

点金训练

教师用书

《点金训练》编写组 编

► 数学

选择性必修第一册

配人教A版



四川教育出版社

CONTENTS

目录

第一章 空间向量与立体几何

○单元概览	1
○探究构建	
1.1 空间向量及其运算	3
1.1.1 空间向量及其线性运算	3
第1课时 空间向量及其线性运算	3
第2课时 共线向量与共面向量	7
1.1.2 空间向量的数量积运算	10
1.2 空间向量基本定理	16
1.3 空间向量及其运算的坐标表示	21
1.3.1 空间直角坐标系	21
1.3.2 空间向量运算的坐标表示	24
1.4 空间向量的应用	29
1.4.1 用空间向量研究直线、平面的位置关系	29
第1课时 空间中点、直线和平面的向量表示	29
第2课时 空间中直线、平面的平行	33
第3课时 空间中直线、平面的垂直	40
1.4.2 用空间向量研究距离、夹角问题	46
第1课时 用空间向量研究距离	46
第2课时 用空间向量研究夹角	52
○迁移应用	
类型一 空间位置关系的证明	63
类型二 空间夹角和距离问题	63
类型三 立体几何中的动态问题	65
○重构拓展	66

第二章 直线和圆的方程

○单元概览	78
○探究构建	
2.1 直线的倾斜角与斜率	80
2.1.1 倾斜角与斜率	80
2.1.2 两条直线平行和垂直的判定	84
2.2 直线的方程	89
2.2.1 直线的点斜式方程	89
2.2.2 直线的两点式方程	94
2.2.3 直线的一般式方程	99
2.3 直线的交点坐标与距离公式	105
2.3.1 两条直线的交点坐标	105
2.3.2 两点间的距离公式	109
2.3.3 点到直线的距离公式	113
2.3.4 两条平行直线间的距离	116



2.4	圆的方程	120
2.4.1	圆的标准方程	120
2.4.2	圆的一般方程	125
2.5	直线与圆、圆与圆的位置关系	130
2.5.1	直线与圆的位置关系	130
	第1课时 直线与圆的位置关系的判断	130
	第2课时 直线与圆的位置关系的应用	136
2.5.2	圆与圆的位置关系	142
○迁移应用	类型一 用数形结合法解决与圆有关的最值和范围问题	147
	类型二 用坐标法解决平面几何问题	148
○重构拓展		149

第三章 圆锥曲线的方程

○单元概览		157
○探究构建	3.1 椭圆	159
	3.1.1 椭圆及其标准方程	159
	3.1.2 椭圆的简单几何性质	165
	第1课时 椭圆的简单几何性质	165
	第2课时 椭圆几何性质的应用	171
	3.2 双曲线	179
	3.2.1 双曲线及其标准方程	179
	3.2.2 双曲线的简单几何性质	185
	第1课时 双曲线的简单几何性质	185
	第2课时 双曲线几何性质的应用	191
	3.3 抛物线	198
	3.3.1 抛物线及其标准方程	198
	3.3.2 抛物线的简单几何性质	204
	第1课时 抛物线的简单几何性质	204
	第2课时 抛物线几何性质的应用	210
○迁移应用	类型一 圆锥曲线的离心率问题	217
	类型二 圆锥曲线中的定值、定点问题	218
	类型三 圆锥曲线中的最值问题	220
	类型四 非对称结构问题	221
○重构拓展		222

单元概览

单元导航

本章属于课程标准中“几何与代数”主线的内容,在“平面向量”和“立体几何初步”的基础上学习空间向量及其运算、空间向量基本定理,并利用空间向量解决立体几何问题.因此可以借助类比思想,将平面向量推广到空间向量:实际背景—空间向量及其相关概念—空间向量的运算—空间向量基本定理—空间向量及其运算的坐标表示—空间向量的应用.

学习目标

- 1.了解空间向量的概念,空间向量的基本定理及其意义,掌握空间向量的正交分解、线性运算、数量积及其坐标表示.
- 2.运用向量的坐标判断向量的共线与垂直,理解直线的方向向量与平面的法向量.
- 3.能用向量方法证明有关线、面位置关系的判定定理.
- 4.能用向量方法解决线线、线面、面面的夹角的计算问题及一些简单的距离问题.
- 5.经历向量有关概念及其运算等内容由平面推广到空间的过程,体会类比思想;经历向量语言与几何语言之间的转化过程,掌握用向量方法解决几何问题的思想方法.

核心概念

类比平面向量理解空间向量的概念和运算,用空间向量的运算(基向量法、坐标法)解决立体几何问题(长度、夹角、位置关系).

立足于平面向量,理解空间向量知识,体会类比思想,发展数学抽象和逻辑推理素养;利用空间向量及其运算的几何意义和坐标表示实现形与数的统一,体会数形结合思想,培养直观想象素养;通过对线线、线面、面面的夹角和距离的研究,体现数形结合、转化化归思想,培养逻辑推理和数学运算素养.

学法指导

- 1.注意利用类比的方法理解空间向量的概念、运算、基本定理及其坐标表示,在此过程中体会平面向量与空间向量的共性和差异.
- 2.在运用向量的方法研究空间基本图形的位置关系和数量关系的过程中,体会向量方法与综合几何方法的共性和差异.

3.关注数学语言:一是注意语言表述的规范化;二是在用向量法解决立体几何问题时,重视向量语言与几何语言之间的转化.

◀ 单元主题任务

无人机是利用无线电遥控设备和自备的程序控制装置操纵的不载人飞机,在农业、经济、社会、军事等各领域有着越来越重要的应用.无人机表演是近年来非常受欢迎的一种表演形式,它能够通过高科技的手段,在空中展现出各种精彩的图案和动作,给观众带来全新的视觉体验.



(1)如何描述一架无人机的位置及速度?

(2)在表演过程中为了避免无人机相撞,如何计算无人机之间的距离?

探究构建

1.1 空间向量及其运算

1.1.1 空间向量及其线性运算

第1课时 空间向量及其线性运算

学习任务目标

- 1.了解空间向量的概念,掌握空间向量的几何表示法和字母表示法.
- 2.会用图形表示空间向量的加法、减法以及它们的运算律.
- 3.培养数学运算、数形结合的能力.

问题式预习

【知识清单】

知识点一 空间向量的有关概念

(1)定义:在空间,我们把具有大小和方向的量叫做空间向量.

(2)空间向量的长度:空间向量的大小叫做空间向量的长度或模.

(3)表示法

①几何表示法:空间向量用有向线段表示.

②字母表示法:若向量 $\vec{a}$ 的起点是 A , 终点是 B , 则向量 $\vec{a}$ 也可以记作 $\overrightarrow{AB}$, 其模记为 $|\vec{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$.

知识点二 几类特殊向量

特殊向量	定义	表示法
零向量	长度为 0 的向量	$\vec{0}$
单位向量	模为 1 的向量	$ \vec{a} = 1$ 或 $ \overrightarrow{AB} = 1$
相反向量	与向量 $\vec{a}$ 长度相等而方向相反的向量	$-\vec{a}$
相等向量	方向相同且模相等的向量	$\vec{a} = \vec{b}$ 或 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
共线向量	表示若干空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合	$\vec{a} \parallel \vec{b}$

知识点三 空间向量的线性运算

(1)空间向量的加法、减法以及数乘运算

①如图 1, $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$.

②如图 1, $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CA}$.

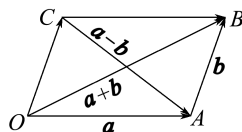


图1

③如图 2, 当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda\vec{a} = \lambda\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{PQ}$;

当 $\lambda < 0$ 时, $\lambda\vec{a} = \lambda\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{MN}$;

当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda\vec{a} = \vec{0}$.

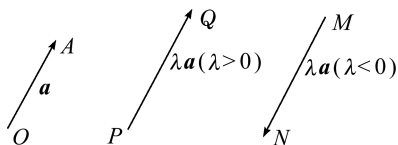


图2

(2)空间向量的线性运算满足的运算律(其中 $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$)

交换律: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

结合律: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$;

分配律: $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$, $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)相等向量一定是共线向量. (√)

(2)三个空间向量一定是共面向量. (×)

(3)零向量没有方向. (×)

2.化简: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} =$ _____.

解析: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.

3.请思考并回答下列问题:

(1)向量运算的结果与向量起点的选择有关系吗?

提示:没有关系.

(2)进行空间向量的加减运算时,两个向量必须共起点吗?

提示:求向量的和时,可以首尾相接(三角形法则),也可以共起点(平行四边形法则);求向量的差时,必须共起点(三角形法则:共起点,指被减).

(3)向量 λa 与向量 a 是什么关系?

提示:向量 λa 与向量 a 一定是共线向量.

(4) λ 的正负和绝对值的大小对向量 λa 分别有什么影响?

提示: λ 的正负影响着向量 λa 的方向, λ 的绝对值的大小影响着向量 λa 的长度.

任务型课堂

任务1 > 空间向量的有关概念

1.下列关于空间向量的说法中正确的是 ()

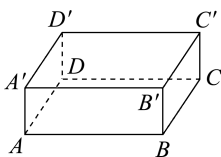
- A.若向量 a, b 平行,则 a, b 所在的直线未必平行
B.若 $|a| = |b|$,则 a, b 的长度相等而方向相同或相反

- C.若向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ 满足 $|\overrightarrow{AB}| > |\overrightarrow{CD}|$,则 $\overrightarrow{AB} > \overrightarrow{CD}$
D.相等向量的方向未必相同

解析:A中,向量 a, b 平行,则 a, b 所在的直线平行或重合,故 A 正确;B中, $|a| = |b|$ 只能说明 a, b 的长度相等而方向不确定,故 B 错误;C中,向量作为矢量不能比较大小,故 C 错误;D中,相等向量指的是两个向量长度相等且方向相同,故 D 错误,故选 A.

2.如图,在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, $AB=3, AD=2, AA'=1$,以长方体的顶点为向量的起点和终点.

- (1)单位向量共有多少个?
(2)试写出模为 $\sqrt{5}$ 的向量.
(3)试写出与向量 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量.
(4)试写出向量 $\overrightarrow{AA'}$ 的相反向量.



解:(1)因为长方体的高为 1,所以长方体的四条高所对应的向量 $\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{DD'}, \overrightarrow{D'D}$ 都是单位向量,而其他向量的模均不为 1,故单位向量共有 8 个.

(2)由于长方体的左、右侧面的对角线长均为 $\sqrt{5}$,故模为 $\sqrt{5}$ 的向量有 $\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{D'A}, \overrightarrow{A'D}, \overrightarrow{DA'}, \overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{C'B}, \overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{CB'}.$

(3)与向量 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量(除它自身之外)有 $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{D'C'}.$

(4)向量 $\overrightarrow{AA'}$ 的相反向量有 $\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{D'D}.$

【探究总结】

解决空间向量问题的方法

(1)在空间中,向量、向量的模、相等向量的概念和平面中向量的相关概念完全一致.因此可以类比平面向

量的有关方法解题.

(2)判断有关向量的命题时,要抓住向量的两个主要元素:大小与方向.两者缺一不可,相互制约.

任务2 > 空间向量的线性运算

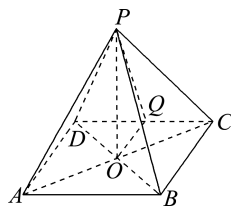
探究活动

例1 已知四边形 $ABCD$ 为正方形, P 是四边形 $ABCD$ 所在平面外的一点, P 在平面 $ABCD$ 上的射影恰好是正方形 $ABCD$ 的中心 O , Q 是 CD 的中点,求下列各式中 x, y 的值:

$$(1) \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PQ} + x \overrightarrow{PC} + y \overrightarrow{PA};$$

$$(2) \overrightarrow{PA} = x \overrightarrow{PO} + y \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PD}.$$

解:(1)如图, $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$,由向量加法的平行四边形法则可得 $\overrightarrow{PO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA})$,故 $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PA}.$



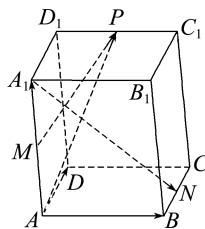
$$\text{所以 } \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PQ}.$$

$$\text{所以 } x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}.$$

(2)因为 $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{PD} + 2\overrightarrow{QO}$
 $= \overrightarrow{PD} + 2(\overrightarrow{PO} - \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{PD} + 2\overrightarrow{PO} - 2\overrightarrow{PQ},$
所以 $x = 2, y = -2.$

例2 如图,在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,设 $\overrightarrow{AA_1} = a, \overrightarrow{AB} = b, \overrightarrow{AD} = c, M, N, P$ 分别是 AA_1, BC, C_1D_1 的中点,试用 a, b, c 表示以下各向量:

- (1) $\overrightarrow{AP}$; (2) $\overrightarrow{A_1N}$; (3) $\overrightarrow{MP}.$



解:(1)因为 P 是 C_1D_1 的中点,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{D_1P} = a + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{D_1C_1}$$

$$= \mathbf{a} + \mathbf{c} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

(2) 因为 N 是 BC 的中点,

$$\text{所以 } \overrightarrow{A_1N} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = -\mathbf{a} + \mathbf{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -\mathbf{a}$$

$$+ \mathbf{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = -\mathbf{a} + \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}.$$

(3) 因为 M 是 AA_1 的中点,

$$\text{所以 } \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\mathbf{a} +$$

$$\left(\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

【一题多思】

思考 1. 本例涉及线段的中点, 若 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点为 G , 如何用向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 表示向量 $\overrightarrow{AG}$?

$$\text{解: } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

思考 2. 若把本例中“ P 是 C_1D_1 的中点”改为“ P 在线段 C_1D_1 上, 且 $\frac{C_1P}{PD_1} = \frac{1}{2}$ ”, 其他条件不变, 如何表示 $\overrightarrow{AP}$?

$$\text{解: } \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1D_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{D_1C_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} + \mathbf{c} + \frac{2}{3}\mathbf{b}.$$

【探究总结】

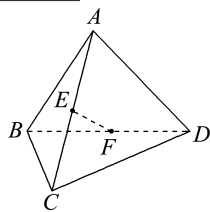
空间向量加减运算的方法

(1) 空间向量的运算仍然遵循三角形法则和平行四边形法则, 在进行加法、减法的运算时, 要注意找准向量所在的三角形或平行四边形.

(2) 向量的加法和减法是互逆运算, 在进行减法运算时, 可以将减去一个向量转化为加上这个向量的相反向量.

应用迁移

1. 如图, 已知空间四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} - 2\mathbf{c}$, $\overrightarrow{CD} = 5\mathbf{a} + 6\mathbf{b} - 8\mathbf{c}$, 对角线 AC, BD 的中点分别为 E, F , 则 $\overrightarrow{EF} = 3\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 5\mathbf{c}$ (用 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 表示).

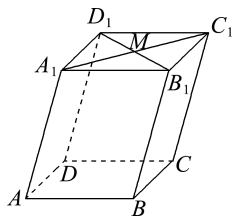


2. 如图, 已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为 A_1C_1 与 B_1D_1 的交点, 化简下列向量表达式:

$$(1) \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1};$$

$$(2) \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{MC_1} - \overrightarrow{D_1M};$$

$$(3) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1A_1} + \overrightarrow{A_1A}.$$



$$\text{解: (1) } \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB_1}.$$

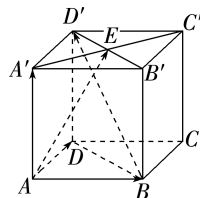
$$(2) \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{MC_1} - \overrightarrow{D_1M} = \overrightarrow{AD_1}.$$

$$(3) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1A_1} + \overrightarrow{A_1A} = \mathbf{0}.$$

3. 如图, 已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$, 点 E 是上底面 $A'B'C'D'$ 的中心, 求下列各式中 x, y, z 的值.

$$(1) \overrightarrow{BD'} = x\overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AA'};$$

$$(2) \overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AA'}.$$



$$\text{解: (1) 因为 } \overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD'} \\ = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'},$$

$$\text{且 } \overrightarrow{BD'} = x\overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AA'},$$

$$\text{所以 } x=1, y=-1, z=1.$$

$$(2) \text{ 因为 } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'E} = \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$$

$$= \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'})$$

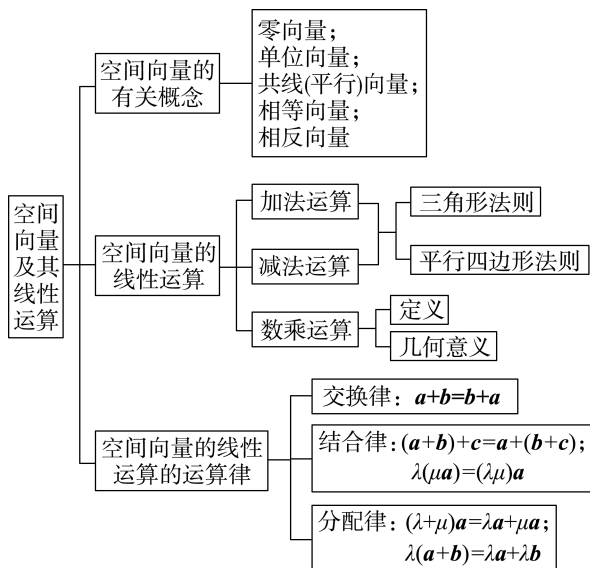
$$= \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A'D'}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'},$$

$$\text{且 } \overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AA'},$$

$$\text{所以 } x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = 1.$$

提质归纳



课后素养评价(一)

空间向量及其线性运算

A组 学习·理解

1. (多选) 下列命题中为假命题的是 ()

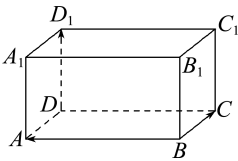
- A. 任意两个空间向量的模能比较大小
- B. 将空间中所有的单位向量移到同一个起点, 则它们的终点构成一个圆
- C. 空间向量就是空间中一条有向线段
- D. 不相等的两个空间向量的模必不相等

BCD 解析: 对于选项 A, 向量的模即向量的长度, 是一个数量, 所以任意两个空间向量的模可以比较大小; 对于选项 B, 其终点构成一个球面; 对于选项 C, 零向量不能用有向线段表示; 对于选项 D, 向量 a 与向量 b 不相等, 它们的模可以相等.

2. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} +$

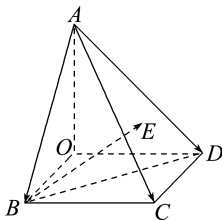
$$\overrightarrow{DD_1} =$$

- A. $\overrightarrow{D_1B_1}$
- B. $\overrightarrow{D_1B}$
- C. $\overrightarrow{DB_1}$
- D. $\overrightarrow{BD_1}$



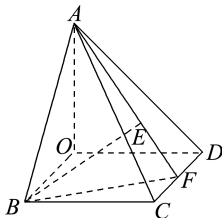
D 解析: 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD_1} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{BD_1}$.

3. 如图, 在四棱锥 $A-OBCE$ 中, E 为 $\triangle ACD$ 的重心. 若 $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{AC} = b$, $\overrightarrow{AD} = c$, 则 $\overrightarrow{BE} =$ ()



- A. $-a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$
- B. $-a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c$
- C. $a + \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c$
- D. $-a + \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c$

B 解析: 如图, 连接 AE 并延长交 CD 于点 F .



因为 E 为 $\triangle ACD$ 的重心, 则 F 为 CD 的中点, 且 $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} +$$

$$\overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = -a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c.$$

4. 已知平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$, 则下列结论错误的是 ()

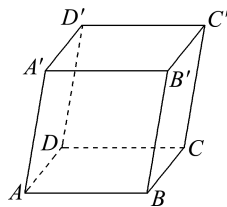
- A. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$
- B. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{CC'}$
- C. $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$
- D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{AC'}$

D 解析: 如图, 对于 A, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC}$, 所以 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'}$, 故 B 正确;

对于 C, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$, 故 C 正确;

对于 D, 因为 $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$, 所以 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C'C} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{CC'}) = \overrightarrow{AC}$, 故 D 错误. 故选 D.



B组 应用·实践

1. (多选) 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的中心为 O , 则下列结论中, 正确的是 ()

- A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$ 与 $\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$ 是一对相反向量
- B. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$ 与 $\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OD_1}$ 是一对相反向量
- C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ 与 $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1}$ 是一对相反向量
- D. $\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC_1}$ 是一对相反向量

ACD 解析: 利用图形及向量的运算可知, B 是相等向量, A, C, D 是相反向量.

2. (多选) 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 下列各式运算结果为 $\overrightarrow{AC_1}$ 的有 ()

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$
- B. $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{D_1C_1}$
- C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{B_1C_1}$
- D. $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{B_1C_1}$

BCD 解析: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{AC_1}$, 故 A 错

误; $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{D_1C_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{D_1C_1} = \overrightarrow{AC_1}$, 故 B 正确; $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AC_1}$, 故 C 正确; $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AC_1}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

3. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 若点 O 是底面正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心, 且 $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD} + z\overrightarrow{AA_1}$, 则 $x+y+z =$ _____.

2 解析: 由题意可知 $x=y=\frac{1}{2}, z=1$, 故 $x+y+z=2$.

4. 在空间四边形 $ABCD$ 中, G 为 $\triangle BCD$ 的重心, E, F, H 分别为边 CD, AD 和 BC 的中点, 化简下列各式.

(1) $\overrightarrow{AG} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$;

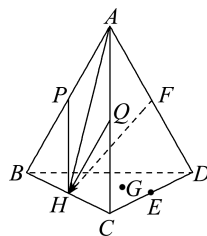
(2) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})$.

解: (1) 根据空间向量的运算法则, 可得 $\overrightarrow{AG} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$

$$+ \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF}.$$

(2) 如图, 分别取 AB, AC 的中点 P, Q , 连接 PH, QH , 则四边形 $APHQ$ 为平行四边形, 且有 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AH}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF}$.

根据空间向量的运算法则, 可得 $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AH} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FH}$.



第2课时 共线向量与共面向量

学习任务目标

1. 经历由平面向量的线性运算及其法则推广到空间向量的过程, 掌握空间向量的数乘运算及其运算律.
2. 了解空间向量共线、共面的概念, 掌握它们的表示方法, 能判断空间向量是否共线、共面.
3. 了解空间直线的方向向量.
4. 通过用向量的方法解决共线、共面问题, 培养数形结合的能力.

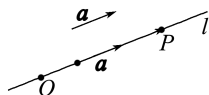
问题式预习

【知识清单】

知识点一 向量共线的充要条件

(1) 对任意两个空间向量 $a, b (b \neq 0)$, $a \parallel b$ 的充要条件是存在实数 λ , 使 $a = \lambda b$.

(2) 如图, O 是直线 l 上一点, 在直线 l 上取非零向量 a , 则对于直线 l 上任意一点 P , 由数乘向量的定

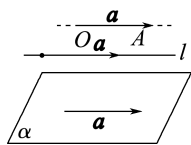


义及向量共线的充要条件可知, 存在实数 λ , 使得 $\overrightarrow{OP} = \lambda a$. 我们把与向量 a 平行的非零向量称为直线 l 的方向向量. 这样, 直线 l 上任意一点都可以由直线 l 上的一点和它的方向向量表示, 也就是说, 直线可以由其上一点和它的方向向量确定.

知识点二 向量共面的充要条件

(1) 如图, 如果表示向量 a 的有向线段 OA 所在的直线 OA 与直线 l 平行或重合, 那么称向量 a 平行于直线 l . 如果直线 OA 平行于平面 α 或在平面 α 内, 那么称向量 a 平行于平面 α . 平行于同一个平面的向量, 叫做

共面向量.



(2) 如果两个向量 a, b 不共线, 那么向量 p 与向量 a, b 共面的充要条件是存在唯一的有序实数对 (x, y) , 使 $p = xa + yb$.

【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打“√”, 错误的打“×”).

(1) 若 A, B, C 三点共线, 则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 共线.

(√)

(2) 若向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{CD}$ 是共线向量, 则点 A, B, C, D 必在同一条直线上.

(×)

(3) 若向量 a, b, c 共面, 则表示这三个向量的有向线段所在的直线共面.

(×)

(4) 空间中任意三个向量一定是共面向量.

(×)

2. 若 a, b 是平面 α 内的两个向量, 则下列命题中是真命题的是 ()

A. α 内任一向量 $p = \lambda a + \mu b (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$

B. 若存在 $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, 使 $\lambda a + \mu b = \mathbf{0}$, 则 $\lambda = \mu = 0$

C. 若 a, b 不共线, 则空间任一向量 $p = \lambda a + \mu b (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$

D. 若 a, b 不共线, 则平面 α 内任一向量 $p = \lambda a + \mu b (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$

解析: 当 a 与 b 共线时, A 项不正确; 当 a 与 b 是相反向量, $\lambda = \mu \neq 0$ 时, $\lambda a + \mu b = \mathbf{0}$ 仍成立, 故 B 项不正确; 若 a 与 b 不共线, 则与 a, b 共面的任意向量可以用 a, b 表示, 对空间向量则不一定, 故 C 项不正确, D 项正确.

3. 请思考并回答下列问题:

(1) 对于空间向量 a, b, c , 若 $a \parallel b$ 且 $b \parallel c$, 是否可以得到 $a \parallel c$?

提示: 不能. 若 $b = \mathbf{0}$, 则对任意向量 a, c 都有 $a \parallel b$ 且 $b \parallel c$.

(2) 怎样利用向量共线证明 A, B, C 三点共线?

提示: 只需证明向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ (或 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$, 或 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BC}$) 共线即可.

(3) 空间中任意两个向量一定是共面向量吗?

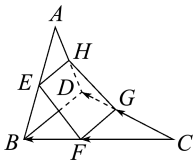
提示: 空间中任意两个向量都可以平移到同一个平面内, 成为同一个平面内的两个向量, 因此一定是共面向量.

任务型课堂

任务1 向量共线的充要条件

探究活动

例1 如图, 已知四边形 $ABCD$ 是空间四边形, E, H 分别是边 AB, AD 的中点, F, G 分别是边 CB, CD 上的点, 且 $\overrightarrow{CF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$. 求证: 四边形 $EFGH$ 是梯形.



证明: 因为 E, H 分别是 AB, AD 的中点,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} =$$

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{CG} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CF}\right) = \frac{3}{4}(\overrightarrow{CG} - \overrightarrow{CF}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{FG},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{EH} \parallel \overrightarrow{FG}, \text{ 且 } |\overrightarrow{EH}| = \frac{3}{4}|\overrightarrow{FG}| \neq |\overrightarrow{FG}|.$$

又点 F, G 不在直线 EH 上,

所以四边形 $EFGH$ 是梯形.

【探究总结】

1. 利用向量共线的充要条件可以证明三点共线或两直线平行, 解题时应注意向量共线与两直线平行的区别.

2. 判断或证明两向量 $a, b (b \neq \mathbf{0})$ 共线, 就是寻找实数 λ , 使 $a = \lambda b$ 成立, 为此常结合已知图形, 运用空间向量的线性运算法则将目标向量化简或用同一组向量表示.

应用迁移

已知非零向量 a, b , 且 $\overrightarrow{AB} = a + 2b$, $\overrightarrow{BC} = -5a + 6b$, $\overrightarrow{CD} = 7a - 2b$, 则 A, B, C, D 四点中, 一定共线的三点是 ()

A. A, B, D

B. A, B, C

C. B, C, D

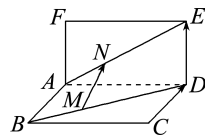
D. A, C, D

解析: 因为 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = 3a + 6b = 3(a + 2b) = 3\overrightarrow{AB}$, 所以 $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{AB}$. 因为 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 有公共点 A , 所以 A, B, D 三点共线.

任务2 向量共面的充要条件

探究活动

例2 如图, 已知矩形 $ABCD$ 所在的平面和矩形 $ADEF$ 所在的平面互相垂直, 点 M, N 分别在对角线 BD, AE 上, 且 $BM = \frac{1}{3}BD$, $AN = \frac{1}{3}AE$. 求证: 向量 $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}$ 共面.



证明: 因为点 M 在 BD 上, 且 $BM = \frac{1}{3}BD$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{MB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

$$\text{同理 } \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DE}.$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{BA} \\ &+ \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DE}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DE}. \end{aligned}$$

又 $\overrightarrow{CD}$ 与 $\overrightarrow{DE}$ 不共线, 根据向量共面的充要条件可知 $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}$ 共面.

【探究总结】

对于空间四点 P, M, A, B , 可通过证明下列结论成立来证明四点共面: (其中 $x, y, z \in \mathbf{R}$)

$$(1) \overrightarrow{MP} = x \overrightarrow{MA} + y \overrightarrow{MB};$$

$$(2) \text{对空间任一点 } O, \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + x \overrightarrow{MA} + y \overrightarrow{MB};$$

$$(3) \text{对空间任一点 } O, \overrightarrow{OP} = x \overrightarrow{OA} + y \overrightarrow{OB} + z \overrightarrow{OM} (x + y + z = 1);$$

$$(4) \overrightarrow{PM} \parallel \overrightarrow{AB} (\text{或 } \overrightarrow{PA} \parallel \overrightarrow{MB}, \text{或 } \overrightarrow{PB} \parallel \overrightarrow{AM}).$$

应用迁移

(多选) 已知 O 为空间任意一点, 在下列条件中, 使点 M, A, B, C 一定共面的是 ()

$$A. \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$$

$$B. \overrightarrow{OM} = \frac{1}{5} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OC}$$

$$C. \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \mathbf{0}$$

$$D. \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$$

AC 解析: 空间的四点 M, A, B, C 共面, 只需满足 $\overrightarrow{OM} = x \overrightarrow{OA} + y \overrightarrow{OB} + z \overrightarrow{OC}$, 且 $x + y + z = 1$. C 项可表示为 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{OC}$, A, C 项满足, 故选 AC.



提质归纳

共线
向量
与
共面
向量

向量共线的充要条件: 对任意两个空间向量 $a, b (b \neq \mathbf{0})$, $a \parallel b$ 的充要条件是存在实数 λ , 使 $a = \lambda b$

向量共面的充要条件: 向量 p 与不共线向量 a, b 共面的充要条件是存在唯一的有序实数对 (x, y) , 使 $p = xa + yb$

应用

课后素养评价 (二)

共线向量与共面向量

A组 学习·理解

1. 对于空间中的三个向量 $a, b, 2a - b$, 它们一定是 ()

- A. 共面向量
B. 共线向量
C. 不共面向量
D. 既不共线也不共面向量

A 解析: 由共面向量定理易得答案选 A.

2. 设空间四点 O, A, B, P 满足 $\overrightarrow{OP} = m \overrightarrow{OA} + n \overrightarrow{OB}$, 其中 $m + n = 1$, 则 ()

- A. 点 P 一定在直线 AB 上
B. 点 P 一定不在直线 AB 上
C. 点 P 不一定在直线 AB 上
D. 以上都不对

A 解析: 由 $m + n = 1$ 可得 $m = 1 - n$.

结合题意可知 $\overrightarrow{OP} = (1 - n) \overrightarrow{OA} + n \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + n(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$, 即 $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = n(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$, 所以 $\overrightarrow{AP} = n \overrightarrow{AB}$. 据此可知 A, P, B 三点共线, 点 P 一定在直线 AB 上.

3. 下列条件中, 能说明空间不重合的三点 A, B, C 共线的是 ()

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ D. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$

C 解析: 对于空间中的任意向量, 都有 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, 选项 A 不满足题意. 若 $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, 则 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$, 而 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$. 据此可知 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB}$, 即 B, C 两点重合, 选项 B 不满足题意. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$, 则

A, B, C 三点共线, 选项 C 满足题意. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$, 则线段 AB 的长度与线段 BC 的长度相等, 不一定有 A, B, C 三点共线, 选项 D 不满足题意, 故选 C.

4. 若 $a = -i + 2j - k, b = -3i + 6j - 3k, c = -2i + 4j - 2k$, 则 a, b, c ()

- A. 可构成锐角三角形
B. 可构成直角三角形
C. 可构成钝角三角形
D. 不可以构成三角形

D 解析: 由题意知, $b = 3a, c = 2a$, 所以 a, b, c 共线, 所以 a, b, c 不可以构成三角形.

5. 下列结论中, 正确的是 _____. (填序号)

- ① 若 a, b, c 共面, 则存在实数 x, y , 使得 $a = xb + yc$;
② 若 a, b, c 不共面, 则不存在实数 x, y , 使得 $a = xb + yc$;
③ 若 a, b, c 共面, b, c 不共线, 则存在实数 x, y , 使得 $a = xb + yc$;
④ 若存在实数 x, y 使 $a = xb + yc$, 则 a, b, c 共面.

②③④ 解析: 对于①, 若 b, c 共线, 且 a, b 不共线,

则不存在实数 x, y , 使 $a = xb + yc$, 故①错误;

由共面向量的基本定理可知②, ③, ④均正确.

6. 已知 e_1, e_2, e_3 不共面, 若 $\overrightarrow{AB} = e_1 + e_2 + e_3, \overrightarrow{BC} = e_1 + \lambda e_2 + \mu e_3$, 且 A, B, C 三点共线, 则 $\lambda + \mu =$ _____.

2 解析: 因为 A, B, C 三点共线, 所以 $\overrightarrow{AB} = x \overrightarrow{BC}$. 因为 e_1, e_2, e_3 不共面, 所以有 $e_1 + e_2 + e_3 = x(e_1 +$

$$\lambda \mathbf{e}_2 + \mu \mathbf{e}_3 = x \mathbf{e}_1 + x\lambda \mathbf{e}_2 + x\mu \mathbf{e}_3, \text{ 故 } \begin{cases} x=1, \\ x\lambda=1, \text{ 解得} \\ x\mu=1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda=1, \\ \mu=1, \end{cases} \text{ 所以 } \lambda + \mu = 1 + 1 = 2.$$

B组 应用·实践

1. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, P, M 为空间任意两点, 如果有 $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PB_1} + 7\overrightarrow{BA} + 6\overrightarrow{AA_1} - 4\overrightarrow{A_1D_1}$, 那么点 M

- A. 在平面 BAD_1 内
B. 在平面 BA_1D 内
C. 在平面 BA_1D_1 内
D. 在平面 AB_1C_1 内

解析: 由 $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PB_1} + 7\overrightarrow{BA} + 6\overrightarrow{AA_1} - 4\overrightarrow{A_1D_1}$
 $= \overrightarrow{PB_1} + \overrightarrow{BA} + 6\overrightarrow{BA_1} - 4\overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{PB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} +$
 $6\overrightarrow{BA_1} - 4\overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{PA_1} + 6(\overrightarrow{PA_1} - \overrightarrow{PB}) - 4(\overrightarrow{PD_1} -$
 $\overrightarrow{PA_1}) = 11\overrightarrow{PA_1} - 6\overrightarrow{PB} - 4\overrightarrow{PD_1}$, 易知 $M, B, A_1,$
 D_1 四点共面, 故选 C.

2. 已知在四面体 $OABC$, 空间的一点 M 满足 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OB} + \lambda\overrightarrow{OC}$. 若 M, A, B, C 四点共面, 则 λ 等于

- A. $\frac{7}{12}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{1}{2}$

解析: 因为 M, A, B, C 四点共面, 所以 $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \lambda = 1$, 解得 $\lambda = \frac{7}{12}$, 故选 A.

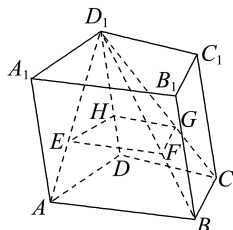
3. 若 $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD} + \mu\overrightarrow{CE}$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$), 则直线 AB 与平面 CDE 的位置关系为_____.

$AB \subset \text{平面 } CDE$ 或 $AB \parallel \text{平面 } CDE$ **解析:** 由 $\overrightarrow{AB}$

$= \lambda\overrightarrow{CD} + \mu\overrightarrow{CE}$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$) 及共面向量定理可知向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}$ 共面,
 即直线 AB 可能在平面 CDE 内, 也可能与平面 CDE 平行.

4. 如图, 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $\overrightarrow{D_1E} = k\overrightarrow{D_1A}, \overrightarrow{D_1F} = k\overrightarrow{D_1B}, \overrightarrow{D_1G} = k\overrightarrow{D_1C}, \overrightarrow{D_1H} = k\overrightarrow{D_1D}$.

- (1) 当 $k = \frac{3}{4}$ 时, 试用 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}$ 表示 $\overrightarrow{AF}$;
 (2) 求证: E, F, G, H 四点共面.



(1) **解:** 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD}$. 因为 $k = \frac{3}{4}$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{D_1F} - \overrightarrow{D_1E} =$$

$$\frac{1}{4}\overrightarrow{AD_1} + \frac{3}{4}\overrightarrow{D_1B} - \frac{3}{4}\overrightarrow{D_1A} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD_1} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}.$$

(2) **证明:** 设 $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AD}$ (λ, μ 不为 0),
 则 $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{D_1G} - \overrightarrow{D_1E} = k\overrightarrow{D_1C} - k\overrightarrow{D_1A} = k\overrightarrow{AC} =$
 $k(\lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AD}) = k\lambda\overrightarrow{AB} + k\mu\overrightarrow{AD}$
 $= k\lambda(\overrightarrow{D_1B} - \overrightarrow{D_1A}) + k\mu(\overrightarrow{D_1D} - \overrightarrow{D_1A}) = \lambda(\overrightarrow{D_1F} -$
 $\overrightarrow{D_1E}) + \mu(\overrightarrow{D_1H} - \overrightarrow{D_1E}) = \lambda\overrightarrow{EF} + \mu\overrightarrow{EH},$
 所以 $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{EH}$ 共面, 所以 E, F, G, H 四点共面.

1.1.2 空间向量的数量积运算

学习任务目标

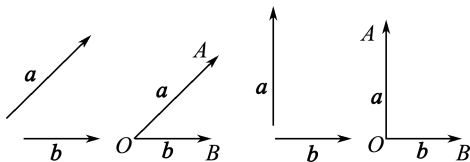
1. 了解空间向量的夹角、模的概念及其表示.
2. 掌握空间向量的数量积及其运算律, 了解空间向量投影的概念及投影向量的意义.
3. 能运用向量的数量积解决立体几何中简单的垂直、长度等问题.
4. 培养利用向量的方法解决立体几何问题的能力.

问题式预习

【知识清单】

知识点一 空间向量的夹角

(1) 定义



如图, 已知两个非零向量 a, b , 在空间任取一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OB} = b$, 则 $\angle AOB$ 叫做向量 a, b 的夹角, 记作 $\langle a, b \rangle$.

(2) 夹角的范围

通常规定, $0 \leq \langle a, b \rangle \leq \pi$. 这样, 两个向量的夹角是唯一确定的, 且 $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$. 如果 $\langle a, b \rangle = \frac{\pi}{2}$, 那么向

量 a, b 互相垂直, 记作 $a \perp b$.

知识点二 空间向量的数量积、运算律

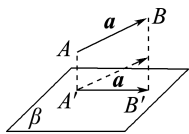
(1) 定义

已知两个非零向量 a, b , 则 $|a||b|\cos\langle a, b \rangle$ 叫做 a, b 的数量积, 记作 $a \cdot b$. 即 $a \cdot b = |a||b|\cos\langle a, b \rangle$. 其

中, $|a|\cos\langle a, b \rangle \frac{b}{|b|}$ 称为向量 a 在向量 b 上的投影向量. 特别地, 零向量与任意向量的数量积为 0.

(2) 线面角

如图, 向量 a 向平面 β 投影, 就是分别由向量 a 的起点 A 和终点 B 作平面 β 的垂线, 垂足分别为 A', B' , 得到向量 $\overrightarrow{A'B'}$, 向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 称为向量 a 在平面 β 上的投影向量. 这时, 向量 $a, \overrightarrow{A'B'}$ 的夹角就是向量 a 所在直线与平面 β 所成的角.



(3) 空间两个向量的数量积的性质

向量数量积的性质	垂直	若 a, b 是非零向量, 则 $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$
	共线	同向: $a \cdot b = a b $, 反向: $a \cdot b = - a b $
	模	$a \cdot a = a a \cos\langle a, a \rangle = a ^2$, $ a = \sqrt{a \cdot a}$, $ a \cdot b \leq a b $
	夹角	若 θ 为 a, b 的夹角, 则 $\cos \theta = \frac{a \cdot b}{ a b }$

(4) 空间向量的数量积满足的运算律

$$\textcircled{1} (\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b), \lambda \in \mathbf{R};$$

$$\textcircled{2} a \cdot b = b \cdot a \text{ (交换律);}$$

$$\textcircled{3} (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \text{ (分配律).}$$

【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打“√”, 错误的打“×”).

(1) 对于非零向量 $a, b, \langle a, b \rangle$ 与 $\langle a, -b \rangle$ 相等.

(×)

(2) 对于任意向量 a, b, c , 都有 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

(×)

(3) 若 $a \cdot b = b \cdot c$, 且 $b \neq 0$, 则 $a = c$.

(×)

(4) $(3a+2b) \cdot (3a-2b) = 9|a|^2 - 4|b|^2$.

(√)

2. 已知向量 a 和 b 的夹角为 120° , 且 $|a|=2, |b|=5$, 则 $(2a-b) \cdot a =$

()

A. 12

B. $8 + \sqrt{13}$

C. 4

D. 13

D 解析: $(2a-b) \cdot a = 2a^2 - b \cdot a = 2|a|^2 - |a| \cdot$

$$|b| \cos 120^\circ = 2 \times 4 - 2 \times 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 13.$$

3. 请思考并回答下列问题:

(1) 若 $a \cdot b = 0$, 则一定有 $a \perp b$ 吗?

提示: 不一定, 也可能 $a=0$ 或 $b=0$.

(2) 若 $a \cdot b > 0$, 则 $\langle a, b \rangle$ 一定是锐角吗?

提示: 不一定, 当 $\langle a, b \rangle = 0$ 时, 也有 $a \cdot b > 0$, 故当 $a \cdot b > 0$ 时, $\langle a, b \rangle$ 不一定是锐角.

(3) $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$ 成立吗?

提示: 不成立.

任务型课堂

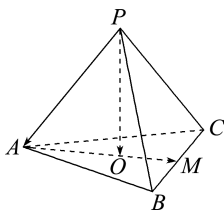
任务1 空间向量数量积的运算

1. 已知空间四边形 $ABCD$ 的每条边和对角线的长都等于 a , 点 E, F 分别是 BC, AD 的中点, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} =$ _____.

$$\frac{1}{4}a^2 \quad \text{解析: } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 2 \times \frac{1}{4}a^2 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{4}a^2.$$

2. 在正三棱锥 $P-ABC$ 中, O 是 $\triangle ABC$ 的中心, $PA=AB=2$, 则 $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA} =$ _____.

$\frac{8}{3}$ 解析: 如图所示,



因为 $P-ABC$ 为正三棱锥且 $PA=AB=2$,

取 BC 的中点 M , 连接 AM , 因为 O 是 $\triangle ABC$ 的中心,

所以 A, O, M 三点共线且 $AO = \frac{2}{3}AM$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{PA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PA} + \frac{2}{3} \times$$

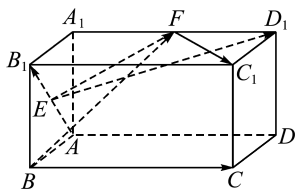
$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{PA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA} = \left(\overrightarrow{PA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{PA} =$$

$$\overrightarrow{PA}^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{CA}$$

$$= 4 - \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = \frac{8}{3}.$$

3. 如图, 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=AA_1=2, AD=4$, E 为 AB_1 的中点, F 为 A_1D_1 的中点, 试计算:



$$(1) \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{ED_1};$$

$$(2) \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AB_1};$$

$$(3) \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FC_1}.$$

解: 设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c}$, 则 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{c}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 4$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 0$.

$$\begin{aligned} (1) \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{ED_1} &= \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{A_1D_1} - \overrightarrow{A_1E}) = \\ &= \overrightarrow{BC} \cdot \left[\overrightarrow{A_1D_1} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB}) \right] \\ &= \mathbf{b} \cdot \left[\frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{a}) + \mathbf{b} \right] = |\mathbf{b}|^2 = 16. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AB_1} &= (\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{A_1F}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}) = \\ &= (\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1F}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}) \\ &= \left(\mathbf{c} - \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} \right) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c}) = |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{a}|^2 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FC_1} &= (\overrightarrow{EA_1} + \overrightarrow{A_1F}) \cdot (\overrightarrow{FD_1} + \overrightarrow{D_1C_1}) = \\ &= \left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{A_1F} \right] \cdot (\overrightarrow{FD_1} + \overrightarrow{D_1C_1}) \\ &= \left[\frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}\mathbf{b} \right] \cdot \left(\frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{a} \right) = \frac{1}{2}(-\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot \left(\frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{a} \right) = -\frac{1}{2}|\mathbf{a}|^2 + \frac{1}{4}|\mathbf{b}|^2 = 2. \end{aligned}$$

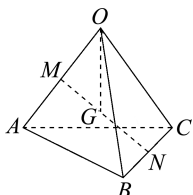
【探究总结】

- 只有两个非零空间向量才有夹角, 当两个非零空间向量共线同向时, 夹角为 0 , 共线反向时, 夹角为 π .
- 对空间任意两个非零向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 有: ① $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$; ② $\langle -\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, -\mathbf{b} \rangle = \pi - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$; ③ $\langle -\mathbf{a}, -\mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.

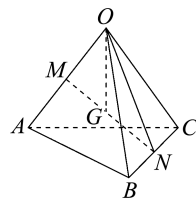
任务2 利用数量积证明空间中的垂直关系

探究活动

例1 如图, 在空间四边形 $OABC$ 中, 已知 $\angle AOB = \angle BOC = \angle AOC$, 且 $OA = OB = OC$, M, N 分别是 OA, BC 的中点, G 是 MN 的中点. 求证: $OG \perp BC$.



例1 证明: 如图, 连接 ON , 设 $\angle AOB = \angle BOC = \angle AOC = \theta$, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, 则 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|$.



$$\begin{aligned} \text{又 } \overrightarrow{OG} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \right] \\ &= \frac{1}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}), \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \mathbf{c} - \mathbf{b}, \text{ 所以 } \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \frac{1}{4}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \\ &= \frac{1}{4}(|\mathbf{a}|^2 \cdot \cos \theta - |\mathbf{a}|^2 \cdot \cos \theta - |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{a}|^2) = 0. \end{aligned}$$

所以 $\overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{BC}$, 即 $OG \perp BC$.

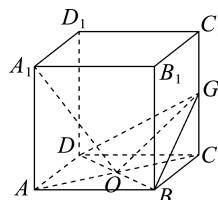
【探究总结】

用向量法证明空间中垂直关系的步骤

- 把几何问题转化为向量问题;
- 用已知向量表示关键向量;
- 结合向量的数量积公式和运算律证明数量积为 0 ;
- 从向量问题返回到几何问题.

应用迁移

如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, O 为 AC 与 BD 的交点, G 为 CC_1 的中点. 求证: $A_1O \perp$ 平面 GBD .



证明: 设 $\overrightarrow{A_1B_1} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{A_1D_1} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{A_1A} = \mathbf{c}$,

则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|$.

$$\begin{aligned} \text{因为 } \overrightarrow{A_1O} &= \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{A_1A} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, \\ \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{c}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \overrightarrow{A_1O} \cdot \overrightarrow{BD} &= \left(\mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} \right) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{b}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \\ &= \frac{1}{2}(|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2) = 0, \end{aligned}$$

所以 $\overrightarrow{A_1O} \perp \overrightarrow{BD}$, 即 $A_1O \perp BD$.

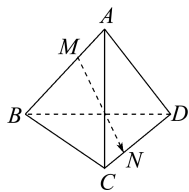
同理可证 $\overrightarrow{A_1O} \perp \overrightarrow{OG}$, 即 $A_1O \perp OG$.

又因为 $OG \cap BD = O$, $OG \subset$ 平面 GBD , $BD \subset$ 平面 GBD , 所以 $A_1O \perp$ 平面 GBD .

任务3 利用向量的数量积求夹角和模长

探究活动

例2 如图, 正四面体 $ABCD$ 的棱长为 a , M, N 分别是棱 AB, CD 上的点, 且 $MB = 2AM, CN = \frac{1}{2}ND$, 求 $|\overrightarrow{MN}|$ 的值.



解: 因为 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$,
 所以 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MN} = \left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2 = \frac{1}{9}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{9}\overrightarrow{AD}^2 + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC}^2 - \frac{2}{9}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{9}a^2 + \frac{4}{9}a^2 - \frac{1}{9}a^2 - \frac{2}{9}a^2 + \frac{2}{9}a^2 = \frac{5}{9}a^2$. 故 $|\overrightarrow{MN}| = \frac{\sqrt{5}}{3}a$.

一题多思

思考1 本例的条件不变, 求异面直线 AC 与 MN 所成角的余弦值.

解: 因为 $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,
 所以 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}^2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{6}a^2 + \frac{2}{3}a^2 + \frac{1}{6}a^2 = \frac{2}{3}a^2$,
 所以 $\cos \langle \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC} \rangle = \frac{\frac{2}{3}a^2}{\frac{\sqrt{5}}{3}a \cdot a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 即异面直线

AC 与 MN 所成角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

思考2 把本例中的条件“ $MB = 2AM, CN = \frac{1}{2}ND$ ”

改为“ M, N 分别是 AB, CD 的中点”, 求 $|\overrightarrow{MN}|$ 的值.

解: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

因为 $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ 两两的夹角均为 $\frac{\pi}{3}$, 且 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = a$,

所以 $|\overrightarrow{MN}|^2 = \left|-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right|^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AD}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2 - 2|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos \frac{\pi}{3} - 2|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cos \frac{\pi}{3} + 2|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}a^2$,

故 $|\overrightarrow{MN}| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

探究总结

1. 利用数量积求异面直线所成角 θ 的余弦值的步骤:

- (1) 分别在两条异面直线上取向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$;
- (2) 求向量夹角的余弦值 $\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$;
- (3) 得结果, 即 $\cos \theta = |\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|$.

2. 用数量积求两点间距离的步骤:

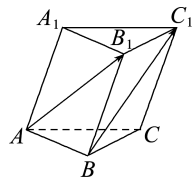
- (1) 用向量 $\mathbf{a}$ 的长度表示此距离;
- (2) 用其他已知向量表示向量 $\mathbf{a}$;
- (3) 用公式 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$, 求 $|\mathbf{a}|$.

应用迁移

如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都为 a , $\angle BAA_1 = \angle CAA_1 = 60^\circ$.

(1) 求 $|\overrightarrow{AB_1}|, |\overrightarrow{BC_1}|$;

(2) 求向量 $\overrightarrow{AB_1}$ 与 $\overrightarrow{BC_1}$ 夹角的余弦值.



解: (1) 因为 $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}$,

所以 $|\overrightarrow{AB_1}|^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AA_1}^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot a \cos 60^\circ + a^2 = 3a^2$,

所以 $|\overrightarrow{AB_1}| = \sqrt{3}a$.

因为 $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AA_1} + (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB}$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } |\overrightarrow{BC_1}|^2 &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB})^2 \\ &= \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AA_1}^2 + \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AA_1} - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} \\ &= a^2 + a^2 + a^2 + a^2 - a^2 - a^2 = 2a^2, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{BC_1}| = \sqrt{2}a.$$

$$(2) \text{ 因为 } \overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB})$$

$$\begin{aligned} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}) \cdot \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}^2 - \overrightarrow{AB}^2 \\ &= a \cdot a \cos 60^\circ + a \cdot a \cos 60^\circ + a^2 - a^2 = a^2, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{BC_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{AB_1}| |\overrightarrow{BC_1}|} = \frac{a^2}{\sqrt{3}a \times \sqrt{2}a}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

故向量 $\overrightarrow{AB_1}$ 与 $\overrightarrow{BC_1}$ 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.



提质归纳

空间向量的数量积	定义: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b} \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$
	性质: $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} ^2$
	运算律: ① $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) (\lambda \in \mathbf{R})$; ② $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$; ③ $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$
	应用: 利用数量积证明空间中的垂直关系; 利用数量积求向量的夹角和模

课后素养评价 (三)

空间向量的数量积运算

A组 学习·理解

1. (多选) 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是任意的非零向量, 且它们相互不共线, 则下列结论正确的是 ()

A. $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{0}$

B. $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$

C. $\mathbf{a}^2 \mathbf{b} = \mathbf{b}^2 \mathbf{a}$

D. $(3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = 9|\mathbf{a}|^2 - 4|\mathbf{b}|^2$

BD 解析: 因为数量积不满足结合律, 故 A 不一定成立; 由数量积的性质可知 B 正确, C 中结论不一定成立, D 运算正确.

2. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c}$, 则 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ 的值为 ()

A. 1 B. 0 C. -1 D. -2

B 解析: 由题意可得 $AB \perp AD$, $AB \perp AA_1$, 所以 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$, 所以 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$, 所以 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$, 故选 B.

3. 已知 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 均为单位向量, 它们的夹角为 60° , 那么 $|\mathbf{a} + 3\mathbf{b}|$ 等于 ()

A. 7 B. $\sqrt{10}$ C. $\sqrt{13}$ D. 4

C 解析: 因为 $|\mathbf{a} + 3\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + 3\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 9\mathbf{b}^2 + 6\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 + 9 + 6|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos 60^\circ = 13$,

所以 $|\mathbf{a} + 3\mathbf{b}| = \sqrt{13}$.

4. 已知 $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{2}$, 且 $\mathbf{a}$ 与 $2\mathbf{b} - \mathbf{a}$ 互相垂直, 则向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 _____.

45° 解析: 由于 $\mathbf{a}$ 与 $2\mathbf{b} - \mathbf{a}$ 互相垂直,

所以 $\mathbf{a} \cdot (2\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0$,

即 $2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - |\mathbf{a}|^2 = 0$,

所以 $2|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 4$,

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{4}{2 \times 2 \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 45° .

5. 已知 $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 1$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 60^\circ$, 则使向量 $\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$ 与 $\lambda \mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ 的夹角为钝角的实数 λ 的取值范围是 _____.

$(-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3})$ 解析: 由题意

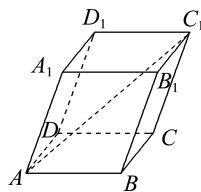
$$\text{知 } \begin{cases} (\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}) \cdot (\lambda \mathbf{a} - 2\mathbf{b}) < 0, \\ \cos \langle \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}, \lambda \mathbf{a} - 2\mathbf{b} \rangle \neq -1, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} (\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}) \cdot (\lambda \mathbf{a} - 2\mathbf{b}) < 0, \\ (\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}) \cdot (\lambda \mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \neq -|\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}| |\lambda \mathbf{a} - 2\mathbf{b}|, \end{cases}$$

$$\text{得 } \lambda^2 + 2\lambda - 2 < 0, \text{ 解得 } -1 - \sqrt{3} < \lambda < -1 + \sqrt{3}.$$

故实数 λ 的取值范围是 $(-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3})$.

6. 如图, 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 以顶点 A 为端点的三条棱的长都为 1, 且两两夹角为 60° , 求 AC_1 的长.



解: 因为 $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}$, 所以 $|\overrightarrow{AC_1}|^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CC_1}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CC_1} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC_1} = 1 + 1 + 1 + 2|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{BC}| \cos 60^\circ + 2|\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{CC_1}| \cos 60^\circ + 2|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{CC_1}| \cos 60^\circ = 6$. 所以 $|\overrightarrow{AC_1}| = \sqrt{6}$, 故 AC_1 的长为 $\sqrt{6}$.

B组 应用·实践

1. 已知空间四边形 $ABCD$, $\angle ACD = \angle BDC = 90^\circ$, 且 $AB=2, CD=1$, 则 AB 与 CD 所成的角是 ()

A. 30° B. 45°
C. 60° D. 90°

C 解析: 根据 $\angle ACD = \angle BDC = 90^\circ$, 得 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + |\overrightarrow{CD}|^2 + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{CD}|^2 = 1$,

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{CD}|} = \frac{1}{2},$$

所以 AB 与 CD 所成的角是 60° .

2. (多选) 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 下列结论正确的有 ()

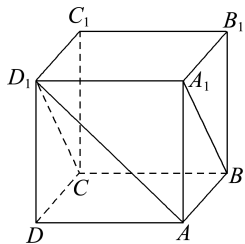
A. $(\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB})^2 = 3\overrightarrow{AB}^2$

B. $\overrightarrow{A_1C} \cdot (\overrightarrow{A_1B_1} - \overrightarrow{A_1A}) = 0$

C. $\overrightarrow{AD_1}$ 与 $\overrightarrow{A_1B}$ 的夹角为 60°

D. 正方体的体积为 $|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A_1A} \cdot \overrightarrow{AD}|$

AB 解析: 如图, $(\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB})^2 = (\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})^2 = \overrightarrow{A_1C}^2 = 3\overrightarrow{AB}^2$, 故 A 正确;

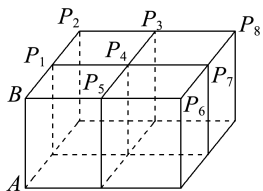


由正方体的性质易证 $AB_1 \perp$ 平面 A_1BC , 因为 $A_1C \subset$ 平面 A_1BC , 所以 $AB_1 \perp A_1C$, 所以 $\overrightarrow{A_1C} \cdot (\overrightarrow{A_1B_1} - \overrightarrow{A_1A}) = \overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0$, 故 B 正确;

$\overrightarrow{AD_1}$ 与 $\overrightarrow{A_1B}$ 的夹角是 $\overrightarrow{D_1C}$ 与 $\overrightarrow{D_1A}$ 夹角的补角, 而 $\overrightarrow{D_1C}$ 与 $\overrightarrow{D_1A}$ 的夹角为 60° , 故 $\overrightarrow{AD_1}$ 与 $\overrightarrow{A_1B}$ 的夹角为 120° , 故 C 错误;

正方体的体积为 $|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{A_1A}| |\overrightarrow{AD}|$, 故 D 错误.

3. 如图, 四个棱长为 1 的正方体组成一个正四棱柱, AB 是一条侧棱, $P_i (i=1, 2, \dots, 8)$ 是上底面上的八个点, $x_i = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP_i} (i=1, 2, \dots, 8)$, 用列举法表示 x_i 组成的集合 _____.



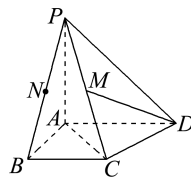
{1} 解析: 由题意得 $x_i = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP_i} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} +$

$\overrightarrow{BP_i}) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP_i} (i=1, 2, \dots, 8)$. 又因为 $AB \perp$ 平面 $BP_2P_8P_6$, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BP_i}$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP_i} = 0$. 所以 $x_i = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP_i} = |\overrightarrow{AB}|^2 = 1$, 则 $x_i = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP_i} (i=1, 2, \dots, 8) = 1$.

4. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC$, $\angle BAD = 90^\circ$, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PA = AD = AB = 2BC$, M, N 分别为 PC, PB 的中点.

(1) 求证: $PB \perp DM$;

(2) 求 AC 与 PD 所成角的余弦值.



(1) **证明:** 因为 $\angle BAD = 90^\circ$, 所以 $AB \perp AD$. 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB, AD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $AP \perp AB, AP \perp AD$. 故 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$. 由题意知, $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{DC})$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}, \text{ 则 } \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{DM} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) \cdot \\ &\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2 - \frac{1}{2}|\overrightarrow{AP}|^2 = 0, \end{aligned}$$

所以 $\overrightarrow{PB} \perp \overrightarrow{DM}$, 即 $PB \perp DM$.

(2) **解:** 设 $PA = AD = AB = 2BC = 2$,

$$\text{由于 } \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD},$$

$$\text{则 } |\overrightarrow{PD}|^2 = |\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AP}|^2 = \overrightarrow{AD}^2 - 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AP}^2 = 8, \text{ 故 } |\overrightarrow{PD}| = 2\sqrt{2};$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AC}|^2 &= \left|\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ &+ \frac{1}{4}|\overrightarrow{AD}|^2 = 5, \text{ 故 } |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } \overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AP}) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) = \\ &\frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}|^2 = 2, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{PD}, \overrightarrow{AC} \rangle = \frac{2}{2\sqrt{2} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

故 AC 与 PD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

1.2 空间向量基本定理

学习任务目标

- 1.了解空间向量的基本定理及其意义.
- 2.掌握空间向量的正交分解.
- 3.会在简单问题中选用空间三个不共面向量作为基向量表示其他向量.

问题式预习

【知识清单】

知识点一 空间向量基本定理

(1)分向量

如果 i, j, k 是空间三个两两垂直的向量,那么对任意一个空间向量 p ,存在唯一的有序实数组 (x, y, z) ,使得 $p = xi + yj + zk$.我们称 xi, yj, zk 分别为向量 p 在 i, j, k 上的分向量.

(2)空间向量基本定理

如果三个向量 a, b, c 不共面,那么对任意一个空间向量 p ,存在唯一的有序实数组 (x, y, z) ,使得 $p = xa + yb + zc$.

知识点二 基底

如果三个向量 a, b, c 不共面,那么所有空间向量组成的集合就是 $\{p | p = xa + yb + zc, x, y, z \in \mathbf{R}\}$.这个集合可看作由向量 a, b, c 生成的,我们把 $\{a, b, c\}$ 叫做空间的一个基底, a, b, c 都叫做基向量.空间任意三个不共面的向量都可以构成空间的一个基底.

知识点三 正交分解

特别地,如果空间的一个基底中的三个基向量两两垂直,且长度都为1,那么这个基底叫做单位正交基底,常用 $\{i, j, k\}$ 表示.由空间向量基本定理可知,对空间中的任意向量 a ,均可以分解为三个向量 xi, yj, zk ,使 $a = xi + yj + zk$.像这样,把一个空间向量分解为三个两两垂直的向量,叫做把空间向量进行正交分解.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)若 $\{\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}\}$ 不能作为空间的一个基底,则

O, A, B, C 四点共面. (√)

(2)空间的任何一个向量都可用三个给定向量表示. (×)

(3)若向量 a, b 与任何向量都不能构成空间的一个基底,则一定有 a 与 b 共线. (√)

(4)任何三个不共线的向量都可构成空间的一个基底. (×)

2.在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,可以作为空间的一个基底的是 ()

A. $\{\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\}$

B. $\{\vec{AB}, \vec{AA_1}, \vec{AB_1}\}$

C. $\{\vec{D_1A_1}, \vec{D_1C_1}, \vec{D_1D}\}$

D. $\{\vec{AC_1}, \vec{A_1C}, \vec{CC_1}\}$

C 解析:由题意知, $\vec{D_1A_1}, \vec{D_1C_1}, \vec{D_1D}$ 不共面,故 $\{\vec{D_1A_1}, \vec{D_1C_1}, \vec{D_1D}\}$ 可以作为空间的一个基底.

3.请思考并回答下列问题:

(1)零向量能不能作为一个基向量?

提示:不能.因为 0 与任意一个非零向量共线,与任意两个非零向量共面.

(2)当基底确定后,空间向量基本定理中的实数组 (x, y, z) 是否唯一?

提示:唯一.

(3)不同基底,同一向量的表达式相同吗?

提示:不同基底,同一向量的表达式一般不同.

任务型课堂

任务1 基底的判断

1.以下四个命题中是真命题的是 ()

A.空间中任何一个向量都可用其他三个向量表示

B.若 $\{a, b, c\}$ 为空间的一个基底,则 a, b, c 都不是零向量

C. $\triangle ABC$ 为直角三角形的充要条件是 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$

D.任何三个不共线的向量都可构成空间的一个基底

B 解析:由空间基底的概念可知,构成基底的三个

基向量一定不共面,因此一定不共线,且都是非零向量,故 A 错误, B 正确, D 错误; $\triangle ABC$ 为直角三角形时, $\angle A$ 不一定为直角,故 C 错误.

2.已知 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是空间的一个基底,且 $\vec{OA} = e_1 + 2e_2 - e_3, \vec{OB} = -3e_1 + e_2 + 2e_3, \vec{OC} = e_1 + e_2 - e_3$.试判断 $\{\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}\}$ 能否作为空间的一个基底.

解:假设 $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ 共面,

则存在实数 λ, μ 使得 $\vec{OA} = \lambda \vec{OB} + \mu \vec{OC}$,

所以 $e_1 + 2e_2 - e_3 = \lambda(-3e_1 + e_2 + 2e_3) + \mu(e_1 + e_2 - e_3) = (-3\lambda + \mu)e_1 + (\lambda + \mu)e_2 + (2\lambda - \mu)e_3$.

因为 e_1, e_2, e_3 不共面,

$$\text{所以 } \begin{cases} -3\lambda + \mu = 1, \\ \lambda + \mu = 2, \\ 2\lambda - \mu = -1, \end{cases} \quad \text{此方程组无解,}$$

所以 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 不共面,

所以 $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ 可以作为空间的一个基底.

【探究总结】

判断基底的基本思路及方法

(1) 基本思路: 判断三个空间向量是否共面, 若共面, 则不能构成基底; 若不共面, 则能构成基底.

(2) 方法: ① 如果向量中存在零向量, 那么不能构成基底; 如果其中某个向量可以用另外的向量线性表示, 那么不能构成基底.

② 假设 $a = \lambda b + \mu c$, 运用空间向量基本定理, 建立关于 λ, μ 的方程组. 若方程组有解, 则 a, b, c 共面, 不能构成基底; 若方程组无解, 则 a, b, c 不共面, 能构成基底.

任务2 用基底表示空间向量

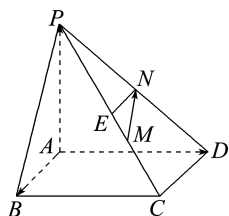
探究活动

例1 点 P 是矩形 $ABCD$ 所在平面外一点, 且 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, M, N 分别是 PC, PD 上的点, 且 $PM = \frac{2}{3}PC, PN = ND$, 试求满足 $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD} + z\overrightarrow{AP}$ 的实数 x, y, z 的值.

解: 如图, 取 PC 的中点 E , 连接 NE , 则 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EN} - \overrightarrow{EM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} - (\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PE}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} - \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{PC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} - \frac{1}{6}\overrightarrow{PC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}(-\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AP}$.

因为 $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD} + z\overrightarrow{AP}$,

所以 $x = -\frac{2}{3}, y = -\frac{1}{6}, z = \frac{1}{6}$.



【一题多思】

思考1 用基底表示向量需要注意哪些问题?

提示: (1) 若基底确定, 要充分利用向量运算的三角形法则和平行四边形法则, 以及向量数乘运算的运算律;

(2) 若没给定基底, 首先选择基底, 选择时, 要尽量使所选的基向量能方便地表示其他向量, 还要注意基向量的模及其夹角是否已知或易求.

思考2 把本例中的“ $PM = \frac{2}{3}PC, PN = ND$ ”改为“ $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{PN} = 2\overrightarrow{ND}$ ”, 试用基底 $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AP}\}$ 表示向量 $\overrightarrow{NM}$.

解: 因为 $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{PN} = 2\overrightarrow{ND}$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}).$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}, \text{ 所以 } \overrightarrow{NM} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AP}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AP}.$$

【探究总结】

基向量的选择和使用方法

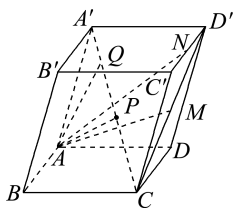
(1) 尽可能选择具有垂直关系的, 起点相同的三个不共面的向量作为基向量.

(2) 用基向量表示一个向量时, 若此向量的起点与基向量的起点相同, 一般考虑向量的加法, 否则考虑向量的减法; 若此向量与一个易求的向量共线, 可用数乘运算.

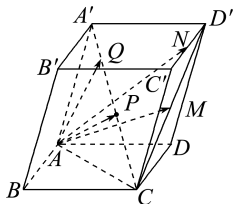
应用迁移

1. 如图, 在平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AD} = b, \overrightarrow{AA'} = c$, P 是 CA' 的中点, M 是 CD' 的中点, N 是 $C'D'$ 的中点, Q 是 CA' 上的点, 且 $CQ : QA' = 4 : 1$, 用基底 $\{a, b, c\}$ 表示以下向量:

(1) $\overrightarrow{AP}$; (2) $\overrightarrow{AM}$; (3) $\overrightarrow{AN}$; (4) $\overrightarrow{AQ}$.



解: 如图, 连接 AC, AD', AC' .



$$(1) \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) = \frac{1}{2}(a + b + c).$$

$$(2) \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD'})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}.$$

$$(3) \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'})$$

$$= \frac{1}{2}[(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})]$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AA'})$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

$$(4) \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ}$$

$$= \overrightarrow{AC} + \frac{4}{5}(\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AA'}$$

$$= \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AD} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AA'}$$

$$= \frac{1}{5}\mathbf{a} + \frac{1}{5}\mathbf{b} + \frac{4}{5}\mathbf{c}.$$

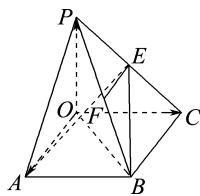
2. 已知四棱锥 $P-OABC$ 的底面为矩形, $PO \perp$ 平面 $OABC$. 设 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OP} = \mathbf{c}$, E, F 分别是 PC 和 PB 的中点.

(1) 判断 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 能否作为空间的一个基底;

(2) 若 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 可以作为空间的一个基底, 用 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 表示 $\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EF}$.

解: (1) 因为 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OP}$ 不共面, 所以 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 能作为空间的一个基底.

(2) 如图所示, 连接 BO ,



$$\text{则 } \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OP}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP})$$

$$= \frac{1}{2}(-\mathbf{b} - \mathbf{a} + \mathbf{c}) = -\frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c},$$

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = -\mathbf{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CP} = -\mathbf{a} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OP})$$

$$= -\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c},$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PE} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}) = -\mathbf{a}$$

$$+ \mathbf{c} + \frac{1}{2}(-\mathbf{c} + \mathbf{b}) = -\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c},$$

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\mathbf{a}.$$

任务3 > 空间向量基本定理的应用

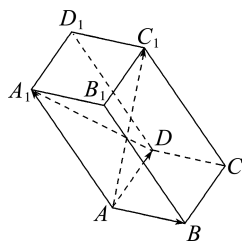
探究活动

例2 如图, 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, $AA_1 = 2$, $\angle A_1AB = \angle A_1AD = 120^\circ$.

(1) 若选取 $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}\}$ 作为一个基底, 试表示向量 $\overrightarrow{AC_1}$;

(2) 求向量 $\overrightarrow{AC_1}$ 的模;

(3) 求直线 AC_1 与 A_1D 所成角的余弦值.



解: (1) $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$.

(2) 因为 $|\overrightarrow{AC_1}|^2 = \overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{AC_1} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AA_1}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1}$

$= 1 + 1 + 4 + 0 + 2 \times 1 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \times 1 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 2$, 所以向量 $\overrightarrow{AC_1}$ 的模为 $\sqrt{2}$.

(3) 因为 $\overrightarrow{A_1D} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD}$,

所以 $|\overrightarrow{A_1D}|^2 = (-\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD})^2$

$$= \overrightarrow{AA_1}^2 + \overrightarrow{AD}^2 - 2\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= 4 + 1 - 2 \times 2 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 7, \text{ 所以 } |\overrightarrow{A_1D}| = \sqrt{7}.$$

又因为 $\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{A_1D} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}) \cdot (-\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD}) = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AA_1}^2 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1} = -1 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 - 1 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 - 4 + 1 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$,

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{A_1D} \rangle = \frac{\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{A_1D}}{|\overrightarrow{AC_1}| \cdot |\overrightarrow{A_1D}|} = \frac{-2}{\sqrt{2} \times \sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{14}}{7}.$$

所以直线 AC_1 与 A_1D 所成角的余弦值为 $|\cos \langle \overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{A_1D} \rangle| = \frac{\sqrt{14}}{7}$.

【探究总结】

利用空间向量证明两直线垂直或平行的方法

(1)要证两直线垂直,只需选取三个不共线的已知向量(通常是已知它们的模及两两的夹角)为基向量,将两直线的方向向量表示出来,随后证明两方向向量的数量积为0.

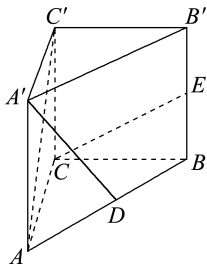
(2)要证明两直线平行,只需选取三个不共线的已知向量(通常已知它们的模及两两的夹角)为基向量,将两直线的方向向量表示出来,而后作相应的运算证明它们共线即可.

应用迁移

如图,在直三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中,已知 $AC=BC=AA'$, $\angle ACB=90^\circ$, D, E 分别为 AB, BB' 的中点.

(1)求证: $CE \perp A'D$;

(2)求异面直线 CE 与 AC' 所成角的余弦值.



(1)证明: 设 $\overrightarrow{CA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CC'} = \mathbf{c}$,

则 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|$, 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 0$.

因为 $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$, $\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{A'A} +$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'A} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = -\mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{A'D} = -\frac{1}{2}\mathbf{c}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{b}^2 = 0.$$

所以 $\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{A'D}$, 即 $CE \perp A'D$.

(2)解: 因为 $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} = -\mathbf{a} + \mathbf{c}$,

$$\text{所以 } |\overrightarrow{AC'}| = \sqrt{2}|\mathbf{a}|, |\overrightarrow{CE}| = \frac{\sqrt{5}}{2}|\mathbf{a}|.$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{CE} = (-\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot \left(\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}\right)$$

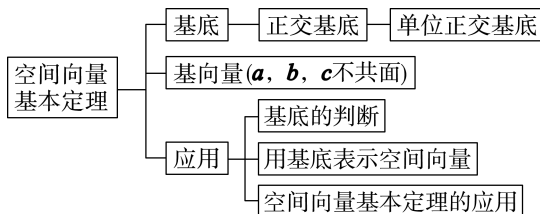
$$= \frac{1}{2}\mathbf{c}^2 = \frac{1}{2}|\mathbf{a}|^2,$$

$$\text{所以 } |\cos \langle \overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{CE} \rangle| = \frac{\frac{1}{2}|\mathbf{a}|^2}{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2}|\mathbf{a}|^2} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

所以异面直线 CE 与 AC' 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.



提质归纳



课后素养评价(四)

空间向量基本定理

A组 学习·理解

1. 已知 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 是空间向量的一个基底, 则可以与向量 $\mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{q} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ 构成基底的向量是 ()

- A. $\mathbf{a}$ B. $\mathbf{b}$
C. $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ D. $\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$

D 解析: 因为 $\mathbf{a}, \mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{q} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ 为共面向量, 所以不能作为基底, 故 A 错误; 因为 $\mathbf{b}, \mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{q} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ 为共面向量, 所以不能作为基底, 故 B 错误; 因为 $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}, \mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{q} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ 为共面向量, 所以不能作为基底, 故 C 错误; 因为 $\mathbf{a} + 2\mathbf{c}, \mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{q} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ 为不共面向量, 所以能作为基底, 故 D 正确, 故选 D.

2. 设 $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ 为空间的一个单位正交基底, $\mathbf{m} = 8\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{n} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, 则 $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}$ 等于 ()

- A. 7 B. -20
C. 23 D. 11

B 解析: 因为 $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ 为空间的一个单位正交基

底, 所以 $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0, \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$.

所以 $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = (8\mathbf{i} + 3\mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) = -8\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + 40\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} - 32\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} - 3\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + 15\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} - 12\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = -20$, 故选 B.

3. 已知 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 是空间的一个基底, 若 $\lambda \mathbf{e}_1 + \mu \mathbf{e}_2 + \nu \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$ ($\lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}$), 则 $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 =$ _____.

0 解析: 因为 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 是空间的一个基底, 所以 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 为不共面向量.

又因为 $\lambda \mathbf{e}_1 + \mu \mathbf{e}_2 + \nu \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$, 所以 $\lambda = \mu = \nu = 0$, 所以 $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0$.

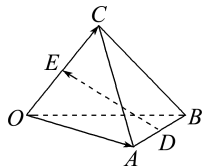
4. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 O 为 AC_1 与 BD_1 的交点, $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BC} + z\overrightarrow{CC_1}$, 则 $x + y + z =$ _____.

$\frac{3}{2}$ 解: 因为 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1})$,

则 $x = y = z = \frac{1}{2}$, 所以 $x + y + z = \frac{3}{2}$.

- 5.如图,三棱锥 $O-ABC$ 各棱长都是 1,点 D 是棱 AB 的中点,点 E 在棱 OC 上,且 $OE=\lambda OC$,记 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$.

- (1)用向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{DE}$;
(2)求 $|\overrightarrow{DE}|$ 的最小值.



解:(1) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA}$
 $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) + \lambda \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{a} - \frac{1}{2}\boldsymbol{b} + \lambda\boldsymbol{c}.$

(2)因为三棱锥的各棱长都为 1,则 $a^2=b^2=c^2=1$,

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{DE}|^2 = \left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{a} - \frac{1}{2}\boldsymbol{b} + \lambda\boldsymbol{c}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \lambda^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} - \lambda\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} - \lambda\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$$

$$= \frac{3}{4} + \lambda^2 - \lambda = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2},$$

故当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, $|\overrightarrow{DE}|$ 取得最小值,且 $|\overrightarrow{DE}|_{\min} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

B组 应用·实践

- 1.有以下命题:

①已知 A, B, C, D 是空间任意四点,则 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \mathbf{0}$;

② $|\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|$ 是 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线的充要条件;

③若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线,则 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 所在的直线平行;

④对空间任意一点 O 和不共线的三点 A, B, C ,若 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ (其中 $x, y, z \in \mathbf{R}$),则 P, A, B, C 四点共面.

其中是假命题的有

A.1 个

B.2 个

C.3 个

D.4 个

C 解析: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \mathbf{0}$, ①正确;

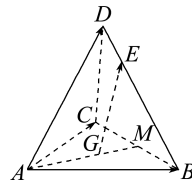
若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 同向共线,则 $|\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}| < |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|$, 故 ② 不正确;

由向量平行知 ③ 不正确;

由空间向量共面知 ④ 不正确.

故共有 3 个命题不正确,故选 C.

- 2.如图,在空间四边形 $ABCD$ 中, G 为 $\triangle ABC$ 的重心, E 是 BD 上一点, $BE=3ED$.若以 $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$ 为基底,则 $\overrightarrow{GE} =$ _____.



$$-\frac{1}{12}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} \quad \text{解析: 由题意,连接 AE}$$

(图略),则 $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

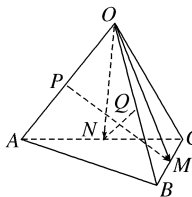
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) - \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$= -\frac{1}{12}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}.$$

- 3.已知空间四边形 $OABC$ 中, M 为 BC 的中点, N 为 AC 的中点, P 为 OA 的中点, Q 为 OB 的中点.若 $AB=OC$,求证: $PM \perp QN$.

证明:如图,取 $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ 为空间的一个基底,

由题意得 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$.



$$\text{所以 } \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} =$$

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC}),$$

$$\overrightarrow{QN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AB}).$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{QN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4}(|\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2).$$

又因为 $AB=OC$,则 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OC}|$,所以 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{QN} = 0$,即 $PM \perp QN$.

1.3 空间向量及其运算的坐标表示

1.3.1 空间直角坐标系

学习任务目标

1. 类比平面直角坐标系学习空间直角坐标系.
2. 掌握空间中点和向量的坐标表示.

问题式预习

【知识清单】

知识点一 空间直角坐标系

(1) 在空间选定一点 O 和一个单位正交基底 $\{i, j, k\}$, 以点 O 为原点, 分别以 i, j, k 的方向为正方向、以它们的长为单位长度建立三条数轴: x 轴、 y 轴、 z 轴, 它们都叫做坐标轴. 这时我们就建立了一个空间直角坐标系 $Oxyz$, O 叫做原点, i, j, k 都叫做坐标向量, 通过每两条坐标轴的平面叫做坐标平面, 分别称为 Oxy 平面, Oyz 平面, Ozx 平面.

(2) 在空间直角坐标系中, 让右手拇指指向 x 轴的正方向, 食指指向 y 轴的正方向, 如果中指指向 z 轴的正方向, 则称这个坐标系为右手直角坐标系.

知识点二 空间直角坐标系中的坐标表示

(1) 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中, i, j, k 为坐标向量, 对空间任意一点 A , 对应一个向量 $\overrightarrow{OA}$, 且点 A 的位置由向量 $\overrightarrow{OA}$ 唯一确定, 由空间向量基本定理, 存在唯一的有序实数组 (x, y, z) , 使 $\overrightarrow{OA} = xi + yj + zk$. 在单位正交基底 $\{i, j, k\}$ 下与向量 $\overrightarrow{OA}$ 对应的有序实数组 (x, y, z) , 叫做点 A 在空间直角坐标系中的坐标, 记作 $A(x, y, z)$, 其中 x 叫做点 A 的横坐标, y 叫做点 A 的纵坐标, z 叫做点 A 的竖坐标.

(2) 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中, 给定向量 a . 由空间向量基本定理, 存在唯一的有序实数组 (x, y, z) , 使 $a = xi + yj + zk$. 有序实数组 (x, y, z) 叫做 a 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标, 可简记作 $a = (x, y, z)$.

【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打“√”, 错误的打“×”).

(1) 若向量 $a = xe_1 + ye_2 + ze_3$, 则 a 的坐标是 $(x,$

$y, z)$. (×)

(2) 若向量 $\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$, 则点 B 的坐标是 (x, y, z) . (×)

(3) 若四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 则向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 的坐标相同. (√)

2. 点 $A(-2, 3, -4)$ 关于坐标平面 Ozx 的对称点 A' 的坐标为 ()

A. $(-2, -3, -4)$ B. $(2, -3, 4)$

C. $(-2, -3, 4)$ D. $(2, 3, -4)$

A 解析: 点 A 的坐标中横、竖坐标不变, 纵坐标变为原来的相反数, 即得点 A' 的坐标为 $(-2, -3, -4)$.

3. 请思考并回答下列问题:

(1) 空间向量的坐标和点的坐标有什么关系?

提示: 如果以 O 为坐标原点, 点 A 在空间直角坐标系中的坐标为 (x, y, z) , 那么向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标也为 (x, y, z) .

(2) 在空间直角坐标系中, 坐标轴上的点的坐标有何特征?

提示: x 轴上的点的纵坐标、竖坐标都为 0, 即 $(x, 0, 0)$;

y 轴上的点的横坐标、竖坐标都为 0, 即 $(0, y, 0)$;

z 轴上的点的横坐标、纵坐标都为 0, 即 $(0, 0, z)$.

(3) 如何求空间直角坐标系中某点的坐标?

提示: 求某点的坐标时, 一般先找这一点在某一坐标平面内的射影, 确定其两个坐标, 再找出它在另一坐标轴上的射影(或者利用它到这个坐标平面的距离)进而确定第三个坐标.

任务型课堂

任务 1 空间中点的坐标

1. 已知点 A 在基底 $\{a, b, c\}$ 下的坐标为 $(8, 6, 4)$, 其中 $a = i + j, b = j + k, c = k + i$, 则点 A 在基底 $\{i, j, k\}$ 下的坐标是 ()

A. $(12, 14, 10)$

B. $(10, 12, 14)$

C. $(14, 12, 10)$

D. $(4, 3, 2)$

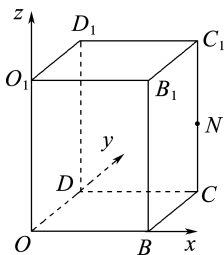
A 解析: 设点 A 在基底 $\{a, b, c\}$ 下对应的向量为

p , 则 $p = 8a + 6b + 4c = 8i + 8j + 6j + 6k + 4k + 4i = 12i + 14j + 10k$, 故点 A 在基底 $\{i, j, k\}$ 下的坐标是 $(12, 14, 10)$.

2. 如图, 在长方体 $OBCD-O_1B_1C_1D_1$ 中, $OB = 4, OD = 3, OO_1 = 5, N$ 为棱 CC_1 的中点. 以 O 为原点, 以 OB, OD, OO_1 所在的直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间直角坐标系.

(1) 求点 $O, B, C, D, O_1, B_1, C_1, D_1$ 的坐标;

(2)求点 N 的坐标.



解:(1)由已知,得 $O(0,0,0)$.

因为点 B 在 x 轴上, $OB=4$, 所以 $\overrightarrow{OB}=4\mathbf{i}+0\mathbf{j}+0\mathbf{k}$.

所以点 B 的坐标为 $(4,0,0)$.

同理 $D(0,3,0), O_1(0,0,5)$.

又点 C 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的射影分别为 B, D, O , 它们在坐标轴上的坐标分别为 $4, 3, 0$,

所以点 C 的坐标为 $(4,3,0)$.

同理 $B_1(4,0,5), D_1(0,3,5)$.

又点 C_1 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的射影分别为 B, D, O_1 , 它们在坐标轴上的坐标分别为 $4, 3, 5$,

所以点 C_1 的坐标为 $(4,3,5)$.

综上所述,点 $O(0,0,0), B(4,0,0), C(4,3,0), D(0,3,0), O_1(0,0,5), B_1(4,0,5), C_1(4,3,5), D_1(0,3,5)$.

(2)由(1),知 $C(4,3,0), C_1(4,3,5)$,

则 C_1C 的中点坐标为 $(\frac{4+4}{2}, \frac{3+3}{2}, \frac{0+5}{2})$,

即点 N 的坐标为 $(4,3,\frac{5}{2})$.

【探究总结】

确定空间直角坐标系中某点的坐标的方法

设该点为 P , 点 P 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的射影分别为 A, B, C , 则 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. 若点 A, B, C 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的坐标分别为 x, y, z , 则点 P 的坐标为 (x, y, z) , 且 $\overrightarrow{OP}=(x, y, z)$.

任务2 空间中的对称问题

探究活动

例1 (多选)关于空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的一点 $P(1,2,3)$, 下列说法正确的是 ()

A. OP 的中点坐标为 $(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$

B. 点 P 关于 x 轴对称的点的坐标为 $(-1, 2, 3)$

C. 点 P 关于原点对称的点的坐标为 $(-1, -2, -3)$

D. 点 P 关于 Oxy 平面对称的点的坐标为 $(1, 2, -3)$

ACD 解析:利用中点坐标公式可得 OP 的中点坐标为 $(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$, 故 A 正确;点 P 关于 x 轴对称的点的坐标为 $(1, -2, -3)$, 故 B 错误;点 P 关于原点对称的点的坐标为 $(-1, -2, -3)$, 故 C 正确;点 P 关于

Oxy 平面对称的点的坐标为 $(1, 2, -3)$, 故 D 正确, 故选 ACD.

【探究总结】

在空间直角坐标系中,任一点 $P(a, b, c)$ 的几种特殊的对称点的坐标如下:

已知点	对称轴或对称中心	对称点坐标
$P(a, b, c)$	x 轴	$(a, -b, -c)$
	y 轴	$(-a, b, -c)$
	z 轴	$(-a, -b, c)$
	Oxy 平面	$(a, b, -c)$
	Oyz 平面	$(-a, b, c)$
	Ozx 平面	$(a, -b, c)$
	原点	$(-a, -b, -c)$

应用迁移

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,点 $(2, 3, 2)$ 关于 Oxy 平面对称的点的坐标为 ()

A. $(2, 3, -2)$

B. $(-2, -3, -2)$

C. $(-2, -3, 2)$

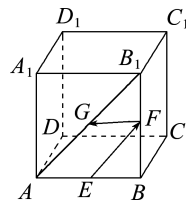
D. $(2, -3, -2)$

A 解析:因为点关于 Oxy 平面的对称点,横坐标、纵坐标不变,而竖坐标互为相反数,所以点 $(2, 3, 2)$ 关于 Oxy 平面的对称的点的坐标为 $(2, 3, -2)$. 故选 A.

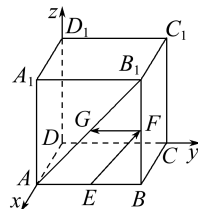
任务3 空间中向量的坐标

探究活动

例2 如图,在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是 AB 的中点, F 是 BB_1 的中点, G 是 AB_1 的中点. 试建立适当的空间直角坐标系,并确定 E, F, G 三点的坐标及向量 $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FG}$ 的坐标.



解:如图,以 DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴,建立空间直角坐标系 $Dxyz$.



由于正方体的棱长为1,则 $D(0,0,0)$,

$E(1, \frac{1}{2}, 0), F(1, 1, \frac{1}{2}), G(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$,

所以 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DE}=(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \overrightarrow{FG}=\overrightarrow{DG}-\overrightarrow{DF}=(0, -\frac{1}{2}, 0)$.

【一题多思】

思考 1. 如何求向量的坐标?

提示: (1) 起点在原点的向量, 点 A 的坐标和向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标形式完全相同, 其中 O 为坐标原点;
(2) 起点不在原点的向量, 其坐标可以通过向量的运算求得.

思考 2. 本例的条件不变, 求向量 $\overrightarrow{A_1F}$ 的坐标.

解: 由题图和例 2 的解析, 知 $A_1(1, 0, 1)$, $F\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$, 则 $\overrightarrow{A_1F} = \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DA_1} = \left(0, 1, -\frac{1}{2}\right)$.

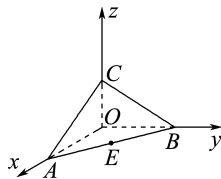
【探究总结】

- 空间中向量的坐标: 在空间直角坐标系中, 由空间向量基本定理知, 存在唯一的有序实数组 (x, y, z) 使得空间向量 $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. 当 $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ 为单位正交基底时, (x, y, z) 即为向量 $\mathbf{a}$ 的坐标. 也可先求出向量两个端点的坐标, 进而求出向量的坐标.
- 在空间直角坐标系中, 若点 A, B 的坐标分别为 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$, 则线段 AB 的中点坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

应用迁移

在四面体 $OABC$ 中, OA, OB, OC 两两互相垂直, $OA = OB = 2, OC = 1$, E 是 AB 的中点. 试建立适当的空间直角坐标系, 写出向量 $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CE}$ 的坐标.

解: 建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$, 根据条件可得 $A(2, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 1), E(1, 1, 0)$,



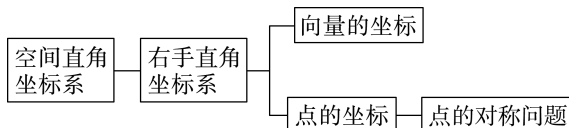
所以 $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA} = (-2, 0, 0)$;

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (0, -2, 1)$;

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC} = (1, 1, -1)$.



提质归纳

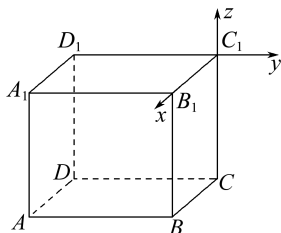


课后素养评价 (五)

空间直角坐标系

A组 学习·理解

- 在空间直角坐标系中, 已知点 $A(4, -3, 5), B(-2, 1, -7)$, 则线段 AB 的中点坐标是 ()
A. $(2, -2, -2)$ B. $(1, -1, -1)$
C. $(1, 1, 1)$ D. $(2, 2, 2)$
B 解析: 在空间直角坐标系中, 点 $A(4, -3, 5), B(-2, 1, -7)$, 则线段 AB 的中点坐标是 $\left(\frac{4-2}{2}, \frac{-3+1}{2}, \frac{5-7}{2}\right)$, 即 $(1, -1, -1)$. 故选 B.
- 在空间直角坐标系中, 点 $P(x, 2\ 024, 2\ 025) (x \in \mathbf{R})$ 的集合表示 ()
A. 一条直线
B. 一个平行于 Oxy 平面的平面
C. 一个平行于 Ozx 平面的平面
D. 两条直线
A 解析: 点 P 的纵坐标与竖坐标不变, 只有横坐标发生变化, 在空间中表示一条直线. 故选 A.
- 在如图所示的空间直角坐标系中, 单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A 关于 y 轴对称的点的坐标是 ()
A. $(-1, -1, 1)$
B. $(1, -1, 1)$



C. $(1, -1, -1)$

D. $(-1, -1, -1)$

A 解析: 由题图可知, 点 $A(1, -1, -1)$, 所以点 A 关于 y 轴对称的点的坐标为 $(-1, -1, 1)$. 故选 A.

4. 已知 $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ 是空间的一个单位正交基底, 向量 $\mathbf{b} = -5\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ 用坐标形式可表示为 _____.

$(-5, 0, 2)$ **解析:** 因为 $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ 是空间的一个单位正交基底, 则有 $\mathbf{b} = -5\mathbf{i} + 2\mathbf{k} = (-5, 0, 2)$.

所以向量 $\mathbf{b} = -5\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ 用坐标形式表示为 $(-5, 0, 2)$.

5. 已知空间直角坐标系 $Oxyz$.

(1) 哪个坐标平面与 x 轴垂直? 哪个坐标平面与 y 轴垂直? 哪个坐标平面与 z 轴垂直?

(2) 写出点 $P(3, 1, 5)$ 在三个坐标平面内的射影的坐标.

解: (1) 由于三条坐标轴两两互相垂直, 所以 Oyz 平面与 x 轴垂直, Ozx 平面与 y 轴垂直, Oxy 平面与 z 轴垂直.

(2) 过点 P 作 $PP_1 \perp Oxy$ 平面 (图略), 则射影为 $(3, 1, 0)$, 即点 P 在 Oxy 平面内的射影为 $(3, 1, 0)$. 同理, 点 P 在 Oyz 平面内的射影为 $(0, 1, 5)$, 点 P 在 Ozx 平面内的射影为 $(3, 0, 5)$.

B组 应用·实践

1. 已知 i, j, k 是空间直角坐标系 $Oxyz$ 中分别与 x 轴、 y 轴、 z 轴方向相同的单位向量, 且 $\overrightarrow{OA} = 3i$, $\overrightarrow{AB} = i + j + k$, 则点 B 的坐标为 ()

A. $(1, -1, 1)$ B. $(4, 1, 1)$
C. $(1, 4, 2)$ D. $(4, 1, 2)$

B 解析: 由题知点 $A(3, 0, 0)$, 设 $B(x, y, z)$, 所以 $\overrightarrow{AB} = (x-3, y, z) = (1, 1, 1)$,

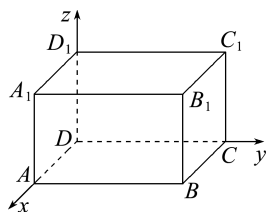
所以 $x-3=1, y=1, z=1$, 所以 $x=4, y=1, z=1$, 所以点 B 的坐标为 $(4, 1, 1)$. 故选 B.

2. 在空间直角坐标系中, 已知点 $A(1, 3, -4)$ 关于原点对称的点为 B , 而点 B 关于 x 轴对称的点为 C , 则 $\overrightarrow{AC} =$ ()

A. $(-2, 0, 0)$ B. $(-2, 3, 0)$
C. $(-2, 0, -4)$ D. $(1, 0, -4)$

A 解析: 点 $A(1, 3, -4)$ 关于原点中心对称的点为 $B(-1, -3, 4)$, 则点 B 关于 x 轴对称的点为 $C(-1, 3, -4)$, 故 $\overrightarrow{AC} = (-2, 0, 0)$. 故选 A.

3. (多选) 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=5, AD=4, AA_1=3$, 以直线 DA, DC, DD_1 分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间直角坐标系 $Dxyz$, 以下结论正确的是 ()



- A. 点 B_1 的坐标为 $(4, 5, 3)$
B. 点 C_1 关于点 B 对称的点为 $(5, 8, -3)$
C. 点 A 关于直线 BD_1 对称的点为 $(0, 5, 3)$
D. 点 C 关于平面 ABB_1A_1 对称的点为 $(8, 5, 0)$

ACD 解析: 因为在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

$$AB=5, AD=4, AA_1=3,$$

所以点 B_1 的坐标为 $(4, 5, 3)$, 故 A 正确.

易知 $C_1(0, 5, 3), B(4, 5, 0)$,

设点 C_1 关于点 B 对称的点为 (x_0, y_0, z_0) ,

$$\text{则 } \frac{x_0}{2} = 4, \frac{y_0+5}{2} = 5, \frac{z_0+3}{2} = 0,$$

解得 $x_0=8, y_0=5, z_0=-3$.

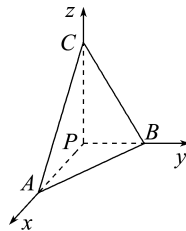
则点 C_1 关于点 B 对称的点为 $(8, 5, -3)$, 故 B 错误.

由立体几何的特征知, 点 A 关于直线 BD_1 对称的点为 $C_1(0, 5, 3)$, 故 C 正确.

由立体几何的特征知, 点 C 关于平面 ABB_1A_1 对称的点为 $(8, 5, 0)$, 故 D 正确.

故选 ACD.

4. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, PA, PB, PC 两两垂直, 且 $PA=a, PB=b, PC=c$. 以 1 为单位长度, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $\triangle ABC$ 的重心 G 的坐标是 _____.



$\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right)$ **解析:** 由题意知 $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$.

由重心坐标公式得点 G 的坐标为 $\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right)$.

5. 在空间直角坐标系中, 已知点 $P(5, 1, a)$ 与 $Q(5, b, 4)$ 关于坐标平面 Oxy 对称, 则 $a+b =$ _____.

-3 解析: 在空间直角坐标系中, 两点 $P(5, 1, a)$ 与 $Q(5, b, 4)$ 关于坐标平面 Oxy 对称, 则 $b=1, a=-4$, 所以 $a+b=-3$.

1.3.2 空间向量运算的坐标表示

学习任务目标

1. 掌握空间向量及其线性运算的坐标表示.
2. 掌握空间向量的数量积的坐标表示.
3. 会根据向量的坐标判断两个向量是否共线或垂直.
4. 掌握向量的长度公式、两向量的夹角公式.

问题式预习

【知识清单】

知识点一 空间向量的坐标运算

设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

向量运算	坐标表示
加法	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
减法	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$
数乘	$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3), \lambda \in \mathbf{R}$
数量积	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

知识点二 空间向量的平行、垂直及模、夹角

设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$).

名称	向量表示	坐标表示
平行	$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$)	$a_1 = \lambda b_1, a_2 = \lambda b_2, a_3 = \lambda b_3$ ($\lambda \in \mathbf{R}$)
垂直	$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$
模	$ \mathbf{a} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$	$ \mathbf{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
夹角	$\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ \mathbf{a} \mathbf{b} }$	$\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

知识点三 空间两点间的距离公式

设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间中任意两

点, 则 $P_1 P_2 = |\overrightarrow{P_1 P_2}| =$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打“√”, 错误的打“×”).

(1) 若 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 则 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$. (×)

(2) 若 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$. (√)

2. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (-1, 0, 2)$, 且 $k\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 互相垂直, 则 k 的值是 ()

A. 1 B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{7}{5}$

D 解析: 由题意得 $(k\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (2\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$, 所以 $2k|\mathbf{a}|^2 - k\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - |\mathbf{b}|^2 = 0$.

又 $|\mathbf{a}|^2 = 2$, $|\mathbf{b}|^2 = 5$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -1$, 所以 $4k + k - 2 - 5 = 0$, 解得 $k = \frac{7}{5}$.

3. 请思考并回答下列问题:

(1) 空间向量运算的坐标表示与平面向量运算的坐标表示有何联系?

提示: 空间向量运算的坐标表示与平面向量运算的坐标表示完全一致, 如一个空间向量的坐标等于表示此向量的有向线段的终点坐标减去起点坐标.

(2) 已知点 $A(x, y, z)$, 则点 A 到原点的距离是多少?

提示: 设原点为 O , 则 $OA = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

任务型课堂

任务1 空间向量运算的坐标表示

1. 已知 $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (-2, -1, 1)$, $\mathbf{c} = (3, 1, 0)$, 则 $|\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}| =$ ()

A. $3\sqrt{10}$ B. $2\sqrt{10}$
C. $\sqrt{10}$ D. 5

A 解析: 因为 $\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c} = (1, 0, 1) - (-2, -1, 1) + 2(3, 1, 0) = (1 + 2 + 6, 0 + 1 + 2, 1 - 1 + 0) = (9, 3, 0)$, 所以 $|\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}| = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$.

2. 已知空间向量 $\mathbf{a} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{b} = (-2, 1, 3)$, 则 $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} =$ _____.

(5, -2, -4) 解析: 因为 $\mathbf{a} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{b} = (-2, 1, 3)$, 所以 $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = (1, 0, 2) - 2(-2, 1, 3) = (5, -2, -4)$.

3. 已知空间向量 $\mathbf{a} = (-2, 1, 5)$, $\mathbf{b} = (1, 3, -4)$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$ _____.

-19 解析: 因为 $\mathbf{a} = (-2, 1, 5)$, $\mathbf{b} = (1, 3, -4)$, 所以 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -2 \times 1 + 1 \times 3 + 5 \times (-4) = -19$.

【探究总结】

1. 一个向量的坐标等于表示这个向量的有向线段的终点坐标减去起点坐标.

2. 在确定了向量的坐标后, 可应用空间向量的加减、数乘、数量积的坐标运算公式进行计算, 且要熟练应用下列公式:

(1) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2$;
(2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2$.

任务2 空间向量平行、垂直及两向量夹角的坐标表示

探究活动

例1 已知向量 $\mathbf{a} = (\lambda + 1, 1, 2\lambda)$, $\mathbf{b} = (6, 2m - 1, 2)$.

(1) 若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 分别求 λ 与 m 的值;

(2) 若 $|a| = \sqrt{5}$, 且 a 与 $c = (2, -2\lambda, -\lambda)$ 垂直, 求 a .

解: (1) 由 $a \parallel b$, 得 $(\lambda + 1, 1, 2\lambda) = k(6, 2m - 1, 2)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \lambda + 1 = 6k, \\ 1 = k(2m - 1), \\ 2\lambda = 2k, \end{cases} \text{解得 } \begin{cases} \lambda = k = \frac{1}{5}, \\ m = 3. \end{cases}$$

所以 $\lambda = \frac{1}{5}, m = 3$.

(2) 因为 $|a| = \sqrt{5}$, 且 $a \perp c$,

$$\text{所以 } \begin{cases} (\lambda + 1)^2 + 1^2 + (2\lambda)^2 = 5, \\ (\lambda + 1, 1, 2\lambda) \cdot (2, -2\lambda, -\lambda) = 0, \end{cases}$$

$$\text{化简, 得 } \begin{cases} 5\lambda^2 + 2\lambda = 3, \\ 2 - 2\lambda^2 = 0, \end{cases}$$

解得 $\lambda = -1$.

所以 $a = (0, 1, -2)$.

【一题多思】

思考 1. 如何根据两向量平行或垂直求参数?

提示: 已知两向量平行或垂直求参数值, 可利用向量平行、垂直的充要条件, 将位置关系转化为坐标关系, 列方程(组)求解.

思考 2. 在本例中, 若向量 a 与向量 $d = (0, 1, 1)$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 求实数 λ 的值.

$$\text{解: 由题意得 } \cos \langle a, d \rangle = \frac{a \cdot d}{|a| |d|} = \frac{1 + 2\lambda}{\sqrt{5\lambda^2 + 2\lambda + 2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 解得 } \lambda = 1.$$

【探究总结】

1. 向量平行与垂直问题主要有两种题型:

- (1) 平行与垂直的判断;
- (2) 利用平行与垂直求参数的值或解决其他问题, 即平行与垂直的应用.

解题时要注意:

- (1) 适当引入参数(比如向量 $a, b (b \neq 0)$ 平行, 可设 $a = \lambda b$), 建立关于参数的方程组;
- (2) 最好选择坐标形式, 以达到简化运算的目的.

2. 向量夹角的坐标表示比较复杂, 可以熟记公式

$$\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}, \text{ 再将坐标代入计算即可.}$$

应用迁移

1. 已知向量 $a = (1, x, 3), b = (-2, 4, y)$.

(1) 若 $a \parallel b$, 则 $x - y =$ _____;

(2) 若 $a \perp b$, 则 $4x + 3y =$ _____.

(1) 4 (2) 2 解析: (1) 因为 $a \parallel b$, 所以 $b = \lambda a$.

$$\text{所以 } \begin{cases} \lambda = -2, \\ x\lambda = 4, \\ 3\lambda = y, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} \lambda = -2, \\ x = -2, \\ y = -6. \end{cases}$$

所以 $x - y = 4$.

(2) 因为 $a \perp b$, 所以 $a \cdot b = -2 + 4x + 3y = 0$, 即 $4x + 3y = 2$.

2. 已知向量 $a = (1, 2, 3), b = (-2, -4, -6), |c| = \sqrt{14}$. 若 $(a + b) \cdot c = 7$, 求 a 与 c 的夹角.

解: 因为 $a = (1, 2, 3), b = (-2, -4, -6)$, 所以 $a + b = (-1, -2, -3)$, 所以 $|a + b| = \sqrt{14}$. 因为 $(a + b) \cdot c = 7$, 所以 $\cos \langle a + b, c \rangle = \frac{(a + b) \cdot c}{|a + b| |c|} = \frac{1}{2}$, 即 $a + b$ 与 c 的夹角为 60° . 因为 $a = (1, 2, 3)$ 与 $a + b = (-1, -2, -3)$ 的方向相反, 所以 a 与 c 的夹角为 120° .

任务 3 空间向量坐标运算的应用

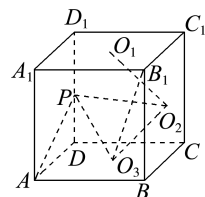
探究活动

例 2 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为 DD_1 的中点, O_1, O_2, O_3 分别是平面 $A_1B_1C_1D_1$, 平面 BB_1C_1C , 平面 $ABCD$ 的中心.

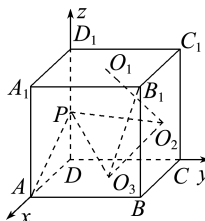
(1) 求证: $B_1O_3 \perp PA$;

(2) 求异面直线 PO_3 与 O_1O_2 所成角的余弦值;

(3) 求 PO_2 的长.



(1) 证明: 以 D 为坐标原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系 $Dxyz$.



则 $B_1(1, 1, 1), O_3(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), P(0, 0, \frac{1}{2}), A(1, 0, 0)$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{B_1O_3} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1), \overrightarrow{PA} = (1, 0, -\frac{1}{2}),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{B_1O_3} \cdot \overrightarrow{PA} = -\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 0,$$

$$\text{即 } \overrightarrow{B_1O_3} \perp \overrightarrow{PA}.$$

所以 $B_1O_3 \perp PA$.

(2) 解: 因为 $O_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1), O_2(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{O_1O_2} = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}).$$

$$\text{又因为 } \overrightarrow{PO_3} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}),$$

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{PO_3}, \overrightarrow{O_1O_2} \rangle = \frac{\overrightarrow{PO_3} \cdot \overrightarrow{O_1O_2}}{|\overrightarrow{PO_3}| |\overrightarrow{O_1O_2}|} =$$

$$\begin{aligned} & 0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \\ & \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \times \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \\ & = \frac{\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

所以异面直线 PO_3 与 O_1O_2 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(3)解: 因为 $P\left(0, 0, \frac{1}{2}\right), O_2\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } |PO_2| &= |\overrightarrow{PO_2}| = \\ & \sqrt{\left(\frac{1}{2}-0\right)^2 + (1-0)^2 + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

【探究总结】

1. 空间向量的数量积应用很广泛, 其主要用途有:

(1) 求向量的模: $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$;

(2) 求向量夹角: $\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$;

(3) 证明向量垂直: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

2. 利用向量数量积的坐标公式求异面直线所成角的步骤:

(1) 根据几何图形的特点建立适当的空间直角坐标系;

(2) 利用已知条件写出有关点的坐标, 进而获得相关向量的坐标;

(3) 利用向量数量积的坐标运算求得异面直线上有关向量的夹角, 并将它转化为异面直线所成的角.

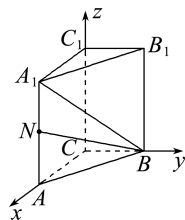
88 应用迁移

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面 $\triangle ABC$ 中, $CA = CB = 1, \angle BCA = 90^\circ, AA_1 = 2, N$ 是 AA_1 的中点.

(1) 求 BN 的长;

(2) 求异面直线 BA_1, B_1C 所成角的余弦值.

解: 以 C 为原点, $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CC_1}$ 的方向分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系.



(1) 由题意, 得 $B(0, 1, 0), N(1, 0, 1)$, 所以 $\overrightarrow{BN} = (1, -1, 1)$, 所以 $|\overrightarrow{BN}| = \sqrt{3}$, 即 BN 的长为 $\sqrt{3}$.

(2) 由题意, 得 $A_1(1, 0, 2), B(0, 1, 0), B_1(0, 1, 2)$,

所以 $\overrightarrow{BA_1} = (1, -1, 2), \overrightarrow{CB_1} = (0, 1, 2)$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{CB_1} \rangle &= \frac{\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{CB_1}}{|\overrightarrow{BA_1}| |\overrightarrow{CB_1}|} = \frac{0-1+4}{\sqrt{6} \times \sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{30}}{10}. \end{aligned}$$

所以异面直线 BA_1, B_1C 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{10}$.



提质归纳

空间向量运算 的坐标表示 [设 $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3),$ $\mathbf{b}=(b_1, b_2, b_3)$]	两向量平 行($\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$)	当 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ 时, $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \lambda \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \lambda b_1, \\ a_2 = \lambda b_2, \\ a_3 = \lambda b_3 \end{cases}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$)
	两向量垂 直($\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$)	$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$
	向量的模	$ \mathbf{a} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
	向量的夹角	$\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ \mathbf{a} \mathbf{b} } = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

课后素养评价(六)

空间向量运算的坐标表示

A组 学习·理解

1. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 3, -2), \mathbf{b} = (2, 1, 0)$, 则 $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} =$ ()

- A. $(-3, 1, -2)$ B. $(5, 5, -2)$
C. $(3, -1, 2)$ D. $(-5, -5, 2)$

A 解析: 因为 $2\mathbf{b} = (4, 2, 0)$, 所以 $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = (-3, 1, -2)$. 故选 A.

2. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, n, 2), \mathbf{b} = (-2, 1, 2)$, 若 $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{b}$ 垂直, 则 $|\mathbf{a}|$ 等于 ()

- A. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{37}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{21}}{2}$

B 解析: 因为 $\mathbf{a} = (1, n, 2), \mathbf{b} = (-2, 1, 2)$, 所以 $2\mathbf{a} - \mathbf{b} =$

$$- \mathbf{b} = (4, 2n - 1, 2).$$

因为 $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{b}$ 垂直, 所以 $(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$, 所以 $-8 + 2n - 1 + 4 = 0$, 解得 $n = \frac{5}{2}$, 所以 $\mathbf{a} =$

$$\left(1, \frac{5}{2}, 2\right), \text{ 所以 } |\mathbf{a}| = \sqrt{1 + \frac{25}{4} + 4} = \frac{3\sqrt{5}}{2}. \text{ 故选 B.}$$

3. 已知 $\mathbf{a} = (\cos \alpha, 1, \sin \alpha), \mathbf{b} = (\sin \alpha, 1, \cos \alpha)$, 则向量 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 的夹角是 ()

- A. 90° B. 60° C. 45° D. 30°

A 解析: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\cos \alpha + \sin \alpha, 2, \sin \alpha + \cos \alpha)$,

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (\cos \alpha - \sin \alpha, 0, \sin \alpha - \cos \alpha),$$

$$\text{所以 } (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0,$$

所以 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \perp (\mathbf{a} - \mathbf{b})$. 故选 A.

4. 向量 $a = (0, 1, -1)$ 在 $b = (1, 2, 3)$ 上的投影向量为 ()

- A. $-\frac{1}{14}b$ B. $-\frac{\sqrt{14}}{14}b$
C. $-\frac{1}{14}$ D. $-\frac{\sqrt{14}}{14}$

A 解析: 与 b 方向相同的单位向量为 $\frac{b}{|b|} = \frac{1}{\sqrt{14}}b$,
由 $a = (0, 1, -1), b = (1, 2, 3)$, 得 $a \cdot b = 0 + 2 - 3 = -1$, $|b| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$,

所以向量 a 在向量 b 上的投影向量为 $\frac{a \cdot b}{|b|} \cdot \frac{b}{|b|}$
 $= \frac{-1}{\sqrt{14}} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}b = -\frac{1}{14}b$. 故选 A.

5. (多选) 已知向量 $a = (1, 2, -y), b = (x, 1, 2)$, 且 $(a + 2b) \parallel (2a - b)$, 则 ()

- A. $x = \frac{1}{3}$ B. $x = \frac{1}{2}$
C. $y = -\frac{1}{4}$ D. $y = -4$

BD 解析: 因为 $a + 2b = (1 + 2x, 4, 4 - y), 2a - b = (2 - x, 3, -2y - 2)$, 且 $(a + 2b) \parallel (2a - b)$, 所以 $3(1 + 2x) = 4(2 - x)$ 且 $3(4 - y) = 4(-2y - 2)$, 所以 $x = \frac{1}{2}, y = -4$. 故选 BD.

6. 若 $\overrightarrow{AB} = (-4, 6, -1), \overrightarrow{AC} = (4, 3, -2), |a| = 1$, 且 $a \perp \overrightarrow{AB}, a \perp \overrightarrow{AC}$, 则 $a =$ _____.

$(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13})$ 或 $(-\frac{3}{13}, -\frac{4}{13}, -\frac{12}{13})$ **解析:** 设 $a =$

(x, y, z) , 由题意有 $\begin{cases} a \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ a \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \\ |a| = 1, \end{cases}$ 代入坐标可解得

$$\begin{cases} x = \frac{3}{13}, \\ y = \frac{4}{13}, \\ z = \frac{12}{13} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{3}{13}, \\ y = -\frac{4}{13}, \\ z = -\frac{12}{13}. \end{cases}$$

7. 已知向量 $a = (-1, 0, 1), b = (1, -2, 0)$.

(1) 求 a 与 $a - b$ 的夹角;

(2) 若 $2a + b$ 与 $a - tb$ 垂直, 求实数 t 的值.

解: (1) 因为 $a = (-1, 0, 1), b = (1, -2, 0)$,
所以 $a - b = (-2, 2, 1), |a| = \sqrt{2}, |a - b| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$.

设 a 与 $a - b$ 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{a \cdot (a - b)}{|a||a - b|} = \frac{2 + 0 + 1}{\sqrt{2} \times 3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 a 与 $a - b$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$.

(2) 因为 $2a + b = (-1, -2, 2), a - tb = (-1 - t, 2t, 1)$,

又 $2a + b$ 与 $a - tb$ 垂直, 所以 $(2a + b)(a - tb) = 0$,
即 $-1 \times (-1 - t) + 2t \times (-2) + 1 \times 2 = 0$, 解得 $t = 1$.

B组 应用·实践

1. (多选) 已知向量 $a = (1, -1, m), b = (-2, m - 1, 2)$, 下列结论中正确的是 ()

- A. 若 $|a| = 2$, 则 $m = \pm\sqrt{2}$
B. 若 $a \perp b$, 则 $m = -1$
C. 不存在实数 λ , 使得 $a = \lambda b$
D. 若 $a \cdot b = -1$, 则 $a + b = (-1, -2, -2)$

AC 解析: 对于 A 中, 由 $|a| = 2$, 可得 $\sqrt{1^2 + (-1)^2 + m^2} = 2$, 解得 $m = \pm\sqrt{2}$, 故 A 选项正确; 对于 B 中, 由 $a \perp b$, 可得 $-2 - m + 1 + 2m = 0$, 解得 $m = 1$, 故 B 选项错误; 对于 C 中, 若存在实数

λ , 使得 $a = \lambda b$, 则 $\begin{cases} 1 = -2\lambda, \\ -1 = \lambda(m - 1), \\ m = 2\lambda, \end{cases}$ 显然 λ 无解, 即

不存在实数 λ , 使得 $a = \lambda b$, 故 C 选项正确; 对于 D 中, 若 $a \cdot b = -1$, 则 $-2 - m + 1 + 2m = -1$, 解得 $m = 0$, 于是 $a + b = (-1, -2, 2)$, 故 D 选项错误. 故选 AC.

2. 已知 $\overrightarrow{PA} = (2, 1, -3), \overrightarrow{PB} = (-1, 2, 3), \overrightarrow{PC} = (\lambda, 6, -9)$, 若 P, A, B, C 四点共面, 则 $\lambda =$ ()

- A. 3 B. -3
C. 7 D. -7

C 解析: 由 P, A, B, C 四点共面, 可得 $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$ 共面,

设 $\overrightarrow{PC} = x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} = (2x - y, x + 2y, -3x + 3y) = (\lambda, 6, -9)$,

则 $\begin{cases} 2x - y = \lambda, \\ x + 2y = 6, \\ -3x + 3y = -9, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 4, \\ y = 1, \\ \lambda = 7. \end{cases}$ 故选 C.

3. 已知 $A(4, 1, 3), B(2, 3, 1), C(3, 7, -5)$, 点 $P(x, -1, 3)$ 在平面 ABC 内, 则 $x =$ _____.

11 解析: 因为点 P 在平面 ABC 内,

所以存在实数 k_1, k_2 ,

使 $\overrightarrow{AP} = k_1\overrightarrow{AB} + k_2\overrightarrow{AC}$,

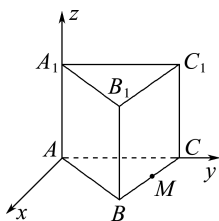
即 $(x - 4, -2, 0) = k_1(-2, 2, -2) + k_2(-1, 6, -8)$,

所以 $\begin{cases} 2k_1 + 6k_2 = -2, \\ k_1 + 4k_2 = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k_1 = -4, \\ k_2 = 1. \end{cases}$

所以 $x - 4 = -2k_1 - k_2 = 8 - 1 = 7$, 即 $x = 11$.

4. 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 所有的棱长都是 2, M 是 BC 的中点, 则在棱 CC_1 上是否存在点 N , 使得异面直线 AB_1 和 MN 所成的角等于 45° ?

解: 以 A 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系 $Axyz$. 由题意知 $A(0,0,0), C(0,2,0), B(\sqrt{3},1,0), B_1(\sqrt{3},1,2), M(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0)$.



又点 N 在 CC_1 上, 可设 $N(0,2,m)(0 \leq m \leq 2)$,

则 $\overrightarrow{AB_1} = (\sqrt{3}, 1, 2), \overrightarrow{MN} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, m)$,

所以 $|\overrightarrow{AB_1}| = 2\sqrt{2}, |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{m^2+1}, \overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{MN} = 2m-1$.

如果异面直线 AB_1 和 MN 所成的角等于 45° , 那么向量 $\overrightarrow{AB_1}$ 和 $\overrightarrow{MN}$ 的夹角等于 45° 或 135° .

$$\begin{aligned} \cos \langle \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{MN} \rangle &= \frac{\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{AB_1}| |\overrightarrow{MN}|} \\ &= \frac{2m-1}{2\sqrt{2} \times \sqrt{m^2+1}}, \end{aligned}$$

所以 $\frac{2m-1}{2\sqrt{2} \times \sqrt{m^2+1}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, 解得 $m = -\frac{3}{4}$, 这与 $0 \leq m \leq 2$ 矛盾.

所以在 CC_1 上不存在点 N , 使得异面直线 AB_1 和 MN 所成的角等于 45° .

1.4 空间向量的应用

1.4.1 用空间向量研究直线、平面的位置关系

第1课时 空间中点、直线和平面的向量表示

学习任务目标

1. 能用向量语言表示空间中的点、直线与平面.
2. 能用自己的语言解释直线的方向向量、平面的法向量的含义.
3. 能说出求直线的方向向量与平面的法向量的一般步骤, 会求直线的方向向量与平面的法向量.

问题式预习

【知识清单】

知识点一 空间中点的向量表示

在空间中, 我们取一定点 O 作为基点, 那么空间中任意一点 P 就可以用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示. 我们把向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为点 P 的位置向量.

知识点二 空间中直线的向量表示

条件	已知直线 l 上一点 A 表示直线 l 方向的向量 $\vec{a}$ (即直线 l 的方向向量)
形式	在直线 l 上取 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, 设 P 是直线 l 上的任意一点, 由向量共线的条件可知, 点 P 在直线 l 上的充要条件是存在实数 t , 使得 $\overrightarrow{AP} = t\vec{a}$, 即 $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$

取定空间中的任意一点 O , 可以得到点 P 在直线 AB 上的充要条件是存在实数 t , 使 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$.

知识点三 空间中平面的向量表示

(1) 通过平面 α 内的一个定点 O 和两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 来确定:

条件	已知平面 α 内两条相交直线的方向向量分别为 $\vec{a}, \vec{b}$, 交点为 O
形式	对于平面 α 内任意一点 P , 存在唯一的有序实数对 (x, y) , 使得 $\overrightarrow{OP} = x\vec{a} + y\vec{b}$

取定空间任意一点 O , 可以得到, 空间一点 P 位于平面 ABC 内的充要条件是存在实数 x, y , 使 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

(2) 通过平面 α 内的一个定点 A 和平面的法向量来确定:

平面的法向量	直线 $l \perp \alpha$, 直线 l 的方向向量 $\vec{a}$ 叫做平面 α 的法向量
确定平面位置	给定一个点 A 和一个向量 $\vec{a}$, 那么过点 A , 且以向量 $\vec{a}$ 为法向量的平面完全确定, 可以表示为集合 $\{P \vec{a} \cdot \overrightarrow{AP} = 0\}$

【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1) 零向量不能作为直线的方向向量. (√)

(2) 若向量 $\mathbf{v}$ 是直线 l 的方向向量, 则 $\lambda \mathbf{v}$ ($\lambda \neq 0$) 也是直线 l 的方向向量. (√)

(3) 直线 l 的方向向量都平行, 且方向相同. (×)

(4) 平面 α 的所有法向量都平行, 且同向. (×)

(5) 若 $\mathbf{n}$ 是平面 α 的一个法向量, 则 $\lambda \mathbf{n}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$) 也是平面 α 的一个法向量. (×)

(6) 向量 $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ 是坐标平面 Oyz 的一个法向量. (√)

2. 若 $A(3, 6, -5), B(5, 10, 1)$ 在直线 l 上, 则直线 l 的一个方向向量为 ()

A. $(1, 2, 3)$

B. $(1, 3, 2)$

C. $(2, 1, 3)$

D. $(3, 2, 1)$

A 解析: 因为 $\overrightarrow{AB} = (2, 4, 6)$, 所以 $(1, 2, 3)$ 是直线 l 的一个方向向量.

3. 请思考并回答下列问题:

(1) 如何确定直线的方向向量?

提示: 设 l 是空间中的一条直线, A, B 是直线 l 上任意两点, 则 $\overrightarrow{AB}$ 及与 $\overrightarrow{AB}$ 平行的非零向量均为直线 l 的方向向量.

(2) 如何确定平面的法向量?

提示: 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 是平面 α 内两个不共线的向量, $\mathbf{n}$ 为平面 α 的法向量, 则求法向量的方程组

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0. \end{cases}$$

任务型课堂

任务1 > 空间中直线的方向向量

1. 若点 $A(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), B(\frac{1}{2}, 2, \frac{7}{2})$ 在直线 l 上, 则直线 l 的一个方向向量为 ()

A. $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$

B. $(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3})$

C. $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1)$

D. $(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

A 解析: 因为 $A(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), B(\frac{1}{2}, 2, \frac{7}{2})$, 所以 $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 3)$ 为直线 l 的一个方向向量, 故所有与 $\overrightarrow{AB}$ 共线的非零向量都可以是直线 l 的方向向量, 故选 A.

2. 已知直线 l 的一个方向向量 $\mathbf{m} = (2, -1, 3)$, 且直线 l 过 $A(0, y, 3)$ 和 $B(-1, 2, z)$ 两点, 则 $y - z =$ ()

A. 0

B. 1

C. $\frac{3}{2}$

D. 3

A 解析: 已知 $A(0, y, 3)$ 和 $B(-1, 2, z)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (-1, 2 - y, z - 3)$.

因为直线 l 的一个方向向量为 $\mathbf{m} = (2, -1, 3)$, 所以可设 $\overrightarrow{AB} = k\mathbf{m}$.

所以 $-1 = 2k, 2 - y = -k, z - 3 = 3k$,

解得 $k = -\frac{1}{2}, y = z = \frac{3}{2}$.

所以 $y - z = 0$, 故选 A.

【探究总结】

1. 已知直线上 A, B 两点, 则与向量 $\overrightarrow{AB}$ 共线的非零向量均是直线 AB 的方向向量.

2. 已知直线的方向向量和直线上的两点求参数, 只需利用向量共线的坐标表示即可得解.

任务2 > 平面的法向量

探究活动

例 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 已知 $PA \perp$ 平面 $ABCD, PA = AB = 3$, 底面 $ABCD$ 为正方形. 试建立适当的空间直角坐标系, 分别求下列平面的一个法向量.

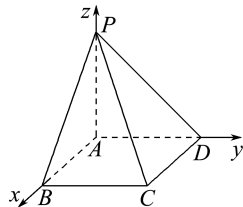
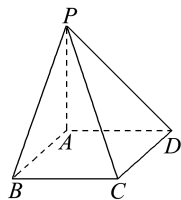
(1) 平面 $ABCD$;

(2) 平面 PAB ;

(3) 平面 PBC ;

(4) 平面 PCD .

解: 如图所示, 建立空间直角坐标系 $Axyz$.



(1) 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 所以平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $(0, 0, 1)$.

(2) 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD, AD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $AD \perp PA$. 因为 $AD \perp AB, PA, AB \subset$ 平面 $PAB, PA \cap AB = A$, 所以 $AD \perp$ 平面 PAB ,

所以平面 PAB 的一个法向量为 $(0, 1, 0)$.

(3) 因为 $B(3, 0, 0), C(3, 3, 0), P(0, 0, 3)$,

所以 $\overrightarrow{PB} = (3, 0, -3), \overrightarrow{PC} = (3, 3, -3)$.

设平面 PBC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PB} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 0, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} 3x - 3z = 0, \\ 3x + 3y - 3z = 0. \end{cases}$$

取 $x = 1$, 则 $y = 0, z = 1$, 于是 $\mathbf{n} = (1, 0, 1)$ 为平面 PBC 的一个法向量.

(4) 由(3)同理可求得平面 PCD 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (0, 1, 1)$.

【一题多思】

思考 1. 一个平面的法向量唯一吗?

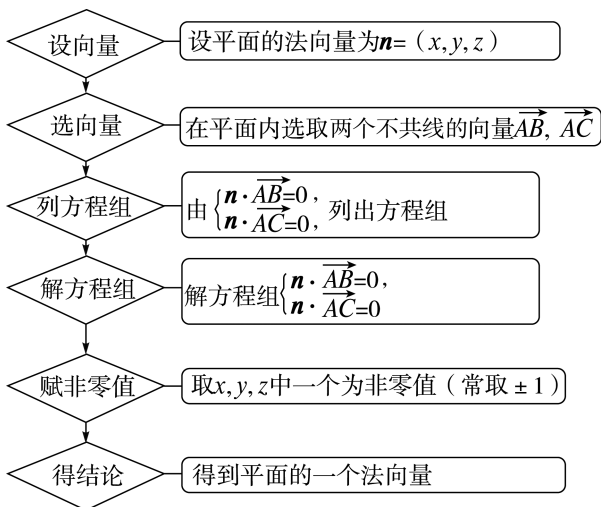
提示: 一个平面的法向量不唯一, 有无数个, 它们互相平行.

思考 2. 在本例中, 若点 M 是线段 AD 上一点, 平面 PBM 的一个法向量是 $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$, 求线段 AM 的长.

解: 由本例的解析, 设 $M(0, y, 0)$, $0 \leq y \leq 3$, 则 $\overrightarrow{PM} = (0, y, -3)$, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{PB} \cdot \mathbf{a} = 0, \\ \overrightarrow{PM} \cdot \mathbf{a} = 0, \end{cases}$ 解得 $y = \frac{3}{2}$, 所以线段 AM 的长为 $\frac{3}{2}$.

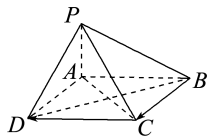
【探究总结】

求平面法向量的步骤



应用迁移

1. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, AC, BD 为正方形 $ABCD$ 的对角线, 给出下列命题:



- ① $\overrightarrow{BC}$ 为平面 PAD 的一个法向量;
 ② $\overrightarrow{BD}$ 为平面 PAC 的一个法向量;
 ③ $\overrightarrow{CD}$ 为直线 AB 的一个方向向量;
 ④ 直线 BC 的方向向量一定是平面 PAB 的法向量.
 其中真命题的序号是 _____.

②③④ 解析: ① 因为底面 $ABCD$ 是正方形, 所以 $BC \parallel AD$.

由 $AD \subset$ 平面 PAD , 知 $\overrightarrow{BC}$ 不是平面 PAD 的一个法向量, ① 错误.

② 由底面 $ABCD$ 是正方形, 知 $BD \perp AC$. 因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PA \perp BD$.

又 $PA \cap AC = A$, $PA \subset$ 平面 PAC , $AC \subset$ 平面 PAC ,

所以 $BD \perp$ 平面 PAC , 所以 $\overrightarrow{BD}$ 为平面 PAC 的一个法向量, ② 正确.

③ 因为底面 $ABCD$ 是正方形, 所以 $CD \parallel AB$.

所以 $\overrightarrow{CD}$ 为直线 AB 的方向向量, ③ 正确.

④ 由底面 $ABCD$ 是正方形, 知 $BC \perp AB$.

因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $BC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp BC$.

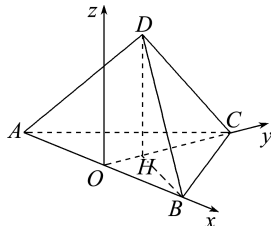
又 $PA \cap AB = A$, $PA \subset$ 平面 PAB , $AB \subset$ 平面 PAB .

所以 $BC \perp$ 平面 PAB .

所以直线 BC 的方向向量一定是平面 PAB 的法向量, ④ 正确.

故正确命题的序号是 ②③④.

2. 如图, 放置于空间直角坐标系中的棱长为 2 的正四面体 $ABCD$ 中, H 是底面的中心, $DH \perp$ 平面 ABC , 则平面 BHD 的一个法向量是 _____.



$(1, \sqrt{3}, 0)$ (答案不唯一) 解析: 由题意可知 $CH = \frac{2}{3}OC = \frac{2}{3}\sqrt{4-1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $DH = \sqrt{4 - \frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$,

则 $H(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $D(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3})$,

所以 $\overrightarrow{HD} = (0, 0, \frac{2\sqrt{6}}{3})$, $\overrightarrow{BH} = (-1, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$.

设 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ 为平面 BHD 的法向量,

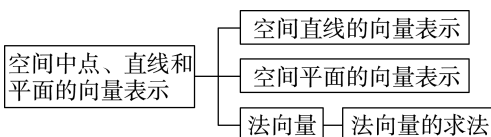
$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{HD} = \frac{2\sqrt{6}}{3}z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BH} = -x + \frac{\sqrt{3}}{3}y = 0. \end{cases}$$

不妨设 $x = 1$, 则 $\mathbf{n} =$

$(1, \sqrt{3}, 0)$, 所以平面 BHD 的一个法向量为 $(1, \sqrt{3}, 0)$.

故答案为 $(1, \sqrt{3}, 0)$ (答案不唯一).

提质归纳



课后素养评价(七)

空间中点、直线和平面的向量表示

A组 学习·理解

1. 已知直线 l 的一个方向向量 $\mathbf{m} = (3, -2, 1)$, 且直线 l 经过 $A(a, 2, -1)$ 和 $B(-2, 3, b)$ 两点, 则 $a + b =$ ()

A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

A 解析: 因为 $\overrightarrow{AB} = (-2-a, 1, b+1)$, 直线 l 的一个方向向量为 $\mathbf{m} = (3, -2, 1)$, 所以有向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\mathbf{m}$ 共线, 所以 $\frac{-2-a}{3} = \frac{1}{-2} = \frac{b+1}{1}$, 解得 $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$. 所以 $a + b = -2$. 故选 A.

2. 若 $\mathbf{a} = (1, 2, -2), \mathbf{b} = (-2, 3, 2)$ 分别为直线 l_1, l_2 的方向向量, 则 l_1 与 l_2 的位置关系是 ()

A. $l_1 \perp l_2$
B. $l_1 \parallel l_2$
C. l_1, l_2 相交但不垂直
D. 不能确定

A 解析: 由题意, $\mathbf{a} = (1, 2, -2), \mathbf{b} = (-2, 3, 2)$ 分别为直线 l_1, l_2 的方向向量. 因为 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -2 + 6 - 4 = 0$, 所以 l_1 与 l_2 的位置关系是 $l_1 \perp l_2$. 故选 A.

3. 已知 $\mathbf{a} = (1, 0, -1), \mathbf{b} = (1, -1, 0)$ 分别为直线 a, b 的方向向量, 且直线 a, b 均平行于平面 α , 则平面 α 的单位法向量为 ()

A. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
B. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
C. $(1, 1, 1)$
D. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

D 解析: 设平面 α 的单位法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$, $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$ ①,

因为直线 a, b 均平行于平面 α , 所以有 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \mathbf{a} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \mathbf{b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \text{ ②,} \\ x - y = 0 \text{ ③.} \end{cases}$

由①②③可得 $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x = y = z = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选 D.

4. 已知 $A(0, 2, 3), B(-2, 1, 6), C(1, -1, 5)$, 则平面 ABC 的一个法向量是 _____.

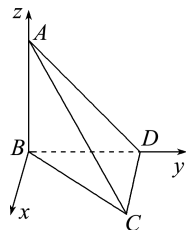
$(1, 1, 1)$ (答案不唯一)

解析: 由题意, 得 $\overrightarrow{AB} = (-2, -1, 3), \overrightarrow{AC} = (1, -3, 2)$. 设平面 ABC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -2x - y + 3z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = x - 3y + 2z = 0. \end{cases} \text{ 取 } y = 1, \text{ 得 } x = 1, z =$$

1, 所以 $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$ 是平面 ABC 的一个法向量.

5. 《九章算术》中, 将四个面都为直角三角形的四面体称为“鳖臑”. 如图, 在“鳖臑” $A-BCD$ 中, $AB \perp$ 平面 $BCD, \angle BDC = 90^\circ, BD = AB = CD$. 若建立如图所示的空间直角坐标系, 则平面 ACD 的一个法向量为 _____.



$(0, 1, 1)$ (答案不唯一) **解析:** 根据题意, 设 $BD = AB = CD = 1$, 则 $D(0, 1, 0), C(1, 1, 0), A(0, 0, 1)$, 所以 $\overrightarrow{DC} = (1, 0, 0), \overrightarrow{AD} = (0, 1, -1)$.

设平面 ACD 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则有 } \begin{cases} \overrightarrow{DC} \cdot \mathbf{m} = x = 0, \\ \overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{m} = y - z = 0. \end{cases} \text{ 令 } y = 1, \text{ 可得 } z = 1, x =$$

0, 所以 $\mathbf{m} = (0, 1, 1)$ 为平面 ACD 的一个法向量.

B组 应用·实践

1. 已知向量 $\overrightarrow{OA} = (1, 2, 3), \overrightarrow{OB} = (2, m, 3), \overrightarrow{OC} = (4, 2, k)$, 若 $\overrightarrow{OA}$ 是平面 ABC 的法向量, 则 mk 的值是 ()

A. 3 B. 2 C. 6 D. 4

A 解析: 由题可得 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1, m-2, 0), \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (3, 0, k-3)$,

又 $\overrightarrow{OA}$ 为平面 ABC 的法向量,

$$\text{所以 } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 1 + 2 \times (m-2) + 3 \times 0 = 2m - 3 = 0, \text{ 解得 } m = \frac{3}{2},$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 3 + 2 \times 0 + 3 \times (k-3) = 3k - 6 = 0, \text{ 解得 } k = 2, \text{ 所以 } mk = 3. \text{ 故选 A.}$$

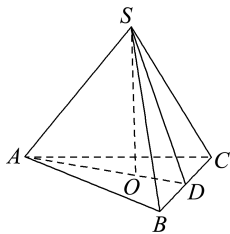
2. 已知平面 α 内有一个点 $A(2, -1, 2)$, 平面 α 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (3, 1, 2)$, 则下列各点中, 在平面 α 内的是 ()

A. $(1, -1, 1)$ B. $\left(1, 3, \frac{3}{2}\right)$
C. $\left(1, -3, \frac{3}{2}\right)$ D. $\left(11, 3, -\frac{3}{2}\right)$

B 解析: 对于 B, $\overrightarrow{AP} = \left(-1, 4, -\frac{1}{2}\right)$, 则 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AP} = (3, 1, 2) \cdot \left(-1, 4, -\frac{1}{2}\right) = 0$, 所以 $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{AP}$.

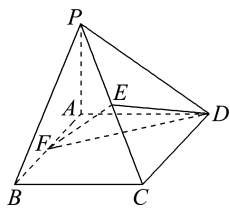
故点 $P\left(1, 3, \frac{3}{2}\right)$ 在平面 α 内. 故选 B.

- 3.如图,在正三棱锥 $S-ABC$ 中,点 O 是 $\triangle ABC$ 的中心,点 D 是棱 BC 的中点,则平面 ABC 的一个法向量可以是_____,平面 SAD 的一个法向量可以是_____.



$\overrightarrow{OS}$ $\overrightarrow{BC}$ (答案不唯一) 解析:在正三棱锥 $S-ABC$ 中,点 O 是 $\triangle ABC$ 的中心,点 D 是棱 BC 的中点,所以 $SO \perp$ 平面 ABC , $BC \perp$ 平面 SAD ,所以 $\overrightarrow{OS}$ 是平面 ABC 的一个法向量, $\overrightarrow{BC}$ 是平面 SAD 的一个法向量.

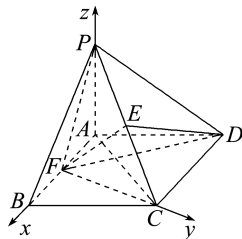
- 4.如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, $\triangle PAB$ 是边长为 1 的正三角形,四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle ABC = 60^\circ$. E 是 PC 的中点, F 是 AB 的中点,试建立适当的空间直角坐标系,求平面 DEF 的一个法向量.



解:连接 PF , CF , 因为 $\triangle PAB$ 是边长为 1 的正三角形, $PA=PB$, F 是 AB 的中点,所以 $PF \perp AB$. 又因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$, $PF \subset$ 平面 PAB , 所以 $PF \perp$ 平面 $ABCD$.

连接 AC , 因为 $AB=BC$, $\angle ABC = 60^\circ$, 所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形. 又 F 是 AB 的中点, 所以 $CF \perp AB$.

综上可知, 直线 FB , FC , FP 两两垂直, 所以建立以 F 为原点, FB , FC , FP 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴的空间直角坐标系, 如图所示.



由题意, 在正三角形 PAB 和正三角形 ABC 中, $FP = FC = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

则 $F(0,0,0)$, $D\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $E\left(0, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$,

所以 $\overrightarrow{FE} = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $\overrightarrow{FD} = \left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.

设平面 DEF 的法向量为 $n = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{FE} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{FD} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{4}z = 0, \\ -x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0, \end{cases} \quad \text{化简得}$$

$$\begin{cases} y = -z, \\ x = \frac{\sqrt{3}}{2}y. \end{cases} \quad \text{令 } y = 2, \text{ 则 } x = \sqrt{3}, z = -2, \text{ 即 } n = (\sqrt{3}, 2, -2).$$

(答案不唯一)

所以平面 DEF 的一个法向量为 $n = (\sqrt{3}, 2, -2)$.

第2课时 空间中直线、平面的平行

学习任务目标

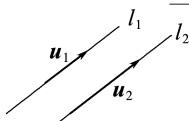
- 1.能用向量语言表述直线与直线、直线与平面、平面与平面的平行关系.
- 2.能用向量方法证明直线与平面、平面与平面平行的有关判定定理.

问题式预习

【知识清单】

知识点一 直线与直线平行

如图, 设 u_1, u_2 分别是直线 l_1, l_2 的方向向量, 则 $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \underline{u_1 \parallel u_2} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}, \text{ 使得 } \underline{u_1 = \lambda u_2}$.

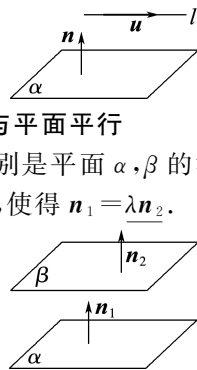


知识点二 直线与平面平行

如图, 设 u 是直线 l 的方向向量, n 是平面 α 的法向量, $l \not\subset \alpha$, 则 $l \parallel \alpha \Leftrightarrow \underline{u \perp n} \Leftrightarrow \underline{u \cdot n = 0}$.

知识点三 平面与平面平行

如图, 设 n_1, n_2 分别是平面 α, β 的法向量, 则 $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \underline{n_1 \parallel n_2} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}, \text{ 使得 } \underline{n_1 = \lambda n_2}$.



【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打“√”, 错误的打“×”).

(1) 直线的方向向量一定是单位向量. (×)

(2) 若直线 l 的一个方向向量为 $\mathbf{a} = (-1, 2, 1)$, 平面 α 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (-1, -1, 1)$, $l \not\subset \alpha$, 则 $l \parallel \alpha$. (√)

(3) 若 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ 分别是平面 α, β 的法向量, 则 $\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow \alpha \parallel \beta$. (√)

(4) 已知点 $A(-1, 0, 1), B(1, 4, 7)$ 在直线 l 上, 若点 P 在直线 l 上, 则 $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}, t \in \mathbf{R}$. (√)

2. 已知向量 $\mathbf{a} = (2, 3, 5), \mathbf{b} = (3, x, y)$ 分别是直线 l_1, l_2 的方向向量, 若 $l_1 \parallel l_2$, 则 ()

A. $x = \frac{9}{2}, y = 15$ B. $x = 3, y = \frac{15}{2}$

C. $x = 3, y = 15$ D. $x = \frac{9}{2}, y = \frac{15}{2}$

D 解析: 由 $l_1 \parallel l_2$, 得 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 即 $\frac{3}{2} = \frac{x}{3} = \frac{y}{5}$, 解得 $x = \frac{9}{2}, y = \frac{15}{2}$. 故选 D.

3. 请思考并回答下列问题:

(1) 直线的方向向量(平面的法向量)是否唯一?

提示: 不唯一, 直线的方向向量(平面的法向量)有无数个, 它们是共线向量.

(2) 证明直线与平面平行的关键是什么?

提示: 证明直线与平面平行的关键是证明直线的方向向量与平面的法向量垂直.

任务型课堂

任务1 利用空间向量判断线线、线面平行

(1) 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 分别是直线 l_1, l_2 的方向向量, 根据条件判断 l_1, l_2 的位置关系:

① $\mathbf{a} = (2, 3, -1), \mathbf{b} = (-6, -9, 3)$;

② $\mathbf{a} = (5, 0, 2), \mathbf{b} = (0, 4, 0)$.

(2) 设 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 分别是平面 α, β 的法向量, 根据条件判断 α, β 的位置关系:

① $\mathbf{u} = (1, -1, 2), \mathbf{v} = \left(3, 2, -\frac{1}{2}\right)$;

② $\mathbf{u} = (0, 3, 0), \mathbf{v} = (0, -5, 0)$.

(3) 设 $\mathbf{a}$ 是直线 l 的方向向量, $\mathbf{u}$ 是平面 α 的法向量, 根据条件判断 l, α 的位置关系:

① $\mathbf{a} = (-3, 4, 2), \mathbf{u} = (2, 2, -1)$;

② $\mathbf{a} = (0, -8, 12), \mathbf{u} = (0, 2, -3)$.

解: (1) ① 因为 $\mathbf{a} = (2, 3, -1), \mathbf{b} = (-6, -9, 3)$, 所以 $\mathbf{a} = -\frac{1}{3}\mathbf{b}$.

所以 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$. 所以 $l_1 \parallel l_2$.

② 因为 $\mathbf{a} = (5, 0, 2), \mathbf{b} = (0, 4, 0)$, 所以 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

所以 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. 所以 $l_1 \perp l_2$.

(2) ① 因为 $\mathbf{u} = (1, -1, 2), \mathbf{v} = \left(3, 2, -\frac{1}{2}\right)$,

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, 所以 $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. 所以 $\alpha \perp \beta$.

② 因为 $\mathbf{u} = (0, 3, 0), \mathbf{v} = (0, -5, 0)$,

所以 $\mathbf{u} = -\frac{3}{5}\mathbf{v}$.

所以 $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$. 所以 $\alpha \parallel \beta$.

(3) ① 因为 $\mathbf{u} = (2, 2, -1), \mathbf{a} = (-3, 4, 2), \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0$, 所以 $\mathbf{u} \perp \mathbf{a}$. 所以 $l \parallel \alpha$ 或 $l \subset \alpha$.

② 因为 $\mathbf{u} = (0, 2, -3), \mathbf{a} = (0, -8, 12), \mathbf{u} = -\frac{1}{4}\mathbf{a}$, 所以 $\mathbf{u} \parallel \mathbf{a}$. 所以 $l \perp \alpha$.

【探究总结】

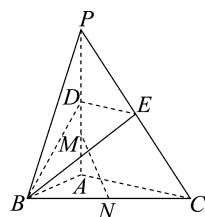
(1) 若证线线平行, 则证直线的方向向量共线, 即设 μ_1, μ_2 分别是直线 l_1, l_2 的方向向量, 则 $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \mu_1 \parallel \mu_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}$, 使得 $\mu_1 = \lambda\mu_2$.

(2) 若证线面平行, 则证直线的方向向量与平面的法向量垂直, 即设 μ 是直线 l 的方向向量, $\mathbf{n}$ 是平面 α 的法向量, $l \not\subset \alpha$, 则 $l \parallel \alpha \Leftrightarrow \mu \perp \mathbf{n} \Leftrightarrow \mu \cdot \mathbf{n} = 0$.

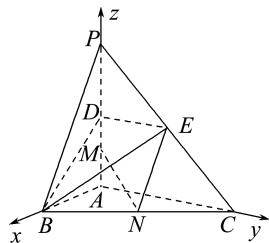
任务2 利用空间向量证明线线、线面平行

探究活动

例1 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 底面 ABC , $\angle BAC = 90^\circ$, 点 D, E, N 分别为棱 PA, PC, BC 的中点, M 是线段 AD 的中点, $PA = AC = 4, AB = 2$. 试证明: $MN \parallel$ 平面 BDE .



证明: 如图, 以 A 为原点, AB, AC, AP 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间直角坐标系.



依题意可得 $A(0, 0, 0), B(2, 0, 0), C(0, 4, 0), P(0, 0, 4), D(0, 0, 2), E(0, 2, 2), M(0, 0, 1), N(1, 2, 0)$,

所以 $\overrightarrow{DE} = (0, 2, 0), \overrightarrow{DB} = (2, 0, -2)$.

设 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ 为平面 BDE 的法向量,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{DE} = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{DB} = 0, \end{cases} \text{所以} \begin{cases} 2y = 0, \\ 2x - 2z = 0. \end{cases}$$

不妨取 $z=1$, 可得 $\vec{n}=(1,0,1)$ 为平面 BDE 的一个法向量.

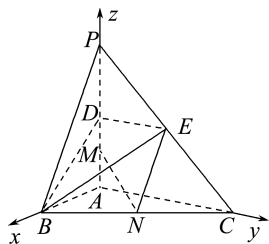
又 $\vec{MN}=(1,2,-1)$, 所以 $\vec{MN} \cdot \vec{n}=0$.

因为 $MN \not\subset$ 平面 BDE , 所以 $MN \parallel$ 平面 BDE .

【一题多思】

思考 在本例中, 你还能用其他方法证明 $MN \parallel$ 平面 BDE 吗?

证明: 因为 $PA \perp$ 底面 ABC , $\angle BAC = 90^\circ$, 建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(0,4,0)$, $D(0,0,2)$,

$E(0,2,2)$, $M(0,0,1)$, $N(1,2,0)$, $P(0,0,4)$,

所以 $\vec{DE}=(0,2,0)$, $\vec{DB}=(2,0,-2)$. 又 $\vec{MN}=(1,2,-1)$,

设 $\vec{MN}=\lambda \vec{DE}+\mu \vec{DB}$, 即 $(1,2,-1)=\lambda(0,2,0)+\mu(2,0,-2)$, 解得 $\lambda=1, \mu=\frac{1}{2}$,

所以 $\vec{MN}=\vec{DE}+\frac{1}{2}\vec{DB}$, 故 $\vec{MN}, \vec{DE}, \vec{DB}$ 共面.

又因为 $MN \not\subset$ 平面 BDE , 所以 $MN \parallel$ 平面 BDE .

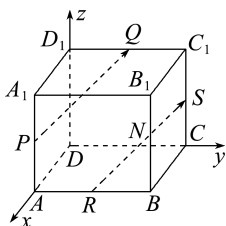
【探究总结】

证明直线与平面平行, 可以证明直线的方向向量与平面的法向量的数量积为零, 或证直线的方向向量与平面内的两个不共线的向量共面, 或证直线的方向向量与平面内某直线的方向向量平行, 然后说明直线不在平面内即可. 这样就把几何证明问题转化为向量运算问题.

88 应用迁移

1. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=4$, $AD=3$, $AA_1=2$, P, Q, R, S 分别是 AA_1, D_1C_1, AB, CC_1 的中点. 求证: $PQ \parallel RS$.

证明: (方法一) 以 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $P(3,0,1), Q(0,2,2), R(3,2,0), S(0,4,1)$,

所以 $\vec{PQ}=(-3,2,1), \vec{RS}=(-3,2,1)$,

所以 $\vec{PQ}=\vec{RS}$,

所以 $\vec{PQ} \parallel \vec{RS}$, 即 $PQ \parallel RS$.

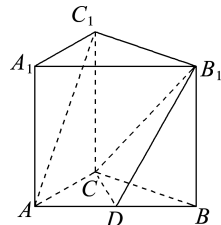
(方法二) 因为 $\vec{RS}=\vec{RC}+\vec{CS}=\frac{1}{2}\vec{DC}-\vec{DA}+\frac{1}{2}\vec{DD_1}$,

$\vec{PQ}=\vec{PA_1}+\vec{A_1Q}=\frac{1}{2}\vec{DD_1}+\frac{1}{2}\vec{DC}-\vec{DA}$,

所以 $\vec{PQ}=\vec{RS}$,

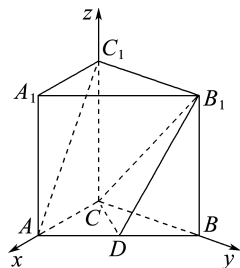
所以 $\vec{PQ} \parallel \vec{RS}$, 即 $PQ \parallel RS$.

2. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC=3, BC=4, AB=5, AA_1=4$. 在线段 AB 上是否存在点 D , 使得 $AC_1 \parallel$ 平面 CDB_1 ?



解: 因为 $AC=3, BC=4, AB=5$, 所以 $AC^2+BC^2=AB^2$, 所以 $AC \perp BC$.

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, AC, BC, CC_1 两两垂直, 以 C 为原点, CA, CB, CC_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.



则 $C(0,0,0), A(3,0,0), B(0,4,0), B_1(0,4,4)$,

$C_1(0,0,4)$, 所以 $\vec{CB_1}=(0,4,4), \vec{AC_1}=(-3,0,4)$.

设点 D 的坐标为 $(x,y,0)$ ($0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 4$),

则 $\vec{CD}=(x,y,0)$.

设平面 CDB_1 的法向量为 $\vec{m}=(a,b,c)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{CD} = 0, \\ \vec{m} \cdot \vec{CB_1} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} ax+by=0, \\ 4b+4c=0. \end{cases}$$

令 $b=-x$, 于是 $\vec{m}=(y,-x,x)$ 为平面 CDB_1 的一个法向量.

若 $AC_1 \parallel$ 平面 CDB_1 ,

则 $\vec{AC_1} \cdot \vec{m}=0$, 即 $-3y+4x=0$. ①

由点 D 在 AB 上, 得 $\frac{x-3}{-3}=\frac{y}{4}$, 即 $4x+3y=12$. ②

由①②可得 $x=\frac{3}{2}, y=2$, 即 D 为 AB 的中点. 故在

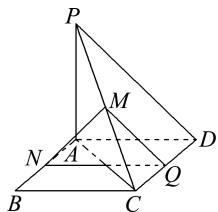
线段 AB 上存在点 D , 使得 $AC_1 \parallel$ 平面 CDB_1 , 此时 D 是线段 AB 的中点.

任务3 利用空间向量证明面面平行

探究活动

例2 如图所示, 四边形 $ABCD$ 为矩形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA=AD$, M, N, Q 分别是 PC, AB, CD 的中点.

- (1) 求证: $MN \parallel$ 平面 PAD ;
(2) 求证: 平面 $MNQ \parallel$ 平面 PAD .



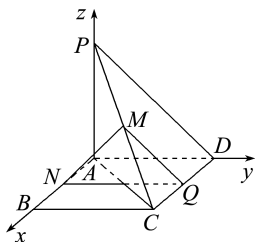
证明: (1) 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB, AD \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PA \perp AB, PA \perp AD$.

因为四边形 $ABCD$ 为矩形, 所以 $AB \perp AD$,

所以 AB, AD, AP 两两垂直,

所以以 A 为原点, AB, AD, AP 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间直角坐标系, 如图所示.



设 $B(b, 0, 0), D(0, d, 0), P(0, 0, d)$,

则 $C(b, d, 0)$.

因为 M, N, Q 分别是 PC, AB, CD 的中点,

所以 $M\left(\frac{b}{2}, \frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right), N\left(\frac{b}{2}, 0, 0\right), Q\left(\frac{b}{2}, d, 0\right)$,

所以 $\overrightarrow{MN} = \left(0, -\frac{d}{2}, -\frac{d}{2}\right)$.

因为平面 PAD 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (1, 0, 0)$, 所以 $\overrightarrow{MN} \cdot \mathbf{m} = 0$, 即 $\overrightarrow{MN} \perp \mathbf{m}$.

又因为 $MN \not\subset$ 平面 PAD , 所以 $MN \parallel$ 平面 PAD .

(2) 因为 $\overrightarrow{QN} = (0, -d, 0)$, 所以 $\overrightarrow{QN} \cdot \mathbf{m} = 0$, 所以 $\overrightarrow{QN} \perp \mathbf{m}$.

又 $QN \not\subset$ 平面 PAD , 所以 $QN \parallel$ 平面 PAD .

又因为 $MN \cap QN = N, MN, QN \subset$ 平面 MNQ ,

所以平面 $MNQ \parallel$ 平面 PAD .

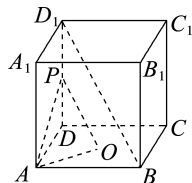
【探究总结】

证明面面平行的方法

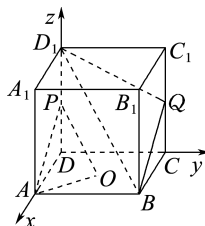
- (1) 转化为相应的线线平行或线面平行;
(2) 分别求出这两个平面的法向量, 然后证明这两个法向量平行.

应用迁移

如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, O 为底面 $ABCD$ 的中心, P 是 DD_1 的中点. 设 Q 是 CC_1 上的点, 问: 是否存在点 Q , 使得平面 $D_1BQ \parallel$ 平面 PAO ?



解: 以 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.



在 CC_1 上任取一点 Q , 连接 BQ, D_1Q .

设正方体的棱长为 1, 则 $O\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), P\left(0, 0, \frac{1}{2}\right), A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), D_1(0, 0, 1)$, 设 $Q(0, 1, m) (0 \leq m \leq 1)$.

(方法一) $\overrightarrow{AP} = \left(-1, 0, \frac{1}{2}\right), \overrightarrow{BQ} = (-1, 0, m), \overrightarrow{OP} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \overrightarrow{BD_1} = (-1, -1, 1)$,

所以 $\overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{BD_1}$, 即 $OP \parallel BD_1$.

所以 $OP \parallel$ 平面 D_1BQ .

当 $m = \frac{1}{2}$ 时, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BQ}$, 即 $AP \parallel BQ$, 所以 $AP \parallel$ 平面 D_1BQ . 又 $OP \cap AP = P$, 所以平面 $PAO \parallel$ 平面 D_1BQ .

故当 Q 为 CC_1 的中点时, 平面 $D_1BQ \parallel$ 平面 PAO .

(方法二) $\overrightarrow{OA} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$,

$\overrightarrow{OP} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

设平面 PAO 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

则有 $\mathbf{n}_1 \perp \overrightarrow{OA}, \mathbf{n}_1 \perp \overrightarrow{OP}$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1 = 0, \\ -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}z_1 = 0. \end{cases}$$

取 $x_1 = 1$, 则 $\mathbf{n}_1 = (1, 1, 2)$ 为平面 PAO 的一个法向量.

易知 $\overrightarrow{BD_1} = (-1, -1, 1), \overrightarrow{QD_1} = (0, -1, 1-m)$.

设平面 D_1BQ 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, 则有 $\mathbf{n}_2 \perp \overrightarrow{BD_1}, \mathbf{n}_2 \perp \overrightarrow{QD_1}$,

所以 $\begin{cases} -x_2 - y_2 + z_2 = 0, \\ -y_2 + (1-m)z_2 = 0. \end{cases}$ 取 $z_2 = 1$, 则 $\mathbf{n}_2 = (m, 1-m, 1)$.

$m, 1)$ 为平面 D_1BQ 的一个法向量.

要使平面 $D_1BQ \parallel$ 平面 PAO , 需满足 $n_1 \parallel n_2$.

因此 $\frac{1}{m} = \frac{1}{1-m} = \frac{2}{1}$, 解得 $m = \frac{1}{2}$, 这时点 Q 的坐标为 $(0, 1, \frac{1}{2})$.

故当 Q 为 CC_1 的中点时, 平面 $D_1BQ \parallel$ 平面 PAO .



提质归纳

空间中直线、平面的平行
(设 u_1, u_2 分别是直线 l_1, l_2 的方向向量, n_1, n_2 分别是平面 α, β 的法向量)

线线平行: $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow u_1 \parallel u_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}$, 使得 $u_1 = \lambda u_2$

线面平行: $l \parallel \alpha \Leftrightarrow u \perp n \Leftrightarrow u \cdot n = 0$

面面平行: $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow n_1 \parallel n_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}$, 使得 $n_1 = \lambda n_2$

课后素养评价(八)

空间中直线、平面的平行

A组 学习·理解

1. 若平面 α 外的直线 l 的一个方向向量为 $a = (1, 0, -2)$, 平面 α 的一个法向量为 $m = (8, -1, 4)$, 则 ()

A. $l \perp \alpha$ B. $l \parallel \alpha$
C. $a \parallel m$ D. l 与 α 相交但不垂直

B 解析: 根据题意, 直线 l 的一个方向向量为 $a = (1, 0, -2)$, 平面 α 的一个法向量为 $m = (8, -1, 4)$, 易得 $a \cdot m = 1 \times 8 - 2 \times 4 = 0$,

又直线 l 在平面 α 外, 则有 $l \parallel \alpha$, 故选 B.

2. 已知直线 l 上有两点 $A(1, 2, 3), B(2, 1, 1)$, 平面 α 的一个法向量为 $n = (-3, 2, m)$, 若 $l \parallel \alpha$, 则 $m =$ ()

A. 2 B. 1
C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{5}{2}$

D 解析: 因为直线 l 上有两点 $A(1, 2, 3), B(2, 1, 1)$, 所以直线的一个方向向量为 $\overrightarrow{AB} = (1, -1, -2)$. 又因为 $l \parallel \alpha$, 平面 α 的一个法向量为 $n = (-3, 2, m)$,

所以 $n \perp \overrightarrow{AB}$, 即 $n \cdot \overrightarrow{AB} = (-3) \times 1 + 2 \times (-1) - 2m = 0$, 解得 $m = -\frac{5}{2}$. 故选 D.

3. 已知平面 α 的一个法向量是 $(2, -1, 1)$, $\alpha \parallel \beta$, 则下列向量可作为平面 β 的一个法向量的是 ()

A. $(4, 2, -2)$ B. $(2, 0, 4)$
C. $(2, -1, -5)$ D. $(4, -2, 2)$

D 解析: 平面 α 的一个法向量是 $(2, -1, 1)$, $\alpha \parallel \beta$. 设平面 β 的法向量为 (x, y, z) , 则 $(2, -1, 1) = \lambda(x, y, z)$, $\lambda \neq 0$.

对比四个选项可知, 只有 D 符合要求. 故选 D.

4. 已知平面 α 的一个法向量是 $(2, 3, -1)$, 平面 β 的一个法向量是 $(4, \lambda, -2)$. 若 $\alpha \parallel \beta$, 则 λ 的值是 ()

A. $-\frac{3}{10}$ B. -6
C. 6 D. $\frac{10}{3}$

- C 解析:** 因为 $\alpha \parallel \beta$, 所以平面 α 的法向量 $(2, 3, -1)$ 与平面 β 的法向量 $(4, \lambda, -2)$ 共线.

所以 $\frac{2}{4} = \frac{3}{\lambda} = \frac{-1}{-2}$, 解得 $\lambda = 6$. 故选 C.

5. 若平面 β 外的一条直线 l 的一个方向向量是 $u = (-1, 2, -3)$, 平面 β 的一个法向量为 $n = (4, -1, -2)$, 则 l 与 β 的位置关系是 _____.

平行 解析: 因为直线 l 的方向向量是 $u = (-1, 2, -3)$, 平面 β 的一个法向量为 $n = (4, -1, -2)$, 所以 $u \cdot n = (-1, 2, -3) \cdot (4, -1, -2) = -4 - 2 + 6 = 0$. 所以 $u \perp n$, 所以直线与平面平行, 即 $l \parallel \beta$.

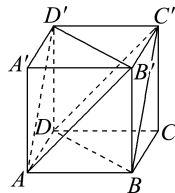
6. 已知直线 l 的一个方向向量为 $(2, m, 1)$, 平面 α 的一个法向量为 $(1, \frac{1}{2}, 2)$, 且 $l \parallel \alpha$, 则 $m =$ _____.

-8 解析: 因为 $l \parallel \alpha$, 所以 l 的方向向量与 α 的法向量垂直.

所以 $(2, m, 1) \cdot (1, \frac{1}{2}, 2) = 2 + \frac{1}{2}m + 2 = 0$,

解得 $m = -8$.

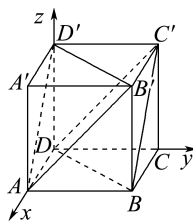
7. 如图, 已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$, 求证: 平面 $AB'D' \parallel$ 平面 BDC' .



证明: 设正方体的棱长为 1, 建立如图所示的空间直角坐标系 $Dxyz$,

则 $A(1, 0, 0), B'(1, 1, 1), D'(0, 0, 1), B(1, 1, 0), D(0, 0, 0), C'(0, 1, 1)$,

所以 $\overrightarrow{AB'} = (0, 1, 1), \overrightarrow{D'B'} = (1, 1, 0), \overrightarrow{DB} = (1, 1, 0), \overrightarrow{DC'} = (0, 1, 1)$.



设平面 $AB'D'$ 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

则 $\mathbf{n}_1 \perp \overrightarrow{AB'}$, $\mathbf{n}_1 \perp \overrightarrow{D'B'}$,

$$\text{即} \begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{AB'} = y_1 + z_1 = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{D'B'} = x_1 + y_1 = 0. \end{cases}$$

令 $y_1 = 1$, 则 $x_1 = -1, z_1 = -1$, 可得平面 $AB'D'$ 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (-1, 1, -1)$.

设平面 BDC' 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则 } \mathbf{n}_2 \perp \overrightarrow{DB}, \mathbf{n}_2 \perp \overrightarrow{DC'}, \text{ 即 } \begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{DB} = x_2 + y_2 = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{DC'} = y_2 + z_2 = 0. \end{cases}$$

令 $y_2 = 1$, 则 $x_2 = -1, z_2 = -1$, 可得平面 BDC' 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2 = (-1, 1, -1)$.

所以 $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$, 即 $\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2$.

故平面 $AB'D' \parallel$ 平面 BDC' .

B组 应用·实践

1. (多选) 已知直线 l 过点 $P(2, -2, -3)$, 且直线 l 的一个方向向量为 $\mathbf{a} = (4, 2, 2)$, 若直线 l 与点 $M(2, 0, 1)$ 在平面 α 内, 则下列向量为平面 α 的法向量的是 ()

A. $(-1, 4, -2)$ B. $\left(\frac{1}{4}, -1, \frac{1}{2}\right)$

C. $\left(-\frac{1}{2}, 2, -1\right)$ D. $(0, -1, 1)$

ABC 解析: 由题意可知, 所研究平面的法向量垂直于向量 $\mathbf{a} = (4, 2, 2)$ 和向量 $\overrightarrow{PM}$.

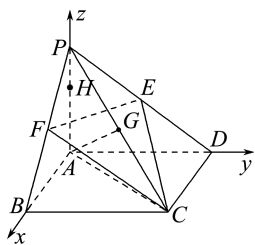
而 $\overrightarrow{PM} = (2, 0, 1) - (2, -2, -3) = (0, 2, 4)$.

选项 A, $(4, 2, 2) \cdot (-1, 4, -2) = 0, (0, 2, 4) \cdot (-1, 4, -2) = 0$ 满足垂直, 故正确; 同理可得 B, C 也满足题意, 故选 ABC.

2. (数学文化)《九章算术》是我国古代数学名著, 书中将底面为矩形, 且有一条侧棱垂直于底面的四棱锥称为“阳马”. 如图, 在“阳马” $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是正方形, $PA = AB$, E, F 分别为 PD, PB 的中点, $\overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{HP}, \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{GP}$. 若 $GH \parallel$ 平面 EFC , 则 $\lambda =$ ()

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

C 解析: 以 A 为坐标原点, AB, AD, AP 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,



设 $AD = a (a > 0)$, 则 $A(0, 0, 0), P(0, 0, a), C(a, a, 0), E\left(0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right), F\left(\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2}\right)$,

所以 $\overrightarrow{EF} = \left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, 0\right), \overrightarrow{AP} = (0, 0, a), \overrightarrow{PC} = (a, a, -a), \overrightarrow{EC} = \left(a, \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$.

设平面 EFC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{EF} \cdot \mathbf{n} = \frac{a}{2}x - \frac{a}{2}y = 0, \\ \overrightarrow{EC} \cdot \mathbf{n} = ax + \frac{a}{2}y - \frac{a}{2}z = 0. \end{cases} \quad \text{令 } x = 1, \text{ 得 } y = 1,$$

$z = 3$, 所以 $\mathbf{n} = (1, 1, 3)$ 为平面 EFC 的一个法向量.

由 $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{GP}$, 得 G 是 PC 的中点, 所以

$$G\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right).$$

由 $\overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{HP}$, 得 $H\left(0, 0, \frac{\lambda a}{1+\lambda}\right)$, 所以 $\overrightarrow{GH}$

$$= \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{\lambda a}{1+\lambda} - \frac{a}{2}\right).$$

因为 $GH \parallel$ 平面 EFC , 所以 $\overrightarrow{GH} \cdot \mathbf{n} = -\frac{a}{2} - \frac{a}{2} +$

$$\frac{3\lambda a}{1+\lambda} - \frac{3a}{2} = 0, \text{ 解得 } \lambda = 5, \text{ 故选 C}$$

3. 已知 $A(0, 0, 1), B(1, 0, 0), C(0, 1, 0)$, 直线 $l \parallel$ 平面 ABC , 且 l 的一个方向向量为 $\mathbf{a} = (2, m, 1)$, 则实数 m 的值是 _____.

-3 解析: 设平面 ABC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, $\overrightarrow{AB} = (1, 0, -1), \overrightarrow{AC} = (0, 1, -1)$,

$$\text{则有} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = x - z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = y - z = 0. \end{cases}$$

令 $z = 1$, 则 $x = 1, y = 1$, 所以 $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$ 为平面 ABC 的一个法向量.

因为直线 $l \parallel$ 平面 ABC , 所以有 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0$,

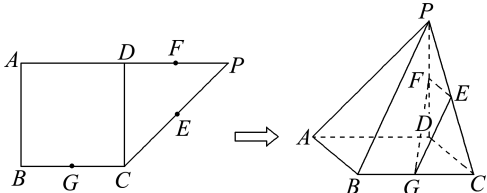
即 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = (1, 1, 1) \cdot (2, m, 1) = 2 + m + 1 = 0$, 解得 $m = -3$.

4. 直线 l 的一个方向向量为 $\mathbf{a} = (2, 0, 4)$, 平面 α 的一个法向量为 $\mathbf{n} = \left(1, -2, -\frac{1}{2}\right)$, 则直线 l 与平面 α 的位置关系为 _____.

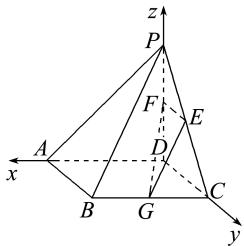
$l \subset \alpha$ 或 $l \parallel \alpha$ 解析: 因为直线 l 的方向向量为 $\mathbf{a} = (2, 0, 4)$, 平面 α 的法向量为 $\mathbf{n} = \left(1, -2, -\frac{1}{2}\right)$,

而 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 2 \times 1 + 0 \times (-2) + 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, 所以 $\mathbf{a} \perp \mathbf{n}$, 则 $l \subset \alpha$ 或 $l \parallel \alpha$.

5. 如图, 在直角梯形 $ABCP$ 中, $AP \parallel BC$, $AP \perp AB$, $AB = BC = \frac{1}{2}AP = 2$, D 是 AP 的中点, E, F, G 分别为 PC, PD, CB 的中点, 将 $\triangle PCD$ 沿 CD 折起, 使得 $PD \perp$ 平面 $ABCD$, 得到四棱锥 $P-ABCD$. 试用向量方法证明 $AP \parallel$ 平面 EFG .



证明: 由题意可知底面 $ABCD$ 为正方形, 因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $DA, DC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 DA, DC, DP 两两垂直. 如图, 以 D 为原点, $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DP}$ 的方向为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系 $Dxyz$,



则 $P(0, 0, 2), C(0, 2, 0), G(1, 2, 0), E(0, 1, 1), F(0, 0, 1), A(2, 0, 0)$, 所以 $\overrightarrow{AP} = (-2, 0, 2), \overrightarrow{EF} = (0, -1, 0), \overrightarrow{EG} = (1, 1, -1)$.

设平面 EFG 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EF} = -y = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EG} = x + y - z = 0. \end{cases} \quad \text{取 } x = 1, \text{ 则 } z = 1, y = 0,$$

所以 $\mathbf{n} = (1, 0, 1)$ 为平面 EFG 的一个法向量.

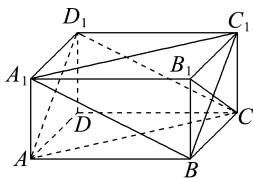
因为 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AP} = -2 + 0 + 2 = 0$, 又 AP 在平面 EFG 外,

所以 $AP \parallel$ 平面 EFG .

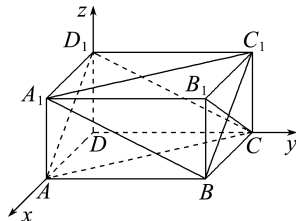
6. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 4, BC = 3, CC_1 = 2$.

(1) 求证: 平面 $A_1C_1B \parallel$ 平面 ACD_1 .

(2) 线段 B_1C 上是否存在点 P , 使得 $A_1P \parallel$ 平面 ACD_1 ? 若存在, 求出点 P 的位置; 若不存在, 请说明理由.



(1) **证明:** 以 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(3, 0, 0), B(3, 4, 0), C(0, 4, 0), A_1(3, 0, 2), B_1(3, 4, 2), C_1(0, 4, 2), D_1(0, 0, 2)$,

所以 $\overrightarrow{A_1C_1} = (-3, 4, 0), \overrightarrow{A_1B} = (0, 4, -2), \overrightarrow{AC} = (-3, 4, 0), \overrightarrow{AD_1} = (-3, 0, 2)$.

设平面 A_1C_1B 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = -3x + 4y = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 4y - 2z = 0. \end{cases}$$

取 $x = 4$, 则 $y = 3, z = 6$, 所以 $\mathbf{n} = (4, 3, 6)$ 为平面 A_1C_1B 的一个法向量.

设平面 ACD_1 的法向量为 $\mathbf{m} = (a, b, c)$,

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AC} = -3a + 4b = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AD_1} = -3a + 2c = 0. \end{cases}$$

取 $a = 4$, 则 $b = 3, c = 6$, 所以 $\mathbf{m} = (4, 3, 6)$ 为平面 ACD_1 的一个法向量.

因为 $\mathbf{m} = \mathbf{n}$, 即 $\mathbf{m} \parallel \mathbf{n}$, 所以平面 $A_1C_1B \parallel$ 平面 ACD_1 .

(2) **解:** 设线段 B_1C 上存在点 P 使得 $A_1P \parallel$ 平面 ACD_1 , $\overrightarrow{B_1P} = t \overrightarrow{B_1C} (0 \leq t \leq 1)$.

由(1)得 $\overrightarrow{A_1B_1} = (0, 4, 0), \overrightarrow{B_1C} = (-3, 0, -2)$, 平面 ACD_1 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (4, 3, 6)$,

所以 $\overrightarrow{A_1P} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1P} = \overrightarrow{A_1B_1} + t \overrightarrow{B_1C} = (-3t, 4, -2t)$.

所以 $\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{A_1P} = -3t \times 4 + 4 \times 3 + (-2t) \times 6 = 0$,

解得 $t = \frac{1}{2}$.

所以当 P 为线段 B_1C 的中点时, $A_1P \parallel$ 平面 ACD_1 .

第3课时 空间中直线、平面的垂直

学习任务目标

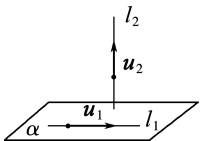
- 1.能用向量语言表述直线与直线、直线与平面、平面与平面的垂直关系.
- 2.能用向量方法证明直线与平面、平面与平面垂直的有关判定定理.

问题式预习

【知识清单】

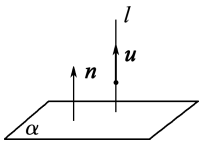
知识点一 线线垂直

如图,设直线 l_1, l_2 的方向向量分别为 u_1, u_2 , 则 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow u_1 \perp u_2 \Leftrightarrow u_1 \cdot u_2 = 0$.



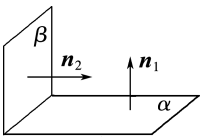
知识点二 线面垂直

如图,设直线 l 的方向向量为 u , 平面 α 的法向量为 n , 则 $l \perp \alpha \Leftrightarrow u \parallel n \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$, 使得 $u = \lambda n$.



知识点三 面面垂直

如图,设平面 α, β 的法向量分别为 n_1, n_2 , 则 $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow n_1 \perp n_2 \Leftrightarrow n_1 \cdot n_2 = 0$.



【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

- (1)同一个平面的法向量均为共线向量. (√)

(2)若 a, b 是平面 α 内的向量, 且 $n \cdot a = 0, n \cdot b = 0$, 则 n 可以作为平面 α 的一个法向量. (×)

(3)若点 A, B 是平面 α 内的任意两点, n 是平面 α 的法向量, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot n = 0$. (√)

2.设直线 l 的一个方向向量 $u = (-2, 2, t)$, 平面 α 的一个法向量 $v = (6, -6, 12)$, 若直线 $l \perp$ 平面 α , 则实数 t 等于 ()

- A.4 B.-4 C.2 D.-2

B 解析: 因为直线 $l \perp$ 平面 α , 所以 $u \parallel v$, 则 $\frac{-2}{6} = \frac{t}{12}$

$\frac{2}{-6} = \frac{t}{12}$, 解得 $t = -4$. 故选 B.

3.请思考并回答下列问题:

(1)若一个平面内一条直线的方向向量与另一个平面的法向量共线, 则这两个平面是否垂直?

提示: 垂直.

(2)怎样利用直线的方向向量与平面的法向量证明垂直关系.

提示: ①若证线线垂直, 则证两直线的方向向量垂直;

②若证线面垂直, 则证直线的方向向量与平面的法向量平行;

③若证面面垂直, 则证两平面的法向量垂直.

任务型课堂

任务1 利用空间向量判断位置关系

1.若 $d = (4, 2, 3)$ 是直线 l 的方向向量, $n = (-1, 3, 0)$ 是平面 α 的法向量, 则直线 l 与平面 α 的位置关系是 ()

- A.垂直 B.平行
C.直线 l 在平面 α 内 D.相交但不垂直

D 解析: 显然 d 与 n 不平行, 因此直线 l 与平面 α 不垂直. 又 $d \cdot n = 4 \times (-1) + 2 \times 3 + 3 \times 0 = 2$, 即 d 与 n 不垂直, 从而直线 l 与平面 α 不平行且直线 l 不在平面 α 内, 故直线 l 与平面 α 相交但不垂直. 故选 D.

2.在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是平行四边形, $\overrightarrow{AB} = (2, -1, -4)$, $\overrightarrow{AD} = (4, 2, 0)$, $\overrightarrow{AP} = (-1, 2, -1)$, 则直线 PA 与平面 $ABCD$ 的位置关系是 ()

- A.平行 B.垂直
C.在平面内 D.相交但不垂直

B 解析: 依题意得 $\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{AP} = (1, -2, 1)$, 而 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 + 2 - 4 = 0$, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AD} = 4 - 4 + 0 = 0$, 所以 $PA \perp AB, PA \perp AD$. 又 $AB \cap AD = A, AB, AD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp$ 平面 $ABCD$. 故选 B.

【探究总结】

(1)若两条直线的方向向量垂直, 则这两条直线垂直;

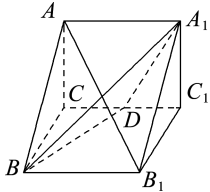
(2)若直线的方向向量与平面的法向量平行, 则直线与平面垂直;

(3)若两平面的法向量垂直, 则这两个平面垂直.

任务2 利用空间向量证明线线、线面垂直

探究活动

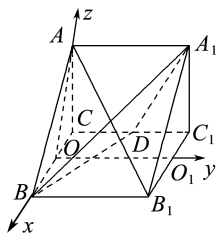
例1 如图,正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都为2, D 为 CC_1 的中点.试证明: $AB_1 \perp$ 平面 A_1BD .



证明: (方法一) 取 BC 的中点 O , 连接 AO . 因为 $\triangle ABC$ 为正三角形, 所以 $AO \perp BC$.

因为在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 平面 $ABC \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $AO \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

如图, 取 B_1C_1 的中点 O_1 , 连接 OO_1 , 以 O 为原点, OB, OO_1, OA 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间直角坐标系,



则 $B(1,0,0), D(-1,1,0), A_1(0,2,\sqrt{3}), A(0,0,\sqrt{3}), B_1(1,2,0)$,

所以 $\overrightarrow{AB_1} = (1, 2, -\sqrt{3}), \overrightarrow{BA_1} = (-1, 2, \sqrt{3}), \overrightarrow{BD} = (-2, 1, 0)$.

因为 $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BA_1} = 1 \times (-1) + 2 \times 2 + (-\sqrt{3}) \times \sqrt{3} = 0$,

$\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BD} = 1 \times (-2) + 2 \times 1 + (-\sqrt{3}) \times 0 = 0$,

所以 $\overrightarrow{AB_1} \perp \overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{AB_1} \perp \overrightarrow{BD}$,

即 $AB_1 \perp BA_1, AB_1 \perp BD$.

又因为 $BA_1 \cap BD = B, BA_1 \subset$ 平面 $A_1BD, BD \subset$ 平面 A_1BD ,

所以 $AB_1 \perp$ 平面 A_1BD .

(方法二) 建系同方法一.

设平面 A_1BD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \perp \overrightarrow{BA_1}, \\ \mathbf{n} \perp \overrightarrow{BD}, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BA_1} = -x + 2y + \sqrt{3}z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BD} = -2x + y = 0. \end{cases}$$

令 $x=1$, 得 $\mathbf{n} = (1, 2, -\sqrt{3})$ 为平面 A_1BD 的一个法向量.

又 $\overrightarrow{AB_1} = (1, 2, -\sqrt{3})$, 所以 $\mathbf{n} = \overrightarrow{AB_1}$, 即 $\overrightarrow{AB_1} \parallel \mathbf{n}$.

所以 $AB_1 \perp$ 平面 A_1BD .

【一题多思】

思考1. 在本例中, 你还能用其他方法证明 $AB_1 \perp$ 平面 A_1BD 吗?

证明: 设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AC} = \mathbf{b}, \overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c}$,

由题意得 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 2, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2, \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0, \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$,

则 $\overrightarrow{AB_1} = \mathbf{a} + \mathbf{c}, \overrightarrow{A_1B} = \mathbf{a} - \mathbf{c}, \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\mathbf{c} - \mathbf{a} + \mathbf{b}$,

所以 $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{A_1B} = (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{c}^2 = 0$, 所以 $\overrightarrow{AB_1} \perp \overrightarrow{A_1B}$, 即 $AB_1 \perp A_1B$,

$\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BD} = (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot \left(\frac{1}{2}\mathbf{c} - \mathbf{a} + \mathbf{b}\right) = 0 - 4 + 2 + 2 - 0 + 0 = 0$, 所以 $\overrightarrow{AB_1} \perp \overrightarrow{BD}$, 即 $AB_1 \perp BD$.

又 $A_1B \cap BD = B$, 所以 $AB_1 \perp$ 平面 A_1BD .

思考2. 在本例中, 设 M 是 A_1B_1 的中点, 在线段 CC_1 上是否存在一点 N , 使得 $MN \perp$ 平面 A_1BD ?

解: 假设存在点 $N(-1, y_0, 0), 0 \leq y_0 \leq 2$, 由例1的

解析可知 $M\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 所以 $\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{3}{2}, y_0 - 2, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 因为 $MN \perp$ 平面 A_1BD ,

所以 $\overrightarrow{MN} \parallel \mathbf{n}$, 即 $\frac{-\frac{3}{2}}{1} = \frac{y_0 - 2}{2} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\sqrt{3}}$, 解得 $y_0 = -1$, 不符合题意.

所以在线段 CC_1 上不存在一点 N , 使得 $MN \perp$ 平面 A_1BD .

【探究总结】

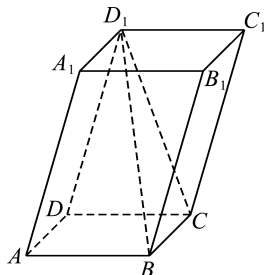
用向量证明线线、线面垂直的方法

(1) 线线垂直: 证明两直线的方向向量互相垂直, 即证它们的数量积为零.

(2) 线面垂直: 证明直线的方向向量与平面的法向量共线, 或将线面垂直的判定定理用向量表示.

应用迁移

如图, 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = 2, AB = AD = 1, \angle DAB = 90^\circ, \angle A_1AD = 45^\circ, \angle A_1AB = 60^\circ$. 求证: $AB \perp$ 平面 BCD_1 .



证明: (方法一)

以 A 为坐标原点, $\overrightarrow{AB}$ 方向为 x 轴正方向, $\overrightarrow{AD}$ 方向为 y 轴正方向, 建立空间直角坐标系,

则 $A(0,0,0), B(1,0,0), D(0,1,0), C(1,1,0)$,

设 $A_1(x,y,z), \overrightarrow{AA_1}=(x,y,z), \overrightarrow{AD}=(0,1,0), \overrightarrow{AB}=(1,0,0)$.

由 $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AA_1}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos \angle A_1AD = 2 \times 1 \times \cos 45^\circ = \sqrt{2} = y$, 得 $y = \sqrt{2}$,

由 $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AA_1}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \angle A_1AB = 2 \times 1 \times \cos 60^\circ = 1 = x$, 得 $x = 1$,

由 $|\overrightarrow{AA_1}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + z^2} = 2$, 得 $z = 1$, 即 $A_1(1, \sqrt{2}, 1)$.

又 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A_1D_1}$, 则 $D_1(1, \sqrt{2} + 1, 1)$,

所以 $\overrightarrow{CD_1} = (0, \sqrt{2}, 1), \overrightarrow{AB} = (1, 0, 0)$, 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD_1} = 0$, 即 $AB \perp CD_1$.

又 $AB \perp BC, BC \cap CD_1 = C, BC, CD_1 \subset \text{平面 } BCD_1$, 所以 $AB \perp \text{平面 } BCD_1$.

(方法二)

因为 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1D_1})$
 $= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A_1D_1}$
 $= -|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AA_1}| \cdot \cos \angle A_1AB + 0$
 $= -1 + 1 \times 2 \times \frac{1}{2} + 0 = 0$,

所以 $AB \perp BD_1$.

又 $AB \perp BC, BC \cap BD_1 = B, BC, BD_1 \subset \text{平面 } BCD_1$, 所以 $AB \perp \text{平面 } BCD_1$.

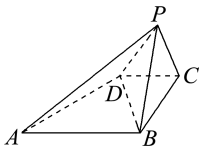
任务3 利用空间向量证明面面垂直

探究活动

例2 如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是直角梯形, $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ, AB = BC = PB = PC = 2CD$, 侧面 $PBC \perp$ 底面 $ABCD$.

求证: (1) $PA \perp BD$;

(2) 平面 $PAD \perp$ 平面 PAB .



证明: 如图, 取 BC 的中点 O , 连接 PO .

因为侧面 $PBC \perp$ 底面 $ABCD, \triangle PBC$ 为等边三角形, 所以 $PO \perp$ 底面 $ABCD$.

以 BC 的中点 O 为坐标原点, 以 BC 所在直线为 x 轴, 过点 O 与 AB 平行的直线为 y 轴, OP 所在直线为 z 轴, 建立空间直角坐标系.

(1) 不妨设 $CD = 1$, 则 $AB = BC = PB = PC = 2$, 所以 $PO = \sqrt{3}$.

所以 $A(1, -2, 0), B(1, 0, 0), D(-1, -1, 0), P(0,$

$0, \sqrt{3})$,

所以 $\overrightarrow{BD} = (-2, -1, 0), \overrightarrow{PA} = (1, -2, -\sqrt{3})$.

因为 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{PA} = (-2) \times 1 + (-1) \times (-2) + 0 \times (-\sqrt{3}) = 0$,

所以 $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{BD}$,

所以 $PA \perp BD$.

(2) 如图, 取 PA 的中点 M ,

连接 DM ,

则 $M(\frac{1}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

因为 $\overrightarrow{DM} = (\frac{3}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}), \overrightarrow{PB} =$

$(1, 0, -\sqrt{3})$,

所以 $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{3}{2} \times 1 + 0 \times 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times (-\sqrt{3}) = 0$,

所以 $\overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{PB}$, 即 $DM \perp PB$.

因为 $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{PA} = \frac{3}{2} \times 1 + 0 \times (-2) + \frac{\sqrt{3}}{2} \times (-\sqrt{3}) = 0$,

所以 $\overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{PA}$, 即 $DM \perp PA$.

又因为 $PA \cap PB = P, PA \subset \text{平面 } PAB, PB \subset \text{平面 } PAB$,

所以 $DM \perp \text{平面 } PAB$.

因为 $DM \subset \text{平面 } PAD$,

所以平面 $PAD \perp$ 平面 PAB .

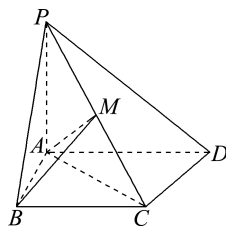
【探究总结】

1. 利用空间向量证明面面垂直通常有两个途径: 一是利用两个平面垂直的判定定理将面面垂直转化为线面垂直进而转化为线线垂直; 二是直接求出两个平面的法向量, 由两个法向量垂直, 得面面垂直.

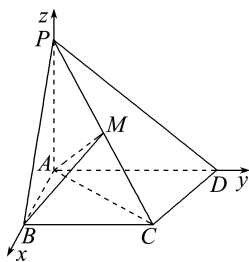
2. 向量法证明面面垂直的优越性主要体现在不必考虑图形中的位置关系, 只需建立适当的空间直角坐标系或选定基向量后, 经过向量运算就可得到要证明的结果. 思路方法“公式化”, 降低了思维难度.

应用迁移

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC, AB \perp AD, PA \perp$ 平面 $ABCD, AD = 10, BC = 2AB = 8, M$ 为 PC 的中点. 求证: 平面 $PAC \perp$ 平面 PCD .



证明:以 $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AP}\}$ 为正交基底建立如图所示的空间直角坐标系,



设 $PA=m$,则 $A(0,0,0), C(4,8,0), D(0,10,0), P(0,0,m)$,所以 $\overrightarrow{PC}=(4,8,-m), \overrightarrow{CD}=(-4,2,0), \overrightarrow{AC}=(4,8,0)$.

设平面 PCD 的法向量为 $\mathbf{n}_1=(x_1, y_1, z_1)$,则

$$\begin{cases} \overrightarrow{PC} \cdot \mathbf{n}_1 = 0, \\ \overrightarrow{CD} \cdot \mathbf{n}_1 = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 4x_1 + 8y_1 - mz_1 = 0, \\ -4x_1 + 2y_1 = 0. \end{cases}$$

不妨令 $x_1=1$,则 $y_1=2, z_1=\frac{20}{m}$,

所以 $\mathbf{n}_1=(1, 2, \frac{20}{m})$ 为平面 PCD 的一个法向量.

设平面 PAC 的法向量为 $\mathbf{n}_2=(x_2, y_2, z_2)$,则

$$\begin{cases} \overrightarrow{PC} \cdot \mathbf{n}_2 = 0, \\ \overrightarrow{AC} \cdot \mathbf{n}_2 = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 4x_2 + 8y_2 - mz_2 = 0, \\ 4x_2 + 8y_2 = 0. \end{cases}$$

不妨令 $x_2=2$,则 $y_2=-1, z_2=0$,

所以 $\mathbf{n}_2=(2, -1, 0)$ 为平面 PAC 的一个法向量.

因为 $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 1 \times 2 + 2 \times (-1) + \frac{20}{m} \times 0 = 0$,

所以 $\mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2$,所以平面 $PAC \perp$ 平面 PCD .



提质归纳

空间中直线、平面的垂直
(设直线 l_1, l_2 的方向向量分别为 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, 平面 α, β 的法向量分别为 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$)

线线垂直: $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2 \Leftrightarrow \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$

线面垂直: $l_1 \perp \alpha \Leftrightarrow \mathbf{u}_1 \parallel \mathbf{n}_1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}, \mathbf{u}_1 = \lambda \mathbf{n}_1$

面面垂直: $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$

课后素养评价(九)

空间中直线、平面的垂直

A组 学习·理解

1.若 $\mathbf{a}=(-1, 2, 4), \mathbf{b}=(x, -1, -2)$ 分别为平面 α, β 的法向量,且 $\alpha \perp \beta$,则 x 的值为 ()

- A. 10 B. -10
C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

B 解析:因为 $\alpha \perp \beta$,所以平面 α, β 的法向量相互垂直,所以 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-1, 2, 4) \cdot (x, -1, -2) = -x - 2 - 8 = 0$,解得 $x = -10$.故选 B.

2.若直线 l 的一个方向向量为 $\mathbf{a}=(-1, 0, -2)$,平面 α 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(2, 0, 4)$,则 ()

- A. $l \parallel \alpha$
B. $l \perp \alpha$
C. $l \subset \alpha$
D. l 与 α 相交但不垂直

B 解析:因为 $\mathbf{n} = -2\mathbf{a}$,所以 $\mathbf{n} \parallel \mathbf{a}$,所以 $l \perp \alpha$.故选 B.

3.已知 $\mathbf{u}=(-2, 3, 3), \mathbf{v}=(3, -1, 3)$ 分别为平面 α, β 的法向量,则 ()

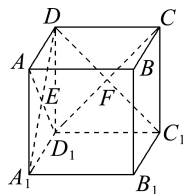
- A. $\alpha \parallel \beta$
B. $\alpha \perp \beta$
C. α, β 相交但不垂直
D. 以上都不正确

B 解析:由 $\mathbf{u}=(-2, 3, 3), \mathbf{v}=(3, -1, 3)$,可知 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$,所以平面 α, β 垂直.故选 B.

4.如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $A_1D \cap AD_1$

$=E, CD_1 \cap C_1D = F$,则下列结论中正确的是

()



- A. $BB_1 \parallel$ 平面 ACD_1
B. 平面 $BDC_1 \perp$ 平面 ACD_1
C. $EF \perp$ 平面 BDD_1B_1
D. 平面 ABB_1A_1 内存在与 EF 平行的直线

C 解析:由题意,设正方体的边长为2,以 D_1 为原点, D_1A_1 所在直线为 x 轴, D_1C_1 所在直线为 y 轴, D_1D 所在直线为 z 轴,建立空间直角坐标系(图略),则 $D_1(0,0,0), A(2,0,2), C(0,2,2), D(0,0,2), B(2,2,2), B_1(2,2,0), E(1,0,1), F(0,1,1)$,所以 $\overrightarrow{D_1A}=(2,0,2), \overrightarrow{D_1C}=(0,2,2)$.

设平面 ACD_1 的法向量为 $\mathbf{n}=(x, y, z)$,则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{D_1A} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{D_1C} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 2x + 2z = 0, \\ 2y + 2z = 0. \end{cases} \quad \text{令 } x=1, \text{ 则 } z=-1, y=1,$$

所以 $\mathbf{n}=(1, 1, -1)$ 为平面 ACD_1 的一个法向量.

$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,-2), \overrightarrow{BB_1} \cdot \mathbf{n} = 2 \neq 0$,故 A 不正确.

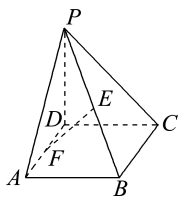
同理,解得平面 BDC_1 的一个法向量为 $\mathbf{m}=(-1, 1, 1)$,

$\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = -1 \neq 0$,故 B 不正确.

因为 $\overrightarrow{EF} = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{D_1D} = (0, 0, 2)$, $\overrightarrow{D_1B_1} = (2, 2, 0)$, 则 $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{D_1D} = 0$, $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{D_1B_1} = 0$, 所以 $EF \perp D_1D$, $EF \perp D_1B_1$. 又 $D_1D \cap D_1B_1 = D_1$, $D_1D, D_1B_1 \subset$ 平面 BDD_1B_1 , 所以 $EF \perp$ 平面 BDD_1B_1 , 故 C 正确.

平面 ABB_1A_1 的一个法向量为 $p = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{EF} \cdot p = -1 \neq 0$, 故 D 不正确. 故选 C.

5. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PD = 1$. 若 E, F 分别为 PB, AD 的中点, 则直线 EF 与平面 PBC 的位置关系是 _____.



垂直 解析: 由题意, 以 D 为原点, DA, DC, DP 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间直角坐标系 $Dxyz$ (图略), 则 $E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $P(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $F\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, 所以 $\overrightarrow{EF} = \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{PB} = (1, 1, -1)$, $\overrightarrow{PC} = (0, 1, -1)$.

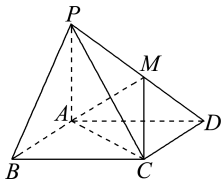
设平面 PBC 的法向量为 $n = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{PB} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{PC} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ y - z = 0. \end{cases}$

令 $y = 1$, 得 $n = (0, 1, 1)$ 为平面 PBC 的一个法向量. 因为 $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}n$, 所以 $\overrightarrow{EF} \parallel n$. 所以 $EF \perp$ 平面 PBC .

6. 设平面 α 的一个法向量为 $a = (-1, 2, -4)$, 平面 β 的一个法向量为 $b = (2, 3, 1)$, 则平面 α 与 β 的位置关系是 _____.

垂直 解析: 因为 $a \cdot b = -2 + 6 - 4 = 0$, 所以 $a \perp b$, 因此, $\alpha \perp \beta$.

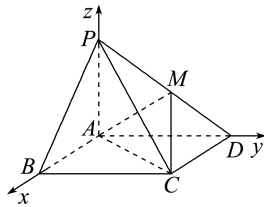
7. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 点 M 为 PD 的中点, $PA = AD = 1$. 求证: 平面 $MAC \perp$ 平面 PCD .



证明: 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, 侧棱 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 AB, AD, AP 两两垂直.

以 A 为原点, AB, AD, AP 所在直线分别为 x, y, z

轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(0, 0, 0)$, $P(0, 0, 1)$, $D(0, 1, 0)$, $C(1, 1, 0)$,

$M\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

所以 $\overrightarrow{PD} = (0, 1, -1)$, $\overrightarrow{CD} = (-1, 0, 0)$.

设平面 PCD 的法向量为 $m = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{PD} = y - z = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{CD} = -x = 0. \end{cases}$

令 $y = 1$, 则 $z = 1$, $x = 0$, 所以 $m = (0, 1, 1)$ 为平面 PCD 的一个法向量.

又 $\overrightarrow{AM} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0)$,

设平面 MAC 的法向量为 $n = (a, b, c)$,

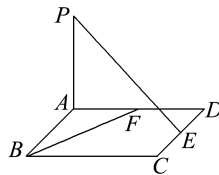
则 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{AC} = a + b = 0. \end{cases}$

令 $b = 1$, 则 $c = -1$, $a = -1$, 所以 $n = (-1, 1, -1)$ 为平面 MAC 的一个法向量.

因为 $m \cdot n = (0, 1, 1) \cdot (-1, 1, -1) = 1 - 1 = 0$, 所以平面 $MAC \perp$ 平面 PCD .

B组 应用·实践

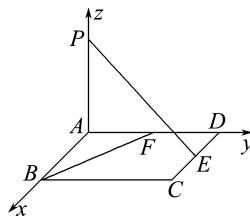
1. 如图, 已知 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 为正方形, E 为 CD 的中点, F 是 AD 上一点, 则当 $BF \perp PE$ 时, $\frac{AF}{FD}$ 等于 ()



A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 3

B 解析: 建立如图所示的空间直角坐标系, 设正方形 $ABCD$ 的边长为 1, $PA = a$,

则 $B(1, 0, 0)$, $E\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$, $P(0, 0, a)$.

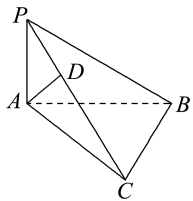


设 $F(0, y, 0)$, 则 $\overrightarrow{BF} = (-1, y, 0)$, $\overrightarrow{PE} = \left(\frac{1}{2}, 1, -a\right)$.

因为 $BF \perp PE$, 所以 $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{PE} = (-1) \times \frac{1}{2} + y \times 1 + 0 \times (-a) = 0$, 解得 $y = \frac{1}{2}$,

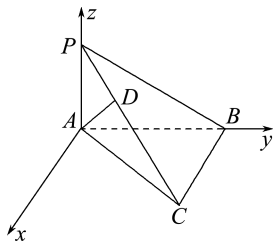
即 $F(0, \frac{1}{2}, 0)$, 可知 F 是 AD 的中点, 故 $\frac{AF}{FD} = 1$. 故选 B.

2. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $AB \perp BC$, 且 $AB=BC=2$, $AP=a$. 若 D 是棱 PC 上的点, 满足 $PD = \frac{1}{3}PC$, 且 $AD \perp PB$, 则 $a =$ _____.



$\sqrt{2}$ 解析: 因为 $PA \perp$ 平面 ABC , $AB, BC \subset$ 平面 ABC , 所以 $PA \perp AB, PA \perp BC$.

又 $AB \perp BC$, 故 PA, AB, BC 两两垂直. 以 A 为原点, AB, AP 所在直线分别为 y 轴、 z 轴, 过点 A 平行于 BC 的直线为 x 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(0, 0, 0), B(0, 2, 0), C(2, 2, 0), P(0, 0, a)$.

因为 $PD = \frac{1}{3}PC$, 所以 $D(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}a)$.

因为 $AD \perp PB$, 所以 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{PB} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}a) \cdot (0, 2, -a) = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}a^2 = 0$, 解得 $a = \sqrt{2}$ (负值舍去).

3. 已知 $a = (0, 1, 1), b = (1, 1, 0), c = (1, 0, 1)$ 分别是平面 α, β, γ 的法向量, 则 α, β, γ 三个平面中互相垂直的有 _____ 对.

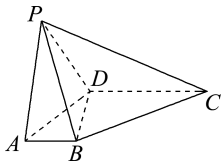
0 解析: 因为 $a \cdot b = (0, 1, 1) \cdot (1, 1, 0) = 1 \neq 0$,

$a \cdot c = (0, 1, 1) \cdot (1, 0, 1) = 1 \neq 0$,

$b \cdot c = (1, 1, 0) \cdot (1, 0, 1) = 1 \neq 0$,

所以 a, b, c 中任意两个向量都不垂直, 即 α, β, γ 三个平面中任意两个平面都不垂直.

4. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $ABCD \perp$ 平面 PCD , 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AB \parallel CD, AD \perp DC$, 且 $AB=1, AD=DC=DP=2, \angle PDC=120^\circ$.

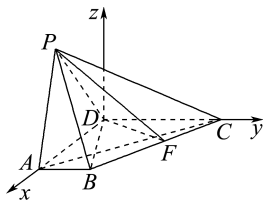


(1) 求证: $AD \perp$ 平面 PCD .

(2) 线段 BC 上是否存在点 F , 使得平面 $PDF \perp$ 平面 PAC ? 若存在, 求 $\frac{BF}{BC}$ 的值; 若不存在, 说明理由.

(1) 证明: 因为平面 $ABCD \perp$ 平面 PCD , 平面 $ABCD \cap$ 平面 $PCD = CD$, 且 $AD \perp DC, AD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $AD \perp$ 平面 PCD .

(2) 解: 以 D 为原点, DA, DC 所在直线分别为 x 轴、 y 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $P(0, -1, \sqrt{3}), C(0, 2, 0), A(2, 0, 0), B(2, 1, 0)$. 假设存在符合题意的点 F , 如图, 连接 PF, DF, AC ,

设 $\frac{BF}{BC} = \lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$, 则 $\overrightarrow{BF} = \lambda \overrightarrow{BC}$, 所以 $\overrightarrow{PF} = (2, 2, -\sqrt{3}), \overrightarrow{BC} = (-2, 1, 0), \overrightarrow{PA} = (2, 1, -\sqrt{3}), \overrightarrow{PC} = (0, 3, -\sqrt{3}), \overrightarrow{PD} = (0, 1, -\sqrt{3}), \overrightarrow{PF} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{PB} + \lambda \overrightarrow{BC} = (2 - 2\lambda, 2 + \lambda, -\sqrt{3})$.

设平面 PAC 的法向量为 $m = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \overrightarrow{PA} \cdot m = 0, \\ \overrightarrow{PC} \cdot m = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x + y - \sqrt{3}z = 0, \\ 3y - \sqrt{3}z = 0. \end{cases}$

令 $z = \sqrt{3}$, 则 $y = 1, x = 1$, 所以 $m = (1, 1, \sqrt{3})$ 为平面 PAC 的一个法向量.

设平面 PDF 的法向量为 $n = (a, b, c)$,

则 $\begin{cases} \overrightarrow{PD} \cdot n = 0, \\ \overrightarrow{PF} \cdot n = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} b - \sqrt{3}c = 0, ① \\ (2 - 2\lambda)a + (2 + \lambda)b - \sqrt{3}c = 0. ② \end{cases}$

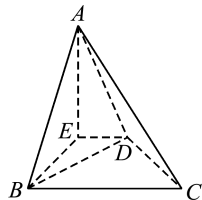
若平面 $PDF \perp$ 平面 PAC , 则 $m \cdot n = 0$, 即 $a + b + \sqrt{3}c = 0. ③$

联立①②③, 解得 $\lambda = \frac{3}{5}$.

所以线段 BC 上存在点 F , 使得平面 $PDF \perp$ 平面 PAC , 此时 $\frac{BF}{BC} = \frac{3}{5}$.

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $B = \frac{\pi}{2}, AB = 2BC$

$= 4$, 点 D, E 分别为边 AC, AB 的中点, 将 $\triangle AED$ 沿 DE 折起, 使得平面 $AED \perp$ 平面 $BCDE$, 得到如图所示的四棱锥 $A-BCDE$.



(1) 求证: $DC \perp AE$.

(2) 在平面 ACD 内是否存在点 M , 使得平面 $AEM \perp$ 平面 ABD ? 若存在, 指出点 M 的位置; 若不存在, 说明理由.

(1)证明:在 $\triangle ABC$ 中,因为点 D, E 分别为边 AC, AB 的中点,

所以 $DE \parallel BC$.又 $B = \frac{\pi}{2}$,所以 $AE \perp ED$.

又因为平面 $AED \perp$ 平面 $BCDE$,平面 $AED \cap$ 平面 $BCDE = ED, AE \subset$ 平面 AED ,

所以 $AE \perp$ 平面 $BCDE$.

又因为 $DC \subset$ 平面 $BCDE$,所以 $DC \perp AE$.

(2)解:由(1)知, $AE \perp ED, AE \perp EB, EB \perp ED$.

以 E 为原点, EB, ED, EA 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴,建立空间直角坐标系 $Exyz$,

则 $E(0,0,0), B(2,0,0), C(2,2,0), D(0,1,0), A(0,0,2)$,

所以 $\overrightarrow{EA} = (0,0,2), \overrightarrow{AB} = (2,0,-2), \overrightarrow{AD} = (0,1,-2)$.

设平面 ABD 的法向量为 $m = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{AD} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x - 2z = 0, \\ y - 2z = 0. \end{cases}$ 取 $z = 1$,则 $x = 1, y = 2$,所以 $m = (1, 2, 1)$ 为平面 ABD 的一个法向量.

假设在平面 ACD 内存在点 M ,使得平面 $AEM \perp$ 平面 ABD ,连接 AM .

若 $\overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{DC}$,则设 $\overrightarrow{AM} = \mu \overrightarrow{DC} = (2\mu, \mu, 0)$.设平面

AEM 的法向量为 $n = (a, b, c)$.

由 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{EA} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{AM} = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} 2c = 0, \\ 2\mu a + \mu b = 0. \end{cases}$ 取 $a = 1$,则 $b = -2, c = 0$,所以 $n = (1, -2, 0)$ 为平面 AEM 的一个法向量.

因为平面 ABD 的一个法向量为 $m = (1, 2, 1)$,所以由 $m \cdot n \neq 0$ 知,此情况不成立.

若 $\overrightarrow{AM}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 不共线,设 $AM \cap CD = N$,连接 EN ,如图.

设 $\overrightarrow{DN} = \lambda \overrightarrow{DC} = \lambda(2, 1, 0) = (2\lambda, \lambda, 0)$,则 $\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DN} = (2\lambda, \lambda + 1, 0)$.

当 $\overrightarrow{EN} \cdot \overrightarrow{BD} = (2\lambda, \lambda + 1, 0) \cdot (-2, 1, 0) = 0$,即 $\lambda = \frac{1}{3}$ 时, $BD \perp EN$.

又因为 $AE \perp BD, AE \cap EN = E, AE, EN \subset$ 平面 AEN ,所以 $BD \perp$ 平面 AEN .

因为 $BD \subset$ 平面 ABD ,所以平面 $ABD \perp$ 平面 AEN .

所以在平面 ACD 内存在点 M ,当点 M 在直线 AN (N 点在直线 CD 上且 $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DC}$)上时,平面

$AEM \perp$ 平面 ABD .

1.4.2 用空间向量研究距离、夹角问题

第1课时 用空间向量研究距离

学习任务目标

- 1.能用向量方法解决点到直线、点到平面、两条平行直线、两个平行平面的距离问题,并能描述解决这一类问题的步骤.
- 2.体会向量方法在研究几何问题中的作用.

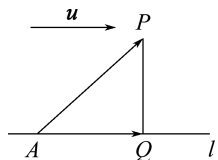
问题式预习

【知识清单】

知识点一 直线外一点到直线的距离

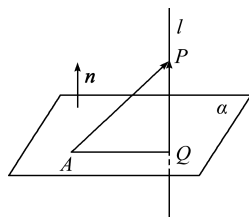
如图,设 $\overrightarrow{AP} = a$,直线 l 的单位方向向量为 u ,则向量 $\overrightarrow{AP}$ 在直线 l 上的投影向量 $\overrightarrow{AQ} = (a \cdot u)u$.在 $Rt\triangle APQ$

中,由勾股定理,得 $PQ = \sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2 - |\overrightarrow{AQ}|^2} = \sqrt{a^2 - (a \cdot u)^2}$.



知识点二 平面外一点到平面的距离

如图,已知平面 α 的法向量为 n , A 是平面 α 内的定点, P 是平面 α 外一点.过点 P 作平面 α 的垂线 l ,交平面 α 于点 Q ,则 n 是直线 l 的方向向量,且点 P 到平面 α 的距离就是 $\overrightarrow{AP}$ 在直线 l 上的投影向量 $\overrightarrow{QP}$ 的长度.因此 $PQ = \left| \overrightarrow{AP} \cdot \frac{n}{|n|} \right| = \left| \frac{\overrightarrow{AP} \cdot n}{|n|} \right| = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot n|}{|n|}$.



知识点三 用空间向量解决立体几何问题的“三步曲”

(1)建立立体图形与空间向量的联系,用空间向量表示问题中涉及的点、直线、平面,把立体几何问题转化为向量问题;

(2)通过向量运算,研究点、直线、平面之间的位置关系以及它们之间的距离和夹角等问题;

(3)把向量运算的结果“翻译”成相应的几何结论.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)平面 α 外一点 A 到平面 α 的距离,就是以点 A 为起点,以平面 α 内一点 B 为终点的向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度. (×)

(2)若直线 $l \parallel$ 平面 α ,则直线 l 到平面 α 的距离就是直线 l 上的任一点到平面 α 的距离. (√)

(3)若平面 $\alpha \parallel$ 平面 β ,则两平面的距离可转化为平面 α 内某条直线到平面 β 的距离,也可转化为平面 α 内某点到平面 β 的距离. (√)

(4) l_1 与 l_2 为异面直线,在 l_1 上任取一点 P ,在 l_2 上任取一点 Q ,则 $|\overrightarrow{PQ}|$ 的最小值就是 l_1 与 l_2 的距离. (√)

2.已知直线 l 经过点 $A(2, 3, 1)$,且向量 $\mathbf{n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 为 l 的一个单位方向向量,则点 $P(4, 3, 2)$ 到 l 的距离为_____.

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 解析:因为 $\overrightarrow{PA} = (-2, 0, -1)$, $\mathbf{n} =$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ 为 } l \text{ 的一个单位方向向量, 所以点 } P \text{ 到 } l \text{ 的距离 } d = \sqrt{|\overrightarrow{PA}|^2 - (\overrightarrow{PA} \cdot \mathbf{n})^2} = \sqrt{5 - \left(-\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

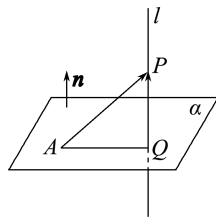
3.请思考并回答下列问题:

(1)怎样利用向量方法求直线与直线的距离、直线到平面的距离、平面与平面的距离?

提示:两条直线平行,两条直线的距离是其中一条直线上任一点到另一条直线的距离;一条直线和一个平面平行,直线与平面的距离就是这条直线上任一点到这个平面的距离;两个平面平行,平面与平面的距离就是一个平面上任一点到另一个平面的距离.

(2)已知平面 α 的法向量为 $\mathbf{n}$, A 是平面 α 内的定点, P 是平面 α 外一点, l 是过点 P 的平面 α 的垂线,则点 P 到平面 α 的距离与 $\overrightarrow{AP}$ 在直线 l 上的投影向量有什么关系?

提示:实质上, $\mathbf{n}$ 是直线 l 的方向向量,点 P 到平面 α 的距离就是 $\overrightarrow{AP}$ 在直线 l 上的投影向量 $\overrightarrow{QP}$ 的长度.



任务型课堂

任务1 利用空间向量求点到直线的距离

1.已知 $A(0, 0, 2)$, $B(1, 0, 2)$, $C(0, 2, 0)$, 则点 A 到直线 BC 的距离为 ()

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

A 解析:因为 $A(0, 0, 2)$, $B(1, 0, 2)$, $C(0, 2, 0)$, 所以 $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (-1, 2, -2)$. 所以点 A 到直线 BC 的距离

$$d = \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \text{ 故选 A.}$$

2.已知 $\mathbf{m} = (1, \sqrt{2}, -1)$ 为直线 l 的方向向量.若点 $P(-1, 1, -1)$ 为直线 l 外一点, $A(4, 1, -2)$ 为直线 l 上一点,则点 P 到直线 l 的距离为_____.

$\sqrt{17}$ 解析:因为 $\mathbf{m} = (1, \sqrt{2}, -1)$, 所以 $\frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{m}|} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

因为 $P(-1, 1, -1)$, $A(4, 1, -2)$, 所以 $\overrightarrow{PA} = (5, 0, -1)$. 所以点 P 到直线 l 的距离为

$$\sqrt{|\overrightarrow{PA}|^2 - \left(\overrightarrow{PA} \cdot \frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{m}|}\right)^2} = \sqrt{26 - 9} = \sqrt{17}.$$

【探究总结】

用向量法求点到直线的距离的一般步骤

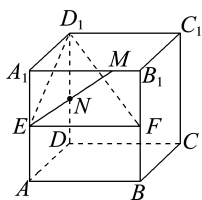
(1)建立空间直角坐标系,并求相应点的坐标;
(2)求出直线的方向向量 $\mathbf{a}$ 的坐标,并求 $|\mathbf{a}|$;
(3)求以直线上某一特殊点为起点,已知的直线外的点为终点的向量 $\mathbf{b}$ 的坐标,并求 b^2 ,计算 $\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$;

(4)利用 $\sqrt{b^2 - \left(\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right)^2}$,求点到直线的距离.

任务2 利用空间向量求点到平面的距离

探究活动

例1 如图,在棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为棱 AA_1, BB_1 的中点, M 为棱 A_1B_1 上的一点,且 $A_1M = \lambda$ ($0 < \lambda < 2$).设 N 为 ME 的中点,求点 N 到平面 D_1EF 的距离.



解:以 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间直角坐标系(图略), 则 $M(2, \lambda, 2), D_1(0, 0, 2), E(2, 0, 1), F(2, 2, 1)$, 所以 $\overrightarrow{ED_1} = (-2, 0, 1), \overrightarrow{EF} = (0, 2, 0), \overrightarrow{EM} = (0, \lambda, 1)$.

设平面 D_1EF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{ED_1} = -2x + z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EF} = 2y = 0. \end{cases}$$

取 $x = 1$, 得 $\mathbf{n} = (1, 0, 2)$ 为平面 D_1EF 的一个法向量.

所以点 M 到平面 D_1EF 的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{EM} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $= \frac{2\sqrt{5}}{5}$. 因为 N 为 ME 的中点, 所以点 N 到平面

D_1EF 的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

【一题多思】

思考 1. 本例中的点 M 是棱 A_1B_1 上的动点, 为什么求出的点 N 到平面 D_1EF 的距离为定值?

解: 因为 $A_1B_1 \parallel$ 平面 D_1EF , 所以 A_1B_1 上任意一点到平面 D_1EF 的距离相等, 且为定值.

又 N 为 ME 的中点, 所以 N 到平面 D_1EF 的距离为定值.

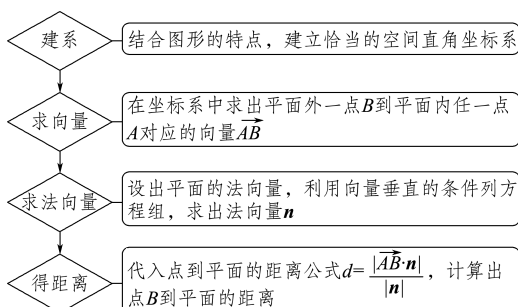
思考 2. 在本例中, 你还有什么方法求点 N 到平面 D_1EF 的距离?

解: 由例 1 的解析, 易知 $N\left(2, \frac{\lambda}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $\overrightarrow{EN} = \left(0, \frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

又平面 D_1EF 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (1, 0, 2)$, 所以点 N 到平面 D_1EF 的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{EN} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

【探究总结】

用向量法求点到平面的距离的四个步骤



应用迁移

1. 已知点 $M(0, 1, -2)$, 平面 α 过原点, 且垂直于向量 $\mathbf{n} = (1, -2, 2)$, 则点 M 到平面 α 的距离为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. 2
C. 6 D. $\sqrt{6}$

B 解析: 由题意可知点 M 到平面 α 的距离即为 $\overrightarrow{OM}$ 在 $\mathbf{n}$ 上的投影长度.

因为 $M(0, 1, -2)$, 所以 $\overrightarrow{OM} = (0, 1, -2)$.

所以 $\overrightarrow{OM} \cdot \mathbf{n} = 0 \times 1 + 1 \times (-2) + (-2) \times 2 = -6$,

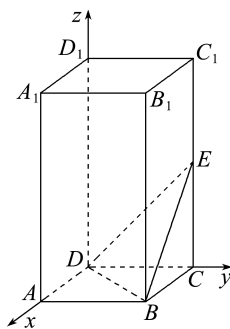
$$|\mathbf{n}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3.$$

所以点 M 到平面 α 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{OM} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|-6|}{3} =$

2. 故选 B.

2. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, $AB = 1, AA_1 = 2$, 点 E 为 CC_1 的中点, 求点 D_1 到平面 BDE 的距离.

解: 以 D 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系 $Dxyz$,



则 $D(0, 0, 0), B(1, 1, 0), D_1(0, 0, 2), E(0, 1, 1)$,

所以 $\overrightarrow{DB} = (1, 1, 0), \overrightarrow{DE} = (0, 1, 1)$.

设平面 BDE 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则 $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{DB}$, $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{DE}$,

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DE} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x + y = 0, \\ y + z = 0. \end{cases}$$

取 $x = 1$, 则 $y = -1, z = 1$, 所以 $\mathbf{n} = (1, -1, 1)$ 是平面 BDE 的一个法向量.

因为点 D_1 到平面 BDE 的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{DD_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$, $\overrightarrow{DD_1} = (0, 0, 2)$,

所以 $\overrightarrow{DD_1} \cdot \mathbf{n} = 2, |\mathbf{n}| = \sqrt{3}$,

$$\text{所以 } d = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

即点 D_1 到平面 BDE 的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

任务3 利用空间向量求直线与平面、平面与平面、异面直线的距离

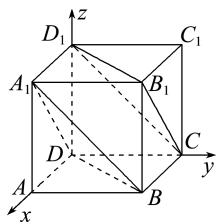
探究活动

例2 设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 求:

(1) 直线 B_1C 到平面 A_1BD 的距离;

(2) 平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 间的距离.

解: (1) 以 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $D(0,0,0), B(2,2,0), A_1(2,0,2), B_1(2,2,2), C(0,2,0)$,

所以 $\overrightarrow{CB_1} = (2,0,2), \overrightarrow{DA_1} = (2,0,2), \overrightarrow{DB} = (2,2,0)$,

所以 $\overrightarrow{CB_1} \parallel \overrightarrow{DA_1}$, 即 $CB_1 \parallel DA_1$.

又 $CB_1 \not\subset$ 平面 $A_1BD, DA_1 \subset$ 平面 A_1BD , 所以 $CB_1 \parallel$ 平面 A_1BD ,

所以直线 B_1C 到平面 A_1BD 的距离等于点 B_1 到平面 A_1BD 的距离.

设平面 A_1BD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DA_1} = 2x + 2z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 2x + 2y = 0. \end{cases} \quad \text{令 } x = 1, \text{ 则 } \mathbf{n} = (1, -1, -1)$$

为平面 A_1BD 的一个法向量. 又 $\overrightarrow{A_1B_1} = (0, 2, 0)$,

所以点 B_1 到平面 A_1BD 的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{A_1B_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} =$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

(2) 由 (1) 知, $CB_1 \parallel$ 平面 A_1BD , 同理, $D_1B_1 \parallel$ 平面 A_1BD ,

又 $CB_1 \cap D_1B_1 = B_1, CB_1, D_1B_1 \subset$ 平面 B_1CD_1 ,

所以平面 $A_1BD \parallel$ 平面 B_1CD_1 ,

即平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 间的距离等于点 B_1 到平面 A_1BD 的距离.

由 (1) 知, 点 B_1 到平面 A_1BD 的距离 $d = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

所以平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 间的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

【探究总结】

直线到平面的距离、平行平面间的距离, 均可以转化为点到平面的距离进行求解.

应用迁移

在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形, $PA \perp$ 底面 $ABCD, PA = 6$, 点 G 在侧棱 PB 上, 且满足 $2PG = GB$, 则异面直线 PC 和 DG 的距离为 ()

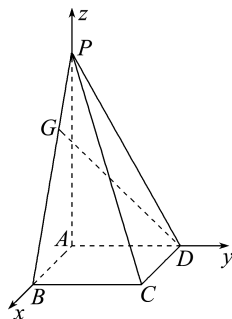
A. $\frac{3\sqrt{14}}{14}$

B. $\frac{3\sqrt{15}}{15}$

C. $\frac{3\sqrt{21}}{7}$

D. $\frac{3\sqrt{77}}{77}$

A 解析: 如图, 以 A 为原点, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AP}$ 的方向分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间直角坐标系,



则 $B(3,0,0), C(3,3,0), D(0,3,0), P(0,0,6), G(1,0,4)$,

所以 $\overrightarrow{DG} = (1, -3, 4), \overrightarrow{PC} = (3, 3, -6), \overrightarrow{DC} = (3, 0, 0)$.

设 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ 为直线 PC 和 DG 的公垂线的方向向量,

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DG} = x - 3y + 4z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 3x + 3y - 6z = 0. \end{cases} \quad \text{可取 } \mathbf{n} = (1, 3, 2),$$

所以异面直线 PC 和 DG 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{DC} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{3}{\sqrt{14}}$

$= \frac{3\sqrt{14}}{14}$. 故选 A.

提质归纳

点到直线的距离:

$$d = \sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2 - |\overrightarrow{AQ}|^2} = \sqrt{a^2 - (a \cdot u)^2}$$

用空间向量研究距离(设 $\overrightarrow{AP} = \mathbf{a}, \mathbf{u}$ 为直线的单位方向向量, $\mathbf{n}$ 为平面的法向量)

点到平面的距离:

$$d = \left| \overrightarrow{AP} \cdot \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right| = \left| \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right| = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$$

直线到平面、平面与平面的距离: 转化为点面距

课后素养评价(十)

用空间向量研究距离

A组 学习·理解

1. 已知点 $A(-1, -1, -1)$, 直线 l 过原点且一个方向向量为 $a = (0, 1, 2)$, 则点 A 到 l 的距离为 ()

A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B. 1 C. $\frac{\sqrt{30}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{35}}{5}$

C 解析: 由题意取 $P(0, 1, 2)$, 则 $\overrightarrow{AP} = (1, 2, 3)$, 所以点 A 到 l 的距离为 $d = \sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2 - \left(\frac{\overrightarrow{AP} \cdot a}{|a|}\right)^2}$

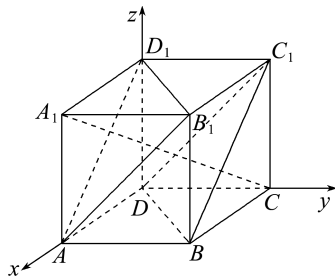
$$= \sqrt{(1^2 + 2^2 + 3^2) - \left(\frac{2+6}{\sqrt{1^2+2^2}}\right)^2} = \sqrt{14 - \frac{64}{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}$$
. 故选 C.

2. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 则平面 AB_1D_1 与平面 BDC_1 的距离为 ()

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D 解析: 由正方体的性质得 $AB_1 \parallel DC_1$, $D_1B_1 \parallel DB$, $AB_1 \cap D_1B_1 = B_1$, $DC_1 \cap DB = D$, 且 $AB_1 \subset$ 平面 AB_1D_1 , $D_1B_1 \subset$ 平面 AB_1D_1 , $DC_1 \subset$ 平面 BDC_1 , $DB \subset$ 平面 BDC_1 , 所以平面 $AB_1D_1 \parallel$ 平面 BDC_1 , 则两平面间的距离可转化为点 B 到平面 AB_1D_1 的距离.

以 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间直角坐标系, 如图所示.



由正方体的棱长为 1, 所以 $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $A_1(1, 0, 1)$, $C(0, 1, 0)$, $B_1(1, 1, 1)$, $D_1(0, 0, 1)$, 所以 $\overrightarrow{CA_1} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{BA} = (0, -1, 0)$, $\overrightarrow{AB_1} = (0, 1, 1)$, $\overrightarrow{B_1D_1} = (-1, -1, 0)$.

连接 A_1C , 因为 $\overrightarrow{CA_1} \cdot \overrightarrow{AB_1} = (1, -1, 1) \cdot (0, 1, 1) = 1 \times 0 + (-1) \times 1 + 1 \times 1 = 0$, $\overrightarrow{CA_1} \cdot \overrightarrow{B_1D_1} = (1, -1, 1) \cdot (-1, -1, 0) = 1 \times (-1) + (-1) \times (-1) + 1 \times 0 = 0$,

所以 $\overrightarrow{CA_1} \perp \overrightarrow{AB_1} \Rightarrow CA_1 \perp AB_1$, $\overrightarrow{CA_1} \perp \overrightarrow{B_1D_1} \Rightarrow CA_1 \perp B_1D_1$. 又 $AB_1 \cap B_1D_1 = B_1$, $AB_1, B_1D_1 \subset$ 平面 AB_1D_1 ,

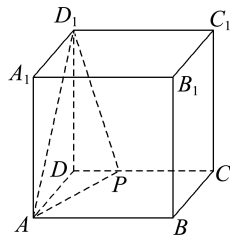
所以 $CA_1 \perp$ 平面 AB_1D_1 , 得平面 AB_1D_1 的一个法

向量为 $\overrightarrow{CA_1} = n = (1, -1, 1)$.

故两平面间的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot n|}{|n|} = \frac{|0 \times 1 + (-1) \times (-1) + 0 \times 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

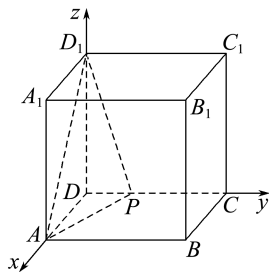
故选 D.

3. (多选) 如图, 在棱长为 3 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 在棱 DC 上运动 (不与顶点重合), 则点 B 到平面 AD_1P 的距离可以是 ()



A. 1 B. $\sqrt{6}$ C. 2 D. 3

BC 解析: 如图, 以 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间直角坐标系,



则 $D(0, 0, 0)$, $A(3, 0, 0)$, $B(3, 3, 0)$, $D_1(0, 0, 3)$. 设 $P(0, t, 0)$ ($0 < t < 3$),

所以 $\overrightarrow{AP} = (-3, t, 0)$, $\overrightarrow{AD_1} = (-3, 0, 3)$, $\overrightarrow{AB} = (0, 3, 0)$.

设平面 AD_1P 的法向量为 $n = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{AP} = -3x + ty = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{AD_1} = -3x + 3z = 0. \end{cases}$ 取 $y = 3$, 则 $x = t, z = t$, 所以 $n = (t, 3, t)$ 是平面 AD_1P 的一个法向量.

故点 B 到平面 AD_1P 的距离为 $d = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot n|}{|n|}$

$$= \frac{9}{\sqrt{2t^2 + 9}}.$$

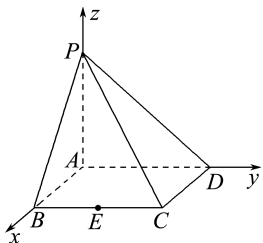
因为 $0 < t < 3$, 所以 $2t^2 + 9 \in (9, 27)$, 所以 $d \in (\sqrt{3}, 3)$. 故选 BC.

4. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = AB = 1$, 点 E 是 BC 的中点, 则点 E 到直线 PD 的距离是 ()

A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

D 解析:由题意建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $P(0,0,1), D(0,1,0), E\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$,



所以 $\overrightarrow{PD} = (0, 1, -1), \overrightarrow{DE} = \left(1, -\frac{1}{2}, 0\right)$,

所以 $|\overrightarrow{DE}| = \frac{\sqrt{5}}{2}, |\overrightarrow{PD}| = \sqrt{2}, \frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{PD}}{|\overrightarrow{PD}|} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$,

所以点 E 到直线 PD 的距离是 $\sqrt{|\overrightarrow{DE}|^2 - \left(\frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{PD}}{|\overrightarrow{PD}|}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{1}{8}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. 故选 D.

B组 应用·实践

1. (多选) 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 点 E, O 分别是 A_1B_1, A_1C_1 的中点, 点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$, 则下列说法正确的是 ()

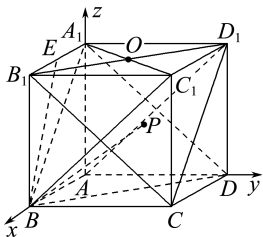
A. 点 A 到直线 BE 的距离是 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

B. 点 O 到平面 ABC_1D_1 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

C. 平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 间的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D. 点 P 到直线 AB 的距离为 $\frac{25}{36}$

AB 解析:如图,建立空间直角坐标系,



则 $A(0,0,0), B(1,0,0), D(0,1,0), A_1(0,0,1), C_1(1,1,1), D_1(0,1,1), E\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right), O\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$,

所以 $\overrightarrow{BA} = (-1, 0, 0), \overrightarrow{BE} = \left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right)$.

设 $\angle ABE = \theta$, 则 $\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE}|}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BE}|} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \sin \theta$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

故点 A 到直线 BE 的距离 $d_1 = |\overrightarrow{BA}| \sin \theta = 1 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 故 A 正确.

易知 $\overrightarrow{C_1O} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$, 平面 ABC_1D_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{DA_1} = (0, -1, 1)$,

则点 O 到平面 ABC_1D_1 的距离 $d_2 = \frac{|\overrightarrow{DA_1} \cdot \overrightarrow{C_1O}|}{|\overrightarrow{DA_1}|}$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ 故 B 正确.}$$

$\overrightarrow{A_1B} = (1, 0, -1), \overrightarrow{A_1D} = (0, 1, -1), \overrightarrow{A_1D_1} = (0, 1, 0)$,

设平面 A_1BD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1D} = 0, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} x - z = 0, \\ y - z = 0. \end{cases}$$

令 $z = 1$, 得 $y = 1, x = 1$, 所以 $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$ 为平面 A_1BD 的一个法向量.

所以点 D_1 到平面 A_1BD 的距离 $d_3 = \frac{|\overrightarrow{A_1D_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

由题易知平面 $A_1BD \parallel$ 平面 B_1CD_1 ,

所以平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 间的距离等于点 D_1 到平面 A_1BD 的距离,

所以平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 间的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故 C 错误.

因为 $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$, 所以 $\overrightarrow{AP} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$.

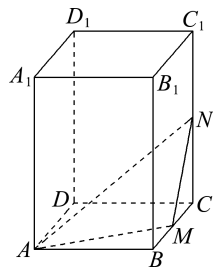
又 $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0)$, 所以 $\frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{3}{4}$,

所以点 P 到直线 AB 的距离 $d_4 =$

$$\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2 - \left(\frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right)^2} = \sqrt{\frac{181}{144} - \frac{9}{16}} = \frac{5}{6}, \text{ 故 D}$$

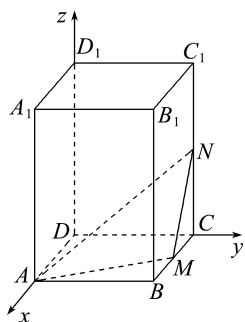
错误. 故选 AB.

2. 如图, 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 ABCD 是正方形, $AB = 2, AA_1 = 3$, M 是 BC 的中点, 点 N 是棱 CC_1 上的一个动点, 则点 A_1 到平面 AMN 的距离的最小值为 ()



A.1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{6}{7}$

D 解析:由题意知,该几何体为长方体,建立空间直角坐标系如图所示,



则 $A(2,0,0), M(1,2,0)$, 所以 $\overrightarrow{AM}=(-1,2,0)$.

设 $N(0,2,t)(0 \leq t \leq 3)$, 则 $\overrightarrow{MN}=(-1,0,t)$.

设平面 AMN 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AM} = -x + 2y = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{MN} = -x + tz = 0. \end{cases}$$

令 $y=t$, 则 $x=2t, z=2$, 所以 $\boldsymbol{n}=(2t,t,2)$ 为平面 AMN 的一个法向量.

又 $\overrightarrow{AA_1}=(0,0,3)$, 所以点 A_1 到平面 AMN 的

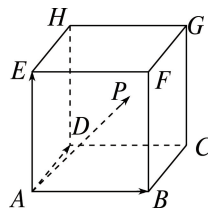
距离为 $\frac{|\overrightarrow{AA_1} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{6}{\sqrt{5t^2+4}}.$

又 $0 \leq t^2 \leq 9, 4 \leq 5t^2+4 \leq 49$, 所以当 $t=3, 5t^2+4=49$ 时,

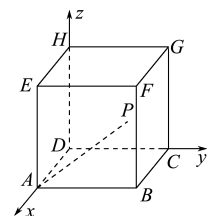
点 A_1 到平面 AMN 的距离取得最小值为 $\frac{6}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}.$

故选 D.

3.如图,正方体 $ABCD-EFGH$ 的棱长为 1.若点 P 在正方体的内部且满足 $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$, 则点 P 到直线 AB 的距离为 $\frac{5}{6}$.



$\frac{5}{6}$ 解析:由题意,以 D 为原点, DA, DC, DH 所在的直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(1,0,0), B(1,1,0), D(0,0,0), E(1,0,1)$, 所

以 $\overrightarrow{AB}=(0,1,0), \overrightarrow{AD}=(-1,0,0), \overrightarrow{AE}=(0,0,1)$,

则 $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}(0,1,0) + \frac{1}{2}(-1,0,0) + \frac{2}{3}(0,0,1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}\right).$

设点 P 到直线 AB 的距离为 d ,

则 $d = \sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2 - \left(\frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right)^2} = \sqrt{\frac{181}{144} - \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{100}{144}} = \frac{5}{6}.$

第2课时 用空间向量研究夹角

学习任务目标

- 1.利用图形,能用向量语言表述直线与直线、直线与平面、平面与平面的夹角.
- 2.能用向量方法解决线线、线面、面面夹角的计算问题,体会向量方法在研究几何问题中的作用.

问题式预习

【知识清单】

知识点 空间角的向量求法

角	向量求法	与相应向量夹角的关系	范围
异面直线所成的角	设异面直线 l_1, l_2 所成的角为 θ , 其方向向量分别是 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$, 则 $\cos \theta = \cos \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \frac{ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} }{ \boldsymbol{u} \boldsymbol{v} }$	与 $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ 相等或互补	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

续表

角	向量求法	与相应向量夹角的关系	范围
直线与平面所成的角	设直线 l 与平面 α 所成的角为 θ , 直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{u}$, 平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$, 则 $\sin \theta = \cos \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{n} \rangle = \frac{ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} }{ \boldsymbol{u} \boldsymbol{n} }$	$\theta = \left \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{n} \rangle - \frac{\pi}{2} \right $	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

续表

角	向量求法	与相应向量 夹角的关系	范围
平面 与平面 的 夹角	设平面 α, β 的法向量 分别是 $\mathbf{n}_1$ 和 $\mathbf{n}_2$, 平面 α 与平面 β 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{ \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle }{1}$ $= \frac{ \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 }{ \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 }$	与 $\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle$ 相 等或互补	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打“√”, 错误的打“×”).

(1) 两异面直线所成的角与两直线的方向向量所成的角相等. (×)

(2) 直线 l 的方向向量与平面 α 的法向量的夹角的余角就是直线 l 与平面 α 所成的角. (×)(3) 若平面 α 和 β 的夹角为 θ , 平面 α, β 的法向量分别为 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$, 则 $\theta = \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle$. (×)2. 已知 $\mathbf{m}$ 是直线 l 的方向向量, $\mathbf{n}$ 是平面 α 的法向量, 若 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 l 与 α 所成的角为 ()A. 30° B. 60°
C. 150° D. 120° B 解析: 设 l 与 α 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 又 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, 所以 $\theta = 60^\circ$.3. 若直线 a 的一个方向向量是 $\mathbf{m} = (1, 0, 1)$, 平面 α 的一个法向量是 $\mathbf{n} = (-3, 1, 3)$, 则直线 a 与平面 α 所成的角为 ()
A. 0° B. 45°
C. 60° D. 90° A 解析: 已知直线 a 的一个方向向量是 $\mathbf{m} = (1, 0, 1)$, 平面 α 的一个法向量是 $\mathbf{n} = (-3, 1, 3)$,设直线 a 与平面 α 所成的角为 θ , 则 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$,

$$\text{所以 } \sin \theta = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{0}{\sqrt{2} \times \sqrt{19}} = 0,$$

所以 $\theta = 0^\circ$, 故直线 a 与平面 α 所成的角为 0° .4. 已知 $\mathbf{m} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{n} = (1, -1, 0)$ 分别为两个平面的法向量, 则这两个平面的夹角为 ()
A. 30° B. 60°
C. 60° 或 120° D. 120°

$$\text{B 解析: } \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{-1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = -\frac{1}{2},$$

因为两个向量夹角的范围为 $[0, \pi]$,所以两个法向量的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$, 故两个平面的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 即 60° . 故选 B.

5. 请思考并回答下列问题:

(1) 二面角与平面的夹角范围一样吗?

提示: 不一样. 二面角的范围为 $[0, \pi]$, 而两个平面的夹角是不大于直角的角, 范围是 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(2) 平面与平面的夹角与两平面的法向量的夹角有何关系?

提示: 平面与平面的夹角是两平面的法向量的夹角或其补角.

(3) 直线与平面所成的角和直线的方向向量与平面的法向量所成的角有怎样的关系?

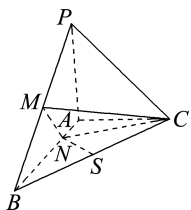
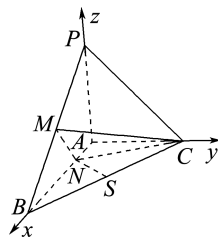
提示: 设 $\mathbf{n}$ 为平面 α 的法向量, $\mathbf{a}$ 为直线 a 的方向向量, 直线 a 与平面 α 所成的角为 θ , 则 θ

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle, & \langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle - \frac{\pi}{2}, & \langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$

○ 任务型课堂 ○

任务1 求线线角、线面角

探究活动

例1 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $AB \perp AC$, $PA = AC = \frac{1}{2}AB$, N 为 AB 上一点, $AB = 4AN$, M, S 分别为 PB, BC 的中点.(1) 求证: $CM \perp SN$;(2) 求 SN 与平面 CMN 所成角的大小.(1) 证明: 设 $PA = 1$, 以 A 为原点, AB, AC, AP 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,则 $P(0, 0, 1)$, $C(0, 1, 0)$, $B(2, 0, 0)$.又 $AB = 4AN$, M, S 分别为 PB, BC 的中点,所以 $N\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $M\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$, $S\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$.

$$\text{所以 } \overrightarrow{CM} = \left(1, -1, \frac{1}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{SN} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{SN} = \left(1, -1, \frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) = 0.$$

因此 $CM \perp SN$.

$$(2) \text{解: } \overrightarrow{NC} = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right).$$

设平面 CMN 的法向量为 $\mathbf{a} = (x, y, z)$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{CM} \cdot \mathbf{a} = 0, \overrightarrow{NC} \cdot \mathbf{a} = 0,$$

$$\text{则 } \begin{cases} x - y + \frac{1}{2}z = 0, \\ -\frac{1}{2}x + y = 0, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} x = 2y, \\ z = -2y. \end{cases}$$

取 $y = 1$, 得 $\mathbf{a} = (2, 1, -2)$ 为平面 CMN 的一个法向量.

$$\text{因为 } \cos \langle \mathbf{a}, \overrightarrow{SN} \rangle = \frac{-1 - \frac{1}{2}}{3 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{所以 } \langle \mathbf{a}, \overrightarrow{SN} \rangle = \frac{3}{4}\pi.$$

$$\text{所以 } SN \text{ 与平面 } CMN \text{ 所成的角为 } \frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

【一题多思】

思考 1. 我们知道求直线与平面所成角的公式为 $\sin \theta$

$$= |\cos \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{u}| |\mathbf{n}|} = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{u}| |\mathbf{n}|}, \text{ 为了更好地}$$

理解和记忆公式, 你能用一句话来解释它吗?

提示: 直线与平面所成的角的正弦值等于其方向向量与平面法向量夹角的余弦值的绝对值.

思考 2. 本例中, 在线段 BC 上是否存在一点 E , 使 EN 与平面 CMN 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$? 若存在,

求出点 E 的位置; 若不存在, 说明理由.

解: 设 $\overrightarrow{CE} = \lambda \overrightarrow{CB} = (2\lambda, -\lambda, 0)$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), 故 $E(2\lambda, 1 - \lambda, 0)$, 所以 $\overrightarrow{NE} = \left(2\lambda - \frac{1}{2}, 1 - \lambda, 0\right)$.

由例题解析可知, 平面 CMN 的一个法向量为 $\mathbf{a} = (2, 1, -2)$,

$$\text{所以 } \sin \theta = \frac{|\overrightarrow{NE} \cdot \mathbf{a}|}{|\overrightarrow{NE}| |\mathbf{a}|} = \frac{1}{3}, \text{ 解得 } \lambda = \frac{1}{4},$$

所以存在点 E , 且满足 $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{4} \overrightarrow{CB}$ 时, 使得 EN 与平面 CMN 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$.

【探究总结】

1. 求异面直线所成角的步骤

- (1) 确定两条异面直线的方向向量;
- (2) 确定两个向量夹角的余弦值的绝对值;
- (3) 得出两条异面直线所成的角.

2. 利用平面的法向量求直线与平面所成角的基本步骤

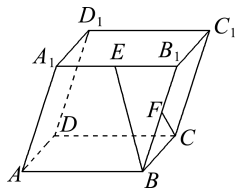
- (1) 建立空间直角坐标系;
- (2) 求直线的方向向量 $\mathbf{u}$;
- (3) 求平面的法向量 $\mathbf{n}$;

$$(4) \text{ 设直线与平面所成的角为 } \theta, \text{ 则 } \sin \theta = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{u}| |\mathbf{n}|}.$$

应用迁移

已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长都是 1, 且 $\angle A_1AB = \angle A_1AD = \angle BAD = 60^\circ$, E, F 分别为 A_1B_1, BB_1 的中点, 求异面直线 BE 与 CF 所成角的余弦值.

解: 如图所示, 设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AD} = \mathbf{b}, \overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c}$,



$$\text{则 } |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1,$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = 60^\circ,$$

$$\text{所以 } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{而 } \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1E} = -\frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{c},$$

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF} = -\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c},$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{BE}| = \sqrt{\frac{1}{4}|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{c}|^2 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, |\overrightarrow{CF}| = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CF} = \left(-\frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{c}\right) \cdot \left(-\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \frac{1}{4}\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{c}^2 = \frac{1}{8}.$$

$$\text{因为 } \cos \langle \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF} \rangle = \frac{\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CF}}{|\overrightarrow{BE}| \cdot |\overrightarrow{CF}|} = \frac{1}{6},$$

所以异面直线 BE 与 CF 所成角的余弦值是 $\frac{1}{6}$.

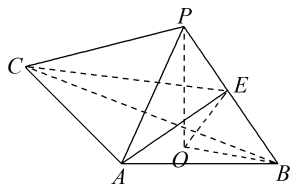
任务 2 求平面与平面的夹角

探究活动

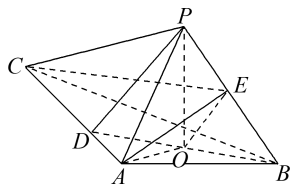
例 2 如图, PO 是三棱锥 $P-ABC$ 的高, $PA = PB$, $AB \perp AC$, E 是 PB 的中点.

(1) 求证: $OE \parallel$ 平面 PAC ;

(2) 若 $\angle ABO = \angle CBO = 30^\circ$, $PO = 3$, $PA = 5$, 求平面 ACE 与平面 ABE 的夹角的正弦值.



(1) 证明: 如图, 延长 BO 交 AC 于点 D , 连接 OA, PD .



因为 PO 是三棱锥 $P-ABC$ 的高, 所以 $PO \perp$ 平面 ABC . 因为 $AO, BO \subset$ 平面 ABC ,

所以 $PO \perp AO, PO \perp BO$.

又 $PA = PB$, 所以 $\triangle POA \cong \triangle POB$, 所以 $OA = OB$, 所以 $\angle OAB = \angle OBA$.

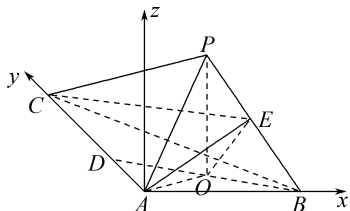
又 $AB \perp AC$, 即 $\angle BAC = 90^\circ$, 所以 $\angle OAB + \angle OAD = 90^\circ$, $\angle OBA + \angle ODA = 90^\circ$,

所以 $\angle ODA = \angle OAD$,

所以 $AO = DO$, 即 $AO = DO = OB$, 所以 O 是 BD 的中点. 又 E 是 PB 的中点, 所以 $OE \parallel PD$.

因为 $OE \not\subset$ 平面 PAC , $PD \subset$ 平面 PAC , 所以 $OE \parallel$ 平面 PAC .

(2) 解: 过点 A 作 $Az \parallel OP$, 建立如图所示的空间直角坐标系.



因为 $PO = 3, AP = 5$, 所以 $OA = \sqrt{AP^2 - PO^2} = 4$.

又 $\angle ABO = \angle CBO = 30^\circ$, 所以 $BD = 2OA = 8, AD = 4, AB = 4\sqrt{3}$,

所以 $AC = 12$, 所以 $A(0, 0, 0), O(2\sqrt{3}, 2, 0), B(4\sqrt{3}, 0, 0), P(2\sqrt{3}, 2, 3), C(0, 12, 0)$.

因为 E 是 PB 的中点,

所以 $E\left(3\sqrt{3}, 1, \frac{3}{2}\right)$,

则 $\overrightarrow{AE} = \left(3\sqrt{3}, 1, \frac{3}{2}\right), \overrightarrow{AB} = (4\sqrt{3}, 0, 0), \overrightarrow{AC} = (0, 12, 0)$.

设平面 AEB 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 3\sqrt{3}x + y + \frac{3}{2}z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 4\sqrt{3}x = 0. \end{cases}$$

令 $z = 2$, 则 $y = -3, x = 0$, 所以 $\mathbf{n} = (0, -3, 2)$ 是平面 AEB 的一个法向量.

设平面 AEC 的法向量为 $\mathbf{m} = (a, b, c)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AE} = 3\sqrt{3}a + b + \frac{3}{2}c = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AC} = 12b = 0. \end{cases}$$

令 $a = \sqrt{3}$, 则 $c = -6, b = 0$, 所以 $\mathbf{m} = (\sqrt{3}, 0, -6)$ 是平面 AEC 的一个法向量.

$$\text{所以} \cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{m}|} = \frac{-12}{\sqrt{13} \times \sqrt{39}} = -\frac{4\sqrt{3}}{13}.$$

设平面 ACE 与平面 ABE 的夹角的大小为 θ ,

$$\text{则} \cos \theta = \cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle = -\frac{4\sqrt{3}}{13},$$

所以 $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{11}{13}$, 即平面 ACE 与平面

ABE 的夹角的正弦值为 $\frac{11}{13}$.

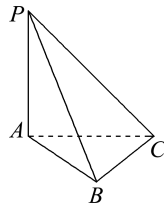
【探究总结】

求平面与平面的夹角的步骤

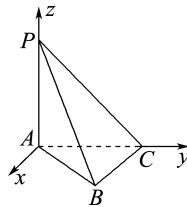
- (1) 建立空间直角坐标系;
- (2) 分别求出两个平面的法向量;
- (3) 求两个法向量的夹角;
- (4) 确定平面与平面的夹角的大小.

应用迁移

1. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $AC \perp BC$, $PA = AC = 1, BC = \sqrt{2}$, 求平面 APB 与平面 PBC 的夹角的余弦值.



解: 如图, 建立空间直角坐标系 $Axyz$,



则 $A(0, 0, 0), B(\sqrt{2}, 1, 0), C(0, 1, 0), P(0, 0, 1)$,

所以 $\overrightarrow{AP} = (0, 0, 1), \overrightarrow{AB} = (\sqrt{2}, 1, 0)$,

$\overrightarrow{CB} = (\sqrt{2}, 0, 0), \overrightarrow{CP} = (0, -1, 1)$.

设平面 APB 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} (x, y, z) \cdot (0, 0, 1) = 0, \\ (x, y, z) \cdot (\sqrt{2}, 1, 0) = 0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} z = 0, \\ y = -\sqrt{2}x, \end{cases}$$

令 $x=1$, 得 $\mathbf{m}=(1, -\sqrt{2}, 0)$ 为平面 APB 的一个法向量.

设平面 PBC 的法向量为 $\mathbf{n}=(x', y', z')$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CB}=0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CP}=0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} (x', y', z') \cdot (\sqrt{2}, 0, 0)=0, \\ (x', y', z') \cdot (0, -1, 1)=0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x'=0, \\ y'=z'. \end{cases}$$

令 $y'=-1$, 得 $\mathbf{n}=(0, -1, -1)$ 为平面 PBC 的一个法向量,

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

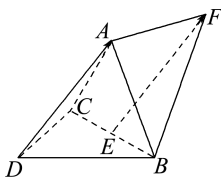
设平面 APB 与平面 PBC 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

即平面 APB 与平面 PBC 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

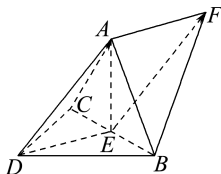
2. (2023 · 新高考全国II卷) 如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $DA=DB=DC$, $BD \perp CD$, $\angle ADB = \angle ADC = 60^\circ$, E 为 BC 的中点.

(1) 求证: $BC \perp DA$;

(2) 点 F 满足 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DA}$, 求二面角 $D-AB-F$ 的正弦值.



(1) 证明: 如图, 连接 DE, AE .



因为 $DC=DB$, 且 E 为 BC 的中点, 所以 $DE \perp BC$.

因为 $\angle ADB = \angle ADC = 60^\circ$, $DA=DA$, $DC=DB$, 所以 $\triangle ADB \cong \triangle ADC$ (SAS).

所以 $AC=AB$, 故 $AE \perp BC$.

因为 $DE \cap AE = E$, $DE, AE \subset$ 平面 ADE , 所以 $BC \perp$ 平面 ADE .

又 $DA \subset$ 平面 ADE , 所以 $BC \perp DA$.

(2) 解: 由(1)知, $DE \perp BC$, $AE \perp BC$.

不妨设 $DA=DB=DC=2$,

因为 $\angle ADB = \angle ADC = 60^\circ$,

所以 $AB=AC=2$.

由题可知 $\triangle DBC$ 为等腰直角三角形,

故 $DE=EB=EC=\sqrt{2}$.

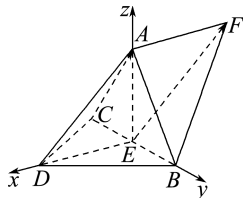
因为 $AE \perp BC$,

所以 $AE = \sqrt{AB^2 - EB^2} = \sqrt{2}$.

在 $\triangle ADE$ 中, $AE^2 + ED^2 = AD^2$, 所以 $AE \perp ED$.

所以 EA, ED, EB 两两垂直.

以 E 为原点, ED 所在直线为 x 轴, EB 所在直线为 y 轴, EA 所在直线为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $E(0, 0, 0)$, $D(\sqrt{2}, 0, 0)$, $B(0, \sqrt{2}, 0)$, $A(0, 0, \sqrt{2})$, 所以 $\overrightarrow{DA} = (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$, $\overrightarrow{BA} = (0, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

设 $F(x_F, y_F, z_F)$, 因为 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DA}$,

所以 $(x_F, y_F, z_F) = (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$,

可得 $F(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$, 所以 $\overrightarrow{FA} = (\sqrt{2}, 0, 0)$.

设平面 DAB 的法向量为 $\mathbf{m}=(x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{DA} \cdot \mathbf{m}=0, \\ \overrightarrow{BA} \cdot \mathbf{m}=0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -\sqrt{2}x_1 + \sqrt{2}z_1=0, \\ -\sqrt{2}y_1 + \sqrt{2}z_1=0. \end{cases}$$

取 $x_1=1$, 则 $y_1=z_1=1$, 所以 $\mathbf{m}=(1, 1, 1)$ 为平面 DAB 的一个法向量.

设平面 ABF 的法向量为 $\mathbf{n}=(x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{FA} \cdot \mathbf{n}=0, \\ \overrightarrow{BA} \cdot \mathbf{n}=0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} \sqrt{2}x_2=0, \\ -\sqrt{2}y_2 + \sqrt{2}z_2=0, \end{cases} \text{ 得 } x_2=0.$$

取 $y_2=1$, 则 $z_2=1$, 所以 $\mathbf{n}=(0, 1, 1)$ 为平面 ABF 的一个法向量.

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{2}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

记二面角 $D-AB-F$ 的平面角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

所以二面角 $D-AB-F$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

任务3 > 空间向量的综合应用

探究活动

例3 如图1, 已知直角梯形 $ABCD$, $\angle ADC = 90^\circ$, $AB \parallel CD$, $AB = 2CD = \sqrt{6}$, $AD = \sqrt{3}$, M 为对角线 AC 与 BD 的交点. 现以 AC 为折痕把 $\triangle ADC$ 折起, 使点 D 到达点 P 的位置, 得到三棱锥 $P-ABC$, 点 Q 为 PB 的中点, 如图2所示.

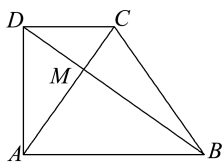


图1

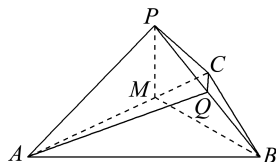


图2

(1) 求证: $AC \perp$ 平面 PBM ;

(2) 求三棱锥 $P-ACQ$ 体积的最大值;

(3) 当三棱锥 $P-ACQ$ 的体积最大时, 求直线 AB 与平面 PBC 所成角的正弦值.

(1) 证明: 在直角梯形 $ABCD$ 中,

由相似可得, $\frac{DC}{AB} = \frac{DM}{MB} = \frac{CM}{AM} = \frac{1}{2}$.

因为 $AB = 2CD = \sqrt{6}$, $AD = \sqrt{3}$, 可得 $AC = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $BD = 3$,

所以 $AM = 2MC = \sqrt{2}$, $BM = 2DM = 2$.

由 $AM^2 + BM^2 = AB^2$, 得 $AM \perp BM$, 即 $AC \perp BD$, $AC \perp DM$,

翻折后可得, $AC \perp BM$, $AC \perp PM$.

又因为 $PM \cap BM = M$, $PM, BM \subset$ 平面 PBM , 所以 $AC \perp$ 平面 PBM .

(2) 解: 因为点 Q 为 PB 的中点,

所以 $V_{Q-PAC} = \frac{1}{2} V_{B-PAC}$.

又 $V_{Q-PAC} = V_{P-ACQ}$, $V_{B-PAC} = V_{P-ABC}$,

所以 $V_{P-ACQ} = \frac{1}{2} V_{P-ABC}$.

因为 $AC \subset$ 平面 ABC , 所以平面 $ABC \perp$ 平面 PBM , 所以点 P 到平面 ABC 的距离, 即为点 P 到 BM 的距离, 设为 h .

因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle CAB = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times$

$\frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 为定值,

所以当 h 最大时, 三棱锥 $P-ACQ$ 的体积最大.

而 $PM = \frac{PA \cdot PC}{AC} = 1$, 则 $h \leq PM = 1$,

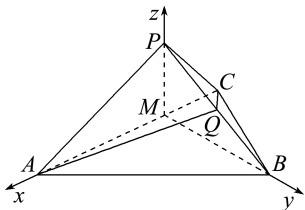
所以当 $h = 1$ 时, $(V_{P-ACQ})_{\max} = \frac{1}{2} (V_{P-ABC})_{\max} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$

$\times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

(3) 解: 由(2)得, 当三棱锥 $P-ACQ$ 的体积最大时, 点 P 到平面 ABC 的距离为 $PM = 1$, 即 $PM \perp$ 平面 ABC . 因为 $AC, MB \subset$ 平面 ABC ,

所以 $PM \perp AC$, $PM \perp MB$.

又因为 $AC \perp BM$, 所以 MA, MB, MP 两两垂直. 故以 M 为原点, MA, MB, MP 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.



由题可得, $A(\sqrt{2}, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $P(0, 0, 1)$, $C(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)$,

则 $\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{2}, 2, 0)$, $\overrightarrow{PB} = (0, 2, -1)$, $\overrightarrow{CB} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 2, 0)$.

设平面 PBC 的法向量为 $n = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{PB} = 2y - z = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 2y = 0. \end{cases}$ 令 $y = 1$, 得 $x = -2\sqrt{2}$, $z = 2$, 所以 $n = (-2\sqrt{2}, 1, 2)$ 为平面 PBC 的一个法向量.

设直线 AB 与平面 PBC 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta =$

$$|\cos \langle \overrightarrow{AB}, n \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot n|}{|\overrightarrow{AB}| |n|} = \frac{6}{\sqrt{6} \times \sqrt{13}} = \frac{\sqrt{78}}{13},$$

所以直线 AB 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{78}}{13}$.

【探究总结】

解决与折叠有关的问题的方法

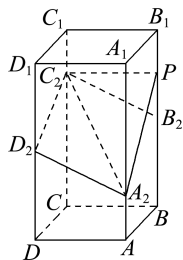
解决与折叠有关的问题的关键是明确折叠前后的变化量和不变量. 一般情况下, 线段的长度是不变量, 而位置关系往往会发生变化, 抓住不变量是解决问题的突破口.

应用迁移

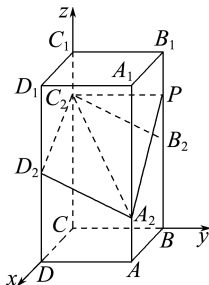
(2023 · 新高考全国 I 卷) 如图, 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2$, $AA_1 = 4$, 点 A_2, B_2, C_2, D_2 分别在棱 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 上, $AA_2 = 1$, $BB_2 = DD_2 = 2$, $CC_2 = 3$.

(1) 求证: $B_2C_2 \parallel A_2D_2$;

(2) 点 P 在棱 BB_1 上, 当二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 150° 时, 求 B_2P 的长.



(1) 证明: 以 C 为原点, CD, CB, CC_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $C(0,0,0), C_2(0,0,3), B_2(0,2,2), D_2(2,0,2), A_2(2,2,1)$,

所以 $\overrightarrow{B_2C_2} = (0, -2, 1), \overrightarrow{A_2D_2} = (0, -2, 1)$, 所以 $\overrightarrow{B_2C_2} // \overrightarrow{A_2D_2}$.

又 B_2C_2, A_2D_2 不在同一条直线上,

所以 $B_2C_2 // A_2D_2$.

(2)解: 设 $P(0, 2, \lambda) (0 \leq \lambda \leq 4)$,

则 $\overrightarrow{A_2C_2} = (-2, -2, 2), \overrightarrow{PC_2} = (0, -2, 3-\lambda), \overrightarrow{D_2C_2} = (-2, 0, 1)$.

设平面 PA_2C_2 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_2C_2} = -2x - 2y + 2z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PC_2} = -2y + (3-\lambda)z = 0. \end{cases}$$

令 $z = 2$, 则 $y = 3 - \lambda, x = \lambda - 1$, 所以 $\mathbf{n} = (\lambda - 1, 3 - \lambda, 2)$ 是平面 PA_2C_2 的一个法向量.

设平面 $A_2C_2D_2$ 的法向量为 $\mathbf{m} = (a, b, c)$,

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{A_2C_2} = -2a - 2b + 2c = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{D_2C_2} = -2a + c = 0. \end{cases}$$

令 $a = 1$, 得 $b = 1, c = 2$, 所以 $\mathbf{m} = (1, 1, 2)$ 是平面

$A_2C_2D_2$ 的一个法向量.

$$\text{所以 } |\cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{n}| |\mathbf{m}|}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{6} \times \sqrt{(\lambda-1)^2 + (3-\lambda)^2 + 4}} = |\cos 150^\circ| = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

化简可得 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, 解得 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 3$,

所以 $P(0, 2, 1)$ 或 $P(0, 2, 3)$, 所以 $B_2P = 1$.



提质归纳

线线角: $\cos \theta = |\cos \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|$

$$= \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|}$$

线面角: $\sin \theta = |\cos \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle|$

$$= \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{u}| |\mathbf{n}|} = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{u}| |\mathbf{n}|}$$

面面角: $\cos \theta = |\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle|$

$$= \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|}$$

用空间向量研究夹角(设异面直线 l_1, l_2 的方向向量分别是 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$; 直线 AB 的方向向量为 $\mathbf{u}$; 平面 α 的法向量为 $\mathbf{n}$; 平面 α, β 的法向量分别是 $\mathbf{n}_1$ 和 $\mathbf{n}_2$)

课后素养评价 (十一)

用空间向量研究夹角

A组 学习·理解

1. (多选) 下列说法不正确的是 ()

A. 若直线 l 的方向向量与平面 α 的法向量的夹角等于 $\frac{5\pi}{6}$, 则直线 l 与平面 α 所成的角等于 $\frac{\pi}{6}$

B. 两条异面直线的夹角等于它们的方向向量的夹角

C. 二面角的取值范围是 $[0, \pi]$

D. 二面角的大小等于其两个面的法向量的夹角的大小

ABD 解析: 当直线 l 的方向向量与平面 α 的法向量的夹角为 $\frac{5\pi}{6}$ 时, 直线 l 与平面 α 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$, A 不正确; 向量夹角的取值范围是 $[0, \pi]$, 而异面直线夹角的取值范围是 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, B 不正确; 二面角的取值范围是 $[0, \pi]$, C 正确; 二面角的大小与其两个面的法向量的夹角的大小相等或互补, D 不正确. 故选 ABD.

2. 已知 $A(0, 1, 1), B(2, -1, 0), C(3, 5, 7), D(1, 2, 4)$, 则直线 AB 和直线 CD 所成角的余弦值为 ()

A. $\frac{5\sqrt{22}}{66}$

B. $-\frac{5\sqrt{22}}{66}$

C. $\frac{5\sqrt{22}}{22}$

D. $-\frac{5\sqrt{22}}{22}$

A 解析: $\overrightarrow{AB} = (2, -2, -1), \overrightarrow{CD} = (-2, -3, -3)$, 而 $\cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{CD}|} = \frac{5}{3 \times \sqrt{22}} =$

$\frac{5\sqrt{22}}{66}$, 故直线 AB 和直线 CD 所成角的余弦值为

$\frac{5\sqrt{22}}{66}$. 故选 A.

3. 平面 α 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (\sqrt{2}, 1, -1)$, 直线 l 的一个方向向量为 $\mathbf{n} = (0, 0, \sqrt{3})$, 则直线 l 与平面 α 所成的角为 ()

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{6}$

D 解析: 设直线 l 与平面 α 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta$

$$= \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{2 \times \sqrt{3}} = \frac{1}{2}.$$

又因为 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{6}$, 即直线 l 与平面 α 所

成的角为 $\frac{\pi}{6}$. 故选 D.

4. 已知 $\mathbf{m} = (0, 1, 1), \mathbf{n} = (1, 1, 1)$ 分别为两个平面的法向量, 则两个平面的夹角的正弦值为 ()

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

B 解析: 由两平面的法向量分别为 $\mathbf{m} = (0, 1, 1), \mathbf{n} = (1, 1, 1)$,

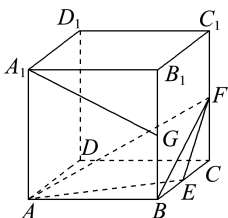
$$\text{可得 } \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{0 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

设两平面的夹角为 θ , 其中 $\theta \in [0, \pi]$,

$$\text{可得 } \cos \theta = \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\sqrt{6}}{3}, \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

即两平面的夹角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故选 B.

5. 如图所示, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 点 E, F, G 分别为 BC, CC_1, BB_1 的中点, 则下列说法正确的是 ()

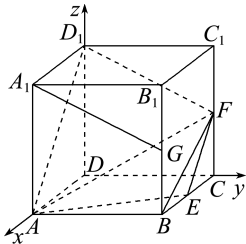


- A. 直线 D_1D 与直线 AF 垂直
B. 直线 A_1G 与平面 AEF 平行

C. 三棱锥 $F-ABE$ 的体积为 $\frac{1}{8}$

D. 直线 BC 与平面 AEF 所成的角为 45°

B 解析: 对于 A, 因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体, 所以 $DD_1 \parallel CC_1$. 因为直线 AF 与直线 CC_1 不垂直, 所以直线 AF 与直线 DD_1 不垂直, 故 A 错误. 由题意建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(1, 0, 0)$, $E(\frac{1}{2}, 1, 0)$, $F(0, 1, \frac{1}{2})$, $G(1, 1, \frac{1}{2})$, $A_1(1, 0, 1)$.

对于 B, $\overrightarrow{AE} = (-\frac{1}{2}, 1, 0)$, $\overrightarrow{AF} = (-1, 1, \frac{1}{2})$, 设平面 AEF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \overrightarrow{AE} \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{2}x + y = 0, \\ \overrightarrow{AF} \cdot \mathbf{n} = -x + y + \frac{1}{2}z = 0. \end{cases}$$

令 $y=1$, 则 $x=2, z=2$, 所以 $\mathbf{n} = (2, 1, 2)$ 为平面 AEF 的一个法向量. 因为 $\overrightarrow{A_1G} = (0, 1, -\frac{1}{2})$, 所以 $\overrightarrow{A_1G} \cdot \mathbf{n} = 0 \times 2 + 1 \times 1 - \frac{1}{2} \times 2 = 0$, 所以 $\overrightarrow{A_1G} \perp \mathbf{n}$. 因为 A_1G 在平面 AEF

外, 所以直线 A_1G 与平面 AEF 平行, 故 B 正确.

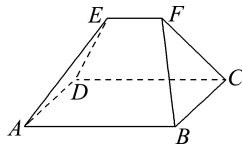
对于 C, $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} BE \cdot AB = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, 所以三棱锥 $F-ABE$ 的体积为 $\frac{1}{3} S_{\triangle ABE} \cdot h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$

$\times \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$, 其中 h 为点 F 到底面 ABE 的距离, 故 C 错误.

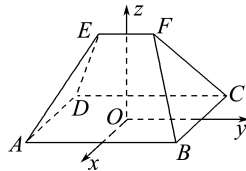
对于 D, $B(1, 1, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (-1, 0, 0)$, 设直线 BC 与平面 AEF 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{BC}| |\mathbf{n}|} = \frac{|-2|}{1 \times \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}$, 故 D 错误.

故选 B.

6. (数学文化)《九章算术》是我国古代的一部数学专著, 书中记载了一种名为“刍甍”的五面体(如图), 其中四边形 $ABCD$ 为矩形, $EF \parallel AB$. 若 $AB = 3EF$, $\triangle ADE$ 和 $\triangle BCF$ 都是正三角形, 且 $AD = 2EF$, 则异面直线 DE 与 BF 所成角的大小为 _____.



$\frac{\pi}{2}$ **解析:** 如图, 以矩形 $ABCD$ 的中心 O 为原点, $\overrightarrow{CB}$ 的方向为 x 轴正方向, 建立空间直角坐标系.



因为四边形 $ABCD$ 为矩形, $EF \parallel AB$, $\triangle ADE$ 和 $\triangle BCF$ 都是正三角形, 所以 $EF \subset$ 平面 Oyz , 且 Oz 是线段 EF 的垂直平分线. 设 $AB = 3$, 则 $EF = 1$, $AD = 2$, 所以 $D(-1, -\frac{3}{2}, 0)$, $E(0, -\frac{1}{2}, \sqrt{2})$, $B(1, \frac{3}{2}, 0)$, $F(0, \frac{1}{2}, \sqrt{2})$, 所以 $\overrightarrow{DE} = (1, 1, \sqrt{2})$, $\overrightarrow{BF} = (-1, -1, \sqrt{2})$. 所以 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BF} = 1 \times (-1) + 1 \times (-1) + \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 0$, 故 $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{BF}$, 所以异面直线 DE 与 BF 所成的角为 $\frac{\pi}{2}$.

7. 在空间直角坐标系中, 已知平面 α 过点 $(3, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$ 及 z 轴上一点 $(0, 0, a)$ ($a > 0$). 若平面 α 与 Oxy 平面的夹角为 45° , 则 $a =$ _____.

$\frac{12}{5}$ **解析:** Oxy 平面的一个法向量为 $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$, 设平面 α 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} -3x + 4y = 0, \\ -3x + az = 0, \end{cases}$$

即 $3x = 4y = az$. 取 $z = 1$, 则 $x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{a}{4}$, 所以 $\mathbf{m} = (\frac{a}{3}, \frac{a}{4}, 1)$ 为平面 α 的一个法向量.

$$\text{由题意得 } |\cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle| = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{16} + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{解得 } a = \pm \frac{12}{5}.$$

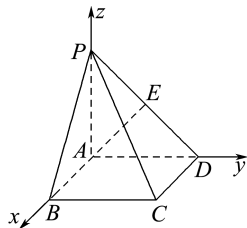
$$\text{又因为 } a > 0, \text{ 所以 } a = \frac{12}{5}.$$

B组 应用·实践

1. 已知点 P 为正方形 $ABCD$ 所在平面外一点, $PA \perp$ 平面 $ABCD$. 若 $PA = AB$, 则平面 PAB 与平面 PCD 的夹角为 ()

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

B 解析: 如图所示, 建立空间直角坐标系.



设 $PA = AB = 1$,

则 $A(0, 0, 0), D(0, 1, 0), P(0, 0, 1)$,

所以 $\overrightarrow{AD} = (0, 1, 0)$. 取 PD 的中点 E ,

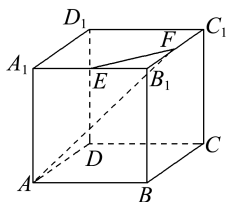
则 $E(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 所以 $\overrightarrow{AE} = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

易知 $\overrightarrow{AD}$ 是平面 PAB 的一个法向量, $\overrightarrow{AE}$ 是平面

PCD 的一个法向量, 所以 $\cos \langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE} \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故平

面 PAB 与平面 PCD 的夹角为 45° . 故选 B.

2. (多选) 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, E, F 分别是 A_1B_1, B_1C_1 的中点, 则 ()



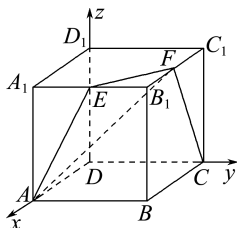
A. $EF \parallel$ 平面 $ABCD$

B. $AF = 3$

C. 直线 AF 与平面 ADD_1A_1 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$

D. 直线 AF 与平面 ADD_1A_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

ABC 解析: 由题意, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 棱长为 2, E, F 分别是 A_1B_1, B_1C_1 的中点, 连接 AE, CF , 建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(2, 0, 0), B(2, 2, 0), C(0, 2, 0), D(0, 0, 0), A_1(2, 0, 2), B_1(2, 2, 2), C_1(0, 2, 2), D_1(0, 0, 2), E(2, 1, 2), F(1, 2, 2)$.

A 项, $\overrightarrow{EF} = (-1, 1, 0)$, 平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (0, 0, 1)$,

因为 $\overrightarrow{EF} \cdot \mathbf{n}_1 = 0$, 所以 $EF \parallel$ 平面 $ABCD$, A 正确;

B 项, $AF = \sqrt{(1-2)^2 + (2-0)^2 + (2-0)^2} = 3$, B 正确;

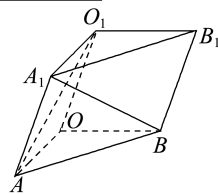
因为 $\overrightarrow{AF} = (-1, 2, 2)$, 平面 ADD_1A_1 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2 = (0, 1, 0)$,

设直线 AF 与平面 ADD_1A_1 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta$

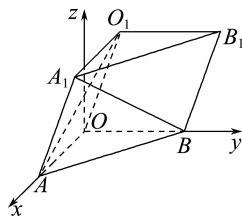
$$= \frac{|\overrightarrow{AF} \cdot \mathbf{n}_2|}{|\overrightarrow{AF}| |\mathbf{n}_2|} = \frac{0 + 2 \times 1 + 0}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} \times \sqrt{0 + 1^2 + 0}} =$$

$$\frac{2}{3}, \text{ 所以 C 正确, D 错误. 故选 ABC.}$$

3. 如图, 在三棱柱 $OAB-O_1A_1B_1$ 中, 平面 $OBB_1O_1 \perp$ 平面 OAB , 且 $\angle O_1OB = 60^\circ, \angle AOB = 90^\circ, OB = OO_1 = 2, OA = \sqrt{3}$, 则异面直线 A_1B 与 O_1A 所成角的余弦值为 _____.



$\frac{1}{7}$ 解析: 以 O 为原点, OA, OB 所在直线分别为 x 轴、 y 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,



由题意得 $A(\sqrt{3}, 0, 0), B(0, 2, 0), A_1(\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}), O_1(0, 1, \sqrt{3})$,

所以 $\overrightarrow{A_1B} = (-\sqrt{3}, 1, -\sqrt{3}), \overrightarrow{O_1A} = (\sqrt{3}, -1, -\sqrt{3})$.

设所求的角为 α ,

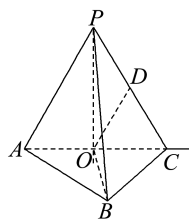
$$\text{则 } \cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{O_1A}|}{|\overrightarrow{A_1B}| |\overrightarrow{O_1A}|} = \frac{|-3 - 1 + 3|}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{1}{7},$$

即异面直线 A_1B 与 O_1A 所成角的余弦值为 $\frac{1}{7}$.

4. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB \perp$

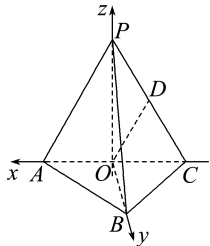
$BC, AB = BC = \frac{1}{2}PA$, 点 O, D

分别是 AC, PC 的中点, $OP \perp$ 底面 ABC , 则直线 OD 与平面 PBC 所成角的正弦值为 _____.



$$\frac{\sqrt{210}}{30}$$

解析:以 O 为原点, OA, OB, OP 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $AB = a$, 则 $OP = \frac{\sqrt{14}}{2}a$, 所以 $O(0, 0, 0)$,

$$D\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}a, 0, \frac{\sqrt{14}}{4}a\right), P\left(0, 0, \frac{\sqrt{14}}{2}a\right),$$

$$B\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right), C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0\right), \text{ 所以 } \overrightarrow{PB} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, -\frac{\sqrt{14}}{2}a\right), \overrightarrow{BC} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right), \overrightarrow{OD} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}a, 0, \frac{\sqrt{14}}{4}a\right),$$

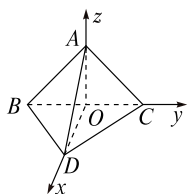
可求得平面 PBC 的一个法向量为 $\mathbf{n} = \left(-1, 1, \sqrt{\frac{1}{7}}\right)$.

设 $\overrightarrow{OD}$ 与平面 PBC 所成的角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = \cos \langle \overrightarrow{OD}, \mathbf{n} \rangle = \frac{|\overrightarrow{OD} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{OD}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{210}}{30}.$$

5. 将边长为 1, $\angle A = 60^\circ$ 的菱形 $ABDC$ 沿对角线 BC 折成直二面角, 则平面 ABD 与平面 BDC 的夹角的正弦值为 _____.

解析:取 BC 的中点 O , 连接 AO, DO , 建立如图所示的空间直角坐标系.



$$\text{由题意得 } A\left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(0, -\frac{1}{2}, 0\right), D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{OA} = \left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{BA} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{BD} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right).$$

显然 $\overrightarrow{OA} = \left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 为平面 BDC 的一个法向量.

设平面 ABD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BA} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 0. \end{cases}$$

取 $x = 1$, 则 $y = -\sqrt{3}, z = 1$, 所以 $\mathbf{n} = (1, -\sqrt{3}, 1)$ 是平面 ABD 的一个法向量.

所以 $\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{OA} \rangle = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 所以平面 ABD 与平面

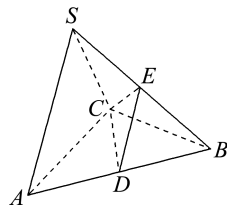
BDC 的夹角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

6. 如图, 在三棱锥 $S-ABC$ 中, 底面 ABC 是正三角形, $AB = 4, SA = SC = 2\sqrt{3}$, 侧面 $SAC \perp$ 底面 ABC , D, E 分别为 AB, SB 的中点.

(1) 求证: $AC \perp SB$;

(2) 求直线 SC 与平面 ECD 所成角的正弦值;

(3) 求二面角 $E-CD-B$ 的余弦值.



(1) **证明:**如图, 取 AC 的中点 O , 连接 OB, OS .

因为 $SA = SC, AB = CB$, 所以 $AC \perp SO, AC \perp BO$. 又 $BO \subset$ 平面 $OBS, SO \subset$ 平面 $OBS, SO \cap BO = O$, 所以 $AC \perp$ 平面 OBS . 又因为 $SB \subset$ 平面 OBS , 所以 $AC \perp SB$.

(2) **解:**因为平面 $SAC \perp$ 平面 ABC , 平面 $SAC \cap$ 平面 $ABC = AC$,

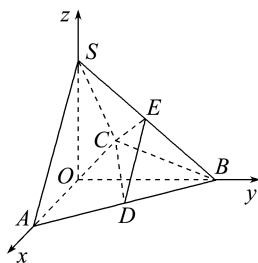
又 $SO \subset$ 平面 $SAC, SO \perp AC$,

所以 $SO \perp$ 平面 ABC .

在 $\text{Rt} \triangle SAO$ 中, $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{2}$.

在等边三角形 ABC 中, $OB = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = 2\sqrt{3}$.

如图所示, 以 O 为原点, OA, OB, OS 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间直角坐标系 $Oxyz$,



则 $A(2, 0, 0), B(0, 2\sqrt{3}, 0), C(-2, 0, 0), S(0, 0, 2\sqrt{2})$.

又 D, E 分别为 AB, SB 的中点, 则 $D(1, \sqrt{3}, 0), E(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$,

所以 $\overrightarrow{CE} = (2, \sqrt{3}, \sqrt{2}), \overrightarrow{DE} = (-1, 0, \sqrt{2}), \overrightarrow{SC} = (-2, 0, -2\sqrt{2})$.

设平面 ECD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \vec{n} \cdot \vec{CE} = 0, \vec{n} \cdot \vec{DE} = 0,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} 2x + \sqrt{3}y + \sqrt{2}z = 0, \\ -x + \sqrt{2}z = 0. \end{cases}$$

$$\text{令 } z = 1, \text{ 则 } x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{6},$$

所以 $\vec{n} = (\sqrt{2}, -\sqrt{6}, 1)$ 为平面 ECD 的一个法向量.

设直线 SC 与平面 ECD 所成的角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \vec{n}, \vec{SC} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{SC}|}{|\vec{n}| |\vec{SC}|} = \frac{4\sqrt{2}}{3 \times 2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{9},$$

所以直线 SC 与平面 ECD 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{6}}{9}$.

(3)解:由(2)可知 $\vec{n} = (\sqrt{2}, -\sqrt{6}, 1)$ 为平面 ECD 的一个法向量,

而 $\vec{OS} = (0, 0, 2\sqrt{2})$ 为平面 BCD 的一个法向量.

设二面角 $E-CD-B$ 的大小为 α , 又二面角 $E-CD-B$ 是锐角,

$$\text{所以 } \cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{OS}|}{|\vec{n}| |\vec{OS}|} = \frac{2\sqrt{2}}{3 \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{3},$$

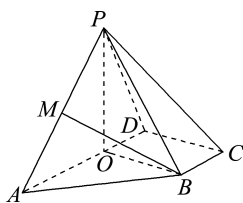
所以二面角 $E-CD-B$ 的余弦值等于 $\frac{1}{3}$.

7.如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为直角梯形, $\angle ADC = \angle BCD = 90^\circ$, $BC = 1$, $CD = \sqrt{3}$, $PD = 2$, $\angle PDA = 60^\circ$, $\angle PAD = 30^\circ$, 且平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 在平面 $ABCD$ 内过点 B 作 $BO \perp AD$, 交 AD 于点 O , 连接 PO .

(1)求证: $PO \perp$ 平面 $ABCD$;

(2)求二面角 $A-PB-C$ 的正弦值;

(3)在线段 PA 上存在一点 M , 使直线 BM 与平面 PAD 所成的角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$, 求 PM 的长.



(1)证明: 因为 $BO \perp AD$, $BC \parallel AD$, $\angle ADC = \angle BCD = 90^\circ$,

所以四边形 $BODC$ 为矩形.

在 $\triangle PDO$ 中, $PD = 2$, $DO = BC = 1$, $\angle PDA = 60^\circ$,

$$\text{则 } PO = \sqrt{PD^2 + OD^2 - 2PD \cdot OD \cos 60^\circ} = \sqrt{3},$$

所以 $PO^2 + DO^2 = PD^2$, 所以 $PO \perp AD$.

又平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $PO \subset$ 平面 PAD ,

平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$,

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$.

(2)解:由(1)知, OA, OB, OP 两两垂直, 以 O 为原点, OA 为 x 轴, OB 为 y 轴, OP 为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.

因为 $PO = \sqrt{3}$, $\angle PAD = 30^\circ$, 所以 $AO = 3$,

则 $O(0, 0, 0)$, $A(3, 0, 0)$, $P(0, 0, \sqrt{3})$, $B(0, \sqrt{3}, 0)$,

$C(-1, \sqrt{3}, 0)$.

设平面 APB 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$, $\vec{PA} = (3, 0, -\sqrt{3})$, $\vec{PB} = (0, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{PA} \cdot \vec{m} = 3x - \sqrt{3}z = 0, \\ \vec{PB} \cdot \vec{m} = \sqrt{3}y - \sqrt{3}z = 0. \end{cases} \text{ 取 } x = 1, \text{ 则 } z = \sqrt{3}, y = \sqrt{3},$$

所以 $\vec{m} = (1, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ 为平面 APB 的一个法向量.

设平面 CPB 的法向量为 $\vec{n} = (a, b, c)$, $\vec{PC} = (-1, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$,

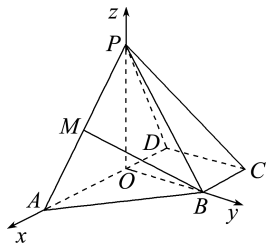
$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{PB} = \sqrt{3}b - \sqrt{3}c = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{PC} = -a + \sqrt{3}b - \sqrt{3}c = 0. \end{cases} \text{ 取 } b = 1, \text{ 则 } c = 1, a = 0,$$

所以 $\vec{n} = (0, 1, 1)$ 为平面 CPB 的一个法向量,

$$\text{故 } \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{42}}{7}.$$

因为二面角 $A-PB-C$ 是钝角,

所以二面角 $A-PB-C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$.



(3)解: 设 $\vec{AM} = \lambda \vec{AP}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), 则 $\vec{BM} = \vec{BA} + \vec{AM} = (3, -\sqrt{3}, 0) + \lambda(-3, 0, \sqrt{3}) = (3 - 3\lambda, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\lambda)$.

又平面 PAD 的一个法向量为 $\vec{OB} = (0, \sqrt{3}, 0)$,

所以直线 BM 与平面 PAD 所成的角的正弦值为

$$|\cos \langle \vec{OB}, \vec{BM} \rangle| = \frac{3}{\sqrt{3} \times \sqrt{(3 - 3\lambda)^2 + 3 + 3\lambda^2}} = \frac{2\sqrt{7}}{7},$$

解得 $\lambda = \frac{3}{4}$, 所以 $PM = \frac{1}{4}AP = \frac{1}{4}\sqrt{PO^2 + OA^2}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

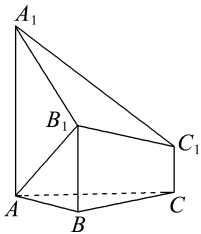
迁移应用

学习目标

1. 能够利用空间向量证明空间中的点、线、面之间的位置关系.
2. 理解空间的夹角与距离, 能利用空间向量及几何知识解决空间中的线线、线面的夹角与距离问题.
3. 探究立体几何中的动态问题, 能够将空间中的动态问题转化成函数问题或平面中的动态问题.

类型一 空间位置关系的证明

例 1 如图, 已知多面体 $ABC-A_1B_1C_1$, A_1A, B_1B, C_1C 均垂直于平面 ABC , $\angle ABC = 120^\circ$, $A_1A = 4, C_1C = 1$, $AB = BC = B_1B = 2$. 证明: $AB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.



证明: (方法一) 由 $AB = 2, AA_1 = 4, BB_1 = 2, AA_1 \perp AB, BB_1 \perp AB$, 得 $AB_1 = A_1B_1 = 2\sqrt{2}$, 所以 $A_1B_1^2 + AB_1^2 = AA_1^2$, 故 $AB_1 \perp A_1B_1$.

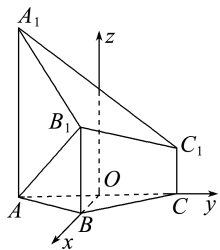
由 $BC = 2, BB_1 = 2, CC_1 = 1, BB_1 \perp BC, CC_1 \perp BC$, 得 $B_1C_1 = \sqrt{5}$,

由 $AB = BC = 2, \angle ABC = 120^\circ$, 得 $AC = 2\sqrt{3}$,

连接 AC_1 (图略), 由 $CC_1 \perp AC$, 得 $AC_1 = \sqrt{13}$, 所以 $AB_1^2 + B_1C_1^2 = AC_1^2$, 故 $AB_1 \perp B_1C_1$.

又 $A_1B_1 \cap B_1C_1 = B_1, A_1B_1, B_1C_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$, 所以 $AB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.

(方法二) 如图所示, 以 AC 的中点 O 为坐标原点, 建立空间直角坐标系 $Oxyz$.



由题意知, $A(0, -\sqrt{3}, 0), A_1(0, -\sqrt{3}, 4), B_1(1, 0, 2), C_1(0, \sqrt{3}, 1)$, 则 $\overrightarrow{AB_1} = (1, \sqrt{3}, 2), \overrightarrow{A_1B_1} = (1, \sqrt{3}, -2), \overrightarrow{A_1C_1} = (0, 2\sqrt{3}, -3)$.

由 $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = 1 + 3 - 4 = 0$, 得 $AB_1 \perp A_1B_1$.

由 $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 6 - 6 = 0$, 得 $AB_1 \perp A_1C_1$.

又 $A_1B_1 \cap A_1C_1 = A_1, A_1B_1, B_1C_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$, 所以 $AB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.

(方法三) 如方法二建立空间直角坐标系, 则 $A, A_1, B_1, C_1, \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1}$ 的坐标同方法二.

设平面 $A_1B_1C_1$ 的法向量是 $\mathbf{m} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x + \sqrt{3}y - 2z = 0, \\ 2\sqrt{3}y - 3z = 0. \end{cases} \text{ 令 } z = 1, \text{ 得 } x = \frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 所以 } \mathbf{m} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \text{ 是平面 } A_1B_1C_1 \text{ 的一个法向量.}$$

因为 $\overrightarrow{AB_1} = 2\mathbf{m}$, 所以 $AB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.

【总结升华】

用向量知识解决立体几何问题有两种基本思路: 一种是用向量表示几何量; 另一种是用向量的坐标表示几何量. 求解过程共分三步:

- (1) 建立立体几何与空间向量的联系, 用空间向量(或坐标)表示问题中所涉及的点、线、面, 把立体几何问题转化为向量问题;
- (2) 通过向量运算, 研究点、线、面之间的位置关系;
- (3) 根据运算结果的几何意义来解释相关问题.

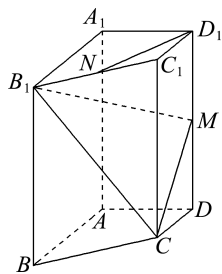
类型二 空间夹角和距离问题

例 2 (2024 · 天津卷) 如图, 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 为梯形, $AB \parallel CD$, $A_1A \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp AB$, $AB = AA_1 = 2, AD = DC = 1$, N 是 B_1C_1 的中点, M 是 DD_1 的中点.

(1) 求证: $D_1N \parallel$ 平面 CB_1M ;

(2) 求平面 CB_1M 与平面 BB_1C_1C 的夹角的余弦值;

(3) 求点 B 到平面 CB_1M 的距离.



(1)证明:如图,取 CB_1 的中点 P ,连接 NP, MP ,
由 N 是 B_1C_1 的中点,得 $NP \parallel CC_1$,且 $NP = \frac{1}{2}CC_1$.

由 M 是 DD_1 的中点,得 $D_1M = \frac{1}{2}DD_1 = \frac{1}{2}CC_1$,且 $D_1M \parallel CC_1$,

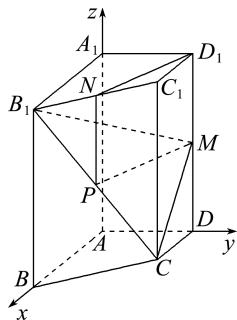
则有 $D_1M \parallel NP$,且 $D_1M = NP$,

所以四边形 D_1MPN 是平行四边形,故 $D_1N \parallel MP$.

又 $MP \subset$ 平面 CB_1M , $D_1N \not\subset$ 平面 CB_1M ,

所以 $D_1N \parallel$ 平面 CB_1M .

(2)解:以 A 为原点,建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(0,0,0), B(2,0,0), B_1(2,0,2), M(0,1,1), C(1,1,0), C_1(1,1,2)$,

所以 $\overrightarrow{CB_1} = (1, -1, 2), \overrightarrow{CM} = (-1, 0, 1), \overrightarrow{BB_1} = (0, 0, 2)$.

设平面 CB_1M 与平面 BB_1C_1C 的法向量分别为 $m = (x_1, y_1, z_1), n = (x_2, y_2, z_2)$,

则有 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{CB_1} = x_1 - y_1 + 2z_1 = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{CM} = -x_1 + z_1 = 0, \end{cases}$

$\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{CB_1} = x_2 - y_2 + 2z_2 = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{BB_1} = 2z_2 = 0. \end{cases}$

分别取 $x_1 = x_2 = 1$, 则有 $y_1 = 3, z_1 = 1, y_2 = 1, z_2 = 0$,

所以 $m = (1, 3, 1)$ 是平面 CB_1M 的一个法向量, $n = (1, 1, 0)$ 是平面 BB_1C_1C 的一个法向量,

所以 $\cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m| |n|} = \frac{1+3}{\sqrt{1+9+1} \times \sqrt{1+1}} = \frac{2\sqrt{22}}{11}$.

故平面 CB_1M 与平面 BB_1C_1C 的夹角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{22}}{11}$.

(3)解:由 $\overrightarrow{BB_1} = (0, 0, 2)$, 平面 CB_1M 的一个法向量为 $m = (1, 3, 1)$,

得 $\frac{|\overrightarrow{BB_1} \cdot m|}{|m|} = \frac{2}{\sqrt{1+9+1}} = \frac{2\sqrt{11}}{11}$,

即点 B 到平面 CB_1M 的距离为 $\frac{2\sqrt{11}}{11}$.

【总结升华】

1. 异面直线所成的角(注意所成角的范围)

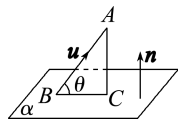
若异面直线 l_1, l_2 所成的角为 θ , 其方向向量分别

是 u, v , 则 $\cos \theta = |\cos \langle u, v \rangle| = \frac{|u \cdot v|}{|u| |v|}$.

2. 直线与平面所成的角(注意所成角的范围)

如图, 直线 AB 与平面 α 相交于点 B , 设直线 AB 与平面 α 所成的角为 θ , 直线 AB 的方向向量为 u , 平面 α 的法向量为 n , 则 $\sin \theta =$

$|\cos \langle u, n \rangle| = \frac{|u \cdot n|}{|u| |n|}$.

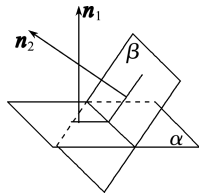


3. 平面与平面的夹角(与二面角的范围有区别)

如图, 平面 α 与平面 β 相交, 形成四个二面角, 我们把这四个二面角中不大于 90° 的二面角称为平面 α 与平面 β 的夹角.

若平面 α, β 的法向量分别是 n_1 和 n_2 , 则平面 α 与平面 β 的夹角即为向量 n_1 和 n_2 的夹角或其补角. 设平面 α 与平面 β 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = |\cos \langle n_1,$

$n_2 \rangle| = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1| |n_2|}$.



4. 利用空间向量求距离

(1) 点到直线的距离

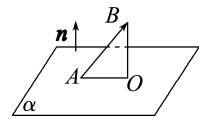
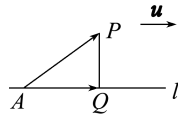
如图, 已知直线 l 的单位方向向量为 u , A 是直线 l 上的定点, P 是直线 l 外一点, $\overrightarrow{AQ}$ 是 $\overrightarrow{AP}$ 在直线 l 上的投影向量, 则点

P 到直线 l 的距离 $PQ = \sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2 - (\overrightarrow{AP} \cdot u)^2}$.

(2) 点到平面的距离

如图, 已知 A 为平面 α 内的一定点, n 为平面 α 的法向量, 点 O 是平面外一点 B 在平面 α 内的射影, 则点 B 到平面 α

的距离 $BO = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot n|}{|n|}$.

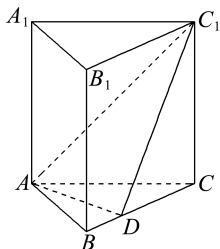


类型三 立体几何中的动态问题

例 3 如图,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D 是棱 BC 上一点(点 D 与点 C 不重合),且 $AD \perp DC$,过点 A_1 作平面 BCC_1B_1 的垂线 l .

(1)求证: $l \parallel AD$;

(2)若 $AC=CC_1=2$,当三棱锥 C_1-ACD 的体积最大时,求 AC 与平面 ADC_1 所成角的正弦值.



(1)证明:在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $CC_1 \perp$ 平面 ABC ,因为 $AD \subset$ 平面 ABC ,所以 $CC_1 \perp AD$.

又 $AD \perp DC$, $CC_1 \cap DC = C$, $CC_1, DC \subset$ 平面 BCC_1B_1 ,所以 $AD \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

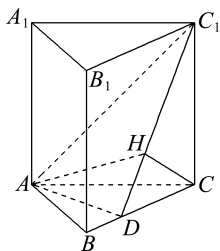
又因为 $l \perp$ 平面 BCC_1B_1 ,所以 $l \parallel AD$.

(2)解:因为 $V_{C_1-ACD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACD} \cdot CC_1$,所以当三棱锥 C_1-ACD 的体积最大时, $S_{\triangle ACD}$ 最大.

又 $AC=2$, $AD \perp CD$,所以 $4=AC^2=AD^2+DC^2 \geq 2AD \cdot CD=4S_{\triangle ACD}$,

当且仅当 $AD=CD=\sqrt{2}$ 时,等号成立,即当 $S_{\triangle ACD}$ 最大时, $AD=CD=\sqrt{2}$.

(方法一:综合法)如图,作 $CH \perp DC_1$ 于点 H ,连接 AH .



由(1)可知 $AD \perp$ 平面 BCC_1B_1 ,因为 $CH \subset$ 平面 BCC_1B_1 ,所以 $AD \perp CH$.

又 $DC_1 \cap AD=D$, $AD, DC_1 \subset$ 平面 ADC_1 ,所以 $CH \perp$ 平面 ADC_1 .

因此, AC 与平面 ADC_1 所成的角为 $\angle CAH$.

因为 $CH \perp$ 平面 ADC_1 , $AH \subset$ 平面 ADC_1 ,所以 $CH \perp AH$.

在 $Rt\triangle CDC_1$ 中, $CD=\sqrt{2}$, $CC_1=2$,所以 $DC_1=\sqrt{6}$,

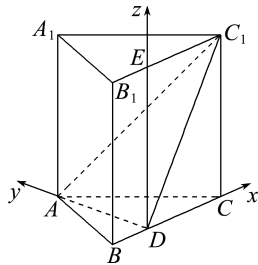
因此 $CH = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

在 $Rt\triangle ACH$ 中, $\sin \angle CAH = \frac{CH}{AC} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以 AC 与平面 ADC_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(方法二:向量法)如图,在平面 BCC_1B_1 内,过点 D 作 $DE \parallel CC_1$, DE 交 B_1C_1 于点 E ,因为 $CC_1 \perp$ 平面 ABC ,所以 $DE \perp$ 平面 ABC .

以 D 为原点, DC, DA, DE 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴,建立空间直角坐标系,则 $A(0, \sqrt{2}, 0)$, $C(\sqrt{2}, 0, 0)$, $C_1(\sqrt{2}, 0, 2)$.



设平面 ADC_1 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,易得 $\vec{DA} = (0, \sqrt{2}, 0)$, $\vec{DC_1} = (\sqrt{2}, 0, 2)$,

所以 $\begin{cases} \vec{DA} \cdot \vec{n} = \sqrt{2}y = 0, \\ \vec{DC_1} \cdot \vec{n} = \sqrt{2}x + 2z = 0. \end{cases}$ 令 $x = \sqrt{2}$, 则 $z = -1$,

$y = 0$,所以 $\vec{n} = (\sqrt{2}, 0, -1)$ 为平面 ADC_1 的法向量.

因为 $\vec{AC} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$,所以 $\cos \langle \vec{AC}, \vec{n} \rangle = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

设 AC 与平面 ADC_1 所成的角为 θ ,

所以 AC 与平面 ADC_1 所成角的正弦值为 $\sin \theta =$

$|\cos \langle \vec{AC}, \vec{n} \rangle| = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

【总结升华】

1. 空间位置关系问题常见解决方法:

- (1) 利用点、线、面位置关系的相关定理解决;
- (2) 建立空间直角坐标系解决.

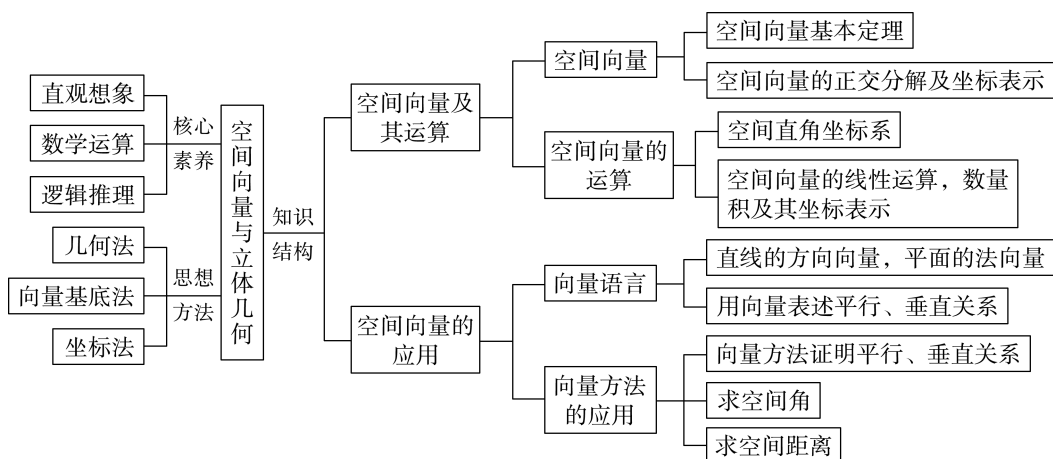
2. 空间动点的轨迹判断或轨迹长度问题常见解决方法:先根据点、线、面的位置关系的判定定理和性质定理,求出动点的轨迹(或利用空间向量的坐标运算求出动点的轨迹方程),再进行判断或长度计算.

3. 与空间图形有关的线段、夹角、距离、面积、体积等最值问题,常见解决方法:

- (1) 从问题的几何特征入手,充分利用空间图形的几何性质去解决;
- (2) 找出问题中的代数关系,建立目标函数,利用代数方法求目标函数的最值.

重构拓展

● 多维体系构建 ●



【问题探究】

1. 空间向量由平面向量推广而来, 空间向量与平面向量有许多共同性质, 如果我们把平面称为二维空间, 把普通的空间称为三维空间, 那么我們能不能把向量的概念推广到四维空间 (例如由“长”“宽”“高”“时间”四个维度构成的空间)、五维空间中去呢? 它们是否也与平面向量、空间向量有许多共同的性质?
2. 因为向量可以用有向线段表示, 所以我们用几何方式引入空间向量的运算法则, 如向量加法的平行四边形法则. 在空间直角坐标系中, 我们还可以把这种由几何方式引入的向量运算转化成代数运算 (实数运算). 对于这样的做法给空间向量运算带来的方便, 你有什么体会?
3. 从数量及其运算发展的角度理解向量及其运算, 数

的运算律对于向量仍然成立的有哪些? 不成立的有哪些?

4. 如何理解空间向量可以由三个不共面的向量唯一表示? 你认为应如何根据问题的条件选择空间的基底?
5. 我们是如何利用直线的方向向量和平面的法向量表示直线和平面的? 我们又是如何利用直线的方向向量和平面的法向量刻画空间直线、平面的平行和垂直关系的?
6. 距离和角度是立体几何中的基本度量, 本章我们如何把点到直线、点到平面、平行直线、平行平面的距离问题转化为投影向量的长度问题? 如何把直线与平面、平面与平面所成角的问题转化为直线的方向向量或平面的法向量之间的夹角问题? 请结合具体实例谈谈你的体会.

● 学科视野拓展 ●

拓展一

空间向量的应用

【拓展总结】

球面三角学是研究球面三角形的边角关系的学科, 在天文、航海中有重要应用. 球面三角形的每一个角都对应一个二面角, 即球的两个大圆所在平面的夹角. 这些二面角的大小与球面三角形的边长有着密切的关系. 球面三角学的核心在于探索这些边长和角度之间的关系.

应用 1 如图 1, 球 O 的半径为 R , A, B, C 为球面上三点, 曲面三角形 ABC (阴影部分) 叫做球面三角形.

设 O_a 表示以 O 为圆心, 且过 B, C 的圆, 圆 O_a 的劣弧 BC 的长记为 a , 同理, 圆 O_b, O_c 的劣弧 AC, AB 的弧长分别记为 b, c . 若设二面角 $C-OA-B, A-OB-C, B-OC-A$ 分别为 α, β, γ , 则球面三角形 ABC 的面积为 $S_{\text{球面}\triangle ABC} = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2$.

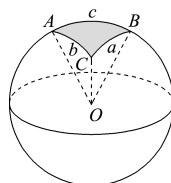


图 1

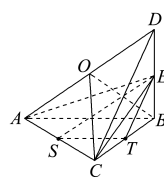


图 2

(1)若平面 OAB 、平面 OAC 、平面 OBC 两两垂直,求球面三角形 ABC 的面积.

(2)延长 AO 与球 O 交于点 D ,抽象出立体图形如图 2,若 $\triangle ABC$ 为直角三角形, $AC \perp BC$, 直线 DA, DC

与平面 ABC 所成的角分别为 $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BD}, \lambda \in$

$(0, 1], S$ 为 AC 的中点, T 为 BC 的中点.

①设 $\angle AOC = \theta_1, \angle BOC = \theta_2, \angle AOB = \theta_3$. 求证: $\cos \theta_1 + \cos \theta_2 - \cos \theta_3 = 1$;

②设平面 OBC 与平面 EST 的夹角为 θ , 求 $\sin \theta$ 的最小值, 及此时平面 AEC 截球 O 所得截面的面积.

(1)解: 若平面 OAB 、平面 OAC 、平面 OBC 两两垂直, 则有 $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$,

所以球面三角形 ABC 的面积为 $S_{\text{球面} \triangle ABC} = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2 = \frac{\pi}{2}R^2$.

(2)①证明: 在 $\triangle AOC, \triangle BOC$ 和 $\triangle AOB$ 中, 由余弦

定理得 $\begin{cases} AC^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos \theta_1, \\ BC^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos \theta_2, \text{ 且 } AC^2 + BC^2 \\ AB^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos \theta_3, \end{cases}$

$= AB^2$,

消掉 R^2 , 可得 $\cos \theta_1 + \cos \theta_2 - \cos \theta_3 = 1$.

②解: 由 AD 是球 O 的直径, 得 $AB \perp BD, AC \perp CD$, 又 $AC \perp BC, CD \cap BC = C, CD, BC \subset \text{平面 } BCD$, 所以 $AC \perp \text{平面 } BCD$. 因为 $BD \subset \text{平面 } BCD$, 所以 $AC \perp BD$.

又 $AB \perp BD, AB \cap AC = A, AB, AC \subset \text{平面 } ABC$, 所以 $BD \perp \text{平面 } ABC$.

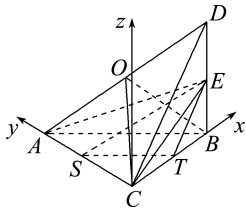
因为直线 DA, DC 与平面 ABC 所成的角分别为 $\frac{\pi}{4}$,

$\frac{\pi}{3}$, 所以 $\angle DAB = \frac{\pi}{4}, \angle DCB = \frac{\pi}{3}$.

不妨令 $R = \sqrt{3}$, 则 $AD = 2\sqrt{3}, AB = BD = \sqrt{6}, BC = \sqrt{2}, AC = 2$.

由 $AC \perp BC, AC \perp BD, BC \perp BD$,

以 C 为坐标原点, CB, CA 所在直线分别为 x 轴、 y 轴, 过点 C 作 BD 的平行线为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,



设 $BE = t, t \in (0, \sqrt{6}]$, 则 $A(0, 2, 0), B(\sqrt{2}, 0, 0), C(0, 0, 0), D(\sqrt{2}, 0, \sqrt{6})$,

可得 $S(0, 1, 0), T(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0), E(\sqrt{2}, 0, t), O(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{6}}{2})$,

所以 $\overrightarrow{CB} = (\sqrt{2}, 0, 0), \overrightarrow{CO} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{6}}{2}), \overrightarrow{ST} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, 0), \overrightarrow{TE} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, t)$.

设平面 OBC 的法向量为 $m = (x_1, y_1, z_1)$, 则

$$\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{CB} = \sqrt{2}x_1 = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{CO} = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + y_1 + \frac{\sqrt{6}}{2}z_1 = 0. \end{cases} \quad \text{取 } z_1 = -2, \text{ 则 } y_1 = \sqrt{6}, x_1 = 0, \text{ 所以 } m = (0, \sqrt{6}, -2) \text{ 是平面 } OBC \text{ 的一个法向量.}$$

设平面 EST 的法向量为 $n = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{ST} = \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 - y_2 = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{TE} = \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + tz_2 = 0. \end{cases}$$

取 $x_2 = \sqrt{2}t$, 则 $y_2 = t, z_2 = -1$, 所以 $n = (\sqrt{2}t, t, -1)$ 是平面 EST 的一个法向量.

若要使 $\sin \theta$ 取最小值, 则 $|\cos \theta|$ 取最大值.

因为 $|\cos \theta| = |\cos \langle m, n \rangle| = \frac{|m \cdot n|}{|m||n|} =$

$$\frac{|\sqrt{6}t + 2|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{3t^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3t + 2}}{\sqrt{3t^2 + 1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \sqrt{\frac{(\sqrt{3t + 2})^2}{3t^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{6}t + 1}{3t^2 + 1}},$$

令 $m = 2\sqrt{6}t + 1, m \in (1, 13]$, 则 $t = \frac{m-1}{2\sqrt{6}}, 3t^2$

$$= \frac{(m-1)^2}{8},$$

$$\text{所以 } \frac{2\sqrt{6}t + 1}{3t^2 + 1} = \frac{m}{\frac{(m-1)^2}{8} + 1} = \frac{8m}{m^2 - 2m + 9} =$$

$$\frac{8}{m + \frac{9}{m} - 2} \leq \frac{8}{6 - 2} = 2,$$

当且仅当 $m = 3, t = \frac{1}{\sqrt{6}}$ 时, 等号成立.

故 $|\cos \theta|$ 取最大值 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ 时, $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

为最小值,

此时点 $E(\sqrt{2}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}})$, 可得 $\overrightarrow{CE} = (\sqrt{2}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}), \overrightarrow{CA} = (0, 2, 0)$.

设平面 AEC 的法向量为 $k = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} k \cdot \overrightarrow{CE} = \sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{6}}z = 0, \\ k \cdot \overrightarrow{CA} = 2y = 0. \end{cases}$$

取 $x = 1$, 则 $y = 0, z = -2\sqrt{3}$, 所以 $k = (1, 0, -2\sqrt{3})$

是平面 AEC 的一个法向量,

$$\text{此时球心 } O \text{ 到平面 AEC 距离为 } d = \frac{|\overrightarrow{AO} \cdot \mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|} = \frac{5}{\sqrt{26}}.$$

$$\text{设平面 AEC 截球 } O \text{ 的圆的半径为 } r, \text{ 则 } r^2 = R^2 - d^2 = \frac{53}{26},$$

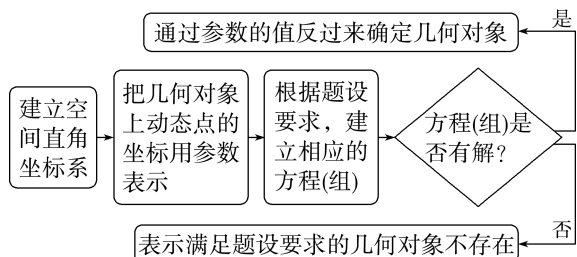
$$\text{所以截面圆面积为 } \pi r^2 = \frac{53}{26} \pi = \frac{53}{78} \pi R^2.$$

拓展二

立体几何中存在性问题的向量解法

【拓展总结】

与空间角有关的存在性问题的解题流程



应用 2 如图 1, 在等腰梯形 ABCD 中, 点 E 在 AB 上, $AE = BE = BC = CD = 4$, M, N 分别是 AD, AE 的中点, $\overrightarrow{EF} = \lambda \overrightarrow{EB}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), 将 $\triangle ADE$ 沿着 DE 折起, 使得点 A 到达点 P 的位置, 平面 $PDE \perp$ 平面 BCDE, 如图 2.

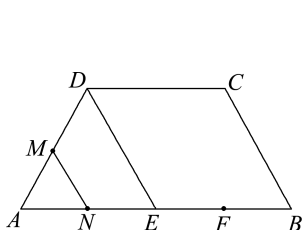


图 1

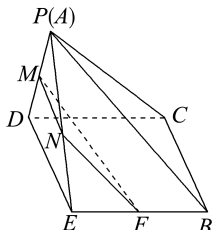


图 2

(1) 若 $PC \parallel$ 平面 MNF, 求 λ 的值;

(2) 若 $\overrightarrow{CQ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CP}$, 平面 $DEQ \perp$ 平面 MNF, 求 λ 的值;

(3) 若平面 MNF 与平面 BCDE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$, 求 λ 的值;

(4) 若点 C 到平面 MNF 的距离为 $\frac{3\sqrt{15}}{5}$, 求 λ 的值.

解: 如图, 取 DE 的中点 O, 连接 OC, OA, CE, 由条件可知, $AE = EB = BC = CD = AD = CE$, 所以 $\triangle ADE, \triangle DCE, \triangle BCE$ 是等边三角形, 所以 $OC \perp DE, PO \perp DE$.

因为平面 $PDE \perp$ 平面 BCDE, 平面 $PDE \cap$ 平面 BC-

$DE = DE$, 所以 $PO \perp$ 平面 BCDE. 因为 $OC \subset$ 平面 BCDE, 所以 $PO \perp OC$.

所以 OE, OC, OP 两两垂直, 则以 O 为原点, 分别以 $\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OP}$ 的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系.

因为 $PE = BE = BC = CD = 4$, 所以 $B(4, 2\sqrt{3}, 0)$, $E(2, 0, 0)$, $M(-1, 0, \sqrt{3})$, $N(1, 0, \sqrt{3})$, $P(0, 0, 2\sqrt{3})$, $C(0, 2\sqrt{3}, 0)$, 所以 $\overrightarrow{PC} = (0, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$, $\overrightarrow{MN} = (2, 0, 0)$, $\overrightarrow{EB} = (2, 2\sqrt{3}, 0)$.

因为 $\overrightarrow{EF} = \lambda \overrightarrow{EB} = (2\lambda, 2\sqrt{3}\lambda, 0)$, 所以 $F(2\lambda + 2, 2\sqrt{3}\lambda, 0)$, 所以 $\overrightarrow{NF} = (2\lambda + 1, 2\sqrt{3}\lambda, -\sqrt{3})$.

设平面 MNF 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{MN} = 2x_1 = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{NF} = (2\lambda + 1)x_1 + 2\sqrt{3}\lambda y_1 - \sqrt{3}z_1 = 0. \end{cases}$ 令 $y_1 = 1$, 则 $z_1 = 2\lambda$, $x_1 = 0$, 所以 $\mathbf{n}_1 = (0, 1, 2\lambda)$ 是平面 MNF 的一个法向量.

(1) 由 $PC \parallel$ 平面 MNF, 得 $\overrightarrow{PC} \cdot \mathbf{n}_1 = 0$, 即 $2\sqrt{3} + 2\lambda \times (-2\sqrt{3}) = 0$, 解得 $\lambda = \frac{1}{2}$.

(2) 由 $\overrightarrow{CQ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CP} = \left(0, -\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$,

得 $\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CQ} = \left(2, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$,

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CB} = (4, 0, 0)$.

设平面 DEQ 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{DE} = 4x_2 = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{DQ} = 2x_2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}y_2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}z_2 = 0. \end{cases}$ 令 $z_2 = 1$, 则

$y_2 = -2$, $x_2 = 0$, 所以 $\mathbf{n}_2 = (0, -2, 1)$ 是平面 DEQ 的一个法向量.

由平面 $DEQ \perp$ 平面 MNF, 得 $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$, 即 $0 - 2 + 2\lambda = 0$, 解得 $\lambda = 1$.

(3) 由题意知, 平面 BCDE 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$.

设平面 MNF 与平面 BCDE 所成的角为 θ , 则 $\cos \theta = |\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{m} \rangle| = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{m}|} = \frac{2\lambda}{\sqrt{(2\lambda)^2 + 1}}$.

因为平面 MNF 与平面 BCDE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$,

所以 $\frac{2\lambda}{\sqrt{(2\lambda)^2 + 1}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 解得 $\lambda = \frac{1}{6}$.

(4) 连接 NC, 如图, 平面 MNF 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (0, 1, 2\lambda)$, $\overrightarrow{NC} = (-1, 2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, 则点 C 到平面 MNF 的距离为 $d = \frac{|\overrightarrow{NC} \cdot \mathbf{n}_1|}{|\mathbf{n}_1|} = \frac{|2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\lambda|}{\sqrt{1 + 4\lambda^2}} =$

新定义、新概念问题

(2) 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=AD=2, AA_1=3, \angle BAD=\angle BAA_1=\angle DAA_1=60^\circ$, 建立空间斜 60° 坐标系如图所示.

故 $|\overrightarrow{AM}| = |3\mathbf{i} - 3\mathbf{j}| = \sqrt{(3\mathbf{i} - 3\mathbf{j})^2} = 3.$

单元测试卷(一)

(考查范围:第一章 时间:120 分钟 分值:150 分)

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 下列向量中,与向量 $a = (1, -3, 2)$ 平行的是 ()

- A. $(\frac{1}{3}, 1, 1)$ B. $(-1, -3, 2)$
C. $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1)$ D. $(\sqrt{2}, -3, -2\sqrt{2})$

C 解析: $a = (1, -3, 2) = -2(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1)$.

2. 已知向量 $a = (-2, 1, 3)$, $b = (-1, 2, 1)$, 若 $a \perp (a - \lambda b)$, 则实数 λ 的值为 ()

- A. -2 B. $-\frac{14}{3}$ C. $\frac{14}{5}$ D. 2

D 解析: 因为 $a \perp (a - \lambda b)$,
所以 $a \cdot (a - \lambda b) = |a|^2 - \lambda a \cdot b = 0$,
所以 $|a|^2 = \lambda a \cdot b$,
所以 $14 = \lambda(2 + 2 + 3) = 7\lambda$,
解得 $\lambda = 2$. 故选 D.

3. 若向量 $a = (x, 4, 5)$, $b = (1, -2, 2)$, 且 a 与 b 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$, 则 $x =$ ()

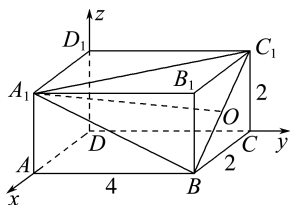
- A. 3 B. -3 C. -11 D. 3 或 -11

A 解析: 因为 $a \cdot b = (x, 4, 5) \cdot (1, -2, 2) = x - 8 + 10 = x + 2$, 且 a 与 b 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$, 所以 $\frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4^2+5^2} \times \sqrt{1+4+4}}$, 且 $x+2 > 0$, 解得 $x = 3$ 或 $x = -11$ (舍去). 故选 A.

4. 在空间直角坐标系中, 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 $D(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $B(2, 4, 0)$, $C_1(0, 4, 2)$, 则点 A_1 到直线 BC_1 的距离为 ()

- A. $3\sqrt{2}$ B. 2 C. $\frac{12}{5}$ D. $\frac{5}{2}$

A 解析: 由题意建立如图所示的空间直角坐标系,



由 $D(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $B(2, 4, 0)$, $C_1(0, 4, 2)$, 得 $AB = 4$, $BC = 2$, $CC_1 = 2$. 连接 A_1B , A_1C_1 , BC_1 , 所以 $A_1B = 2\sqrt{5}$, $A_1C_1 = 2\sqrt{5}$, $BC_1 = 2\sqrt{2}$, 所以 $\triangle A_1BC_1$ 是等腰三角形.

取 BC_1 的中点为 O , 连接 OA_1 , 则 $OA_1 \perp BC_1$, 即点 A_1 到直线 BC_1 的距离为 OA_1 .

在 $Rt \triangle A_1OB$ 中, 有 $OA_1 = \sqrt{A_1B^2 - OB^2} = \sqrt{20 - 2} = 3\sqrt{2}$.

5. 已知向量 $\vec{AM} = (0, 1, \frac{1}{2})$, $\vec{AN} = (-1, \frac{1}{2}, 1)$, 则平面 AMN 的一个法向量是 ()

- A. $(-3, -2, 4)$ B. $(3, 2, -4)$
C. $(-3, -2, -4)$ D. $(-3, 2, -4)$

D 解析: 设平面 AMN 的法向量为 $n = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} n \cdot \vec{AM} = 0, \\ n \cdot \vec{AN} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} y + \frac{z}{2} = 0, \\ -x + \frac{1}{2}y + z = 0. \end{cases}$$

令 $z = 4$, 则 $x = 3$, $y = -2$, 所以 $n = (3, -2, 4)$ 是平面 AMN 的一个法向量.

由 $(-3, 2, -4) = -(3, -2, 4)$, 可知选项 D 符合.

6. 设 O 为坐标原点, 向量 $\vec{OA} = (1, 2, 3)$, $\vec{OB} = (2, 1, 2)$, $\vec{OP} = (1, 1, 2)$, 点 Q 在直线 OP 上运动, 则 $\vec{QA} \cdot \vec{QB}$ 的最小值为 ()

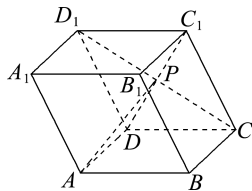
- A. $\frac{2}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

B 解析: 因为 $\vec{OP} = (1, 1, 2)$, 点 Q 在直线 OP 上运动, 所以可设 $\vec{OQ} = \lambda \vec{OP} = (\lambda, \lambda, 2\lambda)$.

又向量 $\vec{OA} = (1, 2, 3)$, $\vec{OB} = (2, 1, 2)$, 所以 $\vec{QA} = (1 - \lambda, 2 - \lambda, 3 - 2\lambda)$, $\vec{QB} = (2 - \lambda, 1 - \lambda, 2 - 2\lambda)$, 则 $\vec{QA} \cdot \vec{QB} = (1 - \lambda) \times (2 - \lambda) + (2 - \lambda) \times (1 - \lambda) + (3 - 2\lambda) \times (2 - 2\lambda) = 6\lambda^2 - 16\lambda + 10$.

易得当 $\lambda = \frac{4}{3}$ 时, $\vec{QA} \cdot \vec{QB}$ 取得最小值 $-\frac{2}{3}$. 故选 B.

7. 如图, 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是菱形, 侧面 A_1ADD_1 是正方形, 且 $\angle A_1AB = 120^\circ$, $\angle DAB = 60^\circ$, $AB = 2$. 若 P 是 C_1D 与 CD_1 的交点, 则异面



直线 AP 与 DC 的夹角的余弦值为 ()

A. $\frac{3\sqrt{7}}{14}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

D. $\frac{\sqrt{6}}{14}$

A 解析: 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 四边形 DD_1C_1C 是平行四边形, 侧面 A_1ADD_1 是正方形,

又 P 是 C_1D , CD_1 的交点, 所以 P 是 CD_1 的中点, 因为 $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, $\angle A_1AB = 120^\circ$, $\angle DAB = 60^\circ$, $AB = 2$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}),$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{AP}|^2 = \frac{1}{4}[\overrightarrow{AA_1}^2 + \overrightarrow{AB}^2 + 4\overrightarrow{AD}^2 + 2(\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD})] = \frac{1}{4}[4 + 4 + 4 \times 4 + 2 \times 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 + 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2}] = 7,$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{7}.$$

$$\begin{aligned} \text{又因为 } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DC} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{DC} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}) = \\ &= \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AA_1}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos 120^\circ + |\overrightarrow{AB}|^2 + 2|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos 60^\circ) = \frac{1}{2}\left[2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 2^2 + 2 \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2}\right] = 3, |\overrightarrow{DC}| = 2, \end{aligned}$$

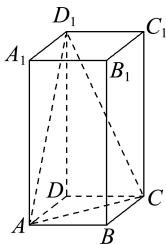
$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{DC} \rangle = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{DC}|} = \frac{3}{\sqrt{7} \times 2} = \frac{3\sqrt{7}}{14},$$

所以异面直线 AP 与 DC 的夹角的余弦值为

$$|\cos \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{DC} \rangle| = \frac{3\sqrt{7}}{14}.$$

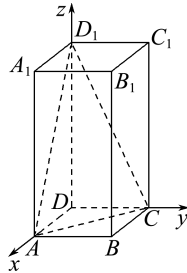
故选 A.

8. 如图, 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面边长为 2, 直线 CC_1 与平面 ACD_1 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$, 则正四棱柱的高为 ()



A.2 B.3 C.4 D.5

C 解析: 以 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $DD_1 = a$, 则 $A(2, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $D_1(0, 0, a)$, $C_1(0, 2, a)$,

所以 $\overrightarrow{AC} = (-2, 2, 0)$, $\overrightarrow{AD_1} = (-2, 0, a)$, $\overrightarrow{CC_1} = (0, 0, a)$.

设平面 ACD_1 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AD_1} = 0, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} -2x + 2y = 0, \\ -2x + az = 0. \end{cases}$$

令 $x = 1$, 则 $y = 1$, $z = \frac{2}{a}$, 所以 $\mathbf{n} = \left(1, 1, \frac{2}{a}\right)$ 是平面 ACD_1 的一个法向量.

$$\begin{aligned} \text{故 } \cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{CC_1} \rangle &= \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CC_1}}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{CC_1}|} = \frac{2}{\sqrt{1^2 + 1^2 + \left(\frac{2}{a}\right)^2} \cdot a} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2a^2 + 4}}. \end{aligned}$$

因为直线 CC_1 与平面 ACD_1 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$, 所以 $\frac{2}{\sqrt{2a^2 + 4}} = \frac{1}{3}$, 解得 $a = 4$.

二、多项选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 下列命题中是真命题的是 ()

A. 若向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 满足 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$, 则向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的夹角是钝角

B. 若 $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ 是空间的一个基底, 且 $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}$, 则 A, B, C, D 四点共面

C. 若 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 是空间的一个基底, 向量 $\mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$, 则 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{m}\}$ 也是空间的一个基底

D. 若直线 l 的一个方向向量为 $\mathbf{e} = (1, 0, 3)$, 平面 α 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (-2, 0, 2)$, 则直线 l 与平面

α 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

BC 解析: 选项 A, 若 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$, 则向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的夹角是钝角或向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 反向共线, 故 A 错误;

选项 B, $\overrightarrow{OD} = 2(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DA}) - 3(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB}) + 2(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{DA} - 3\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC}$, 即有 $\overrightarrow{DB} =$

$\frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$, 故 A, B, C, D 四点共面, 故 B 正确;

选项 C, 假设 $\{a, b, m\}$ 不是空间的一个基底, 则存在实数 x, y , 使 $m = xa + yb$, 即 $a + c = xa + yb$, 由向量 $\{a, b, c\}$ 是空间的一个基底, 则向量 a, b, c 不共面, 故不存在这样的实数 x, y , 即 $\{a, b, m\}$ 是空间的一个基底, 故 C 正确;

选项 D, 设直线 l 与平面 α 所成的角为 θ , 则 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 由题意可得, $\sin \theta = |\cos \langle e, n \rangle| = \frac{|e \cdot n|}{|e| \cdot |n|}$

$$= \frac{|-2+6|}{\sqrt{1+9} \times \sqrt{4+4}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 则 } \cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} =$$

$\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 故 D 错误.

故选 BC.

10. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=AD=2$, $AA_1=1$, 点 M 为线段 B_1D_1 上一动点 (包括端点), 则下列结论正确的是 ()

A. 当点 M 为 B_1D_1 的中点时, $C_1M \perp$ 平面 BB_1D_1D

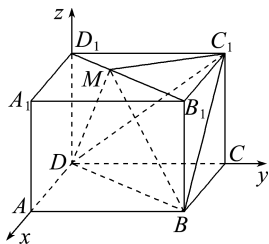
B. 当点 M 为 B_1D_1 的中点时, 直线 DM 与直线

BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

C. 当点 M 在线段 B_1D_1 上运动时, 三棱锥 C_1-BDM 的体积是定值

D. 点 M 到直线 BC_1 距离的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

ACD 解析: 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 以 D 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $D(0,0,0), B(2,2,0), C(0,2,0), C_1(0,2,1), D_1(0,0,1), B_1(2,2,1)$. 设 $M(t,t,1), 0 \leq t \leq 2$.

对于 A, $t=1, M(1,1,1), \overrightarrow{MC_1}=(-1,1,0), \overrightarrow{DD_1}=(0,0,1), \overrightarrow{DB}=(2,2,0)$, 因为 $\overrightarrow{MC_1} \cdot \overrightarrow{DD_1}=0, \overrightarrow{MC_1} \cdot \overrightarrow{DB}=0$, 所以 $MC_1 \perp DD_1, MC_1 \perp DB$,

而 $DD_1 \cap DB=D, DD_1, DB \subset$ 平面 BB_1D_1D , 因此 $C_1M \perp$ 平面 BB_1D_1D , A 正确;

对于 B, $\overrightarrow{DM}=(1,1,1), \overrightarrow{BC}=(-2,0,0)$,

$$|\cos \langle \overrightarrow{DM}, \overrightarrow{BC} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{DM}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{2}{\sqrt{3} \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ B}$$

错误;

对于 C, 由选项 A 知, 点 C_1 到平面 BB_1D_1D 的距离为 $\sqrt{2}$, 而 $\triangle BDM$ 的面积为 $\frac{1}{2}BD \cdot DD_1 = \sqrt{2}$,

因此三棱锥 C_1-BDM 的体积为 $\frac{2}{3}$, 是定值, C 正确;

对于 D, $\overrightarrow{BC_1}=(-2,0,1), \overrightarrow{C_1M}=(t,t-2,0)$, 则点 M 到直线 BC_1 的距离 $d =$

$$\sqrt{|\overrightarrow{C_1M}|^2 - \left(\frac{|\overrightarrow{C_1M} \cdot \overrightarrow{BC_1}|}{|\overrightarrow{BC_1}|} \right)^2} = \sqrt{t^2 + (t-2)^2 - \frac{4t^2}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{6}{5}t^2 - 4t + 4} = \sqrt{\frac{6}{5}\left(t - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}} \geq \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ 当且}$$

仅当 $t = \frac{5}{3}$ 时, 等号成立, D 正确.

故选 ACD.

11. 在正四面体 $D-ABC$ 中, 点 E 在棱 AB 上, 满足 $AE=2EB$, 点 F 为线段 AC 上的动点. 设直线 DE 与平面 DBF 所成的角为 α , 则下列说法不正确的是 ()

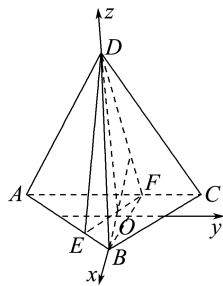
A. 存在某个位置, 使得 $DE \perp BF$

B. 存在某个位置, 使得 $\angle FDB = \frac{\pi}{4}$

C. 存在某个位置, 使得平面 $DEF \perp$ 平面 DAC

D. 存在某个位置, 使得 $\alpha = \frac{\pi}{6}$

ABD 解析: 如图, 设正四面体 $D-ABC$ 的底面中心为 O , 连接 DO, OB , 则 $DO \perp$ 平面 ABC . 以 O 为原点, OB, OD 所在直线分别为 x 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.



设正四面体的棱长为 2, 则 $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -1, 0\right)$,

$C\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, 0\right)$, $B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, 0\right)$, $E\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)$,

$D\left(0, 0, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

设 $F\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \lambda, 0\right) (-1 \leq \lambda \leq 1)$.

若存在某个位置, 使得 $DE \perp BF$, 则 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BF} =$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right) \cdot (-\sqrt{3}, \lambda, 0) = 0$, 解得 $\lambda = -3$, 不合题意, 故 A 不正确.

若存在某个位置, 使得 $\angle FDB = \frac{\pi}{4}$,

$$\text{即 } \cos \langle \overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DB} \rangle = \frac{\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{DF}| |\overrightarrow{DB}|} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{所以 } \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \lambda, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right) \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)}{\sqrt{\lambda^2 + 3} \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

此方程无解, 故 B 不正确.

$$\overrightarrow{DA} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -1, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right), \overrightarrow{DC} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right),$$

设平面 DAC 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DA} = -\frac{\sqrt{3}}{3}x_1 - y_1 - \frac{2\sqrt{6}}{3}z_1 = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DC} = -\frac{\sqrt{3}}{3}x_1 + y_1 - \frac{2\sqrt{6}}{3}z_1 = 0. \end{cases}$$

取 $z_1 = -1$, 则 $x_1 = 2\sqrt{2}$, $y_1 = 0$, 所以 $\mathbf{m} = (2\sqrt{2}, 0, -1)$ 是平面 DAC 的一个法向量.

设平面 DEF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{\sqrt{3}}{3}x_2 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}z_2 = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DF} = -\frac{\sqrt{3}}{3}x_2 + \lambda y_2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}z_2 = 0. \end{cases}$$

取 $z_2 = 1$, 得 $\mathbf{n} = \left(\frac{6\sqrt{2}\lambda + 2\sqrt{2}}{3\lambda - 1}, \frac{4\sqrt{6}}{3\lambda - 1}, 1\right)$ 是平面

DEF 的一个法向量.

若存在某个位置, 使得平面 DEF $\perp$ 平面 DAC,

$$\text{则 } 2\sqrt{2} \times \frac{6\sqrt{2}\lambda + 2\sqrt{2}}{3\lambda - 1} - 1 = 0,$$

解得 $\lambda = -\frac{3}{7} \in [-1, 1]$, 故 C 正确.

设平面 DBF 的法向量为 $\mathbf{v} = (x_3, y_3, z_3)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{v} \cdot \overrightarrow{DB} = \frac{2\sqrt{3}}{3}x_3 - \frac{2\sqrt{6}}{3}z_3 = 0, \\ \mathbf{v} \cdot \overrightarrow{DF} = -\frac{\sqrt{3}}{3}x_3 + \lambda y_3 - \frac{2\sqrt{6}}{3}z_3 = 0. \end{cases}$$

取 $x_3 = \sqrt{2}$, 得 $\mathbf{v} = \left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{\lambda}, 1\right)$ 是平面 DBF 的一个法向量.

若存在某个位置, 使得 $\alpha = \frac{\pi}{6}$,

$$\text{则 } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = |\cos \langle \mathbf{v}, \overrightarrow{DE} \rangle| = \frac{|\mathbf{v} \cdot \overrightarrow{DE}|}{|\mathbf{v}| |\overrightarrow{DE}|} =$$

$$\frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3\lambda} - \frac{2\sqrt{6}}{3}\right|}{\sqrt{3 + \frac{6}{\lambda^2}} \times \frac{2\sqrt{7}}{3}}, \text{ 整理得 } 5\lambda^2 - 4\lambda + 12 = 0, \text{ 此方}$$

程无解, 故 D 不正确. 故选 ABD.

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 已知空间向量 $\mathbf{a} = (1, -1, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{c} = (1, 2, m)$ 共面, 则实数 $m =$ _____.

3 解析: 设 $\mathbf{c} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$, 即 $(1, 2, m) = x(1, -1, 0)$

$$+ y(0, 1, 1), \text{ 故 } \begin{cases} x = 1, \\ -x + y = 2, \\ m = y, \end{cases} \text{ 解得 } m = y = 3.$$

13. 如图, 在四面体 O-ABC 中,

$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, D 为

BC 的中点, E 为 AD 的中点.

若 $\overrightarrow{OE} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$, 其中 x,

y, z $\in \mathbf{R}$, 则 $x =$ _____, y

$=$ _____, z $=$ _____.

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ 解析: 因为 D 为 BC 的中点, E 为

AD 的中点,

$$\text{所以 } \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} +$$

$$\overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{b} + \frac{1}{4}\mathbf{c}.$$

因为 $\overrightarrow{OE} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$, 所以 $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$, z

$= \frac{1}{4}$.

14. 如图 1, 正方形 ABCD 的边长为 4, AB = AE = BF

$= \frac{1}{2}EF$, AB $\parallel$ EF. 把四边形 ABCD 沿 AB 折起,

使得 AD $\perp$ 平面 AEFB, 得到如图 2 所示几何

体, G 是 EF 的中点, 则 AG 与平面 BCE 的位置

关系为 _____, 二面角 C-AE-F 的余弦值为 _____.

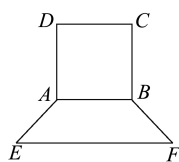


图1

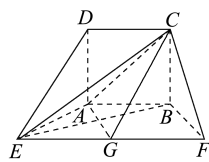


图2

垂直 $\frac{\sqrt{21}}{7}$ 解析: 如图, 连接 BG, 因为 BC $\parallel$

AD, AD $\perp$ 底面 AEFB, 所以 BC $\perp$ 底面 AEFB.

又 AG $\subset$ 底面 AEFB, 所以 BC $\perp$ AG.

因为 AB $\parallel$ EG 且 AB = EG, AB = AE,

所以四边形 ABGE 为菱形,

所以 AG $\perp$ BE.

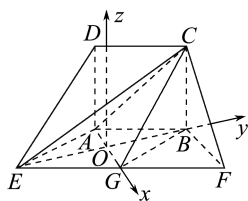
又 BC $\cap$ BE = B, BE $\subset$ 平面 BCE, BC $\subset$ 平面 BCE,

所以 AG $\perp$ 平面 BCE.

由以上证明知 AE = EG = BG = AB = 4,

设 AG $\cap$ BE = O, 由题意知 OE = OB = $2\sqrt{3}$, OA = OG = 2.

以 O 为原点,建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$,



则 $O(0,0,0), A(-2,0,0), E(0,-2\sqrt{3},0), C(0,2\sqrt{3},4), D(-2,0,4)$,

所以 $\overrightarrow{AC}=(2,2\sqrt{3},4), \overrightarrow{AE}=(2,-2\sqrt{3},0)$.

设平面 ACE 的法向量为 $\mathbf{n}=(x,y,z)$,

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{AE} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} 2x + 2\sqrt{3}y + 4z = 0, \\ 2x - 2\sqrt{3}y = 0. \end{cases}$$

令 $y=1$, 则 $x=\sqrt{3}, z=-\sqrt{3}$,

所以 $\mathbf{n}=(\sqrt{3},1,-\sqrt{3})$ 为平面 ACE 的一个法向量.

易知平面 AEF 的一个法向量为 $\overrightarrow{AD}=(0,0,4)$.

设二面角 $C-AE-F$ 的大小为 θ ,

由图易知 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$,

$$\text{所以 } \cos \theta = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AD}|}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{AD}|} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7} \times 4} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

四、解答题: 本题共 5 小题,共 77 分.解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分) 已知向量 $\mathbf{a}=(1,-3,2), \mathbf{b}=(-2,1,1)$, 点 $A(-3,-1,4), B(-2,-2,2)$.

(1) 求 $|2\mathbf{a}+\mathbf{b}|$;

(2) 在直线 AB 上,是否存在一点 E ,使得 $\overrightarrow{OE} \perp \mathbf{b}$? (O 为原点)

解: (1) $2\mathbf{a}+\mathbf{b}=(2,-6,4)+(-2,1,1)=(0,-5,5)$, 故 $|2\mathbf{a}+\mathbf{b}|=\sqrt{0^2+(-5)^2+5^2}=5\sqrt{2}$.

(2) 假设存在点 E , 设 $\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AB}$, 则 $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}=(-3,-1,4)+t(1,-1,-2)=(-3+t,-1-t,4-2t)$. 若 $\overrightarrow{OE} \perp \mathbf{b}$, 则 $\overrightarrow{OE} \cdot \mathbf{b}=0$, 所以 $-2(-3+t)+(-1-t)+(4-2t)=0$,

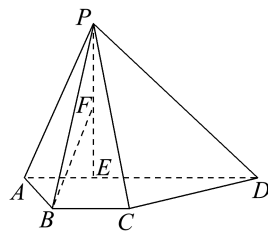
解得 $t=\frac{9}{5}$. 因此存在点 E , 使得 $\overrightarrow{OE} \perp \mathbf{b}$,

此时点 E 的坐标为 $(-\frac{6}{5}, -\frac{14}{5}, \frac{2}{5})$.

16. (15 分) (2024 · 北京卷) 如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $BC \parallel AD, AB=BC=1, AD=3$, 点 E 在 AD 上,且 $PE \perp AD, PE=DE=2$.

(1) 若 F 为线段 PE 的中点,求证: $BF \parallel$ 平面 PCD .

(2) 若 $AB \perp$ 平面 PAD ,求平面 PAB 与平面 PCD 夹角的余弦值.



(1) **证明:** 取 PD 的中点 G , 连接 FG, CG (图略),

因为 F 为 PE 的中点, 所以 $FG=\frac{1}{2}DE=1, FG \parallel DE$.

又 $BC=1, AD \parallel BC$, 所以 $FG=BC, FG \parallel BC$,

所以四边形 $FGCB$ 为平行四边形, 所以 $BF \parallel CG$.

又 $BF \not\subset$ 平面 $PCD, CG \subset$ 平面 PCD ,

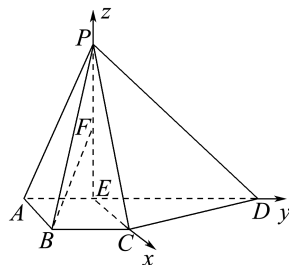
所以 $BF \parallel$ 平面 PCD .

(2) **解:** 因为 $AB \perp$ 平面 $PAD, PE \subset$ 平面 PAD , 所以 $AB \perp PE$.

又 $PE \perp AD, AB \cap AD=A, AB, AD \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PE \perp$ 平面 $ABCD$.

连接 EC , 易知四边形 $ABCE$ 为矩形, 则直线 EC, ED, EP 两两垂直, 故以 E 为原点, EC, ED, EP 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $P(0,0,2), C(1,0,0), D(0,2,0), A(0,-1,0), B(1,-1,0)$, 所以 $\overrightarrow{AB}=(1,0,0), \overrightarrow{AP}=(0,1,2), \overrightarrow{PC}=(1,0,-2), \overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$.

设平面 PAB 的法向量为 $\mathbf{n}_1=(x_1, y_1, z_1)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{AB} = x_1 = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{AP} = y_1 + 2z_1 = 0. \end{cases} \text{ 令 } z_1=1, \text{ 则 } y_1=-2, x_1=0,$$

所以 $\mathbf{n}_1=(0,-2,1)$ 为平面 PAB 的一个法向量.

设平面 PCD 的法向量为 $\mathbf{n}_2=(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{PC} = x_2 - 2z_2 = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{PD} = 2y_2 - 2z_2 = 0. \end{cases} \text{ 令 } z_2=1, \text{ 则 } x_2=2, y_2=1,$$

所以 $\mathbf{n}_2=(2,1,1)$ 为平面 PCD 的一个法向量.

设平面 PAB 与平面 PCD 的夹角为 θ ,

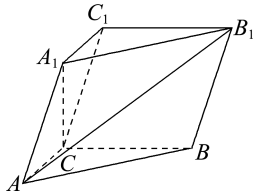
$$\text{则 } \cos \theta = |\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle| = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{\sqrt{30}}{30},$$

所以平面 PAB 与平面 PCD 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{30}$.

17. (15分) (2023·全国甲卷) 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1=2$, $A_1C \perp$ 平面 ABC , $\angle ACB=90^\circ$, 点 A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离为 1.

(1) 求证: $AC=A_1C$.

(2) 若直线 AA_1 与 BB_1 的距离为 2, 求 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值.



(方法一)(1) 证明: 因为 $A_1C \perp$ 平面 ABC , $BC \subset$ 平面 ABC ,

所以 $A_1C \perp BC$. 又 $\angle ACB=90^\circ$, 所以 $BC \perp AC$. 因为 $A_1C \cap AC=C$, $A_1C, AC \subset$ 平面 ACC_1A_1 , 所以 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 . 又 $BC \subset$ 平面 BCC_1B_1 , 所以平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

如图, 过点 A_1 作 $A_1O \perp CC_1$ 交 CC_1 于点 O , 又平面 $ACC_1A_1 \cap$ 平面 $BCC_1B_1 = CC_1$, $A_1O \subset$ 平面 ACC_1A_1 ,

所以 $A_1O \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

因为 A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离为 1, 所以 $A_1O=1$.

在 $\text{Rt}\triangle A_1CC_1$ 中, $A_1C \perp A_1C_1$, $CC_1=AA_1=2$,

设 $CO=x$, 则 $C_1O=2-x$.

因为 $\triangle A_1OC$, $\triangle A_1OC_1$, $\triangle A_1CC_1$ 均为直角三角形, 且 $CC_1=2$,

$A_1O^2 + CO^2 = A_1C^2$, $A_1O^2 + OC_1^2 = C_1A_1^2$, $A_1C^2 + A_1C_1^2 = C_1C^2$,

所以 $1+x^2+1+(2-x)^2=4$, 解得 $x=1$, 所以 $AC=A_1C_1=A_1C=\sqrt{2}$, 所以 $AC=A_1C$.

(2) 解: 因为 $AC=A_1C$, $BC \perp A_1C$, $BC \perp AC$, 所以 $\text{Rt}\triangle ACB \cong \text{Rt}\triangle A_1CB$, 所以 $BA=BA_1$.

如图, 过点 B 作 $BD \perp AA_1$ 交 AA_1 于点 D , 则 D 为 AA_1 的中点.

因为直线 AA_1 与 BB_1 的距离为 2, 所以 $BD=2$.

因为 $A_1D=1$, $BD=2$, 所以 $A_1B=AB=\sqrt{5}$.

所以在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{3}$.

延长 AC 至点 M , 使 $AC=CM$, 连接 C_1M ,

由 $CM \parallel A_1C_1$, $CM=A_1C_1$ 知四边形 A_1CMC_1 为平行四边形,

所以 $C_1M \parallel A_1C$, 所以 $C_1M \perp$ 平面 ABC .

又 $AM \subset$ 平面 ABC , 所以 $C_1M \perp AM$.

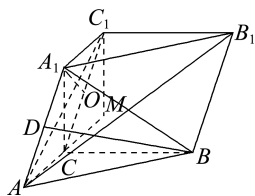
在 $\text{Rt}\triangle AC_1M$ 中, $AM=2AC$, $C_1M=A_1C$, 所以 $AC_1=\sqrt{(2AC)^2+A_1C^2}$,

在 $\text{Rt}\triangle AB_1C_1$ 中, $AC_1=\sqrt{AB_1^2-B_1C_1^2}$, $B_1C_1=BC=\sqrt{3}$,

所以 $AB_1=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{13}$.

又 A 到平面 BCC_1B_1 距离也为 1,

所以 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为 $\frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$.



(方法二)(1) 证明: 因为 $A_1C \perp$ 平面 ABC , $BC \subset$ 平面 ABC , 所以 $A_1C \perp BC$.

因为 $\angle ACB=90^\circ$, 所以 $BC \perp AC$. 又 $AC \cap A_1C=C$, $A_1C, AC \subset$ 平面 ACC_1A_1 ,

所以 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 .

又因为 $BC \subset$ 平面 BCC_1B_1 ,

所以平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

如图, 过点 A_1 作 $A_1H \perp CC_1$, 则 $A_1H \perp$ 平面 BCC_1B_1 (面面垂直的性质),

即 A_1H 的长为点 A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离, 所以 $A_1H=1$.

设 $AC=x$, 在 $\text{Rt}\triangle A_1CA$ 中, $A_1C=\sqrt{4-x^2}$,

在 $\text{Rt}\triangle CA_1C_1$ 中, 由等面积法得 $A_1C_1 \cdot A_1C = CC_1 \cdot A_1H$, 即 $x \cdot \sqrt{4-x^2} = 2 \times 1$, 解得 $x=\sqrt{2}$,

所以 $A_1C=AC=\sqrt{2}$,

故 $A_1C=AC$.

(2) 解: 如图, 连接 B_1C , 过点 C 作 $CQ \perp AA_1$, 垂足为 Q , 连接 BQ . 由 (1) 知 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 , 又 $AA_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1 , 所以 $BC \perp AA_1$.

又 $CQ \cap BC=C$, $CQ, BC \subset$ 平面 BCQ , 所以 $AA_1 \perp$ 平面 BCQ .

因为 $BQ \subset$ 平面 BCQ , 所以 $AA_1 \perp BQ$.

又因为 $AA_1 \parallel BB_1$, 所以 $BB_1 \perp BQ$. 所以 BQ 的长为直线 AA_1 与 BB_1 之间的距离, 即 $BQ=2$.

在 $\text{Rt}\triangle BCQ$ 中, $BQ=2$, $CQ=1$, 所以 $BC=\sqrt{3}$.

由 (1) 知 CA, CB, CA_1 两两垂直, 所以以 C 为原点, CA, CB, CA_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $C(0,0,0)$, $A(\sqrt{2},0,0)$, $A_1(0,0,\sqrt{2})$, $B(0,\sqrt{3},0)$,

所以 $\overrightarrow{CB}=(0,\sqrt{3},0)$, $\overrightarrow{AA_1}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$.

又知 $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AA_1}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$, 所以 $B_1(-\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{2})$, 所以 $\overrightarrow{CB_1}=(-\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{2})$, $\overrightarrow{AB_1}=(-2\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{2})$.

设平面 BCC_1B_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

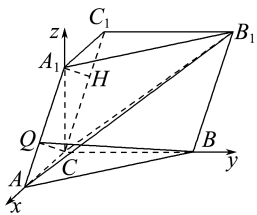
$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{CB} = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{CB_1} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} \sqrt{3}y = 0, \\ -\sqrt{2}x + \sqrt{3}y + \sqrt{2}z = 0. \end{cases} \text{ 令 } x = 1, \text{ 则 } y = 0, z = 1, \text{ 所以 } \vec{n} = (1, 0, 1) \text{ 为平面 } BCC_1B_1 \text{ 的一个法向量.}$$

设直线 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成的角为 θ , 则

$$\sin \theta = |\cos \langle \vec{AB_1}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{AB_1} \cdot \vec{n}|}{|\vec{AB_1}| |\vec{n}|} =$$

$$\frac{|-2\sqrt{2} \times 1 + \sqrt{2} \times 1|}{\sqrt{8+3+2} \times \sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{13}}{13},$$

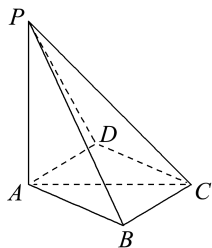
即直线 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{13}}{13}$.



18. (17分) (2024·新高考全国I卷) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = AC = 2$, $BC = 1$, $AB = \sqrt{3}$.

(1) 若 $AD \perp PB$, 证明: $AD \parallel$ 平面 PBC ;

(2) 若 $AD \perp DC$, 且二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$, 求 AD 的长.



(1) 证明: 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 而 $AD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp AD$.

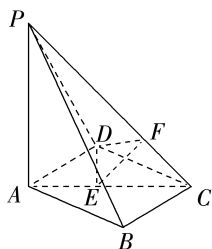
又 $AD \perp PB$, $PB \cap PA = P$, $PB, PA \subset$ 平面 PAB , 所以 $AD \perp$ 平面 PAB .

因为 $AB \subset$ 平面 PAB , 所以 $AD \perp AB$.

因为 $BC^2 + AB^2 = AC^2$, 所以 $BC \perp AB$, 所以 $AD \parallel BC$.

又 $AD \not\subset$ 平面 PBC , $BC \subset$ 平面 PBC , 所以 $AD \parallel$ 平面 PBC .

(2) 解: (方法一) 如图所示, 过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E , 再过点 E 作 $EF \perp CP$ 于点 F , 连接 DF .



因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA \subset$ 平面 PAC , 所以平面 $PAC \perp$ 平面 $ABCD$. 因为平面 $PAC \cap$ 平面 $ABCD = AC$, $DE \perp AC$, $DE \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $DE \perp$ 平面 PAC , 所以 $DE \perp CP$. 又 $EF \perp CP$, $EF \cap DE = E$, $EF, DE \subset$ 平面 DEF , 所以 $CP \perp$ 平面 DEF . 又 $DF \subset$ 平面 DEF , 所以 $PC \perp DF$.

根据二面角的定义, 可知 $\angle DFE$ 即为二面角 $A-CP-D$ 的平面角,

$$\text{即 } \sin \angle DFE = \frac{\sqrt{42}}{7}, \text{ 所以 } \tan \angle DFE = \sqrt{6}.$$

因为 $AD \perp DC$, 设 $AD = x$, 则 $CD = \sqrt{4-x^2}$, 由等

$$\text{面积法可得, } DE = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}.$$

$$\text{又 } CE = \sqrt{(4-x^2) - \frac{x^2(4-x^2)}{4}} = \frac{4-x^2}{2}, \text{ 由题意}$$

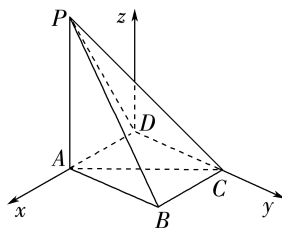
$$\text{知, } \triangle EFC \text{ 为等腰直角三角形, 所以 } EF = \frac{4-x^2}{2\sqrt{2}}.$$

因为 $DE \perp$ 平面 PAC , $EF \subset$ 平面 PAC , 所以 $DE \perp EF$,

$$\text{所以 } \tan \angle DFE = \frac{\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}}{\frac{4-x^2}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{6}, \text{ 解得 } x = \sqrt{3}, \text{ 即}$$

$$AD = \sqrt{3}.$$

(方法二) 由题意知 DC, AD, AP 两两垂直, 以 D 为原点, AD 所在直线为 x 轴, DC 所在直线为 y 轴, 过点 D 且平行于 AP 的直线为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $D(0, 0, 0)$. 设 $A(a, 0, 0)$, $a > 0$, 则 $CD = \sqrt{4-a^2}$, $C(0, \sqrt{4-a^2}, 0)$, $P(a, 0, 2)$, 所以 $\vec{CD} = (0, -\sqrt{4-a^2}, 0)$, $\vec{AC} = (-a, \sqrt{4-a^2}, 0)$, $\vec{CP} = (a, -\sqrt{4-a^2}, 2)$.



设平面 CPD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{CD} \cdot \vec{n} = 0, \\ \vec{CP} \cdot \vec{n} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -\sqrt{4-a^2}y = 0, \\ ax - \sqrt{4-a^2}y + 2z = 0. \end{cases} \text{ 取 } x =$$

2, 则 $y = 0, z = -a$, 所以 $\vec{n} = (2, 0, -a)$ 是平面 CPD 的一个法向量.

设平面 ACP 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{CP} = 0, \\ \vec{m} \cdot \vec{AC} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} ax_1 - \sqrt{4-a^2}y_1 + 2z_1 = 0, \\ -ax_1 + \sqrt{4-a^2}y_1 = 0, \end{cases} \text{ 则}$$

$z_1 = 0$. 取 $x_1 = \sqrt{4-a^2}$, 得 $y_1 = a$, 所以 $m = (\sqrt{4-a^2}, a, 0)$ 是平面 ACP 的一个法向量.

因为二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$,

所以二面角 $A-CP-D$ 的余弦值的绝对值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$,

$$|\cos \langle m, n \rangle| = \frac{|m \cdot n|}{|m| \cdot |n|} = \frac{2\sqrt{4-a^2}}{\sqrt{4-a^2+a^2} \cdot \sqrt{4+a^2}} = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

又 $a > 0$, 所以 $a = \sqrt{3}$, 即 $AD = \sqrt{3}$.

19. (17 分) 如图 1, 在边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 60^\circ$, 将 $\triangle BCD$ 沿对角线 BD 折起到 $\triangle BC'D$ 的位置, 使平面 $BC'D \perp$ 平面 ABD , 得到如图 2 所示几何体, E 是 BD 的中点, $FA \perp$ 平面 ABD , 且 $FA = 2\sqrt{3}$.

(1) 求证: $FA \parallel$ 平面 $BC'D$;

(2) 在线段 AD 上是否存在一点 M , 使得 $C'M \perp$ 平面 FBC' ? 若存在, 求 $\frac{AM}{AD}$ 的值; 若不存在, 说明理由.

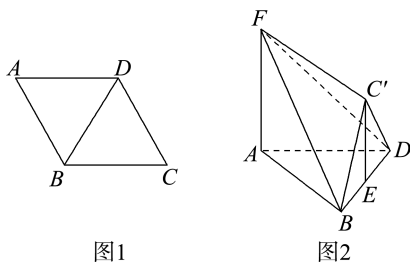


图1

图2

(1) 证明: 因为 $BC' = C'D$, E 为 BD 的中点, 所以 $C'E \perp BD$.

又平面 $BC'D \perp$ 平面 ABD , 且平面 $BC'D \cap$ 平面 $ABD = BD$, $C'E \subset$ 平面 $BC'D$,

所以 $C'E \perp$ 平面 ABD .

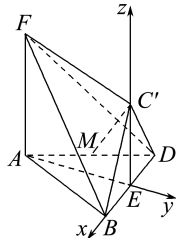
因为 $FA \perp$ 平面 ABD , 所以 $FA \parallel C'E$.

因为 $C'E \subset$ 平面 $BC'D$, $FA \not\subset$ 平面 $BC'D$, 所以 $FA \parallel$ 平面 $BC'D$.

(2) 解: 由 (1) 知, $C'E \perp$ 平面 ABD , $AE, BE \subset$ 平面 ABD ,

所以 $C'E \perp AE, C'E \perp BE$. 又四边形 $ABCD$ 为边长为 2 的菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, 所以 $AE \perp BD, BE = ED = 1, AE = \sqrt{3}$.

故以 E 为原点, BD, AE, EC' 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $B(1, 0, 0), A(0, -\sqrt{3}, 0), D(-1, 0, 0), F(0, -\sqrt{3}, 2\sqrt{3}), C'(0, 0, \sqrt{3})$, 所以 $\overrightarrow{FB} = (1, \sqrt{3}, -2\sqrt{3}), \overrightarrow{BC'} = (-1, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{AD} = (-1, \sqrt{3}, 0)$.

设平面 FBC' 的法向量为 $m = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{FB} = x + \sqrt{3}y - 2\sqrt{3}z = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{BC'} = -x + \sqrt{3}z = 0. \end{cases}$$

令 $z = 1$, 则 $x = \sqrt{3}, y = 1$, 所以 $m = (\sqrt{3}, 1, 1)$ 为平面 FBC' 的一个法向量.

假设在线段 AD 上存在 $M(a, b, c)$, 使得 $C'M \perp$ 平面 FBC' ,

设 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AD} (0 \leq \lambda \leq 1)$, 则 $(a, b + \sqrt{3}, c) = \lambda(-1, \sqrt{3}, 0) = (-\lambda, \sqrt{3}\lambda, 0)$,

所以 $a = -\lambda, b = \sqrt{3}\lambda - \sqrt{3}, c = 0$, 故 $\overrightarrow{C'M} = (-\lambda, \sqrt{3}\lambda - \sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

因为 $C'M \perp$ 平面 FBC' , 且平面 FBC' 的一个法向量为 $m = (\sqrt{3}, 1, 1)$,

所以 $m \parallel \overrightarrow{C'M}$, 即 $m = t \overrightarrow{C'M}$,

$$\begin{cases} \sqrt{3} = -\lambda t, \\ 1 = t(\sqrt{3}\lambda - \sqrt{3}), \\ 1 = -\sqrt{3}t, \end{cases} \text{ 方程组无解, } \lambda \text{ 不存在.}$$

所以在线段 AD 上不存在点 M , 使得 $C'M \perp$ 平面 FBC' .

单元概览

单元导航

本章用解析几何的方法对直线和圆进行再研究,可以使学生体会解析几何方法的特点.首先在平面直角坐标系中,探索确定直线位置和圆的几何要素,然后用代数方法刻画直线的斜率、两点间的距离,在此基础上,建立直线和圆的方程,用方程研究两条直线的位置关系、交点坐标,点到直线的距离,以及直线与圆、圆与圆的位置关系,解决简单的数学问题和实际问题,初步感悟平面解析几何蕴含的数学思想.

学习目标

- 1.理解直线的倾斜角和斜率的概念,掌握过两点的直线斜率的计算公式.
- 2.根据确定直线位置的几何要素,探索并掌握直线方程的三种形式:点斜式、两点式、一般式.
- 3.探索并掌握平面上两点间的距离公式、点到直线的距离公式,会求两条平行直线间的距离.
- 4.探索并掌握圆的标准方程与一般方程.
- 5.能根据给定直线、圆的方程,判断直线与圆、圆与圆的位置关系.
- 6.能用直线和圆的方程解决一些简单的数学问题与实际问题.

核心概念

- 1.通过斜率概念的建立和斜率公式的推导,利用直线的斜率判断直线的平行和垂直以及直线方程的建立,经历几何问题代数化的过程,经历从特殊到一般、从感性到理性的认知过程,体会数形结合、转化与化归思想,提升直观想象、逻辑推理、数学建模等核心素养.
- 2.通过对两点间的距离公式、点到直线的距离公式及两条平行直线间的距离公式的探索,体会几何度量“距离”的研究方法,进一步体会“坐标法”的思想,体会通过代数方法研究几何问题的一般思路.在两点间距离公式、点到直线的距离公式及两条平行直线间的距离公式的探究和推导中,蕴涵着丰富的转化与化归、数形结合、函数与方程等重要的数学思想,有利于发展数学运算、逻辑推理等核心素养.
- 3.通过对圆的标准方程和圆的一般方程的探索,体会类比的数学思想、转化与化归的思想,发展数学推理、数学运算、几何直观等核心素养.
- 4.通过图形位置关系与方程的解、几何问题与代数方法的转化,学习用方程研究两个图形位置关系的方法,体会数形结合、转化与化归思想.

学法指导

- 1.在建立直线的方程、圆的方程的过程中,认识曲线与方程之间的关系.曲线与方程之间的一一对应反映了数量关系与空间形式之间的关系.有了这种关系,就可以用方程表示曲线,对曲线进行“运算”;建立方程的几何直观表达,把方程“形象化”,进一步体会数形结合的思想.

2. 注重对坐标法思想的宏观认识, 注意体会坐标系作为一个参照系, 在刻画直线位置时的作用, 理解以一个点和一个方向作为确定直线位置的几何要素的合理性. 同时要理解斜率的概念及斜率与倾斜角的关系.
3. 重视直线的点斜式方程的学习. 因为点斜式方程是其他所有形式方程的基础, 实际上, 它是经过两点的直线斜率公式的一种“变式”表达. 在得出点斜式方程后, 通过特殊化、其他方式表达、方程形式的共性归纳等, 得出直线方程的其他形式, 建立各种方程的内在联系. 在此过程中, 要体会斜率的核心地位.
4. 联系直线点斜式方程的建立过程, 按照建立曲线方程的基本步骤得出圆的方程, 并进行求曲线方程的训练.

单元主题任务

现实世界中, 到处有美妙的曲线, 从飞逝的流星到雨后的彩虹, 从古代的石拱桥到现代的立交桥……

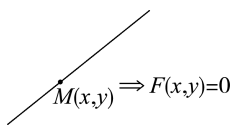
行星围绕太阳运行, 人们可以建立行星运动的轨迹方程, 并借助方程进一步认识它的运动规律.

在建造桥梁时, 我们可以根据要求, 首先确定桥拱所对应的曲线方程, 然后进行进一步的设计和施工.

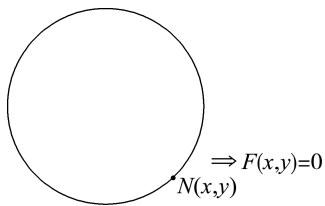


曲线可以看成满足某种条件的点的集合. 引进平面直角坐标系后, 平面内的点可以用坐标 (x, y) 来表示. 根据曲线的几何特征, 可以得到曲线上任意一点的坐标 (x, y) 满足的一个方程 $F(x, y) = 0$; 反过来, 以方程 $F(x, y) = 0$ 的解 (x, y) 为坐标的点也都在曲线上. 这样, 对曲线性质的研究就可以通过对方程 $F(x, y) = 0$ 的研究来进行.

直线是常见的几何图形, 直线可以看成满足某种条件的点的集合. 在平面直角坐标系中, 当点用坐标 (x, y) 表示后, 直线便可用一个方程 $F(x, y) = 0$ 表示, 进而通过对方程的研究来研究直线.



圆也是常见的几何图形, 圆也可以看成满足某种条件的点的集合. 在平面直角坐标系中, 当点用坐标 (x, y) 表示后, 圆便可以用一个方程 $F(x, y) = 0$ 表示, 进而通过对方程的研究来研究圆.



(1) 如何建立直线、圆的方程?

(2) 如何利用直线的方程研究直线的性质? 如何利用圆的方程研究圆的性质?

(3) 直线与圆有哪些位置关系?

探究构建

2.1 直线的倾斜角与斜率

2.1.1 倾斜角与斜率

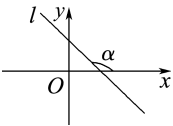
学习任务目标

1. 在平面直角坐标系中, 结合具体图形, 探索确定直线位置的几何要素.
2. 理解直线的倾斜角和斜率的概念, 经历用代数方法刻画直线斜率的过程.
3. 掌握过两点的直线斜率的计算公式.

问题式预习

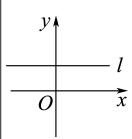
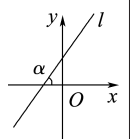
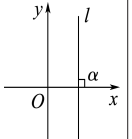
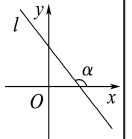
【知识清单】

知识点一 倾斜角的相关概念

定义	当直线 l 与 x 轴相交时, 以 x 轴为基准, x 轴正向与直线 l 向上的方向之间所成的角 α 叫做直线 l 的倾斜角. 当直线 l 与 x 轴平行或重合时, 规定直线 l 的倾斜角为 0° .
图示	
范围	$0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$
作用	用倾斜角表示平面直角坐标系中一条直线的倾斜程度, 也就表示了直线的方向. 确定平面直角坐标系中一条直线位置的几何要素: 直线上的一个定点以及它的倾斜角.

知识点二 斜率的概念及斜率公式

- (1) 定义: 倾斜角 α ($\alpha \neq 90^\circ$) 的 正切值.
- (2) 记法: $k = \tan \alpha$.
- (3) 斜率与倾斜角的对应关系:

图示				
----	---	---	---	---

续表

倾斜角 α	0°	$(0^\circ, 90^\circ)$	90°	$(90^\circ, 180^\circ)$
斜率	0	$(0, +\infty)$	不存在	$(-\infty, 0)$

(4) 经过两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ ($x_1 \neq x_2$) 的直线的斜率公式: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

(5) 若直线 l 的斜率为 k , 它的一个方向向量的坐标为 (x, y) , 则 $k = \frac{y}{x}$.

【概念辨析】

1. 判断正误 (正确的打“√”, 错误的打“×”).
 - (1) 任意一条直线都有唯一的倾斜角. (√)
 - (2) 一条直线的倾斜角可以为 -30° . (×)
 - (3) 倾斜角为 0° 的直线有无数条. (√)
 - (4) 若直线的倾斜角为 α , 则 $\sin \alpha \in (0, 1)$. (×)

2. 若经过 $A(m, 3), B(1, 2)$ 两点的直线的倾斜角为 45° , 则 m 等于 ()

A. 2 B. 1 C. -1 D. -2

A 解析: 由题意知, $\tan 45^\circ = \frac{2-3}{1-m}$, 解得 $m = 2$.

3. 请思考并回答下列问题:

(1) 所有直线都有斜率吗? 如果直线没有斜率, 那么这条直线的倾斜角为多少?

提示: 不是. 若直线没有斜率, 则其倾斜角为 90° .

(2) 斜率公式 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 中, 分子与分母的位置是

否可以互换? y_1 与 y_2, x_1 与 x_2 的位置呢?

提示:斜率公式中分子与分母的位置不可以互换,但 y_1 与 y_2, x_1 与 x_2 可以同时互换位置,即斜率公式也可写为 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

(3)直线斜率的正负与倾斜角的范围有什么联系?

提示:当 $k = \tan \alpha < 0$ 时,倾斜角 α 是钝角;

当 $k = \tan \alpha > 0$ 时,倾斜角 α 是锐角;

当 $k = \tan \alpha = 0$ 时,倾斜角 α 是 0° .

(4)直线的斜率 k 随倾斜角 α 的增大而增大吗?

提示:不是,在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内, k 随 α 的增大而增大,在

$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 内, k 也是随 α 的增大而增大,但当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$

时,斜率 k 不存在.

任务型课堂

任务1 直线的倾斜角

1.下列说法中正确的是 ()

A.若直线的倾斜角为 α ,则此直线的斜率为 $\tan \alpha$

B.若直线的斜率为 $\tan \alpha$,则此直线的倾斜角为 α

C.若直线的倾斜角为 α ,则 $\tan \alpha > 0$

D.任意直线都有倾斜角,但它不一定有斜率

D 解析:当 $\alpha = 90^\circ$ 时,直线的斜率不存在,故 A 错误;直线的斜率为 $\tan \alpha$,但只有 $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ 时, α 才是此直线的倾斜角,故 B 错误;当 $\alpha = 0^\circ$ 时, $\tan \alpha = 0$,故 C 错误;D 正确,故选 D.

2.一条直线 l 与 x 轴相交,其向上方向与 y 轴正方向所成的角为 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$),则其倾斜角为 ()

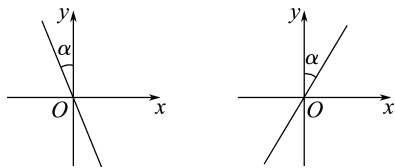
A. α

B. $180^\circ - \alpha$

C. $180^\circ - \alpha$ 或 $90^\circ - \alpha$

D. $90^\circ + \alpha$ 或 $90^\circ - \alpha$

D 解析:如图,当 l 的倾斜角大于 90° 时,倾斜角为 $90^\circ + \alpha$;当 l 的倾斜角小于 90° 时,倾斜角为 $90^\circ - \alpha$. 故选 D.



【探究总结】

理解直线的倾斜角的概念时,要注意三个条件:① x 轴正向;② 直线向上的方向;③ 小于 180° 的非负角.

任务2 直线的斜率

探究活动

例1 (1)已知点 $P(-\sqrt{3}, 1)$, 点 Q 在 y 轴上, 直线 PQ 的倾斜角为 120° , 则点 Q 的坐标为 _____.

(2)求经过下列两点的直线斜率,并判断其倾斜角是什么类型的角.

① $(1, 1), (2, 4)$; ② $(-3, 5), (0, 2)$;

③ $(2, 3), (2, 5)$; ④ $(3, -2), (6, -2)$.

(1) $(0, -2)$ 解析:因为点 Q 在 y 轴上,所以可设点 Q 的坐标为 $(0, y)$. 又因为 $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$,

所以 $\frac{y-1}{0+\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$, 解得 $y = -2$,

因此 $Q(0, -2)$.

(2)解:① $k = \frac{4-1}{2-1} = 3 > 0$, 所以倾斜角是锐角;

② $k = \frac{2-5}{0-(-3)} = -1 < 0$, 所以倾斜角是钝角;

③ 由 $x_1 = x_2 = 2$ 知 k 不存在, 倾斜角是 90° ;

④ $k = \frac{-2-(-2)}{6-3} = 0$, 所以倾斜角为 0° .

【探究总结】

求直线的斜率的两种方法

(1)利用定义:已知直线的倾斜角为 α , 且 $\alpha \neq 90^\circ$, 则 $k = \tan \alpha$.

(2)利用斜率公式: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ($x_1 \neq x_2$).

应用迁移

1.若 $A(2, -3), B(4, 3), C(5, m)$ 三点在同一条直线上, 则实数 $m =$ _____.

6 解析:由题可知 $k_{AB} = \frac{3-(-3)}{4-2} = 3, k_{AC} =$

$\frac{m-(-3)}{5-2} = \frac{m+3}{3}$.

因为 A, B, C 三点共线, 所以 $k_{AB} = k_{AC}$, 解得 $m = 6$.

2.经过 $A(1, 5), B(3, 2)$ 两点的直线的一个方向向量为 $(2, n)$, 则实数 $n =$ _____.

-3 解析:由题意知直线的一个方向向量为 $\overrightarrow{AB} = (3-1, 2-5) = (2, -3)$, 故 $n = -3$.

任务3 直线斜率的应用

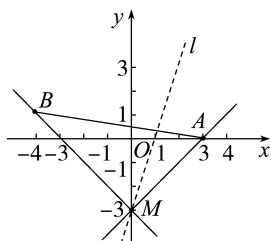
探究活动

例2 过点 $M(0, -3)$ 的直线 l 与以点 $A(3, 0), B(-4, 1)$ 为端点的线段 AB 有公共点, 求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

解:由题意与斜率公式可知, 直线 AM 与 BM 的斜率分别为 $k_{AM} = \frac{0-(-3)}{3-0} = 1$,

$$k_{BM} = \frac{1 - (-3)}{-4 - 0} = -1.$$

如图所示,



直线 l 相当于绕点 M 在直线 AM 与 BM 间旋转. 当 l 由 AM 位置旋转到 y 轴位置时, 倾斜角增大到 90° , 又 $k_{AM} = 1$, 所以 $k \geq 1$; 当 l 从 y 轴位置旋转到 BM 位置时, 倾斜角大于 90° , 又 $k_{BM} = -1$, 所以 $k \leq -1$. 综上所述, 直线 l 的斜率 k 的取值范围是 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

【一题多思】

思考 1. 如何借助于正切函数的单调性理解直线的斜率随倾斜角的变化而变化?

提示: 当倾斜角为锐角时, 斜率为正, 而且斜率随着倾斜角的增大而增大; 当倾斜角为钝角时, 斜率为负, 而且斜率随着倾斜角的增大而增大.

思考 2. 本例中, 把点 M 的坐标改为 $(-5, -3)$, 其余条件不变, 求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

解: 直线 AM 的斜率为 $k_{AM} = \frac{-3 - 0}{-5 - 3} = \frac{3}{8}$, 直线 BM

的斜率为 $k_{BM} = \frac{-3 - 1}{-5 - (-4)} = 4$,

由图 (图略) 可知, 直线 l 的斜率 k 的取值范围是 $\left[\frac{3}{8}, 4\right]$.

【探究总结】

1. 直线的倾斜角 α 与斜率 k 的关系: $k = \tan \alpha$ ($\alpha \neq 90^\circ$). 由直线的倾斜角能求斜率, 反之, 由直线的斜率也能求倾斜角. 注意倾斜角 α 的范围为 $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$.
2. 当在 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 时, $k > 0$, 且 k 随着 α 的增大而增大; 当 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ 时, $k < 0$, 且 k 随着 α 的增大而增大. 但当 $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ 时, k 并不是随着 α 的增大而增大的.
3. 涉及直线与线段有交点的问题, 常结合图形利用斜率公式求解.

应用迁移

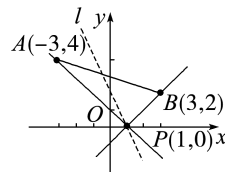
1. 已知点 $A(-3, 4)$, $B(3, 2)$, 过 $P(1, 0)$ 的直线 l 与线段 AB 有公共点.

(1) 求直线 l 的倾斜角 α 的取值范围;

(2) 求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

解: 由题意可知 $k_{PA} = \frac{4 - 0}{-3 - 1} = -1$, $k_{PB} = \frac{2 - 0}{3 - 1} = 1$, 如图.

1, 如图.



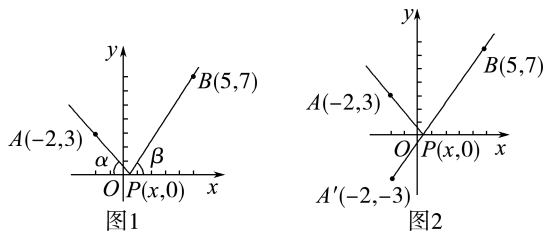
(1) 由题意可知, 直线 l 的倾斜角介于直线 PB 与 PA 的倾斜角之间. 易知直线 PB 的倾斜角是 45° , 直线 PA 的倾斜角是 135° , 所以 α 的取值范围是 $45^\circ \leq \alpha \leq 135^\circ$.

(2) 要使直线 l 与线段 AB 有公共点, 则直线 l 的斜率 k 的取值范围是 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

2. 一条光线从点 $A(-2, 3)$ 射入, 交 x 轴于点 P , 经 x 轴反射后, 通过点 $B(5, 7)$, 求点 P 的坐标.

解: (方法一) 设点 $P(x, 0)$. 如图 1, 由光的反射原理知, 反射角等于入射角, 可得 $\beta = \alpha$. 所以反射光线 PB 的倾斜角 β 与入射光线 PA 的倾斜角 ($180^\circ - \alpha$) 互补. 因此 $k_{AP} = -k_{BP}$, 即 $\frac{0 - 3}{x - (-2)} = -\frac{0 - 7}{x - 5}$,

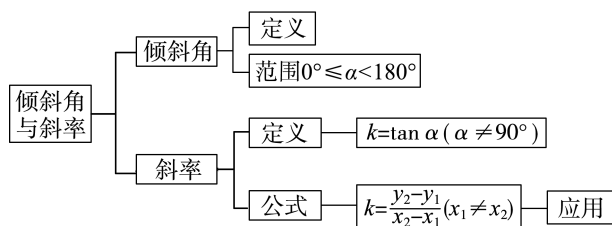
解得 $x = \frac{1}{10}$, 所以点 P 的坐标为 $\left(\frac{1}{10}, 0\right)$.



(方法二) 如图 2, 由题意, 易知入射点 $A(-2, 3)$ 关于 x 轴的对称点为 $A'(-2, -3)$.

由光学知识知, 点 A' 应在反射光线所在的直线上, 即 A', P, B 三点共线. 设点 $P(x, 0)$, 从而有 $k_{A'P} = k_{PB}$, 即 $\frac{0 + 3}{x + 2} = \frac{7}{5 - x}$, 解得 $x = \frac{1}{10}$, 所以点 P 的坐标为 $\left(\frac{1}{10}, 0\right)$.

提质归纳



课后素养评价(十二)

倾斜角与斜率

A组 学习·理解

1. (多选) 下列叙述正确的是 ()

- A. 任意一条直线都有倾斜角和斜率
 B. 直线的倾斜角 α 的取值范围是 $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$
 C. 若一条直线的倾斜角为 α ($\alpha \neq 90^\circ$), 则此直线的斜率为 $\tan \alpha$
 D. 平面直角坐标系内与坐标轴垂直的直线的倾斜角是 0° 或 90°

BCD 解析: 根据斜率的定义知, 当直线与 x 轴垂直时, 斜率不存在, 故 A 错误, 其他选项正确.

2. 若经过
- $A(\sqrt{3}, m)$
- ,
- $B(2\sqrt{3}, 4)$
- 两点的直线的倾斜角为
- 30°
- , 则
- $m =$
- ()

- A. 6 B. -6
 C. 3 D. -3

C 解析: 由题意可得 $\tan 30^\circ = \frac{4-m}{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}$, 解得 $m =$

3, 故选 C.

3. 已知直线
- l
- 的斜率的绝对值等于
- $\sqrt{3}$
- , 则直线
- l
- 的倾斜角
- α
- 为 ()

- A. 60° 或 120° B. 30°
 C. 60° D. 30° 或 150°

A 解析: 由题意知 $|\tan \alpha| = \sqrt{3}$,
 即 $\tan \alpha = \sqrt{3}$ 或 $\tan \alpha = -\sqrt{3}$,
 所以直线 l 的倾斜角为 60° 或 120° .

4. (多选) 若经过点
- $A(1-a, 1+a)$
- ,
- $B(3, a)$
- 的直线的倾斜角为钝角, 则实数
- a
- 的值不可能为 ()

- A. -3 B. -2
 C. 1 D. 2

AB 解析: 由题意得 $k_{AB} = \frac{1+a-a}{1-a-3} = \frac{1}{-2-a} < 0$,
 即 $2+a > 0$, 所以 $a > -2$.

5. 若
- $A(-1, -2)$
- ,
- $B(4, 8)$
- ,
- $C(5, x)$
- 三点共线, 则
- $x =$
- ()

- A. -2 B. 5 C. 10 D. 12

C 解析: 由题意可知, 直线 AB , AC 的斜率存在并相等, 即 $\frac{8-(-2)}{4-(-1)} = \frac{x-(-2)}{5-(-1)}$, 解得 $x = 10$.

B组 应用·实践

1. (多选) 若直线
- l
- 向上方向与
- y
- 轴的正方向成
- 30°
- 角, 则直线
- l
- 的倾斜角可能为 ()

- A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°

BC 解析: 由于 y 轴正方向对应的直线的倾斜角为 90° , 因此所求直线的倾斜角为 60° 或 120° .

2. 若过
- $A(4, y)$
- ,
- $B(2, -3)$
- 两点的直线的一个方向向量为
- $\boldsymbol{n} = (-1, -1)$
- , 则
- $y =$
- ()

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 C. -1 D. 1

C 解析: (方法一) 由直线上的两点 $A(4, y)$, $B(2, -3)$, 得 $\overrightarrow{AB} = (-2, -3-y)$.

又直线 AB 的一个方向向量为 $\boldsymbol{n} = (-1, -1)$,

所以 $\boldsymbol{n} \parallel \overrightarrow{AB}$,

所以 $(-2) \times (-1) - (-3-y) \times (-1) = 0$, 解得 $y = -1$.

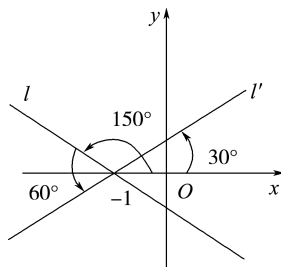
故选 C.

(方法二) 由直线的一个方向向量为 $\boldsymbol{n} = (-1, -1)$,

得直线的斜率为 $\frac{-1}{-1} = 1$, 所以 $\frac{y-(-3)}{4-2} = 1$, 解得 $y = -1$, 故选 C.

3. 已知直线
- l
- 经过点
- $(-1, 0)$
- , 倾斜角为
- 150°
- , 若将直线
- l
- 绕点
- $(-1, 0)$
- 逆时针旋转
- 60°
- 后, 得到直线
- l'
- , 则直线
- l'
- 的倾斜角为 _____, 斜率为 _____.

30° $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 解析: 如图所示.



因为直线 l 的倾斜角为 150° , 所以绕点 $(-1, 0)$ 逆时针旋转 60° 后, 所得直线 l' 的倾斜角 $\alpha = (150^\circ +$

$60^\circ) - 180^\circ = 30^\circ$, 斜率 $k = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

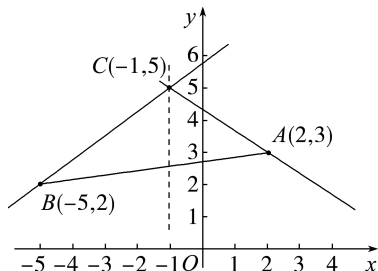
4. 已知一条光线从点
- $A(-2, \sqrt{3})$
- 出发, 与
- x
- 轴交于点
- B
- , 经
- x
- 轴反射, 这时反射光线恰好过点
- $C(1, 2\sqrt{3})$
- , 则反射光线所在直线的倾斜角为 _____.

60° 解析: 点 $A(-2, \sqrt{3})$ 关于 x 轴的对称点为 $A'(-2, -\sqrt{3})$, 由物理知识知 $k_{BC} = k_{A'C} = \frac{2\sqrt{3}-(-\sqrt{3})}{1-(-2)} = \sqrt{3}$, 所以所求倾斜角为 60° .

5. 已知点
- $A(2, 3)$
- ,
- $B(-5, 2)$
- , 若过点
- $C(-1, 5)$
- 的直线
- l
- 与线段
- AB
- 相交, 则直线
- l
- 的斜率的取值范围是 _____.

$\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$ 解析: 如图, 直线 l 与

线段 AB 相交, 因为 $k_{AC} = \frac{5-3}{-1-2} = -\frac{2}{3}$, $k_{BC} = \frac{5-2}{-1+5} = \frac{3}{4}$, 结合图象可知, 直线 l 的斜率的取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$.



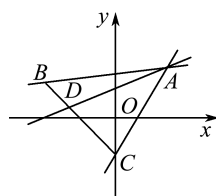
6. 已知点 $A(3, 3)$, $B(-4, 2)$, $C(0, -2)$.

- (1) 求直线 AB 和 AC 的斜率;
- (2) 若点 D 在线段 BC 上 (包括端点) 移动, 求直线 AD 的斜率的取值范围.

解: (1) 由斜率公式可得直线 AB 的斜率 $k_{AB} = \frac{2-3}{-4-3} = \frac{1}{7}$, 直线 AC 的斜率 $k_{AC} = \frac{-2-3}{0-3} = \frac{5}{3}$, 所以直线 AB 的斜率为 $\frac{1}{7}$, 直线 AC 的斜率为 $\frac{5}{3}$.

(2) 如图, 当点 D 由点 B 运动到点 C 时, 直线 AD 的斜率由 k_{AB} 增大到 k_{AC} , 由 (1) 知, $k_{AB} = \frac{1}{7}$, $k_{AC} = \frac{5}{3}$,

所以直线 AD 的斜率的取值范围是 $\left[\frac{1}{7}, \frac{5}{3}\right]$.



2.1.2 两条直线平行和垂直的判定

学习任务目标

1. 理解并掌握两条直线平行与垂直的判定方法.
2. 能根据斜率判定两条直线平行或垂直.

问题式预习

【知识清单】

知识点一 两条直线平行与斜率之间的关系

前提条件	$\alpha_1 = \alpha_2 \neq 90^\circ$	$\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$
对应关系	$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$	$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow$ 两直线斜率都不存在
图示		

知识点二 两条直线垂直与斜率之间的关系

对应关系	直线 l_1 与 l_2 的斜率都存在, 分别为 k_1, k_2 , 则 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$	直线 l_1 与 l_2 中的一条斜率不存在, 另一条斜率为 0, 则 l_1 与 l_2 的位置关系是 $l_1 \perp l_2$
图示		

【概念辨析】

1. 判断正误 (正确的打“√”, 错误的打“×”).

- (1) 若两条直线的倾斜角相等, 则这两条直线必定平行. (×)

(2) 若两条直线平行, 则这两条直线的倾斜角一定相等. (√)

(3) 若两条直线的斜率都不存在且两直线不重合, 则这两条直线平行. (√)

(4) 若两条直线中有一条直线的斜率不存在, 另一条直线的斜率存在, 则这两条直线垂直. (×)

(5) 已知直线 l_1, l_2 的斜率分别为 k_1, k_2 , 若 $k_1 = 2$, $k_2 = -\frac{1}{2}$, 则 l_1 与 l_2 垂直. (√)

2. 若过点 $P(3, 2m)$ 和点 $Q(-m, 2)$ 的直线与过点 $M(2, -1)$ 和点 $N(-3, 4)$ 的直线平行, 则 m 的值是 ()

A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. 2 D. -2

B 解析: 由题意知, 直线 PQ 的斜率存在, 由 $k_{PQ} = k_{MN}$, 即 $\frac{2m-2}{3-(-m)} = \frac{4-(-1)}{-3-2}$, 得 $m = -\frac{1}{3}$.

经检验知, $m = -\frac{1}{3}$ 符合题意.

3. 请思考并回答下列问题:

(1) 如果两条直线平行, 那么这两条直线的斜率一定相等吗?

提示: 不一定. 只有在两条直线的斜率都存在的情况下斜率才相等.

(2) 直线 $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$ 成立的前提条件是什么?

提示: ①两条直线的斜率都存在; ②两直线不重合.

(3) 如果 $l_1 \perp l_2$, 一定有 $k_1 k_2 = -1$ 吗? 为什么?

提示: 不一定. 当两条直线的斜率都存在时, $k_1 k_2 = -1$, 若一条直线的斜率不存在, 另一条直线的斜率为 0, 此时 $l_1 \perp l_2$, 但 $k_1 k_2 = -1$ 不成立.

任务型课堂

任务1 > 两条直线平行的判定及应用

探究活动

例1 判断下列各题中的直线 l_1 与 l_2 是否平行.

(1) l_1 经过点 $A(-1, -2)$, $B(2, 1)$, l_2 经过点 $M(3, 4)$, $N(-1, -1)$;

(2) l_1 的斜率为 1, l_2 经过点 $A(1, 1)$, $B(2, 2)$;

(3) l_1 经过点 $A(0, 1)$, $B(1, 0)$, l_2 经过点 $M(-1, 3)$, $N(2, 0)$;

(4) l_1 经过点 $A(-3, 2)$, $B(-3, 10)$, l_2 经过点 $M(5, -2)$, $N(5, 5)$.

解: (1) $k_1 = \frac{1-(-2)}{2-(-1)} = 1$, $k_2 = \frac{-1-4}{-1-3} = \frac{5}{4}$,

$k_1 \neq k_2$, 故 l_1 与 l_2 不平行.

(2) $k_1 = 1$, $k_2 = \frac{2-1}{2-1} = 1$, $k_1 = k_2$,

故 $l_1 \parallel l_2$ 或 l_1 与 l_2 重合.

(3) $k_1 = \frac{0-1}{1-0} = -1$, $k_2 = \frac{0-3}{2-(-1)} = -1$, 则有 $k_1 = k_2$.

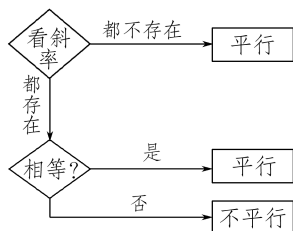
又 $k_{AM} = \frac{3-1}{-1-0} = -2 \neq -1$,

则 A, B, M 三点不共线, 故 $l_1 \parallel l_2$.

(4) 由已知点的坐标, 得 l_1, l_2 均与 x 轴垂直且不重合, 故 $l_1 \parallel l_2$.

【探究总结】

判断两条不重合的直线是否平行的方法



应用迁移

已知 $A(-2, m)$, $B(m, 4)$, $M(m+2, 3)$, $N(1, 1)$. 若直线 $AB \parallel$ 直线 MN , 则实数 m 的值为 _____.

0 或 1 解析: 若直线 AB 的斜率不存在, 则 $m = -2$. 此时 $M(0, 3)$, $N(1, 1)$, 其斜率存在, 显然直线 AB 与 MN 不平行.

若直线 AB 的斜率存在, 因为 $AB \parallel MN$, 所以 $k_{AB} = k_{MN}$, 即 $\frac{4-m}{m-(-2)} = \frac{1-3}{1-(m+2)}$, 解得 $m = 0$ 或 $m = 1$. 经检验符合题意.

任务2 > 两条直线垂直的判定及应用

探究活动

例2 (1) 直线 l_1 经过点 $A(3, 2)$, $B(3, -1)$, 直线 l_2 经过点 $M(1, 1)$, $N(2, 1)$, 判断 l_1 与 l_2 是否垂直.

(2) 已知直线 l_1 经过点 $A(3, a)$, $B(a-2, 3)$, 直线 l_2 经过点 $C(2, 3)$, $D(-1, a-2)$. 若 $l_1 \perp l_2$, 求 a 的值.

(3) 已知 $\triangle ABC$ 三个顶点分别为 $A(-2, -4)$, $B(6, 6)$, $C(0, 6)$, 求此三角形三边上的高所在直线的斜率.

解: (1) 由题意可知直线 l_1 的斜率不存在, 直线 l_2 的斜率为 $\frac{1-1}{2-1} = 0$, 所以 $l_1 \perp l_2$.

(2) 由题意, 知直线 l_2 的斜率 k_2 一定存在, 直线 l_1 的斜率可能不存在.

当直线 l_1 的斜率不存在时, $3 = a - 2$, 即 $a = 5$.

此时 $D(-1, 3)$, $k_2 = \frac{3-3}{-1-2} = 0$. 所以 $l_1 \perp l_2$, 满足题意.

当直线 l_1 的斜率 k_1 存在时, $a \neq 5$,

由斜率公式,

得 $k_1 = \frac{3-a}{a-2-3} = \frac{3-a}{a-5}$, $k_2 = \frac{a-2-3}{-1-2} = \frac{a-5}{-3}$.

由 $l_1 \perp l_2$, 知 $k_1 k_2 = -1$, 即 $\frac{3-a}{a-5} \times \left(\frac{a-5}{-3} \right) = -1$, 解得 $a = 0$.

综上所述, a 的值为 0 或 5.

(3) 由斜率公式可得

$k_{AB} = \frac{6-(-4)}{6-(-2)} = \frac{5}{4}$,

$k_{BC} = \frac{6-6}{6-0} = 0$,

$k_{AC} = \frac{6-(-4)}{0-(-2)} = 5$.

因为 $k_{BC} = 0$,

所以边 BC 上的高所在直线与 x 轴垂直, 其斜率不存在.

设边 AB, AC 上的高所在直线的斜率分别为 k_1, k_2 ,

由 $k_1 \cdot k_{AB} = -1$, $k_2 \cdot k_{AC} = -1$,

得 $k_1 \times \frac{5}{4} = -1$, $k_2 \times 5 = -1$,

解得 $k_1 = -\frac{4}{5}$, $k_2 = -\frac{1}{5}$.

综上所述, 边 BC 上的高所在直线的斜率不存在;

边 AB 上的高所在直线的斜率为 $-\frac{4}{5}$;

边 AC 上的高所在直线的斜率为 $-\frac{1}{5}$.

【探究总结】

利用斜率公式判定两条直线是否垂直的步骤

(1)一看:看直线上两点的横坐标是否相等,若相等,则这条直线的斜率不存在,这时看另一条直线上两点的纵坐标是否相等,若相等,则垂直,若不相等,则不垂直.否则,进行第二步.

(2)二代:将点的坐标代入斜率公式.

(3)三求:计算斜率的值,进行判断.

注意:当点的坐标中含有参数时,应用斜率公式时要对参数进行讨论.

88 应用迁移

1.已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的顶点为 $C(1,1), A(-2,3), B(0,y)$, 且 $AC \perp BC$, 则 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$-\frac{1}{2} \quad \text{解析: } k_{AC} = \frac{3-1}{-2-1} = -\frac{2}{3}, k_{BC} = \frac{y-1}{0-1} = 1-y.$$

由题意可知 $AC \perp BC$, 即 $\left(-\frac{2}{3}\right) \times (1-y) = -1$,

$$\text{解得 } y = -\frac{1}{2}.$$

2.若不同的两点 P, Q 的坐标分别为 $(a, b), (3-b, 3-a)$, 则线段 PQ 的垂直平分线的斜率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

-1 解析: 因为 $k_{PQ} = \frac{b-3+a}{a-3+b} = 1$, 所以线段 PQ 的垂直平分线的斜率为 -1.

任务3 两条直线平行与垂直的综合应用

探究活动

例3 已知点 $A(0,1), B(1,0), C(3,2), D(2,3)$, 试判断四边形 $ABCD$ 的形状.

解: 由题意, 得 $k_{AB} = \frac{0-1}{1-0} = -1, k_{CD} = \frac{3-2}{2-3} = -1$,

$$k_{BC} = \frac{2-0}{3-1} = 1, k_{DA} = \frac{3-1}{2-0} = 1,$$

所以 $k_{AB} = k_{CD}, k_{BC} = k_{DA}$, 所以 $AB \parallel CD, BC \parallel DA$. 所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

又因为 $k_{AB} \cdot k_{BC} = -1$, 所以 $AB \perp BC$,

即 $\angle ABC = 90^\circ$, 所以平行四边形 $ABCD$ 为矩形.

故四边形 $ABCD$ 为矩形.

【一题多思】

思考1.你还有什么方法判断四边形 $ABCD$ 的形状?

解: 易知线段 AC 的中点为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, 线段 BD 的中点为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, 所以四边形 $ABCD$ 对角线的中点重合, 所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 又 $AC = \sqrt{(3-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10}$, $BD = \sqrt{(2-1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{10}$, 所以 $AC = BD$, 故平行四边形 $ABCD$ 为矩形, 即四边形 $ABCD$ 为矩形.

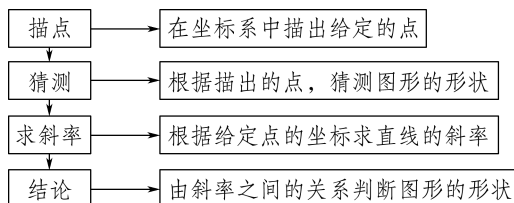
思考2.已知点 $A(1,0), B(3,1), C(2,-1)$, 求点 D 的坐标, 使四边形 $ABCD$ 是菱形.

解: 设 $D(x, y)$, 由题意可得

$$\begin{cases} \frac{y+1}{x-2} = \frac{1-0}{3-1}, \\ \frac{1-(-1)}{3-2} = \frac{y-0}{x-1}, \\ \frac{y-1}{x-3} \times \frac{0-(-1)}{1-2} = -1, \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} x=0, \\ y=-2, \end{cases} \text{ 所以点 } D \text{ 的坐标为 } (0, -2).$$

【探究总结】

1.利用两条直线平行或垂直来判断图形形状的步骤:



2.利用两直线平行、垂直关系的关键在于正确求出斜率, 特别是当斜率的表达式中含参数时, 必须要分类讨论. 注意斜率不存在的情况.

88 应用迁移

1.已知 $A(1,-1), B(2,2), C(3,0)$ 三点, 且有一点 D 满足 $CD \perp AB, CB \parallel AD$, 则点 D 的坐标为 ()

- A. $(-1,0)$ B. $(0,-1)$
C. $(1,0)$ D. $(0,1)$

D 解析: 由题意可知, $k_{AB} = \frac{2+1}{2-1} = 3, k_{CB} = \frac{2-0}{2-3} = -2$.

由 $CD \perp AB, CB \parallel AD$, 可知直线 AD, CD 的斜率存在.

$$\text{设 } D(x, y), \text{ 则 } k_{CD} = \frac{y-0}{x-3} = \frac{y}{x-3}, k_{AD} = \frac{y+1}{x-1},$$

$$\text{则 } \begin{cases} k_{CD} \cdot k_{AB} = -1, \\ k_{AD} = k_{CB}, \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} \frac{y}{x-3} \times 3 = -1, \\ \frac{y+1}{x-1} = -2, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x=0, \\ y=1, \end{cases} \text{ 即 } D(0, 1).$$

故选 D.

2.在平面直角坐标系中, 四边形 $OPQR$ 的顶点分别为 $O(0,0), P(1,t), Q(1-2t, 2+t), R(-2t, 2)$, 其中 $t > 0$. 试判断四边形 $OPQR$ 的形状.

解: 依题意, 直线 OP 的斜率 $k_{OP} = \frac{t-0}{1-0} = t$, 直线

$$QR \text{ 的斜率 } k_{QR} = \frac{2-(2+t)}{-2t-(1-2t)} = \frac{-t}{-1} = t,$$

直线 OR 的斜率 $k_{OR} = \frac{2-0}{-2t-0} = -\frac{1}{t}$, 直线 PQ 的

$$\text{斜率 } k_{PQ} = \frac{2+t-t}{1-2t-1} = \frac{2}{-2t} = -\frac{1}{t},$$

所以 $k_{OP} = k_{QR}, k_{OR} = k_{PQ}$.

在四边形 $OPQR$ 中, $OP \parallel QR, OR \parallel PQ$,

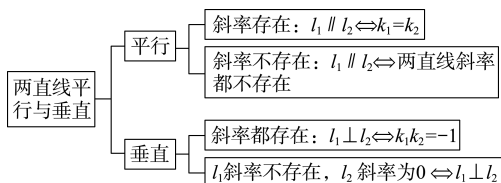
因此四边形 $OPQR$ 为平行四边形.

又 $k_{OP} \cdot k_{OR} = -1$, 则 $OP \perp OR$,

所以四边形 $OPQR$ 为矩形.



提质归纳



课后素养评价 (十三)

两条直线平行和垂直的判定

A组 学习·理解

1. (多选) 下列说法错误的是 ()

- A. 若直线 $l_1 \perp l_2$, 则它们的斜率之积为 -1
 B. 若直线 $l_1 \parallel l_2$, 则两条直线的斜率相等或都不存在
 C. 若两条直线中, 一条直线的斜率存在, 而另一条直线的斜率不存在, 则两条直线一定垂直
 D. 若两条不重合的直线的倾斜角的正弦值相等, 则这两条直线平行

ACD 解析: 若两条直线垂直, 则它们的斜率之积为 -1 或其中一条直线的斜率不存在, 另一条直线的斜率为 0 , 故 A, C 错误; 两条直线平行, 可能两条直线的斜率都不存在, 故 B 正确; 因为 60° 和 120° 的正弦值相等, 但倾斜角为 60° 和倾斜角为 120° 的两条直线不平行, 故 D 错误.

2. 若过点 $A(2, -2), B(5, 6)$ 的直线与过点 $P(2m, 1), Q(-1, -m)$ 的直线平行, 则 m 的值为 ()

- A. -1 B. $-\frac{5}{13}$
 C. 2 D. $\frac{1}{2}$

B 解析: 由 $\frac{6-(-2)}{5-2} = \frac{-m-1}{-1-2m}$, 解得 $m = -\frac{5}{13}$.

3. 直线 l_1 过点 $A(-1, m), B(m, 1)$, 直线 l_2 过点 $C(-1, 1), D(1, 0)$, 且 $l_1 \perp l_2$, 则 m 的值为 ()

- A. -3 B. $-\frac{1}{3}$
 C. 3 D. $\frac{1}{3}$

B 解析: 由题意得 $k_1 = \frac{1-m}{m-(-1)} = \frac{1-m}{m+1}, k_2 = \frac{1-0}{-1-1} = -\frac{1}{2}$. 因为 $l_1 \perp l_2$, 所以 $k_1 \cdot k_2 = -1$, 即 $\frac{1-m}{m+1} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$, 解得 $m = -\frac{1}{3}$.

4. 已知经过点 $A(3, n), B(5, m)$ 的直线 l_1 与经过点 $P(-m, 0), Q(0, n^2)$ ($mn \neq 0$) 的直线 l_2 平行, 则 $\frac{m}{n}$

的值为

- A. -1 B. -2
 C. -1 或 2 D. -2 或 1

C 解析: 由题意得 $k_{l_1} = \frac{m-n}{2}, k_{l_2} = \frac{n^2}{m}$.

因为 $l_1 \parallel l_2$, 所以 $k_{l_1} = k_{l_2}$, 即 $\frac{m-n}{2} = \frac{n^2}{m}$,

化简得 $m^2 - mn - 2n^2 = 0$, 所以 $m = -n$ 或 $m = 2n$.

又由 $mn \neq 0$, 得 $\frac{m}{n}$ 的值为 -1 或 2 , 故选 C.

5. 已知点 $A(m, 3), B(2m, m+4), C(m+1, 2), D(1, 0)$, 且直线 AB 与直线 CD 平行, 则 m 的值为

- A. -1 或 0 B. 0 或 1
 C. 1 D. 2

B 解析: 当 $m = 0$ 时, 直线 AB 与直线 CD 的斜率均不存在, 此时直线 AB 的方程为 $x = 0$, 直线 CD 的方程为 $x = 1$, 故 $AB \parallel CD$;

当 $m \neq 0$ 时, $k_{AB} = \frac{(m+4)-3}{2m-m} = \frac{m+1}{m}, k_{CD} = \frac{2-0}{(m+1)-1} = \frac{2}{m}$,

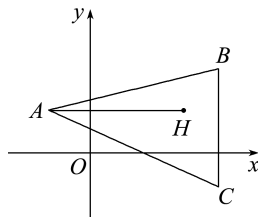
则 $k_{AB} = k_{CD}$, 即 $\frac{m+1}{m} = \frac{2}{m}$, 得 $m = 1$.

综上, $m = 0$ 或 $m = 1$.

故选 B.

6. 已知点 $A(-2, 2), B(6, 4), H(5, 2)$, H 是 $\triangle ABC$ 的垂心, 则点 C 的坐标为 _____.

(6, -2) 解析: 如图, 设点 C 的坐标为 (x, y) .



因为 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心, 所以 $BC \perp AH$. 又直线 AH 的斜率 $k_{AH} = \frac{2-2}{5+2} = 0$, 得直线 BC 的倾斜角为 90° , 而点 B 的横坐标为 6 , 则 $x = 6$.

又直线 BH 的斜率 $k_{BH} = \frac{4-2}{6-5} = 2$, $BH \perp AC$, 所以

直线 AC 的斜率 $k_{AC} = \frac{y-2}{6+2} = -\frac{1}{2}$, 所以 $y = -2$.

所以点 C 的坐标为 $(6, -2)$.

7. 已知 $\square ABCD$ 的三个顶点分别为 $A(0, 1)$, $B(1, 0)$, $C(4, 3)$, 则顶点 D 的坐标为 _____.

(3, 4) 解析: 设顶点 D 的坐标为 (x, y) .

因为 $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$, 所以 $\begin{cases} \frac{0-1}{1-0} = \frac{3-y}{4-x}, \\ \frac{y-1}{x-0} = \frac{3-0}{4-1}, \end{cases}$ 解得

$\begin{cases} x=3, \\ y=4. \end{cases}$ 所以顶点 D 的坐标为 $(3, 4)$.

8. 已知直线 l_1 经过点 $A(3, a)$, $B(a-1, 2)$, 直线 l_2 经过点 $C(1, 2)$, $D(-2, a+2)$. 若 $l_1 \parallel l_2$, 则 a 的值为 _____; 若 $l_1 \perp l_2$, 则 a 的值为 _____.

1 或 6 3 或 -4 解析: 当 $l_1 \parallel l_2$ 时, $\frac{2-a}{a-1-3} = \frac{a+2-2}{-2-1}$, 即 $\frac{2-a}{a-4} = \frac{a}{-3}$, 解得 $a=1$ 或 $a=6$, 经验证均符合题意.

当 $l_1 \perp l_2$ 时, 若 l_2 的斜率为 0, 即 $a=0$, 此时 l_1 的斜率存在, 不符合题意; 当 l_2 的斜率不为 0, 有 $\frac{2-a}{a-4} \times \frac{a}{-3} = -1$, 解得 $a=3$ 或 $a=-4$, 经验证均符合题意.

B组 应用·实践

1. (多选) 若过点 $(1, a)$, $(0, 0)$ 的直线 l_1 与过点 $(a, 3)$, $(-1, 1)$ 的直线 l_2 平行, 则 a 的值可以为 _____.

- A. -2 B. -1
C. 1 D. 2

AC 解析: 若直线 l_1 与 l_2 平行, 则 $\frac{a-0}{1-0} = \frac{3-1}{a+1}$, 即 $a(a+1)=2$, 解得 $a=-2$ 或 $a=1$.

2. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $B(2, 1)$, $C(-6, 3)$, 且 $\triangle ABC$ 的垂心为 $H(-3, 2)$, 则顶点 A 的坐标为 _____.

- A. $(-19, -62)$ B. $(19, -62)$
C. $(-19, 62)$ D. $(19, 62)$

A 解析: 因为 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心, 所以 $AH \perp BC$, $BH \perp AC$.

又 $k_{BC} = \frac{3-1}{-6-2} = -\frac{1}{4}$, $k_{BH} = \frac{2-1}{-3-2} = -\frac{1}{5}$,

所以直线 AH , AC 的斜率存在, 且 $k_{AH}=4$, $k_{AC}=5$.

设 $A(x, y)$, 则 $\begin{cases} k_{AH} = \frac{y-2}{x+3} = 4, \\ k_{AC} = \frac{y-3}{x+6} = 5, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-19, \\ y=-62. \end{cases}$

所以顶点 A 的坐标为 $(-19, -62)$.

3. 已知 $A(-4, 3)$, $B(2, 5)$, $C(6, 3)$, $D(-3, 0)$ 四点, 则四边形 $ABCD$ 的形状是 _____.

- A. 平行四边形 B. 矩形
C. 菱形 D. 直角梯形

D 解析: 因为 $k_{AB} = \frac{5-3}{2+4} = \frac{1}{3}$, $k_{CD} = \frac{3-0}{6+3} = \frac{1}{3}$,

$k_{AD} = \frac{3-0}{-4-(-3)} = -3$, $k_{BC} = \frac{5-3}{2-6} = -\frac{1}{2}$,

所以 $AB \parallel CD$, $AD \perp AB$.

所以四边形 $ABCD$ 为直角梯形.

4. 直线 l_1 与 l_2 的斜率 k_1, k_2 是关于 k 的方程 $2k^2 - 3k - b = 0$ 的两根. 若 $l_1 \perp l_2$, 则 $b =$ _____; 若 $l_1 \parallel l_2$, 则 $b =$ _____.

$2 - \frac{9}{8}$ 解析: 当 $l_1 \perp l_2$ 时, $k_1 k_2 = \frac{-b}{2} = -1$, 得 $b=2$.

当 $l_1 \parallel l_2$ 时, $k_1 = k_2$, $\Delta = 9 - 4 \times 2 \times (-b) = 0$, 解得 $b = -\frac{9}{8}$.

5. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(5, 1)$, 重心 $G(3, 3)$, 垂心为 H , 若 B, H 都在直线 $y = -x$ 上, 则点 H 的坐标为 _____.

$(5, -5)$ 解析: 设 $B(x_1, -x_1)$, 因为重心 $G(3,$

$3)$, 所以 $\begin{cases} 3 = \frac{5+x_1+x_C}{3}, \\ 3 = \frac{1-x_1+y_C}{3}, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_C = 4-x_1, \\ y_C = 8+x_1. \end{cases}$

因为 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心, 所以 $BH \perp AC$, 则 $-1 \cdot \frac{8+x_1-1}{4-x_1-5} = -1$, 解得 $x_1 = -4$, 所以 $B(-4, 4)$, $C(8, 4)$, $k_{BC} = 0$, 所以直线 AH 的斜率不存在, 则 $x_H = x_A = 5$, $y_H = -5$, 所以 $H(5, -5)$.

6. 已知直线 l 的倾斜角为 30° , 点 $P(2, 1)$ 在直线 l 上, 直线 l 绕点 $P(2, 1)$ 按逆时针方向旋转 30° 后到达直线 l_1 的位置, 直线 l_1 与 l_2 平行, 且 l_2 是线段 AB 的垂直平分线, 线段 AB 的端点为 $A(1, m-1)$, $B(m, 2)$, 试求实数 m 的值.

解: 易知直线 l_1 的倾斜角为 $30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$,

所以直线 l_1 的斜率 $k_1 = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$.

因为 $l_1 \parallel l_2$, 所以直线 l_2 的斜率 $k_2 = \sqrt{3}$.

又 l_2 是线段 AB 的垂直平分线, 所以直线 AB 的斜率存在, 且 $k_{AB} = \frac{m-1-2}{1-m} = \frac{m-3}{1-m}$, 所以 $\frac{m-3}{1-m} \cdot \sqrt{3} = -1$,

解得 $m = 4 + \sqrt{3}$.

综上, 实数 m 的值为 $4 + \sqrt{3}$.

7. 已知 $A(4, 0)$, $B(1, 2)$, $C(m, m)$, $D(7, -1)$.

(1) 若直线 AB 与 CD 平行, 求 m 的值;

(2) 若 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 求 m 的值.

解:(1)依题意可得 $k_{AB}=k_{CD}$,

$$\text{即 } \frac{2-0}{1-4} = \frac{-1-m}{7-m}, \text{ 解得 } m = \frac{11}{5}.$$

$$\text{又 } k_{AB} = \frac{2-0}{1-4} = -\frac{2}{3}, k_{AD} = \frac{-1-0}{7-4} = -\frac{1}{3},$$

所以 $k_{AB} \neq k_{AD}$, 所以 A, B, C, D 四点不共线.

$$\text{所以 } m = \frac{11}{5}.$$

$$(2) \text{ 若 } A \text{ 为直角, 则 } k_{AB}k_{AC} = -1, \text{ 即 } \frac{2-0}{1-4} \cdot \frac{m-0}{m-4} = -1, \text{ 解得 } m = 12.$$

$$\text{若 } B \text{ 为直角, 则 } k_{AB}k_{BC} = -1, \text{ 即 } \frac{2-0}{1-4} \cdot \frac{m-2}{m-1} = -1, \text{ 解得 } m = -1.$$

$$\text{若 } C \text{ 为直角, 则 } AC \perp BC, \text{ 此时直线 } AC \text{ 与 } BC \text{ 的斜率都存在, 且 } k_{AC} \cdot k_{BC} = -1, \text{ 即 } \frac{m-0}{m-4} \cdot \frac{m-2}{m-1} =$$

$$-1, \text{ 解得 } m = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

$$\text{综上, } m \text{ 的值为 } 12 \text{ 或 } -1 \text{ 或 } \frac{7 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

2.2 直线的方程

2.2.1 直线的点斜式方程

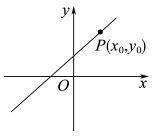
学习任务目标

1. 根据确定直线位置的要素, 探究直线的点斜式方程.
2. 掌握直线的点斜式方程与斜截式方程.
3. 了解斜截式方程与一次函数的关系.

问题式预习

【知识清单】

知识点一 直线的点斜式方程

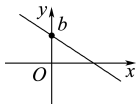
名称	已知条件	示意图	方程	适用范围
点斜式	过点 $P(x_0, y_0)$, 斜率为 k		$y - y_0 = k(x - x_0)$	斜率存在的直线

知识点二 直线的斜截式方程

(1) 直线 l 在 y 轴上的截距

直线 l 与 y 轴的交点 $(0, b)$ 的纵坐标 b 叫做直线 l 在 y 轴上的截距.

(2) 直线的斜截式方程

名称	已知条件	示意图	方程	适用范围
斜截式	斜率为 k , 直线在 y 轴上的截距为 b		$y = kx + b$	斜率存在的直线

【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打“√”, 错误的打“×”).

(1) 直线的点斜式方程 $y - y_0 = k(x - x_0)$ 也可写成

$$k = \frac{y - y_0}{x - x_0}. \quad (\times)$$

(2) 直线 $y - 3 = k(x + 1)$ 恒过定点 $(-1, 3)$. (√)

(3) 直线 $y - 2 = 3(x + 1)$ 的斜率是 3. (√)

2. 经过点 $(-1, 1)$, 且斜率是直线 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - 2$ 的斜率的

2 倍的直线的方程是 ()

A. $x = -1$

B. $y = 1$

C. $y - 1 = \sqrt{2}(x + 1)$

D. $y - 1 = 2\sqrt{2}(x + 1)$

C 解析: 由题意知, 所求直线的斜率为 $\sqrt{2}$, 故由直线的点斜式方程知, 所求直线方程为 $y - 1 = \sqrt{2}(x + 1)$.

3. 请思考并回答下列问题:

(1) 直线的点斜式方程能否表示坐标平面内的所有直线呢?

提示: 不能. 斜率存在的直线的方程才能写成点斜式, 斜率不存在的直线, 其方程都不能写成点斜式.

(2) 已知直线 $l_1: y = k_1x + b_1, l_2: y = k_2x + b_2$, 若 $l_1 \parallel l_2, k_1, b_1, k_2, b_2$ 应满足什么条件? 若 $l_1 \perp l_2, k_1, b_1, k_2, b_2$ 应满足什么条件?

提示: 若 $l_1 \parallel l_2$, 则 $k_1 = k_2$ 且 $b_1 \neq b_2$; 若 $l_1 \perp l_2$, 则 $k_1 \cdot k_2 = -1$.

(3) 一次函数的解析式 $y = kx + b$ 与直线的斜截式方程 $y = kx + b$ 有什么不同?

提示: 一次函数的解析式 $y = kx + b$ 中 x 的系数 $k \neq 0$, 否则就不是一次函数, 而直线的斜截式方程 $y = kx + b$ 中的 k 可以是 0.

任务型课堂

任务1 直线的点斜式方程

探究活动

例1 求满足下列条件的直线的点斜式方程:

- (1) 过点 $P(-4, 3)$, 斜率 $k = -3$;
- (2) 过点 $P(3, -4)$, 且与 x 轴平行;
- (3) 过 $P(-2, 3), Q(5, -4)$ 两点.

解: (1) 由直线过点 $P(-4, 3)$, 斜率 $k = -3$, 得直线的点斜式方程为 $y - 3 = -3(x + 4)$.

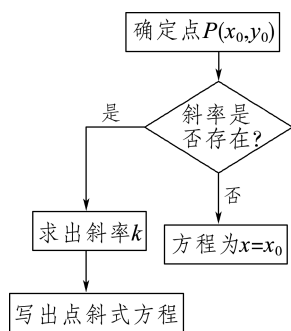
(2) 与 x 轴平行的直线, 其斜率 $k = 0$, 可得直线的点斜式方程为 $y - (-4) = 0 \times (x - 3)$, 即 $y + 4 = 0$.

(3) 过点 $P(-2, 3), Q(5, -4)$ 的直线的斜率 $k = \frac{-4-3}{5-(-2)} = \frac{-7}{7} = -1$,

又因为直线过点 $P(-2, 3)$, 所以直线的点斜式方程为 $y - 3 = -(x + 2)$.

【探究总结】

求直线的点斜式方程的步骤



应用迁移

1. 直线 $y = x + 1$ 绕着其上一一点 $P(3, 4)$ 逆时针旋转 90° 后得直线 l , 求直线 l 的点斜式方程.

解: 直线 $y = x + 1$ 的斜率 $k = 1$, 所以其倾斜角为 45° . 由题意可得直线 l 的倾斜角为 135° , 所以直线 l 的斜率 $k' = \tan 135^\circ = -1$.

又点 $P(3, 4)$ 在直线 l 上, 所以直线 l 的点斜式方程为 $y - 4 = -(x - 3)$.

2. 直线 l 过点 $P(2, -3)$, 且与过点 $M(-1, 2), N(3, 10)$ 的直线垂直, 求直线 l 的点斜式方程.

解: 直线 MN 的斜率 $k = \frac{10-2}{3-(-1)} = 2$,

因为直线 l 垂直于直线 MN , 所以直线 l 的斜率为 $-\frac{1}{2}$.

又直线 l 过点 $P(2, -3)$, 所以直线 l 的方程为 $y + 3 = -\frac{1}{2}(x - 2)$.

任务2 直线的斜截式方程

探究活动

例2 已知直线 l_1 的方程为 $y = -2x + 3$, l_2 的方程为 $y = 4x - 2$, 直线 l 与 l_1 垂直, 且与 l_2 在 y 轴上的截距互为相反数, 求直线 l 的斜截式方程.

解: 因为 $l_1 \perp l$, 直线 $l_1: y = -2x + 3$,

所以 l 的斜率为 $\frac{1}{2}$.

因为 l 与 l_2 在 y 轴上的截距互为相反数,

直线 l_2 的方程为 $y = 4x - 2$, 所以 l 在 y 轴上的截距为 2 ,

所以直线 l 的斜截式方程为 $y = \frac{1}{2}x + 2$.

【一题多思】

思考1. 截距是距离吗?

提示: 截距不是距离, 截距是一个实数, 它是直线与坐标轴交点的横坐标或纵坐标, 可以为正数、负数和 0 . 当直线过原点时, 它在 x 轴上的截距和在 y 轴上的截距都为 0 .

思考2. 已知直线 l_1 的方程为 $y = -2x + 3$, l_2 的方程为 $y = 4x - 2$, 直线 l 与 l_1 平行, 且与 l_2 在 y 轴上的截距相同, 求直线 l 的斜截式方程.

解: 由直线的方程为 $y = -2x + 3$ 知, 直线 l_1 的斜率 $k_1 = -2$,

因为 $l \parallel l_1$, 所以 $k_l = -2$.

l_2 在 y 轴上的截距为 -2 ,

所以直线 l 在 y 轴上的截距也为 -2 .

故直线 l 的斜截式方程为 $y = -2x - 2$.

【探究总结】

(1) 求直线的斜截式方程, 只要确定直线的斜率和截距即可, 要特别注意截距和距离的区别.

(2) 直线的斜截式方程 $y = kx + b$ 不仅形式简单, 而且特点明显: k 是直线的斜率, b 是直线在 y 轴上的截距, 只要确定了 k 和 b 的值, 直线的位置就一目了然. 因此, 在解决直线的位置问题时, 常把直线方程化为斜截式, 利用 k, b 的几何意义进行求解.

应用迁移

1. 根据条件写出下列直线的斜截式方程:

- (1) 斜率为 2 , 在 y 轴上的截距是 5 ;
- (2) 倾斜角为 150° , 在 y 轴上的截距是 -2 ;
- (3) 倾斜角为 60° , 与 y 轴的交点到坐标原点的距离为 3 .

解: (1) 由 $k = 2, b = 5$ 可知, 所求直线的斜截式方程为 $y = 2x + 5$.

(2) 由于倾斜角为 150° , 所以斜率 $k = \tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故直线的斜截式方程为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 2$.

(3) 由于直线的倾斜角为 60° , 所以斜率 $k = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$. 由于直线与 y 轴的交点到坐标原点的距离为 3, 所以直线在 y 轴上的截距 $b = 3$ 或 $b = -3$, 故所求直线的斜截式方程为 $y = \sqrt{3}x + 3$ 或 $y = \sqrt{3}x - 3$.

2. 已知直线 l 的斜率为 $\frac{1}{6}$, 且和两坐标轴围成的三角形面积为 3, 求直线 l 的斜截式方程.

解: 设直线 l 的方程为 $y = \frac{1}{6}x + b$, 则 $x = 0$ 时, $y = b$,
 $y = 0$ 时, $x = -6b$.

由已知可得 $\frac{1}{2} \cdot |b| \cdot |-6b| = 3$,

即 $6|b|^2 = 6$, 所以 $b = \pm 1$.

故直线 l 的斜截式方程为 $y = \frac{1}{6}x + 1$ 或 $y = \frac{1}{6}x - 1$.

任务3 > 直线的点斜式、斜截式方程的综合应用

探究活动

例3 观察下列各组直线的方程:

① $l_1: y = 2x + 1, l_2: y = 2x - 1$;

② $l_1: y = 2x + 1, l_2: y = 2x + 1$;

③ $l_1: y = 2x + 1, l_2: y = -\frac{1}{2}x + 1$.

(1) ①②中的两条直线分别有怎样的位置关系?

(2) ③中的两条直线有怎样的位置关系?

解: (1) ①中两直线平行, ②中两直线重合.

(2) 垂直.

探究总结

1. 已知直线 $l_1: y = k_1x + b_1$ 与直线 $l_2: y = k_2x + b_2$.

(1) 若 $l_1 \parallel l_2$, 则 $k_1 = k_2$, 此时两直线与 y 轴的交点不同, 即 $b_1 \neq b_2$; 反之, 当 $k_1 = k_2$, 且 $b_1 \neq b_2$ 时, $l_1 \parallel l_2$. 所以有 $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$, 且 $b_1 \neq b_2$.

(2) 若 $l_1 \perp l_2$, 则 $k_1 \cdot k_2 = -1$; 反之, 当 $k_1 \cdot k_2 = -1$ 时, $l_1 \perp l_2$. 所以有 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$.

2. 若已知两条直线平行或垂直, 求直线方程中参数的值时, 要注意讨论斜率是否存在, 若是平行关系, 还应考虑截距不相等这个条件.

应用迁移

1. (多选) 设 $\alpha \in \mathbf{R}$, 对于直线 $l: y = -x \sin \alpha - 2$, 下列说法中正确的是 ()

A. l 的斜率为 $\sin \alpha$

B. l 在 y 轴上的截距为 -2

C. l 不可能平行于 x 轴

D. l 与直线 $x - y \sin \alpha - 1 = 0$ 垂直

BD 解析: 对于 A, 直线 $l: y = -x \sin \alpha - 2$, 则 l 的斜率为 $-\sin \alpha$, 故 A 错误;

对于 B, 令 $x = 0$, 解得 $y = -2$, 故 l 在 y 轴上的截距为 -2 , 故 B 正确;

对于 C, 当 $\sin \alpha = 0$ 时, 直线 $l: y = -2$, 平行于 x 轴, 故 C 错误;

对于 D, 当 $\sin \alpha = 0$ 时, 直线 $l: y = -2$ 与直线 $x = 1$ 显然垂直, 当 $\sin \alpha \neq 0$ 时, 直线 $x - y \sin \alpha - 1 = 0$ 的斜率为 $\frac{1}{\sin \alpha}$, 直线 l 的斜率为 $-\sin \alpha$, 所以 $\frac{1}{\sin \alpha} \cdot$

$(-\sin \alpha) = -1$, 故 D 正确. 故选 BD.

2. (多选) 下列说法正确的是 ()

A. 直线 $y = ax - 2a + 3 (a \in \mathbf{R})$ 必过定点 $(2, 3)$

B. 直线 $y + 1 = 2x$ 在 y 轴上的截距为 1

C. 直线 $\sqrt{3}y = -x - 3$ 的倾斜角为 150°

D. 已知点 $A(2, -3), B(-3, -2)$, 若直线 $l: mx + y - m - 1 = 0$ 与线段 AB 相交, 则实数 m 的取值

范围是 $m \leq \frac{3}{4}$ 或 $m \geq 4$

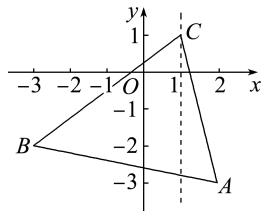
AC 解析: 选项 A, 直线 $y = ax - 2a + 3 = a(x - 2) + 3$ 过定点 $(2, 3)$, 故 A 正确;

选项 B, 直线 $y + 1 = 2x$, 即 $y = 2x - 1$, 纵截距为 -1 , 故 B 错误;

选项 C, 直线 $\sqrt{3}y = -x - 3$ 的斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以其倾斜角为 150° , 故 C 正确;

选项 D, 直线 $l: mx + y - m - 1 = 0$, 即 $m(x - 1) + y - 1 = 0$ 过定点 $C(1, 1)$,

画出图象如下图所示,



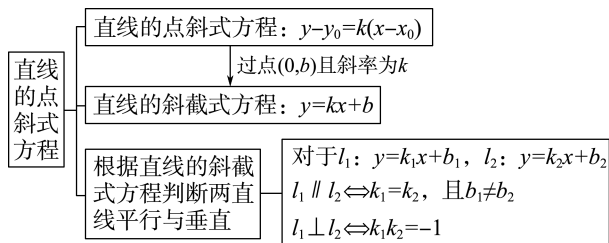
其中 $k_{AC} = \frac{-4}{1} = -4$, $k_{BC} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$,

又直线 l 的斜率为 $-m$, 所以 $-m \geq \frac{3}{4}$ 或 $-m \leq -4$,

解得 $m \leq -\frac{3}{4}$ 或 $m \geq 4$, 故 D 错误.

故选 AC.

提质归纳



课后素养评价(十四)

直线的点斜式方程

A组 学习·理解

1.(多选)下列直线中与直线 $y=2x$ 平行的是

(AB)

A. $y=2x+4$

B. $y-1=2(x+4)$

C. $y-1=\frac{1}{2}(x-2)$

D. $y-1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)$

2.已知直线的方程是 $y+2=-x-1$, 则 ()

A. 直线经过点 $(-1,2)$, 斜率为 -1

B. 直线经过点 $(-1,2)$, 斜率为 1

C. 直线经过点 $(-1,-2)$, 斜率为 -1

D. 直线经过点 $(-1,-2)$, 斜率为 1

C 解析: 方程 $y+2=-x-1$ 可写成 $y+2=-(x+1)$, 根据点斜式方程的定义可知, 该直线的斜率为 -1 , 过点 $(-1,-2)$.

3.与直线 $y=-\frac{3}{2}x$ 的斜率相等, 且过点 $(4,-3)$ 的直线的方程为 ()

A. $y-3=-\frac{3}{2}(x+4)$

B. $y+3=\frac{3}{2}(x-4)$

C. $y-3=\frac{3}{2}(x+4)$

D. $y+3=-\frac{3}{2}(x-4)$

D 解析: 依题意, 所求直线的斜率为 $-\frac{3}{2}$, 所以直

线方程为 $y+3=-\frac{3}{2}(x-4)$.

4.直线 $y=2x-3$ 的斜率和在 y 轴上的截距分别等于 ()

A. $2, 3$

B. $-3, -3$

C. $-3, 2$

D. $2, -3$

D 解析: 由斜截式方程的定义可知, $k=2, b=-3$.

5.已知直线 $y=ax-2$ 和 $y=(2-a)x+1$ 互相平行, 则 a 等于 ()

A. 2

B. 1

C. 0

D. -1

B 解析: 由 $a=2-a$, 得 $a=1$. 经检验符合条件.

6.直线 $y=kx+b$ 经过第二、三、四象限, 则斜率 k 和在 y 轴上的截距 b 满足的条件为 ()

A. $k>0, b>0$

B. $k<0, b<0$

C. $k>0, b<0$

D. $k<0, b>0$

B 解析: 直线 $y=kx+b$ 经过第二、三、四象限, 如图所示, 由图可知 $k<0, b<0$.

7.已知直线 l 经过点 $P(\sqrt{2}, 1)$, 且倾斜角等于直线 $y=-\sqrt{3}x+3$ 的倾斜角的一半, 则直线 l 的点斜式方程为 _____.

$y-1=\sqrt{3}(x-\sqrt{2})$ 解析: 设直线 $y=-\sqrt{3}x+3$ 的倾斜角为 θ_1 ,

则斜率 $k_1=\tan \theta_1=-\sqrt{3}$. 又 $0\leq\theta_1<\pi$, 故 $\theta_1=\frac{2\pi}{3}$.

设直线 l 的倾斜角为 θ , 则 $\theta=\frac{\theta_1}{2}=\frac{\pi}{3}$,

所以直线 l 的斜率 $k=\tan \frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

又直线 l 经过点 $P(\sqrt{2}, 1)$,

所以直线 l 的点斜式方程为 $y-1=\sqrt{3}(x-\sqrt{2})$.

8.直线 $y=x+1$ 绕点 $P(3,4)$ 逆时针旋转 90° 后得到直线 l , 则直线 l 的点斜式方程为 _____.

$y-4=-(x-3)$ 解析: 由题意可知两直线互相垂直, 所以直线 l 的斜率为 -1 .

又直线 l 过点 $P(3,4)$, 所以直线 l 的点斜式方程为 $y-4=-(x-3)$.

9.已知 $A(3,4), B(-1,0)$, 则过线段 AB 的中点且倾斜角为 120° 的直线的点斜式方程是 _____.

$y-2=-\sqrt{3}(x-1)$ 解析: 设线段 AB 的中点为 M , 则 $M(1,2)$.

又所求直线的斜率 $k=\tan 120^\circ=-\sqrt{3}$,

所以所求直线的点斜式方程为 $y-2=-\sqrt{3}(x-1)$.

10.经过点 $(1,1)$, 与直线 $y=2x+7$ 平行的直线的斜截式方程为 _____, 与直线 $y=x-1$ 垂直的直线的点斜式方程为 _____.

$y=2x-1$ $y-1=-(x-1)$ 解析: 设直线 $y=2x+7$ 的斜率为 k_1 ,

与直线 $y=2x+7$ 平行的直线的斜率为 k_2 ,

与直线 $y=x-1$ 垂直的直线的斜率为 k_3 .

由 $y=2x+7$ 得 $k_1=2$,

由两直线平行知 $k_2=2$,

所以与直线 $y=2x+7$ 平行的直线的斜截式方程为 $y-1=2(x-1)$, 即 $y=2x-1$.

由两直线垂直知 $k_3=-1$,

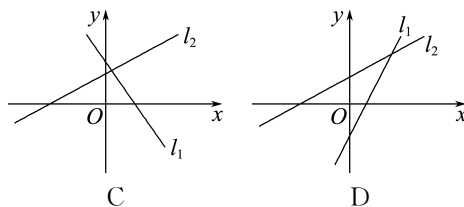
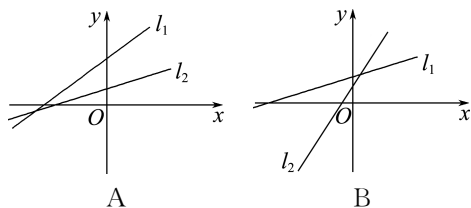
所以与直线 $y=x-1$ 垂直的直线的点斜式方程为 $y-1=-(x-1)$.

B组 应用·实践

1. (多选) 下列说法正确的有 ()

A. 若直线 $y=kx+b$ 经过第一、二、四象限, 则点 (k, b) 在第二象限B. 直线 $y=ax-3a+2$ 过定点 $(3, 2)$ C. 过点 $(2, -1)$ 且斜率为 $-\sqrt{3}$ 的直线的点斜式方程为 $y+1=-\sqrt{3}(x-2)$ D. 斜率为 -2 , 在 y 轴上的截距为 3 的直线的方程为 $y=-2x+3$

ABC 解析: 在 A 中, 若直线 $y=kx+b$ 经过第一、二、四象限, 则 $k<0, b>0$, 所以 (k, b) 在第二象限, 故 A 正确. 在 B 中, 直线可化为 $y-2=a(x-3)$, 所以直线过定点 $(3, 2)$, 故 B 正确. 在 C 中, 根据点斜式方程知 C 正确. 在 D 中, 所求斜截式方程为 $y=-2x+3$, 故 D 错误.

2. 已知过点 $A(-2, m)$ 和点 $B(m, 4)$ 的直线与直线 $2x+y=1$ 平行, 则 m 的值为 ()A. 0 B. -8 C. 2 D. 10B 解析: 已知直线 $2x+y=1$ 的斜率为 -2 ,所以 $\frac{4-m}{m+2}=-2$, 解得 $m=-8$.经检验, $m=-8$ 时两直线不重合, 符合题意.3. 已知直线 $mx-3y=0$ 的倾斜角是直线 $y=\sqrt{3}x+1$ 的倾斜角的 2 倍, 则 $m=$ ()A. $-3\sqrt{3}$ B. $-\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{3}$ A 解析: 直线 $y=\sqrt{3}x+1$ 的斜率为 $\sqrt{3}$, 则倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$.因为直线 $mx-3y=0$ 的倾斜角是直线 $y=\sqrt{3}x+1$ 的倾斜角的 2 倍,所以直线 $mx-3y=0$ 的倾斜角为 $\frac{2\pi}{3}$.所以直线 $mx-3y=0$ 的斜率为 $-\sqrt{3}=\frac{m}{3}$, 解得 $m=-3\sqrt{3}$.4. 直线 $l_1: ax-y+b=0$ 与 $l_2: bx-y+a=0$ (其中 $a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$) 在同一平面直角坐标系中的位置可能为 ()B 解析: 直线 $l_1: ax-y+b=0$, 即 $y=ax+b$, 斜率为 $k_{l_1}=a$ 且与 y 轴交于点 $(0, b)$,直线 $l_2: bx-y+a=0$, 即 $y=bx+a$, 斜率为 $k_{l_2}=b$ 且与 y 轴交于点 $(0, a)$.对于 A, 直线 l_1 中 $a>0, b>0$, 直线 l_2 中 $a>0, b>0$, 且 $b>a$, 则 $k_{l_2}>k_{l_1}$, 所以 l_2 的倾斜角大于 l_1 的倾斜角, 不符合题意, 故 A 错误;对于 B, 直线 l_1 中 $a>0, b>0$, 直线 l_2 中 $a>0, b>0$, 且 $b>a$, 则 $k_{l_2}>k_{l_1}$, 所以 l_2 的倾斜角大于 l_1 的倾斜角, 符合题意, 故 B 正确;对于 C, 直线 l_1 中 $a<0, b>0$, 直线 l_2 中 $a>0, b>0$, 矛盾, 故 C 错误;对于 D, 直线 l_1 中 $a>0, b<0$, 直线 l_2 中 $a>0, b>0$, 矛盾, 故 D 错误. 故选 B.5. 一条直线经过点 $A(2, -\sqrt{3})$, 且它的倾斜角等于直线 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ 的倾斜角的 2 倍, 则这条直线的点斜式方程是 _____. $y-(-\sqrt{3})=\sqrt{3}(x-2)$ 解析: 因为直线 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ 的倾斜角为 30° , 所以所求直线的倾斜角为 60° ,即斜率 $k=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$.又该直线过点 $A(2, -\sqrt{3})$,故所求直线的点斜式方程为 $y-(-\sqrt{3})=\sqrt{3}(x-2)$.6. 把直线 $x-y+\sqrt{3}-1=0$ 绕点 $(1, \sqrt{3})$ 逆时针旋转 15° 后, 所得直线的方程为 _____. $\sqrt{3}x-y=0$ 解析: $x-y+\sqrt{3}-1=0$ 可化为 $y-$ $\sqrt{3}=x-1$, 所以直线 $x-y+\sqrt{3}-1=0$ 的斜率为 1,其倾斜角为 45° . 绕点 $(1, \sqrt{3})$ 逆时针旋转 15° 后, 得到的直线的倾斜角为 $45^\circ+15^\circ=60^\circ$, 其斜率 $k=$ $\sqrt{3}$, 故所求直线的方程为 $y-\sqrt{3}=\sqrt{3}(x-1)$,即 $\sqrt{3}x-y=0$.7. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(-5, 0), B(1, -3), C(0, 2)$, 边 AC, BC 的中点分别是 E, F .(1) 求 EF 所在直线的点斜式方程;(2) 求边 AB 上的高所在直线的斜截式方程.解: (1) 因为 $A(-5, 0), B(1, -3), C(0, 2)$, 边 AC, BC 的中点分别是 E, F ,所以 $E\left(-\frac{5}{2}, 1\right), F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$,

$$\text{所以 } k_{EF} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } EF \text{ 所在直线的点斜式方程为 } y - 1 = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{2}\right).$$

(2) 设边 AB 上的高所在直线为 l_h .

$$\text{因为 } k_{l_h} \cdot k_{AB} = -1, k_{AB} = \frac{0 - (-3)}{-5 - 1} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } k_{l_h} = 2.$$

又因为直线 l_h 过点 $C(0, 2)$,

$$\text{所以直线 } l_h \text{ 的方程为 } y - 2 = 2(x - 0), \text{ 即 } y = 2x + 2.$$

所以边 AB 上的高所在直线的斜截式方程为 $y = 2x + 2$.

8. 已知直线 l 的斜率为 -1 , 且它与两坐标轴围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2}$, 求直线 l 的方程.

解: 设直线 l 的方程为 $y = -x + b$,

则它与两坐标轴的交点分别为 $A(b, 0)$ 和 $B(0, b)$, 所以, 直线与坐标轴所围成的直角三角形的两条直角边长都为 $|b|$,

$$\text{故其面积为 } \frac{1}{2}b^2.$$

$$\text{由 } \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}, \text{ 解得 } b = \pm 1.$$

故所求直线 l 的方程为 $y = -x + 1$ 或 $y = -x - 1$.

2.2.2 直线的两点式方程

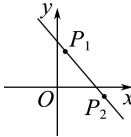
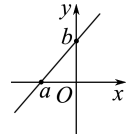
学习任务目标

1. 掌握直线两点式方程的形式特点及适用范围.
2. 了解直线截距式方程的形式特点及适用范围.
3. 根据确定直线位置的几何要素, 探索并掌握直线的两点式和截距式方程.

问题式预习

【知识清单】

知识点 直线的两点式、截距式方程

名称	已知条件	示意图	方程	适用范围
两点式	经过两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, 其中 $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$		$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	斜率存在且不为 0
截距式	在 x 轴、 y 轴上的截距分别为 a, b , 且 $a \neq 0, b \neq 0$		$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	斜率存在且不为 0, 不过原点

【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打“√”, 错误的打“×”).

(1) 能用两点式方程表示的直线也可用点斜式方程表示. (√)

(2) 方程 $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ 和方程 $(y - y_1) \cdot (x_2 - x_1) = (x - x_1) \cdot (y_2 - y_1)$ 的适用范围相同. (×)

(3) 过点 $(1, 3)$ 和 $(1, 5)$ 的直线可以用两点式方程来

表示. (×)

(4) 所有的直线都可以用两点式方程来表示. (×)

2. 直线 $\frac{x}{4} - \frac{y}{5} = 1$ 在两坐标轴上的截距之和为 ____.

-1 解析: 由方程知, 直线 $\frac{x}{4} - \frac{y}{5} = 1$ 在 x 轴上的截距为 4, 在 y 轴上的截距为 -5 , 故 $4 + (-5) = -1$.

3. 请思考并回答下列问题:

(1) 若已知直线的斜率, 且直线过一定点, 选择哪种形式的方程较好? 若已知直线过两定点呢?

提示: 点斜式. 若直线过两点可选择两点式或点斜式.

(2) 若已知直线的斜率, 可选择哪种形式的方程?

提示: 可选择斜截式或点斜式.

(3) 若已知直线与两坐标轴的交点, 选择哪种形式的方程较好?

提示: 选择截距式较好.

任务型课堂

任务1 直线的两点式方程

探究活动

例1 (1)直线 l 经过点 $P_1(1,2), P_2(3,5)$, 求直线 l 的方程;

(2)直线 l 在 y 轴上的截距是 -3 , 且经过点 $(-2,1)$, 求直线 l 的方程.

解: (1)由题意可得 $\frac{y-2}{5-2} = \frac{x-1}{3-1}$,

即 $y-2 = \frac{3}{2}(x-1)$, 整理可得 $3x-2y+1=0$.

(2)由题易知, 直线 l 过点 $(0, -3)$, 所以直线 l 的方程为 $\frac{y-(-3)}{1-(-3)} = \frac{x-0}{-2-0}$, 即 $2x+y+3=0$.

【探究总结】

利用两点式求直线的方程的注意点

当已知两点坐标, 求过这两点的直线的方程时, 首先要判断是否满足两点式方程的适用条件: 两点的连线不平行于坐标轴. 若满足, 则选用两点式方程.

应用迁移

1. 若点 $P(3, m)$ 在过点 $A(2, -1), B(-3, 4)$ 的直线上, 则 $m =$ _____.

-2 解析: 将 $A(2, -1), B(-3, 4)$ 代入两点式,

得 $\frac{y-(-1)}{4-(-1)} = \frac{x-2}{-3-2}$, 即 $\frac{y+1}{5} = \frac{x-2}{-5}$, 所以直线

AB 的方程为 $y+1=-x+2$.

因为点 $P(3, m)$ 在直线 AB 上,

所以 $m+1=-3+2$, 得 $m=-2$.

2. 在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(1, 3), B(5, 1), C(-1, -1)$.

(1)边 BC 上的中线 AD 所在直线的方程为 _____;

(2)边 AC 上的高 BH 所在直线的方程为 _____.

(1) $3x+y-6=0$ (2) $x+2y-7=0$ 解析: (1)边 BC 的中点 D 的坐标为 $(2, 0)$, 所以直线 AD 的方

程为 $\frac{y-3}{0-3} = \frac{x-1}{2-1}$, 即 $3x+y-6=0$.

(2)因为 $k_{AC} = \frac{3-(-1)}{1-(-1)} = 2$, $BH \perp AC$, 所以 $k_{BH} =$

$-\frac{1}{2}$, 所以直线 BH 的方程为 $y-1 = -\frac{1}{2}(x-5)$,

即 $x+2y-7=0$.

任务2 直线的截距式方程

探究活动

例2 已知直线 l 经过点 $P(4, 3)$, 且在两坐标轴上的截距相等, 求直线 l 的方程.

解: (方法一) 当直线 l 过原点时, 它在两坐标轴上的截距都是 0 .

设直线 l 的方程为 $y=kx$.

因为直线 l 过点 $P(4, 3)$,

所以 $3=4k$, 故 $k = \frac{3}{4}$.

所以直线 l 的方程为 $y = \frac{3}{4}x$, 即 $3x-4y=0$.

当直线 l 不过原点时, 设直线 l 的截距式方程为 $\frac{x}{a} +$

$\frac{y}{a} = 1 (a \neq 0)$.

又因为直线 l 过点 $P(4, 3)$, 所以 $\frac{4}{a} + \frac{3}{a} = 1$, 所以 $a=7$.

所以直线 l 的方程为 $\frac{x}{7} + \frac{y}{7} = 1$, 即 $x+y-7=0$.

综上所述, 直线 l 的方程为 $3x-4y=0$ 或 $x+y-7=0$.

(方法二) 由题意可知, 直线 l 的斜率存在且不为 0 , 设直线 l 的斜率为 $k (k \neq 0)$, 则有 $y-3=k(x-4)$.

令 $x=0$, 得 $y=3-4k$; 令 $y=0$, 得 $x=4-\frac{3}{k}$.

由直线 l 在两坐标轴上的截距相等, 得 $3-4k=4-\frac{3}{k}$, 解得 $k=-1$ 或 $k=\frac{3}{4}$,

所以直线 l 的方程为 $y-3=-(x-4)$ 或 $y-3=\frac{3}{4}(x-4)$,

即直线 l 的方程为 $x+y-7=0$ 或 $3x-4y=0$.

【一题多思】

思考1 已知直线 l 经过点 $P(4, 3)$, 且在两坐标轴上的截距互为相反数, 求直线 l 的方程.

解: 当直线 l 经过原点时, 横、纵截距都为 0 , 设直线 l 的方程为 $y=kx$, 因为直线 l 过点 $P(4, 3)$, 所以 $3=4k$, 解得 $k=\frac{3}{4}$, 所以直线 l 的方程为 $y=\frac{3}{4}x$, 即 $3x-4y=0$.

当直线 l 不经过原点时, 设直线 l 的方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{-a} = 1 (a \neq 0)$.

因为直线 l 过点 $P(4, 3)$, 所以 $\frac{4}{a} + \frac{3}{-a} = 1$, 得 $a=4-3=1$.

所以直线 l 的方程为 $x-y-1=0$.

综上, 所求直线 l 的方程为 $3x-4y=0$ 或 $x-y-1=0$.

思考 2. 已知直线 l 经过点 $P(4,3)$, 且直线 l 与两坐标轴围成的三角形的面积为 $\frac{49}{2}$, 求直线 l 的方程.

解: 设直线 l 的方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 (a, b \neq 0)$, 则

$$\begin{cases} \frac{4}{a} + \frac{3}{b} = 1, \\ \frac{1}{2}|a||b| = \frac{49}{2}, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a=7, \\ b=7 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=\frac{28}{3}, \\ b=\frac{21}{4}, \end{cases}$$

所以直线 l 的方程为 $x+y-7=0$ 或 $9x+16y-84=0$.

【探究总结】

利用截距式求直线的方程的策略

(1) 如果问题中涉及直线与坐标轴相交, 那么求直线方程时可以考虑选用截距式, 用待定系数法确定其系数即可.

(2) 若求直线方程时选用截距式, 则首先考虑直线是否过原点以及是否与坐标轴垂直. 如果题目中出现直线在两坐标轴上的“截距相等”“截距互为相反数”等条件, 那么求直线方程时, 要考虑截距为 0 的情况.

应用迁移

求过点 $(4, -3)$ 且在两坐标轴上的截距的绝对值相等的直线 l 的方程.

解: 设直线 l 在 x 轴和 y 轴上的截距分别为 a, b , 则直线 l 过两点 $A(a, 0)$ 和 $B(0, b)$.

① 当 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$ 时, 因为直线 l 过点 $(4, -3)$,

$$\text{所以 } \frac{4}{a} - \frac{3}{b} = 1.$$

$$\text{又 } |a| = |b|, \text{ 解得 } \begin{cases} a=1, \\ b=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=7, \\ b=-7. \end{cases}$$

所以直线 l 的方程为 $x+y-1=0$ 或 $x-y-7=0$.

② 当 $a=b=0$ 时, 直线 l 过点 $(0, 0)$ 和点 $(4, -3)$, 此时, 直线 l 的斜率为 $-\frac{3}{4}$,

$$\text{所以直线 } l \text{ 的方程为 } y = -\frac{3}{4}x, \text{ 即 } 3x+4y=0.$$

综上, 直线 l 的方程为 $x+y-1=0$ 或 $x-y-7=0$ 或 $3x+4y=0$.

任务 3 > 直线方程形式的灵活应用

探究活动

例 3 直线 l 过定点 $A(-2, 3)$, 并且与两坐标轴所围成的三角形的面积为 4, 求直线 l 的方程.

解: (方法一) 由题意可知, 直线 l 在两坐标轴上的截距均不为 0, 可设所求直线 l 的方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

$$\text{因为点 } A(-2, 3) \text{ 在直线 } l \text{ 上, 所以 } \frac{-2}{a} + \frac{3}{b} = 1. \text{ ①}$$

因为直线 l 与两坐标轴围成的三角形的面积为 4,

$$\text{所以 } \frac{1}{2}|a||b| = 4. \text{ ②}$$

$$\text{由 ①② 可得 } \begin{cases} -2b+3a=8, \\ ab=8 \end{cases} \text{ ③ 或 } \begin{cases} -2b+3a=-8, \\ ab=-8. \end{cases} \text{ ④}$$

$$\text{解 ③ 得 } \begin{cases} a=-\frac{4}{3}, \\ b=-6 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=4, \\ b=2, \end{cases}$$

④ 无解.

故所求直线 l 的方程为 $9x+2y+12=0$ 或 $x+2y-4=0$.

(方法二) 显然, 直线 l 不垂直于坐标轴.

设直线 l 的方程为 $y-3=k(x+2) (k \neq 0)$.

令 $x=0$, 得 $y=2k+3$;

$$\text{令 } y=0, \text{ 得 } x = -\frac{3}{k} - 2.$$

所以直线 l 在 x 轴、 y 轴上的截距分别为 $-\frac{3}{k}-2$ 和 $2k+3$.

$$\text{由题意, 得 } \frac{1}{2} |2k+3| \cdot \left| -\frac{3}{k}-2 \right| = 4,$$

$$\text{则 } (2k+3) \left(\frac{3}{k} + 2 \right) = 8 \text{ 或 } (2k+3) \left(\frac{3}{k} + 2 \right) = -8.$$

$$\text{若 } (2k+3) \left(\frac{3}{k} + 2 \right) = 8, \text{ 则方程无解.}$$

$$\text{若 } (2k+3) \left(\frac{3}{k} + 2 \right) = -8,$$

$$\text{解得 } k_1 = -\frac{1}{2}, k_2 = -\frac{9}{2}.$$

所以直线 l 的方程为 $x+2y-4=0$ 或 $9x+2y+12=0$.

【探究总结】

直线方程的灵活应用

直线方程的应用涉及图形的周长、面积、对称等. 解题时, 首先要明确直线方程, 然后从不同的角度, 分别对直线的斜率、截距等进行分析, 注意解题规范.

应用迁移

已知直线 l 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A, B , 且线段 AB 的中点为 $P(4, 1)$, 求直线 l 的方程.

解: 设点 $A(x, 0), B(0, y)$,

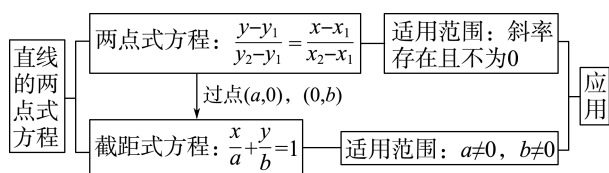
因为线段 AB 的中点为 $P(4, 1)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{x+0}{2} = 4, \\ \frac{0+y}{2} = 1, \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} x=8, \\ y=2. \end{cases}$$

所以点 A 的坐标为 $(8, 0)$, 点 B 的坐标为 $(0, 2)$.

由直线的截距式方程, 可得直线 l 的方程为 $\frac{x}{8} + \frac{y}{2} = 1$, 整理得 $x+4y-8=0$.

提质归纳



课后素养评价(十五)

直线的两点式方程

A组 学习·理解

1. 已知直线 l 经过点 $A(1, -2), B(-3, 2)$, 则直线 l 的方程为 (A)

A. $x + y + 1 = 0$ B. $x - y + 1 = 0$
C. $x + 2y + 1 = 0$ D. $x + 2y - 1 = 0$

2. 有关直线的两点式方程, 有如下说法:

① 直线的两点式方程适用于与两坐标轴不垂直的直线;

② 直线方程 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ 可写成 $\frac{y-y_2}{y_1-y_2} = \frac{x-x_2}{x_1-x_2}$;

③ 过点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 的直线的方程可以写成 $(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$.

其中正确的说法有 ()

A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

D 解析: ① 正确, 从两点式方程的形式看, 只要 $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$, 就可以用两点式来求解直线的方程.

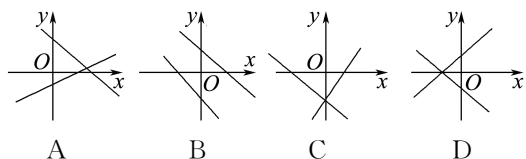
② 正确, 方程 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ 与 $\frac{y-y_2}{y_1-y_2} = \frac{x-x_2}{x_1-x_2}$ 的形式有异, 但实质相同, 均表示过点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 的直线. ③ 显然正确.

3. 直线 $-\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = -1$ 在 x 轴、 y 轴上的截距分别为 ()

A. 2, 3 B. -2, 3
C. -2, -3 D. 2, -3

D 解析: 将方程变形为 $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$, 所以直线在 x 轴、 y 轴上的截距分别为 2, -3. 故选 D.

4. 直线 $\frac{x}{m} - \frac{y}{n} = 1$ 与 $\frac{x}{n} - \frac{y}{m} = 1$ 在同一平面直角坐标系中的位置可能是 ()



B 解析: 直线 $\frac{x}{m} - \frac{y}{n} = 1$ 在两坐标轴上的截距分别为 $m, -n$; 直线 $\frac{x}{n} - \frac{y}{m} = 1$ 在两坐标轴上的截距分别为 $n, -m$. 所以符合题意为 B.

5. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(1, 2), B(3, 6), C(5, 2)$, M 为 AB 的中点, N 为 AC 的中点, 则中位线

MN 所在直线的方程为 ()

A. $2x + y - 8 = 0$ B. $2x - y + 8 = 0$
C. $2x + y - 12 = 0$ D. $2x - y - 12 = 0$

A 解析: 由题意可求得点 M 的坐标为 $(2, 4)$, 点 N 的坐标为 $(3, 2)$, 由两点式方程得中位线 MN 所在直线的方程为 $\frac{y-2}{4-2} = \frac{x-3}{2-3}$, 即 $2x + y - 8 = 0$.

6. 一束光线从点 $M(3, 2)$ 射到 x 轴上, 经 x 轴反射后反射光线与 y 轴交于点 $N(0, 4)$, 则反射光线所在直线的方程为 ()

A. $x + 2y - 2 = 0$ B. $2x + y - 4 = 0$
C. $x + y - 4 = 0$ D. $2x + 3y - 12 = 0$

B 解析: 取点 $M(3, 2)$ 关于 x 轴的对称点 $A(3, -2)$, 则直线 NA 即为所求直线.

所以反射光线所在直线的方程为 $\frac{y+2}{4+2} = \frac{x-3}{0-3}$, 即 $2x + y - 4 = 0$.

7. (多选) 下列说法正确的是 ()

A. 不经过原点的直线都可以表示为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

B. 若直线 l 与 x 轴、 y 轴的交点分别为 A, B , 且线段 AB 的中点为 $(4, 1)$, 则直线的方程为 $\frac{x}{8} + \frac{y}{2} = 1$

C. 过点 $(1, 1)$ 且在两坐标轴上的截距相等的直线的方程为 $y = x$ 或 $x + y = 2$

D. 直线 $3x - 2y = 4$ 的截距式方程为 $\frac{x}{\frac{4}{3}} + \frac{y}{-2} = 1$

BCD 解析: A 中, 与坐标轴垂直的直线也不能用截距式表示, 故 A 错误. B 中, 因为线段 AB 的中点为 $(4, 1)$, A 点在 x 轴上, B 点在 y 轴上, 所以 $A(8, 0), B(0, 2)$, 故所求直线的方程为 $\frac{x}{8} + \frac{y}{2} = 1$, 故 B 正确. C 中, 当直线过原点时, 直线方程为 $y = x$, 当直线不过原点时, 设直线方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1 (a \neq 0)$, 将点 $(1, 1)$ 代入方程并整理得直线方程为 $x + y = 2$, 故 C 正确. D 中, 方程 $3x - 2y = 4$ 可化为 $\frac{x}{\frac{4}{3}} + \frac{y}{-2} = 1$, 故 D 正确.

8. 已知点 $A(4, 0), B(0, 5), P(x, y)$ 为直线 AB 上一动点, 则 xy 的最大值是 _____.

5 解析: 由题意可得直线 AB 的方程为 $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$

1, 显然 xy 取得最大值时, $x > 0, y > 0$.

当 $x > 0, y > 0$ 时, $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{20}}$, 即 $2\sqrt{\frac{xy}{20}} \leq 1$,

解得 $xy \leq 5$, 当且仅当 $x=2, y=\frac{5}{2}$ 时取等号.

9. 过点 $P(1,3)$, 在 x 轴上的截距和在 y 轴上的截距相等的直线的方程为 _____.

$y=3x$ 或 $x+y-4=0$ 解析: 当直线过原点时, 直线 $y=3x$ 在 x 轴上的截距和在 y 轴上的截距相等, 此时直线方程为 $y=3x$;

当直线不过原点时, 设直线方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{3}{a} = 1$, 解得 $a=4$, 此时直线方程为 $x+y-4=0$.

所以所求直线方程为 $y=3x$ 或 $x+y-4=0$.

B组 应用·实践

1. 直线 $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$ 的一个方向向量是 ()

- A. $(1,2)$ B. $(1,-2)$
C. $(-2,1)$ D. $(-2,-1)$

C 解析: 直线方程 $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$ 可化成斜截式方程 $y = -\frac{1}{2}x + 2$, 所以直线的斜率为 $-\frac{1}{2}$.

由直线方向向量与斜率的关系, 即直线的方向向量为 (x,y) , 则斜率为 $\frac{y}{x}$,

所以选项 $(-2,1)$ 是直线 $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$ 的方向向量, 故 C 正确.

2. 由曲线 $2|x| + |y| = 2$ 围成的图形的面积为 ()

- A. 2 B. 4 C. 5 D. 8

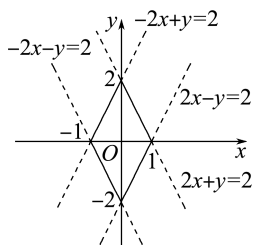
B 解析: 当 $x \geq 0, y \geq 0$ 时, 曲线方程为 $2x + y = 2$;

当 $x \geq 0, y < 0$ 时, 曲线方程为 $2x - y = 2$;

当 $x < 0, y \geq 0$ 时, 曲线方程为 $-2x + y = 2$;

当 $x < 0, y < 0$ 时, 曲线方程为 $-2x - y = 2$.

作图如下,



所以围成的图形是一个菱形, 面积为 $\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$.

3. 过点 $A(1,4)$ 且在两坐标轴上的截距的绝对值相等的直线共有 _____ 条.

3 解析: 一条是截距为 0, 一条是截距相等 (不为 0), 一条是截距互为相反数 (不为 0), 共 3 条.

4. 已知直线 l 过点 $P(1,2)$ 且与 x 轴、 y 轴分别交于 $A(a,0), B(0,b)$ ($a > 0, b > 0$) 两点, O 为坐标原点, 那么 $2|OA| + |OB|$ 的最小值为 _____.

8 解析: 因为直线 l 与 x 轴、 y 轴分别交于 $A(a,0), B(0,b)$ ($a > 0, b > 0$) 两点,

所以可设直线 l 的截距式方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

因为直线 l 过点 $P(1,2)$, 所以 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$, 且 $a > 0, b > 0$,

所以 $2|OA| + |OB| = 2a + b = (2a + b) \cdot$

$\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b}\right) = 4 + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} \geq 4 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{4a}{b}} = 8$,

当且仅当 $\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{4a}{b}, \\ \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1, \end{cases}$ 即 $a=2, b=4$ 时, 等号成立.

所以 $2|OA| + |OB|$ 的最小值为 8.

5. 已知直线 l 过点 $P(2,1)$, 且与 x 轴、 y 轴的正半轴分别交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 则 $\triangle OAB$ 的面积的最小值为 _____.

4 解析: 设 $A(a,0), B(0,b)$, 则直线 l 的截距式方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, 依题意, $a > 0, b > 0$. 又因为点 $P(2,$

$1)$ 在直线 l 上, 所以 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 即 $2b + a = ab$.

又因为 $\triangle OAB$ 面积为 $S = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| = \frac{1}{2}ab$,

所以 $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(2b + a) \geq \frac{2\sqrt{2ab}}{2} = \sqrt{2ab}$,

当且仅当 $2b = a$ 时, 等号成立,

所以 $\frac{1}{2}ab \geq \sqrt{2ab}$, 得 $ab \geq 8$.

所以 $S = \frac{1}{2}ab \geq 4$, 当且仅当 $2b = a$ 时, S 取最小值 4.

6. 已知直线 l 过点 $P(2,3)$, 求直线 l 与两条坐标轴在第一象限所围成的三角形面积最小时直线 l 的方程.

解: 由题意可知直线 l 与两坐标轴均交于正半轴, 设交点分别为 $A(a,0), B(0,b)$, 直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}$

$+\frac{y}{b} = 1$ ($a > 0, b > 0$).

将 $P(2,3)$ 代入可得 $\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1$,

故 $\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1 \geq 2\sqrt{\frac{2}{a} \cdot \frac{3}{b}}$, 得 $ab \geq 24$, 当且仅当 $\frac{2}{a} = \frac{3}{b}$, 即 $a=4, b=6$ 时, 等号成立.

故所围成的三角形的面积为 $S = \frac{1}{2}ab \geq 12$,

当且仅当 $a=4, b=6$ 时 S 取得最小值为 12,

此时, 直线 l 的方程为 $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$, 即 $3x + 2y - 12 = 0$.

7. 已知直线 l 过点 $P\left(\frac{4}{3}, 2\right)$, 且与 x 轴、 y 轴的正半轴分别交于 A, B 两点, O 为坐标原点.

(1) 当 $OA=OB$ 时, 求直线 l 的方程;

(2) 当 $\triangle AOB$ 的面积为 6 时, 求直线 l 的方程.

解: 设直线 l 的方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 (a > 0, b > 0)$, 则

$A(a, 0), B(0, b)$.

(1) 由 $|OA| = |OB|$, 得 $a = b$.

又直线 l 过点 $P\left(\frac{4}{3}, 2\right)$, 得 $\frac{4}{3a} + \frac{2}{a} = 1$, 解得 $a = \frac{10}{3}, b = \frac{10}{3}$,

所以直线 l 的方程为 $3x + 3y - 10 = 0$.

(2) 由题意知, $\frac{1}{2}ab = 6$, 即 $ab = 12$, 又直线 l 过点

$P\left(\frac{4}{3}, 2\right)$, 所以 $\frac{4}{3a} + \frac{2}{b} = 1$, 解得 $\begin{cases} a=4, \\ b=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=2, \\ b=6 \end{cases}$,

所以直线 l 的方程为 $3x + 4y - 12 = 0$ 或 $3x + y - 6 = 0$.

2.2.3 直线的一般式方程

学习任务目标

1. 明确直线的一般式方程的形式特征.
2. 会把直线的一般式方程化为斜截式方程, 进而求斜率和截距.
3. 会把直线的点斜式、两点式方程化为一般式方程.

问题式预习

【知识清单】

知识点 直线的一般式方程

(1) 关于 x, y 的二元一次方程都表示一条直线. 我们把关于 x, y 的二元一次方程 $Ax + By + C = 0$ (其中 A, B 不同时为 0) 叫做直线的一般式方程, 简称一般式.

(2) 对于直线 $Ax + By + C = 0$, 当 $B \neq 0$ 时, 其斜率为 $-\frac{A}{B}$, 在 y 轴上的截距为 $-\frac{C}{B}$; 当 $B = 0, A \neq 0$ 时, 直线在 x 轴上的截距为 $-\frac{C}{A}$; 当 $AB \neq 0$ 时, 直线在 x 轴、 y 轴上的截距分别为 $-\frac{C}{A}, -\frac{C}{B}$.

(3) 直线的一般式方程的结构特征

- ① 方程是关于 x, y 的二元一次方程.
- ② 方程中等号的左侧自左向右一般按 x, y , 常数的先后顺序排列.
- ③ x 的系数一般不为分数和负数.
- ④ 虽然直线的一般式方程中有三个参数, 但只需两个独立的条件即可求得直线的方程.

【概念辨析】

1. 判断正误 (正确的打“√”, 错误的打“×”).

- (1) 任何一条直线的一般式方程都能与其他四种形式互化. (×)
- (2) 对于二元一次方程 $Ax + By + C = 0$, 当 $A = 0, B \neq 0$ 时, 方程表示斜率不存在的直线. (×)
- (3) 当 A, B 同时为零时, 方程 $Ax + By + C = 0$ 也可表示一条直线. (×)

2. 过点 $(-3, 0)$ 和 $(0, 4)$ 的直线的一般式方程为

()

- A. $4x + 3y + 12 = 0$
- B. $4x + 3y - 12 = 0$
- C. $4x - 3y + 12 = 0$
- D. $4x - 3y - 12 = 0$

C 解析: 由截距式得直线方程为 $\frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1$, 整理得 $4x - 3y + 12 = 0$.

3. 请思考并回答下列问题:

(1) 任何直线的方程都能表示为一般式吗?

提示: 能. 因为平面内任意一条直线都可以用一个关于 x, y 的二元一次方程表示.

(2) 在方程 $Ax + By + C = 0 (A, B$ 不同时为 0) 中, A, B, C 为何值时, 方程表示的直线分别满足下列条件:

- ① 平行于 x 轴?
- ② 平行于 y 轴?
- ③ 与 x 轴重合?
- ④ 与 y 轴重合?

提示: 当 $A = 0, B \neq 0$ 时, 方程变为 $y = -\frac{C}{B}$, 当 $C \neq 0$ 时, 表示的直线平行于 x 轴, 当 $C = 0$ 时, 表示的直线与 x 轴重合; 当 $A \neq 0, B = 0$ 时, 方程变为 $x = -\frac{C}{A}$, 当 $C \neq 0$ 时, 表示的直线平行于 y 轴, 当 $C = 0$ 时, 表示的直线与 y 轴重合.

任务型课堂

任务1 直线的一般式方程

探究活动

例1 根据下列条件,分别写出直线的方程,并化为一般式方程.

- (1)斜率是 $\sqrt{3}$,且经过点 $A(5,3)$;
- (2)斜率为4,在 y 轴上的截距为2;
- (3)经过 $A(-1,5), B(2,-1)$ 两点;
- (4)在 x 轴、 y 轴上的截距分别是-3,-1.

解:(1)由点斜式可得,所求直线的方程为 $y-3=\sqrt{3}(x-5)$,化为一般式为 $\sqrt{3}x-y+3-5\sqrt{3}=0$.

(2)由斜截式可得,所求直线的方程为 $y=4x+2$,化为一般式为 $4x-y+2=0$.

(3)由两点式可得,

$$\text{所求直线的方程为 } \frac{y-5}{-1-5} = \frac{x-(-1)}{2-(-1)},$$

化为一般式为 $2x+y-3=0$.

(4)由截距式可得,所求直线的方程为 $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-1} = 1$,

化为一般式为 $x+3y+3=0$.

【探究总结】

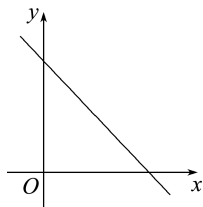
根据已知条件求直线方程的策略

在求直线方程时,常用的方法是根据给定条件先用直线方程的四种特殊形式之一求出方程,再化为一般式方程,选用策略:

- (1)已知直线的斜率和直线上的点的坐标时,选用点斜式;
- (2)已知直线的斜率和在 y 轴上的截距时,选用斜截式;
- (3)已知直线上两点的坐标时,选用两点式;
- (4)已知直线在 x 轴、 y 轴上的截距时,选用截距式.

应用迁移

1.(多选)已知直线 $ax+by+c=0$ 在平面直角坐标系中的位置如图,则 ()



- 若 $c>0$,则 $a>0, b>0$
- 若 $c>0$,则 $a<0, b<0$
- 若 $c<0$,则 $a>0, b<0$
- 若 $c<0$,则 $a>0, b>0$

BD 解析:易知 $b \neq 0$,由直线 $ax+by+c=0$,可得

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

根据题图可得 $-\frac{a}{b} < 0, -\frac{c}{b} > 0$,

所以若 $c < 0$,则 $a > 0, b > 0$;若 $c > 0$,则 $a < 0, b < 0$.

故选 BD.

2.若直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$,且在 x 轴上的截距为-1,则直线 l 的一般式方程是_____.

$\sqrt{3}x - y + \sqrt{3} = 0$ **解析:**由直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$,

可得直线 l 的斜率为 $k = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

又因为直线 l 在 x 轴上的截距为-1,所以直线 l 的方程为 $y = \sqrt{3}(x+1)$,即 $\sqrt{3}x - y + \sqrt{3} = 0$.

任务2 一般形式下的平行与垂直问题

探究活动

例2 (1)已知直线 $l_1: 2x + (m+1)y + 4 = 0$ 与直线 $l_2: mx + 3y - 2 = 0$ 平行,试求 m 的值.

(2)当 a 为何值时,直线 $l_1: (a+2)x + (1-a)y - 1 = 0$ 与直线 $l_2: (a-1)x + (2a+3)y + 2 = 0$ 互相垂直?

(1)解:(方法一)由 $l_1: 2x + (m+1)y + 4 = 0, l_2: mx + 3y - 2 = 0$ 知,

①当 $m=0$ 时,显然 l_1 与 l_2 不平行;

②当 $m \neq 0$ 时,要使 $l_1 \parallel l_2$,需 $\frac{2}{m} = \frac{m+1}{3} \neq \frac{4}{-2}$,解得 $m=2$ 或 $m=-3$.

所以 m 的值为2或-3.

(方法二)令 $2 \times 3 = m(m+1)$,解得 $m=-3$ 或 $m=2$.

当 $m=-3$ 时, $l_1: x - y + 2 = 0, l_2: 3x - 3y + 2 = 0$.

显然 l_1 与 l_2 不重合,所以 $l_1 \parallel l_2$.

当 $m=2$ 时, $l_1: 2x + 3y + 4 = 0, l_2: 2x + 3y - 2 = 0$,

显然 l_1 与 l_2 不重合,所以 $l_1 \parallel l_2$.

所以 m 的值为2或-3.

(2)解:(方法一)由题意知,直线 $l_1 \perp l_2$.

①当 $1-a=0$,即 $a=1$ 时,直线 $l_1: 3x-1=0$ 与直线 $l_2: 5y+2=0$ 显然垂直.

②当 $2a+3=0$,即 $a=-\frac{3}{2}$ 时,直线 $l_1: x+5y-2=0$ 与直线 $l_2: 5x-4=0$ 不垂直.

③当 $1-a \neq 0$,且 $2a+3 \neq 0$ 时,直线 l_1, l_2 的斜率

k_1, k_2 都存在,且 $k_1 = -\frac{a+2}{1-a}, k_2 = -\frac{a-1}{2a+3}$.

当 $l_1 \perp l_2$ 时, $k_1 \cdot k_2 = -1$,

即 $\left(-\frac{a+2}{1-a}\right) \cdot \left(-\frac{a-1}{2a+3}\right) = -1$,解得 $a=-1$.

综上所述,当 $a=1$ 或 $a=-1$ 时,直线 $l_1 \perp l_2$.

(方法二)由题意知直线 $l_1 \perp l_2$,

所以 $(a+2)(a-1)+(1-a)(2a+3)=0$, 解得 $a=\pm 1$.

将 $a=\pm 1$ 代入直线方程, 均满足题意.

故当 $a=1$ 或 $a=-1$ 时, 直线 $l_1 \perp l_2$.

【探究总结】

1. 利用一般式解决直线平行与垂直问题的策略

已知直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, 直线 $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

(1) $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ 且 $B_1C_2 - B_2C_1 \neq 0$ (或 $A_1C_2 - A_2C_1 \neq 0$).

(2) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

2. 与已知直线平行(垂直)的直线的方程

(1) 与直线 $Ax + By + C = 0$ 平行的直线的方程可设为 $Ax + By + m = 0 (m \neq C)$.

(2) 与直线 $Ax + By + C = 0$ 垂直的直线的方程可设为 $Bx - Ay + m = 0$.

应用迁移

1. 数学家欧拉在 1765 年提出定理: 三角形的外心、重心、垂心依次位于同一直线上, 且重心到外心的距离是重心到垂心距离的一半. 这条直线被后人称为三角形的欧拉线. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(2, 0)$, $B(0, 1)$, 且 $AC = BC$, 则 $\triangle ABC$ 的欧拉线的方程为 ()

- A. $2x + 4y - 3 = 0$ B. $x - 2y - 3 = 0$
C. $2x - y - 3 = 0$ D. $4x - 2y - 3 = 0$

D 解析: 因为 $AC = BC$, 结合题意可知 $\triangle ABC$ 的欧拉线即为线段 AB 的垂直平分线.

线段 AB 的中点为 $M\left(1, \frac{1}{2}\right)$, 斜率 $k_{AB} = -\frac{1}{2}$,

则线段 AB 的垂直平分线的斜率 $k = 2$.

所以 $\triangle ABC$ 的欧拉线的方程为 $y - \frac{1}{2} = 2(x - 1)$,

即 $4x - 2y - 3 = 0$.

故选 D.

2. 已知 m, n 为实数, 直线 l_1 的方程为 $(m-1)x + 2my - 8m = 0$, 直线 l_2 的方程为 $(2n-1)x + 4ny - 4n = 0$, 讨论直线 l_1 与 l_2 的位置关系.

解: 由题意, 列方程组 $\begin{cases} (m-1)x + 2my = 8m, \\ (2n-1)x + 4ny = 4n. \end{cases}$

因为 $4n(m-1) - 2m(2n-1) = 4mn - 4n - 4mn + 2m = 2(m-2n)$,

所以 $m \neq 2n$ 时, l_1 与 l_2 相交;

当 $m = 2n$ 时, $\begin{cases} (2n-1)x + 4ny = 16n, \\ (2n-1)x + 4ny = 4n, \end{cases}$

① 当 $m = 2n = 0$ 时, l_1 与 l_2 重合,

② 当 $m = 2n \neq 0$ 时, $l_1 \parallel l_2$.

任务3 > 直线方程的综合应用

探究活动

例3 设直线 l 的方程为 $(a+1)x + y + 2 - a = 0 (a \in \mathbb{R})$.

(1) 若 l 在两坐标轴上的截距相等, 求 l 的方程;

(2) 若 l 不经过第二象限, 求实数 a 的取值范围.

解: (1) 由题意可知, $a \neq -1$. 当直线 l 过原点时, 其在 x 轴和 y 轴上的截距均为 0, 所以 $2 - a = 0$, 解得 $a = 2$, 此时直线 l 的方程为 $3x + y = 0$; 当直线 l 不过原点时, $a \neq 2$, 由 $\frac{a-2}{a+1} = a-2$, 得 $a = 0$, 此时直线 l 的方程为 $x + y + 2 = 0$.

综上, 所求直线的方程为 $3x + y = 0$ 或 $x + y + 2 = 0$.

(2) 将直线 l 的方程化为 $y = -(a+1)x + a - 2$,

要使 l 不经过第二象限, 当且仅当 $\begin{cases} -(a+1) \geq 0, \\ a - 2 \leq 0, \end{cases}$ 解得 $a \leq -1$.

故实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -1]$.

【一题多思】

思考 在本例中若直线 l 在 x 轴上的截距为 -3 , 求实数 a 的值.

解: 由题易知 $a \neq -1$. 由直线 l 的方程 $(a+1)x + y + 2 - a = 0$, 得直线 l 在 x 轴上的截距为 $\frac{a-2}{a+1}$,

即 $\frac{a-2}{a+1} = -3$, 解得 $a = -\frac{1}{4}$.

【探究总结】

含参直线方程的研究策略

(1) 若方程 $Ax + By + C = 0$ 表示直线, 则需满足 A, B 不同时为 0.

(2) 令 $x = 0$ 可得直线在 y 轴上的截距, 令 $y = 0$ 可得直线在 x 轴上的截距. 若确定直线斜率存在, 则可将一般式化为斜截式.

(3) 解分式方程要注意验根.

应用迁移

1. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点是 $A(-1, -1), B(3, 1), C(1, 6)$, 直线 l 平行于 AB , 分别交 AC, BC 于点 E, F , 且 $\triangle CEF$ 的面积是 $\triangle ABC$ 的面积 $\frac{1}{4}$.

(1) 求点 E, F 的坐标;

(2) 求直线 l 的方程.

解: (1) 设点 $E(x_1, y_1), F(x_2, y_2)$.

因为直线 $EF \parallel AB$, 且 $\triangle CEF$ 的面积是 $\triangle ABC$ 的面积 $\frac{1}{4}$, 所以 E, F 分别为边 AC, BC 的中点,

所以 $E\left(0, \frac{5}{2}\right), F\left(2, \frac{7}{2}\right)$.

(2) 由 (1) 知点 $E\left(0, \frac{5}{2}\right), F\left(2, \frac{7}{2}\right)$,

可得直线 l 的方程为 $\frac{y-\frac{5}{2}}{\frac{7}{2}-\frac{5}{2}} = \frac{x-0}{2-0}$, 即 $x-2y+5=0$.

2. 直线 l 与两坐标轴围成的三角形的面积为 3, 分别求满足下列条件的直线 l 的方程.

(1) 过定点 $A(-3, 4)$;

(2) 与直线 $6x+y-3=0$ 垂直.

解: (1) 由条件可知直线 l 的斜率一定存在且不为 0.

因为直线 l 过点 $A(-3, 4)$,

所以设直线 l 的方程为 $y=k(x+3)+4(k \neq 0)$.

令 $x=0$, 得 $y=3k+4$;

令 $y=0$, 得 $x=-\frac{4}{k}-3$.

所以 $\frac{1}{2} \left| -\frac{4}{k}-3 \right| \cdot |3k+4| = 3$.

所以 $9k^2+30k+16=0$ 或 $9k^2+18k+16=0$,

解得 $k=-\frac{2}{3}$ 或 $k=-\frac{8}{3}$.

所以直线 l 的方程为 $2x+3y-6=0$ 或 $8x+3y+12=0$.

(2) 因为直线 l 与直线 $6x+y-3=0$ 垂直,

所以设直线 l 的方程为 $x-6y+m=0$.

令 $x=0$, 得 $y=\frac{m}{6}$;

令 $y=0$, 得 $x=-m$.

所以 $\frac{1}{2} |-m| \cdot \left| \frac{m}{6} \right| = 3$,

解得 $m=\pm 6$.

所以直线 l 的方程为 $x-6y+6=0$ 或 $x-6y-6=0$.

提质归纳

直线的一般式方程	直线的一般式方程: $Ax+By+C=0(A, B$ 不同时为 0)
	一般式与其他形式的互化
	由直线的一般式方程研究直线的平行与垂直 直线 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ 直线 $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ (1) $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow A_1B_2-A_2B_1=0$ 且 $B_1C_2-B_2C_1 \neq 0$ (或 $A_1C_2-A_2C_1 \neq 0$) (2) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$

课后素养评价 (十六)

直线的一般式方程

A组 学习·理解

1. (多选) 若直线 $(2m^2+m-3)x+(m^2-m)y=4m-1$ 在 x 轴上的截距为 1, 则实数 m 的值可能为 ()

A. 1

B. 2

C. $-\frac{1}{2}$

D. -1

BC 解析: 由题意可知, 当 $2m^2+m-3 \neq 0$, 即 $m \neq -\frac{3}{2}$ 且 $m \neq 1$ 时, 直线在 x 轴上的截距为

$\frac{4m-1}{2m^2+m-3} = 1$, 即 $2m^2-3m-2=0$, 所以 $m=2$ 或 $m=-\frac{1}{2}$.

2. 在平面直角坐标系中, 直线 $x+2y=1$ 与直线 $\frac{1}{2}x+y-1=0$ 的位置关系为 ()

A. 相交但不垂直

B. 垂直

C. 平行

D. 重合

C 解析: 直线 $x+2y=1$, 即 $x+2y-1=0$;

直线 $\frac{1}{2}x+y-1=0$, 即 $x+2y-2=0$.

由于 $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} \neq \frac{-1}{-2}$, 所以两直线平行.

3. 已知直线 $x+my+6=0$ 和 $(m-2)x+3y+2m=0$ 互相平行, 则实数 m 的值为 ()

A. -1 或 3

B. -1

C. -3

D. 1 或 -3

B 解析: 当 $m=0$ 或 $m=2$ 时, 显然两条直线不平行. 由题意知 $\frac{1}{m-2} = \frac{m}{3} \neq \frac{6}{2m}$, 解得 $m=-1$ ($m=3$ 舍去). 经检验, 当 $m=-1$ 时两条直线平行, 符合题意.

4. 坐标原点在直线 l 上的射影为点 $(2, 1)$, 则直线 l 的方程是 ()

A. $x+2y-5=0$

B. $2x+y-5=0$

C. $2x+3y-7=0$

D. $3x+2y-8=0$

B 解析: 因为坐标原点在直线 l 上的射影为点 $(2, 1)$,

所以直线 l 的斜率 $k=-\frac{2}{1}=-2$.

又点 $(2, 1)$ 在直线 l 上,

所以所求直线的方程为 $y-1=-2(x-2)$,

即 $2x+y-5=0$.

5. 已知直线 $Ax+By+C=0(A, B$ 不同时为 0), 下列说法正确的是 ()

A. 无论 A, B 取何值, 直线斜率都存在

B. 当 $A=0$, 且 $B \neq 0$ 时, 直线只与 x 轴相交

C. 当 $A \neq 0$, 或 $B \neq 0$ 时, 直线与两条坐标轴都相交

D. 当 $A \neq 0$, 且 $B=0, C=0$ 时, 直线与 y 轴重合

D 解析:对于 A 选项,当 $A \neq 0$,且 $B=0$ 时,直线斜率不存在,故错误.

对于 B 选项,当 $A=0$,且 $B \neq 0, C \neq 0$ 时,直线只与 y 轴相交;当 $A=0$,且 $B \neq 0, C=0$ 时,直线与 x 轴重合,故错误.

对于 C 选项,当 $A \neq 0$,且 $B \neq 0$ 时,直线与两条坐标轴都相交,故错误.

对于 D 选项,当 $A \neq 0$,且 $B=0, C=0$ 时,直线方程为 $x=0$,即 y 轴所在直线,故正确.

6. 已知直线 $a_1x+b_1y+1=0$ 和 $a_2x+b_2y+1=0$ 都过点 $A(2,1)$,则过 $P_1(a_1, b_1), P_2(a_2, b_2)$ 两点的直线的一般式方程为 _____.

$2x+y+1=0$ 解析:由题意得 $\begin{cases} 2a_1+b_1+1=0, \\ 2a_2+b_2+1=0, \end{cases}$

所以 $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ 都在直线 $2x+y+1=0$ 上.

又两点确定一条直线,所以所求直线的方程为 $2x+y+1=0$.

7. 已知直线 l 的倾斜角为 $\alpha, \sin \alpha = \frac{3}{5}$,且直线 l 经过点 $P(3,5)$,则直线 l 的一般式方程为 _____.

$3x-4y+11=0$ 或 $3x+4y-29=0$ 解析:因为

$\sin \alpha = \frac{3}{5}$,所以 $\cos \alpha = \pm \sqrt{1-\sin^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5}$,所以

直线 l 的斜率 $k = \tan \alpha = \pm \frac{3}{4}$.又因为直线 l 经过

点 $P(3,5)$,所以直线 l 的方程为 $y-5 = \frac{3}{4}(x-3)$

或 $y-5 = -\frac{3}{4}(x-3)$,所以直线 l 的一般式方程

为 $3x-4y+11=0$ 或 $3x+4y-29=0$.

8. 在 $\triangle ABC$ 中,已知点 A 的坐标为 $(1,3)$,边 AB, AC 上的中线所在直线方程分别为 $x-2y+1=0$ 和 $y-1=0$,求 $\triangle ABC$ 各边所在直线的方程.

解:点 B 应满足两个条件:①点 B 在直线 $y-1=0$ 上;② BA 的中点 D 在直线 $x-2y+1=0$ 上.

设 $B(x_B, 1)$,则 AB 的中点 $D\left(\frac{x_B+1}{2}, 2\right)$.

因为点 D 在中线 $CD: x-2y+1=0$ 上,

所以 $\frac{x_B+1}{2} - 2 \times 2 + 1 = 0$,

解得 $x_B=5$,故 $B(5,1)$.

因为点 C 在直线 $x-2y+1=0$ 上,故可设 $C(2y_C-1, y_C)$,因为 AC 边的中线为 $y-1=0$,所以 $y_C=-1$,则 $C(-3, -1)$.

根据两点式,得直线 AB 的方程为 $\frac{y-3}{1-3} = \frac{x-1}{5-1}$,即

$x+2y-7=0$,直线 BC 的方程为 $\frac{y+1}{1+1} = \frac{x+3}{5+3}$,即

$x-4y-1=0$,直线 AC 的方程为 $\frac{y+1}{3+1} = \frac{x+3}{1+3}$,即 $x-y+2=0$.

B组 应用·实践

1. 直线 $2x-2\sqrt{3}y-1=0$ 的倾斜角 $\alpha =$ ()

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

A 解析:由 $2x-2\sqrt{3}y-1=0$,可得 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{6}$,

所以直线的斜率 $k = \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

又 $0 \leq \alpha < \pi$,所以 $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

2. (多选) 三条直线: $x+y=0, x-y=0, x+ay=3$ 可以围成三角形,则 a 的值不能为 ()

A. 1 B. 2 C. -1 D. -2

AC 解析:直线 $x+y=0$ 与 $x-y=0$ 都经过原点,而无论 a 为何值,直线 $x+ay=3$ 都不经过原点,因此,要满足三条直线围成三角形,只需直线 $x+ay=3$ 与另外两条直线不平行,所以 $a \neq \pm 1$.

3. (多选) 如果 $A \cdot C < 0$ 且 $B \cdot C < 0$,那么直线 $Ax+By+C=0$ 经过 ()

A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限

ABD 解析:直线 $Ax+By+C=0$,即 $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$,

其斜率为 $-\frac{A}{B}$,纵截距为 $-\frac{C}{B}$.

因为 $A \cdot C < 0, B \cdot C < 0$,所以 $A \cdot B \cdot C^2 > 0$,所以 $A \cdot B > 0$.

所以 $-\frac{A}{B} < 0, -\frac{C}{B} > 0$,所以斜率小于 0,纵截距大于 0.

所以直线 $Ax+By+C=0$ 经过第一、二、四象限,故选 ABD.

4. (多选) 已知直线 $l_1: mx+y+m-1=0, l_2: 4x+my+3m-4=0$,下列命题中是真命题的是 ()

A. 若 $l_1 \perp l_2$,则 $m=0$

B. 当 $m=0$ 时, $\mathbf{n}=(1,0)$ 是直线 l_1 的一个方向向量

C. 若 $l_1 \parallel l_2$,则 $m=2$ 或 $m=-2$

D. 若直线 l_2 在两坐标轴上的截距相等,则实数 $m=4$

AB 解析:对于 A,若 $l_1 \perp l_2$,则 $m \times 4 + 1 \times m = 0$,所以 $m=0$,A 正确;

对于 B,当 $m=0$ 时,直线 $l_1: y-1=0$,

故 $\mathbf{n}=(1,0)$ 是直线 l_1 的一个方向向量,B 正确;

对于 C, 当 $m=0$ 时, $l_1: y-1=0, l_2: x-1=0, l_1$ 与 l_2 不平行,

故 $m \neq 0$, 则由 $l_1 \parallel l_2$, 可得 $k_{l_1} = k_{l_2}$, 即 $-m = -\frac{4}{m}$,

得 $m=2$ 或 $m=-2$,

当 $m=2$ 时, $l_1: 2x+y+1=0, l_2: 4x+2y+2=0$, 两直线重合,

当 $m=-2$ 时, $l_1: 2x-y+3=0, l_2: 2x-y-5=0$, 即 $l_1 \parallel l_2$, 符合题意,

故 $l_1 \parallel l_2$, 则 $m=-2$, C 错误;

对于 D, 由直线 l_2 在两坐标轴上的截距相等, 可知 $m \neq 0$,

对于 $4x+my+3m-4=0$, 令 $x=0$, 则 $y=\frac{4-3m}{m}$,

令 $y=0$, 则 $x=\frac{4-3m}{4}$, 则 $\frac{4-3m}{4} = \frac{4-3m}{m}$,

解得 $m=4$ 或 $m=\frac{4}{3}$, D 错误.

5. 若直线 $2x-y+1-4m=0$ 过第一、三、四象限, 则实数 m 的取值范围为 _____.

$\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ 解析: 因为直线方程为 $2x-y+1-4m=0$, 即 $y=2x+1-4m$,

又因为直线过第一、三、四象限, 所以直线在 y 轴上的截距小于 0,

即 $1-4m < 0$, 解得 $m > \frac{1}{4}$.

所以实数 m 的取值范围为 $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

6. 已知直线 $Ax+By+C=0$ 的斜率为 5, 且 $A-2B+3C=0$, 则直线的方程是 _____.

$15x-3y-7=0$ 解析: 因为直线 $Ax+By+C=0$

的斜率为 5, 所以 $B \neq 0$, 且 $-\frac{A}{B}=5$, 即 $A=-5B$. 又

$A-2B+3C=0$, 所以 $-5B-2B+3C=0$, 即 $C=\frac{7}{3}B$. 此时直线的方程化为 $-5Bx+By+\frac{7}{3}B=0$,

即 $-5x+y+\frac{7}{3}=0$.

故所求直线的方程为 $15x-3y-7=0$.

7. 点 $A(4,5)$ 关于直线 l 的对称点为 $B(-2,7)$, 则 l 的方程为 _____.

$3x-y+3=0$ 解析: 线段 AB 的中点为

$\left(\frac{4-2}{2}, \frac{5+7}{2}\right)$, 即 $(1,6)$, 直线 AB 的斜率 $k_{AB} =$

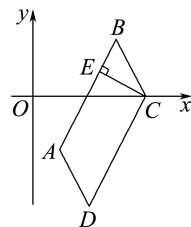
$\frac{7-5}{-2-4} = -\frac{1}{3}$, 所以直线 l 的斜率 $k_l = -\frac{1}{k_{AB}} = 3$. 由

点斜式可得直线 l 的方程为 $y-6=3(x-1)$, 即 $3x-y+3=0$.

8. 如图所示, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 边 AB 所在直线的方程为 $2x-y-2=0$, 点 $C(2,0)$.

(1) 求直线 CD 的方程;

(2) 求边 AB 上的高 CE 所在直线的方程.



解: (1) 因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 所以 $AB \parallel CD$.

设直线 CD 的方程为 $2x-y+m=0 (m \neq -2)$,

将 $C(2,0)$ 代入上式, 得 $m=-4$.

所以直线 CD 的方程为 $2x-y-4=0$.

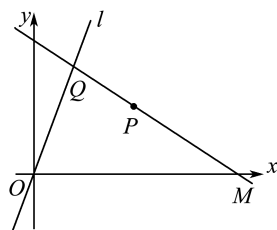
(2) 由 $AB \perp CE$, 可设直线 CE 的方程为 $x+2y+n=0$,

将 $C(2,0)$ 代入上式, 得 $n=-2$.

所以直线 CE 的方程为 $x+2y-2=0$.

9. 已知直线 $l: y=4x$ 和定点 $P(6,4)$, 点 Q 为第一象限内的点, 且在直线 l 上, 直线 PQ 交 x 轴正半轴于点 M , 求 $\triangle OMQ$ (O 为原点) 的面积最小时点 Q 的坐标.

解: 如图, 因为点 Q 在第一象限且在直线 $y=4x$ 上, 故可设点 Q 的坐标为 $(t, 4t) (t > 0)$,



所以 PQ 所在直线的方程为 $y-4 = \frac{4t-4}{t-6} \cdot (x-6)$.

令 $y=0$, 得点 M 的坐标为 $\left(\frac{5t}{t-1}, 0\right)$.

所以 $\triangle OMQ$ 的面积为 $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{5t}{t-1} \cdot 4t$,

得 $10t^2 - St + S = 0$,

所以 $\Delta = S^2 - 4 \times 10S \geq 0$,

所以 $S \geq 40$, 即 $S_{\min} = 40$, 此时 $t=2, 4t=8$.

所以当 $\triangle OMQ$ 的面积最小时, 点 Q 的坐标为 $(2, 8)$.

2.3 直线的交点坐标与距离公式

2.3.1 两条直线的交点坐标

学习任务目标

1. 掌握两直线的交点坐标的求法.
2. 理解两直线交点坐标和二元一次方程组的解之间的联系.
3. 掌握过两直线交点的直线方程的求法.

问题式预习

【知识清单】

知识点 两条直线的交点坐标

已知直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ 与 $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 相交, 交点为 P , 则点 P 既在直线 l_1 上, 也在直线 l_2 上, 所以点 P 的坐标既满足直线 l_1 的方程 $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, 也满足直线 l_2 的方程 $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, 即点 P 的坐标是方程组 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$ 的解.

【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打“√”, 错误的打“×”).

- (1) 若两条直线相交, 则交点坐标一定是两条直线方程所组成的二元一次方程组的解. (√)
- (2) 无论 m 为何值, 直线 $x - y + 1 = 0$ 与 $x - 2my + 3 = 0$ 必相交. (×)
- (3) 若两条直线的方程组成的方程组有解, 则两直线相交. (×)
- (4) 直线 $x + 3y - 4 = 0$ 与直线 $3x + 2y - 6 = 0$ 相交. (√)

2. 直线 $l_1: 2x - y - 1 = 0$ 与 $l_2: x + 3y - 11 = 0$ 的交点坐标为 ()

- A. (3, 2) B. (2, 3)
C. (-2, -3) D. (-3, -2)

B 解析: 解方程组 $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0, \\ x + 3y - 11 = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 2, \\ y = 3. \end{cases}$

3. 请思考并回答下列问题:

(1) 直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 (A_1^2 + B_1^2 \neq 0)$ 和 $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0 (A_2^2 + B_2^2 \neq 0)$ 相交的充要条件是什么?

提示: 两条直线相交的充要条件是 $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$.

(2) 直线 $A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0 (\lambda \in \mathbf{R})$ 与直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 有什么关系?

提示: 直线 $A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0 (\lambda \in \mathbf{R})$ 是过直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ 与 $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 交点的直线(不含 l_2).

任务型课堂

任务1 两条直线的交点问题

1. 直线 $3x + 2y + 6 = 0$ 与 $2x + 5y - 7 = 0$ 的交点坐标为 ()

- A. (-4, -3) B. (4, 3)
C. (-4, 3) D. (3, 4)

C 解析: 解方程组 $\begin{cases} 3x + 2y + 6 = 0, \\ 2x + 5y - 7 = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = -4, \\ y = 3. \end{cases}$

2. 若直线 $5x + 4y = 8 + m$ 与 $3x + 2y = 6$ 的交点在第一象限, 则实数 m 的取值范围是_____.

(2, 4) 解析: 解方程组 $\begin{cases} 5x + 4y = 8 + m, \\ 3x + 2y = 6, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 4 - m, \\ y = \frac{3m - 6}{2}. \end{cases}$

由题意得 $\begin{cases} 4 - m > 0, \\ \frac{3m - 6}{2} > 0, \end{cases}$ 解得 $2 < m < 4$.

所以实数 m 的取值范围是 (2, 4).

3. 若直线 l 过直线 $x + y - 2 = 0$ 和直线 $x - y + 4 = 0$ 的交点, 且与直线 $3x - 2y + 4 = 0$ 平行, 则直线 l 的方程为_____.

$3x - 2y + 9 = 0$ 解析: (方法一) 解方程组 $\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ x - y + 4 = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = -1, \\ y = 3, \end{cases}$ 即直线 l 过点 $(-1, 3)$.

因为直线 l 与直线 $3x - 2y + 4 = 0$ 平行, 所以直线 l 的斜率为 $\frac{3}{2}$,

所以直线 l 的方程为 $y - 3 = \frac{3}{2}(x + 1)$, 即 $3x - 2y + 9 = 0$.

(方法二) 因为直线 $x + y - 2 = 0$ 与 $3x - 2y + 4 = 0$ 不平行,

所以可设直线 l 的方程为 $x - y + 4 + \lambda(x + y - 2) = 0$,

整理得 $(1 + \lambda)x + (\lambda - 1)y + 4 - 2\lambda = 0$.

因为直线 l 与直线 $3x-2y+4=0$ 平行,

所以 $\frac{1+\lambda}{3} = \frac{\lambda-1}{-2} \neq \frac{4-2\lambda}{4}$, 解得 $\lambda = \frac{1}{5}$.

所以直线 l 的方程为 $\frac{6}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{18}{5} = 0$, 即 $3x - 2y + 9 = 0$.

【探究总结】

过两条相交直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 交点的直线方程可设为 $A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ (不含直线 l_2).

任务2 > 判断两条直线的位置关系并求交点坐标

探究活动

例1 判断下列各对直线的位置关系. 如果相交, 求出交点坐标.

(1) $l_1: 2x + y + 3 = 0, l_2: x - 2y - 1 = 0$;

(2) $l_1: x + y + 2 = 0, l_2: 2x + 2y + 3 = 0$;

(3) $l_1: x - y + 1 = 0, l_2: 2x - 2y + 2 = 0$.

解: (1) 解方程组 $\begin{cases} 2x + y + 3 = 0, \\ x - 2y - 1 = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = -1, \\ y = -1. \end{cases}$

所以 l_1 与 l_2 相交, 交点坐标为 $(-1, -1)$.

(2) 解方程组 $\begin{cases} x + y + 2 = 0, ① \\ 2x + 2y + 3 = 0, ② \end{cases}$

① $\times 2 - ②$ 得 $1 = 0$, 矛盾,

这个方程组无解, 所以 l_1 与 l_2 无公共点, $l_1 \parallel l_2$.

(3) 解方程组 $\begin{cases} x - y + 1 = 0, ① \\ 2x - 2y + 2 = 0, ② \end{cases}$

① $\times 2$ 得 $2x - 2y + 2 = 0$.

①和②可以化成同一个方程, 即①和②表示同一条直线, l_1 与 l_2 重合.

【探究总结】

两条直线位置关系与两条直线方程的系数的关系: l_1

与 l_2 平行 $\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2, \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$ (斜率 k 存在) $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$

$(A_2B_2C_2 \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} A_1B_2 = A_2B_1, \\ B_1C_2 \neq B_2C_1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} A_1B_2 = A_2B_1, \\ A_1C_2 \neq A_2C_1; \end{cases}$

与 l_2 重合 $\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases}$ (斜率 k 存在) $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

$(A_2B_2C_2 \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} A_1B_2 = A_2B_1, \\ B_1C_2 = B_2C_1, \\ A_1C_2 = A_2C_1; \end{cases}$ l_1 与 l_2 相交 $\Leftrightarrow k_1 \neq k_2$

k_2 (斜率 k 存在) $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} (A_2B_2 \neq 0) \Leftrightarrow A_1B_2 \neq A_2B_1$.

特别地, $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2 = -1$ (斜率 k 存在) $\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

88 应用迁移

1. 已知直线 $5x + 4y = 2a + 1$ 与直线 $2x + 3y = a$ 的交点位于第四象限, 则 a 的取值范围是_____.

$\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$ **解析:** 由 $\begin{cases} 5x + 4y = 2a + 1, \\ 2x + 3y = a, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x = \frac{2a+3}{7}, \\ y = \frac{a-2}{7}. \end{cases}$

由题意得 $\begin{cases} \frac{2a+3}{7} > 0, \\ \frac{a-2}{7} < 0, \end{cases}$ 解得 $-\frac{3}{2} < a < 2$.

所以 a 的取值范围是 $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$.

2. 若三条直线 $2x + 3y + 8 = 0, x - y - 1 = 0, x + by = 0$ 相交于一点, 求 b 的值.

解: 解方程组 $\begin{cases} 2x + 3y + 8 = 0, \\ x - y - 1 = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = -1, \\ y = -2, \end{cases}$ 所以两直线的交点坐标为 $(-1, -2)$,

代入直线方程 $x + by = 0$ 得 $b = -\frac{1}{2}$.

任务3 > 直线过定点问题

探究活动

例2 求证: 不论 m 为何值, 直线 $(3m+1)x - (2m-1)y + 3m - 1 = 0$ 都过一个定点, 并求这个定点的坐标.

证明: (方法一) 令 $m = 0$, 得 $x + y - 1 = 0$, ①

令 $m = 1$, 得 $4x - y + 2 = 0$. ②

联立①②得 $\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ 4x - y + 2 = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = -\frac{1}{5}, \\ y = \frac{6}{5}. \end{cases}$

把 $x = -\frac{1}{5}, y = \frac{6}{5}$ 代入 $(3m+1)x - (2m-1)y + 3m - 1 = 0$,

得 $(3m+1) \times \left(-\frac{1}{5}\right) - \frac{6}{5} \times (2m-1) + 3m - 1 = 0$.

所以直线 $(3m+1)x - (2m-1)y + 3m - 1 = 0$ 过定点 $\left(-\frac{1}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

(方法二) 方程可化为 $(x + y - 1) + m(3x - 2y + 3) = 0$.

由 m 的任意性可知 $\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ 3x - 2y + 3 = 0, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x = -\frac{1}{5}, \\ y = \frac{6}{5}. \end{cases}$

所以不论 m 取何值, 直线都过定点 $\left(-\frac{1}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

【一题多思】

思考 1. 求证: 不论 m 为何值, 直线 $(3m+1)x - (2m-1)y + 3m-1=0$ 总经过第二象限.

证明: 由例 2 的解析, 可知直线 $(3m+1)x - (2m-1)y + 3m-1=0$ 恒过第二象限内的定点 $(-\frac{1}{5}, \frac{6}{5})$, 所以无论 m 为何值, 直线总经过第二象限.

思考 2. 已知点 $A(1, 0), B(0, -1)$, 若直线 $(3m+1)x - (2m-1)y + 3m-1=0$ 和线段 AB 有交点, 求实数 m 的取值范围.

解: 由例 2 的解析, 可知直线 $(3m+1)x - (2m-1)y + 3m-1=0$ 过定点 $P(-\frac{1}{5}, \frac{6}{5})$.

由题可知, 直线 $(3m+1)x - (2m-1)y + 3m-1=0$ 的斜率存在, 又 $k_{AP} = -1, k_{BP} = -11$, 所以 $-11 \leq \frac{3m+1}{2m-1} \leq -1$, 解得 $0 \leq m \leq \frac{2}{5}$, 故实数 m 的取值范围是 $[0, \frac{2}{5}]$.

【探究总结】

求直线所过定点的方法

(1) 特殊值法: 给方程中的参数取两个特殊值, 可得两条直线的方程, 两条直线的交点即为所求的定点.

(2) 分离参数法: 将含参数 m 的直线方程化为 $A_1x + B_1y + C_1 + m(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ 的形式, 直线

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ 与 $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 的交点即为所求的定点.

88 应用迁移

1. 已知直线 $l: (a+2)x + (1-a)y - 3 = 0 (a \in \mathbf{R})$, 则直线 l 过定点 ()

- A. $(0, 0)$ B. $(0, 1)$
C. $(-2, 1)$ D. $(1, 1)$

D 解析: 直线 $l: (a+2)x + (1-a)y - 3 = 0$, 即 $a(x-y) + 2x + y - 3 = 0$.

联立 $\begin{cases} x-y=0, \\ 2x+y-3=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$ 所以当 a 变化时, 所有直线都通过点 $(1, 1)$.

2. 若不论 m 取何实数, 直线 $l: mx + y - 1 + 2m = 0$ 恒过一个定点, 则该定点的坐标是 _____.

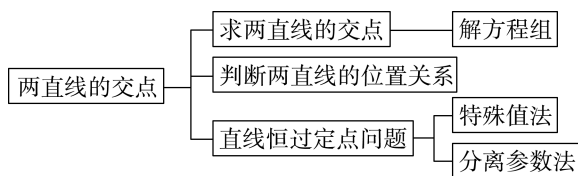
$(-2, 1)$ **解析:** 直线 $l: mx + y - 1 + 2m = 0$ 可化为 $m(x+2) + (y-1) = 0$,

由题意, 可得 $\begin{cases} x+2=0, \\ y-1=0, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} x=-2, \\ y=1. \end{cases}$

所以直线 $l: mx + y - 1 + 2m = 0$ 恒过定点 $(-2, 1)$.



提质归纳



课后素养评价 (十七)

两条直线的交点坐标

A组 学习·理解

1. 直线 $l_1: 2x - 3y + 5 = 0$ 与 $l_2: x + y - 10 = 0$ 的交点坐标是 ()

- A. $(5, 5)$ B. $(2, 3)$
C. $(3, 7)$ D. $(8, 5)$

A 解析: 联立方程 $\begin{cases} 2x-3y+5=0, \\ x+y-10=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=5, \\ y=5, \end{cases}$ 故 l_1 与 l_2 的交点坐标为 $(5, 5)$.

2. 经过直线 $l_1: 2x - y + 1 = 0$ 和 $l_2: x - y - 2 = 0$ 的交点, 且垂直于直线 l_1 的直线的方程为 ()

- A. $2x - y + 13 = 0$ B. $x + 2y + 13 = 0$
C. $2x - y - 13 = 0$ D. $x + 2y - 13 = 0$

B 解析: 联立 $\begin{cases} 2x-y+1=0, \\ x-y-2=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-3, \\ y=-5, \end{cases}$

所以直线 $l_1: 2x - y + 1 = 0$ 和 $l_2: x - y - 2 = 0$ 的交点为 $(-3, -5)$.

又直线 l_1 的斜率为 2, 故所求直线的斜率为 $-\frac{1}{2}$,

所以所求直线的方程为 $y + 5 = -\frac{1}{2}(x + 3)$, 即 $x + 2y + 13 = 0$.

3. 已知点 $M(0, -1)$, 点 N 在直线 $x - y + 1 = 0$ 上. 若直线 MN 垂直于直线 $x + 2y - 3 = 0$, 则点 N 的坐标为 ()

- A. $(-2, -3)$ B. $(2, 1)$
C. $(2, 3)$ D. $(-2, -1)$

C 解析: 由题意可设直线 MN 的方程为 $2x - y + C = 0$, 将 $M(0, -1)$ 代入,

则 $1 + C = 0$, 解得 $C = -1$, 则直线 MN 的方程为 $2x - y - 1 = 0$.

联立 $\begin{cases} 2x-y-1=0, \\ x-y+1=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=3, \end{cases}$ 则点 N 的坐标为 $(2, 3)$.

4. 经过直线 $2x + y - 4 = 0$ 与直线 $3x - y - 1 = 0$ 的交点, 且在 y 轴上截距为 6 的直线 l 的方程是 _____.

$$4x+y-6=0 \quad \text{解析: 联立} \begin{cases} 2x+y-4=0, \\ 3x-y-1=0, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=1, \\ y=2, \end{cases}$ 即直线 l 过点 $(1, 2)$.

又由直线 l 在 y 轴上截距为 6, 即直线 l 过点 $(0, 6)$, 所以斜率 $k = \frac{2-6}{1-0} = -4$,

所以所求直线的方程为 $y = -4x + 6$, 化为一般式方程为 $4x + y - 6 = 0$.

5. 已知直线 $ax + 2y - 1 = 0$ 与直线 $2x - 5y + c = 0$ 垂直相交于点 $(1, m)$, 则 $a =$ _____, $c =$ _____, $m =$ _____.

$$5 \quad -12 \quad -2 \quad \text{解析: 由题意得} \begin{cases} 2a - 10 = 0, \\ a + 2m - 1 = 0, \\ 2 - 5m + c = 0, \end{cases}$$

$$\text{得} \begin{cases} a = 5, \\ c = -12, \\ m = -2. \end{cases}$$

6. 直线 $(m-1)x + (2m-1)y = m-3 (m \in \mathbf{R})$ 恒过定点 _____.

$(5, -2)$ 解析: 直线方程 $(m-1)x + (2m-1)y = m-3 (m \in \mathbf{R})$ 可化为 $m(x+2y-1) - x - y + 3 = 0$,

$$\text{令} \begin{cases} x+2y-1=0, \\ -x-y+3=0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x=5, \\ y=-2. \end{cases}$$

所以直线 $(m-1)x + (2m-1)y = m-3 (m \in \mathbf{R})$ 恒过定点 $(5, -2)$.

B组 应用·实践

1. 若三条直线 $2x+y-4=0, x-y+1=0$ 与 $ax-y+2=0$ 共有两个交点, 则实数 a 的值为 ()

- A. 1 B. -2
C. 1 或 -2 D. -1

C 解析: 由题意可得, 三条直线中有两条直线互相平行.

因为直线 $x-y+1=0$ 和直线 $2x+y-4=0$ 不平行,

所以直线 $x-y+1=0$ 和直线 $ax-y+2=0$ 平行, 或直线 $2x+y-4=0$ 和直线 $ax-y+2=0$ 平行.

因为直线 $x-y+1=0$ 的斜率为 1, 直线 $2x+y-4=0$ 的斜率为 -2, 直线 $ax-y+2=0$ 的斜率为 a , 所以 $a=1$ 或 $a=-2$. 经检验, 当 $a=1$ 或 $a=-2$ 时, 均满足三条直线共有两个交点.

2. (多选) 当 $0 < k < \frac{1}{2}$ 时, 直线 $l_1: kx - y - k + 1 = 0$

与直线 $l_2: ky - x - 2k = 0$ 的交点可能是 ()

- A. $(2, 3)$ B. $(1, 2)$
C. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ D. $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

$$\text{CD 解析: 由} \begin{cases} kx - y - k + 1 = 0, \\ ky - x - 2k = 0, \end{cases} \text{得} \begin{cases} x = \frac{k}{k-1}, \\ y = \frac{2k-1}{k-1}, \end{cases}$$

把各个选项代入验证即可.

3. 已知直线 $l_1: mx - y + m - 1 = 0$ 与射线 $l_2: x - y - 2 = 0 (x \geq 0)$ 恒有公共点, 则 m 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$
B. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
C. $[-1, 1)$
D. $[-1, 1]$

$$\text{C 解析: 联立} \begin{cases} mx - y + m - 1 = 0, \\ x - y - 2 = 0, \end{cases} \text{得} x = \frac{-m-1}{m-1}.$$

因为直线 $l_1: mx - y + m - 1 = 0$ 与射线 $l_2: x - y - 2 = 0 (x \geq 0)$ 恒有公共点,

$$\text{所以} x = \frac{-m-1}{m-1} \geq 0, \text{解得} -1 \leq m < 1.$$

所以 m 的取值范围是 $[-1, 1)$.

4. 若直线 $5x + 4y - 2m - 1 = 0$ 与直线 $2x + 3y - m = 0$ 的交点在第三象限, 则实数 m 的取值范围是 _____.

$$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \quad \text{解析: 由} \begin{cases} 5x + 4y - 2m - 1 = 0, \\ 2x + 3y - m = 0, \end{cases} \text{得} \begin{cases} x = \frac{2m+3}{7}, \\ y = \frac{m-2}{7}, \end{cases}$$

所以两条直线的交点坐标为 $\left(\frac{2m+3}{7}, \frac{m-2}{7}\right)$.

又此交点在第三象限,

$$\text{所以} \begin{cases} \frac{2m+3}{7} < 0, \\ \frac{m-2}{7} < 0, \end{cases} \text{解得} m < -\frac{3}{2}.$$

所以实数 m 的取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$.

5. 已知 $\triangle ABC$ 的三条边 AB, BC, AC 所在直线的方程分别为 $3x + 4y + 12 = 0, 4x - 3y + 16 = 0, 2x + y - 2 = 0$, 则边 AC 上的高 BD 所在直线的方程为 _____.

$$x - 2y + 4 = 0 \quad \text{解析: 由} \begin{cases} 3x + 4y + 12 = 0, \\ 4x - 3y + 16 = 0, \end{cases} \text{解得点}$$

B 的坐标为 $(-4, 0)$.

$$\text{因为} BD \perp AC, k_{AC} = -2, \text{所以} k_{BD} = -\frac{1}{k_{AC}} = \frac{1}{2}.$$

所以 AC 边上的高 BD 所在直线的方程为 $y = \frac{1}{2}(x + 4)$, 即 $x - 2y + 4 = 0$.

2.3.2 两点间的距离公式

学习任务目标

1. 通过两点间距离公式的推导, 体会数形结合思想.
2. 掌握并会用两点间的距离公式.
3. 能用坐标法解决简单的几何问题.

问题式预习

【知识清单】

知识点 两点间的距离

(1) 平面内的两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 间的距离

公式: $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

(2) 两点间距离的特殊情况

① 原点 $O(0, 0)$ 与任一点 $P(x, y)$ 间的距离 $|OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

② 当 $P_1P_2 \parallel x$ 轴时, $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 两点间的距离 $|P_1P_2| = |x_2 - x_1|$.

③ 当 $P_1P_2 \parallel y$ 轴时, $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 两点间的距离 $|P_1P_2| = |y_2 - y_1|$.

【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打“√”, 错误的打“×”).

(1) 点 $P_1(0, a)$ 与 $P_2(b, 0)$ 之间的距离为 $a - b$. (×)

(2) 当 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点的连线与坐标轴平行或垂直时, 两点间的距离公式不适用. (×)

(3) 平面内两点间的距离等于这两点的横坐标之差与纵坐标之差的平方和的算术平方根. (√)

2. (多选) 对于 $\sqrt{x^2 + 2x + 5}$, 下列说法正确的是 ()

- A. 可看作点 $(x, 0)$ 与点 $(1, 2)$ 间的距离
 B. 可看作点 $(x, 0)$ 与点 $(-1, -2)$ 间的距离
 C. 可看作点 $(x, 0)$ 与点 $(-1, 2)$ 间的距离
 D. 可看作点 $(x, -1)$ 与点 $(-1, 1)$ 间的距离

BCD 解析: $\sqrt{x^2 + 2x + 5} = \sqrt{(x+1)^2 + 4}$

$= \sqrt{(x+1)^2 + (0 \pm 2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (-1 \mp 1)^2}$,
 可看作点 $(x, 0)$ 与点 $(-1, -2)$ 间的距离, 可看作点 $(x, 0)$ 与点 $(-1, 2)$ 间的距离, 可看作点 $(x, -1)$ 与点 $(-1, 1)$ 间的距离, 故选项 A 不正确.

3. 请思考并回答下列问题:

(1) 平面内两点间的距离公式与两点坐标顺序是否有关?

提示: 无关. 公式中, x_2 与 x_1, y_2 与 y_1 的位置可以互换, 不影响计算结果.

(2) 式子 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 的几何意义是什么?

提示: 式子 $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$, 表示平面内的点 (x, y) 到原点的距离.

任务型课堂

任务1 两点间的距离公式

1. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(7, 8), B(10, 4), C(2, -4)$, 则边 BC 上的中线 AM 的长为 ()

- A. 8 B. 13
 C. $2\sqrt{15}$ D. $\sqrt{65}$

D 解析: 由 $B(10, 4), C(2, -4)$, 可得 $M(6, 0)$, 又 $A(7, 8)$, 所以 $|AM| = \sqrt{(6-7)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{65}$.

2. 已知线段 AB 的两个端点分别在 x 轴和 y 轴上, 且线段 AB 的中点为 $C(1, 1)$, 则 $|AB|$ 等于 ()

- A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. 4 D. $2\sqrt{2}$

D 解析: 设 $A(a, 0), B(0, b)$, 则 $\begin{cases} 1 = \frac{a+0}{2}, \\ 1 = \frac{0+b}{2}, \end{cases}$ 即

$\begin{cases} a=2, \\ b=2, \end{cases}$ 所以 $A(2, 0), B(0, 2)$, 所以 $|AB| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$.

任务2 利用坐标法进行平面几何计算

探究活动

例1 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别是 $A(-3, 1), B(3, -3), C(1, 7)$.

(1) 判断 $\triangle ABC$ 的形状;

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解: (1) (方法一) 因为 $|AB| = \sqrt{(3+3)^2 + (-3-1)^2} = 2\sqrt{13}$,

$|AC| = \sqrt{(1+3)^2 + (7-1)^2} = 2\sqrt{13}$,

$|BC| = \sqrt{(1-3)^2 + (7+3)^2} = 2\sqrt{26}$,

所以 $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$, 所以 $AC \perp AB$.

又 $|AB| = |AC|$,

所以 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

(方法二) 因为 $k_{AC} = \frac{7-1}{1-(-3)} = \frac{3}{2}, k_{AB} = \frac{-3-1}{3-(-3)} = -\frac{2}{3}$,

所以 $k_{AC} \cdot k_{AB} = -1$, 所以 $AC \perp AB$.

$$\text{又 } |AC| = \sqrt{(1+3)^2 + (7-1)^2} = 2\sqrt{13},$$

$$|AB| = \sqrt{(3+3)^2 + (-3-1)^2} = 2\sqrt{13},$$

所以 $|AC| = |AB|$.

所以 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

$$(2) \text{ 由 (1) 可知 } \triangle ABC \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} |AC| \cdot |AB| = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{13} \times 2\sqrt{13} = 26.$$

【探究总结】

用坐标法解决平面几何问题的常见步骤

(1) 建立平面直角坐标系, 用坐标表示有关的量;

(2) 进行有关代数运算;

(3) 把代数运算的结果“翻译”成几何结论.

应用迁移

已知点 $A(-3, 4)$, $B(2, \sqrt{3})$, 在 x 轴上找一点 P , 使 $|PA| = |PB|$, 并求 $|PA|$ 的值.

解: 设点 $P(x, 0)$, 则有

$$|PA| = \sqrt{(x+3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{x^2 + 6x + 25},$$

$$|PB| = \sqrt{(x-2)^2 + (0-\sqrt{3})^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 7}.$$

由 $|PA| = |PB|$, 得 $x^2 + 6x + 25 = x^2 - 4x + 7$, 解得

$$x = -\frac{9}{5},$$

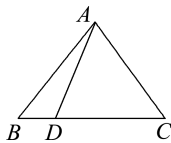
即点 P 的坐标为 $(-\frac{9}{5}, 0)$,

$$\text{所以 } |PA| = \sqrt{\left(-\frac{9}{5} + 3\right)^2 + (0-4)^2} = \frac{2\sqrt{109}}{5}.$$

任务3 利用坐标法进行平面几何证明

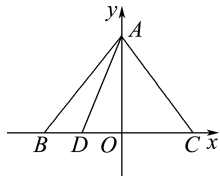
探究活动

例2 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $|AB| = |AC|$, D 是边 BC 上异于 B, C 的任意一点, 求证: $|AB|^2 = |AD|^2 + |BD| \cdot |DC|$.



证明: 如图, 取 BC 的中点 O , 连接 AO , 则 $AO \perp BC$, 以 O 为坐标原点, 边 BC 所在的直线为 x 轴, AO 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系.

设 $A(0, a)$, $B(-b, 0)$, $C(b, 0)$, $D(m, 0)$ ($-b < m < b$).



$$\text{则 } |AB|^2 = (-b-0)^2 + (0-a)^2 = a^2 + b^2,$$

$$|AD|^2 = (m-0)^2 + (0-a)^2 = m^2 + a^2,$$

$$|BD| \cdot |DC| = |m+b| \cdot |b-m| = (b+m)(b-m) = b^2 - m^2,$$

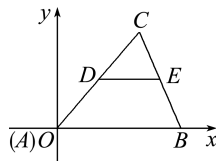
$$\text{所以 } |AD|^2 + |BD| \cdot |DC| = a^2 + b^2,$$

$$\text{所以 } |AB|^2 = |AD|^2 + |BD| \cdot |DC|.$$

【一题多思】

思考 求证: 三角形的中位线长度等于第三边长度的一半.

证明: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别为边 AC 和 BC 的中点, 即证 $|DE| = \frac{1}{2} |AB|$. 以 A 为坐标原点, 边 AB 所在直线为 x 轴, 过点 A 垂直于 AB 的直线为 y 轴建立平面直角坐标系.



设 $A(0, 0)$, $B(c, 0)$, $C(m, n)$, 则 $|AB| = |c|$.

又由中点坐标公式, 得 $D(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})$, $E(\frac{c+m}{2}, \frac{n}{2})$,

$$\text{所以 } |DE| = \left| \frac{c+m}{2} - \frac{m}{2} \right| = \left| \frac{c}{2} \right|,$$

$$\text{所以 } |DE| = \frac{1}{2} |AB|,$$

即三角形的中位线长度等于第三边长度的一半.

【探究总结】

利用坐标法解决平面几何问题时, 建立平面直角坐标系的原则主要有两点:

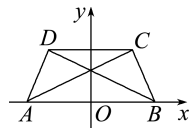
(1) 让尽可能多的点落在坐标轴上, 这样便于运算.

(2) 如果条件中有互相垂直的两条直线, 可考虑将它们作为坐标轴; 如果图形为中心对称图形, 可考虑将其对称中心作为原点; 如果图形为轴对称图形, 可考虑将其对称轴作为坐标轴.

应用迁移

已知等腰梯形 $ABCD$, 建立适当的坐标系, 证明: $|AC| = |BD|$.

证明: 如图, 以等腰梯形 $ABCD$ 的下底 AB 的中点 O 为坐标原点, AB 所在直线为 x 轴, 过点 O 垂直于 AB 的直线为 y 轴建立平面直角坐标系.



设 $|AB| = 2a$, $|CD| = 2b$, 高为 h , 则 $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $C(b, h)$, $D(-b, h)$. 由两点间的距离公式,

$$\text{得 } |AC| = \sqrt{(-a-b)^2 + (0-h)^2} = \sqrt{(a+b)^2 + h^2},$$

$$|BD| = \sqrt{[a-(-b)]^2 + (0-h)^2} = \sqrt{(a+b)^2 + h^2},$$

$$\text{所以 } |AC| = |BD|.$$

提质归纳

两点间的
距离公式

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

用坐标法解决平面几何问题

课后素养评价(十八)

两点间的距离公式

A组 学习·理解

1. 若过点 $A(3, a)$ 和点 $B(4, b)$ 的直线与直线 $y = 2x + 3$ 平行, 则 $|AB|$ 的值为 ()

A. 3 B. $\sqrt{3}$ C. 5 D. $\sqrt{5}$

D 解析: 由题意得 $\frac{b-a}{4-3} = 2$, 即 $b-a = 2$,

所以 $|AB| = \sqrt{(4-3)^2 + (b-a)^2} = \sqrt{5}$.

2. 以 $A(5, 5)$, $B(1, 4)$, $C(4, 1)$ 为顶点的三角形是 ()

A. 直角三角形 B. 等腰三角形
C. 等边三角形 D. 等腰直角三角形

B 解析: 因为 $|AB| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$,
 $|BC| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$, $|AC| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$,
所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

3. 到点 $A(1, 3)$, $B(-5, 1)$ 的距离相等的动点 $P(x, y)$ 的坐标满足的方程是 ()

A. $3x - y - 8 = 0$ B. $3x + y + 4 = 0$
C. $3x - y + 6 = 0$ D. $3x + y + 2 = 0$

B 解析: 因为 $P(x, y)$ 到 A, B 距离相等,
则 $\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x+5)^2 + (y-1)^2}$,
即 $3x + y + 4 = 0$.

4. 直线 $y = kx + b$ 经过点 $(1, 8)$, 且被两坐标轴截得的线段长为 $5\sqrt{5}$, 则 k 的所有可能取值之和为 ()

A. 14 B. 16 C. 18 D. 20

C 解析: 由题意, 因为直线 $y = kx + b$ 经过点 $(1, 8)$, 所以 $k + b = 8$, 则 $b = 8 - k$, 所以直线方程为 $y = kx + 8 - k$.

令 $x = 0$, 则 $y = 8 - k$,

令 $y = 0$, 则 $x = 1 - \frac{8}{k}$.

由题意得 $(8-k)^2 + \left(1 - \frac{8}{k}\right)^2 = (5\sqrt{5})^2$,

化简得 $k^4 - 16k^3 - 60k^2 - 16k + 64 = 0$,

即 $(k+2)(k^3 - 18k^2 - 24k + 32) = 0$,

即 $(k+2)^2(k^2 - 20k + 16) = 0$,

解得 $k = -2$ 或 $k = 10 + 2\sqrt{21}$ 或 $k = 10 - 2\sqrt{21}$.

故 k 的所有可能取值之和为 18.

5. 已知点 $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-2, -3)$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

A. 3 B. 2 C. 1 D. $\frac{1}{2}$

A 解析: 由题意得 $|AB| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $|AC| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$, $|CB| = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$,

所以 $|AB|^2 + |AC|^2 = |CB|^2$, 即 $AB \perp AC$, 所以

$\triangle ABC$ 的面积为 $S = \frac{1}{2} |AB| \cdot |AC| = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 3$.

6. 已知 $A(a, -5)$ 与 $B(0, 10)$ 两点间的距离是 17, 则 a 的值为 _____.

± 8 解析: 因为 $A(a, -5)$ 与 $B(0, 10)$ 两点间的距离是 17, 所以 $\sqrt{(a-0)^2 + (-5-10)^2} = 17$, 解得 $a = \pm 8$.

7. 直线 $l_1: x - my - 2 = 0$ 与直线 $l_2: mx + y + 2 = 0$ 交于点 Q , m 是实数, O 为坐标原点, 则 $|OQ|$ 的最大值是 _____.

$2\sqrt{2}$ 解析: 联立 $\begin{cases} x - my - 2 = 0, \\ mx + y + 2 = 0, \end{cases}$ 得

$$Q\left(\frac{2-2m}{1+m^2}, \frac{-2-2m}{1+m^2}\right),$$

$$\text{所以 } |OQ| = \sqrt{\left(\frac{2-2m}{1+m^2}\right)^2 + \left(\frac{-2-2m}{1+m^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{8(1+m^2)}}{\sqrt{(1+m^2)^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+m^2}}.$$

若 $|OQ|$ 最大, 则 $\sqrt{1+m^2}$ 最小, 即 $1+m^2$ 最小,

而 $1+m^2 \geq 1$, 当且仅当 $m = 0$ 时取等号,

此时 $|OQ|_{\max} = 2\sqrt{2}$.

所以 $|OQ|$ 的最大值是 $2\sqrt{2}$.

8. 已知点 $A(4, 12)$, P 为 x 轴上的一点, 且点 P 与点 A 的距离等于 13, 则点 P 的坐标为 _____.

$(9, 0)$ 或 $(-1, 0)$ 解析: 因为点 P 在 x 轴上, 设 $P(x, 0)$, 因为点 P 与点 A 的距离等于 13,

所以 $\sqrt{(x-4)^2 + (0-12)^2} = 13$, 解得 $x = 9$ 或 $x = -1$.

所以点 P 的坐标为 $(9, 0)$ 或 $(-1, 0)$.

B组 应用·实践

1. 光线从点 $A(-3, 5)$ 射到 x 轴上, 经 x 轴反射以后经过点 $B(2, 10)$, 则光线从 A 到 B 经过的路程为 ()

A. $5\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{5}$
C. $5\sqrt{10}$ D. $10\sqrt{5}$

C 解析: 因为点 A 关于 x 轴的对称点为 $A'(-3, -5)$,

所以 $|A'B| = \sqrt{(-3-2)^2 + (-5-10)^2} = 5\sqrt{10}$.

由光的反射理论可知, 此即为光线从 A 到 B 经过的路程.

2. 在等腰直角三角形 ABC 中, $\angle C=90^\circ$, 若点 A, C 的坐标分别为 $(0, 4), (3, 3)$, 则点 B 的坐标是 ()

- A. $(2, 0)$ 或 $(4, 6)$ B. $(2, 0)$ 或 $(6, 4)$
C. $(4, 6)$ D. $(0, 2)$

A 解析: 设 $B(x, y)$, 直线 AC, BC 的斜率分别为

k_{AC}, k_{BC} , 由题意可得 $\begin{cases} k_{AC} \cdot k_{BC} = -1, \\ |BC| = |AC|, \end{cases}$ 即

$$\begin{cases} \frac{3-4}{3-0} \cdot \frac{y-3}{x-3} = -1, \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (3-4)^2}, \end{cases} \quad \text{解得}$$

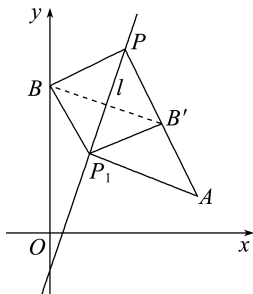
$$\begin{cases} x=2, \\ y=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=4, \\ y=6. \end{cases}$$

所以点 B 的坐标是 $(2, 0)$ 或 $(4, 6)$.

3. 已知点 $A(4, 1), B(0, 4)$, 直线 $l: 3x - y - 1 = 0$, 点 P 在直线 l 上, 则 $\|PB\| - \|PA\|$ 的最大值为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. 2

C 解析: 如图, 作出点 B 关于直线 l 的对称点 B' , 连接 AB' 并延长交直线 l 于点 P ,



根据点关于直线的对称图形特征, 知 $|PB| = |PB'|$, $\|PB\| - \|PA\| = \|PB'\| - \|PA\| = |B'A|$.

在直线 l 上任取点 P_1 , 连接 P_1A, P_1B, P_1B' , 则 $|P_1B| = |P_1B'|$, $\|P_1B\| - \|P_1A\| = \|P_1B'\| - \|P_1A\| < |B'A| = \|PB\| - \|PA\| = |B'A|$, 故 $\|PB\| - \|PA\|_{\max} = |B'A|$.

不妨设点 $B'(m, n)$, 则有 $\begin{cases} \frac{n-4}{m-0} = -\frac{1}{3}, \\ 3 \times \frac{m}{2} - \frac{n+4}{2} - 1 = 0, \end{cases} \quad \text{解}$

得 $\begin{cases} m=3, \\ n=3, \end{cases}$ 即 $B'(3, 3)$,

$$\|PB\| - \|PA\|_{\max} = |B'A| = \sqrt{(4-3)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{5}.$$

4. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(2, 4), B(3, -6), C(5, 2)$, 则边 BC 上的中线的长为 _____.

$2\sqrt{10}$ **解析:** 设 D 为 BC 的中点, 则过点 A 的中线为线段 AD , 易知 $D\left(\frac{3+5}{2}, \frac{-6+2}{2}\right)$, 即 $D(4, -2)$,

$$\text{所以 } |AD| = \sqrt{(4-2)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{4+36} = 2\sqrt{10}.$$

5. 已知 $A(1, 4), B(8, 3)$, 点 P 在 x 轴上, 则使 $|AP| + |BP|$ 取得最小值的点 P 的坐标是 _____.

$(5, 0)$ **解析:** 因为点 $A(1, 4)$ 关于 x 轴的对称点为 $A'(1, -4)$, 所以 $(|AP| + |BP|)_{\min} = |A'B|$, 所以 $A'B$ 所在的直线方程为 $y = x - 5$. 令 $y = 0$, 得 $x = 5$, 所以 $P(5, 0)$.

6. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点坐标分别为 $A(2, -2), B(-2, 3), C(3, 7)$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为 _____.

等腰直角三角形 **解析:** 因为 $|AB| = \sqrt{(2+2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{41}$, $|AC| = \sqrt{(2-3)^2 + (-2-7)^2} = \sqrt{82}$, $|BC| = \sqrt{(-2-3)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{41}$, 所以 $|AB| = |BC|$, $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$, 所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

7. 过定点 A 的直线 $mx - y + 1 = 0$ 与过定点 B 的直线 $x + my - 3 = 0$ 交于点 P , 则 $|PA|^2 + |PB|^2 =$ _____.

10 **解析:** 由 $y - 1 = mx$, 得 $A(0, 1)$,

由 $my = -(x - 3)$, 得 $B(3, 0)$.

当 $m = 0$ 时, 两直线垂直,

当 $m \neq 0$ 时, 两直线斜率之积等于 -1 ,

所以直线 $mx - y + 1 = 0$ 和直线 $x + my - 3 = 0$ 垂直,

$$\text{则 } |PA|^2 + |PB|^2 = |AB|^2 = (3-0)^2 + (0-1)^2 = 10.$$

8. 已知直线 $l_1: 2x + y - 6 = 0$ 和点 $A(1, -1)$, 过点 A 作直线 l_2 与直线 l_1 相交于点 B , 且 $|AB| = 5$, 则点 B 的坐标为 _____, 直线 l_2 的方程为 _____.

$(1, 4)$ 或 $(5, -4)$ $x = 1$ 或 $3x + 4y + 1 = 0$ **解析:** 根据题意, 点 B 在直线 $l_1: 2x + y - 6 = 0$ 上, 设点 B 的坐标为 $(t, 6 - 2t)$.

又由 $|AB| = 5$, 得 $(t-1)^2 + (7-2t)^2 = 25$, 解得 $t = 1$ 或 $t = 5$.

当 $t = 1$ 时, 点 B 的坐标为 $(1, 4)$, 直线 l_2 的方程为 $x = 1$;

当 $t = 5$ 时, 点 B 的坐标为 $(5, -4)$, 此时直线 l_2 的斜率 $k = \frac{-4 - (-1)}{5 - 1} = -\frac{3}{4}$, 直线 l_2 的方程为 $y +$

$$1 = -\frac{3}{4}(x - 1), \text{ 即 } 3x + 4y + 1 = 0.$$

故点 B 的坐标为 $(1, 4)$ 或 $(5, -4)$, 直线 l_2 的方程为 $x = 1$ 或 $3x + 4y + 1 = 0$.

2.3.3 点到直线的距离公式

学习任务目标

1. 掌握点到直线的距离公式.
2. 能用点到直线的距离公式求点到直线的距离.

◦ 问题式预习 ◦

【知识清单】

知识点 点到直线的距离

点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的距离 d

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打“√”, 错误的打“×”).

(1) 当点 $P(x_0, y_0)$ 在直线 $l: Ax + By + C = 0$ 上时, 点到直线的距离公式不适用. (×)

(2) 点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $y = kx + b$ 的距离为 $\frac{|kx_0 + b|}{\sqrt{1+k^2}}$. (×)

(3) 直线外一点与直线上一点的距离的最小值是直线外的点到该直线的距离. (√)

2. 点 $(2, 5)$ 到直线 $y = 2x$ 的距离为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ D. $\sqrt{5}$

A 解析: 直线的方程 $y = 2x$ 可化为 $2x - y = 0$, 所

以点 $(2, 5)$ 到直线 $y = 2x$ 的距离为 $\frac{|2 \times 2 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} =$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

3. 思考并回答下列问题:

(1) 在使用点到直线的距离公式时对直线方程有什么要求?

提示: 要求直线的方程为一般式.

(2) 式子 $\frac{|a-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$ 的几何意义是什么?

提示: 式子 $\frac{|a-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$ 的几何意义是点 $(a, 1)$ 到

直线 $x - y + 1 = 0$ 的距离.

◦ 任务型课堂 ◦

任务1 > 点到直线的距离

在 y 轴上求一点 P , 使以点 $A(2, 1)$, $B(4, 3)$ 和 P 为顶点的三角形的面积为 10.

解: 由题易得, 过 A, B 两点的直线方程为 $\frac{y-1}{3-1} =$

$\frac{x-2}{4-2}$, 整理得 $x - y - 1 = 0$, $|AB| =$

$$\sqrt{(2-4)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}.$$

在 $\triangle PAB$ 中, 设 AB 边上的高为 h .

由 $\triangle PAB$ 的面积为 10, 得 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times h = 10$, 所以 $h = 5\sqrt{2}$.

设 $P(0, m)$, 则点 P 到直线 AB 的距离 $d =$

$$\frac{|-m-1|}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}, \text{ 解得 } m=9 \text{ 或 } m=-11.$$

所以点 P 的坐标为 $(0, 9)$ 或 $(0, -11)$.

【探究总结】

求点到直线的距离时要注意的三点

(1) 直线方程应为一般式, 若给出其他形式, 要先化为一般式.

(2) 点在直线上时, 点到直线的距离为 0, 公式仍然

适用.

(3) 直线方程 $Ax + By + C = 0$ 中, $A=0$ 或 $B=0$ 时公式也成立, 但由于直线是特殊直线(与坐标轴垂直), 故也可数形结合求解.

任务2 > 点到直线的距离公式的应用

🔍 探究活动

例1 设直线 $l_1: 3x - y - 1 = 0$ 与直线 $l_2: x + 2y - 5 = 0$ 的交点为 A , 则点 A 到直线 $l: x + by + 2 + b = 0$ 的距离的最大值为 ()

- A. 4 B. $\sqrt{10}$ C. $3\sqrt{2}$ D. $\sqrt{11}$

C 解析: 联立 $\begin{cases} 3x - y - 1 = 0, \\ x + 2y - 5 = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \end{cases}$ 即交点为 $A(1, 2)$,

所以点 A 到直线 $l: x + by + 2 + b = 0$ 的距离 $d =$

$$\frac{|3+3b|}{\sqrt{1+b^2}} = \sqrt{9 + \frac{18}{b + \frac{1}{b}}}, \text{ 当 } b > 0 \text{ 时, } d \leq$$

$$\sqrt{9 + \frac{18}{2\sqrt{b \cdot \frac{1}{b}}}} = 3\sqrt{2},$$

当且仅当 $b=1$ 时取等号,

当 $b=0$ 时, $d=3<3\sqrt{2}$,

当 $b<0$ 时, $b+\frac{1}{b}\leqslant-2, 0\leqslant d<3<3\sqrt{2}$, 当且仅当 $b=-1$ 时取等号.

故点 A 到直线 $l: x+y+2+b=0$ 的距离的最大值为 $3\sqrt{2}$.

【探究总结】

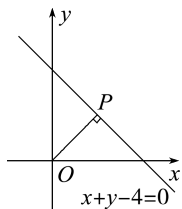
(1) 一个点到过定点的直线距离的最大值即这个点与定点之间的距离.

(2) 利用点到直线的距离公式, 可以求未知量的值、范围.

应用迁移

已知点 $P(x, y)$ 在直线 $x+y-4=0$ 上, O 为坐标原点, 求 $|OP|$ 的最小值并求出此时点 P 的坐标.

解: 如图, $|OP|$ 的最小值即为点 O 到直线 $x+y-4=0$ 的距离.



由点到直线的距离公式, 得 $|OP|_{\min} = \frac{|-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} =$

$2\sqrt{2}$.

此时, 直线 OP 的方程为 $y=x$.

解方程组 $\begin{cases} x+y-4=0, \\ y=x, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=2, \\ y=2, \end{cases}$ 所以点 P 的坐标为 $(2, 2)$.

任务3 对称问题

探究活动

例2 若直线 $l_1: y=kx+4$ 与直线 l_2 关于点 $M(1, 2)$ 对称, 当 l_2 经过点 $N(0, -1)$ 时, 求点 M 到直线 l_2 的距离.

解: 由题易得直线 $l_1: y=kx+4$ 恒过定点 $P(0, 4)$, 且 $P(0, 4)$ 关于点 $M(1, 2)$ 的对称点为 $(2, 0)$, 所以点 $(2, 0)$ 和 $N(0, -1)$ 都在直线 l_2 上.

可得直线 l_2 方程为 $\frac{y-0}{-1-0} = \frac{x-2}{0-2}$,

即 $x-2y-2=0$,

所以点 M 到直线 l_2 的距离 $d = \frac{|1-4-2|}{\sqrt{1+2^2}} = \sqrt{5}$.

【一题多思】

思考1. 已知入射光线经过点 $M(-3, 4)$, 被直线 $l: x-y+3=0$ 反射, 反射光线经过点 $N(2, 6)$, 求反射光线所在直线的方程.

解: 设点 $M(-3, 4)$ 关于直线 $l: x-y+3=0$ 的对称点为 $M'(a, b)$, 则反射光线所在直线过点 M' ,

$$\begin{cases} \frac{b-4}{a-(-3)} = -1, \\ \frac{-3+a}{2} - \frac{b+4}{2} + 3 = 0, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a=1, \\ b=0, \end{cases} \quad \text{即 } M'(1, 0).$$

又反射光线经过点 $N(2, 6)$,

所以反射光线所在直线的方程为 $\frac{y-0}{6-0} = \frac{x-1}{2-1}$, 即

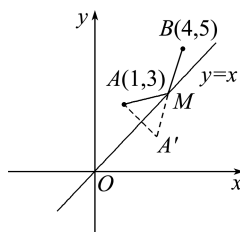
$6x-y-6=0$.

思考2. 已知两点 $A(1, 3), B(4, 5)$, 动点 M 在直线 $y=x$ 上运动, 求 $|MA|+|MB|$ 的最小值.

解: 设点 $A(1, 3)$ 关于直线 $y=x$ 的对称点为 $A'(x, y)$,

$$\begin{cases} \frac{y+3}{2} = \frac{x+1}{2}, \\ \frac{y-3}{x-1} = -1, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x=3, \\ y=1, \end{cases} \quad \text{即 } A'(3, 1).$$

根据题意画出图象, 如图,



连接 $A'B$, 则 $|A'B|$ 即为 $|MA|+|MB|$ 的最小值,

$|A'B| = \sqrt{(3-4)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{17}$.

【探究总结】

(1) 若点 $P(a, b), P'(m, n)$ ($a \neq m$ 且 $b \neq n$) 关于直线 $l: Ax + By + C = 0$ (A, B 均不为 0) 对称,

$$\begin{cases} \frac{n-b}{m-a} = \frac{B}{A}, \\ A \cdot \frac{m+a}{2} + B \cdot \frac{n+b}{2} + C = 0. \end{cases}$$

(2) 直线 l_1 关于直线 l_2 对称的问题, 可以转化为直线 l_1 上的点关于直线 l_2 对称的问题.

应用迁移

1. 点 $(1, 2)$ 关于直线 $x+y-2=0$ 的对称点是 ()

- A. $(1, 0)$ B. $(0, 1)$
C. $(0, -1)$ D. $(2, 1)$

B 解析: 设点 $(1, 2)$ 关于直线 $x+y-2=0$ 的对称点是 (a, b) ,

$$\begin{cases} \frac{b-2}{a-1} = 1, \\ \frac{a+1}{2} + \frac{b+2}{2} - 2 = 0, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a=0, \\ b=1. \end{cases}$$

故点 $(1, 2)$ 关于直线 $x+y-2=0$ 的对称点是 $(0, 1)$.

2. 已知直线 $l_1: y=\sqrt{2}x+2$, 直线 l_2 与 l_1 关于直线 $y=-x+1$ 对称, 则直线 l_2 的方程为 _____.

$x-\sqrt{2}y+\sqrt{2}+1=0$ 解析: 在 l_1 上取一点 $P(0,$

2),

设点 P 关于直线 $y = -x + 1$ 的对称点为 $P'(a, b)$,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{b-2}{a} = 1, \\ \frac{b+2}{2} = -\frac{a}{2} + 1, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a = -1, \\ b = 1, \end{cases} \quad \text{故点 } P'(-1, 1),$$

1).

$$\text{联立} \begin{cases} y = \sqrt{2}x + 2, \\ y = -x + 1, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2}, \\ y = \sqrt{2}, \end{cases} \quad \text{所以 } l_1 \text{ 与直线}$$

$y = -x + 1$ 的交点坐标为 $(1 - \sqrt{2}, \sqrt{2})$.

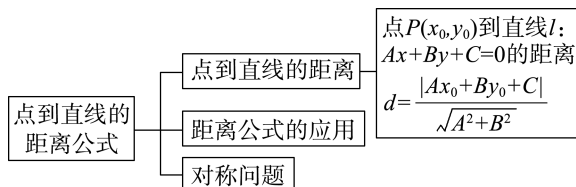
易知直线 l_2 过点 $(1 - \sqrt{2}, \sqrt{2})$ 和 $P'(-1, 1)$,

$$\text{所以直线 } l_2 \text{ 的斜率为 } \frac{\sqrt{2}-1}{-\sqrt{2}+2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{所以直线 } l_2 \text{ 的方程为 } y - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + 1),$$

$$\text{即 } x - \sqrt{2}y + \sqrt{2} + 1 = 0.$$

提质归纳



课后素养评价(十九)

点到直线的距离公式

A组 学习·理解

1. 点 $(2, 1)$ 到直线 $l: x - 2y + 2 = 0$ 的距离为 ()

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ D. 0

B 解析: 由点到直线的距离公式得 $d = \frac{|2 - 2 \times 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

2. (多选) 若点 $A(a, 1)$ 到直线 $3x - 4y = 1$ 的距离为 1, 则 a 的值为 ()

- A. 0 B. $\frac{10}{3}$
C. 5 D. $-\frac{10}{3}$

AB 解析: 点 $A(a, 1)$ 到直线 $3x - 4y = 1$ 的距离为 $\frac{|3a - 4 - 1|}{5} = 1$, 即 $\frac{|3a - 5|}{5} = 1$, 解得 $a = 0$ 或 $a = \frac{10}{3}$.

3. 已知点 $P(1+t, 1+3t)$ 到直线 $l: y = 2x - 1$ 的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 则点 P 的坐标为 ()

- A. $(0, -2)$ B. $(2, 4)$
C. $(0, -2)$ 或 $(2, 4)$ D. $(1, 1)$

C 解析: 直线 $l: y = 2x - 1$ 可化为 $2x - y - 1 = 0$, 由题意得 $\frac{|2(1+t) - (1+3t) - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 整理得 $|t| = 1$, 所以 $t = 1$ 或 $t = -1$.

当 $t = 1$ 时, 点 P 的坐标为 $(2, 4)$;

当 $t = -1$ 时, 点 P 的坐标为 $(0, -2)$. 故选 C.

4. 若 $A(3, 2)$ 和 $B(-1, 4)$ 到直线 $l: mx + y + 3 = 0$ 的

距离相等, 则 m 的值等于 _____.

$\frac{1}{2}$ 或 -6 解析: 因为 A, B 两点到直线 l 的距离相等, 所以 $AB \parallel l$ 或 l 过 AB 的中点 $(1, 3)$, 所以 $\frac{4-2}{-1-3} = -m$ 或 $m + 3 + 3 = 0$, 所以 $m = \frac{1}{2}$ 或 $m = -6$.

5. 已知点 $P(3, 4)$ 到直线 l 的距离为 5, 且直线 l 在两坐标轴上的截距相等, 则满足条件的直线共有 _____ 条.

3 解析: 当截距不为 0 时, 由题意设所求直线方程为 $x + y = a$ ($a \neq 0$), 则 $\frac{|7-a|}{\sqrt{2}} = 5$, 解得 $a = 7 \pm 5\sqrt{2}$, 此时满足题意的直线方程为 $x + y = 7 + 5\sqrt{2}$ 或 $x + y = 7 - 5\sqrt{2}$; 当截距为 0 时, 设原点为 $O(0, 0)$, 则 $|PO| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $k_{PO} = \frac{4}{3}$,

所以此时满足题意的直线方程是 $y = -\frac{3}{4}x$.

综上所述, 满足条件的直线共有 3 条.

6. 已知直线 $(1+k)x + y - k - 2 = 0$ 恒过定点 P , 则点 P 到直线 $x - y - 2 = 0$ 的距离为 _____.

$\sqrt{2}$ 解析: 直线方程 $(1+k)x + y - k - 2 = 0$ 可化为 $k(x-1) + (x+y-2) = 0$,

$$\text{令} \begin{cases} x-1=0, \\ x+y-2=0, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x=1, \\ y=1, \end{cases}$$

所以此直线恒过点 $P(1, 1)$.

由点到直线的距离公式, 得点 P 到直线 $x - y - 2 = 0$ 的距离 $d = \frac{|1-1-2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$.

B组 应用·实践

1. (多选) 下列过点 $(2, 2)$ 的直线中, 到 $A(0, -2), B(8, 2)$ 两点的距离相等的是 ()

A. $x + y - 4 = 0$ B. $x = 2$
C. $2x + y - 6 = 0$ D. $x - 2y + 2 = 0$

AD 解析: 显然斜率不存在时 $x = 2$ 不符合题意. 设 $l: y - 2 = k(x - 2)$, 即 $kx - y + 2 - 2k = 0$. 由题意可知 $\frac{|4 - 2k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|6k|}{\sqrt{k^2 + 1}}$, 解得 $k = \frac{1}{2}$ 或 $k = -1$.

当 $k = \frac{1}{2}$ 时, 因为 $k_{AB} = \frac{-2 - 2}{0 - 8} = \frac{1}{2}$, 所以 $l \parallel AB$, 直线 l 的方程为 $x - 2y + 2 = 0$; 当 $k = -1$ 时, l 过 AB 的中点 $(4, 0)$, 方程为 $x + y - 4 = 0$.

2. 已知光线从点 $A(-1, 2)$ 射出, 经直线 $y = -x$ 反射, 且反射光线过点 $B(4, -2)$, 则入射光线所在直线的方程是 ()

A. $2x + y = 0$ B. $2x + y + 4 = 0$
C. $x - 2y + 5 = 0$ D. $x + 2y - 3 = 0$

A 解析: 设点 $B(4, -2)$ 关于直线 $y = -x$ 的对称点为 $B'(x, y)$,

则入射光线所在直线经过点 B' ,

$$\text{且} \begin{cases} \frac{x+4}{2} + \frac{y-2}{2} = 0, \\ \frac{y+2}{x-4} = 1, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x=2, \\ y=-4, \end{cases} \text{即 } B'(2, -4).$$

又入射光线经过点 $A(-1, 2)$, 所以入射光线所在直线的方程是 $\frac{y-2}{-4-2} = \frac{x+1}{2+1}$, 即 $2x + y = 0$.

3. 已知直线 $l: kx + y + 2 - k = 0$ 过定点 M , 点 $P(x, y)$ 在直线 $2x - y + 1 = 0$ 上, 则 $|MP|$ 的最小值是 ()

A. 5 B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

B 解析: 由 $kx + y + 2 - k = 0$, 得 $y + 2 = k(1 - x)$, 所以直线 l 过定点 $M(1, -2)$.

由题意可知, $|MP|$ 的最小值就是点 M 到直线 $2x$

$-y + 1 = 0$ 的距离.

由点到直线的距离公式可得 $|MP|_{\min} = \frac{|2 + 2 + 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \sqrt{5}$.

4. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(3, 2), B(-1, 5)$, 点 C 在直线 $3x - y + 3 = 0$ 上. 若 $\triangle ABC$ 的面积为 10, 则点 C 的坐标为 _____.

$(-1, 0)$ 或 $(\frac{5}{3}, 8)$ **解析:** 设点 C 到直线 AB 的距

离为 h , 则 $\frac{1}{2} |AB| \cdot h = 10$. 又 $|AB| = \sqrt{(3+1)^2 + (2-5)^2} = 5$, 所以 $h = 4$. 又直线 AB 的方程为 $\frac{y-5}{2-5} = \frac{x+1}{3+1}$, 即 $3x + 4y - 17 = 0$, 设 $C(x_0, y_0)$, 则 $\frac{|3x_0 + 4y_0 - 17|}{5} = 4$ ①. 又点 C 在直线 $3x - y + 3 = 0$ 上, 所以 $3x_0 - y_0 + 3 = 0$ ②. 由①②联立方

程组解得 $\begin{cases} x_0 = -1, \\ y_0 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_0 = \frac{5}{3}, \\ y_0 = 8. \end{cases}$ 所以点 C 的坐标为

$(-1, 0)$ 或 $(\frac{5}{3}, 8)$.

5. 已知直线 $l: x - 2y + 8 = 0$ 和点 $A(2, 0), B(-2, -4)$. 在直线 l 上求一点 P , 使 $|PA| + |PB|$ 的值最小.

解: 设点 A 关于直线 l 的对称点为 $A'(m, n)$,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{n-0}{m-2} = -2, \\ \frac{m+2}{2} - 2 \cdot \frac{n+0}{2} + 8 = 0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} m = -2, \\ n = 8, \end{cases}$$

所以点 A' 的坐标为 $(-2, 8)$.

因为 P 为直线 l 上的一点, 且 A, B 在直线 l 的同侧, 所以当 B, P, A' 三点共线时, $|PA| + |PB|$ 取得最小值, 为 $|A'B|$, 点 P 即是直线 $A'B$ 与直线 l

的交点, 则 $\begin{cases} x = -2, \\ x - 2y + 8 = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = -2, \\ y = 3. \end{cases}$

故所求点 P 的坐标为 $(-2, 3)$.

2.3.4 两条平行直线间的距离

学习任务目标

1. 理解两条平行直线间的距离公式的推导过程.
2. 会求两条平行直线间的距离.
3. 通过两条平行直线间的距离公式的推导, 培养运用等价转化、数形结合等数学思想方法解决问题的能力.

问题式预习

【知识清单】

知识点 两条平行直线间的距离

(1)概念:夹在两条平行直线间的公垂线段的长就是这两条平行直线间的距离.

(2)求法:将两条平行直线间的距离转化为点到直线的距离.

(3)公式:两条平行直线 $l_1:Ax+By+C_1=0$ 与 $l_2:$

$Ax+By+C_2=0$ 间的距离为 $d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)当两条直线平行时,一条直线上任一点到另一条直线的距离都相等. (√)

(2)在用两条平行直线间的距离公式时,两直线方程中 x, y 的系数对应成比例即可. (×)

2.两条平行直线 $5x+12y+3=0$ 与 $10x+24y+5=0$ 之间的距离是 ()

A. $\frac{2}{13}$ B. $\frac{1}{13}$ C. $\frac{1}{26}$ D. $\frac{5}{26}$

C 解析: $5x+12y+3=0$ 可化为 $10x+24y+6=0$.

由两条平行直线间的距离公式,可得 $d=\frac{|6-5|}{\sqrt{10^2+24^2}}=\frac{1}{26}$.

3.请思考并回答下列问题:

(1)在应用两条平行直线间的距离公式时对直线方程有什么要求?

提示:两条平行直线的方程都是一般式,且 x, y 的系数应分别相等.

(2)如果过点 $P(x_0, y_0)$ 的直线 l' 与 $l:Ax+By+C=0$ 平行,那么点 P 到 l 的距离和 l' 与 l 之间的距离相等吗?

提示:相等.两条平行直线间的距离处处相等.

(3)怎样理解两条平行直线间的距离公式?

提示:公式 $d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 可以理解为坐标原点到两条平行直线间的距离之差(同侧时)或之和(异侧时).

任务型课堂

任务1 两条平行直线间的距离

探究活动

例1 求两条平行直线 $l_1:3x+4y=10$ 与 $l_2:6x+8y=15$ 间的距离.

解:(方法一)在 l_1 上任取一点 $A(2,1)$,则点 A 到 l_2 的距离即为 l_1 与 l_2 间的距离.

又 l_2 的方程可化为 $6x+8y-15=0$,

所以 $d=\frac{|2 \times 6 + 8 \times 1 - 15|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

(方法二) l_1 的方程可化为 $3x+4y-10=0$,

l_2 的方程可化为 $3x+4y-\frac{15}{2}=0$,

所以 l_1 与 l_2 间的距离 $d=\frac{\left|-10-\left(-\frac{15}{2}\right)\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{\frac{5}{2}}{5}=\frac{1}{2}$.

【一题多思】

思考1.与直线 $3x+4y=10$ 平行的直线的方程可以设为什么形式?

解:可设为 $3x+4y=m(m \neq 10)$.

思考2.若直线 l 与本例中直线 l_1 和 l_2 的距离相等,求直线 l 的方程.

解:设直线 l 的方程为 $3x+4y=m(m \neq 10 \text{ 且 } m \neq \frac{15}{2})$.

由题意可得 $\frac{|10-m|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{\left|\frac{15}{2}-m\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}$,

解得 $m=\frac{35}{4}$,

则直线 l 的方程为 $3x+4y=\frac{35}{4}$,即 $12x+16y-35=0$.

【探究总结】

求两条平行直线间的距离的两种思路

(1)将两条平行直线间的距离转化为一条直线上任意一点到另一条直线的距离.

(2)直接利用两条平行直线间的距离公式 $d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$,但必须注意两个直线方程中 x, y 的系数对应相等.

应用迁移

1.两条平行直线 $y=\frac{3}{2}x$ 与 $6x-4y+13=0$ 间的距离为 ()

A. $\sqrt{13}$ B. $\frac{\sqrt{13}}{2}$
C. $\frac{\sqrt{13}}{3}$ D. 13

B 解析: $y = \frac{3}{2}x$ 可化为 $6x - 4y = 0$, 则这两条平

$$\text{行直线间的距离 } d = \frac{13}{\sqrt{6^2 + 4^2}} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

2. 求与两条平行直线 $l_1: 2x - 3y + 4 = 0$ 和 $l_2: 2x - 3y - 2 = 0$ 距离相等的直线 l 的方程.

解: 由题意知, 所求直线与两条已知直线平行, 因此可设所求直线 l 的方程为 $2x - 3y + C = 0$ ($C \neq 4$ 且 $C \neq -2$).

在直线 l 上取点 $A(0, \frac{C}{3})$, 则点 A 到直线 l_1 与 l_2 的距离相等,

$$\text{即 } \frac{|2 \times 0 - 3 \times \frac{C}{3} + 4|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|2 \times 0 - 3 \times \frac{C}{3} - 2|}{\sqrt{2^2 + 3^2}},$$

即 $|4 - C| = |C + 2|$, 解得 $C = 1$.

所以, 所求直线 l 的方程为 $2x - 3y + 1 = 0$.

任务2 两条平行直线间的距离公式的应用

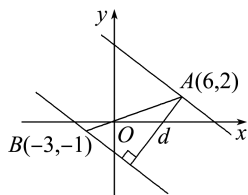
探究活动

例2 两条互相平行的直线分别过点 $A(6, 2)$ 和 $B(-3, -1)$, 并且各自绕着 A, B 旋转, 已知两条平行直线间的距离为 d . 求:

(1) d 的取值范围;

(2) 当 d 取最大值时, 两条直线的方程.

解: (1) 如图, 显然有 $0 < d \leq |AB|$.



$$\text{而 } |AB| = \sqrt{(6+3)^2 + (2+1)^2} = 3\sqrt{10}.$$

故 d 的取值范围为 $(0, 3\sqrt{10}]$.

(2) 由(1)中图可知, 当 d 取最大值时, 两直线与直线 AB 垂直.

$$\text{而 } k_{AB} = \frac{2 - (-1)}{6 - (-3)} = \frac{1}{3},$$

所以两条平行直线的斜率为 -3 .

故所求直线的方程为

$$y - 2 = -3(x - 6) \text{ 和 } y + 1 = -3(x + 3),$$

$$\text{即 } 3x + y - 20 = 0 \text{ 和 } 3x + y + 10 = 0.$$

【探究总结】

常见的距离公式应用问题的解题策略

(1) 求最值问题:

① 求点到直线的距离的最大值, 可转化为两点间的

距离;

② 求代数式的最值, 可根据所求式子的几何意义转化为点到直线的距离;

③ 利用距离公式求最值时, 可将问题转化为二次函数的最值问题.

(2) 求参数问题: 利用距离公式建立关于参数的方程或方程组, 通过解方程或方程组求参数的值.

(3) 求直线方程的问题: 立足确定直线的几何要素, 利用直线方程的各种形式, 结合直线间的位置关系, 巧设直线方程, 在此基础上借助距离公式求解.

应用迁移

1. 已知两条平行直线 $x + 2y + m = 0$ 与 $2x - ny - 4 = 0$ 间的距离是 $\sqrt{5}$. 若 $m > 0$, 则 $m + n =$ ()
A. 0 B. -1 C. 1 D. -2

B 解析: 因为直线 $x + 2y + m = 0$, 即 $2x + 4y + 2m = 0$ 与 $2x - ny - 4 = 0$ 平行, 所以 $n = -4$.

又两条平行直线间的距离是 $\sqrt{5}$, 且 $m > 0$, 所以 $\sqrt{5} = \frac{|2m + 4|}{\sqrt{4 + 16}}$, 解得 $m = 3$ 或 $m = -7$ (舍去).

故 $m + n = 3 - 4 = -1$.

2. 已知直线 l 过点 $A(2, -3)$.

(1) 若直线 l 在 y 轴上的截距为 3, 求直线 l 的方程;

(2) 若直线 l 与直线 $2x + y + b = 0$ ($b < 0$) 平行, 且两条平行直线间的距离为 $\sqrt{5}$, 求 b .

解: (1) 由题意可知, 直线 l 过点 $A(2, -3)$ 和 $(0, 3)$,

$$\text{所以直线 } l \text{ 的斜率 } k = \frac{-3 - 3}{2 - 0} = -3,$$

所以所求直线 l 的方程为 $y = -3x + 3$, 即 $3x + y - 3 = 0$.

(2) 设直线 l 的方程为 $2x + y + n = 0$,

则 $4 - 3 + n = 0$, 得 $n = -1$,

即直线 l 的方程为 $2x + y - 1 = 0$.

因为直线 l 与直线 $2x + y + b = 0$ 间的距离为 $\sqrt{5}$,

$$\text{所以 } \frac{|b + 1|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}, \text{ 即 } |b + 1| = 5.$$

又 $b < 0$, 所以 $b = -6$.

提质归纳

定义

公式: 两条平行直线 $l_1: Ax + By + C_1 = 0$ 与 $l_2: Ax + By + C_2 = 0$ ($C_1 \neq C_2$) 间的距离

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

距离公式的综合应用

两条平行直线间的距离

课后素养评价(二十)

两条平行直线间的距离

A组 学习·理解

1. 直线 $2x+3y+1=0$ 与 $4x+my+7=0$ 平行, 则它们之间的距离 ()

- A. 4
B. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$
C. $\frac{5\sqrt{13}}{26}$
D. $\frac{5\sqrt{10}}{20}$

C 解析: 由题意得 $2m-3\times 4=0$, 所以 $m=6$.

故两直线 $2x+3y+1=0$ 与 $4x+6y+7=0$ 即 $2x$

$+3y+\frac{7}{2}=0$ 间的距离 $d=\frac{\left|1-\frac{7}{2}\right|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{5\sqrt{13}}{26}$.

2. (多选) 若直线 l_1 与直线 $l: 3x-4y-20=0$ 平行且距离为 3, 则直线 l_1 的方程可能为 ()

- A. $3x-4y-5=0$
B. $3x-4y-35=0$
C. $3x-4y-23=0$
D. $3x-4y-17=0$

AB 解析: 设直线 l_1 的方程为 $3x-4y+m=0$.

由题意得 $\frac{|m+20|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$,

解得 $m=-5$ 或 $m=-35$,

所以直线 l_1 的方程为 $3x-4y-5=0$ 或 $3x-4y-35=0$.

3. l_1, l_2 是分别经过 $A(1,1), B(0,-1)$ 两点的两条平行直线, 当 l_1 与 l_2 间的距离最大时, 直线 l_1 的方程为 ()

- A. $x+2y-3=0$
B. $x-2y-3=0$
C. $2x-y-1=0$
D. $2x-y-3=0$

A 解析: 当两条平行直线与 AB 垂直时, 两条平行

直线间的距离最大, 又 $k_{AB}=\frac{1-(-1)}{1-0}=2$, 所以 $k_{l_1}=-\frac{1}{2}$.

又 l_1 过点 $A(1,1)$, 所以 l_1 的方程为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$, 即 $x+2y-3=0$.

4. 若直线 $x+3y-9=0$ 与直线 $x+3y-C=0$ 间的距离为 $\sqrt{10}$, 则 C 的值为 ()

- A. -1
B. 19
C. -1 或 19
D. 1 或 -19

C 解析: 由两平行线间的距离公式, 得

$$d=\frac{|-C-(-9)|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10},$$

所以 $|9-C|=10$, 解得 $C=-1$ 或 $C=19$.

5. 已知点 A, B 分别是直线 $l_1: 2x+y-2=0$ 与直线 $l_2: 4x+2y+1=0$ 上的点, 则 $|AB|$ 的最小值为 _____.

$\frac{\sqrt{5}}{2}$ 解析: 由题意可知直线 $l_1: 2x+y-2=0$, 直线

$l_2: 4x+2y+1=0$, 即 $l_2: 2x+y+\frac{1}{2}=0$,

则两直线斜率均为 -2 , 且两直线不重合,

所以 $l_1 \parallel l_2$.

所以当 $AB \perp l_1$ 且 $AB \perp l_2$ 时, $|AB|$ 有最小值, 其最小值为平行直线 l_1 与 l_2 间的距离,

$$\text{所以 } |AB|_{\min}=\frac{\left|-2-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

B组 应用·实践

1. 到直线 $3x+2y-4=0$ 和 $3x+2y+8=0$ 的距离相等的点的轨迹是 ()

- A. 直线 $3x+2y+2=0$
B. 直线 $3x+2y-2=0$
C. 直线 $3x+2y\pm 2=0$
D. 以上都不对

A 解析: 设满足题意的点的坐标为 (x, y) , 则

$$\frac{|3x+2y-4|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{|3x+2y+8|}{\sqrt{3^2+2^2}}, \text{ 所以 } |3x+2y-4|=|3x+2y+8|.$$

将 $3x+2y$ 看成一个整体得 $3x+2y+2=0$.

2. 已知直线 $l_1: 3x-2y-6=0, l_2: 3x-2y+8=0$, 则直线 l_1 关于直线 l_2 对称的直线的方程为 ()

- A. $3x-2y+24=0$
B. $3x-2y-10=0$
C. $3x-2y-20=0$
D. $3x-2y+22=0$

D 解析: 设所求直线方程为 $3x-2y+C=0 (C \neq -6)$,

由题意可知, 所求直线到直线 l_2 的距离等于直线 l_1, l_2 间的距离,

$$\text{所以 } \frac{|C-8|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{|-6-8|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}.$$

因为 $C \neq -6$, 所以 $C=22$.

因此, 所求直线的方程为 $3x-2y+22=0$.

3. 已知直线 $l_1: 2x-y+a=0, l_2: 4x-2y-1=0$. 若

直线 l_1 与 l_2 间的距离等于 $\frac{7\sqrt{5}}{10}$, 且直线 l_1 不经过第四象限, 则 $a =$ _____.

3 解析: 由直线 l_1, l_2 的方程可知, 直线 $l_1 \parallel l_2$, 且 $l_1: 2x - y + a = 0$, 即 $4x - 2y + 2a = 0$, $l_2: 4x - 2y$

$-1 = 0$, 由题意得, l_1 与 l_2 间的距离为 $\frac{|-1-2a|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}} = \frac{7\sqrt{5}}{10}$, 整理得 $\frac{|2a+1|}{2\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{10}$, 解得 $a=3$ 或 $a=-4$. 因为直线 l_1 不经过第四象限, 所以 $a \geq 0$, 所以 $a=3$.

2.4 圆的方程

2.4.1 圆的标准方程

学习任务目标

1. 掌握圆的标准方程的推导过程.
2. 能根据圆心坐标、半径熟练地写出圆的标准方程.
3. 能根据圆的标准方程熟练地写出圆心坐标和半径.
4. 会根据已知条件求出圆的标准方程, 会判断点与圆的位置关系.

问题式预习

【知识清单】

知识点一 圆的标准方程

(1) 圆的定义: 平面上到定点的距离等于定长的点的集合叫做圆, 定点称为圆心, 定长称为圆的半径.

(2) 确定圆的要素是圆心坐标和半径.

(3) 圆的标准方程: 圆心为 $A(a, b)$, 半径为 r 的圆的标准方程是 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

当 $a=b=0$ 时, 方程为 $x^2 + y^2 = r^2$, 表示圆心在 原点, 半径为 r 的圆.

知识点二 点与圆的位置关系

圆的标准方程为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, 圆心为 $A(a, b)$, 半径为 r . 设所给点为 $M(x_0, y_0)$, 则点 M 与圆的位置关系如下表:

位置关系	判断方法	
	几何法	代数法
点在圆上	$ MA = r$	$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2$
点在圆内	$ MA < r$	$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 < r^2$
点在圆外	$ MA > r$	$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 > r^2$

【概念辨析】

1. 判断正误 (正确的打“√”, 错误的打“×”).

(1) 方程 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = m^2$ 一定表示圆. (×)

(2) 圆 $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 4$ 的圆心坐标是 $(1, 2)$, 半径是 4. (×)

(3) 若圆的标准方程是 $(x+m)^2 + (y+n)^2 = a^2$ ($a \neq 0$), 则圆的半径一定是 a . (×)

2. 圆心是点 $(-3, 4)$, 半径为 5 的圆的标准方程为 ()

A. $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 5$

B. $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$

C. $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 5$

D. $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$

D 解析: 将 $(-3, 4)$, $r=5$ 代入圆的标准方程可得.

3. 思考并回答下列问题:

(1) 确定圆的要素与圆有怎样的关系?

提示: 圆心坐标确定圆的位置, 半径确定圆的大小.

(2) 点 $M(x_0, y_0)$ 在圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 内的条件是什么? 在圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 外的条件又是什么?

提示: 点 M 在圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 内时, $|OM| < |r|$ (O 为坐标原点), 点 M 在圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 外时, $|OM| > |r|$.

任务型课堂

任务1 圆的标准方程的有关概念

1. 圆 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 5$ 的圆心和半径分别是 ()

A. $(-2, 3), \sqrt{5}$ B. $(2, -3), \sqrt{5}$

C. $(-2, 3), 5$ D. $(2, -3), 5$

A 解析: 由圆的标准方程 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 5$, 知圆心为 $(-2, 3)$, 半径为 $\sqrt{5}$. 故选 A.

2. 圆心为 $(-2, 3)$, 半径为 3 的圆的标准方程为 ()

A. $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$

B. $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 3$

C. $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$

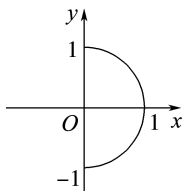
D. $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 3$

C 解析: 圆心为 $(-2, 3)$, 半径为 3 的圆的标准方程为 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$. 故选 C.

3. 方程 $x = \sqrt{1-y^2}$ 表示的图形是 ()

- A. 两个半圆 B. 两个圆
C. 圆 D. 半圆

D 解析: 根据题意可知 $x \geq 0$, 将 $x = \sqrt{1-y^2}$ 两边同时平方, 得 $x^2 + y^2 = 1$. 由此确定图形为半圆, 如图, 故选 D.



【探究总结】

1. 直接法求圆的标准方程的关键

圆的标准方程由圆心坐标和半径决定, 因此求出圆心坐标和半径即可写出圆的标准方程.

2. 几种特殊位置的圆的标准方程

特殊位置	标准方程
圆心在 x 轴上	$(x-a)^2 + y^2 = r^2$
圆心在 y 轴上	$x^2 + (y-b)^2 = r^2$
与 x 轴相切	$(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$
与 y 轴相切	$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2$

任务2 求圆的标准方程

探究活动

例1 求满足下列条件的圆的标准方程:

- (1) 圆心为 $(3,4)$ 且经过坐标原点;
- (2) 圆心为 $(1,1)$ 且与直线 $x+y=4$ 相切;
- (3) 过点 $A(2,0), B(2,-2)$, 且以 AB 为直径;
- (4) 经过 $A(3,1), B(-1,3)$, 且圆心在直线 $3x-y-2=0$ 上.

解: (1) 设圆的半径为 r , 因为圆心为 $(3,4)$,

且圆经过坐标原点, 所以 $r = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = 5$,

所以圆的标准方程为 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$.

(2) 设圆的半径为 r ,

因为圆心为 $(1,1)$ 且与直线 $x+y=4$ 相切, 所以 $r = \frac{|1+1-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2}$.

故所求圆的标准方程为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$.

(3) 设圆心为 (a,b) , 半径为 r ,

由题意得 $\begin{cases} a = \frac{2+2}{2} = 2, \\ b = \frac{0-2}{2} = -1, \end{cases}$ 即圆心坐标为 $(2,-1)$.

所以 $r = \sqrt{(2-2)^2 + (-1-0)^2} = 1$,

所以所求圆的标准方程为 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$.

(4) (方法一) 设圆的标准方程为 $(x-a)^2 + (y-b)^2$

$= r^2$,

依题意得 $\begin{cases} (3-a)^2 + (1-b)^2 = r^2, \\ (-1-a)^2 + (3-b)^2 = r^2, \\ 3a-b-2=0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} a^2 + b^2 - 6a - 2b = r^2 - 10, \\ a^2 + b^2 + 2a - 6b = r^2 - 10, \\ 3a-b-2=0, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=2, \\ b=4, \\ r=\sqrt{10}. \end{cases}$

故所求圆的标准方程是 $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$.

(方法二) 设圆的半径为 r . 由直线 AB 的斜率 $k =$

$$\frac{3-1}{-1-3} = -\frac{1}{2},$$

可知线段 AB 的垂直平分线 m 的斜率为 2.

又 AB 的中点的横坐标和纵坐标分别为 $x = \frac{3-1}{2} =$

$$1, y = \frac{1+3}{2} = 2,$$

因此直线 m 的方程为 $y-2=2(x-1)$, 即 $2x-y=0$.

又圆心在直线 $3x-y-2=0$ 上, 所以圆心是这两条直线的交点.

联立方程 $\begin{cases} 2x-y=0, \\ 3x-y-2=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=4. \end{cases}$

所以圆心坐标为 $(2,4)$.

又 $r = \sqrt{(2-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10}$,

故所求圆的标准方程是 $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$.

(方法三) 设圆心为 C .

因为圆心在直线 $3x-y-2=0$ 上, 所以可设圆心 C 的坐标为 $(a, 3a-2)$.

又 $|CA| = |CB|$,

即 $\sqrt{(a-3)^2 + (3a-3)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (3a-5)^2}$, 解得 $a=2$,

所以圆心为 $(2,4)$, 半径 $r = |CA| = \sqrt{10}$.

故所求圆的标准方程为 $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$.

【探究总结】

求圆的标准方程常用待定系数法, 一般步骤:

设——设所求圆的标准方程为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 (r>0)$;

列——由已知条件, 建立关于 a, b, r 的方程组;

解——解方程组, 求出 a, b, r ;

代——将 a, b, r 代入所设方程, 得所求圆的标准方程.

应用迁移

求圆心在直线 $2x-y-3=0$ 上, 且过点 $(5,2)$ 和点 $(3,-2)$ 的圆的标准方程.

解: (方法一) 设圆的标准方程为 $(x-a)^2 + (y-b)^2$

$$=r^2, \text{ 则 } \begin{cases} 2a-b-3=0, \\ (5-a)^2+(2-b)^2=r^2, \\ (3-a)^2+(-2-b)^2=r^2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=2, \\ b=1, \\ r=\sqrt{10}. \end{cases}$$

所以所求圆的标准方程是 $(x-2)^2+(y-1)^2=10$.

(方法二) 因为圆过点 $A(5,2)$ 和点 $B(3,-2)$,

所以圆心一定在线段 AB 的垂直平分线上.

由题意可得 $k_{AB} = \frac{-2-2}{3-5} = 2$, 线段 AB 的中点为 $(4,$

$0)$, 所以线段 AB 的垂直平分线的斜率为 $-\frac{1}{2}$, 所以

线段 AB 的垂直平分线方程为 $y = -\frac{1}{2}(x-4)$.

设圆心坐标为 $C(a,b)$, 则有 $\begin{cases} 2a-b-3=0, \\ b = -\frac{1}{2}(a-4), \end{cases}$ 解

$$\text{得 } \begin{cases} a=2, \\ b=1. \end{cases}$$

又因为 $r = |AC| = \sqrt{(5-2)^2+(2-1)^2} = \sqrt{10}$, 所以所求圆的标准方程是 $(x-2)^2+(y-1)^2=10$.

任务3 点与圆的位置关系

探究活动

例2 判断 $A(0,5), B(1,-2), C(-3,-4), D(-7,-2)$ 四点是否共圆.

解: 易知点 A, B, C 不共线, 设 A, B, C 三点确定的圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 (r>0)$.

把 $A(0,5), B(1,-2), C(-3,-4)$ 的坐标代入, 得

$$\begin{cases} (0-a)^2+(5-b)^2=r^2, \\ (1-a)^2+(-2-b)^2=r^2, \\ (-3-a)^2+(-4-b)^2=r^2, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a=-3, \\ b=1, \\ r^2=25. \end{cases}$$

所以 A, B, C 三点确定的圆的标准方程为 $(x+3)^2+(y-1)^2=25$.

把 $D(-7,-2)$ 代入上述圆的标准方程, 等号成立,

所以点 D 在该圆上.

故 A, B, C, D 四点共圆.

一题多思

思考1 在本例中, 还有什么方法可判断四点是否共圆?

解: 易知 $\overrightarrow{AB} = (1, -7), \overrightarrow{AD} = (-7, -7), \overrightarrow{CB} = (4, 2), \overrightarrow{CD} = (-4, 2)$,

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \rangle = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}|} = \frac{3}{5},$$

$$\cos \langle \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD} \rangle = \frac{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CB}| |\overrightarrow{CD}|} = -\frac{3}{5},$$

所以 $\angle BAD + \angle BCD = \pi$, 所以 A, B, C, D 四点共圆.

思考2 在本例中, 有什么方法求由 A, B, C 三点所确定的圆的方程?

解: 因为线段 AB 的中点为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, 且直线 AB 的斜率为 -7 ,

所以线段 AB 的垂直平分线的方程为 $x-7y+10=0$.

同理可得线段 BC 的垂直平分线的方程为 $2x+y+5=0$.

由 $\begin{cases} x-7y+10=0, \\ 2x+y+5=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-3, \\ y=1, \end{cases}$ 所以圆心坐标为 $(-3, 1)$,

半径为 $\sqrt{(-3-0)^2+(1-5)^2} = 5$,

故所求的圆的方程为 $(x+3)^2+(y-1)^2=25$.

探究总结

判断点 (x_0, y_0) 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的位置关系, 只需将 (x_0, y_0) 代入圆的标准方程. 若 $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2 < r^2$, 则点 (x_0, y_0) 在圆内; 若 $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2 = r^2$, 则点 (x_0, y_0) 在圆上; 若 $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2 > r^2$, 则点 (x_0, y_0) 在圆外.

应用迁移

1. 已知 $A(-1, 4), B(5, -4)$ 两点, 求以 AB 为直径的圆的标准方程, 并判断 $C(5, 1), D(6, -3), E(-5, 1)$ 三点与该圆的位置关系.

解: 设圆心为 $M(x_0, y_0)$, 半径为 r ,

$$\text{由题意得 } \begin{cases} x_0 = \frac{-1+5}{2} = 2, \\ y_0 = \frac{4-4}{2} = 0, \end{cases}$$

所以圆心 M 的坐标为 $(2, 0)$.

又 $r = \sqrt{(2-5)^2+(0+4)^2} = 5$,

所以圆的标准方程为 $(x-2)^2+y^2=25$.

因为 $|MC|^2 = (5-2)^2+(1-0)^2 = 10 < r^2$,

所以点 C 在圆内.

因为 $|MD|^2 = (6-2)^2+(-3-0)^2 = 25 = r^2$,

所以点 D 在圆上.

因为 $|ME|^2 = (-5-2)^2+(1-0)^2 = 50 > r^2$,

所以点 E 在圆外.

2. 已知圆 N 的标准方程为 $(x-5)^2+(y-6)^2=a^2 (a>0)$.

(1) 若点 $M(6, 9)$ 在圆上, 求 a 的值;

(2) 若点 $P(3, 3)$ 与 $Q(5, 3)$ 有一点在圆内, 另一点在圆外, 求 a 的取值范围.

解: (1) 因为点 $M(6, 9)$ 在圆上, 所以 $(6-5)^2+(9-6)^2 = a^2$, 即 $a^2 = 10$.

又 $a > 0$, 所以 $a = \sqrt{10}$.

(2) 由已知得圆心 $N(5, 6)$.

因为 $|PN| = \sqrt{(3-5)^2+(3-6)^2} = \sqrt{13}$,

$$|QN| = \sqrt{(5-5)^2 + (3-6)^2} = 3,$$

$|PN| > |QN|$, 所以点 P 在圆外, 点 Q 在圆内.

所以 a 的取值范围是 $(3, \sqrt{13})$.

任务4 圆的标准方程的应用

探究活动

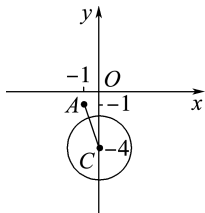
例3 已知 x, y 满足 $x^2 + (y+4)^2 = 4$, 求 $\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}$ 的最大值与最小值.

解: 设点 $P(x, y)$ 是圆 $x^2 + (y+4)^2 = 4$ 上的任意一点, 圆心为 $C(0, -4)$, 半径 $r=2$,

因此 $\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}$ 表示点 $A(-1, -1)$ 与该圆上的点的距离.

因为 $|AC|^2 = (-1)^2 + (-1+4)^2 = 10 > 4$,

所以点 $A(-1, -1)$ 在圆外, 如图所示.



$$\text{又 } |AC| = \sqrt{10},$$

所以 $\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}$ 的最大值为 $|AC| + r = \sqrt{10} + 2$, 最小值为 $|AC| - r = \sqrt{10} - 2$.

【探究总结】

求与圆有关的最值问题, 利用数形结合法是解题关键.

(1) 设圆上任意一点的坐标为 (x, y) , 则 $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ 表示圆上的点到点 (a, b) 的距离.

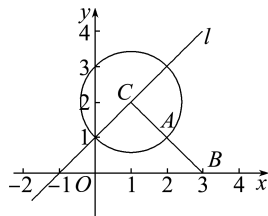
(2) 求圆外的点到圆上的点的距离的最值, 先求该点到圆心的距离, 再加减半径长即可.

(3) 求圆上的点到一条直线的距离的最值, 先求圆心到直线的距离, 再根据直线与圆的位置关系求最值.

应用迁移

1. 已知 A 为圆 $C: (x-m)^2 + (y-m-1)^2 = 2$ 上一点, 点 $B(3, 0)$, 当 m 变化时线段 AB 长度的最小值为 _____.

$\sqrt{2}$ **解析:** 圆 C 的圆心坐标为 $(m, m+1)$, 半径 $r = \sqrt{2}$, 所以圆心在直线 $l: y = x + 1$ 上, 如图.



当 $AB \perp l$ 时, 线段 AB 的长度最小,

$$\text{点 } B \text{ 到直线 } l \text{ 的距离 } d = \frac{|3+1-0|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2},$$

$$\text{所以 } |AB|_{\min} = d - r = \sqrt{2}.$$

2. 已知直线 $l_1: mx - y - 3m + 1 = 0$ 与直线 $l_2: x + my - 3m - 1 = 0$ 相交于点 P , $m \in \mathbf{R}$, 则点 P 到坐标原点 O 的距离的最小值为 _____.

$\sqrt{2}$ **解析:** 因为 $m \cdot 1 + (-1) \cdot m = 0$, 所以 $l_1 \perp l_2$.

又由直线 $l_1: m(x-3) - (y-1) = 0$, 可得直线 l_1 恒过定点 $A(3, 1)$.

由直线 $l_2: x - 1 + m(y-3) = 0$, 可得直线 l_2 恒过定点 $B(1, 3)$,

$$\text{所以点 } P \text{ 在以 } AB \text{ 为直径的圆上, 且 } |AB| = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2},$$

所以半径为 $\sqrt{2}$.

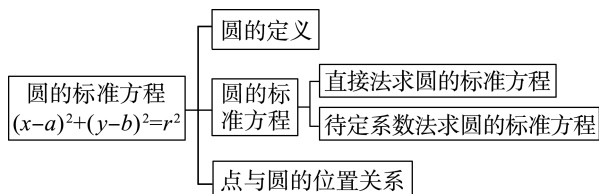
圆心 C 为线段 AB 的中点, 即 $C(2, 2)$,

故点 P 所在的圆的方程为 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$,

$$\text{可得 } |OC| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\text{所以点 } P \text{ 到坐标原点 } O \text{ 的最小距离 } |OP|_{\min} = |OC| - r = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

提质归纳



课后素养评价 (二十一)

圆的标准方程

A组 学习·理解

1. 已知点 $M(2, 0)$, $N(6, 4)$, 则以线段 MN 为直径的圆的圆心坐标为 ()

- A. $(2, 2)$ B. $(2, 4)$
C. $(8, 4)$ D. $(4, 2)$

D 解析: 因为 $M(2, 0)$, $N(6, 4)$, 所以线段 MN 的

中点为 $(4, 2)$,

所以以线段 MN 为直径的圆的圆心坐标为 $(4, 2)$.

2. 圆心在 y 轴上, 半径为 2, 且过点 $(2, 4)$ 的圆的方程为 ()

- A. $x^2 + (y-1)^2 = 1$
B. $(x-2)^2 + y^2 = 4$

C. $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 4$

D. $x^2 + (y-4)^2 = 4$

D 解析:由题意设圆心为 $(0, b)$, 则圆的方程为 $x^2 + (y-b)^2 = 4$.

又点 $(2, 4)$ 在圆上, 所以 $2^2 + (4-b)^2 = 4$, 解得 $b = 4$, 所以圆的方程为 $x^2 + (y-4)^2 = 4$.

故选 D.

3. 点 $P(m^2, 5)$ 与圆 $x^2 + y^2 = 24$ 的位置关系是

()

A. 点 P 在圆外

B. 点 P 在圆内

C. 点 P 在圆上

D. 不确定

A 解析: 因为 $(m^2)^2 + 5^2 > 24$, 所以点 P 在圆外.

4. 已知圆 C 与 y 轴相切, 切点为 $(0, 2)$, $|OC| = \sqrt{5}$ (O 为坐标原点), 圆心 C 在第一象限, 则圆 C 的标准方程为

()

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$

C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

D. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$

A 解析: 由圆 C 与 y 轴相切, 切点为 $(0, 2)$, 可设圆心 $C(a, 2)$. 由圆心 C 在第一象限, 得 $a > 0$,

则 $|OC| = \sqrt{a^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, 解得 $a = 1$, 所以圆 C 的半径 $r = 1$,

所以圆 C 的标准方程为 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$.

5. 圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的点到点 $M(3, 4)$ 的距离的最小值是

()

A. 1

B. 4

C. 5

D. 6

B 解析: 易知点 $M(3, 4)$ 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 外, 且点 M 到圆心 $(0, 0)$ 的距离为 5, 所以圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的点到 M 的距离的最小值为 $5 - 1 = 4$.

6. 一个动点在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上移动时, 它与定点 $A(3, 0)$ 连线的中点的轨迹方程是

()

A. $(x+3)^2 + y^2 = 4$

B. $(x-3)^2 + y^2 = 1$

C. $(2x-3)^2 + 4y^2 = 1$

D. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$

C 解析: 设 $M(x_0, y_0)$ 为圆上的动点, 则有 $x_0^2 + y_0^2 = 1$. 设线段 MA 的中点为 $P(x, y)$, 则 $x = \frac{x_0 + 3}{2}$,

$y = \frac{y_0 + 0}{2}$, 则 $x_0 = 2x - 3, y_0 = 2y$, 代入 $x_0^2 + y_0^2 = 1$, 得 $(2x-3)^2 + (2y)^2 = 1$, 即 $(2x-3)^2 + 4y^2 = 1$.

7. 圆心为直线 $x - y + 2 = 0$ 与直线 $2x + y - 8 = 0$ 的交点, 且过原点的圆的标准方程是

$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 20$

解析: 由

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0, \\ 2x + y - 8 = 0, \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} x = 2, \\ y = 4, \end{cases} \text{ 即圆心为 } (2, 4),$$

从而半径 $r = \sqrt{(2-0)^2 + (4-0)^2} = 2\sqrt{5}$, 故圆的标准方程为 $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 20$.

8. 已知点 $P(1, -1)$ 在圆 $(x+2)^2 + y^2 = m$ 的外部, 则实数 m 的取值范围是

$(0, 10)$ 解析: 由题意知, $(1+2)^2 + (-1)^2 > m$, 所以 $m < 10$.

又 $m = r^2 > 0$, 所以 $0 < m < 10$.

故实数 m 的取值范围是 $(0, 10)$.

9. 已知点 $P(x, y)$ 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上, 则 $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ 的最大值为

$1 + \sqrt{2}$ 解析: $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ 的几何意义是圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的点 $P(x, y)$ 到点 $(1, 1)$ 的距离, 易知点 $(1, 1)$ 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 外, 且点 $(1, 1)$ 到圆心 $(0, 0)$ 的距离为 $\sqrt{2}$, 因此 $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ 的最大值为 $\sqrt{2} + 1$.

B组 应用·实践

1. 下列方程中表示圆心在直线 $y = x$ 上, 半径为 $\sqrt{2}$, 且过原点的圆的是

()

A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{2}$

B. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = \sqrt{2}$

C. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

D 解析: 因为圆心在 $y = x$ 上, 所以设圆心为 (a, a) .

因为圆的半径为 $\sqrt{2}$, 所以圆的标准方程为 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 2$.

因为该圆过原点, 所以 $(-a)^2 + (-a)^2 = 2$, 解得 $a = \pm 1$, 所以圆心为 $(1, 1)$ 或 $(-1, -1)$.

当圆心为 $(1, 1)$ 时, 圆的标准方程为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$, D 正确;

当圆心为 $(-1, -1)$ 时, 圆的标准方程为 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$.

故选 D.

2. 由动点 P 向圆 $M: (x+2)^2 + (y+3)^2 = 1$ 作两条切线 PA, PB , 切点分别为 A, B , 若四边形 $APBM$ 为

正方形,则动点 P 的轨迹方程为 ()

A. $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 4$

B. $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 2$

C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$

D. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$

B 解析: 因为四边形 $APBM$ 为正方形,且 $|MA| = |MB| = 1$,所以 $|MP| = \sqrt{2}$,

故动点 P 的轨迹是以 M 为圆心, $\sqrt{2}$ 为半径的圆,其方程为 $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 2$.

故选 B.

3. (多选) 若经过点 $P(5m+1, 12m)$ 可以作出圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 的两条切线,则实数 m 的值可能是 ()

A. $\frac{1}{10}$

B. $\frac{1}{13}$

C. $-\frac{1}{13}$

D. $-\frac{1}{2}$

AD 解析: 过点 P 可作圆的两条切线,说明点 P 在圆的外部,所以 $(5m+1-1)^2 + (12m)^2 > 1$,解得 $m > \frac{1}{13}$ 或 $m < -\frac{1}{13}$,对照选项知 A, D 正确.

4. 已知点 $A(3, 6)$, $B(1, 4)$, $C(1, 0)$, 则 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心坐标为 ()

A. $(5, 2)$

B. $(-5, 2)$

C. $(2, 5)$

D. $(5, -2)$

A 解析: 易知线段 AB 的中点坐标为 $(2, 5)$, 斜率为 $\frac{6-4}{3-1} = 1$, 所以线段 AB 的垂直平分线的斜率为 -1 , 故线段 AB 的垂直平分线方程为 $y-5 = -(x-2)$, 即 $x+y-7=0$.

线段 AC 的中点坐标为 $(2, 3)$, 斜率为 $\frac{6-0}{3-1} = 3$, 所

以线段 AC 的垂直平分线的斜率为 $-\frac{1}{3}$, 故线段

AC 的垂直平分线方程为 $y-3 = -\frac{1}{3}(x-2)$, 即 $x+3y-11=0$.

由 $\begin{cases} x+y-7=0, \\ x+3y-11=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=5, \\ y=2. \end{cases}$

所以 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心坐标为 $(5, 2)$.

5. 方程 $y = \sqrt{36-x^2}$ 表示的曲线是 ()

A. 一个圆

B. 两条射线

C. 半圆

D. 一条射线

C 解析: 由 $y = \sqrt{36-x^2}$ 两边平方, 得 $x^2 + y^2 = 36$ ($y \geq 0$), 故 $y = \sqrt{36-x^2}$ 表示半圆.

6. 已知圆过 $A(1, -2)$, $B(-1, 4)$ 两点, 求:

(1) 周长最小的圆的方程;

(2) 圆心在直线 $2x-y-4=0$ 上的圆的方程.

解: (1) 当 AB 为直径时, 过 A, B 两点的圆的半径最小, 从而周长最小,

即圆心为 AB 的中点 $(0, 1)$, $r = \frac{1}{2}|AB| = \sqrt{10}$ 为半径,

故周长最小的圆的方程为 $x^2 + (y-1)^2 = 10$.

(2) 由于直线 AB 的斜率 $k = \frac{4+2}{-1-1} = -3$, 线段

AB 的垂直平分线的斜率为 $\frac{1}{3}$, 方程是 $y-1 = \frac{1}{3}(x-0)$, 即 $x-3y+3=0$.

联立 $\begin{cases} x-3y+3=0, \\ 2x-y-4=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=3, \\ y=2, \end{cases}$

即圆心坐标为 $(3, 2)$.

又半径 $r = \sqrt{(3-1)^2 + (2+2)^2} = 2\sqrt{5}$,

所以所求圆的方程是 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 20$.

2.4.2 圆的一般方程

学习任务目标

1. 在掌握圆的标准方程的基础上, 理解圆的一般方程的代数特征, 并能由圆的一般方程确定圆的圆心和半径.
2. 掌握方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 表示圆的条件.
3. 掌握求轨迹方程的常用方法.

问题式预习

【知识清单】

知识点一 圆的一般方程

(1)圆的一般方程的概念

当 $D^2 + E^2 - 4F > 0$ 时, 二元二次方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 叫做圆的一般方程.

(2)对方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 的说明

方程	条件	图形
$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$	$D^2 + E^2 - 4F < 0$	不表示任何图形
	$D^2 + E^2 - 4F = 0$	表示一个点 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$
	$D^2 + E^2 - 4F > 0$	表示以 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ 为圆心, $\frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$ 为半径的圆

知识点二 待定系数法求圆的方程的步骤

- (1)根据题意,选择标准方程或一般方程;
- (2)根据条件列出关于 a, b, r 或 D, E, F 的方程组;
- (3)解出 a, b, r 或 D, E, F , 得到标准方程或一般方程.

知识点三 轨迹方程与轨迹

点 M 的轨迹方程是指点 M 的坐标 (x, y) 满足的关

系式.点 M 的轨迹是指点 M 在运动变化过程中形成的图形.在解析几何中,我们常常把图形看作点的轨迹(集合).

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)圆的一般方程可以化为圆的标准方程.

(√)

(2)二元二次方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 一定是某个圆的方程.

(×)

(3)若方程 $x^2 + y^2 - 2x + Ey + 1 = 0$ 表示圆,则 $E \neq 0$.

(√)

(4)方程 $x^2 + y^2 + x + 1 = 0$ 表示圆.

(×)

2.圆 $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ 的圆心坐标和半径分别为

()

A. $(-4, -6), 16$ B. $(2, -3), 4$

C. $(-2, 3), 4$ D. $(2, -3), 16$

C 解析:由 $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$, 得 $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$, 故圆心坐标为 $(-2, 3)$, 半径为 4.

3.请思考并回答下列问题:

(1)如何进行圆的一般方程与标准方程的互化?

提示:将圆的标准方程展开成二元二次方程的形式即得一般方程,将圆的一般方程配方即得标准方程.

(2)求圆的一般方程的关键什么?

提示:确定系数 D, E, F .

任务型课堂

任务1 圆的一般方程的概念辨析

1.若方程 $x^2 + y^2 + ax + 2ay + \frac{5}{4}a^2 + a - 1 = 0$ 表示圆,则实数 a 的取值范围是 ()

A. $a < 1$

B. $a > 1$

C. $-2 < a < \frac{2}{3}$

D. $-2 < a < 0$

A 解析:当 $a^2 + 4a^2 - 4\left(\frac{5}{4}a^2 + a - 1\right) > 0$ 时, 方程表示圆, 化简得 $-a + 1 > 0$, 解得 $a < 1$. 故选 A.

2.已知 $a \in \mathbf{R}$, 方程 $a^2x^2 + (a+2)y^2 + 4x + 8y + 5a = 0$ 表示圆, 则圆心坐标为 _____, 半径为 _____.

$(-2, -4)$ 5 解析:由题意可得 $a^2 = a + 2$, 解得 $a = 2$ 或 $a = -1$. 当 $a = 2$ 时, 方程为 $4x^2 + 4y^2 + 4x + 8y + 10 = 0$, 即 $x^2 + y^2 + x + 2y + \frac{5}{2} = 0$, 配方得

$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = -\frac{5}{4} < 0$, 不表示圆, 舍去;

当 $a = -1$ 时, 方程为 $x^2 + y^2 + 4x + 8y - 5 = 0$, 配方得 $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$, 则圆心坐标为 $(-2, -4)$, 半径为 5.

3.判断下列方程分别表示什么图形.

(1) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$;

(2) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6 = 0$;

(3) $x^2 + y^2 - 2ax - b^2 = 0$;

(4) $3x^2 + 3y^2 - 2x + 4y - 6 = 0$.

解:(1)(方法一:配方法)原方程等价于 $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 0$, 因此方程表示点 $(-1, -1)$.

(方法二:公式法)因为 $D^2 + E^2 - 4F = 2^2 + 2^2 - 4 \times 2 = 0$, 所以方程表示点 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$, 即 $(-1, -1)$.

(2)原方程等价于 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = (\sqrt{11})^2$, 因此方程表示圆心为 $(1, -2)$, 半径为 $\sqrt{11}$ 的圆.

(3)因为 $D^2 + E^2 - 4F = 4a^2 + 4b^2 \geq 0$, 所以当 $a = b = 0$ 时, 方程表示原点; 当 a, b 不全为 0 时, 方程表示以 $(a, 0)$ 为圆心, $\sqrt{a^2 + b^2}$ 为半径的圆.

(4)原方程等价于 $x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y - 2 = 0$, 配

方, 得 $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{23}}{3}\right)^2$, 因此方程

表示圆心为 $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, 半径为 $\frac{\sqrt{23}}{3}$ 的圆.

【探究总结】

判断方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 是否表示圆的两种方法

(1) 配方法. 对形如 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 的二元二次方程, 可以通过配方将其变形为“标准”形式后, 再观察它是否表示圆.

(2) 运用圆的一般方程满足的条件判断, 即通过判断 $D^2 + E^2 - 4F$ 是否大于 0 来确定它是否表示圆.

任务 2 求圆的一般方程

探究活动

例 1 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(1, 4), B(-2, 3), C(4, -5)$, 求 $\triangle ABC$ 的外接圆的方程、圆心坐标和半径.

解: 设 $\triangle ABC$ 的外接圆方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

因为点 A, B, C 在圆上,

$$\text{所以} \begin{cases} 1+16+D+4E+F=0, \\ 4+9-2D+3E+F=0, \\ 16+25+4D-5E+F=0, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} D=-2, \\ E=2, \\ F=-23, \end{cases}$$

所以 $\triangle ABC$ 的外接圆方程为 $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$,

即 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$.

所以圆心坐标为 $(1, -1)$, 半径为 5.

【探究总结】

求圆的方程时, 如果由已知条件容易求得圆心坐标、半径, 或需利用圆心坐标或半径列方程, 一般采用圆的标准方程, 再用待定系数法求出 a, b, r ; 如果已知条件与圆心和半径都无直接关系, 一般采用圆的一般方程, 再用待定系数法求出 D, E, F .

应用迁移

平面直角坐标系中的 $A(-1, 5), B(5, 5), C(6, -2), D(-2, -1)$ 四个点能否在同一个圆上?

解: 设过 A, B, C 三点的圆的方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$,

$$\text{则} \begin{cases} D-5E-F=26, \\ 5D+5E+F=-50, \\ 6D-2E+F=-40, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} D=-4, \\ E=-2, \\ F=-20. \end{cases}$$

所以过 A, B, C 三点的圆的方程为 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

将 $D(-2, -1)$ 代入上述方程, 等号不成立,

故 A, B, C, D 四点不能在同一个圆上.

任务 3 求动点的轨迹方程

探究活动

例 2 已知圆 C 经过点 $A(1, 1), B(2, -2)$, 且圆心 C 在直线 $l: x - y + 1 = 0$ 上.

(1) 求圆 C 的方程;

(2) 线段 PQ 的端点 P 的坐标是 $(5, 0)$, 端点 Q 在圆 C 上运动, 求线段 PQ 的中点 M 的轨迹方程.

解: (1) 设点 D 为线段 AB 的中点, 直线 m 为线段 AB 的垂直平分线, 则 $D\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

又 $k_{AB} = -3$, 所以 $k_m = \frac{1}{3}$.

所以直线 m 的方程为 $x - 3y - 3 = 0$.

由 $\begin{cases} x - 3y - 3 = 0, \\ x - y + 1 = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = -3, \\ y = -2, \end{cases}$ 即圆心 $C(-3, -2)$,

则半径 $r = |CA| = \sqrt{(-3-1)^2 + (-2-1)^2} = 5$.

所以圆 C 的方程为 $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 25$.

(2) 设点 $M(x, y), Q(x_0, y_0)$.

因为点 P 的坐标为 $(5, 0)$,

$$\text{所以} \begin{cases} x = \frac{x_0 + 5}{2}, \\ y = \frac{y_0 + 0}{2}, \end{cases} \text{即} \begin{cases} x_0 = 2x - 5, \\ y_0 = 2y. \end{cases}$$

又点 $Q(x_0, y_0)$ 在圆 $C: (x+3)^2 + (y+2)^2 = 25$ 上运动,

所以 $(x_0+3)^2 + (y_0+2)^2 = 25$,

即 $(2x-5+3)^2 + (2y+2)^2 = 25$,

整理得 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{25}{4}$,

即所求线段 PQ 的中点 M 的轨迹方程为 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{25}{4}$.

【一题多思】

思考 在本例中, 若点 $E(-1, -1)$ 是圆 C 内一点, F, G 为圆 C 上的动点, 且 $\angle GEF = 90^\circ$, 求线段 GF 的中点 N 的轨迹.

解: 设线段 GF 的中点为 $N(a, b)$, 连接 EN, CN, CG (图略).

在 $\text{Rt}\triangle GEF$ 中, $|EN| = |GN|$.

又 $CN \perp GF$,

所以在 $\text{Rt}\triangle GCN$ 中, $|CG|^2 = |CN|^2 + |GN|^2 = |CN|^2 + |EN|^2$,

所以 $(a+3)^2 + (b+2)^2 + (a+1)^2 + (b+1)^2 = 25$,

即 $a^2 + b^2 + 4a + 3b - 5 = 0$.

因为 $4^2 + 3^2 + 4 \times 5 > 0$,

所以线段 GF 的中点 N 的轨迹是圆心为

$\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$, 半径为 $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ 的圆.

【探究总结】

求动点的轨迹方程的常用方法

(1)直接法:根据题目的条件,建立平面直角坐标系,设出动点坐标,找出动点所满足的条件,并用坐标表示,化简即得轨迹方程.

(2)定义法:当动点的轨迹符合圆的定义时,可直接写出动点的轨迹方程.

(3)相关点法:若动点 $P(x, y)$ 随着圆上一动点 $Q(x_1, y_1)$ 的运动而运动,且 x_1, y_1 可用 x, y 表示,则可将用 x, y 表示后的点 Q 的坐标代入已知圆的方程,即得动点 P 的轨迹方程.

应用迁移

1.已知动点 M 到点 $(8, 0)$ 的距离等于点 M 到点 $(2, 0)$ 的距离的 2 倍,则点 M 的轨迹方程是 _____.

$x^2 + y^2 = 16$ 解析:设 $M(x, y)$,则由题意得 $\sqrt{(x-8)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-2)^2 + y^2}$,整理可得点 M 的轨迹方程为 $x^2 + y^2 = 16$.

2.已知等腰三角形 ABC 中, $|AB| = |AC|$,且顶点 A, B 的坐标分别为 $(4, 2), (3, 5)$,求另一个顶点 C 的轨迹方程,并说明它的轨迹是什么.

解:根据题意得 $|AC| = |AB|$,所以点 C 在以 A 为圆心的圆上,且半径 $r = |AB| = \sqrt{(3-4)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{10}$,故圆的方程为 $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 10$.

又因为 A, B, C 为三角形的三个顶点,所以 $A, B,$

C 三点不共线,即点 B, C 不能重合且 B, C 不能为直径的两个端点,所以 $x \neq 3$ 且 $\frac{x+3}{2} \neq 4$,即 $x \neq 3$

且 $x \neq 5$.故端点 C 的轨迹方程为 $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 10 (x \neq 3 \text{ 且 } x \neq 5)$.端点 C 的轨迹是以 A 为圆心, $\sqrt{10}$ 为半径除去 $(3, 5)$ 和 $(5, -1)$ 两点的圆.

3.已知定点 $A(4, 0)$,点 P 是圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上一动点,点 Q 是 AP 的中点,求点 Q 的轨迹方程.

解:设点 Q 的坐标为 (x, y) ,点 P 的坐标为 (x', y') ,则 $x = \frac{4+x'}{2}$ 且 $y = \frac{0+y'}{2}$,

即 $x' = 2x - 4, y' = 2y$.

又点 P 在圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上,

所以 $x'^2 + y'^2 = 4$.

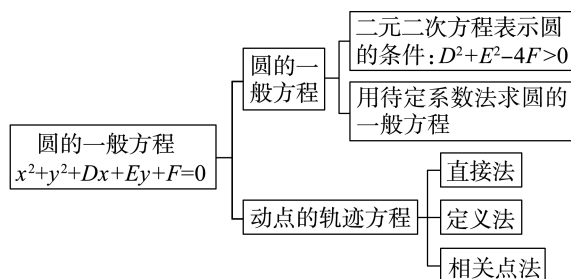
由 $x' = 2x - 4, y' = 2y$,得 $(2x-4)^2 + (2y)^2 = 4$,

即 $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

故点 Q 的轨迹方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 1$.



提质归纳



课后素养评价 (二十二)

圆的一般方程

A组 学习·理解

1.若方程 $x^2 + y^2 + 2ax + 2ay + 2a^2 + a - 1 = 0$ 表示圆,则 a 的取值范围为 ()

- A. R B. $a \leq 1$
C. $a < 1$ D. $a > 1$

C 解析:根据题意,若方程表示圆,则有 $(2a)^2 + (2a)^2 - 4(2a^2 + a - 1) > 0$,解得 $a < 1$.故选 C.

2.圆 $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$ 的圆心到直线 $x - y + 2 = 0$ 的距离为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. 2
C. 3 D. $3\sqrt{2}$

D 解析:由题意得 $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$,即 $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 10$,

则其圆心坐标为 $(1, -3)$,所以圆心到直线 $x - y + 2 = 0$ 的距离为 $\frac{|1 - (-3) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 3\sqrt{2}$.

故选 D.

3.若点 $(1, 1)$ 在圆 $x^2 + y^2 - x - a = 0$ 的外部,则 a 的取值范围为 ()

- A. $(-\frac{1}{4}, 1)$ B. $(\frac{1}{4}, 1)$
C. $(-\infty, 1)$ D. $(1, +\infty)$

A 解析:因为 $x^2 + y^2 - x - a = 0$ 可化为 $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = a + \frac{1}{4}$,则 $a + \frac{1}{4} > 0$,所以 $a > -\frac{1}{4}$.

又点 $(1, 1)$ 在圆 $x^2 + y^2 - x - a = 0$ 的外部,所以 $1^2 + 1^2 - 1 - a > 0$,故 $a < 1$.

综上, $-\frac{1}{4} < a < 1$.故选 A.

4.若圆 $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$ 的圆心到直线 $ax + y - 1 = 0$ 的距离为 $\sqrt{2}$,则 $a =$ ()

- A. 0 或 -1 B. 0
C. 7 D. -1 或 7

D 解析:将 $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$ 整理得 $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 4$,所以圆心为 $(1, 4)$,半径为 2.

$1)^2 + (y-4)^2 = 4$, 所以圆心坐标为 $(1, 4)$.

所以圆心到直线 $ax + y - 1 = 0$ 的距离 $d = \frac{|a+4-1|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{2}$, 整理得 $a^2 - 6a - 7 = 0$, 解得 $a = -1$ 或 $a = 7$.

5. 当实数 a 取不同的值时, 方程 $x^2 + y^2 + 2ax + 2ay - 1 = 0$ 可以表示不同的圆, 则 ()

- A. 这些圆的圆心都在直线 $y = x$ 上
B. 这些圆的圆心都在直线 $y = -x$ 上
C. 这些圆的圆心都在直线 $y = x$ 或 $y = -x$ 上
D. 这些圆的圆心不在同一条直线上

A 解析: 由题意知圆心为 $(-a, -a)$, 则圆心都在直线 $y = x$ 上.

6. 若圆心在直线 $2x - y - 7 = 0$ 上的圆 C 与 y 轴交于 $A(0, -4), B(0, -2)$ 两点, 则圆 C 的一般方程为 _____.

$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ 解析: 设圆的一般方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

由题意可知, $-4, -2$ 是方程 $y^2 + Ey + F = 0$ 的两个根,

$$\text{所以 } \begin{cases} -4 - 2 = -E, \\ (-4) \times (-2) = F, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} E = 6, \\ F = 8. \end{cases}$$

又点 $\left(-\frac{D}{2}, -3\right)$ 在直线 $2x - y - 7 = 0$ 上,

所以 $-D + 3 - 7 = 0$, 即 $D = -4$.

所以圆的一般方程为 $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$.

7. 已知 A 是圆 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 上的动点, PA 是圆的切线, 且 $|PA| = 1$, 则点 P 的轨迹方程是 _____.

$(x-1)^2 + y^2 = 2$ 解析: 将 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 整理得 $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

设 $P(x, y)$,

圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 的圆心为 $B(1, 0)$,

则 $|PA|^2 + 1 = |PB|^2$,

所以 $|PB|^2 = 2$.

所以点 P 的轨迹是以 $(1, 0)$ 为圆心, $\sqrt{2}$ 为半径的圆.

所以点 P 的轨迹方程是 $(x-1)^2 + y^2 = 2$.

8. 动圆 $x^2 + y^2 - (4m+2)x - 2my + 4m^2 + 4m + 1 = 0$ 的圆心的轨迹方程为 _____.

$x - 2y - 1 = 0$ 解析: 设动圆圆心为 (x, y) , 由题意

$$\text{得 } \begin{cases} x = \frac{4m+2}{2} = 2m+1, \\ y = \frac{2m}{2} = m, \end{cases} \text{ 整理得 } x - 2y - 1 = 0.$$

B组 应用·实践

1. 已知 $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$, 则 $x^2 + y^2$ 的最大值是 ()

A. 9

B. 14

C. $14 - 6\sqrt{5}$

D. $14 + 6\sqrt{5}$

D 解析: 方程 $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ 可化为 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$, 所以圆心为 $(-2, 1)$, 半径为 3.

而 $x^2 + y^2$ 表示圆上的点到原点的距离的平方, 所以 $x^2 + y^2$ 的最大值为 $[\sqrt{(-2-0)^2 + (1-0)^2} + 3]^2 = 14 + 6\sqrt{5}$.

2. 圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 关于直线 $2ax - by + 2 = 0 (a, b \in \mathbf{R})$ 对称, 则 ab 的取值范围是 ()

A. $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$

B. $\left(0, \frac{1}{4}\right]$

C. $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$

D. $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$

A 解析: 圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 关于直线 $2ax - by + 2 = 0 (a, b \in \mathbf{R})$ 对称, 则圆心 $(-1, 2)$ 在该直线上, 所以 $-2a - 2b + 2 = 0$, 即 $a + b = 1$, 所以 $ab = a(1-a) = -a^2 + a = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$,

所以 ab 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$. 故选 A.

3. 过点 $A(-1, 3), B(3, -1)$, 且圆心在直线 $x - 2y - 1 = 0$ 上的圆的方程为 ()

A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$

B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 16$

C. $(x-1)^2 + y^2 = 13$

D. $(x-1)^2 + y^2 = 5$

B 解析: 由题易知 $k_{AB} = \frac{-1-3}{3+1} = -1$, 所以线段

AB 的垂直平分线的斜率为 1. 又线段 AB 的中点为 $(1, 1)$, 所以线段 AB 的垂直平分线方程为 $y = x$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = x, \\ x - 2y - 1 = 0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = -1, \\ y = -1, \end{cases}$$

即圆心坐标为 $(-1, -1)$,

半径为 $r = \sqrt{(-1+1)^2 + (-1-3)^2} = 4$, 所以圆的方程为 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 16$.

故选 B.

4. 已知圆 $C: x^2 + y^2 = 3$, 直线 l 过点 $A(-2, 0)$, 线段 AB 的端点 B 在圆 C 上运动, 则线段 AB 的中点 M 的轨迹方程为 ()

A. $(x-1)^2 + y^2 = \frac{3}{4}$

B. $(x+1)^2 + y^2 = \frac{3}{4}$

C. $x^2 + (y-1)^2 = \frac{3}{4}$

D. $(x+1)^2 + y^2 = \frac{4}{3}$

B 解析: 设 $M(x, y), B(x_0, y_0)$.

由点 M 是线段 AB 的中点, 得
$$\begin{cases} x = \frac{x_0 - 2}{2}, \\ y = \frac{y_0 + 0}{2}, \end{cases}$$

可得
$$\begin{cases} x_0 = 2x + 2, \\ y_0 = 2y. \end{cases}$$

又点 B 在圆 C 上运动, 所以 $x_0^2 + y_0^2 = 3$,

将上式代入, 可得 $(2x + 2)^2 + (2y)^2 = 3$,

化简整理得点 M 的轨迹方程为 $(x + 1)^2 + y^2 = \frac{3}{4}$.

5. 当 a 为任意实数时, 直线 $(a - 1)x - y + a + 1 = 0$ 恒过定点 C , 则以 C 为圆心, 半径为 $\sqrt{5}$ 的圆的一般方程为 _____.

$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ 解析: 因为 $(a - 1)x - y + a + 1 = 0$ 可化为 $a(x + 1) - x - y + 1 = 0$, 所以该直线恒过定点 $(-1, 2)$,

所以所求圆的方程为 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$, 即 $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$.

6. 已知 $A(-2, 0)$, $B(0, 2)$ 两点, 点 C 是圆 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 上任意一点, 则 $\triangle ABC$ 的面积的最小值是 _____.

$3 - \sqrt{2}$ 解析: 易得 $|AB| = 2\sqrt{2}$, 直线 AB 的方程为 $x - y + 2 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 可化为 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, 故圆心 $(1, 0)$ 到直线 AB 的距离 $d = \frac{|1 - 0 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} > 1$, 所以圆上任意一点到直线

AB 的最小距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$, 故 $\triangle ABC$ 的面积的最小

值为 $\frac{1}{2} \times |AB| \times \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1\right) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times$

$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1\right) = 3 - \sqrt{2}$.

7. 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 14y + 45 = 0$, 点 $Q(-2, 3)$.

(1) 若点 $P(a, a + 1)$ 在圆上, 求线段 PQ 的长及直线 PQ 的斜率;

(2) 若 M 为圆 C 上任一点, 求 $|MQ|$ 的最大值和最小值.

解: (1) 因为点 $P(a, a + 1)$ 在圆上,

所以 $a^2 + (a + 1)^2 - 4a - 14(a + 1) + 45 = 0$,

解得 $a = 4$, 即 $P(4, 5)$,

所以 $|PQ| = \sqrt{(4 + 2)^2 + (5 - 3)^2} = 2\sqrt{10}$,

$k_{PQ} = \frac{3 - 5}{-2 - 4} = \frac{1}{3}$.

(2) 因为圆的方程可化为 $(x - 2)^2 + (y - 7)^2 = 8$, 所以圆心 C 的坐标为 $(2, 7)$, 半径为 $2\sqrt{2}$,

所以 $|QC| = \sqrt{(2 + 2)^2 + (7 - 3)^2} = 4\sqrt{2} > 2\sqrt{2}$,

所以点 Q 在圆外.

所以 $|MQ|_{\max} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$,

$|MQ|_{\min} = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

2.5 直线与圆、圆与圆的位置关系

2.5.1 直线与圆的位置关系

第1课时 直线与圆的位置关系的判断

学习任务目标

1. 理解直线与圆的三种位置关系, 掌握其判定方法和性质.
2. 会求直线与圆相切时的切线方程和直线与圆相交时的弦长.

问题式预习

【知识清单】

知识点一 直线与圆的三种位置关系

位置关系	交点个数
相交	有两个公共点
相切	只有一个公共点
相离	没有公共点

知识点二 直线与圆的位置关系的判断

已知直线: $Ax + By + C = 0$ 与圆 $(x - a)^2 + (y - b)^2$

$= r^2$, 则

判断方法		相交	相切	相离
几何法	圆心到直线的距离 $d = \frac{ Aa + Bb + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$	$d < r$	$d = r$	$d > r$
代数法	由 $\begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \end{cases}$ 消元得到关于 x (或 y) 的一元二次方程的根的判别式 Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$

【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

- (1) 若直线与圆有公共点,则直线与圆相交. (×)
 (2) 若直线与圆的方程组成的方程组有解,则直线和圆相交或相切. (√)
 (3) 若圆心到直线的距离大于半径,则直线与圆的方程联立消元后得到的一元二次方程无解. (√)
 (4) 过圆外一点的直线与圆相离. (×)

2. 直线 $y=x+1$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 的位置关系是

- ()
 A. 相切
 B. 相交但直线不过圆心
 C. 直线过圆心
 D. 相离

B 解析:由圆心到直线的距离 $d = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} <$

1,且直线 $y=x+1$ 不过圆心 $(0,0)$,得直线与圆相交但不过圆心,故选 B.

3. 请思考并回答下列问题:

(1) 用代数法与几何法判断直线与圆的位置关系各有什么特点?

提示:几何法与代数法判断直线与圆的位置关系,是从不同的方面,不同的思路来判断的.几何法侧重于“形”,更多地结合了图形的几何性质;代数法则侧重于“数”,它倾向于“坐标”与“方程”.

(2) 怎样解决直线与圆相切的问题?

提示:一般采用几何法,即圆心到直线的距离等于半径.

(3) 当点 (x_0, y_0) 在圆外时,过该点有几条直线与圆相切? 当由点斜式只求出一条直线时怎么办?

提示:有两条.用点斜式要考虑斜率存在与不存在两种情况,当只求出一条直线时,另一条一定是直线 $x=x_0$.

任务型课堂

任务1 直线与圆的位置关系的判断

探究活动

例1 已知圆 $x^2+y^2=8$, 定点 $P(4,0)$, 过点 P 的直线的斜率在什么范围内取值时,直线与已知圆的位置分别满足下列条件.(1)直线与圆相交;(2)直线与圆相切;(3)直线与圆相离.

解:设过点 P 的直线的斜率为 k (由已知 k 存在), 则直线方程为 $y=k(x-4)$.

(方法一) 由 $\begin{cases} y=k(x-4) \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$, 消去 y , 得 $(1+k^2)x^2 -$

$8k^2x + 16k^2 - 8 = 0$, $\Delta = (-8k^2)^2 - 4(1+k^2)(16k^2 - 8) = 32(1-k^2)$.

(1) 令 $\Delta > 0$, 即 $32(1-k^2) > 0$, 得 $-1 < k < 1$.

所以, 当 $-1 < k < 1$ 时, 直线与圆相交.

(2) 令 $\Delta = 0$, 即 $32(1-k^2) = 0$, 得 $k = \pm 1$.

所以, 当 $k = \pm 1$ 时, 直线与圆相切, 切线方程为 $x-y-4=0$ 或 $x+y-4=0$.

(3) 令 $\Delta < 0$, 即 $32(1-k^2) < 0$, 得 $k > 1$ 或 $k < -1$.

所以, 当 $k > 1$ 或 $k < -1$ 时, 直线与圆相离.

(方法二) 设圆心到直线的距离为 d ,

则 $d = \frac{|k \cdot 0 - 0 - 4k|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{4|k|}{\sqrt{1+k^2}}$.

(1) 令 $d < r$, 即 $\frac{4|k|}{\sqrt{1+k^2}} < 2\sqrt{2}$, 得 $k^2 < 1$, 即 $-1 < k < 1$.

所以, 当 $-1 < k < 1$ 时, 直线与圆相交.

(2) 令 $d = r$, 即 $\frac{4|k|}{\sqrt{1+k^2}} = 2\sqrt{2}$, 得 $k^2 = 1$, 即 $k = \pm 1$.

所以, 当 $k = \pm 1$ 时, 直线与圆相切, 切线方程为 $x-y-4=0$ 或 $x+y-4=0$.

(3) 令 $d > r$, 即 $\frac{4|k|}{\sqrt{1+k^2}} > 2\sqrt{2}$, 得 $k^2 > 1$, 即 $k > 1$ 或 $k < -1$.

所以, 当 $k > 1$ 或 $k < -1$ 时, 直线与圆相离.

【探究总结】

判断直线与圆的位置关系的常用方法

(1) 几何法: 根据圆心到直线的距离 d 与圆的半径 r 的大小关系判断.

(2) 代数法: 根据直线与圆的方程组成的方程组的解的个数判断.

(3) 动直线法: 若动直线过定点 P , 则当点 P 在圆内时, 直线与圆相交; 当点 P 在圆上时, 直线与圆相切或相交; 当点 P 在圆外时, 直线与圆的位置关系不确定.

应用迁移

1. (多选) 已知直线 $l: ax+by-r^2=0$ 与圆 $C: x^2+y^2=r^2$, 点 $A(a,b)$, 则下列说法正确的是 ()

- A. 若点 A 在圆 C 上, 则直线 l 与圆 C 相切
 B. 若点 A 在圆 C 内, 则直线 l 与圆 C 相离
 C. 若点 A 在圆 C 外, 则直线 l 与圆 C 相离
 D. 若点 A 在直线 l 上, 则直线 l 与圆 C 相切

ABD 解析: 圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d = \frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

若点 $A(a,b)$ 在圆 C 上, 则 $a^2+b^2=r^2$, 所以 $d = \frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = |r|$, 则直线 l 与圆 C 相切, 故 A 正确;

若点 $A(a, b)$ 在圆 C 内, 则 $a^2 + b^2 < r^2$, 所以 $d = \frac{r^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} > |r|$, 则直线 l 与圆 C 相离, 故 B 正确;

若点 $A(a, b)$ 在圆 C 外, 则 $a^2 + b^2 > r^2$, 所以 $d = \frac{r^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} < |r|$, 则直线 l 与圆 C 相交, 故 C 错误;

若点 $A(a, b)$ 在直线 l 上, 则 $a^2 + b^2 - r^2 = 0$, 即 $a^2 + b^2 = r^2$, 所以 $d = \frac{r^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = |r|$, 直线 l 与圆 C

相切, 故 D 正确.

故选 ABD.

2. 若直线 $x + y + m = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = m$ 相切, 则 m 的值为 ()

- A. 0 或 2 B. 2
C. $\sqrt{2}$ D. 0

B 解析: 由题意知 $m \neq 0$, 由圆心到直线的距离为半径, 得 $\frac{|m|}{\sqrt{2}} = \sqrt{m}$, 所以 $m = 2$.

任务2 直线与圆相切的有关问题

探究活动

例2 过点 $A(4, -3)$ 作圆 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$ 的切线.

(1) 求此切线的方程;

(2) 求切线长.

解: (1) 因为 $(4-3)^2 + (-3-1)^2 = 17 > 1$, 所以点 A 在圆外.

① 若所求切线的斜率存在, 设切线的斜率为 k , 则切线的方程为 $y + 3 = k(x - 4)$.

设圆心为 C .

因为圆心 $C(3, 1)$ 到切线的距离等于半径 1,

所以 $\frac{|3k - 1 - 3 - 4k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1$,

即 $|k + 4| = \sqrt{k^2 + 1}$.

所以 $k^2 + 8k + 16 = k^2 + 1$, 解得 $k = -\frac{15}{8}$.

所以切线的方程为 $y + 3 = -\frac{15}{8}(x - 4)$,

即 $15x + 8y - 36 = 0$.

② 若切线的斜率不存在,

则切线的方程为 $x = 4$,

此时, 圆心 $C(3, 1)$ 到直线 $x = 4$ 的距离也为 1,

所以另一条切线的方程是 $x = 4$.

综上, 所求切线的方程为 $15x + 8y - 36 = 0$ 或 $x = 4$.

(2) 圆心 C 的坐标为 $(3, 1)$.

设切点为 B , 则 $\triangle ABC$ 为直角三角形,

$|AC| = \sqrt{(3-4)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{17}$,

又 $|BC| = 1$,

所以 $|AB| = \sqrt{|AC|^2 - |BC|^2} = \sqrt{(\sqrt{17})^2 - 1^2} = 4$, 所以切线长为 4.

一题多思

思考1 本例中, 设切点为 P, Q , 圆心为 C , 求四边形 $APCQ$ 的面积.

解: 由本例(2)可知, $|AP| = 4$, 所以 $S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} |AP| \cdot$

$|CP| = \frac{1}{2} \times 4 \times 1 = 2$,

所以 $S_{\text{四边形}APCQ} = 2S_{\triangle APC} = 4$.

思考2 由直线 $y = x + 1$ 上任意一点向圆 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$ 作切线, 求切线长的最小值.

解: 当直线 $y = x + 1$ 上的点到圆心 C 的距离最短时, 切线长有最小值, 又因为圆心 $C(3, 1)$ 到直线 y

$= x + 1$ 的距离 $d = \frac{|3-1+1|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$,

所以切线长的最小值为 $\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

探究总结

如果所求切线过已知点 M , 务必确定该点在圆上还是在圆外.

(1) 如果点 M 在圆上, 那么圆心和点 M 的连线与切线垂直, 从而求得切线的斜率, 用直线的点斜式方程可求得切线的方程.

(2) 如果点 M 在圆外, 那么过这点的切线有两条. 用点斜式求出的切线可能只有一条, 这是因为过这点的另一条切线的斜率可能不存在.

应用迁移

1. 求过点 $(1, -7)$ 且与圆 $x^2 + y^2 = 25$ 相切的直线的方程.

解: 由题意易知切线的斜率存在.

设切线的斜率为 k , 则切线的方程为 $y + 7 = k(x - 1)$, 即 $kx - y - k - 7 = 0$.

由圆心 $(0, 0)$ 到切线的距离等于圆的半径 5,

所以 $\frac{|-k-7|}{\sqrt{k^2+1}} = 5$, 解得 $k = \frac{4}{3}$ 或 $k = -\frac{3}{4}$.

所以所求切线的方程为 $y + 7 = \frac{4}{3}(x - 1)$ 或 $y + 7$

$= -\frac{3}{4}(x - 1)$,

即 $4x - 3y - 25 = 0$ 或 $3x + 4y + 25 = 0$.

2. 已知圆 $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 10$, 求满足下列条件的圆的切线的方程.

(1) 与直线 $l_1: x + y - 4 = 0$ 平行;

(2) 与直线 $l_2: x - 2y + 4 = 0$ 垂直;

(3) 切点为 $A(4, -1)$.

解: 由题意得圆心 $C(1, -2)$, 半径 $r = \sqrt{10}$.

(1) 设切线的方程为 $x+y+b=0 (b \neq -4)$,

则 $\frac{|1-2+b|}{\sqrt{2}} = \sqrt{10}$, 得 $b = 1 \pm 2\sqrt{5}$,

所以切线的方程为 $x+y+1+2\sqrt{5}=0$ 或 $x+y+1-2\sqrt{5}=0$.

(2) 设切线的方程为 $2x+y+m=0$,

则 $\frac{|2-2+m|}{\sqrt{5}} = \sqrt{10}$, 得 $m = \pm 5\sqrt{2}$,

所以切线的方程为 $2x+y+5\sqrt{2}=0$ 或 $2x+y-5\sqrt{2}=0$.

(3) 因为 $k_{AC} = \frac{-2+1}{1-4} = \frac{1}{3}$,

所以切点为 $A(4, -1)$ 时, 切线的斜率为 -3 ,

所以切点为 $A(4, -1)$ 时, 切线的方程为 $y+1 = -3(x-4)$, 即 $3x+y-11=0$.

任务3 圆的弦长问题

探究活动

例3 过点 $(-4, 0)$ 作直线 l 与圆 $x^2+y^2+2x-4y-20=0$ 交于 A, B 两点, 如果 $|AB|=8$, 求直线 l 的方程.

解: 将圆的方程配方得 $(x+1)^2+(y-2)^2=25$, 所以圆心为 $(-1, 2)$, 半径 $r=5$, 由圆的性质可得, 圆心到

直线 l 的距离 $d = \sqrt{r^2 - \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2} = \sqrt{25-16} = 3$.

当 l 的斜率不存在时, $x=-4$ 满足题意;

当 l 的斜率存在时, 设方程为 $y=k(x+4)$, 即 $kx-y+4k=0$,

由点到直线的距离公式得

$$\frac{|-k-2+4k|}{\sqrt{1+k^2}} = 3, \text{ 解得 } k = -\frac{5}{12}.$$

所以直线 l 的方程为 $5x+12y+20=0$.

综上, 直线 l 的方程为 $x=-4$ 或 $5x+12y+20=0$.

【探究总结】

求直线与圆相交所得弦的长的三种方法

(1) 交点法: 将直线的方程与圆的方程联立, 求出交点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 的坐标, 根据两点间的距离公式 $|AB| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 求解.

(2) 弦长公式: 如图1, 设两个交点分别是 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $|AB| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_1-x_2| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \cdot |y_1-y_2|$ (直线 l 的斜率 k 存在且不为0).

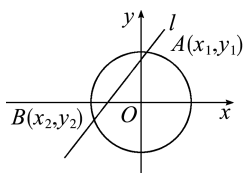


图1

(3) 几何法: 如图2, 直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点, 设弦心距为 d , 圆的半径为 r , 弦长为 $|AB|$, 则有 $\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 + d^2 = r^2$, 即 $|AB| = 2\sqrt{r^2-d^2}$.

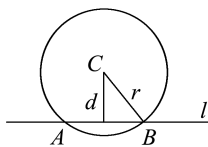


图2

应用迁移

1. 已知圆 $x^2+y^2-6x=0$, 过点 $(1, 2)$ 的直线被该圆所截得的弦的长度的最小值为 ()

A.1 B.2 C.3 D.4

B 解析: 将圆的方程 $x^2+y^2-6x=0$ 化为标准方程为 $(x-3)^2+y^2=9$, 设圆心为 C , 则 $C(3, 0)$, 半径 $r=3$. 设点 $(1, 2)$ 为点 A , 过点 $A(1, 2)$ 的直线为 l . 因为 $(1-3)^2+2^2 < 9$, 所以点 $A(1, 2)$ 在圆的内部, 则直线 l 与圆必相交, 设交点分别为 B, D . 易知当直线 $l \perp AC$ 时, 直线 l 被该圆所截得的弦的长度最小, 设此时圆心 C 到直线 l 的距离为 d , 则 $d = |AC| = \sqrt{(3-1)^2+(0-2)^2} = 2\sqrt{2}$, 所以 $|BD|_{\min} = 2\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2} = 2$, 即弦的长度的最小值为 2. 故选 B.

2. 直线 l 经过点 $P(5, 5)$ 并且与圆 $C: x^2+y^2=25$ 相交, 相交所得的弦的长为 $4\sqrt{5}$, 求 l 的方程.

解: 若直线 l 的斜率不存在, 则 $l: x=5$ 与圆 C 相切, 不合题意, 所以直线 l 的斜率存在, 设直线 l 的方程为 $y-5=k(x-5)$, 与圆 C 相交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

(方法一) 联立方程 $\begin{cases} y-5=k(x-5), \\ x^2+y^2=25, \end{cases}$

消去 y , 得 $(k^2+1)x^2+10k(1-k)x+25k(k-2)=0$.

由 $\Delta = [10k(1-k)]^2 - 4(k^2+1) \cdot 25k(k-2) > 0$,

解得 $k > 0$. 则 $x_1+x_2 = -\frac{10k(1-k)}{k^2+1}$,

$$x_1x_2 = \frac{25k(k-2)}{k^2+1}.$$

由斜率公式, 得 $y_1-y_2=k(x_1-x_2)$,

所以 $|AB| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$$= \sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}$$

$$= \sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$$

$$= \sqrt{(1+k^2)\left[\frac{100k^2(1-k)^2}{(k^2+1)^2}-4 \cdot \frac{25k(k-2)}{k^2+1}\right]}$$

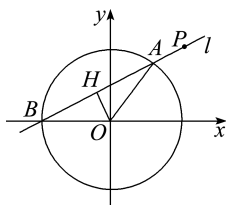
$$= 4\sqrt{5}.$$

整理得 $2k^2-5k+2=0$, 解得 $k = \frac{1}{2}$ 或 $k=2$, 符合

题意.

故直线 l 的方程为 $x-2y+5=0$ 或 $2x-y-5=0$.

(方法二) 如图所示,



$|OH|$ 是圆心到直线 l 的距离, $|OA|$ 是圆的半径,

$|AH|$ 是弦长 $|AB|$ 的一半.

在 $\text{Rt}\triangle AHO$ 中, $|OA|=5$,

$$|AH| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} = 2\sqrt{5},$$

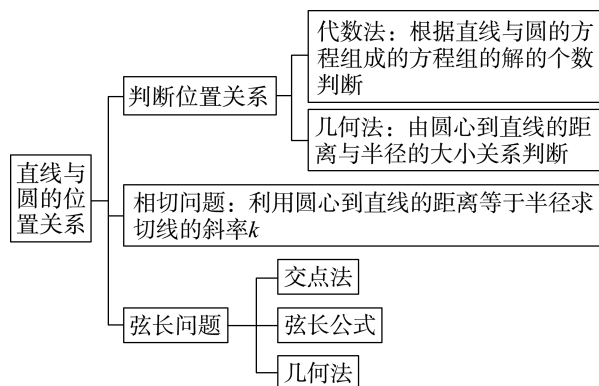
$$\text{则 } |OH| = \sqrt{|OA|^2 - |AH|^2} = \sqrt{5}.$$

$$\text{所以 } \frac{|5(1-k)|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{5},$$

$$\text{解得 } k = \frac{1}{2} \text{ 或 } k = 2.$$

所以直线 l 的方程为 $x-2y+5=0$ 或 $2x-y-5=0$.

提质归纳



课后素养评价 (二十三)

直线与圆的位置关系的判断

A组 学习·理解

1. 若直线 $y=k(x+3)$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交, 则实数 k 的取值范围为 ()

- A. $(-2, 2)$ B. $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, +\infty\right)$
C. $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{5}, \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$ D. $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

D 解析: 直线方程 $y=k(x+3)$ 化为一般式为 $kx-y+3k=0$,

直线 $y=k(x+3)$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交等价于圆心到直线的距离小于半径,

$$\text{即 } \frac{|3k|}{\sqrt{k^2+1}} < 2, \text{ 即 } 5k^2 < 4, \text{ 故 } k \in \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$$

故选 D.

2. 若直线 $x+y+2=0$ 与圆 $M:(x-a)^2+(y-a)^2=8a^2 (a>0)$ 相切, 则圆 M 的半径为 ()

- A. 2 B. 4 C. $2\sqrt{2}$ D. 8

C 解析: 由题意得 $\frac{|a+a+2|}{\sqrt{2}} = |2\sqrt{2}a|$, 解得 a

$=1$ (负值舍), 所以圆 M 的半径为 $2\sqrt{2}$.

故选 C.

3. 若直线 $x-y+m=0$ 与曲线 $y=\sqrt{4-x^2}$ 相交, 则 m 的取值范围是 ()

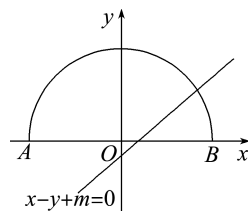
- A. $[-2, 2]$ B. $[-2, 2\sqrt{2}]$
C. $[-2, 2\sqrt{2})$ D. $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

C 解析: 曲线 $y=\sqrt{4-x^2}$ 是圆 $x^2+y^2=4$ 的上半

部分, 如图所示, 易知 m 为直线 $x-y+m=0$ 的纵截距, 当直线 $x-y+m=0$ 与曲线 $y=\sqrt{4-x^2}$ 相切时, 由 $\frac{|m|}{\sqrt{2}}=2$, 得 $m=2\sqrt{2}$ 或 $-2\sqrt{2}$ (舍去).

结合图象可知, 当点 B 在直线 $x-y+m=0$ 上时, $m=-2$, 故 $m \geq -2$.

所以 $m \in [-2, 2\sqrt{2})$, 故选 C.



4. 直线 $x+2y-5+\sqrt{5}=0$ 被圆 $x^2+y^2-2x-4y=0$ 截得的弦的长为 ()

- A. 1 B. 2 C. 4 D. $4\sqrt{6}$

C 解析: 由题意, 圆的方程 $x^2+y^2-2x-4y=0$ 可化为 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$, 故圆心为 $(1, 2)$, 半径 $r=\sqrt{5}$, 圆心到直线 $x+2y-5+\sqrt{5}=0$ 的距离 $d = \frac{|1+4-5+\sqrt{5}|}{\sqrt{5}} = 1$, 所以弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2} = 4$,

故弦长为 4.

5. 过原点且与圆 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 相切的直线的方程是 ()

- A. $y = \frac{3}{4}x$ B. $y = \frac{3}{4}x$ 或 $y=0$
C. $y = \frac{3}{4}x$ 或 $x=0$ D. $y = \frac{4}{3}x$ 或 $x=0$

C 解析:由题意,圆的方程可化为 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$,则圆心为 $(2,-1)$,半径为2.

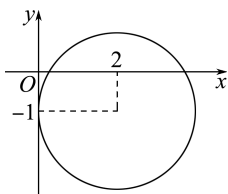
当切线的斜率存在时,设切线方程为 $kx-y=0$.

由圆心 $(2,-1)$ 到切线的距离等于半径2,即

$$\frac{|2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=2, \text{解得 } k=\frac{3}{4},$$

因此切线方程为 $y=\frac{3}{4}x$.

当切线的斜率不存在时,如图, y 轴是符合条件的切线,此时切线方程为 $x=0$.



综上,所求直线方程为 $y=\frac{3}{4}x$ 或 $x=0$.

6. 已知直线 $ax-y+3=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 相交于 A, B 两点,且 $|AB|=2\sqrt{3}$,则 $a=$ _____.

0 解析:由 $|AB|=2\sqrt{3}$,圆半径 $r=2$,

得圆心 $(1,2)$ 到直线 $ax-y+3=0$ 的距离为1,

$$\text{即 } \frac{|a+1|}{\sqrt{a^2+1}}=1, \text{解得 } a=0.$$

7. (2022·新高考全国I卷)写出与圆 $x^2+y^2=1$ 和 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 都相切的一条直线的方程:_____.

$3x+4y-5=0$ (或 $7x-24y-25=0$ 或 $x+1=0$)

解析:显然直线的斜率不为0,不妨设直线的方程为 $x+by+c=0$,

$$\text{于是 } \frac{|c|}{\sqrt{1+b^2}}=1, \frac{|3+4b+c|}{\sqrt{1+b^2}}=4.$$

$$\text{故 } c^2=1+b^2 \text{ ①}, |3+4b+c|=|4c|,$$

$$\text{于是 } 3+4b+c=4c \text{ 或 } 3+4b+c=-4c.$$

$$\text{再结合①解得 } \begin{cases} b=0, \\ c=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} b=-\frac{24}{7}, \\ c=-\frac{25}{7} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} b=\frac{4}{3}, \\ c=-\frac{5}{3} \end{cases},$$

所以直线有三条,分别为 $x+1=0, 7x-24y-25=0, 3x+4y-5=0$.(填一条即可)

B组 应用·实践

1. (多选)已知圆 $C: x^2+y^2=1$,在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,且 $a \sin A + b \sin B - c \sin C = 0$,直线 l 的方程为 $ax+by+c=0$,则

()

- A. $\triangle ABC$ 是直角三角形
B. 圆 C 与直线 l 相离
C. 圆 C 与直线 l 相切
D. 圆 C 与直线 l 相交

AC 解析:因为 $a \sin A + b \sin B - c \sin C = 0$,所以由正弦定理得 $a^2+b^2-c^2=0$,即 $a^2+b^2=c^2$,所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形.圆心 $C(0,0)$ 到直线 $l: ax+by+c=0$ 的距离 $d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1=r$,故圆 $C: x^2+y^2=1$ 与直线 $l: ax+by+c=0$ 相切.

2. 根据圆的性质,过圆 O 外的一点 A 可以作圆 O 的两条切线,设切点为 B, C ,我们把四边形 $OBAC$ 称为圆 O 的“切点四边形”.已知圆 $O: x^2+y^2=1$,圆外有一点 $A(1,2)$,则圆 O 的“切点四边形”的周长为 ()

A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

C 解析:由题意, $|OA|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$,圆 O 的半径为1,故 $|AB|=|AC|=\sqrt{5-1}=2$,故四边形 $OBAC$ 的周长为 $|OB|+|OC|+|AB|+|AC|=1+1+2+2=6$.

3. 圆 $x^2+y^2+2x+4y-3=0$ 上到直线 $x+y+1=0$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 的点有_____个.

3 解析:圆的方程可化为 $(x+1)^2+(y+2)^2=8$,

所以圆心 $(-1,-2)$ 到直线 $x+y+1=0$ 的距离 $d=\frac{|-1-2+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

又圆的半径为 $2\sqrt{2}$,所以圆上到直线 $x+y+1=0$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 的点有3个.

4. 过点 $P(-1,6)$,且与圆 $(x+3)^2+(y-2)^2=4$ 相切的直线的方程是_____.

$3x-4y+27=0$ 或 $x=-1$ 解析:由题意知圆心为 $(-3,2)$,半径 $r=2$.当所求直线的斜率存在时,设所求直线的方程为 $y-6=k(x+1)$,则圆心到直线的距离 $d=\frac{|2-6-k(-3+1)|}{\sqrt{1+k^2}}=2$,解得 $k=\frac{3}{4}$,

此时,直线的方程为 $3x-4y+27=0$.当所求直线的斜率不存在时,所求直线的方程为 $x=-1$,验证可知,符合题意.所以所求直线的方程为 $3x-4y+27=0$ 或 $x=-1$.

5. 已知圆 $C: (x-3)^2+(y-4)^2=4$.

(1)若直线 l 过定点 $A(1,0)$ 且与圆 C 相切,求直线 l 的方程;

(2)若直线 $m: kx-y-2k+3=0$ 与圆 C 交于 D, F 两点,求 $|DF|$ 的最小值.

解:(1)已知圆心 $C(3,4)$,半径 $r=2$.

当直线 l 的斜率存在时,设直线 $l: y=k(x-1)$,即 $kx-y-k=0$,

圆心 $C(3,4)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|3k-4-k|}{\sqrt{k^2+1}}=2$,

解得 $k = \frac{3}{4}$,

此时直线 l 的方程为 $\frac{3}{4}x - y - \frac{3}{4} = 0$, 即 $3x - 4y - 3 = 0$.

当直线 l 的斜率不存在时, 直线 l 的方程为 $x = 1$, 满足题意.

所以直线 l 的方程为 $3x - 4y - 3 = 0$ 或 $x = 1$.

(2) 因为直线 m 的方程可化为 $y - 3 = k(x - 2)$, 所

以直线 m 过定点 $P(2, 3)$.

又点 $P(2, 3)$ 在圆 C 内, 所以当直线 m 与直线 CP 垂直时, 直线 m 被圆 C 截得的弦 DF 的长 $|DF|$ 最小.

因为 $|CP| = \sqrt{(3-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2}$, $r = 2$,

所以 $|DF|_{\min} = 2\sqrt{r^2 - |CP|^2} = 2\sqrt{2}$.

所以 $|DF|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

第2课时 直线与圆的位置关系的应用

学习任务目标

1. 会用坐标法解决相应的平面几何问题.
2. 能用直线与圆的方程解决实际问题.
3. 能解决直线与圆的位置关系的综合问题.

问题式预习

【知识清单】

知识点 直线与圆的方程的应用

用坐标法解决平面几何问题的“三步曲”

第一步: 建立适当的平面直角坐标系, 用坐标和方程表示问题中的几何要素, 如点、直线、圆, 把平面几何问题转化为代数问题; 第二步: 通过代数运算, 解决代数问题; 第三步: 把代数运算的结果“翻译”成几何结论.

【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打“√”, 错误的打“×”).

(1) 在解决直线和圆的实际问题时, 所建的坐标系不同, 得到的直线或圆的方程也可能不同.

(√)

(2) 通过代数运算解决平面几何问题时, 最后要将代数运算的结果“翻译”成几何结论.

(√)

2. 设村庄外围所在曲线可用方程 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ 表示, 村外一条小路所在直线可用方程 $x - y + 2 = 0$ 表示, 则村庄外围任一点到小路的最短距离为 _____.

$\frac{7\sqrt{2}}{2} - 2$ 解析: 由题意可知圆心为 $(2, -3)$, 半径为 2, 因为圆心 $(2, -3)$ 到直线 $x - y + 2 = 0$ 的距离为 $\frac{|2+3+2|}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$, 所以从村庄外围任一点到小路的最短距离为 $\frac{7\sqrt{2}}{2} - 2$.

3. 请思考并回答下列问题:

(1) 解决平面几何问题时, 如何建立平面直角坐标系?

提示: 建立平面直角坐标系的方式对解决问题有着直接的影响. 因此, 建立平面直角坐标系时, 应使所给图形尽量对称, 所需的几何元素的坐标或方程尽量简单.

(2) 你认为解决直线与圆的实际应用问题的关键是什么?

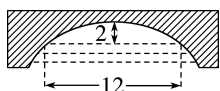
提示: 关键是把实际应用问题转化为数学问题.

任务型课堂

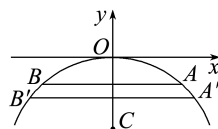
任务1 直线与圆的位置关系的实际应用

探究活动

例1 已知一个圆弧形桥拱, 当水面在如图所示的位置时, 拱顶离水面 2 m, 水面宽 12 m, 当水面下降 1 m 后, 求水面的宽度.



解: 如图, 以圆弧形桥拱的顶点为坐标原点, 以过圆弧形桥拱的顶点的水平直线为 x 轴, 以过圆弧形桥拱的顶点的竖直直线为 y 轴, 建立平面直角坐标系.



设圆弧所在圆的圆心为 C , 水面对应弦的端点为 A, B , 则由已知可得 $A(6, -2)$.

设圆的半径为 r , 则 $C(0, -r)$, 即圆的方程为 $x^2 + (y + r)^2 = r^2$.

将点 A 的坐标代入上述方程, 可得 $r = 10$,

所以圆的方程为 $x^2 + (y + 10)^2 = 100$.

当水面下降 1 m 后, 水面对应弦的端点为 A', B' ,

可设 $A'(x_0, -3)$ ($x_0 > 0$), 代入 $x^2 + (y + 10)^2 = 100$,

解得 $x_0 = \sqrt{51}$,

所以此时水面的宽度 $|A'B'| = 2\sqrt{51}$ m.

【探究总结】

直线与圆的方程的实际应用问题的解题步骤

(1) 审题: 认真审题, 明确题意, 从题目中抽象出几何模型, 明确已知和未知;

(2) 建系: 建立平面直角坐标系, 根据实际问题求出相关点的坐标, 从而求出直线与圆的方程;

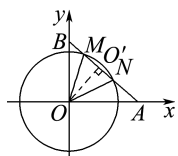
(3) 求解: 利用直线与圆的方程的有关知识求解;

(4) 还原: 将运算结果还原到实际问题中去.

应用迁移

1. 一艘海监船上配有雷达, 其监测范围是半径为 26 km 的圆形区域, 一艘轮船从位于海监船正东 40 km 的 A 处出发, 径直驶向位于海监船正北 30 km 的 B 处, 船速为 10 km/h, 则这艘轮船能被海监船监测到的时间约为多少小时?

解: 根据题意, 以海监船的位置为坐标原点, 其正东方向为 x 轴正方向, 正北方向为 y 轴正方向, 建立如图所示的平面直角坐标系,



所以 $A(40, 0)$, $B(0, 30)$, 圆 $O: x^2 + y^2 = 676$, 所以直线 AB 的方程为 $\frac{x}{40} + \frac{y}{30} = 1$, 即 $3x + 4y - 120 = 0$.

记从点 N 处开始被监测, 到点 M 处监测结束, 因为点 O 到直线 AB 的距离 $|OO'| = \frac{|-120|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 24$ (km),

所以 $|MN| = 2\sqrt{|MO|^2 - |OO'|^2} = 20$ (km).

因为 $\frac{20}{10} = 2$ (h),

所以这艘轮船被海监船监测到的时间约为 2 h.

2. 从点 $A(-3, 3)$ 发出的光线 l 射到 x 轴上, 被 x 轴反射, 其反射光线所在直线与圆 $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ 相切, 求光线 l 所在直线的方程.

解: 如图所示, 设 l 与 x 轴交于点 $B(b, 0)$ ($b \neq -3$), 则 $k_{AB} = \frac{-3}{b+3}$.

根据光的反射定律, 反射光线的斜率 $k_{\text{反}} = \frac{3}{b+3}$,

所以反射光线所在直线的方程为 $y = \frac{3}{b+3}(x - b)$,

即 $3x - (b+3)y - 3b = 0$.

设圆心为 C ,

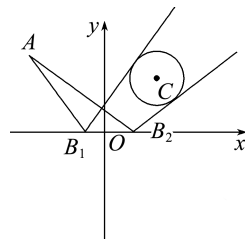
将 $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ 化为 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$, 可知圆心 $C(2, 2)$, 半径为 1,

所以 $\frac{|6 - (b+3) \times 2 - 3b|}{\sqrt{9 + (b+3)^2}} = 1$, 解得 $b_1 = -\frac{3}{4}$, $b_2 = 1$,

所以 $k_{AB} = -\frac{4}{3}$ 或 $k_{AB} = -\frac{3}{4}$.

所以光线 l 所在直线的方程为 $y - 3 = -\frac{4}{3}(x + 3)$

或 $y - 3 = \frac{-3}{4}(x + 3)$, 即 $4x + 3y + 3 = 0$ 或 $3x + 4y - 3 = 0$.



任务2 与圆有关的最值问题

探究活动

例2 已知点 (x, y) 在圆 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 1$ 上.

(1) 求 $\frac{y}{x}$ 的最大值和最小值;

(2) 求 $x + y$ 的最大值和最小值.

解: (1) $\frac{y}{x}$ 可看作点 (x, y) 与原点连线的斜率, $\frac{y}{x}$ 的最大值和最小值就是与该圆有公共点且过原点的直线的斜率的最大值和最小值, 即直线与圆相切时的斜率.

由题意知, 圆心为 $(2, -3)$, 半径为 1, 设过原点的直线的方程为 $y = kx$.

由直线与圆相切得圆心到直线的距离等于半径, 即 $\frac{|2k+3|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$,

解得 $k = -2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $k = -2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

所以 $\frac{y}{x}$ 的最大值为 $-2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 最小值为 $-2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2) 设 $t = x + y$, 则 $y = -x + t$, t 可看作直线 $y = -x + t$ 在 y 轴上的截距.

所以 $x + y$ 的最大值和最小值就是直线 $y = -x + t$ 与圆有公共点时直线纵截距的最大值和最小值, 即直

线 $y = -x + t$ 与圆相切时的纵截距.

由直线与圆相切得圆心到直线的距离等于半径,

$$\text{即 } \frac{|2+(-3)-t|}{\sqrt{2}}=1, \text{ 解得 } t=\sqrt{2}-1 \text{ 或 } t=-\sqrt{2}-1.$$

所以 $x+y$ 的最大值为 $\sqrt{2}-1$, 最小值为 $-\sqrt{2}-1$.

【一题多思】

思考 1. 本例(2)还有其他解法吗?

解: 因为 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 1$, 故可设 $x = 2 + \cos \alpha, y = -3 + \sin \alpha, \alpha \in \mathbf{R}$,

$$\text{所以 } x+y = -1 + \cos \alpha + \sin \alpha = -1 + \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right).$$

故当 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ 时, $x+y$ 取得最大值 $-1 + \sqrt{2}$;

当 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -1$ 时, $x+y$ 取得最小值 $-1 - \sqrt{2}$.

思考 2. 已知点 $O(0,0), A(0,2)$, 点 M 是圆 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 1$ 上的动点, 求 $\triangle OAM$ 面积的最小值.

解: 根据题意, 得圆 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 1$ 的圆心为 $(2, -3)$, 半径 $r = 1$.

因为 $O(0,0), A(0,2)$, 所以 OA 所在的直线是 y 轴. 当点 M 到直线 AO 的距离最小时, $\triangle OAM$ 的面积最小,

则点 M 到直线 AO 的距离的最小值为 $d = 2 - 1 = 1$,

所以 $\triangle OAM$ 面积的最小值为 $S = \frac{1}{2} |OA| \cdot d = 1$.

【探究总结】

代数式最值问题的常见类型

(1) $u = \frac{y-b}{x-a}$ 的最值问题, 可转化为过点 (a, b) 和点 (x, y) 的直线的斜率的最值问题.

(2) $t = ax + by$ 的最值问题, 可转化为直线 $y = -\frac{a}{b}x + \frac{t}{b}$ 的纵截距的最值问题.

(3) $(x-a)^2 + (y-b)^2$ 的最值问题, 可转化为动点 (x, y) 到定点 (a, b) 的距离的平方的最值问题.

应用迁移

1. (2023 · 全国乙卷) 已知实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$, 则 $x - y$ 的最大值是 ()

A. $1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$ B. 4

C. $1 + 3\sqrt{2}$ D. 7

C 解析: (方法一) 令 $x - y = k$, 则 $x = k + y$, 代入圆的方程化简得 $2y^2 + (2k - 6)y + k^2 - 4k - 4$

$= 0$.

因为存在实数 y , 所以 $\Delta \geq 0$, 即 $(2k - 6)^2 - 4 \times 2(k^2 - 4k - 4) \geq 0$,

化简得 $k^2 - 2k - 17 \leq 0$, 解得 $1 - 3\sqrt{2} \leq k \leq 1 + 3\sqrt{2}$.

故 $x - y$ 的最大值是 $1 + 3\sqrt{2}$.

(方法二) 将 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$, 整理得 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

令 $x = 3\cos \theta + 2, y = 3\sin \theta + 1$, 其中 $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$\text{则 } x - y = 3\cos \theta - 3\sin \theta + 1 = 3\sqrt{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 1.$$

因为 $\theta \in [0, 2\pi]$, 所以 $\theta + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$, 当 $\theta + \frac{\pi}{4} = 2\pi$, 即 $\theta = \frac{7\pi}{4}$ 时, $x - y$ 取得最大值 $3\sqrt{2} + 1$.

(方法三) 由 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$, 得 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$, 可知圆心为 $(2, 1)$, 半径为 3.

设 $x - y = m$, 则圆心到直线 $x - y = m$ 的距离 $d = \frac{|2 - 1 - m|}{\sqrt{2}} \leq 3$,

$$\text{解得 } 1 - 3\sqrt{2} \leq m \leq 1 + 3\sqrt{2}.$$

故 $x - y$ 的最大值为 $1 + 3\sqrt{2}$.

2. 著名数学家华罗庚曾说过, 数无形时少直觉, 形少数时难入微. 事实上, 很多代数问题都可以转化为几何问题加以解决, 如 $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ 可以转化为平面上点 $M(x, y)$ 与点 $N(a, b)$ 间的距离. 结合上述观点, 可得 $f(y) = \sqrt{y^2 - 4y + 20} + \sqrt{y^2 - 2y + 10}$ 的最小值为 ()

A. $2\sqrt{5}$ B. $5\sqrt{2}$ C. 8 D. 6

B 解析: $f(y) = \sqrt{y^2 - 4y + 20} + \sqrt{y^2 - 2y + 10} = \sqrt{(0-4)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(0-3)^2 + (y-1)^2}$, 所以 $f(y)$ 表示点 $P(0, y)$ 到点 $A(4, 2)$ 与点 $B(3, 1)$ 的距离之和. 因为 $A(4, 2)$ 关于 y 轴的对称点为 $A'(-4, 2)$, 当点 A', P, B 共线时, $|PA| + |PB|$ 取得最小值, 所以 $|PA| + |PB| = |PA'| + |PB| \geq |A'B| = \sqrt{(-4-3)^2 + (2-1)^2} = 5\sqrt{2}$. 故选 B.

提质归纳

直线与圆的位置关系的应用

坐标法

实际应用

综合应用

课后素养评价(二十四)

直线与圆的位置关系的应用

A组 学习·理解

1. 过直线 $y=x$ 上的点 P 作圆 $C: (x+3)^2 + (y-5)^2 = 4$ 的两条切线 l_1, l_2 , 当直线 l_1, l_2 关于直线 $y=x$ 对称时, 点 P 的坐标为 ()

- A. $(1, 1)$ B. $(\frac{3}{5}, \frac{3}{5})$
C. $(\frac{6}{5}, \frac{6}{5})$ D. $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

A 解析: 圆 $C: (x+3)^2 + (y-5)^2 = 4$ 的圆心为 $C(-3, 5)$,

直线 l_1, l_2 关于直线 $y=x$ 对称时, CP 与直线 $y=x$ 垂直,

所以直线 CP 的方程为 $y-5=-(x+3)$, 即 $x+y-2=0$.

由 $\begin{cases} x+y-2=0, \\ y=x, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=1, \\ y=1, \end{cases}$ 所以 $P(1, 1)$. 故选 A.

2. 圆 $C_1: x^2 + y^2 - 10x + 4y + 25 = 0$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$, 点 A, B 分别是圆 C_1, C_2 上的动点, M 为直线 $y=x+1$ 上的动点, 则 $|MA| + |MB|$ 的最小值为 ()

- A. $2\sqrt{2} + 3$ B. $3 - 2\sqrt{2}$
C. $6\sqrt{2} - 3$ D. $6\sqrt{2} + 3$

C 解析: 因为圆 $C_1: x^2 + y^2 - 10x + 4y + 25 = 0$ 的标准方程为 $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 4$,

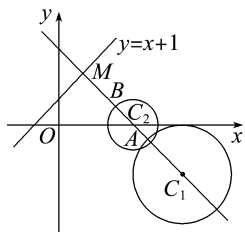
圆 $C_2: x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ 的标准方程为 $(x-3)^2 + y^2 = 1$,

所以圆 C_1 和 C_2 的圆心分别为 $C_1(5, -2), C_2(3, 0)$, 半径 $r_1=2, r_2=1$,

所以直线 C_1C_2 的斜率 $k = \frac{0-(-2)}{3-5} = -1$. 而直线

$y=x+1$ 的斜率为 1,

所以直线 C_1C_2 与直线 $y=x+1$ 垂直, 如图,



所以当点 M 与 C_1, C_2 共线时, $|MA| + |MB|$ 最小,

此时 $|MA| + |MB| = |MC_1| - r_1 + |MC_2| - r_2$.

又此时 $|MC_1| = \frac{|5+2+1|}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}, |MC_2| =$

$\frac{|3-0+1|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2},$

所以 $|MA| + |MB|$ 最小值为 $4\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} - 1 = 6\sqrt{2} - 3$. 故选 C.

3. 已知直线 l 与圆 $C: x^2 + y^2 - 4y = 0$ 相交于 A, B 两点, 且线段 AB 的中点 P 的坐标为 $(-1, 1)$, 则直线 l 的方程为 _____.

$x+y=0$ **解析:** 因为圆 $C: x^2 + y^2 - 4y = 0$ 的圆心为 $C(0, 2)$, 又点 $P(-1, 1)$,

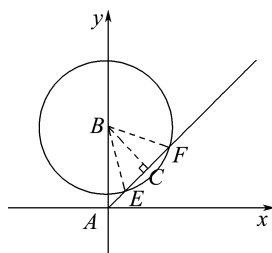
所以直线 CP 的斜率为 $k_{CP} = \frac{2-1}{0+1} = 1$.

因为 AB 是圆 C 的一条弦, P 为线段 AB 的中点, 所以 $AB \perp CP$, 所以 $k_{AB} = -1$, 即直线 l 的斜率为 -1 .

因此, 直线 l 的方程为 $y-1=-(x+1)$, 即 $x+y=0$.

4. 我国东南沿海一台风中心从 A 地以 10 km/h 的速度向东北方向移动, 离台风中心 15 km 内的地区为危险地区. 若城市 B 在 A 地正北 20 km 处, 试确定城市 B 处于危险地区内的时间.

解: 以 A 为坐标原点, 正北方向为纵轴正方向, 正东方向为横轴正方向, 建立如图所示的平面直角坐标系.



因为台风中心从 A 地以 10 km/h 的速度向东北方向移动, 所以运动轨迹所在直线 AF 与坐标轴成 45° 角.

设以点 B 为圆心, 15 km 为半径的圆交 AF 于点 E, F , 连接 BE, BF .

过点 B 作 $BC \perp AF$, 交 AF 于点 C .

在等腰直角三角形 ABC 中, $AB = 20 \text{ km}, BC = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 20 = 10\sqrt{2} (\text{km}).$

在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中, $BC = 10\sqrt{2} \text{ km}, BE = 15 \text{ km}$, 所以

$CE = \sqrt{BE^2 - BC^2} = 5 \text{ (km)}$, 所以 $EF = 2CE = 10 \text{ (km)}$.

因为台风中心从 A 地以 10 km/h 的速度向东北方向移动, 且当台风中心在线段 EF 上时城市 B 处于危险区域内, 所以城市 B 处于危险区域内的时间为 $\frac{10}{10} = 1 \text{ (h)}$.

5. 已知 $M(m, n)$ 为圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 14y + 45 = 0$ 上任意一点.

(1) 求 $m + 2n$ 的最大值;

(2) 求 $\frac{n-3}{m+2}$ 的最大值和最小值;

(3) 求 $m^2 + n^2$ 的最大值和最小值.

解: 圆的方程 $x^2 + y^2 - 4x - 14y + 45 = 0$ 可化为 $(x-2)^2 + (y-7)^2 = 8$, 所以圆心为 $C(2, 7)$, 半径 $r = 2\sqrt{2}$.

(1) 设 $m + 2n = t$, 将 $m + 2n = t$ 看成是关于 m, n 的直线的方程.

因为该直线与圆 C 有公共点, 所以圆心 C 到该直线的距离 $d = \frac{|2 + 2 \times 7 - t|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \leq 2\sqrt{2}$,

解得 $16 - 2\sqrt{10} \leq t \leq 16 + 2\sqrt{10}$.

所以 $m + 2n$ 的最大值为 $16 + 2\sqrt{10}$.

(2) 记点 $Q(-2, 3)$, 则 $\frac{n-3}{m+2}$ 表示直线 MQ 的斜率.

设直线 MQ 的方程为 $y - 3 = k(x + 2)$, 即 $kx - y + 2k + 3 = 0$.

由直线 MQ 与圆 C 有公共点, 所以圆心 C 到直线 MQ 的距离 $\frac{|2k - 7 + 2k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} \leq 2\sqrt{2}$, 解得 $2 - \sqrt{3} \leq k \leq 2 + \sqrt{3}$.

所以 $\frac{n-3}{m+2}$ 的最大值为 $2 + \sqrt{3}$, 最小值为 $2 - \sqrt{3}$.

(3) 设 $\mu = m^2 + n^2 = (m-0)^2 + (n-0)^2$, 表示圆 C 上的点到原点的距离的平方,

则 $\mu_{\max} = [\sqrt{(2-0)^2 + (7-0)^2} + r]^2 = (\sqrt{53} + 2\sqrt{2})^2 = 61 + 4\sqrt{106}$,

$\mu_{\min} = [\sqrt{(2-0)^2 + (7-0)^2} - r]^2 = (\sqrt{53} - 2\sqrt{2})^2 = 61 - 4\sqrt{106}$.

所以 $m^2 + n^2$ 的最大值为 $61 + 4\sqrt{106}$, 最小值为 $61 - 4\sqrt{106}$.

B组 应用·实践

1. 若关于 x 的方程 $kx + 3 - k = \sqrt{1-x^2}$ 恰有两个实

数根, 则实数 k 的取值范围是

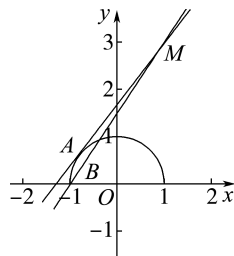
()

A. $(\frac{4}{3}, +\infty)$ B. $(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}]$

C. $(0, \frac{4}{3})$ D. $(\frac{4}{3}, \frac{3}{2})$

B 解析: 因为关于 x 的方程 $kx + 3 - k = \sqrt{1-x^2}$ 恰有两个实数根,

所以函数 $y = k(x-1) + 3$ 与函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的图象恰有两个交点, 即直线 $y = k(x-1) + 3$ 与半圆 $y = \sqrt{1-x^2}$ 恰有两个交点, 如图所示.



已知直线 $y = k(x-1) + 3$ 经过定点 $M(1, 3)$,

当直线 $y = k(x-1) + 3$ 与半圆 $y = \sqrt{1-x^2}$ 相切于点 A 时, 由 $\frac{|3-k|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$, 解得 $k = \frac{4}{3}$.

当直线 $y = k(x-1) + 3$ 经过点 $B(-1, 0)$ 时, $k = \frac{3}{2}$.

所以满足函数 $y = k(x-1) + 3$ 与函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的图象恰有两个交点的 k 的取值范围为 $(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}]$.

2. (新定义) 如果动点 M 与两定点 A, B 的距离之比为 $\lambda (\lambda > 0, \lambda \neq 1)$, 那么点 M 的轨迹是一个圆, 这个圆称为阿氏圆. 已知 $A(3, 0), O(0, 0)$, 若直线 $3x - 4y + c = 0$ 上存在点 M 满足 $|MA| = 2|MO|$, 则实数 c 的取值范围是 ()

A. $(-7, 13)$ B. $[-7, 13]$

C. $(-11, 9)$ D. $[-11, 9]$

B 解析: 点 M 在直线 $3x - 4y + c = 0$ 上, 设点 M 的坐标为 $(x, \frac{3x+c}{4})$.

由直线 $3x - 4y + c = 0$ 上存在点 M 满足 $|MA| = 2|MO|$, 则 $|MA|^2 = 4|MO|^2$,

所以 $(x-3)^2 + (\frac{3x+c}{4})^2 = 4[x^2 + (\frac{3x+c}{4})^2]$,

整理可得 $25x^2 + (6c+32)x + c^2 - 48 = 0$.

由 $\Delta = (6c+32)^2 - 100(c^2-48) \geq 0$, 得 $c^2 - 6c - 91 \leq 0$, 解得 $-7 \leq c \leq 13$,

所以实数 c 的取值范围为 $[-7, 13]$.

3. 已知圆 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$, 直线 $l: mx - y$

$-3m+1=0$ 与 C 相交于 A, B 两点, 则 $|AB|$ 的最小值为 ()

- A. $4\sqrt{5}$ B. 2
C. 4 D. $2\sqrt{5}$

A 解析: 由圆 C 的方程可得圆心 $C(1, 2)$, 半径 $r=5$.

直线 l 的方程可整理为 $m(x-3)-y+1=0$,

$$\text{令} \begin{cases} x-3=0, \\ -y+1=0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x=3, \\ y=1, \end{cases}$$

所以直线 l 恒过定点 $D(3, 1)$.

由题意知, 当 AB 与 CD 垂直时, 弦长 $|AB|$ 最小,

此时, $k_{CD} = \frac{2-1}{1-3} = -\frac{1}{2}$, 所以 $k_{AB} = 2$, 直线 $l: 2x - y - 5 = 0$.

因为点 C 到直线 l 的距离 $d = \frac{|2-2-5|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5}$,

所以 $|AB|_{\min} = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2 \times \sqrt{25 - 5} = 4\sqrt{5}$.

4. 已知 P 是直线 $l: 3x - 4y + 11 = 0$ 上的动点, PA, PB 是圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 的两条切线, 那么四边形 $PACB$ 面积的最小值是 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$
C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

C 解析: 圆的标准方程为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, 圆心为 $C(1, 1)$, 半径为 $r=1$,

圆心 $C(1, 1)$ 到直线 $l: 3x - 4y + 11 = 0$ 的距离 $d = \frac{|3-4+11|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{10}{5} = 2 > r = 1$,

所以圆 C 与直线 l 相离.

根据对称性可知, 四边形 $PACB$ 的面积为 $2S_{\triangle APC}$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times |PA| \times r = |PA| = \sqrt{|PC|^2 - r^2} = \sqrt{|PC|^2 - 1},$$

要使四边形 $PACB$ 的面积最小, 则只需 $|PC|$ 最小.

又 $|PC|$ 的最小值为圆心 C 到直线 $l: 3x - 4y + 11 = 0$ 的距离 $d = 2$,

所以四边形 $PACB$ 面积的最小值为 $\sqrt{|PC|_{\min}^2 - 1} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$.

故选 C.

5. 设直线 $y = x + 2a$ 与圆 $C: x^2 + y^2 - 2ay - 2 = 0$ 相交于 A, B 两点. 若 $|AB| = 2\sqrt{3}$, 则圆 C 的面积为 _____.

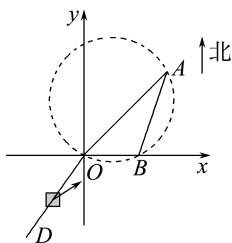
4 π 解析: 圆 C 的方程可化为 $x^2 + (y-a)^2 = a^2 + 2$, 可得圆心为 $C(0, a)$, 半径 $r = \sqrt{a^2 + 2}$, 所以圆心

C 到直线 $x - y + 2a = 0$ 的距离为 $\frac{|-a+2a|}{\sqrt{2}} =$

$\frac{|a|}{\sqrt{2}}$. 由题意得 $\left(\frac{|a|}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 = (\sqrt{a^2+2})^2$, 解得

$a^2 = 2$, 所以圆 C 的半径为 2, 所以圆 C 的面积为 4π .

6. 如图, 某海面上有 O, A, B 三个小岛 (面积大小忽略不计), A 岛在 O 岛的北偏东 45° 方向距 O 岛 $40\sqrt{2}$ km 处, B 岛在 O 岛的正东方向距 O 岛 20 km 处, 以 O 为坐标原点, O 的正东方向为 x 轴的正方向, 1 km 为单位长度, 建立平面直角坐标系, 圆 C 经过 O, A, B 三点.



(1) 求圆 C 的标准方程;

(2) 若圆 C 区域内有未知暗礁, 现有一船在 O 岛的南偏西 30° 方向距 O 岛 40 km 的 D 处, 沿着北偏东 60° 方向行驶, 若不改变方向, 该船有没有触礁的危险?

解: (1) 由题意可知, $A(40, 40), B(20, 0)$,

设过 O, A, B 三点的圆 C 的方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$,

$$\text{则} \begin{cases} F=0, \\ 40^2+40^2+40D+40E+F=0, \\ 20^2+20D+F=0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} D=-20, \\ E=-60, \\ F=0, \end{cases}$$

所以圆 C 的方程为 $x^2 + y^2 - 20x - 60y = 0$, 即圆 C 的标准方程为 $(x-10)^2 + (y-30)^2 = 1\,000$.

(2) 由 (1) 知, 圆 C 的圆心 $C(10, 30)$, 半径 $r = 10\sqrt{10}$. 易知 $D(-20, -20\sqrt{3})$, 且该船航线所在直

线 l 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,

故直线 l 的方程为 $\sqrt{3}x - 3y - 40\sqrt{3} = 0$.

由于圆心 $C(10, 30)$ 到直线 l 的距离 $d =$

$$\frac{|10\sqrt{3} - 3 \times 30 - 40\sqrt{3}|}{\sqrt{3+9}} = 15(\sqrt{3} + 1) > 10\sqrt{10},$$

所以该船没有触礁的危险.

2.5.2 圆与圆的位置关系

学习任务目标

1. 能根据给定的方程判断圆与圆的位置关系.
2. 初步了解用代数方法处理几何问题的思想, 学会用数形结合思想处理问题.

问题式预习

【知识清单】

知识点 圆与圆的位置关系

已知圆 $O_1: (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = r_1^2 (r_1 > 0)$,
圆 $O_2: (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 = r_2^2 (r_2 > 0)$, 则两圆的位置关系如下:

位置关系	几何法: 圆心距 d 与 r_1, r_2 的关系	代数法: 两圆的方程组成的方程组的解的情况
外离	$d > r_1 + r_2$	没有实数解
外切	$d = r_1 + r_2$	一组实数解
相交	$ r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$	两组不同的实数解
内切	$d = r_1 - r_2 (r_1 \neq r_2)$	一组实数解
内含	$0 \leq d < r_1 - r_2 (r_1 \neq r_2)$	没有实数解

【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打“√”, 错误的打“×”).

- (1) 若两个圆的方程组成的方程组只有一组实数解, 则两圆外切. (×)
- (2) 若两圆的圆心距小于两圆的半径之和, 则两圆相交. (×)
- (3) 由两圆的方程消掉二次项后得到的二元一次方程是两圆的公共弦所在直线的方程. (×)

(4) 若两圆有公共点, 则两圆的半径 r_1, r_2 与圆心距 d 满足 $|r_1 - r_2| \leq d \leq r_1 + r_2$. (√)

2. 圆 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 和圆 $x^2 + y^2 + 4y = 0$ 的位置关系是 ()

A. 相离 B. 外切 C. 相交 D. 内切

C 解析: 两圆的方程可分别化为 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 和 $x^2 + (y+2)^2 = 4$, 两圆的圆心距为 $\sqrt{(1-0)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{5}$, 又 $2-1 < \sqrt{5} < 2+1$, 所以两圆相交.

3. 请思考并回答下列问题:

(1) 利用代数法判断两圆的位置关系, 当方程组无解时, 两圆一定是外离吗?

提示: 不一定, 也可能内含.

(2) 利用代数法判断两圆的位置关系, 当方程组有一组解时, 两圆一定是外切吗?

提示: 不一定, 也可能内切.

(3) 两圆的位置关系与其公切线的条数有什么关系?

提示: 当两圆外离时有四条公切线, 当两圆外切时有三条公切线, 当两圆相交时有两条公切线, 当两圆内切时只有一条公切线, 当两圆内含时无公切线.

任务型课堂

任务1 圆与圆位置关系的判定

探究活动

例1 判断下列两圆的位置关系, 若相交, 请求出公共弦所在直线的方程.

(1) 圆 $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 1$ 和圆 $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 16$;

(2) 圆 $x^2 + y^2 + 6x - 7 = 0$ 和圆 $x^2 + y^2 + 6y - 27 = 0$.

解: (1) 根据题意得, 两圆的圆心分别为 $(-2, 2), (2, 5)$, 半径分别为 $r_1 = 1, r_2 = 4$, 两圆的圆心距 $d = \sqrt{[2 - (-2)]^2 + (5-2)^2} = 5$. 因为 $d = r_1 + r_2$, 所以两圆外切.

(2) 将圆的一般方程化成标准方程, 得 $(x+3)^2 + y^2 = 16, x^2 + (y+3)^2 = 36$, 故两圆的圆心分别为 $(-3, 0), (0, -3)$, 半径分别为 $r_1 = 4, r_2 = 6$, 两圆的圆心距 $d = \sqrt{(0+3)^2 + (-3-0)^2} = 3\sqrt{2}$.

因为 $6-4 < 3\sqrt{2} < 6+4$, 即 $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$, 所

以两圆相交.

因为 $x^2 + y^2 + 6x - 7 = 0$ 和 $x^2 + y^2 + 6y - 27 = 0$ 两式相减得 $3x - 3y + 10 = 0$, 所以公共弦的方程为 $3x - 3y + 10 = 0$.

【探究总结】

判断两圆的位置关系或利用两圆的位置关系求参数的取值范围有以下几个步骤:

(1) 利用圆的标准方程, 写出圆心坐标和半径;

(2) 计算两圆的圆心距 d ;

(3) 通过 d 与 $r_1 + r_2$ 和 $|r_1 - r_2|$ 的关系来判断两圆的位置关系或求参数的取值范围, 必要时可借助于图形, 数形结合.

应用迁移

1. 已知两圆分别为圆 $C_1: x^2 + y^2 = 81$ 和圆 $C_2: x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$, 这两圆的位置关系是 ()

A. 相离 B. 相交
C. 内切 D. 外切

C 解析: 圆 C_1 的圆心为 $C_1(0,0)$, 半径 $r_1=9$, 圆 C_2 的方程化为标准形式为 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$, 圆心为 $C_2(3,4)$, 半径 $r_2=4$, 所以 $|C_1C_2|=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5$. 因为 $r_1-r_2=5$, 所以 $|C_1C_2|=r_1-r_2$, 所以圆 C_1 和圆 C_2 内切.

2. 若圆 $C_1:x^2+y^2=1$ 与圆 $C_2:x^2+y^2-6x-8y+m=0$ 外切, 则 $m=$ ()

A. 21 B. 19 C. 9 D. -11

C 解析: 圆 C_1 的圆心为 $C_1(0,0)$, 半径为 1, 圆 C_2 的方程可化为 $(x-3)^2+(y-4)^2=25-m$, 圆心为 $C_2(3,4)$, 半径为 $\sqrt{25-m}$. 由题意得 $\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=1+\sqrt{25-m}$, 解得 $m=9$, 故选 C.

任务2 > 两圆相切问题

探究活动

例2 求与圆 $C:x^2+y^2-2x=0$ 外切, 且与直线 $l:x+\sqrt{3}y=0$ 相切于点 $M(3,-\sqrt{3})$ 的圆的方程.

解: 圆 C 的方程可化为 $(x-1)^2+y^2=1$, 圆心为 $C(1,0)$, 半径为 1.

设所求圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ($r>0$),

$$\text{由题意可得} \begin{cases} \sqrt{(a-1)^2+b^2}=r+1, \\ \frac{b+\sqrt{3}}{a-3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -1, \\ \frac{|a+\sqrt{3}b|}{2} = r, \end{cases} \text{解得}$$

$$\begin{cases} a=4, \\ b=0, \\ r=2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a=0, \\ b=-4\sqrt{3}, \\ r=6. \end{cases}$$

所以所求圆的标准方程为 $(x-4)^2+y^2=4$ 或 $x^2+(y+4\sqrt{3})^2=36$.

【探究总结】

两圆相切时常用的性质

(1) 设两圆的圆心分别为 O_1, O_2 , 半径分别为 r_1, r_2 , 则 $\begin{cases} \text{内切} \Leftrightarrow |O_1O_2| = |r_1 - r_2|, \\ \text{外切} \Leftrightarrow |O_1O_2| = r_1 + r_2. \end{cases}$

(2) 两圆相切时, 两圆圆心所在的直线过切点 (两圆相交时, 两圆圆心所在的直线垂直平分公共弦).

83 应用迁移

求过点 $(0,6)$ 且与圆 $C:x^2+y^2+10x+10y=0$ 相切于原点的圆的标准方程.

解: 将圆 C 的方程化为标准方程得 $(x+5)^2+(y+5)^2=50$, 则圆心为 $(-5,-5)$,

所以经过此圆心和原点的直线方程为 $x-y=0$.

(方法一) 设所求圆的标准方程是 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ($r>0$).

$$\text{由题意得} \begin{cases} (0-a)^2+(0-b)^2=r^2, \\ (0-a)^2+(6-b)^2=r^2, \\ a-b=0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=3, \\ b=3, \\ r=3\sqrt{2}. \end{cases}$$

故所求圆的标准方程是 $(x-3)^2+(y-3)^2=18$.

(方法二) 易知所求圆的圆心在直线 $x-y=0$ 上.

由题意, 所求圆经过点 $(0,0)$ 和 $(0,6)$,

所以圆心一定在直线 $y=3$ 上.

$$\text{所以由} \begin{cases} y=3, \\ x-y=0, \end{cases} \text{得圆心为} (3,3).$$

所以 $r=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$.

故所求圆的标准方程为 $(x-3)^2+(y-3)^2=18$.

任务3 > 两圆相交问题

探究活动

例3 已知圆 $C_1:x^2+y^2-2x-6y-1=0$ 和圆 $C_2:x^2+y^2-10x-12y+45=0$.

(1) 判断圆 C_1 和圆 C_2 的位置关系, 并说明理由;

(2) 求圆 C_1 和圆 C_2 的公共弦所在直线的方程和公共弦的长.

解: (1) 圆 C_1 和圆 C_2 相交, 理由如下:

将圆 C_1 和圆 C_2 的一般方程化为标准方程, 得圆 $C_1:(x-1)^2+(y-3)^2=11$, 圆 $C_2:(x-5)^2+(y-6)^2=16$, 则圆心 $C_1(1,3)$, 半径 $r_1=\sqrt{11}$, 圆心 $C_2(5,6)$, 半径 $r_2=4$.

又两圆的圆心距 $d=|C_1C_2|=\sqrt{(5-1)^2+(6-3)^2}=5$, $r_1+r_2=\sqrt{11}+4$,

$$|r_1-r_2|=4-\sqrt{11},$$

所以 $|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$,

所以圆 C_1 和圆 C_2 相交.

(2) 将圆 C_1 和圆 C_2 的方程相减,

$$\text{得 } 4x+3y-23=0,$$

所以两圆的公共弦所在直线的方程为 $4x+3y-23=0$.

因为圆心 $C_2(5,6)$ 到直线 $4x+3y-23=0$ 的距离

$$d=\frac{|20+18-23|}{\sqrt{16+9}}=3,$$

所以公共弦长为 $2\sqrt{r_2^2-d^2}=2\sqrt{16-9}=2\sqrt{7}$.

【探究总结】

1. 求两圆的公共弦所在直线的方程的方法: 将两圆的方程相减即得两圆公共弦所在直线的方程, 但必须注意只有当两圆方程中的二次项系数相同时, 才能如此求解, 否则应先调整系数.

2. 求两圆公共弦的长的方法: 一是联立两圆的方程求出交点坐标, 再用两点间的距离公式求解; 二是先求出两圆的公共弦所在直线的方程, 再利用以半径、弦心距和弦长的一半为三边长的直角三角形求解.

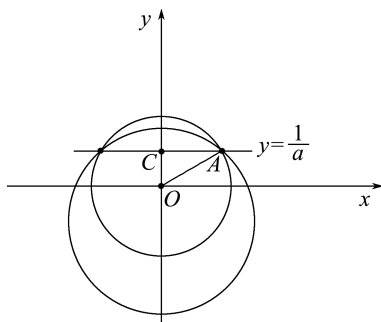
3. 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$ 相交, 则过两圆交点的圆的方程可设为 $x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + \lambda(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0 (\lambda \neq -1)$.

应用迁移

1. 若圆 $x^2 + y^2 = 4$ 与圆 $x^2 + y^2 + 2ay - 6 = 0 (a > 0)$ 的公共弦的长为 $2\sqrt{3}$, 则 $a =$ _____.

1 解析: 将两圆的方程作差得公共弦所在直线的方程为 $y = \frac{1}{a}$.

如图, 由已知 $|AC| = \sqrt{3}$, $|OA| = 2$,

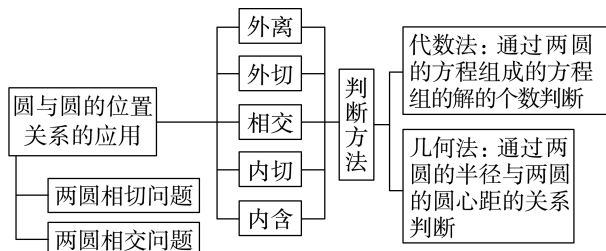


所以 $|OC| = \frac{1}{a} = 1$, 所以 $a = 1$.

2. 求过圆 $x^2 + y^2 + 6x - 4 = 0$ 与 $x^2 + y^2 + 6y - 28 = 0$ 的交点, 且圆心在直线 $x - y - 4 = 0$ 上的圆的方程.

解: 设所求圆的方程为 $x^2 + y^2 + 6x - 4 + \lambda(x^2 + y^2 + 6y - 28) = 0, \lambda \neq -1$, 整理得 $(1 + \lambda)x^2 + (1 + \lambda)y^2 + 6x + 6\lambda y - 4 - 28\lambda = 0$, 所以圆心为 $\left(\frac{-3}{1 + \lambda}, \frac{-3\lambda}{1 + \lambda}\right)$. 又因为圆心在直线 $x - y - 4 = 0$ 上, 所以 $-\frac{3}{1 + \lambda} - \left(\frac{-3\lambda}{1 + \lambda}\right) - 4 = 0$, 解得 $\lambda = -7$, 因此所求圆的方程为 $x^2 + y^2 - x + 7y - 32 = 0$.

提质归纳



课后素养评价 (二十五)

圆与圆的位置关系

A组 学习·理解

1. 圆 $C_1: x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$ 的位置关系是 ()

A. 内切 B. 相交
C. 外切 D. 外离

C 解析: 因为圆 $C_1: x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 的圆心为 $C_1(2, -1)$, 半径为 $r_1 = 2$,

圆 $C_2: x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$ 的圆心为 $C_2(-2, 2)$, 半径为 $r_2 = 3$,

又 $|C_1C_2| = \sqrt{(2+2)^2 + (-1-2)^2} = 5 = r_1 + r_2$, 所以两圆的位置关系为外切.

故选 C.

2. 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$, 圆 $C_2: x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$, 则圆 C_1 与圆 C_2 的公切线的条数为 ()

A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

B 解析: 由圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$, 得 $(x + 1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, 则其圆心为 $C_1\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$, 半径 $r_1 = \frac{3}{2}$,

由圆 $C_2: x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$, 得 $(x + 2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$, 则其圆心为 $C_2\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$, 半径 $r_2 = \frac{\sqrt{17}}{2}$,

则两圆的圆心距为 $|C_1C_2| = 1, r_1 + r_2 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$,

$r_2 - r_1 = \frac{\sqrt{17} - 3}{2}$.

因为 $r_2 - r_1 < |C_1C_2| < r_2 + r_1$, 则两圆相交, 所以圆 C_1 与圆 C_2 的公切线有 2 条, 故选 B.

3. 若圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$ 与 $x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$ 相交于 A, B 两点, 则公共弦 AB 的长是 ()

A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

B 解析: 圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$, 即 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$,

所以圆心为 $(-1, 2)$, 半径为 $\sqrt{10}$.

圆 $x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$, 即 $(x + 1)^2 + y^2 = 2$,

所以圆心为 $(-1, 0)$, 半径为 $\sqrt{2}$.

所以两圆圆心距为 $\sqrt{(-1+1)^2 + (2-0)^2} = 2 \in$

$$(\sqrt{10}-\sqrt{2}, \sqrt{10}+\sqrt{2}),$$

所以两圆相交,两圆方程作差得到 $y=-1$,即公共弦所在直线的方程为 $y=-1$.

又圆 $(x+1)^2+(y-2)^2=10$ 的圆心 $(-1,2)$ 到直线 $y=-1$ 的距离为 3,

所以公共弦 AB 的长为 $2\sqrt{(\sqrt{10})^2-3^2}=2$. 故选 B.

4. 以 $(3,-4)$ 为圆心,且与圆 $x^2+y^2=1$ 外切的圆 C 的方程为 ()

A. $(x+3)^2+(y+4)^2=4$

B. $(x-3)^2+(y+4)^2=16$

C. $(x-3)^2+(y-4)^2=16$

D. $(x-3)^2+(y+4)^2=4$

B 解析:由题意可知,两圆的圆心距为

$$\sqrt{(3-0)^2+(-4-0)^2}=5, \text{ 设圆 } C \text{ 的半径为 } r,$$

因为两圆外切,则 $5=r+1$,得 $r=4$,

所以圆 C 的方程为 $(x-3)^2+(y+4)^2=16$.

5. 若圆 $O_1: x^2+y^2+y=0$ 和圆 $O_2: x^2+y^2-2x=0$ 的交点为 A, B , 则线段 AB 的中垂线方程为 ()

A. $x-y-2=0$

B. $x-2y-1=0$

C. $2x-y-1=0$

D. $x-2y=0$

B 解析:由圆 $O_1: x^2+y^2+y=0$, 可得 $x^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$, 圆心为 $O_1(0, -\frac{1}{2})$,

由圆 $O_2: x^2+y^2-2x=0$, 可得 $(x-1)^2+y^2=1$, 圆心为 $O_2(1, 0)$, 根据圆的对称性可知, O_1O_2 即线段 AB 的中垂线, 故其方程为 $y=\frac{1}{2}(x-1)$, 即 $x-2y-1=0$. 故选 B.

6. 已知圆 $C: (x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=1$ 和点 $A(-t, 0), B(t, 0) (t>0)$, 若圆 C 上存在点 P , 使得 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}=0$, 则 t 的取值范围为 ()

A. $(0, 1]$

B. $[1, 3]$

C. $[2, 3]$

D. $[3, 4]$

B 解析: $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}=0$ 说明点 P 在以 AB 为直径的圆 $x^2+y^2=t^2$ 上, 而点 P 又在圆 C 上, 因此两圆有公共点, 则两圆的圆心距位于半径差的绝对值与半径和的闭区间中, 所以 $|t-1| \leq |OC| \leq t+1$. 又 $|OC|=\sqrt{(\sqrt{3}-0)^2+(1-0)^2}=2$, 所以 $|t-1| \leq 2 \leq t+1$. 又 $t>0$, 解得 $1 \leq t \leq 3$. 故选 B.

7. 若圆 $x^2+y^2=r^2 (r>0)$ 与圆 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$ 有公共点, 则实数 r 的取值范围是 _____.

$[\sqrt{5}-1, \sqrt{5}+1]$ 解析:由 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$, 得 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$, 则圆心为 $(-1, 2)$, 半径为 1, 两圆圆心之间的距离为 $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$. 因为

两圆有公共点, 所以 $|r-1| \leq \sqrt{5} \leq r+1$, 所以 $\sqrt{5}-1 \leq r \leq \sqrt{5}+1$, 即 $-1 \leq r-\sqrt{5} \leq 1$, 所以 $\sqrt{5}-1 \leq r \leq \sqrt{5}+1$.

8. 圆 $C_1: x^2+y^2=1$ 与圆 $C_2: x^2+y^2-8x-9=0$ 的公切线方程为 _____.

$x=-1$ 解析:圆 $C_2: x^2+y^2-8x-9=0$, 即 $(x-4)^2+y^2=25$,

因此 $C_1(0, 0), r_1=1, C_2(4, 0), r_2=5$, 所以 $|C_1C_2|=4=r_2-r_1$,

故两圆内切, 公切线只有一条, 与两圆圆心的连线即 x 轴垂直.

$$\text{由 } \begin{cases} x^2+y^2-8x-9=0, \\ x^2+y^2=1, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x=-1, \\ y=0, \end{cases}$$

所以切点为 $(-1, 0)$,

故公切线方程为 $x=-1$.

B组 应用·实践

1. 已知圆 $x^2+y^2-2x-5=0$ 和圆 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 的交点为 A, B , 则线段 AB 的垂直平分线的方程为 ()

A. $x+y-1=0$

B. $2x-y+1=0$

C. $x-2y+1=0$

D. $x-y+1=0$

A 解析:由题意得, 所求直线即为两圆圆心 $(1, 0), (-1, 2)$ 连线所在的直线, 故由 $\frac{y-0}{2-0}=\frac{x-1}{-1-1}$, 得 $x+y-1=0$.

2. (多选) 若圆 $C_1: x^2+y^2=1$ 和圆 $C_2: x^2+y^2-6x-8y-k=0$ 没有公共点, 则实数 k 的值可能是 ()

A. -16

B. -9

C. 11

D. 12

AD 解析:将圆 $C_2: x^2+y^2-6x-8y-k=0$ 化为 $(x-3)^2+(y-4)^2=25+k$, 则 $k>-25$, 圆心为 $C_2(3, 4)$, 半径为 $\sqrt{25+k}$;

圆 $C_1: x^2+y^2=1$ 的圆心为 $C_1(0, 0)$, 半径为 1.

要使圆 C_1 和圆 C_2 没有公共点, 则 $|C_1C_2|>\sqrt{25+k}+1$ 或 $|C_1C_2|<\sqrt{25+k}-1$.

$$\text{又 } |C_1C_2|=5,$$

$$\text{所以 } 5>\sqrt{25+k}+1 \text{ 或 } 5<\sqrt{25+k}-1,$$

$$\text{解得 } -25<k<-9 \text{ 或 } k>11.$$

所以实数 k 的取值范围是 $(-25, -9) \cup (11, +\infty)$.

故选 AD.

3. 过圆 $x^2+y^2=4$ 外一点 $M(4, -1)$ 作圆的两条切线, 则经过两切点的直线的方程为 ()

A. $4x-y-4=0$

B. $4x+y-4=0$

C. $4x+y+4=0$

D. $4x-y+4=0$

A 解析:以线段 OM 为直径的圆的方程为 $x^2 + y^2 - 4x + y = 0$, 经过两切点的直线就是两圆的公共弦所在的直线. 将两圆的方程相减得 $4x - y - 4 = 0$, 这就是经过两切点的直线方程.

4. (多选) 已知圆 $C_1: (x-1)^2 + y^2 = 1$ 和圆 $C_2: x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$, 则 ()

A. 圆 C_2 的半径为 4

B. y 轴为圆 C_1 与 C_2 的公切线

C. 圆 C_1 与 C_2 公共弦所在直线的方程为 $x + 2y - 1 = 0$

D. 圆 C_1 与 C_2 上共有 6 个点到直线 $2x - y - 2 = 0$ 的距离为 1

BD 解析: 对于 A, 由圆 $C_2: x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$, 得 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$,

所以圆 C_2 的半径为 2, 故选项 A 错误;

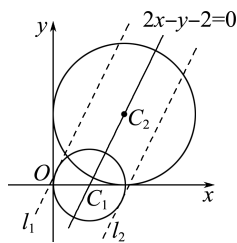
对于 B, 因为圆心 $C_1(1, 0)$ 到 y 轴的距离为 1, 等于圆 C_1 的半径, 所以圆 C_1 与 y 轴相切,

同理圆心 $C_2(2, 2)$ 到 y 轴的距离等于圆 C_2 的半径, 圆 C_2 与 y 轴相切, 故 y 轴为圆 C_1 与 C_2 的公切线, 故选项 B 正确;

对于 C, 将 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 与 $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ 相减,

即得圆 C_1 与 C_2 的公共弦所在的直线方程为 $x + 2y - 2 = 0$, 故选项 C 错误;

对于 D, 如图, 因为直线 $2x - y - 2 = 0$ 同时经过两圆的圆心, 依题意可作两条与该直线平行且距离为 1 的直线 l_1 与 l_2 , 其中 l_1 和 l_2 与圆 C_1 相切, 各有一个公共点, l_1 和 l_2 与圆 C_2 都相交, 各有两个交点, 所以圆 C_1 与 C_2 上共有 6 个点到直线 $2x - y - 2 = 0$ 的距离为 1, 故选项 D 正确.



5. 与圆 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ 外切于点 $A(4, -1)$ 且半径为 1 的圆的方程为 _____.

$(x-5)^2 + (y+1)^2 = 1$ **解析:** 设所求圆的圆心为

$P(a, b)$, 则 $\sqrt{(a-4)^2 + (b+1)^2} = 1$. ①

因为两圆外切,

所以有 $\sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2} = 1 + 2 = 3$. ②

联立①②, 解得 $a = 5, b = -1$.

故所求圆的方程为 $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 1$.

6. 过原点 O 作圆 $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 16 = 0$ 的两条切线, 设切点分别为 P, Q , 则直线 PQ 的方程为 _____.

$x + 2y - 8 = 0$ **解析:** 把圆的方程化成标准方程为 $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 4$, 所以圆心为 $(2, 4)$, 半径为 2.

圆心到原点的距离为 $\sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$, 所以切线长为 $\sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2^2} = 4$, 所以 P, Q 在以 $(0, 0)$ 为圆心, 以 4 为半径的圆上, 方程为 $x^2 + y^2 = 16$.

由 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 8y + 16 = 0, \\ x^2 + y^2 - 16 = 0, \end{cases}$

得 $x + 2y - 8 = 0$, 即直线 PQ 的方程为 $x + 2y - 8 = 0$.

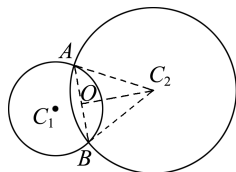
7. 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 - 2x = 0$ 和圆 $C_2: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ 相交于 A, B 两点.

(1) 求公共弦 AB 所在直线的方程;

(2) 求 $\triangle ABC_2$ 的面积.

解: (1) 因为 $C_1: x^2 + y^2 - 2x = 0, C_2: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$, 所以两圆方程作差得 $4x + 4y - 4 = 0$, 即 $x + y - 1 = 0$, 所以公共弦 AB 所在直线的方程为 $x + y - 1 = 0$.

(2) 如图, 连接 AB, AC_2, BC_2 , 取 AB 的中点 O , 连接 C_2O , 根据圆的性质可得 $C_2O \perp AB$.



圆 C_2 的方程为 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ 可整理为 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$, 所以 $C_2(3, 2), |AC_2| = 3$.

由 (1) 得点 C_2 到直线 AB 的距离 $|C_2O| = \frac{|3+2-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{2}$,

所以在 $\text{Rt}\triangle AOC_2$ 中, $|AO| = \sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 1$, 所以 $|AB| = 2$.

故 $S_{\triangle ABC_2} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |C_2O| = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

迁移应用

学习目标

1. 在掌握直线与圆的位置关系的基础上,能够利用数形结合的方法解决与圆相关的最值问题以及参数的范围问题.
2. 能够利用坐标法解决平面解析几何问题.

类型一 用数形结合法解决与圆有关的最值和范围问题

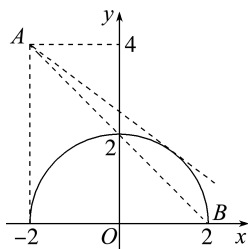
例1 (1)若直线 $l: kx - y + 4 + 2k = 0$ 与曲线 $y = \sqrt{4-x^2}$ 有两个交点,则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $\{k \mid k = \pm 1\}$
 B. $\{k \mid k < -\frac{3}{4}\}$
 C. $\{k \mid -1 \leq k < -\frac{4}{3}\}$
 D. $\{k \mid -1 \leq k < -\frac{3}{4}\}$

(2)已知圆 $O_1: x^2 + (y-2)^2 = 1$, 圆 $O_2: (x-3)^2 + (y-6)^2 = 9$, 过 x 轴上一点 P 分别作两圆的切线,切点分别为 M, N , 则 $|PM| + |PN|$ 的最小值为 _____.

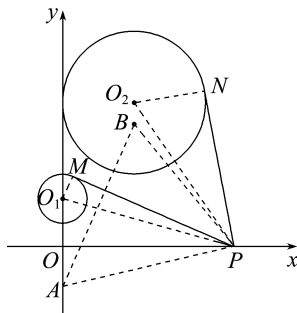
(1)D 解析:由题意可知,直线 l 的方程可化为 $(x+2)k - y + 4 = 0$, 所以直线 l 恒过点 $A(-2, 4)$. $y = \sqrt{4-x^2}$ 可化为 $x^2 + y^2 = 4 (y \geq 0)$, 其表示圆心为原点,半径为 2 的圆的上半部分,当直线 l 与该曲线相切时,点 $(0,0)$ 到直线的距离 $d = \frac{|4+2k|}{\sqrt{k^2+1}} = 2$, 解得 $k = -\frac{3}{4}$.

设 $B(2,0)$, 则 $k_{AB} = \frac{4-0}{-2-2} = -1$. 如图所示,由图可得,若要使直线 $l: kx - y + 4 + 2k = 0$ 与曲线 $y = \sqrt{4-x^2}$ 有两个交点,需要 $-1 \leq k < -\frac{3}{4}$, 即实数 k 的取值范围是 $\{k \mid -1 \leq k < -\frac{3}{4}\}$. 故选 D.



(2) $\sqrt{57}$ 解析:由题意知圆 $O_1: x^2 + (y-2)^2 = 1$ 的圆心为 $(0, 2)$, 半径 $r_1 = 1$;

圆 $O_2: (x-3)^2 + (y-6)^2 = 9$ 的圆心为 $(3, 6)$, 半径 $r_2 = 3$, 如图所示.



设 $P(t, 0)$, 则 $|PM| = \sqrt{|PO_1|^2 - 1^2} = \sqrt{t^2 + 4 - 1} = \sqrt{t^2 + 3}$,

$|PN| = \sqrt{|PO_2|^2 - 3^2} = \sqrt{(t-3)^2 + 6^2 - 9} = \sqrt{(t-3)^2 + 27}$,

则 $|PM| + |PN| = \sqrt{t^2 + 3} + \sqrt{(t-3)^2 + 27} = \sqrt{(t-0)^2 + [0 - (-\sqrt{3})]^2}$

$+ \sqrt{(t-3)^2 + (0 - 3\sqrt{3})^2}$,

所以 $|PM| + |PN|$ 等价于点 $P(t, 0)$ 到点 $(0, -\sqrt{3})$ 与 $(3, 3\sqrt{3})$ 的距离之和.

设 $A(0, -\sqrt{3})$, $B(3, 3\sqrt{3})$, 则 $|PM| + |PN| = |PA| + |PB| \geq |AB|$,

当且仅当 P, A, B 三点共线时, 等号成立,

此时 $|PM| + |PN|$ 的最小值为 $|AB| = \sqrt{(3-0)^2 + (3\sqrt{3} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{57}$.

【总结升华】

在点运动时,动点到直线或圆上一点的距离会发生变化,在变化过程中,就会出现一些最值问题,如距离最小、最大等.这些问题常常需要联系平面几何知识,利用数形结合思想进行求解.

(1)圆上的点到定点(点在圆外)的距离的最值问题

一般都是转化为定点到圆心的距离问题,定点到圆心的距离加半径为最大值,减半径为最小值.

(2)圆上的点到直线的距离的最值问题

已知圆 C 和圆外的一条直线 l ,则圆上的点到直线距离的最小值为 $d-r$,距离的最大值为 $d+r$,其中 d

为圆心到直线 l 的距离.

(3)过圆内定点的弦的长的最值问题

已知圆 C 及圆内一定点 P ,则过点 P 的所有弦中最长的为直径,最短的为与该直径垂直的弦.

类型二 用坐标法解决平面几何问题

例2 已知圆 $C: x^2 + y^2 = 2$.

(1)直线 l 过点 $Q\left(1, \frac{1}{2}\right)$,与圆 C 相交所得弦的长为2,求直线 l 的方程;

(2)过圆上一点 $P(1,1)$ 作两条相异直线分别与圆 C 相交于 A, B ,且直线 PA 和直线 PB 的倾斜角互补, O 为坐标原点,求证:直线 OP 和 AB 平行.

(1)解:直线 l 过点 $Q\left(1, \frac{1}{2}\right)$,

当直线 l 的斜率不存在时,方程为 $x=1$,与圆 C 相交得到的弦长等于 $2\sqrt{r^2-1}=2$,满足条件.

当直线 l 的斜率存在时,设直线 l 的方程为 $y - \frac{1}{2} = k(x-1)$,即 $kx - y + \frac{1}{2} - k = 0$,

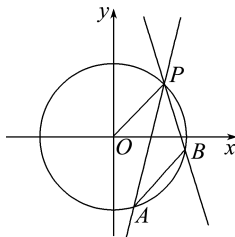
$$\text{则圆心 } C \text{ 到直线 } l \text{ 的距离 } d = \frac{\left|0-0+\frac{1}{2}-k\right|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{\left|\frac{1}{2}-k\right|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

$$\text{再由弦长公式可得 } 2 = 2\sqrt{2 - \frac{\left(\frac{1}{2}-k\right)^2}{k^2+1}}, \text{ 解得 } k = -\frac{3}{4},$$

故所求的直线方程为 $-\frac{3}{4}x - y + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 0$,即 $3x + 4y - 5 = 0$.

综上所述,直线 l 的方程为 $x=1$ 或 $3x+4y-5=0$.

(2)证明:由题意知,直线 PA 和直线 PB 的斜率存在,且互为相反数,



故可设 $l_{PA}: y-1=k(x-1)$, $l_{PB}: y-1=-k(x-1)$.

$$\text{由 } \begin{cases} y-1=k(x-1), \\ x^2+y^2=2, \end{cases} \text{ 得 } (1+k^2)x^2+2k(1-k)x+k^2-2k-1=0.$$

$$\text{则 } x_P x_A = \frac{k^2-2k-1}{1+k^2}, \text{ 又 } x_P = 1, \text{ 可得 } x_A = \frac{k^2-2k-1}{1+k^2}.$$

$$\text{同理 } x_B = \frac{k^2+2k-1}{1+k^2}.$$

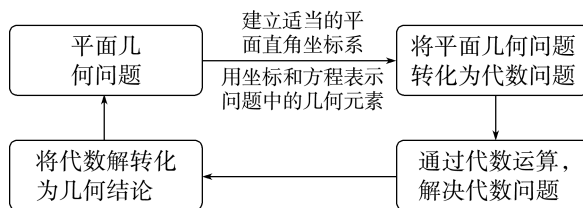
$$\text{所以 } k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-k(x_B-1) - k(x_A-1)}{x_B - x_A} = \frac{2k - k(x_A + x_B)}{x_B - x_A}$$

$$= \frac{2k - k\left(\frac{k^2-2k-1}{1+k^2} + \frac{k^2+2k-1}{1+k^2}\right)}{\frac{k^2+2k-1}{1+k^2} - \frac{k^2-2k-1}{1+k^2}} = 1 = k_{OP},$$

所以直线 AB 和 OP 一定平行.

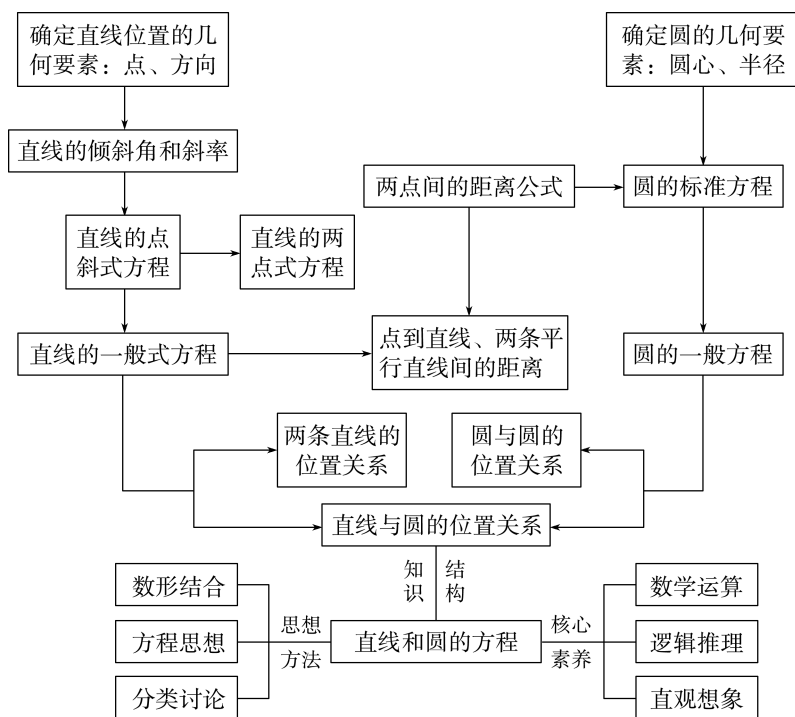
【总结升华】

用坐标法解决平面几何问题的基本过程



重构拓展

● 多维体系构建 ●



【问题探究】

1. 在平面直角坐标系中,我们是如何探索确定直线位置的几何要素的?它与平面几何中确定直线位置的几何要素有什么差异?
2. 直线的倾斜程度、倾斜角、斜率三者之间有什么关系?如何用直线上两点的坐标表示这条直线的斜率?直线的方向向量在刻画直线的倾斜角、斜率方面有什么作用?
3. 你能写出两点间的距离公式、点到直线的距离公式吗?比较用坐标法和向量法推导点到直线的距离公式的过程,你有何体会?
4. 位置关系是图形间的一种重要关系,直线与直线、

直线与圆、圆与圆各有哪些位置关系?我们是如何通过方程来研究这些位置关系的?你能说说用方程研究图形位置关系的基本思路与具体步骤吗?

5. 坐标法是研究和解决平面几何问题的重要方法,你能举例说明用坐标法解决平面几何问题“三步曲”中的第一步、第二步和第三步的具体含义吗?
6. 数形结合是重要的数学思想方法,坐标系把图形性质与代数运算结合起来,由此产生了解析几何这门学科,我们常说,两点间的距离公式是勾股定理的坐标表示,用“数”表示“形”,用“形”解释“数”,在解析几何的学习中经常遇到,你还能举出一些这方面的例子吗?

● 学科视野拓展 ●

拓展一

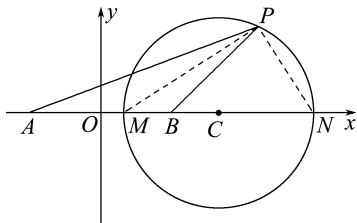
阿波罗尼斯圆

【拓展总结】

阿波罗尼斯证明过这样一个命题:平面内到两定点距离之比为常数 $k(k>0$ 且 $k\neq 1)$ 的点的轨迹是圆,后人将这个圆称为阿氏圆.

【定理 1】已知点 $P(x, y)$, $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$. 若 $\frac{PA}{PB} = \lambda (\lambda > 0$ 且 $\lambda \neq 1)$, 则点 P 的轨迹方程是 $\left(x - \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1}a\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2a\lambda}{\lambda^2 - 1}\right)^2$, 其轨迹是以 $\left(\frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1}a, 0\right)$ 为圆心, 半径为 $r = \left|\frac{2a\lambda}{\lambda^2 - 1}\right|$ 的圆.

【定理 2】 A, B 为两已知点, M, N 分别为线段 AB 的定比为 $\lambda (\lambda \neq 1)$ 的内外分点, 则以 MN 为直径的圆 C 上任意一点 P 到 A, B 两点的距离之比为 λ , 如下图.



注: 当定比分点在线段的延长线上时, 该点被称为外分点; 当该点在线段上时, 被称为内分点.

应用 1 (多选) 古希腊数学家阿波罗尼斯的著作《圆锥曲线论》中给出了阿波罗尼斯圆的定义: 在平面内, 已知两定点 A, B 之间的距离为 a (非零常数), 动点 M 到 A, B 的距离之比为常数 $\lambda (\lambda > 0, \text{且 } \lambda \neq 1)$, 则点 M 的轨迹是圆, 该圆简称为阿氏圆. 在平面直角坐标系中, 已知 $A(-4, 0), B(2, 0)$, 点 M 满足 $|MA| = 2|MB|$, 则下列说法正确的是 ()

A. $\triangle AMB$ 面积的最大值为 12

B. $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ 的最大值为 72

C. 若 $Q(8, 8)$, 则 $|MA| + 2|MQ|$ 的最小值为 10

D. 当点 M 不在 x 轴上时, MO 始终平分 $\angle AMB$

解析: 对于 A, 设点 $M(x, y)$, 由 $|MA| = 2|MB|$, 得 $\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-2)^2 + y^2}$,

$$\text{整理得 } (x-4)^2 + y^2 = 16,$$

所以点 M 的轨迹是以点 $(4, 0)$ 为圆心, 4 为半径的圆,

所以 $\triangle AMB$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2}|AB| \cdot r = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$, 故 A 正确;

对于 B, 设线段 AB 的中点为 N , 则 $N(-1, 0)$, 所以 $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (\vec{MN} + \vec{NA}) \cdot (\vec{MN} + \vec{NB}) = |\vec{MN}|^2 - |\vec{NA}|^2 \leq (8+1)^2 - (-1+4)^2 = 72$,

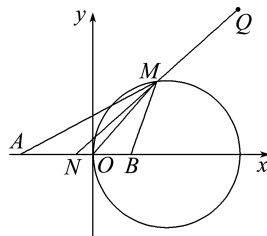
当点 M 的坐标为 $(8, 0)$ 时取等号, 故 $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ 的最大值为 72, 故 B 正确;

对于 C, 显然点 $Q(8, 8)$ 在圆外, 点 $B(2, 0)$ 在圆内, $|MA| + 2|MQ| = 2|MB| + 2|MQ| = 2(|MB| + |MQ|) \geq 2|BQ| = 2\sqrt{(8-2)^2 + 8^2} = 20$, 当 B, M, Q 三点共线且点 M 在线段 BQ 上时, $(|MA| + 2|MQ|)_{\min} = 20$, 故 C 错误;

对于 D, 由 $|OA| = 4, |OB| = 2$, 有 $\frac{|OA|}{|OB|} = 2 =$

$$\frac{|MA|}{|MB|}, \text{ 当点 } M \text{ 不在 } x \text{ 轴上时,}$$

由三角形内角平分线分线段成比例定理的逆定理知, MO 是 $\triangle AMB$ 中 $\angle AMB$ 的平分线, 故 D 正确. 故选 ABD.



拓展二

欧拉线

【拓展总结】

瑞士著名数学家欧拉在 1765 年提出定理: 三角形的外心、重心、垂心位于同一直线上, 这条直线被后人称为三角形的欧拉线.

应用 2 在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 满足 $AC = BC$, 顶点 A, B 的坐标分别为 $(-1, 0), (1, 2)$, 且其欧拉线与圆 $M: (x+5)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 相切.

(1) 求 $\triangle ABC$ 的“欧拉线”方程;

(2) 若圆 M 与圆 $x^2 + (y-a)^2 = 2$ 有公共点, 求 a 的取值范围.

解: (1) 因为 $AC = BC$, 所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, $\triangle ABC$ 的外心、重心、垂心均在边 AB 的垂直平分线上.

设 $\triangle ABC$ 的欧拉线为 l , 则 l 过线段 AB 的中点, 且与直线 AB 垂直.

由 $A(-1, 0), B(1, 2)$ 可得, 线段 AB 的中点为 $D\left(\frac{1-1}{2}, \frac{2+0}{2}\right)$, 即 $D(0, 1)$.

$$\text{由 } k_{AB} = \frac{2-0}{1-(-1)} = 1, \text{ 得 } k_l = -1,$$

故 l 的方程为 $y-1 = -x$, 即 $x+y-1=0$.

(2) 因为 l 与圆 $M: (x+5)^2 + y^2 = r^2$ 相切, 且圆心为 $M(-5, 0)$, 所以 $r = \frac{|6|}{\sqrt{1+1}} = 3\sqrt{2}$.

圆 $x^2 + (y-a)^2 = 2$ 的圆心坐标为 $(0, a)$, 半径 $r_1 = \sqrt{2}$,

要想圆 M 与圆 $x^2 + (y-a)^2 = 2$ 有公共点, 则两圆外切、相交或内切,

只需两圆圆心的距离小于等于半径之和, 大于等于半径之差的绝对值,

即 $|3\sqrt{2}-\sqrt{2}| \leq \sqrt{(-5)^2+a^2} \leq 3\sqrt{2}+\sqrt{2}$, 即 $2\sqrt{2} \leq \sqrt{25+a^2} \leq 4\sqrt{2}$, 解得 $-\sqrt{7} \leq a \leq \sqrt{7}$.

故 a 的取值范围是 $[-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$.

★★★★

拓展三 隐圆问题

【拓展总结】

对于一些直线和圆的问题,虽然条件中并没有直接给出有关圆的方程,但实际上可以通过某些条件求出圆的方程,再利用圆的知识来解答,这类问题称为隐圆问题.确定隐圆的常见的方法有:

(1) 利用圆的定义(到定点的距离等于定长的点的轨迹)确定隐圆;

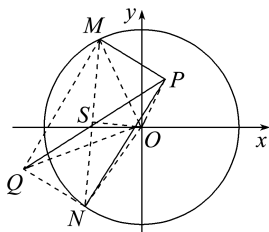
(2) 利用圆的性质(动点与两定点连线的夹角为直角)确定隐圆;

(3) 已知两定点 A, B , 若动点 P 满足 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 为定值,则由此可确定隐圆;

(4) 已知两定点 A, B , 若动点 P 满足 $|PA|^2 + |PB|^2$ 为定值,则由此可确定隐圆.

应用 3 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 16$, 点 $P(1, 2), M, N$ 为圆上两个不同的点, 且 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0$. 若 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}$, 则 $|PQ|$ 的最小值为_____.

$3\sqrt{3} - \sqrt{5}$ **解析:** 如图, 由 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0$ 知, $PM \perp PN$, 又 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}$, 连接 MQ, QN , 则四边形 $PMQN$ 为矩形.



(方法一) 连接 MN , 设 MN 的中点为 S , 连接 OS , OM, ON , 则 $|OM| = |ON| = 4, OS \perp MN$,

所以 $|OS|^2 = |OM|^2 - |MS|^2 = 16 - |MS|^2$.

又 $\triangle PMN$ 为直角三角形, S 为 MN 的中点, 则 $|MS| = |PS|$, 所以 $|OS|^2 = 16 - |PS|^2$. 设 $S(x, y)$, 则 $x^2 + y^2 = 16 - [(x-1)^2 + (y-2)^2]$, 即 $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 = \frac{27}{4}$, 这表明点 S 的轨迹为圆 $T: (x - \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 = \frac{27}{4}$, 圆心为 $T(\frac{1}{2}, 1)$, 半径为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 由点 P

在圆 T 内, 得 $|PS|_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - |PT| = \frac{3\sqrt{3}}{2} -$

$\sqrt{(1 - \frac{1}{2})^2 + (2 - 1)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$. 故 $|PQ|_{\min} = 2 \times$

$(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}) = 3\sqrt{3} - \sqrt{5}$.

(方法二) 连接 OP, OQ, OM, ON , 由矩形的性质得

$|OM|^2 + |ON|^2 = |OP|^2 + |OQ|^2$, 即 $16 + 16 = 5 +$

$|OQ|^2$, 所以 $|OQ| = 3\sqrt{3}$, 即点 Q 的轨迹为以 O 为圆

心, $3\sqrt{3}$ 为半径的圆, 点 P 在该圆内, $|OP| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, 故 $|PQ|_{\min} = 3\sqrt{3} - |OP| = 3\sqrt{3} - \sqrt{5}$.

单元测试卷(二)

(考查范围:第二章 时间:120 分钟 分值:150 分)

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.过 $A(-2, -3), B(1, 0)$ 两点的直线的倾斜角是

()

- A. 45° B. 60°
C. 120° D. 135°

A 解析: 已知 $A(-2, -3), B(1, 0)$, 则 $k_{AB} = \frac{-3-0}{-2-1} = 1$. 设直线 AB 的倾斜角为 θ , 则 $\tan \theta = k_{AB} = 1$, 得 $\theta = 45^\circ$.

2.已知直线 $l_1: -m^2x + y - 1 = 0$, 直线 $l_2: (2m-3)x + y - 3 = 0$, 则“ $m = -3$ ”是“ $l_1 \parallel l_2$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

A 解析: 因为 $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow -m^2 = 2m - 3 \Leftrightarrow m = 1$ 或 $m = -3$, 所以“ $m = -3$ ”是“ $l_1 \parallel l_2$ ”的充分不必要条件. 故选 A.

3.过点 $P(1, 3)$, 且与 x 轴、 y 轴的正半轴围成三角形的面积等于 6 的直线的方程是 ()

- A. $3x + y - 6 = 0$ B. $x + 3y - 10 = 0$
C. $3x - y = 0$ D. $x - 3y + 8 = 0$

A 解析: 设所求直线的方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 (a > 0, b > 0)$, 则有 $\frac{1}{2}ab = 6$, 且 $\frac{1}{a} + \frac{3}{b} = 1$. 由

$$\begin{cases} ab = 12, \\ \frac{1}{a} + \frac{3}{b} = 1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 2, \\ b = 6. \end{cases} \text{ 故所求直线的方程为 } \frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1, \text{ 即为 } 3x + y - 6 = 0.$$

4.已知直线 $x - 2y + m = 0 (m > 0)$ 与直线 $x + ny - 3 = 0$ 互相平行, 且它们之间的距离是 $\sqrt{5}$, 则 $m + n =$

()

- A. 0 B. 1 C. -1 D. 2

A 解析: 由题意两条直线平行, 所以 $n = -2$. 由两条平行直线间的距离公式, 得 $d = \frac{|m+3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} =$

$$\frac{|m+3|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}, \text{ 解得 } m = 2 \text{ 或 } m = -8 (\text{舍去}), \text{ 所以}$$

$$m + n = 0.$$

5.若直线 $3x - 4y + 12 = 0$ 与两坐标轴的交点为 A, B , 则过 A, B 及原点 O 三点的圆的方程是 ()

- A. $x^2 + y^2 + 4x - 3y = 0$
B. $x^2 + y^2 - 4x - 3y = 0$
C. $x^2 + y^2 + 4x - 3y - 4 = 0$
D. $x^2 + y^2 - 4x - 3y + 8 = 0$

A 解析: 由题意不妨设 $A(0, 3), B(-4, 0)$, 圆的方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$,

$$\text{则 } \begin{cases} 9 + 3E + F = 0, \\ 16 - 4D + F = 0, \\ F = 0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} D = 4, \\ E = -3, \\ F = 0, \end{cases}$$

所以所求圆的方程为 $x^2 + y^2 + 4x - 3y = 0$.

6.过原点的直线 l 与圆 $C: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ 相交于 A, B 两点, 若 $\triangle ABC$ 为正三角形, 则直线 l 的斜率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\pm \sqrt{2}$

C 解析: 根据题意, 圆 $C: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ 即 $(x-3)^2 + y^2 = 4$, 圆心为 $C(3, 0)$, 半径 $r = 2$.

设直线 l 的斜率为 k , 则直线 l 的方程为 $y = kx$, 即 $kx - y = 0$,

若直线 l 与圆 C 相交于 A, B 两点且 $\triangle ABC$ 为正三角形,

则圆心 C 到直线 l 的距离 $d = \sqrt{3}$, 即 $\frac{|3k|}{\sqrt{1+k^2}} = \sqrt{3}$,

$$\text{解得 } k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

7.数学家欧拉 1765 年在其所著的《三角形几何学》一书中提出:任意三角形的外心、重心、垂心在同一条直线上.后人称这条直线为欧拉线.已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(2, 0), B(0, 4)$, 若其欧拉线的方程为 $x - y + 2 = 0$, 则顶点 C 的坐标是 ()

- A. $(-4, 0)$ B. $(0, -4)$
C. $(4, 0)$ D. $(4, 0)$ 或 $(-4, 0)$

A 解析: 当顶点 C 的坐标是 $(-4, 0)$ 时, $\triangle ABC$ 的

重心坐标为 $\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$, 在欧拉线上, 对于其他选项, $\triangle ABC$ 的重心都不在欧拉线上.

8. 已知直线 $y=kx+m$ (m 为常数) 与圆 $x^2+y^2=4$ 交于点 M, N , 当 k 变化时, 若 $|MN|$ 的最小值为 2, 则 $m=$ ()

A. ± 1 B. $\pm\sqrt{2}$ C. $\pm\sqrt{3}$ D. ± 2

C 解析: 由题意可得圆心为 $(0,0)$, 半径为 2,

所以圆心到直线的距离 $d = \frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$,

则弦长为 $|MN| = 2\sqrt{4 - \frac{m^2}{k^2+1}}$.

当 $k=0$ 时, 弦长 $|MN|$ 取得最小值为 $2\sqrt{4-m^2}=2$, 解得 $m=\pm\sqrt{3}$.

二、多项选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知直线 $l_1: x+ay-a=0$ 和直线 $l_2: ax-(2a-3)y-1=0$, 下列说法正确的是 ()

A. l_2 始终过定点 $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

B. 若 $l_1 \parallel l_2$, 则 $a=1$ 或 $a=-3$

C. 若 $l_1 \perp l_2$, 则 $a=0$ 或 $a=2$

D. 当 $a>0$ 时, l_1 始终不过第三象限

ACD 解析: 选项 A, $l_2: a(x-2y)+3y-1=0$, 令

$\begin{cases} x-2y=0, \\ 3y-1=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\frac{2}{3}, \\ y=\frac{1}{3}, \end{cases}$ 过点 $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, 故 A 正确;

选项 B, 当 $a=1$ 时, l_1, l_2 重合, 故 B 错误;

选项 C, 当 $l_1 \perp l_2$ 时, 由 $1 \times a + a \times (3-2a) = 0$, 得 $a=0$ 或 $a=2$, 故 C 正确;

选项 D, 当 $a>0$ 时, $l_1: y = -\frac{1}{a}x + 1$ 始终过点 $(0, 1)$, 斜率为负, 所以不会过第三象限, 故 D 正确.

故选 ACD.

10. 已知圆 $O: x^2+y^2=4$ 和圆 $C: (x-3)^2+(y-3)^2=10$, 则下列说法正确的是 ()

A. 圆 O 与圆 C 有四条公切线

B. $|OC| = 3\sqrt{2}$

C. 圆 O 与圆 C 的公共弦所在直线的方程为 $x+y=2$

D. 圆 O 与圆 C 的公共弦的长为 $2\sqrt{2}$

BCD 解析: 由题意知, $O(0,0), C(3,3), r_O=2, r_C=\sqrt{10}$, 则 $|OC| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$, 故 B 正确;

又 $2+\sqrt{10} > 3\sqrt{2} > \sqrt{10}-2$, 即 $r_C - r_O < |OC| < r_O + r_C$, 所以圆 O 与圆 C 相交, 有两条公切线, 故 A 错误;

联立 $\begin{cases} (x-3)^2+(y-3)^2=10, \\ x^2+y^2=4, \end{cases}$ 整理得 $x+y=2$,

故圆 O 与圆 C 的公共弦所在直线 l 的方程为 $x+y=2$, 故 C 正确;

圆心 O 到直线 l 的距离为 $d = \frac{2}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$,

所以圆 O 与圆 C 的公共弦长为 $2\sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$, 故 D 正确.

11. 已知圆 C 截 y 轴所得的弦长为 2, 圆心 C 到直线

$l: x-2y=0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 且圆 C 被 x 轴分成的两段弧长之比为 3:1, 则圆 C 的方程为 ()

A. $(x+1)^2+(y+1)^2=2$

B. $(x-1)^2+(y-1)^2=2$

C. $(x+1)^2+(y-1)^2=2$

D. $(x-1)^2+(y+1)^2=2$

AB 解析: 设圆 C 的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, 则点 C 到 x 轴、 y 轴的距离分别为 $|b|, |a|$.

由题意可知 $\begin{cases} r^2=2b^2, \\ r^2=a^2+1, \\ \frac{|a-2b|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \end{cases}$ 所以

$\begin{cases} a=-1, \\ b=-1, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=1, \\ b=1, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-1, \\ b=1, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=1, \\ b=-1, \end{cases}$

故所求圆 C 的方程为 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$ 或 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 已知圆 C 的圆心坐标是 $(0, m)$, 半径是 r . 若直线 $2x-y+3=0$ 与圆 C 相切于点 $A(-2, -1)$, 则 $m=$ _____, $r=$ _____.

$-2\sqrt{5}$ 解析: 由题意可知 $k_{AC} = -\frac{1}{2}$, 所以直线

AC 的方程为 $y+1 = -\frac{1}{2}(x+2)$. 把 $(0, m)$ 代入直线 AC 的方程得 $m=-2$, 此时 $r = |AC| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

13. 已知点 $A(1, m), B(1, 2\sqrt{5}-m)$, 若圆 $C: x^2+y^2+2x=0$ 上有且只有一点 P , 使得 $PA \perp PB$, 则实数 m 的一个值为 _____. (写出满足条件的一个值即可)

$\sqrt{5}+2$ (答案不唯一) 解析:由题意知,圆 $C: x^2 + y^2 + 2x = 0$, 即 $(x+1)^2 + y^2 = 1$, 圆心为 $C(-1, 0)$, 半径 $r=1$.

设线段 AB 的中点为 M .

因为 $A(1, m), B(1, 2\sqrt{5}-m)$,

则 $M(1, \sqrt{5}), |AB| = 2|\sqrt{5}-m|$,

所以以 AB 为直径的圆 M 为 $(x-1)^2 + (y-\sqrt{5})^2 = (\sqrt{5}-m)^2$.

因为圆 $C: x^2 + y^2 + 2x = 0$ 上有且只有一点 P , 使得 $PA \perp PB$,

所以圆 C 与圆 M 相切.

又 $|MC| = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-\sqrt{5})^2} = 3$,

即有 $|\sqrt{5}-m| + 1 = 3$ 或 $|\sqrt{5}-m| - 1 = 3$,

解得 $m = \sqrt{5} \pm 2$ 或 $m = \sqrt{5} \pm 4$.

14. 已知 A 为圆 $C: x^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$ 上的动点, B 为

圆 $E: (x-3)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 上的动点, P 为直线 $y = \frac{1}{2}x$ 上的动点, 则 $|PB| - |PA|$ 的最大值为

$\frac{\sqrt{130}}{5} + 1$ 解析: 设 $E(3, 0)$ 关于直线 $y = \frac{1}{2}x$ 的

对称点为 $E'(m, n)$, 则 $\begin{cases} \frac{n}{m-3} \cdot \frac{1}{2} = -1, \\ \frac{n}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m+3}{2}, \end{cases}$ 解得

$\begin{cases} m = \frac{9}{5}, \\ n = \frac{12}{5}, \end{cases}$ 所以 $E'(\frac{9}{5}, \frac{12}{5})$.

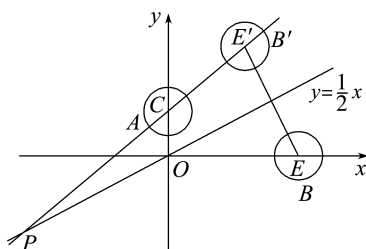
则圆 E 关于直线 $y = \frac{1}{2}x$ 对称的圆 E' 的方程为

$(x - \frac{9}{5})^2 + (y - \frac{12}{5})^2 = \frac{1}{4}$.

要使 $|PB| - |PA|$ 的值最大, 则 P, A, B' (其中 B'

为圆 E 关于直线 $y = \frac{1}{2}x$ 的对称圆 E' 上的点) 三点

共线, 且该直线过 C, E' 两点, 如图,



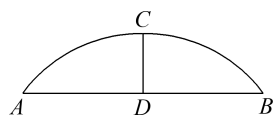
其最大值为 $|AB'| = |CE'| + 1 = \sqrt{(\frac{9}{5})^2 + (\frac{12}{5}-1)^2} + 1 = \frac{\sqrt{130}}{5} + 1$.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

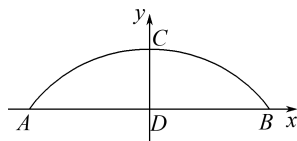
15. (13 分) 我国的隧道样式多种多样, 它们或傍山而过, 上方构筑顶棚形成“明洞”; 或挂于峭壁, 每隔一段开出“天窗”形成挂壁公路; 但是更多时候它们都隐伏于山体之中, 只露出窄窄的出入口洞门. 某学生学过圆的知识后受此启发, 为山体隧道设计了一个圆弧形洞门样式, 如图所示, 路宽为 16 m ($AB = 16$ m), 洞门最高处距路面 4 m ($CD = 4$ m).

(1) 建立适当的平面直角坐标系, 求圆弧 AB 的方程;

(2) 为使双向行驶的车辆更加安全, 该同学进一步优化了设计方案, 在路中间建立了 2 m 宽的隔墙. 某货车装满货物后整体呈长方体状, 宽 2 m, 高 3.6 m, 则此货车能否通过该洞门? 并说明理由.



解: (1) 以点 D 为坐标原点, AB, DC 所在直线分别为 x 轴、 y 轴, 建立如图所示的平面直角坐标系,



则点 $C(0, 4), B(8, 0)$.

由圆的对称性可知, 圆心在 y 轴上,

设圆心坐标为 $(0, b)$, 圆的半径为 r , 则圆弧 AB 所在圆的方程为 $x^2 + (y-b)^2 = r^2$.

因为点 C, B 在圆上, 所以 $\begin{cases} 0 + (4-b)^2 = r^2, \\ 8^2 + (0-b)^2 = r^2, \end{cases}$ 解得

$b = -6, r = 10$.

所以圆弧 AB 所在圆的方程为 $x^2 + (y+6)^2 = 100$,

因此圆弧 AB 的方程为 $x^2 + (y+6)^2 = 100 (0 \leq y \leq 4)$.

(2) 此货车不能通过该洞门. 理由如下:

由题意可知, 隔墙在 y 轴右侧 1 m, 而车宽 2 m, 车高 3.6 m,

所以货车右侧的最高点的坐标为 $(3, 3.6)$.

因为 $3^2 + (3.6+6)^2 > 100$,

所以此货车不能通过该洞门.

16. (15 分) 已知点 $P(x, y)$ 在圆 $x^2 + y^2 - 6x - 6y +$

14=0 上.

(1)求 $\frac{y}{x}$ 的最大值和最小值;

(2)求 x^2+y^2+2x+3 的最大值与最小值.

解:(1)圆的方程 $x^2+y^2-6x-6y+14=0$ 可化为 $(x-3)^2+(y-3)^2=4$,

即该圆以 (3,3) 为圆心,2 为半径.

因为 $\frac{y}{x} = \frac{y-0}{x-0}$, 所以 $\frac{y}{x}$ 即为 (0,0) 与该圆上一点确定的直线的斜率.

设过 (0,0) 与圆 $(x-3)^2+(y-3)^2=4$ 相切的直线方程为 $kx-y=0$ (斜率不存在时直线与圆是相离的), 则有 $2 = \frac{|3k-3|}{\sqrt{k^2+1}}$, 解得 $k = \frac{9 \pm 2\sqrt{14}}{5}$.

所以 $\left(\frac{y}{x}\right)_{\max} = \frac{9+2\sqrt{14}}{5}$, $\left(\frac{y}{x}\right)_{\min} = \frac{9-2\sqrt{14}}{5}$.

(2) $x^2+y^2+2x+3 = (x+1)^2+y^2+2$ 表示点 (x,y) 与点 (-1,0) 距离的平方加上 2.

因为点 (x,y) 在圆上, 点 (-1,0) 在圆外,

所以所求最大值为 $[\sqrt{(3+1)^2+(3-0)^2}+2]^2+2=51$, 所求最小值为 $[\sqrt{(3+1)^2+(3-0)^2}-2]^2+2=11$.

17. (15 分) 已知方程 $x^2+y^2-2x+4y+4m=0$.

(1)若此方程表示圆, 求正整数 m 的值;

(2)在 (1) 的条件下, 方程表示的圆为圆 C, 若从点 M(-4,1) 发出的光线经过直线 $y=-x$ 反射, 反射光线恰好平分圆 C, 求反射光线所在直线 l_1 的一般式方程.

解:(1)若此方程表示圆, 则 $(-2)^2+4^2-4 \times 4m > 0$, 解得 $m < \frac{5}{4}$.

因为 m 为正整数, 所以 $m=1$.

(2)在 (1) 的条件下, 方程表示圆 C: $(x-1)^2+(y+2)^2=1$.

由 l_1 恰好平分圆 C, 得 l_1 经过圆心 C(1,-2).

设点 M 关于直线 $y=-x$ 的对称点为 N(x,y), 则直线 MN 与直线 $y=-x$ 垂直, 且线段 MN 的中点 $\left(\frac{x-4}{2}, \frac{y+1}{2}\right)$ 在直线 $y=-x$ 上,

则有 $\begin{cases} \frac{y-1}{x+4} \times (-1) = -1, \\ \frac{y+1}{2} = -\frac{x-4}{2}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = -1, \\ y = 4, \end{cases}$

所以 N(-1,4).

所以直线 CN 即为直线 l_1 , 且 $k_{l_1} = k_{CN} = \frac{-2-4}{1-(-1)}$

$= -3$,

所以反射光线所在直线 l_1 的方程为 $y+2 = -3(x-1)$, 即 $3x+y-1=0$.

18. (17 分) 已知半径为 4 的圆 C 与直线 $l_1: 3x-4y+8=0$ 相切, 圆心 C 在 y 轴的负半轴上.

(1)求圆 C 的方程;

(2)已知直线 $l_2: kx-y+3=0$ 与圆 C 相交于 A, B 两点, 当 $\triangle ABC$ 面积最大时, 求直线 l_2 的方程.

解:(1)结合题意, 因为圆心 C 在 y 轴的负半轴上, 且半径为 4,

所以可设圆 C 的标准方程为 $x^2+(y-b)^2=16$, $b < 0$, 此时圆心为 C(0,b).

因为直线 $l_1: 3x-4y+8=0$ 与圆 C 相切, 所以圆心 C(0,b) 到直线 l_1 的距离为 4,

即 $\frac{|-4b+8|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 4$, 解得 $b=7$ (舍去) 或 $b=-3$,

所以圆 C 的方程为 $x^2+(y+3)^2=16$.

(2)由 (1) 可得圆 C: $x^2+(y+3)^2=16$ 的圆心为 C(0,-3), 半径 $r=4$,

所以圆心 C 到直线 $l_2: kx-y+3=0$ 的距离为 $d = \frac{|0+3+3|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{k^2+1}}$,

结合圆的弦长公式得 $|AB| = 2\sqrt{r^2-d^2} = 2\sqrt{16-d^2}$.

因为直线 l_2 与圆 C 相交于 A, B 两点,

所以 $0 < d^2 < r^2 = 16$,

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = d\sqrt{16-d^2}$
 $= \sqrt{d^2(16-d^2)} \leq \frac{d^2+(16-d^2)}{2} = 8$,

当且仅当 $d^2=16-d^2$, 即 $d=2\sqrt{2}$ 时, $\triangle ABC$ 的面积取得最大值 8.

所以 $d = \frac{6}{\sqrt{k^2+1}} = 2\sqrt{2}$, 解得 $k = \pm \frac{\sqrt{14}}{2}$.

所以直线 l_2 的方程为 $\sqrt{14}x-2y+6=0$ 或 $\sqrt{14}x+2y-6=0$.

19. (17 分) 已知圆 $C_1: x^2+y^2+6x-2y+6=0$ 和圆 $C_2: x^2+y^2-8x-10y+41-r^2=0$ ($r>0$).

(1)若圆 C_1 与圆 C_2 相交, 求 r 的取值范围;

(2)若直线 $l: y=kx+1$ 与圆 C_1 交于 P, Q 两点, 且 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 4$ (O 为原点), 求实数 k 的值;

(3)若 $r=2$, 设 P 为平面上的点, 且满足: 存在过点 P 的无穷多对互相垂直的直线 l_1 和 l_2 , 它们分别与圆 C_1 和圆 C_2 相交, 且直线 l_1 被圆 C_1 截得的弦

长与直线 l_2 被圆 C_2 截得的弦长相等,试求所有满足条件的点 P 的坐标.

解:(1)圆 $C_1: x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$ 的标准方程为 $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$, 则圆心 $C_1(-3, 1)$, $r_1 = 2$,

圆 $C_2: x^2 + y^2 - 8x - 10y + 41 - r^2 = 0 (r > 0)$ 的标准方程为 $(x-4)^2 + (y-5)^2 = r^2 (r > 0)$, 则圆心 $C_2(4, 5)$, $r_2 = r$,

所以 $|C_1C_2| = \sqrt{(4+3)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{65}$.

因为圆 C_1 与圆 C_2 相交, 所以 $|r_1 - r_2| < |C_1C_2| < r_1 + r_2$, 即 $|r - 2| < \sqrt{65} < r + 2$, 解得 $\sqrt{65} - 2 < r < \sqrt{65} + 2$.

所以 r 的取值范围为 $(\sqrt{65} - 2, \sqrt{65} + 2)$.

(2)已知直线 $l: y = kx + 1$ 与圆 C_1 交于 P, Q 两点, 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = kx + 1, \\ (x+3)^2 + (y-1)^2 = 4, \end{cases}$$

得 $(1+k^2)x^2 + 6kx + 5 = 0$,

由 $\Delta = 16 - 20k^2 > 0$, 得 $k \in \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$,

$$\text{所以} \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{6}{1+k^2}, \\ x_1 x_2 = \frac{5}{1+k^2}. \end{cases}$$

因为 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = (1+k^2)x_1 x_2 + k(x_1 + x_2) + 1 = \frac{-6k}{1+k^2} + 6 = 4$,

解得 $k = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

因为 $k \in \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, 所以 $k = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

(3)如图, 设点 P 的坐标为 (m, n) , 直线 l_1, l_2 的方程分别为 $y - n = t(x - m), y - n = -\frac{1}{t}(x - m)$,

即 $tx - y + n - tm = 0, -\frac{1}{t}x - y + n + \frac{1}{t}m = 0$.

因为直线 l_1 被圆 C_1 截得的弦长与直线 l_2 被圆 C_2 截得的弦长相等且两圆半径相等,

所以圆心 C_1 到直线 l_1 的距离与圆心 C_2 到直线 l_2 的距离相等,

$$\text{即} \frac{|-3t - 1 + n - tm|}{\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{\left|-\frac{4}{t} - 5 + n + \frac{1}{t}m\right|}{\sqrt{\frac{1}{t^2} + 1}},$$

化简得 $(2 - m - n)t = m - n - 3$ 或 $(m - n + 8)t = m + n - 5$.

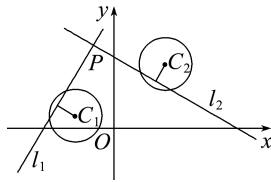
因为存在过点 P 的无穷多对互相垂直的直线 l_1 和 l_2 ,

所以关于 t 的方程有无穷多解, 从而有

$$\begin{cases} 2 - m - n = 0, \\ m - n - 3 = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m - n + 8 = 0, \\ m + n - 5 = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} m_1 = \frac{5}{2}, \\ n_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m_2 = -\frac{3}{2}, \\ n_2 = \frac{13}{2}, \end{cases}$$

所以点 P 的坐标为 $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{13}{2}\right)$.



单元概览

单元导航

本章内容是在学习了直线和圆的基础上,进一步运用坐标法研究几何问题.本章结合具体情境探索了椭圆、双曲线和抛物线的几何特征,利用确定三类圆锥曲线的几何要素(如定点、定直线等)合理地建立坐标系,用代数语言描述这些特征,得到相应的标准方程;运用代数方法进一步认识圆锥曲线的性质以及它们的位置关系,并用圆锥曲线的方程解决一些简单问题.

学习目标

- 1.了解圆锥曲线的实际背景,例如行星运行轨道、抛体运动轨迹、探照灯的镜面,感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用.
- 2.经历从具体情境中抽象出椭圆的过程,掌握椭圆的定义、标准方程及其简单几何性质.
- 3.掌握抛物线与双曲线的定义、几何图形和标准方程,以及它们的简单几何性质.
- 4.通过圆锥曲线与方程的学习,进一步体会数形结合的思想.
- 5.掌握椭圆、双曲线和抛物线的简单应用,能用坐标法解决一些与圆锥曲线有关的简单几何问题(如直线与圆锥曲线的位置关系)和实际问题.

核心概念

通过图形探究圆锥曲线的几何特征,建立圆锥曲线的方程,并通过方程研究其简单的几何性质.

依托对圆锥曲线(几何图形)的研究,在现实情境或数学情境中,概括出数学对象的一般特征,并解决一些实际应用问题,注重数学思想和坐标法的引领性,提升思考和表达问题的能力,发展数学抽象、直观想象、数学运算、逻辑推理、数学建模等素养.

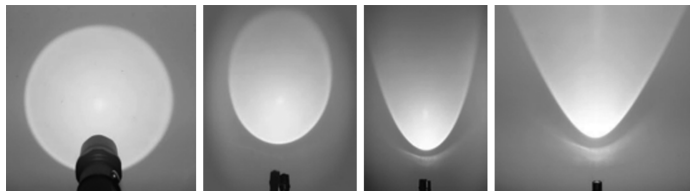
学法指导

- 1.以坐标法为核心和纽带,在学习中理解解析几何的学科特点,抓住它的核心,体会其中蕴含的数学思想,用坐标法解决一些几何、代数的问题.
- 2.重视对研究对象几何特征的分析.解析几何是以代数方法研究几何问题,要注意代数运算与几何直观的相互作用.体验先用几何眼光观察,再用坐标法推理、论证和求解的基本思路.
- 3.正确理解解析几何中的运算.为了更好地把握坐标法的基本思想,必须控制代数运算的难度,但必要的运算是不可避免的,关键是要把握解析几何中的运算特点.解析几何中的运算是建立在几何背景下的代数运算,所以要先用几何眼光观察,分析清楚几何图形的要素及图形间的基本关系,再用代数语言表达,而且在运算过程中要时刻注意利用图形的几何特征及图形间的关系来简化运算.

4. 注意用好教科书中的例题、习题. 教科书中的例题与习题能帮助理解圆锥曲线的几何特征. 对有关题目进行适当的变式拓展, 熟练运用坐标法研究圆锥曲线的性质以及它们的位置关系, 并能解决有一定综合性的问题, 通过解题感悟解析几何中蕴含的数学思想.
5. 解析几何的学科特点就在于它的综合性, 综合解决问题的能力需要逐步培养. 目光要聚焦在核心概念上, 从整体上更好地把握圆锥曲线.

单元主题任务

如图, 将手电筒光束照到墙面上, 观察照亮的区域边沿的形状. 当手电筒光束正对墙面时, 照亮的区域边沿是圆. 让手电筒光束逐渐倾斜, 观察照亮的区域边沿形状的变化.



我们知道, 圆是平面内到圆心的距离等于半径的点的集合, 圆的特征是圆上任意一点到圆心的距离都等于半径.

(1) 照亮的区域边沿形状有什么特征?

(2) 如何用方程来研究这些边沿曲线?

探究构建

3.1 椭圆

3.1.1 椭圆及其标准方程

学习任务目标

1. 经历从具体情境中抽象出椭圆模型的过程.
2. 掌握椭圆的定义、标准方程.

问题式预习

【知识清单】

知识点一 椭圆的定义

我们把平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离的和等于常数(大于 $|F_1F_2|$) 的点的轨迹叫做椭圆. 这两个定点叫做椭圆的焦点, 两焦点间的距离叫做椭圆的焦距, 焦距的一半称为半焦距.

知识点二 椭圆的标准方程

焦点的位置	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
标准方程	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$
焦点坐标	$(-c, 0), (c, 0)$	$(0, -c), (0, c)$
a, b, c 的关系	$c^2 = a^2 - b^2$	

【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打“√”, 错误的打“×”).

- (1) 已知点 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$, 动点 P 满足 $|PF_1| + |PF_2| = 4$, 则点 P 的轨迹是椭圆. (√)
- (2) 已知点 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$, 动点 P 满足 $|PF_1| + |PF_2| = 2$, 则点 P 的轨迹是椭圆. (×)
- (3) 已知点 $F_1(0, -1), F_2(0, 1)$, 动点 P 满足 $|PF_1| + |PF_2| = 1$, 则点 P 的轨迹是椭圆. (×)
- (4) 椭圆定义中动点到两定点的距离之和是常数, 而不能是变量. (√)

2. 已知椭圆 $4x^2 + ky^2 = 4$ 的一个焦点坐标是 $(0, 1)$,

则实数 k 的值是 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

B 解析: 将椭圆方程化为标准方程为 $x^2 + \frac{y^2}{k} = 1$,

又其中一个焦点坐标为 $(0, 1)$, 故 $\frac{4}{k} - 1 = 1$, 解得 $k = 2$.

3. 请思考并回答下列问题:

(1) 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(-4, 0), B(4, 0)$, 若 $|PA| + |PB| = 10$, 则点 P 的轨迹方程是什么?

提示: 点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

(2) 两种椭圆: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 和 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$

有什么相同点和不同点?

提示: 相同点: 它们的形状、大小都相同, 都有 $a > b > 0, a^2 = b^2 + c^2$;

不同点: 两种椭圆的位置不同, 它们的焦点坐标也不同.

(3) 如何根据椭圆的标准方程判断焦点的位置?

提示: 比较含 x^2 项和含 y^2 项的分母, 谁的分母大, 焦点就在谁对应的坐标轴上.

任务型课堂

任务1 椭圆定义的应用

探究活动

例1 已知 P 为椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上一点, F_1, F_2 分别是椭圆的左、右焦点, $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, 求 $\triangle F_1PF_2$

的面积.

解: 由已知得 $a = 2\sqrt{3}, b = \sqrt{3}$, 所以 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{12 - 3} = 3$,

从而 $|F_1F_2| = 2c = 6$.

在 $\triangle F_1PF_2$ 中, 由余弦定理得

$$|F_1F_2|^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \cos 60^\circ,$$

$$\text{即 } 36 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |PF_1| \cdot |PF_2| \text{ ①.}$$

$$\text{由椭圆的定义得 } |PF_1| + |PF_2| = 4\sqrt{3},$$

$$\text{即 } 48 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| \text{ ②.}$$

$$\text{由 ②-①, 得 } |PF_1| \cdot |PF_2| = 4.$$

$$\text{所以 } S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{1}{2}|PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}.$$

【一题多思】

思考 1. 从椭圆上一点 P 与椭圆的两个焦点 F_1, F_2 为顶点的 $\triangle PF_1F_2$ 称为焦点三角形, 解决焦点三角形问题要用到哪些知识点?

提示: 可以利用椭圆的定义, 结合正弦定理、余弦定理、勾股定理、三角形的面积公式等知识点解决焦点三角形问题.

思考 2. 若将本例中“ $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ ”变为“ $\angle PF_1F_2 = 90^\circ$ ”, 其他条件不变, 求 $\triangle F_1PF_2$ 的面积.

解: 由已知得 $a = 2\sqrt{3}, b = \sqrt{3}$, 所以 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{12 - 3} = 3$,

$$\text{从而 } |F_1F_2| = 2c = 6.$$

在 $\triangle F_1PF_2$ 中, 因为 $\angle PF_1F_2 = 90^\circ$, 则由勾股定理可得

$$|PF_2|^2 = |PF_1|^2 + |F_1F_2|^2, \text{ 即 } |PF_2|^2 = |PF_1|^2 + 36.$$

$$\text{又由椭圆的定义知 } |PF_1| + |PF_2| = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}, \text{ 所以 } |PF_2| = 4\sqrt{3} - |PF_1|.$$

$$\text{从而有 } (4\sqrt{3} - |PF_1|)^2 = |PF_1|^2 + 36, \text{ 解得 } |PF_1| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{所以 } \triangle F_1PF_2 \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}|PF_1| \cdot |F_1F_2| = \frac{1}{2}$$

$$\times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

【探究总结】

椭圆定义的应用技巧

(1) 利用椭圆的定义能够对椭圆上的点到焦点的距离进行转化.

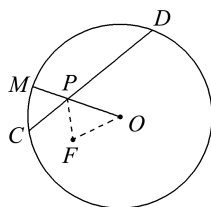
(2) 以椭圆上一点 P 与椭圆的两个焦点 F_1, F_2 为顶点的 $\triangle PF_1F_2$ 称为焦点三角形, 可以利用椭圆的定义, 结合正弦定理、余弦定理、三角形的面积公式等解决焦点三角形问题.

(3) 若椭圆的焦点三角形为 $\triangle PF_1F_2$, 且 $\angle F_1PF_2 = \theta$, 则焦点三角形的面积 $S = b^2 \tan \frac{\theta}{2}$.

应用迁移

1. 如图, 一圆形纸片的圆心为 O , F 是圆内一定点, M 是圆周上一动点, 把纸片折叠使 M 与 F 重合, 然后

抹平纸片, 折痕为 CD . 设 CD 与 OM 交于点 P , 则点 P 的轨迹是 ()



- A. 椭圆
C. 抛物线
B. 线段
D. 圆

A 解析: 设圆的半径为 r , 由题意知 $|PM| = |PF|$, 所以 $|PO| + |PF| = |PO| + |PM| = |OM| = r > |OF|$, 所以点 P 的轨迹是以 O, F 为焦点的椭圆.

2. (2023 · 全国甲卷) 设 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$

的两个焦点, 点 P 在 C 上. 若 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$, 则 $|PF_1| \cdot |PF_2| =$ ()

- A. 1
B. 2
C. 4
D. 5

B 解析: (方法一) 因为 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$, 所以 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$,

$$\text{从而 } S_{\triangle F_1PF_2} = b^2 \cdot \tan \frac{\angle F_1PF_2}{2} = 1 = \frac{1}{2}|PF_1| \cdot |PF_2|, \text{ 所以 } |PF_1| \cdot |PF_2| = 2.$$

(方法二) 因为 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$, 所以 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$.

由椭圆方程可知, $c^2 = 5 - 1 = 4$, 故 $c = 2$,

$$\text{所以 } |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2 = 4^2 = 16.$$

$$\text{又 } |PF_1| + |PF_2| = 2a = 2\sqrt{5}, \text{ 平方得}$$

$$|PF_1|^2 + |PF_2|^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| = 16 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| = 20, \text{ 所以 } |PF_1| \cdot |PF_2| = 2.$$

任务 2 > 求椭圆的标准方程

探究活动

例 2 求满足下列条件的椭圆的标准方程:

(1) 两个焦点的坐标分别是 $(-4, 0), (4, 0)$, 椭圆上一点 P 到两焦点距离之和等于 10;

(2) 两个焦点的坐标分别是 $(0, -2), (0, 2)$, 并且椭圆经过点 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

解: (1) 由题意得 $c = 4, a = 5$, 故 $b = 3$.

又焦点在 x 轴上, 所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

(2) 由题意得 $c = 2$, 且焦点在 y 轴上, 所以设椭圆方程为 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2 - 4} = 1$. 将 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 代入方程, 得 $a =$

$$\sqrt{10}, \text{ 故椭圆的标准方程为 } \frac{y^2}{10} + \frac{x^2}{6} = 1.$$

【探究总结】

求椭圆的标准方程的方法

- (1) 求椭圆的标准方程多采用定义法和待定系数法.
 (2) 利用定义法求椭圆方程, 要注意条件 $2a > |F_1F_2|$.
 利用待定系数法要先定形(焦点位置), 再定量(a, b, c 的值), 也可把椭圆方程设为 $mx^2 + ny^2 = 1 (m > 0, n > 0, m \neq n)$ 的形式.

应用迁移

1. 过点 $(-3, 2)$ 且与 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 有相同焦点的椭圆的标准方程为 ()

A. $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{10} = 1$ B. $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{100} = 1$
 C. $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{15} = 1$ D. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{225} = 1$

A 解析: 由方程 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 可知, 其焦点的坐标为 $(-\sqrt{5}, 0)$ 和 $(\sqrt{5}, 0)$, 即 $c = \sqrt{5}$. 设所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 因为椭圆过点 $(-3, 2)$,

代入方程得 $\frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$, 解得 $a^2 = 15 (a^2 = 3$

舍去). 故所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{10} = 1$.

2. 已知椭圆的中心在原点, 以坐标轴为对称轴, 且经过点 $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$, $(\sqrt{3}, \sqrt{5})$, 则此椭圆的标准方程为 _____.

$\frac{y^2}{10} + \frac{x^2}{6} = 1$ 解析: 设椭圆方程为 $mx^2 + ny^2 = 1 (m$

$> 0, n > 0, m \neq n)$. 由 $\begin{cases} (-\frac{3}{2})^2 m + (\frac{5}{2})^2 n = 1, \\ 3m + 5n = 1, \end{cases}$ 解

得 $m = \frac{1}{6}, n = \frac{1}{10}$, 所以椭圆的标准方程为 $\frac{y^2}{10} + \frac{x^2}{6} = 1$.

任务3 与椭圆有关的轨迹问题

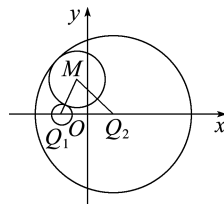
探究活动

例3 (1) 一个动圆与圆 $Q_1: (x+3)^2 + y^2 = 1$ 外切, 与圆 $Q_2: (x-3)^2 + y^2 = 81$ 内切, 试求这个动圆圆心的轨迹方程.

(2) 已知圆 $C: x^2 + y^2 = 4$, 过圆 C 上一动点 M 作平行于 x 轴的直线 m . 设直线 m 与 y 轴的交点为 N . 若向量 $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$, 试求动点 Q 的轨迹方程.

解: (1) 由已知得两定圆的圆心和半径分别为 $Q_1(-3, 0), R_1 = 1; Q_2(3, 0), R_2 = 9$.

设动圆圆心为 $M(x, y)$, 半径为 R , 如图.



由题意得 $|MQ_1| = 1 + R, |MQ_2| = 9 - R$,
 所以 $|MQ_1| + |MQ_2| = 10 > |Q_1Q_2| = 6$.

由椭圆的定义知, 点 M 在以 Q_1, Q_2 为焦点的椭圆上, 且 $a = 5, c = 3$,

所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$.

故动圆圆心的轨迹方程为 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

(2) 设点 M 的坐标为 $(x_0, y_0) (y_0 \neq 0)$, 点 Q 的坐标为 (x, y) , 则点 N 的坐标为 $(0, y_0)$. 因为 $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$, 所以 $(x, y) = (x_0, 2y_0)$, 即 $x_0 = x, y_0 = \frac{y}{2}$. 又因

为点 M 在圆 C 上, 所以 $x_0^2 + y_0^2 = 4$, 所以 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 4$.

由 $y_0 \neq 0$, 得 $y \neq 0$,

所以动点 Q 的轨迹方程为 $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1 (y \neq 0)$.

【探究总结】

求与椭圆有关的轨迹方程的常用方法

(1) 定义法: 若动点的轨迹特点符合某一基本图形(如椭圆、圆等)的定义, 则可用定义法求解.

(2) 直接法: 根据题设条件, 建立适当的平面直角坐标系, 设出动点的坐标, 写出动点坐标所满足的关系式, 化简得到轨迹方程.

(3) 相关点法: 若动点 $P(x, y)$ 随着某已知图形上的另一动点 $Q(x_1, y_1)$ 的运动而运动, 且 x_1, y_1 可以用 x, y 表示, 则可将点 Q 的坐标代入表示已知图形的方程, 即得动点 P 的轨迹方程.

应用迁移

1. 已知圆 $C_1: (x+1)^2 + y^2 = 1$ 和圆 $C_2: (x-1)^2 + y^2 = 9$, 求与圆 C_1 外切且内切于圆 C_2 的动圆圆心 M 的轨迹方程.

解: 由题意可知, 圆 C_1 的圆心 $C_1(-1, 0)$, 半径 $r_1 = 1$, 圆 C_2 的圆心 $C_2(1, 0)$, 半径 $r_2 = 3$.

设动圆的半径为 r ,

由题意得 $\begin{cases} |MC_1| = r + 1, \\ |MC_2| = 3 - r, \end{cases}$ 即 $|MC_1| + |MC_2| = 4 >$

$|C_1C_2| = 2$.

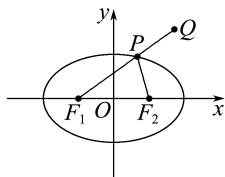
根据椭圆的定义可知, 点 M 在以 C_1, C_2 为焦点, 4 为长轴长的椭圆上,

所以 $a = 2, c = 1$, 可得 $b^2 = a^2 - c^2 = 3$.

所以动圆圆心 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

2. 已知 P 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上的一动点, F_1, F_2 是椭圆的左、右焦点, 延长 F_1P 到点 Q , 使得 $|PQ| = |PF_2|$, 求动点 Q 的轨迹方程.

解: 如图, 由题意得 $|PF_1| + |PF_2| = 4$.



又 $|PQ| = |PF_2|$, 所以 $|PF_1| + |PQ| = 4$, 即 $|QF_1| = 4$.

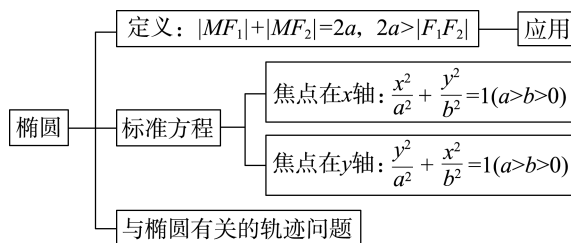
所以动点 Q 的轨迹是以 $F_1(-1, 0)$ 为圆心, 4 为半

径的圆.

又 $F_1(-1, 0)$,

所以动点 Q 的轨迹方程是 $(x+1)^2 + y^2 = 16$.

提质归纳



课后素养评价 (二十六)

椭圆及其标准方程

A组 学习·理解

1. 已知点 M 是平面 α 内的动点, F_1, F_2 是平面 α 内的两个定点, 则“点 M 到点 F_1, F_2 的距离之和为定值”是“点 M 的轨迹是以 F_1, F_2 为焦点的椭圆”的 ()

- A. 充要条件
B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件
D. 既不充分也不必要条件

C 解析: 若点 M 到点 F_1, F_2 的距离之和恰好为 F_1, F_2 两点之间的距离, 则点 M 的轨迹不是椭圆, 所以前者不能推出后者. 根据椭圆的定义, 椭圆上的点到两焦点的距离之和为常数 $2a$, 所以后者能推出前者, 故前者是后者的必要不充分条件, 故选 C.

2. 如果椭圆 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ 上一点 P 到焦点 F_1 的距离等于 6, 那么点 P 到另一个焦点 F_2 的距离是 ()

- A. 12 B. 14
C. 16 D. 20

B 解析: 根据椭圆的定义可得 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$,

因为椭圆 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ 上一点 P 到焦点 F_1 的距离等于 6, 所以 $6 + |PF_2| = 20$, 所以 $|PF_2| = 14$, 故选 B.

3. (多选) 椭圆 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{8} = 1$ 的焦距为 4, 则 m 的值可以是 ()

- A. 12 B. 10
C. 6 D. 4

AD 解析: 因为椭圆的焦距为 $2c = 4$, 则 $c = 2$.

当焦点在 x 轴上时, 有 $m = 8 + 2^2 = 12$, 即 $m = 12$;

当焦点在 y 轴上时, 有 $8 = m + 2^2$, 解得 $m = 4$.

故 $m = 4$ 或 $m = 12$.

4. 已知方程 $(m-1)x^2 + (3-m)y^2 = (m-1)(3-m)$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆, 则实数 m 的取值范围为 ()

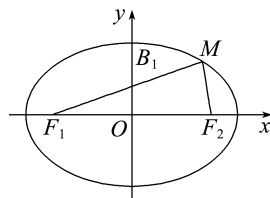
- A. (1, 2) B. (2, 3)
C. $(-\infty, 1)$ D. $(3, +\infty)$

B 解析: 方程 $(m-1)x^2 + (3-m)y^2 = (m-1)(3-m)$ 可化为 $\frac{x^2}{3-m} + \frac{y^2}{m-1} = 1$, 表示焦点在 y 轴上的椭圆, 可得 $m-1 > 3-m > 0$, 解得 $2 < m < 3$, 所以实数 m 的取值范围为 $(2, 3)$. 故选 B.

5. (多选) 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$, F_1, F_2 是椭圆的两个焦点, 点 M 为椭圆上一点且在第一象限. 若 $\triangle MF_1F_2$ 是等腰三角形, 则下列结论正确的是 ()

- A. $|MF_2| = 2$
B. $\cos \angle MF_2F_1 = \frac{17}{18}$
C. 点 M 到 x 轴的距离为 $\frac{\sqrt{35}}{3}$
D. $S_{\triangle MF_1F_2} = 9$

AC 解析: 如图.



因为椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$, 所以 $a = 4, b =$

$$\sqrt{7}, c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 7} = 3.$$

因为点 M 在第一象限, 且 $\triangle MF_1F_2$ 是等腰三角形,

$$\text{所以 } |F_1F_2| = |MF_1|.$$

根据椭圆的定义, $|MF_2| = 2a - |MF_1| = 2a - |F_1F_2| = 2a - 2c = 2$, 故 A 正确;

在 $\triangle MF_1F_2$ 中, $|MF_1| = |F_1F_2| = 6$, $|MF_2| = 2$, 由余弦定理的推论得 $\cos \angle MF_2F_1 = \frac{|MF_2|^2 + |F_1F_2|^2 - |MF_1|^2}{2|MF_2| \cdot |F_1F_2|} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$, 故 B 错误;

由 $\cos \angle MF_2F_1 = \frac{1}{6}$, 得 $\sin \angle MF_2F_1 = \frac{\sqrt{35}}{6}$, 得点 M 到 x 轴的距离为 $|MF_2| \cdot \sin \angle MF_2F_1 = 2 \times \frac{\sqrt{35}}{6} = \frac{\sqrt{35}}{3}$, 故 C 正确;

$$S_{\triangle MF_1F_2} = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{\sqrt{35}}{3} = \sqrt{35}, \text{ 故 D 错误.}$$

故选 AC.

6. 已知椭圆中心在坐标原点, 焦点在 x 轴上, 椭圆与 x 轴的交点到两焦点的距离分别为 3 和 1, 则椭圆的标准方程为 _____.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad \text{解析: 设椭圆的标准方程为 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$(a > b > 0), \text{ 由题意可得 } \begin{cases} a + c = 3, \\ a - c = 1, \end{cases}$$

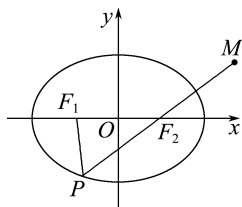
$$\text{解得 } \begin{cases} a = 2, \\ c = 1, \end{cases} \text{ 故 } b^2 = a^2 - c^2 = 3,$$

$$\text{所以椭圆的标准方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

7. 设 F_1, F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的左、右焦点, P

为椭圆上任意一点, 点 M 的坐标为 $(6, 4)$, 则 $|PM| + |PF_1|$ 的最大值为 _____.

15 解析: 由椭圆的方程可得 $a = 5, b = 4, c = 3$, 所以 $F_1(-3, 0), F_2(3, 0)$, 如图所示.

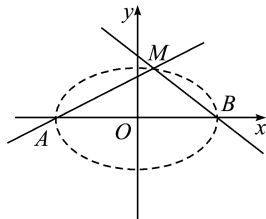


由椭圆的定义, 得 $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 10$,

$$\text{所以 } |PM| + |PF_1| = |PM| + 2a - |PF_2| = 10 + (|PM| - |PF_2|) \leq 10 + |MF_2| = 10 + \sqrt{3^2 + 4^2} = 15,$$

当 M, F_2, P 三点共线时取到最大值, 所以 $|PM| + |PF_1|$ 的最大值为 15.

8. 如图, 设 A, B 的坐标分别为 $(-5, 0), (5, 0)$, 直线 AM, BM 相交于点 M , 且它们的斜率之积为 $-\frac{4}{9}$, 则点 M 的轨迹方程为 _____.



$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1 (x \neq \pm 5) \quad \text{解析: 设点 } M \text{ 的坐标为}$$

$$(x, y), \text{ 则 } k_{AM} = \frac{y}{x+5} (x \neq -5), k_{BM} = \frac{y}{x-5} (x \neq$$

5). 由已知有 $\frac{y}{x+5} \cdot \frac{y}{x-5} = -\frac{4}{9}$, 化简即可得点 M

$$\text{的轨迹方程为 } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1 (x \neq \pm 5).$$

B组 应用·实践

1. 已知 $\triangle ABC$ 的周长为 20, 且顶点 B, C 的坐标分别为 $(0, -4), (0, 4)$, 则顶点 A 的轨迹方程是 ()

A. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1 (x \neq 0)$

B. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1 (x \neq 0)$

C. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{20} = 1 (x \neq 0)$

D. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{6} = 1 (x \neq 0)$

B 解析: 因为 $\triangle ABC$ 的周长为 20, 顶点 $B(0, -4), C(0, 4)$, 所以 $BC = 8, AB + AC = 20 - 8 = 12$. 因为 $12 > 8$, 所以点 A 到两个定点 B, C 的距离之和等于定值, 所以点 A 的轨迹是以 B, C 为焦点的椭圆, 且点 A 不能在 y 轴上.

因为 $a = 6, c = 4$, 所以 $b^2 = 20$, 所以椭圆的方程是 $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1 (x \neq 0)$.

2. (多选) 已知 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$ 是椭圆 C 的两个焦点, 过点 F_2 且垂直于 x 轴的直线与椭圆 C 交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 3$, 则 ()

A. 椭圆的焦点在 y 轴上

B. $\triangle ABF_1$ 的周长为 6

C. $\triangle AF_1F_2$ 的周长为 6

D. 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

CD 解析: 显然椭圆的焦点在 x 轴上, A 错误. 设椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 且 $c = 1$. 因为

过点 F_2 且垂直于 x 轴的直线与椭圆 C 交于 A, B 两点, 设 $A(c, y_1)$, 代入方程可得 $\frac{c^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, 求得 $y_1^2 = \frac{b^4}{a^2}$. 由于 $|AB| = 3$, 所以 $\frac{b^2}{a} = \frac{3}{2}$. 又 $b^2 = a^2 - c^2$, 解得 $a = 2$, 所以 $a^2 = 4, b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 1 = 3$, 所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, D 正确. $\triangle ABF_1$ 的周长为 $4a = 8, \triangle AF_1F_2$ 的周长为 $2a + 2c = 6$, B 错误, C 正确.

3. (多选) 已知 P 为椭圆 C 上一点, F_1, F_2 为椭圆的焦点, 且 $|F_1F_2| = 2\sqrt{3}$. 若 $|PF_1| + |PF_2| = 2 \cdot |F_1F_2|$, 则椭圆 C 的标准方程为 ()

A. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$ B. $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{48} = 1$
C. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} = 1$ D. $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{45} = 1$

AC 解析: 由题知 $2c = |F_1F_2| = 2\sqrt{3}$, 所以 $c = \sqrt{3}$.

因为 $2a = |PF_1| + |PF_2| = 2|F_1F_2| = 4\sqrt{3}$,

所以 $a = 2\sqrt{3}$, 所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 9$.

故椭圆 C 的标准方程是 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$ 或 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} = 1$.

4. 已知 F 为椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的右焦点, P 为 C 上一点, Q 为圆 $M: x^2 + (y-3)^2 = 1$ 上一点, 则 $|PQ| + |PF|$ 的最大值为 ()

A. 5 B. 6
C. $4 + 2\sqrt{3}$ D. $5 + 2\sqrt{3}$

D 解析: 依题意 $a = 2, b = 1, c = \sqrt{3}$, 设椭圆 C 的左焦点为 $F_1(-\sqrt{3}, 0)$,

圆 $M: x^2 + (y-3)^2 = 1$ 的圆心为 $M(0, 3)$, 半径为 1, $|PQ| + |PF| = |PQ| + 2a - |PF_1| = 4 + |PQ| - |PF_1| \leq 4 + |QF_1|$,

当 P, F_1, Q 三点共线, 且 F_1 在 P, Q 之间时等号成立.

而 $|QF_1| \leq |MF_1| + 1 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} + 1 = 2\sqrt{3} + 1$,

所以 $|PQ| + |PF| \leq 4 + 2\sqrt{3} + 1 = 5 + 2\sqrt{3}$,

当 P, F_1, M, Q 四点共线, 且 F_1 在 P, Q 之间, Q 是 F_1M 的延长线与圆 M 的交点时等号成立.

故选 D.

5. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$, 且过点 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$, 则椭圆 C 的标准方程为 _____.

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 解析: 由题意知 $c = 1, a^2 - b^2 = c^2 = 1$ ①.

又椭圆经过点 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$, 所以 $\frac{1}{a^2} + \frac{\frac{9}{4}}{b^2} = 1$ ②.

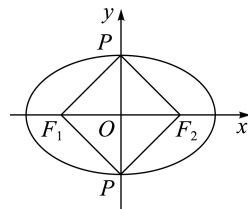
联立 ①②, 解得 $a^2 = 4, b^2 = 3$.

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

6. 椭圆的两焦点为 $F_1(-4, 0), F_2(4, 0)$, 点 P 在椭圆上. 若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积最大为 12, 则椭圆的标准方程为 _____.

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 解析: 由已知可得 $2c = 8, c = 4$, 如图,

当点 P 在 y 轴上时, $\triangle PF_1F_2$ 的面积最大,

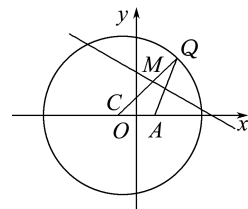


所以 $\frac{1}{2} \times 8 \times b = 12$, 所以 $b = 3$.

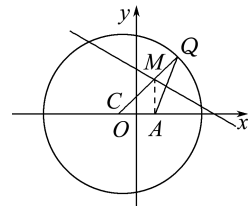
所以 $a^2 = b^2 + c^2 = 25$.

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

7. 如图所示, 在圆 $C: (x+1)^2 + y^2 = 25$ 内有一点 $A(1, 0)$, Q 为圆 C 上一点, AQ 的垂直平分线与 C , Q 的连线交于点 M , 求点 M 的轨迹方程.



解: 如图所示, 连接 MA , 由题意知点 M 在线段 CQ 上, 从而有 $|CQ| = |MQ| + |MC|$.



又点 M 在 AQ 的垂直平分线上,

所以 $|MA| = |MQ|$.

因为点 Q 在圆 $C: (x+1)^2 + y^2 = 25$ 上, 所以 $|CQ| = 5$, 故 $|MA| + |MC| = |CQ| = 5$.

又 $A(1, 0), C(-1, 0), |MA| + |MC| = 5 > 2$,

所以点 M 的轨迹是以 $A(1, 0), C(-1, 0)$ 为焦点的

椭圆,

$$\text{且 } 2a = 5, c = 1, \text{ 故 } a = \frac{5}{2}, b^2 = a^2 - c^2 = \frac{25}{4} - 1 = \frac{21}{4}.$$

$$\text{故点 } M \text{ 的轨迹方程为 } \frac{x^2}{\frac{25}{4}} + \frac{y^2}{\frac{21}{4}} = 1.$$

8. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点为 F_1, F_2 , 点 P 在椭圆 C 上, 且 $PF_1 \perp F_1F_2, |PF_1| = 3, |PF_2| = 5$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 点 M 在椭圆 C 上, 且 $\triangle MF_1F_2$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 求点 M 的坐标.

解: (1) 因为点 P 在椭圆 C 上, 所以 $|PF_1| + |PF_2| = 3 + 5 = 8 = 2a$, 解得 $a = 4$.

因为 $PF_1 \perp F_1F_2, |PF_1| = 3, |PF_2| = 5$,

所以 $|F_1F_2|^2 = 25 - 9 = 16$, 即 $2c = |F_1F_2| = 4$, 解得 $c = 2$.

所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 12$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

(2) 设 $M(x_0, y_0)$, 因为 $\triangle MF_1F_2$ 的面积为 $2\sqrt{3}$,

所以 $\frac{1}{2} |F_1F_2| \cdot |y_0| = 2\sqrt{3}$, 即 $\frac{1}{2} \times 4 \times |y_0| = 2\sqrt{3}$, 解得 $|y_0| = \sqrt{3}$.

因为点 M 在椭圆 C 上, 所以 $\frac{x_0^2}{16} + \frac{3}{12} = 1$, 解得 $x_0 = \pm 2\sqrt{3}$.

所以点 M 的坐标为 $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 或 $(2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ 或 $(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 或 $(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

3.1.2 椭圆的简单几何性质

第1课时 椭圆的简单几何性质

学习任务目标

1. 掌握椭圆的几何图形和简单几何性质.
2. 掌握椭圆标准方程中的 a, b, c 及椭圆的离心率 e 的几何意义和它们之间的关系.
3. 了解解析几何中研究曲线性质的代数方法.

问题式预习

【知识清单】

知识点 椭圆的简单几何性质

焦点的位置	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
图形		
标准方程	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$
范围	$-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b$	$-b \leq x \leq b, -a \leq y \leq a$
顶点	$A_1(-a, 0), A_2(a, 0), B_1(0, -b), B_2(0, b)$	$A_1(0, -a), A_2(0, a), B_1(-b, 0), B_2(b, 0)$
轴长	短轴长 $= 2b$, 长轴长 $= 2a$	
焦点	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c), F_2(0, c)$

续表

焦点的位置	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
焦距	$ F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{a^2 - b^2}$	
对称性	对称轴是坐标轴, 对称中心是原点	
离心率	$e = \frac{c}{a}, 0 < e < 1$	

【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打“√”, 错误的打“×”).

(1) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长是 a .

(×)

(2) 若椭圆的对称轴为坐标轴, 长轴长与短轴长分别为 10, 8, 则椭圆的方程为 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

(×)

(3) 设 F 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点, M 为椭圆上任一点, 则 $|MF|$ 的最大值为 $a + c$ (c 为椭圆的半焦距).

(√)

2. 椭圆 $25x^2 + 9y^2 = 225$ 的长轴长、短轴长、离心率依次是 ()

- A. $5, 3, \frac{4}{5}$ B. $10, 6, \frac{4}{5}$
C. $5, 3, \frac{3}{5}$ D. $10, 6, \frac{3}{5}$

B 解析: 将椭圆方程化为标准方程为 $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$, 则 $a=5, b=3, c=4$, 故长轴长、短轴长、离心率依次是 $10, 6, \frac{4}{5}$.

3. 请思考并回答下列问题:

(1) 椭圆的焦点一定在它的长轴上吗?

提示: 椭圆的焦点一定在它的长轴上.

(2) 椭圆上到其中心的距离最小与最大的点分别是哪些?

提示: 椭圆上到其中心的距离最小的点是短轴的两个端点, 到其中心的距离最大的点是长轴的两个端点.

(3) 椭圆上到焦点的距离最大与最小的点分别是哪些? 距离的最大值与最小值分别是多少?

提示: 椭圆上到焦点的距离最大和最小的点分别是长轴的两个端点, 故距离的最大值为 $a+c$, 最小值为 $a-c$.

任务型课堂

任务1 根据椭圆的方程研究其几何性质

1. (多选) 已知椭圆 $C: 16x^2 + 4y^2 = 1$, 则下列结论正确的是 ()

- A. 长轴长为 $\frac{1}{2}$
B. 焦距为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$
C. 焦点坐标为 $(0, \pm \frac{\sqrt{3}}{4})$
D. 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

CD 解析: 将椭圆方程 $16x^2 + 4y^2 = 1$ 化为标准方程为 $\frac{y^2}{\frac{1}{4}} + \frac{x^2}{\frac{1}{16}} = 1$, 可得 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}, c = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 所以

长轴长为 $2a = 1$, 短轴长为 $2b = \frac{1}{2}$, 焦距为 $2c = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 焦点坐标为 $(0, \pm \frac{\sqrt{3}}{4})$, 离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 CD.

2. 下列关于椭圆 $C_1: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 和椭圆 $C_2: \frac{x^2}{9-k} + \frac{y^2}{25-k} = 1 (0 < k < 9)$ 的说法, 正确的是 ()

- A. 长轴长相等
B. 焦距相等
C. 离心率相等
D. 短轴长相等

B 解析: 由题意知, 椭圆 C_1 的焦点在 x 轴上, 椭圆 C_2 的焦点在 y 轴上, 对于椭圆 C_1 , 焦距为 $2 \times \sqrt{25-9} = 8$, 对于椭圆 C_2 , 焦距为 $2 \times \sqrt{(25-k)-(9-k)} = 8$. 故选 B.

3. 求椭圆 $25x^2 + 16y^2 = 400$ 的长轴长、短轴长、焦点坐标和顶点坐标.

解: 将方程变形为 $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$,

得 $a=5, b=4$, 所以 $c=3$.

故椭圆的长轴长和短轴长分别为 $2a=10$ 和 $2b=8$, 焦点坐标为 $(0, -3), (0, 3)$,

顶点坐标为 $(0, -5), (0, 5), (-4, 0), (4, 0)$.

【探究总结】

根据椭圆的方程研究其几何性质的注意点

(1) 已知椭圆的方程讨论椭圆的性质时, 若不是标准方程, 应先化成标准方程, 再确定焦点的位置, 进而确定椭圆的几何性质.

(2) 焦点位置不确定的要分类讨论, 找准 a 与 b , 利用 $c^2 = a^2 - b^2$ 求出焦点坐标, 再写出顶点坐标. 同时要注意长轴长、短轴长、焦距不是 a, b, c , 而分别是 $2a, 2b, 2c$.

任务2 由椭圆的几何性质求椭圆的标准方程

探究活动

例1 (1) 焦点在 x 轴上, 短轴长为 8, 离心率为 $\frac{3}{5}$ 的椭圆的标准方程是 _____.

(2) 已知椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 右焦点为 $F(\sqrt{2}, 0)$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 则椭圆 C 的标准方程为 _____.

(1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ **解析:** 由题意, 得 $\begin{cases} 2b=8, \\ \frac{c}{a}=\frac{3}{5}, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=5, \\ b=4, \\ c=3. \end{cases}$

又椭圆的焦点在 x 轴上, 故此椭圆的标准方程是 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

(2) $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 解析:由题意,得椭圆 C 的半焦距 c

$=\sqrt{2}$, 且 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 所以 $a = \sqrt{3}$.

又 $b^2 = a^2 - c^2 = 1$, 所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

【探究总结】

求椭圆的标准方程的方法

(1) 根据已知条件求椭圆的标准方程的步骤:

① 确定焦点所在的坐标轴;

② 求出 a^2, b^2 的值;

③ 写出标准方程.

(2) 在求 a^2, b^2 的值时, 通常由关系式 $a^2 = b^2 + c^2, e = \frac{c}{a}$ 等构造方程(或方程组)加以求解.

应用迁移

1. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且过点 $A(2, 1)$, 则椭圆 C 的标准方程为_____.

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad \text{解析: 由题意可得} \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \text{解}$$

$$\text{得} \begin{cases} a^2 = 6, \\ b^2 = c^2 = 3, \end{cases}$$

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$.

2. 焦点在 y 轴上且中心为原点的椭圆 C_2 与椭圆 $C_1: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的离心率相同, 且 C_1, C_2 在第一象限内公共点的横坐标为 1, 则椭圆 C_2 的方程为_____.

$$\frac{2y^2}{5} + \frac{4x^2}{5} = 1 \quad \text{解析: 在椭圆 } C_1 \text{ 中, } a_1 = \sqrt{2}, b_1 =$$

$$1, c_1 = \sqrt{2-1} = 1, \text{ 故椭圆 } C_1 \text{ 的离心率为 } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

对于 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 令 $x = 1$ 得 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$,

故 C_1, C_2 在第一象限内公共点的坐标为 $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

设 $C_2: \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{x^2}{b_2^2} = 1 (a_2 > b_2 > 0)$, 将 $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 代入可得

$$\frac{1}{2a_2^2} + \frac{1}{b_2^2} = 1,$$

$$\text{又 } \frac{\sqrt{a_2^2 - b_2^2}}{a_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 联立以上两式解得 } b_2^2 = \frac{5}{4}, a_2^2$$

$$= \frac{5}{2}.$$

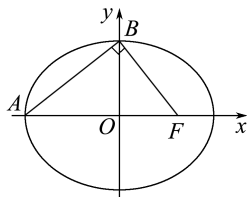
故椭圆 C_2 的方程为 $\frac{2y^2}{5} + \frac{4x^2}{5} = 1$.

任务3 > 求椭圆的离心率

探究活动

例2 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, A 是左顶点, F 是右焦点, B 是短轴的一个端点, 若 $\angle ABF = 90^\circ$, 则该椭圆的离心率为_____.

$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 解析: 如图所示, 由题意知 $|AO| = a, |OF| = c, |BF| = a, |AB| = \sqrt{a^2 + b^2}, a^2 = b^2 + c^2$,



所以在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中, $a^2 + b^2 + a^2 = (a+c)^2 = a^2 + 2ac + c^2$, 即 $a^2 - c^2 - ac = 0$, 两边同时除以 a^2 , 得 $e^2 + e - 1 = 0$, 解得 $e = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $e = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (舍去).

【一题多思】

思考1 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 左、右顶点分别为 A, B , 椭圆上有一动点 P (异于椭圆的左、右顶点), 设直线 PA, PB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 求 $k_1 k_2$ 的值.

解: 因为点 P 为椭圆上的动点,

所以设 $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$.

又 $A(-a, 0), B(a, 0)$, 所以 $k_1 k_2 = \frac{b \sin \theta}{a \cos \theta + a} \cdot$

$$\frac{b \sin \theta}{a \cos \theta - a} = \frac{b^2 \sin^2 \theta}{a^2 (\cos^2 \theta - 1)} = -\frac{b^2}{a^2} = -\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) =$$

$$e^2 - 1 = e^2 - 1 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

思考2 若将本例中的“ $\angle ABF = 90^\circ$ ”改为“ $\angle ABF$ 为锐角”, 其他条件不变, 求椭圆的离心率 e 的取值范围.

解: 在 $\triangle ABF$ 中, $|AB|^2 = a^2 + b^2, |BF|^2 = a^2, |AF|^2 = (a+c)^2$.

因为 $\angle ABF$ 为锐角, 所以 $a^2 + b^2 + a^2 > (a+c)^2$, 即 $a^2 - ac - c^2 > 0$, 所以 $1 - e - e^2 > 0$, 解得 $0 < e$

$$< \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

【探究总结】

求椭圆的离心率的方法

(1)直接法:求出 a, c 后用 $e = \frac{c}{a}$ 求出离心率,或求出

a, b 后用 $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ 求出离心率.

(2)转化法:将条件转化成关于 a, b, c 的关系式,利用 $b^2 = a^2 - c^2$ 消去 b ,构造关于 $\frac{c}{a}$ 的方程求离心率.

应用迁移

1.(2023·新高考全国I卷)设椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$, $C_2: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的离心率分别为 e_1, e_2 .若 $e_2 = \sqrt{3}e_1$,则 $a =$ ()

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{6}$

A 解析:由 $e_2 = \sqrt{3}e_1$,得 $e_2^2 = 3e_1^2$,因此 $\frac{4-1}{4} = 3 \times \frac{a^2-1}{a^2}$.又 $a > 1$,所以 $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2.(2022·全国甲卷)椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 A ,点 P, Q 均在 C 上,且关于 y 轴对称.若直线 AP, AQ 的斜率之积为 $\frac{1}{4}$,则椭圆 C 的

离心率为 ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

A 解析:设 $P(x_1, y_1)$,则 $Q(-x_1, y_1)$,

又 $A(-a, 0)$,则由 $k_{AP} \cdot k_{AQ} = \frac{1}{4}$,得 $k_{AP} \cdot k_{AQ} =$

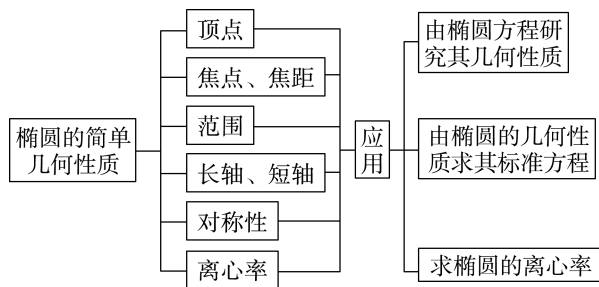
$$\frac{y_1}{x_1 + a} \cdot \frac{y_1}{-x_1 + a} = \frac{y_1^2}{-x_1^2 + a^2} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{由 } \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \text{得 } y_1^2 = \frac{b^2(a^2 - x_1^2)}{a^2},$$

$$\text{所以 } \frac{b^2(a^2 - x_1^2)}{-x_1^2 + a^2} = \frac{1}{4}, \text{即 } \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{4},$$

所以椭圆 C 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.故选 A.

提质归纳



课后素养评价 (二十七)

椭圆的简单几何性质

A组 学习·理解

1.若点 $A(a, 1)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的内部,则 a 的取值范围是 ()

A. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
B. $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
C. $(-2, 2)$
D. $(-1, 1)$

A 解析:由题意知 $\frac{a^2}{4} + \frac{1}{2} < 1$,解得 $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$.

2.(多选)已知椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$,则下列说法正确的是 ()

A. C 的焦点坐标为 $(\pm 5, 0)$
B. C 的长轴长为 8
C. C 的短轴长为 6
D. C 的一个顶点为 $(0, -4)$

BC 解析:由椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$,可得 $a = 4, b = 3$,

$$\text{则 } c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{7}.$$

对于 A,椭圆 C 的焦点坐标为 $(\pm\sqrt{7}, 0)$,所以 A 错误;

对于 B,椭圆 C 的长轴长为 $2a = 8$,所以 B 正确;

对于 C,椭圆 C 的短轴长为 $2b = 6$,所以 C 正确;

对于 D,顶点坐标为 $(\pm 4, 0)$ 和 $(0, \pm 3)$,所以 D 错误.

3.(2022·全国甲卷)已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{3}$, A_1, A_2 分别为 C 的左、右顶点, B 为 C 的上顶点.若 $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BA_2} = -1$,则 C 的方程为 ()

$$\text{A. } \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{B. } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$$

$$\text{C. } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \quad \text{D. } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

B 解析:因为离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{3}$,解得

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{8}{9}, \text{ 所以 } b^2 = \frac{8}{9}a^2.$$

因为 A_1, A_2 分别为 C 的左、右顶点, B 为上顶点, 则 $A_1(-a, 0), A_2(a, 0), B(0, b)$, 所以 $\overrightarrow{BA_1} = (-a, -b), \overrightarrow{BA_2} = (a, -b)$.

因为 $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BA_2} = -1$, 所以 $-a^2 + b^2 = -1$.

将 $b^2 = \frac{8}{9}a^2$ 代入, 解得 $a^2 = 9, b^2 = 8$,

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$.

4. 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 椭圆 C 上不存在点 P 使 $\angle F_1PF_2 \geq \frac{\pi}{3}$, 则椭圆 C 的离心率的取值范围是 ()

- A. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
C. $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ D. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

D 解析: 椭圆 C 上不存在点 P 使 $\angle F_1PF_2 \geq \frac{\pi}{3}$,

即 $\angle F_1PF_2 < \frac{\pi}{3}$ 恒成立, 当点 P 在短轴端点时,

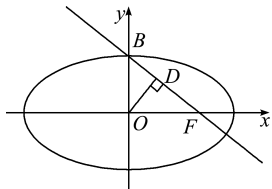
$\angle F_1PF_2$ 最大, 即 $\sin \angle F_1PO = \frac{c}{a} < \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$,

即 $e < \frac{1}{2}$. 故选 D.

5. 直线 l 经过椭圆的一个顶点和一个焦点. 若椭圆中心到 l 的距离为其短轴长的 $\frac{1}{4}$, 则该椭圆的离心率为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

B 解析: 如图, $|BF| = a, |OF| = c, |OB| = b, |OD| = \frac{1}{4} \times 2b = \frac{1}{2}b$.



在 $Rt\triangle FOB$ 中, $|OF| \cdot |OB| = |BF| \cdot |OD|$, 即 $cb = a \cdot \frac{1}{2}b$, 解得 $a = 2c$.

故椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

6. 已知焦点在 x 轴上的椭圆 $C: \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则实数 $m =$ _____.

$\pm 2\sqrt{2}$ 解析: 因为椭圆 $C: \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的焦点在 x 轴上,

所以 $a^2 = m^2, b^2 = 4$, 则 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} =$

$\sqrt{1 - \frac{4}{m^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 解得 $m = \pm 2\sqrt{2}$.

7. 已知椭圆的中心在坐标原点, 焦点在 x 轴上, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且椭圆上一点到两个焦点的距离之和为 12, 则椭圆的方程为 _____.

$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ 解析: 由题意, 知 $2a = 12, \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $a = 6, c = 3\sqrt{3}$, 所以 $b = 3$,

故椭圆的方程为 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$.

8. 已知 $P(m, n)$ 是椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 上的一个动点, 则 $m^2 + n^2$ 的取值范围是 _____.

$[1, 2]$ 解析: 因为 $P(m, n)$ 是椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 上

的一个动点, 所以 $m^2 + \frac{n^2}{2} = 1$,

即 $n^2 = 2 - 2m^2$, 所以 $m^2 + n^2 = 2 - m^2$.

又因为 $-1 \leq m \leq 1$, 所以 $1 \leq 2 - m^2 \leq 2$, 所以 $1 \leq m^2 + n^2 \leq 2$. 故 $m^2 + n^2$ 的取值范围是 $[1, 2]$.

9. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, C 的上顶点为 A , 两个焦点为 F_1, F_2 , $\triangle AF_1F_2$ 是等边三角形, 则椭圆 C 的离心率是 _____.

$\frac{1}{2}$ 解析: 设椭圆 C 的焦距 $|F_1F_2| = 2c$.

因为 C 的上顶点为 A , $\triangle AF_1F_2$ 是等边三角形,

所以 $\begin{cases} |AF_1| = |AF_2| = |F_1F_2|, \\ |AF_1| + |AF_2| = 2a, \end{cases}$ 所以 $|AF_1| = |AF_2| = |F_1F_2| = a$,

即 $a = 2c$, 所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

B组 应用·实践

1. 已知椭圆的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则下列椭圆中不满足条件的为 ()

- A. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ B. $\frac{y^2}{4} + x^2 = 1$
C. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ D. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$

C 解析: 选项 A, $a^2 = 4, b^2 = 1$, 则 $c^2 = a^2 - b^2 = 3$,

即 $a = 2, c = \sqrt{3}$, 故 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 满足条件;

选项 B, $a^2=4, b^2=1$, 则 $c^2=a^2-b^2=3$, 即 $a=2, c$

$=\sqrt{3}$, 故 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 满足条件;

选项 C, $a^2=2, b^2=1$, 则 $c^2=a^2-b^2=1$, 即 $a=\sqrt{2}$,

$c=1$, 故 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 不满足条件;

选项 D, $a^2=8, b^2=2$, 则 $c^2=a^2-b^2=6$, 即 $a=$

$2\sqrt{2}, c=\sqrt{6}$, 故 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 满足条件. 故选 C.

2. 设 F_1, F_2 是椭圆的两个焦点, 若椭圆上任意一点 M 都满足 $\angle F_1MF_2$ 为锐角, 则椭圆离心率的取值范围是 ()

A. $(0, \frac{1}{2})$

B. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$

C. $(0, 1)$

D. $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$

B 解析: 由题可知, 当点 M 位于短轴端点时, $\angle F_1MF_2$ 最大,

此时在 $\triangle F_1MF_2$ 中, 由余弦定理的推论得

$$\cos \angle F_1MF_2 = \frac{a^2 + a^2 - 4c^2}{2a^2} = \frac{a^2 - 2c^2}{a^2} > 0, \text{ 所以 } a >$$

$$\sqrt{2}c.$$

$$\text{所以 } e = \frac{c}{a} < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{又因为 } 0 < e < 1, \text{ 所以 } 0 < e < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. (多选) 椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ 上的一点 P 到椭圆两焦点的距离的乘积为 m , 当 m 取最大值时, 点 P 的坐标不可能为 ()

A. $(4, 0)$

B. $(0, 5)$

C. $(-4, 0)$

D. $(0, -5)$

BD 解析: 记椭圆的两个焦点分别为 F_1, F_2 ,

$$\text{有 } |PF_1| + |PF_2| = 2a = 10,$$

$$\text{则知 } m = |PF_1| \cdot |PF_2| \leq \left(\frac{|PF_1| + |PF_2|}{2} \right)^2 = 25,$$

当且仅当 $|PF_1| = |PF_2| = 5$, 即点 P 位于椭圆的短轴的端点处时, m 取得最大值 25.

所以点 P 的坐标为 $(-4, 0)$ 或 $(4, 0)$.

4. 与椭圆 $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$ 有相同的离心率, 且长轴长与椭圆 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的长轴长相等的椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1 \text{ 或 } \frac{y^2}{8} + \frac{x^2}{6} = 1$$

$$\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1 \text{ 的离心率为 } \frac{1}{2}, \text{ 椭圆 } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{3} = 1 \text{ 的长轴}$$

长为 $4\sqrt{2}$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \\ 2a = 4\sqrt{2}, \end{cases}$$

解得 $a = 2\sqrt{2}, c = \sqrt{2}$, 故 $b^2 = a^2 - c^2 = 6$.

又因为所求椭圆的焦点既可在 x 轴上, 也可在 y 轴

上, 所以其标准方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$ 或 $\frac{y^2}{8} + \frac{x^2}{6} = 1$.

5. (新定义) 阿基米德不仅是著名的物理学家, 也是著名的数学家, 他利用“逼近法”得到了椭圆的面积公式. 设椭圆的长半轴长、短半轴长分别为 a, b , 则椭圆的面积公式为 $S = ab\pi$. 若椭圆 C 的焦点在 x 轴上, 离心率为 $\frac{1}{2}$, 面积为 $8\sqrt{3}\pi$, 则椭圆 C 的标准方程为

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

$$\text{解析: 由题意可设椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0).$$

$$\text{由离心率为 } \frac{1}{2}, \text{ 即 } e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \text{ 得 } a = 2c.$$

因为椭圆 C 的面积为 $8\sqrt{3}\pi$,

$$\text{所以由 } S = ab\pi = 8\sqrt{3}\pi, \text{ 得 } ab = 8\sqrt{3},$$

$$\text{所以 } \begin{cases} a = 2c, \\ ab = 8\sqrt{3}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 4, \\ b = 2\sqrt{3}, \\ c = 2. \end{cases}$$

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

6. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, F_1, F_2 分别为椭圆 C 的左、右焦点, $P(x_0, y_0)$ 为椭圆 C 上一点, $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, 则 $x_0 =$

$$\frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ 或 } -\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{解析: (方法一) 由题意可得 } |PF_1| + |PF_2| = 2a = 4, |F_1F_2| = 2c = 2\sqrt{3}.$$

在 $\triangle F_1PF_2$ 中, 由余弦定理可得

$$|F_1F_2|^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \cos \angle F_1PF_2 = (|PF_1| + |PF_2|)^2 - 3|PF_1| \cdot |PF_2|,$$

$$\text{所以 } |PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{4}{3},$$

$$\begin{aligned} \text{即 } & \sqrt{(x_0 + \sqrt{3})^2 + y_0^2} \cdot \sqrt{(x_0 - \sqrt{3})^2 + y_0^2} = \\ & \sqrt{(x_0 + \sqrt{3})^2 + 1 - \frac{x_0^2}{4}} \cdot \sqrt{(x_0 - \sqrt{3})^2 + 1 - \frac{x_0^2}{4}} \\ & = \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

$$\text{即 } \left(\frac{3x_0^2}{4} + 2\sqrt{3}x_0 + 4 \right) \cdot \left(\frac{3x_0^2}{4} - 2\sqrt{3}x_0 + 4 \right) = \frac{16}{9},$$

$$\text{整理得 } \left(\frac{3x_0^2}{4} - 4 \right)^2 = \frac{16}{9}, \text{ 所以 } \frac{3x_0^2}{4} - 4 = \frac{4}{3} \text{ 或 } \frac{3x_0^2}{4} - 4$$

$$= -\frac{4}{3},$$

$$\text{解得 } x_0 = \pm \frac{8}{3} \text{ 或 } x_0 = \pm \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{又因为 } x_0 \in (-2, 2), \text{ 所以 } x_0 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ 或 } x_0 = -\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

(方法二) 易知 $a=2, b=1, c=\sqrt{3}, |F_1F_2|=2c=2\sqrt{3}$. 已知 $P(x_0, y_0)$, 由焦点三角形面积公式, 得

$$S_{\triangle PF_1F_2} = b^2 \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{又 } S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} \cdot |F_1F_2| \cdot |y_0| = \sqrt{3} \cdot |y_0|,$$

$$\text{所以 } |y_0| = \frac{1}{3}.$$

$$\text{又因为 } \frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1, \text{ 所以 } x_0 = \pm \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{故答案为 } \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ 或 } -\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

7. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 $P(a, b)$ 满足 $|PF_2| = |F_1F_2|$, 则椭圆的离心率为_____.

$$\frac{1}{2} \quad \text{解析: 易知 } F_1(-c, 0), F_2(c, 0).$$

$$\text{因为 } |PF_2| = |F_1F_2|, \text{ 则 } \sqrt{(a-c)^2 + b^2} = 2c,$$

$$\text{整理得 } 2c^2 + ac - a^2 = 0.$$

$$\text{两边同除以 } a^2, \text{ 得 } 2\left(\frac{c}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} - 1 = 0, \text{ 所以 } \frac{c}{a} = -1$$

$$(\text{舍}) \text{ 或 } \frac{c}{a} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{所以椭圆的离心率 } e = \frac{1}{2}.$$

8. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{2}{3}$,

且椭圆 C 经过点 $\left(2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$, F_1, F_2 是椭圆 C 的左、右焦点.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若 P 为椭圆 C 上一点, $\angle PF_1F_2 = 60^\circ$, 求 $\triangle PF_1F_2$ 的面积.

$$\text{解: (1) 由题意可得 } \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{2}{3}, \\ \frac{8}{a^2} + \frac{5}{9b^2} = 1, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a^2 = 9, \\ b^2 = 5, \\ c^2 = 4. \end{cases}$$

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

(2) 在 $\triangle PF_1F_2$ 中, $\angle PF_1F_2 = 60^\circ, |F_1F_2| = 2c = 4$.

$$\text{由 } |PF_1| + |PF_2| = 2a = 6, \text{ 得 } |PF_1| = 6 - |PF_2|.$$

$$\text{设 } |PF_2| = m, \text{ 则 } |PF_1| = 6 - m.$$

$$\text{在 } \triangle PF_1F_2 \text{ 中, 由余弦定理得 } |PF_2|^2 = |PF_1|^2 + |F_1F_2|^2 - 2|PF_1||F_1F_2|\cos 60^\circ,$$

$$\text{即 } m^2 = (6-m)^2 + 16 - 4(6-m), \text{ 解得 } m = \frac{7}{2}.$$

$$\text{所以 } |PF_2| = \frac{7}{2}, |PF_1| = \frac{5}{2}.$$

$$\text{所以 } S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{5}{2} \times \sin 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

第2课时 椭圆几何性质的应用

学习任务目标

1. 进一步掌握椭圆的方程及其性质的应用, 会判断直线与椭圆的位置关系.
2. 能运用直线与椭圆的位置关系解决相关的弦长、中点弦问题.

问题式预习

【知识清单】

知识点一 点与椭圆的位置关系

点 $P(x_0, y_0)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的位置关系:

$$\text{点 } P \text{ 在椭圆上} \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1;$$

$$\text{点 } P \text{ 在椭圆内部} \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} < 1;$$

$$\text{点 } P \text{ 在椭圆外部} \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} > 1.$$

知识点二 直线与椭圆的位置关系

直线 $y = kx + m$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的位置关系的判断方法:

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得到一个关于 } x \text{ 的一元二}$$

次方程, 根据一元二次方程根的判别式 Δ 的大小判断直线与椭圆的位置关系, 具体见下表.

位置关系	解的个数	Δ 的大小
相交	2	$\Delta > 0$
相切	1	$\Delta = 0$
相离	0	$\Delta < 0$

【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1) 若直线的斜率一定,则当直线过椭圆的中心时,相交所得弦的长最大. (√)

(2) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与点 $P(b, 0)$, 过点 P 可作出该椭圆的一条切线. (×)

(3) 直线 $y = k(x - a)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的位置关系是相交. (√)

(4) 直线与椭圆的位置关系有相离、相切、相交三种. (√)

2. 已知直线 $l: x + y - 3 = 0$, 椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 则直线与椭圆的位置关系是 ()

- A. 相离 B. 相切
C. 相交 D. 相交或相切

A 解析: 由 $x + y - 3 = 0$ 及 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 消去 y , 得 $5x^2 - 24x + 32 = 0$.

因为 $\Delta = (-24)^2 - 4 \times 5 \times 32 = -64 < 0$, 所以直线与椭圆没有交点, 即直线与椭圆相离.

3. 请思考并回答下列问题:

(1) 直线 $y = k(x - 1)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的位置关系如何?

提示: 直线 $y = k(x - 1)$ 过定点 $(1, 0)$, 而该点在椭圆内部, 所以直线和椭圆相交.

(2) 过原点的直线和椭圆相交, 交点关于原点对称吗?

提示: 对称.

任务型课堂

任务1 直线与椭圆的位置关系

1. 若直线 $y = kx + 2$ 与椭圆 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 相切, 则斜率 k 的值是 ()

- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{6}}{3}$
C. $\pm \frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

C 解析: 由 $\begin{cases} y = kx + 2, \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1, \end{cases}$ 得 $(3k^2 + 2)x^2 + 12kx + 6 = 0$.

由题意得 $\Delta = 144k^2 - 24(3k^2 + 2) = 0$, 解得 $k = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$.

2. 直线 $y = kx - k + 1 (k \in \mathbf{R})$ 与焦点在 x 轴上的椭圆 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{m} = 1$ 总有公共点, 则 m 的取值范围是 _____.

解析: 直线 $y = kx - k + 1 = k(x - 1) + 1$ 恒过定点 $P(1, 1)$, 直线与椭圆总有公共点等价于点 $P(1, 1)$ 在椭圆内或在椭圆上, 所以 $\frac{1^2}{5} + \frac{1^2}{m} \leq 1$, 即 $m \geq \frac{5}{4}$. 又 $0 < m < 5$, 故 $m \in \left[\frac{5}{4}, 5\right)$.

【探究总结】

判断直线与椭圆的位置关系的方法

(1) 直线与椭圆有相交、相切和相离三种位置关系, 它

们的几何特征分别是直线与椭圆有两个公共点、直线与椭圆有且只有一个公共点、直线与椭圆无公共点. 反之也成立.

(2) 判断直线与椭圆的位置关系主要使用代数法, 即将直线方程与椭圆方程联立, 消去一个未知数 y (或 x), 得到关于 x (或 y) 的一个一元二次方程, 根据 $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ 还是 $\Delta = 0$ 即可判断方程解的个数, 从而得到直线与椭圆的公共点个数. 由此可见, 判断直线与椭圆的位置关系时, 准确计算出判别式 Δ 是解题的关键.

任务2 弦长及中点弦问题

探究活动

例1 过椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 内一点 $M(2, 1)$ 作一条弦, 使该弦被点 M 平分.

(1) 求此弦所在直线的方程;

(2) 求此弦的长.

解: (1) (方法一) 易知直线的斜率存在, 设为 k , 则所求直线方程为 $y - 1 = k(x - 2)$, 代入椭圆方程并整理, 得 $(4k^2 + 1)x^2 - 8(2k^2 - k)x + 4(2k - 1)^2 - 16 = 0$, 且 $\Delta = 64(2k^2 - k)^2 - 4(4k^2 + 1)[4(2k - 1)^2 - 16] > 0$.

设直线与椭圆的交点为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 x_1, x_2 是方程的两个根,

于是有 $x_1 + x_2 = \frac{8(2k^2 - k)}{4k^2 + 1}$.

又因为 M 为 AB 的中点,

所以 $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{4(2k^2-k)}{4k^2+1} = 2$, 解得 $k = -\frac{1}{2}$, 满足 $\Delta > 0$.

故此弦所在直线的方程为 $x+2y-4=0$.

(方法二) 设直线与椭圆的交点为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

又 $M(2, 1)$ 为 AB 的中点, 所以 $x_1+x_2=4, y_1+y_2=2$.

又因为 A, B 两点在椭圆上,

则 $x_1^2+4y_1^2=16, x_2^2+4y_2^2=16$,

两式相减得 $(x_1^2-x_2^2)+4(y_1^2-y_2^2)=0$.

于是 $(x_1+x_2)(x_1-x_2)+4(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$.

所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = -\frac{x_1+x_2}{4(y_1+y_2)} = -\frac{1}{2}$,

即 $k_{AB} = -\frac{1}{2}$.

又直线 AB 过点 $M(2, 1)$,

故此弦所在直线的方程为 $x+2y-4=0$.

(2) 设此弦的两端点分别为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

由(1)知直线 AB 的方程为 $x+2y-4=0$,

$$\text{联立} \begin{cases} x+2y-4=0, \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1, \end{cases}$$

得 $x^2-4x=0, \Delta=16>0$.

所以 $x_1+x_2=4, x_1x_2=0$.

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2} = \sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2} \times \sqrt{4^2-4 \times 0} = 2\sqrt{5}.$$

故此弦的长为 $2\sqrt{5}$.

【一题多思】

思考 1. 已知椭圆的方程为 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1 (m>0, n>0, m \neq n)$, 一条直线与椭圆相交于点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) (x_1 \neq x_2)$, 弦 AB 的中点为 $M(x_0, y_0)$, 你能求出 $k_{AB} \cdot k_{OM} (O$ 为原点) 的值吗?

解: 将 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 代入椭圆方程, 得

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{m}+\frac{y_1^2}{n}=1, \\ \frac{x_2^2}{m}+\frac{y_2^2}{n}=1, \end{cases} \quad \text{两式作差并整理得}$$

$$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{m} + \frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{n} = 0. \text{ 已知}$$

$$\text{弦 } AB \text{ 的中点为 } M(x_0, y_0), \text{ 则 } x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}, y_0 = \frac{y_1+y_2}{2}.$$

$$\text{因为 } x_1 \neq x_2, \text{ 所以 } \frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{(x_1-x_2)(x_1+x_2)} = -\frac{n}{m}, \text{ 即}$$

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \cdot \frac{y_0}{x_0} = -\frac{n}{m}, \text{ 所以 } k_{AB} \cdot k_{OM} = -\frac{n}{m}.$$

思考 2. 你还有其它方法求解本例(1)吗?

解: 设所求直线与椭圆的一个交点为 $A(x, y)$, 另一个交点为 B ,

由于弦 AB 的中点为 $M(2, 1)$, 则 $B(4-x, 2-y)$.

因为 A, B 两点都在椭圆上,

$$\text{所以} \begin{cases} \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \text{ ①,} \\ \frac{(4-x)^2}{16}+\frac{(2-y)^2}{4}=1 \text{ ②,} \end{cases}$$

①-②, 化简得 $x+2y-4=0$.

显然点 A 的坐标满足这个方程, 代入验证可知点 B 的坐标也满足这个方程, 而过点 A, B 的直线只有一条, 故所求直线的方程为 $x+2y-4=0$.

【探究总结】

求直线与椭圆相交所得弦的长的方法

求直线与椭圆相交所得弦的长, 其常规思路是先把直线方程与椭圆方程联立消元, 再应用一元二次方程根与系数的关系结合弦长公式求解.

弦长公式:

设直线与椭圆的交点为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $|AB|$

$$= \sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]} =$$

$$\sqrt{\left(1+\frac{1}{k^2}\right)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]} \quad (k \text{ 为直线斜率且不为 } 0).$$

应用迁移

1. 已知椭圆 $4x^2+5y^2=20$ 的一个焦点为 F , 过点 F 且倾斜角为 45° 的直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 则弦长 $|AB| =$ _____.

$$\frac{16\sqrt{5}}{9} \quad \text{解析: 由题易知椭圆的标准方程为 } \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1,$$

则 $a=\sqrt{5}, b=2, c=1$.

根据椭圆的对称性, 不妨设焦点 F 为左焦点, 则直线 l 的方程为 $y=x+1$.

$$\text{联立} \begin{cases} y=x+1, \\ 4x^2+5y^2=20, \end{cases} \quad \text{消去 } y, \text{ 得 } 9x^2+10x-15=$$

$$0, \Delta=10^2+4 \times 9 \times 15=640>0.$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } x_1+x_2=-\frac{10}{9}, x_1 \cdot x_2=-\frac{5}{3},$$

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{2} |x_1 - x_2| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2} = \sqrt{2} \times$$

$$\sqrt{\left(-\frac{10}{9}\right)^2-4 \times \left(-\frac{5}{3}\right)} = \sqrt{2} \times \frac{8\sqrt{10}}{9} = \frac{16\sqrt{5}}{9}.$$

2. 已知椭圆 $ax^2+by^2=1$ 与直线 $x+y-1=0$ 相交于 A, B 两点, C 是 AB 的中点. 若 $|AB|=2\sqrt{2}$, 直线 $OC (O$ 为坐标原点) 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 求椭圆的方程.

解: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 代入椭圆方程并作差得 $a(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + b(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0$.

而 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = k_{AB} = -1, \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = k_{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 结合上

式可得 $b = \sqrt{2}a$.

因为 $|AB| = \sqrt{1+k^2} |x_2 - x_1| = \sqrt{2} |x_2 - x_1| = 2\sqrt{2}$, 所以 $|x_2 - x_1| = 2$.

又由 $\begin{cases} ax^2 + by^2 = 1, \\ x + y - 1 = 0, \end{cases}$ 得 $(a+b)x^2 - 2bx + b - 1 = 0$,

$\Delta = 4b^2 - 4(a+b)(b-1) > 0$, 所以 $x_1 + x_2 =$

$$\frac{2b}{a+b}, x_1 x_2 = \frac{b-1}{a+b}.$$

$$\text{故 } |x_2 - x_1|^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \left(\frac{2b}{a+b}\right)^2 -$$

$$4 \cdot \frac{b-1}{a+b} = 4.$$

将 $b = \sqrt{2}a$ 代入, 得 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 所以椭圆的方程

$$\text{是 } \frac{x^2}{3} + \frac{\sqrt{2}y^2}{3} = 1.$$

任务3 > 直线与椭圆的相交问题

探究活动

例2 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左、右焦点. 设过定点 $M(0, 2)$ 的直线 l 与椭圆交于不同的两点 A, B , 且 $\angle AOB$ (O 为坐标原点) 为锐角, 求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

解: 显然直线 $x=0$ 不满足题设条件, 可设直线 $l: y = kx + 2, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + 2, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 整理得 } \left(k^2 + \frac{1}{4}\right)x^2 + 4kx + 3 = 0.$$

$$\text{由 } \Delta = (4k)^2 - 4\left(k^2 + \frac{1}{4}\right) \times 3 = 4k^2 - 3 > 0, \text{ 得 } k > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{或 } k < -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = -\frac{4k}{k^2 + \frac{1}{4}}, x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{k^2 + \frac{1}{4}}.$$

又 $0^\circ < \angle AOB < 90^\circ$, 所以 $\cos \angle AOB > 0$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 > 0.$$

$$\text{又 } y_1 y_2 = (kx_1 + 2)(kx_2 + 2)$$

$$= k^2 x_1 x_2 + 2k(x_1 + x_2) + 4$$

$$= \frac{3k^2}{k^2 + \frac{1}{4}} + \frac{-8k^2}{k^2 + \frac{1}{4}} + 4 = \frac{-k^2 + 1}{k^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\text{故 } \frac{3}{k^2 + \frac{1}{4}} + \frac{-k^2 + 1}{k^2 + \frac{1}{4}} > 0, \text{ 即 } k^2 < 4,$$

$$\text{所以 } -2 < k < 2.$$

$$\text{故 } -2 < k < -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 或 } \frac{\sqrt{3}}{2} < k < 2.$$

【探究总结】

解决直线与椭圆相交问题时, 应用一元二次方程根与系数的关系的前提是方程有两个实数根, 即不能漏掉条件 $\Delta > 0$.

应用迁移

中心在坐标原点, 焦点在 x 轴上的椭圆离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

与直线 $x + y - 1 = 0$ 相交于 M, N 两点. 若以 MN 为直径的圆经过坐标原点, 求椭圆的方程.

解: 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$,

因为 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $a^2 = 4b^2$, 即 $a = 2b$.

$$\text{所以椭圆方程为 } \frac{x^2}{4b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

与直线方程联立并化简, 得 $5x^2 - 8x + 4 - 4b^2 = 0$.

$$\Delta = 64 - 4 \times 5(4 - 4b^2) > 0, \text{ 解得 } b^2 > \frac{1}{5}.$$

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{8}{5}, x_1 x_2 = \frac{1}{5}(4 - 4b^2).$$

$$\text{所以 } y_1 y_2 = (1 - x_1)(1 - x_2)$$

$$= 1 - (x_1 + x_2) + x_1 x_2 = \frac{1}{5}(1 - 4b^2).$$

$$\text{由题意可知 } OM \perp ON, \text{ 所以 } x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0, \text{ 即 } \frac{1}{5}(4 - 4b^2) + \frac{1}{5}(1 - 4b^2) = 0,$$

$$\text{解得 } b^2 = \frac{5}{8} > \frac{1}{5}, \text{ 所以 } a^2 = \frac{5}{2}.$$

$$\text{所以椭圆的方程为 } \frac{2}{5}x^2 + \frac{8}{5}y^2 = 1.$$

任务4 > 与椭圆有关的综合问题

探究活动

例3 (1) 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 A, B 在椭圆 $x^2 + 3y^2 = 4$ 上, 点 C 在直线 $l: y = x + 2$ 上, 且 $AB \parallel l$. 当边 AB 过坐标原点 O 时, 求 AB 的长及 $\triangle ABC$ 的面积.

(2) 在椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{7} = 1$ 上求一点 P , 使它到直线 $l: 3x - 2y - 16 = 0$ 的距离最短, 并求出最短距离.

解: (1) 因为 $AB \parallel l$, 且边 AB 过点 $O(0, 0)$,

所以 AB 所在直线的方程为 $y = x$.

设 A, B 两点坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} x^2+3y^2=4, \\ y=x, \end{cases} \text{ 得 } x=\pm 1.$$

$$\text{所以 } |AB|=\sqrt{2}|x_1-x_2|=2\sqrt{2}.$$

又因为边 AB 上的高 h 等于原点到直线 l 的距离,

$$\text{所以 } h=\frac{|0-0+2|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}, \text{ 所以 } S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot h=2.$$

(2) 设与椭圆相切并与 l 平行的直线方程为 $y=$

$$\frac{3}{2}x+m, \text{ 代入 } \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{7}=1,$$

$$\text{整理得 } 4x^2+3mx+m^2-7=0,$$

$$\Delta=9m^2-16(m^2-7)=0, \text{ 所以 } m^2=16, \text{ 所以 } m=\pm 4.$$

$$\text{故切线方程为 } y=\frac{3}{2}x+4 \text{ 或 } y=\frac{3}{2}x-4.$$

显然直线 $y=\frac{3}{2}x-4$ 距直线 l 最近, 此时点 P 的坐

$$\text{标为 } \left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}\right). \text{ 最短距离 } d=\frac{\left|\frac{9}{2}+\frac{7}{2}-16\right|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{8}{\sqrt{13}}=\frac{8\sqrt{13}}{13}.$$

【探究总结】

解决与椭圆有关的综合问题的思路

直线与椭圆的综合问题常与不等式、三角函数、平面向量以及函数的最值等知识联系在一起, 解决这类问题常需要挖掘出题目中隐含的数量关系、位置关系等, 然后利用一元二次方程根与系数的关系构造等式或利用函数关系式进行合理的转化, 特别要注意利用根的判别式来确定参数的限制条件.

应用迁移

1. (2023·新高考全国 II 卷) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{3}+y^2=1$

的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 $y=x+m$ 与 C 交于 A, B 两点. 若 $\triangle F_1AB$ 面积是 $\triangle F_2AB$ 面积的 2 倍, 则 $m=$ ()

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

C. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

D. $-\frac{2}{3}$

C 解析: 联立 $\begin{cases} y=x+m, \\ \frac{x^2}{3}+y^2=1, \end{cases}$ 消去 y , 得 $4x^2+6mx$

$$+3m^2-3=0.$$

因为直线与椭圆交于 A, B 两点, 则 $\Delta=36m^2-4\times 4(3m^2-3)>0$, 解得 $-2<m<2$.

设 F_1 到直线 AB 的距离为 d_1 , F_2 到直线 AB 的距离为 d_2 , 易知 $F_1(-\sqrt{2}, 0), F_2(\sqrt{2}, 0)$,

$$\text{则 } d_1=\frac{|-\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}}, d_2=\frac{|\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}}.$$

由题意可知

$$\frac{S_{\triangle F_1AB}}{S_{\triangle F_2AB}}=\frac{\frac{|-\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}}}{\frac{|\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}}}=\frac{|-\sqrt{2}+m|}{|\sqrt{2}+m|}=2, \text{ 解得 } m=$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{3} \text{ 或 } m=-3\sqrt{2} \text{ (舍)}.$$

故选 C.

2. (2024·新高考全国 I 卷) 已知 $A(0, 3)$ 和 $P\left(3, \frac{3}{2}\right)$

为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 (a>b>0)$ 上两点.

(1) 求 C 的离心率;

(2) 若过点 P 的直线 l 交椭圆 C 于另一点 B , 且 $\triangle ABP$ 的面积为 9, 求 l 的方程.

$$\text{解: (1) 由题意得 } \begin{cases} b=3, \\ \frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} b=3, \\ a=2\sqrt{3}, \end{cases}$$

$$\text{所以 } e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{9}{12}}=\frac{1}{2}.$$

(2) 由 (1) 可得椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$.

$$\text{因为 } k_{AP}=\frac{3-\frac{3}{2}}{0-3}=-\frac{1}{2}, \text{ 所以直线 } AP \text{ 的方程为 } y=-\frac{1}{2}x+3, \text{ 即 } x+2y-6=0,$$

$$\text{且 } |AP|=\sqrt{(0-3)^2+\left(3-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

设点 B 到直线 AP 的距离为 d , 则 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}|AP|\cdot$

$$d, \text{ 即 } \frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{5}}{2}d=9, \text{ 解得 } d=\frac{12\sqrt{5}}{5}.$$

所以将直线 AP 沿着与 AP 垂直的方向平移 $\frac{12\sqrt{5}}{5}$

个单位长度,

此时该平行线与椭圆的交点即为点 B .

设该平行线的方程为 $x+2y+D=0$,

$$\text{则 } \frac{|D+6|}{\sqrt{5}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}, \text{ 解得 } D=6 \text{ 或 } D=-18.$$

$$\text{当 } D=6 \text{ 时, 联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1, \\ x+2y+6=0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x=0, \\ y=-3, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-3, \\ y=-\frac{3}{2}, \end{cases}$$

$$\text{即 } B(0, -3) \text{ 或 } B\left(-3, -\frac{3}{2}\right).$$

当 $B(0, -3)$ 时, $k_l = \frac{3}{2}$, 直线 l 的方程为 $y = \frac{3}{2}x - 3$, 即 $3x - 2y - 6 = 0$;

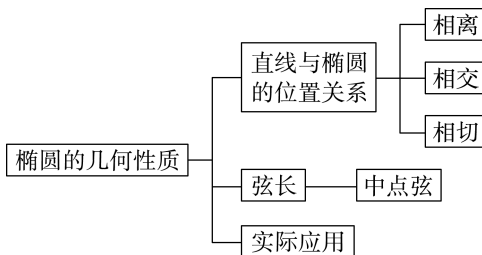
当 $B(-3, -\frac{3}{2})$ 时, $k_l = \frac{1}{2}$, 直线 l 的方程为 $y = \frac{1}{2}x$, 即 $x - 2y = 0$.

当 $D = -18$ 时, 联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ x + 2y - 18 = 0, \end{cases}$ 得 $2y^2 - 27y + 117 = 0$,
 $\Delta = 27^2 - 4 \times 2 \times 117 = -207 < 0$, 此时该直线与椭圆无交点.

圆无交点.

综上, 直线 l 的方程为 $3x - 2y - 6 = 0$ 或 $x - 2y = 0$.

提质归纳



课后素养评价 (二十八)

椭圆几何性质的应用

A组 学习·理解

1. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$, 直线 l 过点 $(3, -1)$, 则直线 l 与椭圆 C 的公共点的个数为 ()
- A. 1 B. 1 或 2
C. 2 D. 0

C 解析: 因为直线 l 过点 $(3, -1)$, 且 $\frac{3^2}{25} + \frac{(-1)^2}{36} < 1$, 所以点 $(3, -1)$ 在椭圆 C 的内部, 故直线 l 与椭圆 C 有 2 个公共点.

2. (多选) 若直线 $y = kx + 2$ 与椭圆 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 相切, 则 k 的值可以是 ()

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

AB 解析: 把 $y = kx + 2$ 代入 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$, 得 $(3k^2 + 2)x^2 + 12kx + 6 = 0$. 因为直线与椭圆相切, 所以 $\Delta = (12k)^2 - 4(3k^2 + 2) \times 6 = 0$, 解得 $k = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$.

3. 直线 $y = x + 2$ 与椭圆 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{3} = 1$ 有两个公共点, 则 m 的取值范围是 ()
- A. $(1, +\infty)$
B. $(1, 3) \cup (3, +\infty)$
C. $(3, +\infty)$
D. $(0, 3) \cup (3, +\infty)$

B 解析: 由 $\begin{cases} y = x + 2, \\ \frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$ 消去 y 可得 $(3+m)x^2 + 4mx + m = 0$, 因为直线与椭圆有两个公共点, 所以 $\Delta = (4m)^2 - 4m(3+m) > 0$, 解得 $m > 1$ 或 m

< 0 .

又因为 $m > 0$ 且 $m \neq 3$, 所以 $m > 1$ 且 $m \neq 3$.
 故 m 的取值范围是 $(1, 3) \cup (3, +\infty)$.

4. 在椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 内, 过点 $M(1, 1)$, 且被这点平分的弦所在直线的方程为 ()
- A. $x + 4y - 5 = 0$ B. $x - 4y - 5 = 0$
C. $4x + y - 5 = 0$ D. $4x - y - 5 = 0$

A 解析: 设直线与椭圆交点为 $A(x_1, y_1)$,

$$B(x_2, y_2), \text{ 则 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{4} = 1, \text{ ①} \\ \frac{x_2^2}{16} + \frac{y_2^2}{4} = 1. \text{ ②} \end{cases}$$

由 ① - ②, 得

$$\frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{16} + \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{4} = 0.$$

$$\text{由题意得 } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ y_1 + y_2 = 2, \end{cases}$$

$$\text{所以 } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{4(x_1 + x_2)}{16(y_1 + y_2)} = -\frac{1}{4}.$$

所以所求直线的方程为 $y - 1 = -\frac{1}{4}(x - 1)$, 即 $x + 4y - 5 = 0$.

5. 过椭圆 $x^2 + 2y^2 = 4$ 的左焦点作倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线, 交椭圆于 A, B 两点, 则弦 AB 的长为 ()
- A. $\frac{6}{7}$ B. $\frac{16}{7}$ C. $\frac{7}{16}$ D. $\frac{7}{6}$

B 解析: 易求得直线 AB 的方程为 $y = \sqrt{3}(x + \sqrt{2})$.

由 $\begin{cases} y = \sqrt{3}(x + \sqrt{2}), \\ x^2 + 2y^2 = 4, \end{cases}$ 消去 y 并整理, 得 $7x^2 + 12\sqrt{2}x + 8 = 0$, $\Delta > 0$. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则

$$x_1 + x_2 = -\frac{12\sqrt{2}}{7}, x_1 x_2 = \frac{8}{7}.$$

由弦长公式, 得 $|AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_1 - x_2| = \sqrt{1+(\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{12\sqrt{2}}{7}\right)^2 - 4 \times \frac{8}{7}} = \frac{16}{7}.$

6. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 若直线 $y = kx$ 与椭圆一个交点的横坐标为 b , 则 k 的值为 _____.

$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 解析: 由条件知, (b, kb) 在椭圆上, 即 $\frac{b^2}{a^2} + \frac{k^2 b^2}{b^2} = 1,$

所以 $k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} = e^2 = \frac{1}{2}$, 所以 $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$

7. 椭圆 $mx^2 + ny^2 = 1$ 与直线 $y = 1 - x$ 交于 M, N 两点, 过原点 O 与线段 MN 的中点 P 的直线的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\frac{m}{n}$ 的值是 _____.

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 解析: 由 $\begin{cases} y = 1 - x, \\ mx^2 + ny^2 = 1, \end{cases}$ 消去 y , 得 $(m+n)x^2 - 2nx + n - 1 = 0.$

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $\Delta > 0, x_1 + x_2 = \frac{2n}{m+n}, y_1 + y_2 = 1 - x_1 + 1 - x_2 = \frac{2m}{m+n}$. 因为 P 为线段 MN 的中点, 所以 P 的坐标为 $\left(\frac{n}{m+n}, \frac{m}{m+n}\right)$.

所以 $k_{OP} = \frac{m}{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

8. 直线 $5x + 4y - 1 = 0$ 交椭圆 $C: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 于 M, N 两点, 设 MN 的中点为 P, O 为坐标原点, 直线 OP 的斜率等于 $\frac{5}{4}$, 则椭圆 C 的离心率为 _____.

$\frac{3}{5}$ 解析: 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, MN 的中点为 $P(x_0, y_0)$,

则 $\begin{cases} \frac{y_1^2}{a^2} + \frac{x_1^2}{b^2} = 1, \\ \frac{y_2^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \end{cases}$ 两式相减整理得 $b^2(y_1^2 - y_2^2) + a^2(x_1^2 - x_2^2) = 0,$

则 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{a^2}{b^2} \left(\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \right)$, 即 $k_{MN} = -\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{1}{k_{OP}}.$

因为 $k_{MN} = -\frac{5}{4}, k_{OP} = \frac{5}{4}$, 所以 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{16}{25},$

所以 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{3}{5}.$

B组 应用·实践

1. (多选) 已知直线 $y = kx + 1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{m} = 1$, 则 ()

A. 直线 $y = kx + 1$ 恒过定点 $(0, 1)$

B. $m > 0$

C. $0 < m < 5$

D. 若直线与椭圆总有公共点, 则 m 的取值范围是 $[1, 5) \cup (5, +\infty)$

AD 解析: 由于直线 $y = kx + 1$ 可以化为 $y - 1 = k(x - 0)$, 故恒过点 $(0, 1)$, 故 A 正确; 而方程 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{m} = 1$ 表示椭圆的条件为 $m > 0$ 且 $m \neq 5$, 故 B, C

错误; 若直线与椭圆总有公共点, 则点 $(0, 1)$ 必在椭圆内或椭圆上, 则 $0 < \frac{1}{m} \leq 1$ 且 $m \neq 5$, 所以 $m \geq 1$ 且 $m \neq 5$, 故 D 正确.

2. 已知 $F(2, 0)$ 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点, $A(2, 3)$ 为椭圆 C 内一点. 若在椭圆 C 上存在一点 P , 使得 $|PA| + |PF| = 10$, 则 a 的取值范围是 ()

A. $(4, 7]$

B. $(5, 7]$

C. $\left(5, \frac{15}{2}\right]$

D. $\left(4, \frac{15}{2}\right]$

D 解析: 依题意, $a^2 - b^2 = 4$, 设椭圆 C 的左焦点为 F' , 则 $F'(-2, 0)$.

因为 $|PA| + |PF| = 10$, 且 $|PF| + |PF'| = 2a$, 所以 $|PA| + 2a - |PF'| = 10$, 即 $|PA| - |PF'| = 10 - 2a$,

于是 $|10 - 2a| \leq |AF'| = 5$, 解得 $\frac{5}{2} \leq a \leq \frac{15}{2}$.

而 $b^2 = a^2 - 4$, 点 $A(2, 3)$ 为椭圆 C 内一点,

所以 $\frac{4}{a^2} + \frac{9}{a^2 - 4} < 1$, 整理得 $a^4 - 17a^2 + 16 > 0$.

又 $a > 2$, 解得 $a > 4$.

所以 a 的取值范围是 $4 < a \leq \frac{15}{2}$. 故选 D.

3. (多选) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1$ 内一点 $M(1, 2)$, 过

M 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 且 M 为线段 AB 的中点, 则下列结论正确的是 ()

A. 椭圆 C 的焦点坐标为 $(2, 0), (-2, 0)$

B. 椭圆 C 的长轴长为 $4\sqrt{2}$

C. 直线 l 的方程为 $x + y - 3 = 0$

$$D. |AB| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

BCD 解析: 对于 A, 易知椭圆 C 的焦点在 y 轴上, 由椭圆方程可得 $a^2=8, b^2=4$, 则 $c=\sqrt{a^2-b^2}=2$, 故其焦点坐标为 $(0, \pm 2)$, 故 A 错误;

对于 B, $a^2=8$, 则 $a=2\sqrt{2}$, 椭圆 C 的长轴长为 $2a=4\sqrt{2}$, 故 B 正确;

对于 C, 由题意, 可设直线 l 的方程为 $x=m(y-2)+1$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1+y_2=4$, 联立直线与椭圆方程并整理得 $(2m^2+1)y^2+4m(1-2m)y+8m^2-8m-6=0$, 则 $\Delta>0$,

所以 $y_1+y_2=\frac{4m(2m-1)}{2m^2+1}=4$, 解得 $m=-1$, 即直线 l 的方程为 $x+y-3=0$, 故 C 正确;

对于 D, 由 C 知 $y_1+y_2=4, y_1y_2=\frac{10}{3}$, 则 $|AB|=\sqrt{1+m^2} \cdot \sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, 故 D 正确.

4. 已知以 $F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$ 为焦点的椭圆与直线 $x+\sqrt{3}y+4=0$ 有且仅有一个交点, 则椭圆的长轴长为_____.

$2\sqrt{7}$ 解析: 根据题意设椭圆方程为 $\frac{x^2}{b^2+4}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($b>0$), 将 $x=-\sqrt{3}y-4$ 代入椭圆方程, 得 $4(b^2+1)y^2+8\sqrt{3}b^2y-b^4+12b^2=0$. 因为椭圆与直线 $x+\sqrt{3}y+4=0$ 有且仅有一个交点, 所以 $\Delta=(8\sqrt{3}b^2)^2-4 \cdot 4(b^2+1) \cdot (-b^4+12b^2)=0$, 即 $(b^2+4)(b^2-3)=0$, 解得 $b^2=3$,

所以椭圆的长轴长为 $2\sqrt{b^2+4}=2\sqrt{7}$.

5. 过椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=1$ 内的一点 $P(2, -1)$ 的直线交椭圆于 A, B 两点, 且满足 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ (O 为原点), 则这条直线的方程是_____.

$5x-3y-13=0$ 解析: 由于直线 AB 过点 P, 又 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$,

所以点 P 为弦 AB 的中点. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1+x_2=4, y_1+y_2=-2$,

所以 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{5}=1, \\ \frac{x_2^2}{6}+\frac{y_2^2}{5}=1, \end{cases}$ 两式作差整理得

$$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{6}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{5}=0,$$

$$\text{所以 } \frac{4(x_1-x_2)}{6}-\frac{2(y_1-y_2)}{5}=0,$$

$$\text{即 } k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{5}{3}.$$

所以直线方程为 $y+1=\frac{5}{3}(x-2)$, 即 $5x-3y-13=0$.

6. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 的左顶点为 A, 左焦点为 F. 若该椭圆的上顶点到焦点的距离为 2, 离心率 $e=\frac{1}{2}$, 则椭圆的标准方程是_____; 若点 P 为椭圆上任意一点, 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{FP}$ 的取值范围是_____.

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ $[0, 12]$ 解析: 因为椭圆的上顶点到焦点的距离为 2, 所以 $a=2$.

因为离心率 $e=\frac{1}{2}$, 所以 $c=1, b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$,

则椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

所以点 A 的坐标为 $(-2, 0)$, 点 F 的坐标为 $(-1, 0)$.

设 $P(x, y)$, 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{FP}=(x+2, y) \cdot (x+1, y)=x^2+3x+2+y^2$.

由椭圆的方程, 得 $y^2=3-\frac{3}{4}x^2$,

所以 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{FP}=x^2+3x-\frac{3}{4}x^2+5=\frac{1}{4}(x+6)^2-4$.

因为 $x \in [-2, 2]$, 所以 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{FP} \in [0, 12]$.

7. 已知椭圆的中心在原点, 焦点在 x 轴上, 离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 焦距为 2.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 过椭圆的左焦点 F_1 , 且斜率为 1 的直线 m 交椭圆于 A, B 两点, 求 $\triangle OAB$ (O 为原点) 的面积.

解: (1) 由题意, 设所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$),

因为焦距为 $2c=2$, 所以 $c=1$.

又离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$, 所以 $a=\sqrt{5}$.

则 $b^2=a^2-c^2=4$.

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2) 由(1)知左焦点为 $F_1(-1, 0)$, 则直线 m 的方程为 $y=x+1$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = x + 1, \\ \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1, \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 得 } 9x^2 + 10x - 15 = 0,$$

$$\Delta = 10^2 - 4 \times 9 \times (-15) = 640 > 0,$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = -\frac{10}{9}, x_1 x_2 = -\frac{5}{3}.$$

由弦长公式得 $|AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot$

$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \frac{16\sqrt{5}}{9},$$

$$\text{原点 } O \text{ 到直线 } m \text{ 的距离为 } d = \frac{|1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{1}{2} \times \frac{16\sqrt{5}}{9} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{10}}{9}.$$

3.2 双曲线

3.2.1 双曲线及其标准方程

学习任务目标

1. 理解双曲线的定义、几何图形和标准方程的推导过程.
2. 掌握双曲线的标准方程及其求法.
3. 会利用双曲线的定义和标准方程解决简单的问题.

问题式预习

【知识清单】

知识点一 双曲线的定义

一般地,我们把平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离的差的绝对值等于非零常数(小于 $|F_1 F_2|$)的点的轨迹叫做双曲线.这两个定点叫做双曲线的焦点,两焦点间的距离叫做双曲线的焦距.

知识点二 双曲线的标准方程

焦点的位置	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
标准方程	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)
焦点坐标	$(-c, 0), (c, 0)$	$(0, -c), (0, c)$
a, b, c 的关系	$c^2 = a^2 + b^2$	

【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1) 平面内到两定点的距离的差等于常数(小于两定点间距离)的点的轨迹是双曲线. (×)

(2) 平面内到点 $F_1(0, 4), F_2(0, -4)$ 的距离之差的绝对值等于 8 的点的轨迹是双曲线. (×)

(3) 在双曲线的标准方程中, a, b 的大小关系是 $a > b$. (×)

(4) 双曲线的标准方程中 a, b, c 之间的关系与椭圆的标准方程中 a, b, c 之间的关系相同. (×)

2. 若方程 $\frac{x^2}{2+m} - \frac{y^2}{2-m} = 1$ 表示双曲线, 则 m 的取值

范围是

()

A. $(-2, 2)$

B. $(0, +\infty)$

C. $[0, +\infty)$

D. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

A 解析: 因为已知方程表示双曲线, 所以 $(2+m) \cdot (2-m) > 0$, 所以 $-2 < m < 2$. 故 m 的取值范围是 $(-2, 2)$.

3. 请思考并回答下列问题:

(1) 若将双曲线定义中的“绝对值”删掉, 动点的轨迹是什么?

提示: 那么动点的轨迹为双曲线的一支.

(2) 两种双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的相同点和不同点分别是什么?

提示: 相同点: 它们的形状、大小都相同, 都有 $a > 0, b > 0, a^2 + b^2 = c^2$;

不同点: 两种双曲线的位置不同, 它们的焦点坐标也不同.

(3) 如何根据双曲线的标准方程确定双曲线的焦点位置?

提示: 若含 x^2 项的系数为正, 则焦点在 x 轴上; 若含 y^2 项的系数为正, 则焦点在 y 轴上.

任务型课堂

任务1 双曲线定义的应用

探究活动

例1 已知 F_1, F_2 为双曲线 $C: x^2 - y^2 = 2$ 的左、右焦点, 点 P 在 C 上, $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为_____.

$2\sqrt{3}$ **解析:** 将 $x^2 - y^2 = 2$ 化为 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$, 则 $a = b = \sqrt{2}, c = 2$. 不妨设点 P 在双曲线 C 的右支上, 则 $|PF_1| - |PF_2| = 2a = 2\sqrt{2}$. 由题意知 $|F_1F_2| = 2c = 4$.

在 $\triangle F_1PF_2$ 中, 由余弦定理的推论,

$$\cos \angle F_1PF_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|} = \frac{1}{2},$$

所以 $|PF_1| \cdot |PF_2| = 8$,

$$\text{所以 } S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{1}{2} |PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}.$$

一题多思

思考1 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 , 点 P 在双曲线上, 且 $\angle F_1PF_2 = \theta$, 求 $\triangle PF_1F_2$ 的面积.

解: 在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 因为 $\angle F_1PF_2 = \theta$, 所以由余弦定理可得 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \cos \theta = |F_1F_2|^2 = 4c^2$ ①.

由双曲线的定义可得 $||PF_1| - |PF_2|| = 2a$, 两边平方可得 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| = 4a^2$ ②.

由①-②, 可得 $2|PF_1| \cdot |PF_2| \cdot (1 - \cos \theta) = 4c^2 - 4a^2$,

$$\text{则 } |PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{2b^2}{1 - \cos \theta}.$$

$$\text{故 } S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} |PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \sin \theta = b^2 \cdot \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}.$$

$$= b^2 \cdot \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{b^2}{\tan \frac{\theta}{2}}.$$

思考2 把本例中“ $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ ”改为“ $|PF_1| = (2 + \sqrt{3})|PF_2|$ ”, 其他条件不变, 求 $\triangle PF_1F_2$ 的面积.

解: 由题易知 $|PF_1| > |PF_2|$,

$$\text{则 } \begin{cases} |PF_1| - |PF_2| = 2\sqrt{2}, \\ |PF_1| = (2 + \sqrt{3})|PF_2|, \end{cases} \text{ 解得 } |PF_1| = \sqrt{6} + \sqrt{2}, |PF_2| = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

在 $\triangle PF_1F_2$ 中, $|PF_1| = \sqrt{6} + \sqrt{2}, |PF_2| = \sqrt{6} - \sqrt{2}, |F_1F_2| = 4$, 则 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2$, 所以 $\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形, 且 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$, 所以 $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} |PF_1| \cdot |PF_2| = 2$.

探究总结

1. 双曲线的定义的应用, 要注意三点:

- (1) $2a$ 是双曲线上的点到两个焦点的距离之差的绝对值;
- (2) $2a < |F_1F_2|$;
- (3) 焦点所在坐标轴.

2. 在焦点三角形 PF_1F_2 中, 常利用正弦定理、余弦定理或勾股定理, 并结合 $||PF_1| - |PF_2|| = 2a$, 建立 a 与 $|PF_1| \cdot |PF_2|$ 的联系.

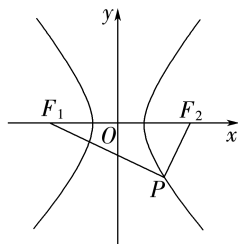
应用迁移

1. (2024 · 天津卷) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . P 是双曲线右支上一点, 且直线 PF_2 的斜率为 2, $\triangle PF_1F_2$ 是面积为 8 的直角三角形, 则双曲线的方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 1$ B. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$
C. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1$ D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$

C 解析: 如图, 由题意可知, 点 P 必落在第四象限, $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$.

设 $|PF_2| = m, \angle PF_2F_1 = \theta_1, \angle PF_1F_2 = \theta_2$, 由 $k_{PF_2} = \tan \theta_1 = 2$, 所以 $\sin \theta_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$.



因为 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$, 所以 $k_{PF_1} \cdot k_{PF_2} = -1$, 则 $k_{PF_1} = -\frac{1}{2}$, 即 $\tan \theta_2 = \frac{1}{2}, \sin \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. 由正弦定理可得,

$$|PF_1| : |PF_2| : |F_1F_2| = \sin \theta_1 : \sin \theta_2 : \sin 90^\circ = 2 : 1 : \sqrt{5},$$

则由 $|PF_2| = m$, 得 $|PF_1| = 2m, |F_1F_2| = 2c = \sqrt{5}m$.

$$\text{由 } S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} |PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot m = 8,$$

得 $m=2\sqrt{2}$,

则 $|PF_2|=2\sqrt{2}$, $|PF_1|=4\sqrt{2}$, $|F_1F_2|=2c=2\sqrt{10}$, $c=\sqrt{10}$.

由双曲线的定义可得, $|PF_1|-|PF_2|=2a=2\sqrt{2}$,

所以 $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{c^2-a^2}=2\sqrt{2}$,

所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{8}=1$. 故选 C.

2. 已知双曲线的方程是 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{8}=1$, 点 P 在双曲线上, 且到其中一个焦点 F_1 的距离为 10, 点 N 是 PF_1 的中点, 则 $|ON|$ (O 为坐标原点) 的大小为

1 或 9. 解析: 设双曲线的另一个焦点为 F_2 , 连接 PF_2 (图略). 因为 N 为 PF_1 的中点, 所以 ON 是 $\triangle PF_1F_2$ 的中位线,

所以 $|ON|=\frac{1}{2}|PF_2|$.

因为 $||PF_1|-|PF_2||=8$, $|PF_1|=10$, 所以 $|PF_2|=2$ 或 $|PF_2|=18$.

所以 $|ON|=1$ 或 $|ON|=9$.

任务 2 > 求双曲线的标准方程

探究活动

例 2 求过点 $P(3, \frac{15}{4})$, $Q(-\frac{16}{3}, 5)$ 且焦点在坐标轴上的双曲线的标准方程.

解: 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1 (mn<0)$.

因为 P, Q 两点在双曲线上, 所以 $\begin{cases} \frac{9}{m}+\frac{225}{16n}=1, \\ \frac{256}{9m}+\frac{25}{n}=1, \end{cases}$ 解得

$\begin{cases} m=-16, \\ n=9. \end{cases}$ 所以所求双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$.

【探究总结】

1. 双曲线标准方程的两种求法

(1) 定义法: 根据双曲线的定义得到相应的 a, b, c 的值, 再写出双曲线的标准方程.

(2) 待定系数法: 先设出双曲线的标准方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 或 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ (a, b 均为正数), 然后根据条件求出待定系数即可得到所求方程.

2. 当焦点位置不确定时, 可设双曲线方程为 $mx^2+ny^2=1 (mn<0)$. 因为它包括焦点在 x 轴上 ($m>0, n<0$) 和焦点在 y 轴上 ($m<0, n>0$) 两种情况, 可以避免分类讨论, 从而简化运算.

88 应用迁移

分别根据下列条件, 求双曲线的标准方程.

(1) $a=4$, 经过点 $A(1, -\frac{4\sqrt{10}}{3})$;

(2) 经过点 $(3, 0), (-6, -3)$;

(3) 与双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ 有相同的焦点, 且经过点 $(3\sqrt{2}, 2)$.

解: (1) 当焦点在 x 轴上时,

设所求双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{b^2}=1 (b>0)$.

把点 A 的坐标代入, 得 $b^2=-\frac{16}{15}\times\frac{160}{9}<0$, 不符合题意;

当焦点在 y 轴上时,

设所求双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{b^2}=1 (b>0)$.

把点 A 的坐标代入, 得 $b^2=9$,

所以所求双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$.

(2) 设双曲线的方程为 $mx^2+ny^2=1 (mn<0)$.

因为双曲线经过点 $(3, 0), (-6, -3)$,

所以 $\begin{cases} 9m+0=1, \\ 36m+9n=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=\frac{1}{9}, \\ n=-\frac{1}{3}. \end{cases}$

所以所求双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$.

(3) 因为所求双曲线与双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ 有相同的焦点,

所以可设所求双曲线的方程为 $\frac{x^2}{16-\lambda}-\frac{y^2}{4+\lambda}=1 (-4<\lambda<16)$.

因为双曲线过点 $(3\sqrt{2}, 2)$, 所以 $\frac{18}{16-\lambda}-\frac{4}{4+\lambda}=1$,

解得 $\lambda=4$ 或 $\lambda=-14$ (舍去).

所以所求双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$.

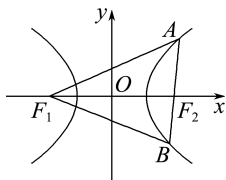
任务 3 > 双曲线的实际应用

探究活动

例 3 如图, B 地在 A 地的正东方向 4 km 处, C 地在 B 地的北偏东 30° 方向 2 km 处, 河岸 PQ (曲线) 上任意一点到 A 地的距离比到 B 地的距离远 2 km. 现要在河岸 PQ 上选一处 M 建码头, 并修建两条公路 MB, MC , 以便于向 B, C 两地转运货物. 经测算, 公路的造价是 a 万元/km, 求修建这两条公路的总费用最低是多少.

由 $\begin{cases} |PF_1| \cdot |PF_2| = 2, \\ |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = (2\sqrt{5})^2, \end{cases}$
 得 $(|PF_1| - |PF_2|)^2 = 16$,
 即 $2a = 4$, 解得 $a = 2$. 又 $c = \sqrt{5}$, 所以 $b = 1$.
 所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. 故选 C.

4. 如图, 已知双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 点 A, B 均在双曲线的右支上, 线段 AB 经过双曲线的右焦点 F_2 , $|AB| = m$, F_1 为双曲线的左焦点, 则 $\triangle ABF_1$ 的周长为 ()



- A. $2a + 2m$ B. $4a + 2m$
 C. $a + m$ D. $2a + 4m$

B 解析: 由双曲线的定义, 知

$|AF_1| - |AF_2| = 2a$, $|BF_1| - |BF_2| = 2a$.
 又 $|AF_2| + |BF_2| = |AB|$, 所以 $\triangle ABF_1$ 的周长为
 $|AF_1| + |BF_1| + |AB| = 4a + 2|AB| = 4a + 2m$.

5. 若双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{m} = 1$ 的焦距为 10, 则 $m =$ _____.

9 解析: 由题意知, $a = 4$, $b = \sqrt{m}$, $c = 5$, 又由 $a^2 + b^2 = c^2$, 得 $16 + m = 25$, 所以 $m = 9$.

6. 已知动点 $M(x, y)$ 满足 $\sqrt{(x+2)^2 + y^2} - \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 4$, 则动点 M 的轨迹方程是 _____.
- $y = 0 (x \geq 2)$ 解析: 设 $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$, 由题意知动点 M 满足 $|MF_1| - |MF_2| = 4 = |F_1F_2|$, 故动点 M 的轨迹是射线 $y = 0 (x \geq 2)$.

7. 以椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ 的焦点为顶点, 且过点 $(-\sqrt{3}, 6)$ 的双曲线标准方程是 _____.

$\frac{y^2}{9} - x^2 = 1$ 解析: 在椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ 中, $a^2 = 25$, $b^2 = 16$, 所以 $c^2 = 25 - 16 = 9$,
 所以椭圆的焦点为 $(0, \pm 3)$, 所以双曲线的顶点为 $(0, \pm 3)$.

设双曲线方程为 $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{m^2} = 1$,

由题意可得 $\frac{36}{9} - \frac{3}{m^2} = 1$, 解得 $m^2 = 1$,

所以所求双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{9} - x^2 = 1$.

8. 若方程 $\frac{x^2}{5-m} + \frac{y^2}{m-3} = 1$ 表示焦点在 x 轴上的双曲

线, 则实数 m 的取值范围是 _____.

$(-\infty, 3)$ 解析: 将双曲线方程化为标准方程为

$$\frac{x^2}{5-m} - \frac{y^2}{3-m} = 1,$$

则 $\begin{cases} 5-m > 0, \\ 3-m > 0, \end{cases}$ 解得 $m < 3$.

9. 已知点 P 在双曲线 $C: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 上, F_1, F_2 分别是双曲线 C 的左、右焦点, 若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 20, 则点 P 到 x 轴的距离为 _____, 且 $|PF_1| + |PF_2| =$ _____.

4 $\frac{50}{3}$ 解析: 由已知得 $a = 4, b = 3$,

则 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, 设点 $P(x_P, y_P)$,

则 $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} \times 2c \times |y_P| = \frac{1}{2} \times 10 \times |y_P| = 20$,

所以 $|y_P| = 4$, 即点 P 到 x 轴的距离为 4.

由双曲线的对称性, 不妨取点 P 的坐标为 $(\frac{20}{3}, 4)$,

得 $|PF_2| = \sqrt{(\frac{20}{3} - 5)^2 + 4^2} = \frac{13}{3}$,

由双曲线的定义, 得 $|PF_1| = |PF_2| + 2a = \frac{13}{3} + 8$

$= \frac{37}{3}$,

所以 $|PF_1| + |PF_2| = \frac{37}{3} + \frac{13}{3} = \frac{50}{3}$.

B组 应用·实践

1. (多选) 已知方程 $\frac{x^2}{4-t} + \frac{y^2}{t-1} = 1$ 表示的曲线为 C , 给出以下判断, 正确的是 ()

- A. 当 $1 < t < 4$ 时, 曲线 C 为椭圆
 B. 当 $t > 4$ 或 $t < 1$ 时, 曲线 C 为双曲线

- C. 若曲线 C 为焦点在 x 轴上的椭圆, 则 $1 < t < \frac{5}{2}$
 D. 若曲线 C 为焦点在 y 轴上的双曲线, 则 $t > 4$

BCD 解析: 当 $t = \frac{5}{2}$ 时, 曲线 C 表示圆, A 错误. 若 C 为双曲线, 则 $(4-t)(t-1) < 0$, 所以 $t < 1$ 或 $t > 4$, B 正确. 若曲线 C 为焦点在 x 轴上的椭圆, 则 $4-t > t-1 > 0$, 所以 $1 < t < \frac{5}{2}$, C 正确. 若曲线 C 为焦

点在 y 轴上的双曲线, 则 $\begin{cases} 4-t < 0, \\ t-1 > 0, \end{cases}$ 所以 $t > 4$, D 正确.

2. 设 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$ 的下、上焦点, P 是该双曲线上的一点, 且 $3|PF_1| = 5|PF_2|$, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积等于 ()

A.12

B.24

C.12 $\sqrt{3}$

D.24 $\sqrt{3}$

B 解析:由双曲线 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$, 得 $a=2, b=2\sqrt{3}, c=4$.

由 $3|PF_1| = 5|PF_2|$, 知 $|PF_1| > |PF_2|$, 所以 $|PF_1| - |PF_2| = 2a = 4$,
得 $|PF_1| = 10, |PF_2| = 6$.
所以 $|PF_1|^2 - |PF_2|^2 = 64 = (2c)^2 = |F_1F_2|^2$,
即 $\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形, 且 $\angle PF_2F_1 = 90^\circ$, 所以
 $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2}|PF_2| \cdot |F_1F_2| = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$.

3. 已知双曲线 $C_1: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 与椭圆 $C_2: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > \sqrt{2})$ 有公共的焦点 F_1, F_2 , 且 C_1 与 C_2 在第一象限的交点为 M , 若 $\triangle MF_1F_2$ 的面积为 1, 则 a 的值为 _____.

$\sqrt{3}$ 解析: 设 F_1, F_2 分别为左、右焦点, 根据椭圆以及双曲线的定义可得 $\begin{cases} |MF_1| + |MF_2| = 2a, \\ |MF_1| - |MF_2| = 2, \end{cases}$ 所以 $|MF_1| = a+1, |MF_2| = a-1$,
所以 $|MF_1| \cdot |MF_2| = a^2 - 1$,
由余弦定理可得 $|F_1F_2|^2 = (|MF_1| + |MF_2|)^2 - 2|MF_1| \cdot |MF_2| \cos \angle F_1MF_2 = 4(a^2 - 1)$,

所以 $\cos \angle F_1MF_2 = \frac{3-a^2}{a^2-1}$,

故 $\sin \angle F_1MF_2 = \frac{\sqrt{4a^2-8}}{a^2-1}$,

因此 $\triangle MF_1F_2$ 的面积为 $\frac{1}{2}|MF_1| \cdot |MF_2| \cdot \sin \angle F_1MF_2 = \frac{1}{2}(a^2-1) \cdot \frac{\sqrt{4a^2-8}}{a^2-1} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2-8} = 1$,

解得 $a = \sqrt{3}$.

4. 椭圆 $\frac{y^2}{49} + \frac{x^2}{24} = 1$ 与双曲线 $y^2 - \frac{x^2}{24} = 1$ 有公共点 P , 则以 P 与椭圆两焦点为顶点的三角形的周长为 _____, 面积为 _____.

24 24 解析: 由已知可得椭圆与双曲线具有共同的焦点 $F_1(0, 5), F_2(0, -5)$.

由椭圆与双曲线的定义可得 $\begin{cases} |PF_1| + |PF_2| = 14, \\ ||PF_1| - |PF_2|| = 2, \end{cases}$

所以 $\begin{cases} |PF_1| = 8, \\ |PF_2| = 6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} |PF_1| = 6, \\ |PF_2| = 8 \end{cases}$.

又 $|F_1F_2| = 10$, 所以 $\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形, 且 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$, 所以周长为 $|PF_1| + |PF_2| + |F_1F_2| = 14 + 10 = 24, S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2}|PF_1| \cdot |PF_2| = 24$.

5. 设 O 为坐标原点, F_1, F_2 为双曲线 $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{6} = 1$

的两个焦点, 点 P 在 C 上, $\cos \angle F_1PF_2 = \frac{4}{5}$, 则 $|OP| =$ _____.

$3\sqrt{7}$ 解析: 因为 $||PF_1| - |PF_2|| = 2a = 6$ ①,
 $|F_1F_2| = 2\sqrt{9+6} = 2\sqrt{15}$,
所以由余弦定理得 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| \cos \angle F_1PF_2 = |F_1F_2|^2$,

即 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - \frac{8}{5}|PF_1| \cdot |PF_2| = (2\sqrt{15})^2$ ②, 联立 ①②,

解得 $|PF_1| \cdot |PF_2| = 60, |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 156$,
而 $\vec{PO} = \frac{1}{2}(\vec{PF_1} + \vec{PF_2})$, 所以 $|OP| = |\vec{PO}| =$

$\frac{1}{2}|\vec{PF_1} + \vec{PF_2}|$
 $= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{PF_1}|^2 + 2\vec{PF_1} \cdot \vec{PF_2} + |\vec{PF_2}|^2}$
 $= \frac{1}{2}\sqrt{156 + 2 \times 60 \times \frac{4}{5}} = 3\sqrt{7}$.

6. 设圆 C 与圆 $A: (x+\sqrt{5})^2 + y^2 = 4$, 圆 $B: (x-\sqrt{5})^2 + y^2 = 4$ 中的一个内切, 与另一个外切.

(1) 求圆 C 的圆心轨迹 L 的方程;

(2) 已知点 $M(\frac{3\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5})$, $F(\sqrt{5}, 0)$, 且 P 为 L 上的动点, 求 $||MP| - |FP||$ 的最大值.

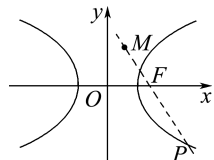
解: (1) 设两圆的圆心分别为 $A(-\sqrt{5}, 0), B(\sqrt{5}, 0)$, 半径均为 2, 设圆 C 的半径为 r .

由题意得 $|CA| = r-2, |CB| = r+2$ 或 $|CA| = r+2, |CB| = r-2$, 则 $|CA| - |CB| = -4$ 或 $|CA| - |CB| = 4$, 即 $||CA| - |CB|| = 4$.

因为 $4 < 2\sqrt{5}$, 所以圆 C 的圆心轨迹为以 A, B 为焦点的双曲线, 其中 $2a=4, c=\sqrt{5}, b^2=1$,

所以圆 C 的圆心轨迹 L 的方程为 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

(2) 由(1)知 F 为双曲线 L 的一个焦点, 如图, 连接 MF 并延长交双曲线于点 P , 此时 $||MP| - |FP|| = |MF|$ 为 $||MP| - |FP||$ 的最大值.



又 $|MF| = \sqrt{(\frac{3\sqrt{5}}{5} - \sqrt{5})^2 + (\frac{4\sqrt{5}}{5})^2} = 2$,

所以 $||MP| - |FP||$ 的最大值为 2.

3.2.2 双曲线的简单几何性质

第1课时 双曲线的简单几何性质

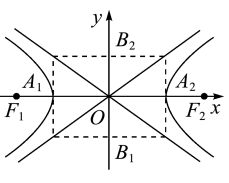
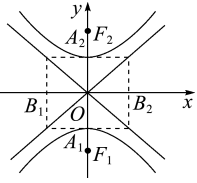
学习任务目标

1. 掌握双曲线的简单几何性质.
2. 掌握双曲线标准方程中的 a, b, c 及双曲线的离心率 e 的几何意义和它们之间的相互关系.

问题式预习

【知识清单】

知识点一 双曲线的几何性质

标准方程	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$
图形		
焦点	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c), F_2(0, c)$
焦距	$ F_1F_2 = 2c$	
范围	$x \leq -a$ 或 $x \geq a, y \in \mathbf{R}$	$y \leq -a$ 或 $y \geq a, x \in \mathbf{R}$
对称性	对称轴: 坐标轴; 对称中心: 原点	
顶点	$A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$	$A_1(0, -a), A_2(0, a)$
轴	实轴: 线段 A_1A_2 , 长: $2a$; 虚轴: 线段 B_1B_2 , 长: $2b$; 实半轴长: a , 虚半轴长: b	
离心率	$e = \frac{c}{a} \in (1, +\infty)$	
渐近线	$y = \pm \frac{b}{a}x$	$y = \pm \frac{a}{b}x$

知识点二 双曲线的中心和等轴双曲线

(1) 双曲线的中心

双曲线的对称中心叫做双曲线的中心.

(2) 等轴双曲线

实轴和虚轴等长的双曲线叫做等轴双曲线, 其离心率 $e = \sqrt{2}$.

【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打“√”, 错误的打“×”).

- (1) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的形状相同. (√)
- (2) 等轴双曲线的渐近线方程为 $x \pm y = 0$. (√)
- (3) 离心率是 $\sqrt{2}$ 的双曲线为等轴双曲线. (√)
- (4) 双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的渐近线方程是 $3x \pm 2y = 0$. (√)

2. (多选) 已知双曲线方程为 $x^2 - 8y^2 = 32$, 则 ()

- A. 实轴长为 $8\sqrt{2}$ B. 虚轴长为 4
C. 焦距为 6 D. 离心率为 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

ABD 解析: 将双曲线方程 $x^2 - 8y^2 = 32$ 化为标准方程为 $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{4} = 1$, 可得 $a = 4\sqrt{2}, b = 2, c = 6$,

所以双曲线的实轴长为 $8\sqrt{2}$, 虚轴长为 4, 焦距为 12, 离心率为 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

3. 请思考并回答下列问题:

(1) 渐近线相同的双曲线的方程一定相同吗?

提示: 不一定.

(2) 双曲线的离心率 e 和 $\frac{b}{a}$ 有什么关系?

提示: $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a} = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{a^2}} = \sqrt{e^2 - 1}$.

(3) 双曲线的离心率是如何影响双曲线的形状的?

提示: 双曲线的离心率刻画了双曲线的“张口”大小, e 越大, 张口越大.

任务型课堂

任务1 根据双曲线的方程研究几何性质

1. (多选) 已知双曲线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$, 则 ()

- A. 焦点坐标为 $(\pm 1, 0)$
B. 渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{2}x$

C. 离心率为 $\sqrt{3}$

D. 实轴长为 $2\sqrt{2}$

BC 解析: 因为双曲线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$, 所以 $a = 1, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3}$, 所以该双曲线的焦

点坐标为 $(\pm\sqrt{3}, 0)$, 故 A 错误; 渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{2}x$, 故 B 正确; 离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{3}$, 故 C 正确; 实轴长 $2a = 2$, 故 D 错误.

2. 关于椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 与双曲线 $\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{4} = 1$, 下列说法正确的是 ()

- A. 有相同的离心率
- B. 有相等的焦距
- C. 有相同的焦点
- D. 有相同的顶点

B 解析: 对于椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $a = 5, b = 3, c = 4$, 所以离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$, 焦距 $2c = 8$, 焦点为 $(-4, 0), (4, 0)$, 顶点为 $(-5, 0), (5, 0), (0, 3), (0, -3)$. 双曲线 $\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{4} = 1$, $a = 2\sqrt{3}, b = 2, c = 4$, 则离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 焦距 $2c = 8$, 焦点为 $(0, 4), (0, -4)$, 顶点为 $(0, 2\sqrt{3}), (0, -2\sqrt{3})$.

综上可知, 椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 与双曲线 $\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{4} = 1$ 有相同的焦距, 故选 B.

【探究总结】

根据双曲线的方程研究其几何性质的方法

(1) 已知双曲线方程讨论其几何性质, 应先将方程化为标准形式, 找出对应的 a, b , 利用 $c^2 = a^2 + b^2$ 求出 c , 再按定义求出其焦点坐标、焦距、实轴长、虚轴长、顶点坐标、离心率、渐近线方程.

(2) 已知双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 或 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 求双曲线的渐近线方程时, 直接将标准方程等号右边的 1 变为 0, 即可得出渐近线方程.

任务 2 由双曲线的几何性质求双曲线的方程

探究活动

例 1 求满足下列条件的双曲线的标准方程.

- (1) 焦点在 x 轴上, 离心率为 $\frac{5}{3}$, 且经过点 $M(-3, 2\sqrt{3})$;
- (2) 渐近线方程为 $y = \pm\frac{1}{2}x$, 且经过点 $A(2, -3)$.

解: (1) 设所求双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$.

因为 $e = \frac{5}{3}$, 所以 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{25}{9}$, 所以

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{3}.$$

又由题意得 $\frac{9}{a^2} - \frac{12}{b^2} = 1$, 解得 $\begin{cases} a^2 = 9, \\ b^2 = 4. \end{cases}$

所以所求双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) (方法一) 因为双曲线的渐近线方程为 $y = \pm\frac{1}{2}x$.

当焦点在 x 轴上时, 设所求双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 则 $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ ①.

因为点 $A(2, -3)$ 在双曲线上, 所以 $\frac{4}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1$ ②.

联立①②, 方程组无解.

当焦点在 y 轴上时, 设所求双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 则 $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ ③.

因为点 $A(2, -3)$ 在双曲线上, 所以 $\frac{9}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$ ④.

联立③④, 解得 $a^2 = 8, b^2 = 32$.

所以所求双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{32} = 1$.

(方法二) 由双曲线的渐近线方程为 $y = \pm\frac{1}{2}x$, 可设

双曲线方程为 $\frac{x^2}{2^2} - y^2 = \lambda (\lambda \neq 0)$.

因为 $A(2, -3)$ 在双曲线上, 所以 $\frac{2^2}{2^2} - (-3)^2 = \lambda$, 即 $\lambda = -8$.

所以所求双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{32} = 1$.

【探究总结】

由双曲线的几何性质求双曲线的方程的方法

(1) 若双曲线的渐近线方程为 $y = \pm\frac{n}{m}x$, 则双曲线方程可设为 $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = \lambda (\lambda \neq 0)$.

(2) 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 共渐近线的双曲线的方程可设为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda (a > 0, b > 0, \lambda \neq 0)$; 与双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 共渐近线的双曲线的方程可设为 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = \lambda (a > 0, b > 0, \lambda \neq 0)$.

88 应用迁移

1. (2023·北京卷) 已知双曲线 C 的焦点为 $(-2, 0)$ 和 $(2, 0)$, 离心率为 $\sqrt{2}$, 则 C 的方程为 _____.

$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 解析: 令双曲线 C 的实半轴长、虚半轴长分别为 a, b , 显然双曲线 C 的中心为坐标原点, 焦点在 x 轴上, 其半焦距 $c = 2$. 由双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{2}$, 得 $\frac{c}{a} = \sqrt{2}$, 解得 $a = \sqrt{2}$, 则 $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{2}$, 所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$.

2. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 2, 顶点到渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 求双曲线 C 的标准方程.

解: 记 C 的半焦距为 c , 由题意得 C 的离心率 $e = \frac{c}{a} = 2$ ①.

双曲线 C 的顶点坐标为 $(\pm a, 0)$, 渐近线方程为 $bx \pm ay = 0$, 则由题意得 $\frac{|ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ab}{c} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ②.

又 $a^2 + b^2 = c^2$ ③.

联立①②③, 解得 $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{6}, c = 2\sqrt{2}$.

所以双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$.

任务 3 > 求双曲线的离心率

探究活动

例 2 已知 F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, M 为双曲线上的点, 若 $MF_1 \perp MF_2$, $\angle MF_2F_1 = 60^\circ$, 求双曲线的离心率.

解: 由题意知 M 为双曲线右支上的点, 由 $MF_1 \perp MF_2$, $\angle MF_2F_1 = 60^\circ$, $|F_1F_2| = 2c$, 得 $|MF_1| = \sqrt{3}c$, $|MF_2| = c$, 所以 $|MF_1| - |MF_2| = (\sqrt{3} - 1)c = 2a$, 所以双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{2c}{2a} = \frac{2c}{(\sqrt{3} - 1)c} = \sqrt{3} + 1$.

【一题多思】

思考 1. 把本例中的 “ $\angle MF_2F_1 = 60^\circ$ ” 改为 “ $\tan \angle MF_1F_2 = \frac{1}{2}$ ”, 其他条件不变, 求双曲线的离心率.

解: 因为 $MF_1 \perp MF_2$, $\tan \angle MF_1F_2 = \frac{1}{2}$, $|F_1F_2| = 2c$, 所以 $\sin \angle MF_1F_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $|MF_2| = |F_1F_2| \cdot \sin \angle MF_1F_2 = \frac{2\sqrt{5}c}{5}$, $|MF_1| = \frac{4\sqrt{5}c}{5}$.

又点 M 在双曲线上, 所以 $2a = |MF_1| - |MF_2| = \frac{2\sqrt{5}c}{5}$, 所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{2c}{2a} = \sqrt{5}$.

思考 2. 把本例中的 “ $MF_1 \perp MF_2$, $\angle MF_2F_1 = 60^\circ$ ” 改为 “ $|MF_1| = 3|MF_2|$ ”, 其他条件不变, 求双曲线离心率 e 的取值范围.

解: 由题意得 $\begin{cases} |MF_1| = 3|MF_2|, \\ |MF_1| - |MF_2| = 2a, \end{cases}$ 解得 $|MF_2| = a$, $|MF_1| = 3a$. 因为 $|MF_1| + |MF_2| \geq |F_1F_2|$, 即 $4a \geq 2c$, 所以 $e = \frac{c}{a} \leq 2$. 又 $e > 1$, 所以离心率 e 的取值范围是 $(1, 2]$.

【探究总结】

求双曲线离心率的三种方法

(1) 若可求得 a, c , 则直接利用 $e = \frac{c}{a}$ 求解.

(2) 若已知 a, b , 则可直接利用 $e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ 求解.

(3) 若得到的是关于 a, c 的二次齐次方程 $rc^2 + s \cdot ac + ta^2 = 0 (r, s, t \text{ 为常数, 且 } r \neq 0)$, 则方程两边同除以 a^2 可转化为关于 e 的一元二次方程 $re^2 + se + t = 0$, 进而求解.

88 应用迁移

已知 F_1, F_2 为双曲线的焦点, 过 F_2 作垂直于实轴的直线交双曲线于 A, B 两点, BF_1 交 y 轴于点 C . 若 $AC \perp BF_1$, 则双曲线的离心率为 _____ ()

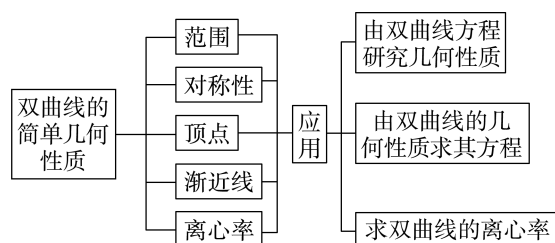
A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{3}$

B 解析: 不妨设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$,

由已知, 不妨令点 A 的坐标为 $(c, \frac{b^2}{a})$, 点 B 的坐标为 $(c, -\frac{b^2}{a})$, 又 $F_1(-c, 0)$, 则点 C 的坐标为 $(0, -\frac{b^2}{2a})$. 由 $AC \perp BF_1$ 知 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BF_1} = 0$. 又 $\overrightarrow{AC} = (-c, -\frac{b^2}{2a})$, $\overrightarrow{BF_1} = (-2c, \frac{b^2}{a})$, 可得 $2c^2 - \frac{3b^4}{2a^2} = 0$. 又 $b^2 = c^2 - a^2$, 可得 $3c^4 - 10c^2a^2 + 3a^4 = 0$, 则有 $3e^4 - 10e^2 + 3 = 0$, 可得 $e^2 = 3$ 或 $e^2 = \frac{1}{3}$. 又 $e > 1$, 所以 $e = \sqrt{3}$.



提质归纳



课后素养评价 (三十)

双曲线的简单几何性质

A组 学习·理解

1. (多选) 已知双曲线的方程为 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$, 则下列说法正确的是 ()

- A. 焦点在 y 轴上
B. 渐近线方程为 $2x \pm \sqrt{5}y = 0$
C. 虚轴长为 4
D. 离心率为 $\frac{3}{5}$

AB 解析: 双曲线的方程为 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$, 则双曲线的焦点在 y 轴上, 渐近线方程为 $2x \pm \sqrt{5}y = 0$, 虚轴长为 $2\sqrt{5}$, 离心率为 $\frac{3}{2}$, 判断知 A, B 正确.

2. 已知双曲线 $C: \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$, 则下列说法中不正确的是 ()

- A. C 的焦点坐标为 $(\pm 4, 0)$
B. C 的顶点坐标为 $(0, \pm 3)$
C. C 的离心率为 $\frac{4}{3}$
D. C 的虚轴长为 $2\sqrt{7}$

A 解析: 因为 $a^2 = 9, b^2 = 7$, 所以 $a = 3, b = \sqrt{7}, c = \sqrt{a^2 + b^2} = 4$.

因为双曲线的焦点在 y 轴上, 所以 C 的焦点坐标为 $(0, \pm 4)$, 顶点为 $(0, \pm 3)$, 离心率为 $\frac{4}{3}$, 虚轴长为 $2\sqrt{7}$.

3. (多选) 以椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的顶点为顶点, 离心率为 2 的双曲线的方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{16} = 1$ B. $\frac{y^2}{45} - \frac{x^2}{9} = 1$
C. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$ D. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$

CD 解析: 因为离心率为 2, 当顶点为 $(\pm 4, 0)$ 时, $a = 4, c = 8, b = 4\sqrt{3}$, 双曲线方程为 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$; 当顶点为 $(0, \pm 3)$ 时, $a = 3, c = 6, b = 3\sqrt{3}$, 双曲线方程为 $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$.

4. 某建筑外形弧线的一段可以近似看成双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 下支的一部分, 且此双曲线的下

焦点到渐近线的距离为 2, 离心率为 2, 则该双曲线的方程为 ()

- A. $\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{4} = 1$ B. $\frac{3y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$
C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ D. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$

B 解析: 设双曲线的一个焦点为 $(0, c)$, 一条渐近线方程为 $y = \frac{a}{b}x$,

则焦点到渐近线的距离 $d = \frac{|-bc|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = b = 2$,

所以 $\begin{cases} b = 2, \\ \frac{c}{a} = 2, \\ c^2 = a^2 + b^2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a^2 = 4, \\ b^2 = 4, \end{cases}$ 所以该双曲线的方程为 $\frac{3y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$.

5. 双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$, 其中 $a > 0$, 双曲线的渐近线与圆 $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ 相切, 则双曲线的离心率为 ()

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

A 解析: 根据题意, 可以求得双曲线的渐近线方程为 $x \pm ay = 0$, 而圆 $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ 的圆心为 $(2, 0)$, 半径为 1, 结合题意有 $\frac{|2 \pm 0|}{\sqrt{1 + a^2}} = 1$, 结合 $a > 0$,

得 $a = \sqrt{3}$, 所以 $c = \sqrt{3 + 1} = 2$, 所以有 $e = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

6. 已知直线 $y = \sqrt{3}x$ 是双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线, 则此双曲线的离心率为 _____.

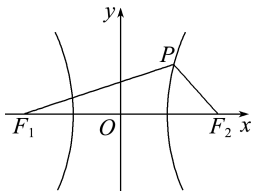
$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 解析: 因为双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{a}{b}x$,

又直线 $y = \sqrt{3}x$ 是双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线, 可得 $a = \sqrt{3}b$,

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2b$, 所以离心率为 $\frac{c}{a} = \frac{2b}{\sqrt{3}b} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

7. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 2, P 为 C 上一点, 且 $\angle F_1PF_2 = 120^\circ$. 若 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为 $4\sqrt{3}$, 则 $a =$ _____.

2 解析:不妨取点 P 在第一象限,如图所示.



根据双曲线的定义可得 $|PF_1| - |PF_2| = 2a$, 且 $|F_1F_2| = 2c$.

由离心率为 2, 即 $\frac{c}{a} = 2$, 可得 $c = 2a$, 即 $|F_1F_2| = 4a$.

设 $|PF_2| = m > 0$, 则 $|PF_1| = 2a + m$.

由 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为 $4\sqrt{3}$, 可得 $\frac{1}{2}$.

$$|PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \sin \angle F_1PF_2 = \frac{1}{2}m(2a+m) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3},$$

$$m(2a+m) = 16.$$

由余弦定理的推论可得

$$\cos \angle F_1PF_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{即 } \frac{(2a+m)^2 + m^2 - (4a)^2}{2m(2a+m)} = -\frac{1}{2}, \text{ 整理可得 } 2m^2 +$$

$$4am - 12a^2 = -m(2a+m),$$

$$\text{即 } 12a^2 = 3m(2a+m), \text{ 所以 } 12a^2 = 48, \text{ 解得 } a = 2.$$

8. 若双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 经过点 $(3, 4)$, 则该双曲线的渐近线方程是_____.

$y = \pm\sqrt{2}x$ 解析: 由已知得 $3^2 - \frac{4^2}{b^2} = 1$, 解得 $b = \sqrt{2}$ 或 $b = -\sqrt{2}$. 又因为 $b > 0$, 所以 $b = \sqrt{2}$. 因为 $a = 1$, 所以双曲线的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{2}x$.

9. 与椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ 共焦点, 离心率之和为 $\frac{14}{5}$ 的双曲线的标准方程为_____.

$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$ 解析: 易知椭圆的焦点是 $(0, 4)$, $(0, -4)$,

$$\text{所以 } c = 4, e = \frac{4}{5},$$

$$\text{所以双曲线的离心率为 } \frac{14}{5} - \frac{4}{5} = 2.$$

$$\text{设双曲线的标准方程为 } \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

$$\text{所以 } \frac{4}{a} = 2, \text{ 所以 } a = 2, b^2 = 4^2 - 2^2 = 12.$$

$$\text{所以双曲线的标准方程为 } \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1.$$

10. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{m} = 1$ 的开口比等轴双曲线的开口更开阔, 则实数 m 的取值范围是_____.

$(4, +\infty)$ 解析: 因为等轴双曲线的离心率为 $\sqrt{2}$, 且双曲线 C 的开口比等轴双曲线的开口更开阔, 所以双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{m} = 1$ 的离心率 $e > \sqrt{2}$, 即 $\frac{4+m}{4} > 2$, 所以 $m > 4$.

故实数 m 的取值范围是 $(4, +\infty)$.

B组 应用·实践

1. (数学文化) 如图 1 为陕西历史博物馆收藏的唐金筐宝钿团花纹金杯, 杯身曲线内收, 玲珑娇美, 巧夺天工, 是唐代金银细作的典范之作. 该杯的主体部分可以近似看作是离心率为 $\sqrt{5}$ 的双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$) 的右支与 y 轴及平行于 x 轴的两条直线围成的曲边四边形 $ABMN$ 绕 y 轴旋转一周得到的几何体. 如图 2, 若 P 为 C 右支上的一点, F 为 C 的左焦点, 则 $|PF|$ 与 P 到 C 的一条渐近线的距离之和的最小值为 ()



图1

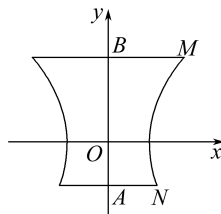


图2

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

C 解析: 由题意可知 $a = 1, e = \frac{c}{a} = \sqrt{5}$, 则 $c = \sqrt{5}$, $b^2 = c^2 - a^2 = 4$, 所以 $b = 2$,

所以双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$, 一条渐近线方程为 $2x - y = 0$. 设双曲线的右焦点为 F_2 , 则 $F_2(\sqrt{5}, 0)$ 到渐近线 $2x - y = 0$ 的距离为 $d = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2$, 所以 $|PF_2|$ 与 P 到 C 的一条渐近线的距离之和的最小值为 $d = 2$.

又因为 $|PF| = 2a + |PF_2|$, 所以 $|PF|$ 与 P 到 C 的一条渐近线的距离之和的最小值为 $2a + 2 = 4$.

2. 已知左、右焦点分别为 F_1, F_2 的双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 过点 $(\sqrt{15}, -\frac{\sqrt{6}}{3})$, 点 P 在双曲线 C 上. 若 $|PF_1| = 3$, 则 $|PF_2| =$ ()

A. 3 B. 6 C. 9 D. 12

C 解析: 由左、右焦点分别为 F_1, F_2 的双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 过点 $(\sqrt{15}, -\frac{\sqrt{6}}{3})$, 可得 $\frac{15}{a^2} - \frac{6}{9} = 1$,

解得 $a = 3$, 又 $b = 1$, 所以 $c = \sqrt{10}$, $a + c > 3$.

因为点 P 在双曲线 C 上, 若 $|PF_1|=3$, 可得 P 在双曲线的左支上,

则 $|PF_2|=2a+|PF_1|=6+3=9$, 故选 C.

3. 设 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的右焦点, O 为坐标原点, 以 OF 为直径的圆与圆 $x^2+y^2=a^2$ 交于 P, Q 两点. 若 $|PQ|=|OF|$, 则 C 的离心率为 ()

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

A 解析: 如图, 设 PQ 与 x 轴交于点 A , 由对称性可知 $PQ \perp x$ 轴.

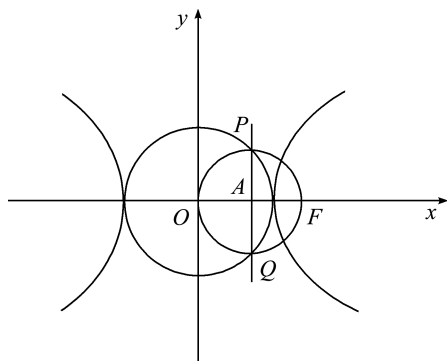
又因为 $|PQ|=|OF|=c$, 所以 $|PA|=\frac{c}{2}$, 所以 PA

为以 OF 为直径的圆的半径, 所以 $|OA|=\frac{c}{2}$, 所以

$$P\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right).$$

又点 P 在圆 $x^2+y^2=a^2$ 上, 所以 $\frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4} = a^2$, 即 $\frac{c^2}{2}$

$=a^2$, 所以 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 2$, 所以 $e = \sqrt{2}$.



4. 已知圆 $C: x^2+y^2-4x+3=0$ 与双曲线 $D: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的渐近线有公共点, 则双曲线 D 的离心率的取值范围为 _____.

$[2, +\infty)$ 解析: 圆 $C: (x-2)^2 + y^2 = 1$, 双曲线

$D: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的渐近线为 $ax \pm by = 0$, 因为圆 C 与双曲线 D 的渐近线有公共点, 所以

圆心 $C(2, 0)$ 到渐近线的距离 $d = \frac{2a}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq 1$, 所以

以 $3a^2 \leq b^2$, 所以 $c^2 = a^2 + b^2 \geq 4a^2$, 即 $\frac{c^2}{a^2} \geq 4$, 所以

$$e = \frac{c}{a} \geq 2.$$

5. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b>0)$ 的离心率为 2, 点 P 是 E 上的动点, 则点 P 到 E 的两条渐近线的距离之积为 _____.

3 解析: 由题意知 $a=2$, 又 $\frac{b}{a} = \sqrt{e^2-1} = \sqrt{3}$, 得 b

$=2\sqrt{3}$, 所以双曲线 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$, 渐近线

方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$, 即 $\sqrt{3}x \pm y = 0$.

设 $P(s, t)$, 则 $\frac{s^2}{4} - \frac{t^2}{12} = 1$, 即 $3s^2 - t^2 = 12$,

所以点 P 到 E 的两条渐近线的距离之积为 $\frac{|\sqrt{3}s+t|}{2} \cdot$

$$\frac{|\sqrt{3}s-t|}{2} = \frac{|3s^2-t^2|}{4} = 3.$$

6. 已知双曲线的中心在原点, 焦点 F_1, F_2 在坐标轴上, 离心率为 $\sqrt{2}$, 且过点 $P(4, -\sqrt{10})$.

(1) 求双曲线的方程;

(2) 若点 $M(3, m)$ 在双曲线上, 求证: $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 0$;

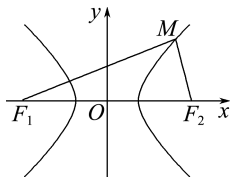
(3) 在 (2) 的条件下, 求 $\triangle F_1MF_2$ 的面积.

(1) 解: 因为 $e = \sqrt{2}$, 所以可设双曲线的方程为 $x^2 - y^2 = \lambda (\lambda \neq 0)$.

因为双曲线过点 $P(4, -\sqrt{10})$, 所以 $16 - 10 = \lambda$, 即 $\lambda = 6$.

所以双曲线的方程为 $x^2 - y^2 = 6$, 即 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{6} = 1$.

(2) 证明: 由 (1) 可知, $a = b = \sqrt{6}$, 所以 $c = 2\sqrt{3}$, 不妨设 F_1, F_2 分别为双曲线的左、右焦点, 则 $F_1(-2\sqrt{3}, 0)$, $F_2(2\sqrt{3}, 0)$, 如图所示.



(方法一) 因为 $k_{MF_1} = \frac{m}{3+2\sqrt{3}}$, $k_{MF_2} = \frac{m}{3-2\sqrt{3}}$, 所以

$$k_{MF_1} \cdot k_{MF_2} = \frac{m^2}{9-12} = -\frac{m^2}{3}.$$

因为点 $M(3, m)$ 在双曲线上, 所以 $9 - m^2 = 6$, 即 $m^2 = 3$, 所以 $k_{MF_1} \cdot k_{MF_2} = -1$,

所以 $MF_1 \perp MF_2$, 所以 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 0$.

(方法二) 因为 $\overrightarrow{MF_1} = (-2\sqrt{3}-3, -m)$, $\overrightarrow{MF_2} = (2\sqrt{3}-3, -m)$,

所以 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = (-2\sqrt{3}-3) \times (2\sqrt{3}-3) + m^2 = -3 + m^2$.

因为点 M 在双曲线上, 所以 $9 - m^2 = 6$, 即 $m^2 = 3$, 所以 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 0$.

(3) 解: 由 (2) 知 $\triangle F_1MF_2$ 的底边长 $|F_1F_2| = 4\sqrt{3}$, $\triangle F_1MF_2$ 的高 $h = |m| = \sqrt{3}$, 所以 $S_{\triangle F_1MF_2} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6$.

第2课时 双曲线几何性质的应用

学习任务目标

- 1.从数与形两方面理解双曲线与直线的位置关系.
- 2.会解决直线与双曲线相交的相关问题.

问题式预习

【知识清单】

知识点 直线与双曲线的位置关系

设直线 l 的方程为 $y=kx+m (m \neq 0)$ ①,

双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ②,

把①代入②得 $(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2mkx - a^2m^2 - a^2b^2 = 0$.

(1)当 $b^2 - a^2k^2 = 0$, 即 $k = \pm \frac{b}{a}$ 时, 直线 l 与双曲线 C 的渐近线平行, 直线 l 与双曲线 C 相交于一点.

(2)当 $b^2 - a^2k^2 \neq 0$, 即 $k \neq \pm \frac{b}{a}$ 时, $\Delta = (-2a^2mk)^2 - 4(b^2 - a^2k^2)(-a^2m^2 - a^2b^2)$.

$\Delta > 0 \Rightarrow$ 直线 l 与双曲线 C 有两个公共点, 此时称直线 l 与双曲线 C 相交;

$\Delta = 0 \Rightarrow$ 直线 l 与双曲线 C 有一个公共点, 此时称直线 l 与双曲线 C 相切;

$\Delta < 0 \Rightarrow$ 直线 l 与双曲线 C 没有公共点, 此时称直线 l 与双曲线 C 相离.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)过点 $A(1,0)$ 作直线 l 与双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 只有一个公共点, 则这样的直线可作两条. (×)

(2)直线 $l: y = x$ 与双曲线 $C: 2x^2 - y^2 = 2$ 有两个公共点. (√)

(3)直线与双曲线有唯一交点是直线与双曲线相切的必要不充分条件. (√)

2.若直线 $y = kx$ 与双曲线 $4x^2 - y^2 = 16$ 相交, 则实数 k 的取值范围为 ()

A. $(-2, 2)$

B. $[-2, 2)$

C. $(-2, 2]$

D. $[-2, 2]$

A 解析: 由题易得, 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm 2x$, 故 $k \neq \pm 2$.

将 $y = kx$ 代入 $4x^2 - y^2 = 16$, 得 $(4 - k^2)x^2 - 16 = 0$,

由 $\Delta = 64(4 - k^2) > 0$, 得 $-2 < k < 2$.

故实数 k 的取值范围为 $(-2, 2)$.

3.请思考并回答下列问题:

(1)与双曲线只有一个公共点的直线是双曲线的切线吗?

提示: 不一定, 与双曲线只有一个公共点的直线有两种: 一种是与渐近线平行的直线; 另一种是与双曲线相切的直线.

(2)如何判断直线 $y = kx + m (m \neq 0)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 (a > 0, b > 0)$ 的两个交点是在同一支上, 还是在两支上?

提示: 利用方程 $(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2mkx - a^2m^2 - a^2b^2 = 0$ 判断,

若 $\frac{-a^2m^2 - a^2b^2}{b^2 - a^2k^2} > 0$, 则直线与双曲线的两个交点

在一支上;

若 $\frac{-a^2m^2 - a^2b^2}{b^2 - a^2k^2} < 0$, 则直线与双曲线的两个交点

在两支上.

结合渐近线的特点可知, 只需 $0 < \frac{b}{a} \leq 2$, 即 $\frac{b^2}{a^2} \leq 4$,

可满足条件“直线 $y = 2x$ 与 C 无公共点”,

所以 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \leq \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$.

又因为 $e > 1$, 所以 $1 < e \leq \sqrt{5}$.

2.已知双曲线 $x^2 - y^2 = 4$, 直线 $l: y = k(x - 1)$, 试确定满足下列条件的实数 k 的取值范围.

(1)直线 l 与双曲线有两个不同的公共点;

任务1 直线与双曲线的位置关系

1.(2022 · 全国甲卷)记双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 e , 写出满足条件“直线 $y = 2x$ 与 C 无公共点”的 e 的一个值: _____.

2(满足 $1 < e \leq \sqrt{5}$ 皆可) 解析: 因为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$.

(2) 直线 l 与双曲线有且只有一个公共点;

(3) 直线 l 与双曲线没有公共点.

解: 联立 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4, \\ y = k(x-1), \end{cases}$ 消去 y ,

得 $(1-k^2)x^2 + 2k^2x - k^2 - 4 = 0$. (*)

当 $1-k^2 \neq 0$, 即 $k \neq \pm 1$ 时,

$\Delta = (2k^2)^2 - 4(1-k^2)(-k^2-4) = 4 \times (4-3k^2)$.

(1) 由 $\begin{cases} 4-3k^2 > 0, \\ 1-k^2 \neq 0, \end{cases}$ 得 $-\frac{2\sqrt{3}}{3} < k < \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 且 $k \neq \pm 1$,

此时方程 (*) 有两个不同的实数根,

即直线 l 与双曲线有两个不同的公共点.

故实数 k 的取值范围为 $\left\{k \mid -\frac{2\sqrt{3}}{3} < k < \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 且 } k \neq \pm 1\right\}$.

(2) 由 $\begin{cases} 4-3k^2 = 0, \\ 1-k^2 \neq 0, \end{cases}$ 得 $k = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

此时方程 (*) 有两个相同的实数根,

即直线 l 与双曲线有且只有一个公共点.

当 $1-k^2 = 0$, 即 $k = \pm 1$ 时,

直线 l 与双曲线的渐近线平行,

方程 (*) 可化为 $2x = 5$,

故方程 (*) 只有一个实数根, 即直线 l 与双曲线相交, 有且只有一个公共点.

综上, 当 $k = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $k = \pm 1$ 时,

直线 l 与双曲线有且只有一个公共点.

(3) 由 $\begin{cases} 4-3k^2 < 0, \\ 1-k^2 \neq 0, \end{cases}$ 得 $k < -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $k > \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

此时方程 (*) 无实数根, 即直线 l 与双曲线没有公共点.

所以实数 k 的取值范围为 $\left\{k \mid k < -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 或 } k > \frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$.

【探究总结】

判断直线与双曲线的位置关系的注意点

(1) 判断直线与双曲线的位置关系时, 不仅要考虑消元后得一元二次方程的判别式, 也要注意二次项系数为 0 时, 直线与双曲线的渐近线平行的特殊情况.

(2) 注意对直线的斜率是否存在进行讨论.

任务 2 弦长与中点弦问题

探究活动

例 1 已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, 求过点 $A(3, -1)$ 且被点 A 平分的弦 MN 所在直线的方程.

解: (方法一) 由题意知直线的斜率存在, 故可设直线方程为 $y+1=k(x-3)$, 即 $y=kx-3k-1$.

由 $\begin{cases} y=kx-3k-1, \\ \frac{x^2}{4}-y^2=1, \end{cases}$ 消去 y ,

整理得 $(1-4k^2)x^2 + 8k(3k+1)x - 36k^2 - 24k - 8 = 0$, $\Delta = 64k^2(3k+1)^2 + 4(1-4k^2)(36k^2 + 24k + 8) > 0$.

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

所以 $x_1 + x_2 = \frac{8k(3k+1)}{4k^2-1}$.

因为 $A(3, -1)$ 为 MN 的中点,

所以 $\frac{x_1+x_2}{2} = 3$, 即 $\frac{8k(3k+1)}{2(4k^2-1)} = 3$, 解得 $k = -\frac{3}{4}$.

当 $k = -\frac{3}{4}$ 时, 满足 $\Delta > 0$, 符合题意.

所以所求直线 MN 的方程为 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$, 即 $3x + 4y - 5 = 0$.

(方法二) 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$.

因为 M, N 均在双曲线上, 所以 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{4} - y_1^2 = 1, \\ \frac{x_2^2}{4} - y_2^2 = 1, \end{cases}$

两式相减, 得 $\frac{x_2^2 - x_1^2}{4} = y_2^2 - y_1^2$.

所以 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 + x_1}{4(y_2 + y_1)}$.

因为点 $A(3, -1)$ 平分弦 MN , 所以 $x_1 + x_2 = 6, y_1 + y_2 = -2$.

所以 $k_{MN} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 + x_1}{4(y_2 + y_1)} = -\frac{3}{4}$.

经验证, 该直线 MN 存在.

所以所求直线 MN 的方程为 $y+1 = -\frac{3}{4}(x-3)$, 即 $3x + 4y - 5 = 0$.

【一题多思】

思考 1. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 一条直线与双曲线相交于点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) (x_1 \neq x_2)$, 弦 AB 的中点为 $M(x_0, y_0)$, O 为原点, 你能求出 $k_{OM} \cdot k_{AB}$ 的值吗?

解: 将 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 代入双曲线方程

得 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \\ \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \end{cases}$

两式作差并整理得 $\frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{a^2} - \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{b^2} = 0$.

已知弦 AB 的中点为 $M(x_0, y_0)$,

因为 $x_1 \neq x_2$, 则 $\frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)} = \frac{b^2}{a^2}$, 即 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{b^2}{a^2}$.

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{b^2}{a^2}, \text{ 所以 } k_{OM} \cdot k_{AB} = \frac{b^2}{a^2}.$$

思考 2. 已知斜率为 -1 的直线与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 交于 P, Q 两点, 若线段 PQ 的中点为 $A(3, -1)$, 求双曲线的渐近线方程.

解: 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 代入双曲线方程得:

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \\ \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \end{cases} \quad \text{两式相减得 } \frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} - \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0,$$

$$\text{即 } \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{a^2} - \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{b^2} = 0.$$

由题知 $x_1 \neq x_2$, 两边同时除以 $x_1 - x_2$, 得 $\frac{x_1 + x_2}{a^2} -$

$$\frac{y_1 + y_2}{b^2} \cdot \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 0.$$

由题意可知, PQ 的中点为 $A(3, -1)$, 直线 PQ 的斜率为 -1 , 所以 $x_1 + x_2 = 6, y_1 + y_2 = -2, \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -1$,

$$\text{所以 } \frac{6}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 0, \text{ 解得 } \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}, \text{ 即 } \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

所以双曲线的渐近线方程是 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

【探究总结】

解决弦长和中点弦问题的方法

(1) 解决弦长问题和中点弦问题时, 我们要注意一元二次方程根与系数的关系、弦长公式和中点坐标公式的应用, 也可以考虑应用点差法.

(2) 弦长公式

若斜率为 k ($k \neq 0$) 的直线与双曲线相交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点, 则

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]} \\ &= \sqrt{\left(1+\frac{1}{k^2}\right)[(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2]}. \end{aligned}$$

88 应用迁移

1. 过双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的右焦点 F 作倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的

直线, 与双曲线交于 A, B 两点, 求弦 AB 的长及 AB 的中点 M 到右焦点 F 的距离.

解: 由题意可得 $F(5, 0)$,

所以直线 AB 的方程为 $y = x - 5$.

代入双曲线方程, 得 $7x^2 + 90x - 369 = 0, \Delta > 0$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则

$$x_1 + x_2 = -\frac{90}{7}, x_1x_2 = -\frac{369}{7},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } |AB| &= \sqrt{2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{18432}}{7} = \frac{192}{7}. \end{aligned}$$

$$\text{又 } x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{45}{7}, \text{ 所以 } y_M = -\frac{80}{7}.$$

$$\text{所以 } |MF| = \sqrt{\left(-\frac{45}{7} - 5\right)^2 + \left(-\frac{80}{7} - 0\right)^2} = \frac{80\sqrt{2}}{7}.$$

2. 已知直线 $y = \frac{1}{3}x + 2$ 与双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 相交于点 A, B , O 为原点, 求 $\triangle ABO$ 的面积.

$$\text{解: 由 } \begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 2, \\ \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1, \end{cases} \text{ 得 } x^2 - 4x - 24 = 0, \Delta > 0.$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } \begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_1x_2 = -24, \end{cases}$$

$$\text{所以 } |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = 4\sqrt{7},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4\sqrt{7} = 4\sqrt{7}.$$

任务 3 > 直线与双曲线的综合应用

探究活动

例 2 (2024 · 上海卷) 已知双曲线 $\Gamma: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$) 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 过点 $M(-2, 0)$ 的直线 l 交双曲线 Γ 于 P, Q 两点.

(1) 若双曲线 Γ 的离心率 $e = 2$, 求 b 的值;

(2) 若 $b = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, $\triangle MA_2P$ 为等腰三角形, 且点 P 在第一象限, 求点 P 的坐标;

(3) 连接 QO (O 为原点) 并延长, 交双曲线 Γ 于另一点 R , 若 $\overrightarrow{A_1R} \cdot \overrightarrow{A_2P} = 1$, 求 b 的取值范围.

解: (1) 由题意得 $e = \frac{c}{a} = \frac{c}{1} = 2$, 则 $c = 2, b = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$.

(2) 当 $b = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ 时, 双曲线 $\Gamma: x^2 - \frac{y^2}{\frac{8}{3}} = 1, M(-2, 0),$

$A_2(1, 0)$.

因为 $\triangle MA_2P$ 为等腰三角形, 则

① 当以 MA_2 为底时, 显然点 P 在直线 $x = -\frac{1}{2}$ 上,

这与点 P 在第一象限矛盾, 故舍去;

② 当以 A_2P 为底时, $|MP| = |MA_2| = 3$,

$$\text{设 } P(m, n), \text{ 则 } \begin{cases} m^2 - \frac{3n^2}{8} = 1, \\ (m+2)^2 + n^2 = 9, \end{cases} \text{ 联立解得}$$

$$\begin{cases} m = -\frac{23}{11}, \\ n = -\frac{8\sqrt{17}}{11} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m = -\frac{23}{11}, \\ n = \frac{8\sqrt{17}}{11} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m = 1, \\ n = 0, \end{cases}$$

因为点 P 在第一象限, 显然以上均不合题意, 舍去;
(或者由双曲线的性质知 $|MP| > |MA_2|$, 矛盾, 舍去)

③当以 MP 为底时, $|A_2P| = |MA_2| = 3$,

设 $P(x_0, y_0)$, 其中 $x_0 > 0, y_0 > 0$,

$$\text{则有 } \begin{cases} (x_0 - 1)^2 + y_0^2 = 9, \\ x_0^2 - \frac{y_0^2}{8} = 1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x_0 = 2, \\ y_0 = 2\sqrt{2}, \end{cases} \text{ 即 } P(2, 2\sqrt{2}).$$

综上所述, 点 P 的坐标为 $(2, 2\sqrt{2})$.

(3)由题意知 $A_1(-1, 0), A_2(1, 0)$,

当直线 l 的斜率为 0 时, $\overrightarrow{A_1R} \cdot \overrightarrow{A_2P} = 0$, 不合题意,
则 $k_l \neq 0$.

设直线 $l: x = ty - 2, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

根据双曲线的对称性知 $R(-x_2, -y_2)$,

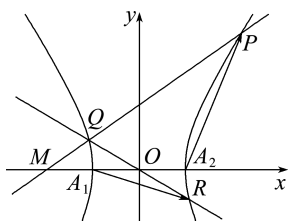
$$\text{联立 } \begin{cases} x = ty - 2, \\ x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1, \end{cases} \text{ 消去 } x \text{ 并整理得 } (b^2t^2 - 1)y^2 - 4b^2ty + 3b^2 = 0,$$

$$4b^2ty + 3b^2 = 0,$$

显然二次项系数 $b^2t^2 - 1 \neq 0$,

$$\Delta = (-4b^2t)^2 - 4(b^2t^2 - 1)3b^2 = 4b^4t^2 + 12b^2 > 0,$$

$$y_1 + y_2 = \frac{4b^2t}{b^2t^2 - 1} \text{ ①}, y_1y_2 = \frac{3b^2}{b^2t^2 - 1} \text{ ②},$$



$$\overrightarrow{A_1R} = (-x_2 + 1, -y_2), \overrightarrow{A_2P} = (x_1 - 1, y_1),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{A_1R} \cdot \overrightarrow{A_2P} = (-x_2 + 1)(x_1 - 1) - y_1y_2 = 1.$$

因为 P, Q 在直线 l 上,

$$\text{则 } x_1 = ty_1 - 2, x_2 = ty_2 - 2,$$

$$\text{即 } -(ty_2 - 3)(ty_1 - 3) - y_1y_2 = 1, \text{ 即 } y_1y_2(t^2 + 1) - (y_1 + y_2)3t + 10 = 0.$$

$$\text{将 ①② 代入上式有 } (t^2 + 1) \cdot \frac{3b^2}{b^2t^2 - 1} - 3t \cdot \frac{4b^2t}{b^2t^2 - 1} + 10 = 0,$$

$$\text{即 } 3b^2(t^2 + 1) - 3t \cdot 4b^2t + 10(b^2t^2 - 1) = 0,$$

$$\text{化简得 } b^2t^2 + 3b^2 - 10 = 0,$$

$$\text{所以 } t^2 = \frac{10}{b^2} - 3, \text{ 代入到 } b^2t^2 - 1 \neq 0, \text{ 得 } b^2 \neq 3, \text{ 即 } b \neq \pm\sqrt{3},$$

$$\text{又 } t^2 = \frac{10}{b^2} - 3 \geq 0, \text{ 解得 } b^2 \leq \frac{10}{3}, \text{ 即 } -\frac{\sqrt{30}}{3} \leq b \leq \frac{\sqrt{30}}{3}.$$

$$\text{又因为 } b > 0, \text{ 所以 } 0 < b \leq \frac{\sqrt{30}}{3} \text{ 且 } b \neq \sqrt{3}.$$

$$\text{综上, } b \in (0, \sqrt{3}) \cup \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{30}}{3}\right].$$

【探究总结】

利用设而不求的方法解决直线与双曲线相交问题的步骤:

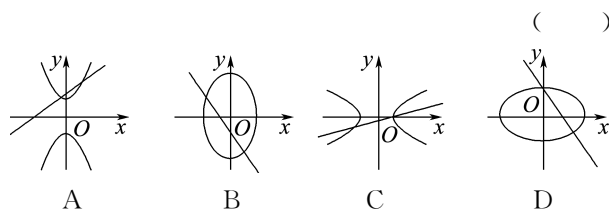
(1) 设直线与双曲线的两个交点为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

(2) 将直线方程与双曲线方程联立, 消元后得到关于 x 的一元二次方程.

(3) 结合一元二次方程根与系数的关系可求得 $x_1 + x_2, x_1x_2$, 从而弦长问题、参数取值范围问题等都可以根据 $x_1 + x_2, x_1x_2$ 应满足的条件解决.

应用迁移

1. 如图, 直线 $ax - y + b = 0$ 和曲线 $bx^2 + ay^2 = ab (ab \neq 0)$ 在同一平面直角坐标系中的位置可能是



C 解析: 直线方程可化为 $y = ax + b$, 曲线方程可

化为 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$. 若 $a > 0, b > 0$, 则曲线表示椭圆,

故 A 不正确. 关于 B, D, 由椭圆知直线斜率应满足 $a > 0$, 而选项 B, D 的图象中直线斜率均为负值, 故 B, D 不正确. 由 C 可知 $a > 0, b < 0$, 故 C 正确.

2. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率

$$\text{为 } \sqrt{3}, \text{ 且 } \frac{a^2}{c} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 已知直线 $x - y + m = 0$ 与双曲线 C 交于不同的两点 A, B , 且线段 AB 的中点在圆 $x^2 + y^2 = 5$ 上, 求 m 的值.

$$\text{解: (1) 由题意得 } \begin{cases} \frac{a^2}{c} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \frac{c}{a} = \sqrt{3}, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 1, \\ c = \sqrt{3}. \end{cases}$$

$$\text{所以 } b^2 = c^2 - a^2 = 2,$$

$$\text{所以双曲线 } C \text{ 的方程为 } x^2 - \frac{y^2}{2} = 1.$$

(2) 设 A, B 两点的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 线段 AB 的中点为 $M(x_0, y_0)$.

$$\text{由} \begin{cases} x-y+m=0, \\ x^2-\frac{y^2}{2}=1, \end{cases}$$

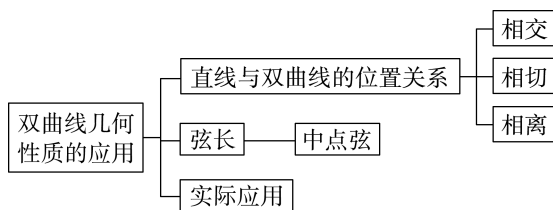
$$\text{得 } x^2-2mx-m^2-2=0, \Delta=8m^2+8>0.$$

$$\text{所以 } x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=m, y_0=x_0+m=2m.$$

$$\text{因为点 } M(x_0, y_0) \text{ 在圆 } x^2+y^2=5 \text{ 上,}$$

$$\text{所以 } m^2+(2m)^2=5, \text{ 解得 } m=\pm 1.$$

提质归纳



课后素养评价 (三十一)

双曲线几何性质的应用

A组 学习·理解

1. “直线与双曲线有唯一交点”是“直线与双曲线相切”的 (B)

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

2. (多选) 直线 $y=mx+1$ 与双曲线 $x^2-y^2=1$ 有公共点, 则 m 的值不可能为 ()

- A. -2 B. -1
C. 1 D. 2

AD 解析: 由 $\begin{cases} y=mx+1, \\ x^2-y^2=1, \end{cases}$ 得 $(1-m^2)x^2-2mx-2=0$.

由题意知 $1-m^2=0$ 或 $\begin{cases} 1-m^2 \neq 0, \\ \Delta=4m^2+8(1-m^2) \geq 0, \end{cases}$ 解得 $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$. 经判断只有 A, D 符合题意.

3. 已知等轴双曲线的中心在原点, 焦点在 x 轴上, 与直线 $y=\frac{1}{2}x$ 交于 A, B 两点. 若 $|AB|=2\sqrt{15}$, 则

- 该双曲线的方程为 ()
A. $x^2-y^2=6$
B. $x^2-y^2=9$
C. $x^2-y^2=16$
D. $x^2-y^2=25$

B 解析: 设等轴双曲线的方程为 $x^2-y^2=a^2$ ($a>0$), 与 $y=\frac{1}{2}x$ 联立, 得 $\frac{3}{4}x^2=a^2$,

$$\text{所以 } |AB|=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} \times \frac{4\sqrt{3}}{3}a=2\sqrt{15},$$

解得 $a=3$, 所以该双曲线的方程为 $x^2-y^2=9$. 故选 B.

4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 的右焦点为 F , 过点 F 作一条直线与双曲线的一条渐近线垂直, 垂足为 A , O 为坐标原点, 则 $S_{\triangle OAF} =$ ()

- A. 3 B. $3\sqrt{5}$
C. $2\sqrt{5}$ D. $\sqrt{5}$

D 解析: 双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 的右焦点为 $F(3,0)$, 渐近线方程为 $\sqrt{5}x \pm 2y=0$, F 到渐近线 $\sqrt{5}x+2y=0$ 的距离 $|FA|=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5+4}}=\sqrt{5}$, 则 $|OA|=\sqrt{|OF|^2-|FA|^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=2$.

$$\text{所以 } S_{\triangle OAF}=\frac{1}{2}|FA| \cdot |OA|=\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times 2=\sqrt{5}.$$

5. 若直线 $y=kx+2$ 与双曲线 $x^2-y^2=6$ 的右支交于不同的两点, 则 k 的取值范围是 _____.

$\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}, -1\right)$ 解析: 由 $\begin{cases} y=kx+2, \\ x^2-y^2=6, \end{cases}$ 得 $(1-k^2)x^2-4kx-10=0$.

$$\text{由题意, 得 } \begin{cases} 1-k^2 \neq 0, \\ \Delta=16k^2+40(1-k^2) > 0, \\ \frac{4k}{1-k^2} > 0, \\ \frac{10}{k^2-1} > 0, \end{cases}$$

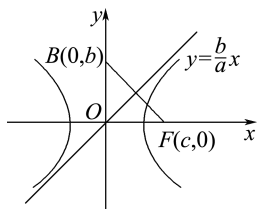
$$\text{解得 } -\frac{\sqrt{15}}{3} < k < -1,$$

所以 k 的取值范围是 $\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}, -1\right)$.

6. 设双曲线的一个焦点为 F , 虚轴的一个端点为 B , 如果直线 BF 与该双曲线的一条渐近线垂直, 那么此双曲线的离心率为 _____.

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 解析: 不妨设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

($a>0, b>0$), 如图所示, 双曲线的一条渐近线方程为 $y = \frac{b}{a}x$,



$k_{BF} = -\frac{b}{c}$. 因为直线 BF 与直线 $y = \frac{b}{a}x$ 垂直,

所以 $\frac{b}{a} \cdot \left(-\frac{b}{c}\right) = -1$, 整理得 $b^2 = ac$,

所以 $c^2 - a^2 - ac = 0$.

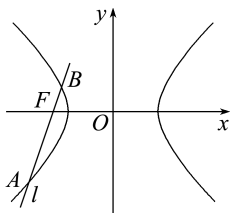
两边同除以 a^2 , 得 $e^2 - e - 1 = 0$,

解得 $e = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $e = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (舍去).

7. 过双曲线 $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的右焦点的直线被双曲线所截得弦的长为 $\sqrt{5}$, 这样的直线有 _____ 条.

1 解析: 由题意得右焦点 $F(5, 0)$, 所以过点 F 且垂直于 x 轴的直线是 $x = 5$, 代入 $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$, 得 $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$, 所以此时弦长为 $\frac{\sqrt{5}}{2} \times 2 = \sqrt{5}$. 当直线不垂直 x 轴, 且与双曲线右支有两个交点时, 那么弦长一定比 $\sqrt{5}$ 长. 因为两顶点间的距离为 $4\sqrt{5}$, 即左、右两支上的点的最短距离是 $4\sqrt{5}$, 所以如果交于两支的话, 那么弦长不可能为 $\sqrt{5}$. 故这样的直线只有 1 条.

8. 如图, 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的左焦点为 F , 过 F 作倾斜角为 60° 的直线 l 与双曲线 C 的左支交于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{FB}$, 则双曲线 C 的渐近线方程为 _____.



$y = \pm \frac{\sqrt{11}}{5}x$ 解析: 如图, 令双曲线的右焦点为

F' , 半焦距为 c , 设 $|BF| = t$, 则 $|AF| = 4t$.

由双曲线定义得 $|BF'| = t + 2a$, $|AF'| = 4t + 2a$.

由直线 AB 倾斜角为 60° ,

得 $\begin{cases} \angle BFF' = 60^\circ, \\ \angle AFF' = 120^\circ. \end{cases}$ 由余弦定理得

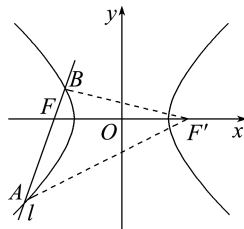
$$\begin{cases} |BF'|^2 = |BF|^2 + |FF'|^2 - 2|BF||FF'|\cos 60^\circ, \\ |AF'|^2 = |AF|^2 + |FF'|^2 - 2|AF||FF'|\cos 120^\circ, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} (t+2a)^2 = t^2 + 4c^2 - 2tc, \\ (4t+2a)^2 = 16t^2 + 4c^2 + 8tc, \end{cases}$$

$$\text{整理得 } \begin{cases} (2a+c)t = 2c^2 - 2a^2, \\ (4a-2c)t = c^2 - a^2, \end{cases}$$

$$\text{解得 } c = \frac{6}{5}a, t = \frac{11}{40}a, b = \frac{\sqrt{11}}{5}a,$$

所以双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{11}}{5}x$.



B组 应用·实践

1. 若点 O 和点 $F_1(-2, 0)$ 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$

($a>0$) 的中心和左焦点, 点 P 为双曲线右支上的一点, 并且过点 P 与双曲线的右焦点 F_2 的直线垂直于 x 轴, 则线段 OP 的长为 ()

A. $\frac{13}{3}$ B. $\frac{\sqrt{39}}{3}$ C. $\frac{7}{3}$ D. $\frac{\sqrt{21}}{3}$

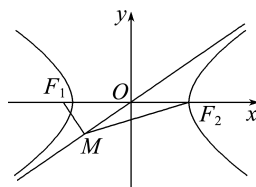
B 解析: 由条件知 $a^2 + 1 = 4$, 因为 $a>0$, 所以 $a = \sqrt{3}$. 又 $PF_2 \perp x$ 轴, 把 $x = 2$ 代入 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$, 得 $y^2 = \frac{1}{3}$,

$$\text{所以 } |OP| = \sqrt{2^2 + \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{39}}{3}.$$

2. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , O 为坐标原点, 过 F_1 作 C 的一条渐近线的垂线, 垂足为 M , 且 $|MF_2| = 3|OM|$, 则双曲线 C 的离心率为 ()

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{6}$
C. $2\sqrt{2}$ D. 3

B 解析: 如图.



由题意得 $F_1(-c, 0)$, 设一条渐近线的方程为 $bx -$

$$ay=0,$$

$$\text{所以 } |MF_1| = \frac{|-bc|}{\sqrt{b^2+(-a)^2}} = \frac{bc}{c} = b, \text{ 由勾股定理}$$

$$\text{得 } |OM| = a.$$

$$\text{因为 } MF_1 \text{ 垂直于渐近线, 所以 } \cos \angle MOF_1 = \frac{a}{c}.$$

$$\text{因为 } |MF_2| = 3|OM|, \text{ 所以 } |MF_2| = 3a. \text{ 又 } |OF_2| = c,$$

$$\text{在 } \triangle MOF_2 \text{ 中, 由余弦定理的推论得 } \cos \angle MOF_2 = \frac{a^2+c^2-9a^2}{2ac}.$$

$$\text{因为 } \angle MOF_1 + \angle MOF_2 = \pi, \text{ 所以 } \frac{a^2+c^2-9a^2}{2ac} +$$

$$\frac{a}{c} = 0,$$

$$\text{化简得 } c^2 = 6a^2, \text{ 所以 } c = \sqrt{6}a, \text{ 故 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{6}. \text{ 故}$$

选 B.

3. (多选) 已知双曲线 C 过点 $(3, \sqrt{2})$, 且渐近线为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 则下列结论正确的是 ()

A. 双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$

B. 双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{3}$

C. 曲线 $y = e^{x-2} - 1$ 经过 C 的一个焦点

D. 直线 $x - \sqrt{2}y - 1 = 0$ 与 C 有两个公共点

AC 解析: 当焦点在 x 轴上时, 设双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 由题意可知 $\frac{b}{a} =$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 所以 } \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}, \text{ 即 } a^2 = 3b^2, \text{ 所以双曲线方程可化}$$

$$\text{为 } \frac{x^2}{3b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\text{又点 } (3, \sqrt{2}) \text{ 在双曲线 C 上,}$$

$$\text{所以 } \frac{9}{3b^2} - \frac{2}{b^2} = 1, \text{ 所以 } b^2 = 1, a^2 = 3,$$

$$\text{所以双曲线 C 的方程为 } \frac{x^2}{3} - y^2 = 1.$$

同理可得, 当焦点在 y 轴上时, 双曲线方程不存在, 故 A 正确.

$$\text{双曲线 C 的离心率 } e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

故 B 错误.

双曲线 C 的一个焦点 $(2, 0)$ 恰在曲线 $y = e^{x-2} - 1$ 上, 故 C 正确.

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{3} - y^2 = 1, \\ x - \sqrt{2}y - 1 = 0, \end{cases} \text{ 消去 } x, \text{ 得 } y^2 - 2\sqrt{2}y + 2 = 0,$$

$$\Delta = 0,$$

因为 $\Delta = 0$, 故 D 错误.

4. 过点 $M(2, 1)$ 作斜率为 1 的直线, 交双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 于 A, B 两点, 点 M 为 AB 的中点, 则该双曲线的离心率为 ()

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\sqrt{2}$

B 解析: 设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{代入双曲线方程得 } \begin{cases} \frac{y_1^2}{a^2} - \frac{x_1^2}{b^2} = 1, \\ \frac{y_2^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \end{cases} \text{ 两式作差后整理得}$$

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{a^2}{b^2}.$$

$$\text{由题易知 } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 1, x_1 + x_2 = 4, y_1 + y_2 = 2,$$

$$\text{所以 } \frac{2}{4} = \frac{a^2}{b^2}.$$

$$\text{又 } c^2 = a^2 + b^2, \text{ 所以 } \frac{1}{2} = \frac{a^2}{c^2 - a^2}, \text{ 得 } \frac{c}{a} = \sqrt{3}.$$

5. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F.

若过点 F 且倾斜角为 60° 的直线 l 与双曲线的右支有且只有一个交点, 则此双曲线的离心率 e 的取值范围是_____.

$[2, +\infty)$ 解析: 由题意, 知 $\frac{b}{a} \geq \sqrt{3}$, 则 $\frac{b^2}{a^2} \geq 3$, 所以

$$c^2 - a^2 \geq 3a^2, \text{ 即 } c^2 \geq 4a^2, \text{ 所以 } e^2 = \frac{c^2}{a^2} \geq 4, \text{ 所以 } e \geq 2.$$

故双曲线的离心率 e 的取值范围是 $[2, +\infty)$.

6. 已知双曲线的方程为 $2x^2 - y^2 = 2$, 则以点 $A(2, 3)$ 为中点的双曲线的弦所在的直线的方程为_____.

$$4x - 3y + 1 = 0 \text{ 解析: 设弦的两端点分别为 } P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), \text{ 则 } 2x_1^2 - y_1^2 = 2, 2x_2^2 - y_2^2 = 2, \text{ 两式相减, 得 } 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 0.$$

$$\text{又 } x_1 + x_2 = 4, y_1 + y_2 = 6,$$

$$\text{所以 } 8(x_1 - x_2) - 6(y_1 - y_2) = 0, \text{ 即 } k_{PQ} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{因此直线 PQ 的方程为 } y - 3 = \frac{4}{3}(x - 2), \text{ 即 } 4x -$$

$$3y+1=0.$$

经验证, 直线 $4x-3y+1=0$ 与双曲线相交.

因此所求直线方程为 $4x-3y+1=0$.

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$, 其一条渐近线被圆 $(x-3)^2+y^2=8$ 截得的弦长为 $2\sqrt{2}$, 则 $b=$ _____.

$2\sqrt{2}$ 解析: 依题意, $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的渐近线方

程为 $y=\pm\frac{b}{2}x$,

不妨取渐近线 $l_1: bx-2y=0$, 则圆心 $(3,0)$ 到 l_1 的

距离 $d=\frac{3b}{\sqrt{b^2+4}}$.

由圆的性质得 $\left(\frac{3b}{\sqrt{b^2+4}}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2=(2\sqrt{2})^2$, 所

以 $b=2\sqrt{2}$.

8. 双曲线 $C: \frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点为 F_2 , 直线 l 过点 F_2 且与双曲线 C 交于 A, B 两点, 直线 l 的倾斜角为 30° , O 为坐标原点.

(1) 求 $|AB|$;

(2) 求 $\triangle AOB$ 的面积.

解: (1) 由题意, 双曲线 $C: \frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的右焦点为 $F_2(3,0)$.

由直线 l 的倾斜角为 30° , 得斜率 $k=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以直线 l 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}$.

联立直线与双曲线的方程 $\begin{cases} y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}, \\ \frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 消去 y ,

并整理得 $x^2+12x-36=0$, 易得 $\Delta>0$.

不妨设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $\begin{cases} x_1+x_2=-12, \\ x_1x_2=-36. \end{cases}$

由弦长公式得 $|AB|=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}\times\sqrt{12^2+4\times 36}=8\sqrt{6}$.

(2) 由题意, 在 $\triangle OAB$ 中, 边 AB 上的高即为原点 O 到直线 AB 的距离 d ,

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}$ 即 $\frac{\sqrt{3}}{3}x-y-\sqrt{3}=0$,

故 $d=\frac{|-\sqrt{3}|}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}}=\frac{3}{2}$,

所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\times 8\sqrt{6}\times\frac{3}{2}=6\sqrt{6}$.

3.3 抛物线

3.3.1 抛物线及其标准方程

学习任务目标

1. 掌握抛物线的定义、焦点及准线的概念.
2. 掌握抛物线的标准方程及其推导过程.
3. 掌握抛物线标准方程中 p 的几何意义, 并能解决简单的求抛物线标准方程的问题.

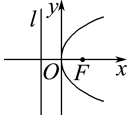
问题式预习

【知识清单】

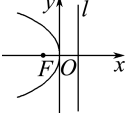
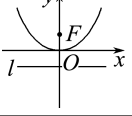
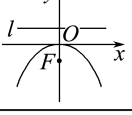
知识点一 抛物线的定义

把平面内与一个定点 F 和一条定直线 l (l 不经过点 F) 的距离相等的点的轨迹叫做 抛物线. 点 F 叫做抛物线的 焦点, 直线 l 叫做抛物线的 准线.

知识点二 抛物线的标准方程

图形	标准方程	焦点坐标	准线方程
	$y^2=2px(p>0)$	$\left(\frac{p}{2}, 0\right)$	$x=-\frac{p}{2}$

续表

图形	标准方程	焦点坐标	准线方程
	$y^2=-2px(p>0)$	$\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$	$x=\frac{p}{2}$
	$x^2=2py(p>0)$	$\left(0, \frac{p}{2}\right)$	$y=-\frac{p}{2}$
	$x^2=-2py(p>0)$	$\left(0, -\frac{p}{2}\right)$	$y=\frac{p}{2}$

【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1) 若点 P 到点 $F(1,0)$ 的距离和到直线 $x=-1$ 的距离相等,则点 P 的轨迹是抛物线. (√)

(2) 若点 P 到点 $F(1,0)$ 的距离和到直线 $x+y-1=0$ 的距离相等,则点 P 的轨迹是抛物线. (×)

(3) 若点 P 到点 $F(1,0)$ 的距离比到直线 $x=-2$ 的距离小 1,则点 P 的轨迹是抛物线. (√)

(4) 抛物线的准线与坐标轴的交点和抛物线的焦点关于原点对称. (√)

2. 准线为 $x=1$ 的抛物线的标准方程为 ()

A. $y^2=4x$

B. $y^2=-4x$

C. $x^2=4y$

D. $x^2=-4y$

任务型课堂

任务 1 求抛物线的标准方程

1. 已知抛物线 C 与双曲线 $x^2-y^2=1$ 有相同的焦点,且顶点在原点,则抛物线 C 的标准方程是 ()

A. $y^2=\pm 2\sqrt{2}x$

B. $y^2=\pm 2x$

C. $y^2=\pm 4x$

D. $y^2=\pm 4\sqrt{2}x$

D 解析:由已知可得双曲线的焦点为 $(-\sqrt{2},0)$, $(\sqrt{2},0)$. 设抛物线 C 的方程为 $y^2=\pm 2px$ ($p>0$), 则 $\frac{p}{2}=\sqrt{2}$, 所以 $p=2\sqrt{2}$, 抛物线 C 的标准方程为 $y^2=\pm 4\sqrt{2}x$.

2. 已知抛物线的顶点是原点,且经过点 $P(-2,-4)$, 则该抛物线的标准方程为 _____.

$y^2=-8x$ 或 $x^2=-y$ 解析:设抛物线的标准方程为 $y^2=mx$ ($m\neq 0$) 或 $x^2=ny$ ($n\neq 0$).

将 $P(-2,-4)$ 分别代入,得 $m=-8$, $n=-1$, 所以抛物线的标准方程为 $y^2=-8x$ 或 $x^2=-y$.

3. (1) 准线方程为 $y=\frac{2}{3}$ 的抛物线的标准方程为 _____;

(2) 焦点在 y 轴上,焦点到准线的距离为 5 的抛物线的标准方程为 _____.

(1) $x^2=-\frac{8}{3}y$ 解析:因为抛物线的准线交 y 轴于正半轴,且 $\frac{p}{2}=\frac{2}{3}$, 所以 $p=\frac{4}{3}$, 所以所求抛物线的标准方程为 $x^2=-\frac{8}{3}y$.

(2) $x^2=10y$ 或 $x^2=-10y$ 解析:已知抛物线的焦点在 y 轴上,故可设其方程为 $x^2=2my$ ($m\neq 0$). 由焦点到准线的距离为 5, 知 $|m|=5$, 所以 $m=\pm 5$, 所以满足条件的抛物线的标准方程为 $x^2=10y$, $x^2=-10y$.

B 解析:由题意知,抛物线的焦点在 x 轴的负半轴上, $\frac{p}{2}=1$, 即 $p=2$,

故抛物线的标准方程为 $y^2=-4x$.

3. 请思考并回答下列问题:

(1) 抛物线标准方程中 p 的几何意义是什么?

提示: p 的几何意义是焦点到准线的距离.

(2) 方程为标准方程的抛物线的结构特征是什么?

提示:顶点在坐标原点,焦点在坐标轴上.

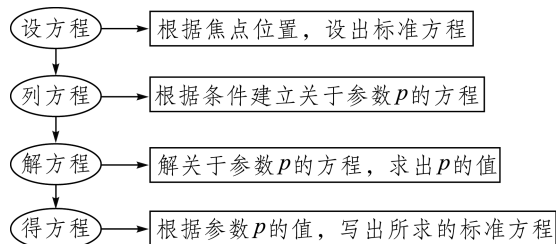
(3) 如何判断抛物线的焦点位置和开口方向?

提示:抛物线的焦点所在的坐标轴与标准方程中一次项变量一致,开口方向取决于标准方程中一次项系数的正负.

【探究总结】

求抛物线的标准方程的方法

(1) 待定系数法,步骤如下:



(2) 当抛物线的类型没有确定时,可设方程为 $y^2=mx$ ($m\neq 0$) 或 $x^2=ny$ ($n\neq 0$), 这样可以避免分类讨论.

任务 2 抛物线定义的应用

探究活动

例 1 已知动圆 M 与直线 $y=2$ 相切,且与定圆 $C: x^2+(y+3)^2=1$ 外切,设动圆圆心为 $M(x,y)$, 半径为 r .

(1) 点 M 到定圆圆心 $C(0,-3)$ 的距离与到直线 $y=3$ 的距离有什么关系?

(2) 点 M 的轨迹是什么? 求出其轨迹方程.

解: (1) 相等.

(2) 由抛物线的定义可知,动圆圆心 M 的轨迹是以 $C(0,-3)$ 为焦点, $y=3$ 为准线的一条抛物线,其方程为 $x^2=-12y$.

【一题多思】

思考 1. 设定点 $F(0,-2)$, 动圆 M 过点 F 且与直线 $y=2$ 相切, 求动圆圆心 $M(x,y)$ 的轨迹方程.

解: 由题意知,动圆圆心 $M(x,y)$ 到定点 $F(0,-2)$ 与到定直线 $y=2$ 的距离相等,

所以动圆圆心 M 的轨迹是以 F 为焦点, $y=2$ 为准线的抛物线, 所以动圆圆心 $M(x,y)$ 的轨迹方程为 $x^2=-8y$.

思考 2.与抛物线的定义有关的最值问题常进行哪些方面的转化?

提示:(1)将抛物线上的点到准线的距离化为该点到焦点的距离,利用“两点之间线段最短”解决;

(2)将抛物线上的点到焦点的距离转化为该点到准线的距离,利用“垂线段最短”解决.

思考 3.设点 P 是抛物线 $x^2 = -12y$ 上的一个动点,求点 P 到点 $A(2,0)$ 的距离与点 P 到该抛物线准线的距离之和的最小值.

解:抛物线 $x^2 = -12y$ 的焦点为 $F(0, -3)$,过点 P 作 PP' 垂直于准线 $y=3$,垂足为 P' (图略).

由抛物线的定义知 $|PF| = |PP'|$,所以 $|PA| + |PP'| = |PA| + |PF| \geq |AF| = \sqrt{13}$.

故当 P, A, F 三点共线时, $|PA| + |PP'|$ 取到最小值为 $\sqrt{13}$.

【探究总结】

抛物线定义的两应用

(1)实现距离转化.根据抛物线的定义,抛物线上任意一点到焦点的距离等于它到准线的距离.因此,由抛物线的定义可以实现点到点的距离与点到直线的距离的相互转化,从而简化某些问题.

(2)解决最值问题.求抛物线上一动点到焦点的距离与抛物线内部另一点的距离之和的最小值时,往往用抛物线的定义进行转化,即化折线为直线解决最值问题.

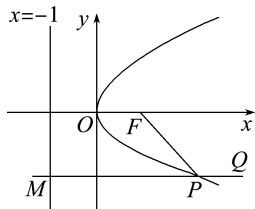
应用迁移

1.已知点 P 在抛物线 $y^2 = 4x$ 上,那么点 P 到点 $Q(2, -1)$ 的距离与点 P 到抛物线焦点的距离之和取得最小值时,点 P 的坐标为 ()

- A. $\left(\frac{1}{4}, -1\right)$ B. $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$
C. $(1, 2)$ D. $(1, -2)$

A 解析:由题意,抛物线的方程为 $y^2 = 4x$,所以 $p = 2$,焦点为 $F(1, 0)$.

如图所示,过点 Q 作准线 $x = -1$ 的垂线,垂足为 M ,交抛物线于点 P ,则 $|PF| = |PM|$.



依题意可知,当 P, Q, M 三点共线且点 P 在中间时所求距离和最小,

故点 P 的纵坐标为 -1 ,代入抛物线的方程,求得 x

$$= \frac{1}{4},$$

所以点 P 的坐标为 $\left(\frac{1}{4}, -1\right)$,故选 A.

2.若动点 M 到点 $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 的距离比它到 y 轴的距离大 $\frac{1}{2}$,求点 M 的轨迹方程.

解:当动点 M 位于 y 轴上及 y 轴右侧时,因为动点 M 到 $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 的距离比它到 y 轴的距离大 $\frac{1}{2}$,所以

动点 M 到 $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 的距离与它到直线 $l: x = -\frac{1}{2}$ 的距离相等.由抛物线的定义知,动点 M 的轨迹是以 F 为焦点, l 为准线的抛物线.设方程为 $y^2 = 2px$ ($p > 0$),其中 $\frac{p}{2} = \frac{1}{2}$,所以 $p = 1$,故点 M 的轨迹方程为 $y^2 = 2x$.

当动点 M 位于 y 轴左侧时,点 M 的轨迹为 x 轴的负半轴.

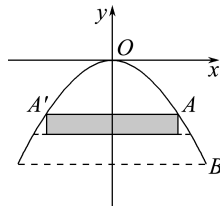
综上所述,点 M 的轨迹方程为 $y^2 = 2x$ 或 $y = 0$ ($x < 0$).

任务 3 > 抛物线的实际应用

探究活动

例 2 河上有一抛物线形拱桥,当水面距拱顶 5 m 时,水面宽为 8 m,一小船宽 4 m,高 2 m,载货后船露出水面的部分高 0.75 m,问:水面上涨到与拱桥顶相距多远时,小船开始不能通过?

解:如图,以拱桥的拱顶为坐标原点,以过拱顶且平行于水面的直线为 x 轴,建立平面直角坐标系.



设抛物线方程为 $x^2 = -2py$ ($p > 0$),由题意可知,点 $B(4, -5)$ 在抛物线上,代入抛物线方程得 $p = \frac{8}{5}$,故

$$x^2 = -\frac{16}{5}y.$$

当船两侧和拱桥接触时,船不能通过,

因为船宽 4 m,则 $A(2, y_A)$.

$$\text{由 } 2^2 = -\frac{16}{5}y_A, \text{ 得 } y_A = -\frac{5}{4}.$$

又知船露出水面的部分高为 0.75 m,所以 $|y_A| + 0.75 = 2$.

所以水面上涨到与拱顶相距 2 m 时,小船开始不能通过.

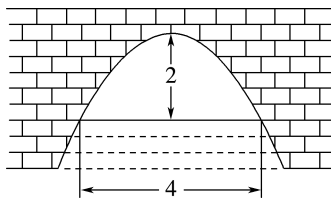
【探究总结】

解决抛物线实际应用问题的五个步骤

- (1) 建立适当的坐标系;
- (2) 设出合适的抛物线标准方程;
- (3) 通过计算求出抛物线的标准方程;
- (4) 利用抛物线的性质进行计算;
- (5) 将计算结果还原到实际问题中,从而解决实际问题.

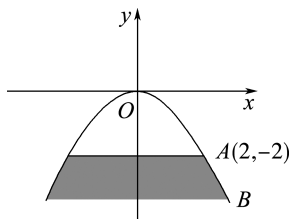
88 应用迁移

1. 如图是抛物线形桥拱,当水面的宽度为 4 m 时,拱顶离水面 2 m.若水面下降 0.42 m,则水面宽为 ()



- A. 4.6 m B. 4.4 m
C. 2.2 m D. 4 m

B 解析: 如图,建立平面直角坐标系.设抛物线方程为 $x^2 = my$ ($m < 0$).



将 $A(2, -2)$ 代入 $x^2 = my$, 得 $m = -2$, 所以 $x^2 = -2y$. 代入 $B(x_B, -2.42)$, 得 $x_B = 2.2$, 故水面宽为 4.4 米. 故选 B.

2. 被称为“中国天眼”的 500 米口径球面射电望远镜 (FAST) 是目前世界上口径最大,灵敏度最高的单口径射电望远镜 (图 1). 其轴截面可以看作抛物线

的一部分. 某学校科技小组制作了一个 FAST 模型,观测时呈口径为 4 m、高为 1 m 的抛物面,则其轴截面所在的抛物线 (图 2) 的顶点到焦点的距离为 ()



图 1

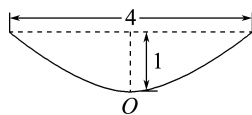
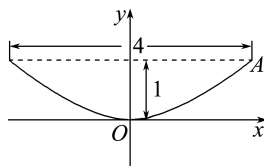


图 2

- A. 1 m B. 2 m C. 4 m D. 8 m

A 解析: 如图,以抛物线的顶点为坐标原点,对称轴为 y 轴,建立平面直角坐标系.



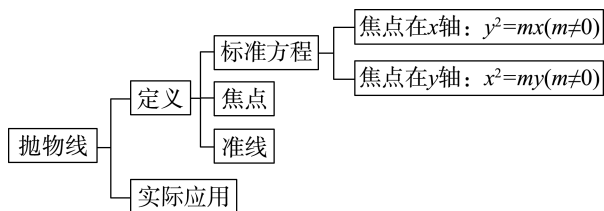
设抛物线的方程为 $x^2 = 2py$, $p > 0$.

由题意可得抛物线上一点 $A(2, 1)$, 代入抛物线方程可得 $2^2 = 2p \times 1$, 所以 $p = 2$,

即抛物线方程为 $x^2 = 4y$, 则抛物线的焦点坐标为 $(0, 1)$, 故顶点到焦点的距离为 1 m.

故选 A.

89 提质归纳



课后素养评价 (三十二)

抛物线及其标准方程

A组 学习·理解

1. 已知 M 为抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上一点, 且 M 到抛物线焦点 F 的距离为 4, 它到 y 轴的距离为 3, 则 $p =$ ()
- A. 4 B. 3
C. 2 D. 1

C 解析: 由题意得, $|MF| = \frac{p}{2} + x_M$, 即 $4 = \frac{p}{2} + 3$, 解得 $p = 2$. 故选 C.

2. (多选) 关于抛物线 $y = 4x^2$, 下列描述正确的是 ()

A. 焦点坐标为 $(0, 1)$

B. 焦点坐标为 $(0, \frac{1}{16})$

C. 准线方程为 $y = -\frac{1}{16}$

D. 准线方程为 $y = -1$

BC 解析: 由 $y = 4x^2$, 得 $x^2 = \frac{1}{4}y$, 所以该抛物线

开口向上, 焦点坐标为 $(0, \frac{1}{16})$, 准线方程为 $y = -\frac{1}{16}$.

3. 如果抛物线 $y^2 = mx (m \neq 0)$ 的焦点在直线 $3x - 4y - 12 = 0$ 上, 那么抛物线的方程是 ()

A. $y^2 = 12x$ B. $y^2 = 16x$
C. $y^2 = 4x$ D. $y^2 = 8x$

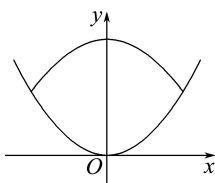
B 解析: 由题知抛物线 $y^2 = mx (m \neq 0)$ 的焦点在 x 轴上, 又直线 $3x - 4y - 12 = 0$ 与 x 轴的交点为 $(4, 0)$, 故抛物线的焦点为 $(4, 0)$, 所以抛物线的方程为 $y^2 = 16x$.

4. 如图, 已知某盖碗的碗体和碗盖的纵截面的形状均可近似看作抛物线的一部分, 碗盖深为 3 cm, 碗盖口直径为 8 cm, 碗体口直径为 10 cm, 碗体深 6.25 cm, 则盖上碗盖后, 碗盖内部最高点到碗体内部最低点的距离为 (碗和碗盖的厚度忽略不计) ()



A. 5 cm B. 6 cm
C. 7 cm D. 8.25 cm

C 解析: 以碗体的最低点为原点, 向上方向为 y 轴, 建立如图所示的平面直角坐标系.



设碗体的抛物线方程为 $x^2 = 2py (p > 0)$, 将 $(5, 6.25)$ 代入, 得 $5^2 = 2p \times 6.25$,

解得 $p = 2$, 则 $x^2 = 4y$.

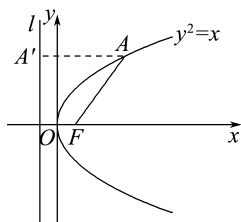
设盖上碗盖后, 碗盖内部最高点到碗体内部最低的距离为 h cm,

则两抛物线在第一象限的交点为 $(4, h-3)$, 代入 $x^2 = 4y$, 得 $4^2 = 4(h-3)$, 解得 $h = 7$.

5. 已知抛物线 $C: y^2 = x$ 的焦点为 F , $A(x_0, y_0)$ 是 C 上一点, $|AF| = \frac{5}{4}x_0$, 则 x_0 等于 ()

A. 4 B. 2 C. 1 D. 8

C 解析: 如图, 易知 $F(\frac{1}{4}, 0)$, 准线 l 的方程为 $x = -\frac{1}{4}$.



过点 A 作 $AA' \perp l$, 垂足为 A' , 则 $|AF| = |AA'|$,

即 $\frac{5}{4}x_0 = x_0 + \frac{1}{4}$, 所以 $x_0 = 1$.

6. 已知抛物线的焦点在 y 轴上, 顶点为坐标原点 O , 且经过点 $P(x_0, 2)$. 若点 P 到该抛物线焦点的距离为 4, 则该抛物线的方程为 _____.

$x^2 = 8y$ **解析:** 因为抛物线的焦点在 y 轴上, 顶点为坐标原点 O , 且经过点 $P(x_0, 2)$,

所以可设抛物线的标准方程为 $x^2 = 2py (p > 0)$.

由抛物线的定义可得 $2 + \frac{p}{2} = 4$, 解得 $p = 4$.

所以抛物线的方程为 $x^2 = 8y$.

7. (2023 · 全国乙卷) 已知点 $A(1, \sqrt{5})$ 在抛物线 $C: y^2 = 2px$ 上, 则 A 到 C 的准线的距离为 _____.

$\frac{9}{4}$ **解析:** 由题意可得 $(\sqrt{5})^2 = 2p \times 1$, 则 $2p = 5$, 抛物线的方程为 $y^2 = 5x$,

准线方程为 $x = -\frac{5}{4}$, 故 A 到 C 的准线的距离为 1

$-\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{9}{4}$.

8. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , P, Q 是抛物线上的两个点. 若 $\triangle PQF$ 是边长为 2 的正三角形, 求 p 的值.

解: 依题意得 $F(\frac{p}{2}, 0)$, 设 $P(\frac{y_1^2}{2p}, y_1)$, $Q(\frac{y_2^2}{2p}, y_2)$ ($y_1 \neq y_2$).

由抛物线定义及 $|PF| = |QF|$, 得 $\frac{y_1^2}{2p} + \frac{p}{2} = \frac{y_2^2}{2p} + \frac{p}{2}$,

所以 $y_1^2 = y_2^2$, 所以 $y_1 = -y_2$.

又 $|PQ| = 2$,

因此 $|y_1| = |y_2| = 1$, 不妨令点 $P(\frac{1}{2p}, 1)$.

又点 P 位于该抛物线上,

由抛物线的定义得 $|PF| = \frac{1}{2p} + \frac{p}{2} = 2$,

解得 $p = 2 \pm \sqrt{3}$.

B组 应用 · 实践

1. (多选) 下列关于抛物线 $y^2 = 10x$ 的说法正确的有 ()

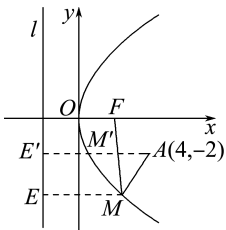
A. 焦点在 x 轴上
B. 抛物线上横坐标为 1 的点到焦点的距离等于 6
C. 焦点到准线的距离为 5
D. 由原点向过焦点的直线作垂线, 垂足坐标可能为 $(2, 1)$

ACD 解析: 抛物线 $y^2=10x$ 的焦点在 x 轴上, A 满足. 设 $M(1, y_0)$ 是抛物线 $y^2=10x$ 上一点, 则 $|MF|=1+\frac{p}{2}=1+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}\neq 6$, B 不满足. 因为 $y^2=10x$ 中 $p=5$, 所以焦点到准线的距离为 5, C 满足. 由于抛物线 $y^2=10x$ 的焦点为 $(\frac{5}{2}, 0)$, 设过该焦点的直线方程为 $y=k(x-\frac{5}{2})$, 若由原点向该直线作垂线, 垂足为 $(2, 1)$, 则 $k=-2$, 此时直线存在, D 满足.

2. 已知 $A(4, -2)$, F 为抛物线 $y^2=8x$ 的焦点, 点 M 在抛物线上移动, 当 $|MA|+|MF|$ 取最小值时, 点 M 的坐标为 ()

- A. $(0, 0)$ B. $(1, -2\sqrt{2})$
C. $(2, -2)$ D. $(\frac{1}{2}, -2)$

D 解析: 如图所示, 过点 M 作准线 l 的垂线, 垂足为 E , 由抛物线的定义知 $|MF|=|ME|$.



当点 M 在抛物线上移动时, $|ME|+|MA|$ 的值在变化, 显然 M 移动到 M' 时, A, M', E' 三点共线, 此时 $|ME|+|MA|$ 的值最小, $AM \parallel Ox$. 把 $y=-2$ 代入 $y^2=8x$, 得 $x=\frac{1}{2}$,

所以当 $|MA|+|MF|$ 取最小值时, 点 M 的坐标为 $(\frac{1}{2}, -2)$.

3. (多选) 已知 O 为坐标原点, $M(1, 2)$, P 是抛物线 $C: y^2=2px (p>0)$ 上的一点, F 为其焦点, 若 F 与双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的右焦点重合, 则下列说法正确的有 ()

- A. 若 $|PF|=6$, 则点 P 的横坐标为 6
B. 该抛物线的准线被双曲线所截得的线段的长度为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$
C. 若 $\triangle POF$ 的外接圆与抛物线 C 的准线相切, 则该圆面积为 9π
D. $\triangle PMF$ 周长的最小值为 $3+\sqrt{5}$

CD 解析: 由双曲线方程知 $F(2, 0)$, 所以抛物线 $C: y^2=8x$.

对于 A, 设 $P(x_0, y_0)$, 则 $|PF|=x_0+2=6$, 解得 $x_0=4$, A 错误;

对于 B, 抛物线准线方程为 $x=-2$, 由

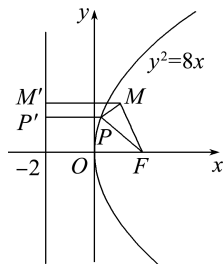
$$\begin{cases} \frac{x^2}{3}-y^2=1, \\ x=-2 \end{cases} \text{ 得 } y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3},$$

所以抛物线的准线被双曲线截得的线段长度为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, B 错误;

对于 C, 因为 $\triangle POF$ 外接圆圆心在线段 OF 的中垂线上, 则其横坐标为 1,

又该圆与抛物线准线相切, 所以该圆的半径 $r=1+2=3$, 所以该圆的面积 $S=\pi r^2=9\pi$, C 正确;

对于 D, 设 P 和 M 在准线上的射影分别为 P', M' ,



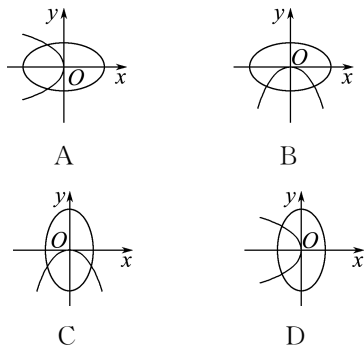
由抛物线定义知 $|PF|=|PP'|$,

则 $|PF|+|PM|=|PP'|+|PM|\geq|MM'|$ (当且仅当 M, P, P' 三点共线时取等号, 此时 P', M' 重合),

又 $|MM'|=1+2=3$, $|MF|=\sqrt{(1-2)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$,

所以 $\triangle PMF$ 周长的最小值为 $3+\sqrt{5}$, D 正确.

4. 在同一平面直角坐标系中, 方程 $a^2x^2+b^2y^2=1$ 与 $ax+by^2=0 (a>b>0)$ 表示的曲线可能是 ()



D 解析: 方程 $a^2x^2+b^2y^2=1$ 与 $ax+by^2=0$ 可化为 $\frac{x^2}{\frac{1}{a^2}}+\frac{y^2}{\frac{1}{b^2}}=1$ 与 $y^2=-\frac{a}{b}x$.

因为 $a>b>0$, 所以 $\frac{1}{a^2}<\frac{1}{b^2}$, $-\frac{a}{b}<0$. 所以椭圆的焦点在 y 轴上, 抛物线的焦点在 x 轴负半轴上.

5. 抛物线 $y^2 = 2x$ 上的两点 A, B 到焦点的距离之和是 5, 则线段 AB 的中点到 y 轴的距离是 _____.

2 解析: 设抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点为 $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, 准线方程为 $x = -\frac{1}{2}$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $|AF| + |BF| = x_1 + \frac{1}{2} + x_2 + \frac{1}{2} = 5$, 解得 $x_1 + x_2 = 4$, 所以线段 AB 的中点的横坐标为 2. 故线段 AB 的中点到 y 轴的距离是 2.

6. O 为坐标原点, F 为抛物线 $C: y^2 = 4\sqrt{2}x$ 的焦点, P 为 C 上一点, 若 $|PF| = 4\sqrt{2}$, 则 $\triangle POF$ 的面积为 _____.

2 $\sqrt{3}$ 解析: 抛物线 C 的准线方程为 $x = -\sqrt{2}$, 焦点 $F(\sqrt{2}, 0)$, 由 $|PF| = 4\sqrt{2}$ 及抛物线的定义知, $x_P = 3\sqrt{2}$, 从而 $y_P = \pm 2\sqrt{6}$, 所以 $S_{\triangle POF} = \frac{1}{2} |OF| \cdot |y_P| = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 2\sqrt{3}$.

7. 分别求满足下列条件的抛物线的标准方程.

- (1) 准线方程为 $2y + 4 = 0$;
- (2) 过点 $(3, -4)$;

(3) 焦点在直线 $x + 3y + 15 = 0$ 上.

解: (1) 准线方程为 $2y + 4 = 0$, 即 $y = -2$, 则抛物线的焦点坐标为 $(0, 2)$,

所以所求抛物线的标准方程为 $x^2 = 8y$.

(2) 设所求抛物线的标准方程为 $y^2 = mx (m \neq 0)$ 或 $x^2 = ny (n \neq 0)$,

则 $(-4)^2 = 3m$, 解得 $m = \frac{16}{3}$, 或 $3^2 = -4n$, 解得 $n = -\frac{9}{4}$,

所以所求抛物线的标准方程为 $y^2 = \frac{16}{3}x$ 或 $x^2 = -\frac{9}{4}y$.

(3) 直线 $x + 3y + 15 = 0$ 交 y 轴于点 $(0, -5)$, 则以 $(0, -5)$ 为焦点的抛物线的标准方程为 $x^2 = -20y$;

直线 $x + 3y + 15 = 0$ 交 x 轴于点 $(-15, 0)$, 则以 $(-15, 0)$ 为焦点的抛物线的标准方程为 $y^2 = -60x$.

所以所求抛物线的标准方程为 $x^2 = -20y$ 或 $y^2 = -60x$.

3.3.2 抛物线的简单几何性质

第 1 课时 抛物线的简单几何性质

学习任务目标

1. 掌握抛物线的几何性质.
2. 会判断直线与抛物线的位置关系.
3. 能利用方程及数形结合思想解决与抛物线的弦有关的问题.

问题式预习

【知识清单】

知识点一 抛物线的几何性质

类型	$y^2 = 2px$ ($p > 0$)	$y^2 = -2px$ ($p > 0$)	$x^2 = 2py$ ($p > 0$)	$x^2 = -2py$ ($p > 0$)
图象				

续表

性质	焦点	$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$	$F\left(0, \frac{p}{2}\right)$	$F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$
	准线	$x = -\frac{p}{2}$	$x = \frac{p}{2}$	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
	范围	$x \geq 0,$ $y \in \mathbf{R}$	$x \leq 0,$ $y \in \mathbf{R}$	$x \in \mathbf{R},$ $y \geq 0$	$x \in \mathbf{R},$ $y \leq 0$
	对称轴	<u>x 轴</u>		<u>y 轴</u>	
	顶点	<u>$O(0, 0)$</u>			
	离心率	<u>$e = 1$</u>			
	开口方向	<u>向右</u>	<u>向左</u>	<u>向上</u>	<u>向下</u>

知识点二 直线与抛物线的位置关系

直线 $y=kx+b$ ($k, b \in \mathbf{R}$) 与抛物线 $y^2=2px$ ($p>0$) 的位置关系及判定方法如下表:

位置关系	公共点情况	判定方法
相交	有一个或两个公共点	$k=0$ 或 $\begin{cases} k \neq 0, \\ \Delta > 0 \end{cases}$
相切	有且只有一个公共点	$\Delta=0$
相离	无公共点	$\Delta<0$

其中, Δ 为联立直线与抛物线的方程, 消去 y 后得到的关于 x 的一元二次方程的根的判别式.

【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打“√”, 错误的打“×”).

- (1) 抛物线 $x^2=2py$ ($p>0$) 有一条对称轴为 y 轴. (√)
- (2) 抛物线只有一个焦点, 一条对称轴, 无对称中心. (√)
- (3) 抛物线的标准方程虽然各不相同, 但是其离心率都相同. (√)
- (4) 抛物线方程 $x^2=4y$ 与 $y^2=4x$ 中, x, y 的范围是不同的, 但是两条抛物线的焦点到准线的距离是相同的, 离心率也相同. (√)

2. 直线 $y=kx+2$ 与抛物线 $y^2=8x$ 有且只有一个公共点, 则 $k=$ _____.

0 或 1 解析: 当 $k=0$ 时, 直线与抛物线有唯一交点.

当 $k \neq 0$ 时, 将 $y=kx+2$ 代入 $y^2=8x$, 得 $k^2x^2+4(k-2)x+4=0$.

由题意 $\Delta=16(k-2)^2-16k^2=0$, 解得 $k=1$.

综上, $k=0$ 或 $k=1$.

3. 请思考并回答下列问题:

(1) 若一条直线与抛物线只有一个公共点, 则二者一定相切吗?

提示: 不一定. 当直线与抛物线的对称轴平行或重合时, 也只有一个公共点, 此时二者不相切.

(2) 掌握抛物线的性质, 重点应抓住“两点”“两线”“一率”“一方向”, 它们分别指的是什么?

提示: “两点”是指抛物线的焦点和顶点; “两线”是指抛物线的准线 and 对称轴; “一率”是指离心率; “一方向”是指抛物线的开口方向.

(3) 抛物线的性质与椭圆和双曲线的性质的主要区别有哪些?

提示: 抛物线的离心率等于 1, 它只有一个焦点、一个顶点、一条对称轴和一条准线, 它没有中心, 通常称抛物线为无心圆锥曲线, 而称椭圆和双曲线为有心圆锥曲线.

任务型课堂

任务 1 抛物线几何性质的应用

1. 设 F 为抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点, 曲线 $y=\frac{k}{x}$ ($k>0$)

与 C 交于点 P , $PF \perp x$ 轴, 则 $k=$ _____ ()

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

D 解析: 因为抛物线方程是 $y^2=4x$, 所以 $F(1, 0)$, 又因为 $PF \perp x$ 轴, 所以 $P(1, 2)$.

把点 P 的坐标代入曲线方程 $y=\frac{k}{x}$ ($k>0$), 即 $\frac{k}{1}=2$, 所以 $k=2$.

2. 已知点 $P(x, y)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上, 则 $z=x^2+\frac{1}{2}y^2+4$ 的最小值为_____.

4 解析: $z=x^2+\frac{1}{2}y^2+4=x^2+2x+4=(x+1)^2+3$. 因为 $y^2=4x \geq 0$, 所以 $x \in [0, +\infty)$, 所以当 $x=0$ 时, $z_{\min}=4$.

3. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0, b>0$) 的两条渐近线与抛物线 $y^2=2px$ ($p>0$) 的准线分别交于 A, B 两点, O 为坐标原点. 若双曲线的离心率为 2, $\triangle AOB$

的面积为 $\sqrt{3}$, 求抛物线的标准方程.

解: 由已知得 $\frac{c}{a}=2$, 所以 $\frac{a^2+b^2}{a^2}=4$, 解得 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$,

即双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$.

而抛物线的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$,

不妨设 $A(-\frac{p}{2}, -\frac{\sqrt{3}p}{2})$, $B(-\frac{p}{2}, \frac{\sqrt{3}p}{2})$,

从而 $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}p \cdot \frac{p}{2} = \sqrt{3}$, 可得 $p=2$, 所以抛物线的标准方程为 $y^2=4x$.

【探究总结】

抛物线的几何性质在解决与抛物线有关的问题时具有广泛的应用. 在解题时, 应先注意开口方向、焦点位置, 确定标准方程形式, 然后利用条件求解. 要注意运用数形结合思想, 根据抛物线的定义, 将抛物线上的点到焦点的距离与到准线的距离相互转化.

任务 2 直线与抛物线的位置关系

探究活动

例 1 已知抛物线 $C: y^2=-2x$, 过点 $P(1, 1)$ 的直线 l 的斜率为 k , 当 k 取何值时, l 与 C 有且只有一个公共点? 有两个公共点? 无公共点?

解: 设直线 $l: y-1=k(x-1)$, 将 $x=-\frac{y^2}{2}$ 代入整理得 $ky^2+2y+2k-2=0$.

① 当 $k=0$ 时, 把 $y=1$ 代入 $y^2=-2x$, 得 $x=-\frac{1}{2}$,

此时 l 与 C 只有一个公共点 $(-\frac{1}{2}, 1)$.

② 当 $k \neq 0$ 时,

$$\Delta = 4 - 4k(2k - 2) = -8k^2 + 8k + 4.$$

由 $\Delta=0$, 得 $k=\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$, 此时 l 与 C 有且只有一个公共点;

当 $\frac{1-\sqrt{3}}{2} < k < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 且 $k \neq 0$ 时, $\Delta > 0$, l 与 C 有两个公共点;

当 $k < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ 或 $k > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 时, $\Delta < 0$, 此时 l 与 C 无公共点.

综上, 当 $k=0$ 或 $k=\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ 时, l 与 C 有且只有一个公共点;

当 $\frac{1-\sqrt{3}}{2} < k < 0$ 或 $0 < k < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 时, l 与 C

有两个公共点; 当 $k < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ 或 $k > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 时, l 与 C 无公共点.

【一题多思】

思考 求抛物线 $C: y^2=12x$ 上的点到直线 $x-y+12=0$ 的最小距离.

解: 易知直线 $x-y+12=0$ 与抛物线 $C: y^2=12x$ 相离.

设直线 $y=x+m$ 与抛物线 $C: y^2=12x$ 相切, 联立 $\begin{cases} y=x+m, \\ y^2=12x, \end{cases}$ 消去 x , 得 $y^2-12y+12m=0$, 所以 $\Delta=144-48m=0$, 解得 $m=3$.

所以直线 $y=x+3$ 与 $x-y+12=0$ 的距离 $d=\frac{|12-3|}{\sqrt{2}}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

故抛物线上的点到直线 $x-y+12=0$ 的最小距离为 $\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

【探究总结】

直线与抛物线交点个数的判断方法

设直线 $l: y=kx+m (k, m \in \mathbf{R})$, 抛物线 $y^2=2px (p > 0)$.

将直线方程与抛物线方程联立, 消去 y 后得到关于 x 的方程 $k^2x^2+(2km-2p)x+m^2=0$.

(1) 若 $k \neq 0$,

当 $\Delta > 0$ 时, 直线与抛物线相交, 有两个交点;

当 $\Delta=0$ 时, 直线与抛物线相切, 有一个交点;

当 $\Delta < 0$ 时, 直线与抛物线相离, 无交点.

(2) 若 $k=0$, 直线与抛物线有一个交点, 此时直线平行于抛物线的对称轴或与对称轴重合.

应用迁移

已知抛物线 $C: y^2=mx (m > 0)$ 的焦点为 F , 以 F 和 C 的准线上的两点为顶点可以构成边长为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 的等边三角形.

(1) 求 C 的方程;

(2) 讨论过点 $(-2, 1)$ 的直线 l 与 C 的交点个数.

解: (1) 由题意得焦点 $F(\frac{m}{4}, 0)$, 准线方程为 $x=-\frac{m}{4}$. 以 F 和 C 的准线上的两点为顶点可以构成边长为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 的等边三角形,

则这个等边三角形的高为 $\sqrt{(\frac{4\sqrt{3}}{3})^2 - (\frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{3}}{3})^2} = 2$,

即焦点到准线的距离 $|\frac{m}{2}| = 2$, 解得 $m=4$ (负值舍去),

所以 C 的方程为 $y^2=4x$.

(2) 若直线 l 的斜率存在, 设 l 的方程为 $y-1=k(x+2)$.

由方程组 $\begin{cases} y-1=k(x+2), \\ y^2=4x, \end{cases}$ 可得 $ky^2-4y+4(2k+1)=0$.

① 当 $k=0$ 时, 解得 $x=\frac{1}{4}, y=1$, 此时方程只有一个实数解, l 与 C 只有一个公共点;

② 当 $k \neq 0$ 时, $\Delta = -16(2k^2+k-1)$,

由 $\Delta=0$, 解得 $k=-1$ 或 $k=\frac{1}{2}$, 此时方程有两个相等的实数解, l 与 C 只有一个公共点;

由 $\Delta > 0$, 解得 $-1 < k < 0$ 或 $0 < k < \frac{1}{2}$, 此时方程有两个不等的实数解, l 与 C 有两个公共点;

由 $\Delta < 0$, 解得 $k < -1$ 或 $k > \frac{1}{2}$, 此时方程没有实数解, l 与 C 没有公共点;

若直线 l 的斜率不存在, 则直线 l 的方程为 $x=-2$, 易知 l 与 C 没有公共点.

综上所述, 当 l 的方程为 $x=-2$ 或 l 的斜率 $k < -1$ 或 $k > \frac{1}{2}$ 时, l 与 C 的交点个数为 0; 当 l 的斜率 $k=0$

或 $k=-1$ 或 $k=\frac{1}{2}$ 时, l 与 C 的交点个数为 1; 当 l 的斜率 $k \in (-1, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$ 时, l 与 C 的交点个数为 2.

任务3 与抛物线的弦有关的问题

探究活动

例2 若直线 $y=kx-2$ 与抛物线 $y^2=8x$ 交于 A, B 两点, 且线段 AB 中点的横坐标为 2, 求此直线的方程.

解: (方法一) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

则由 $\begin{cases} y=kx-2, \\ y^2=8x, \end{cases}$ 可得 $k^2x^2-(4k+8)x+4=0$.

因为直线与抛物线相交于两点,

所以 $k \neq 0$ 且 $\Delta > 0$, 即 $k > -1$ 且 $k \neq 0$.

因为线段 AB 中点的横坐标为 2, 所以 $\frac{x_1+x_2}{2} =$

$\frac{4k+8}{2k^2} = 2$, 解得 $k=2$ 或 $k=-1$ (舍去).

故所求直线方程为 $y=2x-2$.

(方法二) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则有 $y_1^2=8x_1, y_2^2=8x_2$.

两式作差, 得 $(y_1-y_2)(y_1+y_2)=8(x_1-x_2)$.

即 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{8}{y_1+y_2}$.

因为 $x_1+x_2=4$, 所以 $y_1+y_2=kx_1-2+kx_2-2=k(x_1+x_2)-4=4k-4$.

所以 $k = \frac{8}{4k-4}$, 故 $k=2$ 或 $k=-1$.

而当 $k=-1$ 时, 直线 $y=-x-2$ 与抛物线 $y^2=8x$ 只有一个交点, 不合题意.

从而所求直线的方程为 $y=2x-2$.

【探究总结】

直线与抛物线相交问题, 可联立直线与抛物线的方程, 消元后利用一元二次方程根与系数的关系列方程求解. 若已知条件与直线斜率及弦的中点坐标有关, 则可考虑利用“点差法”求解.

应用迁移

1. 已知抛物线 C 的顶点为坐标原点, 焦点在 x 轴上,

直线 $y=x$ 与抛物线 C 交于 A, B 两点. 若 $P(2, 2)$ 为 AB 的中点, 求抛物线 C 的方程.

解: 由题意可设抛物线 C 的方程为 $y^2=2px$ ($p > 0$), $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

则 $\begin{cases} y_1^2=2px_1, \\ y_2^2=2px_2, \end{cases}$ ①

②-①并整理得 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{2p}{y_1+y_2}$.

又 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = 1, y_1+y_2=4$, 所以 $2p=4$.

因此抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.

2. 若抛物线 $y^2=4x$ 与直线 $y=x-4$ 相交于不同的两点 A, B , O 为原点, 求证: $OA \perp OB$.

证明: 因为直线 $y=x-4$ 与抛物线相交于不同的两点 A, B ,

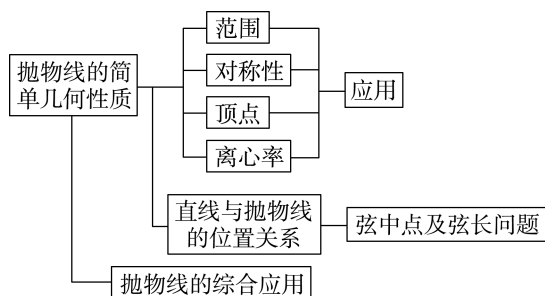
所以可设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

由 $\begin{cases} y^2=4x, \\ y=x-4, \end{cases}$ 消去 y , 得 $x^2-12x+16=0$.

则有 $\Delta > 0, x_1+x_2=12, x_1x_2=16, y_1=x_1-4, y_2=x_2-4$.

因为 $\vec{OA}=(x_1, y_1), \vec{OB}=(x_2, y_2)$, 且 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 = x_1x_2 + (x_1-4)(x_2-4) = x_1x_2 + x_1x_2 - 4(x_1+x_2) + 16 = 16 + 16 - 4 \times 12 + 16 = 0$, 所以 $\vec{OA} \perp \vec{OB}$, 即 $OA \perp OB$.

提质归纳



课后素养评价 (三十三)

抛物线的简单几何性质

A组 学习·理解

1. 直线 $y=k(x-1)+2$ 与抛物线 $x^2=4y$ 的位置关系为 ()

- A. 相交 B. 相切
C. 相离 D. 不能确定

A 解析: 直线 $y=k(x-1)+2$ 过定点 $(1, 2)$, 因为 $1^2 < 4 \times 2$,

所以 $(1, 2)$ 在抛物线 $x^2=4y$ 内部, 所以直线 $y=k(x-1)+2$ 与抛物线 $x^2=4y$ 相交. 故选 A.

2. 若抛物线 $y^2=x$ 上一点 P 到准线的距离等于它到顶点的距离, 则点 P 的坐标为 ()

- A. $\left(\frac{1}{4}, \pm\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ B. $\left(\frac{1}{8}, \pm\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$
C. $\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ D. $\left(\frac{1}{8}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

B 解析: 设点 P 的坐标为 (a^2, a) , 依题意可知抛物线的准线方程为 $x = -\frac{1}{4}$, 则 $a^2 + \frac{1}{4} =$

$\sqrt{a^4+a^2}$, 解得 $a = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$, 所以点 P 的坐标为 $(\frac{1}{8}, \pm \frac{\sqrt{2}}{4})$.

3. 设 O 为坐标原点, F 为抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, A 为抛物线上一点. 若 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AF} = -4$, 则点 A 的坐标为

- A. $(2, \pm 2\sqrt{2})$ B. $(1, \pm 2)$
C. $(1, 2)$ D. $(2, 2\sqrt{2})$

B 解析: 设 $A(x, y) (x > 0)$, 则 $y^2 = 4x$. ①

又 $\overrightarrow{OA} = (x, y)$, $\overrightarrow{AF} = (1-x, -y)$,

所以 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AF} = x - x^2 - y^2 = -4$. ②

由①②可解得 $x = 1, y = \pm 2$, 所以点 A 的坐标为 $(1, \pm 2)$.

4. 等腰直角三角形 AOB 内接于抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$, O 为抛物线的顶点, $OA \perp OB$, 则 $\triangle AOB$ 的面积是

- A. $8p^2$ B. $4p^2$
C. $2p^2$ D. p^2

B 解析: 因为抛物线的对称轴为 x 轴, 内接三角形 AOB 为等腰直角三角形, 所以由抛物线的对称性, 知直线 AB 与抛物线的对称轴垂直, 不妨设直线 OA 与 x 轴的夹角为 45° .

由方程组 $\begin{cases} y=x, \\ y^2=2px, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=0, \\ y=0 \end{cases}$ (舍) 或 $\begin{cases} x=2p, \\ y=2p, \end{cases}$ 所以 A, B 两点的坐标分别为 $(2p, 2p)$ 和 $(2p, -2p)$.

所以 $|AB| = 4p$, 所以 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 4p \times 2p = 4p^2$.

5. 抛物线 $y^2 = ax$ 上有一点 $P(3, m)$, 它到焦点的距离等于 4, 则 $a =$ _____, $m =$ _____.

4 $\pm 2\sqrt{3}$ 解析: 由题意, 得 $a > 0$ 且 $\begin{cases} 3a = m^2, \\ 3 + \frac{a}{4} = 4, \end{cases}$ 所

以 $a = 4, m = \pm 2\sqrt{3}$.

6. 在边长为 1 的等边三角形 AOB 中, O 为坐标原点, $AB \perp x$ 轴, 以 O 为顶点且过 A, B 的抛物线的方程是 _____.

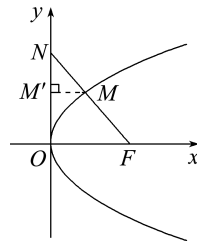
$y^2 = \pm \frac{\sqrt{3}}{6}x$ 解析: 设抛物线方程为 $y^2 = ax (a \neq$

$0)$. 不妨设 $A(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, 则有 $\frac{1}{4} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}a$, 解得 $a =$

$\pm \frac{\sqrt{3}}{6}$, 所以所求抛物线的方程为 $y^2 = \pm \frac{\sqrt{3}}{6}x$.

7. 已知 F 是抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点, M 是 C 上一点, FM 的延长线交 y 轴于点 N . 若 M 是 FN 的中点, 则 $|FN| =$ _____.

6 解析: 如图, 过点 M 作 $MM' \perp y$ 轴, 垂足为 M' , $|OF| = 2$.



因为 M 为 FN 的中点, 所以 $|MM'| = 1$, 所以 M 到准线的距离 $d = |MM'| + \frac{p}{2} = 3$, 所以 $|MF| = 3$, 所以 $|FN| = 6$.

8. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$, C 的一条切线的方程为 $x - y - 1 = 0$, 则 C 的准线方程为 _____.

$y + 1 = 0$ 解析: 由 $\begin{cases} x^2 = 2py, \\ x - y - 1 = 0, \end{cases}$ 消去 y , 得 $x^2 -$

$2px + 2p = 0$.

由题意 $\Delta = (-2p)^2 - 4 \times 2p = 0$, 解得 $p = 2$, 则抛物线的方程为 $x^2 = 4y$,

所以抛物线的准线方程为 $y = -1$, 即 $y + 1 = 0$.

B组 应用·实践

1. 抛物线 $y = -x^2$ 上的点到直线 $4x + 3y - 8 = 0$ 的距离的最小值是

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{7}{5}$
C. $\frac{8}{5}$ D. 3

A 解析: 设抛物线 $y = -x^2$ 上一点 $(m, -m^2)$, 该点到直线 $4x + 3y - 8 = 0$ 的距离 $d =$

$\frac{|4m - 3m^2 - 8|}{5} = \frac{|3(m - \frac{2}{3})^2 + \frac{20}{3}|}{5}$, 当 $m = \frac{2}{3}$ 时,

d 取得最小值为 $\frac{4}{3}$.

2. (多选) 设 $M(x_0, y_0)$ 为抛物线 $C: x^2 = 8y$ 上一点, F 为抛物线 C 的焦点, 以 F 为圆心、 $|FM|$ 为半径的圆和抛物线 C 的准线相交, 则 y_0 的值可能是

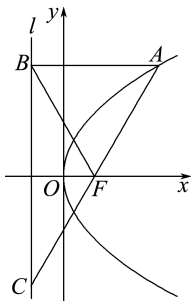
- ()
A. 0 B. 2
C. 4 D. 6

CD 解析: 由抛物线 $C: x^2 = 8y$ 知 $p = 4$, 所以焦点

为 $F(0,2)$, 准线方程为 $y=-2$.

由抛物线的定义, 得 $|FM|=y_0+2$, 因为以 F 为圆心、 $|FM|$ 为半径的圆与准线相交, 且圆心 $F(0,2)$ 到准线 $y=-2$ 的距离为 4, 所以 $4 < y_0+2$, 从而 $y_0 > 2$.

3. (数学文化)《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学著作, 第九章“勾股”讲述了勾股定理及其一些应用, 其中将直角三角形的斜边称为“弦”, 短直角边称为“勾”, 长直角边称为“股”. 设点 F 是抛物线 $y^2=2px$ ($p>0$) 的焦点, l 是该抛物线的准线, 过抛物线上一点 A 作准线 l 的垂线 AB , 垂足为 B , 射线 AF 交准线 l 于点 C . 若 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的“勾” $|AB|=3$, “股” $|BC|=3\sqrt{3}$, 则抛物线的方程为 .
- $y^2=3x$ 解析: 如图, 由题意可知, $|AB|=3$, $|BC|=3\sqrt{3}$,

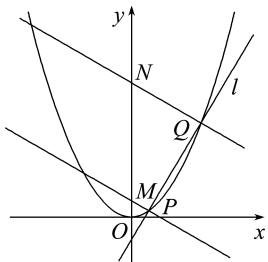


可得 $|AC|=\sqrt{3^2+(3\sqrt{3})^2}=6$, 所以 $\angle CAB=60^\circ$. 由抛物线的定义知 $|AB|=|AF|$, 所以 $\triangle ABF$ 是等边三角形, 即 $|BF|=|AB|=3$, $\angle ABF=60^\circ$, 故 $\angle CBF=30^\circ$.

所以 $\frac{p}{2}-\left(-\frac{p}{2}\right)=p=\frac{1}{2}|BF|=\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2}$, 所以抛物线的方程是 $y^2=3x$.

4. 已知直线 $l: \sqrt{3}x-y-a=0$ 与抛物线 $x^2=4y$ 交于 P, Q 两点, 过 P, Q 分别作 l 的垂线与 y 轴交于 M, N 两点. 若 $|MN|=\frac{16\sqrt{3}}{3}$, 则 $a=$.

2 解析: 根据题意作图如下.



设直线 l 的倾斜角为 θ , 则 $\theta=\frac{\pi}{3}$, 易知 $|PQ|=|MN|\sin\theta=8$,

$$\text{联立} \begin{cases} x^2=4y, \\ y=\sqrt{3}x-a, \end{cases} \text{得 } x^2-4\sqrt{3}x+4a=0, \Delta>0.$$

$$\text{设 } P, Q \text{ 的横坐标分别为 } x_1, x_2, \text{ 则 } \begin{cases} x_1+x_2=4\sqrt{3}, \\ x_1x_2=4a. \end{cases}$$

$$\text{由弦长公式得 } |PQ|=\sqrt{1+3}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2\sqrt{48-16a}=8,$$

得 $a=2$, 且 $\Delta=(4\sqrt{3})^2-4\times 8=16>0$, 符合题意.

5. 若过点 $P(0,-1)$ 的直线 l 与抛物线 $y^2=2x$ 恰有一个公共点, 则直线 l 的方程为 .

$x=0$ 或 $y=-1$ 或 $x+2y+2=0$ 解析: 当直线 l 的斜率不存在或为 0 时, 显然满足题意, 此时直线 l 的方程为 $x=0$ 或 $y=-1$.

当直线 l 的斜率存在且不为 0 时, 设直线 l 的方程为 $y=kx-1$.

$$\text{由} \begin{cases} y=kx-1, \\ y^2=2x, \end{cases} \text{消去 } y \text{ 整理得 } k^2x^2-(2k+2)x+1=0.$$

由 $\Delta=(2k+2)^2-4k^2=0$, 得 $8k+4=0$, 即 $k=-\frac{1}{2}$, 此时直线 l 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x-1$, 即 $x+2y+2=0$.

综上, 直线 l 的方程为 $x=0$ 或 $y=-1$ 或 $x+2y+2=0$.

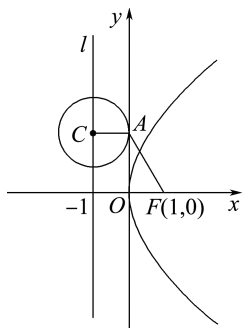
6. 抛物线 $x^2=2py$ ($p>0$) 的焦点为 F , 其准线与双曲线 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$ 相交于 A, B 两点. 若 $\triangle ABF$ 为等边三角形, 则 $p=$.

6 解析: 因为抛物线 $x^2=2py$ 的准线 $y=-\frac{p}{2}$ 和双曲线 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$ 相交, 交点的横坐标为 $x=\pm\sqrt{3+\frac{p^2}{4}}$, 所以由等边三角形的性质及抛物线的定义, 得 $2\sqrt{3+\frac{p^2}{4}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=p$, 解得 $p=6$ 或 $p=-6$ (舍).

7. 设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F , 准线为 l . 已知点 C 在 l 上, 以 C 为圆心的圆与 y 轴的正半轴相切于点 A . 若 $\angle FAC=120^\circ$, 则圆的方程为 .

$(x+1)^2+(y-\sqrt{3})^2=1$ 解析: 由 $y^2=4x$ 可得点 F 的坐标为 $(1,0)$, 准线 l 的方程为 $x=-1$.

由圆心 C 在 l 上, 且圆 C 与 y 轴正半轴相切(如图),



可得点 C 的横坐标为 -1 , 圆的半径为 1 , $\angle CAO = 90^\circ$. 又因为 $\angle FAC = 120^\circ$, 所以 $\angle OAF = 30^\circ$, 所以 $|OA| = \sqrt{3}$, 所以点 C 的纵坐标为 $\sqrt{3}$.

所以圆的方程为 $(x+1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 1$.

8. 设 A, B 为曲线 $C: y^2 = 4x$ 上两点, A 与 B 的横坐标之和为 4 .

(1) 若 A 与 B 的纵坐标之和为 4 , 求直线 AB 的方程.

(2) 证明: 线段 AB 的垂直平分线过定点.

(1) 解: 由题意可得直线 AB 的斜率不为 0 , 设直线

AB 方程为 $x = my + t, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y^2 = 4x, \\ my = x - t, \end{cases} \text{化为 } y^2 - 4my - 4t = 0,$$

$$\Delta = 16m^2 + 16t > 0,$$

$$\text{所以 } y_1 + y_2 = 4m = 4, y_1 y_2 = -4t,$$

$$\text{解得 } m = 1.$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = my_1 + t + my_2 + t = 1 \times 4 + 2t = 4,$$

$$\text{解得 } t = 0.$$

所以直线 AB 的方程为 $y = x$, 即 $x - y = 0$.

(2) 证明: 设直线 AB 的方程为 $x = my + t$, 线段 AB 的中点为 $M(x_0, y_0)$,

$$x_0 = \frac{4}{2} = 2, y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = 2m,$$

则线段 AB 的垂直平分线的方程为 $y - 2m = -m(x - 2)$,

$$\text{化为 } y = -mx + 4m = -m(x - 4),$$

可得线段 AB 的垂直平分线经过定点 $(4, 0)$.

第2课时 抛物线几何性质的应用

学习任务目标

1. 能利用抛物线的性质解决与抛物线有关的问题.
2. 能利用方程与数形结合思想解决焦点弦问题.
3. 能解决直线与圆锥曲线的综合应用问题.

问题式预习

【知识清单】

知识点 抛物线的焦点弦

设抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$, AB 为过焦点的一条弦, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, AB 的中点为 $M(x_0, y_0)$, 则有以下结论:

(1) 以 AB 为直径的圆与准线相切;

(2) $|AB| = 2\left(x_0 + \frac{p}{2}\right)$ (焦点弦长与中点坐标的关系);

(3) $|AB| = x_1 + x_2 + p$;

(4) A, B 两点的横坐标之积、纵坐标之积为定值, 即

$$x_1 x_2 = \frac{p^2}{4}, y_1 y_2 = -p^2.$$

【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打“√”, 错误的打“×”).

(1) 抛物线没有渐近线. ()

√ 提示: 渐近线是圆锥曲线中双曲线的特有性质, 抛物线没有渐近线.

(2) 过抛物线的焦点且垂直于抛物线对称轴的弦的长为 p . ()

× 提示: 过抛物线的焦点且垂直于对称轴的弦长为 $2p$, 此弦长也称为通径长.

(3) 若一条直线与抛物线只有一个公共点, 则二者一定相切. ()

× 提示: 当直线与抛物线的对称轴平行或重合时, 也只有一个公共点, 此时不相切.

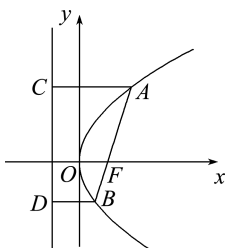
(4) 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的图象上的点的横坐标的取值范围是 $[0, +\infty)$. ()

√ 提示: 因为 $p > 0, y^2 \geq 0$, 所以 $x \geq 0$.

2. 已知过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点, 则称 AB 为抛物线的焦点弦. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由抛物线的定义知, $|AF| = \underline{\hspace{2cm}}, |BF| = \underline{\hspace{2cm}}$, 故 $|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$.

$x_1 + \frac{p}{2} \quad x_2 + \frac{p}{2} \quad x_1 + x_2 + p$ 解析: 如图, 过点

A, B 作准线的垂线, 垂足分别为 C, D .



由抛物线的定义可知, $|AF| = |AC| = x_1 + \frac{p}{2}$,

$$|BF| = |BD| = x_2 + \frac{p}{2},$$

$$\text{所以 } |AB| = |AF| + |BF| = x_1 + x_2 + p.$$

3. 过抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点, 若弦 AB 中点的纵坐标为 2, 则 $|AB| =$ _____.

6 解析: 由 $y = \frac{1}{4}x^2$, 得 $x^2 = 4y$, 所以焦点为 $F(0, 1)$, 准线为 $l: y = -1$.

设弦 AB 中点的纵坐标为 $y_0 = 2$,

$$\text{故 } |AB| = y_A + y_B + 2 = 2y_0 + 2 = 6.$$

任务型课堂

任务1 抛物线几何性质的应用

探究活动

例1 已知直线 l 过原点, 抛物线 C 的顶点在原点, 焦点在 x 轴的正半轴上, 且点 $A(-1, 0)$ 和点 $B(0, 8)$ 关于直线 l 的对称点都在 C 上, 求直线 l 和抛物线 C 的方程.

解: 设抛物线 C 的方程为 $y^2 = 2px$ ($p > 0$), 直线 l 的方程为 $y = kx$ ($k \neq 0$).

(方法一) 设点 $A(-1, 0), B(0, 8)$ 关于直线 l 的对称点分别为 $A'(x_1, y_1), B'(x_2, y_2)$.

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{y_1}{2} = k \cdot \frac{x_1 - 1}{2}, \\ \frac{y_1}{x_1 + 1} \cdot k = -1, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x_1 = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}, \\ y_1 = \frac{-2k}{k^2 + 1}; \end{cases}$$

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{y_2 + 8}{2} = k \cdot \frac{x_2}{2}, \\ \frac{y_2 - 8}{x_2} \cdot k = -1, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x_2 = \frac{16k}{k^2 + 1}, \\ y_2 = \frac{8(k^2 - 1)}{k^2 + 1}. \end{cases}$$

因为 A', B' 在抛物线 C 上,

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{4k^2}{(k^2 + 1)^2} = 2p \cdot \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}, \\ \frac{64(k^2 - 1)^2}{(k^2 + 1)^2} = 2p \cdot \frac{16k}{k^2 + 1}, \end{cases}$$

两式相除, 消去 p , 整理得 $k^2 - k - 1 = 0$, 故 $k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

$$\text{由 } x_2 = \frac{16k}{k^2 + 1} > 0, \text{ 得 } k > 0, \text{ 从而 } k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{把 } k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ 代入 } \frac{64(k^2 - 1)^2}{(k^2 + 1)^2} = 2p \cdot \frac{16k}{k^2 + 1}, \text{ 得 } p = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

所以直线 l 的方程为 $y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x$, 抛物线 C 的方程

$$\text{为 } y^2 = \frac{4\sqrt{5}}{5}x.$$

(方法二) 设点 A, B 关于 l 的对称点分别为 $A'(x_1, y_1), B'(x_2, y_2)$, $\overrightarrow{OB'}$ 与 x 轴正方向的夹角为 α .

依题意, 有 $|OA'| = |OA| = 1, |OB'| = |OB| = 8$,

$$\text{故 } x_2 = 8\cos\alpha, y_2 = 8\sin\alpha.$$

由 $\angle BOA = 90^\circ$, 知 $\angle B'OA' = 90^\circ$,

$$\text{所以 } x_1 = \cos(\alpha - 90^\circ) = \sin\alpha, y_1 = \sin(\alpha - 90^\circ) = -\cos\alpha.$$

$$\text{所以 } A'(\sin\alpha, -\cos\alpha), B'(8\cos\alpha, 8\sin\alpha).$$

将 A', B' 的坐标代入抛物线方程,

$$\text{得 } \begin{cases} \cos^2\alpha = 2p\sin\alpha, \\ 64\sin^2\alpha = 16p\cos\alpha, \end{cases}$$

$$\text{所以 } 8\sin^3\alpha = \cos^3\alpha, \text{ 即 } \tan\alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\text{从而 } \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{ 所以 } p = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{ 得抛物}$$

$$\text{线 } C \text{ 的方程为 } y^2 = \frac{4\sqrt{5}}{5}x.$$

$$\text{又直线 } l \text{ 平分 } \angle B'OB, \text{ 得 } l \text{ 的倾斜角为 } \alpha + \frac{90^\circ - \alpha}{2} =$$

$$\frac{\alpha}{2} + 45^\circ.$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } k &= \tan\left(\frac{\alpha}{2} + 45^\circ\right) = \frac{\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} + 1}{1 - \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}} \\ &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{所以直线 } l \text{ 的方程为 } y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x.$$

【探究总结】

对称问题,利用基本方法,虽然思路明确,但是运算量大,若不仔细,难以求得正确结果;利用对称图形的性质,技巧性较强,一时难以想到求解方法,但可简化运算,避免出错.

88 应用迁移

1. 已知抛物线 $C: y^2 = -2px (p > 0)$ 的焦点为 F , $M(-1, y_0)$ 是抛物线上一点,过点 M 向抛物线 C 的准线作垂线,垂足为 D . 若 $\triangle MDF$ 为等边三角形,则 p 的值为 ()

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. 1 D. 2

A 解析: 抛物线 $C: y^2 = -2px (p > 0)$, 焦点为 $F(-\frac{p}{2}, 0)$, 准线为 $l: x = \frac{p}{2}$,

$M(-1, y_0)$ 是抛物线上一点, 则 $y_0^2 = 2p$, 根据抛物线的对称性, 不妨令 $y_0 = \sqrt{2p}$,

则 $D(\frac{p}{2}, \sqrt{2p})$.

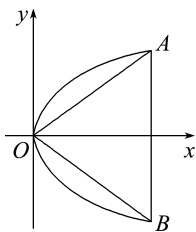
由于 $\triangle MDF$ 为等边三角形, 则有 $|MF| = |MD| = |FD|$,

即有 $1 + \frac{p}{2} = \sqrt{2p + p^2}$, 可得 $p = \frac{2}{3}$ (负值舍去).

故选 A.

2. 正三角形的一个顶点位于坐标原点, 另外两个顶点在抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上, 求这个正三角形的边长.

解: 如图, 设正三角形 OAB 的顶点 A, B 在抛物线上, 且坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 则 $y_1^2 = 2px_1$, $y_2^2 = 2px_2$.



又 $|OA| = |OB|$, 所以 $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$, 即 $x_1^2 - x_2^2 + 2px_1 - 2px_2 = 0$, $(x_1^2 - x_2^2) + 2p(x_1 - x_2) = 0$,

$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2p) = 0$.

因为 $x_1 > 0, x_2 > 0, 2p > 0$, 所以 $x_1 = x_2$.

由此可得 $|y_1| = |y_2|$, 即线段 AB 关于 x 轴对称.

因为 AB 垂直于 x 轴且 $\angle AOx = 30^\circ$,

所以 $\frac{y_1}{x_1} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

因为 $x_1 = \frac{y_1^2}{2p}$, 所以 $y_1 = 2\sqrt{3}p$.

所以 $|AB| = 2y_1 = 4\sqrt{3}p$.

任务2 抛物线的焦半径和焦点弦

探究活动

- 例2** (1) 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 的直线 l 与抛物线交于 A, B 两点, 若 $|AF| = 2|BF|$, 则 $|AB|$ 等于 ()

A. 4 B. $\frac{9}{2}$ C. 5 D. 6

(2) 设 F 为抛物线 $C: y^2 = 3x$ 的焦点, 过点 F 且倾斜角为 30° 的直线交 C 于 A, B 两点, 则 $|AB| =$ _____.

(1) B 解析: (方法一) 易知直线 l 的斜率存在, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 l 的方程为 $y = k(x - 1)$, 将其代入抛物线方程得 $k^2x^2 - (2k^2 + 4)x + k^2 = 0$, $\Delta = (2k^2 + 4)^2 - 4k^4 > 0$, 则 $x_1x_2 = 1$.

又由 $|AF| = 2|BF|$, 可知 $x_1 + 1 = 2(x_2 + 1)$,

解得 $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$,

所以 $|AB| = x_1 + x_2 + p = \frac{9}{2}$.

(方法二) 由 $|AF| = 2|BF|$, 可知 $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} =$

$\frac{3}{2|BF|} = \frac{2}{p} = 1$,

所以 $|BF| = \frac{3}{2}, |AF| = 3$,

所以 $|AB| = |AF| + |BF| = \frac{9}{2}$.

(2) 12 解析: (方法一) 由题意知抛物线焦点

$F(\frac{3}{4}, 0)$, 所以直线 $AB: y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - \frac{3}{4})$. 由

$\begin{cases} y^2 = 3x, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - \frac{3}{4}), \end{cases}$ 得 $x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{9}{16} = 0, \Delta > 0$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则由抛物线的几何性质,

得 $|AB| = x_1 + x_2 + p = \frac{21}{2} + \frac{3}{2} = 12$.

(方法二) 易知 $2p = 3$, 因为 $|AB| = \frac{2p}{\sin^2 \theta}, \theta = 30^\circ$, 所

以 $|AB| = \frac{3}{\sin^2 30^\circ} = 12$.

【探究总结】

抛物线焦点弦的相关结论

设 AB 是过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 的弦, 若 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, α 为直线 AB 的倾斜角, 则

(1) 焦半径 $|AF| = x_1 + \frac{p}{2} = \frac{p}{1 - \cos \alpha}, |BF| = x_2 +$

$\frac{p}{2} = \frac{p}{1 + \cos \alpha}$;

(2) $x_1x_2 = \frac{p^2}{4}, y_1y_2 = -p^2$;

$$(3) \text{弦长 } |AB| = x_1 + x_2 + p = \frac{2p}{\sin^2 \alpha};$$

$$(4) \frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{2}{p};$$

(5) 以弦 AB 为直径的圆与抛物线的准线相切;

$$(6) S_{\triangle OAB} = \frac{p^2}{2\sin \alpha} \quad (O \text{ 为抛物线的顶点}).$$

88 应用迁移

1. (2023 · 新高考全国 II 卷) (多选) 设 O 为坐标原点, 直线 $y = -\sqrt{3}(x-1)$ 过抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, 且与 C 交于 M, N 两点, l 为 C 的准线, 则 ()

A. $p=2$

B. $|MN| = \frac{8}{3}$

C. 以 MN 为直径的圆与 l 相切

D. $\triangle OMN$ 为等腰三角形

AC 解析: 易知直线 $y = -\sqrt{3}(x-1)$ 与 x 轴的交点为 $(1, 0)$, 又直线 $y = -\sqrt{3}(x-1)$ 过抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, 可得 $\frac{p}{2} = 1$, 所以 $p = 2$, 故 A 正确;

抛物线方程为 $y^2 = 4x$,

将直线方程代入抛物线方程可得 $3x^2 - 10x + 3 = 0$,

$$\Delta = 10^2 - 4 \times 3 \times 3 = 64 > 0, \text{ 则 } x_M + x_N = \frac{10}{3},$$

所以 $|MN| = x_M + x_N + p = \frac{16}{3}$, 故 B 错误;

因为 M, N 的中点的横坐标为 $\frac{5}{3}$, 该点到抛物线的

准线的距离为 $1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3}$,

所以以 MN 为直径的圆与 l 相切, 故 C 正确;

由 $3x^2 - 10x + 3 = 0$,

解得 $x = 3$ 或 $x = \frac{1}{3}$, 不妨取 $M(3, -2\sqrt{3})$,

$$N\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right),$$

$$\text{则 } |OM| = \sqrt{9+12} = \sqrt{21}, |ON| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{12}{9}} =$$

$$\frac{\sqrt{13}}{3}, |MN| = \frac{16}{3},$$

所以 $\triangle OMN$ 不是等腰三角形, 故 D 不正确.

2. 设 O 是坐标原点, F 是抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, A 是抛物线上的一点, $\overrightarrow{FA}$ 与 x 轴正方向的夹角为 60° , 求 $|\overrightarrow{OA}|$ 的值.

解: 由题意设 $A\left(x + \frac{p}{2}, \sqrt{3}x\right)$,

代入 $y^2 = 2px$, 得 $(\sqrt{3}x)^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right)$

解得 $x = p$ (负值舍去).

所以 $A\left(\frac{3}{2}p, \sqrt{3}p\right)$,

$$\text{所以 } |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}p\right)^2 + 3p^2} = \frac{\sqrt{21}}{2}p.$$

任务3 直线与抛物线的综合问题

探究活动

例3 已知抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 经过点 $P(1, 2)$.

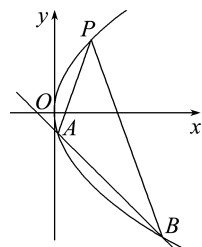
(1) 求抛物线 E 的方程.

(2) 设直线 $y = kx + m$ 与 E 的交点为 A, B , 且直线 PA 与 PB 的倾斜角互补, 求 k 的值.

解: (1) 由题意可得, $4 = 2p$, 所以 $p = 2$,

所以抛物线 E 的方程为 $y^2 = 4x$.

(2) 如图,



设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 将直线 AB 的方程代入 $y^2 = 4x$, 得 $k^2x^2 + (2km - 4)x + m^2 = 0$, $\Delta = (2km - 4)^2 - 4k^2m^2 > 0$,

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{4 - 2km}{k^2}, x_1x_2 = \frac{m^2}{k^2}.$$

因为直线 PA 与 PB 的倾斜角互补,

$$\text{所以 } k_{PA} + k_{PB} = \frac{y_1 - 2}{x_1 - 1} + \frac{y_2 - 2}{x_2 - 1} = \frac{kx_1 + m - 2}{x_1 - 1} +$$

$$\frac{kx_2 + m - 2}{x_2 - 1} = 0,$$

$$\text{即 } 2k + (k + m - 2)\left(\frac{1}{x_2 - 1} + \frac{1}{x_1 - 1}\right) = 2k + (k + m - 2)\frac{x_1 + x_2 - 2}{(x_2 - 1)(x_1 - 1)} = 0,$$

$$\text{所以 } 2k + (k + m - 2)\frac{4 - 2km - 2k^2}{(k + m - 2)(k + m + 2)} = 0,$$

$$\text{即 } 2k + \frac{4 - 2km - 2k^2}{k + m + 2} = 0, \text{ 所以 } k = -1.$$

【探究总结】

解决直线与圆锥曲线的综合问题的方法

(1) 求参数的最值、范围的方法:

① 利用一元二次方程根的判别式构造不等关系, 从而确定参数的取值范围;

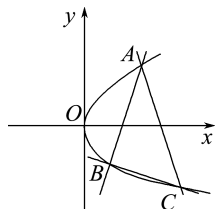
- ②利用已知参数的范围,求新参数的范围,关键是在两个参数之间建立等量关系;
 ③利用隐含或已知的不等关系建立不等式,从而求出参数的取值范围;
 ④利用基本不等式求出参数的取值范围;
 ⑤利用函数的值域,确定参数的取值范围.

(2)圆锥曲线中定点问题的两种解决方法:

- ①引入参数法:引入动点的坐标或动直线方程中的系数为参数表示变化量,再研究变化量与参数在何时没有关系,从而找到定点;
 ②特殊到一般法:根据动点或动直线的特殊情况探索出定点,再证明该定点与变量无关.

应用迁移

如图,过抛物线 $y^2=x$ 上一点 $A(4,2)$ 作倾斜角互补的两条直线 AB,AC ,交抛物线于 B,C 两点,求证:直线 BC 的斜率是定值.



证明: 设 $k_{AB}=k(k \neq 0)$,
 因为直线 AB,AC 的倾斜角互补,
 所以 $k_{AC}=-k$.
 则直线 AB 的方程是 $y=k(x-4)+2$.

由方程组 $\begin{cases} y=k(x-4)+2, \\ y^2=x, \end{cases}$ 消去 y 后,整理得
 $k^2x^2+(-8k^2+4k-1)x+16k^2-16k+4=0, \Delta =$
 $(-8k^2+4k-1)^2-4k^2(16k^2-16k+4)>0$.

$$\text{所以 } 4 \cdot x_B = \frac{16k^2-16k+4}{k^2},$$

$$\text{即 } x_B = \frac{4k^2-4k+1}{k^2}.$$

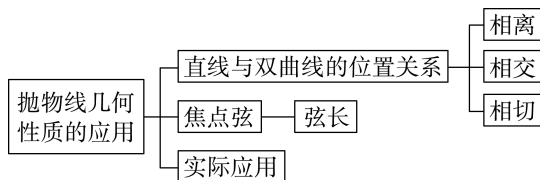
$$\text{以 } -k \text{ 代换上式中的 } k, \text{ 得 } x_C = \frac{4k^2+4k+1}{k^2},$$

$$\text{所以 } k_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{k(x_B-4)+2 - [-k(x_C-4)+2]}{x_B - x_C}$$

$$= \frac{k(x_B+x_C-8)}{x_B - x_C} = \frac{k\left(\frac{8k^2+2}{k^2}-8\right)}{\frac{-8k}{k^2}} = -\frac{1}{4}.$$

所以直线 BC 的斜率为定值.

提质归纳



课后素养评价 (三十四)

抛物线几何性质的应用

A组 学习·理解

1. 抛物线 $C: x^2=2py (p>0)$ 的焦点为 F , 过 F 且倾斜角为 60° 的直线 l 交 C 于 A, B 两点. 若 $|AB|=16$, 则 $p=$ ()

A.2 B.4 C.6 D.12

A 解析: 抛物线 $C: x^2=2py$ 的焦点为 $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$,

直线 $l: y - \frac{p}{2} = \sqrt{3}x$, 可得 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(y - \frac{p}{2}\right)$,

代入抛物线方程, 得 $y^2 - 7py + \frac{1}{4}p^2 = 0, \Delta > 0$, 则
 $y_1 + y_2 = 7p, |AB| = y_1 + y_2 + p = 7p + p = 16$, 解得 $p=2$.

2. 设抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F , 过点 $(-2,0)$ 且斜率为 $\frac{2}{3}$ 的直线与 C 交于 M, N 两点, 则 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} =$ ()

A.5 B.6 C.7 D.8

- D **解析:** 由题意知直线 MN 的方程为 $y = \frac{2}{3}(x+2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = \frac{2}{3}(x+2), \\ y^2 = 4x, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=1, \\ y=2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=4, \\ y=4. \end{cases}$$

不妨设 $M(1,2), N(4,4)$.

又因为抛物线焦点为 $F(1,0)$, 所以 $\overrightarrow{FM} = (0,2)$,
 $\overrightarrow{FN} = (3,4)$, 所以 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} = 0 \times 3 + 2 \times 4 = 8$.

3. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 作斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线, 交抛物线于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{FB} (\lambda > 1)$, 则 $\lambda =$ ()

A.3 B.4
 C.5 D.6

A 解析: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 易得直线 AB 的方程为 $y = \sqrt{3}(x-1)$. 联立 $\begin{cases} y = \sqrt{3}(x-1), \\ y^2 = 4x, \end{cases}$ 可得

$$3x^2 - 10x + 3 = 0, \text{ 解得 } x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{3} (x_1 > x_2).$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } |FA| &= x_1 + 1, |FB| = x_2 + 1, \text{ 所以 } \lambda = \frac{|FA|}{|FB|} \\ &= \frac{x_1 + 1}{x_2 + 1} = \frac{4}{\frac{4}{3}} = 3. \end{aligned}$$

4. 设抛物线 $x^2 = 12y$ 的焦点为 F , 经过点 $P(2, 1)$ 的直线 l 与抛物线相交于 A, B 两点, 又知点 P 恰为 AB 的中点, 则 $|AF| + |BF| =$ _____.

8 解析: 分别过点 A, B, P 作准线的垂线, 垂足分别为 M, N, Q (图略),

根据抛物线上的点到焦点的距离等于该点到准线的距离,

$$\text{得 } |AF| + |BF| = |AM| + |BN| = 2|PQ| = 2 \times (1 + 3) = 8.$$

5. 已知抛物线 $y^2 = 4x$, 过点 $P(4, 0)$ 的直线与抛物线相交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点, 则 $y_1^2 + y_2^2$ 的最小值是 _____.

32 解析: 设直线 AB 的方程为 $x = my + 4$, 代入 $y^2 = 4x$, 得 $y^2 - 4my - 16 = 0, \Delta = 16m^2 + 64 > 0$, 则 $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -16$, 所以 $y_1^2 + y_2^2 = (y_1 + y_2)^2 - 2y_1 y_2 = 16m^2 + 32$, 当 $m = 0$ 时, $y_1^2 + y_2^2$ 取得最小值为 32.

6. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 和点 $M(6, 0), O$ 为坐标原点, 直线 l 过点 M , 且与抛物线交于 A, B 两点.

(1) 求 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 的值;

(2) 若 $\triangle OAB$ 的面积等于 $12\sqrt{10}$, 求直线 l 的方程.

解: (1) 设直线 l 的方程为 $x = my + 6, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x = my + 6, \\ y^2 = 4x, \end{cases} \text{ 得 } y^2 - 4my - 24 = 0,$$

显然 $\Delta > 0, y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -24, x_1 x_2 = 36$,

$$\text{可得 } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 12.$$

$$(2) \text{ 因为 } S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |OM| \cdot |y_1 - y_2| =$$

$$3\sqrt{16m^2 + 96} = 12\sqrt{m^2 + 6} = 12\sqrt{10},$$

所以 $m^2 = 4, m = \pm 2$.

故直线 l 的方程为 $x + 2y - 6 = 0$ 或 $x - 2y - 6 = 0$.

B组 应用·实践

1. A, B 是抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上不同的两点, 点 F 是抛物线的焦点, 且 $\triangle OAB (O \text{ 为原点})$ 的重心恰为 F , 若 $|AF| = 5$, 则 $p =$ _____ ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

D 解析: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$,

$$\text{因为 } \triangle OAB \text{ 的重心为 } F, \text{ 所以 } \begin{cases} \frac{x_1 + x_2 + 0}{3} = \frac{p}{2}, \\ \frac{y_1 + y_2 + 0}{3} = 0, \end{cases} \text{ 解}$$

$$\text{得 } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3p}{2}, \\ y_1 = -y_2. \end{cases}$$

由 $y_1 = -y_2$ 可知 A, B 关于 x 轴对称, 即 $x_1 = x_2$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = 2x_1 = \frac{3p}{2}, \text{ 即 } x_1 = \frac{3p}{4}.$$

$$\text{又因为 } |AF| = x_1 + \frac{p}{2} = \frac{5p}{4} = 5, \text{ 解得 } p = 4.$$

2. 设抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过抛物线上一点 P 作其准线的垂线, 设垂足为 Q , 若 $\angle PQF = 30^\circ$, 则 $|PQ| =$ _____ ()

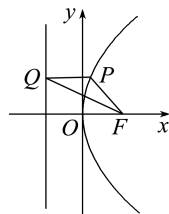
A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{4}{3}$

D. $\sqrt{3}$

C 解析: 如图所示,



由抛物线的定义, 可得 $|PF| = |PQ|$.

又 $\angle PQF = 30^\circ$, 所以可得直线 PF 的倾斜角为 120° ,

$$\text{则可得 } \frac{1}{2} |PF| + |PQ| = \frac{1}{2} |PF| + |PF| = p = 2,$$

$$\text{从而 } |PF| = \frac{2}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}, \text{ 所以 } |PQ| = \frac{4}{3}.$$

3. 已知直线 $l_1: 4x + 3y + 6 = 0$ 和直线 $l_2: x = -1$, 则抛物线 $y^2 = 4x$ 上一动点 P 到直线 l_1 和直线 l_2 的距离之和的最小值是 _____ ()

A. 2

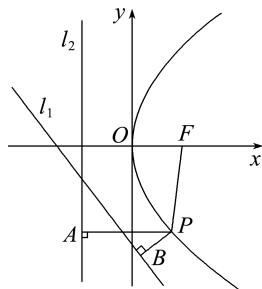
B. 3

C. $\frac{11}{5}$

D. $\frac{37}{16}$

A 解析: 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 $F(1, 0)$, 直线 $l_2: x = -1$ 为抛物线的准线.

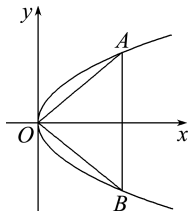
如图, $|PB| + |PA| = |PB| + |PF| \geq |FB|$, 所以当点 F, P, B 共线且 $FB \perp l_1$ 时, 抛物线 $y^2 = 4x$ 上一动点 P 到直线 l_1 和直线 l_2 的距离之和最小,



$$\text{即距离和的最小值为点 } F \text{ 到直线 } l_1 \text{ 的距离 } d = \frac{|4 \times 1 + 3 \times 0 + 6|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2.$$

4. 已知等边三角形的一个顶点位于原点, 另外两个顶点在抛物线 $y^2 = \sqrt{3}x$ 上, 则这个等边三角形的边长为 .

6 解析: 由题意可知等边三角形的一个顶点位于原点, 另外两个顶点在抛物线 $y^2 = \sqrt{3}x$ 上, 则另外两个顶点关于 x 轴对称, 如图所示.



设等边三角形的边长为 a , 则点 A 的横坐标为 $a \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, 纵坐标为 $a \sin 30^\circ = \frac{1}{2}a$,

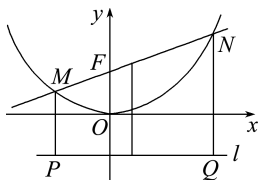
则 $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{1}{2}a\right)$, 代入 $y^2 = \sqrt{3}x$ 得 $\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a$,
 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$,

解得 $a = 6$ ($a = 0$ 舍),

故等边三角形的边长为 6.

5. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 过点 F 的直线与抛物线 C 交于 M, N 两点, 且 $|MN| = 8$, 则线段 MN 的中点到抛物线 C 的准线的距离为 .

4 解析: 如图, 分别过点 M, N 作抛物线 C 的准线的垂线, 垂足分别为 P, Q , 由抛物线的定义知, $|MP| = |MF|$, $|NQ| = |NF|$, 则 $|MP| + |NQ| = |MN| = 8$. 线段 MN 的中点到抛物线 C 的准线的距离为梯形 $MNQP$ 的中位线的长度, 即 $\frac{1}{2} \times (|MP| + |NQ|) = 4$.



6. 已知点 A, B 是抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上的两点, O 为原点, 且 $OA \perp OB$.

(1) 求 A, B 两点的横坐标之积和纵坐标之积;

(2) 求证: 直线 AB 过定点.

(1) 解: 设点 A, B 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

则有 $k_{OA} = \frac{y_1}{x_1}, k_{OB} = \frac{y_2}{x_2}$.

因为 $OA \perp OB$, 所以 $k_{OA} \cdot k_{OB} = -1$, 所以 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$.

因为 $y_1^2 = 2px_1, y_2^2 = 2px_2$, 所以 $\frac{y_1^2}{2p} \cdot \frac{y_2^2}{2p} + y_1 y_2 = 0$.

因为 $y_1 \neq 0, y_2 \neq 0$, 所以 $y_1 y_2 = -4p^2$, 所以 $x_1 x_2 = 4p^2$.

(2) 证明: 因为 $y_1^2 = 2px_1, y_2^2 = 2px_2$, 两式相减得 $(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 2p(x_1 - x_2)$,

所以 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2p}{y_1 + y_2}$, 所以 $k_{AB} = \frac{2p}{y_1 + y_2}$, 故直线

AB 的方程为 $y - y_1 = \frac{2p}{y_1 + y_2}(x - x_1)$,

所以 $y = \frac{2px}{y_1 + y_2} + y_1 - \frac{2px_1}{y_1 + y_2}$, 即 $y = \frac{2px}{y_1 + y_2} + \frac{y_1^2 - 2px_1 + y_1 y_2}{y_1 + y_2}$.

因为 $y_1^2 = 2px_1, y_1 y_2 = -4p^2$, 代入整理得 $y = \frac{2px}{y_1 + y_2} + \frac{-4p^2}{y_1 + y_2}$,

所以 $y = \frac{2p}{y_1 + y_2}(x - 2p)$, 即直线 AB 过定点 $(2p, 0)$.

7. 已知抛物线 $C: y^2 = 3x$ 的焦点为 F , 斜率为 $\frac{3}{2}$ 的直线 l 与 C 的交点为 A, B , 与 x 轴的交点为 P .

(1) 若 $|AF| + |BF| = 4$, 求 l 的方程;

(2) 若 $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$, 求 $|AB|$.

解: 设直线 $l: y = \frac{3}{2}x + t, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

(1) 由题设得 $F\left(\frac{3}{4}, 0\right)$, 故 $|AF| + |BF| = x_1 + x_2 + \frac{3}{2}$.

又 $|AF| + |BF| = 4$, 所以 $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$.

由 $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + t, \\ y^2 = 3x, \end{cases}$ 可得 $9x^2 + 12(t-1)x + 4t^2 = 0, \Delta$

> 0 , 则 $x_1 + x_2 = -\frac{12(t-1)}{9}$.

从而 $-\frac{12(t-1)}{9} = \frac{5}{2}$, 得 $t = -\frac{7}{8}$. 所以 l 的方程为

$y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{8}$.

(2) 由 $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$ 可得 $y_1 = -3y_2$.

由 $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + t, \\ y^2 = 3x, \end{cases}$ 可得 $y^2 - 2y + 2t = 0, \Delta > 0$, 所以

$y_1 + y_2 = 2$,

从而 $-3y_2 + y_2 = 2$, 故 $y_2 = -1, y_1 = 3$.

代入 C 的方程得 $x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{3}$.

故 $|AB| = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} \times \left|3 - \frac{1}{3}\right| = \frac{4\sqrt{13}}{3}$.

迁移应用

学习目标

1. 在熟练掌握椭圆、双曲线的标准方程及性质的基础上,能够利用其性质解决与离心率相关的问题.
2. 能够利用设参数以及数形结合的方法解决与圆锥曲线相关的定值、定点和最值问题.
3. 了解韦达定理的非对称结构,能够应用韦达定理解决圆锥曲线中的非对称结构问题.

类型一 圆锥曲线的离心率问题

例 1 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 点 A 在 C 上, 点 B 在 y 轴上, $\overrightarrow{F_1A} \perp \overrightarrow{F_1B}, \overrightarrow{F_2A} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$, 则 C 的离心率 $e =$ _____.

$\frac{3\sqrt{5}}{5}$ **解析:** (方法一) 如图, 设 $|AF_2| = 2m (m > 0)$,

则 $|BF_2| = 3m = |BF_1|, |AF_1| = 2a + 2m$.

在 $\text{Rt}\triangle AF_1B$ 中, $9m^2 + (2a + 2m)^2 = 25m^2$, 则 $(a + 3m)(a - m) = 0$,

故 $a = m$ 或 $a = -3m$ (舍去),

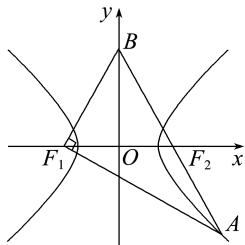
所以 $|AF_1| = 4a, |AF_2| = 2a, |BF_2| = |BF_1| = 3a$, 则 $|AB| = 5a$,

故 $\cos \angle F_1AF_2 = \frac{|AF_1|}{|AB|} = \frac{4a}{5a} = \frac{4}{5}$.

所以在 $\triangle AF_1F_2$ 中, $\cos \angle F_1AF_2 = \frac{16a^2 + 4a^2 - 4c^2}{2 \times 4a \times 2a}$

$= \frac{4}{5}$, 整理得 $5c^2 = 9a^2$,

故 $e = \frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.



(方法二) 由题意, 得 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 令 $A(x_0, y_0), B(0, t)$,

因为 $\overrightarrow{F_2A} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$, 所以 $(x_0 - c, y_0) = -\frac{2}{3}(-c, t)$, 则 $x_0 = \frac{5}{3}c, y_0 = -\frac{2}{3}t$.

又 $\overrightarrow{F_1A} \perp \overrightarrow{F_1B}$, 所以 $\overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{F_1B} = \left(\frac{8}{3}c, -\frac{2}{3}t\right) \cdot (c, t) = \frac{8}{3}c^2 - \frac{2}{3}t^2 = 0$, 则 $t^2 = 4c^2$.

又点 A 在 C 上, 则 $\frac{\frac{25}{9}c^2}{a^2} - \frac{\frac{4}{9}t^2}{b^2} = 1$, 整理得 $\frac{25c^2}{9a^2} - \frac{4t^2}{9b^2} = 1$, 则 $\frac{25c^2}{9a^2} - \frac{16c^2}{9b^2} = 1$,

所以 $25c^2b^2 - 16a^2c^2 = 9a^2b^2$, 即 $25c^2(c^2 - a^2) - 16a^2c^2 = 9a^2(c^2 - a^2)$,

整理得 $25c^4 - 50a^2c^2 + 9a^4 = 0$, 则 $(5c^2 - 9a^2)(5c^2 - a^2) = 0$, 即 $5c^2 = 9a^2$ 或 $5c^2 = a^2$.

所以 $e = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ 或 $e = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 又 $e > 1$, 故 $e = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

【总结升华】

求椭圆、双曲线的离心率的两种常用方法

方法1	求出 a, c , 代入公式 $e = \frac{c}{a}$ 求解
方法2	根据条件得到关于 a, b, c 的齐次式, 结合 $b^2 = a^2 - c^2$ (或 $b^2 = c^2 - a^2$) 转化为关于 a, c 的齐次式, 然后等式(不等式)两边同时除以 a 的最高次幂转化为关于 e 的方程(不等式), 解方程(不等式)即可

类型二 圆锥曲线中的定值、定点问题

例2 已知椭圆 E 的中心为坐标原点, 对称轴为 x 轴、 y 轴, 且过 $A(0, -2), B\left(\frac{3}{2}, -1\right)$ 两点.

(1) 求 E 的方程.

(2) 设过点 $P(1, -2)$ 的直线交 E 于 M, N 两点, 过 M 且平行于 x 轴的直线与线段 AB 交于点 T , 点 H 满足 $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{TH}$. 证明: 直线 HN 过定点.

(1) 解: 设椭圆 E 的方程为 $mx^2 + ny^2 = 1$, 因为椭圆 E 过点 $A(0, -2), B\left(\frac{3}{2}, -1\right)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} 4n=1, \\ \frac{9}{4}m+n=1, \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} m=\frac{1}{3}, \\ n=\frac{1}{4}, \end{cases}$$

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$.

(2) 证明: 因为 $A(0, -2), B\left(\frac{3}{2}, -1\right)$,

所以直线 $AB: y = \frac{2}{3}x - 2$.

① 若过点 $P(1, -2)$ 的直线斜率不存在, 即直线方程为 $x=1$, 代入 $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$,

可得 $M\left(1, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right), N\left(1, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$. 将 $y = -\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 代入

直线 AB 的方程, 可得 $T\left(-\sqrt{6}+3, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

由 $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{TH}$, 得 $H\left(-2\sqrt{6}+5, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

易求得直线 HN 的方程为 $y = \left(2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)x - 2$, 此直线过一定点 $(0, -2)$.

② 若过点 $P(1, -2)$ 的直线斜率存在, 设直线方程为 $kx - y - (k+2) = 0, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$.

$$\text{联立 } \begin{cases} kx - y - (k+2) = 0, \\ \frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1, \end{cases}$$

得 $(3k^2+4)x^2 - 6k(2+k)x + 3k(k+4) = 0$,

$\Delta = 36k^2(2+k)^2 - 12k(3k^2+4)(k+4) > 0$,

$$\text{可得 } \begin{cases} x_1+x_2 = \frac{6k(2+k)}{3k^2+4}, \\ x_1x_2 = \frac{3k(4+k)}{3k^2+4}, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1+y_2 = \frac{-8(2+k)}{3k^2+4}, \\ y_1y_2 = \frac{4(4+4k-2k^2)}{3k^2+4}, \end{cases}$$

且 $x_1y_2 + x_2y_1 = \frac{-24k}{3k^2+4} (*)$.

$$\text{联立 } \begin{cases} y = y_1, \\ y = \frac{2}{3}x - 2, \end{cases} \quad \text{可得 } T\left(\frac{3y_1}{2} + 3, y_1\right). \text{ 由 } \overrightarrow{MT} =$$

$\overrightarrow{TH}$, 得 $H(3y_1+6-x_1, y_1)$.

可求得此时直线 $HN: y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{3y_1+6-x_1-x_2}(x - x_2)$,

将点 $(0, -2)$ 代入上式, 整理得 $2(x_1+x_2) - 6(y_1+y_2) + x_1y_2 + x_2y_1 - 3y_1y_2 - 12 = 0$,

将 $(*)$ 代入, 得 $24k + 12k^2 + 96 + 48k - 24k - 48 - 48k + 24k^2 - 36k^2 - 48 = 0$,

显然成立.

综上, 直线 HN 过定点 $(0, -2)$.

例3 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为

$\frac{\sqrt{6}}{3}$, 以两焦点与短轴两端点为顶点的四边形的面积为 $4\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 我们称圆心在椭圆 C 上运动、半径为 $\frac{a}{2}$ 的圆是椭圆 C 的“卫星圆”, 过原点 O 作椭圆 C 的“卫星圆”的

两条切线, 分别交椭圆 C 于 A, B 两点, 若直线 OA, OB 的斜率存在, 记为 k_1, k_2 .

① 求证: k_1k_2 为定值.

② 试问 $|OA|^2 + |OB|^2$ 是否为定值? 若是, 求出该定值; 若不是, 请说明理由.

$$\text{(1) 解: 由题意得 } \begin{cases} 2bc = 4\sqrt{2}, \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} a = \sqrt{6}, \\ b = \sqrt{2}, \\ c = 2, \end{cases}$$

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2)①证明:直线 OA, OB 的方程分别为 $y = k_1x, y = k_2x$.

设椭圆 C 的“卫星圆”的圆心为 (x_0, y_0) .

因为直线 OA, OB 为“卫星圆”的两条切线,

$$\text{所以 } \frac{|k_1x_0 - y_0|}{\sqrt{1+k_1^2}} = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{|k_2x_0 - y_0|}{\sqrt{1+k_2^2}} = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\text{化简得 } (2x_0^2 - 3)k_1^2 - 4k_1x_0y_0 + 2y_0^2 - 3 = 0,$$

$$(2x_0^2 - 3)k_2^2 - 4k_2x_0y_0 + 2y_0^2 - 3 = 0,$$

所以 k_1, k_2 为方程 $(2x_0^2 - 3)k^2 - 4kx_0y_0 + 2y_0^2 - 3 = 0$

$$\text{的两根,故 } k_1k_2 = \frac{2y_0^2 - 3}{2x_0^2 - 3}.$$

$$\text{又因为 } \frac{x_0^2}{6} + \frac{y_0^2}{2} = 1,$$

$$\text{所以 } k_1k_2 = \frac{2y_0^2 - 3}{2x_0^2 - 3} = \frac{2y_0^2 - 3}{9 - 6y_0^2} = -\frac{1}{3},$$

故 k_1k_2 为定值 $-\frac{1}{3}$.

②解: $|OA|^2 + |OB|^2$ 是定值.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y_1 = k_1x_1, \\ x_1^2/6 + y_1^2/2 = 1, \end{cases} \begin{cases} y_2 = k_2x_2, \\ x_2^2/6 + y_2^2/2 = 1, \end{cases}$$

$$\text{解得 } x_1^2 = \frac{6}{3k_1^2 + 1}, x_2^2 = \frac{6}{3k_2^2 + 1}, \text{所以 } |OA|^2 + |OB|^2$$

$$= (1+k_1^2) \left(\frac{6}{3k_1^2 + 1} \right) + (1+k_2^2) \left(\frac{6}{3k_2^2 + 1} \right).$$

$$\text{由 } k_1k_2 = -\frac{1}{3}, \text{得 } k_2^2 = \frac{1}{9k_1^2},$$

$$\text{所以 } |OA|^2 + |OB|^2 = \frac{6(1+k_1^2)}{3k_1^2 + 1} + \frac{2(9k_1^2 + 1)}{3k_1^2 + 1} =$$

$$\frac{8(1+3k_1^2)}{3k_1^2 + 1} = 8,$$

所以 $|OA|^2 + |OB|^2$ 为定值 8.

【总结升华】

1. 定点问题

(1) 参数法

参数法解决定点问题的思路:①引入动点的坐标或动直线中的参数表示变化量,即确定题目中的核心变量(此处设为 k);②利用条件找到 k 与过定点的曲线 $F(x, y) = 0$ 之间的关系,得到关于 k 与 x, y 的等式,再对等式进行合理变形,找到定点.

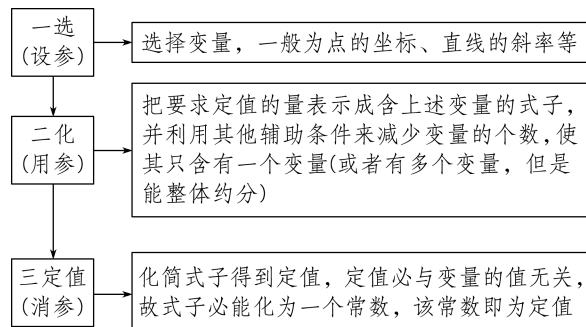
(2) 由特殊到一般法

由特殊到一般法求解定点问题时,常根据动点或动直线的特殊情况探索出定点,再证明该定点与变量无关.

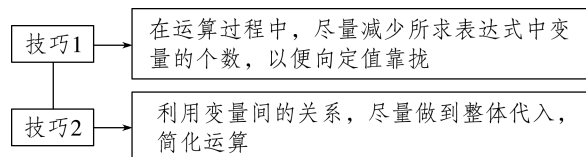
2. 定值问题

(1) 直接消参法

一般步骤如下:

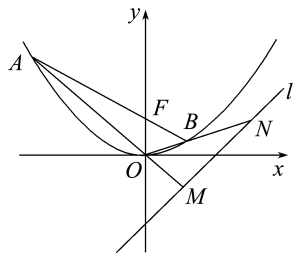


(2) 由特殊到一般法



类型三 圆锥曲线中的最值问题

例 4 (2024·浙江卷)如图所示,已知抛物线 C 的顶点为 $O(0,0)$,焦点为 $F(0,1)$.



(1)求抛物线 C 的方程.

(2)过点 F 作直线交抛物线 C 于 A, B 两点.若直线 AO, BO 分别交直线 $l: y = x - 2$ 于 M, N 两点,求 $|MN|$ 的最小值.

解: (1)由题意可设抛物线 C 的方程为 $x^2 = 2py$ ($p > 0$),

则 $\frac{p}{2} = 1$, 所以 $p = 2$.

所以抛物线 C 的方程为 $x^2 = 4y$.

(2)设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 AB 的方程为 $y = kx + 1$.

由 $\begin{cases} y = kx + 1, \\ x^2 = 4y, \end{cases}$ 消去 y , 整理得 $x^2 - 4kx - 4 = 0$,

则 $\Delta = 16k^2 + 16 > 0$,

所以 $x_1 + x_2 = 4k, x_1 x_2 = -4$,

从而 $|x_1 - x_2| = 4\sqrt{k^2 + 1}$.

由 $\begin{cases} y = \frac{y_1}{x_1}x, \\ y = x - 2, \end{cases}$ 可得 $x_M = \frac{2x_1}{x_1 - y_1} = \frac{2x_1}{x_1 - \frac{x_1^2}{4}} = \frac{8}{4 - x_1}$.

同理可得 $x_N = \frac{8}{4 - x_2}$.

所以 $|MN| = \sqrt{2} |x_M - x_N| = \sqrt{2} \left| \frac{8}{4 - x_1} - \frac{8}{4 - x_2} \right| =$

$8\sqrt{2} \cdot \left| \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2 - 4(x_1 + x_2) + 16} \right| = \frac{8\sqrt{2} \cdot \sqrt{k^2 + 1}}{|4k - 3|}$.

令 $4k - 3 = t, t \neq 0$, 则 $k = \frac{t+3}{4}$.

当 $t > 0$ 时, $|MN| = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{25}{t^2} + \frac{6}{t} + 1} > 2\sqrt{2}$;

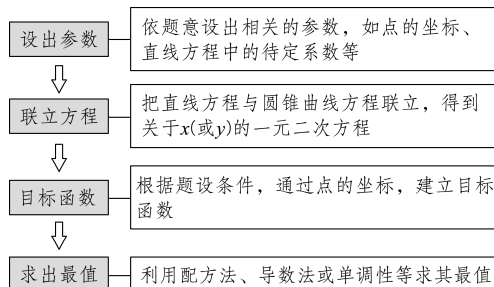
当 $t < 0$ 时, $|MN| = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{5}{t} + \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{16}{25}} \geq \frac{8\sqrt{2}}{5}$.

综上所述, 当 $t = -\frac{25}{3}$, 即 $k = -\frac{4}{3}$ 时, $|MN|$ 取得最

小值, 最小值是 $\frac{8\sqrt{2}}{5}$.

【总结升华】

1. 解决圆锥曲线中最值问题的方法



2. 解决圆锥曲线中取值范围问题的方法

(1)利用圆锥曲线的几何性质或一元二次方程根的判别式构造不等关系, 从而确定参数的取值范围;

(2)利用已知参数的范围, 求新参数的范围, 核心是建立两个参数之间的等量关系;

(3)利用已知的不等关系构造不等式, 从而求出参数的取值范围;

(4)利用隐含的不等关系建立不等式, 从而求出参数的取值范围;

(5)将参数表示为其他变量的函数, 利用求函数的值域的方法求出函数值域, 从而确定参数的取值范围.

类型四 非对称结构问题

例 5 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 4, 左、右顶点分别为 A, B , 左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过右焦点 F_2 的直线 l 交椭圆 E 于 M, N 两点, $\triangle F_1MN$ 的周长为 12.

(1) 记直线 AM 的斜率为 k_1 , 直线 BN 的斜率为 k_2 .

证明: $\frac{k_1}{k_2}$ 为定值;

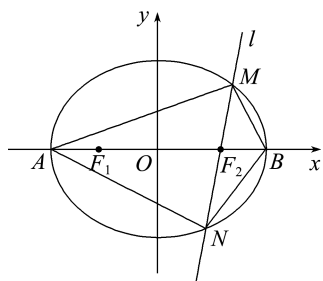
(2) 记 $\triangle AMN$ 的面积为 S_1 , $\triangle BMN$ 的面积为 S_2 , 求 $S_1 + S_2$ 的最大值.

解: 由椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 4, 可知 $c = 2$.

由 $\triangle F_1MN$ 的周长为 12, 可得 $4a = 12, a = 3$.

所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$.

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$, 如图所示.



(1) **证明:** 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 直线 l 方程为 $x = my + 2$.

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1, \\ x = my + 2, \end{cases} \text{得 } (5m^2 + 9)y^2 + 20my - 25 = 0,$$

则 $\Delta = 900(m^2 + 1) > 0$,

$$\text{所以 } y_1 + y_2 = \frac{-20m}{5m^2 + 9}, y_1 y_2 = \frac{-25}{5m^2 + 9}.$$

$$\text{所以 } \frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2} = \frac{-20m}{-25} = \frac{4m}{5}, \text{即 } my_1 y_2 = \frac{5}{4}(y_1 + y_2).$$

$$\text{则 } \frac{k_1}{k_2} = \frac{\frac{y_1}{x_1 + 3}}{\frac{y_2}{x_2 - 3}} = \frac{y_1(x_2 - 3)}{y_2(x_1 + 3)} = \frac{my_1 y_2 - y_1}{my_1 y_2 + 5y_2} =$$

$$\frac{\frac{5}{4}(y_1 + y_2) - y_1}{\frac{5}{4}(y_1 + y_2) + 5y_2} = \frac{\frac{1}{4}(y_1 + 5y_2)}{\frac{5}{4}(y_1 + 5y_2)} = \frac{1}{5}.$$

所以 $\frac{k_1}{k_2}$ 为定值 $\frac{1}{5}$.

(2) **解:** 由题意可知,

$$S_1 + S_2 = S_{\triangle MAB} + S_{\triangle NAB}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times |y_1 - y_2| = 3|y_1 - y_2|$$

$$= 3 \times \frac{\sqrt{(-20m)^2 + 4 \times 25 \times (5m^2 + 9)}}{5m^2 + 9}$$

$$= \frac{90\sqrt{m^2 + 1}}{5m^2 + 9}.$$

$$\text{令 } t = \sqrt{m^2 + 1} \geq 1,$$

$$\text{则 } S_1 + S_2 = \frac{90t}{5t^2 + 4} = \frac{90}{5t + \frac{4}{t}}.$$

又 $y = 5t + \frac{4}{t}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

所以当 $t = 1$, 即 $m = 0$ 时, $S_1 + S_2$ 取得最大值为

$$\frac{90}{5 \times 1 + \frac{4}{1}} = 10.$$

所以 $S_1 + S_2$ 的最大值为 10.

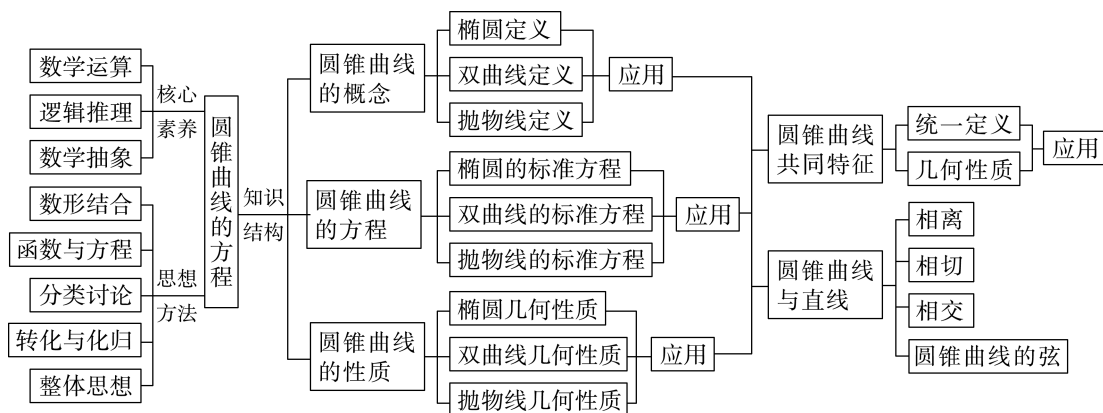
【总结升华】

非对称结构问题常用的处理方式

1. 和积互换法. 如例 5 中根据 $y_1 + y_2$ 与 $y_1 y_2$ 的关系, 整体代换. 若不能直接得出关系, 可以用待定系数法, 设 $y_1 y_2 = m(y_1 + y_2) + n$, 求出 m, n .
2. 配凑半代换法. 通过部分代换将分子配凑成能与分母约分的形式.
3. 先猜后证法. 先找特殊情况得到定值, 再证明一般情况也成立.
4. 使用圆锥曲线的第三定义.

重 构 拓 展

● 多维体系构建 ●



【问题探究】

1. 在椭圆、双曲线、抛物线这三类圆锥曲线的研究中, 椭圆是研究的第一类圆锥曲线, 对双曲线、抛物线的研究, 我们采用的是类比的方法, 你能说说具体的类比内容吗?
2. 椭圆、双曲线、抛物线的几何特征有哪些? 这些几何特征在研究圆锥曲线中有什么作用?
3. 圆锥曲线的几何性质主要包括哪些方面? 如何用

代数方法研究这些几何性质?

4. 圆锥曲线的“统一性”体现在哪些方面? 你如何理解圆锥曲线的“统一性”?
5. 如何用直线与圆锥曲线的方程判断它们之间的位置关系?
6. 数形结合在圆锥曲线的研究中具有重要作用, 你能举例说明吗?

● 学科视野拓展 ●

★★★ 拓展一

圆锥曲线中的斜率问题—— 平移齐次化

【拓展总结】

1. 已知点 P 是椭圆上的一个定点, A, B 是椭圆上的两个动点, 则有
 - (1) 若 $k_{PA} + k_{PB} = \lambda (\lambda \neq 0)$, 则直线 AB 过定点;
 - (2) 若 $k_{PA} \cdot k_{PB} = \lambda$, 则直线 AB 过定点.
2. 储备知识:
 - (1) 直线平移后不会改变斜率, 但经过的点会变;
 - (2) 平移口诀: 左加右减, 上加下减.
3. 平移齐次化可解决的问题:
 - (1) 斜率之和为定值;
 - (2) 斜率之积为定值.

应用 1 (2023 · 新高考全国 II 卷) 已知双曲线 C 的中心为坐标原点, 左焦点为 $(-2\sqrt{5}, 0)$, 离心率为 $\sqrt{5}$.

- (1) 求 C 的方程;
- (2) 记 C 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 过点 $(-4, 0)$ 的直线与 C 的左支交于 M, N 两点, M 在第二象限, 直线 MA_1 与 NA_2 交于点 P , 证明: 点 P 在定直线上.

(1) 解: 设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, c 为双曲线 C 的半焦距.

$$\text{由题意可得} \begin{cases} c = 2\sqrt{5}, \\ \frac{c}{a} = \sqrt{5}, \\ c^2 = a^2 + b^2, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a = 2, \\ b = 4, \\ c = 2\sqrt{5}. \end{cases}$$

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$.

(2)证明:(方法一)设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 直线 MN 的方程为 $x = my - 4$,

则 $x_1 = my_1 - 4, x_2 = my_2 - 4$.

$$\text{联立} \begin{cases} x = my - 4, \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1, \end{cases} \text{得 } (4m^2 - 1)y^2 - 32my + 48 = 0.$$

因为直线 MN 与双曲线 C 的左支交于 M, N 两点, 所以 $4m^2 - 1 \neq 0$, 且 $\Delta > 0$.

$$\text{由根与系数的关系得} \begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{32m}{4m^2 - 1}, \\ y_1 y_2 = \frac{48}{4m^2 - 1}, \end{cases} \text{所以 } y_1 +$$

$$y_2 = \frac{2m}{3} y_1 y_2.$$

因为 A_1, A_2 分别为双曲线 C 的左、右顶点,

所以 $A_1(-2, 0), A_2(2, 0)$.

直线 MA_1 的方程为 $\frac{y_1}{x_1 + 2} = \frac{y}{x + 2}$, 直线 NA_2 的方程

$$\text{为 } \frac{y_2}{x_2 - 2} = \frac{y}{x - 2},$$

$$\text{所以 } \frac{\frac{y_1}{x_1 + 2}}{\frac{y_2}{x_2 - 2}} = \frac{\frac{y}{x + 2}}{\frac{y}{x - 2}}, \text{ 得 } \frac{(x_2 - 2)y_1}{(x_1 + 2)y_2} = \frac{x - 2}{x + 2},$$

$$\frac{(my_2 - 6)y_1}{(my_1 - 2)y_2} = \frac{my_1 y_2 - 6y_1}{my_1 y_2 - 2y_2} = \frac{x - 2}{x + 2}.$$

$$\text{因为 } \frac{my_1 y_2 - 6y_1}{my_1 y_2 - 2y_2} = \frac{my_1 y_2 - 6(y_1 + y_2) + 6y_2}{my_1 y_2 - 2y_2}$$

$$= \frac{my_1 y_2 - 6 \cdot \frac{2m}{3} y_1 y_2 + 6y_2}{my_1 y_2 - 2y_2}$$

$$= \frac{-3my_1 y_2 + 6y_2}{my_1 y_2 - 2y_2}$$

$$= -3,$$

$$\text{所以 } \frac{x - 2}{x + 2} = -3, \text{ 解得 } x = -1.$$

所以点 P 在定直线 $x = -1$ 上.

(方法二)将原坐标系平移, 原点 O 平移至点 A_1 处,

$$\text{则在新坐标系下双曲线 } C \text{ 的方程为 } \frac{(x - 2)^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

设直线 MN 的方程为 $mx + ny = 1$, 与双曲线 C 的方

程联立, 得 $y^2 + 16nxy + (16m - 4)x^2 = 0$,

$$\text{即 } k^2 + 16nk + (16m - 4) = 0.$$

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), k_1 = k_{A_1 M}, k_2 = k_{A_1 N}$,

$$\text{则 } k_1 \cdot k_2 = 16m - 4.$$

因为直线 MN 过点 $(-2, 0)$, 所以 $m = -\frac{1}{2}$, 则 $k_1 \cdot$

$$k_2 = -12.$$

因为 $k_{A_1 N} \cdot k_{A_2 N} = \frac{b^2}{a^2} = 4$, 所以 $k_1 = -3k_{A_2 N}$.

直线 $A_1 M$ 的方程为 $y = k_1 x$, 直线 $A_2 N$ 的方程为 $y = k_{A_2 N}(x - 4)$,

联立两方程可得 $k_1 x = k_{A_2 N}(x - 4)$, 即 $-3x = x - 4$, 可得 $x = 1$.

由此可知在原坐标系中点 P 在定直线 $x = -1$ 上.

★★★ 拓展二 圆锥曲线与函数、数列、向量等的交汇问题

【拓展总结】

1. 圆锥曲线与数列的结合点常见的有圆锥曲线中的相关线段长度或参数成等差、等比数列等, 解决此类问题的关键是利用数列的知识, 将条件等价转化为相关数量之间的关系, 其实质就是相关数量之间的相等关系的一种外在表现.

2. 圆锥曲线中向量问题的基本求解策略就是坐标化, 主要有两个方面:

(1) 向量的共线, 转化为两向量所在的直线重合或平行, 并且两向量模之间存在倍数关系;

(2) 向量的数量积, 直接利用坐标运算转化为点的坐标所满足的条件进行求解.

应用 2 (2024 · 新高考全国 II 卷) 已知双曲线 $C: x^2 - y^2 = m (m > 0)$, 点 $P_1(5, 4)$ 在 C 上, k 为常数, $0 < k < 1$. 按照如下方式依次构造点 $P_n (n = 2, 3, \dots)$: 过 P_{n-1} 作斜率为 k 的直线与 C 的左支交于点 Q_{n-1} , 令 P_n 为 Q_{n-1} 关于 y 轴的对称点. 记 P_n 的坐标为 (x_n, y_n) .

(1) 若 $k = \frac{1}{2}$, 求 x_2, y_2 .

(2) 证明: 数列 $\{x_n - y_n\}$ 是公比为 $\frac{1+k}{1-k}$ 的等比数列.

(3) 设 S_n 为 $\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}$ 的面积. 证明: 对任意正整

数 $n, S_n = S_{n+1}$.

(1)解:将点 $P_1(5, 4)$ 代入 C 的方程, 得 $5^2 - 4^2 = m$, 则 $m = 9$, 所以 $C: x^2 - y^2 = 9$.

过点 $P_1(5, 4)$ 且斜率 $k = \frac{1}{2}$ 的直线方程为 $y = \frac{1}{2}(x - 5) + 4$,

与 C 的方程联立, 消去 y 并化简可得 $x^2 - 2x - 15 = 0$, 即 $(x - 5)(x + 3) = 0$,

所以点 Q_1 的横坐标为 -3 .

将 $x = -3$ 代入直线方程 $y = \frac{1}{2}(x - 5) + 4$, 得 $y = 0$,

因此 $Q_1(-3, 0)$, 从而 $P_2(3, 0)$,

即 $x_2 = 3, y_2 = 0$.

(2)证明:(方法一)由题意, $P_n(x_n, y_n), P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1}), Q_n(-x_{n+1}, y_{n+1})$.

设过点 $P_n(x_n, y_n)$ 且斜率为 k 的直线为 $l_n: y = k(x - x_n) + y_n$,

将 l_n 的方程与 C 的方程联立, 消去 y 化简可得 $(1 - k^2)x^2 + (2k^2x_n - 2ky_n)x - (kx_n - y_n)^2 - 9 = 0, \Delta > 0$,

由根与系数的关系得 $-x_{n+1} + x_n = -\frac{2k^2x_n - 2ky_n}{1 - k^2}$,

所以 $x_{n+1} = \frac{2k^2x_n - 2ky_n}{1 - k^2} + x_n = \frac{k^2x_n + x_n - 2ky_n}{1 - k^2}$.

又 $Q_n(-x_{n+1}, y_{n+1})$ 在直线 l_n 上,

所以 $y_{n+1} = k(-x_{n+1} - x_n) + y_n = -kx_{n+1} - kx_n + y_n$.

从而 $x_{n+1} - y_{n+1} = x_{n+1} + kx_{n+1} + kx_n - y_n = (1 + k) \cdot$

$x_{n+1} + kx_n - y_n = (1 + k) \cdot \frac{k^2x_n + x_n - 2ky_n}{1 - k^2} + kx_n$

$- y_n = \frac{1 + k}{1 - k} \cdot (x_n - y_n)$.

易知 $x_n - y_n \neq 0$, 所以数列 $\{x_n - y_n\}$ 是公比为 $\frac{1 + k}{1 - k}$ 的等比数列.

(方法二)由题意, $P_n(x_n, y_n), P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1}), Q_n(-x_{n+1}, y_{n+1})$.

由点 P_n, Q_n 所在直线的斜率为 k , 可知 k

$= \frac{y_n - y_{n+1}}{x_n + x_{n+1}}$.

又点 P_n, Q_n 都在 C 上, 所以 $\begin{cases} x_n^2 - y_n^2 = 9, \\ x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2 = 9, \end{cases}$

即 $\begin{cases} (x_n - y_n)(x_n + y_n) = 9, \\ (x_{n+1} - y_{n+1})(x_{n+1} + y_{n+1}) = 9, \end{cases}$

易知 $x_n - y_n \neq 0$,

则 $\frac{1 + k}{1 - k} = \frac{1 + \frac{y_n - y_{n+1}}{x_n + x_{n+1}}}{1 - \frac{y_n - y_{n+1}}{x_n + x_{n+1}}} = \frac{x_n + x_{n+1} + y_n - y_{n+1}}{x_n + x_{n+1} - y_n + y_{n+1}}$

$= \frac{x_{n+1} - y_{n+1} + \frac{9}{x_n - y_n}}{x_n - y_n + \frac{9}{x_{n+1} - y_{n+1}}}$

$= \frac{\frac{1}{x_n - y_n}[(x_{n+1} - y_{n+1})(x_n - y_n) + 9]}{\frac{1}{x_{n+1} - y_{n+1}}[(x_n - y_n)(x_{n+1} - y_{n+1}) + 9]}$

$= \frac{x_{n+1} - y_{n+1}}{x_n - y_n},$

即数列 $\{x_n - y_n\}$ 是公比为 $\frac{1 + k}{1 - k}$ 的等比数列.

(3)证明:(方法一)由(2)知, 数列 $\{x_n - y_n\}$ 是首项为

$x_1 - y_1 = 5 - 4 = 1$, 公比为 $\frac{1 + k}{1 - k}$ 的等比数列.

令 $t = \frac{1 + k}{1 - k}$, 由 $0 < k < 1$, 可知 $t > 1$, 则 $x_n - y_n = t^{n-1}$.

又 $x_n^2 - y_n^2 = 9$, 所以 $x_n + y_n = \frac{9}{x_n - y_n} = \frac{9}{t^{n-1}}$,

可得 $x_n = \frac{9 + t^{2n-2}}{2t^{n-1}}, y_n = \frac{9 - t^{2n-2}}{2t^{n-1}}$.

所以 $P_n\left(\frac{9 + t^{2n-2}}{2t^{n-1}}, \frac{9 - t^{2n-2}}{2t^{n-1}}\right), P_{n+1}\left(\frac{9 + t^{2n}}{2t^n}, \frac{9 - t^{2n}}{2t^n}\right),$

$P_{n+2}\left(\frac{9 + t^{2n+2}}{2t^{n+1}}, \frac{9 - t^{2n+2}}{2t^{n+1}}\right).$

所以直线 P_nP_{n+1} 的方程为 $x - x_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}(y -$

$y_n)$, 即 $(9 + t^{2n-1})x - (9 - t^{2n-1})y - 9t^{n-1}(1 + t) = 0$.

易知点 P_{n+2} 到直线 P_nP_{n+1} 的距离 $d =$

$\frac{\left| (9 + t^{2n-1}) \cdot \frac{9 + t^{2n+2}}{2t^{n+1}} - (9 - t^{2n-1}) \cdot \frac{9 - t^{2n+2}}{2t^{n+1}} - 9t^{n-1}(1 + t) \right|}{\sqrt{(9 + t^{2n-1})^2 + (9 - t^{2n-1})^2}}$
 $= \frac{|9t^{n-2}(t - 1)^2(t + 1)|}{\sqrt{(9 + t^{2n-1})^2 + (9 - t^{2n-1})^2}}.$

$$\begin{aligned} \text{又 } |P_n P_{n+1}| &= \sqrt{\left(\frac{9+t^{2n}}{2t^n} - \frac{9+t^{2n-2}}{2t^{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{9-t^{2n}}{2t^n} - \frac{9-t^{2n-2}}{2t^{n-1}}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{(t-1)^2[(9-t^{2n-1})^2 + (9+t^{2n-1})^2]}}{2t^n}, \end{aligned}$$

$$\text{则 } S_n = \frac{1}{2} \cdot |P_n P_{n+1}| \cdot d = \frac{9(t-1)^3(t+1)}{4t^2} =$$

$$\frac{36k^3}{(1-k^2)^2}, \text{ 即 } S_n \text{ 为定值, 所以 } S_n = S_{n+1}.$$

(方法二) 由 (2) 知, 数列 $\{x_n - y_n\}$ 是首项为 $x_1 - y_1$
 $= 5 - 4 = 1$, 公比为 $\frac{1+k}{1-k}$ 的等比数列.

令 $t = \frac{1+k}{1-k}$, 由 $0 < k < 1$, 可知 $t > 1$, 则 $x_n - y_n$
 $= t^{n-1}$,

$$\text{又 } x_n^2 - y_n^2 = 9, \text{ 所以 } x_n + y_n = \frac{9}{x_n - y_n} = \frac{9}{t^{n-1}},$$

$$\text{可得 } x_n = \frac{9+t^{2n-2}}{2t^{n-1}}, y_n = \frac{9-t^{2n-2}}{2t^{n-1}}.$$

$$\text{所以 } P_n \left(\frac{9+t^{2n-2}}{2t^{n-1}}, \frac{9-t^{2n-2}}{2t^{n-1}} \right), P_{n+1} \left(\frac{9+t^{2n}}{2t^n}, \frac{9-t^{2n}}{2t^n} \right),$$

$$P_{n+2} \left(\frac{9+t^{2n+2}}{2t^{n+1}}, \frac{9-t^{2n+2}}{2t^{n+1}} \right), P_{n+3} \left(\frac{9+t^{2n+4}}{2t^{n+2}}, \frac{9-t^{2n+4}}{2t^{n+2}} \right).$$

$$\text{所以 } \frac{x_{n+3} - x_{n+2}}{y_{n+3} - y_{n+2}} = \frac{\frac{9+t^{2n+4}}{2t^{n+2}} - \frac{9+t^{2n+2}}{2t^{n+1}}}{\frac{9-t^{2n+4}}{2t^{n+2}} - \frac{9-t^{2n+2}}{2t^{n+1}}} = \frac{9-t^{2n+1}}{9+t^{2n+1}},$$

$$\frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{y_{n+2} - y_{n+1}} = \frac{\frac{9+t^{2n+2}}{2t^{n+1}} - \frac{9+t^{2n}}{2t^n}}{\frac{9-t^{2n+2}}{2t^{n+1}} - \frac{9-t^{2n}}{2t^n}} = \frac{9-t^{2n+1}}{9+t^{2n+1}},$$

$$\text{即 } \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{y_{n+2} - y_{n+1}} = \frac{x_{n+3} - x_{n+2}}{y_{n+3} - y_{n+2}},$$

$$\text{所以 } P_n P_{n+3} \parallel P_{n+1} P_{n+2},$$

所以点 P_n 和点 P_{n+3} 到直线 $P_{n+1} P_{n+2}$ 的距离相等,

因此 $\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}$ 和 $\triangle P_{n+1} P_{n+2} P_{n+3}$ 的面积相等,

$$\text{即 } S_n = S_{n+1}.$$

拓展三

圆锥曲线的光学性质

【拓展总结】

1. 抛物线的光学性质

如图 1 所示, 从抛物线的焦点 F 发出的光线, 被抛物线反射后, 得到的是一系列的与抛物线对称轴平行(或重合)的光线;

如图 2 所示, 若抛物线在点 P 处的切线 l 交对称轴于点 Q , $PM \perp l$ 交对称轴于点 M , 则焦点 F 是 QM 的中点.

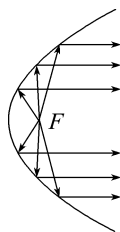


图 1

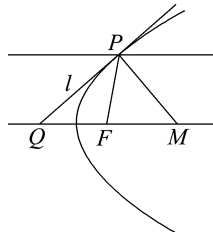


图 2

2. 椭圆的光学性质

如图 3 所示, 从椭圆的一个焦点发出的光线, 被椭圆反射后, 必定经过另一个焦点;

如图 4 所示, 椭圆在点 P 处的切线为 l , 直线 $PQ \perp l$ 交直线 $F_1 F_2$ 于点 Q , 则 PQ 平分 $\angle F_1 P F_2$, 由角

平分线性质定理, 得 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{|QF_1|}{|QF_2|}$.

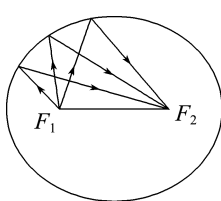


图 3

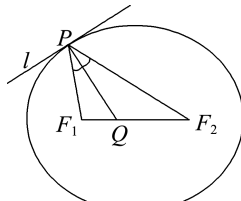


图 4

3. 双曲线的光学性质

如图 5 所示, 从双曲线一个焦点发出的光线, 被双曲线反射后, 反射光线的反向延长线交于另一个焦点;

如图 6 所示, 双曲线在点 P 处的切线 l 与直线 $F_1 F_2$ 相交于点 Q , 则 PQ 平分 $\angle F_1 P F_2$, 由角平

分线性质定理, 得 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{|QF_1|}{|QF_2|}$.

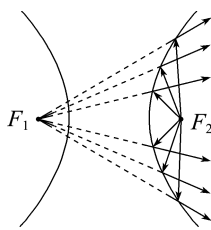


图 5

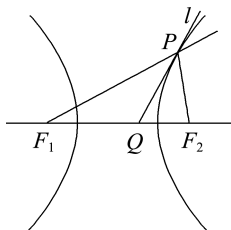
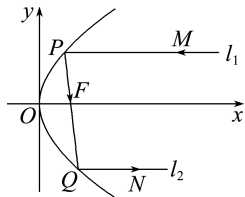


图 6

应用 3 (多选) 抛物线有如下光学性质: 从焦点发出的光线经抛物线反射后, 沿平行于抛物线对称轴的方向

向射出;反之,平行于抛物线对称轴的入射光线经抛物线反射后,必过抛物线的焦点.如图,已知平行于 x 轴的光线 l_1 从点 M 射入,经过抛物线 $C: y^2 = 8x$ 上的点 P 反射,再经过 C 上另一点 Q 反射后,沿直线 l_2 射出,经过点 N ,则 ()



- A.若直线 l_1 的方程为 $y=2$,则 $|PQ|=8$
 B.若直线 l_1 的方程为 $y=2$,且 $\angle PQM = \angle MQN$,则点 M 的坐标为 $(13, 2)$
 C.分别延长 PO, NQ 交于点 D ,则点 D 在 C 的准线上
 D.抛物线 C 在点 P 处的切线与直线 FP, l_1 所成角相等

BCD 解析:对于选项 A,

若 l_1 的方程为 $y=2$,则 $P\left(\frac{1}{2}, 2\right)$,又 $F(2, 0)$,

所以直线 PF 的斜率 $k = \frac{2-0}{\frac{1}{2}-2} = -\frac{4}{3}$,所以直线 PF

的方程为 $y = -\frac{4}{3}(x-2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y^2 = 8x, \\ y = -\frac{4}{3}(x-2), \end{cases} \text{得 } 2x^2 - 17x + 8 = 0, \text{即 } (2x -$$

$$1)(x-8)=0,$$

所以 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x=8$,所以 $Q(8, -8)$,

所以 $|PQ| = x_1 + x_2 + 4 = \frac{25}{2}$,A 选项错误.

对于选项 B,由 $P\left(\frac{1}{2}, 2\right), Q(8, -8)$,得直线 PQ 的

方程为 $4x + 3y - 8 = 0$,直线 l_2 的方程为 $y = -8$,

若 $\angle PQM = \angle MQN$,则点 M 在 $\angle PQN$ 的平分线上,点 M 到直线 PQ 和到直线 l_2 的距离相等,

设 $M(a, 2)$,

则有 $\frac{|4a+6-8|}{5} = 2 - (-8)$,由 $a > 0$,解得 $a = 13$,

所以 $M(13, 2)$,B 选项正确.

对于选项 C,抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 $F(2, 0)$,准线方程为 $x = -2$,

设 $P\left(\frac{y_1^2}{8}, y_1\right), Q\left(\frac{y_2^2}{8}, y_2\right)$,由 $\overrightarrow{PF} \parallel \overrightarrow{QF}$,

得 $y_2 \left(\frac{y_1^2}{8} - 2\right) = y_1 \left(\frac{y_2^2}{8} - 2\right)$,即 $y_1 y_2 (y_2 - y_1) =$

$16(y_1 - y_2)$,由 $y_1 \neq y_2$,得 $y_1 y_2 = -16$.

又直线 PO 的斜率 $k_{PO} = \frac{8}{y_1}$,所以直线 PO 的方程为

$y = \frac{8}{y_1}x$,直线 NQ 的方程为 $y = y_2$,

分别延长 PO, NQ 交于点 D (图略),由 $y_2 = \frac{8}{y_1}x$,得

$x = \frac{y_1 y_2}{8} = \frac{-16}{8} = -2$,即点 D 横坐标为 -2 ,所以点

D 在 C 的准线上,C 选项正确.

对于选项 D,由反射的性质可知,选项 D 正确.

单元测试卷(三)

(考查范围:第三章 时间:120 分钟 分值:150 分)

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 双曲线 $3x^2 - y^2 = 9$ 的焦距为 ()

A. $\sqrt{6}$ B. $2\sqrt{6}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

D 解析: $3x^2 - y^2 = 9$ 化为标准方程为 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$,

所以 $a^2 = 3, b^2 = 9$.

因为 $c^2 = a^2 + b^2 = 12$, 所以 $c = 2\sqrt{3}$, 所以 $2c = 4\sqrt{3}$.

2. 已知椭圆的中心在原点, 离心率 $e = \frac{1}{2}$, 且它的一个

焦点与抛物线 $y^2 = -4x$ 的焦点重合, 则此椭圆的方程为 ()

A. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$

C. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ D. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

A 解析: 由题意知抛物线 $y^2 = -4x$ 的焦点为 $(-1, 0)$, 所以 $c = 1$.

又离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 所以 $a = 2$, 所以 $b = \sqrt{3}$,

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

3. 设 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点, 点 A 在 C 上, 点 $B(3, 0)$. 若 $|AF| = |BF|$, 则 $|AB| =$ ()

A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 3 D. $3\sqrt{2}$

B 解析: 由题意得 $F(1, 0)$, 则 $|AF| = |BF| = 2$, 即点 A 到准线 $x = -1$ 的距离为 2, 所以点 A 的横坐标为 $-1 + 2 = 1$.

不妨设点 A 在 x 轴上方, 代入得 $A(1, 2)$,

所以 $|AB| = \sqrt{(3-1)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2}$. 故选 B.

4. 过点 $P(2, 1)$ 的直线 l 与双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 相交于

A, B 两点. 若 P 是线段 AB 的中点, 则直线 l 的方程是 ()

A. $6x - y - 11 = 0$ B. $6x + y - 13 = 0$

C. $2x - 3y - 1 = 0$ D. $3x - 2y - 4 = 0$

A 解析: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由 $P(2, 1)$ 是线段 AB 的中点, 得 $x_1 + x_2 = 4, y_1 + y_2 = 2$, 将 A, B

$$\text{代入双曲线方程得} \begin{cases} x_1^2 - \frac{y_1^2}{3} = 1, \\ x_2^2 - \frac{y_2^2}{3} = 1, \end{cases}$$

两式作差, 得直线 l 的斜率为 $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} =$

$$\frac{3(x_1 + x_2)}{y_1 + y_2} = \frac{3 \times 4}{2} = 6.$$

又直线 l 过点 $P(2, 1)$, 所以直线 l 的方程为 $6x - y - 11 = 0$.

经检验, 此时直线 l 与双曲线有两个交点, 满足题意.

5. (2024 · 新高考全国 II 卷) 已知曲线 $C: x^2 + y^2 = 16$ ($y > 0$), 从 C 上任意一点 P 向 x 轴作垂线段 PP' , P' 为垂足, 则线段 PP' 的中点 M 的轨迹方程为 ()

A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 (y > 0)$ B. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1 (y > 0)$

C. $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1 (y > 0)$ D. $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{8} = 1 (y > 0)$

A 解析: 设点 $M(x_0, y_0)$, $y_0 > 0$, 则 $P(x_0, 2y_0)$.

又点 P 在曲线 C 上,

所以 $x_0^2 + 4y_0^2 = 16 (y_0 > 0)$, 即 $\frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{4} = 1 (y_0 > 0)$,

故点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 (y > 0)$. 故选 A.

6. (2024 · 全国甲卷) 已知双曲线的两个焦点分别为 $(0, 4), (0, -4)$, 点 $(-6, 4)$ 在该双曲线上, 则该双曲线的离心率为 ()

A. 4 B. 3 C. 2 D. $\sqrt{2}$

C 解析: 设 $F_1(0, -4), F_2(0, 4), P(-6, 4)$,

则 $|F_1F_2| = 2c = 8, |PF_1| =$

$\sqrt{(-6-0)^2 + (4+4)^2} = 10, |PF_2| =$

$\sqrt{(-6-0)^2 + (4-4)^2} = 6,$

则 $2a = |PF_1| - |PF_2| = 10 - 6 = 4$, 所以 $e = \frac{c}{a} = 2$.

故选 C.

7. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的渐近线与椭圆 C 有四个交点,

以这四个交点为顶点的四边形的面积为 16, 则椭圆 C 的方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ B. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$
C. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ D. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$

D 解析: 因为椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, c^2 = \frac{3}{4}a^2 = a^2 - b^2$,

所以 $b^2 = \frac{1}{4}a^2$, 即 $a^2 = 4b^2$.

双曲线的渐近线方程为 $y = \pm x$,

代入椭圆方程得 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$, 即 $\frac{x^2}{4b^2} + \frac{x^2}{b^2} = \frac{5x^2}{4b^2} = 1$,

所以 $x^2 = \frac{4}{5}b^2, x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}b, y^2 = \frac{4}{5}b^2, y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}b$, 则

在第一象限内双曲线的渐近线与椭圆 C 的交点坐标为 $(\frac{2}{\sqrt{5}}b, \frac{2}{\sqrt{5}}b)$, 所以四边形的面积为 $4 \times \frac{2}{\sqrt{5}}b \times$

$\frac{2}{\sqrt{5}}b = \frac{16}{5}b^2 = 16$,

解得 $b^2 = 5, a^2 = 4b^2 = 20$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$.

8. 设 O 为坐标原点, 直线 $x = a$ 与双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线分别交于 D, E 两点. 若 $\triangle ODE$ 的面积为 8, 则 C 的焦距的最小值为 ()

- A. 4 B. 8 C. 16 D. 32

B 解析: 因为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$,

所以双曲线的渐近线方程是 $y = \pm \frac{b}{a}x$.

直线 $x = a$ 与双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的

两条渐近线分别交于 D, E 两点,

不妨设 D 在第一象限, E 在第四象限.

联立 $\begin{cases} x = a, \\ y = \frac{b}{a}x, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = a, \\ y = b. \end{cases}$ 故 $D(a, b)$.

联立 $\begin{cases} x = a, \\ y = -\frac{b}{a}x, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = a, \\ y = -b. \end{cases}$ 故 $E(a, -b)$.

所以 $|ED| = 2b$,

所以 $\triangle ODE$ 的面积为 $S_{\triangle ODE} = \frac{1}{2} \times a \times 2b = ab = 8$.

因为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 所以其焦

距为 $2c = 2\sqrt{a^2 + b^2} \geq 2\sqrt{2ab} = 2\sqrt{16} = 8$, 当且仅当 $a = b = 2\sqrt{2}$ 时, 等号成立.

所以 C 的焦距的最小值为 8.

二、多项选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的两个焦点为 F_1, F_2 , P 是 C 上任意一点, 则 ()

- A. $|PF_1| + |PF_2| = 4$ B. $|F_1F_2| = 2\sqrt{21}$
C. $|PF_1| \leq 5 + \sqrt{21}$ D. $|PF_1| \cdot |PF_2| \leq 25$

BCD 解析: 对 A, B, 设该椭圆的长轴长、短轴长、焦距分别为 $2a, 2b, 2c$,

因为 $4 < 25$, 所以 $a^2 = 25, b^2 = 4, c^2 = 25 - 4 = 21$,

所以 $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 10, |F_1F_2| = 2c = 2\sqrt{21}$, 故 A 错误, B 正确;

对 C, 设 $F_1(-\sqrt{21}, 0)$,

则当点 P 为椭圆的右顶点时, $|PF_1|_{\max} = \sqrt{21} + 5$,

即 $|PF_1| \leq \sqrt{21} + 5$, 当 $P(5, 0)$ 时, 等号成立, 故 C 正确;

对 D, 由椭圆的定义及基本不等式可知 $|PF_1| \cdot |PF_2| \leq \left(\frac{|PF_1| + |PF_2|}{2}\right)^2 = 25$, 当且仅当 $|PF_1| = |PF_2| = 5$ 时, 等号成立, 故 D 正确.

10. (2024 · 新高考全国 II 卷) 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的准线为 l , P 为 C 上的动点. 过 P 作 $\odot A: x^2 + (y - 4)^2 = 1$ 的一条切线, Q 为切点. 过 P 作 l 的垂线, 垂足为 B. 则 ()

- A. l 与 $\odot A$ 相切
B. 当 P, A, B 三点共线时, $|PQ| = \sqrt{15}$
C. 当 $|PB| = 2$ 时, $PA \perp AB$
D. 满足 $|PA| = |PB|$ 的点 P 有且仅有 2 个

ABD 解析: A 选项, 抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线方程为 $x = -1$,

$\odot A$ 的圆心 $A(0, 4)$ 到直线 $x = -1$ 的距离为 1, 等于圆的半径,

故准线 l 与 $\odot A$ 相切, A 选项正确.

B 选项, 当 P, A, B 三点共线时, 即 $PA \perp l$, 则 $y_P = 4$,

由 $y_P^2 = 4x_P$, 得 $x_P = 4$, 故 $P(4, 4)$,

此时 $|PA| = 4$, 切线长 $|PQ| = \sqrt{|PA|^2 - r^2} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$, B 选项正确.

C 选项, 当 $|PB| = 2$ 时, $x_P = 1$, 此时 $y_P^2 = 4x_P = 4$, 则 $y_P = \pm 2$, 故 $P(1, 2)$ 或 $P(1, -2)$,

当 $P(1, 2)$ 时, $B(-1, 2)$, 又 $A(0, 4)$, 所以 $k_{PA} =$

$$\frac{4-2}{0-1} = -2, k_{AB} = \frac{4-2}{0-(-1)} = 2,$$

不满足 $k_{PA}k_{AB} = -1$;

当 $P(1, -2)$ 时, $B(-1, -2)$, 又 $A(0, 4)$, 所以

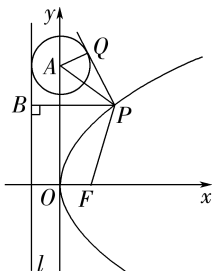
$$k_{PA} = \frac{4-(-2)}{0-1} = -6, k_{AB} = \frac{4-(-2)}{0-(-1)} = 6,$$

不满足 $k_{PA}k_{AB} = -1$,

于是 $PA \perp AB$ 不成立, C 选项错误.

D 选项, (方法一: 利用抛物线定义转化)

如图, 根据抛物线的定义, 可得 $|PB| = |PF|$,



于是 $|PA| = |PB|$ 时点 P 的存在性问题转化成 $|PA| = |PF|$ 时点 P 的存在性问题.

因为 $A(0, 4)$, $F(1, 0)$, AF 的中点为 $(\frac{1}{2}, 2)$, 所以

线段 AF 中垂线的斜率为 $-\frac{1}{k_{AF}} = \frac{1}{4}$,

线段 AF 的中垂线方程为 $y = \frac{1}{4}x + \frac{15}{8}$. 与抛物线方程 $y^2 = 4x$ 联立消去 x , 可得 $y^2 - 16y + 30 = 0$, $\Delta = 16^2 - 4 \times 30 = 136 > 0$, 所以 AF 的中垂线和抛物线有两个交点,

即存在两个点 P , 使得 $|PA| = |PF|$, D 选项正确. (方法二: 设点直接求解)

设 $P(\frac{t^2}{4}, t)$, 由 $PB \perp l$, 可得 $B(-1, t)$, 又 $A(0, 4)$, $|PA| = |PB|$,

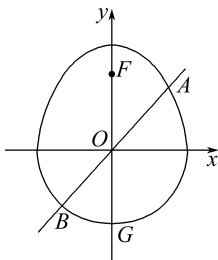
所以根据两点间的距离公式, 得 $\sqrt{\frac{t^4}{16} + (t-4)^2} = \frac{t^2}{4} + 1$, 整理得 $t^2 - 16t + 30 = 0$,

$\Delta = 16^2 - 4 \times 30 = 136 > 0$, 则关于 t 的方程有两个不相等的解,

即存在两个这样的点 P , 使得 $|PA| = |PB|$, D 选项正确.

故选 ABD.

11. 某载人飞船返回舱的轴截面可近似地看作是由半圆和半椭圆组成的“曲圆”, 如图. 在平面直角坐标系中, 半圆的圆心在坐标原点, 半圆所在的圆过椭圆的焦点 $F(0, 2)$, 椭圆的短轴与半圆的直径重



合, 半圆与 y 轴交于点 G . 若过原点 O 的直线与半椭圆交于点 A , 与半圆交于点 B , 则 ()

A. 椭圆的长轴长为 $4\sqrt{2}$

B. 线段 AB 长度的最大值为 $2+2\sqrt{2}$

C. $\triangle AFG$ 的周长为 $4+4\sqrt{2}$

D. 在 x 轴上方的半椭圆上存在 M, N 两点, 使得

$$\angle FMG = \angle FNG = \frac{\pi}{2}$$

ABC 解析: 由题意可知, 椭圆的半焦距 $c=2$, 短半轴长 $b=2$, 得长半轴长 $a=2\sqrt{2}$, 则椭圆的长轴长为 $2a=4\sqrt{2}$, 故 A 正确;

因为 $2 \leq |OA| \leq 2\sqrt{2}$, $|OB|=2$, 所以 $|AB| = |OA| + |OB| \in [4, 2+2\sqrt{2}]$, 故 B 正确;

因为点 F, G 是椭圆的两个焦点, 所以 $\triangle AFG$ 的周长为 $|FG| + |AF| + |AG| = 4 + 2a = 4 + 4\sqrt{2}$, 故 C 正确;

由题意知 $|MF| < |MG|$, 在 $\triangle MFG$ 中,

$$\cos \angle FMG = \frac{|MF|^2 + |MG|^2 - |FG|^2}{2|MF| \cdot |MG|} = \frac{\frac{1}{2}[(|MF| + |MG|)^2 + (|MF| - |MG|)^2] - |FG|^2}{2|MF| \cdot |MG|}$$

$\frac{1}{2} \times (4\sqrt{2})^2 - 4^2 > \frac{1}{2|MF| \cdot |MG|} = 0$, 所以 $\angle FMG$ 不可能为直角, 所以在 x 轴上方的半椭圆上不存在点 M , 使得

$\angle FMG = \frac{\pi}{2}$, 故 D 错误.

故选 ABC.

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. (2024 · 新高考全国 I 卷) 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 作平行于 y 轴的直线交 C 于 A, B 两点, 若 $|F_1A| = 13$, $|AB| = 10$, 则 C 的离心率为 _____.

$\frac{3}{2}$ 解析: 由题可知 A, B, F_2 三点横坐标相等, 设

A 在第一象限, 将 $x=c$ 代入 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,

得 $y = \pm \frac{b^2}{a}$, 即 $A(c, \frac{b^2}{a})$, $B(c, -\frac{b^2}{a})$, 所以 $|AB| = \frac{2b^2}{a} = 10$, $|F_2A| = \frac{b^2}{a} = 5$.

由 $|F_1A| - |F_2A| = 2a$, 得 $|F_1A| = |F_2A| + 2a = 5 + 2a = 13$, 解得 $a=4$, 代入 $\frac{b^2}{a} = 5$, 得 $b^2=20$,

则 $c^2 = a^2 + b^2 = 36$, 即 $c=6$, 所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

13. 给出四个命题: ①方程 $x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0$ 表示的图形是圆; ②椭圆 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$; ③抛物线 $x = 2y^2$ 的准线方程是 $x = -\frac{1}{8}$; ④双曲线 $\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{25} = -1$ 的渐近线方程是 $y = \pm \frac{5}{7}x$. 其中是假命题的是_____。(填序号)

①②④ 解析: ①方程表示的图形是一个点 $(1, 0)$; ② $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$; ④渐近线方程为 $y = \pm \frac{7}{5}x$; ③正确.

14. 如图, 设椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过焦点 F_1 的直线交椭圆于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点. 若 $\triangle ABF_2$ 的内切圆的面积为 π , 则 $\triangle ABF_2$ 的面积为_____, $|y_1 - y_2| =$ _____.

6 3 解析: 因为 $\triangle ABF_2$ 的内切圆的面积为 π , 所以 $\triangle ABF_2$ 内切圆的半径 $r = 1$,

所以 $\triangle ABF_2$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times 1 \times (|AB| + |AF_2| + |BF_2|) = 2a = 6$.

又 $\triangle ABF_2$ 的面积 $S = \frac{1}{2} |y_1 - y_2| \times 2c = \frac{1}{2} |y_1 - y_2| \times 2 \times 2 = 6$,

所以 $|y_1 - y_2| = 3$.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分) 双曲线 C 与椭圆 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 有相同的焦点, 直线 $y = \sqrt{3}x$ 为 C 的一条渐近线. 求双曲线 C 的方程.

解: 由题意设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$.

由椭圆 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$,

求得两焦点分别为 $(-2, 0), (2, 0)$,

所以对于双曲线 C 可得 $c = 2$.

又 $y = \sqrt{3}x$ 为双曲线 C 的一条渐近线,

所以 $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$, 解得 $a^2 = 1, b^2 = 3$,

所以双曲线 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

16. (15 分) 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 点 M 在抛物线上, 且 $|MF| = 6$, MN 垂直于 x 轴, 垂足为点 N .

(1) 求点 M 的横坐标;

(2) 求 $\triangle MNF$ 的面积.

解: (1) 由抛物线方程为 $y^2 = 4x$, 可得 $p = 2$ 且焦点为 $F(1, 0)$, 设点 $M(x_1, y_1)$.

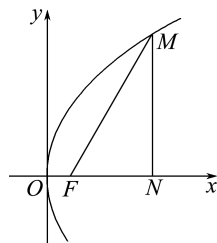
因为 $|MF| = 6$, 由抛物线的定义, 可得 $|MF| = x_1 + \frac{p}{2} = x_1 + 1 = 6$,

解得 $x_1 = 5$, 即点 M 的横坐标为 5.

(2) 由 (1) 知 $x_1 = 5$, 代入抛物线方程, 可得 $y_1^2 = 20$, 解得 $y_1 = \pm 2\sqrt{5}$.

又因为 $MN \perp x$ 轴于点 N (如图), 且 $F(1, 0)$, 所以 $N(5, 0)$,

所以 $S_{\triangle MNF} = \frac{1}{2} |NF| \cdot |y_1| = \frac{1}{2} \times (5 - 1) \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.



17. (15 分) (2024 · 北京卷) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

($a > b > 0$), 以椭圆 E 的焦点和短轴端点为顶点的四边形是边长为 2 的正方形. 过点 $(0, t)$ ($t > \sqrt{2}$) 且斜率存在的直线与椭圆 E 交于不同的两点 A, B , 过点 A 和 $C(0, 1)$ 的直线 AC 与椭圆 E 的另一个交点为 D .

(1) 求椭圆 E 的方程及离心率;

(2) 若直线 BD 的斜率为 0, 求 t 的值.

解: (1) 由题意可知 $b = \sqrt{2}, c = \sqrt{2}$,

所以 $a = \sqrt{b^2 + c^2} = 2$,

故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, 离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 AB 的方程为 $y = kx + t$ ($k \neq 0$),

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, \\ y = kx + t, \end{cases}$ 得 $(1 + 2k^2)x^2 + 4ktx + 2t^2 - 4 = 0$.

所以 $\Delta = (4kt)^2 - 4(1 + 2k^2)(2t^2 - 4) > 0$, 即 $4k^2 - t^2 + 2 > 0$.

由根与系数的关系得 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{4kt}{1 + 2k^2}, \\ x_1 x_2 = \frac{2t^2 - 4}{1 + 2k^2}, \end{cases}$ ①

因为直线 BD 的斜率为 0, 所以由椭圆的对称性可

得 $D(-x_2, y_2)$.

因为 A, C, D 三点共线, 所以 $k_{AC} = k_{CD}$,

所以 $\frac{y_1-1}{x_1} = \frac{y_2-1}{-x_2}$, 即 $x_1y_2 + x_2y_1 - (x_1 + x_2) = 0$.

由 $y_1 = kx_1 + t, y_2 = kx_2 + t$, 得 $x_1(kx_2 + t) + x_2(kx_1 + t) - (x_1 + x_2) = 0$,

整理得 $2kx_1x_2 + (t-1)(x_1 + x_2) = 0$, ②

所以 $2k \cdot \frac{2t^2-4}{1+2k^2} + (t-1) \cdot \frac{-4kt}{1+2k^2} = 0$,

解得 $t=2$.

18. (17分) 已知 O 为坐标原点, 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

($a>0, b>0$) 的离心率为 $\sqrt{3}$, 点 P 在双曲线 C 上, 点 F_1, F_2 分别为双曲线 C 的左、右焦点, $||PF_1| - |PF_2|| = 2$.

(1) 求双曲线 C 的标准方程.

(2) 已知点 $A(-1, 0), B(1, 0)$, 设直线 PA, PB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 求证: k_1k_2 为定值.

(1) 解: 因为 $||PF_1| - |PF_2|| = 2$, 由双曲线的定义知 $2a=2$, 所以 $a=1$.

又因为 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{3}$, 所以 $c = \sqrt{3}$, 所以 $b^2 = c^2 - a^2 = 2$,

所以双曲线 C 的标准方程为 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 证明: 设 $P(x_0, y_0)$, 则 $x_0^2 - \frac{y_0^2}{2} = 1$.

因为 $A(-1, 0), B(1, 0)$,

所以 $k_1 = \frac{y_0}{x_0+1}, k_2 = \frac{y_0}{x_0-1}$,

所以 $k_1k_2 = \frac{y_0}{x_0+1} \cdot \frac{y_0}{x_0-1} = \frac{y_0^2}{x_0^2-1} = \frac{y_0^2}{\left(1+\frac{y_0^2}{2}\right)-1} = 2$.

故 k_1k_2 为定值 2.

19. (17分) 已知 l_1, l_2 是过点 $(0, 2)$ 的两条互相垂直的直线, 且 l_1 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 相交于 A, B 两点, l_2 与椭圆相交于 C, D 两点.

(1) 求直线 l_1 的斜率 k 的取值范围;

(2) 若线段 AB, CD 的中点分别为 M, N , 求证: 直

线 MN 经过一个定点, 并求出此定点的坐标.

(1) 解: 根据题意, 直线 l_1, l_2 的斜率均存在且不为 0,

则直线 l_1, l_2 的方程分别为 $y = kx + 2, y = -\frac{1}{k}x + 2$.

联立 $\begin{cases} y = kx + 2, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases}$ 消去 y , 得 $(4k^2 + 1)x^2 + 16kx + 12 = 0$.

由 $\Delta = (16k)^2 - 4 \times 12(4k^2 + 1) > 0$, 得 $4k^2 > 3$, 则

$k < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $k > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

同理 $4\left(-\frac{1}{k}\right)^2 > 3$, 则 $-\frac{2\sqrt{3}}{3} < k < \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

所以 k 的取值范围为 $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

(2) 证明: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由 (1) 知 $(4k^2 + 1)x^2 + 16kx + 12 = 0$,

所以 $x_1 + x_2 = -\frac{16k}{4k^2 + 1}$, 则 $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{8k}{4k^2 + 1}$,

所以 $y_M = kx_M + 2 = -\frac{8k^2}{4k^2 + 1} + 2 = \frac{2}{4k^2 + 1}$, 则

$M\left(-\frac{8k}{4k^2 + 1}, \frac{2}{4k^2 + 1}\right)$.

同理 $N\left(\frac{8k}{k^2 + 4}, \frac{2k^2}{k^2 + 4}\right)$,

则直线 MN 的方程为 $y - \frac{2}{4k^2 + 1} =$

$\frac{\frac{2k^2}{k^2 + 4} - \frac{2}{4k^2 + 1}}{\frac{8k}{k^2 + 4} + \frac{8k}{4k^2 + 1}} \left(x + \frac{8k}{4k^2 + 1}\right)$,

化简整理得 $y = \frac{k^2 - 1}{5k}x + \frac{2}{5}$.

因此直线 MN 经过一个定点, 该定点的坐标为 $\left(0, \frac{2}{5}\right)$.

模块测试卷

(考查范围:选择性必修 第一册 时间:120 分钟 分值:150 分)

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知 $A(3,4), B(-1,0)$, 则过 AB 的中点且倾斜角为 120° 的直线的方程是 ()

- A. $\sqrt{3}x - y + 2 - \sqrt{3} = 0$
 B. $\sqrt{3}x - y + 1 - 2\sqrt{3} = 0$
 C. $\sqrt{3}x + y - 2 - \sqrt{3} = 0$
 D. $\sqrt{3}x + 3y - 6 - \sqrt{3} = 0$

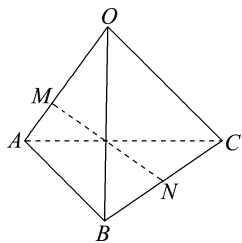
C 解析: 设 AB 的中点为 M , 则 M 的坐标为 $(1, 2)$, 又斜率 $k = -\sqrt{3}$, 所以直线的方程为 $y - 2 = -\sqrt{3}(x - 1)$, 即 $\sqrt{3}x + y - 2 - \sqrt{3} = 0$.

2. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, 椭圆上一点 P 到两焦点距离之和为 12, 则椭圆的短轴长为 ()

- A. 8 B. 6 C. 5 D. 4

A 解析: 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 椭圆上一点 P 到两焦点距离之和为 12, 即 $2a = 12$, 可得 $a = 6, c = 2\sqrt{5}$, 所以 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{36 - 20} = 4$, 则椭圆的短轴长为 $2b = 8$.

3. 如图, 在空间四边形 $OABC$ 中, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, 点 M 在 OA 上, $\overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$, 点 N 为 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{MN} =$ ()



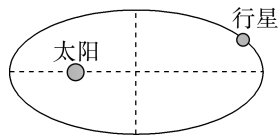
- A. $\frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$ B. $-\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$
 C. $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{c}$ D. $\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{c}$

B 解析: 连接 ON (图略),

$$\text{因为 } \overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{2}{3}\mathbf{a}, \text{ 点 } N \text{ 为 } BC \text{ 的中点, 则 } \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}),$$

$$\text{于是, } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) - \frac{2}{3}\mathbf{a} = -\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}.$$

4. 开普勒第一定律指出, 所有行星绕太阳运动的轨道都是椭圆, 太阳处在椭圆的一个焦点上. 如图, 若某行星距太阳表面的最大距离为 ρ , 最小距离 μ , 太阳半径为 r , 则该行星运行轨迹椭圆的离心率为 ()



- A. $\frac{\rho - \mu}{\rho + \mu + 2r}$ B. $\frac{\rho + 2r - \mu}{\rho + \mu}$
 C. $\frac{\rho + \mu}{\rho - \mu + 2r}$ D. $\frac{\rho + \mu + 2r}{\rho - \mu}$

A 解析: 设椭圆的焦距为 $2c$, 长轴长为 $2a$, 则由已知可得 $\rho = a + c - r, \mu = a - c - r$, 两式相加可得 $\rho + \mu = 2a - 2r$, 两式相减可得 $\rho - \mu = 2c$,

$$\text{则 } a = \frac{\rho + \mu + 2r}{2}, c = \frac{\rho - \mu}{2}, \text{ 所以离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{\rho - \mu}{\rho + \mu + 2r}.$$

5. 已知圆 $C: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$, 点 $N(3, 4), M$ 为圆 C 上的动点, P 为 x 轴上的动点, 则 $|PM| + |PN|$ 的最小值为 ()

- A. $5\sqrt{2} - 1$ B. $5\sqrt{2}$
 C. $2\sqrt{10} - 1$ D. $2\sqrt{10}$

C 解析: 圆 $C: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$, 圆心 $C(1, 2)$, 半径为 $r = 1$,

则圆心 $C(1, 2)$ 关于 x 轴的对称点为 $C_1(1, -2)$,

$$\text{则 } (|PC_1| + |PN|)_{\min} = |NC_1| = \sqrt{(3 - 1)^2 + (4 + 2)^2} = 2\sqrt{10},$$

当且仅当 P, N, C_1 三点共线时取得最小值.

结合图象(图略)可知 $(|PM| + |PN|)_{\min} = |NC_1|$

$$-r = 2\sqrt{10} - 1.$$

故选 C.

6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 以 F_1F_2 为直径的圆与双曲线渐近线的一个交点为 $A(3, 4)$, 则此双曲线的方程为 ()

A. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ B. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$

C. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

C 解析: 由已知可得交点 $A(3, 4)$ 到原点 O 的距离为圆的半径,

则半径 $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, 故 $c = 5$,

所以 $a^2 + b^2 = 25$, 又双曲线的一条渐近线 $y = \frac{b}{a}x$

过点 $A(3, 4)$, 即 $3b = 4a$.

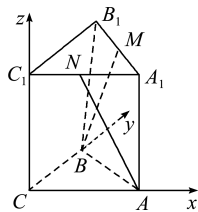
$$\text{联立} \begin{cases} a^2 + b^2 = 25, \\ 3b = 4a, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = 3, \\ b = 4. \end{cases}$$

所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. 故选 C.

7. 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BCA = 90^\circ$, M, N 分别是 A_1B_1, A_1C_1 的中点, $BC = CA = CC_1$, 则 BM 与 AN 所成角的余弦值为 ()

A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{\sqrt{30}}{10}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

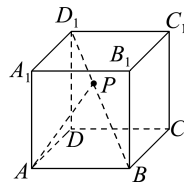
C 解析: 由题意建立如图所示的空间直角坐标系 $Cxyz$,



设 $BC = 2$, 则 $B(0, 2, 0), A(2, 0, 0), M(1, 1, 2), N(1, 0, 2)$, 所以 $\overrightarrow{BM} = (1, -1, 2), \overrightarrow{AN} = (-1, 0, 2)$. 设 BM 与 AN 所成的角为 θ , 所以 $\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AN}|}{|\overrightarrow{BM}| |\overrightarrow{AN}|} = \frac{3}{\sqrt{6} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$.

8. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 若动点 P 在线段 BD_1 上运动, 则 $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AP}$ 的取值范围是 ()
- A. $(0, 1)$ B. $[0, 1)$ C. $[0, 1]$ D. $[-1, 1]$

C 解析: 如图,



由题意, 设 $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BD_1}$, 其中 $\lambda \in [0, 1]$, $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}) = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{BD_1}) = \overrightarrow{AB}^2 + \lambda \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD_1} = 1 + \sqrt{3}\lambda \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1 - \lambda \in [0, 1]$.

因此 $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AP}$ 的取值范围是 $[0, 1]$.

二、多项选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 若方程 $\frac{x^2}{3-t} + \frac{y^2}{t-1} = 1$ 所表示的曲线为 C , 则下列

命题错误的是 ()

A. 当 $1 < t < 3$ 时, C 为椭圆

B. 当 $t > 3$ 或 $t < 1$ 时, C 为双曲线

C. 若 C 为椭圆, 则长轴长为 $2\sqrt{3-t}$

D. 若 C 为双曲线, 则焦距为 $2\sqrt{4-2t}$

ACD 解析: 当 $\frac{x^2}{3-t} + \frac{y^2}{t-1} = 1$ 表示椭圆时, 则

$$\begin{cases} 3-t > 0, \\ t-1 > 0, \\ 3-t \neq t-1, \end{cases} \text{ 所以 } 1 < t < 3 \text{ 且 } t \neq 2, \text{ 故 A 错误;}$$

当 $\frac{x^2}{3-t} + \frac{y^2}{t-1} = 1$ 表示双曲线时, 则 $(3-t)(t-1) < 0$, 解得 $t > 3$ 或 $t < 1$, 故 B 正确;

当 $1 < t < 2$ 时, C 表示焦点在 x 轴上的椭圆, 则长轴长为 $2\sqrt{3-t}$, 当 $2 < t < 3$ 时, C 表示焦点在 y 轴上的椭圆, 则长轴长为 $2\sqrt{t-1}$, 故 C 错误;

当 $t < 1$ 时, C 表示焦点在 x 轴上的双曲线, 则焦距为 $2\sqrt{4-2t}$, 当 $t > 3$ 时, C 表示焦点在 y 轴上的双曲线, 则焦距为 $2\sqrt{2t-4}$, 故 D 错误.

故选 ACD.

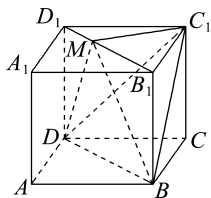
10. 已知点 P 是平行四边形 $ABCD$ 所在的平面外一点, 如果 $\overrightarrow{AB} = (2, -1, -4), \overrightarrow{AD} = (4, 2, 0), \overrightarrow{AP} = (-1, 2, -1)$, 那么下列结论正确的是 ()
- A. $AP \perp AB$
B. $AP \perp AD$
C. $\overrightarrow{AP}$ 是平面 $ABCD$ 的一个法向量
D. $\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{BD}$

ABC 解析: 因为 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$, 所以 $AB \perp AP, AD \perp AP$, 故 A, B 正确.

又 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 不平行, 所以 $\overrightarrow{AP}$ 是平面 $ABCD$ 的一个法向量, 故 C 正确.

因为 $BD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $AP \perp BD$, 故 D 不正确.

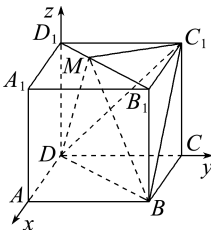
11. 如图, 棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为线段 B_1D_1 上的动点 (包括端点), 则下列结论正确的是 ()



- A. 当点 M 为 B_1D_1 的中点时, $C_1M \perp$ 平面 BB_1D_1D
 B. 当点 M 在线段 B_1D_1 上运动时, 三棱锥 C_1-BDM 的体积为定值
 C. 当点 M 为 B_1D_1 的中点时, 直线 DM 与直线 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

- D. 点 M 到线段 BC_1 距离的最小值为 $\frac{1}{3}$

AB 解析: 如图, 以 D 为坐标原点, 建立空间直角坐标系,



则 $D(0,0,0), B(1,1,0), D_1(0,0,1), C_1(0,1,1), C(0,1,0)$.

对于选项 A, $\overrightarrow{DB} = (1,1,0), \overrightarrow{DD_1} = (0,0,1)$, 设平面 BB_1D_1D 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DB} = x + y = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DD_1} = z = 0, \end{cases} \quad \text{令 } x = 1, \text{ 则 } y = -1, z = 0, \text{ 所以}$$

以 $\mathbf{n} = (1, -1, 0)$ 为平面 BB_1D_1D 的一个法向量, 当点 M 为 B_1D_1 中点时, 则 $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$, 可得

$$\overrightarrow{C_1M} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right),$$

因为 $\mathbf{n} = 2\overrightarrow{C_1M}$, 即 $\mathbf{n}$ 与 $\overrightarrow{C_1M}$ 共线, 所以 $C_1M \perp$ 平面 BB_1D_1D , 故 A 正确;

对于选项 B, 由选项 A 可知点 C_1 到平面 BB_1D_1D

的距离为 $\frac{1}{2}|\mathbf{n}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以三棱锥 C_1-BDM 的体积 $V_{C_1-BDM} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times$

$\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 1 = \frac{1}{6}$, 为定值, 故 B 正确;

对于选项 C, 当点 M 为 B_1D_1 中点时, 则 $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$, 可得 $\overrightarrow{DM} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right), \overrightarrow{CB} = (1, 0, 0)$,

$$\text{因为 } \cos \langle \overrightarrow{DM}, \overrightarrow{CB} \rangle = \frac{\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{DM}| |\overrightarrow{CB}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2} \times 1} = \frac{\sqrt{6}}{6},$$

所以直线 DM 与直线 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$,

故 C 错误;

对于选项 D, 设 $M(a, a, 1), a \in [0, 1]$, 则 $\overrightarrow{BM} = (a-1, a-1, 1), \overrightarrow{BC_1} = (-1, 0, 1)$,

$$\overrightarrow{BM} \text{ 在 } \overrightarrow{BC_1} \text{ 上的投影为 } \frac{\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{BC_1}|} = \frac{2-a}{\sqrt{2}}, \text{ 且 } |\overrightarrow{BM}|^2 =$$

$$= 2(a-1)^2 + 1,$$

则点 M 到线段 BC_1 的距离为

$$\sqrt{2(a-1)^2 + 1 - \left(\frac{2-a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}\left(a - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}},$$

所以当 $a = \frac{2}{3}$ 时, 点 M 到线段 BC_1 距离取到最小

值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故 D 错误.

故选 AB.

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. A, B, C, D 是空间不共面的四点, 且 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, 则 $\triangle BCD$ 的形状是 _____ 三角形. (填“锐角”“直角”或“钝角”)

锐角 解析: 因为 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}^2 > 0$,

所以 $\angle CBD$ 为锐角.

同理可证 $\angle BCD, \angle BDC$ 均为锐角,

故 $\triangle BCD$ 是锐角三角形.

13. 若双曲线 $y^2 - \frac{x^2}{m^2} = 1 (m > 0)$ 的渐近线与圆 $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ 相切, 则 $m =$ _____.

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 解析: 双曲线 $y^2 - \frac{x^2}{m^2} = 1 (m > 0)$ 的渐近线为

$y = \pm \frac{x}{m}$, 即 $x \pm my = 0$, 不妨取 $x + my = 0$.

圆 $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$, 即 $x^2 + (y - 2)^2 = 1$, 所以圆心为 $(0, 2)$, 半径 $r = 1$.

依题意圆心 $(0, 2)$ 到渐近线 $x + my = 0$ 的距离 $d =$

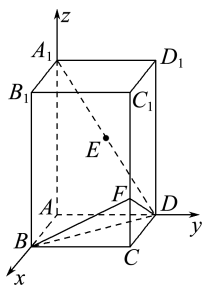
$$\frac{|2m|}{\sqrt{1+m^2}} = 1,$$

解得 $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (舍去).

故答案为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

14. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面是边长为 1 的正方形, $AA_1 = 2$, E 为 A_1D 的中点, F 为 CC_1 靠近点 C 的三等分点, 则点 E 到平面 BDF 的距离为 _____.

$\frac{4\sqrt{17}}{17}$ 解析: 以 A 为坐标原点, AB, AD, AA_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $B(1, 0, 0), D(0, 1, 0), A_1(0, 0, 2), E(0, \frac{1}{2}, 1)$,

$F(1, 1, \frac{2}{3})$,

所以 $\overrightarrow{BD} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{BF} = (0, 1, \frac{2}{3}), \overrightarrow{BE} = (-1, \frac{1}{2}, 1)$.

设平面 BDF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BF} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} -x + y = 0, \\ y + \frac{2}{3}z = 0. \end{cases}$$

令 $z = -3$, 则 $x = 2, y = 2$, 所以 $\mathbf{n} = (2, 2, -3)$ 为平面 BDF 的一个法向量,

所以点 E 到平面 BDF 的距离 $d = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BE}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分) 已知圆 C 经过点 $A(2, -1)$, 和直线 $x + y = 1$ 相切, 且圆心在直线 $y = -2x$ 上.

(1) 求圆 C 的方程;

(2) 已知直线 l 经过原点, 并且被圆 C 截得的弦长为 2, 求直线 l 的方程.

解: (1) 设圆心 $C(a, -2a)$,

$$\text{则} \sqrt{(a-2)^2 + (-2a+1)^2} = \frac{|a-2a-1|}{\sqrt{2}},$$

化简, 得 $a^2 - 2a + 1 = 0$, 解得 $a = 1$.

所以圆心为 $C(1, -2)$,

$$\text{半径} r = |AC| = \sqrt{(1-2)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{2}.$$

所以圆 C 的方程为 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$.

(2) ① 当直线 l 的斜率不存在时, 直线 l 的方程为 $x = 0$, 此时直线 l 被圆 C 截得的弦长为 2, 满足条件.

② 当直线 l 的斜率存在时, 设直线 l 的方程为 $y =$

$$kx, \text{由题意得} \frac{|k+2|}{\sqrt{1+k^2}} = 1, \text{解得} k = -\frac{3}{4},$$

所以直线 l 的方程为 $y = -\frac{3}{4}x$,

即 $3x + 4y = 0$.

综上所述, 直线 l 的方程为 $x = 0$ 或 $3x + 4y = 0$.

16. (15 分) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的

一个焦点为 $(2\sqrt{5}, 0)$, 一条渐近线方程为 $2x - y = 0$, O 为坐标原点.

(1) 求双曲线 C 的标准方程;

(2) 已知倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$ 的直线 l 与双曲线 C 交于 A, B 两点, 且线段 AB 的中点的纵坐标为 4, 求弦长 $|AB|$.

解: (1) 由一个焦点为 $(-2\sqrt{5}, 0)$, 可知 $c = 2\sqrt{5}$,

又一条渐近线方程为 $2x - y = 0$, 所以 $\frac{b}{a} = 2$.

由 $c^2 = a^2 + b^2$, 可得 $20 = a^2 + 4a^2$, 解得 $a^2 = 4, b^2 = 16$,

故双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$.

(2) 设直线 l 的斜率为 $k, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 线段 AB 中点的坐标为 $(x_0, 4)$,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{16} = 1, \\ \frac{x_2^2}{4} - \frac{y_2^2}{16} = 1, \end{cases}$$

两式相减得 $16(x_2^2 - x_1^2) = 4(y_2^2 - y_1^2)$,

即 $16(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = 4(y_2 - y_1)(y_2 + y_1)$,

化简得 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4(x_2 + x_1)}{y_2 + y_1} = \frac{4x_0}{4} = x_0$, 又 k

$= \tan \frac{3\pi}{4} = -1$, 所以 $x_0 = -1$,

所以 AB 中点的坐标为 $(-1, 4)$.

所以直线 l 的方程为 $y - 4 = -(x + 1)$, 即 $x + y - 3 = 0$.

由 $x + y - 3 = 0$, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$, 得 $3x^2 + 6x - 25 = 0$,

$\Delta = 36 + 4 \times 3 \times 25 = 336 > 0$,

则 $x_1 + x_2 = -2$, $x_1 x_2 = -\frac{25}{3}$,

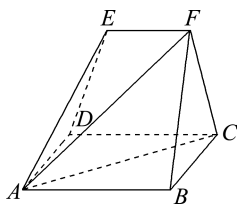
$|AB| = \sqrt{2} |x_1 - x_2| = \sqrt{2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} =$

$\sqrt{2} \times \sqrt{4 + 4 \times \frac{25}{3}} = \frac{4\sqrt{42}}{3}$.

17. (15分) 如图, 在五面体 $ABCDEF$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, 侧面 $CDEF$ 为等腰梯形, $EF \parallel CD$, 平面 $CDEF \perp$ 平面 $ABCD$, $AB = 2EF = 4$, $AF = 13$.

(1) 求直线 EF 到平面 $ABCD$ 的距离;

(2) 求直线 AC 与平面 ABF 所成角的正弦值.



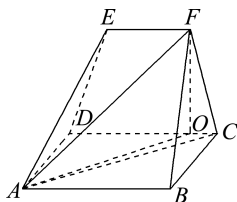
解: (1) 因为侧面 $CDEF$ 为等腰梯形,

$EF \parallel CD$, $EF \not\subset$ 平面 $ABCD$, $CD \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $EF \parallel$ 平面 $ABCD$,

则直线 EF 到平面 $ABCD$ 的距离就是点 F 到平面 $ABCD$ 的距离.

如图, 过点 F 作 $FO \perp DC$ 于点 O , 连接 OA .



因为平面 $CDEF \perp$ 平面 $ABCD$,

又平面 $CDEF \cap$ 平面 $ABCD = CD$, $FO \subset$ 平面 $CDEF$,

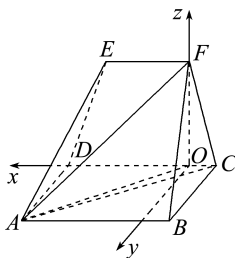
所以 $FO \perp$ 平面 $ABCD$. 因为 $OA \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $FO \perp OA$.

因为四边形 $CDEF$ 为等腰梯形, $AB = CD = 2EF = 4$,

所以 $OD = 3$, 所以 $AO = 5$.

又 $AF = 13$, 所以 $FO = 12$, 即直线 EF 到平面 $ABCD$ 的距离为 12.

(2) 如图, 以 O 为坐标原点, 分别以 OD, OF 所在直线为 x 轴, z 轴, 过点 O 且垂直于平面 $CDEF$ 的直线为 y 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$.



则 $A(3, 4, 0)$, $B(-1, 4, 0)$, $C(-1, 0, 0)$, $F(0, 0, 12)$,

所以 $\overrightarrow{AF} = (-3, -4, 12)$, $\overrightarrow{AB} = (-4, 0, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-4, -4, 0)$.

设平面 ABF 的法向量为 $m = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot m = 0, \\ \overrightarrow{AF} \cdot m = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} -4x = 0, \\ -3x - 4y + 12z = 0. \end{cases}$$

令 $z = 1$, 则 $x = 0$, $y = 3$, 所以 $m = (0, 3, 1)$ 为平面 ABF 的一个法向量.

设直线 AC 与平面 ABF 的夹角为 α ,

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= |\cos \langle \overrightarrow{AC}, m \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot m|}{|\overrightarrow{AC}| |m|} = \frac{12}{\sqrt{32} \times \sqrt{10}} \\ &= \frac{3\sqrt{5}}{10}. \end{aligned}$$

18. (17分) 如图, 已知在几何体 $ABCDE$ 中, $\triangle ABC$

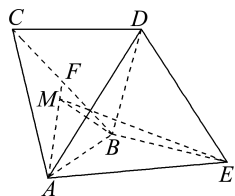
是边长为 4 的正三角形, $CD = DE = 2\sqrt{3}$, $AE =$

BE , $\cos \angle ACD = \cos \angle BCD = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 二面角 $D-AB-$

E 的大小为 $\frac{\pi}{3}$, F 为线段 BC 的中点.

(1) 证明: $DE \parallel$ 平面 ABC ;

(2) 点 M 为线段 AF 上的动点 (不包括端点), 求平面 ABC 与平面 BEM 所成角的余弦值的最大值, 并说明此时点 M 的位置.



(1)证明:因为 $CA=CB=4, CD=2\sqrt{3}, \cos\angle ACD = \cos\angle BCD = \frac{\sqrt{3}}{4}$,

由余弦定理得 $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cos\angle ACD} = 4$, 同理可得 $BD=4$.

如图,取线段 AB 的中点 O ,连接 CO, DO, OE , 所以 $AB \perp CO, AB \perp DO, AB \perp OE$, 所以 $CO = DO = CD = 2\sqrt{3}$,

所以 $\angle OCD = \angle COD = \angle CDO = \frac{\pi}{3}, \angle DOE$ 为二面角 $D-AB-E$ 的平面角, 即 $\angle DOE = \frac{\pi}{3}$,

易知点 O, E, D, C 共面, 所以 $CD \parallel OE$.

又因为 $DO = DE = OE = 2\sqrt{3}$, 所以 $OE = CD$, 所以四边形 $COED$ 是平行四边形,

所以 $DE \parallel CO$.

又因为 $DE \not\subset$ 平面 $ABC, CO \subset$ 平面 ABC , 所以 $DE \parallel$ 平面 ABC .

(2)解:取线段 CD 的中点 P , 连接 PO ,

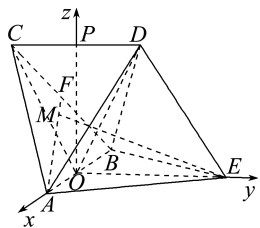
所以 $PO \perp CD, PO \perp OE$.

又 $AB \perp DO, AB \perp OE, OD \cap OE = O, OD, OE \subset$ 平面 $OEDC$,

所以 $AB \perp$ 平面 $OEDC$.

所以 OP, OA, OE 两两垂直,

以点 O 为坐标原点, 以 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OP}$ 方向分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$,



所以 $A(2, 0, 0), B(-2, 0, 0), C(0, -\sqrt{3}, 3), D(0, \sqrt{3}, 3), E(0, 2\sqrt{3}, 0), \overrightarrow{OA} = (2, 0, 0), \overrightarrow{OC} = (0, -\sqrt{3}, 3)$.

设平面 ABC 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

所以 $\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \mathbf{m} = 2x_1 = 0, \\ \overrightarrow{OC} \cdot \mathbf{m} = -\sqrt{3}y_1 + 3z_1 = 0, \end{cases}$

令 $y_1 = \sqrt{3}$, 则 $x_1 = 0, z_1 = 1$, 所以 $\mathbf{m} = (0, \sqrt{3}, 1)$ 为

平面 ABC 的一个法向量.

因为 $F(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$, 所以 $\overrightarrow{AF} = (-3, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$,

设 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AF} = (-3\lambda, -\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda), \lambda \in (0, 1)$,

又因为 $\overrightarrow{AB} = (-4, 0, 0), \overrightarrow{BE} = (2, 2\sqrt{3}, 0)$,

所以 $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = (-3\lambda + 4, -\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda)$.

设平面 BEM 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

则 $\begin{cases} \overrightarrow{BE} \cdot \mathbf{n} = 2x_2 + 2\sqrt{3}y_2 = 0, \\ \overrightarrow{BM} \cdot \mathbf{n} = (-3\lambda + 4)x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda y_2 + \frac{3}{2}\lambda z_2 = 0, \end{cases}$

令 $x_2 = \sqrt{3}$, 则 $y_2 = -1, z_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(5 - \frac{8}{\lambda})$, 所以 $\mathbf{n} =$

$(\sqrt{3}, -1, \frac{\sqrt{3}}{3}(5 - \frac{8}{\lambda}))$ 为平面 BEM 的一个法向量.

设平面 ABC 与平面 BEM 所成角为 θ , 则 $\cos \theta =$

$$\frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{\left| -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}(5 - \frac{8}{\lambda}) \right|}{2\sqrt{4 + \frac{1}{3}(5 - \frac{8}{\lambda})^2}},$$

令 $t = -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}(5 - \frac{8}{\lambda}) \in (-\infty, -2\sqrt{3})$,

则 $\cos \theta = \frac{|t|}{2\sqrt{4 + (t + \sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2\sqrt{7(\frac{1}{t} + \frac{\sqrt{3}}{7})^2 + \frac{4}{7}}}$

$\leq \frac{\sqrt{7}}{4}$,

当且仅当 $\frac{1}{t} = -\frac{\sqrt{3}}{7}$, 即 $\lambda = \frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{AF}|} = \frac{8}{9}$ 时等号成立.

所以平面 ABC 与平面 BEM 所成角的余弦值的最大

大值为 $\frac{\sqrt{7}}{4}$, 此时 $\frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{AF}|} = \frac{8}{9}$.

19. (17分) (2024 · 天津卷) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a >$

$b > 0)$, 椭圆的离心率 $e = \frac{1}{2}$, 左顶点为 A , 下顶点

为 B , O 为坐标原点, C 是线段 OB 的中点, 且

$$S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

(1)求椭圆的方程.

(2)过点 $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ 的动直线与椭圆有两个交点 P, Q , 在 y 轴上是否存在点 T 使得 $\overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{TQ} \leq 0$? 若存在, 求出点 T 纵坐标的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

解: (1) 因为椭圆的离心率 $e = \frac{1}{2}$, 所以 $a = 2c, b = \sqrt{3}c$, 其中 c 为半焦距,

所以 $A(-2c, 0), B(0, -\sqrt{3}c), C\left(0, -\frac{\sqrt{3}c}{2}\right)$,

故 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}c \times 2c = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

得 $c = \sqrt{3}$, 所以 $a = 2\sqrt{3}, b = 3$,

故椭圆的方程为 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$.

(2) 若过点 $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ 的动直线的斜率存在, 则可设

该直线方程为 $y = kx - \frac{3}{2}$.

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), T(0, t)$,

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ y = kx - \frac{3}{2}, \end{cases}$ 消去 y 可得 $(3+4k^2)x^2 - 12kx -$

$27 = 0$,

故 $\Delta = 144k^2 + 108(3+4k^2) > 0$, 且 $x_1 + x_2 =$

$\frac{12k}{3+4k^2}, x_1x_2 = -\frac{27}{3+4k^2}$.

而 $\overrightarrow{TP} = (x_1, y_1 - t), \overrightarrow{TQ} = (x_2, y_2 - t)$,

故 $\overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{TQ} = x_1x_2 + (y_1 - t)(y_2 - t) = x_1x_2$

$+ \left(kx_1 - \frac{3}{2} - t\right)\left(kx_2 - \frac{3}{2} - t\right)$

$= (1+k^2)x_1x_2 - k\left(\frac{3}{2}+t\right)(x_1+x_2) + \left(\frac{3}{2}+t\right)^2$

$= (1+k^2) \times \left(-\frac{27}{3+4k^2}\right) - k\left(\frac{3}{2}+t\right) \times \frac{12k}{3+4k^2}$

$+ \left(\frac{3}{2}+t\right)^2$

$= \frac{-27k^2 - 27 - 18k^2 - 12k^2t + 3\left(\frac{3}{2}+t\right)^2 + (3+2t)^2k^2}{3+4k^2}$

$= \frac{[(3+2t)^2 - 12t - 45]k^2 + 3\left(\frac{3}{2}+t\right)^2 - 27}{3+4k^2}$.

因为 $\overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{TQ} \leq 0$ 恒成立,

所以 $\begin{cases} (3+2t)^2 - 12t - 45 \leq 0, \\ 3\left(\frac{3}{2}+t\right)^2 - 27 \leq 0, \end{cases}$

解得 $-3 \leq t \leq \frac{3}{2}$.

若过点 $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ 的动直线的斜率不存在, 则 $P(0,$

$3), Q(0, -3)$ 或 $P(0, -3), Q(0, 3)$,

要使 $\overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{TQ} \leq 0$ 恒成立, 则 $-3 \leq t \leq 3$.

所以 $-3 \leq t \leq \frac{3}{2}$.

综上, 点 T 纵坐标的取值范围是 $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$.