

答案详解

第七章 立体几何与空间向量

第 50 课时 基本立体图形、简单几何体的表面积与体积

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1)平行 全等 平行 相似 平行且相等 一点
一点 平行四边形 三角形 梯形 (2)直棱柱 斜棱柱 正
棱柱 平行六面体 (4)垂直 一点 一点 矩形 等腰三角
形 等腰梯形 圆 矩形 扇形 扇环

知识点 2 (1)斜二测画法 (2)垂直 分别平行于坐标轴
不变 一半

知识点 3 $2\pi rl$ πrl $\pi(r_1+r_2)l$

知识点 4 Sh $\frac{1}{3}Sh$ $4\pi R^2$ $\frac{4}{3}\pi R^3$

链教材·夯基固本

- 1. C** [由于平面 $ABFEA' \parallel$ 平面 $DCGHD'$, 且 $AD, BC, FG, EH, A'D'$ 相互平行且相等, 所以剩下的几何体是五棱柱, 故选 C.]
- 2. D** [由直观图的画法规则知, 角度、长度都有可能改变, 而线段的平行关系不变, 正方形的直观图是平行四边形, 故选 D.]
- 3. B** [设圆锥的底面圆的半径为 r , 母线长为 l , 因为侧面展开图是一个半圆, 所以 $\pi l = 2\pi r$, 即 $l = 2r$, 所以 $\pi r^2 + \pi rl = \pi r^2 + \pi r \cdot 2r = 3\pi r^2 = 12\pi$, 解得 $r = 2(\text{cm})$.]
- 3** [设球的半径为 R , 由题意得 $\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2$, 解得 $R = 3$.]
- 5. A** [由常用结论 2 知, $S_{\triangle AOB} = 2\sqrt{2} \times S_{\triangle A'O'B'} = 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 45^\circ = 4$, 故选 A.]

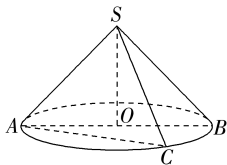
考点深研·题型突破

考点一

考向 1 典例 1 AD [由圆台定义知, 以直角梯形垂直于底边的腰所在直线为旋转轴, 其余三边旋转一周形成的面围成的旋转体是圆台, 故 A 正确;

底面是正多边形的棱锥, 不能保证顶点在底面上的射影为底面正多边形的中心, 故 B 错误;

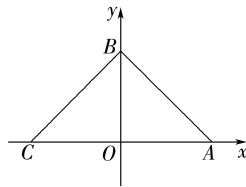
对于 C, 如图, 在圆锥 SO 中, 经过圆锥顶点的平面截圆锥所得截面一定是等腰三角形,



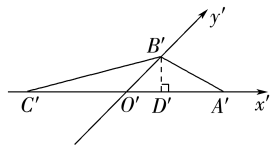
设截面为 $\triangle SAC$, 设 AB 为底面圆 O 的一条直径, 若 $\angle ASB$ 为钝角, 则当 $SA \perp SC$ 时, 截面三角形的面积最大, C 错误;

棱台是由平行于棱锥底面的平面截得的, 故棱台的各侧棱延长后必交于一点, 故 D 正确.]

考向 2 典例 2 D [根据斜二测画法还原图形, 如图:



则 $AO = A'O', CO = C'O', BO = 2B'O', BO \perp AC$, 易知 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 故 A、C 错误; 由题意, 过 B' 作 $B'D' \perp A'C'$, 垂足为 D' , 如图,



则 $B'D' = B'O' \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BO = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$,

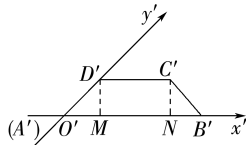
$S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot A'C' \cdot B'D' = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$,

则 $S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{2} S_{\triangle A'B'C'}$, 故 B 错误;

$\triangle ABC$ 的周长 $AB + AC + BC = AC + \sqrt{AO^2 + BO^2} + \sqrt{CO^2 + BO^2} = 4 + 4\sqrt{2}$, 故 D 正确, 故选 D.]

多维变迁

BC [由题意可画出其直观图如下,



其中 $A'B' \parallel C'D'$, $A'B' = AB = 4$, $C'D' = CD = 2$, $A'D' = \frac{1}{2}AD = \sqrt{2}$, 故 A 错误, B 正确;

过点 D', C' 分别作 $D'M \perp A'B', C'N \perp A'B'$, 垂足分别为点 M, N , 故 $A'M = D'M = C'N = A'D' \sin 45^\circ = 1$, $NB' = A'B' - C'D' - A'M = 1$,

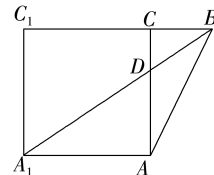
故 $B'C' = \sqrt{2}$, 则四边形 $A'B'C'D'$ 为等腰梯形, 故 C 正确;

故四边形 $A'B'C'D'$ 的周长为 $4 + 2 + 2\sqrt{2} = 6 + 2\sqrt{2}$, 故 D 错误.

故选 BC.]

考向 3 典例 3 D [第 1 步 确定展开方式: 找路径两 endpoint 所在平面的公共棱、端点所在棱或所在的母线, 确定展开方式.

将平面 ABC 、平面 AA_1C_1C 沿 AC 翻折至同一平面, 如图所示.



第2步 确定最小值:分别计算不同展开方式中两端点的连线长度,其最小值为最短路径的长.

则当 A_1, B, D 三点共线时, $A_1D + DB$ 取最小值,

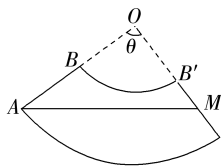
因为 $A_1C_1 = CC_1 = 4, BC = 2$, 且 $\angle ACB = \angle ACC_1 = 90^\circ$, 延展后, B, C, C_1 共线, 所以 $BC_1 = 2 + 4 = 6, A_1C_1 = 4, \angle A_1C_1B = 90^\circ$,

由勾股定理, 得 $A_1B = \sqrt{A_1C_1^2 + BC_1^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$.

故 $A_1D + DB$ 的最小值为 $2\sqrt{13}$. 故选 D.]

多维变迁

B [如图, 绳子的最短长度为侧面展开图中 AM 的长度.]



因为圆台的上、下底面半径分别为 1 cm, 3 cm,

$$\text{所以 } \frac{OB}{OB+AB} = \frac{1}{3},$$

母线长 $AB = 12$ cm, 代入可得 $OB = 6$ cm,

所以 $OA = 18$ cm, $OM = 12$ cm, 设 $\angle BOB' = \theta$,

$$\text{由 } 2 \times 1 \times \pi = OB \cdot \theta,$$

$$\text{解得 } \theta = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{所以 } AM = \sqrt{OA^2 + OM^2 - 2OA \cdot OM \cdot \cos \theta}$$

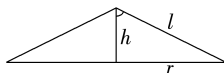
$$= \sqrt{18^2 + 12^2 - 2 \times 18 \times 12 \times \frac{1}{2}} = 6\sqrt{7} \text{ (cm)},$$

即绳子的最短长度为 $6\sqrt{7}$ cm.

故选 B.]

考点二

考向 1 典例 4 (1)A (2)D [(1)根据题意, 如图所示为该组合体上半部分圆锥轴截面,



由于其母线长为 $2\sqrt{3}$ m, 轴截面是面积为 $3\sqrt{3}$ m² 的等腰钝角三角形,

$$\text{则有 } \begin{cases} h^2 + r^2 = 12, \\ \frac{1}{2} \times 2r \times h = 3\sqrt{3}, \\ r > h, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} r = 3, \\ h = \sqrt{3}, \end{cases}$$

则上半部分圆锥的侧面积 $S_1 = \pi r l = 6\sqrt{3}\pi$,

下半部分圆柱的侧面积 $S_2 = 2\pi r \times 2.5 = 15\pi$,

则该组合体的表面积(不含底面) $S = S_1 + S_2 = (6\sqrt{3} + 15)\pi$.

故选 A.

(2) 设 $A_1B_1 = a$, 则 $AB = 2a$, 如图,

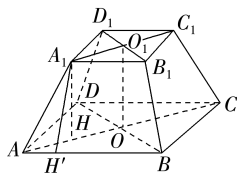
连接 AC, BD 交于点 O , 连接 A_1C_1 ,

B_1D_1 交于点 O_1 , 连接 OO_1 , 由正四

棱台的几何性质可知 O_1, O 分别是

上、下底面的中心, 所以 $OO_1 \perp$ 平面

$ABCD, OO_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 所以 OO_1 为正四棱台的高 h ,



由题可知 $h = 2\sqrt{2}$. 过点 A_1 作 $A_1H \perp AO$ 交 AO 于点 H , 则

$$h^2 + (AO - A_1O_1)^2 = AA_1^2, \text{ 即 } h^2 + \left(\sqrt{2}a - \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = (2\sqrt{3})^2,$$

解得 $a = 2\sqrt{2}$. 过点 A_1 作 $A_1H' \perp AB$ 交 AB 于点 H' , 则

A_1H' 为斜高, 此时 $A_1H' = \sqrt{12 - 2} = \sqrt{10}$, 所以正四棱台的

$$\text{表面积 } S = 4 \times \frac{(2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) \times \sqrt{10}}{2} + (2\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2 = 40 +$$

$$24\sqrt{5}. \text{ 故选 D.}]$$

多维变迁

B [由题意作出示意图如图所示,

则球的半径为 $OA = OB$, 由题意可得

$$\angle OAB = \frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } \triangle OAB \text{ 是等边三}$$

角形,

$$\text{所以 } \angle AOB = \frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } \angle O_1OB$$

$$= \frac{\pi}{6},$$

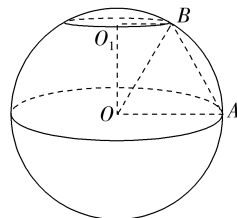
因为球 O 的表面积为 4π , 所以 $4\pi \times OA^2 = 4\pi$, 解得 $OA = 1$, 所以

$$OB = AB = 1,$$

$$\text{所以 } O_1B = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以圆台的侧面积为 } \pi \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times 1 = \frac{3\pi}{2}.$$

故选 B.]



考向 2 典例 5 (1) $\frac{2}{3}$ 1 (2)C [(1)设圆锥的底面半径为

r , 球的半径为 R ,

因为圆锥的轴截面为正三角形, 所以圆锥的高 $h = \sqrt{3}r$, 母线长

$$l = 2r, \text{ 由题可知, } h = 2R, \text{ 所以球的半径 } R = \frac{\sqrt{3}}{2}r,$$

$$\text{所以圆锥的体积为 } V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 \times \sqrt{3}r = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3,$$

$$\text{球的体积 } V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi r^3,$$

$$\text{所以 } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3}{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi r^3} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{圆锥的表面积 } S_1 = \pi r l + \pi r^2 = 3\pi r^2,$$

$$\text{球的表面积 } S_2 = 4\pi R^2 = 4\pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2 = 3\pi r^2,$$

$$\text{所以 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi r^2}{3\pi r^2} = 1.$$

(2) 法一(补形法): 如图 1, 用一个完全相同的五面体

$HIJLMN$ 与该五面体相嵌, 因为 $AD \parallel BE \parallel CF$, 且两两之间的

距离为 1, $AD = 1, BE = 2, CF = 3$, 则形成的新组合体为一个

三棱柱, 且该三棱柱的直截面(与侧棱垂直的截面)为边长为 1

$$\text{的等边三角形, 该截面的面积为 } \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ 侧棱长}$$

$$\text{为 } 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1 = 4, \text{ 所以该五面体的体积为 } V_{ABC-DEF} =$$

$$\frac{1}{2}V_{ABC-HIJ} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

法二(补形法):如图 2, 延长 AD 到点 G , 使 $DG=2$, 延长 BE 到点 H , 使 $EH=1$, 连接 AF, BF , 可得 $AG=BH=CF=3$, 结合 $AG \parallel BH \parallel CF$, 可知多面体 $ABC-GHF$ 为三棱柱. 因为四边形 $ABED$ 与四边形 $HGDE$ 全等, 所以 $V_{F-ABED} = V_{F-HGDE} = \frac{1}{3}V_{ABC-GHF}$. 由 $AG \parallel BH \parallel CF$, 且它们两两之间的距离为 1, 得当三棱柱 $ABC-GHF$ 为正三棱柱时, 底面边长为 1, 高为 3, 此时 $V_{ABC-GHF} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 \times 3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. 根据棱柱的性质, 若三棱柱 $ABC-GHF$ 为斜三棱柱, 则体积也是 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, 所以 $V_{F-ABED} = V_{F-HGDE} = \frac{1}{3}V_{ABC-GHF} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 所以该五面体的体积 $V = V_{ABC-GHF} - V_{F-HGDE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

法三(分割法):因为 AD, BE, CF 两两平行, 且两两之间的距离为 1, 过点 D 作与 AB, AC 平行的直线分别交 BE, CF 于点 P, Q (图略), 则该五面体可以分成一个侧棱长为 1 的三棱柱 $ABC-DPQ$ 和一个底面为梯形的四棱锥 $D-PQFE$, 其中三棱柱的体积等于棱长均为 1 的直三棱柱的体积, 四棱锥的高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 底面是上底为 1, 下底为 2, 高为 1 的梯形, 故该五面体的体积为 $V = \left(\frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 1 + \frac{1}{3} \times \left[\frac{1}{2} \times (1+2) \times 1\right] \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

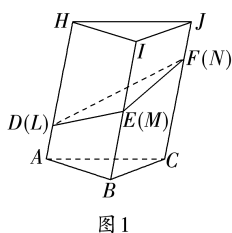


图 1

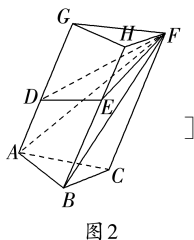


图 2

微点突破

典例 6 解:法一(直接法):如图 1, 取 BC 的中点 D , 连接 AD, PD , 过点 P 作 $PO \perp AD$ 于点 O ,

由题意可得 $BC \perp AD, BC \perp PD$.

因为 $AD \cap PD = D, AD, PD \subset$ 平面 PAD ,

所以 $BC \perp$ 平面 PAD .

又 $BC \subset$ 平面 ABC , 所以平面 $PAD \perp$ 平面 ABC .

因为平面 $PAD \cap$ 平面 $ABC = AD, PO \perp AD, PO \subset$ 平面 PAD ,

所以 $PO \perp$ 平面 ABC ,

即 PO 为三棱锥 $P-ABC$ 的高.

因为 $AB=AC=2, \angle BAC=60^\circ$,

所以 $BC=2, AD=\sqrt{3}$.

又 $PA=1, \angle PAC=\angle PAB=60^\circ$,

所以 $PB=PC=\sqrt{3}$, 所以 $PD=\sqrt{2}$,

所以 $AD^2=PA^2+PD^2$, 所以 $AP \perp PD$.

由 $PA \cdot PD=PO \cdot AD$,

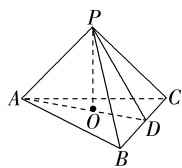


图 1

$$\text{得 } PO = \frac{PA \cdot PD}{AD},$$

$$\text{所以 } V_{\text{三棱锥 } P-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot PO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} BC \cdot AD \cdot \frac{PA \cdot PD}{AD} = \frac{1}{6} \times 2 \times 1 \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

法二(等积转换法):在 $\triangle PAB$ 中, 由余弦定理, 得 $PB^2 = PA^2 + AB^2 - 2PA \cdot AB \cdot \cos \angle PAB = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \cos 60^\circ = 3$.

$$\text{所以 } AB^2 = PA^2 + PB^2,$$

所以 $PA \perp PB$.

同理可得 $PA \perp PC$, 故 $PA \perp$ 平面 PBC .

因为 $AB=AC=2, \angle BAC=60^\circ$,

所以 $\triangle ABC$ 为正三角形, $BC=2$.

如图 1, 取 BC 的中点 D , 连接 PD ,

$$\text{则 } PD = \sqrt{PB^2 - BD^2} = \sqrt{3 - 1} = \sqrt{2}.$$

$$\text{所以 } S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} BC \cdot PD = \sqrt{2},$$

$$\text{所以 } V_{\text{三棱锥 } A-PBC} = \frac{1}{3} S_{\triangle PBC} \cdot PA = \frac{1}{3} \times \sqrt{2} \times 1 = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{所以 } V_{\text{三棱锥 } P-ABC} = V_{\text{三棱锥 } A-PBC} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

法三(割补法):如图 2, 分别取 AB, AC

的中点 M, N , 连接 PM, PN, MN , 则

$$PA=AM=AN=1,$$

由 $\angle PAB=\angle PAC=\angle BAC=60^\circ$, 得

$$PM=PN=MN=1,$$

所以三棱锥 $P-AMN$ 是一个棱长为 1

的正四面体.

$$\text{则 } V_{\text{三棱锥 } P-AMN} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle AMN} \cdot h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin 60^\circ \times$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{12},$$

$$\text{所以 } V_{\text{三棱锥 } P-ABC} = 4V_{\text{三棱锥 } P-AMN} = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

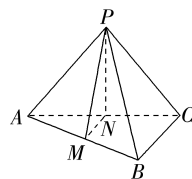


图 2

课堂·对点检测

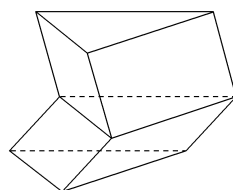
1. C [依题意, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC \perp AC, BC=2B'C'=4, AC=A'C'=3$, 所以 $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

故选 C.]

2. ABD [选项 A: 圆柱的侧面展开图是一个矩形, A 正确;

选项 B: 棱台的侧面一定是梯形, 而不是平行四边形, 故 B 正确.

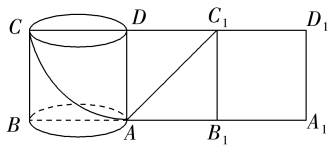
选项 C: 有两个面互相平行, 其余各面都是四边形的多面体不一定是棱柱, 如图所示, 故 C 错误;



选项 D: 球体是旋转体的一种类型, D 正确.

故选 ABD.]

3. C [如图,在圆柱侧面展开图中,线段 AC_1 的长度即为所求.]



在 $\text{Rt}\triangle AB_1C_1$ 中, $AB_1 = \pi \cdot \frac{2}{\pi} = 2(\text{cm})$, $B_1C_1 = 2 \text{ cm}$, 所以 $AC_1 = 2\sqrt{2} \text{ cm}$. 故选 C.]

4. CD [圆柱的侧面积为 $2\pi R \times 2R = 4\pi R^2$, 故 A 错误; 圆锥的母线长为 $\sqrt{R^2 + (2R)^2} = \sqrt{5}R$, 圆锥的侧面积为 $\pi R \times \sqrt{5}R = \sqrt{5}\pi R^2$, 故 B 错误; 球的表面积为 $4\pi R^2$, 所以圆柱的侧面积与球的表面积相等, 故 C 正确; 圆柱的体积为 $\pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3} \times \pi R^2 \times 2R = \frac{2\pi}{3}R^3$, 球的体积为 $\frac{4\pi}{3}R^3$, 所以圆柱、圆锥、球的体积之比为 $2\pi R^3 : \frac{2\pi}{3}R^3 : \frac{4\pi}{3}R^3 = 3 : 1 : 2$, 故 D 正确. 故选 CD.]

5. $\frac{2}{9}$ [因为在三棱锥 $P-ABC$ 中, 线段 PC 上的点 M 满足 $PM = \frac{1}{3}PC$, 线段 PB 上的点 N 满足 $PN = \frac{2}{3}PB$, 所以 $S_{\triangle PMA} = \frac{1}{3}S_{\triangle PAC}$,

设 N 到平面 PAC 的距离为 d_1 , B 到平面 PAC 的距离为 d_2 , 则 $d_1 = \frac{2}{3}d_2$,

则三棱锥 $P-AMN$ 的体积 $V_{\text{三棱锥}P-AMN} = V_{\text{三棱锥}N-APM} = \frac{1}{3}S_{\triangle PAM} \cdot d_1$.

$d_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times S_{\triangle PAC} \times \frac{2}{3}d_2 = \frac{2}{9}V_{\text{三棱锥}B-PAC}$.

故三棱锥 $P-AMN$ 和三棱锥 $P-ABC$ 的体积之比为 $\frac{2}{9}$.]

* 第 51 课时 与球有关的切、接问题(进阶课)

类型一

考向 1 典例 1 (1)C (2) $\frac{32\pi}{3}$ [(1)设球的半径为 r ,

所以球的体积为 $\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi$, 所以 $r = 3$,

因为正方体的顶点都在球面上, 正方体的棱长为 a , 所以 $3a^2 = (2r)^2 = 36$, 解得 $a = 2\sqrt{3}$.

故选 C.

(2)第 1 步 补形: 若为棱柱或圆柱, 则无需补形; 若棱锥中有侧棱垂直于底面, 则补形为棱柱.

根据题意及正弦定理可得上、下底面三角形的外接圆的半径为

$\frac{\sqrt{3}}{2\sin \frac{\pi}{3}} = 1$, 又 $AA_1 = 2\sqrt{3}$,

第 2 步 定外心、定球心: 确定上、下底面的外心及外接球球心, 连出直角三角形.

且其外接球的球心为上、下底面三角形外心连线的中点.

第 3 步 用勾股定理: $R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$ (r 为底面外接圆半径, h 为柱体高, R 为外接球半径).

设外接球的半径为 R ,

则根据勾股定理可得 $1^2 + (\sqrt{3})^2 = R^2$, 所以 $R = 2$,

所以该三棱柱的外接球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 8 = \frac{32\pi}{3}$.]

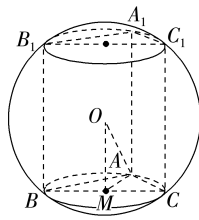
母题探究

$\frac{13}{2}$ [如图所示, 过球心 O 作平面 ABC 的垂线, 则垂足为 BC 的中点 M .

易得 $BC = 5$, 又 $AM = \frac{1}{2}BC = \frac{5}{2}$,

$OM = \frac{1}{2}AA_1 = 6$, 所以球 O 的半径 $R =$

$OA = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6^2} = \frac{13}{2}$.]



考向 2 典例 2 (1)A (2)B (3)BD

[(1)设圆锥的高为 h , 因为圆锥的体积为 3π , 所以 $\frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times h = 3\pi$, 解得 $h = 1$, 设圆锥的外接球的半径为 R , 可得 $R^2 = r^2 + (R-h)^2$, 即 $R^2 = 3^2 + (R-1)^2$, 解得 $R = 5$, 所以外接球的表面积为 $S = 4\pi R^2 = 4\pi \times 5^2 = 100\pi$. 故选 A.

(2)第 1 步 将几何体放入长方体中: 几何体的顶点作为长方体的顶点.

因为在三棱锥 $S-ABC$ 中, $SA \perp$ 平面 ABC , $AB \perp BC$, $SA = AB = \sqrt{2}$, $BC = 2$,

第 2 步 确定长方体的长、宽、高的长度.

所以三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的直径

$2R$ 即为长、宽、高分别为 $\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2$ 的长方体的体对角线长, 如图所示.

第 3 步 求长方体的外接球半径.

$(2R)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

所以 $(2R)^2 = 2 + 2 + 4 = 8$,

所以三棱锥的外接球的表面积为 $4\pi R^2 = 8\pi$. 故选 B.

(3)设该正四棱台外接球的球心为 O , 半径为 R , 则 $4\pi R^2 = 100\pi$, 解得 $R = 5$. 设上底面正方形 $ABCD$ 的中心为 M , 下底面正方形 $EFGH$ 的中心为 N . 如图 1, 若球心在正四棱台的内部, 连接 OA, OE, AM, EN, OM, ON , 则 MN 为正四棱台的高, $OA = OE = 5$, 可得 $AM = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = 3$, 同理 $NE = 4$. 由勾股定理得 $OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, $ON = \sqrt{OE^2 - NE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$, 可得正四棱台的高 $h = MN = 4 + 3 = 7$, 正四棱台的体积 $V = \frac{1}{3} \times (18 + 32 + \sqrt{18 \times 32}) \times 7 = \frac{518}{3}$. 如图 2, 若球心在正四棱台的外部, 可得正四棱台的高 $h = OM - ON = 4 - 3 = 1$, 所以正四棱台的体积 $V = \frac{1}{3} \times (18 + 32 + \sqrt{18 \times 32}) \times 1 = \frac{74}{3}$. 故选 BD.

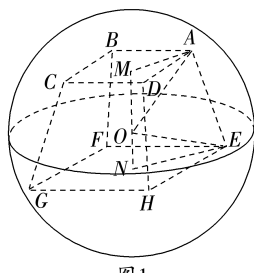
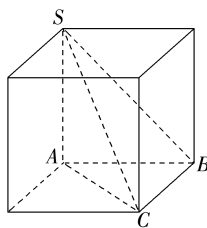


图 1

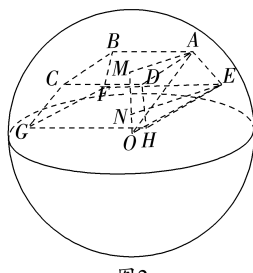


图 2

母题探究

1. 8 π [将三棱锥 $S-ABC$ 放入长方体中, 设长方体的长、宽、高分别为 a, b, c , 如图所示,

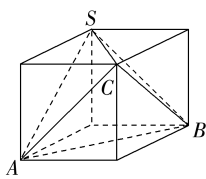
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 5, \\ a^2 + c^2 = 7, \\ b^2 + c^2 = 4, \end{cases}$$

所以 $a^2 + b^2 + c^2 = 8$,

因为外接球 O 的直径即为长方体的对角线,

则球 O 的半径为 $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2} = \sqrt{2}$,

所以球 O 的表面积为 $4\pi \times (\sqrt{2})^2 = 8\pi$.]



2. 3 [依题意, 得该正四棱锥底面对角线的长为 $3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 6$,

高为 $\sqrt{(3\sqrt{2})^2 - (\frac{1}{2} \times 6)^2} = 3$,

因此底面中心到各顶点的距离均等于 3, 所以该正四棱锥的外接球的球心即为底面正方形的中心, 其外接球的半径为 3.]

类型二

典例 3 (1)D (2)B [(1)圆锥的侧面展开图是一个半径为 3, 圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的扇形,

由题意得, 扇形的弧长 $l = 3 \times \frac{2\pi}{3} = 2\pi$,

所以该圆锥的底面圆的半径 $r = \frac{l}{2\pi} = 1$,

所以该圆锥的高 $h = \sqrt{3^2 - r^2} = 2\sqrt{2}$.

设该圆锥内的球的最大半径为 R , 圆锥的轴截面如图所示,

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times$

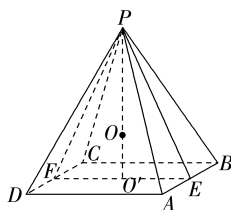
$(3+3+2) \times R$, 所以 $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以该球的体积 V 的最大值是

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \pi.$$

故选 D.

(2)作出示意图如图所示.

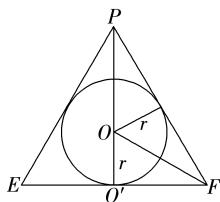


设正四棱锥内切球球心为 O , 底面正方形的中心为 O' , 则 O 在 PO' 上, 设内切球半径为 r ,

取 AB 中点 E , CD 中点 F , 则正四棱锥 $P-ABCD$ 内切球半径即为 $\triangle PEF$ 的内切圆半径,

因为底面边长为 3,

所以 $EF = 3$, $O'F = \frac{1}{2} EF = \frac{3}{2}$,



因为高为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 即 $PO' = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

则 $PE = PF = 3$,

所以 $OF = OP = PO' - OO' = \frac{3\sqrt{3}}{2} - r$,

在 $\text{Rt}\triangle OO'F$ 中, $O'O^2 + O'F^2 = OF^2$,

即 $r^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - r\right)^2$, 解得 $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以正四棱锥 $P-ABCD$ 内切球的体积为 $\frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi$. 故选 B.]

微点突破

技法 1 典例 4 $\frac{2\pi}{3}(16\sqrt{7} + 24\sqrt{3})$

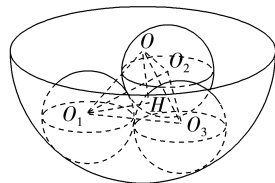
[如图, 取半球的球心为 O , 三个小球的球心分别为 O_1, O_2, O_3 , 连接 $OO_1, OO_2, OO_3, O_1O_2, O_1O_3, O_2O_3$,

则有 $O_1O_2 = O_2O_3 = O_1O_3 = 2\sqrt{3}$, 取 $\triangle O_1O_2O_3$ 的重心 H , 连接 OH, O_1H , 则 $OH = \sqrt{3}$.

在 $\triangle O_1O_2O_3$ 中, 易求得 $O_1H = \frac{2}{3} \times 2\sqrt{3} \times \sin \frac{\pi}{3} = 2$,

则 $OO_1 = \sqrt{OH^2 + O_1H^2} = \sqrt{3+4} = \sqrt{7}$, 所以半球的半径 $R = \sqrt{3} + \sqrt{7}$,

所以半球的容积 $V = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi (\sqrt{3} + \sqrt{7})^3 = \frac{2\pi}{3} (3\sqrt{3} + 9\sqrt{7} + 21\sqrt{3} + 7\sqrt{7}) = \frac{2\pi}{3} (16\sqrt{7} + 24\sqrt{3})$.]



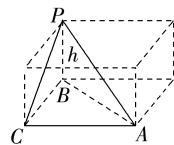
技法 2 典例 5 A $[AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} =$

$\sqrt{3}$, 设 $PB = h$, 则由 $PA = 2PB$, 可得

$\sqrt{3+h^2} = 2h$, 解得 $h = 1$, 可将三棱锥

$P-ABC$ 还原成如图所示的长方体, 则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球即为长方体的外接球, 设外接球的半径为 R , 则 $2R = 2, R =$

1 , 所以其外接球的体积 $V = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3}$. 故选 A.]



第 52 课时 空间点、直线、平面之间的位置关系

理法先行 · 题练固本

梳必备 · 破题有方

知识点 1 (1)不在一条直线上 两个点 过该点的公共直线

(2)一条直线 两条相交 两条平行

知识点 3 (1)平行 (2)相等或互补

链教材 · 夯基固本

1. D [对于 A, 三个不在同一条直线上的点确定一个平面, 故 A 错误. 对于 B, 直线和直线外一点, 确定一个平面, 故 B 错误. 对于 C, 因为圆的一条直径不能确定一个平面, 所以若圆心和圆上的两点在同一条直径上, 则无法确定一个平面, 故 C 错误. 对于 D, 两条平行直线确定一个平面, 梯形有一组对边平行, 另一组对边不平行, 故梯形可确定一个平面, 故 D 正确.]

2. D [$\because \alpha // \beta, \therefore a$ 与 b 无公共点, $\therefore a$ 与 b 可能平行, 也可能是异面直线.]

3. (1) $AC=BD$ (2) $AC=BD$ 且 $AC \perp BD$

[(1) 要使四边形 $EFGH$ 为菱形, 应有 $EF=EH$,

$$\therefore EF \perp \frac{1}{2}AC, EH \perp \frac{1}{2}BD, \therefore AC=BD.$$

(2) 要使四边形 $EFGH$ 为正方形,

应有 $EF=EH$ 且 $EF \perp EH$,

$$\therefore EF \perp \frac{1}{2}AC, EH \perp \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore AC=BD \text{ 且 } AC \perp BD.]$$

4. D [连接 BD (图略), 由于 $AA_1 \parallel DD_1$, 所以 $\angle DD_1B$ 即为直线 BD_1 与直线 AA_1 所成的角,

不妨设正方体的棱长为 a , 则 $BD = \sqrt{2}a$, $BD_1 = \sqrt{D_1D^2 + BD^2} = \sqrt{3}a$,

$$\text{所以 } \cos \angle DD_1B = \frac{DD_1}{D_1B} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.]$$

5. C [与直线 BC_1 成异面直线的有 A_1B_1, AC, AA_1 , 共 3 条. 故选 C.]

考点深研 · 题型突破

考点一

典例 1 证明: (1) 如图所示, 连接 B_1D_1 .

因为 EF 是 $\triangle D_1B_1C_1$ 的中位线,

所以 $EF \parallel B_1D_1$.

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $B_1D_1 \parallel BD$,

所以 $EF \parallel BD$, 所以 EF, BD 确定一个平面,

即 D, B, E, F 四点共面.

(2) 设 A_1, C, C_1 确定的平面为 α , 平面 $BDEF$ 记为 β .

因为 $Q \in A_1C_1$, 所以 $Q \in \alpha$.

又 $Q \in EF$, 所以 $Q \in \beta$,

所以 Q 是 α 与 β 的公共点,

同理, P 是 α 与 β 的公共点.

所以 $\alpha \cap \beta = PQ$.

又 $A_1C \cap \beta = R$, 所以 $R \in A_1C, R \in \alpha$, 且 $R \in \beta$.

则 $R \in PQ$, 故 P, Q, R 三点共线.

(3) 因为 $EF \parallel BD$ 且 $EF < BD$,

所以 DE 与 BF 相交,

设交点为 M , 则由 $M \in DE, DE \subset \text{平面 } D_1DCC_1$ 得 $M \in \text{平面 } D_1DCC_1$, 同理, $M \in \text{平面 } B_1BCC_1$.

又平面 $D_1DCC_1 \cap \text{平面 } B_1BCC_1 = CC_1$,

所以 $M \in CC_1$.

所以 DE, BF, CC_1 三线交于一点.

考点二

典例 2 (1) ABD (2) CD [(1) 对于 A, 因为 $M \in \alpha, M \in \beta, \alpha \cap \beta = l$, 由基本事实 3 可知 $M \in l$, A 正确;

对于 B, 若 $a \subset \alpha, b \subset \beta, \alpha \cap \beta = A$, 则 $A \in \alpha, A \in \beta$, 因为 $\alpha \cap \beta = l$, 所以 $A \in l$, B 正确;

对于 C, 若 $l \cap \alpha = A$, 则有 $l \not\subset \alpha, A \in l$, 但 $A \in \alpha$, C 错误;

对于 D, 有三个不共线的点在平面 α, β 中, 故 α, β 重合, D 正确.

故选 ABD.

(2) 因为点 A 在平面 CDD_1C_1 外, 点 M 在平面 CDD_1C_1 内, 直线 CC_1 在平面 CDD_1C_1 内, CC_1 不过点 M, 所以直线 AM 与 CC_1 是异面直线, 故 A 错误; 取 DD_1 的中点 E, 连接 AE (图略), 则 $BN \parallel AE$, 但 AE 与 AM 相交, 所以 AM 与 BN 不平行, 故 B 错误; 因为点 B_1 与直线 BN 都在平面 BCC_1B_1 内, 点 M 在平面 BCC_1B_1 外, BN 不过点 B_1 , 所以 BN 与 MB_1 是异面直线, 故 C 正确; 同理 D 正确. 故选 CD.]

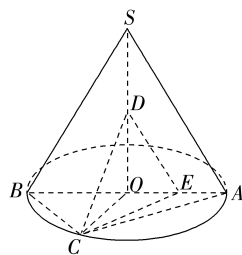
考点三

典例 3 (1) C (2) C [(1) 取 OA 的中点 E, 连接 DE, CE,

因为 D 为 SO 的中点, 所以 $DE \parallel SA$,

则直线 CD 与 AS 所成的角为 $\angle CDE$ (或其补角), 不妨设 $AB=2$,

又圆锥的轴截面 SAB 是正三角形, O 为底面圆的圆心, D 为 SO 的中点, 点 C 在底面圆的圆周上, 且 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形,



$$\text{则 } DE = \frac{1}{2} \times 2 = 1, CE = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$CD = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

在 $\triangle CDE$ 中, 由余弦定理的推论, 得

$$\cos \angle CDE = \frac{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + 1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2 \times \frac{\sqrt{7}}{2} \times 1} = \frac{3\sqrt{7}}{14},$$

即直线 CD 与 AS 所成角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{7}}{14}$.

故选 C.

(2) 法一: 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的一侧补上一个相同的长方体 $CDEF-C_1D_1E_1F_1$, 连接 DE_1, B_1E_1 .

易知 $AD_1 \parallel DE_1$, 则 $\angle B_1DE_1$ (或其补角) 为异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角.

因为在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

$$AB=BC=1, AA_1=\sqrt{3},$$

$$\text{所以 } DE_1 = \sqrt{DE^2 + EE_1^2}$$

$$= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2,$$

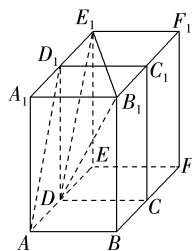
$$DB_1 = \sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{5},$$

$$B_1E_1 = \sqrt{A_1B_1^2 + A_1E_1^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

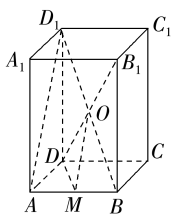
在 $\triangle B_1DE_1$ 中, 由余弦定理的推论,

$$\text{得 } \cos \angle B_1DE_1 = \frac{2^2 + (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \times 2 \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

即异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.



法二:如图,连接 BD_1 , 交 DB_1 于点 O , 取 AB 的中点 M , 连接 DM, OM . 易知 O 为 BD_1 的中点, 所以 $AD_1 \parallel OM$, 则 $\angle MOD$ (或其补角) 为异面直线 AD_1 与 DB_1 所成的角. 因为在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=BC=1, AA_1=\sqrt{3}$,



所以 $AD_1 = \sqrt{AD^2 + DD_1^2} = 2$,

$$DM = \sqrt{AD^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$DB_1 = \sqrt{AB^2 + AD^2 + BB_1^2} = \sqrt{5},$$

所以 $OM = \frac{1}{2}AD_1 = 1, OD = \frac{1}{2}DB_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 在 $\triangle DMO$ 中, 由余弦定理的推论,

$$\cos \angle MOD = \frac{1^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2 \times 1 \times \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

即异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$. 故选 C.]

多维变迁

1. D [如图所示, 连接 CD_1, AD_1 , 根据长方体的性质易知 $BC_1 \parallel AD_1$,

所以 $\angle D_1AC$ (或其补角) 为异面直线 AC 与 BC_1 所成的角,

不妨设 $AA_1 = AD = 2AB = 2a$,

在 $\triangle D_1AC$ 中, $AD_1 = 2\sqrt{2}a, D_1C = AC = \sqrt{5}a$,

所以由余弦定理的推论, 得

$$\begin{aligned} \cos \angle D_1AC &= \frac{AD_1^2 + AC^2 - CD_1^2}{2AD_1 \cdot AC} \\ &= \frac{(2\sqrt{2}a)^2 + (\sqrt{5}a)^2 - (\sqrt{5}a)^2}{2 \times 2\sqrt{2}a \times \sqrt{5}a} = \frac{\sqrt{10}}{5}, \end{aligned}$$

所以异面直线 AC 与 BC_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

故选 D.]

2. D [如图, 过点 M 作 AO 的平行线

ME 交 OC 于点 E , 连接 EN, ON, MO ,

则 $\angle NME$ (或其补角) 为直线 MN 与 AO 所成的角,

设球的半径为 2, 则 $AO = OM = ON = 2$,

因为 M 为 $\widehat{AC}$ 的中点, 所以 $\angle MOE = 45^\circ$,

又 $ME \parallel AO, AO$ 垂直于底面, 所以 ME 垂直于底面, $ME \perp OE, ME \perp EN$,

则 $ME = OE = \frac{\sqrt{2}}{2}OM = \sqrt{2}$, 所以 $EN = \sqrt{OE^2 + ON^2} = \sqrt{6}$,

所以 $\tan \angle NME = \frac{EN}{ME} = \sqrt{3}$.

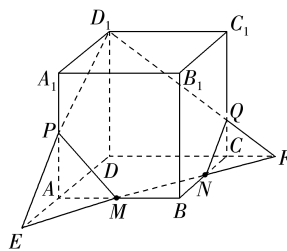
故选 D.]

微点突破

典例 4 $\frac{7\sqrt{17}}{6}$ [在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 设直线 MN 与直线 DA, DC 分别交于 E, F ,

连接 D_1E, D_1F , 分别与 AA_1, CC_1 交于点 P, Q , 连接 PM, QN ,

则五边形 D_1PMNQ 是过 M, N, D_1 的正方体的截面 α ,



由 M 为 AB 中点, N 为 BC 中点,

得 $AM = BM = BN = CN = 1, AE = AM = 1, CF = CN = 1$,

所以 $\frac{AP}{DD_1} = \frac{AE}{ED} = \frac{1}{3}$, 即 $AP = \frac{2}{3}$,

同理 $CQ = \frac{2}{3}, D_1E = D_1F = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}, EF = 3EM = 3\sqrt{2}$,

$$PE = PM = QN = QF = \sqrt{1^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{3},$$

在等腰 $\triangle D_1EF$ 中,

$$\cos \angle D_1EF = \frac{\frac{1}{2}EF}{D_1E} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{13}},$$

$$\begin{aligned} \sin \angle D_1EF &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle D_1EF} = \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{13}}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{34}}{2\sqrt{13}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle D_1EF} &= \frac{1}{2}EF \cdot D_1E \cdot \sin \angle D_1EF = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{13} \times \frac{\sqrt{34}}{2\sqrt{13}} \\ &= \frac{3\sqrt{17}}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle PEM} &= \frac{1}{2}EM \cdot PE \cdot \sin \angle D_1EF = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{13}}{3} \times \frac{\sqrt{34}}{2\sqrt{13}} \\ &= \frac{\sqrt{17}}{6}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以截面 } \alpha \text{ 的面积 } S &= S_{\triangle D_1EF} - 2S_{\triangle PEM} = \frac{3\sqrt{17}}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{17}}{6} \\ &= \frac{7\sqrt{17}}{6}. \end{aligned}$$

随堂·对点检测

1. C [对于 A, 由线面垂直的性质得: 垂直于同一个平面的两条直线平行, 故 A 正确;

对于 B, 由平面的基本性质得: 经过一条直线和这条直线外一点, 有且只有一个平面, 故 B 正确;

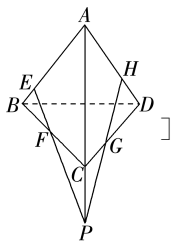
对于 C, 由等角定理得: 如果空间中两个角的两条边分别对应平行, 那么这两个角相等或互补, 故 C 错误;

对于 D, 如果两个不重合的平面有一个公共点, 则两个平面必交于一条直线, 且公共点在该直线上,

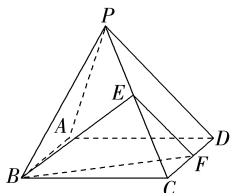
所以它们有且只有一条过该点的公共直线, 故 D 正确.

故选 C.]

2. A [如图,因为 $EF \subset \text{平面 } ABC$, 而 $GH \subset \text{平面 } ADC$, 且 EF 和 GH 相交于点 P , 所以点 P 在两平面的交线上, 因为 AC 是两平面的交线, 所以点 P 必在直线 AC 上.]



3. C [取 CD 的中点 F , 连接 EF, BF, BE ,



因为 E, F 分别是棱 PC, CD 的中点, 所以 $EF \parallel PD, EF = \frac{1}{2}PD$, 则 $\angle BEF$ (或其补角) 是异面直线 PD 与 BE 所成的角.

设 $AB = BC = 2$, 则 $PD = PA = 3AB = 6, CF = 1$,

则 $EF = \frac{1}{2}PD = 3, BF = \sqrt{BC^2 + CF^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$,

因为 $PB = PC = 6, BC = 2$, 所以 $\cos \angle PCB = \frac{36+4-36}{2 \times 2 \times 6} = \frac{1}{6}$,

所以 $BE = \sqrt{BC^2 + CE^2 - 2BC \cdot CE \cos \angle PCB}$

$= \sqrt{4+9-2 \times 2 \times 3 \times \frac{1}{6}} = \sqrt{11}$,

则 $\cos \angle BEF = \frac{BE^2 + EF^2 - BF^2}{2BE \cdot EF} = \frac{11+9-5}{2 \times \sqrt{11} \times 3} = \frac{5\sqrt{11}}{22}$.

故选 C.]

4. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ [如图, 过点 E 作圆柱的母线交下底面于点 F , 连接 AF ,

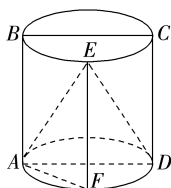
易知 F 为 $\widehat{AD}$ 的中点. 设正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 则 $EF = 2, AF = \sqrt{2}$, 所以 $AE =$

$\sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}$.

连接 ED , 则 $ED = \sqrt{6}$. 因为 $BC \parallel AD$, 所以 $\angle EAD$ (或其补角) 为异面直线 AE 与 BC

所成的角. 在 $\triangle EAD$ 中, $\cos \angle EAD = \frac{6+4-6}{2 \times 2 \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, 所以异面直

线 AE 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.]



第 53 课时 空间直线、平面的平行

理法先行 · 题练固本

梳必备 · 破题有方

知识点 1 此平面内 相交

知识点 2 相交直线 相交 交线

链教材 · 夯基固本

1. A [因为 F, G 分别为 BC, CD 的中点, 所以 $FG \parallel BD$, 因为 $EH \parallel \text{平面 } CBD$, 平面 $ABD \cap \text{平面 } CBD = BD$, $EH \subset \text{平面 } ABD$, 所以 $EH \parallel BD$, 由平行的传递性可知 $EH \parallel FG$. 故选 A.]

2. D [对于 A, 平面 α 内有无穷多条直线都与平面 β 平行, 并不能保证平面 α 内有两条相交直线与平面 β 平行, 这无穷多条直线可以是一组平行线, 故 A 错误; 对于 B, 直线 $a \parallel \alpha, a \parallel \beta$, 且直线 a 不在 α 内, 也不在 β 内, 当直线 a 平行于平面 α 与平面 β 的相交直线时满足上述条件, 但平面 α 与平面 β 不平行, 故 B 错误; 对于 C, 直线 $a \subset \alpha$, 直线 $b \subset \beta$, 且 $a \parallel \beta, b \parallel \alpha$, 当直线 $a \parallel b$ 时, 不能保证平面 α 与平面 β 平行, 故 C 错误; 对于 D, α 内的任何一条直线都与 β 平行, 则 α 内至少有两条相交直线与平面 β 平行, 所以平面 α 与平面 β 平行, 故 D 正确.]

3. $\frac{27}{4}$ [因为 $\alpha \parallel \beta$, 平面 $PBD \cap \alpha = AC$, 平面 $PBD \cap \beta = BD$,

由平面与平面平行的性质定理, 得 $AC \parallel BD$,

所以 $\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PD}$, 即 $\frac{4}{9} = \frac{3}{PD}$, 故 $PD = \frac{27}{4}$.]

考点深研 · 题型突破

考点一

典例 1 B [对于 A, 在如图 1 所示三棱柱中, 右侧面为 γ , 前面的平面为 α , 后面的侧面为 β , 满足 $\alpha \cap \gamma = m, \beta \cap \gamma = n$, 且 $m \parallel n$, 但 α, β 相交, A 错误; 对于 B, 如图 2, m, n 相交且都在 α, β 外, 设 m, n 确定的平面为 γ , 即 $m, n \subset \gamma$. 因为 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$, 故可得 $\gamma \parallel \alpha$, 同理 $\gamma \parallel \beta$, 故 $\alpha \parallel \beta$, B 正确; 对于 C, 若 $m \parallel n, n \subset \alpha$, 则 $m \subset \alpha$ 或 $m \parallel \alpha$, C 错误; 对于 D, 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$, 则 m, n 可能平行或相交或异面, D 错误.]

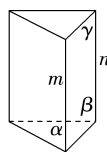


图 1

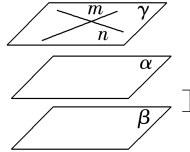


图 2

考点二

考向 1 典例 2 证明: 法一 (应用线面平行的判定定理):

第 1 步 平移连线: 找特殊点并连线, 长度一致构造平行四边形, 一长一短构造三角形.

设 PA 的中点为 F , 连接 EF, FB (图略).

$\because E, F$ 分别为 PD, PA 的中点, $\therefore EF \parallel AD$, 且 $EF = \frac{1}{2}AD$.

又 $\because BC \parallel AD, BC = \frac{1}{2}AD, \therefore EF \parallel BC$, 且 $EF = BC, \therefore$ 四边形 $BCEF$ 为平行四边形,

第 2 步 证明线线平行.

$\therefore CE \parallel BF$.

第 3 步 证明线面平行: 根据线面平行的判定定理, 推出线面平行.

又 $\because BF \subset \text{平面 } PAB, CE \not\subset \text{平面 } PAB$,

$\therefore CE \parallel \text{平面 } PAB$.

法二 (应用面面平行的性质): 第 1 步 平移平面: 将平面平移到包含直线的平面中找平行线, 构造新的平面.

取 AD 的中点 G , 连接 GE, GC (图略).

由题意知 $AG = BC$ 且 $AG \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCG$ 为平行四边形,

第 2 步 证明面面平行.

$GC \parallel AB$,

$AB \subset \text{平面 } PAB, \left. \begin{array}{l} GC \not\subset \text{平面 } PAB \\ GC \parallel AB \end{array} \right\} \Rightarrow GC \parallel \text{平面 } PAB$.

$GC \not\subset \text{平面 } PAB$

$GE \parallel PA$,
 $PA \subset \text{平面 } PAB$,
 $GE \not\subset \text{平面 } PAB$

$\left. \begin{array}{l} GE \parallel PA \\ PA \subset \text{平面 } PAB \\ GE \not\subset \text{平面 } PAB \end{array} \right\} \Rightarrow GE \parallel \text{平面 } PAB$.

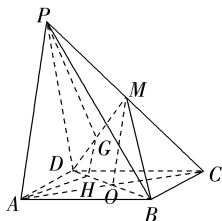
又 $\because GC \cap GE = G$, 且 $GC \subset \text{平面 } EGC$, $GE \subset \text{平面 } EGC$,
 $\therefore \text{平面 } EGC \parallel \text{平面 } PAB$.

第3步 证明线面平行.

$\because EC \subset \text{平面 } EGC$,
 $\therefore EC \parallel \text{平面 } PAB$.

考向2 典例3 证明: 如图所示, 连接 AC 交 BD 于点 O , 连接 OM .

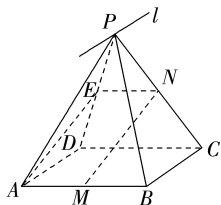
因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
 所以 O 是 AC 的中点.
 又 M 是 PC 的中点, 所以 $PA \parallel OM$.
 又 $OM \subset \text{平面 } BMD$, $PA \not\subset \text{平面 } BMD$,
 所以 $PA \parallel \text{平面 } BMD$.
 因为 $PA \subset \text{平面 } PAHG$,
 平面 $PAHG \cap \text{平面 } BMD = GH$,
 所以 $PA \parallel GH$.



多维变迁

证明: (1) 取 PD 的中点 E , 连接 AE, NE , 如图所示.

因为 $NE \parallel DC$, 且 $NE = \frac{1}{2}DC$, $AM \parallel DC$, 且 $AM = \frac{1}{2}DC$, 所以 $NE \parallel AM$,
 且 $NE = AM$,
 所以四边形 $MNEA$ 是平行四边形,
 所以 $MN \parallel AE$,
 又 $AE \subset \text{平面 } PAD$, $MN \not\subset \text{平面 } PAD$,
 所以 $MN \parallel \text{平面 } PAD$.



(2) 因为 $BC \parallel AD$, $BC \not\subset \text{平面 } PAD$, $AD \subset \text{平面 } PAD$,
 所以 $BC \parallel \text{平面 } PAD$,
 又因为平面 $PBC \cap \text{平面 } PAD = l$,
 所以 $l \parallel BC$.

考点三

典例4 证明: (1) $\because E, F$ 分别为 B_1C_1, A_1B_1 的中点,

$\therefore EF \parallel A_1C_1$.
 $\because A_1C_1 \subset \text{平面 } A_1C_1G$, $EF \not\subset \text{平面 } A_1C_1G$,
 $\therefore EF \parallel \text{平面 } A_1C_1G$.
 又 F, G 分别为 A_1B_1, AB 的中点,
 $\therefore A_1F = BG$,
 又 $A_1F \parallel BG$,
 $\therefore$ 四边形 A_1GBF 为平行四边形,
 $\therefore BF \parallel A_1G$.
 $\because A_1G \subset \text{平面 } A_1C_1G$, $BF \not\subset \text{平面 } A_1C_1G$,
 $\therefore BF \parallel \text{平面 } A_1C_1G$,
 又 $EF \cap BF = F$, $EF, BF \subset \text{平面 } BEF$,
 $\therefore \text{平面 } A_1C_1G \parallel \text{平面 } BEF$.

(2) $\because \text{平面 } ABC \parallel \text{平面 } A_1B_1C_1$, 平面 $A_1C_1G \cap \text{平面 } A_1B_1C_1 = A_1C_1$,
 平面 A_1C_1G 与平面 ABC 有公共点 G , 经过点 G 的直线交 BC 于点 H , 则 $A_1C_1 \parallel GH$, 得 $GH \parallel AC$,
 $\because G$ 为 AB 的中点, $\therefore H$ 为 BC 的中点.

多维变迁

证明: $\because$ 圆台可以看做是由平行于圆锥底面的平面去截圆锥而得到,

$\therefore$ 圆台的母线也就是生成这个圆台的圆锥相应母线的一部分.
 $\therefore$ 母线 AA_1 与母线 BB_1 的延长线必交于一点,
 $\therefore A, A_1, B, B_1$ 四点共面.
 $\because \text{平面 } ABO_1 \parallel \text{平面 } ABO$, 且平面 $ABB_1A_1 \cap \text{平面 } ABO_1 = A_1B_1$, 平面 $ABB_1A_1 \cap \text{平面 } ABO = AB$.
 $\therefore A_1B_1 \parallel AB$.

考点四

典例5 解: (1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, M, N, Q 分别为 BC, PA, PB 的中点,
 $\therefore NQ \parallel AB \parallel CD$, $MQ \parallel PC$,
 又 $NQ \not\subset \text{平面 } PCD$, $CD \subset \text{平面 } PCD$, $MQ \not\subset \text{平面 } PCD$, $PC \subset \text{平面 } PCD$,
 $\therefore NQ \parallel \text{平面 } PCD$, $MQ \parallel \text{平面 } PCD$,
 又 $\because NQ \cap MQ = Q$, 且 $NQ, MQ \subset \text{平面 } MNQ$,
 $\therefore \text{平面 } MNQ \parallel \text{平面 } PCD$.

(2) 在线段 PD 上存在点 E , 使得 $MN \parallel \text{平面 } ACE$, 且 $\frac{PE}{PD} = \frac{1}{2}$.

理由如下:

如图, 取 PD 的中点 E , 连接 NE, CE , AC, AE ,

$\because N, E$ 分别是 AP, PD 的中点,

$\therefore NE \parallel AD$, $NE = \frac{1}{2}AD$,

易知 $BC \parallel AD$, $BC = AD$, 又 M 为 BC 的中点, $\therefore MC \parallel AD$, $MC = \frac{1}{2}AD$,

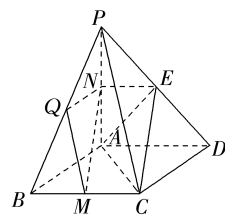
$\therefore NE \parallel MC$, $NE = MC$,

$\therefore$ 四边形 $MCEN$ 是平行四边形, $\therefore MN \parallel CE$,

又 $\because MN \not\subset \text{平面 } ACE$, $CE \subset \text{平面 } ACE$,

$\therefore MN \parallel \text{平面 } ACE$,

故在线段 PD 上存在点 E , 使得 $MN \parallel \text{平面 } ACE$, 且 $\frac{PE}{PD} = \frac{1}{2}$.



随堂·对点检测

1. C [若 $m \parallel \alpha, m \parallel \beta$, 则 α 与 β 可能平行也可能相交, 所以 A 选项错误;

若 $m \parallel n, m \parallel \alpha, n \parallel \beta$, 则 α 与 β 可能平行也可能相交, 所以 B 选项错误;

若 $m \parallel n, m \perp \alpha, n \perp \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$, 所以 C 选项正确;

如图, 因为 $AB \parallel \text{平面 } A_1B_1C_1D_1$,

$A_1D_1 \parallel \text{平面 } BCC_1B_1$, 且 AB 与 A_1D_1

是异面直线,

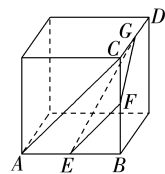
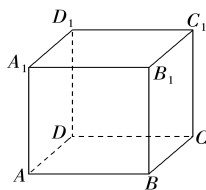
但平面 $A_1B_1C_1D_1$ 与平面 BCC_1B_1 不平行, 所以 D 选项错误.

故选 C.]

2. A [如图, 把这三条线段放在正方体内, 可得 $AC \parallel EF$, $AC \not\subset \text{平面 } EFG$, $EF \subset \text{平面 } EFG$,

故 $AC \parallel \text{平面 } EFG$.

故选 A.]



3. D [因为平面 $\alpha \parallel$ 平面 ABC , 所以 $AB \parallel$ 平面 α , 又平面 $\alpha \cap$ 平面 $PAB = A'B'$, $AB \subset$ 平面 PAB , 所以 $A'B' \parallel AB$, 同理可得 $AC \parallel A'C'$, $BC \parallel B'C'$,
所以 $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle BCA = \angle B'C'A'$,
所以 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.
因为 $PA' : AA' = 2 : 3$,
所以 $PA' : PA = 2 : 5$,
所以 $A'B' : AB = 2 : 5$,
所以 $\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{A'B'}{AB}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$.
故选 D.]

4. $\frac{1}{2}$ [连接 BD , 与 AC 交于点 O , 连接 DF 交 CE 于点 G , 连接 OG .

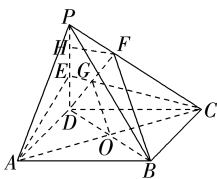
由于直线 $BF \parallel$ 平面 AEC ,
 $BF \subset$ 平面 BDF ,
平面 $BDF \cap$ 平面 $AEC = OG$,
则 $BF \parallel OG$,

由于 O 是 BD 的中点, 所以 $\frac{OB}{OD} =$

$\frac{GF}{GD} = 1$, 过 F 作 $FH \parallel CE$, 交 PD 于点 H , 则 $\frac{ED}{EH} = \frac{GD}{GF} = 1$,

由于 $\frac{PE}{ED} = \frac{3}{2}$, 所以 $\frac{PH}{HE} = \frac{1}{2}$,

所以 $\frac{PF}{FC} = \frac{PH}{HE} = \frac{1}{2}$.]



第 54 课时 空间直线、平面的垂直

理法先行 · 题练固本

梳必备 · 破题有方

知识点 1 (1)任意 (2)相交 $l \perp a$ $l \perp b$

$a \cap b = O$ $a, b \subset \alpha$ 平行 $a \perp \alpha$ $b \perp \alpha$

(3)平面上的射影 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

知识点 2 (1)两个半平面 垂直于棱

(2) $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$

知识点 3 (1)直二面角 (2)垂线 交线

链教材 · 夯基固本

1. C [由题意可知 $AD \perp BD$, $AD \perp CD$, $BD \cap CD = D$, $BD, CD \subset$ 平面 α ,

所以 $AD \perp$ 平面 α ,

所以折痕 AD 所在直线与桌面 α 所成的角等于 90° , 故选 C.]

2. (1)外 (2)垂 [(1)易证 $\triangle POA \cong \triangle POB \cong \triangle POC$,

故 $OA = OB = OC$, O 是 $\triangle ABC$ 的外心.

(2)易知 $PA \perp$ 平面 PBC , 从而 $PA \perp BC$.

而 $PO \perp$ 平面 ABC , 所以 $PO \perp BC$,

从而 $BC \perp$ 平面 PAO ,

所以 $BC \perp AO$.

同理 $AC \perp BO$,

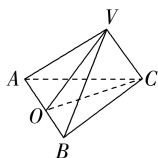
所以 O 为 $\triangle ABC$ 的垂心.]

3. $\frac{5}{6}$ [如图所示, 取 AB 的中点 O , 连接

VO, CO ,

因为 $VA = VB = AB = AC = BC = 2$,

所以 $VO \perp AB, CO \perp AB$,



所以 $\angle VOC$ 是二面角 $V-AB-C$ 的平面角.

又 $VO = CO = \sqrt{3}, VC = 1$,

在 $\triangle VOC$ 中, 由余弦定理的推论, 得

$$\cos \angle VOC = \frac{VO^2 + CO^2 - VC^2}{2VO \cdot CO} = \frac{5}{6}.$$

4. D [$\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma \Rightarrow \alpha$ 与 β 相交或平行, 故 A 不正确;

因为 $\alpha \cap \beta = a, b \perp a, b \subset \beta$,

所以 β 可以绕交线 a 任意旋转, 所以不能得到 $\alpha \perp \beta$, 故 B 不正确;

$a \parallel \beta, a \parallel \alpha \Rightarrow \alpha$ 与 β 相交或平行, 故 C 不正确;

$a \perp \beta, a \parallel \alpha$, 过直线 a 作平面与平面 α 交于直线 b , 所以 $a \parallel b$,

又 $a \perp \beta$, 所以 $b \perp \beta$,

又 $b \subset \alpha$, 所以 $\alpha \perp \beta$, 故 D 正确.]

考点深研 · 题型突破

考点一

典例 1 C [对于 A, 若 $m \parallel \alpha, n \subset \alpha$, 则 $m \parallel n$ 或 m, n 异面, 故 A 错误;

对于 B, 若 $m \perp \alpha, m \perp \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$, 故 B 错误;

对于 C, 若 $m \parallel \alpha, m \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$, 故 C 正确;

对于 D, 若 $m \subset \alpha, \alpha \perp \beta$, 则 $m \parallel \beta$ 或 m 与 β 相交或 $m \subset \beta$, 故 D 错误.

故选 C.]

多维变迁

AC [根据平面与平面垂直的性质知 A 正确; B 中, m 还可能在 α 内或 $m \parallel \alpha$ 或 m 与 α 斜交, 不正确; C 中, $\alpha \perp \beta, m \perp \beta, m \not\subset \alpha$ 时, 只能有 $m \parallel \alpha$, 正确; D 中, 若 $m \perp n, m \perp \alpha, n \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$ 或 α 与 β 相交, 故 D 错误. 故选 AC.]

考点二

典例 2 证明: (1)在四棱锥 $P-ABCD$ 中,

$\because PA \perp$ 底面 $ABCD, CD \subset$ 底面 $ABCD$,

$\therefore PA \perp CD$, 又 $\because AC \perp CD$, 且 $PA \cap AC = A, PA, AC \subset$ 平面 PAC , $\therefore CD \perp$ 平面 PAC .

又 $AE \subset$ 平面 PAC , $\therefore CD \perp AE$.

(2)由 $PA = AB = BC, \angle ABC = 60^\circ$,

可得 $AC = PA$.

$\because E$ 是 PC 的中点, $\therefore AE \perp PC$.

由(1)知 $AE \perp CD$, 且 $PC \cap CD = C, PC, CD \subset$ 平面 PCD ,

$\therefore AE \perp$ 平面 PCD .

又 $PD \subset$ 平面 PCD , $\therefore AE \perp PD$.

$\because PA \perp$ 底面 $ABCD, AB \subset$ 底面 $ABCD$,

$\therefore PA \perp AB$.

又 $\because AB \perp AD$, 且 $PA \cap AD = A, PA, AD \subset$ 平面 PAD ,

$\therefore AB \perp$ 平面 PAD .

又 $PD \subset$ 平面 PAD , $\therefore AB \perp PD$.

又 $\because AB \cap AE = A, AB, AE \subset$ 平面 ABE ,

$\therefore PD \perp$ 平面 ABE .

考点三

典例 3 (1)证明:连接 CD ,

由于 $AC = \frac{1}{2}AA_1 = 1, BC = \sqrt{2}$, D 是棱

AA_1 的中点, 则 $CD = C_1D = \sqrt{2}$,

因为 $CD^2 + C_1D^2 = 4 = CC_1^2$, 所以 $C_1D \perp CD$,

又由 $C_1D \perp BD$, 且 $CD \cap BD = D$, $CD, BD \subset$ 平面 BCD , 则 $C_1D \perp$ 平面 BCD ,

而 $BC \subset$ 平面 BCD , 所以 $C_1D \perp BC$.

(2)证明: 由(1)知, $BC \perp C_1D$,

因为 $CC_1 \perp$ 平面 ABC , $BC \subset$ 平面 ABC , 则 $CC_1 \perp BC$,

因为 $CC_1 \cap C_1D = C_1$, $CC_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1 且 $C_1D \subset$ 平面

ACC_1A_1 , 则 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 , 又由 $BC \subset$ 平面 BCC_1B_1 ,

由面面垂直判定定理, 必有平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1 .

(3)解: 根据题意, 由(2)知, $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 ,

由于 $AC \subset$ 平面 ACC_1A_1 , 则 $BC \perp AC$,

故 $AB = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$,

过点 C 作 $CH \perp AB$, 交 AB 于点 H ,

如图,

又由 $\frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times CH$,

解得 $CH = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

因为 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , 而 $CH \subset$ 平面 ABC , 则 $AA_1 \perp CH$,

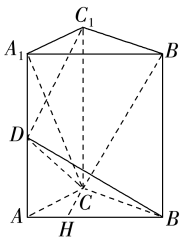
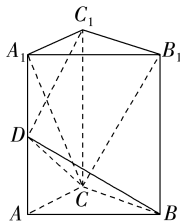
因为 $AA_1 \cap AB = A$, 而 $AA_1, AB \subset$ 平面

ABB_1A_1 , 则 $CH \perp$ 平面 ABB_1A_1 ,

则 CH 为四棱锥 $C-ABB_1A_1$ 的高,

故 $V_{\text{四棱锥}C-ABB_1A_1} = \frac{1}{3} \times S_{\text{四边形}ABB_1A_1} \times CH = \frac{1}{3} \times 2 \times \sqrt{3} \times$

$\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.



考点四

典例 4 (1)证明: 连接 BD , 设 AC 交 BD 于点 O , 连接 SO , 由题意知 $SO \perp AC$,

在正方形 $ABCD$ 中, $AC \perp BD$, 又 $SO \cap BD = O$,

因为 $SO, BD \subset$ 平面 SBD ,

所以 $AC \perp$ 平面 SBD , 因为 $SD \subset$ 平面 SBD ,

所以 $AC \perp SD$.

(2)解: 连接 OP , 若 $SD \perp$ 平面 PAC ,

则 $SD \perp OP$,

设正方形 $ABCD$ 的边长为 a ,

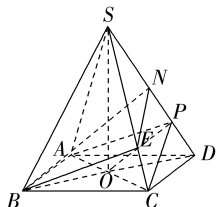
则 $SD = \sqrt{2}a, OD = \frac{\sqrt{2}}{2}a$,

则 $OD^2 = PD \cdot SD$,

可得 $PD = \frac{OD^2}{SD} = \frac{\sqrt{2}}{4}a$,

故可在 SP 上取一点 N , 使 $PN = PD$,

过 N 作 PC 的平行线与 SC 的交点即为 E , 连接 BN, BE .



在 $\triangle BDN$ 中知 $BN \parallel PO$,

又 $NE \parallel PC, BN \not\subset$ 平面 $APC, PO \subset$ 平面 $APC, NE \not\subset$ 平面 $APC, PC \subset$ 平面 APC , 可知 $BN \parallel$ 平面 $PAC, NE \parallel$ 平面 PAC , $BN \cap NE = N, BN, NE \subset$ 平面 BEN , 故平面 $BEN \parallel$ 平面 PAC ,

得 $BE \parallel$ 平面 PAC ,

由于 $SN : NP = 2 : 1$,

故 $SE : EC = 2$.

微点突破

典例 5 (1)证明: 因为 $AD = AB = \frac{1}{2}BC = 2, \angle BAD = 90^\circ$, 则

$BD = CD = 2\sqrt{2}$,

可得 $BD^2 + CD^2 = BC^2$, 则 $BD \perp CD$.

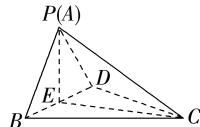
又因为平面 $PBD \perp$ 平面 BCD , 且平面 $PBD \cap$ 平面 $BCD = BD, CD \subset$ 平面 BCD ,

可得 $CD \perp$ 平面 PBD ,

且 $PB \subset$ 平面 PBD ,

所以 $CD \perp PB$.

(2)解: 过点 P 作 $PE \perp BD$, 交 BD 于点 E .



因为 $PB = PD$, 则 E 为 BD 的中点,

又因为平面 $PBD \perp$ 平面 BCD , 平面 $PBD \cap$ 平面 $BCD = BD, PE \subset$ 平面 PBD ,

所以 $PE \perp$ 平面 BCD .

连接 CE , 则 $\angle PCE$ 为 PC 与平面 BCD 所成的角.

由(1)知 $BD = CD = 2\sqrt{2}$,

因为 $PE = \sqrt{2}, CE = \sqrt{CD^2 + DE^2} = \sqrt{10}$,

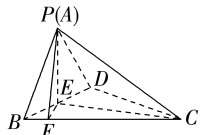
则 $PC = \sqrt{PE^2 + CE^2} = 2\sqrt{3}$,

所以直线 PC 与平面 BCD 所成角的正弦值 $\sin \angle PCE =$

$\frac{PE}{PC} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

(3)解: 由(2)知 $PE \perp$ 平面 $BCD, BC \subset$ 平面 BCD , 所以 $PE \perp BC$.

过点 E 作 $EF \perp BC$ 交 BC 于点 F , 连接 PF ,



因为 $PE \cap EF = E, PE, EF \subset$ 平面 PEF , 所以 $BC \perp$ 平面 PEF ,

且 $PF \subset$ 平面 PEF , 所以 $BC \perp PF$,

可知 $\angle PFE$ 为二面角 $P-BC-D$ 的平面角.

在 $\triangle BCD$ 中, $EF = \frac{1}{4}BC = 1$, 则 $PF = \sqrt{PE^2 + EF^2} = \sqrt{3}$,

可得 $\cos \angle PFE = \frac{EF}{PF} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以二面角 $P-BC-D$ 的平面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

教材拓展

典例 6 ACD [由三余弦定理,得 $\cos \angle BCD = \cos \angle ACD \cdot \cos \angle ACB = \cos 45^\circ \cdot \cos 45^\circ = \frac{1}{2}$, 所以 $\angle BCD = 60^\circ$. 由 $DC = 2BC$, 得 $BC \perp DB$. 又 $EF \parallel BC$, 所以 $EF \perp DB$, 故 A 正确, B 错误.

如图, 过点 B 作 $BH \perp AC$ 于点 H, $HK \perp DC$ 于点 K, 连接 BK.

因为平面 $ADFC \perp$ 平面 ABC , 平面 $ADFC \cap$ 平面 $ABC = AC$, 所以 $BH \perp$ 平面 $ADFC$. 易得 $BK \perp DC$.

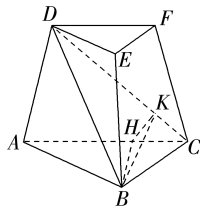
设 $BC = 1$, 则 $BK = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $BH = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $\sin \angle BKH = \frac{BH}{BK} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 故 C 正确.

因为 $AC \parallel DF$, 所以 DF 与平面 DBC 所成角, 即为 AC 与平面 DBC 所成角, 设为 θ .

由三正弦定理, 得 $\sin \theta = \sin \angle ACD \cdot \sin \angle BKH = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} =$

$\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故 D 正确. 故选 ACD.]



课堂·对点检测

1. B [若 $m \parallel \alpha, n \perp m$, 则 $n \subset \alpha$ 或 $n \parallel \alpha$ 或直线 n 和平面 α 相交, 则“ $n \perp m$ ”不是“ $n \perp \alpha$ ”的充分条件; 若 $m \parallel \alpha, n \perp \alpha$, 则 $n \perp m$, 则“ $n \perp m$ ”是“ $n \perp \alpha$ ”的必要条件, 所以“ $n \perp m$ ”是“ $n \perp \alpha$ ”的必要不充分条件. 故选 B.]

2. D [若 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = m, l \perp m$, 则 $l \subset \beta$ 或 $l \parallel \beta$ 或 l 与 β 相交, A 错误; 若 $\alpha \cap \beta = m, l \subset \alpha, l \perp m$, 则 l 与 β 相交但不一定垂直, B 错误; 若 $\alpha \perp \beta, l \subset \alpha$, 则 $l \subset \beta$ 或 $l \parallel \beta$ 或 l 与 β 相交, C 错误; 若 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = m, l \subset \alpha, l \perp m$, 则 $l \perp \beta$, 由面面垂直的性质定理可知 D 正确. 故选 D.]

3. B [因为 AB 是圆柱上底面的一条直径, 所以 $AC \perp BC$, 又 AD 垂直圆柱的底面, 所以 $AD \perp BC$, 因为 $AC \cap AD = A, AC, AD \subset$ 平面 ACD , 所以 $BC \perp$ 平面 ACD , 因为 $BC \subset$ 平面 BCD , 所以平面 $BCD \perp$ 平面 ACD . 故选 B.]

4. BD [选项 A, 由题意知, BC_1 和 CC_1 是两条不同的直线, 由正方体的性质知, $CC_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 若 $BC_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 则这与过一点有且只有一条直线与已知平面垂直相矛盾, 故选项 A 错误; 选项 B, 由正方体的性质知, $AB \parallel C_1D_1, AB = C_1D_1$, 所以四边形 ABC_1D_1 是平行四边形, 所以 $BC_1 \parallel AD_1$, 而 $AD_1 \subset$ 平面 $ACD_1, BC_1 \not\subset$ 平面 ACD_1 , 所以 $BC_1 \parallel$ 平面 ACD_1 , 故选项 B 正确; 选项 C, 连接 BD , 因为正方形 $A_1B_1C_1D_1$, 所以 $A_1C_1 \perp B_1D_1$, 由正方体的性质知, $BB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 因为 $A_1C_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 所以 $BB_1 \perp A_1C_1$, 又 $B_1D_1 \cap BB_1 = B_1$, 所以 $A_1C_1 \perp$ 平面 BDD_1B_1 ,

而 $A_1C_1 \subset$ 平面 A_1C_1B , 所以平面 $A_1C_1B \perp$ 平面 BDD_1B_1 ,

若平面 $A_1C_1B \perp$ 平面 B_1D_1C , 则这与过同一条直线有且只有一个平面与已知平面垂直相矛盾, 故选项 C 错误;

选项 D, 因为正方形 BCC_1B_1 , 所以 $BC_1 \perp B_1C$,

由正方体的性质知, $CD \perp$ 平面 BCC_1B_1 ,

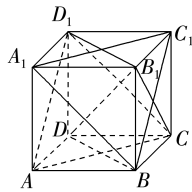
因为 $BC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 ,

所以 $CD \perp BC_1$,

又 $B_1C \cap CD = C, B_1C, CD \subset$ 平面 B_1CD , 所以 $BC_1 \perp$ 平面 B_1CD ,

而 $BC_1 \subset$ 平面 A_1C_1B , 所以平面 $A_1C_1B \perp$ 平面 B_1CD , 故选项 D 正确.

故选 BD.]



5. $\frac{4}{3}$ [连接 AC, BD 相交于点 H, 则 H 为正方形 $ABCD$ 的中心,

故 $PH \perp$ 底面 $ABCD$,

取 CD 的中点 Q, 连接 HQ, PQ ,

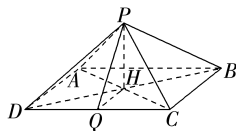
则 $HQ \perp CD, PQ \perp CD, HQ = \frac{1}{2}AD = 1$,

故 $\angle PQH$ 为二面角 $P-CD-A$ 的平面角,

所以 $\angle PQH = \frac{\pi}{4}$,

故 $PH = HQ = 1$,

所以该四棱锥的体积为 $\frac{1}{3} \times AB^2 \cdot PH = \frac{4}{3}$.]



第 55 课时 空间向量的运算及其应用

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 大小 方向 相同 相等 相反 相等 平行 重合 同一个平面

知识点 2 (1) $a = \lambda b$ (2) 存在唯一的有序实数对 (x, y) , 使 $p = xa + yb$

知识点 3 (1) $|a| |b| \cos \langle a, b \rangle$

链教材·夯基固本

1. $\frac{1}{4}\vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{OB} + \frac{1}{4}\vec{OC}$ [$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP} = \vec{OA} + \frac{3}{4}\vec{AN}$
 $= \vec{OA} + \frac{3}{4}(\vec{ON} - \vec{OA}) = \vec{OA} + \frac{3}{4}\vec{ON} - \frac{3}{4}\vec{OA}$
 $= \frac{1}{4}\vec{OA} + \frac{3}{4}(\frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OC})$
 $= \frac{1}{4}\vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{OB} + \frac{1}{4}\vec{OC}$.]

2. $\frac{10}{3}$ [因为 $a \perp b$,

所以 $a \cdot b = -8 - 2 + 3x = 0$, 解得 $x = \frac{10}{3}$.]

3. 12 [因为 $|\vec{PA} + \vec{AB} + \vec{BC}|^2 = \vec{PA}^2 + \vec{AB}^2 + \vec{BC}^2 + 2\vec{PA} \cdot \vec{AB} + 2\vec{PA} \cdot \vec{BC} + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC}$
 $= |\vec{PA}|^2 + |\vec{AB}|^2 + |\vec{BC}|^2 + 2|\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}| \cos \langle \vec{AB}, \vec{BC} \rangle =$
 $6^2 + 6^2 + 6^2 + 2 \times 6 \times 6 \times \frac{1}{2} = 144$,
 所以 $|\vec{PA} + \vec{AB} + \vec{BC}| = 12$.]

$$4. 10 \quad \sqrt{85} \quad [\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AA'}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos 60^\circ = 5 \times 4 \times \frac{1}{2} = 10.]$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'},$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{AC'}|^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{AA'}|^2 + 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA'})$$

$$= 16 + 9 + 25 + 2 \times \left(0 + 4 \times 5 \times \frac{1}{2} + 3 \times 5 \times \frac{1}{2} \right) = 85,$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{AC'}| = \sqrt{85}, \text{ 即 } AC' \text{ 的长为 } \sqrt{85}.$$

$$5. C \quad [\because n_1 \neq \lambda n_2, \text{ 且 } n_1 \cdot n_2 = -23 \neq 0, \therefore \alpha, \beta \text{ 相交但不垂直}.]$$

考点深研 · 题型突破

考点一

典例 1 (1) ABD (2) A [(1) 对于选项 A, 对于空间四个点 P,

$$A, B, C, \overrightarrow{PC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{PA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{PB},$$

由共线向量定理可知 A, B, C 三点共线, 故选项 A 正确;

对于选项 B, $b+c$ 与 $b-c$ 不共线, 且 a 不能用 $b+c$ 和 $b-c$ 表示, 即 $b+c, b-c, a$ 不共面, 故选项 B 正确;

对于选项 C, 由 A, B, C 三点不共线, 对空间任意一点 O, 若 $\overrightarrow{OP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OC}$,

因为 $\frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1$, 由空间向量基本定理的推论可得 P, A, B, C 四点共面, 故选项 C 错误;

对于选项 D, 若 P, A, B, C 为空间四点, 且有 $\overrightarrow{PA} = \lambda\overrightarrow{PB} + \mu\overrightarrow{PC}$ ($\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$ 不共线),

当 $\lambda + \mu = 1$ 时, 即 $\mu = 1 - \lambda$, 可得 $\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC} = \lambda(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC})$, 即 $\overrightarrow{CA} = \lambda\overrightarrow{CB}$,

由共线向量定理可得 A, B, C 三点共线, 反之也成立, 即 $\lambda + \mu = 1$ 是 A, B, C 三点共线的充要条件, 故选项 D 正确.

故选 ABD.

$$(2) \text{ 因为 } EC = 2PE, \text{ 所以 } \overrightarrow{PE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PC},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PE} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{AD}$$

$$= \overrightarrow{AP} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) - \overrightarrow{AD}$$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD})$$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AP} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CD}$$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AP} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB},$$

$$\text{又 } \overrightarrow{DE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AP},$$

$$\text{所以 } \begin{cases} x=1, \\ y=-\frac{2}{3}, \\ z=\frac{2}{3}, \end{cases} \text{ 则 } x+y+z=1, \text{ 故选 A. }$$

多维变迁

1. A [由点 A(2, 3, 5), B(1, 1, 2), C(0, a, b),

$$\text{得 } \overrightarrow{AB} = (-1, -2, -3), \overrightarrow{BC} = (-1, a-1, b-2),$$

由于 A, B, C 三点共线, 所以 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$,

所以 $a-1 = -2, b-2 = -3$, 解得 $a = -1, b = -1$, 故 $a + b = -2$.

故选 A.]

2. D [因为 $e_1 + e_2, e_2 - e_3, 3e_1 + te_3$ 共面,

所以存在有序数对 (x, y) 使得 $e_1 + e_2 = x(e_2 - e_3) + y(3e_1 + te_3)$

$$\text{所以 } \begin{cases} 1 = 3y, \\ 1 = x, \\ yt - x = 0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = 1, \\ y = \frac{1}{3}, \\ t = 3. \end{cases}$$

故选 D.]

考点二

典例 2 解: 设 $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AC} = b, \overrightarrow{AD} = c$.

(1) 由题意得, $|a| = |b| = |c| = 1, \langle a, b \rangle = \langle b, c \rangle = \langle c, a \rangle =$

$$60^\circ. \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}a, \overrightarrow{BA} = -a,$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BA} = \left(\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}a \right) \cdot (-a)$$

$$= -\frac{1}{2}a \cdot c + \frac{1}{2}a^2 = -\frac{1}{2} \times \left(1 \times 1 \times \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}.$$

$$(2) \text{ 证明: } \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(b + c - a),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(a \cdot b + a \cdot c - a^2) = \frac{1}{2} \times \left(1 \times 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times 1 \times \frac{1}{2} - 1 \right) = 0.$$

故 $\overrightarrow{EG} \perp \overrightarrow{AB}$.

母题探究

$$1. \text{ 解: 由本例(2)知, } \overrightarrow{EG} = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c,$$

$$|\overrightarrow{EG}|^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}a \cdot b + \frac{1}{2}b \cdot c - \frac{1}{2}c \cdot a = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \times \left(1 \times 1 \times \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \times \left(1 \times 1 \times \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \times \left(1 \times 1 \times \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}, \text{ 即 } |\overrightarrow{EG}| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$2. \text{ 解: } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c, \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = -b + \frac{1}{2}a, \text{ 所以 } \overrightarrow{AG} \cdot$$

$$\overrightarrow{CE} = \left(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \right) \cdot \left(-b + \frac{1}{2}a \right) = -\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{4}a \cdot b - \frac{1}{2}b \cdot$$

$$c + \frac{1}{4}a \cdot c = -\frac{1}{2}, \text{ 又 } |\overrightarrow{AG}| = \frac{\sqrt{3}}{2}, |\overrightarrow{CE}| = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{CE} \rangle = \frac{\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CE}}{|\overrightarrow{AG}| |\overrightarrow{CE}|} = -\frac{2}{3}.$$

多维变迁

ABD [设 $b = (x, y, z)$, 因为 $a = (1, 2, 3)$, 所以 $a + 2b = (-3, 0, 5) = (1, 2, 3) + 2(x, y, z) = (1 + 2x, 2 + 2y, 3 + 2z)$, 即 $1 + 2x = -3, 2 + 2y = 0, 3 + 2z = 5$, 解得 $b = (-2, -1, 1)$, 则 $|b| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$, A 正确;

因为 $a \parallel c$, 所以 $a = \lambda c$, 即 $\begin{cases} 1 = 2\lambda, \\ 2 = 4\lambda, \\ 3 = m\lambda, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \lambda = \frac{1}{2}, \\ m = 6. \end{cases}$ B 正确;

因为 $2b + c = (-2, 2, 8), a \cdot (2b + c) = -2 \times 1 + 2 \times 2 + 8 \times 3 = 26 \neq 0$, 所以 C 错误;

$$\cos\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}|} = \frac{-2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{56}} = -\frac{\sqrt{21}}{42}, \text{D 正确.}$$

故选 ABD.]

考点三

典例 3 BD [法一: 对于 A, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 ABC ,

又 $AD \subset$ 平面 ABC , 则 $AA_1 \perp AD$, 则

$$\overrightarrow{A_1A} \cdot \overrightarrow{AD} = 0,$$

因为 $\triangle ABC$ 是正三角形, D 为 BC 的中

点, 所以 $AD \perp BC$, 所以 $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

$$\text{又 } \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot \overrightarrow{AD}.$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A_1A} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}^2 \neq 0,$$

则 $AD \perp A_1C$ 不成立, 故 A 错误;

对于 B, 因为在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 ABC ,

又 $BC \subset$ 平面 ABC , 则 $AA_1 \perp BC$,

因为 $\triangle ABC$ 是正三角形, D 为 BC 中点, 则 $AD \perp BC$,

又 $AA_1 \cap AD = A$, $AA_1, AD \subset$ 平面 AA_1D , $BC \not\subset$ 平面 AA_1D ,

所以 $BC \perp$ 平面 AA_1D , 又 $BC \parallel B_1C_1$, 所以 $B_1C_1 \perp$ 平面 AA_1D , 故 B 正确;

对于 C, 因为在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $A_1B_1 \parallel AB$,

假设 $AD \parallel A_1B_1$, 则 $AD \parallel AB$, 这与 $AD \cap AB = A$ 矛盾,

所以 $AD \parallel A_1B_1$ 不成立, 故 C 错误;

对于 D, 因为在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $CC_1 \parallel AA_1$,

又 $AA_1 \subset$ 平面 AA_1D , $CC_1 \not\subset$ 平面 AA_1D , 所以 $CC_1 \parallel$ 平面 AA_1D , 故 D 正确.

故选 BD.

法二: 如图, 建立空间直角坐标系, 设该正三棱柱的底边为 2, 高为 h , $h > 0$,

$$\text{则 } D(0, 0, 0), A(\sqrt{3}, 0, 0), A_1(\sqrt{3}, 0, h),$$

$$C(0, -1, 0), C_1(0, -1, h), B(0, 1, 0), B_1(0, 1, h),$$

$$\text{对于 A, } \overrightarrow{AD} = (-\sqrt{3}, 0, 0), \overrightarrow{A_1C} =$$

$$(-\sqrt{3}, -1, -h),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{A_1C} = (-\sqrt{3}) \times (-\sqrt{3}) + 0 = 3 \neq 0,$$

则 $AD \perp A_1C$ 不成立, 故 A 错误;

$$\text{对于 B, } \overrightarrow{B_1C_1} = (0, -2, 0), \overrightarrow{CC_1} = (0, 0, h), \overrightarrow{AA_1} = (0, 0, h),$$

$$\overrightarrow{AD} = (-\sqrt{3}, 0, 0),$$

设平面 AA_1D 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{AA_1} \cdot \mathbf{n} = hz = 0, \\ \overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{n} = -\sqrt{3}x = 0, \end{cases} \text{ 得 } x = z = 0, \text{ 令 } y = 1, \text{ 则 } \mathbf{n} = (0, 1, 0)$$

为平面 AA_1D 的一个法向量,

$$\text{所以 } \overrightarrow{B_1C_1} = (0, -2, 0) = -2\mathbf{n}, \overrightarrow{CC_1} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

则 $B_1C_1 \perp$ 平面 AA_1D , $CC_1 \parallel$ 平面 AA_1D , 故 BD 正确;

$$\text{对于 C, } \overrightarrow{AD} = (-\sqrt{3}, 0, 0), \overrightarrow{A_1B_1} = (-\sqrt{3}, 1, 0),$$

$$\text{则 } \frac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} \neq \frac{0}{1}, \text{ 显然 } AD \not\parallel A_1B_1 \text{ 不成立, 故 C 错误. 故选 BD.}]$$

随堂·对点检测

1. BD [$\because \mathbf{a} = (-2, 1, 2), \therefore |\mathbf{a}| = \sqrt{4+1+4} = 3$, A 错误;

若 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -2 - \frac{1}{2} + 2m = 0$, 解得 $m = \frac{5}{4}$, B 正确;

若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 则 $\frac{-2}{1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{m}$, 解得 $m = -1$, C 错误;

若 $m = 1$, 则 $\cos\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{-2 - \frac{1}{2} + 2}{3 \times \frac{3}{2}} = -\frac{1}{9}$, D 正

确. 故选 BD.]

$$2. \text{A} \quad [\text{由题意得, } \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}), \overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}.$$

若 G 与 M, N 共线, 则存在实数 λ ,

$$\text{使得 } \overrightarrow{OG} = \lambda \overrightarrow{ON} + (1-\lambda) \overrightarrow{OM} = \frac{\lambda}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{2(1-\lambda)}{3}\overrightarrow{OA}.$$

$$\text{又 } \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{x}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{x}{4}\overrightarrow{OC},$$

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{2(1-\lambda)}{3} = \frac{1}{3}, \\ \frac{\lambda}{2} = \frac{x}{4}, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2}, \\ x = 1. \end{cases} \text{ 故选 A.}]$$

3. 证明: 以 B 为坐标原点, BA, BC, BB_1 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $B(0, 0, 0), D(0, 2, 2), B_1(0, 0, 4), E(0, 0, 3), F(0, 1, 4)$.

$$\text{设 } BA = a, \text{ 则 } A(a, 0, 0), G\left(\frac{a}{2}, 1, 4\right),$$

$$A_1(a, 0, 4).$$

$$(1) \text{ 因为 } \overrightarrow{BA} = (a, 0, 0), \overrightarrow{BD} = (0, 2, 2),$$

$$\overrightarrow{B_1D} = (0, 2, -2), \text{ 所以 } \overrightarrow{B_1D} \cdot$$

$$\overrightarrow{BA} = 0, \overrightarrow{B_1D} \cdot \overrightarrow{BD} = 0. \text{ 所以 } \overrightarrow{B_1D} \perp$$

$$\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{B_1D} \perp \overrightarrow{BD}, \text{ 即 } B_1D \perp BA, B_1D \perp$$

$$BD. \text{ 又 } BA \cap BD = B, BA, BD \subset \text{平面}$$

$$ABD, B_1D \not\subset \text{平面 } ABD, \text{ 所以 } B_1D \perp$$

$$\text{平面 } ABD.$$

因为 $B_1D \subset$ 平面 A_1B_1D , 所以平面 $A_1B_1D \perp$ 平面 ABD .

$$(2) \text{ 因为 } \overrightarrow{EG} = \left(\frac{a}{2}, 1, 1\right), \overrightarrow{EF} = (0, 1, 1), \overrightarrow{B_1D} = (0, 2, -2),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{B_1D} \cdot \overrightarrow{EG} = 0, \overrightarrow{B_1D} \cdot \overrightarrow{EF} = 0.$$

$$\text{所以 } B_1D \perp EG, B_1D \perp EF.$$

因为 $EG \cap EF = E, EG, EF \subset$ 平面 $EGF, B_1D \not\subset$ 平面 EGF , 所以 $B_1D \perp$ 平面 EGF .

由 (1) 知, $B_1D \perp$ 平面 ABD , 所以平面 $EGF \parallel$ 平面 ABD .

第 56 课时 向量法求空间角(一)

理法先行·题练固本

链教材·夯基固本

1. A [如图, 建立空间直角坐标系, 设 $BC =$

$$CA = CC_1 = 1, \text{ 则 } A(1, 0, 1), B(0, 1, 1),$$

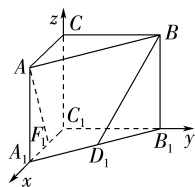
$$D_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), F_1\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{BD_1} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right),$$

$$\overrightarrow{AF_1} = \left(-\frac{1}{2}, 0, -1\right),$$

$$\text{所以 } |\cos\langle \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{AF_1} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{AF_1}|}{|\overrightarrow{BD_1}| |\overrightarrow{AF_1}|}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} \times \sqrt{\frac{1}{4} + 1}} = \frac{\sqrt{30}}{10}. \text{ 故选 A.}]$$



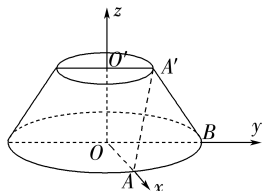
2. A [设直线 l 与平面 α 所成的角为 θ ,

则 $\sin \theta = |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{1}{2}$, 所以直线 l 与平面 α 所成的角为 30° . 故选 A.]

考点深研 · 题型突破

考点一

典例 1 (1)A (2)D [(1)设圆台经过点 A' 的母线为 $A'B$,
 $\because O'A' \perp OA, \therefore OA \perp OB$, 以 O 为原点, OA, OB, OO' 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间直角坐标系, 如图所示.

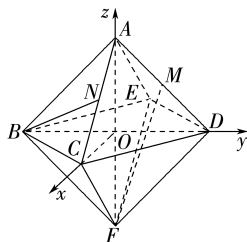


则 $O(0,0,0), A(2,0,0), A'(0,1,1), O'(0,0,1)$, 可得 $\vec{AA'} = (-2, 1, 1), |\vec{AA'}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}, \therefore \vec{OO'} = (0, 0, 1),$
 $\therefore \cos \langle \vec{AA'}, \vec{OO'} \rangle = \frac{\vec{AA'} \cdot \vec{OO'}}{|\vec{AA'}| |\vec{OO'}|} = \frac{0+0+1}{\sqrt{6} \times 1} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, 即直线 AA'

与 OO' 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$. 故选 A.

(2)法一: 连接 BD, AF 交于点 O , 连接 OC ,
 易知 OC, OD, OA 两两垂直, 如图,
 建立空间直角坐标系 $Oxyz$,

则 $B(0, -\sqrt{2}, 0), C(\sqrt{2}, 0, 0), A(0, 0, \sqrt{2}), D(0, \sqrt{2}, 0), F(0, 0, -\sqrt{2})$,
 所以 $N(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}), M(0, \frac{\sqrt{2}}{2},$



$\frac{\sqrt{2}}{2}), \vec{BN} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}),$

$\vec{FM} = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}),$

所以 $|\cos \langle \vec{BN}, \vec{FM} \rangle| = \frac{|\vec{BN} \cdot \vec{FM}|}{|\vec{BN}| |\vec{FM}|} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{3} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{6},$

即直线 BN 和 FM 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{6}$.

法二: 由题意, 可得 $\vec{BN} = \vec{AN} - \vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AC} - \vec{AB},$

$\vec{FM} = \vec{FD} + \vec{DM} = \vec{BA} + \vec{DM} = -\frac{1}{2}\vec{AD} - \vec{AB},$

连接 BD (图略), 由正八面体 $ABCDEF$ 的棱长都是 2, 且各个面都是等边三角形, 易知四边形 $BCDE$ 为正方形,

在 $\triangle ABD$ 中, 由 $AB = AD = 2, BD = 2\sqrt{2}$, 可得 $AB^2 + AD^2 = BD^2$, 所以 $AB \perp AD$,

所以 $\vec{FM} \cdot \vec{BN} = (-\frac{1}{2}\vec{AD} - \vec{AB}) \cdot (\frac{1}{2}\vec{AC} - \vec{AB}) = -\frac{1}{4} \cdot$

$\vec{AD} \cdot \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AD} \cdot \vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AB}^2 = -\frac{1}{4} \times 2 \times 2 \times$

$\frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2^2 = -\frac{1}{2} - 1 + 4 = \frac{5}{2}, |\vec{BN}| =$

$\sqrt{(\frac{1}{2}\vec{AC} - \vec{AB})^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\vec{AC}^2 - \vec{AC} \cdot \vec{AB} + \vec{AB}^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{4} \times 2^2 - 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2^2} = \sqrt{3},$

$$|\vec{FM}| = \sqrt{(-\frac{1}{2}\vec{AD} - \vec{AB})^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\vec{AD}^2 + \vec{AD} \cdot \vec{AB} + \vec{AB}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} \times 2^2 + 0 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$\text{所以 } |\cos \langle \vec{FM}, \vec{BN} \rangle| = \frac{|\vec{FM} \cdot \vec{BN}|}{|\vec{FM}| |\vec{BN}|} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{5} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{6},$$

即直线 BN 和 FM 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{6}$.]

多维变迁

1. B [如图, 以 B 为原点, BA, BC, BB_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系,

则 $B(0,0,0), A(2,0,0), C(0,2\sqrt{2},0)$.

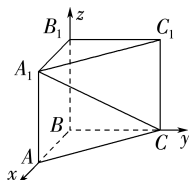
设 $A_1(2,0,z), z > 0$,

则 $\vec{BA} = (2,0,0), \vec{CA_1} = (2, -2\sqrt{2}, z)$,

$$\text{所以 } |\cos \langle \vec{BA}, \vec{CA_1} \rangle| = \frac{4}{2\sqrt{12+z^2}}$$

$$= \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

解得 $z=2$, 故 $AA_1=2$. 故选 B.]



2. A [取 BC 的中点 F , 连接 AF , 则由题意可得 $AF \perp BC, AF \perp AD$, 且 $BF=1, AF=\sqrt{3}$,

以 A 为坐标原点, AF, AD, AA_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(0,0,0), B(\sqrt{3}, -1, 0)$,

$B_1(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1), C(\sqrt{3}, 1, 0)$,

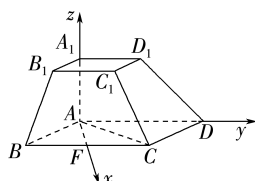
$\therefore \vec{BB_1} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1), \vec{AC} =$

$(\sqrt{3}, 1, 0),$

$$\therefore |\cos \langle \vec{BB_1}, \vec{AC} \rangle| = \frac{|\vec{BB_1} \cdot \vec{AC}|}{|\vec{BB_1}| |\vec{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$\therefore$ 直线 AC 与直线 BB_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

故选 A.]



考点二

典例 2 (1)证明: 连接 AC_1 , 交 A_1C 于点 P , 连接 DP ,

因为点 D, P 分别是 AB, AC_1 的中点,

所以 $DP \parallel BC_1$,

因为 $DP \subset$ 平面 $A_1CD, BC_1 \not\subset$ 平面 A_1CD , 所以 $BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD .

(2)解: 因为 $AB=2, AA_1=AC=CB=\sqrt{2}$,

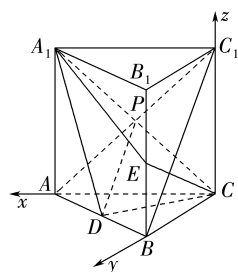
所以 $AC^2 + BC^2 = AB^2$, 所以 $AC \perp CB$,

如图, 以 C 为原点, CA, CB, CC_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间直角坐标系,

则 $C(0,0,0), D(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), A_1(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}), E(0, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 所

以 $\vec{CD} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), \vec{CE} = (0, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), \vec{CA_1} = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$,

设平面 A_1CE 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,



$$\begin{cases} m \perp \overrightarrow{CE}, \\ m \perp \overrightarrow{CA_1}, \end{cases}$$

$$\text{所以} \begin{cases} m \cdot \overrightarrow{CE} = \sqrt{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{CA_1} = \sqrt{2}x + \sqrt{2}z = 0, \end{cases}$$

令 $x=2$, 则 $y=1, z=-2$,

所以平面 A_1CE 的一个法向量为 $m=(2,1,-2)$.

设 CD 与平面 A_1CE 所成的角为 θ ,

$$\begin{aligned} \text{则 } \sin \theta &= |\cos \langle \overrightarrow{CD}, m \rangle| = \frac{|\overrightarrow{CD} \cdot m|}{|\overrightarrow{CD}| |m|} \\ &= \frac{\left| \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \times \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{又 } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

所以直线 CD 与平面 A_1CE 所成角的大小为 $\frac{\pi}{4}$.

多维变迁

(1)证明:过 A_1 作 $A_1D \perp CC_1$, 垂足为 D ,

$\because A_1C \perp$ 平面 $ABC, BC \subset$ 平面 ABC ,

$\therefore A_1C \perp BC$,

又 $\angle ACB = 90^\circ, \therefore AC \perp BC$,

$\because A_1C, AC \subset$ 平面 ACC_1A_1 , 且 $A_1C \cap AC = C$,

$\therefore BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 ,

$\because A_1D \subset$ 平面 $ACC_1A_1, \therefore BC \perp A_1D$,

又 $CC_1, BC \subset$ 平面 BCC_1B_1 , 且 $CC_1 \cap BC = C$,

$\therefore A_1D \perp$ 平面 $BCC_1B_1, \therefore A_1D \perp B_1C$.

由已知条件易证 $\triangle A_1C_1C$ 是直角三角形, 又 $CC_1 = AA_1 = 2$,

$A_1D = 1, \therefore D$ 为 CC_1 的中点, 又 $A_1D \perp CC_1$,

$\therefore A_1C = A_1C_1$,

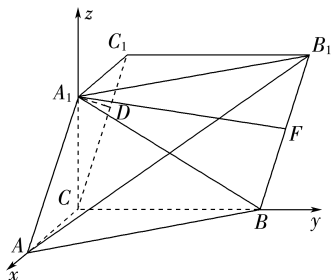
又在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC = A_1C_1, \therefore A_1C = AC$.

(2)解:连接 A_1B , 由(1)易证 $A_1B = A_1B_1$, 故取 BB_1 的中点

F , 连接 $A_1F, \because AA_1$ 与 BB_1 的距离为 2, $\therefore A_1F = 2$,

又 $A_1D = 1$ 且 $A_1C = AC$,

$\therefore A_1C = A_1C_1 = AC = \sqrt{2}, AB = A_1B_1 = \sqrt{5}, BC = \sqrt{3}$.



建立空间直角坐标系 $Cxyz$ 如图所示,

则 $C(0,0,0), A(\sqrt{2},0,0), B(0,\sqrt{3},0), B_1(-\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{2})$,

$C_1(-\sqrt{2},0,\sqrt{2}), \therefore \overrightarrow{CB} = (0,\sqrt{3},0), \overrightarrow{CC_1} = (-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$,

$\overrightarrow{AB_1} = (-2\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{2})$.

设平面 BCC_1B_1 的法向量为 $n=(x,y,z)$,

$$\text{则} \begin{cases} n \cdot \overrightarrow{CB} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{CC_1} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} \sqrt{3}y = 0, \\ -\sqrt{2}x + \sqrt{2}z = 0, \end{cases} \text{取 } x=1, \text{ 则 } y=0, z=1,$$

$\therefore$ 平面 BCC_1B_1 的一个法向量为 $n=(1,0,1)$.

设 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle n, \overrightarrow{AB_1} \rangle| = \frac{|n \cdot \overrightarrow{AB_1}|}{|n| |\overrightarrow{AB_1}|} = \frac{\sqrt{13}}{13}.$$

$\therefore AB_1$ 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{13}}{13}$.

随堂·对点检测

1. C [因为 $s_1=(1,0,1), s_2=(-1,2,-2)$, 所以 $\cos \langle s_1, s_2 \rangle =$

$$\frac{s_1 \cdot s_2}{|s_1| |s_2|} = \frac{-1-2}{\sqrt{2} \times 3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ 又两直线所成角的取值范围为}$$

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ 所以 } l_1 \text{ 和 } l_2 \text{ 所成角的余弦值为 } \frac{\sqrt{2}}{2}.]$$

2. C [因为 $P(0,0,1), A(0,\sqrt{3},0), B(1,\sqrt{3},0), C(2,0,0)$,

故 $\overrightarrow{PA}=(0,\sqrt{3},-1), \overrightarrow{PB}=(1,\sqrt{3},-1), \overrightarrow{PC}=(2,0,-1)$,

设平面 PAB 的法向量为 $n=(x,y,z)$,

$$\text{则} \begin{cases} n \perp \overrightarrow{PA}, \\ n \perp \overrightarrow{PB}, \end{cases} \text{ 则} \begin{cases} n \cdot \overrightarrow{PA} = \sqrt{3}y - z = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{PB} = x + \sqrt{3}y - z = 0, \end{cases}$$

令 $y=1$, 则 $x=0, z=\sqrt{3}$,

故 $n=(0,1,\sqrt{3})$ 为平面 PAB 的一个法向量,

设 PC 与平面 PAB 所成的角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = \frac{|n \cdot \overrightarrow{PC}|}{|n| |\overrightarrow{PC}|} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{10}, \text{ 故选 C.}]$$

3. B [如图,以 D 为坐标原点, DA ,

DC, DD_1 所在直线分别为 x, y, z

轴建立空间直角坐标系,

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

$AB = BC = 3, BB_1 = 2, \overrightarrow{DM} =$

$$\frac{2}{3} \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{A_1N} = \frac{1}{3} \overrightarrow{A_1C_1},$$

则 $A_1(3,0,2), M(2,2,0), B(3,3,0), N(2,1,2)$, 所以 $\overrightarrow{A_1M} =$

$(-1,2,-2), \overrightarrow{BN} = (-1,-2,2)$,

设异面直线 A_1M 和 BN 所成的角为 θ ,

$$\begin{aligned} \text{则 } \cos \theta &= \frac{|\overrightarrow{A_1M} \cdot \overrightarrow{BN}|}{|\overrightarrow{A_1M}| |\overrightarrow{BN}|} = \frac{|(-1,2,-2) \cdot (-1,-2,2)|}{\sqrt{1+4+4} \times \sqrt{1+4+4}} \\ &= \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

故选 B.]

4. $\frac{1}{2}$ [建立空间直角坐标系如图, 设 $AB=2$,

则 $M(2,2,1), N(1,2,2), B(2,2,0)$,

$A'(2,0,2), C(0,2,0)$,

则 $\overrightarrow{MN} = (-1,0,1), \overrightarrow{BA'} = (0,-2,2)$,

$\overrightarrow{BC} = (-2,0,0)$.

设平面 $A'BCD'$ 的法向量为 $n=(x,y,$

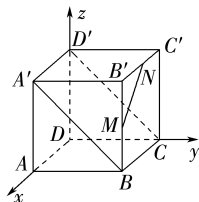
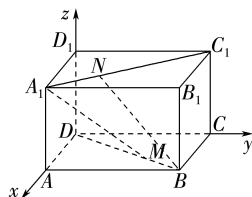
$z)$,

$$\text{故} \begin{cases} \overrightarrow{BA'} \cdot n = -2y + 2z = 0, \\ \overrightarrow{BC} \cdot n = -2x = 0, \end{cases}$$

令 $z=1$, 则 $y=1, x=0$, 所以平面 $A'BCD'$ 的一个法向量为 $n=(0,1,1)$,

所以 MN 与平面 $A'BCD'$ 所成角的正弦值为 $|\cos \langle \overrightarrow{MN}, n \rangle| =$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2}.]$$



第 57 课时 向量法求空间角(二)

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 夹角 $\frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|}$

链教材·夯基固本

$\frac{\pi}{3}$ [以 C 为原点,建立如图所示的空间直角坐标系 $Cxyz$.

易得平面 ABC 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (0, 0, 1)$.

设平面 BCP 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x, y, z)$,

$\overrightarrow{CB} = (0, 2, 0), \overrightarrow{CP} = (2, 0, 2\sqrt{3})$,

所以 $\begin{cases} \overrightarrow{CB} \cdot \mathbf{n}_2 = 2y = 0, \\ \overrightarrow{CP} \cdot \mathbf{n}_2 = 2x + 2\sqrt{3}z = 0, \end{cases}$

取 $x = \sqrt{3}$, 则 $z = -1, y = 0$,

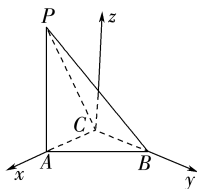
故 $\mathbf{n}_2 = (\sqrt{3}, 0, -1)$,

所以 $\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{-1}{1 \times 2} = -\frac{1}{2}$,

所以 $\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{2\pi}{3}$.

由图可知所求二面角为锐二面角,

所以二面角 A-BC-P 的平面角的大小为 $\frac{\pi}{3}$.]



考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1)证明:因为 $PD \perp$ 平面 ABCD, $AD \subset$ 平面 ABCD, 则 $AD \perp PD$,

因为 $\angle ADC = 90^\circ$, 所以 $AD \perp CD$,

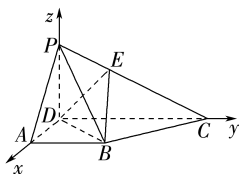
因为 $PD \cap CD = D, CD \subset$ 平面 PCD, $PD \subset$ 平面 PCD,

故 $AD \perp$ 平面 PDC.

(2)解:由 $PD \perp$ 平面 ABCD, $\angle ADC =$

90° , 则直线 DA, DC, DP 两两垂直.

以 D 为坐标原点, DA, DC, DP 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,



因为 $AB = AD = PD = 3, \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EP}$,

所以 $B(3, 3, 0), C(0, 6, 0), D(0, 0, 0), P(0, 0, 3), E(0, 2, 2)$,

$\overrightarrow{DB} = (3, 3, 0), \overrightarrow{DE} = (0, 2, 2), \overrightarrow{CP} = (0, -6, 3), \overrightarrow{CB} = (3, -3, 0)$,

设平面 BDE 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DB} = 3x_1 + 3y_1 = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DE} = 2y_1 + 2z_1 = 0, \end{cases}$ 取 $x_1 = 1$,

可得 $\mathbf{m} = (1, -1, 1)$ 为平面 BDE 的一个法向量,

设平面 PBC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CP} = -6y_2 + 3z_2 = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CB} = 3x_2 - 3y_2 = 0, \end{cases}$ 取 $x_2 = 1$, 可得 $\mathbf{n} = (1, 1, 2)$ 为平面 PBC 的一个法向量,

面 PBC 的一个法向量,

设平面 BDE 与平面 PBC 的夹角为 θ ,

则 $\cos \theta = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{2}{\sqrt{3} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 所以平面

BDE 与平面 PBC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

多维变迁

(1)证明:连接 BO, OP, 因为 $AB = BC = \sqrt{2}$, 所以 $BO \perp AC$,

因为平面 $PAC \perp$ 平面 ABC, 两平面交线为 AC,

$BO \subset$ 平面 ABC,

所以 $BO \perp$ 平面 PAC,

因为 $PA = AC = CP = 2$, 所以 $PO \perp AC$,

$AO = 1, PO = \sqrt{AP^2 - AO^2} = \sqrt{3}$,

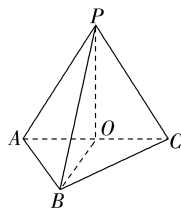
故 $S_{\triangle OPA} = \frac{1}{2} OP \cdot AO = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

又 $AB = \sqrt{2}$, 由勾股定理得

$BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{2 - 1} = 1$,

又 $BO \perp$ 平面 PAC,

故三棱锥 B-OPA 的体积 $V = \frac{1}{3} S_{\triangle OPA} \cdot BO = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$.



(2)解:由(1)知 $BO \perp$ 平面 PAC, 因为 $OC, OP \subset$ 平面 PAC,

所以 $BO \perp OC, BO \perp OP$, 又 $PO \perp AC$, 故 OB, OC, OP 两两垂直.

以 O 为坐标原点, OB, OC, OP 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系, 如图所示,

则 $B(1, 0, 0), P(0, 0, \sqrt{3}), C(0, 1, 0)$,

所以 $\overrightarrow{BP} = (-1, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{PC} = (0, 1, -\sqrt{3})$,

设平面 BPC 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{m} \perp \overrightarrow{BP}, \\ \mathbf{m} \perp \overrightarrow{PC}, \end{cases}$

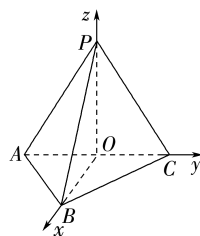
则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BP} = -x + \sqrt{3}z = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PC} = y - \sqrt{3}z = 0, \end{cases}$

令 $z = 1$ 得 $x = y = \sqrt{3}$, 故 $\mathbf{m} = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1)$ 为平面 BPC 的一个法向量,

又平面 PCA 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$,

故 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$,

故二面角 B-PC-A 的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$.



考点二

典例 2 (1)证明:由 $AB = 8, AD = 5\sqrt{3}, \overrightarrow{AE} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF} =$

$\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$, 得 $AE = 2\sqrt{3}, AF = 4$.

又 $\angle BAD = 30^\circ$, 在 $\triangle AEF$ 中, 由余弦定理得

$EF = \sqrt{AE^2 + AF^2 - 2AE \cdot AF \cos \angle BAD}$

$= \sqrt{16 + 12 - 2 \times 4 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$.

所以 $AE^2 + EF^2 = AF^2$,

则 $AE \perp EF$,

即 $EF \perp AD$,

所以 $EF \perp PE, EF \perp DE$,

又 $PE \cap DE = E, PE, DE \subset$ 平面 PDE,

所以 $EF \perp$ 平面 PDE,

又 $PD \subset$ 平面 PDE , 故 $EF \perp PD$.

(2)解: 连接 CE , 由 $\angle ADC = 90^\circ$, $ED = 3\sqrt{3}$, $CD = 3$,

$$\text{则 } CE^2 = ED^2 + CD^2 = 36,$$

在 $\triangle PEC$ 中, $PC = 4\sqrt{3}$, $PE = 2\sqrt{3}$, $EC = 6$,

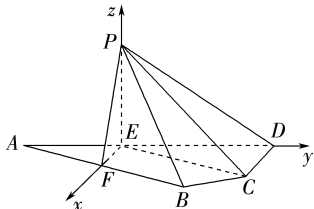
$$\text{得 } EC^2 + PE^2 = PC^2,$$

所以 $PE \perp EC$, 由(1)知 $PE \perp EF$,

又 $EC \cap EF = E$, $EC, EF \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PE \perp$ 平面 $ABCD$, 又 $ED \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PE \perp ED$, 则 PE, EF, ED 两两垂直, 建立如图空间直角坐标系 $Exyz$,



则 $E(0,0,0), P(0,0,2\sqrt{3}), D(0,3\sqrt{3},0)$,

$C(3,3\sqrt{3},0), F(2,0,0), A(0,-2\sqrt{3},0)$,

由 F 是 AB 的中点, 得 $B(4,2\sqrt{3},0)$,

所以 $\overrightarrow{PC} = (3, 3\sqrt{3}, -2\sqrt{3}), \overrightarrow{PD} = (0, 3\sqrt{3}, -2\sqrt{3}), \overrightarrow{PB} = (4, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}), \overrightarrow{PF} = (2, 0, -2\sqrt{3})$,

设平面 PCD 和平面 PBF 的法向量分别为 $\mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{m} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 3x_1 + 3\sqrt{3}y_1 - 2\sqrt{3}z_1 = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PD} = 3\sqrt{3}y_1 - 2\sqrt{3}z_1 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PB} = 4x_2 + 2\sqrt{3}y_2 - 2\sqrt{3}z_2 = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PF} = 2x_2 - 2\sqrt{3}z_2 = 0, \end{cases}$$

令 $y_1 = 2$, 得 $x_1 = 0, z_1 = 3$, 令 $x_2 = \sqrt{3}$, 得 $y_2 = -1, z_2 = 1$,

所以 $\mathbf{n} = (0, 2, 3)$ 为平面 PCD 的一个法向量, $\mathbf{m} = (\sqrt{3}, -1, 1)$ 为平面 PBF 的一个法向量,

$$\text{所以 } |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{5} \times \sqrt{13}} = \frac{\sqrt{65}}{65},$$

设平面 PCD 和平面 PBF 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{8\sqrt{65}}{65},$$

即平面 PCD 与平面 PBF 所成的二面角的正弦值为 $\frac{8\sqrt{65}}{65}$.

母题探究

解: 由本例(2)知, 平面 PBF 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (\sqrt{3}, -1, 1)$.

假设在线段 PD 上存在点 M ,

使二面角 $M-FB-P$ 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$,

设 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PD} (0 < \lambda < 1)$,

则 $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FP} + \overrightarrow{PM} = (-2, 0, 2\sqrt{3}) + (0, 3\sqrt{3}\lambda, -2\sqrt{3}\lambda) = (-2, 3\sqrt{3}\lambda, 2\sqrt{3}(1-\lambda))$,

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PM} = (-4, -2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}) + (0, 3\sqrt{3}\lambda, -2\sqrt{3}\lambda) = (-4, 3\sqrt{3}\lambda - 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}(1-\lambda))$.

设平面 MFB 的法向量为 $\mathbf{v} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{FM} \cdot \mathbf{v} = 0, \\ \overrightarrow{BM} \cdot \mathbf{v} = 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} -2x + 3\sqrt{3}\lambda y + 2\sqrt{3}(1-\lambda)z = 0, \\ -4x + (3\sqrt{3}\lambda - 2\sqrt{3})y + 2\sqrt{3}(1-\lambda)z = 0, \end{cases}$$

两式相减, 得 $x + \sqrt{3}y = 0$,

取 $x = \sqrt{3}$, 得 $y = -1, z = \frac{2+3\lambda}{2(1-\lambda)}$,

即 $\mathbf{v} = (\sqrt{3}, -1, \frac{2+3\lambda}{2(1-\lambda)})$.

$$\text{由题意 } |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{v} \rangle| = \frac{\left| 4 + \frac{2+3\lambda}{2(1-\lambda)} \right|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{4 + \frac{(2+3\lambda)^2}{4(1-\lambda)^2}}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

可设 $t = \frac{2+3\lambda}{2(1-\lambda)}$, 则 $t > 0$, 整理得 $8t^2 - 26t - 7 = 0$,

解得 $t = \frac{7}{2}$ 或 $t = -\frac{1}{4}$ (舍去),

所以 $\lambda = \frac{1}{2}$, 假设成立.

所以在线段 PD 上存在点 M , 使二面角 $M-FB-P$ 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$, 点 M 是 PD 的中点.

微点突破 13

典例 3 解: 由题意知 DC, AD, AP 两两垂直, 以 D 为原点, AD, DC 所在直线分别为 x 轴、 y 轴, 过点 D 且平行于 AP 的直线为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系. 设 $AD = p, DC = q$,

$p > 0, q > 0$,

满足 $p^2 + q^2 = AC^2 = 4$.

则 $A(p, 0, 0), P(p, 0, 2), C(0, q, 0)$,

$D(0, 0, 0)$.

设平面 APC 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

因为 $\overrightarrow{AP} = (0, 0, 2), \overrightarrow{AC} = (-p, q, 0)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{m} = 2z_1 = 0, \\ \overrightarrow{AC} \cdot \mathbf{m} = -px_1 + qy_1 = 0, \end{cases} \quad \text{取 } \mathbf{m} = (q, p, 0) \text{ 为平面 } APC$$

的一个法向量.

设平面 DPC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

因为 $\overrightarrow{DP} = (p, 0, 2), \overrightarrow{DC} = (0, q, 0)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \overrightarrow{DP} \cdot \mathbf{n} = px_2 + 2z_2 = 0, \\ \overrightarrow{DC} \cdot \mathbf{n} = qy_2 = 0, \end{cases} \quad \text{取 } \mathbf{n} = (2, 0, -p) \text{ 为平面 } DPC$$

的一个法向量.

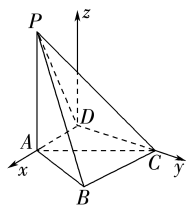
$$\text{所以 } |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{2q}{\sqrt{p^2 + q^2} \cdot \sqrt{p^2 + 4}} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{42}}{7}\right)^2},$$

又因为 $p^2 + q^2 = 4$, 所以 $\frac{q}{\sqrt{p^2 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$,

解得 $p = \sqrt{3}$ (负值舍去), 即 $AD = \sqrt{3}$.

随堂·对点检测

1. $\frac{\sqrt{7}}{7}$ [因为正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长均为 2, 取 BC 的中点 O , 连接 AO , 则 $AO \perp$ 平面 BB_1C_1C . 取 B_1C_1 的中点 H , 连接 OH , 则易得 AO, BO, OH 两两垂直.]



梳必备 · 破题有方

知识点 2 $\frac{|\vec{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$

链教材 · 夯基固本

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ [因为 $\vec{PA} = (-2, 0, -1)$, 且 $\vec{n} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 为 l 的一个

单位方向向量,

故点 P 到 l 的距离为

$$d = \sqrt{|\vec{PA}|^2 - (\vec{PA} \cdot \vec{n})^2} = \sqrt{5 - \left(-\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. $\frac{2\sqrt{5}}{15}$ [由题意, 得 $\vec{AM} = (-2, 0, 3)$, $\vec{AB} = (-3, -2, 1)$,

$$\vec{AC} = (-1, 0, 2),$$

设平面 ABC 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{由题意可得} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} -3x - 2y + z = 0, \\ -x + 2z = 0, \end{cases}$$

不妨令 $x = 2$, 则 $z = 1, y = -\frac{5}{2}$,

$$\therefore \vec{n} = \left(2, -\frac{5}{2}, 1\right).$$

$$\therefore \text{点 } M \text{ 到平面 } \alpha \text{ 的距离为 } \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|-4 + 3|}{\sqrt{2^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{15}.$$

3. B [如图, 以 D 为原点, 建立空间直角坐标系,

则 $A(2, 0, 0), C(0, 2, 0), E(2, 1, 2)$,

$M(1, 0, 0), N(0, 2, 1)$,

所以 $\vec{ME} = (1, 1, 2), \vec{MN} = (-1, 2,$

$1), \vec{AC} = (-2, 2, 0)$,

设平面 EMN 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{ME} = x + y + 2z = 0, \\ \vec{m} \cdot \vec{MN} = -x + 2y + z = 0, \end{cases}$$

令 $x = 1$, 可得 $\vec{m} = (1, 1, -1)$ 为平面 EMN 的一个法向量, 所

以 $\vec{AC} \cdot \vec{m} = 0$,

即 $\vec{AC} \perp \vec{m}$,

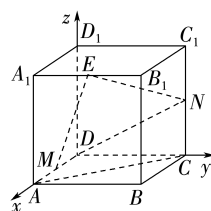
又 $AC \not\subset$ 平面 EMN , 所以 $AC \parallel$ 平面 EMN ,

故点 A 到平面 EMN 的距离即为直线 AC 到平面 EMN 的距离,

又 $\vec{MA} = (1, 0, 0)$, 所以点 A 到平面 EMN 的距离为

$$\frac{|\vec{MA} \cdot \vec{m}|}{|\vec{m}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

即直线 AC 与平面 EMN 之间的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



以 O 为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(0, 0, \sqrt{3}), B(1, 0, 0), A_1(0, 2,$

$\sqrt{3}), C_1(-1, 2, 0)$,

所以 $\vec{AB} = (1, 0, -\sqrt{3}), \vec{AA_1} = (0, 2,$

$0), \vec{BC_1} = (-2, 2, 0), \vec{BA_1} = (-1, 2, \sqrt{3})$.

设平面 AA_1B 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{AB} = x_1 - \sqrt{3}z_1 = 0, \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{AA_1} = 2y_1 = 0, \end{cases} \text{令 } z_1 = 1, \text{ 得 } \vec{n}_1 = (\sqrt{3}, 0, 1) \text{ 为平}$$

面 AA_1B 的一个法向量.

同理可得平面 A_1BC_1 的一个法向量为 $\vec{n}_2 = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, -1)$.

设平面 AA_1B 与平面 A_1BC_1 的夹角为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{2}{2 \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7},$$

即平面 AA_1B 与平面 A_1BC_1 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

2. (1) 证明: 翻折前, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = DE = BD = 2$,

所以 $DE \parallel BC$, 且 $AD = 4, BC = \frac{3}{2}DE = 3$,

因为 $\angle ABC = 90^\circ$, 所以 $\angle ADE = 90^\circ$, 即 $DE \perp AB$,

翻折后, $DE \perp AD, DE \perp BD$,

在 $\triangle BCD$ 中, $\angle CBD = 90^\circ, BD = 2, BC = 3$, 所以 $CD = \sqrt{BC^2 + BD^2} = \sqrt{13}$,

在 $\triangle ACD$ 中, $AD = 4, CD = \sqrt{13}, AC = \sqrt{29}$, 所以 $AD^2 + CD^2 = AC^2$, 即 $AD \perp CD$,

又 $CD \cap DE = D, CD, DE \subset$ 平面 $BCED$,

所以 $AD \perp$ 平面 $BCED$.

(2) 解: 因为 $AD \perp$ 平面 $BCED, DE \perp BD$,

所以 DB, DE, DA 两两垂直,

故以 D 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(0, 0, 4), C(2, 3, 0), D(0, 0, 0)$,

$E(0, 2, 0)$, 所以 $\vec{AC} = (2, 3, -4)$,

$\vec{AE} = (0, 2, -4), \vec{DA} = (0, 0, 4), \vec{DC} =$

$(2, 3, 0)$,

设平面 ACE 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AC} = 2x_1 + 3y_1 - 4z_1 = 0, \\ \vec{m} \cdot \vec{AE} = 2y_1 - 4z_1 = 0, \end{cases}$$

取 $z_1 = 1$, 可得 $\vec{m} = (-1, 2, 1)$ 为平面 ACE 的一个法向量,

设平面 ACD 的法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

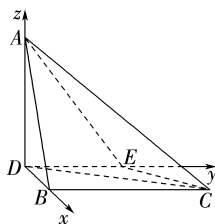
$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{DA} = 4z_2 = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{DC} = 2x_2 + 3y_2 = 0, \end{cases}$$

取 $x_2 = 3$, 可得 $\vec{n} = (3, -2, 0)$ 为平面 ACD 的一个法向量,

设平面 ACE 与平面 ACD 的夹角为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{|-3 - 4|}{\sqrt{6} \times \sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{78}}{78}, \text{ 所以平}$$

面 ACE 与平面 ACD 夹角的余弦值为 $\frac{7\sqrt{78}}{78}$.



考点深研·题型突破

考点一

考向1 典例1 B [法一(向量法):由题意知 $A_1(0,0,3)$, $B(1,0,0)$, $C(1,2,0)$, $\overrightarrow{A_1C}=(1,2,-3)$, $\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$, $\overrightarrow{A_1C}$ 方向上的单位向量为 $\mu=(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}})$, 所以点 B 到直线 A_1C 的距离为 $\sqrt{|\overrightarrow{BC}|^2 - (\overrightarrow{BC} \cdot \mu)^2} = \sqrt{4 - \frac{8}{7}} = \frac{2\sqrt{35}}{7}$. 故选 B.]

法二(几何法):连接 AC , A_1B (图略), 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 由 $AB=1$, $BC=2$, 得 $AC=\sqrt{5}$,

在 $\text{Rt}\triangle A_1AC$ 中, $A_1C=\sqrt{AC^2+A_1A^2}=\sqrt{14}$,

在 $\text{Rt}\triangle A_1AB$ 中, $A_1B=\sqrt{A_1A^2+AB^2}=\sqrt{10}$,

则 $A_1B^2+BC^2=A_1C^2$,

在 $\text{Rt}\triangle A_1BC$ 中, 设边 A_1C 上的高为 h ,

由 $A_1B \times BC = A_1C \times h$ 得 $h = \frac{\sqrt{10} \times 2}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{35}}{7}$. 故选 B.]

考向2 典例2 C [建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $D(0,0,0)$, $A(1,-1,0)$, $B(1,0,0)$,

$C(0,1,0)$, $C_1(0,1,2)$, $E(1,-1,\frac{1}{2})$,

所以 $\overrightarrow{DC_1}=(0,1,2)$, $\overrightarrow{DE}=(1,-1,\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{DB}=(1,0,0)$,

设平面 EDC_1 的法向量为 $m=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{DE} = x - y + \frac{1}{2}z = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{DC_1} = y + 2z = 0, \end{cases}$ 取 $z=1$, 则 $x=-\frac{5}{2}$, $y=-2$,

所以 $m=(-\frac{5}{2}, -2, 1)$ 为平面 EDC_1 的一个法向量,

所以点 B 到平面 EDC_1 的距离 $d = \frac{|m \cdot \overrightarrow{DB}|}{|m|} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

故选 C.]

多维变迁

1. **D** [以 D 为坐标原点, DA 所在直线为 x 轴, DC 所在直线为 y 轴, DD_1 所在直线为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $G(2,\lambda,2)$, $D_1(0,0,2)$, $E(2,0,1)$, $F(2,2,1)$,

所以 $\overrightarrow{ED_1}=(-2,0,1)$, $\overrightarrow{EF}=(0,2,0)$, $\overrightarrow{EG}=(0,\lambda,1)$.

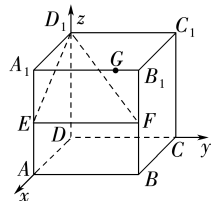
设平面 D_1EF 的法向量为 $n=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{ED_1} = -2x + z = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{EF} = 2y = 0, \end{cases}$

取 $x=1$, 得 $n=(1,0,2)$ 为平面 D_1EF 的一个法向量,

所以点 G 到平面 D_1EF 的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{EG} \cdot n|}{|n|} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.]

2. **解:** 以 D_1 为坐标原点, 分别以 D_1A_1 , D_1C_1 , D_1D 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系,



则 $A(1,0,1)$, $B(1,1,1)$, $C(0,1,1)$,

$C_1(0,1,0)$, $E(1,\frac{1}{2},0)$, $F(1,\frac{1}{2},1)$,

$\therefore \overrightarrow{AB}=(0,1,0)$, $\overrightarrow{AC_1}=(-1,1,-1)$,

$\overrightarrow{AE}=(0,\frac{1}{2},-1)$, $\overrightarrow{EC_1}=(-1,\frac{1}{2},0)$,

$\overrightarrow{FC}=(-1,\frac{1}{2},0)$, $\overrightarrow{AF}=(0,\frac{1}{2},0)$,

(1) 取 $a=\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$, $u=\frac{\overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AC_1}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}(-1,1,-1)$,

$a^2=1$, $a \cdot u = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则点 B 到直线 AC_1 的距离为

$\sqrt{a^2 - (a \cdot u)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

(2) $\because \overrightarrow{FC}=\overrightarrow{EC_1}=(-1,\frac{1}{2},0)$, 且 F, C, E, C_1 四点不共线,

$\therefore FC \parallel EC_1$,

而 $FC \not\subset$ 平面 AEC_1 , $EC_1 \subset$ 平面 AEC_1 ,

$\therefore FC \parallel$ 平面 AEC_1 ,

则点 F 到平面 AEC_1 的距离就是直线 FC 到平面 AEC_1 的距离.

设平面 AEC_1 的法向量为 $n=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}y - z = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{EC_1} = -x + \frac{1}{2}y = 0, \end{cases}$ 取 $y=2$, 得

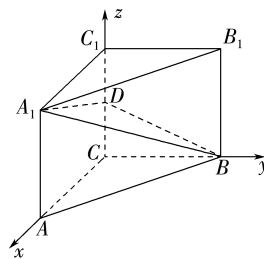
$n=(1,2,1)$ 为平面 AEC_1 的一个法向量,

又 $\overrightarrow{AF}=(0,\frac{1}{2},0)$,

$\therefore$ 直线 FC 到平面 AEC_1 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{AF} \cdot n|}{|n|} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

考点二

典例3 解: (1) 因为 $CC_1 \perp$ 平面 ABC , $CA, CB \subset$ 平面 ABC , $\angle ACB=90^\circ$, 则 $CC_1 \perp CA$, $CC_1 \perp CB$, $CA \perp CB$, 以 C 为坐标原点, 以 CA, CB, CC_1 所在的直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系, 如图所示,



因为 $AA_1=AC=BC=2$, 则 $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$, $A_1(2,0,2)$, $D(0,0,1)$,

则 $\overrightarrow{DA_1}=(2,0,1)$, $\overrightarrow{DB}=(0,2,-1)$.

易知平面 ABC 的一个法向量为 $m=\overrightarrow{CC_1}=(0,0,2)$,

设平面 A_1BD 的法向量为 $n=(x,y,z)$,

所以 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{DA_1} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{DB} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x + z = 0, \\ 2y - z = 0, \end{cases}$ 令 $y=1$,

故 $n=(-1,1,2)$ 为平面 A_1BD 的一个法向量,

则 $n \cdot m = 4, |n| = \sqrt{6}, |m| = 2$,

$$\text{所以 } \cos \langle n, m \rangle = \frac{n \cdot m}{|n| |m|} = \frac{4}{2 \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

因为平面 A_1BD 与平面 ABC 的夹角为锐角,

$$\text{所以平面 } A_1BD \text{ 与平面 } ABC \text{ 夹角的余弦值为 } |\cos \langle n, m \rangle| = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$(2) \text{ 假设存在点 } P, \text{ 设 } \overrightarrow{CP} = \lambda \overrightarrow{CD} = (0, 0, \lambda), \lambda \in [0, 1], \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} = (0, -2, 0) + (0, 0, \lambda) = (0, -2, \lambda),$$

$$\text{设 } BP \text{ 与平面 } A_1BD \text{ 所成的角为 } \theta, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

由(1)知,平面 A_1BD 的一个法向量为 $n = (-1, 1, 2)$,

$$n \cdot \overrightarrow{BP} = 2\lambda - 2, |n| = \sqrt{6}, |\overrightarrow{BP}| = \sqrt{4 + \lambda^2},$$

$$\text{所以 } \cos \langle n, \overrightarrow{BP} \rangle = \frac{n \cdot \overrightarrow{BP}}{|n| |\overrightarrow{BP}|} = \frac{2\lambda - 2}{\sqrt{6} \times \sqrt{4 + \lambda^2}},$$

$$\text{所以 } \sin \theta = |\cos \langle n, \overrightarrow{BP} \rangle| = \left| \frac{2\lambda - 2}{\sqrt{6} \times \sqrt{4 + \lambda^2}} \right| = \frac{\sqrt{3}}{6}, \text{ 所以 } 7\lambda^2 -$$

$$16\lambda + 4 = 0, \text{ 解得 } \lambda = \frac{2}{7} \text{ 或 } \lambda = 2 (\text{舍}).$$

所以在线段 CD 上存在一点 P , 使 BP 与平面 A_1BD 所成角的

$$\text{正弦值为 } \frac{\sqrt{3}}{6}, \text{ 此时 } CP = \frac{2}{7}.$$

多维变迁

(1) 证明: 因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$,

$BC \perp AB, BC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $BC \perp$ 平面 PAB ,

又 $PB \subset$ 平面 PAB , 所以 $BC \perp PB$.

(2) 解: 假设存在满足条件的点 E , 在 $\triangle PAB$ 中, 因为 $PA = 2, PB = \sqrt{3}, AB = 1$,

所以 $PA^2 = AB^2 + PB^2$, 所以 $PB \perp AB$.

以 B 为坐标原点, 以 BA, BC, BP 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(-1, 0, 0), B(0, 0, 0), C(0, 2, 0),$

$D(-1, 3, 0), P(0, 0, \sqrt{3}),$

所以 $\overrightarrow{CD} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{PC} = (0, 2, -\sqrt{3}).$

设平面 PCD 的法向量为 $m = (x, y, z),$

$$\text{则 } \begin{cases} m \cdot \overrightarrow{CD} = -x + y = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{PC} = 2y - \sqrt{3}z = 0, \end{cases} \text{ 取 } z = 2, \text{ 则 } m = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2).$$

因为点 B 与点 E 到平面 PCD 的距离相等, 且点 B 与点 E 在平面 PCD 的同侧,

所以 $BE \parallel$ 平面 PCD , 因为点 E 在棱 PA 上, 所以 $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AP}$, 其中 $0 \leq \lambda \leq 1$,

因为 $\overrightarrow{AP} = (1, 0, \sqrt{3})$, 所以 $\overrightarrow{AE} = (\lambda, 0, \sqrt{3}\lambda)$, 又 $\overrightarrow{BA} = (-1, 0, 0)$, 所以 $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = (\lambda - 1, 0, \sqrt{3}\lambda).$

因为 $BE \parallel$ 平面 $PCD, m = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2)$ 为平面 PCD 的一个法向量,

$$\text{所以 } \overrightarrow{BE} \cdot m = 0, \text{ 即 } \sqrt{3}(\lambda - 1) + 2\sqrt{3}\lambda = 0, \text{ 解得 } \lambda = \frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{BE} = \left(-\frac{2}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

$$\text{所以 } BE = |\overrightarrow{BE}| = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

教材拓展

典例 4 A [如图, 以 A 为原点, 建立空间直角坐标系,

则 $B(3, 0, 0), C(3, 3, 0), D(0, 3, 0), P(0, 0, 6), G(1, 0, 4).$

所以 $\overrightarrow{DG} = (1, -3, 4), \overrightarrow{PC} = (3, 3, -6),$

$\overrightarrow{DC} = (3, 0, 0),$

设 $n = (x, y, z)$ 为直线 PC 和 DG 的公垂线的方向向量,

$$\text{则有 } \begin{cases} n \cdot \overrightarrow{DG} = x - 3y + 4z = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{PC} = 3x + 3y - 6z = 0, \end{cases} \text{ 可取 } n = (1, 3, 2),$$

所以异面直线 PC 和 DG 的距离为

$$\frac{|\overrightarrow{DC} \cdot n|}{|n|} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}.$$

随堂·对点检测

1. B [建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $D_1(0, 0, 0), A(1, 0, 1), B(1, 1, 1),$

$O\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), C_1(0, 1, 0), \overrightarrow{D_1A} = (1, 0,$

$1), \overrightarrow{AB} = (0, 1, 0),$

$\overrightarrow{OC_1} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right).$

设平面 ABC_1D_1 的法向量为 $n = (x, y, z),$

$$\text{则 } \begin{cases} n \cdot \overrightarrow{D_1A} = x + z = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{AB} = y = 0, \end{cases} \text{ 令 } x = 1, \text{ 得 } n = (1, 0, -1) \text{ 为平面}$$

ABC_1D_1 的一个法向量, 故点 O 到平面 ABC_1D_1 的距离为 $d =$

$$\frac{|n \cdot \overrightarrow{OC_1}|}{|n|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

2. A [如图, 分别以 AB, AD, AP 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系,

则 $P(0, 0, 1), B(3, 0, 0), D(0, 4, 0),$

则 $\overrightarrow{BP} = (-3, 0, 1), \overrightarrow{BD} = (-3, 4, 0).$

法一: 点 P 到直线 BD 的距离

$$d = \sqrt{|\overrightarrow{BP}|^2 - \left(\frac{\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BD}|}\right)^2} = \sqrt{10 - \left(\frac{9}{5}\right)^2} = \frac{13}{5},$$

所以点 P 到直线 BD 的距离为 $\frac{13}{5}.$

$$\text{法二: } \cos \langle \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BD} \rangle = \frac{\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BP}| |\overrightarrow{BD}|} = \frac{9}{\sqrt{10} \times 5} = \frac{9\sqrt{10}}{50}, \text{ 所以}$$

$$\sin \langle \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BD} \rangle = \frac{13\sqrt{10}}{50}, \text{ 所以点 } P \text{ 到直线 } BD \text{ 的距离为}$$

$$|\overrightarrow{BP}| \sin \langle \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BD} \rangle = \sqrt{10} \times \frac{13\sqrt{10}}{50} = \frac{13}{5}.$$

3. (1) 证明: 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $BB_1 \perp$ 平面 ABC , 所以 $BB_1 \perp BC, BB_1 \perp BA.$

因为 $BA \perp BC, BA \cap BB_1 = B, BA, BB_1 \subset$ 平面 BAA_1B_1 , 所以 $BC \perp$ 平面 BAA_1B_1 , 又 $AB_1 \subset$ 平面 BAA_1B_1 , 所以 $BC \perp AB_1.$

因为 $BB_1 \perp BA, BA = BB_1$, 所以四边形 BAA_1B_1 为正方形, 所以 $AB_1 \perp A_1B.$

因为 $A_1B \cap BC = B, A_1B, BC \subset$ 平面 A_1BC , 所以 $AB_1 \perp$ 平面 $A_1BC.$

(2)解:由(1)知,直线 BA, BB_1, BC 两两垂直,以 B 为原点,直线 BA, BB_1, BC 分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.

因为 $BA=BC=BB_1=2$,

则 $B(0,0,0), A_1(2,2,0), B_1(0,2,0), C(0,0,2)$.

设 $M(0,0,t)(0 \leq t \leq 2)$, 则 $\overrightarrow{MC}=(0,0,2-t), \overrightarrow{A_1B_1}=(-2,0,0), \overrightarrow{B_1C}=(0,-2,2)$.

设平面 A_1B_1C 的法向量为 $\mathbf{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = -2x = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{B_1C} = -2y + 2z = 0, \end{cases}$ 取 $y=1$, 得 $\mathbf{n}=(0,1,1)$ 为平面

A_1B_1C 的一个法向量,

所以点 M 到平面 A_1B_1C 的距离等于 $\frac{|\overrightarrow{MC} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|2-t|}{\sqrt{2}}$, 所以

以 $\frac{|2-t|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 解得 $t=1$ 或 $t=3$ (舍去), 所以当点 M 为棱 BC

的中点时,点 M 到平面 A_1B_1C 的距离等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

规范答题四

典例 (1) $EB \parallel$ 平面 $CD'F$ $A'E \parallel$ 平面 $CD'F$ 平面 $BA'E \parallel$ 平面 $CD'F$ $A'B \subset$ 平面 $BA'E$ 平面 $BA'E \parallel$ 平面 $CD'F$ $A'B \subset$ 平面 $BA'E$ (2) $\angle A'EB$ OM, OC, OD' 两两垂直 (1,1,0)

(0, $-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$) (1,0,0) (0, $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$)

第八章 解析几何

第 59 课时 直线的方程

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 2 (1)向上 (2) 0° (3) $\{\alpha | 0^\circ \leq \alpha < 180^\circ\}$

知识点 3 (1)正切值 $\tan \alpha$

知识点 4 $y=kx+b$ $y-y_0=k(x-x_0)$ $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

链教材·夯基固本

1. D [因为 $\mathbf{v}=(3,1)$, 故直线的斜率 $k=\frac{1}{3}$.]

2. B [由题意得直线 AB 的斜率 $k=\frac{\sqrt{3}-0}{3-2}=\sqrt{3}$, 设直线 AB 的倾斜角为 α , 则 $\tan \alpha=\sqrt{3}$.

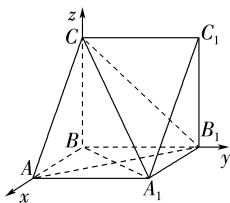
$\because 0^\circ \leq \alpha < 180^\circ, \therefore \alpha=60^\circ$. 故选 B.]

3. -3 [因为 A, B, C 三点共线, 所以 $k_{AB}=k_{AC}$, 所以 $\frac{7-5}{4-3} = \frac{x-5}{-1-3}$, 所以 $x=-3$.]

4. B [因为 $k>0$, 故 A, C 不正确; 当 $x=-1$ 时, $y=0$, 直线过点 $(-1,0)$, 故选 B.]

5. $3x-2y=0$ 或 $x+y-5=0$ [当截距为 0 时, 直线方程为 $3x-2y=0$;

当截距不为 0 时, 设直线方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$, 则 $\frac{2}{a} + \frac{3}{a} = 1$, 解得 $a=5$, 直线方程为 $x+y-5=0$. 所以所求直线方程为 $3x-2y=0$ 或 $x+y-5=0$.]



6. D [由题图知, 直线 l_1 的倾斜角 α_1 是钝角, 故 $k_1 < 0$, 直线 l_2 与 l_3 的倾斜角 α_2 与 α_3 均为锐角, 且 $\alpha_2 > \alpha_3$, 所以 $0 < k_3 < k_2$, 因此 $k_1 < k_3 < k_2$. 故选 D.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1)ACD (2) $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [1, +\infty)$ [(1) 直线 $x \sin \alpha + y + 2 = 0$ 的斜率 $k = -\sin \alpha \in [-1, 1]$, 所以其倾斜角的取值范围是 $[0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi)$, A 正确;

由三点共线可得 AB 的斜率等于 BC 的斜率, 即 $\frac{3-12}{1+2} =$

$\frac{m-3}{4-1} \Rightarrow m = -6$, B 错误;

由 $-\frac{1}{m} = \tan \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$, 得 $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$, C 正确;

直线 l 的方向向量为 $(-1, \sqrt{3})$, 则斜率 $k = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$, D 正确.

故选 ACD.

(2) 设点 $P(0, -2)$, 依题意 $k_{PA} = \frac{-2-1}{0-3} =$

$1, k_{PB} = \frac{-2-4}{0-(-2\sqrt{3})} = -\sqrt{3}$,

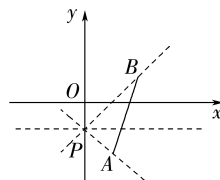
因为直线 l 与线段 AB 有交点, 设直线 l 的斜率为 k ,

由图知 $k \leq -\sqrt{3}$ 或 $k \geq 1$,

由图可知直线 l 的斜率的取值范围是 $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [1, +\infty)$.]

母题探究

1. 解: 如图,



$\therefore A(1, -2), B(2, 1), P(0, -1)$,

$\therefore k_{PA} = \frac{-2-(-1)}{1-0} = -1, k_{PB} = \frac{-1-1}{0-2} = 1$,

则使直线 l 与线段 AB 有公共点的直线 l 的斜率 k 的取值范围是 $[-1, 1]$.

2. 解: 由题意可知直线 l 的倾斜角介于直线 PA 与 PB 的倾斜角之间. 又直线 PB 的倾斜角是 120° , 直线 PA 的倾斜角是 45° , 所以 α 的取值范围是 $45^\circ \leq \alpha \leq 120^\circ$.

考点二

典例 2 (1)ABD (2)ABC [(1) 对于 $x - \sqrt{3}y + 3 = 0$, 令 $y=0$, 得 $x=-3$, 所以直线在 x 轴上的截距为 -3 , A 正确;

由直线的截距式方程可得, 过点 $A(2,0), B(0,3)$ 的直线方程为 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, B 正确;

两点式适用于不垂直于 x 轴和 y 轴的直线, C 错误;

因为直线 $y=x-3$ 的斜率为 1,

所以其倾斜角等于 45° , 于是直线 l 的倾斜角等于 90° , 则其斜率不存在,

又直线 l 过点 $(2,4)$, 所以直线 l 的方程为 $x=2$, D 正确. 故选 ABD.

(2) 当直线经过原点时, 斜率 $k = \frac{2-0}{1-0} = 2$, 所求的直线方程为 $y = 2x$, 即 $2x - y = 0$;
当直线不过原点时, 设所求的直线方程为 $x \pm y = k$, 把 $A(1, 2)$ 代入可得 $1 - 2 = k$, 或 $1 + 2 = k$,
求得 $k = -1$ 或 $k = 3$, 故所求的直线方程为 $x - y + 1 = 0$, 或 $x + y - 3 = 0$.
综上, 所求的直线方程为 $2x - y = 0$, $x - y + 1 = 0$ 或 $x + y - 3 = 0$.
故选 ABC.]

考点三

典例 3 (1) 证明: 直线 l 的方程可化为

$$k(x+2) + (1-y) = 0,$$

$$\text{令 } \begin{cases} x+2=0, \\ 1-y=0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=-2, \\ y=1. \end{cases}$$

∴ 无论 k 取何值, 直线 l 总经过定点 $(-2, 1)$.

(2) 解: 由方程知, 当 $k \neq 0$ 时, 直线在 x 轴上的截距为 $-\frac{1+2k}{k}$, 在 y 轴上的截距为 $1+2k$, 且过定点 $(-2, 1)$,

要使直线不经过第四象限, 则

$$\begin{cases} -\frac{1+2k}{k} \leq -2, \\ 1+2k \geq 1, \end{cases} \text{ 解得 } k > 0.$$

当 $k = 0$ 时, 直线 l 的方程为 $y = 1$, 符合题意,
故 k 的取值范围是 $[0, +\infty)$.

(3) 解: 由题意可知 $k \neq 0$, 再由直线 l 的方程,

$$\text{得 } A\left(-\frac{1+2k}{k}, 0\right), B(0, 1+2k).$$

$$\text{依题意得 } \begin{cases} -\frac{1+2k}{k} < 0, \\ 1+2k > 0, \end{cases}$$

解得 $k > 0$.

$$\therefore S = \frac{1}{2} |OA| |OB| = \frac{1}{2} \left| \frac{1+2k}{k} \right| |1+2k|$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{(1+2k)^2}{k} = \frac{1}{2} \left(4k + \frac{1}{k} + 4 \right)$$

$$\geq \frac{1}{2} \times \left(2\sqrt{4k \times \frac{1}{k}} + 4 \right) = 4,$$

等号成立的条件是 $k > 0$, 且 $4k = \frac{1}{k}$, 即 $k = \frac{1}{2}$,

$$\therefore S_{\min} = 4,$$

此时直线 l 的方程为 $x - 2y + 4 = 0$.

随堂·对点检测

1. B [设直线的倾斜角为 α ,

$$\text{直线 } x - \sqrt{3}y + 1 = 0 \text{ 的斜率为 } \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{则 } \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore \alpha \in [0, \pi), \therefore \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

故选 B.]

2. D [将直线 l 绕点 O 顺时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 后, 恰与 y 轴重合,

则直线 l 的倾斜角为 $\frac{2\pi}{3}$, 其斜率为 $-\sqrt{3}$,

又直线过原点,

则直线 l 的方程为 $y = -\sqrt{3}x$.

故选 D.]

3. C [要使直线 $y = (k-1)x + 2k + 1$ 经过第一、二、四象限,

$$\text{则 } \begin{cases} k-1 < 0, \\ 2k+1 > 0, \end{cases} \text{ 解得 } -\frac{1}{2} < k < 1,$$

因此, “直线 $y = (k-1)x + 2k + 1$ 经过第一、二、四象限” 是

“ $-\frac{1}{2} < k < 1$ ” 的充要条件.]

4. $5x - 2y - 5 = 0$ [设 $C(x, y), M(0, m), N(n, 0)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \frac{x+5}{2} = 0, \\ \frac{y-2}{2} = m, \end{cases} \text{ 且 } \begin{cases} \frac{x+7}{2} = n, \\ \frac{y+3}{2} = 0, \end{cases}$$

解得 $x = -5, y = -3, m = -\frac{5}{2}, n = 1$, 即 $C(-5, -3)$,

$$M\left(0, -\frac{5}{2}\right), N(1, 0), \text{ 所以 } MN \text{ 所在直线的方程为 } \frac{y + \frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{x - 0}{1 - 0},$$

$$\text{即 } 5x - 2y - 5 = 0.]$$

第 60 课时 两条直线的位置关系

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 $k_1 = k_2$ 且 $b_1 \neq b_2$ $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, 且 $A_1C_2 - A_2C_1 \neq 0$ (或 $B_1C_2 - B_2C_1 \neq 0$) $k_1 \cdot k_2 = -1$ $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ $k_1 \neq k_2$ $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$

知识点 3 (1) $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $\sqrt{x^2 + y^2}$

$$(2) \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (3) \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

链教材·夯基固本

1. B [由 $A(-1, 1), B(2, -1), C(1, 4)$ 可得 $k_{AB} = \frac{-1-1}{2+1} =$

$$-\frac{2}{3}, k_{BC} = \frac{4+1}{1-2} = -5, k_{AC} = \frac{4-1}{1+1} = \frac{3}{2}, \text{ 从而 } k_{AB} \cdot k_{AC} = -1,$$

即 $AB \perp AC, A$ 为直角.]

2. A [经过直线 $2x - 2y - 1 = 0$ 与直线 $6x - 4y + 1 = 0$ 的交点的直线 l 的方程可设为 $2x - 2y - 1 + \lambda(6x - 4y + 1) = 0$, 将 $O(0, 0)$ 代入, 得 $-1 + \lambda = 0$, 解得 $\lambda = 1$, 所以直线 l 的方程为 $4x - 3y = 0$. 故选 A.]

3. $\pm \sqrt{10}$ [直线方程化为 $3x - y + 6 = 0$,

$$d = \frac{|3m - 6 + 6|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = 3, \text{ 解得 } m = \pm \sqrt{10}.]$$

4. B [直线 $3x - 4y + 5 = 0$ 的斜率是 $\frac{3}{4}$,

$$\text{与 } x \text{ 轴的交点为 } \left(-\frac{5}{3}, 0\right),$$

因此它关于 x 轴对称的直线方程是

$$y = -\frac{3}{4} \left(x + \frac{5}{3}\right), \text{ 即 } 3x + 4y + 5 = 0. \text{ 故选 B.]}$$

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 ACD [直线 $l_1: x + (1+a)y = 2+a$ 与 $l_2: 2ax + 4y = -16$,

A 中, 当 $a = 1$ 时, 直线 $l_1: x + 2y = 3$ 与 $l_2: x + 2y = -8$, 可得两条直线的斜率相同, 在 y 轴上的截距不同, 则两条直线平行, 所以 A 正确;

B 中, 当 $a = -2$ 时, 直线 $l_1: x - y = 0$ 与 $l_2: x - y = 4$, 则这两条直线不重合, 所以 B 错误;

C 中, 当 $a = -\frac{2}{3}$ 时, 直线 $l_1: x + \frac{1}{3}y = \frac{4}{3}$ 与 $l_2: -\frac{1}{3}x + y = -4$, 则 $-\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 = 0$, 可得两条直线垂直, 所以 C 正确;

D 中, 若 $a = 0$ 时, 直线 $l_1: x + y = 2$ 与 $l_2: y = -4$, 联立 $\begin{cases} y = -4, \\ x + y = 2, \end{cases}$ 可得 $x = 6, y = -4$, 即两条直线的交点为 $(6, -4)$, 所以 D 正确.

故选 ACD.]

多维变迁

1. A [若直线 $mx + (2m - 1)y + 3 = 0$ 与直线 $3x + my = 0$ 垂直, 则 $3m + m(2m - 1) = 0$, 即 $2m^2 + 2m = 0$, 解得 $m = -1$ 或 $m = 0$.

故选 A.]

2. D [若直线 $l_1: (m - 2)x + 3y + 3 = 0$ 与直线 $l_2: 2x + (m - 1)y + 2 = 0$ 平行,

则 $(m - 2)(m - 1) = 3 \times 2 = 6$, 整理可得 $m^2 - 3m - 4 = 0$, 解得 $m = 4$ 或 $m = -1$,

若 $m = -1$, 直线 $l_1: x - y - 1 = 0$ 与直线 $l_2: x - y + 1 = 0$ 平行, 符合题意;

若 $m = 4$, 直线 $l_1: 2x + 3y + 3 = 0$ 与直线 $l_2: 2x + 3y + 2 = 0$ 平行, 符合题意.

综上所述, $m = 4$ 或 $m = -1$.

故选 D.]

考点二

典例 2 (1) A (2) D (3) A [(1) 由题意, 联立 $\begin{cases} 2x - y - 4 = 0, \\ x + y - 5 = 0, \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x = 3, \\ y = 2, \end{cases}$ 故 $P(3, 2)$.

则点 P 到直线 $l: x + 2y + 3 = 0$ 的距离 $d = \frac{|3 + 4 + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 2\sqrt{5}$,

故选 A.

(2) 由题意可得 $2a - (-1) \times (-3) = 0$, 即 $a = \frac{3}{2}$,

则 $l_2: \frac{3}{2}y - x + 2 = 0$, 即 $2x - 3y - 4 = 0$,

所以两平行直线间的距离为 $\frac{|2 - (-4)|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$.

故选 D.

(3) 直线 l 的方程可整理为 $\lambda(3x + y - 4) + x + y - 2 = 0$,

令 $\begin{cases} 3x + y - 4 = 0, \\ x + y - 2 = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases}$

所以直线 l 恒过点 $A(1, 1)$,

由题意得当 PA 垂直于直线 l 时, 点 P 到直线 l 的距离最大,

$|PA| = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{13}$,

$k_{PA} = \frac{-1 - 1}{-2 - 1} = \frac{2}{3}$,

所以直线 $l: y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 1)$, 整理得 $3x + 2y - 5 = 0$.

故选 A.]

母题探究

1. 解: 法一: 设与直线 $x + 2y + 3 = 0$ 平行的直线方程为 $x + 2y + m = 0 (m \neq 3)$,

由例(1)的解析知 $P(3, 2)$,

所以 $3 + 2 \times 2 + m = 0$, 解得 $m = -7$,

所以所求直线方程为 $x + 2y - 7 = 0$.

法二: 设所求直线方程为 $2x - y - 4 + \lambda(x + y - 5) = 0$,

即 $(\lambda + 2)x + (\lambda - 1)y - 4 - 5\lambda = 0$,

又该直线与 $x + 2y + 3 = 0$ 平行,

故 $(\lambda + 2) \cdot 2 - (\lambda - 1) = 0$, 解得 $\lambda = -5$,

故所求直线方程为 $(-5 + 2)x + (-5 - 1)y - 4 + 25 = 0$, 即 $x + 2y - 7 = 0$.

2. 解: 设与直线 $x + 2y + 3 = 0$ 垂直的直线的方程为 $2x - y + m = 0$, 由例(1)的解析知 $P(3, 2)$, 则 $3 \times 2 - 2 + m = 0$, 得 $m = -4$, 所以所求直线方程为 $2x - y - 4 = 0$.

考点三

考向 1 典例 3 C [法一: 因为直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 关于点 $(1, -1)$ 对称的直线斜率不变,

故设对称后的直线方程 l 为 $2x + 3y + c = 0 (c \neq -6)$,

又 $\because$ 点 $(1, -1)$ 到两直线的距离相等,

$\therefore \frac{|2 - 3 + c|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|2 - 3 - 6|}{\sqrt{2^2 + 3^2}}$,

化简得 $|c - 1| = 7$,

即 $c = -6$ 或 $c = 8$,

$\therefore l$ 的方程为 $2x + 3y - 6 = 0$ (舍) 或 $2x + 3y + 8 = 0$,

即直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 关于点 $(1, -1)$ 对称的直线方程是 $2x + 3y + 8 = 0$.

故选 C.

法二: 在直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 上任选两点, 比如 $A(0, 2), B(3, 0)$,

则点 A, B 关于点 $(1, -1)$ 对称的点 A', B' 在所求直线上.

$\because AA'$ 的中点为点 $(1, -1)$,

$\therefore$ 点 $A'(2, -4)$,

同理可得 $B'(-1, -2)$,

由两点式得直线 $A'B'$ 的方程为 $2x + 3y + 8 = 0$.

故选 C.]

考向 2 典例 4 (1) C (2) $9x - 46y + 102 = 0$

[(1) 设 $P(-1, 3)$ 关于直线 $x - y = 0$ 的对称点为 $Q(a, b)$,

由对称关系可得 $\begin{cases} \frac{b - 3}{a + 1} \times 1 = -1, \\ \frac{a - 1}{2} - \frac{b + 3}{2} = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 3, \\ b = -1. \end{cases}$

$\therefore Q(3, -1)$.

则点 $Q(3, -1)$ 到直线 $3x + y - 2 = 0$ 的距离 $d =$

$\frac{|3 \times 3 - 1 - 2|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$.

故选 C.

(2) 在直线 m 上取一点, 如 $M(2, 0)$, 则 $M(2, 0)$ 关于直线 l 的对称点 M' 必在直线 m' 上.

设对称点为 $M'(a, b)$,

则 $\begin{cases} 2 \times \frac{a + 2}{2} - 3 \times \frac{b + 0}{2} + 1 = 0, \\ \frac{b - 0}{a - 2} \times \frac{2}{3} = -1, \end{cases}$

解得 $M'(\frac{6}{13}, \frac{30}{13})$.

设直线 m 与直线 l 的交点为 N ,

梳必备 · 破题有方

知识点 1 定点 定长 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 (r>0) (a,b)$

$$\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) \quad \frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$$

知识点 2 (1) $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2$

$$(2) (x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2 \quad (3) (x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2$$

链教材 · 夯基固本

$$1. \left(-1, \frac{1}{2}\right) \quad \frac{\sqrt{7}}{2} \quad \left[\text{将圆的方程化为标准方程 } (x+1)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{4},\right.$$

$$\left.\text{则圆心坐标为 } \left(-1, \frac{1}{2}\right), \text{ 半径 } r = \frac{\sqrt{7}}{2}.\right]$$

$$2. (x-2)^2+y^2=10 \quad \left[\text{设圆心 } C \text{ 的坐标为 } (a, 0), \text{ 半径为 } r, \text{ 则圆 } C \text{ 的标准方程为 } (x-a)^2+y^2=r^2,\right.$$

$$\left.\text{则 } \begin{cases} (-1-a)^2+1^2=r^2, \\ (1-a)^2+3^2=r^2, \end{cases}\right.$$

$$\left.\text{解得 } a=2, r^2=10, \text{ 所以圆 } C \text{ 的标准方程为 } (x-2)^2+y^2=10.\right]$$

$$3. [1, 2) \cup (2, +\infty) \quad \left[\text{将 } (0, 0) \text{ 代入方程, 则 } 0^2+0^2-a \cdot 0+a-1 \geq 0, \text{ 得 } a \geq 1.\right.$$

$$\left.\text{圆的方程可化为 } x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}-a+1,\right.$$

$$\left.\therefore \frac{a^2}{4}-a+1 > 0, \therefore a \neq 2,\right.$$

$$\left.\therefore \text{实数 } a \text{ 的取值范围为 } [1, 2) \cup (2, +\infty).\right]$$

$$4. (x-5)^2+(y-6)^2=10 \quad \left[\text{法一: 由题意得所求圆的圆心为线段 } P_1P_2 \text{ 的中点 } \left(\frac{4+6}{2}, \frac{3+9}{2}\right), \text{ 即 } (5, 6),\right.$$

$$\left.\text{半径为 } \frac{|P_1P_2|}{2} = \frac{\sqrt{(6-4)^2+(3-9)^2}}{2} = \sqrt{10},\right.$$

$$\left.\text{所以所求圆的标准方程为 } (x-5)^2+(y-6)^2=10.\right.$$

$$\left[\text{法二: 由圆的“直径式”方程知, 圆的方程为 } (x-4)(x-6)+(y-9)(y-3)=0, \text{ 化为标准方程得 } (x-5)^2+(y-6)^2=10.\right]$$

考点深研 · 题型突破

考点一

典例 1 (1) A (2) $(x-1)^2+(y+1)^2=5$

$$\left[\text{(1) 由已知得圆 } C \text{ 的半径为 } 2, \text{ 故圆 } C \text{ 的方程为 } (x-1)^2+(y+2)^2=4,\right.$$

$$\left.\text{即 } x^2+y^2-2x-4y+1=0, \text{ 故 A 正确.}\right.$$

故选 A.

$$\left[\text{(2) 法一: 设 } \odot M \text{ 的方程为 } (x-a)^2+(y-b)^2=r^2,\right.$$

$$\left.\text{则 } \begin{cases} 2a+b-1=0, \\ (3-a)^2+b^2=r^2, \\ a^2+(1-b)^2=r^2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=1, \\ b=-1, \\ r^2=5, \end{cases}\right.$$

$$\left.\therefore \odot M \text{ 的方程为 } (x-1)^2+(y+1)^2=5.\right.$$

$$\left[\text{法二: 设 } \odot M \text{ 的方程为 } x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 (D^2+E^2-4F>0),\right.$$

$$\left.\text{则 } M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right),\right.$$

$$\left.\begin{cases} 2 \cdot \left(-\frac{D}{2}\right) + \left(-\frac{E}{2}\right) - 1 = 0, \\ 9 + 3D + F = 0, \\ 1 + E + F = 0, \end{cases}\right.$$

$$\left.\therefore \begin{cases} -D - \frac{E}{2} - 1 = 0, \\ 9 + 3D + F = 0, \\ 1 + E + F = 0, \end{cases}\right.$$

$$\text{由 } \begin{cases} 2x-3y+1=0, \\ 3x-2y-6=0, \end{cases} \text{ 得 } N(4, 3). \text{ 又 } m' \text{ 经过点 } N(4, 3), \text{ 所以由}$$

$$\text{两点式得直线 } m' \text{ 的方程为 } 9x-46y+102=0.]$$

多维变迁

解: (1) 设 $A'(x, y)$, 由已知条件得

$$\begin{cases} \frac{y+2}{x+1} \times \frac{2}{3} = -1, \\ 2 \times \frac{x-1}{2} - 3 \times \frac{y-2}{2} + 1 = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = -\frac{33}{13}, \\ y = \frac{4}{13}. \end{cases} \text{ 所以 } A'\left(-\frac{33}{13}, \frac{4}{13}\right).$$

(2) 法一: 在 $l: 2x-3y+1=0$ 上任取两点,

如 $P(1, 1), Q(4, 3)$, 则 P, Q 关于点 $A(-1, -2)$ 的对称点 P', Q' 均在直线 l' 上,

$$\text{易得 } P'(-3, -5), Q'(-6, -7),$$

$$\text{所以 } l' \text{ 的方程为 } 2x-3y-9=0.$$

法二: 因为 $l \parallel l'$,

$$\text{所以设 } l' \text{ 的方程为 } 2x-3y+C=0 (C \neq 1).$$

因为点 $A(-1, -2)$ 到两直线 l, l' 的距离相等,

所以由点到直线的距离公式,

$$\text{得 } \frac{|-2+6+C|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{|-2+6+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}},$$

$$\text{解得 } C=-9 (C=1 \text{ 舍去}),$$

$$\text{所以 } l' \text{ 的方程为 } 2x-3y-9=0.$$

随堂 · 对点检测

$$1. \text{ B } \left[\text{因为直线 } mx+3y+m-1=0 \text{ 与直线 } x+(m+2)y+2m-2=0 \text{ 平行,}\right.$$

$$\left.\text{所以 } 1 \times 3 = m(m+2), \text{ 解得 } m=1 \text{ 或 } m=-3.\right.$$

$$\left.\text{当 } m=-3 \text{ 时, 两条直线分别为 } 3x-3y+4=0, x-y-8=0, \text{ 两条直线平行;}\right.$$

$$\left.\text{当 } m=1 \text{ 时, 两条直线分别为 } x+3y=0, x+3y=0, \text{ 两条直线重合, 舍去.}\right.$$

故选 B.]

$$2. \text{ A } \left[k_{AB} = \frac{2-1}{-1-2} = -\frac{1}{3}, \text{ 所以直线 } AB \text{ 的方程为 } y-2 = -\frac{1}{3}(x+1), \text{ 即 } x+3y-5=0,\right.$$

$$\left.\text{即 } x+3y-5=0,\right.$$

$$\left.\therefore \text{点 } C \text{ 到直线 } AB \text{ 的距离 } d = \frac{7}{\sqrt{10}},\right.$$

$$\left.\text{又 } |AB| = \sqrt{10}, \therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{\sqrt{10}} \times \sqrt{10} = \frac{7}{2}.\right.$$

故选 A.]

$$3. \text{ B } \left[\text{设点 } A(1, 2) \text{ 关于直线 } x+y-2=0 \text{ 的对称点 } B \text{ 的坐标为 } (a, b),\right.$$

$$\left.\text{则有 } \begin{cases} \frac{b-2}{a-1} = 1, \\ \frac{a+1}{2} + \frac{b+2}{2} - 2 = 0, \end{cases}\right.$$

$$\left.\text{解得 } \begin{cases} a=0, \\ b=1, \end{cases} \text{ 故 } B(0, 1). \text{ 故选 B.}\right.]$$

$$4. -9 \quad \left[\text{由 } \begin{cases} y=2x, \\ x+y=3, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}\right.$$

$$\left.\text{所以 } (1, 2) \text{ 满足方程 } mx+2y+5=0,\right.$$

$$\left.\text{即 } m \times 1 + 2 \times 2 + 5 = 0, \text{ 所以 } m = -9.\right]$$

$$\begin{cases} D=-2, \\ E=2, \\ F=-3, \end{cases}$$

∴⊙M 的方程为 $x^2+y^2-2x+2y-3=0$,
即 $(x-1)^2+(y+1)^2=5$.

法三: 设 $A(3,0), B(0,1)$, ⊙M 的半径为 r ,

则 $k_{AB} = \frac{1-0}{0-3} = -\frac{1}{3}$, AB 的中点坐标为 $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$,

∴ AB 的垂直平分线方程为 $y - \frac{1}{2} = 3(x - \frac{3}{2})$,

即 $3x - y - 4 = 0$.

$$\text{联立} \begin{cases} 3x - y - 4 = 0, \\ 2x + y - 1 = 0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x=1, \\ y=-1, \end{cases}$$

∴ $M(1, -1)$,

∴ $r^2 = |MA|^2 = (3-1)^2 + [0 - (-1)]^2 = 5$,

∴⊙M 的方程为 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$.

多维变迁

1. C [将圆 $C: x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$ 化成标准方程, 可得 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 1$,

所以圆 C 的圆心坐标为 $(3, -2)$, 故选 C.]

2. $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ [设圆的方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 (D^2 + E^2 - 4F > 0)$,

因为圆经过 $A(0,0), B(0,8), C(6,0)$ 三点,

$$\text{则} \begin{cases} F=0, \\ 64+8E+F=0, \\ 36+6D+F=0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} D=-6, \\ E=-8, \\ F=0, \end{cases}$$

故圆的方程为 $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$,

故圆的标准方程为 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$.]

考点二

典例 2 (1)B [因为圆 $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$,

所以圆心 $C(1,1)$, 半径 $r=1$,

因为点 M 是圆 C 上的动点, 所以 $|MC|=1$,

又 AM 与圆 C 相切, 且 $|AM|=2$,

则 $|AC| = \sqrt{|MC|^2 + |AM|^2} = \sqrt{5}$,

设 $A(x,y)$, 则 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$,

即 $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$,

所以点 A 的轨迹方程为 $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$. 故选 B.]

(2)解: ①法一: 设 $C(x,y)$, 因为 A, B, C 三点不共线, 所以 $y \neq 0$.

因为 $AC \perp BC$, 所以 $k_{AC} \cdot k_{BC} = -1$.

$$\text{又 } k_{AC} = \frac{y}{x+1}, k_{BC} = \frac{y}{x-3},$$

所以 $\frac{y}{x+1} \cdot \frac{y}{x-3} = -1$, 化简得 $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$.

因此, 直角顶点 C 的轨迹方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 4 (y \neq 0)$.

法二: 设 AB 的中点为 D , 由中点坐标公式得 $D(1,0)$, 由直角

三角形的性质知 $|CD| = \frac{1}{2}|AB| = 2$. 由圆的定义知, 动点 C

的轨迹是以 $D(1,0)$ 为圆心, 2 为半径的圆 (由于 A, B, C 三点不共线, 所以应除去与 x 轴的交点),

所以直角顶点 C 的轨迹方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 4 (y \neq 0)$.

②设 $M(x,y), C(x_0, y_0)$, 因为 $B(3,0), M$ 是线段 BC 的中

点, 由中点坐标公式得 $x = \frac{x_0+3}{2}, y = \frac{y_0+0}{2}$, 所以 $x_0 = 2x -$

$3, y_0 = 2y$.

由①知, 点 C 的轨迹方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 4 (y \neq 0)$, 将 $x_0 = 2x - 3, y_0 = 2y$ 代入得 $(2x-4)^2 + (2y)^2 = 4 (y \neq 0)$, 即 $(x-2)^2 + y^2 = 1 (y \neq 0)$.

因此中点 M 的轨迹方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 1 (y \neq 0)$.

考点三

典例 3 解: 原方程可化为 $(x-2)^2 + y^2 = 3$,

表示以 $(2,0)$ 为圆心, $\sqrt{3}$ 为半径的圆.

(1) $\frac{y}{x}$ 的几何意义是圆上一点与原点连线

的斜率, 所以设 $\frac{y}{x} = k$, 即 $y = kx$. 当直线

$y = kx$ 与圆相切时 (如图 1), 斜率 k 取最大值或最小值, 此时

$\frac{|2k-0|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{3}$, 解得 $k = \pm\sqrt{3}$. 所以 $\frac{y}{x}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$.

(2)法一: $y-x$ 可看作是直线 $y = x+b$ 在 y 轴上的截距.

如图 2 所示, 当直线 $y = x+b$ 与圆

相切时, 截距 b 取最大值或最小值.

此时 $\frac{|2-0+b|}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$, 解得 $b =$

$-2 \pm \sqrt{6}$.

所以 $y-x$ 的最大值为 $-2 + \sqrt{6}$, 最

小值为 $-2 - \sqrt{6}$.

法二: 令 $x = 2 + \sqrt{3} \cos \theta, y = \sqrt{3} \sin \theta, \theta \in [0, 2\pi)$,

则 $y-x = \sqrt{3} \sin \theta - 2 - \sqrt{3} \cos \theta$

$= \sqrt{6} \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) - 2 \in [-\sqrt{6} - 2, \sqrt{6} - 2]$.

(3)法一: $x^2 + y^2$ 表示圆上的一点与原点的距离的平方. 由平面几何知识, 知在圆心和原点连线与圆的两个交点处取得最大值和最小值. 又圆心到原点的距离为 2, 所以 $x^2 + y^2$ 的最大值是 $(2+\sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$, $x^2 + y^2$ 的最小值是 $(2-\sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}$.

法二: 令 $x = 2 + \sqrt{3} \cos \theta, y = \sqrt{3} \sin \theta, \theta \in [0, 2\pi), x^2 + y^2 = 7 + 4\sqrt{3} \cos \theta \in [7 - 4\sqrt{3}, 7 + 4\sqrt{3}]$.

母题探究

1. 解: 设 $x = 2 + \sqrt{3} \cos \theta, y = \sqrt{3} \sin \theta (0 \leq \theta < 2\pi)$,

则 $x+2y = 2 + 2\sqrt{3} \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 + \sqrt{15} \cdot \sin(\theta + \varphi), \tan \varphi =$

$\frac{1}{2}$,

当 $\sin(\theta + \varphi) = 1$ 时, $x+2y$ 取最大值 $2 + \sqrt{15}$.

2. 解: $\sqrt{x^2 + (y+1)^2}$ 表示圆上的点到点 $(0, -1)$ 的距离,

因为圆心 $(2,0)$ 到点 $(0, -1)$ 的距离为 $\sqrt{5}$, 所以 $\sqrt{x^2 + (y+1)^2}$ 的最小值为 $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

3. 解: $|x+y+2| = \sqrt{2} \times \frac{|x+y+2|}{\sqrt{2}}$, 表示圆上的点到直线 $x +$

$y+2=0$ 的距离的 $\sqrt{2}$ 倍.

因为圆心 $(2,0)$ 到直线 $x+y+2=0$ 的距离为 $\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$,

故圆上的点到直线 $x+y+2=0$ 的距离的最小值为 $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$,

故 $|x+y+2|$ 的最小值为 $4 - \sqrt{6}$.

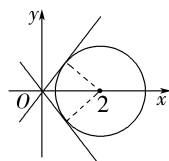


图1

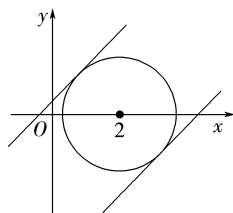
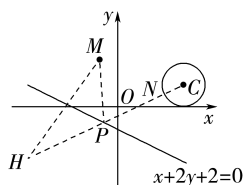


图2

多维变迁

$3\sqrt{5}-1$ [如图, 曲线 $C: x^2+y^2-6x-2y+9=0$ 是以 $C(3,1)$ 为圆心, 1 为半径的圆, 则根据圆的性质可知, $|PN|$ 的最小值为 $|PC|-1$. 设 M 关于直线 $x+2y+2=0$ 的对称点为 $H(m,n)$,

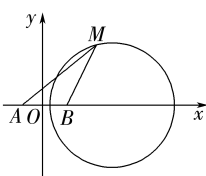


$$\begin{cases} \frac{n-2}{m+1}=2, \\ \frac{m-1}{2}+2\times\frac{n+2}{2}+2=0, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} m=-3, \\ n=-2, \end{cases}$ 即 $H(-3,-2)$. 连接 HC , 分别交直线 $x+2y+2=0$ 与圆 C 于 P, N , 连接 PM , 则 $|PM|+|PN|\geq|PM|+|PC|-1=|PH|+|PC|-1\geq|HC|-1$, 当且仅当 P, H, C 三点共线时取等号, 此时取得最小值 $3\sqrt{5}-1$, 所以 $|PM|+|PN|$ 的最小值为 $3\sqrt{5}-1$.

教材拓展

典例 4 A [以线段 AB 的中点 O 为坐标原点, AB 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系, 设 $M(x,y)$, 且 $A(-2,0), B(2,0)$,



由 $|MA|=\sqrt{2}|MB|$, 得 $(x+2)^2+y^2=2(x-2)^2+2y^2$,

化简得 M 的轨迹方程为圆 $(x-6)^2+y^2=32(y\neq 0)$, 半径 $r=4\sqrt{2}$,

如图, 有 $S_{\triangle MAB}\leq\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot r=8\sqrt{2}$.

所以 $\triangle MAB$ 面积的最大值为 $8\sqrt{2}$.

随堂·对点检测

1. B [根据题意, 圆的内接正方形相对的两个顶点分别是 $A(5,6), C(3,-4)$, 则圆的圆心坐标为 $(4,1)$, 半径 $r=\frac{1}{2}\times$

$\sqrt{4+100}=\sqrt{26}$, 则圆的方程为 $(x-4)^2+(y-1)^2=26$, 即 $x^2+y^2-8x-2y-9=0$. 故选 B.]

2. C [法一: 设圆心 C 的坐标为 (a,b) , 半径为 r . 因为圆心 C 在直线 $x+y-2=0$ 上, 所以 $b=2-a$.

又 $|CA|^2=|CB|^2$, 所以 $(a-1)^2+(2-a+1)^2=(a+1)^2+(2-a-1)^2$, 解得 $a=1, b=1$, 所以 $r=2$. 所以圆的方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$.

法二: 由已知条件得, 线段 AB 的垂直平分线的方程是 $y=x$,

$$\begin{cases} y=x, \\ x+y-2=0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=1, \\ y=1, \end{cases}$$

即圆心坐标为 $(1,1)$,

所以 $r^2=(1-1)^2+[1-(-1)]^2=4$,

所以圆的方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$. 故选 C.]

3. C [将方程 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$ 化为 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$, 其表示圆心为 $(2,1)$, 半径为 3 的圆. 设 $z=x-y$, 数形结合知, 只有当直线 $x-y-z=0$ 与圆相切时, z 才能取到最大值, 此时 $\frac{|2-1-z|}{\sqrt{2}}=3$, 解得 $z=1\pm 3\sqrt{2}$, 故 $z=x-y$ 的最大值为 $1+3\sqrt{2}$, 故选 C.]

4. $(x-5)^2+y^2=16$ [设 $M(x,y)$, 由 $\frac{|MA|}{|MB|}=2$, 得 $\frac{(x+3)^2+y^2}{(x-3)^2+y^2}=4$, 可得 $(x+3)^2+y^2=4(x-3)^2+4y^2$, 即 $x^2-10x+y^2+9=0$, 整理得 $(x-5)^2+y^2=16$, 故动点 M 的轨迹方程为 $(x-5)^2+y^2=16$.]

第 62 课时 直线与圆、圆与圆的位置关系

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 $< = > > = <$

知识点 2 $d>r_1+r_2 \quad d<|r_1-r_2| \quad |r_1-r_2|<d<r_1+r_2$
 $d=|r_1-r_2| \quad d=r_1+r_2$

知识点 3 (1) $2\sqrt{r^2-d^2}$

链教材·夯基固本

1. B [由题意可得 $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}<1$,

即 $a^2+b^2>1$, 所以 $P(a,b)$ 在圆外.]

2. C [圆心为 $O(0,0)$, $k_{OP}=2$, 故切线的斜率为 $-\frac{1}{2}$, 故切线方程为 $y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$, 即 $x+2y-5=0$.]

3. BC [圆 $C_1: x^2+y^2=4$, 圆心为 $C_1(0,0)$, 半径 $r=2$; 圆 $C_2: x^2+y^2-8x-6y+16=0$, 即 $(x-4)^2+(y-3)^2=9$, 圆心为 $C_2(4,3)$, 半径 $R=3$. 因为 $|C_1C_2|=\sqrt{4^2+3^2}=5, R+r=5=|C_1C_2|$, 所以两圆外切.]

4. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ [圆心坐标为 $(1,2)$, 半径 $r=2$.

圆心到直线的距离 $d=\frac{|2-2+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}<2$, 所以直线与圆相交,

所以弦长 $l=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-\frac{4}{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$.]

5. B [由圆 $C_1: x^2+y^2+2x+y=0$, 圆 $C_2: x^2+y^2+4x+3y+2=0$,

将两圆方程作差, 有 $(x^2+y^2+4x+3y+2)-(x^2+y^2+2x+y)=0$,

整理可得 $x+y+1=0$, 即公共弦所在直线方程为 $x+y+1=0$. 故选 B.]

考点深研·题型突破

考点一

考向 1 典例 1 ABD [对于 A, $\because$ 点 A 在圆 C 上, $\therefore a^2+b^2=r^2$, 圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=r$, $\therefore$ 直线 l 与

圆 C 相切, A 正确;

对于 B, $\because$ 点 A 在圆 C 内, $\therefore a^2+b^2<r^2$, 圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}>r$, $\therefore$ 直线 l 与圆 C 相离, B 正确;

对于 C, $\because$ 点 A 在圆 C 外, $\therefore a^2+b^2>r^2$, 圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}<r$, $\therefore$ 直线 l 与圆 C 相交, C 错误;

对于 D, $\because$ 点 A 在直线 l 上, $\therefore a^2+b^2=r^2$, 圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=r$, $\therefore$ 直线 l 与圆 C 相切, D 正确.

故选 ABD.]

考向 2 典例 2 C [圆 C 的标准方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=4$, 圆心坐标为 $(1, -1)$, 半径 $r=2$,
直线 l 的方程为 $x+y-m=0$, 圆心到直线 l 的距离 $d=\frac{|1+(-1)-m|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|-m|}{\sqrt{2}}=\frac{m}{\sqrt{2}}(m>0)$,
因为直线 $l: x+y-m=0(m>0)$ 被圆 $C: (x-1)^2+(y+1)^2=4$ 截得的弦长为 $\sqrt{2}m$,

$$\text{则 } \sqrt{2}m = 2\sqrt{2^2 - \left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)^2}, \text{ 解得 } m=2.$$

将 $m=2$ 代入原方程, 验证弦长是否匹配, 结果符合题意.
故选 C.]

考向 3 典例 3 解: $\because (2-1)^2+(3+2)^2>1, \therefore$ 点 P 在圆外.

法一: ①若直线 l 的斜率存在, 设 $l: y-3=k(x-2)$, 即 $kx-y+3-2k=0$.

$\because$ 直线 l 与圆 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$ 相切,

$$\therefore \frac{|5-k|}{\sqrt{k^2+1}}=1, \therefore k=\frac{12}{5},$$

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y-3=\frac{12}{5}(x-2)$, 即 $12x-5y-9=0$.

②若直线 l 的斜率不存在, 则直线 $l: x=2$ 也符合要求.

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $12x-5y-9=0$ 或 $x=2$.

法二: ①若直线 l 的斜率存在,

设 $l: y-3=k(x-2)$, 即 $y=k(x-2)+3$,

与圆的方程联立消去 y , 得 $(x-1)^2+[k(x-2)+3+2]^2=1$,

整理得 $(k^2+1)x^2-(4k^2-10k+2)x+4k^2-20k+25=0$,

$\therefore \Delta=(4k^2-10k+2)^2-4(k^2+1)(4k^2-20k+25)=0$,

$\therefore k=\frac{12}{5}$. 此时直线 l 的方程为 $y-3=\frac{12}{5}(x-2)$, 即 $12x-5y-9=0$.

②若直线 l 的斜率不存在, 则直线 $l: x=2$ 也符合要求.

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $12x-5y-9=0$ 或 $x=2$.

母题探究

1. 解: $\because (2-1)^2+(-2+2)^2=1, \therefore$ 点 P 在圆上.

$\therefore$ 过 $P(2, -2)$ 的切线方程为 $x=2$,

即直线 l 的方程为 $x=2$.

2. 解: 点 $P(2, 3)$ 到圆心 $(1, -2)$ 的距离为 $\sqrt{(2-1)^2+(3+2)^2}=\sqrt{26}$,

$\therefore$ 切线长为 $\sqrt{26-1}=5$.

考点二

典例 4 (1) C [圆 $C_1: x^2+y^2+2ax=0(a\neq 0)$ 与圆 $C_2: x^2+y^2-2\sqrt{3}y+2=0$ 化为标准方程分别为 $(x+a)^2+y^2=a^2(a\neq 0), x^2+(y-\sqrt{3})^2=1$,

$\therefore$ 两圆恰有三条公切线,

$\therefore$ 两圆外切, $\therefore |C_1C_2|=r_1+r_2$,

$\therefore \sqrt{a^2+3}=|a|+1$,

$\therefore a^2+3=a^2+2|a|+1$,

$\therefore |a|=1$,

$\therefore a=\pm 1$.]

(2) 解: ①由已知可得两个圆的方程分别为 $(x+1)^2+(y-3)^2=9, (x-3)^2+(y-6)^2=45-m$,

两圆的圆心距 $d=\sqrt{(-1-3)^2+(3-6)^2}=5$, 两圆的半径之和 $r_1+r_2=3+\sqrt{45-m}$,

若两圆外切, 则 $3+\sqrt{45-m}=5$, 可得 $m=41$.

②当 $m=-9$ 时, 两圆的方程分别为 $x^2+y^2+2x-6y+1=0, x^2+y^2-6x-12y-9=0$,

把两个圆的方程相减, 可得公共弦所在直线的方程为 $4x+3y+5=0$.

圆 C_1 的圆心 $(-1, 3)$ 到公共弦所在的直线的距离 $d=\frac{|-4+9+5|}{5}=2$,

可得弦长为 $2\sqrt{9-4}=2\sqrt{5}$.

多维变延

1. D [化圆 $C_2: x^2+y^2-6x-8y-k=0$ 为 $(x-3)^2+(y-4)^2=25+k$,

则 $k>-25$, 圆心坐标为 $C_2(3, 4)$, 半径为 $\sqrt{25+k}$,

圆 $C_1: x^2+y^2=1$ 的圆心坐标为 $C_1(0, 0)$, 半径为 1,

要使圆 $C_1: x^2+y^2=1$ 和圆 $C_2: x^2+y^2-6x-8y-k=0$ 没有公共点,

则 $|C_1C_2|>\sqrt{25+k}+1$ 或 $|C_1C_2|<\sqrt{25+k}-1$,

即 $5>\sqrt{25+k}+1$ 或 $5<\sqrt{25+k}-1$, 解得 $-25<k<-9$ 或 $k>11$,

所以实数 k 的取值范围是 $(-25, -9)\cup(11, +\infty)$.

故选 D.]

2. A [由 $x^2+y^2-4x-3=0, x^2+y^2-4y-3=0$, 解得两圆交点为 $M\left(\frac{2+\sqrt{10}}{2}, \frac{2+\sqrt{10}}{2}\right)$ 与 $N\left(\frac{2-\sqrt{10}}{2}, \frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$,

因为所求圆经过此两点, 则连接 MN , MN 即是所求圆的一条弦.

因为 MN 的斜率 $k_1=1$,

所以其垂直平分线的斜率 $k_2=-1$, MN 的中点 $P(1, 1)$,

所以垂直平分线的方程为 $y=-x+2$,

垂直平分线与直线 $x-y-4=0$ 的交点即为所求圆的圆心,

$$\text{联立 } \begin{cases} y=-x+2, \\ x-y-4=0, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=3, \\ y=-1, \end{cases}$ 所以圆心坐标为 $(3, -1)$,

圆的半径 $r=\sqrt{\left(3-\frac{2+\sqrt{10}}{2}\right)^2+\left(-1-\frac{2+\sqrt{10}}{2}\right)^2}$

$=\sqrt{13}$, 所以所求圆的方程为 $(x-3)^2+(y+1)^2=13$, 即 $x^2+y^2-6x+2y-3=0$.

故选 A.]

随堂·对点检测

1. B [圆 $C: x^2+(y-2a)^2=\frac{1}{4}a^2$ 的圆心为 $C(0, 2a)$, 半径 $R=\frac{|a|}{2}$,

因为直线 $y=\sqrt{3}x+a+1$ 与圆 C 相离,

所以点 C 到直线 $y=\sqrt{3}x+a+1$ 的距离 $d=\frac{|-2a+a+1|}{2}>$

$\frac{|a|}{2}$, 解得 $a<\frac{1}{2}$,

结合 $R=\frac{|a|}{2}>0, a\neq 0$, 可得实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0)\cup$

$\left(0, \frac{1}{2}\right)$. 故选 B.]

2. D [由 $x^2-4x+y^2=0$, 得 $(x-2)^2+y^2=2^2$, 则圆心坐标为 $(2, 0)$, 半径为 2; 由 $x^2+y^2+4x+3=0$, 得 $(x+2)^2+y^2=1^2$, 则圆心坐标为 $(-2, 0)$, 半径为 1.

故两圆的圆心距为 4, 半径之和为 3,

因为 $4 > 3$, 所以两圆的位置关系是外离, 故两圆的公切线共有 4 条.

故选 D.]

3. C [根据题意可知, 圆 $C: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$ 的圆心 $C(1, -3)$, 半径 $r=5$,

圆心 C 到直线 l 的距离 $d = \frac{|1-2 \times (-3)+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = 2\sqrt{5}$,

所以 $|AB| = 2\sqrt{r^2-d^2} = 2\sqrt{5}$.

故选 C.]

4. $5x-12y+45=0$ 或 $x-3=0$ [圆 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ 化为标准方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$, 则圆心 $O(1, 2)$, 半径为 2,

因为 $|OA| = \sqrt{(3-1)^2+(5-2)^2} = \sqrt{13} > 2$, 所以点 $A(3, 5)$ 在圆外. 显然, 当切线斜率不存在时, 直线与圆相切, 即切线方程为 $x-3=0$; 当切线斜率存在时, 设所求切线方程为 $y-5=k(x-3)$, 即 $kx-y+5-3k=0$. 又圆心坐标为 $(1, 2)$, 半径 $r=2$, 圆心到切线的距离 $d = \frac{|3-2k|}{\sqrt{k^2+1}} = 2$,

即 $|3-2k| = 2\sqrt{k^2+1}$, 解得 $k = \frac{5}{12}$, 此时直线方程为 $5x-12y+45=0$.

故所求切线方程为 $5x-12y+45=0$ 或 $x-3=0$.]

第 63 课时 椭圆

理法先行 · 题练固本

梳必备 · 破题有方

知识点 1 (1)椭圆 焦点 焦距 (2) $a > c$ $a = c$ $a < c$

知识点 2 $2a$ $2b$ $2c$ $(0, 1)$ $a^2 - b^2$

链教材 · 夯基固本

1. 14 [根据椭圆的定义得 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$,

又 $a^2 = 100$, 即 $a = 10$,

所以 $6 + |PF_2| = 20$, 故 $|PF_2| = 14$.]

2. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ [由题设, 椭圆焦点为 $(\pm 1, 0)$, 则 $c = 1$,

令椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-1} = 1$ 且 $a^2 > 1$,

又 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 在椭圆上, 则 $\frac{1}{2a^2} + \frac{3}{4(a^2-1)} = 1$,

整理得 $4a^4 - 9a^2 + 2 = (4a^2 - 1)(a^2 - 2) = 0$,

解得 $a^2 = 2$ 或 $a^2 = \frac{1}{4}$ (舍去),

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.]

3. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ [$x=0$ 时, $y=1$, 即 $b=1$;

$y=0$ 时, $x=-2$, 即 $c=2$,

故 $a = \sqrt{b^2+c^2} = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$,

故 $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.]

4. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ [由题意可知 $|AB| = 3 = \frac{2b^2}{a}$ ($a > 0$),

又 $c=1$, 解得 $a=2, b^2=3$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.]

考点深研 · 题型突破

考点一

典例 1 (1)D [已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点为

$F(2, 0)$, 离心率为 $\frac{2}{3}$.

设 C 的左焦点为 F' , 半焦距为 c ($c > 0$),

由题意得 $c=2, e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$,

所以 $a=3$,

由椭圆的定义得 $|PF'| + |PF| = 2a = 6$,

所以 $|PA| + |PF| = |PA| - |PF'| + 2a \leq |AF'| + 2a = 6 + \sqrt{5}$,

当点 P 为线段 AF' 的延长线与 C 的交点时取等号,

故 $|PA| + |PF|$ 的最大值为 $6 + \sqrt{5}$.

故选 D.]

(2)解: 由已知得 $a=2\sqrt{3}, b=\sqrt{3}$,

所以 $c = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{12-3} = 3$,

从而 $|F_1F_2| = 2c = 6$.

在 $\triangle F_1PF_2$ 中,

$|F_1F_2|^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \cos 60^\circ$,

即 $36 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |PF_1| \cdot |PF_2|$. ①

由椭圆的定义得 $|PF_1| + |PF_2| = 4\sqrt{3}$,

即 $48 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2|$. ②

由①②得 $|PF_1| \cdot |PF_2| = 4$.

所以 $S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{1}{2} |PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$.

母题探究

1. 解: 因为 P, Q 都在椭圆上, 由椭圆的定义知

$|PF_1| + |PF_2| = 2a, |QF_1| + |QF_2| = 2a$.

又因为 $|PQ| = |PF_1| + |QF_1|$,

所以 $\triangle PQF_2$ 的周长为 $|PQ| + |PF_2| + |QF_2| = |PF_1| + |QF_1| + |QF_2| + |PF_2| = 4a$.

故 $\triangle PQF_2$ 的周长为 $4 \times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

2. 解: 由已知得 $a=2\sqrt{3}, b=\sqrt{3}$,

所以 $c = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{12-3} = 3$.

从而 $|F_1F_2| = 2c = 6$.

在 $\triangle F_1PF_2$ 中, 由勾股定理可得

$|PF_2|^2 = |PF_1|^2 + |F_1F_2|^2$,

即 $|PF_2|^2 = |PF_1|^2 + 36$,

又由椭圆定义知 $|PF_1| + |PF_2| = 4\sqrt{3}$,

所以 $|PF_2| = 4\sqrt{3} - |PF_1|$.

从而有 $(4\sqrt{3} - |PF_1|)^2 = |PF_1|^2 + 36$,

解得 $|PF_1| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{1}{2} \times |PF_1| \times |F_1F_2| = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 即

$\triangle F_1PF_2$ 的面积是 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

多维变迁

A [由题意得 $P(x, y)$ 到 $A(-2, 0)$ 与 $B(2, 0)$ 的距离之和为 8, 且 $8 > 4$, 故动点 P 的轨迹是以 $A(-2, 0)$ 与 $B(2, 0)$ 为焦点的椭圆, 可得 $2a = 8, c = 2$, 所以 $a = 4, b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12$, 所以动点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. 故选 A.]

考点二

典例 2 (1) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 或 $\frac{y^2}{81} + \frac{x^2}{9} = 1$

(2) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ (3) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$ 或 $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{25} = 1$ [(1)法一: 若

椭圆的焦点在 x 轴上, 设方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

$$\text{由题意得 } \begin{cases} 2a = 3 \times 2b, \\ \frac{9}{a^2} + \frac{0}{b^2} = 1, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = 3, \\ b = 1, \end{cases} \text{ 所以椭圆的标准方程为 } \frac{x^2}{9} + y^2 = 1.$$

若椭圆的焦点在 y 轴上, 设方程为 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

$$\text{由题意得 } \begin{cases} 2a = 3 \times 2b, \\ \frac{0}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 9, \\ b = 3, \end{cases} \text{ 所以椭圆的标准方程为}$$

$$\frac{y^2}{81} + \frac{x^2}{9} = 1.$$

综上所述, 椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 或 $\frac{y^2}{81} + \frac{x^2}{9} = 1$.

法二: 设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1 (m > 0, n > 0, m \neq n)$,

$$\text{由题意知 } \begin{cases} \frac{9}{m} = 1, \\ 2\sqrt{m} = 3 \times 2\sqrt{n} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \frac{9}{n} = 1, \\ 2\sqrt{n} = 3 \times 2\sqrt{m} \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} m = 9, \\ n = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m = 9, \\ n = 81 \end{cases},$$

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 或 $\frac{y^2}{81} + \frac{x^2}{9} = 1$.

(2)法一: 若焦点在 x 轴上, 设椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

$$\text{由已知条件得 } \begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1, \\ \frac{1}{a^2} + \frac{14}{4b^2} = 1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a^2 = 8, \\ b^2 = 4, \end{cases}$$

所以所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

若焦点在 y 轴上, 设椭圆的标准方程为 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

$$\text{由已知条件得 } \begin{cases} \frac{4}{b^2} + \frac{2}{a^2} = 1, \\ \frac{1}{b^2} + \frac{14}{4a^2} = 1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} b^2 = 8, \\ a^2 = 4. \end{cases}$$

则 $a^2 < b^2$, 与 $a > b > 0$ 矛盾, 舍去.

综上可知, 所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

法二: 设椭圆的一般方程为 $Ax^2 + By^2 = 1 (A > 0, B > 0, A \neq B)$.

分别将两点的坐标 $(2, -\sqrt{2}), (-1, \frac{\sqrt{14}}{2})$ 代入椭圆的一般方程,

$$\text{得 } \begin{cases} 4A + 2B = 1, \\ A + \frac{14}{4}B = 1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} A = \frac{1}{8}, \\ B = \frac{1}{4}, \end{cases}$$

所以所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(3) 椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的离心率 $e = \frac{1}{2}$,

当焦点在 x 轴上时,

设所求椭圆的方程是 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a^2 = 8, \\ b^2 = 6, \end{cases}$$

所以所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$.

当焦点在 y 轴上时, 设所求椭圆的方程为 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} a^2 = \frac{25}{3}, \\ b^2 = \frac{25}{4}, \end{cases}$$

所以椭圆的标准方程为 $\frac{y^2}{\frac{25}{3}} + \frac{x^2}{\frac{25}{4}} = 1$.

所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$ 或 $\frac{y^2}{\frac{25}{3}} + \frac{x^2}{\frac{25}{4}} = 1$.]

多维变迁

1. D [由题意可知, 椭圆的焦点在 x 轴上, 故可设它的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

由椭圆的定义知 $c = 2$,

$$2a = \sqrt{\left(\frac{5}{2} + 2\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 2\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} =$$

$$2\sqrt{10}, \text{ 所以 } a = \sqrt{10}, \text{ 所以 } b^2 = a^2 - c^2 = 10 - 4 = 6, \text{ 所以所求}$$

椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1$. 故选 D.]

2. A [若曲线 $ax^2 + by^2 = c$ 为椭圆,

则椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{\frac{c}{a}} + \frac{y^2}{\frac{c}{b}} = 1 (a \neq b)$,

则 $\frac{c}{a} > 0$, 即 $ac > 0$,

所以由“曲线 $ax^2 + by^2 = c$ 为椭圆”可以推出“ $ac > 0$ ”, 充分性成立;

当 $ac > 0$ 时, 比如 $a = b = 1, c = 1$, 此时曲线方程为 $x^2 + y^2 = 1$, 它表示的是圆, 而不是椭圆,

所以由“ $ac > 0$ ”不能推出“曲线 $ax^2 + by^2 = c$ 为椭圆”, 必要性不成立, 所以“曲线 $ax^2 + by^2 = c$ 为椭圆”是“ $ac > 0$ ”的充分不必要条件.

故选 A.]

考点三

考向 1 典例 3 (1)B (2)A (3)C [(1)由题意可得, $2b = 2\sqrt{6}c$, 所以 $b = \sqrt{6}c$, 所以 $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{7}c$, 所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{7}$.

故选 B.

(2)设 $|PF_2| = m$, 因为 $|PF_1| = 3|PF_2|$,

所以 $|PF_1| = 3m$,

因为 P 为椭圆 C 上一点, 所以 $3m + m = 2a$, 即 $4m = 2a$,

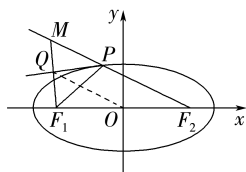
故 $|PF_2| = \frac{a}{2}$, $|PF_1| = \frac{3a}{2}$,

因为 $PF_1 \perp PF_2$, 所以由勾股定理得 $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = (2c)^2$,

得 $\frac{5}{2}a^2 = 4c^2$, 即 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{8}$, 解得 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{4}$, 故 A 正确.

故选 A.

(3)延长 F_1Q 交 F_2P 的延长线于 M , 连接 OQ ,



$|PF_1| = |MP|$, $|MF_2| = |MP| + |PF_2| = |PF_1| + |PF_2| = 2a$,

$\therefore |OQ| = \frac{1}{2}|MF_2| = a$, 则 Q 的轨迹为以 O 为圆心、 a 为半径的圆,

$\therefore Q$ 与短轴顶点的最短距离为 $a - b = \frac{c}{2}$,

$\therefore a^2 + b^2 - 2ab = \frac{a^2 - b^2}{4}$, 又 $a \neq b$, $\therefore \frac{b}{a} = \frac{3}{5}$,

则 $e = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$.

故选 C.]

考向 2 典例 4 AB [对于 A, 依题意知 $a = 4, b = 2, c = 2\sqrt{3}$,

当 P 为短轴端点时, $(S_{\triangle PF_1F_2})_{\max} = \frac{1}{2} \times 2c \times b = 4\sqrt{3}$, 故 A 正确;

对于 B, 由椭圆的性质知 $|PF_1|$ 的取值范围是 $[a - c, a + c]$, 即 $[4 - 2\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3}]$, 故 B 正确;

对于 C, $\sin \angle F_2BO = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\angle F_2BO = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\angle F_1BF_2 = \frac{2\pi}{3}$, 即 $\angle F_1PF_2$ 的最大值为 $\frac{2\pi}{3}$, 最小值为 0, 所以存在点 P 使 $PF_1 \perp PF_2$, 故 C 错误;

对于 D, 设 $P(x_0, y_0)$,

所以 $|PB| = \sqrt{x_0^2 + (y_0 - 2)^2}$,

又 $\frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{4} = 1$, 所以 $x_0^2 = 16 - 4y_0^2$,

所以 $|PB| = \sqrt{16 - 4y_0^2 + (y_0 - 2)^2} = \sqrt{-3y_0^2 - 4y_0 + 20}$

$= \sqrt{-3\left(y_0 + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{64}{3}}$,

又 $-2 \leq y_0 \leq 2$, 故当 $y_0 = -\frac{2}{3}$ 时, $|PB|_{\max} = \sqrt{\frac{64}{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$, 故

D 错误. 故选 AB.]

多维变迁

1. D [法一: 由题意知 $A(-4, 0), F(2, 0)$, 设 $M(x_0, y_0)$,

则 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MF} = (-4 - x_0, -y_0) \cdot (2 - x_0, -y_0) = (x_0 - 2) \cdot$

$(x_0 + 4) + y_0^2 = x_0^2 + 2x_0 - 8 + 12 - \frac{3}{4}x_0^2 = \frac{1}{4}x_0^2 + 2x_0 + 4 =$

$\frac{1}{4}(x_0 + 4)^2$, 因为 $-4 \leq x_0 \leq 4$,

所以 $0 \leq \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MF} \leq 16$.

法二: 由题意知 $A(-4, 0), F(2, 0)$,

设 $M(x_0, y_0)$, 取线段 AF 的中点 N ,

则 $N(-1, 0)$,

连接 MN , 如图,

则 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MF}$

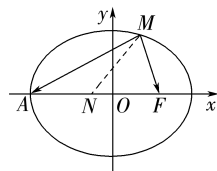
$= \frac{(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MF})^2 - (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MF})^2}{4}$

$= \frac{4\overrightarrow{MN}^2 - \overrightarrow{FA}^2}{4} = \overrightarrow{MN}^2 - 9 = (x_0 + 1)^2 + y_0^2 - 9 = x_0^2 + 2x_0 +$

$1 + 12 - \frac{3}{4}x_0^2 - 9 = \frac{1}{4}x_0^2 + 2x_0 + 4 = \frac{1}{4}(x_0 + 4)^2$,

因为 $-4 \leq x_0 \leq 4$,

所以 $0 \leq \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MF} \leq 16$. 故选 D.]



2. $\left(\frac{1}{3}, \sqrt{2} - 1\right)$ [由题意得, 椭圆 C 上存在一点 P , 使得

$\angle PF_2F_1$ 为钝角, 且 $|PF_2| = |F_2F_1| = 2c$,

则 $|PF_1| = 2a - |PF_2| = 2a - 2c$,

因为 $\angle PF_2F_1$ 为钝角,

所以 $\frac{1}{2}\angle PF_2F_1 > 45^\circ$, $\sin \frac{1}{2}\angle PF_2F_1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$,

即 $\frac{\frac{1}{2}|PF_1|}{|F_1F_2|} = \frac{a - c}{2c} > \frac{\sqrt{2}}{2}$, 整理得 $a > (\sqrt{2} + 1)c$, 所以离心率

$e = \frac{c}{a} < \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$,

又点 P 不在 x 轴上时, $a - c < |PF_2| < a + c$, 所以 $a - c < 2c < a + c$, 解得 $e > \frac{1}{3}$,

所以离心率的取值范围为 $\left(\frac{1}{3}, \sqrt{2} - 1\right)$.]

随堂·对点检测

1. D [由已知得, $a = 3$,

由椭圆的定义可得 $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 6$.

故选 D.]

2. B [若曲线为椭圆, 则 $\begin{cases} m - 1 > 0, \\ 3 - m > 0, \\ m - 1 \neq 3 - m, \end{cases}$

解得 $1 < m < 2$ 或 $2 < m < 3$,

故“ $1 < m < 3$ ”是“曲线 C 为椭圆”的必要不充分条件. 故选 B.]

3. BCD [把原方程化成标准方程, 得 $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$, 于是 $a = 5, b =$

$4, c = \sqrt{25 - 16} = 3$,

因此, 椭圆的长轴和短轴的长分别是 $2a = 10$ 和 $2b = 8$, 离心率

$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$, 两个焦点坐标分别是 $(-3, 0)$ 和 $(3, 0)$, 椭圆上任

一点 P 到两焦点的距离的和等于 $2a = 10$. 故选 BCD.]

4. $\frac{y^2}{27} + \frac{x^2}{9} = 1$ 或 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$ [当椭圆的焦点在 x 轴上时, 则 $a=3, \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 所以 $c=\sqrt{6}$, 从而 $b^2=a^2-c^2=9-6=3$, 所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$. 当椭圆的焦点在 y 轴上时, 则 $b=3, \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 所以 $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 所以 $a^2=27$, 所以椭圆的标准方程为 $\frac{y^2}{27} + \frac{x^2}{9} = 1$. 综上, 椭圆的标准方程为 $\frac{y^2}{27} + \frac{x^2}{9} = 1$ 或 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$.]

第 64 课时 双曲线

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1) 定点 (2) $a < c$ 两条射线 $a > c$

知识点 2 $x \in \mathbf{R}, y \leq -a$ 或 $y \geq a$ 坐标轴 原点 $A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$ $y = \pm \frac{a}{b}x - a^2 + b^2$

链教材·夯基固本

1. 17 [根据双曲线的定义得 $||PF_1| - |PF_2|| = 8$, 因为 $|PF_1| = 9$, 所以 $|PF_2| = 1$ 或 $|PF_2| = 17$. 又 $|PF_2| \geq c - a = 2$, 故 $|PF_2| = 17$.]
2. $\frac{y^2}{9} - x^2 = 1$ [由题设, 可设双曲线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{9} = m$ 且 $m \neq 0$, 又 $(-\sqrt{3}, 6)$ 在双曲线上, 所以 $m = 3 - \frac{36}{9} = -1$, 故双曲线的方程是 $\frac{y^2}{9} - x^2 = 1$.]
3. $\frac{9}{5}$ [双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的渐近线方程是 $\frac{x}{4} \pm \frac{y}{3} = 0$, 即 $3x \pm 4y = 0$. 由点到直线的距离公式, 得所求距离为 $\frac{|3 \times 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{9}{5}$.]

考点深研·题型突破

考点一

- 典例 1 (1) CD (2) $\frac{3}{4}$ [(1) 对于 A, 设 $F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$, 由题意知动点 M 满足 $|MF_1| - |MF_2| = 4 = |F_1F_2|$. 故动点 M 的轨迹是射线, 故选项 A 错误; 对于 B, 设动圆 M 的半径为 r , 由动圆 M 同时与圆 C_1 和圆 C_2 外切, 得 $|MC_1| = 1 + r, |MC_2| = 3 + r, |MC_2| - |MC_1| = 2 < 6$, 所以动圆圆心 M 的轨迹是以点 $C_1(-3, 0)$ 和 $C_2(3, 0)$ 为焦点的双曲线的左支, 且 $2a = 2$, 解得 $a = 1$. 又 $c = 3$, 则 $b^2 = c^2 - a^2 = 8$, 所以动圆圆心 M 的轨迹方程为 $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1 (x \leq -1)$, 故选项 B 错误; 对于 C, 设双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 则 $a = 2, c = \sqrt{4 + 12} = 4$, 则 $|PF_2| = 8 > 6$, 由双曲线定义可得 $||PF_1| - |PF_2|| = 2a = 4$, 即 $||PF_1| - 8| = 4$, 所以 $|PF_1| = 4$ 或 $|PF_1| = 12$, 由于 $c - a = 2$, 故点 P 到它的左焦点的距离是 4 或 12, 故选项 C 正确;

对于 D, 不妨设点 P 在双曲线的右支上,

则 $|PF_1| - |PF_2| = 2a = 2\sqrt{2}$,

在 $\triangle F_1PF_2$ 中, 由余弦定理,

$$\cos \angle F_1PF_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|} = \frac{1}{2},$$

所以 $|PF_1| \cdot |PF_2| = 8$,

所以 $S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{1}{2} |PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$, 故选项 D 正确.

(2) 因为由双曲线的定义有 $|PF_1| - |PF_2| = |PF_2| = 2a = 2\sqrt{2}$, 所以 $|PF_1| = 2|PF_2| = 4\sqrt{2}, c^2 = a^2 + b^2 = 4$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \cos \angle F_1PF_2 &= \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|} \\ &= \frac{(4\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 4^2}{2 \times 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

母题探究

解: 不妨设点 P 在双曲线的右支上,

则 $|PF_1| - |PF_2| = 2a = 2\sqrt{2}, \therefore \overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$,

$\therefore \overrightarrow{PF_1} \perp \overrightarrow{PF_2}$,

$\therefore$ 在 $\triangle F_1PF_2$ 中, 有 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2$,

即 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 16$,

$\therefore |PF_1| \cdot |PF_2| = 4$,

$\therefore S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{1}{2} |PF_1| \cdot |PF_2| = 2$.

考点二

- 典例 2 B [因为 C_1 和 C_2 有相同的渐近线, 所以设双曲线 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{4\lambda} - \frac{y^2}{3\lambda} = 1 (\lambda \neq 0)$, 将 $(2, 3)$ 代入得 $\frac{4}{4\lambda} - \frac{9}{3\lambda} = 1 \Rightarrow \lambda = -2$, 所以双曲线 C_1 的标准方程为 $\frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{8} = 1$. 故选 B.]

多维变迁

1. D [根据对称性, 不妨设双曲线的其中一条渐近线方程为 $y = \frac{b}{a}x$, 则过 $F_2(c, 0)$ 且垂直于渐近线 $y = \frac{b}{a}x$ 的直线方程为 $y = -\frac{a}{b}(x - c)$,
- $$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{b}{a}x, \\ y = -\frac{a}{b}(x - c), \end{cases} \text{ 可得 } P\left(\frac{a^2}{c}, \frac{ab}{c}\right),$$
- $\therefore |PF_2| = \sqrt{\left(\frac{a^2}{c} - c\right)^2 + \frac{a^2b^2}{c^2}} = b = 2$, 又 $F_1(-c, 0)$,
- $$\therefore k_{PF_1} = \frac{\frac{ab}{c}}{\frac{a^2}{c} - c} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \therefore \frac{ab}{a^2 + a^2 + b^2} = \frac{2a}{2a^2 + 4} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$
- $\therefore a^2 + 2 = 2\sqrt{2}a, \therefore a = \sqrt{2}$, 又 $b = 2$,
- $\therefore$ 双曲线的方程为 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$. 故选 D.]
2. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{75} = 1$ [设双曲线方程为 $mx^2 - ny^2 = 1 (mn > 0)$.

$$\therefore \begin{cases} 9m - 28n = 1, \\ 72m - 49n = 1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} m = -\frac{1}{75}, \\ n = -\frac{1}{25}. \end{cases} \therefore \text{双曲线的标准方程为}$$

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{75} = 1.]$$

考点三

考向 1 典例 3 (1)D (2)B [(1)因为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$

的焦距为 $2\sqrt{5}$, 即 $2c = 2\sqrt{5}$, 所以 $c = \sqrt{5}$,

又 $b = 1$,

所以 $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{5 - 1} = 2$,

所以双曲线的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

故选 D.

(2)法一: 设 C 的半焦距为 c , 则直线 l 的方程为 $x = -c$, 代入 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 解得 $y = \pm \frac{b^2}{a}$, $\therefore |AF_1| = \frac{b^2}{a}$.

$\because \triangle ABF_2$ 为等边三角形, $\therefore \tan \angle AF_2F_1 = \frac{|AF_1|}{|F_1F_2|} = \frac{\frac{b^2}{a}}{2c} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\therefore \frac{c^2 - a^2}{2ac} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$\therefore \frac{c}{2a} - \frac{a}{2c} = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

即 $\frac{e}{2} - \frac{1}{2e} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 解得离心率 $e = \sqrt{3}$ (负值舍去).

法二: 设 C 的半焦距为 c , 则直线 l 的方程为 $x = -c$, 代入 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 解得 $y = \pm \frac{b^2}{a}$,

$\therefore |AF_1| = \frac{b^2}{a}$, $|AB| = \frac{2b^2}{a}$,

$\because \triangle ABF_2$ 为等边三角形,

$\therefore |AF_2| = |AB| = \frac{2b^2}{a}$,

由双曲线的定义知 $|AF_2| - |AF_1| = 2a$, 即 $\frac{b^2}{a} = 2a$, $\therefore \frac{b^2}{a^2} = 2$,

$\therefore C$ 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{3}$. 故选 B.]

多维变迁

C [A(0, -a), 设双曲线的左焦点为 F' ,

则 $|FP| - |PF'| = 2a$,

故而 $|PA| + |PF| = 2a + |PF'| + |PA| \geq 2a + |F'A|$,

$\therefore |PA| + |PF|$ 的最小值为 $2a + |F'A| = 2a + \sqrt{a^2 + c^2}$,

$\because C$ 的左支上存在一点 P , 使得 $|PA| + |PF| = 7$,

$\therefore 2a + \sqrt{a^2 + c^2} \leq 7$, 即 $\sqrt{a^2 + c^2} \leq 7 - 2a$,

$\therefore c^2 + a^2 \leq 4a^2 - 28a + 49$, 又 $c^2 = a^2 + 1$,

可得 $a^2 - 14a + 24 \geq 0 \Rightarrow a \geq 12$ (舍) 或 $a \leq 2$,

$\therefore a^2 \leq 4 = 4(c^2 - a^2)$, 可得 $e \geq \frac{\sqrt{5}}{2}$,

$\therefore$ 离心率的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$.

故选 C.]

考向 2 典例 4 (1)B (2)D [(1)双曲线 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的离心

率为 $\frac{\sqrt{21}}{3}$, 则 $\frac{\sqrt{3-m}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$, 解得 $m = -4$,

故 $a = \sqrt{3}$, $b = 2$,

则渐近线方程为 $y = \pm \frac{a}{b}x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$. 故选 B.

(2)由双曲线定义知 $||PF_2| - |PF_1|| = 2a$,

$\because |PF_2| = 3|PF_1|$, $\therefore |PF_1| = a$, $|PF_2| = 3a$,

$\therefore \angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$, $|F_1F_2| = 2c$,

$\therefore \cos \angle F_1PF_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|} = \frac{1}{2}$,

即 $\frac{a^2 + 9a^2 - 4c^2}{2 \times a \times 3a} = \frac{1}{2}$, 化简得 $7a^2 = 4c^2$, 又 $c^2 = a^2 + b^2$,

$\therefore \frac{b^2}{a^2} = \frac{3}{4}$, 解得 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore$ 双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

故选 D.]

多维变迁

-3 [双曲线 $y^2 + \frac{x^2}{m} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{x}{\sqrt{-m}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 故实数 $m = -3$.]

考向 3 典例 5 ABD [设双曲线半焦距为 c , 则由已知可

得 $c = \sqrt{5}$, 因为双曲线 C 经过点 $(\sqrt{5}, \frac{1}{2})$, 所以 $\frac{5}{a^2} - \frac{1}{4b^2} = 1$,

联立 $\begin{cases} c = \sqrt{5}, \\ \frac{5}{a^2} - \frac{1}{4b^2} = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 2, \\ b = 1, \end{cases}$ 所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$.

$y^2 = 1$.

对于 A, 因为 $a = 2, b = 1$, 所以 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{2}x$,

即 $x \pm 2y = 0$, 故 A 正确;

对于 B, C 的实轴长为 $2a = 4$, 故 B 正确;

依题意, 不妨设 $B_1(0, 1), B_2(0, -1)$,

设 $M(x, y)$,

动点 M 满足 $|MB_1| = \sqrt{3}|MB_2|$,

所以 $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + (y+1)^2}$,

化简得 $x^2 + (y+2)^2 = 3$, 则点 M 的轨迹是以 $N(0, -2)$ 为圆心, 半径为 $\sqrt{3}$ 的圆.

对于 C, 点 F 到圆心 N 的距离 $d = \sqrt{(\sqrt{5}-0)^2 + (0+2)^2} = 3$,

所以 $|FM|$ 的最大值为 $3 + \sqrt{3}$, 故 C 错误;

对于 D, 设 $P(x_0, y_0)$ 为双曲线上任一点, 则 $x_0^2 - 4y_0^2 = 4$,

P 到圆心 N 的距离为

$|PN| = \sqrt{x_0^2 + (y_0+2)^2} = \sqrt{4y_0^2 + 4 + y_0^2 + 4y_0 + 4}$
 $= \sqrt{5\left(y_0 + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{36}{5}}$,

当 $y_0 = -\frac{2}{5}$ 时, $|PN|$ 最小, 最小值为 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$, 故 $|PM|$ 的最小值

为 $\frac{6\sqrt{5}}{5} - \sqrt{3}$, 故 D 正确.

故选 ABD.]

多维变迁

1. ABC [因为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 过点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 和 $(2, 3)$,

所以 $\begin{cases} \frac{2}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1, \\ \frac{4}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 1, \\ b = \sqrt{3}, \end{cases}$

则 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$.

对于 A 选项, 实轴长为 $2a=2$, 故 A 正确;

对于 B 选项, 焦距为 $2c=4$, 故 B 正确;

对于 C 选项, 渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \sqrt{3}x$, 故 C 正确;

对于 D 选项, 离心率为 $\frac{c}{a} = 2$, 故 D 错误.

故选 ABC.]

2.8 $[a=2, b=\sqrt{21}, c=5, |PF_2| \geq c-a=3, |PF_1| = |PF_2| + 2a = |PF_2| + 4,$

$|PF_1| + \frac{3}{|PF_2|} = |PF_2| + \frac{3}{|PF_2|} + 4, |PF_2| \geq 3$, 而函数 $y = x + \frac{3}{x} + 4 (x > 0)$ 在 $[3, +\infty)$ 上单调递增,

所以当且仅当 $x=3$ 时, $y_{\min}=8$.]

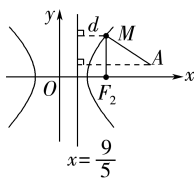
教材拓展

典例 6 $\frac{36}{5}$ [设 M 到直线 $x = \frac{a^2}{c} = \frac{9}{5}$ 的距离为 d , 由双曲线第

二定义知, $\frac{|MF_2|}{d} = e = \frac{5}{3},$

$\therefore d = \frac{3}{5}|MF_2|,$

$\therefore |MA| + \frac{3}{5}|MF_2| = |MA| + d,$



如图, 可知 $(|MA| + d)_{\min} = x_A - \frac{9}{5} = 9 - \frac{9}{5} = \frac{36}{5}.$

典例 7 (1)D (2)A (3)B [(1)设动点 $M(x, y)$, 由于 $A(1, 0), B(-1, 0)$, 根据直线 AM 与 BM 的斜率之积为 4, 整理得

$\frac{y}{x-1} \cdot \frac{y}{x+1} = 4$, 化简得 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 (x \neq \pm 1)$. 故选 D.

(2)法一(设而不求): 设 $P(x_1, y_1)$, 则 $Q(-x_1, y_1)$, 则由 k_{AP}

$\cdot k_{AQ} = \frac{1}{4}$ 得 $k_{AP} \cdot k_{AQ} = \frac{y_1}{x_1+a} \cdot \frac{y_1}{-x_1+a} = \frac{y_1^2}{-x_1^2+a^2} = \frac{1}{4},$

由 $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, 得 $y_1^2 = \frac{b^2(a^2-x_1^2)}{a^2},$

所以 $\frac{b^2(a^2-x_1^2)}{-x_1^2+a^2} = \frac{1}{4}$, 即 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{4}$, 所以椭圆 C 的离心率 $e =$

$\frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

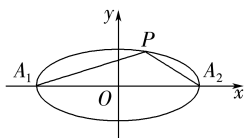
法二(第三定义): 设右顶点为 B , 连接 PB (图略), 由椭圆的对称性知 $k_{PB} = -k_{AQ},$

故 $k_{AP} \cdot k_{AQ} = k_{PA} \cdot (-k_{PB}) = \frac{1}{4}$, 由椭圆第三定义得 $k_{PA} \cdot$

$k_{PB} = -\frac{b^2}{a^2}$, 故 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{4}$, 所以椭圆 C 的离心率 $e = \frac{c}{a} =$

$\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

(3)设点 $P(x, y)$,



则直线 PA_1 的斜率为 $k_1 = \frac{y-0}{x-(-2)} = \frac{y}{x+2},$

直线 PA_2 的斜率为 $k_2 = \frac{y-0}{x-2} = \frac{y}{x-2},$

$k_1 \cdot k_2 = \frac{y}{x+2} \cdot \frac{y}{x-2} = \frac{y^2}{x^2-4}.$

$\therefore$ 点 $P(x, y)$ 满足 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1,$

$\therefore x^2 + \frac{4y^2}{3} = 4$, 即 $x^2 - 4 = -\frac{4y^2}{3},$

故 $k_1 \cdot k_2 = \frac{y^2}{-\frac{4}{3}y^2} = -\frac{3}{4}, k_1 = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{k_2},$

$\therefore k_2 \in [-2, -1],$

$\therefore k_1 \in [\frac{3}{8}, \frac{3}{4}].$ 故选 B.]

随堂·对点检测

1. A [椭圆 $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1$ 的半焦距 $c = \sqrt{10-6} = 2$, 则 C 的半焦

距 $c' = 2$. $\therefore C$ 的一条渐近线的方程为 $x - \sqrt{3}y = 0$, $\therefore$ 可设 C 的

方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = \lambda (\lambda \neq 0)$, 化为标准方程为 $\frac{x^2}{3\lambda} - \frac{y^2}{\lambda} = 1$. 当 $\lambda >$

0 时, $c' = \sqrt{\lambda + 3\lambda} = 2$, 得 $\lambda = 1$, 则 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$; 当

$\lambda < 0$ 时, $c' = \sqrt{-\lambda - 3\lambda} = 2$, 得 $\lambda = -1$, 则 C 的方程为 $y^2 - \frac{x^2}{3} = 1$. 综上, C 的方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 或 $y^2 - \frac{x^2}{3} = 1$.]

2. C [因为 $|AP| + |AF_2| = |AP| +$

$|AF_1| - 2\sqrt{5}$, 所以要求 $|AP| +$

$|AF_2|$ 的最小值, 只需求 $|AP| +$

$|AF_1|$ 的最小值. 如图, 连接 F_1P 交双

曲线的右支于点 A_0 . 当点 A 位于点

A_0 处时, $|AP| + |AF_1|$ 最小, 最小值为 $|PF_1| =$

$\sqrt{[3 - (-3)]^2 + 1^2} = \sqrt{37}.$

故 $|AP| + |AF_2|$ 的最小值为 $\sqrt{37} - 2\sqrt{5}.$

3. 10 $\frac{7}{5} y = \pm \frac{5\sqrt{6}}{12}x$ [双曲线 $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{24} = 1$ 中 $a=5, b^2=$

$24, c^2=25+24=49,$

$\therefore$ 实轴长为 $2a=10$, 离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{7}{5},$

渐近线方程为 $y = \pm \frac{5\sqrt{6}}{12}x.$

4. $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ [因为 $F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0), \frac{x_0^2}{2} - y_0^2 = 1$, 所

以 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = (-\sqrt{3} - x_0, -y_0) \cdot (\sqrt{3} - x_0, -y_0) = x_0^2 +$

$y_0^2 - 3 < 0$, 即 $3y_0^2 - 1 < 0$, 解得 $-\frac{\sqrt{3}}{3} < y_0 < \frac{\sqrt{3}}{3}.$

第 65 课时 抛物线

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1)相等 准线

知识点 2 $x_0 + \frac{p}{2} - y_0 + \frac{p}{2} p - x_1 - x_2 y_1 + y_2 + p$

链教材·夯基固本

1. D [由题意知, 抛物线的准线方程为 $y = -1$, 所以由抛物线的定义知, 点 A 到抛物线焦点的距离为 5.

故选 D.]

2. D [抛物线 $y=2x^2$ 的标准方程为 $x^2=\frac{1}{2}y$, 所以焦点在 y 轴

上, 由 $2p=\frac{1}{2}$, 所以焦点坐标为 $(0, \frac{1}{8})$. 故选 D.]

3. AC [当抛物线的焦点在 x 轴上时,

设方程为 $y^2=2px (p>0)$,

$$\therefore (-2\sqrt{2})^2=2p \times 2,$$

$$\text{解得 } p=2, \therefore y^2=4x.$$

当抛物线的焦点在 y 轴上时,

设方程为 $x^2=-2py (p>0)$,

$$\therefore 2^2=-2p \times (-2\sqrt{2}),$$

$$\text{解得 } p=\frac{\sqrt{2}}{2}, \therefore x^2=-\sqrt{2}y.]$$

4. $\frac{\sqrt{35}}{2}$ [设点 P 的坐标为 (x, y) ,

$$\text{则 } x^2=-5y, \text{ 而且 } |PA|^2=x^2+(y+3)^2=y^2+y+9=(y+\frac{1}{2})^2+\frac{35}{4},$$

$$\text{又因为 } y \leq 0, \text{ 所以当 } y=-\frac{1}{2} \text{ 时, } |PA|_{\min}^2=\frac{35}{4}.$$

$$\text{因此所求最小值为 } \frac{\sqrt{35}}{2}.]$$

考点深研 · 题型突破

考点一

典例 1 (1)ABC (2)(1,2) [(1)由题意得 $\frac{p}{2}=2$, 则 $p=4$, A

正确;

$$\text{设 } M(x_0, y_0), \text{ 则 } |MF|=x_0+\frac{p}{2}, |OF|=\frac{p}{2},$$

又因为 $x_0 \geq 0$, 所以 $|MF| \geq |OF|$, B 正确;

由抛物线的定义知 M 到 F 的距离与 M 到 C 的准线的距离相等, 故以 M 为圆心且过 F 的圆与 C 的准线相切, C 正确;

当 $\angle OFM=120^\circ$ 时, 不妨设 $M(x_0, y_0)$ 在第一象限, 则 $x_0>2$,

$$y_0>0, \text{ 故 } k_{MF}=\frac{y_0}{x_0-2}=\tan 60^\circ=\sqrt{3}, \text{ 即 } x_0=\frac{y_0}{\sqrt{3}}+2,$$

$$\text{又 } y_0^2=8x_0, \text{ 所以 } \sqrt{3}y_0^2-8y_0-16\sqrt{3}=0,$$

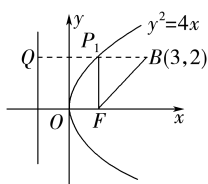
$$\text{解得 } y_0=4\sqrt{3} \text{ 或 } y_0=-\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ (舍去),}$$

$$\text{所以 } S_{\triangle OFM}=\frac{1}{2}|OF| \times |y_0|=\frac{1}{2} \times 2 \times 4\sqrt{3}=4\sqrt{3}, \text{ D 错误.}$$

(2)如图, 过点 B 作准线 $x=-1$ 的垂线, 垂足为点 Q , 交抛物线于点 P_1 , 由抛物线定义, 知 $|P_1Q|=|P_1F|$.

则有 $|PB|+|PF| \geq |P_1B|+|P_1Q|=|BQ|=4$, 当 B, P_1, Q 三点共

线时, $|PB|+|PF|$ 取最小值, 把 $y=2$ 代入 $y^2=4x$, 得 $x=1$, 所以当 $|PB|+|PF|$ 取最小值时, 点 P 的坐标为 $(1, 2)$.]



母题探究

1. 解: 由题意可知点 $B(3, 4)$ 在抛物线的外部,

所以 $|PB|+|PF|$ 的最小值即为 B, F 两点间的距离, 又 $F(1, 0)$, 所以 $|PB|+|PF| \geq |BF|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$, 即 $|PB|+|PF|$ 的最小值为 $2\sqrt{5}$.

2. 解: 由题意, 知抛物线的焦点为 $F(1, 0)$.

点 P 到 y 轴的距离 $d_1=|PF|-1$,

$$\text{所以 } d_1+d_2=d_2+|PF|-1.$$

易知 $d_2+|PF|$ 的最小值为点 F 到直线 l 的距离,

$$\text{故 } d_2+|PF| \text{ 的最小值为 } \frac{|1+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2},$$

$$\text{所以 } d_1+d_2 \text{ 的最小值为 } 3\sqrt{2}-1.$$

考点二

典例 2 (1)B (2) $y^2=-8x$ 或 $x^2=-y$

[(1)以抛物线的顶点为坐标原点, 该碗轴截面的对称轴为 y 轴, 建立平面直角坐标系, 如图,

设该抛物线的方程为 $x^2=2py (p>0)$

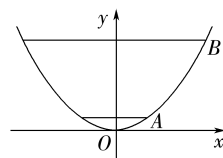
(x, y 的单位均为 cm), 点 A 纵坐标为

h ,

$$\text{则 } A(5, h), B(13, h+10),$$

$$\text{于是 } \begin{cases} 25=2ph, \\ 169=2p(h+10), \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} h=\frac{125}{72}, \\ p=\frac{36}{5}, \end{cases}$$



故该抛物线的焦点到准线的距离为 $\frac{36}{5} \text{ cm}$. 故选 B.

(2)由题意设抛物线方程为 $y^2=-2px (p>0)$ 或 $x^2=-2py (p>0)$. 将 $P(-2, -4)$ 代入, 分别得标准方程为 $y^2=-8x$ 或 $x^2=-y$.]

多维变迁

1. D [抛物线 $y=ax^2$ 的标准方程为 $x^2=\frac{1}{a}y$,

$$\text{其准线方程为 } y=-\frac{1}{4a},$$

$\therefore$ 点 $M(5, 3)$ 到抛物线 $y=ax^2$ 的准线的距离为 6,

$$\therefore 3+\frac{1}{4a}=6, \text{ 或 } -\frac{1}{4a}-3=6,$$

$$\text{解得 } a=\frac{1}{12}, \text{ 或 } a=-\frac{1}{36},$$

故抛物线的标准方程是 $x^2=12y$ 或 $x^2=-36y$,

故选 D.]

2. A [因为圆 $O: x^2+y^2=4$ 与 y 轴交于 A, B 两点 (A 在 B 的上方), 所以 $A(0, 2), B(0, -2)$, 所以切线 l 的方程为 $y=-2$, 因为动点 P 到 A 的距离等于 P 到 l 的距离, 所以动点 P 的轨迹为抛物线, 且其焦点为 $(0, 2)$, 准线方程为 $y=-2$, 所以动点 P 的轨迹方程为 $x^2=8y$. 故选 A.]

考点三

典例 3 (1)AC (2)BD [(1)由抛物线 $\frac{1}{8}x^2=y$, 即 $x^2=8y$, 可

知抛物线开口向上, 焦点坐标为 $(0, 2)$, 焦点到准线的距离为 4, 准线方程为 $y=-2$. 故选 AC.

(2)由抛物线 $y^2=8x$, 可得焦点为 $F(2, 0)$, 故 A 错误;

由抛物线的性质可得 $|AB|=|AF|+|BF|=x_1+2+x_2+2=x_1+x_2+4$, 故 B 正确;

法一: 易知直线 AB 的斜率不为 0, 设直线 AB 的方程为 $x=my+2$, 与抛物线的方程联立, 可得 $y^2-8my-16=0$, $\Delta>0$,

$$\text{则 } y_1+y_2=8m, y_1y_2=-16,$$

$$\frac{1}{|FA|}+\frac{1}{|FB|}=\frac{1}{x_1+2}+\frac{1}{x_2+2}$$

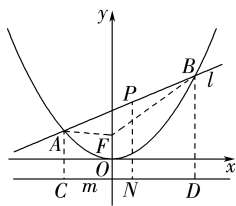
$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\frac{y_1^2}{8}+2} + \frac{1}{\frac{y_2^2}{8}+2} = \frac{8}{y_1^2+16} + \frac{8}{y_2^2+16} \\
 &= \frac{8y_1^2+8 \times 16+8y_2^2+8 \times 16}{y_1^2y_2^2+16y_1^2+16y_2^2+16^2} \\
 &= \frac{8(y_1+y_2)^2-16y_1y_2+16^2}{(y_1y_2)^2+16(y_1+y_2)^2-32y_1y_2+16^2} \\
 &= \frac{8 \times (8m)^2+16^2+16^2}{16^2+16 \times (8m)^2+32 \times 16+16^2} \\
 &= \frac{1}{2}, \text{故 C 错误, D 正确.}
 \end{aligned}$$

法二: 因为 $p=4$, 所以 $y_1y_2=-p^2=-16$,

$$\frac{1}{|FA|} + \frac{1}{|FB|} = \frac{2}{p} = \frac{1}{2}, \text{故 C 错误, D 正确.}]$$

多维变迁

1. B [如图, F 为抛物线的焦点, m 为准线. 作 $AC \perp m$ 于点 C , $PN \perp m$ 于点 N , $BD \perp m$ 于点 D , 连接 AF, BF . 由抛物线定义, 知 $2|PN| = |AC| + |BD| = |AF| + |BF| \geq |AB| = 6$, 所以 $|PN| \geq 3$, 当且仅当点 F 在线段 AB 上时, 等号成立.



故 y_0 的最小值为 2. 故选 B.]

2. 3 [由题意得焦点 $F(1,0)$, 易知直线 l 的斜率不为 0, 设直线 l 的方程为 $x = \lambda y + 1 (\lambda \neq 0)$,

代入抛物线方程得 $y^2 - 4\lambda y - 4 = 0, \Delta > 0$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

由根与系数的关系得 $y_1y_2 = -4, ①$

由 $\overrightarrow{AF} = t\overrightarrow{FB}$, 即 $(1-x_1, -y_1) = t(x_2-1, y_2)$,

有 $y_1 = -ty_2, ②$

$\therefore$ 由 ①② 得 $y_2 = \frac{2}{\sqrt{t}}, y_1 = -2\sqrt{t}$ 或 $y_2 = -\frac{2}{\sqrt{t}}, y_1 = 2\sqrt{t}$, 即

$$x_1 = t, x_2 = \frac{1}{t},$$

$$\therefore |AB| = x_1 + x_2 + p = \frac{1}{t} + t + 2 = \frac{16}{3},$$

化简得 $3t^2 - 10t + 3 = 0$,

$$\therefore t = 3 \text{ 或 } t = \frac{1}{3} (\text{舍}).]$$

教材拓展

- 典例 4 (1) D [由已知得线段 AC 是动圆的直径,

故 $AB \perp CB$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 0,$$

因为 $A(0,5), B(x,0), C(0,y)$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AB} = (x, -5), \overrightarrow{CB} = (x, -y),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = x^2 + 5y = 0,$$

可得 $x^2 = -5y$,

又 B, C 不重合, 所以原点除外,

所以点 M 的轨迹方程为 $x^2 = -5y (y \neq 0)$.

故选 D.]

(2) 解: ① 由动点 $P(x, y)$ 满足 $2|OP| = |PA|$, 得 $2\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-6)^2+y^2}$, 化简得 $x^2+y^2+4x-12=0$, 所以动点 P 的轨迹方程是 $(x+2)^2+y^2=16$.

② 设点 $M(x_0, y_0)$, 由 $PQ \perp y$ 轴于点 Q , 且 M 是 PQ 中点, 得

$$P(2x_0, y_0), \text{ 即 } \begin{cases} x=2x_0, \\ y=y_0. \end{cases}$$

由 ① 知 $(x+2)^2+y^2=16$,

因此 $(2x_0+2)^2+y_0^2=16$, 整理得 $\frac{(x_0+1)^2}{4} + \frac{y_0^2}{16} = 1$.

所以点 M 的轨迹方程是 $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$.

随堂·对点检测

1. A [因为 $P(4,1)$ 在抛物线 $x^2=2py (p>0)$ 上,

所以 $16=2p$, 所以 $p=8$,

$$\text{所以 } |PF| = \frac{p}{2} + y_P = 4 + 1 = 5.$$

故选 A.]

2. B [抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 $F(1,0)$, 准线方程为 $x=-1$. 根据题意可得 $|PQ| = |PF| + |QF| = x_1 + 1 + x_2 + 1 = x_1 + x_2 + 2 = 8$. 故选 B.]

3. (4,0) [由题意, 知 $p=8$, 则 $\frac{p}{2}=4$, 所以抛物线 $y^2=16x$ 的焦点坐标为 $(4,0)$.]

4. $y^2=8x$ [由题意得 $F(\frac{p}{2}, 0)$, $A(0,2)$, 准线方程为 $x = -\frac{p}{2}$,

$$\therefore \text{直线 } FQ \text{ 的方程为 } y = -\frac{4}{p}x + 2, \therefore Q(-\frac{p}{2}, 4),$$

把 $y=4$ 代入 $y^2=2px$ 可得 $x = \frac{8}{p}$.

$$\therefore |PQ| = \frac{8}{p} + \frac{p}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle PQF} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{8}{p} + \frac{p}{2}\right) \times 4 = 8, \text{解得 } p=4.$$

$\therefore$ 抛物线方程为 $y^2=8x$.]

第 66 课时 直线与圆锥曲线

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1) 相交 相切 相离 (2) 相交 相切 相离
渐近线 对称轴

知识点 2 $\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2| \quad \sqrt{1+\frac{1}{k^2}}|y_1-y_2|$

知识点 3 (2) $\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$

链教材·夯基固本

1. C [由 $\begin{cases} y=kx+2, \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1, \end{cases}$ 得 $(2+3k^2)x^2+12kx+6=0$,

由题意知 $\Delta = (12k)^2 - 4 \times 6 \times (2+3k^2) = 0$,

解得 $k = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$. 故选 C.]

2. $\frac{8\sqrt{2}}{7}$ [在 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 中, $a^2=2, b^2=1$,

所以 $c^2 = a^2 - b^2 = 1$, 即 $c=1$,

故左焦点为 $F_1(-1,0)$, 而 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$,

故直线 l 的方程为 $y = \sqrt{3}(x+1)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = \sqrt{3}(x+1), \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得 } 7x^2 + 12x + 4 = 0,$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由根与系数的关系得 $x_1 + x_2 = -\frac{12}{7}, x_1 x_2 = \frac{4}{7}$.

则由弦长公式得 $|AB| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{12}{7}\right)^2 - 4 \times \frac{4}{7}} = \frac{8\sqrt{2}}{7}$.

3. D [设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, $\therefore$ 点 A, B 是双曲线 C 上的两点, $\therefore \frac{x_1^2}{2} - \frac{y_1^2}{3} = 1, \frac{x_2^2}{2} - \frac{y_2^2}{3} = 1$, 两式相减得 $\frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{2} = \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{3}$, $\therefore M(3, 2)$ 是线段 AB 的中点, $\therefore x_1 + x_2 = 6, y_1 + y_2 = 4$, $\therefore \frac{6(x_1 - x_2)}{2} = \frac{4(y_1 - y_2)}{3}$, $\therefore k_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{9}{4}$. 经验证 $\Delta > 0$, 符合题意. 故选 D.]

考点深研 · 题型突破

考点一

典例 1 解: (1) 由题意得 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$,

可得 $a=3, b=4, c=5$,

故顶点坐标为 $(\pm 3, 0)$, 焦点坐标为 $(\pm 5, 0)$, 离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$, 渐近线方程为 $y = \pm \frac{4}{3}x$.

(2) 联立 $\begin{cases} 16x^2 - 9y^2 = 144, \\ y = kx + 1, \end{cases}$

消去 y 得 $(16 - 9k^2)x^2 - 18kx - 153 = 0$, (*)

① 当 $16 - 9k^2 = 0$ 或 $\Delta = (-18k)^2 - 4 \times (16 - 9k^2) \times (-153) = 0$,

即 $k = \pm \frac{4}{3}$ 或 $k = \pm \frac{\sqrt{17}}{3}$ 时, 直线 l 与双曲线只有一个公共点.

② 当 $16 - 9k^2 \neq 0, \Delta = (-18k)^2 - 4 \times (16 - 9k^2) \times (-153) > 0$, 即 $-\frac{\sqrt{17}}{3} < k < \frac{\sqrt{17}}{3}$ 且 $k \neq \pm \frac{4}{3}$ 时, 方程 (*) 有两个不同的实数根, 可知原方程组有两组不同的实数解.

直线 l 与双曲线有两个不同的公共点.

③ 当 $\Delta = (-18k)^2 - 4 \times (16 - 9k^2) \times (-153) < 0$, 即 $k < -\frac{\sqrt{17}}{3}$ 或 $k > \frac{\sqrt{17}}{3}$ 时, 方程 (*) 没有实数根, 可知原方程组没有实数解. 直线 l 与双曲线没有公共点.

多维变迁

1. A [由于过 M 且与抛物线 C 仅有一个公共点的直线有 3 条, 则当直线的斜率不存在时符合题意, 此时直线方程为 $x=m$; 当直线的斜率存在时, 设直线方程为 $y-1=k(x-m)$, 则 $\begin{cases} y-1=k(x-m), \\ x^2=y, \end{cases}$ 消去 y 整理得 $x^2 - kx + km - 1 = 0$, 所以 $\Delta = 0$, 即关于 k 的方程 $k^2 - 4km + 4 = 0$ 有两个不同的解, 所以 $\Delta_1 > 0$ 即 $16m^2 - 16 > 0$, 解得 $m < -1$ 或 $m > 1$, 所以“ $m > 1$ ”是“过 M 且与抛物线 C 仅有一个公共点的直线有 3 条”的充分条件. 故选 A.]

2. 解: 将直线 l 的方程与椭圆 C 的方程联立, 得方程

$$\begin{cases} y = 2x + m, & ① \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, & ② \end{cases}$$

将①代入②, 整理得 $9x^2 + 8mx + 2m^2 - 4 = 0$. ③

方程③的根的判别式 $\Delta = (8m)^2 - 4 \times 9 \times (2m^2 - 4) = -8m^2 + 144$.

(1) 当 $\Delta > 0$, 即 $-3\sqrt{2} < m < 3\sqrt{2}$ 时, 方程③有两个不同的实数根, 可知原方程组有两组不同的实数解.

这时直线 l 与椭圆 C 有两个不同的公共点.

(2) 当 $\Delta = 0$, 即 $m = \pm 3\sqrt{2}$ 时, 方程③有两个相同的实数根, 可知原方程组有两组相同的实数解.

这时直线 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点.

(3) 当 $\Delta < 0$, 即 $m < -3\sqrt{2}$ 或 $m > 3\sqrt{2}$ 时, 方程③没有实数根, 可知原方程组没有实数解. 这时直线 l 与椭圆 C 没有公共点.

考点二

典例 2 解: (1) 由题意知 $\begin{cases} \frac{9}{b^2} = 1, \\ \frac{9}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a = 2\sqrt{3}, \\ b = 3, \end{cases}$

$\therefore c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$, $\therefore C$ 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

(2) 由题意知

$$|PA| = \sqrt{(3-0)^2 + \left(\frac{3}{2}-3\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2},$$

设点 B 到直线 PA 的距离为 h ,

则 $\triangle ABP$ 的面积为 $S = \frac{1}{2} |PA| \cdot h = 9$, 解得 $h = \frac{12\sqrt{5}}{5}$.

易知直线 $PA: x + 2y - 6 = 0$, 设 $B(x_0, y_0)$,

$$\begin{cases} \frac{|x_0 + 2y_0 - 6|}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}, \\ \frac{x_0^2}{12} + \frac{y_0^2}{9} = 1, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x_0 = 0, \\ y_0 = -3, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_0 = -3, \\ y_0 = -\frac{3}{2}, \end{cases}$

$\therefore B(0, -3)$ 或 $B(-3, -\frac{3}{2})$,

故 $l: y = \frac{3}{2}x - 3$ 或 $y = \frac{1}{2}x$.

考题探源

解: 由 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 可知 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$,

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } S_{\triangle MF_1N} = \frac{1}{2} |F_1F_2| |y_1 - y_2| = |y_1 - y_2|,$$

易知直线 MN 的斜率不为 0,

设直线 $MN: x = my + 1$, 由 $\begin{cases} x = my + 1, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 消去 x 得 $(3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0, \Delta = 36m^2 + 36(3m^2 + 4) > 0$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } y_1 + y_2 &= \frac{-6m}{3m^2+4}, y_1 y_2 = \frac{-9}{3m^2+4}, \\ S_{\triangle MF_1 N} &= |y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{-6m}{3m^2+4}\right)^2 + \frac{36}{3m^2+4}} = \frac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}, \\ \text{令 } t &= \sqrt{m^2+1}, \text{ 则 } t \geq 1, S_{\triangle MF_1 N} = \frac{12}{3t + \frac{1}{t}}, \end{aligned}$$

$\therefore$ 函数 $y = 3t + \frac{1}{t}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore 3t + \frac{1}{t} \geq 4, \text{ 故 } S_{\triangle MF_1 N} \leq 3,$$

所以 $\triangle MF_1 N$ 面积的最大值为 3.

此时 $t = \sqrt{m^2+1} = 1$, 即 $m = 0$,

所以所求直线 l 的方程为 $x = 1$.

多维变迁

解: (1) 由题意可知, $2a = 4$, 则 $a = 2$,

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore c = \sqrt{3},$$

$$\therefore b = \sqrt{a^2 - c^2} = 1,$$

$$\therefore \text{椭圆 } C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

(2) 由(1)可得 $F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0)$,

$$\therefore \text{直线 } l: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1,$$

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1, \end{cases}$$

消去 y 得 $7x^2 - 8\sqrt{3}x = 0$,

$$\text{解得 } x = 0 \text{ 或 } x = \frac{8\sqrt{3}}{7}, \text{ 不妨设 } P(0, 1), Q\left(\frac{8\sqrt{3}}{7}, -\frac{1}{7}\right),$$

$$\text{所以 } |PQ| = \sqrt{\left(\frac{8\sqrt{3}}{7}\right)^2 + \left(-\frac{1}{7} - 1\right)^2} = \frac{16}{7},$$

$$\text{又点 } F_1 \text{ 到直线 } PQ \text{ 的距离 } d = \frac{\left|-\frac{\sqrt{3}}{3} \times (-\sqrt{3}) + 1\right|}{\sqrt{1 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\sqrt{3}, \therefore S_{\triangle F_1 PQ} = \frac{1}{2} |PQ| \cdot d = \frac{1}{2} \times \frac{16}{7} \times \sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{7}.$$

微点突破

典例 3 D [联立双曲线与直线的方程,

得 $x^2 - 2x - 3 = 0, \Delta = 16$, 又 $k = 1, a = 1$,

由弦长的万能公式, 知 $|MN| = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 4\sqrt{2}$. 故选 D.]

考点三

典例 4 A [设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{代入椭圆方程可得} \begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \end{cases}$$

两式作差可得,

$$\frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{a^2} + \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{b^2} = 0,$$

又线段 AB 的中点坐标为 $(1, -1)$, 所以 $x_1 + x_2 = 2, y_1 + y_2 = -2$,

$$\text{则 } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{b^2}{a^2}, \text{ 又直线 } AB \text{ 的斜率为 } k_{AB} = \frac{-1 - 0}{1 - 3} = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2}, \text{ 而 } a^2 - b^2 = c^2 = 9,$$

所以 $a^2 = 18, b^2 = 9$, 所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$. 故选 A.]

多维变迁

1. A [$\because$ 焦点到准线的距离为 p , 则 $p = 1$,

$$\therefore y^2 = 2x. \text{ 设点 } P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2),$$

$$\text{则 } \begin{cases} y_1^2 = 2x_1, \\ y_2^2 = 2x_2, \end{cases} \text{ 两式相减可得 } (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 2(x_1 - x_2),$$

$$\therefore k_{PQ} = \frac{2}{y_1 + y_2}, \text{ 又 } \because P, Q \text{ 关于直线 } l \text{ 对称},$$

$$\therefore k_{PQ} = -1, \text{ 即 } y_1 + y_2 = -2,$$

$$\therefore \text{线段 } PQ \text{ 中点的纵坐标为 } \frac{y_1 + y_2}{2} = -1,$$

又 $\because$ 线段 PQ 的中点在直线 l 上,

$$\therefore \text{线段 } PQ \text{ 中点的横坐标为 } -1 + 2 = 1.$$

$\therefore$ 线段 PQ 的中点坐标为 $(1, -1)$. 故选 A.]

2. $x + 2y - 3 = 0$ [法一: 易知此弦所在直线的斜率存在,

设斜率为 k , 弦所在的直线与椭圆相交于 A, B 两点, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{2} = 1, \text{ ①}$$

$$\frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{2} = 1, \text{ ②}$$

由①-②得

$$\frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{4} + \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{2} = 0.$$

$$\therefore x_1 + x_2 = 2, y_1 + y_2 = 2, \therefore \frac{x_1 - x_2}{2} + y_1 - y_2 = 0.$$

$$\text{又 } x_2 - x_1 \neq 0, \therefore k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{2}.$$

经检验, $k = -\frac{1}{2}$ 满足题意.

$$\therefore \text{此弦所在直线的方程为 } y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1),$$

即 $x + 2y - 3 = 0$.

法二: 利用结论

$$k = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} = -\frac{2}{4} \times \frac{1}{1} = -\frac{1}{2}, \therefore \text{此弦所在直线的方程为}$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1), \text{ 即 } x + 2y - 3 = 0.]$$

随堂·点对检测

1. A [直线 $y = kx - k + 1 = k(x - 1) + 1$ 恒过定点 $(1, 1)$, 又点 $(1, 1)$ 在椭圆内部,

故直线与椭圆相交.]

2. C [由题意, 得 $a^2 = 4, b^2 = 1$, 所以 $c^2 = 3$,

所以椭圆右焦点的坐标为 $(\sqrt{3}, 0)$,

则直线 l 的方程为 $y = x - \sqrt{3}$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = x - \sqrt{3}, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得 } 5x^2 - 8\sqrt{3}x + 8 = 0,$$

$$\Delta = (-8\sqrt{3})^2 - 4 \times 5 \times 8 = 32 > 0,$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{8\sqrt{3}}{5}, x_1 x_2 = \frac{8}{5},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } |AB| &= \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{\left(\frac{8\sqrt{3}}{5}\right)^2 - 4 \times \frac{8}{5}} = \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

即弦 AB 的长为 $\frac{8}{5}$.]

3. $\sqrt{3}-1$ [由题意知直线 l 的斜率存在, 设直线 l 的方程为 $y=kx+1$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{2} = 1, \\ y = kx + 1, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 并整理得 } (2-k^2) \cdot x^2 - 2kx - 3 = 0. \text{ 显}$$

然 $2-k^2 \neq 0$, 设 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, 由 $\Delta = 24 - 8k^2 > 0$, 得 $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{2k}{2-k^2} = 1$, 解得 $k = -1 \pm \sqrt{3}$, 所以 $k = -1 + \sqrt{3}$.]

* 第 67 课时 最值(范围)、证明问题(进阶课)

类型一

典例 1 解: (1) 由题意知 $\frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 所以 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{8}{9}$,

设 $a^2 = 9t, t > 0$, 则 $c^2 = 8t$, 所以 $b^2 = t$.

$$\text{又 } |AB|^2 = a^2 + b^2 = 10t = 10,$$

所以 $t = 1$, 所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$.

(2) ① 设 $R(x, y)$, 由(1)知 $A(0, -1)$,

又 $P(m, n), m \neq 0$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR} = (m, n+1) \cdot (x, y+1) = mx + (n+1)(y+1) = |\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AR}| \cdot \cos 0 = 3. \quad \text{①}$$

$$\text{由 } k_{AP} = k_{AR}, \text{ 得 } \frac{n+1}{m} = \frac{y+1}{x}, \quad \text{②}$$

$$\text{由 ①②, 得 } x = \frac{3m}{m^2 + (n+1)^2}, y = \frac{n+2-m^2-n^2}{m^2 + (n+1)^2},$$

$$\text{故 } R \text{ 的坐标为 } \left(\frac{3m}{m^2 + (n+1)^2}, \frac{n+2-m^2-n^2}{m^2 + (n+1)^2} \right).$$

$$\text{② 由 ① 得 } k_{OR} = \frac{n+2-m^2-n^2}{3m} = 3k_{OP} = \frac{3n}{m}, \text{ 整理得 } m^2 + n^2 + 8n - 2 = 0,$$

$$\text{即 } m^2 + (n+4)^2 = 18.$$

所以点 P 的轨迹方程为 $m^2 + (n+4)^2 = 18 (m \neq 0)$.

由题设 $Q(3\cos \theta, \sin \theta), K(0, -4)$,

$$\text{则 } |KQ|^2 = (3\cos \theta)^2 + (\sin \theta + 4)^2 = -8\sin^2 \theta + 8\sin \theta + 25,$$

$$\text{设 } s = \sin \theta, \text{ 则 } |KQ|^2 = -8s^2 + 8s + 25 = -8\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + 27 \quad (-1 \leq s \leq 1),$$

当 $s = \sin \theta = \frac{1}{2}$ 时, $|KQ|$ 取得最大值, 且 $|KQ|_{\max} = 3\sqrt{3}$,

故 $|PQ|$ 的最大值为 $|KQ|_{\max} + 3\sqrt{2} = 3(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

多维变迁

解: (1) 因为点 $M(2\sqrt{3}, 3)$ 在抛物线上, 所以 $(2\sqrt{3})^2 = 2p \times 3$, 解得 $p = 2$, 所以抛物线 C 的标准方程为 $x^2 = 4y$.

(2) 抛物线 C 的焦点为 $F(0, 1)$, 且“点 $F(0, 1)$ 在以线段 AB 为直径的圆内”等价于“ $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} < 0$ ”,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } \overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} = (x_1, y_1 - 1) \cdot (x_2, y_2 - 1) = x_1 x_2 + y_1 y_2 - (y_1 + y_2) + 1, \quad \text{①}$$

过点 $D(0, t)$ 且斜率为 1 的直线方程为 $y = x + t$, 于是有 $y_1 = x_1 + t$ 和 $y_2 = x_2 + t$, 将其代入 ① 式, 得

$$\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} = 2x_1 x_2 +$$

$$(t-1)(x_1 + x_2) + t^2 - 2t + 1, \quad \text{②}$$

$$\text{联立 } \begin{cases} x^2 = 4y, \\ y = x + t, \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 整理得}$$

$x^2 - 4x - 4t = 0$, 于是有 $\Delta = 16 + 16t > 0$, 即 $t > -1$ 且

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 x_2 = -4t, \end{cases} \quad \text{③}$$

再将 ③ 代入 ②, 整理得

$$\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} = -8t + 4(t-1) + t^2 - 2t + 1 = t^2 - 6t - 3,$$

要使 $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} < 0$ 成立, 只要 $t^2 - 6t - 3 = (t-3)^2 - 12 < 0$ 在 $t \in (-1, +\infty)$ 时成立即可, 解不等式 $(t-3)^2 - 12 < 0$ 得 $t \in (3-2\sqrt{3}, 3+2\sqrt{3})$, 符合题意,

综上, 实数 t 的取值范围为 $(3-2\sqrt{3}, 3+2\sqrt{3})$.

类型二

典例 2 解: (1) $\because$ 直线 PF 的斜率为 $\frac{1}{3}$,

$$\therefore |PA| = \frac{1}{3} |FA|,$$

$$\therefore S_{\triangle PFA} = \frac{1}{2} \times |PA| \times |FA| = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times (a+c)^2 = \frac{3}{2}, \text{ 得}$$

$$a+c=3,$$

$$\text{又 } \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \therefore a=2, c=1, \text{ 则 } b=\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{椭圆的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 证明: 由(1)知 $F(-1, 0), P(2, 1)$, 则直线 PF 的方程为

$$y = \frac{1}{3}(x+1),$$

易知直线 PB 的斜率存在, 设 PB 的方程为 $y-1=k(x-2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y-1=k(x-2), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \text{ 得 } (4k^2+3)x^2 - 8k(2k-1)x + 8(2k^2 -$$

$$2k-1) = 0,$$

$\because PB$ 与椭圆仅有一个交点,

$$\therefore \Delta = 64k^2(2k-1)^2 - 32(4k^2+3)(2k^2-2k-1) = 0, \text{ 解}$$

$$\text{得 } k = -\frac{1}{2},$$

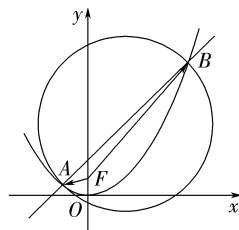
$$\therefore x_B = -\frac{-8k(2k-1)}{2(4k^2+3)} = 1, \text{ 则 } y_B = \frac{3}{2},$$

$$\therefore B\left(1, \frac{3}{2}\right),$$

$$\therefore \text{直线 } BF \text{ 的斜率为 } \frac{\frac{3}{2}-0}{1-(-1)} = \frac{3}{4}.$$

$$\therefore \tan 2\angle PFA = \frac{2 \times \frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4},$$

$\therefore \angle BFA = 2\angle PFA$, 即 PF 平分 $\angle AFB$.



类型一

典例1 解: (1) 由题意得, $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 点 P 的横坐标为 1, 且

$$|PF|=2, \text{ 则 } 2=1+\frac{p}{2}, \therefore p=2,$$

$\therefore$ 抛物线 E 的标准方程为 $y^2=4x$.

(2) **证明:** 当直线 AB 的斜率不存在时,

$$\text{设 } A\left(\frac{t^2}{4}, t\right), B\left(\frac{t^2}{4}, -t\right) (t>0),$$

因为直线 OA, OB 的斜率之积为 -4 ,

$$\text{则 } \frac{t}{\frac{t^2}{4}} \times \frac{-t}{\frac{t^2}{4}} = -4, \text{ 化简得 } t^2=4.$$

所以 $A(1, t), B(1, -t)$, 此时直线 AB 的方程为 $x=1$.

当直线 AB 的斜率存在时, 设其方程为 $y=kx+b, A(x_1, y_1),$

$$B(x_2, y_2),$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y^2=4x, \\ y=kx+b, \end{cases} \text{ 化简得 } ky^2-4y+4b=0, \text{ 需满足 } \Delta=16(1-kb)>0,$$

$$\text{根据根与系数的关系得 } y_1y_2=\frac{4b}{k},$$

因为直线 OA, OB 的斜率之积为 -4 ,

$$\text{所以 } \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -4, \text{ 即 } y_1y_2+4x_1x_2=0, \text{ 即 } y_1y_2+4 \cdot \frac{y_1^2}{4} \cdot$$

$$\frac{y_2^2}{4}=0, \text{ 解得 } y_1y_2=0 (\text{舍去}) \text{ 或 } y_1y_2=-4,$$

$$\text{所以 } y_1y_2=\frac{4b}{k}=-4, \text{ 即 } b=-k, \text{ 满足 } \Delta=16(1-kb)>0, \text{ 所}$$

$$\text{以 } y=kx-k,$$

$$\text{即 } y=k(x-1).$$

综上所述, 直线 AB 过定点 $(1, 0)$.

多维变迁

(1) **解:** 因为 $|MF|=2$,

$$\text{由抛物线的定义得 } t+\frac{p}{2}=2,$$

$$\text{又 } 2pt=4, \text{ 所以 } t=\frac{2}{p},$$

$$\text{因此 } \frac{2}{p}+\frac{p}{2}=2, \text{ 即 } p^2-4p+4=0, \text{ 解得 } p=2,$$

所以抛物线的方程为 $y^2=4x$.

(2) **证明:** 由(1)知点 M 的坐标为 $(1, 2)$,

因为 $\angle AMB$ 的平分线与 x 轴垂直,

所以可知直线 MA, MB 的倾斜角互补,

即 MA, MB 的斜率互为相反数,

$$k_{MA}=\frac{y_1-2}{x_1-1}=\frac{y_1-2}{\frac{y_1^2}{4}-1}=\frac{4}{y_1+2},$$

$$\text{同理 } k_{MB}=\frac{4}{y_2+2},$$

$$\text{则 } k_{MA}+k_{MB}=\frac{4}{y_1+2}+\frac{4}{y_2+2}=0,$$

$$\text{化简得 } y_1+y_2=-4,$$

$$\text{则 } y_N=\frac{y_1+y_2}{2}=-2,$$

所以点 N 在定直线 $y=-2$ 上.

类型二

典例2 解: 设 $Q(x_0, y_0)$,

由点 Q 在椭圆 E 上(且在第一象限)可知 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1 (x_0>0,$

$y_0>0)$, 因为 $D(2, 0)$,

所以直线 $l: x=2$,

由已知得直线 AQ, BQ 的斜率存在,

$$\text{则直线 } AQ: y=\frac{y_0-1}{x_0}x+1,$$

$$\text{令 } x=2 \text{ 得 } y_N=\frac{2(y_0-1)}{x_0}+1,$$

$$\text{直线 } BQ: y=\frac{y_0+1}{x_0}x-1,$$

$$\text{令 } y=0 \text{ 得 } x_M=\frac{x_0}{y_0+1}.$$

因为点 Q 在第一象限,

$$\text{所以 } |DN|=\frac{2(y_0-1)}{x_0}+1, |OM|=\frac{x_0}{y_0+1},$$

$$\text{则 } |OM|+2|DN|=\frac{x_0}{y_0+1}+\frac{4(y_0-1)}{x_0}+2=\frac{x_0^2+4y_0^2-4}{x_0(y_0+1)}+2,$$

$$\text{又 } \frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1, \text{ 即 } x_0^2+4y_0^2-4=0,$$

$$\text{所以 } |OM|+2|DN|=2.$$

所以 $|OM|+2|DN|$ 为定值, 该定值为 2.

规范答题五

$$\text{典例 } (1) 2a \quad 2\sqrt{2} \quad (2) \frac{8k}{1+2k^2} \quad \frac{4}{1+2k^2} \quad \frac{3}{2} \quad \sqrt{5}$$

第九章 统计与成对数据的统计分析

第69课时 随机抽样、统计图表

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点1 总体 个体 样本 样本容量

知识点2 (1) 逐个不放回 (2) 相等 (3) 随机数法

知识点3 (1) 简单随机 合在一起 层

$$(2) \frac{n_1}{n_1+n_2} \bar{x}_1 + \frac{n_2}{n_1+n_2} \bar{x}_2 = \frac{n_1}{n_1+n_2} [s_1^2 + (\bar{x}_1 - \bar{x})^2] + \frac{n_2}{n_1+n_2} [s_2^2 + (\bar{x}_2 - \bar{x})^2]$$

链教材·夯基固本

1. **B** [对于 A, 总体指的是该市参加升学考试的全体学生的数学成绩, 故 A 错误; 对于 B, 样本是指 1 000 名学生的数学成绩, 故 B 正确; 对于 C, 样本量是 1 000, 故 C 错误; 对于 D, 个体指的是每名学生的数学成绩, 故 D 错误. 故选 B.]

2. **解:** (1) 该抽样过程中编号为 1~75 每个被抽中的概率相等, 故该过程是简单随机抽样.

(2) 该过程中, 编号为 1~24, 75, 25~74 被抽中的可能性不同, 故不是简单随机抽样.

(3) 该过程中, 每个编号被抽中的可能性相同, 故该过程是简单随机抽样.

3. 120, 110, 90 [小学生、初中生、高中生人数的比例为 12 000 : 11 000 : 9 000 = 12 : 11 : 9,

$$\text{故抽取人数分别为 } 320 \times \frac{12}{12+11+9} = 120, 320 \times \frac{11}{12+11+9} =$$

$$110, 320 \times \frac{9}{12+11+9} = 90.]$$

4. **CD** [加班费与包装费同为8%,故相同;
工人支出包括基本工资、加班费和奖金,占比为 $18\%+8\%+11\%=37\%$,不到40%,故选CD.]
5. (1)0.004 4 (2)70 [(1)由 $(0.002\ 4+0.003\ 6+0.006\ 0+x+0.002\ 4+0.001\ 2)\times 50=1$,
解得 $x=0.004\ 4$.
(2)用电量落在区间 $[100,250)$ 内的频率为
 $(0.003\ 6+0.006\ 0+0.004\ 4)\times 50=0.7$,
故在被调查的用户中,用电量落在区间 $[100,250)$ 内的户数为
 $100\times 0.7=70$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1)**C** (2)**D** (3)**ABD** [(1)找到第1行第6列的数开始向右读,
符合条件的第一个数是394,第二个数是435,第三个数是482,第四个数是173,故选C.

(2) $m+n$ 名学生的平均成绩为74分,其中 m 名初中生的平均成绩为72分, n 名高中生的平均成绩为 x 分,

$$\begin{cases} \frac{m}{n} = \frac{600}{200}, \\ \frac{72m+nx}{m+n} = 74, \end{cases} \quad \text{解得 } x=80.$$

故选D.

(3)由题意得,抽取的样本里男生有 $\frac{3}{3+2}\times 100=60$ (人),A正确;

每一位学生被抽中的可能性为 $\frac{100}{1\ 500}=\frac{1}{15}$,B正确;

该学校学生身高的平均数 $\bar{w}=\frac{3\times 170+2\times 160}{5}=166$,C错误;

该学校学生身高的方差 $s^2=\frac{3}{5}\times [12+(170-166)^2]+\frac{2}{5}\times [38+(160-166)^2]=46.4$,D正确.

故选ABD.]

多维变迁

1. **B** [因为高一年级有男生160人,女生120人,抽取男生16人,

所以抽取比例为 $\frac{16}{160}=\frac{1}{10}$,

所以抽取人数为 $(160+120)\times \frac{1}{10}=28$.

故选B.]

2. 166 45 [对题中数据分析可得,

项目	人数	平均数	方差
男生	30	170	15
女生	20	160	30

则估计该校高一年级全体学生身高数据的平均数 $\bar{x}=\frac{30}{50}\times$

$170+\frac{20}{50}\times 160=166$,

方差 $s^2=\frac{30}{50}\times [(170-166)^2+15]+\frac{20}{50}\times [(160-166)^2+30]=45$.]

考点二

典例 2 (1)**ACD** (2)**D** [(1)由扇形图可知青年人占比45%,是老年人占比20%的2倍多,故A正确;
其中满意的青年人占总人数的 $0.45\times 0.4\times 100\%=18\%$,满意的中年人占总人数的 $(1-0.45-0.2)\times 0.7\times 100\%=24.5\%$,满意的老年人占总人数的 $0.2\times 0.8\times 100\%=16\%$,故B错误,C正确;
总满意率为 $18\%+24.5\%+16\%=58.5\%>50\%$,故D正确.故选ACD.

(2)对于A,由游客人数折线图可知,乙景点的7,8,9月份的总游客人数为 $33+44+53=130$,

甲景点7,8,9月份的总游客人数为 $30+52+47=129$, $129<130$,A正确;

对于B,根据乙景点的游客人数折线图可知,乙景点每月的游客人数逐月增多,所以总体呈上升趋势,B正确;

对于C,甲景点游客人数的平均数为 $\frac{1}{6}(14+21+26+30+52+47)\approx 31.7$, $31.7\in [31,32]$,C正确;

对于D,由游客人数折线图可知,乙景点4月到9月中游客量的最高峰期在9月,甲景点4月到9月中游客量的最高峰期在8月,D错误.

故选D.]

多维变迁

ABD [对于A,由题图可知,2020—2024年快递业务量逐年上升,故A正确;

对于B,2020—2024年快递业务量的极差为 $132.0-63.5=68.5$ (亿件),故B正确;

对于C,增长率从小到大排序,即2.1%,19.4%,25.3%,29.9%,31.3%,则中位数为25.3%,故C错误;

对于D,由 $\frac{1}{5}\times (2.1\%+19.4\%+25.3\%+29.9\%+31.3\%)=21.6\%$,故D正确.故选ABD.]

考点三

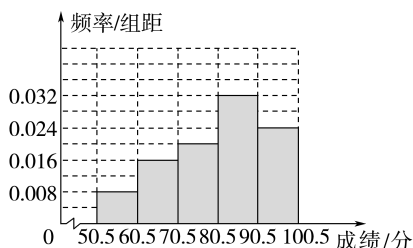
典例 3 解:(1)因为 $50\times 0.16=8$, $\frac{10}{50}=0.2$, $50-(4+8+10+$

$16)=12$, $\frac{12}{50}=0.24$,且所有频率和为1,

据此补全频率分布表,如表所示.

分组	频数	频率
50.5~60.5	4	0.08
60.5~70.5	8	0.16
70.5~80.5	10	0.2
80.5~90.5	16	0.32
90.5~100.5	12	0.24
合计	50	1

(2)根据(1)中数据可得频率分布直方图,如图所示.



(3)由题意可知,成绩在75.5~85.5频率为 $\frac{0.2+0.32}{2}=0.26$,

估计获得二等奖的学生人数为 $900 \times 0.26 = 234$.

多维变迁

1.300 [由频率分布直方图可知,在区间 $[50,75)$ 内的频率为 $0.004 \times 25 = 0.1$,所以 $n = \frac{30}{0.1} = 300$.]

2.5 [根据频率分布直方图可得 $(a+0.020+0.030+0.025+0.020) \times 10 = 1$,

则 $a = 0.005$,

所以成绩在 $[50,60)$ 的频率为 $0.005 \times 10 = 0.05$,

则成绩在 $[50,60)$ 之间的学生人数为 $100 \times 0.05 = 5$.]

随堂·对点检测

1.A [由题意知,依次选出的编号为14,05,11,09,所以第4个编号为09.

故选A.]

2.B [对于选项A,由条形图可知丁险种参保比例为 $1-0.3-0.1-0.04-0.02=0.54 > 0.5$,超过五成,故A正确;

对于选项B,41岁以上参保人数占比为 $35\%+10\%=45\%$,故B错误;

对于选项C,令样本容量为 m ,由扇形图与折线图可知18~29周岁人群参保人数占比15%,人均参保费用在(3 000,4 000)内,总参保费用小于 $0.15m \times 4\ 000 = 600m$,而54周岁及以上人群参保比例虽然为10%,但人均参保费用为6 000元,总参保费用约为 $0.1m \times 6\ 000 = 600m$,显然其他年龄段总参保费用也大于 $600m$,所以18~29周岁人群参保的总费用最少,故C正确;

对于选项D,人均参保费用约 $15\% \times 4\ 000 + 40\% \times 4\ 000 + 35\% \times 5\ 500 + 10\% \times 6\ 000 = 4\ 725$,故D正确.故选B.]

3.BD [$\because (a+c+0.025+0.035+2b) \times 10 = 1$,又 $a+c=2b$,

$\therefore 4b+0.06=0.1$, $\therefore b=0.01$, $\therefore$ B正确;

又成绩在 $[90,100]$ 内的有5人,

$\therefore n = \frac{5}{0.01 \times 10} = 50$, $\therefore$ D正确;

$\therefore$ 无法分别求出 a, c , $\therefore$ A,C错误.

故选BD.]

4.16 12 [田径队运动员的总人数是 $56+42=98$,要得到容量为28的样本,占总体的比例为 $\frac{2}{7}$,于是应该在男运动员中随机

抽取 $56 \times \frac{2}{7} = 16$ (名),在女运动员中随机抽取 $28-16=12$ (名).]

第70课时 用样本估计总体

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点1 (1)小于或等于 $(100-p)\%$

(2) j 平均数 (3)第一 下 第三 上

知识点2 (1)最多 (2)中间 平均数

(3) $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 平均数

中位数 众数

知识点3 (1) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

链教材·夯基固本

1.B [因为7次训练的成绩从小到大排列为85,86,87,88,88,89,90,且 $7 \times 80\% = 5.6$,所以第80百分位数为从小到大排列的数据中的第6个数据,即89.故选B.]

2.D [由样本的数字特征与总体的数字特征的关系,可知全市居民用户日电量的平均数约为 $5.5 \text{ kW} \cdot \text{h}$.]

3.C [方差刻画一组数据的集中程度或稳定性.故选C.]

4.乙 [甲机床的平均数 $\bar{x}_甲 = \frac{0+1+0+\cdots+4}{10} = 1.5$,

$$\text{标准差 } s_甲 = \sqrt{\frac{1}{10}[(0-1.5)^2+(1-1.5)^2+\cdots+(4-1.5)^2]}$$

$$\approx 1.28; \text{乙机床的平均数 } \bar{x}_乙 = \frac{2+3+\cdots+1}{10} = 1.2, \text{标准差 } s_乙 =$$

$$\sqrt{\frac{1}{10}[(2-1.2)^2+(3-1.2)^2+\cdots+(1-1.2)^2]} \approx 0.87.$$

比较发现乙机床的平均数较小而且标准差也较小,说明乙机床生产的次品数比甲机床生产的次品数少,而且更为稳定,所以乙机床的性能更好.]

5.2 [设数据 $x_1, x_2, \cdots, x_{10}$ 的方差为 s^2 ,则数据 $3x_1-2, 3x_2-2, \cdots, 3x_{10}-2$ 的方差为 $9s^2$,由题可知 $9s^2=18$,解得 $s^2=2$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例1 (1)C (2)B [(1)已知数据16,21,18,28,14,20,22,24,

则从小到大排列为14,16,18,20,21,22,24,28,

又 $8 \times 75\% = 6$,所以第75百分位数为 $\frac{22+24}{2} = 23$.

故选C.

(2)由于 $2 \times (0.05+0.1) = 0.3$, $2 \times (0.05+0.1+0.2) = 0.7$,

所以样本数据的第60百分位数的估计值是 $6 + \frac{0.6-0.3}{0.2 \times 2} \times 2 = 7.5$.故选B.]

多维变迁

1.C [已知数据6,9,5,8,4, m 的75%分位数是8,

由题可知数据的总个数为 $6, 6 \times 75\% = 4.5$,

所以该组数据的75%分位数是这组数据从小到大排列后的第5个数据,

则 $m \leq 8$,即实数 m 的取值范围是 $(-\infty, 8]$.

故选C.]

2.D [根据题意,设该组数据的第60百分位数为 x ,

第一组的频率为 $0.010 \times 10 = 0.1$,

第二组的频率为 $0.015 \times 10 = 0.15$,

第三组的频率为 $0.020 \times 10 = 0.2$,

第四组的频率为 $0.030 \times 10 = 0.3$,

则 x 在第四组,则 $0.1+0.15+0.2+(x-80) \times 0.03 = 0.6$,解得 $x=85$.

故估计学生对食堂用餐质量的评分的第60百分位数为85.

故选D.]

考点二

考向1 典例2 ABD [对于A,平均数为 $\frac{1}{8}(26+29+27+$

$29+26+29+31+33) = 28.75$,故A正确;

对于B,29在该组数据中出现的次数最多,故众数为29,故B正确;

对于C,中位数为该组数据从小到大排列后的第四个数与第五

个数的平均数,即为 $\frac{29+29}{2}=29$,故 C 错误;

对于 D,连续 8 天的最高气温从小到大排列为 26,26,27,29,29,29,31,33,

因为 $8 \times 0.8 = 6.4$,所以第 80 百分位数为从小到大排列后的第 7 个数,即为 31,故 D 正确.

故选 ABD.]

多维变迁

1. A [因为这组数据从小到大排列为 2,4,6,a,13,14,

所以中位数为 $\frac{6+a}{2}$,

由 $6 \times 60\% = 3.6$,得这组数据的第 60 百分位数为 a,

所以 $\frac{6+a}{2} = a$,解得 $a = 6$.

所以这组数据的平均数为 $\frac{2+4+6+6+13+14}{6} = 7.5$.

故选 A.]

2. D [$\because$ 数据 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 的平均数为 5,

数据 $y_1, y_2, \dots, y_8$ 的平均数为 6,

$\therefore$ 由加权平均数公式得数据 $x_1, x_2, \dots, x_{10}, y_1, y_2, \dots, y_8$ 的

平均数为 $\bar{z} = \frac{1}{10+8}(10 \times 5 + 8 \times 6) = \frac{49}{9}$.

故选 D.]

考向 2 典例 3 解:(1)因为第三、四、五组的频率之和为 0.7,

所以 $(0.045 + 0.020 + a) \times 10 = 0.7$,解得 $a = 0.005$,

所以前两组的频率之和为 $1 - 0.7 = 0.3$,即 $(a + b) \times 10 = 0.3$,所以 $b = 0.025$.

(2)由样本的频率分布直方图,

得众数为 $\frac{65+75}{2} = 70$,

平均数为 $50 \times 0.05 + 60 \times 0.25 + 70 \times 0.45 + 80 \times 0.2 + 90 \times 0.05 = 69.5$,

前两组频率和: $0.05 + 0.25 = 0.3 < 0.5$,前三组频率和: $0.3 + 0.45 = 0.75 > 0.5$,

因此,中位数在第三组 $[65, 75)$ 内,设中位数为 x,

则 $0.3 + 0.045 \times (x - 65) = 0.5$,解得 $x \approx 69.4$.

则这 100 名候选者的众数、平均数和中位数分别约为 70 分、69.5 分和 69.4 分.

多维变迁

ABC [A 选项,由频率分布直方图知 $[70, 80)$ 对应矩形最高,即频率最大,故成绩在 $[70, 80)$ 内的考生人数最多,A 选项正确;

B 选项,由 $0.01 \times 10 = 0.1 < 0.2 < (0.01 + 0.015) \times 10 = 0.25$,故成绩的第 80 百分位数在区间 $[80, 90)$ 内,设为 x,则 $0.1 + (90 - x) \times 0.015 = 0.2$,可得 $x \approx 83.3$ 分,B 选项正确;

C 选项,由题图知,平均分为 $0.1 \times 45 + 0.15 \times 55 + 0.2 \times 65 + 0.3 \times 75 + 0.15 \times 85 + 0.1 \times 95 = 70.5$,C 选项正确;

D 选项,由 $(0.01 + 0.015 + 0.02) \times 10 = 0.45 < 0.5 < (0.01 + 0.015 + 0.02 + 0.03) \times 10 = 0.75$,

所以中位数位于区间 $[70, 80)$,设为 y,则 $0.5 - 0.45 = (y - 70) \times 0.03$,可得 $y \approx 71.7$ 分,D 选项错误.

故选 ABC.]

考点三

典例 4 解:(1)由题意,求出 z_i 的值如表所示,

试验 序号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_i	9	6	8	-8	15	11	19	18	20	12

则 $\bar{z} = \frac{1}{10} \times (9 + 6 + 8 - 8 + 15 + 11 + 19 + 18 + 20 + 12) = 11$,

$s^2 = \frac{1}{10} \times [(9-11)^2 + (6-11)^2 + (8-11)^2 + (-8-11)^2 + (15-11)^2 + (11-11)^2 + (19-11)^2 + (18-11)^2 + (20-11)^2 + (12-11)^2] = 61$.

(2)因为 $2\sqrt{\frac{s^2}{10}} = 2\sqrt{6.1} = \sqrt{24.4}$, $\bar{z} = 11 = \sqrt{121} > \sqrt{24.4}$,

所以可认为甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率有显著提高.

多维变迁

1. C [因为样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的方差为 4,

所以数据 $3x_1 + 1, 3x_2 + 1, \dots, 3x_n + 1$ 的方差为 $3^2 \times 4 = 36$,

故标准差为 $\sqrt{36} = 6$.

故选 C.]

2. D [一组样本数据 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$ ($x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{10}$)的平均数为 2,

则 $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{10} = 2 \times 10 = 20$,

则新样本数据的平均数为

$\frac{2 \times 2 + x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{10}}{12} = \frac{4 + 20}{12} = 2$,

所以新样本数据的方差为 $\frac{1}{12} [(2-2)^2 + \dots + (x_{10}-2)^2] =$

$\frac{10 \times 8}{12} = \frac{20}{3}$.

故选 D.]

随堂·对点检测

1. B [平均数反映数据的集中趋势,平均数的大小并不能说明该组数据极差的大小,所以 A 错误;平均数反映数据的集中趋势,方差反映数据波动的大小,所以 B 正确;一组数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$,其平均数为 $\bar{x}$,则其方差 $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$,所以 C 错误;方差大说明射击水平不稳定,所以 D 错误.故选 B.]

2. A [将 8 名学生的成绩从低到高依次排列为 65,70,75,80,85,92,95,95,因为 $8 \times 75\% = 6$,所以这组数据的 75% 分位数为第 6 个数和第 7 个数的平均数,即为 $\frac{92+95}{2} = 93.5$.故选 A.]

3. BCD [由题图可知,成绩在区间 $[80, 90)$ 内的频率为 $0.030 \times 10 = 0.3$,抽取学生总数为 200,则成绩在该区间的学生人数为 $0.3 \times 200 = 60$,所以选项 A 错误;由 $(0.005 + 0.010 + 0.015 + 0.030 + x) \times 10 = 1$,得 $x = 0.040$,所以选项 B 正确;

因为众数估计为 $\frac{90+100}{2} = 95$,所以选项 C 正确;

设 70% 分位数为 m,因为成绩在 $[50, 90)$ 的频率为 $(0.005 + 0.010 + 0.015 + 0.030) \times 10 = 0.6$,而成绩在 $[50, 100]$ 的频率为 1,所以 m 在 $[90, 100]$ 内,

根据分位数计算公式 $0.6 + (m - 90) \times 0.04 = 0.7$, 解得 $m = 92.5$,

所以估计全校学生成绩的 70% 分位数为 92.5, 所以选项 D 正确.

故选 BCD.]

4.3 [∵ 数据 1, 2, a , $a+1$ 是按从小到大的顺序排列的, 它的中位数是 3,

$$\therefore \frac{1}{2}(2+a)=3, \text{ 解得 } a=4,$$

$$\therefore \text{这组数据的平均数为 } \frac{1}{4}(1+2+4+4+1)=3.]$$

第 71 课时 一元线性回归模型及其应用

理法先行 · 题练固本

梳必备 · 破题有方

知识点 1 (1) 正 负 增加 减小 (2) 线性 非线性 一条 直线 线性

$$\text{知识点 2 (2)} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2}} \quad (3) [-1, 1] \quad \text{正 负 } 1 \quad 0$$

知识点 3 (1) 因变量 自变量 $a \quad b \quad bx+a \quad 0$

$$(2) \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \bar{y} - b\bar{x}$$

知识点 4 (1) 窄 (2) $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ 小

链教材 · 夯基固本

1. A [因为 $-0.1 < 0$, 所以 x 与 y 负相关,

又因为变量 y 与 z 正相关, 所以 x 与 z 负相关. 故选 A.]

2. D [观察题干散点图可知, 只有 D 选项的散点图表示的是变量 x 与 y 之间具有负的线性相关关系. 故选 D.]

3. B [根据题意得 $\bar{x} = \frac{1}{4} \times (1+2+4+1) = 1.5$, $\bar{y} = \frac{1}{4} \times (2+$

$$0-4+6) = 1, \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 22, \sum_{i=1}^4 y_i^2 = 56, \sum_{i=1}^4 x_i y_i = -20, \text{ 样本相关}$$

$$\text{系数 } r = \frac{-20-4 \times 1.5 \times 1}{\sqrt{(22-4 \times 1.5^2)(56-4 \times 1^2)}} = -1.$$

故选 B.]

4. 168 [当 $x = 175$ 时, $\hat{y} = 0.81x + 25.82 = 0.81 \times 175 + 25.82 \approx 168.$]

5. C [由一元线性回归模型 $\begin{cases} Y = bx + a + e, \\ E(e) = 0, D(e) = \sigma^2 \end{cases}$ 得到经验回归模

型 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$, 根据对应的残差图, 残差的均值 $E(e) = 0$ 可能成立, 但明显残差在 x 轴上方的数据更分散, $D(e) = \sigma^2$ 不满足一元线性回归模型, 正确的只有 C.]

6. A [计算得 $\bar{x} = \frac{1}{5}(-2-1+0+1+2) = 0$,

$$\bar{y} = \frac{1}{5}(5+4+2+2+1) = 2.8,$$

经验回归直线必过 $(0, 2.8)$, 故只有 A 项满足.]

考点深研 · 题型突破

考点一

典例 1 (1) A [对于 A, 因为利用最小二乘法求得相应的经验回归方程为 $\hat{y} = 0.750 1x + 0.610 5$,

$$\text{所以当 } x=7 \text{ 时, } \hat{y} = 0.750 1 \times 7 + 0.610 5 = 5.861 2 \text{ cm,}$$

即花萼长度为 7 cm 的该品种鸢尾花的花瓣长度的平均数为 5.861 2 cm, 故 A 正确;

对于 B, 由于 $r = 0.864 2$ 是全部数据的样本相关系数, 取出来一部分数据, 相关性可能变强, 可能变弱,

即取出的数据的样本相关系数不一定是 0.864 2, 故 B 错误;

对于 C, 因为计算得样本相关系数 $r = 0.864 2 > 0$,

所以花瓣长度和花萼长度正相关, 故 C 错误;

对于 D, 因为计算得样本相关系数 $r = 0.864 2$, 不是 1 或 -1,

所以花瓣长度和花萼长度不存在一次函数关系, 故 D 错误.

故选 A.]

$$(2) \text{解: ① 由表格数据可知, } \bar{x} = \frac{1}{5} \times (12+12.5+13+13.5+$$

$$14) = 13, \bar{y} = \frac{1}{5} \times (14+13+11+9+8) = 11.$$

$$\text{② 因为 } \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 1+0.25+0+0.25+1 = 2.5, \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 9+4+0+4+9 = 26,$$

$$\text{所以 } r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = -\frac{8}{\sqrt{65}} \approx -0.992.$$

多维变证

1. D [由散点图可知, x 与 y 负相关, v 与 u 正相关, 则 $b_1 < 0$, $b_2 > 0$, $0 < r_2 < 1$, 故 A, B 错误. 图形中点 (x, y) 比 (v, u) 更加集中在一条直线附近, 则 $|r_1| > |r_2|$. 又 $r_1 < 0$, $r_2 > 0$, 所以 $r_1 + r_2 < 0$, 故 C 错误, D 正确. 故选 D.]

2. -1 [因为所有样本点 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ 都在直线 $y = -3x + 1$ 上, 所以经验回归方程是 $\hat{y} = -3x + 1$, 可得这两个变量是负相关,

故这组样本数据的样本相关系数为负值, 且所有样本点 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ 都在直线上, 则有 $|r| = 1$, 所以样本相关系数 $r = -1$.]

考点二

考向 1 典例 2 解: (1) 根据题目表格里的数据可得 $\bar{x} = \frac{2+4+5+6+8}{5} = 5$, $\bar{y} = \frac{20+30+50+60+70}{5} = 46$.

$$\text{则 } \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (2-5) \times (20-46) + (4-5) \times (30-46) + (5-5) \times (50-46) + (6-5) \times (60-46) + (8-5) \times (70-46) = 180,$$

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = (2-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2 + (8-5)^2 = 20,$$

$$\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = (20-46)^2 + (30-46)^2 + (50-46)^2 + (60-46)^2 + (70-46)^2 = 1\ 720.$$

$$\text{所以 } r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{180}{\sqrt{20} \times \sqrt{1\ 720}} = \frac{18}{\sqrt{340}} \approx 0.97 > 0.75,$$

故广告支出与销售额具有较强的线性相关关系.

$$(2) \text{ 根据公式可得 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{180}{20} = 9,$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 46 - 9 \times 5 = 1,$$

所以 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y} = 9x + 1$.

所以当广告支出为 15 万元时, 预测销售额约为 $\hat{y} = 9 \times 15 + 1 = 136$ (万元).

多维变迁

C [由表格中的数据可得 $\bar{x} = 2.5, \bar{y} = 3.5$,

又经验回归直线过样本点中心 $(\bar{x}, \bar{y})$,

所以将 $(2.5, 3.5)$ 代入经验回归方程可得 $2.5k - 0.5 = 3.5$,

解得 $k = 1.6$,

故经验回归方程为 $\hat{y} = 1.6x - 0.5$,

当 $x = 5$ 时, $\hat{y} = 1.6 \times 5 - 0.5 = 7.5$, 即若变量 x 的值为 5, 则变量 y 的估计值为 7.5. 故选 C.]

考向 2 典例 3 解: (1) 根据散点图判断, 看出样本点分布在一条指数曲线的周围,

所以 $y = c_1 e^{c_2 x}$ 适宜作为 y 与 x 之间的经验回归方程模型.

(2) ① 对 $y = c_1 e^{c_2 x}$ 两边同时取对数, 得 $\ln y = \ln c_1 + c_2 x$,

令 $z = \ln y$, 则 $z = c_2 x + \ln c_1$,

$$\text{所以 } \hat{c}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})}{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{32}{384} = \frac{1}{12},$$

$$\text{所以 } \ln \hat{c}_1 = \bar{z} - \hat{c}_2 \bar{x} = \frac{44}{10} - \frac{1}{12} \times \frac{360}{10} = \frac{7}{5},$$

$$\text{所以 } \hat{z} = \frac{1}{12}x + \frac{7}{5},$$

$$\text{所以 } \hat{y} = e^{\hat{z}} = e^{\frac{1}{12}x + \frac{7}{5}}.$$

$$\text{② 因为 } \ln y = \frac{1}{12}x + \frac{7}{5},$$

$$\text{所以 } h(x) = x(\ln y - 2.4) + 170 = x\left(\frac{1}{12}x + \frac{7}{5} - 2.4\right) +$$

$$170 = \frac{1}{12}x^2 - x + 170,$$

所以当 $x = 6$ 时, 培养成本的预报值最小.

考点三

典例 4 (1) A [因为 $\sum_{i=1}^9 x_i = 33$,

$$\text{所以 } \bar{x} = \frac{33}{9} = \frac{11}{3},$$

因为经验回归直线 $\hat{y} = 2x - 1$ 过样本点中心 $(\bar{x}, \bar{y})$,

$$\text{所以 } \bar{y} = 2\bar{x} - 1 = 2 \times \frac{11}{3} - 1 = \frac{19}{3},$$

$$\text{增加数据 } (-3, 3) \text{ 后, } \bar{x}_1 = \frac{33-3}{10} = 3, \bar{y}_1 = \frac{9 \times \frac{19}{3} + 3}{10} = 6, \text{ 且经}$$

验回归方程为 $\hat{y} = 2.1x + \hat{b}$, 所以 $6 = 2.1 \times 3 + \hat{b} \Rightarrow \hat{b} = -0.3$,

$$\text{则 } \hat{y} = 2.1x - 0.3,$$

所以当 $x = 4$ 时, 有 $\hat{y} = 2.1 \times 4 - 0.3 = 8.1$,

故残差的绝对值为 $|8 - 8.1| = 0.1$.

故选 A.]

$$(2) \text{ 解: ① 由题意可知, } \bar{y} = \frac{1}{5}(120 + 106 + 96 + 90 + 95) = 101.4.$$

② 中国出生人口数低于 700 万, 即 $\hat{y} < 70$,

当 $x = 8$ 时, $\hat{y} = 120 - 6 \times 8 = 72 > 70$, 当 $x = 9$ 时, $\hat{y} = 120 - 6 \times 9 = 66 < 70$,

所以 $x = 9$ 对应 2028 年, 即预测从 2028 年开始中国出生人口数将低于 700 万.

③ 分别令 $x = 1, 2, 3, 4, 5$, 得 $\hat{y} = 114, 108, 102, 96, 90$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } R^2 &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^5 (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2} \\ &= 1 - \frac{6^2 + 2^2 + 6^2 + 6^2 + 5^2}{567} = 1 - \frac{137}{567} = \frac{430}{567} \\ &\approx 0.76, \end{aligned}$$

因为 $0.7 \leq R^2 < 0.85$, 所以这个模型的拟合效果一般.

随堂·点对检测

1. C [因为沿海地区气温和海水表层温度相关, 且样本相关系数为正数,

所以随着沿海地区气温由低到高, 海水表层温度呈上升趋势.

故选 C.]

$$2. A [\bar{x} = \frac{80+90+100+110+120}{5} = 100,$$

经验回归方程为 $\hat{y} = 1.45x + 7$,

$$\text{则 } \bar{y} = 1.45 \times 100 + 7 = 152,$$

$$\text{则 } a = 152 \times 5 - 120 - 140 - 165 - 180 = 155.$$

故选 A.]

3. A [由题意可知,

$$\bar{x} = \frac{20+23+25+27+30}{5} = 25,$$

$$\bar{z} = \frac{2+2.4+3+3+4.6}{5} = 3,$$

因为经验回归直线 $\hat{z} = 0.2x + \hat{a}$ 过样本点中心 $(25, 3)$, 所以 $3 = 0.2 \times 25 + \hat{a}$, 所以 $\hat{a} = -2$, 所以 $\hat{z} = 0.2x - 2$,

因为 $z = \ln y$, 所以 $\ln y = 0.2x - 2$,

$$\text{所以 } y = e^{0.2x-2} = \frac{e^{0.2x}}{e^2} = e^{-2} \cdot e^{0.2x},$$

所以 $c_1 = e^{-2}$. 故选 A.]

4. -5 [已知 $\bar{x} = 19, \bar{y} = 161$,

则样本点中心为 $(19, 161)$,

把 $(19, 161)$ 代入经验回归方程 $\hat{y} = 4x + \hat{a}$,

$$\text{得 } 161 = 4 \times 19 + \hat{a}, \text{ 解得 } \hat{a} = 85,$$

$$\text{所以 } \hat{y} = 4x + 85,$$

$$\text{当 } x = 25 \text{ 时, } \hat{y} = 4 \times 25 + 85 = 185,$$

所以该样本点处的残差为 $180 - 185 = -5$ (cm).]

第 72 课时 列联表与独立性检验

理法先行·题练固本

链教材·夯基固本

$$1. A [a = 35 - 8 = 27, b = a + 11 = 27 + 11 = 38.]$$

2. C [因为 $\chi^2 = 2.974 < \chi_{0.05}^2 = 3.841$, 所以变量 x 与 y 独立. 又 $2.706 < 2.974 < 3.841$, 所以这个结论犯错误的概率不超过 0.1. 故选 C.]

3. 0.1 [由题意得 $\chi^2 = \frac{89 \times (24 \times 26 - 8 \times 31)^2}{55 \times 34 \times 32 \times 57} \approx 3.689 > 2.706$, 所以在犯错误的概率不超过 0.1 的前提下可以认为性别与出生时间有关联.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1)D (2)ABD [(1)由题意知, $\frac{10+c}{105} = \frac{2}{7}$, 解得 $c = 20$, 由 $10+20+b+30=105$, 解得 $b=45$. 补全 2×2 列联表如下:

单位:分

班级	数学成绩		合计
	优秀	非优秀	
甲班	10	45	55
乙班	20	30	50
合计	30	75	105

甲班的优秀率为 $\frac{10}{55} = \frac{2}{11}$, 乙班的优秀率为 $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$, $\frac{2}{11} < \frac{2}{5}$, 所以成绩与班级有关, 选项 D 正确, 选项 A, B, C 错误. 故选 D.

(2)设等高堆积条形图对应 2×2 列联表如下:

单位:人

性别	年龄		合计
	35 岁及以上	35 岁以下	
男性	a	c	$a+c$
女性	b	d	$b+d$
合计	$a+b$	$c+d$	$a+b+c+d$

根据第 1 个等高堆积条形图可知, 35 岁及以上男性比 35 岁及以上女性多, 即 $a > b$,

35 岁以下男性比 35 岁以下女性多, 即 $c > d$,

根据第 2 个等高堆积条形图可知, 男性中 35 岁及以上的比 35 岁以下的多, 即 $a > c$,

女性中 35 岁及以上的比 35 岁以下的多, 即 $b > d$.

对于选项 A, 男性人数为 $a+c$, 女性人数为 $b+d$, 因为 $a > b, c > d$, 所以 $a+c > b+d$, 故 A 正确;

对于选项 B, 35 岁及以上女性人数为 b , 35 岁以下女性人数为 d , 因为 $b > d$, 故 B 正确;

对于选项 C, 35 岁以下男性人数为 c , 35 岁及以上女性人数为 b , 无法从图中直接判断 b 与 c 的大小关系, 故 C 不一定正确;

对于选项 D, 35 岁及以上的人数为 $a+b$, 35 岁以下的人数为 $c+d$, 因为 $a > c, b > d$,

所以 $a+b > c+d$, 故 D 正确.

故选 ABD.]

多维变迁

C [对于 A, $\left| \frac{a}{a+b} - \frac{c}{c+d} \right| = \left| \frac{2}{5} - \frac{3}{10} \right| = \frac{1}{10}$,

对于 B, $\left| \frac{a}{a+b} - \frac{c}{c+d} \right| = \left| \frac{1}{5} - \frac{2}{10} \right| = 0$,

对于 C, $\left| \frac{a}{a+b} - \frac{c}{c+d} \right| = \left| \frac{1}{5} - \frac{4}{5} \right| = \frac{3}{5}$,

对于 D, $\left| \frac{a}{a+b} - \frac{c}{c+d} \right| = \left| \frac{9}{10} - \frac{4}{5} \right| = \frac{1}{10}$,

由于 $\frac{3}{5} > \frac{1}{10} > 0$,

故选 C.]

考点二

典例 2 解:由题意可得 2×2 列联表如下.

单位:人

性别	满意度		合计
	满意	不满意	
男	100	50	150
女	20	30	50
合计	120	80	200

零假设为

H_0 :游客性别与满意度无关.

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{200 \times (100 \times 30 - 50 \times 20)^2}{150 \times 50 \times 120 \times 80} \approx 11.111 > 10.828,$$

所以依据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验, 推断 H_0 不成立, 即认为游客性别与满意度有关.

多维变迁

解:填写列联表如下:

单位:件

车间	产品		合计
	优级品	非优级品	
甲车间	26	24	50
乙车间	70	30	100
合计	96	54	150

零假设为

H_0 :甲、乙两车间产品的优级品率没有差异.

$$\chi^2 = \frac{150 \times (26 \times 30 - 70 \times 24)^2}{96 \times 54 \times 50 \times 100} = 4.6875.$$

因为 $\chi^2 = 4.6875 > 3.841 = x_{0.05}$, 所以依据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 推断 H_0 不成立, 即认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异, 此推断犯错误的概率不大于 0.05;

因为 $\chi^2 = 4.6875 < 6.635 = x_{0.01}$, 所以依据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验, 没有充分证据推断 H_0 不成立, 因此可以认为 H_0 成立, 即认为甲、乙两车间产品的优级品率没有差异.

随堂·点对检测

1. B [依题意, 要使性别与视力无关的可能性最大,

则 $240 \times 50 = 200m$,

解得 $m = 60$.

故选 B.]

2. AC [选项 A, 根据分层随机抽样的抽样比可知, 样本中男生和女生人数之比为 $60:40=3:2$,

用样本估计总体, 则全校男生和女生人数之比为 $3:2$, 故选项 A 正确;

选项 B, 样本中男生有 20% 手机成瘾, 女生有 40% 手机成瘾, 比例关系差异很大,

所以手机是否成瘾与学生的性别很大概率上有关系, 但不能说“一定与学生的性别有关系”, 故选项 B 错误;

选项 C, 由题意知, 男生中有 $60 \times 20\% = 12$ (人) 手机成瘾, 女生中有 $40 \times 40\% = 16$ (人) 手机成瘾,

即在抽取的 100 人样本中,有 28 人手机成瘾,

所以样本中学生手机成瘾的频率为 $\frac{28}{100} = \frac{7}{25}$,

用频率估计概率,从该校学生中随机抽取一名学生,该生手机成瘾的概率为 $\frac{7}{25}$,故选项 C 正确;

选项 D,由条件概率知,在样本中抽到一名手机成瘾的学生,该生是男生的概率为 $\frac{12}{12+16} = \frac{3}{7}$,

用样本估计总体,从该校学生中抽到一名手机成瘾的学生,该生是男生的概率也为 $\frac{3}{7}$,故选项 D 错误.

故选 AC.]

3. 14.7 [根据题意可知, $n=60, a=3, b=27, c=17, d=13$,

则 $\chi^2 = \frac{60 \times (3 \times 13 - 27 \times 17)^2}{30 \times 30 \times 20 \times 40} = 14.7$.]

第十章 计数原理、概率、随机变量及其分布

第 73 课时 两个计数原理、排列与组合

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1) $m+n$ (2) $m \times n$

知识点 2 一定的顺序

知识点 3 (3) $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ 1 $n!$

链教材·夯基固本

1. A [4 名学生中每人有 3 种可选方案,根据分步乘法计数原理,4 人共有 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$ (种)报名方式,故选 A.]

2. 40 [根据分类加法计数原理分两类:

第一类,末位为 1,有 1, 11, 21, ..., 191, 共 $\frac{191-1}{10} + 1 = 20$ (个);

第二类,末位为 6,有 6, 16, 26, ..., 196, 共 $\frac{196-6}{10} + 1 = 20$ (个),

综上,共 $20+20=40$ (个).]

3. 480 [先考虑该歌手的位置,不是第一个出场,也不是最后一个出场,则该歌手有 4 种位置可以选,共有 $C_4^1 = 4$ 种结果,剩下 5 人在 5 个不同位置,共有 $A_5^5 = 120$ (种)结果,

所以不同安排方法有 $C_4^1 A_5^5 = 4 \times 120 = 480$ (种).]

4. C [$A_{n+1}^n = (n+1)n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 = (n+1)!$,其他选项可化简为 $n!$. 故选 C.]

5. 330 [$C_7^3 + C_7^4 + C_8^5 + C_9^6 + C_{10}^7 = C_8^4 + C_8^5 + C_9^6 + C_{10}^7 = C_9^5 + C_9^6 + C_{10}^7 = C_{10}^6 + C_{10}^7 = C_{11}^7 = C_{11}^4 = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 330$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1) A (2) C (3) ABD [(1) 因为焦点在 x 轴上,所以 $m > n$,以 m 的值为标准分类,由分类加法计数原理,可分为四类,第一类:当 $m=5$ 时, n 有 4 种选择;第二类:当 $m=4$ 时, n 有 3 种选择;第三类:当 $m=3$ 时, n 有 2 种选择;第四类:当 $m=2$ 时, n 有 1 种选择. 故符合条件的椭圆共有 10 个. 故选 A.

(2) 第一步,给 A 区域涂色,有 4 种涂法;第二步,给 B 区域涂色,有 3 种涂法;第三步,给 C 区域涂色,有 2 种涂法;第四步,给 D 区域涂色,有 2 种涂法. 所以共有 $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$ (种)涂法. 故选 C.

(3) 对于 A, A, B, C 三名同学到甲、乙、丙、丁四个工厂进行社会实践,每名学生有 4 种选法,则三名学生有 $4 \times 4 \times 4 = 4^3$ (种)选法,故 A 正确;

对于 B,三人到四个工厂,有 $4^3 = 64$ (种)情况,其中甲工厂没有人去,即三人全部到乙、丙、丁三个工厂的情况有 $3^3 = 27$ (种),则甲工厂必须有同学去的安排方法有 $64 - 27 = 37$ (种),故 B 正确;

对于 C,若同学 A 必须去甲工厂,剩下 2 名同学安排到 4 个工厂即可,有 $4^2 = 16$ (种)安排方法,故 C 错误;

对于 D,若三名同学所选工厂各不相同,有 $4 \times 3 \times 2 = 24$ (种)安排方法,故 D 正确.

故选 ABD.]

多维变迁

解:(1) 分 3 步:

①先选百位数字有 5 种选法;

②再选十位数字有 5 种选法;

③最后选个位数字有 4 种选法.

由分步乘法计数原理知,所求三位数共有 $5 \times 5 \times 4 = 100$ (个).

(2) 分 3 步:

①先选个位数字,由于组成的三位数是奇数,因此有 3 种选法;

②再选百位数字有 4 种选法;

③最后选十位数字有 4 种选法.

由分步乘法计数原理知,所求三位数共有 $3 \times 4 \times 4 = 48$ (个).

(3) 分 3 类:

①一位数,共有 6 个;

②两位数,先选十位数字,有 5 种选法,再选个位数字,也有 5 种选法,共有 $5 \times 5 = 25$ (个);

③三位数,先选百位数字,有 5 种选法,再选十位数字,有 5 种选法,最后选个位数字,有 4 种选法,共有 $5 \times 5 \times 4 = 100$ (个). 因此,比 1 000 小的自然数共有 $6 + 25 + 100 = 131$ (个).

(4) 分 4 类:

①千位数字为 3 或 4 时,后面三个数位上可随便选择,此时共有 $2 \times 5 \times 4 \times 3 = 120$ (个);

②千位数字为 5,百位数字为 0, 1, 2, 3 之一时,共有 $4 \times 4 \times 3 = 48$ (个);

③千位数字为 5,百位数字为 4,十位数字为 0, 1 之一时,共有 $2 \times 3 = 6$ (个);

④5 420 也满足条件.

故所求四位数共有 $120 + 48 + 6 + 1 = 175$ (个).

考点二

典例 2 (1) ABC (2) 64 [(1) 对于 A,从 7 人中选 5 人排列,有 A_7^5 种排法,故 A 正确.

对于 B,分两步完成,先选 3 人站前排,有 A_7^3 种方法,余下 4 人站后排,有 A_4^4 种方法,共有 $A_7^3 \cdot A_4^4$ 种排法,故 B 正确.

对于 C,法一(特殊元素优先法):先排甲,有 5 种方法,其余 6 人有 A_6^6 种排列方法,共有 $5 \times A_6^6 = 3\ 600$ (种)排法,故 C 正确.

法二(特殊位置优先法):左、右两边位置可安排另 6 人中的两人,有 A_6^2 种排法,其他有 A_5^5 种排法,共有 $A_6^2 A_5^5 = 3\ 600$ (种)排法,故 C 正确.

对于 D,法一(特殊元素优先法):甲在最右边时,其他的可全排,有 A_6^6 种方法;甲不在最右边时,可从余下的 5 个位置任选一个,有 A_5^1 种,而乙可在除去最右边的位置后剩下的 5 个中任选一个,有 A_5^1 种,其余人全排列,有 A_5^5 种不同排法,共有 $A_6^6 + A_5^1 A_5^1 A_5^5 = 3\ 720$ (种)排法,故 D 错误.

法二(间接法):7人全排列,有 A_7^7 种方法,其中甲在最左边时,有 A_6^6 种方法,乙在最右边时,有 A_6^6 种方法,其中都包含了甲在最左边且乙在最右边的情形,有 A_5^5 种方法,故共有 $A_7^7 - 2A_6^6 + A_5^5 = 3\,720$ (种)排法,故D错误.

故选ABC.

(2)法一:由题意,可分三类:第一类,体育类选修课和艺术类选修课各选修1门,有 $C_4^1 C_4^1$ 种方案;第二类,在体育类选修课中选修1门,在艺术类选修课中选修2门,有 $C_4^1 C_4^2$ 种方案;第三类,在体育类选修课中选修2门,在艺术类选修课中选修1门,有 $C_4^2 C_4^1$ 种方案. 综上,不同的选课方案共有 $C_4^1 C_4^1 + C_4^1 C_4^2 + C_4^2 C_4^1 = 64$ (种).

法二:若学生从这8门课中选修2门课,则有 $C_8^2 - C_4^2 - C_4^2 = 16$ (种)选课方案;若学生从这8门课中选修3门课,则有 $C_8^3 - C_4^3 - C_4^3 = 48$ (种)选课方案. 综上,不同的选课方案共有 $16 + 48 = 64$ (种).]

考点三

考向1 典例3 解:(1)无序不均匀分组问题. 先选1本有 C_6^1 种选法;再从余下的5本中选2本有 C_5^2 种选法;最后余下3本全选有 C_3^3 种方法,故共有 $C_6^1 C_5^2 C_3^3 = 60$ (种)分配方法.

(2)有序不均匀分组问题. 由于甲、乙、丙是不同的三人,在第(1)问基础上,还应考虑再分配,共有 $C_6^1 C_5^2 C_3^3 A_3^3 = 360$ (种)分配方法.

(3)无序均匀分组问题. 先分三组,则应有 $C_6^2 C_4^2 C_2^2$ 种分法,但是这里面出现了重复,不妨记六本书为A,B,C,D,E,F,若第一组取了A,B,第二组取了C,D,第三组取了E,F,该方法记为(AB,CD,EF),则 $C_6^2 C_4^2 C_2^2$ 种分法中还有(AB,EF,CD), (CD,AB,EF), (CD,EF,AB), (EF,CD,AB), (EF,AB,CD),共 A_3^3 种情况,而这 A_3^3 种情况只能作为一种分法,故分配方法有 $\frac{C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{A_3^3} = 15$ (种).

(4)有序均匀分组问题. 在第(3)问的基础上,还应考虑再分配,共有 $15A_3^3 = 90$ (种)分配方法.

(5)无序部分均匀分配问题. 共有 $\frac{C_6^4 C_2^2 C_1^1}{A_2^2} = 15$ (种)分配方法.

(6)有序部分均匀分配问题. 在第(5)问的基础上,还应考虑再分配,共有 $15A_3^3 = 90$ (种)分配方法.

多维变迁

1. C [先从前排6人中抽出两名同学,有 C_6^2 种方法. 然后与前排4人排列,有 A_6^6 种排法. 因为其他同学的相对顺序不变,所以前排4人不再排,共有 $C_6^2 \cdot \frac{A_6^6}{A_4^4} = 450$ (种)调整方法.

故选C.]

2. B [问题可转化为将9个入团名额排成一列,再分成6组,每组至少一个,求其方法数. 事实上,只需在上述9个入团名额所产生的8个“空档”中选出5个“空档”插入挡板,即产生符合要求的方法,有 $C_8^5 = 56$ (种).

故选B.]

考向2 典例4 AB [已知将体重各不相同的A,B,C,D,E,F六只幼崽排成一排晒太阳,

对于A,6只幼崽全排列有 A_6^6 种方法,A,C,D全排列有 A_3^3 种方法,则A,C,D从左到右按照体重递增的顺序排列有 $\frac{A_6^6}{A_3^3} =$

120(种)方法,故A正确;

对于B,先排列除E与F外的4只幼崽,有 A_4^4 种方法,4只幼崽排列共有5个空,利用插空法将E和F插入5个空,有 A_5^2 种方法,则共有 $A_4^4 A_5^2 = 480$ (种)方法,故B正确;

对于C,A,B,C三只幼崽排在一起,且A只能在B与C的中间有2种排法,

将这3只幼崽看作一个整体,再与其余3只幼崽全排列,有 A_4^4 种方法,则共有 $2A_4^4 = 48$ (种)方法,故C错误;

对于D,6只幼崽全排列有 A_6^6 种方法,

当D在排头时,有 A_5^5 种方法,当F在排尾时,有 A_5^5 种方法,

当D在排头且F在排尾时,有 A_4^4 种方法,

则D不在排头,F不在排尾的情况共有 $A_6^6 - 2A_5^5 + A_4^4 = 504$ (种),故D错误. 故选AB.]

多维变迁

C [已知A,B,C,D,E五人站成一排,要求A,B相邻且C,D不相邻,将A,B看成一个整体,

则A,B的排列方法有 A_2^2 种方法,

然后将这个整体与E进行全排列,

则不同的排列方法有 A_3^3 种,

最后将C,D插入到三个空中的两个中,有 A_3^2 种方法,

根据分步乘法计数原理,可知排法种数为 $A_2^2 A_3^3 A_3^2 = 24$.

故选C.]

微点突破 15

典例5 24 112 [第一步,从第一行任选一个数,共有4种不同的选法;第二步,从第二行选一个与第一个数不同列的数,共有3种不同的选法;第三步,从第三行选一个与第一、二个数均不同列的数,共有2种不同的选法;第四步,从第四行选一个与第一、二、三个数均不同列的数,只有1种选法.

由分步乘法计数原理知,不同的选法种数为 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

先按列分析,每列必选出一个数,故所选4个数的十位上的数字分别为1,2,3,4. 再按行分析,第一、二、三、四行个位上的数字的最大值分别为1,3,3,5,故从第一行选21,从第二行选33,从第三行选43,从第四行选15,此时个位上的数字之和最大. 故选中方格中的4个数之和的最大值为 $21 + 33 + 43 + 15 = 112$.]

母题探究

1. 108 [由本例解析知所选方格中,40,12,22,34的和最小,选中方格中的4个数之和的最小值为108.]

2. 12 4 [根据题意可得所有情况如图所示.]

第一行	第二行	第三行	第四行	和
-1	-1	-1	-1	-4
	-1	-2	-4	-4
	-2	-4	-1	-4
	-2	-3	-3	0
2	-3	-4	-4	-4
	-1	-3	-1	-4
	4	-1	-1	4
	2	-3	-1	0
-3	2	-3	-1	0
	-3	-3	-4	0
	-1	-3	-1	0
	4	-1	-1	4
4	4	-1	-3	4
	-1	-3	-1	-8
	-3	-3	-3	-12
	-3	-4	-2	0
2	4	-1	-3	4
	-1	-3	-1	-8
	-3	-3	-3	-12
	-3	-4	-2	0

则满足4个数之和为正的有12个,其中最小值为4.]

随堂·对点检测

1. C [若路线为甲、乙、丁,则有 $3 \times 2 = 6$ (条);若路线为甲、丙、丁,则有 $3 \times 4 = 12$ (条),故共有 $6 + 12 = 18$ (条). 故选 C.]
2. C [将 5 名同学分配到三个班,每班至少 1 名同学,则可将 5 名同学分为 1,2,2 或 1,1,3 三组,再分到三个班,则不同的分配方法有 $(\frac{C_5^2 C_3^2}{A_2^2} + C_5^3) A_3^3 = 150$ (种). 故选 C.]
3. AD [对于 A,因为甲、乙必须相邻且乙在甲的右边,所以将甲、乙看成一个整体,再与丙、丁、戊全排列,有 $A_4^4 = 24$ (种)排法,故 A 正确;
对于 B,若甲站在最左端,乙和丙、丁、戊全排列,有 $A_4^4 = 24$ (种)排法;若乙站在最左端,有 $A_3^1 A_3^3 = 18$ (种)排法,共有 $24 + 18 = 42$ (种)排法,故 B 错误;
对于 C,因为甲、乙不相邻,所以先将丙、丁、戊三人排成一排,再将甲、乙安排在三人的空位中,有 $A_3^3 \cdot A_4^2 = 72$ (种)排法,故 C 错误;
对于 D,甲、乙、丙、丁、戊五人全排列有 $A_5^5 = 120$ (种)排法,甲、乙、丙全排列有 $A_3^3 = 6$ (种)排法,
所以甲、乙、丙按从左到右的顺序排列的排法有 $\frac{120}{6} = 20$ (种),故 D 正确.
故选 AD.]
4. 288 [先选 2 个家长排在队列的头和尾的排法数为 $A_4^2 = 12$,剩下的家长和儿童全排的排法种数为 $A_4^4 = 24$,则不同的排列种数为 $12 \times 24 = 288$.]

第 74 课时 二项式定理

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1) $C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n$
(2) $k+1$

知识点 2 $C_n^k = C_n^{n-k}$ 递增 递减 $C_n^{\frac{n}{2}}$ $C_n^{\frac{n-1}{2}}$ $C_n^{\frac{n+1}{2}}$

知识点 3 (1) 2^n (2) 2^{n-1}

链教材·夯基固本

1. A [二项式系数是指 $C_7^0, C_7^1, C_7^2, \dots, C_7^7$,
故第 3 项的二项式系数为 C_7^2 . 故选 A.]

2. B [$(2x - \frac{1}{\sqrt{4x}})^6$ 的展开式的中间项为 $C_6^3 (2x)^3 \cdot (-\frac{1}{\sqrt{4x}})^3 = -40x^2$. 故选 B.]

3. C [由题意可得,二项式的展开式满足 $T_{k+1} = C_n^k x^k$,且有 $C_n^3 = C_n^7$,因此 $n = 10$. 故二项式系数最大的项为 $C_{10}^5 x^5 = 252x^5$. 故选 C.]

4. 0 [由 $(1+x)^n = C_n^0 x^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$,
令 $x = -1$,得 $(1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$.]

考点深研·题型突破

考点一

考向 1 典例 1 B [$(x - \frac{\sqrt{a}}{x^2})^6$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_6^k \cdot (-\sqrt{a})^k \cdot x^{6-3k}$,令 $6-3k=0$,得 $k=2$,
可得它的常数项为 $C_6^2 \cdot a = 60$, $\therefore a=4$.
故选 B.]

母题探究

1. 7 [由题意可得,展开式共有 7 项.]
2. $-160x^{-3}$ [中间项为 $C_6^3 \cdot (-2)^3 \cdot x^{-3} = -160x^{-3}$.]
3. -12 [$(x - \frac{2}{x^2})^6$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_6^k \cdot (-2)^k \cdot x^{6-3k}$, $k=0,1,\dots,6$,
令 $6-3k=3$,得 $k=1$,所以 x^3 的系数为 -12 .]
4. 7 [由 $6-3k$ 为整数, $k \in \mathbf{N}$, $k \leq 6$,可知有理项共有 7 项.]

考向 2 典例 2 (1) B (2) C [(1) $(2 + \frac{1}{x}) \cdot (2x-1)^{11} =$

$$2(2x-1)^{11} + \frac{1}{x}(2x-1)^{11},$$

$(2x-1)^{11}$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_{11}^k (2x)^{11-k} \cdot (-1)^k = (-1)^k \cdot 2^{11-k} C_{11}^k x^{11-k}$, $k=0,1,\dots,11$,

$$\therefore 2(2x-1)^{11} = (-1)^k 2^{12-k} C_{11}^k x^{11-k} \text{ ①},$$

$$\frac{1}{x}(2x-1)^{11} = (-1)^k 2^{11-k} C_{11}^k x^{10-k} \text{ ②},$$

在①式中,令 $11-k=0$,得 $k=11$,故 $2(2x-1)^{11}$ 的展开式中的常数项为 $(-1)^{11} 2^1 C_{11}^{11} = -2$,

在②式中,令 $10-k=0$,得 $k=10$,则 $\frac{1}{x}(2x-1)^{11}$ 的展开式中的常数项为 $(-1)^{10} 2^1 C_{11}^{10} = 22$,

故 $(2 + \frac{1}{x})(2x-1)^{11}$ 的展开式中的常数项为 $-2 + 22 = 20$.

故选 B.

(2) 法一: $(x+y-z)^5$ 的展开式的通项为 $C_5^r x^{5-r} (y-z)^r$ ($0 \leq r \leq 5, r \in \mathbf{N}$),

$(y-z)^r$ 的展开式的通项为 $C_r^k y^{r-k} (-z)^k = (-1)^k C_r^k y^{r-k} z^k$ ($0 \leq k \leq r \leq 5, k, r \in \mathbf{N}$),

可得 $(x+y-z)^5$ 的展开式的通项为 $(-1)^k C_5^r C_r^k x^{5-r} y^{r-k} z^k$ ($0 \leq k \leq r \leq 5, k, r \in \mathbf{N}$),

$$\text{由} \begin{cases} 5-r=2, \\ r-k=2, \\ k=1, \end{cases} \text{可得} \begin{cases} r=3, \\ k=1, \end{cases}$$

故 $(x+y-z)^5$ 的展开式中 $x^2 y^2 z$ 项的系数为 $-C_5^3 C_3^1 = -10 \times 3 = -30$. 故选 C.

法二: $(x+y-z)^5$ 表示 5 个因式 $(x+y-z)$ 之积,

$\therefore x^2 y^2 z$ 可从两个因式中取 x , 剩余的 3 个因式中 2 个取 y , 其余一个因式取 z , 因此 $x^2 y^2 z$ 的系数为 $C_5^2 C_3^2 C_1^1 (-1) = -30$. 故选 C.]

考点二

考向 1 典例 3 BCD [二项展开式中的二项式系数和为 2^{2026} , 故 A 错误;

令 $x=1$, 可得 $(1-2)^{2026} = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2025} + a_{2026} = 1$, 即展开式中所有项的系数和为 1, 故 B 正确;

令 $x=0$, 可得 $a_0 = 1$, 令 $x = \frac{1}{2}$, 可得 $(1-2 \times \frac{1}{2})^{2026} = a_0 +$

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_{2025}}{2^{2025}} + \frac{a_{2026}}{2^{2026}} = 0, \text{ 所以 } \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots +$$

$$\frac{a_{2025}}{2^{2025}} + \frac{a_{2026}}{2^{2026}} = -1, \text{ 故 C 正确;}$$

将等式 $(1-2x)^{2026} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2025} x^{2025} + a_{2026} x^{2026}$ 两边同时求导可得,

$$2026 \times (-2) \times (1-2x)^{2025} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + 2025a_{2025} x^{2024} + 2026a_{2026} x^{2025},$$

再令 $x=1$, 可得 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+2\ 025a_{2\ 025}+2\ 026a_{2\ 026}=4\ 052$, 故 D 正确. 故选 BCD.]

多维变迁

解: (1) $(2x-3y)^{10}$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_{10}^k(2x)^{10-k}\cdot(-3y)^k=C_{10}^k2^{10-k}\cdot(-3)^kx^{10-k}y^k(k\in\mathbf{N}$ 且 $0\leq k\leq 10)$.

第 3 项的二项式系数为 $C_{10}^2=45$, 第 3 项的系数为 $C_{10}^22^{10-2}\times(-3)^2=103\ 680$.

(2) 二项式系数的和为 $C_{10}^0+C_{10}^1+C_{10}^2+\cdots+C_{10}^{10}=2^{10}=1\ 024$.

(3) 令 $x=y=1$, 得各项系数的和为 $(2-3)^{10}=(-1)^{10}=1$.

(4) 奇数项的二项式系数和为 $C_{10}^0+C_{10}^2+C_{10}^4+C_{10}^6+C_{10}^8+C_{10}^{10}=2^9=512$, 偶数项的二项式系数和为 $C_{10}^1+C_{10}^3+C_{10}^5+C_{10}^7+C_{10}^9=2^9=512$.

(5) 设 $(2x-3y)^{10}=a_0x^{10}+a_1x^9y+a_2x^8y^2+\cdots+a_{10}y^{10}$, 令 $x=y=1$, 得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}=1$ ①.

令 $x=1, y=-1$, 得

$$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{10}=5^{10} \text{ ②.}$$

$$\text{①}+\text{②}, \text{得 } 2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10})=1+5^{10},$$

$$\text{所以奇数项系数和为 } \frac{1+5^{10}}{2}.$$

$$\text{①}-\text{②}, \text{得 } 2(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)=1-5^{10},$$

$$\text{所以偶数项系数和为 } \frac{1-5^{10}}{2}.$$

$$(6) \text{ 由 (5) 知 } x \text{ 的奇次项系数和为 } a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=\frac{1-5^{10}}{2}; x \text{ 的偶次项系数和为 } a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=\frac{1+5^{10}}{2}.$$

考向 2 典例 4 D [因为 $(2x+\frac{1}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式中二项式系数之和为 64, 所以 $2^n=64$, 则 $n=6$,

$$\text{所以 } (2x+\frac{1}{\sqrt{x}})^6 \text{ 的展开式的通项为 } T_{k+1}=C_6^k(2x)^{6-k}\cdot$$

$$(\frac{1}{\sqrt{x}})^k=C_6^k2^{6-k}x^{6-\frac{3}{2}k}.$$

令 $x=1$, 可得展开式中各项系数之和为 3^6 , 故 A 错误;

第 4 项的二项式系数最大, 此时 $k=3$, 则二项展开式中二项式系数最大的项为 $T_4=C_6^32^{6-3}x^{6-\frac{3}{2}\times 3}=160x^{\frac{3}{2}}$, 故 B 错误;

$$\text{令 } 6-\frac{3}{2}k=0, \text{ 则 } k=4,$$

$$\text{所以展开式中的常数项为 } C_6^42^{6-4}x^{6-\frac{3}{2}\times 4}=60, \text{ 故 C 错误;}$$

$$\text{令第 } k+1 \text{ 项的系数最大, 则 } \begin{cases} C_6^k2^{6-k}\geq C_6^{k-1}2^{6-k+1}, \\ C_6^k2^{6-k}\geq C_6^{k+1}2^{6-k-1}, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \frac{4}{3}\leq k\leq \frac{7}{3},$$

因为 $k\in\mathbf{N}$, 所以 $k=2$.

所以展开式中系数最大的项为 $T_3=C_6^22^4x^3=240x^3$, 故 D 正确. 故选 D.]

多维变迁

$-8\ 064-15\ 360x^4$ [由题意知, $2^{2n}-2^n=992$, 即 $(2^n-32)\cdot(2^n+31)=0$, 故 $2^n=32$, 解得 $n=5$. 由二项式系数的性质知,

$(2x-\frac{1}{x})^{10}$ 的展开式中第 6 项的二项式系数最大, 故二项式

$$\text{系数最大的项为 } T_6=C_{10}^5(2x)^5\left(-\frac{1}{x}\right)^5=-8\ 064.$$

设第 $k+1$ 项的系数的绝对值最大,

$$\text{则 } T_{k+1}=C_{10}^k\cdot(2x)^{10-k}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^k=(-1)^kC_{10}^k\cdot2^{10-k}\cdot x^{10-2k},$$

$$\text{令 } \begin{cases} C_{10}^k\cdot 2^{10-k}\geq C_{10}^{k-1}\cdot 2^{10-k+1}, \\ C_{10}^k\cdot 2^{10-k}\geq C_{10}^{k+1}\cdot 2^{10-k-1}, \end{cases}$$

$$\text{得 } \begin{cases} C_{10}^k\geq 2C_{10}^{k-1}, \\ 2C_{10}^k\geq C_{10}^{k+1}, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} 11-k\geq 2k, \\ 2(k+1)\geq 10-k, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{8}{3}\leq k\leq \frac{11}{3}.$$

$$\because k\in\mathbf{N}, \therefore k=3.$$

故系数的绝对值最大的项是第 4 项,

$$T_4=-C_{10}^3\times 2^7\times x^4=-15\ 360x^4.]$$

考点三

典例 5 (1)B (2)B [(1)因为 $a\in\mathbf{Z}$, 且 $0\leq a\leq 13$,

$$\text{所以 } 51^{2\ 025}+a=(52-1)^{2\ 025}+a$$

$$=C_{2\ 025}^052^{2\ 025}-C_{2\ 025}^152^{2\ 024}+C_{2\ 025}^252^{2\ 023}-\cdots+C_{2\ 025}^{2\ 024}52-C_{2\ 025}^{2\ 025}+a,$$

因为 $51^{2\ 025}+a$ 能被 13 整除, 结合选项, 所以 $-C_{2\ 025}^{2\ 025}+a=-1+a$ 能被 13 整除, 所以 $a=1$.

$$(2) 1.02^6=(1+0.02)^6=1+C_6^1\times 0.02+C_6^2\times 0.02^2+C_6^3\times 0.02^3+\cdots+0.02^6\approx 1+0.12+0.006\approx 1.13.]$$

教材拓展

典例 6 AD [根据组合数性质可知, $C_n^r=C_{n-1}^{r-1}+C_{n-1}^r$, A 正确;

根据二项式定理可知, $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$, 故 B 错误;

根据选项 A 的等式, $C_4^4+C_4^3+C_5^3+C_6^3+C_7^3+C_8^3=C_9^4=126$, 故 C 错误;

第 10 行中从左往右第 5 个数与第 6 个数分别为 C_{10}^4 和 C_{10}^5 , 比为 $5:6$, 故 D 正确.

故选 AD.]

随堂·对点检测

$$1. \text{ B } [(2x-y)^5 \text{ 的展开式的通项为 } T_{k+1}=C_5^k(2x)^{5-k}(-y)^k, k=0,1,\cdots,5,$$

$$\text{则 } \left(1+\frac{y}{x}\right)(2x-y)^5 \text{ 的展开式中 } x^2y^3 \text{ 的系数为 } -C_5^32^2+C_5^22^3=40. \text{ 故选 B.}]$$

2. ACD [由二项式系数的性质知, $(a-b)^{11}$ 的展开式中的二项式系数之和为 $2^{11}=2\ 048$, 故 A 正确;

因为 $(a-b)^{11}$ 的展开式共有 12 项, 中间两项的二项式系数最大, 即第 6 项和第 7 项的二项式系数最大, 故 C 正确, B 错误;

因为展开式中第 6 项的系数是负数, 且绝对值最大, 所以展开式中第 6 项的系数最小, 故 D 正确. 故选 ACD.]

3. ABC [二项展开式的通项为

$$T_{k+1}=C_n^kx^{2n-2k}(-1)^kx^{-\frac{k}{2}}=(-1)^kC_n^kx^{2n-\frac{5k}{2}},$$

由于第 3 项与第 5 项的系数之比为 $3:14$,

$$\text{则 } \frac{C_n^2}{C_n^4}=\frac{3}{14},$$

$$\text{故 } \frac{\frac{n(n-1)}{1\times 2}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\times 2\times 3\times 4}}=\frac{3}{14},$$

得 $n^2-5n-50=0$, 解得 $n=10$ (负值舍去), 故 A 正确;

$$\text{则 } T_{k+1}=(-1)^kC_{10}^kx^{20-\frac{5k}{2}},$$

$$\text{令 } 20-\frac{5k}{2}=0, \text{ 解得 } k=8,$$

则展开式中的常数项为 $(-1)^8 C_{10}^8 = 45$, 故 B 正确;

令 $20 - \frac{5k}{2} = 5$, 解得 $k = 6$,

则含 x^5 的项的系数为 $(-1)^6 C_{10}^6 = 210$, 故 C 正确;

令 $20 - \frac{5k}{2} \in \mathbb{Z}$, 则 k 为偶数,

此时 $k = 0, 2, 4, 6, 8, 10$, 故有 6 项为有理项, 故 D 错误. 故选 ABC.]

4. 1.105 $[1.01^{10} = (1+0.01)^{10} = 1 + C_{10}^1 \times 0.01 + C_{10}^2 \times 0.01^2 + C_{10}^3 \times 0.01^3 + \dots \approx 1 + 0.1 + 0.0045 = 1.1045 \approx 1.105.]$

第 75 课时 随机事件与概率

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1)样本空间 (2)必然事件 不可能事件

知识点 2 $A \subseteq B$ $A \cup B$ 或 $A+B$ $A \cap B$ 或 AB $A \cap B = \emptyset$
 $A \cap B = \emptyset$ $A \cup B = \Omega$

知识点 3 (1)有限个 相等 (2) $\frac{n(A)}{n(\Omega)}$

知识点 4 $P(A)+P(B) - 1-P(B)$

$P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

知识点 5 (1)稳定于

链教材·夯基固本

1. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 5 [任选一个数, 共有 10 种不同选法, 故样本空间为 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, 其中偶数共有 5 种, 故“它是偶数”这一事件包含的样本点个数为 5.]

2. D [连续射击两次中靶的情况如下: ①两次都中靶; ②只有一次中靶; ③两次都没有中靶, 故选 D.]

3. C [互斥事件与对立事件都是两个事件的关系, 互斥事件是不可能同时发生的两个事件, 而对立事件除要求这两个事件不同时发生外, 还要求二者必须有一个发生. 因此, 对立事件是互斥事件的特殊情况, 而互斥事件未必是对立事件. 故选 C.]

4. $\frac{1}{5} \quad \frac{2}{5}$ [从 0~9 这 10 个数中随机选择一个数, 共有 10 种可能, 其样本空间可表示为 $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. 若一个数的平方的个位数字为 1, 则该数为 1 或 9, 共 2 个, 故其概率为 $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$; 若一个数的四次方的个位数字为 1, 则该数平方的个位数字为 1 或 9, 所以该数为 1, 3, 7, 9, 共 4 个, 故其概率为 $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.]

5. $\frac{3}{10}$ [该试验的样本空间可表示为 $\Omega = \{(1, 3, 5), (1, 3, 7), (1, 3, 9), (1, 5, 7), (1, 5, 9), (1, 7, 9), (3, 5, 7), (3, 5, 9), (3, 7, 9), (5, 7, 9)\}$, 共有 10 个样本点, 其中能构成三角形的样本点有 $(3, 5, 7), (3, 7, 9), (5, 7, 9)$, 共 3 个, 故所求概率 $P = \frac{3}{10}$.]

6. (1)0.5 0.3 (2)0.8 0 [(1)如果 $B \subseteq A$, 那么 $A \cup B = A$, $A \cap B = B$, 所以 $P(A \cup B) = P(A) = 0.5$, $P(AB) = P(B) = 0.3$.

(2)如果 A, B 互斥, 那么 $A \cap B = \emptyset$, 所以 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.5 + 0.3 = 0.8$, $P(AB) = 0$.]

7. 0.782 [总共 $50 \times 20 = 1\,000$ (次),

从全班情况看频率为 $\frac{782}{1\,000} = 0.782$,

由此估计钉尖朝上的概率为 0.782.]

考点深研·题型突破

考点一

考向 1 典例 1 (1)C (2)B [(1)从甲、乙、丙三位同学中随机抽选两位同学进行家访, 所有的基本事件有 (甲乙), (甲丙), (乙丙), 对于 A, P 不一定发生, 故不是必然事件;

对于 B, Q 可能发生, 所以不是不可能事件;

对于 C, P 与 Q 不能同时发生, 故 P 与 Q 是互斥事件;

对于 D, P 与 Q 不能同时发生, 但 $P \cup Q$ 不是全部事件, 所以不是对立事件. 故选 C.

(2)对于 A, 例如点数 (1, 2), 满足题意要求, 所以二者能同时发生, 不是互斥事件, 故 A 错误;

对于 B, 点数之和为奇数, 两数一奇一偶, 点数之积为奇数, 两数均为奇数, 两事件不能同时发生, 存在两数和为偶数且积为偶数的情况, 所以二者互斥但不对立, 故 B 正确;

对于 C, 二者不能同时不发生, 也不能同时发生, 是对立事件, 故 C 错误;

对于 D, 二者能同时发生, 不是互斥事件, 如点数 (4, 2), 故 D 错误.

故选 B.]

考向 2 典例 2 解: (1)易知 $P(A) = \frac{1}{1\,000}$, $P(B) = \frac{1}{100}$,

$P(C) = \frac{1}{20}$.

(2)1 张奖券中奖包含中特等奖或一等奖或二等奖. 设“1 张奖券中奖”为事件 M, 则 $M = A \cup B \cup C$. 因为 A, B, C 两两互斥, 所以 $P(M) = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1+10+50}{1\,000} = \frac{61}{1\,000}$. 故 1 张奖券的中奖概率为 $\frac{61}{1\,000}$.

(3)设“1 张奖券不中特等奖且不中一等奖”为事件 N, 则事件 N 与“1 张奖券中特等奖或中一等奖”互为对立事件. 所以 $P(N) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{1\,000} - \frac{1}{100} = \frac{989}{1\,000}$. 故 1 张奖券不中特等奖且不中一等奖的概率为 $\frac{989}{1\,000}$.

多维变延

1. ABC [若事件 B 包含事件 A, 则 $P(A) \leq P(B)$, 故 A 正确;

若 A, B 为对立事件, 则 $P(A) + P(B) = 1$, 故 B 正确;

若 A, B 为互斥事件, 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, 故 C 正确;

因为 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, 所以当 A, B 互斥时, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, 故 D 错误. 故选 ABC.]

2. 0.11 [记“射中环数不够 7 环”为事件 D, 则事件 $\bar{D}$ 为“射中 10 环或 9 环或 8 环或 7 环”,

所以 $P(\bar{D}) = 0.21 + 0.23 + 0.25 + 0.2 = 0.89$, 所以 $P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - 0.89 = 0.11$.]

考向 3 典例 3 AB [随机事件 A 的概率是频率的稳定值, 频率是概率的近似值, 故 A 正确;

抛掷骰子 100 次, 得点数是 1 的结果是 18 次, 则出现 1 点的频率是 $\frac{18}{100} = \frac{9}{50}$, 故 B 正确;

有一批产品, 其次品率为 0.05, 若从中任取 200 件产品, 则不一定抽取到 190 件正品和 10 件次品, 故 C 错误;

100 次并不是无穷多次, 抛掷一枚质地均匀的硬币 100 次, 有 51 次出现了正面, 则不能得出抛掷一次该硬币出现正面的概率是 0.51, 故 D 错误. 故选 AB.]

考点二

典例 4 (1)C (2) $\frac{3}{5}$ $\frac{1}{2}$ [(1)由题意,从 4 辆燃油车和 2 辆新能源车中随机选出 3 辆,有 $C_6^3=20$ (种)情况,选出的 3 辆中至少有 1 辆新能源车,有 $C_6^3-C_4^3=16$ (种)情况,所以选出的 3 辆中至少有 1 辆新能源车的概率为 $\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$. 故选 C.]

(2)法一:列举法

从五个活动中选三个的情况有

$ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE$, 共 10 种情况,

其中甲选到 A 有 6 种可能情况: $ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE$,

则甲选到 A 的概率为 $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

乙选 A 活动有 6 种可能情况: $ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE$,

其中再选择 B 有 3 种可能情况: ABC, ABD, ABE ,

故乙选了 A 活动,他再选择 B 活动的概率为 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

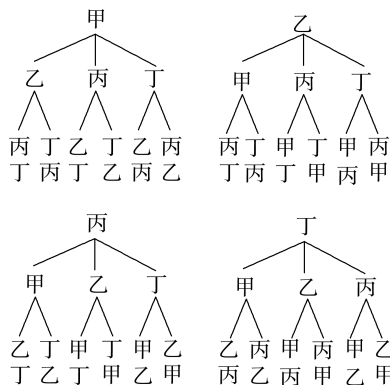
法二:设甲、乙选到 A 为事件 M,乙选到 B 为事件 N,

则甲选到 A 的概率为 $P(M)=\frac{C_4^2}{C_5^2}=\frac{3}{5}$.

乙选了 A 活动,他再选择 B 活动的概率为 $P(N|M)=\frac{C_3^1}{C_3^2}=\frac{1}{2}$.
 $\frac{P(MN)}{P(M)}=\frac{C_3^1}{C_4^2}=\frac{1}{2}$.]

多维变迁

B [画出树状图:



甲、乙、丙、丁四人排成一列共有 24 种排法,其中丙不在排头,且甲或乙在排尾的排法共有 8 种,所以所求概率为 $\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$. 故选 B.]

考点三

典例 5 解:设事件 A=“不派出医生”,事件 B=“派出 1 名医生”,事件 C=“派出 2 名医生”,事件 D=“派出 3 名医生”,事件 E=“派出 4 名医生”,事件 F=“派出 5 名或 5 名以上医生”,则事件 A, B, C, D, E, F 彼此互斥,且 $P(A)=0.1$, $P(B)=0.16$, $P(C)=0.3$, $P(D)=0.2$, $P(E)=0.2$, $P(F)=0.04$.

(1)“派出医生至多 2 人”的概率为 $P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=0.1+0.16+0.3=0.56$.

(2)法一:“派出医生至少 2 人”的概率为 $P(C \cup D \cup E \cup F)=P(C)+P(D)+P(E)+P(F)=0.3+0.2+0.2+0.04=0.74$.

法二:“派出医生至少 2 人”的概率为 $1-P(A \cup B)=1-(0.1+0.16)=0.74$.

随堂·对点检测

1. C [对于选项 A,若 $A \subseteq B \subseteq C$,则 $P(A \cup B \cup C)=P(C)=0.6 < 1$,

所以 $A \cup B \cup C$ 不是必然事件,故 A 错误;

对于选项 B,若 $A \subseteq B$,则 $P(A \cap B)=P(A)=0.4 \neq 0$,所以 A 与 B 不是互斥事件,故 B 错误;

对于选项 C,由 $(A \cap B) \subseteq A$,得 $P(A \cap B) \leq P(A)=0.4$,故 C 正确;

对于选项 D, $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)=0.9-P(A \cap B)$,

而 $P(A \cap B) \geq 0$,

所以 $P(A \cup B) \leq 0.9$,故 D 错误.

故选 C.]

2. B [对于 A,抛掷一枚硬币,正面朝上的概率为 0.5,为定值,故 A 错误;

对于 B,甲同学的试验中,正面朝上的频率为 0.517,反面朝上的频率为 0.483,故 B 正确;

对于 C,抛掷一枚硬币,反面朝上的概率为 0.5,故 C 错误;

对于 D,甲同学的试验中,正面朝上的频率就是 0.517,而不是接近 0.517,故 D 错误.

故选 B.]

3. D [根据题意可知, $P(A \cup B)=P(A)+P(B)=\frac{2}{3}$,

又 $P(A)=3P(B)$,

所以 $P(B)=\frac{1}{6}$,则 $P(\overline{B})=\frac{5}{6}$.

故选 D.]

4. ACD [因为事件 A, B, C 两两互斥,所以 $P(B \cap C)=0$,故 D 正确;由 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{5}+P(B)=\frac{8}{15}$,得

$P(B)=\frac{1}{3}$,故 A 正确;由 $P(A \cup C)=P(A)+P(C)=\frac{1}{5}+$

$P(C)=\frac{9}{20}$,得 $P(C)=\frac{1}{4}$,故 B 错误; $P(B \cup C)=P(B)+$

$P(C)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$,故 C 正确. 故选 ACD.]

5. $\frac{5}{16}$ [根据题意,设 A=“被选取的整数是质数”,大于 1 且小于 50 的整数共有 48 个,

其中质数包含 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,

共 15 个,故 $P(A)=\frac{15}{48}=\frac{5}{16}$.]

第 76 课时 事件的相互独立性、条件

概率与全概率公式

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1) $P(A)P(B)$ (2)B

知识点 2 (2) $P(A)P(B|A)$

(3)1 $0 \leq P(B|A) \leq 1$ $P(B|A)+P(C|A)=1-P(B|A)$

知识点 3 $\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$

链教材·夯基固本

1. C [掷两枚质地均匀的骰子, A = “第一枚出现奇数点”, B = “第二枚出现偶数点”, 事件 A 与 B 能同时发生, 故事件 A 与 B 既不是互斥事件, 也不是对立事件, 故 A, B 错误; $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(AB) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, 因为 $P(A) \cdot P(B) = P(AB)$, 所以 A 与 B 相互独立, 故 C 正确; 事件 A 与 B 不相等, 故 D 错误. 故选 C.]
2. A [甲、乙两人射击时相互独立, 则他们都中靶的概率为 $0.8 \times 0.7 = 0.56$.]
3. $\frac{18}{19}$ [由题意, 设该节能灯使用寿命超过 10 000 h 为事件 A , 则事件 A 的概率 $P(A) = 0.95$; 设该节能灯使用寿命超过 12 000 h 为事件 B , 则事件 B 的概率 $P(B) = 0.9$, 则 $P(AB) = P(B) = 0.9$, 所以 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.9}{0.95} = \frac{18}{19}$.]
4. 0.7 [设 A_1 = “第 1 天去 A 餐厅用餐”, B_1 = “第 1 天去 B 餐厅用餐”, A_2 = “第 2 天去 A 餐厅用餐”, 则 $\Omega = A_1 \cup B_1$, 且 A_1 与 B_1 互斥, 根据题意得, $P(A_1) = P(B_1) = 0.5$, $P(A_2|A_1) = 0.6$, $P(A_2|B_1) = 0.8$, 由全概率公式, 得 $P(A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(B_1)P(A_2|B_1) = 0.5 \times 0.6 + 0.5 \times 0.8 = 0.7$. 因此, 王同学第 2 天去 A 餐厅用餐的概率为 0.7.]
5. D [因为 $P(\bar{N}|M) = 0.5$, 由对立事件概率计算公式可得, $P(N|M) = 1 - 0.5 = 0.5$, 则 $P(MN) = P(M)P(N|M) = 0.4 \times 0.5 = 0.2$. 故选 D.]

考点深研·题型突破

考点一

- 考向 1 典例 1 B [事件甲发生的概率 $P(\text{甲}) = \frac{1}{6}$, 事件乙发生的概率 $P(\text{乙}) = \frac{1}{6}$, 事件丙发生的概率 $P(\text{丙}) = \frac{5}{6 \times 6} = \frac{5}{36}$, 事件丁发生的概率 $P(\text{丁}) = \frac{6}{6 \times 6} = \frac{1}{6}$. 事件甲与事件丙同时发生的概率为 0, $P(\text{甲丙}) \neq P(\text{甲})P(\text{丙})$, 故 A 错误; 事件甲与事件丁同时发生的概率为 $\frac{1}{6 \times 6} = \frac{1}{36}$, $P(\text{甲丁}) = P(\text{甲}) \cdot P(\text{丁})$, 故 B 正确; 事件乙与事件丙同时发生的概率为 $\frac{1}{6 \times 6} = \frac{1}{36}$, $P(\text{乙丙}) \neq P(\text{乙})P(\text{丙})$, 故 C 错误; 事件丙与事件丁是互斥事件, 不是相互独立事件, 故 D 错误. 故选 B.]

- 考向 2 典例 2 解: 设甲、乙、丙三个小组攻克该技术难题分别为事件 A, B, C , 即 $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{2}{3}$, 且 A, B, C 相互独立.

(1) 甲、乙、丙三个小组均受到奖励的概率为 $P(ABC) = P(A) \cdot P(B)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$.

(2) 只有甲小组受到奖励的概率为 $P(\overline{ABC}) = P(A)P(\overline{B})P(\overline{C}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

(3) 设受到奖励的小组数为 X , 则 $P(X=2) = P(A)P(B)P(\overline{C}) + P(A)P(\overline{B})P(C) + P(\overline{A})P(B)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{12}$.

所以受到奖励的小组数是 2 的概率为 $\frac{5}{12}$.

考点二

典例 3 (1) D (2) A [(1) 由题意知 $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A+B) = 0.6 + 0.7 - 0.9 = 0.4$,

所以 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.4}{0.7} = \frac{4}{7}$. 故选 D.

(2) 事件 A 表示“两个家庭至少一个家庭选择沈阳博物馆”, 事件 B 表示“两个家庭选择景点不同”, 两个家庭共有 $3^2 = 9$ (种) 选择,

则 $P(AB) = \frac{C_2^1 C_2^1}{9} = \frac{4}{9}$, $P(A) = 1 - \frac{2^2}{9} = \frac{5}{9}$,

则 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{5}$.

故选 A.]

多维变迁

1. A [在不超过 20 的自然数中, 素数有 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 共 8 个, 其中“孪生素数”有 3 和 5, 5 和 7, 11 和 13, 17 和 19, 共 4 种情况,

则 $P(\overline{B}|A) = \frac{n(\overline{AB})}{n(A)} = \frac{4}{C_8^2} = \frac{1}{7}$,

故 $P(B|A) = 1 - P(\overline{B}|A) = \frac{6}{7}$.

故选 A.]

2. ABD [$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, 而 $P(A)$ 与 $P(B)$ 不一定相等, 故 A 不正确; 当 B, C 为互斥事件时, 等式成立, 故 B 不正确; 由概率的乘法公式知 C 正确; $P(B|A)P(A) = P(AB) \leq P(A) + P(B)$, 故 D 不正确. 故选 ABD.]

考点三

典例 4 A [设事件 A 表示“随机抽一名教师, 该教师喜欢跑步”, 事件 B_1, B_2, B_3 分别表示“抽到的教师来自高一、高二、高三年级”,

由题意知 $P(B_1) = \frac{3}{3+3+4} = 0.3$, $P(B_2) = \frac{3}{3+3+4} = 0.3$,

$P(B_3) = \frac{4}{3+3+4} = 0.4$,

$P(A|B_1) = 0.4$, $P(A|B_2) = 0.3$, $P(A|B_3) = 0.35$,

根据全概率公式知 $P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) = 0.3 \times 0.4 + 0.3 \times 0.3 + 0.4 \times 0.35 = 0.35$. 故选 A.]

多维变迁

1. C [设事件 A 表示该园区水质每日发生化学污染, 事件 B 表示该监测系统每日发出警报, 由题意, 可得 $P(A) = 0.1$, $P(\overline{A}) = 0.9$, $P(B|A) = 0.95$, $P(B|\overline{A}) = 0.05$,

所以 $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = 0.1 \times 0.95 + 0.9 \times 0.05 = 0.14$.

故选 C.]

2. 解: (1) 从该地区小学生中随机抽取 1 人, 该生感染甲型流感的概率为 $\frac{1}{2}$,

从该地区初中生中随机抽取 1 人, 该生感染甲型流感的概率为 $\frac{1}{8}$,

所以这 2 人中至多有一人感染甲型流感的概率为 $1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{15}{16}$.

(2) 设 A = “抽到小学生”, B = “抽到初中生”, C = “抽到高中生”, D = “该生感染甲型流感”,

则 $P(A) = \frac{5}{12}, P(B) = \frac{1}{3}, P(C) = \frac{1}{4}$,

$P(D|A) = \frac{1}{2}, P(D|B) = \frac{1}{8}, P(D|C) = \frac{1}{12}$,

所以由全概率公式可知,

$P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C)$
 $= \frac{5}{12} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{12} = \frac{13}{48}$.

所以该生感染甲型流感的概率为 $\frac{13}{48}$.

随堂·对点检测

1. **AB** [由于摸球过程是有效回地, 所以第一次摸球的结果对第二次摸球的结果没有影响, 故事件 A 与 B , A 与 C 均相互独立, 且 A 与 B , A 与 C 均有可能同时发生, 说明 A 与 B , A 与 C 均不互斥, 故选 AB.]

2. **A** [根据题意可知, 甲投中的概率为 0.7, 乙投中的概率为 0.8,

则甲、乙两人恰好有一人投中的概率为 $0.7 \times (1 - 0.8) + 0.8 \times (1 - 0.7) = 0.38$.

故选 A.]

3. **D** [由题意知, 事件 M 包含的基本事件有 30 个, 则 $P(M) = \frac{30}{6^2} = \frac{5}{6}$, 事件 MN 包含的基本事件有 8 个,

则 $P(MN) = \frac{8}{6^2} = \frac{2}{9}$,

所以 $P(N|M) = \frac{P(MN)}{P(M)} = \frac{4}{15}$.

故选 D.]

4. $\frac{1}{4}$ [$\because P(B|A) = \frac{3}{4}, P(A) = \frac{1}{3}$,

$\therefore P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.]

5. $\frac{3}{4}$ [设输入的问题表达清晰为事件 A , 回答被采纳为事件 B ,

则 $P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, P(\bar{A}) = \frac{1}{4}$,

$P(B|A) = \frac{8}{9}, P(B|\bar{A}) = \frac{1}{3}$,

根据全概率公式, $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$.]

第 77 课时 离散型随机变量及其分布列、数字特征

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1)唯一 (2)一一列举

知识点 2 (2) ≥ 1

知识点 3 (1) $x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$ $\sum_{i=1}^n x_i p_i$ 均值

期望 平均水平 $aE(X) + b$ p (2) $\sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i$

偏离程度 $\sqrt{D(X)}$ $a^2 D(X)$ $p(1-p)$

链教材·夯基固本

1. **D** [第一枚与第二枚的点数之差大于 4, 只有 D 项符合.]

2. **C** [因为随机变量 X 的可能取值为 $1, 2, \cdots, n$, 并且取 $1, 2, \cdots, n$ 是等可能的,

所以 $P(X \leq 4) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{3}{n} = 0.3$, 解得 $n=10$, 故选 C.]

3. 2.8 10.4 [$E(X) = 1 \times 0.1 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.4 + 4 \times 0.1 + 5 \times 0.1 = 2.8, E(3X+2) = 3E(X) + 2 = 3 \times 2.8 + 2 = 10.4$.]

4. 0.84 $\frac{2\sqrt{21}}{5}$ [由题意知 $E(X) = 1 \times 0.2 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.4 + 4 \times 0.1 = 2.4$, 所以 $D(X) = (1-2.4)^2 \times 0.2 + (2-2.4)^2 \times 0.3 + (3-2.4)^2 \times 0.4 + (4-2.4)^2 \times 0.1 = 0.84$, $D(2X+7) = 4D(X) = 4 \times 0.84 = 3.36, \sigma(2X+7) = \sqrt{3.36} = \frac{2\sqrt{21}}{5}$.]

5. $\frac{91}{6}$ [因为 $E(X) = \frac{7}{2}, D(X) = \frac{35}{12}$,

由 $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$,

得 $E(X^2) = D(X) + (E(X))^2 = \frac{35}{12} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6}$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1) **A** (2) **ABD** [(1) 由分布列的性质得,

$\begin{cases} 0 \leq 4a - 1 \leq 1, \\ 0 \leq 3a^2 + a \leq 1, \\ 4a - 1 + 3a^2 + a = 1, \end{cases}$ 解得 $a = \frac{1}{3}$. 故选 A.

(2) 因为 $0.1 + 0.2 + 0.4 + 0.2 + a = 1$, 解得 $a = 0.1$, 故 A 正确;

由分布列知 $P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0.1 + 0.2 + 0.4 = 0.7$, 故 B 正确;

$P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) = 0.2 + 0.1 = 0.3$, 故 C 错误;

$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0.1 + 0.2 = 0.3$, 故 D 正确. 故选 ABD.]

多维变迁

1. **C** [根据题意, $P(\xi \geq 2) = 0.9$, 则 $P(\xi < 2) = 1 - 0.9 = 0.1$,

又由 $\eta = 3\xi + 1$, 则 $P(\eta < 7) = P(\xi < 2) = 0.1$.

故选 C.]

2. **ACD** [由 $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{a}{2} + \frac{a}{6} + \frac{a}{12} =$

1, 解得 $a = \frac{4}{3}$, 故 A 正确;

$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{a}{6} + \frac{a}{12} = \frac{a}{4} = \frac{1}{3}$, 故 B

错误;

$P(X^2 < 3) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{a}{2} + \frac{a}{6} = \frac{2a}{3} = \frac{8}{9}$, 故 C 正确;

由 B 项的分析, 知 $P(X \geq 1) = \frac{1}{3}$, 所以 $0 \leq m < 1$, 故 D 正确. 故选 ACD.]

考点二

典例 2 解: (1) 因为两次抽奖相互独立, 记“第 2 次抽到一等奖”

为事件 A, 则 $P(A) = \frac{1}{5}$.

(2) 由题意知 Y 的所有取值可能为 0, 1, 2, 3, 4,

$$P(Y=4) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times 2 = \frac{2}{25}, P(Y=3) = 2 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times 2 = \frac{4}{25},$$

$$P(Y=2) = 3 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times 2 = \frac{6}{25}, P(Y=1) = 4 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times 2 =$$

$$\frac{8}{25}, P(Y=0) = 5 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5},$$

所以 Y 的分布列为

Y	4	3	2	1	0
P	$\frac{2}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{1}{5}$

$$\text{所以 } E(Y) = 4 \times \frac{2}{25} + 3 \times \frac{4}{25} + 2 \times \frac{6}{25} + 1 \times \frac{8}{25} + 0 \times \frac{1}{5} = \frac{8}{5}.$$

多维变迁

1. ABD [依题意, $a+b+c=3b=0.75$, 解得 $b=0.25, a+c=0.5$.

$$D\left(\frac{1}{4}X+1\right) = \frac{1}{16}D(X), A \text{ 正确};$$

$$P(|X|=1) = P(X=-1) + P(X=1) = a+c=0.5, B \text{ 正确};$$

$E(X) = -a+c+0.5 = 1-2a$, 则 $E(aX) = aE(X) = a(1-2a) = 0.08$, 解得 $a=0.1$ 或 $a=0.4$, C 错误; 当 $a=0.3, c=0.2$ 时, $a-c=0.1$, D 正确. 故选 ABD.]

2. 解: (1) X 的可能取值为 0, 1, 2,

$$P(X=0) = \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}, P(X=1) = \frac{C_3^1 C_7^1}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}, P(X=2) =$$

$$\frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{15},$$

故 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } E(X) = 0 \times \frac{7}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{3}{5},$$

$$\text{所以 } D(X) = \frac{7}{15} \times \left(0 - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{7}{15} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{15} \times \left(2 - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{28}{75}.$$

考点三

典例 3 解: (1) 甲投篮 3 次得 2 分, 即只投进 1 次, 概率为 $P =$

$$C_3^1 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}.$$

(2) 由题意, 知 X 的所有可能取值为 0, 2, 4, 6.

$$P(X=0) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{50}, P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} +$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{25},$$

$$P(X=4) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{25},$$

$$P(X=6) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{50}.$$

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	2	4	6
P	$\frac{9}{50}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{9}{50}$

$$E(X) = 0 \times \frac{9}{50} + 2 \times \frac{8}{25} + 4 \times \frac{8}{25} + 6 \times \frac{9}{50} = 3.$$

(3) 设甲投篮 3 次的得分为 Y, 则 $Y=0, 2, 4, 6$, 且 $\frac{Y}{2} \sim$

$$B\left(3, \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{所以 } E(Y) = 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 3,$$

$$D(Y) = 2^2 \times 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 3.$$

$$\text{由 (2), 得 } D(X) = 0^2 \times \frac{9}{50} + 2^2 \times \frac{8}{25} + 4^2 \times \frac{8}{25} + 6^2 \times \frac{9}{50} - 3^2 = \frac{97}{25}.$$

因为 $E(X) = E(Y), D(X) > D(Y), P(X=6) > P(Y=6) = \frac{1}{8}$, 所以从最终得分的均值方面分析, 甲、乙两人的投篮水平

相当; 从最终得分的方差方面分析, 甲的投篮水平更稳定; 从概率方面分析, 乙得 6 分的可能性更大. (答案不唯一, 言之有理即可)

多维变迁

解: (1) 由题意得, X 的所有可能取值为 0, 20, 100,

$$P(X=0) = 1 - 0.8 = 0.2,$$

$$P(X=20) = 0.8 \times (1 - 0.6) = 0.32,$$

$$P(X=100) = 0.8 \times 0.6 = 0.48,$$

所以 X 的分布列为

X	0	20	100
P	0.2	0.32	0.48

$$(2) \text{ 当小明先回答 A 类问题时, 由 (1) 可得 } E(X) = 0 \times 0.2 + 20 \times 0.32 + 100 \times 0.48 = 54.4.$$

当小明先回答 B 类问题时, 记 Y 为小明的累计得分,

则 Y 的所有可能取值为 0, 80, 100,

$$P(Y=0) = 1 - 0.6 = 0.4,$$

$$P(Y=80) = 0.6 \times (1 - 0.8) = 0.12,$$

$$P(Y=100) = 0.6 \times 0.8 = 0.48,$$

所以 Y 的分布列为

Y	0	80	100
P	0.4	0.12	0.48

$$E(Y) = 0 \times 0.4 + 80 \times 0.12 + 100 \times 0.48 = 57.6.$$

因为 $57.6 > 54.4$, 即 $E(Y) > E(X)$, 所以为使累计得分的期望最大, 小明应选择先回答 B 类问题.

微点突破

典例 4 (1) D (2) B [(1) 由题意可知, $E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3}a +$

$$2 \times \frac{1}{3} = \frac{a+2}{3},$$

所以 $D(X) = \left(0 - \frac{a+2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(a - \frac{a+2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(2 - \frac{a+2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \left[\frac{(a+2)^2}{9} + \frac{(2a-2)^2}{9} + \frac{(4-a)^2}{9}\right] = \frac{2}{9}[(a-1)^2 + 3]$, 又因为 $0 < a < 2$,

所以当 $a \in (0, 1)$ 时, $D(X)$ 随着 a 的增大而减小; 当 $a \in (1, 2)$ 时, $D(X)$ 随着 a 的增大而增大.

故选 D.

(2) 因为 $a+b+c=1$, 且 $a=b+c$,

$$\text{所以 } \begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = \frac{1}{2} - c, \end{cases} \text{ 可得 } 0 < c < \frac{1}{2},$$

$$\text{此时 } E(X) = 1 \times b - 1 \times c = \frac{1}{2} - 2c,$$

$$\text{所以 } D(X) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - 2c\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - c\right) \times \left(1 - \frac{1}{2} + 2c\right)^2 + c \times \left(-1 - \frac{1}{2} + 2c\right)^2 = \frac{1}{8} - c + 2c^2 + \left(\frac{1}{2} - c\right) \left(\frac{1}{4} + 2c + 4c^2\right) + c \times \left(\frac{9}{4} - 6c + 4c^2\right) = -4c^2 + 2c + \frac{1}{4} = -4\left(c - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2},$$

则当 $c = \frac{1}{4}$ 时, $D(X)$ 取得最大值, 最大值为 $\frac{1}{2}$.

故选 B.]

随堂·对点检测

1. A [由离散型随机变量 X 的分布列, 得 $0.3 - q + 0.12 + 0.9 - 2q + 0.16 = 1$, 解得 $q = 0.16$,

满足 $0.3 - q > 0, 0.9 - 2q > 0$,

$\therefore q = 0.16$. 故选 A.]

2. C [因为 $E(3X+1) = 10$, 所以 $3E(X) + 1 = 10$, 解得 $E(X) = 3$, 因为 $D(\sqrt{2}X + \sqrt{2}) = 2$,

所以 $2D(X) = 2$,

解得 $D(X) = 1$.

故选 C.]

3. 乙 [$E(X) = 0 \times 0.4 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.1 = 1, E(Y) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.5 + 2 \times 0.2 = 0.9$,

$\therefore E(Y) < E(X)$, $\therefore$ 乙技术较好.]

4. $\frac{61}{25}$ [X 的所有可能取值为 1, 2, 3, 则 $P(X=1) = C_5^1 \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{5}{125} = \frac{1}{25}, P(X=2) = C_5^2 \left(\frac{1}{5}\right)^3 \times 6 = \frac{60}{125} = \frac{12}{25}, P(X=3) = C_5^3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 \times 6 = \frac{60}{125} = \frac{12}{25}$, 所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{12}{25}$

$$\text{所以 } E(X) = 1 \times \frac{1}{25} + 2 \times \frac{12}{25} + 3 \times \frac{12}{25} = \frac{61}{25}.$$

第 78 课时 二项分布、超几何分布与正态分布

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1) 两个可能 n 重伯努利试验 (2) $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
二项分布 $B(n, p)$ (3) np $np(1-p)$

知识点 3 (1) 正态密度曲线 (2) $x = \mu$ $x = \mu \pm 1$

(3) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (4) 0.682 7 0.954 5 0.997 3

(5) μ σ^2

链教材·夯基固本

1. B [因为随机变量 $X \sim B\left(6, \frac{1}{3}\right)$,

所以 $D(X) = 6 \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$. 故选 B.]

2. $\frac{63}{256}$ [设事件 $A =$ “正面朝上”, 则 $P(A) = 0.5$. 用 X 表示事件 A 发生的次数, 则 $X \sim B(10, 0.5)$, 恰好出现 5 次正面朝上等价于 $X=5$, 于是 $P(X=5) = C_{10}^5 \times 0.5^{10} = \frac{252}{1\,024} = \frac{63}{256}$.]

3. $\frac{56}{165}$ [总共有 C_{12}^4 种选法, 甲班有 4 名候选人, 选择 2 名甲班同学和 2 名其他班同学的选法种数为 $C_4^2 C_8^2$, 则甲班恰有 2 名同学被选到的概率为 $\frac{C_4^2 C_8^2}{C_{12}^4} = \frac{56}{165}$.]

4. B [与 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 中对比可知 $\sigma = 2$. 故选 B.]

5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 0.5 0.682 7 0.158 7

[由题意知随机变量 $X \sim N(0, 1)$, 则 X 的密度函数为 $f(x) =$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. 因为 $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.682 7$, 根据正态密度

曲线的对称性, 可得 $P(X \leq 0) = 0.5$, 所以 $P(|X| \leq 1) = P(-1 \leq X \leq 1) \approx 0.682 7, P(X > 1) \approx \frac{1 - 0.682 7}{2} \approx 0.158 7$.]

6. 0.341 35 [由题意知随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.682 7$, 根据正态密度曲线的对称性, 可得 $P(\mu \leq X \leq \mu + \sigma) = \frac{1}{2} P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx \frac{1}{2} \times 0.682 7 = 0.341 35$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 解: (1) 由题意可得投到该杂志社的 1 篇稿件初审直接被录用的概率 $P_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

投到该杂志社的 1 篇稿件初审没有被录用, 复审被录用的概率

$$P_2 = C_2^1 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

故投到该杂志社的 1 篇稿件被录用的概率 $P = P_1 + P_2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$.

(2) 由题意可知 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 且 $X \sim B\left(3, \frac{2}{9}\right)$,

$$P(X=0) = C_3^0 \times \left(\frac{7}{9}\right)^3 = \frac{343}{729},$$

$$P(X=1) = C_3^1 \times \frac{2}{9} \times \left(\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{98}{243},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{2}{9}\right)^2 \times \frac{7}{9} = \frac{28}{243},$$

$$P(X=3) = C_3^3 \times \left(\frac{2}{9}\right)^3 = \frac{8}{729}.$$

则 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{343}{729}$	$\frac{98}{243}$	$\frac{28}{243}$	$\frac{8}{729}$

$$\text{故 } E(X) = 0 \times \frac{343}{729} + 1 \times \frac{98}{243} + 2 \times \frac{28}{243} + 3 \times \frac{8}{729} = \frac{2}{3}. \quad (\text{或 } E(X) = 3 \times \frac{2}{9} = \frac{2}{3})$$

多维变迁

1. **B** [质点从原点 O 出发, 移动到 1 处时, 向左移动了一次, 向右移动了两次,

记向左移动的次数为 X ,

$$\text{则 } P(X=1) = C_3^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

即经过 3 次移动后, 该质点位于 1 处的概率为 $\frac{4}{9}$.

故选 B.]

2. **BCD** [由 $X \sim B\left(6, \frac{1}{3}\right)$, 得 $P(X=k) =$

$$C_6^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{6-k}, k=0, 1, \dots, 6,$$

$$E(X) = 6 \times \frac{1}{3} = 2, D(X) = 6 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{对于 A, } P(X=2) = C_6^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4 > C_6^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^2 =$$

$P(X=4)$, 选项 A 错误;

对于 B, 由 $2X+Y=8$, 得 $Y=8-2X$,

则 $E(Y) = 8 - 2E(X) = 4$, 选项 B 正确;

对于 C, $D(Y) = D(8-2X) = 4D(X) = 4 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$, 选项 C

正确;

对于 D, $E(X^2) = D(X) + (E(X))^2 = \frac{4}{3} + 2^2 = \frac{16}{3}$, 选项 D

正确.

故选 BCD.]

考点二

典例 2 解: (1) 由题可知这 8 家乡村民宿中普通型民宿的房间不低于 10 间的有 6 家, 品质型民宿和普通型民宿的房间均不低于 10 间的有 4 家.

记“这 3 家的普通型民宿的房间均不低于 10 间”为事件 A , “这 3 家的品质型民宿的房间均不低于 10 间”为事件 B ,

$$\text{则 } P(A) = \frac{C_6^3}{C_8^3} = \frac{5}{14}, P(AB) = \frac{C_4^3}{C_8^3} = \frac{1}{14},$$

$$\text{所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{5}.$$

(2) 这 8 家乡村民宿中普通型民宿的房间不低于 15 间的有 3 家,

故 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$P(X=0) = \frac{C_3^0 C_5^4}{C_8^4} = \frac{1}{14},$$

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 C_5^3}{C_8^4} = \frac{3}{7},$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 C_5^2}{C_8^4} = \frac{3}{7},$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^3 C_5^1}{C_8^4} = \frac{1}{14},$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{1}{14} + 1 \times \frac{3}{7} + 2 \times \frac{3}{7} + 3 \times \frac{1}{14} = \frac{3}{2}.$$

多维变迁

解: (1) 记“取出的产品中次品不超过 1 件”为事件 A ,

$$\text{则 } P(A) = P(X=0) + P(X=1)$$

$$= \frac{C_3^0 C_{17}^{10}}{C_{20}^{10}} + \frac{C_3^1 C_{17}^9}{C_{20}^{10}} = \frac{2}{19} + \frac{15}{38} = \frac{19}{38} = \frac{1}{2},$$

即取出的产品中次品不超过 1 件的概率是 $\frac{1}{2}$.

$$(2) \because f(n) = P(X=3) = \frac{C_n^3 C_{20-n}^7}{C_{20}^{10}},$$

$$\therefore f(n-1) = \frac{C_{n-1}^3 C_{21-n}^7}{C_{20}^{10}},$$

$$\text{若 } \frac{f(n)}{f(n-1)} = \frac{C_n^3 C_{20-n}^7}{C_{n-1}^3 C_{21-n}^7} = \frac{n(14-n)}{(n-3)(21-n)} > 1,$$

$$\text{则 } n(14-n) > (n-3)(21-n),$$

解得 $n < 6.3$;

故当 $n < 6.3$ 时, $f(n) > f(n-1)$;

当 $n > 6.3$ 时, $f(n) < f(n-1)$.

故当 $n=6$ 时, $f(n)$ 取得最大值.

考点三

考向 1 典例 3 D [对于 A, σ 越小, 正态分布的图象越瘦长, 总体分布越集中在对称轴附近, 故 A 正确. 对于 B, C, 由于正态分布图象的对称轴为 $\mu=10$, 显然 B, C 正确. D 显然错误. 故选 D.]

考向 2 典例 4 BC [因为 $X \sim N(1.8, 0.1^2)$, 所以 $P(X > 2) = P(X > 1.8 + 2 \times 0.1)$.

因为 $P(X < 1.8 + 0.1) \approx 0.8413$,

所以 $P(X > 1.8 + 0.1) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587 < 0.2$,

而 $P(X > 2) = P(X > 1.8 + 2 \times 0.1) < P(X > 1.8 + 0.1) < 0.2$, B 正确, A 错误.

依题可知, $\bar{x} = 2.1, s^2 = 0.1^2$,

所以 $Y \sim N(2.1, 0.1^2)$,

故 $P(Y > 2) = P(Y > 2.1 - 0.1) = P(Y < 2.1 + 0.1) \approx 0.8413 > 0.5$, C 正确, D 错误. 故选 BC.]

考向 3 典例 5 解: (1) $\mu = \frac{1}{10} \times (87 + 87 + 88 + 92 + 95 + 97 +$

$98 + 99 + 103 + 104) = 95, \sigma^2 = \frac{1}{10} \times (64 + 64 + 49 + 9 + 0 + 4 + 9 + 16 + 64 + 81) = 36$, 则 $\sigma = 6$.

(2) ① 因为 $Z \sim N(95, 6^2)$, 所以 $P(Z > 107) = P(Z > \mu + 2\sigma) \approx 0.5 - \frac{0.9545}{2} = 0.02275$.

故 $X \sim B(10, 0.02275)$, 所以 $D(X) = 10 \times 0.02275 \times (1 - 0.02275) \approx 0.2223$.

所以 $D(2X+1) = 4D(X) \approx 0.89$.

② 因为 $Z \sim N(95, 6^2)$, 所以 $P(77 \leq Z \leq 113) = P(\mu - 3\sigma \leq Z \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$.

所以 5 个零件的内径中恰有一个不在 $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ 内发生的概率小于 0.3%, 为小概率事件.

因为 $76 \notin [77, 113]$, 所以根据 3σ 原则, 需要进一步调试.

微点突破

典例 6 解: (1) 质量超过 505 g 的产品的频率为 $5 \times 0.05 + 5 \times 0.01 = 0.3$, 所以质量超过 505 g 的产品数量为 $20 \times 0.3 = 6$ (件).

(2) 质量超过 505 g 的产品数量为 6 件, 则质量未超过 505 g 的产品数量为 14 件,

X 的取值可能为 0, 1, 2, 3, X 服从超几何分布,

$$P(X=0) = \frac{C_{14}^3}{C_{20}^3} = \frac{364}{1\,140} = \frac{91}{285},$$

$$P(X=1) = \frac{C_6^1 C_{14}^2}{C_{20}^3} = \frac{6 \times 91}{1\,140} = \frac{91}{190},$$

$$P(X=2) = \frac{C_6^2 C_{14}^1}{C_{20}^3} = \frac{15 \times 14}{1\,140} = \frac{7}{38},$$

$$P(X=3) = \frac{C_6^3}{C_{20}^3} = \frac{20}{1\,140} = \frac{1}{57},$$

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{91}{285}$	$\frac{91}{190}$	$\frac{7}{38}$	$\frac{1}{57}$

(3) 由质量超过 505 g 的产品的频率为 0.3,

故可估计从该流水线上任取 1 件产品质量超过 505 g 的产品的概率为 0.3, 从流水线上任取 5 件产品互不影响, 该问题可看成 5 次独立重复试验, 即 $Y \sim B(5, 0.3)$,

则 $E(Y) = 5 \times 0.3 = 1.5$, $D(Y) = 5 \times 0.3 \times (1 - 0.3) = 1.05$.

随堂·对点检测

1. B [由随机变量 $X \sim N(90, 10^2)$,

可得 $P(X \geq 80) = P(80 \leq X < 90) + P(X \geq 90) \approx \frac{1}{2} \times 0.6827 + 0.5 = 0.84135$. 故选 B.]

2. D [由题意知, 第 12 次取到红球, 前 11 次中恰有 9 次取到红球, 2 次取到白球, 由每次取到红球的概率为 $\frac{3}{8}$, 取到白球的概率为 $\frac{5}{8}$, 得 $P(X=12) = C_{11}^9 \left(\frac{3}{8}\right)^9 \times \left(\frac{5}{8}\right)^2 \times \frac{3}{8} = C_{11}^9 \left(\frac{3}{8}\right)^{10} \times \left(\frac{5}{8}\right)^2$. 故选 D.]

3. C [由题意, X 服从超几何分布, 故 $P(X=2) = \frac{C_3^2 C_7^2}{C_{10}^4} = \frac{3}{10}$. 故选 C.]

4. AC [由题意知 $P(X < \mu + \sigma) = P(X > \mu - \sigma)$, 故 A 正确; $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + \sigma) = P(\mu - \sigma < X < \mu + 2\sigma)$, 故 B 错误; $P(X < \mu + \sigma)$ 为定值, 不随 μ, σ 的变化而变化, 故 C 正确; $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + \sigma)$ 为定值, 也不随 μ, σ 的变化而变化, 故 D 错误. 故选 AC.]

5. 95.45% [设误差为 X , 则 $X \sim N(0, 4)$, 所以 $P(|X| \leq 4) = P(-4 \leq X \leq 4) = P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$, 故合格率约为 95.45%.]

* 第 79 课时 概率与统计的综合问题(进阶课)

类型一

典例 1 解: (1) 根据题意知, $(m + 2m + 0.015 + 0.020 \times 2 + 0.030) \times 10 = 1$, 解得 $m = 0.005$.

(2) 若以每一组数据的中间值为代表, 则估计本次考试的平均成绩为 $\bar{x} = 45 \times 0.05 + 55 \times 0.15 + 65 \times 0.2 + 75 \times 0.3 + 85 \times 0.2 + 95 \times 0.1 = 72.5$ (分).

(3) 根据频率分布直方图知, 全校同学中成绩在 $[40, 50)$, $[50, 60)$, $[60, 70)$ 各段的同学人数比例为 1:3:4, 所以样本中三段分数的同学人数分别为 1, 3, 4,

所以随机变量 ξ 的可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$\text{则 } P(\xi=0) = \frac{C_5^3}{C_8^3} = \frac{5}{28}, P(\xi=1) = \frac{C_5^2 C_3^1}{C_8^3} = \frac{15}{28},$$

$$P(\xi=2) = \frac{C_5^1 C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56}, P(\xi=3) = \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}.$$

所以随机变量 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

$$E(\xi) = 0 \times \frac{5}{28} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{15}{56} + 3 \times \frac{1}{56} = \frac{9}{8}.$$

类型二

$$\text{典例 2 解: (1) } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5 \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5 \bar{x}^2} =$$

$$\frac{85.2 - 5 \times 3 \times 4.7}{55 - 5 \times 3^2} = 1.47, \text{ 则 } \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x} = 4.7 - 1.47 \times 3 =$$

0.29, 所以 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y} = 1.47x + 0.29$,

当 $x=6$ 时, $\hat{y} = 1.47 \times 6 + 0.29 = 9.11$.

故预测第 6 天的点击量约为 9.11 万次.

(2) 设事件 A 为“用户来自移动端”, 事件 B 为“用户甲下单”,

则 $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{10} + \frac{2}{5} \times$

$$\frac{1}{2} = \frac{19}{50}, \text{ 所以 } P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{3}{10}}{\frac{19}{50}} = \frac{9}{19}, \text{ 故如}$$

果用户甲点击该商品后最终下单了, 用户甲来自移动端的概率为 $\frac{9}{19}$.

类型三

典例 3 解: (1) 零假设为 H_0 : 周平均锻炼时长与年龄无关.

由 2×2 列联表中的数据,

$$\text{可得 } \chi^2 = \frac{200 \times (40 \times 75 - 25 \times 60)^2}{100 \times 100 \times 65 \times 135} \approx 5.128,$$

$$\therefore \chi^2 \approx 5.128 > 3.841 = x_{0.05},$$

根据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 我们推断 H_0 不成立, 即认为周平均锻炼时长与年龄有关, 此推断犯错误的概率不大于 0.05.

(2) 抽取的 5 人中, 周平均锻炼时长少于 4 小时的有 $5 \times \frac{40}{100} =$

2 (人), 不少于 4 小时的有 $5 \times \frac{60}{100} = 3$ (人),

所以 X 所有可能的取值为 1, 2, 3,

$$\text{所以 } P(X=1) = \frac{C_3^1 C_2^2}{C_5^3} = \frac{3}{10}, P(X=2) = \frac{C_3^2 C_2^1}{C_5^3} = \frac{3}{5}, P(X=$$

$$3) = \frac{C_3^3 C_2^0}{C_5^3} = \frac{1}{10},$$

所以随机变量 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

$$E(X) = 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{9}{5}.$$

规范答题六

典例 (1) 200 180 0.9

$$(2) \frac{1\,000 \times (20 \times 20 - 180 \times 780)^2}{800 \times 200 \times 200 \times 800} \text{ 不成立 有关}$$