

答案详解

第一章 集合、常用逻辑用语、不等式

第1课时 集合

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点1 (1)互异性 (2)属于 $\in$ (3)列举法 描述法

(4) $\mathbb{N}$ $\mathbb{N}^*$ 或 $\mathbb{N}_+$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$

知识点2 (1)元素 $\subseteq \supseteq$ (2)存在 真子集 (3) $B \subseteq A$

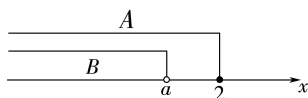
(4)非空

知识点3 $\{x|x \in A, \text{且 } x \in B\}$

链教材·夯基固本

1. D

2. 解:因为集合 B 的元素都是集合 A 的元素,所以可用数轴表示它们的关系,如图所示.



从而可知 $a \leq 2$.

3. 解: $A \cap B = \{-1, 0, 1\} \cap \{0, 1, 2, 3\} = \{0, 1\}$;

$A \cup B = \{-1, 0, 1\} \cup \{0, 1, 2, 3\} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

4. 7 [对于集合 $A = \{x|x = 2^n, n \in \mathbb{Z}\}$,当 $n=0$ 时, $x=1$;当 $n=1$ 时, $x=2$;当 $n=2$ 时, $x=4$,且 $B = \{1, 2, 3, 4\}$,所以 $A \cap B = \{1, 2, 4\}$,即 $A \cap B$ 中有3个元素,则其真子集的个数为 $2^3 - 1 = 7$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例1 ACD [对于A,集合 $A = \{a-2, a^2+4a, 12\}$,且 $-3 \in A$,

①当 $a-2=-3$ 时, $a=-1$,

所以 $a^2+4a=1-4=-3$,

此时集合 $A = \{-3, -3, 12\}$,不满足集合中元素的互异性,故不符合题意,舍去;

②当 $a^2+4a=-3$ 时, $a=-1$ 或 -3 ,

若 $a=-1$,则 $a-2=-3$,此时集合 $A = \{-3, -3, 12\}$,不满足集合中元素的互异性,故不符合题意,舍去,

若 $a=-3$,则 $a-2=-5$,此时集合 $A = \{-5, -3, 12\}$,符合题意,综上所述, $a=-3$,故A正确.

对于B,因为 $A = \{0, 1, 2\}$, $a \in A$, $b \in A$,

所以 $ab=0$ 或 $ab=1$ 或 $ab=2$ 或 $ab=4$,

故 $B = \{ab|a \in A, b \in A\} = \{0, 1, 2, 4\}$,

即集合 B 中有4个元素,

故B错误.

对于C,因为 $A = \{x|x^2 \leq 4\} = \{x|-2 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x|x \in \mathbb{N}^*, \text{且 } x-1 \in A\}$,所以 $B = \{1, 2, 3\}$,故C正确.

对于D,当 $x=5$ 时, $y=1, 2, 3, 4$,

当 $x=4$ 时, $y=1, 2, 3$,

当 $x=3$ 时, $y=1, 2$,

当 $x=2$ 时, $y=1$,

综上知, B 中的元素个数为10,故D正确. 故选ACD.]

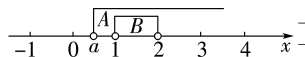
考点二

典例2 (1)B (2)B [(1)集合 $A = \{x|x = 3k-1, k \in \mathbb{Z}\}$,

$B = \{x|x = 6k-1, k \in \mathbb{Z}\} = \{x|x = 3 \times 2k-1, k \in \mathbb{Z}\}$,

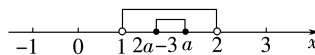
则集合 B 是集合 A 的子集,即 $B \subseteq A$. 故选B.

(2)因为 $A = \{x|x > a\}$, $B = \{x|1 < x < 2\}$,且 $B \subseteq A$,用数轴表示其关系如图,所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$. 故选B.



母题探究

1. $(3, +\infty)$ [因为 $A = \{x|2a-3 \leq x \leq a\}$, $B = \{x|1 < x < 2\}$,且 $A \subseteq B$,用数轴表示其关系如图.

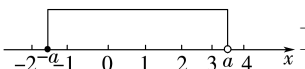


①当 $A = \emptyset$ 时, $2a-3 > a$,则 $a > 3$,满足题意;

②当 $A \neq \emptyset$ 时, $\begin{cases} 2a-3 \leq a, \\ 2a-3 > 1, \\ a < 2, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a \leq 3, \\ a > 2, \\ a < 2. \end{cases}$ 所以 a 不存在.

综上所述,实数 a 的取值范围为 $(3, +\infty)$.]

2. $(3, +\infty)$ [因为 $B \subseteq A$,用数轴表示其关系如图. 所以 $\begin{cases} -a \leq -1, \\ a > 3, \end{cases}$ 即 $a > 3$. 所以实数 a 的取值范围为 $(3, +\infty)$.



考点三

典例3 C [$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 3, 5\}$,故 $\complement_U A = \{2, 4, 6, 7, 8\}$,故 $\complement_U A$ 中有5个元素. 故选C.]

考题探源

解:根据题意可知, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,所以 $\complement_U A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $\complement_U B = \{1, 2, 7, 8\}$.

多维变迁

1. C [由集合的并运算,得 $M \cup N = \{x|-3 < x < 4\}$.]

2. C [因为 $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 3, 5\}$,所以 $A \cap B = \{3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$,

所以阴影部分表示的集合为 $\complement_{A \cup B} (A \cap B) = \{1, 2, 5\}$.

故选C.]

3. $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ [由题意得, $A = \{x|x^2 \leq 4\} = \{x|-2 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x|a-1 \leq x \leq a+1\}$,因为 $A \cap B = \emptyset$,所以 $a+1 < -2$ 或 $a-1 > 2$,得 $a < -3$ 或 $a > 3$,则实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.]

微点突破

典例4 AC [根据题意知 $a > 0$, $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{\sqrt{a}} = 1$, $\therefore a = 4$ 或 $a = 1$.

故选AC.]

随堂·对点检测

1. C [因为集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{0, 1, 4\}$,所以 $A \cap B = \{0, 1\}$. 故选C.]

2. C [因为 $A = \{x|2x-1 > m\}$, $2 \in A$,所以 $2 \times 2 - 1 > m$,解得 $m < 3$. 故选C.]

3. B [依题意,有 $a-2=0$ 或 $2a-2=0$. 当 $a-2=0$ 时,解得 $a=2$,此时 $A=\{0,-2\}$, $B=\{1,0,2\}$,不满足 $A\subseteq B$;当 $2a-2=0$ 时,解得 $a=1$,此时 $A=\{0,-1\}$, $B=\{-1,0,1\}$,满足 $A\subseteq B$. 所以 $a=1$,故选 B.]

4. $\left\{x \mid -\frac{1}{3} \leq x \leq 1\right\}$ [由 $A=\left\{x \mid -\frac{1}{3} \leq x \leq 3\right\}$, $B=\{x \mid x > 1\}$, $A-B=\{x \mid x \in A, \text{且 } x \notin B\}$,
则 $A-B=\left\{x \mid -\frac{1}{3} \leq x \leq 1\right\}$.]

第2课时 常用逻辑用语

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点1 充分 必要 充分不必要 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$ $p \Leftrightarrow q$
既不充分也不必要

知识点2 (1) $\exists x \in M, \neg p(x)$ 存在 $\forall x \in M, \neg p(x)$ 全称
(2)不是 不都是 小于或等于 大于或等于 或 至多有 $n-1$ 个 至少有两个 存在一个 x 不成立

链教材·夯基固本

- 解:(1)因为命题“若 $A \subseteq B$, 则 $A \cap B = A$ ”为真命题,并且“若 $A \cap B = A$, 则 $A \subseteq B$ ”也为真命题,所以 p 是 q 的充要条件.
(2)因为“ $a=b \Rightarrow |a|=|b|$ ”,但是“ $|a|=|b|$ ”不能推出“ $a=b$ ”,例如,“ $|1|=|-1|$ ”,而“ $1 \neq -1$ ”,所以 p 是 q 的充分不必要条件.
(3)因为“四边形的对角线相等”不能推出“四边形是平行四边形”,并且“四边形是平行四边形”也不能推出“四边形的对角线相等”,所以 p 既不是 q 的充分条件,也不是 q 的必要条件.
- 任意一个偶数都不是素数
- $[1, +\infty)$ [$\because x^2 \geq 1$, 即 $x \geq 1$ 或 $x \leq -1$, 且原命题是真命题, $\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$.]
- B [若 $x \in A$, 但 x 不一定同时属于集合 B , 即由“ $x \in A$ ”推不出“ $x \in A \cap B$ ”, 所以“ $x \in A$ ”不是“ $x \in A \cap B$ ”的充分条件; 如果 $x \in A \cap B$, 那么 x 既在集合 A 中又在集合 B 中, 所以一定有 $x \in A$, 即由“ $x \in A \cap B$ ”可以推出“ $x \in A$ ”, 所以“ $x \in A$ ”是“ $x \in A \cap B$ ”的必要不充分条件. 故选 B.]

考点深研·题型突破

考点一

典例1 (1)B (2)BC [(1)由 $|x-2| < 1$ 可得 $-1 < x-2 < 1$, 解得 $1 < x < 3$.
所以由 $|x-2| < 1$ 推不出 $1 < x < 2$, 故充分性不成立, 由 $1 < x < 2$ 可推出 $|x-2| < 1$, 故必要性成立, 所以“ $|x-2| < 1$ ”是“ $1 < x < 2$ ”的必要不充分条件.

(2)对于 A, 当 $a=2$ 时, $x^2+2x+5=0$, 此时 $\Delta=2^2-4 \times 1 \times 5=-16 < 0$,

方程没有实数根, 故 A 错误;

对于 B, 方程无实数根的充要条件是 $\Delta=a^2-4 \times 1 \times (a+3) < 0$, 即 $-2 < a < 6$,

因为 $\{a \mid -2 < a < 4\} \subsetneq \{a \mid -2 < a < 6\}$, 故 B 正确;

对于 C, 方程有两个不相等的负根的充要条件是

$$\begin{cases} \Delta=a^2-4 \times 1 \times (a+3) > 0, \\ x_1+x_2=-a < 0, \\ x_1 \cdot x_2=a+3 > 0, \end{cases} \quad \text{解得 } a > 6, \text{ 故 C 正确;}$$

对于 D, 方程有一个正根和一个负根的充要条件是

$$\begin{cases} \Delta=a^2-4 \times 1 \times (a+3) > 0, \\ x_1 \cdot x_2=a+3 < 0, \end{cases} \quad \text{解得 } a < -3, \text{ 故 D 错误.}$$

故选 BC.]

考点二

典例2 解: $p: -2 \leq x \leq 10, q: 1-m \leq x \leq 1+m (m > 0)$.

因为 p 是 q 的必要不充分条件,

所以 q 是 p 的充分不必要条件,

即 $\{x \mid 1-m \leq x \leq 1+m\} \subseteq \{x \mid -2 \leq x \leq 10\}$,

$$\text{故有 } \begin{cases} 1-m \geq -2, \\ 1+m < 10, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 1-m > -2, \\ 1+m \leq 10, \end{cases}$$

解得 $m \leq 3$.

又 $m > 0$, 所以实数 m 的取值范围为 $\{m \mid 0 < m \leq 3\}$.

母题探究

1. 解: $p: -2 \leq x \leq 10, q: 1-m \leq x \leq 1+m (m > 0)$.

因为 p 是 q 的充分不必要条件,

所以 $\{x \mid -2 \leq x \leq 10\} \subseteq \{x \mid 1-m \leq x \leq 1+m\}$.

$$\text{所以 } \begin{cases} 1-m \leq -2, \\ 1+m > 10, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 1-m < -2, \\ 1+m \geq 10, \end{cases}$$

解得 $m \geq 9$,

即实数 m 的取值范围是 $\{m \mid m \geq 9\}$.

2. 解: 因为 $p: -2 \leq x \leq 10, q: 1-m \leq x \leq 1+m (m > 0)$,

若 p 是 q 的充要条件, 则 $\begin{cases} -2=1-m, \\ 10=1+m, \end{cases}$ 无解,

故不存在实数 m , 使得 p 是 q 的充要条件.

考点三

典例3 D [因为 p 为假命题, 所以命题 $\neg p: \forall x \in [0, 3], x^2-2x-a \leq 0$ 为真命题,

即 $x^2-2x-a \leq 0$ 在 $x \in [0, 3]$ 上恒成立,

即 $a \geq x^2-2x$ 在 $x \in [0, 3]$ 上恒成立,

记 $f(x)=x^2-2x, x \in [0, 3]$,

则 $a \geq f(x)_{\max}$,

因为 $f(x)=x^2-2x$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减, 在 $[1, 3]$ 上单调递增,

所以 $f(x)_{\max}=f(3)=3$,

所以 $a \geq 3$, 所以实数 a 可取的最小值是 3.

故选 D.]

多维变迁

1. D [因为原命题为存在量词命题,

故否定是 $\forall x \in \mathbb{R}, x^2-\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

故选 D.]

2. B [对于命题 p 而言, 取 $x=-1$, 则有 $|x+1|=0 < 1$, 故 p 是假命题, $\neg p$ 是真命题; 对于命题 q 而言, 取 $x=1$, 则有 $x^3=1^3=1=x$, 故 q 是真命题, $\neg q$ 是假命题.

综上, $\neg p$ 和 q 都是真命题. 故选 B.]

随堂·点对检测

1. A [由“三角形是等边三角形”可得到“该三角形一定是等腰三角形”, 但反之不成立. 故选 A.]

2. B [由 $(a+b) \cdot (a-b)=0$, 得 $a^2-b^2=0$, 即 $|a|^2-|b|^2=0$, 所以 $|a|=|b|$, 当 $a=(1,1), b=(-1,1)$ 时, $|a|=|b|$, 但 $a \neq b$ 且 $a \neq -b$, 故充分性不成立; 当 $a=-b$ 或 $a=b$ 时, $(a+b) \cdot (a-b)=0$, 故必要性成立. 所以“ $(a+b) \cdot (a-b)=0$ ”是“ $a=-b$ 或 $a=b$ ”的必要不充分条件.]

3. AD [对于 A, 命题 p 的否定是 $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 \geq 0$, 故 A 正确.]

对于 B, $|x| > |y|$ 不能推出 $x > y$, 例如 $|-2| > |1|$, 但 $-2 < 1$; $x > y$ 也不能推出 $|x| > |y|$, 例如 $2 > -3$, 而 $|2| < |-3|$;

所以“ $|x| > |y|$ ”是“ $x > y$ ”的既不充分也不必要条件, 故 B 错误.

对于 C, 当 $x=0$ 时, $x^2=0$, 故 C 错误;

对于 D, 关于 x 的方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有一正一负根 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 4-4m > 0, \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0,$$

所以“ $m < 0$ ”是“关于 x 的方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有一正一负根”的充要条件, 故 D 正确.

故选 AD.]

4. $[-2, +\infty)$ [因为 $\exists x \in (0, +\infty), x^2 + ax + 1 < 0$ 为假命题, 故 $\forall x \in (0, +\infty), x^2 + ax + 1 \geq 0$ 是真命题,

即 $a \geq -x - \frac{1}{x}$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上恒成立,

根据基本不等式可得 $y = x + \frac{1}{x} \geq 2$, 当且仅当 $x = \frac{1}{x}$, 即 $x = 1$ 时等号成立,

所以 $-x - \frac{1}{x} \leq -2$, 故 $a \geq -2$.]

第 3 课时 等式性质与不等式性质

理法先行 · 题练固本

梳必备 · 破题有方

知识点 2 $b < a$ $a > c$ $a + c > b + c$ $ac > bc$ $ac < bc$

$$a + c > b + d \quad ac > bd$$

链教材 · 夯基固本

1. $M > N$ [$M - N = x^2 + y^2 + 1 - 2x - 2y + 2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + 1 > 0$, 故 $M > N$.]

2. B [对于 A, 若 $a > b > 0$, 则当 $c = 0$ 时, 显然 $ac^2 > bc^2$ 不成立, 故 A 错误;

对于 B, 若 $a > b > 0$, 则 $a^2 > b^2$ 成立, 故 B 正确;

对于 C, 若 $a < b < 0$, 则 $a^2 > b^2$, 故 C 错误;

对于 D, 若 $a < b < 0$, 则 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} > 0$,

所以 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 故 D 错误. 故选 B.]

3. $(-5, -1)$ [由 $b \in (2, 3)$ 得 $-6 < -2b < -4$, 又 $1 < a < 3$, 故 $-5 < a - 2b < -1$.]

4. D [这一事实用不等式可表示为 $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$.

下面证明不等式成立:

$$\therefore \frac{a}{b} - \frac{a+m}{b+m} = \frac{a(b+m) - b(a+m)}{b(b+m)}$$

$$= \frac{m(a-b)}{b(b+m)},$$

又 $\because b > a > 0, m > 0$,

$\therefore b(b+m) > 0, m(a-b) < 0$,

$$\text{即 } \frac{m(a-b)}{b(b+m)} < 0,$$

$$\therefore \frac{a}{b} - \frac{a+m}{b+m} < 0, \text{ 即 } \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}.$$

故选 D.]

考点深研 · 题型突破

考点一

典例 1 ABD [对于 A, $\because x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 \geq 2 > 0$, $\therefore x^2 - 2x > -3$, 故 A 正确.

对于 B, 法一(作商法): $\because a = \frac{\ln 3}{3} > 0, b = \frac{\ln 2}{2} > 0, \therefore \frac{a}{b} =$

$$\frac{\ln 3}{3} \times \frac{2}{\ln 2} = \frac{2 \ln 3}{3 \ln 2} = \frac{\ln 9}{\ln 8} = \log_8 9 > 1, \therefore a > b.$$

法二(作差法): $a - b = \frac{\ln 3}{3} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{6} (2 \ln 3 - 3 \ln 2) = \frac{1}{6} (\ln 9 -$

$\ln 8) > 0$, 即 $a > b$. 故 B 正确.

对于 C, $\because a^2 + b^2 - 2a + 2b + 2 = (a-1)^2 + (b+1)^2 \geq 0$,

$\therefore a^2 + b^2 \geq 2(a-b-1)$, 故 C 错误.

对于 D, $\frac{a+2 \ 025}{b+2 \ 025} - \frac{a}{b} = \frac{2 \ 025(b-a)}{b(b+2 \ 025)}$,

$\because b > a > 0, \therefore \frac{2 \ 025(b-a)}{b(b+2 \ 025)} > 0, \therefore \frac{a}{b} < \frac{a+2 \ 025}{b+2 \ 025}$, 故 D 正确.]

考点二

典例 2 (1) D (2) AC [(1) 对于 A, $\because a > b > 0, \therefore \frac{1}{a} <$

$\frac{1}{b}, \therefore -\frac{1}{a} > -\frac{1}{b}, \therefore a - \frac{1}{a} > b - \frac{1}{b}$, 故 A 正确;

对于 B, 若 $b < a < 0$, 则 $-b > -a > 0$,

$\therefore \frac{1}{-b} < \frac{1}{-a}$, 则 $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$, 故 B 正确;

对于 C, $\because a > b, c > d$,

$\therefore$ 由不等式的可加性可得 $a + c > b + d$, 即 $a - d > b - c$, 故 C 正确;

对于 D, 令 $a = -1, b = -2, c = 2, d = 1$, 满足 $a > b, c > d > 0$,

但 $\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$, 故 D 错误.

故选 D.

(2) A 中, 因为 $a < 0 < b$, 且 $a + b > 0$, 两边同时除以 b ,

所以 $\frac{a}{b} + 1 > 0$, 即 $\frac{a}{b} > -1$, 所以 A 正确;

B 中, 由题意可得 $ab < 0, a + b > 0$ 两边同时除以 ab ,

则 $\frac{1}{b} + \frac{1}{a} < 0$, 所以 B 不正确;

C 中, 由题意可得 $|b| > |a|$, 所以 $b^2 > a^2$, 所以 C 正确;

D 中, 取 $a = -2 < 0 < b = 3, a + b = 1 > 0$, 则 $a - \frac{1}{a} = -\frac{3}{2} <$

$b - \frac{1}{b} = \frac{8}{3}$, 故 D 错误. 故选 AC.]

考点三

典例 3 ABC [因为 $-3 < a + 2b < 2, -1 < 2a - b < 4$,

所以 $-2 < 4a - 2b < 8$,

所以 $-5 < 5a < 10$, 即 $-1 < a < 2$, A 正确;

由 $-3 < a + 2b < 2$, 可得 $-4 < -2a - 4b < 6$,

又 $-1 < 2a - b < 4$, 则 $-5 < -5b < 10$, 即 $-2 < b < 1$, B 正确;

$a + b = \frac{3}{5}(a + 2b) + \frac{1}{5}(2a - b) \in (-2, 2)$, C 正确;

$a - b = -\frac{1}{5}(a + 2b) + \frac{3}{5}(2a - b) \in (-1, 3)$, D 错误.

故选 ABC.]

母题探究

1. $(\frac{1}{3}, 2)$ [因为 $4 < b < 9$, 所以 $\frac{1}{9} < \frac{1}{b} < \frac{1}{4}$, 又 $3 < a < 8$, 所以 $\frac{1}{9} \times 3 < \frac{a}{b} < \frac{1}{4} \times 8$, 即 $\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 2$.]

2. $(-5, 6)$ [设 $3a+2b=x(a+2b)+y(2a-b)$,
即 $3a+2b=(x+2y)a+(2x-y)b$,

$$\text{所以 } \begin{cases} x+2y=3, \\ 2x-y=2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=\frac{7}{5}, \\ y=\frac{4}{5}, \end{cases}$$

于是 $3a+2b=\frac{7}{5}(a+2b)+\frac{4}{5}(2a-b)$,

又因为 $-\frac{21}{5} < \frac{7}{5}(a+2b) < \frac{14}{5}$, $-\frac{4}{5} < \frac{4}{5}(2a-b) < \frac{16}{5}$,

所以 $-5 < \frac{7}{5}(a+2b) + \frac{4}{5}(2a-b) < 6$,

即 $-5 < 3a+2b < 6$.]

随堂·对点检测

1. B [由 $a-b=2+\sqrt{3}-\sqrt{7}$, 且 $(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}>7$, 故 $a>b$.
 $a-c=2+\sqrt{2}-\sqrt{6}$, 且 $(2+\sqrt{2})^2=6+4\sqrt{2}>6$, 故 $a>c$.
 $b-c=(\sqrt{7}+\sqrt{2})-(\sqrt{6}+\sqrt{3})$, 且 $(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2=9+2\sqrt{18}>9+2\sqrt{14}=(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2$, 故 $c>b$.
所以 $a>c>b$.]

2. D [因为实数 $a<b$,

若 $m>0$, 如 $a=-2, b=-1, m=2$, 得 $\frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}$,

$\therefore m>0$ 不是 $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$ 的充分条件;

若 $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$, 如 $a=0, b=1, m=-2$ 符合此不等式, 但是 $m<0$,

$\therefore m>0$ 不是 $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$ 的必要条件,

$\therefore m>0$ 是 $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$ 的既不充分也不必要条件.

故选 D.]

3. ACD [选项 A, 由 $a>b$ 可得 $a-b>0$,

由 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 可得 $\frac{a-b}{ab} < 0$, 故 $ab<0$, A 正确;

选项 B, 当 $a=0, b=-1$ 时, 满足 $a>b$, 且 $a \neq -b$, 但 $\frac{b}{a-b} =$

$-1, \frac{a}{a+b}=0$, 不等式 $\frac{b}{a-b} > \frac{a}{a+b}$ 不成立, B 错误;

选项 C, 因为 $a<b<0$, 所以 $-a>-b>0$,

故 $-a-b>2\sqrt{ab}>\sqrt{ab}$, C 正确;

选项 D, 由 $a<b<0$, 可得 $b-a>0$, 且 $b-1<0$,

故 $\frac{a}{b} - \frac{a-1}{b-1} = \frac{b-a}{b(b-1)} > 0$,

即 $\frac{a}{b} > \frac{a-1}{b-1}$, D 正确.

故选 ACD.]

4. (2, 5) [因为 $2<a<3$, 所以 $4<2a<6$,
又 $-2<b<-1$, 所以 $2<2a+b<5$.]

第4课时 基本不等式

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (2) $a=b$ (3) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

知识点 2 (1) $2\sqrt{P}$ (2) $\frac{1}{4}S^2$

链教材·夯基固本

1. C [$\because 0 < a < b, \therefore 2b > a+b, \therefore b > \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

$\because b > a > 0, \therefore ab > a^2, \therefore \sqrt{ab} > a$.

故 $b > \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > a$, 故选 C.]

2. 9 [由 $ab=a+b+3 \geq 2\sqrt{ab}+3$, 得 $ab-2\sqrt{ab}-3 \geq 0$, 解得 $\sqrt{ab} \geq 3$ ($\sqrt{ab} \leq -1$ 舍去),

即 $ab \geq 9$. 当且仅当 $a=b=3$ 时取等号.]

3. 6 [因为 $x > -2$, 所以 $x+2 > 0$.

由基本不等式, 得

$$x + \frac{16}{x+2} = (x+2) + \frac{16}{x+2} - 2$$

$$\geq 2\sqrt{(x+2) \cdot \frac{16}{x+2}} - 2 = 6,$$

当且仅当 $x+2 = \frac{16}{x+2}$, 即 $x=2$ 时, 等号成立.

因此, y 的最小值为 6.]

4. AD [对于 A, C, 因为 $a>0, b>0$, 所以 $a+b=4 \geq 2\sqrt{ab}$, 即

$\sqrt{ab} \leq 2$, 当且仅当 $a=b=2$ 时等号成立, 故 $0 < ab \leq 4$, 则 $\frac{1}{ab} \geq$

$\frac{1}{4}$, 故 A 正确, C 错误; 对于 B, 代入 $a=b=2$, $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{1}{2} +$

$1 = \frac{3}{2} < 2$, 故 B 错误; 对于 D, $a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} = 8$, 当且仅当

$a=b=2$ 时等号成立, 故 D 正确.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 ABC [对于 A, 当 $x>0$ 时, $x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$ (当且仅当 $x=2$ 时取等号),

当 $x < 0$ 时, $x + \frac{4}{x} = - \left[(-x) + \frac{4}{-x} \right] \leq$

$-2\sqrt{(-x) \cdot \frac{4}{-x}} = -4$ (当且仅当 $x=-2$ 时取等号), 故 A

错误;

对于 B, $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ 恒成立, 而 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ 成立的条件为

$a>0, b>0$, 故 B 错误;

对于 C, $y = \sqrt{x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \geq 2$, 等号成立的条件是

$\sqrt{x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$, 即 $x^2+2=1$, 显然不能取到, 故 C 错误;

对于 D, 存在 $a=-1$, 使得 $a + \frac{1}{a} < 2$ 成立, 故 D 正确.]

考点二

考向 1 典例 2 D [由题意可得, $|a| > 0$,

则 $3|a| + \frac{7}{|a|} \geq 2\sqrt{3|a| \times \frac{7}{|a|}} = 2\sqrt{21}$,

当且仅当 $3|a| = \frac{7}{|a|}$, 即 $|a| = \sqrt{\frac{7}{3}}$ 时取等号.

故选 D.]

考向 2 典例 3 A [由 $x > -3$,

$$\text{则 } \frac{1}{x+3} + x = \frac{1}{x+3} + (x+3) - 3$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{1}{x+3} \cdot (x+3)} - 3 = -1,$$

当且仅当 $\frac{1}{x+3} = x+3$, 即 $x = -2$ 时取等号.

故选 A.]

母题探究

解: 由 $x < -3$, 知 $\frac{1}{x+3} < 0$, $-\frac{1}{x+3} > 0$,

$$\text{则 } -\frac{1}{x+3} + [-(x+3)]$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{1}{x+3} \cdot (x+3)} = 2,$$

所以 $\frac{1}{x+3} + (x+3) \leq -2$, 当且仅当 $\frac{1}{x+3} = x+3$, 即 $x = -4$ 时取等号.

$$\text{故 } \frac{1}{x+3} + x = \frac{1}{x+3} + (x+3) - 3 \leq -2 - 3 = -5,$$

所以 $\frac{1}{x+3} + x$ 的最大值为 -5 .

考向 3 典例 4 C $[8a+b=(8a+b)\left(\frac{8}{b} + \frac{4}{a}\right) = \frac{64a}{b} + \frac{4b}{a} +$

$$40 \geq 2\sqrt{\frac{64a}{b} \cdot \frac{4b}{a}} + 40 = 72,$$

当且仅当 $\frac{64a}{b} = \frac{4b}{a}$, 即 $a = 6, b = 24$ 时取等号.

故选 C.]

考向 4 典例 5 (1) B [因为 $x > 0, y > 0$, 且 $xy + 2x + y = 2$,

$$\text{所以 } y = \frac{2-2x}{x+1}, \text{ 其中 } 0 < x < 1,$$

$$\text{则 } 2x + y = 2x + \frac{2-2x}{x+1} = 2(x+1) + \frac{-2(x+1)+4}{x+1} - 2 =$$

$$2(x+1) + \frac{4}{x+1} - 4 \geq 4\sqrt{2} - 4,$$

当且仅当 $2(x+1) = \frac{4}{x+1}$, 即 $x = \sqrt{2} - 1$ 时取等号,

所以 $2x + y$ 的最小值为 $4\sqrt{2} - 4$.

故选 B.]

(2) 解: 设 $x-1=t (t > 0)$, $\therefore x=t+1$.

$$\therefore y = \frac{(t+1)^2 + 2(t+1)}{t} = \frac{t^2 + 4t + 3}{t} = t + \frac{3}{t} + 4$$

$$\geq 2\sqrt{t \cdot \frac{3}{t}} + 4 = 2\sqrt{3} + 4.$$

当且仅当 $t = \frac{3}{t}$, 即 $t = \sqrt{3}, x = \sqrt{3} + 1$ 时, y 取得最小值 $2\sqrt{3} + 4$.

微点突破

典例 6 ACD [对于 A, 由基本不等式可得 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}$,

当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时等号成立, A 正确; 对于 B, 由

$$\frac{2}{\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{2a+b}} \leq \frac{(a+2b) + (2a+b)}{2} = \frac{3(a+b)}{2} = \frac{3}{2}, \text{ 得}$$

$$\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{2a+b} \geq \frac{4}{3}, \text{ 当且仅当 } a+2b=2a+b, \text{ 即 } a=b=\frac{1}{2} \text{ 时}$$

等号成立, B 错误; 对于 C, 由 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}$, 得 $a^2 +$

$b^2 \geq \frac{1}{2}$, 当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时等号成立, C 正确; 对于 D, 由

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \leq \sqrt{\frac{a+b}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}, \text{ 得 } \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } a=b=$$

$\frac{1}{2}$ 时等号成立, D 正确. 故选 ACD.]

随堂·对点检测

1. B [因为正实数 a, b 满足 $ab = 100$,

$$\text{则 } \frac{1}{a} + \frac{4}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{4}{b}} = \frac{4}{\sqrt{ab}} = \frac{2}{5}, \text{ 当且仅当 } \frac{1}{a} = \frac{4}{b}, \text{ 即}$$

$a = 5, b = 20$ 时, 等号成立.

故选 B.]

2. C [因为 $x > 0$,

$$\text{所以 } \frac{4}{1+x} + x = \frac{4}{1+x} + x + 1 - 1 \geq 2\sqrt{\frac{4(x+1)}{1+x}} - 1 = 3,$$

当且仅当 $x+1 = \frac{4}{x+1}$,

即 $x = 1$ 时等号成立,

故 $\frac{4}{1+x} + x$ 的最小值是 3.

故选 C.]

3. B [① $\because a, b$ 为正实数, $\therefore \frac{b}{a}, \frac{a}{b}$ 为正实数, 符合基本不等式的条件, 故①的推导正确.

② $\because a \in \mathbf{R}, a \neq 0$, 不符合基本不等式的条件,

$\therefore \frac{4}{a} + a \geq 2\sqrt{\frac{4}{a} \cdot a} = 4$ 是错误的.

③ 由 $xy < 0$, 得 $\frac{x}{y}, \frac{y}{x}$ 均为负数, 但在推导过程中将 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 整体提出负号后, $(-\frac{x}{y}), (-\frac{y}{x})$ 均变为正数, 符合基本不等式的条件, 故③正确.]

4. B [因为实数 x, y 满足 $3xy + y^2 = 1, y > 0$,

$$\text{所以 } x = \frac{1-y^2}{3y},$$

$$\text{则 } 2x + y = \frac{2-2y^2}{3y} + y = \frac{2}{3y} + \frac{y}{3} \geq 2\sqrt{\frac{2}{3y} \cdot \frac{y}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

当且仅当 $\frac{2}{3y} = \frac{y}{3}$, 即 $y = \sqrt{2}$ 时, 等号成立,

所以 $2x + y$ 的最小值是 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.]

* 第 5 课时 基本不等式的综合应用(进阶课)

类型一

典例 1 C [因为 $x > 0, y > 0$, 且 $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$, 所以 $x+2+$

$$y = (x+2+y) \cdot \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y}\right) \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \left(2 + \frac{y}{x+2} +$$

$$\frac{x+2}{y}\right) \geq \frac{3}{2} \left(2 + 2\sqrt{\frac{y}{x+2} \cdot \frac{x+2}{y}}\right) = 6,$$

当且仅当 $x+2=y$, 即 $y=3, x=1$ 时取等号,

所以 $x+y$ 的最小值为 4,

若 $x+y > m^2 + 3m$ 恒成立, 则 $4 > m^2 + 3m$,

解得 $-4 < m < 1$.

故选 C.]

多维变迁

A [由正实数 x, y 满足 $2x+3y-xy=0$, 得 $\frac{2}{y}+\frac{3}{x}=1$,
 则 $3x+2y=(3x+2y)\left(\frac{2}{y}+\frac{3}{x}\right)=\frac{6x}{y}+9+4+\frac{6y}{x}\geq 13+2\sqrt{\frac{6x}{y}\cdot\frac{6y}{x}}=25$,
 当且仅当 $\frac{6x}{y}=\frac{6y}{x}$, 且 $\frac{2}{y}+\frac{3}{x}=1$, 即 $x=y=5$ 时, 等号成立, 则
 $t\leq 25$.
 故实数 t 的取值范围是 $(-\infty, 25]$. 故选 A.]

类型二

典例 2 解: (1) 由题意, 当 $v=100$ 时, $y=1$,
 $\therefore 1=\frac{184\times 100}{100^2+20\times 100+1\ 280l}$,
 $\therefore l=5$. $\therefore$ 该车型的平均车长为 5 m.
 (2) 由(1)知, $y=\frac{184v}{v^2+20v+6\ 400}$ ($0<v\leq 120$).
 $\therefore v>0, \therefore y=\frac{184v}{v^2+20v+6\ 400}=\frac{184}{v+\frac{6\ 400}{v}+20}$
 $\leq \frac{184}{2\sqrt{v\cdot\frac{6\ 400}{v}}+20}=\frac{46}{45}$, 当且仅当 $v=\frac{6\ 400}{v}$,
 即 $v=80$ 时取等号.
 故当汽车的平均速度为 80 km/h 时, 车流量 y 达到最大值.

多维变迁

1. B [假设第一次的油价为 m 元/L, 第二次的油价为 n 元/L,
 第一种方案的均价为 $\frac{30m+30n}{60}=\frac{m+n}{2}\geq \sqrt{mn}$; 第二种方案
 的均价为 $\frac{400}{\frac{200}{m}+\frac{200}{n}}=\frac{2mn}{m+n}\leq \sqrt{mn}$. 所以无论油价如何变化,
 第二种都更划算.]
 2. 4 [设矩形的长为 x cm, 宽为 y cm,
 则 $x+y=8$,
 其面积 $S=xy\leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2=16$,
 当且仅当 $x=y=4$ 时等号成立.]

类型三

典例 3 B [依题意, 二次函数 $f(x)=ax^2-2\sqrt{2}x+2b$ ($a>0$)
 的图象与 x 轴仅有一个交点,
 令 $ax^2-2\sqrt{2}x+2b=0$,
 所以 $\Delta=(-2\sqrt{2})^2-4a\cdot 2b=0$, 所以 $ab=1$.
 因为 $a>0$, 所以 $b>0$,
 所以 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{2}{a}\cdot\frac{1}{b}}=2\sqrt{2}$, 当且仅当 $\frac{2}{a}=\frac{1}{b}$, 即 $a=\sqrt{2}, b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立.]

多维变迁

B [由题知, 圆心 $(1, 2)$ 在直线 $ax+by-2=0$ 上,
 $\therefore a+2b=2$.
 又 $a>0, b>0, \therefore 2=a+2b\geq 2\sqrt{2ab}$,
 $\therefore ab\leq \frac{1}{2}$, 当且仅当 $a=2b$, 且 $a+2b=2$, 即 $a=1, b=\frac{1}{2}$ 时等
 号成立, $\therefore ab$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$.]

教材拓展 1

典例 4 解: 由于 $a, b, c\in\mathbf{R}_+$, 且 $a+b+c=1$,
 所以 $0<a<1, 0<b<1, 0<c<1$, 所以 $(1-a)\cdot(1-b)(1-c)\leq$
 $\left[\frac{(1-a)+(1-b)+(1-c)}{3}\right]^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$, 当且仅当 $1-a=$
 $1-b=1-c$,
 即 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时, 原式取得最大值 $\frac{8}{27}$.

母题探究

解: $\therefore a, b, c$ 均属于正实数, $a+b+c=1$,
 $\therefore 3\sqrt[3]{abc}\leq a+b+c=1, \therefore \sqrt[3]{abc}\leq \frac{1}{3}$,
 $\therefore \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\geq 3, \therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\geq 9$,
 当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时, 等号成立.
 $\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 的最小值为 9.

第 6 课时 一元二次方程、不等式

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 $\{x|x<x_1 \text{ 或 } x>x_2\} \quad \{x|x_1<x<x_2\} \quad \emptyset \quad \emptyset$

知识点 2 (1) $f(x)g(x)>0$ (<0)

(2) $f(x)g(x)\geq 0$ (≤ 0) 且 $g(x)\neq 0$

知识点 3 $(-\infty, -a)\cup(a, +\infty) \quad (-a, a)$

链教材·夯基固本

1. $(-\infty, -1]\cup\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ [由 $-2x^2+x\leq -3$ 可得 $2x^2-x-3\geq 0$,
 即 $(2x-3)(x+1)\geq 0$, 得 $x\leq -1$ 或 $x\geq \frac{3}{2}$,
 故不等式的解集为 $(-\infty, -1]\cup\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$.]

2. R [已知 $A=\{x|x^2-16<0\}=\{x|-4<x<4\}$, $B=\{x|x^2-4x+3>0\}=\{x|x<1 \text{ 或 } x>3\}$, 则 $A\cup B=\mathbf{R}$.]

3. $-12 \quad -1$ [$\therefore$ 关于 x 的一元二次不等式 $ax^2+bx+1>0$ 的
 解集为 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$,

$\therefore$ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+1=0$ 的两根为 $-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$,
 且 $a<0$.

$\therefore \begin{cases} -\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=-\frac{b}{a}, \\ -\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{a}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-12, \\ b=-1. \end{cases}$

4. $(-3, 0)$ [由题意知 $\begin{cases} k<0, \\ \Delta=k^2-4\times 2k\times\left(-\frac{3}{8}\right)<0, \end{cases}$
 解得 $-3<k<0$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 ABD [因为方程 $x^2+x-2=0$ 的解为 $x_1=1, x_2=-2$, 所以不等式 $x^2+x-2>0$ 的解集为 $\{x|x<-2 \text{ 或 } x>1\}$, 故 A 正确;
 因为 $\frac{2x+1}{x-2}-1\leq 0$, 即 $\frac{x+3}{x-2}\leq 0$, 即 $(x+3)\cdot(x-2)\leq 0$ ($x-2\neq 0$), 解得 $-3\leq x<2$, 所以不等式的解集为 $\{x|-3\leq x<2\}$, 故 B 正确;

由 $|x-2| \geq 1$, 可得 $x-2 \leq -1$ 或 $x-2 \geq 1$,
解得 $x \leq 1$ 或 $x \geq 3$, 所以不等式的解集为 $\{x | x \leq 1, \text{ 或 } x \geq 3\}$,
故 C 错误;
由 $|x-1| < 1$, 可得 $-1 < x-1 < 1$, 解得 $0 < x < 2$, 由 $\frac{x+4}{x-5} < 0$,
可得 $-4 < x < 5$, 因此, “ $|x-1| < 1$ ” 是 “ $\frac{x+4}{x-5} < 0$ ” 的充分不必要条件, 故 D 正确. 故选 ABD.]

考点二

典例 2 解: 原不等式可化为 $ax^2 + (a-2)x - 2 \geq 0$.

因为 $a < 0$, 所以原不等式化为 $\left(x - \frac{2}{a}\right) \cdot (x+1) \leq 0$.

当 $\frac{2}{a} > -1$, 即 $a < -2$ 时, 解得 $-1 \leq x \leq \frac{2}{a}$;

当 $\frac{2}{a} = -1$, 即 $a = -2$ 时, 解得 $x = -1$;

当 $\frac{2}{a} < -1$, 即 $-2 < a < 0$ 时, 解得 $\frac{2}{a} \leq x \leq -1$.

综上所述, 当 $-2 < a < 0$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{2}{a} \leq x \leq -1\right\}$;

当 $a = -2$ 时, 不等式的解集为 $\{-1\}$;

当 $a < -2$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid -1 \leq x \leq \frac{2}{a}\right\}$.

母题探究

解: 第 1 步 看二次项系数: 二次项系数含参, 则需要分系数为 0、正、负三种情况讨论.

当 $a = 0$ 时, 原不等式可化为 $x+1 \leq 0$, 解得 $x \leq -1$.

第 2 步 因式分解: 看含参二次不等式能否因式分解.

不等式 $ax^2 - 2 \geq 2x - ax$ 可化为 $(ax-2) \cdot (x+1) \geq 0$.

第 3 步 能因式分解则比较根的大小, 不能则利用 Δ : 若能通过因式分解求出根, 就比较两根大小, 若不能使用因式分解求根, 就应用判别式判断根的情况, 并求根.

方程 $ax^2 - 2 = 2x - ax$ 的两根为 $x_1 = -1, x_2 = \frac{2}{a}$.

当 $a > 0$ 时, 原不等式可化为 $\left(x - \frac{2}{a}\right)(x+1) \geq 0$,

解得 $x \geq \frac{2}{a}$ 或 $x \leq -1$.

当 $a < 0$ 时, 原不等式化为 $\left(x - \frac{2}{a}\right)(x+1) \leq 0$.

当 $\frac{2}{a} > -1$, 即 $a < -2$ 时, 解得 $-1 \leq x \leq \frac{2}{a}$;

当 $\frac{2}{a} = -1$, 即 $a = -2$ 时, 解得 $x = -1$;

当 $\frac{2}{a} < -1$, 即 $-2 < a < 0$ 时, 解得 $\frac{2}{a} \leq x \leq -1$.

第 4 步 写解集: 在参数的不同取值范围下, 分别写出不等式对应的解集.

综上所述, 当 $a = 0$ 时, 不等式的解集为 $\{x | x \leq -1\}$;

当 $a > 0$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid x \geq \frac{2}{a}, \text{ 或 } x \leq -1\right\}$;

当 $-2 < a < 0$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{2}{a} \leq x \leq -1\right\}$;

当 $a = -2$ 时, 不等式的解集为 $\{-1\}$;

当 $a < -2$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid -1 \leq x \leq \frac{2}{a}\right\}$.

考点三

典例 3 解: 由不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x | 2 < x < 3\}$ 可知 $a < 0$, 且 2 和 3 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根,

$$\text{由根与系数的关系可知} \begin{cases} -\frac{b}{a} = 2+3=5, \\ \frac{c}{a} = 2 \times 3 = 6. \end{cases}$$

$$\text{故} \frac{b}{c} = -\frac{5}{6},$$

又由 $a < 0$ 知 $c < 0$, 故不等式 $cx^2 + bx + a < 0$,

$$\text{即} x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} > 0, \text{即} x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} > 0,$$

$$\text{解得} x < \frac{1}{3} \text{ 或 } x > \frac{1}{2},$$

所以不等式 $cx^2 + bx + a < 0$ 的解集为 $\left\{x \mid x < \frac{1}{3}, \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\right\}$.

母题探究

解: 法一: 由 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 的解集为 $\left\{x \mid -\frac{1}{3} \leq x \leq 2\right\}$, 知 $a < 0$,

且 $-\frac{1}{3}, 2$ 为方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根,

$$\therefore \left(-\frac{1}{3}\right) \times 2 = \frac{c}{a} < 0, -\frac{1}{3} + 2 = -\frac{b}{a}.$$

$$\therefore b = -\frac{5}{3}a, c = -\frac{2}{3}a,$$

$$\therefore \text{不等式} cx^2 + bx + a < 0 \text{ 变为} \left(-\frac{2}{3}a\right)x^2 + \left(-\frac{5}{3}a\right)x + a < 0,$$

$$\text{即} 2ax^2 + 5ax - 3a > 0.$$

$$\text{又} \because a < 0, \therefore 2x^2 + 5x - 3 < 0,$$

$$\text{故所求不等式的解集为} \left\{x \mid -3 < x < \frac{1}{2}\right\}.$$

法二: 由已知得 $a < 0$ 且 $-\frac{1}{3} + 2 = -\frac{b}{a}, \left(-\frac{1}{3}\right) \times 2 = \frac{c}{a}$,
则 $c > 0$,

设方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 的两根分别为 x_1, x_2 ,

$$\text{则} x_1 + x_2 = -\frac{b}{c}, x_1 x_2 = \frac{a}{c},$$

$$\text{其中} \frac{a}{c} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right) \times 2} = -\frac{3}{2},$$

$$-\frac{b}{c} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{-\frac{1}{3} + 2}{\left(-\frac{1}{3}\right) \times 2} = -\frac{5}{2},$$

$$\therefore x_1 = -3, x_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \text{不等式} cx^2 + bx + a < 0 \text{ 的解集为} \left\{x \mid -3 < x < \frac{1}{2}\right\}.$$

微点突破

典例 4 (1)D (2)C (3) $[-1, 0] \cup \left[\frac{5}{3}, 4\right]$ [(1)当 $a = 2$ 时,

不等式 $(a-2)x^2 + 2(a-2)x - 4 < 0$ 可化为 $-4 < 0$, 恒成立;

当 $a \neq 2$ 时, 要使关于 x 的不等式 $(a-2) \cdot x^2 + 2(a-2)x - 4 < 0$ 对一切实数 x 恒成立, 只需

$$\begin{cases} a < 2, \\ 4(a-2)^2 - 4(a-2) \times (-4) < 0, \end{cases}$$

解得 $-2 < a < 2$. 故 $-2 < a \leq 2$. 故选 D.

(2)(分离变量法): $f(x) = x^2 - 2ax + 1 \geq 0$ 对任意 $x \in (0, 2]$

恒成立, 即 $2a \leq x + \frac{1}{x}$ 在 $x \in (0, 2]$ 上恒成立. 因为 $x + \frac{1}{x} \geq 2$,

当且仅当 $x=1$ 时 $x + \frac{1}{x}$ 取最小值 2, 所以 $2a \leq 2$, 即 $a \leq 1$. 故选 C.

(3)(变更主元法): 把不等式的左端看成关于 a 的函数, 令 $g(a) = ax^2 - 2ax + x + 3 - a = (x^2 - 2x - 1)a + x + 3 \geq 0$, 则

由 $g(a) \geq 0$ 对于 $\forall a \in [-1, 3]$ 恒成立, 得 $\begin{cases} g(-1) \geq 0, \\ g(3) \geq 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} -x^2 + 3x + 4 \geq 0, \\ 3x^2 - 5x \geq 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -1 \leq x \leq 4, \\ x \geq \frac{5}{3} \text{ 或 } x \leq 0, \end{cases}$

所以实数 x 的取值范围为 $[-1, 0] \cup [\frac{5}{3}, 4]$.

随堂·点对检测

1. B [由 $\frac{4}{x+2} \geq 1$, 可得 $\frac{4}{x+2} - 1 \geq 0$, 即 $\frac{-x+2}{x+2} \geq 0$, 即 $\frac{x-2}{x+2} \leq 0$,

可化为 $(x-2)(x+2) \leq 0$, 且 $x+2 \neq 0$,

解得 $-2 < x \leq 2$, 所以 $A = \{x | -2 < x \leq 2\}$,

不等式 $x^2 - 3x < 0$ 可化为 $x(x-3) < 0$,

解得 $0 < x < 3$, 所以 $B = \{x | 0 < x < 3\}$,

所以 $A \cup B = \{x | -2 < x < 3\}$.

故选 B.]

2. CD [由题意可得 1 和 5 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根, 且 $a < 0$,

由根与系数的关系可得 $1 + 5 = -\frac{b}{a}$, $1 \times 5 = \frac{c}{a}$, 得 $b = -6a$, $c = 5a$.

对于 A, 因为 $a < 0$, 故 A 错误;

对于 B, $a + b + c = a - 6a + 5a = 0$, 故 B 错误;

对于 C, 不等式 $bx + c > 0$, 即 $-6ax + 5a > 0$, 即 $6x - 5 > 0$, 得

$x > \frac{5}{6}$, 所以不等式 $bx + c > 0$ 的解集是 $\{x | x > \frac{5}{6}\}$, 故 C

正确;

对于 D, 由不等式 $cx^2 - bx + a < 0$,

得 $a(5x^2 + 6x + 1) < 0$, 即 $5x^2 + 6x + 1 > 0$,

则 $(5x+1)(x+1) > 0$, 解得 $x > -\frac{1}{5}$ 或 $x < -1$,

即解集为 $\{x | x > -\frac{1}{5}, \text{ 或 } x < -1\}$, 故 D 正确. 故选 CD.]

3. 解: 不等式 $ax^2 + 3x + 2 > -ax - 1$ 可化为 $ax^2 + (a+3)x + 3 > 0$, 即 $(ax+3)(x+1) > 0$.

因为 $a > 0$,

所以当 $-\frac{3}{a} < -1$, 即 $0 < a < 3$ 时, 原不等式的解集

为 $\{x | x > -1, \text{ 或 } x < -\frac{3}{a}\}$;

当 $-\frac{3}{a} = -1$, 即 $a = 3$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x \neq -1\}$;

当 $-\frac{3}{a} > -1$, 即 $a > 3$ 时, 原不等式的解集为 $\{x | x < -1, \text{ 或 } x > -\frac{3}{a}\}$.

第二章 函数

第 7 课时 函数的概念及其表示

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 实数集 任意一个数 x 唯一 x

知识点 2 定义域 对应关系

知识点 3 解析法 图象法 列表法

知识点 4 (2)并集

链教材·夯基固本

1. BC [对于 A, 当 $x=1.5$ 时, y 没有值与之对应, 故 A 错误;

对于 B, C, 集合 M 中的每一个 x , 集合 N 中都有唯一的 y 与之对应, 故 B, C 正确.

对于 D, 当 $x=1.5$ 时, y 有两个值与之对应, 故 D 错误. 故选 BC.]

2. B [函数 $y = (\sqrt{x})^2 = x (x \geq 0)$ 与 $y = x$ 不是同一个函数, 选项 A 错误;

$u = \sqrt[3]{v^3} = v$ 与 $y = x$ 是同一个函数, 选项 B 正确;

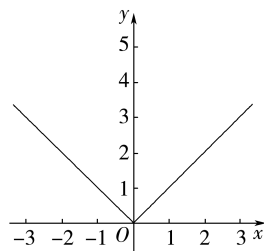
$y = \sqrt{x^2} = |x|$ 与 $y = x$ 不是同一个函数, 选项 C 错误;

$m = \frac{n^2}{n} = n (n \neq 0)$ 与 $y = x$ 不是同一个函数, 选项 D 错误. 故选 B.]

3. 解: 由绝对值的概念, 我们有

$$y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

所以函数 $y = |x|$ 的图象如图所示.



4. 26 [由题意得 $f(1) = 5$, $f(-3) = 21$,

所以 $f(1) + f(-3) = 26$.]

5. $[-3, 0) \cup (0, +\infty)$ [由 $\begin{cases} x+3 \geq 0, \\ x \neq 0, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x \geq -3, \\ x \neq 0, \end{cases}$

故函数的定义域为 $[-3, 0) \cup (0, +\infty)$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1) ABD (2) C [(1) 对于 A, 要使函数 $f(x) =$

$\sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{x+2}$ 有意义,

则 $\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0, \\ x + 2 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $x < -2$ 或 $-2 < x \leq -1$ 或 $x \geq 1$.

所以函数的定义域为 $(-\infty, -2) \cup (-2, -1] \cup [1, +\infty)$, A 正确;

对于 B, 根据函数的定义可知, 函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $x = 2$ 至多有一个交点, B 正确;

对于 C, 函数 $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$,

函数 $y = x - 1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 故这两个函数不是同一个函数, C 错误;

对于D,函数中一个 x 值只能对应一个 y 值,如果 y 值不同,则 x 的值一定不同,D正确.故选ABD.

(2)因为函数 $y=f(x-1)$ 的定义域是 $[-1,2]$,

所以 $-2 \leq x-1 \leq 1$,

则 $y=f(1-3x)$ 中, $-2 \leq 1-3x \leq 1$,

解得 $0 \leq x \leq 1$,

故 $y=f(1-3x)$ 的定义域为 $[0,1]$.

故选C.]

考点二

典例2 解:(1)换元法:令 $\frac{2}{x}+1=t(t>1)$,则 $x=\frac{2}{t-1}$,

$$\therefore f(t)=\ln \frac{2}{t-1},$$

$$\therefore f(x)=\ln \frac{2}{x-1}(x>1).$$

$$(2) \text{配凑法:} \because f\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2,$$

$$\text{令 } t=x^2+\frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}}=2, \text{ 当且仅当 } x=\pm 1 \text{ 时取等号,}$$

$$\therefore f(t)=t^2-2(t \geq 2),$$

$$\therefore f(x)=x^2-2(x \geq 2).$$

(3)待定系数法:设 $f(x)=ax+b(a \neq 0)$,则 $3f(x+1)-2f(x-1)=3ax+3a+3b-2ax+2a-2b=ax+b+5a=2x+17$, $\therefore a=2, b=7$, $\therefore f(x)=2x+7$.

(4)解方程组法: $\because 2f(x)+f(-x)=3x$,①

$\therefore$ 将 x 用 $-x$ 替换得 $2f(-x)+f(x)=-3x$,②

由①②解得 $f(x)=3x$.

考点三

典例3 (1)BC (2)D [(1)函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & -2 \leq x < 1, \\ -x+2, & x \geq 1 \end{cases}$ 的定

义域是 $[-2,+\infty)$,故A错误;

当 $-2 \leq x < 1$ 时, $f(x)=x^2$,值域为 $[0,4]$,当 $x \geq 1$ 时, $f(x)=-x+2$,值域为 $(-\infty,1]$,故 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,4]$,

故B正确;

当 $x \geq 1$ 时,令 $f(x)=-x+2=2$,无解,当 $-2 \leq x < 1$ 时,

令 $f(x)=x^2=2$,解得 $x=-\sqrt{2}$,故C正确;

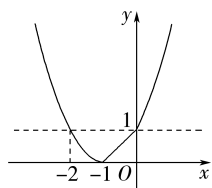
当 $-2 \leq x < 1$ 时,令 $f(x)=x^2 < 1$,解得 $x \in (-1,1)$,当 $x \geq 1$ 时,令 $f(x)=-x+2 < 1$,解得 $x \in (1,+\infty)$,故 $f(x) < 1$ 的解集为 $(-1,1) \cup (1,+\infty)$,故D错误.故选BC.

(2)令 $f(x) \geq g(x)$,即 $x+1 \geq (x+1)^2$,解得 $-1 \leq x \leq 0$;

令 $f(x) < g(x)$,即 $x+1 < (x+1)^2$,解得 $x < -1$ 或 $x > 0$,

$$\text{所以 } F(x)=\max\{f(x),g(x)\}=\begin{cases} (x+1)^2, & x < -1, \\ x+1, & -1 \leq x \leq 0, \\ (x+1)^2, & x > 0, \end{cases}$$

$F(x)$ 的图象如图所示,



又 $F(0)=F(-2)=1, F(-1)=0$,

要使函数 $F(x)$ 在区间 $[m,n]$ 内的值域为 $[0,1]$,

当 $n=0$ 时, $-2 \leq m \leq -1$;

当 $m=-2$ 时, $-1 \leq n \leq 0$,

则当 $n=0, m=-2$ 时, $n-m$ 取得最大值2.故选D.]

母题探究

1.0或2 [当 $-2 \leq a < 1$ 时,由 $a^2=0$,得 $a=0$;当 $a \geq 1$ 时,由 $-a+2=0$,解得 $a=2$,故实数 a 的值为0或2.]

2.1 [f(f(3))=f(-1)=1.]

随堂·对点检测

1.A [f(9)=f(9-3)=f(6)=f(3)=f(0)=2^0+1=2.]

2.C [对于A, $f(x)=x^2, x \in \mathbf{R}, g(x)=(x+1)^2, x \in \mathbf{R}$,两函数的对应关系不同,不是同一个函数;

对于B, $f(x)=\sqrt{-x^3}=-x\sqrt{-x}, x \in (-\infty, 0], g(x)=x\sqrt{-x}, x \in (-\infty, 0]$,两函数的对应关系不同,不是同一个函数;

对于C, $f(x)=\frac{x}{x}=1, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), g(x)=\frac{1}{x^0}=1, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,两函数的定义域相同,对应关系也相同,是同一个函数;

对于D, $f(x)=\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x-3}=\sqrt{x^2-9}, x \in [3, +\infty), g(x)=\sqrt{x^2-9}, x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$,两函数的定义域不同,不是同一个函数.

故选C.]

3.C [因为 $x^2-1 \geq -1$,所以 $f(x^2-1)=x^4-1=(x^2-1)^2+2(x^2-1)$,

所以 $f(x)=x^2+2x$,其中 $x \geq -1$.

故选C.]

4. $[-5, 1) \cup (1, +\infty)$ [由题意可得, $\begin{cases} x+5 \geq 0, \\ x-1 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $x \geq -5$

且 $x \neq 1$,

故函数的定义域为 $[-5, 1) \cup (1, +\infty)$.]

第8课时 函数的单调性

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

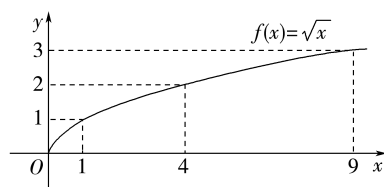
知识点1 $f(x_1) < f(x_2)$ $f(x_1) > f(x_2)$

知识点2 单调递增 单调递减 区间I

链教材·夯基固本

1. ABD [对于A,对任意 $x_1 < x_2, f(x_1)-f(x_2)=-2x_1+1-(-2x_2+1)=2(x_2-x_1) > 0, \therefore f(x_1) > f(x_2), \therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数,A正确;对于B,对任意 $0 < x_1 < x_2, f(x_1)-f(x_2)=x_1^2+1-(x_2^2+1)=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2), \because 0 < x_1 < x_2, \therefore x_1+x_2 > 0, x_1-x_2 < 0, \therefore f(x_1)-f(x_2) < 0, \therefore f(x_1) < f(x_2), \therefore f(x)=x^2+1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,B正确;对于C,单调区间表示错误,两个单调区间不能用并集符号连接,C错误;对于D,对任意 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ 且 $x_1 < x_2, f(x_1)-f(x_2)=1-\frac{1}{x_1}-1+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}, \because x_1 < x_2 < 0, \therefore x_1-x_2 < 0, x_1x_2 > 0, \therefore f(x_1)-f(x_2) < 0, \therefore$ 函数 $f(x)=1-\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增,D正确.故选ABD.]

2. 解:画出函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的图象(如图).由图象可以看出,函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在定义域 $[0, +\infty)$ 上是增函数.



$\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $x_1 - x_2 < 0$.

$$\text{所以 } f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}.$$

由 $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 0$, 可知 $f(x_1) - f(x_2) < 0$,
即 $f(x_1) < f(x_2)$.

所以函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 在定义域 $[0, +\infty)$ 上是增函数.

3. B [由题图知, 该函数的单调递增区间为 $[-1, 2]$ 和 $[4, 5]$, 故选 B.]

4. D [函数 $f(x) = \sqrt{3+2x-x^2}$ 的定义域需要满足 $3+2x-x^2 \geq 0$, 解得 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 3]$.

因为 $y = 3+2x-x^2$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增, 所以 $f(x) = \sqrt{3+2x-x^2}$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增.]

考点深研·题型突破

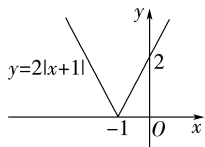
考点一

典例 1 ABD [对于 A, $\because y = x$ 与 $y = -\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调

递增, $\therefore y = x - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 A 正确;

对于 B, 两增函数的和为增函数, 故 B 正确;

对于 C, 作出函数 $y = 2|x+1|$ 的图象, 如图所示,



由图象可知, 函数 $y = 2|x+1|$ 在区间 $(-\infty, -1]$ 上单调递减, 故 C 错误;

由判断复合函数的单调性的方法“同增异减”可得函数 $y = \lg(x+1)$ 是定义域 $(-1, +\infty)$ 上的增函数, 故 D 正确. 故选 ABD.]

考点二

典例 2 解: 函数 $f(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增.

$$\text{证明如下: } f(x) = \frac{x-3}{x+2} = \frac{x+2-5}{x+2} = 1 - \frac{5}{x+2}, \forall x_1, x_2 \in$$

$$(-2, +\infty), \text{ 且 } x_1 < x_2, \text{ 则 } f(x_1) - f(x_2) = 1 - \frac{5}{x_1+2} - \left(1 - \frac{5}{x_2+2}\right) = \frac{5}{x_2+2} - \frac{5}{x_1+2} = \frac{5(x_1-x_2)}{(x_1+2)(x_2+2)}.$$

又 $x_1 < x_2$, 且 $x_1, x_2 \in (-2, +\infty)$, 所以 $x_1+2 > 0, x_2+2 > 0, x_1-x_2 < 0$, 所以 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$,
故函数 $f(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增.

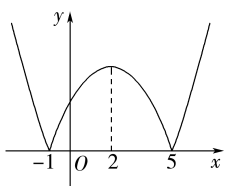
考点三

典例 3 $[-1, 2], [5, +\infty)$ [函数 $y = |-x^2+4x+5| =$

$$\begin{cases} -x^2+4x+5, & x \in (-1, 5), \\ x^2-4x-5, & x \in (-\infty, -1) \cup (5, +\infty), \end{cases}$$

由 $-x^2+4x+5 = 0$, 解得 $x = -1$ 或 $x = 5$,

函数 $y = |-x^2+4x+5|$ 的图象如图所示,



由图可知, 函数 $y = |-x^2+4x+5|$ 的单调递增区间为 $[-1, 2], [5, +\infty)$.]

母题探究

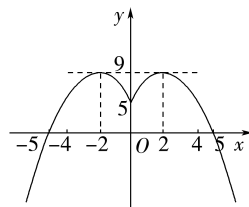
1. $[2, 5]$ [函数 $y = \sqrt{-x^2+4x+5}$ 的定义域需要满足 $-x^2+4x+5 \geq 0$, 解得 $x \in [-1, 5]$, 因为 $t = -x^2+4x+5$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $y = \sqrt{-x^2+4x+5}$ 在 $[2, 5]$ 上单调递减.]

2. $(-\infty, -2]$ 和 $[0, 2]$ [$f(x) =$

$$\begin{cases} -x^2+4x+5, & x \geq 0, \\ -x^2-4x+5, & x < 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } f(x) = \begin{cases} -(x-2)^2+9, & x \geq 0, \\ -(x+2)^2+9, & x < 0. \end{cases}$$

画出函数的图象如图所示,



可知函数 $f(x) = -x^2+4|x|+5$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -2]$ 和 $[0, 2]$.]

随堂·对点检测

1. C [$f(x) = x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

$f(x) = \frac{1}{2x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, $(0, +\infty)$ 上单调递减, 在定义域内不单调递减;

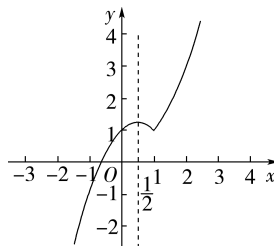
$f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在定义域内不单调递减;

函数 $t = 1-2x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数, $t \in \mathbf{R}$, 函数 $y = \sqrt[3]{t}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数,

所以函数 $f(x) = \sqrt[3]{1-2x}$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上为减函数. 故选 C.]

2. B [$g(x) = x|x-1|+1 = \begin{cases} x^2-x+1, & x \geq 1, \\ -x^2+x+1, & x < 1, \end{cases}$

画出函数图象如图所示.



根据图象知函数 $g(x)$ 的单调递减区间为 $[\frac{1}{2}, 1]$. 故选 B.]

3. 解: ①设 x_1 和 x_2 是区间 $(0, 1]$ 上任意两个实数, 且 $x_1 < x_2$,

$$\text{则 } k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 + \frac{1}{x_2} - (x_1 + \frac{1}{x_1})}{x_2 - x_1} = 1 - \frac{1}{x_1 x_2}.$$

由 $0 < x_1 < x_2 \leq 1$, 得 $0 < x_1 x_2 < 1, \frac{1}{x_1 x_2} > 1$,

于是 $k = 1 - \frac{1}{x_1 x_2} < 0, f(x_2) - f(x_1) < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 上单调递减.

②设 x_1 和 x_2 是区间 $[1, +\infty)$ 上任意两个实数, 且 $x_1 < x_2$.

由 $x_2 > x_1 \geq 1$, 得 $x_1 x_2 > 1, \frac{1}{x_1 x_2} < 1$,

于是 $k = 1 - \frac{1}{x_1 x_2} > 0, f(x_2) - f(x_1) > 0$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增.

第9课时 函数的单调性的应用

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 $f(x) \leq M$ $f(x_0) = M$ $f(x) \geq M$ $f(x_0) = M$

链教材·夯基固本

1. $\left[\frac{1}{4}, 3\right]$ -15

2. $-\frac{2}{5}$ -2 [可判断函数 $f(x) = \frac{2}{1-x}$ 在区间 $[2, 6]$ 上单调递增, 所以 $f(x)_{\max} = f(6) = -\frac{2}{5}$, $f(x)_{\min} = f(2) = -2$.]

3. 17 2 [因为 $y = f(x) = x^2 + 1$ 在区间 $[1, 4]$ 上单调递增, 所以 $f(x)_{\max} = f(4) = 17$, $f(x)_{\min} = f(1) = 2$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 B [因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $f(-2) = f(2)$, $f(-\pi) = f(\pi)$. 又 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $2 < 3 < \pi$, 所以 $f(2) < f(3) < f(\pi)$, 所以 $f(-2) < f(3) < f(-\pi)$. 故选 B.]

考点二

典例 2 A [因为 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的减函数, 且 $f(x-1) < f(1-3x)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} 1-3x < x-1, \\ -1 \leq 1-3x \leq 1, \\ -1 \leq x-1 \leq 1, \end{cases} \text{ 则 } \frac{1}{2} < x \leq \frac{2}{3}.$$

故选 A.]

考点三

典例 3 C [由 $y = x$ 在 $[1, 4]$ 上单调递增,

且 $y = -\frac{2}{x}$ 在 $[1, 4]$ 上单调递增,

可得 $f(x) = x - \frac{2}{x} + 1$ 在 $[1, 4]$ 上单调递增,

$$\text{又 } f(1) = 0, f(4) = \frac{9}{2},$$

故 $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上的值域为 $\left[0, \frac{9}{2}\right]$.]

母题探究

解: 由对勾函数的模型知 $g(x) = x + \frac{2}{x} + 1$

在 $[1, \sqrt{2}]$ 上单调递减, 在 $[\sqrt{2}, 4]$ 上单调递增,

$$\therefore g(x)_{\min} = g(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 1.$$

$$\text{又 } g(1) = 4, g(4) = \frac{11}{2},$$

$$\therefore g(x)_{\max} = g(4) = \frac{11}{2},$$

$\therefore g(x)$ 在 $[1, 4]$ 上的最小值为 $2\sqrt{2} + 1$, 最大值为 $\frac{11}{2}$.

考点四

典例 4 B [因为函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) = -x^2 - 2ax - a$, 所以 $f(x) = -x^2 - 2ax - a$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 所以 $-\frac{-2a}{2 \times (-1)} = -a \geq 0$, 即 $a \leq 0$; 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x + \ln(x+1)$, 所以函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增. 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则 $-a \leq f(0) = e^0 + \ln 1 = 1$, 即 $a \geq -1$.

综上, 实数 a 的取值范围是 $[-1, 0]$.

故选 B.]

考题探源

解: 要使此分段函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数,

$$\text{需满足 } \begin{cases} -\frac{-a}{2 \times 1} \geq 0, \\ 0^2 - a \times 0 + 1 \geq -0 + 3a, \end{cases}$$

解得 $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$, 即实数 a 的取值范围是 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$.

多维变迁

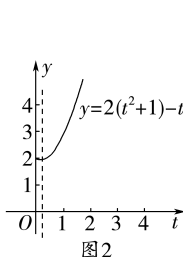
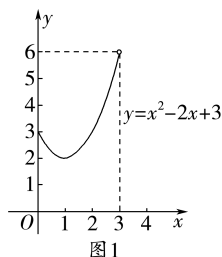
B [由 $y = -x^2 + ax - 3a$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 可知 $\frac{a}{2} \leq 1$, 即 $a \leq 2$, 由 $y = 2ax + 1$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减, 可得 $2a < 0$, 即 $a < 0$, 又 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 所以 $2a + 1 \geq -1 - 2a$, 解得 $a \geq -\frac{1}{2}$.

故实数 a 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2}, 0\right)$.

故选 B.]

微点突破

典例 5 ACD [对于 A, 配方法: $y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$, 由 $x \in [0, 3]$, 再结合函数的图象(如图 1 所示), 可得函数的值域为 $[2, 6]$;



对于 B, 分离常数法: $y = \frac{2x+1}{x-3} = \frac{2(x-3)+7}{x-3} = 2 + \frac{7}{x-3}$, 显然 $\frac{7}{x-3} \neq 0$, $y \neq 2$,

故函数的值域为 $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$;

对于 C, 换元法: 设 $t = \sqrt{x-1}$, 则 $x = t^2 + 1$, 且 $t \geq 0$,

$$\therefore y = 2(t^2 + 1) - t = 2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8},$$

由 $t \geq 0$, 再结合函数的图象(如图 2 所示), 可得函数的值域为 $\left[\frac{15}{8}, +\infty\right)$;

对于 D, 函数的定义域为 $[1, +\infty)$,

$\therefore y = \sqrt{x+1}$ 与 $y = \sqrt{x-1}$ 在 $[1, +\infty)$ 上均单调递增,

$\therefore y = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore$ 当 $x = 1$ 时, $y_{\min} = \sqrt{2}$,

即函数的值域为 $[\sqrt{2}, +\infty)$.

故选 ACD.]

随堂·对点检测

1. B [易知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数,

又 $\pi > 3 > 2$, 故 $f(\pi) < f(3) < f(2)$. 故选 B.]

2. A [因为函数 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 且 $f(1-a) < f(a-3)$, 所以 $1-a < a-3$, 解得 $a > 2$.

故选 A.]

3. A [因为 $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x^2}$ 在 $[1, 4]$ 上单调递增, 所以 $M =$

$$f(4) = 2 - \frac{1}{16} = \frac{31}{16}, m = f(1) = 0, \text{ 因此 } M - m = \frac{31}{16}.$$

故选 A.]

4. $(-\infty, 0]$ [函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 4 = (x-a)^2 + 4 - a^2$, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $[a, +\infty)$, 依题意知, $[0, +\infty) \subseteq [a, +\infty)$, 所以 $a \leq 0$, 即实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0]$.]

第 10 课时 函数的奇偶性、周期性

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识 1 $f(-x) = f(x)$ y 轴

$f(-x) = -f(x)$ 原点

知识 2 (1) $f(x+T) = f(x)$ (2) 最小的正数 最小正数

链教材·夯基固本

1. AC [对于 A, 函数 $f(x) = x^2 - 1$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

因为对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $-x \in \mathbf{R}$,

且 $f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)$,

所以函数 $f(x) = x^2 - 1$ 是偶函数;

对于 B, 函数 $f(x) = 2x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

因为对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $-x \in \mathbf{R}$,

且 $f(-x) = 2(-x) = -2x = -f(x)$,

所以函数 $f(x) = 2x$ 是奇函数;

对于 C, 函数 $f(x) = 2|x|$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

因为对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $-x \in \mathbf{R}$,

且 $f(-x) = 2|-x| = 2|x| = f(x)$,

所以函数 $f(x) = 2|x|$ 是偶函数;

对于 D, 函数 $f(x) = (x-1)^2$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

因为 $f(1) = 0, f(-1) = 4$,

所以 $f(1) \neq f(-1)$,

因此, 函数 $f(x) = (x-1)^2$ 不是偶函数.]

2. $(-2, 0) \cup (2, 5]$ [由题图可知, 当 $0 < x < 2$ 时, $f(x) > 0$; 当 $2 < x \leq 5$ 时, $f(x) < 0$, 又 $f(x)$ 是奇函数, $\therefore$ 当 $-2 < x < 0$ 时, $f(x) < 0$, 当 $-5 \leq x < -2$ 时, $f(x) > 0$. 综上, $f(x) < 0$ 的解集为 $(-2, 0) \cup (2, 5]$.]

3. 解: $\because$ 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 且 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2 + 2x$,

$\therefore f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) = x^2 - 2x$.

$\therefore f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数,

$\therefore f(-x) = -f(x) = x^2 - 2x$,

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时, $f(x) = -x^2 + 2x$.

4. $\frac{1}{2}$ [$\because f(x)$ 的周期为 2,

$\therefore f(2\ 027) = f(1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.]

5. ABC [因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

所以 $f(x) + f(-x) = 0$, 且 $f(0) = 0$, A, B 正确;

因为 $f(-x) = -f(x)$,

所以 $f(x) \cdot f(-x) = -[f(x)]^2 \leq 0$, 当 $x = 0$ 时, 等号成立, C 正确;

当 $x = 0$ 时, $f(-x) = 0$, 此时 $\frac{f(x)}{f(-x)}$ 无意义, D 错误.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 解: (1) 函数的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 且对于定义域内的任意一个 x 都有 $f(-x) = (-x)^3 - \frac{1}{-x} = -(x^3 - \frac{1}{x}) = -f(x)$, 从而函数 $f(x)$ 为奇函数.

(2) 函数 $f(x) = (1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 的定义域满足 $\frac{1-x}{1+x} \geq 0$, 则

$\begin{cases} (1+x)(1-x) \geq 0, \\ x \neq -1, \end{cases}$ 解得 $-1 < x \leq 1$,

故 $f(x)$ 既不是奇函数, 也不是偶函数.

(3) $f(x)$ 的定义域为 $\{-1, 1\}$,

又 $f(-1) = f(1) = 0, f(-1) = -f(1) = 0$,

所以 $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数.

(4) $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 当 $x > 0$ 时, $f(-x) = -(-x)^2 - 2 = -(x^2 + 2) = -f(x)$; 当 $x < 0$ 时, $f(-x) = (-x)^2 + 2 = -(-x^2 - 2) = -f(x)$; 当 $x = 0$ 时, $f(0) = 0$, 也满足 $f(-x) = -f(x)$, 故该函数为奇函数.

(5) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$f(-x) + f(x) = \log_2[-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}] + \log_2(\sqrt{x^2 + 1} + x)$
 $= \log_2[(\sqrt{x^2 + 1} - x) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + x)]$
 $= \log_2 1 = 0,$

$\therefore f(-x) = -f(x)$,

$\therefore f(x)$ 为奇函数.

考点二

典例 2 $(-\infty, 2)$ [因为 $f(x) = -2x - x^5$ 是单调递减的奇函数,

又 $f(x-1) + f(5-3x) < 0$,

所以 $f(x-1) < -f(5-3x) = f(3x-5)$, 则 $x-1 > 3x-5$, 即 $x < 2$,

所以不等式的解集为 $(-\infty, 2)$.]

母题探究

1. $-2x - x^5$ [当 $x < 0$ 时, $-x > 0$.

$f(x) = -f(-x) = -[-2(-x) - (-x)^5] = -2x - x^5$.]

2. -1 [因为函数 $f(x) = -2x - x^5 - b + 2$ 为 $[-7a, a+6]$ 上的奇函数,

所以 $-7a + a + 6 = 0$ 且 $f(0) = 0$, 所以 $a = 1$ 且 $b = 2$, 故 $a - b = -1$.]

多维变证

1. B [根据题意, 函数 $y = f(x) - x^2$ 是奇函数, 则 $[f(4) - 16] + [f(-4) - 16] = 0$,

又由 $f(4) = 9$, 则 $f(-4) = 23$,

则 $g(-4) = f(-4) + 5 = 28$.

故选 B.]

2. C [由于 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(-x) = f(x)$ 恒成立,

不等式 $f(a-1) > f(2)$ 可以转化为 $f(|a-1|) > f(2)$.

函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 根据偶函数的对称性可知, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,

所以 $|a-1| > 2$, 解得 $a < -1$ 或 $a > 3$.

故选 C.]

考点三

典例 3 C [根据题意可知, $f(x) = -f(x+2) = -[-f(x+4)] = f(x+4)$,

$\therefore f(x)$ 是周期为 4 的周期函数,

$f(2\ 025) = f(1+506 \times 4) = f(1) = -f(3) = 1$.

故选 C.]

多维变证

(1) $x^2 - 6x + 8$ (2) 1 [(1) $\because f(x+2) = -f(x)$, $\therefore f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$.

$\therefore f(x)$ 是周期为 4 的周期函数, 且 $f(x)$ 的最小正周期是 4.

当 $x \in [-2, 0]$ 时, $-x \in [0, 2]$, 由已知得

$f(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$.

又 $f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(-x) = -f(x) = -2x - x^2$.

$\therefore f(x) = x^2 + 2x$.

又当 $x \in [2, 4]$ 时, $x-4 \in [-2, 0]$,

$$\therefore f(x-4)=(x-4)^2+2(x-4).$$

又 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数, $\therefore f(x)=f(x-4)=(x-4)^2+2(x-4)=x^2-6x+8$.

即当 $x \in [2, 4]$ 时, $f(x)=x^2-6x+8$.

(2) $\because f(0)=0, f(1)=1, f(2)=0, f(3)=-1$, 且 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数,

$$\therefore f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=f(4)+f(5)+f(6)+f(7)=\dots=f(2\ 020)+f(2\ 021)+f(2\ 022)+f(2\ 023)=0.$$

$$\therefore f(0)+f(1)+f(2)+\dots+f(2\ 026)=f(0)+f(1)+f(2)=1.]$$

考点四

典例 4 A [法一: 当 $x \in [-1, 0]$ 时, $-x+2 \in [2, 3]$, 所以当 $x \in [-1, 0]$ 时, $f(x)=f(-x)=f(-x+2)=5-2(-x+2)=1+2x$,

$$\text{所以 } f\left(-\frac{3}{4}\right)=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}. \text{ 故选 A.}$$

法二: 由 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的偶函数可得,

$$f\left(-\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}+2\right)=f\left(\frac{11}{4}\right),$$

因为当 $2 \leq x \leq 3$ 时, $f(x)=5-2x$,

$$\text{所以 } f\left(\frac{11}{4}\right)=5-2 \times \frac{11}{4}=-\frac{1}{2},$$

$$\text{即 } f\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{2}. \text{ 故选 A.}]$$

考题探源

1. 解: 图略, 函数解析式为 $f(x)=\begin{cases} x(1+x), & x \geq 0, \\ -x(x-1), & x < 0. \end{cases}$

$$2. \text{ 解: } f(3)=0, f\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

随堂·对点检测

1. A [$y=x^3$ 是奇函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 A 正确; 选项 B, C, D 是偶函数, 不正确, 故选 A.]

$$2. \text{ B } [\text{根据题意可知, } f(x+3)=\frac{1}{f(x)},$$

$$\text{则 } f(x+6)=\frac{1}{f(x+3)}=f(x),$$

所以函数 $f(x)$ 的一个周期为 6,

$$\text{所以 } f(2\ 026)=f(337 \times 6+4)=f(4)=\frac{1}{3}.$$

故选 B.]

3. D [根据题意, 当 $x > 0$ 时, $f(x)=x-x^2$, 则 $f(2)=2-4=-2$,

又由 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

$$\text{则 } f(-2)=-f(2)=2.$$

故选 D.]

4. A [函数的定义域为 $(-1, 1)$,

因为 $f(x)$ 是奇函数,

$$\text{所以 } f(-x)=(-2x+a) \cdot \left| \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \right| = -(2x-a) \cdot$$

$$\left| -\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \right| = -(2x+a) \cdot \left| \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \right| = -f(x) \text{ 恒}$$

成立,

$$\text{所以 } a=-a, \text{ 即 } a=0.$$

故选 A.]

5. $\frac{1}{3}$ [$\because f(x)=ax^2+bx+\frac{5}{27}$ 是定义在 $[a-1, 2a]$ 上的偶函数,

$$\therefore a-1+2a=0, \therefore a=-\frac{1}{3}, f(x)=\frac{1}{3}x^2+bx+\frac{5}{27},$$

$$\text{又 } f(-x)=f(x), \therefore ax^2+bx+\frac{5}{27}=a \cdot (-x)^2+b \cdot$$

$$(-x)+\frac{5}{27}, \therefore b=0.$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{27}, x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right],$$

$$\therefore f(x)_{\max}=f\left(-\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{5}{27}=\frac{1}{3}.]$$

第 11 课时 函数的对称性及应用

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1) 原点 y 轴 (2) $x=a$ ($a, 0$)

知识点 2 (2) ($a, 0$)

知识点 3 (1) y 轴 (2) x 轴 (3) 原点

$$(4) x=\frac{a+b}{2}$$

链教材·夯基固本

1. C [因为 $f(x)=x^3+x$ 为奇函数,

所以函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称, 故选 C.]

2. (1, 0) [将 $y=\frac{1}{x}$ 的图象向右平移 1 个单位长度, 得到 $y=$

$\frac{1}{x-1}$ 的图象, 所以 $f(x)=\frac{1}{x-1}$ 的图象的对称中心是 (1, 0).]

3. B [因为 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x=3^{-x}$, 所以函数 $y=3^x$ 与 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图象关于 y 轴对称, 故选 B.]

考点深研·题型突破

考点一

考向 1 典例 1 AB [由于 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 则 $f(1+x)=f(1-x)$, 所以 $f(x+1)$ 为偶函数, 故 A, B 选项正确, C 选项错误; 如 $f(x)=(x-1)^2+1$, 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 但 $f(1)=1 \neq 0$, 故 D 选项错误. 故选 AB.]

考向 2 典例 2 ABC [对于 A, $f(x)=\frac{2x-1}{x+2}=\frac{2(x+2)-5}{x+2}=$

$2-\frac{5}{x+2}$, 其图象可以由 $y=-\frac{5}{x}$ 的图象向左平移 2 个单位长

度, 再向上平移 2 个单位长度得到, 且 $y=-\frac{5}{x}$ 的图象关于原

点对称, 故 $f(x)=\frac{2x-1}{x+2}$ 的图象关于点 $(-2, 2)$ 中心对称, A

正确;

对于 B, 因为 $f(2x-1)$ 为奇函数,

$$\text{所以 } f(2x-1)=-f(-2x-1), \text{ 所以 } f(x-1)=-f(-x-1),$$

所以 $f(x)=-f(-x-2)$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1, 0)$ 中心对称, B 正确;

对于 C, 函数 $y=f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度得到函数 $y=f(x-1)+1$ 的图象, 由于 $y=f(x)$ 过定点 $(0, 1)$, 故函数 $y=f(x-1)+1$ 过定点 $(1, 2)$, C 正确;

对于 D, 函数 $y=\frac{x-1}{x-b}=\frac{(x-b)+b-1}{x-b}=1+\frac{b-1}{x-b}$ 的图象关于

点 $(3, c)$ 中心对称,

$$\text{所以 } \begin{cases} 3-b=0, \\ c=1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} b=3, \\ c=1, \end{cases}$$

所以 $b+c=4$, D 不正确. 故选 ABC.]

考向 3 典例 3 B [设 $y=f(x)=2^{x-1}$, $y=g(x)=2^{1-x}$, 显然 $g(x)=2^{(2-x)-1}=f(2-x)$, 故 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 故选 B.]

考点二

典例 4 BD [因为函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, 所以 $f(-x)=f(x)$, 又 $f(x+1)$ 为奇函数, 所以 $f(-x+1)+f(x+1)=0$, 因为 A 选项中, $f(-x-1)=-f(x+1) \Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$, 而 $f(-x)=f(x)$, 所以 A 选项错误; 所以 $f(-x)+f(x+2)=0$, $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称, 且 $f(1)=0$, 所以 B 选项正确; 所以 $f(x)+f(x+2)=0$, 所以 $f(x+2)+f(x+4)=0$, 所以 $f(x+4)=f(x)$, 所以 $f(x)$ 的周期为 4, 所以 C 选项错误; 所以 $f(2\ 025)=f(4 \times 506+1)=f(1)=0$, 所以 D 选项正确. 故选 BD.]

考点三

典例 5 AC [由 $f(1+x)=f(1-x)$, 可得 $f(x)$ 图象的对称轴方程为 $x=1$, 所以 $f(0)=f(2)$, 又由 $f(1+x)=f(1-x)$, 可知 $f(2+x)=f(-x)$. 因为函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 对称, 即 $f(2+x)=-f(2-x)$, 故 $f(4+x)=-f(-x)$, 所以 $-f(2+x)=f(4+x)$, 即 $-f(x)=f(2+x)$, 所以 $f(x)=f(x+4)$, 所以 $f(x)$ 的周期为 4, 所以 $f(-2)=f(2)$, 所以 $f(0)=f(-2)$, 故 A 正确, B 错误. 因为 $f(x)$ 在 $(-1,0]$ 上单调递增, 且周期为 4, 所以 $f(x)$ 在 $(3,4]$ 上单调递增, 又 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 对称, 所以 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上单调递增, 因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 所以 $f(x)$ 在 $(1,2]$ 上单调递减, 则函数 $f(x)$ 在 $(2,3)$ 上单调递减, 故 C 正确. 根据 $f(x)$ 的周期为 4, 可得 $f(2\ 025)=f(1)$, $f(2\ 026)=f(2)$, $f(2\ 027)=f(3)$, 因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 所以 $f(2)=f(0)$ 且 $f(3)=f(-1)$, 即 $f(2\ 025)=f(1)$, $f(2\ 026)=f(0)$, $f(2\ 027)=f(-1)$, 由 C 选项的分析可知, 函数 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上单调递增, 在 $(-1,0]$ 上单调递增, 确定的单调区间内均不包含 $x=\pm 1$, 若 $f(-1)=f(1)=0$, 则 $f(2\ 025)>f(2\ 026)>f(2\ 027)$ 不成立, 故 D 错误. 故选 AC.]

随堂·对点检测

1. **D** [法一: $f(x)=\frac{ax-1}{x-1}=a+\frac{a-1}{x-1}$ 的图象关于点 $(1,2)$ 对称, 则 $f(x)+f(2-x)=4$, 即 $a+\frac{a-1}{x-1}+a+\frac{a-1}{2-x-1}=4$, 解得 $a=2$. 故选 D. 法二: $f(x)=\frac{ax-1}{x-1}=a+\frac{a-1}{x-1}$, 可知 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,a)$ 对称, 又 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,2)$ 对称, 则 $a=2$. 故选 D.]

2. **ACD** [因为 $f(2+x)=f(2-x)$, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 故 A 正确, B 错误; 因为函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 所以 $f(-x)=f(x+4)$, 又 $f(-x)=f(x)$, 所以 $f(x+4)=f(x)$, 所以 $T=4$, 故 C 正确; 因为 $T=4$ 且 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $y=f(x+4)$ 为偶函数, 故 D 正确. 故选 ACD.]

3. **C** [$f(4-x)=f(2-(x-2))=f(x-2)=-f(2-x)=-f(x)$, 即 $f(4-x)+f(x)=0$, 故 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 对称, B 错误; $\because f(2-x)=f(x)$, 则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, A 错误; 根据题意可得, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, $\because f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 关于点 $(2,0)$ 对称, 则 $f(x)$ 在 $(2,3)$ 内单调递减, C 正确; $\because f(x)=f(2-x)=-f(x-2)$, 则 $f(x+2)=-f(x)$, $\therefore f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$, 可知 $f(x)$ 的周期为 4, 则 $f(-\frac{7}{2})=f(\frac{1}{2})<f(\frac{2}{3})$, D 错误. 故选 C.]

4. 5 [$\because f(x)$ 为偶函数, $\therefore f(-1)=f(1)$, 由 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 可得 $f(1)=f(3)=2 \times 3 - 1 = 5$, $\therefore f(-1)=5$.]

*第 12 课时 抽象函数(进阶课)

类型一

典例 1 (1)B (2)ACD [(1) 由 $f(a+b)=f(a)f(b)$, $f(1)=2$, 令 $b=1$, 可得 $f(a+1)=f(a)f(1)=2f(a)$, 所以 $\frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(4)}{f(3)} + \frac{f(6)}{f(5)} + \dots + \frac{f(2\ 026)}{f(2\ 025)} = \frac{2f(1)}{f(1)} + \frac{2f(3)}{f(3)} + \frac{2f(5)}{f(5)} + \dots + \frac{2f(2\ 025)}{f(2\ 025)} = 2 \times 1\ 013 = 2\ 026$. 故选 B. (2) 根据题意可知, 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)-f(x-1)=f(2)+4x-6$, 令 $x=1$, 得 $f(2)-f(0)=f(2)+4-6$, 解得 $f(0)=2$, 故 A 正确; 令 $x=-1$, 得 $f(0)-f(-2)=f(2)-4-6$, 即 $f(2)+f(-2)=f(0)+10$, 因为 $f(0)=2$, $f(-2)=6$, 所以 $f(2)=6$, 故 B 错误; 因为 $f(2)=6$, 则 $f(x+1)-f(x-1)=4x$, 令 $x=2\ 024$, 则 $f(2\ 025)-f(2\ 023)=4 \times 2\ 024 = 8\ 096$, 故 C 正确; 又 $f(6)=f(4)+4 \times 5 = f(4)+20$, $f(4)=f(2)+4 \times 3 = 18$, 则 $f(6)=18+20=38$, 故 D 正确. 故选 ACD.]

类型二

典例 2 A [根据题意, $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 取 $x=a$, $y=0$, 且 $a>0$, 则 $0<f(a)<1$, $f(a+0)=\frac{f(a)+f(0)}{1+f(a)f(0)}$, 即 $f(a)=\frac{f(a)+f(0)}{1+f(a)f(0)}$, $f(a)[1+f(a)f(0)]=f(a)+f(0)$, 解得 $\{[f(a)]^2-1\}f(0)=0$, 又 $0<[f(a)]^2<1$, $[f(a)]^2-1 \neq 0$, 故 $f(0)=0$. 令 $y=-x$, 则 $f(0)=\frac{f(x)+f(-x)}{1+f(x)f(-x)}=0$, 变形可得 $f(-x)=-f(x)$,

则函数 $f(x)$ 为奇函数,

设 x_1, x_2 为任意实数, 且 $0 < x_1 < x_2$,

则有 $x_2 - x_1 > 0$, 故 $0 < f(x_2 - x_1) < 1$, 则

$$f(x_1) - f(x_2) = f(x_1) - f(x_2 - x_1 + x_1)$$

$$= f(x_1) - \frac{f(x_2 - x_1) + f(x_1)}{1 + f(x_2 - x_1)f(x_1)}$$

$$= \frac{f(x_2 - x_1)\{[f(x_1)]^2 - 1\}}{1 + f(x_2 - x_1)f(x_1)},$$

因为 $x_1 > 0$, 所以 $0 < f(x_1) < 1$, 而 $0 < f(x_2 - x_1) < 1$,

$$\text{则 } \frac{f(x_2 - x_1)\{[f(x_1)]^2 - 1\}}{1 + f(x_2 - x_1)f(x_1)} < 0,$$

所以 $f(x_1) - f(x_2) < 0$,

则有 $f(x_1) < f(x_2)$,

故函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 故选 A.]

多维变迁

ACD [A 中, 令 $x=y=0$, 得 $f(0)=0$, 故 A 正确;

B 中, 令 $y=-x$,

$$\text{则 } f(0) = \frac{f(x) + f(-x)}{1 - f(x)f(-x)} = 0,$$

因此 $f(-x) = -f(x)$, 又 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 4k+2, k \in \mathbf{Z}\}$,

所以 $f(x)$ 为奇函数, 故 B 错误;

$$\text{C 中, 令 } y=1, \text{ 则 } f(x+1) = \frac{f(x)+f(1)}{1-f(x)f(1)} = \frac{f(x)+1}{1-f(x)} = -1 + \frac{2}{1-f(x)},$$

$$\text{所以 } f(x+2) = -1 + \frac{2}{1-f(x+1)} = -\frac{1}{f(x)}, \text{ 因此 } f(x+4) = -\frac{1}{f(x+2)} = f(x),$$

所以 $f(x)$ 为周期函数, 且周期为 4, 故 C 正确;

D 中, $f(2 \cdot 027) = f(3) = f(-1) = -f(1) = -1$, 故 D 正确. 故选 ACD.]

第 13 课时 幂函数与二次函数

理法先行 · 题练固本

梳必备 · 破题有方

知识点 1 (1) $y=x^a$ (3) (1,1) (0,0)

(1,1) 奇函数 偶函数

知识点 2 (1) $ax^2+bx+c(a \neq 0)$ (m, n) 零点 (2) R

$$-\frac{b}{2a} \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a} \right) \text{ 偶 减 增 增 减}$$

链教材 · 夯基固本

1. -3 [由题意知 $8^a=2$, 解得 $a=\frac{1}{3}$, 所以 $f(x)=\sqrt[3]{x}$,

$$\text{所以 } f(-27) = \sqrt[3]{-27} = -3.]$$

2. < [由于函数 $y=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

$$\text{且 } -1.5 < -1.4, \text{ 故 } (-1.5)^3 < (-1.4)^3.]$$

3. $(-\infty, -3]$ [因为二次函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 的图象的对称轴为直线 $x=1-a$, 且开口向上, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1-a]$ 上单调递减.

又已知该函数在区间 $(-\infty, 4)$ 上单调递减, 则 $1-a \geq 4$, 即 $a \leq -3$.

故实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -3]$.]

4. 解: (1) 配方得 $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + 4x) + 5$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4 - 4) + 5$$

$$= \frac{1}{2}(x+2)^2 + 3.$$

所以函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$ 的图象可以由函数 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的图象向左平移 2 个单位长度, 再向上平移 3 个单位长度而得到.

(2) 由 (1) 可知, 该函数的图象开口向上, 对称轴为直线 $x = -2$. 在区间 $(-\infty, -2]$ 上, 函数值 y 随自变量 x 的增大而减小, 在区间 $[-2, +\infty)$ 上, 函数值 y 随自变量 x 的增大而增大. 函数在 $x = -2$ 处取得最小值 3, 即 $y_{\min} = 3$.

考点深研 · 题型突破

考点一

典例 1 (1) B (2) B (3) BC [(1) 根据幂函数 $y=x^n$ 的性质, 在第一象限内的图象:

当 $n > 0$ 时, n 越大, $y=x^n$ 的增长速度越快, 所以曲线 C_1 的 $n=2$, C_2 的 $n=\frac{1}{2}$;

当 $n < 0$ 时, $|n|$ 越大, 曲线越陡峭, 所以曲线 C_3 的 $n=-\frac{1}{2}$, C_4 的 $n=-2$.

$$(2) \text{ 由 } a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}, b = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}, c = \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\text{得 } a = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}}, b = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}, c = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

因为幂函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $\frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$,

所以 $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$, 即 $c < a < b$. 故选 B.

(3) 设 $f(x)=x^a$, 其图象经过点 $\left(3, \frac{1}{9}\right)$,

$$\text{则 } 3^a = \frac{1}{9}, \text{ 解得 } a = -2, \text{ 故 } f(x) = \frac{1}{x^2},$$

那么 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 故 A 错误;

$f(x)$ 的值域为 $\{y | y > 0\}$, 故 B 正确;

因为 $f(-x) = \frac{1}{x^2} = f(x)$, 则 $f(x)$ 为偶函数, 故 C 正确;

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 在定义域上不是减函数, 故 D 错误. 故选 BC.]

考点二

典例 2 解: 法一 (利用二次函数的一般式): 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a \neq 0)$.

$$\text{由题意得 } \begin{cases} 4a+2b+c=-1, \\ a-b+c=-1, \\ \frac{4ac-b^2}{4a}=8, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=-4, \\ b=4, \\ c=7. \end{cases}$$

故所求二次函数的解析式为 $f(x) = -4x^2 + 4x + 7$.

法二 (利用二次函数的顶点式):

设 $f(x)=a(x-m)^2+n(a \neq 0)$.

$$\because f(2)=f(-1),$$

$$\therefore \text{抛物线的对称轴为直线 } x = \frac{2+(-1)}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore m = \frac{1}{2}, \text{ 又根据题意函数有最大值 } 8,$$

$$\therefore n = 8, \therefore y = f(x) = a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 8.$$

$$\therefore f(2) = -1, \therefore a\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + 8 = -1, \text{解得 } a = -4,$$

$$\therefore f(x) = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 8 = -4x^2 + 4x + 7.$$

法三(利用二次函数的零点式):

由已知 $f(x) + 1 = 0$ 的两根为 $x_1 = 2, x_2 = -1$,

故可设 $f(x) + 1 = a(x - 2)(x + 1) (a \neq 0)$,

$$\text{即 } f(x) = ax^2 - ax - 2a - 1.$$

$$\text{又函数有最大值 } 8, \text{即 } \frac{4a(-2a-1)-a^2}{4a} = 8.$$

解得 $a = -4$, 故所求二次函数的解析式为 $f(x) = -4x^2 + 4x + 7$.

考点三

考向 1 典例 3 AD [因为图象与 x 轴交于两点,

所以 $b^2 - 4ac > 0$, 即 $b^2 > 4ac$, A 正确;

对称轴为 $x = -1$, 即 $-\frac{b}{2a} = -1, 2a - b = 0$, B 错误;

结合图象, 当 $x = -1$ 时, $y > 0$, 即 $a - b + c > 0$, C 错误;

由对称轴为 $x = -1$ 知, $b = 2a$.

根据抛物线开口向下, 知 $a < 0$,

所以 $5a < 2a$, 即 $5a < b$, D 正确. 故选 AD.]

考向 2 典例 4 解: $f(x) = x^2 - tx - 1 = \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 - 1 - \frac{t^2}{4}$.

(1) 依题意, $-1 < \frac{t}{2} < 2$, 解得 $-2 < t < 4$,

所以实数 t 的取值范围是 $(-2, 4)$.

(2) ① 当 $\frac{t}{2} \geq 2$, 即 $t \geq 4$ 时, $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上单调递减,

$$\text{所以 } f(x)_{\min} = f(2) = 3 - 2t.$$

② 当 $-1 < \frac{t}{2} < 2$, 即 $-2 < t < 4$ 时,

$$f(x)_{\min} = f\left(\frac{t}{2}\right) = -1 - \frac{t^2}{4}.$$

③ 当 $\frac{t}{2} \leq -1$, 即 $t \leq -2$ 时, $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上单调递增,

$$\text{所以 } f(x)_{\min} = f(-1) = t.$$

$$\text{综上, } g(t) = \begin{cases} t, & t \leq -2, \\ -1 - \frac{t^2}{4}, & -2 < t < 4, \\ 3 - 2t, & t \geq 4. \end{cases}$$

母题探究

1. $(-\infty, 2]$ [不妨设 $x_1 > x_2$, 则 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > -2$ 可化为

$$f(x_1) + 2x_1 > f(x_2) + 2x_2, \text{令 } g(x) = f(x) + 2x = x^2 - (t - 2)x - 1, \text{则 } g(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增.}$$

$$\text{所以 } \frac{t-2}{2} \leq 0, \text{解得 } t \leq 2.]$$

2. 解: $f(-1) = t, f(2) = 3 - 2t, f(2) - f(-1) = 3 - 3t$,

当 $t \geq 1$ 时, $f(2) - f(-1) \leq 0$,

$$\therefore f(2) \leq f(-1), \therefore f(x)_{\max} = f(-1) = t;$$

当 $t < 1$ 时, $f(2) - f(-1) > 0$,

$$\therefore f(2) > f(-1),$$

$$\therefore f(x)_{\max} = f(2) = 3 - 2t,$$

$$\text{综上有 } G(t) = \begin{cases} t, & t \geq 1, \\ 3 - 2t, & t < 1. \end{cases}$$

教材拓展

典例 5 (1) 3 (2) $(-\infty, 1)$ [(1) $f(x) = \frac{ax+2-a}{x+1} =$

$$\frac{a(x+1)+2-2a}{x+1} = a + \frac{2-2a}{x+1},$$

所以 $f(x)$ 的图象的对称中心为点 $(-1, a)$,

由题意得 $a = 3$.

(2) 由 $f(x) = \frac{ax+2-a}{x+1}$ 知直线 $x = -1$ 为 $f(x)$ 的一条渐

近线,

又由一次分式函数的性质知,

当且仅当 $1 \times (2-a) > 1 \times a$,

即 $a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递减,

故实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 1)$.]

典例 6 $\frac{3}{2}$ [由 $f(x) = x^2 + \frac{3}{x^2+2} = x^2 + 2 + \frac{3}{x^2+2} - 2$,

$$\text{令 } x^2 + 2 = t (t \geq 2), \text{则有 } f(t) = t + \frac{3}{t} - 2,$$

由对勾函数的性质知, $f(t)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增, 所以当

$$t = 2 \text{ 时, } f(t)_{\min} = \frac{3}{2},$$

$$\text{即当 } x = 0 \text{ 时, } f(x)_{\min} = \frac{3}{2}.]$$

典例 7 BCD [当 $a > 0$ 时, $f(x) = x - \frac{a}{x}$, 定义域为 $(-\infty, 0) \cup$

$(0, +\infty)$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ 上单调递增, 当 $x \rightarrow +\infty$

时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 故 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 故

A 错误, D 正确; 当 $a = -4$ 时, $f(x) = x + \frac{4}{x}$ 为对勾函数, 其单调

递增区间为 $(-\infty, -2), (2, +\infty)$, 故 B 正确; 当 $x > 0$ 时, $x + \frac{4}{x} \geq$

$$2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4 (\text{当且仅当 } x = 2 \text{ 时取等号}), \text{当 } x < 0 \text{ 时, } x + \frac{4}{x} =$$

$$- \left[(-x) + \left(-\frac{4}{x} \right) \right] \leq -2\sqrt{(-x) \cdot \left(-\frac{4}{x} \right)} = -4 (\text{当且仅当}$$

$x = -2$ 时取等号),

故 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$, 故 C 正确.]

随堂·点对检测

1. C [因为函数 $f(x) = (m^2 - 3m - 3)x^m$ 为幂函数, 则 $m^2 - 3m - 3 = 1$, 解得 $m = 4$ 或 $m = -1$.

当 $m = 4$ 时, $f(x) = x^4$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 不满足条件, A 错误;

当 $m = -1$ 时, $f(x) = x^{-1}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 满足题意.

函数 $f(x) = x^{-1}$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 但不是减函数, B 错误;

因为函数定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 且 $f(-x) =$

$$\frac{1}{-x} = -f(x),$$

所以函数 $f(x)$ 是奇函数, 不是偶函数, 故 C 正确, D 错误.

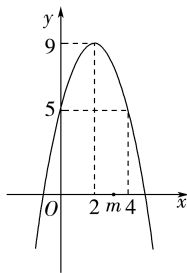
故选 C.]

2. A [已知函数 $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ 在区间 $[0, m]$ 上的值域为 $[5, 9]$,

又 $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ 的图象开口向下, 对称轴为 $x = 2$, 且 $f(0) = f(4) = 5, f(2) = 9$,

$\therefore$ 函数 $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ 在区间 $[0, m]$ 上的值域为 $[5, 9]$,

$\therefore$ 由图可知, $2 \leq m \leq 4$, 即实数 m 的取值范围是 $[2, 4]$.



故选 A.]

3. **ACD** [由二次函数图象开口向下知 $a < 0$,

对称轴为 $x = -\frac{b}{2a} = 1$,

即 $2a + b = 0$, 故 $b > 0$.

又因为 $f(0) = c > 0$, 所以 $abc < 0$.

$f(2) = f(0) = 4a + 2b + c > 0$,

$f(3) = f(-1) = 9a + 3b + c < 0$. 故选 ACD.]

4. $f(x) = x^2 - 4x$ [由题意, 可设 $f(x) = a(x-2)^2 - 4(a > 0)$,

又图象过原点,

所以 $f(0) = 4a - 4 = 0, a = 1$,

所以 $f(x) = (x-2)^2 - 4 = x^2 - 4x$.]

第 14 课时 指数运算与对数运算

理法先行 · 题练固本

梳必备 · 破题有方

知识点 1 (1)根式 (2)负数 $0 \quad a \quad a \quad -a$

知识点 2 0

知识点 3 $a^{r+s} \quad a^{rs} \quad a^r b^r$

知识点 4 $\log_a N \quad a \quad N \quad \lg N \quad \ln N$

知识点 5 (1)0 1 N (2) $\log_a M + \log_a N \quad \log_a M - \log_a N$
 $n \log_a M$

链教材 · 夯基固本

1. 解: (1) $\sqrt[3]{(-8)^3} = -8$;

(2) $\sqrt{(-10)^2} = |-10| = 10$;

(3) $\sqrt[4]{(3-\pi)^4} = |3-\pi| = \pi-3$;

(4) $\sqrt{(a-b)^2} = |a-b| = \begin{cases} a-b, a \geq b, \\ b-a, a < b. \end{cases}$

2. 解: (1) 设 $b = 4^{\frac{3}{2}}$, 由定义, 得 $b^2 = 4^3 = 64, b = 8 (b > 0)$, 所以 $4^{\frac{3}{2}} = 8$.

(2) 由负分数指数幂的定义, 得 $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{1}{3}}}$.

设 $b = 27^{\frac{1}{3}}$, 由定义, 得 $b^3 = 27, b = 3$, 所以 $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$.

(3) 由负分数指数幂的定义, 得 $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{2}} = 16^{\frac{3}{2}} = (4^2)^{\frac{3}{2}} = 4^3 = 64$.

3. 解: (1) 原式 $= \frac{24}{5} \times 5 \times x^{-\frac{2}{3}+1-\frac{1}{3}} \times y^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} = 24x^0 y^{\frac{1}{6}}$
 $= 24y^{\frac{1}{6}}$.

(2) 原式 $= \frac{(m^{\frac{1}{2}})^2 + 2m^{\frac{1}{2}} m^{-\frac{1}{2}} + (m^{-\frac{1}{2}})^2}{m^{\frac{1}{2}} + m^{-\frac{1}{2}}}$
 $= \frac{(m^{\frac{1}{2}} + m^{-\frac{1}{2}})^2}{m^{\frac{1}{2}} + m^{-\frac{1}{2}}} = m^{\frac{1}{2}} + m^{-\frac{1}{2}}$.

4. **ABD** [对于 A, 因为 $\log_{64} x = -\frac{2}{3}$, 所以

$x = 64^{-\frac{2}{3}} = (4^3)^{-\frac{2}{3}} = 4^{-2} = \frac{1}{16}$, A 正确;

对于 B, 因为 $\log_x 8 = 6$, 所以 $x^6 = 8$. 又 $x > 0$, 所以 $x = 8^{\frac{1}{6}} = (2^3)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, B 正确;

对于 C, 因为 $\lg 100 = x$, 所以 $10^x = 100, 10^x = 10^2$, 于是 $x = 2$, C 错误;

对于 D, 因为 $-\ln e^2 = x$, 所以 $\ln e^2 = -x, e^2 = e^{-x}$, 于是 $x = -2$, D 正确.

故选 ABD.]

5. **BC** [对于 A, $\log_3 (27 \times 9^2) = \log_3 (3^3 \times 3^4) = 7$, 故 A 错误; 对

于 B, $2(\log_4 3 + \log_8 3)(\log_5 2 + \log_{10} 2) = 2\left(\frac{\log_2 3}{\log_2 4} + \frac{\log_2 3}{\log_2 8}\right) \times$

$\left(\frac{\log_2 2}{\log_2 3} + \frac{\log_2 2}{\log_2 9}\right) = \frac{5}{3} \log_2 3 \times \frac{3}{2 \log_2 3} = \frac{5}{2}$, 故 B 正确; 对于 C,

$\ln 3 + \ln \frac{1}{3} = \ln 1 = 0$, 故 C 正确; 对于 D, $\log_3 5 - \log_3 15 =$

$\log_3 \frac{1}{3} = -1$, 故 D 错误. 故选 BC.]

考点深研 · 题型突破

考点一

典例 1 (1) $\pi + \frac{23}{4}$ (2) $\frac{1}{ab}$ (3)7 47

[(1) $\left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{2}} + (-8)^{\frac{2}{3}} + 8^{0.25} \times \sqrt{2} + \sqrt[3]{(\pi-2)^3}$

$= \left(\frac{49}{16}\right)^{\frac{1}{2}} + (-2)^2 + 2^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}} + \pi - 2$

$= \frac{7}{4} + 4 + 2 + \pi - 2$

$= \pi + \frac{23}{4}$.

(2) $\frac{\sqrt{b} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{b^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{a^{-2}}} \div \left(\frac{a^{-2} \cdot \sqrt{b^{-2}}}{ab^2}\right)^{-\frac{2}{3}}$

$= \frac{b^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{b^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{2}{3}}} \div \left(\frac{a^{-2} \cdot b^{-1}}{ab^2}\right)^{-\frac{2}{3}}$

$= ab \div (a^{-3} b^{-3})^{-\frac{2}{3}}$

$= ab \div a^2 b^2 = \frac{1}{ab}$.

(3) 由 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 3$, 得 $a + a^{-1} + 2 = 9$, 即 $a + a^{-1} = 7$,
则 $a^2 + a^{-2} + 2 = 49$, 即 $a^2 + a^{-2} = 47$.]

考点二

考向 1 典例 2 (1)AB (2)D (3)64

[(1) $\log_2 \frac{1}{25} \times \log_3 8 \times \log_{\frac{1}{5}} 27 = \frac{\lg \frac{1}{25}}{\lg 2} \times \frac{\lg 8}{\lg 3} \times \frac{\lg 27}{\lg \frac{1}{5}} = \frac{2 \lg \frac{1}{5}}{\lg 2} \times$

$\frac{3 \lg 2}{\lg 3} \times \frac{3 \lg 3}{\lg \frac{1}{5}} = 18$, 故 A 正确; $\ln e + \lg 1 + 2^{\log_2 3} + \ln 10^{\lg e} = 1 +$

$0 + 3 + 1 = 5$, 故 B 正确; $\log_3 \sqrt{27} - \log_3 2^{\log_2 3} - 2^{\log_2 3} + \lg \sqrt{2} +$

$\lg \sqrt{5} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} - 1 - 3 + \lg \sqrt{10} = \frac{3}{2} - 4 + \frac{1}{2} = -2$, 故 C 错误;

因为 $\log_2 [\log_3 (\lg x)] = 1$, 所以 $\log_3 (\lg x) = 2$, 所以 $\lg x = 9$,

所以 $x=10^9$, 故 D 错误.

故选 AB.

(2) 因为 $a=\lg 2, b=\lg 3$,

$$\begin{aligned}\text{所以 } \log_{12} 10 &= \frac{\lg 10}{\lg 12} = \frac{1}{\lg 4 + \lg 3} \\ &= \frac{1}{2\lg 2 + \lg 3} = \frac{1}{2a + b}.\end{aligned}$$

故选 D.

(3) 由题意 $\frac{1}{\log_5 a} - \frac{1}{\log_4 a} = \frac{3}{\log_2 a} - \frac{1}{2} \log_2 a = -\frac{5}{2}$, 整理得

$$(\log_2 a)^2 - 5\log_2 a - 6 = 0,$$

解得 $\log_2 a = -1$ 或 $\log_2 a = 6$. 又 $a > 1$,

所以 $\log_2 a = 6 = \log_2 2^6$, 故 $a = 2^6 = 64$.]

考向 2 典例 3 (1) A (2) e [(1) 由 $3^a = 5^b = 15$, 得 $a = \log_3 15, b = \log_5 15$,

$$\text{所以 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{\log_3 15} + \frac{1}{\log_5 15} = \log_{15} 3 + \log_{15} 5 = \log_{15} 15 = 1.$$

故选 A.

$$(2) f(\ln 2) f(\ln 4) = a^{\ln 2} a^{\ln 4} = a^{\ln 2 + \ln 4}$$

$$= a^{3\ln 2} = (a^{\ln 2})^3 = 8,$$

$$\therefore a^{\ln 2} = 2, \therefore a = e.]$$

考点三

典例 4 (1) D (2) B [(1) 设北极星的亮度为 I_1 , 牛郎星的亮度为 I_2 ,

$$\text{由题意可得 } 2 = -\frac{5}{2} \lg \frac{I_1}{I_0},$$

$$0.8 = -\frac{5}{2} \lg \frac{I_2}{I_0},$$

$$\text{所以 } I_1 = I_0 \cdot 10^{-\frac{4}{5}}, I_2 = I_0 \cdot 10^{-\frac{8}{25}}, \text{ 所以 } \frac{I_1}{I_2} = \frac{10^{-\frac{4}{5}}}{10^{-\frac{8}{25}}} = 10^{-\frac{12}{25}}.$$

故选 D.

$$(2) \text{由题意知, } k \log_2 (1.024 \times 10^9) - k \log_2 10^6 = 20,$$

$$\text{即 } k \log_2 \frac{1.024 \times 10^9}{10^6} = 20,$$

$$\text{所以 } k \log_2 1.024 = 20, \text{ 解得 } k = \frac{20}{\log_2 1.024} = \frac{20}{10} = 2,$$

$$\text{所以 } 2 \log_2 (4.096 \times 10^9) - 2 \log_2 (1.024 \times 10^9)$$

$$= 2 \log_2 \frac{4.096 \times 10^9}{1.024 \times 10^9} = 2 \log_2 4 = 2 \times 2 = 4.$$

故选 B.]

随堂·对点检测

1. C [若 $\log_2 x = 3$, 则 $x = 2^3 = 8$, 故 A 错误; 若 $e = \ln x$, 则 $x = e^e$, 故 B 错误; $\lg(\ln e) = \lg 1 = 0$, 故 C 正确; $5^{\log_5 \frac{1}{25}} = \frac{1}{25}$, 故 D 错误. 故选 C.]

2. BCD [$a^{\frac{4}{3}} a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{4}{3} + \frac{3}{4}} = a^{\frac{25}{12}} \neq a$, 故 A 错误;

$$(a^{\frac{1}{4}})^4 = a^{\frac{1}{4} \times 4} = a, \text{ 故 B 正确;}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ 故 C 正确;}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, \text{ 故 D 正确.}$$

故选 BCD.]

3. C [$f(t) = ma^t$, 第 3 天时其含量为 100, 第 7 天时其含量为 400,

$$\text{则 } \begin{cases} f(3) = ma^3 = 100, \\ f(7) = ma^7 = 400, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = \sqrt{2}, \\ m = 25\sqrt{2} \end{cases} \text{ (负值已舍去),}$$

所以 $f(t) = 25\sqrt{2} \times (\sqrt{2})^t$, 则 $f(t_1) = 25\sqrt{2} \times (\sqrt{2})^{t_1} = 800$, 解得 $t_1 = 9$.

故选 C.]

4. $\sqrt{35}$ [因为正实数 m, n, t 满足 $5^m = 7^n = t$,

$$\text{所以 } m = \log_5 t, n = \log_7 t,$$

$$\text{所以 } \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{\log_5 t} + \frac{1}{\log_7 t} = \log_t 5 + \log_t 7 = \log_t 35 = 2,$$

$$\text{所以 } t^2 = 35,$$

又因为 $t > 0$,

$$\text{所以 } t = \sqrt{35}.]$$

第 15 课时 指数函数

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 2 $(0, +\infty)$ $(0, 1)$ $y > 1$ $0 < y < 1$ $y > 1$ $0 < y < 1$
1 增 减

链教材·夯基固本

1. $f(x) = 9^x$ [设指数函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 则 $81 = a^2$,

所以 $a = 9$, 所以这个指数函数的解析式为 $f(x) = 9^x$.]

2. D [$b = 2^{-0.4} < 2^0 = 1, c = 9^{0.4} = 3^{0.8} > 3^{0.7} = a > 3^0 = 1$, 所以 $b < a < c$. 故选 D.]

3. CD [当 $a > 1$ 时, $y = a^x$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增,

$$\text{此时 } f(1) - f(0) = a - a^0 = a - 1 = \frac{1}{2},$$

$$\text{解得 } a = \frac{3}{2};$$

当 $0 < a < 1$ 时, $y = a^x$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减,

$$\text{此时 } f(0) - f(1) = a^0 - a = 1 - a = \frac{1}{2},$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{2}.$$

所以实数 a 的值为 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$. 故选 CD.]

4. $(-\infty, 2)$ [由指数函数的性质, 得 $x - 1 < 3 - x$, 解得 $x < 2$, 所以实数 x 的取值范围是 $(-\infty, 2)$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1) ABD (2) 1.6 [(1) 对于 A, 令 $2a^2 - 3a + 2 = 1$ 且 $a > 0, a \neq 1$, 则 $a = \frac{1}{2}$, A 正确;

对于 B, 不论 $0 < a < 1$, 还是 $a > 1$, 值域都为 $(0, +\infty)$, B 正确; 对于 C, $f(x) = a^x$ 的图象向左平移一个单位长度得到 $y = a^{x+1}$ 的图象, C 错误;

对于 D, 令 $2x + 3 = 0$, 则 $x = -\frac{3}{2}, y = 0$, 所以函数 $y = a^{2x+3} -$

1 ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 恒过定点 $(-\frac{3}{2}, 0)$, D 正确.

故选 ABD.

(2) 由题图可得, $a = 2, f(t) = 2^t$,

当浮萍面积为 4 m^2 时, $2^{t_1} = 4$, 即 $t_1 = 2$,

当浮萍面积为 12 m^2 时, $2^{t_2} = 12$, 即 $t_2 = \log_2 12 = 2 + \log_2 3$,

$$\text{则 } t_2 - t_1 = \log_2 3 \approx 1.6.]$$

考点二

考向 1 典例 2 B [$\because$ 函数 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$, 它的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 且当 $x \geq 1$ 时, 函数 $f(x) = 3^x - 1$ 单调递增,

$\therefore$ 当 $x < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递减, 且 $f(\frac{3}{2}) = f(\frac{1}{2})$.

$$\therefore \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 1,$$

$$\therefore f\left(\frac{2}{3}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{1}{3}\right), \text{即 } f\left(\frac{2}{3}\right) < f\left(\frac{3}{2}\right) < f\left(\frac{1}{3}\right).$$

故选 B.]

多维变迁

D [函数 $f(x) = e^x + e^{-x}$ 为偶函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

$$\therefore a = f(2^{1.1}), b = f(-1) = f(1), c = f(\log_2 3), 1 < \log_2 3 < 2 < 2^{1.1},$$

$\therefore$ 实数 a, b, c 的大小关系为 $b < c < a$.

故选 D.]

考向 2 典例 3 (1)**D** (2)**B** [(1) $\because y = 4^x - 3 \cdot 2^x + 3$ 的值域为 $[1, 7]$,

$$\therefore 1 \leq 4^x - 3 \cdot 2^x + 3 \leq 7, \text{且 } 2^x > 0,$$

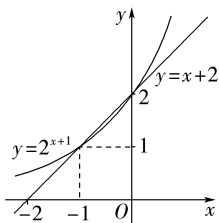
$$\therefore 0 < 2^x \leq 1 \text{ 或 } 2 \leq 2^x \leq 4, \therefore x \leq 0 \text{ 或 } 1 \leq x \leq 2.$$

(2) $\because a^x < 1$, 当 $a > 1$ 时, $y = a^x$ 是增函数,

$$\therefore p: \{x | x < 0\}.$$

对于不等式 $2^{x+1} < x+2$,

作出函数 $y = 2^{x+1}$ 与 $y = x+2$ 的图象, 如图所示.



由图象可知, 不等式 $2^{x+1} < x+2$ 的解集为 $\{x | -1 < x < 0\}$,

$$\therefore q: \{x | -1 < x < 0\}.$$

$$\text{又 } \because \{x | -1 < x < 0\} \subsetneq \{x | x < 0\},$$

$\therefore p$ 是 q 的必要不充分条件.]

考向 3 典例 4 解: (1) 因为函数 $f(x) = 1 - \frac{a}{2^x + 1}$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数,

$$\text{所以 } f(0) = 0, \text{即 } 1 - \frac{a}{2} = 0, \text{解得 } a = 2,$$

$$\text{当 } a = 2 \text{ 时, } f(x) = 1 - \frac{2}{2^x + 1},$$

$$\text{所以 } f(-x) + f(x) = 1 - \frac{2}{2^{-x} + 1} + 1 - \frac{2}{2^x + 1} = 2 -$$

$$\frac{2(2^x + 1)}{2^x + 1} = 0 \text{ 对任意实数 } x \text{ 恒成立, 所以 } a = 2.$$

因为 $y = 2^x$ 是增函数, 所以 $y = 2^x + 1$ 是增函数, 所以 $y =$

$$\frac{2}{2^x + 1} \text{ 是减函数,}$$

$$\text{所以 } y = -\frac{2}{2^x + 1} \text{ 是增函数,}$$

$$\text{所以 } f(x) = 1 - \frac{2}{2^x + 1} \text{ 是增函数.}$$

$$(2) \text{ 由 } y = 2^x > 0, \text{ 得 } y = 2^x + 1 > 1, \text{ 所以 } 0 < \frac{2}{2^x + 1} < 2,$$

$$\text{所以 } -2 < -\frac{2}{2^x + 1} < 0, \text{ 所以 } -1 < 1 - \frac{2}{2^x + 1} < 1,$$

$$\text{所以函数 } y = f(x) = 1 - \frac{2}{2^x + 1} \text{ 的值域为 } (-1, 1).$$

随堂·对点检测

1. **D** [当 $x = 1$ 时, $3^1 > 2^1 > \left(\frac{1}{2}\right)^1 > \left(\frac{1}{3}\right)^1$, 所以图象①, ②,

$$\text{③, ④对应的函数依次为 } y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, y = 3^x \text{ 和 } y =$$

2^x . 故选 D.]

2. **A** [令 $x - 2 = 0$, 得 $x = 2$,

将 $x = 2$ 代入函数可得 $y = 3a^0 + 3 = 6$,

即函数 $y = 3a^{x-2} + 3$ 的图象恒过点 $(2, 6)$.

故选 A.]

$$3. \text{ **D** } [\because a = (\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}, b = 9^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9}, c = 4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{16}, \therefore \sqrt[3]{9} < \sqrt[3]{16} < \sqrt[3]{27} = 3,$$

$\therefore c > b$, 且 $a > c$, 即 $a > c > b$, 故选 D.]

4. **D** [法一(复合函数法): 因为 $y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $y = x(x - a)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减, 所以 $\frac{a}{2} \geq 1$, 解得 $a \geq 2$.

故选 D.]

法二(特值法): 取 $a = 3$, 则 $y = x(x - 3) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 所以 $f(x) = 2^{x(x-3)}$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 所以 $a = 3$ 符合题意, 排除 A, B, C. 故选 D.]

5. $(-3, 2)$ [函数 $y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则

$$2^{x^2 - 2x - 3} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3(x-1)} \Leftrightarrow 2^{x^2 - 2x - 3} < 2^{-3(x-1)} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < -3(x-1),$$

$$\text{即 } x^2 + x - 6 < 0, \text{ 解得 } -3 < x < 2,$$

所以原不等式的解集为 $(-3, 2)$.]

第 16 课时 对数函数

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (2) $(0, +\infty)$ $\mathbf{R}$ (1, 0) 增 减

知识点 2 $y = \log_a x$ $y = x$

链教材·夯基固本

1. **C** [根据 $f(2) < 1, f(3) > 1$, 可知 $y = \ln x$ 满足. 故选 C.]

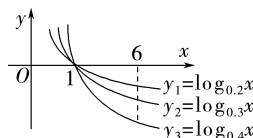
2. **A** [根据复合函数单调性的同增异减原则, 可知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增,

$$\text{因为 } 0 \leq x \leq 1, \text{ 所以 } 1 \leq x + 1 \leq 2,$$

$$\text{则 } \log_2 1 \leq \log_2(x + 1) \leq \log_2 2, \text{ 即 } f(x) \in [0, 1].]$$

3. $(1, +\infty)$ [因为 $y = \log_{0.7} x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且是减函数, 故 $2m > m - 1 > 0$, 解得 $m > 1$.]

4. $a > b > c$ [法一: 如图, 作出函数 $y_1 = \log_{0.2} x, y_2 = \log_{0.3} x, y_3 = \log_{0.4} x$ 的图象,



由图可知, 当 $x = 6$ 时, $\log_{0.2} 6 > \log_{0.3} 6 > \log_{0.4} 6$,

即 $a > b > c$.

法二: 易知 $0 > \log_{0.4} 0.3 > \log_{0.3} 0.2 > \log_{0.2} 0.4$,

$$\text{所以 } \frac{1}{\log_{0.4} 0.3} < \frac{1}{\log_{0.3} 0.2} < \frac{1}{\log_{0.2} 0.4},$$

$$\text{即 } \log_{0.4} 6 < \log_{0.3} 6 < \log_{0.2} 6,$$

即 $a > b > c$.]

5. (1) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ (2) $y = \log_5 x$ [(1) 因为对数函数 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

的底数是 $\frac{1}{3}$, 所以它的反函数是指数函数 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

(2) 因为指数函数 $y = 5^x$ 的底数是 5, 所以它的反函数是对数函数 $y = \log_5 x$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1) BC (2) A (3) $(1, +\infty)$ [(1) 对于 A,

$$\begin{cases} a^2 - 5a + 6 = 0, \\ a - 1 > 0, \\ a - 1 \neq 1, \end{cases} \quad \text{解得 } a = 3, \text{ A 错误;}$$

对于 B, 由题意可得, $\begin{cases} x - 2 \neq 0, \\ 3 - x > 0, \end{cases}$ 解得 $x < 3$ 且 $x \neq 2$, B 正确;

对于 C, 令 $4x - 3 = 1$, 解得 $x = 1$, 则 $f(1) = \log_a 1 = 0$, C 正确;
对于 D, $x^2 - 2x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, 可知当 $x > 2$ 时, $y = x^2 - 2x$ 单调递增, 结合复合函数的单调性可知 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(2, +\infty)$, D 错误.

(2) 由函数图象可知, $f(x)$ 为增函数, 故 $a > 1$.

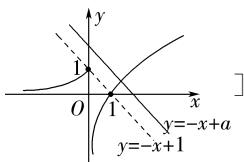
函数图象与 y 轴的交点坐标为 $(0, \log_a b)$,

由函数图象可知 $-1 < \log_a b < 0$,

$$\text{解得 } \frac{1}{a} < b < 1.$$

综上, $0 < a^{-1} < b < 1$.

(3) 如图, 在同一平面直角坐标系中分别作出 $y = f(x)$ 与 $y = -x + a$ 的图象, 其中 a 表示直线在 y 轴上的截距. 由图象可知, 当 $a > 1$ 时, 直线 $y = -x + a$ 与 $f(x)$ 的图象只有一个交点.

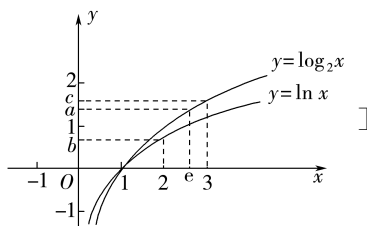


考点二

考向 1 典例 2 D [法一(中间量法): 因为 $a = \log_2 e > 1$, $b =$

$$\ln 2 \in (0, 1), c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \log_2 3 > \log_2 e > 1, \text{ 所以 } c > a > b.$$

法二(图象法): $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \log_2 3$, 在同一平面直角坐标系中作出函数 $y = \log_2 x$, $y = \ln x$ 的图象, 如图. 由图可知 $c > a > b$.



考向 2 典例 3 B [因为 $\log_{2a}(4a^2 + 1) < 0$, $4a^2 + 1 > 1$, 结合对数函数图象的性质得 $0 < 2a < 1$, 所以 $4a^2 + 1 > 4a > 1$, 所以

$$\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}. \text{ 故选 B.}]$$

考向 3 典例 4 解: 由 $x > 0$ 且 $4 - x > 0$, 得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 4)$.

(1) 证明: 因为函数 $f(4 - x) = \log_2(4 - x) + \log_2 x = f(x)$, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称.

(2) 函数 $f(x) = \log_2 x + \log_2(4 - x) = \log_2(4x - x^2) = \log_2[-(x - 2)^2 + 4]$ ($0 < x < 4$),

当 $x = 2$ 时, $4x - x^2$ 取到最大值 4,

此时 $f(x) = \log_2 x + \log_2(4 - x)$ 取到最大值 $\log_2 4 = 2$, 所以函数 $f(x)$ 的最大值为 2.

母题探究

1. 解: $f(x) = \log_2(4x - x^2)$ ($0 < x < 4$) 可以看作是由函数 $y = \log_2 u$ 和 $u = -x^2 + 4x$ ($0 < x < 4$) 复合而成的,

因为 $y = \log_2 u$ 是定义域上的增函数, $u = -x^2 + 4x$ ($0 < x < 4$) 在 $(0, 2)$ 上单调递增, 在 $(2, 4)$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, 2)$, 单调递减区间是 $(2, 4)$.

2. 解: 因为 $f(4 - x) + f(x) = 2f(x) = 0$ 不恒成立, 所以 $f(x)$ 的图象不关于点 $(2, 0)$ 对称.

教材拓展

典例 5 A $[a = 3\log_3 3 = \log_8 27 = \log_3 3^3 = \log_2 3,$

$$b = -\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 16 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4} = \log_3 4, c = \log_4 5,$$

利用对数型糖水不等式得 $\log_2 3 > \log_3 4 > \log_4 5$, 即 $a > b > c$.]

随堂·对点检测

1. A [因为 $a > 1$, 所以 $y = a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 排除 C;

又 $y = \log_a(-x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0)$,

所以由复合函数的单调性可知, $y = \log_a(-x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 且恒过点 $(-1, 0)$, 排除 B, D.

故选 A.]

2. A [因为 $\log_3 \frac{1}{5} < \log_3 1 = 0$, 所以 $a < 0$,

因为 $4^{0.3} > 4^0 = 1$, 所以 $b > 1$,

$$\text{因为 } \log_{\frac{1}{3}} 1 < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3},$$

所以 $0 < c < 1$,

所以 $b > c > a$.

故选 A.]

3. A [因为 $y = \log_{0.3} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $\log_{0.3}(3x) <$

$$\log_{0.3}(x+1), \begin{cases} 3x > 0, \\ 3x > x+1, \text{ 解得 } x > \frac{1}{2}, \text{ 即 } x \text{ 的取值范围是 } (\frac{1}{2}, +\infty). \\ x+1 > 0, \end{cases}$$

故选 A.]

4. $-\frac{1}{4}$ [依题意得 $f(x) = \frac{1}{2} \log_2 x \cdot (2 + 2\log_2 x) =$

$$(\log_2 x)^2 + \log_2 x = \left(\log_2 x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}, \text{ 当 } \log_2 x =$$

$-\frac{1}{2}$, 即 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立, 所以函数 $f(x)$ 的最小值为

$$-\frac{1}{4}.]$$

* 第 17 课时 指、对、幂的大小比较(进阶课)

类型一

典例 1 BD [对于 A, $y = 0.6^x$ 单调递减, 所以 $0.6^{0.6} < 0.6^{0.5}$, 故 A 错误;

对于 B, $y = \log_6 x$ 单调递增, 所以 $\log_6 0.6 > \log_6 0.5$,

又 $\log_6 0.5 > \log_5 0.5$, 所以 $\log_6 0.6 > \log_5 0.5$, 故 B 正确;

对于 C, $0.6^{0.5} \in (0, 1)$, $\log_{0.6} 0.5 > \log_{0.6} 0.6 = 1$, 所以 $0.6^{0.5} < \log_{0.6} 0.5$, 故 C 错误;

对于 D, $\log_3 7 = \log_9 49$, $y = \log_9 x$ 单调递增, 所以 $\log_9 49 > \log_9 40$, 所以 $\log_3 7 > \log_9 40$, 故 D 正确. 故选 BD.]

类型二

典例 2 C [因为函数 $y = 4^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 且 $0 < 0.1 < 1$, 所以 $4^0 < 4^{0.1} < 4^1$, 即 $1 < a < 4$. 因为函数 $y = 0.1^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数, 且 $0 < 0.4 < 1$, 所以 $0.1^1 < 0.1^{0.4} < 0.1^0$, 即 $0.1 < b < 1$.

因为函数 $y = \log_4 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $0.1 < 1$, 所以 $\log_4 0.1 < \log_4 1 = 0$, 即 $c < 0$. 所以 $c < b < a$. 故选 C.]

类型三

典例 3 D [法一(特殊值法): 取 $z = 1$, 则由 $2^x = 3^y = 5$ 得 $x = \log_2 5$, $y = \log_3 5$, 所以 $2x = \log_2 25 < \log_2 32 = 5z$, $3y =$

$\log_3 125 < \log_3 243 = 5z$, 所以 $5z$ 最大. 取 $y=1$, 则由 $2^x=3$ 得 $x=\log_2 3$, 所以 $2x=\log_2 9 > 3y$.

综上可得, $3y < 2x < 5z$.

法二(作差法): 令 $2^x=3^y=5^z=k$, 由 x, y, z 为正数, 知 $k > 1$,

$$\text{则 } x = \frac{\lg k}{\lg 2}, y = \frac{\lg k}{\lg 3}, z = \frac{\lg k}{\lg 5},$$

因为 $k > 1$, 所以 $\lg k > 0$,

$$\text{所以 } 2x - 3y = \frac{2\lg k}{\lg 2} - \frac{3\lg k}{\lg 3}$$

$$= \frac{\lg k \cdot (2\lg 3 - 3\lg 2)}{\lg 2 \cdot \lg 3}$$

$$= \frac{\lg k \cdot \lg \frac{9}{8}}{\lg 2 \cdot \lg 3} > 0,$$

故 $2x > 3y$,

$$2x - 5z = \frac{2\lg k}{\lg 2} - \frac{5\lg k}{\lg 5}$$

$$= \frac{\lg k \cdot (2\lg 5 - 5\lg 2)}{\lg 2 \cdot \lg 5}$$

$$= \frac{\lg k \cdot \lg \frac{25}{32}}{\lg 2 \cdot \lg 5} < 0,$$

故 $2x < 5z$.

所以 $3y < 2x < 5z$.

法三(作商法): 令 $2^x=3^y=5^z=k$, 由 x, y, z 为正数, 知 $k > 1$.

$$\text{则 } x = \frac{\lg k}{\lg 2}, y = \frac{\lg k}{\lg 3}, z = \frac{\lg k}{\lg 5}.$$

$$\text{所以 } \frac{2x}{3y} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\lg 3}{\lg 2} = \frac{\lg 9}{\lg 8} > 1, \text{ 即 } 2x > 3y,$$

$$\frac{5z}{2x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\lg 2}{\lg 5} = \frac{\lg 32}{\lg 25} > 1, \text{ 即 } 5z > 2x.$$

所以 $5z > 2x > 3y$.

第 18 课时 函数的图象

理法先行 · 题练固本

梳必备 · 破题有方

知识点 2 (1) $f(x+h)$ $f(x-h)$ (2) $-f(x)$ $f(-x)$

$-f(-x)$ $\log_a x (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1)$ (3) $f(ax)$ $af(x)$

(4) $|f(x)|$ $f(|x|)$

链教材 · 夯基固本

1. **C** [因为题图 2 中的图象是在题图 1 的基础上, 去掉函数 $y=f(x)$ 图象在 y 轴右侧的部分, 然后将 y 轴左侧的图象翻折到 y 轴右侧得到的, 所以题图 2 中的图象对应的函数可能是 $y=f(-|x|)$. 故选 C.]

2. 上 $\log_2(x+2)$

3. $(-\frac{1}{2}, 0)$ [由指数函数 $y=(\frac{b}{a})^x$ 的图象可知, $0 < \frac{b}{a} < 1$,

所以 $-\frac{1}{2} < -\frac{b}{2a} < 0$, 所以二次函数 $y=ax^2+bx$ 图象顶点的

横坐标的取值范围是 $(-\frac{1}{2}, 0)$.]

考点深研 · 题型突破

考点一

典例 1 解: (1) 首先作出 $y=\lg x$ 的图象, 然后将其向右平移 1 个单位长度, 得到 $y=\lg(x-1)$ 的图象, 再把所得图象在 x 轴下方的部分翻折到 x 轴上方, 即得到所求函数 $y=|\lg(x-1)|$ 的图象, 如图 1 所示(实线部分).

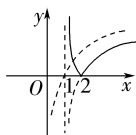


图 1

(2) 将 $y=2^x$ 的图象向左平移 1 个单位长度, 得到 $y=2^{x+1}$ 的

图象, 再将所得图象向下平移 1 个单位长度, 得到 $y=2^{x+1}-1$ 的图象, 如图 2 所示.

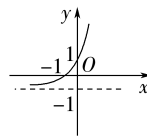


图 2

(3) $y=x^2-|x|-2 = \begin{cases} x^2-x-2, & x \geq 0 \\ x^2+x-2, & x < 0 \end{cases}$, 其图象如图 3 所示.

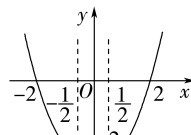


图 3

(4) 因为 $y = \frac{2x-1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$, 所以该函数的图象可由 $y = \frac{1}{x}$ 的图象向右平移 1 个单位长度, 再向上平移 2 个单位长度得到, 如图 4 所示.

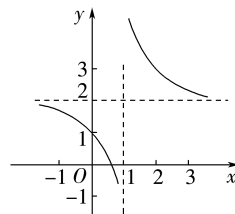


图 4

考点二

考向 1 典例 2 B $[f(-x) = -x^2 + (e^{-x} - e^x) \sin(-x) = -x^2 + (e^x - e^{-x}) \sin x = f(x)]$,

又函数定义域为 $[-2.8, 2.8]$, 故该函数为偶函数, 图象关于 y 轴对称, 可排除 A, C,

$$\text{又 } f(1) = -1 + \left(e - \frac{1}{e}\right) \sin 1 > -1 + \left(e - \frac{1}{e}\right) \sin \frac{\pi}{6} = \frac{e}{2} -$$

$$1 - \frac{1}{2e} > 0, \text{ 故可排除 D.}$$

故选 B.]

考向 2 典例 3 D [由题图可知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x$

$\neq \pm 1\}$, 且 $f(x)$ 为偶函数, 易得 $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ 与 $f(x) =$

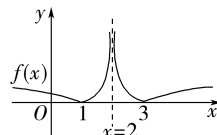
$\frac{x}{|x|-1}$ 均为奇函数, 排除选项 A, B; 由题图可知当 $x > 1$ 时,

$$f(x) > 0, \text{ 易得当 } x > 1 \text{ 时, } f(x) = \frac{|x|}{1-x^2} < 0, f(x) = \frac{|x|}{x^2-1} >$$

0, 排除选项 C. 故选 D.]

考点三

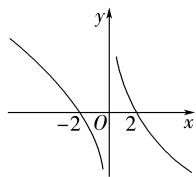
典例 4 (1) ABC (2) B [(1) 由题意知 $f(x) = |\lg|2-x||$. 将函数 $y=\lg x$ 的图象关于 y 轴对称, 可得 $y=\lg|x|$ 的图象, 再将 $y=\lg|x|$ 的图象位于 x 轴下方的部分对折至 x 轴上方, 可得 $y=|\lg|x||$ 的图象, 再将 $y=|\lg|x||$ 的图象向右平移 2 个单位长度, 可得 $f(x)$ 的图象, 如图所示.



结合图象, 可知 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 内单调递增, $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, $f(x)$ 的图象与 $y=m (m > 0)$ 有且仅有 4 个

交点,故 A,B,C 正确. 令 $x_1 = \frac{21}{10}$, $x_2 = 12$, 则 $f(x_1) = f(x_2) = 1$, 但 $x_1 + x_2 = \frac{21}{10} + 12 \neq 4$, 故 D 错误. 故选 ABC.

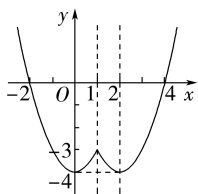
(2) 由题意知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减. 因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 如图



所示. 要使 $(x-1)f(x) > 0$, 则当 $x > 1$ 时, 有 $f(x) > 0$, 得 $1 < x < 2$; 当 $x < 1$ 时, 有 $f(x) < 0$, 得 $-2 < x < 0$. 综上, 满足 $(x-1)f(x) > 0$ 的 x 的取值范围是 $(-2, 0) \cup (1, 2)$. 故选 B.]

多维变迁

C [由 $f(x+1) = f(1-x)$, 得 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 且当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = x^2 - 4x$, 作出 $f(x)$ 的图象如图所示.



由图象可知, $f(x)$ 的图象不关于坐标原点对称, 所以 $f(x)$ 不是奇函数, A 错误;

$f(x)$ 在 $(1, 2)$ 内单调递减, B 错误; $f(x)_{\min} = f(0) = f(2) = -4$, C 正确;

$f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递增, D 错误. 故选 C.]

随堂·对点检测

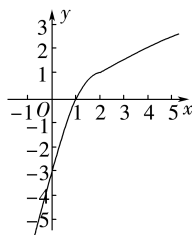
1. C [由 $f(x) = (e^x - e^{-x})\cos x$, 可知 $f(-x) = (e^{-x} - e^x)\cos(-x) = -(e^x - e^{-x})\cos x = -f(x)$, 函数 $f(x)$ 是奇函数, $f(x)$ 的图象关于原点对称, 排除 B, D; 又 $f(-\frac{\pi}{2}) = f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$, 函数 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上有 3 个零点, 排除 A. 故选 C.]

2. D [由题图知, 函数图象关于 y 轴对称, 其为偶函数, 故排除 A, B;

当 $x > 0$ 时, $\frac{5(e^x + e^{-x})}{x^2 + 2} > 0$ 恒成立, 排除 C.

故选 D.]

3. $(-\infty, \frac{5}{2})$ [作出函数 $f(x)$ 的图象如图



所示, 由图可知, 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 因为 $f(4) = \log_2 4 = 2$, 所以 $f(2x-1) < 2$ 等价于 $f(2x-1) < f(4)$, 即 $2x-1 < 4$, 解得 $x < \frac{5}{2}$, 所以不等式 $f(2x-1) < 2$

的解集是 $(-\infty, \frac{5}{2})$.]

4. 解: (1) 根据绝对值的意义, 可将函数式化为分段函数 $y = \begin{cases} 1, & x \geq 1, \\ 2x-1, & x < 1, \end{cases}$ 可知其图象是由两条射线组成, 如图 1 所示.

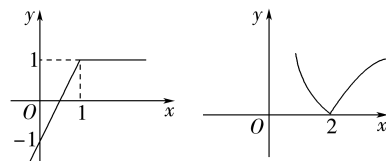


图 1

图 2

(2) 先作出 $y = \log_2 x$ 的图象, 再将其图象向下平移一个单位长度, 保留 x 轴上方的部分, 将 x 轴下方的图象翻折到 x 轴上方, 即得 $y = |\log_2 x - 1|$ 的图象, 如图 2 所示.

第 19 课时 函数的零点与方程的解

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1) $f(x) = 0$ (2) 零点 x 轴

(3) 连续不断 $f(a)f(b) < 0$ (a, b) $f(c) = 0$

知识点 2 连续不断 $f(a)f(b) < 0$ 零点

链教材·夯基固本

1. B [由 $\begin{cases} x \leq 0, \\ x^2 + x - 2 = 0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x > 0, \\ -1 + \ln x = 0, \end{cases}$ 解得 $x = -2$ 或 $x = e$, 故 $f(x)$ 有 2 个零点. 故选 B.]

2. B [函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(1) = -1$, $f(2) = 1$, 则 $f(1)f(2) < 0$, 故 $f(x)$ 的零点所在的区间为 $(1, 2)$. 故选 B.]

3. $(-2, 2)$ [由题意得 $f(-1)f(1) = (-2+a)(2+a) < 0$, 解得 $-2 < a < 2$.]

4. A [根据二分法的概念可知选项 A 中函数不能用二分法求零点.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1) B (2) C [(1) 函数 $f(x) = e^x + 4x - 4$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

$f(-1) = \frac{1}{e} - 8 < 0$, $f(0) = 1 - 4 = -3 < 0$, $f(1) = e + 4 - 4 = e > 0$,

故函数 $f(x)$ 的零点所在区间为 $(0, 1)$.

故选 B.

(2) 因为区间 $(2, 3)$ 的长度为 1, 经过二分法的一次操作, 区间长度变为原来的一半, 所以经过 n ($n \in \mathbf{N}_+$) 次二分法的操作,

区间的长度为 $\frac{1}{2^n}$, 由 $\frac{1}{2^n} < 0.1$, 解得 $n \geq 4$.

故选 C.]

多维变迁

1. B [易知 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 又 $f(0) = 1 > 0$, $f(0.3) = 0.3^{0.3} - \sqrt{0.3} = 0.3^{0.3} - 0.3^{0.5} > 0$, $f(0.5) = 0.3^{0.5} - \sqrt{0.5} = \sqrt{0.3} - \sqrt{0.5} < 0$, 所以 $f(x)$ 的零点所在区间是 $(0.3, 0.5)$. 故选 B.]

2. 1.56 [注意到 $f(1.556 2) \approx -0.029$ 和 $f(1.562 5) \approx 0.003$, 显然 $f(1.556 2)f(1.562 5) < 0$, 又 $|1.556 2 - 1.562 5| = 0.006 3 < 0.01$, 所以近似解可取 1.56.]

考点二

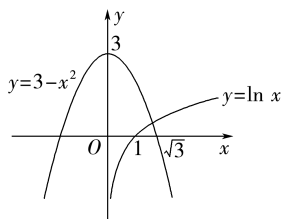
典例 2 (1) D (2) 1 [(1) 当 $x \leq 0$ 时, $x^2 - 1 = 0$, 解得 $x = -1$; 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x - 2 + \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 并且 $f(1) = 1 - 2 + \ln 1 = -1 < 0$, $f(2) = 2 - 2 + \ln 2 = \ln 2 > 0$, 即 $f(1)f(2) < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 内必有一个零点.

综上, 函数 $f(x)$ 的零点个数为 2. 故选 D.

(2) 令 $f(x)=0$, 可得方程 $\ln x + x^2 - 3 = 0$, 即 $\ln x = 3 - x^2$, 故原函数的零点个数即为函数 $y = \ln x$ 与 $y = 3 - x^2$ 图象的交点个数.

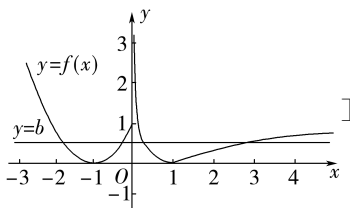
在同一平面直角坐标系中作出两个函数的大致图象(如图).



由图可知, 函数 $y = 3 - x^2$ 与 $y = \ln x$ 的图象只有一个交点, 故函数 $f(x) = \ln x + x^2 - 3$ 只有一个零点.]

考点三

考向 1 典例 3 A [依题意, 函数 $g(x) = f(x) - b$ 有四个不同的零点, 即方程 $f(x) = b$ 有四个解, 转化为函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = b$ 有四个交点, 由函数 $y = f(x)$ 的解析式可知, 当 $x \in (-\infty, -1]$ 时, 函数单调递减, $y \in [0, +\infty)$; 当 $x \in (-1, 0]$ 时, 函数单调递增, $y \in (0, 1]$; 当 $x \in (0, 1)$ 时, 函数单调递减, $y \in (0, +\infty)$; 当 $x \in [1, +\infty)$ 时, 函数单调递增, $y \in [0, +\infty)$, 结合图象, 可知实数 b 的取值范围为 $(0, 1]$. 故选 A.



母题探究

$[0, 1]$ [由本例题的解题过程可知, $x_1 + x_2 = -2$, $x_3 x_4 = 1$, 所以 $x_1 x_2 x_3 x_4 = x_1 x_2 = x_1(-2 - x_1) = -x_1^2 - 2x_1$, 又 $-2 \leq x_1 < -1$, 所以 $-x_1^2 - 2x_1 \in [0, 1]$, 故 $x_1 x_2 x_3 x_4$ 的取值范围是 $[0, 1]$.]

考向 2 典例 4 B [由 $y_1 = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $y_2 = x^2 + m$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 得函数 $f(x) = \log_2 x + x^2 + m$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

因为函数 $f(x) = \log_2 x + x^2 + m$ 在区间 $(1, 2)$ 上存在零点,

$$\text{所以 } \begin{cases} f(1) < 0, \\ f(2) > 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} \log_2 1 + 1^2 + m < 0, \\ \log_2 2 + 2^2 + m > 0, \end{cases}$$

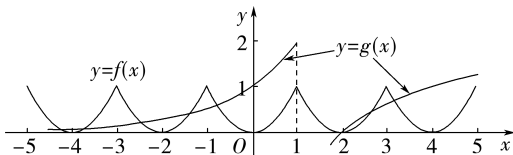
解得 $-5 < m < -1$,

所以实数 m 的取值范围是 $(-5, -1)$.

故选 B.]

多维变迁

A [函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 在区间 $[-5, 5]$ 上恰有 8 个零点, 即函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 的图象在区间 $[-5, 5]$ 上有 8 个交点, 由 $f(x+2) = f(x)$ 知, $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上周期为 2 的函数, 作函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 在区间 $[-5, 5]$ 上的图象, 如图所示,



由图象知, 当 $x \in [-5, 1]$ 时, 图象有 5 个交点, 故在 $(1, 5]$ 上有 3 个交点即可,

故 $\begin{cases} \log_a(3-1) < 1, \\ \log_a(5-1) > 1, \end{cases}$ 解得 $2 < a < 4$. 故选 A.]

随堂·对点检测

1. **B** [由 $f(x) = x + \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \log_2 \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} - \log_2 3 < \frac{1}{3} - \log_2 2 = -\frac{2}{3} < 0,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \log_2 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0,$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} + \log_2 \frac{2}{3} = \frac{5}{3} - \log_2 3 = \frac{1}{3}(5 - 3\log_2 3) =$$

$$\frac{1}{3}(\log_2 32 - \log_2 27) > 0, \text{ 则函数 } f(x) = x + \log_2 x \text{ 的零点所在}$$

的区间为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$. 故选 B.]

2. **C** [由 $f(x) = \log_2 x - \sqrt{x} = 0$,

$$\text{得 } \log_2 x = \sqrt{x},$$

函数 $y = \log_2 x$ 与 $y = \sqrt{x}$ 都是 $(0, +\infty)$ 上的增函数,

$$\text{且 } \log_2 4 = \sqrt{4} = 2, \log_2 16 = \sqrt{16} = 4,$$

且当 $x > 16$ 时, 函数 $y = \sqrt{x}$ 比 $y = \log_2 x$ 增长的快,

则函数 $y = \sqrt{x}$ 与 $y = \log_2 x$ 的图象只有两个交点, 也就是函数

$f(x) = \log_2 x - \sqrt{x}$ 的零点个数是 2. 故选 C.]

3. 0 或 $-\frac{1}{4}$ [当 $a = 0$ 时, $f(x) = -x - 1$,

$$\text{令 } f(x) = 0 \text{ 得 } x = -1,$$

故 $f(x)$ 只有一个零点为 -1 .

$$\text{当 } a \neq 0 \text{ 时, 则 } \Delta = 1 + 4a = 0, \therefore a = -\frac{1}{4}.$$

4. $(0, 3)$ [令 $f(x) = 0$, 则 $x \cdot 2^x - kx - 2 = 0$, 即 $k = 2^x - \frac{2}{x}$, 即

$y = k$ 与 $g(x) = 2^x - \frac{2}{x}$ 的图象在 $(1, 2)$ 内有交点. 因为 $y = 2^x$

和 $y = -\frac{2}{x}$ 在 $(1, 2)$ 内单调递增, 所以 $g(x) = 2^x - \frac{2}{x}$ 在 $(1, 2)$

内单调递增, 所以 $g(1) < g(x) < g(2)$, 即 $0 < g(x) < 3$, 所以 $0 < k < 3$, 即实数 k 的取值范围是 $(0, 3)$.]

第 20 课时 函数模型及其应用

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 递增 递增 越快 越慢 y 轴 x 轴

链教材·夯基固本

1. **D** [结合函数的性质可知, 几种函数模型中, 指数函数的增长速度最快. 故选 D.]

2. **B** [由题图可知, 函数在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 且散点分布在一曲线附近,

函数 $y = a \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x + b$ 的图象为一条曲线, 且当 $a > 0$ 时, 该

函数在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 符合题意.

故选 B.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1)**B** (2)**B** [(1) 水位由高变低, 排除 C, D. 流完半缸水前水位下降速度先快后慢, 流完半缸水后水位下降速度先慢后快.

(2) A 选项, 由散点图知身高 y 随时间 x 的变化不是线性增长, 故 A 错误; C 选项, 指数函数模型中 y 随 x 的增长越来越快,

与图象不符合;D选项,对数函数模型在 $x=0$ 时没有意义;B选项符合散点图中 y 随 x 的增长越来越慢,且在 $x=0$ 时有意义,故选 B.]

考点二

典例 2 解: (1) 将 $x=8\ 100, x_0=4$ 代入 $v=\frac{1}{2}\log_3 \frac{x}{100}-\lg x_0$,

$$\text{得 } v=\frac{1}{2}\log_3 81-\lg 4=2-2\lg 2\approx 2-0.6=1.4,$$

所以候鸟的飞行速度约是 1.4 km/min.

(2) 设雄性候鸟每分钟的耗氧量为 x_1 , 雌性候鸟每分钟的耗氧量为 x_2 ,

$$\text{依题意可得 } \begin{cases} 2.5=\frac{1}{2}\log_3 \frac{x_1}{100}-\lg x_0, \\ 1.5=\frac{1}{2}\log_3 \frac{x_2}{100}-\lg x_0, \end{cases}$$

$$\text{两式相减可得 } 1=\frac{1}{2}\log_3 \frac{x_1}{x_2}, \text{ 解得 } \frac{x_1}{x_2}=9.$$

故此时雄性候鸟每分钟的耗氧量是雌性候鸟每分钟的耗氧量的 9 倍.

多维变迁

C [依题意可知, 当 $t=0$ 时, $\mu(t)=6.05$,

$$\text{即 } 6.05=\lambda e^{-\frac{0}{7}}+0.05, \text{ 解得 } \lambda=6,$$

$$\text{所以 } \mu(t)=6e^{-\frac{t}{7}}+0.05,$$

$$\text{由 } \mu(t)=6e^{-\frac{t}{7}}+0.05\leq 0.1, \text{ 得 } e^{-\frac{t}{7}}\leq \frac{1}{120},$$

$$\text{即 } -\frac{t}{7}\leq \ln \frac{1}{120}, \text{ 即 } \frac{t}{7}\geq \ln 120=3\ln 2+\ln 3+\ln 5\approx 3\times 0.7+1.1+1.6=4.8,$$

$$\text{所以 } t\geq 33.6, \text{ 又 } t\in \mathbf{N}, \text{ 所以 } t_{\min}=34,$$

故至少需要放置的时间为 34 天. 故选 C.]

考点三

考向 1 典例 3 解: (1) 由题意知, 当 $0\leq x\leq 8$ 时,

$$y=0.6x+0.2(14-x)-\frac{1}{20}x^2=-\frac{1}{20}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{14}{5},$$

当 $8<x\leq 14$ 时,

$$y=0.6x+0.2(14-x)-\frac{3x+8}{10}=\frac{1}{10}x+2,$$

$$\text{即 } y=\begin{cases} -\frac{1}{20}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{14}{5}, & 0\leq x\leq 8, \\ \frac{1}{10}x+2, & 8<x\leq 14. \end{cases}$$

$$(2) \text{ 当 } 0\leq x\leq 8 \text{ 时, } y=-\frac{1}{20}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{14}{5}=-\frac{1}{20}(x-4)^2+\frac{18}{5},$$

$$\text{所以当 } x=4 \text{ 时, } y_{\max}=\frac{18}{5}.$$

$$\text{当 } 8<x\leq 14 \text{ 时, } y=\frac{1}{10}x+2,$$

$$\text{所以当 } x=14 \text{ 时, } y_{\max}=\frac{17}{5}.$$

$$\text{因为 } \frac{18}{5}>\frac{17}{5}, \text{ 所以当 } x=4 \text{ 时, } y_{\max}=\frac{18}{5}.$$

所以当精加工蔬菜 4 t 时, 总利润最大, 最大利润为 3.6 万元.

考向 2 典例 4 解: (1) 由题意可得, $y=(400+kx^2)\times \frac{520}{x}=$

$$\frac{208\ 000}{x}+520kx, 0<x\leq 100.$$

$$(2) \text{ 由“对勾函数”的性质可得 } y=\frac{208\ 000}{x}+520kx \text{ 在}$$

$$\left(0, \frac{20}{\sqrt{k}}\right] \text{ 上单调递减, 在 } \left[\frac{20}{\sqrt{k}}, +\infty\right) \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{又 } 0<x\leq 100,$$

$$\text{当 } 0<\frac{20}{\sqrt{k}}\leq 100, \text{ 即 } k\geq \frac{1}{25} \text{ 时,}$$

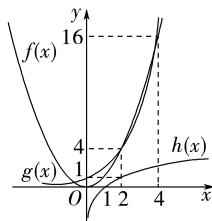
货车速度为 $\frac{20}{\sqrt{k}}$ km/h 时, 全程运输成本最低;

$$\text{当 } \frac{20}{\sqrt{k}}>100, \text{ 即 } 0<k<\frac{1}{25} \text{ 时,}$$

货车速度为 100 km/h 时, 全程运输成本最低.

随堂·点对检测

1. B [画出函数 $f(x)=x^2, g(x)=2^x, h(x)=\log_2 x$ 的图象, 如图所示,



结合图象, 可得三个函数 $f(x)=x^2, g(x)=2^x, h(x)=\log_2 x$ 中, 当 $x\in(4, +\infty)$ 时, 函数 $g(x)=2^x$ 增长速度最快, $h(x)=\log_2 x$ 增长速度最慢.

故选 B.]

$$\mathbf{2. A} \text{ [由题意知 } C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\ 730}}=\frac{2}{5}C_0, \text{ 所以 } \frac{t}{5\ 730}\lg \frac{1}{2}=\lg \frac{4}{10},$$

$$\text{所以 } t=5\ 730\times \frac{1-2\lg 2}{\lg 2}\approx 5\ 730\times \frac{1-2\times 0.301\ 0}{0.301\ 0}\approx 7\ 577,$$

所以可推断该生物死亡的时间约为公元前 7577—2025=5552 年.

故选 A.]

3. 解: (1) 由题图可知每月销售量 y 与每件售价 x 之间为一次函数关系,

设其函数关系式为 $y=kx+b(k\neq 0)$,

将 $(60, 600), (80, 400)$ 代入,

$$\text{得 } \begin{cases} 60k+b=600, \\ 80k+b=400, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k=-10, \\ b=1\ 200, \end{cases}$$

所以每月销售量 y 与每件售价 x 之间的函数关系式为 $y=-10x+1\ 200$.

$$(2) \text{ 根据题意得, } (-10x+1\ 200)(x-50)=10\ 000,$$

$$\text{整理得 } x^2-170x+7\ 000=0, \text{ 解得 } x_1=70, x_2=100,$$

因为该防护品的每件利润不允许高于进货价的 50%,

$$\text{所以 } x\leq 50\times(1+50\%), \text{ 即 } x\leq 75, \text{ 所以 } x=70.$$

所以当这种防护品每件的售价定为 70 元时, 该主播每月的总利润可达到 10 000 元.

第三章 一元函数的导数及其应用

第 21 课时 导数的概念及其意义、导数的运算

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1) $f'(x_0)$ $y'|_{x=x_0}$

知识点 2 斜率 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

知识点 3 0 ax^{a-1} $\cos x$ $-\sin x$ $a^x \ln a$ e^x

知识点 4 $f'(x) \pm g'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - cf'(x)$

知识点 5 $y'_u \cdot u'_x$

链教材·夯基固本

1. $y = x + \frac{1}{3}$ [设 $y = f(x) = (3x-1)^{\frac{1}{3}}$, 则 $f'(x) = 3 \times \frac{1}{3}(3x-1)^{-\frac{2}{3}} = (3x-1)^{-\frac{2}{3}}$, 则 $f'(\frac{2}{3}) = 1$, 因此曲线 $y = \sqrt[3]{3x-1}$ 在点 $(\frac{2}{3}, 1)$ 处的切线方程为 $y-1 = x - \frac{2}{3}$, 即 $y = x + \frac{1}{3}$.]

2. AD [对于 A, 因为 $y = x^5$, 所以 $y' = 5x^4$, 所以在 $x=3$ 处的导数为 $5 \times 3^4 = 405$, 故 A 正确; 对于 B, 因为 $y = \ln x$, 所以 $y' = \frac{1}{x}$, 所以在 $x = \frac{2}{3}$ 处的导数为 $\frac{3}{2}$, 故 B 错误; 对于 C, 因为 $y = \sin x$, 所以 $y' = \cos x$, 所以在 $x = 2\pi$ 处的导数为 $\cos 2\pi = 1$, 故 C 错误; 对于 D, 因为 $y = e^x$, 所以 $y' = e^x$, 所以在 $x=0$ 处的导数为 $e^0 = 1$, 故 D 正确. 故选 AD.]

3. $1 - \sqrt{2}$ [$f'(x) = -f'(\frac{\pi}{4}) \sin x - \cos x$,

$$\text{令 } x = \frac{\pi}{4}, \text{ 得 } f'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} f'(\frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{解得 } f'(\frac{\pi}{4}) = 1 - \sqrt{2}.]$$

4. ABC [选项 D 中, $(\sin(2x + \frac{\pi}{3}))' = 2\cos(2x + \frac{\pi}{3})$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 A [$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+2\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = -6$,

$$\text{则 } 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+2\Delta x) - f(2)}{2\Delta x} = 2f'(2) = -6,$$

$$\text{解得 } f'(2) = -3,$$

故在第 2 h 时, 原油温度的瞬时变化率为 -3°C/h . 故选 A.]

多维变迁

D [因为 $f(x) = 2\ln x + 8x$, 所以 $f'(x) = \frac{2}{x} + 8$,

$$\text{所以 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+2\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+2\Delta x) - f(1)}{2\Delta x} = 2f'(1) = 20.$$

故选 D.]

考点二

典例 2 CD [对于 A 选项, $(e^{3x})' = e^{3x} \cdot (3x)' = 3e^{3x}$, A 错误;

$$\text{对于 B 选项, } (\frac{x^2}{2x+1})'$$

$$= \frac{(x^2)' \cdot (2x+1) - x^2 \cdot (2x+1)'}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{2x \cdot (2x+1) - 2x^2}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x}{(2x+1)^2}, \text{ B 错误;}$$

对于 C 选项, $(2\sin x - 3)' = 2\cos x$, C 正确;

$$\text{对于 D 选项, } (\ln \frac{x}{2-x})' = \frac{1}{\frac{x}{2-x}} \cdot (\frac{x}{2-x})' = \frac{2-x}{x} \cdot$$

$$\frac{2-x-x \cdot (-1)}{(2-x)^2} = \frac{2}{x(2-x)}, \text{ D 正确.}$$

故选 CD.]

考点三

考向 1 典例 3 解: 第 1 步 算切点: 切点已知直接用, 切点未知, 已知切点横坐标 x_0 , 应用关系式计算纵坐标 $y_0 = f(x_0)$.

第 2 步 求斜率: 由导数的几何意义, 得切线的斜率 $k = f'(x_0)$.

由题意得 $f'(x) = x^2$,

$$\therefore \text{点 } P(2, 4) \text{ 在曲线 } f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3} \text{ 上,}$$

$\therefore$ 曲线在点 $P(2, 4)$ 处切线的斜率为 $k = f'(2) = 4$,

第 3 步 列方程: 列出直线的点斜式方程 $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$\therefore$ 曲线在点 $P(2, 4)$ 处的切线方程为 $y - 4 = 4(x - 2)$,

即 $4x - y - 4 = 0$.

母题探究

解: 第 1 步 设切点: 设曲线上的切点坐标为 $(x_0, f(x_0))$.

设曲线 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}$ 与过点 $P(2, 4)$ 的直线相切于点

$$A(x_0, \frac{1}{3}x_0^3 + \frac{4}{3}),$$

第 2 步 求斜率: 由导数的几何意义, 得切线的斜率 $k = f'(x_0)$.

则切线的斜率为 $k = x_0^2$.

第 3 步 列方程: 列出直线的点斜式方程 $y - f(x_0) = k(x - x_0)$.

$$\therefore \text{切线方程为 } y - (\frac{1}{3}x_0^3 + \frac{4}{3}) = x_0^2(x - x_0),$$

$$\text{即 } y = x_0^2 \cdot x - \frac{2}{3}x_0^3 + \frac{4}{3}.$$

第 4 步 代坐标: 把已知点 (a, b) 代入上述方程,

$$\text{得 } b - f(x_0) = k(a - x_0).$$

$\therefore$ 点 $P(2, 4)$ 在切线上,

$$\therefore 4 = 2x_0^2 - \frac{2}{3}x_0^3 + \frac{4}{3},$$

$$\text{即 } x_0^3 - 3x_0^2 + 4 = 0.$$

第 5 步 求参数 x_0 得切线方程.

$$\therefore x_0^3 + x_0^2 - 4x_0^2 + 4 = 0,$$

$$\therefore x_0^2(x_0 + 1) - 4(x_0 + 1)(x_0 - 1) = 0,$$

$$\therefore (x_0 + 1)(x_0 - 2)^2 = 0,$$

解得 $x_0 = -1$ 或 $x_0 = 2$.

故所求的切线方程为 $x - y + 2 = 0$ 或 $4x - y - 4 = 0$.

考向 2 典例 4 (1) D (2) 4 [(1) 因为 $f(x) = \frac{a}{2}x^2 + b\ln x$,

$$\text{所以 } f'(x) = ax + \frac{b}{x}, \text{ 由题意得, } f(1) = \frac{a}{2} + b\ln 1 = 1,$$

$$f'(1) = a + b = -\frac{1}{2}, \text{ 解得 } b = -\frac{5}{2}, a = 2, \text{ 则 } a + 2b = 2 - 5 = -3. \text{ 故选 D.}$$

(2) 设直线 $y = 2x + 5$ 与曲线 $y = e^x + x + a$ 的切点坐标为 $(x_0, e^{x_0} + x_0 + a)$, 由 $y = e^x + x + a$ 得 $y' = e^x + 1$, 所以 $y'|_{x=x_0} = e^{x_0} + 1 = 2$, 解得 $x_0 = 0$, 所以切点坐标为 $(0, 1 + a)$, 又切点 $(0, 1 + a)$ 在切线 $y = 2x + 5$ 上, 所以 $1 + a = 5$, 解得 $a = 4$.]

考题探源

解: 对函数 $y = e^{2ax}$ 求导得 $y' = 2ae^{2ax}$.

在点 $(0, 1)$ 处的切线斜率 $k = y'|_{x=0} = 2ae^0 = 2a$,

又切线与直线 $2x - y + 1 = 0$ 垂直,

$$\text{所以 } 2a \times 2 = -1, \text{ 解得 } a = -\frac{1}{4}.$$

多维变迁

1. C [由题可得, $f'(x) = e^x + a$,

则曲线在 $x = 0$ 处的切线的斜率为 $f'(0) = e^0 + a = 1 + a$,

又曲线 $f(x)=e^x+ax$ 在 $x=0$ 处的切线与直线 $3x-2y-5=0$ 平行,

则有 $1+a=\frac{3}{2}$, 可得 $a=\frac{1}{2}$.

故选 C.]

2. $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$ [$\because y=(x+a)e^x$,

$\therefore y'=(x+1+a)e^x$,

设切点坐标为 (x_0, y_0) , 则 $y_0=(x_0+a)e^{x_0}$, 切线斜率 $k=(x_0+1+a)e^{x_0}$,

切线方程为 $y-(x_0+a)e^{x_0}=(x_0+1+a) \cdot e^{x_0}(x-x_0)$,

$\therefore$ 切线过原点, $\therefore -(x_0+a)e^{x_0}=(x_0+1+a)e^{x_0}(-x_0)$,

整理得 $x_0^2+ax_0-a=0$,

$\therefore$ 切线有两条, $\therefore \Delta=a^2+4a>0$, 解得 $a<-4$ 或 $a>0$,

$\therefore a$ 的取值范围是 $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$.]

微点突破

典例 5 (1)A (2) $\ln 2$ [(1)由 $y=x^2+2\ln x$,

得 $y'=2x+\frac{2}{x}$, 由 $2x+\frac{2}{x}=4$, 解得 $x=1$,

则直线 $y=4x+m$ 与曲线 $y=x^2+2\ln x$ 相切于点 $(1, 4+m)$,
 $\therefore 4+m=1+2\ln 1=1$, 得 $m=-3$.

$\therefore$ 直线 $y=4x-3$ 是曲线 $y=x^3-nx+13$ 的切线,

由 $y=x^3-nx+13$, 得 $y'=3x^2-n$, 设切点为 $(t, t^3-nt+13)$,
 则 $3t^2-n=4$, 且 $t^3-nt+13=4t-3$, 联立可得 $2t^3=16$, 解得
 $t=2$, 由 $n=3t^2-4$, 得 $n=8$.

$\therefore n-m=8-(-3)=11$.

故选 A.

(2)由 $y=e^x+x$ 得 $y'=e^x+1$, 则 $y'|_{x=0}=e^0+1=2$,

故曲线 $y=e^x+x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y=2x+1$.

由 $y=\ln(x+1)+a$ 得 $y'=\frac{1}{x+1}$,

设切线与曲线 $y=\ln(x+1)+a$ 相切的切点为 $(x_0, \ln(x_0+1)+a)$,

由两曲线有公切线得 $y'=\frac{1}{x_0+1}=2$, 解得 $x_0=-\frac{1}{2}$, 则切点
 为 $(-\frac{1}{2}, a+\ln \frac{1}{2})$,

切线方程为 $y=2(x+\frac{1}{2})+a+\ln \frac{1}{2}=2x+1+a-\ln 2$.

因为两切线重合, 所以 $a-\ln 2=0$, 解得 $a=\ln 2$.]

随堂·对点检测

1. A [因为函数 $f(x)=e^x-x^2$,

所以 $f'(x)=e^x-2x$,

所以 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=f'(1)=e-2$. 故选 A.]

2. C [对于选项 A, 因为 $y=\pi^2$,

所以 $y'=0$, 故选项 A 错误;

对于选项 B, 因为 $y=\log_2 x$,

所以 $y'=\frac{1}{x \ln 2}$, 故选项 B 错误;

对于选项 C, 因为 $y=e^{-2x}$,

所以 $y'=e^{-2x} \cdot (-2x)'=-2e^{-2x}$, 故选项 C 正确;

对于选项 D, 因为 $y=\cos \frac{x}{3}$,

所以 $y'=-\sin \frac{x}{3} \cdot (\frac{x}{3})'=-\frac{1}{3} \sin \frac{x}{3}$, 故选项 D 错误. 故选 C.]

3. A [设直线 $y=x+a$ 与曲线 $y=\ln(x+b)$ 相切于点 (x_0, y_0) ,

由导数的几何意义知, $y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0+b}$, 因为直线 $y=x+a$ 的

斜率为 1, 所以 $\frac{1}{x_0+b}=1$, 即 $x_0=1-b$.

又切点 (x_0, y_0) 既在直线上又在曲线上,

所以 $y_0=x_0+a$ 且 $y_0=\ln(x_0+b)$,

即 $\ln(x_0+b)=x_0+a$.

将 $x_0=1-b$ 代入 $\ln(x_0+b)=x_0+a$,

得 $\ln(1-b+b)=1-b+a$, 即 $b-a=1$. 故选 A.]

4. $(\sqrt{e}, 1)$ [由题意得 $f'(x)=\frac{2}{x}$, 显然点 $(0, -1)$ 不在曲线

$f(x)$ 上, 设切点坐标为 $(x_0, 2\ln x_0)$, 则 $\frac{2\ln x_0+1}{x_0}=\frac{2}{x_0}$, 解得

$x_0=\sqrt{e}$, $f(\sqrt{e})=1$, 则切点坐标为 $(\sqrt{e}, 1)$.]

第 22 课时 导数与函数的单调性

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 单调递增 单调递减 常数函数

知识点 2 定义域 零点

链教材·夯基固本

1. (0, 1) (1, 2) [由题图知, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x)>0$,

当 $x \in (1, 2)$ 时, $f'(x)<0$,

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, 1)$,

单调递减区间是 $(1, 2)$.]

2. $(-\infty, -1), (\frac{1}{3}, +\infty)$ [$f'(x)=3x^2+2x-1$, 令 $f'(x)>$

0, 解得 $x>\frac{1}{3}$ 或 $x<-1$, 所以 $f(x)=x^3+x^2-x$ 的单调递增

区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(\frac{1}{3}, +\infty)$.]

3. C [由题图知, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x)>0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增;

当 $x \in (0, x_1)$ 时, $f'(x)<0$, $\therefore f(x)$ 在 $(0, x_1)$ 内单调递减;

当 $x \in (x_1, +\infty)$ 时, $f'(x)>0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(x_1, +\infty)$ 上单调递增.

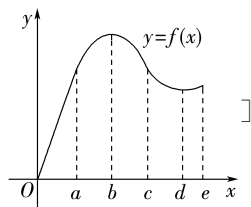
故选 C.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1)D (2)BD [(1)由函数的图象可知, 当 $x<0$ 时, 函数单调递增, 导数始终为正; 当 $x>0$ 时, 函数先增后减再增, 即导数先正后负再正, 对照选项, 应选 D.

(2)由题图知, 当 $0<x<a$ 时, $f'(x)>0$ 且为定值; 当 $a<x<c$ 时, $f'(x)$ 单调递减, 且在 $x \in (a, b)$ 内, $f'(x)>0$, 在 $x \in (b, c)$ 内, $f'(x)<0$; 当 $c<x<e$ 时, $f'(x)$ 单调递增, 且在 $x \in (c, d)$ 内, $f'(x)<0$, 在 $x \in (d, e)$ 内, $f'(x)>0$, 所以当 $0<x<a$ 时, $f(x)$ 单调递增且图象为斜率大于 0 的直线, 当 $a<x<b$ 时, $f(x)$ 单调递增, 当 $b<x<c$ 时, $f(x)$ 单调递减, 当 $c<x<d$ 时, $f(x)$ 单调递减, 当 $d<x<e$ 时, $f(x)$ 单调递增, 其大致图象如图. 故选 BD.



考点二

典例 2 (1)BD (2)C [(1)对于 A, $f(x)=x+\frac{1}{x}$, 其定义域为 $\{x|x \neq 0\}$,

其导数 $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$, 在 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 内, $f'(x)<0$, $f(x)$

不符合题意;

对于 B, $f(x)=x+\sin x$, 其定义域为 $\mathbf{R}$,

其导数 $f'(x)=1+\cos x$, 有 $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 在定义域上为增函数, 符合题意;

对于 C, $f(x)=xe^x$, 其定义域为 $\mathbf{R}$,

其导数 $f'(x)=xe^x+e^x=(1+x)e^x$, 在区间 $(-\infty, -1)$ 上, $f'(x)<0$, $f(x)$ 不符合题意;

对于 D, $f(x)=e^x-e^{-x}$, 其定义域为 $\mathbf{R}$,

其导数 $f'(x)=e^x+e^{-x}$, 易得 $f'(x) \geq 2 > 0$ 恒成立,

则 $f(x)$ 在定义域上为增函数, 符合题意.

故选 BD.

(2) $\because f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}-x=\frac{1-x^2}{x}$,

当 $f'(x)>0$ 时, 解得 $0<x<1$,

$\therefore$ 函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$.

故选 C.]

考点三

典例 3 解: 因为 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-(a+1)x+a\ln x$, 定义域为 $(0, +\infty)$,

所以 $f'(x)=x-(a+1)+\frac{a}{x}=\frac{x^2-(a+1)x+a}{x}=\frac{(x-1)(x-a)}{x}$.

当 $0<a<1$ 时, 令 $f'(x)>0$, 得 $0<x<a$ 或 $x>1$, 令 $f'(x)<0$, 得 $a<x<1$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内单调递增, 在 $(a, 1)$ 内单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

当 $a=1$ 时, $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$ 恒成立, 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

当 $a>1$ 时, 令 $f'(x)>0$, 得 $0<x<1$ 或 $x>a$, 令 $f'(x)<0$, 得 $1<x<a$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递增, 在 $(1, a)$ 内单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增.

综上, 当 $0<a<1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内单调递增, 在 $(a, 1)$ 内单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a=1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a>1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递增, 在 $(1, a)$ 内单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增.

多维变迁

1. 解: 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x)=ae^x-1$,

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) \leq -1 < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a>0$ 时, 令 $f'(x)>0$, 得 $x>-\ln a$,

令 $f'(x)<0$, 得 $x<-\ln a$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减,

在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

综上可得, 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a>0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减,

在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

2. 解: 由题意知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$f'(x)=3x^2-2x+a$,

对于 $f'(x)=0$, $\Delta=(-2)^2-4 \times 3a=4(1-3a)$.

① 当 $a \geq \frac{1}{3}$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

② 当 $a < \frac{1}{3}$ 时, 令 $f'(x)=0$,

即 $3x^2-2x+a=0$,

解得 $x_1=\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3}$, $x_2=\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3}$,

令 $f'(x)>0$, 则 $x < x_1$ 或 $x > x_2$;

令 $f'(x)<0$, 则 $x_1 < x < x_2$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$, $(x_2, +\infty)$ 上单调递增, 在 (x_1, x_2) 内单调递减.

综上, 当 $a \geq \frac{1}{3}$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

当 $a < \frac{1}{3}$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1-\sqrt{1-3a}}{3})$,

$(\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3}, +\infty)$ 上单调递增,

在 $(\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3}, \frac{1+\sqrt{1-3a}}{3})$ 内单调递减.

随堂·对点检测

1. B $[f(x)=xe^{-x}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 导函数 $f'(x)=(1-x)e^{-x}$, 由 $f'(x)>0$, 得 $x<1$, 因此 $f(x)=xe^{-x}$ 的单调递增区间是 $(-\infty, 1)$.

故选 B.]

2. C $[$ 根据题意, 由 $f(x)$ 的图象, $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增,

得当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f'(x)<0$, 当 $x \in (-1, +\infty)$ 时, $f'(x)>0$.

对于函数 $y=xf'(x)$, 在 $(-\infty, -1)$ 上, 必有 $xf'(x)>0$,

在 $(-1, 0)$ 上, 必有 $xf'(x)<0$,

在 $(0, +\infty)$ 上, 必有 $xf'(x)>0$,

分析可知选项 C 符合.

故选 C.]

3. 解: 函数 $f(x)=e^x-ax$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x)=e^x-a$,

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x)=e^x-a>0$ 恒成立, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

当 $a>0$ 时, 由 $f'(x)>0$, 解得 $x>\ln a$;

由 $f'(x)<0$, 解得 $x<\ln a$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增,

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

当 $a>0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

第 23 课时 函数单调性的应用

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 D $[$ 法一: 因为 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f'(x) \geq 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

因为 $f(x)=kx-\ln x$,

所以 $f'(x)=k-\frac{1}{x} \geq 0$, 即 $k \geq \frac{1}{x}$.

因为 $x > 1$, 所以 $0 < \frac{1}{x} < 1$,

所以 $k \geq 1$, 故选 D.

法二: $f'(x) = k - \frac{1}{x} = \frac{kx-1}{x} (x > 0)$,

当 $k \leq 0$ 时, $f'(x) = k - \frac{1}{x} < 0$, $f(x)$ 在其定义域内单调递减, 不合题意,

当 $k > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 知 $x > \frac{1}{k}$, 即 $(\frac{1}{k}, +\infty)$ 是 $f(x)$ 的单

调递增区间. 由题意可知 $\frac{1}{k} \leq 1$, 即 $k \geq 1$, 故选 D.]

母题探究

1.1 [由例题法二知 $\frac{1}{k} = 1$, $\therefore k = 1$.]

2. $(-\infty, 0]$ [由题意知 $f'(x) = \frac{kx-1}{x} \leq 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 即 $k \leq \frac{1}{x}$, 又 $x > 1$,

$\therefore 0 < \frac{1}{x} < 1$, $\therefore k \leq 0$, 即 k 的取值范围是 $(-\infty, 0]$.]

3. $(0, 1)$ [法一: 由例题及母题探究 2 知, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调, 则 $k \leq 0$ 或 $k \geq 1$, $\therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上不单调, 则 $0 < k < 1$. 即 k 的取值范围是 $(0, 1)$.

法二: 因为 $f(x) = kx - \ln x$,

所以 $f'(x) = k - \frac{1}{x} = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上有解, 即 $y = k$ 和 $y = \frac{1}{x}$

的图象在 $(1, +\infty)$ 内有交点. 因为当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $\frac{1}{x} \in (0, 1)$, 所以 k 的取值范围是 $(0, 1)$.]

4. $(-\infty, 1)$ [由题意可知 $f'(x) = \frac{kx-1}{x} < 0$ 在 $(1, +\infty)$ 内有解, 即 $k < \frac{1}{x}$, $x \in (1, +\infty)$ 有解, 由 $0 < \frac{1}{x} < 1$ 可知 $k < 1$, 即 k 的取值范围是 $(-\infty, 1)$.]

5. $(-\infty, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$ [$\because x \in (1, 2)$,

$\therefore \frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 1$,

若 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 内单调递增, 则 $f'(x) = \frac{kx-1}{x} \geq 0$ 恒成立,

即 $k \geq \frac{1}{x}$, $\therefore k \geq 1$;

若 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 内单调递减, 则 $f'(x) = \frac{kx-1}{x} \leq 0$ 恒成立,

即 $k \leq \frac{1}{x}$, $\therefore k \leq \frac{1}{2}$.

$\therefore f(x)$ 在 $(1, 2)$ 内单调, 则 k 的取值范围是 $(-\infty, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$.]

考点二

典例 2 B [因为 $f(x) = x - \sin x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

所以 $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ 恒成立,

故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

又根据 $f(-x) = -x - \sin(-x) = -x + \sin x = -f(x)$,

因此 $f(x)$ 为奇函数,

又 $f(\log_2 m) + f(-1) < 0 \Rightarrow f(\log_2 m) < -f(-1) = f(1)$,

则 $\log_2 m < 1$, 解得 $m \in (0, 2)$.

故选 B.]

多维变迁

B [设 $g(x) = f(x) - 2x + 1$,

因为 $f(2) = 3$,

所以 $g(2) = f(2) - 3 = 0$,

$g'(x) = f'(x) - 2$, 因为 $f'(x) > 2$,

所以 $g'(x) > 0$,

所以函数 $g(x) = f(x) - 2x + 1$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数,

因此由 $f(x) > 2x - 1 \Rightarrow g(x) > 0 = g(2) \Rightarrow x > 2$.

故选 B.]

考点三

典例 3 A [已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x) = (x^2 + 1)e^x$, $x \in \mathbf{R}$,

则 $\begin{cases} x^2 + 1 \geq 1, \\ e^x > 0, \end{cases} x \in \mathbf{R} \Rightarrow f'(x) > 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

选项中 $x = 2, x = e, x = \pi$ 大小顺序为 $2 < e < \pi$.

所以 $f(2) < f(e) < f(\pi)$.

故选 A.]

多维变迁

A [当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $f'(x) = \sin x + x \cos x > 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调递增,

由题知 $f(-x) = (-x) \cdot \sin(-x) = x \sin x = f(x)$,

则函数 $f(x)$ 是偶函数,

故 $f(-\frac{\pi}{3}) = f(\frac{\pi}{3})$.

因为 $0 < \frac{\pi}{5} < 1 < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$,

所以 $f(\frac{\pi}{5}) < f(1) < f(\frac{\pi}{3})$,

即 $f(-\frac{\pi}{3}) > f(1) > f(\frac{\pi}{5})$.

故选 A.]

随堂·对点检测

1. D [因为 $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$,

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

因此 $f(3) > f(2) > f(1)$.

故选 D.]

2. D [$\because$ 函数 $f(x) = x^2 + 2x + a \ln x$ 在 $(0, 1)$ 内单调递减,

$\therefore$ 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) = 2x + 2 + \frac{a}{x} = \frac{2x^2 + 2x + a}{x} \leq 0$,

$\therefore g(x) = 2x^2 + 2x + a \leq 0$ 在 $x \in (0, 1)$ 时恒成立,

$\therefore g(0) \leq 0, g(1) \leq 0$, 即 $a \leq -4$.

故选 D.]

3. B [由题意可知 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

因为 $f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - 1 = -(\frac{1}{x} - 1)^2 \leq 0$ 恒成立,

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

由 $f(2x-1) < f(1-x)$,

可得 $\begin{cases} 2x-1 > 0, \\ 1-x > 0, \\ 2x-1 > 1-x, \end{cases}$

解得 $\frac{2}{3} < x < 1$, 即原不等式的解集为 $(\frac{2}{3}, 1)$. 故选 B.]

4. $[-3, 0]$ [$f'(x) = 3x^2 + 2ax - a \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 所以 $4a^2 + 12a \leq 0$, 解得 $-3 \leq a \leq 0$.]

*第24课时 导数中的构造问题(进阶课)

类型一

技法1 典例1 B [构造函数 $y = xf(x)$, $x \in (0, +\infty)$, 则 $y' = f(x) + xf'(x) < 0$,

所以函数 $y = xf(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

又因为 $f(x+1) > (x-1)f(x^2-1)$, 所以 $(x+1)f(x+1) > (x^2-1)f(x^2-1)$,

所以 $x+1 < x^2-1$, 且 $x^2-1 > 0$, $x+1 > 0$, 解得 $x > 2$ 或 $x < -1$ (舍去),

所以不等式 $f(x+1) > (x-1)f(x^2-1)$ 的解集是 $(2, +\infty)$.]

母题探究

解: 设 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 则 $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$,

$\because f(x) < xf'(x)$, $\therefore g'(x) > 0$, 故 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

由 $(x^2+1)f(2x+1) > (2x+1)f(x^2+1)$ 得,

$$\frac{f(2x+1)}{2x+1} > \frac{f(x^2+1)}{x^2+1},$$

即 $g(2x+1) > g(x^2+1)$,

$$\therefore \begin{cases} 2x+1 > 0, \\ 2x+1 > x^2+1, \end{cases} \text{ 解得 } 0 < x < 2.$$

即不等式 $(x^2+1)f(2x+1) > (2x+1) \cdot f(x^2+1)$ 的解集为 $(0, 2)$.

技法2 典例2 A [令 $h(x) = e^x f(x)$,

则 $h'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x [f(x) + f'(x)] > 0$,

所以函数 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

故 $h(-2.026) < h(0)$, 即 $e^{-2.026} f(-2.026) < e^0 f(0)$,

即 $e^{-2.026} f(-2.026) < f(0)$.

同理, $h(2.026) > h(0)$, 即 $e^{2.026} f(2.026) > f(0)$. 故选 A.]

母题探究

解: 令 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$,

$$\text{则 } g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x},$$

因为对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f'(x) > f(x)$, 所以 $g'(x) > 0$,

即 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

所以 $g(-2.026) < g(0)$,

$$\text{即 } \frac{f(-2.026)}{e^{-2.026}} < \frac{f(0)}{e^0},$$

所以 $e^{2.026} f(-2.026) < f(0)$.

技法3 典例3 BD [构造函数 $F(x) = \frac{f(x)}{\cos x}$,

依题意, 当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时,

$$F'(x) = \frac{f'(x)\cos x + f(x)\sin x}{\cos^2 x} > 0,$$

故函数 $F(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递增.

$$\text{由 } F(0) < F\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ 得 } \frac{f(0)}{\cos 0} < \frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos \frac{\pi}{4}},$$

即 $f(0) < \sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, 排除 A;

$$\text{由 } F\left(\frac{\pi}{3}\right) > F\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ 得 } \frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos \frac{\pi}{3}} > \frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos \frac{\pi}{4}},$$

即 $\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{3}\right) > f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, B 正确;

$$\text{由 } F(0) < F\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ 得 } \frac{f(0)}{\cos 0} < \frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos \frac{\pi}{3}},$$

即 $f(0) < 2f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, 排除 C;

$$\text{由 } F\left(-\frac{\pi}{3}\right) < F\left(-\frac{\pi}{4}\right) \text{ 得 } \frac{f\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} < \frac{f\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)},$$

即 $\sqrt{2}f\left(-\frac{\pi}{3}\right) < f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, D 正确.]

类型二

典例4 C [由 $ae = e^a$, $be^{1.2} = 1.2e^b$, $ce^{1.6} = 1.6e^c$,

$$\text{得 } \frac{a}{e^a} = \frac{1}{e}, \frac{b}{e^b} = \frac{1.2}{e^{1.2}}, \frac{c}{e^c} = \frac{1.6}{e^{1.6}}.$$

$$\text{令 } f(x) = \frac{x}{e^x}, \text{ 则 } f'(x) = \frac{1-x}{e^x},$$

当 $x < 1$ 时, $f'(x) > 0$;

当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

于是 $f(1) > f(1.2) > f(1.6)$,

即 $f(a) > f(b) > f(c)$,

又 $a, b, c \in [0, 1]$, 所以 $a > b > c$. 故选 C.]

第25课时 导数与函数的极值

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 (1) $f'(x) < 0$ $f'(x) > 0$

(2) $f'(x) > 0$ $f'(x) < 0$ (3) 极值点 极值

链教材·夯基固本

1. x_2, x_4 [因为 x_2, x_4 处的导数都为零, 且这两点左右两侧的导数值异号, 所以 x_2, x_4 是函数的极值点. 因为当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (x_2, x_3)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 x_2 是极大值点. 因为当 $x \in (x_3, x_4)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (x_4, x_5)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 x_4 是极小值点.]

2. $\frac{28}{3} - \frac{4}{3}$ [因为 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 4$,

所以 $f'(x) = x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$,

由 $f'(x) > 0$, 得 $x < -2$ 或 $x > 2$,

由 $f'(x) < 0$, 得 $-2 < x < 2$,

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$, $(2, +\infty)$ 上单调递增,

在 $(-2, 2)$ 内单调递减, 故 $f(x)$ 的极大值为 $f(-2) = \frac{28}{3}$, 极小

值为 $f(2) = -\frac{4}{3}$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例1 CD [对于选项 A, 由题图知, 当 $x \in (-3, 1)$ 时, $f'(x)$ 的符号有正有负,

$f(x)$ 不是单调函数, 所以选项 A 错误;

对于选项 B, 由题图知, 当 $x \in (1, 2)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 所以选项 B 错误;

对于选项 C, 由题图知 $f'(2) = 0$, 且在 $x = 2$ 左侧附近, $f'(x) > 0$, 在 $x = 2$ 右侧附近, $f'(x) < 0$, 所以 $x = 2$ 是极大值点, $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取到极大值, 所以选项 C 正确;

对于选项 D, 由题图知 $f'(4) = 0$, 且在 $x = 4$ 左侧附近,

$f'(x) < 0$, 在 $x=4$ 右侧附近, $f'(x) > 0$, 所以 $x=4$ 是极小值点, $f(x)$ 在 $x=4$ 处取到极小值, 所以选项 D 正确.
故选 CD.]

考点二

典例 2 解: 由题意知 $g(x) = ax - \ln(x+1)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$,

$$\text{则 } g'(x) = a - \frac{1}{x+1},$$

① 当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) = a - \frac{1}{x+1}$ 恒小于 0, 无极值;

② 当 $a > 0$ 时, 令 $g'(x) = a - \frac{1}{x+1} > 0$, 则 $x > \frac{1}{a} - 1$, 当 x 变化时, $g'(x)$, $g(x)$ 的变化情况如表所示.

x	$(-1, \frac{1}{a}-1)$	$\frac{1}{a}-1$	$(\frac{1}{a}-1, +\infty)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	单调递减	极小值	单调递增

所以当 $x > \frac{1}{a} - 1$ 时, $g(x)$ 单调递增, 当 $-1 < x < \frac{1}{a} - 1$ 时, $g(x)$ 单调递减,

所以 $g(x)$ 在 $x = \frac{1}{a} - 1$ 处取得极小值 $g(\frac{1}{a} - 1) = 1 - a + \ln a$, 无极大值.

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $g(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上无极值;

当 $a > 0$ 时, $g(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上有极小值 $g(\frac{1}{a} - 1) = 1 - a + \ln a$, 无极大值.

多维变迁

解: (1) 因为 $f(x) = x + \frac{f'(1)}{2} \ln x + \frac{3}{x}$, $x > 0$,

$$\text{所以 } f'(x) = 1 + \frac{f'(1)}{2x} - \frac{3}{x^2},$$

$$\text{所以 } f'(1) = 1 + \frac{f'(1)}{2} - 3, \text{ 解得 } f'(1) = -4.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可知 } f(x) = x - 2 \ln x + \frac{3}{x}, x > 0,$$

$$\text{所以 } f'(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{x^2},$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -1$ (舍去) 或 $x = 3$,

所以当 x 变化时, $f(x)$, $f'(x)$ 的变化情况如表所示.

x	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单调递减	$4 - 2 \ln 3$	单调递增

所以 $f(x)$ 仅有极小值为 $f(3) = 4 - 2 \ln 3$, 无极大值.

考点三

典例 3 (1) A (2) $-\frac{11}{4}$ [(1) 第 1 步 极值点导数为 0; 可导函数存在极值的必要条件是极值点一阶导数为 0.

由函数 $f(x) = x(x-c)^2$,
可得 $f'(x) = (x-c)^2 + 2x(x-c) = (x-c) \cdot (3x-c)$,

因为函数 $f(x)$ 在 $x = -2$ 处取得极小值,
可得 $f'(-2) = 0$,

第 2 步 求解: 求方程或方程组的解.
即 $(-2-c)(-6-c) = 0$,

解得 $c = -2$ 或 $c = -6$,

第 3 步 检验: 出现多解时, 检验是否符合题中的极值情况.

当 $c = -2$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x < -2$ 或 $x > -\frac{2}{3}$;

令 $f'(x) < 0$, 解得 $-2 < x < -\frac{2}{3}$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递增, 在 $(-2, -\frac{2}{3})$ 内单

调递减, 在 $(-\frac{2}{3}, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $x = -2$ 处取极大值, 不符合题意, 舍去.

当 $c = -6$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 可得 $x < -6$ 或 $x > -2$;

令 $f'(x) < 0$, 可得 $-6 < x < -2$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -6)$ 上单调递增, 在 $(-6, -2)$ 内单调递减, 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $x = -2$ 处取极小值, 符合题意.

综上可得, $c = -6$. 故选 A.

(2) 对 $f(x) = b \ln x + \frac{3}{2}x^2 + 2ax + a^2 - 3a$ 求导, 得 $f'(x) =$

$$\frac{b}{x} + 3x + 2a,$$

$$\text{依题意得 } \begin{cases} f(1) = \frac{27}{2}, \\ f'(1) = 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} a^2 - a + \frac{3}{2} = \frac{27}{2}, \\ b + 2a + 3 = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = 4, \\ b = -11 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -3, \\ b = 3. \end{cases}$$

当 $a = 4, b = -11$ 时, $f(x) = -11 \ln x + \frac{3}{2}x^2 + 8x + 4, x > 0$,

$$f'(x) = -\frac{11}{x} + 3x + 8 = \frac{3x^2 + 8x - 11}{x} = \frac{(x-1)(3x+11)}{x},$$

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递减, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

即 $x = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极小值 $f(1) = \frac{27}{2}$, 符合题意, 此时

$$\frac{b}{a} = -\frac{11}{4};$$

当 $a = -3, b = 3$ 时, $f(x) = 3 \ln x + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 18, x > 0$,

$$f'(x) = \frac{3}{x} + 3x - 6 = \frac{3x^2 - 6x + 3}{x} = \frac{3(x-1)^2}{x} \geq 0, \text{ 即函数}$$

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 无极值, 与题意不符, 舍去.]

多维变迁

BCD [因为函数 $f(x) = a \ln x + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$ ($a \neq 0$), 所以函数

$f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{ax^2 - bx - 2c}{x^3}$, 因为函数

$f(x)$ 既有极大值也有极小值, 则函数 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个变号零点, 而 $a \neq 0$, 所以关于 x 的方程 $ax^2 - bx - 2c = 0$

有两个不等的正实根 x_1, x_2 , 则 $\begin{cases} \Delta > 0, \\ x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 x_2 > 0, \end{cases}$

$$\text{即 } \begin{cases} b^2 + 8ac > 0, \\ \frac{b}{a} > 0, \\ -\frac{2c}{a} > 0, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} b^2 + 8ac > 0, \\ ab > 0, \\ ac < 0, \\ bc < 0. \end{cases}$$

故选 BCD.]

微点突破

典例 4 解: (1) 函数的定义域为 $\mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+1)'e^x + (x+1)(e^x)' \\ &= e^x + (x+1)e^x \\ &= (x+2)e^x. \end{aligned}$$

令 $f'(x)=0$, 解得 $x=-2$.

$f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表所示.

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	$-\frac{1}{e^2}$	单调递增

所以, $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -2)$ 上单调递减, 在区间 $(-2, +\infty)$ 上单调递增.

当 $x=-2$ 时, $f(x)$ 有极小值 $f(-2)=-\frac{1}{e^2}$.

(2) 令 $f(x)=0$, 解得 $x=-1$.

当 $x<-1$ 时, $f(x)<0$; 当 $x>-1$ 时, $f(x)>0$.

所以, $f(x)$ 的图象经过特殊点 $A(-2, -\frac{1}{e^2})$, $B(-1, 0)$,

$C(0, 1)$.

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 与一次函数相比, 指数函数 $y=e^{-x}$ 呈爆炸性增长, 从而 $f(x)=\frac{x+1}{e^{-x}} \rightarrow 0$;

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty, f'(x) \rightarrow +\infty$.

根据以上信息, 画出 $f(x)$ 的大致图象如图所示.

(3) 方程 $f(x)=a (a \in \mathbf{R})$ 的解的个数为函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 的交点个数.

由(1)及图可得, 当 $x=-2$ 时, $f(x)$ 有最小值 $f(-2)=-\frac{1}{e^2}$.

所以, 关于方程 $f(x)=a (a \in \mathbf{R})$ 的解的个数有如下结论:

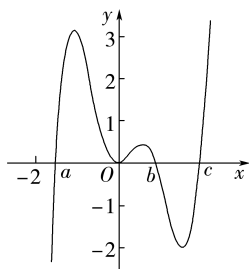
当 $a < -\frac{1}{e^2}$ 时, 解为 0 个;

当 $a = -\frac{1}{e^2}$ 或 $a \geq 0$ 时, 解为 1 个;

当 $-\frac{1}{e^2} < a < 0$ 时, 解为 2 个.

随堂·对点检测

1. C [如图, 设 $f'(x)$ 与 x 轴的交点的横坐标为 $a, 0, b, c$, 其中 $a < 0 < b < c$,



由图象可得 $x < a$ 时, $f'(x) < 0$,

当 $a < x < 0$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $0 < x < b$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $b < x < c$ 时, $f'(x) < 0$,

当 $x > c$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $x=a, x=c$ 是 $f(x)$ 的极小值点, $x=b$ 是 $f(x)$ 的极大值点,

故 $f(x)$ 极小值点的个数为 2.

故选 C.]

2. A $[f'(x) = \cos x + \frac{1}{2},$

由 $f'(x)=0$, 得 $\cos x = -\frac{1}{2}$, 结合 $x \in (0, \pi)$, 可得 $x = \frac{2\pi}{3}$,

因为当 $x \in (0, \frac{2\pi}{3})$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (\frac{2\pi}{3}, \pi)$ 时, $f'(x) < 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{2\pi}{3})$ 内单调递增, 在 $(\frac{2\pi}{3}, \pi)$ 内单调递减,

可知当 $x = \frac{2\pi}{3}$ 时, $f(x)$ 取得极大值, 极大值为 $f(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$, 无极小值.

故选 A.]

3. A [函数 $f(x) = (x-a^2)(x-1)^2$,

则 $f'(x) = (x-1)^2 + 2(x-a^2)(x-1) = (x-1)(3x-1-2a^2)$,

令 $f'(x)=0$, 可得 $x=1$ 或 $x = \frac{1+2a^2}{3}$,

因为函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值,

所以在 $x=1$ 两侧导数需满足左负右正,

所以 $\frac{1+2a^2}{3} < 1$, 解得 $-1 < a < 1$.

故选 A.]

4. -4 $[f'(x) = (x-2)'[(x-1)(x-a)] + (x-2)[(x-1)(x-a)]' = (x-1)(x-a) + (x-2)[(x-1) + (x-a)]'$, 因为 $x=2$ 是函数 $f(x)$ 的极值点, 所以 $f'(2)=0$, 即 $(2-1)(2-a)=0$, 则 $a=2$, 经检验, 满足题意, 所以 $f(x) = (x-1)(x-2)^2$,

所以 $f(0) = -4$.]

第 26 课时 导数与函数的最值

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (2) $f(a)$ $f(b)$ $f(a)$ $f(b)$

知识点 2 (1) 极值 (2) 最大 最小

链教材·夯基固本

1. $\frac{134}{27}$ -10 $[f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2) \cdot (x+2),$

因为 $x \in [-\frac{1}{3}, 1]$, 所以 $f'(x) < 0$,

故 $f(x)$ 在 $[-\frac{1}{3}, 1]$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(-\frac{1}{3}) = \frac{134}{27}$, 最小值为 $f(1) = -10$.]

2. 1.2 1.8 [设该容器底面矩形短边的长为 x m, 则另一边的

长为 $(x+0.5)$ m, 此容器的高为 $y = \frac{14.8}{4} - x - (x+0.5) =$

$3.2 - 2x$, 则此容器的容积为 $V(x) = x(x+0.5)(3.2 - 2x) = -2x^3 + 2.2x^2 + 1.6x$, 其中 $0 < x < 1.6$. 令 $V'(x) =$

$-6x^2 + 4.4x + 1.6 = 0$, 得 $x_1 = 1, x_2 = -\frac{4}{15}$ (舍去). 因为

$V(x)$ 在 $(0, 1.6)$ 内只有一个极值点, 当 $x \in (0, 1)$ 时,

$V'(x) > 0$, 函数 $V(x)$ 单调递增; 当 $x \in (1, 1.6)$ 时, $V'(x) < 0$, 函数 $V(x)$ 单调递减, 所以 $V(x)_{\max} = V(1) = 1 \times (1 + 0.5) \times (3.2 - 2 \times 1) = 1.8 (\text{m}^3)$, 即当高为 1.2 m 时, 长方体容器的容积最大, 且最大容积为 1.8 m^3 .]

3. $2e^2$ [由题意得, $f'(x) = \ln x + 1$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{e}$, 所以当 $\frac{1}{e} < x \leq e^2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(\frac{1}{e}, e^2]$ 上单调递增, 故 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{e}, e^2]$ 上的最大值为 $f(e^2) = e^2 \ln e^2 = 2e^2$.]

考点深研 · 题型突破

考点一

考向 1 典例 1 解: 因为 $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, 所以 $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x + 1)(x - 1)$,

令 $f'(x) = 0$, 即 $(3x + 1)(x - 1) = 0$, 解得 $x = -\frac{1}{3}$ 或 $x = 1$,

列表如下:

x	$[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3}, 1)$	1	$(1, 2]$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	单调递增		单调递减		单调递增

当 $x \in [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in (-\frac{1}{3}, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (1, 2]$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(-\frac{1}{3}) = \frac{32}{27}$, $f(x)$ 的极小值为 $f(1) = 0$,

又 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{9}{8}$, $f(2) = 3$,

所以函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-\frac{1}{2}, 2]$ 上的最大值为 3, 最小值为 0.

考向 2 典例 2 解: $f'(x) = 3x^2 - 2ax - a^2 = (3x + a)(x - a)$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = -\frac{a}{3}$, $x_2 = a$.

① 当 $a > 0$ 时, $3x + a > 0$, 令 $f'(x) > 0$, 则 $x > a$, 令 $f'(x) < 0$, 则 $0 \leq x < a$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, a)$ 上单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增. 所以 $f(x)_{\min} = f(a) = -a^3$;

② 当 $a = 0$ 时, $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)_{\min} = f(0) = 0$;

③ 当 $a < 0$ 时, $x - a > 0$, 令 $f'(x) > 0$, 则 $x > -\frac{a}{3}$, 令 $f'(x) < 0$, 则 $0 \leq x < -\frac{a}{3}$,

所以 $f(x)$ 在 $[0, -\frac{a}{3})$ 上单调递减, 在 $(-\frac{a}{3}, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)_{\min} = f(-\frac{a}{3}) = \frac{5}{27}a^3$.

综上所述, 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $-a^3$;

当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 的最小值为 0;

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $\frac{5}{27}a^3$.

母题探究

解: $f'(x) = (3x + a)(x - a) (a > 0)$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = -\frac{a}{3}$, $x_2 = a$.

所以 $f(x)$ 在 $[-a, -\frac{a}{3})$ 上单调递增,

在 $(-\frac{a}{3}, a)$ 内单调递减, 在 $(a, 2a]$ 上单调递增.

因为 $f(-a) = -a^3$, $f(-\frac{a}{3}) = \frac{5}{27}a^3$,

$f(a) = -a^3$, $f(2a) = 2a^3$.

所以 $f(x)_{\max} = f(2a) = 2a^3$,

$f(x)_{\min} = f(-a) = f(a) = -a^3$.

考点二

典例 3 A $[f'(x) = \frac{2ax(x-1)-ax^2}{(x-1)^2} = \frac{ax(x-2)}{(x-1)^2}$, 且 $x \in (1, +\infty)$,

当 $a = 0$ 时, 不符合题意;

当 $a > 0$ 时, 若 $x \in (1, 2)$, 则 $f'(x) < 0$, 此时函数 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 内单调递减,

若 $x \in (2, +\infty)$, 则 $f'(x) > 0$, 此时函数 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增,

此时 $f(x)$ 无最大值, 不符合题意;

当 $a < 0$ 时, 若 $x \in (1, 2)$, 则 $f'(x) > 0$, 此时函数 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 内单调递增,

若 $x \in (2, +\infty)$, 则 $f'(x) < 0$, 此时函数 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极大值, 也是最大值, 即 $f(2) = 4a = -8$,

解得 $a = -2$, 符合题意.

综上可知, $a = -2$.

故选 A.]

多维变证

A [由题意得 $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.

当 $f'(x) > 0$ 时, 得 $x < 0$ 或 $x > 2$,

当 $f'(x) < 0$ 时, 得 $0 < x < 2$,

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, 2)$,

即 $x = 2$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极小值 $f(2) = -1$, 画出 $f(x)$ 的图象如图.

当 $x^3 - 3x^2 + 3 = -1$ 时, $(x + 1)(x - 2)^2 = 0$,

解得 $x = -1$ 或 $x = 2$,

故要使函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ 在区间 $(a, a + 6)$ 内存在最小值,

需有 $\begin{cases} a + 6 > 2, \\ -1 \leq a < 2, \end{cases}$ 解得 $-1 \leq a < 2$,

即实数 a 的取值范围为 $[-1, 2)$. 故选 A.]

考点三

典例 4 5 [由题意, 利润 $g(x) = f(x) - 2 - x$, 且 $0 \leq x \leq 10$,

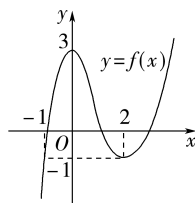
所以 $g(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - 2$,

则 $g'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x = \frac{x}{2}(5 - x)$,

当 $0 \leq x < 5$ 时, $g'(x) \geq 0$, 即 $g(x)$ 在 $[0, 5]$ 上单调递增;

当 $5 < x \leq 10$ 时, $g'(x) < 0$, 即 $g(x)$ 在 $(5, 10]$ 上单调递减,

所以当 $x = 5$ 时, 利润最大.]



多维变迁

225 [设产品单价为 m 万元, 则 $m^2 = \frac{k}{x}$ (其中 k 为非零常数), 所以 $50^2 = \frac{k}{100}$, 故 $k = 250\,000$.

记生产 x 件产品时, 总利润为 $f(x)$, 则

$$f(x) = mx - C(x) = 500\sqrt{x} - 1\,200 - \frac{1}{27}x^2, x > 0, f'(x) = \frac{250}{\sqrt{x}} - \frac{2}{27}x.$$

由 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < 225$; 由 $f'(x) < 0$, 得 $x > 225$.

故函数 $f(x)$ 在 $(0, 225)$ 内单调递增, 在 $(225, +\infty)$ 上单调递减.

因此, 当 $x = 225$ 时, $f(x)$ 取最大值, 即产量定为 225 件时, 总利润最大.]

随堂·对点检测

1. C [根据函数 $f(x) = xe^x$, 得 $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -1$, 因此当 $x \in (-1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减, 所以当 $x = -1$ 时, 函数 $f(x)$ 有最小值,

$$\text{即 } f(-1) = -1 \cdot e^{-1} = -\frac{1}{e}.$$

故选 C.]

2. C [由 $f'(x) = x^2 + 2x$, 令 $f'(x) = 0$, 可得 $x = -2$ 或 $x = 0$, 由 $f'(x) > 0$ 得 $x < -2$ 或 $x > 0$, 由 $f'(x) < 0$ 得 $-2 < x < 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$, $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-2, 0)$ 内单调递减,

所以函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值 $f(0) = 0$,

$$\text{令 } f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 = 0, \text{ 解得 } x = 0 \text{ 或 } x = -3,$$

若函数 $f(x)$ 在 $(a-1, a+5)$ 内存在最小值, 则 $-3 \leq a-1 < 0 < a+5$, 解得 $-2 \leq a < 1$,

即实数 a 的取值范围是 $[-2, 1)$.

故选 C.]

$$3. \text{ ABD } [g'(x) = -\frac{a}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-a}{x^2}.$$

对于选项 A, 当 $a \leq 0$ 时, $g(x)$ 在 $(0, e]$ 上单调递增, 此时 $g(x)$ 有最大值, 故 A 选项正确.

对于选项 B, C, 当 $0 < a < e$ 时, 若 $0 < x < a$, 则 $g'(x) < 0$,

故 $g(x)$ 在 $(0, a)$ 内单调递减;

若 $a < x \leq e$, 则 $g'(x) > 0$, 故 $g(x)$ 在 $(a, e]$ 上单调递增.

$$\text{令 } g(x)_{\min} = g(a) = \frac{a}{a} + \ln a = -1, \text{ 得 } a = \frac{1}{e^2}, \text{ 满足条件,}$$

$$\text{令 } g(x)_{\min} = g(a) = \frac{a}{a} + \ln a = 2, \text{ 得 } a = e, \text{ 不满足条件, 故 B}$$

选项正确, C 选项错误.

对于选项 D, 当 $a \geq e$ 时, 若 $0 < x \leq e$,

则 $g'(x) \leq 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, e]$ 上单调递减, 令 $g(x)_{\min} =$

$$g(e) = \frac{a}{e} + \ln e = 3, \text{ 得 } a = 2e, \text{ 所以此时 } g(x) \text{ 有最小值 } 3, \text{ 故 D}$$

选项正确. 故选 ABD.]

4. 50 [设 A 系列木版画的月利润为 $g(x)$,

$$\text{则 } g(x) = f(x) \cdot (x-30) = (x-90)^2(x-30), 30 < x < 90,$$

$$\text{可得 } g'(x) = 2(x-90)(x-30) + (x-90)^2 = 3(x-90)(x-50),$$

$$\text{令 } g'(x) = 0, \text{ 则 } x = 50,$$

当 $x \in (30, 50)$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x \in (50, 90)$ 时, $g'(x) < 0$,

故 $g(x)$ 在 $(30, 50)$ 内单调递增, 在 $(50, 90)$ 内单调递减,

所以当 $x = 50$ 时, 利润 $g(x)$ 取到极大值, 也是最大值,

即当 A 系列木版画销售价格定为 50 元/套时, 月利润最大.]

* 第 27 课时 利用导数研究不等式问题(进阶课)

类型一

典例 1 证明: (1) 由题意, $e^x > 1+x$ 等价于 $e^x - x - 1 > 0$,

$$\text{令 } f(x) = e^x - x - 1,$$

$$\therefore f'(x) = e^x - 1, \text{ 而 } f'(0) = e^0 - 1 = 0,$$

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

故 $f(x) > f(0) = 0$ 在 $x \neq 0$ 时恒成

立, 即 $e^x - x - 1 > 0 (x \neq 0)$, $\therefore e^x > 1+x, x \neq 0$.

如图, 由图象可直观得到 $e^x > 1+x$, $x \neq 0$.

(2) 由题意, $\ln x < x$ 等价于 $x - \ln x > 0$, $x < e^x$ 等价于 $e^x - x > 0$,

$$\text{令 } f(x) = x - \ln x, \text{ 则 } f'(x) = 1 - \frac{1}{x},$$

$$\text{而 } f'(1) = 1 - \frac{1}{1} = 0,$$

$\therefore$ 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

故 $f(x) \geq f(1) = 1$ 在 $x > 0$ 时恒成立, 即 $x - \ln x \geq 1 > 0$,

$\therefore \ln x < x$ 在 $x > 0$ 时恒成立.

$$\text{令 } g(x) = e^x - x, \text{ 则 } g'(x) = e^x - 1,$$

$$\text{而 } g'(0) = e^0 - 1 = 0,$$

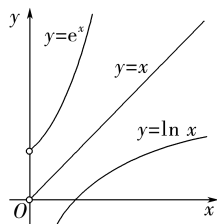
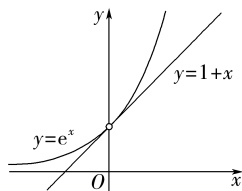
$\therefore$ 当 $x > 0$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

故 $g(x) > g(0) = 1 > 0$ 在 $x > 0$ 时恒成立, 即 $e^x - x > 0$,

$\therefore x < e^x$ 在 $x > 0$ 时恒成立.

综上, $\ln x < x < e^x, x > 0$.

如图, 由图象可直观得到 $\ln x < x < e^x, x > 0$.



类型二

典例 2 解: 若 $f(x)$ 图象恒在 $g(x)$ 图象的上方, 则 $\ln x > 1 - \frac{a}{x}$

恒成立,

即 $a > x(1 - \ln x)$ 恒成立.

$$\text{设 } h(x) = x(1 - \ln x),$$

所求问题转化为 $a > h(x)_{\max}$.

$$\text{则 } h'(x) = 1 - \ln x + x \left(-\frac{1}{x}\right) = -\ln x,$$

$$\text{令 } h'(x) > 0, \text{ 得 } x \in (0, 1), \text{ 令 } h'(x) < 0, \text{ 得 } x \in (1, +\infty),$$

所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{故 } h(x)_{\max} = h(1) = 1,$$

所以 a 的取值范围为 $(1, +\infty)$.

类型三

典例 3 解: 由 $f(x) < x$ 有解, 可得 $a < \frac{2x+1}{e^x}$ 有解,

$$\text{令 } g(x) = \frac{2x+1}{e^x}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{1-2x}{e^x},$$

$$\text{令 } g'(x) > 0, \text{ 可得 } x < \frac{1}{2}, \text{ 令 } g'(x) < 0, \text{ 可得 } x > \frac{1}{2},$$

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $g(x)$ 的最大值为 $g(\frac{1}{2}) = \frac{2\sqrt{e}}{e}$,

所以 $a < \frac{2\sqrt{e}}{e}$, 故实数 a 的取值范围为 $(-\infty, \frac{2\sqrt{e}}{e})$.

* 第 28 课时 利用导数研究函数的零点问题(进阶课)

类型一

典例 1 解: $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x) = \cos x + e^x - 4$.

当 $x \leq 0$ 时, $-1 \leq \cos x \leq 1, 0 < e^x \leq 1$,

所以 $f'(x) = \cos x + e^x - 4 < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 所以 $f(x) \geq f(0) = 1$, 此时函数 $f(x)$ 无零点.

当 $x > 0$ 时, 设 $h(x) = \cos x + e^x - 4$,

则 $h'(x) = -\sin x + e^x > 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

即 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$f'(0) = -2 < 0, f'(2) = \cos 2 + e^2 - 4 > 0$,

因此 $f'(x)$ 在 $(0, 2)$ 内有唯一零点,

记零点为 m , 即 $f'(m) = 0$,

所以 $x \in (0, m)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减,

$x \in (m, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增,

又 $f(0) = 1 > 0, f(1) = \sin 1 + e - 4 < 0$,

$f(\pi) = e^\pi - 4\pi > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有一个零点, 在 $(1, \pi)$ 内有一个零点.

综上所述, $f(x)$ 在定义域上有 2 个零点.

类型二

典例 2 解: 第 1 步 参变分离: 根据函数零点与方程根的关系, 将参数与自变量分开.

由 $f(x) = 0$, 得 $a = \frac{(\ln x)^2}{x}, x > 0$,

第 2 步 求导画曲线: 求导研究曲线性质, 并画出曲线.

设 $g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$,

则 $g'(x) = \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}$,

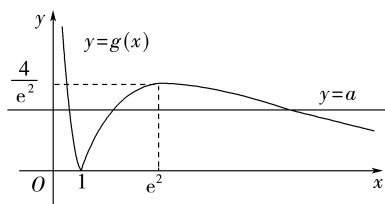
令 $g'(x) = 0$, 得 $x = 1$ 或 $x = e^2$,

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减, $g(x) \in (0, +\infty)$;

当 $x \in (1, e^2)$ 时, $g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增, $g(x) \in (0, \frac{4}{e^2})$;

$x \in (e^2, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减, $g(x) \in (0, \frac{4}{e^2})$.

画出函数 $g(x)$ 的大致图象, 如图所示,



第 3 步 曲直相交得范围: 根据直线与曲线的交点个数, 得参数的取值范围.

由函数的图象知, 当直线 $y=a$ 与函数 $g(x)$ 的图象有三个交点时, a 的取值范围是 $(0, \frac{4}{e^2})$.

微点突破

典例 3 证明: 设 $h(x) = e^x - \ln(x+2), x > -2$,

则 $h'(x) = e^x - \frac{1}{x+2}$, 易知 $h'(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增.

因为 $h'(-1) < 0, h'(0) > 0$,

所以 $h'(x) = 0$ 在 $(-2, +\infty)$ 上存在唯一实数根 x_0 , 且 $x_0 \in (-1, 0)$.

当 $x \in (-2, x_0)$ 时, $h'(x) < 0, h(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0, h(x)$ 单调递增.

所以当 $x = x_0$ 时, $h(x)$ 取得最小值.

因为 $e^{x_0} = \frac{1}{2+x_0}$, 所以 $x_0 = -\ln(2+x_0)$.

故 $h(x) \geq h(x_0) = e^{x_0} - \ln(2+x_0) = \frac{1}{2+x_0} + x_0 =$

$\frac{(1+x_0)^2}{2+x_0} > 0$.

所以 $e^x - \ln(x+2) > 0$.

规范答题一

典例 (1) $e^x - 1 - e - 2$ (1, $e - 2$) (2) $e^x - a$ 单调递增

$f(\ln a) = a - a \ln a - a^3 - \frac{1}{a} - 2a < 0$ (1, $+\infty$)

第四章 三角函数与解三角形

第 29 课时 任意角和弧度制、三角函数的概念

理法先行 · 题练固本

梳必备 · 破题有方

知识点 1 (1) 端点 (2) 零角 象限角

知识点 2 (1) 半径长 (2) $(\frac{180}{\pi})^\circ$ aR

知识点 3 (1) $y = x$ $\frac{y}{x}$ (2) $\frac{y}{r}$ $\frac{x}{r}$ $\frac{y}{x}$ ($x \neq 0$)

链教材 · 夯基固本

1. A [因为 $-2 025^\circ = -360^\circ \times 6 + 135^\circ$, 所以与 $-2 025^\circ$ 终边相同的最小正角是 135° , 故选 A.]

2. $\frac{2\pi}{3}R$ 4 [由弧长公式可得 $l = aR = \frac{2\pi}{3}R$,

由扇形面积公式得 $S = \frac{1}{2}aR^2 = 2R^2$,

$\therefore a = \frac{2R^2}{\frac{1}{2}R^2} = 4$.]

3. $-\frac{7}{13}$ [由三角函数的定义可得 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{5}{\sqrt{(-12)^2 + 5^2}} + \frac{-12}{\sqrt{(-12)^2 + 5^2}} = \frac{5}{13} - \frac{12}{13} = -\frac{7}{13}$.]

4. D [因为 α 为第一象限角, 所以 $2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 所

以 $k\pi < \frac{\alpha}{2} < k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$. 当 $k = 2n, n \in \mathbf{Z}$ 时, $2n\pi < \frac{\alpha}{2} <$

$2n\pi + \frac{\pi}{4}$, 属于第一象限角; 当 $k = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}$ 时, $2n\pi + \pi <$

$\frac{\alpha}{2} < 2n\pi + \frac{5\pi}{4}$, 属于第三象限角, 所以 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一或第三象限角.

故选 D.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 ACD [对于 A, $-\frac{25\pi}{6} = -750^\circ = -1\ 080^\circ + 330^\circ$, 330°

是第四象限角, 所以 $-\frac{25\pi}{6}$ 是第四象限角, 故 A 正确; 对于 B, 终

边落在 y 轴上的角的集合为 $\left\{\alpha \mid \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$, 角度与弧

度不能混用, 故 B 错误; 对于 C, 第三象限角的集合为 $\left\{\alpha \mid \pi +$

$2k\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$, 故 C 正确; 对于 D, 所有与 45° 角终

边相同的角可表示为 $\beta = 45^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$, 从而当 $k = -2$

时, $\beta = -675^\circ$; 当 $k = -1$ 时, $\beta = -315^\circ$, 故 D 正确. 故选 ACD.]

多维变迁

1. D [因为 α 是第二象限角, 可得 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

对于 A, 可得 $-\pi - 2k\pi < -\alpha < -\frac{\pi}{2} - 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 此时 $-\alpha$ 的

终边在第三象限, 所以 $-\alpha$ 是第三象限角, A 错误; 对于 B, 可得

$\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 当 k 为偶数时, $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第一

象限; 当 k 为奇数时, $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第三象限, 所以 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一或

第三象限角, B 错误; 对于 C, 可得 $2\pi + 2k\pi < \frac{3\pi}{2} + \alpha < \frac{5\pi}{2} +$

$2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $2(k+1)\pi < \frac{3\pi}{2} + \alpha < \frac{\pi}{2} + 2(k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以

$\frac{3\pi}{2} + \alpha$ 的终边在第一象限, 所以 $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ 是第一象限角, C 错误;

对于 D, 可得 $\pi + 4k\pi < 2\alpha < 2\pi + 4k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 2α 是第三或

第四象限角或终边在 y 轴的非正半轴上, D 正确. 故选 D.]

2. $\{\alpha \mid k \cdot 360^\circ + 30^\circ \leq \alpha < k \cdot 360^\circ + 105^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

[终边落在射线 OA 上的角的集合是 $\{\beta \mid \beta = k \cdot 360^\circ + 30^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$, 终边落在射线 OB 上的角的集合是 $\{\gamma \mid \gamma = k \cdot 360^\circ +$

$105^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$, 所以终边落在阴影部分(含射线 OA , 不含射线 OB)的角的集合是 $\{\alpha \mid k \cdot 360^\circ + 30^\circ \leq \alpha < k \cdot 360^\circ + 105^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.]

考点二

典例 2 解: (1) 由题意知 $\alpha = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$, 所以弧长 $l = \alpha R = \frac{2\pi}{3} \times$

$10 = \frac{20\pi}{3}$ cm.

(2) 由题意得 $\begin{cases} 2R + \alpha R = 10, \\ \frac{1}{2} \alpha R^2 = 4, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} R = 1, \\ \alpha = 8 \end{cases}$ (舍去) 或 $\begin{cases} R = 4, \\ \alpha = \frac{1}{2}, \end{cases}$ 故扇形的圆心角为 $\frac{1}{2}$.

母题探究

1. 解: 设弓形面积为 $S_{\text{弓}}$, 由题意知 $l = \frac{2\pi}{3}$ cm.

$S_{\text{弓}} = S_{\text{扇形}} - S_{\text{三角形}} = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{3} \times 2 - \frac{1}{2} \times 2^2 \times \sin \frac{\pi}{3} =$

$\left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right) \text{ cm}^2$.

2. 解: 由已知得, $l + 2R = 20$,

法一: 因为 $S = \frac{1}{2} lR = \frac{1}{2} (20 - 2R)R = 10R - R^2 = -(R -$

$5)^2 + 25$,

所以当 $R = 5$ 时, S 取得最大值 25 cm^2 ,

此时 $l = 10, \alpha = 2$.

法二: $S = \frac{1}{2} lR = \frac{1}{4} l \cdot 2R \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{l+2R}{2}\right)^2 = 25$,

当且仅当 $l = 2R$, 即 $R = 5$ cm 时, S 的最大值是 25 cm^2 .

此时扇形的圆心角 $\alpha = 2$.

考点三

考向 1 典例 3 C [根据题意, $r = OP = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$, 所

以 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5}$, 所以 $\cos \alpha + \sin \alpha + 1 = \frac{4}{5} +$

$\left(-\frac{3}{5}\right) + 1 = \frac{6}{5}$. 故选 C.]

多维变迁

D [因为角 θ 的顶点在坐标原点, 始边与 x 轴的非负半轴重

合, 终边与直线 $y = \frac{1}{2}x$ 位于第三象限的部分重合, 在角 θ 的

终边上取点 $(-2, -1)$,

所以 $\sin \theta = \frac{-1}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

故选 D.]

考向 2 典例 4 B [$\because$ 点 $P(2\sin \theta, \sin \theta \cdot \cos \theta)$ 位于第四象限,

$\therefore \begin{cases} 2\sin \theta > 0, \\ \sin \theta \cdot \cos \theta < 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \sin \theta > 0, \\ \cos \theta < 0, \end{cases}$

$\therefore$ 角 θ 的终边所在的象限是第二象限.]

随堂·对点检测

1. B [当 k 为奇数时, 记 $k = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}$, 则 $\alpha = 225^\circ + n \cdot 360^\circ$

$(n \in \mathbf{Z})$, 此时 α 为第三象限角; 当 k 为偶数时, 记 $k = 2n, n \in$

$\mathbf{Z}$, 则 $\alpha = 45^\circ + n \cdot 360^\circ (n \in \mathbf{Z})$, 此时 α 为第一象限角. 故 α 的

终边在第一或第三象限.]

2. D [因为角 α 的终边过点 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

则 $\tan \alpha = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$. 故选 D.]

3. AB [由题意知 $\sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0, \tan \alpha < 0$.

选项 A, $\frac{\sin \alpha}{\tan \alpha} > 0$;

选项 B, $\cos \alpha - \sin \alpha > 0$;

选项 C, $\sin \alpha \cos \alpha < 0$;

选项 D, $\sin \alpha + \cos \alpha$ 符号不确定.

故选 AB.]

4. 200 [设该扇形的半径为 r , 弧长为 l ,

则 $\begin{cases} l = 4r, \\ 2r + l = 60, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} r = 10, \\ l = 40, \end{cases}$ 所以该扇形的面积 $S = \frac{1}{2} rl$

$= 200$.]

第 30 课时 同角三角函数的基本关系与诱导公式

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1) 1

知识点 2 $-\sin \alpha \quad -\sin \alpha \quad \sin \alpha \quad \cos \alpha \quad \cos \alpha \quad -\cos \alpha$

$\cos \alpha \quad -\cos \alpha \quad \sin \alpha \quad -\sin \alpha \quad \tan \alpha \quad -\tan \alpha \quad -\tan \alpha$

链教材·夯基固本

1. A [由题意得 $\cos \alpha = \frac{12}{13}$,

故 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{5}{12}$. 故选 A.]

2. B $\left[\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = \frac{3+1}{3-1} = 2. \right]$

故选 B.]

3. $\frac{\sqrt{2}}{2} \left[\sin \frac{5\pi}{6} \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + \sin \frac{11\pi}{6} \cos \frac{5\pi}{4} \right]$
 $= \sin \left(-\frac{\pi}{6} + \pi \right) \cos \frac{\pi}{4} + \sin \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \pi \right)$
 $= \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} + \left(-\sin \frac{\pi}{6} \right) \left(-\cos \frac{\pi}{4} \right) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.]$

4. $\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \left[\text{因为 } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } -\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3} - x < \frac{\pi}{3}, \text{ 又} \right]$

$\sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \frac{1}{3} > 0, \text{ 所以 } 0 < \frac{\pi}{3} - x < \frac{\pi}{3},$

所以 $\cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \sqrt{1 - \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} - x \right)} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$

$\sin \left(\frac{\pi}{6} + x \right) = \sin \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \right]$

$= \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \frac{2\sqrt{2}}{3};$

$\cos \left(\frac{2\pi}{3} + x \right) = \cos \left[\pi - \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \right]$

$= -\cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.]$

5. A $\left[(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x = 1 - 2 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{4}, \right]$

所以 $\cos x - \sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.]$

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1) BC (2) ABC $\left[(1) \text{ 对于 A, 因为 } \cos \alpha = -\frac{5}{13} < 0 \right]$

且 $\cos \alpha \neq -1,$

所以 α 是第二或第三象限角.

①若 α 是第二象限角,

则 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{5}{13} \right)^2} = \frac{12}{13},$

所以 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}.$

②若 α 是第三象限角,

则 $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

$= -\sqrt{1 - \left(-\frac{5}{13} \right)^2} = -\frac{12}{13},$

所以 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}, \text{ A 错误};$

对于 B, 由 $\sin \alpha + 2\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{2},$

两边平方可得 $\sin^2 \alpha + 4\cos^2 \alpha + 4\sin \alpha \cos \alpha = \frac{5}{2},$

因此, $\frac{\sin^2 \alpha + 4\cos^2 \alpha + 4\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{5}{2},$ 分子、分母同除以 $\cos^2 \alpha$ 可

得 $\frac{\tan^2 \alpha + 4\tan \alpha + 4}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{5}{2},$ 整理可得 $3\tan^2 \alpha - 8\tan \alpha - 3 = 0,$ 解得

$\tan \alpha = 3$ 或 $\tan \alpha = -\frac{1}{3}, \text{ B 正确};$

对于 C, 因为 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2,$ 且 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2},$ 所

以 $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5},$ 所以 $\cos \alpha - \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} -$

$\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5} \right) = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ C 正确};$

对于 D, 由 $\frac{\sin \alpha + 3\cos \alpha}{3\cos \alpha - \sin \alpha} = 5,$ 得 $\frac{\tan \alpha + 3}{3 - \tan \alpha} = 5,$

可得 $\tan \alpha = 2,$

则 $\cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha = \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha$

$= \frac{\cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{1 + \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{3}{5}, \text{ D 错误, 故选 BC.}$

(2) 因为 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{17},$

则 $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{49}{289},$

所以 $2\sin \theta \cos \theta = -\frac{240}{289} < 0,$

又因为 $\theta \in (0, \pi),$ 则 $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0,$ 所以 $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right), \text{ A 正}$

确;

又 $\sin \theta - \cos \theta > 0,$

$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2\sin \theta \cos \theta = \frac{529}{289},$

所以 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{23}{17}, \text{ D 错误};$

联立 $\begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{17}, \\ \sin \theta - \cos \theta = \frac{23}{17}, \end{cases}$ 可得 $\sin \theta = \frac{15}{17}, \cos \theta = -\frac{8}{17}, \tan \theta =$

$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{15}{8},$ 故 B, C 正确.

故选 ABC.]

考点二

典例 2 (1) BC (2) B (3) -1 $\left[(1) \text{ 对于 A, } \sin(3\pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \text{ 故 A 错误}; \right]$

对于 B, $\sin \left(\frac{7\pi + \alpha}{2} \right) = \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)$

$= -\cos \frac{\alpha}{2}, \text{ 故 B 正确};$

对于 C, $\cos \left(\frac{5\pi}{2} - 2\alpha \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) = \sin 2\alpha, \text{ 故 C 正确};$

对于 D, $\cos(9\pi - 3\alpha) = \cos(\pi - 3\alpha) = -\cos 3\alpha, \text{ 故 D 错误.}$

故选 BC.

(2) 因为 $\sin \left(\frac{2\pi}{7} + \alpha \right) = \frac{1}{5},$

所以 $\cos \left(\frac{3\pi}{14} - \alpha \right) = \cos \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{2\pi}{7} + \alpha \right) \right] = \sin \left(\frac{2\pi}{7} + \alpha \right) = \frac{1}{5},$

则 $\sin \left(\frac{3\pi}{14} - \alpha \right) = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \left(\frac{3\pi}{14} - \alpha \right)} = \pm \frac{2\sqrt{6}}{5},$

所以 $\tan \left(\frac{3\pi}{14} - \alpha \right) = \frac{\sin \left(\frac{3\pi}{14} - \alpha \right)}{\cos \left(\frac{3\pi}{14} - \alpha \right)} = \pm 2\sqrt{6}.$

故选 B.

(3) $\because \cos 10^\circ > \sin 10^\circ,$

$\therefore \text{原式} = \frac{\sqrt{1 - 2\sin 10^\circ \cos 10^\circ}}{\sin 10^\circ - \cos 10^\circ}$

梳必备·破题有方

知识点 2 $\sqrt{a^2+b^2} \sin(\alpha+\varphi)$

链教材·夯基固本

1. D $[\sin 20^\circ \cos 10^\circ - \cos 160^\circ \sin 10^\circ = \sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 20^\circ \cdot$

$\sin 10^\circ = \sin(20^\circ + 10^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. 故选 D.]

2. $\frac{7}{25}$ [因为 $\sin(\alpha - \pi) = -\sin \alpha = \frac{3}{5}$,

所以 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, 所以 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \times$

$(-\frac{3}{5})^2 = \frac{7}{25}$.]

3. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ $[\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ)$

$= \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.]

4. 7 $[\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

$= \frac{2 - (-\frac{1}{3})}{1 + 2 \times (-\frac{1}{3})} = 7$.]

5. $\frac{4}{5}$ [由题意, 得 $\cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{4}{5}$,

即 $\cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) = \frac{4}{5}$.]

6. 2 [由 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \tan \frac{3\pi}{4} = -1$, 得 $\tan \alpha +$

$\tan \beta - \tan \alpha \tan \beta + 1 = 0$, 所以 $(1 - \tan \alpha)(1 - \tan \beta) = 1 -$

$(\tan \alpha + \tan \beta) + \tan \alpha \tan \beta = 2$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1) D (2) A (3) B $[(1) \cos \alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = 2 \times$

$\frac{1}{5} - 1 = -\frac{3}{5}$, 因为 $0 < \alpha < \pi$, 所以 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$,

所以 $\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha - \cos \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{7}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$.

(2) 因为 $\cos(\alpha + \beta) = m$,

所以 $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = m$,

而 $\tan \alpha \tan \beta = 2$,

所以 $\sin \alpha \sin \beta = 2\cos \alpha \cos \beta$,

故 $\cos \alpha \cos \beta - 2\cos \alpha \cos \beta = m$,

即 $\cos \alpha \cos \beta = -m$,

从而 $\sin \alpha \sin \beta = -2m$,

故 $\cos(\alpha - \beta) = -3m$. 故选 A.

(3) 因为 $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \sqrt{3}$,

所以 $\frac{1}{1 - \tan \alpha} = \sqrt{3}$, 解得 $\tan \alpha = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = 2\sqrt{3} - 1$.

故选 B.]

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{\sin^2 10^\circ - 2\sin 10^\circ \cos 10^\circ + \cos^2 10^\circ}}{\sin 10^\circ - \cos 10^\circ} \\ &= \frac{|\sin 10^\circ - \cos 10^\circ|}{\sin 10^\circ - \cos 10^\circ} \\ &= \frac{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ}{-(\cos 10^\circ - \sin 10^\circ)} \\ &= -1. \end{aligned}$$

考点三

典例 3 (1) 证明: $f(\alpha) = \frac{\sin(2\pi - \alpha) \cos(\pi + \alpha)}{\sin(\frac{9\pi}{2} + \alpha)}$

$$= \frac{(-\sin \alpha)(-\cos \alpha)}{\cos \alpha} = \sin \alpha, \text{ 得证.}$$

(2) 解: 因为 $f(\alpha) = \sin \alpha = \frac{3}{5}$, 且 α 为第二象限角,

所以 $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{4}{5}$,

所以 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4}$,

$$\text{所以 } \tan \alpha \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} - 1 = \left(-\frac{3}{4}\right) \times \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{1 + \frac{4}{5}}} - 1 = -\frac{5}{4}.$$

随堂·对点检测

1. AD $[\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 A 选项正确;

$$\cos \frac{5\pi}{6} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以 B 选项错误;

$\cos \pi = -\cos 0 = -1$, 所以 C 选项错误;

$$\tan \frac{3\pi}{4} = \tan(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1, \text{ D 选项正确.}$$

故选 AD.]

2. A $[\because \alpha$ 是第三象限角, 且 $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$,

$$\therefore \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{则 } 3\cos \alpha + 4\tan \alpha = -2\sqrt{2} + \sqrt{2} = -\sqrt{2}.$$

故选 A.]

3. D [因为 $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{2}$,

$$\text{所以 } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{3}{4} \times \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{2},$$

$$\text{化简得 } 3(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 8(\sin \alpha + \cos \alpha) - 3 = 0,$$

$$\text{解得 } \sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{1}{3} \text{ 或 } \sin \alpha + \cos \alpha = 3 \text{ (舍去).}$$

故选 D.]

4. $-\frac{3}{10}$ [由题意可得 $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) + 3\cos(\alpha - \pi) = -\sin \alpha -$

$$3\cos \alpha = 0,$$

$$\text{所以 } -\sin \alpha = 3\cos \alpha,$$

$$\text{可得 } \tan \alpha = -3,$$

$$\text{所以 } \frac{\sin^3 \alpha - \sin \alpha}{\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)} = \frac{\sin \alpha(\sin^2 \alpha - 1)}{-\cos \alpha} = \tan \alpha \cdot (1 - \sin^2 \alpha) = \tan \alpha \cdot$$

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \tan \alpha \cdot \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1} = -3 \times \frac{1}{9 + 1} = -\frac{3}{10}.]$$

考点二

考向 1 典例 2 (1)B (2) $\frac{\pi}{2}$ (取值满足 $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 即可)

[(1)由 $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) + \cos(\frac{\pi}{3} - \theta) = 1$, 得 $\cos \theta + \frac{1}{2} \cos \theta +$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta = \frac{3}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta = 1,$$

$$\text{所以 } \sqrt{3} \cos(\theta - \frac{\pi}{6}) = 1,$$

$$\text{所以 } \cos(\theta - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{则 } \cos(2\theta - \frac{\pi}{3}) = 2\cos^2(\theta - \frac{\pi}{6}) - 1 = -\frac{1}{3}.$$

故选 B.

$$(2)f(x) = \sin(x + \varphi) + \cos x = \sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi + \cos x$$

$$= \cos \varphi \sin x + (\sin \varphi + 1) \cdot \cos x = \sqrt{\cos^2 \varphi + (\sin \varphi + 1)^2} \cdot$$

$\sin(x + \theta)$ (其中 $\tan \theta = \frac{\sin \varphi + 1}{\cos \varphi}$), 由 $f(x)$ 的最大值为 2, 所以

$\sqrt{\cos^2 \varphi + (\sin \varphi + 1)^2} = 2$, 化简可得 $\sin \varphi = 1$, 则 φ 可为

$\frac{\pi}{2}$, 其取值满足 $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 即可.]

考向 2 典例 3 ABD [对于 A, $\cos 82^\circ \sin 52^\circ - \sin 82^\circ \cos 52^\circ =$

$$\sin(52^\circ - 82^\circ) = -\frac{1}{2}, \text{故 A 正确};$$

$$\text{对于 B, } \sin 15^\circ \sin 30^\circ \sin 75^\circ = \frac{1}{2} \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 30^\circ =$$

$$\frac{1}{8}, \text{故 B 正确};$$

$$\text{对于 C, } \frac{\tan 48^\circ + \tan 72^\circ}{1 - \tan 48^\circ \tan 72^\circ} = \tan(48^\circ + 72^\circ) = -\sqrt{3}, \text{故 C 错误};$$

对于 D, 由二倍角公式可得,

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{故 D 正确}.$$

故选 ABD.]

考向 3 典例 4 C [$\because \alpha + \beta = \frac{5\pi}{4}$,

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \tan \frac{5\pi}{4} = \tan(\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan \frac{\pi}{4} = 1,$$

$$\therefore \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1, \text{化简得 } \tan \alpha + \tan \beta = 1 - \tan \alpha \tan \beta,$$

$$\text{可得 } (1 + \tan \alpha) \cdot (1 + \tan \beta) = 1 + \tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \cdot \tan \beta = 1 + 1 - \tan \alpha \tan \beta + \tan \alpha \tan \beta = 2.$$

故选 C.]

考点三

典例 5 (1)C (2)D [(1)因为角 α, β 均为锐角, 所以 $\alpha + \beta \in$

$$(0, \pi),$$

$$\text{因为 } \cos(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{10}}{10}, \sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{所以 } \sin(\alpha + \beta) = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{所以 } \cos(\alpha + 2\beta) = \cos[(\alpha + \beta) + \beta]$$

$$= \cos(\alpha + \beta) \cos \beta - \sin(\alpha + \beta) \sin \beta$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{10} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{3\sqrt{10}}{10} \times \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

故选 C.

(2)法一: 设 $\beta = 0$, 则 $\sin \alpha + \cos \alpha = 0$, 取 $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, 排除 A, C;

再取 $\alpha = 0$, 则 $\sin \beta + \cos \beta = 2 \sin \beta$, 取 $\beta = \frac{\pi}{4}$, 排除 B. 故选 D.

法二: $\because \sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2\sqrt{2} \cdot \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) \sin \beta$,

$$\therefore \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = 2(\cos \alpha - \sin \alpha) \cdot$$

$$\sin \beta = 2 \cos \alpha \sin \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\therefore \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 0,$$

$$\text{即 } \sin(\alpha - \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 0,$$

$$\therefore \sin(\alpha - \beta) = -\cos(\alpha - \beta),$$

$$\therefore \tan(\alpha - \beta) = -1.]$$

多维变迁

$$\text{C } [\because \cos \beta = \frac{1}{3}, \cos \alpha \cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \cos \beta = \cos[(\alpha + \beta) - \alpha] = \cos[\alpha - (\alpha + \beta)]$$

$$= \cos \alpha \cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{4} + \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)$$

$$= \frac{1}{3},$$

$$\therefore \sin \alpha \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{12},$$

$$\therefore \cos(2\alpha + \beta) = \cos[\alpha + (\alpha + \beta)]$$

$$= \cos \alpha \cos(\alpha + \beta) - \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

故选 C.]

教材拓展

典例 6 B [因为 $\tan \frac{\alpha}{2} = 3$,

$$\text{所以 } \sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1} = \frac{2 \times 3}{3^2 + 1} = \frac{3}{5},$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - 3^2}{1 + 3^2} = -\frac{4}{5},$$

$$\text{则 } \frac{\sin \alpha}{2 - \cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{2 - (-\frac{4}{5})} = \frac{3}{14}.$$

故选 B.]

随堂·对点检测

1. BC [对于 A, $\frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{\tan 20^\circ \tan 25^\circ - 1} = -\frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ}$

$$= -\tan(20^\circ + 25^\circ) = -1, \text{不符合题意};$$

$$\text{对于 B, } 4 \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = 4 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = 2 \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} = 1, \text{符合题意};$$

$$\text{对于 C, } \sin 72^\circ \cos 18^\circ - \cos 108^\circ \sin 18^\circ = \sin 72^\circ \cos 18^\circ +$$

$$\cos 72^\circ \sin 18^\circ = \sin(72^\circ + 18^\circ) = 1, \text{符合题意};$$

$$\text{对于 D, } 2 \cos^2 22.5^\circ - 1 = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{不符合题意}.$$

故选 BC.]

2. D [$\sin 15^\circ + \sin 75^\circ = \sin 15^\circ + \cos 15^\circ = \sqrt{2} \sin(15^\circ + 45^\circ) =$

$$\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}. \text{ 故选 D.}]$$

3. C $[\tan \alpha + \tan \beta = -\sqrt{3}(1 - \tan \alpha \tan \beta)$, 因为 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\alpha + \beta \in (0, \pi)$,
 所以 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = -\sqrt{3}$,
 故 $\alpha + \beta = \frac{2\pi}{3}$.
 故选 C.]

4. D $[\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 + \cos 2\beta}{2} = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 2\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta + \alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta - \alpha + \beta)] =$
 $-\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$, 故选 D.]

5. $-\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \frac{3\sqrt{10}}{10}$ [因为 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 且 α 为第四象限角,
 所以 $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$,
 所以 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.]

第 32 课时 简单的三角恒等变换

理法先行 · 题练固本

链教材 · 夯基固本

1. $-\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad -\frac{\sqrt{5}}{5}$ [$\because \theta \in (\frac{5\pi}{2}, 3\pi)$, 且 $\sin \theta = \frac{4}{5}$,
 $\therefore \cos \theta = -\frac{3}{5}$, $\frac{\theta}{2} \in (\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$,

$$\therefore \sin \frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.]$$

2. (1) $\frac{1}{2} \sin \alpha$ (2) 0 [(1) 原式 $= \frac{1}{2}[\sin(\alpha + 2\beta) + \sin \alpha] -$
 $\frac{1}{2} \sin(\alpha + 2\beta) = \frac{1}{2} \sin \alpha$.
 (2) 原式 $= 2 \sin \frac{10^\circ + 50^\circ}{2} \cos \frac{50^\circ - 10^\circ}{2} - \cos 20^\circ = 2 \sin 30^\circ \cos 20^\circ$
 $-\cos 20^\circ = 0$.]

考点深研 · 题型突破

考点一

典例 1 (1) $\frac{1}{8}$ (2) 0 [(1) 法一: 原式

$$= \frac{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{2 \sin 20^\circ}$$

$$= \frac{2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{4 \sin 20^\circ} = \frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{8 \sin 20^\circ}$$

$$= \frac{\sin 160^\circ}{8 \sin 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{8 \sin 20^\circ} = \frac{1}{8}.$$

法二: 原式 $= \frac{1}{2}[\cos(20^\circ + 40^\circ) + \cos(20^\circ - 40^\circ)] \cos 80^\circ$

$$= \frac{1}{4} \cos 80^\circ + \frac{1}{2} \cos 20^\circ \cos 80^\circ$$

$$= \frac{1}{4} \cos 80^\circ + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} [\cos(20^\circ + 80^\circ) + \cos(20^\circ - 80^\circ)]$$

$$= \frac{1}{4} \cos 80^\circ + \frac{1}{4} \cos 100^\circ + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{8}.$$

$$(2) \text{ 原式} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta - \cos \theta} + \frac{\cos \theta}{1 - \tan \theta} - \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta - \cos \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta - \sin \theta} - \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sin \theta + \cos \theta - \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 0.]$$

考点二

考向 1 典例 2 ABD [对于 A, $\sin 15^\circ \sin 30^\circ \cdot \sin 75^\circ = \frac{1}{2} \sin 15^\circ \cdot$

$$\sin 75^\circ = -\frac{1}{4} [\cos(15^\circ + 75^\circ) - \cos(15^\circ - 75^\circ)] = \frac{1}{8}, \text{ 故 A}$$

正确;

对于 B, $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$

$$= \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3} \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}$$

$$= \frac{2(\sin 30^\circ \cos 10^\circ - \cos 30^\circ \sin 10^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 20^\circ}$$

$$= \frac{4 \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 4, \text{ 故 B 正确;}$$

对于 C, $\frac{3 - \sin 70^\circ}{2 - \cos^2 10^\circ} = \frac{3 - \cos 20^\circ}{2 - \cos^2 10^\circ}$

$$= \frac{3 - (2 \cos^2 10^\circ - 1)}{2 - \cos^2 10^\circ} = \frac{2(2 - \cos^2 10^\circ)}{2 - \cos^2 10^\circ} = 2, \text{ 故 C 错误;}$$

对于 D, 因为 $\tan 60^\circ = \tan(20^\circ + 40^\circ) = \frac{\tan 20^\circ + \tan 40^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 40^\circ} = \sqrt{3}$,

$$\text{所以 } \tan 20^\circ + \tan 40^\circ = \sqrt{3} - \sqrt{3} \tan 20^\circ \cdot \tan 40^\circ,$$

$$\text{即 } \tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 60^\circ$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{3} \tan 20^\circ \tan 40^\circ + \sqrt{3} \tan 20^\circ \tan 40^\circ = \sqrt{3}, \text{ 故 D 正确.}$$

故选 ABD.]

考向 2 典例 3 B [法一: 依题意, 得

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3}, \\ \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{6}, \end{cases}$$

$$\text{所以 } \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3},$$

$$\text{所以 } \cos(2\alpha + 2\beta) = 1 - 2 \sin^2(\alpha + \beta) = 1 - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}. \text{ 故}$$

选 B.

法二(积化和差公式): 由条件, 知

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{6},$$

$$\text{解得 } \sin(\alpha + \beta) = \frac{2}{3},$$

$$\text{则 } \cos(2\alpha + 2\beta) = \cos[2(\alpha + \beta)] = 1 - 2 \sin^2(\alpha + \beta) = 1 - 2 \times$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}. \text{ 故选 B.}]$$

考向 3 典例 4 (1) B (2) $-\frac{3\pi}{4}$ [(1) 由题意知, $\cos \alpha =$

$$\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\because \tan \beta = -3, \text{ 且 } \beta \text{ 为钝角}, \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1,$$

$$\therefore \sin \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos \beta = -\frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) + \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{又 } \because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi,$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}, \therefore \alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}. \text{ 故选 B.}$$

$$(2) \because \tan \alpha = \tan[(\alpha - \beta) + \beta]$$

$$= \frac{\tan(\alpha - \beta) + \tan \beta}{1 - \tan(\alpha - \beta) \tan \beta} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{7}} = \frac{1}{3} > 0,$$

$$\therefore 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{又 } \because \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times \frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4} > 0, \therefore 0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \tan(2\alpha - \beta) = \frac{\tan 2\alpha - \tan \beta}{1 + \tan 2\alpha \tan \beta} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{3}{4} \times \frac{1}{7}} = 1.$$

$$\because \tan \beta = -\frac{1}{7} < 0, \therefore \frac{\pi}{2} < \beta < \pi, -\pi < 2\alpha - \beta < 0, \therefore 2\alpha - \beta = -\frac{3\pi}{4}.]$$

随堂·对点检测

1. **BC** [对于 A, $\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{4}$, 故 A 错误;

对于 B, $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 B 正确;

对于 C, $\frac{\tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 C 正确;

对于 D, $\frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ} = \frac{\tan 45^\circ + \tan 15^\circ}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan 15^\circ} = \tan(45^\circ + 15^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$, 故 D 错误. 故选 BC.]

2. **D** [由题意, $\cos \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$, 得 $\sin^2 \frac{\alpha}{2} =$

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{8} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16} = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2, \text{ 又 } \alpha \text{ 为锐角}, \text{ 所以 } \sin \frac{\alpha}{2} > 0, \text{ 所}$$

$$\text{以 } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \text{ 故选 D.}]$$

3. $-\frac{3\pi}{4}$ [由 $\beta \in (0, \pi)$, $\cos \beta = -\frac{4}{5}$,

$$\text{得 } \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{3}{5},$$

$$\text{所以 } \tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = -\frac{3}{4}, \text{ 又 } \tan \alpha = \frac{1}{7},$$

$$\text{所以 } \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{7} - \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7} \times \frac{3}{4}} = \frac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}} = 1,$$

$$\text{因为 } \cos \beta = -\frac{4}{5} < 0, \text{ 则 } \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),$$

$$\text{又 } \tan \alpha = \frac{1}{7} > 0, \text{ 则 } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 则 } \alpha - \beta \in (-\pi, 0),$$

$$\text{所以 } \alpha - \beta = -\frac{3\pi}{4}.]$$

4. $\cos \alpha$ [因为 $\pi < \alpha < 2\pi$, 所以 $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$,

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + \sin \alpha + \cos \alpha) \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)}{\sqrt{2 + 2\cos \alpha}} \\ &= \frac{\left(2\cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)}{\sqrt{4\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} \\ &= \frac{2\cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)}{2 \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|} \\ &= \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right)}{\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|} \\ &= \frac{-\cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha}{\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|} = \frac{-\cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha}{-\cos \frac{\alpha}{2}} \\ &= \cos \alpha.] \end{aligned}$$

第 33 课时 三角函数的图象与性质

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 2 $\left\{ x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$ $[-1, 1]$ $[-1, 1]$ 2π π 奇

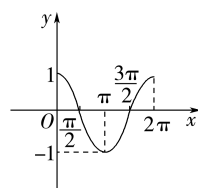
函数 偶函数 奇函数 $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right]$ $[2k\pi - \pi,$

$2k\pi]$ $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \right]$ $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ $(k\pi, 0)$

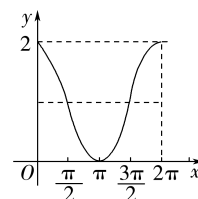
$\left(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0 \right)$ $\left(\frac{k\pi}{2}, 0 \right)$ $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ $x = k\pi$

链教材·夯基固本

1. **D** [函数 $y = \cos x, x \in [0, 2\pi]$ 的图象如图所示,



将函数 $y = \cos x, x \in [0, 2\pi]$ 的图象向上平移 1 个单位长度得到 $y = 1 + \cos x (x \in [0, 2\pi])$ 的简图, 如图所示.



故选 D.]

2. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right]$ [由 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$, 得 $x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6} \right]$,

$$\text{所以 } y = \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right].]$$

$$3. \left[\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{11\pi}{12} + k\pi \right] (k \in \mathbf{Z}) \quad \left[\text{由 } \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \right.$$

$$\left. \text{解得 } \frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \right.$$

$$\left. \text{故 } f(x) \text{ 的单调递减区间是 } \left[\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{11\pi}{12} + k\pi \right] (k \in \mathbf{Z}). \right]$$

$$4. \left\{ x \mid x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbf{Z} \right\} \quad \left[\text{由 } 2x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \right.$$

$$\left. \text{得 } x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}, \right.$$

$$\left. \text{故函数 } y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ 的定义域为 } \left\{ x \mid x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbf{Z} \right\}. \right]$$

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1)D (2) $\left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \right] (k \in \mathbf{Z})$

$$[(1) \because x \in \left(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8} \right),$$

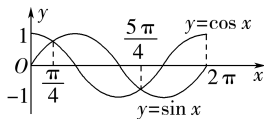
$$\therefore 4x - \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right),$$

$$\therefore \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right],$$

$$\therefore f(x) \in \left[2 - \sqrt{3}, \frac{7}{2} \right].$$

故选 D.

(2)法一:要使函数有意义,必须使 $\sin x - \cos x \geq 0$. 在同一直角坐标系中画出 $[0, 2\pi]$ 上 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 的图象,如图所示.



在 $[0, 2\pi]$ 内,满足 $\sin x = \cos x$ 的 x 为 $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$, 再结合正弦、余弦函数的最小正周期是 2π , 所以原函数的定义域为 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \right] (k \in \mathbf{Z})$.

法二:要使函数 $y = \sqrt{\sin x - \cos x}$ 有意义,

$$\text{则 } \sin x - \cos x \geq 0, \text{ 即 } \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0,$$

$$\text{即 } 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \pi (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{解得 } 2k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{4} (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{即原函数的定义域为 } \left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \right] (k \in \mathbf{Z}).$$

考点二

典例 2 (1)ACD (2)A [(1)由题意可得 $f(x)$ 的最小正周期

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi, \text{ 故 A 正确;}$$

$$\text{令 } 2x - \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 可得 } x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 故 B 错误;}$$

$$\text{令 } 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{可得 } x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$$

当 $k=0$ 时, $x = \frac{\pi}{3}$, 故 $f(x)$ 的图象的对称中心为 $\left(\frac{\pi}{3}, 0 \right)$, 故 C 正确;

$$\text{若 } f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6} + \varphi\right) \text{ 为奇函数, 则 } -\frac{\pi}{6} + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$(k \in \mathbf{Z}), \varphi = k\pi + \frac{2\pi}{3} (k \in \mathbf{Z}), \text{ 当 } k=0 \text{ 时, } \varphi = \frac{2\pi}{3}, \text{ 故 D 正确. 故}$$

选 ACD.

$$(2) \text{ 由题意得 } \omega = \frac{2\pi}{T} \in (2, 3), \text{ 函数 } y = f(x) \text{ 的图象关于点}$$

$$\left(\frac{3\pi}{2}, 2 \right) \text{ 中心对称, 则 } b = 2, \text{ 且 } f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2, \text{ 所以 } \sin\left(\frac{3\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4}\right) + 2 = 2,$$

$$\text{则 } \frac{3\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } \omega = \frac{4k-1}{6}, k \in \mathbf{Z}. \text{ 由}$$

$$\omega \in (2, 3), \text{ 得 } k=4, \omega = \frac{5}{2}, \text{ 所以 } f(x) = \sin\left(\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) + 2,$$

$$\text{故 } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{5}{2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 2 = -1 + 2 = 1. \text{ 故选 A.}]$$

母题探究

1. $\frac{3}{2}$ [由函数 $f(x)$ 的最小正周期 T 满足 $\frac{4\pi}{5} < T < \pi$, 得 $\frac{4\pi}{5} <$

$$\frac{2\pi}{\omega} < \pi, \text{ 解得 } 2 < \omega < \frac{5}{2}, \text{ 又因为函数图象关于点 } \left(\frac{3\pi}{2}, 2 \right) \text{ 中心}$$

对称,

$$\text{所以 } \frac{3\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}), \text{ 且 } b = 2, \text{ 所以 } \omega = \frac{2k}{3} + \frac{1}{6}, k$$

$$\in \mathbf{Z}, \text{ 所以 } \omega = \frac{13}{6}, \text{ 即 } f(x) = \cos\left(\frac{13}{6}x + \frac{\pi}{4}\right) + 2,$$

$$\text{则 } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{13\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right) + 2 = \frac{3}{2}.]$$

2. -1 [因为函数 $f(x)$ 的最大值为 $2+b=1$, 所以 $b=-1$.

$$\text{由 } \pi < T < 2\pi, \text{ 得 } \pi < \frac{2\pi}{\omega} < 2\pi, \text{ 解得 } 1 < \omega < 2.$$

$$\text{由 } y = f(x) \text{ 的图象关于直线 } x = \frac{7\pi}{4} \text{ 对称,}$$

$$\text{可得 } \omega \times \frac{7\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} = k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{所以 } \omega = \frac{4}{7}\left(k - \frac{3}{8}\right), k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{所以 } 1 < \frac{4}{7}\left(k - \frac{3}{8}\right) < 2, \text{ 解得 } \frac{17}{8} < k < \frac{31}{8}.$$

$$\text{又 } k \in \mathbf{Z}, \text{ 所以 } k=3, \text{ 所以 } \omega = \frac{4}{7} \times \left(3 - \frac{3}{8}\right) = \frac{3}{2},$$

$$\text{所以 } f(x) = 2\cos\left(\frac{3}{2}x + \frac{3\pi}{8}\right) - 1.$$

$$\text{故 } f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\frac{3}{2} \times \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{8}\right) - 1$$

$$= 2\cos \frac{3\pi}{2} - 1 = -1.]$$

考点三

典例 3 (1)C (2)D [(1)由题意得 $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x\right) =$

$$-\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{所以函数 } y = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right) \text{ 的单调递减区间, 就是 } y =$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x\right) \text{ 的单调递增区间,}$$

由 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $4k\pi + \frac{5\pi}{3} \leq x \leq 4k\pi + \frac{11\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$,

所以 $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x\right)$ 在区间 $\left[4k\pi + \frac{5\pi}{3}, 4k\pi + \frac{11\pi}{3}\right] (k \in \mathbf{Z})$ 上单调递增,

当 $x \in [-2\pi, 2\pi]$ 时, $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x\right)$ 的单调递增区间是 $\left[-2\pi, -\frac{\pi}{3}\right]$ 和 $\left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$.

故选 C.

(2) 由 $a = \cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right) = \cos \frac{3\pi}{8}$,

$b = \cos \frac{9\pi}{7} = \cos\left(\pi + \frac{2\pi}{7}\right) = -\cos \frac{2\pi}{7} < 0$,

$c = \sin \frac{2\pi}{7} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{7}\right) = \cos \frac{3\pi}{14}$,

又 $0 < \frac{3\pi}{14} < \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$,

$y = \cos x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减,

所以 $\cos \frac{3\pi}{14} > \cos \frac{3\pi}{8} > 0$, 即 $c > a > 0 > b$,

所以 $c > a > b$. 故选 D.]

微点突破

典例 4 ACD [对于 $f(x) = |\sin x| + \cos x$,

由 $f(-x) = f(x)$, 可知 $f(x)$ 是偶函数, 故 A 正确;

因为 $f(\pi - x) = |\sin(\pi - x)| + \cos(\pi - x) = |\sin x| - \cos x \neq f(x)$,

所以 $f(x)$ 的图象不关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称, 故 B 错误;

由题意得 $f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x, & x \in [2k\pi, 2k\pi + \pi], \\ -\sin x + \cos x, & x \in (2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi], \end{cases} k \in \mathbf{Z}$,

所以 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), & x \in [2k\pi, 2k\pi + \pi], \\ -\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), & x \in (2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi], \end{cases} k \in \mathbf{Z}$,

根据正弦函数的性质, 可知当 $x \in [2k\pi, 2k\pi + \pi]$ 时, $f(x) \in [-1, \sqrt{2}]$,

当 $x \in (2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi]$ 时, $f(x) \in (-1, \sqrt{2}]$,

所以 $f(x) \in [-1, \sqrt{2}]$, 即 $f(x)$ 的最小值为 -1 , 可知 C 正确;

当 $x \in (-\pi, 0)$ 时, $f(x) = -\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), x - \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\pi, 0)$ 上不单调, 可知 D 正确.

故选 ACD.]

随堂·对点检测

1. C [根据函数 $y = \sin \frac{x}{2}$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, 可知 A 项

错误;

根据函数 $y = \cos x$ 的最小正周期为 2π , 可知 B 项错误;

根据函数 $y = \tan x$ 的最小正周期为 π , 且在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递增, 可知 C 项正确;

当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, $y = |\sin x| = \sin x$, 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递减,

可知 D 项错误.

故选 C.]

2. BC [$f(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ 为奇函数, A 错误;

根据正弦函数的性质可得, $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, B 正确;

由 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ 得 $T = \pi$, C 正确;

当 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $-\pi \leq 2x \leq \pi$, 此时 $f(x)$ 不单调, D 错误.

故选 BC.]

3. B [A 中, $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$, B 中, $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$, C 中, $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$, D

中, $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$, 排除 C, D; 对于 A, 当 $x = 2$ 时, $f(2) =$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} \times 2\right) = 0$, 故点 $(2, 0)$ 是函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心,

排除 A; 对于 B, 当 $x = 2$ 时, $f(2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \times 2\right) = -1$, 故 $x = 2$

是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴, 故选 B.]

4. $\frac{3}{2}$ [$\because x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{12}\right], \therefore 2x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right]$,

则 $f(x) = \sin 2x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$,

即 $M = 1, m = -\frac{1}{2}$, 则 $M - m = \frac{3}{2}$.]

第 34 课时 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象及应用

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 0 -A

知识点 2 $|\varphi|$ $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$

知识点 3 $\omega x + \varphi$

链教材·夯基固本

1. A [令 $x = 0$, 得 $y = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 排除 B, D; 由 $x =$

$-\frac{\pi}{3}$ 时, $y = 0, x = \frac{\pi}{6}$ 时, $y = 0$, 排除 C. 故选 A.]

2. C [将函数 $y = \sin x$ 的图象上每个点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 得到 $y = \sin 2x$ 的图象, 再将得到的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到 $y = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right] = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象. 故选 C.]

3. C [由题意知 $A = 2, f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{4\pi}$, 初相为 $-\frac{\pi}{3}$. 故选 C.]

考点深研·题型突破

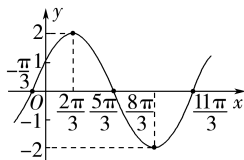
考点一

典例 1 解: $y = \sqrt{3} \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = 2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$,

令 $M = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}$, 则列表如下:

M	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{3}$
$y=2\sin M$	0	2	0	-2	0

在平面直角坐标系中描出相应的五点,用平滑的曲线连接起来,向两端伸展一下,如图所示.



从图象观察知该函数的最小正周期 $T = \frac{11\pi}{3} - (-\frac{\pi}{3}) = 4\pi$.

$[-\frac{4\pi}{3} + 4k\pi, \frac{2\pi}{3} + 4k\pi] (k \in \mathbb{Z})$ 为单调递增区间,

$[\frac{2\pi}{3} + 4k\pi, \frac{8\pi}{3} + 4k\pi] (k \in \mathbb{Z})$ 为单调递减区间.

由函数 $y = \sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,再把横坐标变为原来的 2 倍(纵坐标不变),最后把纵坐标变为原来的 2 倍(横坐标不变)即可得到函数 $y = 2\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})$ 的图象.

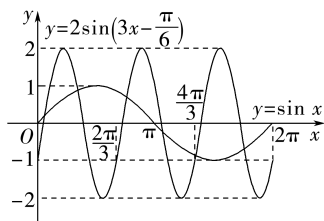
多维变迁

C [因为函数 $y = \sin x$ 的最小正周期 $T = 2\pi$,

函数 $y = 2\sin(3x - \frac{\pi}{6})$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{3}$,

所以在 $x \in [0, 2\pi]$ 上,函数 $y = 2\sin(3x - \frac{\pi}{6})$ 有三个周期的图象,

在平面直角坐标系中结合五点法画出两函数的图象,如图所示,



由图可知,两函数图象有 6 个交点. 故选 C.]

考点二

典例 2 (1) $-\frac{3\pi}{4}$ (2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ [(1) 由 $f(x)$ 的部分图象知, $A + 2 = 3$, 解得 $A = 1$,

最小正周期 $T = 2 \times (\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}) = \frac{4\pi}{3}$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{3}{2}$,

所以 $f(x) = \sin(\frac{3}{2}x + \varphi) + 2$,

因为点 $(\frac{\pi}{6}, 1)$ 在函数图象上,

所以 $\sin(\frac{3}{2} \times \frac{\pi}{6} + \varphi) + 2 = 1$,

所以 $\sin(\frac{\pi}{4} + \varphi) = -1$,

所以 $\varphi = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

因为 $|\varphi| < \pi$, 所以 $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$,

所以 $f(x) = \sin(\frac{3}{2}x - \frac{3\pi}{4}) + 2$,

所以 $f(x)$ 的初相为 $-\frac{3\pi}{4}$.

(2) 对比正弦函数 $y = \sin x$ 的图象易知, 点 $(\frac{2\pi}{3}, 0)$ 为“五点(画图)法”中的第五点, 所以 $\frac{2\pi}{3}\omega + \varphi = 2\pi$. ①

由题知 $|AB| = x_B - x_A = \frac{\pi}{6}$, 又 $y = \frac{1}{2}$, 则 $\begin{cases} \omega x_A + \varphi = \frac{\pi}{6}, \\ \omega x_B + \varphi = \frac{5\pi}{6}, \end{cases}$

两式相减,

得 $\omega(x_B - x_A) = \frac{4\pi}{6}$,

即 $\frac{\pi}{6}\omega = \frac{4\pi}{6}$, 解得 $\omega = 4$.

代入①, 得 $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$,

所以 $f(\pi) = \sin(4\pi - \frac{2\pi}{3}) = -\sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.]

多维变迁

1.1 [根据当 $x = \frac{\pi}{12}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 2, 当 $x = \frac{\pi}{3}$ 时, $f(x)$ 取得最小值 -2,

可知 $f(x)$ 的最小正周期 $T = 2(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}) = \frac{\pi}{2}$, 即 $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$, 解得 $\omega = 4$,

由 $f(\frac{\pi}{12})$ 是函数的最大值, 根据余弦函数的性质, 可得 $4 \times \frac{\pi}{12} + \varphi = 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$,

结合 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 取 $k = 0$, 得 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$,

可得 $f(x) = 2\cos(4x - \frac{\pi}{3})$,

将函数 $f(x)$ 图象上所有的点向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 可得 $f(x + \frac{\pi}{6}) = 2\cos[4(x + \frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{3}] = 2\cos(4x + \frac{\pi}{3})$ 的图象,

所以 $g(x) = 2\cos(4x + \frac{\pi}{3})$, 可得 $g(\frac{\pi}{3}) = 2\cos \frac{5\pi}{3} = 2\cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) = 2\cos \frac{\pi}{3} = 1$.]

2. 解: 由题图得 $A = \frac{3-0}{2} = \frac{3}{2}$,

$B = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2}$,

$T = 2[\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{3})] = \frac{5\pi}{3}$,

$\therefore |\omega| = \frac{2\pi}{T} = \frac{6}{5}$.

当 $\omega > 0$ 时, 函数的解析式为 $y = \frac{3}{2}\sin(\frac{6}{5}x + \varphi) + \frac{3}{2}$,

$\therefore$ 点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 在函数图象上,

$\therefore \frac{6}{5} \times \frac{\pi}{2} + \varphi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

$$\therefore \varphi = \frac{9\pi}{10} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\therefore |\varphi| < \pi, \therefore \varphi = \frac{9\pi}{10}, \therefore y = \frac{3}{2} \sin\left(\frac{6}{5}x + \frac{9\pi}{10}\right) + \frac{3}{2}.$$

$$\text{当 } \omega < 0 \text{ 时, 函数的解析式为 } y = -\frac{3}{2} \cdot \sin\left(\frac{6}{5}x - \varphi\right) + \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{点}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \text{在函数图象上,}$$

$$\therefore \frac{6}{5} \times \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{10} - 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\therefore |\varphi| < \pi, \therefore \varphi = \frac{\pi}{10}.$$

$$\therefore y = -\frac{3}{2} \sin\left(\frac{6}{5}x - \frac{\pi}{10}\right) + \frac{3}{2}.$$

$$\text{综上, 所求的一个函数解析式为 } y = \frac{3}{2} \cdot \sin\left(\frac{6}{5}x + \frac{9\pi}{10}\right) + \frac{3}{2}$$

$$\text{或 } y = -\frac{3}{2} \sin\left(\frac{6}{5}x - \frac{\pi}{10}\right) + \frac{3}{2}.$$

考点三

考向 1 典例 3 解: (1) 因为 $f(0) = \cos \varphi = \frac{1}{2}$, 且 $0 \leq \varphi < \pi$, 所以

$$\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) g(x) = f(x) + f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos 2x$$

$$= \cos 2x \cos \frac{\pi}{3} - \sin 2x \sin \frac{\pi}{3} + \cos 2x$$

$$= \frac{3}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x$$

$$= \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x \right)$$

$$= \sqrt{3} \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{因为 } y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \text{ 的值域是 } [-1, 1],$$

$$\text{所以函数 } y = \sqrt{3} \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \text{ 的值域是 } [-\sqrt{3}, \sqrt{3}],$$

$$\text{所以 } g(x) \text{ 的值域为 } [-\sqrt{3}, \sqrt{3}].$$

$$\text{令 } 2k\pi - \pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi (k \in \mathbf{Z}), \text{ 得 } k\pi - \frac{7\pi}{12} \leq x \leq k\pi - \frac{\pi}{12} (k$$

$$\in \mathbf{Z}), \text{ 所以 } g(x) \text{ 的单调递增区间为 } \left[k\pi - \frac{7\pi}{12}, k\pi - \frac{\pi}{12}\right] (k \in \mathbf{Z}).$$

$$\text{令 } 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \pi (k \in \mathbf{Z}), \text{ 得 } k\pi - \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{12} (k$$

$$\in \mathbf{Z}), \text{ 所以 } g(x) \text{ 的单调递减区间为 } \left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}\right] (k \in \mathbf{Z}).$$

考题探源

1. 解: (1) 由题意, 函数 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos x + a$,

$$\text{化简得 } f(x) = \sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} + \sin x \cos \frac{\pi}{6} -$$

$$\cos x \sin \frac{\pi}{6} + \cos x + a = \sqrt{3} \sin x + \cos x + a = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + a,$$

$$\therefore \varphi = \frac{9\pi}{10} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\therefore y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \text{ 的最大值为 } 1,$$

$$\therefore f(x)_{\max} = 2 \times 1 + a = 1, \text{ 解得 } a = -1.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可知 } f(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1.$$

$$\text{令 } 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{解得 } 2k\pi + \frac{\pi}{3} \leq x \leq 2k\pi + \frac{4\pi}{3}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore f(x) \text{ 的单调递减区间为 } \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z}.$$

$$(3) \text{ 由题意 } f(x) \geq 0, \text{ 即 } 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 \geq 0,$$

$$\text{可得 } \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{1}{2},$$

$$\therefore 2k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{解得 } 2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore \text{使 } f(x) \geq 0 \text{ 成立的 } x \text{ 的取值集合是}$$

$$\left\{x \mid 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

$$2. \text{ 解: } f(x) = \frac{1}{2} \cos^2 x - \frac{1}{2} \sin^2 x + 1 - \sqrt{3} \sin x \cos x = \frac{1}{2} \cos 2x -$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + 1 = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1, \text{ 最小正周期 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi,$$

$$\text{由 } 2k\pi - \pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi (k \in \mathbf{Z}) \text{ 可得,}$$

$$k\pi - \frac{2\pi}{3} \leq x \leq k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 的单调递增区间为 } \left[k\pi - \frac{2\pi}{3}, k\pi - \frac{\pi}{6}\right], k \in \mathbf{Z}.$$

考向 2 典例 4 ACD [由题意, 知 $\frac{T}{2} = 10 - 4 = 6$, 解得 $T = 12$,

故 A 正确;

$$\text{由 } \frac{2\pi}{\omega} = 12, \text{ 得 } \omega = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{由 } \begin{cases} A+B=50, \\ -A+B=10, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} A=20, \\ B=30, \end{cases}$$

$$\text{所以 } h(t) = 20 \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \varphi\right) + 30.$$

$$\text{由 } h(0) = 20, \text{ 得 } 20 \sin \varphi + 30 = 20, \text{ 即 } \sin \varphi = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{因为 } |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \varphi = -\frac{\pi}{6}.$$

$$\text{所以 } h(t) = 20 \sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{6}\right) + 30,$$

故 B 错误;

$$h(14) = 20 \sin\left(\frac{\pi}{6} \times 14 - \frac{\pi}{6}\right) + 30$$

$$= 20 \sin \frac{\pi}{6} + 30 = 40, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\text{由 } h(t) = 20 \sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{6}\right) + 30 < 20, \text{ 得 } \sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{6}\right) <$$

$$-\frac{1}{2}, \text{ 即 } \frac{7\pi}{6} + 2k\pi < \frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{6} < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } 8 +$$

$12k < t < 12 + 12k, k \in \mathbf{Z}$. 所以一个周期内过山车距离地平面低于 20 m 的时间是 $(12 + 12k) - (8 + 12k) = 4$ s, 故 D 正确. 故选 ACD.]

多维变迁

1. C [由题意得, $\begin{cases} A+B=14, \\ A-B=6, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} A=10, \\ B=4, \end{cases}$

所以 $H(t)=10+4\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{2\pi}{3}\right)$,

令 $H(t)\geq 8$, 即 $\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{2\pi}{3}\right)\geq -\frac{1}{2}$,

因为 $0\leq t\leq 24$,

所以 $-\frac{2\pi}{3}\leq \frac{\pi}{12}t-\frac{2\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}$,

由正弦函数的图象与性质可知 $-\frac{\pi}{6}\leq \frac{\pi}{12}t-\frac{2\pi}{3}\leq \frac{7\pi}{6}$, 解得 $6\leq t\leq 22$,

所以该港口一天内水位不小于 8 m 的时长为 $22-6=16$ (h).

故选 C.]

2. 解: (1) 由题图可知 $A=3$, $\frac{3}{4}T=\frac{4\pi}{9}-\left(-\frac{\pi}{18}\right)=\frac{\pi}{2}$, 解得

$T=\frac{2\pi}{3}$,

所以 $\omega=3$, $f(x)=3\sin(3x+\varphi)$,

又 $f(x)$ 的图象过点 $\left(\frac{4\pi}{9}, -3\right)$,

所以 $-3=3\sin\left(3\times\frac{4\pi}{9}+\varphi\right)$,

所以 $\frac{4\pi}{3}+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$, 解得 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$,

又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$, $f(x)=3\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$,

将函数 $f(x)$ 的图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{3}{2}$, 再将所得

函数图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到 $g(x)=3\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象.

综上, $f(x)=3\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$,

$g(x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

(2) 令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq 2x-\frac{\pi}{6}\leq \frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$, 解得 $-\frac{\pi}{6}+k\pi\leq x\leq \frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$,

即函数 $g(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{\pi}{3}+k\pi\right] (k\in\mathbf{Z})$,

令 $2x-\frac{\pi}{6}=k\pi, k\in\mathbf{Z}$, 解得 $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$,

所以函数 $g(x)$ 的图象的对称中心为 $\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, 0\right) (k\in\mathbf{Z})$.

(3) 当 $x\in\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$ 时, $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$, 所以 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$,

所以 $g(x)\in\left[-\frac{3\sqrt{3}}{2}, 3\right]$, 即函数 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$ 上

的值域为 $\left[-\frac{3\sqrt{3}}{2}, 3\right]$.

随堂·对点检测

1. B [将函数 $y=\cos 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度, 得到的

图象的函数解析式为 $y=\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)\right]=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

故选 B.]

2. D [函数的最小正周期 $T=2\left[\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]=\frac{2\pi}{3}$, 可得 $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3}$, 解得 $\omega=3$,

因为当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时, $f(x)=0$, 且 $x=\frac{\pi}{4}$ 在函数 $f(x)$ 的单调递减

区间内,

所以 $3\times\frac{\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi (k\in\mathbf{Z})$, 结合 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$, 解得

$\varphi=-\frac{\pi}{4}$, 又 $A=2$, 可得 $f(x)=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$, 将 $f(x)$ 图象

上的所有点向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度,

可得 $f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(3x+\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的

图象,

结合 $\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin 3x$,

可得 $f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-2\sin 3x$, D 选项符合题意.

故选 D.]

3. BD [由 $f(x)=3\sin(2\omega x+\varphi)$ 的部分图象知, $T=2\times$

$\left[\frac{3\pi}{8}-\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right]=\pi$, 即 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$, 解得 $\omega=1$,

将点 $\left(-\frac{\pi}{8}, 3\right)$ 代入解析式中, 得

$\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=1$,

所以 $-\frac{\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$, 解得 $\varphi=\frac{3\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$,

所以 $f(x)=3\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)$

$=3\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right), k\in\mathbf{Z}$.

对于 A, 因为 $\omega=1$, 所以选项 A 错误;

对于 B, 因为 $f\left(-\frac{5\pi}{8}\right)=3\sin\left(-\frac{5\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)=-3$ 是最小值, 所以

以直线 $x=-\frac{5\pi}{8}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴, 选项 B 正确;

对于 C, 因为 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)=3\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}\neq 0$,

所以点 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 不是 $f(x)$ 图象的对称中心, 选项 C 错误;

对于 D, 函数 $f\left(x+\frac{7\pi}{8}\right)=3\sin\left(2x+\frac{7\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)=3\sin\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)=3\cos 2x$, 为偶函数, 选项 D 正确.

故选 BD.]

4. $y=16+2\sin\frac{\pi}{6}x$ (答案不唯一) [根据题意, 可得函数 $y=$

$h+A\sin(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期 T 满足 $9-3=\frac{T}{2}$, $T=12$, 即

$\frac{2\pi}{|\omega|}=12$, 解得 $\omega=\pm\frac{\pi}{6}$.

不妨设 $A > 0, \omega = \frac{\pi}{6}$, 根据水的深度在早上 3 时达到最大值 18 m, 可知 $f(3)$ 为函数的最大值,
所以 $\frac{3\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 取 $k=0$, 得 $\varphi=0$, 函数表达式为 $y=h+A\sin \frac{\pi}{6}x$.

由 $f(3)=18$ 是最大值, $f(9)=14$ 是最小值,

$$\text{可得} \begin{cases} h+A\sin \frac{\pi}{2}=h+A=18, \\ h+A\sin \frac{3\pi}{2}=h-A=14, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} h=16, \\ A=2. \end{cases}$$

所以该港口水的深度 y 关于时间 t 的函数的近似表达式为 $y=16+2\sin \frac{\pi}{6}x$ (答案不唯一).]

* 第 35 课时 三角函数中 ω 的范围问题(进阶课)

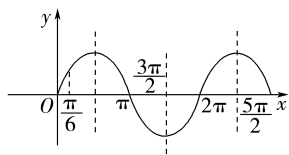
类型一

典例 1 C [法一: 令 $\omega x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$, 解得 $x = \frac{\pi}{3\omega}, x = \frac{4\pi}{3\omega}, x = \frac{7\pi}{3\omega}$ 分别为 $y=f(x)$ 的图象在 y 轴右侧由左向右最近的三条对称轴.

要满足图象在 $(0, \pi)$ 上有且仅有两条对称轴,

$$\text{只需} \begin{cases} 0 < \frac{\pi}{3\omega} < \pi, \\ 0 < \frac{4\pi}{3\omega} < \pi, \text{解得 } \frac{4}{3} < \omega \leq \frac{7}{3}, \text{故选 C.} \\ \frac{7\pi}{3\omega} \geq \pi, \end{cases}$$

法二(整体法): 因为 $0 < x < \pi, \omega > 0$, 所以 $\frac{\pi}{6} < \omega x + \frac{\pi}{6} < \pi\omega + \frac{\pi}{6}$, 将 $\omega x + \frac{\pi}{6}$ 看成一个整体. 由 $y = \sin x$ 的图象分析可知,
 $\frac{3\pi}{2} < \omega\pi + \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{2} \Rightarrow \frac{4}{3} < \omega \leq \frac{7}{3}$.



法三: 令 $\omega x + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,

$$\text{得 } x = \frac{(3k+1)\pi}{3\omega}, k \in \mathbf{Z},$$

依题意知, 满足 $0 < \frac{(3k+1)\pi}{3\omega} < \pi$, 即 $0 < 3k+1 < 3\omega$ 的整数 k 有 2 个,

所以 $k=0, 1$, 则 $3 \times 1 + 1 < 3\omega \leq 3 \times 2 + 1$, 解得 $\frac{4}{3} < \omega \leq \frac{7}{3}$. 故选 C.]

类型二

典例 2 $[\frac{3}{2}, 3]$ [法一: $\because f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$ 在 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减,

$$\therefore \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \leq \frac{T}{2}, \text{即 } \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{\omega},$$

$$\therefore 0 < \omega \leq 6,$$

$$\because \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \therefore 0 < \frac{\omega\pi}{3} \leq \omega x \leq \frac{\omega\pi}{2} \leq 3\pi,$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{\omega\pi}{3} \geq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\omega\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{2}, \end{cases} \therefore \begin{cases} \omega \geq \frac{3}{2}, \\ \omega \leq 3, \end{cases}$$

$$\therefore \frac{3}{2} \leq \omega \leq 3.$$

法二: 令 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 得 $\frac{\pi}{2\omega} + \frac{2k\pi}{\omega} \leq x \leq \frac{3\pi}{2\omega} + \frac{2k\pi}{\omega} (k \in \mathbf{Z})$,

因为函数 $f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$ 在区间 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减,

$$\text{所以} \begin{cases} \frac{\pi}{2\omega} + \frac{2k\pi}{\omega} \leq \frac{\pi}{3}, \\ \frac{\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{2\omega} + \frac{2k\pi}{\omega}, \end{cases} k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{解得 } 6k + \frac{3}{2} \leq \omega \leq 4k + 3 (k \in \mathbf{Z}).$$

又 $\omega > 0$, 所以 $k \geq 0$, 又 $6k + \frac{3}{2} \leq 4k + 3$, 得 $0 \leq k \leq \frac{3}{4}$, 又 $k \in \mathbf{Z}$, 所以 $k=0$.

$$\text{即 } \frac{3}{2} \leq \omega \leq 3.$$

法三: $\because \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \omega > 0$,

$$\therefore \frac{\pi\omega}{3} \leq \omega x \leq \frac{\pi\omega}{2},$$

又 $\because f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减,

$$\therefore \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \frac{\pi\omega}{3}, \\ \frac{\pi\omega}{2} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \end{cases} (k \in \mathbf{Z}) \Rightarrow 6k + \frac{3}{2} \leq \omega \leq 4k + 3 (k \in \mathbf{Z}).$$

$$\text{又 } \begin{cases} \omega > 0, \\ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \leq \frac{T}{2}, \end{cases}$$

$$\therefore 0 < \omega \leq 6, \therefore k=0,$$

$$\text{即 } \frac{3}{2} \leq \omega \leq 3.]$$

类型三

典例 3 A [因为 $\omega > 0$, 所以当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时,

$$\text{有 } \frac{\pi}{6} < \omega x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{6}.$$

因为 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内有最大值, 但无最小值,

$$\text{结合函数图象(图略)得 } \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2},$$

$$\text{解得 } \frac{2}{3} < \omega \leq \frac{8}{3}. \text{ 故选 A.}]$$

类型四

典例 4 A [令 $t = \omega x + \frac{\pi}{4}, x \in (0, \pi)$,

$$\text{则 } t \in (\frac{\pi}{4}, \omega\pi + \frac{\pi}{4}). \text{ 设 } m(t) = \sin t,$$

因为函数 $f(x) = 3\sin(\omega x + \frac{\pi}{4}) (\omega > 0)$ 在 $(0, \pi)$ 上恰有两个零点, 两个极值点,

则 $m(t)$ 在 $t \in \left(\frac{\pi}{4}, \omega\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ 上恰有两个极值点和两个零点,

可得 $2\pi < \omega\pi + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{2}$, 解得 $\frac{7}{4} < \omega \leq \frac{9}{4}$.

故选 A.]

第 36 课时 正弦定理、余弦定理

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 $b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $c^2 + a^2 - 2ca \cos B$

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad \sin A : \sin B : \sin C \quad \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

知识点 3 (2) $\frac{1}{2}ab \sin C$ $\frac{1}{2}ac \sin B$ $\frac{1}{2}bc \sin A$

$$(3) \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

链教材·夯基固本

1. $\sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{3}$ [在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $b=2, A=45^\circ, C=75^\circ$, 所以 $B=$

$180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ$, 则由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $c =$

$$\frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{2 \sin 75^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{3}.]$$

2. $\frac{2\pi}{3}$ [由余弦定理的推论, 得

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{25 + 9 - 49}{30} = -\frac{1}{2},$$

因为 $0 < A < \pi$,

所以 $A = \frac{2\pi}{3}$.]

3. D [对于选项 A, 由 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 得 $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{14 \times \frac{1}{2}}{7} =$

1, 又 $0^\circ < B < 180^\circ$, 从而 $B = 90^\circ, C = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, 只有一解; 对于选项 B, 因为 $A = 150^\circ, \triangle ABC$ 是钝角三角形, 所以只有一解; 同理选项 C 只有一解; 对于选项 D, 由 $b \sin A < a < b$, 所以 B 可能是锐角, 也可能是钝角, 故有两解. 故选 D.]

4. $\frac{27-9\sqrt{3}}{2}$ [由 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 得 $\sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

由于 $0^\circ < C < 180^\circ$,

所以 $C = 45^\circ$ 或 $C = 135^\circ$.

由于 $b > c$, 故 $B > C$, 所以 $C = 45^\circ$,

所以 $A = 180^\circ - 120^\circ - 45^\circ = 15^\circ$,

$$\sin 15^\circ = \sin(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{6} \times 6 \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{27 - 9\sqrt{3}}{2}$.]

5. D [由正弦定理, 得 $\frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$, 得 $\sin A = \frac{1}{2}$. 又 $a < b$,

$\therefore A < B = 45^\circ$. $\therefore A = 30^\circ$. 故选 D.]

6. $\frac{35\sqrt{6}}{24}$ [由题意可得

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+6+7}{2} = 9,$$

$S_{\triangle ABC} = \sqrt{9 \times (9-5) \times (9-6) \times (9-7)} = 6\sqrt{6}$, 设外接圆半径为 R ,

$$\text{则 } R = \frac{abc}{4S} = \frac{5 \times 6 \times 7}{4 \times 6\sqrt{6}} = \frac{35\sqrt{6}}{24}.]$$

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1) A [由题意得 $\cos A =$

$$\frac{(1+\sqrt{3})^2 + 6 - 4}{2(1+\sqrt{3}) \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 因为 } 0^\circ < A < 180^\circ,$$

所以 $A = 45^\circ$.]

(2) 解: ① 由 $\frac{a}{c} = \frac{2}{3}$ 得 $a = \frac{2}{3}c$,

由余弦定理及其推论得 $a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cos B$,

$$\text{即 } \frac{4}{9}c^2 + c^2 - 25 = 2 \times \frac{2}{3}c \times c \times \frac{9}{16},$$

整理得 $\frac{25}{36}c^2 = 25$, 解得 $c = 6$ (舍负), 故 $a = \frac{2}{3}c = 4$.

② 因为 $\cos B = \frac{9}{16}$,

$$\text{所以 } \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{5\sqrt{7}}{16},$$

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 得 $\frac{4}{\sin A} = \frac{5}{\frac{5\sqrt{7}}{16}}$,

$$\text{即 } \sin A = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

多维变迁

1. C [$\because B = 30^\circ, b = \sqrt{2}, c = 2$,

$$\text{则 } \sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\therefore C > B, 0^\circ < C < 180^\circ$,

$\therefore C = 45^\circ$ 或 $C = 135^\circ$.

故选 C.]

2. A [$\because \sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : 4$,

$\therefore$ 由正弦定理, 得 $a : b : c = 2 : 3 : 4$,

不妨设 $a = 2, b = 3, c = 4$,

$$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \times 3 \times 4} = \frac{7}{8}.$$

故选 A.]

3. D [在 $\triangle ABC$ 中, 由 $b^2 + c^2 + bc = a^2$ 及余弦定理的推论, 可

$$\text{得 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2},$$

由 $0 < A < \pi$, 可得 $A = \frac{2\pi}{3}$,

$$\text{又 } b = \sqrt{6}, a = 3\sqrt{2} \sin B,$$

$$\text{由正弦定理得 } \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{\sqrt{6} \sin \frac{2\pi}{3}}{3\sqrt{2} \sin B} = \frac{\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{3\sqrt{2} \sin B} = \frac{1}{2\sin B},$$

又 $\sin B > 0$, 解得 $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

又 $0 < B < \frac{\pi}{3}$, 因此 $B = \frac{\pi}{4}$,

所以 $C = \pi - A - B = \frac{\pi}{12}$. 故选 D.]

考点二

典例 2 A [法一(化角为边):因为 $b\cos C + c\cos B$

$$= b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2a^2}{2a} = a, \text{ 所以 } a \sin A =$$

a , 即 $\sin A = 1$, 故 $A = \frac{\pi}{2}$, 因此 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

法二(化边为角):因为 $b\cos C + c\cos B = a \sin A$,

所以 $\sin B \cos C + \sin C \cos B = \sin^2 A$,

即 $\sin(B+C) = \sin^2 A$,

所以 $\sin A = \sin^2 A$,

又 $\sin A \neq 0$,

故 $\sin A = 1$, 即 $A = \frac{\pi}{2}$, 因此 $\triangle ABC$ 是直角三角形.]

多维变迁

BC [对于 A, 由正弦定理可得 $\sin A \cos A = \sin B \cos B$,

$\therefore \sin 2A = \sin 2B$, $\therefore A = B$ 或 $2A + 2B = 180^\circ$,

即 $A = B$ 或 $A + B = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形, 故 A 错误;

对于 B, $a \sin B = 40 \sin 25^\circ < 40 \sin 30^\circ = 40 \times \frac{1}{2} = 20$,

即 $a \sin B < b < a$, $\therefore \triangle ABC$ 必有两解, 故 B 正确;

对于 C, $\therefore \triangle ABC$ 是锐角三角形, $\therefore 0^\circ < A < 90^\circ, 0^\circ < B < 90^\circ$,

$180^\circ > A + B > 90^\circ$,

即 $90^\circ > A > 90^\circ - B > 0^\circ$,

$\therefore \sin A > \sin(90^\circ - B) = \cos B$, 故 C 正确;

对于 D, 由题意及二倍角的余弦公式知 $1 - 2\sin^2 A + 1 - 2\sin^2 B - 1 + 2\sin^2 C < 1$,

即 $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C > 0$, 即 $a^2 + b^2 - c^2 > 0$, $\therefore \cos C > 0$,

即 C 为锐角, 但不能说明 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 故 D 错误. 故选 BC.]

考点三

典例 3 解: (1) 因为 $a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab$,

$$\text{所以 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

又 $0 < C < \pi$, 所以 $C = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{所以 } \sqrt{2} \cos B = \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $\cos B = \frac{1}{2}$,

又 $0 < B < \pi$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$.

(2) 法一: 由(1)得 $A = \pi - B - C = \frac{5\pi}{12}$.

$$\text{因为 } \sin \frac{5\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6} \cdot$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

所以由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$,

$$\text{得 } \frac{a}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

所以 $a = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}c$.

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}c^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 + \sqrt{3},$$

解得 $c = 2\sqrt{2}$ (舍负).

法二: 由(1)得 $A = \pi - B - C = \frac{5\pi}{12}$.

设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R ,

由正弦定理得 $b = 2R \sin B = \sqrt{3}R, c = 2R \sin C = \sqrt{2}R$.

$$\text{因为 } \sin \frac{5\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6} \cdot$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}R \cdot \sqrt{2}R \cdot \sin \frac{5\pi}{12} = 3 + \sqrt{3}, \text{ 即}$$

$$\frac{\sqrt{6}R^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = 3 + \sqrt{3}, \text{ 解得 } R^2 = 4, \text{ 所以 } R = 2 \text{ (舍负),}$$

所以 $c = \sqrt{2}R = 2\sqrt{2}$.

多维变迁

1. C [由余弦定理得 $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle BAC$, 即

$$64 = 100 + AB^2 - 2AB \times 10 \times \frac{3}{5}, \therefore AB^2 - 12AB + 36 = 0,$$

$$\therefore AB = 6, \therefore AB^2 + BC^2 = AC^2, \therefore AB \perp BC,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24.]$$

2. 解: (1) 法一: 由 $b \cos A = (2c - a) \cos B$ 及正弦定理可得

$$2 \sin C \cos B = \sin B \cos A + \sin A \cos B,$$

可得 $2 \sin C \cos B = \sin(A + B)$,

因为 $A + B = \pi - C$, 所以 $2 \sin C \cos B = \sin C$,

因为 $\sin C \neq 0$, 所以 $\cos B = \frac{1}{2}$,

因为 $0 < B < \pi$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$.

法二: 由 $b \cos A = (2c - a) \cos B$ 及余弦定理可得 $b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = (2c - a) \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$,

化简得 $a^2 + c^2 - b^2 = ac$,

由余弦定理可得 $2ac \cos B = ac$,

因为 $ac \neq 0$, 所以 $\cos B = \frac{1}{2}$,

因为 $0 < B < \pi$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$.

$$(2) \text{ 由 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B, \text{ 得 } \sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 4 \times c \times \frac{\sqrt{3}}{2},$$

解得 $c = 1$,

由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 可得 $b^2 = 4^2 + 1^2 - 2 \times 4 \times$

$$1 \times \frac{1}{2} = 13, \text{ 解得 } b = \sqrt{13},$$

故 $\triangle ABC$ 的周长为 $5 + \sqrt{13}$.

教材拓展

典例 4 C [法一(正弦定理法):由 $a \cos B - b \cos A = c$ 结合正

弦定理得 $\sin A \cos B - \sin B \cos A = \sin C = \sin(A + B)$,

即 $\sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin A \cos B + \cos A \sin B$,

即 $\sin B \cos A = 0$.

在 $\triangle ABC$ 中, $\therefore \sin B \neq 0, \therefore \cos A = 0$, 即 $A = \frac{\pi}{2}$.

则 $B = \pi - A - C = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$.

故选 C.

法二(余弦定理法):由 $a \cos B - b \cos A = c$ 结合余弦定理的推

$$\text{论得 } a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = c,$$

化简得 $b^2 + c^2 = a^2$, $\therefore A = \frac{\pi}{2}$.

则 $B = \pi - A - C = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$.

故选 C.

法三(射影定理):由 $a \cos B - b \cos A = c$ 结合射影定理 $a \cos B + b \cos A = c$, 得 $b \cos A = 0$.

在 $\triangle ABC$ 中, $b \neq 0$, $\therefore \cos A = 0$, 即 $A = \frac{\pi}{2}$.

则 $B = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$. 故选 C.]

随堂·对点检测

1. **D** [由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 得 $b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{6}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times$

$2 = \sqrt{2}$.

故选 D.]

2. **B** [根据余弦定理得 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A = 4 + 1 - 2 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{4} = 4$, 解得 $BC = 2$ (舍负).

故选 B.]

3. **ABC** [对于 A, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 6, AC = 5, BC = 8$, 由余弦定理的推论得

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{6^2 + 5^2 - 8^2}{2 \times 6 \times 5} = -\frac{1}{20} < 0,$$

则 A 为钝角, 所以 $\triangle ABC$ 为钝角三角形, A 正确;

对于 B, 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\cos A = \cos B$, 则 $A = B$, 所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, B 正确;

对于 C, 由 $a : b : c = 4 : 6 : 7$, 设 $a = 4k, b = 6k, c = 7k (k > 0)$,

所以 C 是 $\triangle ABC$ 的最大内角,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{16k^2 + 36k^2 - 49k^2}{2 \times 4k \times 6k} = \frac{1}{16} > 0, \end{aligned}$$

又 $0 < C < \pi$, 所以 C 是锐角, 则 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, C 正确;

对于 D, 由正弦定理及题意, 得 $\sin C - \sin A \cos B = 2 \sin A \cos A - \sin B \cos A$,

所以 $\sin(A+B) - \sin A \cos B = 2 \sin A \cdot \cos A - \sin B \cos A$, 故 $\cos A (\sin B - \sin A) = 0$,

所以 $\cos A = 0$ 或 $\sin A = \sin B$, 即 $A = \frac{\pi}{2}$ 或 $A = B$,

故 $\triangle ABC$ 为直角三角形或等腰三角形, D 错误. 故选 ABC.]

4. $\frac{3}{4} \frac{15\sqrt{7}}{4}$ [依题意得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3}{4}$,

$$\text{所以 } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{7}}{4},$$

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{15\sqrt{7}}{4}$.]

* 第 37 课时 三角形的高线、中线、角平分线(进阶课)

类型一

典例 1 解:(1) 因为 $\cos A = -\frac{1}{3}, A \in (0, \pi)$,

$$\text{所以 } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$,

得 $a \sin C = c \sin A = 4\sqrt{2}$,

$$\text{所以 } c = \frac{4\sqrt{2}}{\sin A} = \frac{4\sqrt{2}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 6.$$

(2) 若 $\triangle ABC$ 存在, 设 BC 边上的高为 AD.

若选①: $a = 6$, 因为 $c = 6$, 所以 $C = A$, 因为 $\cos A = -\frac{1}{3} < 0$,

这表明此时 $\triangle ABC$ 有两个钝角, 而这是不可能的, 所以此时 $\triangle ABC$ 不存在, 故 BC 边上的高也不存在.

$$\text{若选②: } a \sin B = \frac{10\sqrt{2}}{3}, \text{ 由 } a \sin C = 4\sqrt{2}, \text{ 得 } \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\frac{10\sqrt{2}}{3}}{4\sqrt{2}} =$$

$$\frac{5}{6}, \text{ 由正弦定理得 } \frac{b}{c} = \frac{5}{6}, \text{ 由(1)知 } c = 6, \text{ 所以 } b = 5,$$

所以由余弦定理得 $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$

$$= \sqrt{25 + 36 - 2 \times 5 \times 6 \times \left(-\frac{1}{3}\right)} = 9,$$

此时 $\triangle ABC$ 是存在的, 且唯一确定,

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} BC \cdot AD,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{2} \times 9AD,$$

$$\text{解得 } AD = \frac{20\sqrt{2}}{9}.$$

所以 BC 边上的高为 $\frac{20\sqrt{2}}{9}$.

若选③: $\triangle ABC$ 的面积是 $10\sqrt{2}$, 由(1)知 $c = 6, \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$$\text{则 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} b \times 6 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 10\sqrt{2}, \text{ 解得 } b = 5,$$

由余弦定理可得

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} = \sqrt{25 + 36 - 2 \times 5 \times 6 \times \left(-\frac{1}{3}\right)} = 9,$$

此时 $\triangle ABC$ 是存在的, 且唯一确定, 则 BC 边上的高满足

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot AD = \frac{9}{2} AD = 10\sqrt{2}, \text{ 即 } AD = \frac{20\sqrt{2}}{9}.$$

类型二

典例 2 解:法一: 因为 D 为 BC 的中点, 所以 $BD = DC$.

因为 $\angle ADB + \angle ADC = \pi$, 所以 $\cos \angle ADB = -\cos \angle ADC$,

则在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 中, 由余弦定理的推论,

$$\text{得 } \frac{AD^2 + BD^2 - c^2}{2AD \cdot BD} = -\frac{AD^2 + DC^2 - b^2}{2AD \cdot DC},$$

$$\text{即 } 1 + BD^2 - c^2 = -(1 + BD^2 - b^2),$$

所以 $2BD^2 = b^2 + c^2 - 2 = 6$, 所以 $BD = \sqrt{3}$, 所以 $a = 2\sqrt{3}$.

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理的推论, 得

$$\cos \angle BAC = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8 - 12}{2bc} = -\frac{2}{bc},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin \angle BAC$$

$$= \frac{1}{2} bc \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC}$$

$$= \frac{1}{2} bc \sqrt{1 - \left(-\frac{2}{bc}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 c^2 - 4} = \sqrt{3},$$

解得 $bc = 4$ (舍负).

则由 $\begin{cases} bc = 4, \\ b^2 + c^2 = 8, \end{cases}$ 解得 $b = c = 2$.

法二:在 $\triangle ABC$ 中,因为 D 为 BC 的中点,

$$\text{则 } \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),$$

$$\text{所以 } AD^2 = \frac{1}{4}(c^2 + b^2 + 2bc \cos \angle BAC),$$

$$\text{又 } AD=1, b^2 + c^2 = 8,$$

$$\text{则 } 1 = \frac{1}{4}(8 + 2bc \cos \angle BAC),$$

$$\therefore bc \cos \angle BAC = -2, \textcircled{1}$$

$$\text{由 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \angle BAC = \sqrt{3},$$

$$\text{得 } bc \sin \angle BAC = 2\sqrt{3}, \textcircled{2}$$

$$\text{由 } \textcircled{1}\textcircled{2} \text{ 解得 } \tan \angle BAC = -\sqrt{3}, \therefore \angle BAC \in (0, \pi),$$

$$\therefore \angle BAC = \frac{2\pi}{3},$$

$$\therefore bc = 4, \text{ 又 } b^2 + c^2 = 8, \therefore b = c = 2.$$

法三:在 $\triangle ABC$ 中,由中线长公式可得

$$2(BD^2 + AD^2) = AB^2 + AC^2,$$

$$\text{又 } BD = \frac{1}{2}BC, AD=1, b^2 + c^2 = 8,$$

$$\text{则 } (2AD)^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2),$$

$$\text{即 } 2^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2) = 16, \text{ 所以 } a^2 = 12.$$

$$\text{又 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \angle BAC = \sqrt{3},$$

$$\text{因而 } bc \sin \angle BAC = 2\sqrt{3},$$

$$\text{又由余弦定理 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$\text{得 } 12 = 8 - 2bc \cos \angle BAC,$$

$$\text{所以 } bc \cos \angle BAC = -2,$$

$$\text{故 } \tan \angle BAC = -\sqrt{3}, \cos \angle BAC = -\frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } bc = 4,$$

$$\text{又 } b^2 + c^2 + 2bc = 8 + 8 = 16 = (b+c)^2,$$

$$b^2 + c^2 - 2bc = 8 - 8 = 0 = (b-c)^2,$$

$$\text{故 } b = c = 2.$$

类型三

典例3 解:(1)由 $b \cos C + c \cos B = 2a \cos A$ 及正弦定理,

$$\text{可得 } \sin B \cos C + \sin C \cos B = 2 \sin A \cos A,$$

$$\text{即 } \sin(B+C) = \sin A = 2 \sin A \cos A,$$

$$\text{因为 } A \in (0, \pi), \sin A \neq 0, \text{ 所以 } \cos A = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } A = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \text{ 由 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}c = 3\sqrt{3},$$

$$\text{可得 } c = 2, \text{ 由 } S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ACE},$$

$$\text{可得 } \frac{1}{2}AB \cdot AE \cdot \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}AC \cdot AE \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 3\sqrt{3},$$

$$\text{即 } \frac{1}{4} \times AE \times (2+6) = 3\sqrt{3}, \text{ 解得 } AE = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

* 第38课时 解三角形的综合应用(进阶课)

类型一

典例1 B [在 $\triangle ABD$ 中, $AB=2, BD=\sqrt{2}, \angle ABD=\frac{\pi}{4}$,

$$\text{由余弦定理得 } AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos \frac{\pi}{4} = 4 + 2 -$$

$$2 \times 2 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2, \text{ 所以 } AD = \sqrt{2}.$$

$$\text{在 } \triangle ACD \text{ 中, 由正弦定理得 } \frac{CD}{\sin \angle CAD} = \frac{AD}{\sin \angle ACD}, \angle ACD = \frac{\pi}{4}, \angle CAD = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{即 } \frac{CD}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}, \text{ 解得 } CD = \sqrt{3}.$$

故选 B.]

类型二

典例2 ABC [对于A,由正弦定理,得 $2R = \frac{c}{\sin C} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$,可得

$$\triangle ABC \text{ 外接圆的半径 } R = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 故 A 正确;}$$

$$\text{对于 B, 由余弦定理, 得 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

$$\text{所以 } 4 = a^2 + b^2 - ab \geq 2ab - ab = ab, \text{ 即 } ab \leq 4, \text{ 当且仅当 } a = b = 2 \text{ 时, 等号成立. 所以 } \triangle ABC \text{ 面积的最大值为 } S_{\max} = \frac{1}{2} \times$$

$$4 \times \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \text{ 故 B 正确;}$$

$$\text{对于 C, 由 } C = \frac{\pi}{3}, \text{ 可得 } A + B = \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{则 } \sin B = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{1}{2} \sin A.$$

$$\text{由正弦定理, 可得 } a + 2b = 2R \sin A + 2 \times 2R \sin B = \frac{4\sqrt{3}}{3} (2 \sin A +$$

$$\sqrt{3} \cos A) = \frac{4\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{7} \left(\frac{2}{\sqrt{7}} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cos A \right) = \frac{4\sqrt{21}}{3} \sin(A +$$

$$\varphi) \left(\text{其中 } \tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 且 } 0 < A < \frac{2\pi}{3} \right). \text{ 当 } A + \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } a + 2b$$

$$\text{取得最大值 } \frac{4\sqrt{21}}{3}, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\text{对于 D, 由余弦定理, 得 } 4 = a^2 + b^2 - ab \geq a^2 + b^2 - \frac{a^2 + b^2}{2} =$$

$$\frac{a^2 + b^2}{2}, \text{ 得 } a^2 + b^2 \leq 8, \text{ 当且仅当 } a = b = 2 \text{ 时, 等号成立, 所以}$$

$$a^2 + b^2 \text{ 的最大值为 } 8, \text{ 故 D 错误.}$$

故选 ABC.]

多维变迁

$$\text{解: (1) 由 } \frac{a}{4b} = \frac{\sin B}{\sin A} \text{ 及正弦定理得 } \frac{a}{4b} = \frac{b}{a}, \text{ 化简得 } a = 2b,$$

$$\text{因为 } C = \frac{\pi}{2}, c = 5, \text{ 所以 } a^2 + b^2 = c^2 = 25, \text{ 即 } 4b^2 + b^2 = 25, \text{ 解}$$

$$\text{得 } b = \sqrt{5} \text{ (舍负)}, a = 2b = 2\sqrt{5}.$$

$$(2) \text{ 根据 } ab = 20, c = 5, \text{ 由余弦定理的推论得 } \cos C =$$

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{40}(a^2 + b^2 - 25) \geq \frac{1}{40}(2ab - 25) = \frac{3}{8},$$

$$\text{当且仅当 } a = b \text{ 时, 等号成立.}$$

$$\text{所以 } \cos^2 C \geq \frac{9}{64}, \text{ 即 } 1 - \sin^2 C \geq \frac{9}{64}, \text{ 可得 } \sin^2 C \leq \frac{55}{64}, \text{ 结合}$$

$$\sin C > 0,$$

$$\text{解得 } \sin C \leq \frac{\sqrt{55}}{8}.$$

$$\text{因为 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}ab \sin C = 10 \sin C \leq 10 \times \frac{\sqrt{55}}{8}$$

$$= \frac{5\sqrt{55}}{4},$$

$$\text{所以当 } a = b = 2\sqrt{5} \text{ 时, } \triangle ABC \text{ 的面积取得最大值 } \frac{5\sqrt{55}}{4}.$$

类型三

典例 3 (1)**D** (2)**A** (3)**A** [(1)先要测出 c , 则可利用正弦定理求出 PB , 再利用正弦定理求出 PA , 最后由余弦定理求出 AB , 则需测出 a, b 才能求出 DE . 故选 **D**.

(2)法一: 因为 $AB=h, \angle ADB=\beta, \angle ACB=\alpha$, 则 $\angle ACD=\pi-\alpha$, 所以 $\sin \angle ACD=\sin(\pi-\alpha)=\sin \alpha$, $\angle DAC=\alpha-\beta$,

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, 可得 $AD=\frac{AB}{\sin \beta}=\frac{h}{\sin \beta}$,

在 $\triangle ACD$ 中, 由正弦定理可得

$$\frac{CD}{\sin \angle DAC}=\frac{AD}{\sin \angle ACD},$$

$$\text{即 } \frac{CD}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\frac{h}{\sin \beta}}{\sin \alpha},$$

$$\text{可得 } CD=\frac{h \sin(\alpha-\beta)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

$$\begin{aligned} \text{法二: } CD &= BD - BC = \frac{h}{\tan \beta} - \frac{h}{\tan \alpha} \\ &= \frac{h(\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha)}{\sin \beta \sin \alpha} = \frac{h \sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}. \end{aligned}$$

故选 **A**.

(3)如图, $\angle BAC=90^\circ+30^\circ=120^\circ$,

由正弦定理得

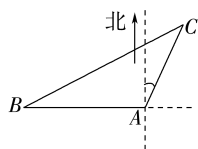
$$\frac{4\sqrt{2}}{\sin C}=\frac{4\sqrt{3}}{\sin \angle BAC},$$

解得 $\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $0^\circ < C < 90^\circ$, 所以

$C=45^\circ$, 因为 $90^\circ-45^\circ-30^\circ=15^\circ$,

所以乙船航行的最佳方向为西偏南 15° .

故选 **A**.]



规范答题二

典例 (1) $\sqrt{3} \sin B \cos A$ $\sqrt{3}$ (3) $\frac{\sqrt{21}}{14}$ $\sqrt{1-\sin^2 B}$
 $2 \sin B \cos B$ $\frac{5\sqrt{3}}{14}$ $1-2 \sin^2 B$ $\frac{11}{14}$ $\sin A \cos 2B + \cos A \sin 2B$

第五章 平面向量、复数

第 39 课时 平面向量的概念及线性运算

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1)大小 方向 长度 $|\vec{AB}|$

(2)0 (3)1 个单位 (4)相同 相反 平行 (5)相等 相同
(6)相等 相反

知识点 2 $\vec{b}+\vec{a}$ $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ $|\lambda||\vec{a}|$ 相同 相反 **0**

$(\lambda\mu)\vec{a}$ $\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ $\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

知识点 3 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$

链教材·夯基固本

1. **CD** [易知 **A, B** 正确;

单位向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向均不确定, 故 **C** 错误;

两个单位向量平行, 它们的方向可能相反, 两个向量不相等, 故 **D** 错误. 故选 **CD**.]

2. $\vec{OA}-\vec{OB}+\vec{OC}$ [因为 $\vec{OD}=\vec{OC}+\vec{CD}$,

而 $\vec{CD}=\vec{BA}=\vec{OA}-\vec{OB}$,

故 $\vec{OD}=\vec{OC}+\vec{CD}=\vec{OC}+(\vec{OA}-\vec{OB})=\vec{OA}-\vec{OB}+\vec{OC}$.]

3. $\frac{1}{3}$ [由题意知, 存在实数 λ , 使得 $\vec{b}-t\vec{a}=\lambda(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b})$,

$$\text{则 } \begin{cases} t=-\frac{1}{2}\lambda, \\ \frac{3}{2}\lambda=-1, \end{cases}$$

解得 $t=\frac{1}{3}$.]

4. 5 1 [$|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}|+|\vec{b}|=2+3=5$, 当且仅当 $\vec{a}, \vec{b}$ 同向时取等号, 所以 $|\vec{a}+\vec{b}|_{\max}=5$.

又 $|\vec{a}+\vec{b}| \geq ||\vec{a}|-|\vec{b}||=|3-2|=1$,

当且仅当 $\vec{a}, \vec{b}$ 反向时取等号, 所以 $|\vec{a}+\vec{b}|_{\min}=1$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1)**CD** (2)**ABC** [(1)方向相反的两个非零向量必定平行, 所以方向相反的两个非零向量一定共线, 单位向量的模相等, 但方向不确定, 不一定是共线向量, 故 **A** 错误;

零向量是有方向的, 其方向是任意的, 故 **B** 错误;

因为 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 与 $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 都是单位向量, 所以只有当 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 与 $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 是相反向量, 即 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 反向共线时, $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\vec{0}$ 才成立, 故 **C** 正确;

向量是有方向和大小的矢量, 不能比较大小, 但它们的模能比较大小, 故 **D** 正确. 故选 **CD**.

(2)由正六边形的结构特征, 知 $\vec{AB}$ 与 $\vec{OC}$ 方向相同, 长度相等, 所以 $\vec{AB}=\vec{OC}$, 故 **A** 正确;

$\vec{AB}$ 与 $\vec{DE}$ 方向相反, 所以 $\vec{AB} \parallel \vec{DE}$, 故 **B** 正确;

由正六边形的性质, 知 $|\vec{AD}|=|\vec{BE}|$, 故 **C** 正确; $\vec{AD}$ 与 $\vec{FC}$ 不共线, 故 **D** 错误. 故选 **ABC**.]

考点二

典例 2 (1)**D** (2)**B** (3)**B** [(1) $\frac{1}{2}\vec{BD}-\vec{AD}=\frac{1}{2}\vec{BA}+\frac{1}{2}\vec{AD}-\vec{AD}=\frac{1}{2}(\vec{BA}-\vec{AD})=-\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AD})=\frac{1}{2}\vec{CA}$. 故选 **D**.

(2)由已知得, $\vec{BE}=\vec{AE}-\vec{AB}=\frac{3}{4}\vec{AD}-\vec{AB}$

$$=\frac{3}{4}(\vec{AB}+\vec{BD})-\vec{AB}$$

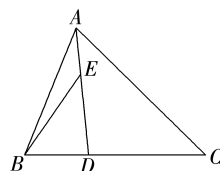
$$=\frac{3}{4}(\vec{AB}+\frac{2}{3}\vec{BC})-\vec{AB}$$

$$=\frac{3}{4}[\vec{AB}+\frac{2}{3}(\vec{AC}-\vec{AB})]-\vec{AB}$$

$$=-\frac{3}{4}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AC}=-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}.$$

故选 **B**.

(3)如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{BD}=\frac{1}{3}\vec{BC}$, $\vec{AE}=\frac{1}{3}\vec{AD}$,

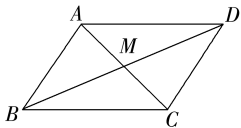


根据向量的运算法则, 可得 $\vec{EB}=\vec{EA}+\vec{AB}=-\frac{1}{3}\vec{AD}+$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \\ &\frac{1}{9}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{7}{9}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{9}\overrightarrow{AC}, \\ \text{所以 } \lambda + \mu &= \frac{7}{9} - \frac{1}{9} = \frac{2}{3}. \text{ 故选 B.}\end{aligned}$$

多维变迁

1. A [∵ 四边形 ABCD 为平行四边形, ∴ M 是 AC, BD 的中点, ∴ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \mathbf{0}, \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = \mathbf{0}$,



$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} &= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \\ &\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) = \\ &\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}. \\ \text{故选 A.}\end{aligned}$$

2. ABD [对于 A, 由题意知, E, F 分别是 CD 边上的两个三等分点, 且 $\overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同, $|\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}|$, 则 $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, 故 A 正确;

$$\begin{aligned}\text{对于 B, } \overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \\ &\overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}, \text{ 故 B 正确;} \\ \text{对于 C, } \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CE} &= \overrightarrow{EB}, \text{ 故 C 错误;} \\ \text{对于 D, } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \text{ 所以 } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \\ &\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \text{ 故 D 正确.}\end{aligned}$$

故选 ABD.]

考点三

- 典例 3 (1)B (2)A [(1)由题意知 $k\mathbf{a} - \mathbf{b} = \lambda(-2\mathbf{a} + k\mathbf{b})$, $\lambda >$

$$\begin{cases} k = -2\lambda, \\ -1 = k\lambda, \end{cases} \text{ 解得 } \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}, k = -\sqrt{2}.$$

0, 即 $\lambda > 0$, 故选 B.

(2)对于 A, 因为 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \mathbf{a} + 5\mathbf{b}$, 所以 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$, 所以 A, B, D 三点共线, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $\overrightarrow{BC} = -2\mathbf{a} + 8\mathbf{b}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} + 5\mathbf{b}$,

所以不存在 $\lambda \in \mathbf{R}$, 使得 $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC}$,

所以 A, B, C 三点不共线, 故 B 错误;

对于 C, 因为 $\overrightarrow{CD} = 3\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, $\overrightarrow{BC} = -2\mathbf{a} + 8\mathbf{b}$,

所以不存在 $\lambda \in \mathbf{R}$, 使得 $\overrightarrow{BC} = \lambda\overrightarrow{CD}$,

所以 B, C, D 三点不共线, 故 C 错误;

对于 D, 因为 $\overrightarrow{CD} = 3\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\mathbf{a} + 13\mathbf{b}$,

所以不存在 $\lambda \in \mathbf{R}$, 使得 $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CD}$,

所以 A, C, D 三点不共线, 故 D 错误.

故选 A.]

母题探究

1. 解: 由题意知 $k\mathbf{a} - \mathbf{b} = \lambda(-2\mathbf{a} + k\mathbf{b})$, 即 $(2\lambda + k)\mathbf{a} - (k\lambda + 1)\mathbf{b} = \mathbf{0}$,

因为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 是两个不共线的向量, 所以 $\begin{cases} k = -2\lambda, \\ -1 = k\lambda, \end{cases}$ 解得 $k = \sqrt{2}$

或 $k = -\sqrt{2}$.

2. 解: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (\mathbf{a} + k\mathbf{b}) + 3(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 4\mathbf{a} + (k - 3)\mathbf{b}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 不共线,

若 A, B, D 三点共线, 则存在实数 λ , 使 $\overrightarrow{BD} = \lambda\overrightarrow{AB}$,

即 $4\mathbf{a} + (k - 3)\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} + 5\mathbf{b})$,

$$\text{所以 } \begin{cases} 4 = \lambda, \\ k - 3 = 5\lambda, \end{cases} \text{ 解得 } k = 23.$$

随堂·对点检测

1. C [$\frac{1}{2}(\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 3\mathbf{c}) - 3(\mathbf{a} - 2\mathbf{b} - \mathbf{c})$

$$= -\frac{5}{2}\mathbf{a} + 7\mathbf{b} + \frac{3}{2}\mathbf{c}, \text{ 故选 C.}]$$

2. D [对于选项 A, 两个向量不能比较大小, 故 A 错误;

对于选项 B, 若 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, 则可得 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ 且 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 所以必要性成立,

当 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ 且 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 时, 则可得 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 或 $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$, 故充分性不成立, 故 B 错误;

对于选项 C, 当 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ 时, 因为零向量与任意向量都平行, 对于任意向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{c}$, 都有 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 且 $\mathbf{b} \parallel \mathbf{c}$, 但 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{c}$ 不一定平行, 故 C 错误;

对于选项 D, A, B, C, D 是不共线的四点, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, 即模相等且方向相同, 即平行四边形 ABCD 对边平行且相等, 反之也成立, 故 D 正确. 故选 D.]

3. A [由点 F 是线段 DE 的中点, 得

$$\overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DE},$$

由 $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{EC}$, 且四边形 ABCD 为平行四边形,

$$\text{得 } \overrightarrow{CE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE}) =$$

$$\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AD}, \text{ 且}$$

$$\overrightarrow{AF} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AD}, \text{ 故 } \mu = \frac{5}{6}.$$

故选 A.]

4. $-\frac{2}{3}$ [由 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线, $\mathbf{a} - x\mathbf{b}$ 与 $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ 共线,

可设 $\mathbf{a} - x\mathbf{b} = \lambda(3\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$,

$$\text{所以 } \begin{cases} 1 = 3\lambda, \\ -x = 2\lambda, \end{cases} \text{ 解得 } x = -\frac{2}{3}.$$

第 40 课时 平面向量基本定理及坐标表示

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1)不共线 有且只有 (2)不共线

知识点 2 (1) $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ $(\lambda x_1, \lambda y_1)$ (2) $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

知识点 3 $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$

链教材·夯基固本

1. B [对于 A, 因为零向量与任何向量平行, 所以选项 A 中的两个向量不可以作为基底; 对于 B, $\mathbf{e}_1 = (-1, 2)$ 与 $\mathbf{e}_2 = (5, 7)$ 对应坐标不成比例, 两向量不共线, 可以作为基底; 对于 C, $\mathbf{e}_1 =$

$(3, 5)$, $\mathbf{e}_2 = (6, 10)$, $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{e}_2$, 两向量共线, 不可以作为基底;

对于 D, $\mathbf{e}_1 = (2, -3)$, $\mathbf{e}_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$, $\mathbf{e}_1 = 4\mathbf{e}_2$, 两向量共线, 不可以作为基底. 故选 B.]

$$2. b - \frac{1}{2}a \quad a - \frac{1}{2}b \quad \left[\text{根据题意, 得 } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = b, \overrightarrow{CF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}a, \right.$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} = b - \frac{1}{2}a.$$

$$\text{同理 } \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = a - \frac{1}{2}b.]$$

$$3. (1, 5) \quad \left[\text{设 } D(x, y), \text{ 则 } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \right.$$

$$\text{得 } (3 - (-1), -1 - (-2)) = (4, 1) = (5 - x, 6 - y),$$

$$\text{即 } \begin{cases} 4 = 5 - x, \\ 1 = 6 - y, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = 1, \\ y = 5, \end{cases} \text{ 即 } D(1, 5).]$$

$$4. -4 \quad \left[\text{因为 } a = (2, 3), b = (x, -6), a \parallel b, \text{ 所以 } 2 \times (-6) - 3x = 0, \text{ 解得 } x = -4, \text{ 所以当 } x = -4 \text{ 时, } a \text{ 与 } b \text{ 共线.} \right]$$

$$5. B \quad \left[\text{由题意得, } P \text{ 是 } \triangle OAB \text{ 的重心,} \right.$$

$$\text{又 } A(5, -2), B(-4, -3), O(0, 0),$$

$$\text{所以 } P \text{ 点坐标为 } \left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3} \right), \text{ 故选 B.}]$$

考点深研 · 题型突破

考点一

典例 1 (1)B (2)C [(1) 因为 $e_1 - 2e_2 = -(2e_2 - e_1)$, 所以 $\{e_1 - 2e_2, 2e_2 - e_1\}$ 不能作为平面向量的基底, A 错误; 因为不存在实数 λ , 使得 $2e_1 + 3e_2 = \lambda(3e_1 + 2e_2)$, 所以 $2e_1 + 3e_2, 3e_1 + 2e_2$ 不共线, 所以 $\{2e_1 + 3e_2, 3e_1 + 2e_2\}$ 能作为平面向量的基底, B 正确;

因为 $6e_1 + 4e_2 = 2(2e_2 + 3e_1)$, 所以 $\{2e_2 + 3e_1, 6e_1 + 4e_2\}$ 不能作为平面向量的基底, C 错误; 因为 $e_1 - 2e_2 = -2\left(e_2 - \frac{1}{2}e_1\right)$, 所以 $\left\{e_1 - 2e_2, e_2 - \frac{1}{2}e_1\right\}$ 不能作为平面向量的基底, D 错误. 故选 B.

(2) 由题意, D 为 BC 的中点, E 是线段 AD 上的一点, 设 $\overrightarrow{AE} = m\overrightarrow{AD}$,

$$\text{则 } \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CA} + m\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA} + m(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) =$$

$$\overrightarrow{CA} + m\left(\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right) = (1-m)\overrightarrow{CA} + \frac{m}{2}\overrightarrow{CB},$$

$$\text{又 } \overrightarrow{CE} = x\overrightarrow{CA} + (1-2x)\overrightarrow{CB},$$

$$\text{则 } \begin{cases} x = 1-m, \\ 1-2x = \frac{m}{2}, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ m = \frac{2}{3}. \end{cases} \text{ 故选 C.}]$$

母题探究

解: 由本例(2)解析可知, $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$, 即 $3\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$, ①

由 D 为 BC 的中点, 可得 $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CD} = 2(\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED})$, ②

将②代入①得, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CE} - 2\overrightarrow{ED}$,

所以 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = 4\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CE} = 4\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EC}$.

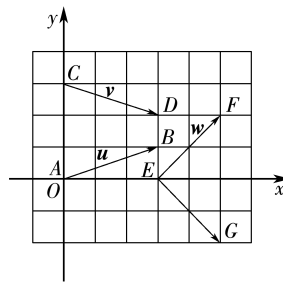
考点二

典例 2 (1)B (2)A [(1) 由题意得 $\overrightarrow{AB} = (-2, -7), \overrightarrow{AC} = (-1, -4),$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (-3, -11).$$

故选 B.

(2) 如图所示, 由题意可得 $a = \overrightarrow{EG}$, 以 A 为原点, AC 为 y 轴, AE 为 x 轴建立平面直角坐标系, 设每个小正方形的边长为 1,



则 $C(0, 3), A(0, 0), E(3, 0), B(3, 1), D(3, 2), G(5, -2),$

所以 $a = (2, -2), u = \overrightarrow{AB} = (3, 1), v = \overrightarrow{CD} = (3, -1),$

因为 $u = ma - nv$, 即 $(3, 1) = m(2, -2) - n(3, -1) = (2m - 3n, -2m + n),$

$$\text{所以 } \begin{cases} 2m - 3n = 3, \\ n - 2m = 1, \end{cases} \text{ 解得 } m = -\frac{3}{2}, n = -2,$$

$$\text{所以 } m + n = -\frac{7}{2}.$$

故选 A.]

考点三

典例 3 (1)C (2)ACD (3) $\frac{1}{2}$ [(1) 因为 $a = (2, 1), a$ 与 b 共

线且方向相反,

$$\text{所以 } b = \lambda a = (2\lambda, \lambda) (\lambda < 0),$$

$$\text{又因为 } |b| = 5, \text{ 所以 } |b| = \sqrt{4\lambda^2 + \lambda^2} = 5,$$

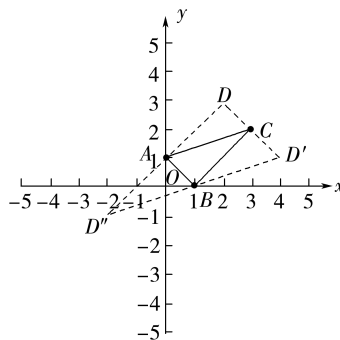
$$\text{解得 } \lambda = -\sqrt{5},$$

$$\text{所以 } b = (2\lambda, \lambda) = (-2\sqrt{5}, -\sqrt{5}).$$

故选 C.

(2) 因为 $A(0, 1), B(1, 0), C(3, 2),$

以 A, B, C 三个点为顶点作平行四边形, 如图所示.



设第四个顶点 D 的坐标为 $(x, y),$

$$\text{若 } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \text{ 则 } (1, -1) = (3-x, 2-y),$$

$$\text{即 } \begin{cases} 3-x=1, \\ 2-y=-1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=2, \\ y=3, \end{cases} \text{ 所以 } D(2, 3), \text{ 选项 A 正确;}$$

$$\text{若 } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}, \text{ 则 } (3, 1) = (x-1, y),$$

$$\text{即 } \begin{cases} x-1=3, \\ y=1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=4, \\ y=1, \end{cases} \text{ 所以 } D(4, 1), \text{ 选项 C 正确;}$$

$$\text{若 } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}, \text{ 则 } (x, y-1) = (-2, -2),$$

$$\text{即 } \begin{cases} x=-2, \\ y-1=-2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=-2, \\ y=-1, \end{cases}$$

所以 $D(-2, -1),$ 选项 D 正确.

故选 ACD.

(3) 因为 $a = (2, 1), b = (1, x), a \parallel b,$

$$\text{则 } 2x = 1, \text{ 解得 } x = \frac{1}{2}.]$$

随堂·对点检测

1. C [因为向量 $\overrightarrow{AB}=(1,2)$, $\overrightarrow{AC}=(3,5)$,
所以 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(2,3)$. 故选 C.]
2. B [因为点 D 在边 AB 上, $BD=2DA$, 所以 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DA}$, 即
 $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=2(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD})$, 所以 $\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{CD}-2\overrightarrow{CA}=3n-2m=-2m+3n$.
故选 B.]
3. A [由已知得, $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AB}$, 则 $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{3}{4}$, $x+y=1$. 故选 A.]
4. 1 [由题可得 $a+b=(2,2)$, $a+kb=(3-k, 1+k)$,
又 $(a+b) \parallel (a+kb)$,
则 $2(1+k)=2(3-k)$, 解得 $k=1$.]

第 41 课时 平面向量的数量积及其应用

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (2) $|a| \cdot |b| \cos \theta$ $|a| \cdot |b| \cos \theta$

链教材·夯基固本

1. $\sqrt{3}c$ $3\sqrt{2}a$ [$(a \cdot b)c = |a| \cdot |b| \cos \frac{\pi}{6} c = 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} c = \sqrt{3}c$,
 $a(b \cdot c) = a \cdot |b| \cdot |c| \cos \frac{\pi}{4} = 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} a = 3\sqrt{2}a$.]
2. $-\frac{\sqrt{962}}{962}$ [$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{-30+28}{\sqrt{74} \times \sqrt{52}} = -\frac{\sqrt{962}}{962}$.]
3. $\pm \frac{3}{4}$ [由题意知 $(a+kb) \cdot (a-kb) = a^2 - k^2 b^2 = 9 - 16k^2 = 0$, 解得 $k = \pm \frac{3}{4}$.]
4. 84 [$(2a-b) \cdot (a+3b) = 2|a|^2 + 5a \cdot b - 3|b|^2 = 2 \times 36 + 5 \times 6 \times 4 \times \frac{1}{2} - 3 \times 16 = 84$.]

考点深研·题型突破

考点一

- 典例 1 (1)B (2)B (3)6 [(1)因为 $a=(1,1)$, $b=(-1,2)$,
则 $a \cdot b = -1+2=1$, $|b| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$,
则 a 在 b 上的投影向量是 $\frac{a \cdot b}{|b|^2} b = \frac{1}{5} b = (-\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$.
故选 B.
- (2)法一: 由题意知, $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, 所以 $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED} = (\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = |\overrightarrow{AD}|^2 - \frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2$, 由题意知 $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}| = 2$, 所以 $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED} = 4 - 1 = 3$. 故选 B.
- 法二: 以点 A 为坐标原点, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ 的方向分别为 x , y 轴的正方向建立平面直角坐标系(图略), 则 $E(1,0)$, $C(2,2)$, $D(0,2)$, 所以 $\overrightarrow{EC} = (1,2)$, $\overrightarrow{ED} = (-1,2)$, 所以 $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED} = -1+4=3$. 故选 B.
- (3)由题意, a 与 b 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$, $|a|=5$, $|b|=4$,
则 $(a+b) \cdot b = a \cdot b + b^2$
 $= 5 \times 4 \times (-\frac{1}{2}) + 4^2 = 6$.]

考点二

- 考向 1 典例 2 (1)B (2)D [(1)因为 $(b-2a) \perp b$, 所以 $(b-2a) \cdot b = 0$,
即 $b^2 = 2a \cdot b$, 又因为 $|a|=1$, $|a+2b|=2$,
所以 $1+4a \cdot b+4b^2=1+6b^2=4$,
所以 $|b| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 B.
- (2)因为 $|a-3b| = |a+3b|$,
所以两边同时平方可得 $a^2 - 6a \cdot b + 9b^2 = a^2 + 6a \cdot b + 9b^2$,
所以 $a \cdot b = 0$,
因为 $a = (3-m, 3)$, $b = (2, m+4)$,
所以 $a \cdot b = 2(3-m) + 3(m+4) = m+18=0$,
解得 $m=-18$.
故选 D.]

- 考向 2 典例 3 (1)C (2)C [(1)因为 $|2b-a| = \sqrt{15}$,
所以两边同时平方得 $|2b-a|^2 = (2b-a)^2 = 4|b|^2 + |a|^2 - 4a \cdot b = 15$,
又因为 $|a|=1$, $|b|=2$,
所以 $16+1-4a \cdot b = 15$, 得 $a \cdot b = \frac{1}{2}$,
所以 $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{1}{4}$.
故选 C.
- (2)由已知得 $a-b = (1-x, -2)$.
由于向量 $a-b$ 与 b 的夹角为锐角, 所以 $(a-b) \cdot b > 0$, 且 $a-b$ 与 b 不共线,
则 $(1-x)x+2 > 0$, 且 $-2x \neq x-1$, 解得 $x \in (-1, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, 2)$,
即 x 的取值范围为 $(-1, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, 2)$.
故选 C.]

- 考向 3 典例 4 $\sqrt{2}$ [法一: 因为 $a=(x,1)$, $b=(x-1,2x)$,
所以 $a-b = (1, 1-2x)$, 又 $a \perp (a-b)$,
所以 $a \cdot (a-b) = x+1-2x=0$, 解得 $x=1$,
所以 $a=(1,1)$,
则 $|a| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.
法二: 由 $a \perp (a-b)$, 得 $a \cdot (a-b) = 0$, 即 $a^2 = a \cdot b$, 将 $a=(x,1)$, $b=(x-1,2x)$ 代入, 得 $x^2+1=x(x-1)+2x$, 解得 $x=1$, 所以 $a=(1,1)$, 则 $|a| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.]

考题探源

1. 解: 因为 $a=(1,0)$, $b=(1,1)$,
所以 $a+\lambda b = (1+\lambda, \lambda)$,
因为 $(a+\lambda b) \perp a$, 所以 $(a+\lambda b) \cdot a = 1+\lambda=0$,
解得 $\lambda=-1$.
2. 解: 因为 $m=(\lambda+1,1)$, $n=(\lambda+2,2)$,
所以 $m+n = (2\lambda+3, 3)$, $m-n = (-1, -1)$,
因为 $(m+n) \perp (m-n)$,
所以 $(m+n) \cdot (m-n) = -(2\lambda+3) - 3 = -2\lambda - 6 = 0$,
解得 $\lambda=-3$.

教材拓展

- 典例 5 解: (1) 由极化恒等式知 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AD^2 - \frac{BC^2}{4} = 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$.

(2) 设 $|\overrightarrow{AD}| = 3m > 0$, $|\overrightarrow{BC}| = 2n > 0$. 因为 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 27$, 所以由极化恒等式知 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}^2 - \frac{\overrightarrow{BC}^2}{4} = 9m^2 - n^2 = 27$.
 因为 $\overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{FC} = -5$, 由极化恒等式知 $\overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FD}^2 - \overrightarrow{BD}^2 = m^2 - n^2 = -5$, 所以 $\begin{cases} 9m^2 - n^2 = 27, \\ m^2 - n^2 = -5, \end{cases}$ 解得 $m = 2, n = 3$,
 所以 $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC} = 4m^2 - n^2 = 7$.

随堂·对点检测

1. B [因为 $\mathbf{a} = (3, 1), \mathbf{b} = (-2, 2)$,
 所以 $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} = (3 - 2\lambda, 1 + 2\lambda)$,
 因为 $\mathbf{a} \perp (\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b})$,
 所以 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) = 3 \times (3 - 2\lambda) + 1 \times (1 + 2\lambda) = 10 - 4\lambda = 0$,
 解得 $\lambda = \frac{5}{4}$.
 故选 B.]
2. C [在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} > 0$,
 根据平面向量数量积公式可得
 $|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\pi - B) > 0$,
 即 $\cos(\pi - B) = -\cos B > 0$,
 所以 $\cos B < 0$, 角 B 为钝角,
 则 $\triangle ABC$ 一定是钝角三角形.
 故选 C.]
3. A [设 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 $\theta, \theta \in [0, \pi]$,
 因为 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{b}^2 = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta - 2|\mathbf{b}|^2 = -17$, 所以 $2^2 - 2 \times 3 \cos \theta - 2 \times 3^2 = -17$,
 解得 $\cos \theta = \frac{1}{2}$, 因为 $\theta \in [0, \pi]$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{3}$.
 故选 A.]
4. ABD [由题意可知, $\overrightarrow{AB} = (3, 1), \overrightarrow{AC} = (2, 4), \overrightarrow{BD} = (-4, 2)$,
 $\overrightarrow{CD} = (-3, -1)$,
 $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$, A 正确;
 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = -4 \times 2 + 2 \times 4 = 0$, 则 $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$, B 正确;
 $\cos \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AB}|}$
 $= \frac{3 \times 2 + 1 \times 4}{\sqrt{2^2 + 4^2} \sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 又 $0^\circ \leq \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle \leq 180^\circ$, 则向量
 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角为 45° , C 错误;
 $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$, 即 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, D 正确.
 故选 ABD.]
5. $(\sqrt{5}, 3)$ [设向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的夹角为 θ , 因为向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的夹角为锐角, 所以 $0 < \cos \theta < 1$, 因为 $\mathbf{c} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$,
 所以 $\mathbf{c}^2 = (\mathbf{a} + 2\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 4\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 4\mathbf{b}^2 = 5 + 4\cos \theta \in (5, 9)$, 所以 $|\mathbf{c}| \in (\sqrt{5}, 3)$.]

第 42 课时 平面向量的应用

理法先行·题练固本

链教材·夯基固本

1. C [因为 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$,
 所以 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, 所以 $A = \frac{\pi}{2}$. 故选 C.]

2.8 [取 AB 的中点 M , 连接 CM (图略), 则 $CM \perp AB, \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \angle BAC = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|^2 = 8$.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 A [因为 $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{DB}$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{设 } AB = x, \text{ 则 } \overrightarrow{AD}^2 = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2,$$

$$\text{即 } 37 = \frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{9} \times x \times 9 \cos 60^\circ + \frac{1}{9} \times 9^2,$$

$$\text{即 } 2x^2 + 9x - 126 = 0,$$

$$\text{因为 } x > 0,$$

$$\text{故解得 } x = 6 \text{ (负值舍去), 即 } AB = 6,$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|$$

$$= \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 - 2|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ}$$

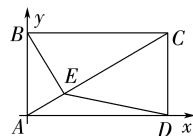
$$= \sqrt{6^2 + 9^2 - 2 \times 6 \times 9 \times \frac{1}{2}}$$

$$= 3\sqrt{7}.]$$

多维变迁

$$\frac{\sqrt{21}}{2} \text{ [以 } A \text{ 为坐标原点, } AD, AB \text{ 所在直线分别为 } x \text{ 轴、} y$$

轴建立平面直角坐标系, 则 $A(0, 0), B(0, \sqrt{3}), C(3, \sqrt{3}), D(3, 0), \overrightarrow{AC} = (3, \sqrt{3})$,



$$\text{设 } \overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AC}, \text{ 则 } E \text{ 的坐标为 } (3\lambda, \sqrt{3}\lambda),$$

$$\text{故 } \overrightarrow{BE} = (3\lambda, \sqrt{3}\lambda - \sqrt{3}).$$

$$\text{因为 } BE \perp AC, \text{ 所以 } \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AC} = 0,$$

$$\text{即 } 9\lambda + 3\lambda - 3 = 0, \text{ 解得 } \lambda = \frac{1}{4},$$

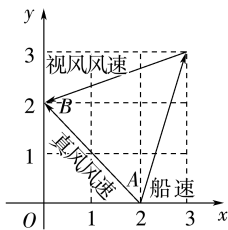
$$\text{所以 } E\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right),$$

$$\text{故 } \overrightarrow{ED} = \left(\frac{9}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right), |\overrightarrow{ED}| = \frac{\sqrt{21}}{2},$$

$$\text{即 } ED = \frac{\sqrt{21}}{2}.]$$

考点二

典例 2 (1)A (2)AC [(1)如图, 真风风速对应的向量=视风风速对应的向量-船行风风速对应的向量=视风风速对应的向量+船速对应的向量= $\overrightarrow{AB}$, $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{2} \in (1.6, 3.3)$, 故选 A.

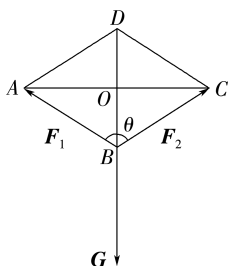


(2) 如图所示, 因为 $|F_1| = |F_2|$, 所以平行四边形 $ABCD$ 为菱形, 故 $|F_1| \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} |G|$, 即 $|F_1| = \frac{|G|}{2 \cos \frac{\theta}{2}}$, 故 A 正确;

由 A 项解析知, θ 越小越省力, θ 越大越费力, 故 B 错误;

当 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 时, $\angle ABD = \frac{\pi}{3}$, 又 $AB = AD$, 所以 $\triangle ABD$ 为等边三角形, 即 $|F_1| = |G|$, 故 C 正确;

若 $\theta = \pi$, 则 $F_1 + F_2 = 0$, 与 $F_1 + F_2 = G$ 矛盾, 所以 $\theta \neq \pi$, 故 D 错误.



故选 AC.]

考点三

考向 1 典例 3 8

[如图, 因为 $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, E 为 AC 的中点,

所以 $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + 2y\overrightarrow{AE}$,

因为 B, E, D 三点共线,

所以 $x + 2y = 1 (x > 0, y > 0)$,

所以 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = (x + 2y) \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} \right) = 4 + \frac{4y}{x} + \frac{x}{y} \geq 4 +$

$2\sqrt{\frac{4y}{x} \cdot \frac{x}{y}} = 8$,

当且仅当 $\frac{4y}{x} = \frac{x}{y}$, 即 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}$ 时等号成立, 故 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 8.]

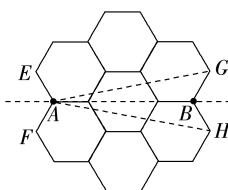
考向 2 典例 4 B [因为 P 为图中 7 个正六边形(边长为 1)内部或边界上的点,

A, B 为两个固定顶点,

所以 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AB}| \cos \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB} \rangle = 4 |\overrightarrow{AP}| \cos \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB} \rangle$.

当点 P 与点 E 或点 F 重合时,

$|\overrightarrow{AP}| \cos \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB} \rangle$ 最小,



最小值为 $1 \times \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$;

当点 P 与点 G 或点 H 重合时, $|\overrightarrow{AP}| \cos \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB} \rangle$ 最大,

最大值为 $4 + 1 \times \cos 60^\circ = \frac{9}{2}$,

所以 $-2 \leq 4 |\overrightarrow{AP}| \cos \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB} \rangle \leq 18$,

则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 $[-2, 18]$.

故选 B.]

考向 3 典例 5 D [由 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{2}, |\overrightarrow{AB}| = 2$, 可知 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$,

故点 A, B 在以 O 为圆心, $\sqrt{2}$ 为半径的圆上,

取 AB 的中点 H, 可知 $|OH| = 1$,

所以点 H 在以 O 为圆心, 1 为半径的圆上,

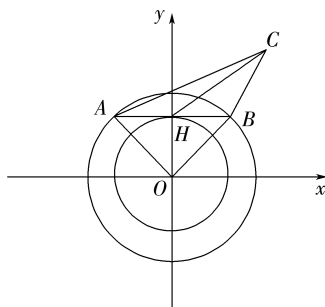
则 $|2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}|^2 = 4\overrightarrow{CA}^2 + 4\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$

$= 4\overrightarrow{CA} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + 4 = 4\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + 4$

$= 4(\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HA}) \cdot (\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HB}) + 4$

$= 4(\overrightarrow{CH}^2 - \overrightarrow{HA}^2) + 4$

$= 4(\overrightarrow{CH}^2 - 1) + 4 = 4\overrightarrow{CH}^2$,



所以 $|2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}| = 2|\overrightarrow{CH}|$,

又 $||\overrightarrow{CO}| - 1| \leq |\overrightarrow{CH}| \leq |\overrightarrow{CO}| + 1, |\overrightarrow{CO}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,

则 $4 \leq |\overrightarrow{CH}| \leq 6$, 故 $8 \leq 2|\overrightarrow{CH}| \leq 12$,

即 $|2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}|$ 的取值范围是 $[8, 12]$.

故选 D.]

教材拓展

典例 6 B [$\because \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}, \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 分别表示与向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 方向相同

的单位向量,

$\therefore$ 设 $\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}, \overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$,

则 $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AE}| = 1$,

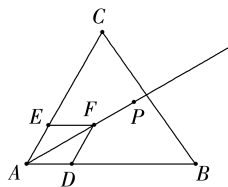
以 AD, AE 为邻边作平行四边形 ADFE, 可得 $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} +$

$\overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$,

$\therefore$ 四边形 ADFE 是菱形, 可得 AF 平分 $\angle BAC$.

又 $\because \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right), \lambda \in [0, +\infty)$,

$\therefore \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right) = \lambda \overrightarrow{AF}$, 可得点 P 在射线 AF 上运动.



由于 $\triangle ABC$ 的内心在 $\angle BAC$ 的平分线上,所以点 P 的轨迹一定经过 $\triangle ABC$ 的内心.

故选 B.]

随堂·对点检测

1. A $[\because (\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0,$

$$\therefore \overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0,$$

$$\therefore \overrightarrow{CB} \perp (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}),$$

$\therefore \triangle ABC$ 的边 BC 上的中线和边 BC 垂直,

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形,故选 A.]

2. D $[\text{由题意,知 } \mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\mathbf{F}_3=\mathbf{0}, \text{即 } \mathbf{F}_3=-(\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2),$

$$\text{所以 } \mathbf{F}_3^2=(\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2)^2=\mathbf{F}_1^2+\mathbf{F}_2^2+2\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2$$

$$=4+16+16\cos 60^\circ=28,$$

$$\text{即 } |\mathbf{F}_3|=2\sqrt{7} \text{ N. 故选 D.}]$$

3. A $[\text{因为 } \mathbf{a}=(-5,m), \mathbf{b}=(-2,3), \text{且 } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ 的夹角为锐角,}$

$$\text{则 } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}=10+3m>0, \text{解得 } m>-\frac{10}{3}.$$

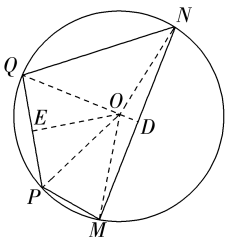
$$\text{当 } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ 共线时, } -2 \times m = -5 \times 3, \text{解得 } m = \frac{15}{2},$$

此时 $\mathbf{a}=(-5, \frac{15}{2}), \mathbf{b}=(-2, 3)$,满足 $\mathbf{a}=\frac{5}{2}\mathbf{b}$,此时两向量夹角为 0° ,

$$\text{于是当 } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ 的夹角为锐角时, } m \in (-\frac{10}{3}, \frac{15}{2}) \cup (\frac{15}{2}, +\infty).$$

故选 A.]

4. C $[\text{如图,连接 } MO, OP, OQ, ON, \text{作 } PQ \perp OE, MN \perp OD, \text{垂足分别为 } E, D,$



则 E, D 分别是 QP, MN 的中点,

$$\text{由勾股定理得 } OE=\sqrt{13^2-5^2}=12, OD=\sqrt{13^2-12^2}=5,$$

$$\text{又 } \overrightarrow{PM}+\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OQ}$$

$$=(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})-(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})=2(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OE}),$$

$$\text{故 } |\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{QN}|=2|\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OE}| \leq 2(|\overrightarrow{OD}|+|\overrightarrow{OE}|)=34, \text{当 } \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OD} \text{ 共线且反向时等号成立,}$$

所以 $|\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{QN}|$ 的最大值是 34 .

故选 C.]

5. 16 $[\text{因为 } \overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \text{所以 } \overrightarrow{CB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CD},$

$$\text{因为 } \overrightarrow{CE}=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB},$$

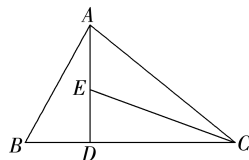
$$\text{所以 } \overrightarrow{CE}=x\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}y\overrightarrow{CD},$$

$$\text{且 } A, D, E \text{ 三点共线, 则 } x+\frac{3y}{2}=1, x>0, y>0,$$

$$\text{则 } \frac{6x+y}{xy}=\frac{6}{y}+\frac{1}{x}=\left(\frac{6}{y}+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{3}{2}y\right)$$

$$=\frac{6x}{y}+\frac{3y}{2x}+10 \geq 2\sqrt{\frac{6x}{y} \cdot \frac{3y}{2x}}+10=16,$$

$$\text{当且仅当 } \begin{cases} \frac{6x}{y}=\frac{3y}{2x}, \\ x+\frac{3}{2}y=1, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x=\frac{1}{4}, \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ 时, 等号成立,}$$



$$\text{所以 } \frac{6x+y}{xy} \text{ 的最小值是 } 16.]$$

第43课时 复数

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1) $a \neq b$ (2) $a \neq b$ (3) $a=c$ 且 $b=d$ (4) $a=c$

$$\text{且 } b=-d \quad (5) |z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$$

知识点 2 $Z(a, b)$

知识点 3 (1) $(a+c)+(b+d)i$ (2) $(a-c)+(b-d)i$ (3) $(ac-$

$$bd)+(ad+bc)i \quad \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

链教材·夯基固本

1. -1 $[\text{由题意知 } \begin{cases} m+1=0, \\ m-1 \neq 0, \end{cases} \text{解得 } m=-1.]$

2. $-2+i$ $[\frac{5}{i-2}=\frac{5(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)}=-2-i,$

故其共轭复数是 $-2+i$.]

3. A $[\text{由 } z=m(3+i)-(2-i)=(3m-2)+(m+1)i,$

$$\text{又 } \frac{2}{3} < m < 1, \text{ 则 } \begin{cases} 3m-2 > 0, \\ m+1 > 0, \end{cases}$$

所以复数 z 在复平面内对应的点为 $(3m-2, m+1)$,位于第一象限,故选 A.]

4. $-5-5i$ $[(3-i)(3+i)=-2 \times 3-2 \times i-3 \times i-i \times i=-6-2i-3i-i^2$

$$=-6-2i-3i+1=-5-5i.]$$

5. 1 $[\text{由题意可知 } |z|=\left|\frac{1+i}{1-i}\right|=|i|=1.]$

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 ACD $[\text{对于 A, 由题知, } \bar{z}=1-mi, \text{ 则 } \bar{z}(2-i)=(1-mi)(2-i)=(2-m)-(1+2m)i,$

$$\text{又 } \bar{z}(2-i) \text{ 是纯虚数, 则 } \begin{cases} 2-m=0, \\ 1+2m \neq 0, \end{cases} \text{ 解得 } m=2, \text{ A 正确;}$$

对于 B, $i(1+i)=-1+i$, 其虚部为 1 , B 错误;

$$\text{对于 C, 因为 } z(1+i)=2, \text{ 所以 } z=\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i,$$

则 $|z|=\sqrt{2}$, C 正确;

对于 D, 由 $(x-i)i=-i^2+xi=1+xi=y+5i$, 得 $x=5, y=1$, 则 $x+y=6$, D 正确, 故选 ACD.]

母题探究

1. $-\frac{1}{2}$ [由题知, $\bar{z}=1-mi$, 则 $\bar{z}(2-i)=(1-mi)(2-i)=(2-m)-(1+2m)i$,

又 $\bar{z}(2-i)$ 是实数, 则 $1+2m=0$, 解得 $m=-\frac{1}{2}$.]

2. $-1-i$ [$i(1+i)=-1+i$, 故其共轭复数为 $-1-i$.]

3. $\sqrt{2}$ [法一: $z=i(1+i)=-1+i$, $|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

法二: $|z|=|i(1+i)|=|i||1+i|=\sqrt{2}$.]

考点二

典例 2 (1)A (2)C (3)A (4) $7-\sqrt{5}i$

[(1) $\frac{1}{z-1}=\frac{1}{i}=-i$, 故选 A.

(2) 由 $-2-z=\frac{1-i}{i^{2027}}=\frac{1-i}{i^3}=\frac{1-i}{-i}=1+i$,

可得 $z=-3-i$, 故选 C.

(3) $\because \frac{1+2i}{2-i}=\frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{5i}{5}=i$,

$\therefore z=i^{2027}=i^{4 \times 506+3}=-i$, $\therefore z \cdot \bar{z}=1$.

故选 A.

(4) $(\sqrt{5}+i) \cdot (\sqrt{5}-2i)=5+\sqrt{5}i-2\sqrt{5}i+2=7-\sqrt{5}i$.]

多维变迁

1. C [因为 $\frac{z}{z-1}=\frac{z-1+1}{z-1}=1+\frac{1}{z-1}=1+i$,

所以 $z=1+\frac{1}{i}=1-i$.]

2. $2i$ [因为复数 z 在复平面内对应的点的坐标为 $(2, -1)$,

所以 $z=2-i$, $\bar{z}=2+i$,

故 $\frac{\bar{z}+i}{z-1}=\frac{2+i+i}{2-i-1}=\frac{2+2i}{1-i}=\frac{2(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2(1+i)^2}{2}=2i$.]

考点三

典例 3 (1)A (2)B [(1) 由题意可知, $\bar{z}=\frac{4+3i}{1+2i}=$

$\frac{(4+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=2-i$,

则 $z=2+i$, 在复平面上对应的点为 $(2, 1)$, 位于第一象限, 故选 A.

(2) 由复数 z 满足 $|z+i|+|z-i|=2$,

可知复数 z 在复平面内对应点的轨迹为以 $A(0, -1)$, $B(0, 1)$ 为两端点的线段,

而 $|z-1|$ 的几何意义为线段上的点到点 $(1, 0)$ 的距离,

则 $|z-1|$ 的最大值是 $\sqrt{2}$. 故选 B.]

多维变迁

1. ABD [分三种情况:

① 当 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ 时, $z_A-z_B=z_D-z_C$,

则 $z_D=z_A-z_B+z_C=-5-2i+4-5i+2=1-7i$;

② 当 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}$ 时, $z_A-z_B=z_C-z_D$,

则 $z_D=z_C-z_A+z_B=2+5+2i-4+5i=3+7i$;

③ 当 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$ 时, $z_C-z_A=z_B-z_D$,

则 $z_D=z_B-z_C+z_A=-4+5i-2-5-2i=-11+3i$.

所以点 D 对应的复数为 $1-7i$ 或 $3+7i$ 或 $-11+3i$.

故选 ABD.]

2. 4 [$|z+2-2i|=1$,

复数 z 对应的点的轨迹是以 $C(-2, 2)$ 为圆心, 半径 $r=1$ 的圆,

而 $|z-3-2i|=|z-(3+2i)|$ 的几何意义是复数 z 对应的点与点 $A(3, 2)$ 的距离.

又 $|AC|=5$, 点 $A(3, 2)$ 在圆 C 外, 所以 $|z-3-2i|$ 的最小值为 $|AC|-r=5-1=4$.]

教材拓展

典例 4 BC [复数 $z=1-\sqrt{3}i$ 的三角形形式为 $z=$

$2\left(\cos \frac{5\pi}{3}+i\sin \frac{5\pi}{3}\right)$, 故 A 错误;

当 $r=1, \theta=\frac{\pi}{2}$ 时, $z=\cos \frac{\pi}{2}+i\sin \frac{\pi}{2}=i$,

因为 $i^{4k+1}+i^{4k+2}+i^{4k+3}+i^{4k+4}=0, k \in \mathbf{Z}$,

所以 $z+z^2+z^3+\cdots+z^{2024}=0$, 故 B 正确;

当 $r=2, \theta=\frac{\pi}{3}$ 时, $z=2\left(\cos \frac{\pi}{3}+i\sin \frac{\pi}{3}\right)$,

$z^3=\left[2\left(\cos \frac{\pi}{3}+i\sin \frac{\pi}{3}\right)\right]^3=2^3(\cos \pi+i\sin \pi)=-8$, 故 C 正确;

当 $r=3, \theta=\frac{\pi}{4}$ 时, $z=3\left(\cos \frac{\pi}{4}+i\sin \frac{\pi}{4}\right)$,

$z^n=\left[3\left(\cos \frac{\pi}{4}+i\sin \frac{\pi}{4}\right)\right]^n$

$=3^n\left(\cos \frac{n\pi}{4}+i\sin \frac{n\pi}{4}\right)$,

若 z^n 为纯虚数, 则 $\begin{cases} \cos \frac{n\pi}{4}=0, \\ \sin \frac{n\pi}{4} \neq 0, \end{cases}$ 则 $\frac{n\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$, 所以 $n=4k+2, k \in \mathbf{Z}$,

虽然 $n=4k+2, k \in \mathbf{Z}$ 是偶数, 但是偶数还有 $n=4k, k \in \mathbf{Z}$ 的形式的数,

所以“ n 为偶数”是“ z^n 为纯虚数”的必要不充分条件, 故 D 错误.

故选 BC.]

随堂·对点检测

1. A [由 $z=i^3 \cdot (2+i)=-i \cdot (2+i)=1-2i$, 得 z 的实部为 1, 故选 A.]

2. D [$\because (a^2-3a+2)+(a^2-4a+3)i$ 是纯虚数,

$\therefore \begin{cases} a^2-3a+2=(a-1)(a-2)=0, \\ a^2-4a+3=(a-1)(a-3) \neq 0, \end{cases}$

解得 $a=2$.

故选 D.]

3. A [因为 $z=\frac{1-i}{2+2i}=\frac{(1-i)^2}{2(1+i)(1-i)}=-\frac{1}{2}i$,

所以 $\bar{z}=\frac{1}{2}i$, 所以 $z-\bar{z}=-\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}i=-i$, 故选 A.]

4. $(-\infty, -2)$ [由于 $(1+2i)-m(3-i)=(1-3m)+(2+m)i$, 故点 $(1-3m, 2+m)$ 位于第四象限,

因此 $\begin{cases} 1-3m>0, \\ 2+m<0, \end{cases} \therefore \begin{cases} m<\frac{1}{3}, \\ m<-2, \end{cases} \therefore m<-2,$

即实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -2)$.]

第六章 数列

第 44 课时 数列的概念及其函数特性

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 序号 n

知识点 2 有限 无限 $>$ $<$

知识点 3 序号 n 数列的第 n 项 a_n

链教材·夯基固本

1. $5n-4$ [由题图可知,

$$a_1=1=5\times 1-4, a_2=6=5\times 2-4, a_3=11=5\times 3-4, a_4=16=5\times 4-4=16, \dots, \text{归纳得 } a_n=5n-4.]$$

2. $\begin{cases} 2, n=1, \\ 2n-1, n\geq 2, n\in \mathbf{N}^* \end{cases}$ [当 $n=1$ 时, $a_1=S_1=2$.

当 $n\geq 2$ 时,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+1-[(n-1)^2+1]=2n-1.$$

显然当 $n=1$ 时, 不满足上式,

$$\text{故 } a_n=\begin{cases} 2, n=1, \\ 2n-1, n\geq 2, n\in \mathbf{N}^*. \end{cases}]$$

3. $\frac{n}{n+1}$ 增 $[a_n=\frac{n}{n+1}$ 可以作为这个数列的一个通项公式.

$$\text{由 } a_{n+1}-a_n=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}>0.$$

得 $a_{n+1}>a_n$, 因此数列 $\{a_n\}$ 为递增数列.]

4. $\frac{1}{2}$ [由题意得 $a_n=\frac{2^n-1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$. 因为 n 为正整数, 所以

$$2^n\geq 2, 0<\frac{1}{2^n}\leq \frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2^n}\geq \frac{1}{2}, \text{所以 } a_n\geq \frac{1}{2}.]$$

5. A [由 $a_1=-2, a_{n+1}=1-\frac{1}{a_n}(n\in \mathbf{N}^*)$,

$$\text{可得 } a_2=1-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2},$$

$$a_3=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}, a_4=1-3=-2=a_1,$$

$$a_5=1-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}=a_2, \dots,$$

即数列 $\{a_n\}$ 是周期为 3 的数列,

则 $a_{2026}=a_{3\times 675+1}=a_1=-2$. 故选 A.]

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1) $a_n=\begin{cases} 4, n=1, \\ 4n-1, n\geq 2 \end{cases}$ [当 $n=1$ 时, $a_1=S_1=2\times 1^2+$

$$1+1=4,$$

$$\text{当 } n\geq 2 \text{ 时, } a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2+n+1-[2(n-1)^2+(n-1)+1]=4n-1.$$

由于 $a_1=4$ 不满足上式,

$$\text{所以 } a_n=\begin{cases} 4, n=1, \\ 4n-1, n\geq 2. \end{cases}]$$

(2)解: 因为 $2S_n=3a_{n+1}-3$, 所以 $2S_{n+1}=3a_{n+2}-3$,

两式相减, 得 $2a_{n+1}=3a_{n+2}-3a_{n+1}$, 即 $3a_{n+2}=5a_{n+1}$,

所以等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=\frac{5}{3}$,

又因为 $2S_1=3a_2-3=5a_1-3$,

所以 $a_1=1$, 故 $a_n=\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$.

(3)解: ①证明: 当 $n=1$ 时, $a_1=\frac{a_1}{2}+\frac{1}{a_1}$,

所以 $a_1^2=2$; 当 $n\geq 2$ 时, $S_n=\frac{S_n-S_{n-1}}{2}+\frac{1}{S_n-S_{n-1}}$, 所以

$$\frac{S_n+S_{n-1}}{2}=\frac{1}{S_n-S_{n-1}}, \text{所以 } S_n^2-S_{n-1}^2=2, \text{故数列 } \{S_n^2\} \text{ 是以 } 2$$

为首项, 2 为公差的等差数列.

②由①知, $S_n^2=2+(n-1)\times 2=2n$, 得

$$T_n=2n. \text{ 当 } n\geq 2 \text{ 时, } b_n=\frac{T_n}{T_{n-1}}=\frac{2n}{2(n-1)}=\frac{n}{n-1}.$$

当 $n=1$ 时, $b_1=T_1=2$, 不符合上式, 故 $b_n=\begin{cases} 2, n=1, \\ \frac{n}{n-1}, n\geq 2. \end{cases}$

母题探究

解: 当 $n=1$ 时, $a_1=3$,

$$\text{当 } n\geq 2 \text{ 时, } a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2+n-[2(n-1)^2+(n-1)]=4n-1,$$

由于 $a_1=3$ 满足上式,

所以 $a_n=4n-1(n\in \mathbf{N}^*)$.

考点二

典例 2 (1) A (2) C [(1)由已知得 $a_{n+1}-a_n=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=$

$$\ln(n+1)-\ln n,$$

$$\text{所以 } a_n-a_{n-1}=\ln n-\ln(n-1),$$

$$a_{n-1}-a_{n-2}=\ln(n-1)-\ln(n-2),$$

...

$$a_3-a_2=\ln 3-\ln 2,$$

$$a_2-a_1=\ln 2-\ln 1,$$

将上述 $n-1$ 个式子相加,

$$\text{整理得 } a_n-a_1=\ln n-\ln 1=\ln n,$$

又因为 $a_1=0$, 所以 $a_n=\ln n(n\geq 2)$.

当 $n=1$ 时, $a_1=0$, 满足 $a_n=\ln n$. 故选 A.

(2)因为 $\frac{S_n}{a_n}=n^2$, 所以 $S_{n+1}=(n+1)^2 a_{n+1}$,

$$\text{所以 } a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=(n+1)^2 a_{n+1}-n^2 a_n,$$

$$\text{化简得 } (n^2+2n)a_{n+1}=n^2 a_n,$$

$$\text{即 } (n+2)a_{n+1}=na_n,$$

$$\text{由 } a_1=1, \text{ 知 } a_n\neq 0, \text{ 所以 } \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+2},$$

$$\text{累乘可得 } \frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot \dots\cdot \frac{a_2}{a_1}=\frac{n}{n+2}\times \frac{n-1}{n+1}\times \dots\times \frac{1}{3},$$

$$\text{即 } a_{n+1}=\frac{2a_1}{(n+1)(n+2)}=\frac{2}{(n+1)(n+2)},$$

$$\text{所以 } a_n=\frac{2}{n(n+1)}(n\geq 2),$$

当 $n=1$ 时, $a_1=1$ 也符合上式, 所以 $S_n=n^2 a_n=\frac{2n}{n+1}(n\in$

$$\mathbf{N}^*), \text{ 所以 } S_{30}=\frac{2\times 30}{30+1}=\frac{60}{31}.$$

故选 C.]

考点三

考向 1 典例 3 A [已知在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, 且 $a_{n+1} =$

$$\frac{1}{1-a_n}, n \in \mathbf{N}^*,$$

$$\text{则 } a_{n+2} = \frac{1}{1-a_{n+1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-a_n}} = 1 - \frac{1}{a_n},$$

$$\text{所以 } a_{n+3} = \frac{1}{1-a_{n+2}} = \frac{1}{1-(1-\frac{1}{a_n})} = a_n,$$

所以数列 $\{a_n\}$ 为周期数列, 周期为 3.

$$\text{又 } a_2 = \frac{1}{1-a_1} = -1, a_3 = \frac{1}{1-a_2} = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } a_{2\,025} = a_{675 \times 3} = a_3 = \frac{1}{2}.$$

故选 A.]

考向 2 典例 4 AD [当 $n \geq 2$ 时, 比较 a_n 与 a_{n-1} 的大小, 可得 $\{a_n\}$ 是否为递增数列.

对于 A, 由 $a_n = 2n - 11$, 得 $a_n - a_{n-1} = 2n - 11 - [2(n-1) - 11] = 2 > 0$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 故 A 正确;

对于 B, 由 $a_n = -3n + 32$, 得 $a_n - a_{n-1} = -3n + 32 - [-3(n-1) + 32] = -3 < 0$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是递减数列, 故 B 错误;

对于 C, 由 $a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$, 得 $a_n - a_{n-1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = -4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n < 0$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是递减数列, 故 C 错误;

对于 D, 由 $a_n = 2 \cdot 3^n$, 得 $a_n - a_{n-1} = 2 \cdot 3^n - 2 \cdot 3^{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1} > 0$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 故 D 正确.

故选 AD.]

考向 3 典例 5 4 [根据题意, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n =$

$$n + \frac{4}{n}, \text{ 设 } f(x) = x + \frac{4}{x} (x \geq 1),$$

由对勾函数的性质可知: $f(x)_{\min} = f(2)$,

即当 $x = 2$ 时, $f(x) = x + \frac{4}{x}$ 取得最小值,

则当 $n = 2$ 时, $\{a_n\}$ 取得最小项, 其最小项的值为 $a_2 = 2 + \frac{4}{2} = 4$.]

多维变迁

1. A [根据题意, 函数 $f(x)$ 为在定义域 $[1, +\infty)$ 上的减函数, 当 $n \geq 1$ 且 $n \in \mathbf{Z}$ 时, 必有 $f(n) > f(n+1)$, 则数列 $\{a_n\}$ 为递减数列,

反之, 当 $f(x) = -\left(x - \frac{5}{4}\right)^2$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 为递减数列, 但函数 $f(x)$ 在定义域上不是减函数,

故“函数 $f(x)$ 为减函数”是“数列 $\{a_n\}$ 为递减数列”的充分不必要条件.

故选 A.]

2. B [由题意可得 $a_2 = 2 - \frac{4}{a_1} = -2$, $a_3 = 2 - \frac{4}{a_2} = 4$, $a_4 = 2 - \frac{4}{a_3} = 1, \dots$,

可知数列 $\{a_n\}$ 是周期为 3 的周期数列,

且一个周期内各项的和为 $a_1 + a_2 + a_3 = 3$,

则数列 $\{a_n\}$ 的前 2 025 项和为 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2\,025} = 675 \times (a_1 + a_2 + a_3) = 2\,025$.

故选 B.]

3. $\frac{9^8}{10^7}$ [由 $a_n = (n+1)\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$,

可得 $a_{n+1} = (n+2)\left(\frac{9}{10}\right)^n$, $a_{n-1} = n \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-2}$,

若 a_n 为最大项, 则有 $\begin{cases} a_n \geq a_{n-1}, \\ a_n \geq a_{n+1}, \end{cases}$

$$\text{即 } \begin{cases} (n+1)\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \geq n \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-2}, \\ (n+1)\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \geq (n+2)\left(\frac{9}{10}\right)^n, \end{cases}$$

解得 $8 \leq n \leq 9$,

当 $n = 8$ 或 $n = 9$ 时, 数列取得最大项,

故数列 $\{a_n\}$ 的最大项的值为 $a_8 = a_9 = \frac{9^8}{10^7}$.]

教材拓展

典例 6 BCD [A 选项: 因为 $a_{n-2} = a_n - a_{n-1} (n \geq 3)$,

因此 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

$$= (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + (a_5 - a_4) + \dots + (a_{n+2} - a_{n+1}) = a_{n+2} - a_2 = a_{n+2} - 1,$$

因此 $S_{20} + 1 = a_{22}$, 因此 A 选项错误.

B 选项: 因为 $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1} = a_{2n}$, 因此 B 选项正确.

C 选项: 因为 $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{30} = a_1 + a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{30} - a_1 = a_3 + a_4 + a_6 + \dots + a_{30} - a_1$

$= \dots = a_{31} - a_1 = a_{31} - 1$, 因此 C 选项正确.

D 选项: 因为 $a_{n-1} = a_n - a_{n-2} (n \geq 3)$, 因此 $a_{n-1}^2 = a_n a_{n-1} - a_{n-1} a_{n-2} (n \geq 3)$,

$$\text{即 } T_n = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = a_1^2 + (a_3 a_2 - a_1 a_2) + (a_4 a_3 - a_3 a_2) + \dots + (a_{n+1} a_n - a_n a_{n-1}) = a_1^2 + a_{n+1} a_n - a_1 a_2 = a_n a_{n+1},$$

因为 $T_n = a_{2\,023} a_{2\,024}$, 因此 $n = 2\,023$, 因此 D 选项正确. 故选 BCD.]

随堂·对点检测

1. C [当 $n = 1$ 时, $S_1 = 4a_1 - 3$, $S_1 = 4S_1 - 3$, 得 $S_1 = 1$,

当 $n \geq 2$ 时, $S_n = 4(S_n - S_{n-1}) - 3$, $3S_n = 4S_{n-1} + 3$, $S_n =$

$$\frac{4}{3} S_{n-1} + 1, S_n + 3 = \frac{4}{3} (S_{n-1} + 3), \text{ 又 } S_1 + 3 = 4,$$

所以 $\{S_n + 3\}$ 是首项为 4, 公比为 $\frac{4}{3}$ 的等比数列,

$$\text{所以 } S_n + 3 = 4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}, S_n = 4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} - 3 =$$

$$3 \left[\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1 \right].$$

故选 C.]

2. D [由 $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n^2 + n}$, 得 $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \dots, a_3 - a_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, a_2 - a_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, 将上述 $n-1$ 个式子相加, 得 $a_n - a_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$,
又因为 $a_1 = \frac{1}{2}$, 所以 $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, 所以 $a_{2025} = 1 - \frac{1}{2026} = \frac{2025}{2026}$, 故选 D.]

3. 7 [因为 $a_n = \frac{2n-2}{2n-15} = \frac{2n-15+13}{2n-15} = 1 + \frac{13}{2n-15}$,
当 $n \leq 7, n \in \mathbf{N}^*$ 时, $2n-15 < 0, a_n = 1 + \frac{13}{2n-15}$ 为递减数列,
且 $1 > a_n = 1 + \frac{13}{2n-15} \geq a_7 = 1 + \frac{13}{-1} = -12$,
所以当 $n > 7, n \in \mathbf{N}^*$ 时, $2n-15 > 0, a_n = 1 + \frac{13}{2n-15}$ 为递减数列,
且 $a_n = 1 + \frac{13}{2n-15} > 1$,
所以 a_n 取到最小值时 n 的值是 7.]

第 45 课时 等差数列及其前 n 项和

理法先行 · 题练固本

梳必备 · 破题有方

知识点 1 (1) 同一个常数 (2) $2A = a + b$

知识点 2 (1) $a_1 + (n-1)d$ (2) $na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$

知识点 3 (1) $a_k + a_l = a_m + a_n$ md

链教材 · 夯基固本

1. -3 [设方程 $x^2 + 6x + 1 = 0$ 的两根分别为 x_1 和 x_2 ,
则 $x_1 + x_2 = -6$, 所以两根的等差中项为 -3.]

2. 6 [由题意可得 $\begin{cases} a_1 + 3d + a_1 + 7d = 20, \\ a_1 + 6d = 12, \end{cases}$
解得 $a_1 = 0, d = 2$, 故 $a_4 = a_1 + 3d = 6$.]

3. 340 [$S_{17} = \frac{17}{2}(a_1 + a_{17}) = \frac{17}{2}(a_3 + a_{15}) = \frac{17}{2} \times 40 = 340$.]

4. 876 [法一: 由 $S_8 = 8a_1 + \frac{8 \times 7}{2}d = 100$,

$$S_{16} = 16a_1 + \frac{16 \times 15}{2}d = 392,$$

$$\text{得 } a_1 = 2, d = 3,$$

$$\therefore S_{24} = 24 \times 2 + \frac{24 \times 23}{2} \times 3 = 876.$$

法二: $\because S_8, S_{16} - S_8, S_{24} - S_{16}$ 成等差数列,

$$\therefore 2(S_{16} - S_8) = S_8 + (S_{24} - S_{16}),$$

$$\text{得 } S_{24} = 3S_{16} - 3S_8 = 876.]$$

考点深研 · 题型突破

考点一

典例 1 (1) AC (2) 95 [(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{则 } \begin{cases} a_5 = a_1 + 4d = 4, \\ S_3 = 3a_1 + \frac{3 \times 2}{2}d = -6, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1 = -4, \\ d = 2, \end{cases} \text{ 故 A 正确;}$$

$a_3 = a_1 + 2d = -4 + 4 = 0$, 故 B 错误;

$$S_5 = 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2}d = -20 + 20 = 0, \text{ 故 C 正确;}$$

因为 $S_2 = 2a_1 + d = -8 + 2 = -6, S_3 = -6$, 所以 $S_2 = S_3$, 故 D 错误. 故选 AC.

(2) 法一(基本量法): 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{则由题意得 } \begin{cases} a_1 + 2d + a_1 + 3d = 7, \\ 3(a_1 + d) + a_1 + 4d = 5, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1 = -4, \\ d = 3, \end{cases}$$

$$\text{则 } S_{10} = 10a_1 + \frac{10 \times 9}{2}d = 10 \times (-4) + 45 \times 3 = 95.$$

法二(利用下标和性质): 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{由 } a_3 + a_4 = a_2 + a_5 = 7,$$

$$3a_2 + a_5 = 5,$$

$$\text{得 } a_2 = -1, a_5 = 8,$$

$$\text{故 } d = \frac{a_5 - a_2}{5 - 2} = 3, a_6 = 11,$$

$$\text{则 } S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \times 10 = 5(a_5 + a_6) = 5 \times 19 = 95.]$$

多维变迁

1. D [设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d (d \neq 0)$.

$$\because a_4 = \frac{1}{2}a_5, \therefore a_4 = \frac{1}{2}(a_4 + d), \text{ 解得 } a_4 = d, a_5 = 2d.$$

$$\therefore a_1 = a_4 - 3d = -2d, \therefore a_1 + a_4 = -d.$$

$$\therefore \frac{S_9}{S_4} = \frac{(a_1 + a_9) \times 9}{(a_1 + a_4) \times 4} = \frac{2a_5 \times 9}{(a_1 + a_4) \times 4} = \frac{4d \times 9}{-d \times 4} = -9. \text{ 故选 D.}]$$

2. $2n^2$ [由 $\sqrt{a_{n+1}} = \sqrt{a_n} + \sqrt{2}$ 得 $\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} = \sqrt{2}$,

而 $\sqrt{a_1} = \sqrt{2}$, 于是得数列 $\{\sqrt{a_n}\}$ 是以 $\sqrt{2}$ 为首项, $\sqrt{2}$ 为公差的等差数列, 则有 $\sqrt{a_n} = \sqrt{a_1} + (n-1)d = \sqrt{2} + \sqrt{2}(n-1) = \sqrt{2}n$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n^2$.]

考点二

典例 2 (1) BCD [对于 A, 当 $n \geq 1$ 时, $a_{n+1} - a_n = d \Leftrightarrow$ 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, A 错误;

对于 B, 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则 $a_n = a_1 + (n-1)d = dn + a_1 - d$, 符合 $a_n = kn + b$ 的形式,

若 $a_n = kn + b$, 则 $a_{n+1} - a_n = k(n+1) + b - kn - b = k$ (常数), 即数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可以表示为 $a_n = kn + b \Leftrightarrow$ 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, B 正确;

对于 C, 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$

$$= \frac{dn^2}{2} + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n, \text{ 符合 } S_n = an^2 + bn \text{ 的形式,}$$

若 $S_n = an^2 + bn$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = an^2 + bn - a(n-1)^2 - b(n-1) = 2an + b - a$,

当 $n=1$ 时, $a_1 = a + b$ 符合上式, 故 $a_n = 2an + b - a$, 即数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,

故数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和可以表示为 $S_n = an^2 + bn$ 的形式 $\Leftrightarrow$ 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, C 正确;

对于 D, 由 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$, 可得 $a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1} \Leftrightarrow$ 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, D 正确.]

(2)证明:①③ $\Rightarrow$ ②.

已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_2=3a_1$.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,则 $a_2=3a_1=a_1+d$,得 $d=2a_1$,

所以 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=n^2a_1$.

因为数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数,所以 $\sqrt{S_n}=n\sqrt{a_1}$,

所以 $\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}=(n+1)\sqrt{a_1}-n\sqrt{a_1}=\sqrt{a_1}$ (常数),所以数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列.

①② $\Rightarrow$ ③.

已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

则 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{1}{2}n^2d+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$.

因为数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列,所以数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 的通项公式是

关于 n 的一次函数,则 $a_1-\frac{d}{2}=0$,即 $d=2a_1$,

所以 $a_2=a_1+d=3a_1$.

②③ $\Rightarrow$ ①.

已知数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列, $a_2=3a_1$,所以 $S_1=a_1$, $S_2=a_1+a_2=4a_1$.

设数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 的公差为 d , $d>0$,则 $\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}=\sqrt{4a_1}-\sqrt{a_1}=d$,

得 $a_1=d^2$,所以 $\sqrt{S_n}=\sqrt{S_1}+(n-1)d=nd$,所以 $S_n=n^2d^2$,

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2d^2-(n-1)^2d^2=2d^2n-d^2(n\geq 2)$,

当 $n=1$ 时也满足,故 $a_n=2d^2n-d^2$, $n\in\mathbf{N}^*$ 是关于 n 的一次函数,所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

考点三

考向1 典例3 (1)C (2)D [(1)在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2+a_8=2a_5=10$,解得 $a_5=5$,

又 $a_4=4$,

故公差 $d=a_5-a_4=5-4=1$.

故选C.

(2)法一(利用等差数列的基本量):由 $S_9=1$,根据等差数列的

求和公式, $S_9=9a_1+\frac{9\times 8}{2}d=1\Rightarrow 9a_1+36d=1$,

又 $a_3+a_7=a_1+2d+a_1+6d=2a_1+8d=\frac{2}{9}(9a_1+36d)=\frac{2}{9}$.

故选D.

法二(利用等差数列的性质):根据等差数列的性质, $a_1+a_9=a_3+a_7$,由 $S_9=1$,根据等差数列的求和公式,

$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=\frac{9(a_3+a_7)}{2}=1$,故 $a_3+a_7=\frac{2}{9}$.

故选D.

法三(特殊值法):不妨取等差数列的公差 $d=0$,则 $S_9=1=$

$9a_1\Rightarrow a_1=\frac{1}{9}$,则 $a_3+a_7=2a_1=\frac{2}{9}$.

故选D.]

考向2 典例4 (1)C (2)C [(1)根据题意,数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,则 $S_{10}, S_{20}-S_{10}, S_{30}-S_{20}$ 成等差数列,

则有 $S_{10}+(S_{30}-S_{20})=2(S_{20}-S_{10})$,

即 $20+(S_{30}-10)=2(10-20)$,解得 $S_{30}=-30$.故选C.

(2) S_n, T_n 分别是等差数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的前 n 项和,且 $\frac{S_n}{T_n}=$

$\frac{3n+1}{2n-1}(n=1,2,\cdots)$,

则 $\frac{a_5}{b_5}=\frac{2a_5}{2b_5}=\frac{a_1+a_9}{b_1+b_9}=\frac{\frac{9}{2}(a_1+a_9)}{\frac{9}{2}(b_1+b_9)}=\frac{S_9}{T_9}=\frac{3\times 9+1}{2\times 9-1}=\frac{28}{17}$.

故选C.]

多维变迁

29 19 [设等差数列的项数为 $2n-1$,设所有的奇数项和为

S ,则 $S=\frac{n(a_1+a_{2n-1})}{2}=na_n$,设所有的偶数项和为 T ,则 $T=$

$\frac{(n-1)(a_2+a_{2n-2})}{2}=(n-1)a_n$, $\frac{T}{S}=\frac{n-1}{n}=\frac{261}{290}=\frac{9}{10}$,解得

$n=10$,则项数为 $2n-1=19$,中间项为 a_{10} .由 $S=10a_{10}=290$,得 $a_{10}=29$,所以此数列中间一项是29,总项数为19.]

考向3 典例5 解:法一:设公差为 d .

由 $S_3=S_{11}$,

可得 $3a_1+\frac{3\times 2}{2}d=11a_1+\frac{11\times 10}{2}d$,即 $d=-\frac{2}{13}a_1$.

从而 $S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n=-\frac{a_1}{13}(n-7)^2+\frac{49}{13}a_1$,

因为 $a_1>0$,所以 $-\frac{a_1}{13}<0$.

故当 $n=7$ 时, S_n 最大.

法二:易知 $S_n=An^2+Bn(A\neq 0)$ 是关于 n 的二次函数,

由 $S_3=S_{11}$,可知 $S_n=An^2+Bn$ 的图象关于直线 $n=\frac{3+11}{2}=7$ 对称.

由法一可知 $A=-\frac{a_1}{13}<0$,故当 $n=7$ 时, S_n 最大.

法三:设公差为 d .

由法一可知 $d=-\frac{2}{13}a_1$.

要使 S_n 最大,则有 $\begin{cases} a_n\geq 0, \\ a_{n+1}\leq 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} a_1+(n-1)\left(-\frac{2}{13}a_1\right)\geq 0, \\ a_1+n\left(-\frac{2}{13}a_1\right)\leq 0, \end{cases}$

解得 $6.5\leq n\leq 7.5$,故当 $n=7$ 时, S_n 最大.

法四:设公差为 d .

由 $S_3=S_{11}$,可得 $2a_1+13d=0$,

即 $(a_1+6d)+(a_1+7d)=0$,故 $a_7+a_8=0$,

又由 $a_1>0, S_3=S_{11}$ 可知 $d<0$,

所以 $a_7>0, a_8<0$,

所以当 $n=7$ 时, S_n 最大.

随堂·对点检测

1. A [等差数列 $\{a_n\}$ 的前4项为 $a, 3b, 2, 5b$,

则 $\begin{cases} 3b+5b=2\times 2, \\ a+2=6b, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=1, \\ b=\frac{1}{2}, \end{cases}$

故等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $\frac{1}{2}$,

所以 $a_9=1+8\times\frac{1}{2}=5$.故选A.]

2. ABD $[a_n = a_1 + (n-1)d = dn + a_1 - d]$

由等差数列的性质,得 $\{a_{2n-1}\}$ 是公差为 $2d$ 的等差数列,故 A 正确.

$2a_n - 1 = 2dn + 2a_1 - 2d - 1$, 所以 $\{2a_n - 1\}$ 是公差为 $2d$ 的等差数列,故 B 正确.

$\frac{a_n}{n} = \frac{dn + a_1 - d}{n} = d + \frac{a_1 - d}{n}$, 当 $a_1 - d > 0$ 时, $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是递减数列,故 C 错误.

$a_n + 3nd = 4dn + a_1 - d$, 因为 $4d > 0$, 所以 $\{a_n + 3nd\}$ 是递增数列,故 D 正确. 故选 ABD.]

3. D [等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 = 20, a_{10} = 35$,

$$\text{则 } d = \frac{a_{10} - a_5}{10 - 5} = 3,$$

$$\text{则 } a_{20} = a_{10} + 10d = 35 + 30 = 65.$$

故选 D.]

4. B [因为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 所以 $S_4, S_8 - S_4, S_{12} - S_8$ 成等差数列,

$$\text{即 } S_4 + S_{12} - S_8 = 2(S_8 - S_4), \text{ 解得 } S_{12} = 96.$$

故选 B.]

5. 30 5 或 6 [法一: 由 $a_{n+1} - a_n = -2 < 0$, 得 $a_{n+1} < a_n$, 所以 $\{a_n\}$ 是递减数列. 又由 $a_n = 10 + (n-1) \times (-2) = -2n + 12$, 可知当 $n < 6$ 时, $a_n > 0$; 当 $n = 6$ 时, $a_n = 0$; 当 $n > 6$ 时, $a_n < 0$. 所以 $S_1 < S_2 < \dots < S_5 = S_6 > S_7 > \dots$. 故当 $n = 5$ 或 6 时, S_n 最大.

因为 $S_5 = \frac{5}{2} \times [10 + 10 + (5-1) \times (-2)] = 30$, 所以 S_n 的最大值为 30.

法二: 因为 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n = -n^2 + 11n = -\left(n - \frac{11}{2}\right)^2 + \frac{121}{4}$, 所以当 n 取与 $\frac{11}{2}$ 最接近的整数, 即 5 或 6 时, S_n 最大, 最大值为 30.]

第 46 课时 等比数列及其前 n 项和

理法先行 · 题练固本

梳必备 · 破题有方

知识点 1 (1)2 同一个 公比 (2)等比 G ab

知识点 2 (1) $a_1 q^{n-1}$ (2) na_1

链教材 · 夯基固本

1. D [设 $\sqrt{3} + 1$ 与 $\sqrt{3} - 1$ 的等比中项为 S ,

$$\text{则有 } S^2 = (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1) = 2,$$

$$\text{解得 } S = \pm\sqrt{2},$$

$$\text{即 } \sqrt{3} + 1 \text{ 与 } \sqrt{3} - 1 \text{ 的等比中项为 } \sqrt{2} \text{ 或 } -\sqrt{2}.$$

故选 D.]

$$2. \frac{1\ 023}{512} \left[S_{10} = \frac{1 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{10} \right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1\ 023}{512} \right]$$

3. $3 \cdot 2^{n-1}$ 或 $2 \cdot 3^{n-1}$ [设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

$$\text{由题意得 } \begin{cases} a_1 q = 6, \\ 6a_1 + a_1 q^2 = 30, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} q = 2, \\ a_1 = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} q = 3, \\ a_1 = 2, \end{cases}$$

$$\text{故 } a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \text{ 或 } a_n = 2 \cdot 3^{n-1}.]$$

$$4. \frac{4}{3} \left[\because a_4 a_5 a_6 = a_5^3 = 3, \therefore a_5 = \sqrt[3]{3}, \right]$$

$$\therefore \log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \log_3 a_8 + \log_3 a_9 = \log_3 (a_1 a_2 a_8 a_9) = \log_3 a_5^4 = \log_3 3^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}.]$$

考点深研 · 题型突破

考点一

典例 1 (1)D (2)2 [(1)设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

$$\text{由 } a_4^2 = a_6, \text{ 得 } (a_1 q^3)^2 = a_1 q^5, \text{ 即 } a_1 q = 1,$$

$$\text{又 } a_1 = \frac{1}{3}, \text{ 故 } q = 3, \text{ 所以 } S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{3} + 1 + 3 + 9 = \frac{40}{3}.$$

故选 D.

(2)法一: 设该等比数列为 $\{a_n\}$, S_n 是其前 n 项和, 则 $S_4 = 4$, $S_8 = 68$,

设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$,

当 $q = 1$ 时, $S_4 = 4a_1 = 4$, 即 $a_1 = 1$, 则 $S_8 = 8a_1 = 8 \neq 68$, 显然不成立, 舍去;

$$\text{当 } q \neq 1 \text{ 时, 则 } S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 4, S_8 = \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = 68,$$

$$\text{两式相除, 得 } \frac{1-q^8}{1-q^4} = \frac{68}{4},$$

$$\text{即 } \frac{(1-q^4)(1+q^4)}{1-q^4} = 17,$$

$$\text{则 } 1+q^4 = 17, \text{ 所以 } q = 2,$$

所以该等比数列公比为 2.

法二: 设该等比数列为 $\{a_n\}$, S_n 是其前 n 项和, 则 $S_4 = 4$, $S_8 = 68$,

设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$,

$$\text{所以 } S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4,$$

$$\begin{aligned} S_8 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_1 q^4 + a_2 q^4 + a_3 q^4 + a_4 q^4 \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(1+q^4) = 68, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } 4(1+q^4) = 68,$$

$$\text{则 } 1+q^4 = 17, \text{ 所以 } q = 2,$$

所以该等比数列公比为 2.

法三: 设该等比数列为 $\{a_n\}$, S_n 是其前 n 项和, 则 $S_4 = 4$, $S_8 = 68$,

设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$,

$$\text{因为 } S_8 - S_4 = a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)q^4 = 68 - 4 = 64,$$

$$\text{又 } S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4,$$

$$\text{所以 } \frac{S_8 - S_4}{S_4} = q^4 = \frac{64}{4} = 16, \text{ 所以 } q = 2,$$

所以该等比数列公比为 2.]

考题探源

$$1. \text{ 解: 若 } q = 1, \text{ 则 } \frac{S_{10}}{S_5} = \frac{10a_1}{5a_1} = 2 \neq \frac{31}{32},$$

所以 $q \neq 1$.

$$\text{当 } q \neq 1 \text{ 时, 由 } \frac{S_{10}}{S_5} = \frac{31}{32}, \text{ 得}$$

$$\frac{(-1)(1-q^{10})}{1-q} \cdot \frac{1-q}{(-1)(1-q^5)} = \frac{31}{32}.$$

$$\text{整理, 得 } 1+q^5 = \frac{31}{32},$$

$$\text{即 } q^5 = -\frac{1}{32}. \text{ 所以 } q = -\frac{1}{2}.$$

2. 证明: 当 $q=1$ 时,

$$S_n = na_1,$$

$$S_{2n} - S_n = 2na_1 - na_1 = na_1,$$

$$S_{3n} - S_{2n} = 3na_1 - 2na_1 = na_1,$$

所以 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 成等比数列, 公比为 1.

当 $q \neq 1$ 时,

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q},$$

$$S_{2n} - S_n = \frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q} - \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1q^n(1-q^n)}{1-q} = q^n S_n,$$

$$S_{3n} - S_{2n} = \frac{a_1(1-q^{3n})}{1-q} - \frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q} = \frac{a_1q^{2n}(1-q^n)}{1-q} = q^n (S_{2n} - S_n),$$

$$\text{所以 } \frac{S_{2n} - S_n}{S_n} = \frac{S_{3n} - S_{2n}}{S_{2n} - S_n} = q^n.$$

因为 q^n 为常数, 所以 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 成等比数列, 公比为 q^n .

多维变迁

1. C [法一(直接运用等比数列的通项公式与前 n 项和公式求解): 若该数列的公比 $q=1$, 代入 $S_5=5S_3-4$ 中, 有 $5=5 \times 3-4$, 不成立, 所以 $q \neq 1$. 由 $\frac{1-q^5}{1-q} = 5 \times \frac{1-q^3}{1-q} - 4$, 化简得 $q^4 - 5q^2 + 4 = 0$, 所以 $q^2 = 1$ (舍) 或 $q^2 = 4$, 由于此数列各项均为正数, 所以 $q=2$, 所以 $S_4 = \frac{1-q^4}{1-q} = 15$. 故选 C.

法二(直接求和法): 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则由已知得 $1+q+q^2+q^3+q^4=5(1+q+q^2)-4$, 整理得 $(1+q)(q^3-4q)=0$, 由于此数列各项均为正数, 所以 $q=2$, 所以 $S_4=1+q+q^2+q^3=1+2+4+8=15$. 故选 C.]

2. ACD [设此人第 n 天走 a_n 里路, 则数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1 , 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, 因为 $S_6=378$, 所以 $S_6 = \frac{a_1(1-\frac{1}{2^6})}{1-\frac{1}{2}} = 378$, 解得 $a_1=192$. 对于 A, 由于 $a_2=192 \times \frac{1}{2}=96$, 所以此人第二天走了九十六里路, 所以 A 正确; 对于 B, 由于 $a_3=192 \times \frac{1}{4}=48$, $\frac{48}{378} > \frac{1}{8}$, 所以 B 不正确; 对于 C, 由于 $378-192=186$, $192-186=6$, 所以此人第一天走的路程比后五天走的路程多六里, 所以 C 正确; 对于 D, $a_4+a_5+a_6=378-192-96-48=42$, 所以此人后三天共走了四十二里路, 所以 D 正确. 故选 ACD.]

考点二

典例 2 (1)BCD [对于 A, 当 $a=b=c=0$ 时, $b^2=ac$, 此时 a, b, c 不是等比数列, 故 A 错误;

对于 B, 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设其公差为 d , 则此时有 $\frac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}} = 2^{a_{n+1}-a_n} = 2^d > 0$, 所以数列 $\{2^{a_n}\}$ 为等比数列, 故 B 正确;

对于 C, 若 $S_n=3^n-1$, 则 $a_1=S_1=2$,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3^n - 1 - (3^{n-1} - 1) = 3^n - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} (n \geq 2),$$

$$a_1=2 \text{ 显然满足 } a_n=2 \cdot 3^{n-1},$$

所以数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 故 C 正确;

对于 D, 因为 $3a_{n+1}=a_n+2a_{n+2}$,

$$\text{所以 } 2(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=0,$$

$$\text{而 } a_1=1, a_2=2,$$

因此数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, 故 D 正确. 故选 BCD.]

$$(2) \textcircled{1} \text{ 证明: 因为 } a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n+2},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n+2}{3a_n} = \frac{a_n}{3a_n} + \frac{2}{3a_n},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } 1 - \frac{1}{a_{n+1}} = 1 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{1}{3} \right),$$

$$\text{即 } 1 - \frac{1}{a_{n+1}} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{a_n} \right),$$

$$\text{所以 } \frac{1 - \frac{1}{a_{n+1}}}{1 - \frac{1}{a_n}} = \frac{2}{3},$$

$$\text{又因为 } 1 - \frac{1}{a_1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

所以数列 $\left\{ 1 - \frac{1}{a_n} \right\}$ 是以 $\frac{2}{3}$ 为首项, $\frac{2}{3}$ 为公比的等比数列.

$$\textcircled{2} \text{ 解: 由 } \textcircled{1} \text{ 知, } 1 - \frac{1}{a_n} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3} \right)^n,$$

$$\text{所以 } \frac{1}{a_n} = 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n = \frac{3^n - 2^n}{3^n},$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{3^n}{3^n - 2^n}.$$

考点三

典例 3 (1)C [法一: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q \neq 0)$, 由题意易知 $q \neq 1$,

$$\text{则 } \begin{cases} \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = -5, \\ \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 21 \times \frac{a_1(1-q^2)}{1-q}, \end{cases} \text{ 化简整理得 } \begin{cases} q^2 = 4, \\ \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{3}. \end{cases} \text{ 所以}$$

$$S_8 = \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = \frac{1}{3} \times (1-4^4) = -85, \text{ 故选 C.}$$

法二: 易知 $S_2, S_4-S_2, S_6-S_4, S_8-S_6, \dots$ 为等比数列, 所以

$$(S_4-S_2)^2 = S_2 \cdot (S_6-S_4), \text{ 解得 } S_2 = -1 \text{ 或 } S_2 = \frac{5}{4}. \text{ 当}$$

$$S_2 = -1 \text{ 时, 由 } (S_6-S_4)^2 = (S_4-S_2) \cdot (S_8-S_6), \text{ 解得}$$

$$S_8 = -85; \text{ 当 } S_2 = \frac{5}{4} \text{ 时, 结合 } S_4 = -5 \text{ 得}$$

$$\begin{cases} \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = -5, \\ \frac{a_1(1-q^2)}{1-q} = \frac{5}{4}, \end{cases} \text{ 化简可得 } q^2 = -5, \text{ 不成立, 舍去.}$$

所以 $S_8 = -85$, 故选 C.]

$$(2) \text{ 解: } \textcircled{1} \because \{a_n\} \text{ 为正项等比数列, } \therefore a_2a_4 + 2a_3a_5 + a_4a_6 = a_3^2 + 2a_3a_5 + a_5^2$$

$$= (a_3 + a_5)^2 = 25,$$

$$\because a_n > 0, \therefore a_3 + a_5 > 0, \therefore a_3 + a_5 = 5.$$

②根据等比数列的性质,

$$\text{得 } a_5 a_6 = a_1 a_{10} = a_2 a_9 = a_3 a_8 = a_4 a_7 = 9,$$

$$\therefore a_1 a_2 \cdots a_9 a_{10} = (a_5 a_6)^5 = 9^5,$$

$$\therefore \log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \cdots + \log_3 a_{10} \\ = \log_3 (a_1 a_2 \cdots a_9 a_{10}) = \log_3 9^5 = 10.$$

多维变迁

1. C [在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_5 + a_6, a_7 + a_8$ 成等比数列,

$$\therefore a_1 + a_2 = 16, a_3 + a_4 = 24,$$

$$\therefore a_7 + a_8 = (a_3 + a_4) \cdot \left(\frac{a_3 + a_4}{a_1 + a_2}\right)^2 = 24 \times \left(\frac{24}{16}\right)^2 = 54. \text{ 故选 C.}]$$

2. 2 [由题意可知 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = 3(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1})$,

$$\text{又 } a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = q(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}),$$

$$\text{所以 } (q+1)(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}) = 3(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}).$$

$$\text{又 } q > 0, a_n > 0, \text{ 所以 } q+1=3, \text{ 即 } q=2.]$$

随堂·对点检测

1. C [由 $a_3 = a_1 q^2 = 2, a_7 = a_1 q^6 = 8$, 得 $q^2 = 2$ (舍负).

$$\text{又 } \therefore a_5 = a_3 q^2 > 0, \therefore a_5 = 4, \text{ 故选 C.}]$$

2. CD [对于 A, 数列的前三项为 2, 4, 6, 第二项不是第一和第三项的等比中项, 不成立;

对于 B, 数列的前三项为 1, 4, 9, 第二项不是第一和第三项的等比中项, 不成立;

对于 C, 因为 $\frac{3^{-n}}{3^{-(n-1)}} = \frac{1}{3}$ 为常数, 所以满足等比数列的定义, 故成立;

对于 D, 因为 $\frac{2 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^{n-1}} = 2$ 为常数, 所以满足等比数列的定义, 故成立.

故选 CD.]

3. A [由等比数列 $\{a_n\}$, 且 $a_3 + a_5 = 12$ ①,

$$a_2 \cdot a_6 = 32, a_3 < a_5 \text{ ②},$$

$$\text{可得 } a_2 \cdot a_6 = a_3 \cdot a_5 = 32 \text{ ③},$$

$$\text{联立 ①②③, 解得 } a_3 = 4, a_5 = 8.$$

故选 A.]

4. $\frac{7}{3}$ [设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 易知 $q \neq -1$, 由等比数列前 n 项和的性质可知 $S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6$ 仍成等比数列,

$$\therefore \frac{S_6 - S_3}{S_3} = \frac{S_9 - S_6}{S_6 - S_3}, \text{ 又由已知得 } S_6 = 3S_3,$$

$$\therefore S_9 - S_6 = 4S_3,$$

$$\therefore S_9 = 7S_3, \therefore \frac{S_9}{S_6} = \frac{7}{3}.]$$

* 第 47 课时 由数列的递推关系求通项公式(进阶课)

类型一

考向 1 典例 1 B [因为 $a_n = 4a_{n-1} + 3 (n \geq 2)$,

$$\text{所以 } a_n + 1 = 4(a_{n-1} + 1) (n \geq 2),$$

所以 $\{a_n + 1\}$ 是以 1 为首项, 4 为公比的等比数列,

$$\text{则 } a_n + 1 = 4^{n-1},$$

$$\text{所以 } a_n = 4^{n-1} - 1, \text{ 所以 } a_{2026} = 4^{2025} - 1.$$

故选 B.]

考向 2 典例 2 $a_n = 3^n - 2(n-1)$ [法一: 设 $a_{n+1} + p(n+1) + q = 3(a_n + pn + q)$, 即 $a_{n+1} = 3a_n + 2pn + 2q - p$,

与原式相比较, 由对应项系数相等得

$$\begin{cases} 2p = 4, \\ 2q - p = -6, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} p = 2, \\ q = -2. \end{cases}$$

$$\text{首项 } a_1 + 2 - 2 = 3,$$

所以数列 $\{a_n + 2n - 2\}$ 是首项为 3, 公比为 3 的等比数列, 故

$$a_n + 2n - 2 = 3 \times 3^{n-1} = 3^n,$$

$$\text{故 } a_n = 3^n - 2(n-1).$$

法二: 因为 $a_{n+1} = 3a_n + 4n - 6 (n \in \mathbb{N}^*)$,

$$\text{所以 } a_{n+1} + 2n = 3a_n + 4n - 6 + 2n$$

$$= 3[a_n + 2(n-1)],$$

$$\text{因为 } a_1 = 3, \text{ 所以 } a_1 + 2 \times (1-1) = 3,$$

所以 $\{a_n + 2(n-1)\}$ 是首项为 3, 公比为 3 的等比数列, 则 $a_n +$

$$2(n-1) = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n,$$

$$\text{所以 } a_n = 3^n - 2(n-1).]$$

考向 3 典例 3 D [法一: 在递推公式 $a_{n+1} = 2a_n + 3 \times 5^n$ 的两边同时除以 5^{n+1} ,

$$\text{得 } \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{2}{5} \times \frac{a_n}{5^n} + \frac{3}{5}, \text{ ①}$$

$$\text{令 } b_n = \frac{a_n}{5^n}, \text{ 则 ① 式变为 } b_{n+1} = \frac{2}{5} b_n + \frac{3}{5},$$

$$\text{即 } b_{n+1} - 1 = \frac{2}{5} (b_n - 1),$$

所以数列 $\{b_n - 1\}$ 是等比数列,

$$\text{其首项为 } b_1 - 1 = \frac{a_1}{5} - 1 = -\frac{3}{5}, \text{ 公比为 } \frac{2}{5},$$

$$\text{所以 } b_n - 1 = -\frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1},$$

$$\text{即 } b_n = 1 - \frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1},$$

$$\text{所以 } \frac{a_n}{5^n} = 1 - \frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = 1 - \frac{3 \times 2^{n-1}}{5^n},$$

$$\text{所以 } a_n = 5^n - 3 \times 2^{n-1}.$$

法二: 设 $a_{n+1} + k \times 5^{n+1} = 2(a_n + k \times 5^n)$,

$$\text{则 } a_{n+1} = 2a_n - 3k \times 5^n,$$

$$\text{与 } a_{n+1} = 2a_n + 3 \times 5^n \text{ 比较可得 } k = -1,$$

$$\text{所以 } a_{n+1} - 5^{n+1} = 2(a_n - 5^n),$$

$$\text{所以数列 } \{a_n - 5^n\} \text{ 是首项为 } a_1 - 5 = -3,$$

$$\text{公比为 2 的等比数列, 所以 } a_n - 5^n = -3 \times 2^{n-1},$$

$$\text{所以 } a_n = 5^n - 3 \times 2^{n-1}.]$$

类型二

典例 4 AB [因为数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{4+15a_n} (n \in \mathbb{N}^*)$,

$$\text{所以 } \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{4+15a_n}{a_n} = 15 + 4 \times \frac{1}{a_n},$$

$$\text{故 } \frac{1}{a_{n+1}} + 5 = 4 \left(\frac{1}{a_n} + 5\right), \text{ 又 } \frac{1}{a_1} + 5 = 6,$$

所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n} + 5\right\}$ 是首项为 6, 公比为 4 的等比数列,

$$\text{故 } \frac{1}{a_n} + 5 = 6 \times 4^{n-1}, \text{ 可得 } \frac{1}{a_n} = 6 \times 4^{n-1} - 5, \text{ 可得 } a_n$$

$$= \frac{1}{6 \times 4^{n-1} - 5},$$

故 $\{a_n\}$ 为递减数列,

$$\text{故 } \left\{\frac{1}{a_n}\right\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } S_n = \frac{6 \times (1-4^n)}{1-4} - 5n = 2(4^n - 1) - 5n.$$

故正确的只有 AB. 故选 AB.]

类型三

典例 5 (1)证明:因为 $a_1=a_2=1, a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$,

$$\text{所以 } a_{n+2}-2a_{n+1}=3a_{n+1}-6a_n=3(a_{n+1}-2a_n),$$

$$\text{所以 } a_2-2a_1=-1,$$

故数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ 是以 -1 为首项, 3 为公比的等比数列.

$$\text{由题意 } a_{n+2}-3a_{n+1}=2a_{n+1}-6a_n=2(a_{n+1}-3a_n),$$

$$\text{所以 } a_2-3a_1=-2,$$

故数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ 是以 -2 为首项, 2 为公比的等比数列.

$$(2)\text{解:由(1)得, } a_{n+1}-2a_n=-3^{n-1}, a_{n+1}-3a_n=-2^n,$$

$$\text{联立两式可得, } a_n=2^n-3^{n-1}.$$

$$(3)\text{解:因为 } a_n=2^n-3^{n-1}, \text{ 所以 } S_n=2+2^2+\cdots+2^n-(1+3+\cdots+3^{n-1})=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-\frac{1-3^n}{1-3}=2^{n+1}-2-\frac{3^n-1}{2}=2^{n+1}-\frac{3^n}{2}-\frac{3}{2}.$$

第 48 课时 数列求和

理法先行·题练固本

梳必备·破题有方

知识点 1 (1) $na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

$$(2) \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1-a_nq}{1-q}$$

链教材·夯基固本

$$1. 2^{n+1}-2+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n \quad [S_n=(2+2^2+\cdots+2^n)+(1+2+\cdots+n)=\frac{2(1-2^n)}{1-2}+\frac{1}{2}n(n+1)=2^{n+1}-2+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n.]$$

$$2. n(n+1)-\frac{3}{4}(1-5^{-n}) \quad [\text{原式}=(2+4+\cdots+2n)-3(5^{-1}+5^{-2}+\cdots+5^{-n})=\frac{(2+2n)n}{2}-3\times\frac{5^{-1}(1-5^{-n})}{1-5^{-1}}=n(n+1)-\frac{3}{4}(1-5^{-n}).]$$

$$3. 22\times 2^{20}-2 \quad [S_{20}=4\times 1+5\times 2^1+6\times 2^2+\cdots+23\times 2^{19}, 2S_{20}=4\times 2+5\times 2^2+6\times 2^3+\cdots+23\times 2^{20}, \text{两式相减, 得 } -S_{20}=4+2+2^2+\cdots+2^{19}-23\times 2^{20}=4+\frac{2(1-2^{19})}{1-2}-23\times 2^{20}=-22\times 2^{20}+2, \text{故 } S_{20}=22\times 2^{20}-2.]$$

$$4. \frac{2\ 026}{2\ 027} \quad [\text{由题意得 } a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}, \text{故 } S_{2\ 026}=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{2\ 026}-\frac{1}{2\ 027})=1-\frac{1}{2\ 027}=\frac{2\ 026}{2\ 027}.]$$

考点深研·题型突破

考点一

典例 1 (1) $\frac{2\ 025\sqrt{3}}{2}$ $[\text{函数 } y=\sin\frac{\pi}{3}x \text{ 以 } 6 \text{ 为最小正周期,}$

$$\text{又 } a_{6m+1}+a_{6m+2}+a_{6m+3}+a_{6m+4}+a_{6m+5}+a_{6m+6}=-3\sqrt{3}, m\in\mathbf{N}^*, 2\ 025=337\times 6+3,$$

$$\text{所以 } S_{2\ 025}=-3\sqrt{3}\times 337+2\ 023\sin\frac{2\ 023\pi}{3}+2\ 024\cdot$$

$$\sin\frac{2\ 024\pi}{3}+2\ 025\sin\frac{2\ 025\pi}{3}=\frac{2\ 025\sqrt{3}}{2}.]$$

$$(2)\text{解:①数列 } \{a_n\} \text{ 满足: } a_1=1, a_{n+1}=a_n+2(n\in\mathbf{N}^*),$$

故 $\{a_n\}$ 是首项为 1 , 公差为 2 的等差数列,

由等差数列的通项公式可得 $a_n=2n-1$.

又 b_1, b_2, b_3-1 成等差数列, 故 $2b_2=b_1+b_3-1$,

$$\text{设 } \{b_n\} \text{ 的公比为 } q, \text{ 其中 } b_2=2, \text{ 则 } 4=\frac{2}{q}+2q-1, \text{ 解得 } q=2$$

$$\text{或 } q=\frac{1}{2},$$

$$\text{当 } q=\frac{1}{2} \text{ 时, } b_1=4, \text{ 此时 } b_n=b_1q^{n-1}=(\frac{1}{2})^{n-3}, \text{ 为递减数列,}$$

舍去;

当 $q=2$ 时, $b_1=1$, 此时 $b_n=b_1q^{n-1}=2^{n-1}$, 为递增数列, 满足要求.

$$\text{综上, } a_n=2n-1, b_n=2^{n-1}.$$

$$\text{②由①得 } c_n=a_n+b_n=2n-1+2^{n-1},$$

$$\text{故 } T_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n=(1+2^0)+(3+2^1)+(5+2^2)+\cdots+(2n-1+2^{n-1})$$

$$=(1+3+\cdots+2n-1)+(2^0+2^1+\cdots+2^{n-1})$$

$$=\frac{n(1+2n-1)}{2}+\frac{2^0(1-2^n)}{1-2}=n^2+2^n-1.$$

多维变迁

$$\text{解:(1)由 } S_n=2^n+\lambda,$$

$$\text{知当 } n=1 \text{ 时, } a_1=2+\lambda.$$

$$\text{当 } n\geq 2 \text{ 时,}$$

$$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n+\lambda-2^{n-1}-\lambda=2^{n-1}.$$

因为数列 $\{a_n\}$ 为等比数列,

$$\text{所以 } a_1=2+\lambda \text{ 适合 } a_n=2^{n-1},$$

$$\text{所以 } \lambda=-1, a_n=2^{n-1}.$$

$$(2) \text{由 } a_n=2^{n-1},$$

$$\text{则 } b_n=(-1)^n\log_2 a_{2n+1}=(-1)^n 2n,$$

$$\text{所以 } T_{2n}=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{2n}=(-2+4)+(-6+8)+\cdots+(-4n+2+4n)=2n.$$

考点二

典例 2 解:(1)因为 $4S_n=3a_n+4$, ①

$$\text{所以当 } n\geq 2 \text{ 时, } 4S_{n-1}=3a_{n-1}+4, \text{②}$$

$$\text{则当 } n\geq 2 \text{ 时, ①-②得 } 4a_n=3a_n-3a_{n-1},$$

$$\text{即 } a_n=-3a_{n-1}.$$

当 $n=1$ 时, 由 $4S_n=3a_n+4$, 得 $4a_1=3a_1+4$, 所以 $a_1=4\neq 0$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是以 4 为首项, -3 为公比的等比数列,

$$\text{所以 } a_n=4\times(-3)^{n-1}.$$

$$(2) \text{因为 } b_n=(-1)^{n-1}na_n=(-1)^{n-1}n\times 4\times(-3)^{n-1}=4n\cdot 3^{n-1},$$

$$\text{所以 } T_n=4\times 3^0+8\times 3^1+12\times 3^2+\cdots+4n\cdot 3^{n-1},$$

$$3T_n=4\times 3^1+8\times 3^2+12\times 3^3+\cdots+4n\cdot 3^n,$$

$$\text{两式相减得 } -2T_n=4+4(3^1+3^2+\cdots+3^{n-1})-4n\cdot 3^n$$

$$=4+4\times\frac{3(1-3^{n-1})}{1-3}-4n\cdot 3^n$$

$$=-2+(2-4n)\cdot 3^n,$$

$$\text{所以 } T_n=1+(2n-1)\cdot 3^n.$$

考题探源

1. 解:由 $a_{n+1}=2S_n+2(n\in\mathbf{N}^*)$, 可得 $a_n=2S_{n-1}+2(n\in\mathbf{N}^*, n\geq 2)$, 两式相减可得 $a_{n+1}=3a_n(n\in\mathbf{N}^*, n\geq 2)$, 又 $a_2=2a_1+2$, 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 所以 $a_2=2a_1+2=3a_1$, 则 $a_1=2$, 故 $a_n=2\times 3^{n-1}$.

2. 解: 由题意设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{因为 } S_4 = 4S_2, a_{2n} = 2a_n + 1,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} 4a_1 + \frac{4 \times (4-1)}{2}d = 4 \left[2a_1 + \frac{2 \times (2-1)}{2}d \right], \\ a_1 + (2n-1)d = 2[a_1 + (n-1)d] + 1, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} 2a_1 - d = 0, \\ a_1 - d + 1 = 0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 2, \end{cases}$$

$$\text{所以 } a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + 2(n-1) = 2n-1 (n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\text{又 } b_n = 3^{n-1},$$

$$\text{所以 } c_n = a_n b_n = (2n-1) \cdot 3^{n-1},$$

$$\text{所以 } T_n = 1 \times 3^0 + 3 \times 3^1 + 5 \times 3^2 + \cdots + (2n-1) \cdot 3^{n-1},$$

$$3T_n = 1 \times 3^1 + 3 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + \cdots + (2n-3) \cdot 3^{n-1} + (2n-1) \cdot 3^n,$$

$$\text{两式相减得 } -2T_n = 1 + 2 \times 3^1 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} - (2n-1) \cdot 3^n$$

$$= 1 + 2(3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1}) - (2n-1) \cdot 3^n$$

$$= 1 + \frac{6(1-3^{n-1})}{1-3} - (2n-1) \cdot 3^n$$

$$= 1 + 3(3^{n-1} - 1) - (2n-1) \cdot 3^n$$

$$= 1 + 3^n - 3 - (2n-1) \cdot 3^n$$

$$= -2 + (2-2n) \cdot 3^n,$$

$$\text{所以 } T_n = 1 + (n-1) \cdot 3^n.$$

多维变迁

(1) 解: 由数列 $\{a_n\}$ 是公比为 3 的等比数列, $a_1, a_2, a_3 - 12$ 成等差数列, 可得 $2a_2 = a_1 + a_3 - 12$,

$$\text{所以 } 2a_1 \times 3 = a_1 + a_1 \times 3^2 - 12, \text{ 即 } 6a_1 = 10a_1 - 12,$$

$$\text{解得 } a_1 = 3, \text{ 所以 } a_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n.$$

$$(2) \text{ 证明: } b_n = \frac{\log_3 a_n}{a_n} = \frac{\log_3 3^n}{3^n} = \frac{n}{3^n},$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{n}{3^n},$$

$$\text{则 } \frac{1}{3}T_n = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \cdots + \frac{n}{3^{n+1}},$$

$$\text{两式相减, 可得 } \frac{2}{3}T_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}} =$$

$$\frac{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^{n+1}}, \text{ 所以 } T_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n},$$

$$\text{因为 } T_{n+1} - T_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+5}{4 \cdot 3^{n+1}} - \left(\frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} \right) = \frac{n+1}{3^{n+1}} > 0,$$

$$\text{所以数列 } \{T_n\} \text{ 是递增数列, 则 } T_n \geq T_1 = \frac{1}{3},$$

$$\text{又因为 } \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} > 0, \text{ 可得 } T_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} < \frac{3}{4},$$

$$\text{综上所述: } \frac{1}{3} \leq T_n < \frac{3}{4}.$$

考点三

典例 3 (1) C [由 $f(4)=2$, 可得 $4^a=2$, 解得 $a=\frac{1}{2}$,

$$\text{则 } f(x) = \sqrt{x}.$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{1}{f(n+1)+f(n)} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n},$$

$$\text{所以 } S_{2025} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2025} = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{2026} - \sqrt{2025}) = \sqrt{2026} - 1.]$$

(2) 解: ① 当 $n=1$ 时,

$$\text{有 } \sqrt{a_2} - \sqrt{a_1} = \frac{1}{4}a_2, \text{ 又 } a_1 = 1,$$

$$\text{所以 } a_2 - 4\sqrt{a_2} + 4 = 0, \text{ 解得 } a_2 = 4.$$

② 由 $\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} = 1$, 得 $\{\sqrt{a_n}\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列,

$$\text{所以 } \sqrt{a_n} = 1 + n - 1 = n, \text{ 即 } a_n = n^2.$$

$$\text{③ } \frac{1}{a_n + \sqrt{a_n}} = \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$\text{所以 } S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

多维变迁

$$(1) \text{ 证明: 由 } a_{n+1} = \frac{3a_n}{1+2a_n} \text{ 取倒数可得, } \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1+2a_n}{3a_n} = \frac{1}{3} \cdot$$

$$\frac{1}{a_n} + \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{a_n} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a_n} - 1 \right),$$

$$\text{又 } \because \frac{1}{a_1} - 1 = 1 \neq 0,$$

$\therefore$ 数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} - 1 \right\}$ 是以 1 为首项, $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列.

(2) 解: 由于数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} - 1 \right\}$ 是以 1 为首项, $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列,

$$\text{则 } \frac{1}{a_n} - 1 = \frac{1}{3^{n-1}},$$

$$\text{可得 } a_n = \frac{3^{n-1}}{3^{n-1} + 1} (n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\therefore b_n = \frac{2a_n \cdot a_{n+1}}{3^n} = \frac{2 \cdot \frac{3^{n-1}}{3^{n-1} + 1} \cdot \frac{3^n}{3^n + 1}}{3^n}$$

$$= \frac{2 \cdot 3^{n-1}}{(3^{n-1} + 1)(3^n + 1)} = \frac{1}{3^{n-1} + 1} - \frac{1}{3^n + 1},$$

$$\therefore b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10} \right) + \cdots +$$

$$\left(\frac{1}{3^{n-1} + 1} - \frac{1}{3^n + 1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3^n + 1} = \frac{3^n - 1}{2(3^n + 1)}.$$

随堂·对点检测

1. D $[a_2 = \frac{2}{a_1} = 2, \frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_{n+2}a_{n+1}}{a_{n+1}a_n} = 2, \text{ 所以数列 } \{a_{2n-1}\} \text{ 和 } \{a_{2n}\} \text{ 均为公比为 2 的等比数列. 所以 } S_{2026} = (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2025}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2026}) = \frac{1-2^{1013}}{1-2} + \frac{2 \times (1-2^{1013})}{1-2} = 3 \times 2^{1013} - 3. \text{ 故选 D.}]$

2. A [观察此数列可知, 当 n 为偶数时, $a_n = \frac{n^2}{2}$; 当 n 为奇数时,

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{2}. \text{ 因为 } b_n = (-1)^n \cdot a_n = \begin{cases} -\frac{n^2 - 1}{2}, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{n^2}{2}, & n \text{ 为偶数,} \end{cases} \text{ 所以数列}$$

$$\{b_n\} \text{ 的前 20 项和为 } (0+2) + (-4+8) + (-12+18) + \cdots + \left(-\frac{19^2-1}{2} + \frac{20^2}{2} \right) = 2+4+6+\cdots+20 = \frac{10 \times (2+20)}{2} = 110.]$$

3. AC [由题可知: $a_2 - a_1 = 2, a_3 - a_2 = 3$, 则 $a_4 - a_3 = 4, \dots$,

$$a_n - a_{n-1} = n (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*),$$

所以 $a_n = a_{n-1} + n (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$,

$$\text{由累加法得: } a_n = a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \dots + a_2 - a_1 + a_1 = n + n - 1 + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2},$$

当 $n=1$ 时, 也满足上式, 所以 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

对于 A, 因为 $a_n - a_{n-1} = n$, 所以 $a_{n+1} = a_n + n + 1$, 故 A 正确;

对于 B, $a_{100} = \frac{100(100+1)}{2} = 5050$, 故 B 错误;

$$\text{对于 C, } \frac{1}{a_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

由裂项相消可得 $S_n = 2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}$, 故 C 正确;

$$\text{对于 D, 令 } t = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{2n}{n+1} = \frac{n(n-1)(n+3)}{2(n+1)},$$

因为 $n \in \mathbf{N}^*$, 即 $n \geq 1$, 所以 $t \geq 0$, 即 $a_n \geq S_n$, 故 D 错误.

故选 AC.]

$$4. \begin{cases} \frac{(1+n)n}{2}, & x=1, \\ \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}, & x \neq 1 \end{cases} \quad \left[\text{当 } x=1 \text{ 时, } 1+2x+3x^2 \right.$$

$\left. + \dots + nx^{n-1} = 1+2+3+\dots+n = \frac{(1+n)n}{2}; \text{ 当 } x \neq 1 \text{ 时, 记} \right.$

$$S_n = 1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1} \text{ ①, ①} \times x \text{ 得 } xS_n = x+2x^2+$$

$$3x^3+\dots+nx^n \text{ ②, ①} - \text{② 得 } (1-x) \cdot S_n = 1+x+x^2+\dots+$$

$$x^{n-1} - nx^n = \frac{1-x^n}{1-x} - nx^n, \text{ 化简得 } S_n = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

综上, $1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1}$

$$= \begin{cases} \frac{(1+n)n}{2}, & x=1, \\ \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}, & x \neq 1. \end{cases}$$

* 第 49 课时 数列的综合应用(进阶课)

类型一

典例 1 解: (1) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 设公差为 d ,

等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 设公比为 q ,

$$a_1 = -1, b_1 = 1, a_2 + b_2 = 2,$$

$$\text{得 } d+q=3. \text{ ①}$$

$$\text{由 } a_3 + b_3 = 5, \text{ 得 } 2d+q^2=6. \text{ ②}$$

$$\text{联立 ①②, 解得 } \begin{cases} d=3, \\ q=0 \end{cases} \text{ (舍去), } \begin{cases} d=1, \\ q=2, \end{cases}$$

$$\text{因此 } T_5 = \frac{1-2^5}{1-2} = 31.$$

$$(2) \text{ 由 } b_1 = 1, T_3 = 21, \text{ 得 } q^2+q-20=0,$$

$$\text{解得 } q=-5 \text{ 或 } q=4,$$

由于数列 $\{a_n\}$ 为递增数列, 所以 $d>0$,

当 $q=4$ 时, 由 ① 得 $d=-1$ (舍去);

当 $q=-5$ 时, 由 ① 得 $d=8$,

$$\text{则 } S_n = n \times (-1) + \frac{n(n-1)}{2} \times 8 = 4n^2 - 5n.$$

类型二

典例 2 BD [由题意可知, 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设数列 $\{a_n\}$ 的

公差为 d , 由题意可得 $a_1 = 5, 30a_1 + \frac{30 \times 29d}{2} = 390$, 解得 $d =$

$$\frac{16}{29}, \text{ 所以 } a_n = 5 + (n-1) \times \frac{16}{29} = \frac{16n+129}{29}.$$

因为 $b_n = 2^{a_n}$, 所以 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}} = 2^{a_{n+1}-a_n} = 2^d$ (非零常数), 则

数列 $\{b_n\}$ 是等比数列, B 正确;

因为 $5d = 5 \times \frac{16}{29} = \frac{80}{29} \neq 3, \frac{b_{10}}{b_5} = (2^d)^5 = 2^{5d} \neq 2^3$, 所以 $b_{10} \neq 8b_5$, A 错误;

$$a_{30} = a_1 + 29d = 5 + 16 = 21, \text{ 所以 } a_1 b_{30} = 5 \times 2^{21} > 105, \text{ C 错误};$$

$$a_4 = a_1 + 3d = 5 + 3 \times \frac{16}{29} = \frac{193}{29}, a_5 = a_1 + 4d = 5 + 4 \times \frac{16}{29} =$$

$$\frac{209}{29}, \text{ 所以 } \frac{a_3+a_5+a_7}{a_2+a_4+a_6} = \frac{3a_5}{3a_4} = \frac{a_5}{a_4} = \frac{209}{193}, \text{ D 正确.}$$

故选 BD.]

类型三

典例 3 解: (1) 根据题意, 点 $(n, a_n) (n \in \mathbf{N}^*)$ 都在函数 $f(x) = 2x$ 的图象上,

则 $a_n = 2n$, 易得数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公差的等差数列,

$$\text{则 } S_n = \frac{n(2+2n)}{2} = n(n+1),$$

$$\text{又 } S_n = (n+1) \log_{\frac{1}{2}} b_n, \text{ 所以 } b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$\text{故 } a_n = 2n, b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$(2) \text{ 证明: 根据题意, 由 (1) 的结论, 得 } c_n = b_n^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^n,$$

$$\text{因为 } \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{1}{4}, c_1 = \frac{1}{4}, \text{ 所以 } \{c_n\} \text{ 是以 } \frac{1}{4} \text{ 为首项,}$$

$\frac{1}{4}$ 为公比的等比数列,

$$\text{所以 } T_n = \frac{\frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right].$$

$$\text{因为 } n \in \mathbf{N}^*, \text{ 函数 } T_n = \frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] \text{ 是增函数,}$$

$$\text{所以当 } n=1 \text{ 时, } T_n \text{ 最小为 } \frac{1}{4}, T_n \geq \frac{1}{4},$$

$$\text{又 } 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n < 1, \text{ 所以 } T_n < \frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{4} \leq T_n < \frac{1}{3}.$$

规范答题三

典例 (2) $a_1 + 2a_2x + \dots + ma_mx^{m-1}$