参考答案

第六章　计数原理

探究构建
6.1　分类加法计数原理与分步乘法计数原理

第1课时　分类加法计数原理与分步乘法计数原理

问题式预习

【知识清单】
知识点一
(1)$m+n$　(2)$m_1+m_2+\cdots+m_n$
知识点二
(1)$m\times n$　(2)$m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$
【概念辨析】
1.(1)×　(2)√　(3)√　(4)√
2.110　**解析**:若这个人来自高二(1)班,则有54种不同的选法;若这个人来自高二(2)班,则有56种不同的选法.所以共有54+56=110种不同的选法.
3.16　**解析**:进出商场可以看作是分两个步骤完成的:第1步,进门,共有4种不同的走法;第2步,出门,共有4种不同的走法.根据分步乘法计数原理知,共有4×4=16种不同的进出方法.
4.提示:区分"完成一件事"是分类还是分步,关键看一步能否完成这件事,若能完成,则是分类,否则是分步.

任务型课堂

任务1
1.C　**解析**:由分类加法计数原理知,冠军可能的结果种数为20+8+4=32.
2.B　**解析**:当三位数的三个数位上的数字都相同时,能被3整除的有111,222,333,444,555,共有5个;
当三位数的三个数位上的数字有两个相同时,能被3整除的有141,252,303,414,525,共有5个.
根据分类加法计数原理知,满足条件的回文数共有10个.
3.A　**解析**:因为椭圆的焦点在x轴上,所以$m>n$.当$m=4$时,$n=1,2,3$;当$m=3$时,$n=1,2$;当$m=2$时,$n=1$.故满足条件的椭圆共有3+2+1=6个.
任务2
【探究活动】
例　**解**:从这三种型号的电视机中各选一台检验可分三步完成:第1步,从甲型号中选一台,有10种不同的选法;第2步,从乙型号中选一台,有8种不同的选法;第3步,从丙型号中选一台,有12种不同的选法.根据分步乘法计数原理,有10×8×12=960种不同的选法.

[一题多思]
思考1.解:根据分步乘法计数原理可知,共有10×(12+8)=200种选法.
思考2.解:完成这件事可分为两类:第一类,恰有一台甲型号电视机,有200种选法;第二类,两台都为甲型号电视机,有9+8+7+…+2+1=45种选法.所以共有200+45=245种选法.

【应用迁移】
1.A　**解析**:从急诊科选派1名男医生和1名女医生有3×4=12种方案,从内科选派1名男医生和1名女医生有4×4=16种方案,根据分步乘法计数原理,共有12×16=192种不同的选派方案.
2.67 600　**解析**:完成这件事可分四步:第1步,确定验证码的第一位,共有10种情况;第2步,确定验证码的第二位,共有26种情况;第3步,确定验证码的第三位,共有10种情况;第4步,确定验证码的第四位,共有26种情况.根据分步乘法计数原理知,这样的验证码共有10×26×10×26=67 600个.

第2课时　分类加法计数原理与分步乘法计数原理的应用

问题式预习

【知识清单】
知识点
(2)不重不漏　步骤完整
【概念辨析】
1.(1)×　**提示**:因为每项比赛的冠军都有3种可能的情况,根据分步乘法计数原理,共有3^4种不同的夺冠情况.
(2)×　**提示**:分为三类:第1类是取白球、黑球,有5×6=30种取法;第2类是取白球、红球,有5×7=35种取法;第3类是取黑球、红球,有6×7=42种取法.
由分类加法计数原理,共有30+35+42=107种不同的取法.
2.A　**解析**:第1类,两个数的和有1+2=3,1+3=4,1+4=5,2+3=5,2+4=6,3+4=7;第2类,三个数的和有1+2+3=6,1+2+4=7,1+3+4=8,2+3+4=9;第3类,四个数的和有1+2+3+4=10.故得到的不同的和为3,4,5,6,7,8,9,10,共有8个不同的数.
3.242　**解析**:若取的两本书中,一本数学书、一本语文书,根据分步乘法计数原理,有10×9=90种不同的取法;若取的两本书中,一本语文书、一本英语书,有9×8=72种不同的取法;若取的两本书中,一本数学书、一本英语书,有10×8=80种不同的取法.综上,共有不同的取法90+72+80=242种.
4.(1)**提示**:由于每一项都是$a_ib_jc_k$($i\leqslant3,j\leqslant3,k\leqslant5$,且$i,j,k\in\mathbf{N}^*$)的形式,所以可以分三步完成,第一步,取$a_i$,有3种方法;第二步,取$b_j$,也有3种方法;第三步,取$c_k$,有5种方法.根据分步乘法计数原理,展开后共有3×3×5=45项.
(2)**提示**:对于两个计数原理的综合应用问题,一般是先分类再分步,分类时要先定好分类标准,防止重复和遗漏;分步时要注意步与步之间的连续性,同时应合理设计步骤的顺序,使各步互不干扰.也可以根据题意画出示意图或列出表格,使问题的实质直观地显现出来,从而便于解题.

任务型课堂

任务1
【探究活动】
例1　**解**:分三步来完成:
第1步,放第一个小球,有5种放法;
第2步,放第二个小球,有4种放法;
第3步,放第三个小球,有3种放法.
根据分步乘法计数原理,共有$N=5\times4\times3=60$种不同的放法.

[一题多思]
思考1.解:分三步来完成:
第1步,放第一个小球,有5种放法;
第2步,放第二个小球,有5种放法;
第3步,放第三个小球,有5种放法.
根据分步乘法计数原理,共有$N=5\times5\times5=125$种不同的放法.
思考2.解:分三步来完成:
第1步,向第一个盒子中放入小球,有5种放法;
第2步,向第二个盒子中放入小球,有4种放法;
第3步,向第三个盒子中放入小球,有3种放法.
根据分步乘法计数原理,共有$N=5\times4\times3=60$种不同的放法.

【应用迁移】

1.ABC　**解析**:对于 A,选 1 人为负责人的选法种数为 $6+7+8+9=30$,故 A 正确;
对于 B,每组选 1 名组长的选法种数为 $6\times7\times8\times9=3\,024$,故 B 正确;
对于 C,2 人来自不同的小组的选法种数为 $6\times7+6\times8+6\times9+7\times8+7\times9+8\times9=335$,故 C 正确;
对于 D,依题意,若不考虑限制,每个人有 4 种选法,共有 4^3 种选法,若第一组没有人选,每个人有 3 种选法,共有 3^3 种选法,所以不同的选法有 $4^3-3^3=37$ 种,故 D 错误.
故选 ABC.

2.解:(方法一)第 1 类,从 3 名只会下象棋的学生中选 1 名参加象棋比赛,同时从 2 名只会下围棋的学生中选 1 名参加围棋比赛,有 $3\times2=6$ 种选法;
第 2 类,从 3 名只会下象棋的学生中选 1 名参加象棋比赛,同时从 2 名既会下象棋又会下围棋的学生中选 1 名参加围棋比赛,有 $3\times2=6$ 种选法;
第 3 类,从 2 名只会下围棋的学生中选 1 名参加围棋比赛,同时从 2 名既会下象棋又会下围棋的学生中选 1 名参加象棋比赛,有 $2\times2=4$ 种选法;
第 4 类,从 2 名既会下象棋又会下围棋的学生中选 2 名分别参加象棋比赛和围棋比赛,有 $2\times1=2$ 种选法.
故共有 $6+6+4+2=18$ 种不同的选法.
(方法二)第 1 类,从 3 名只会下象棋的学生中选 1 名参加象棋比赛,这时 7 人中还有 4 人会下围棋,从中选 1 名参加围棋比赛,有 $3\times4=12$ 种选法;
第 2 类,从 2 名既会下象棋又会下围棋的学生中选 1 名参加象棋比赛,这时 7 人中还有 3 人会下围棋,从中选 1 名参加围棋比赛,有 $2\times3=6$ 种选法.
故共有 $12+6=18$ 种不同的选法.

任务 2

【探究活动】

例 2　解:(1)用 3 个数字给产品编号,首位可以是 0,数字也可以重复,每个位置都有 5 种选择,共有 $5\times5\times5=5^3=125$ 个不同的编号.
(2)三位数的首位不能为 0,但可以有重复数字,首先考虑首位的排法,除 0 外共有 4 种方法,第二、三位可以排 0,因此,共可以排成 $4\times5\times5=100$ 个三位数.
(3)能被 2 整除的数即偶数,末位数字可取 0,2,4,因此,可以分两类.第 1 类,末位数字是 0,有 $4\times3=12$ 种排法;第 2 类,末位数字不是 0,则末位有 2 种排法,即 2 或 4,再排首位,因为 0 不能在首位,所以有 3 种排法,中间位有 3 种排法,因此有 $2\times3\times3=18$ 种排法.
所以共有 $12+18=30$ 种排法,即可以排成 30 个能被 2 整除的无重复数字的三位数.

【应用迁移】

1.D　**解析**:分两类,若末位数字是 0,则有 $5\times4\times3=60$ 个;若末位数字是 5,则有 $4\times4\times3=48$ 个.所以能被 5 整除的没有重复数字的四位数有 $60+48=108$ 个.

2.D　**解析**:一位数有 5 个,两位数有 $4\times4=16$ 个,三位数有 $4\times4\times3=48$ 个,四位数有 $4\times4\times3\times2=96$ 个,五位数分以下两种情况讨论:
①首位数字为 1 或 2,此时共有 $2\times4\times3\times2\times1=48$ 个;
②首位数字为 3,则千位数从 0 或 1 中选择一个,其余三个数位任意排列,此时共有 $2\times3\times2\times1=12$ 个.
综上所述,共有 $5+16+48+96+48+12=225$ 个比32 000 小的数.
故选 D.

3.解:(1)111,112,113,114,121,122,123,124,131,132,133.
(2)这个数列的项数就是用 1,2,3,4 排成的三位数的个数,每个数位上都有 4 种排法,则共有 $4\times4\times4=64$ 项.
(3)比 $a_n=341$ 小的数有两类:
第 1 类如下:

1	×	×
2	×	×

第 2 类如下:

3	1	×
3	2	×
3	3	×

共有 $2\times4\times4+3\times4=44$ 项.
所以 $n=44+1=45$.

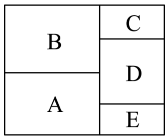
任务 3

【探究活动】

例 3　解:(1)分步进行,先为 A 着色,有 6 种不同的着色方法,再为 B 着色,有 5 种不同的着色方法,然后为 C 着色,有 4 种不同的着色方法,最后为 D 着色,也有 4 种不同的着色方法,所以,共有 $6\times5\times4\times4=480$ 种不同的着色方法.
(2)根据分步乘法计数原理,不同的着色方法数是 $n(n-1)\cdot(n-2)(n-2)$.
因为 $n(n-1)(n-2)(n-2)=180$,
所以可用将自然数代入上式验证的方法,得 $n=5$ 时上式成立.
故 n 的值为 5.

【应用迁移】

1.D　**解析**:如图,先在区域 A 布置花卉,有 5 种不同的布置方案,再在区域 E 布置花卉,有 4 种不同的布置方案,再在区域 D 布置花卉,有 3 种不同的布置方案.
若区域 B 与区域 E 布置同一种花卉,则区域 C 有 3 种不同的布置方案;
若区域 B 与区域 E 布置不同的花卉,则区域 B 有 2 种不同的布置方案,区域 C 有 3 种不同的布置方案.
故不同的布置方案有 $5\times4\times3\times(3+2\times3)=540$ 种.
故选 D.



2.C　**解析**:分两步,先将四棱锥一侧面的三个顶点染色,然后再分类考虑另外两个顶点的染色情况.由题意,设 5 种颜色分别为 1,2,3,4,5,四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的顶点 S,A,B 所染的颜色互不相同,它们共有 $5\times4\times3=60$ 种染色方法.
当 S,A,B 染好时,不妨设所染颜色依次为 1,2,3,若 C 染 2,则 D 可染 3 或 4 或 5,有 3 种染法;若 C 染 4,则 D 可染 3 或 5,有 2 种染法;若 C 染 5,则 D 可染 3 或 4,有 2 种染法,即当 S,A,B 染好时,C,D 还有 7 种染法.
故不同的染色方法总数为 $60\times7=420$.故选 C.

3.A　**解析**:满足条件的摆放方案可分为两类:
第一类,B,D 区域同色,且和其他区域不同色的摆放方案,满足条件的方案可分四步完成,第一步,先摆区域 A,有 4 种方法;第二步,摆放区域 B,D,有 3 种方法;第三步,摆放区域 C,有 2 种方法;第四步,考虑到区域 A,B,C 不同色,且 4 种颜色都要用到,摆放区域 E,有 1 种方法.由分步乘法计数原理可得第一类中共有 $4\times3\times2\times1=24$ 种方案.
第二类,C,E 区域同色,且和其他区域不同色的摆放方案,满足条件的方案可分四步完成,第一步,先摆区域 A,有 4 种方法;第二步,摆放区域 B,有 3 种方法;第三步,摆放区域 C,E,有 2 种方法;第四步,考虑到区域 A,B,C 不同色,且 4 种颜色都要用到,摆放区域 D,有 1 种方法.由分步乘法计数原理可得第二类中共有 $4\times3\times2\times1=24$ 种方案.
根据分类加法计数原理,可得不同的鲜花摆放方案共有 $24+24=48$ 种.
故选 A.

6.2　排列与组合

6.2.1　排列

问题式预习

【知识清单】

知识点

(1)一定的顺序　(2)排列顺序

【概念辨析】

1.(1)√　(2)×　(3)√　(4)×

2.A　**解析**:选项 A 中组成的四位数与数字的排列顺序有关,选项 B,C,D 只需取出元素即可,与元素的排列顺序无关.故选 A.

3.(1)**提示**:不是.

(2)**提示**:若干个元素按照一定的顺序排成一列,元素完全不同或元素部分相同或元素完全相同但排列顺序不同的排列都是不同的排列.只有当元素完全相同,并且元素的排列顺序也完全相同时,才是同一个排列.

任务型课堂

任务1

1.①② **解析**:①由1,2,3组成的无重复数字的三位数与数字的顺序有关,是排列问题;

②由平面上5个点确定的射线与端点的顺序有关,是排列问题;

③与顺序无关,不是排列问题.

2.**解**:(1)植树和种菜是不同的,存在顺序问题,属于排列问题.

(2)(3)不存在顺序问题,不属于排列问题.

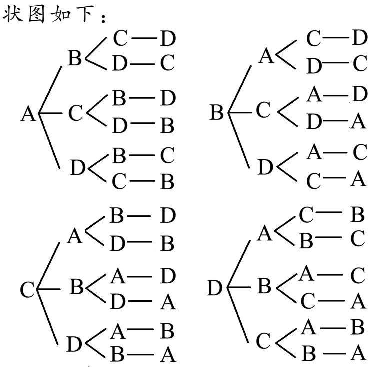
(4)每个人的职务不同,例如,甲当班长或当学习委员是不同的,存在顺序问题,属于排列问题.

任务2

【探究活动】

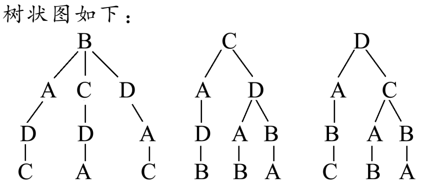
例1 解:(1)所有的排法有ABC,ACB,BAC,BCA,CAB,CBA,共6种.

(2)画出树状图如下:



由树状图可知,所有排法为ABCD,ABDC,ACBD,ACDB,ADBC,ADCB,BACD,BADC,BCAD,BCDA,BDAC,BDCA,CABD,CADB,CBAD,CBDA,CDAB,CDBA,DACB,DABC,DBAC,DBCA,DCAB,DCBA,共24种.

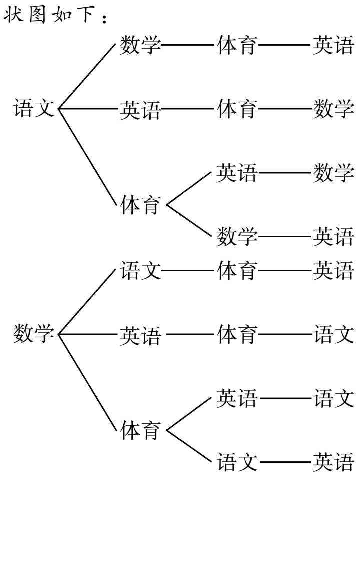
(3)画出树状图如下:

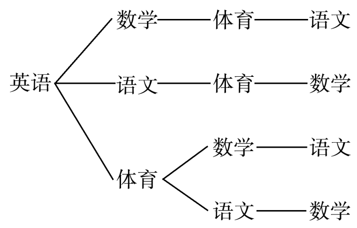


由树状图知,所有排法有BADC,BCDA,BDAC,CADB,CDAB,CDBA,DABC,DCAB,DCBA,共9种.

【应用迁移】

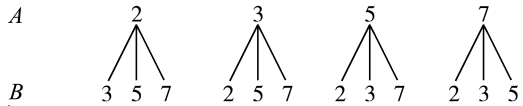
1.**解**:画出树状图如下:





由树状图可知,所有排课方案有:
语文、数学、体育、英语;语文、英语、体育、数学;
语文、体育、英语、数学;语文、体育、数学、英语;
数学、语文、体育、英语;数学、英语、体育、语文;
数学、体育、英语、语文;数学、体育、语文、英语;
英语、数学、体育、语文;英语、语文、体育、数学;
英语、体育、数学、语文;英语、体育、语文、数学.

2.**解**:画树状图如图:

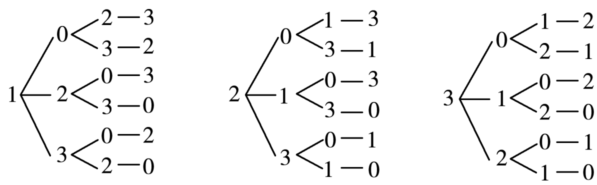


所有不同的直线为$2x+3y=0$,$2x+5y=0$,$2x+7y=0$,$3x+2y=0$,$3x+5y=0$,$3x+7y=0$,$5x+2y=0$,$5x+3y=0$,$5x+7y=0$,$7x+2y=0$,$7x+3y=0$,$7x+5y=0$,共12条.

任务3

【探究活动】

例2 解:画出树状图如下:



由树状图可知,所有没有重复数字的四位数为1 023,1 032,1 203,1 230,1 302,1 320,2 013,2 031,2 103,2 130,2 301,2 310,3 012,3 021,3 102,3 120,3 201,3 210,共有18个.

[一题多思]

思考1.解:可分为两类:第一类,个位为0,有$3\times2\times1=6$个;第二类,个位为2,有$2\times2\times1=4$个.

综上所述,没有重复数字的四位偶数共有$6+4=10$个.

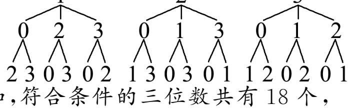
思考2.解:由题意可知,个位为0或2,所以共有$2\times3\times4\times4=96$个四位偶数.

【应用迁移】

1.15 **解析**:第1类,挂1面旗表示信号,有3种不同的信号;第2类,挂2面旗表示信号,有$3\times2=6$种不同的信号;第3类,挂3面旗表示信号,有$3\times2\times1=6$种不同的信号.

根据分类加法计数原理,可以表示的信号共有$3+6+6=15$种.

2.**解**:画出树状图,如图:



由树状图知,符合条件的三位数共有18个,
它们是102,103,120,123,130,132,201,203,210,213,230,231,301,302,310,312,320,321.

6.2.2 排列数

问题式预习

【知识清单】

知识点

(1)个数 排列数 A_n^m (2)$n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ (3)①全排列 $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$ ②$n!$ 1 $\dfrac{n!}{(n-m)!}$

【概念辨析】
1.(1)√　(2)√　(3)√
2.B　**解析**:由排列数公式知可表示为 A_{100}^{11}.故选 B.
3.120　**解析**:利用排列的概念可知不同的分配方法有 $A_5^5=120$ 种.
4.(1)**提示**:①排列是利用分步乘法计数原理,从 n 个不同元素中选出 m 个,排在 m 个位置上,分 m 步完成.
②排列问题可以用分步乘法计数原理解决,但排列数公式将问题公式化,更简洁.
(2)**提示**:排列与排列数是两个不同的概念,"排列"是指从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素按照一定顺序排成一列,是一种排法;"排列数"是指从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素所得不同排列的个数,是一个数值,用 A_n^m 表示.

任务型课堂

任务 1
1.(1)1 320　(2)1　**解析**:(1)原式 $=12\times11\times10=1\ 320$.
(2)原式 $=\dfrac{2\times8\times7\times6\times5\times4+7\times8\times7\times6\times5}{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1-9\times8\times7\times6\times5}$
$=\dfrac{8\times7\times6\times5\times(8+7)}{8\times7\times6\times5\times(24-9)}=1$.
2.(1)5　(2)A_{69-n}^{15}　**解析**:(1)$A_x^2=x(x-1)=20$,解得 $x=5$ 或 $x=-4$.
由 A_x^2 的意义知 $x\in\mathbf{N}^*$ 且 $x\geqslant2$,所以 $x=5$.
(2)因为 $55-n,56-n,\cdots,69-n$ 中最大的数为 $69-n$,且共有 $(69-n)-(55-n)+1=15$ 个数,
所以 $(55-n)(56-n)\cdots(69-n)=A_{69-n}^{15}$.

任务 2
1.1
2.**解**:原方程可化为 $3\times\dfrac{8!}{(8-x)!}=4\times\dfrac{9!}{(10-x)!}$,
化简得 $3=\dfrac{4\times9}{(10-x)(9-x)}$,
即 $x^2-19x+78=0$,解得 $x_1=6,x_2=13$.
又 $\begin{cases}0<x\leqslant8,\\0<x-1\leqslant9,\end{cases}$ 解得 $1<x\leqslant8$.
故原方程的解是 $x=6$.

任务 3
【探究活动】
例　**解**:甲、乙为特殊元素,先将他们排在两端位置,有 A_2^2 种排法,其余 6 人全排列,有 A_6^6 种排法,所以共有 $A_2^2A_6^6=1\ 440$ 种不同的排法.

[一题多思]
思考 1.解:甲、乙为特殊元素,左、右两端为特殊位置.
(方法一:特殊元素法)甲在最右边时,其他的人可全排列,有 A_7^7 种排法;甲不在最右边时,可从余下 6 个位置中任选一个,有 A_6^1 种排法,而乙可排在除去最右边位置和甲的位置后剩余的 6 个位置中的任一个上,有 A_6^1 种排法,其余 6 人全排列,共有 $A_6^1A_6^1A_6^6$ 种排法.由分类加法计数原理知,共有 $A_7^7+A_6^1A_6^1A_6^6=30\ 960$ 种不同的排法.
(方法二:特殊位置法)先排最左边,除去甲外,有 A_7^1 种排法,余下 7 个位置全排列,有 A_7^7 种排法,但应剔除乙在最右边时的 $A_6^1A_6^6$ 种排法,所以共有 $A_7^1A_7^7-A_6^1A_6^6=30\ 960$ 种不同的排法.
(方法三:间接法)8 人全排列,共 A_8^8 种排法.其中,不符合条件的有甲在最左边时的 A_7^7 种排法,乙在最右边时的 A_7^7 种排法,其中都包含了甲在最左边,同时乙在最右边的情形,共 A_6^6 种排法,所以共有 $A_8^8-2A_7^7+A_6^6=30\ 960$ 种不同的排法.
思考 2.解:(捆绑法)由于女生全排在一起,可把她们看成一个整体,这样同 5 个男生合在一起有 6 个元素,排成一排有 A_6^6 种排法,而每一种排法中,3 个女生间又有 A_3^3 种排法,因此共有 $A_6^6A_3^3=4\ 320$ 种不同的排法.
思考 3.解:(插空法)先将 5 名男生排好,共有 A_5^5 种排法,在这 5 名男生中间以及两边的 6 个空位中插入 3 名女生,共有 A_6^3 种排法,
由分步乘法计数原理,共有 $A_5^5\times A_6^3=120\times120=14\ 400$ 种不同的排法.
思考 4.解:不同的排法有 $\dfrac{A_8^8}{A_3^3}=6\ 720$ 种.

【应用迁移】
1.AC　**解析**:对于选项 A,若 A,B 两人站在一起,则有 $A_2^2A_4^4=48$ 种排法,故 A 正确;
对于选项 B,A,B,C,D,E 五个人并排站在一起,则有 $A_5^5=120$ 种排法,所以 A,B 不相邻共有 $120-48=72$ 种排法,故 B 错误;
对于选项 C,根据对称性可知 A 在 B 左边有 $\dfrac{120}{2}=60$ 种排法,故 C 正确;
对于选项 D,A 站在最左边,有 $A_4^4=24$ 种排法,B 站在最右边,有 $A_4^4=24$ 种排法,A 站在最左边,同时 B 站在最右边,有 $A_3^3=6$ 种排法,所以 A 不站在最左边,B 不站在最右边,有 $120-24-24+6=78$ 种排法,故 D 错误.
故选 AC.
2.**解**:(1)当个位数字为 0 时,可以组成 $A_4^4=24$ 个偶数;
当个位数字不为 0 时,可以组成 $2\times A_3^1A_3^3=36$ 个偶数.
所以一共可以组成 $24+36=60$ 个偶数.
(2)所组成的比 13 123 大的五位数,可以分为以下 2 类:
第一类:形如 2□□□□,3□□□□,4□□□□,共有 $3A_4^4=72$ 个;
第二类:形如 13□□□,14□□□,共有 $2A_2^2+A_3^3=10$ 个.
所以一共可以组成 $72+10=82$ 个比 13 123 大的数.

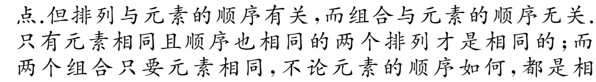
6.2.3　组合

问题式预习

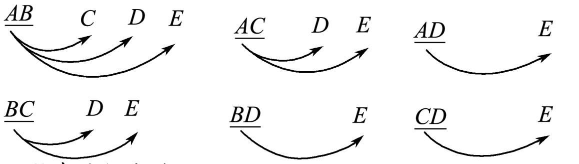
【知识清单】
知识点
(1)不同元素　(2)元素相同
【概念辨析】
1.(1)×　(2)√　(3)√　(4)×
2.(1)**提示**:从排列与组合的定义可以知道,两者都是从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素,这是它们的共同点.但排列与元素的顺序有关,而组合与元素的顺序无关.只有元素相同且顺序也相同的两个排列才是相同的;而两个组合只要元素相同,不论元素的顺序如何,都是相同的.
(2)**提示**:班级选 5 名同学参加学校组织的活动;有 10 辆共享单车,随机选 3 辆进行安全检测等.

任务型课堂

任务 1
1.排列　组合　**解析**:对数式 $\log_a b$ 的值,与 a,b 取值的顺序有关,属于排列问题;ab 的值与 a,b 取值的顺序无关,属于组合问题.
2.**解**:(1)因为甲与乙通了一次电话,也就是乙与甲通了一次电话,没有顺序上的区别,所以这是一个组合问题.
(2)因为每两支球队比赛一次,并不需要考虑谁先谁后,没有顺序的区别,所以这是一个组合问题.
(3)因为甲队获得冠军、乙队获得亚军,与乙队获得冠军、甲队获得亚军是不一样的,与顺序有关,所以这是一个排列问题.
(4)因为 3 名代表之间没有顺序上的区别,所以这是一个组合问题.
(5)因为 3 名学生中,担任哪一科的课代表是有顺序上的区别的,所以这是一个排列问题.

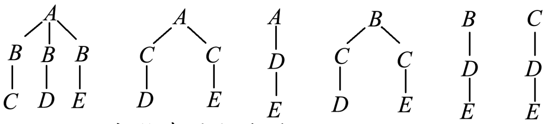
任务 2
【探究活动】
例　**解**:(1)如图所示.


故所有的组合为 $AB,AC,AD,AE,BC,BD,BE,CD,CE,DE$.
(2)(方法一)可按 $AB\to AC\to AD\to BC\to BD\to CD$ 的顺序写出,如图.



所以所有的组合为 $ABC,ABD,ABE,ACD,ACE,ADE,BCD,BCE,BDE,CDE$.

(方法二)画出树状图,如图所示.



由此可以写出所有的组合为 $ABC,ABD,ABE,ACD,ACE,ADE,BCD,BCE,BDE,CDE$.

[一题多思]

思考 1.提示:(2)中取出组合 ABC 后,剩下的 DE 正好是(1)中的一个组合,其他组合也是一一对应的.

思考 2.提示:当取出的元素个数较多时,直接写取出元素的组合往往比较复杂,这时我们可以找它的对立面——“剩下的元素”有哪些,进而得到取出元素的组合.

思考 3.解:(方法一)“顺序后移法”.所有的组合为 $ABCD,ABCE,ABDE,ACDE,BCDE$.

(方法二)剩下 A,则取出 $BCDE$;剩下 B,则取出 $ACDE$……共有 $BCDE,ACDE,ABDE,ABCE,ABCD$ 这 5 个组合.

【应用迁移】

1.解:从 1,2,3,6,9 中任取两个不同的数,不同的取法有 $\{1,2\},\{1,3\},\{1,6\},\{1,9\},\{2,3\},\{2,6\},\{2,9\},\{3,6\},\{3,9\},\{6,9\}$,

不同的相加结果有 3,4,5,7,8,9,10,11,12,15,共 10 个.

2.解:记 2 名教师为 a,b,5 名学生为 1,2,3,4,5.

所有选取方案为

a12,a13,a14,a15,a23,a24,a25,a34,a35,a45,

b12,b13,b14,b15,b23,b24,b25,b34,b35,b45,

ab1,ab2,ab3,ab4,ab5,共 25 种.

3.解:(1)所有各场比赛的双方为甲乙、甲丙、甲丁、乙丙、乙丁、丙丁.

(2)所有冠、亚军的可能情况为甲乙、乙甲、甲丙、丙甲、甲丁、丁甲、乙丙、丙乙、乙丁、丁乙、丙丁、丁丙.

6.2.4 组合数

问题式预习

【知识清单】

知识点一

C_n^m

知识点二

(1)$\dfrac{A_n^m}{A_m^m}$ (2)1

知识点三

C_n^{n-m}

【概念辨析】

1.(1)√ (2)× (3)×

2.B 解析:$C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}=28$,解得 $n=8$.

3.D 解析:$C_3^3+C_4^3+C_5^3=C_4^4+C_4^3+C_5^3=C_5^4+C_5^3=C_6^4$.

4.(1)**提示:**队员上场的方案有 C_8^5 种;队员不上场的方案有 C_8^3 种;$C_8^5=C_8^3=56$.

(2)**提示:**一样,$C_8^5=C_7^4+C_7^5$.

任务型课堂

任务 1

1.(1)D 解析:原式 $=C_4^0+C_4^1+C_5^2+C_6^3+\cdots+C_{2025}^{2022}=C_5^1+C_5^2+C_6^3+\cdots+C_{2025}^{2022}=C_6^2+C_6^3+\cdots+C_{2025}^{2022}=\cdots=C_{2025}^{2021}+C_{2025}^{2022}=C_{2026}^{2022}=C_{2026}^4$.

(2)28 解析:由 $C_{18}^{3n+6}=C_{18}^{4n-2}$,

得 $3n+6+4n-2=18$ 或 $3n+6=4n-2$,

解得 $n=2$ 或 $n=8$(舍去),

故 $C_8^2=28$.

2.解:(1)$C_5^2+C_5^4=\dfrac{5\times4}{2\times1}+\dfrac{5\times4\times3\times2}{4\times3\times2\times1}=10+5=15$.

(2)$C_{10}^2\times C_{10}^0-C_{10}^{10}=\dfrac{10\times9}{2\times1}\times1-1=45-1=44$.

(3)$C_6^2-C_6^5=\dfrac{6\times5}{2\times1}-\dfrac{6\times5\times4\times3\times2}{5\times4\times3\times2\times1}=15-6=9$.

(4)$C_6^3\div C_8^4=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\div\dfrac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=20\div70=\dfrac{2}{7}$.

3.证明:$mC_n^m=m\cdot\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

$=\dfrac{n\cdot(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}$

$=nC_{n-1}^{m-1}$.

任务 2

【探究活动】

例 1 **解:**至少有一名队长有两种情况:有一名队长和有两名队长,故共有 $C_2^1C_{11}^4+C_2^2C_{11}^3=825$ 种选法.

[一题多思]

思考 1.解:至多有两名女生有三种情况:有两名女生、只有一名女生、没有女生,故共有 $C_5^2C_8^3+C_5^1C_8^4+C_8^5=966$ 种不同的选法.

思考 2.解:分两种情况:

第一种:女队长当选,有 C_{12}^4 种不同的选法;

第二种:女队长不当选,有($C_4^1C_7^3+C_4^2C_7^2+C_4^3C_7^1+C_4^4$)种不同的选法.

故共有 $C_{12}^4+C_4^1C_7^3+C_4^2C_7^2+C_4^3C_7^1+C_4^4=790$ 种不同的选法.

【应用迁移】

1.C 解析:不考虑限制条件则共有 $C_4^2A_3^3=36$ 种分配方法.

若甲分到 A 编号子任务,有两种情况:

甲分到一个子任务(即只有 A 编号子任务),此时共有 $C_3^2A_2^2=6$ 种分配方法;

甲分到两个子任务(即包含 A 编号子任务),此时共有 $A_3^3=6$ 种分配方法.

故所求的分配方法共有 $36-6-6=24$ 种.

故选 C.

2.解:(1)任意选 5 人,有 $C_{12}^5=792$ 种不同的选法.

(2)甲、乙、丙三人必须都参加,只需从另外的 9 人中选 2 人,共有 $C_9^2=36$ 种不同的选法.

(3)甲、乙、丙三人都不能参加,只需从另外的 9 人中选 5 人,共有 $C_9^5=126$ 种不同的选法.

(4)甲、乙、丙三人中只能有 1 人参加,分两步,先从甲、乙、丙中选 1 人,有 C_3^1 种选法,再从另外的 9 人中选 4 人,有 C_9^4 种选法,共有 $C_3^1C_9^4=378$ 种不同的选法.

(5)(方法一:直接法)

甲、乙、丙三人中至少有 1 人参加,可分为三类:

第一类,甲、乙、丙中有 1 人参加,共有 $C_3^1C_9^4$ 种选法;

第二类,甲、乙、丙中有 2 人参加,共有 $C_3^2C_9^3$ 种选法;

第三类,甲、乙、丙中有 3 人参加,共有 $C_3^3C_9^2$ 种选法.

共有 $C_3^1C_9^4+C_3^2C_9^3+C_3^3C_9^2=666$ 种不同的选法.

(方法二:间接法)

12 人中任意选 5 人,共有 C_{12}^5 种选法,甲、乙、丙三人都不能参加的有 C_9^5 种选法,所以共有 $C_{12}^5-C_9^5=666$ 种不同的选法.

(6)(方法一:直接法)

甲、乙、丙三人中至多有 2 人参加,可分为三类:

第一类,甲、乙、丙都不参加,共有 C_9^5 种选法;

第二类,甲、乙、丙中有 1 人参加,共有 $C_3^1C_9^4$ 种选法;

第三类,甲、乙、丙中有 2 人参加,共有 $C_3^2C_9^3$ 种选法.

共有 $C_9^5+C_3^1C_9^4+C_3^2C_9^3=756$ 种不同的选法.

(方法二:间接法)

12 人中任意选 5 人,共有 C_{12}^5 种选法,甲、乙、丙三人都参加的有 C_9^2 种,所以共有 $C_{12}^5-C_9^2=756$ 种不同的选法.

任务 3

【探究活动】

例 2 10 解析:将 6 个志愿者的名额分配给 3 个班,每班至少一个名额,采用隔板法,6 个名额中间有 5 个空,在 5 个空中插入 2 个隔板,共有 $C_5^2=10$ 种不同的分配方法.

例 3 **解:**(1)先从 6 本书中选 2 本给甲,有 C_6^2 种选法;再

从其余的 4 本书中选 2 本给乙，有 C_4^2 种选法；最后从余下的 2 本书中选 2 本给丙，有 C_2^2 种选法.所以分给甲、乙、丙三人，每人 2 本，共有 $C_6^2C_4^2C_2^2=90$ 种分法.

(2)分给甲、乙、丙三人，每人 2 本，有 $C_6^2C_4^2C_2^2$ 种分法，这个过程可以分两步完成：第一步，分为三份，每份 2 本，设有 x 种分法；第二步，再将这三份分给甲、乙、丙三人，有 A_3^3 种分法.根据分步乘法计数原理，可得 $C_6^2C_4^2C_2^2=xA_3^3$，所以 $x=\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}=15$.因此分为三份，每份 2 本，一共有 15 种分法.

(3)可以分两步完成：第一步，分为三份，分别有 1 本、2 本、3 本，有 $C_6^1C_5^2C_3^3$ 种分法；第二步，再将这三份分给甲、乙、丙三人，有 A_3^3 种分法.根据分步乘法计数原理，一共有 $C_6^1C_5^2C_3^3A_3^3=360$ 种分法.

【应用迁移】

1.D　解析：三个小组的人数可能是 3，1，1 或 2，2，1.若是 3，1，1 的情况，则报名方法共有 $\frac{C_5^3C_2^1}{A_2^2}A_3^3=60$ 种；若是 2，2，1 的情况，则报名方法共有 $\frac{C_5^2C_3^2}{A_2^2}A_3^3=90$ 种.所以共有不同的报名方法 $60+90=150$ 种.故选 D.

2.B　解析：根据题意，先将 13 个名额分配给一班、二班每班 2 个，三班、四班每班 1 个，
由于五班可以不分配名额，则将剩下的 7 个名额加上 1 个空名额，再分成 5 组，每组至少 1 个名额.
利用“隔板法”，有 $C_7^4=35$ 种分配方式.故选 B.

3.解：(1)先把 6 个相同的小球排成一行，在首尾两球外侧放置一块隔板，然后在小球之间的 5 个空隙中任选 3 个空隙各插一块隔板，即每个盒子都不空有 $C_5^3=10$ 种放法.
(2)恰有一个空盒子，插板分两步进行.
第 1 步，在首尾两球外侧放置一块隔板，并在小球之间的 5 个空隙中任选 2 个空隙各插一块隔板，如|0|000|00|(用“0”表示小球)，有 C_5^2 种插法；
第 2 步，将剩下的一块隔板与前面任意一块并放形成空盒，如|0|000||00|，有 C_4^1 种插法.
故共有 $C_5^2C_4^1=40$ 种放法.
(3)恰有两个空盒子，插板分两步进行.
第 1 步，在首尾两球外侧放置一块隔板，并在小球之间的 5 个空隙中任选 1 个空隙插一块隔板，有 C_5^1 种插法，如|00|0000|；
第 2 步，将剩下的两块隔板插入形成空盒，此时含有两种情况：①这两块板与前面三块板形成不相邻的两个空盒，如||00||0000|，有 C_3^2 种插法；
②将两块板与前面三块板之一并放，形成相邻的两个空盒，如|00|||0000|，有 C_3^1 种插法.
故共有 $C_5^1(C_3^2+C_3^1)=30$ 种放法.

6.3　二项式定理

6.3.1　二项式定理

问题式预习

【知识清单】

知识点一

$n+1$　$C_n^ka^{n-k}b^k$

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)×

2.B　解析：因为 $\left(x-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式共有$(n+1)$项，所以 $n+1=11$，故 $n=10$.

3.B　解析：含 x^6 的项为展开式中的第 5 项，所以二项式系数为 C_{10}^4.

4.D　解析：由展开式的通项，得 $T_4=C_5^3\cdot(\sqrt{2}x)^2\times(-3)^3=10\times2x^2\times(-27)=-540x^2$，所以第 4 项的系数为 -540.

5.(1)提示：从展开过程可以看到，$(a+b)^2$ 是 2 个$(a+b)$相乘，根据多项式乘法法则，每个$(a+b)$在相乘时有两种选择，选 a 或选 b，而且每个$(a+b)$中的 a 或 b 都选定后，才能得到展开式的一项.于是，由分步乘法计数原理，在合并同类项之前，$(a+b)^2$ 的展开式共有 $C_2^1\times C_2^1=2^2$ 项，而且每一项都是 $a^{2-k}\times b^k(k=0,1,2)$ 的形式，$a^{2-k}b^k$ 出现的次数相当于从 2 个$(a+b)$中取 k 个 b 的组合数 C_2^k.
(2)提示：①各项的幂指数和等于 n.②字母 a 按降幂排列，从第一项起，幂指数由 n 逐项减 1 直到 0；字母 b 按升幂排列，从第一项起，幂指数由 0 逐项加 1 直到 n.

任务型课堂

任务 1

【探究活动】

例 1　x^n　解析：原式 $=C_n^0(x+1)^n+C_n^1(x+1)^{n-1}(-1)+C_n^2(x+1)^{n-2}(-1)^2+\cdots+C_n^k(x+1)^{n-k}(-1)^k+\cdots+C_n^n(-1)^n=[(x+1)+(-1)]^n=x^n$.

【应用迁移】

1.B　解析：由进位制的换算方法可知，八进制数 $\underbrace{77\cdots7}_{10\text{个}7}{}_{(8)}$ 换算成十进制数为 $7\times8^9+7\times8^8+\cdots+7\times8^1+7\times8^0=7\times\frac{1-8^{10}}{1-8}=8^{10}-1$，
$8^{10}-1=(10-2)^{10}-1=C_{10}^0\times10^{10}+C_{10}^1\times10^9\times(-2)^1+\cdots+C_{10}^9\times10^1\times(-2)^9+C_{10}^{10}\times2^{10}-1$.
因为 $C_{10}^0\times10^{10}+C_{10}^1\times10^9\times(-2)^1+\cdots+C_{10}^9\times10^1\times(-2)^9$ 是 10 的倍数，
所以这个数的末位数字即为 $C_{10}^{10}\times2^{10}-1$ 的末位数字.
由 $C_{10}^{10}\times2^{10}-1=1\ 023$，得末位数字为 3.

2.$\frac{3}{2}(3^n-1)$　解析：$3C_n^1+6C_n^2+12C_n^3+\cdots+3\times2^{n-1}C_n^n=\frac{3}{2}(2C_n^1+2^2C_n^2+2^3C_n^3+\cdots+2^nC_n^n)=\frac{3}{2}[(1+2)^n-C_n^0]=\frac{3}{2}(3^n-1)$.

任务 2

【探究活动】

例 2　解：(1)通项为 $T_{k+1}=C_n^kx^{\frac{n-k}{3}}(-3)^kx^{-\frac{k}{3}}=C_n^k\cdot(-3)^kx^{\frac{n-2k}{3}}$.

(2)若第 6 项为常数项，则 $\frac{n-2\times5}{3}=0$，得 $n=10$.

[一题多思]

思考 1.解：由题意知 $T_{k+1}=C_{10}^k(-3)^kx^{\frac{10-2k}{3}}$.
令 $\frac{10-2k}{3}=2$，得 $k=2$，
所以含 x^2 的项的系数为 $C_{10}^2\times(-3)^2=405$.
该项的二项式系数为 $C_{10}^2=45$.

思考 2.解：由题意得 $\begin{cases}\frac{10-2k}{3}\in\mathbf{Z},\\0\leqslant k\leqslant10,\\k\in\mathbf{Z},\end{cases}$
令 $\frac{10-2k}{3}=r(r\in\mathbf{Z})$，则 $10-2k=3r$，即 $k=5-\frac{3}{2}r$.
因为 $k\in\mathbf{Z}$，所以 r 应为偶数，$r=2,0,-2$，即 $k=2,5,8$，故二项展开式的所有有理项为
$T_3=C_{10}^2(-3)^2x^2=405x^2$，
$T_6=C_{10}^5(-3)^5=-61\ 236$，
$T_9=C_{10}^8(-3)^8x^{-2}=295\ 245x^{-2}$.

【应用迁移】

1.20　解析：因为 $\left(\frac{3}{x^3}+\frac{x^3}{3}\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_6^k\left(\frac{3}{x^3}\right)^{6-k}\left(\frac{x^3}{3}\right)^k=3^{6-2k}C_6^kx^{6(k-3)}$，$k=0,1,\cdots,6$，
令 $6(k-3)=0$，可得 $k=3$，
所以常数项为 $3^0\times C_6^3=20$.

2.$\frac{1}{2}$　解析：根据二项展开式的通项可得
$T_{k+1}=C_8^kx^{8-k}\left(\frac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^k=C_8^ka^kx^{8-\frac{4k}{3}}$，
令 $8-\frac{4k}{3}=4$，可得 $k=3$，
此时 $C_8^ka^k=C_8^3a^3=7$，解得 $a=\frac{1}{2}$.

3.-8　**解析**：由题意可知，$\left(x-\frac{2}{x^3}\right)^n$的展开式的通项为$T_{k+1}=C_n^k\cdot x^{n-k}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)^k=(-2)^kC_n^k\cdot x^{n-4k}$.

令$n-4k=0$，解得$k=\frac{n}{4}$.

又因为$n\in\mathbf{Z}$，且$3\leqslant n\leqslant6$，所以$n=4$，$k=\frac{n}{4}=1$，

所以$\left(x-\frac{2}{x^3}\right)^n$的展开式中的常数项为$T_2=(-2)^1C_4^1\cdot x^0=(-2)\times4=-8$.

4.**解**：(1)因为$\left(2x^2-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$的展开式的通项是$T_{k+1}=C_8^k(2x^2)^{8-k}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k=(-1)^kC_8^k\cdot2^{8-k}\cdot x^{16-\frac{7}{3}k}$，

$T_5=(-1)^4\times C_8^4\times2^4\cdot x^{\frac{20}{3}}$，

所以第5项的二项式系数是$C_8^4=70$，

第5项的系数是$C_8^4\times2^4=1\ 120$.

(2)由题意，令$16-\frac{7}{3}k=2$，解得$k=6$.

因此，含x^2项的系数是$(-1)^6\times C_8^6\times2^{8-6}=112$.

任务3

【探究活动】

例3　(1)B　**解析**：因为$4^{2\ 024}+a=2^{4\ 048}+a=2\times8^{1\ 349}+a=2\times(9-1)^{1\ 349}+a=2\sum_{k=0}^{1\ 348}[C_{1\ 349}^k\times9^{1\ 349-k}\times(-1)^k]-2+a$，

又$2\sum_{k=0}^{1\ 348}[C_{1\ 349}^k\times9^{1\ 349-k}\times(-1)^k]$能被9整除，

所以$-2+a$能被9整除.

由选项知当$a=-7$时符合，

故选B.

(2)960　**解析**：$\left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$的展开式的通项为$T_{k+1}=C_7^k2^{7-k}(-1)^kx^{-\frac{k}{2}}$，当$k=0,2$时，$T_1=C_7^0\times2^7x^0$，$T_3=C_7^2\times2^5x^{-1}$，

因此$(2x^2-3x)\left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$的展开式中含$x$项的系数为$(-3)\times C_7^0\times2^7+2\times C_7^2\times2^5=-384+1\ 344=960$.

(3)-60　**解析**：$(x-2y+1)^5=[1+(x-2y)]^5$，

其展开式的通项为$T_{r+1}=C_5^r\cdot1^{5-r}\cdot(x-2y)^r=C_5^r\cdot(x-2y)^r$.

因为x^2y的次数为3，所以$r=3$.

又$(x-2y)^3$的通项为$T'_{r'+1}=C_3^{r'}\cdot x^{3-r'}\cdot(-2y)^{r'}$.

令$r'=1$，得含x^2y项的系数为$C_5^3\times C_3^1\times(-2)=-60$.

【应用迁移】

1.C　**解析**：$\left(x^2+2x-\frac{1}{x}\right)^6$可写成$\left[(x^2+2x)-\frac{1}{x}\right]^6$，

故其展开式的通项为$T_{k+1}=C_6^k\cdot(x^2+2x)^{6-k}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^k$，$k=0,1,2,\cdots,6$，

即$T_{k+1}=C_6^kC_{6-k}^m(x^2)^{6-k-m}(2x)^m\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^k=(-1)^k\cdot2^m\cdot C_6^k\cdot C_{6-k}^mx^{12-3k-m}$，$0\leqslant k\leqslant6$，$0\leqslant m\leqslant6-k$，$k,m\in\mathbf{N}$.

要求展开式中的常数项，需要x的指数为0，即需使$12-3k-m=0$，即$3k+m=12$.当$k=4$时，$m=0$；当$k=3$时，$m=3$.

故二项展开式中的常数项为$C_6^4\times C_2^0-2^3\times C_6^3\times C_3^3=15-160=-145$.

故选C.

2.B　**解析**：$(1-x)^5$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_5^r\cdot(-1)^r\cdot x^r(r=0,1,2,3,4,5)$.

$(1+2x)^4$的展开式的通项为$T_{k+1}=C_4^k\cdot2^k\cdot x^k(k=0,1,2,3,4)$.

当$r=0$，$k=2$时，x^2的系数为$C_4^2\times2^2=24$；

当$r=1$，$k=1$时，x^2的系数为$-5\times4\times2=-40$；

当$r=2$，$k=0$时，x^2的系数为$C_5^2=10$.

故含x^2项的系数为$24+10-40=-6$.

故选B.

3.(1)1.34　**解析**：$1.05^6=(1+0.05)^6=1+C_6^1\times0.05+C_6^2\times0.05^2+\cdots\approx1+0.3+0.037\ 5=1.337\ 5\approx1.34$.

(2)**证明**：因为$1+2+2^2+\cdots+2^{5n-1}=\frac{1-2^{5n}}{1-2}=2^{5n}-1$

$=32^n-1$

$=(31+1)^n-1$

$=C_n^0\times31^n+C_n^1\times31^{n-1}+\cdots+C_n^{n-1}\times31+C_n^n\times31^0-1$

$=31(C_n^0\times31^{n-1}+C_n^1\times31^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1})$，

显然$C_n^0\times31^{n-1}+C_n^1\times31^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}$为整数，

所以$1+2+2^2+\cdots+2^{5n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$能被31整除.

6.3.2　二项式系数的性质

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(1)首末两端“等距离”

(2)增大　减小　$C_n^{\frac{n}{2}}$　$C_n^{\frac{n-1}{2}}$　$C_n^{\frac{n+1}{2}}$

知识点二

(1)2^n　(2)2^{n-1}

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)×

2.D　**解析**：因为$n=11$为奇数，所以展开式中二项式系数C_{11}^5与C_{11}^6相等，且同时取得最大值，即第6项和第7项的二项式系数相等，且最大.

3.B　**解析**：令$x=1$，得各项系数的和为-1.

4.B　**解析**：由题意知$(1+1)^n\times(3-1)=1\ 024$，即$2^{n+1}=1\ 024$，所以$n=9$.故选B.

5.(1)**提示**：实际上，a，b既可以取任意实数，也可以取任意多项式，还可以是别的.我们可以根据具体问题的需要灵活选取a，b的值.

(2)**提示**：从n个不同元素中取出$m(m\leqslant n)$个元素，则剩余$(n-m)$个元素，故从n个不同元素中取出m个元素的组合数与取出$(n-m)$个元素的组合数相等，即$C_n^m=C_n^{n-m}$.

任务型课堂

任务1

【探究活动】

例1　(1)B　**解析**：$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2x}\right)^6$的展开式共有7项，则二项式系数最大的项是第4项.故选B.

(2)-10　**解析**：因为$\left(x-\frac{2}{x^2}\right)^n$的二项展开式中所有二项式系数的和等于32，

所以$2^n=32$，得$n=5$.

故$\left(x-\frac{2}{x^2}\right)^5$的展开式的通项为$T_{k+1}=C_5^k\cdot x^{5-k}\cdot(-2)^kx^{-2k}=C_5^k(-2)^kx^{5-3k}$(其中$0\leqslant k\leqslant5$，且$k\in\mathbf{N}$)，

令$5-3k=2$，解得$k=1$，

所以展开式中含x^2项的系数为$C_5^1\times(-2)^1=-10$.

【应用迁移】

1.A　**解析**：因为$(a+b)^{2n}(n\in\mathbf{N}^*)$的展开式中第6项的二项式系数最大，且$(a+b)^{2n}(n\in\mathbf{N}^*)$共有$(2n+1)$项，则$(a+b)^{2n}(n\in\mathbf{N}^*)$的展开式共11项，所以$2n+1=11$，解得$n=5$.

所以$\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^5$的展开式的通项为$T_{k+1}=C_5^k\cdot(\sqrt{x})^{5-k}\cdot\left(-\frac{2}{x}\right)^k=C_5^k(-2)^kx^{\frac{5-3k}{2}}(k=0,1,2,\cdots,5)$.

令$\frac{5-3k}{2}=1$，可得$k=1$，因此，$\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^5$的展开式中

含 x 项的系数为 $C_5^1\times(-2)=-10$.

2.15　**解析**:因为 $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式的各二项式系数之和为 64,所以 $2^n=64$,所以 $n=6$.

所以 $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_6^k(x^2)^{6-k}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k=C_6^kx^{12-3k}$.

令 $12-3k=0$,得 $k=4$,

所以 $T_5=C_6^4=15$,即常数项为 15.

3.$924x^6$　**解析**:依题意,$C_n^0+C_n^1+C_n^2=1+n+\frac{n(n-1)}{2}=79$,解得 $n=12$ 或 $n=-13$(舍去),

即 $\left(\frac{1}{2}+2x\right)^{12}$ 的展开式有 13 项,最中间的项为第 7 项,也是二项式系数最大的项,

即 $T_7=C_{12}^6\left(\frac{1}{2}\right)^6(2x)^6=924x^6$.

任务 2

【探究活动】

例 2　**解**:令 $x=1$,可得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2\,024}=1$.

[一题多思]

思考 1.解:令 $x=-1$,可得 $a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{2\,023}+a_{2\,024}=3^{2\,024}$.

思考 2.解:$|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{2\,024}|$ 与 $b_0+b_1+b_2+\cdots+b_{2\,024}$ 相等.

思考 3.解:对 $(1-2x)^{2\,024}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2\,024}\cdot x^{2\,024}$ 两边求导数,得 $2\,024(1-2x)^{2\,023}\cdot(-2)=a_1+2a_2x+\cdots+2\,023a_{2\,023}\cdot x^{2\,022}+2\,024a_{2\,024}\cdot x^{2\,023}$.令 $x=1$,得 $a_1+2a_2+\cdots+2\,023a_{2\,023}+2\,024a_{2\,024}=4\,048$.

思考 4.解:令 $x=0$,得 $a_0=1$.

思考 5.解:由例题与思考 1 可得,$a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2\,024}$

$=\frac{(a_0+a_1+\cdots+a_{2\,024})+(a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{2\,024})}{2}$

$=\frac{3^{2\,024}+1}{2}$.

【应用迁移】

1.D　**解析**:令 $x=0$,得 $a_0=1$.令 $x=2$,则 $a_0+2a_1+2^2a_2+\cdots+2^9a_9=3^9$,所以 $2a_1+2^2a_2+\cdots+2^9a_9=3^9-1$.

2.**解**:(1)易知 $n\geqslant7$,$n\in\mathbf{N}$.因为 $A_n^5=56C_n^7$,

所以 $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

$=56\times\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}$,

整理可得 $\frac{(n-5)(n-6)}{90}=1$,即 $n^2-11n-60=0$,

解得 $n=15$ 或 $n=-4$(舍去).故 n 的值为 15.

(2)由(1)得 $n=15$,

所以 $(1-3x)^n=(1-3x)^{15}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{15}x^{15}$.

令 $x=0$,可得 $a_0=1$;

令 $x=\frac{1}{3}$,可得 $\left(1-3\times\frac{1}{3}\right)^{15}=a_0+\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\cdots+\frac{a_{15}}{3^{15}}=0$.

所以 $\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\cdots+\frac{a_{15}}{3^{15}}=-1$.

3.**解**:(1)由题意得各二项式系数之和为 $C_9^0+C_9^1+C_9^2+\cdots+C_9^9=2^9=512$.

(2)设 $(2x-y)^9=a_0x^9+a_1x^8y+a_2x^7y^2+\cdots+a_9y^9$,

则各项系数之和为 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9$,

令 $x=1$,$y=1$,得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9=(2-1)^9=1$.

(3)由(2)知 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9=1$,令 $x=1$,$y=-1$ 可得 $a_0-a_1+a_2-\cdots-a_9=3^9$,

将两式相减,可得 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=\frac{1-3^9}{2}=-9\,841$.

故所有偶数项系数之和为 $-9\,841$.

(4)(方法一)$|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_9|=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_9$,

令 $x=1$,$y=-1$,则 $|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_9|=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_9=3^9=19\,683$.

(方法二)$|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_9|$ 即为 $(2x+y)^9$ 展开式中各项系数和,

令 $x=1$,$y=1$,得 $|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_9|=3^9=19\,683$.

故各项系数绝对值之和为 19 683.

任务 3

【探究活动】

例 3　**解**:(1)由题意可得 $C_n^2=4\cdot C_n^1$,即 $\frac{n(n-1)}{2}=4n$,整理得 $n^2-9n=0$,

解得 $n=9$ 或 $n=0$.又 $n\geqslant2$,所以 $n=9$.

(2)由 $n=9$,得 $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-2x\right)^9$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_9^k\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{9-k}(-2x)^k=(-2)^k\cdot C_9^kx^{\frac{3k-9}{2}}$,

则 $T_6=(-2)^5\cdot C_9^5x^{\frac{3\times5-9}{2}}=-32\times126x^3=-4\,032x^3$.

令 $k=3$,则 $T_4=(-2)^3\cdot C_9^3x^0=-8\times84=-672$.

故展开式中的第 6 项的系数及常数项分别为 $-4\,032$,-672.

(3)设第 $(k+1)$ 项的系数绝对值最大,

则有 $\begin{cases}2^k\cdot C_9^k\geqslant2^{k+1}\cdot C_9^{k+1},\\2^k\cdot C_9^k\geqslant2^{k-1}\cdot C_9^{k-1},\end{cases}$

即 $\begin{cases}\frac{9!}{k!\,(9-k)!}\geqslant2\times\frac{9!}{(k+1)!\,(8-k)!},\\2\times\frac{9!}{k!\,(9-k)!}\geqslant\frac{9!}{(k-1)!\,(10-k)!},\end{cases}$

即 $\begin{cases}k+1\geqslant2(9-k),\\2(10-k)\geqslant k,\end{cases}$ 解得 $\frac{17}{3}\leqslant k\leqslant\frac{20}{3}$.

又 $k\in\mathbf{N}$,所以 $k=6$,即展开式中系数绝对值最大的项是第 7 项.

【应用迁移】

5　**解析**:$\left(\frac{1}{3}+x\right)^{10}$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_{10}^k\left(\frac{1}{3}\right)^{10-k}x^k$,$0\leqslant k\leqslant10$ 且 $k\in\mathbf{Z}$,

设展开式中第 $(k+1)$ 项的系数最大,

则 $\begin{cases}C_{10}^k\left(\frac{1}{3}\right)^{10-k}\geqslant C_{10}^{k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{9-k},\\C_{10}^k\left(\frac{1}{3}\right)^{10-k}\geqslant C_{10}^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{11-k},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k\geqslant\frac{29}{4},\\k\leqslant\frac{33}{4},\end{cases}$ 即 $\frac{29}{4}\leqslant k\leqslant\frac{33}{4}$.又 $k\in\mathbf{Z}$,故 $k=8$,

所以展开式中系数最大的项是第 9 项,且该项系数为 $C_{10}^8\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=5$.

迁移应用

类型一

例 1　B　**解析**:(方法一)5 位同学报名参加 3 个项目,人数构成分为 2+2+1 与 3+1+1 两种情况.

先分组,再将不同组分配去参加项目:

当人数构成为 2+2+1 时,

小赵和小钱分别在两个 2 人组:$C_3^1C_2^1A_3^3=36$;

小赵和小钱分别在 2 人组和 1 人组:$C_2^1C_3^1A_3^3=36$;

当人数构成为 3+1+1 时,

小赵和小钱分别在两个 1 人组:$A_3^3=6$;

小赵和小钱分别在 1 人组和 3 人组:$C_2^1C_3^2A_3^3=36$.

所以共有 36+36+6+36=114 种不同的报名方法.

(方法二)不考虑小赵与小钱的特殊要求,5 位同学报名参加 3 个项目,人数构成分为 2+2+1 与 3+1+1 两种情况:

①2+2+1:$\frac{C_5^2C_3^2}{A_2^2}A_3^3=90$;②3+1+1:$\frac{C_5^3C_2^1}{A_2^2}A_3^3=60$.故共有 90+60=150 种不同的报名方法.

假如小赵与小钱参加同一个项目,分为他们都在同一个 2 人组和都在 3 人组两种情况,

①都在同一个 2 人组:$C_3^2\times A_3^3=18$;②都在 3 人组:$\frac{C_3^1C_2^1}{A_2^2}$

$A_3^3=18$.
考虑两人的特殊要求之后，共有 $150-18-18=114$ 种不同的报名方法.
故选 B.
类型二
例 2　解：(1)由题意得 $C_n^4(-2)^4:C_n^2(-2)^2=56:3$，解得 $n=10$(负值舍去)，此时 $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$ 的展开式的通项为
$T_{k+1}=C_{10}^k(\sqrt{x})^{10-k}\left(-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^k=(-2)^kC_{10}^kx^{5-\frac{5k}{6}}$.
当 $5-\frac{5k}{6}$ 为整数时，k 可取 0，6，于是有理项为 $T_1=x^5$ 和 $T_7=13\ 440$.
(2)设第 $(k+1)$ 项系数的绝对值最大，
则 $\begin{cases}C_{10}^k2^k\geqslant C_{10}^{k-1}2^{k-1},\\C_{10}^k2^k\geqslant C_{10}^{k+1}2^{k+1},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k\leqslant\frac{22}{3},\\k\geqslant\frac{19}{3}.\end{cases}$
又因为 $k\in\{1,2,3,\cdots,9\}$，所以 $k=7$，
当 $k=7$ 时，$T_8=-15\ 360x^{-\frac{5}{6}}$.
又因为当 $k=0$ 时，$T_1=x^5$，
当 $k=10$ 时，$T_{11}=(-2)^{10}x^{-\frac{10}{3}}=1\ 024x^{-\frac{10}{3}}$，
所以系数的绝对值最大的项为 $T_8=-15\ 360x^{-\frac{5}{6}}$.
(3)原式 $=10+9\times C_{10}^2+81\times C_{10}^3+\cdots+9^{10-1}\times C_{10}^{10}$
$=\frac{9\times C_{10}^1+9^2\times C_{10}^2+9^3\times C_{10}^3+\cdots+9^{10}\times C_{10}^{10}}{9}$
$=\frac{C_{10}^0+9\times C_{10}^1+9^2\times C_{10}^2+9^3\times C_{10}^3+\cdots+9^{10}\times C_{10}^{10}-1}{9}$
$=\frac{(1+9)^{10}-1}{9}=\frac{10^{10}-1}{9}$.

重构拓展

【学科视野拓展】
拓展一
应用 1　$\frac{1}{630}$　$\frac{1}{3}-\frac{2}{n(n-1)(n+1)}$　**解析**：观察杨辉三角中各数，要求第 8 行第 5 个数，所以 $n=8$，$r=4$，所以第 8 行第 5 个数为 $\frac{1}{(8+1)C_8^4}=\frac{1}{630}$.
由"莱布尼茨三角形"的特点可知，每个数均等于其"脚下"两个数之和，
所以 $\frac{1}{(n+1)C_n^{n-2}}+\frac{1}{(n+1)C_n^{n-3}}=\frac{1}{nC_{n-1}^{n-3}}$，
$\frac{1}{nC_{n-1}^{n-3}}+\frac{1}{nC_{n-1}^{n-4}}=\frac{1}{(n-1)C_{n-2}^{n-4}}$，
$\frac{1}{(n-1)C_{n-2}^{n-4}}+\frac{1}{(n-1)C_{n-2}^{n-5}}=\frac{1}{(n-2)C_{n-3}^{n-5}}$，…，
$\frac{1}{5C_4^1}+\frac{1}{5C_4^2}=\frac{1}{4C_3^1}$，$\frac{1}{4C_3^1}+\frac{1}{4C_3^0}=\frac{1}{3C_2^0}$，
将上述各式相加，得 $\frac{1}{(n+1)C_n^{n-2}}+\frac{1}{(n+1)C_n^{n-3}}+\frac{1}{nC_{n-1}^{n-4}}+\cdots+\frac{1}{20}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$，
所以 $\frac{1}{(n+1)C_n^{n-2}}+S_n=\frac{1}{3}$，
即 $S_n=\frac{1}{3}-\frac{2}{n(n-1)(n+1)}$.
拓展二
应用 2　解：(1)$G(x)=(1+x)(1+x)(1+x)(1+x)$
$=1+4x+6x^2+4x^3+x^4$.
(2)因为 $G(x)=(1+x)^{n+1}+2(1+x)^{n+2}+3(1+x)^{n+3}+\cdots+n(1+x)^{2n}$，
所以展开式中 x^n 的系数为 $C_{n+1}^n+2C_{n+2}^n+3C_{n+3}^n+\cdots+nC_{2n}^n=C_{n+1}^1+2C_{n+2}^2+3C_{n+3}^3+\cdots+nC_{2n}^n$.
因为 $rC_{n+r}^r=(n+1)C_{n+r}^{n+1}$，
所以 x^n 的系数为 $a_n=(n+1)(C_{n+1}^{n+1}+C_{n+2}^{n+1}+C_{n+3}^{n+1}+\cdots+C_{2n}^{n+1})=(n+1)(C_{n+2}^{n+2}+C_{n+2}^{n+1}+C_{n+3}^{n+1}+\cdots+C_{2n}^{n+1})$
$=(n+1)(C_{n+3}^{n+2}+C_{n+3}^{n+1}+\cdots+C_{2n}^{n+1})=(n+1)C_{2n+1}^{n+2}$.
(3)显然 $a_1=a_3=a_5=a_7=0$，
$a_0=1$，$a_2=C_8^2=28$，$a_4=C_8^4=70$，$a_6=C_8^6=28$，$a_8=1$，
故 $A(x)=1+28x^2+70x^4+28x^6+x^8$.
同样 $b_0=b_1=0$，$b_2=b_3=10$，$b_4=5$，$b_5=1$，
故 $B(x)=10x^2+10x^3+5x^4+x^5$，
令 $C(x)=A(x)\cdot B(x)=(1+28x^2+70x^4+28x^6+x^8)\cdot(10x^2+10x^3+5x^4+x^5)$
$=10x^2+10x^3+285x^4+281x^5+840x^6+728x^7+630x^8+350x^9+150x^{10}+38x^{11}+5x^{12}+x^{13}$，
$C(x)$ 中 x^k 的系数 c_k 为符合要求的 k 个人组成的小组的个数，
所有组合的个数为 $10+10+285+281+840+728+630+350+150+38+5+1=3\ 328$.

第七章　随机变量及其分布

探究构建

7.1　条件概率与全概率公式

7.1.1　条件概率

问题式预习

【知识清单】
知识点一
(1)$\frac{P(AB)}{P(A)}$
(2)$P(AB)=P(A)P(B|A)$
知识点二
(1)1
(2)$P(B|A)+P(C|A)$
(3)$1-P(B|A)$
【概念辨析】
1.(1)×　(2)√　(3)×　(4)√　(5)×
2.B　**解析**：$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{13}}{\frac{5}{7}}=\frac{7}{13}$.
3.$\frac{4}{99}$　**解析**：(方法一)在第一次取到不合格产品后，由于不放回，故还有 99 件产品，其中 4 件不合格产品，故第二次取到不合格产品的概率为 $\frac{4}{99}$.
(方法二)第一次取到不合格产品的概率 $p_1=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$，两次都取到不合格产品的概率 $p_2=\frac{C_5^2}{C_{100}^2}=\frac{1}{495}$，所以所求概率 $p=\frac{p_2}{p_1}=\frac{\frac{1}{495}}{\frac{1}{20}}=\frac{4}{99}$.
4.(1)**提示**：$P(B|A)$ 是在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率；$P(AB)$ 是事件 A 与 B 同时发生的概率，无附加条件；$P(A)$ 是事件 A 发生的概率，无附加条件.它们的联系是 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$.
(2)**提示**：不相同.$P(B|A)$ 表示在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率；而 $P(A|B)$ 表示在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的概率.另外，从计算公式上看，$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$，$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$.

任务型课堂

任务 1
【探究活动】
例 1　D　**解析**：由题意易知人员分组情况为：2，1，1，即所

有安排方案有$C_4^2C_3^1\times 2=36$(种)，铅球区域可能安排2人或1人，所以$P(A)=\frac{C_3^1\times 2+C_3^2C_2^1}{36}=\frac{1}{3}$，同理$P(B)=\frac{1}{3}$，$P(C)=\frac{1}{3}$. 而$P(AB)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}\neq P(A)\cdot P(B)$，$P(AC)=\frac{C_2^1C_2^1+1}{36}=\frac{5}{36}$，由相互独立事件的充要条件可知，事件$A$与$B$不相互独立，故A错误；

显然，事件A与C能同时发生，不为互斥事件，故B错误；

由条件概率公式知$P(C|A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{36}}{\frac{1}{3}}=\frac{5}{12}$，故C错误；

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{6}$，故D正确.

故选D.

【应用迁移】

1.$\frac{3}{5}$　$\frac{1}{2}$　**解析**：(方法一)从五个活动中选三个的情况有ABC，ABD，ABE，ACD，ACE，ADE，BCD，BCE，BDE，CDE，共10种，

其中甲选到A活动的情况有ABC，ABD，ABE，ACD，ACE，ADE，共6种，

所以甲选到A活动的概率为$\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

乙选A活动的情况有ABC，ABD，ABE，ACD，ACE，ADE，共6种，

乙同时选了A，B两个活动的情况有ABC，ABD，ABE，共3种，

所以乙选了A活动，他再选择B活动的概率为$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

(方法二)设甲、乙选到A活动分别为事件M，N，乙选到B活动为事件Q，

则甲选到A活动的概率为$P(M)=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{3}{5}$；

乙选了A活动，他再选择B活动的概率为$P(Q|N)=\frac{P(NQ)}{P(N)}=\frac{\frac{C_3^1}{C_5^3}}{\frac{C_4^2}{C_5^3}}=\frac{1}{2}$.

2.$\frac{3}{13}$　**解析**：事件A为“取出的两个球颜色不同”，包括一个黄球一个蓝球，一个黄球一个绿球以及一个蓝球一个绿球，共三种情况，则$n(A)=C_4^1C_3^1+C_4^1C_2^1+C_3^1C_2^1=26$，

事件B为“取出一个蓝球，一个绿球”，则$n(AB)=C_3^1C_2^1=6$，

所以$P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{6}{26}=\frac{3}{13}$.

任务2

【探究活动】

例2　解：由题设知$P(A_1)=\frac{3}{10}$，$P(A_2|A_1)=\frac{2}{9}$.

根据概率的乘法公式，有$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$.

［一题多思］

思考1.解：由题意知$P(A_1)=\frac{3}{10}$，$P(\overline{A_2}|A_1)=\frac{7}{9}$.

根据概率的乘法公式，有$P(A_1\overline{A_2})=P(A_1)P(\overline{A_2}|A_1)=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{30}$.

思考2.解：由题意知$P(A_1)=\frac{3}{10}$，$P(A_2)=\frac{3}{10}$，$P(\overline{A_2})=\frac{7}{10}$，则两次取到的均是黑球的概率为$P(A_1A_2)=\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{9}{100}$，第一次取到黑球，第二次取到白球的概率为$P(A_1\overline{A_2})=\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}=\frac{21}{100}$.

【应用迁移】

1.C　**解析**：设“从1号箱中取到红球放入2号箱”为事件A，“从2号箱中取到红球”为事件B.

由题意知，$P(A)=\frac{4}{2+4}=\frac{2}{3}$，$P(B|A)=\frac{3+1}{8+1}=\frac{4}{9}$，

所以$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{2}{3}\times\frac{4}{9}=\frac{8}{27}$，

所以两次都取到红球的概率为$\frac{8}{27}$.

2.**解**：设A_i=“第i次掉落手机屏幕未碎掉”，$i=1,2$，则由已知可得$P(A_1)=0.5$，$P(A_2|A_1)=0.3$.

由概率的乘法公式可得$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=0.5\times 0.3=0.15$，

即这样的手机从1 m高的地方掉落两次后屏幕仍未碎掉的概率为0.15.

任务3

【探究活动】

例3　解：(1)A，B，C之间两两互斥.

(2)因为A，B，C两两互斥，且$D=A\cup B\cup C$，

所以$P(D)=P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{C_{10}^6}{C_{20}^6}+\frac{C_{10}^5C_{10}^1}{C_{20}^6}+\frac{C_{10}^4C_{10}^2}{C_{20}^6}=\frac{203}{646}$.

(3)$E=A\cup B$，因为$P(AD)=P(A)$，$P(BD)=P(B)$，

所以$P(E|D)=P(A|D)+P(B|D)=\frac{P(A)}{P(D)}+\frac{P(B)}{P(D)}=\frac{\frac{C_{10}^6}{C_{20}^6}}{\frac{12\ 180}{C_{20}^6}}+\frac{\frac{C_{10}^5C_{10}^1}{C_{20}^6}}{\frac{12\ 180}{C_{20}^6}}=\frac{13}{58}$.

故该考生在这次考试中获得优秀的概率为$\frac{13}{58}$.

【应用迁移】

1.A　**解析**：由题意可得$P(B|C)=\frac{P(BC)}{P(C)}=\frac{1}{3}$，由$A$，$B$是互斥事件知，$P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)$，所以$P(A|C)=P(A\cup B|C)-P(B|C)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

2.**解**：设A=“从第一个盒子中取得标有字母A的球”，

B=“从第一个盒子中取得标有字母B的球”，

R=“第二次取出的球是红球”，

W=“第二次取出的球是白球”，

则$P(A)=\frac{7}{10}$，$P(B)=\frac{3}{10}$，

所以$P(R|A)=\frac{1}{2}$，$P(R|B)=\frac{4}{5}$.

事件“试验成功”表示为$RA\cup RB$，

又事件RA与事件RB互斥，

所以由概率加法公式与乘法公式得

$P(RA\cup RB)=P(RA)+P(RB)$

$=P(R|A)P(A)+P(R|B)P(B)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{7}{10}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{10}=\frac{59}{100}$.

3.**解**：(1)平均年龄为$(5\times 0.001+15\times 0.002+25\times 0.012+35\times 0.017+45\times 0.023+55\times 0.020+65\times 0.017+75\times 0.006+85\times 0.002)\times 10=47.9$(岁).

(2)设A=“一位这种疾病患者的年龄在区间$[20,70)$”，

所以$P(A)=1-P(\overline{A})=1-(0.001+0.002+0.006+0.002)\times 10=1-0.11=0.89$.

(3)设B=“任选一人年龄位于区间$[40,50)$”，C=“从该

地区中任选一人患这种疾病”.

由已知得 $P(B)=16\%=0.16$，$P(C)=0.1\%=0.001$，$P(B|C)=0.023\times10=0.23$.

由条件概率公式，可得从该地区中任选一人，若此人的年龄位于区间[40,50)，此人患这种疾病的概率为 $P(C|B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{P(C)P(B|C)}{P(B)}=\frac{0.001\times0.23}{0.16}=0.001\,437\,5\approx0.001\,4$.

7.1.2 全概率公式

问题式预习

【知识清单】

知识点一

$P(A_i)>0$　$\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$

知识点二

$P(A_i)>0$　$\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P(A_k)P(B|A_k)}$

【概念辨析】

1.(1)√　(2)×

2.$\frac{1}{5}$　**解析**：设 A＝“第二个人取得红球”，B＝“第一个人取得红球”，则 $P(B)=\frac{2}{10}$，$P(\overline{B})=\frac{8}{10}$，$P(A|B)=\frac{1}{9}$，$P(A|\overline{B})=\frac{2}{9}$，所以 $P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{5}$.

3.0.8　**解析**：设 B＝“中途停车修理”，A_1＝“经过的是货车”，A_2＝“经过的是客车”，则 $B=A_1B\cup A_2B$.

由贝叶斯公式有

$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)}=\frac{\frac{2}{3}\times0.02}{\frac{2}{3}\times0.02+\frac{1}{3}\times0.01}=0.8$.

4.(1)**提示**：事件 A 发生的概率等于所有可能的状态 B_i 和事件 A 同时发生的概率之和，其中每个状态 B_i 和事件 A 同时发生的概率由该状态下 A 发生的概率和状态 B_i 发生的概率决定.

(2)**提示**：在使用全概率公式时，需要注意以下两点：

①必须确定所有可能的状态 B_i，并给出它们对应的概率 $P(B_i)$；

②必须确定每个状态 B_i 下事件 A 发生的概率 $P(A|B_i)$.

任务型课堂

任务1

【探究活动】

例1　解：(1)A 发生当且仅当 $AB\cup A\overline{B}$ 发生，即 $A=AB\cup A\overline{B}=AB+A\overline{B}$，则 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=\frac{2}{7}\times\frac{4}{8}+\frac{5}{7}\times\frac{3}{8}=\frac{23}{56}$.

(2)$\overline{B}$ 发生当且仅当 $\overline{B}A\cup\overline{B}\,\overline{A}$ 发生，即 $\overline{B}=\overline{B}A+\overline{B}\,\overline{A}$，

则 $P(\overline{B})=P(\overline{B}A)+P(\overline{B}\,\overline{A})=P(A)P(\overline{B}|A)+P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}|\overline{A})=\frac{3}{7}\times\frac{5}{8}+\frac{4}{7}\times\frac{6}{8}=\frac{39}{56}$.

例2　解：设事件 A＝“任取的一件为次品”，事件 B_i＝“任取的一件为 i 厂的产品”，$i=1,2,3$.

由全概率公式得 $P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)$.

又 $P(B_1)=0.3$，$P(B_2)=0.5$，$P(B_3)=0.2$，$P(A|B_1)=0.02$，$P(A|B_2)=0.01$，$P(A|B_3)=0.01$，

所以 $P(A)=0.02\times0.3+0.01\times0.5+0.01\times0.2=0.013$.

【应用迁移】

1.$\frac{1}{7}$　**解析**：由 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$，得 $\frac{3}{10}=P(A)\times\frac{9}{10}+[1-P(A)]\times\frac{1}{5}$，解得 $P(A)=\frac{1}{7}$.

2.0.78　**解析**：由题意知一、二、三级射手占比分别为 $\frac{3}{10}$，$\frac{9}{20}$，$\frac{1}{4}$，且一、二、三级射手在比赛中击中目标的概率分别为0.9，0.8，0.6，所以从该小组随机选一人参加比赛，在比赛中击中目标的概率为 $\frac{3}{10}\times0.9+\frac{9}{20}\times0.8+\frac{1}{4}\times0.6=0.78$.

3.解：(1)该企业原有生产线的正品率为 $P_1=\left(1-\frac{1}{50}\right)\times\left(1-\frac{1}{49}\right)\times\left(1-\frac{1}{48}\right)=\frac{47}{50}$，所以该企业原有生产线的次品率为 $P=1-P_1=1-\frac{47}{50}=\frac{3}{50}$.

(2)记“任取一个芯片来自原生产线”为事件 A，“任取一个芯片来自新生产线”为事件 $\overline{A}$，

“任取一个芯片是次品”为事件 B，

则 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(\overline{A})=\frac{2}{3}$，且 $P(B|A)=\frac{3}{50}$，$P(B|\overline{A})=\frac{1}{25}$，

所以 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{1}{3}\times\frac{3}{50}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{25}=\frac{7}{150}$，

即从混放的芯片中任取一个，它是次品的概率为 $\frac{7}{150}$.

任务2

【探究活动】

例3　解：(1)由题意知，$P(B)=0.8$，$P(\overline{B})=0.2$，$P(A|B)=0.1$，$P(A|\overline{B})=0.95$.

由贝叶斯公式，得该生在毕业三年内未还清贷款，该生是可信的学生的概率为

$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}$

$=\frac{0.8\times0.1}{0.8\times0.1+0.2\times0.95}\approx0.30$.

(2)由题意知，$P(B)=0.8$，$P(\overline{B})=0.2$，$P(\overline{A}|B)=0.9$，$P(\overline{A}|\overline{B})=0.05$.

由贝叶斯公式，得该生在毕业三年内还清贷款，该生是可信的学生的概率为

$P(B|\overline{A})=\frac{P(B)P(\overline{A}|B)}{P(B)P(\overline{A}|B)+P(\overline{B})P(\overline{A}|\overline{B})}$

$=\frac{0.8\times0.9}{0.8\times0.9+0.2\times0.05}$

≈0.99.

【应用迁移】

1.解：(1)记事件 B＝“小明获胜”，记事件 A_i＝“小明与 $i(i=1,2,3)$ 类棋手相遇”，

由题意得，$P(A_1)=\frac{5}{20}=0.25$，$P(A_2)=\frac{7}{20}=0.35$，$P(A_3)=\frac{8}{20}=0.4$，$P(B|A_1)=0.6$，$P(B|A_2)=0.5$，$P(B|A_3)=0.4$.

由全概率公式可得 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)\cdot P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$

$=0.25\times0.6+0.35\times0.5+0.4\times0.4=0.485$.

(2)由(1)及贝叶斯公式可得 $P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.25\times0.6}{0.485}=\frac{30}{97}$，

即小明获胜，对手为一类棋手的概率为$\frac{30}{97}$.

2.解：设 A 表示"该考生会做这道题"，B 表示"该考生选出正确选项"，则 $P(A)=0.85$，$P(\overline{A})=0.15$，$P(B|A)=1$，$P(B|\overline{A})=0.25$.

(1)由全概率公式得 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})\cdot P(B|\overline{A})=0.85\times1+0.15\times0.25=0.8875$.

(2)由(1)及贝叶斯公式得 $P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{0.85\times1}{0.8875}\approx0.958$.

7.2 离散型随机变量及其分布列

问题式预习

【知识清单】

知识点一

唯一　一一列举　X,Y,Z　x,y,z

知识点二

(2)图形法

(3)①$p_i\geqslant0$，$i=1,2,\cdots,n$　②$p_1+p_2+\cdots+p_n=1$

知识点三

(1)$1-p$

(2)两点分布　0－1

【概念辨析】

1.(1)×　(2)√　(3)×

2.A　**解析**：由随机变量 X 的分布列的性质得 $\frac{1}{3}+a+b=1$，解得 $a+b=\frac{2}{3}$.

3.BCD　**解析**：两点分布又叫 0－1 分布，所有的试验结果有两个，B，C，D 满足定义.而抛掷一枚骰子，所得点数为随机变量 X，则 X 的所有可能的结果有 6 种，不服从两点分布.

4.(1)**提示**：随机变量的定义与函数的定义类似，样本点 ω 相当于函数定义中的自变量，而样本空间 Ω 相当于函数的定义域，不同之处在于 Ω 不一定是数集.

(2)**提示**：不服从，因为两点分布中随机变量的取值只能是 0 和 1，因此两点分布又称 0－1 分布.

任务型课堂

任务 1

1.解：(1)某机场一年中每天服务乘客的数量可能为 0，1，2，3，…，是随机变化的，因此是随机变量，也是离散型随机变量.

(2)某单位办公室一天中接到电话的次数可能为 0，1，2，3，…，是随机变化的，因此是随机变量，也是离散型随机变量.

(3)某地明年 5 月 1 日到 10 月 1 日期间所查酒驾的人数可能为 0，1，2，3，…，是随机变化的，因此是随机变量，也是离散型随机变量.

(4)果汁的净含量在 498 mL～502 mL 之间波动，是随机变量，但不是离散型随机变量.

2.解：(1)X 的可能取值为 1，2，3，…，10.

$X=k(k=1,2,\cdots,10)$表示"取出编号为 k 的球".

(2)X 的可能取值为 0，1，2，3，4.

$X=k$ 表示"取出 k 个红球，$(4-k)$个白球"，其中 $k=0,1,2,3,4$.

(3)以(i,j)表示"投掷甲、乙两枚骰子后，骰子甲得 i 点且骰子乙得 j 点".

X 的可能取值为 2，3，4，…，12.

$X=2$ 表示(1，1)；$X=3$ 表示(1，2)，(2，1)；$X=4$ 表示(1，3)，(2，2)，(3，1)；…；$X=12$ 表示(6，6).

任务 2

【探究活动】

例 1　0.7　**解析**：由分布列的性质可得，$0.1+m+0.3+2m=1$，解得 $m=0.2$，

所以 $P(X>2)=P(X=3)+P(X=4)=0.3+2\times0.2=0.7$.

【应用迁移】

1.C　**解析**：由随机变量 X 的分布列知，

$P(X<-1)=0.1$，$P(X<0)=0.3$，$P(X<1)=0.4$，$P(X<2)=0.7$，

则当 $P(X<a)=0.7$ 时，实数 a 的取值范围是$(1,2]$.

2.B　**解析**：由离散型随机变量 X 的分布列，

得$\begin{cases}0\leqslant9C^2-C\leqslant1,\\0\leqslant3-8C\leqslant1,\\9C^2-C+3-8C=1,\end{cases}$　解得 $C=\frac{1}{3}$.

3.B　**解析**：根据分布列的性质，有 $\frac{1}{3}+m+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=1$，解得 $m=\frac{1}{4}$.

所以 $P(|X-3|=1)=P(X=4)+P(X=2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$.

4.$\frac{8}{9}$　**解析**：由 $C\times\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}\right)=1$，得 $C=\frac{4}{3}$.

所以 $P(0.5<X<2.5)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{2}{3}+\frac{2}{9}=\frac{8}{9}$.

任务 3

【探究活动】

例 2　**解**：(1)由题意知 $P(X=0)=\frac{3}{7}$，$P(X=1)=\frac{4}{7}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1
P	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

(2)由题意知 $P(X=0)=\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{1}{7}$，$P(X=1)=1-P(X=0)=\frac{6}{7}$，

所以 X 的分布列为

X	0	1
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$

【应用迁移】

1.C　**解析**：由题意知 $\xi=0$ 表示"试验失败"，$\xi=1$ 表示"试验成功".

设失败率为 p，则成功率为 $2p$，ξ 的分布列为

ξ	0	1
P	p	$2p$

由 $p+2p=1$，得 $p=\frac{1}{3}$.故 $P(\xi=0)=\frac{1}{3}$.

2.C　**解析**：根据题意和两点分布的性质可知

$\begin{cases}P(X=1)-P(X=0)=0.2,\\P(X=1)+P(X=0)=1,\end{cases}$

解得 $P(X=1)=0.6$.

任务 4

【探究活动】

例 3　**解**：用 X 表示摸出的 2 个球中的白球个数，X 的所有可能取值为 0，1，2.

$P(X=0)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$，$P(X=1)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$，

$P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$.

故 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

[一题多思]
思考1.解:由题意知,X的可能取值为1,2,3,

第1次摸到白球的概率为$P(X=1)=\frac{3}{5}$,

第2次摸到白球的概率为$P(X=2)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$,

第3次摸到白球的概率为$P(X=3)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times1=\frac{1}{10}$.

所以X的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

思考2.解:由题意知,X的所有可能取值为3,4,5,

3次摸到所有白球的概率为$P(X=3)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$,

4次摸到所有白球的概率为$P(X=4)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$,

5次摸到所有白球的概率为$P(X=5)=1-\frac{1}{10}-\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$,

所以X的分布列为

X	3	4	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

【应用迁移】

1.解:(1)当甲命中的环数高于乙命中的环数时,只有一种情况:甲命中10环,且乙命中9环,这时概率$p_0=\frac{2}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{3}$.所以甲命中的环数不高于乙命中的环数的概率$p=1-p_0=\frac{2}{3}$.

(2)甲、乙命中的环数之和X的可能取值为17,18,19,20,

$P(X=17)=\frac{1}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$,$P(X=18)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{11}{30}$,$P(X=19)=\frac{2}{5}\times\frac{5}{6}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{5}$,$P(X=20)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{15}$.

所以随机变量X的分布列为

X	17	18	19	20
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$

(3)三轮射击后,甲、乙命中的环数之和低于52环时,甲、乙每轮命中环数之和都是17,其概率$p_1=\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$,所以甲、乙命中的环数之和不低于52环的概率$p=1-p_1=1-\frac{1}{216}=\frac{215}{216}$.

2.解:(1)比赛局数X的可能取值为2,3,4.

若比赛两局结束,则甲连胜两局或乙连胜两局,所以$P(X=2)=0.3\times0.3+0.7\times0.5=0.44$;

若比赛三局结束,则第二局、第三局丙连胜,所以$P(X=3)=0.3\times0.7\times0.5+0.7\times0.5\times0.7=0.35$;

若比赛四局结束,此时$P(X=4)=1-P(X=2)-P(X=3)=0.21$.

所以X的分布列为

X	2	3	4
P	0.44	0.35	0.21

(2)记甲、乙比赛第一局为事件A,甲、丙比赛第一局为事件B,乙、丙比赛第一局为事件C,甲成为优胜者为事件D.第一局比赛双方可能是甲乙、甲丙、乙丙共三种情况,

则$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$,

所以$P(D|A)=0.3\times0.3+0.3\times0.7\times0.5\times0.3+0.7\times0.5\times0.3\times0.3=0.153$,

$P(D|B)=0.3\times0.3+0.3\times0.7\times0.5\times0.3+0.7\times0.5\times0.3\times0.3=0.153$,

$P(D|C)=0.5\times0.3\times0.3+0.5\times0.3\times0.3=0.09$.

所以$P(D)=P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)+P(D|C)P(C)$

$=0.153\times\frac{1}{3}+0.153\times\frac{1}{3}+0.09\times\frac{1}{3}$

$=0.132$.

7.3 离散型随机变量的数字特征

7.3.1 离散型随机变量的均值

问题式预习

【知识清单】

知识点

(1)$x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$ $\sum\limits_{i=1}^{n}x_ip_i$

(2)加权平均数 平均水平 (3)p

(4)$E(X)+b$ $aE(X)$ $aE(X)+b$

【概念辨析】

1.(1)× (2)× (3)× (4)√

2.C **解析**:$E(X)=(-1)\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}$.

3.(1)**提示**:随机变量的均值也称数学期望(数学期望简称期望),均值是随机变量可能取值关于取值概率的加权平均数,它综合了随机变量的取值和取值的概率,反映了随机变量取值的平均水平.

(2)**提示**:随机变量的均值是一个确定的数,而样本的均值具有随机性,它围绕着随机变量的均值波动.随着重复试验次数的增加,样本的均值波动幅度一般会越来越小.因此,我们常用随机变量的观测值的均值(样本均值)去估计随机变量的均值.

任务型课堂

任务1

【探究活动】

例1 $\frac{17}{15}$ **解析**:由分布列的性质,得

$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+m+\frac{1}{20}=1$,解得$m=\frac{1}{6}$.

所以$E(X)=(-2)\times\frac{1}{4}+(-1)\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{20}=-\frac{17}{30}$.

由$Y=-2X$,得$E(Y)=-2E(X)$,

即$E(Y)=-2\times\left(-\frac{17}{30}\right)=\frac{17}{15}$.

[一题多思]
思考1.解:由例题知$E(X)=-\frac{17}{30}$,则$E(Y)=E(2X-3)=2E(X)-3=2\times\left(-\frac{17}{30}\right)-3=-\frac{62}{15}$.

思考2.解:由例题知$E(X)=-\frac{17}{30}$,

则$E(Y)=E(aX+3)=aE(X)+3=-\frac{17}{30}a+3=-\frac{11}{2}$,

解得$a=15$.

【应用迁移】

1.B　解析：因为随机变量 ξ 的分布列为 $P(\xi=k)=\frac{1}{4}$，$k=0,1,2,3$，所以 $E(\xi)=(0+1+2+3)\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$，$E(2\xi+4)=2E(\xi)+4=7$.

2.$\frac{16}{35}$　$\frac{12}{7}$　解析：从写有数字 1,2,2,3,4,5,6 的 7 张卡片中任取 3 张，共有 C_7^3 种取法，其中所抽取的卡片上的数字的最小值为 2 的取法有 $(C_2^2C_4^1+C_2^1C_4^2)$ 种，所以 $P(\xi=2)=\frac{C_2^2C_4^1+C_2^1C_4^2}{C_7^3}=\frac{16}{35}$.

由已知可得 ξ 的可能取值有 1,2,3,4，所以 $P(\xi=1)=\frac{C_6^2}{C_7^3}=\frac{15}{35}$，$P(\xi=2)=\frac{16}{35}$，$P(\xi=3)=\frac{C_3^2}{C_7^3}=\frac{3}{35}$，$P(\xi=4)=\frac{1}{C_7^3}=\frac{1}{35}$，所以 $E(\xi)=1\times\frac{15}{35}+2\times\frac{16}{35}+3\times\frac{3}{35}+4\times\frac{1}{35}=\frac{12}{7}$.

任务 2

【探究活动】

例 2　解：(1) 由题意知，X 的所有可能取值为 200，300，500.

由题表可知 $P(X=200)=\frac{2+16}{90}=0.2$，

$P(X=300)=\frac{36}{90}=0.4$，$P(X=500)=\frac{25+7+4}{90}=0.4$.

因此 X 的分布列为

X	200	300	500
P	0.2	0.4	0.4

$E(X)=200\times0.2+300\times0.4+500\times0.4=360$.

(2) 由 $Y=1.2X$，得 $E(Y)=E(1.2X)=1.2E(X)=1.2\times360=432$.

【应用迁移】

1.A　解析：由题意知，ξ 的可能取值为 0,1,2，

且 $P(\xi=0)=\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{9}$，

$P(\xi=1)=\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$，

$P(\xi=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

故 ξ 的数学期望 $E(\xi)=0\times\frac{4}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{1}{9}=\frac{2}{3}$.

2.$\frac{9}{5}$　解析：依题意，设黑球的个数为 n，由 $\frac{C_n^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$，得 $C_n^3=1$，则 $n=3$.

记取出的 3 个球中黑球的个数为 X，则 X 的取值可以为 1,2,3，

$P(X=1)=\frac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}=\frac{3}{10}$，$P(X=2)=\frac{C_2^1C_3^2}{C_5^3}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，$P(X=3)=\frac{C_2^0C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$.

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

因此 $E(X)=\frac{3}{10}\times1+\frac{3}{5}\times2+\frac{1}{10}\times3=\frac{9}{5}$.

3.解：(1) 由题意知，样本数据的个数 $n=15$，

因为 $n\times10\%=1.5$，所以 10% 分位数为第 2 项数据，即 $a=97$.

因为 $n\times80\%=12$，所以 80% 分位数为第 12 项与第 13 项数据的平均数，即 $b=\frac{116+121}{2}=118.5$.

(2) 因为区间 $(a,b)=(97,118.5)$，样本数据中共有 10 个数据位于该区间，

所以由题意得该品种水稻的一株稻株属于高产稻株的概率为 $P=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$.

由题意知，随机变量 X 的所有可能取值为 0,1,2,3，

$P(X=0)=\left(1-\frac{2}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，$P(X=1)=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^2+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$，

$P(X=2)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，$P(X=3)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$，

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

故 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{27}+1\times\frac{2}{9}+2\times\frac{4}{9}+3\times\frac{8}{27}=2$.

任务 3

【探究活动】

例 3　(1)A　解析：根据题意知随机变量 X 服从两点分布，所以 $E(X)=0.3$.

(2)C　解析：由分布列的性质知，$\frac{a}{2}+\frac{a^2}{2}=1$，解得 $a=1$ 或 $a=-2$(舍去).

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

【应用迁移】

1.D　解析：由题意得 $P(X=1)+P(X=0)=1$，

又因为 $P(X=1)-P(X=0)=0.4$，所以 $P(X=1)=0.7$，$P(X=0)=0.3$，

所以 $E(X)=1\times0.7+0\times0.3=0.7$.

2.1　解析：因为随机变量 X 服从两点分布，所以 $P(X=0)+P(X=1)=1$.

又 $P(X=0)=3-4P(X=1)$，得到 $P(X=0)=\frac{1}{3}$，$P(X=1)=\frac{2}{3}$，

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$，故 $E(Y)=E(3X-1)=3E(X)-1=2-1=1$.

任务 4

【探究活动】

例 4　解：(1) 甲射中环数的均值为

$7\times0.1+8\times0.2+9\times0.3+10\times0.4=9$.

乙射中环数的均值为

$7\times0.15+8\times0.25+9\times0.4+10\times0.2=8.65$.

(2) 从均值角度看，$9>8.65$，故甲的射箭水平比乙高.

【应用迁移】

1.解：(1) 设“甲品牌轿车首次出现故障发生在保修期内”为事件 A，则 $P(A)=\frac{2+3}{50}=\frac{1}{10}$.

(2) 依题意得，X_1 的分布列为

X_1	1	2	3
P	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{9}{10}$

X_2的分布列为

X_2	1.8	2.9
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$

(3)由(2)得 $E(X_1)=1\times\frac{1}{25}+2\times\frac{3}{50}+3\times\frac{9}{10}=2.86$(万元),

$E(X_2)=1.8\times\frac{1}{10}+2.9\times\frac{9}{10}=2.79$(万元).

因为 $E(X_1)>E(X_2)$,所以应生产甲品牌轿车.

2.解:(1)由题意知,当 A,B 两种矮化果树均种植成功时,$X=9+7.5=16.5$,此时 $P(X=16.5)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$;

当 A 种矮化果树种植不成功,B 种矮化果树种植成功时,$X=9-1.5=7.5$,此时 $P(X=7.5)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$;

当 A 种矮化果树种植成功,B 种矮化果树种植不成功时,$X=7.5-1.5=6$,此时 $P(X=6)=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{15}$;

当 A,B 两种矮化果树均种植不成功时,$X=2\times(-1.5)=-3$,此时$P(X=-3)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{2}{15}$.

所以 X 的分布列为

X	16.5	7.5	6	-3
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$

数学期望为 $E(X)=16.5\times\frac{2}{5}+7.5\times\frac{1}{5}+6\times\frac{4}{15}+(-3)\times\frac{2}{15}=9.3$(万元).

(2)全种植 A 种矮化果树的收益为 $W_1=\frac{2}{3}\times6\times7.5-\frac{1}{3}\times6\times1.5=27$(万元),

由(1)得,各种植 3 公顷的收益为 $W_2=3\times9.3=27.9$(万元).

因为 $W_2>W_1$,

所以乙应选择两种果树各种植 3 公顷.

7.3.2 离散型随机变量的方差

问题式预习

【知识清单】

知识点

(1)$(x_1-E(X))^2p_1+(x_2-E(X))^2p_2+\cdots+(x_n-E(X))^2p_n$ $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2p_i$

(2)$D(X)$ $a^2D(X)$ $a^2D(X)$

(3)$p(1-p)$

【概念辨析】

1.(1)× (2)√ (3)√ (4)×

2.B **解析**:$E(X)=(-1)\times0.5+0\times0.3+1\times0.2=-0.3$,
$D(X)=(-1+0.3)^2\times0.5+(0+0.3)^2\times0.3+(1+0.3)^2\times0.2=0.61$.

3.(1)**提示**:样本方差是刻画数据偏离样本均值程度的指标.样本方差越大,说明样本数据偏离样本均值的程度越大;样本方差越小,说明样本数据越集中于样本均值的附近.

(2)**提示**:随机变量的方差即为总体的方差,它是一个客观存在的常数,样本的方差随着样本容量的不同而不同.对于简单随机抽样,随着样本容量的增大,样本的方差越来越接近总体的方差,即越来越接近随机变量的方差.

(3)**提示**:设离散型随机变量 X 的分布列为

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

由 $Y=aX+b$(a,b 为常数)知 Y 也是离散型随机变量,且 Y 的分布列为

Y	ax_1+b	ax_2+b	…	ax_i+b	…	ax_n+b
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

由均值的性质得 $E(Y)=aE(X)+b$,于是

$D(Y)=D(aX+b)$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i+b-E(Y))^2p_i$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i+b-aE(X)-b)^2p_i$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i-aE(X))^2p_i$

$=a^2\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2p_i$

$=a^2D(X)$.

任务型课堂

任务 1

【探究活动】

例 1 解:由题意可知,X 的所有可能取值为 1,3,5,$P(X=1)=\frac{1}{3}$,$P(X=3)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,$P(X=5)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$,所以 X 的分布列为

X	1	3	5
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

故 $E(X)=1\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{2}+5\times\frac{1}{6}=\frac{8}{3}$,

$D(X)=\left(1-\frac{8}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}+\left(3-\frac{8}{3}\right)^2\times\frac{1}{2}+\left(5-\frac{8}{3}\right)^2\times\frac{1}{6}=\frac{17}{9}$.

[一题多思]

思考.解:由题意知,X 的可能取值为 1,2,3,

$P(X=1)=\frac{A_1^1}{A_3^1}=\frac{1}{3}$,$P(X=2)=\frac{A_2^1A_1^1}{A_3^2}=\frac{1}{3}$,$P(X=3)=\frac{A_2^2A_1^1}{A_3^3}=\frac{1}{3}$.

则 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

所以 $E(X)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}=2$,

$D(X)=(1-2)^2\times\frac{1}{3}+(2-2)^2\times\frac{1}{3}+(3-2)^2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

【应用迁移】

1.AC **解析**:由 $m+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+n+\frac{3}{10}=1$,可得 $m+n=\frac{2}{5}$①,

又因为 $E(Y)=E(3X+1)=3E(X)+1=10$,解得 $E(X)=3$,

所以 $E(X)=m+2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{1}{5}+4n+5\times\frac{3}{10}=3$,

则 $m+4n=\frac{7}{10}$②,所以由①②可得 $n=\frac{1}{10}$,$m=\frac{3}{10}$,故 A 正确,B 错误,C 正确;

$D(X)=(1-3)^2\times\frac{3}{10}+(2-3)^2\times\frac{1}{10}+(3-3)^2\times\frac{1}{5}+$

$(4-3)^2\times\frac{1}{10}+(5-3)^2\times\frac{3}{10}$

$=4\times\frac{3}{10}+1\times\frac{1}{10}+1\times\frac{1}{10}+4\times\frac{3}{10}=\frac{13}{5}$,

$D(Y)=D(3X+1)=9D(X)=9\times\frac{13}{5}=\frac{117}{5}$,故 D 错误.

故选 AC.

2.解:(1)由题意,得 X 的取值可能为 0,1,2,

$P(X=0)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{2}{5}$,$P(X=1)=\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$,$P(X=2)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$,

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

$E(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$,

$D(X)=\left(0-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{2}{5}+\left(1-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{8}{15}+\left(2-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{15}=\frac{16}{45}$.

(2)依题意,得 $Z=X+2(2-X)=4-X$,

则 $E(Z)=4-E(X)=4-\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$,$D(Z)=D(X)=\frac{16}{45}$.

任务 2

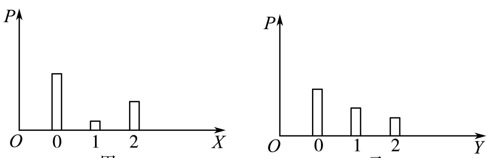
【探究活动】

例 2 解:(1)$E(X)=0\times\frac{3}{5}+1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{3}{10}=0.7$,

$E(Y)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{1}{5}=0.7$.

由 $E(X)=E(Y)$ 知,两人出次品的均值相同,技术水平相当.

(2)(方法一)作出两名工人加工所得次品数的概率分布图如图,比较发现乙工人的技术更稳定.



甲　　乙

(方法二)可通过方差来刻画两名工人技术的稳定性.

计算可得 $D(X)=0.81$,$D(Y)=0.61$,$D(Y)<D(X)$,所以乙工人的技术更稳定.

【应用迁移】

1. ACD　解析:$E(X)=-0.1+1.2=1.1$,$E(Y)=0.4+0.6=1$,$E(X)>E(Y)$,

$D(X)=(-1-1.1)^2\times0.1+(0-1.1)^2\times0.3+(2-1.1)^2\times0.6=1.29$,

$D(Y)=(0-1)^2\times0.3+(1-1)^2\times0.4+(2-1)^2\times0.3=0.6$,$D(X)>D(Y)$,

则投资股票甲的期望收益较大,投资股票甲比投资股票乙风险高.

$E(2X+1)=2E(X)+1=3.2$,$D(2Y+1)=4D(Y)=2.4$.

故选 ACD.

2.解:(1)记"甲、乙两家公司共答对 2 个问题"为事件 A,由题意可知,事件 A 是甲、乙各答对 1 个问题与甲答对 2 题乙没答对题目的和事件,它们互斥,

则有 $P(A)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}\times3\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^3=\frac{1}{15}$,

所以甲、乙两家公司共答对 2 个问题的概率是 $\frac{1}{15}$.

(2)设甲公司答对题数为 X,则 X 的取值可能为 1,2,3,

$P(X=1)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}$,$P(X=2)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}$,$P(X=3)=\frac{C_4^3C_2^0}{C_6^3}=\frac{1}{5}$,

则 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

期望 $E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{5}=2$,方差 $D(X)=(1-2)^2\times\frac{1}{5}+(2-2)^2\times\frac{3}{5}+(3-2)^2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$.

(3)设乙公司答对题数为 Y,则 Y 的取值可能为 0,1,2,3,

$P(Y=0)=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$,$P(Y=1)=3\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$,

$P(Y=2)=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$,$P(Y=3)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$,

则 Y 的分布列为

Y	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

期望 $E(Y)=0\times\frac{1}{27}+1\times\frac{2}{9}+2\times\frac{4}{9}+3\times\frac{8}{27}=2$,

方差 $D(Y)=(0-2)^2\times\frac{1}{27}+(1-2)^2\times\frac{2}{9}+(2-2)^2\times\frac{4}{9}+(3-2)^2\times\frac{8}{27}=\frac{2}{3}$.

显然 $E(X)=E(Y)$,$D(X)<D(Y)$,

所以甲公司竞标成功的可能性更大.

7.4　二项分布与超几何分布

7.4.1　二项分布

第 1 课时　二项分布及其分布列

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(1)两个可能结果　独立地重复

(2)①重复做 n 次　②相互独立

知识点二

$C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$　$X\sim B(n,p)$　$[p+(1-p)]^n$　1

【概念辨析】

1.(1)×　(2)√　(3)√

2.①②④　解析:③中不放回地取球每次结果是相互影响的,不是相互独立事件,因此③不是 n 重伯努利试验.

3.(1)**提示**:不一定,要看研究的结果是什么.如果要研究出现的点数是多少,它就有六个结果,不是伯努利试验;如果要研究出现的点数是奇数还是偶数,它只有两个结果,就是伯努利试验.

(2)**提示**:伯努利试验是一个有两个结果的试验,只能关注某个事件 A 发生或不发生;n 重伯努利试验是对一个有两个结果的试验重复进行了 n 次,所以关注点是这 n 次重复试验中事件 A 发生的次数.

(3)**提示**:如果把 p 看成 b,$1-p$ 看成 a,那么 $C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$ 就是二项式 $[(1-p)+p]^n$ 的展开式的通项.

任务型课堂

任务 1

解:①由于试验的条件不同(质地不同),因此不是 n 重伯努利试验.

②某人射击且击中的概率是稳定的，因此是 n 重伯努利试验.
③每次抽取，试验的结果有三种不同的情况，且每种情况出现的可能性不相等，因此不是 n 重伯努利试验.

任务 2

【探究活动】

例 1 D **解析**：由题意可知，五次中质点 P 向左移动了两次，向右移动了三次，因此质点 P 移动五次后位于点(1,0)的概率是 $C_5^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{80}{243}$.

例 2 **解**：记"甲射击 3 次至少有 1 次未击中目标"为事件 A.由题意知，射击 3 次，相当于 3 重伯努利试验，由对立事件的概率计算公式得$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{19}{27}$.

［一题多思］
思考 1.解：记"甲射击 3 次，恰有 2 次击中目标"为事件 B，则 $P(B)=C_3^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}$.
思考 2.解：记"甲射击 2 次，恰有 2 次击中目标"为事件 C_1，"乙射击 2 次，恰有 1 次击中目标"为事件 C_2，则 $P(C_1)=C_2^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，$P(C_2)=C_2^1\times\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{8}$.由于甲、乙射击相互独立，所以 $P(C_1C_2)=\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{6}$.

【应用迁移】

1.解：(1)记"甲在一次试跳中成功"为事件 A，"乙在一次试跳中成功"为事件 B，"甲、乙两人在一次试跳中至少有一人成功"为事件 C.
由对立事件的概率计算公式得
$P(C)=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-0.3\times0.4=0.88$.
(2)设"甲在两次试跳中成功 i 次"为事件 M_i，"乙在两次试跳中成功 i 次"为事件 N_i，$i=0,1,2$，
所求概率 $p=P(M_1N_0)+P(M_2N_1)=P(M_1)P(N_0)+P(M_2)P(N_1)=C_2^1\times0.7\times0.3\times0.4^2+0.7^2\times C_2^1\times0.6\times0.4=0.302\ 4$.

2.解：(1)甲第一、二局胜，或第二、三局胜，或第一、三局胜，
则 $P=\left(\frac{2}{3}\right)^2+C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{20}{27}$.
(2)甲前三局胜，或甲第四局胜，而前三局仅胜两局，或甲第五局胜，而前四局仅胜两局，则
$P=\left(\frac{2}{3}\right)^3+C_3^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+C_4^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{64}{81}$.

任务 3

【探究活动】

例 3 **解**：(1)由于每个投保人生存至 65 周岁的概率都为 0.9，因此 X 服从二项分布，即 $X\sim B(4,0.9)$，
则 $P(X=k)=C_4^k0.9^k\times(1-0.9)^{4-k}(k=0,1,2,3,4)$，
故随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	0.000 1	0.003 6	0.048 6	0.291 6	0.656 1

(2)因为 4 个投保人中，生存至 65 周岁的人数为 X，所以未达 65 周岁身故的人数为 $4-X$，
因此 $Y=10(4-X)+4X$，
即 $Y=40-6X(X=0,1,2,3,4)$.
由 $Y\geqslant22$，即 $40-6X\geqslant22$，得 $X\leqslant3$.
所以 $P(Y\geqslant22)=P(X\leqslant3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1-P(X=4)=1-0.656\ 1=0.343\ 9$.

【应用迁移】

1.B **解析**：获奖的概率为 $p=\frac{6}{C_6^2}=\frac{2}{5}$，记获奖的人数为 ξ，则 $\xi\sim B\left(4,\frac{2}{5}\right)$，所以 4 人中恰好有 3 人获奖的概率为 $P=C_4^3\times\left(\frac{2}{5}\right)^3\times\frac{3}{5}=\frac{96}{625}$.故选 B.

2.D **解析**：由题意，右边灯笼先被摘完，摘灯笼的次数 X 可能为 3,4，
$X=3$ 时，3 次均摘下右边灯笼，
故 $P(X=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$；
$X=4$ 时，前 3 次中有 2 次摘下右边灯笼，1 次摘下左边灯笼，第 4 次摘下右边灯笼，
故 $P(X=4)=C_3^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{16}$.
所以右边灯笼先被摘完的概率为 $\frac{1}{8}+\frac{3}{16}=\frac{5}{16}$.故选 D.

3.解：依题意，这 4 个人中，每个人去 A 网站购物的概率为 $\frac{1}{3}$，去 B 网站购物的概率为 $\frac{2}{3}$.
设"这 4 个人中恰有 i 个人去 A 网站购物"为事件 $A_i(i=0,1,2,3,4)$，
则 $P(A_i)=C_4^i\left(\frac{1}{3}\right)^i\left(\frac{2}{3}\right)^{4-i}(i=0,1,2,3,4)$.
(1)这 4 个人中恰有 1 人去 A 网站购物的概率为
$P(A_1)=C_4^1\times\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$.
(2)X 的所有可能取值为 0,3,4，
则 $P(X=0)=P(A_0)+P(A_4)=C_4^0\times\left(\frac{1}{3}\right)^0\times\left(\frac{2}{3}\right)^4+C_4^4\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{16}{81}+\frac{1}{81}=\frac{17}{81}$，
$P(X=3)=P(A_1)+P(A_3)$
$=C_4^1\times\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\left(\frac{2}{3}\right)^3+C_4^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^1$
$=\frac{32}{81}+\frac{8}{81}=\frac{40}{81}$，
$P(X=4)=P(A_2)=C_4^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$.
所以随机变量 X 的分布列为

X	0	3	4
P	$\frac{17}{81}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{8}{27}$

第 2 课时　二项分布的均值与方差

问题式预习

【知识清单】

知识点

np　$np(1-p)$　p　$p(1-p)$

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)×

2.B **解析**：由 $E(\xi)=\frac{1}{2}n=15$，解得 $n=30$，
所以 $\eta\sim B\left(30,\frac{1}{3}\right)$，所以 $E(\eta)=30\times\frac{1}{3}=10$.

3.(1)**提示**：两点分布是一种特殊的二项分布，即 $n=1$ 时的二项分布；二项分布中每次试验的结果都服从两点分布.
(2)**提示**：①某射击运动员命中 10 环的概率为 0.8，他在 10 次射击中命中 10 环的次数 X 是一个随机变量，$X\sim B(10,0.8)$.
②经过某路口碰到红灯的概率为 p，某人经过该路口 10 次，碰到红灯的次数 X 是一个随机变量，$X\sim B(10,p)$.

任务型课堂

任务 1

1.D　**解析**:由题意知,$X\sim B\left(13,\frac{2}{7}\right)$,所以 $D(X)=13\times\frac{2}{7}\times\frac{5}{7}=\frac{130}{49}$.

2.D　**解析**:由 $E(X)=1,D(X)=\frac{4}{5}$,得 $np=1,np(1-p)=\frac{4}{5}$,解得 $n=5,p=\frac{1}{5}$,

所以 $P(X=3)=C_5^3\times\left(\frac{1}{5}\right)^3\times\left(1-\frac{1}{5}\right)^2=\frac{32}{625}$.故选 D.

3.**解**:(1)投篮 1 次,命中次数 X 的分布列如表:

X	0	1
P	0.4	0.6

则 $E(X)=0.6$.

(2)由题意得,重复 5 次投篮,命中的次数 Y 服从二项分布,即 $Y\sim B(5,0.6)$.

则 $E(Y)=5\times0.6=3,D(Y)=5\times0.6\times0.4=1.2$.

任务 2

【探究活动】

例 1　**解**:(1)设"该校学生选择地理"为事件 A,

则 $P(A)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{7}{10}$,

因此 $X\sim B\left(3,\frac{7}{10}\right)$,

所以 $P(X=2)=C_3^2\times\left(\frac{7}{10}\right)^2\times\frac{3}{10}=\frac{441}{1\,000}$.

(2)由于 $X\sim B\left(3,\frac{7}{10}\right)$,

则 $P(X=0)=C_3^0\times\left(\frac{7}{10}\right)^0\times\left(\frac{3}{10}\right)^3=\frac{27}{1\,000}$,

$P(X=1)=C_3^1\times\left(\frac{7}{10}\right)^1\times\left(\frac{3}{10}\right)^2=\frac{189}{1\,000}$,

$P(X=2)=C_3^2\times\left(\frac{7}{10}\right)^2\times\frac{3}{10}=\frac{441}{1\,000}$,

$P(X=3)=C_3^3\times\left(\frac{7}{10}\right)^3\times\left(\frac{3}{10}\right)^0=\frac{343}{1\,000}$.

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{1\,000}$	$\frac{189}{1\,000}$	$\frac{441}{1\,000}$	$\frac{343}{1\,000}$

所以 $E(X)=3\times\frac{7}{10}=\frac{21}{10}$.

例 2　**解**:(1)易知司机遇到红灯的次数 $\xi\sim B\left(6,\frac{1}{3}\right)$,

故 $E(\xi)=6\times\frac{1}{3}=2,D(\xi)=6\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$.

(2)由已知得 $\eta=30\xi$,故 $E(\eta)=30E(\xi)=60$,

$D(\eta)=900D(\xi)=1\,200$.

[一题多思]

思考 1.解:设前 k 个是绿灯,第 $(k+1)$ 个是红灯,

则 X 的分布列为 $P(X=k)=\left(\frac{2}{3}\right)^k\times\frac{1}{3},k=0,1,2,3,4,5$,

所以 $P(X=0)=\left(\frac{2}{3}\right)^0\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$,

$P(X=1)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$,

$P(X=2)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$,

$P(X=3)=\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}=\frac{8}{81}$,

$P(X=4)=\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\frac{1}{3}=\frac{16}{243}$,

$P(X=5)=\left(\frac{2}{3}\right)^5\times\frac{1}{3}=\frac{32}{729}$,

若全为绿灯,则 $P(X=6)=\left(\frac{2}{3}\right)^6=\frac{64}{729}$.

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{16}{243}$	$\frac{32}{729}$	$\frac{64}{729}$

思考 2.解:所求概率为 $P(\xi\geqslant1)=1-P(\xi=0)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^6=\frac{665}{729}$.

【应用迁移】

解:(1)因为每张抽奖券是否中奖是相互独立的,

因此 $X\sim B\left(4,\frac{1}{2}\right)$.

所以 $P(X=0)=C_4^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$,

$P(X=1)=C_4^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$,

$P(X=2)=C_4^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{8}$,

$P(X=3)=C_4^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$,

$P(X=4)=C_4^4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$.

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

(2)因为 $X\sim B\left(4,\frac{1}{2}\right)$,所以 $E(X)=4\times\frac{1}{2}=2$.

又由题意可知 $Y=2\,300-100X$,

所以 $E(Y)=E(2\,300-100X)=2\,300-100E(X)=2\,300-100\times2=2\,100$.

因此随机变量 Y 的均值为 2 100.

7.4.2　超几何分布

问题式预习

【知识清单】

知识点

(1)$\frac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$　$\min\{n,M\}$　(2)np

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)×

2.$\frac{3}{7}$　**解析**:设选出的 4 人中,会说日语的人数为 X,则 X 服从 $N=10,M=6,n=4$ 的超几何分布.所以有 2 人会说日语的概率为 $P(X=2)=\frac{C_6^2C_4^2}{C_{10}^4}=\frac{3}{7}$.

3.**提示**:一般地,超几何分布的模型是"取次品",是不放回抽样,而二项分布的模型是"独立重复试验",是有放回抽样.

任务型课堂

任务 1

(1)A　(2)0,1,2,3　(3)$\frac{5}{18}$　**解析**:(1)根据超几何分布的定义知,$N=9,M=4,n=4$.

(2)由于只取了 3 个球,因此随机变量 Y 的所有可能取值为 0,1,2,3.

(3)$P(Z=2)=\frac{C_2^2C_7^3}{C_9^5}=\frac{5}{18}$.

任务 2

【探究活动】

例 1 解:(1)①记事件 A:该盒有次品,事件 B:抽出的 2 支均是正品,

则 $P(A)=\frac{1}{10}$,$P(B|A)=\frac{C_5^2}{C_6^2}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$,$P(B|\overline{A})=1$,

所以 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})\cdot P(B|\overline{A})=\frac{1}{10}\times\frac{2}{3}+\frac{9}{10}\times1=\frac{29}{30}$.

②$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{10}\times\frac{2}{3}}{\frac{29}{30}}=\frac{2}{29}$.

(2)由题意知,两盒电子笔中共有 10 支正品,2 支次品,所以 ξ 的所有可能取值为 0,1,2,

$P(\xi=0)=\frac{C_{10}^3}{C_{12}^3}=\frac{120}{220}=\frac{6}{11}$,

$P(\xi=1)=\frac{C_{10}^2C_2^1}{C_{12}^3}=\frac{90}{220}=\frac{9}{22}$,

$P(\xi=2)=\frac{C_{10}^1C_2^2}{C_{12}^3}=\frac{10}{220}=\frac{1}{22}$.

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{6}{11}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{22}$

例 2 解:(方法一)由题意知 X 的可能取值为 0,1,2,

$P(X=0)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$,

$P(X=1)=\frac{C_2^1C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$,

$P(X=2)=\frac{C_2^2C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{15}$.

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

$E(X)=0\times\frac{7}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{3}{5}$,

$D(X)=\left(0-\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{7}{15}+\left(1-\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{7}{15}+\left(2-\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{1}{15}=\frac{28}{75}$.

(方法二)由题意知 $P(X=k)=\frac{C_2^kC_8^{3-k}}{C_{10}^3}$,$k=0,1,2$,

所以随机变量 X 服从超几何分布,

$n=3,M=2,N=10$,

所以 $E(X)=\frac{nM}{N}=\frac{3\times2}{10}=\frac{3}{5}$,

$D(X)=\left(0-\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{7}{15}+\left(1-\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{7}{15}+\left(2-\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{1}{15}=\frac{28}{75}$.

[一题多思]

思考.解:由题意知,抽取 1 次抽到次品的概率为 $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$,

所以随机变量 X 服从二项分布 $B\left(3,\frac{1}{5}\right)$,

所以 $E(X)=3\times\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$,

$D(X)=3\times\frac{1}{5}\times\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{12}{25}$.

【应用迁移】

解:(1)从参与评价的网民中随机抽取 1 人,抽取到"好评"的概率为 $\frac{9\ 000+1\ 000}{20\ 000}=\frac{1}{2}$,

则抽取了 5 次的概率为 $\left(1-\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{16}$.

(2)在给予"中评"评价的网民中,50 岁以下与 50 岁以上(含 50 岁)的人数之比为 3∶2,

因此在抽取的 10 人中,50 岁以下与 50 岁以上(含 50 岁)的人数分别为 6 和 4.

由题意知,X 服从参数 $N=10,n=3,M=6$ 的超几何分布,

所以 $P(X=k)=\frac{C_6^kC_4^{3-k}}{C_{10}^3}$,$k=0,1,2,3$.

于是 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

任务 3

【探究活动】

例 3 解:(1)设"有女生参加活动"为事件 A,"恰有一名女生参加活动"为事件 B,

则 $P(AB)=\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$,$P(A)=\frac{C_4^1C_2^1+C_2^2}{C_6^2}=\frac{3}{5}$,

所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{8}{15}}{\frac{3}{5}}=\frac{8}{9}$.

(2)由题意知,X 服从超几何分布,且 $P(X=k)=\frac{C_2^kC_4^{2-k}}{C_6^2}$ $(k=0,1,2)$,

则 $P(X=0)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{2}{5}$,$P(X=1)=\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$,$P(X=2)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$,

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

$E(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$,$D(X)=\frac{2}{5}\times\left(0-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{15}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{15}\times\left(2-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{16}{45}$.

【应用迁移】

1.解:(1)因为采用分层随机抽样的方法进行抽样,所以应抽取女生 $7\times\frac{9}{21}=3$(人),抽取男生 $7\times\frac{12}{21}=4$(人).

(2)①由题意知,随机变量 X 的所有可能取值为 3,4,5,6,

$P(X=3)=\frac{C_4^0C_3^3}{C_7^3}=\frac{1}{35}$,$P(X=4)=\frac{C_4^1C_3^2}{C_7^3}=\frac{12}{35}$,

$P(X=5)=\frac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}=\frac{18}{35}$,$P(X=6)=\frac{C_4^3C_3^0}{C_7^3}=\frac{4}{35}$.

所以随机变量 X 的分布列为

X	3	4	5	6
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

$E(X)=3\times\frac{1}{35}+4\times\frac{12}{35}+5\times\frac{18}{35}+6\times\frac{4}{35}=\frac{165}{35}=\frac{33}{7}$.

②由①知 $P(A)=P(X=4)+P(X=5)=\frac{12}{35}+\frac{18}{35}=\frac{6}{7}$,

所以事件 A 发生的概率为 $\frac{6}{7}$.

2.解:(1)由已知,三个年级的人数之比为 $3:2:2$,由于采用分层随机抽样的方法从中抽取 7 人,因此应从高一、高二、高三三个年级的学生中分别抽取 3 人、2 人、2 人.

(2)①由题可知随机变量 X 服从超几何分布,随机变量 X 的所有可能取值为 0,1,2,3,

则 $P(X=k)=\frac{C_4^k \cdot C_3^{3-k}}{C_7^3}(k=0,1,2,3)$.

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

②由题意知 $Y \sim B\left(3,\frac{4}{7}\right)$,

所以 $E(Y)=3\times\frac{4}{7}=\frac{12}{7}$,

$D(Y)=3\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}=\frac{36}{49}$.

7.5 正态分布

问题式预习

【知识清单】

知识点一

1 正态密度函数 正态曲线 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 标准正态分布

知识点二

(1)$x=\mu$ (2)$x=\mu$ (4)σ

知识点三

(1)0.682 7 (2)0.954 5 (3)0.997 3 $[\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$

【概念辨析】

1.(1)× (2)√ (3)√ (4)×

2.A 解析:因为 $\xi\sim N(1,\sigma^2)$,且 $P(0<\xi<1)=0.3$,

所以 $P(\xi\geqslant 2)=P(\xi\leqslant 0)=P(\xi<1)-P(0<\xi<1)=0.5-0.3=0.2$.

所以 $P(\xi<2)=1-P(\xi\geqslant 2)=1-0.2=0.8$.故选 A.

3.0.158 65 解析:因为 $\mu=2,\sigma=1$,所以 $P(1\leqslant X\leqslant 3)\approx 0.682\ 7$.

所以 $P(X<1)=P(X>3)\approx\frac{1-0.682\ 7}{2}=0.158\ 65$.

4.提示:参数 μ 是反映随机变量取值的平均水平的特征数,可以用样本均值去估计;σ 是衡量随机变量总体波动大小的特征数,可以用样本标准差去估计.

任务型课堂

任务 1

1.A 解析:μ 反映的是随机变量的平均水平,直线 $x=\mu$ 是正态密度曲线的对称轴,由题图可知 $\mu_1<\mu_2$.σ 反映的是随机变量的离散程度,σ 越大,越分散,曲线越“矮胖”;σ 越小,越集中,曲线越“瘦高”,由题图可知 $\sigma_1<\sigma_2$.

2.D 解析:由题图可知甲类水果的平均质量为 0.4 kg,D 正确;

乙类水果的平均质量为 0.8 kg,故甲类水果的平均质量比乙类水果的平均质量小,A 错误;

由于甲曲线比乙曲线更“瘦高”,则 $\sigma_1<\sigma_2$,故甲类水果的质量比乙类水果的质量更集中于均值左右,B,C 错误.

故选 D.

任务 2

【探究活动】

例 1 (1)证明:因为 $X\sim N(10,1)$,

所以正态密度曲线关于直线 $x=10$ 对称.

而区间(1,2)和(18,19)关于直线 $x=10$ 对称,

所以 $P(1<X<2)=P(18<X<19)$.

(2)解:因为 $P(X\leqslant 2)+P(2<X\leqslant 10)+P(10<X<18)+P(X\geqslant 18)=1,\mu=10$,

所以 $P(X\leqslant 2)=P(X\geqslant 18)=a$,

$P(2<X\leqslant 10)=P(10<X<18)$.

所以 $2a+2P(10<X<18)=1$,

即 $P(10<X<18)=\frac{1-2a}{2}=\frac{1}{2}-a$.

【应用迁移】

1.C 解析:因为随机变量 $\xi\sim N(3,\sigma^2)$,且 $P(\xi<6)=0.86$,

所以 $P(3<\xi<6)=P(\xi<6)-P(\xi\leqslant 3)=0.86-0.5=0.36$.

2.0.84 解析:由题意知,$X\sim N(25,0.16)$,则 $\mu=25,\sigma=0.4$,

所以 $P(24.6\leqslant X\leqslant 26.2)=P(25-0.4\leqslant X\leqslant 25+3\times 0.4)=P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)\approx\frac{0.682\ 7}{2}+\frac{0.997\ 3}{2}=0.84$,

即抽到“可用产品”的概率约为 0.84.

3.0.14 解析:因为 $X\sim N(2,\sigma^2)$,所以 $P(X<2)=P(X>2)=0.5$,$P(X>2.5)=P(X>2)-P(2<X\leqslant 2.5)=0.5-0.36=0.14$.

任务 3

【探究活动】

例 2 解:设 X 表示此地外出务工人员的月平均收入,

则 $X\sim N(8\ 000,500^2)$,

所以 $P(8\ 000\leqslant X\leqslant 8\ 500)$

$=\frac{1}{2}P(8\ 000-500\leqslant X\leqslant 8\ 000+500)$

$\approx 0.341\ 35$.

所以此地外出务工人员的月平均收入在 8 000~8 500 元之间的人数所占的百分比为 34.135%.

[一题多思]

思考.解:因为 $P(X<7\ 000)=\frac{1}{2}[1-P(8\ 000-2\times 500\leqslant X\leqslant 8\ 000+2\times 500)]\approx\frac{1}{2}\times(1-0.954\ 5)=0.022\ 75$,

所以此地外出务工人员的月平均收入低于 7 000 元的人数所占的百分比为 2.275%.

【应用迁移】

1.C 解析:由题意可设 $P(X>115)=P(X<75)=m$,则 $P(75\leqslant X\leqslant 115)=1-2m$.

又 $X\in[75,115]$ 的学生人数为 $45(1-2m)=18$,解得 $m=0.3$.

故选 C.

2.解:(1)由题意得,样本平均数的估计值为

$(40\times 0.010+50\times 0.020+60\times 0.030+70\times 0.024+80\times 0.012+90\times 0.004)\times 10=62$.

因为考生的初试成绩 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,其中 $\mu=62,\sigma=11.5$,则 $\mu+2\sigma=85$,

所以 $P(X\geqslant 85)=P(X\geqslant\mu+2\sigma)\approx\frac{1-0.954\ 5}{2}=0.022\ 75$,

所以估计初试成绩不低于 85 分的人数为 $0.022\ 75\times 8\ 000=182$.

(2)记该考生的复试成绩为 Y,则能进入面试的复试成绩为 20 分,25 分,30 分,

$P(Y=20)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2\times C_2^1\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{117}{400}$,

$P(Y=25)=C_2^1\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{54}{400}$,

$P(Y=30)=\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{81}{400}$,

所以该考生进入面试的概率为 $P(Y=20)+P(Y=25)+P(Y=30)=\frac{117}{400}+\frac{54}{400}+\frac{81}{400}=\frac{63}{100}$.

迁移应用

类型一

例1 解：(1)由题意可知，$(0.006\times2+a+0.012+0.026+0.040)\times10=1$，

解得 $a=0.010$.

$\mu=(45+95)\times0.06+55\times0.12+65\times0.40+75\times0.26+85\times0.10=69$.

(2)随机抽取一名学生，设获得的学校食堂消费券为 Y 元，

$P(Y=0)=P(X\leqslant57)\approx0.5-\dfrac{0.6827}{2}=0.15865$，

$P(Y=5)=P(57<X\leqslant81)\approx0.6827$，

$P(Y=10)=P(81<X\leqslant93)\approx\dfrac{0.9545-0.6827}{2}=0.1359$，

$P(Y=15)=P(X>93)\approx\dfrac{1-0.9545}{2}=0.02275$，

所以 Y 的分布列为

Y	0	5	10	15
P	0.158 65	0.682 7	0.135 9	0.022 75

即一名学生获得的学校食堂消费券的期望为 $E(Y)=0\times0.15865+5\times0.6827+10\times0.1359+15\times0.02275=5.11375$，

所以全校学生可获得食堂消费券 $1000\times5.11375=5113.75\approx5114$(元).

故估计全校1 000名学生参加知识竞赛共可获得食堂消费券5 114元.

类型二

例2 解：(1)X_1 的分布列为

X_1	0	1	2	…	n
P	$C_n^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$	$C_n^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$	$C_n^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$	…	$C_n^n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$

X_1 服从二项分布，即 $X_1\sim B\left(n,\dfrac{1}{3}\right)$.

(2)X_2 的分布列为

X_2	0	1	2	…	n
P	$\left(1-\frac{M}{N}\right)^n$	$C_n^1\frac{M}{N}\cdot\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-1}$	$C_n^2\left(\frac{M}{N}\right)^2\cdot\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-2}$	…	$\left(\frac{M}{N}\right)^n$

X_2 服从二项分布，即 $X_2\sim B\left(n,\dfrac{M}{N}\right)$.

(3)X_3 的分布列为

X_3	0	1	…	n
P	$\frac{C_{N-M}^n}{C_N^n}$	$\frac{C_M^1C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	…	$\frac{C_M^n}{C_N^n}$

X_3 服从超几何分布.

类型三

例3 解：(1)由题意得 $a+18+a+8+a+20+18=100$，

解得 $a=12$.

故平均数为 $\dfrac{1}{100}\times(150\times12+250\times18+350\times20+450\times32+550\times18)=376$(箱).

(2)由(1)及题意知，$\mu=376$，$\sigma=110$，且 $266=376-110=\mu-\sigma$，$596=376+220=\mu+2\sigma$，

则 $P(X>596)=P(X>\mu+2\sigma)\approx\dfrac{1}{2}\times(1-0.9545)=0.02275$，

所以“优质群”约有 $2000\times0.02275\approx46$(个)；

$P(266\leqslant X\leqslant596)=P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)\approx\dfrac{1}{2}\times0.6827+\dfrac{1}{2}\times0.9545=0.8186$，

所以“一级群”约有 $2000\times0.8186\approx1637$(个).

所以需要资金约 $46\times1000+1637\times200=373400$(元).

故大约需要准备373 400元用于奖励.

重构拓展

【学科视野拓展】

拓展一

应用1 解：(1)由题可知 X 服从二项分布，X 的所有可能取值为0，1，2，3，

$P(X=0)=\left(1-\dfrac{2}{5}\right)^3=\dfrac{27}{125}$，

$P(X=1)=C_3^1\times\dfrac{2}{5}\times\left(1-\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{54}{125}$，

$P(X=2)=C_3^2\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\times\left(1-\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{36}{125}$，

$P(X=3)=\left(\dfrac{2}{5}\right)^3=\dfrac{8}{125}$，

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

$E(X)=0\times\dfrac{27}{125}+1\times\dfrac{54}{125}+2\times\dfrac{36}{125}+3\times\dfrac{8}{125}=\dfrac{6}{5}$.

(2)①设2件减排器的利润为 Y 万元，

$P(Y\geqslant1)=P(Y=1)+P(Y=1.5)+P(Y=2)=\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{5}\times2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{81}{100}$，

所以2件减排器的利润不少于1万元的概率为 $\dfrac{81}{100}$.

②一件减排器的平均利润为 $\dfrac{1}{2}\times1+\dfrac{2}{5}\times0.5+\dfrac{1}{10}\times(-0.3)=0.67$(万元)，

则产量增加 n 件，利润增加 $0.67n$ 万元，成本也相应提高 $(n-\ln n)$ 万元，

所以净利润为 $0.67n-n+\ln n=\ln n-0.33n(n\in\mathbf{N}^*)$.

设 $f(x)=\ln x-0.33x(x\geqslant1)$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-0.33$，

当 $1\leqslant x<\dfrac{100}{33}$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>\dfrac{100}{33}$ 时，$f'(x)<0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $\left[1,\dfrac{100}{33}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{100}{33},+\infty\right)$ 上单调递减，

所以当 $x=\dfrac{100}{33}$ 时，$f(x)$ 取得最大值.

因为 n 只能取正整数，又 $3<\dfrac{100}{33}<4$，

$f(3)=\ln3-0.33\times3\approx1.1-0.99=0.11$，

$f(4)=\ln4-0.33\times4\approx2\times0.69-1.32=0.06<f(3)$，

所以应该增加产量，增加3件最好.

拓展二

应用2 解：(1)由题意知，X 的可能取值为2和3，

$P(X=2)=\dfrac{C_3^2}{C_4^3}=\dfrac{3}{4}$，$P(X=3)=\dfrac{C_3^3}{C_4^3}=\dfrac{1}{4}$，

所以随机变量 X 的分布列为

X	2	3
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

(2)①若刚好抽到甲、乙、丙三人相互做传球训练，且第1次由甲将球传出，第 n 次传球后球在甲手中的概率为 p_n，$n=1,2,3,\cdots$，

则有 $p_1=0$，$p_2=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}$，$p_3=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{2^3}=\frac{1}{4}$.

②记事件 A_n 表示"第 n 次传球后，球在甲手中"，

$A_{n+1}=\overline{A_n}\cdot A_{n+1}+A_n\cdot A_{n+1}$，

所以 $p_{n+1}=P(\overline{A_n}\cdot A_{n+1}+A_n\cdot A_{n+1})=P(\overline{A_n}\cdot A_{n+1})+P(A_n\cdot A_{n+1})$

$=P(\overline{A_n})\cdot P(A_{n+1}|\overline{A_n})+P(A_n)\cdot P(A_{n+1}|A_n)=(1-p_n)\cdot\frac{1}{2}+p_n\cdot 0=\frac{1}{2}(1-p_n)$，

即 $p_{n+1}=-\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}$，$n=1,2,3,\cdots$.

所以 $p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$，且 $p_1-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\neq 0$.

所以数列 $\left\{p_n-\frac{1}{3}\right\}$ 为以 $-\frac{1}{3}$ 为首项，$-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，

所以 $p_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，所以 $p_n=-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]=\frac{1}{3}\left[1+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right]$，

即第 n 次传球后球在甲手中的概率是 $\frac{1}{3}\left[1+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right]$.

拓展三

应用3　解：(1)①由题意知，$X\sim B\left(5,\frac{1}{2}\right)$，

所以 $P(X\leqslant 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$=C_5^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^5+C_5^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^5+C_5^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{2}$.

②由题意知，$X\sim B\left(n,\frac{1}{2}\right)$，则 $E(X)=0.5n$，$D(X)=\frac{1}{2}n\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=0.25n$.

若 $0.4n\leqslant X\leqslant 0.6n$，则 $-0.1n\leqslant X-0.5n\leqslant 0.1n$，

所以 $P(|X-\mu|<\varepsilon)=P(|X-0.5n|<0.1n)\geqslant 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}=1-\frac{0.25n}{(0.1n)^2}\geqslant 0.98$.

又 $n>0$，解得 $n\geqslant 1\ 250$，即发射次数 n 的最小值为 1 250.

(2)由题意知，$X\sim B(2\ 024,0.7)$，

则 $P(X=m)=C_{2\ 024}^m\times 0.7^m\times 0.3^{2\ 024-m}=\frac{2\ 024!}{(2\ 024-m)!\ m!}\times 0.7^m\times 0.3^{2\ 024-m}$，

$P(X=m+1)=C_{2\ 024}^{m+1}\times 0.7^{m+1}\times 0.3^{2\ 023-m}=\frac{2\ 024!}{(2\ 023-m)!\ (m+1)!}\times 0.7^{m+1}\times 0.3^{2\ 023-m}$，

所以 $\frac{P(X=m+1)}{P(X=m)}$

$=\frac{\frac{2\ 024!}{(2\ 023-m)!\ (m+1)!}\times 0.7^{m+1}\times 0.3^{2\ 023-m}}{\frac{2\ 024!}{(2\ 024-m)!\ m!}\times 0.7^m\times 0.3^{2\ 024-m}}$

$=\frac{0.7(2\ 024-m)}{0.3(m+1)}\leqslant 1$，解得 $m\geqslant 1\ 416.5$.

又 $m\in\mathbf{N}^*$，所以当 $m=1\ 417$ 时，$P(X=m)$ 最大.

第八章　成对数据的统计分析

探究构建

8.1　成对数据的统计相关性

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(1)相关关系　(3)正相关　负相关　(4)线性相关　非线性相关　曲线相关

知识点二

(1)$r<0$　(2)强　弱

【概念辨析】

1.(1)√　(2)×　(3)×　(4)×

2.BC　**解析**：A为函数关系；B,C为相关关系；D中，因为点分布得比较分散，所以两者之间无相关关系.

3.A　**解析**：样本相关系数 $r<0$ 时，成对样本数据负相关，且 $|r|$ 越大，成对样本数据间的线性相关程度越强.

4.(1)**提示**：区别：

①函数关系中两个变量间是一种确定性关系.函数值由自变量的值唯一确定；

②相关关系中两个变量间是一种不确定性关系.例如，身高与体重之间的关系，两者之间虽然没有确定的函数关系，但身高高的人往往体重会更重些，两者之间是一种非确定性关系.

联系：

①两种关系在现实生活中均存在.客观上讲，函数关系是一种理想的关系模型，而相关关系是一种更为实际的情况；

②在一定条件下两种关系可以相互转化.有些相关关系可以用函数关系进行估计或推断.

(2)**提示**：具有直观、简明的特点，它能形象地体现成对数据的分布情况，并且可以根据散点图来大致推断两个变量之间是否存在相关关系、是正相关还是负相关、是线性相关还是非线性相关等.

任务型课堂

任务1

1.B　**解析**：A选项，水稻产量与施肥量之间没有明确的等量关系，是相关关系；

B选项，正方形的面积与边长之间有着明确的等量关系，不是相关关系；

C选项，商品销售收入与其广告费支出之间没有明确的等量关系，是相关关系；

D选项，人体内的脂肪含量与年龄之间没有明确的等量关系，是相关关系.

故选B.

2.C　**解析**：A,B为函数关系，D无相关关系.

3.②③　**解析**：利用相关关系的概念进行判断.①④中两个变量之间的关系是一种确定性关系，而②③中的两个变量之间是不确定性关系，它们具有相关关系.

任务2

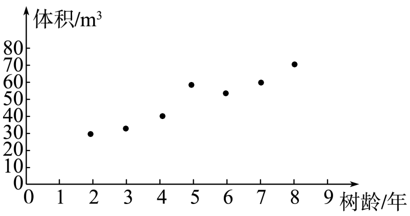
【探究活动】

例1　解：(1)由题左图知气压随海拔的增加而降低，所以气压与海拔呈负相关.

(2)由题右图知沸点随气压的升高而升高，所以沸点与气压呈正相关.

(3)气压随海拔的增加而降低，沸点随气压的升高而升高，所以沸点随海拔的增加而降低，所以沸点与海拔呈负相关.

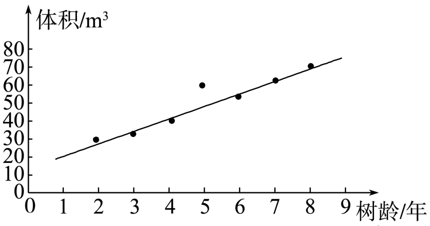
例2　解：(1)以 x 轴表示树龄，y 轴表示树干的体积，可得相应的散点图如图所示.



(2)由散点图发现树干体积随着树龄的增加呈现增加的趋势,且散点大致落在一条直线附近,所以树干的体积与树龄呈线性相关关系,且为正相关.

[一题多思]

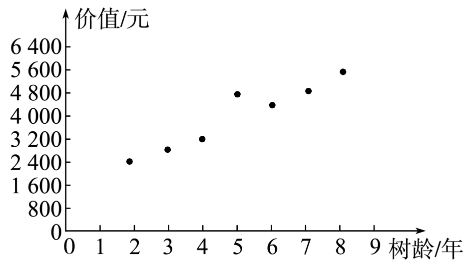
思考1.解:如图所示.



思考2.解:树干的价值与树龄之间的关系如表所示.

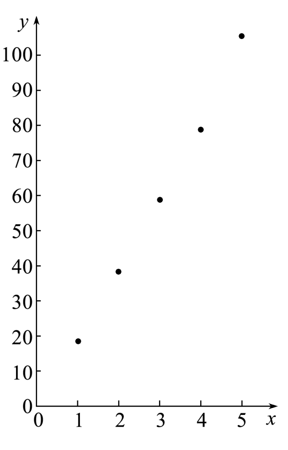
树龄/年	2	3	4	5	6	7	8
体积/m^3	30	34	40	60	55	62	70
价值/元	2 400	2 720	3 200	4 800	4 400	4 960	5 600

以 x 轴表示树龄,y 轴表示树干的价值,可得相应的散点图如图所示.



【应用迁移】

1.B　**解析**:根据题表中的数据作出散点图如图所示,



可知所有点都在一条直线附近波动,所以 y 与 x 是线性相关的,且 y 的值随着 x 的值的增大而增大,即 y 与 x 正相关.故选 B.

2.C　**解析**:由题图1可知,点散布在从左上角到右下角的区域,各点整体呈下降趋势,故 x 与 y 负相关;由题图2可知,点散布在从左下角到右上角的区域,各点整体呈上升趋势,故 u 与 v 正相关.

任务3

【探究活动】

例3　丁　**解析**:因为 $0.85>0.82>0.78>0.69$,已知相关系数的绝对值越接近1,则两个变量的线性相关性越强,所以能体现出 a,b 两变量有更强的线性相关性的是丁同学的试验结果.

例4　**解**:(1)由题表中数据可得

$\overline{y}=\dfrac{7+12+13+19+24}{5}=15.$

(2)由于 $\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=41$,$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2}=\sqrt{174}$,$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}=\sqrt{10}$,

所以样本相关系数 $r=\dfrac{41}{\sqrt{1\ 740}}\approx\dfrac{41}{41.7}\approx0.98>0.75$,

因此,两个变量有很强的线性相关关系.

【应用迁移】

1.ACD　**解析**:由题可得 $\overline{x}=\dfrac{1}{5}\times(9+9.5+10+10.5+11)=10$,故 A 正确;

而 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2}}=\dfrac{-8}{\sqrt{2.5\times26}}=\dfrac{-8}{\sqrt{65}}\approx-0.99$.

由于 y 与 x 的样本相关系数近似为 -0.99,故 y 与 x 的线性相关程度很强,同时,y 与 x 负相关,故 B 错误,C,D 正确.

故选 ACD.

2.解:由题得 $\overline{x}=\dfrac{1+2+3+4+5+6+7}{7}=4$,

$\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})^2=9+4+1+0+1+4+9=28$,

所以 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\overline{y})^2}}=\dfrac{14}{\sqrt{28}\times\sqrt{7.08}}\approx0.99>0.75$,

所以 y 与 x 有很强的线性相关关系.

8.2　一元线性回归模型及其应用

第1课时　一元线性回归模型

问题式预习

【知识清单】

知识点一

$bx+a+e$　响应　解释　随机误差

知识点三

观测值　预测值

【概念辨析】

1.(1)×　(2)√　(3)×　(4)×

2.C　**解析**:在一元线性回归模型中,表达式 $Y=bx+a+e$ 表示的不是确定性关系,因此不是一次函数,A 错误;选项 B 中,因变量 Y 不是由自变量 x 唯一确定的,B 错误;选项 D 中,随机误差是不能避免的,只能将误差缩小,但是不可能没有误差,D 错误.

3.A　**解析**:用残差图判断模型的拟合效果时,残差点比较均匀地落在以横轴为对称轴的水平带状区域中,说明这样的模型比较合适.带状区域的宽度越窄,说明模型的拟合精度越高.故选 A.

4.(1)**提示**:①用线性回归模型模拟真实模型所引起的误差.可能存在非线性的回归模型能更好地描述两变量间

的关系，但是却用线性回归模型来表述这种关系，结果就会产生误差.这种由于模型近似所引起的误差含在 e 中.②忽略了某些因素的影响.影响 Y 的因素不只变量 x 一个，可能还包含其他许多因素，它们的影响都体现在 e 中.③观测误差.由于测量工具、人为测量误差等原因得到的 Y 值一般存在误差.

(2)**提示**：散点图：如果散点图中表示成对样本数据的点分布在一条直线(曲线)附近，那么两个变量之间具有线性(非线性)相关关系.如果散点落在从左下(上)角到右上(下)角的区域，那么两个变量之间正(负)相关.

样本相关系数 r：$|r|$ 越接近于1，两个变量之间的线性相关程度越强；$|r|$ 越接近于0，两个变量之间的线性相关程度越弱.$r>0$，两个变量正相关；$r<0$，两个变量负相关.

任务型课堂

任务1

1.①②③④　**解析**：根据一元线性回归模型的含义可知，以上说法均正确.

2.10.5亿元　**解析**：因为财政收入 x 与支出 Y 满足一元线性回归模型，表达式 $Y=bx+a+e$ 中 $b=0.7$，$a=3$，
所以 $Y=0.7x+3+e$.
当 $x=10$ 时，得 $Y=0.7\times10+3+e=10+e$.
又 $|e|\leqslant0.5$，即 $-0.5\leqslant e\leqslant0.5$，
所以 $9.5\leqslant Y\leqslant10.5$，
所以年支出预计不会超过10.5亿元.

任务2

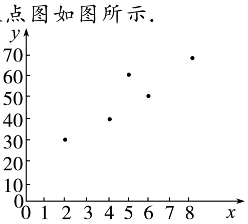
1.BC　**解析**：由经验回归方程的参数 $\hat{b}$ 的意义，可知产品产量与单位成本负相关，且产量每增加1 000件，单位成本约减少1.82元.

2.A　**解析**：因为变量 x 和变量 y 的样本相关系数为 -1，所以这组数据 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_n,y_n) 线性相关，且是负相关，所以经验回归方程的系数 $\hat{b}<0$，可排除B，C，D.故选A.

任务3

【探究活动】

例1　**解**：(1)散点图如图所示.



(2)由已知数据得

$\overline{x}=\dfrac{25}{5}=5$，$\overline{y}=\dfrac{250}{5}=50$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=145$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=1\ 380$.

于是可得 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}=\dfrac{1\ 380-5\times5\times50}{145-5\times25}=6.5$，

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}=50-6.5\times5=17.5$.

所以所求的经验回归方程为 $\hat{y}=6.5x+17.5$.

(3)根据(2)中求得的经验回归方程，当 $x=10$ 时，$\hat{y}=6.5\times10+17.5=82.5$，即广告费用支出为10万元时，销售额大约为82.5万元.

[一题多思]

思考1.解：由例题可得 $\hat{y}=6.5x+17.5$，令 $6.5x+17.5=180$，得 $x=25$.所以预估需要投入的广告费用为25万元.

思考2.提示：由经验回归方程计算出来的结果是估计值，所以在作答时结果(数据)前要有"估计""大约"等限定词语.

【应用迁移】

1.D　**解析**：由题表中数据可得 $\overline{x}=\dfrac{1}{5}\times(2+3+4+5+6)=4$，$\overline{y}=\dfrac{1}{5}\times(15.1+16.3+17+17.2+18.4)=16.8$，

因为经验回归直线过样本点的中心，所以 $16.8=0.75\times4+\hat{a}$，解得 $\hat{a}=13.8$，

所以经验回归方程为 $\hat{y}=0.75x+13.8$，

则估计该公司7月份这种型号产品的销售额为 $\hat{y}=0.75\times7+13.8=19.05$(万元).

故选D.

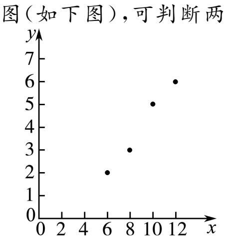
2.C　**解析**：由题意知经验回归直线 $\hat{y}=-x+\hat{a}$ 过点 $(3,-0.2)$，则 $\hat{a}=2.8$，即 $\hat{y}=-x+2.8$.

又 $\overline{x}=\dfrac{1}{5}\times(-2-1+0+1+2)=0$，$\overline{y}=\dfrac{1}{5}(5+4+m+2+1)=\dfrac{1}{5}(12+m)$，

由于经验回归直线 $\hat{y}=-x+\hat{a}$ 必过样本点的中心 $(\overline{x},\overline{y})$，所以 $\dfrac{1}{5}(12+m)=-0+2.8$，所以 $m=2$.

故选C.

3.**解**：(1)画出散点图(如下图)，可判断两个变量线性相关.



(2)由题可得 $\overline{x}=\dfrac{6+8+10+12}{4}=9$，

$\overline{y}=\dfrac{2+3+5+6}{4}=4$，

$\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2=6^2+8^2+10^2+12^2=344$，

$\sum\limits_{i=1}^{4}x_iy_i=6\times2+8\times3+10\times5+12\times6=158$，

$\hat{b}=\dfrac{158-4\times9\times4}{344-4\times9^2}=\dfrac{14}{20}=0.7$，

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=4-0.7\times9=-2.3$，

故经验回归方程为 $\hat{y}=0.7x-2.3$.

当 $x=9$ 时，$\hat{y}=0.7\times9-2.3=4$，

即预测记忆力为9的同学的判断力约为4.

任务4

【探究活动】

例2　**解**：(1)经计算得 $\overline{x}=5$，$\overline{y}=0.48$.

由 $0.48=5\hat{b}+0.88$ 可得 $\hat{b}=-0.08$.

所以 $\hat{y}=-0.08x+0.88$.

当 $x=8$ 时，$\hat{y}=-0.08\times8+0.88=0.24$.

所以当海水浓度为8‰时，该品种水稻的亩产量约为0.24 t.

(2)由(1)知 $\hat{y}=-0.08x+0.88$，从而有残差表如下：

x	3	4	5	6	7
y	0.62	0.58	0.49	0.4	0.31
$\hat{y}$	0.64	0.56	0.48	0.4	0.32
$y-\hat{y}$	-0.02	0.02	0.01	0	-0.01

残差平方和 $\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\hat{y}_i)^2=(-0.02)^2+0.02^2+0.01^2+0^2+(-0.01)^2=0.001$.

【应用迁移】

1.C　**解析**：残差点分布的带状区域的宽度越窄，说明模型拟合精度越高，则残差平方和越小.

2.**解**：(1)$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2}}$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{5}y_i^2-5\overline{y}^2}}$$

$$=\frac{3\ 765-5\times7\times113}{\sqrt{10\times3\ 630}}\approx-0.997\ 2,$$

所以,这两个变量负相关,且有较强的线性相关性.

(2)①$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}=\frac{-190}{10}=-19$,

则 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}=113+19\times7=246$,

所以 Y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=-19x+246$,

当 $x=10$ 时,$\hat{y}=-19\times10+246=56$.

所以,当 $x=10$ 时,Y 的预测值为 56.

②由 $\hat{e}_i=y_i-\hat{y}_i=y_i+19x_i-246$,计算得该回归模型的残差如下表所示:

编号 i	1	2	3	4	5
x	9	8	7	6	5
$\hat{e}$	0	1	-3	3	-1

所以,残差的方差为 $\frac{0^2+1^2+(-3)^2+3^2+(-1)^2}{5}=4$.

第 2 课时　一元线性回归模型的应用

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(3)越好　越差

知识点二

(1)$\hat{u}=\hat{c}+\hat{b}v$　　(2)$\hat{u}=\hat{c}+\hat{b}x$　(3)$\hat{u}=\hat{a}+\hat{b}v$

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)√

2.B　**解析**:由题意得 $\ln y=\ln(ce^{kx})=\ln c+kx$.又 $z=\ln y$,可得 $z=\ln c+kx$.又经验回归方程为 $\hat{z}=2x-1$,所以 $k=2,\ln c=-1$,即 $k=2,c=\frac{1}{e}$.故选 B.

3.(1)**提示**:①画出散点图,确定曲线的大致形状;
②根据曲线的大致形状,确定基本初等函数特征;
③构造曲线方程.

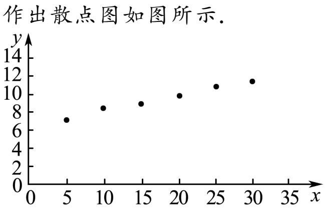
(2)**提示**:在 R^2 的表达式中,$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$ 与经验回归方程无关,残差平方和 $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$ 与经验回归方程有关.因此 R^2 越大,表示残差平方和越小,即模型的拟合效果越好;R^2 越小,表示残差平方和越大,即模型的拟合效果越差.

任务型课堂

任务 1

【探究活动】

例 1　**解**:(1)作出散点图如图所示.



$\overline{x}=\frac{1}{6}\times(5+10+15+20+25+30)=17.5$,

$\overline{y}=\frac{1}{6}\times(7.25+8.12+8.95+9.9+10.9+11.8)\approx9.487$,

$\sum_{i=1}^{6}x_i^2=2\ 275$,$\sum_{i=1}^{6}x_iy_i=1\ 076.2$,

计算得 $\hat{b}=\frac{1\ 076.2-6\times17.5\times9.487}{2\ 275-6\times17.5^2}\approx0.183$,

$\hat{a}=9.487-0.183\times17.5\approx6.285$,

所求经验回归方程为 $\hat{y}=6.285+0.183x$.

(2)列表如下:

编号 i	1	2	3	4	5	6
$y-\hat{y}$	0.05	0.005	-0.08	-0.045	0.04	0.025
$y-\overline{y}$	-2.237	-1.367	-0.537	0.413	1.413	2.313

所以 $\sum_{i=1}^{6}(y_i-\hat{y}_i)^2=0.013\ 175$,$\sum_{i=1}^{6}(y_i-\overline{y})^2=14.678\ 334$.

所以 $R^2=1-\frac{0.013\ 175}{14.678\ 334}\approx0.999\ 1$.

所以线性回归模型的拟合效果较好.

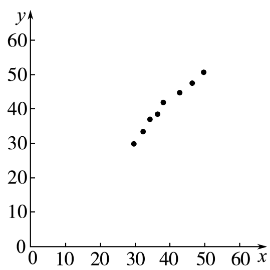
(3)由残差表中的数值可以看出第 3 个样本点的残差绝对值比较大,需要确认在采集这个数据的时候是否有人为的错误,如果有的话,需要纠正数据,重新建立线性回归模型;由表中数据作出残差图(图略),观察表中数据及残差图,可得所有残差点比较均匀地分布在以横轴为对称轴、宽度小于 0.1 的狭窄的水平带状区域中,说明选用的线性回归模型的精度较高.由以上分析可知,弹簧长度与质量有线性相关关系.

[一题多思]

思考.解:利用残差分析研究两个变量间的关系时,首先要根据散点图来粗略判断它们是否线性相关,是否可以用线性回归模型来拟合数据.然后通过残差图来分析残差特性,用残差来判断原始数据中是否存在可疑数据,用 R^2 来刻画模型拟合的效果.

【应用迁移】

1.解:(1)作出该运动员的训练次数 x 与训练成绩 y 的散点图,如图所示.由散点图可知,它们之间有相关关系.



由题表中数据可得 $\overline{x}=39.25$,$\overline{y}=40.875$,$\sum_{i=1}^{8}x_i^2=12\ 656$,$\sum_{i=1}^{8}x_iy_i=13\ 180$,

所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{8}x_iy_i-8\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{8}x_i^2-8\overline{x}^2}\approx1.041\ 5$,

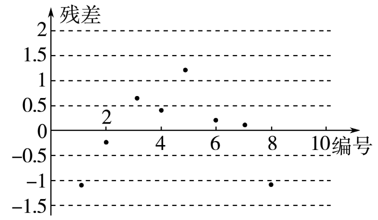
$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}\approx-0.003\ 9$.

所以经验回归方程为 $\hat{y}=1.041\ 5x-0.003\ 9$.

(2)残差分析:下面的表格列出了该运动员的训练次数 x 和训练成绩 y 的原始数据以及相应的残差数据.

x	30	33	35	37
y	30	34	37	39
$\hat{e}$	$-1.241\ 1$	$-0.365\ 6$	$0.551\ 4$	$0.468\ 4$
x	39	44	46	50
y	42	46	48	51
$\hat{e}$	$1.385\ 4$	$0.177\ 9$	$0.094\ 9$	$-1.071\ 1$

作残差图如图所示.



由图可知,残差点比较均匀地分布在以横轴为对称轴的水平带状区域内,说明选择的模型比较合适.

由表中数据得,$R^2=1-\frac{\sum_{i=1}^{8}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{8}(y_i-\overline{y})^2}\approx0.985\ 5$.

2.解:(1)对于模型①,$\overline{y}=\frac{15+22+27+40+48+54+60}{7}=38$,

$\sum_{i=1}^{7}(y_i-\overline{y})^2=\sum_{i=1}^{7}y_i^2-7\overline{y}^2=1\ 750$,

故对应的决定系数 $R_1^2=1-\frac{79.13}{1\ 750}\approx0.955$.

对于模型②,同理可得对应的决定系数 $R_2^2=1-\frac{20.2}{1\ 750}\approx0.988$,$R_2^2>R_1^2$.

(2)由(1)可知,模型②的拟合精度更高、更可靠.

故估计对A型材料进行应用改造的投入为17亿元时的直接收益为 $\hat{y}=21.3\sqrt{17}-14.4\approx72.93$ 亿元.

任务2

【探究活动】

例2 **解**:(1)①由题表可得 $\overline{x}=\frac{2+4+6+8+10+12}{6}=7$,

令 $z=\log_2 y=bx+\log_2 c$,$a=\log_2 c$,则 $z=bx+a$.

可知 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})(z_i-\overline{z})}{\sum_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{34.7}{70}\approx0.5$,

从而 $\hat{a}=\overline{z}-\hat{b}\,\overline{x}=4.5-0.5\times7=1$.

故经验回归方程为 $\hat{z}=0.5x+1$,即 $\hat{y}=2^{0.5x+1}$.

②令 $2^{0.5x+1}\geqslant200$,得 $0.5x+1\geqslant\log_2 200$,即 $x\geqslant4+4\log_2 5\approx13.288$.

故科技投入的费用至少为13.288百万元时,下一年的收益才能不低于2亿元.

(2)甲建立的回归模型的残差如下:

y_i	5.6	6.5	12	27.5	80	129.2
$\hat{y}_i$	4	8	16	32	64	128
$y_i-\hat{y}_i$	1.6	−1.5	−4	−4.5	16	1.2

则 $\sum_{i=1}^{6}(y_i-\hat{y}_i)^2=298.5$.

从而 $R^2=1-\frac{298.5}{12\ 730.4}\approx1-0.02=0.98>0.94$.

所以甲建立的模型拟合效果更好.

【应用迁移】

解:(1)由散点图可知模型 $y=c+dx^2$ 更适宜作为月销售量 y 关于月份代码 x 的回归模型.

(2)①令 $t=x^2$,则 $y=c+dt$,

可得 $\overline{t}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i^2=11$,

$\overline{y}=\frac{1}{5}\times(2.2+2.4+3.8+5.6+8)=4.4$,

则 $\hat{d}=\frac{\sum_{i=1}^{5}t_iy_i-5\overline{t}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{5}t_i^2-5\overline{t}^2}=\frac{335.6-5\times11\times4.4}{979-5\times11^2}\approx0.25$,

$\hat{c}=\overline{y}-\hat{d}\,\overline{t}=4.4-0.25\times11=1.65$,

所以 y 关于 t 的经验回归方程为 $\hat{y}=1.65+0.25t$,

即 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=1.65+0.25x^2$.

②令 $x=7$,可得 $\hat{y}=1.65+0.25\times7^2=13.9$,

预测12月份的销售量大约是13.9万件.

任务3

【探究活动】

例3 **解**:(1)因为 $\overline{x}=\frac{11+9.5+12+10.5+9}{5}=10.4$,$\overline{y}=\frac{11+10+8+6+15}{5}=10$,

所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}=\frac{510-5\times10.4\times10}{546.5-5\times10.4^2}\approx-1.75$,$\hat{a}=10-(-1.75)\times10.4=28.2$,

于是 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=-1.75x+28.2$.

(2)当 $x=10$ 时,$\hat{y}=-1.75\times10+28.2=10.7$,

因为 $|14.2-10.7|=3.5>0.5$,

所以认为所得到的经验回归方程是不理想的.

(3)令销售利润为 W,

则 $W=(x-2.5)(-1.75x+28.2)=-1.75x^2+32.575x-70.5(2.5<x<16.1)$.

因为 $W\approx1.75x(-x+18.6)-70.5\leqslant1.75\times\left(\frac{x-x+18.6}{2}\right)^2-70.5\approx80.86$,

当且仅当 $x=-x+18.6$,即 $x=9.3$ 时,W 取最大值.

所以该配件的销售单价应定为9.3元才能获得最大利润.

【应用迁移】

解:(1)因为 $\sum_{i=1}^{6}(t_i-\overline{t})^2\approx(-1.7)^2+(1-1.7)^2+\left(\frac{0.48}{0.3}-1.7\right)^2+(2-1.7)^2+\left(1+\frac{0.48}{0.3}-1.7\right)^2+(3-1.7)^2=5.98$,

所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{6}t_iy_i-6\overline{t}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{6}(t_i-\overline{t})^2}=\frac{871.36-6\times1.7\times86.6}{5.98}=-2$.

又 $\overline{y}=86.6$,且经验回归直线 $\hat{y}=\hat{b}t+\hat{a}$ 过点(1.7,86.6),

所以 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{t}=86.6-(-2)\times1.7=90$.

(2)由(1)可得 $\hat{y}=-2\log_2 x+90$,$\overline{y}=86.6$,

x	1	2	3	4	6	8
y	90.1	87.6	87.2	86.2	84.2	84.3
$\hat{y}$	90	88	86.8	86	84.8	84
$(y-\hat{y})^2$	0.01	0.16	0.16	0.04	0.36	0.09
$(y-\overline{y})^2$	12.25	1	0.36	0.16	5.76	5.29

则 $R^2=1-\frac{\sum_{i=1}^{6}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{6}(y_i-\overline{y})^2}$

$=1-\frac{0.01+0.16+0.16+0.04+0.36+0.09}{12.25+1+0.36+0.16+5.76+5.29}$

$=1-\frac{0.82}{24.82}\approx0.967$.

因为 $R^2>0.9$,所以该经验回归方程有价值.

(3)经计算,这六组数据中,残差的绝对值不超过0.3的有三组,分别是第一组、第四组和第六组,故从这六组数据中

任意抽取两组,Y 的可能取值有 0,1,2,

所以 $P(Y=0)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$,$P(Y=1)=\frac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{5}$,$P(Y=2)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$,

则 Y 的分布列为

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

故数学期望为 $E(Y)=1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$.

8.3 列联表与独立性检验

8.3.1 分类变量与列联表

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(1)现象　性质　(2)②$a+b$　$c+d$　$a+c$　$b+d$

【概念辨析】

1.(1)×　(2)√　(3)√

2.B　**解析**:根据题表可知 $a+35=45$,解得 $a=10$.则 $m=10+7=17$.

又由 $35+b=73$,解得 $b=38$.则 $n=7+38=45$.故选 B.

3.D　**解析**:散点图是研究两个变量间的相关关系,列联表是研究两个分类变量是否有关联,残差图体现预测值与观测值间的差距,等高堆积条形图能直观地反映两个分类变量间是否有关系.故选 D.

4.(1)**提示**:等高堆积条形图中有两个高度相同的矩形,每一个矩形中都有两种颜色,观察下方颜色区域的高度,如果两个高度相差比较明显,就推断两个分类变量之间具有关联性.

(2)**提示**:不能.因为随机抽样得到的样本具有随机性,根据样本数据计算出来的频率也具有随机性.在统计推断中,依据频率稳定于概率,可以用频率推断与 X 和 Y 有关的概率,但由于频率具有随机性,这种推断可能犯错误,因此,随机抽样数据不能够确定与 X 和 Y 有关的所有概率.

任务型课堂

任务 1

【探究活动】

例 1　**解**:由题表可得,甲专业录取了男生 25 人,女生 90 人,乙专业录取了男生 180 人,女生 50 人,得到 2×2 列联表如下:

单位:人

性别	专业		合计
	甲	乙	
男	25	180	205
女	90	50	140
合计	115	230	345

甲专业的录取率为 $\frac{25+90}{100+300}=28.75\%$,

乙专业的录取率为 $\frac{180+50}{400+100}=46\%$,

所以乙专业的录取率比甲专业的录取率高.

[一题多思]

思考 1.解:女生的录取率为 $\frac{90+50}{300+100}=35\%$.

思考 2.解:男生的录取率为 $\frac{25+180}{100+400}=41\%$,

又由思考 1 知女生的录取率为 35%,

所以男生的录取率比女生的录取率高.

【应用迁移】

B　**解析**:由题表中数据可得,总计患肺癌的人数为 9 965−9 874=91,则吸烟且患肺癌的人数 $d=91-42=49$.

任务 2

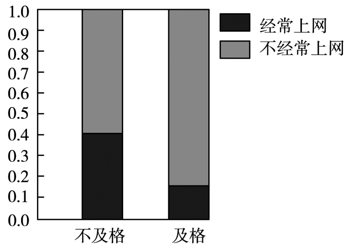
【探究活动】

例 2　**解**:(1)根据题中所给的数据得到如下 2×2 列联表:

单位:人

学习成绩	上网情况		合计
	经常上网	不经常上网	
不及格	80	120	200
及格	120	680	800
合计	200	800	1 000

得出等高堆积条形图如图所示.



(2)比较(1)中等高堆积条形图中深色条的高,可以发现经常上网不及格的频率明显高于经常上网及格的频率,因此可以认为经常上网对学习成绩的好坏有影响.

【应用迁移】

1.C　**解析**:根据题图 1 可知样本中选择物理的人数多于选择历史的人数,故 C 正确;

根据题图 2 可知样本中男生人数多于女生人数,故 D 错误;

由题图可知样本中选择物理的人数多于选择历史的人数,而选择物理的男生比例高,选择历史的女生比例低,所以样本中选择物理的男生人数多于选择历史的女生人数,故 A 错误;

样本中选择历史的女生人数不一定多于选择历史的男生人数,故 B 错误.

故选 C.

2.AD　**解析**:对于 A,城镇户籍倾向选择生育三孩的比例为 40%,农村户籍倾向选择生育三孩的比例为 80%,两者相差较大,所以是否倾向选择生育三孩与户籍有关,故 A 正确;对于 B,男性倾向选择生育三孩的比例为 60%,女性倾向选择生育三孩的比例为 60%,所以是否倾向选择生育三孩与性别无关,故 B 错误;对于 C,男性倾向选择生育三孩的比例为 60%,人数为 $60\times60\%=36$,女性倾向选择生育三孩的比例为 60%,人数为 $40\times60\%=24$,所以倾向选择生育三孩的群体中,男性人数比女性人数多,故 C 错误;对于 D,倾向选择不生育三孩的群体中,农村户籍人数为 $50\times(1-80\%)=10$,城镇户籍人数为 $50\times(1-40\%)=30$,所以倾向选择不生育三孩的群体中,农村户籍人数少于城镇户籍人数,故 D 正确.

8.3.2 独立性检验

问题式预习

【知识清单】

知识点

(1)独立性检验　(2)$a+b+c+d$

【概念辨析】

1.(1)× (2)√ (3)√

2.C 解析:χ^2 越大,"两个变量有关联"的可信度越高,"两个变量无关"的可信度越低;相反,χ^2 越小,"两个变量有关联"的可信度越低,"两个变量无关"的可信度越高.

3.D

4.(1)提示:①小概率值 α 的临界值 x_α 是一个正实数.

②$P(\chi^2 \geqslant x_\alpha)=\alpha$ 时,x_α 称为 α 的临界值,即对于不同的小概率值 α,有不同的临界值 x_α.

③基于小概率值 α 的检验规则:当 $\chi^2 \geqslant x_\alpha$ 时,我们就推断 H_0 不成立,即此时小概率事件不大可能发生,认为两变量之间不独立,该推断犯错误的概率不超过 α;当 $\chi^2 < x_\alpha$ 时,我们没有充分证据推断 H_0 不成立,可以认为两变量之间独立.

(2)检验结论"两个变量之间有关联"是"两个变量不独立"的另一种说法,指在零假设"两个变量独立"之下,成对样本数据显示在一次试验中某个不利于这个假设的小概率事件发生了,由此推断零假设不成立,从而得出"两个变量不独立"的检验结论.检验结论"两个变量之间没有关联"是"两个变量独立"的另一种说法,指在零假设"两个变量独立"之下,成对样本数据显示在一次试验中某个不利于这个假设的小概率事件没有发生,因此不能推断零假设不成立,按照通常的习惯接受零假设,即得出"两个变量独立"的检验结论.

任务型课堂

任务 1

【探究活动】

例 1 解:(1)2×2 列联表如下:

单位:人

秃顶情况	患病情况		合计
	患心脏病	患其他病	
秃顶	200	150	350
不秃顶	400	600	1 000
合计	600	750	1 350

(2)$P_1=\frac{200}{350}=\frac{4}{7}$,$P_2=\frac{400}{1\,000}=\frac{2}{5}$.

由于 P_1 与 P_2 相差较大,所以判断秃顶与患心脏病有关.

[一题多思]

思考 1.解:零假设为 H_0:秃顶与患心脏病无关.

由例 1(1)中列联表中数据计算可得 $\chi^2=\frac{1\,350\times(200\times600-150\times400)^2}{350\times1\,000\times600\times750}=\frac{216}{7}\approx30.86>10.828=x_{0.001}$,

所以依据小概率值 $\alpha=0.001$ 的 χ^2 独立性检验,我们推断 H_0 不成立,即认为秃顶与患心脏病有关,此推断犯错误的概率不大于 0.001.

思考 2.解:根据 χ^2 独立性检验得到的结果更理性、更全面,理论依据也更充分.

【应用迁移】

1.B 解析:完善 2×2 列联表如下:

单位:只

注射疫苗情况	被感染情况		合计
	被感染	未被感染	
注射疫苗	10	40	50
未注射疫苗	20	30	50
合计	30	70	100

零假设为 H_0:给基因编辑小鼠注射该种疫苗不能起到预防被该病毒感染的效果.

因为 $\chi^2=\frac{100\times(10\times30-40\times20)^2}{50\times50\times30\times70}\approx4.762$,$3.841<4.762<6.635$,

所以根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验,推断 H_0 不成立,

即认为"给基因编辑小鼠注射该种疫苗能起到预防被该病毒感染的效果",该推断犯错误的概率不超过 0.05.

2. B 解析:由题表中数据可得 $\chi^2=\frac{407\times(32\times213-101\times61)^2}{133\times274\times93\times314}\approx0.164<2.706=x_{0.1}$,即没有充分证据推断 H_0 不成立,因此可以认为种子是否生病跟是否经过处理无关.

任务 2

【探究活动】

例 2 解:(1)由题表可得 $\overline{x}=1.03$,$\overline{y}=\frac{a+49}{5}$.

由 $\hat{y}=-91+100x$,知 $\frac{a+49}{5}=-91+100\times1.03$.

所以 $a=11$.

由于合格零件的尺寸为(1.03±0.01)cm,

故 2×2 列联表为

单位:个

机床	零件的质量		合计
	合格	不合格	
甲	24	6	30
乙	12	18	30
合计	36	24	60

(2)零假设为 H_0:加工零件的质量与加工机床无关.

由(1)中列联表数据计算得 $\chi^2=\frac{60\times(24\times18-6\times12)^2}{30\times30\times36\times24}=10>6.635=x_{0.01}$.

根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验,我们推断 H_0 不成立,即认为加工零件的质量与加工机床有关,此推断犯错误的概率不大于 0.01.

【应用迁移】

1.解:(1)由题得 2×2 列联表如下:

单位:人

了解情况	性别		合计
	男	女	
了解	40	20	60
不了解	20	20	40
合计	60	40	100

(2)零假设 H_0:该校学生对该宣传活动的了解情况与性别无关.

由(1)可得 $\chi^2=\frac{100\times(40\times20-20\times20)^2}{60\times40\times60\times40}=\frac{25}{9}\approx2.778<3.841$,

则根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验,没有充分证据推断 H_0 不成立,

因此可以认为 H_0 成立,即认为该校学生对该宣传活动的了解情况与性别无关.

(3)由(1)可知抽取的 100 名学生中了解该活动的学生中男生和女生分别为 40 人和 20 人,

所以从了解该活动的学生中随机抽取 1 人参加传统文化知识竞赛,抽取的是女生的概率为 $\frac{20}{40+20}=\frac{1}{3}$,

则由题意可知 $X=0,1,2,3$,且 $X\sim B\left(3,\frac{1}{3}\right)$,

所以 $P(X=0)=C_3^0\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$,

$P(X=1)=C_3^1\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$,

$P(X=2)=C_3^2\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$,

$P(X=3)=C_3^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$,

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

$E(X)=np=3\times\frac{1}{3}=1$.

2.(1)**解**:完善 2×2 列联表如表所示.

单位:分

发球方	得分情况		合计
	甲得分	乙得分	
甲	18	12	30
乙	6	24	30
合计	24	36	60

零假设为 H_0:获胜与接、发球无关.

由列联表中数据计算得 $\chi^2=\frac{60\times(18\times24-12\times6)^2}{30\times30\times24\times36}=10>6.635=x_{0.01}$,

根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验,我们推断 H_0 不成立,即认为获胜与接、发球有关,此推断犯错误的概率不超过 0.01.

(2)①**证明**:在甲发球的情况下,甲得分的概率为 $\frac{18}{30}=\frac{3}{5}$,乙得分的概率为 $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$;

在乙发球的情况下,甲得分的概率为 $\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$,乙得分的概率为 $1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$.

若第 $i(i\geqslant2)$ 回合是甲发球,则要分两种情况讨论:

第 $(i-1)$ 回合是甲发球且甲得分,或第 $(i-1)$ 回合是乙发球且甲得分,

所以 $p_i=p_{i-1}\times\frac{3}{5}+(1-p_{i-1})\times\frac{1}{5}$,即 $p_i=\frac{2}{5}p_{i-1}+\frac{1}{5}$,

故 $p_i-\frac{1}{3}=\frac{2}{5}p_{i-1}-\frac{2}{15}=\frac{2}{5}\left(p_{i-1}-\frac{1}{3}\right)(i\geqslant2)$.

又 $p_1=1$,所以 $p_1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\neq0$,

故 $\left\{p_i-\frac{1}{3}\right\}$ 是以 $\frac{2}{3}$ 为首项,$\frac{2}{5}$ 为公比的等比数列.

②**解**:由①可得 $p_i-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}$,故 $p_i=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}$.

设第 i 回合甲得分为 X_i,显然 X_i 服从两点分布,

且事件"$X_i=1$"等价于"第 $(i+1)$ 回合是甲发球",

故 $E(X_i)=p_{i+1}$.

又甲、乙连续进行 60 回合比赛后,甲的总得分 $X=X_1+X_2+\cdots+X_{60}$,

故 $E(X)=\sum\limits_{i=1}^{60}E(X_i)=\sum\limits_{i=1}^{60}p_{i+1}=\sum\limits_{i=1}^{60}\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{5}\right)^i\right]$

$=\frac{1}{3}\times60+\frac{\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^{60}\right]}{1-\frac{2}{5}}=20+\frac{4}{9}\times\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^{60}\right]=\frac{184}{9}-\frac{4}{9}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{60}$.

因为 $E(X)\approx\frac{184}{9}\neq24$,故列联表中的数据是训练数据.

迁移应用

类型一

例 1　解:(1)由题意得,$\overline{x}=\frac{1+2+3+\cdots+9+10}{10}=5.5$,

又 $\overline{y}=1.5$,$\sum\limits_{i=1}^{10}x_iy_i=89.1$,$\sum\limits_{i=1}^{10}x_i^2=385$,

所以 $\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{10}x_iy_i-10\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{10}x_i^2-10\overline{x}^2}$

$=\frac{89.1-10\times5.5\times1.5}{385-10\times5.5^2}=0.08$,

$\hat{a}=1.5-0.08\times5.5=1.06$,

所以 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=0.08x+1.06$.

当 $x=12$ 时,$\hat{y}=2.02$,

故 A 省 12 月份新能源汽车的销量约为 2.02 万辆.

(2)这两家汽车销售商所获得的奖金总额 X 的所有可能取值为 4,3,2.5,2,1.5,1,

$P(X=4)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$,

$P(X=3)=2\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$,

$P(X=2.5)=2\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$,

$P(X=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$,

$P(X=1.5)=2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$,

$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,

则 X 的分布列为

X	4	3	2.5	2	1.5	1
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

$E(X)=4\times\frac{1}{36}+3\times\frac{1}{9}+2.5\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{9}+1.5\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{4}=\frac{11}{6}$.

类型二

例 2　解:(1)由题中等高堆积条形图得 2×2 列联表如下:

单位:人

性别	排球运动		合计
	喜欢	不喜欢	
男	30	70	100
女	60	40	100
合计	90	110	200

零假设为 H_0：学生的性别与是否喜欢排球运动无关，根据列联表中的数据，

得 $\chi^2=\dfrac{200\times(30\times40-70\times60)^2}{100\times100\times90\times110}\approx18.182>10.828=x_{0.001}$，

依据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，可以推断 H_0 不成立，即认为该校学生的性别与是否喜欢排球运动有关联，此推断犯错误的概率不大于 0.001.

(2)由(1)知，喜欢排球运动的频率为 $\dfrac{90}{200}=\dfrac{9}{20}$，

所以随机变量 $X\sim B\left(50,\dfrac{9}{20}\right)$，

则 $P(X=k)=\mathrm{C}_{50}^{k}\left(\dfrac{9}{20}\right)^{k}\left(1-\dfrac{9}{20}\right)^{50-k}(0\leqslant k\leqslant50,k\in\mathbf{N})$.

令 $\begin{cases}\mathrm{C}_{50}^{k}\left(\dfrac{9}{20}\right)^{k}\left(1-\dfrac{9}{20}\right)^{50-k}\geqslant\mathrm{C}_{50}^{k-1}\left(\dfrac{9}{20}\right)^{k-1}\left(1-\dfrac{9}{20}\right)^{51-k},\\ \mathrm{C}_{50}^{k}\left(\dfrac{9}{20}\right)^{k}\left(1-\dfrac{9}{20}\right)^{50-k}\geqslant\mathrm{C}_{50}^{k+1}\left(\dfrac{9}{20}\right)^{k+1}\left(1-\dfrac{9}{20}\right)^{49-k},\end{cases}$

解得 $\dfrac{439}{20}\leqslant k\leqslant\dfrac{459}{20}$.

因为 $k\in\mathbf{N}$，所以 $k=22$，即当 $k=22$ 时，$P(X=k)$ 取得最大值.

重构拓展

【学科视野拓展】

拓展一

应用1 **解**：(1)由题中散点图可以判断，$y=c\mathrm{e}^{dx}$ 更适合作为平均产卵数 y 关于平均气温 x 的回归方程类型.

(2)由 $z=\ln y$，可得 $z=\ln y=\ln c+dx$，

由题中的数据可得，$\sum\limits_{i=1}^{7}x_iz_i-7\,\overline{x}\,\overline{z}=33.6$，$\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})^2=\sum\limits_{i=1}^{7}x_i^2-7\overline{x}^2=112$，

所以 $\hat{d}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}x_iz_i-7\,\overline{x}\,\overline{z}}{\sum\limits_{i=1}^{7}x_i^2-7\,\overline{x}^2}=\dfrac{33.6}{112}=0.3$，

则 $\ln\hat{c}=\overline{z}-\hat{d}\,\overline{x}=3.6-0.3\times27=-4.5$，

所以 z 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{z}=0.3x-4.5$，

故 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=\mathrm{e}^{0.3x-4.5}$.

(3)用 X_1，X_2 和 X_3 分别表示选择三种方案的收益.

选择方案1，无论气温如何，产值不受影响，收益为 $200-18=182$ 万元，即 $X_1=182$.

选择方案2，当不发生 28 ℃以上的红蜘蛛虫害，收益为 $200-10=190$ 万元，

如果发生 28 ℃以上的红蜘蛛虫害，那么收益为 $100-10=90$ 万元，即 $X_2=\begin{cases}190,\text{不发生 28 ℃以上的红蜘蛛虫害},\\90,\text{发生 28 ℃以上的红蜘蛛虫害}.\end{cases}$

同样，选择方案3，有

$X_3=\begin{cases}200,\text{不发生虫害},\\160,\text{只发生 22～28 ℃虫害},\\100,\text{发生 28 ℃以上虫害},\end{cases}$

所以 $E(X_1)=182$，

$E(X_2)=190\times P(X_2=190)+90\times P(X_2=90)=190\times0.9+90\times0.1=171+9=180$，

$E(X_3)=200\times P(X_3=200)+160\times P(X_3=160)+100\times P(X_3=100)=200\times0.6+160\times0.3+100\times0.1=178$.

显然，$E(X_1)$ 最大，所以选择方案1最佳.

拓展二

应用2 (1)**解**：由题意，这组学生的数学成绩和知识竞赛成绩的样本相关系数为

$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{20}(y_i-\overline{y})^2}}=\dfrac{21\,650}{\sqrt{6\,464\times149\,450}}\approx\dfrac{21\,650}{31\,000}\approx0.70$.

(2)①**证明**：因为 $\{R_i\}$ 和 $\{S_i\}$ 都是 $1,2,\cdots,N$ 的一个排列，所以 $\sum\limits_{i=1}^{N}R_i=\sum\limits_{i=1}^{N}S_i=\dfrac{N(N+1)}{2}$，$\sum\limits_{i=1}^{N}R_i^2=\sum\limits_{i=1}^{N}S_i^2=\dfrac{N(N+1)(2N+1)}{6}$，

从而 $\{R_i\}$ 和 $\{S_i\}$ 的平均数都是 $\overline{R}=\overline{S}=\dfrac{N+1}{2}$.

因此，$\sum\limits_{i=1}^{N}(R_i-\overline{R})^2=\sum\limits_{i=1}^{N}R_i^2-2\,\overline{R}\sum\limits_{i=1}^{N}R_i+N\,\overline{R}^2=\sum\limits_{i=1}^{N}R_i^2-N\,\overline{R}^2=\dfrac{N(N+1)(2N+1)}{6}-\dfrac{N\,(N+1)^2}{4}=\dfrac{N(N+1)(N-1)}{12}$，

同理可得 $\sum\limits_{i=1}^{N}(S_i-\overline{S})^2=\dfrac{N(N+1)(N-1)}{12}$.

由于 $\sum\limits_{i=1}^{N}d_i^2=\sum\limits_{i=1}^{N}(R_i-S_i)^2=\sum\limits_{i=1}^{N}[(R_i-\overline{R})-(S_i-\overline{S})]^2=\sum\limits_{i=1}^{N}(R_i-\overline{R})^2+\sum\limits_{i=1}^{N}(S_i-\overline{S})^2-2\sum\limits_{i=1}^{N}(R_i-\overline{R})(S_i-\overline{S})=2\cdot\dfrac{N(N+1)(N-1)}{12}-2\sum\limits_{i=1}^{N}(R_i-\overline{R})(S_i-\overline{S})$，

所以 $\rho=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N}(R_i-\overline{R})(S_i-\overline{S})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N}(R_i-\overline{R})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N}(S_i-\overline{S})^2}}=\dfrac{\dfrac{N(N+1)(N-1)}{12}-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N}d_i^2}{\dfrac{N(N+1)(N-1)}{12}}=1-\dfrac{6}{N(N^2-1)}\sum\limits_{i=1}^{N}d_i^2$.

②**解**："斯皮尔曼相关系数"刻画的是样本数据排名的样本相关系数，与具体的数值无关，只与排名有关.如果一组数据有异常值，但排名依然符合一定的线性关系，那么可以采用"斯皮尔曼相关系数"刻画线性关系.

课后素养评价(一)

A组　学习·理解

1.D　**解析**:在15首中文歌曲和5首英文歌曲共20首歌曲中任选一首播放,不同的选法共有20种.

2.A　**解析**:当$x=1$时,$y=0,1,2,3,4,5$,有6个不同的有序自然数对;
当$x=2$时,$y=0,1,2,3,4$,有5个不同的有序自然数对;
当$x=3$时,$y=0,1,2,3$,有4个不同的有序自然数对.
根据分类加法计数原理,可得共有$6+5+4=15$个不同的有序自然数对.

3.D　**解析**:由题意,每名同学有2种选择,故不同的报名方法有$2^5=32$种.故选D.

4.B　**解析**:七个课间编号为1,2,3,4,5,6,7,
若仅有一个课间练习,则每个课间都可以,有7种方案;
若有两个课间练习,选法有$\{1,4\}$,$\{1,5\}$,$\{1,6\}$,$\{1,7\}$,$\{2,5\}$,$\{2,6\}$,$\{2,7\}$,$\{3,6\}$,$\{3,7\}$,$\{4,7\}$,共10种方案;
若有三个课间练习,选法为$\{1,4,7\}$,共1种方案.
故共有练习的方案$7+10+1=18$种.

5.24　**解析**:根据分步乘法计数原理,展开后的项数为$2\times3\times4=24$.

6.12　24　**解析**:分两步,第1步,a有3种选法;第2步,b有4种选法.故共有$3\times4=12$种不同的选法.
分三步,第1步,a有3种选法;第2步,b有4种选法;第3步,r有2种选法.故共有$3\times4\times2=24$种不同的选法.

7.8.1×10^7　**解析**:由题意知,本题是一个分步计数问题.电话号码是七位数字时,该城市的电话号码有9×10^6个,同理,改为八位时,该城市的电话号码有9×10^7个.所以可增加的电话号码个数是$9\times10^7-9\times10^6=81\times10^6=8.1\times10^7$.

8.18　**解析**:由题意可知,$E\to F$的最短路径有6条,$F\to G$的最短路径有3条.由分步乘法计数原理知,共有$6\times3=18$条最短路径.

B组　应用·实践

1.B　**解析**:由题意可知,经过3次移动后返回到点A的路径有$ABCA$,$ABDA$,$ADBA$,$ADCA$,$ACBA$,$ACDA$,共有6条不同的路径.故选B.

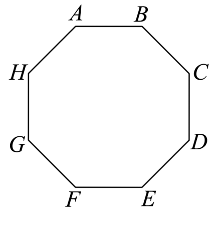
2.D　**解析**:完成这件事需分三步.第1步,植第一棵树有4种不同的分配方法;第2步,植第二棵树有4种不同的分配方法;第3步,植第三棵树也有4种不同的分配方法.由分步乘法计数原理得,不同的分配方法共有$4^3=64$种.

3.B　**解析**:由于甲、乙不能从事翻译工作,因此翻译工作从余下的4名志愿者中选1人,有4种选法.后面三项工作的选法有$5\times4\times3$种,因此共有$4\times5\times4\times3=240$种不同的选派方案.故选B.

4.2 880　**解析**:分两步安排这8名男运动员.
第1步,安排甲、乙、丙3人,共有1,3,5,7四条跑道可安排,安排方式有$4\times3\times2=24$种;
第2步,安排另外5人,可安排在2,4,6,8及余下的一条奇数号跑道上,安排方式有$5\times4\times3\times2\times1=120$种.
所以安排这8名运动员跑道的方式有$24\times120=2\ 880$种.

5.39　**解析**:当取1时,1只能为真数,此时这个对数值为0;当不取1时,根据分步乘法计数原理,共有$7\times6=42$种取法,其中$\log_2 4=\log_3 9=2$,$\log_4 2=\log_9 3=\dfrac{1}{2}$,$\log_2 3=\log_4 9$,$\log_3 2=\log_9 4$,
故此时有$42-4=38$个不同的对数值.
所以共有不同的对数值$38+1=39$个.

6.**解**:



梯形的上、下底平行且不相等,
若以AB为底边,则可构成2个梯形,根据对称性可知此类梯形有$2\times8=16$个;
若以AC为底边,则可构成1个梯形,此类梯形共有$1\times8=8$个.
所以共能构成梯形$16+8=24$个.

7.**解**:(1)要完成的是"4名同学每人从三个项目中选一项报名"这件事,因为每人必报一项,4人都报完才算完成,所以按人分步,且分为四步,又每人可在三项中选一项,选法为3种,所以共有$3\times3\times3\times3=81$(种)不同的报名方法.
(2)因为每项必须有人报名,且限报一人,每人至多报一项,因此跑步项目有4种选法,跳高项目有3种选法,跳远项目只有2种选法.根据分步乘法计数原理,可得不同的报名方法有$4\times3\times2=24$(种).
(3)要完成的是"三个项目的冠军的获取"这件事,因为每个项目的冠军只能有一人获得,三个项目的冠军都有得主,这件事才算完成,所以应以"确定三个项目的冠军得主"为线索进行分步,而每个项目的冠军的得主有4种可能的结果,所以共有$4\times4\times4=64$(种)可能的结果.

课后素养评价(二)

A组　学习·理解

1.D　**解析**:按女生人数分类:若选派1名女生,有$2\times3=6$种方案;若选派2名女生,则有$1\times3=3$种方案.由分类加法计数原理,共有$6+3=9$种不同的选派方案.

2.D　**解析**:以1为首项的等比数列为1,2,4;1,3,9.以2为首项的等比数列为2,4,8.以4为首项的等比数列为4,6,9.把这4个数列的顺序颠倒,又得到4个等比数列,所以所求的数列共有$2\times(2+1+1)=8$个.

3.20　**解析**:依题意得,既会英语又会日语的有$7+3-9=1$人,6人只会英语,2人只会日语.
第1类:从只会英语的6人中选1人有6种选法,此时选会日语的有$2+1=3$种选法,由分步乘法计数原理得不同的选法有$6\times3=18$种;
第2类:从既会英语又会日语的人中选1人有1种选法,此时选会日语的有2种选法,由分步乘法计数原理得不同的选法有$1\times2=2$种.
综上,不同的选法共有$18+2=20$种.

4.20　**解析**:分三类:若甲在周一,则乙、丙有$4\times3=12$种排法;
若甲在周二,则乙、丙有$3\times2=6$种排法;
若甲在周三,则乙、丙有$2\times1=2$种排法.
所以不同的安排方法共有$12+6+2=20$种.

5.8　5　**解析**:十位上的数为1时,有213,214,312,314,412,413,共6个;十位上的数为2时,有324,423,共2个.所以共有$6+2=8$个"驼峰数".
其中的偶数有214,312,314,412,324,共5个.

6.16　**解析**:快件从甲处送到乙处恰用到4种运输方式,且第5个环节从d,e两种运输方式中选一种,
第1,2,3,4个环节必须包含a,b,c三种不同的运输方式.
若第1,2个环节运输方式相同,则只能都选a,第3,4个环节一个选b,一个选c,
故有$2\times1\times2=4$种送达方式;
若第1,2个环节运输方式不相同,则已经包含a,b两种运输方式,
因此,第3,4个环节一个选b,一个选c,或者都选c,
故有$2\times2\times2+2\times1\times2=8+4=12$种送达方式.
快件从甲处送到乙处恰用到4种运输方式的不同送达方式共有$4+12=16$种.

7.480　**解析**:(方法一)操场可从6种颜色中任选1种着色;餐厅可从剩下的5种颜色中任选1种着色;宿舍区和操场、餐厅的颜色都不能相同,故可从其余的4种颜色中任选1种着色;教学区和宿舍区、餐厅的颜色都不能相同,故可从其余的4种颜色中任选1种着色.根据分步乘法计数原理,共有$6\times5\times4\times4=480$种不同的着色方法.

(方法二)分两类:第一类,操场与教学区同色,有 $6\times5\times4=120$ 种着色方法;第二类,操场与教学区不同色,有 $6\times5\times4\times3=360$ 种着色方法.根据分类加法计数原理,共有 $120+360=480$ 种不同的着色方法.

8.40　**解析**:满足条件的有两类:
第一类,与正八边形有两条公共边的三角形有 8 个;
第二类,与正八边形有一条公共边的三角形有 $8\times4=32$ 个,
所以满足条件的三角形共有 $8+32=40$ 个.

B组　应用·实践

1.C　**解析**:对于 A,从中任选 1 个球,有 $4+5+6=15$ 种不同的选法,故选项 A 正确;对于 B,若每种颜色选出 1 个球,有 $4\times5\times6=120$ 种不同的选法,故选项 B 正确;对于 C,若要选出不同颜色的 2 个球,有 $4\times5+5\times6+4\times6=74$ 种不同的选法,故选项 C 错误;对于 D,若要不放回地随机选出 2 个球,有 $15\times14=210$ 种不同的选法,故选项 D 正确.故选 C.

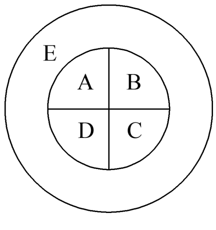
2.C　**解析**:由题意知,集合 $A=\{0,1,2,3,4\}$,且 $a,b,c\in A$,
则这个三位数满足"十位上的数字比其他两个数位上的数字都大"包含以下三种情况:
①十位数是 4,则百位数可以是 1,2,3 中的一个数,个位数可以是 0,1,2,3 中的一个数,即符合要求的三位数的个数为 $3\times4=12$;
②十位数是 3,则百位数可以是 1,2 中的一个数,个位数可以是 0,1,2 中的一个数,即符合要求的三位数的个数为 $2\times3=6$;
③十位数是 2,则百位数只能是 1,个位数可以是 0,1 中的一个数,即符合要求的三位数的个数为 2.
综上,符合要求的三位数共有 $12+6+2=20$ 个.
故选 C.

3.B　**解析**:按每一位算筹的根数分类一共有 15 种情况,如下:(5,0,0),(4,1,0),(4,0,1),(3,2,0),(3,1,1),(3,0,2),(2,3,0),(2,2,1),(2,1,2),(2,0,3),(1,4,0),(1,3,1),(1,2,2),(1,1,3),(1,0,4).
2 根及 2 根以上的算筹可以表示两个数字,运用分步乘法计数原理,则上述情况能表示的三位数的个数分别为 2,2,2,4,2,4,4,4,4,4,2,2,4,2,2.
根据分类加法计数原理,5 根算筹能表示的三位数的个数为 $2+2+2+4+2+4+4+4+4+4+2+2+4+2+2=44$.故选 B.

4.14　**解析**:第一位最少旋转 1 次,其他位置至少旋转的次数依次为 2,1,1,5,4,故至少旋转 $1+2+1+1+5+4=14$ 次.

5.解:完成这件事可分为三类:
第一类是个位数字为 0 的比 2 000 大的四位偶数,可以分三步完成:
第一步,选取千位上的数字,只有 2,3,4,5 可以选择,有 4 种选法;
第二步,选取百位上的数字,除 0 和千位上已选定的数字以外,还有 4 个数字可以选择,有 4 种选法;
第三步,选取十位上的数字,有 3 种选法.
由分步乘法计数原理知,这类数的个数为 $4\times4\times3=48$.
第二类是个位数字为 2 的比 2 000 大的四位偶数,可以分三步完成:
第一步,选取千位上的数字,除去 2,1,0 只有 3 个数字可以选择,有 3 种选法;
第二步,选取百位上的数字,在去掉已经确定的首、尾 2 个数字之后,还有 4 个数字可以选择,有 4 种选法;
第三步,选取十位上的数字,有 3 种选法.
由分步乘法计数原理知,这类数的个数为 $3\times4\times3=36$.
第三类是个位数字为 4 的比 2 000 大的四位偶数,其方法步骤同第二类.
对以上三类用分类加法计数原理,得所求无重复数字且比 2 000 大的四位偶数有 $48+36+36=120$ 个.

6.解:如图,不同的布置方案分两类:
当 A 与 C 布置相同的花卉时,先安排 E,有 6 种不同的选择;再安排 A 与 C,有 5 种不同的选择;再安排 B,有 4 种不同的选择;最后安排 D,有 4 种不同的选择.共有 $6\times5\times4\times4=480$ 种.
当 A 与 C 布置不同的花卉时,先安排 E,有 6 种不同的选择;再安排 A 与 C,有 5×4 种不同的选择;再安排 B,有 3 种不同的选择;最后安排 D,有 3 种不同的选择.共有 $6\times5\times4\times3\times3=1\ 080$ 种.
所以不同的布置方案有 $480+1080=1\ 560$ 种.



课后素养评价(三)

A组　学习·理解

1.BCD　**解析**:选项 A 中组成的三位数与数字的排列顺序有关,选项 B,C,D 只需取出元素即可,与元素的排列顺序无关.

2.B　**解析**:先后按动 A,B,C 中的两个不同的开关,有 $3\times2=6$ 种方法,分别记为(A,B),(A,C),(B,A),(B,C),(C,A),(C,B).
若要 1 号灯亮,则按第一个开关时,1 号灯灭,按第二个开关时,1 号灯亮,
此时对应的方法有 2 种:(B,C),(C,B);
若要 2 号灯亮,同理可得有 2 种方法:(A,C),(C,A).
综上,要使 1 号灯或 2 号灯亮的按动方法有 $2+2=4$ 种.
故选 B.

3.C　**解析**:由于 6 人排两排,先排第一排,共有 $6\times5\times4=120$ 种排法;再排第二排,共有 $3\times2\times1=6$ 种排法.由分步乘法计数原理可知,共有 $120\times6=720$ 种不同的排法.

4.9　**解析**:将 4 张贺卡分别记为 A,B,C,D,且按题意进行排列,用树状图表示为:

B—A—D—C
B—C—D—A
B—D—A—C

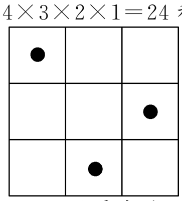
C—A—D—B
C—D—A—B
C—D—B—A

D—A—B—C
D—C—A—B
D—C—B—A

由此可知共有 9 种不同的送法.

5.12　**解析**:这是一个排列问题,可以先排分母,共有 4 种不同的排法,再排分子,共有 3 种不同的排法.由分步乘法计数原理可知,共有 $4\times3=12$ 种不同的排法.又 12 种排法得到的分数值均不相同,因此可得不同的商共有 12 个.

6.24　**解析**:要想任意两颗棋子不在同一行、同一列和同一条对角线上,则三颗棋子必有一颗在正方形方格的顶点,另两颗在对角顶点的两侧,如图所示.由于正方形有四个顶点,故有四个不同的相对位置,又三颗棋子颜色不同,故不同的放法共有 $4\times3\times2\times1=24$ 种.



7.解:(1)可看作是从 5 名运动员中选 3 名进行排列,则前 3 场单打比赛的出场情况有 $5\times4\times3=60$ 种.
(2)可分为三类:
第一类,3 场决胜负,有 $3\times2\times1=6$ 种出场情况,分别为甲乙丙,甲丙乙,乙甲丙,乙丙甲,丙甲乙,丙乙甲;
第二类,4 场决胜负,有 $3\times2\times1\times2=12$ 种出场情况,分别为甲乙丙甲,甲乙丙乙,甲丙乙甲,甲丙乙丙,乙甲丙乙,乙甲丙甲,乙丙甲丙,乙丙甲乙,丙甲乙丙,丙甲乙甲,丙乙甲乙,丙乙甲丙;
第三类,5 场决胜负,有 $3\times2\times1\times2\times1=12$ 种出场情况,分别为甲乙丙甲乙,甲乙丙乙甲,甲丙乙甲丙,甲丙乙丙甲,乙甲丙乙甲,乙甲丙甲乙,乙丙甲乙丙,乙丙甲丙乙,丙甲乙丙甲,丙甲乙甲丙,丙乙甲乙丙,丙乙甲丙乙.
因此,所有可能的出场情况共有 $6+12+12=30$ 种.

B组　应用·实践

1.AD　**解析**:对于A,从甲、乙、丙三名同学中选出两名分别参加数学、物理兴趣小组,与顺序有关,是排列问题;对于B,从甲、乙、丙三名同学中选出两名参加一项活动,只要求选出即可,不是排列问题;对于C,从a,b,c,d中选出3个字母,只要求选出即可,不是排列问题;对于D,从1,2,3,4,5中取出2个数字组成两位数,需要先选出再排序,是排列问题.故选AD.

2.C　**解析**:记小明、小红、小强分别为a,b,c,排成一排的情况有6种,分别为abc,bac,acb,cab,bca,cba,小明站在小红左边共有3种情况,分别为abc,acb,cab.所以小明站在小红左边的概率$p=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

3.C　**解析**:先排个位,需要从2,4,6三个数字中任意选出一个数字,共有3种方法;再排前四位,共有$4\times3\times2\times1=24$种方法.由分步乘法计数原理可知,共有$3\times24=72$种方法.

4.C　**解析**:若甲先传给乙,则有甲→乙→甲→乙→甲,甲→乙→甲→丙→甲,甲→乙→丙→乙→甲3种不同的传递方式;同理,甲先传给丙也有3种不同的传递方式.故共有6种不同的传递方式.

5.12　**解析**:由于$\lg a-\lg b=\lg\frac{a}{b}$,所以从3,5,7,11中取出两个不同的数分别赋值给a和b,为排列问题,不同的取法共有$4\times3=12$种,并且计算结果不会重复,所以得到不同的值有12个.

6.30　**解析**:易知过原点的直线方程的常数项为0,则$C=0$;再从集合中任取两个非零元素作为系数A,B的值,属于排列问题,所以符合条件的直线有$6\times5=30$条.

7.**解**:符合要求的凹数可分为三类.
第1类,十位数字为0的凹数有102,103,104,201,203,204,301,302,304,401,402,403,共12个;
第2类,十位数字为1的凹数有213,214,312,314,412,413,共6个;
第3类,十位数字为2的凹数有324,423,共2个.
所以由0,1,2,3,4可组成$12+6+2=20$(个)无重复数字的凹数.

课后素养评价(四)

A组　学习·理解

1.A　**解析**:$(n-1\,998)(n-1\,999)\cdots(n-2\,023)(n-2\,024)$中总共有$(n-1\,998)-(n-2\,024)+1=27$个数连乘,故$(n-1\,998)(n-1\,999)\cdots(n-2\,023)(n-2024)=A_{n-1\,998}^{27}$.故选A.

2.B　**解析**:不妨记五名志愿者为a,b,c,d,e,
假设a连续参加两天社区服务,再从剩余的4人中抽取2人各参加星期六与星期天的社区服务,共有$A_4^2=12$种方法.
同理,若b,c,d,e连续参加两天社区服务,也各有12种方法.
所以恰有1人连续参加两天社区服务的选择种数为$5\times12=60$.故选B.

3.A　**解析**:将语文和化学捆绑,与英语、物理全排列有$A_3^3A_2^2$种排法;数学不排在第一节课,将数学插空有3种排法.由分步乘法计数原理可得不同的排课法的种数是$A_3^3A_2^2\times3=36$.故选A.

4.{6}　**解析**:由原不等式得$\begin{cases}\frac{8!}{[8-(x+2)]!}<6\times\frac{8!}{(8-x)!},\\x+2\leqslant8\end{cases}$且$x\in\mathbf{N}^*$,
所以$\begin{cases}(8-x)(7-x)<6,\\x\leqslant6,\end{cases}$即$\begin{cases}x^2-15x+50<0,\\x\leqslant6,\end{cases}$解得$5<x\leqslant6$且$x\in\mathbf{N}^*$,
所以$x=6$.

5.24　**解析**:第1步,将2个爸爸排在两端,有2种排法;第2步,将2个小孩视为一人与2个妈妈任意排在中间的三个位置上,有A_3^3种排法;第3步,将2个小孩排序,有2种排法.故总的入园顺序有$2\times2\times A_3^3=24$种.

6.120　**解析**:首先确定一种相同的课外读物,共有6种情况;
然后两人各自的另外一种课外读物相当于在剩余的5种课外读物里,选出2种进行排列,共有A_5^2种选法.
根据分步乘法计数原理,则共有$6\times A_5^2=120$种选法.

7.**解**:(1)依题意,先排最左边,除去甲外,有A_6^1种排法,余下的6个位置全排列有A_6^6种排法,
但应剔除其中乙在最右边的排法$A_5^1A_5^5$种,
则符合条件的排法共有$A_6^1A_6^6-A_5^1A_5^5=3\,720$种.
(2)将男生看成一个整体,进行全排列,有A_3^3种排法,
再与其他元素进行全排列,有A_5^5种排法,
故共有$A_3^3A_5^5=720$种不同的排法.
(3)先排好男生,然后将女生插入男生所形成的四个空位,共有$A_3^3A_4^4=144$种不同的排法.
(4)从除甲、乙以外的5人中选3人排在甲、乙中间的排法有A_5^3种,
将甲、乙看作一个整体,和其余2人排成一排的排法有$A_2^2A_3^3$种,
最后再把选出的3人插入到甲、乙之间即可,
共有$A_5^3A_2^2A_3^3=720$种不同的排法.

B组　应用·实践

1.D　**解析**:$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$,故A,B错误;而$A_n^1A_{n-1}^{m-1}=nA_{n-1}^{m-1}=n\cdot\frac{(n-1)!}{(n-m)!}=\frac{n!}{(n-m)!}$,故C错误,D正确.

2.C　**解析**:先将宫、徵、羽三个音节进行排序,且徵位于羽的左侧,再将商、角插入4个空中.所以共有$3A_4^2=36$种不同的音序.故选C.

3.B　**解析**:比4小的有1,2,3,共3个,从中选出2个排在4的右边和下方,方法数有A_3^2种;
比4大的有5,6,7,8,9,共5个,从中选出2个排在4的左边和上方,方法数有A_5^2种.
所以不同的填法为$A_3^2A_5^2=120$种.

4.C　**解析**:原来n个车站有A_n^2种车票,新增了m个车站,有A_{n+m}^2种车票.
由题意得$A_{n+m}^2-A_n^2=62$,即$(n+m)(n+m-1)-n(n-1)=62$,
整理得$2mn+m^2-m=62$,所以$n=\frac{31}{m}-\frac{m-1}{2}$.
因为$m>1,n>0$,所以$\frac{31}{m}>\frac{m-1}{2}$,所以$m^2-m-62<0$,
解得$1<m<\frac{1+\sqrt{249}}{2}$,即$1<m\leqslant8$.
当$m=3,4,5,6,7,8$时,n均不为整数,只有当$m=2$时,$n=15$符合题意.
所以$m+n=17$,故现在有17个车站.故选C.

5.36　**解析**:先考虑产品A与B相邻,把A,B作为一个元素有$2A_4^4=48$种摆法.又A,B相邻且A,C相邻,有$2A_3^3=12$种摆法,故满足条件的不同的摆法有$48-12=36$种.

6.210　**解析**:因为1,3,5,7四个数有$A_4^4=24$种排法,所以1,3,5,7的顺序一定的排法数只占总排法数的$\frac{1}{24}$.故有$\frac{1}{24}\times A_7^7=210$个七位数符合条件.

7.**解**:根据题意,乙可能是第二或第三或第四名,故有A_3^1种可能的排名情况;
乙排好再排甲,共有A_3^1种可能的排名情况;
剩下3人全排列共有A_3^3种可能的排名情况.
故共有$A_3^1A_3^1A_3^3=3\times3\times6=54$种可能的排名情况.

8.**解**:(1)奇数共5个,奇数位置共有3个;偶数共有4个,偶数位置有2个.第一步先在奇数位置上排上奇数共有A_5^3种排法;第二步再排偶数位置,有4个偶数和余下的2个奇数可以排,排法为A_6^2种.由分步乘法计数原理知,排法种数为$A_5^3A_6^2=1\,800$.
(2)因为偶数位置上不能排奇数,所以先排偶数位,排法为A_4^2种,余下的2个偶数与5个奇数都可以排在奇数位置上,排法为A_7^3种.由分步乘法计数原理知,排法种数为$A_4^2A_7^3=2\,520$.

课后素养评价(五)

A组　学习·理解

1.AC　解析:选项A,从10名学生中任选5名去参观一个展览会,选出的学生不用排序,是组合问题;
选项B,从1,2,3,4,5这5个数字中,每次任取2个不同的数作为一个点的坐标,由于坐标有横、纵坐标之分,所以选出的2个不同的数需要排序,是排列问题;
选项C,从红袋和黄袋中各任取一张卡片,求这两张卡片上的数相加所得的和,因为加法满足交换律,故选出的卡片不用排序,是组合问题;
选项D,因为四本不同的书送给四个人,要求每人一本,所以这四本书需要排序,是排列问题.

2.B　解析:对于①,从50人中选出5人组成班委会,不考虑顺序,是组合问题.②为排列问题.对于③,从1,2,3,…,9中任取两个数求积是组合问题.因为乘法满足交换律,而减法和除法不满足交换律,故④为排列问题.所以组合问题的个数是2.故选B.

3.C　解析:对于A,从4名志愿者中选出2人分别担任导游和翻译的工作,将2人选出后,还要安排导游或翻译的工作,与顺序有关,这个问题为排列问题;
对于B,从1,2,3,4这4个数字中选取3个数字组成一个三位数,选出3个数字之后,还要将这3个数字安排至个位、十位、百位这三个数位,与顺序有关,这个问题为排列问题;
对于C,从全班同学中选出3名同学参加学校运动会开幕式,只需将3名同学选出,与顺序无关,这个问题为组合问题;
对于D,两位同学的座位与顺序有关,这个问题为排列问题.
故选C.

4.解:(1)从a,b,c,d,e五个元素中任取两个元素的所有组合:
$ab,ac,ad,ae,bc,bd,be,cd,ce,de$.
(2)从a,b,c,d,e五个元素中任取两个元素的所有排列:
$(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,a),(b,c),(b,d),(b,e),(c,a),(c,b),(c,d),(c,e),(d,a),(d,b),(d,c),(d,e),(e,a),(e,b),(e,c),(e,d)$.

5.解:(1)以其中任意两个点为端点的有向线段为一个排列,所有有向线段为$AB,AC,AD,BC,BD,CD,BA,CA,DA,CB,DB,DC$.
(2)以其中任意两个点为端点的线段为一个组合问题,所有线段为AB,AC,AD,BC,BD,CD.
(3)以其中任意三个点为顶点的三角形是一个组合问题,所有三角形为$\triangle ABC,\triangle ABD,\triangle BCD,\triangle ACD$.

B组　应用·实践

1.C　解析:①与顺序有关,是排列问题;②③均与顺序无关,是组合问题.

2.BD　解析:对于A,学生与书都不相同,故与顺序有关,是排列问题;
对于B,取出5本书后,即确定了取法,与顺序无关,故是组合问题;
对于C,因为是相互发一条短信,与顺序有关,故是排列问题;
对于D,因为是互相通一次电话,与顺序无关,故是组合问题.
故选BD.

3.3　解析:因为每3个点可确定一个圆,所以由这12个点所确定的圆的个数相当于从12个不同元素中任取3个元素的组合的个数.

4.4　解析:因为是4张同样的参观券,所以参观券没有顺序,即该问题是一个组合问题,即从5个不同元素中取出4个元素.

5.$\frac{6}{35}$　解析:从正方体的8个顶点中任选4个,有$n=70$个结果,这4个点在同一个平面的有$m=6+6=12$个.故所求概率$P=\frac{m}{n}=\frac{12}{70}=\frac{6}{35}$.

6.解:需分两步:
第1步,从经纪人推荐的12种股票中选8种,是一个组合问题;
第2步,从经纪人推荐的7种债券中选4种,也是一个组合问题.
最后将选中的8种股票与选中的4种债券合在一起就是一种投资方案.

课后素养评价(六)

A组　学习·理解

1.A　解析:因为$A_n^3=n(n-1)(n-2)$,$C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$,
所以$n(n-1)(n-2)=12\times\frac{1}{2}n(n-1)$.
又$n\in\mathbf{N}^*$,且$n\geqslant 3$,所以$n=8$.

2.A　解析:若4个数之和为奇数,则有1个奇数、3个偶数或者3个奇数、1个偶数.若是1个奇数、3个偶数,则有$C_5^1C_4^3=20$种取法;若是3个奇数、1个偶数,则有$C_5^3C_4^1=40$种取法.所以共有$20+40=60$种不同的取法.

3.D　解析:根据会划左舷的人中"多面手"(既会划左舷又会划右舷)的人数进行分类:会划左舷的人中没有"多面手"的选派方法有$C_3^3C_6^3$种;有一个"多面手"的选派方法有$C_2^1C_3^2C_5^3$种;有两个"多面手"的选派方法有$C_3^1C_4^3$种.故共有$C_3^3C_6^3+C_2^1C_3^2C_5^3+C_3^1C_4^3=92$种不同的选派方法.

4.B　解析:由题意知不同的选法可分两种情况:
第一种情况,只有1名女生入选,不同的选法有$C_2^1C_4^2=12$种;第二种情况,有2名女生入选,不同的选法有$C_2^2C_4^1=4$种.根据分类加法计数原理知,至少有1名女生入选的不同的选法有$12+4=16$种.故选B.

5.C　解析:因为不超过40的素数有2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,共12个,
所以从中随机选取2个不同的数,共有$C_{12}^2=\frac{12\times 11}{2}=66$个样本点.
其中两个素数的和为40的情况包含3和37,11和29,17和23,共3个样本点,
所以所求概率$P=\frac{3}{66}=\frac{1}{22}$.故选C.

6.解:(1)$3C_8^3+\frac{1}{3}A_8^3=3\times\frac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1}+\frac{1}{3}\times 8\times 7\times 6=280$.
(2)$C_3^3+C_4^3+\cdots+C_{10}^3=C_4^4+C_4^3+\cdots+C_{10}^3$
$=C_5^4+C_5^3+\cdots+C_{10}^3=C_{11}^4=\frac{11\times 10\times 9\times 8}{4\times 3\times 2\times 1}=330$.
(3)由题意可得$\begin{cases}0\leqslant n-3\leqslant 10,\\0\leqslant n-2\leqslant 10,\end{cases}$解得$3\leqslant n\leqslant 12$,且$n\in\mathbf{N}^*$.
因为$C_{10}^{n-3}<C_{10}^{n-2}$,
所以$\frac{10!}{(n-3)!\,(13-n)!}<\frac{10!}{(n-2)!\,(12-n)!}$,
解得$n<7.5$.
又因为$n\in\mathbf{N}^*$,
所以$n=3,4,5,6,7$.故不等式的解集为$\{3,4,5,6,7\}$.

7.解:(1)每个小球都可能放入4个盒子中的任何一个,将小球一个一个放入盒子,共有$4\times 4\times 4\times 4=4^4=256$种放法.
(2)这是全排列问题,共有$A_4^4=24$种放法.
(3)(方法一)先从四个盒子中选出三个盒子,再从三个盒子中选出一个盒子放入两个球,余下两个盒子各放一个.由于球是相同的即没有顺序,
故共有$C_4^3C_3^1=12$种放法.
(方法二)恰有一个空盒子,第一步先选出一个盒子,有C_4^1种选法,
第二步在4个小球之间的3个空隙中任选2个空隙各插一块隔板,有C_3^2种方法.
由分步乘法计数原理得,共有$C_4^1C_3^2=12$种放法.

B组　应用·实践

1.B　解析:由题意可知,应将志愿者分为三人组和两人组.先将小李、小明之外的三人分为两组,有$C_3^1C_2^2=3$种分法;再将小李、小明分进两组,有$A_2^2=2$种分法;最后安排两个组安装两个吉祥物,有$A_2^2=2$种方案.所以共有不同

的安排方案 $3\times2\times2=12$ 种.故选 B.

2.D　解析:根据分层随机抽样的定义知,初中部抽取的人数为 $60\times\frac{400}{600}=40$,高中部抽取的人数为 $60\times\frac{200}{600}=20$.
根据组合公式和分步乘法计数原理,得不同的抽样结果共有 $C_{400}^{40}\cdot C_{200}^{20}$ 种.故选 D.

3.C　解析:甲场馆安排1名同学有 C_6^1 种方法,乙场馆安排2名同学有 C_5^2 种方法,丙场馆安排3名同学有 C_3^3 种方法.由分步乘法计数原理,得不同的安排方法共有 $C_6^1C_5^2C_3^3=60$ 种.

4.165　解析:将12个优秀团员名额分配给4个不同的班级,要求每个班级至少一个,应用隔板法.在12个名额之间的11个空中,用3个隔板分成四组(非空),则不同的分配方案有 $C_{11}^3=\frac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=165$ 种.

5.1 080　解析:分两种情况讨论:
若4名学生选的课全不同,则有 $C_6^4A_4^4=360$ 种方法;
若有3名学生选的课互不相同,即只有2名学生选的课相同,则有 $C_6^3C_4^2A_3^3=720$ 种方法.
故共有 $360+720=1\ 080$ 种方法.

6.解:(1)根据题意,抽取的4件都不是次品,即4件都为合格品.
故有 $C_8^4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$ 种取法.
(2)根据题意,抽取的4件里面至少有1件次品,
可以先考虑对立情况,即4件都为合格品,共有 $C_8^4=70$ 种取法,
总共有 $C_{10}^4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$ 种取法,
则至少有1件次品有 $C_{10}^4-C_8^4=210-70=140$ 种取法.

7.解:依据0与1两个特殊值分析,可分三类.
①取0不取1,可先从另四张卡片中选一张作百位,有 C_4^1 种方法;0可在后两位,有 C_2^1 种方法;最后需从剩下的三张中任取一张,有 C_3^1 种方法.又除含0的那张外,其他两张都有正面或反面两种可能,故此时可得不同的三位数有 $C_4^1C_2^1C_3^1\times2^2=96$ 个.
②取1不取0,同上分析可得不同的三位数有 $C_4^2\times2^2\times A_3^3=144$ 个.
③0和1都不取,有不同的三位数 $C_4^3\times2^3\times A_3^3=192$ 个.
综上所述,不同的三位数共有 $96+144+192=432$ 个.

课后素养评价(七)

A组　学习·理解

1.A　解析:(方法一:公式法)$(x-\sqrt{x})^4$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_4^kx^{4-k}(-\sqrt{x})^k=(-1)^kC_4^kx^{4-\frac{k}{2}}(k=0,1,2,3,4)$.令 $4-\frac{k}{2}=3$,得 $k=2$,所以 $(x-\sqrt{x})^4$ 的展开式中 x^3 的系数为 $(-1)^2\times C_4^2=6$.
(方法二:组合数法)$(x-\sqrt{x})^4$ 的展开式中含 x^3 的项是由 $(x-\sqrt{x})(x-\sqrt{x})(x-\sqrt{x})(x-\sqrt{x})$ 中任意取2个括号内的 x 与剩余的2个括号内的 $(-\sqrt{x})$ 相乘得到的,所以 $(x-\sqrt{x})^4$ 的展开式中含 x^3 的项为 $C_4^2x^2\cdot C_2^2(-\sqrt{x})^2=6x^3$,所以 $(x-\sqrt{x})^4$ 的展开式中 x^3 的系数为6.

2.B　解析:$\left(x^3-\frac{2}{x^2}\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_5^k\cdot(x^3)^{5-k}\left(-\frac{2}{x^2}\right)^k=(-2)^kC_5^kx^{15-5k}$.令 $15-5k=0$,得 $k=3$,所以常数项为 $T_4=(-2)^3\times C_5^3=-80$.

3.D　解析:依题意,可知多项式为 $[(2x+1)-1]^5$ 的展开式,则 $[(2x+1)-1]^5=(2x)^5=32x^5$.故选 D.

4.$16x^4-32x^3+24x^2-8x+1$　解析:$(2x-1)^4=C_4^0(2x)^4(-1)^0+C_4^1(2x)^3(-1)^1+C_4^2(2x)^2(-1)^2+C_4^3(2x)^1(-1)^3+C_4^4(2x)^0(-1)^4=16x^4-32x^3+24x^2-8x+1$.

5.41　解析:由题意可得 $a_9=C_9^9(-1)^9+mC_{10}^1=10m-1$,$a_{10}=m$.
因为 $a_9=a_{10}$,所以 $10m-1=m$,解得 $m=\frac{1}{9}$,所以 $a_2=C_9^2+\frac{1}{9}C_{10}^8=41$.

6.160　解析:由题意得 $n=6$,所以 $T_{k+1}=2^kC_6^kx^{6-2k}$.令 $6-2k=0$,得 $k=3$.所以常数项为 $C_6^3\times2^3=160$.

7.解:由题意得通项为 $T_{k+1}=C_5^k(x^3)^{5-k}\left(\frac{2}{3x^2}\right)^k=\left(\frac{2}{3}\right)^k\cdot C_5^kx^{15-5k}$,则 $T_3=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times C_5^2x^5=\frac{4}{9}\times C_5^2x^5$,
所以第3项的系数为 $\frac{4}{9}\times C_5^2=\frac{40}{9}$.
令 $15-5k=0$,得 $k=3$,
所以常数项为 $T_4=\left(\frac{2}{3}\right)^3\times C_5^3=\frac{80}{27}$.

B组　应用·实践

1.A　解析:因为 $(1+x)^5=-[-2+(1-x)]^5$,通项为 $T_{k+1}=-C_5^k(-2)^{5-k}(1-x)^k$,所以 $a_3=-C_5^3(-2)^2=-40$.

2.C　解析:$(x+y)^5$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_5^kx^{5-k}y^k$ $(k\in\mathbf{N}$ 且 $k\leqslant5)$,
所以 $\left(x+\frac{y^2}{x}\right)(x+y)^5$ 的展开式的通项可表示为 $xT_{k+1}=xC_5^kx^{5-k}y^k=C_5^kx^{6-k}y^k$ 与 $\frac{y^2}{x}T_{k+1}=\frac{y^2}{x}C_5^kx^{5-k}y^k=C_5^kx^{4-k}y^{k+2}$ 的和.
在 $xT_{k+1}=C_5^kx^{6-k}y^k$ 中,令 $k=3$,
可得 $xT_4=C_5^3x^3y^3$,该项中 x^3y^3 的系数为10.
在 $\frac{y^2}{x}T_{k+1}=C_5^kx^{4-k}y^{k+2}$ 中,令 $k=1$,可得 $\frac{y^2}{x}T_2=C_5^1x^3y^3$,该项中 x^3y^3 的系数为5.
所以 x^3y^3 的系数为 $10+5=15$.

3.B　解析:由 $6\times60\%=3.6$,可知 $n=8$.所以 $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{2x}\right)^8$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_8^k\cdot(\sqrt[3]{x})^{8-k}\cdot\left(\frac{1}{2}x^{-1}\right)^k=C_8^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot x^{\frac{8-4k}{3}}$.
令 $\frac{8-4k}{3}=0$,得 $k=2$,所以常数项为 $C_8^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=7$.
故选 B.

4.D　解析:易知 $a=C_{20}^0+C_{20}^1\times3+C_{20}^2\times3^2+\cdots+C_{20}^{20}\times3^{20}=(1+3)^{20}=4^{20}=(5-1)^{20}=C_{20}^0\times5^{20}-C_{20}^1\times5^{19}+\cdots-C_{20}^{19}\times5+C_{20}^{20}$.
因为 $C_{20}^0\times5^{20}-C_{20}^1\times5^{19}+\cdots-C_{20}^{19}\times5$ 能被5整除,所以 a 除以5余 $C_{20}^{20}=1$.
又因为 $a\equiv b(\bmod 5)$,选项中2 026除以5余1,所以 b 的值可以是2 026.故选 D.

5.80　解析:因为 $\left(x^2+\frac{1}{x}+1\right)^6$ 可以看成6个相同因式 $\left(x^2+\frac{1}{x}+1\right)$ 相乘,
所以 $\left(x^2+\frac{1}{x}+1\right)^6$ 的展开式中含 x^3 的项为3个因式取 x^2、3个因式取 $\frac{1}{x}$ 或2个因式取 x^2、1个因式取 $\frac{1}{x}$、3个因式取1所得,
所以 $\left(x^2+\frac{1}{x}+1\right)^6$ 的展开式中 x^3 的系数为 $C_6^3C_3^3+C_6^2C_4^1C_3^3=80$.

6.解:$\left(ax-\frac{b}{x}\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_6^k(ax)^{6-k}\left(-\frac{b}{x}\right)^k=C_6^ka^{6-k}(-b)^kx^{6-2k}$,
令 $6-2k=0$,得 $k=3$.
由题意得 $T_4=C_6^3a^{6-3}(-b)^3=-20a^3b^3=-160$,
即 $a^3b^3=8$,即 $ab=2$,因此 $\frac{a^2+b^2+2}{ab}=\frac{a^2+b^2+2}{2}\geqslant$

$\frac{2\sqrt{a^2b^2}}{2}+1=3$,

当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$ 或 $a=b=-\sqrt{2}$ 时,等号成立.

故$\frac{a^2+b^2+2}{ab}$的最小值为 3.

课后素养评价(八)

A组　学习·理解

1.D　解析:因为 $C_n^1=C_n^3$,所以 $n=4$.令二项式中 $x=-1$,可得 $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4=4^4=256$.故选 D.

2.ABC　解析:由已知可得 $2^{n-1}=64$,解得 $n=7$,故 A 正确;$(x-1)^7$ 的展开式中共有 8 项,令 $x=1$,得所有项的系数和为 0,故 B 正确;偶数项的系数和为 -64,故 C 正确;展开式的中间项为第 4 项与第 5 项,$T_4=C_7^3x^4\cdot(-1)^3=-35x^4$,$T_5=C_7^4x^3(-1)^4=35x^3$,故 D 错误.故选 ABC.

3.ABD　解析:在$\left(3x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$的展开式中,各项系数的和与各二项式系数的和之和为 128.令 $x=1$,得各项系数的和为 2^n,各二项式系数的和为 2^n,则 $2\times2^n=128$,得 $n=6$,即各二项式系数的和为 64,各项系数的和也为 64.$\left(3x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_6^k\cdot(3x)^{6-k}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=C_6^k\cdot(-1)^k3^{6-k}\cdot x^{6-\frac{3}{2}k}$.令 $6-\frac{3}{2}k=0$,得 $k=4$.因此,展开式中的常数项为 $T_5=C_6^4\times(-1)^4\times3^2=135$.

4.C　解析:由题意可知 $C_{2m}^m=a$,$C_{2m+1}^m=C_{2m+1}^{m+1}=b$.因为 $13a=7b$,

所以 $13C_{2m}^m=7C_{2m+1}^m$,即 $13\times\frac{(2m)!}{m!\ m!}=7\times\frac{(2m+1)!}{m!\ (m+1)!}$,

所以 $13=7\times\frac{2m+1}{m+1}$,解得 $m=6$.故选 C.

5.$120x^{\frac{1}{2}}$　解析:因为展开式中只有第 6 项的二项式系数最大,即$\frac{n}{2}+1=6$,所以 $n=10$,

所以 $T_4=C_{10}^3(\sqrt{x})^7\left(\frac{1}{x}\right)^3=120x^{\frac{1}{2}}$.

6.解:(1)由各二项式系数的和为 $2^n=256$,可得 $n=8$.

(2)设常数项为第$(r+1)$项,则

$T_{r+1}=C_8^rx^{8-r}\left(\frac{m}{x}\right)^r=C_8^rm^rx^{8-2r}$.

令 $8-2r=0$,得 $r=4$,则 $C_8^4m^4=\frac{35}{8}$,

解得 $m=\pm\frac{1}{2}$.

(3)易知 $m>0$,设第$(r+1)$项的系数最大.

则$\begin{cases}C_8^rm^r\geqslant C_8^{r-1}m^{r-1},\\C_8^rm^r\geqslant C_8^{r+1}m^{r+1},\end{cases}$化简可得$\frac{8m-1}{m+1}\leqslant r\leqslant\frac{9m}{m+1}$.

由于只有第 6 项和第 7 项的系数最大,

所以$\begin{cases}4<\frac{8m-1}{m+1}\leqslant5,\\6\leqslant\frac{9m}{m+1}<7,\end{cases}$解得$\begin{cases}\frac{5}{4}<m\leqslant2,\\2\leqslant m<\frac{7}{2}.\end{cases}$

所以 m 的值为 2.

B组　应用·实践

1.C　解析:在展开式中,令 $x=2$,得 $a_0+a_1+\cdots+a_{11}+a_{12}=0$.令 $x=1$,得 $a_{12}=2$.所以 $a_0+a_1+\cdots+a_{11}=-2$.故选 C.

2.C　解析:由已知得展开式中 a_0,a_2,a_4,a_6 大于零,a_1,a_3,a_5 小于零,所以$|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_6|=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6$.

令 $x=-1$,得 $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6=3^6$.

所以$|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_6|=3^6$.

3.C　解析:由二项式系数的性质与首末两端"等距离"的两项的二项式系数相等,可知选 C.

4.BD　解析:因为展开式的各项系数之和为 1 024,所以令 $x=1$,得$(a+1)^{10}=1\ 024$.因为 $a>0$,所以 $a=1$,则$\left(x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$的展开式的通项为 $T_{k+1}=$

$C_{10}^k(x^2)^{10-k}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=C_{10}^kx^{20-\frac{5}{2}k}$.

展开式中奇数项的二项式系数之和为$\frac{1}{2}\times2^{10}=512$,故 A 错误;

由展开式的通项可知,项的系数与其二项式系数相同,且展开式有 11 项,故展开式中第 6 项的系数最大,故 B 正确;

令 $20-\frac{5}{2}k=6$,可得 $k=\frac{28}{5}$不是自然数,则展开式中不存在含 x^6 的项,故 C 错误;

令 $20-\frac{5}{2}k=15$,解得 $k=2$,所以展开式中含 x^{15} 的项的系数为 $C_{10}^2=45$,故 D 正确.

故选 BD.

5.D　解析:因为$(2x^2-3x+a)^5$ 的展开式的各项系数之和为 1,

令 $x=1$,得$(-1+a)^5=1$,解得 $a=2$,

所以$(2x^2-3x+2)^5$ 的展开式中含 x^7 项为 $C_5^3(2x^2)^3C_2^1\cdot(-3x)\times2+C_5^2(2x^2)^2C_3^3(-3x)^3=-2\ 040x^7$,

所以该展开式中含 x^7 项的系数是$-2\ 040$.

故选 D.

6.-28　解析:因为$\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8=(x+y)^8-\frac{y}{x}(x+y)^8$,

所以$\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中含 x^2y^6 的项为

$C_8^6x^2y^6-\frac{y}{x}C_8^5x^3y^5=-28x^2y^6$.

所以$\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为-28.

7.3^8(或者写成 6 561)　解析:因为展开式中第 3 项与第 7 项的二项式系数相等,所以 $C_n^2=C_n^6$.由组合数的性质可得 $n=6+2=8$,即$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-2x\right)^n=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-2x\right)^8$.

因为$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-2x\right)^8$的展开式中各项系数的绝对值之和等于$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+|-2x|\right)^8$的展开式中各项系数之和,所以,令 $x=1$ 可得$\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+2\right)^8=3^8=6\ 561$.

故答案为 3^8(或者写成 6 561).

8.解:(1)因为 $C_n^2=C_n^3$,所以 $n=5$.

则$(1-2x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$.

令 $x=0$,则 $a_0=1$.

令 $x=1$,则 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-1$.

所以$(a_0+a_1)+(a_0+a_2)+(a_0+a_3)+\cdots+(a_0+a_n)=3$.

(2)令 $x=\frac{1}{2}$,则 $0=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_5}{2^5}$,所以$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_5}{2^5}=-1$.

(3)对$(1-2x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$ 两边关于 x 求导,则 $5(1-2x)^4(-2)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4$.再令 $x=1$,

可得 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=-10$.

课后素养评价(九)

A组　学习·理解

1.B　解析:条件概率为在某一事件发生的条件下,另一事件发生的概率.
对于A,甲、乙各投篮一次都投中的概率,不是条件概率;
对于B,在甲投中的条件下乙投篮一次命中的概率,是条件概率;
对于C,抽2件产品恰好抽到1件次品的概率,不是条件概率;
对于D,一次上学途中遇到红灯的概率,不是条件概率.
故选B.

2.C　解析:对于A,若事件A和B都为不可能事件,此时两个概率相等,所以A错误;
对于B,若在不同试验下,虽然有$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=1$,但事件A与B不对立,若在同一试验下,则事件A与B对立,所以B错误;
对于C,若A,B互斥,且A,B对立,则$P(A)+P(B)=1$,
若A,B互斥,且A,B不对立,则$P(A)+P(B)<1$,所以C正确;
对于D,若事件A,B,C满足条件$P(B)>0$,A和C为互斥事件,
则$P(A\cup C|B)=P(A|B)+P(C|B)$,所以D错误.
故选C.

3.C　解析:设事件A表示"第一次取出黑球",事件B表示"第二次取出黑球",
$P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$,$P(AB)=\frac{4\times3}{6\times5}=\frac{2}{5}$,
所以在第一次取到的是黑球的条件下,第二次取到黑球的概率为$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{3}{5}$.

4.B　解析:记事件A为"该充电宝循环充电超过500次",则$P(A)=\frac{3}{4}$,记事件B为"该充电宝循环充电超过1 000次",则$P(B)=\frac{1}{2}$.易知$P(AB)=P(B)=\frac{1}{2}$,所以$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$.故选B.

5.D　解析:因为B,C是互斥事件,
所以$P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$.

6.C　解析:不超过30的自然数有31个,其中素数有2,3,5,7,11,13,17,19,23,29共10个,孪生素数有3和5,5和7,11和13,17和29,共4组.
所以$P(A)=\frac{C_{10}^{2}}{C_{31}^{2}}=\frac{45}{465}$,$P(AB)=\frac{C_{10}^{2}-4}{C_{31}^{2}}=\frac{41}{465}$,
所以$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{41}{465}}{\frac{45}{465}}=\frac{41}{45}$.
故选C.

7.C　解析:设"第一个路口遇到红灯"为事件A,"第二个路口遇到红灯"为事件B,则$P(A)=0.5$,$P(AB)=0.4$,所以$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=0.8$.

8.$\frac{7}{20}$　$\frac{5}{7}$　解析:在1到20内与12互质的整数有1,5,7,11,13,17,19,所以$P(A)=\frac{7}{20}$.
根据定义,若对于$\frac{x^2-a}{12}=m(m\in\mathbf{Z})$的$x$不存在,则$a$是12的二次非剩余,
显然,当$a=1$时,x可取11;当$a=13$时,x可取7;
当$a=5,7,11,17,19$时,x不存在.
所以$P(AB)=\frac{1}{4}$.
所以$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{5}{7}$.

B组　应用·实践

1.BD　解析:对于A,因为$P(A)=0.4$,$P(B)=0.3$,$B\subseteq A$,所以$P(AB)=P(B)=0.3$,故A错误;
对于B,因为A与B互斥,所以$P(A+B)=P(A)+P(B)=0.7$,故B正确;
对于C,因为A与B相互独立,所以$P(AB)=0.4\times0.3=0.12$,故C错误;
对于D,因为$P(B|A)=0.3$,即$\frac{P(AB)}{P(A)}=0.3$,所以$P(AB)=0.3\times0.4=0.12$,
又因为$P(A)P(B)=0.12$,所以$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$,所以A与B相互独立,故D正确.
故选BD.

2.C　解析:由已知有$P(B)=\frac{3^3}{4^4}=\frac{27}{256}$,$P(AB)=\frac{A_3^3}{4^4}=\frac{3}{128}$,所以$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{2}{9}$.

3.A　解析:给两枚骰子编号:1号与2号,至少出现一个6点的情况分三类:1号是6点,2号不是6点,有5种;2号是6点,1号不是6点,有5种;1号是6点,2号也是6点,有1种.故事件B包含的样本点数为11,即$n(B)=11$,事件AB包含的样本点数为10,即$n(AB)=10$,所以$P(A|B)=\frac{n(AB)}{n(B)}=\frac{10}{11}$.

4.0.5　解析:设"第一道工序出废品"为事件A,则$P(A)=0.4$,"第二道工序出废品"为事件B.根据题意可得$P(AB)=0.2$,故在第一道工序出废品的条件下,第二道工序又出废品的概率$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=0.5$.

5.$\frac{1}{4}$　解析:设事件A:"学生甲和乙都不是第一个出场,且甲不是最后一个出场",事件B:"学生丙第一个出场".
对事件A,甲和乙都不是第1个出场,第一类:乙在最后,则优先从中间4个位置中选1个给甲,再将余下的4个人全排列,有$C_4^1\cdot A_4^4$种排法;第二类:乙没有在最后,则优先从中间4个位置中选2个给甲、乙,再将余下的4个人全排列,有$A_4^2\cdot A_4^4$种排法.故总的样本点数$n(A)=C_4^1\cdot A_4^4+A_4^2\cdot A_4^4$.对事件$AB$,此时丙第一个出场,优先从除了甲以外的4人中选1人安排在最后,再将余下的4人全排列,有$C_4^1\cdot A_4^4$种排法,则$n(AB)=C_4^1\cdot A_4^4$,所以$P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{C_4^1\cdot A_4^4}{C_4^1\cdot A_4^4+A_4^2\cdot A_4^4}=\frac{1}{4}$.

6.解:由题意可知$n(\Omega)=9$,$n(A)=3$,$n(B)=4$,$n(AB)=1$,所以$P(AB)=\frac{1}{9}$,$P(A|B)=\frac{n(AB)}{n(B)}=\frac{1}{4}$.

7.解:(1)记"从袋中任意摸出2个球,至少有1个白球"为事件A,记袋中白球的个数为x.则$P(A)=1-\frac{C_{10-x}^{2}}{C_{10}^{2}}=\frac{7}{9}$,解得$x=5$,即白球的个数为5.
(2)记"第一次摸出白球"为事件B,"第二次摸出黑球"为事件C,则$P(BC)=\frac{5\times5}{10\times9}=\frac{25}{90}=\frac{5}{18}$,$P(B)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.
故$P(C|B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{\frac{5}{18}}{\frac{1}{2}}=\frac{5}{9}$.

课后素养评价(十)

A组　学习·理解

1.B
2.D　解析:由互斥事件概率的加法公式,得

$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$.

3.A **解析**:记事件 A 为"盆栽没有枯萎",事件 W 为"邻居给盆栽浇水",

由题意可得 $P(W)=P$,$P(\overline{W})=1-P$,$P(\overline{A}\mid\overline{W})=0.8$,$P(\overline{A}\mid W)=0.2$.

由对立事件的概率公式可得 $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.74=0.26$.

由全概率公式可得 $P(\overline{A})=P(W)P(\overline{A}\mid W)+P(\overline{W})\cdot P(\overline{A}\mid\overline{W})=P\times0.2+(1-P)\times0.8=0.26$,

解得 $P=0.9$.故选 A.

4.**解**:(1)要使质点移动 6 次,最终在 2 的位置,则需质点向左移动 2 次,向右移动 4 次,所以 $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{C_6^2}{2^6}=\frac{15}{64}$或 $P(A)=C_6^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{15}{64}$.

(2)设"取出的球是红球"为事件 B,则 $B=AB\cup\overline{A}B$.又由题知,$P(B\mid A)=\frac{2}{3}$,$P(B\mid\overline{A})=\frac{1}{3}$,故根据全概率公式得 $P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})\cdot P(B\mid\overline{A})=\frac{15}{64}\times\frac{2}{3}+\left(1-\frac{15}{64}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{79}{192}$.

B组 应用·实践

1.BC **解析**:甲箱中有 4 个红球和 3 个白球,则 $P(A_1)=\frac{4}{7}$,

若事件 A_1 发生,则乙箱中有 3 个红球和 3 个白球,

所以 $P(B\mid A_1)=\frac{P(A_1B)}{P(A_1)}=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$,故 A 错误,B 正确;

因为若事件 A_2 发生,则乙箱中有 2 个红球和 4 个白球,

所以 $P(B\mid A_2)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$,

所以 $P(A_2B)=P(B\mid A_2)\times P(A_2)=\frac{1}{15}\times\frac{3}{7}=\frac{1}{35}$.

所以 $P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)=\frac{4}{7}\times\frac{1}{5}+\frac{3}{7}\times\frac{1}{15}=\frac{1}{7}$,故 C 正确,D 错误.

故选 BC.

2.$\frac{11}{27}$ **解析**:设 A="从 2 号箱中取出的是红球",B="从 1 号箱中取出的是红球",

则 $P(B)=\frac{4}{2+4}=\frac{2}{3}$,$P(\overline{B})=1-P(B)=\frac{1}{3}$,

$P(A\mid B)=\frac{3+1}{8+1}=\frac{4}{9}$,$P(A\mid\overline{B})=\frac{3}{8+1}=\frac{1}{3}$.

所以 $P(A)=P(AB\cup A\overline{B})$

$=P(AB)+P(A\overline{B})$

$=P(A\mid B)P(B)+P(A\mid\overline{B})P(\overline{B})$

$=\frac{4}{9}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{11}{27}$.

3.0.868 **解析**:设 B="从成品仓库中随机提一台产品是合格品",A_i="提出的产品是第 i 车间生产的产品",$i=1,2$,则 $B=A_1B\cup A_2B$.

因为第一、二车间生产的成品比例为 2∶3,

所以 $P(A_1)=0.4$,$P(A_2)=0.6$.

因为第一车间的次品率为 0.15,第二车间的次品率为 0.12,所以 $P(B\mid A_1)=1-0.15=0.85$,$P(B\mid A_2)=1-0.12=0.88$.

所以 $P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)=0.4\times0.85+0.6\times0.88=0.868$.

4.$\frac{40}{49}$ **解析**:设事件 B_1表示"使用的枪校准过",事件 B_2表示"使用的枪未校准",事件 A 表示"射击时中靶",

则 $P(B_1)=\frac{5}{8}$,$P(B_2)=\frac{3}{8}$,$P(A\mid B_1)=\frac{4}{5}$,$P(A\mid B_2)=\frac{3}{10}$.

由贝叶斯公式,

得 $P(B_1\mid A)=\frac{P(A\mid B_1)P(B_1)}{P(A\mid B_1)P(B_1)+P(A\mid B_2)P(B_2)}=\frac{\frac{4}{5}\times\frac{5}{8}}{\frac{4}{5}\times\frac{5}{8}+\frac{3}{10}\times\frac{3}{8}}=\frac{40}{49}$.

所以所用的枪是校准过的概率为$\frac{40}{49}$.

5.**解**:(1)从甲箱中任取 2 个青团的样本点数为 $C_8^2=28$,这 2 个青团都是肉松馅的样本点数为 $C_3^2=3$,

所以这 2 个青团都是肉松馅的概率 $P=\frac{3}{28}$.

(2)设事件 A 为"从乙箱中任取 1 个青团,取出的这个青团是蛋黄馅",事件 B_1 为"从甲箱中取出的 2 个青团都是蛋黄馅",事件 B_2 为"从甲箱中取出的 2 个青团为 1 个蛋黄馅 1 个肉松馅",事件 B_3 为"从甲箱中取出的 2 个青团都是肉松馅",则事件 B_1,B_2,B_3 彼此互斥.

由题意得 $P(B_1)=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{5}{14}$,$P(B_2)=\frac{C_5^1C_3^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}$,$P(B_3)=\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{3}{28}$,$P(A\mid B_1)=\frac{2}{3}$,$P(A\mid B_2)=\frac{5}{9}$,$P(A\mid B_3)=\frac{4}{9}$,所以 $P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)+P(B_3)P(A\mid B_3)=\frac{5}{14}\times\frac{2}{3}+\frac{15}{28}\times\frac{5}{9}+\frac{3}{28}\times\frac{4}{9}=\frac{7}{12}$.

所以取出的这个青团是蛋黄馅的概率为$\frac{7}{12}$.

课后素养评价(十一)

A组 学习·理解

1.A **解析**:由题意知,①②④是离散型随机变量,③是连续型随机变量,⑤中体积为 8 m^3 的正方体的棱长是一个常量,不是随机变量.故选 A.

2.D **解析**:由题意得取出的 2 个球的号码之和可能为 2,3,4,5,6,7,8,9,10,共 9 个.故选 D.

3.A **解析**:因为 X 的分布列服从两点分布,

所以 $P(X=0)+P(X=1)=1$.

又 $P(X=0)=2-5P(X=1)=a$,

所以 $P(X=0)=2-5[1-P(X=0)]$,

解得 $P(X=0)=\frac{3}{4}$,所以 $a=\frac{3}{4}$.

4.A **解析**:因为 $Y<6$,即 $2X-1<6$,所以 $X<3.5$.所以 $X=1,2,3$,故 $P(Y<6)=0.3$.

5.C **解析**:第一次取到黑球,则放回 1 个红球;第二次取到黑球,则共放回 2 个红球……第五次取到黑球,则共放回 5 个红球;第六次取到了红球,停止取球.故 $X=6$.故选 C.

6.$\frac{1}{36}$ **解析**:因为 $P(X=i)=ai(i=1,2,\cdots,8)$,所以 $a(1+2+3+\cdots+8)=36a=1$,解得 $a=\frac{1}{36}$.

7.$\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$ **解析**:由分布列的性质及等差数列的性质得 $p_1+p_2+p_3=3p_2=1$,$p_2=\frac{1}{3}$.

又$\begin{cases}p_1\geqslant0,\\p_3\geqslant0,\end{cases}$即$\begin{cases}\frac{1}{3}-d\geqslant0,\\\frac{1}{3}+d\geqslant0,\end{cases}$得$-\frac{1}{3}\leqslant d\leqslant\frac{1}{3}$,

所以公差 d 的取值范围是$\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$.

8.**解**:由题意可知 $m=1-0.2-0.1-0.1-0.3=0.3$,

列表为

X	0	1	2	3	4
$\|X-1\|$	1	0	1	2	3
P	0.2	0.1	0.1	0.3	0.3

所以 $P(\eta=0)=P(X=1)=0.1$，
$P(\eta=1)=P(X=0)+P(X=2)=0.2+0.1=0.3$，
$P(\eta=2)=P(X=3)=0.3$，
$P(\eta=3)=P(X=4)=0.3$.
故 $\eta=|X-1|$ 的分布列为

η	0	1	2	3
P	0.1	0.3	0.3	0.3

B组　应用·实践

1.BC　**解析**：甲赢一局输两局得 3 分，甲与乙平局三次得 3 分.

2.B　**解析**：由题意知 $a,b,c\in[0,1]$，且 $\begin{cases}2b=a+c,\\a+b+c=1,\end{cases}$ 解得 $b=\frac{1}{3}$.又由函数 $f(x)=x^2+2x+\xi$ 有且只有一个零点，即方程 $x^2+2x+\xi=0$ 只有一个根，可得 $\Delta=4-4\xi=0$，解得 $\xi=1$.所以 $P(\xi=1)=\frac{1}{3}$.故选 B.

3.C　**解析**：$P(m\leqslant\xi\leqslant n)=1-P(\xi>n)-P(\xi<m)=1-[1-(1-a)]-[1-(1-b)]=1-(a+b)$.

4.**解**：由题意知，η 的可能取值为 200，250，300，
$P(\eta=200)=P(\xi=1)=0.4$，
$P(\eta=250)=P(\xi=2)+P(\xi=3)=0.2+0.2=0.4$，
$P(\eta=300)=P(\xi=4)+P(\xi=5)=0.1+0.1=0.2$.
故 η 的分布列为

η	200	250	300
P	0.4	0.4	0.2

5.**解**：(1)由题意可知，第 2 回合甲发球的概率为 $\frac{2}{3}$，乙发球的概率为 $\frac{1}{3}$，

所以第 3 回合甲发球的概率为 $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$，

乙发球的概率为 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$.

因此第 4 回合甲发球的概率为 $\frac{5}{9}\times\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{14}{27}$.

故第 4 回合甲发球的概率为 $\frac{14}{27}$.

(2)由题意可知，X 可以取 1，2，3，4.

当 $X=1$ 时，$P_1=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{27}$；当 $X=4$ 时，$P_4=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$.

当 $X=2$ 时，前 4 个回合甲发球两次的情况分以下三种：
第一种情况，甲第 1，2 回合发球，乙第 3，4 回合发球，其概率为 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{27}$；

第二种情况，甲第 1，3 回合发球，乙第 2，4 回合发球，其概率为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$；

第三种情况，甲第 1，4 回合发球，乙第 2，3 回合发球，其概率为 $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$.

故前 4 个回合甲发球两次的概率为 $P_2=\frac{4}{27}+\frac{1}{27}+\frac{2}{27}=\frac{7}{27}$；

当 $X=3$ 时，$P_3=1-P_1-P_2-P_4=\frac{8}{27}$.

故 X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{4}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{27}$

课后素养评价(十二)

A组　学习·理解

1.C　**解析**：A 错误，随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 是个常量，是随机变量 X 本身固有的一个数字特征.B 错误，随机变量的均值反映随机变量取值的平均水平.C 正确，由均值的性质可知.D 错误，$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$.

2.ABCD　**解析**：由 $0.3+0.1+b+0.2=1$，得 $b=0.4$.
因为 $E(X)=4\times0.3+a\times0.1+9\times0.4+10\times0.2=6.8+a\times0.1=7.5$，所以 $0.1a=0.7$，得 $a=7$.所以 $E(aX)=aE(X)=7\times7.5=52.5$，$E(X+b)=7.5+0.4=7.9$.

3.C　**解析**：因为随机变量 X 的分布列服从两点分布，所以 $P(X=0)+P(X=1)=1$，

则 $P(X=1)+\frac{2}{9P(X=1)}=1$，解得 $P(X=1)=\frac{1}{3}$ 或 $P(X=1)=\frac{2}{3}$.又因为 $P(X=0)<P(X=1)$，

所以 $P(X=1)=\frac{2}{3}$，则 $P(X=0)=\frac{1}{3}$，所以 $E(X)=\frac{2}{3}$.故选 C.

4.A　**解析**：由题意知，ξ 的所有可能取值为 0，1，2，$P(\xi=0)=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}$，$P(\xi=1)=\frac{C_7^1C_3^1}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}$，$P(\xi=2)=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{15}$.

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

所以 $E(\xi)=0\times\frac{7}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{3}{5}$.

5.B　**解析**：由题意知，试验次数 ξ 的可能取值为 1，2，3，$P(\xi=1)=\frac{2}{3}$，$P(\xi=2)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$，$P(\xi=3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}$.
所以 ξ 的分布列为

ξ	1	2	3
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

所以 $E(\xi)=1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{1}{9}=\frac{13}{9}$.

6.B　**解析**：由题意得 $E(X_1)=1\times0.4+2\times0.1+3\times0.5=2.1$，$E(X_2)=1\times0.1+2\times0.6+3\times0.3=2.2$，所以 $E(X_2)>E(X_1)$，故乙的射击技术更好.

7.A　**解析**：由题意得，X 的所有可能取值为 0，1，2，
$P(X=0)=(1-0.4)\times(1-0.5)=0.3$，
$P(X=1)=0.4\times(1-0.5)+(1-0.4)\times0.5=0.5$，
$P(X=2)=0.4\times0.5=0.2$.
所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	0.3	0.5	0.2

所以 $E(X)=0\times0.3+1\times0.5+2\times0.2=0.9$.

8.1.48　**解析**：由题意知，随机变量 ξ 的所有可能取值为 1，3，
$\xi=3$ 表示三个景点都游览了或都没有游览，

所以 $P(\xi=3)=0.4\times0.5\times0.6+0.6\times0.5\times0.4=0.24$，
$P(\xi=1)=1-P(\xi=3)=0.76$，
所以随机变量 ξ 的分布列为

ξ	1	3
P	0.76	0.24

所以 $E(\xi)=1\times0.76+3\times0.24=1.48$.

B组　应用·实践

1.D　**解析**：由 $\begin{cases}x+0.1+0.3+y=1,\\7x+8\times0.1+9\times0.3+10y=8.9,\end{cases}$ 解得 $y=0.4$.

2.A　**解析**：因为 $P(X=1)=a+b$，$P(X=2)=2a+b$，$P(X=3)=3a+b$，$P(X=4)=4a+b$，
所以 $E(X)=1\times(a+b)+2\times(2a+b)+3\times(3a+b)+4\times(4a+b)=3$，所以 $30a+10b=3$①.
又因为 $(a+b)+(2a+b)+(3a+b)+(4a+b)=1$，所以 $10a+4b=1$②.
由①②可得 $a=\frac{1}{10}$，$b=0$，所以 $a+b=\frac{1}{10}$.

3.D　**解析**：由题意得 ξ 的取值不可能为 1，可能的取值为 4，3，2，0，
$P(\xi=4)=\frac{3\times(1+2)}{A_4^4}=\frac{9}{24}$，$P(\xi=3)=\frac{C_4^3\times2}{A_4^4}=\frac{8}{24}$，
$P(\xi=2)=\frac{C_4^2\times1}{A_4^4}=\frac{6}{24}$，$P(\xi=0)=\frac{1}{A_4^4}=\frac{1}{24}$.
故 $E(\xi)=4\times\frac{9}{24}+3\times\frac{8}{24}+2\times\frac{6}{24}+0\times\frac{1}{24}=3$.故选 D.

4.B　**解析**：设事件 A，B 分别表示这两台雷达发现飞行目标，且 A，B 相互独立，ξ 的可能取值为 0，1，2，$P(\xi=0)=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=(1-0.9)\times(1-0.85)=0.015$，
$P(\xi=1)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)=0.9\times0.15+0.1\times0.85=0.22$，
$P(\xi=2)=P(AB)=P(A)P(B)=0.9\times0.85=0.765$.
所以 $E(\xi)=0\times0.015+1\times0.22+2\times0.765=1.75$.

5.0.4　**解析**：设 A，B 两市受台风袭击的概率均为 p，则 A 市和 B 市均不受台风袭击的概率为 $(1-p)^2=1-0.36$，解得 $p=0.2$ 或 $p=1.8$(舍去).则 $P(X=0)=1-0.36=0.64$，$P(X=1)=2\times0.8\times0.2=0.32$，$P(X=2)=0.2\times0.2=0.04$，所以 $E(X)=0\times0.64+1\times0.32+2\times0.04=0.4$.

6.**解**：由题意可知，X 的所有可能取值为 1，2，3，4，
$X=1$ 表示此人第一次参加考试就通过了，
故 $P(X=1)=0.6$.
$X=2$ 表示此人第一次考试未通过，第二次考试通过了，
故 $P(X=2)=(1-0.6)\times0.7=0.28$.
$X=3$ 表示此人第一、二次考试均未通过，第三次考试通过了，
故 $P(X=3)=(1-0.6)\times(1-0.7)\times0.8=0.096$.
$X=4$ 表示此人第一、二、三次考试都未通过，
故 $P(X=4)=(1-0.6)\times(1-0.7)\times(1-0.8)=0.024$.
所以 X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	0.6	0.28	0.096	0.024

所以 $E(X)=1\times0.6+2\times0.28+3\times0.096+4\times0.024=1.544$.

7.**解**：(1)因为乙还需抛掷 2 次骰子才顺利通关，则第一次不能通关，所以第一次只能掷 1，2，3.
若第一次为 1 或 2，则第二次为 2，3，4，5，6；若第一次为 3，则第二次为 4，5，6.
所以乙还需抛掷 2 次骰子才顺利通关的概率为 $2\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{13}{36}$.
(2)X，Y 的可能取值均为 1，2，3，
由(1)得，$P(Y=1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，$P(Y=2)=\frac{13}{36}$，
$P(Y=3)=1-P(Y=1)-P(Y=2)=\frac{5}{36}$，
所以 Y 的分布列为

Y	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{5}{36}$

$E(Y)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{13}{36}+3\times\frac{5}{36}=\frac{59}{36}$.
若甲还需抛掷 2 次通关，当第一次为 1 时，第二次为 4，5，6；
当第一次为 2 或 3 时，第二次为 2，3，4，5，6；
当第一次为 4 时，第二次为 4，5，6.
故 $P(X=2)=\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}+2\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$，
易得 $P(X=1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，
$P(X=3)=1-P(X=1)-P(X=2)=\frac{2}{9}$，
所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

$E(X)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{4}{9}+3\times\frac{2}{9}=\frac{17}{9}$.

课后素养评价(十三)

A组　学习·理解

1.C　**解析**：由分布列的性质可知 $a+b+\frac{1}{2}=1$，
所以 $a+b=\frac{1}{2}$.
又由 $E(X)=-a+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$，解得 $a=\frac{1}{6}$，所以 $b=\frac{1}{3}$.
所以 $D(X)=\left(-1-\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{6}+\left(0-\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}+\left(1-\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{5}{9}$.

2.D　**解析**：由已知可得 $\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}+a^2=1$，$0\leqslant\frac{1}{3}a\leqslant1$，$0\leqslant a^2\leqslant1$，所以 $a=\frac{2}{3}$.
所以 $E(\xi)=-1\times\frac{2}{9}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$，
所以 $D(\xi)=\left(-1-\frac{2}{9}\right)^2\times\frac{2}{9}+\left(0-\frac{2}{9}\right)^2\times\frac{1}{3}+\left(1-\frac{2}{9}\right)^2\times\frac{4}{9}=\frac{50}{81}$，
所以 $D(1-3\xi)=9D(\xi)=\frac{50}{9}$.

3.D　**解析**：$E(X_1)=2E(X)-5=12-5=7$，$D(X_1)=4D(X)=4\times0.5=2$.

4.B　**解析**：由题意知，X 的可能取值为 0，1，2，
且 $P(X=0)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$，$P(X=1)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$，$P(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$.
所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{15}+1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{8}{15}=\frac{22}{15}$,

$D(X)=\frac{1}{15}\times\left(0-\frac{22}{15}\right)^2+\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{22}{15}\right)^2+\frac{8}{15}\times\left(2-\frac{22}{15}\right)^2=\frac{86}{225}$.

5.D　**解析**:由题意可得 $E(X)=0\times\frac{1-p}{2}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{p}{2}=\frac{1}{2}+p$,

则 $D(X)=\frac{1-p}{2}\left(\frac{1}{2}+p\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+p-1\right)^2+\frac{p}{2}\left(\frac{1}{2}+p-2\right)^2=-p^2+p+\frac{1}{4}=-\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$,

因为 $0<p<1$,所以 $D(X)$先增大后减小.

故选 D.

6.BCD　**解析**:由题意知,ξ的所有可能取值为 0,1,3,$\xi=0$表示三名学生全坐在与自己编号不同的座位上,有 2 种情况,即编号为 1,2,3 的座位上分别坐了编号为 2,3,1 或 3,1,2 的学生,则 $P(\xi=0)=\frac{2}{A_3^3}=\frac{1}{3}$;$\xi=1$ 表示三名学生只有一名学生坐在了与自己编号相同的座位上,则 $P(\xi=1)=\frac{C_3^1}{A_3^3}=\frac{1}{2}$;$\xi=3$ 表示三名同学全坐在了与自己编号相同的座位上,即对号入座,则 $P(\xi=3)=\frac{1}{A_3^3}=\frac{1}{6}$.

所以ξ的分布列为

ξ	0	1	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$E(\xi)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}=1$,

$D(\xi)=\frac{1}{3}\times(0-1)^2+\frac{1}{2}\times(1-1)^2+\frac{1}{6}\times(3-1)^2=1$.

B组　应用·实践

1.AC　**解析**:由题意得$\begin{cases}a+b+\frac{1}{2}=1,\\-1\times a+0\times\frac{1}{2}+2\times b=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=\frac{1}{3},\\b=\frac{1}{6},\end{cases}$

所以ξ的分布列为

ξ	-1	0	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

则 $D(\xi)=\frac{1}{3}\times(-1-0)^2+\frac{1}{2}\times(0-0)^2+\frac{1}{6}\times(2-0)^2=1$,故 A 正确;

则 $D(2\xi+1)=2^2D(\xi)=4$,故 C 正确;

所以$|\xi|$的分布列为

$\lvert\xi\rvert$	1	0	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

则 $E(|\xi|)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$,

$D(|\xi|)=\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{2}\times\left(0-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{6}\times\left(2-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$,故 B 错误;

所以 $D(3|\xi|-2)=3^2D(|\xi|)=5$,故 D 错误.

故选 AC.

2.A　**解析**:由题意得 $E(\xi)=\frac{1}{3}\times(1+2+3)=2$,

所以 $D(\xi)=\frac{1}{3}\times[(1-2)^2+(2-2)^2+(3-2)^2]=\frac{2}{3}$.

所以$D(3\xi+5)=3^2\times D(\xi)=6$.故选 A.

3.BCD　**解析**:当 $p=\frac{3}{7}$时,$P(\xi=2)=\frac{1}{7}$,$P(\xi=1)=\frac{9}{49}$,

$P(\xi=1)>P(\xi=2)$,故 A 错误;

因为 $0<p<1$,所以 $P(\xi=0)-P(\xi=1)=2p-p^2-p^2=2p-2p^2>0$,

所以 $P(\xi=0)>P(\xi=1)$,故 B 正确;

因为 $E(\xi)=p^2+2-4p$,$0<p<1$,

所以 $E(\xi)$随着 p 的增大而减小,故 C 正确;

当 $p=\frac{1}{3}$时,ξ的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$

$E(\xi)=0\times\frac{5}{9}+1\times\frac{1}{9}+2\times\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$,

$D(\xi)=\left(0-\frac{7}{9}\right)^2\times\frac{5}{9}+\left(1-\frac{7}{9}\right)^2\times\frac{1}{9}+\left(2-\frac{7}{9}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{68}{81}$,故 D 正确.

故选 BCD.

4.0.21　**解析**:因为随机变量 X 服从两点分布,且 $P(X=1)=0.7$,

所以 $P(X=0)=1-0.7=0.3$.

所以 $E(X)=0\times0.3+1\times0.7=0.7$,

所以 $D(X)=(0-0.7)^2\times0.3+(1-0.7)^2\times0.7=0.21$.

5.$\frac{5}{9}$　**解析**:因为 a,b,c 成等差数列,

所以 $a+c=2b$.

又因为 $a+b+c=1$,

所以 $b=\frac{1}{3}$.

又因为 $E(\xi)=a+2b+3c=\frac{5}{3}$,

所以 $a=\frac{1}{2}$,$b=\frac{1}{3}$,$c=\frac{1}{6}$.

所以ξ的分布列为

ξ	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

所以 $D(\xi)=\left(1-\frac{5}{3}\right)^2\times\frac{1}{2}+\left(2-\frac{5}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}+\left(3-\frac{5}{3}\right)^2\times\frac{1}{6}=\frac{5}{9}$.

6.$\frac{1}{3}$　$\frac{2}{3}$　**解析**:随机变量ξ的所有可能取值为 0,1,2,

$P(\xi=0)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$,$P(\xi=1)=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$,$P(\xi=2)=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$,所以 $E(\xi)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}=1$,$D(\xi)=\frac{1}{3}\times(0-1)^2+\frac{1}{3}\times(1-1)^2+\frac{1}{3}\times(2-1)^2=\frac{2}{3}$.

7.解:若投资项目一,设获利为 X_1 万元,X_1 的所有可能取值为 300,-150,则 X_1 的分布列为

X_1	300	-150
P	$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{9}$

所以 $E(X_1)=300\times\frac{7}{9}+(-150)\times\frac{2}{9}=200$,

$D(X_1)=(300-200)^2\times\frac{7}{9}+(-150-200)^2\times\frac{2}{9}=35\ 000$.

若投资项目二,设获利 X_2 万元,X_2 的所有可能取值为 $500,-300,0$,则 X_2 的分布列为

X_2	500	-300	0
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$

所以 $E(X_2)=500\times\frac{3}{5}+(-300)\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{15}=200$,

$D(X_2)=(500-200)^2\times\frac{3}{5}+(-300-200)^2\times\frac{1}{3}+(0-200)^2\times\frac{1}{15}=140\ 000$.

由上可知 $E(X_1)=E(X_2)$,$D(X_1)<D(X_2)$,这说明虽然项目一、项目二获利相同,但项目一更稳妥.

综上所述,建议该投资公司选择项目一投资.

课后素养评价(十四)

A组 学习·理解

1.A **解析**:连续测试4次,即4次独立重复试验,故所求概率为 $C_4^3\times\left(\frac{4}{5}\right)^3\times\frac{1}{5}+C_4^4\times\left(\frac{4}{5}\right)^4=\frac{512}{625}$.

2.B **解析**:设此射击运动员射击4次命中的次数为 ξ,1次射击命中的概率为 p,则 $\xi\sim B(4,p)$.

依题意可知,$P(\xi\geqslant 1)=\frac{80}{81}$,所以 $1-P(\xi=0)=1-C_4^0(1-p)^4=\frac{80}{81}$,则 $(1-p)^4=\frac{1}{81}$,解得 $p=\frac{2}{3}$.

3.D **解析**:因为 $X\sim B\left(6,\frac{1}{3}\right)$,所以 $P(X=2)=C_6^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243}$.

4.$\frac{8}{27}$ **解析**:每位申请人申请一个片区的房源为一次试验,这是4重伯努利试验.设 $A=$“申请甲片区房源”,则 $P(A)=\frac{1}{3}$,恰有2人申请甲片区房源的概率 $p=C_4^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$.

5.$\left(\frac{1}{3},1\right)$ **解析**:四引擎飞机成功飞行的概率为$C_4^3p^3(1-p)+p^4$,两引擎飞机成功飞行的概率为 p^2.由 $C_4^3p^3(1-p)+p^4>p^2$,得$\frac{1}{3}<p<1$.

6.解:(1)由题意得,$X\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$,$X$ 的可能取值为 $0,1,2,3$,

则 $P(X=0)=\left(1-\frac{2}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$,

$P(X=1)=C_3^1\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$,

$P(X=2)=C_3^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}$,

$P(X=3)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

(2)3局比赛后,甲的累计得分高于乙的累计得分有两种情况:

甲获胜2局,甲获胜3局,

所以所求概率为 $P=P(X=2)+P(X=3)=\frac{4}{9}+\frac{8}{27}=\frac{20}{27}$.

B组 应用·实践

1.D **解析**:因为是有放回地取产品,所以每次取产品取到次品的概率为 $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.从中取3次,X 为取得次品的次数,则 $X\sim B\left(3,\frac{1}{2}\right)$,

所以 $P(X\leqslant 2)=P(X=2)+P(X=1)+P(X=0)=C_3^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}+C_3^1\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_3^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{8}$.

2.C **解析**:由题意可得 $1-C_n^0\left(\frac{1}{2}\right)^n>0.9$,即 $\left(\frac{1}{2}\right)^n<0.1$,所以 $n\geqslant 4$.

3.B **解析**:由题意可知,每次取出红球的概率为 $\frac{3}{8}$.“$\xi=12$”的含义是前11次中红球出现9次,第12次取出的球是红球,故 $P(\xi=12)=C_{11}^9\times\left(\frac{3}{8}\right)^9\times\left(\frac{5}{8}\right)^2\times\frac{3}{8}$.

4.B **解析**:由题可知,$n=1\ 000>20$,$p=0.001<0.05$,

所以泊松分布可作为二项分布的近似,

此时 $\lambda=1\ 000\times 0.001=1$,

所以 $P(X=k)=\frac{1}{k!}e^{-1}$.

所以 $P(X=0)=\frac{1}{0!}e^{-1}=\frac{1}{e}$,$P(X=1)=\frac{1}{1!}e^{-1}=\frac{1}{e}$,

则 $P(X\geqslant 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\frac{2}{e}$.

5.$\frac{65}{81}$ **解析**:如果不遇到红灯,全程需要15 min,否则至少需要16 min,所以张师傅此行所需时间不少于16 min的概率 $p=1-\left(1-\frac{1}{3}\right)^4=\frac{65}{81}$.

6.解:(1)记“再经过4回合,甲选手获胜”为事件 A,

可知甲在第4回合胜,前3回合胜2个回合,

所以 $P(A)=\frac{3}{4}\times C_3^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}=\frac{81}{256}$.

(2)易知 X 的可能取值为 $0,1,2,3,4$,且 $X\sim B\left(4,\frac{3}{4}\right)$,

$P(X=0)=C_4^0\times\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{1}{256}$,

$P(X=1)=C_4^1\times\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{3}{64}$,

$P(X=2)=C_4^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{27}{128}$,

$P(X=3)=C_4^3\times\left(\frac{3}{4}\right)^3\times\frac{1}{4}=\frac{27}{64}$,

$P(X=4)=C_4^4\times\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{256}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{81}{256}$

课后素养评价(十五)

A组　学习·理解

1.C　解析:由随机变量 X 服从二项分布 $B(n,p)$,又 $E(X)=2,D(X)=\frac{4}{3}$,所以 $np=2,np(1-p)=\frac{4}{3}$,解得 $p=\frac{1}{3}$.故选 C.

2.B　解析:抛掷一次正好出现 2 枚正面向上,3 枚反面向上的概率为 $\frac{C_5^2}{2^5}=\frac{5}{16}$,所以 $X\sim B\left(80,\frac{5}{16}\right)$.故 $E(X)=80\times\frac{5}{16}=25$.

3.B　解析:由题意,随机变量 $X\sim B(10,0.5)$,所以 $E(X)=10\times0.5=5$.因为 $Y=2X-8$,所以 $E(Y)=2E(X)-8=2\times5-8=2$.故选 B.

4.C　解析:设此人上班途中遇到红灯的次数为 X,则 $X\sim B(3,0.4)$,
所以 $D(X)=3\times0.4\times0.6=0.72$.

5.ABC　解析:设该学生做对题目的个数为 X,则 $X\sim B(25,0.6)$,所以 $E(X)=25\times0.6=15$,A 正确;
$D(X)=25\times0.6\times(1-0.6)=6$,B 正确;
设该学生的得分为 Y,则 $Y=4X$,所以 $E(Y)=4E(X)=60$,C 正确;
$D(Y)=4^2D(X)=16\times6=96$,D 错误.
故选 ABC.

6.解:(1)该校男生支持方案一的概率为 $\frac{200}{200+400}=\frac{1}{3}$,
该校女生支持方案一的概率为 $\frac{300}{300+100}=\frac{3}{4}$.
(2)3 人中恰有 2 人支持方案一分两种情况:仅有 2 名男生支持方案一;仅有 1 名男生和 1 名女生支持方案一.
所以 3 人中恰有 2 人支持方案一的概率为 $\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{3}{4}\right)+C_2^1\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{4}=\frac{13}{36}$.
(3)$p_1<p_0$.

7.解:(1)记事件 A_1 为"会员为男会员",A_2 为"会员为女会员",事件 B 为"对服务质量满意",则由题意可知,
$P(A_1)=\frac{3}{5},P(A_2)=\frac{2}{5},P(B|A_1)=\frac{5}{6},P(B|A_2)=\frac{5}{8}$,
所以 $P(B)=P(A_1)\cdot P(B|A_1)+P(A_2)\cdot P(B|A_2)=\frac{3}{5}\times\frac{5}{6}+\frac{2}{5}\times\frac{5}{8}=\frac{3}{4}$.
(2)由题意及(1)知,$X\sim B\left(3,\frac{3}{4}\right)$,
则 $P(X=0)=C_3^0\times\left(\frac{3}{4}\right)^0\times\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$,
$P(X=1)=C_3^1\times\left(\frac{3}{4}\right)^1\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{64}$,
$P(X=2)=C_3^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{27}{64}$,
$P(X=3)=C_3^3\times\left(\frac{3}{4}\right)^3\times\left(\frac{1}{4}\right)^0=\frac{27}{64}$,
所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{64}+1\times\frac{9}{64}+2\times\frac{27}{64}+3\times\frac{27}{64}=\frac{9}{4}$.

B组　应用·实践

1.C　解析:因为 $\xi\sim B(n,0.6)$,所以 $E(\xi)=n\times0.6=3$,解得 $n=5$.故 $P(\xi=1)=C_5^1\times0.6\times0.4^4=3\times0.4^4$.

2.A　解析:由题意可得 $\xi\sim B\left(n,\frac{2}{3}\right)$,所以 $E(\xi)=\frac{2}{3}n=24$,解得 $n=36$.所以 $D(\xi)=n\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=36\times\frac{2}{9}=8$.

3.C　解析:根据题意得,每位盲拧魔方爱好者用时不超过 10 s 的概率为 $\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$.
设随机抽取的 20 名盲拧魔方爱好者中用时不超过 10 s 的人数为 ξ,
则 $\xi\sim B\left(20,\frac{1}{5}\right)$,其中 $P(\xi=k)=C_{20}^k\left(\frac{1}{5}\right)^k\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{20-k}$,$k=0,1,2,\cdots,20$.
由 $\begin{cases}P(\xi=k)\geqslant P(\xi=k+1),\\P(\xi=k)\geqslant P(\xi=k-1),\end{cases}$
得 $\begin{cases}C_{20}^k\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{20-k}\geqslant C_{20}^{k+1}\left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}\left(\frac{4}{5}\right)^{19-k},\\C_{20}^k\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{20-k}\geqslant C_{20}^{k-1}\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{21-k},\end{cases}$
化简得 $\begin{cases}4(k+1)\geqslant20-k,\\21-k\geqslant4k,\end{cases}$ 解得 $\frac{16}{5}\leqslant k\leqslant\frac{21}{5}$.
又 $k\in\mathbf{N}$,所以 $k=4$.
所以这 20 名盲拧魔方爱好者中用时不超过 10 s 的人数最有可能是 4.故选 C.

4.$\frac{4}{9}$　2　解析:由独立重复试验的概率公式,可得恰好投中 2 次的概率为 $C_3^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$.
由题意知随机变量 $X\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$,
所以 $E(X)=3\times\frac{2}{3}=2$.

5.二　解析:设答对题的个数为 X,则 $X\sim B(30,0.8)$,所以 $E(X)=30\times0.8=24$.因为 $24\times5=120$(分),所以最可能得到二等奖.

6.$\frac{31}{32}$　解析:由函数 $f(x)=x^2+4x+\xi$ 存在零点,
得方程 $x^2+4x+\xi=0$ 有解,所以 $\Delta=16-4\xi\geqslant0$,
得 $\xi\leqslant4$.
又因为随机变量 $\xi\sim B\left(5,\frac{1}{2}\right)$,
所以所求概率 $P(\xi\leqslant4)=1-P(\xi=5)=1-C_5^5\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{31}{32}$.

课后素养评价(十六)

A组　学习·理解

1.ABC　解析:对于 A,设事件 E 为"抛掷一枚骰子出现的点数是 3 的倍数",则 $P(E)=\frac{1}{3}$,
而在 n 次独立重复试验中事件 E 恰好发生了 $k(k=0,1,2,\cdots,n)$ 次的概率 $P(\xi=k)=C_n^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$,符合二项分布的定义,不是超几何分布,故 A 符合题意;
对于 B,X 的可能取值是 $2,3,\cdots,12$,
且 $P(X=2)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36},P(X=3)=2\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18},\cdots$,显然不符合超几何分布的定义,因此 X 不服从超几何分布,故 B 符合题意;
C 和 D 的区别:C 是"有放回"抽取,而 D 是"不放回"抽取,显然 D 中 n 次试验是不独立的,因此 D 服从超几何分布,对于 C,有 $X\sim B\left(n,\frac{M}{N}\right)$,故 C 符合题意,D 不符

合题意.
故选 ABC.

2.D 解析:若随机变量 X 表示任取 10 个球中红球的个数,则 X 服从参数为 $N=100,M=80,n=10$ 的超几何分布.取到的 10 个球中恰有 6 个红球,即 $X=6$,$P(X=6)=\frac{C_{80}^{6}C_{20}^{4}}{C_{100}^{10}}$.

3.D 解析:根据题意可知,X 可能取 1,2,3,且服从超几何分布,

则 $P(X=1)=\frac{C_2^2C_4^1}{C_6^3}=\frac{1}{5}$,

$P(X=2)=\frac{C_2^1C_4^2}{C_6^3}=\frac{3}{5}$,

$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}$,

所以 $E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{5}=2$,

$D(X)=(1-2)^2\times\frac{1}{5}+(2-2)^2\times\frac{3}{5}+(3-2)^2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$,

$E(2X-1)=2E(X)-1=2\times2-1=3$,

$D(2X-1)=4D(X)=\frac{8}{5}$.

故选 D.

4.A 解析:正品数比次品数少,有两种情况:0 个正品 4 个次品,1 个正品 3 个次品.
由超几何分布的概率可知,当取到 0 个正品 4 个次品时,$p_1=\frac{C_4^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{210}$.

当取到 1 个正品 3 个次品时,$p_2=\frac{C_6^1C_4^3}{C_{10}^4}=\frac{24}{210}=\frac{4}{35}$.

所以正品数比次品数少的概率为 $p_1+p_2=\frac{5}{42}$.

5.C 解析:对于 A,事件的概率为$\frac{C_3^1C_7^3}{C_{10}^4}=\frac{1}{2}$;

对于 B,事件的概率为$\frac{C_7^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{6}$;

对于 C,事件的概率为$\frac{C_3^2C_7^2}{C_{10}^4}=\frac{3}{10}$;

对于 D,事件的概率为$\frac{C_7^4+C_3^1C_7^3+C_3^2C_7^2}{C_{10}^4}=\frac{29}{30}$.

6.BCD 解析:由题意可知随机变量 X 服从参数为 $N=10,M=4,n=4$ 的超几何分布,故 A 错误,B 正确;随机变量 X 的可能取值为 0,1,2,3,4,所以 $P(X=0)=\frac{C_6^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{14}$,$P(X=1)=\frac{C_4^1C_6^3}{C_{10}^4}=\frac{8}{21}$,$P(X=2)=\frac{C_4^2C_6^2}{C_{10}^4}=\frac{3}{7}$,$P(X=3)=\frac{C_4^3C_6^1}{C_{10}^4}=\frac{4}{35}$,$P(X=4)=\frac{C_4^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{210}$,故 $E(X)=0\times\frac{1}{14}+1\times\frac{8}{21}+2\times\frac{3}{7}+3\times\frac{4}{35}+4\times\frac{1}{210}=\frac{8}{5}$ $\left(\text{或 } E(X)=4\times\frac{4}{10}=\frac{8}{5}\right)$,故 C,D 正确.故选 BCD.

7.$\frac{3}{5}$ 解析:由题意知,X 的可能取值是 0,1,2,$P(X=0)=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}$,$P(X=1)=\frac{C_7^1C_3^1}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}$,$P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{15}$,

故 $E(X)=0\times\frac{7}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{3}{5}$.所以 X 的数学期望是$\frac{3}{5}$.

8.50 $\frac{4}{3}$ 解析:依题意得 $0.016\times10n=8$,则 $n=50$.
可得成绩在[50,60)内的人数为 $0.012\times10\times50=6$,
其中 4 名女生,2 名男生.
所以 ξ 的可能取值为 0,1,2,

$P(\xi=0)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$,

$P(\xi=1)=\frac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$,

$P(\xi=2)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.

故 $E(\xi)=0\times\frac{1}{15}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{5}=\frac{4}{3}$.

9.解:X 的可能取值为 2,6,10,

$P(X=2)=\frac{C_8^2}{C_{10}^2}=\frac{28}{45}$,$P(X=6)=\frac{C_8^1C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{16}{45}$,$P(X=10)=\frac{C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{45}$.

故 X 的分布列为

X	2	6	10
P	$\frac{28}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{45}$

B 组 应用·实践

1.B 解析:设 X 表示 2 名代表中甲的个数,X 的可能取值为 0,1.由题意知 X 服从超几何分布,其中参数 $N=6,M=1,n=2$,则 $P(X=1)=\frac{C_1^1C_5^1}{C_6^2}=\frac{1}{3}$.

2.C 解析:由题意知,8 个数对中有(3,5),(5,7),(11,13),(17,19),共 4 个孪生素数对,
所以 X 的可能取值为 0,1,2,3.

$P(X=0)=\frac{C_4^0C_4^3}{C_8^3}=\frac{1}{14}$,$P(X=1)=\frac{C_4^1C_4^2}{C_8^3}=\frac{3}{7}$,

$P(X=2)=\frac{C_4^2C_4^1}{C_8^3}=\frac{3}{7}$,$P(X=3)=\frac{C_4^3C_4^0}{C_8^3}=\frac{1}{14}$,

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{14}+1\times\frac{3}{7}+2\times\frac{3}{7}+3\times\frac{1}{14}=\frac{3}{2}$.

3.ACD 解析:由题意知,X,Y 均服从超几何分布,且 $X+Y=4,Z=2X+Y$,故 $P(X=k)=\frac{C_4^kC_6^{4-k}}{C_{10}^4}(k=0,1,2,3,4)$.$P(|Z-6|\leqslant1)=1-P(Z=4)-P(Z=8)=1-P(X=0)-P(X=4)=\frac{97}{105}$,故选项 A 正确;$E(X)=4\times\frac{4}{10}=\frac{8}{5}$,$E(Y)=4-E(X)=\frac{12}{5}$,$D(X)=D(4-Y)=D(Y)$,故选项 B 错误,选项 C 正确;$E(Z)=2E(X)+E(Y)=\frac{28}{5}$,故选项 D 正确.故选 ACD.

4.$\frac{28}{145}$ 解析:从这 30 瓶饮料中任取 2 瓶,设"至少取到 1 瓶已过保质期的饮料"为事件 A,则 $P(A)=\frac{C_{27}^1C_3^1}{C_{30}^2}+\frac{C_3^2}{C_{30}^2}=\frac{28}{145}$.

5.解:(1)设甲答对的题目数为 ξ,则 $\xi\sim B(4,0.5)$,
所以 $E(\xi)=4\times0.5=2$,$D(\xi)=4\times0.5\times(1-0.5)=1$.
又因为 $X=10\xi-5(4-\xi)=15\xi-20$,
所以 $E(X)=15E(\xi)-20=15\times2-20=10$,
$D(X)=15^2\times D(\xi)=15^2\times1=225$.
(2)设乙答对的题目数为 η,可知 η 的可能取值为 0,1,2,3,4,
则 $Y=10\eta-5(4-\eta)=15\eta-20$,则有

$P(Y=-20)=P(\eta=0)=\frac{C_4^4C_6^0}{C_{10}^4}=\frac{1}{210}$,

$P(Y=-5)=P(\eta=1)=\frac{C_4^3C_6^1}{C_{10}^4}=\frac{4}{35}$,

$P(Y=10)=P(\eta=2)=\frac{C_4^2C_6^2}{C_{10}^4}=\frac{3}{7}$,

$P(Y=25)=P(\eta=3)=\dfrac{C_4^1C_6^3}{C_{10}^4}=\dfrac{8}{21}$,

$P(Y=40)=P(\eta=4)=\dfrac{C_4^0C_6^4}{C_{10}^4}=\dfrac{1}{14}$,

所以 Y 的分布列为

Y	-20	-5	10	25	40
P	$\dfrac{1}{210}$	$\dfrac{4}{35}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{8}{21}$	$\dfrac{1}{14}$

课后素养评价(十七)

A组　学习·理解

1. B　**解析**:因为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{8\pi}}e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-10)^2}{2\times2^2}}$,

所以均值 $\mu=10$,标准差 $\sigma=2$.故选 B.

2. B　**解析**:根据正态分布密度函数中参数 μ,σ 的意义,

由题图可知 $f_2(x),f_3(x)$ 图象的对称轴位置相同,所以可得 $\mu_2=\mu_3$,

且都在 $f_1(x)$ 图象的右侧,所以 $\mu_1<\mu_2=\mu_3$;

比较 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的图象可得,其形状相同,即 $\sigma_1=\sigma_2$,

又 $f_3(x)$ 图象的离散程度比 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 大,所以可得 $\sigma_1=\sigma_2<\sigma_3$.故选 B.

3. C　**解析**:因为随机变量 ξ 服从正态分布 $N(1,\sigma^2)$,所以其正态曲线关于直线 $x=1$ 对称.又 $P(\xi>3)=0.012$,所以 $P(\xi<-1)=0.012$.因此 $P(-1\leqslant\xi\leqslant1)=0.5-P(\xi<-1)=0.5-0.012=0.488$.

4. D　**解析**:由直线 $\xi=m$ 与直线 $\xi=6-m$ 关于直线 $\xi=3$ 对称,得 $P(\xi\geqslant m)=P(\xi\leqslant6-m)=a$,则 $P(\xi\geqslant6-m)=1-a$.

5. B　**解析**:由题意可知,$\mu=1\ 000,\sigma=50$,则 $P(950\leqslant X\leqslant1\ 100)=P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)=P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu)+P(\mu\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)\approx\dfrac{0.682\ 7}{2}+\dfrac{0.954\ 5}{2}=0.818\ 6$,所以 300 天内小笼包的销售量在 950 到 1 100 个的天数大约是 $300\times0.818\ 6=245.58\approx246$.

故选 B.

6. 20　2　**解析**:由题图可知,该正态曲线关于直线 $x=20$ 对称,峰值是 $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}$,所以 $\mu=20$,$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}$,解得 $\sigma=\sqrt{2}$,因此 $\mu=20,\sigma^2=(\sqrt{2})^2=2$.

7. 0.954 5　**解析**:因为 $10\times60\%=6$,所以 $t=\dfrac{8+12}{2}=10$.

由 $X\sim N(1,4)$,可知 $\mu=1,\sigma=2$,

所以 $P(-3\leqslant X\leqslant t-5)=P(-3\leqslant X\leqslant5)=P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)\approx0.954\ 5$.

8. 0.25　**解析**:由题意知 $P(\xi\geqslant2)=0.8,P(\xi\geqslant6)=0.2$,所以 $P(\xi<2)=P(\xi\geqslant6)=0.2$.所以正态曲线的对称轴为直线 $\xi=4$,即 $P(\xi\geqslant4)=0.5$,即每个摄像头在 4 年内能正常工作的概率为 0.5.所以两个该品牌的摄像头在 4 年内都能正常工作的概率为 $0.5\times0.5=0.25$.

B组　应用·实践

1. BC　**解析**:由题意可知,$\overline{x}=2.1,s^2=0.01$,

所以 $Y\sim N(2.1,0.1^2)$,

故 $P(Y>2)=P(Y>2.1-0.1)=P(Y<2.1+0.1)\approx0.841\ 3>0.5$,C 正确,D 错误.

因为 $X\sim N(1.8,0.1^2)$,

所以 $P(X>2)=P(X>1.8+2\times0.1)$.

因为 $P(X<1.8+0.1)\approx0.841\ 3$,

所以 $P(X>1.8+0.1)\approx1-0.841\ 3=0.158\ 7<0.2$,

而 $P(X>2)=P(X>1.8+2\times0.1)<P(X>1.8+0.1)<0.2$,故 B 正确,A 错误.故选 BC.

2. B　**解析**:因为 ξ 服从正态分布 $N(70,\sigma^2)$,所以正态曲线的对称轴是直线 $x=70$,所以 ξ 在 $(70,100)$ 内取值的概率为 0.5.因为 ξ 在 $(50,70)$ 内取值的概率为 0.4,所以 ξ 在 $(70,90)$ 内取值的概率也为 0.4,则 ξ 的值大于 90 的概率为 $0.5-0.4=0.1$.故选 B.

3. ACD　**解析**:因为其正态密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\times10}\cdot e^{-\frac{(x-80)^2}{200}}(x\in\mathbf{R})$,

所以该市这次考试的数学平均成绩为 80 分,

该市这次考试的数学成绩的标准差为 10.

易知其正态密度曲线关于直线 $x=80$ 对称,

又直线 $x=50$ 与直线 $x=110$ 也关于直线 $x=80$ 对称,

故分数在 110 以上的人数与分数在 50 以下的人数相同.

故选 ACD.

4. (1)2　(2)0.954 5　**解析**:(1)由 $X\sim N(2,9)$,可知 $\mu=2,\sigma=3$,正态密度曲线关于直线 $x=2$ 对称.

又 $P(X>1+c)=P(X<c-1)$,故有 $\dfrac{c-1+c+1}{2}=2$,解得 $c=2$.

(2)$P(-4\leqslant X\leqslant8)=P(2-2\times3\leqslant X\leqslant2+2\times3)\approx0.954\ 5$.

5. 解:(1)设 A_i:第 i 次通过第一关,B_i:第 i 次通过第二关,甲可以进入第三关的概率为 P,由题意知 $P=P(A_1B_1)+P(\overline{A_1}A_2B_1)+P(A_1\overline{B_1}B_2)+P(\overline{A_1}A_2\overline{B_1}B_2)$
$=P(A_1)P(B_1)+P(\overline{A_1})P(A_2)P(B_1)+P(A_1)P(\overline{B_1})\cdot P(B_2)+P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{B_1})P(B_2)$
$=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{5}{6}+\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{5}{6}+\dfrac{2}{3}\times\left(1-\dfrac{5}{6}\right)\times\dfrac{5}{6}+\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\times\dfrac{2}{3}\times\left(1-\dfrac{5}{6}\right)\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{70}{81}$.

(2)若闯关者的分数记为 X,则 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

①由题意可知 $\mu=171$,因为 $\dfrac{57}{2\ 500}=0.022\ 8$,且 $P(X>\mu+2\sigma)=\dfrac{1-P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)}{2}\approx\dfrac{1-0.954\ 5}{2}\approx0.022\ 8$,

所以 $\mu+2\sigma=351$,则 $\sigma=\dfrac{351-171}{2}=90$.

而 $\dfrac{400}{2\ 500}=0.16$,

且 $P(X>\mu+\sigma)=\dfrac{1-P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)}{2}\approx\dfrac{1-0.682\ 7}{2}\approx0.158\ 7<0.16$,

所以前 400 名参赛者的最低得分低于 $\mu+\sigma=261$.

因为甲的得分为 270 分,所以甲能够获得奖励.

②假设乙所说为真,则 $\mu=201$,

$P(X\geqslant\mu+2\sigma)=\dfrac{1-P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)}{2}\approx\dfrac{1-0.954\ 5}{2}\approx0.022\ 8$.

而 $\dfrac{57}{2\ 500}=0.022\ 8$,所以 $\mu+2\sigma=351$,得 $\sigma=\dfrac{351-201}{2}=75$,从而 $\mu+3\sigma=201+3\times75=426<430$.

而 $P(X\geqslant\mu+3\sigma)=\dfrac{1-P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)}{2}\approx\dfrac{1-0.997\ 3}{2}=0.001\ 35<0.005$,

所以 $X\geqslant\mu+3\sigma$ 为小概率事件,即丙的分数为 430 分是小概率事件,可认为其一般不可能发生,但却又发生了,所以可认为乙所说为假.

课后素养评价(十八)

A组　学习·理解

1. D　**解析**:“瑞雪兆丰年”和“读书破万卷,下笔如有神”是根据经验总结归纳出来的,“吸烟有害健康”具有科学根据,所以它们中的两个变量都是相关关系;喜鹊和乌鸦发出叫声是它们自身的生理反应,与事情的好坏无关,故它

们不具有相关关系.

2.A　解析:根据题表知 y 随 x 的增大而减小,所以这两个变量负相关.

3.A　解析:r 的取值范围为$[-1,1]$.

4.C　解析:根据题图,得 x,y 之间的线性相关关系非常不明显,所以样本相关系数 r 最接近的值应为 0.

5.(4,10)　解析:去掉点(4,10)后,其余四点大致在一条直线附近,线性相关程度增强.

6.正　0.99　解析:由题表中数据得 y 随 x 的增大而增大,所以该老师每天一次最多答对题数 y 与天数 x 之间是正相关,

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{7}x_iy_i-7\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{7}x_i^2-7\overline{x}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{7}y_i^2-7\overline{y}^2}}$$

$$=\frac{600-7\times4\times19}{\sqrt{140-7\times4^2}\sqrt{2\ 695-7\times19^2}}=\frac{17}{7\sqrt{6}}\approx\frac{17}{7\times2.45}$$

≈0.99.

7.解:画散点图(图略),观察散点图,可以看出散点都集中在一条直线附近,由此判断 y 与 x 线性相关.

又 $\overline{x}=\frac{1}{7}\times(21+23+25+27+29+32+35)\approx27.4$,

$\overline{y}=\frac{1}{7}\times(7+11+21+24+66+115+325)\approx81.3$,

$\sum_{i=1}^{7}x_i^2=21^2+23^2+25^2+27^2+29^2+32^2+35^2=5\ 414$,

$\sum_{i=1}^{7}x_iy_i=21\times7+23\times11+25\times21+27\times24+29\times66+32\times115+35\times325=18\ 542$,

$\sum_{i=1}^{7}y_i^2=7^2+11^2+21^2+24^2+66^2+115^2+325^2=124\ 393$,

所以 $r=\frac{\sum_{i=1}^{7}x_iy_i-7\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^{7}x_i^2-7\overline{x}^2)(\sum_{i=1}^{7}y_i^2-7\overline{y}^2)}}\approx$

$$\frac{18\ 542-7\times27.4\times81.3}{\sqrt{(5\ 414-7\times27.4^2)\times(124\ 393-7\times81.3^2)}}\approx\frac{2\ 948.66}{3\ 520.92}$$

$\approx0.837\ 5$.

所以 x 与 y 具有线性相关关系,且线性相关程度较强.

B组　应用·实践

1.C　解析:对于A,散点图中的点从左向右是上升的,且在一条直线附近,是正相关关系;对于B,两个变量没有明显的相关关系;对于C,散点图中的点从左向右是下降的,且在一条直线附近,是负相关关系;对于D,两个变量没有明显的相关关系.

2.C　解析:根据散点图的特征,散点从左向右呈上升趋势的是正相关,呈下降趋势的是负相关;散点越集中在一条直线附近,说明线性相关性越强.

由题图可知①③为正相关,②④为负相关,

故 $r_1>0,r_3>0,r_2<0,r_4<0$;

又①与②中散点图更集中在一条直线附近,故 $r_1>r_3,r_2<r_4$,因此 $r_2<r_4<0<r_3<r_1$.

3.C　解析:用样本相关系数 r 可以衡量两个变量之间的线性相关程度的强弱,r 的绝对值越接近于 1,表示两个变量的线性相关程度越强,r 的绝对值越接近于 0,表示两个变量之间的线性相关程度越弱.

4.①②　解析:根据题意,依次分析.对于①,样本相关系数 r 满足$|r|\leqslant1$,即样本相关系数 r 的取值范围为$[-1,1]$,①正确;

对于②,根据样本相关系数的性质知,$|r|$越接近 1,变量间的线性相关程度越强;$|r|$越接近 0,变量间的线性相关程度越弱,②正确;

对于③,当 r 接近-1时,变量间的线性相关程度比 r 接近 0 时的强,③错误.

5.解:(1)$\overline{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$,

$\overline{y}=\frac{75+84+93+98+100}{5}=90$,

所以 $\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=-2\times(-15)-1\times(-6)+0+1\times8+2\times10=64$,

$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=4+1+0+1+4=10$,$\sum_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2=(-15)^2+(-6)^2+3^2+8^2+10^2=434$,

所以 $r=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2\cdot\sum_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{64}{\sqrt{10\times434}}\approx$

$\frac{64}{65.88}\approx0.97>0.75$,

所以,y 与 x 的线性相关性很强,故可用线性回归模型拟合 y 与 x 之间的关系.

(2)设方案一的实际付款金额为 X 元,方案二的实际付款金额为 Y 元.

由题意可知,$E(X)=1\ 000-10\times10=900$ 元.

Y 的可能取值有 600,800,900,1 000,

$P(Y=600)=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$,

$P(Y=800)=C_3^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$,

$P(Y=900)=C_3^1\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$,

$P(Y=1\ 000)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$,

所以 $E(Y)=600\times\frac{1}{27}+800\times\frac{2}{9}+900\times\frac{4}{9}+1\ 000\times\frac{8}{27}$

$=\frac{24\ 200}{27}<\frac{24\ 300}{27}=E(X)$,

所以,方案二更优惠.

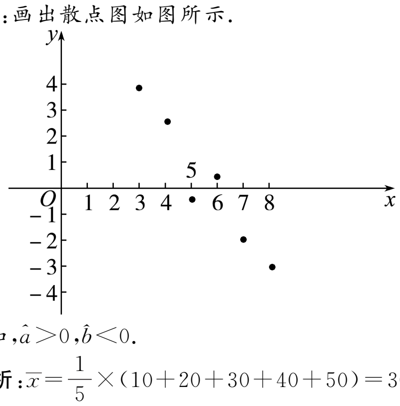
课后素养评价(十九)

A组　学习·理解

1.C　解析:经验回归方程的斜率参数 $\hat{b}$ 表示 x 每增加一个单位,$\hat{y}$ 平均增加 $\hat{b}$.当 x 为 1 时,废品率应为 1%,故当废品率增加 1%时,生铁成本平均每吨增加 3 元.

2.D　解析:$\overline{x}=\frac{0+1+2+3}{4}=1.5$,$\overline{y}=\frac{m+3+5.5+7}{4}$,将$(\overline{x},\overline{y})$代入 $\hat{y}=2.2x+0.7$,解得 $m=0.5$.

3.B　解析:画出散点图如图所示.



由图可知,$\hat{a}>0$,$\hat{b}<0$.

4.BC　解析:$\overline{x}=\frac{1}{5}\times(10+20+30+40+50)=30$,$\overline{y}=\frac{1}{5}\times(52+67+70+75+86)=70$,

所以经验回归直线 $\hat{y}=0.76x+\hat{a}$ 恒过点(30,70),所以 $70=0.76\times30+\hat{a}$,

解得 $\hat{a}=47.2$,故 A 错误,B 正确;

所以 $\hat{y}=0.76x+47.2$,令 $x=60$,则 $\hat{y}=0.76\times60+47.2=92.8$,

故加工 60 个零件的时间大约为 92.8 min,故 C 正确;

因为经验回归直线 $\hat{y}=0.76x+47.2$ 恒过点(30,70),所以去掉(30,70),剩下 4 组数据的经验回归方程不会有变化,故 D 错误.

故选 BC.

5.A　解析：由题意可得 $\overline{x}=6.5,\overline{y}=28.5$，则 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{8}x_iy_i-8\overline{x}\ \overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{8}x_i^2-8\overline{x}^2}\approx2.62$，可得 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\ \overline{x}=11.47$.故 y 关于 x 的经验回归方程是 $\hat{y}=11.47+2.62x$.故选 A.

6.AD　解析：因为经验回归方程为 $\hat{y}=1.5x+0.5,1.5>0$，所以变量 x 与 y 具有正相关关系，故 A 正确.当 $\overline{x}=3$ 时，$\overline{y}=1.5\times3+0.5=5$，样本点中心为 $(3,5)$.去掉 $(1.2,2.2)$ 和 $(4.8,7.8)$ 后，样本点中心还是 $(3,5)$.又因为移除两对误差较大的样本点后重新求得的经验回归方程的斜率参数为1.2，所以 $5=1.2\times3+\hat{a}$，解得 $\hat{a}=1.4$，故移除两对误差较大的样本数据后的经验回归方程为 $\hat{y}=1.2x+1.4$，故 B 错误.因为 $1.5>1.2$，所以移除两对误差较大的样本数据后 y 的估计值增加速度变慢，故 C 错误，D 正确.

7.D　解析：当广告支出为 5 万元时，观测值为 60，预测值为 $\hat{y}=6.5\times5+17.5=50$，则残差为 $60-50=10$.故选 D.

8.C　解析：样本点 $(r,1)$ 处的残差为 $1-(2r+a)$，样本点 $(1,s)$ 处的残差为 $s-(2+a)$，依题意 $1-(2r+a)=s-(2+a)$，故 $s=-2r+3$.故选 C.

B 组　应用·实践

1.BC　解析：由题表中数据可得 $\overline{x}=\dfrac{8+8.5+9+9.5+10}{5}=9,\overline{y}=\dfrac{89+85+80+78+68}{5}=80$，

所以样本点中心为 $(9,80)$，故点 $(9,80)$ 一定在经验回归直线上，B 正确；

由 $\hat{y}=-19.8x+\hat{a}$ 可得 y 与 x 呈负相关，A 错误；

将 $(9,80)$ 代入 $\hat{y}=-19.8x+\hat{a}$ 可得 $80=-19.8\times9+\hat{a}$，解得 $\hat{a}=258.2$，C 正确；

当 $x=9.5$ 时，$\hat{y}=-19.8\times9.5+258.2=70.1$，所以残差为 $78-70.1=7.9$，D 错误.

故选 BC.

2.14.5　解析：由题表中数据得 $\overline{x}=4,\overline{y}=9$，代入经验回归方程得 $\hat{a}=4.6$.所以 $\hat{y}=1.1x+4.6$，当 $x=9$ 时，$\hat{y}=1.1\times9+4.6=14.5$.

3.2.45　解析：当 $x=165$ 时，$\hat{y}=0.85\times165-85.7=54.55$，所以方程在样本点 $(165,57)$ 处的残差是 $57-54.55=2.45$.

4.85　解析：由 $\sum\limits_{i=1}^{10}u_i=50$，得 $\overline{u}=50\times\dfrac{1}{10}=5$.又经验回归直线恒过样本点的中心，所以 $\overline{v}=1.5\ \overline{u}+1=8.5$.所以 $\sum\limits_{i=1}^{10}v_i=10\ \overline{v}=85$.

5.解：(1) $\overline{x}=\dfrac{1+2+3+4+5+6}{6}=3.5$，

$\overline{y}=\dfrac{15.4+25.4+35.4+85.4+155.4+195.4}{6}=85.4$，

$\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2-6\ \overline{x}^2=1+4+9+16+25+36-6\times3.5^2=17.5$，

所以 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}x_iy_i-6\ \overline{x}\ \overline{y}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2-6\overline{x}^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{6}y_i^2-6\overline{y}^2}}$

$=\dfrac{2\ 463.4-6\times3.5\times85.4}{\sqrt{17.5}\times20\sqrt{70}}=\dfrac{670}{20\times35}\approx0.96$.

(2)由题意 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}x_iy_i-6\ \overline{x}\ \overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2-6\overline{x}^2}=\dfrac{2\ 463.4-6\times3.5\times85.4}{17.5}\approx38.3$，

所以 $\hat{a}=85.4-3.5\times38.3=-48.65$，

所以 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=38.3x-48.65$.

所以预测 2027 年 2 月份该公司的销售金额为 $\hat{y}=38.3\times19-48.65=679.05$(万元).

课后素养评价(二十)

A 组　学习·理解

1.C

2.BC　解析：从题图中可以看出，点 B 较其他点偏离直线较远，故去掉点 B 后，回归效果更好，决定系数 R^2 更接近于 1，所以去掉点 B 后，R^2 变大，故 A 错误；

去掉点 B 后，变量间的线性相关性变强，

所以 $|r|$ 更趋近于 1，故 B 正确；

去掉点 B 后，残差平方和变小，故 C 正确；

去掉点 B 后，解释变量 x 与响应变量 y 的相关性增强，故 D 错误.

故选 BC.

3.B　解析：因为 y 关于 x 的一元非线性回归方程为 $y=bx^2+1$，

设 $t=x^2$，则线性回归方程 $y=bt+1$.

又因为 $\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2=12,\sum\limits_{i=1}^{6}y_i=18$，可得 $\dfrac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2=2,\dfrac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^{6}y_i=3$，即样本点中心为 $(2,3)$.

将样本点中心坐标 $(2,3)$ 代入线性回归方程 $y=bt+1$，可得 $3=2b+1$，解得 $b=1$.

4.$>$　$<$　解析：由 R^2 的性质可得，R^2 越大，模型的拟合效果越好，所以 $R_1^2>R_2^2$.

由残差的性质可得，残差平方和越小，模型的拟合效果越好，所以 $Q_1<Q_2$.

5.$\hat{y}=e^{0.25x-2.58}$　解析：由 $z=\ln y,\hat{z}=0.25x-2.58$，

得 $\ln\hat{y}=0.25x-2.58$，

所以 $\hat{y}=e^{0.25x-2.58}$.

故 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=e^{0.25x-2.58}$.

6.解：(1)由已知图表可得 $\overline{x}=4,\overline{y}=5,\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=90,\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=112.3$，

则 $\hat{b}=\dfrac{112.3-5\times4\times5}{90-5\times4^2}=1.23,\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\ \overline{x}=0.08$，

故 $\hat{y}=1.23x+0.08$.

(2)因为 $\hat{e}=y-\hat{y}$，所以 $\hat{e}_1=-0.34,\hat{e}_2=0.03,\hat{e}_3=0.5,\hat{e}_4=0.27,\hat{e}_5=-0.46$，则残差表如下表所示.

x	2	3	4	5	6
$y-\hat{y}$	-0.34	0.03	0.5	0.27	-0.46

因为 $\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2=(2.2-5)^2+(3.8-5)^2+(5.5-5)^2+(6.5-5)^2+(7-5)^2=15.78$，

所以 $R^2=1-\dfrac{0.651}{15.78}\approx0.96>0.9$，

所以该经验回归方程的回归效果良好.

B 组　应用·实践

1.B　解析：由 R^2 的表达式可知，R^2 越大，表示残差平方和越小，即模型的拟合效果越好，R^2 越小，表示残差平方和越大，即模型的拟合效果越差.故选 B.

2.D　解析：由 $\hat{y}=e^{bx-0.5}$，得 $\ln\hat{y}=bx-0.5$.

令 $z=\ln y$，则 $\hat{z}=bx-0.5$.

可得下表：

x	1	2	3	4
z	1	3	4	6

由表可得 $\overline{x}=\dfrac{1+2+3+4}{4}=2.5,\overline{z}=\dfrac{1+3+4+6}{4}=3.5$，

所以 $3.5=b\times2.5-0.5$，解得 $b=1.6$.

所以 $\hat{z}=1.6x-0.5$，所以 $\hat{y}=e^{1.6x-0.5}$.

当 $x=5$ 时，$\hat{y}=e^{1.6\times5-0.5}=e^{7.5}$.故选 D.

3.A　解析：对于两个变量 y 与 x 的回归模型，R^2 越大，说明模型的拟合效果越好.在所给的四个选项中，0.97 是四个决定系数中最大的值，所以 0.97 对应的回归模型拟合

效果最好.故选 A.

4.B　**解析**:因为 $y=ae^{bx}$,所以两边取自然对数,作线性变换得 $\ln y=\ln(ae^{bx})=\ln a+\ln e^{bx}=\ln a+bx$.又因为对 $y=ae^{bx}$ 进行线性变换后得到的经验回归方程为 $\hat{u}=1-0.6x$,所以 $u=\ln y$,$\ln a=1$,$b=-0.6$,所以 $a=e$.由于函数 $y=x^2+bx+a=x^2-0.6x+e$ 为二次函数,图象开口向上,对称轴为直线 $x=\frac{3}{10}$,所以函数 $y=x^2+bx+a$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{3}{10},+\infty\right)$.故选 B.

5.**解**:(1)令 $u=\ln y=\ln(ae^{bx})=bx+\ln a$,

$\overline{x}=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3.5$,$\overline{u}=\frac{20.88}{6}=3.48$,

则 $\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{6}x_iu_i-6\,\overline{x}\cdot\overline{u}}{\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2-6\,\overline{x}^2}$

$=\frac{80.58-6\times3.5\times3.48}{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2-6\times3.5^2}\approx0.43$,

$\ln\hat{a}=3.48-0.43\times3.5\approx1.98$,

所以 $\hat{a}=e^{1.98}$,

所以 $\hat{y}=a\cdot e^{bx}=e^{1.98}\times e^{0.43x}=e^{1.98+0.43x}$.

(2)由题意得 X 的所有可能取值为 1,2,3,4,

$P(X=1)=\frac{C_5^1C_3^3}{C_8^4}=\frac{5}{70}=\frac{1}{14}$,

$P(X=2)=\frac{C_5^2C_3^2}{C_8^4}=\frac{30}{70}=\frac{3}{7}$,

$P(X=3)=\frac{C_5^3C_3^1}{C_8^4}=\frac{30}{70}=\frac{3}{7}$,

$P(X=4)=\frac{C_5^4C_3^0}{C_8^4}=\frac{5}{70}=\frac{1}{14}$,

故 X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

数学期望 $E(X)=1\times\frac{1}{14}+2\times\frac{3}{7}+3\times\frac{3}{7}+4\times\frac{1}{14}=\frac{5}{2}$.

课后素养评价(二十一)

A组　学习·理解

1.C　**解析**:根据列联表的特点,可知 $\begin{cases}a+21=73,\\a+22=b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=52,\\b=74.\end{cases}$

2. A　**解析**:由题意,得 $\left|\frac{a}{a+b}-\frac{c}{c+d}\right|=\left|\frac{ac+ad-ac-bc}{(a+b)(c+d)}\right|=\left|\frac{ad-bc}{(a+b)(c+d)}\right|$,

当 $\frac{a}{a+b}$ 与 $\frac{c}{c+d}$ 相差越大时,$|ad-bc|$ 的值越大,两个分类变量有关系的可能性就越大.故选 A.

3.D　**解析**:在四个选项中,两个深色条的高相差最明显,说明两个分类变量之间关系最强.故选 D.

4.D　**解析**:由题图可知,男生中喜欢国画的占 80%,女生中喜欢国画的占 60%,则这 80 名学生中喜欢国画的人数为 $50\times80\%+30\times60\%=58$.故选 D.

5.15　**解析**:根据题图可知,喜欢徒步的男生人数为 $0.6\times500=300$,喜欢徒步的女生人数为 $0.4\times400=160$,

所以喜欢徒步的总人数为 $300+160=460$.

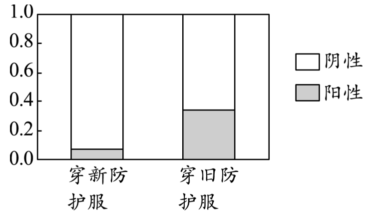
按分层随机抽样的方法抽取 23 人,则抽取的男生人数为 $\frac{300}{460}\times23=15$.

6.**解**:由题中所给的数据得如下 2×2 列联表:

单位:例

防护服	皮肤炎		合计
	阳性	阴性	
新防护服	5	70	75
旧防护服	10	18	28
合计	15	88	103

相应的等高堆积条形图如图所示.



图中两个深色条的高分别表示穿新、旧防护服样本中呈阳性的频率,从图中可以看出,穿旧防护服呈阳性的频率高于穿新防护服呈阳性的频率.因此,可以认为新防护服对预防工人职业性皮肤炎有效.

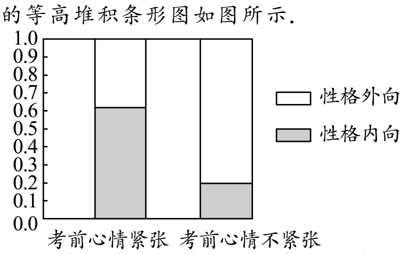
7.**解**:(1)2×2 列联表如下:

单位:人

考前心情	性格类型		合计
	内向	外向	
紧张	332	213	545
不紧张	94	381	475
合计	426	594	1 020

由列联表中数据,估计性格外向的学生中考前心情紧张的概率为 $\frac{213}{594}=\frac{71}{198}$.

(2)相应的等高堆积条形图如图所示.



图中阴影部分表示考前心情紧张与考前心情不紧张的学生中性格内向的学生所占的比例,从图中可以看出,考前心情紧张的样本中性格内向的学生占的比例比考前心情不紧张的样本中性格内向的学生占的比例高,所以可以认为性格类型对考前心情有影响.

B组　应用·实践

1.D　**解析**:依题意 $\frac{10+c}{105}=\frac{2}{7}$,解得 $c=20$,由 $10+20+b+30=105$,解得 $b=45$.

补全 2×2 列联表如下:

单位:人

班级	优秀情况		合计
	优秀	非优秀	
甲班	10	45	55
乙班	20	30	50
合计	30	75	105

甲班的优秀率为$\frac{10}{55}=\frac{2}{11}$，乙班的优秀率为$\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$，

$\frac{2}{11}<\frac{2}{5}$，所以成绩与班级有关.所以选项 D 正确，选项 A，B，C 错误.

故选 D.

2.AB　**解析**：因为分类变量 X，Y 没有关系，

所以$\frac{a}{a+b}\approx\frac{c}{c+d}$，化简得 $ad\approx bc$，

所以 A，B 正确，C，D 显然不正确.

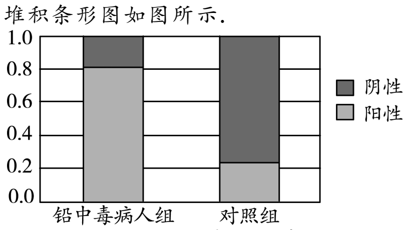
3.解：(1)2×2 列联表如下：

单位：人

性别	休闲方式		合计
	看电视	运动	
女	30	20	50
男	20	40	60
合计	50	60	110

(2)根据(1)中 2×2 列联表中的数据，可得女性中休闲方式为看电视的频率为$\frac{30}{50}=0.6$，男性中休闲方式为看电视的频率为$\frac{20}{60}\approx0.333$，二者差别较大，所以认为性别对休闲方式有影响.

4.解：等高堆积条形图如图所示.



其中两个浅色条的高分别代表铅中毒病人组和对照组样本中尿棕色素为阳性的频率.由图可以直观地看出，铅中毒病人组与对照组中，尿棕色素为阳性的频率有明显差异，因此可以认为铅的毒素对人的尿棕色素呈阴性或阳性有影响.

课后素养评价(二十二)

A组　学习·理解

1.D　**解析**：对于 A，独立性检验是通过计算 χ^2 的值来判断两个变量存在关联的可能性的一种方法，并非检验二者是否是线性相关，故错误；

对于 B，独立性检验并不能 100% 确定两个变量相关，故错误；

对于 C，99% 是指“吸烟”和“患肺病”存在关联的可能性，故错误；

对于 D，根据 χ^2 的定义可知该选项正确.

故选 D.

2.B　**解析**：因为 $\chi^2=8.133>7.879=x_{0.005}$，

所以犯错误的概率不超过 0.005.

故选 B.

3.B　**解析**：由题表中数据可得 $\chi^2=\frac{50\times(18\times15-9\times8)^2}{27\times23\times26\times24}\approx5.059>5.024=x_{0.025}$，

所以认为“对作业量的评价与学生的性别有关”犯错误的概率不超过 0.025.

故选 B.

4.AC　**解析**：由题意，把频率看作概率，可得后半夜下雨的概率约为$\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$，故 A 判断正确；未出现“日落云里走”时，后半夜下雨的概率约为$\frac{25}{25+45}=\frac{5}{14}$，故 B 判断错误；$\chi^2\approx19.05>10.828=x_{0.001}$，根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，认为“日落云里走”是否出现与当晚后半夜是否下雨有关，故 C 判断正确，D 判断错误.故选 AC.

5.C　**解析**：对于 A 项，$\frac{80}{220}=\frac{4}{11}<\frac{50}{80}=\frac{5}{8}$，故 A 项错误；

对于 B 项，$\frac{100}{220}=\frac{5}{11}<\frac{45}{80}=\frac{9}{16}$，故 B 项错误；

对于 C，D 项，根据已知，可列出如下 2×2 列联表：

单位：人

首选科目	生物学		合计
	选择	不选择	
物理	115	105	220
历史	35	45	80
合计	150	150	300

零假设为 H_0：是否选择生物学与首选科目无关.

由表中数据得 $\chi^2=\frac{300\times(115\times45-105\times35)^2}{220\times80\times150\times150}=\frac{75}{44}\approx1.705<2.706=x_{0.1}$，

所以根据小概率值 $\alpha=0.1$ 的独立性检验，没有充分证据推断 H_0 不成立，因此可以认为 H_0 成立，即认为是否选择生物学与首选科目无关，故 C 项正确，D 项错误.故选 C.

6.②　**解析**：由题表中数据计算可得 $\chi^2=\frac{304\times(63\times82-117\times42)^2}{180\times124\times105\times199}\approx0.041<2.706=x_{0.1}$，所以性别与是否知道想学专业无关.

7.解：(1)不妨给出零假设 H_0：顾客购买的玩偶颜色与顾客性别无关.

由题意知该假设成立的概率小于等于 0.01，

又 $P(\chi^2\geqslant6.635)=0.01$，

所以 $\chi^2=\frac{3a\left(\frac{5a}{6}\times\frac{4a}{3}-\frac{a}{6}\times\frac{2a}{3}\right)^2}{a\times2a\times\frac{3a}{2}\times\frac{3a}{2}}=\frac{2a}{3}\geqslant6.635$，解得 $a\geqslant9.952\ 5$.

又 $a\in\mathbf{Z}$，$\frac{a}{6}\in\mathbf{Z}$，所以 a 的最小值为 12.

(2)由(1)知 a 的最小值为 12，

此时女顾客一共有 24 人，男顾客一共有 12 人.

从所有顾客中选出 9 人，所以 X 的所有可能取值是 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，

则 X 服从超几何分布，且 $N=36$，$M=24$，$n=9$.

所以 X 的分布列为 $P(X=i)=\frac{C_{24}^{i}C_{12}^{9-i}}{C_{36}^{9}}$，$i=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$，

所以 $E(X)=\frac{nM}{N}=\frac{216}{36}=6$.

8.解：(1)根据题图得到 2×2 列联表如下：

单位：人

年龄	歌曲名称		合计
	正确	错误	
20 岁到 30 岁	10	30	40
30 岁到 40 岁	10	70	80
合计	20	100	120

(2)有关系.理由如下：

零假设为 H_0：猜对歌曲名称与年龄无关.

根据(1)中列联表的数据计算得

$\chi^2=\frac{120\times(10\times70-30\times10)^2}{40\times80\times20\times100}=3>2.706=x_{0.1}$.

依据 $\alpha=0.1$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，即认为猜对歌曲名称与年龄有关系，此推断犯错误的概率不超过 0.1.

B组　应用·实践

1.D　**解析**：独立性检验应先假设两个分类变量无关.

2.A　**解析**：随机变量 $\chi^2=\dfrac{90\times(11\times37-34\times8)^2}{45\times45\times19\times71}\approx0.600$.

3.C　**解析**：根据题意，不妨设 $a=4m,b=m,c=3m,d=2m$，

则 $\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$=\dfrac{10m\cdot(5m^2)^2}{5m\cdot5m\cdot7m\cdot3m}=\dfrac{10m}{21}$.

由于依据 $\alpha=0.05$ 的独立性检验认为喜欢短视频和性别不相互独立，

所以根据表格可知 $\dfrac{10m}{21}\geqslant3.841$，解得 $m\geqslant8.066\ 1$，所以 m 最小值为 9.

故选 C.

4.解：(1)根据题意，可得 2×2 列联表：

甲球员	球队的胜负情况		合计
	胜	负	
上场	40	5	45
未上场	2	3	5
合计	42	8	50

零假设为 H_0：球队的胜负与甲球员是否上场无关.

计算得 $\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$=\dfrac{50\times(40\times3-5\times2)^2}{45\times5\times42\times8}\approx8.003>6.635$，

依据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，即认为球队的胜负与甲球员是否上场有关，此推断犯错误的概率不大于 0.01.

(2)甲球员上场时，打前锋、中锋、后卫的概率分别为 0.3，0.5，0.2，相应球队赢球的概率分别为 0.7，0.8，0.6.

①设事件 A：甲球员上场打前锋，事件 B：甲球员上场打中锋，事件 C：甲球员上场打后卫，事件 D：球队赢球，

则 $P(A)=0.3,P(B)=0.5,P(C)=0.2,P(D|A)=0.7,P(D|B)=0.8,P(D|C)=0.6$，

所以，当甲球员上场参加比赛时，球队赢球的概率为

$P(D)=P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)=0.3\times0.7+0.5\times0.8+0.2\times0.6=0.73$.

②当甲球员上场参加比赛时，在球队赢了某场比赛的条件下，甲球员打中锋的概率为 $P(B|D)=\dfrac{P(DB)}{P(D)}=\dfrac{P(B)P(D|B)}{P(D)}=\dfrac{0.5\times0.8}{0.73}\approx0.55$.

质量评估(一)

1.A　**解析**:$4A_5^2+5C_4^2=4\times5\times4+5\times\dfrac{4\times3}{2\times1}=110$.

2.D　**解析**:先涂 A,有 5 种涂法,再涂 B,因为 B 与 A 相邻,所以 B 的颜色只要与 A 不同即可,有 4 种涂法;同理 C 有 3 种涂法,D 有 3 种涂法,E 有 3 种涂法.由分步乘法计数原理可知,共有 $5\times4\times3\times3\times3=540$ 种不同的着色方法.故选 D.

3.B　**解析**:展开式的通项为 $T_{k+1}=(-1)^kC_6^k2^{6-k}x^{\frac{6-k}{2}}\cdot x^{-\frac{k}{2}}=(-1)^kC_6^k2^{6-k}x^{3-k}(k=0,1,2,\cdots,6)$,
令 $3-k=-2$,得 $k=5$,所以 $T_6=-C_6^5\times2^{6-5}x^{-2}=-12x^{-2}$.故选 B.

4.C　**解析**:五个元素没有限制条件,全排列数为 A_5^5,若 A,B,C 的顺序为 A,B,C 或 C,B,A(可以不相邻),则不同的排列方法有 $2\cdot\dfrac{A_5^5}{A_3^3}=40$ 种.

5.A　**解析**:$S=C_4^0(x-1)^4+C_4^1(x-1)^3+C_4^2(x-1)^2+C_4^3(x-1)+C_4^4=[(x-1)+1]^4=x^4$.故选 A.

6.C　**解析**:依题意,甲区域除军舰 A 外至少还有一艘军舰,至多还有两艘军舰.
若甲区域除军舰 A 外还有一艘军舰,则安排方案共有 $C_4^1\times C_3^1\times C_2^2\times A_2^2=24$ 种;
若甲区域除军舰 A 外还有两艘军舰,则安排方案共有 $C_4^2\times A_2^2=12$ 种.
所以甲区域还有其他军舰的安排方案共有 $24+12=36$ 种.
故选 C.

7.C　**解析**:按照焊接点脱落的个数进行分类:第 1 类,脱落 1 个,有 1,4,共 2 种;第 2 类,脱落 2 个,有(1,4),(2,3),(1,2),(1,3),(4,2),(4,3),共 6 种;第 3 类,脱落 3 个,有(1,2,3),(1,2,4),(2,3,4),(1,3,4),共 4 种;第 4 类,脱落 4 个,有(1,2,3,4),共 1 种.根据分类加法计数原理,共有 $2+6+4+1=13$ 种焊接点脱落的不同情况.故选 C.

8.B　**解析**:李指导员安排在 C 地上午时,张指导员有 C_4^1 种安排方案,其余 4 位指导员有 A_4^4 种安排方案,则共有 $C_4^1A_4^4=96$ 种安排方案;
李指导员不安排在 C 地上午时,李指导员有 C_2^1 种安排方案,张指导员有 C_3^1 种安排方案,其余 4 位指导员有 A_4^4 种安排方案,则共有 $C_2^1C_3^1A_4^4=144$ 种安排方案.
综上,共有 $96+144=240$ 种不同的安排方案.故选 B.

9.BC　**解析**:36 可以表示为 ≡ ⊤,A 错误;
当十位为 1 时,个位可以是 1,2,3,4,5,6,7,8,9,共 9 个,B 正确;
当十位为 4 时,个位可以是 1,2,3,6,7,即可以表示 41,42,43,46,47,共 5 个,C 正确;
当十位为 2 时,个位可以是 1,2,3,4,5,6,7,8,9,共 9 个;
当十位为 3 时,个位可以是 1,2,3,4,6,7,8,共 7 个;
当十位为 5 时,个位可以是 1,2,6,共 3 个;
当十位为 6 时,个位可以是 1,2,3,4,5,6,7,8,9,共 9 个;
当十位为 7 时,个位可以是 1,2,3,4,6,7,8,共 7 个;
当十位为 8 时,个位可以是 1,2,3,6,7,共 5 个;
当十位为 9 时,个位可以是 1,2,6,共 3 个.
所以总共可表示 $9+5+9+7+3+9+7+5+3=57$ 个不同的两位数,D 错误.

10.BD　**解析**:穿黄色衣服的人不相邻的排法有 $A_3^3A_4^2=72$ 种,穿红色衣服的人相邻的排法有 $A_2^2A_4^4=48$ 种,同理,穿黄色衣服的人相邻的排法也有 48 种.而穿红色、黄色衣服的人同时相邻的排法有 $A_2^2\cdot A_2^2\cdot A_3^3=24$ 种.故穿相同颜色衣服的人不相邻的排法有 $A_5^5-2\times48+24=48$ 种.

11.CD　**解析**:令 $x=0$,得 $(\sqrt{3})^4=a_0$,即 $a_0=9$.
令 $x=1$,得 $(2+\sqrt{3})^4=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=97+56\sqrt{3}$.
令 $x=-1$,得 $(-2+\sqrt{3})^4=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4=97-56\sqrt{3}$.
所以 $a_0+a_2+a_4=97,a_1+a_3=56\sqrt{3}$.

12.1 或 9　**解析**:由于 $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$,而 $\left(\dfrac{1}{x}-1\right)^5$ 的展开式通项为 $T_{k+1}=(-1)^kC_5^k\cdot x^{k-5}$,其中 $k=0,1,2,\cdots,5$.
于是 $\left(\dfrac{1}{x}-1\right)^5$ 的展开式中 x^{-2} 的系数为 $(-1)^3\times C_5^3=-10$,
x^{-1} 的系数为 $(-1)^4\times C_5^4=5$,常数项为 -1.
因此 $(x+a)^2\left(\dfrac{1}{x}-1\right)^5$ 的展开式中常数项为 $1\times(-10)+2a\times5+a^2\times(-1)=-a^2+10a-10$.
由题意得 $-a^2+10a-10=-1$,即 $a^2-10a+9=0$,解得 $a=1$ 或 $a=9$.

13.4　3　**解析**:根据题意知 $a_0=1,a_1=3,a_2=4$.结合二项式定理得 $\begin{cases}C_n^1\cdot\dfrac{1}{a}=3,\\C_n^2\cdot\dfrac{1}{a^2}=4,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}n=3a,\\n(n-1)=8a^2,\end{cases}$ 解得 $a=3$.

14.30　**解析**:四个人分别到三个不同的演出场馆工作,每个演出场馆至少派一人的方法总数为 $C_4^2A_3^3=36$,甲、乙两人在同一演出场馆工作的方法数为 $A_3^3=6$,故甲、乙两人不在同一演出场馆工作的不同分派方案有 $36-6=30$ 种.

15.解:(1)由 $A_6^x<4A_6^{x-2}$,可得 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant6,\\0\leqslant x-2\leqslant6,\\x\in\mathbf{N},\end{cases}$ 可得 $2\leqslant x\leqslant6,x\in\mathbf{N}$.
可得 $\dfrac{6!}{(6-x)!}<4\times\dfrac{6!}{(8-x)!}$,所以 $\dfrac{4}{(8-x)(7-x)}>1$,即 $x^2-15x+52<0$.
因为 $2^2-15\times2+52>0,3^2-15\times3+52>0,4^2-15\times4+52>0,5^2-15\times5+52>0,6^2-15\times6+52<0$,所以 $x=6$.
(2)因为 $C_3^2+C_4^2+C_5^2+\cdots+C_n^2=C_3^3+C_3^2+C_4^2+C_5^2+\cdots+C_n^2-1=C_4^3+C_4^2+C_5^2+\cdots+C_n^2-1=C_5^3+C_5^2+\cdots+C_n^2-1=C_{n+1}^3-1=55$,
所以 $C_{n+1}^3=56=C_8^3$,解得 $n=7$.

16.解:(1)依题意,当 0 在个位时,组成五位偶数的个数为 $A_5^4=120$;
当 2 或 4 在个位时,组成首位不为 0 的五位偶数的个数为 $2\times C_4^1\times A_4^3=192$.
所以共计组成的五位偶数的个数为 $120+192=312$.
(2)小于 2 018 的正整数包含:
一位数有 5 个;
两位数有 $C_5^1\times C_5^1=25$ 个;
三位数有 $C_5^1\times A_5^2=100$ 个;
四位数中千位为 1 时有 $A_5^3=60$ 个,
千位为 2 时有 2 013,2 014,2 015,3 个.
综上,可以组成小于 2 018 的正整数共有 $5+25+100+60+3=193$ 个.
(3)分 4 类:
①千位数字为 3 或 4 时,后面三个数位上可随便选择,此时共有 $2\times5\times4\times3=120$ 个;
②千位数字为 5,百位数字为 0,1,2,3 之一时,共有 $4\times4\times3=48$ 个;
③千位数字为 5,百位数字是 4,十位数字为 0,1 之一时,共有 $2\times3=6$ 个;
④5 420 也满足条件.
故所求四位数共有 $120+48+6+1=175$ 个.

17.**解**:(1)展开式的通项为 $T_{k+1}=C_n^k(-2x)^k=(-2)^kC_n^kx^k$.
因为 $T_3=C_n^2(-2x)^2=a_2x^2$,
所以 $a_2=C_n^2(-2)^2=60$,
化简可得 $n(n-1)=30$,且 $n\in\mathbf{N}^*$,
解得 $n=6$.
(2)因为 $T_{k+1}=C_6^k(-2x)^k=a_kx^k$,
所以 $a_k=C_6^k(-2)^k$,
所以 $(-1)^k\cdot\frac{a_k}{2^k}=C_6^k$,
$-\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}-\frac{a_3}{2^3}+\cdots+(-1)^6\cdot\frac{a_6}{2^6}=C_6^1+C_6^2+\cdots+C_6^6$
$=2^6-1=63$.

18.**解**:(1)由题意知,$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 的展开式的通项为
$T_{k+1}=C_n^k(\sqrt{x})^{n-k}\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^k=\frac{1}{2^k}C_n^kx^{\frac{3n-5k}{6}}$,$k=0,1,2,\cdots,n(n\geqslant2)$,
则 $a_1=\frac{1}{2^0}C_n^0=1$,$a_2=\frac{1}{2^1}C_n^1=\frac{1}{2}n$,$a_3=\frac{1}{2^2}C_n^2=\frac{n(n-1)}{8}$.
因为 $2a_2=a_1+a_3$,即 $2\times\frac{1}{2}n=1+\frac{n(n-1)}{8}$,解得 $n=8$ 或 $n=1$(舍去),
所以 $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 的展开式中各项的二项式系数的和为 $2^8=256$.
(2)由(1)知 $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_8^k(\sqrt{x})^{8-k}\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^k=\frac{1}{2^k}C_8^kx^{\frac{24-5k}{6}}$($0\leqslant k\leqslant8$ 且 $k\in\mathbf{N}$),
记第 k 项的系数最大,则有 $T_k\geqslant T_{k+1}$,且 $T_k\geqslant T_{k-1}$,
即 $\begin{cases}C_8^{k-1}2^{-k+1}\geqslant C_8^k2^{-k},\\C_8^{k-1}2^{-k+1}\geqslant C_8^{k-2}2^{-k+2},\end{cases}$ 解得 $3\leqslant k\leqslant4$.
又 $k\in\mathbf{N}$,所以 $k=3$ 或 $k=4$,
所以系数最大的项为第 3 项 $T_3=7x^{\frac{7}{3}}$ 和第 4 项 $T_4=7x^{\frac{3}{2}}$.
(3)因为 $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=\frac{1}{2^k}C_8^kx^{\frac{24-5k}{6}}$($0\leqslant k\leqslant8$ 且 $k\in\mathbf{N}$),
令 $\frac{24-5k}{6}\in\mathbf{Z}$,$0\leqslant k\leqslant8$ 且 $k\in\mathbf{N}$,则 $k=0$ 或 $k=6$,
所以展开式中有理项为 $T_1=x^4$ 和 $T_7=\frac{7}{16x}$.

19.**解**:(1)因为 $a_1=C_{2m+3}^{3m}\cdot A_{m-2}^1$,
所以 $\begin{cases}2m+3\geqslant3m,\\m-2\geqslant1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m\leqslant3,\\m\geqslant3,\end{cases}$
所以 $m=3$,所以 $a_1=C_9^9\cdot A_1^1=1$.
又由 $\left(x+\frac{1}{4x^2}\right)^4$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_4^kx^{x-k}\cdot\left(\frac{1}{4x^2}\right)^k$,知 $T_2=C_4^1x^3\cdot\frac{1}{4x^2}=x$,所以 $q=x$.
所以 $a_n=x^{n-1}(n\geqslant1$,且 $n\in\mathbf{N}^*)$,$S_n=\begin{cases}n,x=1,\\\frac{1-x^n}{1-x},x\neq1.\end{cases}$
(2)当 $x=1$ 时,$S_n=n$,
所以 $A_n=0C_n^0+C_n^1+2C_n^2+\cdots+(n-1)C_n^{n-1}+nC_n^n$①.
又 $A_n=nC_n^0+(n-1)C_n^1+\cdots+C_n^{n-1}+0C_n^n$②,
由①+②,得 $2A_n=n(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n)=n\cdot2^n$,
所以 $A_n=n\cdot2^{n-1}$.
当 $x\neq1$ 时,$S_n=\frac{1-x^n}{1-x}$,
所以 $A_n=\frac{1-x}{1-x}C_n^1+\frac{1-x^2}{1-x}C_n^2+\frac{1-x^3}{1-x}C_n^3+\cdots+\frac{1-x^n}{1-x}C_n^n$
$=\frac{1}{1-x}[(C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n)-(xC_n^1+x^2C_n^2+x^3C_n^3+\cdots+x^nC_n^n)]$
$=\frac{1}{1-x}[(2^n-1)-(1+xC_n^1+x^2C_n^2+\cdots+x^nC_n^n-1)]$
$=\frac{1}{1-x}[2^n-(1+x)^n]$.
所以 $A_n=\begin{cases}n\cdot2^{n-1},x=1,\\\frac{2^n-(1+x)^n}{1-x},x\neq1.\end{cases}$

质量评估(二)

1.C **解析**:由题意可得 $\frac{a}{2}+\frac{1}{6}+a+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=1$,解得 $a=\frac{1}{9}$.

2.A **解析**:(方法一)在同一时刻至少有一颗卫星准确预报可分为:①甲准确预报,乙没有准确预报;②甲没有准备预报,乙准确预报;③甲准确预报,乙准确预报.这三个事件彼此互斥,故至少有一颗卫星准确预报的概率为 $0.8\times(1-0.75)+(1-0.8)\times0.75+0.8\times0.75=0.95$.
(方法二)"在同一时刻至少有一颗卫星准确预报"的对立事件是"在同一时刻两颗卫星都没有准确预报",故至少有一颗卫星准确预报的概率为 $1-(1-0.8)\times(1-0.75)=0.95$.

3.A **解析**:记"该同学爱好滑雪"为事件 A,"该同学爱好滑冰"为事件 B,
则 $P(A)=0.5$,$P(AB)=0.5+0.6-0.7=0.4$,
所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.5}=0.8$.故选 A.

4.A **解析**:因为 $D(2X+1)=4D(X)$,$D(X)=6\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$,所以 $D(2X+1)=4\times\frac{3}{2}=6$.

5.B **解析**:①因为两枚骰子的点数相同,所以两枚骰子的点数之和不能为 5,
所以 A 与 C 互斥,因此①说法正确;
②当红色骰子的点数是偶数,蓝色骰子的点数是奇数时,B 与 D 同时发生,
因此这两个事件可以同时发生,所以②说法不正确;
③$P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$,$P(D)=1-\frac{9}{36}=\frac{3}{4}$,$P(AD)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$,
显然 $P(A)P(D)\neq P(AD)$,所以 A 与 D 不相互独立,所以③说法不正确;
④$P(B)=\frac{1}{2}$,$P(C)=\frac{1}{6}$,$P(BC)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$,
显然 $P(B)P(C)=P(BC)$,所以 B 与 C 相互独立,所以④说法正确.
故选 B.

6.C **解析**:因为 $P(\eta\leqslant1)=0.1+0.2+0.2+0.3=0.8$,$P(\eta\leqslant2)=0.1+0.2+0.2+0.3+0.1=0.9$,所以当 $1<x\leqslant2$ 时,$P(\eta<x)=0.8$.故选 C.

7.A **解析**:设事件 A_1,A_2,A_3 分别表示取得的这盒 X 光片是由甲厂、乙厂、丙厂生产的,B 表示取得的 X 光片为次品,
$P(A_1)=\frac{5}{10}$,$P(A_2)=\frac{3}{10}$,$P(A_3)=\frac{2}{10}$,
$P(B|A_1)=\frac{1}{10}$,$P(B|A_2)=\frac{1}{15}$,$P(B|A_3)=\frac{1}{20}$.

由全概率公式，得 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)\cdot P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=\frac{5}{10}\times\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{15}+\frac{2}{10}\times\frac{1}{20}=0.08$.故选 A.

8.C　**解析**：最后乙队获胜含 3 种情况：①第三局乙胜；②第三局甲胜，第四局乙胜；③第三局和第四局都是甲胜，第五局乙胜.故最后乙队获胜的概率 $p=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{19}{27}$.故选 C.

9.AD　**解析**：由正态曲线的对称性及 $P(X<1)=\frac{1}{2}$，知 $\mu=1$，即正态曲线关于直线 $x=1$ 对称，于是 $P(X<0)=P(X>2)$，所以 $P(0<X<1)=P(X<1)-P(X<0)=P(X<1)-P(X>2)=\frac{1}{2}-p$.

10.BD　**解析**：$P(X>400)=P(X=500)=0.15$.因为 $E(X)=200\times0.20+300\times0.35+400\times0.30+500\times0.15=340$，所以 $D(X)=(200-340)^2\times0.20+(300-340)^2\times0.35+(400-340)^2\times0.30+(500-340)^2\times0.15=9\ 400$.
若进这种鲜花 500 束，则利润的均值为 $340\times(5-2.5)-(500-340)\times(2.5-1.6)=706$(元).故选 BD.

11.ACD　**解析**：A,B 选项，事件 A_i="零件为第 i 台车床加工"$(i=1,2,3)$，事件 B="零件为次品"，
则 $P(A_1)=\frac{5}{5+6+9}=\frac{1}{4}$，$P(A_2)=\frac{6}{5+6+9}=\frac{3}{10}$，
$P(A_3)=\frac{9}{5+6+9}=\frac{9}{20}$，
$P(B|A_1)=6\%$，$P(B|A_2)=5\%$，$P(B|A_3)=4\%$，故 A 正确，B 错误；
C 选项，$P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)+P(A_3B)$
$=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$
$=\frac{1}{4}\times6\%+\frac{3}{10}\times5\%+\frac{9}{20}\times4\%=0.048$，故 C 正确；
D 选项，$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)}=\frac{6\%\times\frac{1}{4}}{0.048}=\frac{5}{16}$，故 D 正确.故选 ACD.

12.$\frac{1}{3}$　**解析**：因为 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$，
所以 $P(AB)=P(B|A)\cdot P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，
所以 $P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$.

13.$\frac{13}{35}$　**解析**：$P(X\leqslant6)=P(X=4)+P(X=6)$
$=\frac{C_4^4+C_4^3C_3^1}{C_7^4}=\frac{13}{35}$.

14.$\frac{6}{25}$　**解析**：由 $a_4=2,a_7=-4$ 可得等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=10-2n(n\in\mathbf{N}^*)$.$\{a_n\}$ 的前 10 项分别为 $8,6,4,2,0,-2,-4,-6,-8,-10$.由题意知 3 次取数相当于 3 次独立重复试验，在每次试验中取得正数的概率为 $\frac{2}{5}$，取得负数的概率为 $\frac{1}{2}$，在 3 次取数中，取出的数恰好为两个正数和一个负数的概率为 $C_3^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{6}{25}$.

15.解：(1)由题意知 X 的所有可能取值为 $0,1,2,3$，且 X 服从参数为 $N=10,M=3,n=3$ 的超几何分布，
因此 $P(X=k)=\frac{C_3^kC_7^{3-k}}{C_{10}^3}(k=0,1,2,3)$.
所以 $P(X=0)=\frac{C_3^0C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{35}{120}=\frac{7}{24}$，
$P(X=1)=\frac{C_3^1C_7^2}{C_{10}^3}=\frac{63}{120}=\frac{21}{40}$，
$P(X=2)=\frac{C_3^2C_7^1}{C_{10}^3}=\frac{21}{120}=\frac{7}{40}$，
$P(X=3)=\frac{C_3^3C_7^0}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}$.
故 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$

(2)设"取出的 3 件产品中一等品件数多于二等品件数"为事件 A，"恰好取出 1 件一等品和 2 件三等品"为事件 A_1，"恰好取出 2 件一等品"为事件 A_2，"恰好取出 3 件一等品"为事件 A_3.
由于事件 A_1,A_2,A_3 彼此互斥，且 $A=A_1+A_2+A_3$，
而 $P(A_1)=\frac{C_3^1C_3^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{40}$，$P(A_2)=P(X=2)=\frac{7}{40}$，
$P(A_3)=P(X=3)=\frac{1}{120}$，
所以取出的 3 件产品中一等品件数多于二等品件数的概率 $P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{3}{40}+\frac{7}{40}+\frac{1}{120}=\frac{31}{120}$.

16.解：(1)由题意可知，X 的可能取值为 $0,1,2,3,4,5$，且服从二项分布 $B\left(5,\frac{1}{3}\right)$，则
$P(X=0)=C_5^0\times\left(\frac{1}{3}\right)^0\times\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$，
$P(X=1)=C_5^1\times\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243}$，
$P(X=2)=C_5^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{80}{243}$，
$P(X=3)=C_5^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{243}$，
$P(X=4)=C_5^4\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{10}{243}$，
$P(X=5)=C_5^5\times\left(\frac{1}{3}\right)^5\times\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{243}$.
由此得 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{32}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{1}{243}$

$E(X)=5\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$，$D(X)=5\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{10}{9}$.
(2)由于 Y 为这名学生在首次遇到红灯前经过的路口数，显然 Y 是随机变量，其取值为 $0,1,2,3,4,5$，且
$P(Y=0)=\frac{1}{3}$，
$P(Y=1)=\left(\frac{2}{3}\right)^1\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$，
$P(Y=2)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$，
$P(Y=3)=\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}=\frac{8}{81}$，

$P(Y=4)=\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\frac{1}{3}=\frac{16}{243}$,

$P(Y=5)=\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$.

由此得 Y 的分布列为

Y	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{16}{243}$	$\frac{32}{243}$

(3)设"这名学生在途中至少遇到一次红灯"为事件 A,

则 $P(A)=1-P(X=0)=1-\frac{32}{243}=\frac{211}{243}$.

17.解:(1)(方法一:正面计算)记"随机抽取一份保单,索赔次数不少于 2"为事件 A,

由索赔次数不少于 2 知,索赔次数为 2,3,4,

所以 $P(A)=\frac{60+30+10}{1\ 000}=\frac{100}{1\ 000}=\frac{1}{10}$.

(方法二:反面计算)记"随机抽取一份保单,索赔次数不少于 2"为事件 A,

则 $P(A)=1-\frac{800+100}{1\ 000}=\frac{1}{10}$.

(2)①由题意知 X 的所有可能取值为 $0.4,-0.4,-1.2,-2.0,-2.6$,

$P(X=0.4)=\frac{800}{1\ 000}=0.8$,

$P(X=-0.4)=\frac{100}{1\ 000}=0.1$,

$P(X=-1.2)=\frac{60}{1\ 000}=0.06$,

$P(X=-2.0)=\frac{30}{1\ 000}=0.03$,

$P(X=-2.6)=\frac{10}{1\ 000}=0.01$,

故 $E(X)=0.4\times0.8-0.4\times0.1-1.2\times0.06-2.0\times0.03-2.6\times0.01=0.122$.

②如果无索赔的保单的保费减少 4%,有索赔的保单的保费增加 20%,这种情况下一份保单毛利润的数学期望估计值比①中 $E(X)$ 估计值大.

18.解:(1)甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分,则甲第一阶段至少投中 1 次,乙第二阶段也至少投中 1 次,

所以比赛成绩不少于 5 分的概率为

$P=(1-0.6^3)\times(1-0.5^3)=0.686$.

(2)①若甲先参加第一阶段比赛,则甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率为 $P_甲=[1-(1-p)^3]q^3$;

若乙先参加第一阶段比赛,则甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率为 $P_乙=[1-(1-q)^3]p^3$.

所以 $P_甲-P_乙=q^3-(q-pq)^3-p^3+(p-pq)^3$

$=(q-p)(q^2+pq+p^2)+(p-q)[(p-pq)^2+(q-pq)^2+(p-pq)(q-pq)]$

$=(p-q)(3p^2q^2-3p^2q-3pq^2)$

$=3pq(p-q)(pq-p-q)$

$=3pq(p-q)[(1-p)(1-q)-1]$.

因为 $0<p<q$,又 $p<1,q<1$,所以 $p-q<0,(1-p)(1-q)-1<0$,

所以 $pq(p-q)[(1-p)(1-q)-1]>0$,

所以 $P_甲>P_乙$,应该由甲参加第一阶段比赛.

②若甲先参加第一阶段比赛,比赛成绩 X 的所有可能取值为 0,5,10,15,

$P(X=0)=(1-p)^3+[1-(1-p)^3]\cdot(1-q)^3$,

$P(X=5)=[1-(1-p)^3]\cdot C_3^1q(1-q)^2$,

$P(X=10)=[1-(1-p)^3]\cdot C_3^2q^2(1-q)$,

$P(X=15)=[1-(1-p)^3]\cdot q^3$.

所以 $E(X)=15[1-(1-p)^3]q=15(p^3-3p^2+3p)\cdot q$.

若乙先参加第一阶段比赛,比赛成绩 Y 的所有可能取值为 0,5,10,15.

同理 $E(Y)=15(q^3-3q^2+3q)\cdot p$,

所以 $E(X)-E(Y)=15[pq(p+q)(p-q)-3pq(p-q)]=15pq(p-q)(p+q-3)$.

因为 $0<p<q,p<1,q<1$,所以 $p-q<0,p+q-3<1+1-3<0$,

所以 $pq(p-q)(p+q-3)>0$,所以 $E(X)>E(Y)$,

所以应该由甲参加第一阶段比赛.

19.解:(1)由题意得 $2\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=a^2,0<a<1$,

所以 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)X 的可能取值为 0,1,2,3,4.

$P(X=0)=C_2^0\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\times C_2^0(1-a)^2=\frac{1}{4}(1-a)^2$,

$P(X=1)=C_2^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^1\times C_2^0(1-a)^2+C_2^0\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\times C_2^1a(1-a)=\frac{1}{2}(1-a)$,

$P(X=2)=C_2^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times C_2^0(1-a)^2+C_2^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^1\times C_2^1a(1-a)+C_2^0\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\times C_2^2a^2=\frac{1}{4}(1+2a-2a^2)$,

$P(X=3)=C_2^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times C_2^1a(1-a)+C_2^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^1\times C_2^2a^2=\frac{a}{2}$,

$P(X=4)=C_2^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times C_2^2a^2=\frac{1}{4}a^2$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}(1-a)^2$	$\frac{1}{2}(1-a)$	$\frac{1}{4}(1+2a-2a^2)$	$\frac{a}{2}$	$\frac{1}{4}a^2$

$E(X)=1\times\frac{1}{2}(1-a)+2\times\frac{1}{4}(1+2a-2a^2)+3\times\frac{a}{2}+4\times\frac{1}{4}a^2=2a+1$.

质量评估(三)

1.A **解析**:对于 A,用决定系数 R^2 来刻画拟合效果,R^2 的值越接近 1,说明模型的拟合效果越好,错误.对于 B,由样本数据得到的经验回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 必过样本点的中心$(\overline{x},\overline{y})$,正确.对于 C,残差平方和越小的模型,拟合效果越好,正确.对于 D,$|r|$越接近 1,变量 y 与 x 之间的线性相关程度越强,正确.故选 A.

2.D **解析**:经验回归直线一定过点$(\overline{x},\overline{y})$,通过题表中的数据计算得 $\overline{x}=0.275,\overline{y}=4.797\ 5$,易知选 D.

3.D **解析**:由题表中数据得 $\overline{x}=6,\overline{y}=4$,代入方程 $\overline{y}=\hat{b}\,\overline{x}-4.4$,解得 $\hat{b}=1.4$,

则经验回归方程为 $\hat{y}=1.4x-4.4$.

令 $1.4x-4.4>20$,解得 $x>17.4$.因为 $x\in\mathbf{N}^*$,所以 $x\geqslant18$.

故选 D.

4.A **解析**:由经验回归方程可知 $\hat{b}=-3.5$,则变量 x 增加 1 个单位,变量 y 平均减少 3.5 个单位.

5. D　解析：因为 $\overline{x}=\frac{1+2+3+4}{4}=2.5$，$\overline{y}=\frac{4.5+4+3+2.5}{4}=3.5$，所以 $3.5=-0.7\times2.5+\hat{a}$，解得 $\hat{a}=5.25$.

6. A　解析：设男生人数为 x，依题意可得如下 2×2 列联表：

单位：人

性别	追星		合计
	是	否	
男	$\frac{x}{6}$	$\frac{5x}{6}$	x
女	$\frac{x}{3}$	$\frac{x}{6}$	$\frac{x}{2}$
合计	$\frac{x}{2}$	x	$\frac{3x}{2}$

若依据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，可以认为中学生性别和中学生追星有关，则 $\chi^2\geqslant3.841$. 由 $\chi^2=\frac{\frac{3x}{2}\left(\frac{x^2}{36}-\frac{5x^2}{18}\right)^2}{x\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot x}=\frac{3}{8}x\geqslant3.841$ 及 $\frac{x}{2}$，$\frac{x}{6}$ 为整数，可知 x 最小可取 12，所以男生至少有 12 人. 故选 A.

7. D　解析：设 y 的增加量为 $\Delta y=y_1-y_2$，x 的增加量为 $\Delta x=x_1-x_2$，

故可得 $\Delta y=2\lg x_1-2\lg x_2=2\lg\frac{x_1}{x_2}=2$，解得 $\frac{x_1}{x_2}=10$.

故要使得 y 增加 2 个单位，x 应增加到原来的 10 倍. 故选 D.

8. C　解析：若 $r>0$，则两个变量正相关，x 增大时，y 也相应增大，故①正确. 若 $r<0$，则两个变量负相关，x 增大时，y 相应减小，故②错误. $|r|$ 越接近 1，表示两个变量相关性越强，$|r|=1$ 表示两个变量有确定的关系(即函数关系)，故③正确.

9. ABC　解析：对于 A，由 x 与 y 的经验回归方程，可知 $\hat{b}=-0.7<0$，

所以变量 x，y 之间呈负相关关系，故 A 错误；

对于 B，当 $x=20$ 时，$\hat{y}=-0.7\times20+10.3=-3.7$，故 B 错误；

对于 C，由题表中数据可知 $\overline{x}=9$，$\overline{y}=\frac{6+m+3+2}{4}=\frac{11+m}{4}$，由点 $(\overline{x},\overline{y})$ 必在经验回归直线上，得 $\frac{11+m}{4}=-0.7\times9+10.3$，解得 $m=5$，故 C 错误；

对于 D，因为 $m=5$，所以 $\overline{y}=\frac{11+m}{4}=4$，所以经验回归直线必过点 $(9,4)$，故 D 正确. 故选 ABC.

10. BD　解析：对于 A，由题图可知散点从左下到右上分布，所以当月在售二手房均价 y 与月份代码 x 呈正相关关系，故 A 不正确；对于 B，令 $x=49$，得 $\hat{y}=0.936\ 9+0.028\ 5\times\sqrt{49}=1.136\ 4$，所以可以预测 2027 年 8 月在售二手房均价约为 1.136 4 万元$/\mathrm{m}^2$，故 B 正确；对于 C，非线性回归曲线不一定经过点 $(\overline{x},\overline{y})$，故 C 错误；对于 D，$R^2$ 越大，模型拟合效果越好，$0.923<0.973$，故 D 正确.

11. AD　解析：由题可得 $a=45$，$b=10$，$c=30$，$d=15$，则 $a+b=55$，$c+d=45$，$a+c=75$，$b+d=25$，$ad=675$，$bc=300$，$n=100$.

零假设为 H_0：能否做到"光盘"行动与性别无关.

计算可得 $\chi^2=\frac{100\times(675-300)^2}{55\times45\times75\times25}\approx3.030$.

因为 $x_{0.1}=2.706<3.030$，

所以依据小概率 $\alpha=0.1$ 的独立性检验，可以认为该市居民能否做到"光盘"行动与性别有关，此推断犯错误的概率不大于 0.1.

12. $\hat{y}=x+14$　24　解析：把 $(3,17)$，$(8,22)$ 代入经验回归方程得 $\begin{cases}3\hat{b}+\hat{a}=17,\\8\hat{b}+\hat{a}=22,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\hat{b}=1,\\\hat{a}=14.\end{cases}$

所以经验回归方程为 $\hat{y}=x+14$.

令 $x+14=38$，得 $x=24$.

13. 能　解析：零假设为 H_0：市民对人文景观的态度与年龄无关. 由题表中数据计算可得 $\chi^2=\frac{55\times(20\times20-5\times10)^2}{25\times30\times30\times25}\approx11.978>7.879=x_{0.005}$，根据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为市民对人文景观的态度与年龄有关，此推断犯错误的概率不大于 0.005.

14. 75　解析：根据样本点 $(8.4,83)$ 处的残差为 1，得 $83-(-20\times8.4+\hat{a})=1$，得 $\hat{a}=250$，

所以 $\hat{y}=-20x+250$.

$\overline{x}=\frac{8.2+8.4+8.6+8.8}{4}=8.5$，$\overline{y}=\frac{84+83+78+m}{4}=\frac{245+m}{4}$，

由 $\overline{y}=-20\overline{x}+250$，得 $m=75$.

15. 解：(1)由题意可得，

$\overline{x}=\frac{1}{8}\times[20+15+13+3+2+(-5)+(-10)+(-18)]=\frac{5}{2}$，

$\overline{y}=\frac{1}{8}\times[6.5+3.5+3.5+1.5+0.5+(-0.5)+(-2.5)+(-3.5)]=\frac{9}{8}$，

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{8}x_iy_i-8\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{8}x_i^2-8\overline{x}^2}=\frac{324-8\times\frac{5}{2}\times\frac{9}{8}}{1\ 256-8\times\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{1}{4},$$

所以 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=\frac{9}{8}-\frac{1}{4}\times\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$.

故经验回归方程为 $\hat{y}=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$.

(2)由题意，设该同学的物理成绩为 ω，则物理偏差为 $\omega-91.5$.

而数学偏差为 $128-120=8$，

所以 $\omega-91.5=\frac{1}{4}\times8+\frac{1}{2}$，解得 $\omega=94$.

所以，可以预测这位同学的物理成绩为 94 分.

16. 解：(1)根据已知数据可补全 2×2 列联表如下：

单位：人

性别	冬季长跑活动		合计
	感兴趣	不感兴趣	
男	48	8	56
女	32	12	44
合计	80	20	100

零假设为 H_0：学生对冬季长跑活动是否感兴趣与性别无关.

由表中数据计算得 $\chi^2=\frac{100\times(48\times12-8\times32)^2}{56\times44\times80\times20}\approx2.597<2.706=x_{0.1}$，

所以依据小概率值 $\alpha=0.1$ 的独立性检验，没有充分证据推断 H_0 不成立，即可以认为学生对冬季长跑活动是

否感兴趣与性别无关.

(2)由题知 X 的所有可能取值为 0,1,2,3,

因为 $P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{10}{56}=\frac{5}{28}$,$P(X=1)=\frac{C_5^2C_3^1}{C_8^3}=\frac{30}{56}=\frac{15}{28}$,$P(X=2)=\frac{C_5^1C_3^2}{C_8^3}=\frac{15}{56}$,$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_8^3}=\frac{1}{56}$,

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

$E(X)=0\times\frac{5}{28}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{15}{56}+3\times\frac{1}{56}=\frac{9}{8}$.

17.解:(1)根据题意可得 2×2 列联表:

单位:件

车间	品级	
	优级品	非优级品
甲车间	26	24
乙车间	70	30

零假设为 H_0:甲、乙两车间产品的优级品率无差异.

可得 $\chi^2=\frac{150\times(26\times30-24\times70)^2}{50\times100\times96\times54}=4.687\ 5$.

因为 $x_{0.05}=3.841<4.687\ 5<6.635=x_{0.01}$,

所以依据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验,推断 H_0 不成立,即可以认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异,此推断犯错误的概率不超过 0.05.依据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验,没有充分证据推断 H_0 不成立,因此可以认为 H_0 成立,即认为甲、乙两车间产品的优级品率无差异.

(2)由题意可知,生产线智能化升级改造后,该工厂产品的优级品的频率为 $\frac{96}{150}=0.64$,

用频率估计概率可得 $\overline{p}=0.64$.

又因为升级改造前该工厂产品的优级品率 $p=0.5$,

则 $p+1.65\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}=0.5+1.65\times\sqrt{\frac{0.5\times(1-0.5)}{150}}\approx0.5+1.65\times\frac{0.5}{12.247}\approx0.567$,

可知 $\overline{p}>p+1.65\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$,

所以可以认为生产线智能化升级改造后,该工厂产品的优级品率提高了.

18.解:(1)$\overline{x}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i=0.3$,$\overline{y}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}y_i=100.8$,

$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\times\overline{x}\times\overline{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}=620$,$\hat{a}=100.8-620\times0.3=-85.2$,

所以经验回归方程为 $\hat{y}=620x-85.2$.

将 $y=80$ 代入得 $80=620x-85.2$,解得 $x\approx0.27$,所以当步长为 80 cm 时,步频约是 0.27 s.

(2)由(1)可知 $\hat{y}_1=620\times0.28-85.2=88.4$,$\hat{e}_1=90-88.4=1.6$;

$\hat{y}_2=620\times0.29-85.2=94.6$,$\hat{e}_2=95-94.6=0.4$;

$\hat{y}_3=620\times0.30-85.2=100.8$,$\hat{e}_3=99-100.8=-1.8$;

$\hat{y}_4=620\times0.31-85.2=107$,$\hat{e}_4=103-107=-4$;

$\hat{y}_5=620\times0.32-85.2=113.2$,$\hat{e}_5=117-113.2=3.8$,

所以 $\sum_{i=1}^{5}\hat{e}_i=1.6+0.4-1.8-4+3.8=0$,即步长残差和为 0.

对任意具有线性相关关系的两个变量都成立,证明如下:

$\sum_{i=1}^{n}\hat{e}_i=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{b}x_i-\hat{a})=\sum_{i=1}^{n}y_i-\hat{b}\sum_{i=1}^{n}x_i-n\hat{a}=n\overline{y}-n\hat{b}\overline{x}-n(\overline{y}-\hat{b}\overline{x})=0$.

19.解:(1)由已知得,样本中有"25 周岁以上(含 25 周岁)"组工人 60 名,"25 周岁以下"组工人 40 名,

所以样本中日平均生产件数不足 60 件的工人中,

"25 周岁以上(含 25 周岁)"组工人有 60×0.05=3 名,记为 A_1,A_2,A_3;

"25 周岁以下"组工人有 40×0.05=2 名,记为 B_1,B_2.

从中随机抽取 2 名工人,所有的可能结果共有 10 种:(A_1,A_2),(A_1,A_3),(A_2,A_3),(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_3,B_1),(A_3,B_2),(B_1,B_2).

其中,至少有 1 名"25 周岁以下组"工人的可能结果共有 7 种:(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_3,B_1),(A_3,B_2),(B_1,B_2).

故所求的概率 $p=\frac{7}{10}$.

(2)由题图可知,在抽取的 100 名工人中,

"25 周岁以上(含 25 周岁)"组中的生产能手有 60×(0.2+0.05)=15 名,

"25 周岁以下"组中的生产能手有 40×(0.325+0.05)=15 名.

据此可得 2×2 列联表如下:

单位:名

年龄组	生产能手情况		合计
	生产能手	非生产能手	
25 周岁以上(含 25 周岁)组	15	45	60
25 周岁以下组	15	25	40
合计	30	70	100

零假设为 H_0:生产能手与工人所在的年龄组无关.

由表中数据得 $\chi^2=\frac{100\times(15\times25-45\times15)^2}{60\times40\times30\times70}=\frac{25}{14}\approx1.79<2.706=x_{0.1}$.

依据小概率值 $\alpha=0.1$ 的独立性检验,没有充分证据推断 H_0 不成立,因此可以认为 H_0 成立,即生产能手与工人所在的年龄组无关.

综合质量评估

1.B **解析**:因为 $3C_{2n}^3=5A_n^3$,

所以 $3\times\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3\times2\times1}=5n(n-1)(n-2)$,

解得 $n=8$($n=1$ 不合题意,舍去).

2.D **解析**:用决定系数 R^2 来刻画回归效果,R^2 越大,表示残差平方和越小,即模型的拟合效果越好,故 A 正确;

若变量 x 和 y 之间的样本相关系数 $r=-0.982$,r 接近 -1,则变量 x 和 y 之间的负相关程度很强,故 B 正确;

比较两个模型的拟合效果,可以比较残差平方和的大小,残差平方和越小的模型,拟合效果越好,故 C 正确;

对于经验回归方程 $\hat{y}=-3x+0.8$,当解释变量 x 每增加 1 个单位时,响应变量 y 平均减少 3 个单位,故 D 错误.

故选 D.

3.B **解析**:记不发芽的种子数为 ξ,则 $\xi\sim B(1\ 000,0.1)$,

所以 $E(\xi)=1\ 000\times0.1=100$.

又因为 $X=2\xi$,所以 $E(X)=E(2\xi)=2E(\xi)=200$.

4.B **解析**:第一类,甲、乙都不在天和核心舱的安排方案共有 $A_2^2=2$ 种;

第二类,甲、乙恰好有一人在天和核心舱,先安排天和核心舱有 $C_2^1C_3^2=6$ 种安排方案,

然后安排问天实验舱与梦天实验舱有 $A_2^2=2$ 种安排方案,

所以，甲、乙恰好有一人在天和核心舱的安排方案共有 $6\times2=12$ 种.

综上，甲、乙两人不能同时在一个舱内做实验的安排方案共有 $2+12=14$ 种.

5.A　**解析**：由二项式定理，得 $a^{10}-2C_{10}^{1}a^{9}+2^{2}C_{10}^{2}a^{8}-\cdots+2^{10}=C_{10}^{0}(-2)^{0}a^{10}+C_{10}^{1}(-2)^{1}a^{9}+C_{10}^{2}(-2)^{2}a^{8}+\cdots+C_{10}^{10}(-2)^{10}=(a-2)^{10}=(-\sqrt{2})^{10}=2^{5}=32$.

6.B　**解析**：(方法一)记事件 A＝“第一次取到的是合格高尔夫球”，事件 B＝“第二次取到的是合格高尔夫球”.

由题意可得 $P(AB)=\frac{3\times2}{4\times3}=\frac{1}{2}$，$P(A)=\frac{3}{4}$，

所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$.

(方法二)记事件 A＝“第一次取到的是合格高尔夫球”，事件 B＝“第二次取到的是合格高尔夫球”.

由题意可得，事件 $A\cap B$ 所包含的样本点数 $n(A\cap B)=3\times2=6$，事件 A 所包含的样本点数 $n(A)=3\times3=9$，所以 $P(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

7. C　**解析**：利用一元线性回归模型 $\begin{cases}Y=bx+a+e,\\E(e)=0,D(e)=\sigma^{2}\end{cases}$ 得到经验回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，根据题图，易知残差的方差不是一个常数，随变量 x 的变大而变大，不满足一元线性回归模型的 $D(e)=\sigma^{2}$ 的假设.故选 C.

8.B　**解析**：选择左、右两边其中一边将教练组 3 人捆绑看作一个整体安排，共有 $2A_3^3$ 种站法，

将剩余的 11 名队员全排列，共有 A_{11}^{11} 种站法，

由分步乘法计数原理可得总的站法有 $2A_3^3A_{11}^{11}$ 种.

故选 B.

9.BC　**解析**：由题可知，展开式的通项为 $T_{k+1}=C_n^k x^{\frac{n-k}{3}}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^{k}=C_n^k\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\cdot x^{\frac{n-2k}{3}}$.由第 6 项为常数项，得当 $k=5$ 时，$\frac{n-2k}{3}=0$，得 $n=10$.令 $\frac{10-2k}{3}=m\in\mathbf{Z}$，则 $10-2k=3m$，即 $k=5-\frac{3}{2}m$，故 m 应为偶数.又 $0\leqslant k\leqslant10$，故 m 可取 $2,0,-2$，即 k 可取 $2,5,8$.故第 3 项、第 6 项与第 9 项为有理项.又 $n=10$，故第 6 项的二项式系数最大.将 $n=10,k=3$ 代入 T_{k+1} 可得第 4 项为 $-15x^{\frac{4}{3}}$.

10.BC　**解析**：设 $X=k$ 表示取出的螺丝钉中恰有 k 颗为好的，则 $P(X=k)=\frac{C_7^kC_3^{4-k}}{C_{10}^4}(k=1,2,3,4)$.

所以 $P(X=1)=\frac{1}{30}$，$P(X=2)=\frac{3}{10}$，$P(X=3)=\frac{1}{2}$，$P(X=4)=\frac{1}{6}$.

恰有 1 颗是坏的的概率为 $P(X=3)=\frac{1}{2}$，

至多有 2 颗是坏的的概率为 $P(X=4)+P(X=3)+P(X=2)=\frac{29}{30}$.

11.AC　**解析**：由 $\mu=2$，可知正态曲线关于直线 $x=2$ 对称.由 $P(X<4)=0.8$，知 $P(X>4)=P(X<0)=0.2$，故 $P(0<X<2)=0.3$.故选 AC.

12.4　**解析**：由题易知，$X\sim B(10,p)$.

因为 $D(X)=2.4$，$P(X=4)>P(X=6)$，

所以 $\begin{cases}10p(1-p)=2.4,\\C_{10}^4p^4(1-p)^6>C_{10}^6p^6(1-p)^4,\end{cases}$ 解得 $p=0.4$.

所以 $E(X)=10p=4$.

13.0.66　83%　**解析**：由题可知 $\hat{b}=0.66$，故 x 增加 1 时，y 平均增加 0.66.当 $\hat{y}=7.675$ 时，$x=\frac{7.675-1.562}{0.66}\approx9.262$，所以 $\frac{7.675}{9.262}\times100\%\approx83\%$.

14.$\frac{5}{23}$　**解析**：设该员工迟到为事件 A，该员工自驾为事件 B，

则 $P(A)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{23}{120}$，$P(AB)=P(B)P(A|B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$，

所以在该员工迟到的条件下，他自驾去上班的概率为 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{24}}{\frac{23}{120}}=\frac{5}{23}$.

15.**解**：(1)分三类：第 1 类，从高一年级选 1 个班，有 6 种不同的选法；第 2 类，从高二年级选 1 个班，有 7 种不同的选法；第 3 类，从高三年级选 1 个班，有 8 种不同的选法.由分类加法计数原理，得共有 $6+7+8=21$ 种不同的选法.

(2)分三步：第 1 步，从高一年级选 1 个班，有 6 种不同的选法；第 2 步，从高二年级选 1 个班，有 7 种不同的选法；第 3 步，从高三年级选 1 个班，有 8 种不同的选法.由分步乘法计数原理，得共有 $6\times7\times8=336$ 种不同的选法.

(3)分三类，每类又分两步.第 1 类，从高一、高二两个年级各选 1 个班，有 6×7 种不同的选法；第 2 类，从高一、高三两个年级各选 1 个班，有 6×8 种不同的选法；第 3 类，从高二、高三年级各选 1 个班，有 7×8 种不同的选法.故共有 $6\times7+6\times8+7\times8=146$ 种不同的选法.

16.**解**：(1)由 $P(B)=\frac{3}{4}$，可知得分超过 85 分的人数为 $200\times\frac{3}{4}=150$，得分不超过 85 分的人数为 $200-150=50$.

因为 $P(\overline{A}|\overline{B})=1-P(A|\overline{B})=\frac{3}{5}$，$P(\overline{B}|\overline{A})=1-P(B|\overline{A})=\frac{3}{8}$，$P(B)=\frac{3}{4}$，$P(\overline{B})=\frac{1}{4}$，

所以 $P(\overline{A}|\overline{B})\cdot P(\overline{B})=P(\overline{B}|\overline{A})\cdot P(\overline{A})$，即 $\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}P(\overline{A})$，得 $P(\overline{A})=\frac{2}{5}$，$P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{3}{5}$，

故 200 人中男性人数为 $200\times\frac{3}{5}=120$，女性人数为 $200-120=80$.

又 $P(A|\overline{B})=\frac{2}{5}$，即得分不超过 85 分的人中，男性人数为 $50\times\frac{2}{5}=20$，女性人数为 $50-20=30$，

故在得分超过 85 分的人中，男性人数为 $120-20=100$，女性人数为 $80-30=50$.

2×2 列联表如下：

单位：人

性别	了解安全知识的程度		合计
	得分不超过 85 分	得分超过 85 分	
男	20	100	120
女	30	50	80
合计	50	150	200

零假设为 H_0：该校学生了解安全知识的程度与性别没有关联.

经计算得到 $\chi^{2}=\frac{200\times(20\times50-100\times30)^{2}}{120\times80\times50\times150}=\frac{100}{9}\approx$

$11.11>10.828=x_{0.001}$.

根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验,可以推断 H_0 不成立,即认为了解安全知识的程度与性别有关,此推断犯错误的概率不大于 0.001.

(2)X 可能取 0,1,2,3,4.

$P(X=0)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{144}$,

$P(X=1)=C_2^1\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{10}{144}$;

$P(X=2)=\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times C_2^1\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{37}{144}$;

$P(X=3)=\left(\frac{3}{4}\right)^2\times C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+C_2^1\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{60}{144}$;

$P(X=4)=\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{36}{144}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{144}$	$\frac{10}{144}$	$\frac{37}{144}$	$\frac{60}{144}$	$\frac{36}{144}$

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{144}+1\times\frac{10}{144}+2\times\frac{37}{144}+3\times\frac{60}{144}+4\times\frac{36}{144}=\frac{17}{6}$.

17.解:(1)模型②$\lg f=k\lg W+b$ 更符合实际.理由如下:根据题中散点图的特征,题图 2 基本上呈直线形式,所以可以选择一次函数来刻画 $\lg W$ 和 $\lg f$ 的关系.

(2)由题意可得$\begin{cases}\lg 300=k\lg 300+b,\\ \lg 200=k\lg 2\,000+b,\end{cases}$

又 $\lg 200=\lg 2+2\approx2.3$,$\lg 2\,000=\lg 2+3\approx3.3$,$\lg 300=\lg 3+2\approx2.5$,

故解得$\begin{cases}k=-\frac{1}{4},\\ b=\frac{25}{8},\end{cases}$

所以 $\lg f=-\frac{\lg W}{4}+\frac{25}{8}$.

所以 f 关于 W 的函数解析式为 $f=10^{\frac{25}{8}}\cdot W^{-\frac{1}{4}}$.

(3)设马的体重和脉搏率分别为 W_1,f_1,兔的体重和脉搏率分别为 W_2,f_2.由题意可知 $\frac{W_1}{W_2}=256$,则 $\frac{f_1}{f_2}=\left(\frac{W_1}{W_2}\right)^{-\frac{1}{4}}=256^{-\frac{1}{4}}=(2^8)^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}$.

又因为 $f_2=200$,所以 $f_1=50$.

即马的脉搏率约为 50.

18.解:(1)设“该海产品不能销售”为事件 A,

则 $P(A)=1-\left(1-\frac{1}{6}\right)\times\left(1-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{4}$.

所以该海产品不能销售的概率为 $\frac{1}{4}$.

(2)由已知得 ξ 的所有可能取值为 -320,-200,-80,40,160.

$P(\xi=-320)=\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{1}{256}$,

$P(\xi=-200)=C_4^1\times\left(\frac{1}{4}\right)^3\times\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$,

$P(\xi=-80)=C_4^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{128}$,

$P(\xi=40)=C_4^3\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$,

$P(\xi=160)=\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256}$.

所以 ξ 的分布列为

ξ	-320	-200	-80	40	160
P	$\frac{1}{256}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{81}{256}$

$E(\xi)=(-320)\times\frac{1}{256}-200\times\frac{3}{64}-80\times\frac{27}{128}+40\times\frac{27}{64}+160\times\frac{81}{256}=40$.

19.解:(1)由题意,得样本平均数 $\overline{x}\approx185\times0.2=37$,所以估计 $\mu=\overline{x}=37$,$\sigma=s=0.3$,

则 $\mu-\sigma=37-0.3=36.7$,$\mu+\sigma=37+0.3=37.3$,$\mu+2\sigma=37+0.6=37.6$,

则一等品钢管内径在$(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$,即$(36.7,37.3)$内,

二等品钢管内径在$[\mu+\sigma,\mu+2\sigma)$,即$[37.3,37.6)$内,

所以该企业生产的产品为正品的钢管内径尺寸范围为$(36.7,37.6)$.

(2)①从$(n+2)$件正品中任选 2 件,有 C_{n+2}^2 种选法,其中等级相同的有 $C_n^2+C_2^2$ 种选法,

所以某箱产品抽检被记为 B 的概率为 $p=1-\frac{C_n^2+C_2^2}{C_{n+2}^2}=1-\frac{n^2-n+2}{n^2+3n+2}=\frac{4n}{n^2+3n+2}$($n\geqslant2$,$n\in\mathbf{N}$).

②由题意,一箱产品抽检被记为 B 的概率为 p,

则抽检 5 箱产品恰有 3 箱被记为 B 的概率为

$f(p)=C_5^3p^3(1-p)^2=10p^3(1-2p+p^2)=10(p^3-2p^4+p^5)$,

$f'(p)=10(3p^2-8p^3+5p^4)=10p^2(3-8p+5p^2)=10p^2(p-1)(5p-3)$,

所以当 $p\in\left(0,\frac{3}{5}\right)$时,$f'(p)>0$,函数 $f(p)$单调递增;

当 $p\in\left(\frac{3}{5},1\right)$时,$f'(p)<0$,函数 $f(p)$单调递减.

所以当 $p=\frac{3}{5}$时,$f(p)$取得最大值 $f\left(\frac{3}{5}\right)=C_5^3\times\left(\frac{3}{5}\right)^3\times\left(1-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{216}{625}$.

此时,$p=\frac{4n}{n^2+3n+2}=\frac{3}{5}$,解得 $n=3$ 或 $n=\frac{2}{3}$(舍去).

所以当 $n=3$ 时,$f(p)$取得最大值 $\frac{216}{625}$.