3\times5}=\frac{3}{5}$.

B组　应用·实践

1.已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$,则该数列的前4项依次为　(　　)

A.1,0,1,0　　B.0,1,0,1

C.$\frac{1}{2}$,0,$\frac{1}{2}$,0　　D.2,0,0,2

A　**解析**:$a_1=\frac{1+(-1)^{1+1}}{2}=\frac{1+1}{2}=1$;

$a_2=\frac{1+(-1)^{2+1}}{2}=\frac{1-1}{2}=0$;

$a_3=\frac{1+(-1)^{3+1}}{2}=\frac{1+1}{2}=1$;

$a_4=\frac{1+(-1)^{4+1}}{2}=\frac{1-1}{2}=0$.故选A.

2.已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$,则数列$\{a_n\}$中的最大项为　(　　)

A.第2项　　B.第3项

C.第2项或第3项　　D.第4项

C　**解析**:$a_1=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$;$a_2=2\times\frac{4}{9}=\frac{8}{9}$;$a_3=3\times\frac{8}{27}=\frac{8}{9}=a_2$;$a_4=4\times\frac{16}{81}=\frac{64}{81}<a_3$.

当$n\geqslant4$时,$a_{n+1}-a_n=(n+1)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{-n+2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n<0$,所以$a_{n+1}<a_n$,

所以数列$\{a_n\}$中的最大项为第2项或第3项.故选C.

3.已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\begin{cases}3n+1,n\text{ 为奇数},\\2^n-1,n\text{ 为偶数},\end{cases}$则$a_2a_3=$　(　　)

A.13　　B.14

C.30　　D.49

C　**解析**:由$a_n=\begin{cases}3n+1,n\text{ 为奇数},\\2^n-1,n\text{ 为偶数},\end{cases}$得$a_2=2^2-1=3$,$a_3=3\times3+1=10$,所以$a_2a_3=30$.故选C.

4.(多选)根据下列通项公式可以判断数列$\{a_n\}$是递

增数列的有 ( )

A.$a_n=n^2-3n+1$ B.$a_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

C.$a_n=n+\frac{2}{n}$ D.$a_n=\ln\frac{n}{n+1}$

BD **解析**:对于A,因为$n\in\mathbf{N}^*$,所以$a_{n+1}-a_n=(n+1)^2-3(n+1)+1-n^2+3n-1=2n-2\geqslant0$,$a_2-a_1=0$,所以$a_n=n^2-3n+1$时,$\{a_n\}$不是递增数列;

对于B,$a_{n+1}-a_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}>0$,所以$a_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$时,$\{a_n\}$是递增数列;

对于C,$a_{n+1}-a_n=n+1+\frac{2}{n+1}-n-\frac{2}{n}=\frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}\geqslant0$,$a_2-a_1=0$,所以$a_n=n+\frac{2}{n}$时,$\{a_n\}$不是递增数列;

对于D,$a_{n+1}-a_n=\ln\frac{n+1}{n+2}-\ln\frac{n}{n+1}=\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\times\frac{n+1}{n}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)>0$,所以$a_n=\ln\frac{n}{n+1}$时,$\{a_n\}$是递增数列.故选BD.

5.已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a^n+m(a<0,n\in\mathbf{N}^*)$,且满足$a_1=2$,$a_2=4$,则$a_3=$________.

2 **解析**:由题意得$\begin{cases}a_1=a+m=2,\\a_2=a^2+m=4,\end{cases}$

所以$a^2-a=2$,解得$a=2$或$a=-1$.

又$a<0$,所以$a=-1$.

因为$a+m=2$,所以$m=3$.

所以$a_n=(-1)^n+3$,所以$a_3=(-1)^3+3=2$.

6.(传统文化)大衍数列来源于《乾坤谱》中对《易》传"大衍之数五十"作出的推论,主要用于解释中国传统文化中的太极衍生原理.其前10项依次是0,2,4,8,12,18,24,32,40,50,则此数列的第20项与第21项的和为________.

420 **解析**:由数列的前10项可知,数列的偶数项的一个通项公式为$a_{2n}=2n^2$,

所以$a_{20}=2\times10^2=200$.

奇数项的一个通项公式为$a_{2n-1}=2(n-1)n$,

所以$a_{21}=a_{2\times11-1}=2\times10\times11=220$.

所以$a_{20}+a_{21}=200+220=420$.

7.已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=cn+dn^{-1}(n\in\mathbf{N}^*)$,且$a_2=\frac{3}{2}$,$a_4=\frac{3}{2}$,求$a_n$和$a_{10}$.

解:因为$a_2=\frac{3}{2}$,$a_4=\frac{3}{2}$,代入通项公式中,

可得$\begin{cases}\frac{3}{2}=2c+\frac{d}{2},\\\frac{3}{2}=4c+\frac{d}{4},\end{cases}$解得$c=\frac{1}{4}$,$d=2$.

所以$a_n=\frac{n}{4}+\frac{2}{n}$,所以$a_{10}=\frac{10}{4}+\frac{2}{10}=\frac{27}{10}$.

8.已知数列$\{a_n\}$:25,37,49,61,73,…;

$\{b_n\}$:1,4,9,16,25,….

(1)根据前5项的特征,分别求出它们的一个通项公式.

(2)根据(1)中的两个通项公式,判断这两个数列是否有序号与值都相同的项.如果没有,请说明理由;如果有,指明它们是第几项.

解:(1)$a_n=12n+13$,$b_n=n^2$.

(2)有序号与值都相同的项.令$a_n=b_n$,即$12n+13=n^2$,解得$n=13$或$n=-1$(舍去),所以两个数列有序号与值都相同的项,是两个数列的第13项.

第 2 课时　数列的递推公式及前 n 项和

学习任务目标

1. 会判断一个实数是否为某个数列的项.
2. 掌握数列的递推公式及应用.
3. 理解 S_n 与 a_n 的关系,能运用这个关系解决相关问题.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　数列的递推公式

如果一个数列的相邻两项或多项之间的关系可以用一个式子来表示,那么这个式子叫做这个数列的递推公式.

知识点二　数列的前 n 项和

(1)定义:数列$\{a_n\}$从第 1 项起到第 n 项止的各项之和,称为数列$\{a_n\}$的前 n 项和,记作 S_n,即 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

(2)前 n 项和公式:如果数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 与它的序号 n 之间的对应关系可以用一个式子来表示,那么这个式子叫做这个数列的前 n 项和公式.

(3)a_n 与 S_n 的关系:若数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,则 $a_n=\begin{cases}S_1,n=1,\\S_n-S_{n-1},n\geqslant 2\end{cases}$.

【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)递推公式也是表示数列的一种方法.　(√)

(2)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=2,a_n=2-\dfrac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2$,且 $n\in\mathbf{N}^*)$,则 $a_2=\dfrac{3}{2}$.　(　)

√　**提示:** 因为 $a_1=2,a_n=2-\dfrac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*)$,所以 $a_2=2-\dfrac{1}{a_1}=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

(3)设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,则 $a_n=S_n-S_{n-1}$.　(　)

×　**提示:** 当 $n=1$ 时,$a_1=S_1$;当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}$,所以 $a_n=\begin{cases}S_1,n=1,\\S_n-S_{n-1},n\geqslant 2.\end{cases}$

2. 若数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=n^2-10n$,则$a_1=$________,$a_2=$________.

-9　-7　**解析:** 因为 $S_n=n^2-10n$,所以 $a_1=S_1=1^2-10\times 1=-9,a_2=S_2-S_1=2^2-10\times 2-(-9)=-7$.

3. 请思考并回答下列问题:

(1)所有数列都有递推公式吗?

提示: 不一定.例如,$\sqrt{2}$精确到 1,0.1,0.01,0.001,…的不足近似值组成的数列:1,1.4,1.41,1.414,…没有递推公式.

(2)仅由数列$\{a_n\}$满足的递推公式 $a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}^*)$能否确定这个数列?若已知 $a_1=1$ 呢?

提示: 仅由数列$\{a_n\}$满足的递推公式 $a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}^*)$只能得出相邻两项的关系,无法确定这个数列.若已知$a_1=1$,则可以确定这个数列为 1,2,4,8,….

○ 任务型课堂 ○

任务 1 通项公式的应用

1. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n^2-7n-8$.

(1)数列中为负数的项的个数是________;

(2)该数列的最小项为________.

(1)7　(2)-20　**解析:** (1)令 $a_n<0$,即 $n^2-7n-8<0$,得$-1<n<8$.

又 $n\in\mathbf{N}^*$,所以 n 的值为 1,2,3,…,7,

所以数列从第 1 项至第 7 项均为负数,共 7 项.

(2)(方法一)$a_n=n^2-7n-8$ 是关于 n 的二次函数,图象的对称轴方程为 $n=\dfrac{7}{2}=3.5$,

所以当 $1\leqslant n\leqslant 3$ 时,$\{a_n\}$递减;

当 $n\geqslant 4$ 时,$\{a_n\}$递增.

所以当 $n=3$ 或 $n=4$ 时,a_n 最小,即 a_3,a_4是数列中的最小项,且 $a_3=a_4=-20$.

(方法二)设 $a_n(n\geqslant 2)$为数列$\{a_n\}$中的最小项.

则$\begin{cases}a_n\leqslant a_{n-1},\\a_n\leqslant a_{n+1},\end{cases}$

即$\begin{cases}n^2-7n-8\leqslant (n-1)^2-7(n-1)-8,\\n^2-7n-8\leqslant (n+1)^2-7(n+1)-8,\end{cases}$

解得 $3\leqslant n\leqslant 4$.

又因为 $n\in\mathbf{N}^*$,所以当 $n=3$ 或 $n=4$ 时,a_n 最小,即 a_3,a_4是数列中的最小项,且 $a_3=a_4=-20$.

2. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3n^2-28n$.

(1)求这个数列的第 4 项和第 6 项.

(2)-49 是该数列的第几项?

(3)68 是该数列的项吗?

解: (1)根据 $a_n=3n^2-28n$,

得 $a_4=3\times4^2-28\times4=-64$，
$a_6=3\times6^2-28\times6=-60$.
(2)令 $3n^2-28n=-49$，
即 $3n^2-28n+49=0$，解得 $n=7$ 或 $n=\frac{7}{3}$（舍）.
所以 -49 是该数列的第 7 项.
(3)令 $3n^2-28n=68$，即 $3n^2-28n-68=0$，
解得 $n=-2$ 或 $n=\frac{34}{3}$，均不是正整数，
所以 68 不是数列 $\{a_n\}$ 中的项.

【探究总结】

1.如果已知数列的通项公式，只要将相应项数代入通项公式，就可以得出数列中的指定项.
2.判断一个实数是否为某个数列中的一项，步骤如下：
(1)将所给的数代入通项公式中；
(2)解关于 n 的方程；
(3)若 n 为正整数，说明所给的数是该数列中的项；若 n 不是正整数，则所给的数不是该数列中的项.

任务 2 数列的递推公式

探究活动

例 1 (1)已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_na_{n+1}=1-a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$ 且 $a_{2\,024}=2$，则 $a_{2\,023}$ 等于（　　）

A. $-\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

C　**解析**：易知 $a_{n+1}\neq0$. 由 $a_na_{n+1}=1-a_{n+1}$，得 $a_n=\frac{1}{a_{n+1}}-1$. 又因为 $a_{2\,024}=2$，所以 $a_{2\,023}=-\frac{1}{2}$. 故选 C.

(2)已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_n=3a_{n-1}+\frac{(-1)^n}{2}(n\in\mathbf{N}^*$，且 $n\geqslant2)$，写出数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项.

解：由题意，得 $a_2=3a_1+\frac{(-1)^2}{2}$，
又 $a_1=1$，所以 $a_2=3\times1+\frac{(-1)^2}{2}=\frac{7}{2}$.
同理，$a_3=3a_2+\frac{(-1)^3}{2}=10$，
$a_4=3a_3+\frac{(-1)^4}{2}=\frac{61}{2}$，
$a_5=3a_4+\frac{(-1)^5}{2}=91$.

【探究总结】

由递推公式写出数列的项的方法

(1)根据递推公式写出数列的前几项，首先要弄清楚公式中各部分的关系，然后依次代入计算即可.
(2)若已知的是末项，通常将所给公式整理成用后面的项表示前面的项的形式，如 $a_n=2a_{n+1}+1$.
(3)若已知的是首项，通常将所给公式整理成用前面的项表示后面的项的形式，如 $a_{n+1}=\frac{a_n-1}{2}$.

应用迁移

1.已知在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=-\frac{1}{4}$，$a_n=1-\frac{1}{a_{n-1}}(n>1)$，则 $a_{100}=$（　　）

A. 5　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $-\frac{4}{5}$

B　**解析**：因为 $a_1=-\frac{1}{4}$，$a_n=1-\frac{1}{a_{n-1}}(n>1)$，所以 $a_2=1-\frac{1}{a_1}=1-\frac{1}{-\frac{1}{4}}=5$，$a_3=1-\frac{1}{a_2}=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$，$a_4=1-\frac{1}{a_3}=1-\frac{1}{\frac{4}{5}}=1-\frac{5}{4}=-\frac{1}{4}$，…，可知数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为周期的周期数列. 因为 $100=33\times3+1$，所以 $a_{100}=a_1=-\frac{1}{4}$. 故选 B.

2.已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0$，$a_{n+1}=\frac{a_n-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_{20}=$（　　）

A. 0　　B. $-\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B　**解析**：因为 $a_1=0$，$a_{n+1}=\frac{a_n-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n+1}$，所以 $a_2=\frac{a_1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_1+1}=-\sqrt{3}$，$a_3=\frac{a_2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_2+1}=\sqrt{3}$，$a_4=\frac{a_3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_3+1}=0$，…，
所以数列 $\{a_n\}$ 的各项依次为 $0,-\sqrt{3},\sqrt{3},0,-\sqrt{3},\sqrt{3},0,\cdots$，周期为 3.
因为 $20=6\times3+2$，所以 $a_{20}=a_2=-\sqrt{3}$. 故选 B.

3.在数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1=10$，$a_n\in\mathbf{N}^*$，且 $a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{2}, a_n\text{ 是偶数},\\ a_n+3, a_n\text{ 是奇数}\end{cases}(n=1,2,3,\cdots)$，写出数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项.

解：由题意得，$a_1=10$，$a_2=\frac{a_1}{2}=5$，$a_3=a_2+3=8$，$a_4=\frac{a_3}{2}=4$，$a_5=\frac{a_4}{2}=2$.

任务 3 a_n 与 S_n 的关系

探究活动

例 2 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=5^n-1$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=5^1-1=4$；
当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(5^n-1)-(5^{n-1}-1)=5^n-5^{n-1}=4\times5^{n-1}$.
由于 $a_1=4$ 也满足 $a_n=4\times5^{n-1}$，
因此，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=4\times5^{n-1}$.

[一题多思]

思考 1. 若将本例中的“$S_n=5^n-1$”换成“$S_n=5^n+1$”，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

提示： 当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=5+1=6$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(5^n+1)-(5^{n-1}+1)=4\times 5^{n-1}$. 由于 $a_1=6$ 不满足 $a_n=4\times 5^{n-1}$，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\begin{cases}6, n=1,\\ 4\times 5^{n-1}, n\geqslant 2.\end{cases}$

思考 2. 若将本例中的“$S_n=5^n-1$”换成“$S_n=3^n+r$ $(r\in\mathbf{R})$”，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

提示： 当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=3+r$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(3^n+r)-(3^{n-1}+r)$

$=3\times 3^{n-1}-3^{n-1}$

$=2\times 3^{n-1}$.

令 $3+r=2\times 3^0$，解得 $r=-1$.

所以当 $r=-1$ 时，数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2\times 3^{n-1}$；

当 $r\neq -1$ 时，数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\begin{cases}3+r, n=1,\\ 2\times 3^{n-1}, n\geqslant 2.\end{cases}$

【探究总结】

利用 a_n 与 S_n 的关系求通项公式的步骤

(1) 当 $n=1$ 时，$a_1=S_1$.

(2) 当 $n\geqslant 2$ 时，根据 S_n 写出 S_{n-1}，化简 $a_n=S_n-S_{n-1}$.

(3) 如果 a_1 也满足当 $n\geqslant 2$ 时 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 的式子，那么数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=S_n-S_{n-1}$；如果 a_1 不满足当 $n\geqslant 2$ 时 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 的式子，那么数列$\{a_n\}$的通项公式要分段表示为 $a_n=\begin{cases}S_1, n=1,\\ S_n-S_{n-1}, n\geqslant 2.\end{cases}$

应用迁移

1. 若数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=2^n+1$，则$\dfrac{a_5+a_6}{a_2}=$ ( )

A. 7　　B. 8

C. 12　　D. 24

D　**解析：** 由题意得 $a_5+a_6=S_6-S_4=2^6-2^4=48$，$a_2=S_2-S_1=2^2-2^1=2$，所以$\dfrac{a_5+a_6}{a_2}=24$. 故选 D.

2. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=3n^2+4n+2$，求$\{a_n\}$的通项公式.

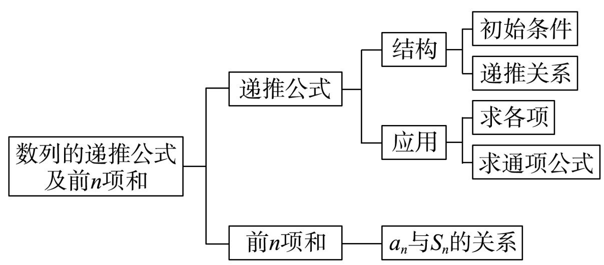
解： 当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=9$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(3n^2+4n+2)-[3(n-1)^2+4(n-1)+2]=6n+1$.

因为 $a_1=9$ 不满足上式，

所以 $a_n=\begin{cases}9, n=1,\\ 6n+1, n\geqslant 2.\end{cases}$

提质归纳



课后素养评价（二）　数列的递推公式及前n项和

A组 学习·理解

1. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=n^2-2n$，则 $a_3+a_4+a_5$ 等于 ( )

A. 12　　B. 15

C. 18　　D. 21

B　**解析：** 因为数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=n^2-2n$，所以 $a_3+a_4+a_5=S_5-S_2=5^2-2\times 5-(2^2-2\times 2)=15$. 故选 B.

2. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=n^2$，则 a_n 等于 ( )

A. n　　B. n^2

C. $2n+1$　　D. $2n-1$

D　**解析：** 因为 $S_n=n^2$，所以当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$.

当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=1$ 也适合上式，所以 $a_n=2n-1$. 故选 D.

3. 已知数列$\{a_n\}$对任意 $m,n\in\mathbf{N}^*$，满足 $a_{m+n}=a_m\cdot a_n$，且 $a_3=8$，则 $a_1=$ ( )

A. 2　　B. 1　　C. ± 2　　D. $\dfrac{1}{2}$

A　**解析：** 令 $m=n=1$，则 $a_2=a_1\cdot a_1=a_1^2$. 令 $m=1, n=2$，则 $a_3=a_1\cdot a_2=a_1^3=8$，解得 $a_1=2$. 故选 A.

4. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=2$，且 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_{2\,024}=$ ( )

A. 2　　B. 1

C. -1　　D. -2

A　**解析：** 由 $a_1=1$，$a_2=2$，且 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$，可得 $a_3=a_2-a_1=1$，$a_4=a_3-a_2=-1$，$a_5=a_4-a_3$

$=-2, a_6=a_5-a_4=-1, a_7=a_6-a_5=1, a_8=a_7-a_6=2, \cdots$，

所以$\{a_n\}$为周期数列，且周期为 6，故 $a_{2024}=a_{6\times337+2}=a_2=2$.

故选 A.

5.（多选）符合递推关系式 $a_n=\sqrt{2}a_{n-1}(n\geqslant2)$的数列可以是（　　）

A.1,2,3,4,…

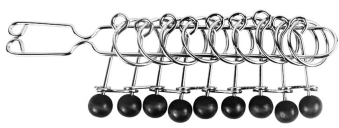
B.$1,\sqrt{2},2,2\sqrt{2},\cdots$

C.$\sqrt{2},2,2\sqrt{2},4,\cdots$

D.$0,\sqrt{2},2,2\sqrt{2},\cdots$

BC　**解析**：对于 A，从第 2 项起，每一项与前一项的差为 1，通项公式为 $a_n=n$；对于 B,C，从第 2 项起，每一项是前一项的$\sqrt{2}$倍，符合递推公式 $a_n=\sqrt{2}a_{n-1}$；对于 D，不符合递推公式.故选 BC.

6.（传统文化）如图所示，九连环是中国的传统民间益智玩具.把玩九连环时按照一定的程序反复操作，可以将九个环全部从框架上解下或者全部套上.解下或套上一个环算一步，且九连环的解下和套上是一对逆过程，解开九连环共需要 256 步.现将第 n 个圆环解下最少需要的步数记为 $a_n(n\leqslant9, n\in\mathbf{N}^*)$，已知 $a_1=1, a_2=1$，按规则有 $a_n=a_{n-1}+3a_{n-2}+2(n\geqslant3)$，则解下第 5 个圆环最少需要的步数为（　　）



A.15　　B.21

C.27　　D.31

D　**解析**：由题意可知 $a_3=a_2+3a_1+2=6$，$a_4=a_3+3a_2+2=11$，$a_5=a_4+3a_3+2=31$.故选 D.

7.已知数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=1$，以后的各项由公式 $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$给出，试写出这个数列的前 5 项.

解：因为 $a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以 $a_2=\dfrac{2a_1}{a_1+2}=\dfrac{2\times1}{1+2}=\dfrac{2}{3}$，

$a_3=\dfrac{2a_2}{a_2+2}=\dfrac{2\times\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+2}=\dfrac{1}{2}$，

$a_4=\dfrac{2a_3}{a_3+2}=\dfrac{2\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+2}=\dfrac{2}{5}$，

$a_5=\dfrac{2a_4}{a_4+2}=\dfrac{2\times\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}+2}=\dfrac{1}{3}$.

故该数列的前 5 项分别为 $1,\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{3}$.

B组　应用·实践

1.已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=n^2-5n$.若它的第 k 项满足 $3<a_k<7$，则 $k=$（　　）

A.4 或 5　　B.5 或 6

C.6 或 7　　D.7 或 8

B　**解析**：当 $n=1$ 时，$S_1=-4$，即 $a_1=-4$；

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-5n)-[(n-1)^2-5(n-1)]=2n-6$.

当 $n=1$ 时，$a_1=2\times1-6=-4$，上式依然成立，故 $a_n=2n-6(n\in\mathbf{N}^*)$.

令 $3<2k-6<7$，解得$\dfrac{9}{2}<k<\dfrac{13}{2}$.

又 $k\in\mathbf{N}^*$，所以 $k=5$ 或 $k=6$.故选 B.

2.在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1, a_{n+1}=a_n+n^2+\dfrac{1}{n(n+1)}$，则 $a_6=$（　　）

A.$\dfrac{341}{6}$　　B.$\dfrac{170}{3}$

C.$\dfrac{343}{6}$　　D.$\dfrac{172}{3}$

A　**解析**：由题意得 $a_{n+1}-a_n=n^2+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，

即 $a_2-a_1=1^2+1-\dfrac{1}{2}$，$a_3-a_2=2^2+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$，…，

$a_6-a_5=5^2+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}$，

将上面 5 个式子两端分别相加得 $a_6-a_1=(1^2+2^2+\cdots+5^2)+\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}\right)=55+1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{335}{6}$，且 $a_1=1$，所以 $a_6=\dfrac{335}{6}+1=\dfrac{341}{6}$.

故选 A.

3.已知数列$\{a_n\}$满足 $2a_1+2^2a_2+2^3a_3+\cdots+2^na_n=n\cdot2^n$，则$\{a_n\}$的通项公式为（　　）

A.$a_n=\begin{cases}1, n=1,\\ n+1, n\geqslant2\end{cases}$

B.$a_n=\dfrac{n+1}{2}$

C.$a_n=n$

D.$a_n=\begin{cases}1, n=1,\\ n-1, n\geqslant2\end{cases}$

B　**解析**：当 $n=1$ 时，有 $2a_1=1\times2^1$，所以 $a_1=1$，

当 $n\geqslant2$ 时，$2a_1+2^2a_2+2^3a_3+\cdots+2^na_n=n\cdot2^n$，

$2a_1+2^2a_2+2^3a_3+\cdots+2^{n-1}a_{n-1}=(n-1)\cdot2^{n-1}$，

两式相减得 $2^na_n=n\cdot2^n-(n-1)\cdot2^{n-1}=(n+1)2^{n-1}$，

此时，$a_n=\dfrac{n+1}{2}$，$a_1=1$ 也满足该式，

所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\dfrac{n+1}{2}$.

故选 B.

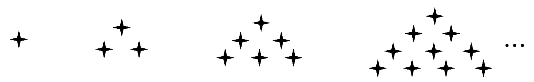
4.已知斐波那契数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.若 $a_2+a_3+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{57}+a_{59}=a_k(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $k=$（　　）

A.2 024　　B.2 025

C.59　　D.60

D　**解析**：由 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，得 $a_2+a_3+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{57}+a_{59}=a_4+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{57}+a_{59}=a_6+a_7+a_9+\cdots+a_{57}+a_{59}=\cdots=a_{58}+a_{59}=a_{60}$，因此 $k=60$.故选 D.

5.下列给出的图形中，星星的个数构成一个数列：1，3，6，10，…，则该数列的一个递推公式是________.



①　②　③　④

$a_n=a_{n-1}+n(n\geqslant 2)$　**解析**：结合题图易知，$a_1=1$，$a_2=3=a_1+2$，$a_3=6=a_2+3$，$a_4=10=a_3+4$，所以 $a_n=a_{n-1}+n(n\geqslant 2)$.

6.若数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=n^2\cdot a_n(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，且 $a_1=1$，则 $a_n=$________.

$\dfrac{2}{n(n+1)}$　**解析**：已知 $S_n=n^2\cdot a_n(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，当 $n\geqslant 3$ 时，$S_n-S_{n-1}=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}$，即 $n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}=a_n$，进而得 $(n^2-1)a_n=(n-1)^2a_{n-1}$.因为 $n\geqslant 3$，所以 $(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}\Rightarrow\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n-1}{n+1}(n\geqslant 3)$，故$\dfrac{a_n}{a_2}=\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\dfrac{a_4}{a_3}\cdot\dfrac{a_5}{a_4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{2}{4}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{6}\times\cdots\times\dfrac{n-1}{n+1}=\dfrac{6}{n(n+1)}(n\geqslant 3)$.因为 $S_n=n^2\cdot a_n(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，当 $n=2$ 时，$a_1+a_2=4a_2$，又 $a_1=1$，解得 $a_2=\dfrac{1}{3}$，所以 $\dfrac{a_n}{\frac{1}{3}}=\dfrac{6}{n(n+1)}(n\geqslant 3)$.所以 $a_n=\dfrac{2}{n(n+1)}(n\geqslant 3)$.又 $a_1=1=\dfrac{2}{1\times 2}$，$a_2=\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{2\times 3}$ 满足上式，所以 $a_n=\dfrac{2}{n(n+1)}$.

7.在数列$\{a_n\}$中，$a_n=\dfrac{n^2}{n^2+1}$.

(1)求数列$\{a_n\}$的第 7 项；

(2)求证：此数列的各项都在区间$(0,1)$内；

(3)区间$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$内有没有数列$\{a_n\}$中的项？若有，有几项？

(1)**解**：$a_7=\dfrac{7^2}{7^2+1}=\dfrac{49}{50}$.

(2)**证明**：因为 $a_n=\dfrac{n^2}{n^2+1}=1-\dfrac{1}{n^2+1}$，

所以 $0<a_n<1$，故此数列的各项都在区间$(0,1)$内.

(3)**解**：区间$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$内有数列$\{a_n\}$中的项.

令$\dfrac{1}{3}<\dfrac{n^2}{n^2+1}<\dfrac{2}{3}$，则$\dfrac{1}{2}<n^2<2$，$n\in\mathbf{N}^*$，

所以 $n=1$，即在区间$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$内有且只有 1 项数列$\{a_n\}$中的项，为 a_1.

8.数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}+2a_na_{n+1}-a_n=0$.

(1)写出此数列的前 5 项；

(2)由(1)写出数列$\{a_n\}$的一个通项公式；

(3)实数$\dfrac{1}{99}$是否为这个数列中的一项？若是，应为第几项？

解：(1)由已知可得 $a_1=1$，$a_2=\dfrac{1}{3}$，$a_3=\dfrac{1}{5}$，$a_4=\dfrac{1}{7}$，$a_5=\dfrac{1}{9}$.

(2)由(1)可得数列$\{a_n\}$中的每一项的分子均为 1，分母依次为 1，3，5，7，9，…，所以它的一个通项公式为 $a_n=\dfrac{1}{2n-1}$.

(3)实数$\dfrac{1}{99}$是这个数列中的一项.令$\dfrac{1}{99}=\dfrac{1}{2n-1}$，解得 $n=50$，故$\dfrac{1}{99}$是这个数列的第 50 项.

4.2 等差数列

4.2.1 等差数列的概念

第 1 课时 等差数列的概念

学习任务目标

1.理解等差数列、等差中项的概念.
2.掌握等差数列的通项公式，并能运用通项公式解决一些简单的问题.
3.能够运用等差中项解决一些简单的问题.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一 等差数列、等差中项的概念

等差数列	一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数，那么这个数列就叫做等差数列，这个常数叫做等差数列的公差，公差通常用字母d 表示
等差中项	由三个数 a，A，b 组成的等差数列可以看成是最简单的等差数列.这时，A 叫做 a 与 b 的等差中项，且 $2A=a+b$

知识点二 等差数列的通项公式

(1)首项为 a_1，公差为 d 的等差数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_1+(n-1)d$.

(2)第 n 项与第 $m(m\neq n)$项的关系为 $a_n=a_m+(n-m)d$，从而变形可得 $d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$.

知识点三 等差数列的函数特性

(1)由于 $a_n=a_1+(n-1)d=dn+(a_1-d)$，所以当 $d\neq 0$ 时，等差数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n 是一次函数 $f(x)=dx+(a_1-d)(x\in\mathbf{R})$当 $x=n$ 时的函数值，即 $a_n=f(n)$.

(2)任给一次函数 $f(x)=kx+b(k,b$ 为常数)，则 $f(1)=k+b$，$f(2)=2k+b$，…，$f(n)=nk+b$，…构成一个等差数列$\{nk+b\}$，其首项为 $k+b$，公差为k.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)如果一个数列的每一项与它的前一项的差是一个常数，那么这个数列是等差数列. (×)

(2)数列 0，0，0，0，…不是等差数列. (×)

(3)在等差数列中，除第 1 项和最后一项外，其余各项都是它前一项和后一项的等差中项. (√)

2.在等差数列$\{a_n\}$中，首项 $a_1=5$，公差 $d=3$，则当 $a_n=2\ 024$ 时，$n=$ ( )

A.671　　B.672

C.673　　D.674

D **解析**：因为 $a_1=5$，$d=3$，所以 $a_n=5+(n-1)\times 3=3n+2$.令 $3n+2=2\ 024$，得 $n=674$.故选 D.

3.请思考并回答下列问题：

(1)已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\begin{cases}1,n=1,\\ n+1,n\geqslant 2,\end{cases}$ 那么$\{a_n\}$是等差数列吗？为什么？

提示：不是.该数列为 1，3，4，5，6，…，第 2 项与第 1 项的差是 2，从第 3 项起，每一项与它的前一项的差都是 1，不符合等差数列的定义.

(2)数列 1，2，1，2，1，2 的相邻两项的差(大减小)都是 1，这个数列是等差数列吗？为什么？

提示：不是.等差数列的定义中“每一项与它的前一项的差”是指“相邻两项中用后项减去前项”.

(3)任意两个数都有等差中项吗？

提示：任意两个数都有等差中项.

(4)等差数列$\{a_n\}$一定是递增数列吗？如果不是，有哪些可能的情况？

提示：不一定.若公差 $d>0$，则数列$\{a_n\}$为递增数列；若公差 $d<0$，则数列$\{a_n\}$为递减数列；若公差 $d=0$，则数列$\{a_n\}$为常数列.

○ 任务型课堂 ○

任务 1 等差数列及等差中项的概念

1.(多选)下列说法正确的是 ( )

A.若 $a-b=b-c$，则 a，b，c 成等差数列

B.若 $a_n-a_{n-1}=n(n\in\mathbf{N}^*$，且 $n>1)$，则$\{a_n\}$是等差数列

C.等差数列是相邻两项中的后项与前项之差都等于同一个常数的数列

D.等差数列的公差是该数列中任意两项的差

AC **解析**：对于 A，由 $a-b=b-c$ 及等差数列的定义，可得 a，b，c 成等差数列，A 正确；对于 B，n 不是常数，该数列不是等差数列，B 错误；对于 C，根据等差数列的定义可知，C 正确；对于 D，公差应为相邻两项中后项减前项之差，D 错误.故选 AC.

2. 若数列$\{a_n\}$是等差数列，且$a_n=an^2+n$，则实数$a=$________.

0　**解析**：因为$\{a_n\}$是等差数列，所以$a_{n+1}-a_n$为常数，即$[a(n+1)^2+(n+1)]-(an^2+n)=2an+a+1$为常数，所以$2a=0$，解得$a=0$.

3. 若等差数列$\{a_n\}$的前三项为$1,a+1,a+3$，则实数a的值为________.

3　**解析**：因为$1,a+1,a+3$为等差数列$\{a_n\}$的前三项，所以$2(a+1)=1+a+3$，解得$a=2$.

【探究总结】

1. 判断一个数列是不是等差数列，要紧扣等差数列的定义，切记不可通过计算a_2-a_1,a_3-a_2,a_4-a_3等有限个式子的值后，根据它们的值都是同一个常数，就得出该数列为等差数列的结论(由以上3个式子仅可得出数列$\{a_n\}$的前4项成等差数列)，因为由特殊到一般得出的结论不一定正确.

2. a,b,c成等差数列的充要条件$b=\dfrac{a+c}{2}$(或$2b=a+c$)可用来进行等差数列的判断或解决有关等差中项的计算问题.如若$\{a_n\}$为等差数列，则$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

任务2 > 等差数列的通项公式

探究活动

例1　(1)已知在等差数列$\{a_n\}$中，$a_5=10,a_{12}=31$，求首项a_1与公差d.

(2)在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_5=11,a_8=5$，求数列$\{a_n\}$的通项公式及a_{10}.

解：(1)设$a_n=a_1+(n-1)d$.

因为$a_5=10,a_{12}=31$，

所以$\begin{cases}a_1+4d=10,\\a_1+11d=31,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=-2,\\d=3.\end{cases}$

所以等差数列$\{a_n\}$的首项$a_1=-2$，公差$d=3$.

(2)(方法一)设$a_n=a_1+(n-1)d$，

则$\begin{cases}a_5=a_1+(5-1)d,\\a_8=a_1+(8-1)d,\end{cases}$

即$\begin{cases}11=a_1+4d,\\5=a_1+7d,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=19,\\d=-2.\end{cases}$

所以$a_n=-2n+21$.

所以$a_{10}=-2\times10+21=1$.

(方法二)设$a_n=An+B$，

则$\begin{cases}a_5=5A+B,\\a_8=8A+B,\end{cases}$即$\begin{cases}11=5A+B,\\5=8A+B,\end{cases}$

解得$\begin{cases}A=-2,\\B=21.\end{cases}$

所以$a_n=-2n+21$.所以$a_{10}=-2\times10+21=1$.

【探究总结】

求等差数列通项公式的方法

(1)通过解方程组求得a_1,d的值，再利用$a_n=a_1+(n-1)d$写出通项公式，这是求解这类问题的基本方法.

(2)已知等差数列中的两项a_m和a_n，可用$d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$直接求得公差，再利用$a_n=a_m+(n-m)d$写出通项公式.

(3)抓住等差数列的通项公式的结构特点，通过a_n是关于n的一次函数，列出方程组求解.

应用迁移

1. 已知数列$\{a_n\}$为等差数列，$a_3=\dfrac{5}{4},a_7=-\dfrac{7}{4}$，求$a_{15}$的值.

解：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

由$\begin{cases}a_3=\dfrac{5}{4},\\a_7=-\dfrac{7}{4},\end{cases}$得$\begin{cases}a_1+2d=\dfrac{5}{4},\\a_1+6d=-\dfrac{7}{4},\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=\dfrac{11}{4},\\d=-\dfrac{3}{4}.\end{cases}$

所以$a_{15}=a_1+(15-1)d=\dfrac{11}{4}+14\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{31}{4}$.

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_1+a_3+a_5=18,a_5+a_7=-6$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

由$a_1+a_3+a_5=3a_3=18$，得$a_3=6$，

由$a_5+a_7=2a_6=-6$，得$a_6=-3$，

故公差$d=\dfrac{a_6-a_3}{6-3}=\dfrac{-3-6}{3}=-3$.

故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_3+(n-3)d=6-3(n-3)=-3n+15$.

任务3 > 等差中项的应用

探究活动

例2　已知$\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{c}$成等差数列，判断$\dfrac{b+c}{a},\dfrac{a+c}{b},\dfrac{a+b}{c}$是否成等差数列.

解：因为$\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{c}$成等差数列，所以$\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}$，

因此$2\cdot\dfrac{a+c}{b}-\dfrac{b+c}{a}-\dfrac{a+b}{c}=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\right)(a+c)-\dfrac{b}{a}-\dfrac{c}{a}-\dfrac{a}{c}-\dfrac{b}{c}=2-b\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\right)=0$，

所以$\dfrac{b+c}{a},\dfrac{a+c}{b},\dfrac{a+b}{c}$成等差数列.

［一题多思］

思考 1. 在 7 和 21 之间插入 3 个数，使这 5 个数成等差数列，求插入的 3 个数。

提示： 设这个等差数列为 $\{a_n\}$，

则 $a_3=\dfrac{a_1+a_5}{2}=\dfrac{7+21}{2}=14$，

$a_2=\dfrac{a_1+a_3}{2}=\dfrac{7+14}{2}=\dfrac{21}{2}$，

$a_4=\dfrac{a_3+a_5}{2}=\dfrac{14+21}{2}=\dfrac{35}{2}$，

所以插入的 3 个数依次为 $\dfrac{21}{2}$，14，$\dfrac{35}{2}$。

思考 2. 若 m 和 $2n$ 的等差中项为 4，$2m$ 和 n 的等差中项为 5，求 m 和 n 的等差中项。

提示： 由 m 和 $2n$ 的等差中项为 4，得 $m+2n=8$。

又由 $2m$ 和 n 的等差中项为 5，得 $2m+n=10$。

两式相加，得 $m+n=6$。

所以 m 和 n 的等差中项为 $\dfrac{m+n}{2}=3$。

【探究总结】

等差中项的应用

(1)由等差数列的定义知 $a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，即 $2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，从而由等差中项的定义可知，等差数列从第 2 项起的每一项都是它前一项与后一项的等差中项。

(2)在设等差数列的项时，可利用上述性质。

应用迁移

1. 已知 a 和 $2b$ 的等差中项是 5，$3a$ 和 $4b$ 的等差中项是 7，求 $2a$ 和 $3b$ 的等差中项。

解： 因为 a 和 $2b$ 的等差中项是 5，所以 $a+2b=10$ ①。又因为 $3a$ 和 $4b$ 的等差中项是 7，所以 $3a+4b=14$ ②。

由①②解得 $\begin{cases}a=-6,\\b=8.\end{cases}$

所以 $2a$ 和 $3b$ 的等差中项为 $\dfrac{2\times(-6)+3\times 8}{2}=6$。

2. 已知数列 $\{x_n\}$ 的首项为 $x_1=3$，通项公式为 $x_n=2^np+nq(n\in\mathbf{N}^*,p,q$ 为常数），且 x_1,x_4,x_5 成等差数列。求 p,q 的值。

解： 由 $x_1=3$，得 $2p+q=3$ ①。

又 $x_4=2^4p+4q=16p+4q$，$x_5=2^5p+5q=32p+5q$，且 $x_1+x_5=2x_4$，

所以 $3+32p+5q=32p+8q$，解得 $q=1$ ②。

将②代入①，得 $p=1$。

故 $p=1,q=1$。

提质归纳

- 等差数列
  - 定义
    - 从第2项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数
    - 递推关系
  - 通项公式
    - $a_n=a_1+(n-1)d$
    - $a_n=a_m+(n-m)d$
    - $a_n=An+B$
  - 等差中项
    - 若 a，A，b 成等差数列，则 A 是 a 与 b 的等差中项，$2A=a+b$

课后素养评价（三） 等差数列的概念

A组 学习·理解

1. 已知 $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$，$b=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$，则 a 与 b 的等差中项为（　　）

A. $2\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{2}$

C. 1　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

B　**解析：** 由已知可得，$a+b=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=2\sqrt{2}$。

设 a 与 b 的等差中项为 m，

根据等差中项的定义，有 $m=\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{2}$。故选 B。

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+2}}=\dfrac{2}{a_{n+1}}$，且 $a_1=1$，$a_2=\dfrac{1}{3}$，则 $a_{2\,024}=$（　　）

A. $\dfrac{1}{2\,021}$　　B. $\dfrac{1}{2\,022}$

C. $\dfrac{1}{4\,047}$　　D. $\dfrac{1}{4\,044}$

C　**解析：** 由 $\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+2}}=\dfrac{2}{a_{n+1}}$，得 $\dfrac{1}{a_{n+2}}-\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}$，所以数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 为等差数列。

又 $\dfrac{1}{a_1}=1$，$\dfrac{1}{a_2}=3$，所以数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 的公差 $d=3-1=2$，所以 $\dfrac{1}{a_n}=1+2(n-1)=2n-1$，所以 $a_n=\dfrac{1}{2n-1}$，

所以 $a_{2024}=\frac{1}{4047}$.故选 C.

3.(多选)下列数列是等差数列的是 ( )

A.1,4,7,10

B.lg 2,lg 4,lg 8,lg 16

C.$2^5,2^4,2^3,2^2$

D.10,8,6,4,2

ABD **解析**:A,B,D 均满足等差数列的定义,是等差数列;

C 中,因为 $2^4-2^5\neq2^3-2^4\neq2^2-2^3$,不满足等差数列的定义,所以不是等差数列.故选 ABD.

4.在等差数列$\{a_n\}$中,$a_4+a_8=20$,$a_7=12$,则 $a_4=$ ( )

A.2 B.4 C.6 D.8

C **解析**:由题意知$\begin{cases}a_1+3d+a_1+7d=20,\\a_1+6d=12,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=0,\\d=2,\end{cases}$所以 $a_4=a_1+3d=0+3\times2=6$.故选 C.

5.已知在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=-1$,公差$d=2$,若 $a_{n-1}=15(n>2)$,则 n 的值为 ( )

A.7 B.8

C.9 D.10

D **解析**:$a_{n-1}=a_1+(n-2)d=-1+2(n-2)=2n-5=15$,所以 $n=10$.故选 D.

6.在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=8$,$a_5=2$.若在相邻两项之间各插入一个数,使之成一个新的等差数列,则新等差数列的公差为 ( )

A.$\frac{3}{4}$ B.$-\frac{3}{4}$

C.$-\frac{6}{7}$ D.-1

B **解析**:由题意,在新等差数列中,首项为 8,第 9 项为 2,所以新公差 $d'=\frac{2-8}{9-1}=\frac{-6}{8}=-\frac{3}{4}$.故选 B.

7.已知等差数列$\{a_n\}$:40,37,34,…,则该数列的第一个负数项是 ( )

A.第 13 项

B.第 14 项

C.第 15 项

D.第 16 项

C **解析**:由 $37-40=-3$ 可知等差数列$\{a_n\}$的公差为-3,又首项为 40,则通项公式为 $a_n=40+(n-1)\cdot(-3)=43-3n$.令 $43-3n<0$,解得 $n>\frac{43}{3}$,故第一个负数项是第 15 项.故选 C.

8.(多选)下列命题正确的是 ( )

A.给出数列的有限项就可以唯一确定这个数列的通项公式

B.若等差数列$\{a_n\}$的公差 $d>0$,则$\{a_n\}$是递增数列

C.若 a,b,c 成等差数列,则$\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$可能成等差数列

D.若数列$\{a_n\}$是等差数列,则数列$\{a_n+2a_{n+1}\}$也是等差数列

BCD **解析**:A 选项中,给出数列的有限项不一定可以唯一确定通项公式;B 选项中,由等差数列的函数特性,知$d>0$ 时$\{a_n\}$必是递增数列;C 选项中,$a=b=c=1$ 时,$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=1$,此时$\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$成等差数列;D 选项中,设数列$\{a_n\}$的公差为 d,所以 $a_n+2a_{n+1}=a_1+(n-1)d+2a_1+2nd=3a_1+(3n-1)d$,$\{a_n+2a_{n+1}\}$也是等差数列.故选 BCD.

9.已知等差数列$\{a_n\}$.

(1)若 $a_5=4$,$a_{10}=-9$,求 a_{20};

(2)若 $a_5-a_3=12$,$a_{12}=20$,求 a_1 和公差 d;

(3)若 $a_3a_4=-7$,$a_4-a_3=8$,求 a_7.

解:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

(1)由 $a_5=4$,$a_{10}=-9$,

得$\begin{cases}a_1+4d=4,\\a_1+9d=-9,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=\frac{72}{5},\\d=-\frac{13}{5}.\end{cases}$

所以 $a_{20}=a_1+19d=-35$.

(2)因为 $a_5-a_3=12$,所以公差 $d=6$.又 $a_{12}=20$,所以 $a_1+11d=20$,解得 $a_1=-46$.所以 $a_1=-46$,$d=6$.

(3)因为 $a_4-a_3=8$,所以 $d=8$.

又因为 $a_3a_4=-7$,所以 $a_3(a_3+8)=-7$,解得 $a_3=-1$ 或 $a_3=-7$.

当 $a_3=-1$ 时,$a_7=a_3+4d=31$;

当 $a_3=-7$ 时,$a_7=a_3+4d=25$.

综上,a_7 的值为 31 或 25.

B组 应用·实践

1.若等差数列$\{a_n\}$的首项为 70,公差为-9,则这个数列中绝对值最小的一项为 ( )

A.a_8 B.a_9

C.a_{10} D.a_{11}

B **解析**:由已知得 $a_n=a_1+(n-1)d=70+(n-1)\times(-9)=79-9n$,

所以 $a_8=7$,$a_9=-2$,$a_{10}=-11$,故绝对值最小的一项为 a_9.故选 B.

2.已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数,且满足$a_1=1$,$\frac{1}{a_n^2}-$

$\frac{1}{a_{n-1}^2}=1(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$,则 $a_{1\,024}=$ ( )

A.$\frac{\sqrt{2}}{16}$　　B.$\frac{1}{16}$

C.$\frac{\sqrt{2}}{32}$　　D.$\frac{1}{32}$

D **解析**:因为数列$\{a_n\}$的各项均为正数,且满足 $a_1=1,\frac{1}{a_n^2}-\frac{1}{a_{n-1}^2}=1(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$,

所以数列$\left\{\frac{1}{a_n^2}\right\}$是首项为1,公差为1的等差数列.

所以$\frac{1}{a_n^2}=1+(n-1)=n$,解得 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$.

所以 $a_{1\,024}=\frac{1}{\sqrt{1\,024}}=\frac{1}{32}$.故选 D.

3.(多选)已知四个数成等差数列,它们的和为28,中间两项的积为40,则这四个数依次为 ( )

A.$-2,4,10,16$　　B.$16,10,4,-2$

C.$2,5,8,11$　　D.$11,8,5,2$

AB **解析**:设这四个数分别为 $a-3d,a-d,a+d,a+3d$,

则$\begin{cases}a-3d+a-d+a+d+a+3d=28,\\(a-d)(a+d)=40,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=7,\\d=3\end{cases}$或$\begin{cases}a=7,\\d=-3.\end{cases}$

所以这四个数依次为$-2,4,10,16$或$16,10,4,-2$.

故选 AB.

4.(多选)设 d 为正项等差数列$\{a_n\}$的公差.若 $d>0$,$a_3=2$,则 ( )

A.$a_2\cdot a_4<4$

B.$a_2^2+a_4\geqslant\frac{15}{4}$

C.$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_5}>1$

D.$a_1\cdot a_5>a_2\cdot a_4$

ABC **解析**:由题意知$\begin{cases}a_1=2-2d>0,\\d>0,\end{cases}$解得 $0<d<1$.

$a_2\cdot a_4=(2-d)\cdot(2+d)=4-d^2<4$,A 正确;

$a_2^2+a_4=(2-d)^2+(2+d)=d^2-3d+6=\left(d-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>\frac{15}{4}$,B 正确;

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_5}=\frac{1}{2-2d}+\frac{1}{2+2d}=\frac{1}{1-d^2}>1$,C 正确;

$a_1\cdot a_5-a_2\cdot a_4=(2-2d)\cdot(2+2d)-(2-d)\cdot(2+d)=-3d^2<0$,所以 $a_1\cdot a_5<a_2\cdot a_4$,D 错误.

故选 ABC.

5.已知$\triangle ABC$内有2 024个点,其中任意三点不共线,把这2 024个点与$\triangle ABC$的三个顶点共2 027个点作为顶点构造互不相叠的小三角形,则一共可构造的小三角形的个数为________.

4 049 **解析**:设$\triangle ABC$内有 n 个点时,小三角形有 a_n 个.

现增加一个点,则此点必落入某一个小三角形内,

且此点与小三角形三个顶点的连线把此小三角形分成三个小三角形,故三角形总数多出了两个,即 $a_{n+1}=a_n+2$.

因此数列$\{a_n\}$是以3为首项,2为公差的等差数列,

所以 $a_n=3+(n-1)\times 2=2n+1$,于是 $a_{2\,024}=2\times 2\,024+1=4\,049$.

6.在数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,对任意 $m,n\in\mathbf{N}^*$,有 $a_{m+n}=a_m+a_n$,若 $a_ka_{k+1}=440$,则正整数 $k=$________.

10 **解析**:由 $a_1=2,a_{m+n}=a_m+a_n$,令 $m=1$,则 $a_{n+1}-a_n=a_1=2$,

所以数列$\{a_n\}$是以2为首项,2为公差的等差数列,

即 $a_n=2+(n-1)\times 2=2n$.

又 k 为正整数,所以 $a_ka_{k+1}=2k\times 2(k+1)=440$,

即 $k(k+1)=110$,解得 $k=10$ 或 $k=-11$(舍去).

7.已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=2,a_{n+1}-2a_n=2^{n+1}$,则数列$\{a_n\}$的通项公式为________.

$a_n=n\cdot 2^n$ **解析**:由 $a_{n+1}-2a_n=2^{n+1}$ 得$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=1$,且$\frac{a_1}{2}=1$,故$\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$为等差数列,首项为1,公差为1,

所以$\frac{a_n}{2^n}=1+(n-1)=n$,所以 $a_n=n\cdot 2^n$.

8.数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1,a_2=2,a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$.

(1)求 a_3,a_4 的值;

(2)设 $b_n=a_{n+1}-a_n$,证明:$\{b_n\}$是等差数列.

(1)**解**:数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1,a_2=2,a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$,

所以 $a_3=2a_2-a_1+2=2\times 2-1+2=5,a_4=2a_3-a_2+2=2\times 5-2+2=10$.

(2)**证明**:因为 $b_{n+1}-b_n=(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=2$,

所以$\{b_n\}$为等差数列.

第2课时　等差数列的性质及应用

学习任务目标

1.掌握等差数列的判定和证明方法.
2.能够根据等差数列的定义和通项公式推出等差数列的重要性质,并运用性质解决有关问题.
3.能够运用等差数列的知识解决简单的实际问题.

◦ 问题式预习 ◦

【知识清单】

知识点　等差数列的性质

1.(1)若$\{a_n\}$,$\{b_n\}$分别是公差为d_1,d_2的等差数列,则数列$\{pa_n+qb_n\}$($p,q\in\mathbf{R}$)是公差为$\underline{pd_1+qd_2}$的等差数列.

(2)若$\{a_n\}$是公差为d的等差数列,则a_k,a_{k+m},a_{k+2m},…($k,m\in\mathbf{N}^*$)是公差为$\underline{md}$的等差数列.

2.(1)等差数列的项的对称性:在有穷等差数列中,与首末两项"等距离"的两项之和等于首项与末项的和,即$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots$.

(2)在等差数列$\{a_n\}$中,若$m+n=p+q$($m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$),则$\underline{a_m+a_n=a_p+a_q}$.特别地,若$m+n=2k$($m,n,k\in\mathbf{N}^*$),则$\underline{a_m+a_n=2a_k}$.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)在等差数列$\{a_n\}$中,若$a_m+a_n=a_p+a_q$,则$m+n=p+q$.　(×)

(2)若$\{a_n\}$是等差数列,则数列$\{2a_n+n\}$也是等差数列.　(　)

√　**提示**:设$\{a_n\}$的公差为d(d为常数),则$2a_{n+1}+(n+1)-(2a_n+n)=2(a_{n+1}-a_n)+1=2d+1$,为常数,因此$\{2a_n+n\}$是等差数列.

(3)在等差数列$\{a_n\}$中,若$m+n+p=3t$($m,n,p,t\in\mathbf{N}^*$),则$a_m+a_n+a_p=3a_t$.　(√)

2.已知等差数列$\{a_n\}$,$a_7+a_{19}=19$,$a_9=1$,则a_{17}等于　(　)

A.20　B.18　C.15　D.17

B　**解析**:因为$a_7+a_{19}=a_9+a_{17}=19$,且$a_9=1$,所以$a_{17}=19-a_9=18$.

3.请思考并回答下列问题:

(1)已知等差数列中任意两项,是否可以直接求公差?

提示:可以.因为等差数列$\{a_n\}$的图象是均匀分布在一条直线上的孤立的点,任选其中两点(n,a_n),(m,a_m)($m\neq n$),类比直线的斜率公式,可知公差$d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$.

(2)已知等差数列$\{a_n\}$,取其奇数项组成一个新数列,则此数列是否为等差数列?若取偶数项呢?

提示:设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,其奇数项为a_1,a_3,a_5,…,是公差为$2d$的等差数列.同样,偶数项也是公差为$2d$的等差数列.从等差数列中,每隔一定的距离抽取一项,组成的数列仍为等差数列.

(3)若数列a_1,a_3,a_5,…和a_2,a_4,a_6,…都是公差为d的等差数列,则a_1,a_2,a_3,…是否为等差数列?

提示:不一定.例如:1,2,3,…和10,11,12,…都是公差为1的等差数列,但是1,10,2,11,3,12,…不是等差数列.

◦ 任务型课堂 ◦

任务1 > 等差数列的性质

探究活动

例1　(1)已知等差数列$\{a_n\}$中,$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=70$,求a_1+a_9.

(2)已知数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都是等差数列,且$a_1=2$,$b_1=-3$,$a_7-b_7=17$,求$a_{19}-b_{19}$.

解:(1)由等差数列的性质,得$a_3+a_7=a_4+a_6=2a_5=a_1+a_9$,所以$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=5a_5=70$,得$a_5=14$,故$a_1+a_9=2a_5=28$.

(2)设等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的公差分别为d_1,d_2.

由$a_7-b_7=2+6d_1-(-3+6d_2)=5+6(d_1-d_2)=17$,得$d_1-d_2=2$.

所以$a_{19}-b_{19}=2+18d_1-(-3+18d_2)=5+18(d_1-d_2)=5+18\times2=41$.

【探究总结】

解决等差数列基本运算问题的两种方法

(1)利用基本量运算,借助于a_1,d建立方程组进行运算,这是最基本的方法.

(2)运用等差数列$\{a_n\}$的性质:若$m+n=p+q=2\omega$($m,n,p,q,\omega\in\mathbf{N}^*$),则$a_m+a_n=a_p+a_q=2a_\omega$.

应用迁移

1.已知$\{a_n\}$为等差数列,$a_4+a_7+a_{10}=30$,则a_3-2a_5的值为　(　)

A.10　B.-10　C.15　D.-15

B　**解析**:因为$a_4+a_7+a_{10}=3a_7=30$,

所以$a_7=10$.

所以$a_3-2a_5=a_3-(a_3+a_7)=-a_7=-10$.故选B.

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_3+a_5+a_7=12$，那么$a_4+a_6=$________.

8 **解析**：(方法一)由等差数列的性质，得$a_3+a_7=a_4+a_6=2a_5$.

由$a_3+a_5+a_7=12$，得$3a_5=12$，解得$a_5=4$.

所以$a_4+a_6=2a_5=8$.

(方法二)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$a_3+a_5+a_7=3a_1+12d=12$，即$a_1+4d=4$.

所以$a_4+a_6=2a_1+8d=2(a_1+4d)=8$.

任务2 > 等差数列的判定和证明

探究活动

例2 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，且$na_{n+1}-(n+1)a_n=2n^2+2n$.

(1)求a_2,a_3；

(2)证明数列$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$是等差数列，并求$\{a_n\}$的通项公式.

(1)**解**：由已知，得$a_2-2a_1=4$，则$a_2=2a_1+4$.

又$a_1=1$，所以$a_2=6$.由$2a_3-3a_2=12$，

得$2a_3=12+3a_2$，所以$a_3=15$.

(2)**证明**：由$na_{n+1}-(n+1)a_n=2n^2+2n$，

得$\dfrac{na_{n+1}-(n+1)a_n}{n(n+1)}=2$，即$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=2$，

所以数列$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$是首项为$\dfrac{a_1}{1}=1$，公差为$d=2$的等差数列.所以$\dfrac{a_n}{n}=1+2(n-1)=2n-1$.所以$a_n=2n^2-n$.

[一题多思]

思考1. 用定义法证明数列$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$是等差数列时，需要证明一个什么样的等式成立？

提示：需要证明$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=$常数.

思考2. 将数列$\{a_n\}$满足的条件改为“$a_1=1,a_2=3$，且$2na_n=(n-1)a_{n-1}+(n+1)a_{n+1}(n\geqslant 2)$”，能判断哪个数列是等差数列？如何进一步求数列$\{a_n\}$的通项公式？

提示：能判断数列$\{na_n\}$是等差数列.

因为$2na_n=(n-1)a_{n-1}+(n+1)a_{n+1}(n\geqslant 2)$，

所以$na_n-(n-1)a_{n-1}=(n+1)a_{n+1}-na_n(n\geqslant 2)$.

故数列$\{(n+1)a_{n+1}-na_n\}$为常数列，且$2a_2-a_1=5$，

所以$\{(n+1)a_{n+1}-na_n\}=5$，

因此数列$\{na_n\}$是以1为首项，5为公差的等差数列.

所以$na_n=1+5(n-1)=5n-4$，因此$a_n=\dfrac{5n-4}{n}$.

【探究总结】

等差数列的判定方法

(1)定义法：$a_{n+1}-a_n=d$(常数)$(n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列；$a_n-a_{n-1}=d$(常数)$(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列.

(2)等差中项法：证明对任意正整数n都有$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$.

(3)通项公式法：得出$a_n=pn+q$后，再根据定义判定数列$\{a_n\}$为等差数列.

应用迁移

1. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2,a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}$.

(1)数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是否为等差数列？说明理由.

(2)求a_n.

解：(1)数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是等差数列.理由如下：

因为$a_1=2,a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}$，显然$a_n>0$，

所以$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+2}{2a_n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{a_n}$，即$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2}$.

所以数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是首项为$\dfrac{1}{2}$，公差为$\dfrac{1}{2}$的等差数列.

(2)由(1)可知$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}(n-1)=\dfrac{n}{2}$，所以$a_n=\dfrac{2}{n}$.

2. 已知数列$\{a_n\}$，$a_1=\dfrac{3}{5}$，$a_n=2-\dfrac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，数列$\{b_n\}$满足$b_n=\dfrac{1}{a_n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.求证：数列$\{b_n\}$是等差数列，并求出其通项公式.

证明：因为$a_n=2-\dfrac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，$b_n=\dfrac{1}{a_n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以$b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{a_{n+1}-1}-\dfrac{1}{a_n-1}$

$=\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{a_n}-1}-\dfrac{1}{a_n-1}$

$=\dfrac{a_n}{a_n-1}-\dfrac{1}{a_n-1}=1$.

又$b_1=\dfrac{1}{a_1-1}=-\dfrac{5}{2}$，

所以数列$\{b_n\}$是以$-\dfrac{5}{2}$为首项，1为公差的等差数列，通项公式为$b_n=n-\dfrac{7}{2}$.

任务3 > 等差数列的实际应用

探究活动

例3 (1)某公司经销一种产品，第1年可获利200万元.从第2年起，由于市场竞争等方面的原因，其利润每年比上一年减少20万元.按照这一规律，如果公司不引进新产品，也不调整经营策略，那么从哪一年起，

该公司经销这一产品将会亏损？

(2)通常情况下，从地面到 10 km 高空，高度每增加 1 km，气温就下降某一个固定数值. 如果 1 km 高度的气温是 8.5 ℃，5 km 高度的气温是 −17.5 ℃，求 2 km，4 km，8 km 高度的气温.

解：(1)设第 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 年的利润为 a_n 万元，

则 $a_1=200$，$a_n-a_{n-1}=-20(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$.

所以每年的利润可构成一个等差数列 $\{a_n\}$，且公差 $d=-20$.

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=200+(n-1)\times(-20)=220-20n$.

若 $a_n<0$，则该公司经销这一产品将会亏损.

由 $a_n=220-20n<0$，得 $n>11$.

故从第 12 年起，该公司经销这一产品将会亏损.

(2)由题易知，自下而上各高度的气温构成等差数列，设为 $\{a_n\}$，公差为 d，则 $a_1=8.5$，$a_5=-17.5$.

由 $a_5=a_1+4d=8.5+4d=-17.5$，解得 $d=-6.5$.

所以 $a_n=15-6.5n(1\leqslant n\leqslant 10,n\in\mathbf{N}^*)$.

所以 $a_2=2$，$a_4=-11$，$a_8=-37$，

即 2 km，4 km，8 km 高度的气温分别为 2 ℃，−11 ℃，−37 ℃.

【探究总结】

解答数列实际应用问题的基本步骤

(1)审题，即仔细阅读材料，认真理解题意；

(2)建模，即将已知条件翻译成数学(数列)语言，将实际问题转化成数学问题；

(3)判型，即判断该数列是否为等差数列；

(4)求解，即求出该问题的数学解；

(5)还原，即将所得数学解还原到实际问题中.

应用迁移

梯子的最高一级宽 33 cm，最低一级宽 110 cm，中间还有 10 级，各级的宽度成等差数列，计算中间各级的宽度.

解：用数列 $\{a_n\}$ 表示梯子自上而下各级宽度所构成的等差数列，其公差设为 d.

由已知，得 $a_1=33$，$a_{12}=110$，$n=12$.

则 $a_{12}=a_1+(12-1)d$，

即 $110=33+11d$，解得 $d=7$.

因此，$a_2=40$，$a_3=47$，$a_4=54$，$a_5=61$，$a_6=68$，$a_7=75$，$a_8=82$，$a_9=89$，$a_{10}=96$，$a_{11}=103$.

所以，梯子中间各级的宽度从上而下依次是 40 cm，47 cm，54 cm，61 cm，68 cm，75 cm，82 cm，89 cm，96 cm，103 cm.

任务4 等差数列的综合问题

探究活动

例 4　(1)已知递减等差数列 $\{a_n\}$ 前三项的和为 18，前三项的积为 66，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2)已知两个等差数列 2，5，8，…，197 与 2，7，12，…，197，求它们的相同项构成的数列的通项公式及相同项的个数.

解：(1)(方法一)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

依题意，得 $\begin{cases}a_1+a_2+a_3=18,\\a_1a_2a_3=66,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}3a_1+3d=18,\\a_1(a_1+d)(a_1+2d)=66,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a_1=11,\\d=-5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=1,\\d=5.\end{cases}$

因为数列 $\{a_n\}$ 是递减等差数列，所以 $d<0$.

故 $a_1=11$，$d=-5$.

所以 $a_n=11+(n-1)\times(-5)=-5n+16$，

即等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=-5n+16$.

(方法二)设等差数列 $\{a_n\}$ 的前三项依次为 $a-d$，a，$a+d$，则 $\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=18,\\(a-d)a(a+d)=66,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=6,\\d=\pm 5.\end{cases}$

又因为数列 $\{a_n\}$ 是递减等差数列，所以 $d<0$，

所以 $a=6$，$d=-5$.

所以等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 11，公差为 −5.

所以 $a_n=11+(n-1)\times(-5)=-5n+16$.

(2)记数列 2，5，8，…，197 为 $\{a_n\}$，由已知，数列 $\{a_n\}$ 的首项为 2，公差为 3，

所以通项公式为 $a_n=3n-1(1\leqslant n\leqslant 66)$.

记数列 2，7，12，…，197 为 $\{b_m\}$，由已知得，数列 $\{b_m\}$ 的首项为 2，公差为 5，则 $b_m=5m-3(1\leqslant m\leqslant 40)$.

(方法一)若数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项与数列 $\{b_m\}$ 的第 m 项相同，

即 $a_n=b_m$，则 $3n-1=5m-3$，

所以 $n=\dfrac{5m-2}{3}=m+\dfrac{2(m-1)}{3}$.

又 $n\in\mathbf{N}^*$，$1\leqslant m\leqslant 40$，所以 $m-1=3k(k\in\mathbf{N})$，即 $m=3k+1$.

所以 $m=1,4,7,\cdots,40$.

所以两数列的相同项为 2，17，32，…，197.

记两数列的相同项构成的数列为 $\{c_n\}$，则 $\{c_n\}$ 的通项公式为 $c_n=15n-13$，共有 $\dfrac{40-1}{3}+1=14$(个)相同项.

(方法二)设它们的相同项构成的数列为 $\{c_n\}$，则 $c_1=2$.

因为数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 为等差数列，所以数列 $\{c_n\}$ 仍为等差数列，且公差 $d=15$.

所以 $c_n=c_1+(n-1)d=2+(n-1)\times 15=15n-13$.

令 $2\leqslant 15n-13\leqslant 197$，得 $1\leqslant n\leqslant 14$，所以两数列共有 14 个相同项.

【探究总结】

等差数列的项的常见设法

(1)通项法

设数列的通项公式，即设 $a_n=a_1+(n-1)d$.

(2)对称项法

①当等差数列$\{a_n\}$的项数为奇数时，可设中间一项为a，再以公差为d向两边分别设项：$\cdots,a-2d,a-d,a,a+d,a+2d,\cdots$；

②当等差数列$\{a_n\}$的项数为偶数时，可设中间两项分别为$a-d,a+d$，再以公差为$2d$向两边分别设项：$\cdots,a-3d,a-d,a+d,a+3d,\cdots$.

对称项法的优点：若有n个数构成等差数列，利用对称项法设出这个数列，则其各项和为na.

应用迁移

已知四个数成等差数列，它们的和为26，中间两项的积为40，求这四个数.

解：设这四个数分别为$a-3d,a-d,a+d,a+3d$.

根据题意，得

$$\begin{cases}(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=26,\\(a-d)(a+d)=40,\end{cases}$$

化简，得$\begin{cases}4a=26,\\a^2-d^2=40,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=\dfrac{13}{2},\\d=\pm\dfrac{3}{2}.\end{cases}$

所以这四个数分别为2,5,8,11或11,8,5,2.

提质归纳

- 等差数列的性质与应用
  - 性质
    - 若$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，则a_k，a_{k+m}，a_{k+2m}，$\cdots(k,\ m\in\mathbf{N}^*)$是公差为$md$的等差数列
    - 对称性：$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots$
    - 若$m+n=p+q(m,\ n,\ p,\ q\in\mathbf{N}^*)$，则$a_m+a_n=a_p+a_q$
    - 若$m+n=2k(m,\ n,\ k\in\mathbf{N}^*)$，则$a_m+a_n=2a_k$
  - 应用

课后素养评价（四） 等差数列的性质及应用

A组 学习·理解

1. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2+a_9=10,a_1=2$，则$a_{10}=$ （　　）

A.8　　B.9　　C.11　　D.12

A　**解析**：因为$a_1+a_{10}=a_2+a_9=10$，所以$10=2+a_{10}$，解得$a_{10}=8$.故选A.

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_2+a_5+a_8=3$，则$2a_4+a_7=$ （　　）

A.6　　B.5　　C.4　　D.3

D　**解析**：由等差数列的性质可得$a_2+a_5+a_8=3a_5=3$，则$a_5=1$，$2a_4+a_7=a_3+a_5+a_7=3a_5=3$.故选D.

3. 在a和b两数之间插入n个数，使它们与a,b组成等差数列，则该数列的公差为 （　　）

A.$\dfrac{b-a}{n}$　　B.$\dfrac{b-a}{n+1}$

C.$\dfrac{a-b}{n+1}$　　D.$\dfrac{b-a}{n+2}$

B　**解析**：在a和b两数之间插入n个数，使它们与a,b组成等差数列，则这个数列共有$(n+2)$项.设该数列的公差为d，则$d=\dfrac{b-a}{(n+2)-1}=\dfrac{b-a}{n+1}$.故选B.

4. 已知等差数列$\{a_n\}$是递增数列，且满足$a_3+a_5=14,a_2a_6=33$，则a_1a_7等于 （　　）

A.33　　B.16　　C.13　　D.12

C　**解析**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

由等差数列的性质，得$a_2+a_6=a_3+a_5=14$.

由$\begin{cases}a_2+a_6=14,\\a_2a_6=33,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_2=3,\\a_6=11\end{cases}$或$\begin{cases}a_2=11,\\a_6=3.\end{cases}$

又$\{a_n\}$是递增数列，

所以$\begin{cases}a_2=3,\\a_6=11,\end{cases}$

所以公差$d=\dfrac{a_6-a_2}{4}=2$.

所以$a_1a_7=(a_2-d)(a_6+d)=1\times13=13$.故选C.

5. （传统文化）《九章算术》是我国古代的数学名著，书中有如下问题："今有五人分五钱，令上二人所得与下三人等.问各得几何."其意思为：已知A,B,C,D,E五人分5钱，A,B两人所得与C,D,E三人所得相同，且A,B,C,D,E每人所得成等差数列.问，五人各得多少钱？在这个问题中，E所得为 （　　）

A.$\dfrac{2}{3}$钱　　B.$\dfrac{4}{3}$钱　　C.$\dfrac{5}{6}$钱　　D.$\dfrac{3}{2}$钱

A　**解析**：由题意，设A所得为$a-4d$，B所得为$a-3d$，C所得为$a-2d$，D所得为$a-d$，E所得为a，则$\begin{cases}5a-10d=5,\\2a-7d=3a-3d,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\dfrac{2}{3},\\d=-\dfrac{1}{6}.\end{cases}$故E所得为$\dfrac{2}{3}$钱.故选A.

6. 已知等差数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=10$，$a_8^2-a_2^2=36$，则a_{11}的值为________.

11　**解析**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

因为$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=5a_5=10$，

所以$a_5=2$.

因为$a_8^2-a_2^2=(a_8+a_2)(a_8-a_2)=2a_5\times 6d=36$，

所以$d=\frac{3}{2}$.

所以$a_{11}=a_5+6d=2+9=11$.

7. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+a_{n-1}=2a_n(n\geqslant 2)$，且$a_2=5$，$a_5=13$，则$a_8=$________.

21　**解析**：由$a_{n+1}+a_{n-1}=2a_n(n\geqslant 2)$，知数列$\{a_n\}$是等差数列.

由等差数列的性质，得$a_2+a_8=2a_5$，所以$a_8=2a_5-a_2=2\times 13-5=21$.

8. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_{12}=23$，$a_{42}=143$，$a_n=239$，求n及公差d.

解：由题意可得，$d=\frac{a_{42}-a_{12}}{42-12}=\frac{143-23}{30}=4$，

所以$a_1=a_{12}-11d=-21$.

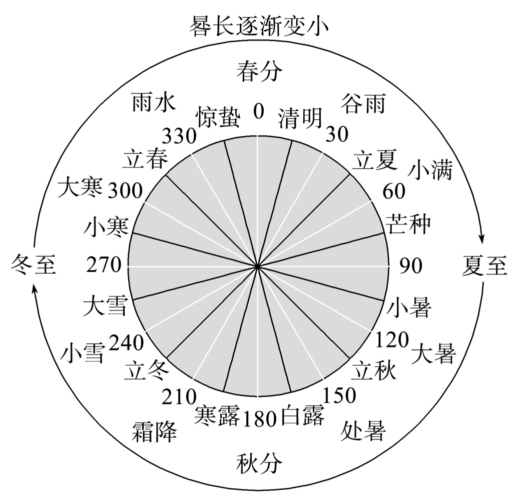
因为$a_n=a_1+(n-1)d=-21+4(n-1)=239$，

解得$n=66$.

综上，$n=66$，$d=4$.

B组　应用·实践

1. 我国古代天文学和数学著作《周髀算经》中记载：一年有二十四个节气，每个节气的晷长损益相同(晷是按照日影测定时刻的仪器，晷长即为所测量影子的长度).二十四节气及晷长变化如图所示，相邻两个节气晷长减少或增加的量相同，周而复始.已知雨水的晷长为9.5尺，立冬的晷长为10.5尺，则冬至的晷长为　(　　)



A. 11.5尺　　B. 13.5尺

C. 12.5尺　　D. 14.5尺

B　**解析**：设相邻两个节气晷长减少或增加的量为d $(d>0)$，则立冬到冬至晷长增加$3d$，冬至到雨水晷长减少$4d$.设冬至的晷长为x尺，则$\begin{cases}x-4d=9.5,\\10.5+3d=x,\end{cases}$解得$\begin{cases}d=1,\\x=13.5.\end{cases}$故选B.

2. 如果点$(n,a_n)(n\in\mathbf{N}^*)$都在直线$3x-y-24=0$上，那么在数列$\{a_n\}$中，有　(　　)

A. $a_7+a_9>0$　　B. $a_7+a_9<0$

C. $a_7+a_9=0$　　D. $a_7a_9=0$

C　**解析**：因为$3n-a_n-24=0$，

所以$a_n=3n-24(n\in\mathbf{N}^*)$.

所以$\{a_n\}$为等差数列.

所以$a_7+a_9=2a_8=0$.故选C.

3. 已知公差不为0的等差数列$\{a_n\}$满足$a_m+a_p=2a_5$，则$\frac{4}{m+2}+\frac{1}{p}$的最小值为　(　　)

A. 1　　B. $\frac{5}{4}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. 2

C　**解析**：根据等差数列的性质可得$m+p=10$，则$(m+2)+p=12$，

所以$\frac{4}{m+2}+\frac{1}{p}=\frac{1}{12}\left(\frac{4}{m+2}+\frac{1}{p}\right)(m+2+p)=\frac{1}{12}\left(5+\frac{4p}{m+2}+\frac{m+2}{p}\right)\geqslant\frac{1}{12}\left(5+2\sqrt{\frac{4p}{m+2}\cdot\frac{m+2}{p}}\right)=\frac{3}{4}$.当且仅当$\frac{4p}{m+2}=\frac{m+2}{p}$，即$p=4$，$m=6$时，等号成立.故选C.

4. (多选)设正项等差数列$\{a_n\}$满足$(a_1+a_{10})^2=2a_2a_9+20$，则　(　　)

A. a_2a_9的最大值为10

B. a_2+a_9的最大值为$2\sqrt{10}$

C. $\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_9^2}$的最大值为$\frac{1}{5}$

D. $a_2^4+a_9^4$的最小值为200

ABD　**解析**：因为正项等差数列$\{a_n\}$满足$(a_1+a_{10})^2=2a_2a_9+20$，

所以$(a_2+a_9)^2=2a_2a_9+20$，即$a_2^2+a_9^2=20$.

对于A，$a_2a_9\leqslant\frac{a_2^2+a_9^2}{2}=\frac{20}{2}=10$，当且仅当$a_2=a_9=\sqrt{10}$时，等号成立，故选项A正确；

对于B，由于$\left(\frac{a_2+a_9}{2}\right)^2\leqslant\frac{a_2^2+a_9^2}{2}=10$，所以$\frac{a_2+a_9}{2}\leqslant\sqrt{10}$，$a_2+a_9\leqslant 2\sqrt{10}$，当且仅当$a_2=a_9=\sqrt{10}$时，等号成立，故选项B正确；

对于 C，$\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_9^2}=\frac{a_2^2+a_9^2}{a_2^2a_9^2}=\frac{20}{a_2^2a_9^2}\geqslant\frac{20}{\left(\frac{a_2^2+a_9^2}{2}\right)^2}=\frac{20}{10^2}=\frac{1}{5}$，当且仅当 $a_2=a_9=\sqrt{10}$ 时，等号成立，所以$\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_9^2}$的最小值为$\frac{1}{5}$，故选项 C 错误；

对于 D，结合 A 选项的结论，有 $a_2^4+a_9^4=(a_2^2+a_9^2)^2-2a_2^2a_9^2=400-2a_2^2a_9^2\geqslant400-2\times10^2=200$，当且仅当 $a_2=a_9=\sqrt{10}$ 时，等号成立，故选项 D 正确.故选 ABD.

5. 设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都是等差数列，且 $a_1=25$，$b_1=75$，$a_2+b_2=100$，则数列$\{a_n+b_n\}$的第 37 项为________.

100　**解析**：因为$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是等差数列，

所以$\{a_n+b_n\}$是等差数列.

因为 $a_1+b_1=100$，$a_2+b_2=100$，

所以数列$\{a_n+b_n\}$的公差 $d=0$，所以 $a_{37}+b_{37}=100$.

6. 已知在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2+2a_3+a_4=12$.

(1)求 a_5+a_7 的值；

(2)若数列$\{b_n\}$满足 $b_n=a_{2n}-1$，证明：数列$\{b_n\}$是等差数列.

(1)**解**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

因为 $a_2+a_4=2a_3$，$a_2+2a_3+a_4=4a_3=12$，

所以 $a_3=3$.

因为 $a_3=a_1+2d$，即 $1+2d=3$，所以 $d=1$.

所以 $a_5+a_7=2a_1+10d=12$.

(2)**证明**：由(1)可知 $a_n=n$，

所以 $b_n=a_{2n}-1=2n-1$.

因为 $b_n-b_{n-1}=(2n-1)-[2(n-1)-1]=2(n\geqslant2)$，

$b_1=a_2-1=1$，

所以数列$\{b_n\}$是首项为 1，公差为 2 的等差数列.

7. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$a_n\neq0$，$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，其中 λ 为常数.

(1)证明：$a_{n+2}-a_n=\lambda$；

(2)是否存在 λ，使得$\{a_n\}$为等差数列？请说明理由.

(1)**证明**：由题意知，$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，$a_{n+1}a_{n+2}=\lambda S_{n+1}-1$，

两式相减得 $a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=\lambda a_{n+1}$.

由于 $a_{n+1}\neq0$，所以 $a_{n+2}-a_n=\lambda$.

(2)**解**：存在.理由如下：

由题意知，$a_1=1$，$a_1a_2=\lambda S_1-1$，可得 $a_2=\lambda-1$.

由(1)知，$a_3=\lambda+1$.

令 $2a_2=a_1+a_3$，

解得 $\lambda=4$.

故 $a_{n+2}-a_n=4$，由此可得

$\{a_{2n-1}\}$是首项为 1，公差为 4 的等差数列，$a_{2n-1}=4n-3$；

$\{a_{2n}\}$是首项为 3，公差为 4 的等差数列，$a_{2n}=4n-1$.

所以 $a_n=2n-1$，$a_{n+1}-a_n=2$.

因此存在实数 $\lambda=4$，使得数列$\{a_n\}$为等差数列.

4.2.2　等差数列的前 n 项和公式

第 1 课时　等差数列的前 n 项和

学习任务目标
1.了解等差数列前 n 项和公式的推导过程. 2.掌握等差数列的前 n 项和公式. 3.熟练掌握等差数列的五个量 a_1,d,n,a_n,S_n 的关系,能够由其中三个求另外两个. 4.掌握等差数列的前 n 项和的简单性质.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　等差数列的前 n 项和公式

$S_n=\underline{\frac{n(a_1+a_n)}{2}}=\underline{na_1+\frac{n(n-1)d}{2}}$.

知识点二　等差数列前 n 项和的性质

(1)若数列$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列,S_n 为其前 n 项和,则数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$也是等差数列,且公差为$\underline{\frac{d}{2}}$.

(2)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,S_n 为其前 n 项和,则 $S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m},\cdots(m\in\mathbf{N}^*)$仍构成等差数列,且公差为$\underline{m^2d}$.

(3)设两个等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n,T_n,则$\frac{a_n}{b_n}=\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}$.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)等差数列的前 n 项和等于其首项与第 n 项的等差中项的 n 倍.　(　　)

√　**提示**:根据等差数列的前 n 项和公式 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$可知,此说法正确.

(2)等差数列的前 n 项和 S_n 一定是关于 n 的二次函数.　(×)

(3)若等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,则 S_6,S_{12},S_{18}也成等差数列.　(×)

2.在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=1,a_{30}=30$,则前 30 项的和 S_{30}的值为　(　　)

A.456　　B.465

C.930　　D.654

B　**解析**:$S_{30}=\frac{30\times(a_1+a_{30})}{2}=\frac{30\times(1+30)}{2}=465$.故选 B.

3.请思考并回答下列问题:

(1)由 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$如何推出 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$?

提示:把 $a_n=a_1+(n-1)d$ 代入 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$中,就可以得到 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$.

(2)等差数列的前 n 项和的两个公式分别适用于什么情况?

提示:若已知等差数列$\{a_n\}$的首项 a_1、末项 a_n 及项数 n,则用公式 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$来求和,其中$\frac{a_1+a_n}{2}$是 a_1 与 a_n 的等差中项,应用时要注意结合等差数列的性质.若已知等差数列$\{a_n\}$的首项 a_1、公差 d 及项数 n,则用公式 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$来求和.

○ 任务型课堂 ○

任务 1 > 等差数列的前 n 项和公式

探究活动

例 1　(1)设 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和,且 $a_1=1,a_4=7$,则 $S_9=$________.

81　**解析**:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,则 $a_4=a_1+3d=1+3d=7$,所以 $d=2$.

故 $S_9=9a_1+\frac{9\times8}{2}d=9+\frac{9\times8}{2}\times2=81$.

(2)设 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和,若 $S_3=3,S_6=24$,则 $a_9=$________.

15　**解析**:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,

则$\begin{cases}S_3=3a_1+\frac{3\times2}{2}d=3,\\S_6=6a_1+\frac{6\times5}{2}d=24,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=-1,\\d=2.\end{cases}$

所以 $a_9=a_1+8d=-1+8\times2=15$.

(3)在等差数列$\{a_n\}$中,若 $a_1=1,a_n=-512$,前 n 项和 $S_n=-1\ 022$,求公差 d.

解：由 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n\times(1-512)}{2}=-1\ 022$，解得 $n=4$.

又由 $a_n=a_1+(n-1)d$，得 $-512=1+(4-1)\times d$，解得 $d=-171$.

【探究总结】

求等差数列的基本量的方法

1. a_1,d,n 称为等差数列的三个基本量，a_n 和 S_n 都可以用这三个基本量来表示.五个量 a_1,d,n,a_n,S_n 中可“知三求二”.
2. 已知等差数列的通项公式及前 n 项和公式的“知三求二”问题，一般是通过通项公式和前 n 项和公式列方程(组)来求解.这种方法是解决数列运算问题的基本方法，在具体求解过程中应注意已知量与未知量的联系及整体思想的运用.

应用迁移

1.(2024·全国甲卷)等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_9=1$，则 $a_3+a_7=$（　　）

A. -2　　B. $\frac{7}{3}$　　C. 1　　D. $\frac{2}{9}$

D　**解析**：(方法一：利用等差数列的基本量)

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.由 $S_9=1$，根据等差数列的求和公式得 $S_9=9a_1+\frac{9\times8}{2}d=1$，即 $9a_1+36d=1$.

又 $a_3+a_7=a_1+2d+a_1+6d=2a_1+8d=\frac{2}{9}(9a_1+36d)=\frac{2}{9}$.

故选 D.

(方法二：利用等差数列的性质)

根据等差数列的性质，得 $a_1+a_9=a_3+a_7$.

由 $S_9=1$，根据等差数列的求和公式，

得 $S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=\frac{9(a_3+a_7)}{2}=1$，故 $a_3+a_7=\frac{2}{9}$.

故选 D.

(方法三：特殊值法)

不妨取等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=0$，则 $S_9=1=9a_1$，所以 $a_1=\frac{1}{9}$，则 $a_3+a_7=2a_1=\frac{2}{9}$.

故选 D.

2.(2024·新高考全国Ⅱ卷)记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_3+a_4=7$，$3a_2+a_5=5$，则 $S_{10}=$________.

95　**解析**：设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

由题意，得 $\begin{cases}a_1+2d+a_1+3d=7,\\3(a_1+d)+a_1+4d=5,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a_1=-4,\\d=3,\end{cases}$

则 $S_{10}=10a_1+\frac{10\times9}{2}d=10\times(-4)+45\times3=95$.

任务2 等差数列前 n 项和的性质

探究活动

例2　(1)两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n,T_n，且 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{5n+2}{n+3}$，则 $\frac{a_2+a_{20}}{b_7+b_{15}}$ 等于（　　）

A. $\frac{107}{24}$　　B. $\frac{7}{27}$　　C. $\frac{149}{12}$　　D. $\frac{149}{3}$

A　**解析**：因为两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n,T_n，且 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{5n+2}{n+3}$，所以 $\frac{a_2+a_{20}}{b_7+b_{15}}=\frac{a_1+a_{21}}{b_1+b_{21}}=\frac{\frac{a_1+a_{21}}{2}\times21}{\frac{b_1+b_{21}}{2}\times21}=\frac{S_{21}}{T_{21}}=\frac{5\times21+2}{21+3}=\frac{107}{24}$.故选 A.

(2)已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_{10}=310$，$S_{20}=1\ 220$，求 S_{30}.

解：(方法一)设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

由题意，得 $\begin{cases}10a_1+\frac{1}{2}\times10\times9\times d=310,\\20a_1+\frac{1}{2}\times20\times19\times d=1\ 220,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a_1=4,\\d=6.\end{cases}$

所以 $S_{30}=30\times4+\frac{1}{2}\times30\times29\times6=2\ 730$.

(方法二)因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，

所以 $S_{10},S_{20}-S_{10},S_{30}-S_{20}$ 也成等差数列.

所以 $2(S_{20}-S_{10})=S_{10}+S_{30}-S_{20}$，

即 $2\times(1\ 220-310)=310+S_{30}-1\ 220$，

所以 $S_{30}=2\ 730$.

(方法三)设 $S_n=An^2+Bn$（A,B 为常数）.

由题意，得 $\begin{cases}310=100A+10B,\\1\ 220=400A+20B,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=3,\\B=1.\end{cases}$

所以 $S_n=3n^2+n$.

所以 $S_{30}=3\times900+30=2\ 730$.

(方法四)设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

由 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，

得 $\frac{S_n}{n}=a_1+(n-1)\frac{d}{2}$，

所以 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是以 a_1 为首项，$\frac{d}{2}$ 为公差的等差数列.

所以 $\frac{S_{10}}{10},\frac{S_{20}}{20},\frac{S_{30}}{30}$ 成等差数列.

所以 $\frac{S_{10}}{10}+\frac{S_{30}}{30}=2\times\frac{S_{20}}{20}$.

所以 $S_{30}=30\times\left(\frac{S_{20}}{10}-\frac{S_{10}}{10}\right)=30\times(122-31)=2\ 730$.

［一题多思］

思考1.若本例(1)中的“$\frac{S_n}{T_n}=\frac{5n+2}{n+3}$”改为“$\frac{S_{2n}}{T_n}=\frac{6n}{3n+4}$”,其他条件不变,则$\frac{a_3+a_{12}}{b_4}=$ ( )

A.$\frac{7}{25}$　B.$\frac{14}{25}$　C.$\frac{21}{25}$　D.$\frac{42}{25}$

D　**解析**:依题意 $\frac{a_3+a_{12}}{b_4}=2\cdot\frac{a_1+a_{14}}{2b_4}=2\cdot\frac{a_1+a_{14}}{b_1+b_7}=2\cdot\frac{\frac{a_1+a_{14}}{2}\times14}{\frac{b_1+b_7}{2}\times7}\times\frac{7}{14}=\frac{S_{14}}{T_7}$.

又因为$\frac{S_{2n}}{T_n}=\frac{6n}{3n+4}$,所以$\frac{a_3+a_{12}}{b_4}=\frac{S_{14}}{T_7}=\frac{6\times7}{3\times7+4}=\frac{42}{25}$.

思考2.若本例(1)中的条件不变,则$\frac{a_6}{b_5}$的值等于________.

$\frac{19}{4}$　**解析**:$\frac{S_n}{T_n}=\frac{5n+2}{n+3}$,可设$S_n=kn(5n+2)$,$T_n=kn(n+3)$,$k\neq0$,则$\frac{a_6}{b_5}=\frac{S_6-S_5}{T_5-T_4}=\frac{6k(30+2)-5k(25+2)}{5k(5+3)-4k(4+3)}=\frac{19}{4}$.

【探究总结】

等差数列前 n 项和的性质

(1)若等差数列$\{a_n\}$的公差为d,前n项和为S_n,则

①数列S_k,$S_{2k}-S_k$,$S_{3k}-S_{2k}$,…($k\in\mathbf{N}^*$)是等差数列,且公差为k^2d.

②在等差数列$\{a_n\}$中,若$S_n=m$,$S_m=n$,$m\neq n$,则$S_{m+n}=-(m+n)$.

③在等差数列$\{a_n\}$中,若$S_n=S_m$,$m\neq n$,则$S_{m+n}=0$.

④数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列,首项为$a_1$,公差为$\frac{d}{2}$.

(2)若$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都为等差数列,S_n,T_n分别为它们的前n项和,则$\frac{a_m}{b_m}=\frac{S_{2m-1}}{T_{2m-1}}$.

应用迁移

1.一个等差数列的前n项和为25,前$2n$项和为100,则前$3n$项和为________.

225　**解析**:由题意,得$S_n=25$,$S_{2n}-S_n=75$.而S_n,$S_{2n}-S_n$,$S_{3n}-S_{2n}$成等差数列,所以$S_{3n}-S_{2n}=125$.

所以$S_{3n}=100+125=225$.

2.设$\{a_n\}$为等差数列,S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和,已知$a_1=-2$,$S_7=7$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设T_n为数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$的前$n$项和,求$T_n$.

解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,

则$S_n=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d$.

因为$S_7=7$,$a_1=-2$,

所以$7=7\times(-2)+\frac{7\times6}{2}d$,解得$d=1$.

所以$a_n=-2+(n-1)\times1=n-3$.

(2)因为$\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{1}{2}(n-1)d=-2+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n-5}{2}$,所以$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{1}{2}$.

又$\frac{S_1}{1}=\frac{a_1}{1}=-2$,

所以数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是首项为$-2$,公差为$\frac{1}{2}$的等差数列.

所以$T_n=n\times(-2)+\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}n^2-\frac{9}{4}n$.

提质归纳

- 等差数列的前n项和
  - 前n项和公式
    - $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$
    - $S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$
  - a_1, d, n, a_n, S_n中可“知三求二”
  - 前n项和性质 — 应用

课后素养评价(五) 等差数列的前n项和

A组 学习·理解

1.(多选)若等差数列$\{a_n\}$的前5项和$S_5=25$,且$a_2=3$,则 ( )

A.$a_1=1$ B.$a_7=13$

C.公差$d=2$ D.公差$d=3$

ABC **解析**:设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

因为$\begin{cases}S_5=5a_1+10d=25,\\a_2=a_1+d=3,\end{cases}$所以$\begin{cases}a_1=1,\\d=2.\end{cases}$

所以$a_7=a_1+6d=13$.故选ABC.

2.设$\{a_n\}$是公差为-2的等差数列,且$a_4+2a_6=4$,则$\{a_n\}$的前10项和$S_{10}=$ ( )

A.-8 B.-10

C.8 D.10

D **解析**:$\{a_n\}$是公差为-2的等差数列,且$a_4+2a_6=4$,则$(a_1-6)+2(a_1-10)=4$,解得$a_1=10$.所以$S_{10}=10a_1+\frac{10\times9}{2}d=10\times10-2\times45=10$.故选D.

3.已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n.若$a_1=2$,且$S_3=S_{19}$,则$S_{21}=$ ( )

A.1 B.2

C.3 D.4

B **解析**:(方法一)因为$S_3=S_{19}$,所以$S_{19}-S_3=a_4+a_5+\cdots+a_{19}=8(a_4+a_{19})=0$,所以$a_4+a_{19}=0$,

所以$S_{21}=a_1+a_2+a_3+(a_4+a_5+\cdots+a_{19})+a_{20}+a_{21}=a_1+a_2+a_3+a_{20}+a_{21}=a_1+2(a_4+a_{19})=a_1=2$.故选B.

(方法二)由于$S_n=An^2+Bn$符合二次函数$f(x)=Ax^2+Bx$的形式,当$x=n$时,$S_n=f(n)$.根据二次函数图象的对称性及$S_3=S_{19}$可知,$f(x)$的图象关于直线$x=11$对称,因此$S_{21}=S_1=a_1=2$.故选B.

4.记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和.若$a_2+a_6=10$,$a_4a_8=45$,则$S_5=$ ( )

A.25 B.22

C.20 D.15

C **解析**:(方法一)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,依题意可得

$a_2+a_6=a_1+d+a_1+5d=10$,即$a_1+3d=5$,

又$a_4a_8=(a_1+3d)(a_1+7d)=45$,解得$d=1$,$a_1=2$,所以$S_5=5a_1+\frac{5\times4}{2}d=5\times2+10=20$.故选C.

(方法二)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.因为$a_2+a_6=2a_4=10$,$a_4a_8=45$,所以$a_4=5$,$a_8=9$,

从而$d=\frac{a_8-a_4}{8-4}=1$,于是$a_3=a_4-d=5-1=4$,

所以$S_5=5a_3=20$.

故选C.

5.已知一个有限项的等差数列$\{a_n\}$,前4项的和是40,最后4项的和是80,所有项的和是210,则此数列的项数为 ( )

A.12 B.14

C.16 D.18

B **解析**:由题意知$a_1+a_2+a_3+a_4=40$,$a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}=80$,两式相加整理得$a_1+a_n=30$.又因为$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{30n}{2}=210$,所以$n=14$.故选B.

6.已知$\{a_n\}$为等差数列,$a_1+a_4+a_7=39$,$a_3+a_6+a_9=27$,则前9项和$S_9=$________.

99 **解析**:在等差数列$\{a_n\}$中,由$a_1+a_4+a_7=39$,$a_3+a_6+a_9=27$,两式相加可得$a_1+a_4+a_7+a_3+a_6+a_9=66$.

由等差数列的性质可得$a_1+a_9=a_4+a_6=a_7+a_3=2a_5$,

故可得$6a_5=66$,解得$a_5=11$,故$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5=99$.

7.等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且$S_3=30$,$S_6=100$,则$S_9=$________.

210 **解析**:因为S_3,S_6-S_3,S_9-S_6成等差数列,即30,70,S_9-100成等差数列,

所以$140=30+S_9-100$,所以$S_9=210$.

8.在等差数列$\{a_n\}$中,S_n是其前n项和,$a_1=-11$,$\frac{S_{10}}{10}-\frac{S_8}{8}=2$,则$S_{11}=$________.

-11 **解析**:由题意知,$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是等差数列,首项为$\frac{a_1}{1}=-11$.

设其公差为d,则$\frac{S_{10}}{10}-\frac{S_8}{8}=2d=2$,所以$d=1$,

所以$\frac{S_{11}}{11}=-11+10\times1=-1$.所以$S_{11}=-11$.

9.在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1+a_3=6$,$a_9=17$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n.

解:设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

(1)因为$a_1+a_3=2a_2=6$,所以$a_2=3$,

所以$d=\frac{a_9-a_2}{9-2}=\frac{17-3}{9-2}=2$,

则 $a_n=a_2+(n-2)d=3+(n-2)\times2=2n-1$.

(2)由(1)可得 $a_1=1$,

所以 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}=n^2$.

B组　应用·实践

1. 设 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和,若 $\frac{S_5}{S_{10}}=\frac{1}{3}$,则 $\frac{S_{10}}{S_{20}}=$ (　　)

A.$\frac{3}{7}$　　B.$\frac{3}{10}$　　C.$\frac{3}{11}$　　D.$\frac{3}{14}$

B　**解析**:由等差数列的性质知 $S_5,S_{10}-S_5,S_{15}-S_{10},S_{20}-S_{15},\cdots$是等差数列.

由 $\frac{S_5}{S_{10}}=\frac{1}{3}$,可设 $S_5=t(t\neq0)$,则 $S_{10}=3t$,于是 $S_5,S_{10}-S_5,S_{15}-S_{10},S_{20}-S_{15},\cdots$依次为 $t,2t,3t,4t,\cdots$,所以 $S_{20}=t+2t+3t+4t=10t$,所以 $\frac{S_{10}}{S_{20}}=\frac{3}{10}$.故选 B.

2. (多选)等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,若 $a_1>0$,则下列命题正确的是 (　　)

A.若 $a_3+a_7=4$,则 $S_9=18$

B.若 $S_{15}>0,S_{16}<0$,则 $a_8^2>a_9^2$

C.若 $a_1+a_2=5,a_3+a_4=9$,则 $a_7+a_8=17$

D.若 $a_8=S_{10}$,则 $S_9>0,S_{10}<0$

ACD　**解析**:对于 A,$a_3+a_7=4$,$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=\frac{9(a_3+a_7)}{2}=18$,故 A 正确;

对于 B,$S_{15}=\frac{15(a_1+a_{15})}{2}=15a_8>0$,则 $a_8>0$,$S_{16}=\frac{16(a_1+a_{16})}{2}=8(a_8+a_9)<0$,则 $a_8+a_9<0$,$a_9<-a_8<0$,

因此 $a_8^2-a_9^2=(a_8+a_9)(a_8-a_9)<0$,即 $a_8^2<a_9^2$,故 B 错误;

对于 C,$a_5+a_6=2(a_3+a_4)-(a_1+a_2)=13$,则 $a_7+a_8=2(a_5+a_6)-(a_3+a_4)=17$,故 C 正确;

对于 D,设$\{a_n\}$的公差为 d,由 $a_8=S_{10}$,得 $a_1+7d=10a_1+45d$,解得 $d=-\frac{9}{38}a_1$,

则 $S_9=9a_1+36d=9\left(a_1-\frac{18}{19}a_1\right)>0$,

$S_{10}=10a_1+45d=5\left(2a_1-\frac{81}{38}a_1\right)<0$,故 D 正确.

故选 ACD.

3. (多选)记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和,则下列命题正确的是 (　　)

A.$S_6=3(S_4-S_2)$

B.若$\{a_n\}$的公差不为 0,$S_{15}=5(a_4+a_8+a_k)$,则 $k=10$

C.$S_{2n},S_{4n}-S_{2n},S_{6n}-S_{4n}$成等差数列

D.$\left\{\frac{S_{2n}}{2n}\right\}$是等差数列

ACD　**解析**:设$\{a_n\}$的公差为 d.

对于 A,$S_6=6a_1+15d$,$3(S_4-S_2)=3[4a_1+6d-(2a_1+d)]=6a_1+15d$,所以 $S_6=3(S_4-S_2)$,故 A 正确;

对于 B,$S_{15}=15a_1+\frac{15\times14}{2}d=15a_1+105d$,$5(a_4+a_8+a_k)=5[a_1+3d+a_1+7d+a_1+(k-1)d]=15a_1+5(k+9)d$,

又因为 $d\neq0$,所以 $S_{15}=5(a_4+a_8+a_k)\Leftrightarrow105=5(k+9)$,解得 $k=12$,故 B 错误;

对于 C,$S_{2n}=2na_1+\frac{2n\times(2n-1)}{2}\times d=2na_1+(2n^2-n)d$,$S_{4n}=4na_1+\frac{4n\times(4n-1)}{2}\times d=4na_1+(8n^2-2n)d$,$S_{6n}=6na_1+\frac{6n\times(6n-1)}{2}\times d=6na_1+(18n^2-3n)d$,

所以 $S_{2n}+S_{6n}-S_{4n}=2na_1+(2n^2-n)d+6na_1+(18n^2-3n)d-[4na_1+(8n^2-2n)d]=4na_1+(12n^2-2n)d$,$S_{4n}-S_{2n}=4na_1+(8n^2-2n)d-[2na_1+(2n^2-n)d]=2na_1+(6n^2-n)d$,

所以 $S_{2n}+S_{6n}-S_{4n}=2(S_{4n}-S_{2n})$,所以 $S_{2n},S_{4n}-S_{2n},S_{6n}-S_{4n}$成等差数列,故 C 正确;

对于 D,因为 $\frac{S_{2n}}{2n}=\frac{2na_1+(2n^2-n)d}{2n}=a_1+\left(n-\frac{1}{2}\right)d$,所以 $\frac{S_{2(n+1)}}{2(n+1)}-\frac{S_{2n}}{2n}=\left[a_1+\left(n+1-\frac{1}{2}\right)d\right]-\left[a_1+\left(n-\frac{1}{2}\right)d\right]=d$,所以 $\left\{\frac{S_{2n}}{2n}\right\}$是公差为 d 的等差数列,故 D 正确.

故选 ACD.

4. 在等差数列$\{a_n\}$中,S_n 为其前 n 项和.已知 $S_3=9$,$a_4+a_5+a_6=7$,则$S_9-S_6=$________.

5　**解析**:因为 S_3,S_6-S_3,S_9-S_6 成等差数列,而 $S_3=9,S_6-S_3=a_4+a_5+a_6=7$,所以 $S_9-S_6=5$.

5. (新定义)形如 $M=m^n(m,n\in\mathbf{N}^*)$的正整数表示为各项都是整数、公差为 2 的等差数列的前 m 项和,称作“对 M 的 m 项划分”.例如:$9=3^2=1+3+5$ 称作“对 9 的 3 项划分”;$64=4^3=13+15+17+19$ 称作“对 64 的 4 项划分”.据此,对 324 的 18 项划分中最大的项是________.

35　**解析**:设对 324 的 18 项划分中最小的项为 a_1,最大的项为 a_{18},

则$\begin{cases}a_{18}=a_1+17\times2,\\ \dfrac{18(a_1+a_{18})}{2}=324,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\ a_{18}=35.\end{cases}$

6.(2022·浙江卷节选)已知等差数列$\{a_n\}$的首项$a_1=-1$,公差$d>1$.记$\{a_n\}$的前n项和为$S_n(n\in\mathbf{N}^*)$.若$S_4-2a_2a_3+6=0$,求S_n.

解:因为$S_4-2a_2a_3+6=0$,$a_1=-1$,

所以$-4+6d-2(-1+d)(-1+2d)+6=0$,

整理得$d^2-3d=0$.

又$d>1$,所以$d=3$,所以$a_n=3n-4$,

所以$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{3n^2-5n}{2}$.

7.已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$a_2+a_4=48$,$a_5=28$.若$S_n+30>n\lambda$对任意$n\in\mathbf{N}^*$恒成立,求λ的取值范围.

解:由题意得$a_2+a_4=a_1+a_5=48$,因为$a_5=28$,

所以$a_1=20$,则公差$d=\dfrac{28-20}{5-1}=2$,

所以$S_n=20n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times2=n(n+19)$.

由$n(n+19)+30>n\lambda$,得$\lambda<\dfrac{n^2+19n+30}{n}=n+\dfrac{30}{n}+19$恒成立.

设$f(x)=x+\dfrac{30}{x}+19$,令$x=\dfrac{30}{x}$,解得$x=\pm\sqrt{30}$.

易知当$x\in(0,\sqrt{30})$时,$f(x)$单调递减;当$x\in(\sqrt{30},+\infty)$时,$f(x)$单调递增.

又因为$5<\sqrt{30}<6$,$f(5)=f(6)=30$,

所以当$n=5$或$n=6$时,$n+\dfrac{30}{n}+19$取得最小值30,

所以$\lambda<30$,即λ的取值范围是$(-\infty,30)$.

8.已知S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和,且$S_2=2$,$S_3=-6$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式和前n项和S_n.

(2)是否存在n,使S_n,$S_{n+2}+2n$,S_{n+3}成等差数列?若存在,求出n的值;若不存在,说明理由.

解:(1)设$\{a_n\}$的公差为d,

则$\begin{cases}2a_1+d=2,\\ 3a_1+\dfrac{3\times2}{2}d=-6,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=4,\\ d=-6,\end{cases}$

所以$a_n=4-6(n-1)=10-6n$,

$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=7n-3n^2$.

(2)存在.$S_n+S_{n+3}=7n-3n^2+7(n+3)-3(n+3)^2=-6n^2-4n-6$,

$S_{n+2}=7(n+2)-3(n+2)^2=-3n^2-5n+2$,

$2(S_{n+2}+2n)=2(-3n^2-5n+2+2n)=-6n^2-6n+4$.

若存在n,使S_n,$S_{n+2}+2n$,S_{n+3}成等差数列,

则$-6n^2-4n-6=-6n^2-6n+4$,解得$n=5$.

所以存在$n=5$,使S_n,$S_{n+2}+2n$,S_{n+3}成等差数列.

第2课时　等差数列前n项和的应用

学习任务目标

1.了解等差数列前n项和的一些性质.

2.掌握解决等差数列前n项和的最值问题的方法.

3.会用裂项相消法求和.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点　等差数列前n项和的性质

(1)等差数列前n项和的"奇偶项"

①若等差数列的项数为$2n$,则$S_{2n}=n(a_n+a_{n+1})$,$S_{偶}-S_{奇}=nd$,$\dfrac{S_{偶}}{S_{奇}}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

②若等差数列的项数为$2n+1$,则$S_{2n+1}=(2n+1)a_{n+1}$,$S_{偶}-S_{奇}=-a_{n+1}$,$\dfrac{S_{偶}}{S_{奇}}=\dfrac{n}{n+1}$.

(2)等差数列前n项和S_n最大(小)值的情形:

①若$a_1>0$,$d<0$,则S_n存在最大值,即所有非负项之和;

②若$a_1<0$,$d>0$,则S_n存在最小值,即所有非正项之和.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)若等差数列$\{a_n\}$共有20项,则$\dfrac{S_{奇}}{S_{偶}}=\dfrac{a_8}{a_{10}}$.　(×)

(2)若无穷等差数列$\{a_n\}$的公差$d>0$,则其前n项和S_n不存在最大值.　(√)

(3)若两个等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前n项和分别为A_n,B_n,则一定有$\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{A_n}{B_n}$.　(×)

2.设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n.若$a_2=-3$,S_5

$=-10$，则 $a_5=$ ________，S_n 的最小值为 ________.

0 -10 **解析**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，则 $a_2=a_1+d=-3$，$S_5=5a_1+10d=-10$，即 $a_1+2d=-2$，解得 $a_1=-4$，$d=1$，所以 $a_5=a_1+4d=0$，$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{n^2-9n}{2}$.当 $n=4$ 或 $n=5$ 时，S_n最小，最小值为-10.

3.请思考并回答下列问题：

(1)若等差数列$\{a_n\}$满足 $a_7+a_8+a_9>0$，$a_7+a_{10}<0$，则当 n 取何值时，数列$\{a_n\}$的前 n 项和最大？

提示：因为 $a_7+a_8+a_9=3a_8>0$，$a_7+a_{10}=a_8+a_9<0$，所以 $a_8>0$，$a_9<0$，所以当 $n=8$ 时，数列$\{a_n\}$的前 n 项和最大.

(2)$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d(d\neq 0)$与二次函数有什么关系？

提示：$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$，所以 S_n 可以看成是二次函数 $f(x)=\frac{d}{2}x^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)x(x\in\mathbf{R})$当 $x=n$ 时的函数值.

○ 任务型课堂 ○

任务1 等差数列的“奇偶项”

探究活动

例 1 项数为奇数的等差数列$\{a_n\}$奇数项之和为 44，偶数项之和为 33，求这个数列的中间项及项数.

解：设等差数列$\{a_n\}$共有$(2m+1)$项，则奇数项有$(m+1)$项，偶数项有 m 项，中间项是第$(m+1)$项，即 a_{m+1}，所以 $\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{\frac{1}{2}(a_1+a_{2m+1})(m+1)}{\frac{1}{2}(a_2+a_{2m})m}=\frac{(m+1)a_{m+1}}{ma_{m+1}}=\frac{m+1}{m}=\frac{44}{33}=\frac{4}{3}$，解得 $m=3$.

因为 $S_{奇}=(m+1)a_{m+1}=44$，

所以 $a_{m+1}=11$.

所以这个数列的中间项为 11，共有 $2m+1=7$(项).

［一题多思］

思考 1.已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，给出下列两个等式：

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1}=S_{奇}$，

$a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=S_{偶}$，

两式相减可得什么结果？

提示：两式相减得 $S_{奇}-S_{偶}=a_1+\underbrace{d+\cdots+d}_{n个}=a_1+nd=a_{n+1}$.

思考 2.若将本例的条件“项数为奇数”改为“项数为 100”，求这个数列的公差.

解：设数列$\{a_n\}$的公差为 d，则 $50d=33-44$，解得 $d=-\frac{11}{50}$.

【探究总结】

若等差数列的项数为 $2n(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $S_{2n}=n(a_n+a_{n+1})$，且 $S_{偶}-S_{奇}=nd$，$\frac{S_{偶}}{S_{奇}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$；若等差数列的项数为 $2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $S_{2n-1}=(2n-1)a_n$(a_n 为中间项)，且 $S_{奇}-S_{偶}=a_n$，$\frac{S_{偶}}{S_{奇}}=\frac{n-1}{n}$(其中 $S_{奇}=na_n$，$S_{偶}=(n-1)a_n$).

应用迁移

已知等差数列$\{a_n\}$的奇数项的和为 216，偶数项的和为 192，首项为 1，项数为奇数，求此数列的末项和通项公式.

解：设等差数列$\{a_n\}$的项数为 $2m+1$，公差为 d，则数列的中间项为 a_{m+1}，奇数项有$(m+1)$项，偶数项有 m 项.

依题意，有 $S_{奇}=(m+1)a_{m+1}=216$①，

$S_{偶}=ma_{m+1}=192$②.

①÷②，得$\frac{m+1}{m}=\frac{216}{192}$，解得 $m=8$，

所以数列$\{a_n\}$共有 $2m+1=17$(项).

把 $m=8$ 代入②，得 $a_9=24$.

又因为 $a_1+a_{17}=2a_9$，

所以末项为 $a_{17}=2a_9-a_1=47$，

公差 $d=\frac{a_{17}-a_9}{17-9}=\frac{23}{8}$，

故 $a_n=1+(n-1)\times\frac{23}{8}=\frac{23}{8}n-\frac{15}{8}$.

所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{23}{8}n-\frac{15}{8}(n\leqslant 17)$.

任务2 等差数列前 n 项和的最值问题

探究活动

例 2 记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $a_1=25$，$S_{17}=S_9$，则数列$\{a_n\}$的前多少项之和最大？求此最大值.

解：(方法一)设数列$\{a_n\}$的公差为 d.由$\begin{cases}a_1=25,\\S_{17}=S_9,\end{cases}$得 $17\times25+\frac{17\times16}{2}d=9\times25+\frac{9\times8}{2}d$，得 $d=-2$.

所以 $S_n=25n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-2)=-(n-13)^2+169$.

故当 $n=13$ 时，S_n 取得最大值 169.所以前 13 项之和

最大，最大值是 169.

（方法二）设数列$\{a_n\}$的公差为 d.由$\begin{cases}a_1=25,\\S_{17}=S_9,\end{cases}$得 $17\times25+\frac{17\times16}{2}d=9\times25+\frac{9\times8}{2}d$，得 $d=-2$.

又 $S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n(d<0)$，

所以 S_n 的图象是开口向下的抛物线上一群离散的点，最高点的横坐标为$\frac{9+17}{2}=13$，即 S_{13} 最大，最大值为 $25\times13+\frac{13\times12}{2}\times(-2)=169$.

（方法三）设数列$\{a_n\}$的公差为 d.因为 $S_{17}=S_9$，

所以 $a_{10}+a_{11}+\cdots+a_{17}=0$，

所以 $a_{10}+a_{17}=a_{11}+a_{16}=\cdots=a_{13}+a_{14}=a_1+a_{26}=0$.

因为 $a_1=25>0$，所以 $a_{26}=-25$，$d=-2$.

所以 $a_{13}>0$，$a_{14}<0$.

所以 S_{13} 最大，最大值为 $25\times13+\frac{13\times12}{2}\times(-2)=169$.

（方法四）设数列$\{a_n\}$的公差为 d.由$\begin{cases}a_1=25,\\S_{17}=S_9,\end{cases}$得 $17\times25+\frac{17\times16}{2}d=9\times25+\frac{9\times8}{2}d$，得 $d=-2$.

因为 $a_1=25>0$，

由$\begin{cases}a_n=25-2(n-1)\geqslant0,\\a_{n+1}=25-2n\leqslant0,\end{cases}$得$\begin{cases}n\leqslant13\frac{1}{2},\\n\geqslant12\frac{1}{2}.\end{cases}$

所以当 $n=13$ 时，S_n 有最大值，最大值为 $25\times13+\frac{13\times12}{2}\times(-2)=169$.

【探究总结】

求等差数列前 n 项和 S_n 最值的方法

(1)函数法：利用等差数列前 n 项和的函数表达式 $S_n=an^2+bn(a\neq0)$，通过配方或借助图象求二次函数最值的方法求解.

(2)邻项变号法：①若 $a_1>0$，$d<0$，则满足$\begin{cases}a_m\geqslant0,\\a_{m+1}\leqslant0\end{cases}$的项数 m 使得 S_n 取得最大值 S_m；

②若 $a_1<0$，$d>0$，则满足$\begin{cases}a_m\leqslant0,\\a_{m+1}\geqslant0\end{cases}$的项数 m 使得 S_n 取得最小值 S_m.

(3)一般地，在等差数列$\{a_n\}$中，若 $a_1>0$，且 $S_p=S_q(p\neq q)$，则

①若 $p+q$ 为偶数，则当 $n=\frac{p+q}{2}$ 时，S_n 最大；

②若 $p+q$ 为奇数，则当 $n=\frac{p+q-1}{2}$ 或 $n=\frac{p+q+1}{2}$ 时，S_n 最大.

应用迁移

1. 在等差数列$\{a_n\}$中，前 n 项和为 S_n，$a_1=29$，$S_{10}=S_{20}$，则 S_n 的最大值为（　　）

A.S_{15}　　B.S_{16}

C.S_{15}或 S_{16}　　D.S_{17}

A　**解析**：（方法一）设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

因为 $a_1=29$，$S_{10}=S_{20}$，

所以 $10a_1+\frac{10\times9}{2}d=20a_1+\frac{20\times19}{2}d$，解得 $d=-2$.

所以 $S_n=29n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-2)=-n^2+30n=-(n-15)^2+225$.所以当 $n=15$ 时，S_n 取得最大值.故选 A.

（方法二）由方法一得 $d=-2$.

因为 $a_1=29>0$，

由$\begin{cases}a_n=29-2(n-1)\geqslant0,\\a_{n+1}=29-2n\leqslant0,\end{cases}$得$\begin{cases}n\leqslant15\frac{1}{2},\\n\geqslant14\frac{1}{2}.\end{cases}$

所以当 $n=15$ 时，S_n 有最大值，即数列$\{a_n\}$的前 15 项和最大.故选 A.

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=7$，公差为 d，前 n 项和为 S_n，当且仅当 $n=8$ 时 S_n 取得最大值，则 d 的取值范围为________.

$\left(-1,-\frac{7}{8}\right)$　**解析**：由题意，当且仅当 $n=8$ 时 S_n 取得最大值，

可得$\begin{cases}d<0,\\a_8>0,\\a_9<0,\end{cases}$即$\begin{cases}d<0,\\7+7d>0,\\7+8d<0,\end{cases}$解得 $-1<d<-\frac{7}{8}$.

故 d 的取值范围为$\left(-1,-\frac{7}{8}\right)$.

任务3 与等差数列有关的前 n 项和问题

探究活动

例 3　(1)已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_3=3$，$S_4=10$，则$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=$________.

$\frac{2n}{n+1}$　**解析**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

由题意得$\begin{cases}a_1+2d=3,\\4a_1+\frac{4\times3}{2}d=10,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=1.\end{cases}$

所以数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=n\times1+\frac{n(n-1)}{2}\times1=\frac{n(n+1)}{2}$.

故$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+1)}$.

裂项可得$\frac{1}{S_k}=\frac{2}{k(k+1)}=2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$，

所以$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}$

$=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$

$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$.

(2)(2023·全国乙卷)记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，已知 $a_2=11$，$S_{10}=40$.

①求$\{a_n\}$的通项公式；

②求数列$\{|a_n|\}$的前 n 项和 T_n.

解：①设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

由题意可得$\begin{cases}a_2=a_1+d=11,\\S_{10}=10a_1+\frac{10\times9}{2}d=40,\end{cases}$

即$\begin{cases}a_1+d=11,\\2a_1+9d=8,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=13,\\d=-2.\end{cases}$

所以 $a_n=13-2(n-1)=15-2n$.

②由①可求得 $S_n=\frac{n(13+15-2n)}{2}=14n-n^2$.

令 $a_n=15-2n>0$，解得 $n<\frac{15}{2}$，且 $n\in\mathbf{N}^*$，

当 $n\leqslant7$ 时，$a_n>0$，则 $T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n=14n-n^2$；

当 $n\geqslant8$ 时，$a_n<0$，则 $T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=(a_1+a_2+\cdots+a_7)-(a_8+\cdots+a_n)=S_7-(S_n-S_7)=2S_7-S_n=2(14\times7-7^2)-(14n-n^2)=n^2-14n+98$.

综上所述，$T_n=\begin{cases}14n-n^2,n\leqslant7,\\n^2-14n+98,n\geqslant8.\end{cases}$

[**一题多思**]

思考 1. 若等差数列$\{a_n\}$的公差大于 0，$a_{10}<0$，$a_{11}>0$，则数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 与数列$\{|a_n|\}$的前 n 项和 T_n 有什么关系？

提示：易知当 $1\leqslant n\leqslant10$ 时，$a_n<0$，

当 $n\geqslant11$ 时，$a_n>0$.

所以 $T_n=\begin{cases}-S_n,1\leqslant n\leqslant10,\\-S_{10}+(S_n-S_{10}),n\geqslant11.\end{cases}$

思考 2. 若将本例(2)中的条件改为"数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=-\frac{3}{2}n^2+\frac{205}{2}n$"，如何解答？

解：当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=-\frac{3}{2}\times1^2+\frac{205}{2}\times1=101$，

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(-\frac{3}{2}n^2+\frac{205}{2}n\right)-\left[-\frac{3}{2}(n-1)^2+\frac{205}{2}(n-1)\right]=-3n+104$.

因为 $a_1=101$ 也满足上式，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=-3n+104$.

由 $a_n=-3n+104\geqslant0$，得 $n\leqslant\frac{104}{3}$.

即当 $n\leqslant34$ 时，$a_n>0$；

当 $n\geqslant35$ 时，$a_n<0$.

①当 $n\leqslant34$ 时，$T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n=-\frac{3}{2}n^2+\frac{205}{2}n$.

②当 $n\geqslant35$ 时，

$T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{34}|+|a_{35}|+\cdots+|a_n|$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_{34})-(a_{35}+a_{36}+\cdots+a_n)$

$=S_{34}-(S_n-S_{34})$

$=2S_{34}-S_n$

$=2\times\left(-\frac{3}{2}\times34^2+\frac{205}{2}\times34\right)-\left(-\frac{3}{2}n^2+\frac{205}{2}n\right)$

$=\frac{3}{2}n^2-\frac{205}{2}n+3\ 502$.

综上所述，$T_n=\begin{cases}-\frac{3}{2}n^2+\frac{205}{2}n,n\leqslant34,\\\frac{3}{2}n^2-\frac{205}{2}n+3\ 502,n\geqslant35.\end{cases}$

【探究总结】

特殊的求和方法——裂项相消法

把数列的通项拆成两项之差，即数列的每一项可按此方法拆成两项之差，在求和时一些正负项相抵消，于是前 n 项和变成首尾若干项之和，这一求和方法称为裂项相消法.

常见的拆项公式(其中 $n\in\mathbf{N}^*$)：

(1)$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$；

(2)$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$；

(3)$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$；

(4)若等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，则$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$，$\frac{1}{a_na_{n+2}}=\frac{1}{2d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$；

(5)$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$.

应用迁移

1. 计算：$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+99^2-100^2$.

解：$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+99^2-100^2$

$=(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+\cdots+(99^2-100^2)$

$=(1-2)\times(1+2)+(3-4)\times(3+4)+\cdots+(99-100)\times(99+100)$

$=-(1+2+3+4+\cdots+99+100)$

$=-5\ 050$.

2. 已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+1}$.

(1)若$b_n=\dfrac{1}{a_n}$，求证：$\{b_n\}$为等差数列；

(2)求数列$\{a_na_{n+1}\}$的前n项和S_n.

(1)**证明**：因为$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+1}$，

所以$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2a_n+1}{a_n}=2+\dfrac{1}{a_n}$，

即$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=2$，$b_{n+1}-b_n=2$.

又因为$b_1=\dfrac{1}{a_1}=1$，

所以$\{b_n\}$是以1为首项，2为公差的等差数列.

(2)**解**：由(1)可得$b_n=\dfrac{1}{a_n}=2n-1$，则$a_n=\dfrac{1}{2n-1}$，

所以$a_na_{n+1}=\dfrac{1}{2n-1}\cdot\dfrac{1}{2n+1}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，

所以$S_n=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{n}{2n+1}$.

提质归纳

- 等差数列的前n项和
  - 前n项和的性质
  - 前n项和的应用
    - $\{|a_n|\}$的前n项和
    - 等差数列前n项和S_n的最值
    - 裂项相消法

课后素养评价（六） 等差数列前n项和的应用

A组 学习·理解

1. 已知等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n，T_n.若$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{n+2}{3n+4}$，则$\dfrac{a_3+a_9}{b_4+b_6+b_8}=$（　　）

A.$\dfrac{13}{111}$　　B.$\dfrac{26}{37}$

C.$\dfrac{26}{111}$　　D.$\dfrac{13}{37}$

C　**解析**：由等差数列的性质可得

$\dfrac{a_3+a_9}{b_4+b_6+b_8}=\dfrac{2a_6}{3b_6}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{a_6}{b_6}$，$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{a_1+a_n}{b_1+b_n}=\dfrac{n+2}{3n+4}$，

则$\dfrac{S_{11}}{T_{11}}=\dfrac{a_6}{b_6}=\dfrac{11+2}{3\times11+4}=\dfrac{13}{37}$，即$\dfrac{a_6}{b_6}=\dfrac{13}{37}$.

所以$\dfrac{a_3+a_9}{b_4+b_6+b_8}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{a_6}{b_6}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{13}{37}=\dfrac{26}{111}$.

故选C.

2. 已知等差数列$\{a_n\}$的项数为$2m+1(m\in\mathbf{N}^*)$，其中奇数项之和为140，偶数项之和为120，则$m=$（　　）

A.6　　B.7

C.12　　D.13

A　**解析**：项数为$2m+1$的数列$\{a_n\}$中奇数项共有$(m+1)$项，其和为$\dfrac{(m+1)(a_1+a_{2m+1})}{2}=\dfrac{(m+1)\cdot2a_{m+1}}{2}=(m+1)a_{m+1}=140$，

项数为$2m+1$的数列$\{a_n\}$中偶数项共有m项，其和为$\dfrac{m(a_2+a_{2m})}{2}=\dfrac{m\cdot2a_{m+1}}{2}=ma_{m+1}=120$，

所以$\dfrac{(m+1)a_{m+1}}{ma_{m+1}}=\dfrac{140}{120}=\dfrac{7}{6}$，解得$m=6$.

故选A.

3. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=26-2n$.当此数列的前n项和S_n最大时，n的值为（　　）

A.12　　B.13

C.12或13　　D.14

C　**解析**：由$a_n\geqslant0$，得$n\leqslant13$，当$n=13$时，$a_n=0$，所以$S_{13}=S_{12}$最大.故选C.

4.（多选）已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2-4n+1$，则（　　）

A.$a_n=2n-5$

B.$\{a_n\}$不是等差数列

C.数列$\{a_n\}$中a_2最小

D.$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{10}|=67$

BD　**解析**：因为$S_n=n^2-4n+1$，当$n=1$时，$a_1=S_1=1^2-4\times1+1=-2$，

当$n\geqslant2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-4n+1-[(n-1)^2-4(n-1)+1]=2n-5(n\geqslant2)$，显然当$n=1$时，$a_n=2n-5$不成立，

所以$a_n=\begin{cases}-2,n=1,\\2n-5,n\geqslant2,\end{cases}$所以数列$\{a_n\}$从第二项起是以2为公差的等差数列，

故数列$\{a_n\}$不是等差数列，故A错误，B正确.

数列$\{a_n\}$从第二项起为递增的等差数列，又a_1

$<a_2$，

所以 a_1 为数列$\{a_n\}$中的最小项，故 C 错误.

因为 $a_1<a_2<0<a_3<\cdots<a_{10}$，所以

$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{10}|=-a_1-a_2+a_3+\cdots+a_{10}$

$=S_{10}-2(a_1+a_2)=-2+(-1)\times 9+\frac{9\times 8}{2}\times 2-2\times(-2-1)=67$，故 D 正确.

故选 BD.

5. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1>0$，$a_{10}\cdot a_{11}<0$.若此数列前 10 项和 $S_{10}=36$，前 18 项和 $S_{18}=12$，则数列$\{|a_n|\}$的前 18 项和 T_{18} 的值为________.

60　**解析**：因为 $a_1>0$，$a_{10}\cdot a_{11}<0$，

所以公差 $d<0$，$a_{10}>0$，$a_{11}<0$，

所以 $T_{18}=a_1+a_2+\cdots+a_{10}-(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{18})=S_{10}-(S_{18}-S_{10})=60$.

6. 已知等差数列$\{a_n\}$，$|a_5|=|a_9|$，公差 $d>0$，则使得其前 n 项和 S_n 取得最小值的正整数 n 的值是________.

6 或 7　**解析**：因为 $d>0$，$|a_5|=|a_9|$，所以 $a_5<0$，$a_9>0$，$-a_5=a_9$，即 $a_5+a_9=2a_7=0$.

所以 $a_7=0$，所以 $a_6<0$，$a_8>0$.

所以 $S_6=S_7$，为最小.

故使得前 n 项和 S_n 取得最小值的正整数 n 的值为 6 或 7.

7. 已知数列$\{a_n\}$为等差数列，其中 $a_2+a_3=8$，$a_5=3a_2$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)记 $b_n=\frac{2}{a_na_{n+1}}$，设$\{b_n\}$的前 n 项和为 S_n，求使得 $S_n>\frac{2\ 024}{2\ 025}$的正整数 n 的最小值.

解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

依题意有$\begin{cases}2a_1+3d=8,\\a_1+4d=3a_1+3d,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}$

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n-1$.

(2)因为 $b_n=\frac{2}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$，

所以 $S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=1-\frac{1}{2n+1}$.

令 $1-\frac{1}{2n+1}>\frac{2\ 024}{2\ 025}$，解得 $n>1\ 012$，故 $n=1\ 013$.

B组　应用·实践

1. 已知数列$\{a_n\}$是等差数列.若 $a_9+a_{12}>0$，$a_{10}\cdot a_{11}<0$，且数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 有最大值，则当 $S_n>0$ 时，n 的最大值为　　(　　)

A.10　　B.11　　C.20　　D.21

C　**解析**：由等差数列的性质可知，$a_9+a_{12}=a_{11}+a_{10}>0$.

因为 $a_{10}\cdot a_{11}<0$，所以 a_{10} 和 a_{11} 异号.

因为数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 有最大值，

所以数列$\{a_n\}$是递减的等差数列，

即 $a_{n+1}-a_n<0$，

所以 $a_{10}>0$，$a_{11}<0$，所以 $S_{21}=\frac{21(a_1+a_{21})}{2}=21a_{11}<0$，$S_{20}=\frac{20(a_1+a_{20})}{2}=10(a_9+a_{12})>0$，

所以当 $S_n>0$ 时，n 的最大值为 20.故选 C.

2. (多选)设 d，S_n 分别为等差数列$\{a_n\}$的公差与前 n 项和.若 $S_{10}=S_{20}$，则下列结论正确的有　　(　　)

A.当 $n=15$ 时，S_n 取得最大值

B.当 $n=30$ 时，$S_n=0$

C.当 $d>0$ 时，$a_{10}+a_{22}>0$

D.当 $d<0$ 时，$|a_{10}|>|a_{22}|$

BC　**解析**：因为 d，S_n 分别为等差数列$\{a_n\}$的公差与前 n 项和，$S_{10}=S_{20}$，

所以 $10a_1+\frac{10\times 9}{2}d=20a_1+\frac{20\times 19}{2}d$，

解得 $a_1=-\frac{29}{2}d$，

$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=-\frac{29}{2}nd+\frac{d}{2}n^2-\frac{d}{2}n=\frac{d}{2}(n-15)^2-\frac{225}{2}d$.

若 $d>0$，当 $n=15$ 时，S_n 取得最小值；若 $d<0$，当 $n=15$ 时，S_n 取得最大值，故 A 错误.

当 $n=30$ 时，$S_n=\frac{d}{2}(n-15)^2-\frac{225}{2}d=0$，故 B 正确.

当 $d>0$ 时，$a_{10}+a_{22}=2a_1+30d=d>0$，故 C 正确.

当 $d<0$ 时，$|a_{10}|=|a_1+9d|=-\frac{11}{2}d$，

$|a_{22}|=|a_1+21d|=-\frac{13}{2}d$，

所以$|a_{10}|<|a_{22}|$，故 D 错误.

故选 BC.

3. (多选)设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=-1$，$S_1=32$，则下列说法正确的是　　(　　)

A.$\{a_n\}$是等差数列

B.S_3，S_6-S_3，S_9-S_6 成等差数列，公差为 -9

C.当 $n=16$ 或 $n=17$ 时，S_n 取得最大值

D.当 $S_n\geqslant 0$ 时，n 的最大值为 33

ACD　**解析**：对于 A，由已知$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=-1$可得，数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是一个等差数列，首项$\frac{S_1}{1}=32$，公差为 -1，

所以$\frac{S_n}{n}=32+(n-1)\times(-1)=-n+33$,

所以 $S_n=-n^2+33n$.

当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=32$;

当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=-n^2+33n+(n-1)^2-33(n-1)=-2n+34$.

当 $n=1$ 时,$-2\times1+34=32=a_1$,满足上式.

综上所述,$a_n=-2n+34$.

所以,当 $n\geqslant2$ 时,$a_n-a_{n-1}=-2n+34+2(n-1)-34=-2$,所以$\{a_n\}$是等差数列,故 A 正确.

对于 B,设$\{a_n\}$的公差为 d,

由选项 A 知,$a_1=32$,$d=-2$,根据等差数列前 n 项和的性质可知,S_3,S_6-S_3,S_9-S_6 成等差数列,$S_9-S_6-(S_6-S_3)=S_6-S_3-S_3=3\times3d=-18$,故 B 错误.

对于 C,因为 $a_1=32>0$,$d=-2<0$,

要使 S_n 取得最大值,则应有$\begin{cases}a_n\geqslant0,\\a_{n+1}\leqslant0,\end{cases}$

即$\begin{cases}-2n+34\geqslant0,\\-2(n+1)+34\leqslant0,\end{cases}$解得 $16\leqslant n\leqslant17$.

又 $n\in\mathbf{N}^*$,所以当 $n=16$ 或 $n=17$ 时,S_n 取得最大值.故 C 正确.

对于 D,由选项 A 知,$S_n=-n^2+33n$,

令$-n^2+33n\geqslant0$,可得 $0\leqslant n\leqslant33$.

所以,当 $S_n\geqslant0$ 时,n 的最大值为 33.故 D 正确.

故选 ACD.

4.(多选)公差为 d 的等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,若 $S_{11}>0$,$S_{12}<0$,则下列说法正确的有( )

A.$d<0$

B.$a_7>0$

C.$\{S_n\}$中 S_5 最大

D.$|a_4|<|a_9|$

AD **解析**:由 $S_{11}=\frac{11(a_1+a_{11})}{2}=11a_6>0$,得 $a_6>0$.

又 $S_{12}=\frac{12(a_1+a_{12})}{2}=6(a_6+a_7)<0$,得 $a_6+a_7<0$,

所以 $a_6>0$,$a_7<0$,数列$\{a_n\}$是递减数列,其前 6 项为正数,从第 7 项起均为负数.

由以上分析可知,公差 $d<0$,故 A 正确;$a_7<0$,故 B 错误;前 6 项和最大,故 C 错误;

由 $a_4>0$,$a_9<0$,有$|a_4|-|a_9|=a_4+a_9=a_6+a_7<0$,则$|a_4|<|a_9|$,故 D 正确.

故选 AD.

5.若等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n,T_n,满足$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n-1}{3n+1}$,则$\frac{a_4}{b_4}=$________.

$\frac{13}{22}$ **解析**:依题意可得 $\frac{a_4}{b_4}=\frac{2a_4}{2b_4}=\frac{a_1+a_7}{b_1+b_7}=\frac{\frac{7}{2}(a_1+a_7)}{\frac{7}{2}(b_1+b_7)}=\frac{S_7}{T_7}=\frac{2\times7-1}{3\times7+1}=\frac{13}{22}$.

6.已知数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都是等差数列,$a_3=b_1=3$,$a_{15}=b_7=15$,设 $c_n=(-1)^{n-1}\cdot\frac{b_n}{a_na_{n+1}}$,则数列$\{c_n\}$的前 2 024 项和为________.

$\frac{2\ 024}{2\ 025}$ **解析**:设数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的公差分别为 d_a,d_b.

由已知得 $a_{15}-a_3=12d_a=12$,$b_7-b_1=6d_b=12$,

所以 $d_a=1$,$d_b=2$.

所以 $a_n=a_3+(n-3)d_a=n$,$b_n=b_1+(n-1)d_b=2n+1$.

所以 $c_n=(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$

$=(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$,

所以数列$\{c_n\}$的前 2 024 项和 $c_1+c_2+\cdots+c_{2\,024}=\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2\,023}+\frac{1}{2\,024}\right)-\left(\frac{1}{2\,024}+\frac{1}{2\,025}\right)=1-\frac{1}{2\,025}=\frac{2\,024}{2\,025}$.

7.设数列$\{a_n\}$的各项都为正数,其前 n 项和为 S_n.已知对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,S_n 是 a_n^2 和 a_n 的等差中项.

(1)证明:数列$\{a_n\}$为等差数列,并求 a_n;

(2)若 $b_n=-n+5$,求 $a_n\cdot b_n$ 的最大项,并求出此时 n 的值.

解:(1)由已知,得 $2S_n=a_n^2+a_n$,且 $a_n>0$.

当 $n=1$ 时,$2a_1=a_1^2+a_1$,解得 $a_1=1$.

当 $n\geqslant2$ 时,$2S_{n-1}=a_{n-1}^2+a_{n-1}$,

所以 $2S_n-2S_{n-1}=a_n^2-a_{n-1}^2+a_n-a_{n-1}$,

即 $2a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+a_n-a_{n-1}$,

即$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1})=a_n+a_{n-1}$.

因为 $a_n+a_{n-1}>0$,所以 $a_n-a_{n-1}=1(n\geqslant2)$.

故数列$\{a_n\}$是首项为 1,公差为 1 的等差数列,

所以 $a_n=n$.

(2)由(1)可知 $a_n=n$.设 $c_n=a_n\cdot b_n$,

则 $c_n=n(-n+5)=-n^2+5n=-\left(n-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$.

因为 $n\in\mathbf{N}^*$,所以当 $n=2$ 或 $n=3$ 时,$\{c_n\}$的最大项为 6.

故 $a_n\cdot b_n$ 的最大项为 6,此时 $n=2$ 或 $n=3$.

8.(2022·新高考全国Ⅰ卷)记 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和,已知 $a_1=1$,$\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是公差为$\frac{1}{3}$的等差数列.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)证明：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$.

(1)**解**：因为 $a_1=1$，所以 $S_1=a_1=1$，所以$\frac{S_1}{a_1}=1$.

因为$\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是公差为$\frac{1}{3}$的等差数列，

所以$\frac{S_n}{a_n}=1+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{n+2}{3}$，

所以 $S_n=\frac{(n+2)a_n}{3}$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=\frac{(n+1)a_{n-1}}{3}$，

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{(n+2)a_n}{3}-\frac{(n+1)a_{n-1}}{3}$，

整理得$(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}$，

又 $a_n\neq 0$，

则$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$，

所以 $a_n=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\frac{a_n}{a_{n-1}}=1\times\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\cdots\times\frac{n}{n-2}\times\frac{n+1}{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}$，即 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

显然上式对于 $n=1$ 也成立，

所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

(2)**证明**：由(1)得$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

所以$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$

$=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$

$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<2$.

易错强化训练（一）　数列和等差数列

练易错

易错点 1｜ 忽视数列是特殊的函数

[**防范要诀**]

数列的通项公式及前 n 项和公式都可看作定义域为正整数集或其子集的函数，要善于运用函数的观点认识和理解数列问题.

[**对点集训**]

1.设 $a_n=-n^2+5n-6$，则数列$\{a_n\}$中的最大项的值是　(　　)

A.$\frac{16}{3}$　　B.$\frac{13}{3}$　　C.$\frac{3}{4}$　　D.0

D　**解析**：数列的通项公式对应的二次函数图象的对称轴为直线 $n=\frac{5}{2}\notin\mathbf{N}^*$.

所以当 $n=2$ 或 $n=3$ 时，a_n 取最大值，$a_2=a_3=0$.

2.(多选)已知数列$\{x_n\}$满足 $x_1=a$，$x_2=b$，$x_{n+1}=x_n-x_{n-1}(n\geqslant 2)$，则下列结论正确的是　(　　)

A.$x_{2\,022}=a$

B.$x_{2\,023}=a-b$

C.$x_{13}=x_{2\,023}$

D.$x_1+x_2+\cdots+x_{2\,023}=a$

CD　**解析**：$x_1=a$，$x_2=b$，$x_3=x_2-x_1=b-a$，$x_4=x_3-x_2=-a$，$x_5=x_4-x_3=-b$，$x_6=x_5-x_4=a-b$，$x_7=x_6-x_5=a=x_1$，$x_8=x_7-x_6=b=x_2$，所以$\{x_n\}$是周期数列，周期为 6，所以 $x_{2\,022}=x_6=a-b$，A 不正确；$x_{2\,023}=x_1=a$，B 不正确；$x_{2\,023}=x_1=x_{13}$，C 正确；因为$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=0$，所以 $x_1+x_2+\cdots+x_{2\,023}=x_1=a$，D 正确.

3.(多选)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_n=\begin{cases}(3-t)n-3, n\leqslant 7,\\ t^{n-6}, n>7\end{cases}$$(n\in\mathbf{N}^*)$，且数列$\{a_n\}$是递增数列，则实数 t 的可能取值是　(　　)

A.2　　B.$\frac{9}{4}$

C.$\frac{11}{4}$　　D.3

BC　**解析**：因为 $a_n=f(n)=\begin{cases}(3-t)n-3, n\leqslant 7,\\ t^{n-6}, n>7\end{cases}$$(n\in\mathbf{N}^*)$，$\{a_n\}$是递增数列，

所以$\begin{cases}3-t>0,\\ t>1,\\ (3-t)\times 7-3<t^{8-6},\end{cases}$ 即$\begin{cases}t<3,\\ t>1,\\ t>2 \text{ 或 } t<-9,\end{cases}$

解得 $2<t<3$.故选 BC.

易错点 2｜ 不能正确进行 a_n 与 S_n 互化

[**防范要诀**]

凡是已知 S_n 的表达式或 S_n 与 a_n 的关系式，都需要用到当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$；另外，也不要忽视检验 $n=1$ 是否也适合由 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 所得公式.

[**对点集训**]

4.(多选)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n^2-5n$，则下列说法正确的是　(　　)

A.$\{a_n\}$为等差数列

B.$a_n>0$

C.S_n 的最小值为$-\frac{21}{4}$

D.$\{a_n\}$为递增数列

AD **解析**:当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=1-5=-4$,
当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-5n-[(n-1)^2-5(n-1)]=2n-6$.
当 $n=1$ 时,$a_1=-4$ 满足上式,
所以 $a_n=2n-6$.
由于 $a_n-a_{n-1}=2(n\geqslant 2)$,所以数列$\{a_n\}$是首项为$-4$,公差为2的等差数列.
因为公差大于零,所以$\{a_n\}$为递增数列,所以A,D正确,B错误.
由于 $S_n=n^2-5n=\left(n-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$,而 $n\in\mathbf{N}^*$,所以当 $n=2$ 或 $n=3$ 时,S_n 取得最小值,且最小值为-6,所以C错误.
故选AD.

5.已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n^2+1$,则数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=$________.

$\begin{cases}2,n=1,\\2n-1,n\geqslant 2\end{cases}$ **解析**:因为 $S_n=n^2+1$,
所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+1-[(n-1)^2+1]=2n-1(n\geqslant 2)$.当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=2$ 不符合上式.
所以 $a_n=\begin{cases}2,n=1,\\2n-1,n\geqslant 2.\end{cases}$

易错点3| 对等差数列的定义理解不透

[防范要诀]

使用等差数列的定义时容易出现以下错误:(1)对定义中“从第二项起”理解有误,常常忽略首项;(2)忽略“任意”,误认为验证有限个相邻两项的差是常数即得等差数列;(3)误认为任意相邻两项的差就是等差数列的公差.

[对点集训]

6.已知数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_2=2$,$2a_{n+1}=2a_n+3(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$,判断$\{a_n\}$是否是等差数列,并说明理由.

解:$\{a_n\}$不是等差数列.理由如下:当 $n\geqslant 2$ 时,由 $2a_{n+1}=2a_n+3$,得 $a_{n+1}-a_n=\frac{3}{2}$.但 $a_2-a_1=1\neq\frac{3}{2}$,所以数列$\{a_n\}$不是等差数列.

7.已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=\frac{1}{4}(a_n+1)^2$,且 $a_n>0$.求$\{a_n\}$的通项公式.

解:因为 $S_n=\frac{1}{4}(a_n+1)^2$,
所以当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{4}(a_n+1)^2-\frac{1}{4}(a_{n-1}+1)^2$.
所以 $a_n^2-a_{n-1}^2-2a_n-2a_{n-1}=0$.
所以$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$.
因为 $a_n>0$,所以 $a_n-a_{n-1}=2(n\geqslant 2)$.
所以$\{a_n\}$是公差为2的等差数列.
当 $n=1$ 时,$S_1=a_1=\frac{1}{4}(a_1+1)^2$.
所以 $a_1^2-2a_1+1=0$.
所以 $a_1=1$.所以 $a_n=2n-1$.

练疑难

1.在数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_n\cdot a_{n-1}=a_{n-1}+(-1)^n(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$,则 a_3 的值是 ( )

A.$\frac{1}{2}$　B.$\frac{2}{3}$　C.$\frac{3}{4}$　D.1

A **解析**:因为在数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_n\cdot a_{n-1}=a_{n-1}+(-1)^n(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$,
所以 $a_2\times 1=1+(-1)^2=1+1=2$,即 $a_2=2$,
所以 $a_3\times 2=2+(-1)^3=2-1=1$,所以 $a_3=\frac{1}{2}$.

2.若 $\lg 2,\lg(2^x-1),\lg(2^x+3)$ 成等差数列,则 x 的值为 ( )

A.0　B.$\log_2 5$
C.32　D.0或32

B **解析**:依题意得 $2\lg(2^x-1)=\lg 2+\lg(2^x+3)$,
所以$(2^x-1)^2=2(2^x+3)$,所以$(2^x)^2-4\cdot 2^x-5=0$,
则$(2^x-5)(2^x+1)=0$,
解得 $2^x=5$ 或 $2^x=-1$(舍),
所以 $x=\log_2 5$.

3.已知$\{a_n\}$为等差数列,首项为$\frac{1}{25}$,数列$\{a_n\}$从第10项开始比1大,那么公差 d 的取值范围是 ( )

A.$d>\frac{8}{75}$　B.$d<\frac{3}{25}$
C.$\frac{8}{75}<d<\frac{3}{25}$　D.$\frac{8}{75}<d\leqslant\frac{3}{25}$

D **解析**:由题可得 $a_1=\frac{1}{25}$,且$\begin{cases}a_{10}>1,\\a_9\leqslant 1,\end{cases}$
根据等差数列的通项公式可得$\begin{cases}\frac{1}{25}+9d>1,\\\frac{1}{25}+8d\leqslant 1,\end{cases}$
解得$\frac{8}{75}<d\leqslant\frac{3}{25}$.

4.(多选)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n(S_n\neq 0)$,且满足 $a_n+4S_{n-1}S_n=0(n\geqslant 2)$,$a_1=\frac{1}{4}$,则下列说法正确的是 ( )

A.数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=\frac{1}{4n}$

B.数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{1}{4n(n-1)}$

C.数列$\{a_n\}$为递增数列

D.数列$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$为递增数列

AD　**解析**:因为 $a_n+4S_{n-1}S_n=0(n\geqslant2)$,所以 $S_n-S_{n-1}+4S_{n-1}S_n=0(n\geqslant2)$.因为 $S_n\neq0$,所以$\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n-1}}=4(n\geqslant2)$.因此数列$\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$是以$\dfrac{1}{S_1}=\dfrac{1}{a_1}=4$为首项,4为公差的等差数列,且是递增数列,所以$\dfrac{1}{S_n}=4+4(n-1)=4n$,所以$S_n=\dfrac{1}{4n}$,故A,D正确;当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{1}{4n}-\dfrac{1}{4(n-1)}=-\dfrac{1}{4n(n-1)}$,当$n=1$时,$a_1=\dfrac{1}{4}$不满足上式,所以

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{4},n=1,\\-\dfrac{1}{4n(n-1)},n\geqslant2,\end{cases}$$

故B,C不正确.故选AD.

5.已知等差数列$\{a_n\}$,$a_n=2n-9$,则$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{10}|=$________.

52　**解析**:由$a_n=2n-9$,可知$a_1=-7,d=2$.由$a_n\geqslant0$,得$n\geqslant4.5$,所以前4项为负,以后各项均为正,所以$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{10}|=-(a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_5+\cdots+a_{10})=-S_4+S_{10}-S_4=S_{10}-2S_4=-7\times10+\dfrac{10\times9}{2}\times2-2\left(-7\times4+\dfrac{4\times3}{2}\times2\right)=52$.

6.数列$\{a_n\}$满足递推关系$a_n=3a_{n-1}+3^n-1(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant2)$,$a_1=5$,则使得数列$\left\{\dfrac{a_n+m}{3^n}\right\}$为等差数列的实数$m$的值为________.

$-\dfrac{1}{2}$　**解析**:$a_1=5$,$a_2=3\times5+3^2-1=23$,

$a_3=3\times23+3^3-1=95$,

依题意得$\dfrac{5+m}{3},\dfrac{23+m}{3^2},\dfrac{95+m}{3^3}$为等差数列,

所以$2\times\dfrac{23+m}{3^2}=\dfrac{5+m}{3}+\dfrac{95+m}{3^3}$,

解得$m=-\dfrac{1}{2}$.经检验$m=-\dfrac{1}{2}$满足题设.

7.已知S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和,b_n为数列$\{S_n\}$的前n项积,$\dfrac{1}{S_n}+\dfrac{2}{b_n}=1$.

(1)证明:数列$\{b_n\}$是等差数列;

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

(1)**证明**:当$n=1$时,$b_1=S_1$,即$\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{2}{b_1}=1$,解得$b_1=3$.

当$n\geqslant2$时,$S_n=\dfrac{b_n}{b_{n-1}}$,所以$\dfrac{1}{S_n}+\dfrac{2}{b_n}=\dfrac{b_{n-1}}{b_n}+\dfrac{2}{b_n}=\dfrac{b_{n-1}+2}{b_n}=1$,所以$b_n-b_{n-1}=2$,

故数列$\{b_n\}$是以$b_1=3$为首项,公差为2的等差数列.

(2)**解**:由(1)知$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=2n+1$,

所以当$n\geqslant2$时,$S_n=\dfrac{2n+1}{2n-1}=1+\dfrac{2}{2n-1}$,

当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{2}{2n-1}-\dfrac{2}{2n-3}=\dfrac{-4}{(2n-1)(2n-3)}$.

又因为$a_1=S_1=3$,不满足上式,

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=\begin{cases}3,n=1,\\\dfrac{-4}{(2n-1)(2n-3)},n\geqslant2.\end{cases}$$

8.已知函数$f(x)=2^x-2^{-x}$,数列$\{a_n\}$满足$f(\log_2a_n)=-2n$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)证明:数列$\{a_n\}$是递减数列.

(1)**解**:因为$f(x)=2^x-2^{-x}$,$f(\log_2a_n)=-2n$,

所以$2^{\log_2a_n}-2^{-\log_2a_n}=-2n$,

即$a_n-\dfrac{1}{a_n}=-2n$,所以$a_n^2+2na_n-1=0$,

解得$a_n=-n\pm\sqrt{n^2+1}$.

因为$a_n>0$,所以$a_n=\sqrt{n^2+1}-n$.

(2)**证明**:$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\sqrt{(n+1)^2+1}-(n+1)}{\sqrt{n^2+1}-n}=\dfrac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{(n+1)^2+1}+(n+1)}<1$.

又$a_n>0$,所以$a_{n+1}<a_n$,故数列$\{a_n\}$是递减数列.

4.3 等比数列

4.3.1 等比数列的概念

第1课时 等比数列的概念

学习任务目标

1.理解等比数列及等比中项的概念.
2.掌握等比数列的通项公式,能运用公式解决相关问题.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一 等比数列、等比中项的概念

等比数列	一般地,如果一个数列从第2项起,每一项与它的前一项的比都等于同一个常数,那么这个数列叫做等比数列,这个常数叫做等比数列的公比,公比通常用字母q表示(显然$q\neq0$)
等比中项	如果在a与b中间插入一个数G,使a,G,b成等比数列,那么G叫做a与b的等比中项.此时,$G^2=ab$

知识点二 等比数列的通项公式

(1)首项为a_1,公比为q的等比数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_1q^{n-1}$.

(2)第n项与第m项的关系为$a_n=a_mq^{n-m}$,变形得$q^{n-m}=\dfrac{a_n}{a_m}$.

(3)由$a_n=\dfrac{a_1}{q}\cdot q^n$可知,当$q>0$且$q\neq1$时,等比数列$\{a_n\}$的第$n$项$a_n$是函数$f(x)=\dfrac{a_1}{q}\cdot q^x(x\in\mathbf{R})$当$x=n$时的函数值,即$a_n=f(n)$.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)等比数列中不存在数值为0的项. (√)

(2)常数列$a,a,a,a,\cdots$一定是等比数列. (×)

(3)若$a_n=\begin{cases}3,n=1,\\2^{n-1},n\geqslant2,\end{cases}$则数列$\{a_n\}$是等比数列. ( )

× 提示:第2项与第1项的比是$\dfrac{2}{3}$,从第3项开始每一项与前一项的比都是2,不符合等比数列的定义.

(4)任何两个实数都有等比中项. (×)

2.已知$1,\sqrt{2},2,\cdots$为等比数列,当$a_n=8\sqrt{2}$时,正整数$n=$ ( )

A.6 B.7 C.8 D.9

C 解析:由题意知首项$a_1=1$,公比$q=\sqrt{2}$,$a_n=8\sqrt{2}=(\sqrt{2})^7$,故$n-1=7$,即$n=8$.故选C.

3.请思考并回答下列问题:

(1)有既是等差数列又是等比数列的数列吗?若有,是什么数列?

提示:有.非零常数列既是等差数列又是等比数列.

(2)等比数列的公比可以是任意实数吗?

提示:不可以.等比数列的公比可以是正数、负数,但不能为零.

(3)若数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}^*)$,那么$\{a_n\}$是等比数列吗?

提示:不一定.当$a_1=0$时,按所给递推关系式,该数列为常数列,且常数为0,此时$\{a_n\}$不是等比数列.

(4)已知数列$\{a_n\}$为等比数列,若$a_1=2,a_5=8$,则$a_3=\pm4$是否正确?

提示:不正确.设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,则可得$q^4=\dfrac{a_5}{a_1}=4$,解得$q^2=2$,所以$a_3=a_1q^2=2\times2=4$.

○ 任务型课堂 ○

任务1 > 等比数列的概念

1.在公差不为0的等差数列$\{a_n\}$中,a_3,a_7,a_m是公比为2的等比数列,则$m=$ ( )

A.11 B.13 C.15 D.17

C 解析:设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,则$d\neq0$.

因为a_3,a_7,a_m是公比为2的等比数列,

所以$\dfrac{a_1+6d}{a_1+2d}=2$①,

$\dfrac{a_1+(m-1)d}{a_1+6d}=2$②.

由①得$a_1=2d$,代入②,解得$m=15$.

故选C.

2.从集合$\{1,2,3,\cdots,10\}$中任意选出三个不同的数,使得这三个数成等比数列,则这样的等比数列的个数是 ( )

A.8 B.10 C.12 D.16

A 解析:当公比为2时,等比数列可为1,2,4或

2,4,8;当公比为 3 时,等比数列可为 1,3,9;当公比为$\frac{3}{2}$时,等比数列可为 4,6,9.同时,以上数列反向排列也是等比数列.综上,共 8 个等比数列.故选 A.

3.下列数列一定是等比数列的是 (　　)

A.$m,m^2,m^3,m^4,\cdots$

B.$2^2,4^2,6^2,8^2,\cdots$

C.$q-1,(q-1)^2,(q-1)^3,(q-1)^4,\cdots$

D.$\frac{1}{a},\frac{1}{a^2},\frac{1}{a^3},\frac{1}{a^4},\cdots$

D　**解析**:当 $m=0,q=1$ 时,A,C 均不是等比数列;$\frac{6^2}{4^2}\neq\frac{4^2}{2^2}$,所以 B 不是等比数列.故选 D.

4.下列数列是等比数列的有________.(填序号)

①$1,\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{9},\frac{1}{12},\cdots$;

②$10,10,10,10,10,\cdots$;

③$\frac{2}{3},\left(\frac{2}{3}\right)^2,\left(\frac{2}{3}\right)^3,\left(\frac{2}{3}\right)^4,\cdots$;

④$1,0,1,0,1,0,\cdots$;

⑤$1,-4,16,-64,256,\cdots$.

②③⑤　**解析**:①中$\frac{\frac{1}{3}}{1}\neq\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}$,故不是等比数列;②是等比数列,公比为 1;③是等比数列,公比为$\frac{2}{3}$;④中有数 0,故不是等比数列;⑤是等比数列,公比为-4.

【探究总结】

等比数列概念的理解

等比数列从第 2 项起,每一项与它的前一项的比都等于同一个常数,且等比数列中任意一项都不能为 0,对于含参数的数列需要分类讨论.

任务2 > 等比数列的通项公式与等比中项

探究活动

例 1　(1)在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,公比 $q\neq\pm1$.若 $a_m=a_2a_3$,则 m 等于 (　　)

A.2　　B.3

C.4　　D.5

C　**解析**:由 $a_m=a_2a_3$,得 $a_1q^{m-1}=a_1q\cdot a_1q^2$.

因为 $a_1=1$,所以 $q^{m-1}=q^3$.

又因为 $q\neq\pm1,q\neq0$,所以 $m-1=3$,解得 $m=4$.故选 C.

(2)若数列$-1,a,b,c,-9$ 为等比数列,则实数 b 的值为 (　　)

A.-3

B.3

C.±3

D.不能确定

A　**解析**:因为$-1,a,b,c,-9$ 成等比数列,

所以$-1,a,b$ 成等比数列,a,b,c 成等比数列,$b,c,-9$成等比数列.

所以 $a^2=-b,b^2=ac,c^2=-9b$.

所以 $b^4=a^2c^2=(-1)\times(-9)b^2$,所以 $b^2=9$.

又 $a^2=-b>0$,所以 $b<0$.所以 $b=-3$.故选 A.

(3)已知数列$\{a_n\}$是等比数列.

①若 $a_2=4,a_5=-\frac{1}{2}$,求 a_n;

②若 $a_2+a_5=18,a_3+a_6=9,a_n=1$,求 n.

解:设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q.

①根据题意,可知$\begin{cases}a_2=a_1q=4,\\a_5=a_1q^4=-\frac{1}{2},\end{cases}$

所以$\begin{cases}q=-\frac{1}{2},\\a_1=-8.\end{cases}$

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=-8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(-2)^{4-n}$.

②因为 $a_3+a_6=(a_2+a_5)q$,

即 $9=18q$,所以 $q=\frac{1}{2}$.

由 $a_1q+a_1q^4=18$,得 $a_1=32$.

由 $a_n=a_1q^{n-1}=1$,得 $n=6$.

【探究总结】

对等比中项的理解

(1)在一个等比数列中,从第 2 项起,每一项(有穷数列的末项除外)都是它的前一项与后一项的等比中项.

(2)“a,G,b 成等比数列”等价于“$G^2=ab$(a,b 均不为 0)”,可以用它来判断或证明三个数成等比数列.应注意“a,G,b 成等比数列”与“$G=\sqrt{ab}$”不是等价的.

(3)当 a,b 同号时,a,b 的等比中项有两个,且它们互为相反数;当 a,b 异号时,a,b 没有等比中项.

应用迁移

1.已知等比数列$\{a_n\}$.

(1)若 $a_3=9,a_6=243$,求 a_5;

(2)若 $a_1=\frac{9}{8},a_n=\frac{1}{3}$,公比 $q=\frac{2}{3}$,求 n;

(3)若 $a_3+a_6=36,a_4+a_7=18,a_n=\frac{1}{2}$,求 n.

解:设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q.

(1)因为 $a_6=a_3q^3$,即 $243=9\cdot q^3$,

所以 $q^3=27$,所以 $q=3$.

所以 $a_5=a_6\times\frac{1}{3}=81$.

(2)因为 $a_n=a_1q^{n-1}$,

所以$\frac{1}{3}=\frac{9}{8}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$,所以$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^3$,

所以 $n=4$.

(3)(方法一)因为 $a_3+a_6=36, a_4+a_7=18$，

所以 $\begin{cases}a_1q^2+a_1q^5=36①,\\a_1q^3+a_1q^6=18②.\end{cases}$

②÷①得 $q=\frac{1}{2}$，代入①得 $a_1=128$.

而 $a_n=a_1q^{n-1}$，所以 $\frac{1}{2}=128\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，

所以 $n=9$.

(方法二)$q=\frac{a_4+a_7}{a_3+a_6}=\frac{1}{2}$，

$a_3+a_6=a_3+a_3\cdot q^3=a_3(1+q^3)=36$，

所以 $a_3=\frac{36}{1+q^3}=32$.

因为 $a_n=a_3q^{n-3}$，

所以 $\frac{1}{2}=32\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$，

所以 $n=9$.

2. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前三项和为 168，$a_2-a_5=42$，求 a_5, a_7 的等比中项.

解：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q.

由已知得 $\begin{cases}a_1+a_1q+a_1q^2=168,\\a_1q-a_1q^4=42,\end{cases}$

整理得 $\begin{cases}a_1(1+q+q^2)=168①,\\a_1q(1-q^3)=42②.\end{cases}$

②÷①得 $q(1-q)=\frac{1}{4}$，所以 $q=\frac{1}{2}$.

所以 $a_1=\dfrac{42}{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^4}=96$.

设 G 是 a_5, a_7 的等比中项，

则应有 $G^2=a_5a_7=a_1q^4\cdot a_1q^6=a_1^2\cdot q^{10}$，

所以 $G^2=96^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=9$，

所以 $G=\pm3$.

所以 a_5, a_7 的等比中项是 ±3.

任务3 几个数成等比数列的设法

探究活动

例 2 有四个实数，前三个数成等比数列，后三个数成等差数列，前三个数之积为 27，中间两个数之和为 9，求这四个数.

解：设前三个数分别为 $\frac{a}{q}, a, aq(a\neq0, q\neq0)$，则第四个数为 $2aq-a$.

由题意得 $\begin{cases}\frac{a}{q}\cdot a\cdot aq=27,\\a+aq=9,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=3,\\q=2.\end{cases}$

所以这四个数分别为 $\frac{3}{2}, 3, 6, 9$.

[一题多思]

思考 1. 四个数成等比数列，这四个数通常可设为什么形式？

提示：可设为 $a, aq, aq^2, aq^3(q\neq0)$. 若四个正数成等比数列，可设为 $\frac{a}{q^3}, \frac{a}{q}, aq, aq^3(q\neq0)$.

思考 2. 若将本例(2)中四个数满足的条件改为“前三个数成等差数列，后三个数成等比数列，中间两个数之积为 16，首尾两个数之积为 −128”，求这四个数.

解：设这四个数分别为 $\frac{2a}{q}-a, \frac{a}{q}, a, aq(a\neq0, q\neq0)$，由题意得 $\begin{cases}\frac{a^2}{q}=16,\\\left(\frac{2a}{q}-a\right)\cdot aq=-128,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=8,\\q=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-8,\\q=4\end{cases}$ ($q=-2$ 舍去).

因此所求的四个数为 $-4, 2, 8, 32$ 或 $4, -2, -8, -32$.

【探究总结】

几个数成等比数列的设法

1. 三个成等比数列的数可设为 $\frac{a}{q}, a, aq$.

推广到一般：奇数个成等比数列的数可设为 $\cdots, \frac{a}{q^2}, \frac{a}{q}, a, aq, aq^2, \cdots$.

2. 四个符号相同的成等比数列的数可设为 $\frac{a}{q^3}, \frac{a}{q}, aq, aq^3$.

推广到一般：偶数个符号相同的成等比数列的数可设为 $\cdots, \frac{a}{q^5}, \frac{a}{q^3}, \frac{a}{q}, aq, aq^3, aq^5, \cdots$.

3. 四个数成等比数列，不能确定它们的符号相同时，可设为 a, aq, aq^2, aq^3.

应用迁移

有四个数，其中前三个数成等差数列，后三个数成等比数列，并且第一个数与第四个数的和是 16，第二个数与第三个数的和是 12，求这四个数.

解：(方法一)设这四个数依次为 $a-d, a, a+d, \frac{(a+d)^2}{a}$ ($a\neq0$, $a+d\neq0$)，由条件得 $\begin{cases}a-d+\frac{(a+d)^2}{a}=16,\\a+a+d=12,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=4,\\d=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=9,\\d=-6.\end{cases}$

当 $a=4, d=4$ 时，所求的四个数分别为 0，4，8，16；

当 $a=9, d=-6$ 时，所求的四个数分别为 15，9，3，1.

故所求的四个数分别为 0,4,8,16 或 15,9,3,1.

(方法二)设这四个数依次为 $\frac{2a}{q}-a$，$\frac{a}{q}$，a，$aq(a\neq0$，$q\neq0)$，

由条件得 $\begin{cases}\frac{2a}{q}-a+aq=16,\\ \frac{a}{q}+a=12,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=8,\\ q=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=3,\\ q=\frac{1}{3}.\end{cases}$

当 $a=8$，$q=2$ 时，所求的四个数分别为 0,4,8,16；

当 $a=3$，$q=\frac{1}{3}$ 时，所求的四个数分别为 15,9,3,1.

故所求的四个数分别为 0,4,8,16 或 15,9,3,1.

提质归纳

- 等比数列的概念
  - 定义
    - 一个数列从第2项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个常数
    - 递推关系
  - 通项公式
    - $a_n=a_1q^{n-1}$
    - $a_n=a_mq^{n-m}$
    - $a_n=\frac{a_1}{q}\cdot q^n$
  - 等比中项
    - 若a,G,b成等比数列，则G叫做a与b的等比中项，此时，$G^2=ab$

课后素养评价（七）　等比数列的概念

A组　学习·理解

1.在等比数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1=32$，公比 $q=-\frac{1}{2}$，则 a_6 等于　(　　)

A.1　　B.$-\frac{1}{2}$　　C.-1　　D.$\frac{1}{2}$

C　**解析**：$a_6=32\times\left(-\frac{1}{2}\right)^5=-1$.故选 C.

2.$2-\sqrt{3}$ 与 $2+\sqrt{3}$ 的等比中项是　(　　)

A.1　　B.-1

C.2　　D.-1 或 1

D　**解析**：由题意可设 $2-\sqrt{3}$ 与 $2+\sqrt{3}$ 的等比中项是 m，则 $m^2=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$，解得 $m=-1$ 或 $m=1$.故选 D.

3.在等比数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1=2$，公比$q=2$，若 $a_n=16$，则 n 为　(　　)

A.2　　B.3

C.4　　D.5

C　**解析**：根据 $a_n=a_1q^{n-1}$，得 $16=2\times2^{n-1}$，解得 $n=4$.故选 C.

4.对任意等比数列$\{a_n\}$，下列说法一定正确的是　(　　)

A.a_1，a_3，a_9 成等比数列

B.a_2，a_3，a_6 成等比数列

C.a_2，a_4，a_8 成等比数列

D.a_3，a_6，a_9 成等比数列

D　**解析**：由等比数列的性质得 $a_3\cdot a_9=a_6^2\neq0$，因此 a_3，a_6，a_9 一定成等比数列.

故选 D.

5.(多选)在等比数列$\{a_n\}$中，已知 $a_3+a_4=40$，$a_3-a_5=30$，则　(　　)

A.公比为$\frac{1}{4}$

B.$a_{2\,023}=16a_{2\,025}$

C.当 $n\geqslant6$ 时，$a_n<\frac{1}{2}$

D.$\{a_n\}$的前 10 项积为 1

ABD　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q.对于 A，由 $\begin{cases}a_3+a_4=40,\\ a_3-a_5=30,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a_3+a_3q=40,\\ a_3-a_3q^2=30,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}q=\frac{1}{4},\\ a_3=32,\end{cases}$ 故 A 正确；

对于 B，$a_{2\,025}=a_{2\,023}q^2=\frac{1}{16}a_{2\,023}$，则 $a_{2\,023}=16a_{2\,025}$，故 B 正确；

对于 C，$a_n=a_3q^{n-3}=2^{11-2n}$，当 $n\geqslant6$ 时，$11-2n\leqslant-1$，则 $a_n\leqslant2^{-1}=\frac{1}{2}$，故 C 错误；

对于 D，由 $a_5a_6=2\times\frac{1}{2}=1$，可得$\{a_n\}$的前 10 项积为$(a_5a_6)^5=1$，故 D 正确.

故选 ABD.

6."$m=3$"是"1，m，9 成等比数列"的　(　　)

A.必要不充分条件

B.充分不必要条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

B　**解析**：1，m，9 成等比数列，等价于 $m^2=1\times9$，解得 $m=\pm3$.

而"$m=3$"是"$m=\pm3$"的充分不必要条件，

所以"$m=3$"是"1，m，9 成等比数列"的充分不必要条件.

故选 B.

7.已知 a,b,c,d 成等比数列，给出下列三个数列：① a^2,b^2,c^2,d^2；② ab,bc,cd；③ $a-b,b-c,c-d$.其中一定是等比数列的数列个数为 （　）

A.0　B.1　C.2　D.3

C　**解析**：若 a,b,c,d 成等比数列，设公比为 q，则 a,b,c,d 均不为 0，且 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=q$，

则 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2}{b^2}=\frac{d^2}{c^2}=q^2$，故 a^2,b^2,c^2,d^2 成等比数列，且公比为 q^2；

$\frac{bc}{ab}=\frac{c}{a}=q^2$，$\frac{cd}{bc}=\frac{d}{b}=q^2$，因此 ab,bc,cd 成等比数列，且公比为 q^2；

$a-b=a(1-q)$，$b-c=b(1-q)=aq(1-q)$，$c-d=c(1-q)=aq^2(1-q)$，当 $q\neq1$ 时，$a-b,b-c,c-d$ 成等比数列，且公比为 q，但当 $q=1$ 时，$a-b,b-c,c-d$ 不是等比数列.故选 C.

8.已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比不为 1，且 a_3,a_2,a_4 成等差数列，则数列 $\{a_n\}$ 的公比为________.

-2　**解析**：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q\neq1)$.

由已知条件可知 $2a_2=a_4+a_3$，

又 $a_3=a_2\cdot q$，$a_4=a_2\cdot q^2$，且 $a_n\neq0$，代入到 $2a_2=a_4+a_3$，

可得 $2a_2=a_2\cdot q^2+a_2\cdot q$，

化简得 $q^2+q-2=(q-1)(q+2)=0$，

解得 $q=-2$ 或 $q=1$（舍）.

9.在 320 与 5 之间插入 5 个数，使这 7 个数成等比数列，求所插入的 5 个数.

解：设所成的等比数列的公比为 q，则 $5=320q^6$，即 $q^6=\frac{1}{64}$，解得 $q=\pm\frac{1}{2}$.

当 $q=\frac{1}{2}$ 时，插入的 5 个数为 160，80，40，20，10；

当 $q=-\frac{1}{2}$ 时，插入的 5 个数为 -160，80，-40，20，-10.

B组　应用·实践

1.已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，则“公比 $q>1$”是“$\{a_n\}$ 为递增数列”的 （　）

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

D　**解析**：等比数列 $\{a_n\}$ 为递增数列的充要条件是 $\begin{cases}a_1>0,\\q>1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1<0,\\0<q<1.\end{cases}$ 故“公比 $q>1$”是“$\{a_n\}$ 为递增数列”的既不充分也不必要条件.故选 D.

2.（多选）已知 a,b,c 为非零实数，则下列说法一定正确的有 （　）

A.若 a,b,c 成等差数列，则 a^2,b^2,c^2 成等差数列

B.若 a,b,c 成等比数列，则 $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ 成等比数列

C.若 a,b,c 成等差数列，则 $2^a,2^b,2^c$ 成等比数列

D.若 a^2,b^2,c^2 成等比数列，则 a,b,c 成等比数列

BC　**解析**：对于 A，1，2，3 是等差数列，但是 1，4，9 不是等差数列，故 A 不正确；

对于 B，a,b,c 成等比数列，则 $b^2=ac$，所以 $\left(\frac{1}{b}\right)^2=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{c}$，所以 $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ 成等比数列，故 B 正确；

对于 C，a,b,c 成等差数列，所以 $2b=a+c$，所以 $2^{2b}=2^{a+c}$，即 $(2^b)^2=2^a\cdot2^c$，故 C 正确；

对于 D，a^2,b^2,c^2 成等比数列，所以 $(b^2)^2=a^2c^2$，所以 $b^2=ac$ 或 $b^2=-ac$，若 $b^2=-ac$，则 a,b,c 不成等比数列，故 D 不正确.

故选 BC.

3.（多选）将 25 个数排成 5 行 5 列：

$$\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45}\\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55}\end{matrix}$$

已知第一行 $a_{11},a_{12},a_{13},a_{14},a_{15}$ 成公差为 d 的等差数列，而每一列 $a_{1j},a_{2j},a_{3j},a_{4j},a_{5j}(1\leqslant j\leqslant5)$ 都成公比为 q 的等比数列.若 $a_{24}=2$，$a_{41}=-1$，$a_{43}=5$，则下列结论一定正确的是 （　）

A.$d=\frac{3}{8}$

B.$q=\pm2$

C.$a_{22}\cdot a_{44}=\frac{8}{3}$

D.$a_{44}=8$

ABD　**解析**：因为第一行 $a_{11},a_{12},a_{13},a_{14},a_{15}$ 成公差为 d 的等差数列，每列成公比为 q 的等比数列，

则 $a_{24}=2=a_{14}q=(a_{11}+3d)q$，$a_{41}=-1=a_{11}q^3$，$a_{43}=5=a_{13}q^3=(a_{11}+2d)q^3$，

联立以上式子，可解得 $2q^2=-1+9=8$，即 $q=\pm2$.

故 B 正确.

将 $q=\pm2$ 代入前面式子，

当 $q=2$ 时，$d=\frac{3}{8}$，$a_{11}=-\frac{1}{8}$，$a_{12}=\frac{1}{4}$，$a_{13}=\frac{5}{8}$，$a_{14}=1$，$a_{15}=\frac{11}{8}$，

此时 $a_{44}=a_{14}q^3=1\times2^3=8$，

$a_{22}=a_{12}q=\frac{1}{4}\times2=\frac{1}{2}$，

则 $a_{22}\cdot a_{44}=\frac{1}{2}\times8=4\neq\frac{8}{3}$；

当 $q=-2$ 时，$d=-\frac{3}{8}$，$a_{11}=\frac{1}{8}$，$a_{12}=-\frac{1}{4}$，$a_{13}=$

$-\frac{5}{8}$，$a_{14}=-1$，$a_{15}=-\frac{11}{8}$，此时 $a_{44}=a_{14}q^3=8$，$a_{22}=a_{12}q=\frac{1}{2}$，则 $a_{22}a_{44}=\frac{1}{2}\times 8=4\neq\frac{8}{3}$.

综上可得 C 错误，A，B，D 正确.

故选 BD.

4.在数列$\{a_n\}$中，$a_1=4$，$a_{n+1}=3a_n-2$，则 $a_n=$________.

3^n+1　**解析**：因为 $a_{n+1}=3a_n-2(n\in\mathbf{N}^*)$，$a_1=4$，所以 $a_{n+1}-1=3(a_n-1)$，所以$\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}=3$，所以数列$\{a_n-1\}$是首项为 3，公比为 3 的等比数列，所以 $a_n-1=3\cdot 3^{n-1}=3^n$，所以 $a_n=3^n+1$.

5.已知一个等比数列的各项均为正数，且数列中的任何一项都等于它后面两项的和，则该数列的公比 $q=$________.

$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$　**解析**：设该等比数列为$\{a_n\}$，公比为 q.依题意，得 $a_n=a_{n+1}+a_{n+2}$，所以 $a_n=a_nq+a_nq^2$.

因为 $a_n>0$，所以 $q^2+q-1=0$，

解得 $q=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\left(q=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}舍去\right)$.

6.在各项均为正偶数的数列 a_1,a_2,a_3,a_4 中，前 3 项成公差为 $d(d>0)$的等差数列，后 3 项成公比为 q 的等比数列.若 $a_4-a_1=88$，求 q 的所有可能的值构成的集合.

解：易知四个数依次为 a_1,a_1+d,a_1+2d,a_1+88，其中 a_1,d 为正偶数.

因为后 3 项成公比为 q 的等比数列，

所以$(a_1+2d)^2=(a_1+d)(a_1+88)$，整理得 $a_1=\frac{4d(22-d)}{3d-88}>0$，

所以$(d-22)(3d-88)<0$，解得 $22<d<\frac{88}{3}$，

所以 d 可能的值为 24，26，28.

当 $d=24$ 时，$a_1=12$，$q=\frac{5}{3}$；

当 $d=26$ 时，$a_1=\frac{208}{5}$(舍去)；

当 $d=28$ 时，$a_1=168$，$q=\frac{8}{7}$.

综上可得，q 的所有可能的值构成的集合为$\left\{\frac{5}{3},\frac{8}{7}\right\}$.

第 2 课时　等比数列的性质及应用

学习任务目标

1.掌握等比数列的判定和证明方法.
2.能够根据等比数列的定义和通项公式推出等比数列的常用性质，并运用性质解决有关问题.
3.能够运用等比数列的知识解决简单的实际问题.

◦ 问题式预习 ◦

【知识清单】

知识点一　等比数列的性质

(1)若 $m+n=p+q(m,n,p,q\in\mathbf{N}^*)$，则$a_m\cdot a_n=$$\underline{a_p\cdot a_q}$；

若 $m+n=2k(m,n,k\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_k^2=a_m\cdot a_n$.

(2)若数列$\{a_n\}$是等比数列，则$\{|a_n|\}$，$\{a_n^2\}$，$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$仍为$\underline{等比}$数列.

(3)若数列$\{a_n\}$是等差数列，则$\{b^{a_n}\}$为等比数列，其中 $b\neq0$.

(4)若数列$\{a_n\}$(各项均为正数)是等比数列，则$\{\log_b a_n\}$为$\underline{等差}$数列，其中 $b>0$ 且 $b\neq1$.

知识点二　等比数列性质的应用

一般来说，当三个数成等比数列时，可设这三个数分别为 a,aq,aq^2 或$\frac{a}{q}$，a,aq，此时公比为$\underline{q}$；当四个数成等比数列时，可设这四个数分别为 a,aq,aq^2,aq^3，公比为 q；当四个数均为正(负)数时，可设为$\frac{a}{q^3}$，$\frac{a}{q}$，aq,aq^3，公比为$\underline{q^2}$.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)在等比数列$\{a_n\}$中，若 $a_ma_n=a_pa_q$，则 $m+n=p+q$.　(×)

(2)若数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都是等比数列，则数列$\{a_n+b_n\}$也一定是等比数列.　(×)

(3)若数列$\{a_n\}$是等比数列，则数列$\{\lambda a_n\}$也是等比数列.　(×)

2.在等比数列$\{a_n\}$中，若 $a_2a_8=9$，则 $a_3a_7=$　(　　)

A.3　　B.±3

C.9　　D.±9

C　**解析**：因为 $2+8=3+7$，所以 $a_3a_7=a_2a_8=9$.故选 C.

3.请思考并回答下列问题：

（1）等差数列的单调性只与其公差有关，等比数列的单调性是否只与其公比有关呢？

提示：等比数列的单调性与其首项 a_1 和公比 q 都有关系：

当 $q>1,a_1>0$ 或 $0<q<1,a_1<0$ 时，$\{a_n\}$ 是递增数列；

当 $q>1,a_1<0$ 或 $0<q<1,a_1>0$ 时，$\{a_n\}$ 是递减数列；

当 $q=1$ 时，$\{a_n\}$ 是常数列；当 $q<0$ 时，$\{a_n\}$ 是摆动数列.

（2）若 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $m+n=p(m,n,p\in\mathbf{N}^*)$，$a_ma_n=a_p$ 一定成立吗？

提示：不一定.例如等比数列 1,2,4,8,… 中，$a_1\cdot a_3\neq a_4$.

（3）从公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 中依次取相邻两项的乘积组成新的数列 $a_1a_2,a_2a_3,a_3a_4,\cdots$.新数列是公比为 $2q$ 的等比数列吗？

提示：不是.由于 $\dfrac{a_na_{n+1}}{a_{n-1}a_n}=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q\cdot q=q^2$，$n\geqslant2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $\{a_na_{n+1}\}$ 是以 q^2 为公比的等比数列.

○ 任务型课堂 ○

任务1 > 等比数列的性质

1.在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_3=\dfrac{1}{2}$，$a_9=2$，则 $a_{15}=$________.

8　**解析：**因为 $a_3a_{15}=a_9^2$，所以 $a_{15}=\dfrac{a_9^2}{a_3}=\dfrac{2^2}{\frac{1}{2}}=8$.

2.已知公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$，$a_5+a_9=q$，则 $a_6(a_2+2a_6+a_{10})$ 的值为________.

1　**解析：**因为 $a_5+a_9=q$，所以 $a_4+a_8=1$.

所以 $a_6(a_2+2a_6+a_{10})=a_6a_2+2a_6^2+a_6a_{10}=a_4^2+2a_4a_8+a_8^2=(a_4+a_8)^2=1$.

3.在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_7a_{11}=6$，$a_4+a_{14}=5$，求 $\dfrac{a_{20}}{a_{10}}$.

解：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q.

因为 $a_7a_{11}=a_4a_{14}=6$，$a_4+a_{14}=5$，

所以 $\begin{cases}a_4=2,\\a_{14}=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_4=3,\\a_{14}=2.\end{cases}$ 所以 $q^{10}=\dfrac{3}{2}$ 或 $q^{10}=\dfrac{2}{3}$.

因为 $\dfrac{a_{20}}{a_{10}}=q^{10}$，所以 $\dfrac{a_{20}}{a_{10}}$ 的值为 $\dfrac{3}{2}$ 或 $\dfrac{2}{3}$.

【探究总结】

（1）解答等比数列问题的基本方法——基本量法

①基本思路：运用方程思想列出基本量 a_1 和 q 的方程组，求出 a_1 和 q，然后利用通项公式求解；

②优缺点：适用面广，入手简单，思路清晰，但有时运算比较复杂.

（2）利用等比数列的性质解题

①基本思路：充分发挥项的“下标”的作用，分析等比数列项与项之间的关系，选择恰当的性质解题；

②优缺点：简便快捷，但适用面窄.

任务2 > 等比数列的判定和证明

探究活动

例1　数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}S_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，求证：数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 为等比数列.

证明：易知 $S_n\neq0$. 因为 $\dfrac{S_{n+1}}{n+1}=\dfrac{S_n+a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{S_n+\frac{n+2}{n}S_n}{n+1}=\dfrac{\frac{2n+2}{n}S_n}{n+1}=2\times\dfrac{S_n}{n}$，所以 $\dfrac{\frac{S_{n+1}}{n+1}}{\frac{S_n}{n}}=2$.

又 $\dfrac{S_1}{1}=\dfrac{a_1}{1}=1$，

所以数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列.

［一题多思］

思考1.本例中为了证明数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 为等比数列，需要先推出一个什么样的等式？为了得到这个等式，如何将已知条件变形？

提示：先推出 $\dfrac{S_{n+1}}{n+1}$ 与 $\dfrac{S_n}{n}$ 的关系式.

将 $a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}S_n$ 变为 $S_{n+1}-S_n=\dfrac{n+2}{n}S_n$，

所以 $S_{n+1}=\dfrac{2n+2}{n}S_n=\dfrac{2(n+1)}{n}S_n$，则 $\dfrac{S_{n+1}}{n+1}=2\cdot\dfrac{S_n}{n}$.

思考2.将本例中数列 $\{a_n\}$ 满足的条件变为“$a_1=2$，$a_{n+1}=4a_n-3n+1(n\in\mathbf{N}^*)$”.证明：数列 $\{a_n-n\}$ 是等比数列.

证明：由 $a_{n+1}=4a_n-3n+1$，得 $a_{n+1}-(n+1)=4(a_n-n)$，$n\in\mathbf{N}^*$.

因为 $a_1-1=1\neq0$，所以 $a_n-n\neq0$，

所以 $\dfrac{a_{n+1}-(n+1)}{a_n-n}=4$，

所以数列 $\{a_n-n\}$ 是以 1 为首项，4 为公比的等比数列.

思考3.若将本例中数列 $\{a_n\}$ 满足的条件变为“$a_1=-2$，$a_{n+1}=2a_n+3$”.试利用此条件构造一个等比数列，进而求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：因为 $a_{n+1}=2a_n+3$，

所以 $a_{n+1}+3=2a_n+6=2(a_n+3)$.

因为 $a_1=-2$,所以 $a_1+3=1$,所以 $a_n+3\neq0$.

所以$\dfrac{a_{n+1}+3}{a_n+3}=2$,

所以$\{a_n+3\}$是以 1 为首项,2 为公比的等比数列.

所以 $a_n+3=1\times2^{n-1}$,所以 $a_n=2^{n-1}-3$.

【探究总结】

判定一个数列是等比数列的方法

(1)定义法:若数列$\{a_n\}$满足$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$(q 为常数且不为 0)或$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=q$($n\geqslant2$,q 为常数且不为 0),则数列$\{a_n\}$是等比数列.

(2)等比中项法:对于数列$\{a_n\}$,若 $a_{n+1}^2=a_n\cdot a_{n+2}$ 且$a_n\neq0$,则数列$\{a_n\}$是等比数列.

(3)通项公式法:若数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=a_1q^{n-1}$($a_1\neq0,q\neq0$),则数列$\{a_n\}$是等比数列.

应用迁移

数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $S_n=2(a_n-1)$.

(1)求证:数列$\{a_n\}$为等比数列;

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

(1)**证明**:因为 $S_n=2(a_n-1)$①,

所以当 $n\geqslant2$ 时,$S_{n-1}=2(a_{n-1}-1)$②.

①-②,得 $a_n=2a_n-2a_{n-1}$,即 $a_n=2a_{n-1}$③.

又当 $n=1$ 时,$a_1=2(a_1-1)$,即 $a_1=2\neq0$,所以 $a_n\neq0$.由③可得$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2(n\geqslant2)$,

则数列$\{a_n\}$为以 2 为首项,2 为公比的等比数列.

(2)**解**:由(1)知 $a_n=2^n$.

任务3 等比数列的实际应用

探究活动

例 2 (1)一种专门占据内存的计算机病毒开始时占据内存 2 KB,然后每 3 min 自动复制一次,复制后所占内存是原来的 2 倍,那么开机后________min,该病毒占据内存 64 MB.(1 MB=2^{10} KB)

45 **解析**:3 min 后占据内存 2^2 KB,两个 3 min 后占据内存 2^3 KB,三个 3 min 后占据内存 2^4 KB,…,n 个 3 min 后占据内存为 2^{n+1} KB.令 $2^{n+1}=64\times2^{10}=2^{16}$,得 $n=15$.又 $15\times3=45$(min),故开机后 45 min,该病毒占据内存 64 MB.

(2)某渔场养鱼,第一年鱼的产量增长率为 200%,以后每年的产量增长率都是上一年增长率的一半.

①当饲养五年后,鱼的产量预计是原来的多少倍?

②如果由于某种原因,每年的损失是预计产量的 10%,那么经过多少年后,鱼的产量开始减少?

解:①设鱼原来的产量为 a,n 年后鱼的产量为 a_n,则

$a_1=a\times(1+2)=3a$,

$a_2=3a\times(1+1)=6a$,

$a_3=6a\times\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=9a$,

$a_4=9a\times\left(1+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{45}{4}a$,

$a_5=\dfrac{45}{4}a\times\left(1+\dfrac{1}{8}\right)=\dfrac{405}{32}a$.

所以,五年后鱼的产量是原来的$\dfrac{405}{32}=12\dfrac{21}{32}$倍.

②设 n 年后鱼的实际产量为 b_n,则

$b_{n+1}=b_n\left(1+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)\times\dfrac{9}{10}$.

由 $b_n>b_{n+1}$,得 $1>\left(1+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)\times\dfrac{9}{10}$.

即 $2^{n-1}>9$,解得 $n\geqslant5$.

因此,从第五年开始,鱼的产量开始减少.

【探究总结】

求解等比数列实际应用问题的关键点

求解此类问题应先把实际问题转化为等比数列问题,在建立等比数列模型后,往往要进行指数运算,要注意运算的准确性.对于近似计算问题,答案要符合题设中实际问题的需要.

应用迁移

某种放射性物质不断变化为其他物质,每经过一年,剩余的物质质量是原来的 84%,这种物质的半衰期(放射性物质质量衰减到原来的一半所需要的时间称为该物质的半衰期)为多长?(参考数据:lg 0.5≈-0.301 0,lg 0.84≈-0.075 7,精确到 1 年)

解:设这种物质最初的质量是 1,经过 n 年,剩余质量是 a_n.由条件可得,数列$\{a_n\}$是一个等比数列,其中 $a_1=0.84$,$q=0.84$.设 $a_n=0.5$,则 $0.84^n=0.5$,两边取常用对数,得 $n=\dfrac{\lg 0.5}{\lg 0.84}\approx4$.

故这种物质的半衰期大约为 4 年.

任务4 等比数列与等差数列的综合应用

探究活动

例 3 已知$\{a_n\}$为等差数列,$a_1=1$ 且公差 $d\neq0$,a_4 是 a_2 和 a_8 的等比中项.

(1)若数列$\{a_n\}$的前 m 项和 $S_m=66$,求 m 的值;

(2)若 $a_1,a_2,a_{k_1},a_{k_2},\cdots,a_{k_n}$ 成等比数列,求数列$\{k_n\}$的通项公式.

解:(1)因为$\{a_n\}$是等差数列,

所以 $a_2=a_1+d$,$a_4=a_1+3d$,$a_8=a_1+7d$.

因为 a_4 是 a_2 和 a_8 的等比中项,

所以 $a_4^2=a_2\cdot a_8$,所以$(a_1+3d)^2=(a_1+d)\cdot(a_1+7d)$.

又 $d\neq0$,化简得 $d=a_1=1$,所以 $a_n=n$.

由 $S_m=\dfrac{m(m+1)}{2}=66$,解得 $m=11$.

(2)因为 $a_1,a_2,a_{k_1},a_{k_2},\cdots,a_{k_n}$ 成等比数列,

所以该数列的公比 $q=\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{2}{1}=2$,所以 $a_{k_n}=1\times$

$2^{(n+2)-1}=2^{n+1}$.

又因为$\{a_n\}$为等差数列,所以 $a_{k_n}=2^{n+1}=k_n$,

所以 $k_n=2^{n+1}$.

【探究总结】

解决等差数列与等比数列的综合问题
应注意的四个方面

(1)灵活应用等差数列、等比数列的公式和性质.

(2)注意基本量及方程思想的应用.

(3)注重问题的转化,利用非等差数列、非等比数列构造出新的等差数列或等比数列,以便利用等差数列、等比数列的公式和性质解题.

(4)当题中出现多个数列时,既要纵向考虑单一数列的项与项之间的关系,又要横向考虑各数列之间的内在联系.

应用迁移

1. 在公比大于 0 的等比数列$\{a_n\}$中,已知 $a_3a_5=a_4$,且 $a_2,3a_4,a_3$ 成等差数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

(2)已知 $S_n=a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n$,当 n 为何值时,S_n 取得最大值? 并求 S_n 的最大值.

解:(1)设数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q>0)$,

由 $a_3a_5=a_4=a_4^2$,得 $a_4=1$.

因为 $a_2,3a_4,a_3$ 成等差数列,

所以 $a_2+a_3=6a_4$,

则 $6q^2-q-1=0$,

解得 $q=\frac{1}{2}$(负值舍去),所以 $a_1=8$.

所以 $a_n=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{4-n}$.

(2)$S_n=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=2^{3+2+1+\cdots+(4-n)}=2^{\frac{(7-n)n}{2}}$.

因为 $\frac{(7-n)n}{2}=-\frac{1}{2}\left(n-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{49}{8}$,

所以当 $n=3$ 或 $n=4$ 时,S_n 取得最大值,此时最大值为 $S_3=S_4=2^6=64$.

2. 数列$\{a_n\}$的前 n 项和记为 S_n,$a_1=1$,$a_{n+1}=2S_n+1(n\geqslant1)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)等差数列$\{b_n\}$的各项均为正数,其前 n 项和为 T_n,且 $T_3=15$,又 a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3 成等比数列,求 T_n.

解:(1)由 $a_{n+1}=2S_n+1$,

可得 $a_n=2S_{n-1}+1(n\geqslant2)$.

两式相减,得 $a_{n+1}-a_n=2a_n$,即 $a_{n+1}=3a_n(n\geqslant2)$.

又因为 $a_2=2S_1+1=3$,所以 $a_2=3a_1$.

故$\{a_n\}$是以 1 为首项,3 为公比的等比数列,

所以 $a_n=3^{n-1}$.

(2)设$\{b_n\}$的公差为 d.

由 $T_3=15$,得 $b_1+b_2+b_3=15$,可得 $b_2=5$,

故 $b_1=5-d,b_3=5+d$.

又 $a_1=1,a_2=3,a_3=9$,

由题意可得$(5-d+1)(5+d+9)=(5+3)^2$,

解得 $d=2$ 或 $d=-10$.

因为等差数列$\{b_n\}$的各项均为正数,

所以 $d>0$.

所以 $d=2$.所以 $b_1=3$.

所以 $T_n=3n+\frac{n(n-1)}{2}\times2=n^2+2n$.

提质归纳

等比数列的性质及应用
- 性质
- 性质的应用
- 实际应用

课后素养评价(八) 等比数列的性质及应用

A组 学习·理解

1. 公比不为 1 的等比数列$\{a_n\}$满足 $a_5a_6+a_4a_7=8$.若 $a_2a_m=4$,则 m 的值为 ( )

A.8 B.9 C.10 D.11

B **解析**:因为公比不为 1 的等比数列$\{a_n\}$满足 $a_5a_6+a_4a_7=8$,所以 $a_5a_6=a_4a_7=4$.

因为 $a_2a_m=4$,所以 $2+m=5+6=11$,解得 $m=9$.故选 B.

2. 已知等比数列$\{a_n\}$的公比 q 为正数,且$a_3a_9=2a_5^2$,$a_2=1$,则 $a_1=$ ( )

A.$\frac{1}{2}$ B.$\frac{\sqrt{2}}{2}$ C.$\sqrt{2}$ D.2

B **解析**:因为 $a_3a_9=a_6^2=2a_5^2$,且 $q>0$,所以 $a_6=\sqrt{2}a_5$,所以 $q=\sqrt{2}$.因为 $a_2=a_1q=1$,所以 $a_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$.故选 B.

3. 已知$\{a_n\}$为等比数列,$a_4+a_7=2$,$a_5a_6=-8$,则 $a_{10}=$ ( )

A.1 B.-1

C.1 或-8 D.-8

C **解析**:因为$\{a_n\}$为等比数列,设公比为 q,由 $a_4+a_7=2,a_5a_6=a_4a_7=-8$,所以 $a_4=4,a_7=-2$,

或 $a_4=-2,a_7=4$.

当 $a_4=4,a_7=-2$ 时,$q^3=\frac{a_7}{a_4}=-\frac{1}{2}$,则 $a_{10}=a_4q^6=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=1$;

当 $a_4=-2,a_7=4$ 时,$q^3=\frac{a_7}{a_4}=-2$,则 $a_{10}=a_4q^6=(-2)\times(-2)^2=-8$.

综上,a_{10}的值为 1 或−8.故选 C.

4.一个蜂巢有 1 只蜜蜂,第一天,它飞出去找回了 5 个伙伴;第二天,6 只蜜蜂飞出去,各自找回了 5 个伙伴……如果这个找伙伴的过程继续下去,第六天所有的蜜蜂都归巢后,蜂巢中蜜蜂的只数为（　　）

A.55 989　　B.46 656

C.216　　D.36

B　**解析**:设第 n 天蜂巢中的蜜蜂数量为 a_n,根据题意得数列$\{a_n\}$为等比数列,它的首项 $a_1=6$,公比 $q=6$,所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=6\times6^{n-1}=6^n$,到第六天,所有的蜜蜂都归巢后,蜂巢中一共有 $a_6=6^6=46\ 656$(只)蜜蜂.

5.(多选)已知数列$\{a_n\}$为等比数列,下列结论正确的是（　　）

A.数列$\{a_n+a_{n+1}\}$为等比数列

B.数列$\{a_na_{n+1}\}$为等比数列

C.数列$\{\lg|a_na_{n+1}|\}$为等差数列

D.数列$\{\lg(|a_n|+|a_{n+1}|)\}$为等差数列

BCD　**解析**:设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q.

对于 A,当 $q=-1$ 时,$a_n+a_{n+1}=0$,故 A 错误;

对于 B,$a_na_{n+1}=a_1q^{n-1}\cdot a_1q^n=a_1^2q\cdot(q^2)^{n-1}$,所以$\frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=q^2$,$\{a_na_{n+1}\}$是等比数列,故 B 正确;

对于 C,$\lg|a_{n+1}a_{n+2}|-\lg|a_na_{n+1}|=\lg\left|\frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}\right|=\lg|q^2|=2\lg|q|$,$\{\lg|a_n\cdot a_{n+1}|\}$是等差数列,故 C 正确;

对于 D,$\lg(|a_{n+1}|+|a_{n+2}|)-\lg(|a_n|+|a_{n+1}|)=\lg\frac{|a_{n+1}|+|a_{n+2}|}{|a_n|+|a_{n+1}|}=\lg\frac{|a_1q^n|+|a_1q^{n+1}|}{|a_1q^{n-1}|+|a_1q^n|}=\lg\frac{|a_1q^n|(1+|q|)}{|a_1q^{n-1}|(1+|q|)}=\lg|q|$,$\{\lg(|a_n|+|a_{n+1}|)\}$是等差数列,故 D 正确.

故选 BCD.

6.已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且满足 $a_1=2,2S_n=a_{n+1}+2$,则$\{a_n\}$的通项公式为__________.

$a_n=\begin{cases}2,n=1,\\2\times3^{n-2},n\geqslant2\end{cases}$　**解析**:当 $n=1$ 时,$2S_1=2a_1=a_2+2$,因为 $a_1=2$,所以 $a_2=2$,

当 $n\geqslant2$ 时,$2S_{n-1}=a_n+2$,

则 $2a_n=2S_n-2S_{n-1}=a_{n+1}-a_n$,

即 $3a_n=a_{n+1}$,$\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$.

又$\frac{a_2}{a_1}=1\neq3$,

所以$\{a_n\}$从第 2 项起构成首项为 $a_2=2$,公比为 3 的等比数列,

则 $a_n=2\times3^{n-2},n\geqslant2$.

所以 $a_n=\begin{cases}2,n=1,\\2\times3^{n-2},n\geqslant2.\end{cases}$

7.已知数列$\{a_n\}$满足 $\log_3a_n+1=\log_3a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$,且 $a_2+a_4+a_6=9$,则 $\log_{\frac{1}{3}}(a_5+a_7+a_9)$的值为________.

-5　**解析**:因为 $\log_3a_n+1=\log_3a_{n+1}$,

所以 $\log_3a_{n+1}-\log_3a_n=1$,所以 $\log_3\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$,

所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$,所以$\{a_n\}$是公比 $q=3$ 的等比数列.

所以 $\log_{\frac{1}{3}}(a_5+a_7+a_9)=\log_{\frac{1}{3}}[(a_2+a_4+a_6)q^3]=\log_{\frac{1}{3}}(9\times27)=-5$.

8.设公比不为 1 的等比数列$\{a_n\}$满足$a_1a_2a_3=-\frac{1}{8}$,且 a_2,a_4,a_3成等差数列,求 a_1.

解:设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q\neq1)$,

因为 $a_1a_2a_3=a_2^3=-\frac{1}{8}$,所以 $a_2=-\frac{1}{2}$.

因为 a_2,a_4,a_3 成等差数列,所以 $2a_4=a_2+a_3$.

所以 $2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot q^2=-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot q$,

解得 $q=-\frac{1}{2}$ 或 $q=1$(舍).

所以 $a_1=\frac{a_2}{q}=1$.

9.已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=3,a_{n+1}=3a_n-4n+2,n\in\mathbf{N}^*$.

(1)证明:$\{a_n-2n\}$是等比数列;

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

(1)**证明**:由 $a_{n+1}=3a_n-4n+2$,

得 $a_{n+1}-2(n+1)=3a_n-6n=3(a_n-2n)$.

又因为 $a_1-2=1$,

所以$\{a_n-2n\}$是以 1 为首项,3 为公比的等比数列.

(2)**解**:由(1)知 $a_n-2n=3^{n-1}$,

则 $a_n=3^{n-1}+2n$.

B组　应用·实践

1.在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,公比 $q\neq\pm1$.若 $a_m=a_1a_2a_3a_4a_5$,则 m 等于（　　）

A.9　　B.10　　C.11　　D.12

C　**解析**:因为 $a_m=a_1a_2a_3a_4a_5=a_3^5=q^{10}=a_{11}$,所以 $m=11$.故选 C.

2.(多选)已知递增等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,则下列

说法正确的是（　　）

A.当 $a_1>0$ 时，$q>1$

B.当 $a_1>0$ 时，$q<0$

C.当 $a_1<0$ 时，$0<q<1$

D.$\frac{a_n}{a_{n+1}}<1$

AC　**解析**：对于 A，当 $a_1>0,q>1$ 时，从第二项起，数列的每一项都大于前一项，所以数列$\{a_n\}$为递增数列，故 A 正确.

对于 B，当 $a_1>0,q<0$ 时，$\{a_n\}$为摆动数列，故 B 错误.

对于 C，当 $a_1<0,0<q<1$ 时，数列$\{a_n\}$为递增数列，故 C 正确.

对于 D，$a_{n+1}-a_n=a_1q^{n-1}(q-1)>0$，当 $a_1>0$ 时，$q>1$，此时 $0<\frac{a_n}{a_{n+1}}<1$；当 $a_1<0$ 时，$0<q<1$，$\frac{a_n}{a_{n+1}}>1$，故 D 错误.

故选 AC.

3.（多选）已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，公差为 d，正项等比数列$\{b_n\}$的前 n 项积为 T_n，公比为 q，下列结论错误的是（　　）

A.若 S_n 有最大值，则 $d<0$

B.若 $d<0$，则 S_n 有最大值

C.若 $T_{2\,024}>T_{2\,023}$，则 $q>1$

D.若 $T_{2\,024}<T_{2\,023}$，则 $T_{2\,025}<T_{2\,024}$

ACD　**解析**：当 $a_1<0,d=0$ 时，S_1 最大，此时 $d=0$，故 A 错误；

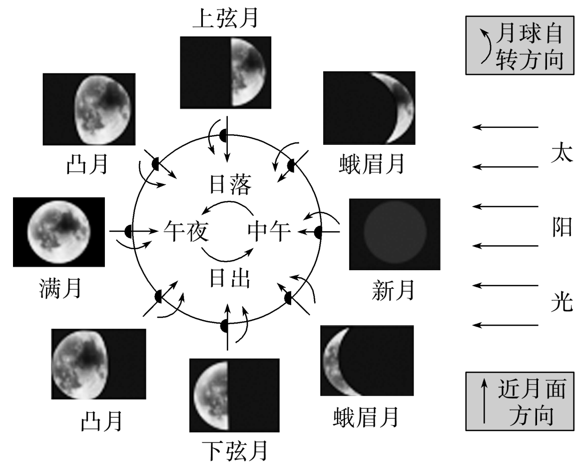
因为 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$，当 $d<0$ 时，S_n 有最大值，故 B 正确；

由 $T_{2\,024}>T_{2\,023}$，可得 $b_{2\,024}>1$，但 $q>1$ 不一定成立，故 C 错误；

若 $T_{2\,024}<T_{2\,023}$，则 $b_{2\,024}<1$，但 $b_{2\,025}$ 可以大于或等于 1，此时 $T_{2\,025}\geqslant T_{2\,024}$，故 D 错误.

故选 ACD.

4.“人有悲欢离合，月有阴晴圆缺”，这里的“圆缺”就是指“月相变化”，即地球上所看到的月球被日光照亮部分的不同形象，随着月球与太阳的相对位置的不同，便会呈现出各种形状，如图.中国古代的天象监测人员发现并记录了月相变化的一个数列，记为$\{a_n\}$，其中 $1\leqslant n\leqslant 15$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$，将满月分成 240 等份，从新月开始，每天的月相数据（部分数据）如下表所示，$a_1=5$ 是指每月的第 1 天可见部分占满月的$\frac{5}{240}$，$a_8=128$ 是指每月的第 8 天可见部分占满月的$\frac{128}{240}$，$a_{15}=240$ 是指每月的第 15 天（即农历十五）会出现满月.已知在月相数列$\{a_n\}$中，前 5 项构成等比数列，第 5 项到第 15 项构成等差数列，则第 3 天可见部分占满月的（　　）



1	2	3	4	5	6	7	8
5	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	128
9	10	11	12	13	14	15	
a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	240	

A.$\frac{1}{24}$　　B.$\frac{1}{12}$　　C.$\frac{1}{6}$　　D.$\frac{1}{3}$

B　**解析**：设第 5 项到第 15 项构成的等差数列的公差为 d，则 $7d=a_{15}-a_8=240-128=112$，解得 $d=16$，所以 $a_5=a_8-3d=128-48=80$.设前 5 项构成的等比数列的公比为 q，则 $a_3^2=a_1a_5=5\times 80=400$.又 $a_3>0$，所以 $a_3=20$，所以 $\frac{a_3}{240}=\frac{20}{240}=\frac{1}{12}$，即第 3 天可见部分占满月的$\frac{1}{12}$.故选 B.

5.已知数列$\{a_n\}$是等比数列，且 $a_3+a_5=18,a_9+a_{11}=144$，则 $a_6+a_8=$________.

$\pm 36\sqrt{2}$　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，

因为$\frac{a_9+a_{11}}{a_3+a_5}=q^6=\frac{144}{18}=8$，

所以 $q^3=\pm 2\sqrt{2}$.

所以 $a_6+a_8=(a_3+a_5)\cdot q^3=18\times(\pm 2\sqrt{2})=\pm 36\sqrt{2}$.

6.已知$\{a_n\}$是等比数列，且 $a_n>0,a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$，则 $a_3+a_5=$________，a_4 的最大值为________.

5　$\frac{5}{2}$　**解析**：因为$\{a_n\}$是等比数列，$a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$，

所以 $a_3^2+2a_3a_5+a_5^2=25$，即 $(a_3+a_5)^2=25$.

因为 $a_n>0$，所以 $a_3+a_5=5$.

故 $a_3+a_5\geqslant 2\sqrt{a_3a_5}=2a_4$，即 $a_4\leqslant\frac{5}{2}$，当且仅当 $a_3=a_5$ 时，等号成立.

7.已知数列$\{a_n\}$是首项为 1，公比为 q 的等比数列.

(1)求证：当 $0<q<1$ 时，$\{a_n\}$是递减数列；

(2)若对任意 $k\in\mathbf{N}^*$，都有 a_k,a_{k+2},a_{k+1} 成等差数列，求 q 的值.

(1)**证明**:因为 $a_n=q^{n-1}$,
所以 $a_{n+1}-a_n=q^n-q^{n-1}=q^{n-1}(q-1)$.
当 $0<q<1$ 时,有 $q^{n-1}>0$,$q-1<0$,
所以 $a_{n+1}-a_n<0$,即 $a_{n+1}<a_n$.
所以$\{a_n\}$为递减数列.
(2)**解**:因为 a_k,a_{k+2},a_{k+1}成等差数列,
所以 $2a_{k+2}=a_k+a_{k+1}$.
所以 $2q^{k+1}-(q^{k-1}+q^k)=0$,
即 $q^{k-1}\cdot(2q^2-q-1)=0$.
因为 $q\neq0$,所以 $2q^2-q-1=0$,
解得 $q=1$ 或 $q=-\dfrac{1}{2}$.

4.3.2 等比数列的前 n 项和公式

第 1 课时 等比数列的前 n 项和

学习任务目标

1.掌握等比数列的前 n 项和公式及其应用.
2.掌握等比数列前 n 项和的性质.
3.会用错位相减法求数列的和.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一 等比数列的前 n 项和

已知量	首项 a_1、公比 q $(q\neq1)$与项数 n	首项 a_1、末项 a_n 与公比 $q(q\neq1)$	首项 a_1、公比 $q=1$
求和公式	$S_n=\underline{\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}}$	$S_n=\underline{\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}}$	$S_n=\underline{na_1}$

知识点二 等比数列前 n 项和的性质

(1)若数列$\{a_n\}$为非常数列的等比数列,且其前 n 项和$S_n=A\cdot q^n+B(A\neq0,B\neq0,q\neq0,q\neq1)$,则必有$A+B=\underline{0}$;反之,若某一非常数列的数列前 n 项和 $S_n=A\cdot q^n-A(A\neq0,q\neq0,q\neq1)$,则该数列必为<u>等比</u>数列.
(2)若等比数列$\{a_n\}$的公比 $q\neq-1$,前 n 项和为 S_n,则 $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$成等比数列,公比为 q^n.
(3)当等比数列$\{a_n\}$的项数为偶数时,偶数项的和与奇数项的和之比$\dfrac{S_{偶}}{S_{奇}}=\underline{q}$.

知识点三 等比数列前 n 项和公式与指数函数的关系

(1)当 $q=1$ 时,$S_n=na_1$是关于 n 的正比例函数,点(n,S_n)是直线 $y=a_1x$ 上的一群孤立的点.
(2)当 $q\neq1$ 时,$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1}{1-q}-\dfrac{a_1}{1-q}q^n$.记 $A=\dfrac{a_1}{1-q}$,则 $S_n=-Aq^n+A$ 是一个指数式与一个常数的和.当 $q>0$ 且 $q\neq1$ 时,$y=q^n$ 是指数函数,此时,点(n,S_n)是指数型函数 $y=-Aq^n+A$ 图象上的一群孤立的点.

知识点四 错位相减法求和

推导等比数列前 n 项和的方法是错位相减法,一般适用于求一个等差数列与一个等比数列对应项<u>乘积</u>所构成的数列的前 n 项和.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").
(1)若首项为 a 的数列既是等比数列又是等差数列,则其前 n 项和等于 na. (√)
(2)若 $a\in\mathbf{R}$,则 $1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}=\dfrac{1-a^n}{1-a}$. (×)
(3)若数列$\{a_n\}$是公比 $q\neq1$ 的等比数列,则其前 n 项和公式可表示为 $S_n=-Aq^n+A(A\neq0,q\neq0$,且 $q\neq1,n\in\mathbf{N}^*)$. (√)

2.(多选)在等比数列$\{a_n\}$中,其前 n 项和为 S_n,$a_1=2$,$S_3=26$,则公比 q 可能为 ( )
A.3 B.-4
C.-3 D.4

AB **解析**:由题意可知 $q\neq1$,且 $S_3=\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\dfrac{2(1-q^3)}{1-q}=26$,所以 $q^2+q-12=0$,解得 $q=3$ 或 $q=-4$.故选 AB.

3.请思考并回答下列问题:
(1)用公式求等比数列前 n 项和时需注意什么问题?
提示:在应用公式求和时,应注意到 $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$的使用条件为 $q\neq1$,当 $q=1$ 时应按常数列求和,即 $S_n=na_1$.
(2)公比不等于 1 的等比数列的前 n 项和公式的推导还有其他的方法吗?

提示：根据等比数列的定义，有$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=q(q\neq 1)$，则$\frac{a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}}=q$，即$\frac{S_n-a_1}{S_n-a_n}=q$，所以$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$.

(3)错位相减法适用于求哪种结构特征的数列的前n项和？

提示：错位相减法一般适用于求数列$\{a_n\cdot b_n\}$前n项和的求解，其中$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列，且等比数列$\{b_n\}$的公比$q\neq 1$.

○ 任务型课堂 ○

任务1 等比数列的前n项和

探究活动

例1 (1)已知S_n是等比数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_3=3$，$S_3=9$，则数列$\{a_n\}$的公比是 ( )

A.$-\frac{1}{2}$或1　　B.$\frac{1}{2}$或1

C.$-\frac{1}{2}$　　D.$\frac{1}{2}$

A　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，依题意得$\begin{cases}a_3=a_1q^2=3,\\S_3=a_1+a_2+a_3=a_1+a_1q+a_1q^2=9,\end{cases}$

解得$q=1$或$q=-\frac{1}{2}$.故选A.

(2)在等比数列$\{a_n\}$中，若$a_1+a_n=66$，$a_2a_{n-1}=128$，$S_n=126$，求n和公比q.

解：由等比数列的性质得$a_1a_n=a_2a_{n-1}=128$.

因为$\begin{cases}a_1+a_n=66,\\a_1a_n=128,\end{cases}$

所以a_1，a_n为方程$x^2-66x+128=0$的两根.

又方程的两根分别为2，64，

所以$\begin{cases}a_1=64,\\a_n=2\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=2,\\a_n=64.\end{cases}$

当$a_1=64$，$a_n=2$时，

由$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=126$，得$q=\frac{1}{2}$.

由$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$，得$2=64\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，得$n=6$.

当$a_1=2$，$a_n=64$时，由$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=126$，得$q=2$.

由$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$，得$64=2\times 2^{n-1}$，得$n=6$.

综上可知，$n=6$，$q=\frac{1}{2}$或$q=2$.

【探究总结】

1. 在等比数列中，对于a_1，q，n，a_n，S_n这五个量，若已知其中三个量，就可求出其余两个量.常常通过列方程组来解答这些问题，有时会涉及高次方程或指数方程.这时要注意观察表达式的特点，再采取必要的数学处理方法，如换元.
2. 在解决与等比数列前n项和有关的问题时，首先要对公比$q=1$或$q\neq 1$进行判断，若两种情况都有可能，则要分类讨论.

应用迁移

1.(多选)在公比q为整数的等比数列$\{a_n\}$中，S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和.若$a_1+a_4=18$，$a_2+a_3=12$，则下列说法正确的是 ( )

A.$q=2$

B.数列$\{S_n+2\}$是等比数列

C.$S_8=510$

D.数列$\{\lg a_n\}$是公差为2的等差数列

ABC　**解析**：因为$a_1+a_4=18$，$a_2+a_3=12$，

所以$a_1(1+q^3)=18$，$a_1(q+q^2)=12$.

又公比q为整数，解得$a_1=q=2$.

所以$a_n=2^n$，$S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$.

所以$S_8=2^9-2=510$.

因为$S_n+2=2^{n+1}$，所以数列$\{S_n+2\}$是公比为2的等比数列.

因为$\lg a_n=n\lg 2$，所以数列$\{\lg a_n\}$是公差为$\lg 2$的等差数列.

综上可得，A，B，C正确.故选ABC.

2.在等比数列$\{a_n\}$中，其前n项和为S_n.若公比$q=-\frac{1}{2}$，$S_5=11$，则$a_1=$________.

16　**解析**：因为$S_5=\frac{a_1\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^5\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\times\frac{33}{32}a_1=11$，所以$a_1=16$.

3.在等比数列$\{a_n\}$中，S_n为其前n项和，解决下列问题：

(1)若$a_n=2^n$，求S_6；

(2)若$a_1+a_3=\frac{5}{4}$，$a_4+a_6=10$，求S_5；

(3)若$S_n=189$，公比$q=2$，$a_n=96$，求a_1和n.

解：设数列$\{a_n\}$的公比为q.

(1)因为$a_n=2^n=2\times 2^{n-1}$，所以$a_1=2$，$q=2$.

所以$S_6=\frac{2\times(1-2^6)}{1-2}=126$.

(2)由题意，得$\begin{cases}a_1+a_1q^2=\frac{5}{4},\\a_1q^3+a_1q^5=10,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=\frac{1}{4},\\q=2.\end{cases}$

从而 $S_5=\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\frac{\frac{1}{4}\times(1-2^5)}{1-2}=\frac{31}{4}$.

(3)(方法一)由 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，$a_n=a_1q^{n-1}$ 及已知条件，得 $\begin{cases}189=\frac{a_1(1-2^n)}{1-2},\\96=a_1\cdot 2^{n-1},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=3,\\n=6.\end{cases}$

(方法二)由公式 $S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$ 及已知条件，

得 $189=\frac{a_1-96\times 2}{1-2}$，

解得 $a_1=3$.

又由 $a_n=a_1q^{n-1}$，得 $96=3\times 2^{n-1}$，

解得 $n=6$.

任务2 等比数列前 n 项和的性质

探究活动

例2 (1)若等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_2=7$，$S_6=91$，则 S_4 为 ( )

A.28　　B.32

C.21　　D.28 或 -21

A **解析**：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q.

因为 $\{a_n\}$ 为等比数列，

所以 S_2，S_4-S_2，S_6-S_4 也为等比数列，

即 7，S_4-7，$91-S_4$ 成等比数列.

由 $(S_4-7)^2=7\times(91-S_4)$，得 $S_4=28$ 或 $S_4=-21$.

又因为 $S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=a_1+a_2+a_1q^2+a_2q^2=(a_1+a_2)(1+q^2)=S_2(1+q^2)>S_2$，

所以 $S_4=28$.

(2)若等比数列 $\{a_n\}$ 共 $2m(m\in\mathbf{N}^*)$ 项，其所有项的和为 -240，且奇数项的和比偶数项的和大 80，则公比 $q=$________.

2 **解析**：根据题意得 $\begin{cases}S_{奇}+S_{偶}=-240,\\S_{奇}-S_{偶}=80,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}S_{奇}=-80,\\S_{偶}=-160.\end{cases}$

所以 $q=\frac{S_{偶}}{S_{奇}}=\frac{-160}{-80}=2$.

[一题多思]

思考1. 把本例(1)等比数列 $\{a_n\}$ 满足的条件改为“$S_5=2$，$S_{10}=6$”，求 $a_{16}+a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}$.

解：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，因为 $S_{2n}-S_n=q^nS_n$，所以 $S_{10}-S_5=q^5S_5$，所以 $6-2=2q^5$，所以 $q^5=2$. 所以 $a_{16}+a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=a_1q^{15}+a_2q^{15}+a_3q^{15}+a_4q^{15}+a_5q^{15}=q^{15}(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)=q^{15}S_5=2^3\times 2=16$.

思考2. 把本例(1)等比数列 $\{a_n\}$ 满足的条件改为“公比 $q=2$，$S_{10}=10$”，求 S_{20}.

解：$S_{20}=S_{10}+q^{10}S_{10}=10+2^{10}\times 10=10\ 250$.

【探究总结】

应用等比数列前 n 项和性质的关注点

(1)运用等比数列的前 n 项和公式，要注意公比 $q=1$ 和 $q\neq 1$ 两种情形，在解有关的方程(组)时，通常用约分或两式相除的方法进行消元.

(2)在解决等比数列前 n 项和问题时，当条件涉及奇数项和与偶数项和的时候，如果项数为偶数，可考虑利用奇数项和与偶数项和之间的关系求解.

(3)当已知条件含有片段和时，要考虑性质 S_m，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$，…成等比数列.

应用迁移

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，公比 $q=3$，前 80 项的和 $S_{80}=32$，则 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{80}=$________.

24 **解析**：设 $A=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{80}$，$B=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{79}$.

由 $\frac{A}{B}=q=3$，得 $A=3B$，即 $B=\frac{1}{3}A$.

又 $A+B=S_{80}=32$，所以 $\frac{4}{3}A=32$，解得 $A=24$.

所以 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{80}=24$.

2. 若等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=2\times 3^n+r$，则 $r=$________.

-2 **解析**：因为 $S_n=2\times 3^n+r$，

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2\times 3^n+r-(2\times 3^{n-1}+r)=4\times 3^{n-1}$.

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=6+r$.

因为 $\{a_n\}$ 为等比数列，所以 $6+r=4$，解得 $r=-2$.

任务3 错位相减法求数列的和

探究活动

例3 (1)已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_n=n\cdot 2^n$，则 $S_n=$________.

$(n-1)2^{n+1}+2(n\in\mathbf{N}^*)$ **解析**：因为 $a_n=n\cdot 2^n$，

所以 $S_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\times 2^n$ ①，

所以 $2S_n=1\times 2^2+2\times 2^3+\cdots+(n-1)\times 2^n+n\times 2^{n+1}$ ②，

①－②，得

$-S_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\times 2^{n+1}$

$=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n\times 2^{n+1}$

$=2^{n+1}-2-n\times 2^{n+1}$

$=(1-n)2^{n+1}-2$.

所以 $S_n=(n-1)2^{n+1}+2(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)求数列 $\{(2n-1)a^{n-1}\}(a\neq 0)$ 的前 n 项和.

解：设数列 $\{(2n-1)a^{n-1}\}$ 的前 n 项和为 S_n.

当 $a=1$ 时，数列变成 1，3，5，7，…，$2n-1$，…，

则 $S_n=\frac{n[1+(2n-1)]}{2}=n^2$.

当 $a\neq 1$ 时，

有 $S_n=1+3a+5a^2+7a^3+\cdots+(2n-1)a^{n-1}$ ①，

$aS_n=a+3a^2+5a^3+7a^4+\cdots+(2n-3)a^{n-1}+(2n-1)a^n$②.

①−②，得 $S_n-aS_n=1+2a+2a^2+2a^3+\cdots+2a^{n-1}-(2n-1)a^n$，

所以 $(1-a)S_n=1-(2n-1)a^n+2(a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-1})=1-(2n-1)a^n+2\times\frac{a(1-a^{n-1})}{1-a}=1-(2n-1)a^n+\frac{2(a-a^n)}{1-a}$.

又 $1-a\neq0$，

所以 $S_n=\frac{1-(2n-1)a^n}{1-a}+\frac{2(a-a^n)}{(1-a)^2}$.

综上所述，$S_n=\begin{cases}n^2, a=1,\\ \frac{1-(2n-1)a^n}{1-a}+\frac{2(a-a^n)}{(1-a)^2}, a\neq1.\end{cases}$

【探究总结】

错位相减法的适用范围及注意事项

(1)适用范围

它主要适用于当$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是等比数列时，求数列$\{a_nb_n\}$的前 n 项和.

(2)注意事项

①利用错位相减法求和，在写 S_n 与 qS_n 的表达式时，应注意使两式交错对齐，以便于作差，正确写出$(1-q)S_n$ 的表达式；

②注意对公式的选择：常用 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq1)$；

③利用此法时要注意讨论公比 q 是否等于 1.

应用迁移

1. 已知数列$\{a_n\}$是首项、公比均为 5 的等比数列，$b_n=a_n\log_{25}a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

解： 依题意，得 $a_n=5\times5^{n-1}=5^n$，

则 $b_n=5^n\log_{25}5^n=\frac{1}{2}\cdot n\cdot 5^n$.

所以 $S_n=\frac{1}{2}\times1\times5+\frac{1}{2}\times2\times5^2+\frac{1}{2}\times3\times5^3+\cdots+\frac{1}{2}\times n\times5^n$，

则 $5S_n=\frac{1}{2}\times1\times5^2+\frac{1}{2}\times2\times5^3+\frac{1}{2}\times3\times5^4+\cdots+\frac{1}{2}\times(n-1)\times5^n+\frac{1}{2}\times n\times5^{n+1}$.

两式相减，得 $-4S_n=\frac{1}{2}\times5+\frac{1}{2}\times5^2+\frac{1}{2}\times5^3+\cdots+\frac{1}{2}\times5^n-\frac{1}{2}\times n\times5^{n+1}$

$=\frac{1}{2}\times(5+5^2+5^3+\cdots+5^n)-\frac{1}{2}\times n\times5^{n+1}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{5(1-5^n)}{1-5}-\frac{1}{2}\times n\times5^{n+1}$

$=\frac{5^{n+1}-5}{8}-\frac{n\times5^{n+1}}{2}$，

故 $S_n=\frac{5-5^{n+1}+4n\times5^{n+1}}{32}=\frac{5+(4n-1)\cdot5^{n+1}}{32}$.

2. (2024·全国甲卷)记 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $4S_n=3a_n+4$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=(-1)^{n-1}na_n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

解： (1)当 $n=1$ 时，$4S_1=4a_1=3a_1+4$，解得 $a_1=4$.

当 $n\geqslant2$ 时，$4S_{n-1}=3a_{n-1}+4$，

所以 $4S_n-4S_{n-1}=4a_n=3a_n-3a_{n-1}$，

即 $a_n=-3a_{n-1}$.

又 $a_1=4\neq0$，故 $a_n\neq0$，故$\frac{a_n}{a_{n-1}}=-3$.

所以数列$\{a_n\}$是以 4 为首项，-3 为公比的等比数列，

所以 $a_n=4\times(-3)^{n-1}$.

(2)$b_n=(-1)^{n-1}n\times4\times(-3)^{n-1}=4n\cdot3^{n-1}$，

所以 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=4\times3^0+8\times3^1+12\times3^2+\cdots+4n\times3^{n-1}$，

故 $3T_n=4\times3^1+8\times3^2+12\times3^3+\cdots+4(n-1)\times3^{n-1}+4n\times3^n$，

所以 $-2T_n=4+4\times3^1+4\times3^2+\cdots+4\times3^{n-1}-4n\times3^n$

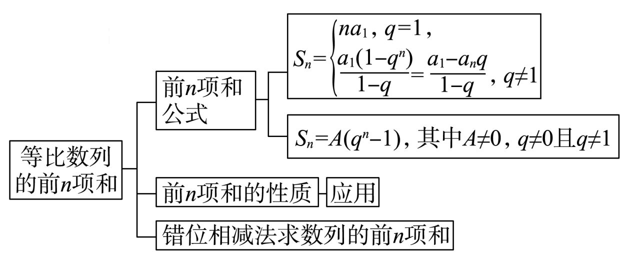
$=4+4\times\frac{3(1-3^{n-1})}{1-3}-4n\times3^n$

$=4+2\times3\times(3^{n-1}-1)-4n\times3^n$

$=(2-4n)\cdot3^n-2$，

所以 $T_n=(2n-1)\cdot3^n+1$.

提质归纳



课后素养评价（九）　等比数列的前n项和

A组　学习·理解

1. 已知等比数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=2^n$，S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，则S_{10}等于（　　）

A.10　　B.210

C.$2^{10}-2$　　D.$2^{11}-2$

D　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.

因为$a_n=2^n$，所以$a_1=2$，$q=2$.

所以$S_{10}=\frac{2\times(1-2^{10})}{1-2}=2^{11}-2$.故选D.

2. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=9$，$a_5=243$，则$\{a_n\}$的前4项和为（　　）

A.81　　B.120

C.168　　D.192

B　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，

因为$a_2=9$，$a_5=243$，

所以$q^3=\frac{a_5}{a_2}=27$，所以$q=3$.

又因为$a_2=a_1q$，所以$a_1=3$.

所以前4项和$S_4=\frac{3\times(1-3^4)}{1-3}=120$.故选B.

3. 在各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，且a_2，a_4+2，a_5成等差数列，记S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，则$S_6=$（　　）

A.126　　B.124

C.64　　D.62

A　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>0)$，

因为a_2，a_4+2，a_5成等差数列，

所以$a_2+a_5=2(a_4+2)$，

所以$a_1q+a_1q^4=2(a_1q^3+2)$，

即$2q+2q^4=2(2q^3+2)$，

解得$q=2$，

所以前6项和$S_6=\frac{2\times(1-2^6)}{1-2}=126$.

故选A.

4. 已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_n=t\cdot 2^{n-1}-1$，则$t=$（　　）

A.2　　B.-2　　C.1　　D.-1

A　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，当$q=1$时，$S_n=na_1$，不合题意；

当$q\neq1$时，根据等比数列的前n项和公式$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=-\frac{a_1}{1-q}\cdot q^n+\frac{a_1}{1-q}$，依题意$S_n=t\cdot 2^{n-1}-1=\frac{1}{2}t\cdot 2^n-1$，得$\frac{1}{2}t+(-1)=0$，解得$t=2$.

故选A.

5. 已知各项均为正数的等比数列的前5项和为3，前15项和为39，则该数列的前10项和为（　　）

A.$3\sqrt{2}$　　B.$3\sqrt{13}$

C.12　　D.15

C　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n.由等比数列前n项和的性质可得S_5，$S_{10}-S_5$，$S_{15}-S_{10}$也为等比数列.

又$S_5=3$，$S_{15}=39$，故可得$(S_{10}-3)^2=3(39-S_{10})$，

解得$S_{10}=12$或$S_{10}=-9$.

因为等比数列的各项均为正数，所以$S_{10}=12$.

故选C.

6. 在等比数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=-3$，公比$q=-2$，前k项和$S_k=15(k\in\mathbf{N}^*)$，则k的值为________.

4　**解析**：由题意可得$S_k=\frac{-3[1-(-2)^k]}{1-(-2)}=(-2)^k-1=15$，解得$k=4$.

7. 在等比数列$\{a_n\}$中，已知对任意正整数n，$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=2^n-1$，则$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2$等于______.

$\frac{1}{3}(4^n-1)$　**解析**：当$n=1$时，$a_1=2^1-1=1$；

当$n\geqslant2$时，$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=2^n-1$，$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}=2^{n-1}-1$，

两式作差可得$a_n=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$.

当$n=1$时，$2^{1-1}=2^0=1=a_1$.

综上可得，数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^{n-1}$，故$a_n^2=(2^{n-1})^2=4^{n-1}$，

则数列$\{a_n^2\}$是首项为1，公比为4的等比数列，

其前n项和为$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=\frac{1\times(1-4^n)}{1-4}=\frac{1}{3}(4^n-1)$.

8. 在等比数列$\{a_n\}$中，公比为q，前n项和为S_n.

(1)若$a_1=-8$，$a_3=-2$，求S_4；

(2)若$S_6=315$，$q=2$，求a_1.

解：(1)由题意可得$q^2=\frac{a_3}{a_1}=\frac{-2}{-8}=\frac{1}{4}$，

解得$q=-\frac{1}{2}$或$q=\frac{1}{2}$.

当$q=-\frac{1}{2}$时，$S_4=\frac{-8\times\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^4\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-5$；

当$q=\frac{1}{2}$时，$S_4=\frac{-8\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]}{1-\frac{1}{2}}=-15$.

综上所述，$S_4=-5$ 或 $S_4=-15$.

(2)由题意得 $S_6=\dfrac{a_1(1-2^6)}{1-2}=315$，解得 $a_1=5$.

B组 应用·实践

1. 设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，前 n 项的倒数之和为 T_n，则$\dfrac{S_n}{T_n}$的值为 （　　）

A.a_1a_n　　B.$\dfrac{a_1}{a_n}$

C.$a_1^na_n^n$　　D.$\left(\dfrac{a_1}{a_n}\right)^n$

A　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，

当 $q\neq1$ 时，则 $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，$T_n=\dfrac{1}{a_1}\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{q}\right)^n}{1-\dfrac{1}{q}}=\dfrac{1}{a_1q^{n-1}}\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1}=\dfrac{1}{a_n}\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1}$，

所以$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}}{\dfrac{1}{a_n}\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1}}=a_1a_n$.

当 $q=1$ 时，则 $a_n=a_1$，$S_n=na_1$，$T_n=\dfrac{n}{a_1}$，

所以$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{na_1}{\dfrac{n}{a_1}}=a_1^2=a_1a_n$ 成立.

综上所述，$\dfrac{S_n}{T_n}=a_1a_n$.故选 A.

2. (多选)已知$\{a_n\}$是首项为 1 的等比数列，S_n 是$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $9S_3=S_6$，则 （　　）

A.公比 $q=2$

B.$S_9=2^9-1$

C.数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$的前 5 项和为$\dfrac{31}{16}$

D.$6S_3=S_9$

ABC　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q\neq1)$，

因为 $9S_3=S_6$，所以 $9\times\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}$，

所以 $9=1+q^3$，所以 $q=2$.

所以 $S_9=\dfrac{1-2^9}{1-2}=2^9-1$，故选项 A，B 正确.

又 $6S_3=6\times(2^3-1)\neq S_9$，故选项 D 不正确.

易知$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是等比数列，首项$\dfrac{1}{a_1}=1$，公比为$\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{2}$，

设数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$的前 n 项和为 S'_n，

所以 $S'_5=\dfrac{1\times\left(1-\dfrac{1}{2^5}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{31}{16}$，故选项 C 正确.

故选 ABC.

3. 设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.若 $S_3=2$，$S_6=18$，则$\dfrac{S_{10}}{S_5}$等于 （　　）

A.-3　　B.5　　C.-31　　D.33

D　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q\neq1)$，

因为 $S_3=\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=2$，$S_6=\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}=18$，

两式作商，得 $1+q^3=9$，解得 $q=2$.

所以$\dfrac{S_{10}}{S_5}=\dfrac{1-q^{10}}{1-q^5}=1+q^5=33$.故选 D.

4. 已知 S_n 是等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $S_n=2^{n+1}+a$，则 $a_1a_2-a_2a_3+a_3a_4-\cdots+a_9a_{10}=$ （　　）

A.$\dfrac{8+2^{21}}{5}$　　B.$\dfrac{-8+2^{21}}{5}$

C.$\dfrac{8-2^{21}}{3}$　　D.$\dfrac{8+2^{21}}{3}$

A　**解析**：$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n+1}+a-2^n-a=2^n(n\geqslant2)$.

因为$\{a_n\}$为等比数列，$a_1=4+a$，$a_2=4$，

所以$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{4}{4+a}=2$，可得 $a=-2$，$a_1=2$.

易知 a_1a_2，$-a_2a_3$，a_3a_4，…，$-a_8a_9$，a_9a_{10} 构成首项为 8，公比为-4 的等比数列，

所以 $a_1a_2-a_2a_3+a_3a_4+\cdots-a_8a_9+a_9a_{10}=\dfrac{8\times[1-(-4)^9]}{1-(-4)}=\dfrac{8+2^{21}}{5}$.

故选 A.

5. 设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_5a_7=3$，$a_3a_{10}=9$，则$\dfrac{S_{10}}{S_5}=$ （　　）

A.243　　B.244

C.81　　D.82

B　**解析**：由等比数列的性质可得 $a_3a_{10}=a_6a_7=9$，

设$\{a_n\}$的公比为 q，则 $q=\dfrac{a_6a_7}{a_5a_7}=3$，

故$\dfrac{S_{10}}{S_5}=\dfrac{\dfrac{a_1(1-q^{10})}{1-q}}{\dfrac{a_1(1-q^5)}{1-q}}=\dfrac{1-q^{10}}{1-q^5}=1+q^5=244$.

故选 B.

6. 设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.若 S_3，S_9，S_6 成等差数列，且 $a_8=3$，则 a_5 的值为________.

-6　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.

因为S_3,S_9,S_6成等差数列，

所以$2S_9=S_3+S_6$.

显然公比$q\neq1$，

所以$2\times\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}$.

所以$2q^9-q^6-q^3=0$.所以$q^3=-\frac{1}{2}$.

所以$a_5=\frac{a_8}{q^3}=3\times(-2)=-6$.

7.已知等比数列$\{a_n\}$共有$2n$项，若它的所有项的和是奇数项的和的3倍，则公比$q=$________.

2　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，由已知可得$q\neq1$，则奇数项也构成等比数列，其公比为q^2，首项为a_1，

$S_{2n}=\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}$，$S_奇=\frac{a_1[1-(q^2)^n]}{1-q^2}$.

由题意得$\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}=\frac{3a_1(1-q^{2n})}{1-q^2}$，所以$1+q=3$，

所以$q=2$.

8.在等比数列$\{a_n\}$中，公比$q=2$，前99项的和$S_{99}=56$，求$a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{99}$的值.

解：(方法一)因为$S_{99}=\frac{a_1(1-q^{99})}{1-q}=56$，

所以$a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{99}=a_3(1+q^3+q^6+\cdots+q^{96})=a_1q^2\cdot\frac{1-(q^3)^{33}}{1-q^3}=a_1q^2\cdot\frac{1-q^{99}}{(1-q)(1+q+q^2)}=\frac{q^2}{1+q+q^2}\left[\frac{a_1(1-q^{99})}{1-q}\right]=\frac{4}{1+2+4}\times56=32$.

(方法二)设$b_1=a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{97}$，

$b_2=a_2+a_5+a_8+\cdots+a_{98}$，

$b_3=a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{99}$，

则$b_1q=b_2$，$b_2q=b_3$且$b_1+b_2+b_3=56$，

所以$b_1(1+q+q^2)=56$，所以$b_1=\frac{56}{1+2+4}=8$，$b_3=b_1q^2=32$，

即$a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{99}=32$.

9.已知数列$\{a_n\}$满足$a_n=2n-10$，数列$\{b_n\}$满足$b_1+\frac{b_2}{5}+\frac{b_3}{5^2}+\cdots+\frac{b_n}{5^{n-1}}=5n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)求数列$\{|a_n|\}$的前15项和；

(2)求数列$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

解：(1)令$a_n=2n-10\geqslant0$，解得$n\geqslant5$，

所以$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{15}|$

$=-(a_1+a_2+a_3+a_4)+a_5+a_6+\cdots+a_{15}$

$=S_{15}-2S_4=\frac{15(a_1+a_{15})}{2}-2\times\frac{4(a_1+a_4)}{2}=130$.

(2)当$n=1$时，$b_1=5$.

因为$b_1+\frac{b_2}{5}+\frac{b_3}{5^2}+\cdots+\frac{b_n}{5^{n-1}}=5n$，

所以当$n\geqslant2$时，$b_1+\frac{b_2}{5}+\frac{b_3}{5^2}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{5^{n-2}}=5(n-1)$，

两式相减，得$\frac{b_n}{5^{n-1}}=5$，即$b_n=5^n$.

又当$n=1$时，$b_1=5$符合该式，

所以$b_n=5^n$.

所以$\frac{a_n}{b_n}=\frac{2n-10}{5^n}$，

$T_n=(-8)\times\frac{1}{5}+(-6)\times\left(\frac{1}{5}\right)^2+\cdots+(2n-10)\times\left(\frac{1}{5}\right)^n$，

故$\frac{1}{5}T_n=(-8)\times\left(\frac{1}{5}\right)^2+(-6)\times\left(\frac{1}{5}\right)^3+\cdots+(2n-10)\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$，

两式相减得$\frac{4}{5}T_n=(-8)\times\frac{1}{5}+2\times\left(\frac{1}{5}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{5}\right)^3+\cdots+2\times\left(\frac{1}{5}\right)^n-(2n-10)\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$，

即$\frac{4}{5}T_n=-\frac{8}{5}+\frac{\frac{2}{25}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{5}}-(2n-10)\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$，

化简得$T_n=\left(-\frac{1}{2}n+\frac{15}{8}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^n-\frac{15}{8}$.

第2课时 等比数列前 n 项和的应用

学习任务目标

1. 能运用等比数列的前 n 项和公式解决一些简单的实际问题.
2. 能够运用所学知识解决等差数列与等比数列的综合应用问题.

◦ 问题式预习 ◦

【知识清单】

知识点 分组求和

某些数列通过适当分组,可得出两个或几个等差数列或等比数列,进而利用等差数列或等比数列的求和公式分别求和,从而得出原数列的和.

【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)如果数列$\{a_n\}$为等比数列,且公比不等于1,那么其前 n 项和 $S_n=\dfrac{a_1-a_{n+1}}{1-q}$.　(　　)

√　**提示:** 等比数列前 n 项和公式 $S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}=\dfrac{a_1-a_{n+1}}{1-q}(q\neq1)$.

(2)若 $S_n=a+2a^2+3a^3+\cdots+na^n$,求 S_n 时只要把上式等号两边同时乘 a,即可根据错位相减法求得.　(　　)

×　**提示:** 需满足 a 不等于0且不等于1.

(3)数列$\{2^n-1\}$的前 n 项和 $S_n=2^{n+1}-2-n$.(　　)

√　**提示:** $S_n=(2^1-1)+(2^2-1)+(2^3-1)+\cdots+(2^n-1)=(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n)-n=2^{n+1}-2-n$.

2. 若数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$a_1=1$,$a_n+a_{n+1}=4\times3^{n-1}$,则 $S_{2\,024}=$________.

$\dfrac{3^{2\,024}-1}{2}$　**解析:** 由题意得 $S_{2\,024}=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{2\,023}+a_{2\,024})=4\times(3^0+3^2+3^4+\cdots+3^{2\,022})=4\times\dfrac{1\times(1-3^{2\,024})}{1-3^2}=\dfrac{3^{2\,024}-1}{2}$.

3. 请思考并回答下列问题:

(1)应用等比数列前 n 项和公式时应先确定哪些信息?

提示: 判断数列是否是等比数列,公比是多少,是否为1,首项、项数是多少.

(2)前面我们学习了哪些数列求和的方法?分别适用于什么情况?

提示: ①倒序相加法:如果一个数列的前 n 项满足与首末两项"等距离"的两项之和等于首末两项之和,那么这个数列的前 n 项和即可用此法来求.如等差数列前 n 项和公式就是用此方法推导的.

②裂项相消法:能把数列的通项拆成两项的差,正负相消后剩下首尾若干项.

③错位相减法:如果一个数列的各项是由一个等差数列和一个等比数列的对应项之积构成的,那么这个数列的前 n 项和即可用此法来求.如公比不为1的等比数列的前 n 项和公式就是用此法推导的.

◦ 任务型课堂 ◦

任务1 等比数列前 n 项和的实际应用

1. 我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题:"远望巍巍塔七层,红光点点倍加增,共灯三百八十一,请问尖头几盏灯."意思是:一座7层塔共挂了381盏灯,且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的2倍,请问,塔的顶层有几盏灯?该问题的答案为　(　　)

A.2盏　　B.3盏

C.5盏　　D.6盏

B　**解析:** 设从上到下塔的各层灯数构成的等比数列为$\{a_n\}$,数列的前 n 项和为 S_n,公比为 q,则由题意知 $S_7=381$,$q=2$.

又由 $S_7=\dfrac{a_1(1-q^7)}{1-q}=\dfrac{a_1(1-2^7)}{1-2}=381$,解得 $a_1=3$.故选B.

2. 为了庆祝元旦,某公司特意制作了一个热气球,在热气球上写着"喜迎新年"四个大字.已知热气球在第一分钟内能上升25 m,以后每分钟上升的高度都是前一分钟上升高度的80%,则该气球________(填"能"或"不能")上升到125 m高空.

不能　**解析:** 设 a_n 表示热气球在第 n min上升的高度.根据题意,有 $a_n=\dfrac{4}{5}a_{n-1}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$.易知 $a_1=25$,$\{a_n\}$为首项 $a_1=25$,公比 $q=\dfrac{4}{5}$ 的等比数列.热气球前 n min上升的总高度 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=125\times\left[1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\right]<125$,即该气球不能上升到125 m高空.

3. 某地投入资金进行生态环境建设,并以此发展旅游产业.据规划,本年度投入800万元,以后每年投入的资金将比上一年减少$\dfrac{1}{5}$,本年度当地旅游业收入

估计为400万元.由于该项建设对旅游业的促进作用,预计今后的旅游业收入每年会比上一年增长$\frac{1}{4}$,则n年内的总投入为________万元,n年内旅游业的总收入为________万元.

$4\ 000\times\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]$　$1\ 600\times\left[\left(\frac{5}{4}\right)^n-1\right]$

解析:由题意知第1年投入800万元,

第2年投入$800\times\left(1-\frac{1}{5}\right)$万元,

……

第n年投入$800\times\left(1-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$万元,

所以每年的投入资金数构成首项为800,公比为$\left(1-\frac{1}{5}\right)$的等比数列.

所以n年内的总投入$S_n=800+800\times\left(1-\frac{1}{5}\right)+\cdots+800\times\left(1-\frac{1}{5}\right)^{n-1}=4\ 000\times\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]$(万元).

由题意知,第1年旅游业收入为400万元,

第2年旅游业收入为$400\times\left(1+\frac{1}{4}\right)$万元,

……

第n年旅游业收入为$400\times\left(1+\frac{1}{4}\right)^{n-1}$万元,

所以每年的旅游业收入资金数构成首项为400,公比为$\left(1+\frac{1}{4}\right)$的等比数列.

所以n年内旅游业的总收入$T_n=400+400\times\left(1+\frac{1}{4}\right)+\cdots+400\times\left(1+\frac{1}{4}\right)^{n-1}=1\ 600\times\left[\left(\frac{5}{4}\right)^n-1\right]$(万元).

故n年内的总投入为$4\ 000\times\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]$万元,$n$年内旅游业的总收入为$1\ 600\times\left[\left(\frac{5}{4}\right)^n-1\right]$万元.

【探究总结】

解数列应用题的方法

(1)认真审题,准确理解题意,达到如下要求:

①明确问题是等差数列问题还是等比数列问题,或者是含有递推关系的数列问题,题目要求的是a_n,还是S_n;

②清楚题目中的已知条件.

(2)抓住数量关系,联想数学知识和数学方法,恰当引入参数变量,将文字语言翻译成数学语言,将数量关系用数学式子表达.

(3)将实际问题抽象为数学问题,将已知与所求联系起来,列出满足题意的数学关系式.

任务2 分组求和法

探究活动

例1　在等差数列$\{a_n\}$中,$a_2+a_7=-23$,$a_3+a_8=-29$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设数列$\{a_n+b_n\}$是首项为1,公比为$|a_2|$的等比数列,求$\{b_n\}$的前n项和S_n.

解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

依题意得$a_3+a_8-(a_2+a_7)=2d=-6$,

解得$d=-3$.

又$a_2+a_7=2a_1+7d=-23$,解得$a_1=-1$.

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=-3n+2$.

(2)由(1)得$a_2=-4$,所以$|a_2|=4$.

所以数列$\{a_n+b_n\}$是首项为1,公比为4的等比数列,

所以$a_n+b_n=4^{n-1}$,即$-3n+2+b_n=4^{n-1}$,

所以$b_n=3n-2+4^{n-1}$.

所以$S_n=[1+4+7+\cdots+(3n-2)]+(1+4+4^2+\cdots+4^{n-1})=\frac{n(3n-1)}{2}+\frac{1-4^n}{1-4}=\frac{n(3n-1)}{2}+\frac{4^n-1}{3}$.

[一题多思]

思考1.在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,$a_2^2=a_4+8$,公差$d>0$.若$b_n=a_n+2^{a_n}$,求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n.

解:由题意得$(2+d)^2=2+3d+8$,

解得$d=2$(负值舍去).

故$a_n=a_1+(n-1)d=2+(n-1)\cdot 2=2n$.

因为$b_n=a_n+2^{a_n}=2n+2^{2n}$,

所以$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=(2+2^2)+(4+2^4)+\cdots+(2n+2^{2n})$

$=(2+4+\cdots+2n)+(2^2+2^4+\cdots+2^{2n})$

$=\frac{(2+2n)n}{2}+\frac{4(1-4^n)}{1-4}$

$=n(n+1)+\frac{4^{n+1}-4}{3}$.

思考2.若数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=\begin{cases}6n-5, & n\text{为奇数},\\ 4^n, & n\text{为偶数},\end{cases}$求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$.

解:①当n为大于或等于3的奇数时,

$S_n=[1+13+\cdots+(6n-5)]+(4^2+4^4+\cdots+4^{n-1})$

$=\frac{1+6n-5}{2}\cdot\frac{n+1}{2}+\frac{4^2(1-4^{n-1})}{1-4^2}$

$=\frac{(n+1)(6n-4)}{4}+\frac{4^{n+1}-16}{15}$

$=\frac{(n+1)(3n-2)}{2}+\frac{4^{n+1}-16}{15}$.

当$n=1$时,$S_1=b_1=1$,上式同样成立.

②当 n 为偶数时,$S_n=[1+13+\cdots+(6n-11)]+(4^2+4^4+\cdots+4^{n-2}+4^n)=\frac{n(3n-5)}{2}+\frac{4^{n+2}-16}{15}$.

综上,$S_n=\begin{cases}\frac{(n+1)(3n-2)}{2}+\frac{4^{n+1}-16}{15}, n\text{ 为奇数},\\ \frac{n(3n-5)}{2}+\frac{4^{n+2}-16}{15}, n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

【探究总结】

分组转化法求数列的前 n 项和的常见类型

(1)$a_n=b_n+c_n$,且$\{b_n\}$,$\{c_n\}$为等差数列或等比数列,求数列$\{a_n\}$的前 n 项和.

(2)$a_n=\begin{cases}b_n, n\text{ 为奇数},\\ c_n, n\text{ 为偶数},\end{cases}$其中$\{b_n\}$,$\{c_n\}$为等差数列或等比数列,求数列$\{a_n\}$的前 n 项和.

应用迁移

若各项均为正数的数列$\{c_n\}$满足 $c_nc_{n+2}-c_{n+1}^2=kc_nc_{n+1}$($n\in\mathbf{N}^*$,$k$ 为常数),则称$\{c_n\}$为"比差等数列".已知$\{a_n\}$为"比差等数列",且 $a_1=\frac{5}{8}$,$a_2=\frac{15}{16}$,$3a_4=2a_5$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设 $b_n=\begin{cases}a_n, n\text{ 为奇数},\\ b_{n-1}+1, n\text{ 为偶数},\end{cases}$求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

解:(1)由$\{a_n\}$为"比差等数列",

得 $a_na_{n+2}-a_{n+1}^2=ka_na_{n+1}$.

又$\{a_n\}$的各项均为正数,

从而$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}-\frac{a_{n+1}}{a_n}=k$.

设 $d_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$,则 $d_{n+1}-d_n=k$,

所以数列$\{d_n\}$为等差数列.

因为 $d_1=\frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{2}$,$d_4=\frac{a_5}{a_4}=\frac{3}{2}$,

所以$\{d_n\}$为常数列,

因此,$d_n=d_1=\frac{3}{2}$,即$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{2}$,

所以$\{a_n\}$是首项为$\frac{5}{8}$,公比为$\frac{3}{2}$的等比数列,

因此 $a_n=\frac{5}{8}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.

(2)当 n 为偶数时,$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=2(b_1+b_3+\cdots+b_{n-1})+\frac{n}{2}=2(a_1+a_3+\cdots+a_{n-1})+\frac{n}{2}$

$=2\times\frac{\frac{5}{8}\left[1-\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{n}{2}}\right]}{1-\frac{9}{4}}+\frac{n}{2}$

$=\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{n}{2}}+\frac{n}{2}-1$

$=\left(\frac{3}{2}\right)^n+\frac{n}{2}-1$;

当 n 为奇数时,$S_n=S_{n+1}-b_{n+1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+\frac{n+1}{2}-1-(b_n+1)=\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+\frac{n+1}{2}-1-\frac{5}{8}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1=\frac{13}{12}\times\left(\frac{3}{2}\right)^n+\frac{n-3}{2}$.

综上,$S_n=\begin{cases}\frac{13}{12}\times\left(\frac{3}{2}\right)^n+\frac{n-3}{2}, n\text{ 为奇数},\\ \left(\frac{3}{2}\right)^n+\frac{n}{2}-1, n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

任务3 等差数列与等比数列的综合问题

探究活动

例 2 (1)在各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,且 a_2,a_4+2,a_5成等差数列,S_n 是数列$\{a_n\}$的前 n 项和,则 $S_{10}-S_4=$________.

2 016 **解析**:设数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q>0)$.

因为 a_2,a_4+2,a_5成等差数列,

所以 $2a_4+4=a_2+a_5$.

所以 $2\times2\times q^3+4=2\times q+2\times q^4$.

所以 $q^4-2q^3+q-2=0$.

所以$(q-2)(q^3+1)=0$,

解得 $q=2$ 或 $q=-1$(舍).

所以 $S_{10}-S_4=\frac{2\times(1-2^{10})}{1-2}-\frac{2\times(1-2^4)}{1-2}=2\ 016$.

(2)已知数列$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列,它的前 n 项和为 S_n,且 a_1+1,a_3+1,a_7+1 成等比数列.

①求数列$\{a_n\}$的通项公式;

②求数列$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$的前 n 项和 T_n.

解:①由题意,得 $a_3+1=a_1+5$,$a_7+1=a_1+13$.

由$(a_3+1)^2=(a_1+1)(a_7+1)$,

得$(a_1+5)^2=(a_1+1)(a_1+13)$,

解得 $a_1=3$.

所以 $a_n=3+2(n-1)$,即 $a_n=2n+1$.

②由①知 $a_1=3$,$a_n=2n+1$,

则 $S_n=\frac{n(3+2n+1)}{2}=n(n+2)$,

所以$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$,

所以

$T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$.

【探究总结】

非等差、等比数列问题的一般求解方法

(1)若数列$\{a_n\}$既不是等差数列又不是等比数列,在求数列$\{a_n\}$的前 n 项和时,可通过转化思想,将数列的求和问题转化为等差或等比数列的求和问题解决,常用的方法有分组求和、裂项求和等.

(2)非等差、等比数列求通项公式问题,可对 a_n 所满足的关系式进行变形,转化为等差或等比数列,借助于求和公式得出数列的通项公式.

应用迁移

1.在①$a_5=b_4+2b_6$,②$a_3+a_5=4(b_1+b_4)$,③$b_2S_4=5a_2b_3$这三个条件中任选一个,补充在下面的问题中,并解答.

设数列$\{a_n\}$是公比大于 0 的等比数列,其前 n 项和为 S_n,$\{b_n\}$是等差数列.已知 $a_1=1,S_3-S_2=a_2+2a_1,a_4=b_3+b_5$,________.

(1)求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式;

(2)设 $T_n=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n$,求 T_n.

解:(1)选条件①.

设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q>0)$.

因为 $a_1=1,S_3-S_2=a_3=a_2+2a_1$,

所以 $q^2-q-2=0$,解得 $q=2$ 或 $q=-1$(舍).

所以 $a_n=2^{n-1}$.

设等差数列$\{b_n\}$的公差为 d.

因为 $a_4=b_3+b_5,a_5=b_4+2b_6$,

所以$\begin{cases}2b_1+6d=8,\\3b_1+13d=16,\end{cases}$解得$\begin{cases}b_1=1,\\d=1.\end{cases}$

所以 $b_n=n$.

所以 $a_n=2^{n-1},b_n=n$.

选条件②.

设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q>0)$.

因为 $a_1=1,S_3-S_2=a_3=a_2+2a_1$,

所以 $q^2-q-2=0$,解得 $q=2$ 或 $q=-1$(舍).

所以 $a_n=2^{n-1}$.

设等差数列$\{b_n\}$的公差为 d.

因为 $a_4=b_3+b_5,a_3+a_5=4(b_1+b_4)$,

所以$\begin{cases}2b_1+6d=8,\\2b_1+3d=5,\end{cases}$

解得$\begin{cases}b_1=1,\\d=1.\end{cases}$

所以 $b_n=n$.

所以 $a_n=2^{n-1},b_n=n$.

选条件③.

设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q>0)$.

因为 $a_1=1,S_3-S_2=a_3=a_2+2a_1$,

所以 $q^2-q-2=0$,解得 $q=2$ 或 $q=-1$(舍).

所以 $a_n=2^{n-1}$.

设等差数列$\{b_n\}$的公差为 d.

因为 $a_4=b_3+b_5,b_2S_4=5a_2b_3$,

所以$\begin{cases}2b_1+6d=8,\\b_1-d=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}b_1=1,\\d=1.\end{cases}$

所以 $b_n=n$.

所以 $a_n=2^{n-1},b_n=n$.

(2)由(1)知,$a_n=2^{n-1},b_n=n$,

所以 $T_n=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n$

$=1\times2^0+2\times2^1+\cdots+(n-1)\times2^{n-2}+n\times2^{n-1}$,

所以 $2T_n=1\times2^1+2\times2^2+\cdots+(n-1)\times2^{n-1}+n\times2^n$,

所以 $-T_n=1+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\times2^n$

$=\dfrac{1-2^n}{1-2}-n\times2^n$

$=2^n-1-n\times2^n$,

所以 $T_n=(n-1)\times2^n+1$.

2.已知等差数列$\{a_n\}$满足 a_2+4,a_5,a_6 成等差数列,且 a_4,a_7,a_{12}成等比数列.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)在数列$\{a_n\}$的每相邻两项 a_t 与 a_{t+1}间插入 2^t 个 3,$t=1,2,3,\cdots$,使它们和原数列$\{a_n\}$的项构成一个新数列$\{b_n\}$,数列$\{b_n\}$的前 n 项和记为 S_n,求 b_1 及 $S_{2\,033}$.

解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

因为 a_2+4,a_5,a_6 成等差数列,

所以有 $2a_5=a_6+a_2+4$,即 $2(a_1+4d)=a_1+5d+a_1+d+4$,解得 $d=2$.

因为 a_4,a_7,a_{12}成等比数列,

所以 $a_7^2=a_4a_{12}$,即$(a_1+6\times2)^2=(a_1+3\times2)(a_1+11\times2)$,解得 $a_1=3$.

所以 $a_n=3+(n-1)\times2=2n+1$.

(2)由题意可知 $b_1=a_1=3$,

且在 3 和 5 之间插入 2 个 3,

在 5 和 7 之间插入 2^2 个 3,

……

在 19 和 21 之间插入 2^9 个 3,

此时共插入 3 的个数为 $\dfrac{2\times(1-2^9)}{1-2}=2^{10}-2=1\,022<2\,033$.

在 21 和 23 之间插入 2^{10}个 3,

此时共插入 3 的个数为$\dfrac{2\times(1-2^{10})}{1-2}=2^{11}-2=2\,046>2\,033$.

所以 $S_{2\,033}=(3+5+\cdots+21)+(2\,033-10)\times3=\dfrac{(3+21)\times10}{2}+2\,023\times3=6\,189$.

提质归纳

等比数列前n项和的应用
- 实际应用
- 分组求数列的前n项和
- 综合应用

课后素养评价（十） 等比数列前n项和的应用

A组 学习·理解

1.设首项为1，公比为$\frac{2}{3}$的等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则（　　）

A.$S_n=2a_n-1$　　B.$S_n=3a_n-2$

C.$S_n=4-3a_n$　　D.$S_n=3-2a_n$

D　**解析**：在等比数列$\{a_n\}$中，$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{1-a_n\times\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=3-2a_n$.故选D.

2.数列$\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{4},\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}$的前$n$项和为（　　）

A.$n+\frac{1}{2n}$　　B.$n-1+\frac{1}{2^n}$

C.$n-1+\frac{1}{2^{n+1}}$　　D.$n+\frac{1}{2^{n-1}}$

B　**解析**：因为数列的通项公式为$a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$，

所以前n项和

$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

$=n-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$

$=n-1+\frac{1}{2^n}$.

故选B.

3.已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=2^{n-1}+1$，则数列$\{a_n\}$的前10项中所有奇数项之和与所有偶数项之和的比值为（　　）

A.$\frac{1}{2}$　　B.2　　C.$\frac{172}{341}$　　D.$\frac{341}{172}$

C　**解析**：当$n\geqslant2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n-2}$，又$a_1=S_1=2$，即前10项分别为2，1，2，4，8，16，32，64，128，256，

所以数列$\{a_n\}$的前10项中$S_{偶}=\frac{1-4^5}{1-4}=\frac{1\ 023}{3}=341$，$S_{奇}=2+\frac{2\times(1-4^4)}{1-4}=2+\frac{510}{3}=172$，所以$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{172}{341}$.故选C.

4.已知数列$\{a_n\}$是以2为首项，1为公差的等差数列，$\{b_n\}$是以1为首项，2为公比的等比数列，则$a_{b_1}+a_{b_2}+\cdots+a_{b_{10}}=$（　　）

A.1 033　　B.1 034

C.2 057　　D.2 058

A　**解析**：因为$a_n=n+1$，$b_n=2^{n-1}$，

所以$a_{b_1}+a_{b_2}+\cdots+a_{b_{10}}=a_1+a_{2^1}+a_{2^2}+\cdots+a_{2^9}$

$=(1+1)+(2^1+1)+(2^2+1)+\cdots+(2^9+1)$

$=10+(1+2+2^2+\cdots+2^9)=10+\frac{1-2^{10}}{1-2}=1\ 033$.

故选A.

5.设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_6=3S_3$，则$\frac{S_9}{S_3}=$（　　）

A.4　　B.6

C.7　　D.9

C　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.

由$S_6=3S_3$，得$a_4+a_5+a_6=S_6-S_3=2S_3$，

即$a_1q^3+a_1q^4+a_1q^5=2(a_1+a_1q+a_1q^2)$，而$a_1\neq0$，$1+q+q^2\neq0$，则$q^3=2$.

因此$S_9=S_6+a_7+a_8+a_9=3S_3+a_1q^6+a_1q^7+a_1q^8=3S_3+q^6S_3=7S_3$，

所以$\frac{S_9}{S_3}=7$.故选C.

6.设$\{a_n\}$是公比为正数的等比数列，$a_1=2$，$a_3=a_2+4$.设$\{b_n\}$的前n项和为S_n，$S_n=n^2$.

(1)求$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{a_n+b_n\}$的前n项和T_n；

(3)设$c_n=\frac{1}{b_n\cdot b_{n+1}}$，求数列$\{c_n\}$的前$n$项和$H_n$.

解：(1)由题意$\{a_n\}$是公比为正数的等比数列，$a_1=2$，$a_3=a_2+4$.

设公比为$q(q>0)$，则$2q^2=2q+4$，所以$q=2$，

故$a_n=2^n$.

由$\{b_n\}$的前n项和为S_n，$S_n=n^2$，得当$n=1$时，$b_1=S_1=1$.

当$n\geqslant2$时，$b_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$.

$b_1=1$也适合上式，故$b_n=2n-1$.

(2)由题意可得$T_n=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)=(2+2^2+\cdots+2^n)+[1+3+\cdots+(2n-1)]=2^{n+1}-2+n^2$.

(3)由(1)得$c_n=\frac{1}{b_n\cdot b_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

故 $H_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.

B组　应用·实践

1.已知数列$\{a_n\}$满足 $a_n=2^n$,在 a_n 和 a_{n+1}之间插入 n 个 1,构成数列$\{b_n\}$:$a_1,1,a_2,1,1,a_3,1,1,1,a_4,\cdots$,则数列$\{b_n\}$的前 18 项的和 $S_{18}=$　(　　)

A.43　　B.44　　C.75　　D.76

C　**解析**:在 a_n 和 a_{n+1}之间插入 n 个 1,构成数列$\{b_n\}$:$a_1,1,a_2,1,1,a_3,1,1,1,a_4,\cdots$,

则从 a_1 到 a_n 共有 $n+[1+2+\cdots+(n-1)]=n+\frac{(n-1)(1+n-1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$(个)数.

当 $n=5$ 时,$\frac{5^2+5}{2}=15$,当 $n=6$ 时,$\frac{6^2+6}{2}=21$.

由于 $a_n=2^n$,所以 $S_{18}=(a_1+a_2+\cdots+a_5)+(18-5)\times1=\frac{2\times(1-2^5)}{1-2}+13=75$.故选 C.

2.(多选)计算机病毒危害很大,一直是计算机科学家研究的对象.当计算机内某文件感染病毒后,该病毒文件就不断地传染其他未感染的文件.计算机科学家们研究的计算机病毒传染指数 C_0,即一个病毒文件在一分钟内平均传染的文件数.某计算机病毒的传染指数 $C_0=2$,一台计算机有 10^5 个文件,若该计算机有一半以上文件感染,则该计算机将处于瘫痪状态.该计算机现只有一个病毒文件,且未经杀毒处理,则下列说法中正确的是　(　　)

A.在第 3 min 内,该计算机新感染的文件为 18 个

B.经过 5 min,该计算机共有 243 个病毒文件

C.10 min 后,该计算机处于瘫痪状态

D.该计算机瘫痪前,每分钟内新感染的文件数成公比为 2 的等比数列

ABC　**解析**:设第$(n+1)$min 之内新感染的文件数为 a_{n+1},前 n min 内新感染的文件数之和为 S_n,则 $a_{n+1}=2(S_n+1)$,且 $a_1=2$.

由 $a_{n+1}=2(S_n+1)$,得当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=2(S_{n-1}+1)$,两式相减得 $a_{n+1}-a_n=2a_n$,

所以 $a_{n+1}=3a_n$.又 $a_2=2(S_1+1)=6$,$a_2=3a_1$,所以每分钟内新感染的文件数构成以 $a_1=2$ 为首项,3 为公比的等比数列,所以 $a_n=2\times3^{n-1}$.

在第 3 min 内,新感染了 $a_3=2\times3^{3-1}=18$(个)文件.故选项 A 正确.

经过 5 min,该计算机共有 $1+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1+\frac{2\times(1-3^5)}{1-3}=3^5=243$(个)病毒文件.故选项 B 正确.

10 min 后,该计算机感染病毒的文件总数为 $1+a_1+a_2+\cdots+a_{10}=1+\frac{2\times(1-3^{10})}{1-3}=3^{10}>\frac{1}{2}\times10^5$,所以该计算机处于瘫痪状态.故选项 C 正确.

该计算机瘫痪前,每分钟内新感染的文件数成公比为 3 的等比数列.故选项 D 不正确.

故选 ABC.

3.设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,其前 n 项和为 S_n,前 n 项积为 T_n,并满足条件 $a_1>1$,$a_{2\,023}a_{2\,024}>1$,$\frac{a_{2\,023}-1}{a_{2\,024}-1}<0$,则　(　　)

A.$S_{2\,023}<S_{2\,024}$

B.$a_{2\,023}a_{2\,024}-1<0$

C.$T_{2\,024}$是数列$\{T_n\}$中的最大项

D.数列$\{T_n\}$无最大项

A　**解析**:当 $q<0$ 时,$a_{2\,023}a_{2\,024}=a_{2\,023}^2q<0$,不成立;

当 $q\geqslant1$ 时,$a_{2\,023}>1$,$a_{2\,024}>1$,$\frac{a_{2\,023}-1}{a_{2\,024}-1}>0$,不成立.

故 $0<q<1$,且 $a_{2\,023}>1$,$0<a_{2\,024}<1$,故 $S_{2\,024}>S_{2\,023}$,故 A 正确;

$a_{2\,023}a_{2\,024}-1>1-1=0$,故 B 错误;

因为 $a_{2\,023}>1$,$0<a_{2\,024}<1$,所以 $T_{2\,023}$是数列$\{T_n\}$中的最大项,故 C,D 错误.

故选 A.

4.已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$,前 n 项和为 S_n,$a_{n+1}\cdot a_n=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$,则 $S_{2\,024}$等于　(　　)

A.$2^{2\,024}-1$

B.$3\times2^{1\,012}-1$

C.$3\times2^{1\,012}-2$

D.$3\times2^{1\,012}-3$

D　**解析**:在数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,由 $a_{n+1}\cdot a_n=2^n$,得 $a_2=2$,$a_{n+2}\cdot a_{n+1}=2^{n+1}$,则有$\frac{a_{n+2}}{a_n}=2$,

因此数列$\{a_{2n-1}\}$是以 1 为首项,2 为公比的等比数列,数列$\{a_{2n}\}$是以 2 为首项,2 为公比的等比数列,

所以 $S_{2\,024}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2\,023})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2\,024})=\frac{1-2^{1\,012}}{1-2}+\frac{2\times(1-2^{1\,012})}{1-2}=3\times2^{1\,012}-3$.

故选 D.

5.已知正项等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.若-1,S_5,S_{10}成等差数列,则 $S_{10}-2S_5=$________,且 $S_{15}-S_{10}$的最小值为________.

1　4　**解析**:由题意知 $2S_5=-1+S_{10}$,

所以 $S_{10}-2S_5=1$.

由$\{a_n\}$为等比数列可知 S_5,$S_{10}-S_5$,$S_{15}-S_{10}$成等比数列,所以$(S_{10}-S_5)^2=S_5(S_{15}-S_{10})$,$S_{15}-S_{10}=\frac{(S_{10}-S_5)^2}{S_5}=\frac{(2S_5+1-S_5)^2}{S_5}=\frac{1}{S_5}+S_5+2\geqslant2\sqrt{\frac{1}{S_5}\cdot S_5}+2=4$,当且仅当 $S_5=1$ 时,等号成立.

6.已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和$S_n=\frac{n^2+n}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=2^{a_n}+(-1)^n a_n$，求数列$\{b_n\}$的前 $2n$ 项和.

解：(1)当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1$；

当 $n\geqslant 2$ 时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n^2+n}{2}-\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}=n$.

因为 $a_1=1$ 也符合上式，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n$.

(2)由(1)知 $a_n=n$，故 $b_n=2^n+(-1)^n n$.

记数列$\{b_n\}$的前 $2n$ 项和为 T_{2n}，则

$T_{2n}=(2^1+2^2+\cdots+2^{2n})+(-1+2-3+4-\cdots+2n)$.

记 $A=2^1+2^2+\cdots+2^{2n}$，$B=-1+2-3+4-\cdots+2n$，

则 $A=\frac{2(1-2^{2n})}{1-2}=2^{2n+1}-2$，

$B=(-1+2)+(-3+4)+\cdots+[-(2n-1)+2n]=n$，

所以数列$\{b_n\}$的前 $2n$ 项和 $T_{2n}=A+B=2^{2n+1}+n-2$.

易错强化训练（二） 等比数列

练易错

易错点 1 | 对等比数列的定义理解不透彻

［防范要诀］

等比数列$\{a_n\}$中任意一项 $a_n\neq 0$，且公比 $q\neq 0$.

［对点集训］

1.(多选)设 S_n 是数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $a_1=1$，$a_{n+1}=2S_n(n\in\mathbf{N}^*)$，则下列结论正确的是（　　）

A.$\{a_n\}$是等比数列　　B.$\{S_n\}$是等比数列

C.$a_n=3^{n-1}$　　D.$S_n=3^{n-1}$

BD　**解析**：因为 $a_{n+1}=2S_n$，所以当 $n\geqslant 2$ 时，有 $a_n=2S_{n-1}$，两式相减得 $a_{n+1}=3a_n$.

又 $a_1=1$，$a_2=2S_1=2$，所以数列$\{a_n\}$不是等比数列，故 A，C 错误.

由 $2S_n=a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$，得 $S_{n+1}=3S_n$.又 $S_1=a_1=1$，所以数列$\{S_n\}$是首项为 1，公比为 3 的等比数列，

所以 $S_n=1\times 3^{n-1}=3^{n-1}$，故 B，D 正确.故选 BD.

2.已知数列$\{a_n\}$，$a_n\neq 0$，a_1，a_2，a_3 成等差数列，a_2，a_3，a_4 成等比数列，a_3，a_4，a_5 的倒数成等差数列，证明：a_1，a_3，a_5 成等比数列.

证明：由已知，有 $2a_2=a_1+a_3$①，

$a_3^2=a_2a_4$②，

$\frac{2}{a_4}=\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_5}$③.

由③得$\frac{2}{a_4}=\frac{a_3+a_5}{a_3a_5}$，所以 $a_4=\frac{2a_3a_5}{a_3+a_5}$④.

由①得 $a_2=\frac{a_1+a_3}{2}$⑤，

将④⑤代入②，得 $a_3^2=\frac{a_1+a_3}{2}\cdot\frac{2a_3a_5}{a_3+a_5}$，

所以 $a_3=\frac{(a_1+a_3)a_5}{a_3+a_5}$，即 $a_3(a_3+a_5)=a_5(a_1+a_3)$.

化简，得 $a_3^2=a_1a_5$.

又 a_1，a_3，a_5 都不等于 0，所以 a_1，a_3，a_5 成等比数列.

易错点 2 | 利用等比中项时忽略判断符号

［防范要诀］

1.等比数列中所有奇数项的符号都相同，所有偶数项的符号都相同.

2.只有同号两数才有等比中项，且有两个，它们互为相反数.

［对点集训］

3.如果 1，a，b，c，16 成等比数列，那么 $b=$________，$ac=$________.

4　16　**解析**：设等比数列的公比为 q.

因为 $b^2=1\times 16=16$，且 $b=1\times q^2>0$，

所以 $b=4$.又因为 $b^2=ac$，所以 $ac=16$.

4.已知-2，a_1，a_2，-8 成等差数列，-2，b_1，b_2，b_3，-8 成等比数列，则$\frac{a_2-a_1}{b_2}=$________.

$\frac{1}{2}$　**解析**：因为-2，a_1，a_2，-8 成等差数列，

所以$\begin{cases}2a_1=-2+a_2,\\2a_2=a_1-8,\end{cases}$得$\begin{cases}a_1=-4,\\a_2=-6.\end{cases}$

又因为-2，b_1，b_2，b_3，-8 成等比数列，

所以 $b_2^2=-2\times(-8)=16$，

所以 $b_2=4$ 或 $b_2=-4$.

由等比数列隔项同号，可得 $b_2=-4$，

所以$\frac{a_2-a_1}{b_2}=\frac{-6-(-4)}{-4}=\frac{1}{2}$.

5.等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_3=5+\sqrt{2}$，$S_3=9+3\sqrt{2}$.

(1)求 a_n 以及 S_n；

(2)设 $b_n=\frac{S_n}{n}$，证明：数列$\{b_n\}$中不存在不同的三项成等比数列.

(1)**解**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

由已知得 $5+\sqrt{2}=a_1+2d, 9+3\sqrt{2}=3a_1+3d$,

解得 $a_1=\sqrt{2}+1, d=2$,

所以 $a_n=2n+\sqrt{2}-1, S_n=n^2+\sqrt{2}n$.

(2)**证明**:由(1)得 $b_n=\frac{S_n}{n}=n+\sqrt{2}$,

假设$\{b_n\}$中存在不同的三项 b_n, b_m, b_p 成等比数列,

则 $b_m^2=b_n\cdot b_p$,

即$(m+\sqrt{2})^2=(n+\sqrt{2})\cdot(p+\sqrt{2})$,

所以$(m^2-np)+\sqrt{2}[2m-(n+p)]=0$.

因为 m,n,p 是正整数,所以 m^2-np 和 $2m-(n+p)$均为有理数,

所以 $m^2-np=0, 2m-(n+p)=0$,

所以$(n+p)^2=4np$,所以$(n-p)^2=0$,所以 $n=p$,与$n\neq p$ 矛盾,

所以数列$\{b_n\}$中不存在不同的三项成等比数列.

易错点 3｜ 忽视对公比 q 的讨论

[防范要诀]

等比数列$\{a_n\}$的公比 $q\neq0$,数列中各项都不为零;当公比 $q\neq1$ 时,前 n 项和 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$;当公比 $q=1$ 时,前 n 项和$S_n=na_1$.

[对点集训]

6. 等比数列 $1,a,a^2,a^3,\cdots(a\neq0)$的前 n 项和 S_n =________.

$\begin{cases}n,a=1,\\ \frac{1-a^n}{1-a},a\neq1\end{cases}$　**解析**:当 $a=1$ 时,$S_n=n$;当 $a\neq1$ 时,$S_n=\frac{1-a^n}{1-a}$.所以 $S_n=\begin{cases}n,a=1,\\ \frac{1-a^n}{1-a},a\neq1.\end{cases}$

7. 在公比为 q 的等比数列$\{a_n\}$中,其前 n 项和为 S_n.若 $S_3=4, S_6=36$,求 a_n.

解:因为 $S_6\neq2S_3$,所以 $q\neq1$.

由$\begin{cases}S_3=4,\\ S_6=36,\end{cases}$得$\begin{cases}\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=4①,\\ \frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=36②.\end{cases}$

由$\frac{②}{①}$得$\frac{1-q^6}{1-q^3}=9$,即 $1+q^3=9$,解得 $q=2$.

将 $q=2$ 代入①式,得 $a_1=\frac{4}{7}$.

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=\frac{4}{7}\times2^{n-1}=\frac{2^{n+1}}{7}$.

练疑难

1. 设$\{a_n\}$是公比为 q 的等比数列,S_n 是它的前 n 项和.若$\{S_n\}$是等差数列,则 q 等于　(　　)

A.1　B.0　C.1 或 0　D.-1

A　**解析**:因为$\{S_n\}$是等差数列,所以 $2S_2=S_1+S_3$,

所以 $2(a_1+a_2)=a_1+(a_1+a_2+a_3)$,所以 $a_2=a_3$,

所以 $q=\frac{a_3}{a_2}=1$.

2. 已知数列$\{a_n\}$是等比数列,函数 $y=x^2-5x+6$ 的零点分别是 a_2, a_{10},则 $a_6=$　(　　)

A.2　B.$\pm\sqrt{6}$

C.$\pm\sqrt{3}$　D.$\sqrt{6}$

D　**解析**:由题意可得 $a_2a_{10}=6>0, a_2+a_{10}=5>0$,所以 $a_2>0, a_{10}>0$,

故 $a_6>0$,所以 $a_6=\sqrt{a_2a_{10}}=\sqrt{6}$.故选 D.

3. 已知数列$\{a_n\}$是公比为 q 的等比数列,且 a_1,a_3,a_2 成等差数列,则公比 q 的值为　(　　)

A.$-\frac{1}{2}$　B.-2

C.-1 或$\frac{1}{2}$　D.1 或$-\frac{1}{2}$

D　**解析**:因为 a_1,a_3,a_2 成等差数列,所以 $2a_3=a_1+a_2$,

所以 $2q^2-q-1=0$,解得 $q=1$ 或 $q=-\frac{1}{2}$.

4. 已知在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,前 n 项和为 S_n,公比为 q.若数列$\{S_n+1\}$也是等比数列,则 $q=$　(　　)

A.1　B.$\frac{3}{2}$　C.2　D.3

D　**解析**:依题意,$\{a_n\}$是等比数列,$\{S_n+1\}$是等比数列,

所以 S_1+1, S_2+1, S_3+1 成等比数列,

所以$(S_2+1)^2=(S_1+1)\times(S_3+1)$,

即$(a_1+a_2+1)^2=(a_1+1)(a_1+a_2+a_3+1)$,

即$(2+2q+1)^2=(2+1)(2+2q+2q^2+1)$,

整理得 $q^2-3q=0$,解得 $q=3$ 或 $q=0$(舍去).

此时 $S_n+1=1+\frac{2\times(1-3^n)}{1-3}=3^n$,$\frac{S_{n+1}+1}{S_n+1}=3$,$\{S_n+1\}$是等比数列.故选 D.

5. 已知等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$的各项都是正数,且 $a_1=b_1, a_{11}=b_{11}$,那么一定有　(　　)

A.$a_6\leqslant b_6$　B.$a_6\geqslant b_6$

C.$a_{12}\leqslant b_{12}$　D.$a_{12}\geqslant b_{12}$

B　**解析**:因为等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$的各项都是正数,且 $a_1=b_1, a_{11}=b_{11}$,

所以 $a_1+a_{11}=b_1+b_{11}=2a_6$,

所以 $a_6=\frac{a_1+a_{11}}{2}=\frac{b_1+b_{11}}{2}\geqslant\sqrt{b_1b_{11}}=b_6$.

当且仅当 $b_1=b_{11}$ 时,等号成立,此时数列$\{b_n\}$的公比为 1.

6. (多选)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{2+3a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$,则下列结论正确的有　(　　)

A.$\left\{\frac{1}{a_n}+3\right\}$为等比数列

B.$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{1}{2^{n+1}-3}$

C.$\{a_n\}$为递增数列

D.$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前$n$项和$T_n=2^{n+2}-3n-4$

ABD **解析**：因为$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2+3a_n}{a_n}=\frac{2}{a_n}+3$，所以$\frac{1}{a_{n+1}}+3=2\left(\frac{1}{a_n}+3\right)$．又因为$\frac{1}{a_1}+3=4\neq0$，所以$\left\{\frac{1}{a_n}+3\right\}$是以4为首项，2为公比的等比数列．故$\frac{1}{a_n}+3=4\times2^{n-1}=2^{n+1}$，即$a_n=\frac{1}{2^{n+1}-3}$．易知$\{a_n\}$为递减数列，$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前$n$项和$T_n=(2^2-3)+(2^3-3)+\cdots+(2^{n+1}-3)=2(2^1+2^2+\cdots+2^n)-3n=2\times\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}-3n=2^{n+2}-3n-4$．故选ABD．

7.在等比数列$\{a_n\}$中，$a_3=4$，前3项和$S_3=12$，数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=$________．

4或$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-5}$ **解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q．

当$q=1$时，$a_3=4$，$a_1=a_2=a_3=4$，$S_3=a_1+a_2+a_3=12$，所以$q=1$符合题意，此时$a_n=4$．

当$q\neq1$时，$\begin{cases}a_3=a_1q^2=4,\\ S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=12,\end{cases}$

解得$q=-\frac{1}{2}$，

所以$a_n=a_3q^{n-3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-5}$．

综上，$a_n=4$或$a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-5}$．

8.设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，点$\left(n,\frac{S_n}{n}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$均在直线$y=x+\frac{1}{2}$上．若$b_n=3^{a_n+\frac{1}{2}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$．

解：依题意得$\frac{S_n}{n}=n+\frac{1}{2}$，即$S_n=n^2+\frac{1}{2}n$．

当$n\geqslant2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(n^2+\frac{1}{2}n\right)-\left[(n-1)^2+\frac{1}{2}(n-1)\right]=2n-\frac{1}{2}$；

当$n=1$时，$a_1=S_1=\frac{3}{2}$，

符合$a_n=2n-\frac{1}{2}$，

所以$a_n=2n-\frac{1}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$．

故$b_n=3^{a_n+\frac{1}{2}}=3^{2n}$．

由$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{3^{2(n+1)}}{3^{2n}}=3^2=9$，可知$\{b_n\}$是公比为9的等比数列，$b_1=3^{2\times1}=9$，

所以$T_n=\frac{9(1-9^n)}{1-9}=\frac{9^{n+1}-9}{8}$．

4.4* 数学归纳法

学习任务目标

1.了解数学归纳法的原理．
2.掌握用数学归纳法证明问题的一般方法与步骤．
3.能用数学归纳法证明一些数学命题．

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一 数学归纳法的定义

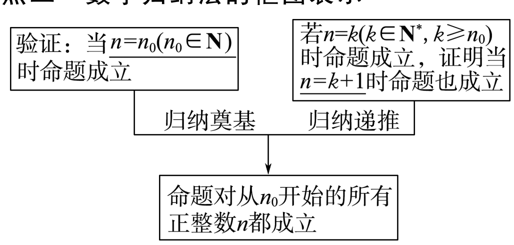
一般地，证明一个与正整数n有关的命题，可按下列步骤进行：

(1)（归纳奠基）证明当$n=n_0(n_0\in\mathbf{N}^*)$时命题成立；

(2)（归纳递推）以“当$n=k(k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant n_0)$时命题成立”为条件，推出“当$n=k+1$时命题也成立”．

只要完成这两个步骤，就可以断定命题对从n_0开始的所有正整数n都成立，这种证明方法称为数学归纳法．

知识点二 数学归纳法的框图表示



【概念辨析】

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）．

(1)与自然数n有关的问题都可以用数学归纳法进

行证明. (×)

(2)在利用数学归纳法证明命题时,只要推理过程正确,也可以不用进行假设. (×)

(3)用数学归纳法证明等式时,由 $n=k$ 到 $n=k+1$,等式的项数一定增加了1. (×)

2. 当 $n=1$ 时,式子 $1+k+k^2+\cdots+k^n(n\in\mathbf{N}^*)$ 的值为 (B)

A.1　　B.$1+k$

C.$1+k+k^2$　　D.以上都不对

3. 请思考并回答下列问题:

(1)用数学归纳法证明时,第一步中,n 的初始值 n_0 只能是1吗?举例说明.

提示:用数学归纳法证明时,第一步中,n 的初始值 n_0 应根据命题的具体情况来确定,不一定是1.如:用数学归纳法证明凸 n 边形的内角和为 $(n-2)\cdot180°$ 时,其初始值 $n_0=3$.

(2)用数学归纳法证明时,在验证了 $n=1$ 时命题正确,假定 $n=k$ 时命题正确后,此时 k 的取值范围是什么?

提示:$k\geqslant1,k\in\mathbf{N}^*$.数学归纳法是证明关于正整数 n 的命题的一种方法,所以 k 是正整数,又因为第一步是递推的基础,所以 k 大于等于1.

(3)数学归纳法两个步骤之间有怎样的联系?

提示:第一步是验证命题递推的基础,第二步是论证命题递推的依据,这两个步骤缺一不可,只完成第一步而缺少第二步就作出判断,可能得出不正确的结论.因为单靠第一步,无法递推下去,即我们无法判定 n 取 n_0 以后的数时命题是否正确.同样只有第二步而缺少第一步,也可能得出不正确的结论,缺少第一步这个基础,假设就失去了成立的前提,第二步也就没有意义了.

○ 任务型课堂 ○

任务1 对数学归纳法的理解

1. 用数学归纳法证明 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n(n\in\mathbf{N}^*,n>1)$ 时,第一步应验证不等式 (　　)

A.$1+\frac{1}{2}<2$　　B.$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<3$

C.$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<2$　　D.$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}<3$

C　**解析**:用数学归纳法证明 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n(n\in\mathbf{N}^*,n>1)$,第一步先验证当 $n=2$ 时,不等式 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<2$ 是否成立.故选C.

2. 已知 $f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}(n\in\mathbf{N}^*)$,从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时,$f(k+1)$ 比 $f(k)$ 共增加了(　　)

A.1项　　B.2^{k-1}项

C.2^{k+1}项　　D.2^k项

D　**解析**:由题意,当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时,最后一项为 $\frac{1}{2^k}$,当 $n=k+1$ 时,最后一项为 $\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^k\times2}=\frac{1}{2^k+2^k}$,所以由 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时,增加的项为 $\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^k}$,增加了 2^k 项.故选D.

【探究总结】

运用数学归纳法证明时的易错点

(1)在项数上出错,特别是寻找从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 项数发生什么变化时易弄错.

(2)不利用归纳假设.归纳假设是使用数学归纳法的关键一步,是起桥梁作用的,桥梁断了就无法通过了,自然也得不出最终结论.

(3)步骤不严谨、不规范.在利用假设后,不作任何推导或计算而直接写出所要的结论.

任务2 用数学归纳法证明与数列有关的等式

探究活动

例1　(1)用数学归纳法证明:$1+3\times2+5\times2^2+\cdots+(2n-1)\times2^{n-1}=2^n(2n-3)+3(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)用数学归纳法证明:$\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{2}{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

证明:(1)①当 $n=1$ 时,左边$=1$,右边$=2\times(2-3)+3=1$,左边=右边,等式成立.

②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时,等式成立,即 $1+3\times2+5\times2^2+\cdots+(2k-1)\times2^{k-1}=2^k(2k-3)+3$,

则当 $n=k+1$ 时,$1+3\times2+5\times2^2+\cdots+(2k-1)\times2^{k-1}+(2k+1)\times2^k=2^k(2k-3)+3+(2k+1)\times2^k=2^k(4k-2)+3=2^{k+1}[2(k+1)-3]+3$,

即当 $n=k+1$ 时,等式也成立.

由①②可知,等式对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

(2)①当 $n=1$ 时,左边$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$,

右边$=\frac{2}{1+2}=\frac{2}{3}$,等式成立.

②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时,等式成立,

即 $\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{2}{k+2}$,

则当 $n=k+1$ 时,

$\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{k+2}\right)\times\left(1-\frac{1}{k+3}\right)=\frac{2}{k+2}\left(1-\frac{1}{k+3}\right)=\frac{2(k+2)}{(k+2)(k+3)}=\frac{2}{k+3}=\frac{2}{(k+1)+2}$,

即当 $n=k+1$ 时,等式也成立.

由①②可知,等式对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

【探究总结】

用数学归纳法证明等式的注意点

(1)弄清 n 取第一个值 n_0 时等式两端项的情况.

(2)弄清从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时等式两端的项是如何变化的,即增加了哪些项,减少了哪些项.

(3)证明当 $n=k+1$ 时结论也成立,要设法将待证式与归纳假设建立联系,并向 $n=k+1$ 时证明的目标表达式进行变形.

应用迁移

1. 设 n 是正整数,证明:$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$.

证明: 当 $n=1$ 时,左边 $=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,右边 $=\frac{1}{2}$,所以当 $n=1$ 时等式成立.

假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时,等式成立,即 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}$,

则当 $n=k+1$ 时,

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2(k+1)-1}-\frac{1}{2(k+1)}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2(k+1)-1}-\frac{1}{2(k+1)}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}$.

即等式在 $n=k+1$ 时也成立.

综上所述,等式对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

2. 观察以下等式:

$1^3=1^2$,

$1^3+2^3=(1+2)^2$,

$1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$,

$1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2$,

……

(1)请用含 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 的等式归纳猜想出一般性结论,并用数学归纳法加以证明;

(2)设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,且 $a_n=n^3+n$,求 S_{10}.

解:(1)猜想 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$.

证明:当 $n=1$ 时,左边 $=1$,右边 $=1$,等式成立.

假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时,等式成立,即 $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=(1+2+3+\cdots+k)^2$,

则当 $n=k+1$ 时,

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$

$=(1+2+3+\cdots+k)^2+(k+1)^3$

$=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3=(k+1)^2\cdot\frac{k^2+4k+4}{4}$

$=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2=[1+2+\cdots+(k+1)]^2$,

即当 $n=k+1$ 时,等式也成立.

综上所述,对任意的正整数 n,$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$.

(2)因为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,且 $a_n=n^3+n$,

所以 $S_{10}=(1^3+2^3+\cdots+10^3)+(1+2+\cdots+10)$

$=(1+2+\cdots+10)^2+\frac{10\times11}{2}$

$=55^2+55=3\ 080$.

任务3 › 用数学归纳法证明与数列有关的不等式

探究活动

例2 用数学归纳法证明:$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}>\frac{n}{2}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

证明:(1)当 $n=1$ 时,左边 $=1$,右边 $=\frac{1}{2}$,不等式成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时,不等式成立,

即 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}>\frac{k}{2}$,

则当 $n=k+1$ 时,$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k}>\frac{k}{2}+\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k}>\frac{k}{2}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}=\frac{k}{2}+(2^k-2^{k-1})\cdot\frac{1}{2^k}=\frac{k+1}{2}$.

即当 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

由(1)(2)可知,不等式对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

[一题多思]

思考1. 推证"当 $n=k+1$ 时,不等式也成立"的过程中必须要用到什么?关键点是什么?

提示: 必须要用到归纳假设,即当 $n=k$ 时,不等式成立.

关键点是对不等式进行适当放缩.

思考2.将本例要证的不等式改为“$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\leqslant\frac{1}{2}+n(n\in\mathbf{N}^*)$”,如何证明?

证明:(1)当 $n=1$ 时,左边$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+1=$右边,不等式成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时,不等式成立,

即 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}\leqslant\frac{1}{2}+k$,

则当 $n=k+1$ 时,

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^k}\leqslant\frac{1}{2}+k+\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^k}<\frac{1}{2}+k+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}+k+2^k\cdot\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}+(k+1)$,

即当 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

由(1)(2)可知,不等式对所有的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

【探究总结】

用数学归纳法证明不等式的注意点

(1)在归纳递推的证明过程中,方向不明确时,可采用分析法完成,经过分析找到推证的方向后,再用综合法、比较法等其他方法证明.

(2)在推证“$n=k+1$ 时不等式也成立”的过程中,常常要将表达式作适当的放缩、变形,以便于应用所作假设变换出要证明的结论.

应用迁移

1.对不等式$\sqrt{n^2+n}<n+1(n\in\mathbf{N}^*)$,某同学的证明过程如下:

(1)当 $n=1$ 时,$\sqrt{1^2+1}<1+1$,不等式成立;

(2)假设当 $n=k(k\geqslant1,k\in\mathbf{N}^*)$时,不等式成立,即$\sqrt{k^2+k}<k+1$,则当 $n=k+1$ 时,$\sqrt{(k+1)^2+(k+1)}=\sqrt{k^2+3k+2}<\sqrt{k^2+3k+2+(k+2)}=\sqrt{(k+2)^2}=(k+1)+1$,所以当 $n=k+1$ 时,不等式也成立.上述证法 (　　)

A.过程全部正确

B.$n=1$ 时的验证不正确

C.归纳假设不正确

D.从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 的推理不正确

D　**解析**:用数学归纳法证明不等式没有应用归纳假设,所以从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 的推理不正确.

2.已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=2,na_{n+1}=(n+1)a_n+n(n+1),n\in\mathbf{N}^*$.

(1)求证:数列$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$为等差数列,并求出数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)记 $b_n=\frac{2}{(n+1)a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$,用数学归纳法证明:$b_1+b_2+\cdots+b_n<1-\frac{1}{(n+1)^2},n\in\mathbf{N}^*$.

证明:(1)由 $a_1=2,na_{n+1}=(n+1)a_n+n(n+1)$,

可得$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+1$,即$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=1$,

又$\frac{a_1}{1}=2$,

则数列$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$是首项为2,公差为1的等差数列,

所以$\frac{a_n}{n}=2+n-1=n+1$.

故 $a_n=n(n+1)$.

(2)由(1)可得 $b_n=\frac{2}{(n+1)a_n}=\frac{2}{n(n+1)^2}$.

①当 $n=1$ 时,左边$=b_1=\frac{1}{2}$,右边$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$,$\frac{1}{2}<\frac{3}{4}$,不等式成立.

②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时,不等式成立,

即 $b_1+b_2+\cdots+b_k<1-\frac{1}{(k+1)^2}$.

当 $n=k+1$ 时,$b_1+b_2+\cdots+b_k+b_{k+1}<1-\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{2}{(k+1)(k+2)^2}=1-\frac{k^2+2k+2}{(k+1)^2(k+2)^2}<1-\frac{k^2+2k+1}{(k+1)^2(k+2)^2}=1-\frac{1}{(k+2)^2}$,

即当 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

由①②可知,$b_1+b_2+\cdots+b_n<1-\frac{1}{(n+1)^2}$对所有的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

任务4 用数学归纳法证明整除问题

探究活动

例3　用数学归纳法证明:$a^{n+1}+(a+1)^{2n-1}(n\in\mathbf{N}^*,a\in\mathbf{R})$能被 a^2+a+1 整除.

证明:(1)当 $n=1$ 时,$a^2+(a+1)^1=a^2+a+1$,显然能被 a^2+a+1 整除,命题成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时,命题成立,

即 $a^{k+1}+(a+1)^{2k-1}$能被 a^2+a+1 整除.

当 $n=k+1$ 时,

$a^{k+2}+(a+1)^{2k+1}=a\cdot a^{k+1}+(a+1)^2(a+1)^{2k-1}=a[a^{k+1}+(a+1)^{2k-1}]+(a+1)^2(a+1)^{2k-1}-a(a+1)^{2k-1}=a[a^{k+1}+(a+1)^{2k-1}]+(a^2+a+1)(a+1)^{2k-1}$.

因为 $a^{k+1}+(a+1)^{2k-1}$与 a^2+a+1 都能被 a^2+a+1 整除,所以上式能被 a^2+a+1 整除,

即当 $n=k+1$ 时,命题也成立.

由(1)(2)知,对一切 $n\in\mathbf{N}^*,a\in\mathbf{R}$,命题都成立.

【探究总结】

用数学归纳法证明整除问题的策略

证明整除问题的关键是凑项，即采取增项、减项、拆项和因式分解等手段，凑出 $n=k$ 时的情形，从而利用归纳递推使问题得以解决.

应用迁移

用数学归纳法证明：$2^{3n}-1$ $(n\in\mathbf{N}^*)$能被 7 整除.

证明：(1)当 $n=1$ 时，$2^{3\times1}-1=8-1=7$，能被 7 整除.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时，$2^{3k}-1$ 能被 7 整除.

那么当 $n=k+1$ 时，$2^{3(k+1)}-1=8\times2^{3k}-1=8\times2^{3k}-8+7=8(2^{3k}-1)+7$.

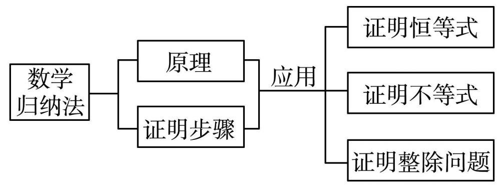
因为 $2^{3k}-1$ 能被 7 整除，

所以 $8(2^{3k}-1)+7$ 能被 7 整除，

即当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

由(1)(2)可知，$2^{3n}-1(n\in\mathbf{N}^*)$能被 7 整除.

提质归纳



课后素养评价（十一） 数学归纳法

A组 学习·理解

1. 用数学归纳法证明等式 $1+2+3+\cdots+(n+3)=\dfrac{(n+3)(n+4)}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$时，第一步验证 $n=1$ 时等式成立，左边的式子是（　　）

A.1　　B.1+2

C.1+2+3　　D.1+2+3+4

D　**解析**：当 $n=1$ 时，$n+3=4$，故左边应为 $1+2+3+4$.故选 D.

2. 利用数学归纳法证明不等式 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n-1}<f(n)(n\geqslant2$，且 $n\in\mathbf{N}^*)$的过程中，由 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时，左边增加了（　　）

A.2^{k-1}项　　B.2^k 项

C.$k-1$ 项　　D.k 项

B　**解析**：当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时，不等式左边为 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2^k-1}$，

当 $n=k+1$ 时，不等式左边为 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2^k-1}+\dfrac{1}{2^k}+\dfrac{1}{2^k+1}+\cdots+\dfrac{1}{2^{k+1}-1}$，

增加的部分为 $\dfrac{1}{2^k}+\dfrac{1}{2^k+1}+\cdots+\dfrac{1}{2^{k+1}-1}=\dfrac{1}{2^k}+\dfrac{1}{2^k+1}+\cdots+\dfrac{1}{2^k+2^k-1}$，共有 2^k 项.

故选 B.

3. 用数学归纳法证明 $1+a+a^2+\cdots+a^n=\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$ $(a\neq1,n\in\mathbf{N}^*)$，在验证等式对于 $n=1$ 成立时，左边的式子是（　　）

A.1　　B.$1+a$

C.$1+a+a^2$　　D.$1+a+a^2+a^3$

B　**解析**：当 $n=1$ 时，$a^n=a$，所以左边应为$1+a$.故选 B.

4. 用数学归纳法证明当 n 为正奇数时，x^n+y^n 能被 $x+y$ 整除，第二步归纳递推应为（　　）

A.假设 $n=2k+1(k\in\mathbf{N}^*)$时正确，再推 $n=2k+3$ 时正确

B.假设 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$时正确，再推$n=2k+1$ 时正确

C.假设 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时正确，再推 $n=k+1$ 时正确

D.假设 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时正确，再推 $n=k+2$ 时正确

B　**解析**：因为 n 为正奇数，所以在证明时，应假设 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$时正确，再推出 $n=2k+1$ 时正确.故选 B.

5. 用数学归纳法证明 $1+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(4n^2-1)$的过程中，由$n=k$ 到 $n=k+1$ 时，左边增加的项是________.

$(2k+1)^2$　**解析**：由题可知 $n=k$ 时，左边$=1+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2$，

当 $n=k+1$ 时，左边$=1+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2$，

所以等式左边增加的项是$(2k+1)^2$.

6. 已知数列$\{a_n\}$的每一项均为正数，记$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$4S_n=a_n^2+2a_n$，尝试通过计算数列$\{a_n\}$的前四项，猜想数列$\{a_n\}$的通项公式，并用数学归纳法加以证明.

解：因为 $4S_n=a_n^2+2a_n$，所以当 $n=1$ 时，$4a_1=a_1^2+2a_1$，可得 $a_1(a_1-2)=0$，又 $a_n>0$，故 $a_1=2$；

当 $n=2$ 时，$4(a_1+a_2)=a_2^2+2a_2$，即 $a_2^2-2a_2-8=0$，即$(a_2-4)(a_2+2)=0$，故 $a_2=4$；

当 $n=3$ 时，$4(a_1+a_2+a_3)=a_3^2+2a_3$，即 $a_3^2-2a_3-24=0$，即$(a_3-6)(a_3+4)=0$，故 $a_3=6$；

当 $n=4$ 时，$4(a_1+a_2+a_3+a_4)=a_4^2+2a_4$，即 $a_4^2-2a_4-48=0$，

即$(a_4-8)(a_4+6)=0$，故 $a_4=8$.

由 $a_1=2,a_2=4,a_3=6,a_4=8$，可猜测 $a_n=2n$.

证明如下：

当 $n=1$ 时，$a_1=2$，猜想成立；

设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时，猜想成立，即 $a_k=2k$，

则当 $n=k+1$ 时，依题意，$4S_{k+1}=a_{k+1}^2+2a_{k+1}$①，

$4S_k=a_k^2+2a_k$②，

由①－②，可得，$4a_{k+1}=a_{k+1}^2+2a_{k+1}-(a_k^2+2a_k)$，

即 $a_{k+1}^2-2a_{k+1}-(4k^2+4k)=0$，

即$(a_{k+1}+2k)[a_{k+1}-2(k+1)]=0$，

因为 $a_n>0$，故得 $a_{k+1}=2(k+1)$，即猜想也成立.

综上，$a_n=2n$ 对任何正整数 n 都成立，即该数列的通项公式为 $a_n=2n$.

B组　应用·实践

1. 利用数学归纳法证明 $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<1(n\in\mathbf{N}^*$，且 $n\geqslant2)$，第二步由 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时，左边的变化是（　　）

A.增加了 $\frac{1}{2k+1}$ 这一项

B.增加了 $\frac{1}{2k+1}$ 和 $\frac{1}{2k+2}$ 两项

C.增加了 $\frac{1}{2k+1}$ 和 $\frac{1}{2k+2}$ 两项，减少了 $\frac{1}{k}$ 这一项

D.以上都不对

C　**解析**：当 $n=k$ 时，左边 $=\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}$；当 $n=k+1$ 时，左边 $=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$，对比可知，C 正确.故选 C.

2. 已知 $f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$，用数学归法证明 $f(2^n)>\frac{n}{2}$ 时，$f(2^{k+1})-f(2^k)=$________.

$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}$　**解析**：因为 $f(2^{k+1})=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}=f(2^k)+\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}$，

所以 $f(2^{k+1})-f(2^k)=\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}$.

3. 用数学归纳法证明$(n+1)\cdot(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+n)=2^n\times1\times3\times\cdots\times(2n-1)(n\in\mathbf{N}^*)$，从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时，左端增乘的代数式为________.

$2(2k+1)$　**解析**：令 $f(n)=(n+1)\cdot(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+n)$，则 $f(k)=(k+1)\cdot(k+2)\cdot\cdots\cdot(k+k)$，$f(k+1)=(k+2)\cdot(k+3)\cdot\cdots\cdot(k+k)\cdot(2k+1)\cdot(2k+2)$，

所以 $\frac{f(k+1)}{f(k)}=\frac{(2k+1)(2k+2)}{k+1}=2(2k+1)$.

4. 用数学归纳法证明 n^3+5n 能被 6 整除的过程中，当 $n=k+1$ 时，式子 $(k+1)^3+5(k+1)$ 应变形为____________.

$(k^3+5k)+3k(k+1)+6$　**解析**：$(k+1)^3+5(k+1)=k^3+1+3k^2+3k+5k+5=(k^3+5k)+3k^2+3k+6=(k^3+5k)+3k(k+1)+6$.

因为 $k(k+1)$ 为偶数，所以 $3k(k+1)$ 能被 6 整除，所以 $(k+1)^3+5(k+1)$ 应变形为 $(k^3+5k)+3k(k+1)+6$.

5. 用数学归纳法证明：$\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}<\frac{n(n+2)}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

解：当 $n=1$ 时，左边 $=\sqrt{2}$，

右边 $=\frac{1\times(1+2)}{2}=\frac{3}{2}$，不等式成立；

假设 $n=k$ 时，不等式成立，即 $\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots+\sqrt{k(k+1)}<\frac{k(k+2)}{2}$，

则当 $n=k+1$ 时，

$\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots+\sqrt{k(k+1)}+\sqrt{(k+1)(k+2)}<\frac{k(k+2)}{2}+\sqrt{(k+1)(k+2)}<\frac{k(k+2)}{2}+\frac{(k+1)+(k+2)}{2}=\frac{k^2+4k+3}{2}=\frac{(k+1)(k+3)}{2}=\frac{(k+1)[(k+1)+2]}{2}$，

所以当 $n=k+1$ 时，不等式成立.

综上，$\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}<\frac{n(n+2)}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

6. 是否存在常数 a，b，使等式 $1\times n+2\times(n-1)+3\times(n-2)+\cdots+(n-1)\times2+n\times1=\frac{1}{6}n(n+a)(n+b)$ 对一切正整数 n 都成立？猜测并用数学归纳法证明你的结论.

解：将 $n=1$，$n=2$ 分别代入，

得 $\begin{cases}1=\frac{1}{6}\times1\times(a+1)(b+1),\\1\times2+2\times1=\frac{1}{6}\times2\times(a+2)(b+2),\end{cases}$

即 $\begin{cases}a+b=3,\\ab=2,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}a=1,\\b=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=2,\\b=1.\end{cases}$

猜测 $1\times n+2\times(n-1)+3\times(n-2)+\cdots+(n-1)\times2+n\times1=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ 对一切正整数都成立.

证明：① 当 $n=1$ 时，显然成立.

②假设当 $n=k$ 时，$1\times k+2(k-1)+3(k-2)+\cdots+(k-1)\times2+k\times1=\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)$ 成立.

则当 $n=k+1$ 时，

左边 $=1\times(k+1)+2\times k+3\times(k-1)+\cdots+k\times2+(k+1)\times1$

$=1\times k+2(k-1)+3(k-2)+\cdots+(k-1)\times2+k\times1+[1+2+3+\cdots+k+(k+1)]$

$=\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)+[1+2+3+\cdots+k+(k+1)]$

$=\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)+\frac{1}{2}(k+2)(k+1)$

$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3)$，

所以当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

由①②可知等式对一切正整数 n 都成立.

迁·移·应·用

学习目标

1.会根据数列的单调性解决与数列相关的不等式恒成立的问题.
2.会利用函数的相关性质解决数列与函数的关系问题.

类型一 数列与不等式交汇

例1 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{n}a_n=n^2+n(n\in\mathbf{N}^*)$,设数列$\{b_n\}$满足$b_n=\frac{2n+1}{a_na_{n+1}}$,数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$.若$T_n<\frac{n}{n+1}\lambda(n\in\mathbf{N}^*)$恒成立,则实数$\lambda$的取值范围为 ( )

A.$\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$ B.$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$

C.$\left[\frac{3}{8},+\infty\right)$ D.$\left(\frac{3}{8},+\infty\right)$

D **解析**:数列$\{a_n\}$满足$a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{n}a_n=n^2+n$①,

当$n\geqslant2$时,$a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{n-1}a_{n-1}=(n-1)^2+(n-1)$②,

①−②得$\frac{1}{n}a_n=2n$,故$a_n=2n^2$.

当$n=1$时,$a_1=2$也满足上式.

故$b_n=\frac{2n+1}{a_na_{n+1}}=\frac{2n+1}{4n^2(n+1)^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]$,

则$T_n=\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=\frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]$.

$T_n<\frac{n}{n+1}\lambda(n\in\mathbf{N}^*)$,

即$\frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]<\frac{n}{n+1}\lambda$,

整理得$\lambda>\frac{n+2}{4n+4}$.

因为$y=\frac{n+2}{4n+4}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$在$n\in\mathbf{N}^*$时单调递减,所以当$n=1$时,$\left(\frac{n+2}{4n+4}\right)_{\max}=\frac{3}{8}$,

所以$\lambda>\frac{3}{8}$,即实数λ的取值范围为$\left(\frac{3}{8},+\infty\right)$.故选D.

【总结升华】

数列与不等式交汇问题的求解策略

(1)判断与数列相关的一些不等关系,可以借助数列的单调性或与数列对应的函数的单调性.

(2)以数列为载体的不等式恒成立问题,往往可转化为函数的最值问题.

(3)与数列有关的不等式证明问题,一般采用放缩法进行证明,有时也可通过构造函数进行证明.

类型二　数列与函数的交汇

例 2　(1)已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+4x$,记等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,若 $f(a_1+2)=100$,$f(a_{2\,024}+2)=-100$,则 $S_{2\,024}$等于　(　　)

A.$-4\ 048$　　B.$-2\ 024$

C.$2\ 024$　　D.$4\ 048$

A　**解析**:因为 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,

且 $f(-x)=-\frac{1}{3}x^3-4x=-f(x)$,

所以 $f(x)$是奇函数.

因为 $f(a_1+2)=100$,$f(a_{2\,024}+2)=-100$,

所以 $f(a_1+2)=-f(a_{2\,024}+2)$,

所以 $a_1+2+a_{2\,024}+2=0$,

所以 $a_1+a_{2\,024}=-4$,

所以 $S_{2\,024}=\frac{2\,024(a_1+a_{2\,024})}{2}=-4\ 048$.故选 A.

(2)已知数列$\{a_n\}$是等差数列,$a_1=1$,公差 $d\in[1,2]$,且 $a_4+\lambda a_{10}+a_{16}=15$,则实数 λ 的最大值为________.

$-\frac{1}{2}$　**解析**:因为 $a_4+\lambda a_{10}+a_{16}=15$,

所以 $a_1+3d+\lambda(a_1+9d)+a_1+15d=15$,

则 $\lambda=\frac{15}{1+9d}-2$.

令 $t=1+9d$,

因为 $d\in[1,2]$,所以 $t\in[10,19]$,

则 $f(t)=\frac{15}{t}-2$.

当 $t\in[10,19]$时,函数 $f(t)$单调递减,故当 $t=10$时,实数 λ 有最大值,最大值为 $f(10)=-\frac{1}{2}$.

【总结升华】

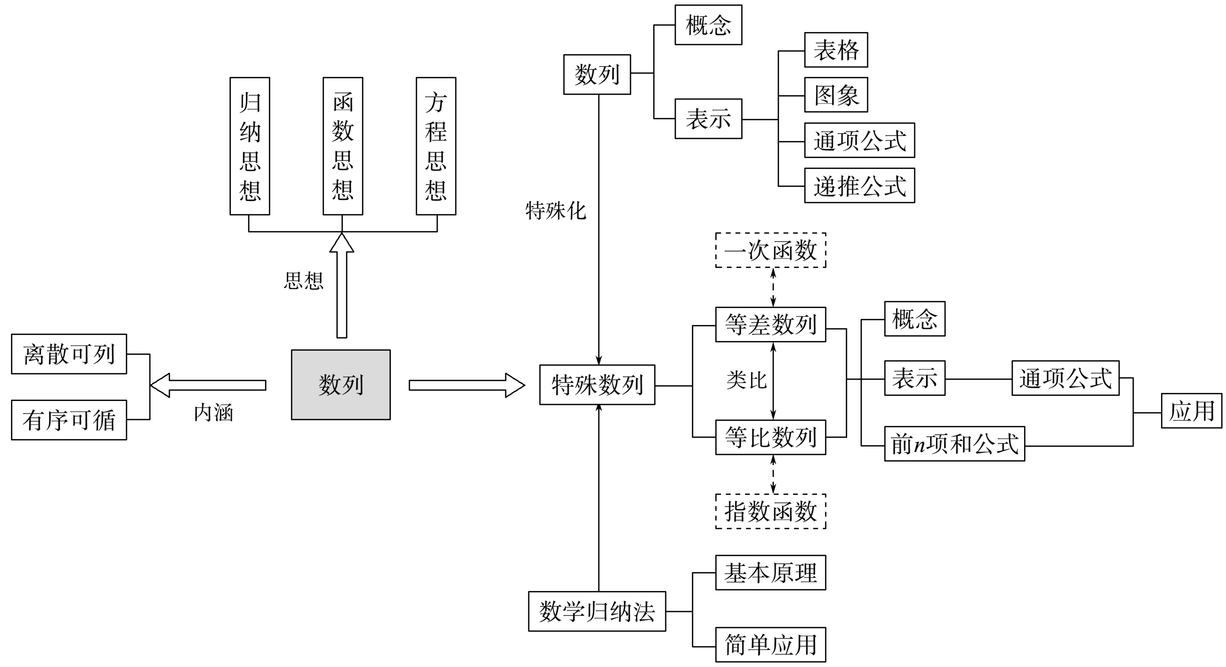
数列与函数交汇问题的求解策略

(1)已知函数条件,解决数列问题:此类问题一般利用函数的性质、图象研究数列问题.

(2)已知数列条件,解决函数问题:解决此类问题一般要利用数列的通项公式、前 n 项和公式、求和方法等对式子化简变形.

重·构·拓·展

多维体系构建



【问题探究】

1.为什么说数列是一种特殊的函数？

2.在什么情况下可以用通项公式表示数列？在什么情况下可以用递推公式表示数列？

3.数列的前 n 项和公式与它的通项公式有什么关系？

4.等差数列和等比数列的通项公式分别是什么？你是如何推导出它们的？等差数列和等比数列的图象分别有什么特点？

5.“等差中项”“等比中项”与“平均数”之间有什么内在联系？等差数列、等比数列有许多有趣的性质，你能列举一些吗？

6.推导等差数列、等比数列的前 n 项和公式时，各用了哪些巧妙的方法？

***7.**为什么说数学归纳法的两个步骤(归纳奠基与归纳递推)缺一不可？你能说说两个步骤各自的作用吗？它们之间有怎样的关系？

学科视野拓展

拓展一 数列中的构造问题

【拓展总结】

形式	构造方法
$a_{n+1}=pa_n+q(p\neq0)$	引入参数 c，构造新的等比数列$\{a_n-c\}$
$a_{n+1}=pa_n+qn+c(p\neq0)$	引入参数 x,y，构造新的等比数列$\{a_n+xn+y\}$
$a_{n+1}=qa_n+q^n$	两边同时除以 q^{n+1}，构造新的数列$\left\{\dfrac{a_n}{q^n}\right\}$

应用1 (1)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1,a_2=2$，且 $a_{n+1}=2a_n+3a_{n-1}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=$________.

$\dfrac{3^n-(-1)^n}{4}$ **解析**：因为 $a_{n+1}=2a_n+3a_{n-1}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$，

设 $b_n=a_{n+1}+a_n$，

所以 $\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=\dfrac{a_{n+1}+a_n}{a_n+a_{n-1}}=\dfrac{3(a_n+a_{n-1})}{a_n+a_{n-1}}=3.$

又因为 $b_1=a_2+a_1=3$，

所以$\{b_n\}$是首项为3，公比为3的等比数列.

所以 $b_n=a_{n+1}+a_n=3\times3^{n-1}=3^n$，

从而$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}$.

不妨令 $c_n=\frac{a_n}{3^n}$，则 $c_{n+1}+\frac{1}{3}c_n=\frac{1}{3}$，

故 $c_{n+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(c_n-\frac{1}{4}\right)$.

又因为 $c_1-\frac{1}{4}=\frac{a_1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$，

所以数列$\left\{c_n-\frac{1}{4}\right\}$是首项为$\frac{1}{12}$，公比为$-\frac{1}{3}$的等比数列，

故 $c_n-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{a_n}{3^n}-\frac{1}{4}$，

从而 $a_n=\frac{3^n-(-1)^n}{4}$.

(2)在数列$\{a_n\}$中，$a_1=-1$，$a_{n+1}=2a_n+4\times3^{n-1}$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解：(方法一)设 $a_{n+1}+\lambda\times3^n=2(a_n+\lambda\times3^{n-1})$，

又 $a_{n+1}=2a_n+4\times3^{n-1}$，所以 $\lambda=-4$，即 $a_{n+1}-4\times3^n=2(a_n-4\times3^{n-1})$，

则数列$\{a_n-4\times3^{n-1}\}$是首项为 $a_1-4\times3^{1-1}=-5$，公比为2的等比数列.

所以 $a_n-4\times3^{n-1}=(-5)\times2^{n-1}$，

即 $a_n=4\times3^{n-1}-5\times2^{n-1}$.

(方法二)将 $a_{n+1}=2a_n+4\times3^{n-1}$ 的两边同除以 3^{n+1}，

得$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}\times\frac{a_n}{3^n}+\frac{4}{3^2}$.

令 $b_n=\frac{a_n}{3^n}$，则 $b_{n+1}=\frac{2}{3}b_n+\frac{4}{9}$，

设 $b_{n+1}+k=\frac{2}{3}(b_n+k)$，比较系数可得 $k=-\frac{4}{3}$.

又 $b_1-\frac{4}{3}=\frac{a_1}{3}-\frac{4}{3}=-\frac{5}{3}$，所以 $b_n-\frac{4}{3}\neq0$，

则$\frac{b_{n+1}-\frac{4}{3}}{b_n-\frac{4}{3}}=\frac{2}{3}$，

所以$\left\{b_n-\frac{4}{3}\right\}$是以$-\frac{5}{3}$为首项，$\frac{2}{3}$为公比的等比数列，

所以 $b_n-\frac{4}{3}=\left(-\frac{5}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，

则 $b_n=\frac{4}{3}-\frac{5}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，

所以 $a_n=3^n\times b_n=4\times3^{n-1}-5\times2^{n-1}$.

拓展二　整数的存在性问题(不定方程)

【拓展总结】

此类问题一般转化为求不定方程正整数解的问题，往往与数列、函数、方程、不等式等知识集于一体，蕴含了丰富的数学思想.

应用2　已知数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 A_n 和 B_n，且对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+1}-a_n=2(b_{n+1}-b_n)$恒成立.

(1)若 $A_n=n^2$，$b_1=2$，求 B_n.

(2)若对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=B_n$ 及$\frac{b_2}{a_1a_2}+\frac{b_3}{a_2a_3}+\frac{b_4}{a_3a_4}+\cdots+\frac{b_{n+1}}{a_na_{n+1}}<\frac{1}{3}$成立，求正实数 b_1 的取值范围.

(3)若 $a_1=2$，$b_n=2^n$，是否存在两个互不相等的整数 $s,t(1<s<t)$，使$\frac{A_1}{B_1},\frac{A_s}{B_s},\frac{A_t}{B_t}$成等差数列？若存在，求出 s,t 的值；若不存在，请说明理由.

解：(1)因为 $A_n=n^2$，

所以 $a_n=\begin{cases}1,n=1,\\n^2-(n-1)^2,n\geq2,\end{cases}$ 即 $a_n=2n-1$，

故 $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)=1$，所以数列$\{b_n\}$是以2为首项，1为公差的等差数列，

所以 $B_n=n\cdot2+\frac{1}{2}n(n-1)\cdot1=\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n$.

(2)依题意 $B_{n+1}-B_n=2(b_{n+1}-b_n)$，

即 $b_{n+1}=2(b_{n+1}-b_n)$，即$\frac{b_{n+1}}{b_n}=2$，

所以数列$\{b_n\}$是以 b_1 为首项，2为公比的等比数列，

所以 $a_n=B_n=\frac{1-2^n}{1-2}\times b_1=b_1(2^n-1)$，

所以$\frac{b_{n+1}}{a_na_{n+1}}=\frac{2^n}{b_1(2^n-1)\cdot(2^{n+1}-1)}$

$=\frac{1}{b_1}\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)$,

所以 $\frac{b_2}{a_1a_2}+\frac{b_3}{a_2a_3}+\frac{b_4}{a_3a_4}+\cdots+\frac{b_{n+1}}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{b_1}\left(\frac{1}{2^1-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)$,所以$\frac{1}{b_1}\left(\frac{1}{2^1-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)<\frac{1}{3}$恒成立,

即 $b_1>3\left(1-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)$,所以 $b_1\geqslant 3$.

(3)由 $a_{n+1}-a_n=2(b_{n+1}-b_n)$,得 $a_{n+1}-a_n=2^{n+1}$,

所以当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_3-a_2)+(a_2-a_1)+a_1=2^n+2^{n-1}+\cdots+2^3+2^2+2=2^{n+1}-2$,

当 $n=1$ 时,上式也成立,

所以 $A_n=2^{n+2}-4-2n$.

又 $B_n=2^{n+1}-2$,所以$\frac{A_n}{B_n}=\frac{2^{n+2}-4-2n}{2^{n+1}-2}=2-\frac{n}{2^n-1}$.

假设存在两个互不相等的整数 $s,t(1<s<t)$,使$\frac{A_1}{B_1}$,$\frac{A_s}{B_s}$,$\frac{A_t}{B_t}$成等差数列,

等价于$\frac{1}{2^1-1}$,$\frac{s}{2^s-1}$,$\frac{t}{2^t-1}$成等差数列,

即$\frac{2s}{2^s-1}=\frac{1}{2^1-1}+\frac{t}{2^t-1}$,

即$\frac{2s}{2^s-1}=1+\frac{t}{2^t-1}$.

因为 $1+\frac{t}{2^t-1}>1$,所以$\frac{2s}{2^s-1}>1$,即 $2^s<2s+1$.

令 $h(s)=2^s-2s-1(s\geqslant 2,s\in\mathbf{N}^*)$,则 $h(s+1)-h(s)=2^s-2>0$,所以 $h(s)$递增.

若 $s\geqslant 3$,则 $h(s)\geqslant h(3)=1>0$,不满足 $2^s<2s+1$,所以 $s=2$,

代入$\frac{2s}{2^s-1}=1+\frac{t}{2^t-1}$得 $2^t-3t-1=0(t\geqslant 3)$.

当 $t=3$ 时,显然不符合要求;

当 $t\geqslant 4$ 时,令 $\varphi(t)=2^t-3t-1(t\geqslant 3,t\in\mathbf{N}^*)$,则同理可证 $\varphi(t)$递增,所以 $\varphi(t)\geqslant\varphi(4)=3>0$,

所以不符合要求.

所以,不存在互不相等的整数 $s,t(1<s<t)$,使$\frac{A_1}{B_1}$,$\frac{A_s}{B_s}$,$\frac{A_t}{B_t}$成等差数列.

单元测试卷（一）

（考查范围：第四章　时间：120 分钟　分值：150 分）

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

1. 已知在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+n(n\in\mathbf{N}^*)$，则 a_4 的值为（　　）

A.5　　B.6

C.7　　D.8

D　**解析**：因为 $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+n$，

所以 $a_2=a_1+1=2+1=3$，$a_3=a_2+2=3+2=5$，

$a_4=a_3+3=5+3=8$.故选 D.

2. 已知等差数列$\{a_n\}$，其前 n 项和是 S_n.若 $S_5=25$，则 $a_2+a_4=$（　　）

A.8　　B.9

C.10　　D.11

C　**解析**：由已知可得，$S_5=\frac{5(a_1+a_5)}{2}=25$，

所以 $a_1+a_5=10$.

又 $a_1+a_5=a_2+a_4$，所以 $a_2+a_4=10$.故选 C.

3. 设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_2=2$，且 a_2，a_3，a_4-2 成等差数列，则 $S_5=$（　　）

A.7　　B.12　　C.15　　D.31

D　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，$q\neq0$，

依题意得$\begin{cases}a_2=2,\\2a_3=a_2+a_4-2,\end{cases}$

则$\begin{cases}a_1q=2,\\2a_1q^2=a_1q+a_1q^3-2,\end{cases}$

所以 $2(a_1q)q=a_1q+(a_1q)q^2-2$，

所以 $4q=2+2q^2-2$，所以 $2q^2-4q=0$，

解得 $q=2$，则 $a_1=1$，所以 $S_5=\frac{1\times(1-2^5)}{1-2}=31$.

故选 D.

4. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_3+2a_4+a_{13}=160$，则 $S_{11}-5a_6=$（　　）

A.240　　B.180　　C.120　　D.60

A　**解析**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

$a_3+2a_4+a_{13}=4a_1+20d=160$，$a_1+5d=40$，

$S_{11}-5a_6=11a_1+55d-5(a_1+5d)=6a_1+30d=6(a_1+5d)=6\times40=240$.

故选 A.

5. 已知数列$\{a_n\}$，$a_3=2$，$a_5=1$.若$\left\{\frac{1}{1+a_n}\right\}$是等差数列，则 a_{11} 等于（　　）

A.0　　B.$\frac{1}{6}$　　C.$\frac{1}{3}$　　D.$\frac{1}{2}$

A　**解析**：因为 $\frac{1}{1+a_3}=\frac{1}{3}$，$\frac{1}{1+a_5}=\frac{1}{2}$，设数列$\left\{\frac{1}{1+a_n}\right\}$的公差为 d，则$\begin{cases}\frac{1}{1+a_1}+2d=\frac{1}{3},\\\frac{1}{1+a_1}+4d=\frac{1}{2},\end{cases}$

解得$\begin{cases}\frac{1}{1+a_1}=\frac{1}{6},\\d=\frac{1}{12}.\end{cases}$所以$\frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{6}+(n-1)\cdot\frac{1}{12}$，

所以$\frac{1}{1+a_{11}}=\frac{1}{6}+\frac{11-1}{12}=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1$，所以 $a_{11}=0$.

故选 A.

6. 设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，$a_1>0$，则“$a_5>0$”是“$d>0$”的（　　）

A.充要条件

B.必要不充分条件

C.充分不必要条件

D.既不充分也不必要条件

B　**解析**：必要性成立：因为 $a_1>0$，由等差数列$\{a_n\}$的公差 $d>0$ 可知，$a_5=a_1+4d>0$；

充分性不成立：例如，由 $a_1=5$，$a_5=1$ 得 $d=-1$.

所以“$a_5>0$”是“$d>0$”的必要不充分条件.故选 B.

7. 若数列$\{a_n\}$满足$(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}(n\geqslant2)$，$a_1=2$，则满足不等式 $a_n<930$ 的最大正整数 n 为（　　）

A.28　　B.29

C.30　　D.31

B　**解析**：依题意，数列$\{a_n\}$满足$(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}(n\geqslant2)$，$a_1=2$，则$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}(n\geqslant2)$，

所以 $a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=2\times\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-2}\times\frac{n+1}{n-1}=n(n+1)$，

$a_1=2$ 也符合上式，所以 $a_n=n(n+1)$，$\{a_n\}$是递增数列.

由 $a_n=n(n+1)<930$，得$(n+31)(n-30)<0$，解得$-31<n<30$.

又 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 n 的最大值为 29.

故选 B.

8.（2022・浙江卷）已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n-\frac{1}{3}a_n^2(n\in\mathbf{N}^*)$，则（　　）

A.$2<100a_{100}<\frac{5}{2}$　　B.$\frac{5}{2}<100a_{100}<3$

C.$3<100a_{100}<\frac{7}{2}$　　D.$\frac{7}{2}<100a_{100}<4$

B　**解析**：因为 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n-\frac{1}{3}a_n^2=-\frac{1}{3}\Big(a_n$

$-\frac{3}{2}\Big)^2+\frac{3}{4}\leqslant\frac{3}{4}$，所以 $a_n\leqslant\frac{3}{4}(n\geqslant2)$，易知 $a_n\neq0$.

由 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{1}{3}a_n\geqslant\frac{3}{4}>0(n\geqslant2)$，得 $a_n>0(n\in\mathbf{N}^*)$.

由题意，$a_{n+1}=a_n\left(1-\frac{1}{3}a_n\right)$，即 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{a_n(3-a_n)}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{3-a_n}$，

所以 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3-a_n}>\frac{1}{3}$，即 $\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}>\frac{1}{3}$，$\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}>\frac{1}{3}$，$\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_3}>\frac{1}{3}$，…，$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}>\frac{1}{3}(n\geqslant2)$，

累加可得 $\frac{1}{a_n}-1>\frac{1}{3}(n-1)$，即 $\frac{1}{a_n}>\frac{1}{3}(n+2)(n\geqslant2)$，

所以 $a_n<\frac{3}{n+2}(n\geqslant2)$，即 $a_{100}<\frac{1}{34}$，$100a_{100}<\frac{100}{34}<3$.

又 $a_1=1$，所以 $a_n\leqslant\frac{3}{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

又 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3-a_n}\leqslant\frac{1}{3-\frac{3}{n+2}}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$，

所以 $\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\leqslant\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{1}{2}\right)$，$\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}\leqslant\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{1}{3}\right)$，$\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_3}\leqslant\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{1}{4}\right)$，…，$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\leqslant\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)(n\geqslant2)$，

累加可得 $\frac{1}{a_n}-1\leqslant\frac{1}{3}(n-1)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(n\geqslant2)$，

所以 $\frac{1}{a_{100}}-1\leqslant33+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}\right)<33+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times4+\frac{1}{6}\times96\right)=39$，

即 $\frac{1}{a_{100}}<40$，所以 $a_{100}>\frac{1}{40}$，即 $100a_{100}>\frac{5}{2}$.

综上，$\frac{5}{2}<100a_{100}<3$.故选 B.

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9.已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，下列说法正确的是（　　）

A.若 $S_n=n^2-1$，则$\{a_n\}$是等差数列

B.若 $S_n=2^n-1$，则$\{a_n\}$是等比数列

C.若$\{a_n\}$是等差数列，则 $S_{99}=99a_{50}$

D.若$\{a_n\}$是等比数列，且 $a_1>0$，公比 $q>0$，则 $S_{2n-1}S_{2n+1}>S_{2n}^2$

BC　**解析**：若 $S_n=n^2-1$，则有 $a_1=S_1=0$，$a_2=S_2-S_1=2^2-1^2=3$，$a_3=S_3-S_2=3^2-2^2=5$，$2a_2\neq a_1+a_3$，此时数列$\{a_n\}$不是等差数列，故 A 错误；

若 $S_n=2^n-1$，则当 $n\geqslant2$ 时，有 $a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$，当 $n=1$ 时，有 $a_1=S_1=1$，满足上式，此时 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$，数列$\{a_n\}$是等比数列，故 B 正确；

由等差数列的性质可得 $S_{99}=\frac{99(a_1+a_{99})}{2}=99a_{50}$，故 C 正确；

当 $a_1>0$，$q=1$ 时，有 $a_n=a_1$，$S_{2n-1}S_{2n+1}=(2n-1)\cdot(2n+1)a_1^2=(4n^2-1)a_1^2$，

$S_{2n}^2=(2na_1)^2=4n^2a_1^2$，此时 $S_{2n-1}S_{2n+1}<S_{2n}^2$，故 D 错误.故选 BC.

10.已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，前 n 项积为 T_n，且 $0<a_1<1$，$a_{2\,023}+a_{2\,024}<2$，$(a_{2\,023}-1)(a_{2\,024}-1)<0$，则（　　）

A.$0<q<1$

B.$a_{2\,023}a_{2\,025}>1$

C.对任意的正整数 n，有 $T_n\geqslant T_{4\,047}$

D.使得 $T_n>1$ 的正整数 n 的最小值为 4 047

BD　**解析**：依题意，$a_n>0$，$q>0$，$0<a_1<1$，

由于 $(a_{2\,023}-1)(a_{2\,024}-1)<0$，

所以 $\begin{cases}0<a_{2\,023}<1,\\a_{2\,024}>1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0<a_{2\,024}<1,\\a_{2\,023}>1.\end{cases}$

若 $\begin{cases}0<a_{2\,024}<1,\\a_{2\,023}>1,\end{cases}$ 则 $0<q<1$，则 $0<a_1q^{2\,022}<1\Rightarrow a_{2\,023}<1$，矛盾，

所以 $\begin{cases}0<a_{2\,023}<1,\\a_{2\,024}>1,\end{cases}$ 则 $q>1$，故 A 错误.

$a_{2\,023}a_{2\,025}=(a_{2\,024})^2>1$，故 B 正确.

由于 $\begin{cases}0<a_{2\,023}<1,\\a_{2\,024}>1,\end{cases}$ 所以 T_n 的最小值为 $T_{2\,023}$，即 $T_n\geqslant T_{2\,023}$，故 C 错误.

$T_{4\,047}=(a_1\times a_{4\,047})\cdot(a_2\times a_{4\,046})\cdot\cdots\cdot(a_{2\,023}\times a_{2\,025})\cdot a_{2\,024}=(a_{2\,024})^{4\,047}>1$，

由于 $a_{2\,023}+a_{2\,024}<2$，

所以 $2>a_{2\,023}+a_{2\,024}>2\sqrt{a_{2\,023}\cdot a_{2\,024}}$，

所以 $a_{2\,023}\cdot a_{2\,024}<1$，

所以 $T_{4\,046}=(a_1\times a_{4\,046})^{2\,023}=(a_{2\,023}\times a_{2\,024})^{2\,023}<1$.

由于 $q>1$，且 $\begin{cases}0<a_{2\,023}<1,\\a_{2\,024}>1,\end{cases}$ 所以当 $n\leqslant4\,046$ 时，$T_n\leqslant T_{4\,046}<1$.

综上所述，使得 $T_n>1$ 的最小正整数 n 为 4 047，故 D 正确.

故选 BD.

11.如果有穷数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m$（m 为正整数）满足 $a_1=a_m$，$a_2=a_{m-1}$，…，即 $a_i=a_{m-i+1}(i=1,2,\cdots,m)$，我们称其为“对称数列”.例如，数列 1,2,5,

2,1 与数列 8,4,2,2,4,8 都是“对称数列”.设$\{b_n\}$是项数为 $2m(m>1,m\in\mathbf{N}^*)$的“对称数列”,且 $1,2,2^2,2^3,\cdots,2^{m-1}$为该数列的前 m 项,则数列$\{b_n\}$的前 100 项和 S_{100}可能的取值为（　　）

A.$2^{100}-1$　　B.$2^{51}-2$

C.$2^{26}-4$　　D.$2^{m+1}-2^{2m-100}-1$

ABD　**解析**:由题意知数列$\{b_n\}$为 $1,2,2^2,2^3,\cdots,2^{m-1},2^{m-1},\cdots,2^3,2^2,2,1$.

若 $m=50$,则 $S_{100}=2\times\dfrac{1\times(1-2^{50})}{1-2}=2^{51}-2$,故 B 正确;

若 $51\leqslant m<100$,则 $S_{100}=2\times\dfrac{1\times(1-2^m)}{1-2}-\dfrac{1\times(1-2^{2m-100})}{1-2}=2^{m+1}-2^{2m-100}-1$,故 D 正确;

若 $m\geqslant100$,则 $S_{100}=\dfrac{1\times(1-2^{100})}{1-2}=2^{100}-1$,故 A 正确.

故选 ABD.

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12.已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\left|n-\dfrac{10}{3}\right|$,则 a_n 的最小值为________.

$\dfrac{1}{3}$　**解析**:依题意,$a_n=\begin{cases}\dfrac{10}{3}-n(n\leqslant3,n\in\mathbf{N}^*),\\ n-\dfrac{10}{3}(n\geqslant4,n\in\mathbf{N}^*),\end{cases}$

当 $n\leqslant3$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,最小值为 $a_3=\dfrac{1}{3}$;

当 $n\geqslant4$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,最小值为 $a_4=\dfrac{2}{3}$.

综上所述,a_n 的最小值为$\dfrac{1}{3}$.

13.在数列$\{a_n\}$中,若 $a_1=2,a_{n+1}=a_n+n+1$,则$\{a_n\}$的通项公式为____________.

$a_n=\dfrac{n^2+n+2}{2}$　**解析**:由题意可知数列$\{a_n\}$中,$a_1=2,a_{n+1}=a_n+n+1$,

故 $a_{n+1}-a_n=n+1$,所以当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=2+2+3+\cdots+n=2+\dfrac{(n-1)(n+2)}{2}=\dfrac{n^2+n+2}{2}$,$a_1=2$ 符合该式,所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\dfrac{n^2+n+2}{2}$.

14.设等比数列$\{a_n\}$满足 $a_1+a_2=12,a_1-a_3=6$,则 $a_n=$________,$a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$的最大值为________.

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-4}$　64　**解析**:设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q\neq0)$,由 $a_1+a_2=12,a_1-a_3=6$,

得$\begin{cases}a_1+a_1q=12,\\a_1-a_1q^2=6,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=8,\\q=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

所以 $a_n=8\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-4}$.

所以 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3-2-1+0+1+\cdots+(n-4)}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-7)}{2}}$.

令 $f(n)=\dfrac{1}{2}n(n-7)=\dfrac{1}{2}(n^2-7n)=\dfrac{1}{2}\left(n-\dfrac{7}{2}\right)^2-\dfrac{49}{8}$,

所以当 $n=3$ 或 $n=4$ 时,$f(n)$有最小值,

即 $f(n)_{\min}=-6$,

所以 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$的最大值为$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-6}=64$.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.(13 分)已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$S_4=-90,a_{10}=15$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)求 S_n 的最小值,并指出 n 取何值时 S_n 取得最小值.

解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,

依题意,$\begin{cases}S_4=-90,\\a_{10}=15,\end{cases}$即$\begin{cases}4a_1+6d=-90,\\a_1+9d=15,\end{cases}$

解得 $a_1=-30,d=5$,

所以 $a_n=-30+(n-1)\times5=5n-35$.

(2)由 $a_n=5n-35\leqslant0$,解得 $1\leqslant n\leqslant7,n\in\mathbf{N}^*$,

所以当 $n=6$ 或 $n=7$ 时,S_n 取得最小值,

且 S_n 的最小值为 $S_6=6a_1+15d=-180+75=-105$.

16.(15 分)数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$S_n=3^{n+1}+2n-3$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若 $c_n=\dfrac{n(a_n-2)}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$,求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 T_n.

解:(1)由题意 $a_1=S_1=3^{1+1}+2\times1-3=8$,

当 $n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^{n+1}+2n-3)-(3^n+2n-5)=2\cdot3^n+2$.

当 $n=1$ 时,$a_1=2\times3^1+2=8$ 也满足上式.

综上所述,数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2\cdot3^n+2(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)由(1)可知 $a_n=2\cdot3^n+2(n\in\mathbf{N}^*)$,所以由题意 $c_n=\dfrac{n(a_n-2)}{2}=n\cdot3^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

所以 $T_n=1\times3^1+2\times3^2+\cdots+n\times3^n$,

$3T_n=1\times3^2+2\times3^3+\cdots+n\times3^{n+1}$,

两式相减得 $-2T_n=3^1+3^2+\cdots+3^n-n\cdot3^{n+1}=$

$\frac{3\times(1-3^n)}{1-3}-n\cdot 3^{n+1}$，

所以数列$\{c_n\}$的前 n 项和为 $T_n=\frac{6n-3}{4}\cdot 3^n+\frac{3}{4}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

17.(15 分)在①$a_3=5,a_5+a_7=22$，②$a_1=1,S_5=25$，③$S_n=n^2$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，然后解答补充完整的题目.

已知 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且________.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若 $c_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 T_n.

解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

若选①，$a_3=5,a_5+a_7=22$，

则$\begin{cases}a_1+2d=5,\\2a_1+10d=22,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}$所以 $a_n=2n-1$.

若选②，$a_1=1,S_5=25$，

则$\begin{cases}a_1=1,\\5a_1+\frac{5\times(5-1)}{2}d=25,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}$所以 $a_n=2n-1$.

若选③，$S_n=n^2$，当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1^2=1$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=(n-1)^2$，

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$.

当 $n=1$ 时，$a_n=2n-1$ 也成立，所以 $a_n=2n-1$.

(2)由(1)知 $a_n=2n-1$，

$c_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

所以 T_n

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.

18.(17 分)(2023·新高考全国Ⅱ卷)已知$\{a_n\}$为等差数列，$b_n=\begin{cases}a_n-6,n\text{ 为奇数},\\2a_n,n\text{ 为偶数},\end{cases}$记 S_n,T_n 分别为数列$\{a_n\},\{b_n\}$的前 n 项和，$S_4=32,T_3=16$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)证明：当 $n>5$ 时，$T_n>S_n$.

(1)**解**:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

而 $b_n=\begin{cases}a_n-6,n\text{ 为奇数},\\2a_n,n\text{ 为偶数},\end{cases}$

则 $b_1=a_1-6,b_2=2a_2=2a_1+2d,b_3=a_3-6=a_1+2d-6$，

于是$\begin{cases}S_4=4a_1+6d=32,\\T_3=4a_1+4d-12=16,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=5,\\d=2,\end{cases}$

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n+3$.

所以数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=2n+3$.

(2)**证明**:由(1)知，$S_n=\frac{n(5+2n+3)}{2}=n^2+4n$，

$b_n=\begin{cases}2n-3,n\text{ 为奇数},\\4n+6,n\text{ 为偶数},\end{cases}$

当 n 为偶数时，$b_{n-1}+b_n=2(n-1)-3+4n+6=6n+1$，

$b_1+b_2=13$，则 $T_n=\frac{13+(6n+1)}{2}\cdot\frac{n}{2}=\frac{3}{2}n^2+\frac{7}{2}n$，

当 $n>5$ 时，$T_n-S_n=\left(\frac{3}{2}n^2+\frac{7}{2}n\right)-(n^2+4n)=\frac{1}{2}n(n-1)>0$，因此 $T_n>S_n$；

当 n 为奇数时，$T_n=T_{n+1}-b_{n+1}=\frac{3}{2}(n+1)^2+\frac{7}{2}(n+1)-[4(n+1)+6]=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n-5$，

当 $n>5$ 时，$T_n-S_n=\left(\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n-5\right)-(n^2+4n)=\frac{1}{2}(n+2)(n-5)>0$，因此 $T_n>S_n$.

综上所述，当 $n>5$ 时，$T_n>S_n$.

19.(17 分)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=1,S_{n+1}=2S_n+1,n\in\mathbf{N}^*$.

(1)证明：$\{S_n+1\}$为等比数列，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)令 $b_n=[\lg a_n]$，$[x]$表示不超过 x 的最大整数，求数列$\{b_n\}$的前 15 项和 T_{15}.

(1)**证明**:由 $S_{n+1}=2S_n+1$，得 $S_{n+1}+1=2(S_n+1)$，又 $S_1+1=a_1+1=2$，则$\frac{S_{n+1}+1}{S_n+1}=2$，

所以$\{S_n+1\}$是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，

则 $S_n+1=2\times 2^{n-1}=2^n$，即 $S_n=2^n-1$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-1-(2^{n-1}-1)=2^{n-1}$.

又 $a_1=1$，符合 $a_n=2^{n-1}$，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^{n-1},n\in\mathbf{N}^*$.

(2)**解**:$b_n=[\lg a_n]=[\lg 2^{n-1}]$，

若$[\lg 2^{n-1}]=0$，则 $0\leqslant\lg 2^{n-1}<1$，得 $1\leqslant n\leqslant 4$；

若$[\lg 2^{n-1}]=1$，则 $1\leqslant\lg 2^{n-1}<2$，得 $5\leqslant n\leqslant 7$；

若$[\lg 2^{n-1}]=2$，则 $2\leqslant\lg 2^{n-1}<3$，得 $8\leqslant n\leqslant 10$；

若$[\lg 2^{n-1}]=3$，则 $3\leqslant\lg 2^{n-1}<4$，得 $11\leqslant n\leqslant 14$；

若$[\lg 2^{n-1}]=4$，则 $4\leqslant\lg 2^{n-1}<5$，得 $15\leqslant n\leqslant 17$.

故 $T_{15}=4\times 0+3\times 1+3\times 2+4\times 3+1\times 4=25$.

第五章 一元函数的导数及其应用

单元概览

单元导航

函数是刻画动态现象的重要概念，而在对函数的进一步研究中，数学家创立了微积分.本章所学习的导数就是微积分的核心内容之一，导数定量地刻画了函数的局部变化.通过本章的学习，可以在丰富的实际背景下理解导数的概念，掌握导数的基本运算，运用导数研究函数的性质，并解决增长率、膨胀率、效率、密度、速度、加速度等实际问题.

学习目标

1.研读教材，梳理导数的核心内容，体会导数的形成过程，明确逻辑关系.

2.用数学语言刻画导数的概念，借助导数的概念，探究导数的运算，用导数分析函数的单调性、极值和最值，逐步形成用导数思想研究函数的方法，提升数学运算的学科素养.

3.在具体情境中构建出函数模型，解决生活中的最优化问题，总结导数在解决函数综合问题中的应用价值，提升数学建模、逻辑推理学科核心素养.

核心概念

导数是研究变化率、曲线的切线、函数性质和众多实际问题的重要工具.

导数可用于研究函数性质、探求函数的极值和最值、求曲线的斜率、证明不等式等，为解决中学数学问题提供了新的视野.导数在中学数学中的应用涉及函数、数列、不等式、向量、解析几何、立体几何等方面，利用导数可以十分方便地处理这些问题.同时，导数也是解决一些物理、化学等其他实际问题的有力工具.

学法指导

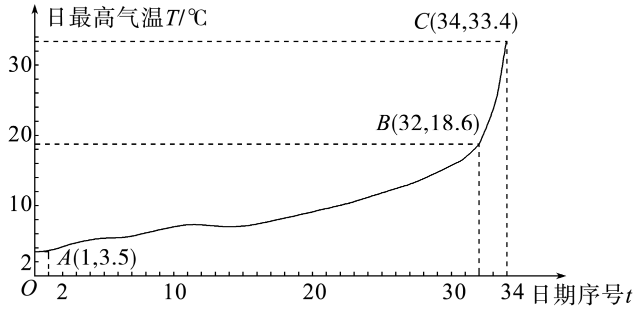
1.学习导数的概念时，我们要结合实例，感受平均速度、瞬时速度与平均变化率、瞬时变化率的联系，感知导数的物理含义，提升数学建模、数学抽象的核心素养.

2.学习导数的运算时，要注意从常见函数出发，先用定义求出对应函数的导数，再归纳总结幂函数、指数函数、对数函数、三角函数等函数的导数公式，并推导出导数的四则运算法则及复合函数的求导法则，提升数学运算的核心素养.

3.解决导数的应用问题时，注意利用数形结合的思想，理解导数的符号与函数的单调性之间的关系，进而解决函数极值、最值等问题；要注意把实际问题转化为导数问题，培养数学抽象、数学运算、数学建模的核心素养.

单元主题任务

世界充满着变化，有些变化几乎不被人们察觉，而有些变化却让人们发出感叹与惊呼.某市某年4月20日最高气温为33.4 ℃，而4月19日和4月18日最高气温分别为24.4 ℃和18.6 ℃，短短两天时间，气温陡增14.8 ℃，闷热中的人们无不感叹："天气热得太快了！"



但是，如果我们将该市3月18日最高气温3.5 ℃与4月18日最高气温18.6 ℃进行比较，发现两者相差15.1 ℃，甚至超过了14.8 ℃，而人们却不会发出上述感叹，这是什么原因呢？

原来前者变化得太快，而后者变化得缓慢.

(1)用怎样的数学模型刻画变量变化的快与慢？

(2)这样的数学模型有哪些应用？

探·究·构·建

5.1　导数的概念及其意义

5.1.1　变化率问题

学习任务目标

1.了解平均速度的意义,会利用运动方程求某一区间内的平均速度.
2.体会由平均速度过渡到瞬时速度的过程,会利用运动方程求某一时刻的瞬时速度.
3.体会极限的思想,会求曲线在某点处的切线的斜率及切线方程.

问题式预习

【知识清单】

知识点一　平均速度与瞬时速度

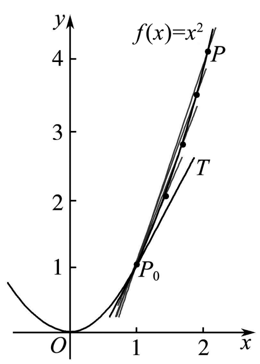
在一次跳水运动中,某运动员在运动过程中的重心相对于水面的高度 h(单位:m)与起跳后的时间 t(单位:s)存在函数关系 $h(t)$.

(1)平均速度:一般地,在 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 这段时间里,$\bar{v}=\dfrac{h(t_2)-h(t_1)}{t_2-t_1}$称为平均速度.

(2)瞬时速度:物体在某一时刻的速度称为瞬时速度.设运动员在 t_0 时刻附近某一时间段内的平均速度是 $\bar{v}$,如果不断缩短这一时间段的长度,那么 $\bar{v}$ 将越来越趋近于运动员在 t_0 时刻的瞬时速度.

(3)为了求运动员在 $t=1$ 时的瞬时速度,在 $t=1$ 之后或之前,任意取一个时刻 $1+\Delta t$,Δt 是时间改变量,可以是正值,也可以是负值,但不为0.当 $\Delta t>0$ 时,把运动员在时间段$[1,1+\Delta t]$内近似看成做匀速直线运动,计算时间段$[1,1+\Delta t]$内的平均速度 $\bar{v}$,用平均速度 $\bar{v}$ 近似表示运动员在 $t=1$ 时的瞬时速度.当 $\Delta t<0$ 时,在时间段$[1+\Delta t,1]$内可作类似处理.

知识点二　抛物线 $f(x)=x^2$ 的切线与斜率



如图,当点 P 无限趋近于点 P_0 时,割线 P_0P 无限趋近于一个确定的位置,这个确定位置的直线 P_0T 称为抛物线 $f(x)=x^2$ 在点 $P_0(1,1)$处的切线,我们可以用割线 P_0P 的斜率 k 近似地表示切线 P_0T 的斜率 k_0.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)瞬时速度就是一段时间内的平均速度.(　　)

×　**提示**:瞬时速度是 Δt 趋近于0时的平均速度.

(2)若平均速度不断增大,则位移关于时间的函数图象"越来越陡".(　　)

√　**提示**:时间段长度相同,平均速度不断增大,图象越来越"陡".

(3)火箭发射 t s后,其高度(单位:m)为 $h(t)=0.9t^2$,火箭在 $1\leqslant t\leqslant 2$ 这段时间内的平均速度为2.7 m/s.(　　)

√　**提示**:由平均速度的定义可知 $\bar{v}=\dfrac{0.9\times4-0.9\times1}{1}=2.7$(m/s).

2.抛物线 $f(x)=2x^2-1$ 在点(1,1)处的切线的方程为________.

$y=4x-3$　**解析**:抛物线 $f(x)$在点(1,1)处的切线斜率为 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=4$,切线方程为 $y=4x-3$.

3.请思考并回答下列问题:

(1)若物体的位移 s 与时间 t 的关系是 $s(t)=5t^2$,则该物体在$[1,1+\Delta t]$这段时间内的平均速度是多少?

提示:$\bar{v}=\dfrac{s(1+\Delta t)-s(1)}{(1+\Delta t)-1}=10+5\Delta t$.

(2)当 Δt 无限趋近于 0 时,上述问题(1)中的平均速度趋近于多少？怎样理解这一速度？

提示：当 Δt 无限趋近于 0 时,$\overline{v}$ 无限趋近于 10,这时的 10 即为当 $t=1$ 时物体的瞬时速度.

○ 任务型课堂 ○

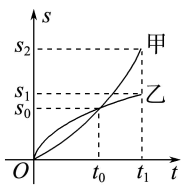
任务1 › 计算平均速度

1. 一质点做直线运动,位移 s 与时间 t 的关系式为 $s=t^2+1$,则质点在时间段$[1,2]$内的平均速度为 (　　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

C　**解析**：由题设可知平均速度 $\overline{v}=\dfrac{2^2+1-(1^2+1)}{2-1}=\dfrac{5-2}{2-1}=3$.故选 C.

2. 物体甲、乙在时间段$[0,t_1]$内位移 s 的变化情况如图所示,下列说法正确的是________.(填序号)



①在$[0,t_0]$内,甲的平均速度大于乙的平均速度；
②在$[0,t_0]$内,甲的平均速度小于乙的平均速度；
③在$[t_0,t_1]$内,甲的平均速度大于乙的平均速度；
④在$[t_0,t_1]$内,甲的平均速度小于乙的平均速度.

③　**解析**：在$[0,t_0]$内,甲、乙的平均速度都为$\dfrac{s_0}{t_0}$,故①②错误.

在$[t_0,t_1]$内,甲的平均速度为$\dfrac{s_2-s_0}{t_1-t_0}$,乙的平均速度为$\dfrac{s_1-s_0}{t_1-t_0}$.

因为 $s_2-s_0>s_1-s_0$,$t_1-t_0>0$,所以$\dfrac{s_2-s_0}{t_1-t_0}>\dfrac{s_1-s_0}{t_1-t_0}$,故③正确,④错误.

【探究总结】

求物体运动的平均速度的三个步骤

(1)求时间的改变量 x_2-x_1；
(2)求位移的改变量 $f(x_2)-f(x_1)$；
(3)求平均速度,$\overline{v}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

任务2 › 求瞬时速度

探究活动

例 1　某物体的位移 s(单位:m)与时间 t(单位:s)的关系可用 $s(t)=t^2+t+1$ 表示,求物体在 $t=1$ 时的瞬时速度.

解：因为$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{s(1+\Delta t)-s(1)}{\Delta t}$

$=\dfrac{(1+\Delta t)^2+(1+\Delta t)+1-(1^2+1+1)}{\Delta t}=3+\Delta t$,

所以$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(3+\Delta t)=3$,

即物体在 $t=1$ 时的瞬时速度为 3 m/s.

[一题多思]

思考 1. 若本例中的条件不变,求物体的初速度.

解：求物体的初速度,即求物体在 $t=0$ 时的瞬时速度,

因为$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{s(0+\Delta t)-s(0)}{\Delta t}$

$=\dfrac{(0+\Delta t)^2+(0+\Delta t)+1-1}{\Delta t}=1+\Delta t$,

所以$\lim\limits_{\Delta t\to 0}(1+\Delta t)=1$.

即物体的初速度为 1 m/s.

思考 2. 若本例中的条件不变,试问：物体在哪一时刻的瞬时速度为 9 m/s?

解：设物体在 t_0 时刻的瞬时速度为 9 m/s.

又$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=(2t_0+1)+\Delta t$,

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(2t_0+1+\Delta t)=2t_0+1$,则 $2t_0+1=9$,

所以 $t_0=4$.

则物体在 $t=4$ 时的瞬时速度为 9 m/s.

【探究总结】

求运动物体瞬时速度的三个步骤

(1)求时间改变量 Δt 和位移改变量 $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$；

(2)求平均速度$\overline{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$；

(3)求瞬时速度,当 Δt 无限趋近于 0 时,$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$无限趋近于的常数 v 即为瞬时速度,即 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

应用迁移

若一物体运动的位移 s(单位:m)与时间 t(单位:s)的关系如下：

$s=\begin{cases}3t^2+2,t\geqslant 3,\\29+3(t-3)^2,0\leqslant t<3,\end{cases}$求：

(1)物体在时间段$[3,5]$内的平均速度；
(2)物体的初速度 v_0；
(3)物体在 $t=1$ 时的瞬时速度.

解：(1)因为物体在$[3,5]$内的时间变化量为 $\Delta t=5-3=2$,

物体在$[3,5]$上的位移变化量为 $\Delta s=3\times 5^2+2-(3\times 3^2+2)=3\times(5^2-3^2)=48$,

所以物体在$[3,5]$上的平均速度为 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{48}{2}$

$=24(\text{m/s})$.

(2)求物体的初速度 v_0,即求物体在 $t=0$ 时的瞬时速度.

因为物体在 $t=0$ 附近的平均变化率为 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{29+3[(0+\Delta t)-3]^2-29-3(0-3)^2}{\Delta t}=3\Delta t-18$,

所以物体在 $t=0$ 时的瞬时速度为 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(3\Delta t-18)=-18(\text{m/s})$,即物体的初速度为 -18 m/s.

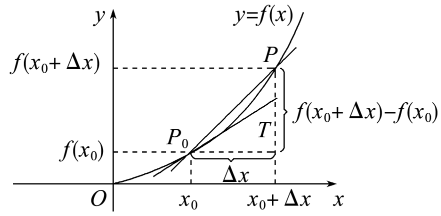
(3)因为物体在 $t=1$ 附近的平均变化率为 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{29+3[(1+\Delta t)-3]^2-29-3(1-3)^2}{\Delta t}=3\Delta t-12$,

所以物体在 $t=1$ 时的瞬时速度为 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(3\Delta t-12)=-12(\text{m/s})$.

任务3 曲线割线斜率与切线斜率的关系

探究活动

例 2　函数 $y=f(x)$的图象如图所示,P_0P 是过点 $P_0(x_0,f(x_0))$与点 $P(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$的一条割线,此割线的斜率是$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.当点 P 沿曲线趋近于点 P_0 时,割线 P_0P 绕点 P_0 转动,它的极限位置为直线 P_0T,这条直线 P_0T 叫做此曲线在点 P_0 处的切线.于是,当 $\Delta x\to 0$ 时,割线 P_0P 的斜率无限趋近于过点 P_0 的切线 P_0T 的斜率 k,即 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.



【探究总结】

函数的平均变化率的物理意义是运动物体在某段时间内的平均速度,几何意义是曲线过某两点的割线的斜率.

应用迁移

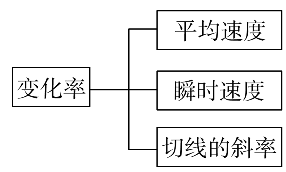
求曲线 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$在点(1,0)处的切线的方程.

解:曲线 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$在点(1,0)处的切线斜率 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{1+\Delta x}\right)=2$.

故所求切线方程为 $y=2(x-1)$,

即 $2x-y-2=0$.

提质归纳



课后素养评价(十二)　变化率问题

A组　学习·理解

1.若一个物体的运动规律为 $s=3+2t$,其中 s 为物体的位移,t 为时间,则物体在 $t\in[2,2.1]$这段时间内的平均速度是　(　　)

A.0.41　　B.2

C.0.3　　D.0.2

B　**解析**:因为 $\Delta s=3+2\times 2.1-(3+2\times 2)=0.2$,

$\Delta t=2.1-2=0.1$,

所以$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{0.2}{0.1}=2$.

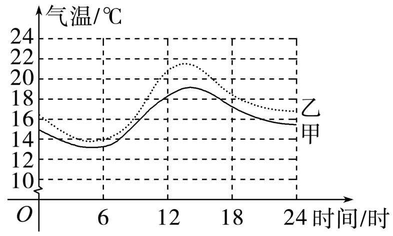
2.如果质点 A 运动的位移 s(单位:m)与时间 t(单位:s)之间的函数关系为 $s(t)=\dfrac{2}{t}$,那么该质点在 $t=3$ s 时的瞬时速度(单位:m/s)为　(　　)

A.$\dfrac{2}{3}$　　B.$-\dfrac{2}{3}$

C.$\dfrac{2}{9}$　　D.$-\dfrac{2}{9}$

D　**解析**:因为$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{s(3+\Delta t)-s(3)}{\Delta t}=\dfrac{\dfrac{2}{3+\Delta t}-\dfrac{2}{3}}{\Delta t}=-\dfrac{2}{3(3+\Delta t)}$,所以 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left[-\dfrac{2}{3(3+\Delta t)}\right]=-\dfrac{2}{9}$.

3.大面积绿化可以增加地表的绿植覆盖,调节小环境的气温,好的绿化有助于降低气温日较差(一天气温的最高值与最低值之差).下图是甲、乙两地某一天的气温曲线图.假设除绿化外,其他可能影响甲、乙两地温度的因素均一致,则下列结论中错误的是　(　　)



A.由上图推测,甲地的绿化好于乙地

B.当日 6 时到 12 时,甲地气温的平均变化率小于乙地气温的平均变化率

C.当日 12 时到 18 时,甲地气温的平均变化率小于乙地气温的平均变化率

D.当日必存在一个时刻,甲、乙两地气温的瞬时变化率相同

C **解析**:对于 A,由题图可知,甲地的气温日较差明显小于乙地气温日较差,所以甲地的绿化好于乙地,故 A 正确;

对于 B,由题图可知,甲、乙两地 6 时到 12 时气温的平均变化率为正数,且乙地的变化幅度更大,所以甲地气温的平均变化率小于乙地气温的平均变化率,故 B 正确;

对于 C,由题图可知,甲、乙两地 12 时到 18 时气温的平均变化率为负数,且乙地的变化幅度更大,所以甲地气温的平均变化率大于乙地气温的平均变化率,故 C 错误;

对于 D,由题图可知,存在一个时刻,使得甲、乙两地气温的瞬时变化率相同,故 D 正确.

故选 C.

4. 已知曲线 $y=x^2-1$ 上两点 $A(2,3)$,$B(2+\Delta x,3+\Delta y)$.当 $\Delta x=1$ 时,直线 AB 的斜率是________;当 $\Delta x=0.1$ 时,直线 AB 的斜率是________.

5 4.1 **解析**:当 $\Delta x=1$ 时,直线 AB 的斜率

$k_1=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{(2+\Delta x)^2-1-2^2+1}{\Delta x}=\dfrac{(2+1)^2-2^2}{1}=5$.

当 $\Delta x=0.1$ 时,直线 AB 的斜率

$k_2=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{(2+0.1)^2-1-2^2+1}{0.1}=4.1$.

5. 已知函数 $y=f(x)$,其中 $f(x)=x^2-1$,此函数在区间$[1,m]$上的平均变化率为 3,则实数 m 的值为________.

2 **解析**:根据题意,函数 $f(x)=x^2-1$ 在区间$[1,m]$上的平均变化率为 $\dfrac{f(m)-f(1)}{m-1}=\dfrac{(m^2-1)-(1^2-1)}{m-1}=m+1=3$,所以 $m=2$.

6. 已知函数 $f(x)=2x^2+1$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率为-8,则 x_0 的值为______,$f(x_0)$的值为______.

-2 9 **解析**:因为 $f(x)=2x^2+1$,所以 $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{2(x+h)^2+1-2x^2-1}{h}=4x+2h$,

所以函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率为 $\lim\limits_{h\to 0}(4x_0+2h)=4x_0=-8$,

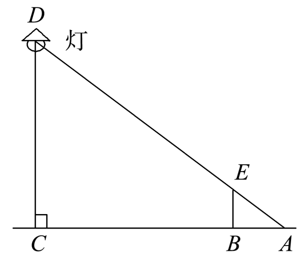
得 $x_0=-2$,所以 $f(-2)=9$.

7. 路灯距地面 8 m,一个身高 1.6 m 的人以 84 m/min 的速度从路灯在地面上的射影 C 处沿某直线远离路灯.

(1)求人影子的长度 y(单位:m)与人离开点 C 的距离 x(单位:m)之间的关系式;

(2)求人离开点 C 第 10 s 时影子长度的瞬时变化率.

解:(1)如图所示,由题意得 $AB=y$ m,$BC=x$ m.



由于 $CD\parallel BE$,则 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BE}{CD}$,

即 $\dfrac{y}{y+x}=\dfrac{1.6}{8}$,所以 $y=\dfrac{1}{4}x(x>0)$.

(2)设人离开点 C 的时间为 t s,

因为 84 m/min=1.4 m/s,所以 $x=1.4t$.

所以 $y=\dfrac{1}{4}x=\dfrac{1}{4}\times 1.4t=\dfrac{7}{20}t$.

又 $\Delta y=\dfrac{7}{20}(10+\Delta t)-\dfrac{7}{20}\times 10=\dfrac{7}{20}\Delta t$,

所以 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta t}=\dfrac{7}{20}$,

即人离开点 C 第 10 s 时影子长度的瞬时变化率为 $\dfrac{7}{20}$.

B组 应用·实践

1. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 等于 ( )

A.$-\dfrac{1}{a}$ B.$\dfrac{2}{a}$ C.$-\dfrac{1}{a^2}$ D.$\dfrac{1}{a^2}$

C **解析**:$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}$

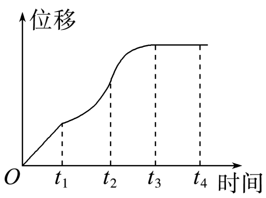
$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a-x}{(x-a)\cdot xa}=-\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{ax}=-\dfrac{1}{a^2}$.

2. 一质点 M 按运动方程 $s(t)=at^2+1$ 做直线运动(位移 s 的单位:m,时间 t 的单位:s),若质点 M 在 $t=2$ s 时的瞬时速度为 8 m/s,则常数 a 的值为 ( )

A.1 B.2 C.4 D.6

B　**解析**：$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{a(2+\Delta t)^2-4a}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(4a+a\Delta t)=4a$，由题可知 $4a=8$，解得 $a=2$.

3.一辆汽车在笔直的公路上行驶，位移关于时间的函数图象如图所示，给出下列四个结论：①汽车在$[0,t_1]$时间段内匀速行驶；②汽车在$[t_1,t_2]$时间段内不断加速行驶；③汽车在$[t_2,t_3]$时间段内不断减速行驶；④汽车在$[t_3,t_4]$时间段内处于静止状态.其中正确的结论有　（　　）



A.1 个　　B.2 个

C.3 个　　D.4 个

D　**解析**：根据题意，

①在$[0,t_1]$时间段内，图象是一条斜率大于零的线段，则汽车在该时间段内匀速行驶，故①正确；

②在$[t_1,t_2]$时间段内，图象是一条斜率越来越大的曲线，则汽车在该时间段内不断加速行驶，故②正确；

③在$[t_2,t_3]$时间段内，图象是一条斜率越来越小的曲线，则汽车在该时间段内不断减速行驶，故③正确；

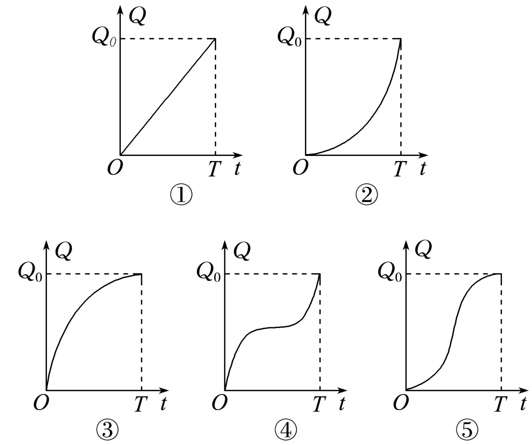
④在$[t_3,t_4]$时间段内，位移不变，则汽车在该时间段内静止不动，故④正确.

故选 D.

4.过函数 $y=x^3$ 图象上两点 $P(1,1)$和$Q(1+\Delta x,1+\Delta y)$作曲线的割线，则当 $\Delta x=0.1$ 时割线的斜率为________.

3.31　**解析**：当 $\Delta x=0.1$ 时，$1+\Delta x=1.1$；故 $1+\Delta y=1.1^3=1.331$.故 $k_{PQ}=\dfrac{1.331-1}{1.1-1}=3.31$.

5.为缓解南方某地区电力用煤紧张的局面，某运输公司提出五种运输方案，据预测，这五种方案均能在规定时间 T 内完成预期的运输任务 Q_0，各种方案的运煤总量 Q 与时间 t 的函数关系如图所示.在这五种方案中，运煤效率(单位时间的运煤量)逐步提高的是________.(填写所有正确的图象的序号)



②　**解析**：曲线在每一时刻的斜率代表在该时刻的运煤效率，运煤效率逐步提高说明斜率越来越大，即 Q 增加得越来越快，符合条件的只有②.

6.航天飞机升空后一段时间内，第 t s 时的高度为 $h(t)=5t^3+30t^2+45t+4$，其中 h 的单位为 m.

(1)$h(0)$，$h(1)$，$h(2)$分别表示什么？

(2)求第 2 s 内的平均速度.

(3)求第 2 s 末的瞬时速度.

解：(1)$h(0)$表示航天飞机升空前的高度；

$h(1)$表示航天飞机升空后第 1 s 时的高度；

$h(2)$表示航天飞机升空后第 2 s 时的高度.

(2)航天飞机升空后第 2 s 内的平均速度

$\overline{v}=\dfrac{h(2)-h(1)}{2-1}$

$=\dfrac{5\times 2^3+30\times 2^2+45\times 2+4-(5\times 1^3+30\times 1^2+45\times 1+4)}{1}$

$=170(\text{m/s})$.

(3)第 2 s 末的瞬时速度为

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta h}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t}=$

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{5(2+\Delta t)^3+30(2+\Delta t)^2+45(2+\Delta t)+4-(5\times 2^3+30\times 2^2+45\times 2+4)}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{5(\Delta t)^3+60(\Delta t)^2+225\Delta t}{\Delta t}=225(\text{m/s})$.

因此，第 2 s 末的瞬时速度为 225 m/s.

5.1.2 导数的概念及其几何意义

第1课时 导数的概念

学习任务目标

1.理解函数在某点的平均变化率的概念并会求此变化率.
2.体会由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，了解导数概念产生的实际背景，会求函数在自变量取某个值时的导数.

◦ 问题式预习 ◦

【知识清单】

知识点一 平均变化率

对于函数 $y=f(x)$，设自变量 x 从 x_0 变化到 $x_0+\Delta x$，相应地，函数值 y 就从 $f(x_0)$ 变化到 $f(x_0+\Delta x)$.这时，x 的变化量为 Δx，y 的变化量为 $\Delta y=$ $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.我们把比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，即 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 叫做函数 $y=f(x)$ 从 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 的平均变化率.

知识点二 瞬时变化率

如果当 $\Delta x\to 0$ 时，平均变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 无限趋近于一个确定的值，即 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 有极限，则称 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，并把这个确定的值叫做 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数(也称为瞬时变化率)，记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

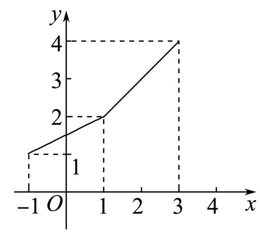
(1)若函数在某区间上的平均变化率为零，则说明此函数在此区间上的函数值都相等.（　　）

× **提示**：函数 $f(x)=-2x^2+1$ 在区间 $[-1,1]$ 上的平均变化率为零，但是此函数在区间 $[-1,1]$ 上的函数值不都相等.

(2)函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数值与 Δx 的正、负无关.（√）

(3)设 $x=x_0+\Delta x$，则 $\Delta x=x-x_0$，当 Δx 趋近于0时，x 趋近于 x_0，因此，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.（√）

2.如图，已知函数 $y=f(x)$ 的图象.



(1)函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的平均变化率为________；

(2)函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的平均变化率为________.

(1)$\dfrac{1}{2}$　(2)$\dfrac{3}{4}$　**解析**：(1)函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的平均变化率为 $\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{2-1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

(2)由函数 $y=f(x)$ 的图象知，$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+3}{2},-1\leqslant x\leqslant 1,\\ x+1,1<x\leqslant 3,\end{cases}$ 所以函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的平均变化率为 $\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{3-\frac{3}{2}}{2}=\dfrac{3}{4}$.

3.请思考并回答下列问题：

(1)Δx，Δy 一定是正值吗？平均变化率是否一定为正值？

提示：Δx，Δy 可正可负，Δy 也可以为零，但 Δx 不能为零.平均变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 可正，可负，可为零.

(2)瞬时变化率的几何意义是什么？

提示：瞬时变化率的几何意义是曲线的切线斜率.

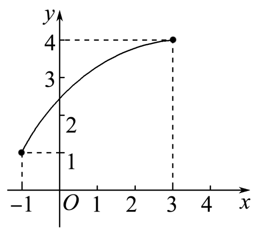
◦ 任务型课堂 ◦

任务1 › 求函数的平均变化率

1.函数 $f(x)=8x-6$ 在区间 $[m,n]$ 上的平均变化率为________.

8　**解析**：$\dfrac{f(n)-f(m)}{n-m}=\dfrac{(8n-6)-(8m-6)}{n-m}=8$.

2.如图是函数 $y=f(x)$ 的图象，则函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的平均变化率为________.



$\frac{3}{4}$　**解析**：由题中函数 $f(x)$ 的图象，知函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的平均变化率为 $\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{4-1}{3-(-1)}=\frac{3}{4}$.

3. 已知函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 和区间 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的平均变化率分别为 k_1,k_2，那么 k_1,k_2 的大小关系为________.

$k_1>k_2$　**解析**：在区间 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 上，平均变化率 $k_1=\frac{\sin\frac{\pi}{6}-\sin 0}{\frac{\pi}{6}}=\frac{3}{\pi}$；在区间 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ 上，平均变化率 $k_2=\frac{\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}=\frac{3(2-\sqrt{3})}{\pi}$. 所以 $k_1>k_2$.

【探究总结】

求平均变化率的步骤

已知函数 $y=f(x)$，求函数在区间 $[x_0,x]$ 上的平均变化率的步骤：

(1)求自变量的改变量 $\Delta x=x-x_0$；

(2)求函数值的改变量 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$；

(3)求平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

任务2 > 求函数在某一处的导数

探究活动

例 1　根据导数定义求函数 $y=x^2+\frac{1}{x}+5$ 在 $x=2$ 处的导数.

解：当 $x=2$ 时，

$\Delta y=(2+\Delta x)^2+\frac{1}{2+\Delta x}+5-\left(2^2+\frac{1}{2}+5\right)=4\Delta x+(\Delta x)^2+\frac{-\Delta x}{2(2+\Delta x)}$，

所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=4+\Delta x-\frac{1}{4+2\Delta x}$，

所以 $y'|_{x=2}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(4+\Delta x-\frac{1}{4+2\Delta x}\right)=4+0-\frac{1}{4+2\times 0}=\frac{15}{4}$.

[一题多思]

思考　若本例中的条件不变，试问：函数在何处的瞬时变化率为 1？

解：设函数在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率为 1.

$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2+\frac{1}{x_0+\Delta x}+5-\left(x_0^2+\frac{1}{x_0}+5\right)$

$=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2+\frac{-\Delta x}{x_0\cdot(x_0+\Delta x)}$，

所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0+\Delta x-\frac{1}{x_0(x_0+\Delta x)}$，

所以 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0-\frac{1}{x_0^2}$.

因为 $f'(x_0)=1$，

所以 $2x_0-\frac{1}{x_0^2}=1$，

所以 $2x_0^3-x_0^2-1=0$，

所以 $x_0^2(x_0-1)+(x_0-1)(x_0^2+x_0+1)=0$，

所以 $(x_0-1)(2x_0^2+x_0+1)=0$，解得 $x_0=1$.

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的瞬时变化率为 1.

【探究总结】

求函数在 $x=x_0$ 处的导数的步骤

(1)求函数值的变化量：$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

(2)求平均变化率：$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(3)取极限：$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

应用迁移

1. 求函数 $y=f(x)=x-\frac{4}{x}$ 在 $x=2$ 处的导数.

解：因为 $\Delta y=f(2+\Delta x)-f(2)=(2+\Delta x)-\frac{4}{2+\Delta x}-\left(2-\frac{4}{2}\right)=\Delta x+\frac{2\Delta x}{2+\Delta x}$，

所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x+\frac{2\Delta x}{2+\Delta x}}{\Delta x}=1+\frac{2}{2+\Delta x}$，

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{2}{2+\Delta x}\right)=2$，

从而 $f'(2)=2$.

2. 已知函数 $y=f(x)=-x^2+3x$，求 $f'(1)$.

解：因为 $\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=[-(1+\Delta x)^2+3(1+\Delta x)]-(-1+3)=-(\Delta x)^2+\Delta x$，

所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\Delta x+1$.

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(-\Delta x+1)=1$.

故 $f'(1)=1$.

任务3 导数定义的应用

探究活动

例 2 (1)已知函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数为 12，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}=$ ( )

A.-4　　B.4

C.-36　　D.36

A　**解析**：由函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数为 12，

得 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}$

$=-\dfrac{1}{3}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=-\dfrac{12}{3}=-4.$

故选 A.

(2)已知函数 $f(x)$ 在定义域 **R** 上可导，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1-\Delta x)-f(1)}{-\Delta x}$ 等于 ( )

A.$f'(1)$　　B.$-f'(1)$

C.$\dfrac{1}{3}f'(1)$　　D.$3f'(1)$

A　**解析**：因为 $\Delta x\to 0$，所以 $-\Delta x\to 0$，

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1-\Delta x)-f(1)}{-\Delta x}=f'(1)$.故选 A.

【探究总结】

正确理解导数定义式的变形

在导数的定义中，自变量的增量 Δx 可正，可负，但不能为零，它有多种表达形式.无论采用哪种表达形式，Δy 中自变量的增量 Δx 都必须用相同的形式，如将 Δx 变形为 $a\Delta x$，则 $\Delta y=f(x_0+a\Delta x)-f(x_0)$，只有这样，才能满足 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+a\Delta x)-f(x_0)}{a\Delta x}=f'(x_0)$.

应用迁移

1. 若函数 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处的瞬时变化率为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，且 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=4+\Delta x$，则 $f'(2)=$ ( )

A.2　　B.4

C.$2+\Delta x$　　D.$4+\Delta x$

B　**解析**：由导数的定义，知 $f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$.故选 B.

2. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)>0$，且

$a=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，

$b=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，

$c=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，

$d=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$，

$e=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，

则 a,b,c,d,e 的大小关系为____________.

$c>a=d=e>b$　**解析**：

$a=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$，

$b=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}$

$=-f'(x_0)$，

$c=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}$

$=2f'(x_0)$，

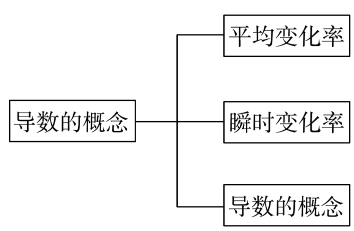
$d=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(x_0)$，

$e=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$.

因为 $f'(x_0)>0$，所以 $c>a=d=e>b$.

故答案为 $c>a=d=e>b$.

提质归纳



课后素养评价（十三）　导数的概念

A组　学习·理解

1. 已知 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f'(2)=$ ( )

A.$-\dfrac{1}{4}$　　B.2　　C.$\dfrac{1}{4}$　　D.-2

A　**解析**：$f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2+\Delta x}-\dfrac{1}{2}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-1}{2(2+\Delta x)}=-\dfrac{1}{4}$.

2.若可导函数 $f(x)$ 的图象过原点，且满足 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}=-1$，则 $f'(0)=$ (　　)

A.-2　　B.-1　　C.1　　D.2

B　**解析**：因为 $f(x)$ 的图象过原点，所以 $f(0)=0$，所以 $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}=-1$.

3.已知函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数为 1，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}=$ (　　)

A.0　　B.$\dfrac{1}{2}$

C.1　　D.2

B　**解析**：因为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数为 1，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{1}{2}f'(x_0)$

$=\dfrac{1}{2}\times 1=\dfrac{1}{2}$.故选 B.

4.已知函数 $f(x)=ax+4$，若 $f'(1)=2$，则实数 a 的值为________.

2　**解析**：因为 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=a$，所以 $f'(1)=a=2$.

5.求出函数 $f(x)=x^2$ 在 $x=1,2,3$ 附近的平均变化率，若 Δx 都为 $\dfrac{1}{3}$，则在哪一点附近的平均变化率最大？

解：在 $x=1$ 附近的平均变化率 $k_1=\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\dfrac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}=2+\Delta x$；在 $x=2$ 附近的平均变化率 $k_2=\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\dfrac{(2+\Delta x)^2-2^2}{\Delta x}=4+\Delta x$；在 $x=3$ 附近的平均变化率 $k_3=\dfrac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\dfrac{(3+\Delta x)^2-3^2}{\Delta x}=6+\Delta x$.

若 $\Delta x=\dfrac{1}{3}$，则 $k_1=2+\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}$，$k_2=4+\dfrac{1}{3}=\dfrac{13}{3}$，$k_3=6+\dfrac{1}{3}=\dfrac{19}{3}$.

因为 $k_1<k_2<k_3$，所以在 $x=3$ 附近的平均变化率最大.

6.在函数 $y=f(x)=x^2+3$ 的图象上取一点 $P(1,4)$ 及附近一点 $(1+\Delta x,4+\Delta y)$.

求：(1)$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$；(2)$f'(1)$.

解：(1)$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\dfrac{(1+\Delta x)^2+3-(1^2+3)}{\Delta x}=2+\Delta x$.

(2)$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2$.

B组　应用·实践

1.设函数 $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$ (　　)

A.6　　B.4　　C.3　　D.2

A　**解析**：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$

$2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}=2f'(1)$，

又 $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(1+\Delta x)^2-\dfrac{1}{1+\Delta x}}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^2+3\Delta x+3}{1+\Delta x}$

$=3$，

则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=2\times 3=6$.故选 A.

2.设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 附近有定义，且有 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=a\Delta x+b(\Delta x)^2$($a,b$ 为常数)，则 (　　)

A.$f'(x)=a$　　B.$f'(x)=b$

C.$f'(x_0)=a$　　D.$f'(x_0)=b$

C　**解析**：因为 $f'(x_0)$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a\Delta x+b(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(a+b\Delta x)=a$，

所以 $f'(x_0)=a$.

3.已知函数 $f(x)=-x^2+10$，则 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{3}{2}$ 处的瞬时变化率是 (　　)

A.3　　B.-3　　C.2　　D.-2

B　**解析**：$\dfrac{f\left(\dfrac{3}{2}+\Delta x\right)-f\left(\dfrac{3}{2}\right)}{\Delta x}$

$=\dfrac{-\left(\dfrac{3}{2}+\Delta x\right)^2+10-\left[-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+10\right]}{\Delta x}$

$=\dfrac{-(\Delta x)^2-3\Delta x}{\Delta x}=-\Delta x-3$，

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(\dfrac{3}{2}+\Delta x\right)-f\left(\dfrac{3}{2}\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(-\Delta x-3)=-3$.

4.函数 $y=x^2$ 在 $x=$________处的导数值等于其函数值.

0 或 2 **解析**：$y=f(x)=x^2$ 在 $x=x_0$ 处的导数值为 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x_0)=2x_0$.由 $2x_0=x_0^2$,解得 $x_0=0$ 或 $x_0=2$.

5.已知函数 $y=f(x)=x^2$.

(1)计算函数 $f(x)$ 从 $x=1$ 到 $x=1+\Delta x$ 的平均变化率，其中 Δx 的值为①2;②1;③0.1;④0.01.

(2)当 Δx 越来越小时，函数 $f(x)$ 在区间 $[1,1+\Delta x]$ 上的平均变化率有怎样的变化趋势？

解：(1)因为 $\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)^2-1^2=(\Delta x)^2+2\Delta x$,

所以 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{(\Delta x)^2+2\Delta x}{\Delta x}=\Delta x+2$.

①当 $\Delta x=2$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x+2=4$;

②当 $\Delta x=1$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x+2=3$;

③当 $\Delta x=0.1$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x+2=2.1$;

④当 $\Delta x=0.01$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x+2=2.01$.

(2)由(1)可知 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{(\Delta x)^2+2\Delta x}{\Delta x}=\Delta x+2$,当 Δx 越来越小时，函数 $f(x)$ 在区间 $[1,1+\Delta x]$ 上的平均变化率逐渐变小，并趋近于 2.

6.求 $y=x^2+\dfrac{1}{x}+5$ 在 $x=2$ 处的导数.

解：因为 $\Delta y=(2+\Delta x)^2+\dfrac{1}{2+\Delta x}+5-\left(2^2+\dfrac{1}{2}+5\right)=4\Delta x+(\Delta x)^2+\dfrac{-\Delta x}{2(2+\Delta x)}$,

所以 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=4+\Delta x-\dfrac{1}{4+2\Delta x}$.

所以 $y'|_{x=2}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(4+\Delta x-\dfrac{1}{4+2\Delta x}\right)=4-\dfrac{1}{4}=\dfrac{15}{4}$.

7.已知函数 $f(x)=x^3-ax^2+b(a,b\in\mathbf{R})$的图象过点$(-1,0)$,且 $f'(2)=4$,求 a,b 的值.

解：因为函数 $f(x)=x^3-ax^2+b$ 的图象过点$(-1,0)$,所以 $-1-a+b=0$①.

又 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=3x^2-2ax$,

$f'(2)=4$,

所以 $f'(2)=3\times 2^2-2\times 2a=12-4a=4$②.

由①②解得 $a=2,b=3$.

第 2 课时　导数的几何意义

学习任务目标

1.通过函数图象直观地理解导数的几何意义.
2.能根据导数的几何意义求曲线在某点处的切线的方程.
3.正确理解曲线“过某点”的切线和“在某点”处的切线，并会求其方程.

◦ 问题式预习 ◦

【知识清单】

知识点一　导数的几何意义

(1)在曲线 $y=f(x)$ 上任取一点 $P(x,f(x))$,如果当点 $P(x,f(x))$沿着曲线 $y=f(x)$无限趋近于点 $P_0(x_0,f(x_0))$时，割线 P_0P 无限趋近于<u>一个确定的位置</u>,这个确定位置的直线 P_0T 称为曲线 $y=f(x)$ 在点 P_0 处的<u>切线</u>.

(2)函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$就是切线 P_0T 的斜率 k_0,即 $k_0=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$.

知识点二　导函数的概念

当 x 变化时，$y=f'(x)$就是 x 的函数，我们称它为 $y=f(x)$的导函数(简称导数).$y=f(x)$的导函数有时也记作 y',即 $f'(x)=y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)函数在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$是一个常数.　(√)

(2)函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数值就是曲线 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的切线的斜率.　(√)

(3)直线与曲线相切，则直线与曲线只有一个公共点.　(　)

× **提示**：直线与曲线相切，则直线与曲线除了切点之外，可能还有其他公共点.

2.曲线 $y=3x^2-4x$ 在点$(1,-1)$处的切线的方程为________.

$y=2x-3$ **解析**：令 $y=f(x)=3x^2-4x$,

则 $k=f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3(1+\Delta x)^2-4(1+\Delta x)-(3\times 1^2-4\times 1)}{\Delta x}=2$.

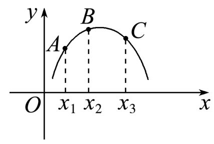
所以切线方程为 $y+1=2(x-1)$,即 $y=2x-3$.

3. 请思考并回答下列问题：

(1)若 $f'(x_0)>0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线的倾斜角为锐角；若 $f'(x_0)<0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线的倾斜角为钝角；若 $f'(x_0)=0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线与 x 轴平行或重合，这种说法正确吗？

提示：由导数的几何意义以及直线倾斜角的正切值的符号与角度的关系知此说法正确.

(2)函数 $y=f(x)$ 的部分图象如图所示，根据导数的几何意义，你能比较 $f'(x_1)$，$f'(x_2)$ 和 $f'(x_3)$ 的大小吗？

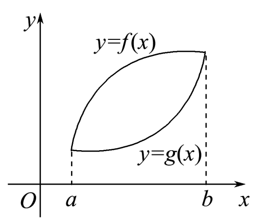


提示：易知图象在点 A，B 处的切线斜率大于零且 $k_A>k_B$，在点 C 处的切线斜率小于零，根据导数的几何意义，可得 $f'(x_1)>f'(x_2)>f'(x_3)$.

○ 任务型课堂 ○

任务1 根据函数图象描述曲线的变化情况

1.(多选)已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图象如图所示，则下列说法正确的是　　(　　)



A.$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均变化率大于 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均变化率

B.$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均变化率等于 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均变化率

C.对于任意 $x_0\in(a,b)$，函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率总大于函数 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率

D.存在 $x_0\in(a,b)$，使得函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率小于函数 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率

BD　**解析**：$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均变化率是 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，

$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均变化率是 $\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}$.

又因为 $f(b)=g(b)$，$f(a)=g(a)$，

所以 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}$，所以 A 错误，B 正确.

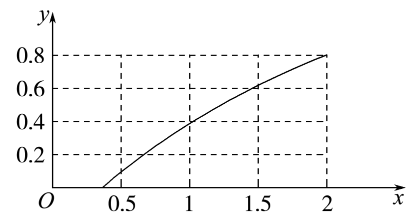
易知函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，即曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线的斜率.

同理，函数 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是函数 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，即曲线 $y=g(x)$ 在该点处的切线的斜率.

由题中图象可知，当 $x_0\in(a,b)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处切线的斜率有可能大于曲线 $y=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处切线的斜率，也有可能小于曲线 $y=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处切线的斜率，

故 C 错误，D 正确.

2. 如图，已知函数 $y=f(x)$ 的图象，则该函数在 $x=1$ 处的瞬时变化率大约是　　(　　)



A.0.1　　B.1.5　　C.4　　D.0.5

D　**解析**：函数在 $x=1$ 时的瞬时变化率为函数图象在 $x=1$ 处的切线的斜率，约为 0.5.故选 D.

【探究总结】

1. 导数的几何意义就是切线的斜率，因此比较导数大小的问题可以用数形结合的思想来解决.

2. 曲线在某点处的切线的斜率大小反映了曲线在相应点处的变化情况，由切线的倾斜程度，可以判断出曲线升降的快慢.

任务2 求曲线在某点处的切线方程

探究活动

例1　求抛物线 $f(x)=x^2+3$ 在点 $P(1,4)$ 处的切线方程.

解：$\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\dfrac{(1+\Delta x)^2+3-(1^2+3)}{\Delta x}=2+\Delta x$，

所以所求切线的斜率

$k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2$.

所以，所求切线方程为 $y-4=2(x-1)$，

即 $2x-y+2=0$.

[一题多思]

思考1. 在本例抛物线上求一点 A，使抛物线在该点处的切线垂直于直线 $2x-6y+5=0$.

解：设点 A 的坐标为 (x_0,y_0).

则抛物线 $f(x)=x^2+3$ 在点 A 处的切线的斜率

$k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[(x_0+\Delta x)^2+3]-(x_0^2+3)}{\Delta x}=2x_0$，

直线 $2x-6y+5=0$ 的斜率为 $\dfrac{1}{3}$，

由题设知 $2x_0\cdot\dfrac{1}{3}=-1$，

解得 $x_0=-\dfrac{3}{2}$，

此时 $y_0=\dfrac{21}{4}$，

所以点 A 的坐标为 $\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{21}{4}\right)$.

思考 2. 将本例的抛物线方程改为“$y=-x^2+3$”，求此抛物线在 $x=1$ 处的切线的方程.

解： 令 $y=f(x)$，则抛物线 $y=-x^2+3$ 在 $x=1$ 处的切线的斜率为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$.

而 $f(1+\Delta x)-f(1)=-(1+\Delta x)^2+3-2=-(\Delta x)^2-2\Delta x$，

所以抛物线 $y=-x^2+3$ 在 $x=1$ 处的切线的斜率为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-(\Delta x)^2-2\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(-\Delta x-2)=-2$.

又 $f(1)=2$，

故抛物线 $y=-x^2+3$ 在 $x=1$ 处的切线的方程为 $y-2=-2(x-1)$，即 $2x+y-4=0$.

【探究总结】

利用导数的几何意义求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的方程的步骤如下：

(1)求函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$，即切线的斜率；

(2)根据已知点和切线斜率可得切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

应用迁移

1. 曲线 $y=x^3$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴、直线 $x=2$ 所围成的三角形的面积为________.

$\dfrac{8}{3}$ **解析：** 因为切线斜率 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(1+\Delta x)^3-1^3}{\Delta x}=3$，所以曲线在点 $(1,1)$ 处的切线的方程为 $y-1=3(x-1)$，

即 $y=3x-2$.

它与 x 轴的交点为 $\left(\dfrac{2}{3},0\right)$，与直线 $x=2$ 的交点为 $(2,4)$，所以围成三角形的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times\left(2-\dfrac{2}{3}\right)\times 4=\dfrac{8}{3}$.

2. 已知曲线 $y=f(x)=x^2$ 在点 P 处的切线满足下列条件，请分别求出点 P 的坐标.

(1)平行于直线 $y=6x-5$；

(2)垂直于直线 $x-3y+5=0$；

(3)倾斜角为 $135°$.

解： $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x$，

设 $P(x_0,y_0)$ 是满足条件的点.

(1)因为切线与直线 $y=6x-5$ 平行，

所以 $2x_0=6$，得 $x_0=3$，$y_0=9$，

即 $P(3,9)$ 是满足条件的点.

(2)因为切线与直线 $x-3y+5=0$ 垂直，

所以 $2x_0\times\dfrac{1}{3}=-1$，

得 $x_0=-\dfrac{3}{2}$，$y_0=\dfrac{9}{4}$，

即 $P\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{4}\right)$ 是满足条件的点.

(3)因为切线的倾斜角为 $135°$，

所以切线的斜率为 -1，即 $2x_0=-1$，得 $x_0=-\dfrac{1}{2}$，

$y_0=\dfrac{1}{4}$，即 $P\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$ 是满足条件的点.

任务 3 求曲线过某点的切线方程

探究活动

例 2 求抛物线 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 过点 $\left(4,\dfrac{7}{4}\right)$ 的切线的方程.

解： 设切点为 $\left(x_0,\dfrac{1}{4}x_0^2\right)$，切线的斜率为 k.

因为 $y'|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{4}(x_0+\Delta x)^2-\dfrac{1}{4}x_0^2}{\Delta x}=\dfrac{1}{2}x_0$，

所以 $k=\dfrac{\dfrac{7}{4}-\dfrac{1}{4}x_0^2}{4-x_0}=\dfrac{1}{2}x_0$，

即 $x_0^2-8x_0+7=0$，解得 $x_0=7$ 或 $x_0=1$，

故 $k=\dfrac{1}{2}x_0=\dfrac{7}{2}$ 或 $\dfrac{1}{2}$.

所以所求切线方程为 $14x-4y-49=0$ 或 $2x-4y-1=0$.

[一题多思]

思考 1. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与曲线 $y=f(x)$ 过点 (x_0,y_0) 的切线有何不同？

提示： 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线时，点 $(x_0,f(x_0))$ 一定是切点，只要求出斜率 $f'(x_0)$，利用切点和所求斜率写出切线方程即可；而求曲线 $y=f(x)$ 过点 (x_0,y_0) 的切线时，给出的点 (x_0,y_0) 不一定在曲线上，即使在曲线上也不一定是切点.

思考 2. 将本例中“抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$”换为“曲线 $y=\frac{1}{x}$”，求过点(2,0)与此曲线相切的直线的方程.

解： 设切点为 $P(x_0,y_0)$.

由 $y'|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x_0+\Delta x}-\dfrac{1}{x_0}}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x\cdot(x_0+\Delta x)\cdot x_0}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}=-\dfrac{1}{x_0^2}$,

得所求切线方程为 $y-y_0=-\dfrac{1}{x_0^2}(x-x_0)$.

因为点(2,0)在切线上，

所以 $x_0^2y_0=2-x_0$.

又点 $P(x_0,y_0)$ 在曲线 $y=\frac{1}{x}$ 上，所以 $x_0y_0=1$.

联立可解得 $x_0=1$，$y_0=1$，

故所求切线方程为 $x+y-2=0$.

【探究总结】

运用导数的几何意义解决切线问题时，一定要注意所给的点是否在曲线上.若点在曲线上，则该点处的导数值就是该点处的切线的斜率；若点不在曲线上，应另设切点，再利用导数的几何意义求解.

应用迁移

求曲线 $y=2x-x^3$ 过点(−1,−2)的切线的方程.

解： $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2(x+\Delta x)-(x+\Delta x)^3-2x+x^3}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[2-3x^2-3x\Delta x-(\Delta x)^2]=2-3x^2$.

设切点坐标为 $(x_0,2x_0-x_0^3)$，则切线方程为 $y-2x_0+x_0^3=(2-3x_0^2)(x-x_0)$.

因为切线过点(−1,−2)，所以 $-2-2x_0+x_0^3=(2-3x_0^2)\cdot(-1-x_0)$，

即 $2x_0^3+3x_0^2=0$，解得 $x_0=0$ 或 $x_0=-\dfrac{3}{2}$.

所以切点坐标为(0,0)或 $\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{8}\right)$.

当切点坐标为(0,0)时，切线斜率 $k=\dfrac{-2-0}{-1-0}=2$，切线方程为 $y=2x$；

当切点坐标为 $\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{8}\right)$ 时，切线斜率 $k=\dfrac{\dfrac{3}{8}-(-2)}{-\dfrac{3}{2}-(-1)}=-\dfrac{19}{4}$，切线方程为 $y+2=-\dfrac{19}{4}(x+1)$，即 $19x+4y+27=0$.

综上可知，曲线 $y=2x-x^3$ 过点(−1,−2)的切线的方程为 $y=2x$ 或 $19x+4y+27=0$.

提质归纳

- 导数的几何意义
  - 应用
  - 导函数的概念

课后素养评价（十四）　导数的几何意义

A组　学习·理解

1. 设 $f'(x_0)=0$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线　(B)

A. 不存在

B. 与 x 轴平行或重合

C. 与 x 轴垂直

D. 与 x 轴斜交

2. (多选)下列说法正确的是　(　　)

A. 曲线的切线和曲线可能有两个交点

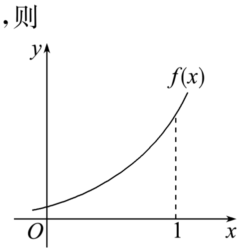
B. 过曲线上的一点作曲线的切线，该点一定是切点

C. 若 $f'(x_0)$ 不存在，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处无切线

D. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处有切线，$f'(x_0)$ 不一定存在

AD　**解析：** 曲线的切线和曲线除有一个公共切点外，还可能有其他公共点，故 A 正确，B 不正确；$f'(x_0)$ 不存在，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率不存在，但切线可能存在，为 $x=x_0$，故 C 不正确，D 正确.

3. 已知函数 $f(x)$ 的部分图象如图所示，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，则　(　　)



A. $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$

B. $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$

C. $f'(0)>f(1)-f(0)>f'(1)$

D. $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

D **解析**：由导数的几何意义可知，$f'(0)$表示曲线$y=f(x)$在$x=0$处的切线斜率，

$f'(1)$表示曲线$y=f(x)$在$x=1$处的切线斜率，

$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$表示$(0,f(0))$，$(1,f(1))$两点连线的斜率.

由题图可知，当x从0变化到1时，切线斜率越来越大，

所以$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$.

对比选项可知，D正确.

故选D.

4. 已知曲线$y=\frac{1}{2}x^2-2$上一点$P\left(1,-\frac{3}{2}\right)$，则曲线在点$P$处的切线的倾斜角为（　　）

A.30°　　B.45°

C.135°　　D.165°

B **解析**：因为$y=\frac{1}{2}x^2-2$，所以$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)=x$，所以曲线在点$P\left(1,-\frac{3}{2}\right)$处的切线的斜率为1，所以曲线在点$P$处的切线的倾斜角为45°.

5. 曲线$y=\sqrt{x}$在点$P(4,2)$处的切线的方程为（　　）

A.$x+4y+4=0$

B.$x-4y+4=0$

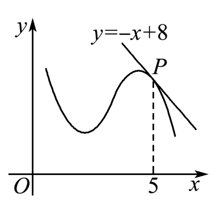
C.$x+4y+12=0$

D.$x-4y+12=0$

B **解析**：因为$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{4+\Delta x}-2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{(\sqrt{4+\Delta x}+2)\Delta x}=\frac{1}{4}$，

所以曲线在点P处的切线的方程为$y-2=\frac{1}{4}(x-4)$，即$x-4y+4=0$.

6. 如图，函数$y=f(x)$的图象在点P处的切线的方程是$y=-x+8$，则$f(5)+f'(5)=$________.



2 **解析**：由题意知$f(5)=-5+8=3$，

由导数的几何意义知$f'(5)=-1$，

所以$f(5)+f'(5)=3-1=2$.

7. 已知函数$f(x)=x^2-4x+3$.

(1)求曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率；

(2)求曲线$y=f(x)$在点$(3,f(3))$处的切线的方程.

解：(1)由导数的几何意义可知，曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率为$f'(x_0)$，

则由导数的定义，可得

$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-4(x_0+\Delta x)+3-(x_0^2-4x_0+3)}{\Delta x}$

$=2x_0-4$.

即曲线$y=f(x)$上任意一点$(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率为$2x_0-4$.

(2)$f(3)=0$，由(1)知，曲线$y=f(x)$在点$(3,f(3))$处的切线斜率为$f'(3)=2$，

所以切线方程为$y-0=2(x-3)$，即$2x-y-6=0$.

B组 应用·实践

1. 已知曲线$f(x)=ax^2+b$在点$(1,3)$处的切线的斜率为2，则$\frac{b}{a}$的值为（　　）

A.1　　B.2

C.3　　D.$\frac{1}{2}$

B **解析**：由题意得$f'(1)=2$，

所以$\lim\limits_{d\to 0}\frac{f(1+d)-f(1)}{d}=\lim\limits_{d\to 0}\frac{a(1+d)^2+b-a-b}{d}$

$=\lim\limits_{d\to 0}(2a+ad)=2a=2$，

解得$a=1$.又$f(1)=a+b=3$，则$b=2$，所以$\frac{b}{a}=2$.

故选B.

2. 已知曲线$y=f(x)$在$x=1$处的切线与直线$x+y-3=0$垂直，则$f'(1)=$（　　）

A.2　　B.0　　C.1　　D.−1

C **解析**：曲线$y=f(x)$在$x=1$处的切线的斜率为$f'(1)$，直线$x+y-3=0$的斜率为−1，由题意知$f'(1)\cdot(-1)=-1$，故$f'(1)=1$.故选C.

3. 直线$y=kx+1$与曲线$f(x)=ax^3+b$相切于点$P(1,2)$，则$b=$________.

$\frac{5}{3}$ **解析**：因为直线$y=kx+1$与曲线$f(x)=ax^3+b$相切于点$P(1,2)$，

将$P(1,2)$代入$y=kx+1$，可得$k+1=2$，解得$k=1$.

因为$f(x)=ax^3+b$，

所以$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=3ax^2$.

由$f'(1)=3a=1$，解得$a=\frac{1}{3}$，可得$f(x)=\frac{1}{3}x^3+b$.

因为点$P(1,2)$在曲线$f(x)=\frac{1}{3}x^3+b$上，

所以$f(1)=\frac{1}{3}+b=2$，解得$b=\frac{5}{3}$.

4. 若曲线$y=2x^2-4x+p$与直线$y=1$相切，则

$p=$________.

3　**解析**:设 $y=f(x)=2x^2-4x+p$,切点为$(x_0,1)$.由 $y'|_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(4x_0-4+2\Delta x)=4x_0-4$,根据导数的几何意义有 $4x_0-4=0$,所以 $x_0=1$,即切点为$(1,1)$,所以 $1=2-4+p$,所以 $p=3$.

5.过点 $P(-1,2)$,且与曲线 $y=3x^2-4x+2$ 在点 $M(1,1)$处的切线平行的直线的方程为__________.

$2x-y+4=0$　**解析**:$f'(1)=$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(1+\Delta x)^2-4(1+\Delta x)+2-(3\times 1^2-4\times 1+2)}{\Delta x}=2.$$

故所求直线方程为 $y-2=2(x+1)$,

即 $2x-y+4=0$.

6.已知曲线 $f(x)=\dfrac{a}{x}-\sqrt{x}$ 在 $x=4$ 处的切线的方程为 $5x+16y+b=0$,则 $a=$________,$b=$________.

1　8　**解析**:因为直线 $5x+16y+b=0$ 的斜率 $k=-\dfrac{5}{16}$,所以 $f'(4)=-\dfrac{5}{16}$.

$$\text{而 } f'(4)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\dfrac{a}{4+\Delta x}-\sqrt{4+\Delta x}\right)-\left(\dfrac{a}{4}-\sqrt{4}\right)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\dfrac{a}{4+\Delta x}-\dfrac{a}{4}\right)-(\sqrt{4+\Delta x}-2)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{-a}{4(4+\Delta x)}-\frac{1}{\sqrt{4+\Delta x}+2}\right]=-\frac{a+4}{16},$$

所以$-\dfrac{a+4}{16}=-\dfrac{5}{16}$,解得 $a=1$.

所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x}$,所以 $f(4)=\dfrac{1}{4}-\sqrt{4}=-\dfrac{7}{4}$,

即切点为$\left(4,-\dfrac{7}{4}\right)$.

因为$\left(4,-\dfrac{7}{4}\right)$在切线 $5x+16y+b=0$ 上,

所以 $5\times 4+16\times\left(-\dfrac{7}{4}\right)+b=0$,得 $b=8$.

综上,$a=1$,$b=8$.

7.已知直线 $l:y=x+a(a\neq 0)$和曲线 $C:y=x^3-x^2+1$ 相切,求 a 的值和切点的坐标.

解:设直线 l 与曲线 C 相切于点 $P(x_0,y_0)$,令 $y=f(x)=x^3-x^2+1$,

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)^2+1-(x^3-x^2+1)}{\Delta x}$$

$=3x^2-2x$.

由题意知,直线 l 的斜率 $k=1$,即 $3x_0^2-2x_0=1$,

解得 $x_0=-\dfrac{1}{3}$ 或 $x_0=1$.

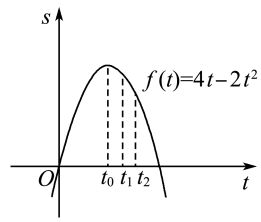
于是切点的坐标为$\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{23}{27}\right)$或$(1,1)$.

当切点为$\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{23}{27}\right)$时,$\dfrac{23}{27}=-\dfrac{1}{3}+a$,所以 $a=\dfrac{32}{27}$.

当切点为$(1,1)$时,$1=1+a$,$a=0$(舍去).

所以 a 的值为$\dfrac{32}{27}$,切点坐标为$\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{23}{27}\right)$.

8.表示某物体运动的位移 s 随时间 t 变化的函数$s=f(t)=4t-2t^2$ 的图象如图所示,试根据图象,描述、比较曲线 $s=f(t)$分别在 t_0,t_1,t_2 附近的变化情况,并求出$t=2$时曲线的切线方程.

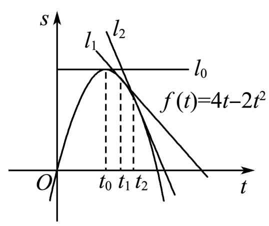


解:如图,分别用曲线 $s=f(t)$在 $t=t_0$,$t=t_1$,$t=t_2$ 处的切线,刻画曲线 $s=f(t)$在上述三个时刻附近的变化情况.

①当 $t=t_0$ 时,曲线 $s=f(t)$在 $t=t_0$ 处的切线 l_0 平行于 t 轴,所以在 $t=t_0$ 附近曲线比较平坦,几乎没有升降;

②当 $t=t_1$ 时,曲线 $s=f(t)$在 $t=t_1$ 处的切线 l_1 的斜率$f'(t_1)<0$,所以在 $t=t_1$ 附近曲线下降.

③当 $t=t_2$ 时,曲线 $s=f(t)$在 $t=t_2$ 处的切线 l_2 的斜率$f'(t_2)<0$,所以在 $t=t_2$ 附近曲线下降.



由图象可以看出,直线 l_1 的倾斜程度小于直线 l_2 的倾斜程度,说明曲线 $s=f(t)$在 $t=t_1$ 附近比在 $t=t_2$ 附近下降得慢.

当 $t=2$ 时,$f(2)=0$.

当 $t=2$ 时,切线的斜率

$$k=f'(2)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(2+\Delta t)-f(2)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{4(2+\Delta t)-2(2+\Delta t)^2-8+8}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{4\Delta t-2(\Delta t)^2-8\Delta t}{\Delta t}$$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(-2\Delta t-4)=-4$.

所以切线方程为 $s=-4(t-2)$,即 $4t+s-8=0$.

5.2 导数的运算

5.2.1 基本初等函数的导数

学习任务目标

1.能根据导数的定义推导常用函数的导数.
2.掌握基本初等函数的导数公式.
3.利用基本初等函数的导数公式解决有关问题.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一 几个常用函数的导数

函数	用定义法求导数
$y=f(x)=c$	$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{c-c}{\Delta x}=\underline{0}$
$y=f(x)=x$	$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=\underline{1}$
$y=f(x)=x^2$	$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=\underline{2x}$
$y=f(x)=x^3$	$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2]=\underline{3x^2}$
$y=f(x)=\dfrac{1}{x}$	$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(-\dfrac{1}{x^2+x\cdot\Delta x}\right)=\underline{-\dfrac{1}{x^2}}$

续表

函数	用定义法求导数
$y=f(x)=\sqrt{x}$	$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\underline{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$

知识点二 基本初等函数的导数公式

(1)若 $f(x)=c$(c 是常数),则 $f'(x)=\underline{0}$.

(2)若 $f(x)=x^{\alpha}$($\alpha\in\mathbf{R}$,且 $\alpha\neq0$),则 $f'(x)=\underline{\alpha x^{\alpha-1}}$.

(3)若 $f(x)=\sin x$,则 $f'(x)=\underline{\cos x}$.

(4)若 $f(x)=\cos x$,则 $f'(x)=\underline{-\sin x}$.

(5)若 $f(x)=a^x$($a>0$,且 $a\neq1$),则 $f'(x)=\underline{a^x\ln a}$;特别地,若 $f(x)=\mathrm{e}^x$,则 $f'(x)=\underline{\mathrm{e}^x}$.

(6)若 $f(x)=\log_a x$($a>0$,且 $a\neq1$),则 $f'(x)=\underline{\dfrac{1}{x\ln a}}$;

特别地,若 $f(x)=\ln x$,则 $f'(x)=\underline{\dfrac{1}{x}}$.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)若 $f(x)=2$,则 $f'(x)=2$. ( )

× 提示:$f'(x)=0$.

(2)若 $f(x)=x^{-1}$,则 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$. (√)

(3)$(2^x)'=x2^{x-1}$. ( )

× 提示:$(2^x)'=2^x\ln 2$.

(4)$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$. (√)

2.(多选)下列求导正确的是 ( )

A.若 $y=\ln 2$,则 $y'=\dfrac{1}{2}$

B.若 $y=\dfrac{1}{x^2}$,则 $y'|_{x=3}=-\dfrac{2}{27}$

C.若 $y=5^x$,则 $y'=5^x\ln 5$

D.若 $y=\log_2 x$,则 $y'=\dfrac{1}{x\ln 2}$

BCD　**解析**:对于 A,$y'=0$,故 A 错误;对于 B,因为 $y'=-\frac{2}{x^3}$,所以 $y'|_{x=3}=-\frac{2}{27}$,故 B 正确;显然 C,D 正确.故选 BCD.

3.请思考并回答下列问题:

(1)常数函数的导数为 0 说明了什么?

提示:说明常数函数 $f(x)=c$ 图象上每一点处的切线的斜率都为 0,即每一点处的切线都与 x 轴平行(或重合).

(2)幂函数、指数函数的导数有何特点?正弦函数与余弦函数的导数有什么关系?

提示:幂函数的导数,系数为原函数的次数,次数是原函数的次数减去 1.指数函数的导数,系数为原函数底数的自然对数.正弦函数的导数为余弦函数,余弦函数的导数为正弦函数的相反数.

◦ 任务型课堂 ◦

任务1 > 利用求导公式求函数的导数

探究活动

例 1　(1)下列各式正确的是　　(　　)

A.$(\sin a)'=\cos a$(a 为常数)

B.$(\cos x)'=\sin x$

C.$(\sin x)'=\cos x$

D.$(x^{-5})'=-\frac{1}{5}x^{-6}$

C　**解析**:选项 A 中,$(\sin a)'=0$;

选项 B 中,$(\cos x)'=-\sin x$;

选项 C 中,$(\sin x)'=\cos x$;

选项 D 中,$(x^{-5})'=-5x^{-6}$.

故选 C.

(2)求下列函数的导数:

①$y=\frac{1}{x^4}$的导数为________;

②$y=7^x$的导数为________;

③$y=x^{12}$的导数为________;

④$y=\sqrt[5]{x^3}$的导数为________.

①$y'=-\frac{4}{x^5}$　**解析**:$y'=\left(\frac{1}{x^4}\right)'=(x^{-4})'=-4x^{-5}=-\frac{4}{x^5}$.

②$y'=7^x\ln 7$　**解析**:$y'=(7^x)'=7^x\ln 7$.

③$y'=12x^{11}$　**解析**:$y'=(x^{12})'=12x^{11}$.

④$y'=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$　**解析**:$y'=(\sqrt[5]{x^3})'=(x^{\frac{3}{5}})'=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$.

【探究总结】

利用公式求导的注意点

(1)若函数的形式符合导数公式的使用条件,则直接利用公式求解,公式法最简捷.

(2)对于不能直接利用公式求解的类型,一般遵循"先化简,再求导"的基本原则,避免不必要的运算失误.比如对带根号的函数,一般先将其转化为分数指数幂的形式,再利用公式$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$进行求导.

(3)要特别注意"$\frac{1}{x}$与 $\ln x$""a^x 与 $\log_a x$""$\sin x$ 与 $\cos x$"的导数的区别.

应用迁移

求下列函数的导数:

(1)$y=\cos\frac{\pi}{10}$;

(2)$y=\log_5 x$;

(3)$y=(x-1)(x^2+x+1)+1$.

解:(1)$y'=\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)'=0$.

(2)$y'=(\log_5 x)'=\frac{1}{x\ln 5}$.

(3)$y'=[(x-1)(x^2+x+1)+1]'=(x^3-1+1)'=(x^3)'=3x^2$.

任务2 > 求函数在某点处的导数

探究活动

例 2　(1)若已知函数 $y=10^x$,则 $y'|_{x=1}$等于(　　)

A.$\frac{1}{10}$　　B.10

C.10ln 10　　D.$\frac{1}{10\ln 10}$

C　**解析**:因为 $y'=10^x\ln 10$,所以 $y'|_{x=1}=10\ln 10$.

(2)已知一质点的运动方程是 $s(t)=\sin t$,其中 s 是质点的位移,t 是时间.

①求质点在 $t=\frac{\pi}{3}$时的速度;

②求质点运动的加速度.

解:①因为 $s'(t)=\cos t$,

所以 $s'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$,

即质点在 $t=\frac{\pi}{3}$时的速度为$\frac{1}{2}$.

②令 $v(t)=\cos t$,

所以加速度为 $v'(t)=(\cos t)'=-\sin t$.

【探究总结】

1.速度是路程对时间的导数,加速度是速度对时间的导数.

2.求函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数的步骤:

(1)先求函数 $f(x)$的导函数 $f'(x)$;

(2)把 $x=x_0$ 代入导函数 $f'(x)$求相应的导数值 $f'(x_0)$.

应用迁移

1.求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 在 $x=1$ 处的导数.

解：因为 $f'(x)=\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)'=(x^{-\frac{1}{3}})'=-\dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}=-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$，

所以 $f'(1)=-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{1}}=-\dfrac{1}{3}$.

2.求函数 $f(x)=\cos x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处的导数.

解：因为 $f'(x)=-\sin x$，

所以 $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

任务3 导数公式的应用

探究活动

例 3 已知曲线 $y=\ln x$，点 $P(\mathrm{e},1)$ 是曲线上一点，求曲线在点 P 处的切线的方程.

解：因为 $y'=\dfrac{1}{x}$，所以切线斜率 $k=y'|_{x=\mathrm{e}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

所以切线方程为 $y-1=\dfrac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})$，即 $x-\mathrm{e}y=0$.

［一题多思］

思考 1.已知 $y=kx+1$ 是曲线 $y=\ln x$ 的一条切线，求实数 k 的值.

解：设切点坐标为 (x_0,y_0)，由题意得 $y'|_{x=x_0}=\dfrac{1}{x_0}=k$.

又 $y_0=kx_0+1$，$y_0=\ln x_0$，解得 $y_0=2$，$x_0=\mathrm{e}^2$，

所以 $k=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

思考 2.求曲线 $y=\ln x$ 过点 $O(0,0)$ 的切线的方程.

解：因为 $O(0,0)$ 不在曲线 $y=\ln x$ 上，

所以设切点为 $Q(x_0,y_0)$，则切线的斜率 $k=\dfrac{1}{x_0}$.

又切线的斜率 $k=\dfrac{y_0-0}{x_0-0}=\dfrac{\ln x_0}{x_0}$，所以 $\dfrac{\ln x_0}{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，

即 $x_0=\mathrm{e}$，所以 $Q(\mathrm{e},1)$，所以 $k=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

所以切线方程为 $y-1=\dfrac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})$，即 $x-\mathrm{e}y=0$.

【探究总结】

求曲线方程或切线方程时的注意点

(1)切点是曲线与切线的公共点，切点坐标既满足曲线方程也满足切线方程.

(2)曲线在点 (x_0,y_0) 处的切线的斜率，即对应函数在 $x=x_0$ 处的导数.

(3)必须明确已知点是不是切点，如果不是，应先设出切点.

应用迁移

1.已知曲线 $y=\dfrac{1}{x}$.

(1)求曲线在点 $P(1,1)$ 处的切线的方程；

(2)求曲线过点 $Q(1,0)$ 的切线的方程.

解：(1)因为点 $P(1,1)$ 在曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 上，且 $y'=-\dfrac{1}{x^2}$，

所以曲线在点 $P(1,1)$ 处的切线的斜率 $k=y'|_{x=1}=-1$.

所以曲线在点 $P(1,1)$ 处的切线的方程为 $y-1=-(x-1)$，即 $x+y-2=0$.

(2)设曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 过点 $Q(1,0)$ 的切线与曲线相切于点 $A\left(x_0,\dfrac{1}{x_0}\right)$，

则切线的斜率 $k=-\dfrac{1}{x_0^2}$，

所以切线方程为 $y-\dfrac{1}{x_0}=-\dfrac{1}{x_0^2}(x-x_0)$.

因为点 $Q(1,0)$ 在切线上，

所以 $-\dfrac{1}{x_0}=-\dfrac{1}{x_0^2}(1-x_0)$，

解得 $x_0=\dfrac{1}{2}$，

故所求的切线方程为 $4x+y-4=0$.

2.求过曲线 $f(x)=\cos x$ 上一点 $P\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 且与曲线在这点处的切线垂直的直线的方程.

解：因为 $f(x)=\cos x$，

所以 $f'(x)=-\sin x$.

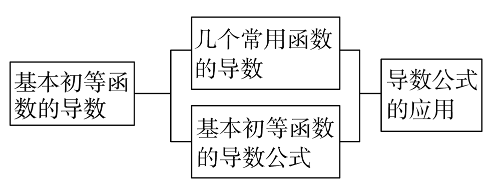
所以曲线 $f(x)=\cos x$ 在点 $P\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 处的切线的斜率为 $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

所以所求直线的斜率为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

所求直线方程为 $y-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，

即 $y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi+\dfrac{1}{2}$.

提质归纳



课后素养评价（十五） 基本初等函数的导数

A组 学习·理解

1. 已知函数 $f(x)=\log_2 x$，其导函数为 $f'(x)$，则 $f'(1)=$ ( )

A.0　　B.1

C.ln 2　　D.$\dfrac{1}{\ln 2}$

D **解析**：因为 $f(x)=\log_2 x$，所以 $f'(x)=(\log_2 x)'=\dfrac{1}{x\ln 2}$，所以 $f'(1)=\dfrac{1}{\ln 2}$.

2. 已知函数 $f(x)=2^{-x}$，则 $f'(x)=$ ( )

A.$-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\ln 2$　　B.$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\ln 2$

C.$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\log_2 e$　　D.$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\dfrac{1}{\ln 2}$

A **解析**：因为 $f(x)=2^{-x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$，所以 $f'(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\ln\dfrac{1}{2}=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\ln 2$.

3. 已知函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2$，则 $f'(-1)=$ ( )

A.-2　　B.-1　　C.1　　D.2

D **解析**：(方法一)设 $x<0$，则 $-x>0$.

所以 $f(-x)=(-x)^2=x^2$. 又 $f(-x)=-f(x)$，

所以 $f(x)=-x^2(x<0)$.

所以当 $x<0$ 时，$f'(x)=-2x$，所以 $f'(-1)=-2\times(-1)=2$.

故选 D.

(方法二)因为当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2$，则 $f'(x)=2x$，所以 $f'(1)=2$.

又因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f'(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，所以 $f'(-1)=f'(1)=2$.

故选 D.

4. 曲线 $y=e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与 y 轴交点的纵坐标是 ( )

A.e　　B.1

C.-1　　D.$-e$

B **解析**：因为 $y'=e^x$，所以 $y'|_{x=0}=e^0=1$，所以切线方程为 $y-1=x$，即 $y=x+1$，令 $x=0$，则 $y=1$.

5. 直线 $y=\dfrac{1}{2}x+b$ 是曲线 $y=\ln x(x>0)$ 的一条切线，则实数 b 的值为 ( )

A.2　　B.$\ln 2+1$

C.$\ln 2-1$　　D.$\ln 2$

C **解析**：因为 $y=\ln x$ 的导数 $y'=\dfrac{1}{x}$，

所以令 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$，得 $x=2$，所以切点为 $(2,\ln 2)$.

代入 $y=\dfrac{1}{2}x+b$，得 $b=\ln 2-1$.

6. 设函数 $f(x)=\cos x$，$0<x_1<x_2<\pi$，若 $f'(x_1)=f'(x_2)$，则 $\cos(x_1+x_2)=$________.

-1 **解析**：由于 $f'(x)=-\sin x$，由题得 $\sin x_1=\sin x_2$，

又 $0<x_1<x_2<\pi$，所以 $x_2=\pi-x_1$，

所以 $\cos(x_1+x_2)=\cos\pi=-1$.

7. 已知直线 $y=kx$ 是曲线 $y=3^x$ 的切线，则 k 的值为________.

$e\ln 3$ **解析**：设切点为 (x_0,y_0).

因为函数 $y=3^x$ 的导函数为 $y'=3^x\ln 3$，

所以 $k=3^{x_0}\ln 3$，

所以 $y=kx$ 化为 $y=(3^{x_0}\ln 3)\cdot x$.

又因为 (x_0,y_0) 在曲线 $y=3^x$ 上，

所以 $(3^{x_0}\ln 3)\cdot x_0=3^{x_0}$，

所以 $x_0=\dfrac{1}{\ln 3}=\log_3 e$. 所以 $k=e\ln 3$.

8. 求下列函数的导数.

(1) $y=x\sqrt{x}$；

(2) $y=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$.

解：(1) 因为 $y=x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}$，所以 $y'=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

(2) 因为 $y=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=\sin x$，所以 $y'=\cos x$.

B组 应用·实践

1. 设函数 $f(x)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$，则 $f(f'(0))=$ ( )

A.0　　B.1

C.cos 1　　D.sin 1

B **解析**：由题意可得 $f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$，得 $f'(x)=-\sin x$，$f'(0)=0$，所以 $f(f'(0))=f(0)=1$. 故选 B.

2. 已知正弦曲线 $y=\sin x$ 上一点 P，直线 l 是曲线以点 P 为切点的切线，则直线 l 的倾斜角的取值范围是 ( )

A.$\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$　　B.$[0,\pi)$

C.$\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$　　D.$\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right]$

A **解析**：因为 $y'=\cos x$，而 $\cos x\in[-1,1]$.
所以直线 l 的斜率的取值范围是 $[-1,1]$，
所以直线 l 的倾斜角的取值范围是
$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$.

3. 若曲线 $y=x^{-\frac{1}{2}}$ 在点 $(a,a^{-\frac{1}{2}})$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积为18，则 $a=$ （　　）
A.64　　B.32　　C.16　　D.8

A **解析**：因为 $y'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$，
所以曲线 $y=x^{-\frac{1}{2}}$ 在点 $(a,a^{-\frac{1}{2}})$ 处的切线的方程为
$y-a^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}(x-a)$.
令 $x=0$，得 $y=\frac{3}{2}a^{-\frac{1}{2}}$；令 $y=0$，得 $x=3a$.
所以 $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}a^{-\frac{1}{2}}\cdot 3a=18$，解得 $a=64$.

4. 我国魏晋时期的数学家刘徽利用"割圆术"，进行"以直代曲"的近似计算，用正 n 边形进行"内外夹逼"的办法求出了圆周率 π 的精度较高的近似值.借用"以直代曲"的近似计算方法，在切点附近，可以用曲线的切线代替切点附近的曲线来近似计算.设 $f(x)=\ln x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线的方程为__________，用此结论近似计算 $\sqrt[4\,000]{e}$ 的值为________（结果用分数表示）.

$y=x-1$　$\frac{4\,001}{4\,000}$　**解析**：由题得 $f'(x)=\frac{1}{x}$，$f'(1)=1$，所以切线方程为 $y=x-1$.设 $\sqrt[4\,000]{e}=e^{\frac{1}{4\,000}}=x$，则 $\ln x=\frac{1}{4\,000}$.由切线方程得，得 $\frac{1}{4\,000}=x-1$，$x=1+\frac{1}{4\,000}=\frac{4\,001}{4\,000}$，所以 $\sqrt[4\,000]{e}\approx\frac{4\,001}{4\,000}$.

5. 曲线 $f(x)=x^2$ 上任意一点 P 到直线 $y=x-1$ 的最短距离是________.

$\frac{3\sqrt{2}}{8}$　**解析**：与直线 $y=x-1$ 平行的曲线 $f(x)=x^2$ 的切线的切点到直线 $y=x-1$ 的距离最短.设切点为 (x_0,y_0)，则 $f'(x_0)=2x_0=1$，
所以 $x_0=\frac{1}{2}$，$y_0=\frac{1}{4}$.即 $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ 到直线 $y=x-1$ 的距离最短.
所以最短距离为 $d=\frac{\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-1\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$.

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, x\leqslant 0,\\ \ln x, x>0,\end{cases}$ 过原点 $O(0,0)$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线，则切线方程为__________.

$x-ey=0$　**解析**：当 $x\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)=e^x$，可得 $f'(x)=e^x$.
设切点为 $P(x_0,y_0)$，则 $f'(x_0)=e^{x_0}$，
所以切线方程为 $y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)$.
因为切线过原点 $O(0,0)$，可得 $-e^{x_0}=-x_0e^{x_0}$，解得 $x_0=1$，不符合题意，舍去；
当 $x>0$ 时，函数 $f(x)=\ln x$，可得 $f'(x)=\frac{1}{x}$.
设切点为 $Q(x_1,y_1)$，则 $f'(x_1)=\frac{1}{x_1}$，
所以切线方程为 $y-\ln x_1=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$.
因为切线过原点 $O(0,0)$，可得 $\ln x_1=1$，解得 $x_1=e$，
此时切线方程为 $y-1=\frac{1}{e}(x-e)$，即 $x-ey=0$.

7.（新定义）已知函数 $f(x)$ 的导数为 $f'(x)$，若存在 x_0 使得 $f(x_0)=f'(x_0)$，则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个"巧值点".下列函数中有"巧值点"的是________.（填序号）
①$f(x)=e^x$；②$f(x)=\ln x$；③$f(x)=\sin x$；
④$f(x)=\sqrt{x}$.

①②③④　**解析**：①中，$f'(x)=e^x$，因为 $f(x)=f'(x)$，所以 $f(x)$ 有无数个"巧值点"；②中，$f'(x)=\frac{1}{x}$，令 $g(x)=\ln x-\frac{1}{x}(x>0)$，易知 $g(x)$ 的图象为 $(0,+\infty)$ 上一条连续不间断的曲线，且 $g(1)=-1<0$，$g(e)=1-\frac{1}{e}>0$，由函数零点存在定理，可知 $g(x)$ 在 $(1,e)$ 上必有零点，所以 $f(x)$ 有"巧值点"；③中，$f'(x)=\cos x$，由 $\sin x=\cos x$，得 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)$ 有"巧值点"；④中，$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，因为 $\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 有实数解，所以 $f(x)$ 有"巧值点".

8. 已知 $P(-1,1)$，$Q(2,4)$ 是曲线 $y=x^2$ 上的两点.
(1)分别求曲线 $y=x^2$ 在点 P，Q 处的切线的方程；
(2)求与直线 PQ 平行的曲线 $y=x^2$ 的切线的方程.

解：(1)因为 $y'=2x$，$P(-1,1)$，$Q(2,4)$ 都是曲线 $y=x^2$ 上的点，
所以在点 P 处的切线的斜率 $k_1=-2$，
在点 Q 处的切线的斜率 $k_2=4$.
所以在点 P 处的切线的方程为 $y-1=-2(x+1)$，
即 $2x+y+1=0$；
在点 Q 处的切线的方程为 $y-4=4(x-2)$，
即 $4x-y-4=0$.
(2)$y'=2x$，直线 PQ 的斜率 $k=\frac{4-1}{2+1}=1$，
设所求切线与曲线相切于点 $M(x_0,y_0)$，则切线的斜率为 $2x_0=1$，
所以 $x_0=\frac{1}{2}$，所以切点为 $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.
所以与直线 PQ 平行的切线的方程为 $y-\frac{1}{4}=x-\frac{1}{2}$，即 $4x-4y-1=0$.

5.2.2　导数的四则运算法则

学习任务目标

1.掌握导数的四则运算法则.
2.利用导数的四则运算法则解决有关问题.

问题式预习

【知识清单】

知识点　导数的四则运算法则

(1)$[f(x)\pm g(x)]'=\underline{f'(x)\pm g'(x)}$.

(2)$[f(x)g(x)]'=\underline{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$.

特别地,当 $g(x)=c$(c 为常数)时,

$[cf(x)]'=\underline{cf'(x)}$.

(3)$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\underline{\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}}$$(g(x)\neq 0)$.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)已知函数 $y=2\sin x-\cos x$,则 $y'=2\cos x+\sin x$.(　　)

√　**提示**:若 $y=2\sin x-\cos x$,

则 $y'=(2\sin x)'-(\cos x)'=2\cos x+\sin x$.

(2)已知函数 $f(x)=(x+1)(x+2)$,则 $f'(x)=2x+1$.(　　)

×　**提示**:因为 $f(x)=(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$,所以 $f'(x)=2x+3$.

2.(多选)下列求导运算正确的是(　　)

A.$\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)'=1-\dfrac{1}{x^3}$

B.$(\log_2 x)'=\dfrac{1}{x\ln 2}$

C.$(x\ln x)'=\ln x+1$

D.$(3^x)'=3^x\log_3 e$

BC　**解析**:$\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)'=1-\dfrac{2}{x^3}$,$(\log_2 x)'=\dfrac{1}{x\ln 2}$,$(x\ln x)'=\ln x+1$,$(3^x)'=3^x\ln 3$,故 A,D 错误,B,C 正确.

3.请思考并回答下列问题:

(1)两个可导函数的和差求导运算法则可推广到有限个函数的和差的导数运算吗?

提示:可以.$[u(x)\pm v(x)\pm\cdots\pm w(x)]'=u'(x)\pm v'(x)\pm\cdots\pm w'(x)$.

(2)如果 $f(x)$,$g(x)$都是可导函数,且 $f(x)\neq 0$,那么下列关系式成立吗?

①$[af(x)+bg(x)]'=af'(x)+bg'(x)$($a$,$b$ 为常数);

②$\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]'=-\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}$.

提示:由导数的运算法则可知,这两个关系式都成立.

任务型课堂

任务1 利用导数的加法与减法法则求导

(1)函数 $y=2x^3+x^2-x+1$ 的导数为________.

$y'=6x^2+2x-1$　**解析**:$y'=(2x^3)'+(x^2)'-x'+1'=6x^2+2x-1$.

(2)函数 $y=x^4+\cos x$ 的导数为________.

$y'=4x^3-\sin x$　**解析**:$y'=(x^4)'+(\cos x)'=4x^3-\sin x$.

(3)函数 $y=e^x+\ln x$ 的导数为________.

$y'=e^x+\dfrac{1}{x}$　**解析**:$y'=(e^x)'+(\ln x)'=e^x+\dfrac{1}{x}$.

(4)函数 $y=\log_5 x+\sin x$ 的导数为________.

$y'=\dfrac{1}{x\ln 5}+\cos x$　**解析**:$y'=(\log_5 x)'+(\sin x)'=\dfrac{1}{x\ln 5}+\cos x$.

【探究总结】

利用导数加法与减法法则求导的策略

先分析每一部分是哪种基本初等函数,确定基本公式,再用导数运算的加法与减法法则求导.

任务2 利用导数的乘法与除法法则求导

探究活动

例1　求下列函数的导数.

(1)$y=(2x^2+3)(3x-2)$;

(2)$y=2^x\cos x-3x\ln x$;

(3)$y=\dfrac{x+3}{x^2+3}$.

解:(1)(方法一)$y'=(2x^2+3)'(3x-2)+(2x^2+3)\cdot(3x-2)'=4x(3x-2)+(2x^2+3)\times 3=18x^2-8x+9$.

(方法二)因为 $y=(2x^2+3)(3x-2)=6x^3-4x^2+9x-6$,所以 $y'=18x^2-8x+9$.

(2) $y'=(2^x\cos x-3x\ln x)'=(2^x)'\cos x+2^x(\cos x)'-3[x'\ln x+x(\ln x)']=2^x\ln 2\times\cos x-2^x\sin x-3\left(\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}\right)=2^x\ln 2\times\cos x-2^x\sin x-3\ln x-3$.

(3) $y'=\dfrac{(x+3)'(x^2+3)-(x+3)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}$

$=\dfrac{1\times(x^2+3)-(x+3)\times 2x}{(x^2+3)^2}=\dfrac{-x^2-6x+3}{(x^2+3)^2}$.

【探究总结】

利用求导公式及法则解题的关注点

(1)熟记常见基本初等函数的求导公式是进行求导运算的前提.

(2)求导之前观察函数解析式的结构特点,看是否可以化简,再进行求导,可以避免反复使用求导法则,从而减少运算量.

(3)运算过程易出现失误的一个重要原因是不能正确理解求导法则,特别是商的求导法则.

(4)求导过程中对符号判断不清,也是导致错误的常见原因.

应用迁移

求下列函数的导数.

(1) $f(x)=xe^x$;

(2) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$;

(3) $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$;

(4) $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}$.

解:(1) $f'(x)=x'\cdot e^x+x\cdot(e^x)'=e^x+xe^x=(1+x)e^x$.

(2) $f'(x)=\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)'$

$=\dfrac{(2x)'(x^2+1)-2x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$.

(3)(方法一)

$f'(x)=\dfrac{(e^x+1)'(e^x-1)-(e^x+1)(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}$

$=\dfrac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$.

(方法二)因为 $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=1+\dfrac{2}{e^x-1}$,

所以 $f'(x)=\dfrac{2'(e^x-1)-2(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}=\dfrac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$.

(4) $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\cos x}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos x$,

所以 $f'(x)=\dfrac{1}{2}(-\sin x)=-\dfrac{1}{2}\sin x$.

任务3 > 与切线有关的综合问题

探究活动

例2 已知曲线 $y=x\ln x$ 与直线 $2x-y-5=0$,曲线上是否存在一点 P,使曲线在点 P 处的切线与直线 $2x-y-5=0$ 平行?

解:存在.设 $P(x_0,y_0)$.因为 $y=x\ln x$,

所以 $y'=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$.

所以曲线 $y=x\ln x$ 在点 P 处的切线的斜率 $k=1+\ln x_0$.

又 $k=2$,所以 $1+\ln x_0=2$,所以 $x_0=e$.

所以 $y_0=e\ln e=e$.

所以点 P 的坐标是 (e,e).

[一题多思]

思考1.求曲线 $y=x\ln x$ 在 $x=e$ 处的切线的方程.

解:因为 $y=x\ln x$,所以 $y'=1\cdot\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$.

当 $x=e$ 时,$y=e$,故切点坐标为 (e,e).

因为所求切线的斜率 $k=y'|_{x=e}=\ln e+1=2$,所以切线方程为 $y-e=2(x-e)$,即 $2x-y-e=0$.

思考2.求曲线 $y=x\ln x$ 上的点到直线 $x-y-2=0$ 的最短距离.

解:设曲线 $y=x\ln x$ 在点 (x_0,y_0) 处的切线与直线 $x-y-2=0$ 平行,则点 (x_0,y_0) 到直线 $x-y-2=0$ 的距离即为最短距离.

因为 $y'=\ln x+1$,所以 $y'|_{x=x_0}=\ln x_0+1=1$,解得 $x_0=1$,

所以 $y_0=0$,即切点坐标为 $(1,0)$.

所以切点 $(1,0)$ 到直线 $x-y-2=0$ 的距离 $d=\dfrac{|1-0-2|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

即曲线 $y=x\ln x$ 上的点到直线 $x-y-2=0$ 的最短距离是 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

【探究总结】

解决有关切线的问题的关注点

(1)此类问题往往涉及切点、切点处对应的导数、切线方程三个主要元素.

(2)准确利用求导公式求出导函数是解决此类问题的第一步,也是解题的关键,务必做到准确.

(3)分清已知点是否在曲线上,若不在曲线上,则要设出切点,这是解题时的易错点.另外有的点虽然在曲线上,但是经过该点的切线不一定只有一条,即该点有可能是切点,也可能是切线与曲线的交点,解题时注意不要漏解.

应用迁移

1. 若曲线 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ 在点 $(3,2)$ 处的切线与直线 $ax+y+1=0$ 垂直，则 a 等于 ( )

A. 2　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. -2

D **解析**：因为 $y=\dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$，

所以 $y'=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$，

所以 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ 在 $x=3$ 处的导数为 $-\dfrac{1}{2}$.

所以 $-a\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$，即 $a=-2$.

2. 已知函数 $f(x)=ax^2+bx+3(a\neq 0)$，其导函数 $f'(x)=2x-8$.

(1) 求 a，b 的值；

(2) 设函数 $g(x)=e^x\sin x+f(x)$，求曲线 $y=g(x)$ 在 $x=0$ 处的切线的方程.

解：(1) 因为 $f(x)=ax^2+bx+3(a\neq 0)$，

所以 $f'(x)=2ax+b$.

又知 $f'(x)=2x-8$，所以 $a=1$，$b=-8$.

(2) 由(1)可知 $g(x)=e^x\sin x+x^2-8x+3$，

所以 $g'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x+2x-8$.

因为 $g'(0)=e^0\sin 0+e^0\cos 0+2\times 0-8=-7$，

且 $g(0)=3$，所以曲线 $g(x)$ 在 $x=0$ 处的切线的方程为 $y-3=-7(x-0)$，即 $7x+y-3=0$.

提质归纳

- 导数的运算法则
  - 加、减法法则
  - 乘法法则
  - 除法法则

课后素养评价（十六） 导数的四则运算法则

A组 学习·理解

1. 已知 $f(x)=x^3-3^x$，则 $f'(x)=$ ( )

A. $3x^2-3^x$

B. $3x^2-3^x\ln 3+\dfrac{1}{3}$

C. $3x^2+3^x\ln 3$

D. $3x^2-3^x\ln 3$

D **解析**：因为 $f(x)=x^3-3^x$，所以 $f'(x)=3x^2-3^x\ln 3$.

2. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且满足 $f(x)=f'(e)\ln x+2x$，则 $f'(e)=$ ( )

A. 1　　B. -1

C. $\dfrac{2e}{e-1}$　　D. $-\dfrac{2e}{e-1}$

C **解析**：由 $f(x)=f'(e)\ln x+2x$，

得 $f'(x)=\dfrac{1}{x}f'(e)+2$.

令 $x=e$，得 $f'(e)=\dfrac{1}{e}f'(e)+2$，解得 $f'(e)=\dfrac{2e}{e-1}$.

3. 已知 $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，则 $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=$ ( )

A. 1　　B. 2　　C. -1　　D. -2

B **解析**：因为 $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，所以 $f'(x)=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$，所以 $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$. 故选 B.

4. 曲线 $y=2\sin x+\cos x$ 在点 $(\pi,-1)$ 处的切线的方程为 ( )

A. $x-y-\pi-1=0$

B. $2x-y-2\pi-1=0$

C. $2x+y-2\pi+1=0$

D. $x+y-\pi+1=0$

C **解析**：由 $y=2\sin x+\cos x$ 可得 $y'=2\cos x-\sin x$，$y'|_{x=\pi}=-2$，即切线的斜率为 -2，所以切线方程为 $y+1=-2(x-\pi)$，即 $2x+y-2\pi+1=0$.

5. (多选)函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象关于 y 轴对称，则 $f(x)$ 的解析式可能为 ( )

A. $f(x)=3\cos x$

B. $f(x)=x^3+x$

C. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

D. $f(x)=e^x+x$

BC **解析**：对于 A，$f(x)=3\cos x$，其导函数 $f'(x)=-3\sin x$ 为奇函数，图象不关于 y 轴对称，不符合题意；对于 B，$f(x)=x^3+x$，其导函数 $f'(x)=3x^2+1$ 为偶函数，图象关于 y 轴对称，符合题意；对于 C，$f(x)=x+\dfrac{1}{x}$，其导函数 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$ 为偶函数，图象关于 y 轴对称，符合题意；对于 D，

$f(x)=e^x+x$，其导函数 $f'(x)=e^x+1$ 为非奇非偶函数，图象不关于 y 轴对称，不符合题意.故选 BC.

6.已知曲线 $y=e^x$ 在 $x=1$ 处的切线 l 恰好与曲线 $y=a+\ln x$ 相切，则实数 a 的值为______.

2　**解析**：由 $y=e^x$ 得 $y'=e^x$，又切点为 $(1,e)$，故 $k=e$，切线 l 为 $y=ex$.

设 l 与曲线 $y=a+\ln x$ 的切点为 (x_0,ex_0)，$y'=\frac{1}{x}$，所以 $\frac{1}{x_0}=e$，解得切点为 $\left(\frac{1}{e},1\right)$，

所以 $a+\ln\frac{1}{e}=a-1=1$，解得 $a=2$.

7.已知函数 $f(x)=ax\ln x$，$x\in(0,+\infty)$，其中 a 为实数，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.若 $f'(1)=3$，则 a 的值为________.

3　**解析**：$f'(x)=a\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=a(1+\ln x)$.

由于 $f'(1)=a(1+\ln 1)=a$，又 $f'(1)=3$，所以 $a=3$.

8.如果函数 $y=\frac{x^2+a^2}{x}(a>0)$ 在 $x=x_0$ 处的导数为 0，那么 x_0 等于________.

$\pm a$　**解析**：$y'=\frac{2x\cdot x-(x^2+a^2)\cdot 1}{x^2}=\frac{x^2-a^2}{x^2}$.

由 $x_0^2-a^2=0$ 得 $x_0=\pm a$.

9.求下列函数的导数.

(1) $y=x^3-2x+3$；

(2) $y=\frac{\ln x}{x}$；

(3) $f(x)=x^3\ln x$；

(4) $S(t)=3\sin t-6t+100$；

(5) $g(x)=x^4\cos x$.

解：(1) $y'=(x^3-2x+3)'=(x^3)'-(2x)'+3'=3x^2-2$.

(2) $y'=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot x'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

(3) $f'(x)=(x^3\ln x)'=(x^3)'\cdot\ln x+x^3\cdot(\ln x)'=3x^2\ln x+x^2$.

(4) $S'(t)=(3\sin t-6t+100)'=(3\sin t)'-(6t)'+100'=3\cos t-6$.

(5) $g'(x)=(x^4\cos x)'=(x^4)'\cdot\cos x+x^4\cdot(\cos x)'=4x^3\cos x-x^4\sin x$.

B组　应用·实践

1.若函数 $f(x)=x^2-2x-4\ln x$，则 $f'(x)>0$ 时 x 的取值范围为（　　）

A. $(0,+\infty)$

B. $(-1,0)\cup(2,+\infty)$

C. $(2,+\infty)$

D. $(-1,0)$

C　**解析**：由题意知 $x>0$，且 $f'(x)=2x-2-\frac{4}{x}$.

若 $f'(x)=\frac{2x^2-2x-4}{x}>0$，则 $x^2-x-2>0$，

解得 $x<-1$ 或 $x>2$.又 $x>0$，所以 $x>2$.

2.设函数 $h(x)=\frac{f(x)+5}{g(x)}$，已知 $f(2)=5$，$f'(2)=3$，$g(2)=2$，$g'(2)=1$，则 $h'(2)=$（　　）

A. -2　　B. -1

C. $\frac{1}{4}$　　D. 3

B　**解析**：由已知可得 $h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)[f(x)+5]}{[g(x)]^2}$，

所以 $h'(2)=\frac{f'(2)g(2)-g'(2)[f(2)+5]}{[g(2)]^2}=\frac{6-10}{4}=-1$.故选 B.

3.（多选）已知曲线 $y=ae^x+x\ln x$ 在点 $(1,ae)$ 处的切线的方程为 $y=2x+b$，则（　　）

A. $a=e$　　B. $a=e^{-1}$

C. $b=1$　　D. $b=-1$

BD　**解析**：令 $f(x)=ae^x+x\ln x$，

则 $f'(x)=ae^x+\ln x+1$，$f'(1)=ae+1=2$，得 $a=\frac{1}{e}=e^{-1}$，$f(1)=ae=2+b$，可得 $b=-1$.

4.曲线 $y=x\sin x$ 在点 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线与 x 轴、直线 $x=\pi$ 所围成的三角形的面积为（　　）

A. $\frac{\pi^2}{2}$　　B. π^2

C. $2\pi^2$　　D. $\frac{1}{2}(2+\pi)^2$

A　**解析**：由题易得曲线 $y=x\sin x$ 在点 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的方程为 $y=-x$，所围成的三角形的顶点为 $O(0,0)$，$A(\pi,0)$，$C(\pi,-\pi)$，所以三角形面积为 $\frac{\pi^2}{2}$.

5.已知 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，$f(x)=\frac{x}{e^x}+2xf'(1)$，则 $f'(1)=$________.

0　**解析**：由题意可得，$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}+2f'(1)$，令 $x=1$，则 $f'(1)=\frac{1-1}{e}+2f'(1)$，解得 $f'(1)=0$.

6.函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-4x,x<0,\\-\frac{1}{x}-\ln x,0<x<1.\end{cases}$ 若 $f'(a)=12$，

则实数 a 的值为________.

$\frac{1}{4}$或-4　**解析**:由题意得 $f'(x)=\begin{cases}x^2-4,x<0,\\ \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x},0<x<1.\end{cases}$

因为 $f'(a)=12$,

所以$\begin{cases}0<a<1,\\ \frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}=12\end{cases}$或$\begin{cases}a<0,\\ a^2-4=12,\end{cases}$解得 $a=\frac{1}{4}$ 或 $a=-4$.

7.(新定义)对于三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$,定义:设 $f''(x)$是函数 $y=f(x)$的导函数 $y=f'(x)$的导数,若 $f''(x)=0$ 有实数解 x_0,则称点$(x_0,f(x_0))$为函数 $y=f(x)$图象的"疑似拐点".已知 $f(x)=x^3-3x^2+2x-2$,则函数 $f(x)$图象的"疑似拐点"A 的坐标为________.

$(1,-2)$　**解析**:因为 $f'(x)=3x^2-6x+2$,所以 $f''(x)=6x-6$.

令 $f''(x)=6x-6=0$,得 $x=1$,$f(1)=1-3+2-2=-2$.所以"疑似拐点"A 的坐标为$(1,-2)$.

8.已知 $f(x)=x^2+ax+b$,$g(x)=x^2+cx+d$,又 $f(2x+1)=4g(x)$,且 $f'(x)=g'(x)$,$f(5)=30$,求 $g(4)$.

解:由 $f(2x+1)=4g(x)$,得

$4x^2+2(a+2)x+(a+b+1)=4x^2+4cx+4d$,

所以 $a+2=2c$①,

$a+b+1=4d$②.

由 $f'(x)=g'(x)$,得 $2x+a=2x+c$,

所以 $a=c$③.

由①与③,得 $a=c=2$.

此时 $f(x)=x^2+2x+b$,

由 $f(5)=30$,得 $25+10+b=30$,

所以 $b=-5$.再由②,得 $d=-\frac{1}{2}$.

从而 $g(x)=x^2+2x-\frac{1}{2}$,

故 $g(4)=16+8-\frac{1}{2}=\frac{47}{2}$.

5.2.3　简单复合函数的导数

学习任务目标

1.了解复合函数的概念.
2.理解复合函数的求导法则.
3.能求简单的复合函数的导数.

◦ 问题式预习 ◦

【知识清单】

知识点一　复合函数的概念

一般地,对于两个函数 $y=f(u)$和 $u=g(x)$,如果通过中间变量 u,y 可以表示成 x 的函数,那么称这个函数为函数 $y=f(u)$和 $u=g(x)$的复合函数,记作$y=f(g(x))$.

知识点二　复合函数的求导法则

一般地,对于由函数 $y=f(u)$和 $u=g(x)$复合而成的函数 $y=f(g(x))$,它的导数与函数 $y=f(u)$,$u=g(x)$的导数间的关系为$y'_x=y'_u\cdot u'_x$.即 y 对 x 的导数等于 y 对 u 的导数与 u 对 x 的导数的乘积.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)函数 $y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$ 与 $u=\sin x$ 复合而成的.　(√)

(2)研究函数 $y=2^{\ln x}$时,可引入中间变量 $u=\ln x$.　(√)

(3)若函数 $y=\ln(2x)$,则 $y'=\frac{1}{2x}$.　(　　)

×　**提示**:$y'=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x}$.

(4)$y=x\cos x$ 是复合函数.　(　　)

×　**提示**:$y=x\cos x$ 是两个函数的积.

2.(多选)下列式子正确的是　(　　)

A.$\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)'=-\sin\frac{\pi}{6}$

B.$(e^{2x})'=2e^{2x}$

C.$(\sin 3x)'=3\cos x$

D.$[\ln(-x+1)]'=\frac{1}{x-1}$

BD　**解析**:$\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)'=0$,$(e^{2x})'=2e^{2x}$,$(\sin 3x)'=3\cos 3x$,$[\ln(-x+1)]'=\frac{-1}{-x+1}=\frac{1}{x-1}$,所以 B,D 正确.

3.请思考并回答下列问题:

(1)借助函数 $y=\ln(2x-1)$,说明如何分析一个复合函数是由哪些基本初等函数复合而成的.

提示:计算自变量 $x=1$ 时 $y=\ln(2x-1)$的函数值,可分以下两步:

①计算 $2\times1-1=1$,用的函数是一次函数 $u=2x-1$;

②计算 $y=\ln 1=0$，用的函数是对数函数 $y=\ln u$. 据此可知，函数 $y=\ln(2x-1)$是由内层为一次函数 $u=2x-1$ 和外层对数函数 $y=\ln u$ 复合而成的.

(2)试用两种方法求函数 $y=\sin 2x$ 的导数，由此验证复合函数的求导法则.

提示：(方法一)函数 $y=\sin 2x$ 可以看作函数 $y=\sin u$ 和 $u=2x$ 的复合函数，根据复合函数求导法则有 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=(\sin u)'\cdot(2x)'=2\cos u=2\cos 2x$.

(方法二)因为 $y=\sin 2x=2\sin x\cos x$，所以 $y'=2\cos^2 x-2\sin^2 x=2\cos 2x$.

○ 任务型课堂 ○

任务1 › 求较复杂函数的导数

1. 函数 $y=(1-\sqrt{x})\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$的导数为____________.

$y'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$　**解析**：因为 $y=(1-\sqrt{x})\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=1-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-1=x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}$，

所以 $y'=(x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}})'=(x^{-\frac{1}{2}})'-(x^{\frac{1}{2}})'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

2. 函数 $y=\frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$的导数为____________.

$y'=\sin x-\cos x$　**解析**：因为 $y=\frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x-\cos x}=-\sin x-\cos x$，所以 $y'=(-\sin x-\cos x)'=\sin x-\cos x$.

3. 函数 $y=\frac{1}{1-\sqrt{x}}+\frac{1}{1+\sqrt{x}}$的导数为________.

$y'=\frac{2}{(1-x)^2}$　**解析**：因为 $y=\frac{1}{1-\sqrt{x}}+\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1+\sqrt{x}}{1-x}+\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\frac{2}{1-x}$，所以 $y'=\frac{2}{(1-x)^2}$.

【探究总结】

若待求导函数的解析式比较复杂，则需要对解析式先变形再求导，例如，将乘积式展开变为和式再求导，将商式变为乘积式再求导，将三角函数式恒等变形后再求导等.

任务2 › 求复合函数的导数

探究活动

例1　求下列函数的导数.

(1) $y=\left(2x^3-x+\frac{1}{x}\right)^4$；

(2) $y=\frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}$；

(3) $y=\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$；

(4) $y=x\sqrt{1+x^2}$.

解：(1) $y'=\left[\left(2x^3-x+\frac{1}{x}\right)^4\right]'$

$=4\left(2x^3-x+\frac{1}{x}\right)^3\left(2x^3-x+\frac{1}{x}\right)'$

$=4\left(2x^3-x+\frac{1}{x}\right)^3\left(6x^2-1-\frac{1}{x^2}\right)$.

(2) $y'=\left(\frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}\right)'$

$=[(1-2x^2)^{-\frac{1}{2}}]'$

$=-\frac{1}{2}(1-2x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(1-2x^2)'$

$=2x(1-2x^2)^{-\frac{3}{2}}$

$=\frac{2x}{(1-2x^2)\sqrt{1-2x^2}}$.

(3) $y'=\left[\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]'$

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left[\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]'$

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)'$

$=2\sin\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)$.

(4) $y'=(x\sqrt{1+x^2})'$

$=x'\sqrt{1+x^2}+x(\sqrt{1+x^2})'$

$=\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

$=\frac{(1+2x^2)\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}$.

【探究总结】

1.求复合函数的导数的步骤

分层 — 选择中间变量，写出内、外层函数
↓
分别求导 — 分别求各层函数对相应变量的导数
↓
相乘 — 把上述求导的结果相乘
↓
变量回代 — 把中间变量回代

2.求复合函数的导数的注意点

(1)分解得到的函数通常为基本初等函数；

(2)求导时分清是对哪个变量求导；

(3)计算结果尽量简洁.

应用迁移

求下列复合函数的导数.

(1) $y=(3x-2)^2$；

(2) $y=\ln(6x+4)$；

(3) $y=\sin(2x+1)$；

(4) $y=\sqrt{3x+5}$.

解：(1)函数 $y=(3x-2)^2$ 可以看作函数 $y=u^2$ 和 $u=3x-2$ 的复合函数.根据复合函数的求导法则，有 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=(u^2)'\cdot(3x-2)'=6u=18x-12$.

(2)函数 $y=\ln(6x+4)$ 可以看作函数 $y=\ln u$ 和 $u=6x+4$ 的复合函数.根据复合函数的求导法则，有 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=(\ln u)'\cdot(6x+4)'=\frac{6}{u}=\frac{6}{6x+4}=\frac{3}{3x+2}$.

(3)函数 $y=\sin(2x+1)$ 可以看作函数 $y=\sin u$ 和 $u=2x+1$ 的复合函数.根据复合函数求导法则，有 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=(\sin u)'\cdot(2x+1)'=2\cos u=2\cos(2x+1)$.

(4)函数 $y=\sqrt{3x+5}$ 可以看作函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=3x+5$ 的复合函数.根据复合函数求导法则，有 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=(\sqrt{u})'\cdot(3x+5)'=\frac{3}{2\sqrt{u}}=\frac{3}{2\sqrt{3x+5}}$.

任务 3 复合函数求导数运算的应用

探究活动

例 2　求曲线 $y=e^{-5x}$ 在点(0,1)处的切线的方程.

解：$y'=-5e^{-5x}$，曲线在点(0,1)处的切线的斜率 $k=y'|_{x=0}=-5$，故切线的方程为 $y-1=-5(x-0)$，即 $5x+y-1=0$.

[一题多思]

思考 1.若直线 l 与直线 $5x+ey=0$ 平行且与本例中的曲线相切，求直线 l 的方程.

解：设切点为 (x_0,y_0)，因为 $y'=-5e^{-5x}$，由已知条件得 $-5e^{-5x_0}=-\frac{5}{e}$，整理得 $e^{-5x_0}=e^{-1}$，所以 $-5x_0=-1$，解得 $x_0=\frac{1}{5}$，所以 $y_0=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

故直线 l 的方程为 $y-\frac{1}{e}=-\frac{5}{e}\left(x-\frac{1}{5}\right)$，即 $5x+ey-2=0$.

思考 2.将本例中的曲线方程改为“$y=e^{ax}$”，若此曲线在点(0,1)处的切线与直线 $x+2y+1=0$ 垂直，求实数 a 的值.

解：令 $y=f(x)$，则曲线 $y=e^{ax}$ 在点(0,1)处的切线的斜率为 $f'(0)$，又切线与直线 $x+2y+1=0$ 垂直，所以 $f'(0)=2$.因为 $f(x)=e^{ax}$，所以 $f'(x)=(e^{ax})'=e^{ax}\cdot(ax)'=ae^{ax}$，所以 $f'(0)=ae^0=a$，故 $a=2$.

【探究总结】

(1)求切线方程时的关键要素为切点，若切点已知便直接使用，若切点未知则需先设再求.两直线平行与垂直的关系与直线的斜率密切相关，进而成为解出切点横坐标的关键条件.

(2)利用导数求参数问题，能较全面地考查导数的应用，突出了导数的工具性作用.

应用迁移

1.(多选)若直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条切线，则函数的解析式可以是　　(　　)

A. $f(x)=\frac{1}{x}$　　B. $f(x)=x^4$

C. $f(x)=\sin\frac{1}{2}x$　　D. $f(x)=e^{2x}$

BCD　**解析**：直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 的斜率为 $k=\frac{1}{2}$.

$f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数为 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$，切线的斜率均小于0，故 A 不正确；

$f(x)=x^4$ 的导数为 $f'(x)=4x^3$，令 $4x^3=\frac{1}{2}$，解得 $x=\frac{1}{2}$，故 B 正确；

$f(x)=\sin\frac{1}{2}x$ 的导数为 $f'(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}$ 有解，故 C 正确；

$f(x)=e^{2x}$ 的导数为 $f'(x)=2e^{2x}$，令 $2e^{2x}=\frac{1}{2}$，解得 $x=-\ln 2$，故 D 正确.故选 BCD.

2.(2024・新高考全国Ⅰ卷)若曲线 $y=e^x+x$ 在点(0,1)处的切线也是曲线 $y=\ln(x+1)+a$ 的切线，则 $a=$________.

$\ln 2$　**解析**：由 $y=e^x+x$，得 $y'=e^x+1$，则 $y'|_{x=0}=e^0+1=2$，

故曲线 $y=e^x+x$ 在点(0,1)处的切线的方程为 $y=2x+1$.

由 $y=\ln(x+1)+a$，得 $y'=\frac{1}{x+1}$，

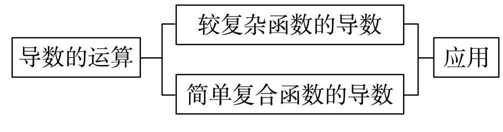
设切线 $y=2x+1$ 与曲线 $y=\ln(x+1)+a$ 相切于点 $(x_0,\ln(x_0+1)+a)$，

则 $y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0+1}=2$，解得 $x_0=-\frac{1}{2}$，则切点为 $\left(-\frac{1}{2},a+\ln\frac{1}{2}\right)$，

切线方程为 $y=2\left(x+\frac{1}{2}\right)+a+\ln\frac{1}{2}=2x+1+a-\ln 2$.

因为两切线重合，所以 $a-\ln 2=0$，解得 $a=\ln 2$.

提质归纳



课后素养评价（十七） 简单复合函数的导数

A组 学习·理解

1.（多选）下列求导运算正确的是 （　　）

A.$(\ln 7)'=\frac{1}{7}$

B.$[(x^2+2)\sin x]'=2x\sin x+(x^2+2)\cdot\cos x$

C.$\left(\frac{x^2}{e^x}\right)'=\frac{2x-x^2}{e^x}$

D.$[\ln(3x+2)]'=\frac{1}{3x+2}$

BC　**解析**：$(\ln 7)'=0$，故A错误；$[(x^2+2)\sin x]'=2x\sin x+(x^2+2)\cos x$，故B正确；$\left(\frac{x^2}{e^x}\right)'=\frac{2x\cdot e^x-x^2e^x}{e^{2x}}=\frac{2x-x^2}{e^x}$，故C正确；$[\ln(3x+2)]'=\frac{3}{3x+2}$，故D错误.

故选BC.

2.函数$y=\frac{1}{(3x-1)^2}$的导数是$y'=$ （　　）

A.$\frac{6}{(3x-1)^3}$　　B.$\frac{6}{(3x-1)^2}$

C.$-\frac{6}{(3x-1)^3}$　　D.$-\frac{6}{(3x-1)^2}$

C　**解析**：因为$y=\frac{1}{(3x-1)^2}=(3x-1)^{-2}$，

所以$y'=-2(3x-1)^{-3}\cdot(3x-1)'=\frac{-6}{(3x-1)^3}$.故选C.

3.函数$y=\sin 2x-\cos 2x$的导数是$y'=$ （　　）

A.$2\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

B.$\cos 2x+\sin x$

C.$\cos 2x-\sin 2x$

D.$2\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

A　**解析**：$y'=2\cos 2x+2\sin 2x=2\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

4.函数$y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$的导数是$y'=$ （　　）

A.$\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$　　B.$\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

C.e^x-e^{-x}　　D.e^x+e^{-x}

A　**解析**：$y'=\left(\frac{1}{2}e^x\right)'+\left(\frac{1}{2}e^{-x}\right)'=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.

5.已知函数$f(x)=\ln(3x)+4x$，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$ （　　）

A.5　　B.-5

C.-10　　D.10

C　**解析**：由题可得$f'(x)=\frac{1}{x}+4$，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=-2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-2\Delta x)-f(1)}{-2\Delta x}=-2f'(1)=-10$.故选C.

6.曲线$f(x)=x+e^{2x}$在点$(0,f(0))$处的切线的方程为 （　　）

A.$y=2x$　　B.$y=2x+1$

C.$y=3x$　　D.$y=3x+1$

D　**解析**：因为$f(x)=x+e^{2x}$，所以$f'(x)=1+2e^{2x}$，所以$f'(0)=1+2=3$.

又$f(0)=1$，所以曲线$f(x)=x+e^{2x}$在点$(0,f(0))$处的切线的方程为$y=3x+1$.

故选D.

7.函数$f(x)=\sqrt{2x+1}$，则曲线$y=f(x)$在$x=4$处的切线的斜率为________.

$\frac{1}{3}$　**解析**：因为$f(x)=\sqrt{2x+1}$，所以$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$，则曲线$y=f(x)$在$x=4$处切线的斜率为$f'(4)=\frac{1}{3}$.

8.求下列函数的导数.

(1)$y=(x^2-4)^2$；

(2)$y=10^{3x-2}$；

(3)$y=\sqrt{2x-1}$；

(4)$y=\frac{\cos(2x+1)}{x}$；

(5)$y=\frac{x^2}{\cos 2x}$.

解：(1)$y'=2(x^2-4)(x^2-4)'=2(x^2-4)\cdot 2x=4x^3-16x$.

(2)$y'=(10^{3x-2}\ln 10)\cdot(3x-2)'=3\times 10^{3x-2}\times\ln 10=3\ln 10\times 10^{3x-2}$.

(3)$y'=\frac{1}{2\sqrt{2x-1}}\cdot(2x-1)'=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}=(2x-1)^{-\frac{1}{2}}$.

(4)$y'=\frac{[\cos(2x+1)]'\cdot x-\cos(2x+1)\cdot x'}{x^2}$

$=\frac{-2x\sin(2x+1)-\cos(2x+1)}{x^2}$

$=-\dfrac{2x\sin(2x+1)+\cos(2x+1)}{x^2}$.

(5) $y'=\left(\dfrac{x^2}{\cos 2x}\right)'$

$=\dfrac{(x^2)'\cos 2x-x^2(\cos 2x)'}{(\cos 2x)^2}$

$=\dfrac{2x\cos 2x-x^2(-2\sin 2x)}{(\cos 2x)^2}$

$=\dfrac{2x\cos 2x+2x^2\sin 2x}{(\cos 2x)^2}$.

B组　应用·实践

1.已知函数 $f(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)$，则其导函数 $f'(x)$是　(　　)

A.最小正周期为 2π 的奇函数

B.最小正周期为 2π 的偶函数

C.最小正周期为 π 的偶函数

D.最小正周期为 π 的奇函数

D　**解析**：$f'(x)=2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin 2x$，最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，且为奇函数.

2.随着科学技术的发展，放射性同位素已经广泛应用于医学、航天等众多领域，并取得了显著的经济效益.假设在某种放射性同位素的衰变过程中，其含量 N(单位：贝克)与时间 t(单位：天)满足函数关系 $N(t)=N_0 2^{-\frac{t}{24}}$，其中 N_0 为 $t=0$ 时的含量.已知 $t=24$ 时，含量的瞬时变化率为 $-8\ln 2$，则 $N(96)=$　(　　)

A.12　　B.12ln 2

C.24　　D.24ln 2

C　**解析**：由 $N(t)=N_0 2^{-\frac{t}{24}}$，得 $N'(t)=N_0 2^{-\frac{t}{24}}\times\ln 2\times\left(-\dfrac{1}{24}\right)$.

因为当 $t=24$ 时，$N'(24)=N_0 2^{-\frac{24}{24}}\times\ln 2\times\left(-\dfrac{1}{24}\right)=-8\ln 2$，解得 $N_0=384$，

所以 $N(t)=384\times 2^{-\frac{t}{24}}$，所以当 $t=96$ 时，$N(96)=384\times 2^{-\frac{96}{24}}=384\times 2^{-4}=24$.

3.(多选)下列说法正确的是　(　　)

A.若 $f(x)=x\sin x+\cos 2x$，则 $f'(x)=\sin x-x\cos x+2\sin 2x$

B.设函数 $f(x)=x\ln x$，若 $f'(x_0)=2$，则 $x_0=e$

C.已知函数 $f(x)=3x^2e^{2x}$，则 $f'(1)=12e$

D.设函数 $f(x)$的导函数为 $f'(x)$，且 $f(x)=x^2+3xf'(2)+\ln x$，则 $f'(2)=-\dfrac{9}{4}$

BD　**解析**：对 A，$f'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin 2x$，故 A 错误；

对 B，$f'(x)=\ln x+1\Rightarrow f'(x_0)=\ln x_0+1=2\Rightarrow x_0=e$，故 B 正确；

对 C，$f(x)=3x^2e^{2x}\Rightarrow f'(x)=6xe^{2x}+6x^2e^{2x}\Rightarrow f'(1)=12e^2$，故 C 错误；

对 D，$f(x)=x^2+3xf'(2)+\ln x\Rightarrow f'(x)=2x+3f'(2)+\dfrac{1}{x}\Rightarrow f'(2)=-\dfrac{9}{4}$，故 D 正确.

4.已知 $a>0,b>0$，若直线 $x-y-a=0$ 与曲线 $y=1+\ln(x+b-1)$相切，则 $\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}$的最小值为　(　　)

A.7　　B.8

C.9　　D.10

C　**解析**：设切点为(m,n)，由题得 $y'=\dfrac{1}{x+b-1}$，

所以切线的斜率 $k=\dfrac{1}{m+b-1}$，且 $n=1+\ln(m+b-1)$，

所以切线方程为 $y=\dfrac{1}{m+b-1}(x-m)+1+\ln(m+b-1)$，

即 $y=\dfrac{1}{m+b-1}\cdot x+\dfrac{b-1}{m+b-1}+\ln(m+b-1)$，与 $y=x-a$ 相同，

所以 $\begin{cases}\dfrac{1}{m+b-1}=1,\\ \dfrac{b-1}{m+b-1}+\ln(m+b-1)=-a,\end{cases}$ 整理得 $a+b=1$，

所以 $\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}=\left(\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}\right)(a+b)=5+\dfrac{4b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant 5+2\sqrt{\dfrac{4b}{a}\times\dfrac{a}{b}}=9$，

当且仅当 $a=\dfrac{2}{3},b=\dfrac{1}{3}$时，$\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}$取得最小值 9.

故选 C.

5.(多选)若直线 $y=-x+m$ 是曲线 $y=2x^2+3x+4$ 与曲线 $y=-e^{x+n}$的公切线，则　(　　)

A.$m=-1$

B.$m=2$

C.$n=3$

D.$n=-3$

BD　**解析**：令 $f(x)=2x^2+3x+4$，则 $f'(x)=4x+3$.

令 $f'(x)=4x+3=-1$，有 $x=-1$，则 $f(-1)=2-3+4=3$，

所以切线方程为 $y-3=-(x+1)$，即 $y=-x+2$，故 $m=2$.

令 $g(x)=-e^{x+n}$，则 $g'(x)=-e^{x+n}$，

令 $g'(x)=-e^{x+n}=-1$，有 $x=-n$，则 $g(-n)=$

$-e^0=-1$，

所以切线方程为 $y+1=-(x+n)$，即 $y=-x-n-1$，

故有 $-n-1=2$，即 $n=-3$.

故选 BD.

6. 曲线 $y=f(x)=(2x-2)^3$ 在点(2,8)处的切线与 x 轴、直线 $x=2$ 所围成的三角形的面积是________.

$\frac{4}{3}$ **解析**：设 $u=2x-2$，则 $f'(x)=(u^3)'\cdot u'=6(2x-2)^2$，所以 $f'(2)=6\times(4-2)^2=24$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点(2,8)处的切线的方程为 $y-8=24(x-2)$，即 $24x-y-40=0$.

所以切线与 x 轴的交点是 $\left(\frac{5}{3},0\right)$，与直线 $x=2$ 的交点是(2,8)，

所以所围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times\left|2-\frac{5}{3}\right|\times 8=\frac{4}{3}$.

7. 若曲线 $y=xe^{a-x}+bx$ 在 $x=2$ 处的切线的方程为 $y=(e-1)x+4$，则 $a=$______，$b=$________.

2 e **解析**：因为 $y=xe^{a-x}+bx$，

所以 $y'=(1-x)e^{a-x}+b$.

又曲线在 $x=2$ 处的切线的方程为 $y=(e-1)x+4$，所以 $y'|_{x=2}=(1-2)e^{a-2}+b=e-1$，且 $2(e-1)+4=2e^{a-2}+2b$，解得 $b=e$，$a=2$.

8. 求函数 $y=\ln(2x+3)$ 的导数，并求函数图象在点 $\left(-\frac{1}{2},\ln 2\right)$ 处的切线的倾斜角.

解：令 $y=\ln u$，$u=2x+3$，

则 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=(\ln u)'\cdot(2x+3)'=\frac{1}{u}\cdot 2=\frac{2}{2x+3}$.

$y'|_{x=-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3-1}=1$，即函数图象在点 $\left(-\frac{1}{2},\ln 2\right)$ 处的切线的倾斜角的正切值为 1，所以倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$.

易错强化训练（三） 导数的概念及运算

练易错

易错点 1 | 用错导数公式或运算法则

［防范要诀］

1. 幂函数 $y=x^a$ 与指数函数 $y=a^x$ 的形式相近，导数公式却有很大区别，解题时易混淆导致计算错误.

2. 导数乘法与除法法则形式较特别，使用时一定记清形式与符号，以免出错.

［对点集训］

1. 已知函数 $f(x)=2\cos x-f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin x$，则 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=$ （　　）

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. 2　　D. -2

B **解析**：因为 $f(x)=2\cos x-f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin x$，所以 $f'(x)=-2\sin x-f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x$，

故 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\sin\frac{\pi}{3}-f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}$，即 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}-\frac{1}{2}f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.故选 B.

2. 下列求导运算正确的是 （　　）

A. $\left(\frac{x}{\ln x}\right)'=\frac{\ln x+1}{(\ln x)^2}$

B. $(x^2+3^x)'=2x+3^x\lg 3$

C. $(x\cos x)'=-\sin x$

D. $\left(x-\frac{1}{x}\right)'=1+\frac{1}{x^2}$

D **解**：对于 A 项，$\left(\frac{x}{\ln x}\right)'=\frac{x'\ln x-x(\ln x)'}{(\ln x)^2}=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，故 A 项错误；

对于 B 项，$(x^2+3^x)'=(x^2)'+(3^x)'=2x+3^x\ln 3$，故 B 项错误；

对于 C 项，$(x\cos x)'=x'\cos x+x(\cos x)'=\cos x-x\sin x$，故 C 项错误；

对于 D 项，$\left(x-\frac{1}{x}\right)'=x'-\left(\frac{1}{x}\right)'=1-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=1+\frac{1}{x^2}$，故 D 项正确.

易错点 2 | 对复合函数求导时层次不清

［防范要诀］

1. 对较复杂的函数求导时，先判断该函数是否为复合函数.

2. 若一个函数是复合函数，求导时要先明确函数的构成，分清内层函数和外层函数，合理换元.

［对点集训］

3.（多选）下列结论中不正确的是 （　　）

A.若 $y=\cos\frac{1}{x}$,则 $y'=-\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$

B.若 $y=\sin x^2$,则 $y'=2x\cos x^2$

C.若 $y=\cos 5x$,则 $y'=-\sin 5x$

D.若 $y=\frac{1}{2}x\sin 2x$,则 $y'=x\sin 2x$

ACD **解析**:对于 A,$y=\cos\frac{1}{x}$,则 $y'=\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$,故 A 错误;对于 B,$y=\sin x^2$,则 $y'=2x\cos x^2$,故 B 正确;对于 C,$y=\cos 5x$,则 $y'=-5\sin 5x$,故 C 错误;对于 D,$y=\frac{1}{2}x\sin 2x$,则 $y'=\frac{1}{2}\sin 2x+x\cos 2x$,故 D 错误.

4.若 $f(x)=\log_3(2x-1)$,则 $f'(2)=$________.

$\frac{2}{3\ln 3}$ **解析**:因为 $f'(x)=[\log_3(2x-1)]'=\frac{1}{(2x-1)\ln 3}(2x-1)'=\frac{2}{(2x-1)\ln 3}$,所以 $f'(2)=\frac{2}{3\ln 3}$.

易错点 3 | 混淆曲线"在某点"与"过某点"的切线

[防范要诀]

曲线"在某点"处的切线是以该点为切点的直线,它只有一条;曲线"过某点"的切线,该点一定在切线上,但不一定在曲线上,这样的切线可能不止一条.

[对点集训]

5.若函数 $f(x)=3x+\ln x$ 的图象在点$(1,f(1))$处的切线与直线 $x+ay+1=0$ 平行,则 $a=$ ( )

A.$-\frac{1}{4}$ B.$\frac{1}{4}$

C.-4 D.4

A **解析**:由函数 $f(x)=3x+\ln x(x>0)$,

得 $f'(x)=3+\frac{1}{x}$,所以 $f'(1)=3+\frac{1}{1}=4$.

因为函数 $f(x)=3x+\ln x$ 的图象在点$(1,f(1))$处的切线与直线 $x+ay+1=0$ 平行,由导数的几何意义得$-\frac{1}{a}=4$,所以 $a=-\frac{1}{4}$.

6.(多选)曲线 $C:y=x\cdot e^x$ 过点 $A(a,0)$的切线有且仅有两条,则实数 a 的值可能是 ( )

A.0 B.$\sqrt{2}$

C.$-\ln e^5$ D.e

BCD **解析**:设切点坐标为$(x_0,x_0e^{x_0})$,因为 $y'=(x+1)e^x$,所以 $y'|_{x=x_0}=(x_0+1)e^{x_0}$,所以切线方程为$y-x_0e^{x_0}=(x_0+1)e^{x_0}(x-x_0)$.将 $A(a,0)$代入可得$-x_0e^{x_0}=(x_0+1)e^{x_0}(a-x_0)$,化简得 $x_0^2-ax_0-a=0$.曲线 C 过点 $A(a,0)$的切线有且仅有两条,即方程 $x_0^2-ax_0-a=0$ 有两个不同的解,则 $\Delta=a^2+4a>0$,解得 $a>0$ 或 $a<-4$,故实数 a 的取值范围是$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$.

$-\ln e^5=-5\ln e=-5$,所以对选项逐一判断可知 B,C,D 正确.

练疑难

1.某市在一次降雨过程中,降雨量 y(单位:mm)与时间 t(单位:min)的函数关系可近似地表示为 $y=f(t)=\sqrt{10t}$,则在 $t=40$ min 时的降雨强度为 ( )

A.20 mm/min B.400 mm/min

C.$\frac{1}{2}$ mm/min D.$\frac{1}{4}$ mm/min

D **解析**:因为 $f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{10t}}\cdot 10=\frac{5}{\sqrt{10t}}$,所以 $f'(40)=\frac{5}{\sqrt{400}}=\frac{1}{4}$.

2.函数 $y=\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$的导数为 ( )

A.$y'=\frac{\cos 2x}{\sqrt{x}}-\frac{\sin 2x}{2x\sqrt{x}}$

B.$y'=\frac{2\cos 2x}{\sqrt{x}}-\frac{\sin 2x}{2x\sqrt{x}}$

C.$y'=\frac{2\cos x}{\sqrt{x}}-\frac{\sin 2x}{2x\sqrt{x}}$

D.$y'=\frac{2\cos 2x}{\sqrt{x}}-\frac{\sin 2x}{x\sqrt{x}}$

B **解析**:因为 $y=\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}(x>0)$,

所以 $y'=\frac{\sqrt{x}(\sin 2x)'-(\sqrt{x})'\sin 2x}{(\sqrt{x})^2}=\frac{2\sqrt{x}\cos 2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin 2x}{x}=\frac{2\cos 2x}{\sqrt{x}}-\frac{\sin 2x}{2x\sqrt{x}}$.

3.若曲线 $y=x^4$ 的一条切线 l 与直线 $x+4y-8=0$ 垂直,则 l 的方程为 ( )

A.$4x-y-3=0$

B.$x+4y-5=0$

C.$4x-y+3=0$

D.$x+4y+3=0$

A **解析**:因为 l 与直线 $x+4y-8=0$ 垂直,

所以 $k_l=4$.

因为 $y'=4x^3$,令 $4x^3=4$ 得 $x=1$,所以切点为$(1,1)$,

所以切线方程为 $y-1=4(x-1)$,即 $4x-y-3=0$.

4.(多选)若以曲线 $y=f(x)$上任意一点$M(x,y)$为切点作切线 l,曲线上总存在异于点 M 的点 $N(x',y')$,使得曲线以点 N 为切点的切线 l'满足 $l/\!/l'$,则称曲线 $y=f(x)$具有"可平行性",下列曲线具有"可平行性"的是 ( )

A.$y=x+\frac{1}{x}$

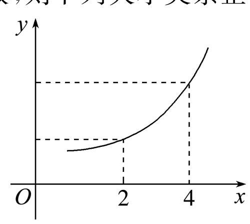
B.$y=x^3-x$

C.$y=\sin x$

D.$y=(x-2)^2+\ln x$

AC **解析**:由题意得,曲线具有"可平行性"的条件是方程 $y'=a$(a 是导数值)至少有两个根.对于A,由 $y'=1-\frac{1}{x^2}=a$($x\neq0$ 且 $a\neq1$),即 $\frac{1}{x^2}=1-a$,此方程有两个不同的实根,符合题意;对于B,由 $y'=3x^2-1$ 知,当 $y'=-1$时,x 的取值唯一,只有0,不符合题意;对于C,由 $y'=\cos x$和三角函数的周期性知,$\cos x=a(-1\leqslant a\leqslant1)$的解有无穷多个,符合题意;对于D,由 $y'=2x-4+\frac{1}{x}(x>0)$,令 $2x-4+\frac{1}{x}=a$,则有 $2x^2-(4+a)x+1=0$,当 $\Delta=0$ 时,解唯一,不符合题意.故选AC.

5.函数 $y=f(x)$的图象如图所示,$f'(x)$是函数 $f(x)$的导函数,则下列大小关系正确的是 ( )



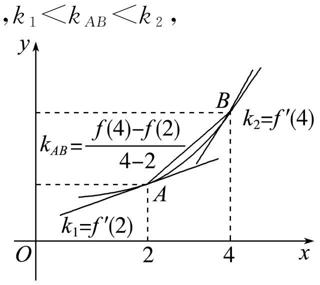
A.$2f'(4)<f(4)-f(2)<2f'(2)$

B.$2f'(2)<f(4)-f(2)<2f'(4)$

C.$2f'(4)<2f'(2)<f(4)-f(2)$

D.$f(4)-f(2)<2f'(4)<2f'(2)$

B **解析**:如图所示,由图象可知 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,$k_1<k_{AB}<k_2$,



故 $f'(2)<\frac{f(4)-f(2)}{4-2}<f'(4)$,即 $2f'(2)<f(4)-f(2)<2f'(4)$.

6.已知点 P 在曲线 $y=\frac{4}{e^x+1}$上,α 为曲线在点 P 处的切线的倾斜角,则 α 的取值范围是 ( )

A.$\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$ B.$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

C.$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$ D.$\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

D **解析**:因为 $y'=\frac{-4e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{-4}{e^x+2+\frac{1}{e^x}}\geqslant-1$,当且仅当 $e^x=1$,即 $x=0$ 时等号成立,又 $y'<0$,则 $-1\leqslant\tan\alpha<0$,所以$\frac{3\pi}{4}\leqslant\alpha<\pi$.

7.已知 $f(x)=e^{\pi x}\sin\pi x$,则$f'\left(\frac{1}{2}\right)=$________.

$\pi e^{\frac{\pi}{2}}$ **解析**:因为 $f'(x)=\pi e^{\pi x}\sin\pi x+\pi e^{\pi x}\cos\pi x=\pi e^{\pi x}(\sin\pi x+\cos\pi x)$,

所以 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\pi e^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right)=\pi e^{\frac{\pi}{2}}$.

8.点 P 是函数 $y=4x^2$ 的图象上一个动点,当点 P 到直线 $y=4x-5$ 的距离最短时,点 P 的坐标为________,这个最短的距离为________.

$\left(\frac{1}{2},1\right)$ $\frac{4\sqrt{17}}{17}$ **解析**:设 $P(m,4m^2)$,又 $y'=8x$,则过点 P 的切线的斜率 $k=y'|_{x=m}=8m$.

当过点 P 的切线平行于直线 $y=4x-5$ 时,点 P 到直线 $y=4x-5$ 的距离最短.

令 $8m=4$,解得 $m=\frac{1}{2}$,此时 $P\left(\frac{1}{2},1\right)$,它到直线 $y=4x-5$ 的距离 $d=\frac{\left|\frac{1}{2}\times4-1-5\right|}{\sqrt{4^2+1}}=\frac{4\sqrt{17}}{17}$.

9.(2022·新高考全国Ⅱ卷)曲线 $y=\ln|x|$过坐标原点的两条切线的方程为________,________.

$y=\frac{1}{e}x$ $y=-\frac{1}{e}x$ **解析**:(方法一:化为分段函数,分段求)因为 $y=\ln|x|$,

当 $x>0$ 时 $y=\ln x$,设切点为$(x_0,\ln x_0)$,由 $y'=\frac{1}{x}$,得 $y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$,所以切线方程为 $y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$.

又切线过坐标原点,所以 $-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(-x_0)$,解得 $x_0=e$,所以切线方程为 $y-1=\frac{1}{e}(x-e)$,即 $y=\frac{1}{e}x$;

当 $x<0$ 时 $y=\ln(-x)$,设切点为$(x_1,\ln(-x_1))$,由 $y'=\frac{1}{x}$,得 $y'|_{x=x_1}=\frac{1}{x_1}$,

所以切线方程为 $y-\ln(-x_1)=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$.

又切线过坐标原点,

所以$-\ln(-x_1)=\frac{1}{x_1}(-x_1)$,解得 $x_1=-e$,

所以切线方程为 $y-1=\frac{1}{-e}(x+e)$,

即$y=-\frac{1}{e}x$.

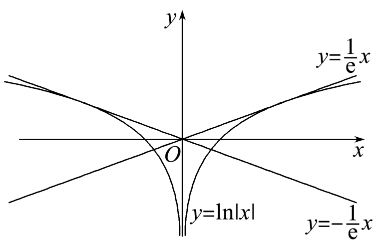
(方法二:根据函数图象的对称性,数形结合)当 x

>0 时 $y=\ln x$，设切点为 $(x_0,\ln x_0)$，由 $y'=\dfrac{1}{x}$，得 $y'|_{x=x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，

所以切线方程为 $y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$.

又切线过坐标原点，所以 $-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(-x_0)$，解得 $x_0=\mathrm{e}$，所以切线方程为 $y-1=\dfrac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})$，即 $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$.

如图，因为 $y=\ln|x|$ 是偶函数，图象关于 y 轴对称，



所以求 $x<0$ 时图象过坐标原点的切线，只需找到直线 $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$ 关于 y 轴的对称直线 $y=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$ 即可.

10. 吹气球时，气球半径 r 将随气球内空气体积 V 的增加而增大.

(1) 写出气球半径 r 关于气球内空气体积 V 的函数解析式；

(2) 求 $V=1$ 时，气球的瞬时膨胀率（即气球半径关于气球内空气体积的瞬时变化率）.

解：(1) 利用球的体积公式可得 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$，

所以 $r^3=\dfrac{3V}{4\pi}$，所以气球半径 r 关于气球内空气体积 V 的函数解析式为 $r=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}\ (V>0)$.

(2) 由 (1) 知 $r=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}\ (V>0)$，所以 $r'=\left[\left(\dfrac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right]'$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}-1}\cdot\left(\dfrac{3V}{4\pi}\right)'=\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{3}{4\pi V^2}}$，

当 $V=1$ 时，$r'=\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{3}{4\pi}}$，

即 $V=1$ 时，气球的瞬时膨胀率为 $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{3}{4\pi}}$.

5.3　导数在研究函数中的应用

5.3.1　函数的单调性

第 1 课时　函数的单调性

学习任务目标

1. 结合实例，借助几何直观了解函数的单调性与导数的关系.
2. 能利用导数研究函数的单调性.
3. 能求不超过三次的多项式函数的单调区间.

◦ 问题式预习 ◦

【知识清单】

知识点　函数的单调性与导数

在区间 (a,b) 内，函数 $y=f(x)$ 的单调性与其导数 $f'(x)$ 的关系：

$f'(x)$ 的正负	$f(x)$ 的单调性
$f'(x)>0$	单调递增
$f'(x)<0$	单调递减

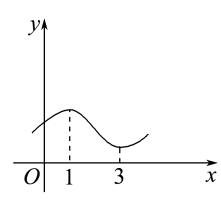
【概念辨析】

1. 判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1) 对于函数 $y=f(x)$，在区间 D 上，若 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 D 上单调递减.　（√）

(2) 函数在某个区间上变化越快，函数在这个区间上的导数的绝对值越大.　（√）

2. 函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，则在区间 $(1,3)$ 内，有　（　　）



A. $f'(x)>0$　　B. $f'(x)<0$

C. $f'(x)=0$　　D. $f'(x)$ 的符号不确定

B　**解析**：在区间 $(1,3)$ 内，函数 $y=f(x)$ 的图象是下降的，函数单调递减，所以 $f'(x)<0$.

3. 请思考并回答下列问题：

(1) 如果在某个区间内恒有 $f'(x)=0$，那么函数 $y=f(x)$ 在这个区间内是什么函数？

提示：常数函数.

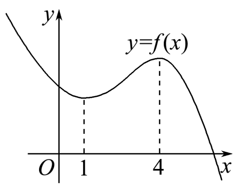
(2)在区间(a,b)内,若$f'(x)>0$,则$f(x)$在此区间上单调递增,反之也成立吗?

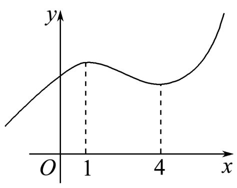
提示:不一定成立.比如$y=x^3$在$\mathbf{R}$上为增函数,但其在$x=0$处的导数等于零,也就是说“$f'(x)>0$”是“$y=f(x)$在某个区间上单调递增”的充分不必要条件.

◦ 任务型课堂 ◦

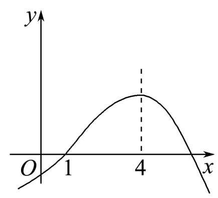
任务1 函数与导函数图象间的关系

1.设函数$f(x)$的图象如图所示,则导函数$f'(x)$的图象可能为 ( )

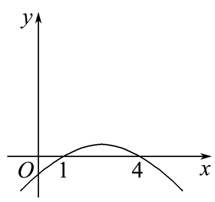




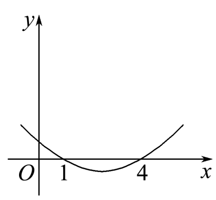
A



B



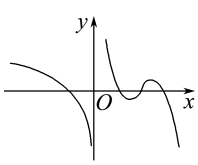
C

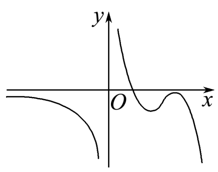


D

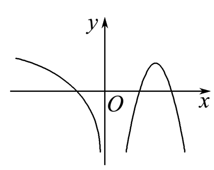
C **解析**:因为$f(x)$在$(-\infty,1)$,$(4,+\infty)$上单调递减,在$(1,4)$上单调递增,所以当$x<1$或$x>4$时,$f'(x)<0$,当$1<x<4$时,$f'(x)>0$.故选C.

2.设函数$f(x)$在定义域内可导,$y=f(x)$的图象如图所示,则导函数$y=f'(x)$的图象可能为 ( )

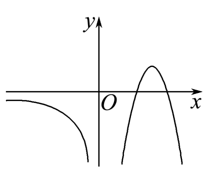




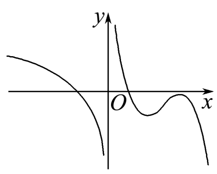
A



B



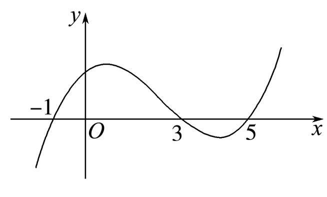
C



D

C **解析**:由题图可知,函数$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,所以$y=f'(x)<0$在$(-\infty,0)$上恒成立,排除选项B和D;函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上先单调递减,后单调递增,再单调递减,所以$y=f'(x)$在$(0,+\infty)$上应先为负,后为正,再为负,即选项A错误,C正确.故选C.

3.(多选)已知函数$f(x)$的导函数的图象如图所示,则 ( )



A.函数$y=f(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递增

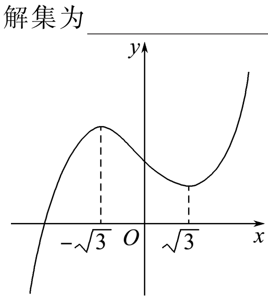
B.函数$y=f(x)$在$(5,+\infty)$上单调递增

C.$f'(3)<f'(5)$

D.$f(-1)<f(3)$

BD **解析**:当$x\in(-\infty,-1)$时,$f'(x)<0$,则函数$y=f(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递减,故A错误;同理,函数$y=f(x)$在$(5,+\infty)$上单调递增,故B正确;由题图可知,$f'(3)=f'(5)=0$,故C错误;函数$y=f(x)$在$[-1,3]$上单调递增,则$f(-1)<f(3)$,故D正确.故选BD.

4.已知函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$,其图象如图所示,$f'(x)$为函数$f(x)$的导函数,则不等式$xf'(x)<0$的解集为________.



$\{x|x<-\sqrt{3}$,或$0<x<\sqrt{3}\}$ **解析**:由题图,知$f(x)$在$(-\infty,-\sqrt{3})$和$(\sqrt{3},+\infty)$上单调递增,在$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$上单调递减.所以当$x\in(-\infty,-\sqrt{3})$或$x\in(\sqrt{3},+\infty)$时,$f'(x)>0$;当$x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$时,$f'(x)<0$.故不等式$xf'(x)<0$的解集为$\{x|x<-\sqrt{3}$,或$0<x<\sqrt{3}\}$.

【探究总结】

研究函数与导函数的图象之间关系的方法

研究一个函数的图象与其导函数图象之间的关系时,注意抓住各自的关键要素.对于原函数,要注意其在哪个区间内单调递增,在哪个区间内单调递减;而对于导函数,则应注意其函数值在哪个区间内大于零,在哪个区间内小于零,并分析这些区间与原函数的单调区间是否一致.

任务2 函数的单调性与导数的关系

探究活动

例1　(1)函数 $f(x)=\cos x-x$ 在$(0,\pi)$上的单调性是　　(　　)

A.先增后减　　B.先减后增

C.单调递增　　D.单调递减

D　**解析**:易知 $f'(x)=-\sin x-1,x\in(0,\pi)$,所以 $f'(x)<0$,则 $f(x)=\cos x-x$ 在$(0,\pi)$上单调递减.

(2)利用导数判断下列函数的单调性.

①$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x-5$;

②$f(x)=x-e^x(x>0)$.

解:①因为 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x-5,x\in\mathbf{R}$,

所以 $f'(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$,

所以函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x-5$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

②因为 $f(x)=x-e^x,x\in(0,+\infty)$,所以 $f'(x)=1-e^x<0$,所以 $f(x)=x-e^x$ 在$(0,+\infty)$上单调递减.

【探究总结】

运用导数研究函数单调性的方法

利用导数判断或证明函数的单调性时,一般是先确定函数的定义域,再求导数,最后判断导数在所给区间上的符号,从而确定函数的单调性.

应用迁移

1.(多选)下列函数中,在$(-\infty,+\infty)$上单调递增的有　　(　　)

A.$f(x)=x^4$

B.$f(x)=x-\sin x$

C.$f(x)=xe^x$

D.$f(x)=e^x-e^{-x}-2x$

BD　**解析**:对于A选项,由 $f(x)=x^4$ 得 $f'(x)=4x^3$,当 $x>0$ 时,$f'(x)=4x^3>0$,则 $f(x)$单调递增;当$x<0$ 时,$f'(x)=4x^3<0$,则 $f(x)$单调递减,故排除A.对于B选项,由 $f(x)=x-\sin x$ 得 $f'(x)=1-\cos x\geqslant0$,显然 $f'(x)$不恒为零,所以 $f(x)=x-\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上单调递增,故B满足题意.对于C选项,由 $f(x)=xe^x$ 得 $f'(x)=(1+x)e^x$,当 $x>-1$ 时,$f'(x)>0$,则$f(x)$单调递增;当 $x<-1$ 时,$f'(x)<0$,则 $f(x)$单调递减,故排除C.对于D选项,由 $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$ 得 $f'(x)=e^x+e^{-x}-2\geqslant2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2=0$,当且仅当 $x=0$ 时,等号成立,故 $f'(x)$不恒为零,所以 $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$ 在$(-\infty,+\infty)$上单调递增,故D满足题意.故选BD.

2.利用导数判断函数 $f(x)=\ln x+e^x$ 在其定义域上的单调性.

解:函数的定义域为$(0,+\infty)$.

因为 $f'(x)=(\ln x+e^x)'=\frac{1}{x}+e^x$,

所以当 $x\in(0,+\infty)$时,$\frac{1}{x}>0,e^x>1>0$,

所以 $f'(x)>0$,

所以 $f(x)=\ln x+e^x$ 在其定义域上单调递增.

任务3 求函数的单调区间

探究活动

例2　求下列函数的单调区间.

(1)$f(x)=2x^3+3x^2-36x+1$;

(2)$f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

解:(1)函数 $f(x)=2x^3+3x^2-36x+1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.对 $f(x)$求导数,得 $f'(x)=6x^2+6x-36=6(x-2)(x+3)$.

由 $f'(x)>0$,解得 $x<-3$ 或 $x>2$;

由 $f'(x)<0$,解得$-3<x<2$.

故 $f(x)$的单调递增区间是$(-\infty,-3)$,$(2,+\infty)$,单调递减区间是$(-3,2)$.

(2)函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$的定义域为$(0,+\infty)$,对 $f(x)$求导数,得

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

令 $f'(x)>0$,即$\frac{1-\ln x}{x^2}>0$,则 $\ln x<1$,解得 $0<x<e$;

令 $f'(x)<0$,即$\frac{1-\ln x}{x^2}<0$,则 $\ln x>1$,解得 $x>e$.

故 $f(x)$的单调递增区间是$(0,e)$,单调递减区间是$(e,+\infty)$.

[一题多思]

思考1.求导后通常要对导函数做怎样的处理,更有利于判断导函数的符号?

提示:通常要利用通分、配方、因式分解等方法将导函数化为非负(正)项之和、连乘式、分式等易于判断符号的结构形式.

思考2.将本例(2)的函数改为"$f(x)=x\ln x$",试求此函数的单调区间.

解:函数 $f(x)=x\ln x$ 的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=x'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$.

令 $f'(x)>0$,则 $\ln x>-1$,解得 $x>\frac{1}{e}$;

令 $f'(x)<0$,则 $\ln x<-1$,解得 $0<x<\frac{1}{e}$.

故 $f(x)$的单调递增区间是$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$,单调递减区间是$\left(0,\frac{1}{e}\right)$.

【探究总结】

利用导数求函数 $f(x)$ 的单调区间的关注点

(1)应先确定函数的定义域，忽视定义域研究单调性与单调区间是无意义的.
(2)实质上是转化为解不等式 $f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$，不等式的解集就是函数的单调区间.
(3)如果函数的单调区间不唯一，中间应用“，”或“和”隔开，不可用“∪”连接.

应用迁移

求下列函数的单调区间.

(1) $f(x)=x^2-\ln x$；

(2) $f(x)=\dfrac{e^x}{x-2}$；

(3) $f(x)=-x^3+3x^2$.

解：(1)函数 $f(x)=x^2-\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

对 $f(x)$ 求导数，得 $f'(x)=2x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1)}{x}$.

因为 $x>0$，所以 $\sqrt{2}x+1>0$. 由 $f'(x)>0$，解得 $x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；由 $f'(x)<0$，解得 $0<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$，单调递减区间为 $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(2)函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x-2}$ 的定义域为 $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$. 对 $f(x)$ 求导数，得 $f'(x)=\dfrac{e^x(x-2)-e^x}{(x-2)^2}=\dfrac{e^x(x-3)}{(x-2)^2}$.

因为 $x\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$，

所以 $e^x>0$，$(x-2)^2>0$.

由 $f'(x)>0$，解得 $x>3$，所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(3,+\infty)$；由 $f'(x)<0$，解得 $x<3$，又定义域为 $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$，所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,2)$ 和 $(2,3)$.

(3) $f(x)=-x^3+3x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

对 $f(x)$ 求导数，得 $f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$.

由 $f'(x)>0$，解得 $0<x<2$；

由 $f'(x)<0$，解得 $x<0$ 或 $x>2$.

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,2)$，单调递减区间是 $(-\infty,0)$ 和 $(2,+\infty)$.

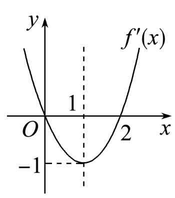
提质归纳

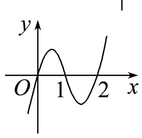
- 函数的单调性
  - 函数与导数图象间的关系
  - 应用
    - 判断函数的单调性
    - 求函数的单调区间

课后素养评价（十八） 函数的单调性

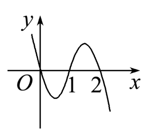
A组 学习·理解

1. $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，$y=f'(x)$ 的图象如图所示，则 $y=f(x)$ 的图象最有可能是下列选项中的 ( )

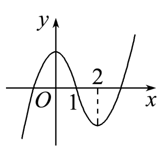




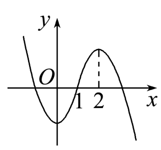
A



B



C



D

C **解析**：由题中导函数的图象可知，当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；

当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；

当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，只有选项 C 符合.

故选 C.

2. 函数 $y=4x^2+\dfrac{1}{x}$ 的单调递增区间是 ( )

A. $(0,+\infty)$　　B. $(-\infty,1)$

C. $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $(1,+\infty)$

C **解析**：因为 $y=f(x)=4x^2+\dfrac{1}{x}$，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，所以 $f'(x)=8x-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{8x^3-1}{x^2}$. 令 $f'(x)>0$，解得 $x>\dfrac{1}{2}$，所以函数 $y=4x^2+\dfrac{1}{x}$ 的单调递增区间是 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

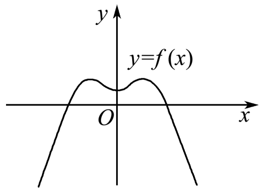
3. 下列函数中，在区间 $(-1,1)$ 上单调递减的是 ( )

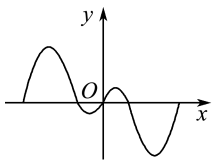
A. $y=2-3x^2$　　B. $y=\ln x$

C.$y=\dfrac{1}{x-2}$　　　　　D.$y=\sin x$

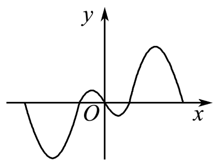
C　**解析**:对于函数 $y=\dfrac{1}{x-2}$,其导数 $y'=\dfrac{-1}{(x-2)^2}<0$,且函数在区间$(-1,1)$上有意义,所以函数 $y=\dfrac{1}{x-2}$在区间$(-1,1)$上单调递减,其余选项都不符合要求.

4.已知函数 $y=f(x)$的图象如图所示,则其导函数 $y=f'(x)$的图象可能是　　(　　)

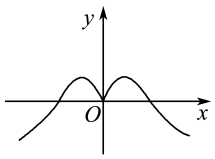




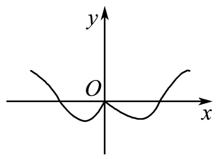
A



B



C



D

A　**解析**:$y=f(x)$的单调性变化情况为增、减、增、减,$y=f'(x)$的符号变化情况依次为大于零、小于零、大于零、小于零,故 A 正确.

5.已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$,则 $f(x)$　　(　　)

A.在$(0,1)$上单调递增

B.在$(1,2)$上单调递增

C.在$(-\infty,1)$上单调递减

D.在$(0,+\infty)$上单调递减

A　**解析**:由题可得 $f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$,令 $f'(x)=0$ 得 $x=1$,所以 $f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减.故选 A.

6.函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\sin x$,$x\in(0,\pi)$的单调递增区间是________.

$\left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$　**解析**:因为 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\sin x$,所以 $f'(x)=\dfrac{1}{2}+\cos x$.

令 $f'(x)>0$,得 $\cos x>-\dfrac{1}{2}$.又因为 $x\in(0,\pi)$,所以 $0<x<\dfrac{2\pi}{3}$.

所以函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\sin x$,$x\in(0,\pi)$的单调递增区间为$\left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

7.函数 $y=\dfrac{1}{2}x^2-\ln x$ 的单调递减区间为________.

$(0,1)$　**解析**:该函数的定义域为$(0,+\infty)$,由 $y'=x-\dfrac{1}{x}<0$,得 $0<x<1$,所以原函数的单调递减区间为$(0,1)$.

8.求函数 $f(x)=\ln(2x-1)-x^2+x$ 的单调递增区间.

解:函数 $f(x)=\ln(2x-1)-x^2+x$ 的定义域为$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$,

且 $f'(x)=\dfrac{2}{2x-1}-2x+1=\dfrac{2-(2x-1)^2}{2x-1}$

$=\dfrac{[\sqrt{2}-(2x-1)][\sqrt{2}+(2x-1)]}{2x-1}$.

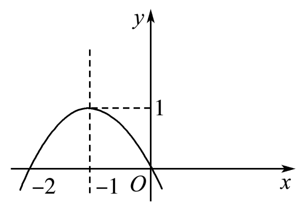
令 $f'(x)=0$,解得 $x=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$(舍),或 $x=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

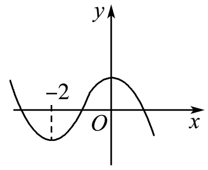
当$\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.

所以 $f(x)$的单调递增区间为$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$.

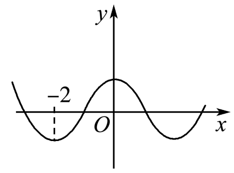
B组　应用·实践

1.已知函数 $f(x)$的导函数 $f'(x)$的图象如图所示,那么函数 $f(x)$的图象最有可能是　　(　　)

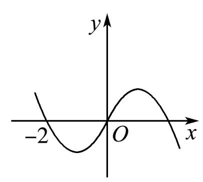




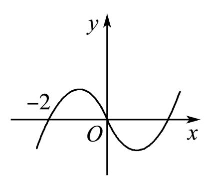
A



B



C



D

A　**解析**:由 $f'(x)$的符号易判断,选 A.

2.已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R})$,若 $a^2-3b<0$,则 $f(x)$是　　(　　)

A.减函数
B.增函数
C.常函数
D.既不是减函数也不是增函数
B **解析**：由题意知 $f'(x)=3x^2+2ax+b$，则方程 $3x^2+2ax+b=0$ 的根的判别式 $\Delta=4a^2-12b=4(a^2-3b)<0$，故 $f'(x)>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，即 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数.

3. 函数 $f(x)=x-2\sin x+1, x\in(0,\pi)$ 的单调递增区间是（　　）

A. $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{6},\pi\right)$

C. $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$　　D. $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$

D **解析**：对 $f(x)=x-2\sin x+1$ 求导，得 $f'(x)=1-2\cos x$.

令 $f'(x)>0$，得 $\cos x<\frac{1}{2}$.

因为 $x\in(0,\pi)$，所以 $\frac{\pi}{3}<x<\pi$，

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$.

4.（多选）（新定义）如果对定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $y=f(x)$，对任意两个不相等的实数 x_1,x_2，都有 $x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>x_1f(x_2)+x_2f(x_1)$，那么称函数 $y=f(x)$ 为“H 函数”.下列函数为 H 函数的是（　　）

A. $f(x)=\sin x$
B. $f(x)=e^x$
C. $f(x)=x^3+3x$
D. $f(x)=x|x|$

CD **解析**：因为 $x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>x_1f(x_2)+x_2f(x_1)$，所以 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$，即 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

对于 A，由于 $f(x)=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上不具有单调性，故排除 A；对于 B，易知 $f(x)=e^x$ 为非奇非偶函数，故排除 B；对于 C，$f(x)=x^3+3x$，$f'(x)=3x^2+3>0$，所以 $f(x)$ 为奇函数且在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，满足题意；对于 D，易知 $f(x)=x|x|$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，又 $f(x)$ 是奇函数，故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，满足题意.

5. 关于函数 $f(x)=\ln(e^x+1)-\frac{x}{2}$，下列说法正确的是（　　）

A. $f(x)$ 是偶函数，且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增
B. $f(x)$ 是偶函数，且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减
C. $f(x)$ 是奇函数，且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增
D. $f(x)$ 既不是奇函数，也不是偶函数

A **解析**：因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=\ln(e^{-x}+1)+\frac{x}{2}=\ln(e^x+1)-x+\frac{x}{2}=\ln(e^x+1)-\frac{x}{2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数.

当 $x>0$ 时，$f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{1}{2}=\frac{e^x-1}{2(e^x+1)}>0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.故选 A.

6. 函数 $f(x)=x^2-5x+2\ln(2x)$ 的单调递增区间是____________.

$\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$(2,+\infty)$ **解析**：易知 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，

对 $f(x)$ 求导，得 $f'(x)=\frac{(2x-1)(x-2)}{x}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=2$.

当 $x>2$ 或 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$(2,+\infty)$.

7. 判断函数 $f(x)=2x(e^x-1)-x^2$ 的单调性.

解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=2(e^x-1+xe^x-x)=2(e^x-1)(x+1)$.
当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)>0$；
当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$；
当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.
所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-1,0)$ 上单调递减.

第 2 课时　函数的单调性的应用

学习任务目标

1.进一步理解函数的导数和其单调性的关系.
2.能求简单的含参数的函数的单调区间.
3.能根据函数的单调性求参数的取值范围.

◦ 问题式预习 ◦

【知识清单】

知识点一　判断函数 $y=f(x)$ 的单调性的步骤

第 1 步,确定函数的定义域;
第 2 步,求出导数 $f'(x)$ 的零点;
第 3 步,用 $f'(x)$ 的零点将 $f(x)$ 的定义域划分为若干个区间,列表给出 $f'(x)$ 在各区间上的正负,由此得出函数 $y=f(x)$ 在定义域内的单调性.

知识点二　导数的绝对值与函数值变化的关系

一般地,设函数 $y=f(x)$,在区间 (a,b) 上:

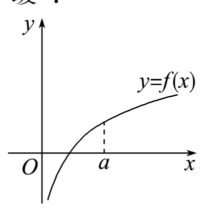
导数的绝对值	函数值变化	函数的图象
较大	较快	比较"陡峭"(向上或向下)
较小	较慢	比较"平缓"

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)利用导数求函数的单调区间时,要先确定函数的定义域.　(√)

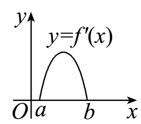
(2)如图,函数 $y=f(x)$ 的图象在 $(0,a)$ 内"陡峭",在 $(a,+\infty)$ 上"平缓".　(√)

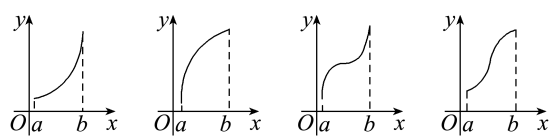


(3)函数 $y=ax^3-1(a\in\mathbf{R})$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.(　　)

×　**提示**:$y'=3ax^2$.当 $a>0$ 时,$y'\geqslant 0$,仅在 $x=0$ 时 $y'=0$,所以函数在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;当 $a<0$ 时,$y'\leqslant 0$,仅在 $x=0$ 时 $y'=0$,所以函数在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;当 $a=0$ 时,$y'=0$,函数在 $\mathbf{R}$ 上不具备单调性.

2.已知 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数,$f'(x)$ 的图象如图所示,则 $f(x)$ 的图象只可能是　(　　)





A　　B　　C　　D

D　**解析**:从 $f'(x)$ 的图象可以看出,在区间 (a,b) 上,$f'(x)$ 先增后减,所以 $f(x)$ 的图象先越来越陡,之后越来越平缓,只有选项 D 符合.

3.请思考并回答下列问题:

(1)若在某区间上有有限个点使 $f'(x)=0$,其余的点恒有 $f'(x)>0$,则 $f(x)$ 仍单调递增吗?

提示:$f(x)$ 仍单调递增(单调递减的情形类似).

(2)可导函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调递增的充要条件是什么?

提示:可导函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调递增的充要条件是对任意的 $x\in(a,b)$,都有 $f'(x)\geqslant 0$,且在 (a,b) 的任一非空子区间上 $f'(x)$ 不恒为 0.

◦ 任务型课堂 ◦

任务 1 > 含参数函数的单调性

探究活动

例 1　讨论下列函数的单调性.

(1)$f(x)=-\dfrac{1}{3}ax^3+x^2+1(a\leqslant 0)$;

(2)$f(x)=\ln x-ax^2+(2-a)x$.

解:(1)①当 $a=0$ 时,$f(x)=x^2+1$,其在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

②当 $a<0$ 时,$f'(x)=-ax^2+2x$.

令 $f'(x)>0$,即 $(-ax+2)x>0$,则 $\left(x-\dfrac{2}{a}\right)x>0$,

解得 $x>0$ 或 $x<\dfrac{2}{a}$;

令 $f'(x)<0$,即 $(-ax+2)x<0$,则 $\left(x-\dfrac{2}{a}\right)x<0$,

解得 $\dfrac{2}{a}<x<0$.

故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{2}{a}\right)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增,在 $\left(\dfrac{2}{a},0\right)$ 上单调递减.

综上所述,当 $a=0$ 时,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

在$(-\infty,0)$上单调递减；当$a<0$时，$f(x)$在$\left(-\infty,\frac{2}{a}\right)$和$(0,+\infty)$上单调递增，在$\left(\frac{2}{a},0\right)$上单调递减.

(2)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{1}{x}-2ax+2-a=\frac{-(2x+1)(ax-1)}{x}$.

①若$a\leqslant0$，则$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

②若$a>0$，由$f'(x)=0$得$x=\frac{1}{a}$，则当$x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$时，$f'(x)>0$；当$x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$时，$f'(x)<0$，

所以$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减.

综上所述，当$a\leqslant0$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；当$a>0$时，$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减.

【探究总结】

讨论含参函数的单调性的关键点

(1)涉及含参数的函数的单调性问题，一定要判断参数对导数$f'(x)$在某一区间内的正负是否有影响.若有影响，则必须分类讨论，讨论时要做到不重不漏，最后进行总结.

(2)求含参函数$y=f(x)$的单调区间，实质上就是解含参数的不等式$f'(x)>0$或$f'(x)<0$，所得不等式的解集就是函数的单调区间.

应用迁移

(2024·全国甲卷节选)已知函数$f(x)=a(x-1)-\ln x+1$，求$f(x)$的单调区间.

解：$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}$.当$a\leqslant0$时，$f'(x)=\frac{ax-1}{x}<0$，故$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减；当$a>0$时，令$f'(x)=0$，解得$x=\frac{1}{a}$.当$x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，当$x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减.综上所述，当$a\leqslant0$时，$f(x)$的单调递减区间为$(0,+\infty)$，无单调递增区间；当$a>0$时，$f(x)$的单调递增区间为$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$，单调递减区间为$\left(0,\frac{1}{a}\right)$.

任务2 已知函数的单调性求参数

探究活动

例2 (1)已知函数$f(x)=x^3-ax-1$为$\mathbf{R}$上的增函数，则实数a的取值范围是________.

$(-\infty,0]$ **解析**：由已知得$f'(x)=3x^2-a$，

因为$f(x)$为$\mathbf{R}$上的增函数，

所以$f'(x)=3x^2-a\geqslant0$在$\mathbf{R}$上恒成立，

即$a\leqslant3x^2$对任意$x\in\mathbf{R}$恒成立.因为$3x^2\geqslant0$，所以只需$a\leqslant0$.

又因为当$a=0$时，$f'(x)=3x^2\geqslant0$，$f(x)=x^3-1$在$\mathbf{R}$上是增函数.所以实数a的取值范围为$(-\infty,0]$.

(2)已知函数$f(x)=2x^2-\ln x$，若$f(x)$在区间$(2m,m+1)$上单调递增，求实数m的取值范围.

解：$f(x)=2x^2-\ln x$的定义域为$(0,+\infty)$，对$f(x)$求导数，得$f'(x)=4x-\frac{1}{x}$.令$f'(x)=0$，解得$x=\frac{1}{2}$，或$x=-\frac{1}{2}$(舍)，当$x>\frac{1}{2}$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在区$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增.

因为$f(x)$在区间$(2m,m+1)$上单调递增，所以$(2m,m+1)\subseteq\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

所以$\begin{cases}m+1>2m,\\2m\geqslant\frac{1}{2},\end{cases}$ 解得$\frac{1}{4}\leqslant m<1$.

因此，实数m的取值范围是$\left[\frac{1}{4},1\right)$.

[一题多思]

思考1.若本例(1)的函数在$(-1,1)$内单调递减，求实数a的取值范围.

解：由题意可知$f'(x)=3x^2-a\leqslant0$在$(-1,1)$上恒成立，所以$\begin{cases}f'(-1)\leqslant0,\\f'(1)\leqslant0,\end{cases}$即$\begin{cases}3-a\leqslant0,\\3-a\leqslant0,\end{cases}$所以$a\geqslant3$，即实数$a$的取值范围是$[3,+\infty)$.

思考2.若本例(1)的函数的单调递减区间为$(-1,1)$，求实数a的值.

解：对$f(x)$求导数，得$f'(x)=3x^2-a$.

当$a\leqslant0$时，$f'(x)\geqslant0$，且$f'(x)$不恒为0，

所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上为增函数，不满足题意.

当$a>0$时，令$f'(x)=0$，解得$x=-\frac{\sqrt{3a}}{3}$，或$x=\frac{\sqrt{3a}}{3}$.当$-\frac{\sqrt{3a}}{3}<x<\frac{\sqrt{3a}}{3}$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在区间$\left(-\frac{\sqrt{3a}}{3},\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)$内单调递减，即函数$f(x)$的单调递减区间为$\left(-\frac{\sqrt{3a}}{3},\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)$.由已知函数$f(x)$的单调递减区间为$(-1,1)$，所以$\frac{\sqrt{3a}}{3}=1$，即$a=3$.

【探究总结】

已知函数单调性求参数的两种方法

(1)分离参数法

可导函数 $f(x)$在(a,b)上单调递增(减)等价于 $f'(x)\geqslant 0$($f'(x)\leqslant 0$)在(a,b)上恒成立,将参数分离后可转化为求某个函数的值域的问题,注意验证等号是否成立.

(2)子集法

若能较容易地求出函数的单调区间,则可利用子区间来解决.若 $f(x)$在(a,b)上单调递增(减),则区间(a,b)是相应单调区间的子集.

应用迁移

1.若函数 $f(x)=\dfrac{x^2-a}{e^x}$在 $\mathbf{R}$ 上存在单调递增区间,则实数 a 的取值范围是　(　　)

A.$[-1,+\infty)$　　B.$(-1,+\infty)$

C.$(-\infty,-1]$　　D.$(-\infty,-1)$

B　**解析**:因为 $f(x)=\dfrac{x^2-a}{e^x}$,所以 $f'(x)=\dfrac{2x-(x^2-a)}{e^x}=\dfrac{a+2x-x^2}{e^x}$.由题意可知,存在 $x\in\mathbf{R}$,使得 $f'(x)>0$,即存在 $x\in\mathbf{R}$,使得 $a>x^2-2x$.二次函数 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1\geqslant -1$,当且仅当 $x=1$ 时,等号成立,所以 $a>-1$,即实数 a 的取值范围是$(-1,+\infty)$.

2.设函数 $f(x)$在(a,b)上的导函数为 $f'(x)$,$f'(x)$在(a,b)上的导函数记为 $f''(x)$.若在(a,b)上 $f''(x)<0$ 恒成立,则称函数 $f(x)$在(a,b)上为"凸函数".已知函数 $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{t}{3}x^3+\dfrac{3}{2}x^2$ 在$(1,4)$上为"凸函数",则实数 t 的取值范围是　(　　)

A.$[3,+\infty)$　　B.$(3,+\infty)$

C.$\left[\dfrac{51}{8},+\infty\right)$　　D.$\left(\dfrac{51}{8},+\infty\right)$

C　**解析**:由 $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{t}{3}x^3+\dfrac{3}{2}x^2$ 可得 $f'(x)=x^3-tx^2+3x$,$f''(x)=3x^2-2tx+3$.

因为函数 $f(x)$在$(1,4)$上为"凸函数",所以 $3x^2-2tx+3<0$ 在$(1,4)$上恒成立,

即 $t>\dfrac{3}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$在$(1,4)$上恒成立.

令 $g(x)=\dfrac{3}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$,

易知 $g(x)$在$(1,4)$上单调递增,所以 $t\geqslant g(4)=\dfrac{51}{8}$,所以 $t\geqslant\dfrac{51}{8}$.

所以实数 t 的取值范围是$\left[\dfrac{51}{8},+\infty\right)$.故选 C.

3.已知函数 $f(x)=2ax-\dfrac{1}{x^2}$,$x\in(0,1]$,若 $f(x)$在$(0,1]$上单调递增,求实数 a 的取值范围.

解:由题意得 $f'(x)=2a+\dfrac{2}{x^3}$.

因为 $f(x)$在$(0,1]$上单调递增,

所以 $f'(x)\geqslant 0$,即 $a\geqslant -\dfrac{1}{x^3}$在$(0,1]$上恒成立.

令 $g(x)=-\dfrac{1}{x^3}$,则 $g(x)=-\dfrac{1}{x^3}$在$(0,1]$上单调递增,

所以 $g(x)_{\max}=g(1)=-1$,所以 $a\geqslant -1$.

当 $a=-1$ 时,$f'(x)=-2+\dfrac{2}{x^3}$,

$\forall x\in(0,1]$,$f'(x)\geqslant 0$,当且仅当 $x=1$ 时,等号成立,所以 $a=-1$ 时,$f(x)$在$(0,1]$上单调递增.

所以 $f(x)$在$(0,1]$上单调递增时,实数 a 的取值范围是$[-1,+\infty)$.

任务3 利用导数比较大小或解不等式

探究活动

例3　(1)已知函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$,当 $1<x<3$ 时,下列关系正确的是　(　　)

A.$f(\sqrt{x})<f(x)<[f(x)]^2$

B.$f(x)<f(\sqrt{x})<[f(x)]^2$

C.$[f(x)]^2<f(\sqrt{x})<f(x)$

D.$[f(x)]^2<f(x)<f(\sqrt{x})$

A　**解析**:由题意得 $f'(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$,当 $1<x<3$ 时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$在$(1,3)$上单调递增.又 $1<\sqrt{x}<x<3$,所以 $f(\sqrt{x})<f(x)$.由 $f(x)$在$(1,3)$上单调递增,可知当 $x\in(1,3)$时,$f(x)>f(1)=e$,所以$[f(x)]^2>f(x)$.所以 $f(\sqrt{x})<f(x)<[f(x)]^2$.

(2)已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$的导函数为 $f'(x)$,且对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f'(x)>2$,$f(2)=0$,则不等式 $f(x)-2x+4>0$ 的解集为　(　　)

A.$(2,+\infty)$　　B.$(1,+\infty)$

C.$(-\infty,1)$　　D.$(-\infty,2)$

A　**解析**:令 $g(x)=f(x)-2x+4$,则 $g'(x)=f'(x)-2>0$,所以 $g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

又 $g(2)=f(2)-2\times 2+4=0$,

则不等式 $f(x)-2x+4>0$ 等价于 $g(x)>g(2)$,所以 $x>2$.故选 A.

【探究总结】

在比较两数(式)的大小时,首先要判断所给函数的单调性,再根据函数的单调性比较大小,有时还需要根据待比较式的结构特征构造新的函数,由新函数的单调性来比较大小.

应用迁移

1.已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$,若$(x-1)\cdot f'(x)<0$,则下列各项正确的是　(　　)

A.$f(0)+f(2)>2f(1)$

B. $f(0)+f(2)=2f(1)$

C. $f(0)+f(2)<2f(1)$

D. $f(0)+f(2)$与$2f(1)$的大小关系不能确定

C **解析**：当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，所以 $f(1)>f(2)$.

当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递增，所以 $f(0)<f(1)$.所以 $f(0)+f(2)<2f(1)$.

2.已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(2)=0$.若当 $x>0$ 时，$xf'(x)+f(x)>0$，则不等式 $xf(x)>0$ 的解集是________

$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ **解析**：设 $g(x)=xf(x)$，则 $g'(x)=xf'(x)+f(x)$.因为当 $x>0$ 时，$xf'(x)+f(x)>0$，所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.因为 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $g(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数.又 $f(2)=0$，则 $g(2)=2f(2)=0$，所以不等式 $xf(x)>0$ 等价于 $g(x)>0=g(2)$，所以$|x|>2$，解得 $x<-2$ 或 $x>2$，所以不等式 $xf(x)>0$ 的解集是$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

提质归纳

函数单调性的应用
- 含参数函数的单调性
- 已知函数的单调性求参数
- 利用导数比较大小或解不等式

课后素养评价（十九） 函数的单调性的应用

A组 学习·理解

1.已知函数 $f(x)$，若在区间$[a,b]$上有$f'(x)>0$，且 $f(a)\geqslant 0$，则在(a,b)上有 ( )

A. $f(x)>0$

B. $f(x)<0$

C. $f(x)=0$

D. $f(x)$符号不能确定

A **解析**：由 $f'(x)>0$，得 $f(x)$在(a,b)上单调递增.

所以当 $x\in(a,b)$时，$f(x)>f(a)\geqslant 0$.

2.若 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2$ 的单调递减区间是$(0,2)$，则正数 a 的值是 ( )

A.1 B.2 C.3 D.4

A **解析**：$f'(x)=x^2-2ax$，令 $f'(x)<0$，由于 $a>0$，故解得 $0<x<2a$，故 $2a=2$，即 $a=1$.

3.若函数 $f(x)=x-\frac{4}{x}-a\ln x$ 单调递增，则实数 a 的取值范围为 ( )

A. $(-\infty,0]$ B. $(-\infty,-4]$

C. $[-4,4]$ D. $(-\infty,4]$

D **解析**：依题意函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=1+\frac{4}{x^2}-\frac{a}{x}=\frac{x^2-ax+4}{x^2}\geqslant 0$，即 $x^2-ax+4\geqslant 0$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$恒成立，

即 $a\leqslant\frac{4}{x}+x$ 恒成立.因为 $\frac{4}{x}+x\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$（当且仅当 $x=2$ 时取“=”），所以 $a\leqslant 4$.故选 D.

4.若函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-bx$ 存在单调递减区间，则实数 b 的取值范围为 ( )

A. $[2,+\infty)$ B. $(2,+\infty)$

C. $(-\infty,2)$ D. $(-\infty,2]$

B **解析**：由 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-bx$，可得 $f'(x)=\frac{x^2-bx+1}{x}(x>0)$.由题意可得存在 $x>0$，使得 $f'(x)=\frac{x^2-bx+1}{x}<0$，即存在 $x>0$，使得 $x^2-bx+1<0$，等价于 $b>x+\frac{1}{x}$.由函数性质易得 $b>2$.故选 B.

5.已知函数 $f(x)=x^2-2\cos x$，则 $f(0)$，$f\left(-\frac{1}{3}\right)$，$f\left(\frac{2}{3}\right)$的大小关系是 ( )

A. $f(0)<f\left(-\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{2}{3}\right)$

B. $f\left(-\frac{1}{3}\right)<f(0)<f\left(\frac{2}{3}\right)$

C. $f\left(\frac{2}{3}\right)<f\left(-\frac{1}{3}\right)<f(0)$

D. $f(0)<f\left(\frac{2}{3}\right)<f\left(-\frac{1}{3}\right)$

A **解析**：易知 $f(x)=x^2-2\cos x$ 为偶函数，

所以 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)$.

因为 $f'(x)=2x+2\sin x$，当 $x\in(0,1)$时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$在$(0,1)$上单调递增.

所以 $f(0)<f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{2}{3}\right)$.

所以 $f(0)<f\left(-\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{2}{3}\right)$.故选 A.

6.设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$，$g(x)$的导函数都存在，且 $f'(x)<g'(x)$，则当 $x\in(a,b)$时 ( )

A. $f(x)<g(x)$

B.$f(x)>g(x)$
C.$f(x)+g(a)<g(x)+f(a)$
D.$f(x)+g(b)<g(x)+f(b)$

C　**解析**:对于 A,B,不妨设 $f(x)=-2x,g(x)=1$,则 $f'(x)=-2,g'(x)=0$,满足题意,
若 $x=-1\in(a,b)$,则 $f(-1)=2>1=g(-1)$,故 A 错误,
若 $x=0\in(a,b)$,则 $f(0)=0<1=g(0)$,故 B 错误;
对于 C,D,因为 $f(x),g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上的导函数都存在,且 $f'(x)<g'(x)$,
令 $h(x)=f(x)-g(x)$,则 $h'(x)=f'(x)-g'(x)<0$,
所以 $h(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,
因为 $x\in(a,b)$,即 $a<x<b$,所以 $h(b)<h(x)<h(a)$,
由 $h(x)<h(a)$得 $f(x)-g(x)<f(a)-g(a)$,则 $f(x)+g(a)<g(x)+f(a)$,故 C 正确;
由 $h(b)<h(x)$得 $f(b)-g(b)<f(x)-g(x)$,则 $f(x)+g(b)>g(x)+f(b)$,故 D 错误.
故选 C.

7.(新定义)定义运算$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$,若函数 $f(x)=\begin{vmatrix} x^2-1 & 1 \\ -x & x+m \end{vmatrix}$的单调递减区间是(0,2),则实数 $m=$________.

-3　**解析**:由题意可知 $f(x)=(x^2-1)(x+m)-1\times(-x)=x^3+mx^2-x-m+x=x^3+mx^2-m$,所以$f'(x)=3x^2+2mx$.令 $f'(x)=0$,得 $x_1=0,x_2=-\dfrac{2m}{3}$.因为函数 $f(x)$的单调递减区间是(0,2),所以$-\dfrac{2m}{3}=2$,解得 $m=-3$.

8.已知函数 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2$.
(1)若 $a=1$,求曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线的方程;
(2)若 $a>0$,求函数 $f(x)$的单调区间.

解:(1)因为 $a=1$,所以 $f(x)=x^3+x^2-x+2$,
所以 $f'(x)=3x^2+2x-1$,则 $f'(1)=4$.
又 $f(1)=3$,所以切点坐标为(1,3),
所以所求切线方程为 $y-3=4(x-1)$,即 $4x-y-1=0$.
(2)对 $f(x)$求导,
得 $f'(x)=3x^2+2ax-a^2=(x+a)\cdot(3x-a)$.
由 $f'(x)=0$,得 $x=-a$ 或 $x=\dfrac{a}{3}$.
又 $a>0$,当 $-a<x<\dfrac{a}{3}$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;
当 $x<-a$ 或 $x>\dfrac{a}{3}$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.
故 $f(x)$的单调递减区间为$\left(-a,\dfrac{a}{3}\right)$,单调递增区间为$(-\infty,-a)$和$\left(\dfrac{a}{3},+\infty\right)$.

B组　应用·实践

1.已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+ax^2+x+1$ 在$(-\infty,0)$,$(3,+\infty)$上单调递增,在(1,2)上单调递减,则实数 a 的取值范围为　(　　)

A.$(-\infty,-1]$　　B.$\left[-\dfrac{5}{3},-\dfrac{5}{4}\right]$

C.$\left(-\dfrac{5}{3},-1\right]$　　D.$\left(-\dfrac{5}{3},-\dfrac{5}{4}\right)$

B　**解析**:由 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+ax^2+x+1$,得 $f'(x)=x^2+2ax+1$.
因为 $f(x)$在$(-\infty,0)$,$(3,+\infty)$上单调递增,在(1,2)上单调递减,

所以$\begin{cases} f'(0)\geqslant 0, \\ f'(1)\leqslant 0, \\ f'(2)\leqslant 0, \\ f'(3)\geqslant 0, \end{cases}$即$\begin{cases} 1\geqslant 0, \\ 1+2a+1\leqslant 0, \\ 4+4a+1\leqslant 0, \\ 9+6a+1\geqslant 0, \end{cases}$

解得$-\dfrac{5}{3}\leqslant a\leqslant-\dfrac{5}{4}$.所以实数 a 的取值范围为$\left[-\dfrac{5}{3},-\dfrac{5}{4}\right]$.故选 B.

2.(多选)已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$满足 $f(x)>-f'(x)$,则下列结论成立的是　(　　)
A.$f(2\,023)<\mathrm{e}f(2\,024)$
B.$\mathrm{e}f(2\,023)>f(2\,024)$
C.$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增
D.若 $t>0$,则有 $f(x)<\mathrm{e}^t f(x+t)$

AD　**解析**:由 $f(x)>-f'(x)$,得 $\mathrm{e}^x f(x)+\mathrm{e}^x f'(x)>0$,即$[\mathrm{e}^x f(x)]'>0$,所以函数 $y=\mathrm{e}^x f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,故 $\mathrm{e}^{2\,023}f(2\,023)<\mathrm{e}^{2\,024}f(2\,024)$,所以 $f(2\,023)<\mathrm{e}f(2\,024)$,故 A 正确,B 不正确;函数 $y=\mathrm{e}^x f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增时,$f(x)$不一定单调递增,如 $y=\mathrm{e}^x\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=\left(\dfrac{\mathrm{e}}{2}\right)^x$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,但$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,故 C 不正确;因为函数 $y=\mathrm{e}^x f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以当 $t>0$ 时,有 $\mathrm{e}^x f(x)<\mathrm{e}^{x+t}f(x+t)$,故有 $f(x)<\mathrm{e}^t f(x+t)$成立,故 D 正确.

3.函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+ax-5$ 在区间$[-1,2]$上不单调,则实数 a 的取值范围是　(　　)

A.$(-\infty,-3]$

B.$(-3,1)$

C.$[1,+\infty)$

D.$(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$

B **解析**：$f'(x)=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$，

如果函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax-5$ 在区间$[-1,2]$上单调，

那么 $a-1\geqslant 0$ 或 $\begin{cases}f'(-1)\leqslant 0,\\ f'(2)\leqslant 0,\end{cases}$

即 $a\geqslant 1$ 或 $\begin{cases}1+2+a\leqslant 0,\\ 4-4+a\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant 1$ 或 $a\leqslant -3$，

所以当函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax-5$ 在区间$[-1,2]$上不单调时，$-3<a<1$.故选 B.

4.已知函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f(x)$的导函数为 $f'(x)$，若 $xf'(x)-1<0$，$f(\mathrm{e})=2$，则关于 x 的不等式 $f(\mathrm{e}^x)<x+1$ 的解集为__________.

$(1,+\infty)$ **解析**：令函数 $g(x)=f(x)-\ln x$，$x>0$，则 $g'(x)=f'(x)-\frac{1}{x}=\frac{xf'(x)-1}{x}<0$，因此函数 $g(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调递减，$g(\mathrm{e})=f(\mathrm{e})-\ln \mathrm{e}=1$，因此 $f(\mathrm{e}^x)<x+1\Leftrightarrow f(\mathrm{e}^x)-x<1\Leftrightarrow g(\mathrm{e}^x)<g(\mathrm{e})$，即 $\mathrm{e}^x>\mathrm{e}$，解得 $x>1$，

所以不等式 $f(\mathrm{e}^x)<x+1$ 的解集为$(1,+\infty)$.

5.已知函数 $f(x)=ax-\ln x$.若 $f(x)>1$ 在区间$(1,+\infty)$上恒成立，求实数 a 的取值范围.

解：由已知得 $a>\frac{1+\ln x}{x}$在$(1,+\infty)$上恒成立，

设 $g(x)=\frac{1+\ln x}{x}$，则 $g'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}<0(x>1)$.

所以 $g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，

所以 $g(x)<g(1)$.

因为 $g(1)=1$，所以 $\frac{1+\ln x}{x}<1$ 在$(1,+\infty)$上恒成立.

所以 $a\geqslant 1$，即实数 a 的取值范围为$[1,+\infty)$.

6.已知函数 $f(x)=x+a\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数 $f(x)$的单调性；

(2)当 $a=1$ 时，如果函数 $g(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2+tx$ 在定义域内单调递增，求实数 t 的取值范围.

解：(1)定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=1+\frac{a}{x}=\frac{x+a}{x}$.

①当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

②当 $a<0$ 时，当 $x\in(0,-a)$时，$f'(x)<0$，当 $x\in(-a,+\infty)$时，$f'(x)>0$，

即 $f(x)$在$(0,-a)$上单调递减，在$(-a,+\infty)$上单调递增.

综上，当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；当 $a<0$ 时，$f(x)$在$(0,-a)$上单调递减，在$(-a,+\infty)$上单调递增.

(2)当 $a=1$ 时，$g(x)=x+\ln x+\frac{1}{2}x^2+tx$，

$g'(x)=1+\frac{1}{x}+x+t$.

由题意 $g'(x)\geqslant 0$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$恒成立，

即 $t\geqslant -x-\frac{1}{x}-1$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$恒成立.

因为 $-x-\frac{1}{x}-1=-\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\leqslant -2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}-1=-3$，所以 $t\geqslant -3$，即实数 t 的取值范围为$[-3,+\infty)$.

7.已知函数 $f(x)=\frac{a}{x}+\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $f'(1)=-2$，求实数 a 的值；

(2)求函数 $f(x)$的单调区间.

解：(1)$f'(x)=-\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-a}{x^2}$，

因为 $f'(1)=\frac{1-a}{1}=1-a=-2$，

所以 $a=3$.

(2)函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

$f'(x)=-\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-a}{x^2}$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，

所以 $f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$，无单调递减区间；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=a$，

当 $x>a$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

当 $0<x<a$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

所以 $f(x)$的单调递增区间为$(a,+\infty)$，单调递减区间为$(0,a)$.

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$，无单调递减区间；

当 $a>0$ 时，$f(x)$的单调递增区间为$(a,+\infty)$，单调递减区间为$(0,a)$.

5.3.2　函数的极值与最大(小)值

第1课时　函数的极值

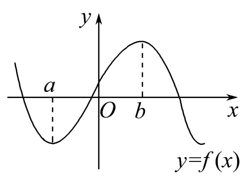
学习任务目标

1.了解极值、极值点的概念.
2.理解函数在某点取得极值的条件.
3.掌握求函数极值的方法步骤.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　极值点与极值



如图,函数 $y=f(x)$ 在点 $x=a$ 处的函数值 $f(a)$ 比它在点 $x=a$ 附近其他点处的函数值都小,$f'(a)=0$;而且在点 $x=a$ 附近的左侧 $f'(x)<0$,右侧 $f'(x)>0$.类似地,函数 $y=f(x)$ 在点 $x=b$ 处的函数值 $f(b)$ 比它在点 $x=b$ 附近其他点处的函数值都大,$f'(b)=0$;而且在点 $x=b$ 附近的左侧 $f'(x)>0$,右侧 $f'(x)<0$.我们把 a 叫做函数 $y=f(x)$ 的极小值点,$f(a)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的极小值;b 叫做函数 $y=f(x)$ 的极大值点,$f(b)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的极大值.极小值点、极大值点统称为极值点,极小值和极大值统称为极值.

知识点二　求函数 $y=f(x)$ 的极值的方法

解方程 $f'(x)=0$,当 $f'(x_0)=0$ 时:

(1)如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)>0$,右侧 $f'(x)<0$,那么 $f(x_0)$ 是极大值;

(2)如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)<0$,右侧 $f'(x)>0$,那么 $f(x_0)$ 是极小值.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)导数值为0的点一定是函数的极值点.　(　　)

×　**提示**:不一定,如 $f(x)=x^3$,$f'(0)=0$,但 $x=0$ 不是 $f(x)=x^3$ 的极值点.

(2)在可导函数的极值点处,函数图象的切线与 x 轴平行.　(　　)

×　**提示**:切线不一定与 x 轴平行.

(3)函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 无极值.　(√)

(4)函数的极小值可能大于它的极大值.　(√)

2.函数 $y=2x^3-x^2$ 的极大值为　(　　)

A.0　　B.-9

C.$0,\dfrac{27}{16}$　　D.$\dfrac{27}{16}$

A　**解析**:$y'=6x^2-2x$,令 $y'=0$,得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{1}{3}$.当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$y'>0$;当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ 时,$y'<0$;当 $x\in\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$ 时,$y'>0$.故 $x=0$ 是极大值点,则极大值 $y=0$.

3.请思考并回答下列问题:

(1)如果函数定义在 $[a,b]$$(a<b)$ 上且存在极值,那么函数的极值点一定出现在区间的内部,区间的端点不能成为极值点.这种说法正确吗?

提示:正确.

(2)函数的极值点与函数的单调区间有什么关系?

提示:极大值点是函数单调递增区间与单调递减区间的分界点,极小值点是函数单调递减区间与单调递增区间的分界点.

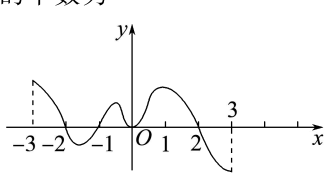
(3)若函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上是单调函数,则函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上有极值吗?

提示:依据极值的定义可知,若函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上是单调函数,则函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上没有极值.

○ 任务型课堂 ○

任务1 > 函数极值的概念

1.如图,已知 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象,则 $f(x)$ 的极小值点的个数为　(　　)



A.1　　B.2　　C.3　　D.4

A　**解析**:由导函数 $f'(x)$ 的图象知,在 $x=-2$ 处 $f'(-2)=0$,且其两侧导数符号相反,左正右负,所以 $x=-2$ 是极大值点;

在 $x=-1$ 处,$f'(-1)=0$,且其两侧导数符号相反,左负右正,所以 $x=-1$ 是极小值点;

在 $x=0$ 处,$f'(0)=0$,其两侧导数符号相同,所以 $x=0$ 不是极值点;

在 $x=2$ 处，$f'(2)=0$，且其两侧导数符号相反，左正右负，所以 $x=2$ 是极大值点.

所以 $f(x)$ 的极小值点的个数为 1.故选 A.

2. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(2a+3)x-1$ 有两个极值点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(-1,3)$

B. $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

C. $(-3,1)$

D. $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

B　**解析**：由题意，函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(2a+3)x-1$，则 $f'(x)=x^2+2ax+(2a+3)$.

因为函数 $f(x)$ 有两个极值点，所以方程 $f'(x)=0$ 有两个不相等的实数根，

即 $x^2+2ax+(2a+3)=0$ 有两个不相等的实数根.

所以 $\Delta=(2a)^2-4(2a+3)>0$，解得 $a<-1$ 或 $a>3$.所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.故选 B.

3. 已知函数 $f(x)=\frac{x^3}{e^x}$，那么（　　）

A. $f(x)$ 有极小值，也有极大值

B. $f(x)$ 有极小值，没有极大值

C. $f(x)$ 有极大值，没有极小值

D. $f(x)$ 没有极值

C　**解析**：$f(x)=\frac{x^3}{e^x}$，则 $f'(x)=\frac{x^2(3-x)}{e^x}$.故函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,3)$ 上单调递增，在 $(3,+\infty)$ 上单调递减.故函数有极大值，没有极小值.故选 C.

【探究总结】

理解极值概念需要注意的几点

(1)极值点不是点.

(2)极值是函数的局部性质.

(3)函数的极值不唯一.

(4)极大值与极小值两者的大小不确定.

(5)极值点出现在区间的内部，区间端点不能是极值点.

(6)若 $f'(x_0)=0$，则 x_0 不一定是极值点，即“$f'(x_0)=0$”是“$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取到极值”的必要不充分条件，函数 $y=f'(x)$ 的变号零点，才是函数的极值点.

任务2 求函数的极值

探究活动

例 1　求下列函数的极值.

(1) $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$；

(2) $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$；

(3) $f(x)=2x+\frac{8}{x}$.

解：(1) $f'(x)=3x^2-6x-9$.令 $f'(x)=0$，即 $3x^2-6x-9=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=3$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以当 $x=-1$ 时，函数 $f(x)$ 有极大值，且极大值为 $f(-1)=10$；当 $x=3$ 时，函数 $f(x)$ 有极小值，且极小值为 $f(3)=-22$.

(2)函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-x$，

解方程 $f'(x)=0$，得 $x_1=1$，$x_2=-1$（舍）.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减

由表可知，$x=1$ 为函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$ 的极大值点，且极大值为 $f(1)=-\frac{1}{2}$.

函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$ 不存在极小值.

(3)函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

且 $f'(x)=2-\frac{8}{x^2}$.令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm2$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−		−	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减		单调递减	极小值	单调递增

因此，当 $x=-2$ 时，$f(x)$ 有极大值，且极大值为 $f(-2)=-8$，

当 $x=2$ 时，$f(x)$ 有极小值，且极小值为 $f(2)=8$.

【探究总结】

1. 讨论函数的性质时，要把握定义域优先的原则，若忽略了定义域，则容易求错极值.

2. 利用导数求函数的极值时，常列表判断导数值为 0 的点 x_0 的左、右两侧的导数值是否异号.若异号，则 $f(x_0)$ 是极值；否则，$f(x_0)$ 不是极值.利用表格可使函数在极值点两侧的单调性一目了然.

应用迁移

求下列函数的极值.

(1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+3$；

(2) $f(x)=x^2e^{-x}$.

解：(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=x^2-2x-3$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=3$ 或 $x=-1$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增	极大值 $\frac{14}{3}$	单调递减	极小值 -6	单调递增

由上表可以看出，$x=-1$ 是 $f(x)$ 的极大值点，$x=3$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

所以 $f(x)_{极大值}=\frac{14}{3}$，$f(x)_{极小值}=-6$.

(2)函数的定义域为 $\mathbf{R}$.

$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=2$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递减	0	单调递增	$4e^{-2}$	单调递减

由上表可以看出，当 $x=0$ 时，函数有极小值，且 $f(0)=0$；当 $x=2$ 时，函数有极大值，且 $f(2)=\frac{4}{e^2}$.

任务3 与函数极值有关的参数问题

探究活动

例2　(1)(2023·新高考全国Ⅱ卷)(多选)若函数 $f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}(a\neq0)$既有极大值也有极小值，则　(　　)

A.$bc>0$　　B.$ab>0$

C.$b^2+8ac>0$　　D.$ac<0$

BCD　**解析**：函数 $f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}$的定义域为$(0,+\infty)$，求导得 $f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}-\frac{2c}{x^3}=\frac{ax^2-bx-2c}{x^3}$.

因为函数 $f(x)$既有极大值也有极小值，所以函数 $f'(x)$在$(0,+\infty)$上有两个变号零点，而 $a\neq0$，

因此方程 $ax^2-bx-2c=0$ 有两个不相等的正根 x_1，x_2.

于是$\begin{cases}\Delta=b^2+8ac>0,\\ x_1+x_2=\frac{b}{a}>0,\\ x_1x_2=-\frac{2c}{a}>0,\end{cases}$即有 $b^2+8ac>0$，$ab>0$，$ac<0$，显然 $a^2bc<0$，即 $bc<0$，A 错误，B，C，D 正确.故选 BCD.

(2)已知函数 $f(x)=x^3-3x+a$(a 为实数).

①函数 $f(x)$的极大值与极小值分别为多少？

②若方程 $f(x)=0$ 有唯一一个实数根，求实数 a 的取值范围.

解：①令 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=1$.

当 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$；当 $-1<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$.

所以当 $x=-1$ 时，$f(x)$有极大值，且 $f(-1)=2+a$；

当 $x=1$ 时，$f(x)$有极小值，且 $f(1)=-2+a$.

②由①知，$2+a<0$ 或 $-2+a>0$，即 $a<-2$ 或 $a>2$.

[一题多思]

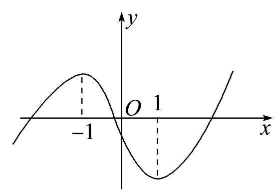
思考1.若本例(2)②中方程 $f(x)=0$ 恰有两个实数根，则实数 a 的值是多少？

解：由①知，$2+a=0$ 或 $-2+a=0$，即 $a=-2$ 或 $a=2$.

思考2.若本例(2)②中方程 $f(x)=0$ 有三个不同的实数根，求实数 a 的取值范围.

解：因为方程 $f(x)=0$ 有三个不同的实数根，

所以 $y=f(x)$的图象与 x 轴有三个交点，如图所示.



由①知，应有$\begin{cases}2+a>0,\\ -2+a<0,\end{cases}$

解得 $-2<a<2$，故实数 a 的取值范围是$(-2,2)$.

【探究总结】

利用函数的极值确定参数值的关注点

(1)利用函数的极值确定参数的值，常根据极值点处导数为 0 和此处函数值为极值两个条件列方程组，利用待定系数法求解.

(2)因为"导数值等于零"不是"此点为极值点"的充要条件，所以利用待定系数法求解后，必须验证根的合理性.

应用迁移

1.已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$ 在 $x=1$ 处取得极值$\frac{5}{2}$.

(1)求实数 a，b 的值；

(2)求函数的另一个极值.

解：(1)因为 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$，

所以 $f'(x)=3x^2+2ax+b$.

依题意可得 $f'(1)=0$，$f(1)=\frac{5}{2}$，

即$\begin{cases}3+2a+b=0,\\ 1+a+b+4=\frac{5}{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\ b=-2,\end{cases}$经验证成立.

(2)由(1)知 $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+4$，

$f'(x)=3x^2-x-2=(3x+2)(x-1)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=-\frac{2}{3}$ 或 $x=1$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以函数的另一个极值在 $x=-\frac{2}{3}$ 处取得，是极大值，极大值为 $f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{130}{27}$.

2. 设函数 $f(x)=[ax^2-(3a+1)x+3a+2]e^x$.

(1)若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线斜率为 0，求 a 的值；

(2)若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，求 a 的取值范围.

解：(1)因为 $f(x)=[ax^2-(3a+1)x+3a+2]e^x$，所以 $f'(x)=[ax^2-(a+1)x+1]e^x$.

由题设知 $f'(2)=(2a-1)e^2=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$.

(2)由(1)得 $f'(x)=[ax^2-(a+1)x+1]e^x=(ax-1)(x-1)e^x$.令 $f'(x)=0$，解得 $x=\frac{1}{a}$，或 $x=1$.

若 $a>1$，则当 $x\in\left(\frac{1}{a},1\right)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值.

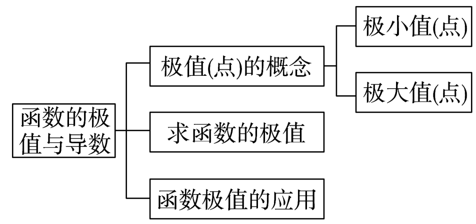
若 $a\leqslant1$，则当 $x\in(0,1)$ 时，$ax-1\leqslant x-1<0$，

所以 $f'(x)>0$，

此时，$x=1$ 不是 $f(x)$ 的极小值点.

综上所述，a 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

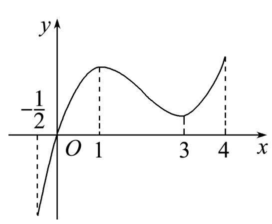
提质归纳



课后素养评价（二十） 函数的极值

A组 学习·理解

1. 定义在区间 $\left[-\frac{1}{2},4\right]$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示，则下列结论正确的是 ( )



A.函数 $f(x)$ 在区间 $(1,4)$ 上单调递增

B.函数 $f(x)$ 在区间 $(1,3)$ 上单调递减

C.函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值

D.函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值

A **解析**：在区间 $(1,4)$ 上 $f'(x)>0$，故函数 $f(x)$ 在区间 $(1,4)$ 上单调递增，故 A 正确；

在区间 $(1,3)$ 上 $f'(x)>0$，故函数 $f(x)$ 在区间 $(1,3)$ 上单调递增，故 B 错误；

当 $x\in(0,4)$ 时，$f'(x)>0$，可知函数 $f(x)$ 在 $(0,4)$ 上单调递增，故 $x=1$ 不是函数 $f(x)$ 的极值点，故 C 错误；

当 $x\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(0,4)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，故函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值，故 D 错误.

故选 A.

2. 下列函数中存在极值的是 ( )

A.$y=\frac{1}{x}$　　B.$y=x-e^x$

C.$y=2$　　D.$y=x^3$

B **解析**：对于 $y=x-e^x$，$y'=1-e^x$，

令 $y'=0$，得 $x=0$.

在区间 $(-\infty,0)$ 上，$y'>0$；

在区间 $(0,+\infty)$ 上，$y'<0$.

故当 $x=0$ 时，函数 $y=x-e^x$ 取得极大值.

其他三个函数不存在极值.

3. 函数 $y=x+\frac{1}{x}(-2<x<0)$ 的极大值为 ( )

A.-2　　B.2

C.$-\frac{5}{2}$　　D.不存在

A **解析**：$y'=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$.令 $y'=0$ 得 $x=-1$ ($x=1$ 舍去).

在 $(-2,-1)$ 上，$y'>0$，在 $(-1,0)$ 上，$y'<0$，故函

数在 $x=-1$ 处取得极大值 -2.

4.已知函数 $f(x)=e^x+kx$ 在 $x=0$ 处有极值,则 $k=$ (　　)

A.-1　　B.0　　C.1　　D.e

A　**解析**:$f'(x)=e^x+k$,因为函数 $f(x)=e^x+kx$ 在 $x=0$ 处有极值,所以 $f'(0)=e^0+k=0$,解得 $k=-1$.代入检验,满足题意.

5.已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-mx^2+mx+9$ 在 **R** 上无极值,则实数 m 的取值范围为 (　　)

A.$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

B.$(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$

C.$(0,1)$

D.$[0,1]$

D　**解析**:函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-mx^2+mx+9$ 在 **R** 上无极值 $\Leftrightarrow f'(x)=x^2-2mx+m$ 在 **R** 上无变号零点 $\Leftrightarrow\Delta=4m^2-4m\leqslant0\Leftrightarrow0\leqslant m\leqslant1$.故选 D.

6.函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2\ln x+x$ 的极值点是______.

1　**解析**:$f(x)=\frac{1}{2}x^2-2\ln x+x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,$f'(x)=x-\frac{2}{x}+1=\frac{1}{x}(x+2)(x-1)$,

令 $f'(x)>0$,解得 $x>1$,

令 $f'(x)<0$,解得 $0<x<1$,

所以 $x=1$ 为 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2\ln x+x$ 的极值点.

7.已知函数 $f(x)=ax^3+3x^2-6ax+b$ 在 $x=2$ 处取得极值 9,则 $a+2b=$______.

-24　**解析**:$f'(x)=3ax^2+6x-6a$,因为 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极值 9,

所以 $\begin{cases}f'(2)=0,\\f(2)=9,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}12a+12-6a=0,\\8a+12-12a+b=9,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-2,\\b=-11,\end{cases}$

所以 $a+2b=-2-22=-24$.

8.若函数 $f(x)=(x^2+ax+2)e^x$ 既有极大值又有极小值,则实数 a 的取值范围是________.

$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　**解析**:函数 $f(x)=(x^2+ax+2)e^x$ 的定义域为 **R**,$f'(x)=[x^2+(a+2)x+a+2]e^x$.

令 $g(x)=x^2+(a+2)x+a+2$,则 $\Delta=a^2-4$.

当 $-2\leqslant a\leqslant2$ 时,有 $\Delta\leqslant0$,$g(x)\geqslant0$,即 $f'(x)\geqslant0$ 恒成立,所以 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增,无极值;

当 $a<-2$ 或 $a>2$ 时,有 $\Delta>0$,$g(x)=0$ 有两个根 x_1,x_2(不妨设 $x_1<x_2$),令 $f'(x)>0$ 解得 $x<x_1$ 或 $x>x_2$,令 $f'(x)<0$ 解得 $x_1<x<x_2$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$,$(x_2,+\infty)$ 上单调递增,在 (x_1,x_2) 上单调递减,所以 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 处取得极大值,在 $x=x_2$ 处取得极小值.

故实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

9.已知函数 $f(x)=x(x-c)^2$ 在 $x=1$ 处取得极小值,求 $f(x)$ 的极大值.

解:因为 $f(x)=x(x-c)^2=x^3-2cx^2+c^2x$,所以 $f'(x)=3x^2-4cx+c^2=3(x-c)\left(x-\frac{c}{3}\right)$.由 $f'(x)=0$,解得 $x=c$ 或 $x=\frac{c}{3}$.依题意,$c=1$ 或 $c=3$,当 $c=3$ 时,$f(x)$ 在 $x=3$ 处取得极小值,与题意不符,当 $c=1$ 时,$f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值,所以 $c=1$,所以当 $x=\frac{1}{3}$ 时,$f(x)$ 取得极大值 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}-1\right)^2=\frac{4}{27}$.

B组　应用·实践

1.已知函数 $f(x)=2f'(1)\cdot\ln x-x$,则 $f(x)$ 的极大值为 (　　)

A.$2\ln 2-2$　　B.$2\ln 2+2$

C.$\ln 2-2$　　D.$\ln 2+2$

A　**解析**:因为 $f'(x)=\frac{2f'(1)}{x}-1$,$x\in(0,+\infty)$,

所以 $f'(1)=2f'(1)-1$,$f'(1)=1$,

所以 $f(x)=2\ln x-x$,$f'(x)=\frac{2}{x}-1$.

易知当 $x\in(0,2)$ 时,$f'(x)>0$;当 $x\in(2,+\infty)$ 时,$f'(x)<0$.

故 $x=2$ 是其极大值点,$f(x)_{极大值}=f(2)=2\ln 2-2$.

故选 A.

2.设 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\cos x$,则函数 $f(x)$ (　　)

A.有且仅有一个极小值

B.有且仅有一个极大值

C.有无数个极值

D.没有极值

A　**解析**:$f'(x)=x-\sin x$,令 $g(x)=f'(x)$,则 $g'(x)=1-\cos x\geqslant0$.

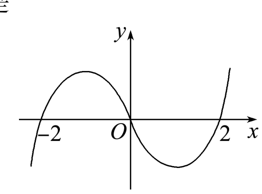
所以 $f'(x)$ 单调递增且 $f'(0)=0$.

所以当 $x<0$ 时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $x>0$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 单调递增.

故 $f(x)$ 有且仅有一个极小值.故选 A.

3.已知函数 $f(x)$ 的定义域为 **R** 且导函数为 $f'(x)$,如图是函数 $y=xf'(x)$ 的图象,则下列说法正确的是 (　　)



A.函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-2,0)$,$(2,+\infty)$

B.函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,-2)$，$(2,+\infty)$

C.$x=-2$ 是函数的极小值点

D.$x=2$ 是函数的极小值点

D **解析**：由题图及题意知，当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$；

当 $-2<x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x<-2$ 时，$f'(x)>0$.

则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-2,2)$ 上单调递减，

因此函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 时取得极小值，在 $x=-2$ 时取得极大值.

故 A，B，C 错误，D 正确.故选 D.

4.函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-2x+1$ 在 $(1,3)$ 内存在极值点，则（　　）

A.$-\frac{7}{6}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$

B.$-\frac{7}{6}<a<\frac{1}{2}$

C.$a\leqslant-\frac{1}{2}$ 或 $a\geqslant\frac{1}{2}$

D.$a<\frac{1}{2}$ 或 $a>\frac{1}{2}$

B **解析**：$f'(x)=x^2+2ax-2$，$\Delta=4a^2+8>0$，

令 $f'(x)=x^2+2ax-2=0$，由于 $x\in(1,3)$，

所以 $2a=\frac{2-x^2}{x}=\frac{2}{x}-x$，

$y=\frac{2}{x}-x$ 在 $(1,3)$ 上单调递减.当 $x=1$ 时，$y=1$；

当 $x=3$ 时，$y=-\frac{7}{3}$.

由于函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-2x+1$ 在 $(1,3)$ 内存在极值点，

所以 $-\frac{7}{3}<2a<1$，即 $-\frac{7}{6}<a<\frac{1}{2}$.故选 B.

5.若 $x=2$ 是函数 $f(x)=x(x-m)^2$ 的极大值点，则函数 $f(x)$ 的极大值为________.

32 **解析**：$f'(x)=3x^2-4mx+m^2=(x-m)\cdot(3x-m)$.

令 $f'(x)=0$，则 $x=m$ 或 $x=\frac{m}{3}$.

由题设知 $m=2$ 或 $m=6$.

当 $m=2$ 时，极大值点为 $x=\frac{2}{3}$，与题意不符；

当 $m=6$ 时，极大值为 $f(2)=32$.

6.（2022·全国乙卷）已知 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-ex^2$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的极小值点和极大值点.若 $x_1<x_2$，则 a 的取值范围是________.

$\left(\frac{1}{e},1\right)$ **解析**：（方法一：将函数零点的问题转化为两个函数图象的交点问题）因为 $f'(x)=2\ln a\cdot a^x-2ex$，

所以方程 $2\ln a\cdot a^x-2ex=0$ 的两个根为 x_1,x_2，

即方程 $\ln a\cdot a^x=ex$ 的两个根为 x_1,x_2，

即函数 $y=\ln a\cdot a^x$ 与函数 $y=ex$ 的图象有两个不同的交点.

因为 $x=x_1,x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-ex^2$ 的极小值点和极大值点，且 $x_1<x_2$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$，$(x_2,+\infty)$ 上单调递减，在 (x_1,x_2) 上单调递增，

所以在区间 $(-\infty,x_1)$，$(x_2,+\infty)$ 上，$f'(x)<0$，即 $y=ex$ 的图象在 $y=\ln a\cdot a^x$ 图象的上方；

在区间 (x_1,x_2) 上，$f'(x)>0$，即 $y=ex$ 的图象在 $y=\ln a\cdot a^x$ 图象的下方.

当 $a>1$ 时，图象显然不符合题意，所以 $0<a<1$.

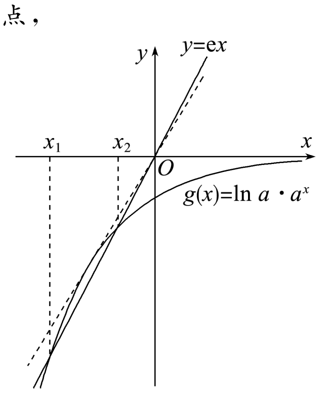
令 $g(x)=\ln a\cdot a^x$，则 $g'(x)=(\ln a)^2\cdot a^x$，$0<a<1$，

如图，设过原点的直线与函数 $y=g(x)$ 的图象相切于点 $(x_0,\ln a\cdot a^{x_0})$.

则切线的斜率为 $g'(x_0)=(\ln a)^2\cdot a^{x_0}$，故切线方程为 $y-\ln a\cdot a^{x_0}=(\ln a)^2\cdot a^{x_0}(x-x_0)$.

则有 $-\ln a\cdot a^{x_0}=-x_0(\ln a)^2\cdot a^{x_0}$，解得 $x_0=\frac{1}{\ln a}$，则切线的斜率为 $(\ln a)^2\cdot a^{\frac{1}{\ln a}}=e(\ln a)^2$.

因为函数 $y=\ln a\cdot a^x$ 与函数 $y=ex$ 的图象有两个不同的交点，



所以 $e(\ln a)^2<e$，解得 $\frac{1}{e}<a<e$.又 $0<a<1$，所以 $\frac{1}{e}<a<1$.综上所述，a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{e},1\right)$.

（方法二：构造新函数，二次求导）$f'(x)=2\ln a\cdot a^x-2ex=0$ 的两个根为 x_1,x_2.

因为 $x=x_1,x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-ex^2$ 的极小值点和极大值点，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$，$(x_2,+\infty)$ 上单调递减，在 (x_1,x_2) 上单调递增.

设函数 $g(x)=f'(x)=2(a^x\ln a-ex)$，则 $g'(x)=2a^x(\ln a)^2-2e$.

若 $a>1$，则 $g'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，此时若 $g'(x_0)$

$=0$，则 $f'(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，此时若有 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-ex^2(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的极小值点和极大值点，则 $x_1>x_2$，不符合题意.

若 $0<a<1$，则 $g'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，此时若 $g'(x_0)=0$，则 $f'(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，令 $g'(x_0)=0$，则 $a^{x_0}=\dfrac{e}{(\ln a)^2}$，此时若有 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-ex^2(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的极小值点和极大值点，且 $x_1<x_2$，则需满足 $f'(x_0)>0$，$f'(x_0)=2(a^{x_0}\ln a-ex_0)=2\left(\dfrac{e}{\ln a}-ex_0\right)>0$，即 $x_0<\dfrac{1}{\ln a}$，$x_0\ln a>1$.

故 $\ln a^{x_0}=x_0\ln a=\ln\dfrac{e}{(\ln a)^2}>1$，所以 $\dfrac{1}{e}<a<e$.

又因为 $0<a<1$，所以 $\dfrac{1}{e}<a<1$，即实数 a 的取值范围为 $\left(\dfrac{1}{e},1\right)$.

7. 设函数 $f(x)=(x-a)(x-b)\cdot(x-c)(a,b,c\in\mathbf{R})$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1)若 $a=b=c$，$f(4)=8$，求 a 的值；

(2)若 $a\neq b$，$b=c$，且 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的零点均在集合 $\{-3,1,3\}$ 中，求 $f(x)$ 的极小值.

解：(1)因为 $a=b=c$，所以 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=(x-a)^3$.

因为 $f(4)=8$，所以 $(4-a)^3=8$，解得 $a=2$.

(2)因为 $b=c$，所以 $f(x)=(x-a)(x-b)^2=x^3-(a+2b)x^2+b(2a+b)x-ab^2$，

从而 $f'(x)=3(x-b)\left(x-\dfrac{2a+b}{3}\right)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=b$ 或 $x=\dfrac{2a+b}{3}$.

因为 $a,b,\dfrac{2a+b}{3}$ 都在集合 $\{-3,1,3\}$ 中，且 $a\neq b$，所以 $\dfrac{2a+b}{3}=1$，$a=3$，$b=-3$.

此时令 $f'(x)=0$，得 $x=-3$ 或 $x=1$.列表如下：

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=(1-3)\times(1+3)^2=-32$.

第2课时　函数的最大(小)值

学习任务目标

1. 了解函数的最大值、最小值的定义.
2. 理解导数与函数最值的关系.
3. 掌握利用导数求函数最值的方法.
4. 体会导数与单调性、极值、最大(小)值的关系.

◦ 问题式预习 ◦

【知识清单】

知识点　函数的最值

1. 一般地，如果在区间 $[a,b]$ 上函数 $y=f(x)$ 的图象是一条<u>连续不断</u>的曲线，那么它必有<u>最大值</u>和<u>最小值</u>.

2. 一般地，求函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值与最小值的步骤如下：

(1)求函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内的<u>极值</u>；

(2)将函数 $y=f(x)$ 的各<u>极值</u>与端点处的函数值<u>$f(a)$</u>，<u>$f(b)$</u>比较，其中最大的一个是<u>最大值</u>，最小的一个是<u>最小值</u>.

【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").

(1)函数的极大值一定是函数的最大值.　(×)

(2)开区间上的单调连续函数无最值.　(√)

(3)函数的最值一定是极值.　(×)

(4)在闭区间上图象连续的函数一定存在最值.　(√)

2. 函数 $f(x)=x^3-3x+3$ 在 $[-3,3]$ 上的最小值为　(　　)

A.1　　B.5

C.12　　D.-15

D　**解析：**$f'(x)=3x^2-3$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\pm1$，且 $f(1)=1$，$f(-1)=5$，$f(-3)=-15$，$f(3)=21$.故选 D.

3. 请思考并回答下列问题：

(1)函数的极值是针对函数在某一点附近的局部而言的，它是比较极值点附近的函数值得出的，函数的最值是否也是一个局部性概念？

提示：不是.函数的最值是一个整体性概念，函数的最值是比较整个定义区间的函数值得出的.

(2)一个函数的极值可以有多个，最大(小)值是否

可以有多个？

提示：不可以.一个函数的最大(小)值是唯一的.

(3)极值只能在区间内取得，不能在端点处取得，最值是否也是如此？

提示：最值可以在区间内取得，也可以在端点处取得.极值有可能为最值，最值不在端点处取得时一定是极值.

◦ 任务型课堂 ◦

任务1 求函数的最值

探究活动

例1 求下列函数的最值.

(1)$f(x)=x^3-3x^2-10, x\in[-1,1]$；

(2)$f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3}$.

解：(1)$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$，令$f'(x)=0$，得$x=0$或$x=2$(舍去).

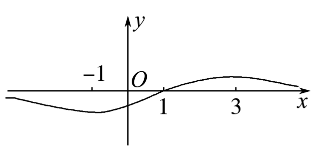
当x变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-14	单调递增	极大值-10	单调递减	-12

所以当$x=-1$时，函数取最小值$f(-1)=-14$；当$x=0$时，函数取最大值$f(0)=-10$.

(2)$f'(x)=\dfrac{-(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}$，

令$f'(x)=0$，得$x=-1$或$x=3$.容易验证函数在$x=-1$处取得极小值，在$x=3$处取得极大值.又因为当$x=1$时，$f(x)=0$，当$x<1$时，$f(x)<0$，当$x>1$时，$f(x)>0$，所以可以画出函数的大致图象，如图所示.



由图象可知，函数的最大值为$f(3)=\dfrac{3-1}{3^2+3}=\dfrac{1}{6}$，最小值为$f(-1)=\dfrac{-1-1}{(-1)^2+3}=-\dfrac{1}{2}$.

【探究总结】

求函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上的最值的步骤

(1)求函数$f(x)$的导函数$f'(x)$.

(2)计算函数$f(x)$在区间(a,b)内使得$f'(x)=0$的所有点处的函数值以及端点处的函数值$f(a)$与$f(b)$.

(3)比较以上各个函数值，其中最大的是函数的最大值，最小的是函数的最小值.

应用迁移

求下列各函数的最值.

(1)$f(x)=3x^3-9x+5, x\in[-2,2]$；

(2)$f(x)=\sin 2x-x, x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

解：(1)$f'(x)=9x^2-9=9(x+1)(x-1)$.

令$f'(x)=0$，得$x=-1$或$x=1$.

当x变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,2)$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	单调递增	极大值11	单调递减	极小值-1	单调递增	11

从表中可以看出，当$x=-2$或1时，函数$f(x)$取得最小值-1.

当$x=-1$或2时，函数$f(x)$取得最大值11.

(2)$f'(x)=2\cos 2x-1$.令$f'(x)=0$，得$\cos 2x=\dfrac{1}{2}$.

又因为$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，所以$2x\in[-\pi,\pi]$.

所以$2x=\pm\dfrac{\pi}{3}$，$x=\pm\dfrac{\pi}{6}$.

易知函数$f(x)$在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上的两个极值分别为

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}$，$f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{6}$.

又$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$，$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

比较以上函数值可得$f(x)_{\max}=\dfrac{\pi}{2}$，$f(x)_{\min}=-\dfrac{\pi}{2}$.

任务2 与函数最值有关的参数问题

探究活动

例2 (1)(2022·全国甲卷)当$x=1$时，函数$f(x)=a\ln x+\dfrac{b}{x}$取得最大值-2，则$f'(2)=$ (　　)

A.-1　　B.$-\dfrac{1}{2}$

C.$\dfrac{1}{2}$　　D.1

B　**解析**：因为函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，所以由题可知，$f(1)=-2$，$f'(1)=0$.又$f'(x)=\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{x^2}$，所以$b=-2$，$a-b=0$，即$a=-2$，$b=-2$，所以$f'(x)=-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}$.此时验证$f(x)$满足题意，则有$f'(2)=-1+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$.故选B.

(2)已知函数$f(x)=x^3-ax^2-a^2x$，求函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上的最小值.

解：$f'(x)=3x^2-2ax-a^2=(3x+a)(x-a)$，

令$f'(x)=0$，得$x_1=-\dfrac{a}{3}$，$x_2=a$.

①当$a>0$时，$f(x)$在$[0,a)$上单调递减，在$(a,$

$+\infty)$上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(a)=-a^3$.

②当 $a=0$ 时，$f'(x)=3x^2\geqslant 0$，$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(0)=0$.

③当 $a<0$ 时，$f(x)$在$\left[0,-\dfrac{a}{3}\right)$上单调递减，在$\left(-\dfrac{a}{3},+\infty\right)$上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f\left(-\dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{5}{27}a^3$.

综上所述，当 $a>0$ 时，$f(x)$的最小值为$-a^3$；

当 $a=0$ 时，$f(x)$的最小值为 0；

当 $a<0$ 时，$f(x)$的最小值为$\dfrac{5}{27}a^3$.

［一题多思］

思考 1. 当 $a>0$ 时，求本例(2)中的函数在$[-a,2a]$上的最值.

解： $f'(x)=(3x+a)(x-a)(a>0)$，令$f'(x)=0$，得 $x_1=-\dfrac{a}{3}$，$x_2=a$.

所以 $f(x)$在$\left[-a,-\dfrac{a}{3}\right]$上单调递增，

在$\left[-\dfrac{a}{3},a\right]$上单调递减，在$[a,2a]$上单调递增.

因为 $f(-a)=-a^3$，$f\left(-\dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{5}{27}a^3$，$f(a)=-a^3$，$f(2a)=2a^3$，

所以 $f(x)_{\max}=f(2a)=2a^3$，$f(x)_{\min}=f(-a)=f(a)=-a^3$.

思考 2. 把本例(2)中的函数改为“$f(x)=-x^3+3ax(a>0)$”，求此函数在$[0,1]$上的最大值.

解： $f'(x)=-3x^2+3a=-3(x^2-a)$.

因为 $a>0$，则令 $f'(x)=0$，解得 $x=\pm\sqrt{a}$.

因为 $x\in[0,1]$，所以只考虑 $x=\sqrt{a}$ 的情况.

①若 $0<\sqrt{a}<1$，即 $0<a<1$，则当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	0	$(0,\sqrt{a})$	$\sqrt{a}$	$(\sqrt{a},1)$	1
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	单调递增	$2a\sqrt{a}$	单调递减	$3a-1$

由表可知，当 $x=\sqrt{a}$ 时，$f(x)$有最大值 $f(\sqrt{a})=2a\sqrt{a}$.

②若$\sqrt{a}\geqslant 1$，即 $a\geqslant 1$，则当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，此时函数 $f(x)$在$[0,1]$上单调递增，所以当 $x=1$ 时，$f(x)$有最大值 $f(1)=3a-1$.

综上可知，在区间$[0,1]$上，

若 $0<a<1$，则当 $x=\sqrt{a}$ 时，$f(x)$有最大值 $2a\sqrt{a}$.

若 $a\geqslant 1$，则当 $x=1$ 时，$f(x)$有最大值 $3a-1$.

【探究总结】

解决与函数最值有关的参数问题的思路

(1)根据条件求出参数的值，从而化为不含参数的函数的最值问题.

(2)对于不能求出参数值的问题，则要对参数进行讨论，其实质是讨论导函数大于 0、等于 0、小于 0 三种情况.若导函数恒不等于 0，则函数在已知区间上是单调函数，最值在端点处取得；若导函数可能等于 0，则求出极值点后求极值，再与端点处的函数值比较后确定最值.

应用迁移

1. 已知函数 $f(x)=ax^3-6ax^2+b$，$x\in[-1,2]$的最大值为 3，最小值为-29，求 a,b 的值.

解： 由题设知 $a\neq 0$，否则 $f(x)=b$ 为常函数，与题设矛盾.

对 $f(x)$求导得 $f'(x)=3ax^2-12ax=3ax(x-4)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=0$，$x_2=4$(舍去).

①当 $a>0$，且 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	-1	$(-1,0)$	0	$(0,2)$	2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-7a+b$	单调递增	b	单调递减	$-16a+b$

由表可知，当 $x=0$ 时，$f(x)$取得极大值 b，也就是函数 $f(x)$在$[-1,2]$上的最大值，所以 $f(0)=b=3$.

又 $f(-1)=-7a+3$，$f(2)=-16a+3<f(-1)$，

所以 $f(2)=-16a+3=-29$，解得 $a=2$.

②当 $a<0$ 时，同理可得，当 $x=0$ 时，$f(x)$取得极小值 b，也就是函数 $f(x)$在$[-1,2]$上的最小值，所以 $f(0)=b=-29$.

又 $f(-1)=-7a-29$，

$f(2)=-16a-29>f(-1)$，

所以 $f(2)=-16a-29=3$，解得 $a=-2$.

综上可得，$a=2,b=3$ 或 $a=-2,b=-29$.

2. 已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+b$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性.

(2)是否存在 a,b，使得 $f(x)$在区间$[0,1]$上的最小值为-1且最大值为 1？若存在，求出 a,b 的值；若不存在，说明理由.

解： (1)由题可得 $f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{a}{3}$.

若 $a>0$，则当 $x\in(-\infty,0)\cup\left(\dfrac{a}{3},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(0,\dfrac{a}{3}\right)$时，$f'(x)<0$.

故 $f(x)$在$(-\infty,0)$，$\left(\dfrac{a}{3},+\infty\right)$上单调递增，在

$\left(0,\dfrac{a}{3}\right)$上单调递减.

若$a=0$，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增.

若$a<0$，则当$x\in\left(-\infty,\dfrac{a}{3}\right)\cup(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$；当$x\in\left(\dfrac{a}{3},0\right)$时，$f'(x)<0$.

故$f(x)$在$\left(-\infty,\dfrac{a}{3}\right)$，$(0,+\infty)$上单调递增，在$\left(\dfrac{a}{3},0\right)$上单调递减.

综上所述，当$a>0$时，$f(x)$在$(-\infty,0)$，$\left(\dfrac{a}{3},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(0,\dfrac{a}{3}\right)$上单调递减；

当$a=0$时，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增；

当$a<0$时，$f(x)$在$\left(-\infty,\dfrac{a}{3}\right)$，$(0,+\infty)$上单调递增，在$\left(\dfrac{a}{3},0\right)$上单调递减.

(2)满足题设条件的a,b存在.

①当$a\leqslant0$时，由(1)知，$f(x)$在$[0,1]$上单调递增，所以$f(x)$在区间$[0,1]$上的最小值为$f(0)=b$，最大值为$f(1)=2-a+b$.

此时要a,b满足题设条件，则$b=-1$，$2-a+b=1$，即$a=0$，$b=-1$.

②当$a\geqslant3$时，由(1)知，$f(x)$在$[0,1]$上单调递减，所以$f(x)$在区间$[0,1]$上的最大值为$f(0)=b$，最小值为$f(1)=2-a+b$.

此时要a,b满足题设条件，则$2-a+b=-1$，$b=1$，即$a=4$，$b=1$.

③当$0<a<3$时，由(1)知，$f(x)$在$[0,1]$上的最小值为$f\left(\dfrac{a}{3}\right)=-\dfrac{a^3}{27}+b$，最大值为$b$或$2-a+b$.

若$-\dfrac{a^3}{27}+b=-1$，$b=1$，则$a=3\sqrt[3]{2}$，与$0<a<3$矛盾.

若$-\dfrac{a^3}{27}+b=-1$，$2-a+b=1$，则$a=3\sqrt{3}$或$a=-3\sqrt{3}$或$a=0$，与$0<a<3$矛盾.

综上，当且仅当$a=0$，$b=-1$或$a=4$，$b=1$时，$f(x)$在$[0,1]$上的最小值为-1，最大值为1.

任务3 利用导数证明不等式

探究活动

例3 （2023·新高考全国Ⅰ卷）已知函数$f(x)=a(e^x+a)-x$.

(1)讨论$f(x)$的单调性；

(2)证明：当$a>0$时，$f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$.

(1)**解**：因为$f(x)=a(e^x+a)-x$，定义域为$\mathbf{R}$，所以$f'(x)=ae^x-1$.

当$a\leqslant0$时，由于$e^x>0$，则$ae^x\leqslant0$，故$f'(x)=ae^x-1<0$恒成立，

所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减.

当$a>0$时，令$f'(x)=ae^x-1=0$，解得$x=-\ln a$，

当$x<-\ln a$时，$f'(x)<0$，

则$f(x)$在$(-\infty,-\ln a)$上单调递减；

当$x>-\ln a$时，$f'(x)>0$，

则$f(x)$在$(-\ln a,+\infty)$上单调递增.

综上，当$a\leqslant0$时，$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减；

当$a>0$时，$f(x)$在$(-\infty,-\ln a)$上单调递减，在$(-\ln a,+\infty)$上单调递增.

(2)**证明**：由(1)得，$a>0$时，$f(x)_{\min}=f(-\ln a)=a(e^{-\ln a}+a)+\ln a=1+a^2+\ln a$.

要证$f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$恒成立，即证$1+a^2+\ln a>2\ln a+\dfrac{3}{2}$，即证$a^2-\dfrac{1}{2}-\ln a>0$恒成立.

令$g(a)=a^2-\dfrac{1}{2}-\ln a(a>0)$，

则$g'(a)=2a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{2a^2-1}{a}$.

令$g'(a)<0$，得$0<a<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；令$g'(a)>0$，得$a>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

所以$g(a)$在$\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$上单调递增，

所以$g(a)_{\min}=g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\ln\sqrt{2}>0$，所以$g(a)>0$恒成立.

因此，当$a>0$时，$f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$恒成立.

【探究总结】

利用函数的最值证明不等式的两种常用方法

(1)证明$f(x)>g(x)$的一般方法是转化为证明$h(x)=f(x)-g(x)>0$，则只需证明$h(x)_{\min}>0$，进而将证明不等式转化为求函数的最值.

(2)必要时，还可将证明$f(x)>g(x)$转化为证明$f(x)_{\min}>g(x)_{\max}$.

应用迁移

1.已知函数$f(x)=e^x-e(\ln x+1)$，求证：$f(x)\geqslant0$恒成立.

证明：由题意知$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=e^x-\dfrac{e}{x}=\dfrac{xe^x-e}{x}$.

设$F(x)=xe^x-e(x>0)$，则$F(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，且$F(1)=0$.

当$x\in(0,1)$时，$F(x)<0$，所以$f'(x)=\dfrac{F(x)}{x}<0$，$f(x)$单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$F(x)>0$，所以 $f'(x)=\dfrac{F(x)}{x}>0$，$f(x)$ 单调递增．

所以 $f(x)$ 的最小值 $f(x)_{\min}=f(1)=0$．

所以 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立．

2. 证明不等式：$x-\sin x<\tan x-x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$．

证明： 令 $f(x)=\tan x-2x+\sin x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

则 $f'(x)=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'-(2x)'+(\sin x)'$

$=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}-2+\cos x$

$=\dfrac{1+\cos^3 x-2\cos^2 x}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{1-\cos^2 x+\cos^3 x-\cos^2 x}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x-\cos^2 x)}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{(1-\cos x)(\cos x+\sin^2 x)}{\cos^2 x}$．

因为 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

所以 $1-\cos x>0$，$\cos x+\sin^2 x>0$，

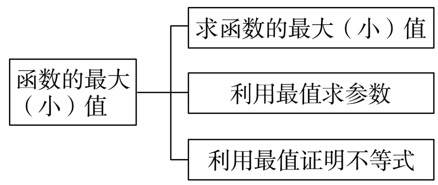
所以 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增．

所以 $f(x)>f(0)=0$，即 $\tan x-2x+\sin x>0$，

即 $x-\sin x<\tan x-x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$．

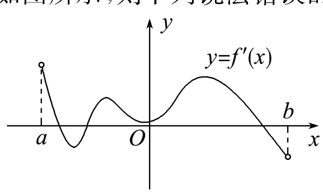
提质归纳



课后素养评价（二十一）　函数的最大(小)值

A组　学习·理解

1. $f(x)$ 是定义在 (a,b) 上的函数，其导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内的图象如图所示，则下列说法错误的是（　　）



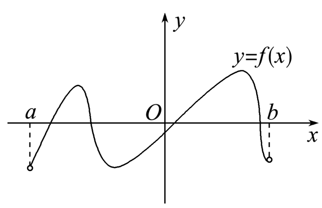
A. 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上一定存在最小值

B. 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上只有一个极小值点

C. 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有两个极大值点

D. 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上可能没有零点

A　**解析：** 由导函数的图象可知原函数的图象大致如图所示，



对于 A，由于不能确定端点值与极小值的大小关系，同时端点值取不到，故 $f(x)$ 不一定有最小值，A 错误；

对于 B，由图象可知 $f(x)$ 只有一个极小值，B 正确；

对于 C，由图象可知 $f(x)$ 有两个极大值，C 正确；

对于 D，函数两个极大值与 0 的大小关系不确定，故 $f(x)$ 在 (a,b) 可能没有零点，D 正确．

故选 A．

2. 已知函数 $f(x)=x^2+a\ln x$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线经过坐标原点，则函数 $y=f(x)$ 的最小值为（　　）

A. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\ln 2$

B. $\dfrac{1}{4}+\ln 2$

C. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\ln 2$

D. 1

C　**解析：** 已知 $f(x)=x^2+a\ln x$，则 $f(1)=1^2+a\ln 1=1$，

且 $f'(x)=2x+\dfrac{a}{x}$，所以 $f'(1)=2+a$，

所以 $f'(1)=\dfrac{f(1)-0}{1-0}=1=2+a$，解得 $a=-1$，

所以 $f(x)=x^2-\ln x\ (x>0)$，

$f'(x)=2x-\dfrac{1}{x}$．

令 $f'(x)>0$，即 $2x-\dfrac{1}{x}>0$，解得 $x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

令 $f'(x)<0$，即 $2x-\dfrac{1}{x}<0$，解得 $0<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以函数在区间 $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递减，在区间

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$上单调递增.

所以 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$.

故选 C.

3. 已知 $x=2$ 是 $f(x)=2\ln x+ax^2-3x$ 的极值点，则 $f(x)$在$\left[\frac{1}{3},3\right]$上的最大值是 （　　）

A. $2\ln 3-\frac{9}{2}$　　B. $-\frac{5}{2}$

C. $-2\ln 3-\frac{17}{8}$　　D. $2\ln 2-4$

A　**解析**：由题意，函数的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{2}{x}+2ax-3$ 且 $f'(2)=0$，所以 $a=\frac{1}{2}$，

则 $f'(x)=\frac{2}{x}+x-3=\frac{x^2-3x+2}{x}$

$=\frac{(x-1)(x-2)}{x}$，

所以当 $1<x<2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

当 $0<x<1$ 或 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

所以 $f(x)$在$\left[\frac{1}{3},1\right)$，$(2,3]$上单调递增，在$(1,2]$上单调递减.

又因为 $\ln 3>\ln e=1$，所以 $2\ln 3>2$，所以 $2\ln 3-\frac{9}{2}>2-\frac{9}{2}$，

所以 $f(3)=2\ln 3-\frac{9}{2}>f(1)=-\frac{5}{2}$，所以 $f(x)$在$\left[\frac{1}{3},3\right]$上的最大值是 $2\ln 3-\frac{9}{2}$.

故选 A.

4. 若函数 $f(x)=-x^3+3x^2-1$ 在区间$(m,m+5)$内存在最大值，则实数 m 的取值范围是 （　　）

A. $[-1,2)$　　B. $(-1,2)$

C. $[-3,2)$　　D. $(-3,2)$

A　**解析**：$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$，

$f'(x)>0\Rightarrow 0<x<2$，$f'(x)<0\Rightarrow x<0$ 或 $x>2$，

所以 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,2)$上单调递增，在$(2,+\infty)$上单调递减，

所以 $f(x)$有极大值 $f(2)=3$.

要使 $f(x)$在$(m,m+5)$上有最大值，则极大值 3 即为该最大值，

则 $2\in(m,m+5)\Rightarrow\begin{cases}m<2,\\m+5>2\end{cases}\Rightarrow -3<m<2$.

又 $f(x)=3\Rightarrow -x^3+3x^2-1=3\Rightarrow x^3-3x^2+4=0$

$\Rightarrow(x-2)^2(x+1)=0\Rightarrow x=2$ 或 $x=-1$，

所以 $m\geqslant -1$.

综上，$-1\leqslant m<2$.

故选 A.

5. 设函数 $f(x)=(x^2-3)e^x$，则 （　　）

A. $f(x)$有极大值，且有最大值

B. $f(x)$有极小值，但无最小值

C. 若方程 $f(x)=a$ 恰有一个实根，则 $a>\frac{6}{e^3}$

D. 若方程 $f(x)=a$ 恰有三个实根，则 $0<a<\frac{6}{e^3}$

D　**解析**：由题意 $f'(x)=(x^2+2x-3)e^x=(x-1)(x+3)e^x$，

所以当 $x<-3$ 或 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，

当 $-3<x<1$ 时，$f'(x)<0$，

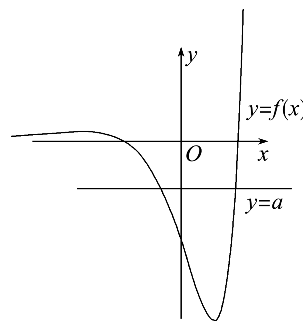
$f(x)$在$(-\infty,-3)$和$(1,+\infty)$上单调递增，在$(-3,1)$上单调递减.

$f(x)_{极大值}=f(-3)=\frac{6}{e^3}$，$f(x)_{极小值}=f(1)=-2e$，

当 $x<-\sqrt{3}$ 或 $x>\sqrt{3}$ 时，$f(x)>0$，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to 0$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，

所以 $f(1)$也是最小值，$f(x)$无最大值.

作出 $y=f(x)$的图象和直线 $y=a$，大致如图，



当 $a=-2e$ 或 $a>\frac{6}{e^3}$ 时，$f(x)=a$ 有一个根，当 $0<a<\frac{6}{e^3}$ 时，$f(x)=a$ 有三个根.

故选 D.

6. 函数 $y=x+2\cos x$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上取最大值时，$x$ 的值为________.

$\frac{\pi}{6}$　**解析**：$y'=1-2\sin x$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. 由 $y'\geqslant 0$，得 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}$；由 $y'<0$，得$\frac{\pi}{6}<x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

所以函数在$\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$上单调递增，在$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减. 故当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，函数取得的极大值也是$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值.

7. 已知函数 $f(x)=ax^4-4ax^3+b(a>0)$，$x\in[1,4]$，$f(x)$的最大值为 3，最小值为 -6，则 $a+b=$________.

$\frac{10}{3}$　**解析**：$f'(x)=4ax^3-12ax^2=4ax^2(x-3)$.令 $f'(x)=0$，得 $x=3$ 或 $x=0$(舍去).

当 $1\leqslant x<3$ 时，$f'(x)<0$；当 $3<x\leqslant 4$ 时，$f'(x)>0$，

故 $x=3$ 为极小值点，也是最小值点.

因为 $f(3)=b-27a$，$f(1)=b-3a$，$f(4)=b$，

所以 $f(x)$的最小值为 $f(3)=b-27a$，最大值为 $f(4)=b$，

所以$\begin{cases}b=3,\\b-27a=-6,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\frac{1}{3},\\b=3,\end{cases}$

所以 $a+b=\frac{10}{3}$.

8.已知函数 $f(x)=\ln x-x+1$.

(1)求 $f(x)$的单调区间；

(2)求证：对任意 $x\in(1,+\infty)$，$\ln x<x-1$.

(1)**解**：$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

因为 $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，

所以当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$的单调递增区间为$(0,1)$，单调递减区间为$(1,+\infty)$.

(2)**证明**：由(1)知 $f(x)=\ln x-x+1$ 在$(1,+\infty)$上单调递减，所以对任意 $x\in(1,+\infty)$，$f(x)<f(1)=0$，即 $\ln x<x-1$.

B组　应用·实践

1.已知 $f(x)=2x^3-6x^2+m$ 是定义在$[-2,2]$上的函数，函数的最大值为 3，那么函数的最小值为　(　　)

A.-43　　B.-37

C.-29　　D.-5

B　**解析**：因为 $f(x)=2x^3-6x^2+m$，$x\in[-2,2]$，

所以 $f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$.令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=2$，

所以当 $-2<x<0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$在$(-2,0)$上单调递增；

当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$在$(0,2)$上单调递减，

所以当 $x=0$ 时，函数 $f(x)$取得最大值，最大值为 m，

所以 $m=3$.

又 $f(-2)=-40+m$，$f(2)=-8+m$，

所以 $x=-2$ 时，函数 $f(x)$取得最小值，最小值为 -37.

故选 B.

2.(多选)已知函数 $f(x)=e^x+a\ln x$，下列结论正确的是　(　　)

A.当 $a=1$ 时，$f(x)$有最大值

B.对于任意的 $a>0$，函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增

C.对于任意的 $a<0$，函数 $f(x)$一定存在最小值

D.对于任意的 $a>0$，都有 $f(x)>0$

BC　**解析**：当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x+\ln x$，函数 $y=e^x$，$y=\ln x$ 都单调递增，易知函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，无最大值，故 A 错误.

对于任意的 $a>0$，函数 $y=e^x$，$y=a\ln x$ 都单调递增，

则函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，故 B 正确.

当 $x\to 0$ 时，$e^x\to 1$，$\ln x\to-\infty$，$f(x)\to-\infty$，故 D 错误.

对于任意的 $a<0$，$f'(x)=e^x+\frac{a}{x}$，易知 $f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

当 $x\to+\infty$时，$f'(x)\to+\infty$；当 $x\to 0$ 时，$f'(x)\to-\infty$.

所以存在 $x_0>0$ 使 $f'(x_0)=0$.

当 $0<x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，函数单调递减；

当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，函数单调递增.

所以$f(x)$存在最小值，故 C 正确.故选 BC.

3.(多选)已知函数 $f(x)=x^3+3x^2-9x+1$.若 $f(x)$在区间$(k,2]$上的最大值为 28，则实数 k 的值可以是　(　　)

A.-5　　B.-4

C.-3　　D.-2

AB　**解析**：因为 $f(x)=x^3+3x^2-9x+1$，所以 $f'(x)=3x^2+6x-9$.

令 $f'(x)=3x^2+6x-9=0$，解得 $x_1=-3$，$x_2=1$，

所以在$(-\infty,-3)$，$(1,+\infty)$上，$f'(x)>0$，在$(-3,1)$上，$f'(x)<0$.所以函数 $f(x)$在$(-\infty,-3)$，$(1,+\infty)$上单调递增，在$(-3,1)$上单调递减.

则 $f(x)$在$[1,2]$上单调递增，所以在$[1,2]$上，$f(2)$最大；

$f(x)$在$(-3,1)$上单调递减，所以在$[-3,1]$上，$f(-3)$最大；

$f(x)$在$(-\infty,-3)$上单调递增，所以在$(-\infty,-3]$上，$f(-3)$最大.

因为 $f(2)=3$，$f(-3)=28$，且 $f(x)$在区间$(k,2]$上的最大值为 28，

所以 $k<-3$，即 k 的取值范围是$(-\infty,-3)$.故选 AB.

4.已知函数 $f(x)=(x-1)e^x$.若对于区间$(-\infty,1)$上的任意 x_1，x_2，都有$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant t$，则　(　　)

A.t 的最小值是 1

B.t 的最小值小于 1

C.t 的最大值是 1

D.这样的 t 的不存在

A　**解析**：由题意，函数 $f(x)=(x-1)e^x$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上有 $f(x)_{\max}-f(x)_{\min}\leqslant t$.

因为 $f(x)=(x-1)e^x$，所以 $f'(x)=xe^x$，且 $x\in(-\infty,1)$.

由 $f'(x)<0$，可得 $x<0$；由 $f'(x)>0$，可得 $0<x<1$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,1)$ 上单调递增，

所以函数的最小值为 $f(0)=-1$.

又当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f(x)=(x-1)e^x<0$，

而 $f(1)=0$，

所以 $-1\leqslant f(x)<0$，所以 $t\geqslant 1$，即 t 的最小值是 1.

故选 A.

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1,x\geqslant 0,\\-x^3+3x+a,x<0\end{cases}$ 的值域为 $[1,+\infty)$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $[1,+\infty)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $(3,+\infty)$　　D. $[3,+\infty)$

D　**解析**：当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2+1$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$\forall x\in[0,+\infty)$，$f(x)\geqslant f(0)=1$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上取值的集合是 $[1,+\infty)$.

当 $x<0$ 时，$f(x)=-x^3+3x+a$，$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$，

当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$，当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,0)$ 上单调递增.

$\forall x<0$，$f(x)\geqslant f(-1)=a-2$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上取值的集合为 $[a-2,+\infty)$.

因为函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1,x\geqslant 0,\\-x^3+3x+a,x<0\end{cases}$ 的值域为 $[1,+\infty)$，所以得 $[a-2,+\infty)\subseteq[1,+\infty)$，则 $a-2\geqslant 1$，解得 $a\geqslant 3$，

所以实数 a 的取值范围是 $[3,+\infty)$.

故选 D.

6. 已知函数 $f(x)=\ln x$，$g(x)=\dfrac{1}{2}x+1$. 若 $f(x_1)=g(x_2)$，则 x_1-x_2 的最小值为________.

$4-2\ln 2$　**解析**：设 $f(x_1)=g(x_2)=t$，即 $\ln x_1=t$，$\dfrac{1}{2}x_2+1=t$，解得 $x_1=e^t$，$x_2=2t-2$，

所以 $x_1-x_2=e^t-2t+2$. 令 $h(t)=e^t-2t+2$，则 $h'(t)=e^t-2$，令 $h'(t)=0$，解得 $t=\ln 2$.

当 $t<\ln 2$ 时，$h'(t)<0$，当 $t>\ln 2$ 时，$h'(t)>0$，所以 $h(t)$ 在 $(-\infty,\ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(t)$ 的最小值为 $h(\ln 2)=2-2\ln 2+2=4-2\ln 2$，所以 x_1-x_2 的最小值为 $4-2\ln 2$.

7. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 的图象在点 $P(0,-2)$ 处的切线的斜率为 -1，且函数在 $x=1$ 处取得极值.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2) 当 $x\in[-1,2]$ 时，求函数 $f(x)$ 的最值.

解：(1) 因为 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，

所以 $f'(x)=3x^2+2ax+b$.

由题意可知，$\begin{cases}f(0)=c=-2,\\f'(0)=b=-1,\\f'(1)=3+2a+b=0,\end{cases}$

解得 $a=-1$，$b=-1$，$c=-2$，

所以函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=x^3-x^2-x-2$，经检验，符合题意，

所以 $f(x)=x^3-x^2-x-2$.

(2) 由 (1) 知 $f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$，

令 $f'(x)=0$，则 $(3x+1)(x-1)=0$，解得 $x=-\dfrac{1}{3}$，或 $x=1$.

当 x 在区间 $\left[-1,-\dfrac{1}{3}\right)$，$(1,2]$ 上时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(-\dfrac{1}{3},1\right)$ 时，$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 在 $\left[-1,-\dfrac{1}{3}\right)$ 和 $(1,2]$ 上单调递增，在 $\left(-\dfrac{1}{3},1\right)$ 上单调递减.

当 $x=-\dfrac{1}{3}$ 时，$f(x)$ 取得极大值为 $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{27}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{3}-2=-\dfrac{49}{27}$；

当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极小值为 $f(1)=1^3-1^2-1-2=-3$.

又 $f(-1)=(-1)^3-(-1)^2-(-1)-2=-3$，$f(2)=2^3-2^2-2-2=0$，

所以 $f(x)_{\min}=-3$，$f(x)_{\max}=0$.

8. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}$，$g(x)=\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{a}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 在 $x=1$ 处的切线重合.

(1) 求实数 a 的值；

(2) 求证：$f(x)\geqslant g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

(1) **解**：因为 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}$，$g(x)=\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{a}{x}$，

所以 $f'(x)=\dfrac{\dfrac{x+1}{x}-\ln x}{(x+1)^2}$，$g'(x)=\dfrac{-2}{(x+1)^2}+\dfrac{a}{x^2}$.

由题意得 $f'(1)=g'(1)$，

所以 $\dfrac{1}{2}=a-\dfrac{1}{2}$，解得 $a=1$.

(2) **证明**：由 (1) 知，$f(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}$，$g(x)=\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{x}$，

所以 $f(x)-g(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x\ln x-x+1}{x(x+1)},x>0$.

令 $h(x)=x\ln x-x+1,x>0$，则 $h'(x)=\ln x$，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

故当 $x=1$ 时，$h(x)$ 取得最小值 $h(1)=0$，所以 $h(x)\geqslant 0$.

因为 $x>0$，所以 $x(x+1)>0$，即 $f(x)-g(x)\geqslant 0$，

所以 $f(x)\geqslant g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

9. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $[-1,0)\cup(0,1]$ 上的奇函数，当 $x\in[-1,0)$ 时，$f(x)=2ax+\dfrac{1}{x^2}(a\in\mathbf{R})$.

(1) 当 $x\in(0,1]$ 时，求 $f(x)$ 的解析式；

(2) 若 $a>-1$，试判断 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上的单调性，并证明你的结论；

(3) 是否存在 a，使得当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)$ 有最大值 -6？

解：(1) 设 $x\in(0,1]$，则 $-x\in[-1,0)$，$f(-x)=-2ax+\dfrac{1}{x^2}$.

因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，

所以 $f(x)=2ax-\dfrac{1}{x^2},x\in(0,1]$.

(2) 当 $a>-1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增. 证明如下：

当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=2ax-\dfrac{1}{x^2}$，

$f'(x)=2a+\dfrac{2}{x^3}=2\left(a+\dfrac{1}{x^3}\right)$.

因为 $a>-1,x\in(0,1]$，$\dfrac{1}{x^3}\geqslant 1$，

所以 $a+\dfrac{1}{x^3}>0$，

即 $f'(x)>0$.

所以当 $a>-1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增.

(3) 当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=2ax-\dfrac{1}{x^2}$，由 (2) 知当 $a>-1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增.

由 $f(x)_{\max}=f(1)=-6$，

得 $a=-\dfrac{5}{2}$（不合题意，舍去）；

当 $a\leqslant -1$ 时，令 $f'(x)=2\left(a+\dfrac{1}{x^3}\right)=0$，

得 $x=\sqrt[3]{-\dfrac{1}{a}}$.

列表如下：

x	$\left(0,\sqrt[3]{-\frac{1}{a}}\right)$	$\sqrt[3]{-\frac{1}{a}}$	$\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{a}},1\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减

可知 $f(x)_{\max}=f\left(\sqrt[3]{-\dfrac{1}{a}}\right)=-6$，解得 $a=-2\sqrt{2}$.

此时 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\in(0,1]$.

所以存在 $a=-2\sqrt{2}$，使得 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上有最大值 -6.

第3课时　函数的最大(小)值的应用

学习任务目标

1.了解画函数大致图象的步骤.
2.掌握利用导数解决实际问题中的求最大(小)值的方法.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　画函数 $f(x)$ 大致图象的步骤

(1)求出函数 $f(x)$ 的定义域；
(2)求导数 $f'(x)$ 及函数 $f'(x)$ 的零点；
(3)用 $f'(x)$ 的零点将 $f(x)$ 的定义域划分为若干个区间，列表给出 $f'(x)$ 在各区间上的正负，并得出 $f(x)$ 的单调性与极值；
(4)确定 $f(x)$ 的图象所经过的一些特殊点，以及图象的变化趋势；
(5)画出 $f(x)$ 的大致图象.

知识点二　导数在实际问题中的应用

导数在实际问题中的应用，主要体现在：利润最大问题，用料最省问题，效率最高问题，体积最值问题等.

【概念辨析】

1.某工厂要围建一个面积为 512 m^2 的矩形堆料场，一边可以利用原有的墙壁，其他三边需要砌新的墙壁.若使砌墙壁所用的材料最省，则堆料场的长和宽应分别为(单位：m)　(　　)

A.32,16　　B.30,15
C.40,20　　D.36,18

A　**解析**：要使材料最省，则要求新砌的墙壁的总长最短.设堆料场的宽为 x m，则长为 $\frac{512}{x}$ m，因此新砌墙壁总长 $L=2x+\frac{512}{x}(x>0)$，则 $L'=2-\frac{512}{x^2}$.令 $L'=0$，得 $x=16$ 或 $x=-16$(舍去).此时长为 $\frac{512}{16}=32$(m)，可使 L 最短.

2.已知圆锥内接于半径为 R 的球，当圆锥的体积最大时，圆锥的高为　(　　)

A.R　　B.$2R$
C.$\frac{4}{3}R$　　D.$\frac{3}{4}R$

C　**解析**：设圆锥高为 h，底面半径为 r，则 $R^2=(h-R)^2+r^2$，
所以 $r^2=2Rh-h^2$.
所以 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi}{3}h(2Rh-h^2)=\frac{2}{3}\pi Rh^2-\frac{\pi}{3}h^3$.
$V'=\frac{4}{3}\pi Rh-\pi h^2$.令 $V'=0$，得 $h=\frac{4}{3}R$.
当 $0<h<\frac{4}{3}R$ 时，$V'>0$；
当 $\frac{4}{3}R<h<2R$ 时，$V'<0$.
故当 $h=\frac{4}{3}R$ 时，圆锥的体积最大.

3.请思考并回答下列问题：
(1)应用导数解决实际问题时，求函数的定义域应注意什么？
提示：在求函数定义域时，不仅要考虑函数解析式本身的限制条件，还要注意实际问题中变量的取值范围.
(2)解决生活中的优化问题时应注意什么？
提示：①在建立函数模型时，应根据实际问题确定出函数的定义域.
②求实际问题的最优解时，一定要从问题的实际意义出发，不符合实际意义的应舍去，如：长度、宽度应大于零，销售价格为正数等.

○ 任务型课堂 ○

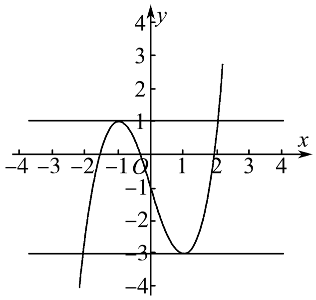
任务1 > 导数与函数的零点

探究活动

例1　(1)已知函数 $f(x)=x^3-3ax-1(a\neq0)$.若函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值，直线 $y=m$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象有三个不同的交点，求 m 的取值范围.
(2)已知函数 $f(x)=e^x-a(x+2)$.
①若 $a=1$，求 $f(x)$ 的图象在点 $(0,f(0))$ 处的切线的方程；
②若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

解：(1)因为 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值，
$f'(x)=3x^2-3a$，
所以 $f'(-1)=3\times(-1)^2-3a=0$，所以 $a=1$.
所以 $f(x)=x^3-3x-1$，$f'(x)=3x^2-3$.
由 $f'(x)=0$，
解得 $x_1=-1$，$x_2=1$.
当 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$；
当 $-1<x<1$ 时，$f'(x)<0$；
当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$.

画出函数 $f(x)=x^3-3x-1$ 的大致图象，如图.



由 $f(x)$ 的单调性可知，$f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值 $f(-1)=1$，在 $x=1$ 处取得极小值 $f(1)=-3$.

要使直线 $y=m$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象有三个不同的交点，结合 $f(x)$ 的单调性可知，m 的取值范围是 $(-3,1)$.

(2)①当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-x-2$，求导得 $f'(x)=e^x-1$，则 $f'(0)=0$，而 $f(0)=-1$，

所以函数 $f(x)$ 的图象在点 $(0,f(0))$ 处的切线的方程为 $y=-1$.

②函数 $f(x)=e^x-a(x+2)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，求导得 $f'(x)=e^x-a$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$f(x)$ 至多有一个零点，不合题意.

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$，解得 $x=\ln a$，

当 $x\in(-\infty,\ln a)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(\ln a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，

则 $f(x)_{\min}=f(\ln a)=a-a(\ln a+2)=-a(\ln a+1)$，

当 $a\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$ 时，$\ln a\leqslant -1$，则 $f(x)_{\min}\geqslant 0$，则 $f(x)$ 至多有一个零点，不合题意；

当 $a\in\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 时，$\ln a>-1$，则 $f(x)_{\min}<0$，而 $f(-2)=e^{-2}>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上有唯一零点，

由①知，当 $x>0$ 时，$e^x-1>0$，函数 $y=e^x-x-2$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则当 $x>2$ 时，$e^x-x-2>0$，即 $e^x>x+2$，所以

当 $x>2\ln(2a)$ 时，$f(x)=e^{\frac{x}{2}}\cdot e^{\frac{x}{2}}-a(x+2)>e^{\ln 2a}\cdot\left(\dfrac{x}{2}+2\right)-a(x+2)=2a>0$，$f(x)$ 在 $(\ln a,+\infty)$ 上有唯一零点，

因此当 $a\in\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 时，$f(x)$ 有两个不同的零点.

综上，实数 a 的取值范围为 $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$.

【探究总结】

此类问题通常要转化为函数的零点问题，解题方法是借助于导数研究函数的单调性、极值(最值)，通过极值或最值的正负、函数的单调性判断函数图象走势，从而判断零点个数或通过零点的个数求参数范围.

应用迁移

1.(2024·全国甲卷)曲线 $y=x^3-3x$ 与 $y=-(x-1)^2+a$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的交点，则 a 的取值范围为________.

$(-2,1)$　**解析**：令 $x^3-3x=-(x-1)^2+a$，即 $a=x^3+x^2-5x+1$，令 $g(x)=x^3+x^2-5x+1(x>0)$，

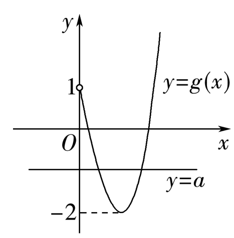
则 $g'(x)=3x^2+2x-5=(3x+5)(x-1)$，令 $g'(x)=0(x>0)$ 得 $x=1$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

$g(0)=1$，$g(1)=-2$.

因为曲线 $y=x^3-3x$ 与 $y=-(x-1)^2+a$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的交点，等价于直线 $y=a$ 与 $g(x)=x^3+x^2-5x+1$ 的图象有两个交点，所以 $a\in(-2,1)$.



2.求函数 $f(x)=x^3-3ax+2$ 的极值，并讨论关于 x 的方程 $x^3-3ax+2=0$ 何时有三个不同的实根，何时有唯一的实根.(其中 $a>0$)

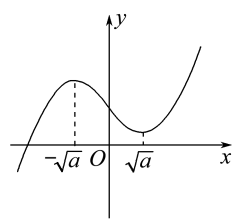
解：函数的定义域为 $\mathbf{R}$，其导函数为 $f'(x)=3x^2-3a$.

由 $f'(x)=0$ 可得 $x=\pm\sqrt{a}$，列表讨论如下：

x	$(-\infty,-\sqrt{a})$	$-\sqrt{a}$	$(-\sqrt{a},\sqrt{a})$	$\sqrt{a}$	$(\sqrt{a},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

由此可得，函数在 $x=-\sqrt{a}$ 处取得极大值 $2+2a^{\frac{3}{2}}$，在 $x=\sqrt{a}$ 处取得极小值 $2-2a^{\frac{3}{2}}$.

根据列表讨论，可作函数的草图(如图).



因为极大值 $f(-\sqrt{a})=2+2a^{\frac{3}{2}}>0$，当 x 取足够小的负数时，有 $f(x)<0$，故当极小值 $f(\sqrt{a})=2-2a^{\frac{3}{2}}<0$，即 $a>1$ 时，方程 $x^3-3ax+2=0$ 有三个不同的实根；当极小值 $f(\sqrt{a})=2-2a^{\frac{3}{2}}>0$，即 $0<$

$a<1$ 时，方程 $x^3-3ax+2=0$ 有唯一的实根.

任务2 导数与恒成立问题

探究活动

例 2 （1）已知 $a\in\mathbf{R}$，设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+2a, x\leqslant 1,\\ x-a\ln x, x>1,\end{cases}$ 若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则 a 的取值范围为（　　）

A.$[0,1]$　　B.$[0,2]$

C.$[0,\mathrm{e}]$　　D.$[1,\mathrm{e}]$

C　**解析**：由 $f(0)\geqslant 0$，可得 $a\geqslant 0$.

当 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时，$\forall x\in(-\infty,1]$，$f(x)=x^2-2ax+2a=(x-a)^2+2a-a^2\geqslant 2a-a^2=a(2-a)>0$，

当 $a>1$ 时，$\forall x\in(-\infty,1]$，$f(x)\geqslant f(1)=1>0$，

故当 $a\geqslant 0$ 时，$x^2-2ax+2a\geqslant 0$ 在 $(-\infty,1]$ 上恒成立；

若 $x-a\ln x\geqslant 0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，即 $a\leqslant\dfrac{x}{\ln x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，

令 $g(x)=\dfrac{x}{\ln x}$，则 $g'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，

当 $x>\mathrm{e}$ 时，函数 $g(x)$ 单调递增，当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，函数 $g(x)$ 单调递减，

故 $g(x)_{\min}=g(\mathrm{e})=\mathrm{e}$，所以 $a\leqslant\mathrm{e}$.

综上可知，a 的取值范围是 $[0,\mathrm{e}]$.

故选 C.

(2)已知函数 $f(x)=2\ln x+x^2-ax$.

①当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

②若对任意 x_1，x_2，且 $0<x_1<x_2$，都有 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>1$，求 a 的取值范围.

解：①当 $a=1$ 时，$f(x)=2\ln x+x^2-x$，

可知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=\dfrac{2}{x}+2x-1=\dfrac{2x^2-x+2}{x}>0$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，无单调递减区间.

②因为 $x_2>x_1>0$，$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>1$，

所以 $f(x_2)-f(x_1)>x_2-x_1$，

即 $f(x_1)-x_1<f(x_2)-x_2$.

设函数 $g(x)=f(x)-x=2\ln x+x^2-(a+1)x$，$x>0$，可知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

且 $g'(x)=\dfrac{2}{x}+2x-a-1=\dfrac{2x^2-(a+1)x+2}{x}$，

则 $g'(x)\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，

即 $2x^2-(a+1)x+2\geqslant 0$，

也即 $a+1\leqslant 2x+\dfrac{2}{x}$ 恒成立.

又因为 $2x+\dfrac{2}{x}\geqslant 2\sqrt{2x\cdot\dfrac{2}{x}}=4$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立，

可得 $a+1\leqslant 4$，即 $a\leqslant 3$.

所以 a 的取值范围是 $(-\infty,3]$.

【探究总结】

利用导数解决不等式恒成立问题的两种情形

(1)若函数的最值可以通过导数求得，则可先利用导数研究函数的单调性，将不等式恒成立问题转化为求函数的最值问题来解决：

①$f(x)>k\Rightarrow f(x)_{\min}>k$；

②$f(x)<k\Rightarrow f(x)_{\max}<k$.

(2)若函数的最值无法通过导数求得，即导函数的零点无法精确求出，则一般向下面两个方向思考：

①将要处理的函数拆分成两个可求最值的函数的和或积，分别求其最值，进而解决问题；

②利用“虚设和代换”的方法求解.

应用迁移

1.已知 $x\ln x-ax-x+1\geqslant 0$ 对于 $x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

解：由题可知 $a\leqslant\dfrac{1-x}{x}+\ln x$ 对于 $x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 恒成立，

令 $g(x)=\dfrac{1-x}{x}+\ln x$，$x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$，

则 $a\leqslant g(x)_{\min}$，

而 $g'(x)=\dfrac{-x-(1-x)}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x^2}$，

当 $x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$ 时，$g'(x)<0$，

当 $x\in(1,2]$ 时，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)=\dfrac{1-x}{x}+\ln x$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right)$ 上单调递减，在 $(1,2]$ 上单调递增，

所以当 $x=1$ 时，$g(x)=\dfrac{1-x}{x}+\ln x$ 取得的极小值，也是最小值，

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=0$，故 $a\leqslant 0$.

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,0]$.

2.已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x-2x^2$，若不等式 $f'(x)\geqslant 0$ 在 **R** 上恒成立，求实数 a 的取值范围.

解：由 $f(x)=a\mathrm{e}^x-2x^2$，得 $f'(x)=a\mathrm{e}^x-4x$，根据题意可知 $a\mathrm{e}^x-4x\geqslant 0$ 在 **R** 上恒成立，

即 $a\geqslant\frac{4x}{\mathrm{e}^x}$ 在 **R** 上恒成立.

令 $h(x)=\frac{4x}{\mathrm{e}^x}$，则 $a\geqslant h(x)_{\max}$，

$h'(x)=\frac{4-4x}{\mathrm{e}^x}$，

当 $x<1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)=\frac{4x}{\mathrm{e}^x}$ 单调递增；

当 $x>1$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)=\frac{4x}{\mathrm{e}^x}$ 单调递减，

故 $h(x)=\frac{4x}{\mathrm{e}^x}$ 在 $x=1$ 处取得极大值，也是最大值，

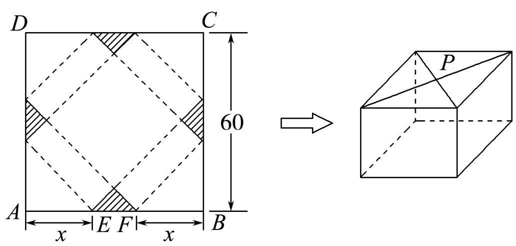
故 $h(x)_{\max}=h(1)=\frac{4}{\mathrm{e}}$，所以 $a\geqslant\frac{4}{\mathrm{e}}$.

故实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{4}{\mathrm{e}},+\infty\right)$.

任务3 导数在实际问题中的应用

探究活动

例 3　如图所示，四边形 $ABCD$ 表示边长为 60 cm 的正方形硬纸片，切去阴影部分所示的四个全等的等腰直角三角形，再沿虚线折起，使得 A,B,C,D 四个点重合于图中的点 P，正好形成一个正四棱柱形状的包装盒，E,F 在 AB 上，是被切去的一个等腰直角三角形斜边的两个端点，设 $AE=FB=x$ cm.



若要求包装盒的容积 V（单位：cm^3）最大，则 x 应取何值？并求出此时包装盒的高与底面边长的比值.

解：设包装盒的高为 h cm，底面边长为 a cm.

由已知得 $a=\sqrt{2}x$，$h=\frac{60-2x}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(30-x)$，$0<x<30$，

所以 $V=a^2h=2\sqrt{2}(-x^3+30x^2)$，

$V'=6\sqrt{2}x(20-x)$.

由 $V'=0$，得 $x=0$（舍去）或 $x=20$，

当 $x\in(0,20)$ 时，$V'>0$；当 $x\in(20,30)$ 时，$V'<0$，

所以当 $x=20$ 时，V 取得极大值，也是最大值.

此时 $\frac{h}{a}=\frac{1}{2}$，即包装盒的高与底面边长的比值为 $\frac{1}{2}$.

［一题多思］

思考 1.本例条件下，若要求包装盒的侧面积 S（单位：cm^2）最大，则 x 应取何值？

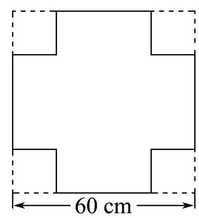
解：设包装盒的高为 h cm，底面边长为 a cm.

由已知得 $a=\sqrt{2}x$，$h=\frac{60-2x}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(30-x)$，$0<x<30$，

所以 $S=4ah=8x(30-x)=-8(x-15)^2+1\ 800$，

所以当 $x=15$ 时，S 取得最大值.

思考 2.如图，在硬纸片的四个角上切去四个相同的小正方形，制成一个无盖的小盒子，小正方形的边长 x（单位：cm）为多少时，盒子的容积最大？



解：由题意，制成盒子的高为 x cm，$0<x<30$，底面边长为 $(60-2x)$cm，

盒子的容积 $V=(60-2x)(60-2x)x=4x^3-240x^2+3\ 600x$，

$V'=12x^2-480x+3\ 600$.

令 $V'=0$，得 $x=10$ 或 $x=30$（舍去），

当 $x\in(0,10)$ 时，$V'>0$；

当 $x\in(10,30)$ 时，$V'<0$；

所以当 $x=10$ 时，$V_{最大值}=16\ 000$.

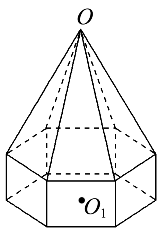
即当小正方形的边长为 10 cm 时，盒子的容积最大.

【探究总结】

求面积与体积的最值问题是实际生产生活中的常见问题.解决这类问题的关键是熟练掌握相关的面积、体积公式，能够依据题意确定出自变量的取值范围，建立准确的函数解析式，然后利用导数加以解决.必要时，可选择建立坐标系，通过点的坐标建立函数解析式或曲线方程，解决问题.

应用迁移

1.一个帐篷如图所示，它下部的形状是高为 1 m 的正六棱柱，上部的形状是侧棱长为 3 m 的正六棱锥.试问：当帐篷的顶点 O 到底面中心 O_1 的距离为多少时，帐篷的体积最大？



解：设 OO_1 为 x m，则 $1<x<4$.

由题设可得正六棱锥的底面边长为 $\sqrt{3^2-(x-1)^2}=\sqrt{8+2x-x^2}$，

故底面正六边形的面积为

$6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{8+2x-x^2})^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}(8+2x-x^2)$.

帐篷的体积为

$V(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}(8+2x-x^2)\left[\frac{1}{3}(x-1)+1\right]$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}(16+12x-x^3)$，

求导得 $V'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(12-3x^2)$.

令 $V'(x)=0$，解得 $x=-2$（不合题意，舍去）或 $x=2$.

当 $1<x<2$ 时，$V'(x)>0$，$V(x)$ 单调递增；

当 $2<x<4$ 时，$V'(x)<0$，$V(x)$ 单调递减.

故当 $x=2$ 时，$V(x)$ 最大，且最大值 $V(2)=16\sqrt{3}$.

所以当 OO_1 为 2 m 时，帐篷的体积最大，最大体积为 $16\sqrt{3}$ m^3.

2. 有关统计数据显示，从上午6 时到中午 12 时，车辆通过某市某一路段的用时 y（单位：min）与车辆进入该路段的时刻 t 之间的关系可近似地用如下函数表示：

$$y=\begin{cases}-\frac{1}{8}t^3-\frac{3}{4}t^2+36t-\frac{629}{4},6\leqslant t<9,\\ \frac{t}{8}+\frac{55}{4},9\leqslant t\leqslant 10,\\ -3t^2+66t-345,10<t\leqslant 12.\end{cases}$$

求在这段时间内通过该路段用时最多的时刻.

解：当 $6\leqslant t<9$ 时，$y'=-\frac{3}{8}t^2-\frac{3}{2}t+36=-\frac{3}{8}(t^2+4t-96)=-\frac{3}{8}(t+12)(t-8)$.

令 $y'=0$，得 $t_1=-12$（舍去），$t_2=8$.

当 $6\leqslant t<8$ 时，$y'>0$；当 $8<t<9$ 时，$y'<0$.

所以当 $t=8$ 时，y 有最大值，$y_{\max}=18.75$.

当 $9\leqslant t\leqslant 10$ 时，$y=\frac{t}{8}+\frac{55}{4}$ 单调递增，

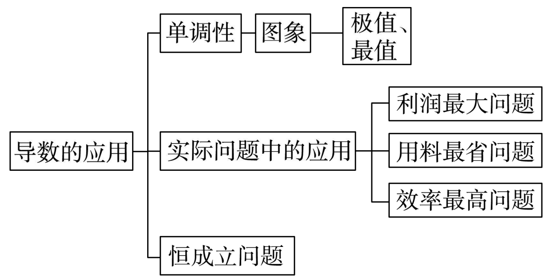
所以当 $t=10$ 时，y 有最大值，$y_{\max}=15$.

当 $10<t\leqslant 12$ 时，$y=-3(t-11)^2+18$，

所以当 $t=11$ 时，y 有最大值，$y_{\max}=18$.

综上所述，通过该路段用时最多的时刻为上午 8 时.

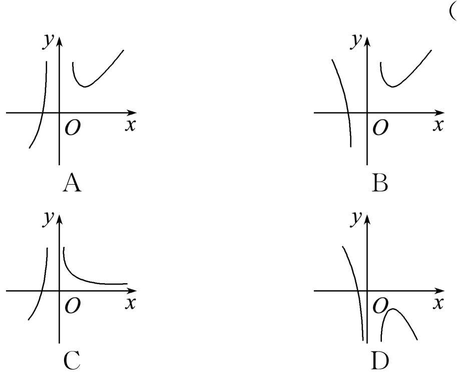
提质归纳



课后素养评价（二十二） 函数的最大(小)值的应用

A组 学习·理解

1. 已知函数 $f(x)=2x-\ln|x|$，则 $f(x)$ 的大致图象为（　　）



A　**解析**：当 $x<0$ 时，$f(x)=2x-\ln(-x)$，$f'(x)=2-\frac{1}{-x}\cdot(-1)=2-\frac{1}{x}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，故 B，D 错误；当 $x>0$ 时，$f(x)=2x-\ln x$，$f'(x)=2-\frac{1}{x}=\frac{2x-1}{x}$，令 $f'(x)>0$，得 $x>\frac{1}{2}$，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<\frac{1}{2}$，则 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，故 A 正确.

2. 已知关于 x 的不等式 $\frac{1}{2}x^2-a\ln x>0(a>0)$ 恒成立，则 a 的取值范围是（　　）

A. $a>0$　　B. $0<a<\mathrm{e}$

C. $a>\mathrm{e}$　　D. $0<a<1$

B　**解析**:令 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-a\ln x(x>0)$,

则 $f'(x)=x-\frac{a}{x}=\frac{x^2-a}{x}$.

因为 $a>0$,所以在 $(0,\sqrt{a})$ 上,$f'(x)<0$;在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 上,$f'(x)>0$.

所以在 $(0,+\infty)$ 上,$f(x)_{\min}=f(\sqrt{a})=\frac{1}{2}a-a\ln\sqrt{a}$.

又因为不等式 $\frac{1}{2}x^2-a\ln x>0(a>0)$ 恒成立,

所以 $f(x)_{\min}>0$,即 $\frac{1}{2}a-a\ln\sqrt{a}>0$,解得 $0<a<\mathrm{e}$.故选 B.

3. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+x^3+(a-3)x+1$ 在区间 $(0,1)$ 上有最小值,则实数 a 的取值范围是　(　　)

A. $(-\mathrm{e},2)$　　B. $(-\mathrm{e},1-\mathrm{e})$

C. $(1,2)$　　D. $(-\infty,1-\mathrm{e})$

A　**解析**:因为 $f'(x)=\mathrm{e}^x+3x^2+(a-3)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增,由题意只需

$\begin{cases}f'(0)<0,\\f'(1)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-2<0,\\\mathrm{e}+a>0\end{cases}\Rightarrow-\mathrm{e}<a<2$.

这时存在 $x_0\in(0,1)$,使得 $f(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上单调递减,在区间 $[x_0,1)$ 上单调递增,即函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上有极小值,也是最小值.所以实数 a 的取值范围是 $(-\mathrm{e},2)$.故选 A.

4. 已知在正四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,$PA=4$,则当该正四棱锥的体积最大时,它的高 h 等于________.

$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　**解析**:设正四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面边长为 a.

因为 $PA=4$,所以 $\frac{a^2}{2}+h^2=16$,即 $a^2=32-2h^2$.

所以正四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的体积 $V=\frac{1}{3}a^2h=\frac{32}{3}h-\frac{2}{3}h^3(0<h<4)$.所以 $V'=\frac{32}{3}-2h^2$.

令 $V'=0$,解得 $h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

当 $0<h<\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时,$V'>0$,所以函数在 $\left(0,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递增;

当 $\frac{4\sqrt{3}}{3}<h<4$ 时,$V'<0$,所以函数在 $\left(\frac{4\sqrt{3}}{3},4\right)$ 上单调递减,

所以当 $h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时,正四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的体积取得最大值.

5. 若关于 x 的不等式 $2x^2+a-\ln x<0$ 有解,则实数 a 的取值范围是________.

$\left(-\infty,-\ln 2-\frac{1}{2}\right)$　**解析**:由 $2x^2+a-\ln x<0$ 有解,得 $a<\ln x-2x^2$ 有解.

令 $f(x)=\ln x-2x^2(x>0)$,则 $f'(x)=\frac{1}{x}-4x=\frac{1-4x^2}{x}(x>0)$.

当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时,$f'(x)>0$;当 $x>\frac{1}{2}$ 时,$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增,在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减.

所以当 $x=\frac{1}{2}$ 时,$f(x)$ 取得最大值 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{4}=-\ln 2-\frac{1}{2}$.

所以实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\ln 2-\frac{1}{2}\right)$.

6. 设函数 $f(x)=x^3-6x+5,x\in\mathbf{R}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2)若关于 x 的方程 $f(x)=a$ 有三个不同的实根,求实数 a 的取值范围;

(3)已知当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$f(x)\geqslant k(x-1)$ 恒成立,求实数 k 的取值范围.

解:(1) $f'(x)=3x^2-6$,令 $f'(x)=0$,

解得 $x_1=-\sqrt{2},x_2=\sqrt{2}$.

因为当 $x>\sqrt{2}$ 或 $x<-\sqrt{2}$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增;

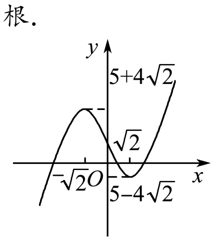
当 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-\sqrt{2})$ 和 $(\sqrt{2},+\infty)$,单调递减区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

当 $x=-\sqrt{2}$ 时,$f(x)$ 有极大值 $5+4\sqrt{2}$;

当 $x=\sqrt{2}$ 时,$f(x)$ 有极小值 $5-4\sqrt{2}$.

(2)由(1)知 $y=f(x)$ 的图象的大致形状如图所示,故当 $5-4\sqrt{2}<a<5+4\sqrt{2}$ 时,直线 $y=a$ 与 $y=f(x)$ 的图象有三个不同的交点,即方程 $f(x)=a$ 有三个不同的实根.



(3) $f(x)\geqslant k(x-1)$,即 $(x-1)(x^2+x-5)\geqslant k(x-1)$.

因为 $x>1$,所以 $k\leqslant x^2+x-5$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立.

令 $g(x)=x^2+x-5$,$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

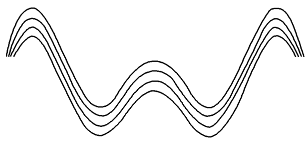
所以 $g(x)>g(1)=-3$.

所以实数 k 的取值范围是 $(-\infty,-3]$.

B组　应用·实践

1. 为了激发同学们学习数学的热情,某学校开展利用数学知识设计 Logo 的比赛,其中某位同学利用函数图象设计了如图的 Logo,那么该同学所选的函数

最有可能是 （　　）



A.$f(x)=x\sin x-\cos x$

B.$f(x)=\cos x-x\sin x$

C.$f(x)=x^2+2\cos x$

D.$f(x)=\sin x-x\cos x$

B　**解析**：由题图可知，所选函数为偶函数，且在图象对称轴右侧附近单调递减.

对于 A 选项，函数 $f(x)=x\sin x-\cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

$f(-x)=(-x)\sin(-x)-\cos(-x)=x\sin x-\cos x=f(x)$，所以函数 $f(x)=x\sin x-\cos x$ 为偶函数，$f'(x)=x\cos x+2\sin x$，

当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f'(x)=x\cos x+2\sin x>0$，

则函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，A 不满足；

对于 B 选项，函数 $f(x)=\cos x-x\sin x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=\cos(-x)-(-x)\sin(-x)=\cos x-x\sin x=f(x)$，所以函数 $f(x)=\cos x-x\sin x$ 为偶函数，$f'(x)=-x\cos x-2\sin x$，当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f'(x)=-x\cos x-2\sin x<0$，则函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，B 满足；

对于 C 选项，函数 $f(x)=x^2+2\cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且为偶函数，$f'(x)=2x-2\sin x$，令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=2-2\cos x\geqslant0$ 且 $g'(x)$ 不恒为零，

所以 $f'(x)$ 在定义域上单调递增，

当 $x>0$ 时，$f'(x)=2x-2\sin x>f'(0)=0$，则函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，C 不满足；

对于 D 选项，函数 $f(x)=\sin x-x\cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则 $f(-x)=\sin(-x)-(-x)\cos(-x)=x\cos x-\sin x=-f(x)$，

所以函数 $f(x)=\sin x-x\cos x$ 为奇函数，D 不满足.

2. 若函数 $f(x)=2\ln x+4x^2+bx+5$ 的图象上的任意一点处的切线的斜率都大于 0，则实数 b 的取值范围是 （　　）

A.$(-\infty,-8)$　　B.$(-8,+\infty)$

C.$(-\infty,8)$　　D.$(8,+\infty)$

B　**解析**：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{2}{x}+8x+b$.

因为 $f(x)$ 图象在任意一点处的切线的斜率都大于 0，

所以 $f'(x)=\dfrac{2}{x}+8x+b>0$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立.

所以 $b>-\dfrac{2}{x}-8x$.

设 $g(x)=-\dfrac{2}{x}-8x$，则 $b>g(x)_{\max}$，$g'(x)=\dfrac{2}{x^2}-8$.

令 $g'(x)=0$，得 $x=\dfrac{1}{2}$，负根舍去.

所以当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减.

所以当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$g(x)$ 取得最大值，最大值为 $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=-8$，

所以 $b>-8$.故选 B.

3.（多选）已知函数 $f(x)=e^x(x^2-x+1)$，则下列说法正确的有 （　　）

A.函数 $f(x)$ 的极小值为 1

B.函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增

C.当 $x\in[-2,2]$ 时，函数 $f(x)$ 的最大值为 $3e^2$

D.当 $k<\dfrac{3}{e}$ 时，方程 $f(x)=k$ 恰有 3 个不等实根

AC　**解析**：对于 A，B，因为 $f'(x)=e^x(x^2-x+1)+e^x(2x-1)=e^x(x^2+x)$，

所以当 $x\in(-\infty,-1)$ 或 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

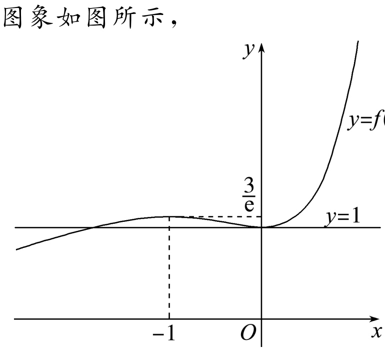
当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(-1)=e^{-1}[(-1)^2-(-1)+1]=3e^{-1}$，

$f(x)$ 的极小值为 $f(0)=e^0(0-0+1)=1$，故 A 正确，B 错误；

对于 C，由函数单调性知，$f(x)$ 在 $[-2,-1)$ 上单调递增，在 $(-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,2]$ 上单调递增，且 $f(-1)=3e^{-1}$，$f(2)=e^2(4-2+1)=3e^2$，$3e^{-1}<3e^2$，故函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值为 $3e^2$，故 C 正确；

对于 D，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to0$，$x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，且 $f(x)$ 的极大值为 $f(-1)=3e^{-1}>0$，$f(x)$ 的极小值为 $f(0)=1>0$，由上述分析可知，$f(x)$ 的图象如图所示，



由图象可得当 $0<k<1$ 或 $k>\dfrac{3}{e}$ 时，$f(x)=k$ 有 1 个实数根，

当 $k=1$ 或 $k=\frac{3}{e}$ 时，$f(x)=k$ 有 2 个实数根，

当 $1<k<\frac{3}{e}$ 时，$f(x)=k$ 有 3 个实数根，故 D 错误.

故选 AC.

4. 已知海轮每小时的燃料费与它的航行速度的立方成正比，某海轮的最大航速为 30 n mile/h，当速度为 10 n mile/h 时，它每小时的燃料费是 25 元，每小时的其余费用(无论速度如何)都是 400 元.若甲、乙两地相距 800 n mile，则要使该海轮从甲地航行到乙地的总费用最低，它的航速应为　　(　　)

A.30 n mile/h　　B.25 n mile/h

C.20 n mile/h　　D.10 n mile/h

C　**解析**：海轮每小时的燃料费与它的航行速度的立方成正比，设船速为 x n mile/h$(0<x\leqslant 30)$，每小时的燃料费用为 W 元，比例系数为 k，则满足 $W=kx^3$.

当速度为 10 n mile/h 时，它每小时的燃料费是 25 元，代入上式可得 $25=k\times 10^3$，解得 $k=\frac{1}{40}$.

若甲、乙两地相距 800 n mile，则所需时间为 $\frac{800}{x}$ h.

所以总费用为 $f(x)=\left(\frac{1}{40}x^3+400\right)\times\frac{800}{x}=\frac{20x^3+320\ 000}{x}(0<x\leqslant 30)$，

所以 $f'(x)=\frac{40\times(x^3-8\ 000)}{x^2}$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=20$.

当 $0<x<20$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,20)$ 上单调递减；

当 $20<x\leqslant 30$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(20,30]$ 上单调递增.

所以当 $x=20$ 时，海轮从甲地航行到乙地的总费用最低.故选 C.

5. 某商场销售某种商品，经验表明，该商品每日的销售量 y(单位:kg)与销售价格 x(单位:元/kg)满足关系式 $y=\frac{2}{x-3}+10(x-6)^2$，$x\in(3,6)$.若该商品的成本为 3 元/kg，则当销售价格为________元/kg 时，该商场每日销售该商品所获得的利润最大.

4　**解析**：设该商场每日销售该商品所获得的利润为 $f(x)=(x-3)\left[\frac{2}{x-3}+10(x-6)^2\right]=2+10(x-3)\cdot(x-6)^2$，$3<x<6$，

$f'(x)=10[(x-6)^2+2(x-3)(x-6)]=30(x-4)\cdot(x-6)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=4$ 或 $x=6$(舍去).

所以函数 $f(x)$ 在 $(3,4)$ 上单调递增，在 $(4,6)$ 上单调递减，

所以当 $x=4$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值 $f(4)=42$.

故当销售价格为 4 元/kg 时，该商场每日销售该商品所获得的利润最大.

6. 某地政府向当地企业发放补助款，其中对纳税额 x(单位:万元)满足 $x\in[4,8]$ 的小微企业设计的补助款发放方案要同时具备下列两个条件：①补助款 $f(x)$(单位:万元)随企业原纳税额 x 的增加而增加；②补助款不低于原纳税额的 50%.经测算，政府决定采用函数 $f(x)=\frac{x}{4}-\frac{m}{x}+4$(其中 m 为使用参数)表示的补助款发放方案.

(1)当使用参数 $m=13$ 时，$f(x)$ 是否满足条件？并说明理由.

(2)求同时满足条件①②的使用参数 m 的取值范围.

解：(1)不满足条件.理由如下：当 $m=13$ 时，函数 $f(x)=\frac{x}{4}-\frac{13}{x}+4$，可得 $f'(x)=\frac{1}{4}+\frac{13}{x^2}>0$.

所以 $f(x)$ 在 $[4,8]$ 上单调递增，满足条件①.

又因为 $f(4)=\frac{7}{4}<2=\frac{1}{2}\times 4$，所以当 $m=13$ 时，$f(x)$ 不满足条件②.

综上，当使用参数 $m=13$ 时，$f(x)$ 不满足条件.

(2)由函数 $f(x)=\frac{x}{4}-\frac{m}{x}+4$，

可得 $f'(x)=\frac{1}{4}+\frac{m}{x^2}=\frac{x^2+4m}{4x^2}$.

所以当 $m\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，满足条件①.

当 $m<0$ 时，由 $f'(x)=0$，可得 $x=2\sqrt{-m}$.

当 $x\in[2\sqrt{-m},+\infty)$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 单调递增.

所以 $2\sqrt{-m}\leqslant 4$，解得 $-4\leqslant m<0$.

综上，$m\geqslant -4$.

由条件②可知，$f(x)\geqslant\frac{x}{2}$，即不等式 $\frac{x}{4}+\frac{m}{x}\leqslant 4$ 在 $[4,8]$ 上恒成立，

等价于 $m\leqslant -\frac{1}{4}x^2+4x=-\frac{1}{4}(x-8)^2+16$ 在 $[4,8]$ 上恒成立.

函数 $y=-\frac{1}{4}(x-8)^2+16$ 在 $[4,8]$ 上单调递增，

当 $x=4$ 时，$y=-\frac{1}{4}(x-8)^2+16$ 取得最小值 12，

所以 $m\leqslant 12$.

综上，使用参数 m 的取值范围是 $[-4,12]$.

7. 已知函数 $f(x)=e^x-ax-a^3$.

(1)当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的方程；

(2)若 $f(x)$ 有极小值，且极小值小于 0，求实数 a 的取值范围.

解：(1)当 $a=1$ 时，则 $f(x)=e^x-x-1$，$f'(x)=e^x-1$，

可得 $f(1)=e-2$，$f'(1)=e-1$，

即切点坐标为 $(1,e-2)$，切线斜率 $k=e-1$，

所以切线方程为 $y-(e-2)=(e-1)(x-1)$，即(e

$-1)x-y-1=0$.

(2)(方法一)由题知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f'(x)=e^x-a$.

若 $a\leqslant 0$,则 $f'(x)>0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,

可知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,无极值,不合题意.

若 $a>0$,令 $f'(x)=0$,解得 $x=\ln a$.

当 $x>\ln a$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增;

当 $x<\ln a$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减,在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增,

则 $f(x)$ 有极小值 $f(\ln a)=a-a\ln a-a^3$,无极大值.

由题意可得 $f(\ln a)=a-a\ln a-a^3<0$,

即 $a^2+\ln a-1>0$.

设 $g(a)=a^2+\ln a-1,a>0$,

则 $g'(a)=2a+\dfrac{1}{a}>0$,

可知 $g(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,且 $g(1)=0$,

不等式 $a^2+\ln a-1>0$ 等价于 $g(a)>g(1)$,解得 $a>1$,

所以 a 的取值范围为 $(1,+\infty)$.

(方法二)$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f'(x)=e^x-a$.

若 $f(x)$ 有极小值,则 $f'(x)=e^x-a$ 有零点,

令 $f'(x)=e^x-a=0$,可得 $e^x=a$,

可知 $y=e^x$ 的图象与直线 $y=a$ 有交点,则 $a>0$.

若 $a>0$,令 $f'(x)=0$,解得 $x=\ln a$.

当 $x>\ln a$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增;

当 $x<\ln a$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减,在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增,

则 $f(x)$ 有极小值 $f(\ln a)=a-a\ln a-a^3$,无极大值,符合题意,

由题意可得 $f(\ln a)=a-a\ln a-a^3<0$,

即 $a^2+\ln a-1>0$,

设 $g(a)=a^2+\ln a-1,a>0$.

因为 $y=a^2$,$y=\ln a-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

可知 $g(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,且 $g(1)=0$,

不等式 $a^2+\ln a-1>0$ 等价于 $g(a)>g(1)$,解得 $a>1$,

所以 a 的取值范围为 $(1,+\infty)$.

8. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+a\ln x$.

(1)若 $a=-1$,求函数 $f(x)$ 的极值,并指出是极大值还是极小值;

(2)若 $a=1$,求证:在区间 $[1,+\infty)$ 上,函数 $f(x)$ 的图象在函数 $g(x)=\dfrac{2}{3}x^3$ 的图象的下方.

(1)**解**:函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

当 $a=-1$ 时,$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\ln x$,

$f'(x)=x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x}$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=1$ 或 $x=-1$(舍去),

当 $x\in(0,1)$ 时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减;

当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点,

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值为 $f(1)=\dfrac{1}{2}$.

(2)**证明**:设 $F(x)=f(x)-g(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\ln x-\dfrac{2}{3}x^3$,

则 $F'(x)=x+\dfrac{1}{x}-2x^2$

$=\dfrac{-2x^3+x^2+1}{x}$

$=\dfrac{-(x-1)(2x^2+x+1)}{x}$,

当 $x\geqslant 1$ 时,$F'(x)\leqslant 0$,

故 $F(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递减.

又 $F(1)=-\dfrac{1}{6}<0$,

所以在区间 $[1,+\infty)$ 上,$F(x)<0$ 恒成立,

即 $f(x)<g(x)$ 恒成立.

因此当 $a=1$ 时,在区间 $[1,+\infty)$ 上,函数 $f(x)$ 的图象在函数 $g(x)$ 的图象的下方.

易错强化训练（四）　导数的应用

练易错

易错点 1｜ 忽视导数为零的情况

［防范要诀］

$f'(x)>0 \Rightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 单调递增，但反之，当函数 $y=f(x)$ 单调递增时，$f'(x)\geqslant 0$，此处不要漏掉导数等于零的情况.

［对点集训］

1. 函数 $y=x+x\ln x$ 的单调递减区间是（　　）

A. $(-\infty,e^{-2})$　　B. $(0,e^{-2})$

C. $(e^{-2},+\infty)$　　D. $(e^{2},+\infty)$

B　**解析**：$y=x+x\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，令 $y'=2+\ln x<0$，得 $0<x<e^{-2}$，即函数的单调递减区间为 $(0,e^{-2})$.

2. 若函数 $f(x)=ax^3-x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，则（　　）

A. $a<0$　　B. $a\leqslant 0$

C. $a<\frac{1}{3}$　　D. $a\leqslant\frac{1}{3}$

B　**解析**：$f'(x)=3ax^2-1$，

因为 $f(x)=ax^3-x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

所以 $f'(x)=3ax^2-1\leqslant 0$ 恒成立，故 $a\leqslant 0$.

3. 若函数 $f(x)=x-\frac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $[-1,1]$　　B. $\left[-1,\frac{1}{3}\right]$

C. $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$　　D. $\left[-1,-\frac{1}{3}\right]$

C　**解析**：（方法一：特殊值法）不妨取 $a=-1$，

则 $f(x)=x-\frac{1}{3}\sin 2x-\sin x$，

$f'(x)=1-\frac{2}{3}\cos 2x-\cos x$，但 $f'(0)=1-\frac{2}{3}-1=-\frac{2}{3}<0$，不满足 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增的条件，排除 A，B，D. 故选 C.

（方法二：综合法）因为函数 $f(x)=x-\frac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f'(x)=1-\frac{2}{3}\cos 2x+a\cos x$

$=1-\frac{2}{3}(2\cos^2 x-1)+a\cos x$

$=-\frac{4}{3}\cos^2 x+a\cos x+\frac{5}{3}\geqslant 0$，

即 $a\cos x\geqslant\frac{4}{3}\cos^2 x-\frac{5}{3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恒成立.

当 $\cos x=0$ 时，恒有 $0\geqslant-\frac{5}{3}$，得 $a\in\mathbf{R}$；

当 $0<\cos x\leqslant 1$ 时，得 $a\geqslant\frac{4}{3}\cos x-\frac{5}{3\cos x}$，令 $t=\cos x$，$g(t)=\frac{4}{3}t-\frac{5}{3t}$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，得 $a\geqslant g(1)=-\frac{1}{3}$；

当 $-1\leqslant\cos x<0$ 时，得 $a\leqslant\frac{4}{3}\cos x-\frac{5}{3\cos x}$，令 $t=\cos x$，$g(t)=\frac{4}{3}t-\frac{5}{3t}$ 在 $[-1,0)$ 上单调递增，得 $a\leqslant g(-1)=\frac{1}{3}$.

综上，可得 a 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$. 故选 C.

易错点 2｜ 由极值求参数时未检验

［防范要诀］

可导函数在 $x=x_0$ 处的导数为 0 是该函数在 $x=x_0$ 处取得极值的必要不充分条件，故已知极值求函数时，由 $f'(x)=0$ 求出的参数的值要进行检验，否则易出错.

［对点集训］

4. 已知函数 $f(x)=x^3+3mx^2+nx+m^2$ 在 $x=-1$ 处有极值 0，则实数 $m+n$ 的值为（　　）

A. 4　　B. 4 或 11

C. 9　　D. 11

D　**解析**：$f'(x)=3x^2+6mx+n$，由题意可知 $\begin{cases}f'(-1)=0,\\f(-1)=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}3-6m+n=0,\\-1+3m-n+m^2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=1,\\n=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=2,\\n=9.\end{cases}$

当 $\begin{cases}m=1,\\n=3\end{cases}$ 时，$f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2\geqslant 0$，不符合题意，舍去.

当 $\begin{cases}m=2,\\n=9\end{cases}$ 时，$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+3)(x+1)$，

令 $f'(x)>0$，得 $x<-3$ 或 $x>-1$；令 $f'(x)<0$，得 $-3<x<-1$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-3)$，$(-1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-3,-1)$ 上单调递减，故 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极小值，符合题意，

则 $m+n=2+9=11$. 故选 D.

5. 函数 $y=x^3-2ax+a$ 在 $(0,1)$ 内有极小值，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(0,3)$　　B. $\left(0,\frac{3}{2}\right)$

C. $(0,+\infty)$　　D. $(-\infty,3)$

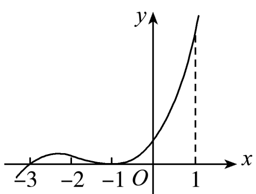
B　**解析**：$y'=3x^2-2a$. 要使函数在 $(0,1)$ 内有极小值，必有 $a>0$. 令 $y'=3x^2-2a=0$，得 $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}a}$.

当 $x<-\sqrt{\frac{2}{3}a}$ 时，$y'>0$；当 $-\sqrt{\frac{2}{3}a}<x<\sqrt{\frac{2}{3}a}$

时，$y'<0$；当 $x>\sqrt{\frac{2}{3}a}$ 时，$y'>0$. 故函数在 $x=\sqrt{\frac{2}{3}a}$ 时取得极小值. 令 $0<\sqrt{\frac{2}{3}a}<1$，得 $0<a<\frac{3}{2}$.

练疑难

1. 函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示，则（　　）



A. -3 是函数 $y=f(x)$ 的极大值点

B. $y=f(x)$ 在区间 $(-3,1)$ 上单调递增

C. -1 是函数 $y=f(x)$ 的最小值点

D. 曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线的斜率小于零

B　**解析**：根据题图可知，当 $x\in(-\infty,-3)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(-3,1)$ 时，$f'(x)>0$，所以函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,-3)$ 上单调递减，在 $(-3,1)$ 上单调递增，-3 是函数 $y=f(x)$ 的极小值点，故 A 错误，B 正确；因为函数在 $(-3,1)$ 上单调递增，所以 -1 不是函数 $y=f(x)$ 的最小值点，故 C 不正确；因为函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数大于 0，所以切线的斜率大于零，故 D 不正确. 故选 B.

2. 已知函数 $f(x)=\frac{a}{3}x^3-ax^2+1$，若 $f(x)$ 在 $x=2$ 处有极小值，则 a 的值可以为（　　）

A. 0　　B. -1

C. 1　　D. -2

C　**解析**：因为 $f(x)=\frac{a}{3}x^3-ax^2+1$，

所以 $f'(x)=ax^2-2ax=ax(x-2)$.

① 当 $a<0$ 时，在 $(-\infty,0)$ 和 $(2,+\infty)$ 上，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，

在 $(0,2)$ 上时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，

故函数在 $x=2$ 处取得极大值，不满足题意；

② 当 $a=0$ 时，$f(x)=1$，函数 $f(x)$ 无极值，不满足题意；

③ 当 $a>0$ 时，在 $(-\infty,0)$ 和 $(2,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，

在 $(0,2)$ 上，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，故函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值，满足题意.

综上所述，$a>0$.

3. 已知 $a\geqslant 0$，函数 $f(x)=(x^2-2ax)e^x$. 若函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减，则 a 的取值范围是（　　）

A. $0<a<\frac{3}{4}$　　B. $\frac{1}{2}<a<\frac{3}{4}$

C. $a\geqslant\frac{3}{4}$　　D. $0<a<\frac{1}{2}$

C　**解析**：（方法一）当 $a=1$ 时，$f(x)=(x^2-2x)e^x$，

$f'(x)=(2x-2)e^x+(x^2-2x)e^x=e^x(x^2-2)$.

当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$x^2-2<0$，所以 $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减，排除 A，B，D. 故选 C.

（方法二）$f'(x)=e^x[x^2+2(1-a)x-2a]$，

因为 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减，所以 $f'(x)\leqslant 0$ 在 $[-1,1]$ 上恒成立. 令 $g(x)=x^2+2(1-a)x-2a$，

则 $\begin{cases} g(1)\leqslant 0, \\ g(-1)\leqslant 0, \end{cases}$ 解得 $a\geqslant\frac{3}{4}$.

4.（多选）若函数 $f(x)$ 在定义域 D 内的某个区间 I 上单调递增，且 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$ 在区间 I 上也单调递增，则称 $y=f(x)$ 是 I 上的“一致递增函数”. 已知 $f(x)=x+\frac{e^x}{x}$，若函数 $f(x)$ 是区间 I 上的“一致递增函数”，则区间 I 可能是（　　）

A. $(-\infty,-2)$　　B. $(-\infty,0)$

C. $(0,+\infty)$　　D. $(2,+\infty)$

AD　**解析**：由 $f(x)=x+\frac{e^x}{x}$，得 $f'(x)=\frac{x^2+e^x(x-1)}{x^2}$.

由 $F(x)=\frac{f(x)}{x}=1+\frac{e^x}{x^2}$，得 $F'(x)=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$.

当 $x\in(-\infty,-2)$ 时，$f'(x)=\frac{x^2+e^x(x-1)}{x^2}>\frac{x^2+(x-1)}{x^2}>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，

$F'(x)=\frac{e^x(x-2)}{x^3}>0$，函数 $F(x)$ 单调递增，故 A 满足题意；

$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{4}-\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{4}}<0$，故 B 不满足题意；

$F'(1)=-e<0$，故 C 不满足题意；

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)=\frac{x^2+e^x(x-1)}{x^2}>0$，

$F'(x)=\frac{e^x(x-2)}{x^3}>0$，故 D 满足题意. 故选 AD.

5. 设 $F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，其中 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)<f(x)$ 对于 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则（　　）

A. $f(2)>e^2f(0)$，$f(2\,024)>e^{2\,024}f(0)$

B. $f(2)<e^2f(0)$，$f(2\,024)>e^{2\,024}f(0)$

C. $f(2)<e^2f(0)$，$f(2\,024)<e^{2\,024}f(0)$

D. $f(2)>e^2f(0)$，$f(2\,024)<e^{2\,024}f(0)$

C　**解析**：因为函数 $F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ 的导函数 $F'(x)=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}<0$，

所以函数 $F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

所以 $F(2)<F(0)$，即 $\frac{f(2)}{e^2}<\frac{f(0)}{e^0}$，故有 $f(2)<e^2f(0)$.

同理可得 $f(2\,024)<e^{2\,024}f(0)$.故选 C.

6. 函数 $f(x)=|2x-1|-2\ln x$ 的最小值为________.

1 **解析**:函数 $f(x)=|2x-1|-2\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.①当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时,$f(x)=2x-1-2\ln x$,所以 $f'(x)=2-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(x-1)}{x}$,当 $\dfrac{1}{2}<x<1$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,所以 $f(x)_{\min}=f(1)=2-1-2\ln 1=1$.②当 $0<x\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,$f(x)=1-2x-2\ln x$,所以 $f'(x)=-2-\dfrac{2}{x}=\dfrac{-2(x+1)}{x}$,此时 $f'(x)<0$,$f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$上单调递减,所以 $f(x)_{\min}=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-2\ln\dfrac{1}{2}=\ln 4>\ln e=1$.综上,函数 $f(x)$的最小值为 1.

7. 设函数 $f(x)=x(e^x-1)-\dfrac{1}{2}x^2$,则 $f(x)$的单调递增区间是____________,单调递减区间是____________.

$(-\infty,-1)$,$(0,+\infty)$ $(-1,0)$ **解析**:$f'(x)=e^x-1+xe^x-x=(e^x-1)(x+1)$.

当 $x\in(-\infty,-1)$时,$f'(x)>0$;

当 $x\in(-1,0)$时,$f'(x)<0$;

当 $x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$.

故 $f(x)$在$(-\infty,-1)$,$(0,+\infty)$上单调递增,在$(-1,0)$上单调递减.

8. 设圆柱的体积为 V,那么其表面积最小时,底面半径为________.

$\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ **解析**:设底面圆半径为 r,高为 h,

则 $V=\pi r^2h$.所以 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$.

所以 $S_{表}=2S_{底}+S_{侧}=2\pi r^2+2\pi r\cdot h=2\pi r^2+2\pi r\cdot\dfrac{V}{\pi r^2}=2\pi r^2+\dfrac{2V}{r}$.

所以 $S'_{表}=4\pi r-\dfrac{2V}{r^2}$.令 $S'_{表}=0$,得 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

又当 $0<r<\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ 时,$S'_{表}<0$,

当 $r>\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ 时,$S'_{表}>0$,

所以当 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ 时,表面积最小.

9. 判断函数 $f(x)=2^x+x^3-2$ 在区间$(0,1)$内的零点个数.

解:因为 $f(x)=2^x+x^3-2$,$0<x<1$,

所以 $f'(x)=2^x\ln 2+3x^2>0$ 在$(0,1)$上恒成立,

所以 $f(x)$在$(0,1)$上单调递增.

又 $f(0)=2^0+0-2=-1<0$,$f(1)=2+1-2=1>0$,

$f(0)f(1)<0$,所以 $f(x)$在$(0,1)$内有且只有一个零点.

10. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2e^x$.

(1)求 $f(x)$的单调区间;

(2)若当 $x\in[-2,2]$时,不等式 $f(x)>m$ 恒成立,求实数 m 的取值范围.

解:(1)$f'(x)=xe^x+\dfrac{1}{2}x^2e^x=\dfrac{e^x}{2}x(x+2)$.

由$\dfrac{e^x}{2}x(x+2)>0$,解得 $x>0$ 或 $x<-2$.

所以 $f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,-2)$,$(0,+\infty)$.

由$\dfrac{e^x}{2}x(x+2)<0$,解得$-2<x<0$.

所以 $f(x)$的单调递减区间为$(-2,0)$.

所以 $f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,-2)$,$(0,+\infty)$,单调递减区间为$(-2,0)$.

(2)令 $f'(x)=0$,得 $x=0$ 或 $x=-2$.

因为 $f(-2)=\dfrac{2}{e^2}$,$f(2)=2e^2$,$f(0)=0$,

所以当 $x\in[-2,2]$时,$f(x)\in[0,2e^2]$.

又因为 $f(x)>m$ 恒成立,所以 $m<0$.

故实数 m 的取值范围为$(-\infty,0)$.

11. 给定函数 $f(x)=(x+3)e^x$.

(1)判断 $f(x)$的单调性并求极值;

(2)讨论方程 $f(x)=m(m\in\mathbf{R})$的解的个数.

解:(1)因为 $f(x)=(x+3)e^x$,

所以 $f'(x)=(x+3)'e^x+(x+3)(e^x)'=(x+4)e^x$.

令 $f'(x)>0$,得 $x>-4$,

令 $f'(x)<0$,得 $x<-4$,

所以函数 $f(x)$在区间$(-\infty,-4)$上单调递减,在区间$(-4,+\infty)$上单调递增,

所以当 $x=-4$ 时,$f(x)$取得极小值 $f(-4)=-\dfrac{1}{e^4}$,无极大值.

(2)由(1)知当 $x=-4$ 时,$f(x)$取得的极小值也是最小值,为 $f(-4)=-\dfrac{1}{e^4}$,且当 $x<-3$ 时,$f(x)=(x+3)e^x<0$,$f(x)$的图象恒在 x 轴的下方,所以当 $x\to-\infty$时,$f(x)\to0$.

根据函数 $y=f(x)$与 $y=m$ 的图象(图略),可知当 $m=-\dfrac{1}{e^4}$或 $m\geqslant0$ 时,两函数图象恰有一个交点,此时方程有一个解;

当$-\dfrac{1}{e^4}<m<0$ 时,两函数图象有两个交点,此时方程有两个解.

综上所述,当 $m=-\dfrac{1}{e^4}$或 $m\geqslant0$ 时,方程有一个解;

当$-\dfrac{1}{e^4}<m<0$ 时,方程有两个解.

迁·移·应·用

学习目标

1. 掌握基本初等函数的导数，能够根据导数形式及需求构造新的函数解决问题.
2. 能够利用导数证明不等式，或解决不等式的恒(能)成立与有解问题.
3. 会利用导数确定函数的零点与方程的根的个数.

类型一 函数中的构造问题

例1 (1)(多选)已知函数 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的奇函数，若当 $x<0$ 时，$xf'(x)-f(x)<0$，且 $f(1)=0$，则 ( )

A. $2f(\mathrm{e})>\mathrm{e}f(2)$

B. 当 $m<2$ 时，$f(m)>mf(1)$

C. $3f(-\pi)+\pi f(3)<0$

D. 不等式 $f(x)>0$ 的解集为 $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

ACD **解析**：构造函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，其中 $x\neq 0$，

因为函数 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，

所以 $g(-x)=\dfrac{f(-x)}{-x}=\dfrac{f(x)}{x}=g(x)$，

故函数 $g(x)$ 为偶函数.

当 $x<0$ 时，$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $f(1)=0$，则 $g(1)=\dfrac{f(1)}{1}=0$，则 $g(-1)=g(1)=0$.

因为 $\mathrm{e}>2$，所以 $g(\mathrm{e})>g(2)$，即 $\dfrac{f(\mathrm{e})}{\mathrm{e}}>\dfrac{f(2)}{2}$，$2f(\mathrm{e})>\mathrm{e}f(2)$，故 A 正确；

不妨取 $m=1$，则 $f(1)=0$，$mf(1)=0$，B 错误；

因为偶函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $g(-\pi)=g(\pi)>g(3)$，

即 $\dfrac{f(-\pi)}{-\pi}>\dfrac{f(3)}{3}$，整理可得 $3f(-\pi)+\pi f(3)<0$，C 正确；

当 $x<0$ 时，由 $f(x)>0$ 可得 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}<0=g(-1)$，解得 $-1<x<0$，

当 $x>0$ 时，由 $f(x)>0$ 可得 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}>0=g(1)$，解得 $x>1$，

综上所述，不等式 $f(x)>0$ 的解集为 $(-1,0)\cup(1,+\infty)$，D 正确.

故选 ACD.

(2)已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数 $f(x)$，其导函数为 $f'(x)$，若 $2f(x)+f'(x)>0$，且 $f(1)=\mathrm{e}$，则不等式 $\mathrm{e}^{2x}f(x)-\mathrm{e}^3>0$ 的解集为 ( )

A. $(1,+\infty)$

B. $(\mathrm{e},+\infty)$

C. $(-\infty,1)$

D. $(-\infty,\mathrm{e})$

A **解析**：构造函数 $g(x)=\mathrm{e}^{2x}f(x)$，该函数的定义域为 $\mathbf{R}$，

则 $g'(x)=2\mathrm{e}^{2x}f(x)+\mathrm{e}^{2x}f'(x)=\mathrm{e}^{2x}[2f(x)+f'(x)]>0$，

所以，函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，且 $g(1)=\mathrm{e}^2f(1)=\mathrm{e}^3$.

由 $\mathrm{e}^{2x}f(x)-\mathrm{e}^3>0$ 可得 $\mathrm{e}^{2x}f(x)>\mathrm{e}^3$，即 $g(x)>g(1)$，解得 $x>1$.

所以不等式 $\mathrm{e}^{2x}f(x)-\mathrm{e}^3>0$ 的解集为 $(1,+\infty)$.

故选 A.

【总结升华】

通过已知等式或不等式的结构特征，构造新函数，解决比较大小、解不等式、恒成立等问题，常见的函数构造方式如下：

(1)对于 $xf'(x)+kf(x)>0(<0)$，构造 $g(x)=x^k\cdot f(x)$；

(2)对于 $xf'(x)-kf(x)>0(<0)$，构造 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^k}$；

(3)对于 $f'(x)+kf(x)>0(<0)$，构造 $g(x)=$

$e^{kx}\cdot f(x)$；

(4)对于 $f'(x)-kf(x)>0(<0)$，构造 $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^{kx}}$；

(5)对于 $\sin x\cdot f'(x)+\cos x\cdot f(x)>0(<0)$，构造 $g(x)=f(x)\cdot\sin x$；

(6)对于 $\cos x\cdot f'(x)+\sin x\cdot f(x)>0(<0)$，构造 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\cos x}$.

类型二 利用导数研究不等式恒(能)成立问题

例 2 已知函数 $f(x)=axe^x-(a+1)(2x-1)$.

(1)若 $a=1$，求函数 $f(x)$ 的图象在点 $(0,f(0))$ 处的切线的方程；

(2)当 $x>0$ 时，函数 $f(x)\geqslant0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

解：(1)若 $a=1$，则 $f(x)=xe^x-2(2x-1)$.

即 $f'(x)=xe^x+e^x-4$，

则 $f'(0)=-3$，$f(0)=2$，

所以所求切线方程为 $3x+y-2=0$.

(2)由 $f(1)\geqslant0$，得 $a\geqslant\dfrac{1}{e-1}>0$，则 $f(x)\geqslant0$ 在 $x>0$ 时恒成立可转化为 $\dfrac{a}{a+1}\geqslant\dfrac{2x-1}{xe^x}$ 在 $x>0$ 时恒成立.

设函数 $F(x)=\dfrac{2x-1}{xe^x}(x>0)$，

则 $F'(x)=-\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x^2e^x}$.

当 $0<x<1$ 时，$F'(x)>0$，当 $x>1$ 时，$F'(x)<0$，

所以函数 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $F(x)_{\max}=F(1)=\dfrac{1}{e}$. 于是 $\dfrac{a}{a+1}\geqslant\dfrac{1}{e}$，解得 $a\geqslant\dfrac{1}{e-1}$. 故实数 a 的取值范围为 $\left[\dfrac{1}{e-1},+\infty\right)$.

【总结升华】

利用分离参数法确定不等式 $f(x,\lambda)\geqslant0(x\in D,\lambda$ 为参数)恒成立问题中参数范围的步骤：

(1)将参数与变量分离，化为 $f_1(\lambda)\geqslant f_2(x)$ 或 $f_1(\lambda)\leqslant f_2(x)$ 的形式；

(2)求 $f_2(x)$ 在 $x\in D$ 时的最大值或最小值；

(3)解不等式 $f_1(\lambda)\geqslant f_2(x)_{\max}$ 或 $f_1(\lambda)\leqslant f_2(x)_{\min}$，得到 λ 的取值范围.

类型三 函数的零点问题

例 3 已知函数 $f(x)=e^{mx}+x-x\ln x(m\geqslant0)$.

(1)当 $m=1$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上的值域；

(2)设函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，讨论 $f'(x)$ 的零点个数.

解：(1)当 $m=1$ 时，$f(x)=e^x+x-x\ln x(x>0)$，

则 $f'(x)=e^x-\ln x$.

设 $g(x)=f'(x)=e^x-\ln x(x>0)$，

则 $g'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$.

因为 $g'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $g'(1)=e-1>0$，所以 $g(x)$ 在 $[1,e]$ 上单调递增.

因为 $g(1)=e>0$，所以 $f'(x)>0$ 在 $[1,e]$ 上恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上单调递增，则 $f(x)_{\min}=f(1)=e+1$，$f(x)_{\max}=f(e)=e^e$.

故函数 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上的值域为 $[e+1,e^e]$.

(2)由题意可得 $f'(x)=me^{mx}-\ln x(x>0)$，

令 $f'(x)=me^{mx}-\ln x=0$，

则 $me^{mx}=\ln x$，即 $mxe^{mx}=x\ln x$.

因为 $m\geqslant0$，所以 $me^{mx}\geqslant0$，即 $\ln x\geqslant0$，则 $x\geqslant1$.

设 $h(x)=xe^x$，则 $mxe^{mx}=x\ln x$ 等价于 $h(mx)=h(\ln x)$.

因为 $h(x)=xe^x$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，且当 $x\geqslant1$ 时，$mx\geqslant0$，$\ln x\geqslant0$，

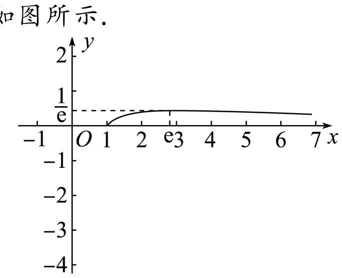
所以 $h(mx)=h(\ln x)$ 等价于 $mx=\ln x$，则 $m=\dfrac{\ln x}{x}$.

设 $\varphi(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x\geqslant1)$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

当 $x\in[1,e)$ 时，$\varphi'(x)>0$；

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)<0$.

即 $\varphi(x)$ 在 $[1,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，其图象如图所示.



因为 $\varphi(1)=0$，$\varphi(e)=\dfrac{1}{e}$，且当 $x>e$ 时，$\varphi(x)>0$，

所以当 $m=0$ 或 $m=\dfrac{1}{e}$ 时，$f'(x)$ 有 1 个零点；

当 $0<m<\dfrac{1}{e}$ 时，$f'(x)$ 有 2 个零点；

当 $m>\dfrac{1}{e}$ 时，$f'(x)$ 没有零点.

【总结升华】

含参数的函数零点个数问题，可转化为方程解的个数问题，若能分离参数，可将参数分离出来，表示为 x 的函数，作出该函数的图象，根据图象特征求参数的范围.

重·构·拓·展

体系建构

- 数学抽象、逻辑推理、数学运算、数学建模、数形结合、分类讨论、转化与化归
- 导数的应用
  - 函数的单调性
    - 导数符号与函数单调性的关系
    - 用导数求函数单调区间的步骤
  - 函数的极值
    - 定义
    - 求函数极值点的步骤
  - 函数的最值
    - 定义
    - 函数在闭区间上最值点的确定方法及最值的求法
      - 实际问题中的应用
  - 实际问题中导数的意义
    - 速度、加速度
    - 功率
    - 降雨强度
    - 边际成本

【问题探究】

1. 你能从物理和几何两方面解释导数的意义吗？

2. 利用导数定义推导函数 $y=f(x)$ 的导数时，其基本步骤是什么？

3. 利用导数研究函数性质的基本步骤是什么？

学科视野拓展

拓展一 导数中的朗博同构和同构放缩

【拓展总结】

当遇到幂函数（或常数）乘指数函数时，可以利用对数恒等式进行变换，变换后的同构形式被称为朗博同构，如：

(1) $xe^x=e^{x+\ln x}$；$x+\ln x=\ln(xe^x)$.

(2) $\dfrac{e^x}{x}=e^{x-\ln x}$；$x-\ln x=\ln\dfrac{e^x}{x}$.

(3) $x^2e^x=e^{x+2\ln x}$；$x+2\ln x=\ln(x^2e^x)$.

(4) $\dfrac{e^x}{x^2}=e^{x-2\ln x}$；$x-2\ln x=\ln\dfrac{e^x}{x^2}$.

另外，一些关于 e^x，$\ln x$，x 的常用不等式也能对解决问题提供方向：

(1) $e^x\geqslant x+1$（$x=0$ 时取等号）；$e^x\geqslant ex$（$x=1$ 时取等号）.

(2) $1-\dfrac{1}{x}\leqslant\ln x\leqslant x-1$（$x=1$ 时取等号）；$\ln x\leqslant\dfrac{x}{e}$（$x=e$ 时取等号）.

(3) $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\sin x<x<\tan x$.

应用1 关于 x 的不等式 $ae^{ax}-2\ln x\leqslant2\ln 2$ 有解，求实数 a 的取值范围.

解：由不等式 $ae^{ax}-2\ln x\leqslant2\ln 2$，$x>0$，

得 $ae^{ax}\leqslant2\ln 2x\Leftrightarrow axe^{ax}\leqslant2x\ln 2x$，

即 $axe^{ax}\leqslant\ln 2x\cdot e^{\ln 2x}$.

当 $a\leqslant0$ 时，$axe^{ax}<0$，存在 x 使 $2x\ln 2x>0$，即必然存在 x 满足不等式 $axe^{ax}\leqslant2x\ln 2x$；

当 $a>0$ 时，要使不等式 $axe^{ax}\leqslant x\ln 2x$ 有解，则 $2x>0$，$x>\dfrac{1}{2}$.

设函数 $f(x)=xe^x$，$x>0$，$f'(x)=(x+1)e^x>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

而 $axe^{ax}\leqslant2x\ln 2x$，即 $f(ax)\leqslant f(\ln 2x)$，

则 $ax\leqslant\ln 2x$，$x>0$，

即存在 $x>0$，使 $a\leqslant\dfrac{\ln 2x}{x}$ 成立，即 $a\leqslant\left(\dfrac{\ln 2x}{x}\right)_{\max}$.

设 $g(x)=\dfrac{\ln 2x}{x}$，令 $g'(x)=\dfrac{1-\ln 2x}{x^2}=0$，得 $x=\dfrac{e}{2}$，

当 $x\in\left(0,\dfrac{e}{2}\right)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

当 $x\in\left(\dfrac{e}{2},+\infty\right)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

所以当 $x=\dfrac{e}{2}$ 时，$g(x)$ 取得最大值 $\dfrac{2}{e}$，即 $a\leqslant\dfrac{2}{e}$.

故实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\dfrac{2}{e}\right]$.

拓展二 洛必达法则

【拓展总结】

法则1 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件：

① $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ 及 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$，

② 在点 a 的去心邻域内，$f(x)$ 与 $g(x)$ 可导且 $g'(x)\neq0$， ③$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$，那么$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$.

法则 2　如果函数 $f(x)$和 $g(x)$满足下列条件：

①$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$及$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，

②在点 a 的去心邻域内，$f(x)$与 $g(x)$可导且 $g'(x)\neq0$，

③$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$，那么$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$.

应用 2　已知函数 $f(x)=\frac{a\ln x}{x+1}+\frac{b}{x}$，曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线的方程为 $x+2y-3=0$.

(1)求实数 a,b 的值；(2)如果当 $x>0$，且 $x\neq1$ 时，$f(x)>\frac{\ln x}{x-1}+\frac{k}{x}$，求实数 k 的取值范围.

解：(1)$f'(x)=\frac{a\left(\frac{x+1}{x}-\ln x\right)}{(x+1)^2}-\frac{b}{x^2}$，由于直线 $x+2y-3=0$ 的斜率为$-\frac{1}{2}$，且过点$(1,1)$，

故$\begin{cases}f(1)=1,\\ f'(1)=-\frac{1}{2},\end{cases}$即$\begin{cases}b=1,\\ \frac{a}{2}-b=-\frac{1}{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\ b=1.\end{cases}$

(2)由题设可得，当 $x>0$，且 $x\neq1$ 时，$k<\frac{2x\ln x}{1-x^2}+1$恒成立.

令 $g(x)=\frac{2x\ln x}{1-x^2}+1(x>0,x\neq1)$，

则 $g'(x)=2\cdot\frac{(x^2+1)\ln x-x^2+1}{(1-x^2)^2}$，

再令 $h(x)=(x^2+1)\ln x-x^2+1$，

则 $h'(x)=2x\ln x+\frac{1}{x}-x$.

令 $m(x)=h'(x)$，则 $m'(x)=2\ln x+1-\frac{1}{x^2}$，

易知 $m'(x)=2\ln x+1-\frac{1}{x^2}$在$(0,+\infty)$上单调递增，且 $m'(1)=0$，

故当 $x\in(0,1)$时，$m'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$时，$m'(x)>0$.

所以$h'(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，故 $h'(x)\geqslant h'(1)=0$，

所以 $h(x)$为$(0,+\infty)$上的增函数.

又 $h(1)=0$，

所以当 $x\in(0,1)$时，$h(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$时，$h(x)>0$，

所以当 $x\in(0,1)$时，$g'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增.由洛必达法则知，

$\lim\limits_{x\to1}g(x)=2\lim\limits_{x\to1}\frac{x\ln x}{1-x^2}+1=2\lim\limits_{x\to1}\frac{1+\ln x}{-2x}+1=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1=0$，所以 $k\leqslant0$.

故实数 k 的取值范围为$(-\infty,0]$.

拓展三　极值点偏移问题

【拓展总结】

若$\frac{x_1+x_2}{2}\neq x_0$，则称极值点偏移，此时函数$f(x)$在 $x=x_0$ 两侧的函数值变化快慢不同，如图 1、图 2.

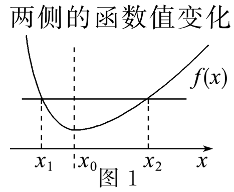


图 1

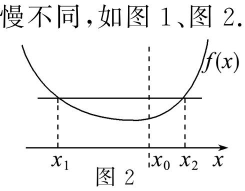


图 2

左陡右缓时，极值点向左偏移：若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1+x_2>2x_0$；

左缓右陡时，极值点向右偏移：若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1+x_2<2x_0$.

应用 3　已知函数 $f(x)=xe^{-x}$，如果 $x_1\neq x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，求证：$x_1+x_2>2$.

证明：(方法一：对称化构造法)由题意知，$f(x)=xe^{-x}$，$f'(x)=(1-x)e^{-x}$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	单调递增	$\frac{1}{e}$	单调递减

因为 $x_1\neq x_2$，不妨设 $x_1>x_2$，根据 $f(x_1)=f(x_2)$，$f(0)=0$ 结合图象(图略)可知，$x_1>1$，$0<x_2<1$.

令 $F(x)=f(x)-f(2-x)$，$x\in(1,+\infty)$，

则 $F'(x)=(x-1)(e^{2x-2}-1)e^{-x}$.

因为 $x>1$，$2x-2>0$，所以 $e^{2x-2}-1>0$，则 $F'(x)>0$，

所以 $F(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以当 $x>1$ 时，$F(x)>F(1)=0$，

即当 $x>1$ 时，$f(x)>f(2-x)$，

则 $f(x_1)>f(2-x_1)$.

又因为 $f(x_1)=f(x_2)$，所以 $f(x_2)>f(2-x_1)$.

因为 $x_1>1$，所以 $2-x_1<1$，所以 $x_2,2-x_1\in(-\infty,1)$.

因为 $f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递增，所以 $x_2>2-x_1$，

所以 $x_1+x_2>2$.

(方法二：比值代换法)由方法一对 $f(x)$单调性的分析及 $f(0)=0$，不妨设 $0<x_1<1<x_2$，

$f(x_1)=f(x_2)$，

即 $x_1e^{-x_1}=x_2e^{-x_2}$，两边取自然对数得 $\ln x_1-x_1=\ln x_2-x_2$.

令 $t=\frac{x_2}{x_1}>1$，则 $x_2=tx_1$，

代入上式得 $\ln x_1-x_1=\ln t+\ln x_1-tx_1$，

得 $x_1=\frac{\ln t}{t-1}$，$x_2=\frac{t\ln t}{t-1}$.

要证 $x_1+x_2=\frac{(t+1)\ln t}{t-1}>2$，即证 $\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}>0$.

设 $g(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，

所以 $g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{2(t+1)-2(t-1)}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

所以当 $t>1$ 时，$g(t)$单调递增，

所以 $g(t)>g(1)=0$，所以 $\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}>0$，故 $x_1+x_2>2$.

单元测试卷（二）

（考查范围：第五章　时间：120 分钟　分值：150 分）

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

1.函数 $f(x)=x^2+x$ 在 $x=1$ 处的导数 $f'(1)=$ （　）

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

D　**解析**：因为 $f(x)=x^2+x$，所以 $f'(x)=2x+1$，所以 $f'(1)=2\times1+1=3$.故选 D.

2.利用导数的定义计算 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\ln(e+2\Delta x)-1}{\Delta x}$ 的值为 （　）

A.1　　B.$\dfrac{2}{e}$　　C.0　　D.2

B　**解析**：因为 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\ln(e+2\Delta x)-1}{\Delta x}$

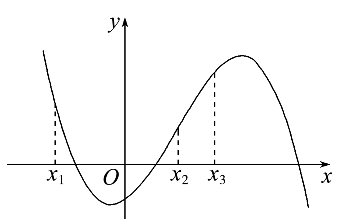
$=2\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\ln(e+2\Delta x)-\ln e}{2\Delta x}$，

而 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\ln(x+2\Delta x)-\ln x}{2\Delta x}=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\ln(e+2\Delta x)-\ln e}{2\Delta x}=\dfrac{1}{e}$，

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\ln(e+2\Delta x)-1}{\Delta x}=\dfrac{2}{e}$.故选 B.

3.已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，$f(x)$ 的图象如图所示，则 （　）



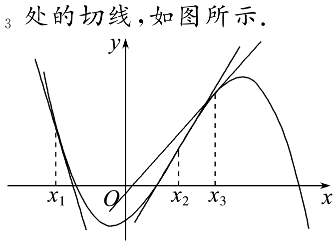
A.$f'(x_1)>f'(x_2)>f'(x_3)$

B.$f'(x_2)>f'(x_3)>f'(x_1)$

C.$f'(x_3)>f'(x_2)>f'(x_1)$

D.$f'(x_1)>f'(x_3)>f'(x_2)$

B　**解析**：分别作出函数 $f(x)$ 的图象在 $x=x_1$，$x=x_2$，$x=x_3$ 处的切线，如图所示.



根据导数的几何意义及图中切线的斜率可知，$f'(x_2)>f'(x_3)>0>f'(x_1)$.故选 B.

4.函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\sin x$ 的零点个数为 （　）

A.1　　B.0　　C.3　　D.2

A　**解析**：由 $\dfrac{1+x}{1-x}>0$，可得 $-1<x<1$，即 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$，

所以 $f'(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1-x}{1+x}\times\dfrac{2}{(1-x)^2}-\cos x=\dfrac{1}{1-x^2}-\cos x$.

由于 $1-x^2\in(0,1]$，故 $\dfrac{1}{1-x^2}-\cos x\geqslant0$，

即 $f'(x)\geqslant0$，当且仅当 $x=0$ 时取等号，

故 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递增.又 $f(0)=0$，

所以 $f(x)$ 仅有一个零点.

故选 A.

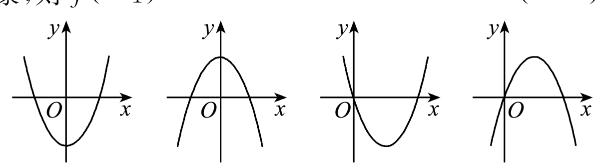
5.函数 $f(x)=2x-\ln 2x$ 的单调递减区间为 （　）

A.$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　B.$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

C.$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　D.$\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$

A　**解析**：由题得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.$f'(x)=2-2\times\dfrac{1}{2x}=\dfrac{2x-1}{x}$，令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<\dfrac{1}{2}$.所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.故选 A.

6.下面四个图象中，有一个是函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+ax^2+(a^2-1)x+1(a\in\mathbf{R})$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象，则 $f(-1)=$ （　）



①　②　③　④

A.$\dfrac{1}{3}$　　B.$-\dfrac{2}{3}$

C.$\dfrac{7}{3}$　　D.$-\dfrac{1}{3}$ 或 $\dfrac{5}{3}$

D　**解析**：因为 $f'(x)=x^2+2ax+a^2-1$，所以 $y=f'(x)$ 的图象开口向上，排除②④.若 $y=f'(x)$ 的图象为①，则 $a=0$，$f(-1)=\dfrac{5}{3}$.若 $y=f'(x)$ 的图象为③，则 $a^2-1=0$，得 $a=\pm1$.又对称轴 $x=-a>0$，所以 $a=-1$，所以 $f(-1)=-\dfrac{1}{3}$.

7.已知当 $x=1$ 时，函数 $f(x)=a\ln x+bx^2+3$ 取得最大值 2，则 $f(3)=$ （　）

A.$2\ln 3+2$　　B.$-\dfrac{16}{3}$

C.$2\ln 3-6$　　D.-4

C　**解析**：$f'(x)=\frac{a}{x}+2bx$，因为当 $x=1$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值 2，

所以 $\begin{cases}f(1)=2,\\f'(1)=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}b+3=2,\\a+2b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-1,\\a=2,\end{cases}$

所以 $f(x)=2\ln x-x^2+3$，$f'(x)=\frac{2}{x}-2x=\frac{2(1-x)(1+x)}{x}$.

令 $f'(x)>0$，得 $0<x<1$；令 $f'(x)<0$，得 $x>1$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

则 $f(x)_{\max}=f(1)=2$，符合题意，所以 $f(3)=2\ln 3-6$.

故选 C.

8.（2024·全国甲卷）设函数 $f(x)=\frac{e^x+2\sin x}{1+x^2}$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为（　　）

A.$\frac{1}{6}$　　B.$\frac{1}{3}$　　C.$\frac{1}{2}$　　D.$\frac{2}{3}$

A　**解析**：对 $f(x)$ 求导可得 $f'(x)=\frac{(e^x+2\cos x)(1+x^2)-(e^x+2\sin x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$，所以 $f'(0)=3$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线的方程为 $y-1=3(x-0)$，即 $3x-y+1=0$，切线与两坐标轴的交点分别为 $(0,1)$，$\left(-\frac{1}{3},0\right)$，所以切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. 故选 A.

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9.（2024·新高考全国Ⅰ卷）设函数 $f(x)=(x-1)^2(x-4)$，则（　　）

A.$x=3$ 是 $f(x)$ 的极小值点

B.当 $0<x<1$ 时，$f(x)<f(x^2)$

C.当 $1<x<2$ 时，$-4<f(2x-1)<0$

D.当 $-1<x<0$ 时，$f(2-x)>f(x)$

ACD　**解析**：对 A 选项，因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，而 $f'(x)=2(x-1)(x-4)+(x-1)^2=3(x-1)(x-3)$，

易知当 $x\in(1,3)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,3)$ 上单调递减，在 $(3,+\infty)$ 上单调递增，所以 $x=3$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，故 A 正确；

对 B 选项，当 $0<x<1$ 时，$x-x^2=x(1-x)>0$，所以 $1>x>x^2>0$，

由 A 选项可知，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $f(x)>f(x^2)$，故 B 错误；

对 C 选项，当 $1<x<2$ 时，$1<2x-1<3$，由 A 选项可知，函数 $f(x)$ 在 $(1,3)$ 上单调递减，

所以 $f(1)>f(2x-1)>f(3)$，即 $-4<f(2x-1)<0$，故 C 正确；

对 D 选项，当 $-1<x<0$ 时，$f(2-x)-f(x)=(1-x)^2(-2-x)-(x-1)^2(x-4)=(x-1)^2(2-2x)>0$，所以 $f(2-x)>f(x)$，故 D 正确. 故选 ACD.

10.（2022·新高考全国Ⅰ卷）已知函数 $f(x)=x^3-x+1$，则（　　）

A.$f(x)$ 有两个极值点

B.$f(x)$ 有三个零点

C.点 $(0,1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心

D.直线 $y=2x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线

AC　**解析**：由题得 $f'(x)=3x^2-1$，令 $f'(x)>0$ 得 $x>\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$；令 $f'(x)<0$ 得 $-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$. 所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递减，所以 $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 是极值点，故 A 正确.

因为 $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1+\frac{2\sqrt{3}}{9}>0$，$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1-\frac{2\sqrt{3}}{9}>0$，$f(-2)=-5<0$，所以，函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 上有一个零点，当 $x\geqslant-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$f(x)\geqslant f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)>0$，即函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 上无零点. 综上所述，函数 $f(x)$ 有一个零点，故 B 错误.

令 $h(x)=x^3-x$，该函数的定义域为 $\mathbf{R}$，$h(-x)=(-x)^3-(-x)=-x^3+x=-h(x)$，所以 $h(x)$ 是奇函数，点 $(0,0)$ 是 $h(x)$ 图象的对称中心. 将 $h(x)$ 的图象向上平移 1 个单位长度得到 $f(x)$ 的图象，所以点 $(0,1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心，故 C 正确.

令 $f'(x)=3x^2-1=2$，可得 $x=\pm 1$. 又 $f(1)=f(-1)=1$，所以当切点为 $(1,1)$ 时，切线方程为 $y=2x-1$；当切点为 $(-1,1)$ 时，切线方程为 $y=2x+3$，故 D 错误.

故选 AC.

11.已知函数 $f(x)=\frac{x}{\ln x}$，下列说法正确的是（　　）

A.$f(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减

B.若方程 $f(|x|)=k$ 有 4 个不相等的实根，则 $k>e$

C.当 $0<x_1<x_2<1$ 时，$x_1\ln x_2<x_2\ln x_1$

D.设 $g(x)=x^2+a$，若 $\forall x_1\in\mathbf{R}$，$\exists x_2\in(1,+\infty)$，使得 $g(x_1)=f(x_2)$ 成立，则 $a\geqslant e$

BD **解析**：函数 $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$. 当 $0<x<1$ 或 $1<x<e$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>e$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$，$(1,e)$ 上单调递减，在 $(e,+\infty)$ 上单调递增，故 A 不正确.

当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)$ 的图象在 x 轴下方，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)$ 的图象在 x 轴上方，且当 $x=e$ 时，$f(x)=e$，显然 $f(|x|)$ 是偶函数，所以在方程 $f(|x|)=k$ 中，当 $k<0$ 或 $k=e$ 时，方程有两个不相等的实根；当 $0\leqslant k<e$ 时，方程无实根；当 $k>e$ 时，方程有 4 个不相等的实根，故 B 正确.

因为 $0<x_1<x_2<1$，所以 $f(x_2)<f(x_1)<0$，即 $\dfrac{x_2}{\ln x_2}<\dfrac{x_1}{\ln x_1}<0$，于是得 $x_2\ln x_1<x_1\ln x_2$，故 C 不正确.

当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$g(x)$ 的值域为 $[a,+\infty)$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)$ 的值域为 $[e,+\infty)$. 因为 $\forall x_1\in\mathbf{R}$，$\exists x_2\in(1,+\infty)$，使得 $g(x_1)=f(x_2)$ 成立，从而 $[a,+\infty)\subseteq[e,+\infty)$，即得 $a\geqslant e$，故 D 正确. 故选 BD.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)>1$，且 $f(2m)<f(m+1)$，则实数 m 的取值范围为________.

$(-\infty,1)$ **解析**：因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)>1>0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.
由 $f(2m)<f(m+1)$，得 $2m<m+1$，即 $m<1$，所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty,1)$.

13. 设函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx(x>0)$ 的图象与直线 $y=4$ 相切于点 $M(1,4)$，则 $y=f(x)$ 在区间 $(0,4]$ 上的最大值为________，最小值为________.

4 0 **解析**：$f'(x)=3x^2+2ax+b(x>0)$.

依题意，得 $\begin{cases}f'(1)=0,\\f(1)=4,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}3+2a+b=0,\\1+a+b=4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-6,\\b=9.\end{cases}$ 所以 $f(x)=x^3-6x^2+9x$.

令 $f'(x)=3x^2-12x+9=0$，解得 $x=1$ 或 $x=3$.
当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 在区间 $(0,4]$ 上的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,4)$	4
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	单调递增	4	单调递减	0	单调递增	4

又当 $x\to0$ 时，$f(x)\to0$，所以函数 $f(x)=x^3-6x^2+9x$ 在区间 $(0,4]$ 上的最大值是 4，最小值是 0.

14. 函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，若在 $f(x)$ 的定义域内存在一个区间 D，$f(x)$ 在区间 D 上单调递增，$f'(x)$ 在区间 D 上单调递减，则称区间 D 为函数 $f(x)$ 的一个“渐缓增区间”. 若函数 $f(x)=ae^x-x^2$，区间 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 是 $f(x)$ 的一个渐缓增区间，则实数 a 的取值范围是________.

$\left[\dfrac{\sqrt{e}}{e},\dfrac{2\sqrt{e}}{e}\right]$ **解析**：对于函数 $f(x)=ae^x-x^2$，$f'(x)=ae^x-2x$. 由题知，$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 为 $f(x)$ 的一个渐缓增区间.

令 $g(x)=ae^x-2x$，则 $g'(x)=ae^x-2$，

因为 $f'(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减，所以 $ae^x-2\leqslant0$ 恒成立，即 $a\leqslant\dfrac{2}{e^x}$ 恒成立.

又 $\dfrac{2}{e^x}>\dfrac{2}{e^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{2}{\sqrt{e}}$，所以 $a\leqslant\dfrac{2\sqrt{e}}{e}$.

又 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递增，

所以 $f'(x)=ae^x-2x\geqslant0$ 恒成立，即 $a\geqslant\dfrac{2x}{e^x}$ 恒成立.

令 $h(x)=\dfrac{2x}{e^x}$，则 $h'(x)=\dfrac{2(1-x)}{e^x}>0$，

所以 $h(x)<h\left(\dfrac{1}{2}\right)$，即 $\dfrac{2x}{e^x}<\dfrac{\sqrt{e}}{e}$，所以 $a\geqslant\dfrac{\sqrt{e}}{e}$.

综合得 $\dfrac{\sqrt{e}}{e}\leqslant a\leqslant\dfrac{2\sqrt{e}}{e}$，

即实数 a 的取值范围是 $\left[\dfrac{\sqrt{e}}{e},\dfrac{2\sqrt{e}}{e}\right]$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分) 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2-2$ 在 $x=-2$ 处取得极值.
(1) 求实数 a 的值；
(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最大值与最小值.

解：(1) 因为 $f(x)=x^3+ax^2-2$，所以 $f'(x)=3x^2+2ax$，
所以 $f'(-2)=12-4a=0$，解得 $a=3$. 经检验成立.
(2) 由 (1) 知 $f(x)=x^3+3x^2-2$，
所以 $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$.
所以当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；
当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.
所以 $f(x)_{\min}=f(0)=-2$.
因为 $f(-1)=0$，$f(2)=18$，所以 $f(x)_{\max}=18$.

16. (15 分) 已知函数 $f(x)=e^x+(m+1)x(m\in\mathbf{R})$.
(1) 当 $m=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线的方程；
(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

解：(1) 当 $m=1$ 时，$f(x)=e^x+2x$，
$f(2)=e^2+4$，$f'(x)=e^x+2$，$f'(2)=e^2+2$，
故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线的方程为 $y-(e^2+4)=(e^2+2)(x-2)$，
即 $(e^2+2)x-y-e^2=0$.

(2)$f'(x)=e^x+m+1$，
当 $m+1\geqslant 0$，即 $m\geqslant -1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.
当 $m+1<0$，即 $m<-1$ 时，
由 $f'(x)=0$，得 $x=\ln(-m-1)$.
当 $x>\ln(-m-1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；
当 $x<\ln(-m-1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.
所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(-m-1))$ 上单调递减，在 $(\ln(-m-1),+\infty)$ 上单调递增.
综上所述，当 $m\geqslant -1$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；
当 $m<-1$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(-m-1))$ 上单调递减，在 $(\ln(-m-1),+\infty)$ 上单调递增.

17.(15 分)已知函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{e^x}-a(2x-1)-b$，其中 a,b 是实数.
(1)若 $a=0$，求 $f(x)$ 的单调区间；
(2)若函数 $f(x)$ 不具有单调性，求实数 a 的取值范围.

解：(1)当 $a=0$ 时，$f(x)=\dfrac{x-1}{e^x}-b$，则 $f'(x)=\dfrac{2-x}{e^x}$，
令 $f'(x)=0$，解得 $x=2$. 当 $x<2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x>2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，
所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减.
(2)因为函数 $f(x)$ 的图象是连续的，且 $f(x)$ 不具有单调性，
所以 $f'(x)=\dfrac{2-x}{e^x}-2a$ 的函数值有正有负（$f'(x)$ 有异号零点）.
记 $g(x)=f'(x)=\dfrac{2-x}{e^x}-2a$，则 $g'(x)=\dfrac{x-3}{e^x}$，
当 $x\in(-\infty,3)$ 时 $g'(x)<0$，当 $x\in(3,+\infty)$ 时 $g'(x)>0$，
所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,3)$ 上单调递减，在 $(3,+\infty)$ 上单调递增.
存在 $x_1=-|2a|$，使得 $f'(x_1)=\dfrac{2+|2a|}{e^{-|2a|}}-2a=(2+|2a|)e^{|2a|}-2a>0$，
故只需 $f'(x)_{\min}=f'(3)=-\dfrac{1}{e^3}-2a<0$，得 $a>-\dfrac{1}{2e^3}$，即实数 a 的取值范围是 $\left(-\dfrac{1}{2e^3},+\infty\right)$.

18.(17 分)某村庄拟修建一个无盖的圆柱形蓄水池（不计厚度）. 设该蓄水池的底面半径为 r m，高为 h m，体积为 V m^3. 假设建造成本仅与表面积有关，侧面的建造成本为 100 元/m^2，底面的建造成本为 160 元/m^2，该蓄水池的总建造成本为 $12\ 000\pi$ 元（π 为圆周率）.
(1)将 V 表示成 r 的函数 $V(r)$，并求该函数的定义域；
(2)讨论函数 $V(r)$ 的单调性，并确定 r 和 h 为何值时该蓄水池的体积最大.

解：(1)因为蓄水池侧面的总成本为 $100\cdot 2\pi rh=200\pi rh$（元），
底面的总成本为 $160\pi r^2$ 元，所以修建蓄水池的总成本为 $(200\pi rh+160\pi r^2)$ 元.
根据题意得 $200\pi rh+160\pi r^2=12\ 000\pi$，
所以 $h=\dfrac{1}{5r}(300-4r^2)$，
从而 $V(r)=\pi r^2h=\dfrac{\pi}{5}(300r-4r^3)$.
由 $r>0,h>0$，可得 $0<r<5\sqrt{3}$，
故函数 $V(r)$ 的定义域为 $(0,5\sqrt{3})$.
(2)因为 $V(r)=\dfrac{\pi}{5}(300r-4r^3)$，$0<r<5\sqrt{3}$，
所以 $V'(r)=\dfrac{\pi}{5}(300-12r^2)$.
令 $V'(r)=0$，解得 $r_1=5,r_2=-5$（舍去）.
当 $r\in(0,5)$ 时，$V'(r)>0$，故 $V(r)$ 在 $(0,5)$ 上单调递增；
当 $r\in(5,5\sqrt{3})$ 时，$V'(r)<0$，故 $V(r)$ 在 $(5,5\sqrt{3})$ 上单调递减.
由此可知，$V(r)$ 在 $r=5$ 时取得最大值 $V(5)=200\pi$，此时 $h=8$.
故当 $r=5,h=8$ 时，该蓄水池的体积最大.

19.(17 分)函数 $f(x)=e^{\lambda x}-4\sin x+\lambda-2$ 的图象在 $x=0$ 处的切线为 $y=ax-a-3,a\in\mathbf{R}$.
(1)求 λ 的值；
(2)求 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上零点的个数.

解：(1)因为 $f(x)=e^{\lambda x}-4\sin x+\lambda-2$，$f'(x)=\lambda e^{\lambda x}-4\cos x$，
所以 $f'(0)=\lambda-4$，所以切线斜率为 $\lambda-4$，即 $a=\lambda-4$，
所以切线方程为 $y=(\lambda-4)x-\lambda+1$.
又 $f(0)=\lambda-1$，所以切点坐标为 $(0,\lambda-1)$，代入得 $\lambda-1=-\lambda+1$，解得 $\lambda=1$.
(2)由(1)得 $f(x)=e^x-4\sin x-1$，$f'(x)=e^x-4\cos x$，
令 $g(x)=f'(x)=e^x-4\cos x$，则 $g'(x)=e^x+4\sin x$，
当 $x\geqslant\pi$ 时，$f'(x)=e^x-4\cos x>0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $[\pi,+\infty)$ 上单调递增，
所以 $f(x)\geqslant f(\pi)=e^\pi-4\sin\pi-1=e^\pi-1>0$.
因此 $f(x)$ 在 $[\pi,+\infty)$ 上无零点.
当 $0<x<\pi$ 时，$g'(x)=e^x+4\sin x>0$ 恒成立，所以 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增，
又 $f'(0)=-3<0$，$f'(\pi)=e^\pi+4>0$，
所以 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上存在唯一的零点 x_0，
当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；
当 $x\in(x_0,\pi)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.
又 $f(0)=0$，$f(x_0)<f(0)=0$，$f(\pi)=e^\pi-1>0$，
因此 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上仅有 1 个零点.
综上，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上仅有 1 个零点.

模块测试卷

（考查范围：选择性必修 第二册 时间：120分钟 分值：150分）

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

1.设 $f(x)$ 是可导函数，且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+3\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=2$，则 $f'(1)=$ （　　）

A.2　　B.$\dfrac{2}{3}$　　C.-1　　D.-2

B　**解析**：因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+3\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=3\times\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+3\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}=2$，

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+3\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}=\dfrac{2}{3}$，

所以 $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+3\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}=\dfrac{2}{3}$.

故选B.

2.已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_1+a_2+a_3=6$，$a_4+a_6=-20$，则 $a_8=$ （　　）

A.-12　　B.-13

C.-22　　D.-23

C　**解析**：由题意得 $a_1+a_2+a_3=3a_2=6$，解得 $a_2=2$，

$a_4+a_6=2a_5=-20$，解得 $a_5=-10$，

故等差数列的公差 $d=\dfrac{a_5-a_2}{5-2}=\dfrac{-10-2}{3}=-4$，

故 $a_8=a_2+6d=2-6\times 4=-22$.

故选C.

3.设 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=e^x+a\cdot e^{-x}$ 的导函数是 $f'(x)$，且 $f'(x)$ 是奇函数.若曲线 $y=f(x)$ 的一条切线的斜率是 $\dfrac{3}{2}$，则切点的横坐标为 （　　）

A.$-\dfrac{\ln 2}{2}$　　B.$-\ln 2$

C.$\dfrac{\ln 2}{2}$　　D.$\ln 2$

D　**解析**：由题可知 $x\in\mathbf{R}$，因为函数 $f(x)=e^x+a\cdot e^{-x}$，所以 $f'(x)=e^x-\dfrac{a}{e^x}$.

又因为 $f'(x)$ 是奇函数，所以 $f'(0)=1-a=0$，

所以 $a=1$，经检验，符合题意，

所以 $f(x)=e^x+\dfrac{1}{e^x}$，$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{e^x}$.

因为曲线 $y=f(x)$ 的一条切线的斜率是 $\dfrac{3}{2}$，

所以 $\dfrac{3}{2}=e^x-\dfrac{1}{e^x}$，解方程可得 $x=\ln 2$.

故选D.

4.已知公差为负数的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 a_3,a_4,a_7 成等比数列，则当 S_n 取最大值时，$n=$ （　　）

A.2或3　　B.2

C.3　　D.4

B　**解析**：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d<0)$，由 a_3,a_4,a_7 成等比数列，

得 $(a_1+3d)^2=(a_1+2d)(a_1+6d)$，

解得 $a_1=-\dfrac{3}{2}d$，则 $a_n=a_1+(n-1)d=\left(n-\dfrac{5}{2}\right)d$.

显然等差数列 $\{a_n\}$ 是递减数列，当 $n\leqslant 2$ 时，$a_n>0$，当 $n\geqslant 3$ 时，$a_n<0$，

所以当 S_n 取最大值时，$n=2$.

故选B.

5.若函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\ln x$ 在区间 $\left(m,m+\dfrac{1}{3}\right)$ 上不单调，则实数 m 的取值范围为 （　　）

A.$0<m<\dfrac{2}{3}$　　B.$\dfrac{2}{3}<m<1$

C.$\dfrac{2}{3}\leqslant m\leqslant 1$　　D.$m>1$

B　**解析**：函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-1}{x}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$.

因为 $f(x)$ 在区间 $\left(m,m+\dfrac{1}{3}\right)$ 上不单调，

所以 $\begin{cases}m>0,\\ m<1<m+\dfrac{1}{3},\end{cases}$ 解得 $\dfrac{2}{3}<m<1$.

故选B.

6.已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\dfrac{n}{n+2}a_n$，$a_1=1$，则 $a_n=$ （　　）

A.$\dfrac{2}{(n+1)^2}$　B.$\dfrac{2}{n(n+1)}$　C.$\dfrac{1}{2^n-1}$　D.$\dfrac{1}{2n-1}$

B　**解析**：由 $a_{n+1}=\dfrac{n}{n+2}a_n$ 且 $a_1=1$，得 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

$=\frac{n}{n+2}$,

所以$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{3}$,$\frac{a_3}{a_2}=\frac{2}{4}$,$\frac{a_4}{a_3}=\frac{3}{5}$,…,$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\frac{n-2}{n}$,

$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n+1}(n\geqslant 2)$.

所以$\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\cdots\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}$

$\times\cdots\times\frac{n-2}{n}\times\frac{n-1}{n+1}$,所以$\frac{a_n}{a_1}=\frac{2}{n(n+1)}$.

因为 $a_1=1$,所以 $a_n=\frac{2}{n(n+1)}$.

因为 $a_1=1$ 满足上式,所以 $a_n=\frac{2}{n(n+1)}$.

故选 B.

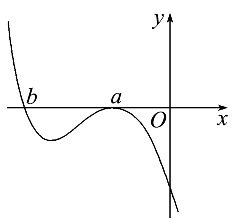
7.设 $a\neq 0$,若 a 为函数 $f(x)=a(x-a)^2(x-b)$的极大值点,则　　(　　)

A.$a<b$　　B.$a>b$　　C.$ab<a^2$　　D.$ab>a^2$

D　**解析**:若 $a=b$,则 $f(x)=a(x-a)^3$ 为单调函数,无极值点,不符合题意,故 $a\neq b$.

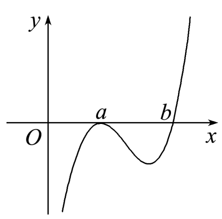
所以 $f(x)$有 a 和 b 两个不同零点,且在 $x=a$ 左右附近是不变号的,在 $x=b$ 左右附近是变号的.依题意,a 为函数$f(x)=a(x-a)^2(x-b)$的极大值点,所以在 $x=a$ 左右附近 $f(x)$都是小于零的.

当 $a<0$ 时,由 $x>b$ 时,$f(x)\leqslant 0$,画出 $f(x)$的图象如图所示.



由图可知 $b<a$,$a<0$,故 $ab>a^2$.

当 $a>0$ 时,由 $x>b$ 时,$f(x)>0$,画出 $f(x)$的图象如图所示.



由图可知 $b>a$,$a>0$,故 $ab>a^2$.

综上所述,$ab>a^2$ 成立.

故选 D.

8.南宋数学家杨辉在《详解九章算术》中提出了高阶等差数列的问题.若一个数列$\{a_n\}$本身不是等差数列,但从数列$\{a_n\}$中的第二项开始,每一项与前一项的差构成等差数列$\{b_n\}$,则称数列$\{a_n\}$为一阶等差数列,或者$\{b_n\}$仍旧不是等差数列,但从数列$\{b_n\}$中的第二项开始,每一项与前一项的差构成等差数列$\{c_n\}$,则称数列$\{a_n\}$为二阶等差数列,…,一阶等差数列、二阶等差数列等统称高阶等差数列.类比高阶等差数列的定义,我们亦可定义高阶等比数列,设数列 1,1,2,8,64,…是一阶等比数列,则该数列的第 8 项是　　(　　)

A.2^5　　B.2

C.2^{21}　　D.2^{28}

C　**解析**:记数列 1,1,2,8,64,…为$\{a_n\}$,设 $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$,

则 $b_1=1$,$b_2=2$,$b_3=4$,$b_4=8$,…,

所以数列$\{b_n\}$是以 1 为首项,2 为公比的等比数列,

所以 $b_n=2^{n-1}$,

所以当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=b_{n-1}\cdot b_{n-2}\cdot b_{n-3}\cdot\cdots\cdot b_1\cdot a_1=2^{1+2+3+\cdots+(n-2)}=2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$,所以 $a_8=2^{\frac{7\times 6}{2}}=2^{21}$.

故选 C.

二、多项选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9.已知数列$\{a_n\}$满足 $2a_1+2^2a_2+\cdots+2^na_n=\frac{3n^2+5n}{2}$,设数列$\{c_n\}$的前 n 项和为 S_n,其中 $c_n=\frac{1}{2^{2n+1}\cdot a_n\cdot a_{n+1}}$,则下列四个结论中,正确的是　　(　　)

A.a_1 的值为 2

B.数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=(3n+1)\times 2^n$

C.数列$\{a_n\}$为递减数列

D.$S_n=\frac{n}{12n+16}$

ACD　**解析**:对于 A,$2a_1=\frac{3\times 1^2+5\times 1}{2}=4$,即 $a_1=2$,故 A 正确.

对于 B,$2a_1+2^2a_2+\cdots+2^na_n=\frac{3n^2+5n}{2}$①,$2a_1+2^2a_2+\cdots+2^{n-1}a_{n-1}=\frac{3(n-1)^2+5(n-1)}{2}(n\geqslant 2)$②,

①－②得 $2^na_n=3n+1$,$a_n=\frac{3n+1}{2^n}$.

当 $n=1$ 时,$a_1=\frac{3\times 1+1}{2^1}=2$,

故数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{3n+1}{2^n}$,故 B 错误.

对于 C,令 $a_{n+1}-a_n=\frac{3n+4}{2^{n+1}}-\frac{3n+1}{2^n}=\frac{3n+4-(6n+2)}{2^{n+1}}=\frac{-3n+2}{2^{n+1}}$,

因为 $n\geqslant 1$,所以 $a_{n+1}-a_n=\frac{-3n+2}{2^{n+1}}<0$,数列

$\{a_n\}$为递减数列,故 C 正确.

对于 D,$c_n=\dfrac{1}{2^{2n+1}\cdot\dfrac{3n+1}{2^n}\cdot\dfrac{3n+4}{2^{n+1}}}$

$=\dfrac{1}{(3n+1)(3n+4)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n+1}-\dfrac{1}{3n+4}\right)$,

$S_n=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}+\cdots+\dfrac{1}{3n+1}-\dfrac{1}{3n+4}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3n+4}\right)=\dfrac{n}{12n+16}$,故 D 正确.

故选 ACD.

10. 关于函数 $f(x)=e^x+\sin x,x\in(-\pi,+\infty)$,下列结论正确的有 ( )

A. $f(x)$在$(0,+\infty)$上是单调递增的

B. $f(x)$存在唯一极小值点

C. $f(x)$在$(-\pi,+\infty)$上有一个零点

D. $f(x)$在$(-\pi,+\infty)$上有两个零点

ABD **解析**:由已知 $f(x)=e^x+\sin x,x\in(-\pi,+\infty)$,得 $f'(x)=e^x+\cos x$,令 $g(x)=f'(x)$,则 $g'(x)=e^x-\sin x$,

当 $x\in(-\pi,0]$时,$e^x>0,-\sin x\geqslant0,g'(x)>0$,

当 $x\in(0,+\infty)$时,$e^x>1,-\sin x\in[-1,1]$,$g'(x)>0$,

即当 $x\in(-\pi,+\infty)$时,$g'(x)>0$ 恒成立,

$f'(x)$在$(-\pi,+\infty)$上单调递增.

又 $f'\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)=e^{-\frac{3\pi}{4}}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<0,f'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}>0$,$f'(0)=2>0$,

所以当 $x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>f'(0)>0$,且存在唯一实数 $x_0\in\left(-\dfrac{3\pi}{4},-\dfrac{\pi}{2}\right)$,使 $f'(x_0)=0$,即 $e^{x_0}=-\cos x_0$,

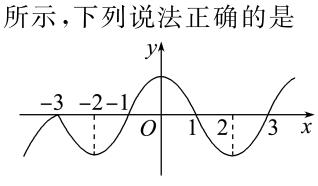
所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上是单调递增的,且 $f(x)$存在唯一极小值点 x_0,故 A,B 选项正确.

由上述知 $f(x)$在$(-\pi,x_0)$上单调递减,$(x_0,+\infty)$上单调递增,

又 $f(-\pi)=e^{-\pi}+0>0,f(x_0)=e^{x_0}+\sin x_0=\sin x_0-\cos x_0=\sqrt{2}\sin\left(x_0-\dfrac{\pi}{4}\right)<0,f(0)=1>0$,所以 $f(x)$在$(-\pi,+\infty)$上有两个零点,故 D 选项正确,C 选项错误.

故选 ABD.

11. 已知定义在 **R** 上的函数 $y=f(x)$的导函数 $f'(x)$的图象如图所示,下列说法正确的是 ( )



A. $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(\Delta x-2)-f(-2)}{\Delta x}<0$

B. 函数 $f(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递减

C. 函数 $f(x)$在 $x=1$ 处取得极大值

D. 函数 $f(x)$有最大值

ABC **解析**:对于 A,由题图可知,

$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(\Delta x-2)-f(-2)}{\Delta x}=f'(-2)<0$,故 A 正确;

对于 B,由题图可知,当 $x\in(-\infty,-1)$时,$f'(x)\leqslant0$ 恒成立,

故函数 $f(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递减,故 B 正确;

对于 C,由题图可知,当 $x\in(-1,1)$时,$f'(x)>0$,当 $x\in(1,2)$,$f'(x)<0$,

故函数 $f(x)$在 $x=1$ 处取得极大值,故 C 正确;

对于 D,由题图可知,当 $x\in(3,+\infty)$时,$f'(x)>0$ 恒成立,

故 $f(x)$在$(3,+\infty)$上单调递增,无最大值,故 D 错误.

故选 ABC.

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 已知 $a=4+2\sqrt{3},c=4-2\sqrt{3}$.若 a,b,c 三个数成等差数列,则 $b=$______;若 a,b,c 三个数成等比数列,则 $b=$______.

4 ±2 **解析**:若 a,b,c 三个数成等差数列,

则 $b=\dfrac{a+c}{2}=\dfrac{4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}}{2}=4$.

若 a,b,c 三个数成等比数列,

则 $b^2=ac=(4+2\sqrt{3})\times(4-2\sqrt{3})=4\Rightarrow b=\pm2$.

13. (2022·新高考全国Ⅰ卷)若曲线 $y=(x+a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线,则 a 的取值范围是______.

$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$ **解析**:因为 $y=(x+a)\cdot e^x$,所以 $y'=(x+1+a)e^x$.

设切点为(x_0,y_0),则 $y_0=(x_0+a)e^{x_0}$,切线斜率 $k=(x_0+1+a)e^{x_0}$,

切线方程为 $y-(x_0+a)e^{x_0}=(x_0+1+a)e^{x_0}(x-x_0)$.

因为切线过原点,所以$-(x_0+a)e^{x_0}=(x_0+1+a)\cdot e^{x_0}(-x_0)$,

整理得 $x_0^2+ax_0-a=0$.

因为切线有两条,所以 $\Delta=a^2+4a>0$,解得 $a<-4$ 或 $a>0$,

所以 a 的取值范围是$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$.

14. 已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$.若 $f(t+3)+f(t-t^2)>0$ 成立,则实数 t 的取值范围为______.

$(-1,3)$ **解析**:由题得函数的定义域为 **R**.因为 $f(-x)=e^{-x}-e^x+2x=-f(x)$,所以函数 $f(x)$是奇函数.又 $f'(x)=e^x+e^{-x}-2\geqslant2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2$

$=0$,当且仅当 $x=0$ 时,等号成立.

所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,$f(t+3)+f(t-t^2)>0$ 等价于 $f(t+3)>-f(t-t^2)=f(t^2-t)$,所以 $t+3>t^2-t$,所以 $t^2-2t-3<0$,解得 $-1<t<3$.

所以实数 t 的取值范围为$(-1,3)$.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.(13 分)(2023·新高考全国Ⅰ卷)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,且 $d>1$.令 $b_n=\dfrac{n^2+n}{a_n}$,记 S_n,T_n 分别为数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的前 n 项和.

(1)若 $3a_2=3a_1+a_3$,$S_3+T_3=21$,求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若$\{b_n\}$为等差数列,且 $S_{99}-T_{99}=99$,求 d.

解:(1)因为 $3a_2=3a_1+a_3$,所以 $3d=a_1+2d$,解得 $a_1=d$,

所以 $S_3=3a_2=3(a_1+d)=6d$.

又 $T_3=b_1+b_2+b_3=\dfrac{2}{d}+\dfrac{6}{2d}+\dfrac{12}{3d}=\dfrac{9}{d}$,所以 $S_3+T_3=6d+\dfrac{9}{d}=21$,

即 $2d^2-7d+3=0$,解得 $d=3$ 或 $d=\dfrac{1}{2}$(舍去),

所以 $a_n=a_1+(n-1)\cdot d=3n$.

(2)因为$\{b_n\}$为等差数列,所以 $2b_2=b_1+b_3$,即 $\dfrac{12}{a_2}=\dfrac{2}{a_1}+\dfrac{12}{a_3}$,

所以 $6\left(\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_3}\right)=\dfrac{1}{a_1}$,即 $\dfrac{6d}{a_2a_3}=\dfrac{1}{a_1}$,即 $a_1^2-3a_1d+2d^2=0$,解得 $a_1=d$ 或 $a_1=2d$.

因为 $d>1$,所以 $a_n>0$.

又 $S_{99}-T_{99}=99$,由等差数列的性质知,

$99a_{50}-99b_{50}=99$,即 $a_{50}-b_{50}=1$,

所以 $a_{50}-\dfrac{2\ 550}{a_{50}}=1$,即 $a_{50}^2-a_{50}-2\ 550=0$,

解得 $a_{50}=51$ 或 $a_{50}=-50$(舍去).

当 $a_1=2d$ 时,$a_{50}=a_1+49d=51d=51$,解得 $d=1$,与 $d>1$ 矛盾,故舍去;

当 $a_1=d$ 时,$a_{50}=a_1+49d=50d=51$,解得 $d=\dfrac{51}{50}>1$,符合题意.

综上所述,$d=\dfrac{51}{50}$.

16.(15 分)已知函数 $g(x)=e^x+\dfrac{a}{2}x^2$,其中 $a\in\mathbf{R}$,$e=2.718\ 28\cdots$是自然对数的底数,$f(x)$是 $g(x)$的导函数.

(1)当 $a=1$ 时,求曲线 $y=g(x)$在点$(1,g(1))$处的切线的方程;

(2)当 $f(x)$存在极值时,证明:$f(x)$的极值小于或等于 1.

(1)**解**:由题设 $f(x)=e^x+ax$,当 $a=1$ 时,$g(x)=e^x+\dfrac{1}{2}x^2$,$f(x)=e^x+x$,则 $f(1)=e+1$,$g(1)=e+\dfrac{1}{2}$,

故曲线 $y=g(x)$在点$(1,g(1))$处的切线的方程为 $y-g(1)=f(1)(x-1)$,

整理得 $2(e+1)x-2y-1=0$.

(2)**证明**:由(1)得 $f(x)=e^x+ax$,求导得 $f'(x)=e^x+a$.

当 $a\geqslant 0$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,故 $f(x)$不存在极值.

当 $a<0$ 时,存在 $x_0\in\mathbf{R}$,

使得 $f'(x_0)=0$,且 $x_0=\ln(-a)$,

在$(-\infty,x_0)$上 $f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,

在$(x_0,+\infty)$上 $f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,

此时 $f(x)$存在极值 $f(x_0)$.

由计算得 $f(x_0)=f(\ln(-a))=e^{\ln(-a)}+a\ln(-a)=-a+a\ln(-a)$.

设 $h(a)=-a+a\ln(-a)$,$a<0$,则 $h'(a)=-1+\ln(-a)+1=\ln(-a)$.

当 $a<-1$ 时 $h'(a)=\ln(-a)>0$,当 $-1<a<0$ 时,$h'(a)=\ln(-a)<0$,

所以 $a=-1$ 时,$h(a)$取得极大值,也是最大值,故 $h(a)\leqslant h(-1)=1-\ln 1=1$,

即 $f(x)$的极值小于或等于 1.

17.(15 分)设函数 $f(x)=x-x^3e^{ax+b}$,曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线的方程为 $y=-x+1$.

(1)求 a,b 的值;

(2)设函数 $g(x)=f'(x)$,求 $g(x)$的单调区间.

解:(1)因为 $f(x)=x-x^3e^{ax+b}$,$x\in\mathbf{R}$,所以$f'(x)=1-(3x^2+ax^3)e^{ax+b}$.

因为曲线 $y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线的方程为 $y=-x+1$,

所以 $f(1)=0$,$f'(1)=-1$,

则$\begin{cases}1-1^3\times e^{a+b}=0,\\1-(3+a)e^{a+b}=-1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-1,\\b=1,\end{cases}$

所以 $a=-1$,$b=1$.

(2)由(1)得 $g(x)=f'(x)=1-(3x^2-x^3)e^{-x+1}$ $(x\in\mathbf{R})$,

则 $g'(x)=-x(x^2-6x+6)e^{-x+1}$.

令 $x^2-6x+6=0$,解得 $x=3\pm\sqrt{3}$,不妨设 $x_1=3-\sqrt{3}$,$x_2=3+\sqrt{3}$,则 $0<x_1<x_2$,

易知 $e^{-x+1}>0$ 恒成立,

所以令 $g'(x)<0$,解得 $0<x<x_1$ 或 $x>x_2$;

令 $g'(x)>0$,解得 $x<0$ 或 $x_1<x<x_2$.

所以 $g(x)$ 在 $(0,x_1)$,$(x_2,+\infty)$ 上单调递减,在 $(-\infty,0)$,(x_1,x_2) 上单调递增,

即 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(0,3-\sqrt{3})$ 和 $(3+\sqrt{3},+\infty)$,单调递增区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$.

18.(17分)在等差数列 $\{a_n\}$ 中,其前 n 项和为 S_n,且 $S_n=\left(\frac{a_n+1}{2}\right)^2$;在等比数列 $\{b_n\}$ 中,其前 n 项和为 T_n,且 $T_n=\left(\frac{b_n+1}{2}\right)^2(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求 a_n,b_n;

(2)求 $\{a_nb_n\}$ 的前 n 项和 M_n.

解:(1)由 $S_1=\left(\frac{a_1+1}{2}\right)^2=a_1$,解得 $a_1=1$.

又 $S_2=a_1+a_2=1+a_2=\left(\frac{a_2+1}{2}\right)^2$,所以 $a_2=3$ 或 -1.

因为 $a_2=-1$ 时,$a_3=-3$,此时 $S_3=a_1+a_2+a_3=-3\neq\left(\frac{a_3+1}{2}\right)^2=1$,故 $a_2=-1$ 舍去.

所以等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=a_2-a_1=2$,

所以 $a_n=2n-1$.

同理可得 $b_1=1$,$b_2=3$ 或 -1.

因为 $b_2=3$ 时,$b_3=9$,此时 $T_3=b_1+b_2+b_3=13\neq\left(\frac{b_3+1}{2}\right)^2=25$,故 $b_2=3$ 舍去.

又 $\{b_n\}$ 为等比数列,所以 $b_n=(-1)^{n-1}$.

(2)因为 $M_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$,

所以 $M_n=1\times(-1)^0+3\times(-1)^1+5\times(-1)^2+\cdots+(2n-1)\times(-1)^{n-1}$①,

则 $-M_n=1\times(-1)^1+3\times(-1)^2+5\times(-1)^3+\cdots+(2n-1)\times(-1)^n$②,

①-②得 $2M_n=1+2\times(-1)^1+2\times(-1)^2+2\times(-1)^3+\cdots+2\times(-1)^{n-1}-(2n-1)\times(-1)^n=1+2\times\frac{(-1)-(-1)^{n-1}\times(-1)}{1-(-1)}-(2n-1)\times(-1)^n$,

所以 $M_n=n\times(-1)^{n-1}$.

19.(17分)已知函数 $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$,$g(x)=\ln x-ax+e$,其中 e 是自然对数的底数.

(1)求函数 $f(x)$ 的极值;

(2)对 $\forall x_1\in[-1,0]$,$\exists x_2\in[2,e^2]$,使 $f(x_1)\leqslant g(x_2)$ 成立,求实数 a 的取值范围.

解:(1)因为 $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$,该函数的定义域为 $\mathbf{R}$,所以 $f'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=0$ 或 $x=2$,当 x 变化时,$f'(x)$,$f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增	极大值	单调递减

由表可得 $f(x)_{极小值}=f(0)=0$,$f(x)_{极大值}=f(2)=\frac{4}{e^2}$.

(2)由题意可得,$\forall x_1\in[-1,0]$,$\exists x_2\in[2,e^2]$,使 $f(x_1)_{\max}\leqslant g(x_2)$ 成立.

由(1)可知 $f(x_1)$ 在 $[-1,0]$ 上单调递减,

所以 $f(x_1)_{\max}=f(-1)=e$,所以 $\ln x_2-ax_2+e\geqslant e$ 在 $[2,e^2]$ 上有解,即 $a\leqslant\frac{\ln x_2}{x_2}$ 在 $[2,e^2]$ 上有解.

令 $h(x_2)=\frac{\ln x_2}{x_2}$,$x_2\in[2,e^2]$,则 $h'(x_2)=\frac{1-\ln x_2}{x_2^2}$,令 $h'(x_2)=0$,得 $x_2=e$.

当 x_2 变化时,$h'(x_2)$,$h(x_2)$ 的变化情况如下表:

x_2	2	$(2,e)$	e	(e,e^2)	e^2
$h'(x_2)$		$+$	0	$-$	
$h(x_2)$	$\frac{\ln 2}{2}$	单调递增	极大值 $\frac{1}{e}$	单调递减	$\frac{2}{e^2}$

所以 $h(x_2)_{\max}=\frac{1}{e}$,所以 $a\leqslant\frac{1}{e}$.故实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$.