

答案详解

课时作业(一)

- D** $[U=\{0,1,2,3,4,5\}, A=\{0,1,2\}, B=\{2,3,4\},$
则 $\complement_U B=\{0,1,5\}, A \cap (\complement_U B)=\{0,1\}.$
故选 D.]
- A** $[\because A=\{1,2\}, B=\{x^2-y^2 \mid x, y \in A\},$
 $\therefore B=\{-3,0,3\}, \therefore 1 \notin B, 0 \in B, 3 \in B, -3 \in B, A$ 错误.
故选 A.]
- D** [根据题意, A 是 $\{1,2,3\}$ 的真子集, 且 A 中至少有一个奇数,
则这样的集合 A 有 $\{1\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}$, 共 5 个,
故选 D.]
- D** [阴影部分表示的集合为 $(\complement_U A) \cap B = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\} \cap$
 $\{x \mid -2 \leq x \leq 3\} = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}.$]
- D** [由题可得 $B=\{-1,0,1\}$, 所以 $A \cap B=\{0,1\}$, 故选 D.]
- C** [由题意, 因为 $A \subseteq B$,
所以 $\begin{cases} 1+m>0, \\ 1-2m>0 \end{cases} \Rightarrow -1 < m < \frac{1}{2}.$
故选 C.]
- CD** [10 以内的质数组成的集合是 $\{2,3,5,7\}$, 故 A 正确;
2,3 组成的集合可表示为 $\{2,3\}$ 或 $\{3,2\}$, 故 B 正确;
 $x^2-4x+4=0$ 的所有解组成的集合是 $\{2\}$, 故 C 错误;
 $\emptyset$: 不含有任何元素的集合, $\{\emptyset\}$: 仅含有一个元素 $\emptyset$ 的集合,
故 D 错误. 故选 CD.]
- BC** [对于 A, 若 $-1 \in M$, 则 $\frac{-1}{-1}=1 \in M$, 则 $1+(-1)=0 \in$
 M , 显然 $0 \notin M$, A 错误;
对于 B, M 是非空集合, 若 $x \in M$, 则 $\frac{x}{x}=1 \in M, 1+1=2 \in M,$
 $1+2=3 \in M$, 所以 $2025 \in M$, B 正确;
对于 C, 因为 $1 \in M, y \in M$, 所以 $\frac{1}{y} \in M$, 所以 $\frac{x}{1}=xy \in M$, C
正确;
对于 D, 若 $x=1, y=2$, 则 $x-y=-1 \notin M$, D 错误. 故选 BC.]
- BCD** $[M=\{x \mid x \geq 2\}, N=\{x \mid y=\ln(2x-6)\}=\{x \mid x > 3\},$
 $M \cap N=\{x \mid x > 3\}=N$, A 错误,
 $M \cup N=\{x \mid x \geq 2\}=M$, B 正确,
 $\complement_{\mathbb{R}} M=\{x \mid x < 2\}, \complement_{\mathbb{R}} N=\{x \mid x \leq 3\},$
 $(\complement_{\mathbb{R}} N) \cap M=\{x \mid x \leq 3\} \cap \{x \mid x \geq 2\}=\{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$, C 正确,
 $(\complement_{\mathbb{R}} M) \cap N=\{x \mid x < 2\} \cap \{x \mid x > 3\}=\emptyset$, D 正确.
故选 BCD.]
- $\{x \mid -2 \leq x \leq -1, \text{ 或 } 0 \leq x \leq 2\}$ $[\because \text{全集 } U=\{x \mid -2 \leq x \leq$
 $3\}, \text{集合 } A=\{x \mid -1 < x < 0, \text{ 或 } 2 < x \leq 3\},$
 $\therefore \complement_U A=\{x \mid -2 \leq x \leq -1, \text{ 或 } 0 \leq x \leq 2\}.$]
- 4** [根据题意, $A \cap B$ 中的元素是直线 $x+y=8$ 上满足 x, y
 $\in \mathbb{N}^*$ 且 $y \geq x$ 的点, 即点 $(1,7), (2,6), (3,5), (4,4)$, 共
4 个.]
- 18** [当 $x=0, y=2$ 或 3 时, 对应的 $z=0$,
当 $x=1, y=2$ 时, $z=6$, 当 $x=1, y=3$ 时, $z=12$,

即集合 $A \odot B = \{0, 6, 12\}$,
故集合 $A \odot B$ 的所有元素之和为 18.]

课时作业(二)

- C** [命题“ $\forall x > 0, e^x + 1 \leq 3x$ ”为全称量词命题,
根据全称量词命题的否定可得原命题的否定为 $\exists x > 0, e^x +$
 $1 > 3x.$
故选 C.]
- C** [根据幂函数的性质和指数函数的性质, $a^3=b^3$ 和 $3^a=3^b$
都当且仅当 $a=b$ 时成立, 所以二者互为充要条件.
故选 C.]
- D** $[x=\sqrt{2}$ 是无理数, $x^2=2$ 是有理数, A 错误;
当 $x=-2, y=-1$ 时, $xy > 0$, 但 $x+y=-3 < 0$, 不是充要条
件, B 错误;
命题“ $\exists x \in \mathbb{R}$, 使得 $x^2+1 > 0$ ”的否定是“ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+1 \leq 0$ ”,
C 错误;
“ $1 < x < 3$ ”的必要不充分条件是“ $m-2 < x < m+2$ ”, 则
 $\begin{cases} m-2 \leq 1, \\ m+2 \geq 3, \end{cases}$ 两个不等式的等号不同时取到, 解得 $1 \leq m \leq 3$, D
正确.]
- C** [因为命题“ $\forall x \in [0, 2], x^2-m \geq 0$ ”是假命题,
则“ $\exists x \in [0, 2], x^2-m < 0$ ”是真命题,
即 $\exists x \in [0, 2], m > x^2,$
又 $0 \leq x^2 \leq 4$,
则当 $x \in [0, 2]$ 时, $m > (x^2)_{\min} = 0.$
故选 C.]
- C** [对于命题 $q, x^3=x$, 解得 $x=0, x=-1$ 或 $x=1 > 0$,
所以 $q: \exists x > 0, x^3=x$, 为真命题, $\neg q$ 为假命题;
对于命题 p , 当 $x=0$ 时, $|x|=0$,
所以 $p: \forall x \in \mathbb{R}, |x| > 0$ 为假命题, $\neg p$ 为真命题;
所以 $\neg p$ 和 q 都是真命题.
故选 C.]
- B** [由 $x^2-x-6 > 0$, 得 $x > 3$ 或 $x < -2, p: x \in (-\infty, -2)$
 $\cup (3, +\infty),$
由 $4x+m < 0$, 得 $x < -\frac{m}{4}, q: x \in (-\infty, -\frac{m}{4})$,
若 p 是 q 的必要不充分条件, 则 $q \subsetneq p$,
即 $-\frac{m}{4} \leq -2$, 解得 $m \geq 8$,
故实数 m 的取值范围为 $[8, +\infty).$
故选 B.]
- BC** [命题 p 为存在量词命题, 由 $6x^2-7x+2 \leq 0$, 得 $\frac{1}{2} \leq x \leq$
 $\frac{2}{3}$, 所以 p 为假命题. $\neg p: \forall x \in \mathbb{N}, 6x^2-7x+2 > 0.$
故选 BC.]
- BC** $[(x-2)(x+2) > 0, \text{ 即 } x < -2 \text{ 或 } x > 2,$
所以 $x > 2$ 或 $x < -2$ 是 $(x-2)(x+2) > 0$ 的充要条件, 故 A
错误;
 $x < -3$ 或 $x > 3$ 和 $x \geq 3$ 是 $(x-2)(x+2) > 0$ 的充分不必要
条件, 故 B, C 正确;

$x \geq 0$ 是 $(x-2)(x+2) > 0$ 的既不充分也不必要条件, 故 D 错误.

故选 BC.]

9. **ABD** [由于原命题和其否定的真假完全相反, 所以题干中“下列命题的否定是假命题”等价于“下列命题是真命题”. 对于 A, 当 $m=0$ 时, $\sqrt{0+1}=1 \in \mathbf{N}$, 则 A 中命题为真命题, 故 A 符合题意; 选项 B 显然符合题意; 对于 C, 因为 $\Delta = a^2 + 4 > 0$ 恒成立, 所以不存在 $a \in \mathbf{R}$, 使得一元二次方程 $x^2 - ax - 1 = 0$ 没有实数根, 故 C 不符合题意; 选项 D 显然符合题意. 故选 ABD.]

10. $x = \frac{\pi}{2}$ (答案不唯一) [当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x = 1$, 由 $\sin x = 1$ 可得 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 故“ $\sin x = 1$ ”的一个充分不必要条件是“ $x = \frac{\pi}{2}$ ”.]

11. $(3, +\infty)$ [因为“若 $x > 1$, 则 $2x + 1 > \lambda$ ”是假命题, 所以“ $\exists x > 1, 2x + 1 \leq \lambda$ ”是真命题. 因为当 $x > 1$ 时, $2x + 1 > 3$, 所以实数 λ 的取值范围是 $(3, +\infty)$.]

12. $\left\{a \mid 0 \leq a \leq \frac{1}{2}\right\}$ [设 $A = \left\{x \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 1\right\}, B = \{x \mid a \leq x \leq a+1\}$, 由 p 是 q 的充分不必要条件, 可知 $A \subsetneq B$,
 $\therefore \begin{cases} a \leq \frac{1}{2}, \\ a+1 > 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a < \frac{1}{2}, \\ a+1 \geq 1, \end{cases}$ 解得 $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$, 故实数 a 的取值范围是 $\left\{a \mid 0 \leq a \leq \frac{1}{2}\right\}$.]

课时作业(三)

1. **A** [因为 $M - N = 2a(a-2) - (a+1)(a-3) = a^2 - 2a + 3 = (a-1)^2 + 2 > 0$, 所以 $M > N$. 故选 A.]
2. **C** [$\because x > y > z, \therefore 3x > x + y + z = 0, 3z < x + y + z = 0,$
 $\therefore x > 0, z < 0.$
 由 $\begin{cases} x > 0, \\ y > z, \end{cases}$ 得 $xy > xz$. 故选 C.]
3. **D** [因为 $a > b > 0, c > d$,
 当 $c=0, d=-1$ 时, A 选项显然错误;
 当 $c=-1, d=-2, a=2, b=1$ 时, $ac=-2=bd=-2$, B 选项错误;
 当 $c=0$ 时, $ac^2=0=bc^2$, C 选项错误;
 因为 $d^2+1 > 0$, 又因为 $a > b > 0$, 所以 $\frac{a}{d^2+1} > \frac{b}{d^2+1}$, D 选项正确.
 故选 D.]
4. **C** [对于 A, $\because 15 < b < 18, \therefore \frac{1}{18} < \frac{1}{b} < \frac{1}{15}$, 又 $6 < a < 60$,
 $\therefore \frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 4$, $\therefore$ A 错误; 对于 B, $\because 6 < a < 60, 15 < b < 18$,
 $\therefore 36 < a + 2b < 96$, $\therefore$ B 错误; 对于 C, $\because 15 < b < 18$,
 $\therefore -18 < -b < -15$, 又 $6 < a < 60, \therefore -12 < a - b < 45$, $\therefore$ C 正确; 对于 D, $\because 6 < a < 60, 15 < b < 18, \therefore 21 < a + b < 78$, 由 A 选项知 $\frac{1}{18} < \frac{1}{b} < \frac{1}{15}, \therefore \frac{7}{6} < \frac{a+b}{b} < \frac{26}{5}, \therefore$ D 错误.
 故选 C.]
5. **C** [因为 $3a + b = 2(a + b) + (a - b)$,
 又 $-3 \leq a + b \leq -2, 1 \leq a - b \leq 4$,

所以 $-6 \leq 2(a + b) \leq -4$,

即 $-5 \leq 2(a + b) + a - b \leq 0$,

所以 $3a + b$ 的取值范围是 $[-5, 0]$.

故选 C.]

6. **B** [因为 $a + 2b + 4c = 0, a < b < c$, 所以 $a < 0, c > 0$, 由 $a + 2b + 4c = 0$ 得 $c = -\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b$, 则 $-\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b > 0$, 解得 $\frac{b}{a} > -\frac{1}{2}$, 由 $b < c$ 得 $b < -\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b$, 整理得 $\frac{1}{4}a < -\frac{3}{2}b$, 解得 $\frac{b}{a} > -\frac{1}{6}$, 由 $a < b$ 得 $\frac{b}{a} < 1$, 综上, $-\frac{1}{6} < \frac{b}{a} < 1$. 故选 B.]

7. **ACD** [$\begin{cases} c < d \Rightarrow -c > -d, \\ a > b \end{cases} \Rightarrow a - c > b - d$, A 正确;
 $\begin{cases} c < d < 0 \Rightarrow -c > -d > 0, \\ a > b > 0 \end{cases} \Rightarrow -ac > -bd$, 即 $ac < bd$, B 错误;
 $a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2}$, C 正确;
 $\begin{cases} a > b > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}, \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{c}{a} < \frac{c}{b}$, D 正确.
 故选 ACD.]

8. **ABD** [对于 A, $\because a > b, \therefore a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} > 0, \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2} > 0, \therefore a > \frac{a+b}{2} > b$, 故 A 正确;
 对于 B, $\because a > b > 0, \therefore \frac{a}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} > 1, \frac{\sqrt{ab}}{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} > 1, \therefore a > \sqrt{ab} > b$, 故 B 正确;

对于 C, 令 $a=2, b=3$, 满足 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 但不满足 $a > 0, b < 0$, 故 C 不正确;

对于 D, $\because a > b > 0, c > 0, \therefore \frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+c} = \frac{a(b+c) - b(a+c)}{b(b+c)} = \frac{c(a-b)}{b(b+c)} > 0$, 即 $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$, 故 D 正确. 故选 ABD.]

9. **ACD** [实数 x, y 满足 $1 < x < 6, 2 < y < 3$,
 由不等式的同向可加性和同向同正可乘性, 有 $3 < x + y < 9$,
 $2 < xy < 18$, A, C 选项正确;
 由 $-3 < -y < -2$, 得 $-2 < x - y < 4$, B 选项错误;
 由 $\frac{1}{3} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2}$, 得 $\frac{1}{3} < \frac{x}{y} < 3$, D 选项正确. 故选 ACD.]
10. $ab < ab^2 < a$ [因为 $a > 0, -1 < b < 0$,
 所以 $ab < 0, 0 < b^2 < 1, 0 < ab^2 < a$,
 故 $ab < ab^2 < a$.]

11. $a = -1, b = 2$ (答案不唯一) [容易发现, 若将①式转化为②式,
 需使 $(a+b)ab < 0$, 即 $a+b$ 与 ab 异号,
 显然应使 $a+b > 0, ab < 0$,
 当 $a < 0, b > 0$ 时, 要使 $a+b > 0$,
 则 $|a| < |b|$, 可取 $a = -1, b = 2$;
 当 $a > 0, b < 0$ 时, 要使 $a+b > 0$,
 则 $|a| > |b|$, 可取 $a = 2, b = -1$.
 综上, 易知取任意两个异号的实数, 且正数的绝对值大于负数的绝对值皆为合理答案.]

12. $(-\pi, \frac{\pi}{6})$ [设 $2\alpha - \beta = x(\alpha + \beta) + y(\alpha - \beta) = (x+y)\alpha +$

$$(x-y)\beta, x, y \in \mathbf{R},$$

$$\text{则 } \begin{cases} x+y=2, \\ x-y=-1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=\frac{3}{2}, \end{cases}$$

$$\text{所以 } 2\alpha - \beta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{3}{2}(\alpha - \beta),$$

$$\text{因为 } \pi < \alpha + \beta < \frac{4\pi}{3}, -\pi < \alpha - \beta < -\frac{\pi}{3},$$

$$\text{所以 } \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}(\alpha + \beta) < \frac{2\pi}{3}, -\frac{3\pi}{2} < \frac{3}{2}(\alpha - \beta) < -\frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以 } -\pi < 2\alpha - \beta < \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{则 } 2\alpha - \beta \text{ 的取值范围为 } \left(-\pi, \frac{\pi}{6}\right).$$

课时作业(四)

1. **B** [因为 $m, n \in (0, +\infty)$, 且 $m + 2n = 1$, 所以 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n} = \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n}\right)(m + 2n) = 5 + \frac{2n}{m} + \frac{2m}{n} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{2n}{m} \cdot \frac{2m}{n}} = 9$, 当且仅当 $\frac{2n}{m} = \frac{2m}{n}$, 即 $m = n = \frac{1}{3}$ 时取等号, 所以 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n}$ 的最小值为 9. 故选 B.]

2. **D** [对 A, 当且仅当 $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, 即 $x = 1$ 时等号成立;

$$\text{对 B, 当且仅当 } |x| = \frac{2}{|x|}, \text{ 即 } x = \pm\sqrt{2} \text{ 时等号成立;}$$

$$\text{对 C, 当且仅当 } -\frac{4}{x} = -\frac{x}{16}, \text{ 即 } x = -8 \text{ 时等号成立;}$$

$$\text{对 D, 当且仅当 } \sqrt{x^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}},$$

$$\text{即 } x^2 = -2, \text{ 无解, 等号不成立.}]$$

3. **B** [对于选项 A, 当 $x < 0$ 时, 选项 A 显然错误;

$$\text{对于选项 B, 因为 } 2^x + 2^{-x} = 2^x + \frac{1}{2^x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot \frac{1}{2^x}} = 2,$$

$$\text{当且仅当 } 2^x = \frac{1}{2^x}, \text{ 即 } x = 0 \text{ 时取等号, B 正确;}$$

$$\text{对于选项 C, 易知 } x^2 > 0, \text{ 则 } x^2 + \frac{4}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{4}{x^2}} = 4,$$

$$\text{当且仅当 } x^2 = \frac{4}{x^2}, \text{ 即 } x = \pm\sqrt{2} \text{ 时取等号, C 错误;}$$

$$\text{对于选项 D, 易知 } \sqrt{x^2 + 2} \geq \sqrt{2},$$

$$\text{又 } \sqrt{x^2 + 2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

$$\geq 2\sqrt{\sqrt{x^2 + 2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}} = 2,$$

$$\text{当且仅当 } \sqrt{x^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} \text{ 时取等号, 显然等号不成立,}$$

$$\text{所以 } \sqrt{x^2 + 2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} > 2, \text{ D 错误.}$$

故选 B.]

4. **B** [$\because a > 0, b > 0, a^2 - 2ab + 4 = 0$,

$$\text{则 } b = \frac{a}{2} + \frac{2}{a}, \therefore b - \frac{a}{4} = \frac{a}{2} + \frac{2}{a} - \frac{a}{4} = \frac{a}{4} + \frac{2}{a} \geq$$

$$2\sqrt{\frac{a}{4} \cdot \frac{2}{a}} = \sqrt{2},$$

$$\text{当且仅当 } \frac{a}{4} = \frac{2}{a}, \text{ 即 } a = 2\sqrt{2} \text{ 时, 等号成立, 此时 } b = \frac{3\sqrt{2}}{2}.]$$

5. **C** [因为正数 x, y 满足 $xy = 1$,

$$\text{由 } \frac{x^2 + y^2 + 6}{x + y} = \frac{(x + y)^2 + 4}{x + y} = (x + y) + \frac{4}{x + y}$$

$$\geq 2\sqrt{(x + y) \times \frac{4}{x + y}} = 4,$$

$$\text{当且仅当 } x = y = 1 \text{ 时取等号, 此时 } \frac{x^2 + y^2 + 6}{x + y} \text{ 取得最小值 } 4.$$

故选 C.]

6. **D** [因为正实数 a, b 满足 $a + b = 1$,

$$\text{所以 } \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} + \frac{b}{a} = \frac{a + b}{b} + \frac{a + b}{ab} + \frac{b}{a}$$

$$= \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + 1$$

$$= \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a + b}{b} + \frac{a + b}{a} + 1$$

$$= 3 + \frac{2a}{b} + \frac{2b}{a} \geq 3 + 2\sqrt{\frac{2a}{b} \cdot \frac{2b}{a}} = 7, \text{ 当且仅当 } \frac{2a}{b} = \frac{2b}{a},$$

$$\text{即 } a = b = \frac{1}{2} \text{ 时取等号.}$$

故选 D.]

7. **BD** [A 选项, 由选项可知 a 与 b 同号, 当 $a > 0$ 且 $b > 0$ 时, 由

$$\text{基本不等式可知 } \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ 成立, 当 } a < 0 \text{ 且 } b < 0 \text{ 时, } \frac{a + b}{2} <$$

$$0, \sqrt{ab} > 0, \text{ 该不等式不成立, 故 A 选项错误;}$$

$$\text{B 选项, 当 } a + b > 0 \text{ 时, } \frac{a + b}{2} > 0, \text{ 则 } \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}\right)^2$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + 2ab - 2a^2 - 2b^2}{4} = \frac{-(a - b)^2}{4} \leq 0, \text{ 即 } \frac{a + b}{2} \leq$$

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \text{ 成立, 当 } a + b \leq 0 \text{ 时, 原不等式恒成立, 故 B 选项}$$

正确;

$$\text{C 选项, 当 } a + b > 0 \text{ 时, } 2ab - \frac{(a + b)^2}{2} = \frac{-(a - b)^2}{2} \leq 0, \text{ 即}$$

$$2ab \leq \frac{(a + b)^2}{2}, \frac{2ab}{a + b} \leq \frac{a + b}{2} \text{ 成立, 当 } a + b < 0 \text{ 时, } 2ab -$$

$$\frac{(a + b)^2}{2} = \frac{-(a - b)^2}{2} \leq 0, \text{ 即 } 2ab \leq \frac{(a + b)^2}{2}, \frac{2ab}{a + b} \geq \frac{a + b}{2}, \text{ 故}$$

C 选项错误;

$$\text{D 选项, 当 } a, b \in \mathbf{R} \text{ 时, } ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \text{ 恒成立, 故 D 选项正确.}]$$

8. **ABD** [对于 A, $\frac{y}{x} + \frac{3}{y} = \frac{y}{x} + \frac{x + 2y}{y} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 2 \geq$

$$2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y}} + 2 = 4, \text{ 当且仅当 } x = y = 1 \text{ 时取等号, 故 A 正确;}$$

$$\text{对于 B, } xy = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2y \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{x + 2y}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{9}{4} = \frac{9}{8}, \text{ 当}$$

$$\text{且仅当 } x = 2y, \text{ 即 } x = \frac{3}{2}, y = \frac{3}{4} \text{ 时取等号, 故 B 正确; 对于 C,}$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{2y})^2 = x + 2y + 2\sqrt{2xy} \leq 3 + 2\sqrt{2 \times \frac{9}{8}} = 3 + 3 = 6,$$

$$\text{则 } \sqrt{x} + \sqrt{2y} \leq \sqrt{6}, \text{ 当且仅当 } x = 2y, \text{ 即 } x = \frac{3}{2}, y = \frac{3}{4} \text{ 时取等}$$

号,故 C 错误;对于 D, $x^2+4y^2=(x+2y)^2-4xy\geq 9-4\times\frac{9}{8}=\frac{9}{2}$, 当且仅当 $x=\frac{3}{2}, y=\frac{3}{4}$ 时取等号,故 D 正确. 故选 ABD.]

9. ABD [已知 $x>0, y>0, \therefore 2x+y=xy, \therefore \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=1$.

$\therefore \frac{2}{x}+\frac{2}{y}>\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=1$, 故 A 正确;

$x+2y+xy=3x+3y=(3x+3y)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)=9+\frac{3y}{x}+$

$\frac{6x}{y}\geq 9+2\sqrt{\frac{3y}{x}\cdot\frac{6x}{y}}=9+6\sqrt{2}$,

当且仅当 $\sqrt{2}x=y$, 即 $x=\sqrt{2}+1, y=2+\sqrt{2}$ 时等号成立, 故 B 正确;

$2x+y=xy\geq 2\sqrt{2xy}$, 解得 $xy\geq 8$,

当且仅当 $y=2x$, 即 $x=2, y=4$ 时等号成立, 故 C 错误;

由 $2x+y=xy$, 得 $(x-1)(y-2)=2$,

由题意知, $x-1>0, y-2>0$,

则 $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{y-2}\geq 2\sqrt{\frac{1}{x-1}\cdot\frac{2}{y-2}}=2$,

当且仅当 $\frac{1}{x-1}=\frac{2}{y-2}$, 即 $x=2, y=4$ 时等号成立, 故 D 正确.]

10. $\frac{1}{16}$ [$y=\frac{1}{2}x(1-2x)=\frac{1}{4}\cdot 2x(1-2x)\leq \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{2x+(1-2x)}{2}\right]^2=\frac{1}{16}$, 当且仅当 $2x=1-2x$, 即 $x=\frac{1}{4}$ 时等号成立.]

11. 4 [由已知, $b+\frac{1}{a}=\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)=2+ab+\frac{1}{ab}\geq 2+2\sqrt{ab\cdot\frac{1}{ab}}=4$, 当且仅当 $ab=\frac{1}{ab}$, 即 $a=\frac{1}{2}, b=2$ 时取等号, 所以 $b+\frac{1}{a}$ 的最小值为 4.]

12. $\frac{4}{5}$ [法一: $\because 5x^2y^2+y^4=1$, $\therefore y\neq 0$ 且 $x^2=\frac{1-y^4}{5y^2}>0, \therefore 0<y^2<1$, $\therefore x^2+y^2=\frac{1-y^4}{5y^2}+y^2=\frac{1}{5y^2}+\frac{4y^2}{5}\geq 2\sqrt{\frac{1}{5y^2}\cdot\frac{4y^2}{5}}=\frac{4}{5}$, 当且仅当 $\frac{1}{5y^2}=\frac{4y^2}{5}$, 即 $x^2=\frac{3}{10}, y^2=\frac{1}{2}$ 时取等号, $\therefore x^2+y^2$ 的最小值为 $\frac{4}{5}$.

法二: 由 $5x^2y^2+y^4=1$,

可得 $y^2(5x^2+y^2)=1$,

即 $4y^2(5x^2+y^2)=4$,

又 $4=4y^2(5x^2+y^2)\leq \left[\frac{4y^2+(5x^2+y^2)}{2}\right]^2=\frac{25}{4}(x^2+y^2)^2$,

$\therefore (x^2+y^2)^2\geq \frac{16}{25}, \therefore x^2+y^2\geq \frac{4}{5}$,

当且仅当 $5x^2+y^2=4y^2=2$, 即 $x^2=\frac{3}{10}, y^2=\frac{1}{2}$ 时取等号,

$\therefore x^2+y^2$ 的最小值是 $\frac{4}{5}$.]

课时作业(五)

1. C [因为 $|MF_1|+|MF_2|=6, |MF_1|>0, |MF_2|>0$,

所以 $|MF_1|\cdot|MF_2|\leq \frac{(|MF_1|+|MF_2|)^2}{4}=\frac{6^2}{4}=9$,

当且仅当 $|MF_1|=|MF_2|=3$ 时, 等号成立,

所以 $|MF_1|\cdot|MF_2|$ 的最大值为 9. 故选 C.]

2. A [由 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=2$, 可得 $\frac{1}{2x}+\frac{2}{y}=1$,

又因为 $x, y>0$,

则 $x+y=(x+y)\cdot\left(\frac{1}{2x}+\frac{2}{y}\right)=\frac{1}{2}+2+\frac{y}{2x}+\frac{2x}{y}\geq \frac{5}{2}+$

$2\sqrt{\frac{y}{2x}\cdot\frac{2x}{y}}=\frac{9}{2}$,

当且仅当 $\frac{y}{2x}=\frac{2x}{y}$, 即 $y=2x=3$ 时取等号,

所以 $(x+y)_{\min}=\frac{9}{2}$,

由 $x+y\geq m$ 恒成立, 可得 $m\leq (x+y)_{\min}=\frac{9}{2}$,

即实数 m 的取值范围为 $(-\infty, \frac{9}{2}]$.]

3. C [设天平的左臂长为 a cm, 右臂长为 b cm, 放在左盘中的黄金为 x g, 放在右盘中的黄金为 y g,

则由天平的平衡条件可得

$\begin{cases} 5a=by, \\ (5+x)a=(y+5)b, \end{cases}$ 解得 $x=\frac{5b}{a}, y=\frac{5a}{b}$.

所以 $x+y\geq 2\sqrt{xy}=10$. 当且仅当 $x=y$, 即 $a=b$ 时, 取等号, 而天平的两臂不等长, 即 $a\neq b$, 则上述不等式等号无法取得,

因此 $x+y>2\sqrt{xy}=10$, 即顾客购得的黄金大于 10 g. 故 C 正确.]

4. ABC [由 $x>0, y>0$, 得 $xy>0$,

$\frac{mxy}{m-1}\leq x+2y$ 恒成立,

即 $\frac{m}{m-1}\leq \frac{x+2y}{xy}=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$ 恒成立,

又 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)(2x+y)=5+\frac{2y}{x}+\frac{2x}{y}\geq 5+$

$2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{2x}{y}}=9$,

当且仅当 $x=y=\frac{1}{3}$ 时, 等号成立,

故 $\frac{m}{m-1}\leq 9$, 即 $\frac{m}{m-1}-9=\frac{-8m+9}{m-1}\leq 0$,

即 $\begin{cases} (m-1)(-8m+9)\leq 0, \\ m-1\neq 0, \end{cases}$

解得 $m<1$ 或 $m\geq \frac{9}{8}$.]

5. AC [对于 A, $x>0, x^2+\frac{2}{x}=x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\geq$

$3\sqrt{x^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}=3$, 当且仅当 $x^2=\frac{1}{x}$, 即 $x=1$ 时, 等号成立, 故 A 正确; 对于 B, 因为 $0<x<1$, 所以 $1-x>0, x^2(1-x)=\frac{1}{2}x\cdot x\cdot(2-2x)\leq \frac{1}{2}\left(\frac{x+x+2-2x}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$, 当且仅当

$x=2-2x$, 即 $x=\frac{2}{3}$ 时, 等号成立, 故 B 错误; 对于 C, 因为 $x>0$, 所以 $2x+\frac{1}{x^2}=x+x+\frac{1}{x^2}\geq 3\sqrt{x\cdot x\cdot \frac{1}{x^2}}=3$, 当且仅当 $x=1$ 时等号成立, 故 C 正确; 对于 D, 因为 $0<x<1$, 所以 $1-x>0$, $x(1-x)^2=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot (1-x)\cdot (1-x)\leq \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1-x+1-x}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$, 当且仅当 $2x=1-x$, 即 $x=\frac{1}{3}$ 时等号成立, 故 D 错误. 故选 AC.]

6. 1 [∵ 正实数 x, y 满足 $x+y=2$,

$$\therefore xy\leq \frac{(x+y)^2}{4}=\frac{2^2}{4}=1, \therefore \frac{1}{xy}\geq 1,$$

又 $\frac{1}{xy}\geq M$ 恒成立, $\therefore M\leq 1$, 即 M 的最大值为 1.]

7. 60° [由题可知 $a+b=8, c=4, p=6$,

$$\text{则 } S=\sqrt{6(6-a)(6-b)(6-4)}$$

$$=\sqrt{12(6-a)(6-b)}$$

$$\leq \sqrt{12}\times \frac{6-a+6-b}{2}=4\sqrt{3},$$

当且仅当 $a=b=4$ 时取等号,

所以此时三角形为等边三角形, 故 $A=60^\circ$.]

8. 解: 设纸张的面积为 $S\text{ cm}^2$, 画面的高为 $x\text{ cm}(x>0)$, 则长为 $\frac{4\ 840}{x}\text{ cm}$,

$$\text{根据题意得 } S=(x+10)\left(\frac{4\ 840}{x}+16\right)=5\ 000+16x+\frac{48\ 400}{x}$$

$$\geq 5\ 000+2\sqrt{16x\cdot \frac{48\ 400}{x}}=6\ 760,$$

当且仅当 $16x=\frac{48\ 400}{x}$, 即 $x=55$ 时等号成立, 所以当画面的

高为 55 cm, 长为 $\frac{4\ 840}{55}=88\text{ cm}$ 时, 宣传画所用纸张的面积最

小, 此时 $a=\frac{55}{88}=\frac{5}{8}$.

课时作业(六)

1. A [不等式 $\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)>0$ 可化为

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)<0, \text{ 解得 } \frac{1}{3}<x<\frac{1}{2},$$

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\left\{x\left|\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\right.\right\}$.

故选 A.]

2. C [由 $\frac{x-4}{x-1}\geq 2$, 得 $\frac{x-4-2x+2}{x-1}\geq 0$, 得 $\frac{x+2}{x-1}\leq 0$, 得

$$\begin{cases} (x-1)(x+2)\leq 0, \\ x\neq 1, \end{cases} \text{ 得 } -2\leq x<1, \text{ 故选 C.}]$$

3. D [由不等式 $\frac{4x+1}{x+2}\leq 0$, 可得 $(4x+1)(x+2)\leq 0$ 且 $x+2\neq$

$$0, \text{ 解得 } -2<x\leq -\frac{1}{4}, \text{ 所以 } A=\left\{x\left|-2<x\leq -\frac{1}{4}\right.\right\}.$$

对于不等式 $|x|\geq 2x+1$,

当 $x\geq 0$ 时, 不等式化为 $x\geq 2x+1$,

解得 $x\leq -1$ (舍去),

当 $x<0$ 时, 不等式化为 $-x\geq 2x+1$,

$$\text{解得 } x\leq -\frac{1}{3},$$

综上所述, 不等式 $|x|\geq 2x+1$ 的解集为 $\left\{x\left|x\leq -\frac{1}{3}\right.\right\}$,

$$\text{所以 } B=\left\{x\left|x\leq -\frac{1}{3}\right.\right\}.$$

$$\text{所以 } A\cap B=\left\{x\left|-2<x\leq -\frac{1}{3}\right.\right\}.$$

故选 D.]

4. D [一元二次不等式 $x^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x|x\neq -1\}$, 则方程 $x^2+bx+c=0$ 有两个相等的根 $x=-1$.

由于方程 $x^2+bx+c=0$ 的根 $x_1=x_2=-1$,

那么两根之和 $-1+(-1)=-\frac{b}{1}$, 两根之积 $(-1)\times(-1)=$

$\frac{c}{1}$, 解得 $b=2, c=1$. 可得 $bc=2\times 1=2$. 故选 D.]

5. CD [对于 A, $4x^2-5x+1>0$, 即 $(x-1)\cdot (4x-1)>0$, 解得

$$x<\frac{1}{4} \text{ 或 } x>1, \text{ 故 A 错误;}$$

对于 B, $2x^2-x-6\leq 0$, 即 $(x-2)(2x+3)\leq 0$, 解得 $-\frac{3}{2}\leq$

$x\leq 2$, 故 B 错误;

对于 C, 若不等式 $ax^2+8ax+21<0$ 恒成立,

当 $a=0$ 时, $21<0$ 是不可能成立的,

所以只能 $\begin{cases} a<0, \\ \Delta=64a^2-84a<0, \end{cases}$ 而该不等式组无解, 故 C 正确;

对于 D, 由题意得 $q, 1$ 是一元二次方程 $2x^2+px-3=0$ 的两根,

$$\text{从而 } \begin{cases} q\times 1=\frac{-3}{2}, \\ 2+p-3=0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} p=1, \\ q=-\frac{3}{2}, \end{cases}$$

而当 $p=1$ 时, 一元二次不等式化为 $2x^2+x-3<0$,

$$\text{即 } (x-1)(2x+3)<0,$$

$$\text{解得 } -\frac{3}{2}<x<1, \text{ 满足题意,}$$

所以 $p+q$ 的值为 $-\frac{1}{2}$, 故 D 正确.]

6. ABD [由题意可知 1, 3 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根, 且

$$a<0, \text{ 由根与系数的关系得 } \begin{cases} -\frac{b}{a}=4, \\ \frac{c}{a}=3, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} b=-4a, \\ c=3a. \end{cases}$$

对于 A, 由以上分析可知 $a<0$, 故 A 正确;

对于 B, $a+b+c=a-4a+3a=0$, 故 B 正确;

对于 C, $4a+2b+c=4a-8a+3a=-a>0$, 故 C 错误;

对于 D, 不等式可变为 $3ax^2+4ax+a<0$, 其中 $a<0$, 则 $3x^2+4x+1>0$, 解集为 $\left\{x\left|x<-1, \text{ 或 } x>-\frac{1}{3}\right.\right\}$, 故 D 正确.

故选 ABD.]

7. $\left[2, \frac{11}{4}\right)$ [当 $a-2=0$, 即 $a=2$ 时, 不等式为 $3>0$ 恒成立, 故

$a=2$ 符合题意; 当 $a-2\neq 0$, 即 $a\neq 2$ 时, 不等式 $(a-2)x^2+4(a-2)x+3>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,

$$\text{则 } \begin{cases} a-2>0, \\ \Delta=[4(a-2)]^2-4(a-2)\times 3<0, \end{cases} \text{ 解得 } 2<a<\frac{11}{4}.$$

综上, 实数 a 的取值范围是 $\left[2, \frac{11}{4}\right)$.]

8. $\frac{5}{2}$ [由题知 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2-2ax-8a^2=0(a>$

0)的两个实数根,

所以 $\Delta = 4a^2 + 32a^2 = 36a^2 > 0$, 且 $x_1 + x_2 = 2a, x_1 x_2 = -8a^2$.

又因为 $x_2 - x_1 = 15$,

所以 $15^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 4a^2 + 32a^2 = 36a^2$.

又 $a > 0$, 解得 $a = \frac{5}{2}$.]

9. 解: (1) 若选①②, 由 $a = -1$ 知函数图象开口向下, 此时 $f(x) < 0$ 的解集不可能为 $(-1, 3)$, 故不符合题意;

若选①③, 因为 $f(x) < 0$ 的解集为 $(-1, 3)$, 所以 $-1, 3$ 是方程

$ax^2 + bx + c = 0$ 的根, 所以函数图象的对称轴为直线 $x = 1$,

由 $f(x) = a(x+1)(x-3) = ax^2 - 2ax - 3a$, 得 $b = -2a, c =$

$-3a$, 又因为 $f(x)$ 的最小值为 -4 ,

所以当 $x = 1$ 时, $f(x) = -4a = -4$, 解得 $a = 1$, 所以 $b =$

$-2, c = -3$, 则 $f(x) = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$;

若选②③, 由 $a = -1$ 知函数图象开口向下, 则 $f(x)$ 无最小值, 不符合题意.

综上, 满足的两个条件为①③, 且 $y = x^2 - 2x - 3$.

(2) 由 $f(x) \geq (m-2)x + 2m^2 - 3 (m \in \mathbf{R})$, 化简得 $x^2 - mx - 2m^2 \geq 0$, 即 $(x+m)(x-2m) \geq 0$,

若 $m < 0$, 则不等式的解集为 $\{x | x \leq 2m, \text{ 或 } x \geq -m\}$;

若 $m = 0$, 则不等式的解集为 $\mathbf{R}$;

若 $m > 0$, 则不等式的解集为 $\{x | x \leq -m, \text{ 或 } x \geq 2m\}$.

综上, 当 $m < 0$ 时, 不等式的解集为 $\{x | x \leq 2m, \text{ 或 } x \geq -m\}$;

当 $m = 0$ 时, 不等式的解集为 $\mathbf{R}$;

当 $m > 0$ 时, 不等式的解集为 $\{x | x \leq -m, \text{ 或 } x \geq 2m\}$.

阶段检测(一)

1. B [因为存在量词命题的否定是全称量词命题,

所以命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, 2026e^x + x^3 > 0$ ”的否定为“ $\forall x \in \mathbf{R}, 2026e^x + x^3 \leq 0$ ”.

故选 B.]

2. A [因为集合 $A = \{x | 0 < x < 3\}$, 集合 $B = \{1, 2, 3, 4\}$,

根据交集的概念, 可得 $A \cap B = \{1, 2\}$.

故选 A.]

3. D [令 $a = 1, b = -1$, 满足 $a > b$, 但 $a^2 - b^2 = 0$, 故 A 错误;

令 $c = 0, ac = bc, ac^2 = bc^2$, 故 BC 错误;

$a > b$, 则 $2a > 2b$, 故 D 正确.

故选 D.]

4. B [命题“ $\exists x \in [0, 2], x^2 \geq m$ ”是真命题,

故当 $x \in [0, 2]$ 时, $m \leq (x^2)_{\max} = 4$.

故选 B.]

5. A [$\because \frac{x-2}{x+1} \geq 0, \therefore \begin{cases} (x-2)(x+1) \geq 0, \\ x+1 \neq 0, \end{cases}$

$\therefore x \geq 2$ 或 $x < -1$,

$\because |2x-1| \geq 3, \therefore 2x-1 \geq 3$ 或 $2x-1 \leq -3, \therefore x \geq 2$ 或 $x \leq -1$,

$\therefore \{x | x \geq 2, \text{ 或 } x < -1\} \subseteq \{x | x \geq 2, \text{ 或 } x \leq -1\}$,

$\therefore \frac{x-2}{x+1} \geq 0$ 是“ $|2x-1| \geq 3$ ”的充分不必要条件.

故选 A.]

6. C [因为不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是 $\{x | x < 1, \text{ 或 } x > 3\}$,

所以 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根为 $1, 3$, 且 $a > 0$,

$$\text{则} \begin{cases} -\frac{b}{a} = 1+3=4, \\ \frac{c}{a} = 1 \times 3=3, \end{cases}$$

即 $b = -4a, c = 3a, a > 0$,

则 $b - \frac{1}{c} = -4a - \frac{1}{3a} = -\left(4a + \frac{1}{3a}\right) \leq -2\sqrt{4a \cdot \frac{1}{3a}} =$

$-\frac{4\sqrt{3}}{3}$, 当且仅当 $4a = \frac{1}{3a}$, 即 $a = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 时取等号.

故选 C.]

7. AC [若 $a = 0$, 则任意实数 x 均满足 $0 \cdot x \leq 6$, 因此 $A = \mathbf{R}$, 故 A 正确, B 错误;

若 $B \subseteq A$, 得 $\begin{cases} 2a \leq 6, \\ 3a \leq 6, \end{cases}$ 解得 $a \leq 2$,

即 a 的取值范围为 $(-\infty, 2]$, 所以 a 不可以取 3 ,

故 C 正确, D 错误.

故选 AC.]

8. ABC [对于 A, $2x + y = 1 \geq 2\sqrt{2xy}$, 则 $xy \leq \frac{1}{8}$, 当且仅当

$2x = y = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 故 A 正确.

对于 B, $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = \frac{2x+y}{x} + \frac{4(2x+y)}{y} = \frac{8x}{y} + \frac{y}{x} + 6 \geq$

$2\sqrt{\frac{8x}{y} \cdot \frac{y}{x}} + 6 = 6 + 4\sqrt{2}$, 当且仅当 $\frac{8x}{y} = \frac{y}{x}$, 即 $x = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$,

$y = 2 - \sqrt{2}$ 时, 等号成立, 故 B 正确.

对于 C, 因为 $\frac{2x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{4x^2+y^2}{2}}$, 所以 $4x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$, 当且仅

当 $2x = y = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 故 C 正确.

对于 D, $4^x + 2^y = 2^{2x} + 2^y \geq 2\sqrt{2^{2x} \cdot 2^y} = 2\sqrt{2^{2x+y}} = 2\sqrt{2}$, 当

且仅当 $2x = y = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 故 D 错误. 故选 ABC.]

9. $(-12, -7)$ [$\because -2 < a < -1, 2 < b < 3, \therefore -6 < 3a < -3,$

$-6 < -2b < -4,$

$\therefore -12 < 3a - 2b < -7,$

故 $3a - 2b$ 的取值范围为 $(-12, -7)$.]

10. $\left\{a \mid -2 \leq a < \frac{6}{5}\right\}$ [由题意可知, 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, (a^2 - 4)x^2 +$

$(a+2)x - 1 < 0$ ”为真命题.

① 当 $a^2 - 4 = 0$ 时, 可得 $a = \pm 2$.

若 $a = -2$, 则 $-1 < 0$, 符合题意;

若 $a = 2$, 则 $4x - 1 < 0$, 解得 $x < \frac{1}{4}$, 不符合题意;

② 若 $a^2 - 4 \neq 0$,

则 $\begin{cases} a^2 - 4 < 0, \\ \Delta = (a+2)^2 + 4(a^2 - 4) < 0, \end{cases}$

解得 $-2 < a < \frac{6}{5}$.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $\left\{a \mid -2 \leq a < \frac{6}{5}\right\}$.]

11. 解: (1) 由 $\frac{3x}{x+1} \leq 2$, 可得 $\frac{3x}{x+1} - 2 \leq 0$, 即 $\frac{x-2}{x+1} \leq 0$,

则 $\begin{cases} (x-2)(x+1) \leq 0, \\ x+1 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $-1 < x \leq 2$. 故 $A = \{x \mid -1 < x \leq 2\}$.

- (2) 由 $|x-2| \leq 2$, 得 $0 \leq x \leq 4$. 又 $x \in \mathbf{Z}$, 所以 $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. 所以 B 的子集个数为 $2^5 = 32$.
- (3) 由 $A = \{x | -1 < x \leq 2\}$, 得 $\complement_{\mathbf{R}} A = \{x | x \leq -1, \text{ 或 } x > 2\}$. 所以 $B \cap (\complement_{\mathbf{R}} A) = \{3, 4\}$.

12. 解: (1) 由题意, 可得 $y = p\left(3 - \frac{8}{p}\right) - x - 0.5p$
 $= 2.5p - x - 8 (1 < x < 10)$.

又因为 $p = \frac{10x}{x+1}$, 所以 $y = \frac{25x}{x+1} - x - 8 (1 < x < 10)$,

所以该公司本季度增加的利润 y 与 x 之间的函数关系为 $y = \frac{25x}{x+1} - x - 8 (1 < x < 10)$.

(2) $y = \frac{25x}{x+1} - x - 8 = 18 - \left[\frac{25}{x+1} + (x+1)\right]$, 因为 $1 < x < 10$, 所以 $2 < x+1 < 11$,

由基本不等式可得,

$$\frac{25}{x+1} + (x+1) \geq 2\sqrt{\frac{25}{x+1} \cdot (x+1)} = 10,$$

当且仅当 $\frac{25}{x+1} = x+1$, 即 $x=4$ 时等号成立,

所以 $y \leq 18 - 10 = 8$, 当 $x=4$ 时, 该公司本季度增加的利润最大, 最大为 8 万元.

课时作业(七)

1. D [要使 $f(x)$ 有意义, 只需满足

$$\begin{cases} 1-3x \geq 0, \\ x \neq 0, \end{cases} \text{ 即 } x \leq \frac{1}{3} \text{ 且 } x \neq 0.]$$

2. B [因为 $2f(x) - f(1-x) = x$, ①

所以 $2f(1-x) - f(x) = 1-x$, ②

由 ① $\times 2 +$ ② 得 $3f(x) = x+1$,

即 $f(x) = \frac{x+1}{3}$. 故选 B.]

3. B [对于 A, 因为这两个函数的定义域不同, 所以这两个函数不是同一个函数;

对于 B, 因为这两个函数的定义域与对应关系均相同, 所以这两个函数为同一个函数;

对于 C, 因为函数 $h = 130t - 5t^2$ 中, $0 \leq t \leq 26$, 而函数 $y = 130x - 5x^2$ 中, $x \in \mathbf{R}$, 即这两个函数的定义域不同, 所以这两个函数不是同一个函数;

对于 D, 因为这两个函数的定义域不同, 所以这两个函数不是同一个函数. 故选 B.]

4. C [考查四个选项, 横坐标表示时间, 纵坐标表示的是距学校的距离, 由此知, 此函数图象一定是下降的, 排除 A;

再由小明骑车上学, 开始时匀速行驶可得出图象开始一段是直线下降型, 又途中因交通堵塞停留了一段时间, 故此时有一段函数图象与 x 轴平行, 由此排除 D; 之后为了赶时间加快速度行驶, 这一时间段内函数图象下降的较快, 由此可确定 C 正确, B 不正确. 故选 C.]

5. A [函数 $y = f(x+1)$ 的定义域为 $[-1, 4]$,

则 $-1 \leq x \leq 4$, 故 $0 \leq x+1 \leq 5$,

故函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 5]$,

$$\text{令 } \begin{cases} 0 \leq 2x+1 \leq 5, \\ x-1 > 0, \end{cases} \text{ 解得 } 1 < x \leq 2,$$

故函数 $y = \frac{f(2x+1)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域为 $(1, 2]$.

故选 A.]

6. D [依题意, $f(2) = f(1) + f(1) + 1 \times 1 = 3$,

$$f(3) = f(2) + f(1) + 1 \times 2 = 3 + 1 + 2 = 6,$$

$$f(4) = f(2) + f(2) + 2 \times 2 = 3 + 3 + 4 = 10,$$

$$f(5) = f(2) + f(3) + 2 \times 3 = 3 + 6 + 6 = 15,$$

$$f(6) = f(2) + f(4) + 2 \times 4 = 3 + 10 + 8 = 21,$$

$$f(7) = f(2) + f(5) + 2 \times 5 = 3 + 15 + 10 = 28,$$

$$f(8) = f(2) + f(6) + 2 \times 6 = 3 + 21 + 12 = 36,$$

$$f(15) = f(7) + f(8) + 7 \times 8 = 28 + 36 + 56 = 120,$$

$$f(30) = f(15) + f(15) + 15 \times 15 = 120 + 120 + 225 = 465. \text{ 故选 D.}]$$

7. BCD [对于 A 选项, 有 $\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ -x-1 \geq 0, \end{cases}$ 不等式组无解, A 错误;

对于 B 选项, 根据函数的概念知, 当函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义时, 函数 $f(x)$ 的图象与直线 $x=1$ 无交点, 当函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有定义时, 函数 $f(x)$ 的图象与直线 $x=1$ 只有 1 个交点, 所以函数 $f(x)$ 的图象与直线 $x=1$ 最多有 1 个交点, B 正确;

对于 C 选项, 因为 $f(x) = |x-1| - |x|$, 所以 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$,

故 $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f(0) = 1$, C 正确; 对于 D 选项, 两个函数的定义域相同, 且对应关系完全一致, 故这两个函数是同一个函数,

D 正确. 故选 BCD.]

8. ABC [$\because$ 矩形的面积为 10, 长为 x , 宽为 y , $\therefore xy = 10$, $\therefore y =$

$$\frac{10}{x}, x > 0, \text{ 根据 } d = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ 得到 } d = \sqrt{x^2 + \frac{100}{x^2}}, x > 0,$$

$$\because \text{周长 } l = 2(x+y), \therefore l = 2x + \frac{20}{x}, x > 0,$$

$$\text{根据 } d^2 = x^2 + \frac{100}{x^2}, l^2 = 4\left(x + \frac{10}{x}\right)^2 = 4\left(x^2 + \frac{100}{x^2} + 20\right) = 4(d^2 + 20),$$

$$\therefore l = 2\sqrt{d^2 + 20}, d \geq 2\sqrt{5}. \text{ 故选 ABC.}]$$

9. ABD [对于 A, 根据狄利克雷函数的定义可知 $D(D(2)) =$

$$D(1) = 1, D(D(\sqrt{2})) = D(0) = 1, \text{ 所以 A 正确;}$$

对于 B, 易知 $D(x)$ 的值域为 $\{0, 1\}$, 函数 $f(x) = \frac{|x|+x}{2x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f(x) = \frac{-x+x}{2x} = 0$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时,

$$f(x) = \frac{x+x}{2x} = 1, \text{ 即函数 } f(x) = \frac{|x|+x}{2x} \text{ 的值域为 } \{0, 1\}, \text{ 所以}$$

B 正确;

对于 C, 若 $x \in \mathbf{Q}$, 则 $-x \in \mathbf{Q}$, 则 $D(x) = D(-x) = 1$, 若 $x \in \complement_{\mathbf{R}} \mathbf{Q}$, 则 $-x \in \complement_{\mathbf{R}} \mathbf{Q}$, 则 $D(x) = D(-x) = 0$, 综上可得 $D(x) = D(-x)$, 所以 C 错误;

对于 D, 当 $x \in \mathbf{Q}$ 时, $x+1 \in \mathbf{Q}$, 此时 $D(x+1) = D(x) = 1$, 当 $x \in \complement_{\mathbf{R}} \mathbf{Q}$ 时, $x+1 \in \complement_{\mathbf{R}} \mathbf{Q}$, 此时 $D(x+1) = D(x) = 0$, 所以 D 正确. 故选 ABD.]

10. 1 [令 $\sqrt{x-1} = t, t \geq 0$,

$$\text{则 } x = t^2 + 1 (t \geq 0), f(t) = t^2 + 3,$$

$$\text{故 } f(a) = a^2 + 3 = 4 (a \geq 0), \text{ 解得 } a = 1.]$$

$$11. \sqrt{3} [f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0, \\ 1, & x \leq 0, \end{cases}$$

$$\text{则 } f(3) = \sqrt{3}.]$$

12. 2 或 $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ [当 $a>1$ 时, $f(a)=1+\frac{1}{a}=\frac{3}{2}$, $\therefore a=2>1$;

当 $-1\leq a\leq 1$ 时, $f(a)=a^2+1=\frac{3}{2}$,

$\therefore a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\in[-1,1]$;

当 $a<-1$ 时, $f(a)=2a+3=\frac{3}{2}$,

$\therefore a=-\frac{3}{4}>-1$, 舍去.

综上, $a=2$ 或 $a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

课时作业(八)

1. **A** [对于 A, $y=x^{-1}=\frac{1}{x}$ 是反比例函数, 在 $(0,1)$ 内单调递减, 符合题意;

对于 B, $y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ 是幂函数, 在 $(0,1)$ 内单调递增, 不符合题意;

对于 C, $y=x^2$ 是二次函数, 在 $(0,1)$ 内单调递增, 不符合题意;

对于 D, $y=x^3$ 是幂函数, 在 $(0,1)$ 内单调递增, 不符合题意.

故选 A.]

2. **B** [由 $x^2-10x>0$, 得 $x<0$ 或 $x>10$.

$\therefore$ 函数 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,

且函数 $y=x^2-10x$ 在 $(10,+\infty)$ 上单调递增,

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间为 $(10,+\infty)$.

故选 B.]

3. **B** [充分性: 因为 $\forall x\in\mathbf{R}, f(x+1)>f(x)$ 成立, 但并不能保证 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的连续函数, 所以 $f(x)$ 不一定为增函数,

$$\text{如 } f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \text{ 或 } x>\frac{1}{2}, \\ 0, & 0\leq x\leq\frac{1}{2}, \end{cases}$$

故充分性不成立;

必要性: 当 $f(x)$ 为增函数时, 因为 $x+1>x$, 所以 $f(x+1)>f(x)$ 一定成立, 故必要性成立.

所以“ $\forall x\in\mathbf{R}, f(x+1)>f(x)$ ”是“函数 $f(x)$ 为增函数”的必要不充分条件. 故选 B.]

4. **CD** [对于选项 A, 一个函数在定义域内的某个子区间上单调递增, 这个函数在定义域上不一定是增函数, A 不符合题意; 对于选项 B, 当 $f(x)$ 为常数函数时, 对任意 $x_1, x_2\in[0,+\infty)$, 都有 $f(x_1)=f(x_2)$, $f(x)$ 不是增函数, 不符合题意; 对于选项 C, 对任意 $x_1, x_2\in[0,+\infty)$, 且 $x_1-x_2<0$, 都有 $f(x_1)-f(x_2)<0$, 符合题意; 对于选项 D, 对任意 $x_1, x_2\in[0,+\infty)$, 设 $x_1>x_2$, 若 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$, 必有 $f(x_1)-f(x_2)>0$, 则函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增, 符合题意. 故选 CD.]

5. **CD** [对任意 $x_1, x_2\in(1,+\infty)$, 有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

对于 A, $f(x)=x+\frac{1}{x}$, 由对勾函数的图象与性质可知 A 不满足题意;

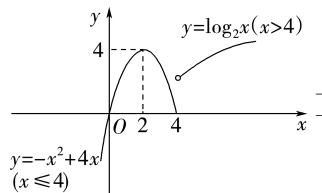
对于 B, $f(x)=\frac{3}{1-x}$, 根据复合函数的单调性知, 函数在区间

$(1,+\infty)$ 上单调递增, 故 B 不满足题意;

对于 C, $f(x)=1+\frac{1}{x}$, 函数在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减, 故 C 满足题意;

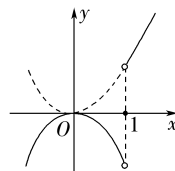
对于 D, $f(x)=-x-\frac{1}{x}$, 由对勾函数的图象和性质可知 D 满足题意. 故选 CD.]

6. $(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$ [作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示, 由图象可知 $f(x)$ 在 $(a,a+1)$ 上单调递增, 需满足 $a\geq 4$ 或 $a+1\leq 2$, 即 $a\leq 1$ 或 $a\geq 4$.



7. $(-\infty,0),(1,+\infty)$ [由题意知 $g(x)=\begin{cases} x^2, & x>1, \\ 0, & x=1, \\ -x^2, & x<1, \end{cases}$

该函数图象如图所示,



由图象知, 函数 $g(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,0),(1,+\infty)$.]

8. **证明:** (1) 根据题意, 令 $m=0$,

可得 $f(0+n)=f(0)\cdot f(n)$.

$\therefore f(n)\neq 0, \therefore f(0)=1$.

(2) 由题意知, 当 $x>0$ 时, $0<f(x)<1$,

当 $x=0$ 时, $f(0)=1>0$;

当 $x<0$ 时, $-x>0, \therefore 0<f(-x)<1$.

$\therefore f(x+(-x))=f(x)\cdot f(-x)$,

$\therefore f(x)\cdot f(-x)=1$,

$\therefore f(x)=\frac{1}{f(-x)}>0$.

故当 $x\in\mathbf{R}$ 时, 恒有 $f(x)>0$.

(3) $\forall x_1, x_2\in\mathbf{R}$, 且 $x_1<x_2$,

则 $f(x_2)=f(x_1+(x_2-x_1))$,

$\therefore f(x_2)-f(x_1)=f(x_1+(x_2-x_1))-f(x_1)$

$=f(x_1)\cdot f(x_2-x_1)-f(x_1)$

$=f(x_1)[f(x_2-x_1)-1]$.

由(2)知 $f(x_1)>0$,

又 $\therefore x_2-x_1>0, \therefore 0<f(x_2-x_1)<1$,

故 $f(x_2)-f(x_1)<0$,

故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

课时作业(九)

1. **D** [因为 $f(x)$ 是偶函数,

所以 $f(-2)=f(2), f(-3)=f(3)$.

因为 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上单调递增,

所以 $f(3)>f(2)>f(1)$,

所以 $f(-3)>f(-2)>f(1)$.]

2. **C** [由题意知, $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上单调递增, 则 $f(x)>$

$$f(2x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \\ -2 \leq 2x-1 \leq 2, \text{ 解得 } -\frac{1}{2} \leq x < 1. \\ x > 2x-1, \end{cases}$$

故选 C.]

3. A [当 $x \geq a$ 时, $f(x) = 2^x$, $f(x)$ 单调递增, 在 $[a, +\infty)$ 上的最小值为 2^a , 当 $x < a$ 时, $f(x) = -\frac{1}{2}x$, $f(x)$ 单调递减, 在 $(-\infty, a)$ 上无最小值.

则由已知得 $-\frac{1}{2}a \geq 2^a$, 即 $2^a + \frac{1}{2}a \leq 0$, 设 $h(a) = 2^a + \frac{1}{2}a$, 易知该函数为增函数, 且 $h(-1) = 2^{-1} - \frac{1}{2} = 0$, 从而 $a \leq -1$. 故

选 A.]

4. D [根据题意, 函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的减函数,

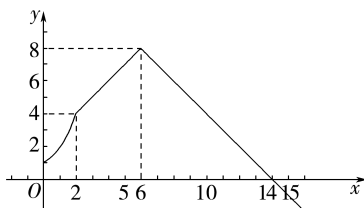
$$\text{必有} \begin{cases} a-2 < 0, \\ a > 0, \\ (a-2) \times 2 + 3 \geq \frac{a}{2}, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} a < 2, \\ a > 0, \\ a \geq \frac{2}{3}, \end{cases}$$

$$\text{即 } \frac{2}{3} \leq a < 2,$$

故实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{2}{3}, 2\right)$.

故选 D.]

5. D [画出函数 $y = 2^x$, $y = 2+x$, $y = 14-x$ 的图象如图所示,



由图象可知, 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $f(x) = 2^x$,

当 $2 < x \leq 6$ 时, $f(x) = 2+x$,

当 $x > 6$ 时, $f(x) = 14-x$,

当 $x = 6$ 时, $f(x)$ 取到最大值, $f(6) = 8$.

故选 D.]

6. C [由题意, 得 $-4x+a > -3-x^2$, $\forall x \in (3, +\infty)$ 恒成立, 则 $a > -x^2+4x-3$, $\forall x \in (3, +\infty)$ 恒成立.

设函数 $g(x) = -x^2+4x-3 = -(x-2)^2+1$,

因为当 $x > 3$ 时, $g(x) < g(3) = 0$,

所以实数 a 的取值范围为 $[0, +\infty)$.

故选 C.]

7. BC [作出函数 $f(x) = \min\{|x|, x+1\}$ 的图象如图所示,

对于 A, 根据图象, 可得 $f(x)$ 无最大值, 无最小值, 故 A 错误;

对于 B, 根据图象得, 当 $x \leq 0$ 时,

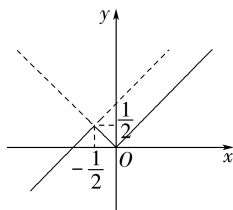
$f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$, 故 B 正确;

对于 C, 由 $|x| \leq \frac{1}{2}$, 解得 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, 结合图象,

得不等式 $f(x) \leq \frac{1}{2}$ 的解集为 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$, 故 C 正确;

对于 D, 由图象得, $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, $[0, +\infty)$, 故 D 错误.

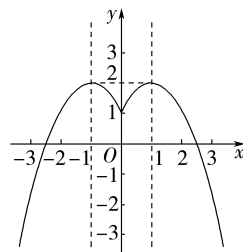
故选 BC.]



8. ABD [因为 $f(x) = -x^2 + 2|x| + 1$,

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 1, & x \geq 0, \\ -x^2 - 2x + 1, & x < 0, \end{cases}$$

作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示,



由图象可知, $f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 上单调递增, 在 $[-1, 0]$ 上单调递减, 故 A, B 正确;

由图象可知, 当 $x = -1$ 或 $x = 1$ 时, 函数 $y = f(x)$ 有最大值, 没有最小值, 故 C 错误, D 正确. 故选 ABD.]

9. ABD [对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+3) = f(1-x)$, 则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称.

又对任意 $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$, $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ ($x_1 \neq x_2$), 所以

函数 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, 2)$ 上单调递增, 故函数 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取最大值, B 正确; $f(0) = f(4) < f(3)$, C

错误; $-a^2 + a + 1 = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4}$, 所以 $f(-a^2 + a + 1) \leq f\left(\frac{5}{4}\right)$, A 正确; 若 $f(m) > f(-1)$, 则 $|m - 2| < |2 -$

$(-1)|$, 解得 $-1 < m < 5$, D 正确.

故选 ABD.]

10. (1)(3)(4)(5) [$\because f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上单调递增,

$\therefore f(0) < f(2)$, 故 (1) 正确.

$\because$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[2, 5]$ 上单调递减,

$\therefore f(3) < f(2)$, 故 (2) 错误.

$\because$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上单调递增, 在区间 $[2, 5]$ 上单调递减, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 5]$ 上有最大值, 也有最小值, 且 $f(2)$ 是最大值, $f(-1)$ 或 $f(5)$ 是最小值, 故 (3)(5) 正确, (6) 不正确, 而 $f(0)$ 与 $f(3)$ 的大小不确定, 故 (4) 正确.]

11. $(0, +\infty)$ [因为 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1, \\ x + \frac{4}{x} - 5, & 0 < x < 1, \end{cases}$

当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = x^2 \geq 1$,

当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) = x + \frac{4}{x} - 5$ 单调递减, 故 $f(x) > 0$,

则 $f(x)$ 的值域为 $(0, +\infty)$.]

12. (2)(4) [由 $x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) > x_1 f(x_2) + x_2 f(x_1)$, 得 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$,

因此 $f(x)$ 是增函数, (1) 错误;

由 $-5 < 0 < 1$, 得 $f(-5) < f(0) < f(1)$, (2) 正确;

不一定有 $f(0) = 0$, 如 $f(x) = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, $f(0) = 1$, (3) 错误;

由 $f(2x-1) < f(3-x)$, 得 $2x-1 < 3-x$, 解得 $x < \frac{4}{3}$, (4) 正确.]

课时作业(十)

1. C [对于 A, $f(0) = f(1) = 0$, 显然不单调, A 错误; 对于 B, $f(x) = x^3 + 1$ 不是奇函数, B 错误;

对于 C, $f(x)=x^3+x$ 为奇函数, 且 $y=x, y=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 即 $f(x)$ 单调递增, C 正确;

对于 D, $f(x)=x^3+x^2$ 既不是奇函数, 也不是偶函数, D 错误. 故选 C.]

2. C [因为函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称, 且周期为 4, 所以 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(27)=f(7 \times 4 - 1)=f(-1)=-f(1)=-2$, 故选 C.]

3. C [根据题意, $f(x)=(2\ 025+m)x^5-x^4$, 其定义域为 $\mathbf{R}$, 若 $f(x)$ 是偶函数, 得 $f(x)-f(-x)=(2\ 025+m)x^5-x^4-[(2\ 025+m)(-x)^5-(-x)^4]=0$ 恒成立, 变形可得 $2\ 025+m=0$, 故 $m=-2\ 025$. 故选 C.]

4. D [法一: 令 $g(x)=ax^3+bx(ab \neq 0)$, 易知 $g(x)$ 是奇函数, 从而 $f(2\ 027)=g(2\ 027)+1, f(-2\ 027)=g(-2\ 027)+1=-g(2\ 027)+1$.

又因为 $f(2\ 027)=k$, 所以 $g(2\ 027)=k-1$,

从而 $f(-2\ 027)=-(k-1)+1=2-k$.

故选 D.

法二: 因为 $f(-x)+f(x)=-ax^3-bx+1+ax^3+bx+1=2$, 所以 $f(-2\ 027)+f(2\ 027)=2$.

又因为 $f(2\ 027)=k$, 所以 $f(-2\ 027)=2-k$, 故选 D.]

5. D [∵ $f(x), g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, $f(x)$ 是偶函数, $g(x)$ 是奇函数,

∴ $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增.

∴ $f(3) < f(2), g(3) < g(2) < 0$, 但无法判断 $f(2), f(3)$ 的正负,

∴ $g(f(2)) < g(f(3))$,

故选 D.]

6. C [根据题意, 函数 $f(x)-1$ 为奇函数,

则有 $f(x)+f(-x)=2$,

令 $x=0$, 可得 $f(0)=1$,

而 $f(x-1)$ 为偶函数, 所以 $f(x-1)=f(-x-1)$, 则 $f(x-2)=f(-x)$,

所以 $f(x)+f(x-2)=2, f(x-2)+f(x-4)=2$,

所以 $f(x)=f(x-4)$, 故 $f(x)$ 的周期为 4,

因为 $f(1)+f(3)=2, f(0)+f(2)=2$, 所以 $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(2\ 026)=506[f(0)+f(1)+f(2)+f(3)]+f(0)+f(1)+f(2)=506 \times 4 + 2 + 0 = 2\ 026$.

故选 C.]

7. CD [利用奇函数的定义, 首先定义域需关于原点对称, 排除选项 A; 函数 $f(x)$ 是奇函数, 还需满足 $f(-x)=-f(x)$, 排除选项 B. 故选 CD.]

8. BD [A 选项, 若 $f(x)=x(x^2-4)$, 则 $f(-2)=0, f(2)=0$, 故 $f(-2)=f(2)$, 因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 关于原点对称, 且 $f(-x)=-x[(-x)^2-4]=-x(x^2-4)=-f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数, 故 A 错误;

B 选项, 根据偶函数的定义知, 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f(-x)=f(x)$, 因此满足 $f(2) \neq f(-2)$ 的函数必然不是偶函数, 故 B 正确;

C 选项, 若 $f(x)=x^2$, 则 $f(2)=4, f(1)=1$, 故 $f(2) > f(1)$, 但函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 C 错误;

D 选项, 因为 $2 > 1, f(2) > f(1)$, 所以 $f(x)$ 不是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 故 D 正确. 故选 BD.]

9. AD [对于 A, 函数 $f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$, 必有 $1-x^2 \neq 0$, 解得 $x \neq \pm 1$, 则函数的定义域为 $\{x|x \neq \pm 1\}$, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$, 其定义域为 $\{x|x \neq \pm 1\}$, 关于原点对称,

又 $f(-x)=\frac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2}=\frac{1+x^2}{1-x^2}=f(x)$, 则 $f(x)$ 为偶函数, 故 B 错误;

对于 C, 因为 $f(2)=\frac{1+4}{1-4}=-\frac{5}{3}, f(3)=\frac{1+9}{1-9}=-\frac{5}{4}$, 所以 $f(3) > f(2)$, 则 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上不可能单调递减, 故 C 错误;

对于 D, 因为 $f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$,

所以 $-f(x)=-\frac{1+x^2}{1-x^2}=\frac{x^2+1}{x^2-1}$,

$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{\frac{x^2+1}{x^2}}{\frac{x^2-1}{x^2}}=\frac{x^2+1}{x^2-1}$,

则 $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)(x \neq 0)$, 故 D 正确.

故选 AD.]

10. 0 [∵ $f(x)$ 是奇函数, ∴ $f(0)=0$, 即 $0^3+a=0$, 解得 $a=0$.]

11. $\sqrt{-x}+1$ [∵ $f(x)$ 为偶函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x)=\sqrt{x}+1$,

∴ 当 $x < 0$ 时, $-x > 0, f(x)=f(-x)=\sqrt{-x}+1$,

即当 $x < 0$ 时, $f(x)=\sqrt{-x}+1$.]

12. $[-1, 1]$ [观察题图知, 奇函数 $f(x)$ 在 $(0, 4]$ 上单调递增, 则在 $[-4, 0)$ 上单调递减,

且 $f(-1)=-f(1)=0$,

不等式 $xf(x) \leq 0$, 当 $x=0$ 时, 不等式成立;

当 $x > 0$ 时, $f(x) \leq 0=f(1)$, 解得 $0 < x \leq 1$;

当 $x < 0$ 时, $f(x) \geq 0=f(-1)$, 解得 $-1 \leq x < 0$,

所以不等式 $xf(x) \leq 0$ 的解集为 $[-1, 1]$.]

课时作业(十一)

1. D [设所求函数图象上的任意一点 $P(x, y)$, 点 P 关于 $x=2$ 对称的点为 $Q(4-x, y)$, 由题意知点 Q 在 $y=\log_2 x$ 的图象上, 可得 $y=\log_2(4-x)$, 即函数 $y=\log_2 x$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称的函数解析式为 $y=\log_2(4-x)$.]

2. A [根据题意, 因为 $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}$, 其定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$,

易得函数的定义域关于点 $(1, 0)$ 对称,

则 $f(x)$ 的图象的对称中心的横坐标为 1,

又由 $f(x)+f(2-x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{2-x}+\frac{1}{-x}=0$, 则对称中心的纵坐标为 0,

所以对称中心为 $(1, 0)$. 故选 A.]

3. C [∵ 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, ∴ $f(x)+f(2-x)=0$, 即 $x^3+ax^2+x+b+(2-x)^3+a(2-x)^2+(2-x)+b=(2a+6)x^2-(4a+12)x+10+4a+2b=0$,

$$\begin{cases} 2a+6=0, \\ 4a+12=0, \\ 10+4a+2b=0, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a=-3, \\ b=1. \end{cases}$ 故选 C.]

4. D [因为 $f(x+2)$ 为偶函数,

所以 $f(-x+2)=f(x+2)$, 又 $f(4+x)=-f(4-x)$,

所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, $f(x)$ 的图象关于点 $(4, 0)$ 对称, 且 $f(4)=0$, 所以 A 选项正确;

所以 $f(-x)=f(x+4)$, $f(-x)=-f(x+8)$,

所以 $f(x+4)=-f(x+8)$, 所以 $f(x+4)=-f(x)$,

所以 $f(x+8)=f(x)$, 所以 $f(x)$ 的一个周期为 8, 所以 B 选项正确;

所以 $f(2\ 025)=f(8 \times 253+1)=f(1)$, 所以 C 选项正确;

因为当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x)=x^2-2x$,

所以 $f(7)=f(-1)=-f(9)=-f(1)=-(1-2)=1$, 所以 D 选项错误.

故选 D.]

5. AC [由 $y=\sqrt{|x|}$ 知定义域为 $\mathbf{R}$,

且 $f(-x)=\sqrt{|-x|}=\sqrt{|x|}=f(x)$,

所以该函数为偶函数, 则图象关于 y 轴对称,

所以 A 正确;

由 $y=x+\frac{1}{x}$ 知定义域为 $\{x|x \neq 0\}$,

且 $f(-x)=(-x)+\left(-\frac{1}{x}\right)=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-f(x)$,

所以该函数为奇函数, 则图象关于原点对称,

所以 B 错误;

由 $y=\frac{2}{x^2+1}$ 知定义域为 $\mathbf{R}$,

且 $f(-x)=\frac{2}{(-x)^2+1}=\frac{2}{x^2+1}=f(x)$,

所以该函数为偶函数, 则图象关于 y 轴对称,

所以 C 正确;

由 $y=x-\frac{1}{x}$ 知定义域为 $\{x|x \neq 0\}$,

且 $f(-x)=(-x)-\left(-\frac{1}{x}\right)=-\left(x-\frac{1}{x}\right)=-f(x)$,

所以该函数为奇函数, 则图象关于原点对称,

所以 D 错误. 故选 AC.]

6. ABD [∵ 函数 $y=f(x+a)-b$ 为奇函数,

∴ $f(-x+a)-b=-f(x+a)+b$,

即 $f(x+a)+f(-x+a)=2b$.

对于 A, 由 $f(x+a)+f(-x+a)=2b$ 得 $a=b$, ∴ 对于任意的 $a=b$, 点 $P(a, b)$ 都是 $f(x)=x$ 的图象的对称中心, 故 A 满足题意;

对于 B, $f(x)=x^3-3x^2=x^2(x-3)$, ∴ $f(x+1)+f(-x+1)=(x+1)^2(x-2)+(-x+1)^2(-x-2)=-4$,

∴ 点 $P(1, -2)$ 为 $f(x)$ 图象的对称中心, 故 B 满足题意;

对于 C, ∵ $f(x)=x^4+x^2$ 是偶函数, 图象关于 y 轴对称, 且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 其图象大致如图 1 所示, 故 $f(x)$ 的图象不是中心对称图形, 故 C 不满足题意;

对于 D, $f(x)=\frac{1}{x-1}$ 的图象如图 2 所示, 该图象关于点 $(1, 0)$

对称, 故 D 满足题意.

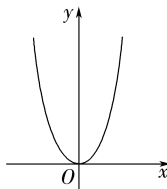


图1

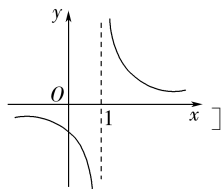


图2

7. $(-1, 1)$ [∵ $y=\frac{x-2}{x+1}=\frac{x+1-3}{x+1}=1-\frac{3}{x+1}$,

∴ 该函数图象是由 $y=-\frac{3}{x}$ 的图象先向左平移 1 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度得到的.

∴ 其图象的对称中心为点 $(-1, 1)$.]

8. 1 [因为 $f(4-x)+f(x)=2$, 令 $x=2$, 得 $2f(2)=2$, 所以 $f(2)=1$. 又 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=4$ 对称, 所以 $f(6)=f(2)=1$. 令 $x=-2$, 得 $f(6)+f(-2)=2$, 所以 $f(-2)=2-1=1$.]

9. 解: (1) $f(x)=x-\frac{2}{x+1}>0$ 即 $\frac{(x+2)(x-1)}{x+1}>0$.

当 $x+1<0$ 时, $(x+2)(x-1)<0$, 解得 $-2<x<-1$;

当 $x+1>0$ 时, $(x+2)(x-1)>0$, 解得 $x>1$.

综上所述, 不等式 $f(x)>0$ 的解集为 $(-2, -1) \cup (1, +\infty)$.

(2) 证明: 记 $f(x)$ 的定义域为 $A=(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, 对任意的 $x \in A$, 都有 $-x-2 \in A$,

且 $f(-x-2)+f(x)=-x-2-\frac{2}{-x-2+1}+x-\frac{2}{x+1}=$

$\frac{2}{x+1}-x-2+x-\frac{2}{x+1}=-2$,

即 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1, -1)$ 对称, 即曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形.

课时作业(十二)

1. B [因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f\left(\frac{1}{2}+x\right)=f\left(\frac{1}{2}-x\right)$,

则 $f(1+x)=f(-x)=-f(x)$, 且 $f(0)=0$,

所以 $f(2+x)=f(x)$, 故 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数.

则 $f(7)=f(1)=f(0)=0$.

故选 B.]

2. A [因为对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 有 $f(x_1 \cdot x_2)=x_1 f(x_2)+x_2 f(x_1)$, 所以 $f(0)=0$, $f(1)=f(1)+f(1)$,

所以 $f(1)=0$,

所以 $f(1)=-f(-1)-f(-1)=0$,

所以 $f(-1)=0$,

所以 $f(-x)=-f(x)+x f(-1)=-f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数, 所以 A 选项正确;

而其他选项不一定成立, 故选 A.]

3. D [因为函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x)=f(1+x)$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 故 $a=f(3)=f(-1)$, $b=f(\sqrt{2})=f(2-\sqrt{2})$, $c=f(2)=f(0)$.

又函数 $f(x)$ 是偶函数, 且在 $[-1, 0]$ 上单调递增, 所以 $a=f(1)$, 且函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减. 又 $0<2-\sqrt{2}<1$, 所以

$f(0) > f(2 - \sqrt{2}) > f(1)$, 即 $c > b > a$. 故选 D.]

4. B [因为当 $x < 3$ 时, $f(x) = x$,

所以 $f(1) = 1, f(2) = 2$.

又 $f(x) > f(x-1) + f(x-2)$,

则 $f(3) > f(2) + f(1) = 3$,

$f(4) > f(3) + f(2) > 5$,

$f(5) > f(4) + f(3) > 8$,

$f(6) > f(5) + f(4) > 13$,

$f(7) > f(6) + f(5) > 21$,

$f(8) > f(7) + f(6) > 34$,

$f(9) > f(8) + f(7) > 55$,

$f(10) > f(9) + f(8) > 89$,

$f(11) > f(10) + f(9) > 144$,

$f(12) > f(11) + f(10) > 233$,

$f(13) > f(12) + f(11) > 377$,

$f(14) > f(13) + f(12) > 610$,

$f(15) > f(14) + f(13) > 987$,

$f(16) > f(15) + f(14) > 1597 > 1000$, 则可知 $f(20) > 1000$,

则 B 正确; 且无证据表明 ACD 一定正确. 故选 B.]

5. ABD [A 选项, 令 $x = y = 0$, 则 $f(0) - [f(0)]^3 = 2f(0)$,

$\therefore f(0) \{ [f(0)]^2 + 1 \} = 0$, 故 $f(0) = 0$, 故 A 正确;

B 选项, 令 $y = -x$, 则 $f(0) - f(0)f(x)f(-x) = f(x) + f(-x) = 0$,

$\therefore f(-x) = -f(x)$, 又函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$\therefore f(x)$ 为奇函数, 故 B 正确;

C 选项, 令 $x = y = 2$,

则 $f(4) - f(4)[f(2)]^2 = 2f(2)$,

$\therefore f(4) = -\frac{4}{3}$, $\therefore [f(2) - 2][2f(2) + 1] = 0$,

解得 $f(2) = 2$ 或 $f(2) = -\frac{1}{2}$, 故 C 错误;

D 选项, 若 $f(100) = 0$, 令 $y = 100$, 得 $f(x + 100) = f(x)$,

$\therefore 100$ 是 $f(x)$ 的一个周期, 故 D 正确.

故选 ABD.]

6. BD [由定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)$ 为奇函数, 得

$f(-x+1) = -f(x+1)$, 因此函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$

对称, 由对任意 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 都有

$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$, 得 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 由对称

性知, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递增, 又 $f(1) = 0$, 因此 $f(x)$ 是

$\mathbf{R}$ 上的增函数, B 正确;

显然 $f(-1) < f(1) = 0$, 则 $f(x)$ 的图象不关于点 $(-1, 0)$ 对称, A 错误;

由 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 得 $f(x) + f(2-x) = 0$, C 错误;

显然 $f(1) = 0$, 又 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则由 $f(x) < 0$, 得 $x < 1$, D 正确. 故选 BD.]

7. 4 054 [因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足对任意实数 x, y 均有 $f(xy) = yf(x)$, 用 x 替换 y, y 替换 x , 可得 $f(xy) = yf(x) = xf(y)$,

所以当 $x \neq 0, y \neq 0$ 时, 可知 $\frac{f(x)}{x}$ 是常函数,

于是当 $x \neq 0$ 时, 可设 $f(x) = cx$, 其中 c 为常数,

又 $2f(2) = f(1) + 6$.

所以 $4c = c + 6$, 解得 $c = 2$,

所以 $f(2\ 027) = 2 \times 2\ 027 = 4\ 054$.]

8. $(-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ [因为对任意的 $x_1, x_2 \in$

$(0, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$,

令 $g(x) = xf(x)$,

所以 $\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$,

则 $g(x) = xf(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

又 $f(x)$ 为奇函数及 $f(1) = 0$,

所以 $g(-x) = -xf(-x) = xf(x) = g(x)$,

则 $g(x)$ 为偶函数, 且 $g(1) = g(-1) = 0$, 故 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增,

所以 $g(x+1)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递增, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递减.

又 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

则由 $xf(x+1) < 0$ 可得 $x > 0, f(x+1) < 0$ 或 $x < 0, f(x+1) > 0$,

当 $x > 0$ 时, $f(x+1) < 0 \Rightarrow \frac{g(x+1)}{x+1} < 0$, 得 $g(x+1) < 0$, 解得 $x < -2$ 或 $x > 0$, 故 $x > 0$;

当 $x < 0$ 时, $f(x+1) > 0 \Rightarrow \frac{g(x+1)}{x+1} > 0$, 即 $(x+1)g(x+1) > 0$,

得 $\begin{cases} x+1 < 0, \\ g(x+1) < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+1 > 0, \\ g(x+1) > 0 \end{cases}$,

解得 $x < -2$ 或 $-1 < x < 0$.

综上, 不等式 $xf(x+1) < 0$ 的解集为 $(-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$.]

9. 解: (1) 根据题意, 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上满足 $f(x+y) = f(x)f(y) + f(0) - 1$,

令 $x = y = 0$, 则 $f(0+0) = f(0)f(0) + f(0) - 1$, 故 $[f(0)]^2 = 1$, 可得 $f(0) = \pm 1$,

令 $y = 0$, 则 $f(x) = f(x)f(0) + f(0) - 1$,

当 $f(0) = -1$ 时, $f(x) = -f(x) - 2$, 即 $f(x) = -1$, 不符合题意, 舍去,

故 $f(0) = 1$.

(2) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

证明: 由 (1) 的结论, $f(0) = 1$,

则 $f(x+y) = f(x)f(y)$,

$f(x_1) = f(x_1 - x_2 + x_2) = f(x_1 - x_2)f(x_2)$.

由题知当 $x > 0$ 时, $0 < f(x) < 1$, 当 $x < 0$ 时, $f(x) > 1$,

则分情况讨论:

当 $x_1 > x_2 > 0$ 时, 有 $0 < f(x_1 - x_2) < 1, 0 < f(x_1) < 1, 0 < f(x_2) < 1$,

所以 $f(x_1) = f(x_1 - x_2)f(x_2) < f(x_2)$, 即 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $0 > x_1 > x_2$ 时, 有 $0 < f(x_1 - x_2) < 1, f(x_1) > 1, f(x_2) > 1$,

所以 $f(x_1) = f(x_1 - x_2)f(x_2) < f(x_2)$, 即 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减;

当 $x_1 > 0 \geq x_2$ 时, $f(x_1) < 1 \leq f(x_2)$.

综上, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

(3) 根据题意, $f(x+y) = f(x)f(y)$ 且 $f(0) = 1$,

令 $y = -x$, 则 $f(x) = \frac{1}{f(-x)}$,

故 $f(1) = \frac{1}{f(-1)} = \frac{1}{2}$,

即 $f(-1)=2$,

所以 $f(-2)=f(-1)f(-1)=4$, 则 $f(x-x^2)>f(-2)$,

由(2)知, $x-x^2<-2$, 即 $x^2-x-2>0$, 可得 $x<-1$ 或 $x>2$,

所以所求不等式的解集为 $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

阶段检测(二)

1. A [由函数关系知 $f(1)=-2$, 即 $m=-2$,

函数的值域为 $\{1, 0, -2\}$,

故选 A.]

2. B [根据题意, 函数 $f(x)=\begin{cases} (2a-6)x+5, & x \leq 2, \\ \frac{a}{x}, & x > 2 \end{cases}$ 是减函数,

则 $\begin{cases} 2a-6 < 0, \\ a > 0, \\ 4a-7 \geq \frac{a}{2}, \end{cases}$ 解得 $2 \leq a < 3$, 即实数 a 的取值范围为 $[2, 3)$.

故选 B.]

3. C [因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(-x)=-f(x)$.

又 $f(1+x)=f(-x)$, 所以 $f(2+x)=f(1+(1+x))=f(-(1+x))=-f(1+x)=-f(-x)=f(x)$, 所以函数

$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数, $f\left(\frac{5}{3}\right)=f\left(\frac{5}{3}-2\right)=$

$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$. 故选 C.]

4. A [根据题意, 函数 $f(x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+3)=-\frac{1}{f(x)}$,

则 $f(x+6)=-\frac{1}{f(x+3)}=f(x)$,

所以 $f(x)$ 的周期为 6,

当 $x \in [2, 3]$ 时, $f(x)=-4x$, 则 $f(2)=-8$,

故 $f(2030)=f(338 \times 6 + 2)=f(2)=-8$.

故选 A.]

5. B [法一: 因为 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$,

所以 $f(x-1)=\frac{1-(x-1)}{1+(x-1)}=\frac{2-x}{x}$, $f(x+1)=$

$\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=\frac{-x}{x+2}$.

对于 A, 令 $F(x)=f(x-1)-1=\frac{2-x}{x}-1=\frac{2-2x}{x}$, 定义域关于原点对称, 但不满足 $F(x)=-F(-x)$;

对于 B, 令 $G(x)=f(x-1)+1=\frac{2-x}{x}+1=\frac{2}{x}$, 定义域关于原点对称, 且满足 $G(x)=-G(-x)$;

对于 C, $f(x+1)-1=\frac{-x}{x+2}-1=\frac{-x-x-2}{x+2}=-\frac{2x+2}{x+2}$, 定义域不关于原点对称;

对于 D, $f(x+1)+1=\frac{-x}{x+2}+1=\frac{-x+x+2}{x+2}=\frac{2}{x+2}$, 定义域不关于原点对称.

故选 B.

法二: $f(x)=\frac{1-x}{1+x}=\frac{2-(x+1)}{1+x}=\frac{2}{1+x}-1$, 为保证函数变换

之后为奇函数, 需将函数 $y=f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度, 得到的图象对应的函数为 $y=$

$f(x-1)+1$. 故选 B.]

6. B [法一: 因为函数 $f(x+2)$ 是偶函数, 所以 $f(x+2)=f(-x+2)$, 则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称. 因为函数 $f(2x+1)$ 是奇函数, 所以 $f(-2x+1)=-f(2x+1)$, 则 $f(1)=0$, 且函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称. $f(x)=f(4-x)=-f(2-(4-x))=-f(x-2)$, $f(x+2)=-f(x)$, 则 $f(x+4)=-f(x+2)=-[-f(x)]=f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数, 所以 $f(5)=f(1+4)=f(1)=0$, 又函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 所以 $f(5)=f(-1)=0$, 故选 B.

法二: 构造一个符合条件的函数 $f(x)=\cos \frac{\pi}{2}x$, 可以验证只有 $f(-1)=0$, 故选 B.]

7. BC [A 项, $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}=(\sqrt{x}+1)^2-1$, $\sqrt{x}+1 \geq 1$,

将左右两边的 $\sqrt{x}+1$ 换成 x , 可得 $f(x)=x^2-1(x \geq 1)$, 故 A 错误;

B 项, 当 $x \geq 1$ 时, $f(x)=x^2-1 \geq 0$, $\therefore f(x)$ 的最小值为 0, 故 B 正确;

C 项, 函数 $f(2x-3)$ 中, 需满足 $2x-3 \geq 1$, 即 $x \geq 2$, $\therefore$ 函数 $f(2x-3)$ 的定义域为 $[2, +\infty)$, 故 C 正确;

D 项, $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}-1$, 由 $\frac{1}{x} \geq 1$, 即 $0 < x \leq 1$,

$\therefore \frac{1}{x^2} \in [1, +\infty)$, $\therefore f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 故 D 错误.

故选 BC.]

8. BC [对于 A, 由题知对任意的 $x, y \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x)f(y)=f(x+y-2)$,

令 $y=2$, 有 $f(x)f(2)=f(x)$, 而 $f(x)$ 是非常数函数,

则有 $f(2)=1$, 故 A 错误;

对于 B, 令 $y=4-x$, 有 $x+y-2=2$,

则有 $f(4-x)f(x)=f(2)=1$,

令 $x=0$, 则有 $f(4)f(0)=1$, 变形可得 $f(4)=\frac{1}{f(0)}=\frac{1}{2}$, 故 B

正确;

对于 C, 由对 B 的分析知, $f(4-x)f(x)=1$,

当 $x < 2$ 时, $4-x > 2$, 则有 $0 < f(4-x) < 1$,

同理, 当 $x < 2$ 时, $f(x)=\frac{1}{f(4-x)} > 1$,

故对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) > 0$ 恒成立,

$\forall x_1 > x_2$, 则 $\frac{f(x_1)}{f(x_2)}=f(x_1-x_2+2) < 1$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$,

故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 故 C 正确;

对于 D, 令 $x=y=0$, 得 $f(-2)=f(0)f(0)=4$,

令 $x=-2, y=0$, 得 $f(-4)=f(-2)f(0)=8$,

再由 $f(4-x)f(x)=1$ 可知 $f(8)=\frac{1}{f(-4)}=\frac{1}{8}$,

又由 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 则不等式 $f(x^2+3x+4) < \frac{1}{8}$ 等价于 $x^2+3x+4 > 8$,

解得 $x < -4$ 或 $x > 1$, 即不等式的解集为 $(-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$, 故 D 错误.

故选 BC.]

9. -4 [根据题意, $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 则 $f(0)=0$,

又由当 $x > 0$ 时, $f(x)=2^x$, 则 $f(2)=2^2=4$,

则 $f(-2)=-f(2)=-4$,

故 $f(0)+f(-2)=-4$.]

10. (3,5) [因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(3-x)=f(3+x)$,

且对任意的 $x_1, x_2 \in [3, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$), 都有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$,

所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称, $f(x)$ 在 $[3, +\infty)$ 上单调递增,

若 $f(m-1) < f(2)$,

则 $|m-1-3| < |2-3|$,

解得 $3 < m < 5$,

即实数 m 的取值范围是 $(3, 5)$.]

11. 解: 定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 值域为 $\mathbf{R}$.

$\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\begin{aligned} \text{则 } y_1 - y_2 &= x_1 - \frac{1}{x_1} - \left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) \\ &= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 x_2 + 1)}{x_1 x_2}. \end{aligned}$$

$\because x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, 且 $x_1 < x_2$,

$\therefore x_1 x_2 > 0, x_1 - x_2 < 0, x_1 x_2 + 1 > 0$,

$\therefore y_1 - y_2 < 0$, 即 $y_1 < y_2$.

$\therefore y = x - \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增.

$\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\text{则 } y_1 - y_2 = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 x_2 + 1)}{x_1 x_2}.$$

$\because x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$,

$\therefore x_1 x_2 > 0, x_1 x_2 + 1 > 0, x_1 - x_2 < 0$.

$\therefore y_1 - y_2 < 0$, 即 $y_1 < y_2$.

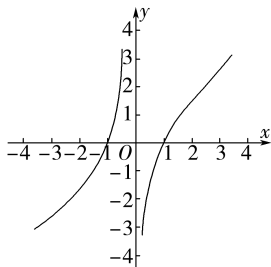
$\therefore y = x - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

设 $f(x) = y = x - \frac{1}{x}$,

$\therefore f(-x) = -x - \frac{1}{-x} = -\left(x - \frac{1}{x}\right) = -f(x)$,

$\therefore f(x) = y = x - \frac{1}{x}$ 是奇函数.

$y = x - \frac{1}{x}$ 的图象如图.



12. 解: (1) $\because f(x) = x^3 - 3x^2 = (x-1)^3 - 3(x-1) - 2$,

$\therefore f(x+1) + 2 = x^3 - 3x$.

设 $g(x) = x^3 - 3x$, 则 $g(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -g(x)$.

$\therefore g(x)$ 为奇函数, 即 $f(x+1) + 2$ 为奇函数.

$\therefore f(x) = x^3 - 3x^2$ 的图象关于点 $(1, -2)$ 对称.

即 $f(x) = x^3 - 3x^2$ 的图象的对称中心是点 $(1, -2)$.

(2) 函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = a$ 成轴对称图形的充

要条件是函数 $y = f(x+a)$ 为偶函数.

课时作业(十三)

1. C [因为 $f(x) = x^{4-m}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $4-m > 0$,

所以 $m < 4$. 又因为 $m \in \mathbf{N}^*$, 所以 $m = 1, 2, 3$.

又因为 $f(x) = x^{4-m}$ 是奇函数, 所以 $4-m$ 是奇数, 所以 $m = 1$ 或 $m = 3$.

故选 C.]

2. B [因为 $f(1) = f(3)$, 所以二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图象的对称轴为直线 $x = 2$,

又因为 $a < 0$, 所以 $f(4) < f(3) < f(2)$,

又 $f(1) = f(3)$, 所以 $f(4) < f(1) < f(2)$. 故选 B.]

3. B [由题图可知 $y = x^{\frac{m}{n}}$ 为偶函数,

且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 结合题图在 $(0, +\infty)$ 上的增长趋势

可知, $\frac{m}{n} \in (0, 1)$ 且 m 为偶数, 又 $m, n \in \mathbf{N}^*$ 且互质, 故 n 是奇数. 故选 B.]

4. C [A 中, 由函数的值域可得 $a > 0$, 所以 A 正确;

B 中, 由题意可得 $f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{a}\right) = a \cdot \frac{1}{a^2} - 2 \cdot \frac{1}{a} + \frac{b}{4} = 0$,

可得 $ab = 4$, 所以 B 正确;

C 中, 因为 $f(m) = f(n)$, 可得 $m + n = \frac{2}{a}$, 所以 C 错误;

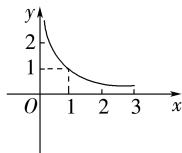
D 中, 由 B 选项分析, 可得 $\frac{1}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2ab} = \frac{1}{8}$, 所以 D 正确.

故选 C.]

5. ACD [依题意设 $f(x) = x^a$, 因为图象

过点 $\left(2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 所以 $2^a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 解得 $a =$

$-\frac{1}{2}$, 所以 $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, A 正确; $f(x)$



的图象大致如图所示, 因为 $x \in (0, +\infty)$, 所以 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数, B 错误, C 正确; 由图象可知函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, D 正确. 故选 ACD.]

6. BD [$f(x) = ax^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^a$,

对于 A, 当 $a = -1$ 时, $f(x) = -x^2 - 2x + 1$, 其图象开口向下,

对称轴方程为 $x = -1$, $g(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$, 其图象关于原点对称, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 A 满足要求;

对于 B, 当 $f(x) = ax^2 - 2x + 1$ 的图象开口向上时, $a > 0$, 此时 $g(x) = x^a$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 B 不满足要求;

对于 C, 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$, 其图象开口向上,

对称轴方程为 $x = 2$, $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 且图象越来越平缓, 故 C 满足要求;

对于 D, 当 $f(x) = ax^2 - 2x + 1$ 的图象开口向上时, $a > 0$, 此时其对称轴方程为 $x = -\frac{-2}{2a} = \frac{1}{a} > 0$, 故 D 不满足要求. 故选 BD.]

7. ② [对于函数①, $f(x) = x^{-1}$ 是奇函数, 值域是 $\{y | y \neq 0\}$, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 所以三个性质中有两个不正确; 对于函数②, $f(x) = x^{-2}$ 是偶函数, 值域是 $\{y | y > 0\}$, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 所以三个性质中有两个正确, 符合条件; 同理可判断

函数③④不符合题意.]

8. $(-1, 2)$ [∵函数 $f(x) = 2x^2 - 4kx - 5$ 图象的对称轴为直线 $x = k$, 函数 $f(x) = 2x^2 - 4kx - 5$ 在区间 $[-1, 2]$ 上不具有单调性.

∴ $-1 < k < 2$.

∴ 实数 k 的取值范围是 $(-1, 2)$.]

9. 解: 依题意, 设函数 $f(x) = a(x-2)^2 + h (a \neq 0)$,
由二次函数 $f(x)$ 的图象过点 $(0, 3)$, 得 $f(0) = 3$, 所以 $4a + h = 3$, 即 $h = 3 - 4a$,

所以 $f(x) = a(x-2)^2 + 3 - 4a$,

令 $f(x) = 0$, 即 $a(x-2)^2 + 3 - 4a = 0$,

所以 $ax^2 - 4ax + 3 = 0$.

设方程 $f(x) = 0$ 的两根为 x_1, x_2 ,

则 $x_1 + x_2 = 4, x_1 x_2 = \frac{3}{a}$,

所以 $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 16 - \frac{6}{a}$,

所以 $16 - \frac{6}{a} = 10$, 解得 $a = 1$,

所以 $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

10. 解: (1) 由题意知 $a \neq 0$.

当 $a > 0$ 时, $f(x) = ax^2 - x + 2a - 1$ 的图象开口向上, 对称轴方程为 $x = \frac{1}{2a}$,

所以 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递减需满足 $\frac{1}{2a} \geq 2$,

又 $a > 0$, 所以 $0 < a \leq \frac{1}{4}$;

当 $a < 0$ 时, $f(x) = ax^2 - x + 2a - 1$ 的图象开口向下, 对称轴方程为 $x = \frac{1}{2a} < 0$,

所以 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递减恒成立.

综上, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{4}]$.

(2) ① 当 $0 < \frac{1}{2a} \leq 1$, 即 $a \geq \frac{1}{2}$ 时,

$f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递增,

此时 $g(a) = f(1) = 3a - 2$.

② 当 $1 < \frac{1}{2a} < 2$, 即 $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$ 时,

$f(x)$ 在区间 $[1, \frac{1}{2a}]$ 上单调递减,

在区间 $[\frac{1}{2a}, 2]$ 上单调递增,

此时 $g(a) = f(\frac{1}{2a}) = 2a - \frac{1}{4a} - 1$.

③ 当 $\frac{1}{2a} \geq 2$, 即 $0 < a \leq \frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递减,

此时 $g(a) = f(2) = 6a - 3$.

综上所述, $g(a) = \begin{cases} 6a - 3, & a \in (0, \frac{1}{4}] \\ 2a - \frac{1}{4a} - 1, & a \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ 3a - 2, & a \in [\frac{1}{2}, +\infty) \end{cases}$.

课时作业(十四)

1. D [原式 $= 2^{\log_2 5} = 5$. 故选 D.]

2. D [对于 A, $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$, 故 A 正确;

对于 B, $\sqrt[4]{a^4} = |a| = a$, 故 B 正确;

对于 C, $(6^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 6^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 6^2 = 36$, 故 C 正确;

对于 D, $a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$, 故 D 错误. 故选 D.]

3. C [$\frac{\lg 2 + \lg 5 - \lg 8}{\lg 50 - \lg 40} = \frac{\lg \frac{10}{8}}{\lg \frac{50}{40}} = 1$, A 不成立;

$\frac{\lg 4 + \lg 5 - 1}{2 \lg 0.5 + \lg 8} = \frac{\lg 20 - 1}{\lg 0.25 + \lg 8} = \frac{1 + \lg 2 - 1}{\lg 2} = 1$, B 不成立;

$\lg 14 - 2 \lg \frac{7}{3} + \lg 7 - \lg 18 = (\lg 7 + \lg 2) - (2 \lg 7 - 2 \lg 3) +$

$\lg 7 - (2 \lg 3 + \lg 2) = 0$, C 成立;

$(\lg 2)^2 + \lg 2 \cdot \lg 5 + \lg 5 = \lg 2(\lg 2 + \lg 5) + \lg 5 = \lg 2 + \lg 5 = 1$, D 不成立. 故选 C.]

4. C [因为 $2^b = 3, a = \log_5 2$, 则 $b = \log_2 3$,

$\log_2 5 = \frac{1}{a}$, 所以 $\log_{12} 10 = \frac{\log_2 10}{\log_2 12} = \frac{\log_2 (2 \times 5)}{\log_2 (2^2 \times 3)}$

$= \frac{1 + \log_2 5}{2 + \log_2 3} = \frac{1 + \frac{1}{a}}{2 + b} = \frac{a + 1}{2a + ab}$.

故选 C.]

5. B [由 $2^a = t$ 可得 $a = \log_2 t$,

所以 $\frac{1}{a} = \log_t 2$,

由 $3^b = t$ 可得 $b = \log_3 t$,

所以 $\frac{1}{b} = \log_t 3$,

故 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 2 \log_t 2 + \log_t 3 = \log_t 4 + \log_t 3 = \log_t 12 = 2$,

故 $t^2 = 12$, 由于 $t > 0$,

故 $t = 2\sqrt{3}$.

故选 B.]

6. C [由题意, 可得 $\lg(100Y_0) = 6 \lg(1+k) + \lg Y_0$,

即 $2 + \lg Y_0 = 6 \lg(1+k) + \lg Y_0$, 所以 $\lg(1+k) = \frac{1}{3}$,

所以 $1+k = 10^{\frac{1}{3}} \approx 2.154$, 所以 $k \approx 1.154 = 115.4\%$. 故选 C.]

7. BD [对于 A, $0.25^{\frac{1}{2}} + (\sqrt[5]{\pi})^0 - 2^{-1} = 0.5 + 1 - \frac{1}{2} = 1$, A 错误;

对于 B, $(\frac{27}{8})^{-\frac{2}{3}} - (\frac{49}{9})^{0.5} + (0.008)^{-\frac{2}{3}} \times \frac{1}{25} + (\pi - 1)^0 =$
 $(\frac{3}{2})^{-2} - \frac{7}{3} + (\frac{1}{5})^{-2} \times \frac{1}{25} + 1 = \frac{4}{9} - \frac{7}{3} + 25 \times \frac{1}{25} + 1 =$
 $\frac{4}{9} - \frac{7}{3} + 2 = \frac{1}{9}$, B 正确;

对于 C, 原式 $= (2a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{2}}) (-6a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}}) \div (-3a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{5}{6}}) = [2 \times$
 $(-6) \div (-3)] a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{5}{6}} = 4ab^0 = 4a$, C 错误;

对于 D, 当 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$ 时, $(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = x + 2 + x^{-1} =$
 6 , 得 $x + x^{-1} = 4$, 由 $(x + x^{-1})^2 = x^2 + 2 + x^{-2} = 16$, 得 $x^2 +$
 $x^{-2} = 14$, 所以 $\frac{x + x^{-1}}{x^2 + x^{-2} - 2} = \frac{4}{14 - 2} = \frac{1}{3}$, D 正确. 故选 BD.]

8. **BCD** [对于 A, $b = \log_3 \frac{1}{5} < \log_3 1 = 0$, $a = \log_2 5 > \log_2 1 = 0$, 所以 $ab < 0$, 故 A 错误;

对于 B, 因为 $a = \log_2 5, b = \log_3 \frac{1}{5}$, 所以由对数的定义知, $2^a = 5, 3^b = \frac{1}{5}$,

则 $4^a \cdot 9^b = (2^a)^2 \cdot (3^b)^2 = 5^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1$, 故 B 正确;

对于 C, 由对数的运算性质知,

$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \log_5 2 - \log_{\frac{1}{5}} 3 = \log_5 2 + \log_5 3 = \log_5 6 > 1$, 故 C 正确;

对于 D, 由对数的运算性质知,

$$\begin{aligned} \frac{2b-a}{b-a} &= \frac{2\log_3 \frac{1}{5} - \log_2 5}{\log_3 \frac{1}{5} - \log_2 5} = \frac{\frac{2\lg 5}{\lg 3} + \frac{\lg 5}{\lg 2}}{\frac{\lg 5}{\lg 3} + \frac{\lg 5}{\lg 2}} \\ &= \frac{\frac{2}{\lg 3} + \frac{1}{\lg 2}}{\frac{1}{\lg 3} + \frac{1}{\lg 2}} = \frac{\lg(2^2 \times 3)}{\lg(2 \times 3)} = \frac{\lg 12}{\lg 6} = \log_6 12, \text{ 故 D 正确.} \end{aligned}$$

故选 BCD.]

9. **BC** [对选项 A, $a > 0$, $\frac{a}{\sqrt{a} \sqrt{a^3}} = \frac{a}{(a \cdot a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{a^{\frac{5}{4}}} = a^{-\frac{1}{4}}$, 故

A 错误;

对选项 B, 因为 $2a + b = 1$, 所以 $\frac{27^a 3^b}{3^a} = \frac{3^{3a} \cdot 3^b}{3^a} = \frac{3^{3a+b}}{3^a} = \frac{3^{a+1}}{3^a} = 3$, 故 B 正确;

对选项 C, $\frac{1}{\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{9}} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{3}} = \frac{1}{\log_4 9} + \frac{1}{\log_5 3} = \log_9 4 + \log_3 5 =$

$\log_3 2 + \log_3 5 = \log_3 10 = \frac{1}{\lg 3}$, 故 C 正确;

对选项 D, 因为 $\log_a 4 = m, \log_a 5 = n$, 所以 $a^m = 4, a^n = 5$,

所以 $a^{2m+n} = (a^m)^2 \cdot a^n = 4^2 \times 5 = 80$, 故 D 错误.

故选 BC.]

10. 1 [原式 $= 4 - 2\log_2 3 \times \log_3 2 + \lg 5 - \lg 2 + 2\lg 2 - 2$
 $= 4 - 2 + \lg 5 + \lg 2 - 2 = 4 - 2 + 1 - 2 = 1$.]

11. 10 [$\because 2^a = 5^b = k, \therefore a = \log_2 k, b = \log_5 k$,

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \log_k 2 + \log_k 5 = \log_k 10 = 1$, 解得 $k = 10$.]

12. 60 [0, 120] [当 $I = 10^{-6}$ 时, $L_I = 10\lg \frac{10^{-6}}{10^{-12}} = 10\lg 10^6 = 60$,

所以声强级为 60 dB

当 $I = 1$ 时, $L_I = 10\lg \frac{1}{10^{-12}} = 120$;

当 $I = 10^{-12}$ 时, $L_I = 10\lg 1 = 0$, 所以人听觉的声强级(单位: dB)范围为 [0, 120].]

课时作业(十五)

1. **D** [集合 $A = \{x | \sqrt{x} < 1\} = \{x | 0 \leq x < 1\}$,

集合 $B = \left\{y \left| y = e^x + \frac{1}{2} \right.\right\} = \left\{y \left| y > \frac{1}{2} \right.\right\}$, 所以 $\complement_{\mathbf{R}} B =$

$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$, 所以 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

故选 D.]

2. **B** [由指数函数的性质可知, $f(x) = a^{x-2} + 1 (a > 0, a \neq 1)$ 的

图象恒过定点 $M(2, 2)$,

则函数 $g(x) = m^x - n = 2^x - 2$ 的图象经过第一、三、四象限.

故选 B.]

3. **C** [因为 $0 < a < 1$, 所以 $y = a^t$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 又 $0 < x <$

$y < 1$, 所以 $a^x > a^y$, 故 A 错误; 因为 $-x > -y$, 所以 $a^{-x} <$

a^{-y} , 故 B 错误; 因为 $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$, 所以 $a^{\frac{1}{x}} < a^{\frac{1}{y}}$, 故 C 正确; 因为

$\frac{1}{a} > 1$, 所以 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^t$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 又 $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$, 所以

$\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{x}} > \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{y}}$, 故 D 错误. 故选 C.]

4. **D** [函数 $f(x) = 2^x - x - 1$, 则不等式 $f(x) > 0$ 的解集即为

$2^x > x + 1$ 的解集, 在同一平面直角坐标系中画出函数 $y = 2^x$,

$y = x + 1$ 的图象(图略), 结合图象易得 $2^x > x + 1$ 的解集为

$(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, 故选 D.]

5. **D** [$y = 1.01^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, $y = x^{0.5}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调

递增, 则 $a = 1.01^{0.5} < b = 1.01^{0.6} > 1, a = 1.01^{0.5} > c = 0.6^{0.5} <$

1, 所以 $b > a > c$.

故选 D.]

6. **A** [$\because 2^x + 2^{2-x} \geq 2 \sqrt{2^x \cdot 2^{2-x}} = 4$, 当且仅当 $2^x = 2^{2-x}$, 即

$x = 1$ 时取等号, $\therefore a = 4, f(x) = \frac{4}{3^x - 1}$.

令 $3^x - 1 \neq 0$, 解得 $x \neq 0$,

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

当 $x > 0$ 时, $3^x - 1 > 0, \frac{4}{3^x - 1} > 0$;

当 $x < 0$ 时, $-1 < 3^x - 1 < 0, \frac{4}{3^x - 1} < -4$,

$\therefore f(x)$ 的值域为 $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$. 故选 A.]

7. **AB** [由题图可得 $a^1 = 2$, 即 $a = 2$,

$y = a^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 单调递减, 且图象过点 $(-1, 2)$, 故 A 正确;

$y = x^{-a} = x^{-2}$ 为偶函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, 0)$

上单调递增, 且图象过点 $(-1, 1)$ 和 $(1, 1)$, 故 B 正确;

$y = a^{|x|} = 2^{|x|} = \begin{cases} 2^x, & x \geq 0, \\ 2^{-x}, & x < 0 \end{cases}$ 为偶函数, 结合指数函数的图象可

知 C 错误;

$y = |a^x| = |2^x| = 2^x$, 根据指数函数的图象可知 D 错误. 故

选 AB.]

8. **AB** [A 项, 因为 $2^x > 0$, 所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 故 A 正

确;

B 项, $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} = 1 - \frac{2}{2^x + 1}$,

由 $2^x > 0 \Rightarrow 2^x + 1 > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2^x + 1} < 1 \Rightarrow -2 < -\frac{2}{2^x + 1} < 0 \Rightarrow$

$-1 < 1 - \frac{2}{2^x + 1} < 1$,

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $(-1, 1)$, 故 B 正确;

C 项, 因为 $f(-x) = \frac{2^{-x} - 1}{2^{-x} + 1} = \frac{1 - 2^x}{1 + 2^x} = -f(x)$,

所以函数 $f(x)$ 是奇函数, 其图象关于原点对称, 不关于 y 轴

对称, 故 C 错误;

D 项, 因为函数 $y = 2^x + 1$ 是增函数, $y = 2^x + 1 > 1$, 所以函数

$y = \frac{2}{2^x + 1}$ 是减函数,

因此函数 $f(x) = 1 - \frac{2}{2^x + 1}$ 是增函数, 故 D 错误.

故选 AB.]

9. BC [对于 A, $3^x = 2 < 3^1$, 又 $y = 3^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $x < 1$, 选项 A 错误;

对于 B, 因为 $3^x = 2, 5^y = 3$, 则 $x = \log_3 2, y = \log_5 3$,

又 $\frac{2}{3} = \log_3 3^{\frac{2}{3}} = \log_3 \sqrt[3]{9} > \log_3 \sqrt[3]{8} = \log_3 2 = x$,

$y = \log_5 3 = \log_5 \sqrt[3]{27} > \log_5 \sqrt[3]{25} = \frac{2}{3}$,

所以 $x < y$, 选项 B 正确;

对于 C, 因为 $0 < x = \log_3 2 < 1, 0 < y = \log_5 3 < 1$, 所以 $0 < xy < 1$, 选项 C 正确;

对于 D, 由选项 C 知 $0 < x = \log_3 2 < 1, 0 < y = \log_5 3 < 1$, 所以 $0 < x + y < 2$, 选项 D 错误.

故选 BC.]

10. $\frac{3}{4}$ [因为 $f(x)$ 的图象过原点, 所以 $f(0) = a\left(\frac{1}{2}\right)^0 + b = 0$, 即 $a + b = 0$.

又 $f(x)$ 的图象无限接近直线 $y = 1$, 但又不与该直线相交, 所以 $b = 1, a = -1$, 所以 $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} + 1$,

所以 $f(-2) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{3}{4}$.]

11. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ [$y = |a^x - 1|$ 的图象是由 $y = a^x$ 的图象先向下平移 1 个单位长度, 再将 x 轴下方的图象翻折到 x 轴上方, 且保持 x 轴上及其上方的图象不变得到的.

当 $a > 1$ 时, 如图 1, 两图象只有一个交点, 不符合题意;

当 $0 < a < 1$ 时, 如图 2, 要使两个图象有两个交点, 则 $0 < 2a < 1$, 即 $0 < a < \frac{1}{2}$.

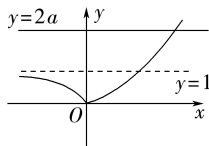


图 1

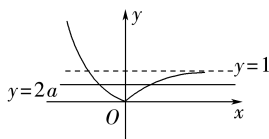


图 2

综上所述, a 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.]

12. $\left(-\frac{2}{3}, 4\right)$ [因为 $f(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|} + 1$,

所以 $f(-x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^{|-x|} + 1 = -\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|} + 1 = f(x)$, 又定义域为 $\mathbf{R}$, 关于原点对称, 所以 $f(x)$ 为偶函数,

又当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$ 单调递增; 当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 单调递减,

所以 $f(2m-1) < f(m+3)$,

即 $|2m-1| < |m+3|$,

两边平方整理可得 $3m^2 - 10m - 8 < 0$, 解得 $-\frac{2}{3} < m < 4$.]

1. D [要使 $\log_{(2x-1)}(2-x)$ 有意义,

则 $\begin{cases} 2-x > 0, \\ 2x-1 > 0, \text{ 解得 } \frac{1}{2} < x < 2 \text{ 且 } x \neq 1, \\ 2x-1 \neq 1, \end{cases}$

所以 x 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2)$.

故选 D.]

2. B [由 $\lg a + \lg b = 0$ 可知, $\frac{1}{a} = b$,

故 $f(x) = a^{-x} = b^x$, 故函数 $f(x) = a^{-x}$ 与函数 $g(x) = \log_b x$ 的单调性相同. 故选 B.]

3. C [由 $\log_2 4 > \log_2 3 > \log_2 2$, 得 $1 < a < 2$, 由 $\log_3 2 < \log_3 3$, 得 $b < 1$,

由 $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$, 可知 $\sqrt{8} > 2$, 即 $c > 2$,

综上得 $c > a > b$.

故选 C.]

4. B [因为 $f(x) = |\log_2 x|$,

若 $0 < a < b$ 且 $f(a) = f(b)$, 则 $-\log_2 a = \log_2 b$, 即 $ab = 1$,

所以 $0 < a < \frac{1}{a}$, 即 $0 < a < 1$,

根据对勾函数的单调性可知, $2a + 3b = 2a + \frac{3}{a} > 5$.

故选 B.]

5. B [由题意可得当 $0 < x < \frac{1}{4}$ 时, $y = \sqrt{x}$ 的图象位于 $y = \log_a x$ 图象的下方,

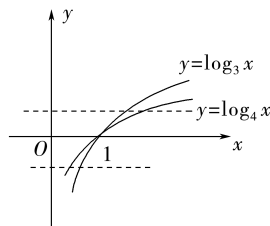
因为 $y = \sqrt{x}$ 在 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ 上单调递增,

所以 $\begin{cases} 0 < a < 1, \\ \log_a \frac{1}{4} \geq \sqrt{\frac{1}{4}}, \end{cases}$

即 $\begin{cases} 0 < a < 1, \\ \log_a \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2} = \log_a \sqrt{a}, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} 0 < a < 1, \\ a \geq \frac{1}{16}, \end{cases}$

可得 $\frac{1}{16} \leq a < 1$. 故选 B.]

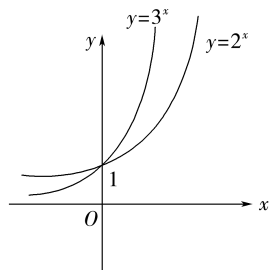
6. D [根据函数 $y = \log_3 x$ 与 $y = \log_4 x$ 的图象知,



当 $\log_3 a = \log_4 b > 0$ 时, $1 < a < b$, 选项 C 可能;

当 $\log_3 a = \log_4 b < 0$ 时, $0 < b < a < 1$, 选项 A 可能;

设 $\log_3 a = \log_4 b = k$, 则 $a = 3^k, b = 4^k$, 所以 $\sqrt{b} = 2^k$, 由题意, 画出函数 $y = 2^x$ 与 $y = 3^x$ 的图象, 如图所示,



$x < 0$ 时, $3^x < 2^x < 1$, 即 $a < \sqrt{b} < 1$, 选项 B 可能;

$x > 0$ 时, $3^x > 2^x > 1$, 即 $a > \sqrt{b} > 1$, 选项 D 不可能. 故选 D.]

7. ABD [函数 $y = \log_3 x$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 又 $\log_3 m < \log_3 n$, 所以 $0 < m < n$, 所以 A 正确;

函数 $y = \log_{0.3} x$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 又 $\log_{0.3} m < \log_{0.3} n$, 所以 $m > n > 0$, 所以 B 正确;

当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $y = \log_a x$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 又 $\log_a m < \log_a n$, 所以 $m > n > 0$, 所以 C 错误;

因为 $5 < 7$, 且 $\log_m 5 < \log_m 7$, 所以 $y = \log_m x$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 所以 $m > 1$, 所以 D 正确. 故选 ABD.]

8. BCD [由 $\begin{cases} 2-x > 0, \\ x+4 > 0, \end{cases}$ 得 $-4 < x < 2$, 故 $f(x)$ 的定义域为 $(-4, 2)$, A 错误; 由 $-4 < x-1 < 2$, 得 $-3 < x < 3$, 所以 $f(x-1)$ 的定义域为 $(-3, 3)$, 关于原点对称, $f(x-1) = -\log_2(3-x) - \log_2(x+3)$, 令 $g(x) = f(x-1)$, 则 $g(-x) = -\log_2(3+x) - \log_2(-x+3) = g(x)$, 所以函数 $y = f(x-1)$ 是偶函数, B 正确;

$f(x) = -\log_2(2-x) - \log_2(x+4) = -\log_2[-(x+1)^2 + 9]$, 易知 $f(x)$ 在 $(-4, -1)$ 上单调递减, 在 $[-1, 2)$ 上单调递增, C 正确; 由 $f(-2-x) = -\log_2(x+4) - \log_2(2-x) = f(x)$ 及 $f(x)$ 的定义域为 $(-4, 2)$, 可得 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -1$ 对称, D 正确. 故选 BCD.]

9. ACD [由 $y = \frac{1}{\log_2(2x-1)}$ 可知 $\begin{cases} \log_2(2x-1) \neq 0, \\ 2x-1 > 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} 2x-1 \neq 1, \\ x > \frac{1}{2}, \end{cases}$ 可得 $\frac{1}{2} < x < 1$ 或 $x > 1$, A 正确;

函数 $y = \log_{\frac{1}{3}} |x+3|$ 的定义域为 $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$,

当 $x > -3$ 时, $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+3)$ 单调递减,

当 $x < -3$ 时, $y = \log_{\frac{1}{3}}(-x-3)$ 单调递增,

故函数的单调递增区间为 $(-\infty, -3)$, B 错误;

显然函数 $u = x-1$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 而函数 $y = \log_a(x-1)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

因此对数函数 $y = \log_a u$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则 $0 < a < 1$, 所以实数 a 的取值范围是 $(0, 1)$, C 正确;

依题意, 由 $\log_2 x \geq \log_{\frac{1}{2}} x$, 得 $\log_2 x \geq -\log_2 x$, 即 $2\log_2 x \geq 0$, 解得 $x \geq 1$,

由 $\log_2 x < \log_{\frac{1}{2}} x$, 解得 $0 < x < 1$,

因此 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x, & 0 < x < 1, \\ \log_2 x, & x \geq 1, \end{cases}$

显然函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 值域为 $(0, +\infty)$, 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 值域为 $[0, +\infty)$, 所以函数 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$, D 正确. 故选 ACD.]

10. $\{x | x > 0, \text{ 且 } x \neq 2\}$ [函数 $f(x) = \lg x + \frac{1}{x-2}$,

则 $\begin{cases} x-2 \neq 0, \\ x > 0, \end{cases}$ 解得 $x > 0$ 且 $x \neq 2$,

故函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x > 0, \text{ 且 } x \neq 2\}$.]

11. $(\frac{3}{4}, \frac{8}{5})$ [由实数 $a > 0$, 且满足 $5^{3a+2} > 5^{4a+1}$, 根据指数函

数的单调性, 可得 $3a+2 > 4a+1$, 解得 $0 < a < 1$,

所以函数 $y = \log_a x$ 为减函数.

由不等式 $\log_a(3x+2) < \log_a(8-5x)$,

可得 $\begin{cases} 3x+2 > 0, \\ 8-5x > 0, \\ 3x+2 > 8-5x, \end{cases}$

解得 $\frac{3}{4} < x < \frac{8}{5}$,

即不等式的解集为 $(\frac{3}{4}, \frac{8}{5})$.]

12. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ [当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $1 \leq x+1 \leq 3$,

所以 $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$,

因为 $f(x)$ 的值域为 $[0, 2]$,

故 $0 < a < 1$ 且 $\log_a \frac{1}{3} = 2, \log_a 1 = 0$,

所以 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$.]

课时作业(十七)

1. D [易知 $\log_{0.1} 3 < 0$, 因为函数 $y = 3^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $0 < (\frac{1}{3})^{0.3} = 3^{-0.3} < 3^{-0.1}$, 所以 $c < b < a$. 故选 D.]

2. C [$\because \lg 0.2 < \lg 1 = 0, \log_5 6 > \log_5 5 = 1, 0 = \ln 1 < \ln 2 < \ln e = 1, \therefore a < c < b$. 故选 C.]

3. B [由 $c = \log_2 3 > \log_2 2 = 1, 0 < a = e^{-1} < e^0 = 1, b = \ln \frac{1}{2} < \ln 1 = 0$, 所以 $b < a < c$. 故选 B.]

4. C [$\because a = 5^{0.3} > 5^0 = 1$, $b = (\log_5 a)^4 = 0.3^4 < 0.3^0 = 1$, 且 $b > 0$, $c = \log_4 (\log_5 a) = \log_4 0.3 < \log_4 1 = 0$, $\therefore a > b > c$. 故选 C.]

5. B [法一: 设 $2 + \log_2 x = 3 + \log_3 y = 5 + \log_5 z = m$,

令 $m = 2$, 则 $x = 1, y = 3^{-1} = \frac{1}{3}, z = 5^{-3} = \frac{1}{125}$, 此时 $x > y > z$,

A 有可能;

令 $m = 5$, 则 $x = 8, y = 9, z = 1$, 此时 $y > x > z$, C 有可能.

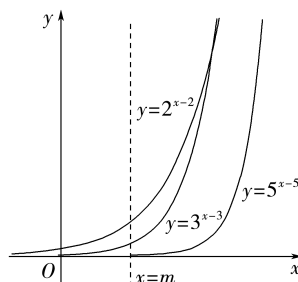
令 $m = 8$, 则 $x = 2^6 = 64, y = 3^5 = 243, z = 5^3 = 125$, 此时 $y > z > x$, D 有可能.

故选 B.

法二: 设 $2 + \log_2 x = 3 + \log_3 y = 5 + \log_5 z = m$, 所以 $x = 2^{m-2}, y = 3^{m-3}, z = 5^{m-5}$,

根据指数函数的单调性, 易知各方程只有唯一的根,

作出函数 $y = 2^{x-2}, y = 3^{x-3}, y = 5^{x-5}$ 的图象, 以上方程的根分别是函数 $y = 2^{x-2}, y = 3^{x-3}, y = 5^{x-5}$ 的图象与直线 $x = m$ 的交点的纵坐标, 如图所示:



易知,随着 m 的变化可能出现: $x > y > z, y > x > z, y > z > x, z > y > x$.

故选 B.]

6. AC [对于 A, 由 $x > y > 0$, 得 $x^2 + 1 > y^2 + 1$, 又 $f(t) = \log_2 t$ 是增函数, 所以 $\log_2(x^2 + 1) > \log_2(y^2 + 1)$, 故 A 正确;

对于 B, 由于 $g(t) = \cos t$ 在 $(0, +\infty)$ 上不单调, 所以 $\cos x$ 与 $\cos y$ 的大小关系无法确定, 故 B 错误;

对于 C, 由 $x > y$, 得 $x + 1 > y + 1$, 又 $h(t) = t^3$ 是增函数, 所以 $(x + 1)^3 > (y + 1)^3$, 故 C 正确;

对于 D, 由 $x > y$, 得 $-x + 1 < -y + 1$, 又 $\varphi(t) = e^t$ 是增函数, 所以 $e^{-x+1} < e^{-y+1}$, 故 D 错误. 故选 AC.]

7. BC [对于 A, $\because 0 < a < 1$, 幂函数 $y = x^a$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

且 $b > c > 1, \therefore b^a > c^a$, 故 A 错误;

对于 B, $\because 0 < a < 1, \therefore$ 函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 又 $\because b > c > 1, \therefore \log_a b < \log_a c < \log_a 1 = 0$,

$\therefore 0 > \frac{1}{\log_a b} > \frac{1}{\log_a c}$, 即 $0 > \log_b a > \log_c a$, 故 B 正确;

对于 C, $\because 0 < a < 1$, 则 $a - 1 < 0$,

$\therefore$ 幂函数 $y = x^{a-1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

且 $b > c > 1, \therefore b^{a-1} < c^{a-1}, \therefore cb^a < bc^a$, 故 C 正确;

对于 D, 由选项 B 可知 $0 > \log_b a > \log_c a$,

$\therefore 0 < -\log_b a < -\log_c a$,

$\therefore b > c > 1, \therefore c(-\log_b a) < b(-\log_c a)$,

$\therefore b \log_c a < c \log_b a$, 故 D 错误. 故选 BC.]

8. $a < b < c$ [因为 $a = 2^{-1.1} < 2^{-1} = \frac{1}{2}$,

$$b = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{3} = \log_4 3 > \log_4 2 = \frac{1}{2},$$

且 $b = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{3} = \log_4 3 < 1, c = \log_2 3 > \log_2 2 = 1$, 所以 $a < b < c$.]

9. $b > a > c$ [因为 $a = 16^{0.3} = (2^4)^{0.3} = 2^{1.2}, b = 9^{0.6} = (3^2)^{0.6} = 3^{1.2}$, 所以 $3^{1.2} > 2^{1.2} > 2^1 = 2$, 即 $b > a > 2$.

因为 $c = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{3} = \log_2 3 < \log_2 4 = 2$,

所以 $b > a > c$.]

课时作业(十八)

1. A [$\because$ 前 3 年年产量的增长速度越来越快, $\therefore$ 当 $0 \leq t \leq 3$ 时, 随着 t 的增大, c 的增长速度越来越快, c 关于 t 的函数图象下凹. 又后 3 年年产量保持不变, $\therefore$ 当 $3 < t \leq 6$ 时, c 随着 t 的增大保持固定的增长速度. 故选 A.]

2. B [易知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0 \text{ 且 } x \neq \pm 1\}$, 因为 $f(-x) = \frac{1}{(-x-1)\ln|-x|} = -\frac{1}{(x+1)\ln|x|}$, 所以函数 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数, 故排除 A; 易知当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$, 故排除 C; 因为 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{2}{3\ln 2}, f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{\ln 2}$, 所以 $f(-\frac{1}{2}) < f(\frac{1}{2})$, 故排除 D. 故选 B.]

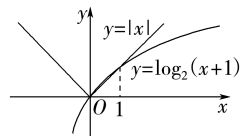
3. C [易知 $f(x) = \sin x$ 为奇函数, 由 $g(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2 + 1} = -\frac{4x}{x^2 + 1} = -g(x)$, 得 $g(x)$ 为奇函数, 由题图可知, 所求函数是偶函数, 而 $f(x) \pm g(x)$ 是奇函数, 所以 A, B 不符合题意;

因为当 $x = 0$ 时, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ 无意义, 所以 D 不符合题意. 故

选 C.]

4. B [不等式 $f(x) > 0 \Leftrightarrow \log_2(x+1) > |x|$,

分别画出函数 $y = \log_2(x+1)$ 和 $y = |x|$ 的图象, 如图所示,



由图象可知 $y = \log_2(x+1)$ 和 $y = |x|$ 有两个交点, 分别是 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$,

所以 $\log_2(x+1) > |x|$ 的解集是 $(0, 1)$,

即不等式 $f(x) > 0$ 的解集是 $(0, 1)$.]

5. AD [由题意可得 $x \neq -c$,

则 $-c < 0$, 即 $c > 0$, D 正确;

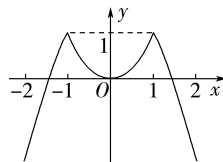
因为 $f(0) = \frac{b}{c^2} > 0$, 所以 $b > 0$, C 错误;

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) < 0$, 且 $f(x) \rightarrow 0$,

故 $a < 0$, A 正确, B 错误.

故选 AD.]

6. ABD [根据函数 $f(x) = 2 - x^2$ 与 $g(x) = x^2$ 的图象, 画出函数 $F(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ 的图象, 如图.



由图象可知, 函数 $F(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ 的图象关于 y 轴对称, 所以 A 项正确;

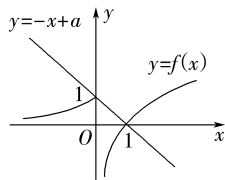
函数 $F(x)$ 的图象与 x 轴有三个交点, 所以方程 $F(x) = 0$ 有三个解, 所以 B 项正确; 函数 $F(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 上单调递增, 在 $[-1, 0]$ 上单调递减, 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 C 项错误, D 项正确. 故选 ABD.]

7. (3, 1) [由于函数 $y = f(4-x)$ 的图象可以看作 $y = f(x)$ 的图象先关于 y 轴对称, 再向右平移 4 个单位长度得到. 点 $(1, 1)$ 关于 y 轴对称的点为 $(-1, 1)$, 再将此点向右平移 4 个单位长度, 可推出函数 $y = f(4-x)$ 的图象过点 $(3, 1)$.]

8. $(-\infty, 1]$ [分别作出函数 $y = f(x)$

与 $y = -x + a$ 的大致图象, 如图所

示. 由图象可知, 当 $a \leq 1$ 时, 两个函数的图象有两个不同的交点, 故实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.]



9. 解: (1) 将 $f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度, 即得到 $f(x-1)$ 的图象, 如图 1.

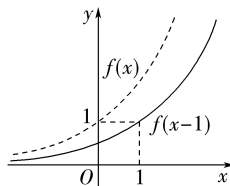


图 1

(2) 去掉原图象在 y 轴左侧的部分, 以 y 轴为对称轴作出 $f(x)$ 图象剩余部分的对称图象, 即得到 $f(|x|)$ 的图象, 如图 2.

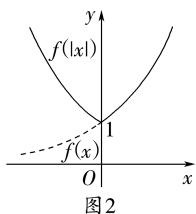


图2

(3)以 x 轴为对称轴,画出与 $f(x)$ 图象对称的图象,即得到 $-f(x)$ 的图象,如图3.

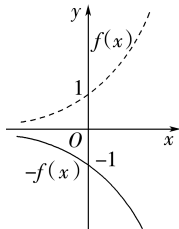


图3

(4)先将 $f(x)$ 的图象向下平移1个单位长度,再将所得图象在 x 轴下方的部分,翻折到上方,即得到 $|f(x)-1|$ 的图象,如图4.

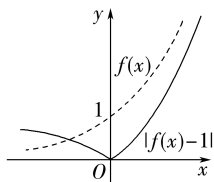


图4

10. 解:(1)设 $x < 0$, 则 $-x > 0$,

可得 $f(-x) = -(-x)^2 + 2(-x) + 3 = -x^2 - 2x + 3$,

又对任意 $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) + f(x) = 0$,

即 $f(x) = -f(-x)$,

则 $f(x) = x^2 + 2x - 3$,

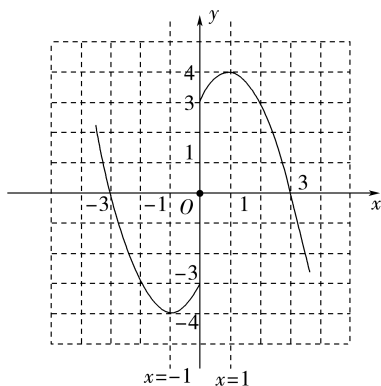
即当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^2 + 2x - 3$,

又 $f(0) + f(0) = 0$,

故 $f(0) = 0$,

即 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ x^2 + 2x - 3, & x < 0. \end{cases}$

(2)函数 $f(x)$ 的图象如图:



顶点坐标为 $(-1, -4)$, $(1, 4)$, 与坐标轴交点坐标为 $(-3, 0)$, $(3, 0)$.

课时作业(十九)

1. D [$\because f(x)$ 为连续函数, 且 $f(a)f(b) < 0$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上至少有一个零点,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上至多有一个零点,

故函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有且只有一个零点,

即方程 $f(x) = 0$ 在区间 $[a, b]$ 上必有唯一的实数解.]

2. B [函数 $f(x) = \ln x + 2x - 3$ 在 $x > 0$ 时的图象是连续的, 且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

因为 $f(1) = 2 - 3 = -1 < 0$, $f(2) = \ln 2 + 4 - 3 = \ln 2 + 1 > 0$,

所以 $f(1)f(2) < 0$, 由函数零点存在定理可知, 函数的零点在 $(1, 2)$ 内.

故选 B.]

3. C [因为 $f(x) = x^3 - 2x - 1$, 所以 $f(1) = -2 < 0$, $f(2) = 3 > 0$,

取中间值, 有 $\frac{1+2}{2} = 1.5$, 而 $f(1.5) = -\frac{5}{8} < 0$,

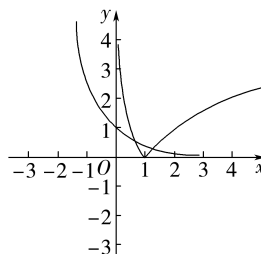
所以下一个零点所在区间是 $(1.5, 2)$.

故选 C.]

4. C [函数 $f(x) = 3^x |\log_2 x| - 1$ 的零点,

即 $3^x |\log_2 x| - 1 = 0$ 的解, 即 $|\log_2 x| = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的解,

转化为 $y = |\log_2 x|$ 与 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 图象的交点个数, 如图所示,



从函数图象可知, $y = |\log_2 x|$ 与 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图象有 2 个交点, 即函数 $f(x)$ 有 2 个零点. 故选 C.]

5. D [因为 $f(x) = \lg x + t$ 在 $(1, 10)$ 内单调递增,

又因为函数 $f(x)$ 在 $(1, 10)$ 内有零点,

所以 $\begin{cases} f(1) < 0, \\ f(10) > 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} t < 0, \\ 1+t > 0, \end{cases}$

解得 $-1 < t < 0$.

即实数 t 的取值范围为 $(-1, 0)$. 故选 D.]

6. C [$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3, & x \leq 0, \\ \cos \frac{\pi x}{2}, & 0 < x < 4, \end{cases}$

当 $x \leq 0$ 时, 由 $x^2 + 4x + 3 = 0$, 解得 $x = -3$ 或 $x = -1$;

当 $0 < x < 4$ 时, 由 $\cos \frac{\pi x}{2} = 0$, 解得 $x = 1$ 或 $x = 3$.

$\therefore$ 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3, & x \leq 0, \\ \cos \frac{\pi x}{2}, & 0 < x < 4 \end{cases}$ 的所有零点之和为 0.

故选 C.]

7. BCD [对于 A, $\because x^2 - 2x - 8 = 0$ 的解为 $x = -2, x = 4$,

$\therefore f(x)$ 在区间 $(-1, 3)$ 内没有零点, 故 A 错误;

对于 B, $\because f(x) = (x+1)^{\frac{3}{2}} - 2$ 在 $[-1, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(-1) = -2 < 0$, $f(3) = 8 - 2 = 6 > 0$,

即 $f(-1)f(3) < 0$,

$\therefore f(x)$ 在区间 $(-1, 3)$ 内存在唯一零点, 故 B 正确;

对于 C, $\because f(x) = 2^{x-1} - 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 且 $f(-1) = -\frac{3}{4} < 0$, $f(3) = 3 > 0$,

即 $f(-1)f(3) < 0$,

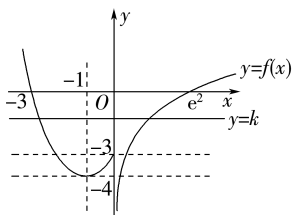
∴ $f(x)$ 在区间 $(-1, 3)$ 内存在唯一零点, 故 C 正确;

对于 D, ∵ $f(x) = 1 - \ln(x+2)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递减, 且 $f(-1) = 1 > 0, f(3) = 1 - \ln 5 < 0$, 即 $f(-1)f(3) < 0$,

∴ $f(x)$ 在区间 $(-1, 3)$ 内存在唯一零点, 故 D 正确.

故选 BCD.]

8. AC [作出 $f(x)$ 的图象与直线 $y=k$, 如图.



由图象可知,

当 $k < -4$ 时, $f(x) = k$ 有 1 个解, A 正确;

当 $k = -4$ 或 $k > -3$ 时, $f(x) = k$ 有 2 个解, B 错误;

当 $-4 < k \leq -3$ 时, $f(x) = k$ 有 3 个解, C 正确;

$f(x) = k$ 不可能有 4 个解, D 错误. 故选 AC.]

9. BC [对于 A, 令 $f(x) = x^2 + 2x - 8 = 0$, 解得 $x_1 = -4, x_2 = 2$, 即函数 $f(x) = x^2 + 2x - 8$ 的零点是 -4 和 2, 故 A 错误;

对于 B, 令 $f(x) = e^x - x - 3$, 则 $f(-3) = e^{-3} > 0, f(0) = -2 < 0, f(10) = e^{10} - 13 > 2^{10} - 13 > 0$, 所以由函数零点存在定理可知 $f(x) = e^x - x - 3$ 在区间 $(-3, 0), (0, 10)$ 内有零点, 即方程 $e^x = 3 + x$ 在区间 $(-3, 0), (0, 10)$ 内有解, 故 B 正确;

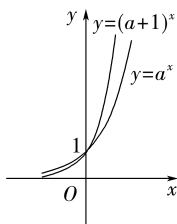
对于 C, 函数 $y = 3^x, y = \log_3 x$ 互为反函数, 所以函数 $y = 3^x, y = \log_3 x$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称, 故 C 正确;

对于 D, 用二分法求方程 $3^x + 3x - 8 = 0$ 在 $(1, 2)$ 内的近似解的过程中得到 $f(1) < 0, f(1.5) > 0, f(1.25) < 0$, 则方程的解落在区间 $(1.25, 1.5)$ 内, 故 D 错误. 故选 BC.]

10. e [根据题意, $f(x) = \ln x - 1$,

令 $f(x) = \ln x - 1 = 0$, 解得 $x = e$, 即函数的零点是 e.]

11. 1 [当 $a > 1$ 时, 由指数函数的图象与性质知,



当 $x < 0$ 时, $(a+1)^x - a^x < 0, x < 0$, 可得 $f(x) < 0$,

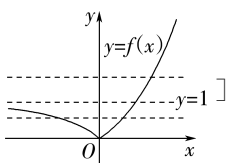
当 $x > 0$ 时, $(a+1)^x - a^x > 0, x > 0$, 可得 $f(x) > 0$,

当 $x = 0$ 时, $f(x) = (a+1)^x - a^x + x = 0$, 则函数 $f(x)$ 只有一个零点.]

12. $[\frac{1}{2}, 1)$ [由 $[f(x)]^2 - 3tf(x) + 2t^2 = 0$ 得 $f(x) = t$ 或

$f(x) = 2t$, 作出函数 $f(x)$ 的图象 (如图所示), 易知当 $t \leq 0$ 时, 不符合题意; 当 $t > 0$ 时, $2t > t$, 结合函数 $f(x)$ 的图象知, 要使方程 $[f(x)]^2 - 3tf(x) + 2t^2 = 0$ 有三个不同的解, 需满足方程 $f(x) = t$ 有两个解, 方程 $f(x) = 2t$ 有且只有一个解,

由图象知 $\begin{cases} 0 < t < 1, \\ 2t \geq 1, \end{cases}$ 所以 $\frac{1}{2} \leq t < 1$.



课时作业(二十)

1. D [根据散点图, 用光滑的曲线把图中各点依次连起来 (图略), 由图并结合选项可排除 A, B, C, 故选 D.]

2. A [由题图可知函数的图象过点 $(10, 1)$,

代入函数解析式, 可得 $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-a} = 1$, 解得 $a = 1$,

$$\text{所以 } y = \begin{cases} 0.1t, & 0 \leq t \leq 10, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}-1}, & t > 10, \end{cases}$$

令 $y \leq 0.25$, 可得 $0.1t \leq 0.25 (0 \leq t \leq 10)$ 或 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}-1} \leq 0.25 (t > 10)$,

解得 $0 < t \leq 2.5$ 或 $t \geq 30$,

所以如果商场规定 9:30 顾客可以进入商场, 那么开始喷洒药物的时间最迟是 9:00.]

3. B [由题意得 $v^2 - Hv^4 = 4H$,

$$\text{故 } H = \frac{v^2}{v^4 + 4} = \frac{1}{v^2 + \frac{4}{v^2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{v^2 \cdot \frac{4}{v^2}}} = \frac{1}{4}, \text{ 当且仅当 } v^2 = 2$$

时, 等号成立.

所以该类昆虫的最大跳跃高度为 0.25 米.

故选 B.]

4. BC [由图 1 可设 y 关于 x 的函数关系为 $y = kx + b, k > 0, b < 0, k$ 为票价, 当 $x = 0$ 时, $y = b$, 则 $-b$ 为固定成本. 由图 2 知, 直线向上平移, k 不变, 即票价不变, b 变大, 则 $-b$ 变小, 固定成本减小, 故 A 错误, B 正确; 由图 3 知, 直线与 y 轴的交点不变, 直线斜率变大, 即 k 变大, 票价提高, b 不变, 即 $-b$ 不变, 固定成本不变, 故 C 正确, D 错误. 故选 BC.]

5. ABD [由题图可得, 函数图象过点 $(1, 2)$, 则 $2 = a^1$, 即 $a = 2$, 故 $y = 2^t$.

对于 A, 浮萍每月的增长率为 $\frac{2^{t+1} - 2^t}{2^t} = \frac{2^t(2-1)}{2^t} = 1$, 故 A 正确;

对于 B, 第 5 个月时, 即 $t = 5$ 时, 浮萍的面积 $y = 2^5 = 32 > 30$, 故 B 正确;

对于 C, 第二个月比第一个月增加 $y_2 - y_1 = 2^2 - 2^1 = 2$, 第三个月比第二个月增加 $y_3 - y_2 = 2^3 - 2^2 = 4$, 即 $y_2 - y_1 \neq y_3 - y_2$, 故 C 错误;

对于 D, 由题意可得 $2 = 2^{t_1}, 3 = 2^{t_2}, 6 = 2^{t_3}$, 所以 $t_1 = \log_2 2, t_2 = \log_2 3, t_3 = \log_2 6$, 则 $t_1 + t_2 = \log_2 2 + \log_2 3 = \log_2 (2 \times 3) = \log_2 6 = t_3$, 故 D 正确.

故选 ABD.]

6. 2 200 [设该工厂生产并销售这款新能源汽车的年利润为 $f(x)$ 万元, 由题意可知,

$$f(x) = \begin{cases} 15x - \left(\frac{1}{80}x^2 + \frac{9}{2}x\right) - 100, & 0 \leq x < 400, \\ 15x - \left(16x + \frac{360\,000}{x} - 3\,500\right) - 100, & x \geq 400, \end{cases} \quad x \in \mathbf{N},$$

$$\text{即 } f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{80}x^2 + \frac{21}{2}x - 100, & 0 \leq x < 400, \\ -x - \frac{360\,000}{x} + 3\,400, & x \geq 400, \end{cases} \quad x \in \mathbf{N},$$

当 $0 \leq x < 400$ 时, $f(x) < f(400) = 2\,200$;

$$\text{当 } x \geq 400 \text{ 时, } f(x) = -\left(x + \frac{360\,000}{x}\right) + 3\,400$$

$$\leq -2\sqrt{360\,000} + 3\,400 = 2\,200,$$

当且仅当 $x=600$ 时, $f(x)$ 取得最大值 2 200.

综上,该工厂生产并销售这款新能源汽车的最高年利润为 2 200 万元.]

7. 解: (1) 由题意知 $t = t_0 e^{\frac{N}{N_0} - 1}$ (其中 N_0, t_0 均为常数), 则 $\ln t =$

$$\ln t_0 + \frac{N}{N_0} - 1,$$

因为当 $N=300$ 时, $t=4e^2$, 当 $N=400$ 时, $t=4e^3$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \ln 4e^2 = \ln t_0 + \frac{300}{N_0} - 1, \\ \ln 4e^3 = \ln t_0 + \frac{400}{N_0} - 1, \end{cases}$$

$$\text{两式相减可得 } \ln \frac{4e^2}{4e^3} = \frac{300-400}{N_0}, \text{ 故 } N_0 = \frac{-100}{-\ln e} = 100,$$

$$\text{故 } t_0 = \frac{4e^2}{e^{\left(\frac{300}{100}-1\right)}} = \frac{4e^2}{e^2} = 4.$$

(2) 由(1)可知 $t = 4e^{\frac{N}{100} - 1}$, 当 $N=600$ 时, $t=4e^5$,

故所需的处理时间为 $4e^5$ 秒.

$$\begin{aligned} (3) \text{ 总处理时间 } t &= 4e^{\frac{N_1}{100} - 1} + 4e^{\frac{N_2}{100} - 1} \\ &\geq 8\sqrt{e^{\frac{N_1}{100} - 1} \times e^{\frac{N_2}{100} - 1}} = 8\sqrt{e^{\frac{N_1 + N_2}{100} - 2}} = 8\sqrt{e^4} = 8e^2, \end{aligned}$$

当且仅当 $N_1 = N_2 = 300$ 时取等号,

故所需的总处理时间的最小值为 $8e^2$ 秒.

阶段检测(三)

1. D [由函数 $f(x)$ 有意义, 得 $\begin{cases} 2x - x^2 \geq 0, \\ 2x - 1 > 0, \\ 2x - 1 \neq 1, \end{cases}$

解得 $\frac{1}{2} < x < 1$ 或 $1 < x \leq 2$. 所以函数 $f(x)$ 的定义域是

$$\left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2]. \text{ 故选 D.}]$$

2. C [因为函数 $f(x) = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $a > 1$, ①

$$\text{因为 } f(9) = \frac{1}{f(3)} - 1, \text{ 所以 } \log_a 9 = \frac{1}{\log_a 3} - 1, \text{ 即 } 2\log_a 3 =$$

$$\frac{1}{\log_a 3} - 1,$$

$$\therefore \log_a 3 = \frac{1}{2} \text{ 或 } \log_a 3 = -1, \therefore a = 9 \text{ 或 } a = \frac{1}{3}, \text{ ②}$$

所以由①②得 $a=9$.

故选 C.]

3. D [因为 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^m$ 是幂函数,

所以 $m^2 - m - 1 = 1$, 解得 $m = -1$ 或 $m = 2$,

因为 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 成立,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $m < 0$,

所以 $m = -1$, 故 A, B 错误;

所以 $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$, 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

$$\text{又 } f(-x) = \frac{1}{-x} = -f(x),$$

所以 $f(x)$ 是奇函数, 故 D 正确, C 错误.

故选 D.]

4. A [根据题意, 由函数 $f(x) = -\ln(x+b)$ 的图象, $0 < f(0) = -\ln b < 1$,

$$\text{即 } -1 < \ln b < 0, \text{ 解得 } \frac{1}{e} < b < 1,$$

故函数 $g(x) = e^x + b$ 的图象由 $y = e^x$ 的图象向上平移 b 个单位长度得到, 分析选项, A 选项符合.

故选 A.]

5. D [由题意可得, $M \approx 3^{361}$, $N \approx 10^{80}$,

根据对数函数性质有 $3 = 10^{\lg 3} \approx 10^{0.48}$,

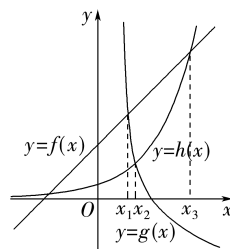
$$\therefore M \approx 3^{361} \approx (10^{0.48})^{361} \approx 10^{173},$$

$$\therefore \frac{M}{N} \approx \frac{10^{173}}{10^{80}} = 10^{93}. \text{ 故选 D.}]$$

6. C [令 $a - 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^b + 1 = \log_2 c + 1 = x (x > 1)$,

$$\text{则 } a = x + 2, b = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1), c = 2^{x-1} (x > 1),$$

在同一平面直角坐标系中作出函数 $f(x) = x + 2$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$, $h(x) = 2^{x-1}$ 的图象, 如图所示.



当 $1 < x < x_1$ 时, $g(x) > f(x) > h(x)$, 即 $b > a > c$, 故 A 正确;

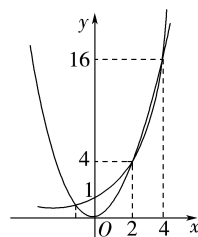
当 $x_1 < x < x_2$ 时, $f(x) > g(x) > h(x)$, 即 $a > b > c$, 故 B 正确;

当 $x_2 < x < x_3$ 时, $f(x) > h(x) > g(x)$, 即 $a > c > b$, 故 C 错误;

当 $x > x_3$ 时, $h(x) > f(x) > g(x)$, 即 $c > a > b$, 故 D 正确.

故选 C.]

7. BC [函数 $f(x) = x^2$ 与 $g(x) = 2^x$ 的图象如图,



由图可知, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有三个交点, 故 A 正确, B 错误;

$\exists x_0 = 4 > 0$, 当 $x > x_0$ 时, $g(x)$ 的图象恒在 $f(x)$ 的图象的上方, 故 C 错误, D 正确.

故选 BC.]

8. ABC [由 $2^x - 1 > 0$, 得 $x > 0$, $\therefore f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $\therefore$ A 正确;

$$f(x) = \ln \frac{2^x + 1}{2^x - 1} = \ln \left(1 + \frac{2}{2^x - 1}\right), 1 + \frac{2}{2^x - 1} > 1,$$

$$\therefore \ln \left(1 + \frac{2}{2^x - 1}\right) > \ln 1 = 0,$$

$\therefore f(x)$ 的值域为 $(0, +\infty)$, $\therefore$ B 正确;

$$f(x) = \ln \left(1 + \frac{2}{2^x - 1}\right), \text{ 当 } x \text{ 增大时, } 2^x - 1 \text{ 增大, } \frac{2}{2^x - 1} \text{ 减小,}$$

即 $f(x)$ 减小, $\therefore f(x)$ 是减函数, $\therefore$ C 正确;

$f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 不关于原点对称, $\therefore f(x)$ 不是奇函数, $\therefore$ D 错误.

故选 ABC.]

$$9. -3 \quad \left[\left(-\frac{1}{27} \right)^{-\frac{1}{3}} + \log_{36} 18 + \log_9 3 \times \log_6 2 - \left(-\frac{1}{8} \right)^0 = (-27)^{\frac{1}{3}} + \log_{6^2} 18 + \log_{3^2} 3 \times \log_6 2 - 1 = -3 + \frac{1}{2} \log_6 18 + \frac{1}{2} \log_6 2 - 1 = -4 + \frac{1}{2} \log_6 36 = -4 + \frac{1}{2} \times 2 = -3. \right]$$

$$10. \left(0, \frac{1}{16} \right] \quad [y = \left(\frac{1}{4} \right)^{x^2+2x+3},$$

$$\text{设 } g(x) = x^2 + 2x + 3,$$

$$\text{则 } g(x) = (x+1)^2 + 2 \geq 2,$$

$$\text{故 } 0 < y = \left(\frac{1}{4} \right)^{x^2+2x+3} \leq \left(\frac{1}{4} \right)^2 = \frac{1}{16},$$

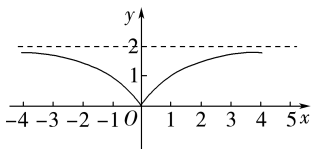
$$\text{所以函数 } f(x) \text{ 的值域为 } \left(0, \frac{1}{16} \right].]$$

$$11. \text{解: (1) 因为函数 } y = a \left(\frac{1}{2} \right)^{|x|} + b \text{ 的图象过原点,}$$

$$\text{所以 } 0 = a + b,$$

由函数的图象无限接近直线 $y=2$ 但又不与该直线相交, 得 $b=2$, 又 $a+b=0$, 所以 $a=-2$,

$$\text{则 } y = -2 \left(\frac{1}{2} \right)^{|x|} + 2, \text{ 其图象如图.}$$



(2) 由图知, $y = -2 \left(\frac{1}{2} \right)^{|x|} + 2$ 是偶函数, 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减.

$$12. \text{解: (1) 若函数 } f(x) \text{ 是 } \mathbf{R} \text{ 上的奇函数,}$$

$$\text{则 } f(0) = 0,$$

$$\therefore \log_2(1+a) = 0, \therefore a = 0.$$

经检验, 当 $a=0$ 时, $f(x) = -x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

$$\therefore a \text{ 的值为 } 0.$$

(2) 由已知得函数 $f(x)$ 是减函数, 故 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值是 $f(0) = \log_2(1+a)$, 最小值是 $f(1) = \log_2 \left(\frac{1}{2} + a \right)$.

$$\text{由题设得 } \log_2(1+a) - \log_2 \left(\frac{1}{2} + a \right) \geq 2,$$

$$\text{则 } \log_2(1+a) \geq \log_2(4a+2).$$

$$\therefore \begin{cases} 1+a \geq 4a+2, \\ 4a+2 > 0, \end{cases} \text{ 解得 } -\frac{1}{2} < a \leq -\frac{1}{3}.$$

$$\text{故实数 } a \text{ 的取值范围是 } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \right].$$

课时作业(二十一)

$$1. \text{C} \quad [\text{由 } h = \frac{1}{3}t^3 + t^2, \text{ 得 } h' = t^2 + 2t.$$

$$\text{当 } t = t_0 \text{ 时, } h' = t_0^2 + 2t_0 = 3, \text{ 解得 } t_0 = 1 (t_0 = -3 \text{ 舍去}).$$

$$\text{故当 } t = t_0 + 1 = 2 \text{ 时, 液体上升高度的瞬时变化率为 } 2^2 + 2 \times 2 = 8 (\text{cm/s}), \text{ 故选 C.]}$$

$$2. \text{B} \quad [\text{因为 } f'(x) = 2f'(1) + \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$\text{令 } x=1, \text{ 得 } f'(1) = 2f'(1) + \frac{1}{2},$$

$$\text{解得 } f'(1) = -\frac{1}{2}.$$

故选 B.]

$$3. \text{C} \quad [\text{由题意可知 } y' = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}, \text{ 则曲线 } y =$$

$$\frac{e^x}{x+1} \text{ 在点 } \left(1, \frac{e}{2} \right) \text{ 处的切线斜率 } k = y'|_{x=1} = \frac{e}{4}, \text{ 所以曲线}$$

$$y = \frac{e^x}{x+1} \text{ 在点 } \left(1, \frac{e}{2} \right) \text{ 处的切线方程为 } y - \frac{e}{2} = \frac{e}{4}(x-1), \text{ 即}$$

$$y = \frac{e}{4}x + \frac{e}{4}, \text{ 故选 C.]}$$

$$4. \text{A} \quad [\text{由题图可知, 函数在 } x=a \text{ 处的切线的斜率 } f'(a) \text{ 为负;}$$

函数在 $x=b$ 处的切线的斜率 $f'(b)$ 为正;

函数在 $x=c$ 处的切线的斜率 $f'(c)$ 为正, 且在 $x=c$ 处的切线比在 $x=b$ 处的切线更“陡”, 即 $f'(c) > f'(b)$,

$$\text{因为 } f'(a) < 0, 0 < f'(b) < f'(c),$$

$$\text{所以 } f'(a) < f'(b) < f'(c).$$

故选 A.]

$$5. \text{D} \quad [\text{因为曲线 } y = 2ae^x + x \text{ 在 } x=0 \text{ 处的切线斜率为 } 2,$$

$$\text{由 } y' = 2ae^x + 1, \text{ 得曲线 } y = 2ae^x + x \text{ 在 } x=0 \text{ 处的切线斜率为 } 2a+1=2, \text{ 得 } a = \frac{1}{2}.$$

故选 D.]

$$6. \text{D} \quad [\text{设过点 } P(m, 0) \text{ 的直线与曲线 } f(x) = \frac{x+1}{e^x} \text{ 切于点}$$

$$Q \left(t, \frac{t+1}{e^t} \right), \text{ 由 } f(x) = \frac{x+1}{e^x}, \text{ 可得 } f'(x) = -\frac{x}{e^x}, \text{ 所以切线}$$

$$PQ \text{ 的斜率 } k = -\frac{t}{e^t} = \frac{\frac{t+1}{e^t} - 0}{t-m},$$

$$\text{整理得 } t^2 + (1-m)t + 1 = 0,$$

因为切线有 2 条, 所以切点有 2 个, 即方程 $t^2 + (1-m)t + 1 = 0$ 有 2 个不等实根,

$$\text{则 } \Delta = (1-m)^2 - 4 > 0, \text{ 解得 } m > 3 \text{ 或 } m < -1,$$

所以实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$. 故选 D.]

$$7. \text{ABC} \quad [\text{当 } t \in [0, 4] \text{ 时, } s(t) = \frac{1}{2}t^2, \text{ 则 } s(4) = 8, s(2) = 2, \text{ 所以}$$

$$\text{平均速度为 } \frac{s(4) - s(2)}{4 - 2} = 3 (\text{m/s}), \text{ A 正确;}$$

当 $t \in [0, 4]$ 时, $s'(t) = t$, 则 $s'(3) = 3$, 所以物体在 $t=3$ s 这个时刻的瞬时速度为 3 m/s, B 正确;

$$\text{该物体在 } 0 \text{ s 到 } 8 \text{ s 这段时间内的平均速度为 } \frac{s(8) - s(0)}{8 - 0} =$$

$$\frac{8 - 0}{8 - 0} = 1 (\text{m/s}), \text{ C 正确;}$$

$$\text{由 } t \in (4, 8] \text{ 时, } s(t) = 8, \text{ 则 } s'(t) = 0,$$

$$\text{故 } s'(5) = 0, \text{ D 错误.}$$

故选 ABC.]

$$8. \text{AC} \quad [\text{由题意知 } f'(x) = e^x. \text{ 对于 A, 令 } f'(x) = e^x = 1, \text{ 得 } x =$$

0, 所以曲线 $y = f(x)$ 的切线斜率可以是 1, 故 A 正确; 对于 B, 令 $f'(x) = e^x = -1$, 无解, 所以曲线 $y = f(x)$ 的切线斜率不可

以是 -1, 故 B 错误; 对于 C, 设切点为 (x_0, e^{x_0}) , 由 $f'(x) = e^x$, 得切线方程为 $y - e^{x_0} = e^{x_0}(x - x_0)$, 又切线过点 $(0, 1)$, 所以

$1 - e^{x_0} = -e^{x_0} \cdot x_0$, 则 $e^{x_0} = \frac{1}{1 - x_0}$, 易知 $e^{x_0} = \frac{1}{1 - x_0}$ 有且仅有一解为 $x_0 = 0$, 所以切线方程为 $y - 1 = x$, 即 $y = x + 1$, 所以

过点(0,1)且与曲线 $y=f(x)$ 相切的直线有且只有1条,故C正确;对于D,设切点为 (x_0, e^{x_0}) , 则切线方程为 $y - e^{x_0} = e^{x_0} \cdot (x - x_0)$, 因为点(0,0)在切线上, 所以 $e^{x_0} = x_0 e^{x_0}$, 解得 $x_0 = 1$, 所以过点(0,0)且与曲线 $y=f(x)$ 相切的直线有且只有1条, 故D错误.]

9. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ [由题可得, $f'(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 1$, 当且仅当 $x=1$ 时取等号,

由 α 为曲线在点 P 处的切线的倾斜角, 得 $\tan \alpha \geq 1$, 则 $\frac{\pi}{4} \leq \alpha <$

$\frac{\pi}{2}$, 所以 α 的取值范围为 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.]

10.2 $\left[\because \frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)} = \frac{4+4}{4} = 2, f'(x) = 3x^2 - 2,\right.$

令 $3x^2 - 2 = 2$, 解得 $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \in [-2, 2]$ 或 $x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \in [-2, 2]$,

$\therefore f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上的“拉格朗日中值点”的个数为 2.]

11. 解: (1) 由 $y = x^2 + \frac{1}{x} + \sqrt{x}$, 得 $y' = 2x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(2) 由 $y = x \sin x - \sqrt{x} \ln x$,

得 $y' = (x \sin x)' - (\sqrt{x} \ln x)'$

$= \sin x + x \cos x - \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)$

$= \sin x + x \cos x - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x - \frac{\sqrt{x}}{x}$.

(3) 由 $y = \frac{\sin x \ln x}{x}$,

得 $y' = \frac{\left(\cos x \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot x - \sin x \ln x \cdot 1}{x^2}$

$= \frac{x \cos x \ln x + \sin x - \sin x \ln x}{x^2}$.

(4) 由 $y = \sqrt{x}(x-1)\left(\frac{1}{x}+1\right) = \sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}$,

得 $y' = \frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$.

(5) 由 $y = e^x \tan x = \frac{e^x \sin x}{\cos x}$, 得

$y' = \frac{(e^x \sin x + e^x \cos x) \cdot \cos x - (e^x \sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$

$= \frac{e^x \sin x \cos x + e^x \cos^2 x + e^x \sin^2 x}{\cos^2 x}$

$= \frac{e^x \sin x \cos x + e^x}{\cos^2 x} = e^x \left(\tan x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)$.

(6) 由 $y = \frac{x^2-1}{x+\ln x}$,

得 $y' = \frac{2x(x+\ln x) - (x^2-1)\left(1+\frac{1}{x}\right)}{(x+\ln x)^2}$

$= \frac{x^3 + 2x^2 \ln x - x^2 + x + 1}{x(x+\ln x)^2}$.

(7) 由 $y = x \sin x + e^x \ln x - 2$,

得 $y' = \sin x + x \cos x + e^x \ln x + \frac{e^x}{x}$.

(8) 由 $y = \frac{\sqrt{x}-x^2}{x \ln x}$,

得 $y' = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x\right) \cdot x \ln x - (\sqrt{x}-x^2)(\ln x+1)}{(x \ln x)^2}$

$= \frac{x^2 - x^2 \ln x - \frac{\sqrt{x}}{2} \ln x - \sqrt{x}}{(x \ln x)^2}$.

(9) 由 $y = (3x+2)^3$, 得 $y' = 3 \times (3x+2)^2 \times 3 = 9(3x+2)^2$.

(10) 由 $y = \sin 2x$, 得 $y' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2 \cos 2x$.

(11) 由 $y = \sqrt{4x-6}$,

得 $y' = \frac{1}{2\sqrt{4x-6}} \cdot (4x-6)'$

$= \frac{2}{\sqrt{4x-6}} = \frac{\sqrt{4x-6}}{2x-3}$.

(12) 由 $y = \ln(4x+5)$, 得 $y' = \frac{1}{4x+5} \cdot (4x+5)' = \frac{4}{4x+5}$.

课时作业(二十二)

1. D [因为 $f'(x) = -\sin x - 1 < 0$ 在 $(0, \pi)$ 内恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 内单调递减, 故选 D.]

2. D [由题意可得函数的定义域为 $(0, +\infty)$, 导函数 $f'(x) = 2x - \frac{4}{x} = \frac{2(x^2-2)}{x}$,

令 $f'(x) < 0$, 可得 $0 < x < \sqrt{2}$,

因此 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, \sqrt{2})$.

故选 D.]

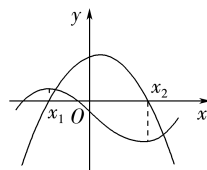
3. C [根据题意, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$,

则其导数 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$,

则 $f'(x)$ 为二次函数, 其图象为抛物线, 设 $f'(x)$ 与 x 轴的两个交点为 $x_1, x_2, x_1 < x_2$.

依次分析选项:

对于 A, 如图所示:



当 $x < x_1$ 或 $x > x_2$ 时, $f'(x) > 0$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, x_1), (x_2, +\infty)$ 上均单调递增,

与 $f(x)$ 的图象不符合, A 错误;

对于 B, 由选项图可知, $\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) > 0$,

则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增,

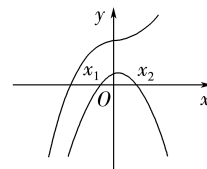
与 $f(x)$ 的图象不符合, B 错误;

对于 C, 由选项图可知, $\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) > 0$,

则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增,

与 $f(x)$ 的图象符合, C 正确;

对于 D, 如图所示:



当 $x < x_1$ 或 $x > x_2$ 时, $f'(x) < 0$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, x_1)$, $(x_2, +\infty)$ 上均单调递减, 与 $f(x)$ 的图象不符合, D 错误.

故选 C.]

4. D [由 $f(x) = 2x^2 - x^3$,

得 $f'(x) = 4x - 3x^2 = x(4 - 3x)$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = \frac{4}{3}$,

$f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如表所示.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{4}{3})$	$\frac{4}{3}$	$(\frac{4}{3}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	单调递减		单调递增		单调递减

所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty, 0)$ 和 $(\frac{4}{3}, +\infty)$.]

5. AB [对于选项 A, 导函数 $y' = 3x^2 + 1 > 0$, $y = x^3 + x - 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 因此选项 A 正确;

对于选项 B, 导函数 $y' = \cos x - 1 \leq 0$, $y = \sin x - x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减, 因此选项 B 正确;

对于选项 C, 导函数 $y' = (x+1)e^x$, 令 $y' < 0 \Rightarrow x < -1$, 令 $y' > 0 \Rightarrow x > -1$,

因此函数 $y = xe^x + 1$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 因此选项 C 错误;

对于选项 D, 导函数 $y' = e^x - 1$, 令 $y' < 0 \Rightarrow x < 0$, 令 $y' > 0 \Rightarrow x > 0$,

$y = e^x - x$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 D 错误.

故选 AB.]

6. ACD [依题意知, 函数 $g(x) = xf(x)$ 为定义域上的增函数.

对于 A, $g(x) = xe^x$, $g'(x) = (x+1)e^x$,

当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $g'(x) < 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 故 A 中函数不是“F 函数”;

对于 B, $g(x) = x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 故 B 中函数为“F 函数”;

对于 C, $g(x) = x \ln x$, $x > 0$, $g'(x) = 1 + \ln x$,

当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时, $g'(x) < 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 内单调递减,

故 C 中函数不是“F 函数”;

对于 D, $g(x) = x \sin x$, $g'(x) = \sin x + x \cos x$,

当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 时, $g'(x) < 0$, $\therefore g(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 内单调递减, 故 D 中函数不是“F 函数”. 故选 ACD.]

7. $(-\infty, -1), (3, +\infty)$ $(-1, 3)$ [因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$,

令 $f'(x) > 0 \Rightarrow x < -1$ 或 $x > 3$;

令 $f'(x) < 0 \Rightarrow -1 < x < 3$;

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1), (3, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-1, 3)$.]

8. $\frac{1}{3}x^3 - 4x$ (答案不唯一) [因为 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -2)$, $(2, +\infty)$ 上单调递增,

所以当 $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.

又 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 为偶函数,

所以令 $f'(x) = x^2 - 4$, 满足题意,

所以 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$, 答案不唯一.]

9. 证明: 由题意知, $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x} -$

$$e^{1-x} = \frac{e^{x-1} - x}{xe^{x-1}}.$$

令 $g(x) = e^{x-1} - x (x > 0)$, 则 $g'(x) = e^{x-1} - 1$,

由 $g'(x) = 0$, 可得 $x = 1$.

$\therefore$ 当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

$\therefore g(x)_{\min} = g(1) = 0$, 即 $g(x) \geq 0$, $\therefore f'(x) \geq 0$,

则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

10. 解: $f(x) = ax^2 - (a-2)x - \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = 2ax - (a-2) - \frac{1}{x} = \frac{(ax+1)(2x-1)}{x}.$$

当 $a \geq 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$, 得 $x > \frac{1}{2}$,

由 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{2}$,

函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 内单调递减, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增;

当 $-2 < a < 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$, 得 $\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{a}$, 由 $f'(x) <$

0, 得 $0 < x < \frac{1}{2}$ 或 $x > -\frac{1}{a}$,

$f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{a})$ 内单调递增;

当 $a = -2$ 时, $f'(x) \leq 0$, 且当 $x = \frac{1}{2}$ 时取等号, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a < -2$ 时, 由 $f'(x) > 0$, 得 $-\frac{1}{a} < x < \frac{1}{2}$, 由 $f'(x) < 0$,

得 $0 < x < -\frac{1}{a}$ 或 $x > \frac{1}{2}$,

函数 $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{a})$, $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\frac{1}{a}, \frac{1}{2})$ 内单调递增.

综上, 当 $a \geq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 内单调递减, 在

$(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a = -2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $-2 < a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调

递减, 在 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{a})$ 内单调递增;

当 $a < -2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{a})$, $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递

减, 在 $(-\frac{1}{a}, \frac{1}{2})$ 内单调递增.

课时作业(二十三)

1. D [$f'(x) = 2 - \cos x$, 因为 $\cos x \in [-1, 1]$, 所以 $f'(x) > 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 因为 $2.7 < e < \pi$, 所以 $f(2.7) < f(e) < f(\pi)$. 故选 D.]

2. C [由 $(x-1)f'(x) \geq 0$, 得 $\begin{cases} x \geq 1, \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \leq 1, \\ f'(x) \leq 0. \end{cases}$ ① 函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递减, $f(0) > f(1)$; 函数 $y=f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, $f(2) > f(1)$, 所以 $f(0) + f(2) > 2f(1)$. ② 若函数 $y=f(x)$ 为常数函数, 则 $f(0) + f(2) = 2f(1)$. 综合①②得 $f(0) + f(2) \geq 2f(1)$. 故选 C.]

3. C [由题意, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x) = 3ax^2 - 6x + 1$, 要使函数 $f(x) = ax^3 - 3x^2 + x + 1$ 恰有三个单调区间, 则 $f'(x) = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \begin{cases} a \neq 0, \\ \Delta = 36 - 12a > 0, \end{cases} \text{ 得 } a < 3 \text{ 且 } a \neq 0, \text{ 故选 C.}]$$

4. D [$f'(x) = 3x^2 - a$, 若 $f(x)$ 在 $[2, 3]$ 上单调递增, 则 $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 即 $a \leq 3x^2$ 恒成立, 当 $x \in [2, 3]$ 时, $12 \leq 3x^2 \leq 27$, 所以只需 $a \leq 12$ 即可. 故选 D.]

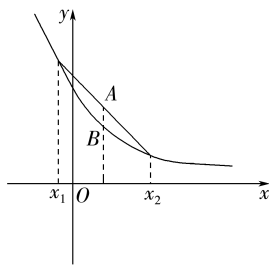
5. D [令 $g(x) = f(x) - 3x$, 因为 $f'(x) > 3$, 所以 $g'(x) = f'(x) - 3 > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 因为 $f(2) = 6$, 所以 $g(2) = f(2) - 6 = 0$, 由 $f(x) > 3x$ 可得 $f(x) - 3x > 0$, 即 $g(x) > g(2)$, 所以 $x > 2$. 故选 D.]

6. A [根据题意, 由函数 $f(x)$ 的图象可知, 在区间 $(-\infty, -1)$ 上, $f(x)$ 单调递减, 必有 $f'(x) < 0$, 在区间 $(-1, 2)$ 内, $f(x)$ 单调递增, 必有 $f'(x) > 0$, 在区间 $(2, 5)$ 内, $f(x)$ 单调递减, 必有 $f'(x) < 0$, 在区间 $(5, +\infty)$ 上, $f(x)$ 单调递增, 必有 $f'(x) > 0$, 若 $x \cdot f'(x) < 0$, 即 $\begin{cases} x > 0, \\ f'(x) < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x < 0, \\ f'(x) > 0 \end{cases}$, 解得 $2 < x < 5$ 或 $-1 < x < 0$, 即不等式的解集为 $(-1, 0) \cup (2, 5)$. 故选 A.]

7. ABD [$f'(x) = x - \frac{9}{x} = \frac{x^2 - 9}{x} (x > 0)$, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > 3$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < 3$, 所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(3, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, 3)$, 因为函数 $f(x)$ 在区间 $(m-1, m+1)$ 内单调, 所以 $\begin{cases} m-1 \geq 0, \\ m+1 \leq 3 \end{cases}$ 或 $m-1 \geq 3$, 解得 $1 \leq m \leq 2$ 或 $m \geq 4$.]

8. BCD [因为 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e^x} (x > 0)$, 所以 $f'(x) = \frac{e^x + x^2 - x}{xe^x} = \frac{e^x + (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}{xe^x}$, 又 $x \in (0, +\infty)$ 时, $e^x > 1$, $(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$, 所以 $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $f(\frac{7}{3}) > f(2) > f(\frac{3}{2})$, 即 $c > b > a$. 故选 BCD.]

9. BD [由题图可知, 导函数 $f'(x)$ 的图象在 x 轴下方, 即 $f'(x) < 0$, 故函数 $f(x)$ 为减函数, 并且递减的速度是先快后慢, 所以 $f(x)$ 的大致图象如图所示.



A 中, $f(x) < 0$ 恒成立, 没有依据, 故 A 不正确;

B 表示 $(x_1 - x_2)$ 与 $[f(x_1) - f(x_2)]$ 异号, 即 $f(x)$ 为减函数, 故 B 正确;

C, D 中不等式的左边为 x_1, x_2 的平均数对应的函数值, 即图中点 B 的纵坐标,

右边为 x_1, x_2 对应的函数值的平均数, 即图中点 A 的纵坐标, 显然左边的值小于右边的值, 故 C 不正确, D 正确. 故选 BD.]

10. $[\frac{13}{3}, +\infty)$ [由已知得, $f'(x) = 1 + \frac{4}{x^2} - \frac{a}{x}$,

题意等价于 $1 + \frac{4}{x^2} - \frac{a}{x} \leq 0$ 在 $(2, 3)$ 内恒成立, 即 $a \geq x + \frac{4}{x}$ 在 $(2, 3)$ 内恒成立.

设 $h(x) = x + \frac{4}{x} (x > 0)$,

由对勾函数性质知, $h(x)$ 在 $(2, 3)$ 内单调递增,

所以 $h(x) < h(3) = \frac{13}{3}$,

故得 $a \geq \frac{13}{3}$, 即实数 a 的取值范围是 $[\frac{13}{3}, +\infty)$.]

11. $(-\infty, -2) \cup (\frac{4}{3}, +\infty)$ [当 $x \geq 0$ 时, 导函数 $f'(x) = e^x + 2x + \sin x$, 因为 $x \geq 0$, 因此 $e^x \geq 1$, 因此导函数 $f'(x) = e^x + 2x + \sin x > 0$, 因此当 $x \geq 0$ 时, 函数 $f(x) = e^x + x^2 - \cos x$ 单调递增. 又 $f(x)$ 为偶函数, 因此当 $x < 0$ 时, 函数单调递减, 因此 $f(x-3) - f(2x-1) < 0$, 等价于 $f(x-3) < f(2x-1)$, 等价于 $|x-3| < |2x-1|$, 平方化简可得 $3x^2 + 2x - 8 > 0$, 解得 $x > \frac{4}{3}$ 或 $x < -2$, 因此解集为 $(-\infty, -2) \cup (\frac{4}{3}, +\infty)$.]

12. $(0, 1)$ [∵ 函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\ln x (x > 0)$,

∴ $f'(x) = -x - 3 + \frac{4}{x}$,

∵ 函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\ln x$ 在 $(t, t+1)$ 内不单调,

∴ $f'(x) = -x - 3 + \frac{4}{x}$ 在 $(t, t+1)$ 内有变号零点,

∴ $\frac{x^2 + 3x - 4}{x} = 0$ 在 $(t, t+1)$ 内有解,

∴ $x^2 + 3x - 4 = 0$ 在 $(t, t+1)$ 内有解,

由 $x^2 + 3x - 4 = 0$ 得 $x = 1$ 或 $x = -4$ (舍去).

∴ $1 \in (t, t+1)$, ∴ $t \in (0, 1)$,

故实数 t 的取值范围是 $(0, 1)$.]

课时作业(二十四)

1. **B** [由题意, 设 $g(x) = xf(x)$, 则 $g'(x) = xf'(x) + f(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 又 $a > b$, 所以 $g(a) > g(b)$, 即 $af(a) > bf(b)$. 故选 B.]

2. **A** [设 $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, x > 0$, 则 $f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$,
令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \sqrt{e}$,
则 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{e})$ 内单调递增, 在 $(\sqrt{e}, +\infty)$ 上单调递减,
 $b = f(\sqrt{5}), c = f(\sqrt{6})$, 则 $b > c$,
又 $a - b = \frac{1}{6} - \frac{\ln 5}{10} = \frac{5 - 3\ln 5}{30} = \frac{\ln e^5 - \ln 125}{30} > 0$, 得 $a > b$,
所以 $c < b < a$. 故选 A.]

3. **B** [根据题意得 $f'(x) - f(x) > 0$, 构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$,
可得 $g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,
则 $\frac{f(2.024)}{e^{2.024}} < \frac{f(2.025)}{e^{2.025}}$, 两边同乘 $e^{2.025}$,
即 $ef(2.024) < f(2.025)$. 故选 B.]

4. **A** [由 $f'(x)\tan x + f(x) > 0, x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 得 $f'(x)\sin x + f(x)\cos x > 0$.
构造函数 $F(x) = f(x)\sin x$, 则 $F'(x) > 0$, 故 $F(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调递增,
有 $F(\frac{\pi}{3}) > F(\frac{\pi}{4})$, 即 $\frac{\sqrt{3}}{2}f(\frac{\pi}{3}) > \frac{\sqrt{2}}{2}f(\frac{\pi}{4})$, 即 $\sqrt{6}f(\frac{\pi}{3}) > 2f(\frac{\pi}{4})$. 故选 A.]

5. **A** [因为当 $0 < x_1 < x_2 \leq 1$ 时, $\frac{f(x_1)}{x_2} < \frac{f(x_2)}{x_1}$,
所以 $x_1f(x_1) < x_2f(x_2)$,
令 $g(x) = xf(x) = e^x - ax$, 则 $g(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增,
所以 $g'(x) = e^x - a \geq 0$ 在 $(0, 1]$ 上恒成立,
所以 $a \leq e^x$ 在 $(0, 1]$ 上恒成立,
因为 $1 < e^x \leq e$, 所以 $a \leq 1$,
故 a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.
故选 A.]

6. **A** [令函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}, x \in (0, +\infty)$,
则导函数 $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$,
由于 $xf'(x) - f(x) < 0$, 因此导函数 $g'(x) < 0$, 因此函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,
由于 $f(3) = 0$, 因此 $g(3) = 0$,
因此当 $0 < x < 3$ 时, 函数 $g(x) > 0$,
即 $f(x) > 0$;
当 $x > 3$ 时, 函数 $g(x) < 0$, 即 $f(x) < 0$,
由 $(x-1)f(x) > 0$, 可得 $\begin{cases} x-1 > 0, \\ f(x) > 0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-1 < 0, \\ f(x) < 0, \end{cases}$ 解得 $1 < x < 3$,
综上可得 $(x-1)f(x) > 0$ 的解集为 $(1, 3)$.
故选 A.]

7. **AC** [令函数 $g(x) = \ln x \cdot f(x)$,

$$\text{则 } g'(x) = \frac{f(x)}{x} + \ln x \cdot f'(x) > 0,$$

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

$$\text{又 } g(1) = 0, \text{ 所以 } g(e) = f(e) > 0, g\left(\frac{1}{e}\right) = -f\left(\frac{1}{e}\right) < 0,$$

所以 $f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e) > 0, f\left(\frac{1}{e}\right) > 0, f(1)$ 与 0 的大小关系不确定. 故选 AC.]

8. **BCD** [令 $g(x) = e^{2x}f(x)$, 则 $g'(x) = e^{2x}[f'(x) + 2f(x)], x \in \mathbf{R}$.

由 $f'(x) + 2f(x) > 0$, 可得 $g'(x) > 0$,

故 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

由 $g(1) < g(2)$, 得 $f(1) < e^2 f(2)$, 故 A 不正确;

由 $g(-1) > g(-2)$, 得 $e^2 f(-1) > f(-2)$, 故 B 正确;

由 $g(2) < g(3)$, 得 $f(2) < e^2 f(3)$, 故 C 正确;

由 $g(-1) > g(-3)$, 得 $e^4 f(-1) > f(-3)$, 故 D 正确, 故选 BCD.]

9. $(0, 2)$ [令 $h(x) = x^2 f(x)$, 则 $h'(x) = 2x \cdot f(x) + x^2 f'(x) < 0$,
所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 不等式 $f(x) > \frac{3}{x^2}$ 可以转

化为 $x^2 f(x) > 4 \times \frac{3}{4} = 2^2 f(2)$, 即 $h(x) > h(2)$, 所以 $0 < x < 2$.]

10. $(-\frac{\pi}{4}, 0) \cup (\frac{\pi}{4}, \pi)$ [令 $g(x) = \frac{f(x)}{\sin x}, x \in (-\pi, 0) \cup (0,$

$$\pi), g'(x) = \frac{f'(x)\sin x - f(x)\cos x}{\sin^2 x} < 0, 0 < x < \pi.$$

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 内单调递减.

奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$, 因此函数 $g(x)$ 为偶函数.

当 $x \in (0, \pi)$ 时, 不等式 $f(x) < \sqrt{2}f(\frac{\pi}{4})\sin x$ 化为 $\frac{f(x)}{\sin x} < \frac{f(\frac{\pi}{4})}{\sin \frac{\pi}{4}}$

$$\frac{f(\frac{\pi}{4})}{\sin \frac{\pi}{4}}, \therefore \frac{\pi}{4} < x < \pi.$$

当 $x \in (-\pi, 0)$ 时, 不等式 $f(x) < \sqrt{2}f(\frac{\pi}{4})\sin x$ 化为

$$\frac{f(x)}{\sin x} > \frac{f(\frac{\pi}{4})}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{f(-\frac{\pi}{4})}{\sin(-\frac{\pi}{4})}, \therefore -\frac{\pi}{4} < x < 0.$$

综上可得, $x \in (-\frac{\pi}{4}, 0) \cup (\frac{\pi}{4}, \pi)$.]

课时作业(二十五)

1. **A** [根据题意导函数 $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ 恒成立,
因此函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 函数 $f(x)$ 既无极大值也无极小值.
故选 A.]

2. **C** [由题意可知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f'(x) = e^x - 1$,
令 $f'(x) = 0$, 可得 $x = 0$,
当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减,
当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增,
所以 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.
故选 C.]

3. D [因为 $f(x)=x^3-3ax+2, x \in \mathbf{R}$,

所以 $f'(x)=3x^2-3a$,

又因为 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点,

所以 $f'(1)=3-3a=0$,

解得 $a=1$,

所以 $f(x)=x^3-3x+2, f'(x)=3x^2-3$,

令 $f'(x)=3x^2-3=0$, 得 $x_1=-1, x_2=1$,

所以当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f'(x)>0, f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (-1, 1)$ 时, $f'(x)<0, f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x)>0, f(x)$ 单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取极大值, 在 $x=1$ 处取极小值,

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(-1)=-1+3+2=4$.

故选 D.]

4. B [由题意可得 $f'(x)=2x^2-ax+1$,

若函数 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 内存在极值点,

则 $f'(x)$ 在 $(1, 2)$ 内有变号零点,

即 $ax=2x^2+1$ 在 $(1, 2)$ 内有解,

即 $a=2x+\frac{1}{x}$ 在 $(1, 2)$ 内有解,

等价于直线 $y=a$ 与函数 $y=2x+\frac{1}{x}$ 在 $(1, 2)$ 内的图象有交

点, 因为 $y=2x+\frac{1}{x}$ 在 $(1, 2)$ 内单调递增,

所以 $y=2x+\frac{1}{x} \in (3, \frac{9}{2})$,

所以 $a \in (3, \frac{9}{2})$.

故选 B.]

5. AD [由题可得 $f'(x)=e^{x-1}[x^2+(a+2)x+a-1], x \in \mathbf{R}$,

因为 $x=-2$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax-1) \cdot e^{x-1}$ 的极值点,

所以 $f'(-2)=0$, 则 $4-2(a+2)+a-1=0$, 解得 $a=-1$,

故 $f(x)=(x^2-x-1)e^{x-1}$,

$f'(x)=e^{x-1}(x^2+x-2)=(x-1)(x+2)e^{x-1}$,

当 $x<-2$ 时, $f'(x)>0, f(x)$ 单调递增,

当 $-2<x<1$ 时, $f'(x)<0, f(x)$ 单调递减,

当 $x>1$ 时, $f'(x)>0, f(x)$ 单调递增,

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -2), (1, +\infty)$,

单调递减区间为 $(-2, 1)$, 故 A 正确, B 错误.

由上可知, $f(x)$ 的极大值为 $f(-2)=5e^{-3}$, 极小值为 $f(1)=-1$, 故 C 错误, D 正确. 故选 AD.]

6. ABD [因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(0)=0$, 故

A 正确; 当 $x<0$ 时, $-x>0$, 因此 $f(-x)=[(-x)^2-3] \cdot e^{-x}+2=-f(x)$, 因此 $f(x)=-(x^2-3)e^{-x}-2$, 故 B 正确;

当 $x>0$ 时, $f(x)=(x^2-3) \cdot e^x+2, f'(x)=(x^2+2x-3)e^x=(x+3)(x-1) \cdot e^x$, 令 $f'(x)>0$, 得 $x>1$, 令 $f'(x)<0$, 得 $0<x<1$, 因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值, 因此奇函数 $f(x)$ 在

$x=-1$ 处取得极大值, 故 D 正确; 当 $x>0$ 时, $f(x) \geq 2$, 即 $(x^2-3) \cdot e^x \geq 0$, 解得 $x \geq \sqrt{3}$, 当 $x<0$ 时, $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值, $f(-1)=-(1-3) \cdot e-2=2e-2>2$, 因此在 $(-\infty, 0)$ 上也存在满足 $f(x) \geq 2$ 的区间, 故 C 错误. 故选 ABD.]

7. 0 [函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$, 则 $f'(x)=2\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}$, 令 $F(x)=2\ln(1+x)+\frac{x}{1+x} (x>-1)$, 则

$F'(x)=\frac{2}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}$, 可得 $F'(x)>0$ 在 $(-1, +\infty)$ 上恒

成立, 则 $F(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 又 $F(0)=0$, 所以当

$-1<x<0$ 时, $F(x)<0$, 即 $f'(x)<0, f(x)$ 单调递减, 当 $x>0$ 时, $F(x)>0$, 即 $f'(x)>0, f(x)$ 单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值, $f(x)_{\text{极小值}}=f(0)=0$.]

8. (0, 2) [$f(x)=\ln x+\frac{1}{2}ax^2-2\sqrt{2}x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

且导函数 $f'(x)=\frac{1}{x}+ax-2\sqrt{2}=\frac{ax^2-2\sqrt{2}x+1}{x}$,

因此方程 $ax^2-2\sqrt{2}x+1=0$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 时有两个不等的正实根 x_1, x_2 ,

根据根与系数的关系可得

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ \Delta = 8 - 4a > 0, \\ x_1 + x_2 = \frac{2\sqrt{2}}{a} > 0, \text{ 解得 } 0 < a < 2. \\ x_1 x_2 = \frac{1}{a} > 0, \end{cases}$$

所以实数 a 的取值范围是 $(0, 2)$.]

9. 解: (1) 因为直线 $2x+y+1=0$ 的斜率为 $k=-2$,

又函数 $f(x)=(x^2-ax-a)e^x$ 的图象在点 $(0, f(0))$ 处的切线垂直于直线 $2x+y+1=0$,

所以函数 $f(x)=(x^2-ax-a)e^x$ 的图象在点 $(0, f(0))$ 处的切线的斜率为 $\frac{1}{2}$, 所以 $f'(0)=\frac{1}{2}$,

由 $f'(x)=(2x-a)e^x+(x^2-ax-a)e^x=(x^2+2x-ax-2a)e^x$,

所以 $f'(0)=-2a=\frac{1}{2}$, 解得 $a=-\frac{1}{4}$.

(2) 由 (1) 知, $f(x)=e^x(x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4})$,

则 $f'(x)=e^x(x+2)(x+\frac{1}{4})$,

令 $f'(x)=e^x(x+2)(x+\frac{1}{4})=0$, 可得 $x=-2$ 或 $x=-\frac{1}{4}$.

当 $x \in (-\infty, -2)$ 时, $f'(x)>0$, 函数 $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in (-2, -\frac{1}{4})$ 时, $f'(x)<0$, 函数 $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (-\frac{1}{4}, +\infty)$ 时, $f'(x)>0$, 函数 $f(x)$ 单调递增,

故当 $x=-2$ 时, $f(x)$ 取极大值, 极大值为 $f(-2)=\frac{15}{4e^2}$,

当 $x=-\frac{1}{4}$ 时, 函数 $f(x)$ 取极小值, 极小值为 $f(-\frac{1}{4})=\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}}$.

10. 解: 由题意, $f'(x)=2x-(m+2)+\frac{m}{x}=$

$$\frac{2x^2-(m+2)x+m}{x}=\frac{(x-1)(2x-m)}{x}, x>0.$$

当 $m \leq 0$ 时, $2x-m>0$, 令 $f'(x)=\frac{(x-1)(2x-m)}{x}>0$, 解得 $x>1$,

令 $f'(x)<0$, 解得 $0<x<1$.

故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

故 $f(x)$ 无极大值, 不成立;

当 $m=2$ 时, $f'(x)=\frac{2(x-1)^2}{x} \geq 0$ 恒成立, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $f(x)$ 无极大值, 不成立;

当 $0 < m < 2$ 时, 令 $f'(x) = \frac{(x-1)(2x-m)}{x} > 0$, 解得 $x > 1$ 或

$0 < x < \frac{m}{2}$, 令 $f'(x) < 0$, 则 $\frac{m}{2} < x < 1$,

故 $f(x)$ 在 $(0, \frac{m}{2})$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\frac{m}{2}, 1)$ 内单

调递减, 故 $f(x)$ 在 $x = \frac{m}{2}$ 处取得极大值;

当 $m > 2$ 时, 令 $f'(x) = \frac{(x-1)(2x-m)}{x} > 0$, 解得 $x > \frac{m}{2}$ 或

$0 < x < 1$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $1 < x < \frac{m}{2}$,

故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 和 $(\frac{m}{2}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(1, \frac{m}{2})$ 内单

调递减, 故 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值,

综上, 实数 m 的取值范围为 $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

课时作业(二十六)

1. D [由 $f(x) = (x+2)e^x$, 得 $f'(x) = e^x + (x+2)e^x = (x+3)e^x$.

当 $x \in [-5, -3)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (-3, 5]$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

所以函数 $f(x)$ 在 $x = -3$ 处取得极小值, 也是最小值.

$f(-3) = (-3+2)e^{-3} = -e^{-3}$, 即 $f(x)$ 的最小值为 $-e^{-3}$,

故选 D.]

2. D [因为 $x > 0, y > 0$, 且 $xy + 2y^2 - 36 = 0$,

所以 $x = \frac{36-2y^2}{y} > 0$, 即 $0 < y < 3\sqrt{2}$,

则 $xy^2 = (36-2y^2)y$, 令 $g(y) = (36-2y^2)y = 36y - 2y^3, 0 < y < 3\sqrt{2}$, 则 $g'(y) = 36 - 6y^2 = 6(\sqrt{6}-y)(\sqrt{6}+y)$,

当 $0 < y < \sqrt{6}$ 时, $g'(y) > 0$, $g(y)$ 单调递增, 当 $\sqrt{6} < y < 3\sqrt{2}$ 时, $g'(y) < 0$, $g(y)$ 单调递减, 故 $y = \sqrt{6}$ 时, $g(y)$ 取得最大值 $24\sqrt{6}$. 故选 D.]

3. A [$f'(x) = 2x + (a-1) - \frac{3}{x} = \frac{2x^2 + (a-1)x - 3}{x}$,

设 $g(x) = 2x^2 + (a-1)x - 3$, 因为 $\Delta = (a-1)^2 + 24 > 0$, 因此 $g(x) = 0$ 有两个不同的实数根, 又 $g(0) = -3 < 0$, 因此 $g(x) = 0$ 的两根一正一负, 由题意可知正根在 $(1, 2)$ 内,

所以 $\begin{cases} g(1) = 2 + (a-1) - 3 < 0, \\ g(2) = 8 + 2(a-1) - 3 > 0, \end{cases}$

解得 $-\frac{3}{2} < a < 2$. 故选 A.]

4. D [$\because$ 函数 $f(x) = m \ln x + \frac{1}{x}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$\therefore f'(x) = \frac{m}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{mx-1}{x^2}$.

当 $m \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 无最值, 舍去;

当 $m > 0$ 时,

令 $f'(x) > 0$, 得 $x > \frac{1}{m}$, $f(x)$ 单调递增,

令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{m}$, $f(x)$ 单调递减,

$\therefore f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{m}\right) = m \ln \frac{1}{m} + m = -m$,

$\therefore m = e^2 > 0$ 成立,

故选 D.]

5. AC [根据题意可知, 点 $P(1, f(1))$ 为切点, 将其坐标代入切线方程 $y = 3x + 1$ 可得,

$f(1) = 3 \times 1 + 1 = 4$, 因此 $f(1) = 1 + a + b + 5 = 4$, 所以 $a + b = -2$,

又根据函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$, 得导函数 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$,

而根据切线 $y = 3x + 1$ 的斜率可知, $f'(1) = 3$, 所以 $3 + 2a + b = 3$, 所以 $2a + b = 0$,

根据 $\begin{cases} a+b=-2, \\ 2a+b=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=2, \\ b=-4, \end{cases}$ 因此选项 A 正确, 选项 B

错误;

根据函数 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$, 可得 $f'(x) = 3x^2 + 4x - 4 = (3x-2)(x+2)$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{2}{3}$ 或 $x = -2$,

当 x 变化时, 函数 $f(x)$, 导函数 $f'(x)$ 的变化情况如表,

x	-3	$(-3, -2)$	-2	$(-2, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}, 1)$	1
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	8	↗	极大值	↘	极小值	↗	4

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(-2) = 13$, 又 $f(1) = 4$,

所以 $f(x)$ 在 $[-3, 1]$ 上的最大值为 13, 最小值不为 4, 故 C 正确, D 错误.

故选 AC.]

6. AD [$f(x) = x^2 + a \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 2x + \frac{a}{x}$.

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) = 2x + \frac{1}{2x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{1}{2x}} = 2$,

当且仅当 $2x = \frac{1}{2x} (x > 0)$, 即当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立,

因此当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 的切线斜率的最小值为 2, 所以选项 A 正确;

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) = 2x + \frac{1}{2x} > 0$ 对任意的 $x > 0$ 恒成立,

因此当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 那么函数 $f(x)$ 无最大值, 所以选项 B 错误;

当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x) = x^2 - \frac{1}{2} \ln x$, $f'(x) = 2x - \frac{1}{2x} = \frac{4x^2 - 1}{2x}$,

由 $f'(x) < 0$, 可得 $0 < x < \frac{1}{2}$, 由 $f'(x) > 0$, 可得 $x > \frac{1}{2}$,

所以此时 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\frac{1}{2}, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, \frac{1}{2})$,

则 $f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$,

所以 $f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$,

所以当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 有最小值, 且最小值大于 0, 函数 $f(x)$ 无零点, C 错误, D 正确. 故选 AD.]

7. $-2-\sin 2$ [函数 $f(x)=x^2-4x+(x-2)\cos x-\sin x$,
可得 $f'(x)=(x-2)(2-\sin x)$,
因为 $2-\sin x>0$, 所以当 $x<2$ 时, $f'(x)<0$,
当 $x>2$ 时, $f'(x)>0$,
从而 $m=f(x)_{\min}=f(2)=-4-\sin 2$,
 $a=2$, 所以 $m+a=-2-\sin 2$.]

8. $-\frac{27}{16}$ [由 $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$, 可得 $f'(x)=\cos x+\cos 2x$, 令 $\cos x+\cos 2x=0$, 解得 $2\cos^2 x+\cos x-1=0$,
即 $(2\cos x-1)(\cos x+1)=0$,
可得 $\cos x=-1$ 或 $\cos x=\frac{1}{2}$, $x\in[-2\pi, -\pi]\cup[\pi, 2\pi]$,
解得 $x=-\pi, x=\pi, x=-\frac{5\pi}{3}, x=\frac{5\pi}{3}$,
 $f(-\pi)=0, f(\pi)=0, f(-\frac{5\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}, f(\frac{5\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{3\sqrt{3}}{4}, f(2\pi)=0, f(-2\pi)=0$,
所以 $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, -\pi]\cup[\pi, 2\pi]$ 上的最小值与最大值之积为 $-\frac{27}{16}$.]

9. 解: 设 $g(x)=f'(x)$,
 $g'(x)=\frac{\frac{1}{1+x}(1+x)-\ln(1+x)}{(1+x)^2}=\frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}, x>-1$,
由 $g'(x)=0$ 可得 $x=e-1$,
当 $x\in(-1, e-1)$ 时, $g'(x)>0, g(x)$ 单调递增,
当 $x\in(e-1, +\infty)$ 时, $g'(x)<0, g(x)$ 单调递减,
所以 $f'(x)$ 的最大值为 $f'(e-1)=\frac{1}{e}$.

10. (1) 证明: 当 $a=1$ 时, $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1, x>0$,

$$\text{则 } f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2},$$

当 $x>1$ 时, $f'(x)>0, f(x)$ 单调递增;
当 $0<x<1$ 时, $f'(x)<0, f(x)$ 单调递减,
故 $f(x)\geq f(1)=0$.

$$(2) \text{解: } f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{ax-1}{x^2}, x>0.$$

当 $a\leq 0$ 时, $f'(x)<0, f(x)$ 单调递减, 此时函数没有最小值, 不符合题意;

当 $a>0$ 时, 由 $f'(x)>0$ 可得 $x>\frac{1}{a}, f(x)$ 单调递增,

由 $f'(x)<0$ 可得 $0<x<\frac{1}{a}, f(x)$ 单调递减,

故当 $x=\frac{1}{a}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最小值 $f(\frac{1}{a})=a\ln \frac{1}{a}-1+a=-1$,
即 $1-\ln a=0$,
所以 $a=e$.

课时作业(二十七)

1. 证明: (1) 令 $g(x)=f(x)-x=e^x-1-x$,
则 $g'(x)=e^x-1$,
当 $x>0$ 时, $g'(x)>0, g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,
故 $g(x)>g(0)=0$,

即当 $x>0$ 时, $f(x)>x$ 成立.

(2) 由(1)可得当 $x>0$ 时, $e^x>1+x$,
要证 $e^x-2>\ln x$, 可证 $e^x-2>x-1\geq \ln x$,
即证 $x-1-\ln x\geq 0$,

令 $h(x)=x-1-\ln x$,

$$\text{则 } h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x},$$

当 $x>1$ 时, $h'(x)>0, h(x)$ 单调递增,

当 $0<x<1$ 时, $h'(x)<0, h(x)$ 单调递减,

所以 $h(x)_{\min}=h(1)=0$,

即 $h(x)=x-1-\ln x\geq 0$ 恒成立,

所以 $e^x-2>\ln x$.

2. 解: 由题意可知, 存在 x 使 $x^2-ax\leq \ln x (x>0)$ 成立,

则存在 x , 使 $a\geq x-\frac{\ln x}{x} (x>0)$.

$$\text{令 } h(x)=x-\frac{\ln x}{x} (x>0),$$

$$\text{则 } h'(x)=\frac{x^2+\ln x-1}{x^2},$$

因为 $y=x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $y=\ln x-1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $y=x^2+\ln x-1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且当 $x=1$ 时, $y=0$.

所以当 $x\in(0, 1)$ 时, $h'(x)<0$, 当 $x\in(1, +\infty)$ 时, $h'(x)>0$,

所以 $h(x)_{\min}=h(1)=1$, 所以 $a\geq 1$.

所以实数 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

3. 解: (1) 当 $a=-1$ 时, $f(x)=x\ln x+x, f'(x)=\ln x+2$,

则 $f(1)=1, f'(1)=2$,

所以函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线的方程为 $y-1=2(x-1)$, 即 $2x-y-1=0$.

(2) 因为对任意 $x\in(0, +\infty), f(x)\leq x^2+2$ 恒成立,

所以 $x\ln x-ax\leq x^2+2$ 恒成立.

即 $a\geq \ln x-x-\frac{2}{x}$ 在 $x\in(0, +\infty)$ 时恒成立.

$$\text{设 } h(x)=\ln x-x-\frac{2}{x} (x>0), \text{ 则 } h'(x)=\frac{1}{x}-1+\frac{2}{x^2}=-\frac{(x-2)(x+1)}{x^2},$$

令 $h'(x)=0$, 得 $x_1=2, x_2=-1$ (舍去),

当 $x\in(0, 2)$ 时, $h'(x)>0, h(x)$ 单调递增,

当 $x\in(2, +\infty)$ 时, $h'(x)<0, h(x)$ 单调递减,

故 $h(x)_{\max}=h(2)=\ln 2-3$,

所以 $a\geq \ln 2-3$,

故实数 a 的取值范围是 $[\ln 2-3, +\infty)$.

课时作业(二十八)

1. 解: 函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$,

若函数 $f(x)$ 在定义域上恰有一个零点, 即方程 $a=\frac{\ln x}{x}$ 恰有一个解.

$$\text{令 } g(x)=\frac{\ln x}{x}, \text{ 则 } g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2} (x>0),$$

当 $0<x<e$ 时, $g'(x)>0, g(x)$ 单调递增,

当 $x>e$ 时, $g'(x)<0, g(x)$ 单调递减,

故当 $x=e$ 时, $g(x)$ 取得极大值, 也是最大值, $g(e)=\frac{1}{e}$.

又当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow 0$,

故当 $a \leq 0$ 或 $a = \frac{1}{e}$ 时, 方程 $a = \frac{\ln x}{x}$ 恰有一个解,

即函数 $f(x)$ 在定义域上恰有一个零点.

即实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 0] \cup \left\{\frac{1}{e}\right\}$.

2. 解: 令 $f(x) = ax - \ln x - 2 = 0$, 因为 $x > 0$, 所以 $a = \frac{\ln x + 2}{x}$,

令 $g(x) = \frac{\ln x + 2}{x} (x > 0)$, 则 $g'(x) = \frac{-1 - \ln x}{x^2}$.

令 $g'(x) > 0$, 则 $0 < x < \frac{1}{e}$; 令 $g'(x) < 0$, 则 $x > \frac{1}{e}$,

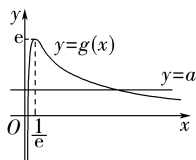
故 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 内单调递增, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递减, 从而

$g(x)_{\max} = g\left(\frac{1}{e}\right) = e$.

如图, 当 $a > e$ 时, 直线 $y = a$ 与 $y = g(x)$ 的图象没有交点;

当 $a = e$ 或 $a \leq 0$ 时, 直线 $y = a$ 与 $y = g(x)$ 的图象有 1 个交点;

当 $0 < a < e$ 时, 直线 $y = a$ 与 $y = g(x)$ 的图象有 2 个交点.



综上, 当 $a > e$ 时, 函数 $f(x)$ 没有零点; 当 $a = e$ 或 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 有 1 个零点; 当 $0 < a < e$ 时, 函数 $f(x)$ 有 2 个零点.

阶段检测(四)

1. D [因为 $P = P_0 e^{-kt}$,

求得 $P' = P_0 \cdot e^{-kt} \cdot (-kt)' = -kP_0 e^{-kt}$.

故选 D.]

2. D [由导函数图象可知, 当 $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in (-3, 3)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减.

对于 A, 3 是函数 $f(x)$ 的极小值点, $f(x)$ 的极小值为 $f(3)$, 故 A 错误;

对于 B, $f(x)$ 的极值点有两个, 极大值点 -3, 极小值点 3, 故 B 错误;

对于 C, 当 $x \in (-\infty, -3)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数单调递增, 当 $x \in (-3, 3)$ 时, $f'(x) < 0$ 函数单调递减, 故 C 错误;

对于 D, 由题干图象可知 $f'(1) < 0$, 即函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线的斜率小于零, 故 D 正确.

故选 D.]

3. B [$f'(x) = x - \frac{3}{x} + 2 = \frac{x^2 + 2x - 3}{x}$, 定义域为 $(0, +\infty)$.

令 $f'(x) < 0$, 得 $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) < 0$, 解得 $-3 < x < 1$. 又 $x > 0$,

故 $0 < x < 1$. 所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, 1)$. 故选 B.]

4. C [因为 $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 3} (x \geq 2)$,

所以 $f'(x) = \frac{e^x(x-3)(x+1)}{(x^2-3)^2}$,

令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > 3$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $2 \leq x < 3$,

故 $f(x)$ 在 $[2, 3)$ 上单调递减, 在 $(3, +\infty)$ 上单调递增, 故

$f(x)_{\min} = f(3) = \frac{e^3}{6}$. 故选 C.]

5. B [易得导函数 $f'(x) = 3x^2 - 2ax$, 那么 $f'(2) = 3 \times 4 - 4a = 0$, 解得 $a = 3$.

当 $a = 3$ 时, 导函数 $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$,

因此当 $x \in (0, 2)$ 时, $f'(x) < 0$,

当 $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

故 $x = 2$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 符合题意.

所以 $a = 3$. 故选 B.]

6. C [根据题意得导函数 $f'(x) = e^x + (x+1) \cdot e^x = (x+2)e^x$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -2$,

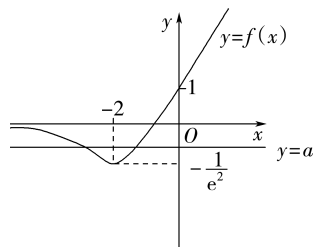
由 $f'(x) < 0$, 得 $x < -2$, 由 $f'(x) > 0$, 得 $x > -2$,

因此函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -2)$, 单调递增区间为 $(-2, +\infty)$,

因此函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(-2) = (-2+1)e^{-2} = -\frac{1}{e^2}$, 当

$x < -1$ 时, $f(x) < 0$,

作出 $f(x)$ 的图象.



根据图象可知 $y = a$ 与 $f(x)$ 的图象恰有两个公共点时,

$-\frac{1}{e^2} < a < 0$. 故选 C.]

7. ABC [对于 A, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+2\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$

$= 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+2\Delta x) - f(1)}{2\Delta x} = 2f'(1) = 4$, 故 A 正确;

对于 B, 由 $f(x) = x^2 + 3xf'(2) + \ln x$, 得 $f'(x) = 2x + 3f'(2) + \frac{1}{x}$, 则 $f'(2) = 4 + 3f'(2) + \frac{1}{2}$, 解得 $f'(2) = -\frac{9}{4}$,

故 B 正确;

对于 C, 因为 $f(x) = \ln(2x+1)$,

所以 $f'(x) = \frac{1}{2x+1} (2x+1)' = \frac{2}{2x+1}$,

令 $\frac{2}{2x_0+1} = 1$, 解得 $x_0 = \frac{1}{2}$, 故 C 正确;

对于 D, $\left(\frac{\cos x}{x}\right)' = \frac{(\cos x)'x - \cos x(x)'}{x^2}$

$= \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}$, 故 D 错误.

故选 ABC.]

8. AC [由题意知, $f'(x) = 3x^2 - 1$,

令 $f'(x) > 0$ 得 $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

令 $f'(x) < 0$ 得 $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 内单调递减, 在 $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,

$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ 上单调递增,

所以 $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ 是极值点, 故 A 正确;

因为 $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{9} > 0$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{9} > 0$,
 $f(-2) = -5 < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 上有一个零点,

当 $x \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $f(x) \geq f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 0$,

即函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ 上无零点,

综上所述, 函数 $f(x)$ 有一个零点, 故 B 错误;

令 $h(x) = x^3 - x$, 该函数的定义域为 $\mathbf{R}$, $h(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -h(x)$,

则 $h(x)$ 是奇函数, 点 $(0, 0)$ 是 $h(x)$ 图象的对称中心, 将 $h(x)$ 的图象向上平移一个单位长度得到 $f(x)$ 的图象,

所以点 $(0, 1)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心, 故 C 正确;

令 $f'(x) = 3x^2 - 1 = 2$, 可得 $x = \pm 1$, 又 $f(1) = f(-1) = 1$,
 当切点坐标为 $(1, 1)$ 时, 切线方程为 $y = 2x - 1$, 当切点坐标为 $(-1, 1)$ 时, 切线方程为 $y = 2x + 3$, 故 D 错误.

故选 AC.]

9. -3 [因为 $y = x + \ln x$, 所以 $y' = 1 + \frac{1}{x}$, 即曲线 $y = x + \ln x$

在点 $(1, 1)$ 处的切线斜率 $k = 1 + 1 = 2$, 切线方程为 $y = 2x - 1$,
 又由 $y = x^2 - 2x - a$, 得 $y' = 2x - 2$, 设切点坐标为 (x_0, y_0) ,
 令 $2x_0 - 2 = 2$, 解得 $x_0 = 2$, 将 $x_0 = 2$ 代入 $y = 2x - 1$, 可得
 $y_0 = 3$, 将点 $(2, 3)$ 代入 $y = x^2 - 2x - a$, 可得 $3 = 4 - 4 - a$, 解得
 $a = -3$.]

10. 3 (答案不唯一) [由题可得 $f'(x) = k - e^x$.

当 $k \leq 0$ 时, $f'(x) = k - e^x < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调
 递减, 不存在最值;

当 $k > 0$ 时, 令 $f'(x) = k - e^x = 0$, 可得 $x = \ln k$,

当 $x < \ln k$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x > \ln k$ 时, $f'(x) < 0$, 所以函数
 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln k)$ 上单调递增, 在 $(\ln k, +\infty)$ 上单调递减,
 若函数 $f(x) = kx - e^x$ 在 $(1, +\infty)$ 上存在最值, 则 $\ln k > 1$,
 解得 $k > e$,

所以实数 k 的一个值为 3.]

11. 解: 因为 $f(x) \geq 2\ln x$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立,

所以 $ax + \frac{a-2}{x} + 2 - 2a - 2\ln x \geq 0 (a > 0)$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒
 成立.

令 $g(x) = ax + \frac{a-2}{x} + 2 - 2a - 2\ln x, x \geq 1$,

则 $g'(x) = a - \frac{a-2}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{ax^2 - 2x - a + 2}{x^2}$
 $= \frac{(x-1)[ax + (a-2)]}{x^2}$.

令 $g'(x) = 0$, 解得 $x_1 = 1, x_2 = -\frac{a-2}{a}$.

若 $-\frac{a-2}{a} = 1$, 即 $a = 1$,

则 $g'(x) \geq 0$,

函数 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 又 $g(1) = 0$, 所以 $g(x) \geq$
 $g(1) = 0$,

所以 $f(x) \geq 2\ln x$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立.

若 $-\frac{a-2}{a} > 1$, 即 $0 < a < 1$, 则当 $x \in (0, 1) \cup \left(-\frac{a-2}{a}, +\infty\right)$

时, $g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增;

当 $x \in \left(1, -\frac{a-2}{a}\right)$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减,

所以 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值为 $g\left(-\frac{a-2}{a}\right)$,

又因为 $g(1) = 0$, 所以 $g\left(-\frac{a-2}{a}\right) < 0$, 不合题意.

若 $-\frac{a-2}{a} < 1$, 即 $a > 1$, 则当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$,

$g(x)$ 单调递增,

所以 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值为 $g(1)$,

又因为 $g(1) = 0$, 所以 $g(x) \geq g(1) = 0$, 所以 $f(x) \geq 2\ln x$ 恒
 成立.

综上可知, 实数 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

12. 解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $f'(x) = 2ae^{2x} + (a-2) \cdot$
 $e^x - 1 = (ae^x - 1) \cdot (2e^x + 1)$.

若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调
 递减;

若 $a > 0$, 则由 $f'(x) = 0$ 得 $x = -\ln a$,

当 $x \in (-\infty, -\ln a)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (-\ln a, +\infty)$ 时,
 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减, 在
 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 由 (1) 知当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上最多有一个零点, 故 $a \leq 0$ 不符合
 题意.

当 $a > 0$ 时, 由 (1) 知 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减, 在
 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增, 欲使 $f(x)$ 有两个零点, 首先需
 $f(-\ln a) = 1 - \frac{1}{a} + \ln a < 0$,

令 $h(a) = 1 - \frac{1}{a} + \ln a (a > 0)$,

$\therefore h'(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} > 0$, $\therefore h(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 而

$h(1) = 1 - 1 = 0$,

$\therefore$ 当 $0 < a < 1$ 时, $h(a) < 0$, 即 $f(-\ln a) < 0$.

其次, 保证 $f(x)$ 在 $x \in (-\infty, -\ln a)$ 和 $x \in (-\ln a, +\infty)$ 时
 各有 1 个零点.

当 $x \in (-\infty, -\ln a)$ 时, $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x =$
 $a(e^{2x} + e^x) - (2e^x + x)$,

这里 $a(e^{2x} + e^x) > 0$, 只需 $2e^x + x < 0$ 即可, 可取 $x = -1$, 即
 $\frac{2}{e} - 1 < 0$,

$\therefore f(-1) > 0$, 又 $f(-\ln a) < 0$,

$\therefore \exists x_1 \in (-1, -\ln a)$, 使 $f(x_1) = 0$,

即 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上存在一个零点 x_1 ;

当 $x \in (-\ln a, +\infty)$ 时, $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x >$
 $ae^{2x} - 2e^x - e^x = ae^{2x} - 3e^x$.

令 $ae^{2x} - 3e^x = 0$, $\therefore ae^x - 3 = 0$, $\therefore x = \ln \frac{3}{a}$,

$\therefore f\left(\ln \frac{3}{a}\right) > 0$, 又 $f(-\ln a) < 0$,

$\therefore \exists x_2 \in \left(-\ln a, \ln \frac{3}{a}\right)$, 使 $f(x_2) = 0$,

即 $f(x)$ 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上存在一个零点 x_2 .

综上, 实数 a 的取值范围为 $(0, 1)$.

课时作业(二十九)

1. D [对于 A, 由 $\frac{17\pi}{9} = -\frac{\pi}{9} + 2\pi$, 可得 $\frac{\pi}{9}$ 角与 $\frac{17\pi}{9}$ 角的终边不相同, 故 A 错误;

对于 B, 由题意 α 为第二象限角, 可得 $2k\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z}$,

所以 $-2k\pi - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \alpha < -2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

所以 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 为第四象限角, 故 B 错误;

对于 C, 当 $m > 0$ 时, 终边经过点 (m, m) 的角的集合是 $\left\{ \alpha \mid \alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$;

当 $m < 0$ 时, 终边经过点 (m, m) 的角的集合是 $\left\{ \alpha \mid \alpha = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$, 故 C 错误;

对于 D, 由题意可得, 扇形的半径 $r = \frac{1}{\sin 2}$,

可得扇形面积 $S = \frac{1}{2} ar^2 = \frac{4}{2} \times \frac{1}{\sin^2 2} = \frac{2}{\sin^2 2}$, 故 D 正确. 故选 D.]

2. D [依题意, 得 $x < 0, r = OP = \sqrt{x^2 + 4}$, 其中 O 为坐标原点, 则 $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{1}{3}$, 所以 $x = -4\sqrt{2}$. 故选 D.]

3. D [$300^\circ = 360^\circ - 60^\circ$, 则 300° 角是第四象限角, 故 $\sin 300^\circ < 0$, A 错误; $-305^\circ = -360^\circ + 55^\circ$, 则 -305° 角是第一象限角, 故 $\cos(-305^\circ) > 0$, B 错误; $-\frac{22\pi}{3} = -8\pi + \frac{2\pi}{3}$, 则 $-\frac{22\pi}{3}$ 是第二象限角, 故 $\tan\left(-\frac{22\pi}{3}\right) < 0$, C 错误; $3\pi < 10 < \frac{7\pi}{2}$, 则 10 是第三象限角, 故 $\sin 10 < 0$, D 正确. 故选 D.]

4. C [当 $k = 2n (n \in \mathbf{Z})$ 时, $2n\pi \leq \alpha \leq 2n\pi + \frac{\pi}{3} (n \in \mathbf{Z})$; 当 $k = 2n + 1 (n \in \mathbf{Z})$ 时, $2n\pi + \pi \leq \alpha \leq 2n\pi + \pi + \frac{\pi}{3} (n \in \mathbf{Z})$. 故选 C.]

5. B [当 $t > 0$ 时, 由三角函数的定义可得 $\sin \theta = \frac{-8t}{\sqrt{(-6t)^2 + (-8t)^2}} = \frac{-8t}{10t} = -\frac{4}{5}$,

$$\cos \theta = \frac{-6t}{\sqrt{(-6t)^2 + (-8t)^2}} = \frac{-6t}{10t} = -\frac{3}{5},$$

$$\text{此时, } 2\sin \theta \cos \theta = \frac{24}{25};$$

当 $t < 0$ 时, 由三角函数的定义可得

$$\sin \theta = \frac{-8t}{\sqrt{(-6t)^2 + (-8t)^2}} = \frac{-8t}{-10t} = \frac{4}{5},$$

$$\cos \theta = \frac{-6t}{\sqrt{(-6t)^2 + (-8t)^2}} = \frac{-6t}{-10t} = \frac{3}{5},$$

$$\text{此时, } 2\sin \theta \cos \theta = \frac{24}{25}.$$

综上, $2\sin \theta \cos \theta = \frac{24}{25}$. 故选 B.]

6. C [由题意可得 $\csc \frac{5\pi}{4} = \frac{1}{\sin \frac{5\pi}{4}} = -\sqrt{2}$, A 正确;

$$\cos \alpha \cdot \sec \alpha = \cos \alpha \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = 1, \text{ B 正确};$$

函数 $f(x) = \sec x$ 的定义域为 $\left\{ x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, C 错误;

$$\sec^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \csc^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 +$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 1 + \frac{4}{\sin^2 2\alpha} \geq 5,$$

当 $\sin 2\alpha = \pm 1$ 时, 等号成立, D 正确.

故选 C.]

7. AC [终边在第二象限的角的集合为 $\{\alpha \mid 90^\circ + 360^\circ \cdot k < \alpha < 180^\circ + 360^\circ \cdot k, k \in \mathbf{Z}\}$, A 正确;

与 -65° 角终边相同的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = -65^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$, B 错误;

$$\alpha = 665^\circ = 360^\circ + 305^\circ,$$

则 665° 角与 305° 角终边相同且 305° 角为第四象限角,

所以角 α 是第四象限角, C 正确;

当 α 为直角时, D 显然错误.

故选 AC.]

8. BC [由角 α 的终边在第三象限, 得 $\pi + 2k\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k$

$\in \mathbf{Z}$, 则 $\frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 因此 $\frac{\alpha}{2}$ 是第二象限角或第四象限角.

$$\text{当 } \frac{\alpha}{2} \text{ 是第二象限角时, } \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|} + \frac{2\cos \frac{\alpha}{2}}{\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|} - \frac{3\tan \frac{\alpha}{2}}{\left| \tan \frac{\alpha}{2} \right|} = 1 - 2 - (-3) = 2;$$

$$\text{当 } \frac{\alpha}{2} \text{ 是第四象限角时, } \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|} + \frac{2\cos \frac{\alpha}{2}}{\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|} - \frac{3\tan \frac{\alpha}{2}}{\left| \tan \frac{\alpha}{2} \right|} = -1 + 2 - (-3) = 4. \text{ 故选 BC.}]$$

9. ABD [终边所在射线方向相反的两个角相差 $(2k+1)\pi (k \in \mathbf{Z})$, 故 A 正确;

设扇形的圆心角为 α , 半径为 r , 由扇形弧长公式得 $l = ar = \frac{\pi}{3} r = \frac{\pi}{2}$, 解得 $r = \frac{3}{2}$,

$$\text{则扇形面积 } S = \frac{1}{2} lr = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3\pi}{8}, \text{ 故 B 正确};$$

终边落在直线 $y = -x$ 上的角的集合为 $\left\{ \alpha \mid \alpha = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$, 故 C 错误;

因为 $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$, 可知 3 为第二象限角, 4 为第三象限角,

由各象限角的三角函数值的符号规律可得 $\cos 3 < 0, \sin 4 < 0$, 所以 $\cos 3 \cdot \sin 4 > 0$, 故 D 正确.

故选 ABD.]

10. 三 [因为 $\cos \alpha < 0$ 且 $\tan \alpha > 0$, 所以角 α 所在的象限是第三象限.]

11. $120^\circ - 90^\circ$ [若时钟拨慢 20 分钟, 则分针逆时针转动, 且为正角, 所以可得 $\frac{4}{12} \times 360^\circ = 120^\circ$, 所以分针转过的角是 120° , 若时针从 6 时走到 9 时, 时针顺时针走动的是负角, 所以时针转过的角为 $-\frac{3}{12} \times 360^\circ = -90^\circ$.]

12. $\frac{8\pi}{3} + 4\sqrt{3}$ [取优弧 BC 所在圆的圆心为 D , 连接 AD, BD, CD , 则 $BD \perp AB, CD \perp AC$,

则 $AD = 4, BD = CD = 2$, 所以 $\angle BAD = \angle CAD = \frac{\pi}{6}$, 则

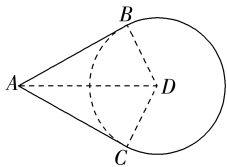
$$\angle BDC = \frac{2\pi}{3},$$

$$AB = AC = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

故优弧 BC 对应的圆心角为 $\frac{4\pi}{3}$, 对应的扇形面积为 $\frac{1}{2} \times \frac{4\pi}{3} \times$

$$2^2 = \frac{8\pi}{3},$$

$$\text{而 } S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3},$$



所以该封闭图形的面积为 $\frac{8\pi}{3} + S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} = \frac{8\pi}{3} + 4\sqrt{3}$.]

课时作业(三十)

1. C [$\sqrt{2} \sin 2025^\circ + \tan 2025^\circ = \sqrt{2} \sin(5 \times 360^\circ + 225^\circ) + \tan(5 \times 360^\circ + 225^\circ) = \sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1 = -1 + 1 = 0$. 故选 C.]

2. C [由于 $\tan \theta = 2$,

$$\text{则 } \frac{\cos \theta - 3 \sin \theta}{\sin \theta + 5 \cos \theta} = \frac{1 - 3 \tan \theta}{\tan \theta + 5} = -\frac{5}{7}.$$

故选 C.]

3. A [因为 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{3}$

$$= \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

$$= \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{所以 } \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{3}.$$

故选 A.]

4. B [$\sqrt{1 - 2 \sin(\pi - 2) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2\right)}$

$$= \sqrt{1 + 2 \sin 2 \cos 2} = \sqrt{(\sin 2 + \cos 2)^2}$$

$$= \sin 2 + \cos 2.$$

故选 B.]

5. B [因为 $\sin \alpha - 2 \cos \alpha = 1$,

$$\text{所以 } \sin \alpha = 2 \cos \alpha + 1, \text{ 又 } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\text{所以 } 5 \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha = 0, \text{ 解得 } \cos \alpha = -\frac{4}{5} \text{ 或 } \cos \alpha = 0,$$

又因为 α 是第三象限角,

$$\text{所以 } \cos \alpha = -\frac{4}{5}, \sin \alpha = 2 \times \left(-\frac{4}{5}\right) + 1 = -\frac{3}{5},$$

$$\text{可得 } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}. \text{ 故选 B.}]$$

6. C [将已知等式两边平方, 可得 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta =$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{7}{4},$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}, \text{ 可得 } (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\text{而 } \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{又 } \theta + \frac{\pi}{4} \in \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right), \therefore \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) < 0,$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) = -\frac{1}{2} \times \left[1 - \left(-\frac{3}{8}\right)\right] = -\frac{11}{16}.$$

故选 C.]

7. BC [由题意可得 $A + B + C = \pi$,

对于 A, $\sin(A + B) = \sin(\pi - C) = \sin C$, 故 A 错误;

对于 B, $\sin \frac{B+C}{2} = \sin \frac{\pi-A}{2} = \cos \frac{A}{2}$, 故 B 正确;

对于 C, $\tan(A + B) = \tan(\pi - C) = -\tan C$, 故 C 正确;

对于 D, $\cos(A + B) = \cos(\pi - C) = -\cos C$, 故 D 错误.

故选 BC.]

8. ACD [对于 A, 因为 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}$,

$$\text{所以 } (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{25},$$

$$\text{即 } \sin \theta \cos \theta = -\frac{12}{25}, \text{ A 正确;}$$

$$\text{对于 B, C, } (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{49}{25},$$

$$\text{因为 } \theta \in (0, \pi), \text{ 且 } \sin \theta \cos \theta = -\frac{12}{25} < 0,$$

所以 $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$, 即 $\sin \theta - \cos \theta > 0$,

$$\text{所以 } \sin \theta - \cos \theta = \frac{7}{5}, \text{ B 错误, C 正确;}$$

$$\text{对于 D, 联立 } \begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}, \\ \sin \theta - \cos \theta = \frac{7}{5}, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = -\frac{3}{5},$$

$$\text{所以 } \tan \theta = -\frac{4}{3}, \text{ D 正确.}$$

故选 ACD.]

9. 1 $\frac{3}{5} \frac{3}{5}$ [由 $\tan \alpha = 2$, 得

$$\frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{4 \sin \alpha - 3 \cos \alpha} = \frac{2 \tan \alpha + 1}{4 \tan \alpha - 3} = \frac{2 \times 2 + 1}{4 \times 2 - 3} = 1,$$

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\tan^2 \alpha - 1}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{4 - 1}{4 + 1} = \frac{3}{5},$$

$$\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \frac{3}{5}.]$$

10. $\frac{6}{7}$ [$\because$ 角 α 终边上一点 $P(-4, 3)$,

$$\therefore \tan \alpha = -\frac{3}{4},$$

$$\begin{aligned}\text{则原式} &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\sin(-\pi-\alpha)}{\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{-\sin\alpha-\sin\alpha}{-\sin\alpha+\cos\alpha} = \\ &= \frac{-2\sin\alpha}{-\sin\alpha+\cos\alpha} = \frac{-2\times\left(-\frac{3}{4}\right)}{\frac{3}{4}+1} = \frac{6}{7}.\end{aligned}$$

11. 解: (1) $f(\alpha) = \frac{\sin(2\pi-\alpha)\tan(\pi+\alpha)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\tan(3\pi-\alpha)}$

$$\begin{aligned}&= \frac{-\sin\alpha\tan\alpha(-\cos\alpha)}{-\cos\alpha(-\tan\alpha)} \\ &= \frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\tan\alpha}{\cos\alpha\cdot\tan\alpha} = \sin\alpha.\end{aligned}$$

所以 $f(\alpha) = \sin\alpha = -\frac{1}{2}$,

因为 $\alpha \in (0, 2\pi)$, 所以 $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ 或 $\alpha = \frac{11\pi}{6}$.

(2) 由 (1) 知 $f(\alpha) = \sin\alpha$,

所以 $f(\alpha) - f\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{5}$,

所以 $\sin\alpha = \frac{1}{5} - \cos\alpha$,

所以 $\cos^2\alpha + \left(\frac{1}{5} - \cos\alpha\right)^2 = 1$,

即 $(5\cos\alpha - 4)(5\cos\alpha + 3) = 0$,

所以 $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ 或 $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

又因为 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$,

所以 $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$,

所以 $\sin\alpha = \frac{1}{5} - \cos\alpha = \frac{1}{5} - \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$.

所以 $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{5} \times \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{4}{3}$.

课时作业(三十一)

1. B $[\cos 54^\circ \cos 24^\circ + \sin 54^\circ \cos 66^\circ = \cos 54^\circ \cos 24^\circ + \sin 54^\circ \cdot \sin 24^\circ = \cos(54^\circ - 24^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}]$ 故选 B.]
2. A $[\text{因为 } \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta = -\frac{1}{2}, \sin\alpha \sin\beta = -\frac{5}{12},$
- 所以 $\cos\alpha \cos\beta = -\frac{1}{12}$,
- 所以 $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{3}$.
- 故选 A.]
3. D $[\text{因为 } \sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = \frac{2}{3},$
- 所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = \frac{1}{3},$
- 所以 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3},$

又因为 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\theta - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$,

所以 $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

故选 D.]

4. C $[\text{由题意 } \frac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{3}{2},$

可得 $-2\tan\alpha = 3\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 3 \times \frac{\tan\alpha - 1}{1 + \tan\alpha},$

所以 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ 或 $\tan\alpha = -3$,

又因为 α 为第一象限角, 可得 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$,

所以 $\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2\alpha - \cos 2\alpha)$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\tan\alpha - 1 + \tan^2\alpha}{\tan^2\alpha + 1} = \frac{\sqrt{2}}{10}. \text{ 故选 C.}]$$

5. B $[\text{因为 } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),$

所以 $x + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right),$

因为 $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{5},$

所以 $x + \frac{\pi}{6} \in \left(\pi, \frac{7\pi}{6}\right),$

所以 $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{1 - \sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = -\sqrt{1 - \frac{1}{5}}$

$$= -\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{所以 } \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2},$$

所以 $\tan\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3} - 2x\right) = -\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) =$

$$= -\frac{2\tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{1 - \tan^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = -\frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{4}{3}.$$

故选 B.]

6. D $[\text{因为 } \alpha \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right),$

所以 $\frac{\pi}{4} + \alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right),$

由 $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\frac{3}{5}$, 得 $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5},$

因为 $\beta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right),$

所以 $\frac{3\pi}{4} + \beta \in (\pi, 2\pi),$

由 $\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \beta\right) = \frac{12}{13}$, 得 $\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \beta\right) = -\sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = -\frac{5}{13},$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \sin \left[\left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) - \left(\frac{3\pi}{4} + \beta \right) \right] &= \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \cos \left(\frac{3\pi}{4} + \beta \right) \\ &- \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \sin \left(\frac{3\pi}{4} + \beta \right) \\ &= -\frac{3}{5} \times \frac{12}{13} - \left(-\frac{4}{5} \right) \times \left(-\frac{5}{13} \right) = -\frac{56}{65}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{由 } \sin \left[\left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) - \left(\frac{3\pi}{4} + \beta \right) \right] &= \sin \left(\alpha - \beta - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= -\cos(\alpha - \beta), \text{ 所以 } \cos(\alpha - \beta) = \frac{56}{65}. \end{aligned}$$

故选 D.]

7. AC [对于 A, $\tan 75^\circ + \tan 120^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) - \tan 60^\circ =$

$$\frac{1 + \tan 30^\circ}{1 - \tan 30^\circ} - \sqrt{3} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} - \sqrt{3} = 2, \text{ 故 A 正确;}$$

$$\text{对于 B, } \frac{1}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{2}{2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4, \text{ 故 B}$$

错误;

$$\begin{aligned} \text{对于 C, } (1 + \tan 20^\circ) \cdot (1 + \tan 25^\circ) &= 1 + \tan 20^\circ + \tan 25^\circ + \tan 20^\circ \tan 25^\circ \\ &= 1 + \tan 45^\circ \cdot (1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ) + \tan 20^\circ \tan 25^\circ = 1 + 1 = 2, \text{ 故 C 正确;} \end{aligned}$$

$$\text{对于 D, } \frac{1}{\cos 80^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} = \frac{\sin 80^\circ - \sqrt{3} \cos 80^\circ}{\sin 80^\circ \cos 80^\circ}$$

$$= \frac{4 \left(\frac{1}{2} \sin 80^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 80^\circ \right)}{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ} = \frac{4 \sin(80^\circ - 60^\circ)}{\sin 160^\circ}$$

$$= \frac{4 \sin 20^\circ}{\sin(180^\circ - 20^\circ)}$$

$$= \frac{4 \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 4, \text{ 故 D 错误.}$$

故选 AC.]

8. ABD [已知 $\tan \alpha = 3 \tan \beta, \alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\text{对于 A, 若 } \alpha = \frac{\pi}{4}, \text{ 则 } \tan \alpha = 1, \tan \beta = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - 1 \times \frac{1}{3}} = 2, \text{ 故 A 正确;}$$

$$\text{对于 B, 若 } \alpha = 2\beta, \text{ 则 } \tan \alpha = \tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = 3 \tan \beta,$$

$$\text{由 } \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 得 } \tan \beta > 0, \text{ 故 } \frac{2}{1 - \tan^2 \beta} = 3, \text{ 解得 } \tan \beta = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \beta = \frac{\pi}{6}, \alpha = \frac{\pi}{3}, \text{ 故 } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \text{ 故 B 正确;}$$

$$\text{对于 C, } \because \tan \alpha = 3 \tan \beta, \alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\therefore \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{2 \tan \beta}{1 + 3 \tan^2 \beta} = \frac{2}{\frac{1}{\tan \beta} + 3 \tan \beta} \leq$$

$$\frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{当且仅当 } \frac{1}{\tan \beta} = 3 \tan \beta, \text{ 即 } \tan \beta = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 时等号成立, 故 C 错误;}$$

$$\text{对于 D, 由 } \tan \alpha = 3 \tan \beta, \text{ 得 } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3 \sin \beta}{\cos \beta},$$

$$\text{即 } \sin \alpha \cos \beta = 3 \sin \beta \cos \alpha.$$

$$\therefore \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} = \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{4 \cos \alpha \sin \beta} = \frac{1}{2}, \text{ 故 D}$$

正确.

故选 ABD.]

9. BC [因为 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{3}$,

$$\sin(\alpha - \beta) = -\frac{1}{6} = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3} - \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\text{所以 } \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}, \text{ A 错误;}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}, \text{ B 正确;}$$

$$\text{因为 } \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{3}, \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \sin \beta} = \frac{2}{3},$$

$$\text{即 } 3 \tan \alpha = 2 \tan \beta, \text{ C 正确;}$$

$$\sin 2\alpha \sin 2\beta = 2 \sin \alpha \cos \alpha \times (2 \sin \beta \cos \beta)$$

$$= 4(\sin \alpha \cos \beta)(\cos \alpha \sin \beta) = 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}, \text{ D 错误.}$$

故选 BC.]

10. 0 [因为 $\tan \alpha = 1$, 所以 $\sin \alpha = \cos \alpha$,

$$\text{所以 } \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha) = 0.]$$

11. $\sqrt{3}$ [$\because \tan 60^\circ = \tan(10^\circ + 50^\circ)$

$$= \frac{\tan 10^\circ + \tan 50^\circ}{1 - \tan 10^\circ \tan 50^\circ},$$

$$\therefore \tan 10^\circ + \tan 50^\circ$$

$$= \tan 60^\circ (1 - \tan 10^\circ \tan 50^\circ)$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{3} \tan 10^\circ \tan 50^\circ,$$

$$\therefore \text{原式} = \sqrt{3} - \sqrt{3} \tan 10^\circ \tan 50^\circ + \sqrt{3} \tan 10^\circ \cdot \tan 50^\circ = \sqrt{3}.]$$

12. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ [因为 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \beta \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \sin \alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}$,

$$\cos \beta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{ 所以 } \cos \alpha > 0, \sin \beta < 0,$$

$$\text{所以 } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{98}{100}} = \frac{\sqrt{2}}{10},$$

$$\sin \beta = -\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -\sqrt{1 - \frac{20}{25}} = -\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{所以 } \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{10} \times \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5} \right) -$$

$$\frac{7\sqrt{2}}{10} \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{5} \right) = \frac{7\sqrt{10} - 2\sqrt{10}}{50} = \frac{\sqrt{10}}{10}.]$$

课时作业(三十二)

1. C [$\because \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \therefore \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \sqrt{5} - 2.$

故选 C.]

2. A [因为 $\sin \left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha \right) = -\cos 2\alpha$,

$$\text{所以 } -\cos 2\alpha + \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = 0,$$

$$\text{即 } \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha).$$

又因为 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$,

所以 $\cos \alpha + \sin \alpha > 0$,

所以 $\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 即 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$,

又 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$,

所以 $\alpha + \frac{\pi}{4} \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$, 所以 $\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$,

所以 $\alpha = \frac{\pi}{12}$. 故选 A.]

3. B [由 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$, 可得 $\beta = \frac{\pi}{3} - \alpha$, $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{6}) = -\frac{2}{3}$,

$$\text{则 } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2} + \frac{\cos 2\beta + 1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} [\cos 2\alpha + \cos(\frac{2\pi}{3} - 2\alpha)] + 1$$

$$= \frac{1}{2} (\frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha) + 1$$

$$= \frac{1}{2} \sin(2\alpha + \frac{\pi}{6}) + 1 = \frac{2}{3}.$$

故选 B.]

4. D [法一: $\cos(140^\circ - \alpha) + \sin(110^\circ + \alpha) = \sin(130^\circ - \alpha)$,

$$\text{即 } -\cos(40^\circ + \alpha) + \cos(20^\circ + \alpha) = \cos(40^\circ - \alpha),$$

$$\text{故 } \cos(20^\circ + \alpha) = \cos(40^\circ - \alpha) + \cos(40^\circ + \alpha),$$

$$\text{即 } \cos 20^\circ \cos \alpha - \sin 20^\circ \sin \alpha = 2\cos 40^\circ \cos \alpha,$$

$$\text{故 } \cos 20^\circ \cos \alpha - 2\cos 40^\circ \cos \alpha = \sin 20^\circ \sin \alpha,$$

$$\text{即 } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos 20^\circ - 2\cos 40^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{\cos(30^\circ - 10^\circ) - 2\cos(30^\circ + 10^\circ)}{\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 10^\circ + \frac{3}{2} \sin 10^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \sin(10^\circ - 30^\circ)}{\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{-\sqrt{3} \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = -\sqrt{3}.$$

法二: 由 $\cos(140^\circ - \alpha) + \sin(110^\circ + \alpha) = \sin(130^\circ - \alpha)$,

$$\text{得 } \cos(140^\circ - \alpha) = \sin(130^\circ - \alpha) - \sin(110^\circ + \alpha)$$

$$= 2\cos 120^\circ \sin(10^\circ - \alpha) = -\sin(10^\circ - \alpha),$$

$$\text{即 } \sin(50^\circ - \alpha) = \sin(10^\circ - \alpha).$$

$$\therefore \sin(50^\circ - \alpha) - \sin(10^\circ - \alpha) = 2\cos(30^\circ - \alpha) \cdot \sin 20^\circ = 0,$$

$$\text{故 } 30^\circ - \alpha = 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}, \text{ 即 } \alpha = -60^\circ - k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{则 } \tan \alpha = \tan(-60^\circ - k \cdot 180^\circ) = \tan(-60^\circ) = -\sqrt{3}. \text{ 故选 D.}]$$

5. ACD [$\sin 72^\circ \sin 78^\circ - \cos 72^\circ \sin 12^\circ = \sin 72^\circ \cdot \cos 12^\circ -$

$$\cos 72^\circ \sin 12^\circ = \sin(72^\circ - 12^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 故 A 正确; } \frac{\tan 22.5^\circ}{1 - \tan^2 22.5^\circ} =$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{2 \tan 22.5^\circ}{1 - \tan^2 22.5^\circ} = \frac{1}{2} \tan 45^\circ = \frac{1}{2}, \text{ 故 B 错误; } \cos^4 \frac{\pi}{8} -$$

$$\sin^4 \frac{\pi}{8} = (\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8}) \cdot (\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}) = \cos^2 \frac{\pi}{8} -$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 故 C 正确; } \cos^2 75^\circ + \cos^2 15^\circ + \cos 15^\circ \sin 15^\circ =$$

$$\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ + \frac{1}{2} \sin 30^\circ = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}, \text{ 故 D 正确.}$$

故选 ACD.]

6. AC [由题意, 易得 $\alpha + \beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $2\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$,

$$\text{所以 } \sin 2\alpha = \sqrt{1 - \cos^2 2\alpha} = \frac{12}{13}, \text{ 故 A 正确;}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{所以 } \cos(\alpha - \beta) = \cos[2\alpha - (\alpha + \beta)]$$

$$= \cos 2\alpha \cos(\alpha + \beta) + \sin 2\alpha \sin(\alpha + \beta)$$

$$= (-\frac{5}{13}) \times (-\frac{\sqrt{5}}{5}) + \frac{12}{13} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{29\sqrt{5}}{65}, \text{ 故 B 错误;}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$= \frac{1}{2} \times (-\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{29\sqrt{5}}{65}) = \frac{8\sqrt{5}}{65}, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] = \frac{1}{2} \times$$

$$[\frac{29\sqrt{5}}{65} - (-\frac{\sqrt{5}}{5})] = \frac{21\sqrt{5}}{65},$$

$$\text{所以 } \tan \alpha \tan \beta = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{21}{8}, \text{ 故 D 错误. 故选 AC.}]$$

7. -1 [$\sin 40^\circ (\tan 10^\circ - \sqrt{3})$

$$= \sin 40^\circ (\frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} - \sqrt{3})$$

$$= \sin 40^\circ \cdot \frac{\sin 10^\circ - \sqrt{3} \cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$= \frac{2\sin 40^\circ (\frac{1}{2} \sin 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 10^\circ)}{\cos 10^\circ}$$

$$= \frac{2\sin 40^\circ \sin(10^\circ - 60^\circ)}{\cos 10^\circ} = \frac{-2\sin 40^\circ \sin 50^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$= \frac{-\sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\cos 10^\circ} \times 2 = -\frac{\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ} = -1.]$$

8. $\frac{\pi}{2}$ (答案不唯一) [因为 $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha - \beta)$,

$$\text{所以 } \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\text{所以 } \cos \alpha \sin \beta = 0, \text{ ①}$$

$$\text{又 } \cos(\alpha + \beta) \neq \cos(\alpha - \beta),$$

$$\text{即 } \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \neq \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\text{即 } \sin \alpha \sin \beta \neq 0, \text{ ②}$$

$$\text{结合 ①② 得 } \cos \alpha = 0, \text{ 且 } \sin \alpha \neq 0, \sin \beta \neq 0,$$

$$\text{故可取 } \alpha = \beta = \frac{\pi}{2}.]$$

9. 解: (1) 由 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 得 $\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + \alpha < \frac{3\pi}{4}$,

$$\text{可得 } \sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\frac{\pi}{4} + \alpha)} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{所以 } \cos 2\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\alpha) = 2\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) \cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) = 2 \times$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 的结论, 可知 } \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{4\sqrt{2}}{9},$$

$$\text{结合 } \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \text{ 解得 } \cos^2 \alpha = \frac{9 + 4\sqrt{2}}{18}, \sin^2 \alpha = \frac{9 - 4\sqrt{2}}{18},$$

$$\text{因为 } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以 } \cos \alpha = \frac{4+\sqrt{2}}{6}, \sin \alpha = \frac{4-\sqrt{2}}{6}.$$

$$\text{由 } \cos \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right),$$

$$\text{可得 } \sin \beta = -\sqrt{1-\cos^2 \beta} = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{所以 } \cos(\alpha-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{4+\sqrt{2}}{6} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4-\sqrt{2}}{6} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{因为 } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \beta < 0, \text{ 可得 } \alpha - \beta \in (0, \pi),$$

$$\text{所以 } \alpha - \beta = \frac{\pi}{4}.$$

阶段检测(五)

$$\begin{aligned} 1. \text{ A } & \text{ [原式} = \sin(720^\circ + 270^\circ) \cos(720^\circ - 60^\circ) \tan(360^\circ - 30^\circ) = \\ & \sin 270^\circ \cos(-60^\circ) \tan(-30^\circ) = \sin 270^\circ \cos 60^\circ (-\tan 30^\circ) = \\ & -1 \times \frac{1}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}, \text{ 故选 A.]} \end{aligned}$$

$$2. \text{ B } \quad \left[\because \frac{3\pi}{2} < 5 < 2\pi, \therefore \sin 5 < 0, \cos 5 > 0, \right.$$

平面内点 P 的坐标为 $(\sin 5, \cos 5)$,

则点 P 位于第二象限.

故选 B.]

$$3. \text{ B } \quad \left[\because \text{角 } \alpha \text{ 的终边过点 } P(1, y), \cos \alpha = \frac{1}{3}, \right.$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{3}, \text{ 得 } 1+y^2=9, \text{ 得 } y^2=8,$$

$$\text{得 } y = \pm 2\sqrt{2}.$$

故选 B.]

$$4. \text{ A } \quad \left[\text{因为 } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ 且 } \tan \alpha = 3, \right.$$

$$\text{故 } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 3, \text{ 又 } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \left(\frac{\sin \alpha}{3}\right)^2 = 1,$$

$$\text{解得 } \sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

故选 A.]

$$5. \text{ A } \quad \left[\text{因为 } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 所以 } \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{2\cos^2 \alpha - 1} = \right.$$

$$\frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha} \Rightarrow \frac{2\sin \alpha}{2\cos^2 \alpha - 1} = \frac{1}{2 - \sin \alpha} \Rightarrow 2\cos^2 \alpha - 1 = 4\sin \alpha - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow$$

$$2\sin^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha - 1 = 4\sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}. \text{ 故}$$

选 A.]

$$6. \text{ B } \quad \left[\text{由 } \sin \theta (\tan 80^\circ - \sqrt{3}) = \sin 80^\circ \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sin 80^\circ}{\tan 80^\circ - \sqrt{3}} = \right.$$

$$\frac{\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ - \sqrt{3}} = \frac{\sin 80^\circ \cdot \cos 80^\circ}{\sin 80^\circ - \sqrt{3} \cos 80^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{4\sin(80^\circ - 60^\circ)} = \frac{1}{4},$$

$$\text{因为 } \theta \text{ 为锐角, 所以 } \cos \theta = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\text{所以 } \sin(\theta + 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{8}.$$

故选 B.]

$$7. \text{ ACD } \quad \left[\text{对于 A, 由 } -\frac{17\pi}{6} = -4\pi + \frac{7\pi}{6}, \text{ 又 } \frac{7\pi}{6} \text{ 为第三象限角, 所} \right.$$

以 $-\frac{17\pi}{6}$ 是第三象限角, 故 A 正确;

对于 B, 钟表的分针顺时针转动, 经过 30 分钟, 转过 $-\pi$ 弧度, 故 B 错误;

$$\text{对于 C, 由题可得 } r = OP = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5, \text{ 所以 } \sin \alpha = -\frac{4}{5}, \cos \alpha = -\frac{3}{5},$$

$$\text{所以 } \sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{7}{5}, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\text{对于 D, 由题可得扇形所在圆的半径为 } \frac{\pi}{3} = 3, \text{ 所以该扇形的}$$

$$\text{面积为 } \frac{1}{2} \times \pi \times 3 = \frac{3\pi}{2}, \text{ 故 D 正确.}$$

故选 ACD.]

$$8. \text{ ABD } \quad \left[\text{因为 } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{5}, \right.$$

$$\text{可得 } \alpha - \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{4}{5},$$

$$\text{所以 } \cos \alpha = \cos\left[\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{4} - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{10}, \text{ 故 A 正确;}$$

$$\text{可得 } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{7\sqrt{2}}{10},$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{7\sqrt{2}}{10} \times \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{7}{25}, \text{ 故 B 正确;}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = -\frac{24}{25}, \text{ 故 C 错误;}$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{4\sqrt{2}}{5}, \text{ 故 D 正确.}$$

故选 ABD.]

$$9. -\frac{\sqrt{2}}{10} \quad \left[\text{由 } \pi < x < \frac{7\pi}{4}, \text{ 得 } \frac{5\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < 2\pi, \right.$$

$$\text{又因为 } \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{3}{5},$$

$$\text{所以 } \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\frac{4}{5},$$

$$\text{所以 } \cos x = \cos\left[\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cos \frac{\pi}{4} + \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{10}.]$$

$$10. -\frac{\sqrt{5}}{5} \quad \left[\text{由 } \begin{cases} \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{2}, \text{ 且 } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \end{cases} \right.$$

$$\text{解得 } \begin{cases} \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \\ \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \end{cases} \text{ 故 } \sin \theta - \cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}.]$$

11. 解: (1) 由题意得 $y_1 > 0, \cos \alpha = \frac{4}{5}, \sin \alpha > 0$,

则 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{3}{5} = \frac{y_1}{1}$, 则 $y_1 = \frac{3}{5}$.

$$\begin{aligned} (2) \frac{2\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sqrt{2+2\cos 2\alpha}}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} &= \frac{\cos \alpha + 1 + \sqrt{4\cos^2 \alpha}}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{\cos \alpha + 1 + \sqrt{4\cos^2 \alpha}}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{3\cos \alpha + 1}{\sin \alpha - \cos \alpha} \\ &= \frac{3 \times \frac{4}{5} + 1}{\frac{3}{5} - \frac{4}{5}} = -17. \end{aligned}$$

12. 解: 由题易知当 $x=2$ 时, $f(\alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

当 $x=4$ 时, $f(\alpha) = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha$

$$\cdot \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha,$$

$$\because -1 \leq \sin 2\alpha \leq 1, \therefore 0 \leq \sin^2 2\alpha \leq 1,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha \leq 1, \text{ 即 } f(\alpha) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

当 $x=6$ 时,

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 \\ &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cdot (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha - \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]. \end{aligned}$$

猜想: 当 $x=2k, k \in \mathbf{N}_+$ 时, $f(\alpha)$ 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2^{k-1}}, 1\right]$.

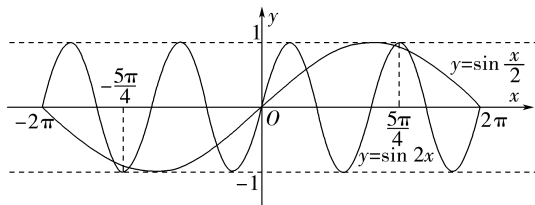
课时作业(三十三)

1. D [根据题意, $y = \sin 2x$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi, y = \sin \frac{x}{2}$

的最小正周期为 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$,

采用“五点法”作图, 在同一直角坐标系中画出函数 $y = \sin 2x$

和 $y = \sin \frac{x}{2}$ 在区间 $[-2\pi, 2\pi]$ 上的图象, 如图所示,



观察图象, 可得两函数图象在区间 $[-2\pi, 2\pi]$ 上有 9 个交点. 故选 D.]

2. C [由已知, 得 $a - \frac{\pi}{3} = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $a = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$,

因为 $a > 0$, 所以取 $k=0$, 得 a 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$. 故选 C.]

3. C [因为 $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$,

$$\text{所以 } 2x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right],$$

$$\text{所以 } \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right],$$

$$\text{所以 } -\sqrt{3}\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \in \left[-\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right],$$

$$\text{所以 } 1 - \sqrt{3} \leq -\sqrt{3}\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 \leq \frac{5}{2},$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 的值域为 } \left[1 - \sqrt{3}, \frac{5}{2}\right].$$

故选 C.]

4. D [对于 A, 当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $2x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$,

由正弦函数的性质, 可知 $y = \sin 2x$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减,

可知 A 项不正确;

对于 B, 当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $2x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$,

由余弦函数的性质, 可知 $y = \cos 2x$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减,

可知 B 项不正确;

对于 C, 当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $y = |\cos x| = \cos x$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上

单调递减, 可知 C 项不正确;

对于 D, 函数 $y = |\sin x|$ 的最小正周期为 π ,

当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $y = |\sin x| = \sin x$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递

增, 可知 D 项正确. 故选 D.]

5. C [由题意得 $\begin{cases} 1 - 2\cos x \geq 0, \\ \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \cos x \leq \frac{1}{2}, \\ \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$

$$\text{解得 } \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \\ \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{即 } \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

又 $x \in [0, 2\pi]$, 所以 $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right)$. 故选 C.]

6. AB [选项 C 中, 函数 $y = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, 故排除 C; 将 $x = \frac{\pi}{3}$ 依次代入选项 A, B, D 中的解析

式, 求得函数值分别为 $-\frac{1}{2}, 2, 1$, 故 A, B 正确, D 错误. 故选 AB.]

7. ACD [对于 A, 函数 $f(x) = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期 $T =$

$\frac{\pi}{2}$, 所以 A 正确; 对于 B, 令 $2x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 得 $x \neq$

$\frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 即函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x \mid x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, 所以 B 错误; 对于 C, 令 $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $x = \frac{\pi}{8} +$

$\frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}, 0\right), k \in \mathbf{Z}$ 对

称, 所以 C 正确; 对于 D, 令 $k\pi - \frac{\pi}{2} < 2x - \frac{\pi}{4} < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in$

$\mathbf{Z}$, 解得 $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} < x < \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}$, 故函数 $f(x)$ 的单调递增

区间为 $\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}\right), k \in \mathbf{Z}$, 所以 D 正确.

故选 ACD.]

8. **ACD** [对于 A, 设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 则 $f(x+T)=f(x)$, 即 $\cos 2(x+T)+2\sin(x+T)=\cos 2x+2\sin x$, 则 $\begin{cases} 2T=2k_1\pi, \\ T=2k_2\pi, \end{cases} k_1, k_2 \in \mathbf{N}^*,$

所以最小正周期 $T=2\pi$, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $f(x)$ 为连续函数且定义域为 $\mathbf{R}$, 所以若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $f(0)=0$,

而 $f(0)=\cos 0+2\sin 0=1 \neq 0$, 所以 $f(x)$ 不是奇函数, 故 B 错误;

对于 C, $f(\pi-x)=\cos[2(\pi-x)]+2\sin(\pi-x)=\cos(2\pi-2x)+2\sin x=\cos 2x+2\sin x=f(x)$,

故 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称, C 正确;

对于 D, 因为 $f(x)=\cos 2x+2\sin x=1-2\sin^2 x+2\sin x=-2\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$,

当 $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $\sin x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 因为 $y=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$ 在 $t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时单调递减, $t=\sin x$ 在 $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减, 故 D 正确. 故选 ACD.]

9. $\frac{\pi}{2}$ [由函数 $y=\sin\left(\frac{x}{2}+\varphi\right)$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 可知 $\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 又因为 $0 \leq \varphi \leq \pi$, 所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}$.]

10. $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ [由已知得, $y=1-\cos^2 x+2\cos x=-(\cos x-1)^2+2$, 令 $t=\cos x$, 得 $y=-(t-1)^2+2$, 显然当 $t=\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ 时, $y=-\frac{1}{4}$, 当 $t=1$ 时, $y=2$, 又由 $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \alpha\right]$ 可知 $\cos x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, 可使函数的值域为 $\left[-\frac{1}{4}, 2\right]$, 所以 $\alpha \geq 0$, 且 $\alpha \leq \frac{2\pi}{3}$, 从而可得 α 的取值范围是 $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$.]

11. 解: (1) 函数 $f(x)=A\sin \omega x \cos \omega x=\frac{A}{2}\sin 2\omega x$, 故无论 A 和 ω 取何值, 函数 $f(x)$ 都不可能为偶函数, 故排除②.

若选①③, 则 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{A}{2}\sin \frac{\pi\omega}{2}=1$, 故 $\frac{A}{2}=1$, 解得 $A=2$, 且 $\frac{\pi\omega}{2}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$), 解得 $\omega=4k+1$ ($k \in \mathbf{Z}$), 故函数 $f(x)$ 存在但不唯一, 故不合题意, 舍去;

若选①④, 则 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$, 解得 $T=\pi$, 故 $\omega=1$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{A}{2}\sin \frac{\pi}{2}=1$, 故 $\frac{A}{2}=1$, 解得 $A=2$, 故函数 $f(x)=\sin 2x$;

若选③④, 则 $\frac{A}{2}=1$, 解得 $A=2$, $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$, 解得 $T=\pi$, 故 $\omega=1$, 所以函数 $f(x)=\sin 2x$.

(2) 利用(1)的结论, $g(x)=\sin 2x-2\cos^2 x+1=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$,

$$\text{令 } -\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq 2x-\frac{\pi}{4} \leq 2k\pi+\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{整理得 } -\frac{\pi}{8}+k\pi \leq x \leq k\pi+\frac{3\pi}{8}, k \in \mathbf{Z},$$

又 $x \in (0, \pi)$,

所以函数 $g(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0, \frac{3\pi}{8}\right]$ 和 $\left[\frac{7\pi}{8}, \pi\right)$.

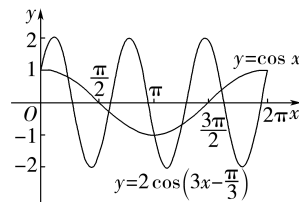
课时作业(三十四)

1. **B** [$\because y=\sin 2x=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]$,

$\therefore$ 将函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $y=\sin 2x$ 的图象.

故选 B.]

2. **C** [根据“五点法”作图, 画出函数 $y=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$ 与 $y=\cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的图象,



观察图象, 可知曲线 $y=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$ 与 $y=\cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有 7 个交点.

故选 C.]

3. **D** [根据题中图象知 $\begin{cases} A+b=4, \\ b-A=0, \end{cases}$

所以 $A=2, b=2, T=4 \times \left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$,

所以 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2, f(x)=2\sin(2x+\varphi)+2$,

又函数图象经过最高点 $\left(\frac{\pi}{6}, 4\right)$,

可得 $\sin\left(2 \times \frac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$,

因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$,

所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+2$. 故选 D.]

4. **A** [因为 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递增且 $x=\frac{\pi}{12}$ 为 $f(x)$ 图象的一条对称轴, 所以 $\frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{\omega} \geq \frac{\pi}{12}-\left(-\frac{5\pi}{12}\right), f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{12}\omega+\varphi\right)=1$, 得 $0 < \omega \leq 2$, 且 $\frac{\pi}{12}\omega+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k_1\pi$ ($k_1 \in \mathbf{Z}$). ①

因为 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 是 $f(x)$ 图象的一个对称中心,

所以 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\omega+\varphi\right)=0$, 得 $\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_2\pi$ ($k_2 \in \mathbf{Z}$). ②

由①②得 $\omega=-2+4(k_2-2k_1)$ ($k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$), 结合 $0 < \omega \leq 2$, 得 $\omega=2$, 则 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k_1\pi$ ($k_1 \in \mathbf{Z}$), 又 $-\pi < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$, 故

$f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$,

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 A.]

5. BD $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到

$y_1 = \cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象,

再将 $y_1 = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上各点的横坐标变为原来的 2

倍 (纵坐标不变), 得 $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象.

A 选项, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 0$, 故 $x = \frac{2\pi}{3}$ 不是 $f(x)$ 的图象的一条对称轴, A 错误;

B 选项, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = 1$, 故 $x = \frac{\pi}{6}$ 为函数 $f(x)$ 的图象的一条对称轴, B 正确;

C 选项, $f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = -1$, 故 $x = \frac{7\pi}{6}$ 为函数 $f(x)$ 的图象的一条对称轴, C 错误;

D 选项, $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 0$,

故 $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 为函数 $f(x)$ 的图象的一个对称中心, D 正确. 故选 BD.]

6. BC [由题图可知 $A = 2$, $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{T}{4}$,

$\therefore T = \pi, \omega = \frac{2\pi}{T} = 2$, 故 A 错误;

根据 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$ 的图象经过点 $\left(\frac{\pi}{12}, 2\right)$,

可得 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi\right) = 2$, 所以 $\frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

结合 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 解得 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 可得 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$,

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin 0 = 0$, 故 B 正确;

将函数 $y = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 得

到的图象对应的函数为 $y = 2\cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{3}\right] =$

$2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(-2x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) =$

$2\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = f(x)$, 故 C 正确;

当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$,

根据正弦函数的性质, 可知 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递增, 在

$\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减,

结合 $f(0) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$, $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3}$, 可知若

$f(x) = m$ 在 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时有且只有一个实数根, 则 m 的取值

范围是 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup \{2\}$, 故 D 错误.

故选 BC.]

7. $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ $\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$ [由 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$

的图象知, $A = 2$, $T = 2 \times \left[\frac{5\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right)\right] = \pi$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$,

由 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = 2$, 得 $2 \times \left(-\frac{\pi}{12}\right) + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得

$\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

因为 $|\varphi| < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$.

当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $2x + \frac{2\pi}{3} \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$,

令 $2x + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$, 解得 $x = \frac{5\pi}{12}$,

所以 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调递增区间为 $\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$.]

8. 4 6 [对于函数 $f(t) = 28 + A\sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{3\pi}{4}\right)$ ($A > 0$), 其最

小正周期 $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}} = 16 < 24$, 最大值为 $A + 28$, 最小值为 $-A +$

28, 因为这天的最大温差为 8°C ,

所以 $(A + 28) - (-A + 28) = 2A = 8$, 解得 $A = 4$.

令 $f(t) \geq 30$, 则 $4\sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{3\pi}{4}\right) + 28 \geq 30$,

即 $\sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{3\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{2}$,

因为 $t \in [0, 24)$, 所以 $\frac{\pi}{8}t + \frac{3\pi}{4} \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}\right)$,

所以 $\frac{3\pi}{4} \leq \frac{\pi}{8}t + \frac{3\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{6}$ 或 $\frac{13\pi}{6} \leq \frac{\pi}{8}t + \frac{3\pi}{4} \leq \frac{17\pi}{6}$, 解得 $t \in$

$\left[0, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{34}{3}, \frac{50}{3}\right]$, 所以一天中需要降温的时长为 $\frac{2}{3} +$

$\left(\frac{50}{3} - \frac{34}{3}\right) = 6$ h.]

9. 解: (1) 由题图可知 $A = 1$, $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{\omega}$, 得 $\omega = 2$,

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 1$, 即 $\frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 所以

$\varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$,

所以函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

(2) 让 $f(x)$ 图象上各点纵坐标保持不变, 横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$, 得到 $y = \sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象, 再将所得图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,

得到 $g(x) = \sin\left[4\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right]$ 的图象,

可得 $g(x) = \sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 4x$,

由 $4x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 得 $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$,

所以 $g(x)$ 的图象的对称中心为 $\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, 0\right) (k \in \mathbf{Z})$,

令 $2k\pi \leq 4x \leq 2k\pi + \pi (k \in \mathbf{Z})$, 得 $\frac{k\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 所以

$g(x)$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right] (k \in \mathbf{Z})$.

课时作业(三十五)

1. B [当 $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\omega\pi}{6} + \frac{\pi}{6}, \frac{\omega\pi}{4} + \frac{\pi}{6}]$,

若 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增,

$$\text{则} \begin{cases} -\frac{\omega\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \geq -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{\omega\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases} \text{结合 } \omega > 0, \text{解得 } 0 < \omega \leq \frac{4}{3},$$

即 $\omega \in (0, \frac{4}{3}]$. 故选 B.]

2. B [因为 $x \in (0, \pi)$, $\omega > 0$,

$$\text{所以 } \omega x + \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{6}, \omega\pi + \frac{\pi}{6}),$$

因为函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有且只有两个零点,

根据正弦函数的性质及函数图象的变换可得, 当 $x > \frac{\pi}{6}$ 时,

$y = \sin x$ 的零点只能是 $\pi, 2\pi$,

$$\text{所以 } 2\pi < \omega\pi + \frac{\pi}{6} \leq 3\pi, \text{解得 } \frac{11}{6} < \omega \leq \frac{17}{6},$$

所以实数 ω 的取值范围为 $(\frac{11}{6}, \frac{17}{6}]$.

故选 B.]

3. B [因为函数 $f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}]$ 上单调递增,

$$\text{所以} \begin{cases} -\frac{\omega\pi}{6} \geq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ \frac{\omega\pi}{12} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \end{cases} k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{即} \begin{cases} \omega \leq 3 - 12k, \\ \omega \leq 6 + 24k, \end{cases} k \in \mathbf{Z}, \text{由 } \omega > 0, \text{可得 } k = 0, \text{所以 } 0 < \omega \leq 3,$$

若 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上恰好取得两次最大值 1, 可得 $\frac{5\pi}{2} \leq \omega\pi < \frac{9\pi}{2}$, 即 $\frac{5}{2} \leq \omega < \frac{9}{2}$,

综上, $\frac{5}{2} \leq \omega \leq 3$, 即实数 ω 的取值范围是 $[\frac{5}{2}, 3]$.

故选 B.]

4. C [根据题意可知, 函数 $f(x) = \sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) (\omega > 0)$ 在 $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ 上单调递增, 得 $\frac{2\pi}{\omega} \geq 2[\frac{\pi}{6} - (-\frac{\pi}{3})] = \pi$,

解得 $0 < \omega \leq 2$, 由 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 对称, 得 $\frac{\pi}{3}\omega - \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbf{N}$,

$$\frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbf{N},$$

解得 $\omega = 3k + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{N}$, 于是 $k = 0, \omega = \frac{1}{2}, f(x) = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6})$,

$$\text{所以 } f(\frac{2\pi}{3}) = \sin(\frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}. \text{ 故选 C.}]$$

5. C [由 $x \in (0, 2\pi)$, 可得 $\frac{\pi}{4} < \omega x + \frac{\pi}{4} < 2\omega\pi + \frac{\pi}{4}$,

因为方程 $f(x) = \frac{1}{2}$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 上恰有 3 个实数根,

$$\text{所以 } 2\pi + \frac{5\pi}{6} < 2\omega\pi + \frac{\pi}{4} \leq 4\pi + \frac{\pi}{6}, \text{解得 } \frac{31}{24} < \omega \leq \frac{47}{24},$$

所以 ω 的取值范围是 $(\frac{31}{24}, \frac{47}{24}]$. 故选 C.]

6. AD [因为 $f(x) = 3\cos(\omega x - \frac{\pi}{3}) + 1 (\omega > 0)$ 的图象关于直线

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 对称,}$$

所以当 $x = \frac{\pi}{3}$ 时, $f(x)$ 取得最大值或最小值,

$$\text{可得 } \frac{\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbf{Z}), \text{结合 } \omega > 0, \text{解得 } \omega = 3k + 1 (k \in \mathbf{N}),$$

当 $k = 1$ 或 2 时, $\omega = 4$ 或 7 , 可知 A, D 项符合题意. 故选 AD.]

7. ACD [若 $\omega = 2, \varphi = \frac{\pi}{2}$,

$$\text{则 } f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{2}) = \cos 2x,$$

所以 $f(x)$ 是最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 的偶函数, A 正确;

若 $\omega = 2$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$,

若 x_0 为 $f(x)$ 的一个零点, 则 $x_0 + \frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的一个极大值点

或极小值点, B 错误;

若 $\varphi = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴,

$$\text{则 } f(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}\omega - \frac{\pi}{4}) = \pm 1,$$

$$\text{所以 } \frac{\pi}{2}\omega - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z}), \text{即 } \omega = \frac{3}{2} + 2k (k \in \mathbf{Z}),$$

又 $\omega > 0$, 所以 ω 的最小值为 $\frac{3}{2}$, C 正确;

若 $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, 则 $f(x) = \sin(\omega x - \frac{\pi}{4}) (\omega > 0)$, 由正弦函数的单调性,

$$\text{令 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}), \text{解得 } -\frac{\pi}{4\omega} + \frac{2k\pi}{\omega} \leq$$

$$x \leq \frac{3\pi}{4\omega} + \frac{2k\pi}{\omega} (k \in \mathbf{Z}), \text{又 } f(x) \text{ 在 } [0, \frac{\pi}{6}] \text{ 上单调, 所以当 } k = 0$$

$$\text{时, } [0, \frac{\pi}{6}] \subseteq [-\frac{\pi}{4\omega}, \frac{3\pi}{4\omega}],$$

$$\text{即 } \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{4\omega}, \text{解得 } \omega \leq \frac{9}{2}, \text{则 } \omega \text{ 的最大值为 } \frac{9}{2}, \text{D 正确.}$$

故选 ACD.]

8. $\frac{5}{4}$ [∵ $f(x) = \cos(2\omega x + \frac{\pi}{6})$ 在 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递减,

$$\therefore \frac{\pi}{3} \leq \frac{T}{2}, \text{即 } \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2\omega}, \therefore 0 < \omega \leq \frac{3}{2}, \text{①}$$

$$\text{又 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}, \therefore \frac{\pi}{6} \leq 2\omega x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{2\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, \therefore \frac{2\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \leq \pi,$$

$$\therefore \omega \leq \frac{5}{4}, \text{②}$$

由①②得 $0 < \omega \leq \frac{5}{4}$, ∴ 实数 ω 的最大值为 $\frac{5}{4}$.]

9. [2, 3] [法一: 函数 $f(x) = \cos \omega x - 1$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 3 个零点, 即 $\cos \omega x = 1$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 3 个根, 因为 $\omega > 0, x \in [0, 2\pi]$, 所以 $\omega x \in [0, 2\omega\pi]$, 则由余弦函数的图象可知, $4\pi \leq 2\omega\pi < 6\pi$, 解得 $2 \leq \omega < 3$, 即 ω 的取值范围是 $[2, 3)$.

法二:函数 $f(x) = \cos \omega x - 1$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 3 个零点,即 $\cos \omega x = 1$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 3 个根,根据函数 $y = \cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的图象可知, $\cos x = 1$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 有 2 个根,所以若 $\cos \omega x = 1$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 3 个根,则函数 $y = \cos \omega x$ 在 $[0, 2\pi]$ 内至少包含 2 个周期,但小于 3 个周

期,即 $\begin{cases} 2 \times \frac{2\pi}{\omega} \leq 2\pi, \\ 3 \times \frac{2\pi}{\omega} > 2\pi, \end{cases}$ 又 $\omega > 0$, 所以 $2 \leq \omega < 3$, 即实数 ω 的取值范

围是 $[2, 3)$.

阶段检测(六)

1. B [将函数 $g(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{6})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度,可得函数 $f(x) = \cos 2x$ 的图象,故选 B.]

2. A [对于 A, $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$, 其最小正周期为 2π , A 正确; 对于 B, $y = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, 其最小正周期为 π , B 错误; 对于 C, $y = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, 为常值函数, 不存在最小正周期, C 错误; 对于 D, $y = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$, 其最小正周期为 π , D 错误. 故选 A.]

3. A [$f(x) = \sin[3(\omega x + \frac{\pi}{3})] = \sin(3\omega x + \pi) = -\sin 3\omega x$, 由 $T = \frac{2\pi}{3\omega} = \pi$, 得 $\omega = \frac{2}{3}$,
即 $f(x) = -\sin 2x$, 当 $x \in [-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}]$ 时, $2x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$,
 $\sin 2x \in [-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$,
 $\therefore -\sin 2x \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$, 即 $f(x) \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$,
所以 $f(x)_{\min} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
故选 A.]

4. B [对于 A, 根据正切函数的周期公式 $T = \frac{\pi}{|\omega|}$, 得函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π , 选项 A 错误;

对于 B, 根据正切函数的对称中心为 $(\frac{k\pi}{2}, 0)$, 令 $\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} = \frac{k\pi}{2}$, 解得 $x = k\pi - \frac{2\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$,

所以当 $k=1$ 时得到 $f(x)$ 图象的一个对称中心为 $(\frac{\pi}{3}, 0)$, 选项 B 正确;

对于 C, 令 $\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$,

解得 $x \neq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$,

即 $f(x)$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, 选项 C 错误;

对于 D, 当 $x = \frac{7\pi}{3} \in (\frac{5\pi}{3}, \frac{8\pi}{3})$ 时, $\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$, 函数没有意义, 选项 D 错误.
故选 B.]

5. D [由题意, $f(-x) = \cos(-x) - \cos(-2x) = \cos x - \cos 2x = f(x)$, 所以该函数为偶函数.

又 $f(x) = \cos x - \cos 2x = -2\cos^2 x + \cos x + 1 = -2(\cos x - \frac{1}{4})^2 + \frac{9}{8}$,

所以当 $\cos x = \frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $\frac{9}{8}$. 故选 D.]

6. B [因为 $f(x) = \sqrt{2} \sin x + 4\cos x = 3\sqrt{2} \sin(x + \varphi)$, 其中 $\sin \varphi = \frac{4}{3\sqrt{2}}$, $\cos \varphi = \frac{1}{3}$,

又当 $x = \theta$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最大值, 所以 $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k

$\in \mathbf{Z}$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$,

则 $\tan \theta = \tan(\frac{\pi}{2} - \varphi + 2k\pi)$

$= \tan(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

故选 B.]

7. ACD [对于 A 选项, 因为 $f(x) = 2\sqrt{3} \cdot \cos^2 2x + 2\sin 2x \cdot \cos 2x - \sqrt{3}$

$= \sqrt{3} \cos 4x + \sin 4x = 2\cos(4x - \frac{\pi}{6})$,

所以 $f(\frac{\pi}{8}) = 2\cos \frac{\pi}{3} = 1$, 故 A 正确;

对于 B 选项, 当 $x \in [-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{12}]$ 时, $4x - \frac{\pi}{6} \in [-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$,

函数 $f(x) = 2\cos(4x - \frac{\pi}{6})$ 在 $[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{12}]$ 上先增后减, 故 B 错误;

对于 C 选项, $f(x)$ 的值域为 $[-2, 2]$, 故 C 正确;

对于 D 选项, $f(x - \frac{\pi}{12}) = 2\cos[4(x - \frac{\pi}{12}) - \frac{\pi}{6}]$

$= 2\cos(4x - \frac{\pi}{2}) = 2\sin 4x$,

当 $x = -\frac{\pi}{8}$ 时, $f(x - \frac{\pi}{12})$ 取得最小值 -2 , 故 D 正确.

故选 ACD.]

8. BC [A 选项, 令 $f(x) = \sin 2x = 0$, 解得 $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$,

即为 $f(x)$ 的零点,

令 $g(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$, 解得 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$, $k \in \mathbf{Z}$,

即为 $g(x)$ 的零点,

显然 $f(x)$, $g(x)$ 的零点不同, A 选项错误;

B 选项, 显然 $f(x)_{\max} = g(x)_{\max} = 1$, B 选项正确;

C 选项, $f(x)$, $g(x)$ 的最小正周期均为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$, C 选项正确;

D 选项, 根据正弦函数的性质, 令 $2x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, 得 $f(x)$

的图象的对称轴为 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$,

令 $2x - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$,

得 $g(x)$ 的图象的对称轴为 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$, $k \in \mathbf{Z}$,

显然 $f(x)$, $g(x)$ 图象的对称轴不同, D 选项错误.

故选 BC.]

9. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ [因为函数 $f(x) = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{3} + \varphi\right)$ 是奇函数,

$$\text{所以 } f(0) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 0,$$

$$\text{所以 } \frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } \varphi = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{则 } \tan \varphi = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.]$$

10. $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ [∵ $\frac{1}{2}T = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}, \omega > 0,$

$$\therefore \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \omega = 2.$$

又图象过点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 且 $\frac{\pi}{3}$ 为单调递减区间上的零点,

$$\therefore \frac{\pi}{3}\omega + \varphi = \pi + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}), \text{ 而 } 0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore \text{点 } P(\omega, \varphi) \text{ 的坐标为 } \left(2, \frac{\pi}{3}\right).]$$

11. 解: (1) 因为 $f(x) = \sin \omega x \cos \varphi + \cos \omega x \sin \varphi,$

$$\text{所以 } f(0) = \sin(\omega \cdot 0) \cos \varphi + \cos(\omega \cdot 0) \cdot \sin \varphi = \sin \varphi =$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 因为 } |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \varphi = -\frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \text{ 因为 } f(x) = \sin \omega x \cos \varphi + \cos \omega x \sin \varphi = \sin(\omega x + \varphi),$$

所以 $f(x)$ 的最大值为 1, 最小值为 -1.

若选条件①: 因为 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 的最大值为 1, 最小值为 -1, 所以 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$ 无解, 故条件①不能使函数 $f(x)$ 存在.

若选条件②: 因为 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增, 且

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1, f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -1,$$

$$\text{所以 } \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \pi, \text{ 所以 } T = 2\pi, \omega = \frac{2\pi}{T} = 1,$$

$$\text{所以 } f(x) = \sin(x + \varphi).$$

$$\text{又因为 } f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -1, \text{ 所以 } \sin\left(-\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = -1,$$

$$\text{所以 } -\frac{\pi}{3} + \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 所以 } \varphi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{因为 } |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \varphi = -\frac{\pi}{6}. \text{ 所以 } \omega = 1, \varphi = -\frac{\pi}{6}.$$

若选条件③: 因为 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增, 在

$\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $x = -\frac{\pi}{3}$ 处取得最

小值 -1, 即 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -1$. 以下与选条件②时相同.

12. 解: (1) 因为 $f(x) = \cos \frac{\omega x}{2} \sin \frac{\omega x}{2} = \frac{1}{2} \sin \omega x$, 且 $y = f(x)$ 的最

小正周期是 4π ,

$$\text{所以 } T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi, \text{ 解得 } \omega = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } f(x) = \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} x.$$

$$\text{令 } \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } x = (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z},$$

即 $f(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}$.

(2) 由 (1) 知 $f(x) = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$, 所以 $g(x) = [f(x)]^2 +$

$$\sqrt{3} f(-x) f(\pi - x) = \frac{1}{4} \sin^2 \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin\left(-\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{8} \sin x$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right)$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{令 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{得 } 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

所以 $g(x)$ 的单调递减区间为 $\left[2k\pi - \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$.

课时作业(三十六)

1. B [由余弦定理得 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B = 49$, 整理得 $BC^2 - 8BC + 15 = 0$, 解得 $BC = 3$ 或 $BC = 5$, 经检验均符合题意.

故选 B.]

2. D [对于 A, 已知两角及其中一角的对边, 三角形确定, 只有一解; 对于 B, 已知两边及其夹角, 用余弦定理, 只有一解; 对于 C, 已知两边及其中一边的对角, 且已知的是两边中较大边所对的角, 所以三角形有一解; 对于 D, $b \sin A = 16 \sin 45^\circ = 8\sqrt{2} < a < b$, 有两解. 故选 D.]

3. C [由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 得 $\frac{4}{\sin 60^\circ} = \frac{4\sqrt{6}}{\sin B}$,

$$\text{解得 } \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 因为 } a > b, \text{ 所以 } A > B, \text{ 又因为 } 0^\circ < B < 120^\circ,$$

所以 $B = 45^\circ$. 故选 C.]

4. B [在 $\triangle ABC$ 中, $4c^2 + a^2 = b^2$,

$$\text{由余弦定理得 } b^2 = 4c^2 + a^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

$$\text{则 } 3c^2 = -2ac \cos B > 0,$$

因此 $\cos B < 0$, 即 B 为钝角, 所以 $\triangle ABC$ 为钝角三角形.

故选 B.]

5. D [因为 $A = 105^\circ, B = 45^\circ$, 所以 $C = 180^\circ - 105^\circ - 45^\circ = 30^\circ$,

$$\text{由正弦定理 } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 得 } c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2},$$

$$\text{因为 } \sin A = \sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ)$$

$$= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} =$$

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{2}. \text{ 故选 D.}]$$

6. **ABD** [在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A : (\sin A + \sin B) : (\sin B + \sin C) = 2 : 5 : 7$,
由正弦定理得 $a : (a+b) : (b+c) = 2 : 5 : 7$, 设 $a = 2t (t > 0)$,
则 $a+b=5t, b+c=7t$, 得 $b=3t, c=4t$, 因此 $a : b = 2 : 3$,
 $a : c = 1 : 2$, A 和 B 正确;
由 $c > b > a$, 得 C 为 $\triangle ABC$ 的最大内角, 而 $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = -\frac{1}{4} < 0$, 因此 C 为钝角,
即 $\triangle ABC$ 是钝角三角形, C 错误, D 正确.
故选 ABD.]

7. **ABD** [对于 A, $a = \sqrt{15}, b = 4, c = 6$, 根据 $\sqrt{15} + 4 > 6$, 可知 a, b, c 可以构成三角形,
结合余弦定理, 可得角 A, B, C 均有唯一解, 所以 $\triangle ABC$ 有唯一解, A 项符合题意;
对于 B, 由 $A = \frac{\pi}{3}, B = \frac{\pi}{6}$, 可得 $C = \pi - A - B = \frac{\pi}{2}$,
所以 $\triangle ABC$ 是以 c 为斜边的直角三角形, 结合 $a = 2$, 可知 $\triangle ABC$ 有唯一解, B 项符合题意;
对于 C, $b \sin A = 4 \times \frac{\sqrt{11}}{4} = \sqrt{11}$, 可得 $a = 2\sqrt{3} \in (b \sin A, b)$,
所以 $\triangle ABC$ 有两解, C 项不符合题意;
对于 D, 由余弦定理得 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B$,
即 $16 = c^2 + 12 - 2 \cdot 2\sqrt{3}c \cdot \frac{1}{4}$,
整理得 $c^2 - \sqrt{3}c - 4 = 0$, 解得 $c = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{19}}{2}$ (舍负),
所以 $\triangle ABC$ 有唯一解, D 项符合题意.
故选 ABD.]

8. 2 [由余弦定理得 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B$, 即 $c^2 + c - 6 = 0$, 解得 $c = 2$ 或 $c = -3$ (舍去).]

9. $\frac{\pi}{3}$ 4 [由 $a \cos C + \sqrt{3} a \sin C - b - c = 0$ 及正弦定理得
 $\sin A \cos C + \sqrt{3} \sin A \sin C - \sin B - \sin C = 0$. 因为 $\sin B = \sin(\pi - A - C) = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C$, 所以
 $\sqrt{3} \sin A \sin C - \cos A \sin C - \sin C = 0$. 由于 $\sin C \neq 0$, 所以
 $\sqrt{3} \sin A - \cos A - 1 = 0$, 所以 $\sin(A - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$. 又 $0 < A < \pi$, 故
 $A = \frac{\pi}{3}$. 由题意知 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \sqrt{3}$,
故 $bc = 4$ ①. 而 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 且 $a = 2$,
故 $b^2 + c^2 = 8$ ②, 由 ①② 得 $b = c = 2$, 所以 $b + c = 4$.]

10. 解: (1) 利用正弦定理化简已知等式可得

$$\sqrt{3} \sin B \sin A = \sin A \cos B,$$

$$\text{又 } \sin A > 0, \text{ 可得 } \sqrt{3} \sin B = \cos B,$$

$$\text{可得 } \frac{\sin B}{\cos B} = \tan B = \frac{\sqrt{3}}{3}, B \in (0, \pi),$$

$$\text{可得 } B = \frac{\pi}{6}.$$

(2) 因为 $\sin C = \sqrt{3} \sin A$, 由正弦定理得 $c = \sqrt{3}a$,
又因为 $b = 3$,

$$\text{由余弦定理可得 } b^2 = a^2 + 3a^2 - 2 \times a \times \sqrt{3}a \times \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 即 } 9 = a^2,$$

$$\text{所以 } a = 3, c = \sqrt{3}a = 3\sqrt{3}.$$

11. 解: (1) 由题知 $\sin 2C = \sqrt{3} \sin C$,

$$\text{即 } 2 \sin C \cos C = \sqrt{3} \sin C,$$

$$\because C \in (0, \pi), \therefore \sin C > 0, \therefore \cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}, C = \frac{\pi}{6}.$$

(2) $\because S_{\triangle ABC} = 6\sqrt{3}, \therefore \frac{1}{2} ab \sin C = 6\sqrt{3}$, 解得 $a = 4\sqrt{3}$, 由余弦定理得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C, \therefore c^2 = 48 + 36 - 2 \times 4\sqrt{3} \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$, 解得 $c = 2\sqrt{3}$ (已舍负根), 所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a + b + c = 6\sqrt{3} + 6$.

课时作业(三十七)

1. 解: (1) 根据题意, $\sin 2C = \sin B \Rightarrow 2 \sin C \cos C = \sin B$,

$$\text{由正弦定理得 } 2c \cos C = b,$$

$$\text{又 } b = 3, c = 6,$$

$$\text{所以 } \cos C = \frac{b}{2c} = \frac{1}{4},$$

$$\text{由 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{4}, \text{ 且 } a > 0, \text{ 解得 } a = 6, \text{ 即 } BC = 6.$$

(2) 因为 AD 为 BC 边上的中线,

$$\text{所以 } CD = \frac{1}{2} BC = 3,$$

$$\text{因为 } AE \text{ 平分 } \angle BAC, \text{ 故 } \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE}, \text{ 即 } 2 = \frac{BE}{CE},$$

$$\text{可得 } CE = \frac{1}{3} BC = 2, \text{ 由 (1) 知 } \cos C = \frac{1}{4}, \text{ 则 } \sin C = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{8}.$$

2. 解: 法一 (1) 在 $\triangle ABC$ 中, $A + B = \pi - C$,

$$\text{因为 } A + B = 3C, \text{ 所以 } 3C = \pi - C,$$

$$\text{所以 } C = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{因为 } 2 \sin(A - C) = \sin B,$$

$$\text{所以 } 2 \sin\left(A - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4} - A\right),$$

$$\text{展开并整理得 } \sqrt{2}(\sin A - \cos A) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos A + \sin A),$$

$$\text{得 } \sin A = 3 \cos A,$$

$$\text{又 } \sin^2 A + \cos^2 A = 1, \text{ 且 } \sin A > 0,$$

$$\text{所以 } \sin A = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$(2) \text{ 由正弦定理得 } \frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C},$$

$$\text{即 } BC = \frac{AB}{\sin C} \cdot \sin A = \frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = 3\sqrt{5},$$

$$\text{由余弦定理得 } AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos C,$$

$$\text{即 } 5^2 = AC^2 + (3\sqrt{5})^2 - 2AC \cdot 3\sqrt{5} \cos \frac{\pi}{4},$$

$$\text{整理得 } AC^2 - 3\sqrt{10}AC + 20 = 0,$$

$$\text{解得 } AC = \sqrt{10} \text{ 或 } AC = 2\sqrt{10}.$$

$$\text{由 (1) 得, } \tan A = 3 > \sqrt{3}, \text{ 所以 } \frac{\pi}{3} < A < \frac{\pi}{2},$$

又 $A+B=\frac{3\pi}{4}$, 所以 $B>\frac{\pi}{4}$,

即 $C<B$, 所以 $AB<AC$, 所以 $AC=2\sqrt{10}$.

设 AB 边上的高为 h , 则 $\frac{1}{2} \times AB \times h = \frac{1}{2} \times AC \times BC \sin C$,

$$\text{即 } 5h = 2\sqrt{10} \times 3\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2},$$

解得 $h=6$,

所以 AB 边上的高为 6.

法二 (1) 在 $\triangle ABC$ 中, $A+B=\pi-C$,

因为 $A+B=3C$, 所以 $3C=\pi-C$,

$$\text{所以 } C=\frac{\pi}{4}.$$

因为 $2\sin(A-C)=\sin B$,

$$\text{所以 } 2\sin(A-C)=\sin[\pi-(A+C)]$$

$$=\sin(A+C),$$

$$\text{所以 } 2\sin A \cos C - 2\cos A \sin C = \sin A \cos C + \cos A \sin C,$$

$$\text{所以 } \sin A \cos C = 3\cos A \sin C,$$

$$\text{易得 } \cos A \cos C \neq 0,$$

$$\text{所以 } \tan A = 3 \tan C = 3 \tan \frac{\pi}{4} = 3,$$

$$\text{又 } \sin A > 0,$$

$$\text{所以 } \sin A = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } \sin A = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \tan A = 3 > 0,$$

$$\text{所以 } A \text{ 为锐角, 所以 } \cos A = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\text{所以 } \sin B = \sin\left(\frac{3\pi}{4}-A\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos A + \sin A) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times$$

$$\left(\frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{3\sqrt{10}}{10}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C},$$

$$\text{即 } AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{5 \times \frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{10},$$

$$\text{故 } AB \text{ 边上的高为 } AC \cdot \sin A = 2\sqrt{10} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = 6.$$

3. 解: (1) $\because a \sin C = c \sin B$,

$\therefore$ 由正弦定理, 得 $\sin A \sin C = \sin C \sin B$,

$\because 0 < C < \pi, \therefore \sin C > 0, \therefore \sin A = \sin B$,

$\because 0 < A < \pi, 0 < B < \pi$,

$\therefore A=B$ 或 $A+B=\pi$ (舍去),

$\because A+B+C=\pi$, 且 $C=\frac{2\pi}{3}, \therefore B=\frac{\pi}{6}$.

$$(2) \text{ 依题意得 } \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} ab \sin C,$$

$$\therefore A=B, \therefore a=b,$$

$$\therefore \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}, \text{ 得 } a=b=\sqrt{3},$$

$$\text{由正弦定理, 得 } c = \frac{a \sin C}{\sin A} = 3,$$

设 BC 的中点为 D , 连接 AD (图略),

$$\therefore \overrightarrow{AD}^2 = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos \angle CAB),$$

$$\text{解得 } |\overrightarrow{AD}| = \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

$$\therefore AD = \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

课时作业(三十八)

1. C [在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理 $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle BAD$, 得 $AB^2 + 2AB - 8 = 0$, 解得 $AB=2$ 或 $AB=-4$ (舍去), 即 $AB=AD, \therefore \angle ABD = \frac{\pi}{6}$. 又 $\triangle BCD$ 是等边三

角形, $\therefore \angle ABC = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 又 $BC=BD=2\sqrt{3}, \therefore$ 由勾股

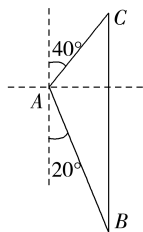
定理可得 $AC=4, \therefore \triangle ABC$ 的周长为 $2+4+2\sqrt{3}=6+2\sqrt{3}$.

故选 C.]

2. D [记轮船行驶到某处的位置为 A , 灯塔的位置为 B , 20 分钟后轮船的位置为 C , 如图所示. 则 $AB=10, AC=6, \angle CAB=120^\circ$, 所以

$$BC^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \times 10 \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 196,$$

所以 $BC=14$. 故 20 分钟后, 轮船与灯塔的距离为 14 n mile. 故选 D.]



3. D [设 $\angle ABC = \alpha, \angle ACB = \beta$,

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \alpha = 4 - 2\sqrt{3} \cos \alpha$,

$$\text{可得 } AC = \sqrt{4 - 2\sqrt{3} \cos \alpha}, CD = \sqrt{4 - 2\sqrt{3} \cos \alpha},$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{AB}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin \alpha},$$

$$\text{可得 } \sin \beta = \frac{AB \sin \alpha}{AC} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{4 - 2\sqrt{3} \cos \alpha}},$$

在 $\triangle BCD$ 中, 由余弦定理得

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = 3 + 4 - 2\sqrt{3} \cos \alpha -$$

$$2\sqrt{3} \sqrt{4 - 2\sqrt{3} \cos \alpha} \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = 7 + 2\sqrt{3} \sin \alpha - 2\sqrt{3} \cos \alpha = 7 +$$

$$2\sqrt{6} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right), \text{ 因为 } 0 < \alpha < \pi, \text{ 所以当 } \alpha - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

即 $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ 时, BD^2 取到最大值 $7 + 2\sqrt{6}$, 可知 BD 的最大值为

$$\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{6} + 1.$$

故选 D.]

4. CD [因为 $\triangle ABC$ 中, $c=4, A=\frac{\pi}{3}, a=2\sqrt{3}$,

$$\text{由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 得 } \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sin C},$$

故 $\sin C=1$, 所以 $C=\frac{\pi}{2}$, 故 $\triangle ABC$ 有一解, 故 A 错误;

因为 $A=\frac{\pi}{3}, c=4, \triangle ABC$ 为钝角三角形,

当 B 为钝角时, $b^2 > a^2 + c^2 > c^2 = 16$, 即 $b > 4$, 故 B 错误;

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,

$$\text{则 } \begin{cases} 0 < C < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - C < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

可得 $C \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin C \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\frac{1}{\sin C} \in (1, 2)$,

又因为 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 即 $\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sin C}$,

可得 $a = \frac{4}{\sin C} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin C} \in (2\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$, 故 C 正确;

由正弦定理可得 $\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin B \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

当 $B = \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{b}{a}$ 的最大值是 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 故 D 正确.

故选 CD.]

5. 200 [在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 45^\circ$.

设 $AB = h$, 则 $BC = h$,

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\angle ADB = 30^\circ$,

所以 $BD = \sqrt{3}h$.

在 $\triangle BCD$ 中, $\angle CBD = 30^\circ$, $CD = 200$ m,

由余弦定理可得 $CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC \cdot BD \cdot \cos \angle CBD$,

$$\text{即 } 40\,000 = h^2 + 3h^2 - 2h \cdot \sqrt{3}h \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

解得 $h = 200$ (已舍负根), 所以塔高 $AB = 200$ m.]

6. $(4, +\infty)$ [因为 $b^2 + c^2 - a^2 = -bc$,

所以由余弦定理的推论得

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-bc}{2bc} = -\frac{1}{2},$$

因为 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{2\pi}{3}$,

由正弦定理 $\frac{a}{\sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{2}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $a = \frac{\sqrt{3}}{\sin B}$, $c = \frac{2\sin C}{\sin B}$,

$$\text{所以 } a^2 - c^2 = \frac{3}{\sin^2 B} - \frac{4\sin^2 C}{\sin^2 B} = \frac{3 - 4\sin^2\left(\frac{\pi}{3} - B\right)}{\sin^2 B}$$

$$= \frac{3 - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B - \frac{1}{2}\sin B\right)^2}{\sin^2 B}$$

$$= \frac{3 - (3\cos^2 B - 2\sqrt{3}\sin B \cos B + \sin^2 B)}{\sin^2 B}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}\sin B \cos B + 2\sin^2 B}{\sin^2 B} = \frac{2\sqrt{3}}{\tan B} + 2,$$

因为 $0 < B < \frac{\pi}{3}$, 所以 $0 < \tan B < \sqrt{3}$,

所以 $\frac{1}{\tan B} > \frac{1}{\sqrt{3}}$, 所以 $\frac{2\sqrt{3}}{\tan B} + 2 > 4$,

所以 $a^2 - c^2$ 的取值范围为 $(4, +\infty)$.]

7. 解: (1) 由题意知 $AB = 10(3 + \sqrt{3})$ n mile,

$\angle DBA = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, $\angle DAB = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$,

可得 $\angle ADB = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ) = 105^\circ$,

$\sin 105^\circ = \sin(45^\circ + 60^\circ) = \sin 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \sin 60^\circ =$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \text{ 在 } \triangle DAB \text{ 中, 由正弦定理得 } \frac{DB}{\sin \angle DAB} =$$

$$\frac{AB}{\sin \angle ADB}, \text{ 即 } DB = \frac{AB \sin \angle DAB}{\sin \angle ADB} = \frac{10(3 + \sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

$$= 20\sqrt{3} \text{ (n mile)}.$$

(2) 在 $\triangle DBC$ 中, $\angle DBC = \angle DBA + \angle ABC = 30^\circ + (90^\circ - 60^\circ) = 60^\circ$, $BC = 40\sqrt{3}$ n mile,

由余弦定理得 $CD^2 = BD^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC \cdot \cos \angle DBC$

$$= 1\,200 + 4\,800 - 2 \times 20\sqrt{3} \times 40\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 3\,600,$$

可得 $CD = 60$ (n mile), 则需要的时间 $t = \frac{60}{30} = 2$ (h).

所以救援船到达点 D 需要 2 h.

阶段检测(七)

1. B [$\because A = \frac{\pi}{3}$, $a = \sqrt{3}$, $b = 1$,

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

$$\text{得 } \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2},$$

又 $\because B \in (0, \pi)$, 且 $b < a$, $\therefore B < A$,

$\therefore B = \frac{\pi}{6}$. 故选 B.]

2. A [在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $a = 5$, $b = 7$, $c = 4$,

由余弦定理的推论可得 $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{16 + 25 - 49}{2 \times 4 \times 5} =$

$-\frac{1}{5}$, 因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $\sin B > 0$,

$$\text{所以 } \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{2\sqrt{6}}{5},$$

因此 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 \times \frac{2\sqrt{6}}{5} =$

$4\sqrt{6}$.

故选 A.]

3. B [由正弦定理可将 $(a+c)(\sin A - \sin C) = b(\sin A - \sin B)$ 化为 $(a+c)(a-c) = b(a-b)$, 即 $a^2 + b^2 - c^2 = ab$,

由余弦定理的推论可得

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}, \text{ 又 } C \in (0, \pi), \text{ 所以 } C = \frac{\pi}{3}.$$

故选 B.]

4. C [因为 $B = \frac{\pi}{3}$, $b^2 = \frac{9}{4}ac$,

则由正弦定理得

$$\sin A \sin C = \frac{4}{9} \sin^2 B = \frac{1}{3}.$$

由余弦定理可得 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B = a^2 + c^2 - ac = \frac{9}{4}ac$,

$$\text{即 } a^2 + c^2 = \frac{13}{4}ac,$$

根据正弦定理得 $\sin^2 A + \sin^2 C = \frac{13}{4} \sin A \sin C = \frac{13}{12}$,

所以 $(\sin A + \sin C)^2 = \sin^2 A + \sin^2 C + 2\sin A \sin C = \frac{7}{4}$,

因为 A, C 为三角形内角,

则 $\sin A > 0$, $\sin C > 0$, 则 $\sin A + \sin C = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

故选 C.]

5. D [由余弦定理可得 $2ac \cos B = a^2 + c^2 - b^2$,

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $S = -\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + c^2 - b^2)$,

$$\therefore \frac{1}{2}ac \sin B = -\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2ac \cos B,$$

$$\therefore \tan B = -\sqrt{3},$$

$$\text{又} \because 0 < B < \pi, \therefore B = \frac{2\pi}{3},$$

$$\therefore (2\sqrt{3})^2 = b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = (a+c)^2 - ac \geq (a+c)^2 - \frac{(a+c)^2}{4} = \frac{3(a+c)^2}{4},$$

$$\therefore (a+c)^2 \leq 16, \text{当且仅当 } a=c \text{ 时, 等号成立,}$$

$$\therefore a+c \text{ 的最大值为 } 4.$$

故选 D.]

6. B [如图所示, 根据题意过 C 作 CE // C'B', 交 BB' 于 E, 过 B 作 BD // A'B', 交 AA' 于 D, 则 BE = 100, C'B' = CE

$$= \frac{100}{\tan 15^\circ}.$$

在 $\triangle A'C'B'$ 中, $\angle C'A'B' = 75^\circ$,

$$\text{则 } BD = A'B' = \frac{C'B' \times \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}.$$

又在 B 点处测得 A 点的仰角为 45° , 所以 $AD = BD = \frac{C'B' \times \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}$, 所以高度差 $AA' - CC' = AD + BE =$

$$\frac{C'B' \times \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} + 100 = \frac{\frac{100}{\tan 15^\circ} \times \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} + 100 = \frac{100 \sin 45^\circ}{\sin 15^\circ} +$$

$$100 = \frac{100 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right)} + 100 = 100(\sqrt{3} + 1) + 100 \approx 373. \text{ 故}$$

选 B.]

7. BC [由题意可知, $\cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \frac{1}{4}$, B 正确;

$$\text{对于 A, C, 由余弦定理得 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 9 + 16 - 2 \times 3 \times 4 \times \frac{1}{4} = 19,$$

得 $c = \sqrt{19}$, 则 $a + b + c = 7 + \sqrt{19}$, A 错误, C 正确;

$$\text{对于 D, 由余弦定理的推论得 } \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} =$$

$$\frac{19 + 9 - 16}{2 \times \sqrt{19} \times 3} = \frac{2\sqrt{19}}{19}, \text{D 错误.}$$

故选 BC.]

8. AD [对于 A, 由正弦定理得 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 因为 $\sin B > \sin C$,

所以 $b > c$, 则 $B > C$, 故 A 正确; 对于 B, 因为 $a = 2\sqrt{6}$, $b = 4$,

$$A = \frac{\pi}{4}, \text{由正弦定理得 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \text{则 } \sin B = \frac{b \sin A}{a} =$$

$$\frac{4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{因为 } a > b, \text{所以 } A > B, \text{则 } B \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \text{所以三角}$$

形有一解, 故 B 错误;

对于 C, 因为 $b \cos B - c \cos C = 0$,

所以 $\sin B \cos B - \sin C \cos C = 0$, 即 $\sin 2B = \sin 2C$, 所以

$2B = 2C$ 或 $2B + 2C = \pi$, 即 $B = C$ 或 $B + C = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\triangle ABC$

为等腰三角形或直角三角形, 故 C 错误;

对于 D, 因为 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2)$,

所以 $\frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{4} \times 2ab \cos C$, 即 $\sin C = \cos C$, 因为 $C \in (0,$

$\pi)$, 所以 $C = \frac{\pi}{4}$, 故 D 正确.

故选 AD.]

$$9. 1 + \sqrt{6} \quad \frac{3 - \sqrt{6}}{6} \quad [\triangle ABC \text{ 中, } a = 3, c = 2, A = 60^\circ,$$

则 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 即 $3^2 = b^2 + 2^2 - 2b \times 2 \times \cos 60^\circ$,

解得 $b = 1 + \sqrt{6}$ (已舍负根),

$$\text{又 } \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},$$

$$\text{所以 } \cos B = \frac{2^2 + 3^2 - (1 + \sqrt{6})^2}{2 \times 2 \times 3} = \frac{3 - \sqrt{6}}{6}.]$$

$$10. \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{3} \quad [\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, 因为 } A = \frac{\pi}{3}, B = \frac{\pi}{4}, \text{所以 } C = \frac{5\pi}{12},$$

$$\sin C = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4},$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C},$$

$$\text{则 } AB = \frac{BC \sin C}{\sin A} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{3}.]$$

11. 解: 连接 AC, 如图所示.

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$ 中分别使用余弦定理可得

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos B,$$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \times CD \cos D.$$

又因为 $B + D = 180^\circ$,

$$\text{所以 } \cos D = \cos(180^\circ - B) = -\cos B,$$

$$\text{因此 } 2^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2 \times 2 \times 4\sqrt{2} \cos B = (2\sqrt{5})^2 + 4^2 + 2 \times 2\sqrt{5} \times 4 \cos B.$$

解得 $\cos B = 0$, 因此 $\cos D = 0$, 则 $B = D = 90^\circ$.

$$\text{所以四边形 } ABCD \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} \times 2 \times 4\sqrt{2} + \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{5} = 4(\sqrt{2} + \sqrt{5}).$$

12. (1) 证明: $\because 2\sin A = 3\sin 2C, \therefore \sin A = 3\sin C \cos C$,

$$\text{由正弦定理及余弦定理得, } a = 3c \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \text{①}$$

$$\text{又 } c = 2b, \text{②}$$

$$\text{由①②得, } a^2 b = 3b(a^2 + b^2 - 4b^2),$$

$$\therefore a^2 = \frac{9}{2}b^2, \therefore a = \frac{3\sqrt{2}}{2}b.$$

$$(2) \text{解: 由(1)得, } \cos C = \frac{\sin A}{3\sin C} = \frac{a}{3c} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}b}{6b} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

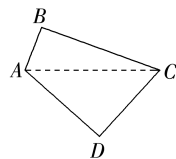
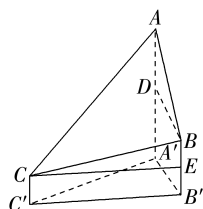
$$\because C \in (0, \pi), \therefore \sin C = \frac{\sqrt{14}}{4},$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2}b^2 \times \frac{\sqrt{14}}{4} =$$

$$\frac{3\sqrt{7}}{2}, \therefore b = 2,$$

$$\text{设 } AB \text{ 边上的高为 } h, \text{则 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}ch = bh = \frac{3\sqrt{7}}{2},$$

$$\therefore h = \frac{3\sqrt{7}}{4}, \text{即 } AB \text{ 边上的高为 } \frac{3\sqrt{7}}{4}.$$



课时作业(三十九)

1. D [因为 $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$, 故 A 错误;
因为 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \mathbf{0}$, 故 B 错误;
因为 $\mathbf{0} - \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$, 故 C 错误;
根据向量加法的三角形法则可知 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \mathbf{0}$, 故 D 正确.
故选 D.]
2. A [对于 A, 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{BA}$ 的长度相等, 方向相反, 故正确;
对于 B, 当 a 或 b 为零向量时, 零向量与任意向量平行, 但是方向任意, 故错误;
对于 C, 若 a 与 b 方向相反时, 有 $|a| + |b| = |a - b|$, 若 $|a| + |b| = |a - b|$, 则当 a 或 b 为零向量时, 不能推出 a 与 b 方向相反, 故错误;
对于 D, 当 $a + b = \mathbf{0}$ 时, 因为零向量的方向任意, 所以这时 $a + b$ 的方向不与 a, b 的方向相同, 故错误.
故选 A.]
3. A [若 $a \parallel b$, 则 $a = \lambda b$.
若 $2e_1 - e_2 = \lambda(-e_1 + \frac{1}{2}e_2)$,
由 e_1, e_2 是同一平面内两个不共线的向量,
得 $\begin{cases} -\lambda = 2, \\ \frac{1}{2}\lambda = -1, \end{cases}$ 解得 $\lambda = -2$, 选项 A 正确;
若 $e_1 + 2e_2 = \lambda(2e_1 + e_2)$,
由 e_1, e_2 是同一平面内两个不共线的向量,
得 $\begin{cases} 2\lambda = 1, \\ \lambda = 2, \end{cases}$ λ 不存在, 选项 B 错误;
若 $e_1 - 2e_2 = \lambda(e_1 + 2e_2)$,
由 e_1, e_2 是同一平面内两个不共线的向量,
得 $\begin{cases} \lambda = 1, \\ 2\lambda = -2, \end{cases}$ λ 不存在, 选项 C 错误;
若 $e_1 - e_2 = \lambda(2e_1 - 4e_2)$,
由 e_1, e_2 是同一平面内两个不共线的向量,
得 $\begin{cases} 2\lambda = 1, \\ -4\lambda = -1, \end{cases}$ λ 不存在, 选项 D 错误.
故选 A.]
4. B [∵ $\overrightarrow{AB} = 3e, \overrightarrow{CD} = -3e, \therefore \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$,
∴ 四边形 ABCD 是平行四边形,
又 ∵ $|\overrightarrow{AD}| = 3, \therefore$ 四边形 ABCD 是菱形. 故选 B.]
5. B [设 $c = \lambda a + \mu b = (\lambda + \mu)m + (\lambda - \mu)n$,
又 $c = 2m - 7n, m, n$ 是两个不共线的非零向量,
所以 $\begin{cases} \lambda + \mu = 2, \\ \lambda - \mu = -7, \end{cases}$
解得 $\begin{cases} \lambda = -\frac{5}{2}, \\ \mu = \frac{9}{2}. \end{cases}$ 故选 B.]
6. D [因为在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{DC}$,
所以 $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})$, 化简得 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$,
因为 $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, E 是 AD 的中点,

所以 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}) = \frac{7}{24}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$.
故选 D.]

7. BCD [对于 A, 因为 $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA}$, 所以 A 错误;
对于 B, 因为 $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AD}$, 所以 B 正确;
对于 C, 因为 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$, 所以 C 正确;
对于 D, 因为 $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD}$, 所以 D 正确.
故选 BCD.]
8. ABC [对于 A, 因为 $EF = \frac{1}{2}BC = CD, EF \parallel CD$, 所以 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$, 故 A 正确;
对于 B, 因为 $DE \parallel AB$, 所以 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DE}$ 共线, 故 B 正确;
对于 C, 因为 $BD = CD$, 所以 $\overrightarrow{BD}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 是相反向量, 故 C 正确;
对于 D, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, 故 D 错误. 故选 ABC.]

9. CD [如图所示,

对于 A, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, 故 A 错误;

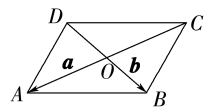
对于 B, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$,
故 B 错误;

对于 C, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, 故 C 正确;

对于 D, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} = 3(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}) - \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CB} - 3\overrightarrow{CD}$, 故 D 正确.

故选 CD.]

10. $b - a$ $-a - b$ [如图, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = b - a$,
 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = -a - b$.]



11. 4 [由 $\overrightarrow{BD} = k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})$,

可得 $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD})$,

整理得 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \frac{k}{k+1}\overrightarrow{CB}$,

又 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \frac{4}{5}\overrightarrow{CB}$, 所以 $-\frac{k}{k+1} = -\frac{4}{5}$, 解得 $k = 4$.]

12. 1 [∵ $\overrightarrow{OA} = 3a + 5b, \overrightarrow{OB} = 4a + 7b, \overrightarrow{OC} = a + mb, \therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = a + 2b, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = -2a + (m-5)b$,
∵ A, B, C 三点共线,

不妨设 $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$,

∴ $a + 2b = \lambda[-2a + (m-5)b] = -2\lambda a + \lambda(m-5)b$,

∴ $\begin{cases} 1 = -2\lambda, \\ 2 = \lambda(m-5), \end{cases}$ 解得 $\lambda = -\frac{1}{2}, m = 1$.]

课时作业(四十)

1. D [∵ $\vec{a}=(1,1), \vec{b}=(1,-1)$,

$$\therefore \frac{1}{2}\vec{a}=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \frac{3}{2}\vec{b}=\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right),$$

$$\therefore \frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)=(-1, 2).$$

故选 D.]

2. C [能作为基底的向量不可以是共线向量,

对于 A, 因为 $\vec{e}_1=(1,3), \vec{e}_2=(-2,-6)$, 所以 $1 \times (-6) = 3 \times (-2)$, 故 $\vec{e}_1 \parallel \vec{e}_2$, 所以不可以作基底, 故 A 错误;

对于 B, 因为 $\vec{e}_1=(\sqrt{2}, 1), \vec{e}_2=(2, \sqrt{2})$, 所以 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 = 1 \times 2$, 故 $\vec{e}_1 \parallel \vec{e}_2$, 所以不可以作基底, 故 B 错误;

对于 C, 因为 $\vec{e}_1=(1,2), \vec{e}_2=(2,-1)$, 所以 $1 \times (-1) \neq 2 \times 2$, 故 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 不共线, 所以可以作基底, 故 C 正确;

对于 D, 因为 $\vec{e}_1=(-3,-4), \vec{e}_2=(3,4)$, 所以 $-3 \times 4 = -4 \times 3$, 故 $\vec{e}_1 \parallel \vec{e}_2$, 所以不可以作基底, 故 D 错误.

故选 C.]

3. D [由题意可知 $\vec{P_1P_2}=(3,-3)$.

若 $\vec{P_1P}=\frac{1}{3}\vec{P_1P_2}$, 则 P 点坐标为 (2, 2);

若 $\vec{P_1P}=\frac{2}{3}\vec{P_1P_2}$, 则 P 点坐标为 (3, 1).

故选 D.]

4. A [因为 $\vec{AE}=3\vec{EF}$,

$$\text{所以 } \vec{AF}=\vec{AB}+\vec{BF}=\vec{AB}+\frac{3}{4}\vec{ED}=\vec{AB}+\frac{3}{4}(\vec{EA}+\vec{AD})=\vec{AB}+\frac{3}{4}(-\vec{AE}+\vec{AD}),$$

$$\text{所以 } \frac{4}{3}\vec{AE}=\vec{AB}+\frac{3}{4}\vec{AD}-\frac{3}{4}\vec{AE},$$

$$\text{整理得 } \vec{AE}=\frac{12}{25}(\vec{AB}+\frac{3}{4}\vec{AD})=\frac{12}{25}\vec{a}+\frac{9}{25}\vec{b}.$$

故选 A.]

5. B [建立如图所示的坐标系, 则

$$\vec{a}=(-1, 1), \vec{b}=(6, 2), \vec{c}=(-1, -3),$$

$$\therefore \vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b},$$

$$\therefore (-1, -3)=\lambda(-1, 1)+\mu(6, 2),$$

$$\therefore \begin{cases} -\lambda+6\mu=-1, \\ \lambda+2\mu=-3, \end{cases} \therefore \lambda=-2, \mu=-\frac{1}{2},$$

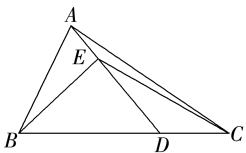
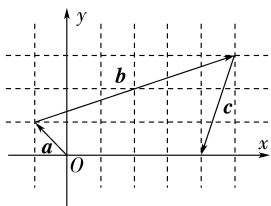
$$\therefore \lambda+\mu=-\frac{5}{2}. \text{ 故选 B.}]$$

6. B [因为 D 为 BC 边的靠近点 C 的三等分点, E 为线段 AD (含端点) 上一动点,

$$\text{所以当 } E, D \text{ 不重合时, } \vec{ED}=\vec{EB}+\vec{BD}=\vec{EB}+\frac{2}{3}\vec{BC}=\vec{EB}+\frac{2}{3}(\vec{EC}-\vec{EB})=\frac{1}{3}\vec{EB}+\frac{2}{3}\vec{EC},$$

$$\text{因为 } \vec{ED}=\lambda\vec{EB}+\mu\vec{EC}(\lambda, \mu \in \mathbf{R}),$$

$$\text{所以 } \begin{cases} \lambda=\frac{1}{3}, \\ \mu=\frac{2}{3}, \end{cases}$$



当 E, D 重合时, $\vec{ED}=\vec{0}$, 此时 $\vec{0}=\vec{ED}=k\vec{EB}+2k\vec{EC}, k \in \mathbf{Z}$, 则必有 $\mu=2\lambda$ 成立,

综上, 都有 $\mu=2\lambda$ 成立, 即只有选项 B 始终成立.

故选 B.]

7. AB [∵ $\vec{a}=(1,3), \vec{b}=(-2,1), \therefore \vec{a}+\vec{b}=(-1,4), \vec{a}-\vec{b}=(3,2), \vec{b}-\vec{a}=(-3,-2), -\vec{a}-\vec{b}=-(\vec{a}+\vec{b})=(1,-4)$. 故选 AB.]

8. ACD [对于 A, 因为 $\vec{OC}=(-2,1), \vec{BA}=(2,-1)$, 所以 $\vec{OC}=-\vec{BA}$,

又直线 OC, BA 不重合, 所以直线 OC 与 BA 平行, 选项 A 正确;

对于 B, 因为 $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC} \neq \vec{CA}$, 所以选项 B 错误;

对于 C, 因为 $\vec{OA}+\vec{OC}=(0,2)=\vec{OB}$, 所以选项 C 正确;

对于 D, 因为 $\vec{AC}=(-4,0), \vec{OB}-2\vec{OA}=(0,2)-2(2,1)=(-4,0)$, 所以选项 D 正确. 故选 ACD.]

9. ACD [对于 A, ∵ E 为 AC 边的中点,

$$\therefore \vec{BA}+\vec{BC}-2\vec{BE}=2\vec{BE}-2\vec{BE}=\vec{0}, \text{ A 正确;}$$

对于 B, $\vec{AB}+\vec{AC}+\vec{BC}=\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{AC}=2\vec{AC} \neq \vec{0}$, B 错误;

$$\text{对于 C, } \therefore \vec{BA} \cdot \vec{BE}=\vec{BC} \cdot \vec{BE}, \therefore \vec{BA} \cdot \frac{1}{2}(\vec{BA}+\vec{BC})=\vec{BC} \cdot \frac{1}{2}(\vec{BA}+\vec{BC}),$$

$$\therefore \vec{BA}^2+\vec{BA} \cdot \vec{BC}=\vec{BC}^2+\vec{BA} \cdot \vec{BC},$$

$$\therefore \vec{BA}^2=\vec{BC}^2, \therefore |\vec{BA}|=|\vec{BC}|, \text{ C 正确;}$$

对于 D, $\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}, \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}, \frac{\vec{AD}}{|\vec{AD}|}$ 分别表示与 $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ 同向的单位向量,

∴ 向量 $\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}+\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}$ 以 A 为起点, 终点在 $\angle BAC$ 的平分线上,

$$\therefore \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}+\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}=\frac{\sqrt{3}\vec{AD}}{|\vec{AD}|}, \therefore \vec{AD} \text{ 为 } \angle BAC \text{ 的平分线.}$$

故选 ACD.]

10. (2, 4) [∵ 在梯形 ABCD 中, $CD=2AB, AB \parallel CD$,

$$\therefore \vec{DC}=2\vec{AB}, \text{ 设点 D 的坐标为 } (x, y),$$

$$\text{则 } \vec{DC}=(4-x, 2-y), \text{ 又 } \vec{AB}=(1, -1),$$

$$\therefore (4-x, 2-y)=2(1, -1),$$

$$\text{即 } \begin{cases} 4-x=2, \\ 2-y=-2, \end{cases} \therefore \begin{cases} x=2, \\ y=4, \end{cases}$$

∴ 点 D 的坐标为 (2, 4).]

11. $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ [∵ $\vec{AB}=(4,3)$, ∴ 与向量 $\vec{AB}$ 方向相同的单位

$$\text{向量为 } \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}=\frac{1}{5}(4,3)=\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right).]$$

12. $\frac{7}{10}$ [由题意得 $\vec{AP}=(m+\frac{1}{10})\vec{AB}+\frac{1}{10}\vec{BC}=(m+\frac{1}{10})\vec{AB}+\frac{1}{10}(\vec{AC}-\vec{AB})=m\vec{AB}+\frac{1}{10}\vec{AC}$,

$$\text{因为 N 为线段 AC 的靠近点 A 的三等分点,}$$

$$\text{所以 } \vec{AP}=m\vec{AB}+\frac{3}{10}\vec{AN},$$

$$\text{又 B, P, N 三点共线, 所以 } \frac{3}{10}+m=1, \text{ 则 } m=\frac{7}{10}.]$$

课时作业(四十一)

1. A [因为 $|a| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$, $|b| = \sqrt{5^2+12^2} = 13$, $a \cdot b = 3 \times 5 + 4 \times 12 = 63$,

设 a 与 b 的夹角为 θ , 所以 $\cos \theta = \frac{63}{5 \times 13} = \frac{63}{65}$.]

2. A [∵ 向量 $a = (1, -1)$, $b = (-2, 3)$, $c = (1, 1)$,
 $\therefore a + b = (-1, 2)$,
 $\therefore (a + b) \cdot c = (-1, 2) \cdot (1, 1) = -1 \times 1 + 2 \times 1 = 1$.
 故选 A.]

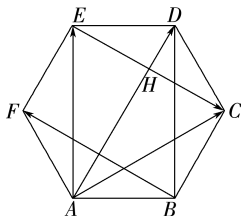
3. C [因为 $a = (m, 1)$, $b = (0, 3)$,
 所以 $|a| = \sqrt{m^2+1}$, $a \cdot b = m \times 0 + 1 \times 3 = 3$.
 因为 $a \perp (a - b)$, 所以 $a \cdot (a - b) = 0$,
 即 $a^2 - a \cdot b = m^2 + 1 - 3 = 0$,
 解得 $m = \pm \sqrt{2}$. 故选 C.]

4. A [因为 $b = (3, 4)$, 所以 $|b| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$,
 所以 a 在 b 上的投影向量为 $\frac{a \cdot b}{|b|^2} b = \frac{-5 \times 5}{5^2} b = -b = (-3, -4)$.
 故选 A.]

5. B [向量 $a = (2, -1)$, $b = (x, 2)$,
 则 $2a - b = (4 - x, -4)$, 又 $(2a - b) \perp a$,
 则 $(2a - b) \cdot a = 8 - 2x + 4 = 0$, 解得 $x = 6$,
 即 $b = (6, 2)$, 可得 $a - b = (-4, -3)$,
 所以 $|a - b| = \sqrt{16+9} = 5$.
 故选 B.]

6. D [因为 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$, 则 $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$,
 设 $\overrightarrow{CP} = k\overrightarrow{CD} (0 \leq k \leq 1)$,
 则 $\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC} = k(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$, 则 $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}k\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}$, 又
 $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,
 则 $(m-1)\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = k(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$,
 故 $\begin{cases} m-1 = -k, \\ \frac{1}{2} = \frac{2}{3}k, \end{cases}$ 解得 $k = \frac{3}{4}$, $m = \frac{1}{4}$,
 因为 $AC = 3$, $AB = 2\sqrt{2}$, $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$,
 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = (\frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) \cdot (\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$
 $= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{8}{3} - \frac{9}{4} - \frac{1}{3} \times 3 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{19}{12}$. 故选 D.]

7. ABC [对于 A, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}$, 而 $\overrightarrow{EC}$ 与 $\overrightarrow{BF}$ 为相反向量, 故 A 错误;



对于 B, 由正六边形的性质知 AD 平分等边 $\triangle ACE$ 的内角 $\angle EAC$ 交 EC 于 H , 所以 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AH}$,
 在 $\text{Rt} \triangle EDH$, $\text{Rt} \triangle AEH$ 中, $|\overrightarrow{AH}| = \sqrt{3} |\overrightarrow{EH}| = 3 |\overrightarrow{DH}|$,
 $\angle DEH = \angle EAH = \frac{\pi}{6}$,

所以 $|\overrightarrow{AD}| = 4 |\overrightarrow{DH}| = \frac{4}{3} |\overrightarrow{AH}|$, 所以 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AD}$, 故 B

错误;

对于 C, 因为 $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DE}$, 所以 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DE}$, 故 C 错误;

对于 D, 由正六边形的性质知 $\angle ABD = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\overrightarrow{AD}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上

的投影向量为 $\overrightarrow{AB}$, 故 D 正确.

故选 ABC.]

8. ACD [对于 A, $a + b = (3, 0)$, 则 $|a + b| = 3$, $a - 2b = (0, 3)$,
 则 $|a - 2b| = 3$,

所以 $|a + b| = |a - 2b|$, 故 A 正确;

对于 B, $a - b = (1, 2)$, 又 $b = (1, -1)$,

则 $\frac{1}{1} \neq \frac{2}{-1}$, 所以 $a - b$ 与 b 不平行, 故 B 错误;

对于 C, $a + 2b = (4, -1)$,

又 $|a| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$, $a \cdot (a + 2b) = 4 \times 2 + (-1) \times 1 = 7$,

故投影向量为 $\frac{a \cdot (a + 2b)}{a^2} a = \frac{7}{5} a$, 故 C 正确;

对于 D, 由题可得 $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$
 $= \frac{2 \times 1 + 1 \times (-1)}{\sqrt{2^2+1^2} \times \sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$,

又 $\langle a, b \rangle \in [0, \pi]$,

所以 $\sin \langle a, b \rangle = \sqrt{1 - \cos^2 \langle a, b \rangle} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, 故 D 正确.

故选 ACD.]

9. AC [由 $|a| = 1$, $|b| = 2$, $|a + 2b| = \sqrt{13}$,
 可得 $|a + 2b|^2 = (a + 2b)^2 = a^2 + 4a \cdot b + 4b^2 = 13$,
 将 $|a| = 1$, $|b| = 2$ 代入, 可得 $a \cdot b = -1$, 故 A 正确;
 因为 $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2 = -3 \neq 0$, 故 B 错误;
 由 $|a - 2b|^2 = a^2 - 4a \cdot b + 4b^2 = 21$,

可得 $|a - 2b| = \sqrt{21}$, 故 C 正确;

设 a 与 b 的夹角为 θ , 则 $a \cdot b = |a| |b| \cos \theta = -1$,

故 $\cos \theta = -\frac{1}{2}$, 又 $0 \leq \theta \leq \pi$, 则 $\theta = \frac{2\pi}{3}$, 故 D 错误. 故选 AC.]

10. 11 [设 a 与 b 的夹角为 θ , 因为 a 与 b 的夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$,

即 $\cos \theta = \frac{1}{3}$,

又 $|a| = 1$, $|b| = 3$, 所以 $a \cdot b = |a| |b| \cos \theta = 1 \times 3 \times \frac{1}{3} = 1$,

所以 $(2a + b) \cdot b = 2a \cdot b + b^2 = 2a \cdot b + |b|^2 = 2 \times 1 + 3^2 = 11$.]

11. $2\sqrt{3}$ [由题意得, $a \cdot b = |a| |b| \cos 60^\circ = 1$, $|a + 2b| = \sqrt{a^2 + 4b^2 + 4a \cdot b} = \sqrt{4 + 4 + 4} = 2\sqrt{3}$.]

12. $-\frac{5}{2}$ [因为 $a = (4, -3)$, $b = (0, -2)$,

则 $a - tb = (4, -3) - (0, -2t) = (4, 2t - 3)$, $|a| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = 5$, $|b| = \sqrt{0^2+(-2)^2} = 2$,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 16 - 3(2t - 3) = 25 - 6t,$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = -2(2t - 3) = 6 - 4t,$$

$$\text{若 } \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle,$$

$$\text{则 } \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{c}|} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{b}| |\mathbf{c}|}, \text{ 即 } \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{b}|}, \text{ 即 } \frac{25-6t}{5} = \frac{6-4t}{2}, \text{ 解得}$$

$$t = -\frac{5}{2}.$$

课时作业(四十二)

1. B [设水流速度为 $\mathbf{v}_1$, 船在静水中的速度为 $\mathbf{v}_2$, 实际行驶速度

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,$$

根据题意, 可得 $|\mathbf{v}_1| = 2, |\mathbf{v}| = 8$, 且 $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}$,

$$\text{所以 } |\mathbf{v}_2| = \sqrt{|\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}|^2} = \sqrt{2^2 + 8^2} = 2\sqrt{17} \text{ m/s},$$

即小船实际航行的速度大小为 $2\sqrt{17}$ m/s.

故选 B.]

2. B [连接 AB, OM , 如图,

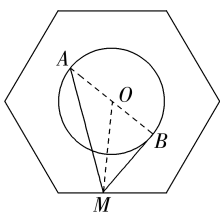
$$\begin{aligned} \text{则 } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) \\ &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) = \\ &= \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = \overrightarrow{MO}^2 - 1, \end{aligned}$$

根据图形知, 当点 M 位于正六边形各边的中点时, 此时 $|\overrightarrow{MO}|$ 取得最小值为

$$\sqrt{3}, |\overrightarrow{MO}|^2 - 1 \text{ 取得最小值为 } 2,$$

所以 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ 的最小值是 2.

故选 B.]



3. A [$\because \triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, $\therefore \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \angle BAC =$

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3},$$

$$\therefore |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| = 4,$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos \angle BAC = 4 \cos \frac{\pi}{3} = 2,$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}, \therefore \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AD},$$

$$\text{由 } \overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}, \text{ 得 } \overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AD},$$

$$\therefore C, P, D \text{ 三点共线}, \therefore m + \frac{3}{4} = 1,$$

$$\text{解得 } m = \frac{1}{4}.$$

$$\therefore |\overrightarrow{AP}|^2 = \left(\frac{1}{4} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \right)^2 = \frac{1}{16} \overrightarrow{AC}^2 + \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{4} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{16} \overrightarrow{AC}^2 + \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2} \geq 2 \times \frac{1}{4} |\overrightarrow{AC}| \times \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| +$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\text{当且仅当 } |\overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AB}| \text{ 时取等号}, \therefore |\overrightarrow{AP}|_{\min} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

故选 A.]

4. ABD [对于 A, $\because \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$,

$$\text{即 } \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}, \text{ 即 } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC},$$

即点 D 是边 BC 的中点, 故 A 正确;

$$\text{对于 B, } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3} \left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}| \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AC}| \cos C} \right)$$

$$= \frac{1}{3} (-|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{BC}|) = 0,$$

即 $AD \perp BC$,

故直线 AD 过 $\triangle ABC$ 的垂心, 故 B 正确;

$$\text{对于 C, } \because \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC},$$

$$\text{即 } \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC},$$

$$\text{即 } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB},$$

即点 D 在边 CB 的延长线上, 故 C 错误;

$$\text{对于 D, } \because \overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}, \text{ 且 } x + y = \frac{1}{2},$$

$$\text{设 } \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AD},$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AD} = 2x\overrightarrow{AB} + 2y\overrightarrow{AC}, \text{ 且 } 2x + 2y = 1,$$

$$\text{故 } M, B, C \text{ 三点共线, 且 } |\overrightarrow{AM}| = 2|\overrightarrow{AD}|,$$

即 $\triangle BCD$ 的面积是 $\triangle ABC$ 的面积的一半, 故 D 正确.

故选 ABD.]

$$5. \frac{3+2\sqrt{2}}{3} \quad [\text{由 } \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}, \text{ 得 } \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}),$$

$$\text{即 } \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3m} \overrightarrow{AE} + \frac{2}{3n} \overrightarrow{AF},$$

$$\therefore D, E, F \text{ 三点共线}, \therefore \frac{1}{3m} + \frac{2}{3n} = 1,$$

$$\therefore m + n = \frac{1}{3} (m + n) \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(3 + \frac{n}{m} + \frac{2m}{n} \right) \geq \frac{3+2\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{当且仅当 } m = \frac{\sqrt{2}+1}{3}, n = \frac{\sqrt{2}+2}{3} \text{ 时取等号},$$

$$\text{所以 } m + n \text{ 的最小值为 } \frac{3+2\sqrt{2}}{3}.$$

6. $-\frac{1}{16}$ [法一(极化恒等式): 如图 1, 取

OB 的中点 D , 连接 PD , 则 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP} =$

$$|\overrightarrow{PD}|^2 - |\overrightarrow{OD}|^2 = |\overrightarrow{PD}|^2 - \frac{1}{4}, \text{ 即求}$$

PD 的最小值.

$$\text{由图可知, 当 } PD \perp AB \text{ 时}, PD_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{则 } \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP} \text{ 的最小值是 } -\frac{1}{16}.$$

法二(坐标法): 以 OB 所在的直线为

x 轴, 过点 A 且垂直于 OB 的直线为

y 轴, 建立如图 2 所示的平面直角坐

标系,

$$\text{则 } A \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), O \left(-\frac{1}{2}, 0 \right), B \left(\frac{1}{2}, 0 \right),$$

$$0), \text{ 可得直线 } AB \text{ 的方程为 } 2x +$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} y = 1, \text{ 设 } P \left(x, \frac{\sqrt{3}}{2} (1-2x) \right),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{OP} = \left(x + \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} (1-2x) \right), \overrightarrow{BP} = \left(x - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} (1-2x) \right),$$

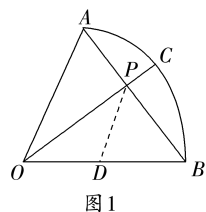


图1

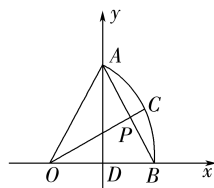


图2

$$\text{所以 } \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP} = 4x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 4\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{1}{16},$$

当 $x = \frac{3}{8}$ 时, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP}$ 取得最小值 $-\frac{1}{16}$.

课时作业(四十三)

1. C [$(1+5i)i = -5+i$, 其虚部为 1. 故选 C.]

2. B [法一: 由 $i \cdot z + 2 = 2i$, 得 $i \cdot z = -2 + 2i$, 则 $z = \frac{-2+2i}{i} = \frac{(-2+2i)(-i)}{-i^2} = 2+2i$, 得 $|z| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$. 故选 B.

法二: 由 $i \cdot z + 2 = 2i$, 得 $i \cdot z = -2 + 2i$,

$$\therefore |iz| = |-2+2i|, \therefore |z| = 2\sqrt{2}.]$$

3. D [由复数的几何意义可知, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = (-1, -3) + (-2, -1) = (-3, -4)$, 所以向量 $\overrightarrow{CA}$ 对应的复数是 $-3-4i$. 故选 D.]

4. C [因为 i 的周期为 4, $2025 \div 4 = 506 \dots 1$, 所以 $i^{2025} = i$,
则 $z = \frac{(1+i)i}{(2-i)^2} = \frac{i+i^2}{4-4i-1} = \frac{-1+i}{3-4i} = \frac{(-1+i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{-3-4i+3i+4i^2}{3^2-(4i)^2} = \frac{-3-4i+3i-4}{9+16} = \frac{-7-i}{25}$,
所以 $z = \frac{-7-i}{25} = -\frac{7}{25} - \frac{1}{25}i$, 对应复平面内的点为 $(-\frac{7}{25}, -\frac{1}{25})$, 位于第三象限. 故选 C.]

5. D [因为复数 $z = 1+i$ 是方程 $z^2 + az + b = 0$ 的根,
所以复数 $\bar{z} = 1-i$ 也是方程 $z^2 + az + b = 0$ 的根,
所以 $-a = (1+i) + (1-i)$, 且 $b = (1+i)(1-i)$,
即 $a = -2, b = 2$, 则 $a + 2b = 2$. 故选 D.]

6. C [对于 A 选项, $e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$, A 错误;
对于 B 选项, $e^{\frac{\pi i}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$, 为纯虚数, B 错误;
对于 C 选项, $\left| \frac{e^{xi}}{\sqrt{3}+i} \right| = \left| \frac{\cos x + i \sin x}{\sqrt{3}+i} \right| = \frac{|\cos x + i \sin x|}{|\sqrt{3}+i|} = \frac{\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1}} = \frac{1}{2}$, C 正确;

对于 D 选项, $2 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 则 $\cos 2 < 0, \sin 2 > 0$, 所以复数 $e^{2i} = \cos 2 + i \sin 2$ 在复平面内对应的点位于第二象限, D 错误. 故选 C.]

7. ABD [$\because 3z_1 + z_2 = -1 - 2i, z_1 + 3z_2 = 5 + 2i$,
 $\therefore z_1 = -1 - i, z_2 = 2 + i$,
 $\therefore z_1 - z_2 = -3 - 2i, \frac{z_1}{z_2} = \frac{-1-i}{2+i} = \frac{-(1+i)(2-i)}{5} = -\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$. 故选 ABD.]

8. BCD [若 $z = i$, 满足 $|z| = 1$, 但 $z \neq 1$, 故 A 错误;
若 $z = 2 + 3i$, 则 $\bar{z} = 2 - 3i$, 故 B 正确;
若 z 的实部是 1, 则点 P 的集合所表示的图形是直线, 故 C 正确;
若 $1 \leq |z| \leq \sqrt{2}$,
则点 P 的集合所表示的图形是以原点为圆心, $1, \sqrt{2}$ 为半径所构成的圆环面,

故所求面积为 $\pi \times (\sqrt{2})^2 - \pi \times 1^2 = \pi$, 故 D 正确.

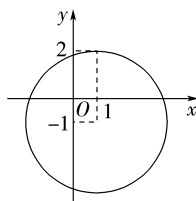
故选 BCD.]

9. ABC [满足 $|z-1+i|=3$ 的复数 z 在复平面内对应点的轨迹是以 $(1, -1)$ 为圆心, 3 为半径的圆, 如图, 由图可知, 虚部最大的复数 $z = 1 + 2i$, 即复数 z 虚部的最大值为 2, 故 A 正确;

实部最小的复数 $z = -2 - i$, 实部最大的复数 $z = 4 - i$, 所以实部的取值范围是 $[-2, 4]$, 故 B 正确;

$|z+1+i|$ 表示复数 z 在复平面内对应的点到 $(-1, -1)$ 的距离, 所以 $|z+1+i|$ 的最小值为 $3-2=1$, 故 C 正确;

由图可知, 复数 z 在复平面内对应的点位于第一、二、三、四象限, 故 D 错误. 故选 ABC.]



10. 2 [$\because m-2+(m^2-4)i \geq 0 (m \in \mathbf{R})$,

$$\therefore \begin{cases} m^2-4=0, \\ m-2 \geq 0, \end{cases} \text{解得 } m=2.]$$

11. $\sqrt{10}$ [$\left| \frac{3+i}{i} \right| = \frac{|3+i|}{|i|} = \frac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10}.]$

12. -8 [由棣莫弗公式 $[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$,
可得 $\left[2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right]^4 = 2^4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 16 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -8 + 8\sqrt{3}i$,
故所求的实部为 -8.]

阶段检测(八)

1. C [若 $z = -1-i$,
则 $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.
故选 C.]

2. C [$\frac{5(1+i^3)}{(2+i)(2-i)} = \frac{5(1-i)}{2^2-i^2} = \frac{5(1-i)}{5} = 1-i$, 故选 C.]

3. C [对于 A, $\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QP} \neq \overrightarrow{PQ}$, 所以 A 错误;

对于 B, $\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{BQ}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PA}) - \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{QB} \neq \overrightarrow{PQ}$, 所以 B 错误;

对于 C, $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PC}) + (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{QC}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{PQ}$, 所以 C 正确;

对于 D, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{QA} \neq \overrightarrow{PQ}$, 所以 D 错误. 故选 C.]

4. C [对于 A, 当 $a \perp b$ 时, 则 $a \cdot b = 0$,
所以 $x \cdot (x+1) + 2x = 0$, 解得 $x = 0$ 或 $x = -3$, 即必要性不成立, 故 A 错误;

对于 B, 当 $a \parallel b$ 时, 则 $2(x+1) = x^2$, 解得 $x = 1 \pm \sqrt{3}$, 即必要性不成立, 故 B 错误;

对于 C, 当 $x = 0$ 时, $a = (1, 0), b = (0, 2)$, 故 $a \cdot b = 0$,
所以 $a \perp b$, 即充分性成立, 故 C 正确;

对于 D, 当 $x = -1 + \sqrt{3}$ 时, 不满足 $2(x+1) = x^2$, 所以 $a \parallel b$ 不成立, 即充分性不成立, 故 D 错误.
故选 C.]

5. C [以A为原点, AB, AD所在的直线分别为x轴、y轴, 建立平面直角坐标系, 如图所示.]

设 $P(x, y)$, 则 $A(0, 0), B(1, 0), C(1, 3)$,

则 $\overrightarrow{PA} = (-x, -y)$,

$\overrightarrow{PC} = (1-x, 3-y)$,

$\overrightarrow{PB} = (1-x, -y)$,

所以 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = (1-2x, 3-2y)$,

所以 $(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}) \cdot \overrightarrow{PB} = (1-2x)(1-x) + (3-2y)(-y) = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + 2\left(y - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{5}{4}$,

所以当且仅当 $x = \frac{3}{4}, y = \frac{3}{4}$ 时, $(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}) \cdot \overrightarrow{PB}$ 取得最小值 $-\frac{5}{4}$. 故选 C.]

6. C [$\because |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$, $\therefore O$ 到 $\triangle ABC$ 三个顶点的距离相等,

$\therefore O$ 是 $\triangle ABC$ 的外心.

$\therefore \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \mathbf{0}$,

$\therefore N$ 是 $\triangle ABC$ 的重心.

$\therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}$,

$\therefore \overrightarrow{PB} \cdot (\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC}) = 0, \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$,

$\therefore \overrightarrow{PB} \perp \overrightarrow{CA}$,

同理得到 $\overrightarrow{PC} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{CB}$,

$\therefore P$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心. 故选 C.]

7. AB [因为 $z = \frac{2+4i}{1+i} = \frac{(2+4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 3+i$, 所以 $z-3=i$ 为

纯虚数, 故选项 A, B 正确;

$z=3+i$, 则 z 在复平面内对应的点 $(3, 1)$ 位于第一象限, 故选项 C 错误;

$|z-2| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, 故选项 D 错误. 故选 AB.]

8. ACD [因为 $a = (1, 2), b = (3, 1)$,

则 $|a| = \sqrt{5}, |b| = \sqrt{10}, a \cdot b = 1 \times 3 + 2 \times 1 = 5$.

对于 A, $(a-b) \cdot a = a^2 - a \cdot b = 5 - 5 = 0$,

即 $(a-b) \perp a$, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $1 \times 1 \neq 2 \times 3$,

所以 a, b 不共线, 故 B 错误;

对于 C, 设 a 与 b 的夹角为 θ ,

则 $\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 又 $\theta \in [0, \pi]$,

即 a 与 b 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 故 C 正确;

对于 D, a 在 b 上的投影向量是 $\left(\frac{a \cdot b}{|b|^2}\right)b = \frac{1}{2}b = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 故

D 正确.

故选 ACD.]

9. 15 [$\because a \parallel b, \therefore 2k = 5 \times 6$, 解得 $k = 15$.]

10. $\sqrt{3}$ [由 $|a-b| = \sqrt{3}$, 得 $a^2 - 2a \cdot b + b^2 = 3$,

即 $2a \cdot b = a^2 + b^2 - 3$.

由 $|a+b| = |2a-b|$,

得 $a^2 + 2a \cdot b + b^2 = 4a^2 - 4a \cdot b + b^2$,

整理得 $3a^2 - 6a \cdot b = 0$,

所以 $3a^2 - 3(a^2 + b^2 - 3) = 0$,

所以 $b^2 = 3$, 所以 $|b| = \sqrt{3}$.]

11. 解: 由 $z_1 = z_2$, 得 $\begin{cases} m = 2\cos \theta, \\ 4 - m^2 = \lambda + 3\sin \theta, \end{cases}$

消去 m , 可得 $\lambda = 4\sin^2 \theta - 3\sin \theta = 4\left(\sin \theta - \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{9}{16}$.

由于 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$, 可得 $-\frac{9}{16} \leq \lambda \leq 7$, 即 λ 的取值范围是 $\left[-\frac{9}{16}, 7\right]$.

12. 解: (1) 依题意有 $\overrightarrow{AO} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC} (m, n \in \mathbf{R})$,

因为 $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{DC}$, 所以 $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$,

因为 B, O, D 三点共线, 所以 $\overrightarrow{AO} = m\overrightarrow{AB} + (1-m)\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + \frac{3-3m}{4}\overrightarrow{AC}$,

因为 $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EB}$, 所以 $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$,

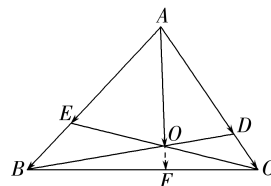
因为 C, O, E 三点共线, 所以 $\overrightarrow{AO} = n\overrightarrow{AC} + (1-n)\overrightarrow{AE} = n\overrightarrow{AC} + \frac{2-2n}{3}\overrightarrow{AB}$.

根据平面向量基本定理, 可得

$$\begin{cases} m = \frac{2-2n}{3}, \\ \frac{3-3m}{4} = n, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} m = \frac{1}{3}, \\ n = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

所以 $m+n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

(2) 延长 AO 与 BC 交于点 F , 因为 B, F, C 三点共线,



所以设 $\overrightarrow{AF} = t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC}$,

又因为 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, 且 $AF \parallel AO$, 所以设 $\overrightarrow{AO} = \lambda \overrightarrow{AF}$,

即 $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \lambda [t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC}] = \lambda t\overrightarrow{AB} + \lambda (1-t)\overrightarrow{AC}$,

$$\text{所以} \quad \begin{cases} \lambda t = \frac{1}{3}, \\ \lambda (1-t) = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\text{解得} \quad \begin{cases} t = \frac{2}{5}, \\ \lambda = \frac{5}{6}, \end{cases}$$

所以 $\overrightarrow{AO} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AF}$, 则 $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AF}$.

所以 $\frac{S'}{S} = \frac{1}{6}$.

课时作业(四十四)

1. C [对于 A, $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} = -\frac{1}{n(n-1)} < 0$, 故 $\{a_n\}$

为递减数列, 故 A 不符合题意.

对于 B, $a_n - a_{n-1} = 1 - 2n - [1 - 2(n-1)] = -2 < 0$, 故 $\{a_n\}$ 为递减数列, 故 B 不符合题意.

对于 C, $a_n - a_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1 > 0$, 故 $\{a_n\}$ 为递增数列, 故 C 符合题意.

对于 D, $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} = -\frac{1}{2^n} < 0$, 故 $\{a_n\}$ 为递减数列,

故 D 不符合题意.

故选 C.]

2. D [由 $a_{n+1} = a_n + 3n + 2 (n \geq 1)$, 可得 $a_{n+1} - a_n = 3n + 2 (n \geq 1)$, 则当 $n \geq 2$ 时, $a_n = a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \cdots + a_3 - a_2 + a_2 - a_1 + a_1 = 3n - 1 + 3n - 4 + \cdots + 8 + 5 + 2 = \frac{n(2+3n-1)}{2} = \frac{3n^2+n}{2}$,

则 $a_{10} = \frac{3 \times 100 + 10}{2} = 155$.

故选 D.]

3. B [由数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{3}{a_n}$,

可得 $a_{n+2} = \frac{3}{a_{n+1}} = a_n$,

即数列 $\{a_n\}$ 是周期为 2 的数列, 且 $a_1 = 3, a_2 = 1$,

则 $a_{2\,024} + a_{2\,025} = a_2 + a_1 = 1 + 3 = 4$.

故选 B.]

4. D [由题意可得 $a_1 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{5} + \cdots + \frac{a_n}{2n-1} = n+1$, ①

当 $n=1$ 时, $a_1 = 2$;

当 $n \geq 2$ 时, $a_1 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{5} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2n-3} = n$, ②

①-②得 $\frac{a_n}{2n-1} = 1$, 即 $a_n = 2n-1$.

又 $a_1 = 2$ 不满足 $a_n = 2n-1$,

综上所述, $a_n = \begin{cases} 2, & n=1, \\ 2n-1, & n \geq 2. \end{cases}$

所以 $a_{2\,027} = 4\,053$.

故选 D.]

5. BCD [根据题意, 依次分析选项:

对于 A, 数列 $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots$ 的一个通项公式是 $a_n = \frac{n+1}{n+2} (n \in \mathbf{N}^*)$, A 正确;

对于 B, 数列 1, 2, 3, 4, 5 只有 5 项, 该数列项数是有限的, B 错误;

对于 C, 数列 -1, 1, -1, 1, -1, 1, $\cdots$ 的通项公式可以为 $a_n = (-1)^n$, 也可以为 $a_n = \cos n\pi$, 该数列通项公式的形式不唯一, C 错误;

对于 D, 该数列的通项公式可以为 $b_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & n \text{ 为奇数}, \\ \frac{3n}{2}, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ D

错误.

故选 BCD.]

6. BCD [对于 A, 已知 $S_n = n^2 + 1$, 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 2$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 1 - [(n-1)^2 + 1] = 2n-1$,

又 $a_1 = 2$ 不满足 $a_n = 2n-1$,

综上, $a_n = \begin{cases} 2, & n=1, \\ 2n-1, & n \geq 2, \end{cases}$ 故 A 错误;

对于 B, $T_n = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$, 所以数列 $\{S_n\}$

的前 n 项积为 $T_n = \frac{1}{n+1}$, 故 B 正确;

对于 C, 由 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}$, 得 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n}$, $\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{n-2}{n-1}$, $\cdots$,

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2}$,

等式左右分别相乘可得 $\frac{a_n}{a_1} = \frac{1}{n}$,

又 $a_1 = 1$, 所以 $a_n = \frac{1}{n}$, 故 C 正确;

对于 D, 因为 $S_n = -n^2 + 7n - 3 = -(n - \frac{7}{2})^2 + \frac{37}{4}$, 且 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以当 $n=3$ 或 4 时, S_n 取得最大值, 故 D 正确.

故选 BCD.]

7. 4 [法一: 因为 $a_{n+1} - a_n = \frac{2n-3}{2^{n+1}} - \frac{2n-5}{2^n} = \frac{-2n+7}{2^{n+1}}$,

所以当 $n \geq 4$ 时, $a_{n+1} < a_n$; 当 $n \leq 3$ 时, $a_{n+1} > a_n$,

即 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 > a_5 > a_6 > \cdots$,

故数列 $\{a_n\}$ 的最大项为第 4 项.

法二: 设数列 $\{a_n\}$ 中的最大项为 a_k ,

则 $\begin{cases} a_k \geq a_{k+1}, \\ a_k \geq a_{k-1}, \end{cases} (k \geq 2),$

即 $\begin{cases} \frac{2k-5}{2^k} \geq \frac{2k-3}{2^{k+1}}, \\ \frac{2k-5}{2^k} \geq \frac{2k-7}{2^{k-1}}, \end{cases}$ 解得 $\frac{7}{2} \leq k \leq \frac{9}{2}$.

因为 $k \in \mathbf{N}^*$, 所以 $k=4$.

故数列 $\{a_n\}$ 的最大项为第 4 项.]

8. $(-\infty, \frac{3}{2})$ [根据题意, 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列,

而 $a_n = n^2 - 2tn + 5$, 则 $a_{n+1} = (n+1)^2 - 2t(n+1) + 5$.

则 $a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - 2t(n+1) + 5 - (n^2 - 2tn + 5) = n^2 +$

$2n + 1 - 2tn - 2t + 5 - n^2 + 2tn - 5 = 2n + 1 - 2t > 0$ 恒成立,

变形可得 $2t < 2n + 1$,

又由 $n \in \mathbf{N}^*$, 则 $2t < 3$, 解得 $t < \frac{3}{2}$.

即实数 t 的取值范围是 $(-\infty, \frac{3}{2})$.]

9. 解: (1) 由 $a_1=1$, 得 $S_1=a_1=1$, 而 $\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{n+2}{n}$, 当 $n \geq 2$ 时,

$$S_n = S_1 \cdot \frac{S_2}{S_1} \cdot \frac{S_3}{S_2} \cdot \dots \cdot \frac{S_n}{S_{n-1}} = 1 \times \frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \times \dots \times \frac{n}{n-2} \times \frac{n+1}{n-1} = \frac{n(n+1)}{2},$$

因为 $S_1=1$ 也满足上式, 所以 $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(2) 由(1)得, 当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$,

所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n$,

因为 $a_1=1$ 也满足上式, 所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n$.

10. 解: (1) 因为 $S_n = n^2 \cdot a_n$, ①

所以 $S_{n+1} = (n+1)^2 \cdot a_{n+1}$, ②

②-①得 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = (n+1)^2 \cdot a_{n+1} - n^2 \cdot a_n$,

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+2}$, 所以 $b_n = \frac{n}{n+2}$,

所以 $b_1 = \frac{1}{3}, b_2 = \frac{1}{2}, b_3 = \frac{3}{5}, b_4 = \frac{2}{3}$.

(2) 当 $n \geq 2$ 时, 由 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+2}$, 得 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}, \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{4}, \frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{5}, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1}$,

所以 $\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \dots \times \frac{n-1}{n+1}$,

即 $\frac{a_n}{a_1} = \frac{2}{n(n+1)} (n \geq 2)$,

又因为 $a_1 = \frac{1}{2}$, 所以 $a_n = \frac{1}{n(n+1)} (n \geq 2)$.

当 $n=1$ 时, $a_1 = \frac{1}{2}$ 满足上式, 故 $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

课时作业(四十五)

1. B [根据 $S_3 = 3a_2 = 6$ 得 $a_2 = 2$, 根据 $S_5 = 5a_3 = -5$ 得 $a_3 = -1$, 所以 $\{a_n\}$ 的公差 $d = a_3 - a_2 = -3$, 所以 $a_6 = a_3 + 3d = -10$, 所以 $S_6 = S_5 + a_6 = -5 - 10 = -15$.]

2. D [由题知, 奇数项有 $\frac{n+1}{2}$ 项, 偶数项有 $\frac{n-1}{2}$ 项, 奇数项之和

为 $\frac{n+1}{2} a_1 + \frac{\frac{n+1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}}{2} \cdot 2d = \frac{n+1}{2} \left(a_1 + \frac{n-1}{2} d \right)$, 偶数项之和

为 $\frac{n-1}{2} (a_1 + d) + \frac{\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2}}{2} \cdot 2d = \frac{n-1}{2} \left(a_1 + \frac{n-1}{2} d \right)$, 所以

奇数项之和与偶数项之和的比为 $\frac{n+1}{n-1}$, 故选 D.]

3. C [法一: 由 $a_2 + a_6 = 10$, 可得 $2a_4 = 10$, 所以 $a_4 = 5$, 又 $a_4 a_8 = 45$, 所以 $a_8 = 9$. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $d = \frac{a_8 - a_4}{8 - 4} = \frac{9 - 5}{4} = 1$, 又 $a_4 = 5$, 所以 $a_1 = 2$, 所以 $S_5 = 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2} d = 20$, 故选 C.

法二: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则由 $a_2 + a_6 = 10$, 可得 $a_1 + 3d = 5$ ①, 由 $a_4 a_8 = 45$, 可得 $(a_1 + 3d)(a_1 + 7d) = 45$ ②,

由①②可得 $a_1 = 2, d = 1$, 所以 $S_5 = 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2} d = 20$, 故选 C.]

4. A [$\because \{a_n\}, \{b_n\}$ 是等差数列,

$$\therefore \frac{a_6}{b_6} = \frac{\frac{a_1 + a_{11}}{2}}{\frac{b_1 + b_{11}}{2}} = \frac{11 \times \frac{a_1 + a_{11}}{2}}{11 \times \frac{b_1 + b_{11}}{2}} = \frac{S_{11}}{T_{11}} = \frac{3 \times 11}{2 \times 11 + 8} = \frac{11}{10}.$$
 故

选 A.]

5. C [当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = -1 + 8 = 7$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = -n^2 + 8n - [-(n-1)^2 + 8(n-1)] = -2n + 9$, 显然 $a_1 = 7$ 也符合该式, 所以 $a_n = -2n + 9$, 所以 $|a_n| = \begin{cases} -2n+9, n \leq 4, \\ 2n-9, n \geq 5, \end{cases}$ 所以 $\{|a_n|\}$ 的前 12 项和为 $\frac{(7+1) \times 4}{2} + \frac{(1+15) \times 8}{2} = 80$. 故选 C.]

6. D [设第 n 环扇面形石板的块数为 a_n , 上层共有 n 环, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,

则 $\{a_n\}$ 是首项为 9, 公差为 9 的等差数列,

$$a_n = 9 + 9(n-1) = 9n, S_n = \frac{9}{2}(n^2 + n),$$

上层、中层、下层的块数分别为 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$,

由下层比中层多 729 块, 得 $S_{3n} - S_{2n} = S_{2n} - S_n + 729$,

$$\therefore \frac{9}{2}(9n^2 + 3n) - \frac{9}{2}(4n^2 + 2n) = \frac{9}{2}(4n^2 + 2n) - \frac{9}{2}(n^2 + n) + 729,$$
 解得 $n=9$,

$\therefore$ 中下两层共有扇面形石板:

$$S_{27} - S_9 = \frac{9}{2}(27^2 + 27) - \frac{9}{2}(9^2 + 9) = 2\,997,$$

$\therefore$ 中下两层共有扇面形石板 2 997 块.

故选 D.]

7. BCD [对于 A, 令 $a=1, b=2, c=3$, 则 $a^2=1, b^2=4, c^2=9$, 不满足 $2b^2=a^2+c^2$, 故 A 错误; 对于 B, 令 $a=b=c$, 则 $2^a=2^b=2^c$, 满足 $2^a+2^c=2 \cdot 2^b$, 故 B 正确; 对于 C, $\because a, b, c$ 成等差数列, $\therefore a+c=2b$, $\therefore (ka+2)+(kc+2)=k(a+c)+4=2(kb+2)$, 即 $ka+2, kb+2, kc+2$ 一定成等差数列, 故 C 正确;

对于 D, 令 $a=b=c$, 则 $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$, 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$, 故 D 正确. 故选 BCD.]

8. AB [A 选项, 由 $a_1 = S_{10} = 10$, 得 $10a_1 + \frac{10 \times 9}{2} d = 10$,

即 $100 + 45d = 10$, 解得 $d = -2$, A 正确;

B 选项, $a_n = 10 - 2(n-1) = 12 - 2n$, B 正确;

C 选项, 由对 B 选项的分析知 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = -n^2 + 11n$,

所以 $\frac{S_n}{n} = -n + 11$,

所以数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为递减数列, C 错误;

D 选项, 由二次函数 $f(n) = -n^2 + 11n$ 的性质可知, 其图象的对称轴方程为 $n = \frac{11}{2}$,

又 $n \in \mathbb{N}^*$, 所以当 $n=5$ 或 $n=6$ 时, S_n 取得最大值, D 错误. 故选 AB.]

9. 4 [由题意有 $a_2 + a_6 = 2a_4, a_3 + a_7 = 2a_5$,

由 $a_2 + a_4 + a_6 = 3a_4 = 3$, 解得 $a_4 = 1$,

由 $a_3 + a_5 + a_7 = 3a_5 = 9$, 解得 $a_5 = 3$,

$\therefore a_1 + a_8 = a_4 + a_5 = 1 + 3 = 4$.]

10. 820 [设第 n 排的座位数为 $a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 其公差 $d=2$, 则 $a_n = a_1 + (n-1)d = a_1 + 2(n-1)$. 由已知 $a_{20} = 60$, 得 $60 = a_1 + 2 \times (20-1)$, 解得 $a_1 = 22$, 则剧场总共的座位数为 $\frac{20(a_1 + a_{20})}{2} = \frac{20 \times (22 + 60)}{2} = 820$.]

11. 解: (1) 因为 $3a_2 = 3a_1 + a_3$, 所以 $3(a_2 - a_1) = a_1 + 2d$, 所以 $3d = a_1 + 2d$, 所以 $a_1 = d$, 所以 $a_n = nd$.

因为 $b_n = \frac{n^2 + n}{a_n}$, 所以 $b_n = \frac{n^2 + n}{nd} = \frac{n+1}{d}$,

所以 $S_3 = \frac{3(a_1 + a_3)}{2} = \frac{3(d + 3d)}{2} = 6d$, $T_3 = b_1 + b_2 + b_3 =$

$$\frac{2}{d} + \frac{3}{d} + \frac{4}{d} = \frac{9}{d}.$$

因为 $S_3 + T_3 = 21$,

所以 $6d + \frac{9}{d} = 21$, 解得 $d=3$ 或 $d=\frac{1}{2}$,

因为 $d > 1$, 所以 $d=3$.

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n$.

(2) 因为 $b_n = \frac{n^2 + n}{a_n}$, 且 $\{b_n\}$ 为等差数列,

所以 $2b_2 = b_1 + b_3$, 即 $2 \times \frac{6}{a_2} = \frac{2}{a_1} + \frac{12}{a_3}$,

$$\text{所以 } \frac{6}{a_1 + d} - \frac{1}{a_1} = \frac{6}{a_1 + 2d},$$

所以 $a_1^2 - 3a_1d + 2d^2 = 0$,

解得 $a_1 = d$ 或 $a_1 = 2d$.

① 当 $a_1 = d$ 时, $a_n = nd$,

所以 $b_n = \frac{n^2 + n}{a_n} = \frac{n^2 + n}{nd} = \frac{n+1}{d}$,

$$S_{99} = \frac{99(a_1 + a_{99})}{2} = \frac{99(d + 99d)}{2} = 99 \times 50d,$$

$$T_{99} = \frac{99(b_1 + b_{99})}{2} = \frac{99\left(\frac{2}{d} + \frac{100}{d}\right)}{2} = \frac{99 \times 51}{d}.$$

因为 $S_{99} - T_{99} = 99$,

$$\text{所以 } 99 \times 50d - \frac{99 \times 51}{d} = 99,$$

即 $50d^2 - d - 51 = 0$,

解得 $d = \frac{51}{50}$ 或 $d = -1$ (舍去).

② 当 $a_1 = 2d$ 时, $a_n = (n+1)d$, 所以 $b_n = \frac{n^2 + n}{a_n} =$

$$\frac{n^2 + n}{(n+1)d} = \frac{n}{d},$$

$$S_{99} = \frac{99(a_1 + a_{99})}{2} = \frac{99(2d + 100d)}{2} = 99 \times 51d,$$

$$T_{99} = \frac{99(b_1 + b_{99})}{2} = \frac{99\left(\frac{1}{d} + \frac{99}{d}\right)}{2} = \frac{99 \times 50}{d}.$$

因为 $S_{99} - T_{99} = 99$,

$$\text{所以 } 99 \times 51d - \frac{99 \times 50}{d} = 99,$$

即 $51d^2 - d - 50 = 0$,

解得 $d = -\frac{50}{51}$ (舍去) 或 $d = 1$ (舍去).

综上, $d = \frac{51}{50}$.

课时作业(四十六)

1. D [由 $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_3(q^{-2} + q^{-1} + 1)$, 得 $q^{-2} + q^{-1} + 1 = 3$, 即 $2q^2 - q - 1 = 0$,

解得 $q = 1$ 或 $q = -\frac{1}{2}$.

$\therefore a_2 = \frac{a_3}{q} = \frac{3}{2}$ 或 -3 . 故选 D.]

2. C [根据题意, 设 1 和 2 025 的等比中项为 x ,

则有 $x^2 = 1 \times 2\,025$, 解得 $x = \pm 45$.

即 1 和 2 025 的等比中项为 ± 45 .

故选 C.]

3. D [依题意, 十三个音的频率依次成等比数列, 记为 $\{a_n\}$, 设公比为 q , 则 $a_{13} = a_1 q^{12}$, 又 $\because a_{13} = 2a_1$,

$$\therefore q = 2^{\frac{1}{12}}, \therefore \frac{f_2}{f_1} = \frac{a_7}{a_3} = q^4 = \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^4 = \sqrt[3]{2}. \text{ 故选 D.}]$$

4. B [数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, a_6, a_{10} 为方程 $x^2 + 2\,025x + 3 = 0$ 的两根,

所以 $a_6 a_{10} = 3, a_6 + a_{10} = -2\,025 < 0$,

则 $a_6 < 0, a_8 < 0, a_{10} < 0$,

则 $a_8 = -\sqrt{a_6 a_{10}} = -\sqrt{3}$.

故选 B.]

5. B [由 $\left\{b_n + \frac{1}{2}\right\}$ 为“对奇数列”, 得 $b_{n+1} + \frac{1}{2} = 3\left(b_n + \frac{1}{2}\right) -$

1, 可化为 $b_{n+1} = 3b_n$,

由 $b_1 = 3$, 可得数列 $\{b_n\}$ 是首项和公比均为 3 的等比数列,

则 $b_{2\,025} = 3 \times 3^{2\,024} = 3^{2\,025}$. 故选 B.]

6. ACD [数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 易得 $a_5 a_{11} = a_8^2$, A 正确;

由 $a_i a_{18-i} = a_9^2 (i \in \mathbf{N}^*, i < 18)$, 得 $T_{17} = a_1 a_2 \cdots a_{17} = a_9^{17}$, B 错误;

由 $a_8 a_{11} = a_9 a_{10} = a_{11}$, 得 $a_8 = 1$, 所以 $T_8 = T_7$, C 正确;

因为 $\sqrt[n]{T_{2n}} = a_1 a_{2n}$, 所以 $\frac{\sqrt[n+1]{T_{2n+2}}}{\sqrt[n]{T_{2n}}} = \frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = q^2$, 其中 q 为等比数列 $\{a_n\}$ 的公比, 所以 $\{\sqrt[n]{T_{2n}}\}$ 是等比数列, D 正确. 故选 ACD.]

7. AD [根据 $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{a_3}{q^2} + \frac{a_3}{q} + a_3 = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} + 1 = 7$,

得 $6q^2 - q - 1 = 0$, 即 $(2q-1)(3q+1) = 0$, 因为 $q > 0$, 所以 $q = \frac{1}{2}$, 故 A 正确.

$a_5 = a_3 q^2 = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 故 B 错误.

因为 $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = 4$, 所以 $S_5 = \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{4\left(1-\frac{1}{32}\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{31}{4}$, 故 C 错误.

$a_n = a_1 q^{n-1} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^2}{2^{n-1}} = 2^{3-n}$, $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} =$

$$\frac{4\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}} = 8\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 8 - \frac{2^3}{2^n} = 8 - 2^{3-n}, \text{ 所以 } a_n +$$

$S_n = 8$, 故 D 正确. 故选 AD.]

8. 2 [由题意, 得 $\begin{cases} S_{奇} + S_{偶} = -240, \\ S_{奇} - S_{偶} = 80, \end{cases}$

解得 $S_{\text{奇}} = -80, S_{\text{偶}} = -160$,

$$\therefore q = \frac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}} = \frac{-160}{-80} = 2.]$$

9. $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}$ [设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

$\therefore a_3 + 2$ 是 a_2, a_4 的等差中项,

$$\therefore 2(a_3 + 2) = a_2 + a_4, \textcircled{1}$$

又 $a_2 + a_3 + a_4 = 28$, 将 $\textcircled{1}$ 代入得 $a_3 = 8$,

$$\therefore a_2 + a_4 = 20,$$

$$\text{则} \begin{cases} a_1 q + a_1 q^3 = 20, \\ a_1 q^2 = 8, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a_1 = 2, \\ q = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_1 = 32, \\ q = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

又 $\{a_n\}$ 为递减数列,

$$\therefore a_1 = 32, q = \frac{1}{2},$$

$$\therefore a_n = 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}.]$$

10. 证明: $\therefore a_n = \frac{T_n}{3T_n - 1}$, 且 $a_n = \frac{T_n}{T_{n-1}} (n \geq 2)$,

$$\therefore \frac{T_n}{T_{n-1}} = \frac{T_n}{3T_n - 1} (n \geq 2),$$

$$\therefore a_n > 0, \therefore T_n > 0,$$

$$\therefore 3T_n - 1 = T_{n-1} (n \geq 2),$$

$$\text{则 } T_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \left(T_{n-1} - \frac{1}{2}\right) (n \geq 2),$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } a_1 = T_1 = \frac{T_1}{3T_1 - 1}, \text{ 得 } T_1 = \frac{2}{3},$$

$$\therefore T_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

$\therefore$ 数列 $\left\{T_n - \frac{1}{2}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{6}$, 公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列.

课时作业(四十七)

1. C [由 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 3}$, 可得 $a_{n+1} + 1 = \frac{2(a_n + 1)}{a_n + 3}$,

$$\text{即 } \frac{1}{a_{n+1} + 1} = \frac{1}{a_n + 1} + \frac{1}{2}, \text{ 又 } \frac{1}{a_1 + 1} = \frac{1}{2},$$

所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n + 1}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$, 公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列,

$$\text{即 } \frac{1}{a_n + 1} = \frac{1}{2}n, \text{ 即 } a_n = \frac{2}{n} - 1, \text{ 可得 } a_{10} = -\frac{4}{5}, \text{ 故 A, B 错误;}$$

由 $\{a_n\}$ 是递减数列, 可得数列 $\{a_n\}$ 有最大项, 且为 $a_1 = 1$, 故 C 正确, D 错误.

故选 C.]

2. B [因为 $a_{n+1} = 2a_n - n + 1$,

设 $a_{n+1} + x(n+1) + y = 2(a_n + xn + y)$, 化简得 $a_{n+1} = 2a_n + xn + y - x$, 对比原式解方程组得 $x = -1, y = 0$,

$$\text{即 } a_{n+1} - (n+1) = 2(a_n - n),$$

$$\text{所以 } \frac{a_{n+1} - (n+1)}{a_n - n} = 2,$$

即数列 $\{a_n - n\}$ 是以 $a_1 - 1 = 2$ 为首项, 2 为公比的等比数列,

$$\text{则 } a_n - n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n, \text{ 所以 } a_n = 2^n + n.$$

故选 B.]

3. AB [由 $a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n + 1}$, 得 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{3a_n} + \frac{2}{3}$, 即 $\frac{1}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a_n} - 1\right)$, 又 $a_1 = \frac{3}{5}$, 得 $\frac{1}{a_1} - 1 = \frac{2}{3}$,

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{1}{a_n} - 1\right\}$ 是以 $\frac{2}{3}$ 为首项, $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列, 选项 B

正确;

$$\therefore \frac{1}{a_n} - 1 = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1},$$

$$\text{即 } \frac{1}{a_n} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 1 = \frac{2+3^n}{3^n},$$

$$\therefore a_n = \frac{3^n}{2+3^n}, \text{ 则 } a_3 = \frac{27}{2+27} = \frac{27}{29}, \text{ 选项 A 正确, 选项 D 错误;}$$

$$\therefore \frac{1}{a_n} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 1,$$

$$\therefore S_n = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}}\right) + n = \frac{2}{3} \times \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} + n =$$

$$n + 1 - \frac{1}{3^n}, \text{ 选项 C 错误.}$$

故选 AB.]

4. BCD [已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_1 = 1, a_2 = 3$,

$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} (n \geq 2),$$

$$\text{所以 } a_{n+1} - a_n = 2(a_n - a_{n-1}),$$

则 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是首项为 $a_2 - a_1 = 2$, 公比为 2 的等比数列, 故 A 错误;

由 $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$ 得 $a_{n+1} - 2a_n = a_n - 2a_{n-1}$, $a_2 - 2a_1 = 1$, 所以数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 1 的等比数列, 故 B 正确;

因为 $a_{n+1} - a_n = 2^n$,

$$\text{所以 } a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$$

$$= 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = \frac{1 \times (1 - 2^n)}{1 - 2} = 2^n - 1, \text{ 故 C 正确;}$$

$$S_n = (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) - n = \frac{2 \times (1 - 2^{n+1})}{1 - 2} - n = 2^{n+1} - n -$$

2, 故 D 正确.

故选 BCD.]

5. $a_n = 2^n - 1$ 2 036 [因为 $a_{n+1} = 2a_n + 1$, 所以 $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$, 所以 $\{a_n + 1\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, 所以 $a_n + 1 = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$, 即 $a_n = 2^n - 1$, 所以 $S_{10} = a_1 + a_2$

$$+ \cdots + a_{10} = 2 + 2^2 + \cdots + 2^{10} - 10 = \frac{2 \times (1 - 2^{10})}{1 - 2} - 10 = 2 \text{ 036.}]$$

6. $a_n = 2(n+1) \cdot 5^{n-1}$ [在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 4, a_{n+1} = 5a_n + 2 \times 5^n, n \in \mathbf{N}^*$,

$$\text{等式两边同时除以 } 5^{n+1}, \text{ 可得 } \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{a_n}{5^n} + \frac{2}{5},$$

$$\text{设 } b_n = \frac{a_n}{5^n}, \text{ 则 } b_{n+1} = b_n + \frac{2}{5},$$

所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 $\frac{4}{5}$, 公差为 $\frac{2}{5}$ 的等差数列.

$$\text{由等差数列的通项公式可得 } b_n = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}(n-1) = \frac{2n+2}{5}, a_n =$$

$$5^n b_n = 2(n+1) \cdot 5^{n-1}.]$$

7. 证明: (1) 因为 $S_n = 2 + a_{n+1} = 2 + (S_{n+1} - S_n)$,

$$\text{所以 } 2S_n = S_{n+1} + 2, \text{ 所以 } S_{n+1} - 2 = 2(S_n - 2),$$

因为 $S_1 - 2 \neq 0$, 所以 $S_n - 2 \neq 0$, $\frac{S_{n+1} - 2}{S_n - 2} = 2$,

故数列 $\{S_n - 2\}$ 为等比数列, 首项为 $S_1 - 2 = 1$, 公比为 2.

(2) 由 (1) 可知 $S_n - 2 = 2^{n-1}$,

所以 $\frac{1}{S_n} = \frac{1}{2 + 2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}$,

所以 $T_n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 2$.

课时作业(四十八)

1. 解: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

因为数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等差数列, 数列 $\{b_n\}$ 是公比为 3 的等比数列, 且 $a_2 + b_3 = 30, b_2 = a_4 + 2$,

所以 $\begin{cases} 1 + d + 9b_1 = 30, \\ 3b_1 = 1 + 3d + 2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} d = 2, \\ b_1 = 3. \end{cases}$

所以 $a_n = 2n - 1, b_n = 3^n$.

(2) $T_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n)$
 $= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n)$
 $= [1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)] + (3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n) =$
 $\frac{n[1 + (2n - 1)]}{2} + \frac{3(1 - 3^n)}{1 - 3} = \frac{3^{n+1}}{2} + n^2 - \frac{3}{2}$.

2. 解: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

由 $S_3 = 5S_1$, 可得 $3a_1 + 3d = 5a_1$, 即 $a_1 = \frac{3}{2}d$.

又因为 $a_{2n} = 2a_n - 1$, 所以当 $n = 1$ 时, 可得 $a_2 = 2a_1 - 1$, 即 $a_1 + d = 2a_1 - 1$.

联立 $\begin{cases} a_1 = \frac{3}{2}d, \\ a_1 + d = 2a_1 - 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 3, \\ d = 2. \end{cases}$

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n + 1$.

(2) 因为 $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right)$,

所以 $T_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) =$
 $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{n}{6n+9}$.

3. 解: (1) $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是各项都为正数的等比数列, 设公差为 d , 公比为 $q (q > 0)$,

由 $a_1 = 2, b_1 = 1, a_3 + b_2 = 8, a_2 = b_3$, 可得 $2 + 2d + q = 8, 2 + d = q^2$, 解得 $q = 2$ (负值已舍去), 则 $d = 2$.

则 $a_n = 2n, b_n = 2^{n-1}$.

(2) 数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + n \times 2^n$,

$2T_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + \cdots + n \times 2^{n+1}$,

两式相减, 得 $-T_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - n \cdot 2^{n+1} =$
 $\frac{2(1-2^n)}{1-2} - n \cdot 2^{n+1} = (1-n) \cdot 2^{n+1} - 2$,

故 $T_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$.

(3) $c_n = \begin{cases} a_n, & n \text{ 为奇数} \\ b_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases} = \begin{cases} 2n, & n \text{ 为奇数} \\ 2^{n-1}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$

则数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 $S_{2n} = (2+6+10+\cdots+4n-2) + (2+8+\cdots+2^{2n-1})$

$= \frac{1}{2}n(2+4n-2) + \frac{2(1-4^n)}{1-4} = 2n^2 + \frac{2}{3} \cdot 4^n - \frac{2}{3}$.

课时作业(四十九)

1. C [依题意, 不同边长的正方形的个数构成以 1 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以 $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1} = 127$, 即 $\frac{1-2^n}{1-2} =$

127 , 解得 $n = 7$, 即有 7 种不同边长的正方形. 又正方形的边长构成以 16 为首项, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为公比的等比数列. 因此, 最小的正方形

的边长为 $16 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{7-1} = 2$. 故选 C.]

2. BD [由 S_3, S_9, S_6 成等差数列, 得 $2S_9 = S_3 + S_6$, 得 $q \neq 1$,

$\therefore 2 \times \frac{a_1(1-q^9)}{1-q} = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} + \frac{a_1(1-q^6)}{1-q}$,

$\therefore 2q^9 = q^3 + q^6$, 得 $2(q^3)^2 - q^3 - 1 = 0$,

故 $q^3 = -\frac{1}{2}$ 或 $q^3 = 1$ (舍去), 故 A 错误;

$a_3 + a_6 = a_3 - \frac{1}{2}a_3 = \frac{1}{2}a_3, 2a_9 = 2a_3q^6 = \frac{1}{2}a_3$,

$\therefore a_3, a_9, a_6$ 成等差数列, 故 B 正确;

$S_3 = \frac{\frac{3}{2}a_1}{1-q}, S_6 = \frac{\frac{3}{4}a_1}{1-q}, S_9 = \frac{\frac{9}{8}a_1}{1-q}$,

$\therefore \frac{S_6}{S_3} = \frac{1}{2}, \frac{S_9}{S_6} = \frac{3}{2}, \therefore S_3, S_6, S_9$ 不成等比数列, 故 C 错误;

$S_{12} = \frac{\frac{15}{16}a_1}{1-q}, S_6 + S_9 = \frac{\frac{3}{4}a_1}{1-q} + \frac{\frac{9}{8}a_1}{1-q} = \frac{\frac{15}{8}a_1}{1-q}, 2S_{12} = \frac{\frac{15}{8}a_1}{1-q}$,

满足 $S_6 + S_9 = 2S_{12}$, 可得 S_6, S_{12}, S_9 成等差数列, 故 D 正确. 故选 BD.]

3. 3 [设塔的顶层共有 a_1 盏灯, 则数列 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列, $\therefore S_7 = \frac{a_1(1-2^7)}{1-2} = 381$,

解得 $a_1 = 3$.]

4. $\sqrt{5}$ [设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$\therefore a_1 = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$,

则前 10 项和为 $S_{10} = 10a_1 + \frac{10 \times 9}{2}d = 10i + 45d = 45 + 10i$,

解得 $d = 1, a_3 = a_1 + 2d = 2 + i$,

$\therefore |a_3| = \sqrt{5}$.]

5. (1) 解: 由 $a_3, a_4, a_5 - 8$ 成等差数列, 得 $2a_4 = a_3 + a_5 - 8$,

$\therefore 2a_1 \times 2^3 = a_1 \times 2^2 + a_1 \times 2^4 - 8$, 解得 $a_1 = 2$,

$\therefore a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$.

(2) 证明: 由 (1) 知, $a_n = 2^n$,

则 $b_n = \frac{\log_2 a_n}{a_n} = \frac{\log_2 2^n}{2^n} = \frac{n}{2^n}$,

$\therefore T_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}$, ①

$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^{n+1}}$, ②

两式作差, 得 $\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}$

$$= \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^{n+1}} = 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}.$$

$$\therefore T_n = 2 - \frac{n+2}{2^n} < 2.$$

$$\text{又 } b_n = \frac{n}{2^n} > 0, \therefore \{T_n\} \text{ 是递增数列,}$$

$$\therefore T_n \geq T_1 = \frac{1}{2}, \text{ 可得 } \frac{1}{2} \leq T_n < 2.$$

6. 解: (1) 由 $\{a_n + b_n\}$ 是等比数列, 且 $a_1 + b_1 = 4, a_2 + b_2 = 8$,

$$\text{则 } \{a_n + b_n\} \text{ 的公比为 } \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1} = 2, \text{ 首项为 } 4, \text{ 所以 } a_n + b_n = 2^{n+1},$$

因为 $a_1 - b_1 = 0, a_2 - b_2 = 2$, 且 $\{a_n - b_n\}$ 是等差数列,

则 $\{a_n - b_n\}$ 的公差为 $(a_2 - b_2) - (a_1 - b_1) = 2$, 首项为 0, 所以 $a_n - b_n = 2n - 2$.

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } \begin{cases} a_n + b_n = 2^{n+1}, \\ a_n - b_n = 2n - 2, \end{cases}$$

$$\text{则 } \begin{cases} a_n = 2^n + n - 1, \\ b_n = 2^n - n + 1. \end{cases}$$

$$(3) \text{ 由 (2) 知 } S_n = (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n) + (1 + 2 + \cdots + n) - n = \frac{2(1-2^n)}{1-2} + \frac{n(n+1)}{2} - n = 2^{n+1} + \frac{n^2 - n - 4}{2}.$$

阶段检测(九)

1. D [由 $\{a_n\}$ 是等比数列可知 $a_2 a_6 = a_4^2$, 且各项均不为 0,

$$\text{又 } a_6 = 3a_4^2, \text{ 可得 } \frac{1}{3} a_6 = a_4^2, \text{ 所以 } a_2 = \frac{1}{3}.$$

故选 D.]

2. A [因为数列 $1, -1, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{16}, \cdots$,

$$\text{所以该数列的通项公式为 } a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{2^{n-1}},$$

所以该数列的第 100 项为

$$a_{100} = (-1)^{100+1} \frac{100}{2^{99}} = -\frac{25}{2^{97}}.$$

故选 A.]

3. A [因为 $S_4 - S_1 = 9$, 所以 $a_2 + a_3 + a_4 = 3a_3 = 9$, 解得 $a_3 = 3$,

$$\text{又 } a_1 + a_4 = a_2 + a_3 = 5, \text{ 所以 } a_2 = 2,$$

所以公差为 $a_3 - a_2 = 1$.

故选 A.]

4. A [由题意 $S_{20} = \frac{a_1(1-q^{20})}{1-q} = 21$,

$$S_{30} = \frac{a_1(1-q^{30})}{1-q} = 49, \therefore q^{10} = 2, \frac{a_1}{1-q} = -7,$$

$$\therefore S_{10} = \frac{a_1}{1-q} (1-q^{10}) = 7.$$

故选 A.]

5. C [因为 $a_{n+1} = 2S_n + 2$, 所以当 $n \geq 2$ 时, $a_n = 2S_{n-1} + 2$, 两式相减得 $a_{n+1} - a_n = 2a_n$, 即 $a_{n+1} = 3a_n (n \geq 2)$, 又 $a_2 = 2 \times 2 +$

$$2 = 6, a_2 = 3a_1, \text{ 所以数列 } \{a_n\} \text{ 是公比 } q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3 \text{ 的等比数列.}$$

因为 $a_1 = 2$, 所以 $a_4 = a_1 q^3 = 2 \times 3^3 = 54$. 故选 C.]

6. D [等差数列 $\{a_n\}$ 中, 由 $S_1 = 1, S_2 = 3$, 得 $a_1 = 1, a_2 = 2$,

$$\text{故 } a_n = 1 + (n-1)(a_2 - a_1) = n,$$

等比数列 $\{b_n\}$ 中, 由 $T_1 = a_2, T_2 = a_6$, 得 $b_1 = 2, b_2 = T_2 - T_1 = a_6 - 2 = 6 - 2 = 4$,

所以公比 $q = 2$,

$$\text{故 } b_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n,$$

$$\text{故 } T_6 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 126.$$

故选 D.]

7. ABD [由 $S_3 = 9, a_3$ 是 a_1 与 a_4 的等比中项, 得 $\begin{cases} 3a_2 = 9, \\ a_3^2 = a_1 \cdot a_4, \end{cases}$

$$\text{即 } \begin{cases} a_2 = 3, \\ (a_2 + d)^2 = (a_2 - d)(a_2 + 2d), \end{cases}$$

解得 $d = -1$ 或 $d = 0$ (舍去), 故 A, B 正确;

$$\text{则 } a_n = a_2 + (n-2)d = -n + 5, a_1 = 4,$$

$$S_n = \frac{n(4-n+5)}{2} = \frac{n(9-n)}{2},$$

$$\text{所以 } \frac{S_n}{n} = \frac{9-n}{2}, \text{ 又 } \frac{9-n}{2} \text{ 随 } n \text{ 的增大而减小,}$$

所以数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是递减数列, 故 C 错误;

$$\text{当 } S_n = \frac{n(9-n)}{2} > 0 \text{ 时, } 0 < n < 9, \text{ 因为 } n \in \mathbf{N}^*, \text{ 所以 } n \text{ 的最大}$$

值为 8, 故 D 正确. 故选 ABD.]

8. ABD [数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 因为 $a_1 = 1, a_{n+1} = 2S_n (n \in \mathbf{N}^*)$, ①

$$\text{所以当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = 2S_{n-1}, \text{ ②}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得 } a_{n+1} - a_n = 2a_n,$$

$$\text{所以 } a_{n+1} = 3a_n, \text{ 即 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3,$$

又 $a_2 = 2$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 3 为公比的等比数列,

$$\text{所以 } a_n = 2 \times 3^{n-2}. \text{ 又 } a_1 = 1, \text{ 不符合 } a_n = 2 \times 3^{n-2},$$

$$\text{故 } a_n = \begin{cases} 1, n=1, \\ 2 \times 3^{n-2}, n \geq 2. \end{cases}$$

故 C 错误, D 正确.

$$\text{对于选项 B, } a_{n+1} = 2S_n,$$

$$\text{所以 } S_{n+1} - S_n = 2S_n, \text{ 所以 } S_{n+1} = 3S_n,$$

$$\text{即 } \frac{S_{n+1}}{S_n} = 3,$$

所以数列 $\{S_n\}$ 是以 $S_1 = 1$ 为首项, 3 为公比的等比数列, 故 B 正确.

$$\text{所以 } S_n = 1 \times 3^{n-1} = 3^{n-1}, \text{ 故 A 正确.}$$

故选 ABD.]

9. 12 [根据等差数列的求和公式, $S_6 = 6a_1 + \frac{6 \times 5}{2}d = 12$.]

10. 48 384 [法一: 设前 3 项的公差为 d , 后 7 项的公比为 q , 且

$$q > 0, \text{ 则 } q^4 = \frac{a_9}{a_5} = \frac{192}{12} = 16, \text{ 可得 } q = 2, \text{ 则 } a_3 = 1 + 2d = \frac{a_5}{q^2},$$

$$\text{即 } 1 + 2d = 3, \text{ 可得 } d = 1,$$

$$\text{所以 } a_3 = 3, a_7 = a_3 q^4 = 48.$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_9 = 1 + 2 + 3 + 3 \times 2 + \cdots + 3 \times 2^6 = 3 + \frac{3(1-2^7)}{1-2} = 384.$$

法二: 因为 $\{a_n\} (3 \leq n \leq 9)$ 为等比数列, 则 $a_7^2 = a_5 a_9 = 12 \times 192 = 48^2$,

$$\text{且 } a_n > 0, \text{ 所以 } a_7 = 48. \text{ 又因为 } a_5^2 = a_3 a_7, \text{ 则 } a_3 = \frac{a_5^2}{a_7} = 3.$$

设后 7 项的公比为 q , 且 $q > 0$, 则 $q^2 = \frac{a_5}{a_3} = 4$, 解得 $q = 2$, 可得

$$a_1 + a_2 + a_3 = \frac{3(a_1 + a_3)}{2} = 6, a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 +$$

$$a_9 = \frac{a_3 - a_9 q}{1 - q} = \frac{3 - 192 \times 2}{1 - 2} = 381,$$

$$\text{所以 } a_1 + a_2 + \cdots + a_9 = 6 + 381 - a_3 = 384.]$$

11. 解: (1) 由 $S_n = 2a_n - 3n$, ①

$$\text{令 } n=1, \text{ 得 } S_1 = a_1 = 2a_1 - 3,$$

$$\text{得 } a_1 = 3,$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_{n-1} = 2a_{n-1} - 3(n-1), \text{ ②}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得 } a_n = 2a_n - 2a_{n-1} - 3, \text{ 即 } a_n - 2a_{n-1} = 3 (n \geq 2),$$

故 $\{a_n\}$ 的首项为 $a_1 = 3$, 递推关系为 $a_n - 2a_{n-1} = 3 (n \geq 2)$.

(2) 由题知 $b_{n+1} = Ab_n + B, A \neq 1, B \neq 0, b_1 \neq \frac{B}{1-A}$, 则 $b_{n+1} -$

$$\frac{B}{1-A} = Ab_n + B - \frac{B}{1-A}, \text{ 即 } b_{n+1} - \frac{B}{1-A} = A(b_n - \frac{B}{1-A}),$$

$$\text{整理得 } b_{n+1} - \frac{B}{1-A} = A(b_n - \frac{B}{1-A}),$$

$$A \neq 1, B \neq 0, b_1 \neq \frac{B}{1-A},$$

故数列 $\{b_n - \frac{B}{1-A}\}$ 是以 A 为公比的等比数列.

由 (1) 知 $a_n - 2a_{n-1} = 3 (n \geq 2)$,

$$\therefore a_n = 2a_{n-1} + 3, a_n + 3 = 2a_{n-1} + 6, \text{ 即 } \frac{a_n + 3}{a_{n-1} + 3} = 2 (n \geq 2), \text{ 又}$$

$$a_1 = 3, a_1 + 3 = 6,$$

则 $\{a_n + 3\}$ 是以 6 为首项, 2 为公比的等比数列,

$$\therefore a_n + 3 = 6 \times 2^{n-1}, \therefore a_n = 6 \times 2^{n-1} - 3.$$

12. 解: (1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $\{b_n\}$ 的公比为 q ,

$$\because \{b_n\} \text{ 是等比数列}, \therefore \frac{b_3}{b_2} = q = 3,$$

$$\therefore b_1 = 1, b_4 = 27,$$

$$\therefore b_n = 3^{n-1}, a_1 = 1, a_{14} = a_1 + 13d = 27,$$

$$\therefore d = 2,$$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + 2(n-1) = 2n-1, \text{ 即 } a_n = 2n-1.$$

(2) 由 (1) 知 $c_n = (2n-1) \times 3^{n-1}$,

设 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,

$$\text{则 } S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} + c_n,$$

$$\text{即 } S_n = 1 \times 3^0 + 3 \times 3^1 + \cdots + (2n-3) \times 3^{n-2} + (2n-1) \times 3^{n-1}, \text{ ①}$$

$$3S_n = 1 \times 3^1 + 3 \times 3^2 + \cdots + (2n-5) \times 3^{n-2} + (2n-3) \times 3^{n-1} + (2n-1) \times 3^n, \text{ ②}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得 } -2S_n = 1 + 2 \times 3^1 + \cdots + 2 \times 3^{n-1} - (2n-1) \times 3^n,$$

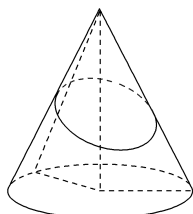
$$\text{即 } -2S_n = 1 + 2 \times \frac{3 \times (1-3^{n-1})}{1-3} - (2n-1) \times 3^n,$$

$$\therefore S_n = 3^n (n-1) + 1.$$

课时作业(五十)

1. C [对于 A: 当球面上两点与球心在一条直线上时, 这样的平面有无数个, 故 A 错误;

对于 B: 若平面与圆锥底面不平行, 则此时截出来的不是圆台, 如图所示, 故 B 错误;



对于 C: 由正棱锥的定义与性质知, 正棱锥的所有侧棱均相等, 底面是正多边形, 所以侧面是全等的等腰三角形, 故 C 正确;

对于 D: 棱台要求侧棱的延长线交于一点, 故 D 错误.

故选 C.]

2. B [设圆柱的底面半径为 r , 则圆锥的母线长为 $\sqrt{r^2 + 3}$, 而它们的侧面积相等, 所以 $2\pi r \times \sqrt{3} = \pi r \times \sqrt{3 + r^2}$, 即 $2\sqrt{3} = \sqrt{3 + r^2}$, 解得 $r = 3$,

$$\text{故圆锥的体积为 } \frac{1}{3} \pi \times 9 \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \pi.$$

故选 B.]

3. B [将长方体的部分表面展开, 则从 A 点出发到点 C_1 , 有 3 条直线路径, 如图 1, 2, 3 所示.

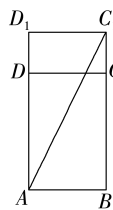


图1

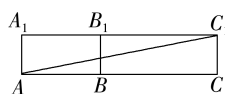


图2

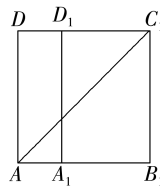


图3

图 1 中, $AB = 2, BC_1 = 4$, 所以 $AC_1 = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$;

图 2 中, $AC = 5, CC_1 = 1$, 所以 $AC_1 = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$;

图 3 中, $C_1B_1 = 3, AB_1 = 3$,

所以 $AC_1 = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$.

而 $\sqrt{26} > 2\sqrt{5} > 3\sqrt{2}$, 所以小蚂蚁从家点 A 出发, 沿长方体的表面到奶奶家点 C_1 的最短距离是 $3\sqrt{2}$.]

4. D [将平行六面体截去三棱锥后, 剩余部分几何体的体积等于平行六面体的体积减去三棱锥的体积,

记平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $V = 1$,

则三棱锥 $A - A_1B_1D_1$ 的体积 $V_1 = \frac{1}{3}$.

$$S_{\triangle A_1B_1D_1} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{\text{四边形} A_1B_1C_1D_1} \cdot$$

$$h = \frac{1}{6} V = \frac{1}{6},$$

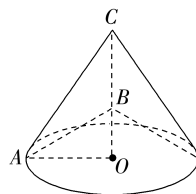
所以剩余部分几何体的体积为 $V - V_1 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

故选 D.]

5. A [如图, 形成的旋转体是一个大圆锥去掉一个小圆锥. 由题易知 $OA = \sqrt{3}$,

$OB = 1$, 所以旋转体的体积为 $V = \frac{1}{3} \pi \times$

$$OA^2 \times BC = \frac{1}{3} \pi \times (\sqrt{3})^2 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \pi.]$$



6. D [由球的半径为 R , 得圆柱体的高为 R ,

$$\text{此鼎主体部分的容积约为 } \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi R^3 + \pi R^2 \times R = \frac{5}{3} \pi R^3,$$

$$\text{此鼎主体部分外表面积约为 } \frac{1}{2} \times 4\pi R^2 + 2\pi R \times R = 4\pi R^2,$$

$$\text{所以此鼎主体部分的容积与外表面积之比约为: } \frac{\frac{5}{3} \pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{5R}{12}.$$

故选 D.]

7. **BD** [如图所示,在直观图 $\triangle A'B'C'$ 中,

过 C' 作 $C'D' \perp A'B'$ 于 D' ,

$$\because A'B' = 2, A'C' = B'C' = \sqrt{5},$$

$$\therefore A'D' = 1,$$

$$C'D' = \sqrt{A'C'^2 - A'D'^2} = 2.$$

$$\text{又} \angle C'O'D' = 45^\circ,$$

$$\therefore O'D' = 2, O'A' = 1, O'C' = 2\sqrt{2},$$

所以利用斜二测画法将直观图 $\triangle A'B'C'$

还原为原平面图形 $\triangle ABC$,如图,

则 $OC = 4\sqrt{2}$, $OA = 1$, $AB = 2$,故选项 B 正确;

$$\text{又因为 } AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = \sqrt{33},$$

$$BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{41}, \text{故选项 A, C 错误;}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times OC = \frac{1}{2} \times 2 \times 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}, \text{故选项 D 正确.}$$

故选 BD.]

8. **BCD** [对于 A,因为在圆台 O_1O_2 的轴截面 $ABCD$ 中, $AB = BC = AD = \frac{1}{2}CD$, $CD = 4$,

$$\text{所以该圆台的高为 } O_1O_2 = \sqrt{AD^2 - \left(\frac{CD-AB}{2}\right)^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{4-2}{2}\right)^2} = \sqrt{3}, \text{所以 A 选项错误;}$$

$$\text{对于 B, 因为该圆台轴截面面积为 } S = \frac{1}{2}(AB+CD) \cdot O_1O_2 = \frac{1}{2}(2+4) \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}, \text{所以 B 选项正确;}$$

$$\text{对于 C, 因为该圆台的体积为 } V = \frac{1}{3}(4\pi + \pi + \sqrt{4\pi \cdot \pi}) \times \sqrt{3} = \frac{7\sqrt{3}\pi}{3}, \text{所以 C 选项正确;}$$

对于 D,将圆台侧面沿 BC 剪开,其展开图如图所示.

易知圆弧 $\widehat{BB'}$, $\widehat{CC'}$ 的长度分别为 2π , 4π ,设扇形圆心为 O ,圆心角为 θ , $OB = r$,

$$\text{由弧长公式可知 } \theta r = 2\pi, \theta(r+2) = 4\pi, \text{解得 } \theta = \pi, r = 2,$$

$$\text{所以可得 } \angle AOB = \frac{\pi}{2},$$

设 E 为 AD 的中点,连接 EC ,当小虫从点 C 沿着 EC 爬行到 AD 的中点,所经过路程最短,

易知 $OE = 3$, $OC = 4$,且 $OE \perp OC$,

由勾股定理可知, $EC = \sqrt{OE^2 + OC^2} = 5$,所以 D 选项正确. 故选 BCD.]

9. **ACD** [对于 A, $V_{\text{三棱锥}A-BCC_1} = V_{\text{三棱锥}C_1-ABC} = \frac{1}{3} \times CC_1 \times$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \times 4 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 4, \text{故 A 正确;}$$

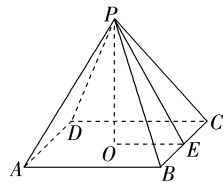
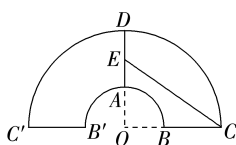
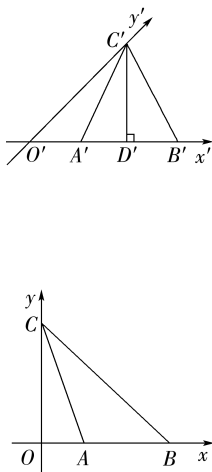
$$\text{对于 B, } V_{\text{三棱锥}C-APC_1} = V_{\text{三棱锥}A-PCC_1},$$

而三棱锥 $A-BCC_1$ 与三棱锥 $A-PCC_1$ 有共同的高,

$\therefore P$ 为 BC_1 的中点,

$$\therefore S_{\triangle PCC_1} = \frac{1}{2} S_{\triangle BCC_1},$$

$$\therefore V_{\text{三棱锥}A-PCC_1} = \frac{1}{2} V_{\text{三棱锥}A-BCC_1} = \frac{1}{2} \times 4 = 2, \text{故 B 错误;}$$



$$\text{对于 C, } V_{\text{四棱锥}C_1-ABB_1A_1} = V_{\text{三棱柱}ABC-A_1B_1C_1} - V_{\text{三棱锥}C_1-ABC} = \frac{1}{2} \times$$

$$2 \times 3 \times 4 - 4 = 8, \text{故 C 正确;}$$

$$\text{对于 D, 由题可知, } AC = \sqrt{13}, AC_1 = \sqrt{29}, BC_1 = 5,$$

$$\therefore AB^2 + BC_1^2 = AC_1^2,$$

$\therefore \triangle ABC_1$ 是直角三角形, $AB \perp BC_1$,

$\therefore$ 三棱锥 C_1-ABC 的表面积为

$$S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BCC_1} + S_{\triangle ACC_1} + S_{\triangle ABC_1}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 3 + \frac{1}{2} \times 3 \times 4 + \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times 4 + \frac{1}{2} \times 2 \times 5 = 14 +$$

$$2\sqrt{13}, \text{故 D 正确.}$$

故选 ACD.]

10. **12** [设 $\triangle ABC$ 的面积为 a ,底面 ABC 水平放置时,液面高为

$$h, \text{侧面 } AA_1B_1B \text{ 水平放置时,水的体积为 } V = \frac{3}{4} S_{\triangle ABC} \cdot$$

$$AA_1 = \frac{3}{4} a \cdot 16 = 12a,$$

当底面 ABC 水平放置时,水的体积为 $V = S_{\triangle ABC} h = ah$,于是 $ah = 12a$,解得 $h = 12$,

所以当底面 ABC 水平放置时,液面高为 12.]

11. $\frac{7\sqrt{3}\pi}{3}$ 11π [因为在圆台 O_1O_2 中, $\triangle ABO_2$ 为等边三角

形,边长为 2,且 $O_1B \parallel O_2A$,

所以 $O_1B = 1$,圆台的高 $h = \sqrt{3}$,

$$\text{因此圆台的体积为 } V = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{7\sqrt{3}\pi}{3},$$

$$\text{表面积 } S = \pi(r_1^2 + r_1 l + r_2 l + r_2^2) = 11\pi.]$$

12. $36\sqrt{3}$ [如图,在正四棱锥 $P-ABCD$

中, PO 为四棱锥的高, PE 为侧面的高,因为正四棱锥的底面边长为 6,且其侧面

$$\text{面积是底面积的 2 倍,}$$

$$\text{所以 } S_{\text{侧}} = 4 \times \frac{1}{2} \times 6PE = 2S_{\text{底}} = 72,$$

$$\text{解得 } PE = 6,$$

$$PO = \sqrt{PE^2 - OE^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\text{所以 } V_{\text{四棱锥}P-ABCD} = \frac{1}{3} S_{\text{底}} \cdot PO = \frac{1}{3} \times 36 \times 3\sqrt{3} = 36\sqrt{3}.]$$

课时作业(五十一)

1. **C** [由题意可知该球为圆柱的外接球,所以球心为圆柱的中

$$\text{心,设球半径为 } r,$$

$$\text{则 } r = \sqrt{1^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2} = \sqrt{2}, \text{故该球的表面积为 } 4\pi r^2 = 8\pi.]$$

2. **B** [设正方体的棱长为 a ,则正方体内切球的半径为 $\frac{a}{2}$,内切

$$\text{球的体积等于 } \frac{4}{3} \pi \times \left(\frac{a}{2}\right)^3 = 4\sqrt{3}\pi, \text{解得 } a = 2\sqrt{3},$$

$$\text{所以正方体的体对角线长等于 } \sqrt{3}a = 6,$$

$$\text{所以正方体外接球的半径等于 } \frac{1}{2} \times \sqrt{3}a = 3,$$

$$\text{则外接球的表面积等于 } 4\pi \times 3^2 = 36\pi. \text{ 故选 B.}]$$

3. **A** [设圆锥的母线长为 l ,则 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3}\pi \cdot l = 6\pi$,解得 $l = 2\sqrt{3}$,

$$\text{故其高 } h = \sqrt{l^2 - 3} = 3,$$

设该圆锥的外接球的半径为 R , 则 $(3-R)^2 + 3 = R^2$, 解得 $R = 2$, 故其体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32\pi}{3}$. 故选 A.]

4. B [由题意得 $O'D' \parallel B'C'$,

$$\text{且 } O'D' = \frac{1}{2}B'C',$$

根据斜二测画法得, 在原图 $\triangle ABC$ 中,

$$\angle ABC = \frac{\pi}{2}, AB = A'B' = 4, BC =$$

$$2B'C' = 4O'D' = 8,$$

三棱锥 $P-ABC$ 的高为 $PB = 6$,

$$\text{所以外接球的半径为 } R = \frac{1}{2} \times \sqrt{AB^2 + BC^2 + PB^2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{4^2 + 8^2 + 6^2} = \sqrt{29},$$

所以外接球的表面积 $S = 4\pi R^2 = 4\pi \times 29 = 116\pi$.

故选 B.]

5. A [由题意, 得正三棱台上、下底面的外接圆的半径分别为

$$\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3\sqrt{3} = 3, \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4\sqrt{3} = 4. \text{ 设该棱台上、下底面的}$$

外接圆的圆心分别为 O_1, O_2 , 连接 O_1O_2 (图略), 则 $O_1O_2 = 1$, 其外接球的球心 O 在直线 O_1O_2 上. 设球 O 的半径为 R , 当球心 O 在线段 O_1O_2 上时, $R^2 = 3^2 + OO_1^2 = 4^2 + (1 - OO_1)^2$,

解得 $OO_1 = 4$ (舍去); 当球心 O 不在线段 O_1O_2 上时, $R^2 = 4^2 + OO_2^2 = 3^2 + (1 + OO_2)^2$, 解得 $OO_2 = 3$, 所以 $R^2 = 25$, 所以该球的表面积为 $4\pi R^2 = 100\pi$. 故选 A.]

6. AD [由题图知 $R = 3r$, 故 A 正确, B 错误; 易知包装盒的高为

$$2r, \text{ 故 } V_2 = \pi R^2 \times 2r = 18\pi r^3, \text{ 又 } V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3, \text{ 所以 } 2V_2 = 27V_1,$$

故 C 错误, D 正确. 故选 AD.]

7. $\frac{21}{8}$ [如图为该几何体的轴截面, 其中

圆 O 是等腰梯形 $ABCD$ 的内切圆,

设圆 O 与梯形的一腰相切于点 E , 与上、

下底分别切于点 O_1, O_2 ,

设球的半径为 r , 圆台上、下底面的半径

分别为 $r_1 = 1, r_2 = 4$. 注意到 OD 与 OA 均为角平分线, 因此

$\angle DOA = 90^\circ$, 从而 $\triangle AO_2O \sim \triangle OO_1D$, 故 $r^2 = r_1 r_2 = 4$. 设圆台的体积为 V_1 , 球的体积为 V_2 ,

$$\begin{aligned} \text{则 } \frac{V_1}{V_2} &= \frac{\frac{1}{3} \times 2r \times (\pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi r_1 r_2)}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{r_1^2 + r_2^2 + r^2}{2r^2} \\ &= \frac{1+16+4}{8} = \frac{21}{8}. \end{aligned}$$

8. 2 [法一: 如图, 设 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O_1 , 连接 O_1A , 因为 $\triangle ABC$ 是边长为

3 的等边三角形, 所以其外接圆半径 $r =$

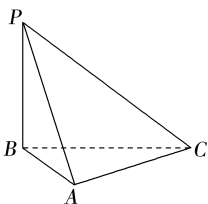
$$O_1A = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 = \sqrt{3}.$$

将三棱锥 $S-ABC$ 补形为正三棱柱 SB_1C_1-ABC , 由题意知 SA 为侧棱, 设球心为 O , 连接 OO_1, OA , 则 $OO_1 \perp$ 平面 ABC , 且

$$OO_1 = \frac{1}{2}SA.$$

又球的半径 $R = OA = 2, OA^2 = OO_1^2 + O_1A^2$,

$$\text{所以 } 4 = \frac{1}{4}SA^2 + 3, \text{ 得 } SA = 2.$$



法二: 如图, 设 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O_1 , 连接 O_1A , 因为 $\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形, 所以其外接圆半径 $r =$

$$O_1A = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 = \sqrt{3}.$$

设三棱锥 $S-ABC$ 的外接球球心为 O , 连接 OO_1 , 则 $OO_1 \perp$ 平面 ABC . 又 $SA \perp$ 平面 ABC , 所以 $OO_1 \parallel SA$, 连接 OS, OA , 由题意知 $OS = OA = 2$. 过 O 作 SA 的垂线, 设垂足为 H , 则四边形 AO_1OH 为矩形, 所以 $OO_1 = AH$, 由 $OS = OA$ 可知 H 为 SA 的中点, 则 $OO_1 = AH = \frac{1}{2}SA$.

所以在 $\text{Rt}\triangle OO_1A$ 中, 由勾股定理可得 $OA^2 = OO_1^2 + O_1A^2$, 即 $4 = \frac{1}{4}SA^2 + 3$, 得 $SA = 2$.]

9. 2.5 [设铁球半径为 r cm, 若两个铁球的球心在竖直方向上, 且分别与两个底面相切, 则铁球球心与圆柱上、下底面的距离均为 r , 此时铁球的半径为 $\frac{9}{4}$ cm.

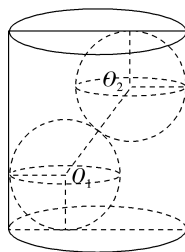


图1

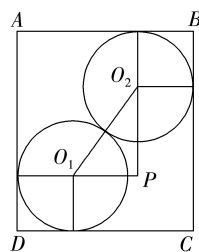


图2

当两球球心不在竖直方向上时, 设两个铁球的球心分别为 O_1, O_2 , 此种情况下, 当铁球半径最大时, 如图 1 所示, 圆柱与两铁球的轴截面如图 2 所示, 其中 $ABCD$ 为圆柱的轴截面, $O_2P \perp AB, O_1P \perp AD$, 则有 $O_2P = 9 - 2r, O_1P = 8 - 2r, O_1O_2 = 2r$, 则有 $(2r)^2 = (8 - 2r)^2 + (9 - 2r)^2$, 即 $4r^2 - 68r + 145 = 0$, 即 $(2r - 29)(2r - 5) = 0$, 解得 $r_1 = 14.5$ (舍去) 或 $r_2 = 2.5$.

因为 $2.5 > \frac{9}{4} = 2.25$, 所以铁球半径的最大值为 2.5 cm.]

课时作业(五十二)

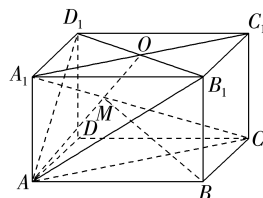
1. B [$\because AB \parallel PQ, BC \parallel QR$, 且 $\angle ABC = 60^\circ$,

$$\therefore \angle PQR = 60^\circ \text{ 或 } 120^\circ.$$

故选 B.]

2. A [如图, 根据题意, 连接 AO, AC ,

则 $A_1C_1 \parallel AC$,



所以 A_1, C_1, C, A 四点共面,

所以 $A_1C \subset$ 平面 ACC_1A_1 ,

又 $M \in A_1C$, 所以 $M \in$ 平面 ACC_1A_1 ,

又 $M \in$ 平面 AB_1D_1 ,

所以点 M 在平面 ACC_1A_1 与平面 AB_1D_1 的交线上,

同理可得点 O 在平面 ACC_1A_1 与平面 AB_1D_1 的交线上,

所以 A, M, O 三点共线, 故 A 正确, B 错误;

由上面分析知 $OM \subset \text{平面 } AB_1D_1$, 又 $DD_1 \not\subset \text{平面 } AB_1D_1$,
 $DD_1 \cap \text{平面 } AB_1D_1 = D_1$,
 $\therefore OM$ 与 DD_1 为异面直线, 故 C 错误;
 连接 BM , 易知 AB_1 与 BM 为异面直线, 故 D 错误.
 故选 A.]

3. B [取 CC_1 的中点 F , 连接 BF, D_1F, EF (图略), 设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 a , 因为 $AB=CD=EF, AB \parallel CD \parallel EF$,

所以四边形 $ABFE$ 为平行四边形,

所以 $BF \parallel AE$,

则 $\angle D_1BF$ (或其补角) 为异面直线 AE 与 BD_1 所成的角,

$$BD_1 = \sqrt{3}a, D_1F = BF = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a,$$

在 $\triangle BD_1F$ 中, 由余弦定理的推论得

$$\cos \angle D_1BF = \frac{D_1B^2 + BF^2 - D_1F^2}{2D_1B \cdot BF} = \frac{3a^2 + \frac{5}{4}a^2 - \frac{5}{4}a^2}{2\sqrt{3}a \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

故选 B.]

4. A [如图, 连接 DM , 取 DM 的中点 P , 连接 PN, PC ,

因为 M, N 分别是 BC 与 AD 的中点,

所以 $NP \parallel AM$,

则 $\angle CNP$ (或其补角) 为异面直线 AM 与 CN 所成的角,

$$\text{又 } AM = CN = \frac{\sqrt{3}}{2}, DM \perp BC,$$

$$\text{所以 } PM = PN = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$PC = \sqrt{PM^2 + CM^2} = \frac{\sqrt{7}}{4},$$

在 $\triangle CPN$ 中, 由余弦定理的推论, 得

$$\cos \angle CNP = \frac{NP^2 + CN^2 - CP^2}{2NP \cdot CN} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{3}.$$

故选 A.]

5. BC

选项	正误	原因
A	×	若 $\alpha \parallel \beta, a \subset \alpha, b \subset \beta$, 则 a 与 b 平行或异面
B	√	若 $a \parallel b, b \subset \alpha$, 则平面 α 内所有与 b 平行的直线都与 a 平行
C	√	若 $\alpha \parallel \beta$, 则平面 α 内所有直线都与 β 平行, 因为 $a \subset \alpha$, 所以 $a \parallel \beta$
D	×	若 $\alpha \cap \beta = b, a \subset \alpha$, 则当 $a \parallel b$ 时, $a \parallel \beta$

故选 BC.]

6. BCD [对于 A, 如图 1, 连接 AB_1, C_1D, BD ,

当 P 为 BC_1 的中点时, $OP \parallel DC_1 \parallel AB_1$, 故 A 不正确;

对于 B, 如图 2, 连接 A_1C, A_1C_1, AC ,

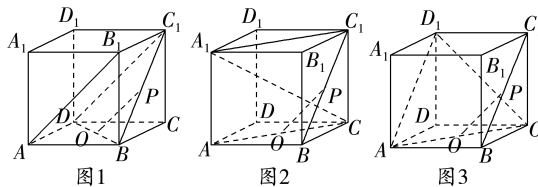
因为 $A_1C \subset \text{平面 } AA_1C_1C, O \in \text{平面 } AA_1C_1C, O \notin A_1C, P \notin \text{平面 } AA_1C_1C$,

所以直线 A_1C 与直线 OP 一定是异面直线, 故 B 正确;

对于 C, 如图 2, 因为 $A_1A \subset \text{平面 } AA_1C_1C, O \in \text{平面 } AA_1C_1C, O \notin A_1A, P \notin \text{平面 } AA_1C_1C$,

所以直线 A_1A 与直线 OP 一定是异面直线, 故 C 正确;

对于 D, 如图 3, 连接 AD_1, D_1C, AC ,



因为 $AD_1 \subset \text{平面 } AD_1C, O \in \text{平面 } AD_1C, O \notin AD_1, P \notin \text{平面 } AD_1C$,

所以直线 AD_1 与直线 OP 一定是异面直线, 故 D 正确.]

7. $\frac{7}{10}$ [如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 连接 BC_1 交 B_1C 于点

O , 取 A_1C_1 的中点 F , 连接 OF , 显然 O 是 BC_1

的中点, 则 $OF \parallel A_1B$, 则 $\angle B_1OF$ (或其补角) 是

A_1B 与 B_1C 所成的角. 在 $\triangle OB_1F$ 中, $B_1F = \sqrt{3}$,

$$OB_1 = \frac{1}{2} B_1C = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{5}, OF =$$

$$\frac{1}{2} A_1B = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$\text{则 } \cos \angle B_1OF = \frac{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2}{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{7}{10}, \text{ 所以直线 } A_1B$$

与直线 B_1C 所成角的余弦值为 $\frac{7}{10}$.]

8. $4\sqrt{3}$ 或 4 [取 BD 的中点 E , 连接 ME, NE .

因为 M, N 分别是 BC, AD 的中点, 所以

$ME \parallel CD$ 且 $ME = \frac{1}{2} CD = 4, NE \parallel AB$ 且

$$NE = \frac{1}{2} AB = 4,$$

可得 $\angle MEN$ (或其补角) 即为 AB 与 CD 所成的角.

因为异面直线 AB 与 CD 所成的角为 60° , 所以 $\angle MEN = 60^\circ$ 或 120° ,

当 $\angle MEN = 120^\circ$ 时, 由余弦定理可知

$$MN = \sqrt{EN^2 + EM^2 - 2 \times EN \times EM \times \cos 120^\circ} = 4\sqrt{3};$$

当 $\angle MEN = 60^\circ$ 时, 由余弦定理可知

$$MN = \sqrt{EN^2 + EM^2 - 2 \times EN \times EM \times \cos 60^\circ} = 4.]$$

9. 证明: (1) 连接 EF, HG , 如图, 因为空间四边形 $ABCD$ 中, H, G 分别是 AD, CD 的中点,

所以 $HG \parallel AC$, 且 $HG = \frac{1}{2} AC$, 又因为 $\frac{CF}{FB} = \frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$,

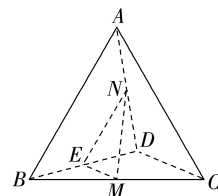
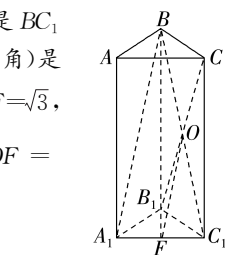
所以 $EF \parallel AC$, 且 $EF = \frac{3}{4} AC$,

所以 $HG \parallel EF$, 且 $HG \neq EF$,

故四边形 $EFGH$ 为梯形.

(2) 由 (1) 知四边形 $EFGH$ 为梯形, 且 EH, FG 是梯形的两腰, 所以 EH, FG 相交于一点.

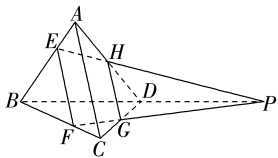
设交点为 P ,



因为 $EH \subset$ 平面 ABD , 所以 $P \in$ 平面 ABD ,

同理 $P \in$ 平面 BCD , 而平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD = BD$, 所以 $P \in BD$,

故点 P 是直线 EH, BD, FG 的公共点, 即直线 EH, BD, FG 相交于一点.



10. 解: (1) 如图, 设 BB_1 的中点为 H , 连接 HF, EH, A_1H , 因为 F 是 CC_1 的中点,

所以 $A_1D_1 \parallel CB \parallel HF$,

$A_1D_1 = CB = HF$,

因此四边形 A_1D_1FH 是平行四边形,

所以 $D_1F \parallel A_1H, D_1F = A_1H$,

因此 $\angle EA_1H$ (或其补角) 是异面直线 A_1E 与 D_1F 所成的角. 因为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, E 是 AB 的中点,

所以 $A_1E = A_1H = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$,

$EH = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,

由余弦定理的推论, 得 $\cos \angle EA_1H = \frac{A_1E^2 + A_1H^2 - EH^2}{2A_1E \cdot A_1H} =$

$$\frac{5 + 5 - 2}{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{4}{5},$$

所以异面直线 A_1E 与 D_1F 所成角的余弦值为 $\frac{4}{5}$.

(2) 因为 $A_1D_1 \parallel HF, HF \subset$ 平面 $A_1D_1E, A_1D_1 \subset$ 平面 A_1D_1E , 所以 $HF \parallel$ 平面 A_1D_1E ,

因此点 H, F 到平面 A_1D_1E 的距离相等,

$$\begin{aligned} V_{\text{三棱锥} A_1-D_1EF} &= V_{\text{三棱锥} F-A_1D_1E} = V_{\text{三棱锥} H-A_1D_1E} \\ &= V_{\text{三棱锥} D_1-A_1EH}, \end{aligned}$$

$$V_{\text{三棱锥} D_1-A_1EH} = \frac{1}{3} D_1A_1 \cdot S_{\triangle A_1EH}$$

$$= \frac{1}{3} \times 2 \times \left(2^2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times 2 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \right) = 1,$$

所以三棱锥 A_1-D_1EF 的体积为 1.

阶段检测(十)

1. D [对于 A, 如图 1, 利用两个底面全等的斜棱柱拼接而成的几何体满足 A 中条件, 但该几何体不是棱柱, A 错误;
对于 B, 如图 2, 利用两个上底面全等, 下底面相似的棱台拼接而成的几何体满足 B 中条件, 但该几何体不是棱台, B 错误;

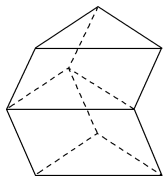


图1

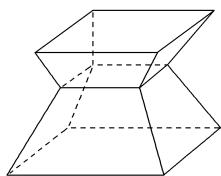


图2

对于 C, 连接圆柱上、下底面圆周上任意两点, 只有连线平行于旋转轴时才是母线, C 错误;

对于 D, 圆台的轴截面是指过圆台轴的平面截取几何体得到的截面, 其形状为等腰梯形, 这是因为圆台由圆锥被平行于底面的平面截得, 轴截面包含上、下底面的直径和母线, 形成对称的等腰梯形, 故圆台的轴截面始终是等腰梯形, 不可能为直角梯形, D 正确. 故选 D.]

2. C [把圆锥侧面沿母线 PA 剪开, 展在同一平面内得扇形 APA' , 连接 AB , 如图,

设扇形 APA' 圆心角大小为 θ ,

则 $12\theta = 2\pi \times 3$,

$$\text{解得 } \theta = \frac{\pi}{2},$$

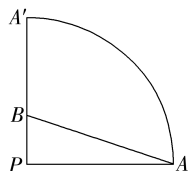
在 $\text{Rt}\triangle PAB$ 中,

$$PB = \frac{1}{3} PA' = 4,$$

$$\text{则 } AB = \sqrt{PB^2 + PA^2} = \sqrt{4^2 + 12^2} = 4\sqrt{10},$$

所以一只蚂蚁从点 A 出发, 沿圆锥侧面绕行一周, 到达点 B , 最短路线长度为 $4\sqrt{10}$.

故选 C.]



3. C [根据题意, 设原图梯形 $ABCD$ 的高为 h ,

直观图梯形 $A'B'C'D'$ 的面积为 30,

则原图的面积 $S = 2\sqrt{2} \times 30 = 60\sqrt{2}$,

原图中, $AB \parallel CD$, 且 $AB = 8, CD = 4$,

则有 $\frac{(8+4)h}{2} = 60\sqrt{2}$, 则 $h = 10\sqrt{2}$.

故选 C.]

4. B [设 $BC = a$, 由“阳马”的定义及 $AC \perp BC$ 可知,

四边形 A_1ACC_1 是矩形, $BC \perp$ 平面 A_1ACC_1 ,

所以“阳马” $B-A_1ACC_1$ 的体积为

$$V_1 = \frac{1}{3} \times AC \times CC_1 \times BC = \frac{1}{3} \times 2 \times 3 \times a = 2a,$$

由“堑堵”的定义可知, $AC \perp BC$, 且 $CC_1 \perp$ 平面 ABC ,

所以“堑堵” $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为

$$V_2 = S_{\triangle ABC} \cdot CC_1 = \frac{1}{2} \times AC \times BC \times CC_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times a \times 3 = 3a,$$

所以“阳马” $B-A_1ACC_1$ 与“堑堵” $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积之比为

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}.$$

故选 B.]

5. C [取 CC_1 的中点 E , 连接 AE ,

DE, A_1D ,

因为在 $\triangle B_1CC_1$ 中,

DE 是中位线,

所以 $DE \parallel B_1C$, 且 $B_1C = 2DE$,

所以 $\angle ADE$ (或其补角) 就是异面直线 AD 与 B_1C 所成的角,

在 $\triangle A_1B_1C_1$ 中, $A_1B_1 = A_1C_1 = 2$,

$\angle B_1A_1C_1 = 120^\circ$,

所以 $A_1D \perp B_1C_1, A_1D = A_1B_1 \cos 60^\circ = 1$, 可得 $AD = \sqrt{AA_1^2 + A_1D^2} = \sqrt{5}$,

在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中, $CE = \frac{1}{2} CC_1 = 1$,

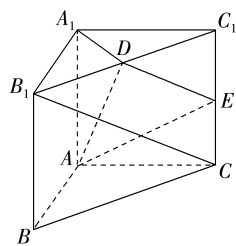
所以 $AE = \sqrt{AC^2 + CE^2} = \sqrt{5}$,

在 $\triangle A_1B_1C_1$ 中, 由余弦定理, 得

$$B_1C_1 = \sqrt{A_1B_1^2 + A_1C_1^2 - 2A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cos 120^\circ} = 2\sqrt{3},$$

所以 $B_1C = \sqrt{BB_1^2 + B_1C^2} = 4$,

可得 $DE = \frac{1}{2} B_1C = 2$,



∴旋转体的表面积 $S=S_1+S_2+S_3+S_5=(4\sqrt{3}+9)\pi a^2$.

(2)由题意知,形成的几何体的体积为一个圆柱的体积减去一个圆锥的体积,

圆柱的体积 $V_1=\pi(2a)^2 \cdot \sqrt{3}a=4\sqrt{3}\pi a^3$,

圆锥的体积 $V_2=\frac{1}{3}\pi a^2 \cdot \sqrt{3}a=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3$,

∴旋转体的体积 $V=V_1-V_2=4\sqrt{3}\pi a^3-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3=\frac{11\sqrt{3}}{3}\pi a^3$.

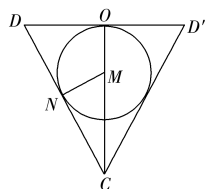
(3)如图,作出圆锥的轴截面,球与圆锥侧面相切,设球心为 M ,球的半径为 R , N 为切点,连接 MN ,

则 $MN \perp CD$, $MN=MO=R$,

则 $\triangle CMN \sim \triangle CDO$, 可得 $\frac{MN}{OD} = \frac{MC}{CD}$,

即 $\frac{R}{a} = \frac{\sqrt{3}a-R}{2a}$, 解得 $R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$,

∴球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^3 = \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi a^3$.



课时作业(五十三)

1. B [由线面平行的性质定理可知 $EF \parallel PB$.]

2. B [由 $\alpha \cap \gamma = l$, $\beta \cap \gamma = m$, $l \parallel m$, 则 α, β 可能相交,

故“ $l \parallel m$ ”推不出“ $\alpha \parallel \beta$ ”,

由 $\alpha \cap \gamma = l$, $\beta \cap \gamma = m$, $\alpha \parallel \beta$, 由面面平行的性质定理知 $l \parallel m$,

故“ $\alpha \parallel \beta$ ”能推出“ $l \parallel m$ ”,

故“ $l \parallel m$ ”是“ $\alpha \parallel \beta$ ”的必要不充分条件.

故选 B.]

3. C [如图,连接 CD , 交 PE 于点 G , 连接 FG , 因为 $AD \parallel$ 平面 PEF , $AD \subset$ 平面 ADC , 平面 $ADC \cap$ 平面 $PEF = FG$, 所以 $AD \parallel FG$.

因为 D, E 分别为棱 PB, BC 的中点, 所以 G 是 $\triangle PBC$ 的重心,

所以 $\frac{AF}{FC} = \frac{DG}{GC} = \frac{1}{2}$.

故选 C.]

4. D [连接 BF (图略), 由于 B, E, F 三点共面, $F \in$ 平面 BEF , $M \notin$ 平面 BEF , EB 不过点 F , 故 MF, EB 为异面直线, 故 A 错误;

连接 B_1E (图略), 由于 B_1, N, E 三点共面, $B_1 \in$ 平面 B_1NE , $A_1 \notin$ 平面 B_1NE , NE 不过点 B_1 , 故 A_1B_1, NE 为异面直线, 故 B 错误;

∵在平行四边形 AA_1B_1B 中, $AM = 2MA_1$,

$BN = 2NB_1$, ∴ $AM \parallel BN$, $AM = BN$,

故四边形 $AMNB$ 为平行四边形,

∴ $MN \parallel AB$ 且 $MN = AB$.

又 $MN \not\subset$ 平面 ABC , $AB \subset$ 平面 ABC ,

∴ $MN \parallel$ 平面 ABC .

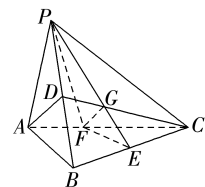
又 $MN \subset$ 平面 $MNEF$, 平面 $MNEF \cap$ 平面 $ABC = EF$,

∴ $MN \parallel EF$,

显然在 $\triangle ABC$ 中, $EF \neq AB$, ∴ $EF \neq MN$,

∴四边形 $MNEF$ 为梯形, 故 C 错误, D 正确.

故选 D.]



5. BC [若 $a \parallel b$ 且 $b \subset \alpha$, 则 $a \parallel \alpha$ 或 $a \subset \alpha$, 故 A 错误; 若 $a \parallel \alpha$ 且 $b \subset \alpha$, 则 $a \parallel b$ 或 a, b 为异面直线, 故 B 正确; 若 $a \parallel b$ 且 $a \parallel \alpha$, 则 $b \parallel \alpha$ 或 $b \subset \alpha$, 故 C 正确; 若 $a \parallel \alpha$ 且 $b \parallel \alpha$, 则 $a \parallel b$ 或 a, b 相交或异面, 故 D 错误.]

6. ABD [连接 OQ , 因为 O 为平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点, 所以 O 为 AC 的中点,

又 Q 为 PA 的中点,

所以 $OQ \parallel PC$,

又 $PC \subset$ 平面 PCD , $OQ \not\subset$ 平面 PCD ,

所以 $OQ \parallel$ 平面 PCD , 故 A 正确;

同理 $OQ \subset$ 平面 BDQ , $PC \not\subset$ 平面 BDQ ,

所以 $PC \parallel$ 平面 BDQ , 故 B 正确;

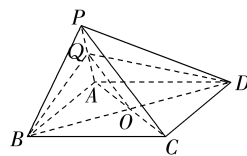
由四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

所以 $AB \parallel CD$, $AB \subset$ 平面 PAB , $CD \not\subset$ 平面 PAB ,

故 $CD \parallel$ 平面 PAB , 故 D 正确;

又 AQ 与平面 PCD 相交于点 P , 故 C 错误.

故选 ABD.]



7. $\frac{5}{2}$ [∵ $\alpha \parallel \beta$, $\triangle PAB$ 所在的平面与 α, β 分别交于 CD, AB ,

∴ $CD \parallel AB$, 则 $\frac{PC}{PA} = \frac{CD}{AB}$,

∴ $AB = \frac{PA \times CD}{PC} = \frac{5 \times 1}{2} = \frac{5}{2}$.]

8. 点 M 与点 H 重合 (点 M 在线段 FH 上即可)

[连接 HN, FH, FN (图略),

则 $FH \parallel DD_1$, $HN \parallel BD$, 易知 $FH \parallel$ 平面 B_1BDD_1 , $HN \parallel$ 平面 B_1BDD_1 ,

∵ $FH \cap HN = H$, $FH, HN \subset$ 平面 FHN ,

∴平面 $FHN \parallel$ 平面 B_1BDD_1 , 只需 $M \in FH$,

则 $MN \subset$ 平面 FHN ,

∴ $MN \parallel$ 平面 B_1BDD_1 .]

9. 证明: (1) 取 B_1D_1 的中点 O_1 , 连接 CO_1, A_1O_1 ,

∵ $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是直四棱柱,

∴ $A_1O_1 \parallel OC$ 且 $A_1O_1 = OC$,

∴四边形 A_1OCO_1 为平行四边形,

∴ $A_1O \parallel O_1C$, 又 $O_1C \subset$ 平面 B_1CD_1 , A_1O

$\not\subset$ 平面 B_1CD_1 , ∴ $A_1O \parallel$ 平面 B_1CD_1 .

(2) ∵ $BB_1 \parallel DD_1$ 且 $BB_1 = DD_1$,

∴四边形 BB_1D_1D 是平行四边形,

∴ $BD \parallel B_1D_1$,

∵ $BD \not\subset$ 平面 B_1CD_1 , $B_1D_1 \subset$ 平面 B_1CD_1 ,

∴ $BD \parallel$ 平面 B_1CD_1 ,

由 (1) 得 $A_1O \parallel$ 平面 B_1CD_1 ,

∵ $BD \cap A_1O = O$, $BD, A_1O \subset$ 平面 A_1BD ,

∴平面 $A_1BD \parallel$ 平面 B_1CD_1 .

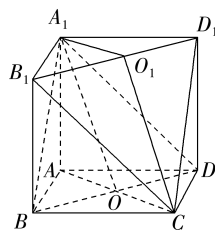
(3) 由 (2) 得 $BD \parallel B_1D_1$,

∵ $B_1D_1 \not\subset$ 平面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$,

∴ $B_1D_1 \parallel$ 平面 $ABCD$,

∵ $B_1D_1 \subset$ 平面 B_1CD_1 , 平面 $B_1CD_1 \cap$ 平面 $ABCD = l$,

∴ $B_1D_1 \parallel l$.



10. (1)解: 直线 AG 与直线 EF 是异面直线, 直线 CG 与平面 ABB_1A_1 相交.

(2)证明: 取 AC 的中点 H , 连接 GH, EH , 如图,

$\because E, H, G$ 分别是棱 AB, AC, B_1C_1 的中点,

$\therefore EH \parallel BC$ 且 $EH = \frac{1}{2}BC, B_1G \parallel BC$

且 $B_1G = \frac{1}{2}BC,$

$\therefore EH \parallel B_1G$ 且 $EH = B_1G,$

$\therefore$ 四边形 $EHGB_1$ 是平行四边形,

$\therefore EB_1 \parallel GH,$

$\because GH \subset$ 平面 $ACG, B_1E \not\subset$ 平面 $ACG,$

$\therefore B_1E \parallel$ 平面 $ACG.$

(3)当点 N 为棱 CC_1 的中点时, 平面 $NEF \parallel$ 平面 $A_1BC_1.$

证明: 连接 NF, EN , 如图,

$\because E, F$ 分别是棱 AB, BC 的中点,

$\therefore EF \parallel AC$

$\because AC \parallel A_1C_1,$

$\therefore EF \parallel A_1C_1,$

$\because EF \not\subset$ 平面 $A_1BC_1, A_1C_1 \subset$ 平面 $A_1BC_1,$

$\therefore EF \parallel$ 平面 $A_1BC_1,$

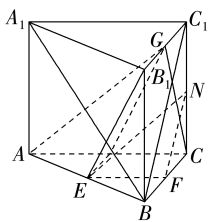
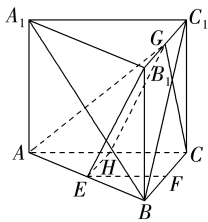
$\because N, F$ 分别是棱 CC_1, BC 的中点, $\therefore NF \parallel BC_1,$

$\because NF \not\subset$ 平面 $A_1BC_1, BC_1 \subset$ 平面 $A_1BC_1,$

$\therefore NF \parallel$ 平面 $A_1BC_1,$

$\because EF \cap NF = F, EF, NF \subset$ 平面 $NEF,$

$\therefore$ 平面 $NEF \parallel$ 平面 $A_1BC_1.$



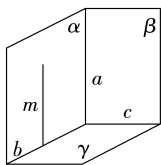
课时作业(五十四)

1. D [当点在交线上时, 若 $\alpha \perp \beta$, 则 l 与 β 的位置关系可能是 l 与 β 相交或 $l \subset \beta$, 故充分性不成立;

当点在交线上时, 若 $l \perp \beta$, 此时 $l \subset \alpha$ 或 $l \not\subset \alpha$, 所以 α, β 不一定垂直, 故必要性不成立.

所以“ $\alpha \perp \beta$ ”是“ $l \perp \beta$ ”的既不充分也不必要条件. 故选 D.]

2. C [对于 A, 由 $\alpha \perp \beta, a \subset \alpha$, 设 $\alpha \cap \beta = l$, 当 $a \parallel l$ 时, 可得 $a \parallel \beta$, 故 A 错误; 对于 B, 由 $a \perp \beta, \alpha \perp \beta$ 可得 $a \parallel \alpha$ 或 $a \subset \alpha$, 故 B 错误; 对于 C, 如图, 设 $\alpha \cap \gamma = b, \beta \cap \gamma = c$, 在平面 α 内作不与 a 重合的直线 m , 使 $m \perp b$, 因为 $\alpha \perp \gamma$, 则 $m \perp \gamma$, 因为 $\beta \perp \gamma, m \not\subset \beta$, 则 $m \parallel \beta$, 因为 $\alpha \cap \beta = a$, 则 $m \parallel a$, 于是 $a \perp \gamma$, 故 C 正确; 对于 D, 当 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = a, b \perp a$ 时, 若 $b \not\subset \alpha$, 且 $b \not\subset \beta$, 则 b 可以和平面 α, β 成任意角度, 故 D 错误.]



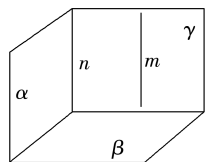
3. D [对于 A 选项, 若 $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$, 则 α, β 平行或相交, 与 A 选项不符合, 所以 A 不正确;

对于 B 选项, 若 $m \perp n, m \subset \alpha, n \subset \beta$, 则 α, β 平行或相交, 与 B 选项不符合, 所以 B 不正确;

对于 C 选项, 若 $m \perp n, \alpha \cap \beta = m, n \subset \beta$, 则 α, β 斜交或垂直, 与 C 选项不符合, 所以 C 不正确;

对于 D 选项, 如图所示,

因为 $m \parallel \alpha$, 过直线 m 作平面 γ , 使得 $\alpha \cap \gamma = n$,



由线面平行的性质定理可得 $m \parallel n$,

因为 $m \perp \beta$, 则 $n \perp \beta$, 因为 $n \subset \alpha$, 故 $\alpha \perp \beta$, 而反过来不成立, D 满足要求.

故选 D.]

4. D [对于 B, 如图,

因为 $AD \parallel BC, AD = AB, \angle BAD = 90^\circ$,

所以 $\angle ABD =$

$\angle ADB = 45^\circ,$

又因为 $\angle BCD = 45^\circ, AD \parallel BC$,

所以 $\angle ADC = 135^\circ,$

所以 $\angle BDC = \angle ADC - \angle ADB = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ,$

所以 $CD \perp BD$, 所以 B 正确;

对于 A, 由 B 选项知 $CD \perp BD$,

又因为平面 $ABD \perp$ 平面 $BCD, CD \subset$ 平面 BCD , 平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD = BD$,

所以 $CD \perp$ 平面 ABD ,

因为 $AB \subset$ 平面 ABD ,

所以 $CD \perp AB$, 所以 A 正确;

对于 C, 由选项 A 知, $CD \perp$ 平面 ABD ,

因为 $CD \subset$ 平面 ADC ,

所以平面 $ADC \perp$ 平面 ABD , 所以 C

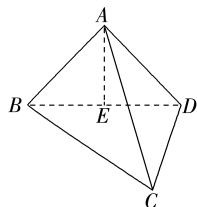
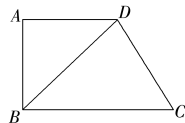
正确;

对于 D, 如图, 过点 A 作 $AE \perp BD$, 垂足为 E,

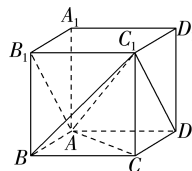
因为平面 $ABD \perp$ 平面 $BCD, AE \subset$ 平面 ABD , 平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD = BD$,

所以 $AE \perp$ 平面 BCD ,

显然 $AE \not\subset$ 平面 ABC , 所以平面 ABC 与平面 BDC 不垂直, 所以 D 错误. 故选 D.]



5. ACD [如图所示,



对于 A, 因为 $CD \parallel AB$, 则 AB_1 与 CD 所成的角为 $\angle BAB_1 = 45^\circ$, A 正确;

对于 B, 因为 $AB \parallel A_1B_1$,

所以 AC_1 与 A_1B_1 所成的角为 $\angle BAC_1$ 或其补角,

因为 $AB = 2, BC_1 = \sqrt{2}BC = 2\sqrt{2}, AC_1 = \sqrt{3}AB = 2\sqrt{3}$, 所以 $AB^2 + BC_1^2 = AC_1^2$,

则 $AB \perp BC_1$, 所以 $\tan \angle BAC_1 = \frac{BC_1}{AB} = \sqrt{2}$, 故 $\angle BAC_1 \neq 45^\circ$, B

错误;

对于 C, 因为 $B_1C_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 故直线 AC_1 与平面 ABB_1A_1 所成的角为 $\angle B_1AC_1$,

因为 $AB_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 则 $B_1C_1 \perp AB_1$,

所以 $\sin \angle B_1AC_1 = \frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

因此直线 AC_1 与平面 ABB_1A_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, C

正确;

对于D, 因为 $AD \perp$ 平面 CC_1D_1D , $CD, C_1D \subset$ 平面 CC_1D_1D , 则 $AD \perp CD, AD \perp C_1D$, 所以二面角 C_1-AD-B 的平面角为 $\angle CDC_1 = 45^\circ$, D 正确. 故选 ACD.]

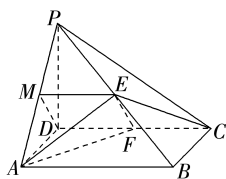
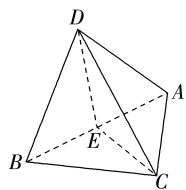
6. **BCD** [对于A, 假设 $PB \perp AC$,
 $\because BC \perp AC, PB \cap BC = B, PB, BC \subset$ 平面 PBC ,
 $\therefore AC \perp$ 平面 PBC ,
 $\therefore PC \subset$ 平面 $PBC, \therefore AC \perp PC$,
 $\therefore PA \perp$ 平面 $ABC, AC \subset$ 平面 $ABC, \therefore AC \perp PA$,
在 $\triangle PCA$ 中, $PA \perp AC, PC \perp AC$, 矛盾, 假设不成立, 故 A 错误;
对于B, $\because PA \perp$ 平面 $ABC, BC \subset$ 平面 $ABC, \therefore BC \perp PA$,
 $\because BC \perp AC, PA \cap AC = A, PA, AC \subset$ 平面 PAC ,
 $\therefore BC \perp$ 平面 PAC , 又 $PC \subset$ 平面 PAC ,
 $\therefore PC \perp BC$, 故 B 正确;
对于C, $\because PA \perp$ 平面 $ABC, PA \subset$ 平面 $PAC, \therefore$ 平面 $ABC \perp$ 平面 PAC , 故 C 正确;
对于D, 由选项B的分析可知 $BC \perp$ 平面 PAC ,
 $\therefore BC \subset$ 平面 $PBC, \therefore$ 平面 $PBC \perp$ 平面 PAC , 故 D 正确.
故选 BCD.]

7. $\frac{1}{3}$ [连接 A_1C_1, AC (图略), 由题意知 $\angle AC_1A_1$ 为 AC_1 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的角.
因为 $AB = BC = 2$, 所以 $A_1C_1 = AC = 2\sqrt{2}$,
又 $AA_1 = 1$, 所以 $AC_1 = 3$,
所以 $\sin \angle AC_1A_1 = \frac{AA_1}{AC_1} = \frac{1}{3}$.]

8. 2 [如图, 取 AB 的中点 E , 连接 DE, CE ,
 $\because BC = AC, \therefore CE \perp AB$,
又平面 $ADB \perp$ 平面 ABC , 且平面 $ADB \cap$ 平面 $ABC = AB, CE \subset$ 平面 ABC ,
 $\therefore CE \perp$ 平面 ADB , 又 $DE \subset$ 平面 $ADB, \therefore CE \perp DE$,
 $\because AB = 2, AC = BC = \sqrt{2}$,
 $\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2$, 则 $AC \perp BC$, 可得 $CE = 1$,
在等边三角形 ADB 中, 由 $AB = 2$, 求得 $DE = \sqrt{3}$,
在 $Rt\triangle DEC$ 中, 有 $DC = \sqrt{DE^2 + CE^2} = \sqrt{3+1} = 2$.]

9. **证明**: 因为 $PA \perp$ 平面 ABC , 且 $BC \subset$ 平面 ABC , 所以 $PA \perp BC$.
因为 AB 是圆 O 的直径, 所以 $BC \perp AC$.
又 $PA \cap AC = A, PA, AC \subset$ 平面 PAC ,
所以 $BC \perp$ 平面 PAC .
因为 $AE \subset$ 平面 PAC , 所以 $BC \perp AE$.
又 $PC \perp AE$, 且 $PC \cap BC = C, PC, BC \subset$ 平面 PBC , 所以 $AE \perp$ 平面 PBC .

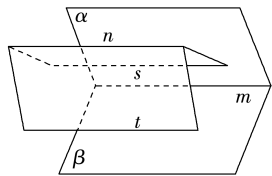
10. (1) **证明**: 如图, 取 AP 的中点 M , 连接 MD, ME .
因为 E, M, F 分别是 PB, PA, CD 的中点, 四边形 $ABCD$ 是矩形,
所以 $ME \parallel AB, ME = \frac{1}{2} AB$, 且
 $DF \parallel AB, DF = \frac{1}{2} AB$, 所以 $ME \parallel DF, ME = DF$,



所以四边形 $EFDM$ 为平行四边形, 所以 $EF \parallel MD$.
又 $MD \subset$ 平面 $PAD, EF \not\subset$ 平面 PAD , 所以 $EF \parallel$ 平面 PAD .
(2) **证明**: 因为 $PD = AD = 1, M$ 为 AP 的中点, 所以 $DM \perp AP$,
因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD, AB \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PD \perp AB$, 因为四边形 $ABCD$ 是矩形, 所以 $AD \perp AB$,
又 $PD \cap AD = D, PD, AD \subset$ 平面 PAD , 所以 $AB \perp$ 平面 PAD ,
又因为 $DM \subset$ 平面 PAD , 所以 $AB \perp DM$,
又因为 $AB \cap AP = A, AB, AP \subset$ 平面 ABP ,
所以 $DM \perp$ 平面 ABP ,
由(1)知 $EF \parallel MD$, 所以 $EF \perp$ 平面 PAB .
(3) **解**: 因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD, AB, AD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PD \perp AB, PD \perp AD$,
又 $PD = AD = 1$, 所以 $PA = \sqrt{2}$,
因为 $PB \perp$ 平面 $AEF, AE \subset$ 平面 AEF , 所以 $PB \perp AE$,
又 E 是 PB 的中点, 所以 $AB = PA = \sqrt{2}, CF = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
所以直角梯形 $ABCF$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \right) \times 1 = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.
因为点 E 到平面 $ABCF$ 的距离 $d = \frac{1}{2} PD = \frac{1}{2}$,
所以 $V_{\text{四棱锥}E-ABCF} = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

阶段检测(十一)

1. **D** [因为 $AD \perp BC, AD \perp BD, BC \cap BD = B, BC, BD \subset$ 平面 BDC , 所以 $AD \perp$ 平面 BDC . 又 $AD \subset$ 平面 ADC , 所以平面 $ADC \perp$ 平面 DBC . 故选 D.]
2. **B** [根据题意, 分两步来判断:
①由线面垂直的判定, 当 $a \subset \alpha, l \perp a$ 时, 不足以判断 $l \perp \alpha$, 故由“ $l \perp a$ ”推不出“ $l \perp \alpha$ ”;
② $a \subset \alpha$, 若 $l \perp \alpha$, 由线面垂直的定义可得, $l \perp a$, 即“ $l \perp \alpha$ ”是“ $l \perp a$ ”的必要条件, 则“ $l \perp a$ ”是“ $l \perp \alpha$ ”的必要不充分条件, 故选 B.]
3. **C** [对于A, B, 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$, 则 m, n 可能平行、相交或异面, 故A, B错误.
对于C, D, 若 $m \parallel \alpha, n \perp \alpha$, 则 $m \perp n$, 且 m 与 n 相交或异面, 故D错误. 故选 C.]
4. **A** [对①, 当 $n \subset \alpha$ 时, 因为 $m \parallel n, m \subset \beta$, 则 $n \parallel \beta$;
当 $n \not\subset \beta$ 时, 因为 $m \parallel n, m \subset \alpha$, 则 $n \parallel \alpha$;
当 n 既不在 α 内也不在 β 内时, 因为 $m \parallel n, m \subset \alpha, m \subset \beta$, 则 $n \parallel \alpha$ 且 $n \parallel \beta$, 故①正确;
对②, 若 $m \perp n$, 则 n 与 α, β 不一定垂直, 故②错误;
对③, 过直线 n 分别作两平面与 α, β 分别相交于直线 s 和直线 t ,
因为 $n \parallel \alpha$, 过直线 n 的平面与平面 α 的交线为直线 s , 则根据线面平行的性质定理知 $n \parallel s$,
同理可得 $n \parallel t$, 则 $s \parallel t$, 因为 $s \not\subset$ 平面 $\beta, t \subset$ 平面 β , 则 $s \parallel$ 平面 β ,
因为 $s \subset$ 平面 $\alpha, \alpha \cap \beta = m$, 则 $s \parallel m$, 又因为 $n \parallel s$, 则 $m \parallel n$, 故③正确;



对④,若 $\alpha \cap \beta = m$, n 与 α 和 β 所成的角相等,如果 $n \parallel \alpha, n \parallel \beta$, 则 $m \parallel n$, 故④错误.

综上只有①③正确,故选 A.]

5. A [如图,取 BE 的中点 M , 连接 DM, AM ,

由 $PD=BD$, 可得 D 为 PB 的中点,

又因为 M 为 BE 的中点,

可得 $MD \parallel PE$,

又因为 $MD \not\subset$ 平面 PEF , $PE \subset$ 平面 PEF , 可得 $MD \parallel$ 平面 PEF ,

又由于 $AD \parallel$ 平面 PEF , 且 $AD \cap MD=D$, $AD, MD \subset$ 平面 ADM ,

可得平面 $PEF \parallel$ 平面 ADM , 由 $AM \subset$ 平面 ADM ,

可得 $AM \parallel$ 平面 PEF ,

又由于 $AM \subset$ 平面 ABC , 平面 $ABC \cap$ 平面 $PEF = EF$, 可得

$AM \parallel EF$, 又因为 $AF = \frac{1}{2} FC$,

可得 $ME = \frac{1}{2} EC$, 可得 $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$, 故 $\lambda = \frac{1}{2}$.

故选 A.]

6. D [由题意知 $\triangle PAB$ 为正三角形, 因为 $PC^2 + PD^2 = CD^2$, 所以

$PC \perp PD$. 如图, 分别取 AB, CD

的中点 E, F , 连接 PE, EF, PF , 则

$PE = 2\sqrt{3}, PF = 2, EF = 4$, 于是

$PE^2 + PF^2 = EF^2$, 所以 $PE \perp PF$. 过

点 P 作 $PG \perp EF$, 垂足为 G . 易知 $CD \perp PF, CD \perp EF, EF, PF$

$\subset$ 平面 PEF , 且 $EF \cap PF = F$, 所以 $CD \perp$ 平面 PEF . 又 $PG \subset$

平面 PEF , 所以 $CD \perp PG$. 又 $PG \perp EF, CD, EF \subset$ 平面 $ABCD$,

$CD \cap EF = F$, 所以 $PG \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 PG 为四棱锥

$P-ABCD$ 的高. 由 $\frac{1}{2} PE \cdot PF = \frac{1}{2} EF \cdot PG$, 得 $PG = \frac{PE \cdot PF}{EF} =$

$\frac{2\sqrt{3} \times 2}{4} = \sqrt{3}$. 故选 D.]

7. BC [由题意, 底面 $ABCD$ 不是菱形, 故 $AC \perp BD$ 不成立,

因为 $CC_1 \perp$ 平面 $ABCD, BD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $CC_1 \perp BD$,

假设 $AC_1 \perp BD$, 由于 $CC_1 \cap AC_1 = C_1, CC_1, AC_1 \subset$ 平面

ACC_1 , 所以 $BD \perp$ 平面 ACC_1 , 又 $AC \subset$ 平面 ACC_1 , 所以 $AC \perp$

BD , 矛盾, 假设不成立, 即 $AC_1 \perp BD$ 不成立, 故 A 错误;

由于 $B_1C = \sqrt{BC^2 + B_1B^2} = \sqrt{2} = A_1B_1$,

在长方体中, 有 $B_1C = A_1B_1 = CD = A_1D$,

由于 $CD \perp$ 平面 $A_1D_1DA, A_1D \subset$ 平面 A_1D_1DA , 所以 $CD \perp A_1D$,

由于 $A_1B_1 \parallel CD$, 所以四边形 A_1B_1CD 是正方形,

所以 $A_1C \perp B_1D$, 故 B 正确;

由于 $AB \parallel CD$, 所以 $AB \perp A_1D$,

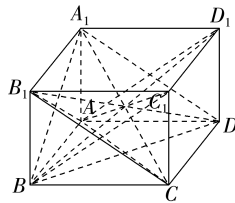
由于四边形 A_1D_1DA 是正方形, 所以 $AD_1 \perp A_1D$,

由于 $AB \cap AD_1 = A$, 且 $AB, AD_1 \subset$ 平面 ABD_1 ,

所以 $A_1D \perp$ 平面 ABD_1 , 故 C 正确;

由于四边形 A_1B_1BA 不是菱形, 所以 $AB_1 \perp A_1B$ 不成立,

由线面垂直的性质可知, $AB_1 \perp$ 平面 A_1BD 不成立, 故 D 错误.



故选 BC.]

8. AD [如图所示, 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $PA \perp CD$, 又因为底面 $ABCD$ 是矩

形, 所以 $CD \perp AD$, 又 $PA \cap AD = A$, 所以

$CD \perp$ 平面 PAD , 所以 $CD \perp PD$, 故 A 正确;

因为 $CD \parallel AB, CD \perp$ 平面 PAD , 所以

$AB \perp$ 平面 PAD , 又 $PC \cap$ 平面 $PAD = P$, 所以 AB 与 PC 不垂

直, 故 B 错误; 因为底面 $ABCD$ 是矩形, 所以 BD 与 AC 不一定

垂直, 则 BD 与平面 PAC 不一定垂直, 所以平面 PBD 与平面

PAC 不一定垂直, 故 C 错误; 因为 E, F 分别是棱 PA, PB 的

中点, 所以 $EF \parallel AB$, 又 $AB \parallel CD$, 所以 $EF \parallel CD$, 所以 $E, F, C,$

D 四点共面, 故 D 正确. 故选 AD.]

9. $\frac{\sqrt{21}}{7}$ [如图, 取 VD 的中点 E , 连接

AE, BE , 则 $AE \perp VD$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, $\therefore AB$

$\perp AD$.

又平面 $VAD \perp$ 平面 $ABCD, AB \subset$ 平面 $ABCD$, 平面 $VAD \cap$ 平面

$ABCD = AD$,

$\therefore AB \perp$ 平面 VAD , 则 $AB \perp AV$,

$\therefore \angle VAB = 90^\circ$.

$\because \triangle VAD$ 是正三角形, 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore$ 由勾股定理, 可知 $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{AB^2 + VA^2} =$

$VB, \therefore BE \perp VD$,

$\therefore \angle AEB$ 就是所求二面角的平面角.

在 $Rt\triangle BAE$ 中, $\angle BAE = 90^\circ$,

$AE = \frac{\sqrt{3}}{2} AD = \frac{\sqrt{3}}{2} AB, BE = \frac{\sqrt{7}}{2} AB$,

$\therefore \cos \angle AEB = \frac{AE}{BE} = \frac{\sqrt{21}}{7}$,

即所求二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$.]

10. 2 或 34 [$\because$ 平面 $\alpha \parallel$ 平面 $\beta, A, C \in \alpha, B, D \in \beta$, 直线 AB 与

CD 交于点 P ,

$\therefore AB, CD$ 共面, 且 $AC \parallel BD$,

①若点 P 在平面 α, β 的外部,

$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{CP}{PD}$,

$\therefore AP = 8, BP = 9, CP = 16$,

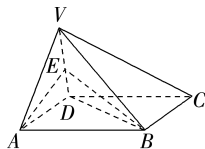
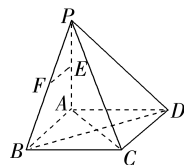
$\therefore \frac{8}{9} = \frac{16}{PD}$, 解得 $PD = 18$,

$\therefore CD = PD - PC = 18 - 16 = 2$.

②若点 P 在平面 α, β 之间,

则 $\frac{AP}{BP} = \frac{CP}{PD}$, 即 $\frac{8}{9} = \frac{16}{PD}$, 解得 $PD = 18$,

则 $CD = CP + PD = 18 + 16 = 34$.]



11. 证明: (1) 如图, 连接 EC , $\because BC = \frac{1}{2}AD$, E 为棱 AD 的中点,

$$\therefore BC = AE,$$

又 $\because AD \parallel BC$, $\therefore$ 四边形 $AECB$ 为平行四边形, $\therefore AB \parallel CE$,

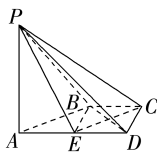
又 $\because CE \subset$ 平面 PCE , $AB \not\subset$ 平面 PCE ,

$\therefore AB \parallel$ 平面 PCE .

(2) $\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$,

$$\therefore PA \perp BD,$$

如图, 连接 BE , 由题意知 $AD \parallel BC$, E 为棱



AD 的中点, $BC = \frac{1}{2}AD = 1$,

知 $BC \parallel DE$, 且 $BC = DE$, 则四边形 $BCDE$ 为平行四边形,

$\because AD \perp DC$, $\therefore DE \perp CD$, 又 $BC = CD = 1$,

所以平行四边形 $BCDE$ 为正方形,

$$\therefore BD \perp EC,$$

又 $AB \parallel EC$, $\therefore BD \perp AB$, 又 $PA \cap AB = A$, $PA, AB \subset$ 平面 PAB , $\therefore BD \perp$ 平面 PAB , 又 $BD \subset$ 平面 PBD ,

$\therefore$ 平面 $PAB \perp$ 平面 PBD .

12. (1) 证明: 由题意得, $EF \parallel MC$, 且 $EF = MC$, 所以四边形 $EFCM$ 是平行四边形, 所以 $EM \parallel FC$.

又 $FC \subset$ 平面 BCF , $EM \not\subset$ 平面 BCF , 所以 $EM \parallel$ 平面 BCF .

(2) 解: 取 DM 的中点 O , 连接 OA, OE (图略), 因为 $AB \parallel MC$, 且 $AB = MC$, 所以四边形 $AMCB$ 是平行四边形, 所以 $AM = BC = \sqrt{10}$,

又 $AD = \sqrt{10}$, 故 $\triangle ADM$ 是等腰三角形, 同理 $\triangle EDM$ 是等边三角形, 可得 $OA \perp DM$, $OE \perp DM$, $OA = \sqrt{AD^2 - \left(\frac{DM}{2}\right)^2} = 3$,

$$OE = \sqrt{ED^2 - \left(\frac{DM}{2}\right)^2} = \sqrt{3}, \text{ 又 } AE = 2\sqrt{3}, \text{ 所以 } OA^2 + OE^2 = AE^2, \text{ 故 } OA \perp OE.$$

又 $OA \perp DM$, $OE \cap DM = O$, $OE, DM \subset$ 平面 EDM , 所以 $OA \perp$ 平面 EDM .

$$\text{易知 } S_{\triangle EDM} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

$$\text{在 } \triangle ADE \text{ 中, } \cos \angle DEA = \frac{4+12-10}{2 \times 2 \times 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{所以 } \sin \angle DEA = \frac{\sqrt{13}}{4}, S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{13}}{4} = \frac{\sqrt{39}}{2}.$$

设点 M 到平面 ADE 的距离为 d , 由 $V_{\text{三棱锥 } M-ADE} = V_{\text{三棱锥 } A-EDM}$,

$$\text{得 } \frac{1}{3} S_{\triangle ADE} \cdot d = \frac{1}{3} S_{\triangle EDM} \cdot OA, \text{ 得 } d = \frac{6\sqrt{13}}{13},$$

$$\text{故点 } M \text{ 到平面 } ADE \text{ 的距离为 } \frac{6\sqrt{13}}{13}.$$

课时作业(五十五)

1. C [对于 A, 由向量的加法法则可知, $a - b = -(b + c) + (a + c)$, 所以 $\{a - b, b + c, a + c\}$ 不能构成空间的一个基底, 故 A 错误;

对于 B, 三个向量 a, b, c 中任意两个一定共面, 但它们三个却不一定共面, 故 B 错误;

对于 C, 已知 $\{a, b, c\}$ 是空间的一个基底, 若 $m = a + c$, 则 $\{a, b, a + c\}$ 可以作为基底, 则 $\{a, b, m\}$ 也是空间的一个基底, 故 C 正确;

对于 D, 只有当 a, b, c 不共面时, 空间任意一向量 p 才能表示为 $p = xa + yb + zc$, 故 D 错误. 故选 C.]

2. C [因为 P, A, B, C 四点共面, 所以 $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$ 共面,

不妨设 $\overrightarrow{PC} = x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} = (2x - y, x + 2y, -3x + 3y) = (\lambda, 6, -9)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} 2x - y = \lambda, \\ x + 2y = 6, \\ -3x + 3y = -9, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = 4, \\ y = 1, \\ \lambda = 7. \end{cases}$$

故选 C.]

3. A [连接 EC, ED , 如图所示,

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AE} +$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} (\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED}) = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{6} (\overrightarrow{EC} +$$

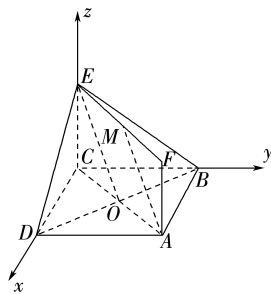
$$\overrightarrow{ED}) = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{6} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} -$$

$$\overrightarrow{AE}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} +$$

$$\frac{1}{6}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{6}\mathbf{b} + \frac{1}{6}\mathbf{c}.$$

故选 A.]

4. C [设 AC, BD 交于点 O , 连接 OE ,



$\because$ 正方形 $ABCD$ 与矩形 $ACEF$ 所在平面互相垂直, $AB = \sqrt{2}$,

$AF = 1$, M 在 EF 上, 且 $AM \parallel$ 平面 BDE ,

$\therefore AM \parallel OE$, 又 $AO \parallel EM$, $\therefore$ 四边形 $OAME$ 是平行四边形,

$\therefore M$ 是 EF 的中点,

$\therefore E(0, 0, 1), F(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$,

$\therefore M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$. 故选 C.]

5. D [由题意得 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = p + n$, $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{m^2 + n^2} = 1$,

$$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{p^2 + n^2} = 1,$$

$$|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3},$$

$$\therefore p + n = 1 \times \sqrt{3} \times \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\because p^2 + n^2 = 1, \therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = np = \frac{(p+n)^2 - (p^2 + n^2)}{2} =$$

$$-\frac{1}{8},$$

则向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 夹角的余弦值为

$$\cos \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} = np = -\frac{1}{8}.$$

故选 D.]

6. C [由题意得 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1M} = \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1C_1}) = \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$,

所以 $\overrightarrow{AM}^2 = \overrightarrow{AA_1}^2 + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 + \overrightarrow{AA_1} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$,

所以 $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{\overrightarrow{AM}^2}$

$= \sqrt{\overrightarrow{AA_1}^2 + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 + \overrightarrow{AA_1} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})}$

$= \sqrt{\overrightarrow{AA_1}^2 + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AC}}$

$= \sqrt{2^2 + \frac{1}{4}(2^2 + 2^2 + 0) + 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 2 \times \frac{1}{2}}$

$= \sqrt{10}$.

故选 C.]

7. BCD [空间向量 $\mathbf{a} = (2, 2, 2)$, $\mathbf{b} = (1, -1, 1)$, $\mathbf{c} = (1, 7, 1)$,
对于 A, 若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 则存在 $\lambda \in \mathbf{R}$ 使得 $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$, 即 $2 = \lambda, 2 = -\lambda, 2 = \lambda$, 无解, 故 A 错误;

对于 B, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 - 2 + 2 = 2$, 故 B 正确;

对于 C, $|\mathbf{a}| = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$, 故 C 正确;

对于 D, 由选项 A 可知 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线, 故若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是共面向量, 则存在 $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ 使得 $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \lambda(2, 2, 2) + \mu(1, -1, 1) = (2\lambda + \mu, 2\lambda - \mu, 2\lambda + \mu)$,

即 $2\lambda + \mu = 1, 2\lambda - \mu = 7$, 解得 $\lambda = 2, \mu = -3$, 故 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是共面向量, D 正确.

故选 BCD.]

8. ABD [对于 A, $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1})$, 故 A 正确;

对于 B, 不妨设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AC} = \mathbf{b}, \overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c}$, 则 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 为空间的一个基底.

则依题意知 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1, |\mathbf{c}| = 2, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 1, \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = -1$,

由选项 A 可得 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$,

则 $|\overrightarrow{AO}|^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) = \frac{3}{2}$,

即 $|\overrightarrow{AO}| = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 故 B 正确;

对于 C, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, 故 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{2}(-1 + 1 + 1 + 1) = 1 \neq 0$, 故 C 错误;

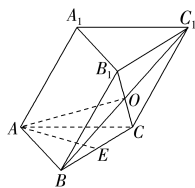
对于 D, 如图, 取 BC 的中点 E , 连接 AE ,

则 $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$,

因为 $AB = AC$, E 为 BC 的中点, 所以 $AE \perp BC$,

又 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = \frac{1}{2}(-1 + 1) = 0$, 故有 $AE \perp BB_1$,

因为 $BC \cap BB_1 = B, BC, BB_1 \subset \text{平面 } B_1BCC_1$, 所以 $AE \perp \text{平面 } B_1BCC_1$,



又 $AE \subset \text{平面 } ABC$,

所以平面 $ABC \perp \text{平面 } B_1BCC_1$, 故 D 正确.

故选 ABD.]

9. $(-10, 1, 16)$ 2 [因为 $\mathbf{a} = (-3, 2, 5), \mathbf{b} = (1, 5, -1)$, 所以 $3\mathbf{a} - \mathbf{b} = (-9, 6, 15) - (1, 5, -1) = (-10, 1, 16), \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -3 + 10 - 5 = 2$.]

10. $\frac{1}{8}$ [∵ P, A, B, C 四点共面, ∴ $\frac{3}{4} + \frac{1}{8} + t = 1$,

∴ $t = \frac{1}{8}$.]

11. 证明: (1) 以 A 为坐标原点, AB, AD, AP 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.

设 $PA = AD = a (a > 0), AB = b (b > 0)$, 则有 $A(0, 0, 0), P(0, 0, a), D(0, a, 0), C(b, a, 0), B(b, 0, 0)$.

因为 M, N 分别为 AB, PC 的中点,

所以 $M(\frac{b}{2}, 0, 0), N(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$,

所以 $\overrightarrow{MN} = (0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$,

又 $\overrightarrow{AP} = (0, 0, a), \overrightarrow{AD} = (0, a, 0)$,

所以 $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

又 $MN \not\subset \text{平面 } PAD$, 所以 $MN \parallel \text{平面 } PAD$.

(2) 结合(1)知 $M(\frac{b}{2}, 0, 0)$,

$\overrightarrow{PC} = (b, a, -a), \overrightarrow{PM} = (\frac{b}{2}, 0, -a)$,

$\overrightarrow{PD} = (0, a, -a)$.

设平面 PMC 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{PC} = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{PM} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} bx_1 + ay_1 - az_1 = 0, \\ \frac{b}{2}x_1 - az_1 = 0, \end{cases}$

令 $z_1 = b$, 则 $x_1 = 2a, y_1 = -b$,

得 $\mathbf{n}_1 = (2a, -b, b)$ 为平面 PMC 的一个法向量.

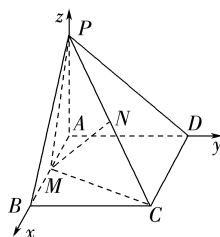
设平面 PDC 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{PC} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{PD} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} bx_2 + ay_2 - az_2 = 0, \\ ay_2 - az_2 = 0, \end{cases}$

得 $x_2 = 0$, 令 $z_2 = 1$, 则 $y_2 = 1$, 得 $\mathbf{n}_2 = (0, 1, 1)$ 为平面 PDC 的一个法向量.

因为 $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 - b + b = 0$, 所以 $\mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2$,

故平面 $PMC \perp \text{平面 } PDC$.

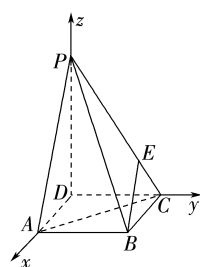


课时作业(五十六)

1. B [以 D 为坐标原点, DA, DC, DP 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间直角坐标系, 如图所示.

设 $PD = 2$, 则 $AB = AD = BC = CD = 1$, 可得 $A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(0, 1, 0), P(0, 0, 2)$, 由 $PC = 4EC$,

得 $E(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{2})$,



$$\text{所以 } \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{BE} = \left(-1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\text{可得 } \cos \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BE} \rangle = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{BE}|}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{4} + 0}{\sqrt{1+1+0} \times \sqrt{1+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{42}}{14},$$

所以异面直线 AC 与 BE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{14}$.

故选 B.]

2. A [以过点 A 作平面 ACC_1A_1 的垂线为 x 轴, 以 AC, AA_1 所在直线分别为 y 轴和 z 轴, 建立空间直角坐标系, 如图所示,

则平面 ACC_1A_1 的一个法向量为

$$\mathbf{n} = (1, 0, 0),$$

在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 设 $AB = AA_1 = 2$,

$$\text{则 } B(\sqrt{3}, 1, 0), P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 2\right),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{BP} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 2\right),$$

设直线 BP 与平面 ACC_1A_1 所成的角为 θ .

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{BP} \rangle| = \left| \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BP}}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{BP}|} \right| = \left| \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 \times \sqrt{5}} \right| = \frac{\sqrt{15}}{10},$$

所以直线 BP 与平面 ACC_1A_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{10}$. 故选 A.]

3. A [设上底面圆心为 O_1 , 下底面圆心为 O , 连接 $OO_1, OC, OB, O_1C_1, O_1B_1$,

以 O 为坐标原点, 分别以 OC, OB, OO_1 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间直角坐标系 (图略),

$$\text{则 } C(1, 0, 0), A(0, 2, 0), B_1(0, 1, 2), D_1(2, 0, 2),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{CD_1} = (1, 0, 2), \overrightarrow{AB_1} = (0, -1, 2),$$

$$\cos \langle \overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AB_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{CD_1} \cdot \overrightarrow{AB_1}}{|\overrightarrow{CD_1}| |\overrightarrow{AB_1}|} = \frac{4}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{4}{5},$$

又异面直线所成角的范围为 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$,

故异面直线 AB_1 与 CD_1 所成角的余弦值为 $\frac{4}{5}$.

故选 A.]

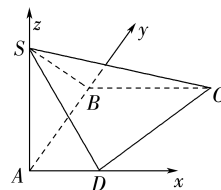
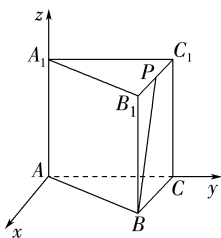
4. A [因为 $SA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD, AB \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $SA \perp AD, SA \perp AB$, 又底面 $ABCD$ 是直角梯形, 且 $BC = 2AD = 1, \angle ABC = 90^\circ$, 所以 $\angle BAD = 90^\circ$, 即 $AD \perp AB$.

如图, 以 A 为坐标原点, AD, AB, AS

所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系,

由 $SA = AB = BC = 2AD = 1$, 可得 $A(0, 0, 0), S(0, 0, 1), C(1, 1, 0)$, 所以 $\overrightarrow{SC} = (1, 1, -1)$,

因为 $SA \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $\overrightarrow{AS} = (0, 0, 1)$ 是平面 $ABCD$ 的一个法向量, 设 SC 与平面 $ABCD$ 所成的角为 θ ,



$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AS}, \overrightarrow{SC} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{SC}|}{|\overrightarrow{AS}| |\overrightarrow{SC}|} = \frac{1}{1 \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

即直线 SC 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 SC 与平面

$ABCD$ 所成角的余弦值为 $\sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. 故选 A.]

5. ACD [∵ $P(2, 2, 0), B(0, 4, 2)$,

$$\therefore |PB| = \sqrt{(2-0)^2 + (2-4)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{3}, \text{ 故 A 正确;}$$

$$\therefore A(4, 0, 6), B(0, 4, 2), C(0, 0, 4),$$

$$\therefore \overrightarrow{CA} = (4, 0, 2), \overrightarrow{CB} = (0, 4, -2),$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \rangle = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{CB}|} = \frac{-4}{2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}} = -\frac{1}{5},$$

∴ 两直线所成角的取值范围为 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

∴ 直线 CA 与直线 CB 夹角的余弦值为 $\frac{1}{5}$, 故 B 错误;

$$\therefore \mathbf{n} = (-1, 1, 2), \text{ 且 } \overrightarrow{CA} \cdot \mathbf{n} = 4 \times (-1) + 0 \times 1 + 2 \times 2 = 0,$$

$$\overrightarrow{CB} \cdot \mathbf{n} = 0 \times (-1) + 4 \times 1 + (-2) \times 2 = 0,$$

∴ $\mathbf{n}$ 是平面 ABC 的一个法向量, 故 C 正确;

$$\therefore P(2, 2, 0), B(0, 4, 2), \therefore \overrightarrow{PB} = (-2, 2, 2),$$

$$\therefore PB \text{ 与平面 } ABC \text{ 所成角的正弦值为 } |\cos \langle \overrightarrow{PB}, \mathbf{n} \rangle| =$$

$$\frac{|\overrightarrow{PB} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{PB}| |\mathbf{n}|} = \left| \frac{2+2+4}{2\sqrt{3} \times \sqrt{6}} \right| = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{ 故 D 正确.}$$

故选 ACD.]

6. BCD [以 D 为坐标原点, $DA, DC,$

DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴,

建立如图所示的空间直角坐标系, 则

$$D_1(0, 0, 2), B_1(2, 2, 2), A_1(2, 0, 2),$$

$$D(0, 0, 0), \text{ 易知 } \overrightarrow{D_1B_1} = (2, 2, 0),$$

$$\overrightarrow{EF} = (0, 1, 0), \text{ 所以 } \cos \langle \overrightarrow{D_1B_1}, \overrightarrow{EF} \rangle =$$

$$\frac{\overrightarrow{D_1B_1} \cdot \overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{D_1B_1}| |\overrightarrow{EF}|} = \frac{2}{2\sqrt{2} \times 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 所以异面}$$

直线 B_1D_1 与 EF 所成的角的大小为 45° , 故 A 正确, B 错误.

连接 A_1D, B_1C , 由题意可知平面 B_1EF 即为平面 A_1B_1CD ,

设平面 A_1B_1CD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = \mathbf{n} \cdot$

$$\overrightarrow{DA_1} = 0. \text{ 又 } \overrightarrow{A_1B_1} = (0, 2, 0), \overrightarrow{DA_1} = (2, 0, 2), \text{ 所以}$$

$$\begin{cases} 2y=0, \\ 2x+2z=0, \end{cases} \text{ 令 } x=1, \text{ 得 } \mathbf{n} = (1, 0, -1) \text{ 为平面 } A_1B_1CD \text{ 的一个}$$

$$\text{法向量, 所以 } \cos \langle \overrightarrow{D_1B_1}, \mathbf{n} \rangle = \frac{2}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \text{ 所以直线}$$

B_1D_1 与平面 A_1B_1CD 所成的角为 30° , 即直线 B_1D_1 与平面

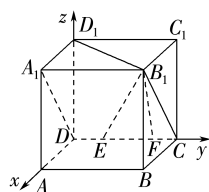
B_1EF 所成角的大小为 30° , 故 C, D 错误. 故选 BCD.]

7. $\frac{\pi}{6}$ [设直线 l 与平面 α 所成的角为 θ ,

因为直线 l 的一个方向向量为 $\mathbf{a} = (2, -3, \sqrt{3})$, 向量 $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ 是平面 α 的一个法向量,

$$\text{所以 } \sin \theta = |\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{a}| |\mathbf{n}|} = \frac{2}{4 \times 1} = \frac{1}{2},$$

因为 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{6}$.]



8. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ [由题意,以 D 为坐标原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别

为 x 轴、 y 轴、 z 轴,建立空间直角坐标系,如图所示,

则 $D(0,0,0), A(2,0,0), B(2,2,0),$
 $E(0,2,1), D_1(0,0,2),$

所以 $\overrightarrow{DB}=(2,2,0), \overrightarrow{DE}=(0,2,1),$
 $\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,2),$

设平面 BDE 的法向量为 $m=(x,y,z),$

$$\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{DB} = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{DE} = 0, \end{cases}$$

即 $\begin{cases} 2x+2y=0, \\ 2y+z=0, \end{cases}$ 令 $x=1$, 得 $y=-1, z=2$, 则 $m=(1,-1,2)$ 为平面 BDE 的一个法向量.

设直线 AD_1 与平面 BDE 所成的角为 θ ,

$$\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AD_1}, m \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AD_1} \cdot m|}{|\overrightarrow{AD_1}| |m|} = \frac{2}{2\sqrt{2} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

9. (1) 证明: 设 $AB_1 \cap A_1B = O$, 因为平面 $AA_1B_1B \perp$ 平面 $ABCD$, 且平面 $AA_1B_1B \cap$ 平面 $ABCD = AB, AD \perp AB, AD \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $AD \perp$ 平面 AA_1B_1B , 又 $A_1B \subset$ 平面 AA_1B_1B , 则 $AD \perp A_1B$,

因为四边形 AA_1B_1B 是菱形, 所以 $AB_1 \perp A_1B$,

又 $AB_1 \cap AD = A, AB_1, AD \subset$ 平面 AB_1D ,

故 $A_1B \perp$ 平面 AB_1D ,

因为 $B_1D \subset$ 平面 AB_1D ,

所以 $A_1B \perp B_1D$.

(2) 解: 设 $CD_1 \cap C_1D = H$, 连接 OH , 分别以 OB, OB_1, OH 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间直角坐标系, 如图所示.

因为 $\angle ABB_1 = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\triangle ABB_1$

为正三角形,

故 $A_1O = BO = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \sqrt{3}$,

依题意可得, $A_1(-\sqrt{3}, 0, 0),$

$B(\sqrt{3}, 0, 0),$

$A(0, -1, 0), P(0, 1, \sqrt{3}),$

则 $\overrightarrow{A_1B}=(2\sqrt{3}, 0, 0), \overrightarrow{AB}=(\sqrt{3}, 1, 0),$

$\overrightarrow{AP}=(0, 2, \sqrt{3}),$

设平面 ABP 的法向量为 $n=(x, y, z),$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp n, \\ \overrightarrow{AP} \perp n, \end{cases} \text{ 则 } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot n = \sqrt{3}x + y = 0, \\ \overrightarrow{AP} \cdot n = 2y + \sqrt{3}z = 0, \end{cases}$$

故可取 $n=(1, -\sqrt{3}, 2)$ 为平面 ABP 的一个法向量,

设直线 A_1B 与平面 ABP 所成的角为 θ ,

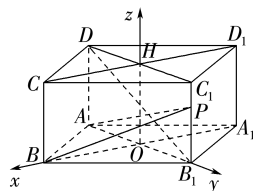
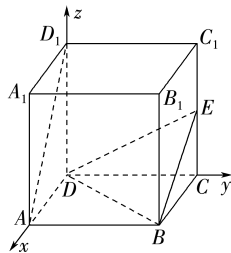
$$\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{A_1B}, n \rangle| = \frac{|\overrightarrow{A_1B} \cdot n|}{|\overrightarrow{A_1B}| |n|} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

10. 解: (1) 因为四棱锥 $P-ABCD$ 是正四棱锥,

所以底面 $ABCD$ 是正方形, 且 $OP \perp$ 底面 $ABCD$,

因为 $AD=3\sqrt{2}$,

所以 $AO=OD=OB=OC=3$,



因为 $AP=5$,

所以 $PO = \sqrt{AP^2 - AO^2} = 4$,

所以 $\triangle POA$ 绕 OP 旋转一周形成的几何体是底面半径为 3, 高为 4 的圆锥,

所以 $V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi$.

(2) 如图, 建立空间直角坐标系,

因为 $AP=AD$, 由题知四棱锥 $P-ABCD$ 是正四棱锥, 所以该四棱锥各棱长相等,

设 $AB=\sqrt{2}a, a>0$,

则 $AO=OD=OB$

$=OC=a, PO = \sqrt{AP^2 - AO^2} = a$,

则 $O(0,0,0), P(0,0,a), A(0,-a,0),$

$B(a,0,0), C(0,a,0), D(-a,0,0), E(\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2}),$

故 $\overrightarrow{BD}=(-2a, 0, 0), \overrightarrow{AC}=(0, 2a, 0), \overrightarrow{AE}=(\frac{a}{2}, a, \frac{a}{2}),$

设 $n=(x_1, y_1, z_1)$ 为平面 AEC 的法向量,

$$\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a \cdot y_1 = 0, \\ \frac{a}{2} \cdot x_1 + a \cdot y_1 + \frac{a}{2} \cdot z_1 = 0, \end{cases} \text{ 令 } x_1=1,$$

则 $y_1=0, z_1=-1$,

所以 $n=(1, 0, -1)$ 为平面 AEC 的一个法向量,

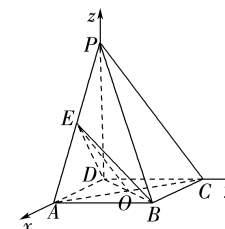
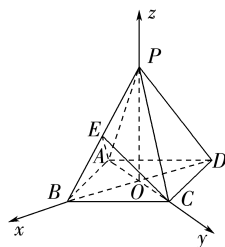
$$\cos \langle n, \overrightarrow{BD} \rangle = \frac{n \cdot \overrightarrow{BD}}{|n| |\overrightarrow{BD}|} = \frac{-2a}{\sqrt{2} \times 2a} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

设直线 BD 与平面 AEC 所成的角为 θ ,

因为 $\sin \theta = |\cos \langle n, \overrightarrow{BD} \rangle| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

所以 $\theta = \frac{\pi}{4}$,

故直线 BD 与平面 AEC 所成角的大小为 $\frac{\pi}{4}$.



课时作业(五十七)

1. (1) 证明: 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 连接 AC 交 BD 于点 O , 连接 OE ,

由四边形 $ABCD$ 为正方形, 得 O 为 AC 的中点, 又 E 是棱 PA 的中点, 则 $OE \parallel PC$,

而 $PC \not\subset$ 平面 $BDE, OE \subset$ 平面 BDE ,

所以 $PC \parallel$ 平面 BDE .

(2) 解: 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 平面 $ABCD$,

因为 $AD, DC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PD \perp AD, PD \perp DC$, 又 $DA \perp DC$, 所以 DA, DC, DP 两两垂直,

以 D 为原点, DA, DC, DP 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系,

则 $D(0,0,0), B(2,2,0), E(1,0,2),$

$P(0,0,4), \overrightarrow{DB}=(2,2,0), \overrightarrow{DE}=(1,0,2),$

$\overrightarrow{DP}=(0,0,4),$

设平面 BDE 的法向量为 $\mathbf{n}=(x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \perp \overrightarrow{DB}, \\ \mathbf{n} \perp \overrightarrow{DE}, \end{cases}$$

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 2x + 2y = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DE} = x + 2z = 0, \end{cases}$$

取 $z=1$, 则 $x=-2, y=2$, 得 $\mathbf{n}=(-2, 2, 1)$ 为平面 BDE 的一个法向量.

设平面 BDP 的法向量为 $\mathbf{m}=(a, b, c)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{m} \perp \overrightarrow{DB}, \\ \mathbf{m} \perp \overrightarrow{DP}, \end{cases} \text{ 则} \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DB} = 2a + 2b = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DP} = 4c = 0, \end{cases}$$

解得 $c=0$, 取 $a=1$, 则 $b=-1$, 得 $\mathbf{m}=(1, -1, 0)$ 为平面 BDP 的一个法向量,

$$\text{因此} |\cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{n}| |\mathbf{m}|} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

所以平面 BDE 与平面 BDP 夹角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2. (1) 证明: $\because CD \parallel BE$ 且 $CD=BE$, $\therefore$ 四边形 CDEB 为平行四边形, $\therefore DE=2$,

$\therefore AD=DE=AE=2$, 由平行四边形性质得 $PA=PD=2$.

取 AD 的中点 O, 连接 PO, OE, 则 $PO \perp AD$, 且 $PO=\sqrt{3}$,

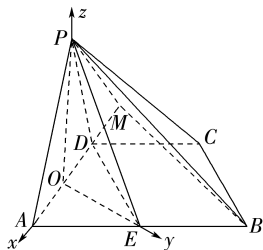
$OE \perp AD$ 且 $OE=\sqrt{3}$,

$\therefore \angle POE$ 为二面角 P-AD-E 的平面角,

又 $\because PO^2 + OE^2 = PE^2$, $\therefore \angle POE = 90^\circ$,

$\therefore$ 平面 PAD $\perp$ 平面 ABCD.

(2) 解: 依题意, 以 O 为坐标原点, OA, OE, OP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $B(-1, 2\sqrt{3}, 0), D(-1, 0, 0), P(0, 0, \sqrt{3}), E(0, \sqrt{3}, 0), M(-2, 0, 0)$,

则 $\overrightarrow{DP}=(1, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{DE}=(1, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{BM}=(-1, -2\sqrt{3}, 0)$,

$\overrightarrow{MP}=(2, 0, \sqrt{3})$,

设平面 PDE 的法向量为 $\mathbf{m}=(x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{DP} \perp \mathbf{m}, \\ \overrightarrow{DE} \perp \mathbf{m}, \end{cases} \text{ 则} \begin{cases} \overrightarrow{DP} \cdot \mathbf{m} = 0, \\ \overrightarrow{DE} \cdot \mathbf{m} = 0, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} x_1 + \sqrt{3}z_1 = 0, \\ x_1 + \sqrt{3}y_1 = 0, \end{cases}$$

令 $z_1=1$ 得 $x_1=-\sqrt{3}, y_1=1$, $\therefore \mathbf{m}=(-\sqrt{3}, 1, 1)$ 为平面 PDE 的一个法向量,

设平面 PBM 的法向量为 $\mathbf{n}=(x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{MP} \perp \mathbf{n}, \\ \overrightarrow{BM} \perp \mathbf{n}, \end{cases} \text{ 则} \begin{cases} \overrightarrow{MP} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{BM} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} 2x_2 + \sqrt{3}z_2 = 0, \\ -x_2 - 2\sqrt{3}y_2 = 0, \end{cases}$$

令 $z_2=4$ 得 $x_2=-2\sqrt{3}, y_2=1$

$\therefore \mathbf{n}=(-2\sqrt{3}, 1, 4)$ 为平面 PBM 的一个法向量,

设平面 PBM 与平面 PDE 的夹角为 θ ,

$$\text{则} \cos \theta = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{11}{\sqrt{5} \times \sqrt{29}} = \frac{11\sqrt{145}}{145},$$

$\therefore$ 平面 PBM 与平面 PDE 夹角的余弦值为 $\frac{11\sqrt{145}}{145}$.

课时作业(五十八)

1. D [由已知, 得 $\overrightarrow{PA}=(-1, -1, -1)$, 因为直线 l 的一个方向向量为 $\mathbf{n}=(1, 0, 2)$, 所以点 $P(1, 2, 2)$ 到直线 l 的距离为

$$\sqrt{|\overrightarrow{PA}|^2 - \left(\frac{\overrightarrow{PA} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\right)^2} = \sqrt{3 - \frac{9}{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}. \text{ 故选 D.}]$$

2. C [在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 设点 A 到平面 A_1BC 的距离为 h , 则 $V_{\text{三棱锥}A-A_1BC} = \frac{1}{3} S_{\triangle A_1BC} \cdot h = \frac{2\sqrt{2}}{3} h = V_{\text{三棱锥}A_1-ABC} =$

$$\frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot A_1A = \frac{1}{3} V_{\text{三棱柱}ABC-A_1B_1C_1} = \frac{4}{3}, \text{ 解得 } h = \sqrt{2}, \text{ 所以点}$$

$$\frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot A_1A = \frac{1}{3} V_{\text{三棱柱}ABC-A_1B_1C_1} = \frac{4}{3}, \text{ 解得 } h = \sqrt{2}, \text{ 所以点}$$

A 到平面 A_1BC 的距离为 $\sqrt{2}$.]

3. ABD [建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $B_1(1, 1, 1), E(0, 0, \frac{1}{2}), F(1, 1,$

$\frac{1}{2}), C_1(0, 1, 1), A(1, 0, 0), A_1(1, 0,$

1).

对于 A, 因为 $\overrightarrow{B_1E}=(-1, -1, -\frac{1}{2})$, 直线 B_1E 的一个单位

方向向量 $\mathbf{u}_1 = \frac{\overrightarrow{B_1E}}{|\overrightarrow{B_1E}|} = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}), \overrightarrow{A_1B_1}=(0, 1,$

0),

所以 $\overrightarrow{A_1B_1} \cdot \mathbf{u}_1 = -\frac{2}{3}$.

所以点 A_1 到直线 B_1E 的距离为 $\sqrt{|\overrightarrow{A_1B_1}|^2 - (\overrightarrow{A_1B_1} \cdot \mathbf{u}_1)^2} =$

$$\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \text{ 故 A 正确;}$$

对于 B, 因为 $\overrightarrow{AE}=(-1, 0, \frac{1}{2}),$

$\overrightarrow{FC_1}=(-1, 0, \frac{1}{2}),$

所以 $\overrightarrow{AE} \parallel \overrightarrow{FC_1}$, 即 $AE \parallel FC_1$,

所以点 F 到直线 AE 的距离即为直线 FC_1 到直线 AE 的距离,

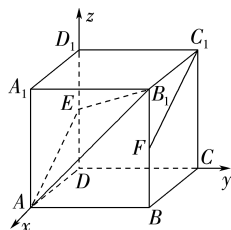
因为直线 AE 的一个单位方向向量 $\mathbf{u}_2 = \frac{\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AE}|} =$

$$(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{\sqrt{5}}{5}), \overrightarrow{AF}=(0, 1, \frac{1}{2}),$$

$$|\overrightarrow{AF}|^2 = \frac{5}{4}, \overrightarrow{AF} \cdot \mathbf{u}_2 = \frac{\sqrt{5}}{10},$$

所以直线 FC_1 到直线 AE 的距离为

$$\sqrt{\frac{5}{4} - \left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{5}, \text{ 故 B 正确;}$$



对于C, 设平面 AB_1E 的法向量为 $\mathbf{n}=(x,y,z)$, 又 $\overrightarrow{AB_1}=(0,1,1)$, $\overrightarrow{AE}=\left(-1,0,\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{AA_1}=(0,0,1)$.

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \perp \overrightarrow{AB_1}, \\ \mathbf{n} \perp \overrightarrow{AE}, \end{cases} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB_1} = y+z=0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AE} = -x+\frac{1}{2}z=0, \end{cases}$$

令 $z=2$, 则 $y=-2, x=1$,

即 $\mathbf{n}=(1,-2,2)$ 为平面 AB_1E 的一个法向量,

设点 A_1 到平面 AB_1E 的距离为 d ,

$$\text{则 } d = \frac{|\overrightarrow{AA_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{2}{3}, \text{ 即点 } A_1 \text{ 到平面 } AB_1E \text{ 的距离为 } \frac{2}{3},$$

故C不正确;

对于D, 因为 $AE \parallel FC_1$,

所以 $FC_1 \parallel$ 平面 AB_1E ,

所以直线 FC_1 到平面 AB_1E 的距离等于 C_1 到平面 AB_1E 的距离,

$$\text{又 } \overrightarrow{C_1B_1}=(1,0,0),$$

由选项C的分析得平面 AB_1E 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(1,-2,2)$,

所以 C_1 到平面 AB_1E 的距离为

$$\frac{|\overrightarrow{C_1B_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{3},$$

所以直线 FC_1 到平面 AB_1E 的距离为 $\frac{1}{3}$, 故D正确. 故选ABD.]

4. ABD [对于A, 如图1所示,

连接 AB_1 交 A_1B 于点E, 连接DE,

所以 $DE \parallel B_1C$,

又 $DE \subset$ 平面 A_1BD , $B_1C \not\subset$ 平面 A_1BD ,

所以 $B_1C \parallel$ 平面 A_1BD , 故A正确;

对于B, 因为 $AB=BC$, D是AC的中点,

所以 $BD \perp AC$,

又平面 $A_1ACC_1 \perp$ 平面 ABC , 平面 $A_1ACC_1 \cap$ 平面 $ABC=AC$, $BD \subset$ 平面 ABC ,

所以 $BD \perp$ 平面 A_1ACC_1 ,

又 $BD \subset$ 平面 A_1BD ,

所以平面 $A_1BD \perp$ 平面 AA_1C_1C ,

故B正确;

对于C, 因为 $B_1C \parallel$ 平面 A_1BD ,

所以 B_1C 到平面 A_1BD 的距离等于点 B_1 到平面 A_1BD 的距离,

以D点为坐标原点, 建立空间直角坐标系, 如图2所示,

$$\text{则 } D(0,0,0), B_1(0,2\sqrt{2},3), B(0,2\sqrt{2},0), A_1(-1,0,3),$$

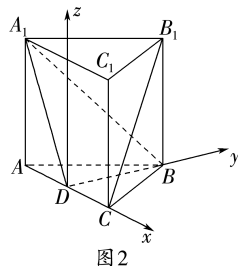
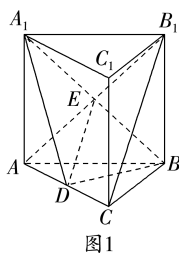
$$\text{所以 } \overrightarrow{DB_1}=(0,2\sqrt{2},3), \overrightarrow{DB}=(0,2\sqrt{2},0), \overrightarrow{DA_1}=(-1,0,3),$$

设平面 A_1BD 的法向量为 $\mathbf{n}=(x,y,z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{DB} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{DA_1} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2\sqrt{2}y = 0, \\ -x + 3z = 0, \end{cases} \text{ 取 } x=3,$$

则 $\mathbf{n}=(3,0,1)$ 为平面 A_1BD 的一个法向量,

$$\text{所求距离 } d = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DB_1}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \text{ 故C错误;}$$



对于D, 如图3所示,

作 $AF \perp BC$, 连接 A_1F , 因为 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , 所以 $AA_1 \perp BC$,

又 $AA_1 \cap AF=A$, $AA_1, AF \subset$ 平面 A_1AF ,

所以 $BC \perp$ 平面 A_1AF , 则 $BC \perp A_1F$,

$$\text{又 } AF = \frac{BD \cdot AC}{BC} = \frac{2\sqrt{2} \times 2}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3},$$

所以 $A_1F = \sqrt{A_1A^2 + AF^2}$

$$= \sqrt{3^2 + \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{113}}{3}, \text{ 故D正确.}$$

故选ABD.]

5. $\frac{8}{3}$ [以D为坐标原点, DA, DC, DD_1

所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立

如图所示的空间直角坐标系, 则 $D(0,$

$0,0), E(0,2,4), F(2,4,4), B(4,4,0),$

$A(4,0,0), M(2,0,4), N(4,2,4),$

所以 $\overrightarrow{EF}=(2,2,0), \overrightarrow{DE}=(0,2,4),$

$\overrightarrow{BA}=(0,-4,0).$

设平面 $EFBD$ 的法向量为 $\mathbf{a}=(1,m,n)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{a} \cdot \overrightarrow{EF} = 0, \\ \mathbf{a} \cdot \overrightarrow{DE} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2+2m=0, \\ 2m+4n=0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} m=-1, \\ n=\frac{1}{2}, \end{cases} \text{ 所以 } \mathbf{a}=\left(1,-1,\frac{1}{2}\right) \text{ 为平面 } EFBD \text{ 的一个法}$$

向量.

因为 $\overrightarrow{AM}=(-2,0,4), \overrightarrow{AN}=(0,2,4)$, 所以 $\mathbf{a} \cdot \overrightarrow{AM}=0, \mathbf{a} \cdot \overrightarrow{AN}=0$, 从而 $\mathbf{a} \perp \overrightarrow{AM}, \mathbf{a} \perp \overrightarrow{AN}$, 所以 $\mathbf{a} \perp$ 平面 AMN , 所以平面 $AMN \parallel$ 平面 $EFBD$, 所以平面 AMN 与平面 $EFBD$ 间的距离

$$\text{即为点A到平面EFBD的距离, 该距离为 } \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|} = \frac{8}{3}.]$$

6. (1)证明: $\because EA=EB, M$ 是 AB 的中点,

$\therefore EM \perp AB$,

又平面 $ABE \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $ABE \cap$ 平面 $ABCD=AB$, $EM \subset$ 平面 ABE ,

$\therefore EM \perp$ 平面 $ABCD$, $\because AD \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore EM \perp AD$.

(2)解: 连接 CM ,

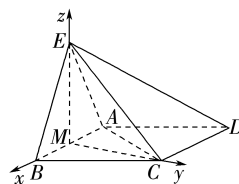
由(1)知 $EM \perp$ 平面 $ABCD$, $\because CM \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore EM \perp CM$,

在菱形 $ABCD$ 中, $\angle ABC=60^\circ$, $\therefore \triangle ABC$ 是正三角形,

$\therefore CM \perp AB$,

故 MB, MC, ME 两两垂直,

以 M 为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $M(0,0,0), A(-1,0,0), B(1,0,0), C(0,\sqrt{3},0), E(0,0,$

$\sqrt{3}), \therefore \overrightarrow{AE}=(1,0,\sqrt{3}), \overrightarrow{EC}=(0,\sqrt{3},-\sqrt{3}),$

设 $\overrightarrow{EP}=\lambda \overrightarrow{EC}=(0,\sqrt{3}\lambda,-\sqrt{3}\lambda), 0 \leq \lambda \leq 1,$

则 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EP} = (1, \sqrt{3}\lambda, \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda)$,
 易知平面 ABE 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$,
 $\therefore$ 直线 AP 与平面 ABE 所成的角为 45° ,
 $\therefore \sin 45^\circ = |\cos \langle \overrightarrow{AP}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{AP}| |\mathbf{n}|}$

$$= \frac{|\sqrt{3}\lambda|}{\sqrt{1+3\lambda^2+3-6\lambda+3\lambda^2} \times 1} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

 解得 $\lambda = \frac{2}{3}$, $\therefore \frac{EP}{EC} = \frac{2}{3}$.

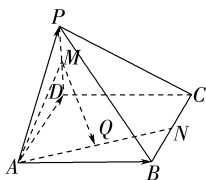
阶段检测(十二)

1. D [根据题意可知, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$,
 $\overrightarrow{AP} = \mathbf{c}$,

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AN} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{4}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{c}. \text{ 故选 D.]}$$



2. C [由于在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中, $\overrightarrow{OA} = (-1, 2, 1)$, $\overrightarrow{OB} = (1, 1, 2)$, $\overrightarrow{OP} = (2, 1, 1)$, 点 Q 在直线 OP 上运动,
 故点 Q, O, P 三点共线, 所以设 $\overrightarrow{OQ} = (2t, t, t)$,
 所以 $\overrightarrow{QA} = (-1-2t, 2-t, 1-t)$, $\overrightarrow{QB} = (1-2t, 1-t, 2-t)$,
 故 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = 6t^2 - 6t + 3 = 6(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{2}$,

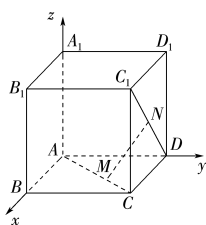
当 $t = \frac{1}{2}$ 时, $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB}$ 取最小值, 最小值为 $\frac{3}{2}$. 故选 C.]

3. A [$\overrightarrow{AC} = (1, 2, -1)$, $\overrightarrow{AD} = (2, 2, 0)$, $\overrightarrow{AB} = (2, 2, -2)$,
 设平面 ACD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,
 则 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$,
 $\therefore x + 2y - z = 0, 2x + 2y = 0$,
 取 $x = 1$, 则 $y = -1, z = -1$, 则 $\mathbf{n} = (1, -1, -1)$ 为平面 ACD 的一个法向量.

$$\therefore \text{点 } B \text{ 到平面 } ACD \text{ 的距离 } d = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|2-2+2|}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

故选 A.]

4. C [根据题意可知, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 以 A 为坐标原点, AB, AD, AA_1 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系, 如图所示,



则 $A(0, 0, 0), C(1, 1, 0), D(0, 1, 0)$,

$C_1(1, 1, 1)$, 所以 $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0), \overrightarrow{DC_1} = (1, 0, 1)$,

因为点 M 在 AC 上, 点 N 在 C_1D 上, 所以设 $M(m, m, 0)$, $N(n, 1, n)$,

所以 $\overrightarrow{MN} = (n-m, 1-m, n)$,

因为 MN 是异面直线 AC 与 C_1D 的公垂线段,

所以 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MN} = 0, \overrightarrow{DC_1} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$,

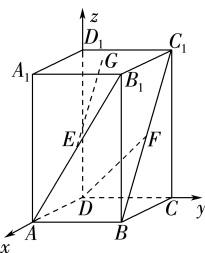
$$\text{即 } \begin{cases} n-m+1-m=0, \\ n-m+n=0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} m=\frac{2}{3}, \\ n=\frac{1}{3}, \end{cases}$$

所以 $M(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0), N(\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3})$,

$$\text{所以 } |MN| = \sqrt{(\frac{2}{3}-\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3}-1)^2 + (0-\frac{1}{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故选 C.]

5. A [由题意, 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = 2AB = 4$, E, F 分别为 AB_1, BC_1 的中点, 点 G 为上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心,
 则可以建立如图所示的空间直角坐标系 $Dxyz$,



则 $D(0, 0, 0), E(2, 1, 2), F(1, 2, 2), G(1, 1, 4)$, 所以 $\overrightarrow{EG} = (-1, 0, 2), \overrightarrow{DF} = (1, 2, 2)$,

$$\text{于是 } \cos \langle \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{DF} \rangle = \frac{\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{DF}}{|\overrightarrow{EG}| |\overrightarrow{DF}|} = \frac{3}{\sqrt{5} \times 3} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

故直线 EG 与 DF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$. 故选 A.]

6. C [由题意知向量 $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}$ 共面, 即这三个向量不能构成空间的一个基底,

对于 A, 由空间直角坐标系易知 $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)$ 三个向量共面, 则由 $(0, 0, 0), (1, 0, 0) \in \Omega$ 无法推出 $(0, 0, 1) \notin \Omega$, 故 A 错误;

对于 B, 由空间直角坐标系易知 $(-1, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)$ 三个向量共面, 则由 $(-1, 0, 0), (1, 0, 0) \in \Omega$ 无法推出 $(0, 0, 1) \notin \Omega$, 故 B 错误;

对于 C, 由空间直角坐标系易知 $(1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)$ 三个向量不共面, 可构成空间的一个基底,

则由 $(1, 0, 0), (0, 1, 0) \in \Omega$ 能推出 $(0, 0, 1) \notin \Omega$, 故 C 正确;

对于 D, 由空间直角坐标系易知 $(1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 0, -1)$ 三个向量共面,

则由 $(0, 0, -1), (1, 0, 0) \in \Omega$ 无法推出 $(0, 0, 1) \notin \Omega$, 故 D 错误. 故选 C.]

7. BC [对于 A, 向量 $\mathbf{a} = (6, 3, 6), \mathbf{b} = (1, -2, 2)$, 向量 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b} = \frac{4}{3} \mathbf{b} = (\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{8}{3})$, 故 A 不正确;

对于 B, 对空间中任意一点 O , 有 $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OC}$, 由于 $2+3-4=1$, 则 P, A, B, C 四点共面, 故 B 正确;

对于 C, $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 是空间的一个基底, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面, 而 $\mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, 则 $\mathbf{a}, \mathbf{m}, \mathbf{c}$ 也不共面, $\{\mathbf{a}, \mathbf{m}, \mathbf{c}\}$ 也是空间的一个基底, 故 C 正确;

对于 D, 直线 l 的一个方向向量为 $\mathbf{a} = (0, 1, 2)$, 平面 α 的一个法向量为 $\mathbf{e} = (3, -4, 2)$, 由于 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = 0$, 因而 $l \parallel \alpha$ 或 l 在平面 α 内, 故 D 不正确.

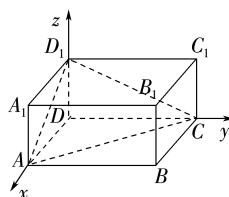
故选 BC.]

8. BD [在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2, AD = AA_1 = 1$,

以 D 为坐标原点, 建立空间直角坐标系, 如图,

则 $A(1, 0, 0), B(1, 2, 0), C(0, 2, 0), D(0, 0, 0), A_1(1, 0, 1), B_1(1, 2, 1), D_1(0, 0, 1), \overrightarrow{AC} = (-1, 2, 0), \overrightarrow{AD_1} = (-1, 0, 1)$,

设平面 ACD_1 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,



$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{AC} \perp \mathbf{n}, \\ \overrightarrow{AD_1} \perp \mathbf{n}, \end{cases} \text{则} \begin{cases} \overrightarrow{AC} \cdot \mathbf{n} = -x + 2y = 0, \\ \overrightarrow{AD_1} \cdot \mathbf{n} = -x + z = 0, \end{cases}$$

取 $x=2$, 得 $\mathbf{n}=(2,1,2)$ 为平面 ACD_1 的一个法向量.

对于 A, $\overrightarrow{AC}=(-1,2,0)$, $\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,1)$,

$$\text{则} \cos \angle D_1AC = \cos \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD_1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}, \text{故 A 错误;}$$

对于 B, 易知 $\mathbf{m}=(0,0,1)$ 为平面 $ABCD$ 的一个法向量,

设平面 ACD_1 与平面 $ABCD$ 夹角为 θ ,

$$\text{则} \cos \theta = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{n}| |\mathbf{m}|} = \frac{2}{3 \times 1} = \frac{2}{3},$$

所以平面 ACD_1 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值为 $\frac{2}{3}$, 故 B 正

确; 对于 C, $\overrightarrow{AD}=(-1,0,0)$,

设直线 AD 与平面 ACD_1 所成的角为 α ,

$$\text{则} \sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{AD}| |\mathbf{n}|} = \frac{2}{3},$$

所以直线 AD 与平面 ACD_1 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$,

所以直线 AD 与平面 ACD_1 所成角的余弦值为

$$\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \text{故 C 错误;}$$

对于 D, $\overrightarrow{AA_1}=(0,0,1)$,

$$\text{所以点 } A_1 \text{ 到平面 } ACD_1 \text{ 的距离为 } d = \frac{|\overrightarrow{AA_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{2}{3}, \text{故 D}$$

正确.

故选 BD.]

9. $-\frac{4}{3}$ [已知 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 是空间的一个基底,

且 A, B, C, D 四点共面, 则 $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, $x, y \in \mathbf{R}$,

又向量 $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} - \mathbf{c}$, $\overrightarrow{AD} = 2\mathbf{b} + \lambda\mathbf{c}$,

则 $2\mathbf{b} + \lambda\mathbf{c} = x(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) + y(\mathbf{a} - \mathbf{c}) = (2x + y)\mathbf{a} - 3x\mathbf{b} - y\mathbf{c}$, 又

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面,

$$\text{因此} \begin{cases} 2x + y = 0, \\ -3x = 2, \\ \lambda = -y, \end{cases} \text{解得 } x = -\frac{2}{3}, y = \frac{4}{3}, \lambda = -\frac{4}{3}, \text{所以 } \lambda$$

$$= -\frac{4}{3}.]$$

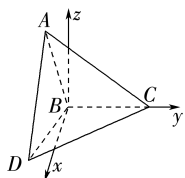
$$\begin{aligned} 10. -\frac{1}{4} \quad & [\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1M}) \cdot \overrightarrow{AD} = [\overrightarrow{CC_1} + \\ & \frac{1}{2}(\overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{C_1D_1})] \cdot \overrightarrow{AD} = [\overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB})] \cdot \overrightarrow{AD} = \\ & \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}, \end{aligned}$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AA_1}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cos 60^\circ = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cos 60^\circ = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 1^2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.]$$

11. 解: 在平面 ABC 内过点 B 作 z 轴垂直于 BC , 在平面 BCD 内过点 B 作 x 轴垂直于 BC , $\because$ 平面 $ABC \perp$ 平面 DBC , $\therefore \angle xBz = 90^\circ$, 如图, 建立空间直角坐标系.



设 $AB=a$, 则 $B(0,0,0)$, $A(0, -\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a)$, $C(0,a,0)$,

$$D(\frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{1}{2}a, 0),$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = (\frac{\sqrt{3}}{2}a, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}a), \overrightarrow{BC} = (0,a,0), \overrightarrow{BD} = (\frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{1}{2}a, 0).$$

$$(1) \because \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \therefore AD \perp BC,$$

$\therefore$ 直线 AD 与直线 BC 所成角的大小为 90° .

(2) 设 AD 与平面 BCD 所成的角为 θ , $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$,

易知 $\mathbf{n}=(0,0,1)$ 是平面 BCD 的一个法向量,

$$\therefore \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AD}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{AD}| |\mathbf{n}|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\sqrt{\frac{3}{2}a^2} \times 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\therefore \theta = 45^\circ$, 即直线 AD 与平面 BCD 所成角的大小为 45° .

(3) 设 $\mathbf{m}=(x,y,z)$ 是平面 ABD 的法向量,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}ax - \frac{\sqrt{3}}{2}az = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}ax - \frac{1}{2}ay = 0, \end{cases}$$

取 $x=1$, 则 $z=1, y=\sqrt{3}$, $\therefore \mathbf{m}=(1, \sqrt{3}, 1)$ 为平面 ABD 的一个法向量.

$$\therefore \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{5} \times 1} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

设平面 ABD 和平面 BCD 的夹角为 β ,

$$\text{则 } \cos \beta = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

故平面 ABD 和平面 BCD 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

12. 解: (1) 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AE \perp DC$,

翻折后, $AE \perp DE$, $AE \perp CE$,

因为平面 $AED \perp$ 平面 $ABCE$, 平面 $AED \cap$ 平面 $ABCE = AE$, $DE \subset$ 平面 AED ,

所以 $DE \perp$ 平面 $ABCE$.

又 $AE, CE \subset$ 平面 $ABCE$, 所以 $DE \perp AE$, $DE \perp CE$,

在等腰梯形 $ABCD$ 中, $3AB = CD = 3$, $AD = BC = \sqrt{2}$, 且 $AE \perp DC$,

所以 $DE=1, CE=2, AE=1$.

故以 E 为原点建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $E(0,0,0), B(1,1,0), D(0,0,1)$,

$C(0,2,0)$,

所以 $\overrightarrow{ED}=(0,0,1)$,

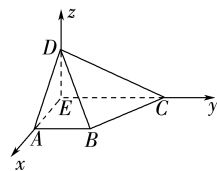
$$\overrightarrow{BD}=(-1,-1,1), \overrightarrow{BC}=(-1,1,0),$$

设平面 BDC 的法向量为 $\mathbf{m}=(x,y,z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BD} = -x - y + z = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BC} = -x + y = 0, \end{cases}$$

令 $x=1$, 则 $y=1, z=2$, 所以 $\mathbf{m}=(1,1,2)$ 为平面 BDC 的一个法向量,

$$\text{所以点 } E \text{ 到平面 } BDC \text{ 的距离为 } \frac{|\overrightarrow{ED} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{m}|} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$



(2) 由(1)知, $\overrightarrow{ED} = (0, 0, 1)$, $\overrightarrow{EB} = (1, 1, 0)$,
 设平面 BDE 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$,

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{ED} = c_1 = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{EB} = a_1 + b_1 = 0, \end{cases}$$

令 $a_1 = 1$, 则 $b_1 = -1, c_1 = 0$, 所以 $\mathbf{n}_1 = (1, -1, 0)$ 为平面 BDE 的一个法向量,

$$\text{设 } \overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DC} = \lambda(0, 2, -1), \lambda \in (0, 1),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{EP} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DP} = (0, 0, 1) + \lambda(0, 2, -1) = (0, 2\lambda, 1-\lambda),$$

设平面 PBE 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$,

$$\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{EP} = 2\lambda b_2 + (1-\lambda)c_2 = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{EB} = a_2 + b_2 = 0, \end{cases}$$

$$\text{令 } a_2 = 1, \text{ 则 } b_2 = -1, c_2 = \frac{2\lambda}{1-\lambda}, \text{ 所以 } \mathbf{n}_2 = \left(1, -1, \frac{2\lambda}{1-\lambda}\right) \text{ 为}$$

平面 PBE 的一个法向量,

因为二面角 $P-BE-D$ 为 60° ,

$$\text{所以 } |\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle| = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|}$$

$$= \frac{|1+1|}{\sqrt{2} \times \sqrt{1+1+\left(\frac{2\lambda}{1-\lambda}\right)^2}} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\text{解得 } \lambda = 3 \pm \sqrt{6},$$

$$\text{因为 } \lambda \in (0, 1), \text{ 所以 } \lambda = 3 - \sqrt{6},$$

$$\text{即 } \overrightarrow{DP} = (3 - \sqrt{6}) \overrightarrow{DC},$$

故 DP 与 DC 的比值为 $3 - \sqrt{6}$.

课时作业(五十九)

1. **B** [经过点 $A(2, m), B(-m, 4)$ 的直线 l 的斜率 $k = \frac{m-4}{2+m}$,

又直线 l 的倾斜角为 135° ,

$$\text{所以 } \frac{m-4}{2+m} = \tan 135^\circ = -1, \text{ 解得 } m = 1. \text{ 故选 B.}]$$

2. **C** [法一: 由直线上的两点 $A(4, y), B(2, -3)$, 得 $\overrightarrow{AB} = (-2, -3-y)$, 又直线 AB 的一个方向向量为 $(-1, -1)$, 因此 $(-2) \times (-1) - (-3-y) \times (-1) = 0$, 解得 $y = -1$, 故选 C.

法二: 由直线的方向向量为 $(-1, -1)$, 得直线的斜率为 $\frac{-1}{-1} = 1$, 所以 $\frac{y-(-3)}{4-2} = 1$, 解得 $y = -1$. 故选 C.]

3. **B** [由 $Ax + By + C = 0$, 整理得 $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, 由于该直线经过第一、二、四象限,

所以 $\begin{cases} -\frac{A}{B} < 0, \\ -\frac{C}{B} > 0, \end{cases}$ 故 $\begin{cases} AB > 0, \\ BC < 0. \end{cases}$

$$\text{故选 B.}]$$

4. **A** [根据题意, 可得直线 l 的斜率 $k = \tan \frac{\pi}{4} = 1$,

结合直线 l 过点 $(1, 3)$, 得 l 的方程为 $y - 3 = x - 1$, 即 $y = x + 2$,

当 $x = 0$ 时, $y = 2$, 直线 l 交 y 轴于点 $(0, 2)$, 即直线 l 在 y 轴上的截距为 2. 故选 A.]

5. **A** [两直线化为截距式分别为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{-b} = 1, \frac{x}{b} + \frac{y}{-a} = 1$.

选项 A, B 中, 根据直线 l_1 的位置可知, $a < 0, -b < 0$,

$\therefore b > 0, -a > 0$, 即直线 l_2 在 x 轴、 y 轴上的截距都大于零,

故选项 A 正确, B 错误;

对于选项 C, 根据直线 l_1 的位置可知, $a < 0, -b > 0$,

$\therefore b < 0, -a > 0$, 即直线 l_2 在 x 轴上的截距小于零, 在 y 轴上的截距大于零, 故选项 C 错误;

对于选项 D, 根据直线 l_1 的位置可知, $a > 0, -b < 0$,

$\therefore b > 0, -a < 0$, 即直线 l_2 在 x 轴上的截距大于零, 在 y 轴上的截距小于零, 故选项 D 错误.

故选 A.]

6. **C** [由题意可设直线 $l: y - 8 = k(x - 6) (k < 0)$, 即 $y = kx + 8 - 6k (k < 0)$.

不妨假设 A 在 x 轴上, 则 $A\left(6 - \frac{8}{k}, 0\right), B(0, 8 - 6k)$, 易知 A 在 C 右侧,

记 O 为坐标原点, 因为线段 OA 与 OB 的长度分别为 $6 - \frac{8}{k}, 8 - 6k$,

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} \left(6 - \frac{8}{k} - 4\right) (8 - 6k) =$$

$$\frac{1}{2} \left(64 - \frac{64}{k} - 12k\right) \geq \frac{1}{2} (64 + 2\sqrt{64 \times 12}) = 32 + 16\sqrt{3},$$

$$\text{当且仅当 } -\frac{64}{k} = -12k (k < 0),$$

$$\text{即 } k = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ 时, 等号成立.}]$$

7. **BC** [A 不正确, 方程 $k = \frac{y-2}{x+1}$ 表示的曲线不过点 $(-1, 2)$; B

正确; C 正确; D 只有在直线的斜率存在时成立.]

8. **BCD** [当直线过原点时, 直线在两坐标轴上的截距相等, 如 $y = 2x$, 不能用方程 $x + y = a (a \in \mathbf{R})$ 表示, 故 A 错误;

直线 $mx + y - 2 = 0 (m \in \mathbf{R})$ 的斜率一定存在, 为 $-m$, 故 B 正确;

$$\text{由 } \alpha \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \text{ 得 } \frac{1}{2} \leq \cos \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{所以斜率 } k = 2\cos \alpha \in [1, \sqrt{3}],$$

设直线的倾斜角为 $\theta (\theta \in [0, \pi))$,

$$\text{则 } \tan \theta \in [1, \sqrt{3}], \text{ 所以 } \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right], \text{ 故 C 正确;}$$

$$\text{经过点 } P(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) (x_1 \neq x_2) \text{ 的直线的斜率 } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

由直线的点斜式方程可得, 直线方程为 $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$, 故 D 正确.

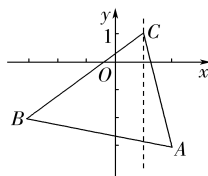
故选 BCD.]

9. **AB** [直线 $y = ax - 2a + 3 = a(x - 2) + 3$ 过定点 $(2, 3)$, A 正确;

当 $m = 0$ 时, 直线方程为 $x = 2$, B 正确;

若直线的倾斜角为 90° , 则该直线的斜率不存在, 不能用 $y - 1 = \tan \theta (x - 1)$ 表示, C 错误;

直线 $l: mx + y - m - 1 = 0$, 即 $m(x - 1) + y - 1 = 0$ 过定点 $C(1, 1)$, 如图所



示,其中 $k_{AC} = \frac{-3-1}{2-1} = -4$, $k_{BC} = \frac{-2-1}{-3-1} = \frac{3}{4}$, 直线 l 的斜率为 $-m$, 所以 $-m \geq \frac{3}{4}$ 或 $-m \leq -4$, 解得 $m \geq 4$ 或 $m \leq -\frac{3}{4}$, D 错误. 故选 AB.]

10. $\frac{\pi}{3}$ [直线 $y = \sqrt{3}x - 2$ 的斜率为 $\sqrt{3}$,

设其倾斜角大小为 α , 则 $\tan \alpha = \sqrt{3}$,

因为 $\alpha \in [0, \pi)$, 则 $\alpha = \frac{\pi}{3}$.]

11. 4 [由条件知 $-2 = -3a + 1$, $b = -3 \times (-1) + 1$,

分别解得 $a = 1$, $b = 4$, $\therefore \frac{a}{x} + bx = \frac{1}{x} + 4x \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot 4x} = 4$,

当且仅当 $\frac{1}{x} = 4x$, 即 $x = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立,

$\therefore \frac{1}{x} + 4x$ 的最小值是 4.]

12. $9x - y = 0$ 或 $x + y - 10 = 0$ [当直线在两坐标轴上的截距为 0 时, 直线方程为 $9x - y = 0$;

当截距不为 0 时, 设直线方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{9}{a} = 1$, 解

得 $a = 10$, 所以直线方程为 $x + y - 10 = 0$.]

课时作业(六十)

1. A [直线 $l_1: 4x - 2y + 5 = 0$ 和 $l_2: 6x + ay - 7 = 0$, 若 $l_1 \perp l_2$, 则 $24 - 2a = 0$, 解得 $a = 12$. 故选 A.]

2. B [法一: 设所求直线上一点的坐标为 (x, y) , 则其关于点 $(\frac{1}{3}, 0)$ 对称的点为 $(\frac{2}{3} - x, -y)$, 因为点 $(\frac{2}{3} - x, -y)$ 在

直线 $3x - 2y = 0$ 上, 所以 $3(\frac{2}{3} - x) - 2(-y) = 0$, 化简得 $3x - 2y - 2 = 0$,

所以所求直线方程为 $3x - 2y - 2 = 0$. 故选 B.

法二: 在直线 $3x - 2y = 0$ 上任取两点 $O(0, 0)$, $M(2, 3)$, 设点 O, M 关于点 $(\frac{1}{3}, 0)$ 的对称点分别为 O', M' , 则 $O'(\frac{2}{3}, 0)$,

$M'(-\frac{4}{3}, -3)$, 所以所求直线方程为 $\frac{y - (-3)}{0 - (-3)} =$

$\frac{x - (-\frac{4}{3})}{\frac{2}{3} - (-\frac{4}{3})}$, 即 $3x - 2y - 2 = 0$. 故选 B.]

3. B [法一: 由点到直线的距离公式知点 $(0, -1)$ 到直线 $y = k(x+1)$ 的距离 $d = \frac{|k \cdot 0 - (-1) + k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|k+1|}{\sqrt{k^2 + 1}} =$

$\sqrt{\frac{k^2 + 2k + 1}{k^2 + 1}} = \sqrt{1 + \frac{2k}{k^2 + 1}}$. 当 $k = 0$ 时, $d = 1$; 当 $k \neq 0$ 时,

$d = \sqrt{1 + \frac{2k}{k^2 + 1}} = \sqrt{1 + \frac{2}{k + \frac{1}{k}}}$, 要使 d 最大, 需 $k > 0$ 且 $k +$

$\frac{1}{k}$ 最小, $\therefore$ 当 $k = 1$ 时, $d_{\max} = \sqrt{2}$, 故选 B.

法二: 记点 $A(0, -1)$, 直线 $y = k(x+1)$ 恒过点 $B(-1, 0)$, 当 AB 垂直于直线 $y = k(x+1)$ 时, 点 $A(0, -1)$ 到直线 $y = k(x+1)$ 的距离最大, 且最大值为 $|AB| = \sqrt{2}$, 故选 B.]

4. A [根据题意, $2x - my + m - 2 = 0$ 变形可得 $(1-y)m + 2x - 2 = 0$,

令 $\begin{cases} 1-y=0, \\ 2x-2=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=1, \\ y=1, \end{cases}$

所以该直线恒过定点 $(1, 1)$, 即 P 的坐标为 $(1, 1)$,

由 $x - 2y + 4 = 0$, 得 $y = \frac{1}{2}x + 2$, 即该直线的斜率为 $\frac{1}{2}$,

因为所求直线与直线 $x - 2y + 4 = 0$ 垂直, 则所求的直线的斜率为 -2 ,

又由所求直线过点 $P(1, 1)$,

则所求直线的方程为 $y - 1 = -2(x - 1)$, 即 $2x + y - 3 = 0$.

故选 A.]

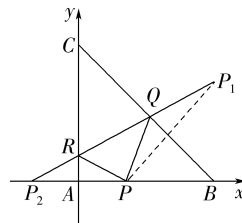
5. B [由题意, 根据菱形的两组对边间的距离相等, 可得

$$\frac{|1-3|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{9+16}},$$

则 $|c_1 - c_2| = 2\sqrt{5}$.

故选 B.]

6. A [由题意, 可建立直角坐标系, 如图所示,



可得 $B(6, 0)$, $C(0, 6)$, 故直线 BC 的方程为 $x + y = 6$,

则 $\triangle ABC$ 的重心坐标为 $(\frac{0+0+6}{3}, \frac{0+0+6}{3})$, 即 $(2, 2)$,

设 $P(a, 0)$, $0 < a < 6$, 点 P 关于直线 BC 的对称点 $P_1(x, y)$,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{a+x}{2} + \frac{0+y}{2} = 6, \\ \frac{y-0}{x-a} \times (-1) = -1, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x=6, \\ y=6-a, \end{cases}$$

即 $P_1(6, 6-a)$,

易得 P 关于 y 轴的对称点 $P_2(-a, 0)$, 由光的反射原理可知 P_1, Q, R, P_2 四点共线,

直线 QR 的斜率 $k = \frac{6-a-0}{6-(-a)} = \frac{6-a}{6+a}$, 故直线 QR 的方程为

$$y = \frac{6-a}{6+a}(x+a),$$

由于直线 QR 过 $\triangle ABC$ 的重心 $(2, 2)$, 代入得 $2 = \frac{6-a}{6+a}(2+a)$,

则 $a = 2$ 或 $a = 0$ (舍去), 故 $P(2, 0)$, $P_1(6, 4)$, $P_2(-2, 0)$, 直

线 QR 的方程为 $y = \frac{1}{2}(x+2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} x+y=6, \\ y=\frac{1}{2}(x+2), \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x=\frac{10}{3}, \\ y=\frac{8}{3}, \end{cases}$$

即点 Q 的坐标为 $(\frac{10}{3}, \frac{8}{3})$,

则 $\triangle PQB$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times (6-2) \times y_Q = 2 \times \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$.

故选 A.]

7. AB [法一: 由题意知点 A 和点 B 到直线 l 的距离相等,

$$\text{所以} \frac{|6a+3+1|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|-3a-4+1|}{\sqrt{a^2+1}},$$

化简得 $6a+4=-3a-3$ 或 $6a+4=3a+3$,

解得 $a=-\frac{7}{9}$ 或 $a=-\frac{1}{3}$. 故选 AB.

法二:由题意知,当直线 l 与点 A, B 的连线所在的直线平行或直线 l 过线段 AB 的中点时,点 A, B 到直线 l 的距离相等.

当直线与点 A, B 的连线所在的直线平行时,

由直线 AB 的斜率 $k=\frac{7}{9}$, 直线 l 的斜率 $-a$, 得 $a=-\frac{7}{9}$;

当直线 l 过线段 AB 的中点时,

因为线段 AB 的中点坐标为 $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, 得 $a=-\frac{1}{3}$.

所以 $a=-\frac{1}{3}$ 或 $a=-\frac{7}{9}$. 故选 AB.]

8. **ABC** [对于选项 A, 由 $ax-(2a-3)y-1=0$ 得 $a(x-2y)+3y-1=0$,

令 $\begin{cases} x-2y=0, \\ 3y-1=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\frac{2}{3}, \\ y=\frac{1}{3}, \end{cases}$ 直线 l_2 始终过定点 $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, 故选

项 A 正确;

对于选项 B, 由 $l_1 \perp l_2$ 得 $a-a(2a-3)=0$, 解得 $a=0$ 或 $a=2$, 故选项 B 正确;

对于选项 C, 由直线 $l_1: x+ay-a=0$ 和直线 $l_2: ax-(2a-3)y-1=0$,

可得当 $a=-3$ 时, $l_1: x-3y+3=0$, 即 $3x-9y+9=0$, $l_2: 3x-9y+1=0$, 则 $l_1 \parallel l_2$,

则 l_1 与 l_2 的距离为 $\frac{|9-1|}{\sqrt{3^2+(-9)^2}}=\frac{4\sqrt{10}}{15}$, 故选项 C 正确;

对于选项 D, 当 $a=0$ 时, $l_1: x=0$, 不经过第三象限, 故选项 D 错误.

故选 ABC.]

9. **AC** [根据点 N 在直线 $x+y=0$ 上,

设点 $N(a, -a)$,

结合 $M(1, 0)$, 可知 MN 的中点坐标为 $(\frac{a+1}{2}, -\frac{a}{2})$,

由题意可知点 $(\frac{a+1}{2}, -\frac{a}{2})$ 在直线 $mx-y+1=0 (m \in \mathbf{R})$ 上,

可得 $m \times \frac{a+1}{2} + \frac{a}{2} + 1 = 0$, 化简得 $m(a+1) + a + 2 = 0$, ①

因为直线 MN 垂直于直线 $mx-y+1=0 (m \in \mathbf{R})$,

所以当 $a \neq 1$ 时, 可得 $-\frac{a}{a-1} \times m = -1$, 化简得 $am = a-1$, ②

联立①②, 解得

$$\begin{cases} a=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \\ m=-\sqrt{3}, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \\ m=\sqrt{3}, \end{cases}$$

又当 $a=1$ 时, 根据直线 MN 垂直于直线 $mx-y+1=0 (m \in \mathbf{R})$, 可知 $m=0$, 此时直线为 $y=1$,

而 MN 的中点坐标为 $(1, -\frac{1}{2})$, 不在直线 $y=1$ 上, 不满足题意.

综上所述, $m = \pm\sqrt{3}$.

故选 AC.]

10. $\sqrt{2}$ [由题可得 $1 \times (-a) - 3 = 0$, 解得 $a = -3$,
直线 $3x - ay + 3 = 0$, 即 $3x + 3y + 3 = 0$, 即 $x + y + 1 = 0$,

所以直线 $x + y + 3 = 0$ 与直线 $x + y + 1 = 0$ 的距离为

$$\frac{|3-1|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}.$$

即直线 $x + y - a = 0$ 与直线 $3x - ay + 3 = 0$ 之间的距离为 $\sqrt{2}$.]

11. $x + y - 1 = 0$ [设所求直线方程为 $x + 2y - 2 + \lambda(3x - 2y + 2) = 0$, 点 $P(1, 0)$ 在直线上,

$$\therefore 1 - 2 + \lambda(3 + 2) = 0, \text{ 解得 } \lambda = \frac{1}{5},$$

$\therefore$ 所求直线方程为 $x + 2y - 2 + \frac{1}{5}(3x - 2y + 2) = 0$, 即 $x + y - 1 = 0$.]

12. 3 [由题意得 $|OP| = \sqrt{m^2 + n^2}$, 表示点 P 到原点 $(0, 0)$ 的距离,

所以 $\sqrt{m^2 + n^2}$ 的最小值等于原点 $(0, 0)$ 到直线 $3x + 4y + 15 = 0$ 的距离,

结合点到直线的距离公式, 可得 $d = \frac{|0 + 0 + 15|}{\sqrt{9 + 16}} = 3$, 可知

$\sqrt{m^2 + n^2}$ 的最小值为 3.]

课时作业(六十一)

1. **D** [化圆的方程为标准方程, 得 $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 10$, 所以该圆的圆心 $(1, -3)$ 到直线 $x - y + 2 = 0$ 的距离为 $\frac{|1 - (-3) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$.]

2. **B** [由 $x^2 + y^2 + kx + 4y + k^2 + 1 = 0$, 得 $(x + \frac{k}{2})^2 + (y + 2)^2 = 3 - \frac{3}{4}k^2$, 由 $3 - \frac{3}{4}k^2 > 0$, 解得 $-2 < k < 2$, ①

$\therefore$ 点 $P(1, -2)$ 在圆 C 的外部, $\therefore 1 + 4 + k - 8 + k^2 + 1 > 0$, 即 $k^2 + k - 2 > 0$, 得 $k < -2$ 或 $k > 1$, ②

由①②得 $1 < k < 2$. 故选 B.]

3. **B** [由题意知, $\triangle ABC$ 是直角三角形, 且 $A = 90^\circ$,

$\therefore$ 圆的半径为 $\frac{|BC|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + 4^2}}{2} = \sqrt{5}$, 圆心为 $(-3, 0)$,

$\therefore$ 圆的方程为 $(x+3)^2 + y^2 = 5$. 故选 B.]

4. **A** [设点 $M(x_0, y_0)$, 则 $P(x_0, 2y_0)$,

又 P 在曲线 C 上,

所以 $x_0^2 + 4y_0^2 = 16 (y_0 > 0)$,

$$\text{即 } \frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{4} = 1 (y_0 > 0),$$

即点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 (y > 0)$.

故选 A.]

5. **ABD** [根据题意, 圆 $C_k: (x-k)^2 + (y-k)^2 = 4 (k \in \mathbf{R})$, 其圆心为 (k, k) , 半径为 2.

依次分析选项:

对于 A, 圆心为 (k, k) , 在直线 $y = x$ 上, A 正确;

对于 B, 圆 $C_k: (x-k)^2 + (y-k)^2 = 4$,

将 $(3, 0)$ 代入圆的方程可得 $(3-k)^2 + (0-k)^2 = 4$,

化简得 $2k^2 - 6k + 5 = 0$, $\Delta = 36 - 40 = -4 < 0$, 方程无解, B 正确;

对于 C, 将 $(2, 2)$ 代入圆的方程可得 $(2-k)^2 + (2-k)^2 = 4$, 解得 $k = 2 \pm \sqrt{2}$, 故 C 错误;

对于 D, 由圆的方程可知圆的半径为 2, 则圆的面积为 4π , 故 D 正确.

故选 ABD.]

6. BD [如图, 方程 $(x-2)^2 + y^2 = 4$

表示以 $C(2,0)$ 为圆心, 半径 $r=2$

的圆. 对于 A, $\frac{y}{x+1}$ 表示点 $(-1,0)$

与圆上的点 (x,y) 的连线的斜率,

设过点 $(-1,0)$ 的直线的斜率

为 k , 则 $y=k(x+1)$, 即 $kx -$

$y+k=0$, 所以圆心 C 到该直线的距离 $d_1 = \frac{|2k+k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} \leq$

2 , 解得 $-\frac{2\sqrt{5}}{5} \leq k \leq \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 故 A 错误; 对于 B, 令 $x+y=z$, 即

$x+y-z=0$, 直线 $x+y-z=0$ 与圆必有交点, 则圆心 C 到该

直线的距离 $d_2 = \frac{|2-z|}{\sqrt{2}} \leq 2$, 解得 $2-2\sqrt{2} \leq z \leq 2+2\sqrt{2}$, 即

$2-2\sqrt{2} \leq x+y \leq 2+2\sqrt{2}$, 故 $x+y$ 的最小值为 $2-2\sqrt{2}$, 即 B

正确; 对于 C, $(x+2)^2 + (y+3)^2$ 表示圆上的点 (x,y) 到

$A(-2,-3)$ 的距离的平方, 令圆上的点 (x,y) 到 $A(-2,-3)$

的距离为 d_3 , 因为 $|AC| = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-0)^2} = 5$, 所

以 $|AC| - r \leq d_3 \leq |AC| + r$, 即 $3 \leq d_3 \leq 7$, 所以 $9 \leq (x+2)^2 +$

$(y+3)^2 \leq 49$, 故 C 错误; 对于 D, 因为直线 $y=kx+2$ 恒过点

$D(0,2)$, 又 $|CD| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$, 所以点 (x,y) 到直线

$y=kx+2$ 的距离的最大值为 $2+2\sqrt{2}$, 故 D 正确. 故选 BD.]

7. $x^2 + y^2 - 2x = 0$ [设圆的方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

$\because$ 圆经过点 $(0,0), (1,1), (2,0)$,

$\therefore \begin{cases} F=0, \\ 2+D+E+F=0, \\ 4+2D+F=0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} D=-2, \\ E=0, \\ F=0. \end{cases}$

$\therefore$ 圆的方程为 $x^2 + y^2 - 2x = 0$.]

8. $[-1,3]$ [将圆 C 的方程 $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ 化为 $(x-2)^2 + y^2 = 1$,

所以圆心 C 的坐标为 $(2,0)$.

所以 $\overrightarrow{PC} = (2-x, -y)$,

又 $\overrightarrow{PO} = (-x, -y)$,

所以 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PO} = x^2 + y^2 - 2x$.

因为 $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$,

所以 $x^2 + y^2 = 4x - 3$,

所以 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PO} = 4x - 3 - 2x = 2x - 3$.

因为 $(x-2)^2 + y^2 = 1$, 所以 $1 \leq x \leq 3$.

所以 $-1 \leq 2x - 3 \leq 3$,

从而 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PO}$ (O 为坐标原点) 的取值范围为 $[-1,3]$.]

9. 解: (1) 设圆心坐标为 $(3t, t)$,

则由圆与 y 轴正半轴相切, 可得半径 $r = 3|t|$.

$\because$ 圆心到直线 l 的距离 $d = \frac{|6t-t|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}t$, 由 $4+5t^2 = 9t^2$, 解

得 $t = \pm 1$,

故圆心坐标为 $(3,1)$ 或 $(-3,-1)$, 半径等于 3.

$\because$ 圆与 y 轴正半轴相切, $\therefore$ 圆心坐标只能为 $(3,1)$,

故圆 C 的方程为 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$.

(2) ① 设 $M(x,y), A(m,n)$,

$\because M$ 为线段 AB 上一点且满足 $\frac{|AM|}{|MB|} = 3$,

$\therefore \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$,

$\therefore (x-m, y-n) = 3(-5-x, 1-y)$,

$\therefore \begin{cases} m = 4x + 15, \\ n = 4y - 3, \end{cases}$

$\because$ 点 A 在圆 C 上运动,

$\therefore (4x+15-3)^2 + (4y-3-1)^2 = 9$,

$\therefore (4x+12)^2 + (4y-4)^2 = 9$,

$\therefore (x+3)^2 + (y-1)^2 = \frac{9}{16}$,

所以曲线 E 的方程为 $(x+3)^2 + (y-1)^2 = \frac{9}{16}$,

它是一个以 $(-3,1)$ 为圆心, 以 $\frac{3}{4}$ 为半径的圆.

② 假设存在一点 $T(a, 2a)$ 满足条件, 设 $P(x, y)$, $\frac{|PT|}{|PO|} = \lambda$,

则 $(x-a)^2 + (y-2a)^2 = \lambda^2(x^2 + y^2)$,

整理得 $\lambda^2(x^2 + y^2) = x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 4ay + 4a^2$,

$\because P$ 在轨迹 E 上,

$\therefore (x+3)^2 + (y-1)^2 = \frac{9}{16}$,

化简得 $x^2 + y^2 = -6x + 2y - \frac{151}{16}$,

$\therefore x(6\lambda^2 - 2a - 6) + y(-2\lambda^2 - 4a + 2) - \frac{151}{16} + \frac{151}{16}\lambda^2 +$

$5a^2 = 0$,

$\therefore \begin{cases} 6\lambda^2 - 2a - 6 = 0, \\ -2\lambda^2 - 4a + 2 = 0, \\ -\frac{151}{16} + \frac{151}{16}\lambda^2 + 5a^2 = 0, \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} \lambda^2 = 1, \\ a = 0, \end{cases} \therefore T(0,0),$

$\because T$ 异于原点, $\therefore T$ 不存在.

课时作业(六十二)

1. A [根据题意, 化简得 $E: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$, 圆心为 $E(3,4), r_1 = 5$.

圆 $F: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$, 圆心为 $F(1,2)$, 半径 $r_2 = 1$.

可得圆心距 $|EF| = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{2}$, 因为 $|EF| < r_1 - r_2 = 4$, 所以两圆内含.

故选 A.]

2. C [将直线 $l: (2m+1)x + (m+1)y - 13m - 9 = 0$, 整理可得 $(2x+y-13)m + x+y-9 = 0$,

令 $\begin{cases} 2x+y-13=0, \\ x+y-9=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=4, \\ y=5, \end{cases}$ 即直线 l 恒过定点 $P(4,5)$,

因为 $(4-2)^2 + (5-3)^2 = 8 < 16$,

所以点 P 在圆 C 内, 所以直线与圆相交, 即直线与圆的公共点有 2 个.

故选 C.]

3. B [联立 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0, \\ x^2 + y^2 - 4x + 4y - 12 = 0, \end{cases}$

两式相减可得公共弦所在直线的方程为 $x - y + 2 = 0$,

法一: 联立 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0, \\ x - y + 2 = 0, \end{cases}$

$$\text{得 } x^2+2x=0,$$

解得 $x_1=0, x_2=-2$, 即公共弦的端点坐标为 $(0, 2), (-2, 0)$, 根据两点之间的距离公式可得公共弦长 $d = \sqrt{[0-(-2)]^2+(2-0)^2} = 2\sqrt{2}$.

法二: 圆 $x^2+y^2-4=0$ 的圆心坐标为 $(0, 0)$, 半径 $r=2$,

$$\text{圆心到公共弦的距离 } d_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

$$\text{公共弦长 } d = 2\sqrt{r^2-d_1^2} = 2\sqrt{2}.$$

故选 B.]

4. B [圆 $C: x^2+y^2=4$ 的圆心 $C(0, 0)$, 半径 $r=2$,

$$\text{可得圆心 } C \text{ 到直线 } l: ax+by-1=0 \text{ 的距离 } d = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\text{所以弦长 } |AB| = 2\sqrt{r^2-d^2} = 2\sqrt{4-\frac{1}{a^2+b^2}} = 2\sqrt{3},$$

$$\text{可得 } a^2+b^2=1,$$

将 $P(a, b)$ 代入直线 l 的方程可得 $a^2+b^2-1=0$, 所以点 P 在直线 l 上.

故选 B.]

5. A [圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的圆心 $C(1, 1)$, 半径为 1, 过直线 $x-y+4=0$ 上一点 P 作圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的切线, 设切点为 M , 连接 PC, MC (图略), 则 $|PM| = \sqrt{|PC|^2-|MC|^2} = \sqrt{|PC|^2-1}$, 要使切线长最小, 则 $|PC|$ 最小, 而 $|PC|$ 的最小值等于圆心 C 到直线 $x-y+4=0$ 的距离, 故 $|PC|_{\min} = \frac{|1-1+4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, 故切线长的最小值为 $\sqrt{(2\sqrt{2})^2-1} = \sqrt{7}$. 故选 A.]

6. B [由题意得圆心 $(0, -2)$ 到直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 的距离 $d=2$. 当 $r=d-1=1$ 时, 圆 $x^2+(y+2)^2=r^2 (r>0)$ 上到直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 的距离为 1 的点有且仅有一个, 当 $r=d+1=3$ 时, 圆 $x^2+(y+2)^2=r^2 (r>0)$ 上到直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 的距离为 1 的点有且仅有三个, 故当 $1<r<3$ 时, 圆 $x^2+(y+2)^2=r^2 (r>0)$ 上到直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 的距离为 1 的点有且仅有两个. 故选 B.]

7. ACD [根据题意, 由 $x^2+y^2-2x=0$, 得 $(x-1)^2+y^2=1$, 则圆心 $O_1(1, 0)$, 半径 $r=1$, 由 $x^2+y^2+2x-8y=0$, 得 $(x+1)^2+(y-4)^2=17$, 则圆心 $O_2(-1, 4)$, 半径 $R=\sqrt{17}$.

对于 A, 联立 $\begin{cases} x^2+y^2-2x=0, \\ x^2+y^2+2x-8y=0, \end{cases}$ 得 $x-2y=0$, 即直线 AB

的方程为 $x-2y=0$, A 正确; 对于 B, 圆心 O_1 到直线 AB 的距离 $d = \frac{|1-0|}{\sqrt{1+4}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $|AB| = 2 \times \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, B 错误; 对于 C, 线段 AB 的垂直平分线即直线 O_1O_2 , 由 $O_1(1, 0), O_2(-1, 4)$, 易得直线 O_1O_2 的方程为 $2x+y-2=0$, C 正确; 对于 D,

由圆心 O_1 到直线 AB 的距离 $d = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 知点 P 到直线 AB 的距离的最大值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}+1$, D 正确. 故选 ACD.]

8. ABD [由题可知, 直线 l 过定点 $(-2, 0)$, 因为圆 $C: (x-2)^2+y^2=8$,

所以圆心为 $C(2, 0)$, 半径为 $2\sqrt{2}$. 对于 A, 若 $t=1$, 则圆心 $C(2, 0)$ 到直线 $x-y+2=0$ 的距离为

$$\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}, \text{ 即圆心到直线的距离等于半径,}$$

所以 l 与圆 C 相切, 故 A 正确;

对于 B, 依题意, 由圆心 $C(2, 0)$ 到直线 $x-ty+2=0$ 的距离为

$$\frac{4}{\sqrt{1+t^2}} < 2\sqrt{2},$$

解得 $t > 1$ 或 $t < -1$, 故 B 正确;

对于 C, 将 $(2, 0)$ 代入 l 的方程, 得 $2=t \times 0-2$ 不成立,

故 l 不能经过圆心 C , 则圆 C 不可能关于 l 对称, 故 C 错误;

对于 D, 若 $t=\sqrt{3}$, 圆心 $C(2, 0)$ 到直线 $x-\sqrt{3}y+2=0$ 的距离为

$$\frac{4}{2} = 2, \text{ 则弦长为 } 2\sqrt{8-2^2} = 4, \text{ 故 D 正确.}$$

故选 ABD.]

9. AD [圆 $O: x^2+y^2=4$ 的半径 $r=2$, 圆心为 $O(0, 0)$.

对于 A, 点 O 到直线 l 的距离 $d = \frac{|0-0+\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 1$, 所以弦长为

$$2\sqrt{r^2-d^2} = 2\sqrt{3}, \text{ A 正确;}$$

对于 B, 因为圆心 O 到直线 l 的距离 $d=1 < 2=r$, 所以直线 l 与圆 O 相交,

此时劣弧上的点到直线 l 的距离的最大值为 $r-d=1$, 所以劣弧上只有一个点满足题意,

优弧上有两个点符合题意, 即圆 O 上共有 3 个点到直线 l 的距离为 1, B 错误;

对于 C, 令 $\frac{y}{x-4} = k$, 则 $y=k(x-4)$, 由题意, 直线 $kx-y-4k=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 有公共点,

$$\text{则 } \frac{|4k|}{\sqrt{k^2+1}} \leq 2, \text{ 解得 } -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq k \leq \frac{\sqrt{3}}{3},$$

所以式子 $\frac{y_0}{x_0-4}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, C 错误;

对于 D, 由题意知, $M(3, 4)$, 且 $|PA|^2 = |PM|^2 - |AM|^2 = |PM|^2 - 1$,

所以问题转化为求 $|PM|$ 的最小值, 易知 $|PM|_{\min} = |OM| - 2 = \sqrt{3^2+4^2} - 2 = 3$,

此时 $|PA| = \sqrt{3^2-1} = 2\sqrt{2}$, 故 D 正确.

故选 AD.]

10. 2 [对于直线 $l: x-y+6=0$, 令 $x=0$, 得 $y=6$, 令 $y=0$, 得 $x=-6$, 所以 $A(-6, 0), B(0, 6)$, 所以 $|AB| = 6\sqrt{2}$. 因为 $|AB| = 3|CD|$, 所以 $|CD| = 2\sqrt{2}$. 圆 $(x+1)^2+(y-3)^2=r^2$ 的圆心为 $(-1, 3)$, 圆心到直线 l 的距离 $d = \frac{|-1-3+6|}{\sqrt{2}} =$

$$\sqrt{2}, \text{ 所以 } r = \sqrt{d^2 + \left(\frac{|CD|}{2}\right)^2} = \sqrt{2+2} = 2.]$$

11. 0 或 -4 [圆 $O_1: x^2+y^2-2\sqrt{3}x+a=0$ 与圆 $O_2: x^2+(y-1)^2=1$ 两个方程相减,

$$\text{化简得 } 2\sqrt{3}x-2y-a=0,$$

即为直线 AB 的方程.

圆 $O_2: x^2+(y-1)^2=1$ 的圆心为 $O_2(0, 1)$, 半径 $r_2=1$,

设点 O_2 到直线 AB 的距离为 d , 则 $|AB| = 2\sqrt{r_2^2-d^2} = \sqrt{3}$,

$$\text{解得 } d = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } \frac{|-2-a|}{\sqrt{12+4}} = \frac{1}{2},$$

解得 $a=0$ 或 $a=-4$.]

12. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ [圆 $x^2+y^2=1$ 的圆心为 $(0,0)$, 半径 $r_1=1$,

圆 $(x-6)^2+y^2=1$ 的圆心为 $(6,0)$, 半径 $r_2=1$,

显然两圆相离.

直线 $y=kx+b(k>0)$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 和圆 $(x-6)^2+y^2=1$ 都相切,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{|b|}{\sqrt{1+k^2}}=1, \\ \frac{|6k+b|}{\sqrt{1+k^2}}=1, \end{cases} \text{解得 } k^2=\frac{1}{8}, \text{ 又 } k>0, \text{ 则 } k=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

阶段检测(十三)

1. A [由题意, 设直线的方程为 $x-2y+c=0(c \neq 3)$,

因为所求直线过点 $P(-1,3)$,

所以 $-1-6+c=0$, 解得 $c=7$,

故所求直线的方程为 $x-2y+7=0$.

故选 A.]

2. B [直线 $l_1: x+2y-3=0$ 与直线 $l_2: kx-2y+1=0(k \in \mathbf{R})$ 平行,

$$\text{则 } \frac{k}{1} = \frac{-2}{2} \neq \frac{1}{-3}, \text{ 解得 } k=-1,$$

故直线 $l_1: x+2y-3=0$, 直线 $l_2: x+2y-1=0$,

$$\text{这两条直线间的距离为 } \frac{|-3+1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

故选 B.]

3. C [由题意, 圆的方程 $x^2+y^2+2x-8=0$ 可化为 $(x+1)^2+y^2=3^2$,

所以圆心坐标为 $(-1,0)$, 半径 $r=3$,

直线 $mx+y-m-1=0$ 化简可得直线 $y=m(1-x)+1$,

所以直线过定点 $(1,1)$, 因为定点和圆心的距离 $d =$

$$\sqrt{(-1-1)^2+(0-1)^2} = \sqrt{5} < 3,$$

所以定点在圆内, 当直线垂直于圆心到定点的连线时, 圆心到直线的距离最大, 最大值为 $\sqrt{5}$,

$$\text{所以弦长最短为 } 2\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2} = 4.$$

故选 C.]

4. B [如图, 由 $x^2+y^2-4x-1=0$ 得 $(x-2)^2+y^2=5$, 所以圆心坐标为 $(2,0)$, 半径 $r=\sqrt{5}$, 所以圆心到点 $(0,-2)$ 的距离为 $\sqrt{(2-0)^2+(0+2)^2} = 2\sqrt{2}$, 由于圆心与点 $(0,-2)$ 的连线平分角 α , 所以 $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{2\sqrt{2}} =$

$$\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

$$\text{所以 } \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}, \text{ 所以 } \sin \alpha = 2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{10}}{4} \times$$

$$\frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

故选 B.]

5. C [根据题意, 设 $\triangle ABC$ 的九点圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,

由于 $A(-2,1), B(4,1), G(3,3)$,

设 AB 中点为 D , 其坐标为 $(1,1)$, AG 中点为 E , 其坐标为

$(\frac{1}{2}, 2)$, BG 中点为 F , 其坐标为 $(\frac{7}{2}, 2)$,

由 $\triangle ABC$ 的九点圆过 D, E, F ,

$$\text{则有} \begin{cases} (1-a)^2+(1-b)^2=r^2, \\ (\frac{1}{2}-a)^2+(2-b)^2=r^2, \\ (\frac{7}{2}-a)^2+(2-b)^2=r^2, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=2, \\ b=\frac{17}{8}, \\ r^2=\frac{145}{64}, \end{cases}$$

故 $\triangle ABC$ 的九点圆的标准方程为 $(x-2)^2+(y-\frac{17}{8})^2=\frac{145}{64}$.

故选 C.]

6. D [由已知 $(x-1)^2+(y-1)^2=9$,

可知圆心坐标为 $(1,1)$, 半径 $r=3$,

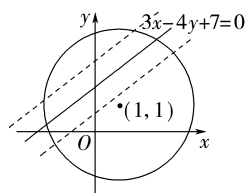
圆心 $(1,1)$ 到直线的距离为

$$\frac{|3-4+7|}{5} = \frac{6}{5} < \frac{1}{2}r = \frac{3}{2},$$

所以圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=9$ 上到

直线 $3x-4y+7=0$ 的距离为 1 的点共有 4 个.

故选 D.]



7. ACD [对于 A, 点 $(0,2)$ 到直线 $y=x+1$ 的距离为 $d =$

$$\frac{|0-2+1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 选项 A 错误;}$$

对于 B, 任意一条直线都有倾斜角, 但不一定有斜率, 如与 x 轴垂直的直线, 所以选项 B 正确;

对于 C, 直线 $x-2y+4=0$ 与两坐标轴的交点为 $A(-4,0)$ 和

$$B(0,2), \text{ 与两坐标轴围成的三角形面积是 } S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 4 \times$$

$2=4$, 选项 C 错误;

对于 D, 直线过原点时, 过点 $(2,2)$ 且在 x 轴和 y 轴上截距都相等的直线方程为 $y=x$,

直线不过原点时, 过点 $(2,2)$ 且在 x 轴和 y 轴上截距都相等的直线方程为 $x+y-4=0$, 所以选项 D 错误.

故选 ACD.]

8. ABC [易知圆 C_1 的圆心为 $C_1(0,0)$, 半径 $r_1=1$.

将 C_2 的方程化为 $(x-3)^2+(y+4)^2=1$, 得圆心为 $C_2(3,-4)$, 半径 $r_2=1$.

对于 A, 两圆的圆心距 $|C_1C_2|=5>r_1+r_2$, 所以两圆外离, 故 A 正确;

对于 B, $|PQ|$ 的最小值为 $|C_1C_2|-r_1-r_2=3$, 最大值为 $|C_1C_2|+r_1+r_2=7$, 所以 $|PQ|$ 的取值范围为 $[3,7]$, 故 B 正确;

对于 C, 两圆的圆心 $C_1(0,0), C_2(3,-4)$ 都在直线 $4x+3y=0$ 上, 所以直线 $4x+3y=0$ 为两圆的对称轴, 故 C 正确;

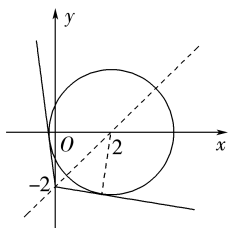
对于 D, 由 A 项知两圆外离, 所以不存在公共弦, 故 D 错误.

故选 ABC.]

9. $2(2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 中任意一个均可 [设直线 $x-my+1=0$

为直线 l , 由条件知 $\odot C$ 的圆心 $C(1,0)$, 半径 $R=2$, 点 C 到直

$$\text{线 } l \text{ 的距离 } d = \frac{2}{\sqrt{1+m^2}},$$



$$|AB|=2\sqrt{R^2-d^2}=2\sqrt{4-\left(\frac{2}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2}=\frac{4|m|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

由 $S_{\triangle ABC}=\frac{8}{5}$, 得 $\frac{1}{2}\times\frac{4|m|}{\sqrt{1+m^2}}\times\frac{2}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{8}{5}$, 整理得

$$2m^2-5|m|+2=0, \text{ 解得 } m=\pm 2 \text{ 或 } m=\pm\frac{1}{2}.$$

$$10. y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4} \text{ 或 } y=\frac{7}{24}x-\frac{25}{24} \text{ 或 } x=-1$$

[圆 $x^2+y^2=1$ 的圆心为 $O(0,0)$, 半径为 1, 圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 的圆心为 $O_1(3,4)$, 半径为 4,

两圆圆心距为 $\sqrt{3^2+4^2}=5$, 等于两圆半径之和, 故两圆外切, 如图,

当切线为 l 时, 因为 $k_{OO_1}=\frac{4}{3}$, 所

以 $k_l=-\frac{3}{4}$, 设方程为 $y=-\frac{3}{4}x+$

$t(t>0)$,

点 O 到 l 的距离 $d=\frac{|t|}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=1$, 解得 $t=\frac{5}{4}$, 所以 l 的方程

$$\text{为 } y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4},$$

当切线为 m 时, 设直线方程为 $kx+y+p=0$, 其中 $p>0, k<0$,

$$\text{由题意得 } \begin{cases} \frac{|p|}{\sqrt{1+k^2}}=1, \\ \frac{|3k+4+p|}{\sqrt{1+k^2}}=4, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k=-\frac{7}{24}, \\ p=\frac{25}{24}, \end{cases} \quad y=\frac{7}{24}x-\frac{25}{24},$$

当切线为 n 时, 易知切线方程为 $x=-1$.]

11. 解: 存在. 设直线 l 的方程为 $y=x+b$,

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

因为以 AB 为直径的圆恰好经过原点,

所以 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}=0$,

即 $x_1x_2+y_1y_2=0, x_1x_2+(x_1+b)(x_2+b)=0$,

所以 $2x_1x_2+b(x_1+x_2)+b^2=0$.

$$\text{由 } \begin{cases} x^2+y^2-2x+4y-4=0, \\ y=x+b, \end{cases}$$

得 $x^2+(x+b)^2-2x+4(x+b)-4=0$,

整理得 $2x^2+(2b+2)x+b^2+4b-4=0$,

由题意 $\Delta=(2b+2)^2-4\times 2(b^2+4b-4)>0$,

即 $b^2+6b-9<0(*)$.

$$\text{而 } x_1+x_2=-\frac{2b+2}{2}=-b-1, x_1x_2=\frac{b^2+4b-4}{2},$$

所以 $b^2+4b-4+b(-b-1)+b^2=0$,

所以 $b=1$ 或 $b=-4$, 满足 $(*)$ 式,

所以直线 l 的方程为 $y=x+1$ 或 $y=x-4$.

12. 解: (1) 依题意, 所求直线过圆心且与 $x-y+1=0$ 垂直, 易得圆心 $C(2,1)$,

所以所求直线的方程为 $y-1=-(x-2)$,

即 $y=-x+3$.

(2) 圆心 $(2,1)$ 到直线 $AB: x-y+1=0$ 的距离

$$d=\frac{|2-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}.$$

所以圆的半径 $r=\sqrt{d^2+\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2}=2$,

$$\text{所以 } \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-2)^2-4m}=2,$$

解得 $m=1$.

(3) 由题意知, 点 $P(4,4)$ 在圆外,

① 当所求切线的斜率存在时, 设切线方程为 $y-4=k(x-4)$,

即 $kx-y-4k+4=0$,

由圆心到切线的距离等于半径 2,

$$\text{即 } \frac{|2k-1+4-4k|}{\sqrt{k^2+1}}=2, \text{ 解得 } k=\frac{5}{12},$$

所以所求切线方程为 $5x-12y+28=0$.

② 当所求切线的斜率不存在时, 过 P 点的直线方程为 $x=4$,

圆心 C 到 $x=4$ 的距离为 2, 等于半径, 故直线 $x=4$ 是圆 C 的切线.

综上, 所求切线的方程为 $x=4$ 或 $5x-12y+28=0$.

课时作业(六十三)

1. D [把椭圆方程 $16x^2+4y^2=1$ 化为标准方程可得 $\frac{y^2}{\frac{1}{4}}+\frac{x^2}{\frac{1}{16}}=1$

$$1, \text{ 所以 } a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{4}, c=\frac{\sqrt{3}}{4},$$

则长轴长 $2a=1$, 焦距 $2c=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 短轴长 $2b=\frac{1}{2}$, 离心率 $e=$

$$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 故选 D.}]$$

2. B [因为方程 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{t}=1$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆, 所以 $0<t<36$,

可得椭圆短轴长: $2\sqrt{t}\in(0,12)$.

故选 B.]

3. B [根据题意可知,

$$a^2=2m, b^2=16, c^2=2m-16,$$

$$\text{所以 } e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{2m-16}{2m}=\frac{1}{9},$$

解得 $m=9$.

故选 B.]

4. C [因为椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,

所以 $a=2, b=\sqrt{3}$,

则 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-3}=1$,

所以 $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2a+2c=6$.

故选 C.]

5. B [因为离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{1}{3}$,

$$\text{解得 } \frac{b^2}{a^2}=\frac{8}{9}, b^2=\frac{8}{9}a^2,$$

A_1, A_2 分别为 C 的左、右顶点,

则 $A_1(-a,0), A_2(a,0), B$ 为上顶点, 所以 $B(0,b)$.

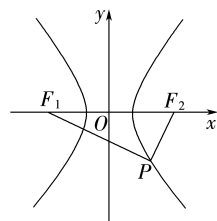
所以 $\overrightarrow{BA_1}=(-a,-b), \overrightarrow{BA_2}=(a,-b)$,

13. 解: (1) 由题意得 $\frac{|BF|}{|AB|} = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{b^2+a^2}} = \frac{a}{\sqrt{b^2+a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 4a^2 = 3(b^2+a^2) \Rightarrow a^2 = 3b^2$,
- 所以椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.
- (2) 由(1)可知椭圆的方程为 $x^2+3y^2=a^2$, 由题意易知直线 l 的斜率存在且不为 0, 设直线 l 的方程为 $y=kx+m (k \neq 0)$,
- 联立 $\begin{cases} y=kx+m, \\ x^2+3y^2=a^2, \end{cases}$ 得 $(1+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-a^2=0$,
- 由 $\Delta=36k^2m^2-4(1+3k^2)(3m^2-a^2)=0 \Rightarrow 3m^2=a^2(1+3k^2)$, ①
- $x_M = -\frac{3km}{3k^2+1}, y_M = kx_M+m = \frac{m}{1+3k^2}$, 由 $|OM|=|ON|$,
- 可得 $m^2 = \frac{m^2(9k^2+1)}{(3k^2+1)^2}$, ②
- 由 $S_{\triangle OMN} = \sqrt{3}$ 可得 $\frac{1}{2}|m| \cdot \frac{|3km|}{1+3k^2} = \sqrt{3}$, ③
- 联立①②③可得 $k^2 = \frac{1}{3}, m^2 = 4, a^2 = 6$,
- 故椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

课时作业(六十四)

1. A [若 $\frac{x^2}{m+1} - \frac{y^2}{m+2} = 1$ 为双曲线方程, 则 $(m+1)(m+2) > 0$, 解得 $m > -1$ 或 $m < -2$, 又 $\{m|m > -1\} \subsetneq \{m|m > -1 \text{ 或 } m < -2\}$, 故“ $m > -1$ ”是“ $\frac{x^2}{m+1} - \frac{y^2}{m+2} = 1$ 为双曲线方程”的充分不必要条件. 故选 A.]
2. B [渐近线方程为 $\sqrt{7}x - \sqrt{2}y = 0$, 即 $y = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}x$, 根据双曲线的渐近线斜率为 $\pm \frac{b}{a}$, 可知 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$, $e^2 = 1 + \left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 + \frac{7}{2} = \frac{9}{2}$, 因此, 离心率 $e = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. 故选 B.]
3. D [双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 虚半轴长为 2, 即 $b = 2, e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{1+\frac{4}{a^2}} = \sqrt{3}$, 可得 $a = \sqrt{2}, c = \sqrt{6}, 2c = 2\sqrt{6}$, 所以双曲线的焦距为 $2\sqrt{6}$. 故选 D.]
4. C [由题意得 $b = 8$ 且 $\frac{8}{a} = \frac{4}{3}$, 所以 $a = 6$, 所以 $||PF_1| - |PF_2|| = 2a = 12$, 则 $|PF_2| = 3$ 或 $|PF_2| = 27$. 当 $|PF_2| = 3$ 时, $|PF_1| + |PF_2| = 18 < |F_1F_2| = 20$, 故舍去; 当 $|PF_2| = 27$ 时, $|PF_1| + |PF_2| = 42 > |F_1F_2| = 20$, 满足题意. 故选 C.]

5. C [如图, 由题意可知, 点 P 必落在第四象限,



$$\begin{aligned} \angle F_1PF_2 &= 90^\circ, \\ \text{设 } |PF_2| &= m, \\ \angle PF_2F_1 &= \theta_1, \\ \angle PF_1F_2 &= \theta_2, \end{aligned}$$

$$\text{由 } k_{PF_2} = \tan \theta_1 = 2, \text{ 所以 } \sin \theta_1 = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\text{因为 } \angle F_1PF_2 = 90^\circ, \text{ 所以 } k_{PF_1} \cdot k_{PF_2} = -1, \text{ 则 } k_{PF_1} = -\frac{1}{2}, \text{ 即}$$

$$\tan \theta_2 = \frac{1}{2}, \sin \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ 由正弦定理可得, } |PF_1| : |PF_2| :$$

$$|F_1F_2| = \sin \theta_1 : \sin \theta_2 : \sin 90^\circ = 2 : 1 : \sqrt{5},$$

$$\text{则由 } |PF_2| = m, \text{ 得 } |PF_1| = 2m, |F_1F_2| = 2c = \sqrt{5}m,$$

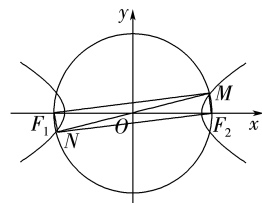
$$\text{由 } S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2}|PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot m = 8, \text{ 得 } m =$$

$$2\sqrt{2}, \text{ 则 } |PF_2| = 2\sqrt{2}, |PF_1| = 4\sqrt{2}, |F_1F_2| = 2c = 2\sqrt{10}, c = \sqrt{10},$$

$$\text{由双曲线的定义, 可得 } |PF_1| - |PF_2| = 2a = 2\sqrt{2}, \text{ 所以 } a = \sqrt{2}, b = \sqrt{c^2 - a^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\text{所以双曲线的方程为 } \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1. \text{ 故选 C.}]$$

6. C [以 F_1F_2 为直径的圆与双曲线在第一、三象限的交点分别为 M, N , 如图所示,



$$\begin{aligned} \text{设 } |MF_2| &= n, |MF_1| = m, \text{ 由 } M \\ \text{在以 } F_1F_2 \text{ 为直径的圆上可得} \\ MF_1 &\perp MF_2, \end{aligned}$$

$$\therefore |MF_1|^2 + |MF_2|^2 = |F_1F_2|^2,$$

$$\text{四边形 } MF_1NF_2 \text{ 为矩形,}$$

$$\text{则 } |MN| = |F_1F_2| = 2c,$$

$$|MF_2| = |F_1N| = n.$$

$$\text{由双曲线 } C: \frac{x^2}{3} - y^2 = 1, \text{ 得 } a^2 = 3, b^2 = 1, c^2 = a^2 + b^2 = 4,$$

$$\therefore m^2 + n^2 = 16, \text{ 又由双曲线的定义有 } m - n = 2a = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore m^2 - 2mn + n^2 = 12, \text{ 得 } mn = 2,$$

$$\therefore (m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2 = 16 + 4 = 20,$$

$$\text{即 } m+n = 2\sqrt{5}, \text{ 而 } |MN| = |F_1F_2| = 2c = 4,$$

$$\therefore m+n+|MN| = 4+2\sqrt{5},$$

$$\therefore \triangle MF_1N \text{ 的周长为 } 4+2\sqrt{5}.$$

$$\text{故选 C.}]$$

7. AD [已知双曲线 $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$,

$$\text{则 } a = 3, b = 4, c = \sqrt{9+16} = 5.$$

$$\text{对于 A, 双曲线的实轴长为 6, 故选项 A 正确;}$$

$$\text{对于 B, 双曲线的焦距为 10, 故选项 B 错误;}$$

$$\text{对于 C, 双曲线的离心率为 } \frac{5}{3}, \text{ 故选项 C 错误;}$$

$$\text{对于 D, 双曲线的焦点到渐近线的距离为 } \frac{\frac{4}{3} \times 5}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}} = 4, \text{ 故}$$

$$\text{选项 D 正确, 故选 AD.}]$$

8. **BCD** [对于 A, 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线

方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 当 $a = 2, b = \sqrt{3}$ 时, 双曲线的渐近线方程是

$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$, 故 A 错误;

对于 B, 因为点 $(2, 4\sqrt{2})$ 在 C 上, 则 $\frac{4}{a^2} - \frac{32}{b^2} = 1$, 得 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2}{4} +$

$8 > 8$, 所以双曲线的离心率 $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 3$, 故 B 正确;

对于 C, 因为 $|PF_1| - |PF_2| = 2a$, 若 $PF_1 \perp PF_2$,

则 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2 = 4c^2$,

即 $(|PF_1| - |PF_2|)^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| = 4c^2$,

即 $4a^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| = 4c^2$,

得 $|PF_1| \cdot |PF_2| = 2(c^2 - a^2) = 2b^2$,

所以 $S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{1}{2}|PF_1| \cdot |PF_2| = b^2$, 故 C 正确;

对于 D, 若 C 为等轴双曲线, 则 $a = b$,

从而 $|F_1F_2| = 2c = 2\sqrt{2}a$,

若 $|PF_1| = 3|PF_2|$, 结合 $|PF_1| - |PF_2| = 2a$,

则 $|PF_2| = a, |PF_1| = 3a$,

在 $\triangle F_1PF_2$ 中, 由余弦定理, 得

$$\cos \angle F_1PF_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|}$$

$$= \frac{9a^2 + a^2 - 8a^2}{2 \times 3a \times a} = \frac{1}{3}, \text{ 故 D 正确.}$$

故选 BCD.]

9. **ACD** [根据双曲线和圆的对称性, 知四边形 A_1MA_2N 为平行四边形, 因为 $\angle NA_1M = \frac{5\pi}{6}$, 所以 $\angle A_1MA_2 = \frac{\pi}{6}$, 故 A 正确.

不妨设 $M(x_0, \frac{b}{a}x_0) (x_0 > 0)$,

根据 $|OM| = c$, 得 $x_0^2 + \frac{b^2}{a^2}x_0^2 = c^2$,

解得 $x_0 = a$,

故 $M(a, b), N(-a, -b)$, 所以

$\angle MA_2A_1 = \frac{\pi}{2}$, 又因为 $\angle A_1MA_2 = \frac{\pi}{6}$,

所以 $|MA_2| = \frac{\sqrt{3}}{2}|MA_1|$, 故 B 错误.

在 $\text{Rt}\triangle MA_1A_2$ 中, $|MA_2| = b, |A_1A_2| = 2a, \angle A_1MA_2 = \frac{\pi}{6}$,

所以 $\tan \angle A_1MA_2 = \frac{|A_1A_2|}{|MA_2|} = \frac{2a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即 $\frac{b}{a} = 2\sqrt{3}$,

故 $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{13}$, 故 C 正确.

当 $a = \sqrt{2}$ 时, $b = 2\sqrt{6}$, 则 $S_{\text{平行四边形}NA_1MA_2} = 2S_{\triangle MA_1A_2} = 2 \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 8\sqrt{3}$, 故 D 正确. 故选 ACD.]

10. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ [依题意, 设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$,

$$\text{由题意得} \begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{3}{4}, \\ c = 5, \\ c^2 = a^2 + b^2, \end{cases}$$

解得 $a = 4, b = 3$, 所以双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.]

11. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 (x \geq 3)$ [由双曲线的定义, 知点 M 的轨迹是双

曲线的右支, 且 $c = 5, a = 3$, 所以 $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 4$, 故点 M 的

轨迹方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 (x \geq 3)$.]

12. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ [设 $P(x, y)$, 因为 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$,

所以 $y^2 = \frac{x^2}{4} - 1$,

所以 $|PA| = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$

$$= \sqrt{(x-3)^2 + \frac{x^2}{4} - 1} = \sqrt{\frac{5x^2}{4} - 6x + 8}$$

$$= \sqrt{\frac{5}{4}\left(x - \frac{12}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}},$$

因此当 $x = \frac{12}{5}$ 时, 满足 $x \geq 2$, $|PA|$ 取最小值, 最小值是

$$\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.]$$

课时作业(六十五)

1. **D** [抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线方程为 $x = -1$,

∴ 点 A 到焦点 F 的距离等于点 A 到准线的距离, 点 A 的横坐标是 4,

∴ 点 A 到焦点 F 的距离是 $4 + 1 = 5$.

故选 D.]

2. **A** [由题可得抛物线方程为 $x^2 = -\frac{1}{5}y$,

$2p = \frac{1}{5}$, 且开口向下,

所以抛物线 $y = -5x^2$ 的准线方程为 $y = \frac{1}{20}$.

故选 A.]

3. **C** [由抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$,

知准线方程为 $x = -\frac{p}{2}, F(\frac{p}{2}, 0)$,

根据对称性得 $\frac{p}{2} + (-9) = 2 \times (-\frac{p}{2})$,

因此 $p = 6$,

故 C 的方程为 $y^2 = 12x$.

故选 C.]

4. **B** [抛物线 $y^2 = 6x$ 的焦点为 $F(\frac{3}{2}, 0)$,

准线 $l: x = -\frac{3}{2}$.

设 $P(x_0, y_0) (x_0 > 0, y_0 > 0)$,

则 $Q(-\frac{3}{2}, y_0)$,

因为直线 QF 的倾斜角为 120° ,

$$\text{所以 } k_{QF} = \frac{y_0}{-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}} = \frac{y_0}{-3} = -\sqrt{3},$$

即 $y_0 = 3\sqrt{3}$, 所以 $x_0 = \frac{y_0^2}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$,

所以 $|PF| = x_0 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} = 6$.]

5. D [因为 F 为 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\text{故 } \overrightarrow{AF} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

设点 A, B, C 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$.

因为抛物线 $y^2 = 8x$, F 为其焦点, 所以 $F(2, 0)$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AF} = (2 - x_1, -y_1), \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1), \overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1).$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),$$

$$\text{所以 } 2 - x_1 = \frac{1}{3} (x_2 - x_1 + x_3 - x_1),$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 + x_3 = 6,$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{AF}| + |\overrightarrow{BF}| + |\overrightarrow{CF}| = x_1 + x_2 + x_3 + 6 = 12,$$

$$\text{即 } |AF| + |BF| + |CF| = 12.]$$

6. B [因为抛物线 $x^2 = 2py$ ($p > 0$) 上的点 A 到抛物线焦点 F

距离的最小值为 1, 则 $\frac{p}{2} = 1$, 解得 $p = 2$,

所以抛物线方程为 $x^2 = 4y$, 当 $x = 2$ 时, $y = 1 < 3$,

因此点 $P(2, 3)$ 在抛物线 $x^2 = 4y$ 的上方.

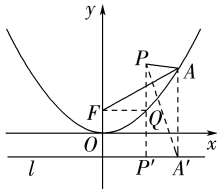
过点 P 作 $PP' \perp$ 准线 l 于 P' , 交抛物线于点 Q , 连接 QF , 过点 A 作 $AA' \perp$ 准线 l 于 A' , 连接 PA' ,

如图, 显然 $|AP| + |AF| = |AP| + |AA'| \geq |PA'| \geq |PP'| = |PQ| + |QP'| = |PQ| + |QF|$,

当且仅当点 A 与点 Q 重合时取等号,

$$\text{所以 } (|AP| + |AF|)_{\min} = |PP'| = 3 - (-1) = 4.$$

故选 B.]



7. AB [对于 A, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} x = ty + 2, \\ y^2 = 8x, \end{cases}$ 得

$$y^2 - 8ty - 16 = 0, \Delta = 64t^2 + 64 > 0,$$

$$\therefore y_1 + y_2 = 8t, \text{ 又线段 } AB \text{ 的中点为 } M(m, 2),$$

$$\therefore \frac{y_1 + y_2}{2} = 4t = 2, \text{ 解得 } t = \frac{1}{2}, \text{ A 正确; 对于 B, } \because M(m, 2) \text{ 在}$$

直线 $l: x = \frac{1}{2}y + 2$ 上, $\therefore m = 1 + 2 = 3$, B 正确; 对于 C, $\because$ 直线

$l: x = \frac{1}{2}y + 2$ 过点 $(2, 0)$, 且点 $(2, 0)$ 为抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦

点, $\therefore |AB| = x_1 + x_2 + 4 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) + 8 = 10$, C 错误; 对于 D,

以 AB 为直径的圆的圆心为 M , 半径为 5, 记 $P(-2, 2)$, 连接 MP ,

$$\text{则 } |MP| = \sqrt{(-2-3)^2 + (2-2)^2} = 5, \therefore \text{点 } P(-2, 2) \text{ 在以 } AB \text{ 为直径的圆上, D 错误. 故选 AB.]$$

8. ACD [抛物线的准线为 $x = -1$, 故 A 正确; 焦点到准线距离为 $p = 2$, 故 B 错误; 当横坐标为 2 时抛物线上位于第一象限内的点为 $(2, 2\sqrt{2})$, 此点位于点 $A(2, 1)$ 的上面, 故点 A 在抛物线内部, 由抛物线的定义知当直线 PA 垂直准线时, $|PA| +$

$|PF|$ 取最小值, 即为 $x_A + \frac{p}{2} = 3$, 故 C 正确; 根据题意, 可得抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 $F(1, 0)$, 设 $P(m, n)$, PF 的中点为

$B(x_1, y_1)$, 可得 $x_1 = \frac{1}{2}(1 + m)$, 由抛物线的定义, 得

$|PF| = m + 1$, 则 $x_1 = \frac{1}{2}|PF|$, 即点 B 到 y 轴的距离等于以

PF 为直径的圆的半径, 因此, 以 PF 为直径的圆与 y 轴相切,

故 D 正确. 故选 ACD.]

9. BC [如图, 因为直线 $l: y = x - 2$ 经过抛物

线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点, 焦点在 x 轴上, 直线 $l: y = x - 2$ 与 x 轴的交点为 $(2, 0)$,

所以抛物线的焦点为 $F(2, 0)$, 故 $\frac{p}{2} = 2$, 所

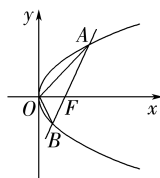
以 $p = 4$, A 错误.

$$\text{联立 } \begin{cases} y = x - 2, \\ y^2 = 8x, \end{cases} \text{ 整理得 } x^2 - 12x + 4 = 0, \Delta = (-12)^2 - 16 = 128 > 0,$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = 12, x_1 x_2 = 4$, 故 $|AB| = x_1 + x_2 + p = 12 + 4 = 16$, B 正确.

线段 AB 的中点到 y 轴的距离为 $\frac{x_1 + x_2}{2} = 6$, C 正确.

由于 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = x_1 x_2 + (x_1 - 2)(x_2 - 2) = 2x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 = 8 - 24 + 4 = -12 \neq 0$, 故 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 不垂直, 所以 OA, OB 不垂直, D 错误. 故选 BC.]



10. $4\sqrt{2}$ [设 $P(x_0, y_0)$, 因为点 P 到准线 $x = -1$ 的距离为 9,

所以 $x_0 + 1 = 9$, 则 $x_0 = 8, y_0^2 = 4x_0 = 32$, 则 $y_0 = \pm 4\sqrt{2}$, 即点

P 到 x 轴的距离为 $4\sqrt{2}$.]

11. $\frac{4}{5}$ [由题意知, 圆 $(x - 1)^2 + y^2 = 25$ 的圆心为 $F(1, 0)$, 故

$$\frac{p}{2} = 1, \text{ 即 } p = 2, \text{ 所以抛物线方程为 } y^2 = 4x.$$

$$\text{由 } \begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 25, \\ y^2 = 4x, \end{cases} \text{ 可得 } x^2 + 2x - 24 = 0, \text{ 解得 } x = 4 \text{ 或 } x = -6 (\text{舍去}),$$

故 $A(4, \pm 4)$, 故直线 AF 的方程为 $y = \pm \frac{4}{3}(x - 1)$, 即 $4x -$

$$3y - 4 = 0 \text{ 或 } 4x + 3y - 4 = 0,$$

$$\text{故原点到直线 } AF \text{ 的距离为 } d = \frac{|-4|}{5} = \frac{4}{5}.]$$

12. $\frac{13\sqrt{2}}{2}$ [以孔顶为原点, 建立如图所示的平面直角坐标系.

设抛物线方程为 $x^2 = -2py$, 其中 $p > 0$,

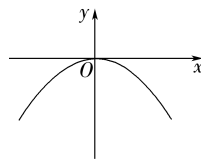
由题意可得点 $(\frac{13}{2}, -8)$ 在抛物线上,

$$\text{则 } p = \frac{169}{64}, \text{ 即 } x^2 = -\frac{169}{32}y,$$

$$\text{当 } y = -4 \text{ 时, } x^2 = -\frac{169}{32} \times (-4) =$$

$$\frac{169}{8}, \text{ 即 } x = \pm \frac{13\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{则水面宽变为 } 2 \times \frac{13\sqrt{2}}{4} = \frac{13\sqrt{2}}{2} (\text{m}).]$$



课时作业(六十六)

1. A [设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

因为线段 PQ 的中点为 $M(4, 1)$,

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = 8, y_1 + y_2 = 2,$$

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{4} - y_1^2 = 1, \\ \frac{x_2^2}{4} - y_2^2 = 1, \end{cases}$$

$$\text{两式相减可得 } \frac{x_1^2}{4} - \frac{x_2^2}{4} = y_1^2 - y_2^2,$$

$$\text{即 } \frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4} = (y_1+y_2)(y_1-y_2),$$

$$\text{所以 } \frac{y_1+y_2}{x_1+x_2} \cdot \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{1}{4}, \text{ 即 } \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = 1,$$

所以直线 l 的斜率为 1,

所以直线 l 的方程为 $y-1=x-4$,

即 $y=x-3$, 经检验符合题意. 故选 A.]

2. D [联立 $\begin{cases} y=kx-1, \\ x^2-y^2=1, \end{cases}$ 整理得 $(1-k^2)x^2+2kx-2=0$, 因为

直线 $y=kx-1$ 与双曲线 $x^2-y^2=1$ 的右支交于不同的两点,

$$\text{所以 } \begin{cases} 1-k^2 \neq 0, \\ \Delta = 4k^2 + 8(1-k^2) > 0, \\ \frac{-2k}{1-k^2} > 0, \\ \frac{-2}{1-k^2} > 0, \end{cases}$$

解得 $1 < k < \sqrt{2}$, 所以实数 k 的取值范围为 $(1, \sqrt{2})$. 故选 D.]

3. ACD [由焦点 F 到准线的距离为 4,

可知 $p=4$, 故 A 正确;

则抛物线的方程为 $y^2=8x$, 故 B 错误;

则 $y_1^2=8x_1, y_2^2=8x_2$,

若 $M(m, 2)$ 是线段 AB 的中点,

则 $y_1+y_2=4$,

$\therefore y_1^2-y_2^2=8x_1-8x_2$,

$$\text{即 } \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{8}{y_1+y_2} = \frac{8}{4} = 2,$$

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y=2x-4$, 故 C 正确;

又由 $y_1+y_2=2(x_1+x_2)-8=4$, 得 $x_1+x_2=6$,

$\therefore |AB| = |AF| + |BF| = x_1+x_2+4=10$, 故 D 正确. 故选 ACD.]

4. BD [由题意, $a=2, b=1$. 对于 A, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(x_0,$

$y_0)$, 则 $\frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = 1, \frac{x_2^2}{4} + y_2^2 = 1$, 两式作差可得

$$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4} = -(y_1+y_2)(y_1-y_2), \therefore \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = -\frac{x_1+x_2}{4(y_1+y_2)} = -\frac{x_0}{4y_0}, \text{ 则 } k_{AB} \cdot k_{OM} = -\frac{1}{4} \neq -1, \text{ 故 A 错误;}$$

对于 B, 若点 M 的坐标为 $(1, \frac{1}{2})$, 则 $k_{AB} = -\frac{1}{2}$, 则直线 l 的

方程为 $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x-1)$, 即 $x+2y-2=0$, 经检验, 符合

题意, 故 B 正确; 对于 C, 若直线 l 的方程为 $y=x+1$, 则 $k_{OM} =$

$-\frac{1}{4}$, 故 OM 所在直线的方程为 $y = -\frac{1}{4}x$, 很显然, 点 M 的坐

标不可能为 $(3, \frac{3}{4})$, 故 C 错误; 对于 D, 易知过椭圆焦点的弦

中, 通径最短, 为 $\frac{2b^2}{a}=1$, 长轴最长, 为 4,

由直线 l 的斜率存在且不过原点, 得 $1 < |AB| < 4$, 故 D 正确. 故选 BD.]

5. $(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3})$ [把 $y=kx+2$ 代入 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$, 消去 y 并整理

得 $(2+3k^2)x^2+12kx+6=0$, 由题意得 $\Delta = (12k)^2 - 4 \times (2+3k^2) \times 6 = 72k^2 - 48 > 0$, 解得 $-\frac{\sqrt{6}}{3} < k < \frac{\sqrt{6}}{3}$.

故实数 k 的取值范围是 $(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3})$.]

6. 4 [设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

因为点 $P(2, 1)$ 是线段 AB 的中点,

所以 $x_1+x_2=4, y_1+y_2=2$,

因为 A, B 为抛物线 $y^2=8x$ 上的点,

所以 $y_1^2=8x_1, y_2^2=8x_2$,

两式相减得 $(y_1-y_2)(y_1+y_2)=8(x_1-x_2)$,

所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=4$, 则直线 AB 的斜率为 4.

经检验, 直线 AB 符合题意.]

7. 解: (1) 设焦点 $F(c, 0)$, 其到渐近线 $y = \frac{b}{a}x$ 的距离 $d =$

$$\frac{\frac{bc}{a}}{\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}} = b = \sqrt{3},$$

又因为双曲线经过点 $P(2\sqrt{2}, \sqrt{3})$, 所以 $\frac{8}{a^2} - \frac{3}{3} = 1$, 解得

$a=2$,

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

因为 $M(4, 2)$ 是弦 AB 的中点,

$$\text{所以 } \begin{cases} x_1+x_2=8, \\ y_1+y_2=4, \end{cases}$$

$$\text{又点 } A, B \text{ 在双曲线上, 则 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{3} = 1, \\ \frac{x_2^2}{4} - \frac{y_2^2}{3} = 1, \end{cases} \quad \text{两式相减得}$$

$$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4} = \frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{3},$$

$$\text{即 } \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{3(x_1+x_2)}{4(y_1+y_2)} = \frac{3}{2},$$

所以直线 l 的方程为 $y = \frac{3}{2}x - 4$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 4, \\ 3x^2 - 4y^2 = 12, \end{cases} \quad \text{消去 } y \text{ 得 } 6x^2 - 48x + 76 = 0, \Delta = 48^2 -$$

$$4 \times 6 \times 76 = 480 > 0,$$

$$\text{所以 } x_1+x_2=8, x_1x_2=\frac{38}{3},$$

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{1+(\frac{3}{2})^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+\frac{9}{4}} \times$$

$$\sqrt{64-4 \times \frac{38}{3}} = \frac{\sqrt{390}}{3}.$$

8. 解: (1) 已知椭圆 C 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$,

$$\text{所以 } e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{1}{4}, \text{ 即 } a^2 = \frac{4}{3}b^2, \text{ ①}$$

因为以原点为圆心、椭圆的短半轴长为半径的 $\odot E$ 与直线 $x - y + \sqrt{6} = 0$ 相切,

$$\text{所以 } b = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{3}, \text{ ②}$$

联立①②, 解得 $a^2=4, b^2=3$,

则椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 不妨设直线 MN 的方程为 $y = k(x-1)$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = k(x-1), \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 并整理得 } (3+4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0, \Delta = 144k^2 + 144 > 0,$$

$$\text{则 } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3+4k^2}, \\ x_1x_2 = \frac{4k^2-12}{3+4k^2}, \end{cases}$$

$$\text{此时 } y_1y_2 = k(x_1-1) \cdot k(x_2-1) = \frac{-9k^2}{3+4k^2},$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{-5k^2-12}{3+4k^2} = -2,$$

$$\text{解得 } k^2 = 2, \text{ 即 } k = \pm\sqrt{2},$$

$$\text{此时 } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{16}{11}, \\ x_1x_2 = -\frac{4}{11}, \end{cases}$$

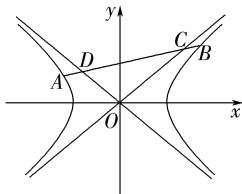
$$\begin{aligned} \text{则 } |MN| &= \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} \\ &= \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{16}{11}\right)^2 + \frac{16}{11}} = \frac{36}{11}, \end{aligned}$$

$$\text{又点 } O \text{ 到直线 } MN \text{ 的距离 } d = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{故 } \triangle MON \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} \times \frac{36}{11} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{6\sqrt{6}}{11}.$$

课时作业(六十七)

1. 解: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4),$



$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1, \\ y = kx + 2, \end{cases} \text{ 可得 } (1-k^2)x^2 - 4kx - 6 = 0,$$

$$\therefore 1-k^2 \neq 0, \Delta = 16k^2 + 24(1-k^2) > 0, \text{ 又 } k > 0,$$

$$\text{解得 } k \in (0, 1) \cup (1, \sqrt{3}),$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{4k}{1-k^2}, x_1x_2 = -\frac{6}{1-k^2},$$

显然双曲线 E 的渐近线方程为 $y = \pm x$, 不妨设 C 为直线 $y = x$ 与直线 l 的交点,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = x, \\ y = kx + 2, \end{cases} \text{ 可得 } x_3 = -\frac{2}{k-1}, \text{ 同理 } x_4 = -\frac{2}{k+1},$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{|AB|}{|CD|} &= \frac{|x_1-x_2|}{|x_3-x_4|} = \frac{\sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2}}{|x_3-x_4|} \\ &= \frac{\sqrt{\left(\frac{4k}{1-k^2}\right)^2 + \frac{24}{1-k^2}}}{\left|-\frac{2}{k-1} + \frac{2}{k+1}\right|} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{3-k^2}}{\left|\frac{4}{k^2-1}\right|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3-k^2}, \end{aligned}$$

$$\therefore k \in (0, 1) \cup (1, \sqrt{3}), \therefore \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3-k^2} \in (0, 1) \cup \left(1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right),$$

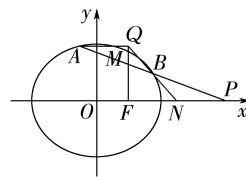
$$\therefore \frac{|AB|}{|CD|} \text{ 的取值范围为 } (0, 1) \cup \left(1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right).$$

2. 解: (1) 设 $F(c, 0)$, 由题设有 $c=1$ 且 $\frac{b^2}{a} = \frac{3}{2}$, 故 $\frac{a^2-1}{a} = \frac{3}{2}$, 故

$$a=2, b=\sqrt{3},$$

$$\text{故椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 直线 AB 的斜率必定存在, 设 $AB: y = k(x-4), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),$



$$\text{由 } \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12, \\ y = k(x-4), \end{cases} \text{ 可得 } (3+4k^2)x^2 - 32k^2x + 64k^2 - 12 = 0,$$

$$\text{故 } \Delta = 1024k^4 - 4(3+4k^2)(64k^2-12) > 0, \text{ 解得 } -\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2},$$

$$\text{又 } x_1 + x_2 = \frac{32k^2}{3+4k^2}, x_1x_2 = \frac{64k^2-12}{3+4k^2}, \text{ 而 } N\left(\frac{5}{2}, 0\right),$$

$$\text{故直线 } BN: y = \frac{y_2}{x_2 - \frac{5}{2}}\left(x - \frac{5}{2}\right), \text{ 故 } y_Q = \frac{-\frac{3}{2}y_2}{x_2 - \frac{5}{2}} = \frac{-3y_2}{2x_2 - 5},$$

$$\text{所以 } y_1 - y_Q = y_1 + \frac{3y_2}{2x_2 - 5}$$

$$= \frac{y_1 \times (2x_2 - 5) + 3y_2}{2x_2 - 5}$$

$$= \frac{k(x_1 - 4) \times (2x_2 - 5) + 3k(x_2 - 4)}{2x_2 - 5}$$

$$= k \cdot \frac{2x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 8}{2x_2 - 5}$$

$$= k \cdot \frac{2 \times \frac{64k^2-12}{3+4k^2} - 5 \times \frac{32k^2}{3+4k^2} + 8}{2x_2 - 5}$$

$$= k \cdot \frac{128k^2 - 24 - 160k^2 + 24 + 32k^2}{3+4k^2} = 0,$$

$$\text{故 } y_1 = y_Q,$$

$$\text{即 } AQ \perp y \text{ 轴}.$$

3. 解: (1) 由题意可知圆 $A: (x+1)^2 + y^2 = 4a^2 (a > 1),$

$$\text{所以圆心 } A(-1, 0), \text{ 半径 } r = 2a > 2,$$

因为 $B(1, 0)$, 线段 PB 的垂直平分线交线段 PA 于点 $M,$

$$\text{所以 } |MB| = |MP|, \text{ 又 } |MA| + |MP| = 2a,$$

$$\text{所以 } |MA| + |MB| = 2a > 2 = |AB|,$$

即点 M 的轨迹是以点 A, B 分别为左、右焦点的椭圆,

$$\text{所以曲线 } C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-1} = 1 (a > 1),$$

因为曲线 C 与直线 $y = \sqrt{3}$ 相切,

$$\text{故 } \sqrt{a^2-1} = \sqrt{3}, \text{ 解得 } a = 2,$$

$$\text{所以 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 由题意得直线 $l: y = kx + 4,$

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + 4, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \text{ 得 } (3+4k^2)x^2 + 32kx + 52 = 0,$$

令 $\Delta = 32^2 k^2 - 4 \times 52 \times (3 + 4k^2) = 48(4k^2 - 13) > 0$, 所以 $k^2 >$

$\frac{13}{4}$, 即 $k < -\frac{\sqrt{13}}{2}$ 或 $k > \frac{\sqrt{13}}{2}$,

设 $D(x_1, y_1), E(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{-32k}{3+4k^2}, x_1 x_2 = \frac{52}{3+4k^2}$,

所以 $S_{\triangle ODE} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{\sqrt{1+k^2}} \times \sqrt{1+k^2} \times |x_1 - x_2| = 2|x_1 - x_2| = 2\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}$
 $= 2\sqrt{\frac{(-32k)^2}{(3+4k^2)^2} - 4 \times \frac{52}{3+4k^2}}$
 $= 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{4k^2 - 13}}{4k^2 + 3}$,

令 $t = \sqrt{4k^2 - 13} > 0$, 则 $4k^2 + 3 = t^2 + 16$, 则 $S_{\triangle ODE} = \frac{8\sqrt{3}t}{t^2 + 16}$

$\frac{8\sqrt{3}}{t + \frac{16}{t}} \leq \frac{8\sqrt{3}}{2\sqrt{t \cdot \frac{16}{t}}} = \sqrt{3}$,

当且仅当 $t = \frac{16}{t}$, 即 $t = 4, k = \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$ 时, 等号成立, 所以 $\triangle ODE$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$.

课时作业(六十八)

1. (1)解: 易知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $F(\frac{p}{2}, 0)$,

因为直线 $2x + 3y - 2 = 0$ 与 x 轴的交点坐标为 $(1, 0)$,

所以 $\frac{p}{2} = 1$, 解得 $p = 2$,

则抛物线方程为 $y^2 = 4x$.

(2)证明: 易知直线 AB 的斜率不为 0,

设直线 AB 的方程为 $x = my + n, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

联立 $\begin{cases} x = my + n, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$

消去 x 并整理得 $y^2 - 4my - 4n = 0$,

此时 $\Delta = 16m^2 + 16n > 0$,

则 $y_1 y_2 = -4n$,

所以 $k_{OA} \cdot k_{OB} = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1 y_2}{\frac{y_1^2 y_2^2}{16}} = \frac{16}{y_1 y_2} = \frac{16}{-4n} = -2$, 解得

$n = 2$, 此时满足 $\Delta > 0$.

故直线 AB 恒过点 $(2, 0)$.

2. (1)解: 因为 $P(t, t) (t \neq 0)$ 为抛物线 $C: y^2 = 2px$ 上的一点, 且 $|PF| = 5$,

所以 $\begin{cases} t^2 = 2pt, \\ |PF| = t + \frac{p}{2} = 5, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} t = 4, \\ p = 2, \end{cases}$

所以抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$.

(2)证明: 设 $l: y = -\frac{1}{2}x + m$,

联立 $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = -\frac{1}{2}x + m, \end{cases}$

得 $y^2 + 8y - 8m = 0$.

由 $\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times (-8m) = 64 + 32m > 0$, 得 $m > -2$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

则 $y_1 + y_2 = -8, y_1 y_2 = -8m$.

由(1)知 $P(4, 4)$,

所以 $k_1 = \frac{y_1 - 4}{x_1 - 4}, k_2 = \frac{y_2 - 4}{x_2 - 4}$,

则 $k_1 + k_2 = \frac{y_1 - 4}{x_1 - 4} + \frac{y_2 - 4}{x_2 - 4} = \frac{y_1 - 4}{\frac{y_1^2}{4} - 4} + \frac{y_2 - 4}{\frac{y_2^2}{4} - 4} = \frac{4}{y_1 + 4} + \frac{4}{y_2 + 4}$

$= \frac{4(y_1 + y_2 + 8)}{(y_1 + 4)(y_2 + 4)} = 0$.

所以 $k_1 + k_2$ 为定值.

3. (1)解: 设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, c 为双曲线 C 的半焦距,

由题意可得 $\begin{cases} c = 2\sqrt{5}, \\ \frac{c}{a} = \sqrt{5}, \\ c^2 = a^2 + b^2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} c = 2\sqrt{5}, \\ a = 2, \\ b = 4, \end{cases}$

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$.

(2)证明: 易知直线 MN 的斜率不为 0, 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 直线 MN 的方程为 $x = my - 4$,

则 $x_1 = my_1 - 4, x_2 = my_2 - 4$.

联立 $\begin{cases} x = my - 4, \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1, \end{cases}$

得 $(4m^2 - 1)y^2 - 32my + 48 = 0$.

因为直线 MN 与双曲线 C 的左支相交于两点, 所以 $4m^2 - 1 \neq 0$, 且 $\Delta > 0$.

由根与系数的关系得 $\begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{32m}{4m^2 - 1}, \\ y_1 y_2 = \frac{48}{4m^2 - 1}, \end{cases}$

所以 $y_1 + y_2 = \frac{2m}{3} y_1 y_2$.

因为 A_1, A_2 分别为双曲线 C 的左、右顶点,

所以 $A_1(-2, 0), A_2(2, 0)$.

直线 MA_1 的方程为 $\frac{y_1}{x_1 + 2} = \frac{y}{x + 2}$, 直线 NA_2 的方程为

$\frac{y_2}{x_2 - 2} = \frac{y}{x - 2}$,

所以 $\frac{\frac{y_1}{x_1 + 2}}{\frac{y_2}{x_2 - 2}} = \frac{\frac{y}{x + 2}}{\frac{y}{x - 2}}$, 得 $\frac{(x_2 - 2)y_1}{(x_1 + 2)y_2} = \frac{x - 2}{x + 2}, \frac{(my_2 - 6)y_1}{(my_1 - 2)y_2} =$

$\frac{my_1 y_2 - 6y_1}{my_1 y_2 - 2y_2} = \frac{x - 2}{x + 2}$.

因为 $\frac{my_1 y_2 - 6y_1}{my_1 y_2 - 2y_2} = \frac{my_1 y_2 - 6(y_1 + y_2) + 6y_2}{my_1 y_2 - 2y_2}$

$= \frac{my_1 y_2 - 6 \cdot \frac{2m}{3} y_1 y_2 + 6y_2}{my_1 y_2 - 2y_2}$

$= \frac{-3my_1 y_2 + 6y_2}{my_1 y_2 - 2y_2}$

$= -3$,

所以 $\frac{x - 2}{x + 2} = -3$, 解得 $x = -1$,

所以点 P 在定直线 $x = -1$ 上.

阶段检测(十四)

1. C [已知抛物线 $C: y = \frac{1}{8}x^2$, 即 $x^2 = 8y$,

又 C 上一点 P 到焦点的距离为 5, 则 $y_P + 2 = 5$,

即 $y_P = 3$, 则点 P 的纵坐标为 3.

故选 C.]

2. C [设 $F_1(0, -4), F_2(0, 4), P(-6, 4)$,

则 $|F_1F_2| = 2c = 8$,

$|PF_1| = \sqrt{6^2 + (-4-4)^2} = 10$,

$|PF_2| = \sqrt{6^2 + (4-4)^2} = 6$,

则 $2a = |PF_1| - |PF_2| = 10 - 6 = 4$,

则 $e = \frac{2c}{2a} = \frac{8}{4} = 2$.

故选 C.]

3. A [椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的焦点在 x 轴上, 可知 $0 < b < \sqrt{2}$, 长轴长为 $2\sqrt{2}$, 所以 B 不正确;

椭圆的焦距为 $2\sqrt{2-b^2}$, 所以 D 不正确;

当 $x=1$ 时, 可得 $\frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$, 解得 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}b \in (0, 1)$ 或 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}b \in (-1, 0)$, 所以 P 在椭圆外, 所以 A 正确, C 错误.

故选 A.]

4. B [$\because$ 双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{36} = 1$,

$\therefore a^2 = 4, b^2 = 36, c^2 = 40, c = 2\sqrt{10}$,

$\therefore$ 右焦点坐标为 $(2\sqrt{10}, 0)$, 其中一条渐近线方程为 $y = 3x$,

$\therefore$ 右焦点到其渐近线的距离为 $\frac{|6\sqrt{10}-0|}{\sqrt{9+1}} = 6$.

故选 B.]

5. A [由已知得 $e_1 = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}, e_2 = \frac{\sqrt{4-1}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 因为 $e_2 =$

$\sqrt{3}e_1$, 所以 $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$, 解得 $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 故选 A.]

6. C [将直线方程与椭圆方程联立得

$\begin{cases} y = x + m, \\ \frac{x^2}{3} + y^2 = 1, \end{cases}$ 消去 y 可得 $4x^2 + 6mx + 3m^2 - 3 = 0$, 因为直线

与椭圆相交于 A, B 两点, 则 $\Delta = 36m^2 - 4 \times 4(3m^2 - 3) > 0$, 解得 $-2 < m < 2$. 易知 $F_1(-\sqrt{2}, 0), F_2(\sqrt{2}, 0)$, 因为 $\triangle F_1AB$ 面积是 $\triangle F_2AB$ 面积的 2 倍, 所以点 F_1 到直线 AB 的距离是点

F_2 到直线 AB 的距离的 2 倍, 即 $\frac{|-\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}} = 2 \times \frac{|\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}}$,

解得 $m = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ 或 $m = -3\sqrt{2}$ (舍去), 故选 C.]

7. ABC [对于选项 A, 由 $C_1: 4x^2 + 3y^2 = 48$,

可得 $C_1: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$,

知曲线 C_1 为椭圆, 其焦点在 y 轴上, 且长轴长为 8, 故选项 A 正确;

对于选项 B, 由 $C_2: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 可得双曲线 C_2 的焦点在 x 轴上,

其渐近线方程为 $x \pm \frac{y}{\sqrt{3}} = 0$,

即 $y = \pm\sqrt{3}x$, 故选项 B 正确;

对于选项 C, 由 $C_1: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$,

可得 $e_1 = \frac{\sqrt{16-12}}{4} = \frac{1}{2}$, 由 $C_2: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$,

可得 $e_2 = \frac{\sqrt{1+3}}{1} = 2$, 故 C_1 与 C_2 的离心率互为倒数, 故选项

C 正确;

对于选项 D, 因为曲线 C_1, C_2 的焦点位置不同, 故焦点坐标不可能相同, 故选项 D 错误.

故选 ABC.]

8. ABD [对于 A, 设曲线上的动点 $P(x, y)$, 则 $x > -2$ 且

$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} \times |x-a| = 4$,

因为曲线过坐标原点, 故 $\sqrt{(0-2)^2 + 0^2} \times |0-a| = 4$, 解得 $a = -2$, 故 A 正确.

对于 B, 曲线方程为 $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} \times |x+2| = 4$, 而 $x > -2$,

故 $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} \times (x+2) = 4$.

当 $x = 2\sqrt{2}, y = 0$ 时, $\sqrt{(2\sqrt{2}-2)^2} \times (2\sqrt{2}+2) = 8-4=4$,

故点 $(2\sqrt{2}, 0)$ 在曲线 C 上, 故 B 正确.

对于 C, 由曲线的方程可得 $y^2 = \frac{16}{(x+2)^2} - (x-2)^2$, 取 $x = \frac{3}{2}$,

则 $y^2 = \frac{64}{49} - \frac{1}{4}$, 而 $\frac{64}{49} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{64}{49} - \frac{5}{4} = \frac{256-245}{49 \times 4} > 0$, 故此

时 $y^2 > 1$, 故 C 错误.

对于 D, 当点 (x_0, y_0) 在曲线上时, 由 C 的分析可得 $y_0^2 =$

$\frac{16}{(x_0+2)^2} - (x_0-2)^2 \leq \frac{16}{(x_0+2)^2}$,

故 $-\frac{4}{x_0+2} \leq y_0 \leq \frac{4}{x_0+2}$, 故 D 正确.

故选 ABD.]

9. $\frac{\pi}{4}$ [由抛物线 $C: y^2 = 4x$, 可得准线方程为 $x = -\frac{p}{2} = -1$,

故 $M(-1, 0)$,

结合图象可得当直线 MA 与 C 相切

时, $\angle AMO$ 取得最大值,

设此时直线 MA 的方程为 $x =$

$my - 1$,

联立 $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ x = my - 1, \end{cases}$

得 $y^2 - 4my + 4 = 0, \Delta = 16m^2 - 16 = 0$,

解得 $m = \pm 1$, 即直线 MA 的斜率为 $\frac{1}{m} = \pm 1$, 倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$

或 $\frac{3\pi}{4}$,

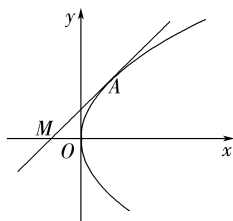
所以 $\angle AMO$ 的最大值为 $\frac{\pi}{4}$.]

10. $\frac{3}{2}$ [由题可知 A, B, F_2 三点横坐标相等, 设 A 在第一象限,

将 $x=c$ 代入 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,

得 $y = \pm \frac{b^2}{a}$, 即 $A(c, \frac{b^2}{a}), B(c, -\frac{b^2}{a})$, 故 $|AB| = \frac{2b^2}{a} = 10$,

$|AF_2| = \frac{b^2}{a} = 5$,



又 $|AF_1| - |AF_2| = 2a$, 得 $|AF_1| = |AF_2| + 2a = 2a + 5 = 13$, 解得 $a = 4$, 代入 $\frac{b^2}{a} = 5$ 得 $b^2 = 20$,
故 $c^2 = a^2 + b^2 = 36$, 即 $c = 6$, 所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

11. 解: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

联立直线与抛物线的方程, 可得 $\begin{cases} y = x - 3, \\ x^2 = -8y, \end{cases}$

消去 y 并整理, 得 $x^2 + 8x - 24 = 0, \Delta > 0$,

由根与系数的关系, 得 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -8, \\ x_1 x_2 = -24. \end{cases}$

因为点 A, B 在直线 l 上, 所以 $\begin{cases} y_1 = x_1 - 3, \\ y_2 = x_2 - 3. \end{cases}$

$$(1) |AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ = \sqrt{2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = 8\sqrt{5}.$$

$$\text{因为 } \frac{x_1 + x_2}{2} = -4,$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{x_1 + x_2 - 6}{2} = -7,$$

所以线段 AB 的中点坐标为 $(-4, -7)$.

(2) $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ 不成立, 理由如下: 因为 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = x_1 x_2 + \left(-\frac{1}{8} x_1^2\right) \cdot \left(-\frac{1}{8} x_2^2\right) = x_1 x_2 + \frac{1}{64} (x_1 x_2)^2 = -24 + 9 = -15 \neq 0$, 所以 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ 不成立.

12. 解: 法一 联立 $\begin{cases} y = x + m, \\ x^2 + 2y^2 = 4, \end{cases}$

可得 $3x^2 + 4mx + 2m^2 - 4 = 0$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $\Delta = 16m^2 - 12(2m^2 - 4) > 0$,
即 $-\sqrt{6} < m < \sqrt{6}$.

由根与系数的关系得 $x_1 + x_2 = \frac{-4m}{3}, x_1 x_2 = \frac{2m^2 - 4}{3}$,

所以 AB 的中点为 $M\left(-\frac{2m}{3}, \frac{m}{3}\right)$.

若 $|EA| = |EB|$, 则 $EM \perp AB$,

即 $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$, 设 $x_1 > x_2$,

则 $y_1 > y_2, \overrightarrow{EM} = \left(-\frac{2m}{3} - 1, \frac{m}{3}\right)$,

$\overrightarrow{BA} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$,

$$x_1 - x_2 = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} \\ = \sqrt{\left(\frac{-4m}{3}\right)^2 - \frac{4 \times (2m^2 - 4)}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{6 - m^2},$$

即 $\overrightarrow{BA} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{6 - m^2}, \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{6 - m^2}\right)$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{6 - m^2} \left(-\frac{m}{3} - 1\right) = 0,$$

解得 $m = -3$ 或 $m = \pm\sqrt{6}$.

因为此时不满足 $\Delta > 0$, 所以不存在直线 l 满足 $|EA| = |EB|$.

法二 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{2} = 1, \frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{2} = 1,$$

$$\text{所以 } |AE|^2 = (x_1 - 1)^2 + y_1^2 = (x_1 - 1)^2 + 2\left(1 - \frac{x_1^2}{4}\right) = \frac{x_1^2}{2} -$$

$$2x_1 + 3 = \frac{1}{2} (x_1 - 2)^2 + 1.$$

$$\text{同理可得 } |BE|^2 = \frac{1}{2} (x_2 - 2)^2 + 1.$$

因为 $-2 \leq x_1 \leq 2, -2 \leq x_2 \leq 2$, 二次函数 $y = \frac{1}{2} (x - 2)^2 + 1$ 在 $[-2, 2]$ 上单调递减, 所以不存在不同的两个值 x_1, x_2 , 使它们的函数值相等, 即不存在点 A, B 满足 $|EA| = |EB|$, 所以不存在直线 l 满足 $|EA| = |EB|$.

课时作业(六十九)

1. C [根据题意, 高一、高二、高三年级学生人数之比为 4 : 4 : 5,

所以从高三年级抽取的学生人数为 $\frac{5}{4+4+5} \times 260 = 100$. 故选 C.]

2. A [由题意可得成绩在 $[13, 15)$ 内的频率为 $1 - 0.08 - 0.32 - 0.38 = 0.22$,

又本次赛车中, 共 50 名参赛选手,

所以这 50 名选手中获奖的人数为 $50 \times 0.22 = 11$.

故选 A.]

3. D [对于 A, 甲的数据分析核心素养指标值为 5, 乙的为 4, 故 A 正确; 对于 B, 乙的数学运算核心素养指标值为 5, 数学抽象核心素养指标值为 3, 故 B 正确; 对于 C, 甲的六大数学核心素养指标值均为 4 或 5, 乙的六大数学核心素养指标值有 3, 4, 5, 故甲的波动性较小, 故 C 正确; 对于 D, 甲、乙在数学建模核心素养上的指标值差为 1, 甲、乙在直观想象核心素养上的指标值差为 2, 故 D 错误. 故选 D.]

4. D [由题意, 高二年级女生有 $2\,000 \times 0.19 = 380$ (名), 即 $x = 380$,

则高三年级女生有 $y = 2\,000 - 373 - 380 - 377 - 370 - 250 = 250$ (名),

则用分层随机抽样的方法在全校抽取 64 名学生, 则应在高三年级抽取的女生人数为 $\frac{250}{2\,000} \times 64 = 8$. 故选 D.]

5. B [设样本中男生身高的平均数为 $\bar{x}$, 女生身高的平均数为 $\bar{y}$, 则 $\bar{x} = 172, \bar{y} = 160$,

$$\text{所以样本平均数 } \bar{W} = \frac{350}{350+250} \bar{x} + \frac{250}{350+250} \bar{y} = \frac{350}{350+250} \times 172 + \frac{250}{350+250} \times 160 = 167 \text{ (cm)},$$

故该校高一学生的平均身高为 167 cm.

故选 B.]

6. A [由题意得, 抽取的 100 人中, 男生有 60 人, 女生有 40 人, 由抽取的样本中男生身高的平均数为 160, 女生身高的平均数为 155,

$$\text{可得这 100 名学生的平均身高为 } \frac{60 \times 160 + 40 \times 155}{100} = 158,$$

又抽取的样本中男生身高的平均数和方差分别为 160 和 4, 女生身高的平均数和方差分别为 155 和 3,

所以这 100 名学生身高的方差为

$$\frac{60}{100} \times [4 + (160 - 158)^2] + \frac{40}{100} \times [3 + (155 - 158)^2] = 9.6,$$

所以估计该校学生身高的总体方差是 9.6.

故选 A.]

7. ACD [高一、高二、高三年级的人数之比为 4 : 3 : 3, 则分层随机抽样时各层抽取的样本数之比也为 4 : 3 : 3,

设高一、高二、高三年级抽取的样本数分别为 $4k, 3k, 3k$,

已知高一年级抽到 80 人, 即 $4k = 80$, 解得 $k = 20$,

高二年级抽取人数为 $3k=3\times 20=60$,故选项 A 正确;
高三年级抽取人数为 $3k=60$,选项 B 错误;
总样本数 $n=80+60+60=200$,选项 C 正确;
抽取的高二与高三人数之和为 $60+60=120$,比高一多 $120-80=40$,选项 D 正确.
故选 ACD.]

8. ABD [对于选项 A,从 2023 年 10 月到 2024 年 4 月,这 7 个月的制造业采购经理指数(PMI)按从小到大的顺序为 49.0%,49.1%,49.2%,49.4%,49.5%,50.4%,50.8%,因为 $7\times 75\%=5.25$,所以第 75 百分位数为 50.4%,故 A 正确;
对于选项 B,极差为 $50.8\%-49.0\%=1.8\%$,故 B 正确;
对于选项 C,制造业采购经理指数(PMI)有升有降,故 C 错误;
对于选项 D,2024 年 3 月到 2024 年 4 月,PMI 大于 50%,经济处于扩张活跃的状态,故 D 正确.

故选 ABD.]

9. ABD [依题意, $(0.005+0.010+0.020+a+0.025+0.010)\times 10=1$,

解得 $a=0.030$,故 A 选项正确;

根据频率分布直方图, $90-50=40$, $100-40=60$,

所以极差在 40 分和 60 分之间,故 B 选项正确;

因为 90 分以上的频率为 0.1,

所以 2 000 名考生中约有 $2\,000\times 0.1=200$ (名)成绩优秀,故 C 选项错误;

成绩在 70 分和 90 分之间的频率为 $0.3+0.25=0.55$,

所以估计有一半以上的考生的成绩在 70 分和 90 分之间,故 D 选项正确.

故选 ABD.]

10. B 6 [由题图可知女生人数为 60,则男生人数为 40,

样本中 A 层的人数为 $9+40\times 10\%=13$;

样本中 B 层的人数为 $24+40\times 30\%=36$;

样本中 C 层的人数为 $15+40\times 25\%=25$;

样本中 D 层的人数为 $9+40\times 20\%=17$;

样本中 E 层的人数为 $3+40\times 15\%=9$.

故样本中 B 层的人数最多.

样本中 E 层的男生人数为 $40\times 15\%=6$.]

11. 0.01 [因为样本中分数低于 60 分的有 15 人,

所以样本中分数不低于 60 分的有 $100-15=85$ (人),

由频率分布直方图可知,样本中分数不低于 60 分的频率为 $0.25+0.3+0.2+10a=0.75+10a$,所以 $100\times (0.75+10a)=85$,解得 $a=0.01$.]

课时作业(七十)

1. D [由已知得 $a=\frac{1}{10}\times (15+17+14+10+15+17+17+16+14+12)=14.7$,将这 10 名工人生产的件数按从小到大的顺序排列,得第 5 个数据和第 6 个数据都是 15,

所以 $b=\frac{1}{2}\times (15+15)=15$,又 $c=17$,所以 $c>b>a$. 故选 D.]

2. D [∵样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 的方差为 3,

∴ $2x_1-1, 2x_2-1, \dots, 2x_{10}-1$ 的方差为 $2^2\times 3=12$.

故选 D.]

3. C [将数据按从小到大的顺序排列可得 2,4,5,7,7,8,9,10,∵ $8\times 75\%=6$,

∴这组数据的 75%分位数为 $\frac{8+9}{2}=8.5$.

故选 C.]

4. A [∵一组样本数据 16, x , 14, 15, 13 的平均数为 15,

∴ $\frac{1}{5}(16+x+14+15+13)=15$,解得 $x=17$,

∴该组样本数据的方差为

$$s^2=\frac{1}{5}[(16-15)^2+(17-15)^2+(14-15)^2+(15-15)^2+(13-15)^2]=2.$$

故选 A.]

5. B [成绩按从小到大排列为 8,9,12,12,13,16,16,16,18,20,对于 A 选项,出现次数最多的数为 16,故 A 选项错误;

对于 B 选项,平均数为 $\frac{1}{10}(8+9+12+12+13+16+16+16+18+20)=14$,故 B 选项正确;

对于 C 选项,中位数为 $\frac{13+16}{2}=14.5$,故 C 选项错误;

对于 D 选项,由 $10\times 0.85=8.5$,

得这组数据的第 85 百分位数为第 9 位,为 18,故 D 选项错误.

故选 B.]

6. C [对于 A,由频率分布直方图可得 $(0.01+n+0.035+m+0.01)\times 10=1$,又 $m=2n$,

解得 $n=0.015$, $m=0.03$,故 A 正确;

对于 B,满意度的众数为最高矩形底边中点的横坐标,为 75 分,故 B 正确;

对于 C,满意度的平均数约为 $(55\times 0.01+65\times 0.015+75\times 0.035+85\times 0.03+95\times 0.01)\times 10=76.5$,故 C 错误;

对于 D,前两组的频率之和为 0.25,所以满意度的第 25 百分位数约为 70 分,故 D 正确. 故选 C.]

7. AC [题图 1 形态的频率分布直方图是对称的,平均数=中位数=众数, A 正确;

题图 2 形态的众数最小,右拖尾使得平均数大于中位数, B 错误, C 正确;

题图 3 形态左拖尾,众数最大,平均数小于中位数, D 错误.

故选 AC.]

8. ACD [甲队每场比赛平均失球数是 1.5,乙队每场比赛平均失球数是 2.1,

说明甲队每场比赛平均失球数比乙队每场比赛平均失球数少,所以从平均水平来看,甲队比乙队防守技术好,故 A 正确;

甲队全年比赛失球个数的标准差为 1.1,乙队全年比赛失球个数的标准差是 0.4,说明甲队全年比赛失球个数的标准差较大,所以甲队的起伏较大,故 B 错误;

甲队全年比赛失球个数的标准差为 1.1,乙队全年比赛失球个数的标准差是 0.4,

说明甲队全年比赛失球个数的标准差较大,

所以甲队的表现时好时坏,故 C 正确;

乙队的平均失球数多,全年失球个数的标准差很小,

说明乙队的表现较稳定,经常失球,故 D 正确.

故选 ACD.]

9. ABC [选项 A, A 班的学生该月平均每天产生的饮料瓶数估计为 $10\times (15\times 0.005+25\times 0.015+35\times 0.030+45\times 0.020+55\times 0.025+65\times 0.005)=41$,故选项 A 正确;

选项 B,由 $10\times (0.005+0.020+m+0.020+0.015+0.015)=1$,得 $m=0.025$,故选项 B 正确;

选项 C,∵ $(0.005+0.020+0.025+0.020)\times 10=0.7<0.75$, $(0.005+0.020+0.025+0.020+0.015)\times 10=0.85>0.75$,

∴B班的学生5月份产生饮料瓶数的第75百分位数 x_2 位于 $[50, 60)$ 内,

∴ $0.7 + (x_2 - 50) \times 0.015 = 0.75$, 解得 $x_2 = \frac{160}{3}$, 故选项C正确;

选项D, A班和B班的学生5月份产生饮料瓶数在 $[40, 50)$ 内的频率均为 $0.020 \times 10 = 0.2$,

故该校学生5月份产生饮料瓶数在 $[40, 50)$ 内的频率也为0.2, ∴ $1\,000 \times 0.2 = 200$,

∴该校约有200人5月份产生饮料瓶数在 $[40, 50)$ 内, 故选项D错误. 故选ABC.]

10.1 [将成绩从小到大排列为110, 120, 120, 122, 130, 130, 130, 138,

∴该组成绩的中位数为 $\frac{122+130}{2} = 126$,

平均数为 $\frac{138+130 \times 3+122+120 \times 2+110}{8} = 125$,

∴该组成绩的中位数与平均数之差为 $126 - 125 = 1$.]

11.27 [已知梨树单株产量分别为24, 27, 29, 31, 32, 34, 35, 36, 38, 40, 41, 43, 45, 47, 50,

因为样本容量为15, 所以 $15 \times 10\% = 1.5$,

则第2个数27即为10%分位数,

所以估计需重点养护的梨树单株产量的最大值为27千克.]

12.3 [由题意可得, $1.966 = \frac{800}{2\,000} \times [1 + (2.7 - 3)^2] +$

$\frac{600}{2\,000} \times [2 + (3.1 - 3)^2] + \frac{600}{2\,000} \times [s_3^2 + (3.3 - 3)^2]$,

解得 $s_3^2 = 3$.]

课时作业(七十一)

1.B [观察题干图, 可知人体脂肪含量与年龄正相关, 且脂肪含量的中位数小于20%.]

2.D [由散点图可知, 若去掉D点,

则 x 与 y 的线性相关性变强, 且是正相关,

所以样本相关系数 r 变大, 决定系数 R^2 变大, 残差平方和变小.

故选D.]

3.B [经验回归直线必过样本点中心, 由题意得 $\bar{x} = \frac{15+20+25+30+35}{5} = 25$,

$\bar{y} = \frac{1+2+2+4+5}{5} = 2.8$, 结合选项可知, $2.8 = 0.2 \times 25 -$

2.2 , 即 y 与 x 的经验回归方程是 $\hat{y} = 0.2x - 2.2$. 故选B.]

4.B [令 $z_i = \log_2 y_i$, 则 $\hat{z} = \hat{b}x + \hat{a}$,

$\bar{z} = \frac{1}{5} \times (0+1+3+3+4) = \frac{11}{5}$, $\bar{x} = \frac{1}{5} \times (1+2+3+4+5) =$

$\frac{\sum_{i=1}^5 x_i z_i - 5 \bar{x} \bar{z}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5 \bar{x}^2} = 1$,

$\hat{a} = \bar{z} - \hat{b} \bar{x} = \frac{11}{5} - 1 \times 3 = -0.8$, 故 $\hat{y} = 2^{x-0.8}$,

当 $x = 6$ 时, $y = 2^{5.2} = 2^5 \times 2^{\frac{1}{5}}$,

因为 $1.15^5 \approx 2$, 所以 $2^{\frac{1}{5}} \approx 1.15$,

所以 $y = 2^{5.2} = 2^5 \times 2^{\frac{1}{5}} \approx 32 \times 1.15 = 36.8 \approx 37$.

故选B.]

5.ABD [对于选项A, 由样本相关系数的性质, 可得 $r \in [-1, 1]$, 故A正确;

对于选项B, 由样本相关系数的性质, 可得当 $|r|$ 越接近1时, 成对样本数据的线性相关程度越强, 故B正确;

对于选项C, 当 $r = 0$ 时, 成对样本数据之间没有线性相关关系, 但不排除它们之间有其他相关关系, 故C错误;

对于选项D, 由样本相关系数的性质, 可得当 $r > 0$ 时, 成对样本数据正相关, 故D正确.

故选ABD.]

6.ABD [由题意可知, $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$,

$\bar{y} = \frac{2.4+3.1+4+5+5.5}{5} = 4$,

因为经验回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + 1.57$ 过点 $(\bar{x}, \bar{y})$,

所以 $4 = 3\hat{b} + 1.57$, 解得 $\hat{b} = 0.81$, 故A正确;

所以经验回归方程为 $\hat{y} = 0.81x + 1.57$,

对于B, 因为 $\hat{b} = 0.81 > 0$, 所以 $r > 0$, 故B正确;

对于C, x 每增加1, y 大约增加0.81, 故C错误;

对于D, 因为 $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = -2 \times (-1.6) + (-1) \times$

$(-0.9) + 1 + 2 \times 1.5 = 8.1$, $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 4 + 1 + 1 + 4 = 10$,

$\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 1.6^2 + 0.9^2 + 1 + 1.5^2 = 6.62$,

所以 $r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{8.1}{\sqrt{66.2}}$,

所以 $r^2 = \frac{6\,561}{6\,620}$,

因为 $\sum_{i=1}^5 (y_i - \hat{y}_i)^2 = 0.02^2 + 0.09^2 + 0.19^2 + 0.12^2 = 0.059$,

则 $R^2 = 1 - \frac{0.059}{6.62} = \frac{6\,561}{6\,620}$,

所以 $r^2 = R^2$, 故D正确. 故选ABD.]

7.1.4 [由题意, 样本点(5, 1.5)处的残差为-0.06,

则 $1.5 - (0.28 \times 5 + \hat{a}) = -0.06$, 解得 $\hat{a} = 0.16$.

由题表数据可得, $\bar{x} = \frac{1}{5} \times (1+2+3+4+5) = 3$,

$\bar{y} = \frac{1}{5} \times (0.5+0.6+1+m+1.5) = \frac{3.6+m}{5}$,

则 $\frac{3.6+m}{5} = 0.28 \times 3 + 0.16$, 解得 $m = 1.4$.]

8.2.88 [设 $z = x^2$, 则 $\hat{y} = 0.14z + \hat{b}$, 则

z	1	4	9	16	25	36
y	2.5	3.6	4.4	5.4	6.6	7.5

则 $\bar{z} = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}$,

$\bar{y} = \frac{2.5+3.6+4.4+5.4+6.6+7.5}{6} = 5$,

则 $\hat{b} = \bar{y} - 0.14\bar{z} = 5 - 0.14 \times \frac{91}{6} \approx 2.88$.]

9.解: (1) 由题意, $\bar{x} = \frac{1}{5} \times (40+45+50+55+60) = 50$, $\bar{y} = \frac{1}{5} \times$

$(50+56+64+72+83) = 65$,

所以 y 与 x 的样本相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5 \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5 \bar{x}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 y_i^2 - 5 \bar{y}^2}} = \frac{16\,660 - 5 \times 50 \times 65}{\sqrt{250} \times \sqrt{680}} \approx \frac{410}{412} \approx 0.995$,

所以 x 与 y 具有较强的线性相关关系.

$$(2) \text{ 由题意及 (1) 得 } b = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5 \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5 \bar{x}^2} = \frac{16\,660 - 5 \times 50 \times 65}{250} = \frac{41}{25}, \text{ 则 } \hat{a} = 65 - \frac{41}{25} \times 50 = -17,$$

所以 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y} = \frac{41}{25}x - 17$,

$$\text{当 } x=70 \text{ 时, } \hat{y} = \frac{41}{25} \times 70 - 17 = 97.8,$$

所以当土壤的湿度为 70% 时, 种子的发芽率 $y\%$ 的预测值为 97.8%.

课时作业(七十二)

1. **D** [因为 $\chi^2 = 6.748 > 6.635 = x_{0.01}$, 所以依据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验, 认为“数学成绩优秀与性别有关”, 即在犯错误的概率不超过 0.01 的前提下认为数学成绩优秀与性别有关, 所以 ABC 错误. 故选 D.]

2. **B** [零假设为 H_0 : 变量 X 与 Y 不相关.

因为 $\chi^2 = 2.954 > 2.706 = x_{0.1}$, 依据小概率值 $\alpha = 0.1$ 的 χ^2 独立性检验, 推断 H_0 不成立, 即认为变量 X 与 Y 相关, 这个推断犯错误的概率不超过 0.1. 故选 B.]

3. **D** [根据列联表中的数据可求得 $b=30, c=10$.

对于 A, 代入计算可得 $\frac{a}{a+b} = \frac{2}{5} > \frac{c}{c+d} = \frac{1}{6}$, 正确;

$$\text{对于 B, } \chi^2 = \frac{110 \times (20 \times 50 - 30 \times 10)^2}{30 \times 80 \times 50 \times 60}$$

$\approx 7.486 > 6.635$, 可得 B 正确;

对于 C, D, 结合附表数值以及独立性检验的实际意义, 根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验, 认为是否患过该流行疾病与性别有关联, 即 C 正确, D 错误.]

4. **BCD** [散点图不适用于推断两个分类变量之间是否有关联, 所以 A 选项错误;

而等高堆积条形图、列联表、 χ^2 独立性检验适用于推断两个分类变量之间是否有关联, 所以 BCD 选项正确.

故选 BCD.]

5. **ABD** [随机抽取了 300 名学生, 则经常锻炼人数为 200, 不经常锻炼人数为 100.

对于选项 A, 由等高堆积条形图知, 男生中经常锻炼的人数为 $200 \times 50\% = 100$, 不经常锻炼的人数为 $100 \times 60\% = 60$, $\therefore$ A 正确;

对于选项 B, 由等高堆积条形图知, 女生中经常锻炼的人数为 $200 \times 50\% = 100$, 不经常锻炼的人数为 $100 \times 40\% = 40$,

$\therefore$ 从参与调查的学生中任取一人, 已知该生为女生, 则该生经常锻炼的概率为 $\frac{100}{100+40} = \frac{5}{7}$, $\therefore$ B 正确;

对于选项 C, 由题意可得列联表如下:

单位: 人

性别	锻炼情况		合计
	不经常	经常	
女生	40	100	140
男生	60	100	160
合计	100	200	300

$$\therefore \chi^2 = \frac{300 \times (40 \times 100 - 100 \times 60)^2}{140 \times 160 \times 200 \times 100}$$

$$\approx 2.679 < 2.706 = x_{0.1},$$

$\therefore$ 依据 $\alpha = 0.1$ 的独立性检验, 不能认为性别因素影响学生体育锻炼的经常性, $\therefore$ C 错误;

对于选项 D, 2×2 列联表如下:

单位: 人

性别	锻炼情况		合计
	不经常	经常	
女生	80	200	280
男生	120	200	320
合计	200	400	600

$$\therefore \chi^2 = \frac{600 \times (80 \times 200 - 200 \times 120)^2}{280 \times 320 \times 200 \times 400} = \frac{75}{14} \approx 5.357$$

$$> 3.841 = x_{0.05},$$

$\therefore$ 依据 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 认为性别因素影响学生体育锻炼的经常性, 该推断犯错误的概率不超过 0.05, $\therefore$ D 正确.

故选 ABD.]

6. 74 [由题意知 $a+21=70, c+5=30$, 可得 $a=49, c=25$,

所以 $a+c=74$.]

7. 4.882 0.05 [根据题意可知,

$$\chi^2 = \frac{100 \times (15 \times 44 - 6 \times 35)^2}{21 \times 79 \times 50 \times 50} \approx 4.882 > 3.841 = x_{0.05},$$

根据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 认为服用此药的效果与患者的性别有关, 此推断犯错误的概率不大于 0.05.]

8. 解: (1) 根据题意可知,

该校成绩超过 90 分的学生人数为 $200 \times 85\% = 170$,

成绩没有超过 90 分的学生人数为 $200 - 170 = 30$,

因此 $\lambda = 90, \mu = 80, t = 20$.

(2) 零假设为

H_0 : 该校学生了解安全知识的程度与性别无关.

$$\text{因为 } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$$= \frac{200 \times (10 \times 80 - 90 \times 20)^2}{100 \times 100 \times 30 \times 170} \approx 3.92 < 6.635 = x_{0.01},$$

根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验, 没有充分证据推断 H_0 不成立, 因此可以认为 H_0 成立,

所以不能推断该校学生了解安全知识的程度与性别有关.

阶段检测(十五)

1. **D** [由分层随机抽样的特点可得 $\frac{15}{m} = \frac{60}{60+80}$,

解得 $m=35$, 故选 D.]

2. **D** [从题干散点图可以看出, 两个变量是正相关, 故 A 正确; 从题干散点图可以看出, 经验回归直线的斜率是正数, 且 $\hat{y} = \hat{b}_1 x + \hat{a}_1$ 的斜率大于 $\hat{y} = \hat{b}_2 x + \hat{a}_2$ 的斜率, 故 B 和 C 正确; 从题干散点图可以看出, 去掉“离群点”E 后, 相关性更强, 拟合的效果更好, R^2 值越大, 模型的拟合效果越好, 所以 $R_1^2 < R_2^2$, 故 D 错误. 故选 D.]

3. **B** [因为样本数据 $2x_1+3, 2x_2+3, \dots, 2x_8+3$ 的方差为 32,

所以数据 $x_1, x_2, \dots, x_8$ 的方差为 $\frac{32}{2^2} = 8$.

故选 B.]

4. **B** [对于 A, 由 $\hat{y} = -10x + \hat{a}$, $-10 < 0$, 可得 y 与 x 负相关, 故 A 错误;
对于 B, C, 由表中数据可得
$$\bar{x} = \frac{6+6.5+7+7.5+8}{5} = 7,$$
$$\bar{y} = \frac{90+85+80+75+70}{5} = 80,$$
将 $(7, 80)$ 代入 $\hat{y} = -10x + \hat{a}$, 得 $80 = -10 \times 7 + \hat{a}$,
解得 $\hat{a} = 150$, 则经验回归方程为 $\hat{y} = -10x + 150$,
当 $x = 7.5$ 时, $\hat{y} = -10 \times 7.5 + 150 = 75$, 故 $(7.5, 75)$ 在经验回归直线上, 故 B 正确, C 错误;
对于 D, 当 $x = 9.5$ 时, $\hat{y} = -10 \times 9.5 + 150 = 55$, 这是一个估计值, 不是精确值, 故 D 错误.
故选 B.]

5. **ACD** [由题意可知, 抽取的男生人数为 $600 \times \frac{100}{400+600} = 60$,
抽取的女生人数为 $400 \times \frac{100}{400+600} = 40$,
由等高堆积条形图知, 抽取的男生感兴趣的人数为 $60 \times 0.5 = 30$, 抽取的男生不感兴趣的人数为 $60 \times 0.5 = 30$,
抽取的女生感兴趣的人数为 $40 \times 0.3 = 12$, 抽取的女生不感兴趣的人数为 $40 \times 0.7 = 28$, 则 2×2 列联表如下:

单位: 人

性别	数学兴趣		合计
	感兴趣	不感兴趣	
女生	12	28	40
男生	30	30	60
合计	42	58	100

对于 A, 由此表可知, $a = 12, c = 30$, 故 A 正确;

对于 B, 女生不感兴趣的人数约为 $400 \times \frac{28}{40} = 280$, 男生不感兴趣的人数约为 $600 \times \frac{30}{60} = 300$,

所以估计该校高一新生中对数学不感兴趣的女生人数比男生人数少, 故 B 错误;

对于 C, 零假设为

H_0 : 性别与对数学的兴趣没有差异.

$$\chi^2 = \frac{100 \times (12 \times 30 - 28 \times 30)^2}{40 \times 60 \times 42 \times 58} \approx 3.941 > 3.841 = x_{0.05},$$

依据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 有充分证据推断 H_0 不成立, 因此可以认为 H_0 不成立, 即可以认为性别与对数学的兴趣有差异, 故 C 正确;

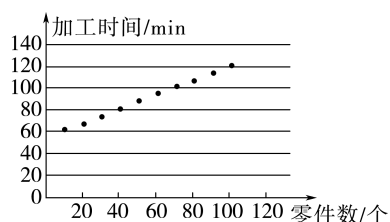
对于 D, 由 C 项知 $\chi^2 \approx 3.941 < 6.635 = x_{0.01}$,

依据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验, 没有充分证据推断 H_0 不成立, 因此可以认为 H_0 成立, 即可以认为性别与对数学的兴趣没有差异, 故 D 正确.

故选 ACD.]

6. 13.5% [设 2025 年到该地旅游的游客总人数为 a ,
由扇形图可知, 游客中青年人所占百分比为 $1 - 35\% - 20\% = 45\%$,
则游客中青年人的人数为 $0.45a$,
其中选择自助游的青年人的人数为 $0.45a \times 0.3 = 0.135a$,
所以估计 2025 年到该地旅游的游客中选择自助游的青年人占总游客人数的 13.5%.]

7. 解: (1) 散点图如下.



$$(2) \text{ 由已知得 } \bar{x} = 55, \bar{y} = 91.7, \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 5\,515,$$

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 8\,250, \text{ 所以 } b = \frac{5\,515}{8\,250} \approx 0.668,$$

$$\hat{a} \approx 91.7 - 0.668 \times 55 = 54.96.$$

所以经验回归方程为 $\hat{y} = 0.668x + 54.96$.

(3) 关于加工零件的个数与加工时间, 我们得到的结论是: 加工的零件越多, 所花的时间大致越长.

8. 解: (1) 由已知得样本中有 25 周岁及以上组工人 60 名, 25 周岁以下组工人 40 名,

所以样本中日平均生产件数不足 60 件的工人中 25 周岁及以上组有 $60 \times 0.05 = 3$ (人), 分别记为 A_1, A_2, A_3 , 25 周岁以下组有 $40 \times 0.05 = 2$ (人), 分别记为 B_1, B_2 ,

从中随机抽取 2 人, 所有可能的结果共 10 种, 分别是 $(A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_2, A_3), (A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_1), (A_3, B_2), (B_1, B_2)$,

其中至少抽到 1 名 25 周岁以下组的工人的结果有 7 种,

$$\text{故所求概率 } P = \frac{7}{10}.$$

(2) 由频率分布直方图可知在抽取的 100 名工人中,

“25 周岁及以上组”中的“生产能手”有 $60 \times 0.25 = 15$ (人),

“25 周岁以下组”中的“生产能手”有 $40 \times 0.375 = 15$ (人),

据此可得 2×2 列联表如下:

单位: 人

分组	生产件数		合计
	≥ 80	< 80	
25 周岁及以上组	15	45	60
25 周岁以下组	15	25	40
合计	30	70	100

零假设为

H_0 : “生产能手”与工人所在的年龄组无关.

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{100 \times (15 \times 25 - 45 \times 15)^2}{60 \times 40 \times 30 \times 70} \approx 1.786 < 2.706 = x_{0.1}.$$

所以依据小概率值 $\alpha = 0.1$ 的独立性检验, 没有充分证据推断 H_0 不成立, 即认为“生产能手”与工人所在的年龄组无关.

课时作业(七十三)

1. **B** [若 $A_n^3 = 10C_n^2$, 则 $\frac{n!}{(n-3)!} = 10 \times \frac{n!}{2!(n-2)!}$,

$$\text{整理得 } \frac{1}{(n-3)!} = \frac{5}{(n-2)!}, \text{ 所以 } 1 = \frac{5}{n-2}, \text{ 解得 } n = 7.$$

故选 B.]

2. **B** [7 名同学排成一排照相,

则甲、乙不相邻的不同排法种数为 $A_5^5 A_6^2 = 3\,600$. 故选 B.]

3. **C** [根据题意, 个位从 3 和 5 中选择一个, 百位不能选 0, 若含 0, 则有 $C_2^1 C_3^1 = 6$ (个);

若不含0,则有 $C_2^1 A_3^2 = 12$ (个).

故符合条件的三位奇数的个数为 $12+6=18$.

故选 C.]

4. C [由题意,区域A有5种涂法,B有4种涂法,C,A不同色,C有3种,D有2种涂法,有 $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ (种),C,A同色,D有3种涂法,有 $5 \times 4 \times 3 = 60$ (种),所以共有 $120+60=180$ (种)不同的涂色方法.

故选 C.]

5. B [甲、乙、丙、丁四位师范生分配到A,B,C三所学校实习,若每所学校至少分到一人,

则可将四人分为1,1,2三组,共有 $\frac{C_4^1 \cdot C_3^1}{A_2^2} = 6$ 种方法,

再分到三所学校有 $A_3^3 = 6$ (种)分法,

则不同的分配方案的种数是 $6 \times 6 = 36$. 故选 B.]

6. B [由题意,可分两类,第一类:由一个数字组成4位数“回文数”,在6个数字中任取1个,有 C_6^1 种情况. 第二类:由两组相同的数字组成4位数“回文数”,在6个数字中任取2个,这2个数字互换位置又可以组成另一个数,所以有 $C_6^2 A_2^2$ 种情况. 综上,由数字1,2,3,4,5,6可以组成4位数的“回文数”的个数为 $C_6^1 + C_6^2 A_2^2 = 36$. 故选 B.]

7. ABD [对于A,左边 $= \frac{n!}{(n-m)!} + m \cdot \frac{n!}{(n-m+1)!} = \frac{(n-m+1) \cdot n!}{(n-m+1)!} + m \cdot \frac{n!}{(n-m+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n-m+1)!} =$ 右边,

$\therefore$ A 正确; 对于B,右边 $= \frac{n \cdot (n-1)!}{(r-1)! \cdot (n-r)!} = \frac{r}{r} \cdot$

$\frac{n!}{(r-1)! \cdot (n-r)!} = r \cdot \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} =$ 左边, $\therefore$ B 正确; 对于C,右边 $= C_n^{m-1} + C_n^m = C_{n+1}^m \neq$ 左边, $\therefore$ C 错误;

对于D,右边 $= \frac{m+1}{n-m} \cdot \frac{n!}{(m+1)! \cdot (n-m-1)!} = \frac{(m+1) \cdot n!}{(m+1)! \cdot (n-m)!} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} =$ 左边, $\therefore$ D 正确. 故选 ABD.]

8. BD [对于A,若一班不再分配其他名额,则20个名额分配到5个班级,每个班级至少1个,根据挡板法,有 C_{19}^4 种分配方法,故A错误; 对于B,若一班有除劳动模范之外的学生参加,则20个名额分配到6个班级,每个班级至少1个,根据挡板法,有 C_{19}^5 种分配方法,故B正确; 对于C,D,若每个班至少3人参加,由于一班有2个劳动模范,故只需先满足其他每个班级有2个名额,还剩10个名额,再将10个名额分配到6个班级,每个班级至少1个名额,故只需在10个名额中的9个空上放置5个挡板即可,故有 $C_9^5 = 126$ (种),故C错误,D正确. 故选 BD.]

9. AC [如果甲工序不能放在第一道,则甲有4种安排方式,根据分步乘法计数原理,共有 $C_4^1 A_4^4 = 96$ (种)加工顺序,故A正确; 甲、乙两道工序必须相邻,将甲和乙捆绑为一道工序,和剩余3道工序放在一起排序,则共有 $A_2^2 A_4^4 = 48$ (种)加工顺序,故B错误; 如果甲、丙两道工序必须不相邻,则先安排剩余3道工序,在形成的4个空中,安排甲、丙,故共有 $A_3^3 A_4^2 = 72$ (种)加工顺序,故C正确;

现将5道不同的工序全排列,再除以乙、丙两道工序的全排列,

故共有 $\frac{A_5^5}{A_2^2} = 60$ (种)加工顺序,故D错误. 故选 AC.]

10. 15 [因为 $2\ 025 = 3^4 \times 5^2$, 所以2 025的正因数有 $(4+1) \times (2+1) = 15$ (个).]

11. 16 [法一:可分两种情况:第一种情况,只有1名女生入选,不同的选法有 $C_2^1 C_4^2 = 12$ (种); 第二种情况,有2名女生入选,不同的选法有 $C_2^2 C_4^1 = 4$ (种). 根据分类加法计数原理知,至少有1名女生入选的不同的选法共有 $12+4=16$ (种).

法二:从6人中任选3人的不同的选法共有 $C_6^3 = 20$ (种),从6人中任选3人都是男生的不同的选法有 $C_4^3 = 4$ (种),所以至少有1名女生入选的不同的选法共有 $20-4=16$ (种).]

12. (1) 96 (2) 1 728 [(1)由题意可得共 $A_2^2 A_2^2 A_4^4 = 2 \times 2 \times 24 = 96$ (种)不同的站法.

(2)先排老师和女学生共有 A_4^4 种站法,再排男学生甲有 C_3^1 种站法,最后排剩余的3名男学生有 A_3^3 种站法,所以共有 $A_4^4 C_3^1 A_3^3 = 24 \times 3 \times 24 = 1\ 728$ (种)不同的站法.]

课时作业(七十四)

1. A [由题意, $f(x) = x^4 - C_4^1 x^3 + C_4^2 x^2 - C_4^3 x + 1 = C_4^0 x^4 - (-1)^0 + C_4^1 x^3 \cdot (-1)^1 + C_4^2 x^2 \cdot (-1)^2 + C_4^3 x \cdot (-1)^3 + C_4^4 x^0 \cdot (-1)^4 = (x-1)^4$,

可由偶函数 $y = x^4$ 的图象向右平移1个单位长度得到,所以函数 $f(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x=1$. 故选 A.]

2. A [$(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2)^6 = (x - \frac{1}{x})^{12}$, 其展开式的通项为 $T_{k+1} = C_{12}^k x^{12-k} \cdot (-\frac{1}{x})^k = (-1)^k C_{12}^k x^{12-2k}$, $0 \leq k \leq 12, k \in \mathbf{N}$, 由

$12-2k=0$, 得 $k=6$, 则 $(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2)^6$ 的展开式中的常数项为 $(-1)^6 \times C_{12}^6 = 924$. 故选 A.]

3. D [因为在 $(1-x)^5 + (1-x)^6 + (1-x)^7 + (1-x)^8$ 中, 含 x^3 的项为 $(C_5^3 + C_6^3 + C_7^3 + C_8^3) \cdot (-x)^3$, 所以含 x^3 的项的系数是 $-(C_5^3 + C_6^3 + C_7^3 + C_8^3) = -(10+20+35+56) = -121$.]

4. A [$(x-\sqrt{x})^4$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_4^k x^{4-k} (-\sqrt{x})^k = C_4^k (-1)^k x^{4-\frac{k}{2}}$ ($k=0,1,2,3,4$), 令 $4-\frac{k}{2}=3$, 解得 $k=2$,

故所求即为 $C_4^2 (-1)^2 = 6$. 故选 A.]

5. A [$(2-x)^4$ 的展开式的通项为 $C_4^k 2^{4-k} \cdot (-x)^k$, $k=0,1,2,3,4$, 所以 $(1+ax)(2-x)^4$ 的展开式中含 x^4 的项为 $1 \times C_4^4 2^{4-4} (-x)^4 + ax \times C_4^3 2^{4-3} (-x)^3 = x^4 - 8ax^4 = (1-8a)x^4$, 则 $1-8a=17$, 解得 $a=-2$. 故选 A.]

6. A [对于A, 令 $x=0$, 可得 $a_0 = 2^{10}$, 故A正确; 对于B, 令 $x=-1$, 可得 $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{10} = 1$ ①, 故B错误;

对于C, 令 $x=1$, 可得 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 5^{10}$ ②,

联立①②可得 $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10} = \frac{1+5^{10}}{2}$, 故C错误;

对于D, 展开式共有11项, 则第6项的二项式系数最大, 故D错误. 故选 A.]

7. BC [由题意可得, 展开式共有7项, 故A错误;

展开式的通项为 $T_{k+1} = C_6^k (x^2)^{6-k} (-\frac{2}{x})^k = (-2)^k C_6^k x^{12-3k}$, $k=0,1,\dots,6$,

令 $12-3k=0$, 得 $k=4$, 则 $T_5 = (-2)^4 \times C_6^4 = 240$, 故B正确;

令 $12-3k=4$, 得 $k=\frac{8}{3}$, 不符合题意, 故没有含 x^4 的项, 则C正确; 由二项式系数的性质可知 C_6^3 最大, 故 $T_4 = (-2)^3 C_6^3 x^3 = -160x^3$, 故D错误. 故选 BC.]

8. **AB** [∵ $f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 = (x-1)^5$, ∴ $f(x)$ 可以被 $(x-1)^3$ 整除, 故 A 正确;
 ∵ $f(x+y+1) = (x+y)^5$, ∴ $f(x+y+1)$ 可以被 $(x+y)^4$ 整除, 故 B 正确;
 ∵ $f(30) = (30-1)^5 = (27+2)^5 = C_5^0 \times 27^5 + C_5^1 \times 27^4 \times 2 + \cdots + C_5^4 \times 27 \times 2^4 + C_5^5 \times 2^5 = C_5^0 \times 27^5 + C_5^1 \times 27^4 \times 2 + \cdots + C_5^4 \times 27 \times 2^4 + 27 + 5$, ∴ $f(30)$ 被 27 除的余数为 5, 故 C 错误;
 ∵ $f(29) = (29-1)^5 = (30-2)^5 = C_5^0 \times 30^5 + C_5^1 \times 30^4 \times (-2) + \cdots + C_5^4 \times 30 \times (-2)^4 + (-2)^5 = C_5^0 \times 30^5 + C_5^1 \times 30^4 \times (-2) + \cdots + C_5^4 \times 30 \times (-2)^4 - 32$, ∴ 个位数为 $10 - 2 = 8$, 故 D 错误. 故选 AB.]

9. **ACD** [对于 A, 因为 $\left(x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式共有 8 项, 所以 $n=7$,
 故所有项的二项式系数和为 $2^7 = 128$, 故 A 正确;

对于 B, 令 $x=1$, 可得所有项的系数和为 $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^7 \neq \left(\frac{3}{2}\right)^8$, 故 B 错误;

展开式的通项为 $T_{k+1} = C_7^k \cdot x^{7-k} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot C_7^k \cdot$

$x^{7-\frac{3k}{2}} (k=0, 1, 2, \dots, 7)$,

对于 C, 设第 $k+1$ 项系数最大,

$$\text{由} \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot C_7^k \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot C_7^{k-1}, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot C_7^k \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \cdot C_7^{k+1}, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k \leq \frac{8}{3}, \\ k \geq \frac{5}{3}, \end{cases} \text{ 则 } k=2, \text{ 故第 3 项的系数最大, 故 C 正确;}$$

对于 D, 由 $7 - \frac{3k}{2}$ 为整数, 且 $k=0, 1, 2, \dots, 7$ 可知, k 的值可以为 0, 2, 4, 6,

所以二项展开式中, 有理项共有 4 项, 故 D 正确.

故选 ACD.]

10. -20 [$(x-1)^6$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_6^k x^{6-k} (-1)^k = (-1)^k C_6^k x^{6-k}$, 令 $6-k=3$, 得 $k=3$, 所以 x^3 项的系数为 $(-1)^3 C_6^3 = -20$.]

11. 1260 [把 $x + \frac{1}{x}$ 看成一个整体, 则 $\left(x + \frac{1}{x} - y\right)^{10}$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_{10}^k \left(x + \frac{1}{x}\right)^{10-k} (-y)^k$. 令 $k=6$, 则 $T_7 = C_{10}^6 \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 y^6$, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^4$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_4^r x^{4-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = C_4^r x^{4-2r}$. 令 $4-2r=0$, 则 $r=2$, 所以在 $\left(x + \frac{1}{x} - y\right)^{10}$ 的展开式中, 只含 y^6 的项的系数为 $C_{10}^6 \times C_4^2 = 1260$.]

12. 5 [$\left(\frac{1}{3} + x\right)^{10}$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} x^k$,
 $0 \leq k \leq 10$ 且 $k \in \mathbf{N}$,

设展开式中第 $k+1$ 项系数最大,

$$\text{则} \begin{cases} C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \geq C_{10}^{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{9-k}, \\ C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \geq C_{10}^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{11-k}, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k \geq \frac{29}{4}, \\ k \leq \frac{33}{4}, \end{cases} \text{ 即 } \frac{29}{4} \leq k \leq \frac{33}{4}, \text{ 又 } k \in \mathbf{N}, \text{ 故 } k=8,$$

所以展开式中系数最大的项是第 9 项, 且该项系数为 $C_{10}^8 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 5$.]

阶段检测(十六)

1. **C** [要让电路从 A 处到 B 处接通, 不同的路径条数为 $2 \times 1 + 2 \times 3 = 8$.

故选 C.]

2. **D** [因为 $(1+x)^2 + (1+x)^3 + \cdots + (1+x)^9 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_9 x^9$,

所以 $a_2 = C_2^2 + C_3^2 + \cdots + C_9^2 = C_3^3 + C_3^2 + \cdots + C_9^2 = C_9^3 + \cdots + C_9^9 = C_{10}^3 = 120$.

故选 D.]

3. **B** [先将丙和丁捆绑在一起, 有 A_2^2 种排法, 再将其与乙、戊排列, 有 A_3^3 种排法, 最后将甲插入中间两空, 有 C_2^1 种排法, 根据分步乘法计数原理, 共有 $A_2^2 A_3^3 C_2^1 = 24$ (种) 不同的排列方式.

故选 B.]

4. **C** [甲、乙二人先选 1 种相同的课外读物, 有 $C_6^1 = 6$ (种) 情况, 再从剩下的 5 种课外读物中各自选 1 本不同的读物, 有 $C_5^1 C_4^1 = 20$ (种) 情况, 由分步乘法计数原理可得共有 $6 \times 20 = 120$ (种) 选法, 故选 C.]

5. **A** [因为二项式系数只有第 6 项最大, 故 $n=10$, 因为 $T_{k+1} = C_{10}^k \left(\frac{1}{2} x^3\right)^{10-k} (-2x^{-2})^k = C_{10}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{10-k} (-2)^k x^{30-5k} (0 \leq k \leq 10, k \in \mathbf{N})$, 令 $30-5k=0$, 则 $k=6$,

故 $T_7 = C_{10}^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times (-2)^6 = 840$.

故选 A.]

6. **B** [先从 5 人中选择 1 人两天均参加公益活动, 有 C_5^1 种方式; 再从余下的 4 人中选 2 人分别安排到星期六、星期日, 有 A_4^2 种安排方式, 所以不同的安排方式共有 $C_5^1 \cdot A_4^2 = 60$ (种). 故选 B.]

7. **BD** [在 $\left(x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ 的展开式中, 所有奇数项的二项式系数和为 $\frac{2^{10}}{2} = 2^9$, A 错误;

令 $x=1$, 则所有项的系数和为 3^{10} , B 正确;

二项式系数最大的项为第 6 项, C 错误;

$$T_{k+1} = C_{10}^k x^{20-2k} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k = 2^k C_{10}^k x^{20-\frac{5k}{2}},$$

令 $20 - \frac{5k}{2} = 0$, 则 $k=8$, 即展开式中的常数项是第 9 项, D 正确.

故选 BD.]

8. **ABD** [A 选项, 0 不能当首位, 所以有 $C_5^1 A_5^3 = 300$ (个), 故 A 正确;

B 选项, 分为两类: 0 在末位, 则有 $A_5^3 = 60$ (个);

0 不在末位, 则有 $C_2^1 C_4^1 A_4^2 = 96$ (个),

所以共有 $60 + 96 = 156$ (个), 故 B 正确;

C 选项, 分为两类: 0 在末位, 则有 $A_5^3 = 60$ (个);

5 在末位, 则有 $C_4^1 A_4^2 = 48$ (个),

所以共有 $60 + 48 = 108$ (个), 故 C 错误;

D 选项,首位为 1 的有 $A_5^3=60$ (个);前两位为 20 的有 $A_4^2=12$ (个);前两位为 21 的有 $A_4^2=12$ 个,所以第 85 个数字是前两位为 23 的最小数,即为 2 301,故 D 正确.

故选 ABD.]

9. 10 [令 $x=1$, 所以 $(1+1)^n=32$, 即 $2^n=32$, 解得 $n=5$, 所以 $(x+1)^5$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_5^k \cdot x^{5-k}$, 令 $5-k=2$, 则 $k=3$, 所以 $T_4=C_5^3 x^2=10x^2$.

故 x^2 的系数为 10.]

10. 1 [因为 $(1-2x)^4=a_0-2a_1x+4a_2x^2-8a_3x^3+16a_4x^4$, 所以令 $x=0$, 可得 $a_0=1$. 再令 $x=-\frac{1}{2}$, 可得 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=2^4=16$, 所以 $a_1+a_2+a_3+a_4=16-a_0=16-1=15$.]

11. 解: (1) 从 5 名男生和 4 名女生中选出 4 人参加创新大赛, 则 4 人中男生和女生各选 2 人, 共有 $C_5^2 \cdot C_4^2=10 \times 6=60$ (种) 选法.

(2) 除去甲、乙之外, 其余 2 人可以从剩下的 7 人中任意选择, 则男生中的甲和女生中的乙必须在内有 $C_7^2=21$ (种) 选法.

(3) 男生中的甲和女生中的乙不在内的情况, 共有 $C_7^4=35$ (种) 选法.

则可得男生中的甲和女生中的乙至少有 1 人在内有 $C_9^4-C_7^4=126-35=91$ (种) 选法.

(4) 如果 4 人中必须既有男生又有女生, 可以按含有女生的人数分成三类: 1 男 3 女、2 男 2 女、3 男 1 女,

则 4 人中必须既有男生又有女生有

$C_5^1 C_4^3+C_5^2 C_4^2+C_5^3 C_4^1=20+60+40=120$ (种) 选法.

12. 解: (1) 依题意, 第 3 项是含 x^2 的项, 其系数是 $C_4^2 3^2+C_4^1 C_5^1 \times (-2 \times 3)+C_5^2 (-2)^2=-26$.

∴ 展开式中按 x 的升幂排列的第 3 项为 $-26x^2$.

(2) 由展开式的通项 $T_{k+1}=C_{18}^k (9x)^{18-k} \cdot \left(\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^k = C_{18}^k 3^{36-3k} x^{18-\frac{3}{2}k}$, 令 $18-\frac{3}{2}k=0$, 得 $k=12$,

∴ 常数项为 $T_{13}=18\ 564$.

(3) 由题意得 $2C_n^9=C_n^8+C_n^{10}$,

得 $n^2-37n+322=0$, 解得 $n=14$ 或 $n=23$.

(4) 原式 $= (1-x^3)(1-x)^9 = (1-x^3)(1-9x+C_9^2 x^2 - C_9^3 x^3 + C_9^4 x^4 - \cdots - C_9^9 x^9)$, ∴ x^4 的系数为 $C_9^4+9=135$.

(5) 原式 $= [(x^2+x)+y]^5$,

∴ 其展开式的通项为 $T_{k+1}=C_5^k (x^2+x)^{5-k} y^k$,

令 $k=2$, ∴ $5-k=3$, ∴ $T_3=C_5^2 (x^2+x)^3 y^2$.

又 $(x^2+x)^3$ 的展开式的通项为 $T'_{r+1}=C_3^r (x^2)^{3-r} x^r = C_3^r x^{6-r}$, 令 $6-r=5$, ∴ $r=1$,

∴ $T'_2=C_3^1 x^{6-1}=C_3^1 x^5$,

∴ $(x^2+x+y)^5$ 的展开式中 $x^5 y^2$ 的系数为 $C_5^2 C_3^1=30$.

课时作业(七十五)

1. A [对于 A, 甲、乙两人各写一个数字, 所有可能的结果为(奇, 偶), (奇, 奇), (偶, 奇), (偶, 偶), 则都是奇数或都是偶数的概率为 $\frac{1}{2}$, 故游戏是公平的;

对于 B, 随着试验次数的增加, 频率偏离概率很大的可能性会越来越小, 故事件 A 发生的频率就是事件 A 发生的概率是不正确的;

对于 C, 某人花 100 元买福利彩票, 中奖或者不中奖都有可能,

但事先无法预料, 故 C 不正确;

对于 D, “某人订阅甲报纸”可能发生也可能不发生, 故该事件是随机事件, 故 D 不正确. 故选 A.]

2. C [由题意, 事件 A = “击中环数小于 8”与事件 B = “击中环数大于 8”是互斥事件但不是对立事件, 故 A 选项错误; 事件 B = “击中环数大于 8”与事件 C = “击中环数不小于 8”, 能同时发生, 所以不是互斥事件, 故 B 选项错误; 事件 A = “击中环数小于 8”与事件 C = “击中环数不小于 8”是对立事件, 故 C 选项正确; 事件 B = “击中环数大于 8”与事件 D = “击中环数不大于 9”能同时发生, 不是互斥事件, 故 D 选项错误. 故选 C.]

3. B [根据题意, 事件 A, B 互斥, 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.2 + 0.3 = 0.5$.]

4. C [法一: 由题意, 甲、乙、丙三人在 3 天节日中值班, 每人值班 1 天, 每天一人的情况有(甲, 乙, 丙), (甲, 丙, 乙), (乙, 甲, 丙), (乙, 丙, 甲), (丙, 甲, 乙), (丙, 乙, 甲), 共 6 种, 其中乙排在甲前面值班的情况有(乙, 甲, 丙), (乙, 丙, 甲), (丙, 乙, 甲), 共 3 种, 故乙排在甲前面值班的概率为 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. 故选 C.

法二: 甲、乙、丙三人在 3 天节日中值班, 每人值班 1 天, 每天一人, 共有 $A_3^3=6$ (种) 等可能结果, 设事件 A = “乙排在甲前面值班”, 则事件 A 包含的可能结果为 $\frac{1}{2} A_3^3=3$ (种), 所以事件 A

发生的概率 $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. 故选 C.]

5. B [根据题意, $P(A) = P(AB) + P(\overline{AB})$, 变形可得 $P(\overline{AB}) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{5}$, 又 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{3}{5}$, 变形可得 $P(B) = \frac{2}{5}$. 故选 B.]

6. A [由统计表可知, 共抽取了 $6+9+15+12+8=50$ 名学生, 阅读时间少于 4 h 的有 $6+9=15$ 人, ∴ 从该校随机抽取 1 名学生, 估计其每周的课外阅读时间少于 4 h 的概率为 $\frac{15}{50}=0.3$. 故选 A.]

7. BC [由题意知事件 A 包含的样本点: 向上的一面出现的点数为 1, 3, 5, 事件 B 包含的样本点: 向上的一面出现的点数为 1, 2, 事件 C 包含的样本点: 向上的一面出现的点数为 4, 5, 6, 所以 $\overline{AB}$ = “向上的一面出现的点数为 2”, 故 A 错误; $\overline{BC}$ = “向上的一面出现的点数为 4 或 5 或 6”, 故 B 正确; $\overline{AB} + \overline{BC}$ = “向上的一面出现的点数为 3 或 4 或 5 或 6”, 故 C 正确; $\overline{ABC}$ = “向上的一面出现的点数为 5”, 故 D 错误. 故选 BC.]

8. ABC [由题意可知, $m=100-55-18=27$, $P(A) = \frac{55}{100} = 0.55$, $P(B) = \frac{18}{100} = 0.18$, $P(C) = \frac{27}{100} = 0.27$. 事件 A, B, C 两两互斥, 所以 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.73$, $P(B \cup C) = P(B) + P(C) = 0.45$. 故选 ABC.]

9. ABD [对于 A, ∵ $A \subseteq B$, 事件 AB 发生就相当于事件 A 发生, ∴ $P(AB) = P(A)$, 故 A 正确; 对于 B, ∵ A, B 是互斥事件, ∴ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.6$, ∴ $P(A) = 0.4$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0.6$, 故 B 正确; 对于 C, 如抛掷一枚骰子, 统计抛得的点数, 记事件 $C = \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 3\}$, 满足 $P(A \cup C) = P(B \cup C)$, ∴ $P(A) = \frac{1}{2} > P(B) = \frac{1}{3}$, 故 C 错误;

对于 D, $\because A = AB + \overline{AB}, B = BA + \overline{BA}, AB, \overline{AB}$ 互斥, $BA, \overline{BA}$ 互斥, $\therefore P(A) = P(AB) + P(\overline{AB}),$
 $P(B) = P(BA) + P(\overline{BA}),$
 $\therefore P(\overline{AB}) = P(\overline{BA}), \therefore P(A) = P(B),$ 故 D 正确.
 故选 ABD.]

10. 0.3 [由题意可知, 摸出红球为摸出白球或黑球的对立事件, 所以摸出红球的概率为 $1 - (0.4 + 0.3) = 0.3$.]

11. 0.9 [在大量重复进行同一试验时, 事件 A 发生的频率总是接近于某个常数, 在它附近摆动, 这个常数就是事件 A 的概率, 观察题表得到某种植物发芽的频率稳定在 0.9 附近, 所以可估计该植物的种子发芽的概率为 0.9.]

12. $\frac{3}{56}$ [从 8 张卡片中随机抽出 3 张, 则样本空间中总的样本点个数为 $C_8^3 = 56$,
 因为 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$,
 所以要使抽出的 3 张卡片上的数字之和与其余 5 张卡片上的数字之和相等,
 则抽出的 3 张卡片上的数字之和应为 18,
 则抽出的 3 张卡片上的数字的组合有 8, 7, 3 或 8, 6, 4 或 7, 6, 5, 共 3 种,
 所以符合抽出的 3 张卡片上的数字之和为 18 的样本点有 3 个, 所以抽出的 3 张卡片上的数字之和与其余 5 张卡片上的数字之和相等的概率为 $\frac{3}{56}$.]

课时作业(七十六)

1. B [法一: $P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}, P(AB) = \frac{7}{36},$
 $\therefore P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{36}}{\frac{1}{3}} = \frac{7}{12}.$

法二: 事件 A 中的样本点个数为 12, 事件 AB 中的样本点个数为 7, 故 $P(B|A) = \frac{7}{12}$. 故选 B.]

2. C [设甲地降雨为事件 A, 乙地降雨为事件 B, 则两地恰有一地降雨为 $\overline{AB} + \overline{AB},$
 所以 $P(\overline{AB} + \overline{AB}) = P(\overline{AB}) + P(\overline{AB})$
 $= P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) = 0.2 \times 0.7 + 0.8 \times 0.3 = 0.38.$
 故选 C.]

3. B [$\because P(B) = P(BA) + P(\overline{BA}),$
 $\therefore P(BA) = P(B) - P(\overline{BA}) = 0.3 - 0.1 = 0.2.$
 故选 B.]

4. C [三个元件 T_1, T_2, T_3 正常工作的概率均为 $\frac{1}{3}$, 且是相互独立的, 则电路不发生故障的概率为 $\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{27}.$
 故选 C.]

5. C [因为 $P(\overline{B}|A) = \frac{3}{4}$, 所以 $P(B|A) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, 故 D 错误;
 因为 $P(AB) = P(B) \cdot P(A|B),$
 所以 $P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{9}P(B)}{P(A)} = \frac{1}{4},$

解得 $\frac{P(B)}{P(A)} = \frac{9}{20}.$

又因为 $P(A)P(B) = \frac{1}{5},$

所以 $P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{3}{10},$ 故 AB 错误;

$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6},$ 故 C 正确.

故选 C.]

6. C [设“甲乘地铁”为事件 A, “甲乘公交车”为事件 B, “甲骑共享单车”为事件 C, “甲按时到达文博会”为事件 D,

则 $P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{4}, P(C) = \frac{1}{2},$

$P(D|A) = \frac{4}{5}, P(D|B) = \frac{3}{4}, P(D|C) = \frac{2}{3},$

则 $P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) =$
 $\frac{1}{4} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{173}{240}, P(CD) = P(C)P(D|C)$
 $= \frac{1}{3},$

所以若某一天甲按时到达文博会,

则他骑共享单车的概率为 $P(C|D) = \frac{P(CD)}{P(D)} = \frac{80}{173}.$

故选 C.]

7. ACD [对于 A, $P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8},$ 所以 A 正确;

对于 B, $P(\overline{B}|A) = 1 - P(B|A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$ 所以 B 错误;

对于 C, $P(B|\overline{A}) = 1 - P(\overline{B}|\overline{A}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$ 所以 C 正确; 对

于 D, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$ 则 $P(B) = P(A)P(B|A) +$
 $P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{24},$ 所以 D 正确. 故

选 ACD.]

8. BD [对于 A, 因为 $A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\},$ 则 $A \cap B = \{1\} \neq \emptyset,$ 所以 A 错误;

对于 B, 因为 $B \cap C = \{1\},$ 所以 $P(BC) = \frac{1}{4},$

又 $P(B) = P(C) = \frac{1}{2},$

则 $P(BC) = P(B)P(C),$ 所以 B 与 C 相互独立, 故 B 正确;

对于 C, 因为 $A \cap B \cap C = \{1\},$ 则 $P(ABC) = \frac{1}{4},$

又 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2},$

所以 $P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C),$ 故 C 错误;

对于 D, 因为 $P(A) = P(C) = \frac{1}{2},$

又 $A \cap C = \{1\},$ 则 $P(AC) = \frac{1}{4},$

所以 $P(A|C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2},$
 $P(C|A) = \frac{P(AC)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2},$ 故 D 正确. 故选 BD.]

9. 0.18 [∵ 随机事件 A 与 B 对立, B 与 C 相互独立, $P(A) = 0.4, P(C) = 0.3$,
 $\therefore P(B) = 1 - P(A) = 1 - 0.4 = 0.6$,
 $P(BC) = P(B)P(C) = 0.6 \times 0.3 = 0.18$.]

10. 0.957 [设 $B =$ “取到合格品”, $A_i =$ “取到的产品来自第 i 批” ($i = 1, 2$), 则 $P(A_1) = 0.3, P(A_2) = 0.7, P(B|A_1) = 0.95, P(B|A_2) = 0.96$, 由全概率公式得 $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) = 0.3 \times 0.95 + 0.7 \times 0.96 = 0.957$.]

11. 解: 根据题意, 设 $A =$ “机器人是甲品牌”, $B =$ “机器人是合格品”, $C =$ “机器人是乙品牌”, $D =$ “机器人是丙品牌”.

(1) 因为甲品牌的占 40%, 合格率为 95%,

则 $P(A) = 40\%, P(B|A) = 95\%$,

所以该机器人是甲品牌合格品的概率

$P(AB) = P(A)P(B|A) = 40\% \times 95\% = 0.38$.

(2) 根据题意, 乙品牌的占 30%, 合格率为 90%, 则 $P(C) = 30\%, P(B|C) = 90\%$,

丙品牌的占 30%, 合格率为 90%,

则 $P(D) = 30\%, P(B|D) = 90\%$,

则 $P(B) = P(A)P(B|A) + P(C)P(B|C) + P(D)P(B|D) = 40\% \times 95\% + 30\% \times 90\% + 30\% \times 90\% = 0.92$.

课时作业(七十七)

1. C [选手甲在三次中距离投篮中可能都不中, 得 0 分, 中一次, 得 2 分, 中两次, 得 4 分, 中三次, 得 6 分, 故总得分 ξ 的所有可能取值为 0, 2, 4, 6, 所以总得分 ξ 的所有可能取值的和为 12.]

2. B [由离散型随机变量 ξ 的分布列的性质, 得 $0.2 + 0.1 + 2m + 0.25 + m = 1$, $\therefore 3m = 0.45$, 解得 $m = 0.15$,
 $\therefore P(|\xi| < 2) = P(\xi = -1) + P(\xi = 1) = 0.1 + 2 \times 0.15 = 0.4$.
 故选 B.]

3. C [因为 $a + \frac{1}{3} + 3a = 1$, 所以 $a = \frac{1}{6}$,
 所以 $E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$,
 则 $D(X) = (0 - \frac{4}{3})^2 \times \frac{1}{6} + (1 - \frac{4}{3})^2 \times \frac{1}{3} + (2 - \frac{4}{3})^2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{9}$.
 故选 C.]

4. C [根据离散型随机变量概率分布列的性质可得概率和为 1,
 即 $a + \frac{1}{3} + 5a + \frac{1}{6} = 1$, 解得 $a = \frac{1}{12}$.
 所以 $E(X) = 0 \times \frac{1}{12} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{5}{12} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$,
 又因为离散型随机变量 $Y = 2X + 1$,
 所以 $E(Y) = 2E(X) + 1$,
 即 $E(Y) = 2 \times \frac{5}{3} + 1 = \frac{13}{3}$.
 故选 C.]

5. AC [半小时内经过的车辆数可以一一列举出来, 是离散型随机变量, 选项 A 正确;
 体重无法一一列举, 选项 B 错误;
 人数可以列举, 选项 C 正确;
 某电子元件的寿命可为任意值, 不能一一列举出来, 选项 D 错误. 故选 AC.]

6. ACD [由离散型随机变量 X 的分布列的性质得:

$q = 1 - 0.4 - 0.1 - 0.2 - 0.2 = 0.1$,

$E(X) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.1 + 3 \times 0.2 + 4 \times 0.2 = 2$,

$D(X) = (0 - 2)^2 \times 0.1 + (1 - 2)^2 \times 0.4 + (2 - 2)^2 \times 0.1 + (3 - 2)^2 \times 0.2 + (4 - 2)^2 \times 0.2 = 1.8$,

∵ 离散型随机变量 Y 满足 $Y = 2X + 1$,

∴ $E(Y) = 2E(X) + 1 = 5, D(Y) = 4D(X) = 7.2$. 故选 ACD.]

7. 2 [由题意, 设 X 表示 1 张彩票中奖的金额, 则 $P(X = 2) = \frac{1\ 000}{10\ 000} = 0.1, P(X = 10) = \frac{300}{10\ 000} = 0.03, P(X = 50) = \frac{100}{10\ 000} = 0.01, P(X = 100) = \frac{50}{10\ 000} = 0.005$,
 $P(X = 1\ 000) = \frac{5}{10\ 000} = 0.0005$,
 $P(X = 0) = 1 - (0.1 + 0.03 + 0.01 + 0.005 + 0.0005) = 0.8545$,
 所以 X 的分布列为

X	0	2	10	50	100	1 000
P	0.854 5	0.1	0.03	0.01	0.005	0.000 5

所以 $E(X) = 0 \times 0.8545 + 2 \times 0.1 + 10 \times 0.03 + 50 \times 0.01 + 100 \times 0.005 + 1\ 000 \times 0.0005 = 2$, 即 1 张彩票中奖金额的均值是 2 元.]

8. 24 [由题意, 可得 X 的所有可能取值为 190, 150, 110,

$P(X = 190) = \frac{C_2^0 C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}, P(X = 150) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}, P(X = 110) = \frac{C_2^2 C_3^0}{C_5^2} = \frac{1}{10}$,

所以 $E(X) = 190 \times \frac{3}{10} + 150 \times \frac{3}{5} + 110 \times \frac{1}{10} = 158$,

所以标准差为

$\sqrt{(190 - 158)^2 \times \frac{3}{10} + (150 - 158)^2 \times \frac{3}{5} + (110 - 158)^2 \times \frac{1}{10}} = 24$.]

9. 解: (1) 根据题意, 可得甲同学 2 门课程均未取得优秀成绩的概率为 $(1 - \frac{2}{3}) \times (1 - \frac{3}{4}) = \frac{1}{12}$.

(2) 根据题意, 可得 X 的可能取值为 0, 1, 2,

$P(X = 0) = (1 - \frac{2}{3}) (1 - \frac{3}{4}) = \frac{1}{12}$,

$P(X = 1) = \frac{2}{3} \times (1 - \frac{3}{4}) + (1 - \frac{2}{3}) \times \frac{3}{4} = \frac{5}{12}$,

$P(X = 2) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$,

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$

所以 $E(X) = 0 \times \frac{1}{12} + 1 \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{17}{12}$.

10. 解: 若按“项目一”投资, 设获利为 X_1 万元, X_1 的所有可能取值为 300, -150. 则 X_1 的分布列为

X_1	300	-150
P	$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{9}$

$\therefore E(X_1) = 300 \times \frac{7}{9} + (-150) \times \frac{2}{9} = 200$ (万元),

$$D(X_1) = (300-200)^2 \times \frac{7}{9} + (-150-200)^2 \times \frac{2}{9} = 35\ 000.$$

若按“项目二”投资,设获利 X_2 万元, X_2 的所有可能取值为 500, -300, 0. 则 X_2 的分布列为

X_2	500	-300	0
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$

$$\therefore E(X_2) = 500 \times \frac{3}{5} + (-300) \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{15} = 200 \text{ (万元)},$$

$$D(X_2) = (500-200)^2 \times \frac{3}{5} + (-300-200)^2 \times \frac{1}{3} + (0-200)^2 \times \frac{1}{15} = 140\ 000. \therefore E(X_1) = E(X_2), D(X_1) < D(X_2),$$

这说明虽然项目一、项目二获利的期望值相等,但项目一更稳妥.

综上所述,建议该投资公司选择项目一投资.

课时作业(七十八)

1. C [超几何分布是在 N 个对象(包含 M 个特定对象)中随机不放回取出 n 个对象,含有特定对象数 ξ 的概率分布,被取出的 n 个对象中特定对象数 ξ 是变化的,任意取出的 4 个号码,最大号码都只有 1 个,个数保持不变, X 不服从超几何分布,故 A 正确;

取出的黑球个数 Y 服从超几何分布,故 B 正确;

取出 2 个白球的概率为 $P = \frac{C_6^2 C_4^2}{C_{10}^4} = \frac{3}{7}$, 故 C 错误;

根据已知可得取出四个黑球的总得分最大,概率为 $P' = \frac{C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{14}$, 故 D 正确. 故选 C.]

2. C [$\because \mu = 0, \therefore P(\xi > 2) = P(\xi < -2) = 0.023,$
 $\therefore P(-2 \leq \xi \leq 2) = 1 - 2 \times 0.023 = 0.954.$]

3. A [若随机变量 $X \sim B\left(4, \frac{2}{3}\right),$

$$P(X=3) = C_4^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} = \frac{32}{81}. \text{ 故选 A.}]$$

4. B [因为 $E(X) + D(X) = \frac{20}{9},$

$$\text{所以 } 4p + 4p(1-p) = \frac{20}{9}, \text{ 即 } (p-1)^2 = \frac{4}{9},$$

$$\text{因为 } 0 < p < 1, \text{ 所以 } p = \frac{1}{3}.$$

$$\text{故 } P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^4 = \frac{65}{81}.]$$

5. AC [从袋子中有放回地取球 4 次,则每次取球互不影响,并且每次取到黑球的概率相等,

又每次取一个球,取到白球记 0 分,取到黑球记 1 分,4 次取球的总分数相当于取到黑球的总个数,

又每次取到黑球的概率为 $\frac{2}{3}$,由有放回地取 4 次球,得 $X \sim$

$B\left(4, \frac{2}{3}\right)$, 故 A 正确;

$$P(X=2) = C_4^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}, \text{ 故 B 错误;}$$

由二项分布期望公式得 $E(X) = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$, 故 C 正确;

由二项分布方差公式得 $D(X) = 4 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$, 故 D 错误.

故选 AC.]

6. AC [对于 A, 因为 X 的正态密度曲线比 Y 的正态密度曲线瘦高, 说明 X 的方差更小, 则 $\sigma_1 < \sigma_2$, 故 A 正确;

对于 B, 因为流水线的误差 $X \sim N(500, 0.01, \sigma_1^2)$, 均值为 500.01, 因此 $P(X \geq 500) > 0.5$,

B 流水线的误差 Y 的均值为 500, 则 $P(Y \geq 500) = 0.5$,

因此 $P(X \geq 500) > P(Y \geq 500)$, 故 B 错误;

因为 $\sigma_1 < \sigma_2$, 所以 $P(X \geq \sigma_1) > P(X \geq \sigma_2)$,

$P(Y \geq \sigma_1) > P(Y \geq \sigma_2)$, 故 C 正确, D 错误.

故选 AC.]

7. 0.648 [该同学通过测试的概率为 $C_3^2 \times 0.6^2 \times 0.4 + C_3^3 \times 0.6^3 = 0.648.$]

8. 25% [设这 12 件产品中的次品数为 x ,

$$\text{则 } P(\xi=1) = \frac{C_x^1 C_{12-x}^1}{C_{12}^2} = \frac{9}{22}, \text{ 且 } \frac{x}{12} \leq 40\%,$$

解得 $x=3$,

故这 12 件产品的次品率为 $\frac{3}{12} = 25\%.$]

9. 解: (1) 设参赛学生的成绩为 X , 由题可得 $X \sim N(70, 100)$, 所以 $\mu=70, \sigma=10$,

$$\text{则 } P(X > 90) = P(X < 50) = \frac{1}{2} [1 - P(50 \leq X \leq 90)] \approx \frac{1}{2} \times$$

$$(1 - 0.954\ 5) = 0.022\ 75, 12 \div 0.022\ 75 \approx 527 \text{ (人)},$$

因此, 此次参赛学生的总数约为 527 人.

$$(2) \text{ 由 } P(X \geq 80) = P(X \leq 60) = \frac{1}{2} [1 - P(60 < X < 80)] \approx$$

$$\frac{1}{2} \times (1 - 0.682\ 7) = 0.158\ 65, 527 \times 0.158\ 65 \approx 84 \text{ (人)},$$

因此, 此次竞赛成绩为优的学生约为 84 人.

10. 解: (1) 每次抽取后都放回, 则取到黄球的个数 $X \sim$

$$B\left(2, \frac{3}{8}\right), \text{ 所以 } P(X=1) = C_2^1 \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{32},$$

$$P(X=2) = C_2^2 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64},$$

$$\text{所以 } P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{15}{32} + \frac{9}{64} = \frac{39}{64}.$$

(2) 每次抽取后都不放回, 则取到黄球的个数 Y 的可能取值为 0, 1, 2,

$$\text{且 } P(Y=0) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5}{14}, P(Y=1) = \frac{C_3^1 C_5^1}{C_8^2} = \frac{15}{28}, P(Y=2) =$$

$$\frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{28}.$$

所以 Y 的分布列为

Y	0	1	2
P	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

$$\text{所以 } E(Y) = 0 \times \frac{5}{14} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{3}{28} = \frac{3}{4}.$$

课时作业(七十九)

1. 解: (1) 零假设为 H_0 : 数学成绩优秀与每天整理数学错题无关.

$$\text{由 } 2 \times 2 \text{ 列联表中的数据, 得 } \chi^2 = \frac{150 \times (55 \times 45 - 30 \times 20)^2}{75 \times 75 \times 85 \times 65} \approx$$

$$16.968 > 10.828 = \chi_{0.001},$$

根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验, 我们推断 H_0 不成立, 即认为数学成绩优秀与每天整理数学错题有关, 此推断犯错误的概率不大于 0.001.

阶段检测(十七)

(2)由题易知采用分层随机抽样的 10 人中,成绩优秀的有 4 人,成绩不优秀的有 6 人,

随机变量 X 的可能取值为 0,1,2,

$$P(X=0)=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{3}, P(X=1)=\frac{C_4^1 C_6^1}{C_{10}^2}=\frac{8}{15}, P(X=2)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15},$$

$$\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15},$$

随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

$$E(X)=0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{2}{15} = \frac{4}{5}.$$

2. 解:(1)利用频率分布直方图的频率性质可得 $(0.006 \times 3 + 0.01 + x + 0.054) \times 10 = 1$, 解得 $x = 0.018$.

(2)分数在 $[80, 90)$, $[90, 100]$ 的人数分别是

$$50 \times 0.018 \times 10 = 9(\text{人}), 50 \times 0.006 \times 10 = 3(\text{人}).$$

所以 ξ 的可能取值为 0,1,2. 则 $P(\xi=0)=\frac{C_9^2}{C_{12}^2}=\frac{6}{11},$

$$P(\xi=1)=\frac{C_9^1 C_3^1}{C_{12}^2}=\frac{9}{22}, P(\xi=2)=\frac{C_3^2}{C_{12}^2}=\frac{1}{22},$$

则 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{6}{11}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{22}$

$$E(\xi)=0 \times \frac{6}{11} + 1 \times \frac{9}{22} + 2 \times \frac{1}{22} = \frac{1}{2}.$$

3. 解:(1)因为 $\bar{x}=\frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i=7, \bar{y}=\frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 y_i=6$, 根据参考数据可

$$\text{得 } \hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^8 x_i y_i - 8 \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^8 x_i^2 - 8 \bar{x}^2} = \frac{379.5 - 8 \times 7 \times 6}{460 - 8 \times 7^2} \approx 0.64,$$

$$\text{所以 } \hat{a}=\bar{y}-\hat{b} \bar{x}=6-0.64 \times 7=1.52,$$

故月利润 y 关于月销售量 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=0.64x+1.52$,

月利润不小于 12.4 万元, 即 $\hat{y}=0.64x+1.52 \geq 12.4$, 可得 $x \geq 17$, 所以月利润不小于 12.4 万元时月销售量的最小值为 17 千个.

(2) X 的所有可能取值为 0,1,2,3,

$$P(X=0)=\frac{C_4^0 C_8^3}{C_{12}^3}=\frac{56}{220}=\frac{14}{55},$$

$$P(X=1)=\frac{C_4^1 C_8^2}{C_{12}^3}=\frac{112}{220}=\frac{28}{55},$$

$$P(X=2)=\frac{C_4^2 C_8^1}{C_{12}^3}=\frac{48}{220}=\frac{12}{55},$$

$$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_{12}^3}=\frac{4}{220}=\frac{1}{55},$$

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{14}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{1}{55}$

$$\text{则数学期望 } E(X)=0 \times \frac{14}{55} + 1 \times \frac{28}{55} + 2 \times \frac{12}{55} + 3 \times \frac{1}{55} = 1.$$

1. A [由 $0.15+0.15+0.15+0.25+m=1$, 得 $m=0.3$,

所以 $P(Y=2)=P(X=4)=0.3$.

故选 A.]

2. D [甲、乙两人从 4 门课程中各选修 2 门, 共有 $C_4^2 \times C_4^2 = 36$ (种)选法,

甲、乙所选的课程都相同的共有 $C_4^2 = 6$ (种),

故甲、乙所选的课程中至少有 1 门不相同的概率 $P=1 -$

$$\frac{6}{36} = \frac{5}{6}.$$

故选 D.]

3. A [根据题意, 事件 A = “三个点数都不同”, B = “至少出现一个 3 点”,

$$\text{则 } P(AB)=\frac{C_5^2 A_3^3}{6^3}=\frac{5}{18}, P(A)=\frac{6 \times 5 \times 4}{6^3}=\frac{5}{9},$$

$$\text{所以 } P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{18}}{\frac{5}{9}}=\frac{1}{2}.$$

故选 A.]

4. C [对于 A, 因为 B, C 不一定互斥, 即使 $P(B)+P(C)=1$, 也无法得到 C 与 B 相互对立, A 错误;

对于 B, 若 $A \subseteq B$, 则 $P(AB)=P(A)=0.3$, B 错误;

对于 C, 事件 A 与 B 相互独立, 则 $P(AB)=P(A)P(B)=0.15$,

则 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.3+0.5-0.15=0.65$, C 正确;

对于 D, 若事件 A 与 B 相互独立, 则 $\bar{A}, B$ 相互独立,

则 $P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B)=0.35$, D 错误. 故选 C.]

5. C [根据题意可知, 单个篮球的质量 Y 服从正态分布 $N(600, 4^2)$, 则 $\mu=600, \sigma=4$,

由所给公式 $P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma)=0.6827 \Rightarrow P(600-4 \leq X \leq 600+4)=0.6827$,

$$\text{即 } P(596 \leq X \leq 604)=0.6827 \Rightarrow P(596 \leq X \leq 600)=\frac{1}{2} \times$$

$$0.6827=0.34135,$$

$$\text{所以 } P(X \geq 596)=P(596 \leq X < 600)+P(X \geq 600)=0.34135+0.5=0.84135,$$

因此被抽检的篮球的质量不小于 596 克的个数约为 $0.84135 \times 300 \approx 252$.

故选 C.]

6. D [因为 $X \sim B(n, p), E(X)=4$,

所以 $E(X)=np=4$, 因为 $Y=2X+3$,

$$D(Y)=3.2,$$

所以 $D(Y)=4D(X)=4np(1-p)=4 \times 4(1-p)=3.2$, 解得 $p=0.8, n=5$.

对于 A, $E(Y)=2E(X)+3=2 \times 4+3=11$, 故 A 错误;

对于 B, 因为 $D(Y)=4D(X)=3.2$,

$$\text{所以 } D(X)=\frac{3.2}{4}=0.8, \text{ 故 B 错误;}$$

对于 C, 由前面求得 $p=0.8$, 故 C 错误;

对于 D, 因为 $X \sim B(5, 0.8)$,

$$\text{所以 } P(X=2)=C_5^2 \times 0.8^2 \times (1-0.8)^3=10 \times 0.64 \times 0.008=$$

$$\frac{32}{625}, \text{ 故 D 正确.}$$

故选 D.]

7. **ACD** [对于 A, 由题知, 抽奖箱中共有五张卡片, 写有“联”字的卡片只有一张,
由古典概率公式可知, 从五张卡片中任抽一张, 中一等奖的概率为 $\frac{1}{5}$, 故 A 正确;

对于 B, 由题知甲同学中二等奖的概率为 $P = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$, 故 B 错误;

对于 C, 记事件 $E =$ “甲同学中奖”, 事件 $F =$ “甲同学中一等奖”, 则 $P(E) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$, $P(EF) = \frac{1}{5}$,

所以 $P(F|E) = \frac{P(EF)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$, 故 C 正确;

对于 D, 因为三位同学都中奖, 则甲、乙、丙三人抽到的三张卡片上写有“联”“欢”“会”,

且抛掷一枚质地均匀的 1 元硬币两次, 硬币均数字一面朝上,

所以三位同学都中奖的概率为 $P = \frac{A_3^3}{A_5^3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{40}$, 故 D 正确. 故选 ACD.]

8. **BC** [对于选项 A, 因为 $\xi \sim N(20, \sigma^2)$, 且 $P(\xi \geq 22) = 0.1$, 所以 $P(\xi \leq 18) = P(\xi \geq 22) = 0.1$,

所以 $P(18 < \xi < 22) = 1 - 0.1 - 0.1 = 0.8$, 故 A 错误;

对于选项 B, 由 A 知, ξ 不在区间 $(18, 22)$ 的概率为 0.2, 则 $X \sim B(3, 0.2)$, 所以 $E(X) = 0.6$,

所以 $E(3X + 2) = 3E(X) + 2 = 3 \times 0.6 + 2 = 3.8$, 故 B 正确;

对于选项 C, 由 B 知, $D(X) = 3 \times 0.2 \times 0.8 = 0.48$,

因此 $D(\sqrt{5}X) = 5D(X) = 2.4$, 故 C 正确;

对于选项 D, $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0.2)^3 = 1 - 0.8^3 = 0.488$, 故 D 错误.

故选 BC.]

9. $\frac{1}{221} \frac{1}{17}$ [由题意, 设第一次抽到 A 的事件为 B, 第二次抽到 A 的事件为 C,

则 $P(BC) = \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$, $P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$,

所以 $P(C|B) = \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{221}}{\frac{1}{13}} = \frac{1}{17}$.]

10. 0.85 [由题意知, A, B, C 题库的比例为 5 : 4 : 3, 各占比分别为 $\frac{5}{12}, \frac{4}{12}, \frac{3}{12}$, 则根据全概率公式知所求正确率 $P = \frac{5}{12} \times 0.92 + \frac{4}{12} \times 0.86 + \frac{3}{12} \times 0.72 = 0.85$.]

11. 解: (1) 设事件 A, B, C 分别为甲、乙、丙三台机床各自加工的零件是一等品,

$$\text{由题知} \begin{cases} P(A\bar{B}) = \frac{1}{4}, \\ P(B\bar{C}) = \frac{1}{12}, \\ P(AC) = \frac{2}{9}, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} P(A)[1 - P(B)] = \frac{1}{4}, \\ P(B)[1 - P(C)] = \frac{1}{12}, \\ P(A)P(C) = \frac{2}{9}. \end{cases}$$

又 $P(A), P(B), P(C)$ 均大于 0,

所以 $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}, P(C) = \frac{2}{3}$.

即甲、乙、丙三台机床各自加工的零件是一等品的概率分别是 $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}$.

(2) 记事件 D 为从甲、乙、丙三台机床加工的零件中各取一个检验, 至少有一个一等品, 则 $P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - [1 - P(A)][1 - P(B)][1 - P(C)] = 1 - \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

故从甲、乙、丙三台机床加工的零件中各取一个检验, 至少有一个一等品的概率为 $\frac{5}{6}$.

12. 解: (1) 记“摸出一球, 放回后再摸出一个球, 两球颜色不同”为

事件 A, 摸出一球是白球的概率为 $\frac{2}{5}$, 摸出一球是黑球的概率为 $\frac{3}{5}$, 所以 $P(A) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$.

(2) 记事件 B 为“第一次摸到黑球”, 事件 C 为“第二次摸到黑球”, 依题意知 $P(B) = \frac{3}{5}, P(BC) = \frac{3 \times 2}{5 \times 4} = \frac{3}{10}$,

所以在第一次摸到黑球的条件下, 第二次摸到黑球的概率为 $P(C|B) = \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{1}{2}$.

(3) 由题意知, X 的可能取值为 0, 1, 2,

$P(X=0) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$,

$P(X=1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$,

$P(X=2) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$.

则 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

所以 $E(X) = 0 \times \frac{9}{25} + 1 \times \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{4}{5}$,

$D(X) = \left(0 - \frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{9}{25} + \left(1 - \frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{12}{25} + \left(2 - \frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{4}{25} = \frac{12}{25}$.

(4) 由题意, Y 的可能取值为 0, 1, 2,

$P(Y=0) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$,

$P(Y=1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$,

$P(Y=2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$.

则 Y 的分布列为

Y	0	1	2
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

所以 $E(Y) = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$,

$D(Y) = \left(0 - \frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{3}{10} + \left(1 - \frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5} + \left(2 - \frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{1}{10} = \frac{9}{25}$.