# 点金训练

# 教师用书

## 数学

《点金训练》编写组　编

必修第一册

配人教A版

四川教育出版社

CONTENTS

# 目录

## 第一章 集合与常用逻辑用语


○单元概览 …… 1
○探究构建 1.1 集合的概念 …… 2
第1课时 集合的概念 …… 2
第2课时 集合的表示 …… 5
1.2 集合间的基本关系 …… 9
1.3 集合的基本运算 …… 13
第1课时 并集与交集 …… 13
第2课时 补集及综合应用 …… 16
微专题培优(一) 集合中的新定义问题 …… 20
1.4 充分条件与必要条件 …… 22
1.4.1 充分条件与必要条件 …… 22
1.4.2 充要条件 …… 25
1.5 全称量词与存在量词 …… 29
1.5.1 全称量词与存在量词 …… 29
1.5.2 全称量词命题和存在量词命题的否定 …… 32
○迁移应用 类型一 集合中的分类讨论问题 …… 35
类型二 集合与常用逻辑用语的转化问题 …… 35
○重构拓展 …… 36
单元测试卷(一) …… 37


## 第二章 一元二次函数、方程和不等式


○单元概览 …… 41
○探究构建 2.1 等式性质与不等式性质 …… 42
第1课时 不等关系与比较大小 …… 42
第2课时 不等式的性质 …… 46
2.2 基本不等式 …… 50
第1课时 基本不等式 …… 50
第2课时 基本不等式的应用 …… 54
微专题培优(二) 利用基本不等式求最值 …… 58
2.3 二次函数与一元二次方程、不等式 …… 60
第1课时 一元二次不等式的解法 …… 60
第2课时 一元二次不等式的应用 …… 65
○迁移应用 类型一 不等式的恒成立、能成立问题 …… 69
类型二 不等式的实际应用问题 …… 69
○重构拓展 …… 70
单元测试卷(二) …… 71


## 第三章 函数的概念与性质


○单元概览 …… 75
○探究构建 3.1 函数的概念及其表示 …… 76
3.1.1 函数的概念 …… 76
第1课时 函数的概念 …… 76
第2课时 函数概念的应用 …… 80

3.1.2 函数的表示法 …… 84
第 1 课时 函数的表示法 …… 84
第 2 课时 分段函数及其应用 …… 88
3.2 函数的基本性质 …… 93
3.2.1 单调性与最大(小)值 …… 93
第 1 课时 函数的单调性 …… 93
第 2 课时 函数的最大(小)值 …… 97
微专题培优(三) 二次函数的最值问题 …… 101
3.2.2 奇偶性 …… 103
第 1 课时 函数的奇偶性 …… 103
第 2 课时 函数的奇偶性的应用 …… 107
3.3 幂函数 …… 111
3.4 函数的应用(一) …… 115
○迁移应用 类型一 函数的值域 …… 120
类型二 函数对称性的应用 …… 121
○重构拓展 …… 122
单元测试卷(三) …… 123
阶段测试卷 …… 127

## 第四章 指数函数与对数函数

○单元概览 …… 132
○探究构建 4.1 指数 …… 133
4.1.1 $n$ 次方根与分数指数幂 …… 133
4.1.2 无理数指数幂及其运算性质 …… 136
4.2 指数函数 …… 139
4.2.1 指数函数的概念 …… 139
4.2.2 指数函数的图象和性质 …… 142
第 1 课时 指数函数的图象和性质 …… 142
第 2 课时 指数函数的图象和性质的应用 …… 146
4.3 对数 …… 151
4.3.1 对数的概念 …… 151
4.3.2 对数的运算 …… 154
4.4 对数函数 …… 158
4.4.1 对数函数的概念 …… 158
4.4.2 对数函数的图象和性质 …… 161
第 1 课时 对数函数的图象和性质 …… 161
第 2 课时 对数函数的图象和性质的应用 …… 165
4.4.3 不同函数增长的差异 …… 169
4.5 函数的应用(二) …… 173
4.5.1 函数的零点与方程的解 …… 173
4.5.2 用二分法求方程的近似解 …… 178
4.5.3 函数模型的应用 …… 182
○迁移应用 类型一 根据函数的零点情况求参数 …… 186
类型二 跨学科整合应用 …… 186
○重构拓展 …… 188
单元测试卷(四) …… 189

# 第五章　三角函数


○单元概览…… 193
○探究构建　5.1　任意角和弧度制 …… 194
5.1.1　任意角 …… 194
5.1.2　弧度制 …… 198
5.2　三角函数的概念 …… 203
5.2.1　三角函数的概念 …… 203
第 1 课时　三角函数的概念(1) …… 203
第 2 课时　三角函数的概念(2) …… 207
5.2.2　同角三角函数的基本关系 …… 210
5.3　诱导公式 …… 215
第 1 课时　诱导公式二～四 …… 215
第 2 课时　诱导公式五、六 …… 219
5.4　三角函数的图象与性质 …… 224
5.4.1　正弦函数、余弦函数的图象 …… 224
5.4.2　正弦函数、余弦函数的性质 …… 229
第 1 课时　正弦函数、余弦函数的周期性与奇偶性 …… 229
第 2 课时　正弦函数、余弦函数的单调性与最值 …… 234
5.4.3　正切函数的性质与图象 …… 239
5.5　三角恒等变换 …… 244
5.5.1　两角和与差的正弦、余弦和正切公式 …… 244
第 1 课时　两角差的余弦公式 …… 244
第 2 课时　两角和与差的正弦、余弦、正切公式 …… 248
第 3 课时　二倍角的正弦、余弦、正切公式 …… 253
5.5.2　简单的三角恒等变换 …… 258
第 1 课时　半角公式及其应用 …… 258
第 2 课时　三角恒等变换的综合应用 …… 262
5.6　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ …… 268
第 1 课时　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象变换 …… 268
第 2 课时　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的性质 …… 275
5.7　三角函数的应用 …… 286
微专题培优(四)　三角函数中参数 $\omega$ 的取值范围问题 …… 291
○迁移应用　类型一　三角恒等变换与三角函数性质的综合问题…… 294
类型二　三角函数在生活中的应用…… 295
○重构拓展…… 296
单元测试卷(五)…… 298
模块测试卷…… 303

# 第一章 集合与常用逻辑用语

## 单元概览

### 单元导航

在生活与学习中，为了方便，我们经常对事物进行分类.在数学中，我们经常用集合来对所研究的对象进行分类.集合是刻画一类事物的语言和工具，常用逻辑用语是数学语言的重要组成部分，是逻辑思维的基本语言.集合与逻辑用语是数学表达和交流的工具.

### 学习目标

**1.**结合实例，探究集合的表示、集合间的关系及其运算性质，解决与集合相关的基本问题.

**2.**探究定理与充分条件、必要条件和充要条件的关系，能用符号语言表示全称量词命题和存在量词命题及其否定，解决与常用逻辑用语相关的基本问题.

**3.**在数学情境与生活情境中抽象出集合关系，将命题间的推出关系转化为集合的包含关系，解决含有参数的集合与逻辑综合问题.

**4.**研读文本，以集合的关系、运算、常用逻辑用语为核心，用自己的方式构建单元知识结构，说明其逻辑关系.

### 核心概念

用数学语言(集合语言、常用逻辑用语)表达数学对象，进行数学推理，积累数学抽象的经验.

依托对集合语言和常用逻辑用语的研究，在现实情境或数学情境中，概括出数学对象的一般特征，会用三种语言(自然语言、图形语言、符号语言)表达数学研究对象，在复杂情境中有逻辑地思考问题，把握事物之间的关联，发展数学抽象、逻辑推理和数学运算的核心素养.

### 学法指导

**1.**在学习集合时，我们要借助实例及已经学过的自然数、整数、有理数等数的整体，感悟集合的概念与表示，并类比实数间的关系及加减运算，探究集合间的关系与运算.通过对集合的学习，经历“集合的概念与表示—集合间的关系—集合的运算”的研究路径，初步体会数学研究的一般路径.

**2.**在学习常用逻辑用语时，我们通过梳理初中学过的判定定理、性质定理及定义，理解充分条件、必要条件及充要条件的概念，并借助实例，理解含有量词的命题及其意义，在数学情境问题和生活实际问题中进行综合应用.

★★★

# 探　究　构　建

## 1.1　集合的概念

### 第1课时　集合的概念

**学习任务目标**

1.通过实例，了解集合的含义.
2.理解元素与集合的“属于”与“不属于”关系；熟记常用的数集的专用符号.
3.理解集合中元素的特性，并能够用其解决有关问题.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　元素与集合的相关概念**

(1)元素：一般地，把研究对象统称为元素，常用小写拉丁字母 $a$，$b$，$c$，…表示.

(2)集合：把一些元素组成的总体叫做集合(简称为集)，常用大写拉丁字母 $A$，$B$，$C$，…表示.

(3)集合相等：只要构成两个集合的元素是一样的，就称这两个集合是相等的.

(4)集合中元素的特性：确定性、互异性和无序性.

**知识点二　元素与集合的关系**

| 关系 | 概念 | 记法 | 读法 |
|---|---|---|---|
| 属于 | 如果 $a$ 是集合 $A$ 的元素，就说 $a$ 属于集合 $A$ | $a\in A$ | $a$ 属于 $A$ |
| 不属于 | 如果 $a$ 不是集合 $A$ 中的元素，就说 $a$ 不属于集合 $A$ | $a\notin A$ | $a$ 不属于 $A$ |

**知识点三　常用的数集及其记法**

| 数集 | 意义 | 符号 |
|---|---|---|
| 非负整数集(或自然数集) | 全体非负整数组成的集合 | $\mathbf{N}$ |
| 正整数集 | 全体正整数组成的集合 | $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$ |
| 整数集 | 全体整数组成的集合 | $\mathbf{Z}$ |
| 有理数集 | 全体有理数组成的集合 | $\mathbf{Q}$ |
| 实数集 | 全体实数组成的集合 | $\mathbf{R}$ |

### 【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)某校所有性格开朗的女生能构成一个集合.(　　)

(2)分别由元素 0，1，2 和 2，0，1 组成的两个集合是相等的.(　　)

(3)$a\in A$ 与 $a\notin A$ 这两种情况有且只有一种成立.(　　)

(4)如果坐标平面内所有的点组成的集合为 $B$，那么 $1\in B$.(　　)

(1)× **解析**：因为“性格开朗”没有明确的划分标准，所以某校所有性格开朗的女生不能构成一个集合.

(2)√ **解析**：只要构成两个集合的元素是一样的，这两个集合就相等，与元素的先后顺序无关.

(3)√ **解析**：元素与集合之间是属于或不属于的关系，二者只成立其一.

(4)× **解析**：集合 $B$ 是点集，$1\notin B$.

2.用符号“$\in$”或“$\notin$”填空.

$2\in\mathbf{N}$；$-3\notin\mathbf{N}$；$\sqrt{3}\notin\mathbf{Z}$；

$\frac{1}{2}\in\mathbf{Q}$；$\pi\in\mathbf{R}$.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1 梳理集合的有关概念

**1.**下列各组对象不能组成集合的是　　(　　)

A.大于6的所有整数

B.安徽省的所有高个子

C.太阳系的所有行星

D.函数 $y=x$ 图象上的所有点

B　**解析**:对于A,大于6的所有整数,满足确定性,故选项A能组成集合;

对于B,高个子的标准不确定,不满足确定性,故选项B不能组成集合;

对于C,太阳系的所有行星,满足确定性,故选项C能组成集合;

对于D,函数 $y=x$ 图象上的所有点,满足确定性,故选项D能组成集合.故选B.

**2.**下列选项中,集合 $P$ 与集合 $Q$ 相等的是　　(　　)

A.$P$ 是由元素 $1,\sqrt{3},\pi$ 构成的集合,$Q$ 是由元素 $\pi,1,|-\sqrt{3}|$ 构成的集合

B.$P$ 是由 $\pi$ 构成的集合,$Q$ 是由3.141 59构成的集合

C.$P$ 是由2,3构成的集合,$Q$ 是由有序数对(2,3)构成的集合

D.$P$ 是满足不等式 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 的自然数 $x$ 构成的集合,$Q$ 是方程 $x^2=1$ 的解集

A　**解析**:因为选项A中 $P,Q$ 的元素完全相同,所以 $P$ 与 $Q$ 表示同一个集合,而选项B,C,D中,$P,Q$ 的元素不相同或不完全相同,所以 $P$ 与 $Q$ 不能表示同一个集合.故选A.

**【探究总结】**

**判断一组对象能否组成集合的策略**

(1)注意集合中元素的确定性.看是否有一个明确的标准,使得对于任何一个对象,都能按此标准进行区分.若具有此"标准",就可以组成集合;否则,不能组成集合.

(2)注意集合中元素的互异性、无序性.

### 任务2 理解元素与集合的关系

#### 探究活动

**例1**　(1)给出下列关系:①$\frac{\pi}{2}\in\mathbf{R}$;②$-2\notin\mathbf{Z}$;③$|-3|\notin\mathbf{N}^*$;④$|-\sqrt{3}|\notin\mathbf{Q}$,其中正确的个数为　　(　　)

A.0　　B.1

C.2　　D.3

(2)已知集合 $A$ 中的元素 $x$ 满足 $2x+a>0$,$a\in\mathbf{R}$,若 $1\notin A$,$2\in A$,则实数 $a$ 的取值范围为_____.

(1)C　**解析**:对于①,$\frac{\pi}{2}$ 为实数,而 $\mathbf{R}$ 表示实数集,所以 $\frac{\pi}{2}\in\mathbf{R}$,所以①正确;

对于②,$-2$ 为整数,而 $\mathbf{Z}$ 表示整数集,所以 $-2\in\mathbf{Z}$,所以②错误;

对于③,$|-3|=3$ 为正整数,而 $\mathbf{N}^*$ 表示正整数集,所以 $|-3|\in\mathbf{N}^*$,所以③错误;

对于④,因为 $|-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$ 为无理数,$\mathbf{Q}$ 表示有理数集,所以 $|-\sqrt{3}|\notin\mathbf{Q}$,所以④正确.故选C.

(2)$\{a|-4<a\leqslant-2\}$　**解析**:因为 $1\notin A$,$2\in A$,所以 $\begin{cases}2\times1+a\leqslant0,\\2\times2+a>0,\end{cases}$ 即 $\{a|-4<a\leqslant-2\}$.

**【探究总结】**

**判断元素与集合关系的两种方法**

(1)直接法

首先明确已知集合是由哪些元素构成的,然后判断所给元素在集合中是否出现.

(2)推理法

首先明确已知集合的元素具有什么特征,然后判断所给元素是否满足集合中元素所具有的特征.

#### 应用迁移

**1.**(教材P5练习题2改编)下列元素与集合的关系表示正确的是　　(　　)

A.$0\in\mathbf{N}$　　B.$\pi\in\mathbf{Q}$

C.$\sqrt{2}\in\mathbf{Q}$　　D.$-1\notin\mathbf{Z}$

A　**解析**:因为 $0\in\mathbf{N}$,$\pi\notin\mathbf{Q}$,$\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$,$-1\in\mathbf{Z}$,所以只有A正确.

**2.**(多选)已知 $x,y,z$ 为非零实数,代数式 $\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}+\frac{xyz}{|xyz|}$ 的值组成的集合为 $A$,则下列判断正确的是　　(　　)

A.$-4\in A$　　B.$-2\in A$

C.$0\notin A$　　D.$4\in A$

AD　**解析**:依题意,当 $x,y,z$ 都为正数时,代数式的值为4;当 $x,y,z$ 中有一个负数、两个正数时,代数式的值为0;当 $x,y,z$ 中有一个正数、两个负数时,代数式的值为0;当 $x,y,z$ 都为负数时,代数式的值为$-4$.故选AD.

### 任务3 集合中元素的特征的应用

#### 探究活动

**例2**　已知集合 $A$ 中只含有1和 $a^2$ 两个元素,若 $a\in A$,求实数 $a$ 的值.

**解**:由题意可知 $a=1$ 或 $a^2=a$.若 $a=1$,则 $a^2=1$,这与 $a^2\neq1$ 相矛盾,故 $a\neq1$.若 $a^2=a$,则 $a=0$ 或 $a=1$(舍去).又当 $a=0$ 时,集合 $A$ 中只含有元素1和0,满足集合中元素的互异性,符合题意.所以实数 $a$ 的值为0.

[一题多思]

**思考1.**解答此类问题，利用分类讨论的方法求出字母的取值后要注意什么问题？

**提示：**不要忘记验证集合中元素的互异性.

**思考2.**在本例中，若把“$a\in A$”去掉，实数 $a$ 的取值范围是怎样的？

**提示：**由集合中元素的互异性，得 $a^2\neq 1$，即 $a\neq\pm 1$.

**思考3.**若把本例条件改为“集合 $A$ 中只含有 $a$ 和 $a^2$ 两个元素”，求实数 $a$ 的取值范围.

**提示：**因为集合 $A$ 中只有两个元素 $a$ 和 $a^2$，所以 $a\neq a^2$，解得 $a\neq 0$ 且 $a\neq 1$.

## 【探究总结】

**由集合中元素的特性求字母的取值（范围）的步骤**

(1)根据集合中元素的确定性，求出字母的取值(范围).

(2)根据集合中元素的互异性，对求出的值进行检验.

(3)写出符合题意的字母的取值(范围).

## 应用迁移

已知集合 $A$ 中只含有元素 $1,a,a-2$，且 $3\in A$，则实数 $a$ 的值为　　(　　)

A.3

B.5

C.3 或 5

D.无解

B　**解析：**由题意得 $a-2=3$ 或 $a=3$.当 $a-2=3$，即 $a=5$ 时，集合 $A$ 中的元素为 1,5,3，满足题意；当 $a=3$ 时，$a-2=1$，不满足集合中元素的互异性，故舍去.

综上可得，$a$ 的值为 5.

# 课后素养评价（一）

## 基础落实

**1.**下列各项中能构成集合的是　　(　　)

A.温柔的老师　　B.所有偶数

C.漂亮的花朵　　D.好玩的玩具

B　**解析：**由集合的性质可知，B 中所有偶数都是确定的，可以构成集合.

而 ACD 中研究对象都不确定，不能构成集合.故选 B.

**2.**由单词“happy”中的字母作为集合 $A$ 中的元素，则集合 $A$ 中的元素个数为　　(　　)

A.4　　B.8　　C.15　　D.16

A　**解析：**因为集合 $A=\{h,a,p,y\}$，所以集合 $A$ 中的元素有 4 个.故选 A.

**3.**下列关系中正确的个数是　　(　　)

①$0\in\mathbf{N}$；②$\sqrt{3}\notin\mathbf{Z}$；③$\frac{1}{2}\in\mathbf{R}$；④$\pi\in\mathbf{Q}$

A.1　　B.2

C.3　　D.4

C　**解析：**$0\in\mathbf{N}$，$\sqrt{3}\notin\mathbf{Z}$，$\frac{1}{2}\in\mathbf{R}$，$\pi\notin\mathbf{Q}$，①②③正确，④错误.故选 C.

**4.**已知集合 $P$ 中只有三个元素 $-1,2a+1,a^2-1$.若 $0\in P$，则实数 $a$ 的值为_____.

$-\frac{1}{2}$或 1　**解析：**因为 $0\in P$，所以 $2a+1=0$ 或 $a^2-1=0$.当 $2a+1=0$，即 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$P$ 中有三个元素 $-1,0,-\frac{3}{4}$，满足题意；当 $a^2-1=0$，即 $a=\pm 1$ 时，若 $a=1$，则 $P$ 中有三个元素 $-1,3,0$，满足题意；若 $a=-1$，则 $P$ 中有两个元素 $-1,0$，不满足题意.综上，实数 $a$ 的值为 $-\frac{1}{2}$ 或 1.

**5.**设 $A$ 表示由 $a^2+2a-3,2,3$ 构成的集合，$B$ 表示由 $2,|a+3|$ 构成的集合.已知 $5\in A$，且 $5\notin B$，求实数 $a$ 的值.

**解：**因为 $5\in A$，所以 $a^2+2a-3=5$，

解得 $a=2$ 或 $a=-4$.

当 $a=2$ 时，$|a+3|=5$；

当 $a=-4$ 时，$|a+3|=1$.

又 $5\notin B$，所以 $a=-4$.

## 能力提升

**1.**下列结论中，正确结论的个数为　　(　　)

①$\mathbf{N}$ 中最小的元素是 1；

②若 $a\in\mathbf{N}$，$b\in\mathbf{N}$，则 $a+b$ 的最小值是 2；

③$|-\sqrt{3}|\in\mathbf{Q}$.

A.0　　B.1

C.2　　D.3

A　**解析：**$\mathbf{N}$ 中最小的元素是 0，故①不正确；当 $a=b=0$ 时，$a+b$ 取得最小值为 0，故②不正确；$|-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$ 是无理数，故③不正确.故选 A.

**2.**(多选)下列给出的对象构成的集合中，元素个数有限的是　　(　　)

A.方程 $x^2-6x-16=0$ 的根

B.大于 0 且小于 5 的实数

C.小于 22 的质数

D.倒数等于它本身的实数

ACD　**解析**：方程 $x^2-6x-16=0$ 的根为 $-2,8$；大于 0 且小于 5 的实数有无数个；小于 22 的质数为 2,3,5,7,11,13,17,19；倒数等于它本身的实数为 $\pm1$.故选 ACD.

**3.**若由 $a,\frac{b}{a},1$ 组成的集合 $A$ 与由 $a^2,a+b,0$ 组成的集合 $B$ 相等，则 $a^{2\,025}+b^{2\,025}=$_____.

$-1$　**解析**：由已知可得 $a\neq0$.因为两集合相等，且 $1\neq0$，所以 $\frac{b}{a}=0$，所以 $b=0$，所以 $a^2=1$，即 $a=\pm1$.当 $a=1$ 时，集合 $A$ 和集合 $B$ 中的元素都不满足互异性，舍去；当 $a=-1$ 时，$A$ 中的元素为 $-1,0,1$，$B$ 中的元素为 $1,-1,0$，满足题意.所以 $a^{2\,025}+b^{2\,025}=-1$.

**4.**设 $A$ 是由满足不等式 $x<6$ 的自然数 $x$ 构成的集合.若 $2a\in A$ 且 $3a\notin A$，求实数 $a$ 的值.

**解**：因为 $2a\in A$ 且 $3a\notin A$，所以 $\begin{cases}2a<6,\\3a\geqslant6,\end{cases}$ 解得 $2\leqslant a<3$.又 $a\in\mathbf{N}$，所以 $a=2$.

## 自我超越

(多选)若集合 $A$ 具有如下性质：①若 $x,y\in A$，则 $\frac{x}{y}\in A$；②若 $x,y\in A$，则 $x+y\in A$.下列判断中，正确的有（　　）

A.$-1\notin A$　　B.$\frac{2\,025}{2\,026}\in A$

C.若 $x,y\in A$，则 $xy\in A$　　D.若 $x,y\in A$，则 $x-y\in A$

ABC　**解析**：对于 A，假设 $-1\in A$，则令 $x=y=-1$，则 $\frac{x}{y}=1\in A$，令 $x=-1,y=1$，则 $x+y=0\in A$，令 $x=1,y=0$，不存在 $\frac{x}{y}$，矛盾，所以 $-1\notin A$，故选项 A 正确；

对于 B，由题易知，$1\in A$，则 $1+1=2\in A$，$2+1=3\in A$，…，$2\,025\in A$，$2\,026\in A$，所以 $\frac{2\,025}{2\,026}\in A$，故选项 B 正确；

对于 C，因为 $1\in A$，$x\in A$，所以 $\frac{1}{x}\in A$，因为 $y\in A$，$\frac{1}{x}\in A$，所以 $\frac{y}{\frac{1}{x}}=xy\in A$，故选项 C 正确；

对于 D，因为 $1\in A$，$2\in A$，若 $x=1,y=2$，则 $x-y=-1\notin A$，故选项 D 错误.故选 ABC.

# 第 2 课时　集合的表示

**学习任务目标**

**1.**掌握集合的两种常用表示方法——列举法和描述法.

**2.**通过实例，选择自然语言、集合语言描述不同的具体问题，感受集合语言的意义和作用.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　列举法**

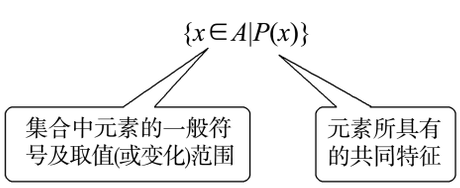
**1.**定义：把集合的所有元素一一列举出来，并用花括号“{　}”括起来表示集合的方法.

**2.**形式：$\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$.

**知识点二　描述法**

**1.**定义：一般地，设 $A$ 是一个集合，我们把集合 $A$ 中所有具有共同特征 $P(x)$ 的元素 $x$ 所组成的集合表示为 $\{x\in A\mid P(x)\}$，这种表示集合的方法称为描述法.

**2.**形式：




### 【概念辨析】

**1.**判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)集合 $\{x\mid1<x<4\}$ 用列举法表示为 $\{2,3\}$.（　　）

(2)大于 $-2$ 且小于 2 的整数构成的集合不能用列举法表示.（　　）

(3)集合 $\{(0,1)\}$ 中的元素是 0 和 1.（　　）

(4)$\{x\mid x>3\}$ 与 $\{y\mid y>3\}$ 是相等集合.（　　）

(1)×　**解析**：集合 $\{x\mid1<x<4\}$ 中有无数个元素.

(2)×　**解析**：能用列举法表示为 $\{-1,0,1\}$.

(3)×　**解析**：集合 $\{(0,1)\}$ 中的元素为 $(0,1)$.

(4)√　**解析**：都表示由大于 3 的数构成的集合.

**2.**把集合 $\{x\mid x^2-4x+3=0\}$ 用列举法表示为（　　）

A.$\{1,3\}$　　B.$\{x\mid x=1,x=3\}$

C.$\{x^2-4x+3=0\}$　　D.$\{x=1,x=3\}$

A　**解析**：集合 $\{x\mid x^2-4x+3=0\}$ 表示由方程 $x^2-4x+3=0$ 的解构成的集合，用列举法表示为 $\{1,3\}$.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1 > 用列举法表示集合

**1.**集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$ 用列举法可以表示为（　　）

A.1,2　　B.(1,2)

C.{1,2}　　D.{(1,2)}

C　**解析**：由方程 $x^2-3x+2=0$，解得 $x=1$ 或 $x=2$，所以 $A=\{1,2\}$，故 C 正确，A,B,D 错误.故选 C.

**2.**以下对象中，是集合 $A=\{(x,y)\mid 2x+y-1=0\}$ 的元素的是（　　）

A.{(−2,2)}　　B.(−2,2)

C.{(1,−1)}　　D.(1,−1)

D　**解析**：集合 $A$ 的元素表示的是直角坐标系中一条直线上的点(数对)，选项 A 和选项 C 表示的都是只有一个点作为元素的集合，可以首先排除；再将点的坐标代入到集合 $A$ 的直线方程当中，可知(−2,2)不在直线上，(1,−1)在直线上.故选 D.

**3.**已知集合 $M=\left\{x\in\mathbf{N}\,\middle|\,\frac{4}{2-x}\in\mathbf{Z}\right\}$，则 $M$ 等于（　　）

A.{1,3,4,6}　　B.{0,1,3,4,6}

C.{1,3,4,7}　　D.{0,1,3,4,5}

B　**解析**：因为 $\frac{4}{2-x}\in\mathbf{Z}$，所以 $2-x=-4,-2,-1,1,2,4$.

若 $2-x=-4$，则 $x=6$，符合；若 $2-x=-2$，则 $x=4$，符合；

若 $2-x=-1$，则 $x=3$，符合；若 $2-x=1$，则 $x=1$，符合；

若 $2-x=2$，则 $x=0$，符合；若 $2-x=4$，则 $x=-2$，不符合.

所以 $M=\{0,1,3,4,6\}$.故选 B.

**【探究总结】**

**用列举法表示集合的步骤**

(1)求出集合的元素.

(2)把元素一一列举出来，中间用“,”隔开，相同元素只列举一次.

(3)用花括号括起来.

**注意**：一定要分清所求集合是数集还是点集.

### 任务2 > 用描述法表示集合

#### 探究活动

**例 1**　(教材 P4 例 2 改编)用描述法表示下列集合：

(1)所有不小于 2 且不大于 20 的实数组成的集合；

(2)在平面直角坐标系中，第二象限内的点组成的集合；

(3)200 以内的正奇数组成的集合；

(4)方程 $x^2-5x-6=0$ 的解组成的集合.

**解**：(1)集合可表示为 $\{x\in\mathbf{R}\mid 2\leqslant x\leqslant 20\}$.

(2)第二象限内的点 $(x,y)$ 满足 $x<0$，且 $y>0$，故集合可表示为 $\{(x,y)\mid x<0,\text{且 } y>0\}$.

(3)$\{x\mid x=2k+1,k\leqslant 99,k\in\mathbf{N}\}$.

(4)$\{x\mid x^2-5x-6=0\}$.

**【探究总结】**

**用描述法表示集合的步骤**

(1)弄清元素的形式.

(2)写出代表元素，写在“|”的前面.

(3)确定元素所具有的共同特征，写在“|”的后面.

(4)用花括号把它们括起来.

#### 应用迁移

用描述法表示下列集合：

(1)不等式 $2x-7<3$ 的解集 $A$；

(2)二次函数 $y=x^2+1$ 的函数值组成的集合 $B$；

(3)被 3 除余 2 的正整数组成的集合 $C$；

(4)在平面直角坐标系中，坐标轴上的点组成的集合 $D$.

**解**：(1)解 $2x-7<3$ 得 $x<5$，所以 $A=\{x\mid x<5\}$.

(2)函数值组成的集合就是 $y$ 的取值集合，

所以 $B=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$.

(3)被 3 除余 2 的正整数可以表示为 $3n+2,n\in\mathbf{N}$，

所以 $C=\{x\mid x=3n+2,n\in\mathbf{N}\}$.

(4)在平面直角坐标系中，坐标轴上的点的共同特征是至少有一个坐标为 0，所以 $D=\{(x,y)\mid xy=0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$.

### 任务3 > 集合表示法的综合应用

#### 探究活动

**例 2**　(1)设集合 $A=\{x\mid x^2-3x+a=0\}$，若 $4\in A$，用列举法表示集合 $A$ 为_____.

(2)已知集合 $A=\{x\mid ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R}\}$，若 $A$ 中只有一个元素，求实数 $a$ 的值.

(1)$\{-1,4\}$　**解析**：因为 $4\in A$，所以 $16-12+a=0$，所以 $a=-4$，所以 $A=\{x\mid x^2-3x-4=0\}=\{-1,4\}$.

(2)**解**：当 $a=0$ 时，原方程变为 $2x+1=0$，此时 $x=-\frac{1}{2}$，符合题意；

当 $a\neq 0$ 时，方程 $ax^2+2x+1=0$ 为一元二次方程，当 $\Delta=4-4a=0$，即 $a=1$ 时，原方程的解为 $x=-1$，符合题意.

故当 $A$ 中只有一个元素时，$a$ 的值为 0 或 1.

[一题多思]

**思考1.**结合本例(1)和(2),若已知集合是用描述法给出的,需要注意哪些问题?谈谈你的观点.

**提示:**要弄清集合的代表元素及属性,如本例(1)中集合 $A$ 中的元素就是所给方程的根,由此便把集合的元素或个数问题转化为方程的根或根的个数问题.

**思考2.**本例(2)中,集合 $A$ 不变,若 $A$ 中至多有一个元素,则 $a$ 的取值范围是怎样的?

**提示:** $A$ 中至多有一个元素,即 $A$ 中有一个元素或没有元素.

当 $A$ 中只有一个元素时,由例题可知,$a=0$ 或 $a=1$.

当 $A$ 中没有元素时,$\Delta=4-4a<0$,且 $a\neq0$,即 $a>1$.

故当 $A$ 中至多有一个元素时,$a$ 的取值范围为 $\{a\mid a=0$,或 $a\geqslant1\}$.

**思考3.**本例(2)中,集合 $A$ 不变,是否存在实数 $a$,使集合 $A$ 与集合 $\{1\}$ 相等?若存在,求出 $a$ 的值;若不存在,说明理由.

**提示:**不存在.理由如下:

若 $A=\{1\}$,则 $1\in A$,所以 $a+2+1=0$,即 $a=-3$.

又当 $a=-3$ 时,由 $-3x^2+2x+1=0$,

得 $x=-\frac{1}{3}$ 或 $x=1$,

即方程 $-3x^2+2x+1=0$ 有两个根 $-\frac{1}{3}$ 和 1,

此时 $A=\left\{-\frac{1}{3},1\right\}$,与 $A=\{1\}$ 矛盾.

故不存在实数 $a$,使 $A=\{1\}$.

## 【探究总结】

**由集合中元素的个数求参数问题的关注点**

(1)要弄清用描述法给出的集合的代表元素及其属性.

(2)如果所给方程是一元二次方程的形式,要对二次项系数是否为0进行分类讨论.

## 应用迁移

已知集合 $A=\{x\mid ax^2-3x+2=0,a\in\mathbf{R}\}$.

(1)若 $A$ 中没有元素,求 $a$ 的取值范围;

(2)若 $A$ 中只有一个元素,求 $a$ 的值,并求集合 $A$;

(3)若 $A$ 中至少有一个元素,求 $a$ 的取值范围.

**解:**(1)因为 $A$ 中没有元素,所以 $a\neq0$ 且 $\Delta<0$,

所以 $\begin{cases}a\neq0,\\9-8a<0,\end{cases}$ 解得 $a>\frac{9}{8}$.

所以 $a$ 的取值范围为 $\left\{a\,\middle|\,a>\frac{9}{8}\right\}$.

(2)①当 $a=0$ 时,集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid-3x+2=0,a\in\mathbf{R}\}=\left\{\frac{2}{3}\right\}$;

②当 $a\neq0$ 时,$\Delta=0$,

所以 $9-8a=0$,解得 $a=\frac{9}{8}$,此时集合 $A=\left\{\frac{4}{3}\right\}$.

综上所述,当 $a=0$ 时,集合 $A=\left\{\frac{2}{3}\right\}$;当 $a=\frac{9}{8}$ 时,集合 $A=\left\{\frac{4}{3}\right\}$.

(3)当 $A$ 中只有一个元素时,$a=0$ 或 $a=\frac{9}{8}$;

当 $A$ 中有两个元素时,则 $a\neq0$ 且 $\Delta>0$,即 $\begin{cases}a\neq0,\\9-8a>0,\end{cases}$ 解得 $a<\frac{9}{8}$ 且 $a\neq0$.

综上可得,若 $A$ 中至少有一个元素,$a$ 的取值范围为 $\left\{a\,\middle|\,a\leqslant\frac{9}{8}\right\}$.

# 课后素养评价(二)

## 基础落实

**1.**集合 $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\}$ 中所有元素的和为　(　　)

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{1}{5}$　　C.$\frac{5}{6}$　　D.$\frac{2}{5}$

C　**解析:**集合 $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\}$ 中的所有元素是 $\frac{1}{2},\frac{1}{3}$,故所有元素的和为 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$.故选C.

**2.**已知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid1<x<k\}$,若集合 $A$ 中至少有3个元素,则　(　　)

A.$k>3$　　B.$k\geqslant3$

C.$k>4$　　D.$k\geqslant4$

C　**解析:**因为 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid1<x<k\}$,且集合 $A$ 中至少有3个元素,即集合 $A$ 中必有元素2,3,4,所以 $k>4$.故选C.

**3.**已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{5}\}$,则　(　　)

A.$\sqrt{3}\in A$　　B.$-2\in A$

C.$0\notin A$　　D.$1\notin A$

A　**解析:**因为 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{5}$,所以 $\sqrt{3}\in A$,$-2\notin A$,$0\in A$,$1\in A$.故选A.

**4.**(多选)由大于 $-3$ 且小于11的偶数所组成的集合是　(　　)

A.$\{-2,0,2,4,6,8,10\}$

B.$\{x\mid-3<2x<11,x\in\mathbf{Z}\}$

C.$\{x\mid-3<x<11,x=2k,k\in\mathbf{N}\}$

D.$\{x\mid-3<x<11,x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$

AD　**解析**：选项A是用列举法表示大于$-3$且小于11的偶数所组成的集合；选项B表示的是所有大于$-\frac{3}{2}$且小于$\frac{11}{2}$的整数；选项C表示的集合中不含有$-2$这个偶数；选项D表示的是大于$-3$且小于11的偶数所组成的集合.

**5.**用描述法表示下列集合：

(1)被5除余3的正整数组成的集合；

(2)正偶数组成的集合；

(3)函数$y=2x^2-x+1$的图象上所有的点组成的集合.

**解**：(1)被5除余3的正整数组成的集合是$\{x\mid x=5n+3,n\in\mathbf{N}\}$.

(2)正偶数组成的集合是$\{x\mid x=2n,n\in\mathbf{N}^*\}$.

(3)函数$y=2x^2-x+1$的图象上所有的点组成的集合是$\{(x,y)\mid y=2x^2-x+1,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$.

## 能力提升

**1.**已知集合$A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-a\leqslant 0\}$，且$2\in A$，则实数$a$的取值范围是　(　　)

A.$\{a\mid a\leqslant -4\}$　　B.$\{a\mid a\geqslant -4\}$

C.$\{a\mid a\leqslant 4\}$　　D.$\{a\mid a\geqslant 4\}$

D　**解析**：依题意，$2^2-a\leqslant 0$，解得$a\geqslant 4$，所以实数$a$的取值范围是$\{a\mid a\geqslant 4\}$.故选D.

**2.**下列各组中，$M$，$P$表示相同集合的是　(　　)

A.$M=\{(2,1)\}$，$P=\{(1,2)\}$

B.$M=\{2,-1\}$，$P=\{(2,-1)\}$

C.$M=\{y\mid y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$，$P=\{x\mid x=t^2-1,t\in\mathbf{R}\}$

D.$M=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，$P=\{(x,y)\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$

C　**解析**：对于A，$(2,1)$与$(1,2)$表示不同的点，则$M\neq P$，二者不是同一集合；

对于B，$M=\{2,-1\}$是数集，$P=\{(2,-1)\}$是点集，二者不是同一集合；

对于C，集合$M$表示大于或者等于$-1$的数，集合$P$也表示大于或者等于$-1$的数，

则$M=P$，二者是同一集合；

对于D，集合$M$表示二次函数$y=x^2+1(x\in\mathbf{R})$中$y$的取值集合，为数集，而集合$P$是二次函数$y=x^2+1(x\in\mathbf{R})$图象上所有点组成的集合，为点集，则$M\neq P$，二者不是同一集合.故选C.

**3.**方程组$\begin{cases}x+y=0,\\x^2+y^2=2\end{cases}$的解集是　(　　)

A.$\{(1,-1),(-1,1)\}$

B.$\{(1,1),(-1,1)\}$

C.$\{(1,-1),(-1,-1)\}$

D.$\varnothing$

A　**解析**：由$x+y=0$，得$x=-y$，代入$x^2+y^2=2$，得$2y^2=2$，解得$y=\pm 1$.

当$y=1$时，$x=-1$；当$y=-1$时，$x=1$.

故方程组的解集是$\{(1,-1),(-1,1)\}$.

**4.**已知集合$M=\{x\mid ax^2-2x+2=0,a\in\mathbf{R}\}$.

(1)若集合$M$中至少有一个元素，求实数$a$的取值范围.

(2)是否存在实数$a$，使集合$M$与集合$\{1\}$相等？若存在，求出$a$的值；若不存在，请说明理由.

**解**：(1)当$a=0$时，方程化为$-2x+2=0$，解得$x=1$，此时$M=\{1\}$，满足条件.

当$a\neq 0$时，方程为一元二次方程，由题意得$\Delta=4-8a\geqslant 0$，即$a\leqslant\frac{1}{2}$且$a\neq 0$，此时方程有两个相等或两个不相等的实数根，满足条件.

综上，若集合$M$中至少有一个元素，则实数$a$的取值范围为$\left\{a\,\middle|\,a\leqslant\frac{1}{2}\right\}$.

(2)存在.假设存在实数$a$，使$M=\{1\}$，则$1\in M$，

所以$a-2+2=0$，即$a=0$.

当$a=0$时，方程变为$-2x+2=0$，解得$x=1$，

故方程$ax^2-2x+2=0$的根为1，即$M=\{1\}$.

所以存在实数$a=0$，使$M=\{1\}$.

## 自我超越

(多选)已知集合$A=\{x\mid x=2m-1,m\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$，且$x_1,x_2\in A$，$x_3\in B$，则　(　　)

A.$x_1x_2\in A$　　B.$x_2x_3\in B$

C.$x_1+x_2\in B$　　D.$x_1+x_2+x_3\in A$

ABC　**解析**：由题意易知集合$A$表示奇数集，集合$B$表示偶数集.又由$x_1,x_2\in A$，$x_3\in B$，可知$x_1,x_2$是奇数，$x_3$是偶数.对于A，两个奇数的积为奇数，所以$x_1x_2\in A$，故A正确；对于B，一奇一偶两个数的积为偶数，所以$x_2x_3\in B$，故B正确；对于C，两个奇数的和为偶数，所以$x_1+x_2\in B$，故C正确；对于D，两个奇数与一个偶数的和为偶数，所以$x_1+x_2+x_3\in B$，故D错误.

# 1.2　集合间的基本关系

**学习任务目标**

1.理解集合之间的包含与相等的含义，能识别给定集合的子集、真子集.
2.会判断给定集合间的关系，并会用符号和 Venn 图表示.
3.在具体情境中，了解空集的含义.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　子集与真子集**

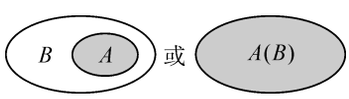
1.子集

(1)定义：一般地，对于两个集合 $A$，$B$，如果集合 $A$ 中任意一个元素都是集合 $B$ 中的元素，就称集合 $A$ 为集合 $B$ 的子集.

(2)符号：$A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$).

(3)读法：$A$ 包含于 $B$(或 $B$ 包含 $A$).

(4)图示：



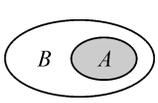

2.真子集

(1)定义：如果集合 $A\subseteq B$，但存在元素 $x\in B$，且 $x\notin A$，就称集合 $A$ 是集合 $B$ 的真子集.

(2)符号：$A\subsetneq B$(或 $B\supsetneq A$).

(3)读法：$A$ 真包含于 $B$(或 $B$ 真包含 $A$).

(4)图示：




**知识点二　空集的概念**

(1)定义：一般地，我们把不含任何元素的集合叫做空集.

(2)符号：$\varnothing$.

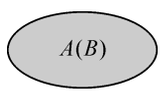
(3)规定：空集是任何集合的子集.

**知识点三　集合相等**

(1)定义：一般地，如果集合 $A$ 的任何一个元素都是集合 $B$ 的元素，同时集合 $B$ 的任何一个元素都是集合 $A$ 的元素，那么集合 $A$ 与集合 $B$ 相等，记作 $A=B$.

(2)符号：若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则 $A=B$.

(3)图示：




**知识点四　集合间关系的性质**

(1)任何一个集合都是它本身的子集，即 $A\subseteq A$.

(2)对于集合 $A$，$B$，$C$，

①若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；

②若 $A\subsetneq B$，$B\subsetneq C$，则 $A\subsetneq C$；

(3)若 $A\subseteq B$，$A\neq B$，则 $A\subsetneq B$.

### 【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)集合{0}是空集.　(　　)

(2)空集是任何集合的真子集.　(　　)

(3)若 $A\subsetneq B$，则 $B$ 中至少有一个元素不属于 $A$.　(　　)

(4)若 $B\subseteq A$，$a\notin A$，则 $a\notin B$.　(　　)

(1)× **解析**：$\varnothing$ 是不含任何元素的集合；{0}是含有一个元素的集合，$\varnothing\subsetneq\{0\}$.

(2)× **解析**：空集是空集的子集，但不是真子集.

(3)√ **解析**：由真子集的定义可知此说法正确.

(4)√ **解析**：因为 $B$ 是 $A$ 的子集，所以不属于 $A$ 的元素一定不属于 $B$.

2.下列四个集合中，是空集的为　(　　)

A.{0}　　B.$\{x\mid x>8$，且 $x<5\}$

C.$\{x\mid x^2-1=0\}$　　D.$\{x\mid x>4\}$

B **解析**：满足 $x>8$ 且 $x<5$ 的实数不存在，故 $\{x\mid x>8$，且 $x<5\}=\varnothing$.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1　集合间关系的判断

1.下列关系中，错误的有　(　　)

①$a\subseteq\{a,b,c\}$；②$\varnothing\in\{0\}$；③$\{0,1\}\subsetneq\mathbf{N}$；

④$\sqrt{2}\in\mathbf{Q}$.

A.1 个　　B.2 个

C.3 个　　D.4 个

C **解析**：对于①，因为 $a$ 是集合 $\{a,b,c\}$ 中的元素，所以 $a\in\{a,b,c\}$，表示的符号不正确，故①错误；

对于②，因为∅是任何集合的子集，所以∅⊆{0}，表示的符号不正确，故②错误；

对于③，因为 **N** 中含有元素 0，1，而且还有其他元素，所以{0，1}⫋**N**，故③正确；

对于④，因为$\sqrt{2}$是无理数，而 **Q** 是有理数集，所以$\sqrt{2}\notin$**Q**，故④错误.故选 C.

**2.**（教材 P9 练习题 3 改编）（多选）下列各组集合之间满足 $A\subseteq B$ 的是　　（　　）

A.$A=\{-1,1\}$，$B=\{(-1,1)\}$

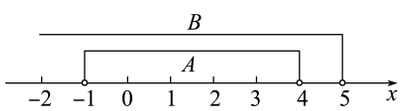
B.$A=\{x\mid -1<x<4\}$，$B=\{x\mid x-5<0\}$

C.$A=\{x\mid x$ 是正整数$\}$，$B=\{x\mid x$ 是非负数$\}$

D.$A=\{x\mid x=2n-1,n\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{x\mid x=2n+1,n\in\mathbf{N}^*\}$

BC　**解析**：选项 A，集合 $A$ 是数集，集合 $B$ 是点集，无包含关系；

选项 B，集合 $A=\{x\mid -1<x<4\}$，$B=\{x\mid x<5\}$，用数轴表示如图所示，

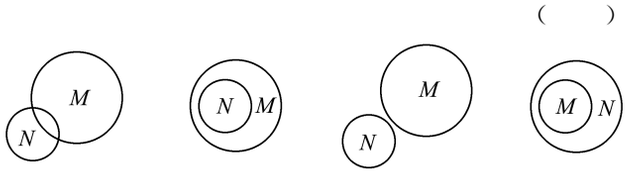



由图可知 $A\subseteq B$；

选项 C，正整数都是非负数，故 $A\subseteq B$；

选项 D，$A=\{$正奇数$\}$，$B=\{$不含 1 的正奇数$\}$，故 $B\subseteq A$.

**3.**下列表示集合 $M=\{x\in\mathbf{R}\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$ 和集合 $N=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-x=0\}$ 之间关系的 Venn 图正确的是　　（　　）




A　　B　　C　　D

B　**解析**：解 $x^2-x=0$，得 $x=1$ 或 $x=0$，故 $N=\{0,1\}$.易得 $N\subsetneq M$，其对应的 Venn 图如选项 B 所示.

## 【探究总结】

**判断集合间关系的方法**

(1)观察法：将集合的元素一一列举然后观察.

(2)元素特征法：首先确定集合中的元素是什么，弄清集合中元素的属性，再利用集合中元素的特征判断集合间的关系.

(3)数形结合法：利用数轴或 Venn 图.

## 任务2 确定集合的子集、真子集

### 探究活动

**例 1**　(1)集合 $A=\{x\mid -4<x<2\}$ 的一个真子集可以为　　（　　）

A.{3}　　B.$\{x\mid -1<x<3\}$

C.{0}　　D.$\{x\mid -4<x<2\}$

(2)已知集合 $M$ 满足{0，1}⫋$M\subseteq${0，1，2，3，4}，则满足条件的 $M$ 的个数是　　（　　）

A.7　　B.8

C.15　　D.16

(1)C　**解析**：$3\notin A=\{x\mid -4<x<2\}$，故 A 错误；

$2.5\notin A=\{x\mid -4<x<2\}$，故 B 错误；

{0}是集合 $A=\{x\mid -4<x<2\}$ 的真子集，故 C 正确；

因为$\{x\mid -4<x<2\}$是集合 $A=\{x\mid -4<x<2\}$ 的子集，但不是真子集，故 D 错误.故选 C.

(2)A　**解析**：根据题意可知，集合 $M$ 中至少含有三个元素（必须包含 1 和 0），且是集合{0，1，2，3，4}的子集，

因此，若 $M$ 中含有三个元素，则 $M$ 可以是{0，1，2}，{0，1，3}，{0，1，4}；

若 $M$ 中含有四个元素，则 $M$ 可以是{0，1，2，3}，{0，1，3，4}，{0，1，2，4}；

若 $M$ 中含有五个元素，则 $M$ 可以是{0，1，2，3，4}.

所以满足条件的 $M$ 的个数是 7.故选 A.

## 【探究总结】

**集合的子集、真子集个数的判断**

若集合 $A$ 中有 $n(n\geqslant 1)$ 个元素，则

(1)$A$ 的子集有 $2^n$ 个；

(2)$A$ 的非空子集有 $(2^n-1)$ 个；

(3)$A$ 的真子集有 $(2^n-1)$ 个；

(4)$A$ 的非空真子集有 $(2^n-2)$ 个.

**注意**：①写集合的子集时，勿漏掉空集和它自身；②一个集合的真子集是除了它自身以外的子集.

### 应用迁移

**1.**集合{(1，2)，(3，4)}的子集个数为　　（　　）

A.3　　B.4

C.15　　D.16

B　**解析**：集合{(1，2)，(3，4)}中有 2 个元素，所以其子集个数为 $2^2=4$.

**2.**（多选）若集合 $M$ 满足{1，2}⫋$M\subseteq${1，2，3，4}，则集合 $M$ 可能为　　（　　）

A.{1，2}　　B.{1，2，3}

C.{1，2，4}　　D.{1，2，3，4}

BCD　**解析**：由题意可知{1，2}⫋$M\subseteq${1，2，3，4}，可以确定集合 $M$ 必含有元素 1，2，且含有元素 3，4 中的至少一个，因此依据集合 $M$ 的元素个数进行分类，含有三个元素：{1，2，3}，{1，2，4}；含有四个元素：{1，2，3，4}.故满足题意的集合 $M$ 为{1，2，3}，{1，2，4}，{1，2，3，4}.

## 任务3 由集合间关系确定参数的值

### 探究活动

**例2**　(1)(2023·新高考全国Ⅱ卷)设集合$A=\{0,-a\}$,$B=\{1,a-2,2a-2\}$,若$A\subseteq B$,则$a=$(　　)

A.2　　B.1　　C.$\frac{2}{3}$　　D.$-1$

(2)(教材P9习题1.2题5(2)改编)已知集合$A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$,集合$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$,若$B\subseteq A$,求实数$m$的取值范围.

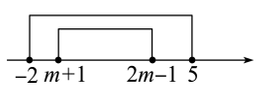
(1)B　**解析**:因为$A\subseteq B$,所以$a-2=0$或$2a-2=0$.

若$a-2=0$,则$a=2$,此时$A=\{0,-2\}$,$B=\{1,0,2\}$,不符合题意;

若$2a-2=0$,则$a=1$,此时$A=\{0,-1\}$,$B=\{1,-1,0\}$,符合题意.因此,$a=1$.故选B.

(2)**解**:①若$B=\varnothing$,则$m+1>2m-1$,解得$m<2$.

②若$B\neq\varnothing$,且$B\subseteq A$,如图所示.




则$\begin{cases}m+1\geqslant -2,\\ 2m-1\leqslant 5,\\ m+1\leqslant 2m-1,\end{cases}$　解得$2\leqslant m\leqslant 3$.

所以实数$m$的取值范围是$\{m\mid m\leqslant 3\}$.

[一题多思]

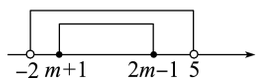
**思考1**.在本例(2)中,若把条件"$B\subseteq A$"改为"$A\subseteq B$",解题过程有何变化?

**提示**:若$A\subseteq B$,则集合$B$一定不是空集,不用再考虑第①步.

**思考2**.若本例(2)条件"$A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$"改为"$A=\{x\mid -2<x<5\}$",其他条件不变,求实数$m$的取值范围.

**提示**:①若$B=\varnothing$,则$m+1>2m-1$,解得$m<2$.

②若$B\neq\varnothing$,且$B\subseteq A$,如图所示.




所以$\begin{cases}m+1>-2,\\ 2m-1<5,\\ m+1\leqslant 2m-1,\end{cases}$　解得$2\leqslant m<3$.

所以实数$m$的取值范围是$\{m\mid m<3\}$.

**【探究总结】**

**由集合间的关系确定参数的取值(范围)的注意事项**

(1)弄清"谁是谁的(真)子集".

(2)注意对含参数集合是否为空集进行讨论.

(3)不忘验证端点值.

### 应用迁移

已知集合$A=\{x\mid -2<x<6\}$,$B=\{x\mid a<x<b\}$,其中$a$,$b(a<b)$是关于$x$的方程$(x-3m)(x+m)=0(m>0)$的两个不同的实数根.

(1)若$A=B$,求实数$m$的值;

(2)若$A\subseteq B$,求实数$m$的取值范围.

**解**:(1)因为$A=B$,故$a=-2$,$b=6$.

又$(x-3m)(x+m)=0(m>0)$的两个根分别为$-m$,$3m$,即$a=-m$,$b=3m$,

故$-m=-2$,$3m=6$,故$m=2$.

(2)因为$A\subseteq B$,故$a\leqslant -2$,$b\geqslant 6$.

又$(x-3m)(x+m)=0(m>0)$的两个根分别为$-m$,$3m$,即$a=-m$,$b=3m$,

故$\begin{cases}-m\leqslant -2,\\ 3m\geqslant 6,\end{cases}$解得$m\geqslant 2$.

故实数$m$的取值范围是$\{m\mid m\geqslant 2\}$.

# 课后素养评价(三)

## 基础落实

**1**.集合$\{a,b,c\}$的非空子集有(　　)

A.5个　　B.6个

C.7个　　D.8个

C　**解析**:集合$\{a,b,c\}$的非空子集有$\{a\}$,$\{b\}$,$\{c\}$,$\{a,b\}$,$\{a,c\}$,$\{b,c\}$,$\{a,b,c\}$,共有7个.故选C.

**2**.已知集合$A=\{0,1,2\}$,$B=\{0,1,2a\}$,若$A=B$,则$a=$(　　)

A.$-1$或2　　B.$-1$或1

C.$-1$　　D.1

D　**解析**:集合$A=\{0,1,2\}$,$B=\{0,1,2a\}$,因为$A=B$,所以$2a=2$,解得$a=1$.故选D.

**3**.已知集合$B=\{2,3,4,5\}$,$C=\{-2,-1,4,5\}$,非空集合$A$满足$A\subseteq B$,$A\subseteq C$,则符合条件的集合$A$的个数为(　　)

A.3　　B.4　　C.7　　D.8

A　**解析**:由题意知集合$B=\{2,3,4,5\}$,$C=\{-2,-1,4,5\}$.因为非空集合$A$满足$A\subseteq B$,$A\subseteq C$,所以集合$A$可以为$\{4\}$或$\{5\}$或$\{4,5\}$.所以符合条件的集合$A$的个数为3.

**4**.(多选)已知集合$A=\{0,1,2\}$,$B=\{a,2\}$,若$B\subseteq A$,则实数$a$的值可以是(　　)

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

AB　**解析**:因为集合$A=\{0,1,2\}$,$B=\{a,2\}$,且$B\subseteq A$,所以$a=0$或$a=1$.

**5.**集合$\{(1,2),(-3,4)\}$的所有非空真子集是$\{(1,2)\},\{(-3,4)\}$.

**6.**已知集合$M=\{x\in\mathbf{N}|x<2\}$,$N=\{x\in\mathbf{Z}|-2<x<2\}$.

(1)写出集合$M$的子集、真子集.

(2)求集合$N$的子集数、真子集数和非空真子集数.

(3)猜想:含$n$个元素的集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$的子集的个数是多少?真子集的个数及非空真子集的个数呢?

**解**:(1)由题意可知$M=\{0,1\}$,所以其子集为$\varnothing$,$\{0\}$,$\{1\}$,$\{0,1\}$,真子集为$\varnothing$,$\{0\}$,$\{1\}$.

(2)由题意可知$N=\{-1,0,1\}$,

所以其子集为$\varnothing$,$\{-1\}$,$\{0\}$,$\{1\}$,$\{0,1\}$,$\{-1,0\}$,$\{-1,1\}$,$\{-1,0,1\}$,共$2^3=8$(个),

真子集为$\varnothing$,$\{-1\}$,$\{0\}$,$\{1\}$,$\{0,1\}$,$\{-1,0\}$,$\{-1,1\}$,共$2^3-1=7$(个),

非空真子集为$\{-1\}$,$\{0\}$,$\{1\}$,$\{0,1\}$,$\{-1,0\}$,$\{-1,1\}$,共$2^3-2=6$(个).

(3)由(1)和(2)可猜想,含有$n$个元素的集合的子集个数为$2^n$,真子集个数为$2^n-1$,非空真子集个数为$2^n-2$.

## 能力提升

**1.**(多选)已知集合$B=\{1,2\}$,$A\subsetneq B$,则集合$A$可以为　(　　)

A.$\varnothing$　　B.$\{1\}$

C.$\{2\}$　　D.$\{1,2\}$

ABC　**解析**:因为$A\subsetneq B$,所以集合$A$是集合$B$的真子集,故集合$A$可以是$\varnothing$,$\{1\}$,$\{2\}$.故选ABC.

**2.**集合$A=\{x|x<-1$或$x\geqslant 3\}$,$B=\{x|ax+1\leqslant 0\}$,若$B\subseteq A$,则实数$a$的取值范围是　(　　)

A.$\left\{a\left|-\frac{1}{3}\leqslant a<1\text{且}a\neq 0\right.\right\}$

B.$\left\{a\left|-\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant 1\right.\right\}$

C.$\{a|a<-1$或$a\geqslant 0\}$

D.$\left\{a\left|-\frac{1}{3}\leqslant a<1\right.\right\}$

D　**解析**:当$a=0$时,不等式$ax+1\leqslant 0$,即$1\leqslant 0$,不成立,所以$B=\varnothing$,满足$B\subseteq A$;

当$a>0$时,不等式$ax+1\leqslant 0$,解得$x\leqslant -\frac{1}{a}$,即$B=\left\{x\left|x\leqslant -\frac{1}{a}\right.\right\}$,

要使得$B\subseteq A$,则满足$-\frac{1}{a}<-1$,解得$0<a<1$;

当$a<0$时,不等式$ax+1\leqslant 0$,解得$x\geqslant -\frac{1}{a}$,即$B=\left\{x\left|x\geqslant -\frac{1}{a}\right.\right\}$,

要使得$B\subseteq A$,则满足$-\frac{1}{a}\geqslant 3$,解得$-\frac{1}{3}\leqslant a<0$.

综上所述,$-\frac{1}{3}\leqslant a<1$.故选D.

**3.**若集合$A=\{x|2a\leqslant x\leqslant 4a-3\}$,$B=\{x|5\leqslant x\leqslant 16\}$,则能使$A\subseteq B$成立的$a$的取值集合为_____.

$\left\{a\left|a<\frac{3}{2}\text{,或}\frac{5}{2}\leqslant a\leqslant\frac{19}{4}\right.\right\}$　**解析**:当$4a-3<2a$,即$a<\frac{3}{2}$时,$A=\varnothing$,满足$A\subseteq B$;

当$4a-3\geqslant 2a$,即$a\geqslant\frac{3}{2}$时,$A\neq\varnothing$,

要使$A\subseteq B$,则$\begin{cases}4a-3\leqslant 16,\\2a\geqslant 5,\end{cases}$解得$\frac{5}{2}\leqslant a\leqslant\frac{19}{4}$.

综上可知,能使$A\subseteq B$成立的$a$的取值集合为$\left\{a\left|a<\frac{3}{2}\text{,或}\frac{5}{2}\leqslant a\leqslant\frac{19}{4}\right.\right\}$.

**4.**已知集合$M=\{x|x^2+2x-a=0\}$.

(1)若$\varnothing\subsetneq M$,求实数$a$的取值范围;

(2)若$N=\{x|x^2+x=0\}$,且$M\subseteq N$,求实数$a$的取值范围.

**解**:(1)由题意得,方程$x^2+2x-a=0$有实数解,

所以$\Delta=2^2-4\times(-a)\geqslant 0$,得$a\geqslant -1$.

所以实数$a$的取值范围是$\{a|a\geqslant -1\}$.

(2)因为$N=\{x|x^2+x=0\}=\{0,-1\}$,且$M\subseteq N$,

所以当$M=\varnothing$时,$\Delta=2^2-4\times(-a)<0$,

得$a<-1$,满足题意.

当$M\neq\varnothing$时,

①当$\Delta=0$时,$a=-1$,

此时$M=\{-1\}$,满足$M\subseteq N$,符合题意;

②当$\Delta>0$时,$a>-1$,$M$中有两个元素,

若$M\subseteq N$,则$M=N$,

从而$\begin{cases}-1+0=-2,\\(-1)\times 0=-a,\end{cases}$无解.

综上,实数$a$的取值范围为$\{a|a\leqslant -1\}$.

## 自我超越

设集合$A=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)|x_i\in\{-1,1\},i=1,2,3,4\}$.任取$(a_1,a_2,a_3,a_4),(b_1,b_2,b_3,b_4)\in A$,若$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4=0$,则称$(a_1,a_2,a_3,a_4)$与$(b_1,b_2,b_3,b_4)$正交.若$B\subseteq A$,且$B$中任意两个元素均正交,则$B$中元素个数最大是　(　　)

A.2　　B.3　　C.4　　D.6

C　**解析**:不妨设$(1,1,1,1)\in B$,由$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4=0$,则$B$中最多包含$(1,1,-1,-1)$,$(1,-1,1,-1)$,$(1,-1,-1,1)$,$(-1,1,1,-1)$,$(-1,1,-1,1)$,$(-1,-1,1,1)$6个元素,

又$(1,1,-1,-1)$,$(-1,-1,1,1)$,$(1,-1,-1,1)$,$(-1,1,1,-1)$,$(1,-1,1,-1)$,$(-1,1,-1,1)$三组元素不正交,

所以$(1,1,-1,-1)$,$(1,-1,1,-1)$,$(1,-1,-1,1)$,$(-1,1,1,-1)$,$(-1,1,-1,1)$,$(-1,-1,1,1)$这6个元素中最多只有3个元素在集合$B$中,如$B=\{(1,1,1,1),(1,1,-1,-1),(1,-1,1,-1),(1,-1,-1,1)\}$,

若$B\subseteq A$,且$B$中任意两个元素均正交,则$B$中元素个数最大是4.

# 1.3　集合的基本运算

## 第1课时　并集与交集

**学习任务目标**

1.能从教材实例中抽象出两个集合的并集和交集的含义.
2.掌握有关的术语和符号,并会用它们正确地进行集合间的并集、交集运算.
3.能用 Venn 图表示两个集合的并集和交集.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

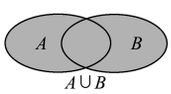
**知识点一　并集**

(1)概念:

①自然语言:一般地,由所有属于集合 $A$ 或属于集合 $B$ 的元素组成的集合,称为集合 $A$ 与 $B$ 的并集,记作 $A\cup B$(读作"$A$ 并 $B$").

②符号语言:$A\cup B=\{x\mid x\in A,$ 或 $x\in B\}$.

③图形语言:




(2)性质:$A\cup A=A$,$A\cup\varnothing=A$.

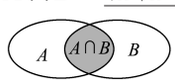
**知识点二　交集**

(1)概念:

①自然语言:一般地,由所有属于集合 $A$ 且属于集合 $B$ 的元素组成的集合,称为集合 $A$ 与 $B$ 的交集,记作 $A\cap B$(读作"$A$ 交 $B$").

②符号语言:$A\cap B=\{x\mid x\in A,$ 且 $x\in B\}$.

③图形语言:




(2)性质:$A\cap A=A$,$A\cap\varnothing=\varnothing$.

### 【概念辨析】

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)若 $A\cup B=A\cup C$,则 $B=C$.　(×)

(2)集合 $A$,$B$ 中分别有 3 个元素,则 $A\cup B$ 中必有 6 个元素.　(×)

(3)若 $A\cap B=\varnothing$,则 $A$,$B$ 均为空集.　(×)

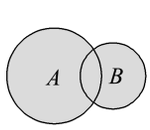
(4)若 $x\in(A\cap B)$,则 $x\in(A\cup B)$.　(√)

2.设集合 $M=\{-1,0,1\}$,$N=\{0,1,2\}$,则 $M\cup N=\{-1,0,1,2\}$,$M\cap N=\{0,1\}$.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1 > 并集的运算

1.已知集合 $A=\{2,4,5,7\}$,$B=\{1,4,7,8\}$,则图中的阴影部分所表示的集合是　(　　)




A.$\{3,6\}$　　B.$\{4,7\}$

C.$\{1,2,4,5,7,8\}$　　D.$\{1,2,3,5,6,8\}$

C　**解析**:由题意知 $A=\{2,4,5,7\}$,$B=\{1,4,7,8\}$,题图中的阴影部分所表示的集合是 $A\cup B=\{1,2,4,5,7,8\}$.故选 C.

2.满足 $\{1,3\}\cup A=\{1,3,5\}$ 的所有集合 $A$ 的个数是　(　　)

A.1　　B.2

C.3　　D.4

D　**解析**:由 $\{1,3\}\cup A=\{1,3,5\}$,知 $A\subseteq\{1,3,5\}$ 且 $A$ 中一定有元素 5,因此集合 $A$ 可以是 $\{5\}$,$\{1,5\}$,$\{3,5\}$,$\{1,3,5\}$.

3.集合 $A=\{x\mid 2\leqslant x<4\}$,$B=\{x\mid 2x-7<8-3x\}$,则 $A\cup B=$　(　　)

A.$\{x\mid x<3\}$

B.$\{x\mid 2\leqslant x<3\}$

C.$\{x\mid x<4\}$

D.$\{x\mid 2\leqslant x<4\}$

C　**解析**:因为 $B=\{x\mid 2x-7<8-3x\}=\{x\mid x<3\}$,$A=\{x\mid 2\leqslant x<4\}$,所以 $A\cup B=\{x\mid x<4\}$.故选 C.

**【探究总结】**

**求集合并集的方法**

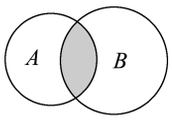
(1)定义法:若集合是用列举法表示的,可以直接利用并集的定义求解.

(2)数形结合法:若集合是用描述法表示的由实数组成的数集,则可以借助数轴分析求解.

### 任务2 > 交集的运算

**探究活动**

**例1**　(1)已知集合 $A=\{x\mid -2<x\leqslant 3\}$,$B=\{-2,0,2,4\}$,则图中阴影部分所表示的集合是　(　　)




A.{−2,0,2,4}　　B.{0,2,4}

C.{0,2}　　D.{0,1,2,3}

(2)(教材 P14 习题 1.3 题 1 改编)设集合 $A=\{x\mid 0<x<4,x\in\mathbf{N}\}$,$B=\left\{x\mid \frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 5\right\}$,则 $A\cap B=$ (　　)

A.$\left\{x\mid 0<x\leqslant\frac{1}{3}\right\}$　　B.$\left\{x\mid \frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 4\right\}$

C.{1,2,3}　　D.$\{x\mid 0<x\leqslant 5\}$

(1)C　**解析**:题图中阴影部分所表示的集合是 $A\cap B$,又 $A\cap B=\{0,2\}$.故选 C.

(2)C　**解析**:集合 $A=\{x\mid 0<x<4,x\in\mathbf{N}\}=\{1,2,3\}$,又 $B=\left\{x\mid \frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 5\right\}$,所以 $A\cap B=\{1,2,3\}$.

## 【探究总结】

**求集合交集的方法**

(1)对于两个元素个数有限的集合,求交集时,逐个挑出两个集合的公共元素即可.

(2)对于两个不等式的解集,求交集时,一般借助数轴,两个集合的交集对应两个集合在数轴上所覆盖部分的公共区域,要注意端点值的取舍.

(3)对于用描述法表示的文字叙述型的集合,求交集时,只需将元素满足的条件用“且”连起来即可,要注意文字语言的提炼与简化.

## 应用迁移

**1.**已知集合 $M=\{x\mid 2x-1\geqslant 5\}$,$N=\{1,2,3\}$,则 $M\cap N=$ (　　)

A.{1,2,3}　　B.{2,3}

C.{3}　　D.$\varnothing$

C　**解析**:由 $2x-1\geqslant 5$,解得 $x\geqslant 3$,即 $M=\{x\mid x\geqslant 3\}$,故 $M\cap N=\{3\}$.故选 C.

**2.**已知 $A=\{(x,y)\mid x+y=3\}$,$B=\{(x,y)\mid x-y=1\}$,则 $A\cap B=$ (　　)

A.{2,1}　　B.$\{x=2,y=1\}$

C.{(2,1)}　　D.(2,1)

C　**解析**:由 $\begin{cases}x+y=3,\\x-y=1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$ 故 $A\cap B=\{(2,1)\}$.

# 任务3 集合并集、交集性质的应用

## 探究活动

**例 2**　(1)已知集合 $A=\{x\mid x\leqslant -1,\text{或 }x\geqslant 3\}$,$B=\{x\mid a<x<4\}$.若 $A\cup B=\mathbf{R}$,则实数 $a$ 的取值范围是 (　　)

A.$\{a\mid 3\leqslant a<4\}$　　B.$\{a\mid -1<a<4\}$

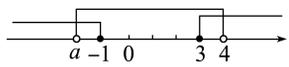
C.$\{a\mid a\leqslant -1\}$　　D.$\{a\mid a<-1\}$

(2)已知集合 $A=\{x\mid 1\leqslant x<5\}$,$B=\{x\mid -a<x\leqslant a+3\}$.若 $A\cap B=B$,则实数 $a$ 的取值范围为 (　　)

A.$\left\{a\mid -\frac{3}{2}<a\leqslant 1\right\}$　　B.$\left\{a\mid a\leqslant\frac{3}{2}\right\}$

C.$\{a\mid a\leqslant -1\}$　　D.$\left\{a\mid a>\frac{3}{2}\right\}$

(1)C　**解析**:利用数轴,画出满足 $A\cup B=\mathbf{R}$ 的图形,如图所示.




由图可知,$a\leqslant -1$.

(2)C　**解析**:因为 $A\cap B=B$,所以 $B\subseteq A$.

当 $B=\varnothing$ 时,$a+3\leqslant -a$,即 $a\leqslant -\frac{3}{2}$,符合题意;

当 $B\neq\varnothing$ 时,$\begin{cases}a+3>-a,\\-a\geqslant 1,\\a+3<5,\end{cases}$

解得 $-\frac{3}{2}<a\leqslant -1$.

所以实数 $a$ 的取值范围为 $\{a\mid a\leqslant -1\}$.

[一题多思]

**思考 1.**在本例(1)中,若把“$A\cup B=\mathbf{R}$”改为“$A\cap B=\varnothing$”,则实数 $a$ 的取值范围将如何变化?

**提示**:当 $a\geqslant 4$ 时,集合 $B$ 为空集,满足题意;

当 $a<4$ 时,集合 $B$ 不是空集,不满足 $A\cap B=\varnothing$.

综上可知,实数 $a$ 的取值范围是 $\{a\mid a\geqslant 4\}$.

**思考 2.**在本例(1)中,若把“$A\cup B=\mathbf{R}$”改为“$A\cup B=A$”,则实数 $a$ 的取值范围将如何变化?

**提示**:当 $a\geqslant 4$ 时,集合 $B$ 为空集,满足题意;

当 $a<4$ 时,若要满足 $A\cup B=A$,必有 $a\geqslant 3$,即 $3\leqslant a<4$.

综上可知,实数 $a$ 的取值范围是 $\{a\mid a\geqslant 3\}$.

## 【探究总结】

**利用集合交集、并集的性质解题的技巧**

(1)在进行集合运算时,若条件中出现 $A\cap B=A$ 或 $A\cup B=B$,应先转化为 $A\subseteq B$,然后用集合间的关系解决问题,并注意 $A=\varnothing$ 的情况.

(2)集合运算常用的性质:

①$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$;②$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$;③$A\cap B=A\cup B\Leftrightarrow A=B$.

## 应用迁移

**1.**设集合 $A=\{x\mid -3\leqslant x<0\}$,$B=\{x\mid x<a\}$.若 $A\cap B\neq\varnothing$,则实数 $a$ 的取值范围是 (　　)

A.$\{a\mid -3<a\leqslant 0\}$

B.$\{a\mid a>0\}$

C.$\{a\mid a\geqslant -3\}$

D.$\{a\mid a>-3\}$

D　**解析**：因为 $A=\{x\mid -3\leqslant x<0\}$，$B=\{x\mid x<a\}$，且 $A\cap B\neq\varnothing$，所以 $a>-3$，

即实数 $a$ 的取值范围是 $\{a\mid a>-3\}$.故选 D.

**2.**已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-2=0\}$，$B=\{x\mid ax=1\}$.若 $A\cup B=A$，则实数 $a=$　　(　　)

A.$-\frac{1}{2}$或 1　　B.$\frac{1}{2}$或 1

C.$-\frac{1}{2}$或 1 或 0　　D.$\frac{1}{2}$或 $-1$ 或 0

D　**解析**：因为 $x^2-x-2=0$ 等价于 $(x-2)(x+1)=0$，

解得 $x=2$ 或 $x=-1$，

所以 $A=\{x\mid x^2-x-2=0\}=\{-1,2\}$.

因为 $A\cup B=A$，所以 $B\subseteq A$.

当 $B=\varnothing$ 时，成立，此时 $a=0$；

当 $B\neq\varnothing$ 时，$a\neq0$，解 $ax=1$ 可得 $x=\frac{1}{a}$.

因为 $B\subseteq A$，所以 $\frac{1}{a}=2$ 或 $\frac{1}{a}=-1$，

解得 $a=\frac{1}{2}$ 或 $a=-1$.

综上可知，$a$ 的值为 $\frac{1}{2}$ 或 $-1$ 或 0.

# 课后素养评价(四)

## 基础落实

**1.**(2025·北京卷)集合 $M=\{x\mid 2x-1>5\}$，$N=\{1,2,3\}$，则 $M\cap N=$　　(　　)

A.$\{1,2,3\}$　　B.$\{2,3\}$

C.$\{3\}$　　D.$\varnothing$

D　**解析**：由题意可知，集合 $M=\{x\mid 2x-1>5\}=\{x\mid x>3\}$，又因为 $N=\{1,2,3\}$，所以 $M\cap N=\varnothing$.故选 D.

**2.**(2024·北京卷)已知集合 $M=\{x\mid -3<x<1\}$，$N=\{x\mid -1\leqslant x<4\}$，则 $M\cup N=$　　(　　)

A.$\{x\mid -1\leqslant x<1\}$　　B.$\{x\mid x>-3\}$

C.$\{x\mid -3<x<4\}$　　D.$\{x\mid x<4\}$

C　**解析**：由集合的并集运算，得 $M\cup N=\{x\mid -3<x<4\}$.

**3.**已知集合 $A=\{-3,-\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},3\}$，且 $B=\{x\mid x\notin\mathbf{Z}$ 且 $x^2\in\mathbf{Z}\}$，则 $A\cap B$ 的元素个数为　　(　　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

C　**解析**：依题意 $-\sqrt{2}\in B$，$\sqrt{3}\in B$，$\sqrt{5}\in B$，$-3\notin B$，$3\notin B$，所以可得 $A\cap B=\{-\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}\}$，则 $A\cap B$ 的元素个数为 3.故选 C.

**4.**(多选)已知集合 $A=\{1,4,a\}$，$B=\{1,2,3\}$，若 $A\cup B=\{1,2,3,4\}$，则实数 $a$ 的取值可以是　　(　　)

A.2　　B.3

C.4　　D.5

AB　**解析**：因为集合 $A=\{1,4,a\}$，$B=\{1,2,3\}$，$A\cup B=\{1,2,3,4\}$，所以 $a$ 的取值可以是 2 或 3.

**5.**已知集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{y\mid y=2x-1,x\in A\}$，则 $A\cap B=$<u>$\{1,3\}$</u>.

**6.**已知集合 $A=\{x\mid x\geqslant 3\}$，$B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 7\}$，$C=\{x\mid x\geqslant a-1\}$.

(1)求 $A\cap B$，$A\cup B$；

(2)若 $C\cup A=A$，求实数 $a$ 的取值范围.

**解**：(1)因为 $A=\{x\mid x\geqslant 3\}$，$B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 7\}$，

所以 $A\cap B=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 7\}$，$A\cup B=\{x\mid x\geqslant 1\}$.

(2)因为 $C\cup A=A$，$A=\{x\mid x\geqslant 3\}$，$C=\{x\mid x\geqslant a-1\}$，

所以 $C\subseteq A$，所以 $a-1\geqslant 3$，即 $a\geqslant 4$.

所以实数 $a$ 的取值范围是 $\{a\mid a\geqslant 4\}$.

## 能力提升

**1.**若集合 $A=\{(x,y)\mid x+y=0\}$，$B=\{(x,y)\mid 2x-y=3\}$，则 $A\cap B=$　　(　　)

A.$\{1,-1\}$　　B.$\{-1,1\}$

C.$\{(1,-1)\}$　　D.$\{(-1,1)\}$

C　**解析**：由 $\begin{cases}x+y=0,\\2x-y=3,\end{cases}$ 解得 $x=1$，$y=-1$，故 $A\cap B=\{(1,-1)\}$.故选 C.

**2.**已知集合 $A=\{x\mid x<-1$ 或 $x>0\}$，$B=\{x\mid m-1<x<m+2\}$，若 $B\cup A=\mathbf{R}$，则实数 $m$ 的取值范围是　　(　　)

A.$\{m\mid m<-2$ 或 $m>0\}$

B.$\{m\mid -3<m<1\}$

C.$\{m\mid -2<m<0\}$

D.$\{m\mid m<-3$ 或 $m>1\}$

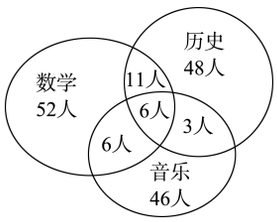
C　**解析**：集合 $A=\{x\mid x<-1$ 或 $x>0\}$，$B=\{x\mid m-1<x<m+2\}$，由 $B\cup A=\mathbf{R}$，

得 $\begin{cases}m-1<-1,\\m+2>0,\end{cases}$

解得 $-2<m<0$.故选 C.

**3.**某年级先后举办了数学、历史、音乐讲座，其中有 75 人听了数学讲座，68 人听了历史讲座，61 人听了音乐讲座，17 人听了数学、历史讲座，12 人听了数学、音乐讲座，9 人听了历史、音乐讲座，6 人听了全部讲座，则听讲座的有<u>　　</u>人.

172　**解析**：由题意，作出 Venn 图，如图所示.




由图可知听讲座的有 52＋48＋46＋11＋6＋3＋6＝172(人).

**4.**已知集合 $A=\{x\mid x^2+4x=0\}$，$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$.

(1)若 $A\cup B=B$，求实数 $a$ 的值；

(2)若 $A\cap B=B$，求实数 $a$ 的取值范围.

**解**：(1)由题意，知 $A=\{-4,0\}$.

若 $A\cup B=B$，则 $B=A=\{-4,0\}$.

由 $\begin{cases}-4+0=-2(a+1),\\(-4)\times 0=a^2-1,\end{cases}$ 解得 $a=1$.

(2)由题意，知 $A=\{-4,0\}$.

若 $A\cap B=B$，则 $B\subseteq A$.

①若 $B$ 为空集，则 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)=8a+8<0$，解得 $a<-1$，符合题意.

②若 $B$ 只有一个元素，则 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)=8a+8=0$，解得 $a=-1$.

将 $a=-1$ 代入方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$，得 $x^2=0$，即 $x=0$，则 $B=\{0\}$，符合题意.

③若 $B=A=\{-4,0\}$，由(1)可知 $a=1$.

综上所述，实数 $a$ 的取值范围为 $\{a\mid a\leqslant -1$，或 $a=1\}$.

## 自我超越

中国古代重要的数学著作《孙子算经》下卷有一题："今有物，不知其数.三三数之，剩二；五五数之，剩三；七七数之，剩二.问：物几何？"现有如下表示：已知 $A=\{x\mid x=3n+2,n\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{x\mid x=5n+3,n\in\mathbf{N}^*\}$，$C=\{x\mid x=7n+2,n\in\mathbf{N}^*\}$.若 $x\in A\cap B\cap C$，则符合题意的整数 $x$ 的值为　(　　)

A.8　　B.127　　C.37　　D.23

D　**解析**：因为 $8=7\times 1+1$，则 $8\notin C$，选项 A 不合题意.

$127=3\times 42+1$，则 $127\notin A$，选项 B 不合题意.

$37=3\times 12+1$，则 $37\notin A$，选项 C 不合题意.

$23=3\times 7+2$，故 $23\in A$；$23=5\times 4+3$，故 $x\in B$；$23=7\times 3+2$，故 $x\in C$，则 $23\in A\cap B\cap C$，选项 D 符合题意.故选 D.

# 第 2 课时　补集及综合应用

**学习任务目标**

**1.**了解全集的含义及符号表示.

**2.**理解补集的含义，并会求给定集合的补集.

**3.**会用 Venn 图、数轴进行集合的运算.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　全集**

(1)定义

一般地，如果一个集合含有所研究问题中涉及的所有元素，那么就称这个集合为全集.

(2)记法

通常记作 $U$.

**知识点二　补集**

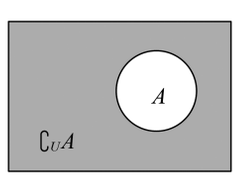
(1)自然语言

对于一个集合 $A$，由全集 $U$ 中不属于集合 $A$ 的所有元素组成的集合称为集合 $A$ 相对于全集 $U$ 的补集，简称为集合 $A$ 的补集，记作 $\complement_U A$.

(2)符号语言

$\complement_U A=\{x\mid x\in U$，且 $x\notin A\}$.

(3)图形语言




### 【概念辨析】

**1.**判断正误(正确的打"√"，错误的打"×").

(1)若在全集 $U$ 中研究问题，则集合 $U$ 没有补集.　(　　)

(2)集合 $A$ 与集合 $A$ 在全集 $U$ 中的补集没有公共元素.　(　　)

(3)在全集 $U$ 中存在元素 $x$，使得 $x\notin A$，且 $x\notin(\complement_U A)$.　(　　)

(4)若 $3\notin A$，则 $3\in\complement_U A$.　(　　)

(1)×　**解析**：全集 $U$ 的补集是空集，即 $\complement_U U=\varnothing$.

(2)√　**解析**:$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$.

(3)×　**解析**:若 $x\in U$,则 $x\notin A$ 与 $x\notin(\complement_U A)$ 二者必有一个成立,不能同时成立.

(4)×　**解析**:根据题意,若 $3\in U$,则必有 $3\in\complement_U A$,若 $3\notin U$,则 $3\notin\complement_U A$.

**2.**设集合 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$,$M=\{1,2,4\}$,则 $\complement_U M=$　(　)

A.$U$　B.$\{1,3,5\}$　C.$\{3,5,6\}$　D.$\{2,4,6\}$

C　**解析**:因为 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$,$M=\{1,2,4\}$,所以 $\complement_U M=\{3,5,6\}$.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1 补集的运算

**1.**(2025·全国Ⅰ卷)已知集合 $U=\{x\mid x$ 是小于 9 的正整数$\}$,$A=\{1,3,5\}$,则 $\complement_U A$ 中元素的个数为　(　)

A.0　B.3

C.5　D.8

C　**解析**:因为 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,$A=\{1,3,5\}$,故 $\complement_U A=\{2,4,6,7,8\}$,故 $\complement_U A$ 中有 5 个元素.故选 C.

**2.**设全集 $U=\{1,2,3,4\}$,集合 $A=\{x\mid x^2-5x+m=0,x\in U\}$.若 $\complement_U A=\{2,3\}$,则 $m=$　(　)

A.4　B.6

C.4 或 6　D.不存在

A　**解析**:由全集 $U=\{1,2,3,4\}$,$\complement_U A=\{2,3\}$,得 $A=\{1,4\}$,即 1,4 是方程 $x^2-5x+m=0$ 的两个根,

于是 $\begin{cases}\Delta=5^2-4m>0,\\1+4=5,\\1\times4=m,\end{cases}$ 解得 $m=4$.

故选 A.

**3.**已知全集 $U=\{x\mid -2<x<4\}$,集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x-1\leqslant1\}$,则 $\complement_U A=$_____.

$\{x\mid -2<x<0$,或 $2<x<4\}$　**解析**:因为 $U=\{x\mid -2<x<4\}$,$A=\{x\mid -1\leqslant x-1\leqslant1\}=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant2\}$,所以 $\complement_U A=\{x\mid -2<x<0$,或 $2<x<4\}$.

**【探究总结】**

**补集运算的原则与方法**

(1)原则:从全集 $U$ 中去掉属于集合 $A$ 的元素后,由所有剩下的元素组成的集合即为 $A$ 的补集 $\complement_U A$.

(2)方法:①若所给的集合是有关不等式的集合,常借助数轴求解;②若所给的集合是用列举法表示的,则可用 Venn 图求解.

### 任务2 集合的综合运算

#### 探究活动

**例 1**　(1)(2024·全国甲卷)已知集合 $A=\{1,2,3,4,5,9\}$,$B=\{x\mid\sqrt{x}\in A\}$,则 $\complement_A(A\cap B)=$　(　)

A.$\{1,4,9\}$　B.$\{3,4,9\}$

C.$\{1,2,3\}$　D.$\{2,3,5\}$

(2)已知全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x\mid x\leqslant0\}$,$B=\{x\mid x\geqslant1\}$,则 $\complement_U(A\cup B)=$　(　)

A.$\{x\mid x\geqslant0\}$

B.$\{x\mid x\leqslant1\}$

C.$\{x\mid 0\leqslant x\leqslant1\}$

D.$\{x\mid 0<x<1\}$

(1)D　**解析**:因为 $A=\{1,2,3,4,5,9\}$,$B=\{x\mid\sqrt{x}\in A\}$,所以 $B=\{1,4,9,16,25,81\}$,

则 $A\cap B=\{1,4,9\}$,$\complement_A(A\cap B)=\{2,3,5\}$.

故选 D.

(2)D　**解析**:由题意可知,$A\cup B=\{x\mid x\leqslant0$,或 $x\geqslant1\}$,所以 $\complement_U(A\cup B)=\{x\mid 0<x<1\}$.

**【探究总结】**

**集合的运算技巧**

(1)若所给集合是有限集,则先把集合中的元素一一列举出来,然后结合交集、并集、补集的定义来求解.在解答过程中常常借助 Venn 图.这样处理起来,相对来说比较直观、形象且解答时不易出错.

(2)若所给集合是无限集,则常借助数轴,把已知集合及全集分别表示在数轴上,然后进行交集、并集、补集的运算.解答过程中要注意边界问题.

#### 应用迁移

**1.**(教材 P13 练习题 2 改编)(多选)已知 $S=\{x\mid x$ 是平行四边形或梯形$\}$,$A=\{x\mid x$ 是平行四边形$\}$,$B=\{x\mid x$ 是菱形$\}$,$C=\{x\mid x$ 是矩形$\}$,下列等式成立的是　(　)

A.$B\cap C=\{x\mid x$ 是正方形$\}$

B.$\complement_A B=\{x\mid x$ 是邻边不相等的平行四边形$\}$

C.$\complement_S A=\{x\mid x$ 是梯形$\}$

D.$A=B\cup C$

ABC　**解析**:根据平行四边形、矩形、菱形、正方形和梯形的概念知,选项 A,B,C 成立,选项 D 不成立.

**2.**(多选)若全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$,集合 $M=\{1,4\}$,$N=\{2,3\}$,则集合 $\{5,6\}=$　(　)

A.$(\complement_U M)\cup(\complement_U N)$　B.$\complement_U(M\cup N)$

C.$\complement_{(\complement_U M)}N$　D.$\complement_{(\complement_U N)}M$

BCD　**解析**：$\complement_U M=\{2,3,5,6\}$，$\complement_U N=\{1,4,5,6\}$，故$(\complement_U M)\cup(\complement_U N)=\{1,2,3,4,5,6\}$，故A错误；$M\cup N=\{1,2,3,4\}$，故$\complement_U(M\cup N)=\{5,6\}$，故B正确；$\complement_U M=\{2,3,5,6\}$，故$\complement_{(\complement_U M)}N=\{5,6\}$，故C正确；$\complement_U N=\{1,4,5,6\}$，故$\complement_{(\complement_U N)}M=\{5,6\}$，故D正确.故选BCD.

## 任务3 与补集相关的参数问题

### 探究活动

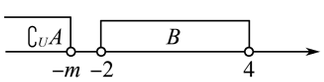
**例2**　(1)设$U=\{0,1,2,3\}$，$A=\{x\in U\mid x^2+mx=0\}$.若$\complement_U A=\{1,2\}$，则实数$m=$_____.

(2)设集合$A=\{x\mid x+m\geqslant 0\}$，$B=\{x\mid -2<x<4\}$，全集$U=\mathbf{R}$，且$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$，求实数$m$的取值范围.

(1)$-3$　**解析**：因为$\complement_U A=\{1,2\}$，所以$A=\{0,3\}$.所以$9+3m=0$，解得$m=-3$.

(2)**解**：(方法一：直接法)由$A=\{x\mid x+m\geqslant 0\}=\{x\mid x\geqslant -m\}$，得$\complement_U A=\{x\mid x<-m\}$.

因为$B=\{x\mid -2<x<4\}$，$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$，在数轴上画出图形如图所示，

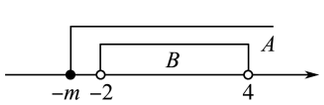



所以$-m\leqslant -2$，即$m\geqslant 2$.

所以$m$的取值范围是$\{m\mid m\geqslant 2\}$.

(方法二：集合间的关系)由$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$，可知$B\subseteq A$.

又$B=\{x\mid -2<x<4\}$，$A=\{x\mid x+m\geqslant 0\}=\{x\mid x\geqslant -m\}$，结合如图所示的数轴，得$-m\leqslant -2$，即$m\geqslant 2$.




所以$m$的取值范围是$\{m\mid m\geqslant 2\}$.

[一题多思]

**思考1.**将本例(2)中的条件“$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$”改为“$(\complement_U A)\cap B=B$”，其他条件不变，求$m$的取值范围.

**提示**：由已知得$A=\{x\mid x\geqslant -m\}$，所以$\complement_U A=\{x\mid x<-m\}$.又$(\complement_U A)\cap B=B$，所以$B\subseteq\complement_U A$，所以$-m\geqslant 4$，解得$m\leqslant -4$.所以$m$的取值范围是$\{m\mid m\leqslant -4\}$.

**思考2.**将本例(2)中的条件“$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$”改为“$(\complement_U B)\cup A=\mathbf{R}$”，其他条件不变，求$m$的取值范围.

**提示**：由已知得$A=\{x\mid x\geqslant -m\}$，$\complement_U B=\{x\mid x\leqslant -2$，或$x\geqslant 4\}$.又$(\complement_U B)\cup A=\mathbf{R}$，所以$-m\leqslant -2$，解得$m\geqslant 2$.所以$m$的取值范围是$\{m\mid m\geqslant 2\}$.

### 【探究总结】

**由集合的补集求参数的方法**

(1)由补集求参数问题，若集合中元素个数有限，可利用补集的定义求解.

(2)与集合的交集、并集、补集运算有关的求参数问题，若集合中元素个数无限，一般利用数轴分析求解.

### 应用迁移

**1.**已知$U=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{|2a-1|,2\}$，$\complement_U A=\{5\}$，则实数$a=$_____.

2　**解析**：由题意知，$a^2+2a-3=5$，

解得$a=-4$或$a=2$.

当$a=-4$时，$|2a-1|=9$，

而$9\notin U$，所以$a=-4$不满足题意，舍去；

当$a=2$时，$|2a-1|=3$，此时，$U=\{2,3,5\}$，$A=\{2,3\}$，满足题意.

故实数$a$的值为2.

**2.**已知集合$A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid 1<x<3\}$，$C=\{x\mid x<m\}$，$U=\mathbf{R}$.

(1)求$A\cup B$，$(\complement_U A)\cap B$；

(2)若$A\cap C\neq\varnothing$，求$m$的取值范围.

**解**：(1)因为$A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid 1<x<3\}$，

所以$A\cup B=\{x\mid -2\leqslant x<3\}$.

由$\complement_U A=\{x\mid x<-2$，或$x>2\}$，

得$(\complement_U A)\cap B=\{x\mid 2<x<3\}$.

(2)因为$A\cap C\neq\varnothing$，且$C=\{x\mid x<m\}$，

所以$m>-2$.所以$m$的取值范围是$\{m\mid m>-2\}$.

# 课后素养评价(五)

## 基础落实

**1.**已知全集$U=\{-2,-1,0,1,2\}$，集合$A=\{x\mid x^2=2x\}$，则$\complement_U A=$　(　　)

A.$\{-2,-1,1\}$　　B.$\{-1,0,1\}$

C.$\{1,2\}$　　D.$\{0,-1\}$

A　**解析**：因为全集$U=\{-2,-1,0,1,2\}$，$A=\{x\mid x^2=2x\}=\{0,2\}$，所以$\complement_U A=\{-2,-1,1\}$.故选A.

**2.**已知集合$A=\{x\in\mathbf{N}\mid -2<x\leqslant 5\}$，$B=\{x\mid x-3>0\}$，则$(\complement_{\mathbf{R}}B)\cap A=$　(　　)

A.$\{1,2,3\}$　　B.$\{-2,-1,0\}$

C.$\{0,1,2,3\}$　　D.$\{-1,0,1,2,3\}$

C　**解析**：因为 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid -2<x\leqslant 5\}=\{0,1,2,3,4,5\}$，$B=\{x\mid x-3>0\}=\{x\mid x>3\}$，所以 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid x\leqslant 3\}$，故 $(\complement_{\mathbf{R}}B)\cap A=\{0,1,2,3\}$.故选 C.

**3.**(多选)已知集合 $M=\{-1,0,1\}$，$N=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$，则下列结论正确的是　　(AD)

A.$M\subseteq N$

B.$N\subseteq M$

C.$M\cup N=\{-1,0,1,2\}$

D.$M\cap(\complement_{\mathbf{R}}N)=\varnothing$

**4.**设全集为 $\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid 3\leqslant x<7\}$，$B=\{x\mid 2<x<10\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=$_____，$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=$_____.

$\{x\mid x\leqslant 2$，或 $x\geqslant 10\}$　$\{x\mid 2<x<3$，或 $7\leqslant x<10\}$

**解析**：由题意知，$A\cup B=\{x\mid 2<x<10\}$，

所以 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=\{x\mid x\leqslant 2$，或 $x\geqslant 10\}$.

又 $\complement_{\mathbf{R}}A=\{x\mid x<3$，或 $x\geqslant 7\}$，

所以 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{x\mid 2<x<3$，或 $7\leqslant x<10\}$.

**5.**已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid 2a\leqslant x\leqslant a+3\}$，$B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$.

(1)当 $a=0$ 时，求 $A\cap B$，$A\cup B$；

(2)若 $A\cup(\complement_U B)=\mathbf{R}$，求实数 $a$ 的取值范围.

**解**：(1)因为 $a=0$，所以 $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$，

所以 $A\cap B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$，$A\cup B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$.

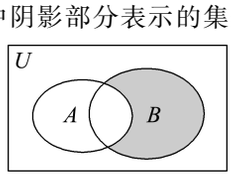
(2)由 $A\cup(\complement_U B)=\mathbf{R}$，得 $B\subseteq A$，

得 $\begin{cases}2a\leqslant -1,\\ a+3\geqslant 1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a\leqslant -\dfrac{1}{2},\\ a\geqslant -2,\end{cases}$ 所以 $-2\leqslant a\leqslant -\dfrac{1}{2}$.

故实数 $a$ 的取值范围为 $\left\{a\,\middle|\,-2\leqslant a\leqslant -\dfrac{1}{2}\right\}$.

## 能力提升

**1.**如图所示，$U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4,5\}$，则图中阴影部分表示的集合是　　(　　)




A.$\{3\}$　　B.$\{1,2\}$

C.$\{4,5\}$　　D.$\{1,2,4,5\}$

C　**解析**：因为 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4,5\}$，所以 $A\cap B=\{3\}$，所以 $\complement_B(A\cap B)=\{4,5\}$.故选 C.

**2.**设 $U=\{1,2,3,4,5\}$，若 $A\cap B=\{2\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{4\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{1,5\}$，则下列结论正确的是　　(　　)

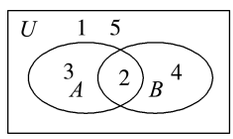
A.$3\notin A$ 且 $3\notin B$

B.$3\in A$ 且 $3\notin B$

C.$3\notin A$ 且 $3\in B$

D.$3\in A$ 且 $3\in B$

B　**解析**：由题意，画出 Venn 图如图所示，



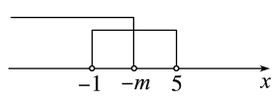

所以 $A=\{2,3\}$，$B=\{2,4\}$，故 $3\in A$ 且 $3\notin B$.

**3.**设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x+m\geqslant 0\}$，$B=\{x\mid -1<x<5\}$，且 $(\complement_U A)\cap B\neq\varnothing$，则实数 $m$ 的取值范围为_____.

$\{m\mid m<1\}$　**解析**：由已知得 $A=\{x\mid x\geqslant -m\}$，则 $\complement_U A=\{x\mid x<-m\}$.

因为 $B=\{x\mid -1<x<5\}$，且 $(\complement_U A)\cap B\neq\varnothing$，

如图，




则 $-m>-1$，即 $m<1$.

则实数 $m$ 的取值范围为 $\{m\mid m<1\}$.

**4.**设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x\leqslant -2$，或 $x\geqslant 5\}$，$B=\{x\mid x\leqslant 2\}$.

(1)求 $\complement_U(A\cup B)$；

(2)记 $\complement_U(A\cup B)=D$，$C=\{x\mid 2a-3\leqslant x\leqslant -a\}$，且 $C\cap D=C$，求实数 $a$ 的取值范围.

**解**：(1)因为 $A=\{x\mid x\leqslant -2$，或 $x\geqslant 5\}$，$B=\{x\mid x\leqslant 2\}$，所以 $A\cup B=\{x\mid x\leqslant 2$，或 $x\geqslant 5\}$.

又全集 $U=\mathbf{R}$，则 $\complement_U(A\cup B)=\{x\mid 2<x<5\}$.

(2)由(1)得 $D=\{x\mid 2<x<5\}$.

由 $C\cap D=C$，得 $C\subseteq D$.

①当 $C=\varnothing$ 时，有 $-a<2a-3$，解得 $a>1$；

②当 $C\neq\varnothing$ 时，有 $\begin{cases}2a-3\leqslant -a,\\ 2a-3>2,\\ -a<5,\end{cases}$ 解得 $a\in\varnothing$.

综上，$a$ 的取值范围为 $\{a\mid a>1\}$.

## 自我超越

已知全集 $U=\mathbf{N}^*$，集合 $M$ 满足：$1\in M$，且当 $n-1\in M$ 时必有 $n\in M$，则 $\complement_U M=$_____.

$\varnothing$　**解析**：若 $M$ 为 $\mathbf{N}^*$ 的真子集，则 $\complement_U M$ 为由部分正整数组成的非空集合，故 $\complement_U M$ 中存在最小元素 $m$，故 $m\notin M$，从而 $m\neq 1$，于是 $m-1\in\mathbf{N}^*$.

因为 $m-1<m$，若 $m-1\in M$，则由 $M$ 的性质可知 $m\in M$，这与 $m\notin M$ 矛盾.

所以 $m-1\in\complement_U M$，但这又与 $m$ 是 $\complement_U M$ 中的最小元素矛盾，所以 $M$ 不是 $\mathbf{N}^*$ 的真子集，即 $M=\mathbf{N}^*$，则 $\complement_U M=\varnothing$.

# 微专题培优(一)　集合中的新定义问题

集合的新定义问题是指引入新的概念、符号、运算或法则，在此背景下完成某种推理或指定要求的集合问题.这类题目要求学生根据这些新定义进行推理和计算，通常涉及集合的运算、性质以及与其他概念的结合，意在考查学生处理新问题的能力、转化与化归能力以及运算求解能力.常见的考点包括集合的定义、集合的运算、集合与元素的关系等.

## 类型1 集合概念的新定义问题

**例1**　已知有限集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$，定义集合 $B=\{a_i+a_j\mid 1\leqslant i<j\leqslant n,i,j\in\mathbf{N}^*\}$ 中的元素个数为集合 $A$ 的“容量”，记为 $L(A)$.若集合 $A=\{x\in\mathbf{N}^*\mid 1\leqslant x\leqslant 4\}$，则 $L(A)=$_____；若集合 $A=\{x\in\mathbf{N}^*\mid 1\leqslant x\leqslant 2n,n\in\mathbf{N}^*\}$，且 $L(A)=8\ 089$，则正整数 $n$ 的值是_____.

5　2 023　**解析**：因为 $A=\{x\in\mathbf{N}^*\mid 1\leqslant x\leqslant 4\}=\{1,2,3,4\}$，所以 $B=\{3,4,5,6,7\}$，所以 $L(A)=5$.因为 $A=\{x\in\mathbf{N}^*\mid 1\leqslant x\leqslant 2n,n\in\mathbf{N}^*\}=\{1,2,3,\cdots,2n-1,2n(n\in\mathbf{N}^*)\}$，

易知集合 $A$ 中任意两个元素和的最小值是 $1+2=3$，最大值是 $2n-1+2n=4n-1$，

且对任意 $k\in\mathbf{N}^*$，$3\leqslant k\leqslant 4n-1$，都存在 $a_i,a_j\in A$，使得 $a_i+a_j=k$，所以 $L(A)=4n-1-3+1=4n-3$，由 $4n-3=8\ 089$，解得 $n=2\ 023$.

**【规律方法】**

**1.**严格遵循题目所给定的新定义，明确新集合中元素的构成条件、特征或取值范围.一般而言，需从文字表述里提炼关键约束条件，并将其转化为数学条件.

**2.**通过列举简单、特殊的集合实例检验是否符合定义，从而理解定义的本质，并验证相关结论.

**3.**充分考虑空集等特殊情形，尤其注意定义中是否隐含“非空”“互异”等条件，避免遗漏.

**【对点训练】**

集合 $U=\{0,1,2,3,4,5\}$，$A$ 是 $U$ 的子集，当 $x\in A$ 时，若有 $x-1\notin A$ 且 $x+1\notin A$，则称 $x$ 为 $A$ 的一个“孤立元素”，那么 $U$ 的子集中无“孤立元素”且含有四个元素的集合个数是　(　)

A.5　　B.6　　C.7　　D.8

B　**解析**：因为 $U=\{0,1,2,3,4,5\}$，其中不含“孤立元素”且包含有四个元素的集合有 $\{0,1,2,3\}$，$\{0,1,3,4\}$，$\{0,1,4,5\}$，$\{1,2,3,4\}$，$\{1,2,4,5\}$，$\{2,3,4,5\}$，共6个，所以 $U$ 中无“孤立元素”的包含有四个元素的子集的个数是6.故选B.

## 类型2 集合性质的新定义问题

**例2**　对于给定的非空集合 $A$，定义集合 $A^+=\{x\mid x=|a+b|,a\in A,b\in A\}$，$A^-=\{x\mid x=|a-b|,a\in A,b\in A\}$，当 $A^+\cap A^-=\varnothing$ 时，称 $A$ 具有孪生性质.

(1)判断集合 $A=\{0,4\}$，$B=\{1,5,6\}$ 是否具有孪生性质，并说明理由；

(2)设集合 $C=\{x\mid n\leqslant x\leqslant 2\ 025,x\in\mathbf{N},n\in\mathbf{N}$ 且 $n\leqslant 2\ 025\}$，若 $C$ 具有孪生性质，求 $n$ 的最小值；

(3)设集合 $D=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，$x_1<x_2<x_3<x_4$，若 $D^-=D$，求证：$x_1+x_4=x_2+x_3$.

(1)**解**：由题意，可得 $A^+=\{0,4,8\}$，$A^-=\{0,4\}$，

$B^+=\{2,6,7,10,11,12\}$，$B^-=\{0,1,4,5\}$，

而 $A^+\cap A^-=\{0,4\}\neq\varnothing$，$B^+\cap B^-=\varnothing$，

所以 $A$ 不具有孪生性质，$B$ 具有孪生性质.

(2)**解**：由题意，可得 $C^-=\{0,1,2,\cdots,2\ 025-n\}$，

$C^+=\{2n,2n+1,\cdots,n+2\ 025,\cdots,4\ 050\}$.

因为 $C^+\cap C^-=\varnothing$，所以 $2\ 025-n<2n$，即 $n>\dfrac{2\ 025}{3}=675$.

又因为 $n\in\mathbf{N}$，所以 $n$ 的最小值是676.

(3)**证明**：集合 $D=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，$x_1<x_2<x_3<x_4$，

则 $0,x_2-x_1,x_3-x_1,x_4-x_1,x_3-x_2,x_4-x_2,x_4-x_3$ 都属于集合 $D^-$.

由题意可知 $0<x_2-x_1<x_3-x_1<x_4-x_1$，且 $x_3-x_2<x_4-x_2>x_4-x_3$.

由于0一定是 $D^-$ 中的元素，结合 $D^-=D$，可知 $x_1=0$，

此时 $D=\{0,x_2,x_3,x_4\}$，故 $0,x_2,x_3,x_4,x_3-x_2,x_4-x_2,x_4-x_3$ 都属于集合 $D^-$.

由于 $D^-=D$，且 $0<x_2<x_3<x_4$，

因此 $x_3-x_2,x_4-x_2,x_4-x_3$ 与 $x_2,x_3,x_4$ 中的某一个元素相等.

因为 $0<x_4-x_3<x_4-x_2,x_3-x_2<x_4-x_2$，

所以 $x_4-x_2$ 是 $x_3-x_2$，$x_4-x_2$，$x_4-x_3$ 三者中的最大者，

故 $x_4-x_2$ 只能与 $x_2$ 或 $x_3$ 相等.

又 $x_4-x_3\neq0$，$x_3-x_2\neq0$，

所以 $x_4-x_2=x_3$，且 $x_3-x_2=x_4-x_3=x_2$，

所以 $x_1+x_4=x_2+x_3$.

**【规律方法】**

1. 回归集合基本性质，将新性质与集合元素的确定性、互异性、无序性以及集合的包含关系、相等关系等结合分析，常需证明或判断集合之间的关系.
2. 对涉及多个集合关系的新性质，优先通过 Venn 图或数轴进行直观分析，寻找反例或验证结论.

**【对点训练】**

已知集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}(0\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_n,n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant3)$ 具有性质 $P$：对任意 $i,j(1\leqslant i\leqslant j\leqslant m)$，$a_i+a_j$ 与 $a_j-a_i$ 至少有一个属于 $A$.

(1)分别判断集合 $M=\{0,2,4\}$ 与 $N=\{1,2,3\}$ 是否具有性质 $P$，并说明理由；

(2)证明：$0\in A$；

(3)$A=\{a_1,a_2,a_3\}$ 具有性质 $P$，当 $a_2=4$ 时，求集合 $A$.

(1)**解**：集合 $M=\{0,2,4\}$ 具有性质 $P$，集合 $N=\{1,2,3\}$ 不具有性质 $P$.

理由如下：

对集合 $M=\{0,2,4\}$，因为 $2-0=2$，$4-2=2$，$4-0=4$，$0-0=0$，$2-2=0$，$4-4=0$ 均属于 $M$，

所以集合 $M$ 具有性质 $P$；

对集合 $N=\{1,2,3\}$，因为 $2+2=4\notin N$，$2-2=0\notin N$，

所以集合 $N$ 不具有性质 $P$.

(2)**证明**：因为 $a_n+a_n>a_n$，所以 $a_n+a_n\notin A$，则 $a_n-a_n\in A$，故 $0\in A$.

故得证.

(3)**解**：由于 $a_3+a_3>a_3$，所以 $a_3+a_3\notin A$，故 $a_3-a_3=0\in A$，所以 $a_1=0$.

又 $a_2+a_3>a_3$，所以 $a_2+a_3\notin A$，故 $a_3-a_2\in A$.

又 $0<a_3-a_2<a_3$，故 $a_3-a_2=a_2$，

所以 $a_3=2a_2=8$.

因此集合 $A=\{0,4,8\}$.

## 类型3 集合运算的新定义问题

**例3**　设 $P=\{1,2,3,4\}$，$Q=\{4,5,6,7,8\}$，定义 $P*Q=\{(a,b)\mid a\in P,b\in Q,a\neq b\}$，则 $P*Q$ 中元素的个数为　　(　　)

A.4　　B.5

C.19　　D.20

C　**解析**：当 $a=1$ 时，集合 $P*Q$ 中的元素为 $(1,4)$，$(1,5)$，$(1,6)$，$(1,7)$，$(1,8)$ 共 5 个；

当 $a=2$ 时，集合 $P*Q$ 中的元素为 $(2,4)$，$(2,5)$，$(2,6)$，$(2,7)$，$(2,8)$ 共 5 个；

当 $a=3$ 时，集合 $P*Q$ 中的元素为 $(3,4)$，$(3,5)$，$(3,6)$，$(3,7)$，$(3,8)$ 共 5 个；

当 $a=4$ 时，集合 $P*Q$ 中的元素为 $(4,5)$，$(4,6)$，$(4,7)$，$(4,8)$ 共 4 个.

所以集合 $P*Q$ 中元素的个数为 $5+5+5+4=19$.故选 C.

**【规律方法】**

1. 将新定义的运算通过定义逐步拆解为交、并、补等基本运算，或用描述法表示结果集合的元素特征.
2. 合理判断新定义的运算是否满足交换律、结合律、分配律等运算律.
3. 选取代表元素进行分类讨论，明确运算结果与元素位置、集合顺序等是否相关.对于含参数的问题，需注意参数对运算结果的影响，并分情况讨论.

**【对点训练】**

(多选)对任意集合 $A,B\subseteq\mathbf{R}$，记 $A\oplus B=\{x\mid x\in A\cup B$ 且 $x\notin A\cap B\}$，称 $A\oplus B$ 为集合 $A,B$ 的对称差，例如，若 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{1,2,3\}$，则 $A\oplus B=\{0,3\}$.下列命题为真命题的是　　(　　)

A.若 $A,B\subseteq\mathbf{R}$ 且 $A\oplus B=\varnothing$，则 $A=B$

B.若 $A,B\subseteq\mathbf{R}$ 且 $A\oplus B=B$，则 $A=\varnothing$

C.存在 $A,B\subseteq\mathbf{R}$，使得 $A\oplus B=(\complement_U A)\oplus(\complement_U B)$

D.若 $A,B\subseteq\mathbf{R}$ 且 $A\oplus B\subseteq A$，则 $A\subseteq B$

ABC　**解析**：对于 A，因为 $A\oplus B=\varnothing$，所以 $\varnothing=\{x\mid x\in A\cup B$ 且 $x\notin A\cap B\}$，即 $A\cup B$ 与 $A\cap B$ 是相同的，所以 $A=B$，故选项 A 为真命题；

对于 B，因为 $A\oplus B=B$，所以 $B=\{x\mid x\in A\cup B$ 且 $x\notin A\cap B\}$，所以 $A\subseteq B$，且 $B$ 中的元素不能出现在 $A\cap B$ 中，因此 $A=\varnothing$，故选项 B 为真命题；

对于 C，$A=B$ 时，$A\oplus B=\varnothing$，$(\complement_U A)\oplus(\complement_U B)=\varnothing=A\oplus B$，故选项 C 为真命题；

对于 D，因为 $A\oplus B\subseteq A$，所以 $\{x\mid x\in A\cup B$ 且 $x\notin A\cap B\}\subseteq A$，所以 $B\subseteq A$，故选项 D 为假命题.

故选 ABC.

# 1.4　充分条件与必要条件

## 1.4.1　充分条件与必要条件

**学习任务目标**

1.理解充分条件、必要条件的概念，能进行充分条件、必要条件的判断.
2.了解充分条件与判定定理、必要条件与性质定理的关系.
3.能通过充分性、必要性解决简单的问题.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　充分条件与必要条件**

对于形如“若 $p$，则 $q$”的命题，有如下结论：

| 命题真假 | 真命题 | 假命题 |
|---|---|---|
| 推出关系 | 由 $p$ 可以推出 $q$ | 由 $p$ 推不出 $q$ |
| 记法 | $p\Rightarrow q$ | $p\not\Rightarrow q$ |
| 读法 | $p$ 推出 $q$ | $p$ 推不出 $q$ |
| 条件关系 | $p$ 是 $q$ 的充分条件，$q$ 是 $p$ 的必要条件 | $p$ 不是 $q$ 的充分条件，$q$ 不是 $p$ 的必要条件 |

**知识点二　定理关系**

(1)数学中的每一条判定定理都给出了相应数学结论成立的一个充分条件.
(2)数学中的每一条性质定理都给出了相应数学结论成立的一个必要条件.

### 【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).
(1)若 $p\Rightarrow q$，则 $p$ 的充分条件是 $q$.　(　　)
(2)若 $q$ 是 $p$ 的必要条件，则 $q$ 是唯一的.　(　　)
(3)如果“若 $q$，则 $p$”是真命题，那么 $p$ 是 $q$ 的必要条件.　(　　)
(4)如果“若 $p$，则 $q$”为假命题，那么 $p$ 不是 $q$ 的充分条件，但 $q$ 可以是 $p$ 的必要条件.　(　　)

(1)×　**解析**：若 $p\Rightarrow q$，则 $p$ 是 $q$ 的充分条件.
(2)×　**解析**：给定条件 $p$，由 $p$ 可以推出的结论 $q$ 是不唯一的.
(3)√
(4)×　**解析**：“若 $p$，则 $q$”为假命题，则 $p$ 不是 $q$ 的充分条件，$q$ 不是 $p$ 的必要条件.

2.“四边形的四条边相等”是“四边形是正方形”的(　　)
A.充分条件
B.必要条件
C.既是充分条件又是必要条件
D.既不是充分条件也不是必要条件

B　**解析**：因为正方形的四条边相等，但四条边相等的四边形不一定是正方形，所以“四边形的四条边相等”是“四边形是正方形”的必要条件.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1　充分条件的判断与探求

1.(教材 P18 例 1(1)改编)在平面内，下列条件是“四边形是矩形”的充分条件的是(　　)
A.四边形是平行四边形且对角线相等
B.四边形两组对边分别相等
C.四边形的对角线互相平分
D.四边形的对角线互相垂直

A　**解析**：若四边形是平行四边形且对角线相等，则四边形是矩形.故选 A.

2.(多选)下列选项中，$p$ 是 $q$ 的充分条件的是(　　)
A.$p$：$(x-2)(x-3)=0$，$q$：$x-2=0$
B.在$\triangle ABC$ 中，$p$：$\angle B>\angle C$，$q$：$AC>AB$
C.$p$：$m>-\frac{1}{4}$，$q$：方程 $x^2-x-m=0$ 无实数根
D.$p$：$x>2$，$q$：$x>1$

BD　**解析**：选项 A，因为$(x-2)(x-3)=0$，所以 $x=2$ 或 $x=3$，不能推出 $x-2=0$，所以 $p$ 不是 $q$ 的充分条件.选项 B，在$\triangle ABC$ 中，由大角对大边知，$\angle B>\angle C\Rightarrow AC>AB$，所以 $p$ 是 $q$ 的充分条件.选项 C，当 $m>-\frac{1}{4}$ 时，$\Delta=1^2+4m>0$，方程$x^2-x-m=0$ 有两个不相等的实根，所以 $p$ 不是 $q$ 的充分条件.选项 D，设集合 $A=\{x\mid x>2\}$，$B=\{x\mid x>1\}$，则 $A\subseteq B$，所以 $p$ 是 $q$ 的充分条件.

3.(多选)“$0<x<3$”的充分条件可以是　　(　　)

A.$-1<x\leqslant 3$　　B.$0\leqslant x<3$

C.$0<x\leqslant 2$　　D.$1<x<2$

CD　**解析**:从集合观点看,求 $0<x<3$ 成立的一个充分条件,就是从选项 A,B,C,D 中选出集合$\{x|0<x<3\}$的子集.由于$\{x|0<x\leqslant 2\}\subseteq\{x|0<x<3\}$,$\{x|1<x<2\}\subseteq\{x|0<x<3\}$,故 C,D 正确.故选 CD.

## 【探究总结】

**1.定义法判断充分条件的步骤**

(1)分清条件 $p$ 与结论 $q$.

(2)判断条件 $p$ 能否推出结论 $q$.

(3)下结论:

若条件 $p\Rightarrow$结论 $q$,则 $p$ 是 $q$ 的充分条件;

若条件 $p\not\Rightarrow$结论 $q$,则 $p$ 不是 $q$ 的充分条件.

**2.集合法判断充分条件**

已知 $A=\{x|x$ 满足条件 $p\}$,$B=\{x|x$ 满足条件 $q\}$,若 $A\subseteq B$,则 $p$ 是 $q$ 的充分条件.

## 任务2 必要条件的判断与探求

### 探究活动

**例 1**　在下列各题中,$q$ 是 $p$ 的必要条件吗?

(1)$p:|x|=|y|$,$q:x=y$;

(2)$p:\triangle ABC$ 是直角三角形,$q:\triangle ABC$ 是等腰三角形;

(3)$p:x=1$,$q:x-1=\sqrt{x-1}$;

(4)$p:-2\leqslant x\leqslant 5$,$q:-1\leqslant x\leqslant 5$;

(5)$p:x$ 是自然数,$q:x$ 是正整数;

(6)$p:$三角形是等边三角形,$q:$三角形是等腰三角形.

**解**:(1)若$|x|=|y|$,则 $x=y$ 或 $x=-y$,

所以 $p\not\Rightarrow q$,所以 $q$ 不是 $p$ 的必要条件.

(2)直角三角形不一定是等腰三角形,

所以 $p\not\Rightarrow q$,所以 $q$ 不是 $p$ 的必要条件.

(3)当 $x=1$ 时,$x-1=\sqrt{x-1}=0$,

所以 $p\Rightarrow q$,所以 $q$ 是 $p$ 的必要条件.

(4)当 $x=-2$ 时,$-2\leqslant x\leqslant 5$ 成立,但是 $-1\leqslant x\leqslant 5$ 不成立,所以 $p\not\Rightarrow q$,所以 $q$ 不是 $p$ 的必要条件.

(5)0 是自然数,但是 0 不是正整数,所以 $p\not\Rightarrow q$,所以 $q$ 不是 $p$ 的必要条件.

(6)等边三角形一定是等腰三角形,所以 $p\Rightarrow q$,所以 $q$ 是 $p$ 的必要条件.

## 【探究总结】

**1.定义法判断必要条件的步骤**

(1)分清条件 $p$ 与结论 $q$.

(2)判断结论 $q$ 能否推出条件 $p$.

(3)下结论:

若结论 $q\Rightarrow$条件 $p$,则 $p$ 是 $q$ 的必要条件;

若结论 $q\not\Rightarrow$条件 $p$,则 $p$ 不是 $q$ 的必要条件.

**2.集合法判断必要条件**

已知 $A=\{x|x$ 满足条件 $p\}$,$B=\{x|x$ 满足条件 $q\}$.若 $B\subseteq A$,则 $p$ 是 $q$ 的必要条件.

### 应用迁移

**1.**(多选)下列命题中为真命题的是　　(　　)

A.“$x>2$”是“$x>3$”的必要条件

B.“$x=2$”是“$x^2=4$”的必要条件

C.“$A\cup B=A$”是“$A\cap B=B$”的必要条件

D.“$a>b$”是“$ac>bc$”的必要条件

AC　**解析**:因为 $x>3\Rightarrow x>2$,所以 A 是真命题;因为 $x=2\Rightarrow x^2=4$,$x^2=4\not\Rightarrow x=2$,所以 B 是假命题;因为 $A\cap B=B\Rightarrow A\cup B=A$,所以 C 是真命题;因为 $q\not\Rightarrow p$,所以 $p$ 不是 $q$ 的必要条件,D 是假命题.故选 AC.

**2.**(多选)下列条件中,是“$x+1>0$”的必要条件的是　　(　　)

A.$x>2$　　B.$x>-2$

C.$x>-4$　　D.$x>0$

BC　**解析**:由 $x+1>0$,得 $x>-1$.

当 $x=0$ 时,$x>-1$ 成立,但是推不出 $x>2$ 成立,故选项 A 错误;

$x>-1$ 成立必定可以推出 $x>-2$ 成立,故选项 B 正确;

$x>-1$ 成立必定可以推出 $x>-4$ 成立,故选项 C 正确;

当 $x=-0.5$ 时,$x>-1$ 成立,但是推不出 $x>0$ 成立,故选项 D 错误.故选 BC.

## 任务3 利用充分条件、必要条件求参数范围

### 探究活动

**例 2**　(1)若“$x>1$”是“$x>a$”的充分条件,则实数 $a$ 的取值范围是_____.

(2)已知集合 $P=\{x|-2<x<1\}$,$Q=\{x|3m-2\leqslant x\leqslant 5m+2,m\in\mathbf{R}\}$.若“$x\in Q$”是“$x\in P$”的必要条件,求实数 $m$ 的取值范围.

(1)$\{a|a\leqslant 1\}$　**解析**:因为 $x>1\Rightarrow x>a$,所以 $a\leqslant 1$.

(2)**解**:由题意,得 $P$ 是 $Q$ 的子集,则

$$\begin{cases}3m-2<5m+2,\\3m-2\leqslant -2,\\5m+2\geqslant 1,\end{cases}\quad\text{解得}-\frac{1}{5}\leqslant m\leqslant 0.$$

所以实数 $m$ 的取值范围是$\left\{m\left|-\frac{1}{5}\leqslant m\leqslant 0\right.\right\}$.

[一题多思]

**思考 1.**本例(1)中,若把“充分条件”改为“必要条件”,则实数 $a$ 的取值范围是怎样的?

**提示**:因为 $x>a\Rightarrow x>1$,所以 $a\geqslant 1$.故答案为$\{a|a\geqslant 1\}$.

**思考 2.** 本例(2)中，若 $P=\{x\mid -2<x<4\}$，集合 $Q$ 不变，“$x\in Q$”是“$x\in P$”的充分条件，则实数 $m$ 的取值范围是怎样的？

**提示：** 已知“$x\in Q$”是“$x\in P$”的充分条件，则 $Q$ 是 $P$ 的子集.

当 $3m-2>5m+2$，即 $m<-2$ 时，$Q=\varnothing$，满足题意；

当 $3m-2\leqslant 5m+2$，即 $m\geqslant -2$ 时，

由题意得 $\begin{cases}3m-2>-2,\\5m+2<4,\end{cases}$ 解得 $0<m<\frac{2}{5}$.

综上，实数 $m$ 的取值范围是 $\left\{m\,\middle|\,m<-2,\text{或 }0<m<\frac{2}{5}\right\}$.

## 【探究总结】

利用充分条件与必要条件求参数的取值范围问题，常用集合法求解，一般步骤如下：

(1)化简集合 $A=\{x\mid p(x)\}$ 和 $B=\{x\mid q(x)\}$.

(2)根据 $p(x)$ 与 $q(x)$ 的关系(充分条件、必要条件)，得出集合 $A$ 与 $B$ 之间的包含关系.

(3)列出相关不等式(组)，可借助数轴分析.

(4)化简，求出参数的取值范围.

## 应用迁移

**1.** 已知 $p:1\leqslant x<4$，$q:x<m$. 若 $p$ 是 $q$ 的充分条件，则实数 $m$ 的取值范围为　(　　)

A.$\{m\mid m>4\}$　　B.$\{m\mid m<4\}$

C.$\{m\mid m\leqslant 4\}$　　D.$\{m\mid m\geqslant 4\}$

D　**解析：** 令 $A=\{x\mid 1\leqslant x<4\}$，$B=\{x\mid x<m\}$，因为 $p$ 是 $q$ 的充分条件，所以 $p\Rightarrow q$，即 $A\subseteq B$，所以 $m\geqslant 4$. 故选 D.

**2.** 已知 $A=\{x\mid x\leqslant m\}$，$B=\{x\mid x\leqslant 3\}$，若“$x\in A$”是“$x\in B$”的必要条件，则 $m$ 的取值范围是　(　　)

A.$\{m\mid m>3\}$　　B.$\{m\mid m\geqslant 3\}$

C.$\{m\mid m<3\}$　　D.$\{m\mid m\leqslant 3\}$

B　**解析：** 因为“$x\in A$”是“$x\in B$”的必要条件，所以 $B\subseteq A$，所以 $m\geqslant 3$. 故选 B.

# 课后素养评价(六)

## 基础落实

**1.** 若 $p$ 是 $q$ 的充分条件，则 $q$ 是 $p$ 的　(B)

A.充分条件

B.必要条件

C.既不是充分条件也不是必要条件

D.以上结论均不正确

**2.** 在平面内，下列条件是“四边形是平行四边形”的必要条件的是　(　　)

A.四边形是矩形

B.四边形的对角线互相平分

C.四边形四条边相等

D.四边形的对角线互相垂直

B　**解析：** 对于 A，“四边形是矩形”是“四边形是平行四边形”的充分不必要条件，故选项 A 不符合题意；

对于 B，若四边形是平行四边形，则四边形的对角线互相平分，即“四边形的对角线互相平分”是“四边形是平行四边形”的必要条件，故选项 B 符合题意；

对于 C，四边形四条边相等即为菱形，是“四边形是平行四边形”的充分不必要条件，故选项 C 不符合题意；

对于 D，由“四边形是平行四边形”得不到四边形的对角线互相垂直，故“四边形的对角线互相垂直”不是“四边形是平行四边形”的必要条件，故选项 D 不符合题意.

故选 B.

**3.**(多选)若“$-1<x<2$”是“$-2<x<a$”的充分条件，则实数 $a$ 的值可以是　(　　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

BCD　**解析：** 由“$-1<x<2$”是“$-2<x<a$”的充分条件，知 $\{x\mid -1<x<2\}\subseteq\{x\mid -2<x<a\}$，所以 $a\geqslant 2$.

所以实数 $a$ 的值可以是 2，3，4.

**4.** 写出“两个三角形相似”的两个充分条件：

一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等；一个三角形的三条边与另一个三角形的三条边对应成比例(答案不唯一).

**5.** 指出下列各题中，$p$ 是 $q$ 的什么条件，$q$ 是 $p$ 的什么条件：

(1)$p:x^2>0$，$q:x>0$；

(2)$p:x+2\neq y$，$q:(x+2)^2\neq y^2$；

(3)$p:a$ 能被 6 整除，$q:a$ 能被 3 整除；

(4)$p:$两个角不都是直角，$q:$两个角不相等.

**解：**(1)$p:x^2>0$，则 $x>0$ 或 $x<0$，$q:x>0$，故 $p$ 是 $q$ 的必要条件，$q$ 是 $p$ 的充分条件.

(2)$p:x+2\neq y$，$q:(x+2)^2\neq y^2$，则 $x+2\neq y$，且 $x+2\neq -y$，故 $p$ 是 $q$ 的必要条件，$q$ 是 $p$ 的充分条件.

(3)$p:a$ 能被 6 整除，故 $a$ 也能被 3 和 2 整除，$q:a$ 能被 3 整除，故 $p$ 是 $q$ 的充分条件，$q$ 是 $p$ 的必要条件.

(4)$p$:两个角不都是直角,这两个角可以相等,$q$:两个角不相等,则这两个角一定不都是直角,故$p$是$q$的必要条件,$q$是$p$的充分条件.

## 能力提升

**1.** 王昌龄是盛唐著名的边塞诗人,被誉为"七绝圣手",其《从军行》传诵至今."青海长云暗雪山,孤城遥望玉门关.黄沙百战穿金甲,不破楼兰终不还."由此推断,"攻破楼兰"是"返回家乡"的　　(A)

A.必要条件

B.充分条件

C.既是充分条件又是必要条件

D.既不是充分条件也不是必要条件

**2.** (多选)下列条件中是"$a+b>0$"的充分条件的是　　(　　)

A.$a>0,b>0$

B.$a<0,b<0$

C.$a=3,b=-2$

D.$a>0,b<0$且$|a|>|b|$

ACD　**解析**:A中,因为$a>0,b>0\Rightarrow a+b>0$,所以A满足题意;

B中,因为$a<0,b<0\nRightarrow a+b>0$,所以B不满足题意;

C中,因为$a=3,b=-2\Rightarrow a+b=1>0$,所以C满足题意;

D中,因为$a>0,b<0$且$|a|>|b|\Rightarrow a>-b\Rightarrow a+b>0$,所以D满足题意.

**3.** "$x^2=2x$"是"$x=0$"的_____条件,"$x=0$"是"$x^2=2x$"的_____条件.(填"充分"或"必要")

必要　充分　**解析**:由于$x=0\Rightarrow x^2=2x$,所以"$x^2=2x$"是"$x=0$"的必要条件,"$x=0$"是"$x^2=2x$"的充分条件.

**4.** (1)是否存在实数$m$,使得"$2x+m<0$"是"$x<-1$或$x>3$"的充分条件?

(2)是否存在实数$m$,使得"$2x+m<0$"是"$x<-1$或$x>3$"的必要条件?

**解**:(1)要使"$2x+m<0$"是"$x<-1$或$x>3$"的充分条件,只需$\left\{x\left|x<-\frac{m}{2}\right.\right\}\subseteq\{x\mid x<-1,$或$x>3\}$,所以$-\frac{m}{2}\leqslant-1$,即$m\geqslant2$.

故存在实数$m$,当$m\geqslant2$时,"$2x+m<0$"是"$x<-1$或$x>3$"的充分条件.

(2)要使"$2x+m<0$"是"$x<-1$或$x>3$"的必要条件,只需$\{x\mid x<-1,$或$x>3\}\subseteq\left\{x\left|x<-\frac{m}{2}\right.\right\}$,但这是不可能的,故不存在实数$m$,使"$2x+m<0$"是"$x<-1$或$x>3$"的必要条件.

## 自我超越

一次函数$y=kx+b(k\neq0)$的图象不过第一象限的一个充分条件是_____.

$k=-1$且$b=-1$(答案不唯一)　**解析**:由一次函数$y=kx+b(k\neq0)$可知,$k>0$时,图象必过第一、三象限,$k<0$时,图象过第二、四象限;当$b>0$时,一次函数图象交于$y$轴正半轴,当$b<0$时,一次函数图象交于$y$轴负半轴,当$b=0$时,一次函数图象过原点,所以一次函数的图象不过第一象限的充分条件是$k<0,b\leqslant0$,可取$k=-1$且$b=-1$.

# 1.4.2　充要条件

**学习任务目标**

**1.** 理解充要条件的含义.

**2.** 会判断一些简单的充要条件.

**3.** 能对充要条件进行证明.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　充要条件**

**1.** 定义:如果"若$p$,则$q$"和它的逆命题"若$q$,则$p$"均是真命题,即既有$p\Rightarrow q$,又有$q\Rightarrow p$,就记作$p\Leftrightarrow q$.此时,$p$既是$q$的充分条件,也是$q$的必要条件,即$p$是$q$的充分必要条件,简称为充要条件.

**2.** 条件与结论的等价性:如果$p$是$q$的充要条件,那么$q$也是$p$的充要条件.

**3.** 概括:如果$p\Leftrightarrow q$,那么$p$与$q$互为充要条件.

**知识点二　命题的条件、结论与充分性、必要性**

**1.** 充分必要条件(充要条件),即$p\Rightarrow q$,且$q\Rightarrow p$.

**2.** 充分不必要条件,即$p\Rightarrow q$,且$q\nRightarrow p$.

**3.** 必要不充分条件,即$p\nRightarrow q$,且$q\Rightarrow p$.

**4.** 既不充分也不必要条件,即$p\nRightarrow q$,且$q\nRightarrow p$.

**【概念辨析】**

**1.**判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)$q$ 是 $p$ 的必要条件时,$p$ 是 $q$ 的充分条件.（√）

(2)$q$ 不是 $p$ 的必要条件时,$p \nRightarrow q$.（√）

(3)若 $q$ 是 $p$ 的必要条件,则当 $q$ 成立时,$p$ 也成立.（×）

(4)如果一个命题及其逆命题均成立,那么原命题中的条件是结论的充要条件.（√）

**2.**设 $p$:四边形为菱形,$q$:四边形的对角线互相垂直,则 $p$ 是 $q$ 的（　　）

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

A　**解析**:因为 $p \Rightarrow q$ 且 $q \nRightarrow p$,所以 $p$ 是 $q$ 的充分不必要条件.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1 充要条件的判断

**1.**“$x=1$”是“$x^2-3x+2=0$”的（　　）

A.必要不充分条件

B.充分不必要条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

B　**解析**:由 $x^2-3x+2=0$,得 $x=1$ 或 $x=2$,所以 $x=1$ 可以推出 $x^2-3x+2=0$;$x^2-3x+2=0$ 不可以推出 $x=1$;所以 $x=1$ 是 $x^2-3x+2=0$ 成立的充分不必要条件.故选 B.

**2.**“$a<0$ 且 $b<0$”是“$a\cdot b>0$ 且 $a+b<0$”的（　　）

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

C　**解析**:若 $a<0$ 且 $b<0$,则 $a\cdot b>0$ 且 $a+b<0$ 成立,故充分性成立.

若 $a\cdot b>0$,则 $a<0$ 且 $b<0$ 或 $a>0$ 且 $b>0$.

而 $a>0$ 且 $b>0$ 时,$a+b>0$.

所以由 $a\cdot b>0$ 且 $a+b<0$ 可以推出 $a<0$ 且 $b<0$,故必要性成立.

因此“$a<0$ 且 $b<0$”是“$a\cdot b>0$ 且 $a+b<0$”的充要条件.故选 C.

**【探究总结】**

**判断充分条件、必要条件及充要条件的三种方法**

(1)定义法:直接判断“若 $p$,则 $q$”以及“若 $q$,则 $p$”的真假.

(2)集合法:利用集合的包含关系进行判断.

(3)传递法:充分条件和必要条件具有传递性,即由 $p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow p_n$,可得 $p_1 \Rightarrow p_n$;充要条件也具有传递性.

### 任务2 充要条件的证明

#### 探究活动

**例1**　求证:一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$($a$,$b$,$c$ 是常数,且 $a\neq 0$)有一正实数根和一负实数根的充要条件是 $ac<0$.

**证明**:必要性:由于方程 $ax^2+bx+c=0$($a\neq 0$)有一正实数根和一负实数根,设为 $x_1$,$x_2$,

所以 $\Delta=b^2-4ac>0$,且 $x_1x_2=\dfrac{c}{a}<0$,所以 $ac<0$.

充分性:由 $ac<0$,可得 $\Delta=b^2-4ac>0$,

故方程 $ax^2+bx+c=0$($a\neq 0$)有两个不相等的实数根,设为 $x_1$,$x_2$,则 $x_1x_2=\dfrac{c}{a}<0$,

所以方程 $ax^2+bx+c=0$($a\neq 0$)有一正实数根和一负实数根.

综上,一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$($a$,$b$,$c$ 是常数,且 $a\neq 0$)有一正实数根和一负实数根的充要条件是 $ac<0$.

**【探究总结】**

**充要条件的证明策略**

要证明 $p$ 是 $q$ 的充要条件,需要从充分性和必要性两个方向进行,即证明“若 $p$,则 $q$”为真且“若 $q$,则 $p$”为真.

**注意**:证明时一定要分清充分性与必要性的推导方向.

#### 应用迁移

(教材 P23 习题 1.4 题 5 改编)已知 $a$,$b$,$c$ 是△$ABC$ 的三边长,求证:“$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$”是“△$ABC$ 是等边三角形”的充要条件.

**证明**:充分性:

由 $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$,

得 $2(a^2+b^2+c^2)=2ab+2ac+2bc$,

整理得 $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0$,

所以 $a=b=c$,

即△$ABC$ 是等边三角形.

必要性:

由△$ABC$ 是等边三角形,得 $a=b=c$,

所以 $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$.

故原命题得证.

## 任务3 利用充分条件、必要条件求参数的值（范围）

### 探究活动

**例2**　已知集合 $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 4\}$，$B=\{x\mid 1-a\leqslant x\leqslant 1+a\}(a>0)$，是否存在实数 $a$，使得“$x\in A$”是“$x\in B$”的充要条件？

**解**：不存在.因为若“$x\in A$”是“$x\in B$”的充要条件，则 $A=B$，所以 $\begin{cases}a>0,\\1-a=0,\\1+a=4,\end{cases}$ 方程组无解.

所以不存在满足条件的实数 $a$.

［一题多思］

**思考1.**若把本例中“充要条件”改为“充分不必要条件”，实数 $a$ 存在吗？

**提示**：由题意知，$A$ 是 $B$ 的真子集，

所以 $1-a\leqslant 0$ 且 $1+a\geqslant 4$（两等号不能同时取得）.

又 $a>0$，解得 $a\geqslant 3$.

所以实数 $a$ 存在，且 $a$ 的取值集合为 $M=\{a\mid a\geqslant 3\}$.

**思考2.**若把本例中“充要条件”改为“必要不充分条件”，实数 $a$ 存在吗？

**提示**：由题意知，$B$ 是 $A$ 的真子集，

所以 $1-a\geqslant 0$ 且 $1+a\leqslant 4$（两等号不能同时取得）.

又 $a>0$，解得 $0<a\leqslant 1$.

所以实数 $a$ 存在，且 $a$ 的取值集合为 $M=\{a\mid 0<a\leqslant 1\}$.

**【探究总结】**

**应用充分不必要条件、必要不充分条件及充要条件求参数的值（范围）的一般步骤**

(1)根据已知，将充分不必要条件、必要不充分条件或充要条件转化为集合间的关系.

(2)根据集合间的关系构建关于参数的方程（组）或不等式（组）求解.

### 应用迁移

**1.**若“$x>2$”是“$x>m$”的必要不充分条件，则实数 $m$ 的取值范围是_____.

$\{m\mid m>2\}$　**解析**：因为“$x>2$”是“$x>m$”的必要不充分条件，所以 $\{x\mid x>m\}$ 是 $\{x\mid x>2\}$ 的真子集，即 $m>2$.

**2.**已知 $p$：$x-3<0$ 是 $q$：$2x-3<m$ 的充分不必要条件，求实数 $m$ 的取值范围.

**解**：由 $x-3<0$，得 $x<3$.由 $2x-3<m$，得 $x<\dfrac{m+3}{2}$.

因为 $p$ 是 $q$ 的充分不必要条件，

所以 $\{x\mid x<3\}\subsetneqq\left\{x\,\middle|\,x<\dfrac{m+3}{2}\right\}$.

所以 $3<\dfrac{m+3}{2}$，

解得 $m>3$.

所以实数 $m$ 的取值范围是 $\{m\mid m>3\}$.

# 课后素养评价（七）

## 基础落实

**1.**“$5<x<10$”是“$-8<x<12$”的　（　）

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

A　**解析**：设集合 $A=\{x\mid 5<x<10\}$，$B=\{x\mid -8<x<12\}$.因为集合 $A$ 是集合 $B$ 的真子集，所以 $5<x<10$ 是 $-8<x<12$ 的充分不必要条件.故选A.

**2.**已知集合 $A=\{x\mid x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=4n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，则“$x\in A$”是“$x\in B$”的　（　）

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

B　**解析**：由集合 $A=\{x\mid x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，可得集合 $A$ 是全体奇数组成的集合.

又由 $B=\{x\mid x=4n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，可得集合 $B$ 是全体被4除余1的整数组成的集合.

因为 $4n+1=2\times 2n+1$，所以 $B\subsetneqq A$，所以“$x\in A$”是“$x\in B$”的必要不充分条件.故选B.

**3.**（多选）“$-3<x<2$”的一个必要不充分条件可以是　（　）

A.$x>-3$　　B.$0<x<1$

C.$-3<x<3$　　D.$x<1$

AC　**解析**：设 $M=\{x\mid -3<x<2\}$，选项对应的集合为 $N$.

因为题中所求的是“$-3<x<2$”的一个必要不充分条件，所以 $M$ 是 $N$ 的真子集，

$M=\{x\mid -3<x<2\}$ 是 $\{x\mid x>-3\}$，$\{x\mid -3<x<3\}$ 的真子集.故选AC.

**4.**设 $a,b\in\mathbf{R}$，则“$ab+1=a+b$”的充要条件是　(C)

A.$a,b$ 都为1

B.$a,b$ 都不为1

C.$a,b$ 中至少有一个为1

D.$a,b$ 都不为0

**5.**写出平面内的一个四边形为平行四边形的两个充要条件：两组对边分别平行；一组对边平行且相等（答案不唯一）.

**6.**已知集合 $A=\{x\mid 2a+1\leqslant x\leqslant 3a+5\}$，$B=\{x\mid x\leqslant -2$，或 $x\geqslant 5\}$.

(1)若 $a=1$，求 $A\cup B$；

(2)若“$x\in B$”是“$x\in A$”的必要不充分条件，求实数 $a$ 的取值范围.

**解**：(1)因为 $a=1$，$A=\{x\mid 2a+1\leqslant x\leqslant 3a+5\}$，所以 $A=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 8\}$.

因为 $B=\{x\mid x\leqslant -2$，或 $x\geqslant 5\}$，

所以 $A\cup B=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 8\}\cup\{x\mid x\leqslant -2$，或 $x\geqslant 5\}=\{x\mid x\leqslant -2$，或 $x\geqslant 3\}$.

(2)因为“$x\in B$”是“$x\in A$”的必要不充分条件，所以 $A\subsetneqq B$.

①若 $A=\varnothing$，则 $2a+1>3a+5$，即 $a<-4$，满足题意；

②若 $A\neq\varnothing$，

则 $\begin{cases}2a+1\leqslant 3a+5,\\ 2a+1\geqslant 5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a+1\leqslant 3a+5,\\ 3a+5\leqslant -2,\end{cases}$

即 $\begin{cases}a\geqslant -4,\\ a\geqslant 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a\geqslant -4,\\ a\leqslant -\dfrac{7}{3},\end{cases}$ 所以 $a\geqslant 2$ 或 $-4\leqslant a\leqslant -\dfrac{7}{3}$.

综合①②知，实数 $a$ 的取值范围为 $\left\{a\,\middle|\,a\leqslant -\dfrac{7}{3}$，或 $a\geqslant 2\right\}$.

## 能力提升

**1.**“$x<y$”是“$|x|<|y|$”的　　(　　)

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

D　**解析**：当 $x=-3$，$y=1$ 时，$x<y$，但 $|x|>|y|$，故 $x<y$ 推不出 $|x|<|y|$；反之，当 $x=1$，$y=-3$ 时，$|x|<|y|$，但 $x>y$，故 $|x|<|y|$ 推不出 $x<y$. 由充分条件、必要条件的定义，知“$x<y$”是“$|x|<|y|$”的既不充分也不必要条件.

**2.**(多选)设全集为 $U$，在下列条件中，是 $B\subseteq A$ 的充要条件的有　　(BCD)

A.$A\cup B=B$　　B.$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$

C.$(\complement_U A)\subseteq(\complement_U B)$　　D.$A\cup(\complement_U B)=U$

**3.**设 $A=\{x\mid x^2-8x+15=0\}$，$B=\{x\mid ax-1=0\}$，若“$x\in B$”是“$x\in A$”的充分不必要条件，则实数 $a$ 的取值集合为_____.

$\left\{0,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{5}\right\}$　**解析**：因为 $x^2-8x+15=0$ 的两个根为 3 和 5，所以 $A=\{3,5\}$.

因为“$x\in B$”是“$x\in A$”的充分不必要条件，所以 $B$ 是 $A$ 的真子集，

所以 $B=\varnothing$ 或 $B=\{3\}$ 或 $B=\{5\}$.

当 $B=\varnothing$ 时，$a=0$；

当 $B=\{3\}$ 时，$3a-1=0$，所以 $a=\dfrac{1}{3}$；

当 $B=\{5\}$ 时，$5a-1=0$，所以 $a=\dfrac{1}{5}$.

所以 $a$ 的值可以是 $0,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{5}$.

故实数 $a$ 的取值集合为 $\left\{0,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{5}\right\}$.

**4.**已知 $a,b$ 是正实数，求证：“$a+b=1$”是“$\dfrac{a+1}{b}+\dfrac{b+1}{a}+2=\dfrac{2}{ab}$”的充要条件.

**证明**：必要性：若 $\dfrac{a+1}{b}+\dfrac{b+1}{a}+2=\dfrac{2}{ab}$，

则 $\dfrac{a(a+1)+b(b+1)+2ab}{ab}=\dfrac{2}{ab}$，

所以 $a^2+a+b^2+b+2ab=2$，

即 $(a+b)^2+(a+b)-2=0$，

故 $(a+b-1)(a+b+2)=0$.

因为 $a,b$ 是正实数，所以 $a+b+2>0$，

所以 $a+b-1=0$，即 $a+b=1$.

充分性：若 $a+b=1$，

则 $\dfrac{a+1}{b}+\dfrac{b+1}{a}+2=\dfrac{a(a+1)+b(b+1)+2ab}{ab}$

$=\dfrac{a^2+b^2+2ab+(a+b)}{ab}=\dfrac{(a+b)^2+(a+b)}{ab}$

$=\dfrac{1+1}{ab}=\dfrac{2}{ab}$.

综上，“$a+b=1$”是“$\dfrac{a+1}{b}+\dfrac{b+1}{a}+2=\dfrac{2}{ab}$”的充要条件.

## 自我超越

若实数 $a,b$ 满足 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，且 $ab=0$，则称 $a$ 与 $b$ 互补. 记 $\varphi(a,b)=\sqrt{a^2+b^2}-a-b$，那么 $\varphi(a,b)=0$ 是 $a$ 与 $b$ 互补的　　(　　)

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

B　**解析**：若 $\varphi(a,b)=\sqrt{a^2+b^2}-a-b=0$，则 $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$，即 $a^2+b^2=a^2+b^2+2ab$，所以 $ab=0$，但不能推出 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$；若 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，且 $ab=0$，则 $\varphi(a,b)=\sqrt{a^2+b^2}-a-b=\sqrt{a^2+b^2+2ab}-(a+b)=(a+b)-(a+b)=0$. 所以 $\varphi(a,b)=0$ 是 $a$ 与 $b$ 互补的必要不充分条件. 故选 B.

# 1.5　全称量词与存在量词

## 1.5.1　全称量词与存在量词

**学习任务目标**

1.理解全称量词与存在量词的含义，熟悉常见的全称量词和存在量词.
2.理解全称量词命题和存在量词命题的含义，并能用数学符号表示.
3.会判断一个命题是全称量词命题还是存在量词命题，并会判断它们的真假.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　全称量词与全称量词命题**

1.定义：短语“所有的”“任意一个”在逻辑中通常叫做全称量词，并用符号“$\forall$”表示.含有全称量词的命题，叫做全称量词命题.
2.表述形式：全称量词命题“对 $M$ 中任意一个 $x$，$p(x)$成立”可用符号简记为$\forall x\in M,p(x)$.

**知识点二　存在量词与存在量词命题**

1.定义：短语“存在一个”“至少有一个”在逻辑中通常叫做存在量词，并用符号“$\exists$”表示.含有存在量词的命题，叫做存在量词命题.
2.表述形式：存在量词命题“存在 $M$ 中的元素 $x$，$p(x)$成立”可用符号简记为$\exists x\in M,p(x)$.

### 【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).
(1)全称量词表示的数量都是无限的.　(　　)
(2)全称量词命题必须含有全称量词.　(　　)
(3)短语“至少有一个”是存在量词.　(　　)
(4)“$2x+3>1$”是存在量词命题.　(　　)

(1)×　**解析**：全称量词表示的数量可能是有限的，也可能是无限的，由题目而定.
(2)×　**解析**：有些全称量词命题中的全称量词是省略的，理解时需要把它补充出来.
(3)√　**解析**：“至少有一个”表示存在，是存在量词.
(4)×　**解析**：“$2x+3>1$”不是命题.

2.“三角形内角和等于 360°”是_____(填“全称量词”或“存在量词”)命题，且是_____(填“真”或“假”)命题.

全称量词　假　**解析**：“三角形内角和等于 360°”即“所有的三角形内角和都等于 360°”，命题含有全称量词“所有的”，是全称量词命题.因为三角形内角和等于 180°，所以该命题为假命题.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1　全称量词命题与存在量词命题的判断

1.判断下列命题是全称量词命题还是存在量词命题：
(1)所有不等式的解集 $A$，都满足 $A\subseteq\mathbf{R}$；
(2)$\exists x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R},(x+y)(x-y)>0$；
(3)存在 $x\in\mathbf{R}$，使 $2x+1$ 是整数；
(4)自然数的平方是正数；
(5)所有四边形的内角和都是 360°.

**解**：(1)(5)中含有全称量词，(4)“自然数的平方是正数”的实质是“任意一个自然数的平方都是正数”，所以(1)(4)(5)是全称量词命题.
(2)中含有“$\exists$”，(3)中含有存在量词，所以(2)(3)是存在量词命题.

2.判断下列命题是全称量词命题还是存在量词命题，并用量词符号“$\forall$”“$\exists$”表示：
(1)所有实数 $x$ 都能使 $x^2+x+1>0$ 成立；
(2)对所有实数 $a,b$，方程 $ax+b=0$ 恰有一个解；
(3)一定有整数 $x,y$，使得 $3x-2y=10$ 成立；
(4)所有的有理数 $x$ 都能使 $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+1$ 是有理数.

**解**：(1)全称量词命题，$\forall x\in\mathbf{R},x^2+x+1>0$.
(2)全称量词命题，$\forall a,b\in\mathbf{R},ax+b=0$ 恰有一个解.
(3)存在量词命题，$\exists x,y\in\mathbf{Z},3x-2y=10$.
(4)全称量词命题，$\forall x\in\mathbf{Q},\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+1$ 是有理数.

### 【探究总结】

(1)判断一个命题是否为全称量词命题，主要看命题中是否有全称量词，但有些命题的全称量词是隐藏的，要仔细辨别.

(2)判断一个命题是否为存在量词命题，主要看命题中是否有存在量词，但有些命题的存在量词是隐藏的，要仔细辨别.

## 任务2 全称量词命题与存在量词命题真假的判断

### 探究活动

**例1**　判断下列命题的真假：

(1)$\forall x\in\mathbf{R},x^2+1>\frac{1}{2}$；

(2)$\exists\alpha,\beta\in\mathbf{R},(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2$；

(3)存在一个数既是偶数又是负数；

(4)每一条线段的长度都能用正有理数表示；

(5)存在一个实数$x$，使等式$x^2+x+8=0$成立.

**解**：(1)真命题，因为$x^2\geqslant0$，所以$x^2+1\geqslant1>\frac{1}{2}$恒成立.

(2)真命题，如$\alpha=0,\beta=1$，符合题意.

(3)真命题，如数$-2,-4$等，既是偶数又是负数.

(4)假命题，如边长为1的正方形的对角线长为$\sqrt{2}$，它的长度不能用正有理数表示.

(5)假命题，因为该方程的判别式$\Delta=-31<0$，故无实数解.

### 【探究总结】

(1)要判定一个全称量词命题是真命题，需保证该命题对所有的元素都成立；若能举出一个反例说明命题不成立，则该全称量词命题是假命题.

(2)要判定一个存在量词命题是真命题，只要在给定的范围内找到一个元素使命题成立即可，否则命题为假.

### 应用迁移

**1.**(教材P27例1改编)(多选)下列命题是全称量词命题且为真命题的有　(　　)

A.一切实数均有相反数

B.$\forall a\in\mathbf{N}$，方程$ax+1=0$有实数根

C.等腰梯形的对角线相等

D.$\pi$是无理数

AC　**解析**：A，C选项都是全称量词命题且为真命题；B选项是全称量词命题，但不是真命题，当$a=0$时，方程没有实数根；D选项是真命题，但不是全称量词命题.

**2.**命题$p:\exists x,y\in\mathbf{R},x^2+y^2\leqslant1$是_____(填“全称量词命题”或“存在量词命题”)，它是_____(填“真”或“假”)命题.

存在量词命题　真　**解析**：命题$p$是存在量词命题，当$x=y=0$时，$x^2+y^2=0<1$成立，故$p$是真命题.

## 任务3 利用全称量词命题与存在量词命题求参数范围

### 探究活动

**例2**　已知集合$A=\{x\mid-2\leqslant x\leqslant5\}$，$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant2m-1\}$，且$B\neq\varnothing$.若命题$p:\forall x\in B,x\in A$是真命题，求实数$m$的取值范围.

**解**：若命题$p:\forall x\in B,x\in A$是真命题，则$B\subseteq A$.

因为$B\neq\varnothing$，所以$\begin{cases}m+1\leqslant2m-1,\\m+1\geqslant-2,\\2m-1\leqslant5,\end{cases}$解得$2\leqslant m\leqslant3$.

故实数$m$的取值范围为$\{m\mid2\leqslant m\leqslant3\}$.

[一题多思]

**思考1.**若把本例中的命题$p$改为“$\exists x\in A,x\in B$”，求$m$的取值范围.

**提示**：若命题$p$为真命题，则$A\cap B\neq\varnothing$.

因为$B\neq\varnothing$，所以$m+1\leqslant2m-1$，即$m\geqslant2$.

所以$\begin{cases}-2\leqslant m+1\leqslant5,\\m\geqslant2\end{cases}$或$\begin{cases}-2\leqslant2m-1\leqslant5,\\m\geqslant2,\end{cases}$

解得$2\leqslant m\leqslant4$.

所以$m$的取值范围是$\{m\mid2\leqslant m\leqslant4\}$.

**思考2.**把本例中的命题$p$改为“$\forall x\in A,x\in B$”，是否存在实数$m$，使命题$p$是真命题？若存在，求出实数$m$的取值范围；若不存在，请说明理由.

**提示**：不存在.理由如下：

若命题$p:\forall x\in A,x\in B$是真命题，

则$A\subseteq B,B\neq\varnothing$.所以$\begin{cases}m+1\leqslant2m-1,\\m+1\leqslant-2,\\2m-1\geqslant5,\end{cases}$无解.

所以不存在实数$m$，使命题$p$是真命题.

### 【探究总结】

**依据含量词命题的真假求参数取值范围问题的求解步骤**

(1)首先，根据全称量词和存在量词的含义理解题意.

(2)其次，根据含量词命题的真假把命题的真假问题转化为集合间的关系或函数的最值问题，再转化为关于参数的不等式(组)求参数的取值范围.

### 应用迁移

已知命题$p:\forall x\in\left\{x\middle|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant1\right\},\frac{1}{x}-a\geqslant0$，命题$q:\exists x\in\mathbf{R},x^2+2x+2-a=0$.若$p$与$q$都是真命题，求实数$a$的取值范围.

**解**：由题可知，$\frac{1}{x}-a\geqslant0$对$\forall x\in\left\{x\middle|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant1\right\}$恒成立，所以$a\leqslant\left(\frac{1}{x}\right)_{\min}$，$x\in\left\{x\middle|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant1\right\}$，

所以$1\leqslant\frac{1}{x}\leqslant2$，即$a\leqslant1$.

由$q:\exists x\in\mathbf{R},x^2+2x+2-a=0$为真命题，可知$\Delta=4-4(2-a)\geqslant0$，解得$a\geqslant1$.

综上，若$p,q$都是真命题，则$a=1$.

# 课后素养评价(八)

## 基础落实

**1.**下列命题不是存在量词命题的是　　(　　)

A.有的无理数的平方是有理数

B.有的无理数的平方不是有理数

C.对于任意 $x\in\mathbf{Z}$,$2x+1$ 是奇数

D.存在 $x\in\mathbf{R}$,$2x+1$ 是奇数

C　**解析**:A,B,D 中都有存在量词,是存在量词命题,C 中含有量词"任意",为全称量词命题.

**2.**下列命题是"$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2>3$"的另一种表述方式的是　　(　　)

A.有一个 $x\in\mathbf{R}$,使得 $x^2>3$

B.对有些 $x\in\mathbf{R}$,使得 $x^2>3$

C.任选一个 $x\in\mathbf{R}$,都有 $x^2>3$

D.至少有一个 $x\in\mathbf{R}$,使得 $x^2>3$

C　**解析**:"$\forall$"和"任选一个"都是全称量词.

**3.**下列命题中为真命题的是　　(　　)

A.$\exists x\in\mathbf{R}$,使得 $x^2+1<0$

B.$\exists x\in\mathbf{N}^*$,使得 $4x<3$

C.$\forall x\in\mathbf{R}$,$|x|\geqslant 0$

D.$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2\in\mathbf{Q}$

C　**解析**:对于 A,因为 $\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2+1>0$,故选项 A 错误;

对于 B,当 $x\in\mathbf{N}^*$ 时,$4x\geqslant 4$,故选项 B 错误;

对于 C,$\forall x\in\mathbf{R}$,$|x|\geqslant 0$,故选项 C 正确;

对于 D,因为有的无理数的平方仍是无理数,如:$\pi^2$,故选项 D 错误.故选 C.

**4.**(多选)下列命题中,是真命题的是　　(　　)

A.空集是任何一个非空集合的真子集

B.$\forall x\in\mathbf{R}$,$4x^2>2x-1+3x^2$

C.$\exists x\in\{-2,-1,0,1,2\}$,$|x-2|<2$

D.$\forall a,b\in\mathbf{R}$,方程 $ax+b=0$ 恰有一个解

AC　**解析**:由空集和真子集的定义可以判断 A 为真命题;将 $4x^2>2x-1+3x^2$ 整理得 $x^2-2x+1=(x-1)^2>0$,又 $x\in\mathbf{R}$,所以 $(x-1)^2\geqslant 0$,故 B 为假命题;当 $x=1$ 时,$|x-2|=|1-2|<2$,故 C 为真命题;当 $a=0$,$b=0$ 时,方程 $ax+b=0$ 有无数个解,故 D 为假命题.

**5.**用量词符号"$\forall$""$\exists$"表示下列命题:

(1)任意一个实数乘 $-1$ 都等于它的相反数;

(2)对任意实数 $x$,都有 $x^3>x^2$;

(3)有些整数既能被 2 整除,又能被 3 整除;

(4)有些四边形不是平行四边形.

**解**:(1)$\forall x\in\mathbf{R}$,$x\cdot(-1)=-x$.

(2)$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^3>x^2$.

(3)$\exists x\in\mathbf{Z}$,$x$ 既能被 2 整除,又能被 3 整除.

(4)$\exists x\in\{x\mid x$ 是四边形$\}$,$x$ 不是平行四边形.

## 能力提升

**1.**下列命题中,既是存在量词命题又是真命题的是　　(　　)

A.锐角三角形的内角是锐角或钝角

B.至少有一个实数 $x$,使 $x^2\leqslant 0$

C.两个无理数的和必是无理数

D.存在一个负数 $x$,使 $\frac{1}{x}>2$

B　**解析**:A 中,"锐角三角形的内角是锐角或钝角"是全称量词命题;B 中,有存在量词"至少有一个",且当 $x=0$ 时,$x^2=0$,所以选项 B 既是存在量词命题又是真命题;C 中,因为 $\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$,所以选项 C 是假命题;D 中,对于任意一个负数 $x$,都有 $\frac{1}{x}<0$,所以选项 D 是假命题.

**2.**(多选)下列选项正确的有　　(ABD)

A.$\exists x\in\mathbf{R}$,$x^2-3x+2=0$

B.$\exists x\in\mathbf{Q}$,$(x+3)(x^2-2)=0$

C.$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2+2x+1>0$

D.$\forall x\in\mathbf{R}$,$2x>2x-1$

**3.**已知命题"存在 $x\in\{x\mid 0<x<3\}$,使得等式 $2x-m=0$ 成立"是假命题,则实数 $m$ 的取值范围是　　(　　)

A.$\{m\mid 0<m<6\}$

B.$\{m\mid m<0$ 或 $m>6\}$

C.$\{m\mid 0\leqslant m\leqslant 6\}$

D.$\{m\mid m\leqslant 0$ 或 $m\geqslant 6\}$

D　**解析**:由已知命题"存在 $x\in\{x\mid 0<x<3\}$,使得等式 $2x-m=0$ 成立"是假命题,

等价于"对任意 $x\in\{x\mid 0<x<3\}$,使得等式 $2x-m\neq 0$ 成立"是真命题.

又因为 $0<x<3$,所以 $0<2x<6$,要使 $2x\neq m$,则需 $m\leqslant 0$ 或 $m\geqslant 6$.

所以实数 $m$ 的取值范围为 $\{m\mid m\leqslant 0$ 或 $m\geqslant 6\}$.故选 D.

**4.**已知命题 $p$:$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2-2x+a\geqslant 0$,命题 $q$:$\exists x\in\mathbf{R}$,$x^2+x+2a-1=0$,若 $p$ 为真命题,$q$ 为假命题,求实数 $a$ 的取值范围.

**解**:因为 $x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$,

若 $p$ 是真命题,则 $a-1\geqslant 0$,即 $a\geqslant 1$.

因为 $x^2+x+2a-1=0$,若 $q$ 为假命题,

则 $\Delta=1-4\times(2a-1)=5-8a<0$，即 $a>\frac{5}{8}$.

综上，$a\geqslant 1$.

所以实数 $a$ 的取值范围是 $\{a\mid a\geqslant 1\}$.

**自我超越**

已知函数 $y_1=x_1^2$，$y_2=-2x_2-m$. 若对 $\forall x_1\in\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$，$\exists x_2\in\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$，使得 $y_1\geqslant y_2$，则实数 $m$ 的取值范围为_____.

$\{m\mid m\geqslant -4\}$　**解析**：因为 $x_1\in\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$，$x_2\in\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$，

所以 $y_1\in\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 9\}$，$y_2\in\{y\mid -4-m\leqslant y\leqslant -m\}$.

又因为对 $\forall x_1\in\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$，$\exists x_2\in\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$，使得 $y_1\geqslant y_2$，即 $y_1$ 的最小值大于或等于 $y_2$ 的最小值，即 $-4-m\leqslant 0$，

所以 $m\geqslant -4$，即实数 $m$ 的取值范围是 $\{m\mid m\geqslant -4\}$.

# 1.5.2　全称量词命题和存在量词命题的否定

**学习任务目标**

1. 通过实例，总结含有量词的命题与它的否定在形式上的变化规律.
2. 能写出全称量词命题与存在量词命题的否定并判断真假.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　全称量词命题的否定**

| 全称量词命题 $p$ | $\forall x\in M,p(x)$ |
|---|---|
| 命题 $p$ 的否定 | $\exists x\in M,\neg p(x)$ |
| 结论 | 全称量词命题的否定是存在量词命题 |

**知识点二　存在量词命题的否定**

| 存在量词命题 $p$ | $\exists x\in M,p(x)$ |
|---|---|
| 命题 $p$ 的否定 | $\forall x\in M,\neg p(x)$ |
| 结论 | 存在量词命题的否定是全称量词命题 |

### 【概念辨析】

1. 判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1) 存在量词命题的否定一定是全称量词命题.（　　）

(2) 对全称量词命题或存在量词命题进行否定时，只否定其结论即可.（　　）

(3) 短语“都是”的否定短语是“都不是”.（　　）

(4) 短语“至少有一个”的否定短语是“至多有两个”.（　　）

(1)√　**解析**：因为存在量词命题否定时要把存在量词改为全称量词，所以它的否定一定是全称量词命题.

(2)×　**解析**：对全称量词命题或存在量词命题进行否定时，除了否定其结论外，还要改变量词.

(3)×　**解析**：短语“都是”的否定短语是“不都是”.

(4)×　**解析**：短语“至少有一个”的否定短语是“一个也没有”.

2. 命题“$\exists a\in\mathbf{R}$，一次函数 $y=x+a$ 的图象经过原点”的否定为 $\forall a\in\mathbf{R}$，一次函数 $y=x+a$ 的图象都不经过原点.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1　全称量词命题的否定

1. 若命题 $p:\forall x>0,x+\frac{2}{x}>1$，则 $\neg p$ 为（　　）

A. $\exists x>0,x+\frac{2}{x}\leqslant 1$　　B. $\exists x>0,x+\frac{2}{x}<1$

C. $\exists x<0,x+\frac{2}{x}\leqslant 1$　　D. $\forall x\leqslant 0,x+\frac{1}{x}\leqslant 1$

A　**解析**：根据全称量词命题的否定为存在量词命题可知，若命题 $p:\forall x>0,x+\frac{2}{x}>1$，则 $\neg p$ 为 $\exists x>0,x+\frac{2}{x}\leqslant 1$. 故选 A.

2. （教材 P29 例 3 改编）写出下列全称量词命题 $p$ 的否定 $\neg p$，并判断 $p$ 与 $\neg p$ 的真假.

(1) $p:\forall x\in\mathbf{R},x^2+2x+5>0$；

(2) $p$：对任意实数 $m$，方程 $x^2+mx-1=0$ 有实数根；

(3) $p$：菱形的对角线互相垂直；

(4) $p$：方程 $x^2-8x-20=0$ 的每一个根都不是奇数.

**解**：(1) $\neg p:\exists x\in\mathbf{R},x^2+2x+5\leqslant 0$.

因为 $x^2+2x+5=(x+1)^2+4>0$，

所以 $p$ 为真命题，$\neg p$ 为假命题.

(2)$\neg p$:至少存在一个实数 $m$,使得方程 $x^2+mx-1=0$ 无实数根.

因为 $\Delta=m^2+4>0$,所以 $p$ 为真命题,$\neg p$ 为假命题.

(3)$\neg p$:至少存在一个菱形,它的对角线不互相垂直.

因为所有菱形的对角线均互相垂直,

所以 $p$ 为真命题,$\neg p$ 为假命题.

(4)$\neg p$:方程 $x^2-8x-20=0$ 至少有一个根是奇数.

因为方程的两个根为 $-2$,10,都不是奇数,

所以 $p$ 为真命题,$\neg p$ 为假命题.

**【探究总结】**

**全称量词命题的否定的关注点**

(1)两变:一变量词,即把全称量词变为存在量词;二变结论,即否定结论.

(2)一补:对省略全称量词的全称量词命题可补上量词后再进行否定.

## 任务2 存在量词命题的否定

**1.**命题"$\exists x\geqslant 0,x^2-x=1$"的否定是　　(　　)

A. $\exists x\geqslant 0,x^2-x\neq 1$　　B. $\exists x<0,x^2-x=1$

C. $\forall x<0,x^2-x\neq 1$　　D. $\forall x\geqslant 0,x^2-x\neq 1$

D　**解析**:命题"$\exists x\geqslant 0,x^2-x=1$"的否定为"$\forall x\geqslant 0,x^2-x\neq 1$".故选 D.

**2.**(教材 P30 例 4 改编)写出下列存在量词命题的否定,并判断原命题及其否定的真假.

(1)存在一个平行四边形,它的对角线互相垂直;

(2)有些三角形是等边三角形;

(3)$\exists x\in\mathbf{R},x^2+4=0$;

(4)$\exists x\in\mathbf{N},x^2-2x+1\leqslant 0$.

**解**:(1)原命题的否定为"任意一个平行四边形,它的对角线不互相垂直".

原命题为真命题,其否定为假命题.

(2)原命题的否定是"所有的三角形都不是等边三角形".原命题为真命题,其否定为假命题.

(3)原命题的否定是"$\forall x\in\mathbf{R},x^2+4\neq 0$",

原命题为假命题,其否定为真命题.

(4)原命题的否定是"$\forall x\in\mathbf{N},x^2-2x+1>0$".

原命题为真命题,其否定为假命题.

**【探究总结】**

**存在量词命题的否定的关注点**

(1)存在量词命题的否定是全称量词命题,写命题的否定时要分别改变其中的量词和结论,即 $\exists x\in M$,$p(x)$ 的否定为 $\forall x\in M$,$\neg p(x)$.

(2)对省略存在量词的存在量词命题可补上量词后再进行否定.

## 任务3 全称量词命题和存在量词命题的否定的应用

### 探究活动

**例**　已知命题"存在 $x>1$,使得 $2x+a<3$"是假命题,求实数 $a$ 的取值范围.

**解**:命题"存在 $x>1$,使得 $2x+a<3$"是假命题,

所以此命题的否定:对任意 $x>1$,$2x+a\geqslant 3$ 是真命题.

因为对任意 $x>1$,都有 $2x+a>2+a$,

所以 $2+a\geqslant 3$,所以 $a\geqslant 1$.

所以实数 $a$ 的取值范围是$\{a\mid a\geqslant 1\}$.

[一题多思]

**思考 1.**当直接判断一个命题的真假困难时,我们应将原命题做怎样的转化?

**提示**:由于命题与命题的否定的真假性只能是一真一假,所以当直接判断一个命题的真假困难时,可以转化为判断该命题的否定的真假.

**思考 2.**若把本例中的"假命题"改为"真命题",则实数 $a$ 的取值范围是怎样的?

**提示**:由题意知"存在 $x>1$,使得 $2x+a<3$"是真命题,则存在 $x>1$,使得 $a<3-2x$,故 $a<(3-2x)_{\max}$.

因为 $x>1$,所以 $a<1$.

故实数 $a$ 的取值范围是$\{a\mid a<1\}$.

**【探究总结】**

(1)注意命题 $p$ 与 $\neg p$ 只能是一真一假,解决问题时可以借此将问题转化.

(2)对求参数取值范围问题,往往分离参数进行求解.

### 应用迁移

若命题"$\forall x\in\mathbf{R},ax^2+2x+1\neq 0$"为假命题,求实数 $a$ 的取值范围.

**解**:由题意可知,"$\exists x\in\mathbf{R},ax^2+2x+1=0$"是真命题,

等价于方程 $ax^2+2x+1=0$ 在 $\mathbf{R}$ 上有解,

则 $a=0$ 或 $\begin{cases}a\neq 0,\\4-4a\geqslant 0,\end{cases}$

所以 $a\leqslant 1$.

故实数 $a$ 的取值范围是$\{a\mid a\leqslant 1\}$.

# 课后素养评价(九)

## 基础落实

**1.**命题“$\exists x>0,x^2-2x-1<0$”的否定是　　(　　)

A.$\forall x\leqslant 0,x^2-2x-1\geqslant 0$

B.$\forall x>0,x^2-2x-1\geqslant 0$

C.$\exists x\leqslant 0,x^2-2x-1<0$

D.$\exists x>0,x^2-2x-1\geqslant 0$

B　**解析**:根据全称量词命题与存在量词命题的关系,可得命题“$\exists x>0,x^2-2x-1<0$”的否定是“$\forall x>0,x^2-2x-1\geqslant 0$”.故选 B.

**2.**命题 $p$:$\forall x\in\mathbf{R},x^2-x+2\neq 0$ 的否定为　　(　　)

A.$\forall x\in\mathbf{R},x^2-x+2=0$

B.$\exists x\notin\mathbf{R},x^2-x+2=0$

C.$\forall x\notin\mathbf{R},x^2-x+2=0$

D.$\exists x\in\mathbf{R},x^2-x+2=0$

D　**解析**:根据全称量词命题与存在量词命题的关系,可得命题 $p$:$\forall x\in\mathbf{R},x^2-x+2\neq 0$ 的否定为“$\exists x\in\mathbf{R},x^2-x+2=0$”.故选 D.

**3.**(多选)下列关于命题 $p$:$\forall x\in\mathbf{R},x^2+1\neq 0$ 的说法,正确的是　　(　　)

A.$p$ 的否定:$\exists x\in\mathbf{R},x^2+1=0$

B.$p$ 的否定:$\forall x\in\mathbf{R},x^2+1=0$

C.$p$ 是真命题,$p$ 的否定是假命题

D.$p$ 是假命题,$p$ 的否定是真命题

AC　**解析**:命题 $p$:$\forall x\in\mathbf{R},x^2+1\neq 0$ 的否定是“$\exists x\in\mathbf{R},x^2+1=0$”,且 $p$ 为真命题,则 $p$ 的否定是假命题.

**4.**已知命题 $p$:$\exists x>1,x^2-4<0$,则 $\neg p$ 是_____.

$\forall x>1,x^2-4\geqslant 0$　**解析**:命题 $p$:$\exists x>1,x^2-4<0$,故 $\neg p$:$\forall x>1,x^2-4\geqslant 0$.

**5.**已知命题 $p$:$\exists x\in\mathbf{R},x^2+2x+a=0$.

(1)命题 $p$ 的否定为_____;

(2)若命题 $p$ 是真命题,则实数 $a$ 的取值范围是_____.

(1)$\forall x\in\mathbf{R},x^2+2x+a\neq 0$　(2)$\{a\mid a\leqslant 1\}$

**解析**:(1)命题“$\exists x\in\mathbf{R},x^2+2x+a=0$”是存在量词命题,其否定为“$\forall x\in\mathbf{R},x^2+2x+a\neq 0$”.

(2)因为“$\exists x\in\mathbf{R},x^2+2x+a=0$”为真命题,所以 $\Delta=4-4a\geqslant 0$,所以 $a\leqslant 1$.

## 能力提升

**1.**(多选)下列命题的否定为真命题的是　　(　　)

A.$\exists x\in\mathbf{Z},1<4x<3$

B.$\exists x\in\mathbf{Z},5x+1=0$

C.$\forall x\in\mathbf{R},x^2-1=0$

D.$\exists x\in\mathbf{R},x^2+3x+2=0$

ABC　**解析**:命题的否定为真命题等价于原命题为假命题.对于 A,由 $1<4x<3$,得 $\frac{1}{4}<x<\frac{3}{4}$,这样的整数不存在,故 A 为假命题,其否定为真命题,A 符合;同理选项 B,C 为假命题,其否定为真命题,B,C 符合;由 $x^2+3x+2=0$,得 $x=-1$ 或 $x=-2$,故 D 为真命题,其否定为假命题,故 D 不符合.故选 ABC.

**2.**(2024·新高考全国Ⅱ卷)已知命题 $p$:$\forall x\in\mathbf{R},|x+1|>1$,命题 $q$:$\exists x>0,x^3=x$,则　　(　　)

A.$p$ 和 $q$ 都是真命题

B.$\neg p$ 和 $q$ 都是真命题

C.$p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

D.$\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

B　**解析**:对于命题 $p$,取 $x=-1$,则有 $|x+1|=0<1$,故 $p$ 是假命题,$\neg p$ 是真命题;对于命题 $q$,取 $x=1$,则有 $x^3=1^3=1=x$,故 $q$ 是真命题,$\neg q$ 是假命题.综上,$\neg p$ 和 $q$ 都是真命题.故选 B.

**3.**17 世纪,数学家费马提出猜想:对任意正整数 $n>2$,关于 $x,y,z$ 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解.经过 300 多年,1995 年数学家安德鲁·怀尔斯给出了证明,使它终成费马大定理,则费马大定理的否定为　　(　　)

A.对任意正整数 $n$,关于 $x,y,z$ 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 都没有正整数解

B.对任意正整数 $n>2$,关于 $x,y,z$ 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 至少存在一组正整数解

C.存在正整数 $n\leqslant 2$,关于 $x,y,z$ 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 至少存在一组正整数解

D.存在正整数 $n>2$,关于 $x,y,z$ 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 至少存在一组正整数解

D　**解析**:原命题为全称量词命题,则其否定为“存在正整数 $n>2$,关于 $x,y,z$ 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 至少存在一组正整数解”.

**4.**已知命题 $p$:$\forall x\in\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$,都有 $m\geqslant x$,命题 $q$:$\exists x\in\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$,使 $m\geqslant x$.若命题 $p$ 为真命题,命题 $q$ 的否定为假命题,求实数 $m$ 的取值范围.

**解**:由题意知命题 $p,q$ 都是真命题.

由 $\forall x\in\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$,都有 $m\geqslant x$ 成立,

得 $m\geqslant x_{\max}$,即 $m\geqslant 3$.

由 $\exists x\in\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$,使 $m\geqslant x$ 成立,

得 $m\geqslant x_{\min}$,即 $m\geqslant 1$.

因为两者同时成立,故实数 $m$ 的取值范围为 $\{m\mid m\geqslant 3\}\cap\{m\mid m\geqslant 1\}=\{m\mid m\geqslant 3\}$.

## 自我超越

已知 $m>1$,集合 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant m\}$,$B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant m^2-2m-4\}$,若 $\forall a\in A$,$\exists b\in B$,使得 $a<b$,则实数 $m$ 的取值范围是_____.

$\{m\mid m>4\}$　**解析**:由题意,$m<m^2-2m-4$ 且 $m>1$,解得 $m>4$.

★★★

# 迁　移　应　用

## 类型一　集合中的分类讨论问题

**例 1**　(1)已知集合 $A=\{0,m,m^2-3m+2\}$，且 $\{2\}\subseteq A$，则实数 $m$ 的值为（　　）

A.2　　B.3

C.0　　D.$-2$

(2)(多选)已知集合 $A=\{1,3,m^2\}$，$B=\{1,m\}$.若 $A\cup B=A$，则实数 $m$ 的值为（　　）

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

(1)B　**解析**：由 $\{2\}\subseteq A$ 可知 $m=2$ 或 $m^2-3m+2=2$.若 $m=2$，则 $m^2-3m+2=0$，这与 $m^2-3m+2\neq0$ 相矛盾；若 $m^2-3m+2=2$，则 $m^2-3m=0$，即 $m=0$ 或 $m=3$，因为 $m\neq0$，所以 $m=3$，此时 $A=\{0,3,2\}$ 符合题意.故 $m$ 的值为 3.

(2)AD　**解析**：因为 $A\cup B=A$，所以 $B\subseteq A$.因为 $A=\{1,3,m^2\}$，$B=\{1,m\}$，所以 $m^2=m$ 或 $m=3$，解得 $m=0$ 或 $m=1$ 或 $m=3$.

当 $m=0$ 时，$A=\{1,3,0\}$，$B=\{1,0\}$，符合题意；

当 $m=1$ 时，集合 $A$、集合 $B$ 均不满足集合元素的互异性，不符合题意；

当 $m=3$ 时，$A=\{1,3,9\}$，$B=\{1,3\}$，符合题意.

综上，$m=0$ 或 3.故选 AD.

**【规律方法】**

集合问题的研究渗透分类讨论的数学思想，具体体现在两个方面：

(1)含有字母的集合，在求出字母的值后，要分类讨论，检验集合中元素是否满足互异性.

(2)已知两集合间的关系求参数时，要注意空集这一“陷阱”，对集合中含有的字母参数要分类讨论.

**【对点训练】**

**1.**设集合 $A=\{0,a,a^2\}$，$B=\{0,1\}$，若 $B\subseteq A$，则 $a=$_____.

$-1$　**解析**：根据题意，$B\subseteq A$，则 $a=1$ 或 $a^2=1$.当 $a=1$ 时，$a=a^2=1$，不成立；当 $a^2=1$ 时，得 $a=-1$ 或 $a=1$(舍)，所以 $a=-1$.

**2.**已知集合 $M=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，集合 $N=\{x\mid x^2-ax+3a-5=0\}$.若 $M\cup N=M$，则实数 $a$ 的取值集合为_____.

$\{a\mid2\leqslant a<10\}$　**解析**：因为 $M=\{x\mid x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$，$N=\{x\mid x^2-ax+3a-5=0\}$，

且 $M\cup N=M$，所以 $N\subseteq M$.对于方程 $x^2-ax+3a-5=0$，$\Delta=a^2-4(3a-5)=a^2-12a+20=(a-2)(a-10)$.

当 $N=\varnothing$ 时，有 $\Delta=(a-2)(a-10)<0$，解得 $2<a<10$；

当 $N=\{1\}$ 时，有 $\begin{cases}\Delta=(a-2)(a-10)=0,\\1-a+3a-5=0,\end{cases}$ 解得 $a=2$；

当 $N=\{2\}$ 时，有 $\begin{cases}\Delta=(a-2)(a-10)=0,\\4-2a+3a-5=0,\end{cases}$ 方程组无解；

当 $N=\{1,2\}$ 时，有 $\begin{cases}a=3,\\3a-5=2,\end{cases}$ 方程组无解.

综上所述，实数 $a$ 的取值集合为 $\{a\mid2\leqslant a<10\}$.

## 类型二　集合与常用逻辑用语的转化问题

**例 2**　已知 $p:-2\leqslant x\leqslant10$，$q:1-m\leqslant x\leqslant1+m(m>0)$.

(1)若 $p$ 是 $q$ 的充分不必要条件，求实数 $m$ 的取值范围.

(2)若 $p$ 是 $q$ 的必要不充分条件，求实数 $m$ 的取值范围.

(3)是否存在实数 $m$，使得 $p$ 是 $q$ 的充要条件？若存在，求出 $m$ 的值；若不存在，请说明理由.

**解**：$p:-2\leqslant x\leqslant10$，$q:1-m\leqslant x\leqslant1+m(m>0)$，

设集合 $A=\{x\mid-2\leqslant x\leqslant10\}$，$B=\{x\mid1-m\leqslant x\leqslant1+m\}$.

(1)因为 $p$ 是 $q$ 的充分不必要条件，所以 $A\subsetneqq B$，

所以 $\begin{cases}1-m\leqslant-2,\\1+m>10\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1-m<-2,\\1+m\geqslant10,\end{cases}$

解得 $m>9$ 或 $m\geqslant9$，所以 $m\geqslant9$，

即实数 $m$ 的取值范围是 $\{m\mid m\geqslant9\}$.

(2)因为 $p$ 是 $q$ 的必要不充分条件，所以 $q$ 是 $p$ 的充分不必要条件，所以 $B\subsetneq A$，

故有 $\begin{cases}1-m\geqslant -2,\\1+m<10\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1-m>-2,\\1+m\leqslant 10,\end{cases}$ 解得 $m\leqslant 3$.

又 $m>0$，所以实数 $m$ 的取值范围为 $\{m\mid 0<m\leqslant 3\}$.

(3)不存在.理由如下：

若 $p$ 是 $q$ 的充要条件，则 $A=B$，

所以 $\begin{cases}-2=1-m,\\10=1+m,\end{cases}$ 无解.

故不存在实数 $m$，使得 $p$ 是 $q$ 的充要条件.

**【规律方法】**

应用充分不必要条件、必要不充分条件或充要条件求参数的值(范围)时，先将所给条件转化为集合间的关系，再根据集合间的关系构建关于参数的方程(组)或不等式(组)求解.

**【对点训练】**

设集合 $A=\{x\mid m-3<x<m+3,m\in\mathbf{R}\}$，集合 $B=\{x\mid x<2$ 或 $x>6\}$.

(1)当 $m=2$ 时，求 $A\cap B$，$A\cup B$；

(2)设命题 $p:x\in A$，命题 $q:x\in B$，若 $p$ 是 $q$ 的充分不必要条件，求实数 $m$ 的取值范围.

**解**：(1)当 $m=2$ 时，$A=\{x\mid -1<x<5\}$，

所以 $A\cap B=\{x\mid -1<x<2\}$，

$A\cup B=\{x\mid x<5$ 或 $x>6\}$.

(2)若 $p$ 是 $q$ 的充分不必要条件，则 $A$ 是 $B$ 的真子集.

所以 $m+3\leqslant 2$ 或 $m-3\geqslant 6$，

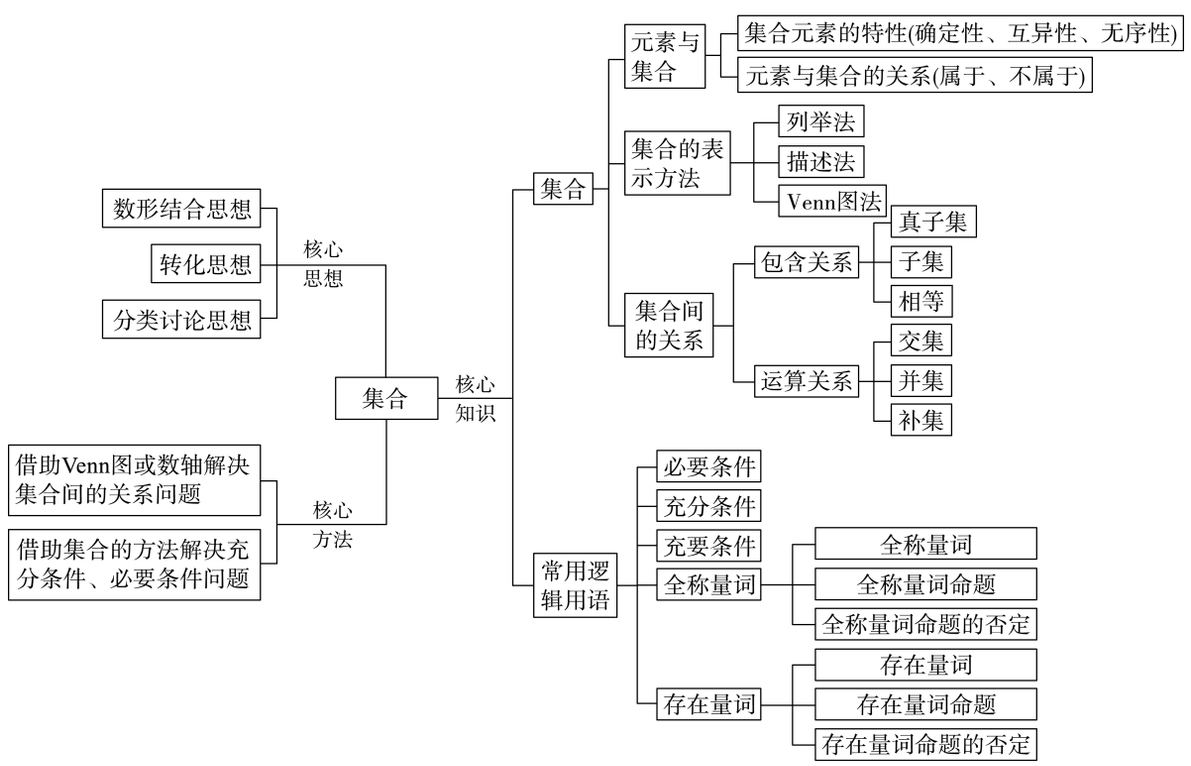
解得 $m\leqslant -1$ 或 $m\geqslant 9$.

所以实数 $m$ 的取值范围是 $\{m\mid m\leqslant -1$ 或 $m\geqslant 9\}$.

★ ★ ★

# 重　构　拓　展

## 多维体系构建



**【问题探究】**

1.集合中的元素具有确定性、互异性和无序性，你能结合实例说明这些特性吗？

2.你能用集合表示平面内线段 $AB$ 的垂直平分线吗？结合集合的描述法谈谈你的体会.

3.用联系的观点看问题，可以使我们更深刻地理解数学知识.本章中，我们类比数与数的关系和运算研究了集合与集合的关系和运算.你认为这样的类比对发现和提出集合的问题有什么意义？你能类比数的减法运算给出集合的减法运算吗？

4.对给定的条件 $p$ 和 $q$，如何判定 $p$ 是 $q$ 的充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件、既不充分也不必要条件？你能举例说明吗？

5.如何否定一个含有量词的全称量词命题或存在量词命题？你能举例说明吗？

# 单元测试卷(一)

（考查范围：第一章　时间：120 分钟　分值：150 分）

**一、单项选择题**：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.命题“$\exists x>0, x^{2\,025}-2\,025>0$”的否定是　（　　）

A. $\exists x\leqslant 0, x^{2\,025}-2\,025<0$

B. $\exists x<0, x^{2\,025}-2\,025\leqslant 0$

C. $\forall x>0, x^{2\,025}-2\,025\leqslant 0$

D. $\forall x>0, x^{2\,025}-2\,025<0$

C　**解析**：命题“$\exists x>0, x^{2\,025}-2\,025>0$”的否定是“$\forall x>0, x^{2\,025}-2\,025\leqslant 0$”.故选 C.

2.(2025·新高考Ⅱ卷)已知集合 $A=\{-4,0,1,2,8\}$，$B=\{x\mid x^3=x\}$，则 $A\cap B=$　（　　）

A.$\{0,1,2\}$　　B.$\{1,2,8\}$

C.$\{2,8\}$　　D.$\{0,1\}$

D　**解析**：由题可得 $B=\{-1,0,1\}$，所以 $A\cap B=\{0,1\}$.故选 D.

3.(2023·全国乙卷)设全集 $U=\{0,1,2,4,6,8\}$，集合 $M=\{0,4,6\}$，$N=\{0,1,6\}$，则 $M\cup \complement_U N=$　（　　）

A.$\{0,2,4,6,8\}$　　B.$\{0,1,4,6,8\}$

C.$\{1,2,4,6,8\}$　　D.$U$

A　**解析**：由题意可得 $\complement_U N=\{2,4,8\}$，则 $M\cup \complement_U N=\{0,2,4,6,8\}$.

4.若集合 $M=\{(x-y,x+y)\mid y=3x\}$，则　（　　）

A.$(-1,-2)\in M$　　B.$(1,2)\in M$

C.$(-2,-4)\in M$　　D.$(-2,4)\in M$

D　**解析**：由题意可知 $x-y=-2x$，$x+y=4x$，所以 $M=\{(-2x,4x)\}$，

显然选项中 D 符合题意，此时 $x=1$，A，B，C 不符合题意.故选 D.

5.对任意实数 $a$，$b$，$c$，给出下列命题，其中真命题是　（　　）

A.“$a=b$”是“$ac=bc$”的充要条件

B.“$a>b$”是“$a^2>b^2$”的充分条件

C.“$a<5$”是“$a<3$”的必要条件

D.“$a+5$ 是无理数”是“$a$ 是无理数”的充分不必要条件

C　**解析**：$a=b\Rightarrow ac=bc$，当 $c=0$ 时，$ac=bc$，$a$ 与 $b$ 不一定相等，A 是假命题；

当 $a=1,b=-2$ 时，$a>b$，但 $a^2<b^2$，充分性不成立，B 是假命题；

$a<5$ 不一定 $a<3$，但 $a<3$ 必有 $a<5$，所以“$a<5$”是“$a<3$”的必要条件，C 是真命题；

若 $a+5$ 是无理数，则 $a$ 是无理数，若 $a$ 是无理数，则 $a+5$ 是无理数，所以“$a+5$ 是无理数”是“$a$ 是无理数”的充要条件，D 是假命题.故选 C.

**6.**已知集合 $A=\{x\mid ax^2-3x+2=0\}$ 的子集只有两个，则实数 $a$ 的值为　（　）

A.$\frac{9}{8}$　　B.0　　C.$\frac{9}{8}$或 0　　D.无法确定

C　**解析**：由集合 $A$ 的子集只有两个，知集合 $A$ 中只有一个元素.

当 $a=0$ 时，$A=\{x\mid ax^2-3x+2=0\}=\{x\mid -3x+2=0\}=\left\{\frac{2}{3}\right\}$，符合题意；

当 $a\neq 0$ 时，方程 $ax^2-3x+2=0$ 只有一个解，则 $\Delta=9-8a=0$，解得 $a=\frac{9}{8}$.

综上，$a=0$ 或 $a=\frac{9}{8}$.故选 C.

**7.**“$a>1$ 且 $b>2\ 024$”是“$a+b>2\ 025$”的　（　）

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

A　**解析**：由 $a>1$ 且 $b>2\ 024$ 可得 $a+b>2\ 025$；但当 $a+b>2\ 025$ 时，推不出 $a>1$ 且 $b>2\ 024$，如 $a=0,b=2\ 026$.

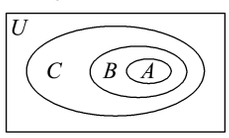
故“$a>1$ 且 $b>2\ 024$”是“$a+b>2\ 025$”的充分不必要条件.故选 A.

**8.**已知 $U$ 为全集，其三个非空子集 $A,B,C$ 满足 $A\subseteq B\subseteq C$，则下列集合为空集的是　（　）

A.$(\complement_U A)\cap B$　　B.$(\complement_U B)\cap C$

C.$(\complement_U C)\cap A$　　D.$A\cap B\cap C$

C　**解析**：由图可知 $(\complement_U A)\cap B$，$(\complement_U B)\cap C$，$A\cap B\cap C$ 都不是空集，$(\complement_U C)\cap A=\varnothing$.故选 C.




**二、多项选择题**：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

**9.**已知 $A\subseteq B,A\subseteq C,B=\{2,0,1,8\},C=\{1,9,3,8\}$，则 $A$ 可以是　（　）

A.$\{1,8\}$　　B.$\{2,3\}$

C.$\{1\}$　　D.$\{2\}$

AC　**解析**：因为 $A\subseteq B,A\subseteq C$，所以 $A\subseteq(B\cap C)$.因为 $B=\{2,0,1,8\},C=\{1,9,3,8\}$，所以 $B\cap C=\{1,8\}$.所以 $A\subseteq\{1,8\}$.故选 AC.

**10.**下列命题正确的是　（　）

A.命题“$\exists x\in\mathbf{R},x^2+x+1\geqslant 0$”的否定是“$\forall x\in\mathbf{R},x^2+x+1<0$”

B.“$a+b=0$”的充要条件是“$\frac{b}{a}=-1$”

C.$\forall x\in\mathbf{R},x^2>0$

D.“$a>1,b>1$”是“$ab>1$”的充分条件

AD　**解析**：因为“$\exists x\in\mathbf{R},x^2+x+1\geqslant 0$”的否定是“$\forall x\in\mathbf{R},x^2+x+1<0$”，所以 A 正确；

当 $a=b=0$ 时，满足 $a+b=0$，但 $\frac{b}{a}=-1$ 不成立，所以 B 错误；

当 $x=0$ 时，$x^2=0$，所以 C 错误；

当 $a>1,b>1$ 时，$ab>1$，所以充分性成立，所以 D 正确.

**11.**取整函数 $y=[x]$ 中，$[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数，如 $[1.2]=1,[2]=2,[-1.2]=-2$.取整函数在现实生活中有着广泛的应用.以下关于取整函数的命题是真命题的有　（　）

A.$\forall x\in\mathbf{R},[2x]=2[x]$

B.$\exists x\in\mathbf{R},[2x]=2[x]$

C.$\forall x,y\in\mathbf{R}$，若 $[x]=[y]$，则 $x-y<1$

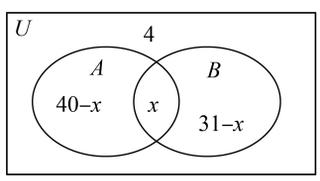
D.$\forall x,y\in\mathbf{R},[x+y]\leqslant[x]+[y]$

BC　**解析**：由取整函数的定义知 $[2x]=2[x]$ 不一定成立，如 $x$ 取 1.5 时，$[2x]=3,2[x]=2$，故 A 是假命题；当 $x$ 取 1 时，$[2x]=2,2[x]=2$，故 B 是真命题；设 $x=n+a(n\in\mathbf{Z},0\leqslant a<1),y=m+b(m\in\mathbf{Z},0\leqslant b<1)$，若 $[x]=[y]$，则 $n=m$，因此 $x-y=a-b\leqslant a<1$，故 C 是真命题；当 $x$ 取 1.6，$y$ 取 1.6 时，$[x+y]=[3.2]=3,[x]+[y]=1+1=2$，故 D 是假命题.故选 BC.

**三、填空题**：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

**12.** 某班 50 名学生做物理、化学两种实验，已知物理实验做对的有 40 人，化学实验做对的有 31 人，两种实验都做错的有 4 人，则这两种实验都做对的有_____人.

25　**解析**：根据题意，可设全集 $U$ 表示全班学生，集合 $A$ 表示做对物理实验的学生，$B$ 表示做对化学实验的学生，并将两种实验都做对的学生人数记为 $x$，如图所示.




所以 $(40-x)+x+(31-x)+4=50$，解得 $x=25$.

故两种实验都做对的学生为 25 人.

**13.** 若命题“$\forall x\in\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$，$x-a\geqslant 0$”是真命题，则实数 $a$ 的取值范围是_____.

$\{a\mid a\leqslant 1\}$　**解析**：由题意知，当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$a\leqslant x$ 恒成立，所以 $a\leqslant 1$.

**14.** 中国古代数学专著《孙子算经》中有一个问题：“今有三女，长女五日一归，中女四日一归，少女三日一归，问：三女几何日相会？”此三女前三次相会经过的天数组成的集合用列举法可表示为_____，此三女相会经过的天数组成的集合用描述法可表示为_____.

$\{60,120,180\}$　$\{x\mid x=60n,n\in\mathbf{N}^*\}$　**解析**：因为三女相会经过的天数是 5，4，3 的公倍数，且它们的最小公倍数为 60，所以三女前三次相会经过的天数组成的集合用列举法可表示为 $\{60,120,180\}$. 此三女相会经过的天数组成的集合用描述法可表示为 $\{x\mid x=60n,n\in\mathbf{N}^*\}$.

**四、解答题**：本题共 5 小题，共 77 分. 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

**15.** (13 分) 已知集合 $A=\{x\mid 2a-1<x<a+1\}$，$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$.

(1) 在①$a=-1$，②$a=0$，③$a=1$ 这三个条件中选择一个作为已知条件，求 $A\cup B$；

(2) 若 $A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=A$，求实数 $a$ 的取值范围.

**解**：(1) 选择①$a=-1$，则 $A=\{x\mid -3<x<0\}$，

所以 $A\cup B=\{x\mid -3<x\leqslant 1\}$.

选择②$a=0$，则 $A=\{x\mid -1<x<1\}$，

所以 $A\cup B=\{x\mid -1<x\leqslant 1\}$.

选择③$a=1$，则 $A=\{x\mid 1<x<2\}$，

所以 $A\cup B=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$.

(2) 由题意知，$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid x<0$，或 $x>1\}$，

因为 $A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=A$，所以 $A\subseteq\complement_{\mathbf{R}}B$.

若 $2a-1\geqslant a+1$，即 $a\geqslant 2$，则 $A=\varnothing$，满足题意；

若 $2a-1<a+1$，即 $a<2$，

由 $A\subseteq\complement_{\mathbf{R}}B$，得 $a+1\leqslant 0$ 或 $2a-1\geqslant 1$，

解得 $a\leqslant -1$ 或 $a\geqslant 1$.

所以 $a\leqslant -1$ 或 $1\leqslant a<2$.

综上，实数 $a$ 的取值范围为 $\{a\mid a\leqslant -1$，或 $a\geqslant 1\}$.

**16.** (15 分) 已知集合 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，集合 $B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$，集合 $C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$.

(1) 若 $A\cap B=\{2\}$，求实数 $a$ 的值；

(2) 若 $A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，求实数 $a$ 的值.

**解**：(1) 因为集合 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，集合 $B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，且 $A\cap B=\{2\}$，

所以 $2\in A$，所以 $4-2a+a^2-19=0$，即 $a^2-2a-15=0$，解得 $a=-3$ 或 $a=5$.

当 $a=-3$ 时，$A=\{x\mid x^2+3x-10=0\}=\{-5,2\}$，$A\cap B=\{2\}$，符合题意；

当 $a=5$ 时，$A=\{x\mid x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，$A\cap B=\{2,3\}$，不符合题意.

综上，实数 $a$ 的值为 $-3$.

(2) 因为 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{2,3\}$，$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}=\{-4,2\}$，且 $A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，

所以 $3\in A$，$-4\notin A$，$2\notin A$，

所以 $9-3a+a^2-19=0$，即 $a^2-3a-10=0$，解得 $a=-2$ 或 $a=5$.

当 $a=-2$ 时，$A=\{x\mid x^2+2x-15=0\}=\{-5,3\}$，满足题意；

当 $a=5$ 时，$A=\{x\mid x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，不满足题意.

综上，实数 $a$ 的值为 $-2$.

**17.** (15 分) 已知集合 $A=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}<x<2\right\}$，$B=\{x\mid a-2<x<a+2\}$.

(1) 若 $C=\{3,4,a^2+2a-3\}$，$0\in(B\cap C)$，求实数 $a$ 的值；

(2) 从①$A\cap B=A$，②$A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=\varnothing$，③$B\cup\complement_{\mathbf{R}}A=\mathbf{R}$ 这三个条件中选择一个作为已知条件，求实数 $a$ 的取值范围.

**解**：(1)因为 $0\in(B\cap C)$，所以 $0\in C$，

所以 $a^2+2a-3=0$，解得 $a=1$ 或 $a=-3$.

当 $a=-3$ 时，$B=\{x\mid -5<x<-1\}$，不满足 $0\in B$，故舍去；

当 $a=1$ 时，$B=\{x\mid -1<x<3\}$，满足题意.

综上，实数 $a$ 的值为 1.

(2)选择条件①.

由 $A\cap B=A$，得 $A\subseteq B$，

所以 $\begin{cases}a+2\geqslant 2,\\ a-2\leqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $0\leqslant a\leqslant\dfrac{5}{2}$.

故实数 $a$ 的取值范围是 $\left\{a\,\middle|\,0\leqslant a\leqslant\dfrac{5}{2}\right\}$.

选择条件②.

由 $A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=\varnothing$，得 $A\subseteq B$，

所以 $\begin{cases}a+2\geqslant 2,\\ a-2\leqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $0\leqslant a\leqslant\dfrac{5}{2}$.

故实数 $a$ 的取值范围是 $\left\{a\,\middle|\,0\leqslant a\leqslant\dfrac{5}{2}\right\}$.

选择条件③.

由 $B\cup\complement_{\mathbf{R}}A=\mathbf{R}$，得 $A\subseteq B$，

所以 $\begin{cases}a+2\geqslant 2,\\ a-2\leqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $0\leqslant a\leqslant\dfrac{5}{2}$.

故实数 $a$ 的取值范围是 $\left\{a\,\middle|\,0\leqslant a\leqslant\dfrac{5}{2}\right\}$.

**18.**(17 分)已知命题 $p$：$\exists x\in\{x\mid 6\leqslant x\leqslant 20\}$，$x<2a$，命题 $q$：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x-a>0$.

(1)若命题 $p$ 和命题 $\neg q$ 有且只有一个为假命题，求实数 $a$ 的取值范围；

(2)若命题 $p$ 和命题 $q$ 至少有一个为真命题，求实数 $a$ 的取值范围.

**解**：(1)若命题 $p$ 为真命题，即 $\exists x\in\{x\mid 6\leqslant x\leqslant 20\}$，$x<2a$，则 $6<2a$，所以 $a>3$.

若命题 $q$ 为真命题，即 $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x-a>0$，则 $\Delta=2^2+4a<0$，解得 $a<-1$.

因为命题 $p$ 和命题 $\neg q$ 有且只有一个为假命题，所以当命题 $p$ 为假命题，命题 $\neg q$ 为真命题时，

$\begin{cases}a\leqslant 3,\\ a\geqslant -1,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant a\leqslant 3$；

当命题 $p$ 为真命题，命题 $\neg q$ 为假命题时，

$\begin{cases}a>3,\\ a<-1,\end{cases}$ 解得 $a\in\varnothing$.

所以实数 $a$ 的取值范围是 $\{a\mid -1\leqslant a\leqslant 3\}$.

(2)由(1)知，若命题 $p$ 和命题 $q$ 都为假命题，

则 $\begin{cases}a\leqslant 3,\\ a\geqslant -1,\end{cases}$ 即 $-1\leqslant a\leqslant 3$.

因为命题 $p$ 和命题 $q$ 至少有一个为真命题，所以 $a>3$ 或 $a<-1$，即实数 $a$ 的取值范围是 $\{a\mid a>3$，或 $a<-1\}$.

**19.**(17 分)定义两种新运算“$\oplus$”与“$\otimes$”，满足如下运算法则：对任意 $a,b\in\mathbf{R}$，有 $a\oplus b=ab$，$a\otimes b=\dfrac{a-b}{(a+b)^2+1}$.设全集 $U=\{x\mid x=(a\oplus b)+(a\otimes b)$，$-2<a\leqslant b<1$，且 $a\in\mathbf{Z}$，$b\in\mathbf{Z}\}$，集合 $A=\left\{x\,\middle|\,x=2(a\oplus b)+\dfrac{a\otimes b}{b},-1<a<b<2,\text{且}\,a\in\mathbf{Z},b\in\mathbf{Z}\right\}$，$B=\{x\mid x^2-3x+m=0\}$.

(1)求集合 $U$ 和 $A$.

(2)集合 $A$，$B$ 是否能满足 $B\cap\complement_U A=\varnothing$？若能，求出实数 $m$ 的取值范围；若不能，请说明理由.

**解**：(1)全集 $U$ 中，$x=(a\oplus b)+(a\otimes b)=ab+\dfrac{a-b}{(a+b)^2+1}$，$-2<a\leqslant b<1$，且 $a\in\mathbf{Z}$，$b\in\mathbf{Z}$，

当 $a=-1$ 时，$b=0$ 或 $b=-1$，此时 $x=-\dfrac{1}{2}$ 或 $x=1$；

当 $a=0$ 时，$b=0$，此时 $x=0$，所以 $U=\left\{-\dfrac{1}{2},0,1\right\}$.

集合 $A$ 中，$x=2(a\oplus b)+\dfrac{a\otimes b}{b}=2ab+\dfrac{a-b}{b[(a+b)^2+1]}$，$-1<a<b<2$，且 $a\in\mathbf{Z}$，$b\in\mathbf{Z}$，

当 $a=0$ 时，$b=1$，此时 $x=-\dfrac{1}{2}$，即 $A=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

(2)因为 $\complement_U A=\{0,1\}$，所以当 $B\cap\complement_U A=\varnothing$ 时，$B=\varnothing$ 或 $B=A$.

当 $B=\varnothing$ 时，方程无实数根，则 $\Delta=(-3)^2-4m<0$，解得 $m>\dfrac{9}{4}$；

当 $B=A$ 时，方程 $x^2-3x+m=0$ 有两个相等的实数根 $-\dfrac{1}{2}$，则 $\begin{cases}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+m=0,\\ (-3)^2-4m=0,\end{cases}$ 此时 $m$ 的值不存在.

综上，实数 $m$ 的取值范围是 $\left\{m\,\middle|\,m>\dfrac{9}{4}\right\}$.

# 第二章 一元二次函数、方程和不等式

## 单元概览

### 单元导航

相等关系与不等关系是数学中最基本的数量关系.我们可以先利用相等、不等关系构建方程、不等式,再通过方程、不等式解决与数学相关的各种问题,并进一步体会用函数观点统一方程和不等式的数学思想方法.

### 学习目标

**1.**结合生活中的实例,探究利用基本不等式求最值的方法和一元二次不等式的解法,建立用一元二次不等式解决应用问题的模型.

**2.**在解决最值、恒成立问题的过程中,初步建立转化与化归的数学思想,解决生活中的成本最低、利益最大化等问题.

**3.**研读文本,类比等式的性质分析不等式的性质,类比恒等式推导基本不等式,用函数的观点研究一元二次不等式的解集,用自己的方式构建单元知识结构,并说明其逻辑关系.

### 核心概念

函数观点下相等和不等的基本数量关系.

类比相等关系探究不等关系,描述函数、方程和不等式的联系,并建立不等关系模型,解决综合问题,培养借助直观图象理解数学内容、通过逻辑推理证明数学结论的思维习惯.

### 学法指导

本单元将在初中学习的基础上,结合具体实例理解相等关系与不等关系,认识基本不等式、一元二次不等式,学会用函数观点将方程和不等式统一起来.在概念的基础上逐步梳理出等式与不等式的性质,从代数与几何两个方面认识基本不等式,探究出函数与方程、不等式的联系,能运用方程与不等式解决问题.在掌握本单元基本知识的基础上,学习结合具体情境建立不等式模型解决综合问题.通过梳理本单元所学内容,找出自己的问题,围绕等式与不等式的概念构建出本单元的知识、逻辑、能力与价值意义体系.

★★★

# 探　究　构　建

## 2.1　等式性质与不等式性质

### 第1课时　不等关系与比较大小

**学习任务目标**

1.了解现实世界和日常生活中的等量关系与不等关系.
2.会用不等式(组)表示实际问题中的不等关系.
3.会运用作差法比较两个数或式的大小、证明不等式.

## ○ 问题式预习 ○

**【知识清单】**

**知识点一　相等关系与不等关系**

类似于多与少、大与小、长与短等问题,反映在数量关系上,就是相等与不等,相等用等式表示,不等用不等式表示.

**知识点二　实数 $a$,$b$ 的大小比较**

(1)画数轴比较法

设 $a$,$b$ 是两个实数,它们在数轴上所对应的点分别是 $A$,$B$.那么,当点 $A$ 在点 $B$ 的左边时,$a<b$;当点 $A$ 在点 $B$ 的右边时,$a>b$.

(2)作差比较法

如果 $a-b$ 是正数,那么 $a>b$;如果 $a-b$ 等于 0,那么 $a=b$;如果 $a-b$ 是负数,那么 $a<b$.反过来也对.

这个基本事实可以表示为

$a>b\Leftrightarrow a-b>0$;

$a=b\Leftrightarrow a-b=0$;

$a<b\Leftrightarrow a-b<0$.

**知识点三　重要不等式**

一般地,$\forall a,b\in\mathbf{R}$,有 $a^2+b^2\geqslant 2ab$,当且仅当 $a=b$ 时,等号成立.

**【概念辨析】**

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)$a$ 不小于 $b$ 应表示为 $a>b$.　(　　)

(2)任意两个实数 $a$,$b$ 之间的大小关系,有且只有 $a>b$,$a<b$ 两种.　(　　)

(3)若 $x-y<0$,我们就说 $x$ 大于 $y$.　(　　)

(4)$\forall a,b\in\mathbf{R}$,且 $a\neq b$,有 $a^2+b^2>2ab$.　(　　)

(1)×　**解析**:$a$ 不小于 $b$ 应表示为 $a\geqslant b$.

(2)×　**解析**:任意两个实数 $a$,$b$ 之间,有且只有 $a>b$,$a=b$,$a<b$ 三种关系中的一种,没有其他大小关系.

(3)×　**解析**:若 $x-y<0$,则 $x$ 小于 $y$.

(4)√　**解析**:因为 $a\neq b$,所以 $a^2+b^2>2ab$.

2.设 $m=2a^2+2a+1$,$n=(a+1)^2$,则 $m$,$n$ 的大小关系是_____.

$m\geqslant n$　**解析**:$m-n=2a^2+2a+1-(a+1)^2=a^2\geqslant 0$.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1　用不等式(组)表示不等关系

1.某车队需一次性运输一批木材,总重 600 t,车队有两种货车,A 型货车载重 30 t,B 型货车载重24 t.设派出 A 型货车 $x$ 辆,B 型货车 $y$ 辆,则 $x$,$y$ 应满足的关系式是　(　　)

A.$5x+4y<100$　　B.$5x+4y\geqslant 100$

C.$5x+4y>100$　　D.$5x+4y\leqslant 100$

B　**解析**:由已知可得 $30x+24y\geqslant 600$,所以有 $5x+4y\geqslant 100$.故选 B.

2.某高速公路要求行驶的车辆的速度 $v$ 最大为 120 km/h,同一车道上的车间距 $d$ 不得小于 10 m,用不等式表示为　(　　)

A.$v\leqslant 120$ km/h 且 $d\geqslant 10$ m

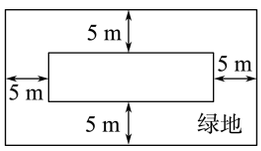
B.$v\leqslant 120$ km/h 或 $d\geqslant 10$ m

C.$v\leqslant 120$ km/h

D.$d\geqslant 10$ m

A　**解析**：$v$ 的最大值为 120 km/h，即 $v\leqslant 120$ km/h.车间距 $d$ 不得小于 10 m，即 $d\geqslant 10$ m.

**3.**如图，在一个面积小于 450 $m^2$ 的矩形空地中心位置上建造一个仓库，仓库的四周建成绿地，仓库的长 $x$（单位：m）大于宽 $y$（单位：m）的 3 倍.试用不等式组表示上面的不等关系.




**解**：依题意，得$\begin{cases}x>0,\\y>0,\\x>3y,\\(x+10)(y+10)<450.\end{cases}$

## 【探究总结】

**将不等关系表示成不等式（组）的思路**

(1)读懂题意，找准与不等关系有关的量.

(2)用适当的不等号连接.

(3)多个不等关系用不等式组表示.

## 任务2 作差法比较大小

### 探究活动

**例 1**　（教材 P38 例 1 改编）当 $x<1$ 时，比较 $x^3-1$ 与 $2x^2-2x$ 的大小.

**解**：$(x^3-1)-(2x^2-2x)=(x-1)(x^2+x+1)-2x(x-1)=(x-1)(x^2-x+1)=(x-1)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$.

因为 $x<1$，所以 $x-1<0$.

又$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}>0$，

所以$(x-1)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]<0$，即 $x^3-1<2x^2-2x$.

［一题多思］

**思考 1.**作差法比较大小的关键是作差后的变形，在变形时，可采用的方法主要有哪些？变形过程中要注意什么问题？

**提示**：作差变形可采用配方、因式分解、通分、分母有理化等方法；变形过程中要注意保持等价性与正确性.

**思考 2.**本例中，若 $x\in\mathbf{R}$，它们的大小关系如何？

**提示**：$(x^3-1)-(2x^2-2x)=x^3-x^2-(x^2-2x+1)=x^2(x-1)-(x-1)^2=(x-1)(x^2-x+1)=(x-1)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$.

因为$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，

所以当 $x>1$ 时，$x-1>0$，则$(x-1)\cdot\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]>0$，即 $x^3-1>2x^2-2x$；

当 $x=1$ 时，$x-1=0$，则$(x-1)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]=0$，即 $x^3-1=2x^2-2x$；

当 $x<1$ 时，$x-1<0$，则$(x-1)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]<0$，即 $x^3-1<2x^2-2x$.

综上，当 $x>1$ 时，$x^3-1>2x^2-2x$；

当 $x=1$ 时，$x^3-1=2x^2-2x$；

当 $x<1$ 时，$x^3-1<2x^2-2x$.

**思考 3.**若 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq-1$，你能比较 $\frac{1}{1+x}$ 与 $1-x$ 的大小吗？

**提示**：因为$\frac{1}{1+x}-(1-x)=\frac{1-(1-x^2)}{1+x}=\frac{x^2}{1+x}$，

所以当 $x=0$ 时，$\frac{1}{1+x}=1-x$；

当 $1+x<0$，即 $x<-1$ 时，$\frac{x^2}{1+x}<0$，所以 $\frac{1}{1+x}<1-x$；

当 $1+x>0$ 且 $x\neq0$，即 $-1<x<0$ 或 $x>0$ 时，$\frac{x^2}{1+x}>0$，

所以 $\frac{1}{1+x}>1-x$.

综上，当 $x=0$ 时，$\frac{1}{1+x}=1-x$；

当 $x<-1$ 时，$\frac{1}{1+x}<1-x$；

当 $-1<x<0$ 或 $x>0$ 时，$\frac{1}{1+x}>1-x$.

## 【探究总结】

**作差法比较大小的一般步骤**

第一步，作差.

第二步，变形，常采用配方、因式分解等恒等变形手段，将“差”化成“和”或“积”.

第三步，定号，即确定结果是大于 0，等于 0，还是小于 0（不确定的要分情况讨论）.

第四步，得出结论.

### 应用迁移

**1.**已知$M=x^2-3x+3$，$N=x-1$，则$M$与$N$的大小关系是（　　）

A.$M>N$　　B.$M<N$

C.$M\geqslant N$　　D.$M\leqslant N$

C　**解析：**因为$M-N=(x^2-3x+3)-(x-1)=x^2-4x+4=(x-2)^2\geqslant 0$，所以$M\geqslant N$.故选C.

**2.**每次去加油站，甲选择加固定金额的汽油，乙选择加固定体积的汽油.在油价有波动的情况下，更经济的方案是（　　）

A.加固定金额的汽油

B.加固定体积的汽油

C.两种方案一样

D.要视具体价格而定

A　**解析：**设两次加油时的油价分别为$x$，$y$（$x$，$y>0$，且$x\neq y$），乙每次加油的体积为$a$（$a>0$），甲每次加油的钱数为$b$（$b>0$）.

乙加油的平均油价为$\dfrac{ax+ay}{2a}=\dfrac{x+y}{2}$，甲加油的平均油价为$\dfrac{2b}{\frac{b}{x}+\frac{b}{y}}=\dfrac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\dfrac{2xy}{x+y}$.

因为$\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{2xy}{x+y}=\dfrac{(x-y)^2}{2(x+y)}>0$，所以$\dfrac{x+y}{2}>\dfrac{2xy}{x+y}$，即甲的方案更经济.故选A.

## 任务3　作差法证明不等式

### 探究活动

**例2**　已知$a>b>1$，证明下列不等式：

(1)$\dfrac{b+1}{a+1}>\dfrac{b}{a}$；(2)$a+\dfrac{1}{a}>b+\dfrac{1}{b}$.

**证明：**(1)$\dfrac{b+1}{a+1}-\dfrac{b}{a}=\dfrac{a(b+1)-b(a+1)}{(a+1)a}=\dfrac{ab+a-ab-b}{(a+1)a}=\dfrac{a-b}{(a+1)a}$.

因为$a>b>1$，所以$a-b>0$，$a+1>0$，$a>0$，

所以$\dfrac{a-b}{(a+1)a}>0$，即$\dfrac{b+1}{a+1}>\dfrac{b}{a}$.

(2)$a+\dfrac{1}{a}-\left(b+\dfrac{1}{b}\right)=a-b+\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=a-b+\dfrac{b-a}{ab}$

$=(a-b)\left(1-\dfrac{1}{ab}\right)=(a-b)\cdot\dfrac{ab-1}{ab}$.

因为$a>b>1$，所以$a-b>0$，$ab>1$，

所以$(a-b)\cdot\dfrac{ab-1}{ab}>0$，即$a+\dfrac{1}{a}>b+\dfrac{1}{b}$.

**【探究总结】**

用作差法证明不等式的关键是对差式进行变形，通过配方、通分、因式分解等方法确定差式的符号，从而证明不等式.

### 应用迁移

已知$a>0$，求证：$a+\dfrac{1}{a}\geqslant 2$.

**证明：**（方法一）因为$a>0$，所以$a+\dfrac{1}{a}=(\sqrt{a})^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\geqslant 2\sqrt{a}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{a}}=2$.

当且仅当$\sqrt{a}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$，即$a=1$时，等号成立.

（方法二）因为$a+\dfrac{1}{a}-2=(\sqrt{a})^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2-2=\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\geqslant 0$，所以$a+\dfrac{1}{a}\geqslant 2$.

# 课后素养评价（十）

## 基础落实

**1.**若$m=3x^2-x$，$n=2x^2+x-1$，则$m$与$n$的大小关系是（　　）

A.$m>n$　　B.$m\geqslant n$　　C.$m<n$　　D.$m\leqslant n$

B　**解析：**因为$m-n=3x^2-x-(2x^2+x-1)=x^2-2x+1=(x-1)^2\geqslant 0$，所以$m\geqslant n$.故选B.

**2.**（多选）使$m^3>m^2-m+1$成立的实数$m$的值可以为（　　）

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

CD　**解析：**因为$m^3-(m^2-m+1)=m^3-m^2+m-1=m^2(m-1)+(m-1)=(m-1)(m^2+1)>0$，又因为$m^2+1>0$，所以$m>1$.故选CD.

**3.**一个两位数的个位数字为$x$，十位数字为$y$，且这个两位数大于70，用不等式表示为_____.

$10y+x>70$　**解析：**该两位数可表示为$10y+x$，所以$10y+x>70$.

**4.**若$x\in\mathbf{R}$，则$\dfrac{x}{1+x^2}$与$\dfrac{1}{2}$的大小关系为_____.

$\dfrac{x}{1+x^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$　**解析：**因为$\dfrac{x}{1+x^2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2x-1-x^2}{2(1+x^2)}=\dfrac{-(x-1)^2}{2(1+x^2)}\leqslant 0$，所以$\dfrac{x}{1+x^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

**5.**用一段长为30 m的篱笆围成一个一边靠墙的矩形菜园，墙长18 m，要求菜园的面积不小于216 m$^2$，靠墙的一边长为$x$ m.试用不等式（组）表示其中的不等关系.

**解：**由于矩形菜园靠墙的一边长为$x$ m，而墙长为

18 m，所以 $0<x\leqslant 18$.

这时菜园的另一条边长为 $\frac{30-x}{2}=15-\frac{x}{2}$(m)，

因此菜园的面积为 $S=x\left(15-\frac{x}{2}\right)$(m²).

依题意，有 $S\geqslant 216$，即 $x\left(15-\frac{x}{2}\right)\geqslant 216$.

故该题中的不等关系可用不等式组表示为 $\begin{cases}0<x\leqslant 18,\\ x\left(15-\frac{x}{2}\right)\geqslant 216.\end{cases}$

## 能力提升

**1.** 已知 $c>1$，且 $x=\sqrt{c+1}-\sqrt{c}$，$y=\sqrt{c}-\sqrt{c-1}$，则 $x$，$y$ 之间的大小关系是　(　　)

A. $x>y$

B. $x=y$

C. $x<y$

D. 与 $c$ 的值有关

C　**解析**：由题意得 $x>0$，$y>0$，因为 $\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{c+1}-\sqrt{c}}{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}}=\frac{\sqrt{c}+\sqrt{c-1}}{\sqrt{c+1}+\sqrt{c}}<1$，所以 $x<y$.

**2.** 已知 $0<a_1<1$，$0<a_2<1$，记 $M=a_1a_2$，$N=a_1+a_2-1$，则 $M$ 与 $N$ 的大小关系是　(　　)

A. $M<N$　　B. $M>N$

C. $M=N$　　D. $M\geqslant N$

B　**解析**：因为 $M-N=a_1a_2-(a_1+a_2-1)=a_1a_2-a_1-a_2+1=a_1(a_2-1)-(a_2-1)=(a_1-1)(a_2-1)$，且 $0<a_1<1$，$0<a_2<1$，所以 $a_1-1<0$，$a_2-1<0$，所以 $(a_1-1)(a_2-1)>0$，所以 $M>N$.

**3.** (多选)某工艺厂用 A，B 两种型号不锈钢薄板制作矩形、菱形、圆形三种图形模板，每个图形模板需要 A，B 型不锈钢薄板张数及该厂两种薄板库存张数见下表.

| 型号 | 矩形 | 菱形 | 圆形 | 库存 |
|---|---|---|---|---|
| A | 5 | 3 | 10 | 55 |
| B | 12 | 6 | 13 | 125 |

该厂制作的矩形、菱形、圆形三种图形模板的个数分别为 $x$，$y$，$z$($x$，$y$，$z\in\mathbf{N}^*$).上述问题中的不等关系表示正确的为　(　　)

A. $5x+3y+10z\geqslant 55$

B. $5x+3y+10z\leqslant 55$

C. $12x+6y+13z\leqslant 125$

D. $12x+6y+13z\geqslant 125$

BC　**解析**：因为每个矩形模板需要 5 张 $A$ 薄板，每个菱形模板需要 3 张 $A$ 薄板，每个圆模板需要 10 张 $A$ 薄板，且共有 55 张 $A$ 薄板，所以 $5x+3y+10z\leqslant 55$.因为每个矩形模板需要 12 张 $B$ 薄板，每个菱形模板需要 6 张 $B$ 薄板，每个圆模板需要 13 张 $B$ 薄板，且共有 125 张 $B$ 薄板，所以 $12x+6y+13z\leqslant 125$.故选 BC.

**4.** 民宿的窗户面积与地板面积之比越大，采光效果越好.现有一所地板面积为 180 m² 的民宿需要同时增加窗户和地板的面积，已知地板增加的面积是窗户增加的面积的 2 倍，且民宿改造后的采光效果不逊于改造前，则改造前的窗户面积最大为_____m².

90　**解析**：设改造前的窗户面积为 $x$ m²，窗户增加的面积为 $y$ m²，$x>0$，$y>0$.

依题意 $\frac{x}{180}\leqslant\frac{x+y}{180+2y}$，即 $180x+2xy\leqslant 180x+180y$，$2xy\leqslant 180y$，$x\leqslant 90$.

所以改造前的窗户面积最大为 90 m².

**5.** 已知 $0<a<b$ 且 $a+b=1$，求证：

(1) $a^2+b^2<b$；

(2) $2ab<\frac{1}{2}$.

**证明**：(1)因为 $0<a<b$ 且 $a+b=1$，

所以 $a^2+b^2-b=a^2+b(b-1)$

$=a^2-ab=a(a-b)<0$，

所以 $a^2+b^2<b$.

(2)由 $a+b=1$，得 $b=1-a$，$a<\frac{1}{2}$，

所以 $2ab-\frac{1}{2}=2a(1-a)-\frac{1}{2}$

$=-2a^2+2a-\frac{1}{2}=-2\left(a^2-a+\frac{1}{4}\right)$

$=-2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2<0$，

所以 $2ab<\frac{1}{2}$.

## 自我超越

设 $a$，$b\in\mathbf{R}$，定义运算“$\otimes$”和“$\oplus$”如下：$a\otimes b=\begin{cases}a,a\leqslant b,\\ b,a>b,\end{cases}$ $a\oplus b=\begin{cases}b,a\leqslant b,\\ a,a>b.\end{cases}$ 若 $m\otimes n\geqslant 2$，$p\oplus q\leqslant 2$，则　(　　)

A. $mn\geqslant 4$ 且 $p+q\leqslant 4$　　B. $m+n\geqslant 4$ 且 $pq\leqslant 4$

C. $mn\leqslant 4$ 且 $p+q\geqslant 4$　　D. $m+n\leqslant 4$ 且 $pq\leqslant 4$

A　**解析**：根据题意，由 $m\otimes n\geqslant 2$ 知，$m$ 与 $n$ 的最小值大于或等于 2；由 $p\oplus q\leqslant 2$ 知，$p$ 与 $q$ 的最大值小于或等于 2.所以 $mn\geqslant 4$ 且 $p+q\leqslant 4$.

# 第 2 课时　不等式的性质

**学习任务目标**

1.梳理等式的性质，掌握不等式的性质.
2.会用不等式的性质解决有关问题.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点　不等式的性质**

(1)性质 1：$a>b\Leftrightarrow b<a$.
(2)性质 2：$a>b,b>c\Rightarrow a>c$.
(3)性质 3：$a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$.
(4)性质 4：$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$；
$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$.
(5)性质 5：$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$.
(6)性质 6：$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$.
(7)性质 7：$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N},n\geqslant 2)$.

### 【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).
(1)若 $a>b$，则 $ac>bc$.　(　)
(2)同向不等式相加与相乘的条件是一致的.　(　)
(3)设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a>b$，则 $a^3>b^3$.　(　)
(4)若 $a+c>b+d$，则 $a>b,c>d$.　(　)

(1)×　**提示**：当 $c=0$ 时，$ac=bc$，故此说法错误.
(2)×　**提示**：相乘需要看是否满足 $\begin{cases}a>b>0,\\c>d>0,\end{cases}$ 而相加与正、负和零均无关系.
(3)√
(4)×　**提示**：取 $a=4,c=5,b=6,d=2$，满足 $a+c>b+d$，但不满足 $a>b$，故此说法错误.

2.若 $a>b,c>d$，则下列不等关系中不一定成立的是(B)
A.$a-b>d-c$　　B.$a+d>b+c$
C.$a-c>b-c$　　D.$a-c<a-d$

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务 1 利用不等式的性质判断命题真假

1.已知 $a>b,c>d$，且 $c,d$ 均不为 0，则下列不等式一定成立的是(　)
A.$ad>bc$　　B.$ac>bd$
C.$a-c>b-d$　　D.$a+c>b+d$

D　**解析**：令 $a=2,b=-2,c=3,d=-6$，可排除 A，B，C.
由不等式的性质知，D 一定成立.

2.下列命题为真命题的是(　)
A.若 $a>b$，则 $ac>bc$
B.若 $a<b<0$，则 $a^2<b^2$
C.若 $a>b>0$，则 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$
D.若 $a<b<0$，则 $\frac{a}{b}>1$

D　**解析**：对于 A，若 $c=0$，则 $ac=0=bc$，故选项 A 为假命题；
对于 B，若 $a=-2,b=-1$，则 $a^2>b^2$，故选项 B 为假命题；
对于 C，若 $a=2,b=1$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，故选项 C 为假命题；
对于 D，由 $a<b<0$，可得 $\frac{a}{b}>1$，故选项 D 为真命题.故选 D.

3.(多选)若 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则下面四个不等式成立的有(　)
A.$|a|>|b|$　　B.$a<b$
C.$a+b<ab$　　D.$a^3>b^3$

CD　**解析**：由 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$ 可得 $b<a<0$，从而 $|a|<|b|$，A，B 均不成立；$a+b<0,ab>0$，则 $a+b<ab$，C 成立；$a^3>b^3$，D 成立.

**【探究总结】**

**判断不等式是否成立的技巧**

(1)注意不等式成立的条件，不要弱化条件.
(2)解答有关不等式的选择题时，可采用特殊值法进行排除，注意取值要遵循以下原则：一是满足题设条件；二是取值要简单，便于验证计算.

### 任务 2 利用不等式的性质证明不等式

**探究活动**

**例 1**　(教材 P42 例 2 改编)若 $a>b>0,c<d<0,e$

$<0$，求证：$\frac{e}{(a-c)^2}>\frac{e}{(b-d)^2}$.

**证明**：因为 $c<d<0$，所以 $-c>-d>0$.

又因为 $a>b>0$，所以 $a-c>b-d>0$.

所以 $(a-c)^2>(b-d)^2>0$.

两边同乘 $\frac{1}{(a-c)^2(b-d)^2}$，

得 $\frac{1}{(a-c)^2}<\frac{1}{(b-d)^2}$.

又 $e<0$，所以 $\frac{e}{(a-c)^2}>\frac{e}{(b-d)^2}$.

## 【探究总结】

**利用不等式的性质证明不等式的注意事项**

(1)利用不等式的性质及其推论可以证明一些不等式.解决此类问题时，一定要在理解的基础上，记准、记熟不等式的性质，并在解题中灵活、准确地加以应用.

(2)应用不等式的性质进行推导时，应注意紧扣不等式的性质包含的条件，不可省略条件或跳步推导，更不能随意构造性质与法则.

## 应用迁移

**1.** 已知 $a>b>c>d$，求证：$\frac{1}{a-d}<\frac{1}{b-c}$.

**证明**：因为 $a>b>c>d$，所以 $a>b$，$-d>-c$，

所以 $a-d>b-c>0$，则 $\frac{1}{a-d}<\frac{1}{b-c}$.

**2.** 不等关系是数学中一种最基本的数量关系，生活中随处可见.例如，已知 $b$ g 糖水中含有 $a$ g 糖（$b>a>0$），再添加 $m$ g 糖（$m>0$，假设全部溶解），糖水变甜了.

(1)请将这一事实表示为一个不等式，并证明这个不等式成立；

(2)利用(1)中的结论证明：若 $a$，$b$，$c$ 为三角形的三边长，则 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}<2$.

(1)**解**：得出不等式 $\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}(b>a>0,m>0)$.

证明：$\frac{a}{b}-\frac{a+m}{b+m}=\frac{a(b+m)-b(a+m)}{b(b+m)}$

$=\frac{ab+am-ab-bm}{b(b+m)}=\frac{m(a-b)}{b(b+m)}$.

因为 $b>a>0$，所以 $a-b<0$，$b>0$.

因为 $m>0$，所以 $b+m>0$.

所以 $\frac{m(a-b)}{b(b+m)}<0$，所以 $\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$.

(2)**证明**：因为 $a$，$b$，$c$ 为三角形的三边长，则有 $a+b>c$，$a+c>b$，$b+c>a$，

由(1)中已证不等式可得 $\frac{a}{b+c}<\frac{a+a}{a+b+c}$，$\frac{b}{a+c}<\frac{b+b}{a+b+c}$，$\frac{c}{a+b}<\frac{c+c}{a+b+c}$，

将以上不等式左、右两边分别相加得 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}<\frac{a+a}{a+b+c}+\frac{b+b}{a+b+c}+\frac{c+c}{a+b+c}=2$，

所以 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}<2$.

# 任务3 利用不等式的性质求代数式的取值范围

## 探究活动

**例2**　(1)已知 $-1<x<4$，$2<y<3$，则 $x-y$ 的取值范围为_____，$3x+2y$ 的取值范围为_____.

(2)已知 $1<a<2$，$2<b<3$，求 $3a-b$ 与 $\frac{a}{b}$ 的取值范围.

(1) $-4<x-y<2$　$1<3x+2y<18$　**解析**：因为 $-1<x<4$，$2<y<3$，所以 $-3<-y<-2$，所以 $-4<x-y<2$.

由 $-1<x<4$，$2<y<3$，

得 $-3<3x<12$，$4<2y<6$，

所以 $1<3x+2y<18$.

(2)**解**：因为 $1<a<2$，$2<b<3$，

所以 $3<3a<6$，$-3<-b<-2$，$\frac{1}{3}<\frac{1}{b}<\frac{1}{2}$，

所以 $0<3a-b<4$，$\frac{1}{3}<\frac{a}{b}<1$.

[一题多思]

**思考1.** 本例(1)中，若把条件改为“$-4\leqslant x-y\leqslant -1$，$-1\leqslant 4x-y\leqslant 5$”，如何求 $9x-y$ 的取值范围？

**提示**：令 $m=x-y$，$n=4x-y$，则 $9x-y=\frac{8}{3}n-\frac{5}{3}m$，得 $-1\leqslant 9x-y\leqslant 20$.

**思考2.** 本例(2)中，若把条件改为“$-6<a<8$，$2<b<3$”，如何求 $\frac{a}{b}$ 的取值范围？

**提示**：因为 $2<b<3$，所以 $\frac{1}{3}<\frac{1}{b}<\frac{1}{2}$.

又 $-6<a<8$，则

①当 $0\leqslant a<8$ 时，$0\leqslant\frac{a}{b}<4$；

②当 $-6<a<0$ 时，$0<-a<6$，所以 $0<-\frac{a}{b}<3$，

所以 $-3<\frac{a}{b}<0$.

综上，$-3<\frac{a}{b}<4$.

**【探究总结】**

**利用不等式的性质求代数式取值范围的策略**

先建立待求范围的代数式与已知范围的代数式的关系，再利用不等式的性质进行运算，求得范围.

**注意**：同向不等式的两边可以相加，但这种转化不是等价变形，如果在解题过程中多次使用这种转化，就有可能扩大代数式的取值范围.

## 应用迁移

**1.** 已知 $4<a<9$，$-2<b<-1$，令 $m=2\sqrt{a}+b$，则 $m$ 的取值范围是（　　）

A.$\{m|2<m<5\}$　　B.$\{m|6<m<17\}$

C.$\{m|1<m<3\}$　　D.$\{m|-3<m<-1\}$

A　**解析**：因为 $4<a<9$，$-2<b<-1$，所以 $2<\sqrt{a}<3$，可得 $4<2\sqrt{a}<6$.

由不等式的基本性质可得 $2<2\sqrt{a}+b<5$.故选 A.

**2.** 已知 $-3\leqslant\alpha\leqslant-1$，$-2\leqslant\beta\leqslant-\frac{1}{2}$，求 $2\alpha-\frac{\beta}{2}$ 与 $\beta-\frac{2\alpha}{3}$ 的取值范围.

**解**：因为 $-3\leqslant\alpha\leqslant-1$，$-2\leqslant\beta\leqslant-\frac{1}{2}$，

所以 $-6\leqslant2\alpha\leqslant-2$，$\frac{1}{4}\leqslant-\frac{\beta}{2}\leqslant1$，

所以 $-\frac{23}{4}\leqslant2\alpha-\frac{\beta}{2}\leqslant-1$.

又因为 $-3\leqslant\alpha\leqslant-1$，

所以 $\frac{2}{3}\leqslant-\frac{2\alpha}{3}\leqslant2$，

所以 $-\frac{4}{3}\leqslant\beta-\frac{2\alpha}{3}\leqslant\frac{3}{2}$.

# 课后素养评价（十一）

## 基础落实

**1.** 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$，则下列结论一定成立的是（　　）

A.若 $a>b$，则 $|a|>|b|$

B.若 $a>b>c>0$，则 $\frac{a}{a+c}>\frac{b}{b+c}$

C.若 $a<b<0$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

D.若 $a>b$，则 $c^2(a-b)>0$

B　**解析**：对于 A，当 $a=-1>b=-3$ 时，可知 $|a|>|b|$ 不成立，故 A 不符合题意；

对于 B，由 $a>b>c>0$，可得 $\frac{a}{a+c}-\frac{b}{b+c}=\frac{a(b+c)}{(a+c)(b+c)}-\frac{b(a+c)}{(a+c)(b+c)}=\frac{c(a-b)}{(a+c)(b+c)}>0$，所以 $\frac{a}{a+c}>\frac{b}{b+c}$，故 B 符合题意；

对于 C，由 $a<b<0$，可得 $\frac{1}{ab}>0$，则 $a\cdot\frac{1}{ab}<b\cdot\frac{1}{ab}$，即 $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$，故 C 不符合题意；

对于 D，当 $c=0$ 时，$c^2(a-b)=0$，故 D 不符合题意.

故选 B.

**2.**（多选）已知 $a,b,c$ 满足 $c<a<b$，且 $ac<0$，那么下列各式中一定成立的是（BCD）

A.$ac(a-c)>0$　　B.$c(b-a)<0$

C.$cb^2<ab^2$　　D.$ab>ac$

**3.**（多选）已知实数 $x,y$ 满足 $1<x<6$，$2<y<3$，则（　　）

A.$3<x+y<9$

B.$-1<x-y<3$

C.$2<xy<18$

D.$\frac{1}{2}<\frac{x}{y-1}<6$

ACD　**解析**：因为 $1<x<6$，$2<y<3$，所以 $3<x+y<9$，$2<xy<18$，故 A，C 正确；由题意可知 $-3<-y<-2$，故 $-2<x-y<4$，B 错误；$1<y-1<2$，则 $\frac{1}{2}<\frac{1}{y-1}<1$，故 $\frac{1}{2}<\frac{x}{y-1}<6$，D 正确.故选 ACD.

**4.** 已知 $a,b,c$ 为实数，能说明“若 $a>b>c$，则 $a^2>bc$”为假命题的一组 $a,b,c$ 的值是_____.

$a=1,b=-1,c=-2$（答案不唯一）

**解析**：当 $a=1,b=-1,c=-2$ 时，$a^2=1,bc=2$，此时满足 $a>b>c$，但是 $a^2<bc$.

故答案为 $a=1,b=-1,c=-2$（答案不唯一）.

**5.** 已知 $a>b>c$，且 $a+b+c=0$，求证：$\frac{c}{a-c}>\frac{c}{b-c}$.

**证明**：因为 $a>b>c$，且 $a+b+c=0$，则 $a>0,c<0$，

则 $a-c>b-c>0$，则 $(a-c)(b-c)>0$，则 $\frac{1}{(a-c)(b-c)}>0$，

则 $\frac{1}{(a-c)(b-c)}\cdot(a-c)>\frac{1}{(a-c)(b-c)}\cdot(b-c)>0$，

则 $\frac{1}{b-c}>\frac{1}{a-c}>0$.

又 $c<0$，则 $\frac{c}{a-c}>\frac{c}{b-c}$.

命题得证.

## 能力提升

**1.**(多选)设 $a<b<0$,则下列不等式中正确的是(　　)

A.$\frac{2}{a}>\frac{2}{b}$　　B.$ac<bc$

C.$|a|>-b$　　D.$\sqrt{-a}>\sqrt{-b}$

ACD　**解析**:由 $a<b<0$,得 $\frac{2}{a}>\frac{2}{b}$ 成立,选项 A 正确;

当 $c>0$ 时,$ac<bc$,其余情况下均不成立,则选项 B 不正确;

$|a|=-a>-b$,则选项 C 正确;

由 $-a>-b>0$,可得 $\sqrt{-a}>\sqrt{-b}$,则选项 D 正确.

**2.**若 $abcd<0$,且 $a>0$,$b>c$,$d<0$,则(　　)

A.$b<0$,$c<0$

B.$b>0$,$c>0$

C.$b>0$,$c<0$

D.$0<c<b$ 或 $c<b<0$

D　**解析**:由 $a>0$,$d<0$,且 $abcd<0$,知 $bc>0$.

又因为 $b>c$,所以 $0<c<b$ 或 $c<b<0$.

**3.**给出以下四个命题:

①$a>b\Rightarrow a^n>b^n$($n\in\mathbf{N}^*$);②$a>|b|\Rightarrow a^n>b^n$($n\in\mathbf{N}^*$);③$a<b<0\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$;④$a<b<0\Rightarrow\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$.

其中真命题的序号是_____.

②③　**解析**:①取 $a=-1$,$b=-2$,$n=2$,则 $a^n>b^n$ 不成立;

②由 $a>|b|$,得 $a>0$,所以 $a^n>b^n$ 成立;

③由 $a<b<0$,得 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 成立;

④由 $a<b<0$,得 $a-b<0$,且 $a-b>a$,故 $\frac{1}{a-b}<\frac{1}{a}$,④不成立.

**4.**已知三个不等式:①$ab>0$;②$\frac{c}{a}>\frac{d}{b}$;③$bc>ad$.若以其中的两个作为条件,余下的一个作为结论,则可以组成_3_个真命题.

**5.**已知 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$,求 $\frac{\alpha+\beta}{2}$,$\frac{\alpha-\beta}{2}$ 的取值范围.

**解**:因为 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$,

所以 $-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$,$-\frac{\pi}{4}<\frac{\beta}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}$.

两式相加,得 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$.

因为 $-\frac{\pi}{4}<\frac{\beta}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}$,

所以 $-\frac{\pi}{4}\leqslant-\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{4}$.

所以 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\alpha-\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$.

又 $\alpha<\beta$,所以 $\frac{\alpha-\beta}{2}<0$,

故 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\alpha-\beta}{2}<0$.

即 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$,$-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\alpha-\beta}{2}<0$.

## 自我超越

**1.**已知 $1\leqslant a-b\leqslant2$,$3\leqslant a+b\leqslant4$,则 $3a+4b$ 的最大值为(　　)

A.$\frac{27}{2}$　　B.15　　C.$\frac{29}{2}$　　D.13

A　**解析**:设 $3a+4b=m(a-b)+n(a+b)=(m+n)a+(n-m)b$,

则 $\begin{cases}m+n=3,\\n-m=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-\frac{1}{2},\\n=\frac{7}{2}.\end{cases}$ 因为 $-1\leqslant-\frac{1}{2}(a-b)\leqslant-\frac{1}{2}$,$\frac{21}{2}\leqslant\frac{7}{2}(a+b)\leqslant14$,

所以 $\frac{19}{2}\leqslant3a+4b=-\frac{1}{2}(a-b)+\frac{7}{2}(a+b)\leqslant\frac{27}{2}$,

则 $3a+4b$ 的最大值为 $\frac{27}{2}$.

**2.**已知 $a<b<c$,且 $a+2b+3c=0$,则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是_____.

$\left(-\frac{1}{5},1\right)$　**解析**:因为 $a<b<c$,$a+2b+3c=0$,

所以 $c=-\frac{a+2b}{3}$,且 $6a<a+2b+3c=0<6c$,所以 $a<0$,$c>0$.

由 $b<c$,得 $b<-\frac{a+2b}{3}$,则 $5b<-a$,即 $\frac{5b}{a}>-1$,

即 $\frac{b}{a}>-\frac{1}{5}$.又 $a<b$,则 $\frac{b}{a}<1$,

因此 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{5},1\right)$.

# 2.2　基本不等式

## 第1课时　基本不等式

**学习任务目标**

1.了解基本不等式的证明过程.
2.能利用基本不等式比较代数式的大小.
3.能利用基本不等式求最值.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　基本不等式**

1.算术平均数与几何平均数

(1)条件：给定两个正数 $a$，$b$.

(2)结论：$\frac{a+b}{2}$ 叫做正数 $a$，$b$ 的算术平均数；$\sqrt{ab}$ 叫做正数 $a$，$b$ 的几何平均数.

2.基本不等式

(1)不等式成立的条件：$a$，$b$ 都是正数.

(2)结论：$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$.

(3)等号成立的条件：当且仅当 $a=b$ 时.

(4)语言描述：两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

**知识点二　基本不等式与最值**

已知 $x$，$y$ 都是正数，

(1)如果积 $xy$ 等于定值 $P$，那么当 $x=y$ 时，和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{P}$；

(2)如果和 $x+y$ 等于定值 $S$，那么当 $x=y$ 时，积 $xy$ 有最大值 $\frac{1}{4}S^2$.

### 【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)基本不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$ 中的 $a$，$b$ 只能是具体的数.　(　　)

(2)重要不等式 $a^2+b^2\geqslant2ab$ 与基本不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$ 成立的条件是相同的.　(　　)

(3)不等式 $m^2+1\geqslant2m$ 中等号成立的条件是 $m=1$.　(　　)

(4)若 $a+b=2$，则 $\sqrt{ab}\leqslant1$.　(　　)

(1)×　**解析**：$a$，$b$ 既可以是具体的某个数，也可以是代数式.

(2)×　**解析**：不同，前者要求 $a$，$b$ 是实数即可，而后者要求 $a>0$，$b>0$.

(3)√　**解析**：当且仅当 $m=1$ 时等号成立.

(4)×　**解析**：若成立，需要增加条件 $a>0$，$b>0$.如当 $a=-1$，$b=3$ 时，$a+b=2$，但 $\sqrt{ab}$ 无意义.

2.已知 $x>0$，$y>0$，且 $x+y=18$，则 $xy$ 的最大值为_____.

81　**解析**：因为 $x>0$，$y>0$，所以 $xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=81$，当且仅当 $x=y=9$ 时，等号成立.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1　理解基本不等式

1.不等式 $a^2+1\geqslant2a$ 中等号成立的条件是　(　　)

A.$a=\pm1$　　B.$a=1$

C.$a=-1$　　D.$a=0$

B　**解析**：令 $a^2+1=2a$，即 $(a-1)^2=0$，得 $a=1$，即 $a=1$ 时，等号成立.

2.下列命题中正确的是　(　　)

A.若 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=16$，则 $ab\leqslant64$

B.若 $a\neq0$，则 $a+\frac{4}{a}\geqslant2\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}}=4$

C.若 $a$，$b\in\mathbf{R}$，则 $ab\geqslant\frac{(a+b)^2}{2}$

D.对任意 $a$，$b\in\mathbf{R}$，$a^2+b^2\geqslant2ab$，$a+b\geqslant2\sqrt{ab}$ 均成立

A　**解析**：对于A，$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=64$，当且仅当 $a=b=8$ 时等号成立，A选项正确；

对于B，当 $a<0$ 时，$a+\frac{4}{a}<0$，所以B选项错误；

对于C，当 $a>0$，$b<0$ 时，$ab<0$，$\frac{(a+b)^2}{2}\geqslant0$，所以C选项错误；

对于D，当$a<0$，$b<0$时，$a+b<0$，$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$不成立，所以D选项错误.故选A.

**3.**若不等式$(x-2y)+\dfrac{1}{x-2y}\geqslant 2$成立，则下列说法正确的是　　(　　)

A.$x\geqslant 2y$，当且仅当$x-2y=1$时取等号

B.$x>2y$，当且仅当$x-2y=1$时取等号

C.$x\leqslant 2y$，当且仅当$x-2y=1$时取等号

D.$x<2y$，当且仅当$x-2y=1$时取等号

B　**解析**：因为基本不等式成立的前提条件是各项均为正，所以$x-2y>0$，即$x>2y$，且等号成立时$(x-2y)^2=1$，即$x-2y=1$.故选B.

## 【探究总结】

**基本不等式的两个关注点**

(1)基本不等式成立的条件是$a$，$b$都是正数.

(2)“当且仅当”的含义：当$a=b$时，$\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}$的等号成立，即$a=b\Rightarrow\sqrt{ab}=\dfrac{a+b}{2}$；仅当$a=b$时，$\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}$的等号成立，即$\sqrt{ab}=\dfrac{a+b}{2}\Rightarrow a=b$.

# 任务2　利用基本不等式比较大小

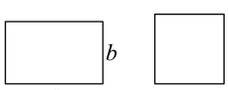
## 探究活动

**例1**　(1)设$A=\dfrac{n}{m}+\dfrac{m}{n}$($m$，$n$为互不相等的正实数)，$B=-x^2+4x-2$，则$A$与$B$的大小关系是　　(　　)

A.$A>B$　　B.$A\geqslant B$

C.$A<B$　　D.$A\leqslant B$

(2)如图所示为一个矩形和一个正方形，矩形的边长分别为$a$，$b(a>0,b>0)$.当正方形的周长与矩形的周长相等时，正方形的边长为$x$；当正方形的面积与矩形的面积相等时，正方形的边长为$y$；当正方形的对角线与矩形的对角线相等时，正方形的边长为$z$，则　　(　　)




A.$x\geqslant y\geqslant z$　　B.$z\geqslant x\geqslant y$

C.$x\geqslant z\geqslant y$　　D.$z\geqslant y\geqslant x$

(1)A　**解析**：$m$，$n$为互不相等的正实数，则$\dfrac{n}{m}\neq\dfrac{m}{n}$，所以$A=\dfrac{n}{m}+\dfrac{m}{n}>2\sqrt{\dfrac{n}{m}\cdot\dfrac{m}{n}}=2$，$B=-x^2+4x-2=-(x-2)^2+2\leqslant 2$.当$x=2$时，$B_{\max}=2$，所以$A>B$.故选A.

(2)B　**解析**：由题意可得，$a+b=2x$，$ab=y^2$，$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}z$，且$a$，$b>0$.

由基本不等式的关系可知$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，当且仅当$a=b$时，等号成立，所以$x\geqslant y$.

因为$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\leqslant 2(a^2+b^2)$，所以$a^2+b^2\geqslant\dfrac{(a+b)^2}{2}$，当且仅当$a=b$时，等号成立，所以$2z^2\geqslant\dfrac{4x^2}{2}$，所以$z\geqslant x$，所以$z\geqslant x\geqslant y$.故选B.

## 【探究总结】

**利用基本不等式比较大小的注意点**

(1)要灵活运用基本不等式，特别注意其变形.

(2)要注意不等式成立的条件.$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$成立的条件是$a>0$，$b>0$，等号成立的条件是$a=b$；$a^2+b^2\geqslant 2ab$成立的条件是$a$，$b\in\mathbf{R}$，等号成立的条件是$a=b$.

## 应用迁移

**1.**若$0<a<b$，则下列不等式一定成立的是　　(　　)

A.$a>\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>b$

B.$b>\sqrt{ab}>\dfrac{a+b}{2}>a$

C.$b>\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>a$

D.$b>a>\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$

C　**解析**：因为$0<a<b$，所以$2b>a+b$，所以$b>\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$.

又因为$b>a>0$，所以$ab>a^2$，所以$\sqrt{ab}>a$.

故$b>\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>a$.

**2.**已知$m=a+\dfrac{1}{a}(a>0)$，$n=(1-x)(1+x)(-1<x<1)$，则$m$，$n$之间的大小关系是　　(　　)

A.$m>n$　　B.$m\geqslant n$

C.$m<n$　　D.$m\leqslant n$

A　**解析**：因为$a>0$，所以$m=a+\dfrac{1}{a}\geqslant 2\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{a}}=2$，

当且仅当$a=\dfrac{1}{a}$，

即$a=1$时，等号成立.

因为$-1<x<1$，所以$1-x>0$，

所以$n=(1-x)(1+x)\leqslant\left(\dfrac{1-x+1+x}{2}\right)^2=1$，当且仅当$1-x=1+x$，即$x=0$时，等号成立.所以$m>n$.

## 任务3 利用基本不等式求最值

### 探究活动

**例2**　(1)(教材P45例1改编)已知$x>0$,则$x+\frac{4}{x}$的最小值为_____.

(2)已知$0<x<\frac{1}{2}$,则$2x(1-2x)$的最大值为_____.

(1)4　**解析**:因为$x>0$,所以$x+\frac{4}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$,当且仅当$x=\frac{4}{x}$,即$x=2$时,等号成立.因此$x+\frac{4}{x}$的最小值为4.

(2)$\frac{1}{4}$　**解析**:由题意知$1-2x>0$,则$2x(1-2x)\leqslant\left(\frac{2x+1-2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,当且仅当$2x=1-2x$,即$x=\frac{1}{4}$时,等号成立.因此$2x(1-2x)$的最大值为$\frac{1}{4}$.

[一题多思]

**思考1.**本例(1)中,若把"$x>0$"改为"$x<0$",则$x+\frac{4}{x}$的最值情况如何?

**提示**:由题可得$x+\frac{4}{x}=-\left(-x+\frac{4}{-x}\right)$,

因为$x<0$,所以$-x>0$,

故有$-x+\frac{4}{-x}\geqslant 2\sqrt{(-x)\cdot\left(\frac{4}{-x}\right)}=4$,

所以$-\left(-x+\frac{4}{-x}\right)\leqslant -4$,当且仅当$-x=\frac{4}{-x}$,即$x=-2$时,等号成立.

故$x+\frac{4}{x}$的最大值为$-4$.

**思考2.**本例(2)条件不变,能否求出$\frac{1}{2}x(1-2x)$的最大值?

**提示**:能.因为$0<x<\frac{1}{2}$,所以$1-2x>0$,

所以$\frac{1}{4}\times 2x(1-2x)\leqslant\frac{1}{4}\times\left(\frac{2x+1-2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$,

当且仅当$2x=1-2x$,即$x=\frac{1}{4}$时,等号成立.

故$\frac{1}{2}x(1-2x)$的最大值为$\frac{1}{16}$.

### 【探究总结】

**利用基本不等式求最值的方法**

(1)知和求积的最值:求解此类问题的关键是明确"和为定值,积有最大值".需要注意两点:①具备条件——正数;②验证等号是否成立.

(2)知积求和的最值:明确"积为定值,和有最小值",直接应用基本不等式求解,注意利用基本不等式求最值的条件.

### 应用迁移

**1.**已知实数$a>0$,则$a+\frac{2}{a}+3$的最小值是　(　　)

A.$3\sqrt{2}+3$　B.$2\sqrt{2}+3$　C.6　D.5

B　**解析**:因为$a>0$,所以$a+\frac{2}{a}+3\geqslant 2\sqrt{a\cdot\frac{2}{a}}+3=2\sqrt{2}+3$,当且仅当$a=\frac{2}{a}$,即$a=\sqrt{2}$时,等号成立,所以$a+\frac{2}{a}+3$的最小值是$2\sqrt{2}+3$.故选B.

**2.**已知$0<x<\frac{1}{3}$,则$y=x(1-3x)$的最大值为　(　　)

A.$\frac{1}{12}$　B.$\frac{1}{4}$　C.$\frac{1}{3}$　D.$\frac{1}{2}$

A　**解析**:当$0<x<\frac{1}{3}$时,$y=x(1-3x)=\frac{1}{3}\times 3x\times(1-3x)\leqslant\frac{1}{3}\times\left(\frac{3x+1-3x}{2}\right)^2=\frac{1}{12}$,当且仅当$3x=1-3x$,即$x=\frac{1}{6}$时,等号成立,所以$y=x(1-3x)$的最大值为$\frac{1}{12}$.故选A.

# 课后素养评价(十二)

## 基础落实

**1.**若$x>0$,$y>0$,且$x+y=1$,则$xy$的最大值是(B)

A.$\frac{1}{16}$　B.$\frac{1}{4}$

C.$\frac{1}{2}$　D.1

**2.**已知正数$x$,$y$满足$xy=8$,则$(x-1)(y-2)$的最大值是　(　　)

A.4　B.6

C.1　D.2

D　**解析**:$(x-1)(y-2)=xy-2x-y+2$.因为$2x+y\geqslant 2\sqrt{2xy}=8$,所以$-2x-y\leqslant -8$,

从而 $xy-2x-y+2\leqslant 8-8+2=2$，当且仅当 $2x=y=4$ 时，等号成立，所以 $(x-1)(y-2)$ 的最大值是 2.故选 D.

**3.** 若 $0<x<\frac{1}{2}$，则 $x(1-2x)$ 取最大值时 $x$ 的值是（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{8}$　　D. $\frac{1}{10}$

A　**解析**：$x(1-2x)=2x\left(\frac{1}{2}-x\right)\leqslant 2\left(\frac{x+\frac{1}{2}-x}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$，当且仅当 $x=\frac{1}{2}-x$，即 $x=\frac{1}{4}$ 时，等号成立.故选 A.

**4.** 设 $x,y\in\mathbf{N}^*$，且满足 $x+y=20$，则 $xy$ 的最大值为_____.

100　**解析**：因为 $x,y\in\mathbf{N}^*$，所以 $20=x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$，

所以 $xy\leqslant 100$，当且仅当 $x=y=10$ 时，等号成立.

**5.** 某工厂第一年的产量为 $A$，第二年的增长率为 $a$，第三年的增长率为 $b$，则这两年的平均增长率 $x$ 与增长率的平均值 $\frac{a+b}{2}$ 的大小关系为 $x\leqslant\frac{a+b}{2}$.

**6.** 已知 $x>0,y>0,xy=4$，求 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值.

**解**：因为 $xy=4$，且 $x>0,y>0$，所以 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{xy}}=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$，当且仅当 $\frac{2}{x}=\frac{1}{y}$，即 $x=2\sqrt{2},y=\sqrt{2}$ 时，等号成立，即 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为 $\sqrt{2}$.

## 能力提升

**1.** 如果 $0<a<b<1$，$P=\frac{a+b}{2}$，$Q=\sqrt{ab}$，$M=\sqrt{a+b}$，那么 $P,Q,M$ 的大小顺序是（　　）

A. $P>Q>M$　　B. $M>P>Q$

C. $Q>M>P$　　D. $M>Q>P$

B　**解析**：显然 $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$.由题易知 $P>0,M>0$，

$M^2-P^2=a+b-\frac{(a+b)^2}{4}=(a+b)\left(1-\frac{a+b}{4}\right)=(a+b)\cdot\frac{4-(a+b)}{4}$.

因为 $0<a<b<1$，所以 $4-(a+b)>0$，所以 $a+b>\frac{(a+b)^2}{4}$，

即 $\frac{a+b}{2}<\sqrt{a+b}$.所以 $\sqrt{a+b}>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$，

即 $M>P>Q$.

**2.**（多选）若 $a>0,b>0$，且 $a+b=4$，则下列不等式不一定恒成立的是（　　）

A. $\frac{1}{ab}>\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqslant 1$

C. $\sqrt{ab}\geqslant 2$　　D. $\frac{1}{a^2+b^2}\leqslant\frac{1}{8}$

ABC　**解析**：由 $a+b=4$，可得 $\sqrt{ab}\leqslant 2$，得 $ab\leqslant 4$，当且仅当 $a=b=2$ 时，等号成立，所以 $\frac{1}{ab}\geqslant\frac{1}{4}$，故 A,C 不一定恒成立；

B 中，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{4}{ab}\geqslant 1$，故 B 不一定恒成立；

由 $\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，得 $a^2+b^2\geqslant 2\times\left(\frac{4}{2}\right)^2=8$，所以 $\frac{1}{a^2+b^2}\leqslant\frac{1}{8}$，D 一定恒成立.

**3.** 若 $\forall x>a$，关于 $x$ 的不等式 $2x+\frac{2}{x-a}\geqslant 5$ 恒成立，则实数 $a$ 的取值范围是_____.

$\left\{a\,\middle|\,a\geqslant\frac{1}{2}\right\}$　**解析**：若关于 $x$ 的不等式 $2x+\frac{2}{x-a}\geqslant 5$ 恒成立，则 $\left(2x+\frac{2}{x-a}\right)_{\min}\geqslant 5$.

因为 $x>a$，故 $2x+\frac{2}{x-a}=2(x-a)+\frac{2}{x-a}+2a\geqslant 2\sqrt{2(x-a)\cdot\frac{2}{x-a}}+2a=4+2a$，

当且仅当 $x=a+1$ 时取等号，故得 $4+2a\geqslant 5$，解得 $a\geqslant\frac{1}{2}$.

**4.**（1）已知 $0<x<1$，求 $x(4-3x)$ 的最大值及取得最大值时 $x$ 的值；

（2）求 $\frac{x^2+2}{x-1}(x>1)$ 的最小值；

（3）已知 $x,y$ 是正实数，且 $x+y=4$，求 $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}$ 的最小值.

**解**：（1）$x(4-3x)=\frac{1}{3}\times 3x\times(4-3x)\leqslant\frac{1}{3}\times\left(\frac{3x+4-3x}{2}\right)^2=\frac{4}{3}$，

当且仅当 $3x=4-3x$，即 $x=\frac{2}{3}$ 时取等号.

故 $x(4-3x)$ 取得最大值 $\frac{4}{3}$ 时，$x$ 的值为 $\frac{2}{3}$.

(2)因为 $x>1$，所以 $x-1>0$，所以 $\frac{x^2+2}{x-1}=\frac{x^2-2x+1+2x-2+3}{x-1}=\frac{(x-1)^2+2(x-1)+3}{x-1}=(x-1)+\frac{3}{x-1}+2\geqslant 2\sqrt{3}+2$，

当且仅当 $x-1=\frac{3}{x-1}$，即 $x=\sqrt{3}+1$ 时取等号.

故 $\frac{x^2+2}{x-1}(x>1)$ 的最小值为 $2\sqrt{3}+2$.

(3)因为 $x+y=4$，所以 $\frac{1}{4}(x+y)=1$. 又 $x>0$，$y>0$，

所以 $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}=\frac{1}{4}(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{y}\right)=1+\frac{1}{4}\left(\frac{y}{x}+\frac{3x}{y}\right)\geqslant 1+\frac{1}{4}\times 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{3x}{y}}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

当且仅当 $\frac{y}{x}=\frac{3x}{y}$，即 $x=2(\sqrt{3}-1)$，$y=2(3-\sqrt{3})$ 时取等号.

所以 $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}$ 的最小值为 $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

## 自我超越

(1)若 $a,b\in\mathbf{R}$，$ab>0$，则 $\frac{a^4+4b^4+1}{ab}$ 的最小值为____；

(2)若 $a>0$，$b>0$，则 $\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b$ 的最小值为_____.

(1)4　(2)$2\sqrt{2}$　**解析**：(1)$\frac{a^4+4b^4+1}{ab}\geqslant\frac{4a^2b^2+1}{ab}=4ab+\frac{1}{ab}\geqslant 2\sqrt{4ab\cdot\frac{1}{ab}}=4$（前一个等号成立条件是 $a^2=2b^2$，后一个等号成立的条件是 $ab=\frac{1}{2}$，两个等号可以同时取得，则当且仅当 $a^2=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$b^2=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时，等号成立）.

(2)因为 $a>0$，$b>0$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{b^2}}+b=\frac{2}{b}+b\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{b}\cdot b}=2\sqrt{2}$，

当且仅当 $\frac{1}{a}=\frac{a}{b^2}$ 且 $\frac{2}{b}=b$，即 $a=b=\sqrt{2}$ 时，等号成立，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

# 第 2 课时　基本不等式的应用

**学习任务目标**

**1.**进一步理解运用基本不等式求最值的条件，能够灵活应用基本不等式求最值.
**2.**能够利用基本不等式证明简单的不等式.
**3.**能够运用基本不等式解决生活中的实际问题.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务 1 基本不等式的实际应用

#### 探究活动

**例 1**　(1)(教材 P47 例 4 改编)要制作一个容积为 4 $m^3$、高为 1 m 的无盖长方体容器. 已知该容器的底面造价是每平方米 20 元，侧面造价是每平方米 10 元，则该容器的最低总造价是　(　　)

A.80 元　　B.120 元

C.160 元　　D.240 元

(2)某幼儿园要用围栏围一个面积为 16 $m^2$ 的矩形游乐园，当这个矩形游乐园的边长为多少时，所用围栏最省？并求所需围栏的最短长度.

(1)C　**解析**：设底面相邻两边的长分别为 $x$ m，$y$ m，$x>0$，$y>0$，总造价为 $T$ 元，则 $xy\times 1=4$，即 $xy=4$. 所以 $T=4\times 20+(2x+2y)\times 1\times 10=80+20(x+y)\geqslant 80+20\times 2\sqrt{xy}=80+20\times 4=160$，当且仅当 $x=y=2$ 时，等号成立.

故该容器的最低总造价是 160 元.

(2)**解**：设矩形围栏的长和宽分别为 $x$ m，$y$ m，则围栏的长度为 $2(x+y)$ m.

(方法一)由题意可得 $xy=16$，

由 $\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$，可知 $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}=8$，

所以 $2(x+y)\geqslant 16$，当且仅当 $x=y=4$ 时，等号成立.

因此，当这个矩形游乐园是边长为 4 m 的正方形时，所用围栏最省，所需围栏的最短长度为 16 m.

(方法二)由题意可得 $xy=16$，则 $y=\frac{16}{x}$，

所以 $2(x+y)=2\left(x+\frac{16}{x}\right)\geqslant 2\times 2\sqrt{x\cdot\frac{16}{x}}=16$，当且仅当 $x=\frac{16}{x}$，即 $x=4$ 时，等号成立，此时 $y=4$.

因此，当这个矩形游乐园是边长为 4 m 的正方形时，所用围栏最省，所需围栏的最短长度为 16 m.

[一题多思]

**思考1.** 本例(2)中，若矩形游乐园的面积为64 $m^2$，则所用围栏长度的最小值是多少？

**提示：** 设矩形围栏的长为 $a$ m，宽为 $b$ m，且面积为64 $m^2$，即 $ab=64$，则 $b=\frac{64}{a}$，所以矩形游乐园的周长为 $2a+2b=2a+\frac{128}{a}\geqslant 2\sqrt{2a\cdot\frac{128}{a}}=32$，当且仅当 $2a=\frac{128}{a}$，即 $a=8$ 时，等号成立，此时 $b=8$.

因此，所用围栏长度的最小值为32 m.

**思考2.** 本例(2)中，若幼儿园只有12 m长的围栏，如何设计，才能使游乐园的面积最大？

**提示：** 设游乐园的长为 $x$ m，宽为 $y$ m.

由已知得 $2(x+y)=12$，故 $x+y=6$，面积为 $xy$.

由 $\sqrt{xy}\leqslant\frac{x+y}{2}=\frac{6}{2}=3$，可得 $xy\leqslant 9$，当且仅当 $x=y=3$ 时，等号成立.

因此，当游乐园为边长为3 m的正方形时，面积最大，最大面积为9 $m^2$.

## 【探究总结】

**应用基本不等式解决实际问题的思路**

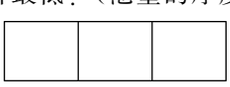
(1)理解题意，设出变量，一般把要求最值的量定为因变量.

(2)建立相应的关系式，把实际问题抽象成数学问题，利用基本不等式求解.

(3)根据实际背景得出答案.

## 应用迁移

如图，工厂拟造一座平面图为长方形且面积为150 $m^2$的三级污水处理池.由于地形限制，该处理池的长、宽都不能超过16 m，且高度一定.如果四周池壁的造价为400元/$m^2$，中间两道隔墙的造价为248元/$m^2$，池底造价为80元/$m^2$，那么如何设计该处理池的长和宽，才能使总造价最低？(池壁的厚度忽略不计)



**解：** 设处理池的长和宽分别为 $x$ m，$y$ m，高为 $h$ m，总造价为 $z$ 元，则 $xy=150(0<x\leqslant 16,0<y\leqslant 16)$，

$z=(2x+2y)h\times 400+2yh\times 248+150\times 80$

$=(800x+1\ 296y)h+12\ 000\geqslant 2\sqrt{800x\times 1\ 296y}\,h+12\ 000=14\ 400\sqrt{3}h+12\ 000$，

又 $xy=150$，当且仅当 $800x=1\ 296y$，即 $x=9\sqrt{3}<16$，$y=\frac{50\sqrt{3}}{9}<16$ 时，等号成立.

故长为 $9\sqrt{3}$ m，宽为 $\frac{50\sqrt{3}}{9}$ m 时总造价最低.

# 任务2 利用基本不等式求最值

## 探究活动

**例2** (1)若正数 $x$，$y$ 满足 $x+2y=3xy$，则 $2x+9y$ 的最小值是　　(　　)

A.$\frac{25}{3}$　　B.$\frac{17}{2}$　　C.$\frac{23}{3}$　　D.8

(2)(教材P48习题2.2题1(1)改编)已知 $x<2$，求 $x+\frac{4}{x-2}$ 的最大值.

(1)A　**解析：** 因为正数 $x$，$y$ 满足 $x+2y=3xy$，所以 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=3$，

所以 $2x+9y=\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)(2x+9y)=\frac{1}{3}\times\left(13+\frac{18y}{x}+\frac{2x}{y}\right)\geqslant\frac{1}{3}\times\left(13+2\sqrt{\frac{18y}{x}\times\frac{2x}{y}}\right)=\frac{25}{3}$，

当且仅当 $\frac{18y}{x}=\frac{2x}{y}$，且 $x+2y=3xy$，即 $x=\frac{5}{3}$，$y=\frac{5}{9}$ 时，等号成立，所以 $2x+9y$ 的最小值是 $\frac{25}{3}$.故选A.

(2)**解：** 因为 $x<2$，所以 $2-x>0$，

所以 $x+\frac{4}{x-2}=-\left[(2-x)+\frac{4}{2-x}\right]+2\leqslant -2\sqrt{(2-x)\cdot\frac{4}{2-x}}+2=-2$.

当且仅当 $2-x=\frac{4}{2-x}$，即 $x=0$ 时，等号成立.

故 $x+\frac{4}{x-2}$ 的最大值为 $-2$.

## 【探究总结】

**拼凑法求最值的解题策略**

拼凑法求解最值，其实质就是先对代数式变形拼凑出和或积为常数的两项，然后利用基本不等式求最值.

## 应用迁移

**1.** 已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+2b=1$，则 $\frac{b}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为　　(　　)

A.2　　B.3　　C.$2\sqrt{2}$　　D.4

D　**解析：** 因为 $a+2b=1$，所以 $\frac{b}{a}+\frac{1}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a+2b}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2=4$，当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $a=b=\frac{1}{3}$ 时，等号成立，所以 $\frac{b}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为4.故选D.

**2.** 已知 $x<1$，则 $2x+\frac{2}{x-1}$ 的最大值是　　(　　)

A.$-2$　　B.4

C.6　　D.7

A　**解析**：因为 $x<1$，所以 $1-x>0$，所以 $2x+\frac{2}{x-1}=2(x-1)+\frac{2}{x-1}+2=-2\times\left[(1-x)+\frac{1}{1-x}\right]+2\leqslant-4\sqrt{(1-x)\cdot\frac{1}{1-x}}+2=-2$，当且仅当 $1-x=\frac{1}{1-x}$，即 $x=0$ 时，等号成立，所以 $2x+\frac{2}{x-1}$ 的最大值是 $-2$.故选 A.

## 任务3 利用基本不等式证明不等式

### 探究活动

**例3**　已知 $a>0,b>0,a+b=1$，求证：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}\geqslant8$.

**证明**：因为 $a>0,b>0,a+b=1$，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}=\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{ab}=4+2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqslant4+4\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=8$，当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，等号成立.

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}\geqslant8$.

**【探究总结】**

**利用基本不等式证明不等式的策略与注意事项**

(1)策略：从已知不等式和其他已知条件出发，借助不等式的性质和基本不等式，经过逐步的逻辑推理，得出要求证明的不等式.其特征是以“已知”看“可知”，逐步推向“未知”.

(2)注意事项：①多次使用基本不等式时，要注意等号能否成立；②累加法是不等式证明中的一种常用方法，证明不等式时注意使用；③不能直接使用基本不等式证明时，可重新组合，构造基本不等式模型后再使用.

### 应用迁移

**1.**已知 $a,b,c$ 是正实数，证明：$a+b+c\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$.

**证明**：因为 $2a+2b+2c=(a+b)+(b+c)+(a+c)\geqslant2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac}$，

当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立，

所以 $a+b+c\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$.

**2.**已知 $a,b,c$ 是互不相等的正数，且 $a+b+c=1$，求证：$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)>8$.

**证明**：因为 $a,b,c$ 是正数，且 $a+b+c=1$，

所以 $\frac{1}{a}-1=\frac{b+c}{a}>0,\frac{1}{b}-1=\frac{a+c}{b}>0,\frac{1}{c}-1=\frac{a+b}{c}>0$，所以 $\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)=\frac{b+c}{a}\cdot\frac{a+c}{b}\cdot\frac{a+b}{c}\geqslant\frac{2\sqrt{bc}\cdot2\sqrt{ac}\cdot2\sqrt{ab}}{abc}=8$，当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时，等号成立.

又因为 $a,b,c$ 是互不相等的正数，

所以 $\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)>8$.

# 课后素养评价（十三）

## 基础落实

**1.**已知 $x>0$，则 $\frac{x^2-x+4}{x}$ 的最小值为　　(　　)

A.5　　B.3

C.$-5$　　D.$-5$ 或 3

B　**解析**：由 $x>0$，得 $\frac{x^2-x+4}{x}=x+\frac{4}{x}-1\geqslant2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}-1=3$，

当且仅当 $x=\frac{4}{x}$，即 $x=2$ 时等号成立，所以 $\frac{x^2-x+4}{x}$ 的最小值为 3.故选 B.

**2.**已知实数 $a>0,b>0$，且 $\frac{3}{a}+\frac{1}{b}=2$，则 $a+3b$ 的最小值为　　(　　)

A.2　　B.4　　C.6　　D.8

C　**解析**：由题意，得 $a+3b=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot(a+3b)=\frac{1}{2}\left(6+\frac{9b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(6+2\sqrt{\frac{9b}{a}\cdot\frac{a}{b}}\right)=6$，当且仅当 $\frac{9b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $a=3,b=1$ 时，等号成立，故 $a+3b$ 的最小值为 6.故选 C.

**3.**将一根铁丝切割成三段，做一个面积为 2 $m^2$、形状为直角三角形的框架，在下列四种长度的铁丝中，选用最合理（够用且浪费最少）的是　　(　　)

A.6.5 m　　B.6.8 m

C.7 m　　D.7.2 m

C　**解析**：设直角三角形框架的两直角边的长度分

别为 $a$，$b$，周长为 $l$，则 $\frac{1}{2}ab=2$，所以 $ab=4$.

$l=a+b+\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab}=4+2\sqrt{2}\approx 6.828$(m)，当且仅当 $a=b=2$ m 时，等号成立.故 C 既够用，且浪费也最少.

**4.**在“$4\times\square+9\times\square=60$”的两个□中，分别填入两个自然数，使它们的倒数和最小，应分别填上____和____.

6　4　**解析**：设两个自然数分别为 $x$，$y$，即 $4x+9y=60$，

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{4x+9y}{60}=\frac{1}{60}\left(13+\frac{4x}{y}+\frac{9y}{x}\right)\geqslant\frac{1}{60}\times\left(13+2\sqrt{\frac{4x}{y}\cdot\frac{9y}{x}}\right)=\frac{5}{12}$，

当且仅当 $\frac{4x}{y}=\frac{9y}{x}$，且 $4x+9y=60$，即 $x=6$，$y=4$ 时，等号成立.$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 取得最小值 $\frac{5}{12}$.

故应分别填上 6 和 4.

**5.**已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$，求证：

(1)$2a^2+2b^2\geqslant 1$；

(2)$\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\geqslant 16$.

**证明**：(1)因为 $a+b=1$，所以 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1-2ab$.

因为 $a>0$，$b>0$，所以 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，等号成立.

所以 $1-2ab\geqslant 1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，即 $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$，故 $2a^2+2b^2\geqslant 1$.

(2)因为 $a+b=1$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{9}{b}=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\right)=\frac{b}{a}+\frac{9a}{b}+10$.

因为 $a>0$，$b>0$，所以 $\frac{b}{a}>0$，$\frac{9a}{b}>0$，

所以 $\frac{b}{a}+\frac{9a}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{9a}{b}}=6$，当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{9a}{b}$，即 $a=\frac{1}{4}$，$b=\frac{3}{4}$ 时，等号成立.

则 $\frac{b}{a}+\frac{9a}{b}+10\geqslant 16$，即 $\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\geqslant 16$.

## 能力提升

**1.**已知 $x>1$，则 $\frac{1}{1-x}-x$ 的最大值为　　(　　)

A.3　　B.$-3$　　C.1　　D.$-1$

B　**解析**：因为 $x>1$，所以 $x-1>0$，

则 $\frac{1}{1-x}-x=\frac{1}{1-x}+1-x-1=-\left(\frac{1}{x-1}+x-1\right)-1\leqslant-2\sqrt{\frac{1}{x-1}\cdot(x-1)}-1=-3$，

当且仅当 $\frac{1}{x-1}=x-1$，即 $x=2$ 时，等号成立，所以 $\frac{1}{1-x}-x$ 的最大值为 $-3$.故选 B.

**2.**已知 $x\in(0,5)$，则 $\frac{1}{x}+\frac{16}{5-x}$ 的最小值为　　(　　)

A.25　　B.6　　C.10　　D.5

D　**解析**：由题意得 $5-x>0$，

则 $\frac{1}{x}+\frac{16}{5-x}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x}+\frac{16}{5-x}\right)(x+5-x)=\frac{1}{5}\left(\frac{5-x}{x}+\frac{16x}{5-x}+17\right)\geqslant\frac{1}{5}\left(2\sqrt{\frac{5-x}{x}\cdot\frac{16x}{5-x}}+17\right)=5$，

当且仅当 $\frac{5-x}{x}=\frac{16x}{5-x}$，即 $x=1$ 时，等号成立，故 $\frac{1}{x}+\frac{16}{5-x}$ 的最小值为 5.故选 D.

**3.**设 $a>b>c$，$n\in\mathbf{N}^*$，使不等式 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{n}{a-c}$ 成立的 $n$ 的最大值为_____.

4　**解析**：因为 $a-b>0$，$b-c>0$，$a-c>0$，要使原不等式成立，

只需 $\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}\geqslant n$ 成立，

即 $\frac{a-b+(b-c)}{a-b}+\frac{a-b+(b-c)}{b-c}\geqslant n$ 成立，

也就是 $2+\frac{b-c}{a-b}+\frac{a-b}{b-c}\geqslant n$ 成立.

又 $\frac{b-c}{a-b}+\frac{a-b}{b-c}\geqslant 2\sqrt{\frac{b-c}{a-b}\cdot\frac{a-b}{b-c}}=2$，当且仅当 $b-c=a-b$，

即 $a+c=2b$ 时，等号成立，

所以 $n\leqslant 4$，所以 $n$ 的最大值为 4.

**4.**为了增强生物实验课的趣味性，丰富生物实验教学内容，某校计划沿着围墙(足够长)划出一块面积为 100 m$^2$ 的矩形区域 $ABCD$ 修建一个羊驼养殖场，规定 $ABCD$ 的每条边长均不超过 20 m.如图所示，矩形 $EFGH$ 为羊驼养殖区，且 $A$，$B$，$E$，$F$ 四点共线，阴影部分为 1 m 宽的鹅卵石小径.设 $AB=x$(单位：m)，养殖区域 $EFGH$ 的面积为 $S$(单位：m$^2$).

(1)将 $S$ 表示为 $x$ 的函数，并写出实数 $x$ 的取值范围.

(2)当 $AB$ 为多长时，$S$ 取得最大值？并求出此最大值.

**解**：(1)因为 $AB=x$，所以 $AD=\frac{100}{x}$，$EF=x-2$，

$FG=\frac{100}{x}-1$，

所以 $S=(x-2)\left(\frac{100}{x}-1\right)=102-\frac{200}{x}-x$.

由 $0<x\leqslant 20$，$0<\frac{100}{x}\leqslant 20$，解得 $5\leqslant x\leqslant 20$.

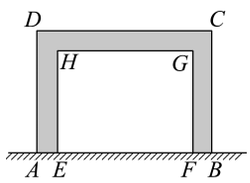
所以 $S=102-\frac{200}{x}-x$，$5\leqslant x\leqslant 20$.

(2)$S=102-\frac{200}{x}-x=102-\left(\frac{200}{x}+x\right)\leqslant 102-2\sqrt{\frac{200}{x}\cdot x}=102-20\sqrt{2}$，

当且仅当 $x=\frac{200}{x}$，即 $x=10\sqrt{2}$ 时，等号成立.

经验证，符合题意.

所以当 $AB=10\sqrt{2}$ m 时，$S$ 取得最大值，最大值为 $(102-20\sqrt{2})\text{m}^2$.




## 自我超越

设 $a>0$，$b>0$，$a+b=2$，则下列说法正确的是（　　）

A.$ab$ 的最小值为 1

B.$a^2+b^2$ 的最小值为 4

C.$\frac{4}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 9

D.$\sqrt{a}+2\sqrt{b}$ 的最大值为 $\sqrt{10}$

D　**解析**：对于 A，因为 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=1$，当且仅当 $a=b=1$ 时，等号成立，所以 $ab$ 的最大值为 1，故 A 错误；

对于 B，因为 $a^2+b^2\geqslant\frac{(a+b)^2}{2}=2$，当且仅当 $a=b=1$ 时，等号成立，所以 $a^2+b^2$ 的最小值为 2，故 B 错误；

对于 C，因为 $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=\frac{1}{2}\left(5+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(5+2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{a}{b}}\right)=\frac{9}{2}$，当且仅当 $\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$ 且 $a+b=2$，即 $a=\frac{4}{3}$，$b=\frac{2}{3}$ 时，等号成立，所以 $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 $\frac{9}{2}$，故 C 错误；

对于 D，$(m^2+n^2)(x^2+y^2)-(mx+ny)^2=n^2x^2+m^2y^2-2mnxy=(nx-my)^2\geqslant 0$，可得 $(mx+ny)^2\leqslant(m^2+n^2)(x^2+y^2)$，当且仅当 $nx-my=0$，即 $nx=my$ 时，等号成立，则 $(\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2\leqslant[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2](1^2+2^2)=5(a+b)=10$，即 $\sqrt{a}+2\sqrt{b}\leqslant\sqrt{10}$，当且仅当 $2\sqrt{a}=\sqrt{b}$，即 $b=4a=\frac{8}{5}$ 时，等号成立，所以 $\sqrt{a}+2\sqrt{b}$ 的最大值为 $\sqrt{10}$，故 D 正确.故选 D.

# 微专题培优(二)　利用基本不等式求最值

利用基本不等式求最值，其核心是遵循“一正、二定、三相等”原则，通过拆项、凑项、代换、换元、消元等技巧进行配凑，构造出和或积为定值的形式，这是解决此类求最值问题的通用方法与核心技能.注意准确识别代数式结构，并严谨验证等号成立条件.

## 类型1　配凑法

**例 1**　已知 $m>-2$，$n>1$，且 $m+n=3$，则 $\sqrt{m+2}+\sqrt{n-1}$ 的最大值为（　　）

A.6　　B.$2\sqrt{3}$　　C.$2\sqrt{2}$　　D.$\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

C　**解析**：由 $m>-2$，$n>1$，可得 $m+2>0$，$n-1>0$，又 $m+n=3$，所以 $4=m+2+n-1\geqslant 2\sqrt{(m+2)(n-1)}$，

当且仅当 $m+2=n-1$，即 $m=0$，$n=3$ 时，等号成立，

因此 $\sqrt{m+2}+\sqrt{n-1}=\sqrt{(\sqrt{m+2}+\sqrt{n-1})^2}=\sqrt{4+2\sqrt{(m+2)(n-1)}}\leqslant\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$，

所以 $\sqrt{m+2}+\sqrt{n-1}$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$.故选 C.

**【规律方法】**

**1**.求和的最小值：尝试拆项或添项，使得各项的积是定值.

**2**.求积的最大值：尝试乘系数，使得各项的和是定值.

**【对点训练】**

$x^2+\frac{16}{x^2+1}$ 的最小值为_____.

7　**解析**：由题意，得 $x^2+\frac{16}{x^2+1}=x^2+1+\frac{16}{x^2+1}-1\geqslant 2\sqrt{(x^2+1)\cdot\frac{16}{x^2+1}}-1=7$，

当且仅当 $x^2+1=\frac{16}{x^2+1}$，即 $x^2=3$ 时，等号成立，所以 $x^2+\frac{16}{x^2+1}$ 的最小值为 7.

## 类型2 常值代换法

**例2**　若$a>0>b$，且$a-b=2$，则$\frac{1}{a+1}-\frac{1}{b}$的最小值为（　　）

A.$\frac{2}{3}$　　B.$\frac{4}{3}$　　C.3　　D.4

B　**解析**：因为$a>0>b$，所以$-b>0$.因为$a-b=2$，所以$a+1+(-b)=3$，即$\frac{a+1}{3}+\frac{-b}{3}=1$，

$\frac{1}{a+1}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{-b}=\left[\frac{1}{a+1}+\frac{1}{-b}\right]\times 1=\left[\frac{1}{a+1}+\frac{1}{-b}\right]\left[\frac{a+1}{3}+\frac{-b}{3}\right]=\frac{1}{3}+\frac{a+1}{3(-b)}+\frac{-b}{3(a+1)}+\frac{1}{3}\geqslant 2\sqrt{\frac{a+1}{3(-b)}\times\frac{-b}{3(a+1)}}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$，当且仅当$a+1=-b$，即$a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{3}{2}$时，等号成立，此时$\frac{1}{a+1}-\frac{1}{b}$的最小值为$\frac{4}{3}$.故选B.

**【规律方法】**

**1.**当题中的已知条件中出现$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$和$cx+dy$，$cx+dy=1$和$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$($a,b,c,d$为常数)形式的式子时，可先用常值代换法，再用基本不等式求最值.

**2.**若已知等式中右边常数$m\neq 1$，则两边同除以$m$，使得右边为1.

**【对点训练】**

已知$m>0$，$n>0$，且$m(2-n)+n=0$，则$m+2n$的最小值为（　　）

A.2　　B.$\frac{1}{2}$　　C.9　　D.4

C　**解析**：由$m(2-n)+n=0$，可得$2m+n=mn$，所以$\frac{2}{n}+\frac{1}{m}=1$，所以$m+2n=(m+2n)\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{m}\right)=\frac{2m}{n}+4+1+\frac{2n}{m}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{2m}{n}\cdot\frac{2n}{m}}=9$，当且仅当$m=n=3$时，等号成立，故$m+2n$的最小值为9.故选C.

## 类型3 消元法

**例3**　已知正实数$x,y$满足$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$，则$4xy-3x$的最小值为（　　）

A.9　　B.10　　C.11　　D.12

A　**解析**：由$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$，可得$x=\frac{y}{y-1}>0$，故$y>1$，

则$4xy-3x=\frac{y}{y-1}\cdot[4(y-1)+1]=4(y-1)+\frac{1}{y-1}+5\geqslant 2\sqrt{4(y-1)\cdot\frac{1}{y-1}}+5=9$，

当且仅当$x=3$，$y=\frac{3}{2}$时取等号，故$4xy-3x$的最小值为9.故选A.

**【规律方法】**

**1.**当所求最值的代数式中的变量比较多时，通常考虑先利用已知条件消去部分变量后，凑出“和为常数”或“积为常数”的形式，再利用基本不等式求最值.

**2.**在进行消元操作时，需审慎考量消去哪个未知数可使消元过程更为简洁.

**【对点训练】**

若正数$x,y$满足$x+\frac{2}{y}=4$，则$\frac{x}{y}$的最大值为_____.

2　**解析**：由$x+\frac{2}{y}=4$，得$x=4-\frac{2}{y}$，

则$\begin{cases}y>0,\\ x=4-\frac{2}{y}>0,\end{cases}$解得$y>\frac{1}{2}$.

$\frac{x}{y}=\frac{4-\frac{2}{y}}{y}=-\frac{2}{y^2}+\frac{4}{y}=-2\left(\frac{1}{y}-1\right)^2+2$，

当$\frac{1}{y}=1$，即$y=1$时，$\frac{x}{y}$取得最大值2.

## 类型4 换元法

**例4**　已知$a>1$，$b>\frac{1}{2}$，$\frac{1}{a-1}+\frac{2}{2b-1}=1$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的最大值为_____.

$\frac{3}{4}$　**解析**：令$\frac{1}{a-1}=x$，$\frac{1}{2b-1}=y$，则$x>0$，$y>0$，$a=\frac{x+1}{x}$，$b=\frac{y+1}{2y}$，$x+2y=1$，所以$x+1+2y+2=4$，所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{x}{x+1}+\frac{2y}{y+1}=\frac{x+1-1}{x+1}+\frac{2(y+1)-2}{y+1}=3-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{y+1}=3-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{y+1}\right)(x+1+2y+2)=3-\frac{1}{4}\left[5+\frac{2(y+1)}{x+1}+\frac{2(x+1)}{y+1}\right]\leqslant 3-\frac{1}{4}\left[5+2\sqrt{\frac{2(y+1)}{x+1}\cdot\frac{2(x+1)}{y+1}}\right]=\frac{3}{4}$，当且仅当$x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{1}{3}$，即$a=4$，$b=2$时，等号成立.所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的最大值为$\frac{3}{4}$.

**【规律方法】**

**1.**求齐次分式、高次式或者带根号式子的最值时，常常利用换元法.

**2.**根据代数式的结构特点，利用换元法时，可将一些式子视为一个整体.

**注意**：利用换元法时，要注意新元的取值范围.

**【对点训练】**

已知实数 $x,y$ 满足 $x(x+y)=2+2y^2$，则 $7x^2-y^2$ 的最小值为_____.

$\dfrac{12\sqrt{2}+20}{3}$　**解析：**将 $x(x+y)=2+2y^2$，化为 $(x+2y)(x-y)=2$.

令 $x+2y=m$　①，$x-y=n$　②，则 $mn=2$.

联立①②可得 $x=\dfrac{m+2n}{3}$，$y=\dfrac{m-n}{3}$，

则 $7x^2-y^2=7\times\dfrac{(m+2n)^2}{9}-\dfrac{(m-n)^2}{9}=\dfrac{1}{3}\left(2m^2+\dfrac{36}{m^2}+20\right)\geqslant\dfrac{1}{3}\left(2\sqrt{2m^2\cdot\dfrac{36}{m^2}}+20\right)=\dfrac{12\sqrt{2}+20}{3}$，当且仅当 $2m^2=\dfrac{36}{m^2}$，即 $m^2=3\sqrt{2}$，$n^2=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ 时，等号成立.所以 $7x^2-7y^2$ 的最小值为 $\dfrac{12\sqrt{2}+20}{3}$.

# 2.3　二次函数与一元二次方程、不等式

## 第 1 课时　一元二次不等式的解法

**学习任务目标**

1.能够借助二次函数求解一元二次不等式.
2.理解一元二次方程、二次函数与一元二次不等式之间的关系，并能解决相应的问题.
3.会解决一元二次不等式中的恒成立问题.

## ○ 问题式预习 ○

**【知识清单】**

**知识点一　一元二次不等式、二次函数的零点**

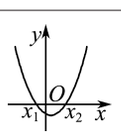
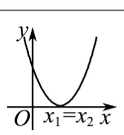
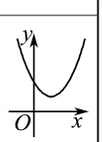
1.一元二次不等式

| | |
|---|---|
| 定义 | 一般地，我们把只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的不等式，称为一元二次不等式 |
| 一般形式 | $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$，其中 $a,b,c$ 均为常数，$a\neq0$ |

2.二次函数的零点

一般地，对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$，我们把使 $ax^2+bx+c=0$ 的实数 $x$ 叫做二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的零点.

**知识点二　二次函数与一元二次方程、不等式的解的对应关系**

| 项目 | $\Delta>0$ | $\Delta=0$ | $\Delta<0$ |
|---|---|---|---|
| $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象 |  |  |  |
| $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的根 | 有两个不相等的实数根 $x_1$，$x_2(x_1<x_2)$ | 有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$ | 没有实数根 |
| $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集 | $\{x\mid x<x_1$，或 $x>x_2\}$ | $\left\{x\middle\vert x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$ | $\mathbf{R}$ |

续表

| 项目 | $\Delta>0$ | $\Delta=0$ | $\Delta<0$ |
|---|---|---|---|
| $ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集 | $\{x\mid x_1<x<x_2\}$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |

**【概念辨析】**

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)不等式 $ax^2+x-1<0$ 是一元二次不等式.（　　）

(2)二次函数 $y=x^2-4$ 的零点是 $(2,0)$，$(-2,0)$.（　　）

(3)若 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的两个零点分别为 1,2，则 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $\{x\mid1<x<2\}$.（　　）

(4)若方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 没有实数根，则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$.（　　）

(1)×　**解析：**当 $a\neq0$ 时，$ax^2+x-1<0$ 是一元二次不等式.

(2)×　**解析：**二次函数 $y=x^2-4$ 的零点是 2 和 −2.

(3)√

(4)×　**解析：**当 $a>0$ 时，解集为 $\mathbf{R}$；当 $a<0$ 时，解集为 $\varnothing$.

2.不等式 $6x^2+x-2\leqslant0$ 的解集为_____.

$\left\{x\middle\vert-\dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}$　**解析：**因为方程 $6x^2+x-2=0$ 的两根为 $x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_2=-\dfrac{2}{3}$，所以原不等式的解集为 $\left\{x\middle\vert-\dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}$.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1 解一元二次不等式

#### 探究活动

**例1**　解下列不等式：

(1)(教材P52例1改编)$2x^2+7x+3>0$；

(2)$-4x^2+18x-\frac{81}{4}\geqslant 0$；

(3)(教材P52例3改编)$-2x^2+3x-2<0$；

(4)$-\frac{1}{2}x^2+3x-5>0$.

**解**：(1)因为$\Delta=7^2-4\times2\times3=25>0$，

所以方程$2x^2+7x+3=0$有两个不相等的实数根.由$2x^2+7x+3=(2x+1)(x+3)=0$，得$x_1=-3$，$x_2=-\frac{1}{2}$.

又因为二次函数$y=2x^2+7x+3$的图象开口向上，

所以原不等式的解集为$\left\{x\middle|x<-3,\text{或 }x>-\frac{1}{2}\right\}$.

(2)原不等式可化为$\left(2x-\frac{9}{2}\right)^2\leqslant 0$，

所以原不等式的解集为$\left\{x\middle|x=\frac{9}{4}\right\}$.

(3)原不等式可化为$2x^2-3x+2>0$，

因为$\Delta=9-4\times2\times2=-7<0$，

所以方程$2x^2-3x+2=0$无实数根.

又因为二次函数$y=2x^2-3x+2$的图象开口向上，

所以原不等式的解集为**R**.

(4)原不等式可化为$x^2-6x+10<0$，

$\Delta=(-6)^2-40=-4<0$，

所以方程$x^2-6x+10=0$无实数根.

又因为二次函数$y=x^2-6x+10$的图象开口向上，

所以原不等式的解集为$\varnothing$.

**【探究总结】**

**解一元二次不等式的一般步骤**

(1)将一元二次不等式化为一端为0的形式(一般使二次项系数大于0).

(2)求出相应一元二次方程的根，或判断出方程没有实数根.

(3)画出相应二次函数的示意草图，方程有根的将根标在图中.

(4)观察图象中位于$x$轴上方或下方的部分，对比不等式中不等号的方向，写出解集.

#### 应用迁移

解下列不等式：

(1)$2+3x-2x^2>0$；

(2)$x(3-x)\leqslant x(x+2)-1$；

(3)$x^2-2x+3>0$.

**解**：(1)原不等式可化为$2x^2-3x-2<0$，

所以$(2x+1)(x-2)<0$，

解得$-\frac{1}{2}<x<2$.

故原不等式的解集是$\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<2\right\}$.

(2)原不等式可化为$2x^2-x-1\geqslant 0$，

所以$(2x+1)(x-1)\geqslant 0$，

解得$x\leqslant-\frac{1}{2}$或$x\geqslant 1$.

故原不等式的解集为$\left\{x\middle|x\leqslant-\frac{1}{2},\text{或 }x\geqslant1\right\}$.

(3)因为$\Delta=(-2)^2-4\times3=-8<0$，

故原不等式的解集是**R**.

### 任务2 理解三个“二次”之间的关系

#### 探究活动

**例2**　(1)(多选)已知不等式$ax^2+bx+c<0$的解集为$\{x|x<-1,\text{或 }x>3\}$，则下列结论正确的是(　　)

A.$a>0$

B.$2a+b+c>0$

C.$a+b+c>0$

D.$cx^2-bx+a<0$的解集为$\left\{x\middle|-\frac{1}{3}<x<1\right\}$

(2)已知关于$x$的不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为$\{x|2<x<3\}$，求关于$x$的不等式$cx^2+bx+a<0$的解集.

(1)BCD　**解析**：根据题意，可知$ax^2+bx+c=0$的两个根为$-1$，3.

由根与系数的关系得$\begin{cases}2=-\frac{b}{a},\\-3=\frac{c}{a}.\end{cases}$解得$\begin{cases}b=-2a,\\c=-3a.\end{cases}$

由题意可得$y=ax^2+bx+c$的图象开口向下，则$a<0$，故A错误.

$2a+b+c=2a+(-2a)+(-3a)=-3a>0$，故B正确.

$a+b+c=a+(-2a)+(-3a)=-4a>0$，故C正确.

$cx^2-bx+a=-3ax^2+2ax+a<0$，两边同时除以$-a$，

得$3x^2-2x-1<0$，解得$-\frac{1}{3}<x<1$，故D正确.

故选 BCD.

(2)**解**：由不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x\mid 2<x<3\}$ 可知 $a<0$，且 2 和 3 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根.

由根与系数的关系可知 $\frac{b}{a}=-5$，$\frac{c}{a}=6$，故 $\frac{b}{c}=-\frac{5}{6}$.

又由 $a<0$ 知 $c<0$，

故不等式 $cx^2+bx+a<0$ 可变形为 $x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}>0$，即 $x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}>0$，

解得 $x<\frac{1}{3}$ 或 $x>\frac{1}{2}$.

所以不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集为 $\left\{x\middle| x<\frac{1}{3}，或\ x>\frac{1}{2}\right\}$.

[一题多思]

**思考 1.** 若本例(2)中条件不变，如何求关于 $x$ 的不等式 $cx^2-bx+a>0$ 的解集？

**提示**：由不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x\mid 2<x<3\}$ 可知 $a<0$，且 2 和 3 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，

由根与系数的关系知 $\frac{b}{a}=-5$，$\frac{c}{a}=6$，

所以 $c<0$，$\frac{b}{c}=-\frac{5}{6}$，

故不等式 $cx^2-bx+a>0$ 可变形为 $x^2-\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}<0$，即 $x^2+\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}<0$，解得 $-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}$.

故原不等式的解集为 $\left\{x\middle| -\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}\right\}$.

**思考 2.** 若将本例(2)中的条件“关于 $x$ 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x\mid 2<x<3\}$”变为“关于 $x$ 的不等式 $ax^2+bx+c\geqslant 0$ 的解集为 $\left\{x\middle| -\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 2\right\}$”，如何求不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集？

**提示**：(方法一)由 $ax^2+bx+c\geqslant 0$ 的解集为 $\left\{x\middle| -\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 2\right\}$ 知 $a<0$，

且 $-\frac{1}{3}$，2 为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根.

由根与系数的关系可得

$\left(-\frac{1}{3}\right)+2=\frac{5}{3}=-\frac{b}{a}$，$\left(-\frac{1}{3}\right)\times 2=-\frac{2}{3}=\frac{c}{a}$，

所以 $b=-\frac{5}{3}a$，$c=-\frac{2}{3}a$.

所以不等式 $cx^2+bx+a<0$ 可转化为 $\left(-\frac{2}{3}a\right)x^2+\left(-\frac{5}{3}a\right)x+a<0$，即 $2ax^2+5ax-3a>0$.

又因为 $a<0$，所以 $2x^2+5x-3<0$，解得 $-3<x<\frac{1}{2}$.

故所求不等式的解集为 $\left\{x\middle| -3<x<\frac{1}{2}\right\}$.

(方法二)由已知可得 $a<0$，且 $-\frac{1}{3}$，2 为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，由根与系数的关系可得 $\left(-\frac{1}{3}\right)+2=\frac{5}{3}=-\frac{b}{a}$，$\left(-\frac{1}{3}\right)\times 2=\frac{2}{-3}=\frac{c}{a}$，所以 $c>0$.

设方程 $cx^2+bx+a=0$ 的两个根分别为 $x_1$，$x_2$，

则 $x_1+x_2=-\frac{b}{c}$，$x_1x_2=\frac{a}{c}$，

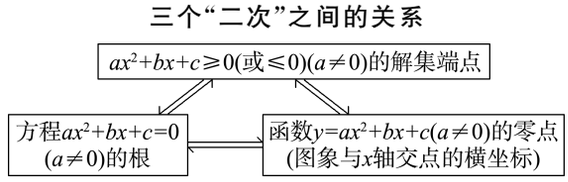
其中 $-\frac{b}{c}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{5}{2}$，$\frac{a}{c}=\frac{1}{\frac{c}{a}}=-\frac{3}{2}$，

所以 $x_1=-3$，$x_2=\frac{1}{2}$.

所以不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集为 $\left\{x\middle| -3<x<\frac{1}{2}\right\}$.

## 【探究总结】

三个“二次”之间的关系




**注意**：不要忽视二次项系数的符号和不等号的方向.

## 应用迁移

**1.** 已知关于 $x$ 的不等式 $ax^2+bx-1<0$ 的解集为 $\left\{x\middle| -1<x<\frac{1}{2}\right\}$，则 $a+b=$ (　　)

A.3　　B.1

C.$-1$　　D.$-3$

A　**解析**：由题意可得 $-1$，$\frac{1}{2}$ 是 $ax^2+bx-1=0$ 的解，所以 $\begin{cases}-1+\frac{1}{2}=-\frac{b}{a},\\ -1\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{a},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=1,\end{cases}$ 所以 $a+b=3$.故选 A.

**2.** 若不等式 $ax^2+bx+c\leqslant 0$ 的解集为 $\{x\mid x\leqslant -3$，或 $x\geqslant 4\}$，求不等式 $bx^2+2ax-c-3b\geqslant 0$ 的解集.

**解**：因为不等式 $ax^2+bx+c\leqslant 0$ 的解集为 $\{x\mid x\leqslant -3$，或 $x\geqslant 4\}$，

所以 $a<0$，且 $-3$，$4$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根.

由根与系数的关系可得 $\begin{cases}-3+4=-\dfrac{b}{a},\\ -3\times 4=\dfrac{c}{a},\end{cases}$

即 $\begin{cases}b=-a,\\ c=-12a.\end{cases}$

所以不等式 $bx^2+2ax-c-3b\geqslant 0$ 可化为 $-ax^2+2ax+15a\geqslant 0$，即 $x^2-2x-15\geqslant 0$，

解得 $x\leqslant -3$ 或 $x\geqslant 5$.

故所求不等式的解集为 $\{x\mid x\leqslant -3$，或 $x\geqslant 5\}$.

## 任务3　解决一元二次不等式恒成立、能成立问题

### 探究活动

**例3**　(1)已知关于 $x$ 的不等式 $ax^2+2ax+1\geqslant 0$ 在 **R** 上恒成立(即解集为 **R**)，求实数 $a$ 的取值范围；

(2)已知关于 $x$ 的不等式 $ax^2+(1-a)x+1<0$ 在 **R** 上能成立(解集不是空集)，求实数 $a$ 的取值范围；

(3)若关于 $x$ 的不等式 $ax^2-2ax-3>0$ 的解集为空集，求实数 $a$ 的取值范围.

**解**：(1)当 $a=0$ 时，$1\geqslant 0$ 恒成立，符合题意；

当 $a\neq 0$ 时，只要 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=4a^2-4a\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant 1$.

综上，实数 $a$ 的取值范围是 $\{a\mid 0\leqslant a\leqslant 1\}$.

(2)当 $a=0$ 时，$x+1<0\Rightarrow x<-1$，符合题意；

当 $a<0$ 时，$ax^2+(1-a)x+1<0$ 一定有解，符合题意；

当 $a>0$ 时，只需 $\Delta=(1-a)^2-4a>0$，

得 $0<a<3-2\sqrt{2}$ 或 $a>3+2\sqrt{2}$.

综上，实数 $a$ 的取值范围为 $\{a\mid a<3-\sqrt{2}$，或 $a>3+2\sqrt{2}\}$.

(3)当 $a=0$ 时，不等式为 $-3>0$，解集为 $\varnothing$；

当 $a\neq 0$ 时，只要 $\begin{cases}a<0,\\ \Delta=4a^2+12a\leqslant 0,\end{cases}$

解得 $-3\leqslant a<0$.

综上，实数 $a$ 的取值范围是 $\{a\mid -3\leqslant a\leqslant 0\}$.

### 【探究总结】

(1)关于 $x$ 的不等式对任意实数 $x$ 恒成立，即不等式的解集为 **R**.

对于一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$，它的解集为 **R** 的条件为 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=b^2-4ac<0;\end{cases}$

对于一元二次不等式 $ax^2+bx+c\geqslant 0$，它的解集为 **R** 的条件为 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=b^2-4ac\leqslant 0.\end{cases}$

(2)一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\varnothing$ 的条件为 $\begin{cases}a<0,\\ \Delta\leqslant 0.\end{cases}$

(3)一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 在 **R** 上有解的条件为 $a>0$ 或 $\begin{cases}a<0,\\ \Delta>0.\end{cases}$

**提醒**：注意题中是否要求不等式是一元二次不等式；注意讨论二次项系数，结合二次函数图象的开口方向和与 $x$ 轴的交点情况讨论；注意根据判别式 $\Delta$ 列出的不等式是否可取等号.

### 应用迁移

若不等式 $(a-2)x^2-2(a-2)x-4<0$ 对一切 $x\in$ **R** 恒成立，则实数 $a$ 的取值范围为　(　　)

A. $\{a\mid a<2$ 或 $a>2\}$　B. $\{a\mid a<2$ 或 $a\geqslant 2\}$

C. $\{a\mid -2<a<2\}$　D. $\{a\mid -2<a\leqslant 2\}$

D　**解析**：当 $a=2$ 时，$-4<0$ 恒成立，则 $a=2$；

当 $a\neq 2$ 时，$\begin{cases}a-2<0,\\ \Delta=4(a-2)^2+16(a-2)<0,\end{cases}$ 解得 $-2<a<2$.

综上所述，$-2<a\leqslant 2$.

所以实数 $a$ 的取值范围为 $\{a\mid -2<a\leqslant 2\}$. 故选 D.

# 课后素养评价(十四)

## 基础落实

**1.** 不等式 $4x^2-12x+9\leqslant 0$ 的解集是　(　　)

A. $\varnothing$　B. **R**

C. $\left\{x\mid x\neq \dfrac{3}{2}\right\}$　D. $\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

D　**解析**：原不等式可化为 $(2x-3)^2\leqslant 0$，故 $x=\dfrac{3}{2}$. 故选 D.

**2.** 已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，$B=\{x\mid x>0\}$，则 $A\cap B=$　(　　)

A. $\{x\mid x>-1\}$　B. $\{x\mid 0<x<3\}$

C. $\{x\mid x>-3\}$　D. $\{x\mid 0<x<1\}$

B　**解析**：由题意得 $x^2-2x-3<0$，因式分解得 $(x+1)(x-3)<0$，解得 $-1<x<3$，

可得 $A=\{x\mid -1<x<3\}$，则 $A\cap B=\{x\mid 0<x<3\}$. 故选 B.

**3.** (多选)下列四个不等式中，解集为 $\varnothing$ 的是　(　　)

A. $-x^2+x+1\leqslant 0$

B.$2x^2-3x+4<0$

C.$x^2+3x+10\leqslant 0$

D.$-x^2+4x-\left(a+\frac{4}{a}\right)>0(a>0)$

BCD　**解析**：对于A，$-x^2+x+1\leqslant 0$可化为$x^2-x-1\geqslant 0$，其解集不为$\varnothing$；

对于B，$2x^2-3x+4<0$，$\Delta=9-32<0$，其解集为$\varnothing$；

对于C，$x^2+3x+10\leqslant 0$，$\Delta=9-40<0$，其解集为$\varnothing$；

对于D，$-x^2+4x-\left(a+\frac{4}{a}\right)>0$可化为$x^2-4x+\left(a+\frac{4}{a}\right)<0$，$\Delta=16-4\left(a+\frac{4}{a}\right)\leqslant 16-4\times 2\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}}=0$，当且仅当$a=2$时，等号成立，故不等式的解集为$\varnothing$.

**4.**解下列不等式：

(1)$3x^2-7x\leqslant 10$；

(2)$-x^2-4x+5<0$；

(3)$x^2-x+\frac{1}{4}<0$.

**解**：(1)由$3x^2-7x\leqslant 10$，得$3x^2-7x-10\leqslant 0$，

即$(3x-10)(x+1)\leqslant 0$，所以$-1\leqslant x\leqslant\frac{10}{3}$，

所以不等式的解集为$\left\{x\,\middle|\,-1\leqslant x\leqslant\frac{10}{3}\right\}$.

(2)由$-x^2-4x+5<0$，得$x^2+4x-5>0$，

故$(x+5)(x-1)>0$，解得$x>1$或$x<-5$，

故不等式的解集为$\{x|x<-5$，或$x>1\}$.

(3)由$x^2-x+\frac{1}{4}<0$，得$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2<0$，无解，

所以不等式的解集为$\varnothing$.

## 能力提升

**1.**若关于$x$的方程$x^2+mx+1=0$有两个不相等的实数根，则　(　　)

A.$-1<m<1$　　B.$m<-1$或$m>1$

C.$-2<m<2$　　D.$m<-2$或$m>2$

D　**解析**：因为方程$x^2+mx+1=0$有两个不相等的实数根，所以$\Delta=m^2-4>0$，所以$m>2$或$m<-2$.

**2.**若不等式$ax^2-bx+c>0$的解集为$\{x|-2<x<1\}$，则$ax^2+(a-b)x+c-a<0$的解集为　(　　)

A.$\{x|x>\sqrt{3}$或$x<-\sqrt{3}\}$

B.$\{x|-3<x<1\}$

C.$\{x|-1<x<3\}$

D.$\{x|x<-3$或$x>1\}$

D　**解析**：因为不等式$ax^2-bx+c>0$的解集为$\{x|-2<x<1\}$，

所以$a<0$且方程$ax^2-bx+c=0$的两根分别为$x=-2$和$x=1$，所以$\frac{b}{a}=-2+1=-1$，$\frac{c}{a}=-2\times 1=-2$，即$b=-a$，$c=-2a$.

此时$ax^2+(a-b)x+c-a=ax^2+2ax-3a<0$.

又$a<0$，所以$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)>0$，解得$x<-3$或$x>1$，

所以$ax^2+(a-b)x+c-a<0$的解集为$\{x|x<-3$或$x>1\}$.故选D.

**3.**若关于$x$的不等式$(a^2-1)x^2-(a-1)x-1<0$的解集为$\mathbf{R}$，则实数$a$的取值范围是_____.

$\left\{a\,\middle|\,-\frac{3}{5}<a\leqslant 1\right\}$　**解析**：①当$a^2-1\neq 0$，即$a\neq\pm 1$时，$\begin{cases}a^2-1<0,\\ \Delta=(a-1)^2+4(a^2-1)<0,\end{cases}$

解得$-\frac{3}{5}<a<1$.

②当$a^2-1=0$，即$a=\pm 1$时，

若$a=1$，则原不等式为$-1<0$，恒成立；

若$a=-1$，则原不等式为$2x-1<0$，即$x<\frac{1}{2}$，不符合题意，舍去.

综上所述，实数$a$的取值范围是$\left\{a\,\middle|\,-\frac{3}{5}<a\leqslant 1\right\}$.

**4.**已知关于$x$的不等式$2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$.

(1)若不等式的解集为$\left\{x\,\middle|\,-\frac{3}{2}<x<1\right\}$，求实数$k$的值；

(2)若不等式对任意$x\in\mathbf{R}$恒成立，求实数$k$的取值范围.

**解**：(1)由关于$x$的不等式$2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$的解集为$\left\{x\,\middle|\,-\frac{3}{2}<x<1\right\}$，可知$-\frac{3}{2}$和1是方程$2kx^2+kx-\frac{3}{8}=0$的两个实数根，且$k>0$.由根与系数的关系得$\left(-\frac{3}{2}\right)\times 1=\frac{-\frac{3}{8}}{2k}$，解得$k=\frac{1}{8}$.

(2)当$k=0$时，原不等式为$-\frac{3}{8}<0$，恒成立，满足题意；

当$k\neq 0$时，则有$\begin{cases}2k<0,\\ \Delta=k^2+3k<0,\end{cases}$解得$-3<k<0$.

综上，实数$k$的取值范围为$\{k|-3<k\leqslant 0\}$.

## 自我超越

$y=[x]$在数学上称为高斯函数，也叫取整函数，其中$[x]$表示不大于$x$的最大整数，如$[1.5]=1$，$[-2.3]=-3$，$[3]=3$，那么使不等式$4[x]^2-12[x]+5\leqslant 0$成立的$x$的取值范围是　　(　　)

A.$\left\{x\left|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5}{3}\right.\right\}$　　B.$\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$

C.$\{x|1\leqslant x<3\}$　　D.$\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$

C　**解析**：由$4[x]^2-12[x]+5\leqslant 0$可得$\frac{1}{2}\leqslant[x]\leqslant\frac{5}{2}$.由题中定义可知$[x]$的可能取值有1，2.当$[x]=1$时，$1\leqslant x<2$；当$[x]=2$时，$2\leqslant x<3$.

综上所述，使不等式$4[x]^2-12[x]+5\leqslant 0$成立的$x$的取值范围是$\{x|1\leqslant x<3\}$.故选C.

# 第2课时　一元二次不等式的应用

**学习任务目标**

1.会求分式不等式的解集.

2.能利用一元二次不等式解决实际问题.

3.会利用分类讨论思想解含参数的一元二次不等式.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1 解简单的分式不等式

1.不等式$\frac{2x+1}{x-1}\geqslant 0$的解集为　　(　　)

A.$\left\{x\left|-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right.\right\}$

B.$\left\{x\left|-\frac{1}{2}\leqslant x<1\right.\right\}$

C.$\left\{x\left|x\leqslant-\frac{1}{2}\text{或}x\geqslant 1\right.\right\}$

D.$\left\{x\left|x\leqslant-\frac{1}{2}\text{或}x>1\right.\right\}$

D　**解析**：由$\frac{2x+1}{x-1}\geqslant 0$，得$\begin{cases}(2x+1)(x-1)\geqslant 0,\\x-1\neq 0,\end{cases}$解得$x\leqslant-\frac{1}{2}$或$x>1$.故选D.

2.不等式$\frac{3-x}{x+1}\leqslant 1$的解集为　　(　　)

A.$\{x|-1<x\leqslant 3\}$

B.$\{x|-1<x\leqslant 1\}$

C.$\{x|x<-1\text{或}x\geqslant 1\}$

D.$\{x|x\leqslant-1\text{或}x>1\}$

C　**解析**：移项得$\frac{3-x}{x+1}-1\leqslant 0$，即$\frac{3-x-(x+1)}{x+1}=\frac{2-2x}{x+1}\leqslant 0$，所以$\frac{x-1}{x+1}\geqslant 0$，

该不等式等价于$(x-1)(x+1)\geqslant 0$且$x+1\neq 0$，所以解集为$\{x|x<-1\text{或}x\geqslant 1\}$.故选C.

**【探究总结】**

**分式不等式的解题策略**

(1)直接法：不等号右边为0的分式不等式，可直接转化为一元二次不等式或一元二次不等式组求解，但要注意分母不为0.

(2)转化法：不等号右边不为0的分式不等式，要移项、通分，使之转化为不等号右边为0的不等式，再用直接法求解.

**注意**：不等号右边不为0的分式不等式，求解时一定不要直接去分母.

### 任务2 一元二次不等式的实际应用

#### 探究活动

**例1**　某蛋糕厂生产某种蛋糕的成本为40元/个，出厂价为60元/个，日销售量为1 000个.为适应市场需求，计划提高蛋糕档次，适度增加成本.若每个蛋糕成本增加的百分率为$x(0<x<1)$，则每个蛋糕的出厂价相应提高的百分率为$0.5x$，同时预计日销售量增加的百分率为$0.8x$.为使日利润有所增加，求$x$的取值范围.

**解**：设增加成本后的日利润为$y$元.

$y=[60\times(1+0.5x)-40\times(1+x)]\times 1\,000\times(1+0.8x)=2\,000(-4x^2+3x+10)(0<x<1)$.

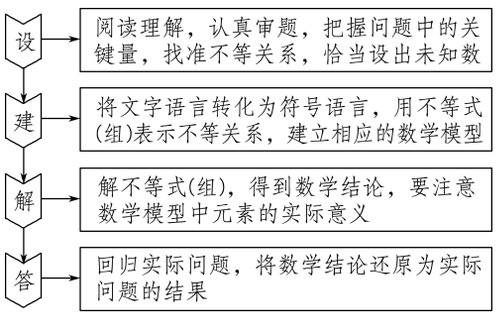
要保证日利润有所增加，

则$y>(60-40)\times 1\,000$，且$0<x<1$，

即$\begin{cases}-4x^2+3x>0,\\0<x<1,\end{cases}$解得$0<x<75\%$.

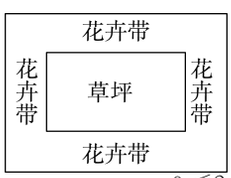
所以，为使日利润有所增加，$x$的取值范围为$\left\{x\left|0<x<75\%\right.\right\}$.

【探究总结】




## 应用迁移

如图，在长为 8 m、宽为 6 m 的矩形空地的中间种植草坪，草坪四周种植花卉.如果要求草坪四周的花卉带的宽度都相同，且草坪的面积不超过总面积的一半，那么花卉带的宽度至少为多少？




**解**：设花卉带的宽度为 $x$ m，则 $\begin{cases}0<2x<8,\\0<2x<6,\end{cases}$ 可得 $0<x<3$，

所以，草坪的长为 $(8-2x)$ m，宽为 $(6-2x)$ m，

所以草坪的面积为 $(8-2x)(6-2x)=4(4-x)(3-x)$.

因为草坪的面积不超过总面积的一半，

所以 $4(4-x)(3-x)\leqslant\frac{1}{2}\times6\times8$，

整理可得 $x^2-7x+6\leqslant0$，解得 $1\leqslant x\leqslant6$.

又由 $0<x<3$，可得 $1\leqslant x<3$.

所以，花卉带的宽度至少为 1 m.

# 任务3 解含参数的一元二次不等式

## 探究活动

**例 2**　解关于 $x$ 的不等式 $ax^2-(a+1)x+1<0$.

**解**：①当 $a=0$ 时，原不等式可化为 $x>1$.

②当 $a\neq0$ 时，原不等式可化为 $(ax-1)(x-1)<0$.

当 $a<0$ 时，原不等式可化为 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)>0$，

因为 $\frac{1}{a}<1$，所以 $x<\frac{1}{a}$ 或 $x>1$.

当 $a>0$ 时，原不等式可化为 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)<0$.

若 $0<\frac{1}{a}<1$，即 $a>1$，则 $\frac{1}{a}<x<1$；

若 $\frac{1}{a}=1$，即 $a=1$，则 $x\in\varnothing$；

若 $\frac{1}{a}>1$，即 $0<a<1$，则 $1<x<\frac{1}{a}$.

综上所述，当 $a<0$ 时，原不等式的解集为 $\left\{x\middle|x<\frac{1}{a}\text{，或 }x>1\right\}$；当 $a=0$ 时，原不等式的解集为 $\{x\mid x>1\}$；当 $0<a<1$ 时，原不等式的解集为 $\left\{x\middle|1<x<\frac{1}{a}\right\}$；当 $a=1$ 时，原不等式的解集为 $\varnothing$；当 $a>1$ 时，原不等式的解集为 $\left\{x\middle|\frac{1}{a}<x<1\right\}$.

[一题多思]

**思考 1**.本例中，若关于 $x$ 的不等式换为“$ax^2-(a+1)x+1>0(a>0)$”，你能求出不等式的解集吗？

**提示**：因为 $a>0$，所以原不等式可化为 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)>0$，所以方程 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)=0$ 的两个根分别为 $x_1=\frac{1}{a}$，$x_2=1$.

①当 $\frac{1}{a}>1$，即 $0<a<1$ 时，解得 $x<1$ 或 $x>\frac{1}{a}$；

②当 $\frac{1}{a}=1$，即 $a=1$ 时，原不等式即为 $(x-1)^2>0$，解得 $x\neq1$；

③当 $0<\frac{1}{a}<1$，即 $a>1$ 时，解得 $x<\frac{1}{a}$ 或 $x>1$.

综上所述，当 $0<a<1$ 时，原不等式的解集为 $\left\{x\middle|x<1\text{，或 }x>\frac{1}{a}\right\}$；当 $a=1$ 时，原不等式的解集为 $\{x\mid x\neq1\}$；当 $a>1$ 时，原不等式的解集为 $\left\{x\middle|x<\frac{1}{a}\text{，或 }x>1\right\}$.

**思考 2**.本例中，若关于 $x$ 的不等式换为“$ax^2-(a+1)x+1>0(a<0)$”，你能求出不等式的解集吗？

**提示**：因为 $a<0$，所以原不等式可化为 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)<0$，所以方程 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)=0$ 的两个根分别为 $x_1=\frac{1}{a}$，$x_2=1$.

因为 $\frac{1}{a}<1$，所以原不等式的解集为 $\left\{x\middle|\frac{1}{a}<x<1\right\}$.

【探究总结】

**解含参数的一元二次不等式的策略**

在解含参数的一元二次不等式时，往往要对参数进行分类讨论，为了做到分类不重不漏，讨论需从如下三个方面进行：

(1)关于不等式类型的讨论：二次项系数 $a>0$，$a<0$，$a=0$.

(2)关于不等式对应的方程根的个数的讨论：两根($\Delta$

>0),一根(Δ=0),无根(Δ<0).

(3)关于不等式对应的方程根的大小的讨论:$x_1>x_2$,$x_1=x_2$,$x_1<x_2$.

## 应用迁移

**1.**设 $a$ 为实数,则关于 $x$ 的不等式$(ax-2)\cdot(2x-4)<0$ 的解集不可能是　　(　　)

A.$\left\{x\left|\frac{2}{a}<x<2\right.\right\}$

B.$\left\{x\left|x<2,\text{或 }x>\frac{2}{a}\right.\right\}$

C.$\{x|x>2\}$

D.$\left\{x\left|2<x<\frac{2}{a}\right.\right\}$

B　**解析**:关于 $x$ 的不等式$(ax-2)(2x-4)<0$,

若 $a=0$,不等式为$-2(2x-4)<0$,解得 $x>2$,此时解集为$\{x|x>2\}$.

若 $a\neq0$,解方程$(ax-2)(2x-4)=0$,得 $x=\frac{2}{a}$或 $x=2$.

当 $a<0$ 时,解不等式$(ax-2)(2x-4)<0$,得 $x<\frac{2}{a}$,或 $x>2$,此时解集为$\left\{x\left|x<\frac{2}{a},\text{或 }x>2\right.\right\}$;

当 $0<a<1$ 时,$\frac{2}{a}>2$,解不等式$(ax-2)(2x-4)<0$,得 $2<x<\frac{2}{a}$,此时解集为$\left\{x\left|2<x<\frac{2}{a}\right.\right\}$;

当 $a=1$ 时,$\frac{2}{a}=2$,不等式$(ax-2)(2x-4)<0$ 的解集为∅;

当 $a>1$ 时,$\frac{2}{a}<2$,解不等式$(ax-2)(2x-4)<0$,得$\frac{2}{a}<x<2$,此时解集为$\left\{x\left|\frac{2}{a}<x<2\right.\right\}$.

所以不等式$(ax-2)(2x-4)<0$ 的解集不可能是$\left\{x\left|x<2,\text{或 }x>\frac{2}{a}\right.\right\}$.故选 B.

**2.**解关于 $x$ 的不等式$ax^2-2x+a<0(a\in\mathbf{R})$.

**解**:若 $a=0$,则原不等式为$-2x<0$,故解集为$\{x|x>0\}$.

若 $a\neq0$,$\Delta=4-4a^2$.分情况讨论:

①若 $a>0$,

当 $\Delta>0$,即 $0<a<1$ 时,方程$ax^2-2x+a=0$ 的两个根为 $x_1=\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}$,$x_2=\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}$,

所以原不等式的解集为$\left\{x\left|\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}<x<\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right.\right\}$;

当 $\Delta=0$,即 $a=1$ 时,原不等式的解集为∅;

当 $\Delta<0$,即 $a>1$ 时,原不等式的解集为∅.

②若 $a<0$,

当 $\Delta>0$,即 $-1<a<0$ 时,原不等式的解集为$\left\{x\left|x<\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a},\text{或 }x>\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right.\right\}$;

当 $\Delta=0$,即 $a=-1$ 时,原不等式可化为$(x+1)^2>0$,

所以原不等式的解集为$\{x|x\neq-1\}$;

当 $\Delta<0$,即 $a<-1$ 时,原不等式的解集为 **R**.

综上所述,当 $a\geqslant1$ 时,原不等式的解集为∅;

当 $0<a<1$ 时,原不等式的解集为$\left\{x\left|\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}<x<\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right.\right\}$;

当 $a=0$ 时,原不等式的解集为$\{x|x>0\}$;

当 $-1<a<0$ 时,原不等式的解集为$\left\{x\left|x<\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a},\text{或 }x>\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right.\right\}$;

当 $a=-1$ 时,原不等式的解集为$\{x|x\neq-1\}$;

当 $a<-1$ 时,原不等式的解集为 **R**.

# 课后素养评价(十五)

## 基础落实

**1.**已知集合 $A=\{1,3,5,7,9\}$,$B=\left\{x\left|\frac{x-3}{x-7}\leqslant0\right.\right\}$,则 $A\cap B=$　　(　　)

A.$\{3,5\}$　　B.$\{3,7\}$

C.$\{x|3\leqslant x\leqslant5\}$　　D.$\{x|3\leqslant x<7\}$

A　**解析**:因为$\frac{x-3}{x-7}\leqslant0$,所以$\begin{cases}(x-3)(x-7)\leqslant0,\\x-7\neq0,\end{cases}$

解得 $3\leqslant x<7$,即 $B=\{x|3\leqslant x<7\}$,所以 $A\cap B=\{3,5\}$.故选 A.

**2.**产品的总成本 $y$(单位:万元)与产量 $x$(单位:台)之间的函数关系式是 $y=3\,000+20x-0.1x^2$,$x\in(0,240)$.若每台产品的售价为 25 万元,则生产者不亏本时(销售收入不小于总成本)的最低产量是　　(　　)

A.100 台　　B.120 台　　C.150 台　　D.180 台

C　**解析**:由题设可知,当产量为 $x$ 时,销售收入为 $25x$.要使生产者不亏本,必须满足销售收入不小于总成本,即$25x\geqslant3\,000+20x-0.1x^2$,等价于$0.1x^2+5x-3\,000\geqslant0$,即$x^2+50x-30\,000\geqslant0$,解得 $x\geqslant150$ 或 $x\leqslant-200$(舍去).故要使生产者不亏本,最低产量是 150 台.

**3.** 设 $m+n>0$，则关于 $x$ 的不等式 $(m-x)\cdot(n+x)>0$ 的解集是（　　）

A. $\{x\mid x<-n$，或 $x>m\}$

B. $\{x\mid -n<x<m\}$

C. $\{x\mid x<-m$，或 $x>n\}$

D. $\{x\mid -m<x<n\}$

B　**解析**：方程 $(m-x)(n+x)=0$ 的两根为 $m$，$-n$，

因为 $m+n>0$，所以 $m>-n$. 结合函数 $y=(m-x)(n+x)$ 的图象（图略），得不等式的解集是 $\{x\mid -n<x<m\}$.

**4.** (1) 解不等式 $\dfrac{2-x}{x+3}>1$；

(2) 关于 $x$ 的不等式 $ax-b>0$ 的解集是 $\left\{x\,\middle|\,x>\dfrac{1}{2}\right\}$，求关于 $x$ 的不等式 $\dfrac{ax-2b}{-x+5}>0$ 的解集.

**解**：(1) 不等式 $\dfrac{2-x}{x+3}>1$ 可化为 $\dfrac{2-x-(x+3)}{x+3}>0$，

化简得 $\dfrac{-2x-1}{x+3}>0$，即 $\dfrac{2x+1}{x+3}<0$，

等价于 $(2x+1)(x+3)<0$，解得 $-3<x<-\dfrac{1}{2}$.

所以原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,-3<x<-\dfrac{1}{2}\right\}$.

(2) 因为不等式 $ax-b>0$ 的解集是 $\left\{x\,\middle|\,x>\dfrac{1}{2}\right\}$，

所以 $a>0$，且 $a=2b$.

则不等式 $\dfrac{ax-2b}{-x+5}>0$ 等价于 $\dfrac{x-1}{-x+5}>0$，即 $\dfrac{x-1}{x-5}<0$.

所以 $(x-1)(x-5)<0$，解得 $1<x<5$.

因此原不等式的解集为 $\{x\mid 1<x<5\}$.

## 能力提升

**1.** (多选) 对于给定的实数 $a$，关于 $x$ 的一元二次不等式 $(ax-1)(x+1)<0$ 的解集可能是（　　）

A. $\left\{x\,\middle|\,-1<x<\dfrac{1}{a}\right\}$　　B. $\{x\mid x\neq 1\}$

C. $\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{a}<x<-1\right\}$　　D. $\mathbf{R}$

AB　**解析**：当 $a<-1$ 时，$-1<\dfrac{1}{a}<0$，此时解集为 $\left\{x\,\middle|\,x<-1$ 或 $x>\dfrac{1}{a}\right\}$；

当 $a=-1$ 时，$\dfrac{1}{a}=-1$，此时解集为 $\{x\mid x\neq -1\}$；

当 $-1<a<0$ 时，$\dfrac{1}{a}<-1$，此时解集为 $\left\{x\,\middle|\,x<\dfrac{1}{a}$ 或 $x>-1\right\}$；

当 $a=0$ 时，不等式为 $-(x+1)<0$，此时解集为 $\{x\mid x>-1\}$；

当 $a>0$ 时，$\dfrac{1}{a}>0$，此时解集为 $\left\{x\,\middle|\,-1<x<\dfrac{1}{a}\right\}$.

故选 AB.

**2.** (多选) 若关于 $x$ 的不等式 $ax^2-4x+2<0$ 有实数解，则 $a$ 的值可能为（　　）

A. 0　　B. 3　　C. 1　　D. $-2$

ACD　**解析**：当 $a=0$ 时，不等式 $-4x+2<0$ 有实数解，符合题意；

当 $a<0$ 时，二次函数 $y=ax^2-4x+2$ 的图象开口向下，则不等式 $ax^2-4x+2<0$ 有解；

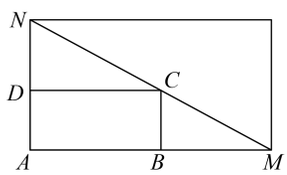
当 $a>0$ 时，由 $\Delta=16-8a>0$，解得 $0<a<2$.

综上，$a$ 的取值范围为 $\{a\mid a<2\}$. 故选 ACD.

**3.** 如图，有一矩形地块，$AM=30$ m，$AN=20$ m. 物业计划将其中的矩形区域 $ABCD$ 建为仓库，要求顶点 $C$ 在地块的对角线 $MN$ 上，$B$，$D$ 分别在边 $AM$，$AN$ 上，其他地方建停车场和路. 设 $AB=x$ m.

(1) 求矩形 $ABCD$ 的面积 $S$ 关于 $x$ 的函数解析式；

(2) 若要求仓库占地面积不小于 144 m$^2$，求 $x$ 的取值范围.




**解**：(1) 由题意知，$\triangle NDC\backsim\triangle NAM$，则 $\dfrac{DC}{AM}=\dfrac{ND}{NA}$，即 $\dfrac{x}{30}=\dfrac{20-AD}{20}$，解得 $AD=20-\dfrac{2}{3}x$.

所以矩形 $ABCD$ 的面积 $S$ 关于 $x$ 的函数解析式为 $S=20x-\dfrac{2}{3}x^2(0<x<30)$.

(2) 由题意得 $20x-\dfrac{2}{3}x^2\geqslant 144$，即 $x^2-30x+216\leqslant 0$，解得 $12\leqslant x\leqslant 18$.

故 $x$ 的取值范围是 $\{x\mid 12\leqslant x\leqslant 18\}$.

## 自我超越

关于 $x$ 的不等式 $2x^2+(1-2a)x-a<0$ 的解集中整数有且只有 3 个，则正数 $a$ 的取值范围为（　　）

A. $\{a\mid 2<a\leqslant 3\}$　　B. $\{a\mid 2\leqslant a<3\}$

C. $\{a\mid 2<a<3\}$　　D. $\{a\mid 2\leqslant a\leqslant 3\}$

A　**解析**：原不等式可化为 $(2x+1)(x-a)<0$，则方程 $2x^2+(1-2a)x-a=0$ 的两个根为 $a$ 和 $-\dfrac{1}{2}$.

当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，原不等式的解集为空集，不满足题意；

当 $a<-\dfrac{1}{2}$ 时，原不等式的解集为 $\left\{a\,\middle|\,a<x<-\dfrac{1}{2}\right\}$，则 $a$ 不能取到正数值；

当 $a>-\dfrac{1}{2}$ 时，原不等式的解集为 $\left\{a\,\middle|\,-\dfrac{1}{2}<x<a\right\}$，要使不等式的解集中整数有且只有 3 个，则 $2<a\leqslant 3$.

故选 A.

★★★

# 迁　移　应　用

## 类型一　不等式的恒成立、能成立问题

**例 1**　(1)若关于 $x$ 的不等式 $kx^2+3kx+k-2\leqslant 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,则实数 $k$ 的取值范围为_____.

(2)对于 $\forall x\in\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3\}$,不等式 $mx^2-mx-1<0$ 恒成立,则 $m$ 的取值范围为_____.

(3)若存在 $x\in\mathbf{R}$,使得 $\dfrac{4x+m}{x^2-2x+3}\geqslant 2$ 成立,则 $m$ 的取值范围为_____.

(1)$\left\{k\left|-\dfrac{8}{5}\leqslant k\leqslant 0\right.\right\}$　**解析**:当 $k=0$ 时,$-2\leqslant 0$ 恒成立,符合题意;

当 $k\neq 0$ 时,需满足 $k<0$ 且 $9k^2-4k(k-2)=5k^2+8k\leqslant 0$,得 $-\dfrac{8}{5}\leqslant k<0$.

综上,实数 $k$ 的取值范围是 $\left\{k\left|-\dfrac{8}{5}\leqslant k\leqslant 0\right.\right\}$.

(2)$\left\{m\left|m<\dfrac{1}{6}\right.\right\}$　**解析**:由不等式 $mx^2-mx-1<0$,得 $m(x^2-x)<1$.

因为 $x\in\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3\}$,所以 $x^2-x>0$,所以 $m(x^2-x)<1$ 可化为 $m<\dfrac{1}{x^2-x}$.

因为当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时,$x^2-x=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\leqslant 6$,所以 $\dfrac{1}{x^2-x}\geqslant\dfrac{1}{6}$,所以 $m<\dfrac{1}{6}$.

(3)$\{m\mid m\geqslant -2\}$　**解析**:因为 $x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0$,所以题意等价于存在 $x\in\mathbf{R}$,使得 $4x+m\geqslant 2(x^2-2x+3)$ 成立,所以存在 $x\in\mathbf{R}$,使得 $m\geqslant 2x^2-8x+6$ 成立.

又 $2x^2-8x+6=2(x-2)^2-2\geqslant -2$,所以 $m\geqslant -2$.

**【规律方法】**

(1)将不等式在 $\mathbf{R}$ 上的恒成立问题转化为一元二次不等式解集为 $\mathbf{R}$ 的问题求解.

(2)简单的不等式在给定范围内的恒成立、能成立问题,可以通过分离参数,转化为求函数的最值问题.

**【对点训练】**

**1.**(教材 P58 复习参考题 2T6 改编)若不等式 $2kx^2+kx+\dfrac{3}{8}>0$ 对一切实数 $x$ 都成立,则 $k$ 的取值范围为_____.

$\{k\mid 0\leqslant k<3\}$　**解析**:当 $k=0$ 时,$\dfrac{3}{8}>0$,满足题意;

当 $k\neq 0$ 时,$\begin{cases}k>0,\\ \Delta<0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}k>0,\\ k^2-3k<0,\end{cases}$ 解得 $0<k<3$.综上所述,$0\leqslant k<3$.所以 $k$ 的取值范围是 $\{k\mid 0\leqslant k<3\}$.

**2.**若两个正实数 $x$,$y$ 满足 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=1$,且不等式 $x+\dfrac{y}{4}<m^2-3m$ 有解,则实数 $m$ 的取值范围为_____.

$\{m\mid m<-1$ 或 $m>4\}$　**解析**:因为正实数 $x$,$y$ 满足 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=1$,所以 $x+\dfrac{y}{4}=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}\right)\left(x+\dfrac{y}{4}\right)=2+\dfrac{4x}{y}+\dfrac{y}{4x}\geqslant 2+2\sqrt{\dfrac{4x}{y}\cdot\dfrac{y}{4x}}=4$,当且仅当 $x=2$,$y=8$ 时,等号成立,$x+\dfrac{y}{4}$ 取得最小值 4.

因为 $x+\dfrac{y}{4}<m^2-3m$ 有解,所以 $m^2-3m>4$,解得 $m<-1$ 或 $m>4$.所以实数 $m$ 的取值范围为 $\{m\mid m<-1$ 或 $m>4\}$.

## 类型二　不等式的实际应用问题

**例 2**　某盲盒生产及销售公司今年初用 98 万元购进一批盲盒生产线,预计每年有 50 万元的总收入,已知生产此盲盒 $x$ 年($x\in\mathbf{N}^*$)所用的各种费用总计为 $2x^2+10x$ 万元.

(1)该公司第几年首次盈利(总收入超过总支出,今年为第一年)?

(2)该公司第几年的年平均利润最大,最大是多少?

**解**:(1)设利润为 $y$,则 $y=50x-(98+2x^2+10x)=-2x^2+40x-98(x\in\mathbf{N}^*)$.

由 $-2x^2+40x-98>0$,整理得 $x^2-20x+49<0$,

解得 $10-\sqrt{51}<x<10+\sqrt{51}$.因为 $x\in\mathbf{N}^*$,

所以 $x\in\{x\in\mathbf{N}^*\mid 3\leqslant x\leqslant 17\}$,所以该公司第 3 年首次盈利.

(2)由(1)可知 $x\in\{x\in\mathbf{N}^*\mid 3\leqslant x\leqslant 17\}$.

平均利润为 $\frac{y}{x}=-2\left(x+\frac{49}{x}\right)+40\leqslant -2\times 2\sqrt{x\cdot\frac{49}{x}}+40=12$,

当且仅当 $x=\frac{49}{x}$,即 $x=7$ 时,等号成立.

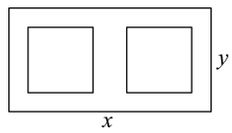
所以该公司第 7 年的年平均利润最大,最大为 12 万元.

**【规律方法】**

不等式的实际应用常常涉及生活中的优化问题,解题的关键是结合题意,正确建立基本不等式或一元二次不等式模型.

**【对点训练】**

如图所示,某公益广告公司拟在一张矩形海报纸上设计大小相等的左右两个矩形宣传栏,宣传栏的面积之和为 45 $m^2$,为了美观,要求海报上四周空白的宽度为 0.1 m,两个宣传栏之间的空隙的宽度为0.2 m.设海报纸的长和宽分别为 $x$ m,$y$ m,为节约成本(即使用纸量最少),则长 $x=$_____m.




$\frac{2+15\sqrt{10}}{5}$　**解析**:由题意可得$(x-0.4)(y-0.2)=45$,则 $xy=0.2(x+2y)+44.92$,

所以 $xy\geqslant 0.4\sqrt{2xy}+44.92$,当且仅当 $x=2y$ 时,等号成立.

令 $t=\sqrt{2xy}>0$,则 $\frac{t^2}{2}-0.4t-44.92\geqslant 0$,

即 $25t^2-20t-2\,246\geqslant 0$,

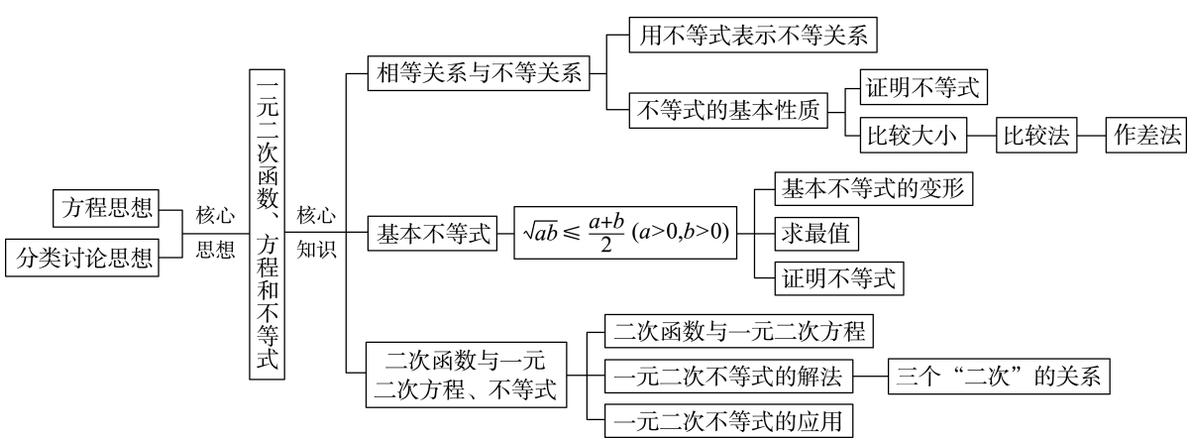
所以 $t\geqslant\frac{2+15\sqrt{10}}{5}$ 或 $t\leqslant\frac{2-15\sqrt{10}}{5}$(舍),

此时 $\sqrt{2xy}=t\geqslant\frac{2+15\sqrt{10}}{5}$,即用纸量最少时,$x=\frac{2+15\sqrt{10}}{5}$ m.

★★★

# 重　构　拓　展

## 多维体系构建




**【问题探究】**

1.举出一些蕴含不等关系的实际例子,并用不等式描述这些不等关系.

2.你能说说应用两个实数大小关系的基本事实解决问题的基本思路吗?

**3.**在类比等式的基本性质研究不等式的基本性质时，你认为应特别注意哪些问题？

**4.**两个正数的大小关系是完全确定的，但通过运算就会产生非常奇妙的变化，基本不等式就是其中之一.你还能通过运算（代数变形）得出基本不等式的一些变式吗？通过对变式的研究，你有什么体会？

**5.**用基本不等式解决最大值、最小值问题时，你认为应注意哪些问题？

**6.**用函数思想理解方程和不等式是数学的基本思想方法之一，其中函数的图象、零点、图象与 $x$ 轴的位置关系等是关键要素.你能以用函数观点看一元二次方程、一元二次不等式为例，谈谈体会吗？

# 单元测试卷（二）

（考查范围：第二章　时间：120 分钟　分值：150 分）

**一、单项选择题**：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

**1.**不等式 $x^2-2<0$ 的解集为　　（　　）

A.$\{x\mid 0<x<\sqrt{2}\}$

B.$\{x\mid -\sqrt{2}<x<0\}$

C.$\{x\mid x<-\sqrt{2}$ 或 $x>\sqrt{2}\}$

D.$\{x\mid -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\}$

D　**解析**：由 $x^2-2<0$ 化简得 $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})<0$，即 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$.故选 D.

**2.**某人元旦回家共 225 km，准备先坐动车再转汽车，从动车转汽车耗时 10 min，转汽车时离家还有 30 km.已知动车的平均速度为 300 km/h，汽车的平均速度为 $x$ km/h.若从坐动车开始能在 1 h 内到家，则 $x$ 应满足的不等式为　　（D）

A.$\dfrac{225}{300+x}+\dfrac{1}{6}<1$　　B.$\dfrac{225}{300+x}+10<60$

C.$\dfrac{195}{300}+\dfrac{30}{x}+10<60$　　D.$\dfrac{195}{300}+\dfrac{30}{x}+\dfrac{1}{6}<1$

**3.**已知 $x>0,y>0,x+3y=6$，则 $xy$ 的最大值为　　（　　）

A.3　　B.6　　C.9　　D.12

A　**解析**：因为 $x>0,y>0,x+3y=6$，所以 $x+3y=6\geqslant 2\sqrt{3xy}$，所以 $xy\leqslant 3$，当且仅当 $x=3y=3$ 时，即当 $x=3$，且 $y=1$，等号成立，故 $xy$ 的最大值为 3.故选 A.

**4.**已知 $-1\leqslant a\leqslant 3,2\leqslant b\leqslant 4$，则 $2a-b$ 的取值范围为　　（　　）

A.$-6\leqslant 2a-b\leqslant 4$　　B.$0\leqslant 2a-b\leqslant 10$

C.$-4\leqslant 2a-b\leqslant 2$　　D.$-5\leqslant 2a-b\leqslant 1$

A　**解析**：因为 $-1\leqslant a\leqslant 3,2\leqslant b\leqslant 4$，可得 $-2\leqslant 2a\leqslant 6,-4\leqslant -b\leqslant -2$，所以 $-2-4\leqslant 2a-b\leqslant 6-2$，即 $-6\leqslant 2a-b\leqslant 4$.

**5.**不等式 $\dfrac{x-2}{x+1}\leqslant 0$ 的解集是　　（　　）

A.$\{x\mid x<-1$，或 $-1<x\leqslant 2\}$

B.$\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$

C.$\{x\mid x<-1$，或 $x\geqslant 2\}$

D.$\{x\mid -1<x\leqslant 2\}$

D　**解析**：原不等式等价于 $\begin{cases}x+1\neq 0,\\(x-2)(x+1)\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $-1<x\leqslant 2$.故选 D.

**6.**设 $A=\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$，其中 $a,b$ 是正实数，且 $a\neq b$，$B=-x^2+4x-2$，则 $A$ 与 $B$ 的大小关系是　　（　　）

A.$A\geqslant B$　　B.$A>B$

C.$A<B$　　D.$A\leqslant B$

B　**解析**：因为 $a,b$ 都是正实数，且 $a\neq b$，

所以 $A=\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}>2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}=2$，即 $A>2$.

$B=-x^2+4x-2=-(x-2)^2+2\leqslant 2$，即 $B\leqslant 2$.

所以 $A>B$.

**7.**若关于 $x$ 的不等式 $x^2-(k+1)x+k<0$ 的解集中恰有 2 个整数，则实数 $k$ 的取值范围为　　（　　）

A.$\{k\mid -2<k\leqslant -1$ 或 $3<k\leqslant 4\}$

B.$\{k\mid -2\leqslant k\leqslant -1$ 或 $3\leqslant k\leqslant 4\}$

C.$\{k\mid -2\leqslant k<-1$ 或 $3\leqslant k<4\}$

D.$\{k\mid -2\leqslant k<-1$ 或 $3<k\leqslant 4\}$

D　**解析**：将不等式 $x^2-(k+1)x+k<0$ 因式分解，可得 $(x-1)(x-k)<0$，

当 $k>1$ 时，此时不等式 $(x-1)(x-k)<0$ 的解集

为$\{x|1<x<k\}$，

因为解集中恰有2个整数，所以这两个整数应为2和3，所以$3<k\leqslant4$；

当$k=1$时，不等式变为$(x-1)^2<0$，因为任何实数的平方都大于或等于0，所以此时不等式无解，不符合题意；

当$k<1$时，此时不等式$(x-1)(x-k)<0$的解集为$\{x|k<x<1\}$，

因为解集中恰有2个整数，所以这两个整数应为$-1$和0，所以$-2\leqslant k<-1$.

综上，实数$k$的取值范围为$\{k|-2\leqslant k<-1$或$3<k\leqslant4\}$.故选D.

**8.**已知$a>b>0$，当代数式$2a^2+\dfrac{2}{b(a-b)}$取最小值时，$a+2b$的值为　　（　　）

A.$2\sqrt{2}$　　B.4

C.$4\sqrt{2}$　　D.8

A　**解析**：因为$a>b>0$，所以$b(a-b)\leqslant\left[\dfrac{b+(a-b)}{2}\right]^2=\dfrac{a^2}{4}$，当且仅当$b=a-b$，即$a=2b$时，等号成立.所以$\dfrac{2}{b(a-b)}\geqslant\dfrac{8}{a^2}$，所以$2a^2+\dfrac{2}{b(a-b)}\geqslant2a^2+\dfrac{8}{a^2}\geqslant2\sqrt{2a^2\cdot\dfrac{8}{a^2}}=8$，当且仅当$2a^2=\dfrac{8}{a^2}$，即$a=\sqrt{2}$时，等号成立，其中第一个不等式等号成立的条件为$a=2b$，第二个不等式等号成立的条件为$a=\sqrt{2}$，所以当$a=\sqrt{2}$，$b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$2a^2+\dfrac{2}{b(a-b)}$取最小值，此时$a+2b=2\sqrt{2}$.故选A.

**二、多项选择题**：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

**9.**已知$a$，$b$，$c\in\mathbf{R}$，且$a<b<0$，则　　（　　）

A.$a^2+c>b^2+c$　　B.$a^2c>b^2c$

C.$a+c^2<b+c^2$　　D.$ac^2-b<bc^2-a$

ACD　**解析**：对于A，因为$a<b<0$，所以$a^2+c-(b^2+c)=a^2-b^2=(a+b)(a-b)>0$，故$a^2+c>b^2+c$，故选项A正确；

对于B，因为$a<b<0$，所以$a^2>b^2$，当$c=0$时，$a^2c=b^2c$，故选项B错误；

对于C，因为$a<b<0$，所以$a+c^2-(b+c^2)=a-b<0$，故$a+c^2<b+c^2$，故选项C正确；

对于D，因为$a<b<0$，所以$ac^2-b-(bc^2-a)=(a-b)\cdot(c^2+1)<0$，故$ac^2-b<bc^2-a$，故选项D正确.故选ACD.

**10.**已知函数$y=x^2+ax+b(a\neq0)$有且只有一个零点，则　　（　　）

A.$a^2-b^2\leqslant4$

B.$a^2+\dfrac{1}{b}\leqslant4$

C.若不等式$x^2+ax-b<0$的解集为$\{x|x_1<x<x_2\}$，则$x_1x_2>0$

D.若不等式$x^2+ax+b<c$的解集为$\{x|1<x<3\}$，则$c=1$

AD　**解析**：因为函数$y=x^2+ax+b(a\neq0)$有且只有一个零点，

所以$\Delta=a^2-4b=0$，即$a^2=4b>0$.

$a^2-b^2\leqslant4$等价于$b^2-4b+4\geqslant0$，即$(b-2)^2\geqslant0$，显然成立，故A正确；

$a^2+\dfrac{1}{b}=4b+\dfrac{1}{b}\geqslant2\sqrt{4b\cdot\dfrac{1}{b}}=4$，当且仅当$4b=\dfrac{1}{b}$，即$b=\dfrac{1}{2}$时，等号成立，故B错误；

因为不等式$x^2+ax-b<0$的解集为$\{x|x_1<x<x_2\}$，

所以$x_1x_2=-b<0$，故C错误；

因为不等式$x^2+ax+b<c$的解集为$\{x|1<x<3\}$，

所以实数1与3是方程$x^2+ax+b-c=0$的两个根，

所以$-a=1+3=4$，则$a=-4$，从而$b=4$.

又$b-c=1\times3=3$，所以$c=b-3=1$，故D正确.

**11.**设$a>1$，$b>1$，且$ab-(a+b)=1$，则　　（　　）

A.$a+b$有最小值$2(\sqrt{2}+1)$

B.$a+b$有最大值$(\sqrt{2}+1)^2$

C.$ab$有最大值$3+2\sqrt{2}$

D.$ab$有最小值$3+2\sqrt{2}$

AD　**解析**：因为$a>1$，$b>1$，所以$a+b\geqslant2\sqrt{ab}$，当且仅当$a=b$时取等号，所以$1=ab-(a+b)\leqslant ab-2\sqrt{ab}$，解得$\sqrt{ab}\geqslant\sqrt{2}+1$或$\sqrt{ab}\leqslant1-\sqrt{2}$（舍去），所以$\sqrt{ab}\geqslant\sqrt{2}+1$，$ab\geqslant(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}$，所以$ab$有最小值$3+2\sqrt{2}$；因为$ab\leqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$，当且仅当$a=b$时取等号，所以$1=ab-(a+b)\leqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-(a+b)$，所以$(a+b)^2-4(a+b)\geqslant4$，所以$[(a+b)-2]^2\geqslant8$，解得$a+b\geqslant2\sqrt{2}+2$或$a+b\leqslant2-2\sqrt{2}$（舍去），所以$a+b\geqslant2(\sqrt{2}+1)$，所以$a+b$有最小值$2(\sqrt{2}+1)$.

**三、填空题**：本题共3小题，每小题5分，共15分.

**12.**已知$a$，$b\in\mathbf{R}$，$a<b$和$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$同时成立的条件是_____.

$a<0<b$　**解析**：若 $ab<0$，由 $a<b$ 两边同乘 $\frac{1}{ab}$，可得 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；若 $ab>0$，由 $a<b$ 两边同乘 $\frac{1}{ab}$，可得 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.所以 $a<b$ 和 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 同时成立的条件是 $a<0<b$.

**13.** 已知不等式 $x^2-ax-b<0$ 的解集为 $\{x\mid 2<x<3\}$，则不等式 $bx^2-ax-1>0$ 的解集为_____.

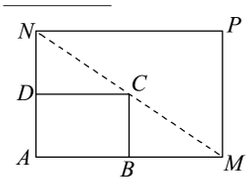
$\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}\right.\right\}$　**解析**：由题意知方程 $x^2-ax-b=0$ 的根为 2，3，

由根与系数的关系得 $a=5$，$b=-6$.

所以不等式 $bx^2-ax-1>0$ 为 $-6x^2-5x-1>0$，即 $6x^2+5x+1<0$，解得 $-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}$.

所以不等式 $bx^2-ax-1>0$ 的解集为 $\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}\right.\right\}$.

**14.** 如图，将一矩形花坛 $ABCD$ 扩建成一个更大的矩形花坛 $AMPN$，要求点 $B$ 在 $AM$ 上，点 $D$ 在 $AN$ 上，且对角线 $MN$ 过点 $C$.已知 $AB=3$，$AD=2$，那么要使矩形花坛 $AMPN$ 的面积大于 27，则 $DN$ 的取值范围为_____.




$0<DN<1$ 或 $DN>4$　**解析**：设 $ND=x(x>0)$，根据矩形的性质，易知 $\triangle NDC\backsim\triangle CBM$，可得 $\frac{ND}{CB}=\frac{DC}{BM}$，代入可得 $\frac{x}{2}=\frac{3}{BM}$，解得 $BM=\frac{6}{x}$.

矩形花坛 $AMPN$ 的面积为 $S=(x+2)\left(3+\frac{6}{x}\right)=3x+\frac{12}{x}+12$.

令 $3x+\frac{12}{x}+12>27$，则 $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)>0$，解得 $x<1$ 或 $x>4$.

综上，$0<DN<1$ 或 $DN>4$.

**四、解答题**：本题共 5 小题，共 77 分.解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

**15.**（13 分）已知 $a>0$，$b>0$，$a+b=3ab$.

（1）求 $a+b$ 的最小值；

（2）证明：$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant\frac{8}{9ab}$.

（1）**解**：因为 $a+b=3ab$，所以 $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1$.

所以 $a+b=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=\frac{1}{3}\left(2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqslant\frac{1}{3}\left(2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}\right)=\frac{4}{3}$.

当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $a=b=\frac{2}{3}$ 时等号成立.

（2）**证明**：因为 $a>0$，$b>0$，所以要证 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant\frac{8}{9ab}$，只需证 $a^2+b^2\geqslant\frac{8}{9}$.

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a+b)^2-\frac{2(a+b)}{3}$，

令 $t=a+b$，由（1）得 $t\geqslant\frac{4}{3}$，

所以 $a^2+b^2=t^2-\frac{2t}{3}=\left(t-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}$.

当 $t=\frac{4}{3}$ 时，$t^2-\frac{2t}{3}$ 取得最小值 $\frac{8}{9}$.

所以 $a^2+b^2\geqslant\frac{8}{9}$.

原不等式得证.

**16.**（15 分）某公司计划租地建造仓库存储货物，经过市场调查了解到下列信息：每月土地占用费 $y_1$（单位：万元）与仓库到车站的距离 $x$（单位：km）成反比，每月库存货物费 $y_2$（单位：万元）与 $x$ 成正比.若在距离车站 10 km 处建仓库，则 $y_1$ 和 $y_2$ 分别为 2 万元和 8 万元.

（1）若每月土地占用费与每月库存货物费之和不超过 10 万元，则仓库到车站的距离 $x$ 应该在什么范围？

（2）这家公司把仓库建在距离车站多远处，才能使得两项费用之和最小？并求出最小费用.

**解**：（1）设 $y_1=\frac{k}{x}$，$y_2=mx$，

由题意知，当 $x=10$ 时，$y_1$ 和 $y_2$ 的值分别为 2 和 8，

即 $\frac{k}{10}=2$，$10m=8$，解得 $k=20$，$m=\frac{4}{5}$，

所以 $y_1=\frac{20}{x}(x>0)$，$y_2=\frac{4}{5}x(x>0)$.

若使每月土地占用费与每月库存货物费之和不超过 10 万元，则 $\frac{20}{x}+\frac{4}{5}x\leqslant10$.

因为 $x>0$，所以 $2x^2-25x+50\leqslant0$，即 $(2x-5)(x-10)\leqslant0$，解得 $\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant10$.

（2）由（1）知，$y_1+y_2=\frac{20}{x}+\frac{4}{5}x$，$x>0$，

由基本不等式得 $y_1+y_2=\frac{20}{x}+\frac{4}{5}x\geqslant$

$2\sqrt{\frac{20}{x}\cdot\frac{4}{5}x}=2\sqrt{16}=8$，

当且仅当$\frac{20}{x}=\frac{4}{5}x$，即$x=5$时，等号成立.

所以把仓库建在离车站5 km处，才能使两项费用之和最小，最小费用为8万元.

**17.**(15分)已知$a>0,b>0,c>0,d>0,a^2+b^2=ab+1,cd>1$.

(1)求证：$a+b\leqslant 2$；

(2)判断等式$\sqrt{ac}+\sqrt{bd}=c+d$能否成立，并说明理由.

(1)**证明**：由题意得$(a+b)^2=3ab+1\leqslant 3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+1$，当且仅当$a=b$时，等号成立，

解得$(a+b)^2\leqslant 4$.

又$a>0,b>0$，所以$a+b\leqslant 2$.

(2)**解**：不能成立.

理由：由基本不等式得$\sqrt{ac}+\sqrt{bd}\leqslant\frac{a+c}{2}+\frac{b+d}{2}$，

当且仅当$a=c$且$b=d$时等号成立.

因为$a+b\leqslant 2$，所以$\sqrt{ac}+\sqrt{bd}\leqslant 1+\frac{c+d}{2}$.

因为$c>0,d>0,cd>1$，所以$c+d=\frac{c+d}{2}+\frac{c+d}{2}\geqslant\frac{c+d}{2}+\sqrt{cd}>\frac{c+d}{2}+1\geqslant\sqrt{ac}+\sqrt{bd}$.

故$\sqrt{ac}+\sqrt{bd}=c+d$不能成立.

**18.**(17分)已知$ax^2+2ax+1\geqslant 0$恒成立.

(1)求$a$的取值范围；

(2)解关于$x$的不等式$x^2-x-a^2+a<0$.

**解**：(1)当$a=0$时，原不等式可化为$1\geqslant 0$恒成立；

当$a\neq 0$时，则$\begin{cases}a>0,\\ \Delta=4a^2-4a\leqslant 0,\end{cases}$

解得$0<a\leqslant 1$.

综上，$a$的取值范围为$\{a\mid 0\leqslant a\leqslant 1\}$.

(2)由$x^2-x-a^2+a<0$，得$(x-a)[x-(1-a)]<0$.

又由(1)知$0\leqslant a\leqslant 1$，则

①当$1-a>a$，即$0\leqslant a<\frac{1}{2}$时，$a<x<1-a$；

②当$1-a=a$，即$a=\frac{1}{2}$时，原不等式可化为$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2<0$，不等式无解；

③当$1-a<a$，即$\frac{1}{2}<a\leqslant 1$时，$1-a<x<a$.

综上所述，当$0\leqslant a<\frac{1}{2}$时，不等式的解集为$\{x\mid a<x<1-a\}$；

当$a=\frac{1}{2}$时，不等式的解集为$\varnothing$；

当$\frac{1}{2}<a\leqslant 1$时，不等式的解集为$\{x\mid 1-a<x<a\}$.

**19.**(17分)若方程$x^2+mx+n=0(m,n\in\mathbf{R})$有两个不相等的实数根$x_1,x_2$，且$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4$.

(1)求证：$m^2=4n+4$；

(2)若$m\leqslant -4$，求$\frac{x_1^2}{x_2}-\frac{4}{x_1+x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}$的最小值.

(1)**证明**：由根与系数的关系得，

$x_1+x_2=-m,x_1x_2=n$，

所以$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(-m)^2-4n=4$，

所以$m^2=4n+4$.

(2)**解**：$\frac{x_1^2}{x_2}-\frac{4}{x_1+x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1x_2}-\frac{4}{x_1+x_2}$

$=\frac{(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)}{x_1x_2}-\frac{4}{x_1+x_2}$

$=\frac{(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]}{x_1x_2}-\frac{4}{x_1+x_2}$

$=\frac{(-m)[(-m)^2-3n]}{n}-\frac{4}{-m}$

$=-\frac{m^3}{n}+3m+\frac{4}{m}=-\frac{4m^3}{m^2-4}+3m+\frac{4}{m}$

$=-\frac{4m^3-16m+16m}{m^2-4}+3m+\frac{4}{m}$

$=-4m-\frac{16m}{m^2-4}+3m+\frac{4}{m}=-m+\frac{4}{m}+\frac{16}{-m+\frac{4}{m}}$.

因为$m\leqslant -4$，所以$-m+\frac{4}{m}>0$，

所以$-m+\frac{4}{m}+\frac{16}{-m+\frac{4}{m}}\geqslant 2\sqrt{16}=8$，

当且仅当$-m+\frac{4}{m}=\frac{16}{-m+\frac{4}{m}}$，即$m=-2-2\sqrt{2}$时，等号成立，

所以$\frac{x_1^2}{x_2}-\frac{4}{x_1+x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}$的最小值为8.

# 第三章 函数的概念与性质

## 单元概览

### 单元导航

在初中我们已经学习了函数的知识，比如一次函数、二次函数、反比例函数，并了解了函数的一些简单应用.在高中数学学习中，我们将从集合对应关系的角度理解函数的概念，并借助初中学习的函数图象来探究函数图象的变化规律，借助函数图象研究函数的单调性、奇偶性及对称性.在学习的过程中，我们要重视函数、方程与不等式的关系，学会构建函数模型，并解决实际问题.

### 学习目标

**1.**通过对具体函数的分析，探究函数的单调性、最值、奇偶性，构建分析函数性质的思维模型，解决基本的函数性质问题.

**2.**应用函数性质，探究函数与方程、不等式的关系，构建函数模型，解决不等式恒成立问题.

**3.**对比初中函数的概念，从集合对应关系的角度，以高中函数的概念、表示方法与性质为主线，用自己的方式构建单元知识和逻辑体系.

### 核心概念

函数是现代数学中最重要的概念之一，是刻画变量之间依赖关系的重要数学模型，是高中数学课程的一条主线.函数的概念和思想已渗透到数学的各个领域，是进一步学习数学的重要基础.

函数的性质就是变化中的不变性、变化中的规律性.综合利用函数性质，构建函数模型，解决实际问题，提升数学抽象、直观想象、数学运算和数学建模素养.

### 学法指导

在初中的基础上用集合语言和对应关系理解函数的概念，由一次函数、二次函数及反比例函数的图象直观感知函数变化的主要特点，形成对单调性、最值、奇偶性的理解；通过函数的不同表示法（列表法、图象法和解析法）加深对函数概念的理解，通过对幂函数的学习，感受研究函数的基本内容、过程和方法，抓住函数的本质特点，研究函数与方程、函数与不等式的关系，并建立函数和生活、函数与其他学科的关系，为函数的应用奠定理论基础；从知识、方法、逻辑等方面重构单元结构，深度理解函数的概念、表示及性质.

★★★

# 探　究　构　建

## 3.1　函数的概念及其表示

### 3.1.1　函数的概念

#### 第1课时　函数的概念

**学习任务目标**

1.在初中用变量之间的依赖关系描述函数的基础上，用集合语言和对应关系刻画函数，建立完整的函数概念.
2.了解构成函数的三要素.
3.能构造问题情境描述解析式中变量的关系.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　函数的概念**

(1)定义：一般地，设$A$，$B$是非空的实数集，如果对于集合$A$中的任意一个数$x$，按照某种确定的对应关系$f$，在集合$B$中都有唯一确定的数$y$和它对应，那么就称$f:A\to B$为从集合$A$到集合$B$的一个函数.

(2)记法：$y=f(x)$，$x\in A$.

(3)定义域：$x$叫做自变量，$x$的取值范围$A$叫做函数的定义域.

(4)值域：与$x$的值相对应的$y$值叫做函数值，函数值的集合$\{f(x)\mid x\in A\}$叫做函数的值域.

**知识点二　常见函数的定义域和值域**

(1)一次函数$y=ax+b(a\neq0)$的定义域是**R**，值域也是**R**.对应关系$f$把**R**中的任意一个数$x$，对应到**R**中唯一确定的数$ax+b(a\neq0)$.

(2)二次函数$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的定义域是**R**，值域是$B$.当$a>0$时，$B=\left\{y\,\middle|\,y\geqslant\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right\}$；当$a<0$时，$B=\left\{y\,\middle|\,y\leqslant\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right\}$.对应关系$f$把**R**中的任意一个数$x$，对应到$B$中唯一确定的数$ax^2+bx+c(a\neq0)$.

### 【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)根据函数的定义，定义域中的任意一个数可以对应着值域中不同的数.　(　　)

(2)根据函数的定义，定义域中可以有多个数对应着值域中同一个数.　(　　)

(3)根据函数的定义，定义域中可以存在一些数在值域中没有对应的数.　(　　)

(4)函数的定义域和值域一定是无限集合.　(　　)

(1)×　**解析**：根据函数的定义，对于定义域中的任意一个数$x$，在值域中都有唯一确定的数$y$与之对应.

(2)√　**解析**：根据函数的定义，对于定义域中的任意一个数$x$，在值域中都有唯一确定的数$y$与之对应，所以可以有多个$x$对应同一个$y$.

(3)×　**解析**：根据函数的定义，对于定义域中的任意一个数$x$，在值域中都有唯一确定的数$y$与之对应.

(4)×　**解析**：函数的定义域和值域也可能是有限集，如函数$y=x^2$，$x\in\{1,2\}$，显然$y\in\{1,4\}$，其定义域和值域均是有限集合.

2.函数$y=x+1$，$x\in\{1,2,3,4,5\}$的值域是$\{2,3,4,5,6\}$.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1　理解函数的概念

1.(多选)下列$y$与$x$的关系中不是函数关系的是(　　)

A.$y=x(x=0)$　　B.$y=\dfrac{1}{x}(-1<x<1)$

C.$y=|x|(x\neq0)$　　D.$y=\pm x(x\in\mathbf{R})$

BD　**解析**：对于A，因为$x=0$，$y=0$，所以该关系是函数关系，故选项A不符合题意；

对于B，函数的定义域包括0，当$x=0$时，没有对应的$y$值，所以该关系不是函数关系，故选项B符合题意；

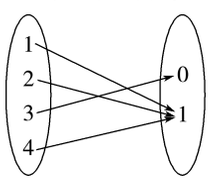
对于C，因为对任意的$x$值，有唯一的$y$值与之对应，所以该关系是函数关系，故选项C不符合题意；

对于D，当$x=1$时，有两个$y$值与之对应，所以该关系不是函数关系，故选项D符合题意.故选BD.

**2.**下列对应关系中，$f:A\to B$是从$A$到$B$的函数的是（　　）

A.$A\subseteq\mathbf{R}$，$B\subseteq\mathbf{R}$，$f:x\to y=\pm\sqrt{1-x^2}$

B.$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{0,1\}$，对应关系$f$如图：

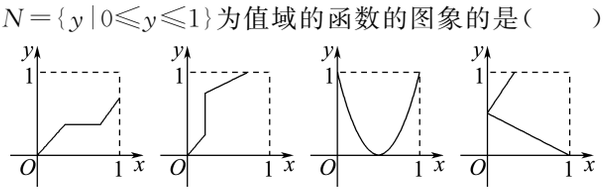



C.$A=\mathbf{R}$，$B=\mathbf{R}$，$f:x\to y=\dfrac{1}{x-2}$

D.$A=\mathbf{Z}$，$B=\mathbf{Z}$，$f:x\to y=\sqrt{2x-1}$

B　**解析**：对于$y=\pm\sqrt{1-x^2}$，显然对任意$x\in A$，$y$值不唯一，故A项不符合；B项符合函数的定义；$2\in A$，但在集合$B$中找不到与之相对应的数，故C项不符合；$-1\in A$，但在集合$B$中找不到与之相对应的数，故D项不符合.故选B.

**3.**下列图形可能是以$M=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$为定义域，以$N=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 1\}$为值域的函数的图象的是（　　）

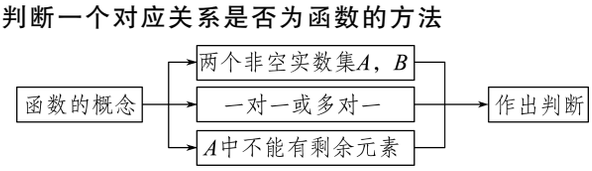



A　　B　　C　　D

C　**解析**：对于A，其对应函数的值域不是$N=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 1\}$，A错误；对于B，图象中存在一部分与$x$轴垂直，该图象不是函数的图象，B错误；对于C，其对应函数的定义域为$M=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$，值域是$N=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 1\}$，C正确；对于D，图象不满足一个$x$对应唯一的$y$，该图象不是函数的图象，D错误.故选C.

## 【探究总结】

**1.判断一个对应关系是否为函数的方法**




**2.根据图形判断对应关系是否为函数的方法**

(1)任取一条垂直于$x$轴的直线$l$.

(2)在定义域内平行移动直线$l$.

(3)若$l$与图形始终有且只有一个交点，则是函数；若$l$与图形没有交点或有两个及两个以上的交点，则不是函数(常函数除外).

## 任务2 了解函数的三要素

**1.**(多选)下列函数中，定义域和值域都是$\mathbf{R}$的是（　　）

A.$y=x+1$　　B.$y=x^2+2x-3$

C.$y=-\dfrac{1}{x}$　　D.$y=2x$

AD　**解析**：A和D中，$y=x+1$与$y=2x$都为一次函数，它们的定义域和值域都为$\mathbf{R}$；B中为二次函数，定义域为$\mathbf{R}$，且$y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$，所以其值域为$\{y\mid y\geqslant -4\}$；C中为反比例函数，定义域是$\{x\mid x\neq 0\}$，值域是$\{y\mid y\neq 0\}$，都不是$\mathbf{R}$.故选AD.

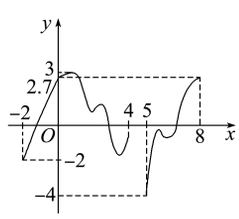
**2.**已知函数$f(x)=x^2$，$x\in\{-1,0,1\}$，则函数$f(x)$的值域为（　　）

A.$\{y\mid y\geqslant 0\}$　　B.$\{-1,0,1\}$

C.$\{0,1\}$　　D.$\mathbf{R}$

C　**解析**：由$x\in\{-1,0,1\}$，代入$f(x)=x^2$，得$f(-1)=1$，$f(0)=0$，$f(1)=1$.根据集合的互异性，函数$f(x)$的值域为$\{0,1\}$.故选C.

**3.**已知函数$y=f(x)$的图象如图所示，则该函数的定义域为$\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 4$，或$5\leqslant x\leqslant 8\}$，值域为$\{y\mid -4\leqslant y\leqslant 3\}$.



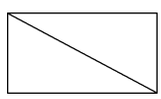

## 【探究总结】

**由图象求函数定义域、值域的方法**

若函数用图象给出，则图象在$x$轴上的正投影所覆盖的$x$的集合即为定义域，图象在$y$轴上的正投影所覆盖的$y$的集合即为值域.

## 任务3 会根据解析式构建问题情境

(教材P63例1改编)如图所示，已知矩形的面积为10，借助该图形构建问题情境，使得其中的变量关系能用解析式$f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4+100}}{x}$来描述.



**解**：设矩形的长为$x$，对角线长为$f(x)$，那么$f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4+100}}{x}$.

其中 $x$ 的取值范围 $A=\{x|x>0\}$，$f(x)$ 的取值范围 $B=\{f(x)|f(x)\geqslant 2\sqrt{5}\}$，对应关系 $f$ 把每一个矩形的长 $x$，对应到唯一确定的对角线长 $\dfrac{\sqrt{x^4+100}}{x}$.

［一题多思］

**思考 1.** 本题中条件不变，能否构建问题情境，使其中的变量关系用解析式 $f(x)=\dfrac{10}{x}$ 来描述？

**提示：** 能. 设矩形的长为 $x$，宽为 $f(x)$，那么 $f(x)=\dfrac{10}{x}$. 其中 $x$ 的取值范围 $A=\{x|x>0\}$，$f(x)$ 的取值范围 $B=\{f(x)|f(x)>0\}$，对应关系 $f$ 把每一个矩形的长 $x$，对应到唯一确定的宽 $\dfrac{10}{x}$.

**思考 2.** 本题中条件不变，能否构建问题情境，使其中的变量关系用解析式 $f(x)=2x+\dfrac{20}{x}$ 来描述？

**提示：** 能. 设矩形的长为 $x$，周长为 $f(x)$，那么 $f(x)=2x+\dfrac{20}{x}$. 其中 $x$ 的取值范围 $A=\{x|x>0\}$，$f(x)$ 的取值范围 $B=\{f(x)|f(x)\geqslant 4\sqrt{10}\}$，对应关系 $f$ 把每一个矩形的长 $x$，对应到唯一确定的周长 $2x+\dfrac{20}{x}$.

## 【探究总结】

**数学情境的构建**

常见的函数模型有一次函数模型、二次函数模型、反比例函数模型等，要熟悉这些函数模型与常见的几何图形、实际问题的联系，体会数学来源于生活，又能解决生活中的实际问题.

# 课后素养评价（十六）

## 基础落实

**1.** 有下列三个说法：

①若函数的值域只含有一个元素，则定义域也只含有一个元素；②若 $f(x)=5(x\in\mathbf{R})$，则 $f(\pi)=5$ 一定成立；③两个集合之间的对应关系就是函数.

其中正确说法的个数为（　　）

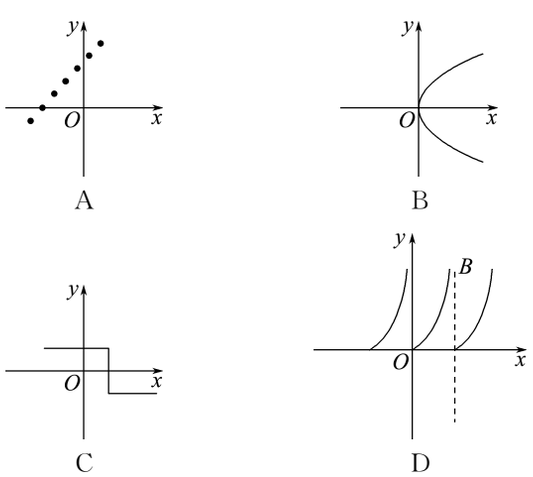
A.0　　B.1　　C.2　　D.3

B　**解析：** ①错误，若函数的值域只含有一个元素，则定义域不一定只含有一个元素；

②正确，因为 $f(x)=5$，这个数值不随 $x$ 的变化而变化，所以 $f(\pi)=5$；

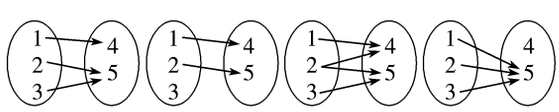
③错误，函数是两个非空实数集之间的对应关系.

**2.** （多选）下列图象中，能够表示函数关系 $y=f(x)$ 的有（　　）




AD　**解析：** 根据函数的定义，对于定义域内任意 $x$，都有且仅有唯一的函数值与其相对应，故满足函数关系的有 AD.

**3.** （多选）下列两个集合的对应关系中，为函数的是（　　）




A　　B　　C　　D

AD　**解析：** A 项，每一个自变量都有唯一的数与之对应，可以构成函数，A 正确；B 项，自变量 3 没有对应的数，不能构成函数，B 错误；C 项，自变量 2 同时对应了两个数，不能构成函数，C 错误；D 项，每一个自变量都有唯一的数与之对应，可以构成函数，D 正确.

**4.** 已知函数 $f(x)=x^2$ 的定义域 $A\subseteq\mathbf{R}$，值域 $B=\{9\}$，则满足条件的 $f(x)$ 有（　　）

A.1 个　　B.2 个

C.3 个　　D.4 个

C　**解析：** 令 $f(x)=x^2=9$，则 $x=\pm 3$，则满足条件的 $f(x)$ 有 $f(x)=x^2$，$x\in\{3\}$；$f(x)=x^2$，$x\in\{-3\}$；$f(x)=x^2$，$x\in\{-3,3\}$，故满足条件的 $f(x)$ 有 3 个. 故选 C.

**5.** 函数 $y=-\dfrac{3}{x}$ 的定义域为_____，值域为_____.

$\{x|x\neq 0\}$　$\{y|y\neq 0\}$　**解析：** 画出反比例函数 $y$

$=-\frac{3}{x}$的图象(图略),由图象可得,定义域为$\{x\mid x\neq 0\}$,值域为$\{y\mid y\neq 0\}$.

## 能力提升

**1.**已知集合$M=\{-2,0,2\}$,$N=\{0,2\}$,下列对应关系$f:x\to y$是从集合$M$到集合$N$的函数的是　(　　)

A.$y=x$　　B.$y=|x|$

C.$y=\frac{4}{x}$　　D.$y=x^2$

B　**解析**:对于A,若$y=x$,则当$x=-2$时,$y=-2\notin N$,故选项A不符合题意;

对于B,若$y=|x|$,则当$x=\pm 2$时,$y=2\in N$,当$x=0$时,$y=0\in N$,故选项B符合题意;

对于C,若$y=\frac{4}{x}$,则当$x=0$时,$y$无意义,故选项C不符合题意;

对于D,若$y=x^2$,则当$x=\pm 2$时,$y=4\notin N$,故选项D不符合题意.故选B.

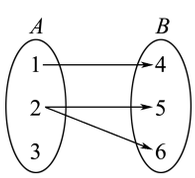
**2.**(多选)下列对应关系是从集合$A$到集合$B$的函数的为　(　　)

A.$A=\mathbf{R}$,$B=\{y\mid y>0\}$,$f:x\to y=|x|$

B.$A=\mathbf{Z}$,$B=\mathbf{Z}$,$f:x\to y=x^2$

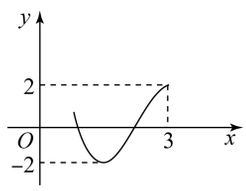
C.$A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$,$B=\{0\}$,$f:x\to y=0$

D.$A=\{1,2,3\}$,$B=\{4,5,6\}$,对应关系如图所示:




BC　**解析**:A不是,集合$A$中的元素0在集合$B$中没有对应的元素.B是,对于集合$A$中的任意一个整数$x$,按照对应关系$f:x\to y=x^2$,在集合$B$中都有唯一一个确定的整数$x^2$与之对应.C是,对于集合$A$中任意一个实数$x$,按照对应关系$f:x\to y=0$,在集合$B$中都有唯一一个确定的数0和它对应.D不是,集合$A$中的元素3在集合$B$中没有对应的元素,且$A$中的元素2在集合$B$中有5和6两个元素与之对应.

**3.**函数$y=f(x)$的部分图象如图所示,则$f(3)=\underline{2}$,值域为$\underline{\{y\mid -2\leqslant y\leqslant 2\}}$.




**4.**构建一个问题情境,使其中的变量关系能用解析式$y=(300+10x)(200-4x)$来描述,其中$1\leqslant x\leqslant 50$,$x\in\mathbf{N}^*$.

**解**:某汽车租赁公司有200辆小汽车,若每辆车一天的租金为300元,可全部租出;若将每天的租金提高$10x$元($1\leqslant x\leqslant 50$,$x\in\mathbf{N}^*$),则租出的车辆会相应减少$4x$辆.

设该汽车租赁公司每天的收入为$y$元,则$y=(300+10x)(200-4x)$.

## 自我超越

写出满足下列要求的两个函数.

(1)定义域相同,值域相同,但对应关系不同:

_____;

(2)值域相同,对应关系相同,但定义域不同:

_____.

(1)$f(x)=x$,$g(x)=2x+1$(答案不唯一)　**解析**:函数$f(x)=x$,$g(x)=2x+1$,定义域和值域都是$\mathbf{R}$,但对应关系不同.

(2)$f(x)=x^2$,$x\in[0,+\infty)$,$g(x)=x^2$,$x\in(-\infty,0]$(答案不唯一)　**解析**:函数$f(x)=x^2$,$x\in[0,+\infty)$,$g(x)=x^2$,$x\in(-\infty,0]$,值域都是$[0,+\infty)$,但定义域不同.

# 第 2 课时　函数概念的应用

**学习任务目标**

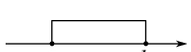
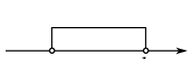
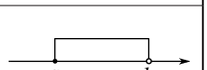
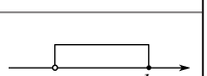
1.能正确使用区间表示数集.
2.能求简单函数的定义域.
3.理解同一函数的概念，会判断两个函数是不是同一函数.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　区间及有关概念**

设 $a$，$b$ 是两个实数，且 $a<b$，规定如下：

| 区间 | 类别 | 含义 | 数轴表示 |
|---|---|---|---|
| $[a,b]$ | 闭区间 | $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ |  |
| $(a,b)$ | 开区间 | $\{x\mid a<x<b\}$ |  |
| $[a,b)$ | 半开半闭区间 | $\{x\mid a\leqslant x<b\}$ |  |
| $(a,b]$ | 半开半闭区间 | $\{x\mid a<x\leqslant b\}$ |  |

**知识点二　函数的三要素与同一个函数**

(1)一个函数的构成要素为定义域、对应关系和值域.

(2)同一个函数：如果两个函数的定义域相同，并且对应关系完全一致，即相同的自变量对应的函数值也相同，那么这两个函数是同一个函数.

### 【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)区间是数集的另外一种表示形式，任何数集都可用区间表示.　(　　)

(2)集合$\{x\mid x<4\}$用区间表示为$[4,-\infty)$.　(　　)

(3)已知定义域和对应关系就可以确定一个函数.　(　　)

(4)函数 $f(x)=x^2$ 和 $f(x-1)=x^2$ 是同一个函数.　(　　)

(1)×　**解析**：只有连续的实数集可用区间表示，单元素集合不能用区间表示.

(2)×　**解析**：应表示为$(-\infty,4)$.

(3)√　**解析**：只要函数的定义域和对应关系确定了，函数就唯一确定了.

(4)×　**解析**：不是，对应关系 $f$ 所施加的对象不同(前者为 $x$，后者为 $x-1$)，因此两者不是同一个函数.

2.若$[a,3a-1]$为一个确定的区间，则 $a$ 的取值范围是_____.

$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　**解析**：由题意知 $3a-1>a$，则 $a>\frac{1}{2}$.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1　求具体函数的定义域

#### 探究活动

**例 1**　求下列函数的定义域：

(1)$f(x)=(x-1)^0+\sqrt{\frac{2}{x+1}}$；

(2)$f(x)=\frac{(x+1)^2}{x+1}+\sqrt{1-x}$.

**解**：(1)要使函数有意义，

则有$\begin{cases}x-1\neq0,\\ \frac{2}{x+1}\geqslant0,\\ x+1\neq0,\end{cases}$解得 $x>-1$ 且 $x\neq1$.

所以这个函数的定义域为$\{x\mid x>-1,\text{且 }x\neq1\}$.

(2)要使函数有意义，自变量 $x$ 的取值必须满足$\begin{cases}x+1\neq0,\\ 1-x\geqslant0,\end{cases}$解得 $x\leqslant1$ 且 $x\neq-1$.

所以这个函数的定义域为$\{x\mid x\leqslant1,\text{且 }x\neq-1\}$.

[一题多思]

**思考 1.**求函数的定义域的实质是什么？

**提示**：求函数的定义域，其实质是求使解析式有意义的未知数的取值集合.

**思考 2.**如果函数的解析式是根据实际问题列出的，那么函数的定义域应满足什么条件？

**提示**：函数的定义域应是使解析式本身有意义且符合实际意义的实数的集合.

**思考 3.**若把(1)中的函数变为“$f(x)=\frac{(x-1)^0}{\sqrt{x+1}}$”，其定义域是否发生变化？

**提示**：不变.

【探究总结】

求函数定义域的策略

(1)分式：分母不为0.

(2)偶次根式：被开方数大于或等于0.

(3)零次幂：底数不为0.

(4)实际问题：使实际问题有意义.

### 应用迁移

函数 $f(x)=\sqrt{2x-6}+\dfrac{1}{x-3}$ 的定义域为　　(　　)

A.$(3,+\infty)$　　B.$[3,+\infty)$

C.$(0,+\infty)$　　D.$[0,+\infty)$

A　**解析**：根据题意 $\begin{cases}2x-6\geqslant 0,\\ x-3\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x>3$，所以 $f(x)$ 的定义域为$(3,+\infty)$.故选A.

## 任务2 求函数的值

### 探究活动

**例2**　已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}(x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq -1)$，$g(x)=x^2+2(x\in\mathbf{R})$，求 $f(2)$，$g(2)$，$f(g(2))$ 的值.

**解**：因为 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，所以 $f(2)=\dfrac{1}{1+2}=\dfrac{1}{3}$.

因为 $g(x)=x^2+2$，

所以 $g(2)=2^2+2=6$.

所以 $f(g(2))=f(6)=\dfrac{1}{1+6}=\dfrac{1}{7}$.

【探究总结】

函数求值的方法

(1)已知函数 $f(x)$ 的解析式时，只需用 $a$ 替换解析式中的 $x$ 即得 $f(a)$ 的值.

(2)求 $f(g(a))$ 的值应遵循由里往外的原则.

### 应用迁移

若函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$，$g(x)=x^2$，则 $f(g(3))=$　　(　　)

A.$\dfrac{8}{3}$　　B.9　　C.4　　D.$\dfrac{80}{9}$

D　**解析**：由题可得 $g(3)=3^2=9$，

则 $f(g(3))=f(9)=9-\dfrac{1}{9}=\dfrac{80}{9}$.故选D.

## 任务3 同一函数的判断

### 探究活动

**例3**　(教材P66例3改编)下列各组函数是否为同一个函数？为什么？

(1)$f(x)=|x|$，$\varphi(t)=\sqrt{t^2}$；

(2)$y=\sqrt{x^2}$，$y=(\sqrt{x})^2$；

(3)$f(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}$，$g(x)=\sqrt{x(x+1)}$；

(4)$f(x)=1$，$g(x)=x^0(x\neq 0)$.

**解**：(1)在定义域 $\mathbf{R}$ 上，$f(x)=|x|$ 和 $\varphi(t)=\sqrt{t^2}=|t|$ 的对应关系完全相同，是同一个函数.

(2)$y=\sqrt{x^2}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为$[0,+\infty)$，两者定义域不同，不是同一个函数.

(3)$f(x)$ 的定义域为$[0,+\infty)$，$g(x)$ 的定义域为$(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$，不是同一个函数.

(4)$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$g(x)$ 的定义域为$\{x\mid x\neq 0\}$，不是同一个函数.

【探究总结】

判断函数是否为同一个函数的方法

先看定义域，若定义域不同，则不是同一个函数；若定义域相同，再化简函数的解析式，看对应关系是否相同.

### 应用迁移

(多选)下列各组函数为同一个函数的是　　(　　)

A.$y=\dfrac{|x|}{x}$ 与 $y=1$

B.$y=\sqrt[3]{x^3}$ 与 $y=x$

C.$y=\sqrt{(x-1)^2}$ 与 $y=|x-1|$

D.$y=\dfrac{x^3+x}{x^2+1}$ 与 $y=x$

BCD　**解析**：对于A，$y=\dfrac{|x|}{x}$ 的定义域为$\{x\mid x\neq 0\}$，而函数 $y=1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，故A错误；

对于B，函数 $y=\sqrt[3]{x^3}=x$，$x\in\mathbf{R}$，故B正确；

对于C，函数 $y=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$，$x\in\mathbf{R}$，故C正确；

对于D，函数 $y=\dfrac{x^3+x}{x^2+1}=\dfrac{x(x^2+1)}{x^2+1}=x$，$x\in\mathbf{R}$，故D正确.故选BCD.

## 任务4 求抽象函数的定义域

### 探究活动

**例4**　(1)已知函数 $f(x)$ 的定义域是$[-1,3]$，则函数 $f(2x+1)$ 的定义域为_____.

(2)已知函数 $f(x+1)$ 的定义域为$(2,4)$，则函数 $f(x)$ 的定义域为_____.

(3)已知函数 $f(x^2-1)$ 的定义域为$\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$，则函数 $f(2x-1)$ 的定义域为_____.

(1)$[-1,1]$　**解析**：令 $-1\leqslant 2x+1\leqslant 3$，解得 $-1\leqslant x\leqslant 1$，所以 $f(2x+1)$ 的定义域为$[-1,1]$.

(2)$(3,5)$　**解析**：因为 $f(x+1)$ 的定义域为$(2,4)$，所以 $2<x<4$，则 $3<x+1<5$，即 $f(x)$ 的定义域为$(3,5)$.

(3)$\left[\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right]$　**解析**：由 $f(x^2-1)$ 的定义域为 $[1,3]$，得 $x\in[1,3]$，所以 $x^2\in[1,9]$，所以 $x^2-1\in[0,8]$，故 $f(x)$ 的定义域为 $[0,8]$. 令 $2x-1\in[0,8]$，得 $2x\in[1,9]$，即 $x\in\left[\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right]$，所以 $f(2x-1)$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right]$.

**【探究总结】**

**抽象函数定义域的求解方法**

(1)已知 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，求 $f(g(x))$ 的定义域时，不等式 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 的解集即定义域.

(2)已知 $f(g(x))$ 的定义域为 $[c,d]$，求 $f(x)$ 的定义域时，$g(x)$ 在 $[c,d]$ 上的取值范围（值域）即定义域.

**应用迁移**

**1.**若函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $[-1,2]$，则函数 $f(1-x)$ 的定义域为　（　　）

A.$[0,3]$　　B.$[0,2]$

C.$[-1,1]$　　D.$[-2,1]$

D　**解析**：因为函数 $y=f(x+1)$ 的定义域为 $[-1,2]$，即 $-1\leqslant x\leqslant 2$，所以 $0\leqslant x+1\leqslant 3$，

所以 $0\leqslant 1-x\leqslant 3\Rightarrow -1\leqslant -x\leqslant 2\Rightarrow -2\leqslant x\leqslant 1$.

所以函数 $y=f(1-x)$ 的定义域为 $[-2,1]$.

**2.**已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-1,1]$，则函数 $y=\frac{f(x+1)}{x}$ 的定义域是　（　　）

A.$(-2,0]$　　B.$[-2,0)$

C.$(0,2]$　　D.$[0,2)$

B　**解析**：由 $\begin{cases}-1\leqslant x+1\leqslant 1,\\ x\neq 0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 0,\\ x\neq 0,\end{cases}$ 所以 $-2\leqslant x<0$，所以函数 $y=\frac{f(x+1)}{x}$ 的定义域是 $[-2,0)$. 故选 B.

# 课后素养评价（十七）

## 基础落实

**1.**集合 $A=\{x\mid x<3$ 或 $x\geqslant 4\}$ 用区间表示为　（　　）

A.$(-\infty,3)\cup[4,+\infty)$

B.$(3,4]$

C.$(-\infty,3]\cup[4,+\infty)$

D.$(3,4)$

A　**解析**：由区间的定义可知，$A=\{x\mid x<3$ 或 $x\geqslant 4\}=(-\infty,3)\cup[4,+\infty)$. 故选 A.

**2.**函数 $f(x)=\frac{\sqrt{4-x}}{x-1}$ 的定义域是　（　　）

A.$(1,4)$

B.$(1,4]$

C.$(-\infty,1)\cup(1,4)$

D.$(-\infty,1)\cup(1,4]$

D　**解析**：要使函数 $f(x)=\frac{\sqrt{4-x}}{x-1}$ 有意义，需满足 $\begin{cases}4-x\geqslant 0,\\ x-1\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x\leqslant 4$ 且 $x\neq 1$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,4]$. 故选 D.

**3.**（多选）若函数 $f(x)=\frac{5x}{x^2+1}$，且 $f(a)=2$，则实数 $a$ 的值可以为　（　　）

A.$\frac{1}{2}$　　B.1　　C.2　　D.3

AC　**解析**：由 $f(a)=2$，得 $\frac{5a}{a^2+1}=2$，解得 $a=2$ 或 $a=\frac{1}{2}$.

**4.**已知等腰三角形 $ABC$ 的周长为 10，底边长 $y$ 关于腰长 $x$ 的函数解析式为 $y=10-2x$，则此函数的定义域为_____.

$\left(\frac{5}{2},5\right)$　**解析**：因为 $\triangle ABC$ 的底边长大于 0，所以 $y=10-2x>0$，所以 $x<5$.

又两边之和大于第三边，所以 $2x>10-2x$，所以 $x>\frac{5}{2}$.

所以此函数的定义域为 $\left(\frac{5}{2},5\right)$.

**5.**已知函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}$ 是同一个函数，则函数 $y=f(x)$ 的定义域是_____.

$[-3,1]$　**解析**：由于 $y=f(x)$ 与 $y=\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}$ 是同一个函数，故二者定义域相同. 由 $\begin{cases}x+3\geqslant 0,\\ 1-x\geqslant 0,\end{cases}$ 得 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-3,1]$.

**6.**已知函数 $f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$.

(1)求 $f(x)$ 的定义域；

(2)若 $f(a)=2$，求 $a$ 的值；

(3)求证：$f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$.

(1)**解**：要使函数 $f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$ 有意义，只需 $1-x^2\neq 0$，得 $x\neq\pm 1$，所以函数的定义域为 $\{x\mid x\neq\pm 1\}$.

(2)**解**：因为 $f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$，且 $f(a)=2$，

所以 $f(a)=\dfrac{1+a^2}{1-a^2}=2$，即 $a^2=\dfrac{1}{3}$，解得 $a=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(3)**证明**：由已知，得 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$，

$-f(x)=-\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$，所以 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$.

## 能力提升

**1.**已知函数 $f(x-1)$ 的定义域为 $[0,3]$，则函数 $f(2x-1)$ 的定义域为　　(　　)

A.$[-3,1]$　　B.$\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$

C.$[1,7]$　　D.$\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2}\right]$

B　**解析**：因为 $f(x-1)$ 的定义域为 $[0,3]$，所以 $f(x-1)$ 中 $x\in[0,3]$，所以 $x-1\in[-1,2]$.

在 $f(2x-1)$ 中令 $-1\leqslant 2x-1\leqslant 2$，解得 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}$，所以 $f(2x-1)$ 的定义域为 $\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$.故选 B.

**2.**(多选)在下列四组函数中，$f(x)$ 与 $g(x)$ 为同一个函数的是　　(　　)

A.$f(x)=x-1$，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$

B.$f(x)=|x+1|$，$g(x)=\begin{cases}x+1,x\geqslant -1,\\-1-x,x<-1\end{cases}$

C.$f(x)=1$，$g(x)=(x+1)^0$

D.$f(x)=\dfrac{(\sqrt{x})^2}{x}$，$g(x)=\dfrac{x}{(\sqrt{x})^2}$

BD　**解析**：对于 A，$f(x)=x-1(x\in\mathbf{R})$，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}=x-1(x\neq -1)$，两个函数的定义域不同，故不为同一个函数；对于 B，$f(x)=|x+1|=\begin{cases}x+1,x\geqslant -1,\\-1-x,x<-1,\end{cases}$ 即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同，对应关系相同，故为同一个函数；对于 C，$f(x)=1$，$x\in\mathbf{R}$，$g(x)=(x+1)^0(x\neq -1)$，两个函数的定义域不同，故不为同一个函数；对于 D，$f(x)=\dfrac{(\sqrt{x})^2}{x}=1(x>0)$，$g(x)=\dfrac{x}{(\sqrt{x})^2}=1(x>0)$，即两个函数的定义域相同，对应关系相同，故为同一个函数.

**3.**已知函数 $f(x)=\sqrt{ax^2+4ax+5}(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $a=-1$，求 $y=f(x)$ 的定义域；

(2)若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，求实数 $a$ 的取值范围.

**解**：(1)当 $a=-1$ 时，$f(x)=\sqrt{-x^2-4x+5}$.

由 $-x^2-4x+5\geqslant 0$，得 $-5\leqslant x\leqslant 1$.

故函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-5,1]$.

(2)因为函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

所以 $ax^2+4ax+5\geqslant 0$ 对任意实数 $x$ 恒成立.

当 $a=0$ 时，$f(x)=\sqrt{5}$，满足题意；

当 $a\neq 0$ 时，有 $\begin{cases}a>0,\\\Delta=(4a)^2-20a\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant\dfrac{5}{4}$.

综上所述，实数 $a$ 的取值范围是 $\left[0,\dfrac{5}{4}\right]$.

## 自我超越

定义：称 $|b-a|$ 为区间 $[a,b]$ 的长度，若函数 $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ $(a<0)$ 的定义域与值域区间长度相等，则 $a$ 的值为　　(　　)

A.$-4$　　B.$-2$

C.$4$ 或 $-2$　　D.与 $b$，$c$ 的取值有关

A　**解析**：因为函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[0,\sqrt{\dfrac{4ac-b^2}{4a}}\right]$，所以区间 $\left[0,\sqrt{\dfrac{4ac-b^2}{4a}}\right]$ 的长度为 $\sqrt{\dfrac{4ac-b^2}{4a}}$.

设 $ax^2+bx+c\geqslant 0$ 的解集为 $[x_1,x_2]$，所以 $|x_2-x_1|=\sqrt{\dfrac{4ac-b^2}{4a}}$.

因为 $|x_2-x_1|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2-\dfrac{4c}{a}}=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}=\sqrt{\dfrac{4ac-b^2}{4a}}$，

且 $a<0$，所以 $a^2=-4a$，

解得 $a=-4$.故选 A.

# 3.1.2　函数的表示法

## 第1课时　函数的表示法

**学习任务目标**

1.掌握函数的三种表示方法，会根据不同的需要选择恰当的方法表示函数.
2.理解函数图象的作用，能作出函数的图象.
3.掌握求函数解析式的常用方法.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

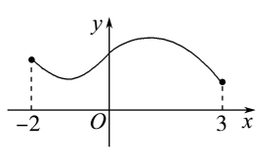
**知识点　函数的表示法**

| | |
|---|---|
| 解析法 | 就是用解析式表示两个变量之间的对应关系 |
| 列表法 | 就是列出表格来表示两个变量之间的对应关系 |
| 图象法 | 就是用图象表示两个变量之间的对应关系 |

### 【概念辨析】

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.
(1)任何一个函数都可以用解析法表示.　（×）
(2)函数的图象一定是定义区间上一条连续不断的曲线.　（×）

2.已知函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，则其定义域是 $[-2,3]$.



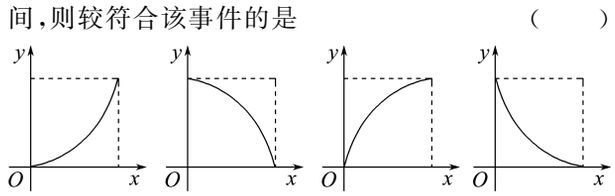

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1 掌握函数的表示法

1.（教材P67例4改编）购买某种饮料 $x$ 听，所需金额为 $y$ 元.若每听2元，用解析法将 $y$ 表示成 $x(x\in\{1,2,3,4\})$ 的函数为　（　　）
A.$y=2x$
B.$y=2x(x\in\mathbf{R})$
C.$y=2x(x\in\{1,2,3,\cdots\})$
D.$y=2x(x\in\{1,2,3,4\})$

D　**解析**：题中已给出自变量的取值范围，$x\in\{1,2,3,4\}$.故选D.

2.（教材P72练习题1改编）某学生离家去学校，一开始跑步前进，跑累了再走完余下的路程.下列图中纵轴表示他与学校的距离，横轴表示出发后的时间，则较符合该事件的是　（　　）




A　　B　　C　　D

D　**解析**：结合题意可知，该学生离校的距离先快速减少，又较慢减少，最后到0.故选D.

3.已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 分别由下表给出：

| $x$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 3 | 1 |

| $x$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 3 | 2 | 1 |

则 $f(g(1))$ 的值为____，满足 $f(g(x))>g(f(x))$ 的 $x$ 的值是____.

1　2　**解析**：由表中对应值，知 $f(g(1))=f(3)=1$.
当 $x=1$ 时，$f(g(1))=1$，$g(f(1))=g(1)=3$，不满足条件；
当 $x=2$ 时，$f(g(2))=f(2)=3$，$g(f(2))=g(3)=1$，满足条件；
当 $x=3$ 时，$f(g(3))=f(1)=1$，$g(f(3))=g(1)=3$，不满足条件.
所以满足 $f(g(x))>g(f(x))$ 的 $x$ 的值是2.

**【探究总结】**

**理解函数表示法的三个关注点**

(1)列表法、图象法、解析法均是函数的表示法，无论用哪种方式表示函数，都必须满足函数的概念.
(2)列表法更直观具体，图象法从形的角度描述函数，

解析法从数的角度描述函数.

(3)函数的三种表示法各有优点,许多函数是可以用三种方法表示的,但在实际应用中,仍以解析法为主.

## 任务2 作函数的图象并应用

### 探究活动

**例1**　作出下列函数的图象并求出其值域.

(1)$y=-x$,$x\in\{0,1,-2,3\}$;

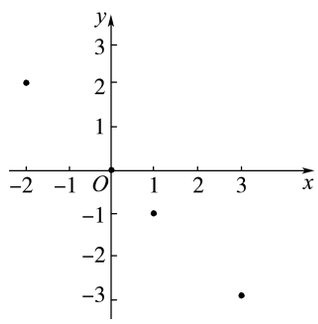
(2)$y=\dfrac{2}{x}$,$x\in[2,+\infty)$;

(3)$y=x^2+2x$,$x\in[-2,2)$.

**解**:(1)列表:

| $x$ | 0 | 1 | $-2$ | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | $-1$ | 2 | $-3$ |

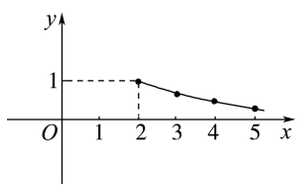
函数图象由四个点$(0,0)$,$(1,-1)$,$(-2,2)$,$(3,-3)$组成,如图所示,其值域为$\{0,-1,2,-3\}$.




(2)列表:

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | … |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | $\dfrac{2}{3}$ | $\dfrac{1}{2}$ | $\dfrac{2}{5}$ | … |

描点并用光滑的曲线连接,得函数的图象,如图所示.

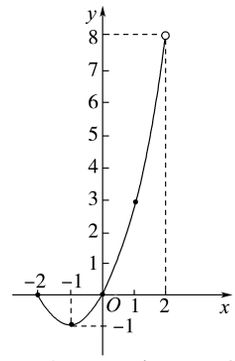



当$x\in[2,+\infty)$时,图象是反比例函数$y=\dfrac{2}{x}$图象的一部分,观察图象可知其值域为$(0,1]$.

(3)列表:

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | $-1$ | 0 | 3 | 8 |

描点并用光滑的曲线连接,得函数的图象,如图所示.




图象是抛物线$y=x^2+2x$在$-2\leqslant x<2$时的部分,由图象可得函数的值域为$[-1,8)$.

### 【探究总结】

**作函数图象的注意点**

(1)要在函数的定义域内作图.

(2)要标出图象的关键点,例如图象的顶点、端点、与坐标轴的交点等.要分清这些关键点是实心还是空心.

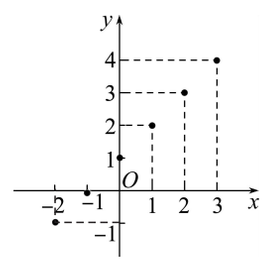
### 应用迁移

作出下列函数的图象,并求其值域.

(1)$y=1+x(x\in\mathbf{Z})$;

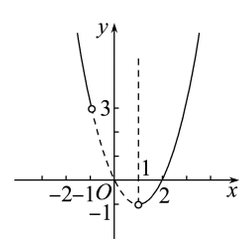
(2)$y=x^2-2x(x>1$或$x<-1)$.

**解**:(1)这个函数的图象由一些点组成,这些点都在直线$y=1+x$上(因为$x\in\mathbf{Z}$,所以$y\in\mathbf{Z}$),这些点都为整数点,如图所示的是函数图象的一部分.




由图象可得函数的值域为$\mathbf{Z}$.

(2)函数$y=x^2-2x=(x-1)^2-1(x>1$或$x<-1)$的图象是抛物线$y=x^2-2x$去掉$x\in[-1,1]$这一段后剩余的曲线,如图所示.




由图象可得函数的值域为$(-1,+\infty)$.

## 任务3 求函数的解析式

### 探究活动

**例2**　(1)已知 $f(x)$ 是二次函数，且满足 $f(0)=1$，$f(x+1)-f(x)=2x$，求 $f(x)$ 的解析式.

(2)已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，求 $f(x)$ 的解析式.

(3)已知 $f(x)+2f(-x)=x^2+2x$，求 $f(x)$ 的解析式.

**解**：(1)设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$.

因为 $f(0)=1$，所以 $c=1$.

又因为 $f(x+1)-f(x)=2x$，

所以 $a(x+1)^2+b(x+1)+1-(ax^2+bx+1)=2x$，

整理得 $2ax+(a+b)=2x$，所以 $\begin{cases}2a=2,\\a+b=0,\end{cases}$

解得 $a=1$，$b=-1$，所以 $f(x)=x^2-x+1$.

(2)(方法一：换元法)令 $t=\sqrt{x}+1$，$t\geqslant1$，则 $x=(t-1)^2$，所以 $f(t)=(t-1)^2+2(t-1)=t^2-1(t\geqslant1)$，所以 $f(x)=x^2-1(x\geqslant1)$.

(方法二：配凑法)$f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}=(\sqrt{x}+1)^2-1$.

因为 $\sqrt{x}+1\geqslant1$，所以 $f(x)=x^2-1(x\geqslant1)$.

(3)以 $-x$ 代替 $x$ 得 $f(-x)+2f(x)=x^2-2x$，与 $f(x)+2f(-x)=x^2+2x$ 联立，解得 $f(x)=\frac{1}{3}x^2-2x$.

[一题多思]

**思考1.** 根据例题，你能大致总结一下求函数解析式的类型及方法吗？

**提示**：(1)函数类型确定时用待定系数法；(2)已知 $f(g(x))$ 的解析式时用配凑法或换元法；(3)$f(x)$ 与 $f(-x)$ 或 $f(x)$ 与 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 并存时用方程组法.

**思考2.** 应用换元法求函数解析式时，需要注意什么问题？

**提示**：应用换元法求函数解析式时，务必保证函数在换元前后的等价性.

### 【探究总结】

**求函数解析式的四种常用方法**

(1)待定系数法：若已知函数 $f(x)$ 的类型，设出它的一般形式，根据特殊值确定相关的系数即可.

(2)换元法：设 $t=g(x)$，解出 $x$，代入 $f(g(x))$，求 $f(t)$ 的解析式即可.

(3)配凑法：对 $f(g(x))$ 的解析式进行配凑变形，使它能用 $g(x)$ 表示出来，再用 $x$ 代替所有的 $g(x)$ 即可.

(4)方程组法：当同一个对应关系中的两个变量互为相反数或互为倒数时，可构造方程组求解.

### 应用迁移

**1.** 已知函数 $f(x)$ 为一次函数，且 $f(3)=7$，$f(5)=-1$，则 $f(2)=$　(　　)

A. $-11$　　B. $11$

C. $-15$　　D. $15$

B　**解析**：设 $f(x)=kx+b(k\neq0)$，则 $\begin{cases}3k+b=7,\\5k+b=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-4,\\b=19,\end{cases}$ 所以 $f(x)=-4x+19$，

所以 $f(2)=-8+19=11$. 故选 B.

**2.** 已知函数 $f\left(\frac{x}{3}-1\right)=2x-5$，则 $f(x)$ 的解析式为　(　　)

A. $f(x)=3x+3$

B. $f(x)=6x+1$

C. $f(x)=3x+1$

D. $f(x)=6x+3$

B　**解析**：令 $\frac{x}{3}-1=t$，则 $x=3(t+1)$，所以 $f(t)=2\times3(t+1)-5=6t+1$，所以 $f(x)=6x+1$. 故选 B.

**3.** 已知 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$，求 $f(x)$ 的解析式.

**解**：因为 $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$，①

将 $x$ 用 $\frac{1}{x}$ 替换，得 $2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{3}{x}$.②

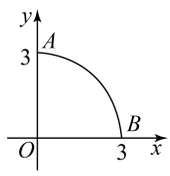
由①②解得 $f(x)=2x-\frac{1}{x}(x\neq0)$，

即 $f(x)$ 的解析式是 $f(x)=2x-\frac{1}{x}(x\neq0)$.

# 课后素养评价(十八)

## 基础落实

**1.**已知函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示,其中点 $A,B$ 的坐标分别为(0,3),(3,0),则 $f(f(0))=$　　(　　)




A.2　　B.4

C.0　　D.3

C　**解析**:结合图象可知 $f(0)=3$,$f(3)=0$,则 $f(f(0))=f(3)=0$.

**2.**若函数 $f(x-3)=\frac{1}{x}$,则 $f(2)=$　　(　　)

A.$\frac{1}{5}$　　B.$\frac{1}{3}$　　C.$\frac{1}{6}$　　D.$\frac{1}{2}$

A　**解析**:因为函数 $f(x-3)=\frac{1}{(x-3)+3}$,所以 $f(x)=\frac{1}{x+3}$,则 $f(2)=\frac{1}{5}$.故选 A.

**3.**若某一次函数的图象经过点 $A(1,6)$ 和 $B(2,8)$,则该函数的图象还可能经过的点的坐标为　　(A)

A.$\left(\frac{1}{2},5\right)$　　B.$\left(\frac{1}{4},4\right)$

C.$(-1,3)$　　D.$(-2,1)$

**4.**已知 $f(x)$ 为二次函数,且 $f(x+1)+f(x-1)=2x^2-4x$,则 $f(x)=$_____.

$x^2-2x-1$　**解析**:设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$.因为 $f(x+1)+f(x-1)=a(x+1)^2+b(x+1)+c+a(x-1)^2+b(x-1)+c=2ax^2+2bx+2a+2c=2x^2-4x$,

所以 $2a=2$,$2b=-4$,$2a+2c=0$.所以 $a=1$,$b=-2$,$c=-1$,所以 $f(x)=x^2-2x-1$.

**5.**若 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$,则 $f\left(\frac{3}{2}\right)=$_____,$f(x)=$_____.

$\frac{17}{4}$　$x^2+2$　**解析**:因为 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$,所以 $f(x)=x^2+2$,所以 $f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2+2=\frac{17}{4}$.

**6.**(1)已知函数 $f(x)$,满足 $f(x)-2f(-x)=1+2x$,求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2)已知函数 $f(x)=x^2-bx+c$,且 $f(1)=0$,$f(2)=-3$,求 $f(x)$ 的解析式.

**解**:(1)以 $-x$ 代替 $x$ 可得 $f(-x)-2f(x)=1-2x$,

联立得 $\begin{cases}f(x)-2f(-x)=1+2x,\\f(-x)-2f(x)=1-2x,\end{cases}$

消去 $f(-x)$ 可得 $f(x)=\frac{2}{3}x-1$.

(2)由 $\begin{cases}f(1)=1-b+c=0,\\f(2)=4-2b+c=-3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=6,\\c=5.\end{cases}$

故 $f(x)=x^2-6x+5$.

## 能力提升

**1.**已知函数 $f(2x+1)=3x+2$,且 $f(a)=2$,则实数 $a$ 的值为　　(　　)

A.$-1$　　B.5　　C.1　　D.8

C　**解析**:由 $3x+2=2$ 得 $x=0$.所以 $a=2\times0+1=1$.故选 C.

**2.**已知函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}$,则 $f(x)=$　　(　　)

A.$\frac{1+x^2}{x}$　　B.$\frac{2+x^2}{x}$　　C.$\frac{1+x^2}{3x}$　　D.$\frac{2+x^2}{3x}$

D　**解析**:因为 $2f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}$,所以 $2f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)=x$.两式联立可得 $f(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}+x\right)=\frac{2+x^2}{3x}$.故选 D.

**3.**用列表法表示函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=g(x)$,如下表所示.若 $f(g(t))\geqslant2$,则 $t$ 的值不可能为　　(　　)

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 4 | 3 | 2 | 1 |
| $g(x)$ | 2 | 1 | 4 | 3 |

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

C　**解析**:观察 $f(x)$ 的表格:当 $x=1$ 时,$f(1)=4\geqslant2$;当 $x=2$ 时,$f(2)=3\geqslant2$;

当 $x=3$ 时,$f(3)=2\geqslant2$;当 $x=4$ 时,$f(4)=1<2$.所以满足 $f(x)\geqslant2$ 的 $x$ 取值为 1,2,3.

当 $g(t)=1$ 时,由 $g(x)$ 表格可知 $t=2$;当 $g(t)=2$ 时,由 $g(x)$ 表格可知 $t=1$;

当 $g(t)=3$ 时,由 $g(x)$ 表格可知 $t=4$.所以 $f(g(t))\geqslant2$ 时,$t$ 的值可以是 1,2 或 4.故选 C.

**4.**若一个长方体的高为 80 cm,长比宽多10 cm,则这个长方体的体积 $y$(单位:$cm^3$)与长方体的宽 $x$(单位:cm)之间的关系式是_____.

$y=80x(x+10),x\in(0,+\infty)$　**解析**:由题意可

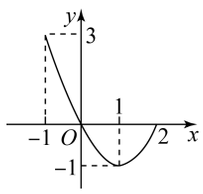
知，长方体的长为$(x+10)$cm，从而长方体的体积$y=80x(x+10)$，$x>0$.

**5.**已知函数$f(x)=x^2-2x(-1\leqslant x\leqslant 2)$.

(1)画出函数$f(x)$的简图；

(2)根据图象写出$f(x)$的值域.

**解**：(1)$f(x)$的图象如图所示.




(2)观察$f(x)$的图象可知，$f(x)$图象上所有点的纵坐标的取值范围是$[-1,3]$，即$f(x)$的值域是$[-1,3]$.

## 自我超越

若正整数$m$，$n$只有1为公约数，则称$m$，$n$互质.对于正整数$n$，$\varphi(n)$是小于或等于$n$的正整数中与$n$互质的数的个数，例如：$\varphi(3)=2$，$\varphi(7)=6$，$\varphi(9)=6$，则下列说法正确的是_____.(填序号)

①$\varphi(5)=\varphi(10)$；②$\varphi(2^n-1)=1$；③$\varphi(32)=16$；

④$\varphi(2n+2)>\varphi(2n)$，$n$是正整数.

①③　**解析**：因为小于或等于5的正整数中与5互质的正整数为1，2，3，4，小于或等于10的正整数中与10互质的正整数为1，3，7，9，所以$\varphi(5)=\varphi(10)=4$，故①正确；

当$n=2$时，$\varphi(3)=2\neq 1$，故②不正确；

因为小于或等于32的正整数中与32互质的正整数为1，3，5，7，9，11，13，15，17，19，21，23，25，27，29，31，共有16个，所以$\varphi(32)=16$，故③正确；

当$n=2$时，$\varphi(4)=\varphi(6)=2$，故④不正确.

# 第2课时　分段函数及其应用

**学习任务目标**

**1.**了解分段函数的概念，会求分段函数的值，能画出分段函数的图象.

**2.**能在实际问题中列出分段函数的解析式，并能解决有关问题.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点　分段函数**

(1)定义：在定义域内，对于自变量的不同取值范围，有不同的函数解析式.像这样的函数，通常叫做分段函数.

(2)定义域和值域：分段函数定义域是各段定义域的并集，其值域是各段值域的并集.

(3)分段函数的图象：分段函数是一个函数，因此画分段函数的图象时，应根据自变量的取值范围及对应的函数解析式画出各段的图象，从而得到分段函数图象.

### 【概念辨析】

**1.**判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)分段函数有几段就是几个函数.　(×)

(2)分段函数的定义域要分开写成几个集合的形式.　(×)

(3)函数$f(x)=\begin{cases}0,x<0,\\1,x\geqslant 0\end{cases}$不是分段函数.　(×)

**2.**已知函数$f(x)=\begin{cases}x+5,x\geqslant 4,\\x-2,x<4,\end{cases}$则$f(3)$的值是　(A)

A.1　　B.2　　C.8　　D.9

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1 求分段函数值

#### 探究活动

**例1**　已知函数$f(x)=\begin{cases}x+1,x\leqslant -2,\\3x+5,-2<x<2,\\2x-1,x\geqslant 2.\end{cases}$

(1)求$f(-5)$，$f(f(1))$的值；

(2)若$f(a)=3$，求实数$a$的值.

**解**：(1)由于$-5\in(-\infty,-2]$，$1\in(-2,2)$，

所以$f(-5)=-5+1=-4$，

$f(1)=3\times 1+5=8$.

又$8\in[2,+\infty)$，

所以$f(f(1))=f(8)=2\times 8-1=15$.

(2)当$a\leqslant -2$时，$f(a)=a+1=3$，

解得$a=2>-2$，不符合题意，舍去；

当$-2<a<2$时，$f(a)=3a+5=3$，

解得 $a=-\frac{2}{3}\in(-2,2)$，符合题意；

当 $a\geqslant 2$ 时，$f(a)=2a-1=3$，

解得 $a=2\in[2,+\infty)$，符合题意.

综上可得，当 $f(a)=3$ 时，实数 $a$ 的值为 $-\frac{2}{3}$ 或 2.

[一题多思]

**思考 1.** 本例函数不变，若 $f(a^2+2)\geqslant a+4$，你能求出实数 $a$ 的取值范围吗？

**提示：** 因为 $a^2+2\geqslant 2$，

所以 $f(a^2+2)=2(a^2+2)-1=2a^2+3$，

所以不等式 $f(a^2+2)\geqslant a+4$ 可化为 $2a^2-a-1\geqslant 0$，

解得 $a\geqslant 1$ 或 $a\leqslant -\frac{1}{2}$，

即实数 $a$ 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$.

**思考 2.** 本例函数不变，若 $f(x)>2x$，你能求出 $x$ 的取值范围吗？

**提示：** 当 $x\leqslant -2$ 时，$f(x)>2x$ 可化为 $x+1>2x$，即 $x<1$，所以 $x\leqslant -2$；

当 $-2<x<2$ 时，$f(x)>2x$ 可化为 $3x+5>2x$，即 $x>-5$，所以 $-2<x<2$；

当 $x\geqslant 2$ 时，$f(x)>2x$ 可化为 $2x-1>2x$，则 $x\in\varnothing$.

综上可得，$x$ 的取值范围是 $(-\infty,2)$.

## 【探究总结】

**分段函数求值的关注点**

(1) 注意所给自变量的值所在的范围，代入相应的解析式求函数值.

(2) 多层函数嵌套时，按照由里到外的顺序，层层处理.

(3) 已知函数值求相应的自变量的值时，应在各段中分别求解.

## 应用迁移

**1.** 设函数 $f(x)=\begin{cases}4x^2,x<1,\\ x+a,x\geqslant 1,\end{cases}$ $f\left(f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=3$，则 $a=$（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\ln 2$

C. 1　　D. $\lg 3$

C　**解析：** 因为函数 $f(x)=\begin{cases}4x^2,x<1,\\ x+a,x\geqslant 1,\end{cases}$ 所以 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=2$，因此 $f\left(f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=f(2)=2+a=3$，所以 $a=1$. 故选 C.

**2.** 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x,x\geqslant 0,\\ x^2,x<0,\end{cases}$ 则 $f(f(-\sqrt{2}))=$_____.

4　**解析：** 因为 $-\sqrt{2}<0$，所以 $f(-\sqrt{2})=(-\sqrt{2})^2=2$，$f(f(-\sqrt{2}))=f(2)=2\times 2=4$.

# 任务 2　画分段函数的图象并应用

## 探究活动

**例 2**　(教材 P68 例 6 改编) 已知函数 $f(x)=-x^2+2$，$g(x)=x$，令 $\varphi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$（即 $f(x)$ 和 $g(x)$ 中的较小者）.

(1) 分别用图象和解析式表示 $\varphi(x)$；

(2) 求函数 $\varphi(x)$ 的定义域、值域.

**解：** (1) 令 $-x^2+2=x$，得 $x=-2$ 或 $x=1$.

在同一个平面直角坐标系中画出函数 $f(x)$，$g(x)$ 的图象如图 1 所示.

由图 1 中函数取值的情况，结合函数 $\varphi(x)$ 的定义，可得函数 $\varphi(x)$ 的图象如图 2 所示.

结合图 2，得 $\varphi(x)=\begin{cases}-x^2+2,x\leqslant -2,\\ x,-2<x<1,\\ -x^2+2,x\geqslant 1.\end{cases}$

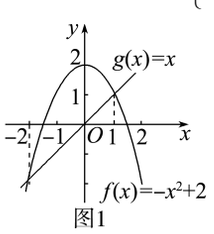


图1

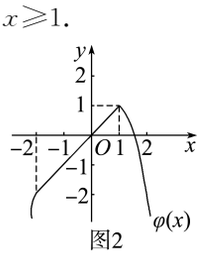


图2

(2) 由图 2 知，$\varphi(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$\varphi(1)=1$，

所以 $\varphi(x)$ 的值域为 $(-\infty,1]$.

## 【探究总结】

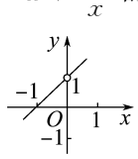
**画分段函数图象的方法**

(1) 整段作图分段取：先不考虑定义域的限制，用虚线分别作出各段图象，再用实线画出定义域内的图象.

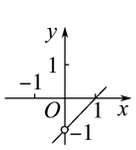
(2) 端点实虚要明确：一定要明确区间端点是否包含在内，图象端点是实心还是空心.

## 应用迁移

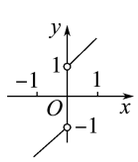
**1.** 函数 $y=x+\frac{|x|}{x}$ 的图象是（　　）



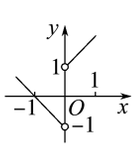
A



B



C



D

C　**解析**：对于 $y=x+\dfrac{|x|}{x}$，当 $x>0$ 时，$y=x+1$；当 $x<0$ 时，$y=x-1$. 即 $y=\begin{cases}x+1,x>0,\\x-1,x<0,\end{cases}$ 故其图象应为 C.

**2.** 设 $x\in\mathbf{R}$，则函数 $y=2|x-1|-3|x|$ 的值域为_____.

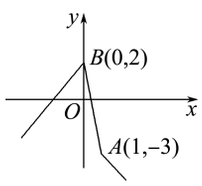
$(-\infty,2]$　**解析**：当 $x\geqslant1$ 时，$y=2(x-1)-3x=-x-2$；

当 $0\leqslant x<1$ 时，$y=-2(x-1)-3x=-5x+2$；

当 $x<0$ 时，$y=-2(x-1)+3x=x+2$.

故 $y=\begin{cases}-x-2,x\geqslant1,\\-5x+2,0\leqslant x<1,\\x+2,x<0.\end{cases}$

根据函数解析式画出函数图象，如图所示.




由图象可以看出，函数的值域为 $\{y|y\leqslant2\}$.

## 任务3 分段函数的实际应用

### 探究活动

**例 3**　（教材 P70 例 8 改编）目前，某市居民用户综合水价按三档分阶梯计价（如下表所示），阶梯水量以年为计价周期，不同周期之间不累计、不结转.

| 阶梯 | 用户年用水量/t | 综合水价/(元/t) | 项目 | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 自来水费/(元/t) | 污水处理费/(元/t) |
| 第一阶梯 | 0～144(含) | 3.50 | 2.50 | 1.00 |
| 第二阶梯 | 144～204(含) | 7.00 | 6.00 | |
| 第三阶梯 | 204 以上 | 9.00 | 8.00 | |

若一户家庭一年所缴纳的水费为 756 元，则其一年用水多少吨？

**解**：设用水量为 $x$ t，

当 $0\leqslant x\leqslant144$ 时，水费 $f(x)=3.5x$；

当 $144<x\leqslant204$ 时，水费 $f(x)=144\times3.5+7(x-144)=7x-504$；

当 $x>204$ 时，水费 $f(x)=144\times3.5+7\times(204-144)+9(x-204)=9x-912$.

故水费 $f(x)=\begin{cases}3.5x,0\leqslant x\leqslant144,\\7x-504,144<x\leqslant204,\\9x-912,x>204.\end{cases}$

令 $3.5x=756$，解得 $x=216$，不符合题意；

令 $7x-504=756$，解得 $x=180$，$180\in(144,204]$，

所以一年用水 180 t.

### 【探究总结】

**用分段函数表示函数关系的方法**

(1)当两个变量在不同区间有不同的对应关系时，往往需要用分段函数来表示两个变量间的对应关系.

(2)应用分段函数模型的关键是确定分段的各分界点，即明确自变量的取值区间，对每一个区间进行分类讨论，从而写出相应的函数解析式.

### 应用迁移

某工厂一条手机配件生产线的产量 $\omega$（单位：百个）与生产成本 $x$（单位：百元）满足如下关系：

$$\omega(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2+3,0\leqslant x\leqslant2,\\6-\dfrac{3}{1+x},2<x\leqslant5.\end{cases}$$

此外，还需要投入其他成本（如运输、包装成本等）$2x$ 百元. 已知这种手机配件的市场售价为 16 元/个（即 16 百元/百个），且始终供不应求. 记由这条生产线获得的利润为 $L(x)$（单位：百元）.

(1)求函数 $L(x)$ 的解析式.

(2)当投入的生产成本为多少时，由这条生产线获得的利润最大？最大利润是多少？

**解**：(1)$L(x)=16\omega(x)-2x-x$

$=\begin{cases}8x^2+48-3x,0\leqslant x\leqslant2,\\96-\dfrac{48}{1+x}-3x,2<x\leqslant5.\end{cases}$

(2)当 $0\leqslant x\leqslant2$ 时，$L(x)=8x^2-3x+48$，图象的对称轴方程为 $x=\dfrac{3}{16}$.

所以 $L(x)_{\max}=L(2)=74$.

当 $2<x\leqslant5$ 时，$L(x)=99-\left[\dfrac{48}{x+1}+3(x+1)\right]\leqslant99-2\sqrt{\dfrac{48}{x+1}\times3(x+1)}=75$.

当且仅当 $\dfrac{48}{x+1}=3(x+1)$，即 $x=3$ 时，等号成立.

因为 $75>74$，所以当投入的生产成本为 300 元时，由这条生产线获得的利润最大，最大利润是 7 500 元.

# 课后素养评价(十九)

## 基础落实

**1.**若函数 $f(x)=\begin{cases}3x+1,x\leqslant 0,\\-(x-1)^2,x>0,\end{cases}$ 则 $f(f(2))=$ (　　)

A.$-1$　　B.$-2$　　C.1　　D.2

B　**解析**:因为 $f(2)=-(2-1)^2=-1$,所以 $f(f(2))=f(-1)=3\times(-1)+1=-2$.故选 B.

**2.**已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+1,x\leqslant 2,\\2f(x-1),x>2,\end{cases}$ 则 $f(3)=$ (　　)

A.4　　B.5

C.6　　D.8

C　**解析**:因为函数 $f(x)=\begin{cases}x+1,x\leqslant 2,\\2f(x-1),x>2,\end{cases}$ 所以 $f(3)=2f(2)=2\times(2+1)=6$.故选 C.

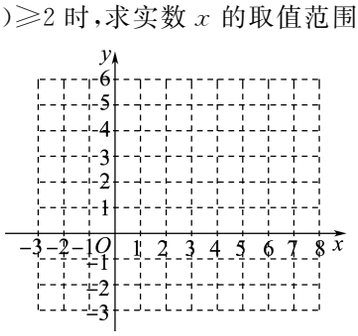
**3.**某单位为鼓励职工节约用水,作出了如下规定:每位职工每月用水量不超过10 $m^3$ 时,按每立方米 $m$ 元收费;用水量超过10 $m^3$ 时,超过部分按每立方米 $2m$ 元收费.某职工某月缴纳水费 $16m$ 元,则该职工这个月的用水量为_____$m^3$.

13　**解析**:设该单位职工每月应缴水费为 $y$ 元,实际用水量为 $x$ $m^3$,则满足的关系式为 $y=\begin{cases}mx,0\leqslant x\leqslant 10,\\2mx-10m,x>10.\end{cases}$ 由 $y=16m$,可知 $x>10$.令 $2mx-10m=16m$,解得 $x=13$.

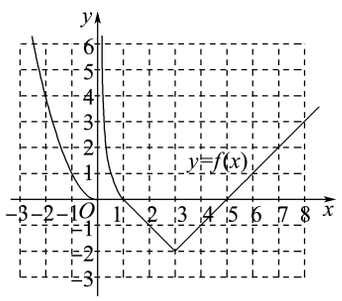
**4.**已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,x\leqslant 0,\\\dfrac{1-x}{x},0<x<1,\\|x-3|-2,x\geqslant 1.\end{cases}$

(1)画出函数 $f(x)$ 的图象;

(2)当 $f(x)\geqslant 2$ 时,求实数 $x$ 的取值范围.




**解**:(1)因为 $f(x)=\begin{cases}x^2,x\leqslant 0,\\\dfrac{1-x}{x},0<x<1,\\|x-3|-2,x\geqslant 1,\end{cases}$ 所以 $f(x)$ 的图象如图所示.




(2)由题可得 $\begin{cases}x\leqslant 0,\\x^2\geqslant 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0<x<1,\\\dfrac{1-x}{x}\geqslant 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant 1,\\|x-3|-2\geqslant 2,\end{cases}$

解得 $x\leqslant-\sqrt{2}$ 或 $0<x\leqslant\dfrac{1}{3}$ 或 $x\geqslant 7$,

所以实数 $x$ 的取值范围为 $(-\infty,-\sqrt{2}]\cup\left(0,\dfrac{1}{3}\right]\cup[7,+\infty)$.

## 能力提升

**1.**(多选)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+2,x\leqslant -1,\\x^2,-1<x<2,\end{cases}$ 则下列结论正确的是 (　　)

A.$f(f(-1))=1$

B.若 $f(x)=3$,则 $x$ 的值是 1 或 $\sqrt{3}$

C.$f(x)$ 的值域为 $(-\infty,4)$

D.$f(x)<1$ 的解集为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)$

ACD　**解析**:对于 A,因为 $f(f(-1))=f(1)=1^2=1$,故选项 A 正确.

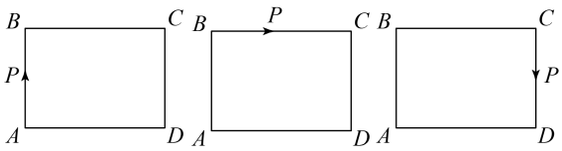
对于 B,当 $x\leqslant -1$ 时,由 $f(x)=3$,得 $x+2=3$,解得 $x=1$(舍去);当 $-1<x<2$ 时,由 $f(x)=3$,得 $x^2=3$,解得 $x=\sqrt{3}$ 或 $x=-\sqrt{3}$(舍去),所以 $x$ 的值是 $\sqrt{3}$,故选项 B 错误.

对于 C,当 $x\leqslant -1$ 时,$f(x)=x+2\in(-\infty,1]$;当 $-1<x<2$ 时,$f(x)=x^2\in[0,4)$,且 $(-\infty,1]\cup[0,4)=(-\infty,4)$,所以 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,4)$,故选项 C 正确.

对于 D,当 $x\leqslant -1$ 时,由 $f(x)<1$,得 $x+2<1$,解得 $x<-1$;当 $-1<x<2$ 时,由 $f(x)<1$,得 $x^2<$

1，解得$-1<x<1$，所以不等式的解集是$(-\infty,-1)\cup(-1,1)$，故选项D正确.故选ACD.

**2.** 如图，在矩形$ABCD$中，$AB=6$，$BC=8$，点$P$从点$A$出发沿$A—B—C—D$的路径移动.设点$P$移动的路线长为$x$，$\triangle PAD$的面积为$y$.




(1)写出$y$关于$x$的函数解析式.

(2)当$x=4$和$x=18$时，求函数值$y$.

(3)当$x$取何值时，$y=20$？请说明此时点$P$在矩形的哪条边上.

**解**：(1)当点$P$在线段$AB$上运动时，$AP=x$.根据三角形的面积公式可得$y=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AP=\frac{1}{2}\times8\times x=4x$；

当点$P$在线段$BC$上运动时，面积不变，$y=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AB=\frac{1}{2}\times8\times6=24$；

当点$P$在线段$CD$上运动时，$DP=6+8+6-x=20-x$，$AD=8$.

根据三角形的面积公式可得$y=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot DP=\frac{1}{2}\times8\times(20-x)=80-4x$.

所以$y$与$x$之间的函数关系式为

$$y=\begin{cases}4x,0\leqslant x\leqslant6,\\24,6<x\leqslant14,\\80-4x,14<x\leqslant20.\end{cases}$$

(2)当$x=4$时，$y=4x=4\times4=16$；

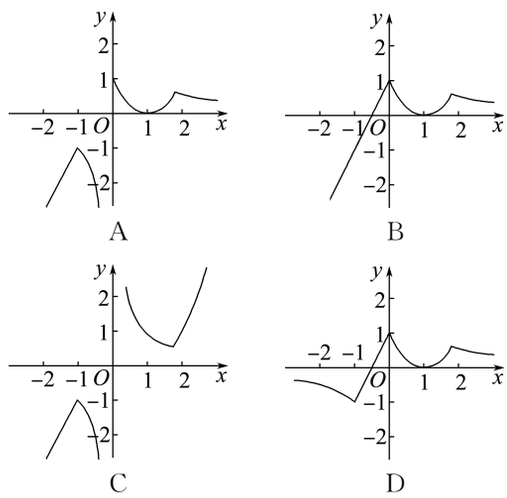
当$x=18$时，$y=80-4\times18=8$.

(3)由$y=4x=20$，解得$x=5$，此时点$P$在线段$AB$上；

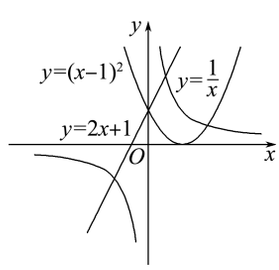
由$y=80-4x=20$，解得$x=15$，此时点$P$在线段$CD$上.

## 自我超越

已知函数$f(x)=(x-1)^2$，$g(x)=2x+1$，$h(x)=\frac{1}{x}$，记$m(x)=\min\{f(x),g(x),h(x)\}$为它们中的最小者，则函数$m(x)$的大致图象是　　(　　)




A　**解析**：将$f(x)=(x-1)^2$，$g(x)=2x+1$，$h(x)=\frac{1}{x}$，画在同一个平面直角坐标系中，如图所示.




由函数$m(x)=\min\{f(x),g(x),h(x)\}$的定义，取三个函数中的最小者，可得$m(x)$的图象.故选A.

# 3.2　函数的基本性质

## 3.2.1　单调性与最大(小)值

## 第1课时　函数的单调性

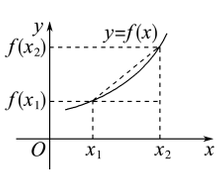
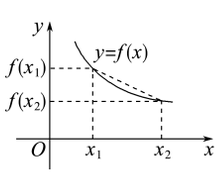
**学习任务目标**

1.了解函数单调性、单调区间等概念.
2.会利用函数图象判断一次函数、二次函数的单调性.
3.能利用定义判断一些简单函数在给定区间上的单调性,掌握利用单调性的定义判断、证明函数单调性的方法.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　函数的单调性**

| | | |
|---|---|---|
| 前提条件 | 一般地,设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$,区间 $I\subseteq D$ | |
| 条件 | 如果 $\forall x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时 | |
| | 都有 $f(x_1)<f(x_2)$ | 都有 $f(x_1)>f(x_2)$ |
| 图示 |  |  |
| 结论 | $f(x)$ 在区间 $I$ 上单调递增.<br>当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递增时,我们就称它是增函数 | $f(x)$ 在区间 $I$ 上单调递减.<br>当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递减时,我们就称它是减函数 |

**知识点二　函数的单调性与单调区间**

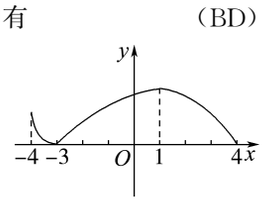
如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上单调递增或单调递减,那么就说函数 $y=f(x)$ 在这一区间具有(严格的)单调性,区间 $I$ 叫做 $y=f(x)$ 的单调区间.

### 【概念辨析】

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").
(1)函数在其定义域上都具有单调性.　(×)
(2)若函数 $y=f(x)$ 在定义域上有 $f(1)<f(2)$,则该函数是增函数.　(×)
(3)若函数 $y=f(x)$ 在[0,2]上单调递增,则该函数的单调递增区间是[0,2].　(×)

2.(多选)函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示,则下列区间中,是函数的单调递减区间的有　(BD)

A.[−4,1]
B.[−4,−3]
C.[−3,1]
D.[1,4]




BD　**解析**:根据函数单调性的定义及题图可知,$f(x)$ 在[−4,−3]和[1,4]上单调递减.故选 BD.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1　函数单调性的判断

1.若函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**,且满足 $f(1)<f(2)<f(3)$,则函数 $f(x)$ 在(0,+∞)上的单调性为(　　)

A.单调递增　　B.单调递减
C.先增后减　　D.不能确定

D　**解析**:由于函数单调性的定义突出了 $x_1,x_2$ 的任意性,所以仅凭区间内几个函数值的关系,不能作为判断函数单调性的依据,也就是说函数单调性定义的三个特征缺一不可.

2.下列函数中,在区间(0,1)上单调递增的是(　　)

A.$y=|x|$　　B.$y=3-x$
C.$y=\dfrac{1}{x}$　　D.$y=-x^2+4$

A　**解析**:因为 $-1<0$,所以一次函数 $y=3-x=-x+3$ 在 **R** 上单调递减,B 不符合;反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在(0,+∞)上单调递减,C 不符合;二次函数 $y=-x^2+4$ 在(0,+∞)上单调递减,D 不符合.

3.函数 $f(x)=\dfrac{|x-1|}{3}+1$ 的单调递减区间为(　　)

A.(−∞,2]　　B.(2,+∞)
C.(1,+∞)　　D.(−∞,1]

D　**解析**：因为函数 $f(x)=\frac{|x-1|}{3}+1=\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{2}{3},x>1,\\-\frac{x}{3}+\frac{4}{3},x\leqslant 1,\end{cases}$ 所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,1]$.故选 D.

## 【探究总结】

**由函数图象求单调区间的关注点**

(1)优先确定定义域.

(2)在某区间内，函数的图象由左至右是上升的还是下降的.

**注意**：当单调递增(减)区间多于一个时，不能用“∪”连接(因为函数在并区间上不一定满足“任意性”).

# 任务2 函数单调性的证明

## 探究活动

**例1**　(教材 P79 例 3 改编)证明：函数 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调递增.

**证明**：$\forall x_1,x_2\in[-1,1]$，且 $x_1<x_2$，

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{x_2^2+1}-\frac{x_1}{x_1^2+1}$$

$$=\frac{x_2(x_1^2+1)-x_1(x_2^2+1)}{(x_2^2+1)(x_1^2+1)}=\frac{x_1x_2(x_1-x_2)+(x_2-x_1)}{(x_2^2+1)(x_1^2+1)}$$

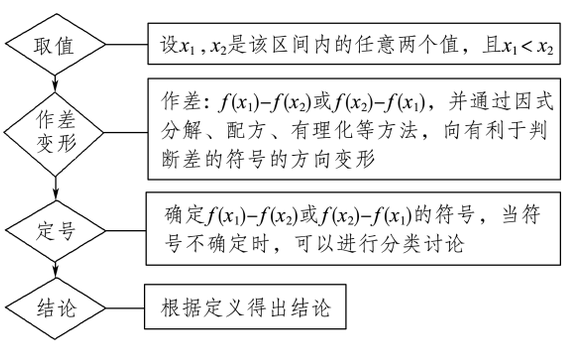
$$=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-1)}{(x_2^2+1)(x_1^2+1)}.$$

因为 $x_1x_2<1$，$x_1-x_2<0$，$x_2^2+1>0$，$x_1^2+1>0$，所以 $f(x_2)-f(x_1)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增.

## 【探究总结】

**利用定义证明函数单调性的步骤**




## 应用迁移

证明：函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递减.

**证明**：$\forall x_1,x_2\in(2,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1^2-4}-\frac{1}{x_2^2-4}$$

$$=\frac{x_2^2-x_1^2}{(x_1^2-4)(x_2^2-4)}=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{(x_1^2-4)(x_2^2-4)}.$$

因为 $2<x_1<x_2$，

所以 $x_2-x_1>0$，$x_1^2>4$，$x_2^2>4$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$.

所以函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递减.

# 任务3 函数单调性的应用

## 探究活动

**例2**　(1)已知函数 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增，若 $f(1-m)<f(m)$，则实数 $m$ 的取值范围是_____.

(2)已知函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$，若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,4]$ 上单调递减，则实数 $a$ 的取值范围是_____.

(1)$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　**解析**：由题意知，$1-m<m$，解得 $m>\frac{1}{2}$.所以实数 $m$ 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

(2)$(-\infty,-3]$　**解析**：因为函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,4]$ 上单调递减，所以函数 $f(x)$ 图象的对称轴直线 $x=1-a\geqslant 4$，所以 $a\leqslant -3$.

所以实数 $a$ 的取值范围为 $(-\infty,-3]$.

**[一题多思]**

**思考1.**如何利用函数的单调性比较两个函数值的大小？

**提示**：当两个自变量在函数的同一个单调区间上时，比较两个函数值的大小可以转化为比较两个自变量的大小.

**思考2.**本例(1)中，若把“函数 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增”改为“函数 $f(x)$ 在定义域 $[-2,2]$ 上单调递增”，其他条件不变，实数 $m$ 的取值范围会有变化吗？

**提示**：会.由题意知，$\begin{cases}-2\leqslant 1-m\leqslant 2,\\-2\leqslant m\leqslant 2,\\1-m<m,\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{2}<m\leqslant 2$.故此时实数 $m$ 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2},2\right]$.

**思考3.**在本例(2)中，若把“函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,4]$ 上单调递减”改为“函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,4]$”，实数 $a$ 的取值范围会发生变化吗？

**提示**：会.因为函数 $f(x)$ 的图象的对称轴为直线 $x=1-a$，$f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,4]$，所以 $1-a=4$，所以 $a=-3$.所以实数 $a$ 的值为 $-3$.

## 【探究总结】

**1.关于抽象函数的不等式的解法**

(1)利用函数的单调性转化为关于自变量的不等式.

(2)求出的自变量的范围与函数的定义域求交集.

**2.由二次函数单调性求参数的策略**

(1)若已知函数的单调区间,则图象的对称轴对应单调区间的端点.

(2)若已知函数在某区间上单调,则该区间是函数单调区间的子区间.

## 应用迁移

**1.**(多选)已知 $f(x)$ 为区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的减函数,且 $a\in(0,+\infty)$,则　　(　　)

A.$f(a)>f(2a)$　　B.$f(a^2)<f(a)$

C.$f(a^2+1)<f(a)$　　D.$f(a^2+a)<f(a)$

ACD　**解析**:因为 $a\in(0,+\infty)$,所以 $a<2a$,又 $f(x)$ 为区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的减函数,所以 $f(a)>f(2a)$,故 A 正确;因为 $a^2-a=a(a-1)$ 与 0 的大小关系不定,所以无法比较 $f(a^2)$ 与 $f(a)$ 的大小,故 B 错误;因为 $a^2+1-a=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$,所以 $a^2+1>a$,又 $f(x)$ 为区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的减函数,所以 $f(a^2+1)<f(a)$,故 C 正确;因为 $a^2+a-a=a^2>0$,所以 $a^2+a>a$,又 $f(x)$ 为区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的减函数,所以 $f(a^2+a)<f(a)$,故 D 正确.

**2.**已知函数 $f(x)=2x^2-kx+1$ 在 $[2,4]$ 上是单调函数,则实数 $k$ 的取值范围是　　(　　)

A.$(8,16)$　　B.$[8,16]$

C.$(-\infty,8)\cup(16,+\infty)$　　D.$(-\infty,8]\cup[16,+\infty)$

D　**解析**:函数 $f(x)=2x^2-kx+1$ 的图象为开口向上的抛物线,对称轴为直线 $x=\frac{k}{4}$.因为该函数在 $[2,4]$ 上单调,因此,需满足 $\frac{k}{4}\leqslant 2$ 或 $\frac{k}{4}\geqslant 4$,解得 $k\leqslant 8$ 或 $k\geqslant 16$.故选 D.

# 课后素养评价(二十)

## 基础落实

**1.**设函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的增函数,则 $f(-2)$,$f(\pi)$,$f(-3)$ 的大小关系是　　(　　)

A.$f(\pi)>f(-2)>f(-3)$

B.$f(\pi)<f(-2)<f(-3)$

C.$f(\pi)>f(-3)>f(-2)$

D.$f(\pi)<f(-3)<f(-2)$

A　**解析**:因为函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的单调递增函数,且 $-3<-2<\pi$,所以 $f(\pi)>f(-2)>f(-3)$.故选 A.

**2.**函数 $f(x)=-x^2+2x+3$ 的单调递减区间是　　(　　)

A.$(-\infty,1)$　　B.$(1,+\infty)$

C.$(-\infty,2)$　　D.$(2,+\infty)$

B　**解析**:易知函数 $f(x)=-x^2+2x+3$ 的图象开口向下,其对称轴为直线 $x=1$,所以该函数的单调递减区间是 $(1,+\infty)$.

**3.**(多选)下列函数中满足"对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$"的是　　(　　)

A.$f(x)=-\frac{2}{x}$

B.$f(x)=-3x+1$

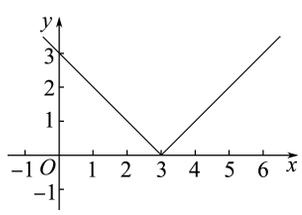
C.$f(x)=x^2+4x+3$

D.$f(x)=x-1$

ACD　**解析**:因为对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.对于 A,根据反比例函数的性质可知,$f(x)=-\frac{2}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,符合题意;对于 B,根据一次函数的性质可知,$f(x)=-3x+1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,不符合题意;对于 C,根据二次函数的性质可知,$f(x)=x^2+4x+3$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,符合题意;对于 D,根据一次函数的性质可知,$f(x)=x-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,符合题意.

**4.**设 $f(x)=|x-3|$,则 $f(x)$ 的单调递减区间为_____.

$(-\infty,3]$　**解析**:因为 $f(x)=|x-3|=\begin{cases}x-3,x>3,\\3-x,x\leqslant 3.\end{cases}$ 所以函数 $f(x)$ 的图象如图所示.




由图象可知,函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,3]$

**5.**已知函数 $f(x)=\frac{x^2+a}{x}$,且 $f(1)=2$.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2)用定义证明函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数.

(1)**解**:因为 $f(1)=\frac{1+a}{1}=2$,所以 $a=1$,所以 $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$.

(2)**证明**:$\forall x_1,x_2\in(1,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,

$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{x_1^2+1}{x_1}-\dfrac{x_2^2+1}{x_2}$

$=\dfrac{(x_1x_2-1)(x_1-x_2)}{x_1x_2}$.

因为 $1<x_1<x_2$，$x_1x_2>1$，所以 $x_1-x_2<0$，$x_1x_2-1>0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数.

## 能力提升

**1.** 函数 $f(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$ 的单调递减区间为（　　）

A.$[1,2]$　　B.$[2,3]$

C.$(-\infty,2]$　　D.$[2,+\infty)$

B　**解析**：由 $-x^2+4x-3\geqslant 0$，得 $1\leqslant x\leqslant 3$，所以函数 $f(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$ 的定义域为 $[1,3]$.

因为二次函数 $y=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1$ 图象的对称轴为直线 $x=2$，所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[2,3]$. 故选 B.

**2.** 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的减函数，且 $f(2a-3)<f(a-2)$，则实数 $a$ 的取值范围是（　　）

A.$(1,2]$　　B.$(1,3]$

C.$(1,4]$　　D.$(1,+\infty)$

A　**解析**：因为 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的减函数，且 $f(2a-3)<f(a-2)$，

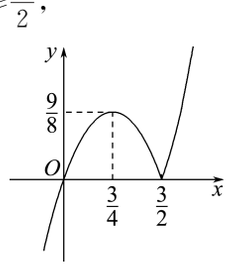
所以 $\begin{cases}-1\leqslant 2a-3\leqslant 1,\\ -1\leqslant a-2\leqslant 1,\\ 2a-3>a-2,\end{cases}$ 解得 $1<a\leqslant 2$.

**3.** 已知函数 $f(x)=x|2x-3|$，若 $f(x)$ 在区间 $I$ 上单调递减，则区间 $I$ 可能为（　　）

A.$\left(-\infty,\dfrac{3}{4}\right)$　　B.$(2,4)$

C.$\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$　　D.$\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{2}\right)$

D　**解析**：依题意，$f(x)=x|2x-3|=\begin{cases}(3-2x)x,x<\dfrac{3}{2},\\ (2x-3)x,x\geqslant\dfrac{3}{2},\end{cases}$ 画出 $f(x)$ 的图象如图所示.




由图象可知 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{3}{4}\right)$ 和 $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{2}\right)$ 上单调递减. 故选 D.

**4.** 函数 $f(x)$ 对任意 $a,b\in\mathbf{R}$，都有 $f(a+b)=f(a)+f(b)-1$，并且当 $x>0$ 时，$f(x)>1$.

(1)求证：$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数；

(2)若 $f(4)=5$，解不等式 $f(3m-2)<3$.

(1)**证明**：$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，则 $x_2-x_1>0$，$f(x_2-x_1)>1$.

所以 $f(x_2)-f(x_1)=f((x_2-x_1)+x_1)-f(x_1)$

$=f(x_2-x_1)+f(x_1)-1-f(x_1)=f(x_2-x_1)-1>0$.

所以 $f(x_2)>f(x_1)$.

故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

(2)**解**：因为 $f(4)=f(2+2)=f(2)+f(2)-1=5$，所以 $f(2)=3$.

所以原不等式可化为 $f(3m-2)<f(2)$.

由(1)可知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，所以 $3m-2<2$，解得 $m<\dfrac{4}{3}$.

故原不等式的解集为 $\left(-\infty,\dfrac{4}{3}\right)$.

## 自我超越

已知函数 $f(x)=\begin{cases}(2a-3)x+2,x\leqslant 1,\\ \dfrac{a}{x},x>1\end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，则 $a$ 的取值范围是（　　）

A.$\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$　　B.$\left[1,\dfrac{3}{2}\right)$

C.$\left(0,\dfrac{3}{2}\right]$　　D.$\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$

B　**解析**：由于函数 $f(x)=\begin{cases}(2a-3)x+2,x\leqslant 1,\\ \dfrac{a}{x},x>1\end{cases}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数，

所以函数 $y=(2a-3)x+2$ 在区间 $(-\infty,1]$ 上为减函数，

函数 $y=\dfrac{a}{x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上为减函数，且有 $(2a-3)\times 1+2\geqslant\dfrac{a}{1}$，即 $\begin{cases}2a-3<0,\\ a>0,\\ 2a-1\geqslant a,\end{cases}$ 解得 $1\leqslant a<\dfrac{3}{2}$.

因此，实数 $a$ 的取值范围是 $\left[1,\dfrac{3}{2}\right)$. 故选 B.

# 第2课时　函数的最大(小)值

**学习任务目标**

1.理解函数的最大值和最小值的概念及其几何意义.
2.能借助函数的图象和单调性,求一些简单函数的最值.
3.能利用函数的最值解决有关的实际应用问题.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点　函数的最大(小)值**

| | 最大值 | 最小值 |
|---|---|---|
| 条件 | 一般地,设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D$,如果存在实数 $M$ 满足 $\forall x\in D$,都有 | |
| | $f(x)\leqslant M$ | $f(x)\geqslant M$ |
| | $\exists x_0\in D$,使得 $f(x_0)=M$ | |
| 结论 | $M$ 是函数 $y=f(x)$ 的最大值 | $M$ 是函数 $y=f(x)$ 的最小值 |
| 几何意义 | $f(x)$ 图象上最高点的纵坐标 | $f(x)$ 图象上最低点的纵坐标 |

### 【概念辨析】

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").
(1)函数 $y=f(x)$ 的最大值是图象最高点的纵坐标. (　　)
(2)一个函数可能有多个最小值. (　　)
(3)函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最值不一定是 $f(a)$(或 $f(b)$). (　　)
(4)若一个函数有最大值,则最大值不一定是其值域中的一个元素. (　　)

(1)√
(2)× **解析**:最大(小)值至多有1个.
(3)√ **解析**:函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不一定是单调函数,故最值不一定是 $f(a)$(或 $f(b)$).
(4)× **解析**:若函数有最大(小)值,则一定是其值域中的一个元素.

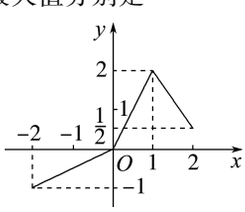
2.设函数 $f(x)=2x-1(x<0)$,则 $f(x)$ (　　)
A.有最大值
B.有最小值
C.既有最大值又有最小值
D.既无最大值又无最小值

D **解析**:因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增,所以 $f(x)<f(0)=-1$.故选D.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1 利用图象求函数的最值

1.函数 $y=f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的图象如图所示,则此函数的最小值和最大值分别是 (C)

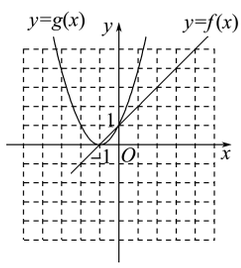



A.$-1,0$　　B.$0,2$
C.$-1,2$　　D.$\frac{1}{2},2$

C **解析**:由题图可知,$f(x)$ 的最大值为 $f(1)=2$,$f(x)$ 的最小值为 $f(-2)=-1$.故选C.

2.已知函数 $f(x)$ 为一次函数,且 $f(x+1)=x+2$,$g(x)=(x+1)^2$.
(1)求 $f(x)$ 的解析式;
(2)$\forall x\in\mathbf{R}$,用 $M(x)$ 表示 $f(x)$,$g(x)$ 中的较大者,记 $M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$,请用分段函数表示 $M(x)$ 的解析式并求 $M(x)$ 的最小值.

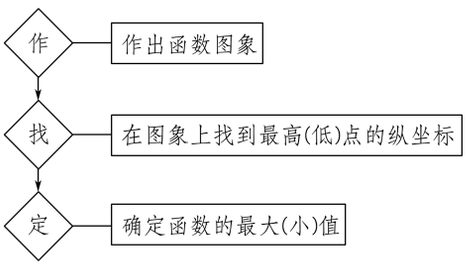
**解**:(1)因为 $f(x+1)=x+2$,所以 $f(x+1)=(x+1)+1$,所以 $f(x)=x+1$.
(2)在同一平面直角坐标系下,画出两函数的图象,如图所示.




由图可知,两函数图象的交点坐标分别为 $(-1,0)$,$(0,1)$.
又 $M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$,所以 $M(x)=\begin{cases}(x+1)^2,x\leqslant -1,\\ x+1,-1<x<0,\\ (x+1)^2,x\geqslant 0,\end{cases}$ 且 $M(x)_{\min}=M(-1)=0$.

【探究总结】

图象法求函数最值的步骤




## 任务2 利用单调性求函数的最值

### 探究活动

**例1**　(1)函数 $y=x^2-2x$，$x\in[0,3]$的最小值是_____，最大值是_____.

(2)(教材P81例5改编)已知函数 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$，$x\in[3,5]$，求$f(x)$的最大值和最小值.

(1)$-1$　3　**解析**：因为函数 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$，$x\in[0,3]$，

所以当 $x=1$ 时，函数取得最小值$-1$，

当 $x=3$ 时，函数取得最大值3.

(2)**解**：$\forall x_1,x_2\in[3,5]$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{2x_1-1}{x_1+1}-\dfrac{2x_2-1}{x_2+1}$

$=\dfrac{3(x_1-x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}$.

因为 $3\leqslant x_1<x_2\leqslant5$，

所以 $x_1-x_2<0$，$x_1+1>0$，$x_2+1>0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以函数 $f(x)$在$[3,5]$上单调递增.

所以 $f(x)$的最小值为 $f(3)=\dfrac{2\times3-1}{3+1}=\dfrac{5}{4}$，最大值为$f(5)=\dfrac{2\times5-1}{5+1}=\dfrac{3}{2}$.

[一题多思]

**思考1.**本例(1)中，若把“$x\in[0,3]$”改为“$x\in(0,3)$”，函数的最值发生怎样的变化？

**提示**：函数的最小值不变，没有最大值.

**思考2.**求函数的最值时，若所给函数的单调性不明确，我们应该怎么办？

**提示**：先利用定义证明函数的单调性，再利用单调性求最值.

**思考3.**本例(2)中，若把函数换为“$f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$，$x\in[2,4]$”，你能求出它的最大值与最小值吗？

**提示**：$\forall x_1,x_2\in[2,4]$，且 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{2x_1+1}{x_1+1}-\dfrac{2x_2+1}{x_2+1}=\dfrac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}$.

因为 $2\leqslant x_1<x_2\leqslant4$，

所以 $x_1+1>0$，$x_2+1>0$，$x_1-x_2<0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以 $f(x)$在$[2,4]$上单调递增.

所以 $f(x)$的最小值为 $f(2)=\dfrac{2\times2+1}{2+1}=\dfrac{5}{3}$，最大值为$f(4)=\dfrac{2\times4+1}{4+1}=\dfrac{9}{5}$.

【探究总结】

利用函数的单调性求最值的关注点

(1)若函数 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上单调递增，则 $f(x)$的最大值为 $f(b)$，最小值为$f(a)$.

(2)若函数 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上单调递减，则 $f(x)$的最大值为 $f(a)$，最小值为$f(b)$.

(3)若函数 $y=f(x)$有多个单调区间，则先求出各区间上的最值，再从各区间的最值中比较出最大(小)值.函数的最大(小)值是整个值域范围内的最大(小)值.

(4)若函数的定义域为闭区间，则不但要考虑函数在该区间上的单调性，还要考虑端点处的函数值.

### 应用迁移

已知函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

(1)证明：$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增；

(2)求 $f(x)$在$[2,4]$上的最值.

(1)**证明**：对于任意 $x_1,x_2\in(1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

$f(x_1)-f(x_2)=x_1+\dfrac{1}{x_1}-x_2-\dfrac{1}{x_2}=(x_1-x_2)\cdot\left(1-\dfrac{1}{x_1x_2}\right)=\dfrac{(x_1-x_2)(x_1x_2-1)}{x_1x_2}$.

因为 $x_2>x_1>1$，所以 $x_1-x_2<0$.

又因为 $x_1x_2>1$，所以 $x_1x_2-1>0$.

故$(x_1-x_2)\cdot\dfrac{(x_1x_2-1)}{x_1x_2}<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以 $f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增.

(2)**解**：由(1)可知，$f(x)$在$[2,4]$上单调递增，

所以当 $x\in[2,4]$时，$f(2)\leqslant f(x)\leqslant f(4)$.

又因为 $f(2)=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$，$f(4)=4+\dfrac{1}{4}=\dfrac{17}{4}$，

所以 $f(x)$在$[2,4]$上的最大值为$\dfrac{17}{4}$，最小值为$\dfrac{5}{2}$.

## 任务3 函数最值的实际应用

### 探究活动

**例2**　一个工厂生产某种产品每年需要固定投资100万元，此外每生产1件该产品还需要增加投资1万元，年产量为$x(x\in\mathbf{N}^*)$件，当$x\leqslant20$时，年销售总收

入为$(33x-x^2)$万元；当$x>20$时，年销售总收入为260万元.设该工厂生产并销售这种产品所得的年利润(年利润=年销售总收入-年总投资)为$y$万元.

(1)求$y$与$x$的函数关系式.

(2)当该工厂的年产量为多少件时，所得年利润最大？最大年利润是多少？

**解**：(1)当$0<x\leqslant 20$时，

$y=(33x-x^2)-x-100=-x^2+32x-100$；

当$x>20$时，$y=260-100-x=160-x$.

故$y=\begin{cases}-x^2+32x-100,0<x\leqslant 20,\\160-x,x>20\end{cases}(x\in\mathbf{N}^*)$.

(2)当$0<x\leqslant 20$时，$y=-x^2+32x-100=-(x-16)^2+156$，当$x=16$时，$y_{max}=156$；

当$x>20$时，$160-x<140$.

故$x=16$时所得年利润最大，最大年利润为156万元.

即当该工厂年产量为16件时，所得最大年利润156万元.

## 【探究总结】

**求解实际应用中的最值问题的步骤**

(1)审题：把问题情境“翻译”为数学语言，找出问题中的主要关系.

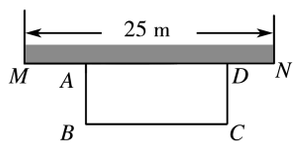
(2)建模：建立函数模型，把实际问题转化成函数问题.

(3)求解：选择合适的数学方法求出函数的最值.

(4)评价：对结果进行验证或评估，并将结果应用于现实，作出解释.

## 应用迁移

如图，某中学准备在校园里利用院墙的一段，用篱笆围成一个矩形花园$ABCD$.已知院墙$MN$的长为25 m，篱笆长为50 m(篱笆全部用完)，设篱笆的一面$AB$的长为$x$ m.




(1)当$AB$的长为多少时，矩形花园的面积为300 m$^2$？

(2)若围成的矩形花园$ABCD$的面积为$S$ m$^2$，当$x$为何值时，$S$有最大值？最大值是多少？

**解**：(1)因为$AB=x$ m，所以$BC=(50-2x)$m.

由题意得，$x(50-2x)=300$，

解得$x_1=15$，$x_2=10$.

因为$\begin{cases}0<x<25,\\0<50-2x\leqslant 25,\end{cases}$所以$12.5\leqslant x<25$，所以$x=15$.

所以，$AB$的长为15 m时，矩形花园的面积为300 m$^2$.

(2)由题意得，$S=x(50-2x)=-2x^2+50x=-2(x-12.5)^2+312.5$，$12.5\leqslant x<25$，

所以当$x=12.5$时，$S$取得最大值，最大值为312.5.

# 课后素养评价(二十一)

## 基础落实

**1.**函数$y=\dfrac{x+2}{x-3}$，$x\in[4,8]$的最大值是　　(　　)

A.5　　B.6　　C.7　　D.8

B　**解析**：函数$y=\dfrac{x+2}{x-3}=1+\dfrac{5}{x-3}$，$x\in[4,8]$单调递减，所以当$x=4$时，函数的最大值是6.

**2.**(多选)若函数$y=ax+1$在$[1,2]$上的最大值与最小值的差为2，则实数$a$的值可能是　　(　　)

A.2　　B.-2　　C.1　　D.0

AB　**解析**：由题意知$a\neq 0$，当$a>0$时，$y=ax+1$在$[1,2]$上单调递增，有$(2a+1)-(a+1)=2$，解得$a=2$；当$a<0$时，$y=ax+1$在$[1,2]$上单调递减，有$(a+1)-(2a+1)=2$，解得$a=-2$.综上可知$a=\pm 2$.

**3.**已知二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$的最大值为$f(4)$，则　　(　　)

A.$f(5)>f(2)>f(8)$

B.$f(8)>f(5)>f(2)$

C.$f(8)>f(2)>f(5)$

D.$f(2)>f(8)>f(5)$

A　**解析**：因为二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$的最大值为$f(4)$，所以$a<0$，且$f(x)=ax^2+bx+c$的图象关于直线$x=4$对称.所以$f(2)=f(6)$，且$f(x)$在$[4,+\infty)$上单调递减，故$f(5)>f(6)=f(2)>f(8)$.故选A.

**4.**射出的弓箭以$a$ m/s的初速度从地面垂直向上运动，$t$ s时弓箭距离地面的高度为$x$ m，$x$与$t$的关系为$x=at-5t^2$.若3 s时弓箭距离地面的高度为135 m，则弓箭可以到达的最大高度为_____m.

180　**解析**：由题意，当$t=3$时，$x=135$，代入$x=at-5t^2$，可得$135=3a-5\times 9$，解得$a=60$，则$x=60t-5t^2=-5(t-6)^2+180$.故当$t=6$时，$x$取得最大值，最大值为180.

**5.**已知函数$f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

(1)判断函数在区间$(-1,+\infty)$上的单调性，并用定义证明你的结论；

(2)求该函数在区间[2,4]上的最大值和最小值.

**解**:(1)$f(x)$在$(-1,+\infty)$上为增函数.证明如下:

设$\forall x_1,x_2\in(-1,+\infty)$,且$x_1<x_2$,

则$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{2x_1+1}{x_1+1}-\dfrac{2x_2+1}{x_2+1}$

$=\dfrac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}$.

因为$-1<x_1<x_2$,所以$x_1+1>0$,$x_2+1>0$,$x_1-x_2<0$,

所以$f(x_1)-f(x_2)<0$,即$f(x_1)<f(x_2)$.

故$f(x)$在$(-1,+\infty)$上为增函数.

(2)由(1)可知,$f(x)$在[2,4]上单调递增,

所以$f(x)$的最小值为$f(2)=\dfrac{2\times2+1}{2+1}=\dfrac{5}{3}$,

最大值为$f(4)=\dfrac{2\times4+1}{4+1}=\dfrac{9}{5}$.

## 能力提升

**1.**若函数$y=x^2-2x-3$的定义域是$[0,a]$,值域是$[-4,-3]$,则实数$a$的取值范围是　　(　　)

A.[1,2]　　B.[1,3]

C.[1,4]　　D.$[1,+\infty)$

A　**解析**:由$y=f(x)=x^2-2x-3$,可得对称轴为直线$x=1$,且$f(1)=-4$为最小值.

又由$f(0)=f(2)=-3$,函数$y=x^2-2x-3$的定义域为$[0,a]$,值域为$[-4,-3]$,

可得$1\leqslant a\leqslant2$,即实数$a$的取值范围是[1,2].故选A.

**2.**若不等式$2x-1+m<0$对$\forall x\in[-1,2]$恒成立,则$m$的取值范围是　　(　　)

A.$(3,+\infty)$　　B.$(-3,+\infty)$

C.$(-\infty,3)$　　D.$(-\infty,-3)$

D　**解析**:由题意,得$m<-2x+1$对$\forall x\in[-1,2]$恒成立,且$y=-2x+1$在$x\in[-1,2]$的最小值为$-3$,则$m<-3$.故选D.

**3.**某公司生产的一种产品,它的成本是2元/件,售价是3元/件,月销售量为10万件.为了获得更好的效益,公司准备拿出一定的资金做广告.根据经验,每月投入的广告费是$x$(单位:万元)时,产品的月销售量将是原销售量的$t$倍,且$t$是$x$的二次函数,它们的关系如下表:

| $x$/万元 | 0 | 1 | 2 | … |
|---|---|---|---|---|
| $t$ | 1 | 1.5 | 1.8 | … |

(1)求$t$关于$x$的函数解析式.

(2)如果把利润看作销售总额减去成本费和广告费,试写出月利润$S$(单位:万元)关于广告费$x$(单位:万元)的函数解析式.

(3)如果投入的月广告费$x$在区间[1,2]内,问:当月广告费为多少时,公司可获得最大月利润?最大月利润为多少?

**解**:(1)设二次函数的解析式为$t=ax^2+bx+c(a\neq0)$.

由题表得$\begin{cases}c=1,\\a+b+c=1.5,\\4a+2b+c=1.8,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-0.1,\\b=0.6,\\c=1.\end{cases}$

所以所求函数的解析式为$t=-0.1x^2+0.6x+1(x\geqslant0)$.

(2)根据题意得$S=10t\cdot(3-2)-x$,

整理得$S=-x^2+5x+10(x\geqslant0)$,

所以$S=-x^2+5x+10=-\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{65}{4}$.

(3)因为$x\in[1,2]$时,$S$随$x$的增大而增大,

所以当$x=2$时,$S$取得最大值16.

故当月广告费为2万元时,公司可获得最大月利润,最大月利润为16万元.

## 自我超越

(多选)定义一种运算$\min\{a,b\}=\begin{cases}a,a\leqslant b,\\b,a>b.\end{cases}$设$f(x)=\min\{4+2x-x^2,|x-t|\}$($t$为常数),且$x\in[-3,3]$,则使函数$f(x)$的最大值为4的$t$的值可以是　　(　　)

A.$-2$　　B.6

C.4　　D.$-4$

AC　**解析**:函数$y=4+2x-x^2$在$[-3,3]$上的最大值为5.

由$4+2x-x^2=4$,解得$x=2$或$x=0$,

所以当$x\in(0,2)$时,$y=4+2x-x^2>4$.

要使函数$f(x)$的最大值为4,则根据定义可知,

若$t<1$,则当$x=2$时,$|2-t|=4$,解得$t=-2$,符合题意;

若$t>1$,则当$x=0$时,$|0-t|=4$,解得$t=4$,符合题意.

综上所述,$t=-2$或$t=4$.

# 微专题培优(三)　二次函数的最值问题

二次函数是单峰(谷)函数,$x=-\frac{b}{2a}$为其图象顶点的横坐标,在其两侧二次函数具有相反的单调性.高中阶段将进一步探究二次函数最值的求法,包括二次函数在固定区间、动区间上的最值的求法以及含参数的二次函数在定区间上的最值的求法.求二次函数在给定区间上的最值,其核心是函数图象的对称轴与给定区间的相对位置的讨论.

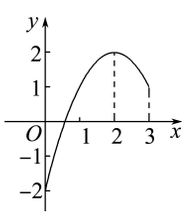
## 类型1 “轴定区间定”问题

**例1**　求函数 $y=-x^2+4x-2$ 在区间$[0,3]$上的最大值和最小值.

**解**:函数 $y=-x^2+4x-2=-(x-2)^2+2$,

其图象的对称轴是 $x=2$,顶点坐标为$(2,2)$,且开口向下,

其在$[0,3]$上的大体图象如图所示.




故函数的最大值为 $f(2)=2$,最小值为 $f(0)=-2$.

**【规律方法】**

定二次函数在定区间上的最值,其区间和对称轴都是确定的,先将函数配方,再根据对称轴和区间的关系,结合函数在区间上的单调性,求其最值(可结合图象).

**【对点训练】**

已知二次函数 $f(x)=x^2-2x+3$.

(1)当 $x\in[-2,0]$时,求 $f(x)$的最值;

(2)当 $x\in[-2,3]$时,求 $f(x)$的最值.

**解**:函数 $f(x)=(x-1)^2+2$ 的图象开口向上,对称轴为直线 $x=1$.

(1)当 $x\in[-2,0]$时,$f(x)$单调递减,

所以 $f(x)_{\max}=f(-2)=11$,$f(x)_{\min}=f(0)=3$.

(2)当 $x\in[-2,3]$时,$f(x)$在$[-2,1]$上单调递减,在$(1,3]$上单调递增,

所以 $f(x)_{\max}=f(-2)=11$,$f(x)_{\min}=f(1)=2$.

## 类型2 “轴变区间定”问题

**例2**　求函数 $f(x)=x^2-2ax+2$ 在$[-1,1]$上的最小值.

**解**:函数 $f(x)=x^2-2ax+2$ 的图象开口向上,对称轴为直线 $x=a$.

①当 $a\leqslant-1$ 时,函数 $f(x)$在$[-1,1]$上单调递增,

$f(x)_{\min}=f(-1)=1+2a+2=2a+3$.

②当 $-1<a\leqslant1$ 时,函数 $f(x)$在$[-1,1]$上先减后增,

$f(x)_{\min}=f(a)=a^2-2a^2+2=-a^2+2$.

③当 $a>1$ 时,函数 $f(x)$在$[-1,1]$上单调递减,

$f(x)_{\min}=f(1)=1-2a+2=3-2a$.

综上所述,当 $a\leqslant-1$ 时,$f(x)_{\min}=2a+3$;

当 $-1<a\leqslant1$ 时,$f(x)_{\min}=-a^2+2$;

当 $a>1$ 时,$f(x)_{\min}=3-2a$.

**【规律方法】**

动二次函数在定区间上的最值,其区间是确定的,而对称轴是变化的,应根据对称轴在区间的左侧、右侧和区间上这三种情况分类讨论,再利用二次函数的示意图,结合其单调性求解.

**【对点训练】**

求函数 $f(x)=x^2-ax+1$ 在$[0,1]$上的最大值.

**解**:因为 $f(x)=x^2-ax+1$ 的图象开口向上,对称轴为直线 $x=\frac{a}{2}$,

所以 $f(x)$在$\left(-\infty,\frac{a}{2}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$上单调递增.

①若$\frac{a}{2}>1$,即 $a>2$,则 $f(x)$在$[0,1]$上单调递减,

所以 $f(x)_{\max}=f(0)=1$.

②若$\frac{a}{2}<0$,即 $a<0$,则 $f(x)$在$[0,1]$上单调递增,

所以 $f(x)_{\max}=f(1)=2-a$.

③若 $0\leqslant\frac{a}{2}\leqslant1$,即 $0\leqslant a\leqslant2$.

当 $0\leqslant\frac{a}{2}\leqslant\frac{1}{2}$,即 $0\leqslant a\leqslant1$ 时,$f(x)_{\max}=f(1)=2-a$,

当$\frac{1}{2}<\frac{a}{2}\leqslant1$,即 $1<a\leqslant2$ 时,$f(x)_{\max}=f(0)=1$.

综上所述,函数 $f(x)=x^2-ax+1$ 在$[0,1]$上的最大值为 1 或 $2-a$.

## 类型3 “轴定区间变”问题

**例3**　求函数 $f(x)=x^2-2x+3$ 在区间 $[t,t+1]$ 上的最小值.

**解**：函数 $f(x)=x^2-2x+3$ 的图象开口向上，对称轴为直线 $x=1$.

①当 $t>1$ 时，$f(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(t)=t^2-2t+3$；

②当 $t\leqslant 1\leqslant t+1$，即 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，

$f(x)_{\min}=f(1)=1-2+3=2$；

③当 $t+1<1$，即 $t<0$ 时，$f(x)$ 在区间 $[t,t+1]$ 上单调递减，

所以 $f(x)_{\min}=f(t+1)=(t+1)^2-2(t+1)+3=t^2+2$.

综上所述，当 $t>1$ 时，$f(x)_{\min}=t^2-2t+3$；

当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$f(x)_{\min}=2$；

当 $t<0$ 时，$f(x)_{\min}=t^2+2$.

**【规律方法】**

定二次函数在动区间上的最值，其对称轴确定而区间是变化的，只需讨论对称轴是否在动区间上.

**【对点训练】**

已知函数 $f(x)=-x^2+8x$，求 $f(x)$ 在区间 $[t,t+1]$ 上的最大值 $h(t)$.

**解**：函数 $f(x)=-x^2+8x=-(x-4)^2+16$ 的图象开口向下，对称轴为直线 $x=4$.

①当 $t+1<4$，即 $t<3$ 时，$f(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上单调递增，

则 $h(t)=f(t+1)=-(t+1)^2+8(t+1)=-t^2+6t+7$.

②当 $t\leqslant 4\leqslant t+1$，即 $3\leqslant t\leqslant 4$ 时，$h(t)=f(4)=16$.

③当 $t>4$ 时，$f(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上单调递减，

则 $h(t)=f(t)=-t^2+8t$.

综上所述，$h(t)=\begin{cases}-t^2+6t+7,t<3,\\16,3\leqslant t\leqslant 4,\\-t^2+8t,t>4.\end{cases}$

## 类型4 “轴变区间变”问题

**例4**　已知 $a$ 是正数，且函数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x-ax+2$ 在 $\left[0,\frac{2}{a}\right]$ 上的最大值为 $M(a)$，求 $M(a)$ 的解析式.

**解**：因为 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x-ax+2=-\frac{1}{2}[x-(3-a)]^2+\frac{(3-a)^2}{2}+2$，

所以 $x=3-a$ 为图象对称轴.

①当 $3-a<0$，即 $a>3$ 时，$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{2}{a}\right]$ 上单调递减，$M(a)=f(0)=2$；

②当 $0\leqslant 3-a\leqslant\frac{2}{a}$，即 $0<a\leqslant 1$ 或 $2\leqslant a\leqslant 3$ 时，$M(a)=f(3-a)=\frac{(3-a)^2}{2}+2$；

③当 $3-a>\frac{2}{a}$，即 $1<a<2$ 时，$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{2}{a}\right]$ 上单调递增，$M(a)=f\left(\frac{2}{a}\right)=\frac{6a-2}{a^2}$.

综上所述，

$$M(a)=\begin{cases}2,a>3,\\\frac{(3-a)^2}{2}+2,0<a\leqslant 1\text{ 或 }2\leqslant a\leqslant 3,\\\frac{6a-2}{a^2},1<a<2.\end{cases}$$

**【规律方法】**

动二次函数在动区间上的最值，其区间和对称轴均是变化的，根据对称轴在区间的左侧、右侧和区间上这三种情况讨论，并结合图象和单调性求解.

**【对点训练】**

已知函数 $f(x)=2x^2-ax+1$，$x\in[-1,a]$，且 $f(x)$ 的最大值为 $f(a)$，求实数 $a$ 的取值范围.

**解**：$f(x)=2\left(x-\frac{a}{4}\right)^2+1-\frac{a^2}{8}$ 的图象关于直线 $x=\frac{a}{4}$ 对称.

当 $-1<a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $[-1,a]$ 上单调递减，

所以 $f(x)_{\max}=f(-1)$，不合题意.

当 $a>0$ 时，$\frac{a}{4}\in[-1,a]$，

所以 $f(x)$ 在 $\left[-1,\frac{a}{4}\right)$ 上单调递减，在 $\left[\frac{a}{4},a\right]$ 上单调递增，要使 $f(a)$ 为最大值，则 $f(a)\geqslant f(-1)$，

即 $2a^2-a^2+1\geqslant 2+a+1$，

解得 $a\geqslant 2$ 或 $a\leqslant -1$（舍）.

所以实数 $a$ 的取值范围为 $[2,+\infty)$.

# 3.2.2　奇偶性

## 第1课时　函数的奇偶性

**学习任务目标**

1.了解函数奇偶性的概念，掌握判断函数奇偶性的方法.
2.了解奇函数、偶函数图象的特征.
3.会利用函数的奇偶性求函数或参数的值.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　函数的奇偶性**

| 奇偶性 | 偶函数 | 奇函数 |
|---|---|---|
| 条件 | 一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，如果 $\forall x\in D$，都有 $-x\in D$ | |
| 结论 | $f(-x)=\underline{f(x)}$ | $f(-x)=\underline{-f(x)}$ |
| 图象特点 | 关于 $\underline{y}$ 轴对称 | 关于 $\underline{原点}$ 对称 |

**知识点二　奇偶函数的运算性质**

在公共定义域内，
(1)两个奇函数的和是 $\underline{奇}$ 函数，两个奇函数的积是 $\underline{偶}$ 函数；
(2)两个偶函数的和、积都是偶函数；
(3)一个奇函数、一个偶函数的积是 $\underline{奇}$ 函数.

### 【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).
(1)函数 $f(x)$ 的定义域是 **R**，且 $f(-1)=f(1)$，$f(-2)=f(2)$，则 $f(x)$ 是偶函数.　(　)
(2)函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，且 $f(5)=-3$，则 $f(-5)=3$.　(　)
(3)若 $f(x)$ 是偶函数，则必有 $f(x)=f(-x)=f(|x|)$.　(　)
(1)×　**解析**：所给关系式 $f(-1)=f(1)$，$f(-2)=f(2)$ 不满足任意性.
(2)√　**解析**：因为 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，所以 $f(-5)=-f(5)=3$.
(3)√

2.若函数 $y=f(x)$，$x\in[-1,a](a>-1)$ 是奇函数，则 $a=$　(　)
A.$-1$
B.0
C.1
D.无法确定
C　**解析**：因为奇函数的定义域关于原点对称，所以 $a-1=0$，即 $a=1$.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1　函数奇偶性的判断

1.下列函数是奇函数的是　(　)
A.$f(x)=x^2+1$　　B.$f(x)=x^3-1$
C.$f(x)=x^3+\dfrac{1}{x}$　　D.$f(x)=x^4+2x^2$
C　**解析**：对于A，因为 $f(x)=x^2+1$ 的定义域为 **R**，且 $f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x)$，所以 $f(x)=x^2+1$ 为偶函数；对于B，因为 $f(x)=x^3-1$ 的定义域为 **R**，且 $f(-x)=(-x)^3-1=-x^3-1\neq -f(x)$，所以 $f(x)=x^3-1$ 不是奇函数；对于C，因为 $f(x)=x^3+\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且 $f(-x)=(-x)^3+\dfrac{1}{-x}=-x^3-\dfrac{1}{x}=-\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$，所以 $f(x)=x^3+\dfrac{1}{x}$ 为奇函数；对于D，因为 $f(x)=x^4+2x^2$ 的定义域为 **R**，且 $f(-x)=(-x)^4+2(-x)^2=x^4+2x^2=f(x)$，所以 $f(x)=x^4+2x^2$ 为偶函数.故选C.

2.下列函数是偶函数的是　(　)
A.$y=|x|,x\in(-1,1]$　　B.$y=\sqrt{x}$
C.$y=2x^2-3$　　D.$y=x$
C　**解析**：对于A，定义域为 $(-1,1]$，故选项A不符合题意；
对于B，定义域为 $[0,+\infty)$，故选项B不符合题意；
对于C，定义域为 **R**，且 $f(-x)=2(-x)^2-3=2x^2-3=f(x)$，是偶函数，故选项C符合题意；
对于D，定义域为 **R**，且 $f(-x)=-x=-f(x)$，

是奇函数，故选项D不符合题意.故选C.

3.（多选）设函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域都为 **R**，且 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，则下列结论中正确的是　　（ABD）

A. $f(x)g(x)$ 是奇函数

B. $|f(x)|g(x)$ 是偶函数

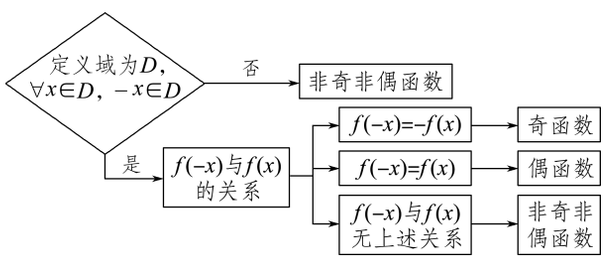
C. $f(x)|g(x)|$ 是偶函数

D. $|f(x)g(x)|$ 是偶函数

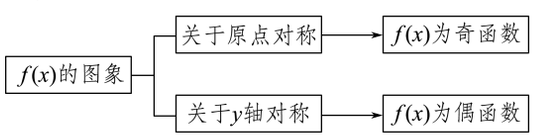
## 【探究总结】

**判断函数奇偶性的方法**

（1）定义法：



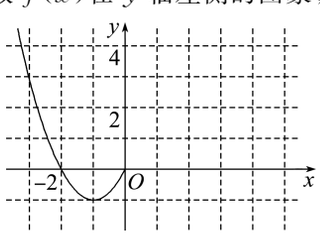

（2）图象法：




## 任务2 奇、偶函数图象的应用

### 探究活动

**例1**　（教材P85思考改编）已知函数 $y=f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数，且当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=x^2+2x$. 现已画出函数 $f(x)$ 在 $y$ 轴左侧的图象，如图所示.

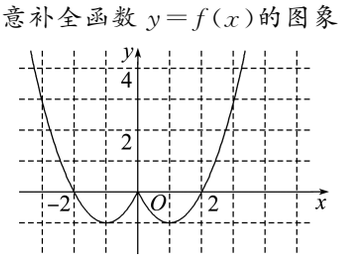



（1）请补全函数 $y=f(x)$ 的图象；

（2）根据图象写出函数 $y=f(x)$ 的单调递增区间；

（3）根据图象写出使 $f(x)<0$ 的 $x$ 的取值集合.

**解**：（1）由题意补全函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示.




（2）由图可知，函数 $y=f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,0)$，$(1,+\infty)$.

（3）由图可知，使 $f(x)<0$ 的 $x$ 的取值集合为 $\{x\mid -2<x<2$，且 $x\neq 0\}$.

［一题多思］

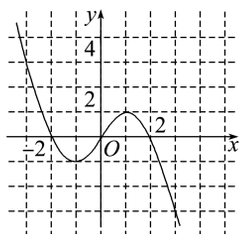
将本例中的“偶函数”改为“奇函数”，其他条件不变.

（1）作出函数 $y=f(x)$ 的图象.

（2）写出函数 $y=f(x)$ 的单调递增区间.

（3）写出使 $f(x)<0$ 的 $x$ 的取值集合.

（1）**提示**：函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示.




（2）**提示**：由图可知，函数 $y=f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,1)$.

（3）**提示**：由图可知，使 $f(x)<0$ 的 $x$ 的取值集合为 $\{x\mid -2<x<0$，或 $x>2\}$.

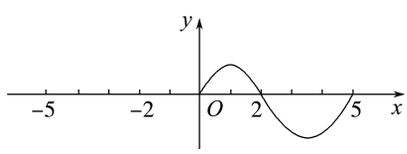
## 【探究总结】

**巧用奇、偶函数的图象解决问题的依据**

根据奇、偶函数图象的对称性可以解决求值、比较大小及解不等式等问题.依据为奇函数⇔图象关于原点对称，偶函数⇔图象关于 $y$ 轴对称.

### 应用迁移

已知奇函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-5,5]$，且在区间 $[0,5]$ 上的图象如图所示.

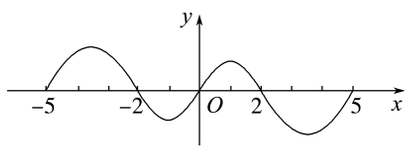



（1）画出 $y=f(x)$ 在区间 $[-5,0]$ 上的图象；

（2）写出使 $f(x)<0$ 的 $x$ 的取值范围.

**解**：（1）因为函数 $y=f(x)$ 是奇函数，所以 $y=f(x)$ 在 $[-5,5]$ 上的图象关于原点对称.

由 $y=f(x)$ 在 $[0,5]$ 上的图象，可知它在 $[-5,0]$ 上的图象如图所示.




（2）由图象可知，使 $f(x)<0$ 的 $x$ 的取值范围为 $(-2,0)\cup(2,5)$.

## 任务3 利用函数的奇偶性求值

### 探究活动

**例2**　（1）已知函数 $y=f(x)$ 在 **R** 上是奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-2x$，则 $f(-1)=$　　（　　）

A. $-1$　　B. $1$　　C. $0$　　D. $\pm 1$

(2)若函数 $f(x)=x^2+ax+1$ 是定义在 $(-b,2b-2)$ 上的偶函数,则 $f\left(\frac{b}{2}\right)=$ (　　)

A.$\frac{1}{4}$　　B.$\frac{5}{4}$　　C.$\frac{7}{4}$　　D.2

(3)设函数 $f(x)=\frac{x^2+(a+1)x+a}{x}$ 为奇函数,则实数 $a=$ (　　)

A.$-1$　　B.1　　C.0　　D.$-2$

(1)B　**解析**:$f(1)=1^2-2=-1$,又 $f(x)$ 在 **R** 上是奇函数,故 $f(-1)=-f(1)=1$.故选 B.

(2)D　**解析**:因为函数 $f(x)=x^2+ax+1$ 是定义在 $(-b,2b-2)$ 上的偶函数,

所以 $-b+2b-2=0$ 且 $f(-x)=x^2-ax+1=x^2+ax+1=f(x)$,则 $\begin{cases}a=0,\\b=2,\end{cases}$

所以 $f(x)=x^2+1$,则 $f\left(\frac{b}{2}\right)=f(1)=1^2+1=2$.故选 D.

(3)A　**解析**:(方法一)根据题意知,函数 $f(x)=\frac{x^2+(a+1)x+a}{x}$ 为奇函数,则有 $f(x)+f(-x)=0$,即 $\frac{x^2+(a+1)x+a}{x}+\frac{(-x)^2-(a+1)x+a}{-x}=0$,整理可得 $(a+1)x=0$,则有 $a=-1$.

(方法二)因为 $f(x)$ 是奇函数,所以 $f(-1)=-f(1)$,即 $2a+2=0$,解得 $a=-1$.经检验,此时,$f(x)$ 是奇函数.所以 $a=-1$.

## 【探究总结】

**利用函数奇偶性求值的常见类型**

(1)求参数值:若解析式含参数,则根据 $f(-x)=-f(x)$ 或 $f(-x)=f(x)$ 列式,利用待定系数法求解;若定义域含参数,则根据定义域区间的端点值之和为 0 求参数值.

(2)求函数值:利用 $f(-x)=-f(x)$ 或 $f(-x)=f(x)$ 求解,有时需要构造奇函数或偶函数以便于求值.

## 应用迁移

**1.**已知 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数,当 $x>0$ 时,$f(x)=3x-\frac{a}{x}$.若 $f(1)+f(0)=2$,则 $f(-2)=$ (　　)

A.$\frac{9}{2}$　　B.$-\frac{9}{2}$　　C.$-\frac{11}{2}$　　D.$\frac{11}{2}$

C　**解析**:因为 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数,所以 $f(0)=0$,$f(1)=3-a$,所以 $3-a=2$,得 $a=1$.故当 $x>0$ 时,$f(x)=3x-\frac{1}{x}$,则 $f(-2)=-f(2)=-\frac{11}{2}$.故选 C.

**2.**若函数 $f(x)=x^2+(a-2)x+1$ 为偶函数,$g(x)=\frac{x-3+b}{x^2+2}$ 为奇函数,则 $a+b$ 的值为 (　　)

A.2　　B.3　　C.4　　D.5

D　**解析**:因为函数 $f(x)=x^2+(a-2)x+1$ 为偶函数,

所以 $a=2$.

因为 $g(x)=\frac{x-3+b}{x^2+2}$ 为奇函数,且定义域为 **R**,

所以 $g(0)=\frac{-3+b}{0+2}=0$,$b=3$,

所以 $a+b=5$.

# 课后素养评价(二十二)

## 基础落实

**1.**(多选)下列函数中,是奇函数的是 (　　)

A.$y=x+1$　　B.$y=-x^2$

C.$y=x|x|$　　D.$y=\frac{1}{x}$

CD　**解析**:对于 A,令 $f(x)=x+1$,其定义域为 **R**,因为 $f(-x)=(-x)+1$,所以 $f(-x)\neq-f(x)$,且当 $x\neq0$ 时,$f(-x)\neq f(x)$,所以 $f(x)$ 是非奇非偶函数,故选项 A 不符合题意.

对于 B,令 $f(x)=-x^2$,其定义域为 **R**,因为 $\forall x\in\mathbf{R}$,$f(-x)=f(x)$,所以 $f(x)$ 是偶函数,故选项 B 不符合题意.

对于 C,令 $f(x)=x|x|$,其定义域为 **R**,因为 $\forall x\in\mathbf{R}$,$f(-x)=-x|x|=-f(x)$,所以 $f(x)$ 是奇函数,故选项 C 符合题意.

对于 D,令 $f(x)=\frac{1}{x}$,其定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,且 $\forall x\in\mathbf{R}$,$f(-x)=-f(x)$,所以 $f(x)$ 是奇函数,故选项 D 符合题意.故选 CD.

**2.**已知函数 $f(x)=(x-2)^2+kx$ 是偶函数,则 $k=$ (　　)

A.5　　B.4　　C.3　　D.2

B　**解析**:由 $f(x)=(x-2)^2+kx$ 是偶函数,得 $f(x)=(x-2)^2+kx=x^2+(k-4)x+4$,满足二次函数图象的对称轴 $x=-\frac{k-4}{2}=0\Rightarrow k=4$.故选 B.

**3.**已知 $f(x)=(x-1)^2$,下列函数中为偶函数的是 (　　)

A.$f(x)+1$　　B.$f(x)-1$

C.$f(x+1)$　　D.$f(x-1)$

C　**解析**：对于A，$f(x)+1=(x-1)^2+1=x^2-2x+2$，不是偶函数，故选项A不符合题意；

对于B，$f(x)-1=(x-1)^2-1=x^2-2x$，不是偶函数，故选项B不符合题意；

对于C，$f(x+1)=(x+1-1)^2=x^2$，为偶函数，故选项C符合题意；

对于D，$f(x-1)=(x-1-1)^2=(x-2)^2$，不是偶函数，故选项D不符合题意.故选C.

**4.**若函数$f(x)=ax^2+bx+3a+b$是偶函数，定义域为$[a-1,2a]$，则$a=$_____，$b=$_____.

$\frac{1}{3}$　0　**解析**：因为$f(x)$偶函数，所以$a-1=-2a$，解得$a=\frac{1}{3}$.

又函数$f(x)=\frac{1}{3}x^2+bx+b+1$为偶函数，结合偶函数图象的特点，易得$b=0$.

**5.**函数$f(x)=x^2+|x|$的图象关于_____对称.

$y$轴　**解析**：因为$x\in\mathbf{R}$，且$f(-x)=(-x)^2+|-x|=x^2+|x|=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数，图象关于$y$轴对称.

## 能力提升

**1.**下列函数中，为偶函数的是　　（　　）

A.$f(x)=\frac{x}{x-1}$

B.$f(x)=\sqrt{x^2}$

C.$f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}$

D.$f(x)=x+\frac{1}{x}$

B　**解析**：选项A中，函数定义域是$\{x|x\neq1\}$，函数为非奇非偶函数；

选项B中，函数定义域是$(-\infty,+\infty)$，$f(-x)=\sqrt{(-x)^2}=\sqrt{x^2}=f(x)$，是偶函数；

选项C中，函数定义域是$\{1\}$，函数为非奇非偶函数；

选项D中，函数定义域是$\{x|x\neq0\}$，$f(-x)=-x-\frac{1}{x}=-f(x)$，函数是奇函数.故选B.

**2.**已知奇函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，且当$x<-2$时，$f(x)=\frac{8}{x+2}$，当$0<x\leqslant2$时，$f(x)=x^2-2$，则$f(3)+f(0)+f(-1)=$　　（　　）

A.7　　B.9　　C.$-7$　　D.$-9$

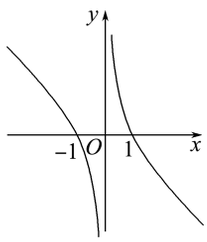
B　**解析**：因为$f(x)$是定义域为$\mathbf{R}$的奇函数，

所以$f(0)=0$，$f(3)=-f(-3)=-\frac{8}{-3+2}=8$，

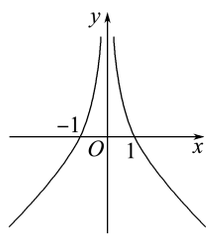
$f(-1)=-f(1)=-(1^2-2)=1$，

所以$f(3)+f(0)+f(-1)=9$.故选B.

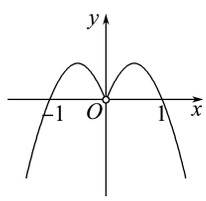
**3.**函数$f(x)=\frac{1}{x}-x$的图象大致为　　（　　）



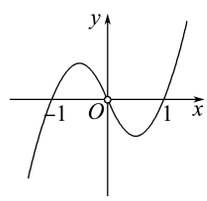
A



B



C



D

A　**解析**：函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，又$f(-x)=-\frac{1}{x}+x=-f(x)$，所以函数$f(x)$为奇函数，排除BC.又$f(2)=\frac{1}{2}-2<0$，排除D.故选A.

**4.**已知函数$f(x)=ax^3-bx-3$，若$f(-1)=7$，则$f(1)=$_____.

$-13$　**解析**：设$g(x)=ax^3-bx$，则$g(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，且$g(-x)=-g(x)$，所以$g(x)$为奇函数.由$f(-1)=7$，得$g(-1)=10$，所以$g(1)=-10$，从而$f(1)=g(1)-3=-13$.

**5.**已知函数$f(x)=\frac{ax^2+1}{bx+c}$是奇函数，且$f(1)=3$，$f(2)=5$，求$a$，$b$，$c$的值.

**解**：因为函数$f(x)=\frac{ax^2+1}{bx+c}$是奇函数，

所以$f(-x)=-f(x)$.

故$\frac{a(-x)^2+1}{b(-x)+c}=-\frac{ax^2+1}{bx+c}$，

即$\frac{ax^2+1}{-bx+c}=-\frac{ax^2+1}{bx+c}$.

所以$-bx+c=-(bx+c)$，即$c=-c$，解得$c=0$.

所以$f(x)=\frac{ax^2+1}{bx}$.

因为$f(1)=\frac{a+1}{b}=3$，所以$a+1=3b$①.

因为$f(2)=\frac{4a+1}{2b}=5$，所以$4a+1=10b$②.

联立①②，得$\begin{cases}a=\frac{7}{2},\\ b=\frac{3}{2}.\end{cases}$故 $a=\frac{7}{2}$，$b=\frac{3}{2}$，$c=0$.

## 自我超越

若$(3x+y)^{2\,025}+x^{2\,025}+4x+y=0$，则 $4x+y=$（　　）

A.1　　B.0　　C.2　　D.−1

B　**解析**：构造函数 $f(x)=x^{2\,025}+x$.由$(3x+y)^{2\,025}+x^{2\,025}+4x+y=(3x+y)^{2\,025}+3x+y+x^{2\,025}+x=0$，可得 $f(3x+y)+f(x)=0$.

由于 $f(x)=x^{2\,025}+x$ 的定义域为 **R**，且有 $f(-x)=(-x)^{2\,025}-x=-(x^{2\,025}+x)=-f(x)$，故 $f(x)=x^{2\,025}+x$ 是奇函数，所以 $f(3x+y)=f(-x)$.

又易得 $f(x)=x^{2\,025}+x$ 为 **R** 上的单调递增函数，故 $3x+y=-x$，所以 $4x+y=0$.故选 B.

# 第 2 课时　函数的奇偶性的应用

**学习任务目标**

1.会判断分段函数、抽象函数的奇偶性.

2.掌握用奇偶性求解析式的方法.

3.理解奇偶性对单调性的影响，并能用于比较大小、求最值和解不等式.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务 1　判断分段函数、抽象函数的奇偶性

1.已知函数 $y=f(x)(x\in\mathbf{R})$，若对于任意实数 $a$，$b$ 都有 $f(a+b)=f(a)+f(b)$，则不恒为 0 的函数 $f(x)$（　　）

A.是奇函数

B.是偶函数

C.既是奇函数又是偶函数

D.是非奇非偶函数

A　**解析**：令 $a=0$，则 $f(b)=f(0)+f(b)$，所以 $f(0)=0$.再令 $a=-x$，$b=x$，则 $f(0)=f(-x)+f(x)$.所以 $f(-x)=-f(x)$，且定义域关于原点对称，所以 $f(x)$是奇函数.

2.如果 $f(x)$是定义在 **R** 上的奇函数，那么下列函数中，一定为偶函数的是（　　）

A.$y=x+f(x)$　　B.$y=xf(x)$

C.$y=x^2+f(x)$　　D.$y=x^2f(x)$

B　**解析**：因为 $f(x)$是奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$.令 $y=g(x)$.

对于 A，$g(-x)=-x+f(-x)=-x-f(x)=-g(x)$，所以 $y=x+f(x)$是奇函数.

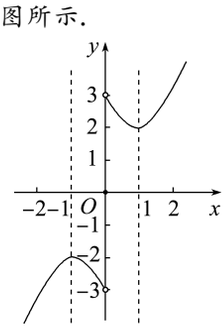
对于 B，$g(-x)=-xf(-x)=xf(x)=g(x)$，所以 $y=xf(x)$是偶函数.

对于 C，$g(-x)=(-x)^2+f(-x)=x^2-f(x)$，由于 $g(-x)\neq g(x)$，$g(-x)\neq -g(x)$，所以 $y=x^2+f(x)$既不是奇函数也不是偶函数.

对于 D，$g(-x)=(-x)^2f(-x)=-x^2f(x)=-g(x)$，所以 $y=x^2f(x)$是奇函数.

3.判断函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3,x>0,\\ 0,x=0,\\ -x^2-2x-3,x<0\end{cases}$的奇偶性.

**解**：（方法一：图象法）$f(x)$的定义域为 **R**，画出函数 $f(x)$的图象，如图所示.




由图知函数 $f(x)$是奇函数.

（方法二：定义法）$f(x)$的定义域为 **R**.

①当 $x>0$ 时，$-x<0$，所以 $f(-x)=-(-x)^2-2(-x)-3=-(x^2-2x+3)=-f(x)$；

②当 $x<0$ 时，$-x>0$，所以 $f(-x)=(-x)^2-2(-x)+3=-(-x^2-2x-3)=-f(x)$；

③当 $x=0$ 时，$-x=0$，$f(-x)=f(x)=f(0)=0$，所以 $f(-x)=-f(x)$.

由①②③可知，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，都有 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$为奇函数.

**【探究总结】**

**1.分段函数奇偶性的判断方法**

(1)图象法：画出图象，根据图象的对称性判断.

(2)定义法：利用奇、偶函数的定义，分段判断，要注意每段函数的定义域.

**2.抽象函数奇偶性的判断方法**

赋值，利用奇、偶函数的定义判断.

## 任务2 利用函数的奇偶性求解析式

### 探究活动

**例1**　(1)(教材P86习题3.2题11改编)若$f(x)$是定义在**R**上的偶函数，当$x>0$时，$f(x)=2x^2-4x+3$，则当$x<0$时，$f(x)=$_____.

(2)设$f(x)$是偶函数，$g(x)$是奇函数，且$f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$，求函数$f(x)$，$g(x)$的解析式.

(1)$2x^2+4x+3$　**解析**：当$x<0$时，$-x>0$，$f(-x)=2(-x)^2-4(-x)+3=2x^2+4x+3$.

由于$f(x)$是定义在**R**上的偶函数，故$f(x)=f(-x)$，所以当$x<0$时，$f(x)=2x^2+4x+3$.

(2)**解**：因为$f(x)$是偶函数，$g(x)$是奇函数，

所以$f(-x)=f(x)$，$g(-x)=-g(x)$.

又$f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$，①

用$-x$代替$x$，

得$f(-x)+g(-x)=\frac{1}{-x-1}$，

所以$f(x)-g(x)=\frac{1}{-x-1}$.②

联立①②，解得$f(x)=\frac{1}{x^2-1}$，$g(x)=\frac{x}{x^2-1}$.

[一题多思]

**思考1.**在本例(1)中，若把“偶函数”改为“奇函数”，其他条件不变，你能求出$f(x)$的解析式吗？

**提示**：当$x<0$时，$-x>0$，$f(-x)=2(-x)^2-4(-x)+3=2x^2+4x+3$.

由于$f(x)$是奇函数，故$f(x)=-f(-x)$，所以当$x<0$时，$f(x)=-2x^2-4x-3$.

又因为$f(x)$是定义在**R**上的奇函数，所以$f(0)=0$.

故$f(x)=\begin{cases}2x^2-4x+3,x>0,\\0,x=0,\\-2x^2-4x-3,x<0.\end{cases}$

**思考2.**本例(2)中，若把“$f(x)$是偶函数，$g(x)$是奇函数”改为“$f(x)$是奇函数，$g(x)$是偶函数”，还能求出$f(x)$，$g(x)$的解析式吗？

**提示**：因为$f(x)$是奇函数，$g(x)$是偶函数，

所以$f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=g(x)$.

又$f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$，①

用$-x$代替上式中的$x$，得$f(-x)+g(-x)=\frac{1}{-x-1}$，即$f(x)-g(x)=\frac{1}{x+1}$.②

联立①②，解得$f(x)=\frac{x}{x^2-1}$，$g(x)=\frac{1}{x^2-1}$.

【探究总结】

**利用函数奇偶性求解析式的方法**

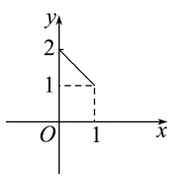
(1)“求谁设谁”，即在哪个区间上求解析式，就应在哪个区间上设自变量$x$.

(2)利用已知区间的解析式进行代入.

(3)利用$f(x)$的奇偶性写出$-f(x)$或$f(-x)$，从而解出$f(x)$.

### 应用迁移

**1.**已知函数$y=f(x)$是偶函数，它在[0，1]上的图象如图所示，则它在[−1，0]上的解析式为_____.




$f(x)=x+2$　**解析**：由题意知$y=f(x)$在[−1，0]上的图象为一条线段，且过点(−1，1)，(0，2)，设$f(x)=kx+b$，代入解得$k=1$，$b=2$，所以$f(x)=x+2$.

**2.**已知函数$f(x)$是定义在**R**上的奇函数，当$x>0$时，$f(x)=x^3-3x+1$，则当$x<0$时，$f(x)=$（　　）

A.$-x^3+3x-1$　　B.$-x^3-3x-1$

C.$x^3-3x-1$　　D.$x^3+3x+1$

C　**解析**：因为函数$f(x)$是定义在**R**上的奇函数，当$x>0$时，$f(x)=x^3-3x+1$.

当$x<0$时，则$-x>0$，所以$f(x)=-f(-x)=-[(-x)^3-3(-x)+1]=x^3-3x-1$.故选C.

## 任务3 函数的单调性与奇偶性的综合应用

### 探究活动

**例2**　(1)已知定义在**R**上的奇函数$f(x)$在$(-\infty,0]$上单调递增，若$f(a)>f(3)$，则实数$a$的取值范围是_____.

(2)定义在[−2，2]上的偶函数$f(x)$在[0，2]上单调递减，若$f(1-m)<f(m)$，则实数$m$的取值范围是_____.

(1)$(3,+\infty)$　**解析**：由题意可知，函数$f(x)$是**R**上的增函数，所以$a>3$.

(2)$\left[-1,\frac{1}{2}\right)$　**解析**：因为$f(x)$是定义在[−2，2]上的偶函数，且$f(x)$在[0，2]上单调递减，因此$f(1-m)<f(m)$，等价于$f(|1-m|)<f(|m|)$，所以$\begin{cases}-2\leqslant1-m\leqslant2,\\-2\leqslant m\leqslant2,\\|1-m|>|m|,\end{cases}$解得$-1\leqslant m<\frac{1}{2}$.

【探究总结】

**利用函数的奇偶性、单调性解不等式**

(1)若$f(x)$为奇函数，则在连续的区间上，由$f(a)$，$f(b)$的大小关系，利用单调性可直接得到$a$，$b$的大小关系.

(2)若 $f(x)$ 为偶函数，则在连续的区间上，由 $f(a)$，$f(b)$ 的大小关系，可得到 $|a|$，$|b|$ 的大小关系.

**注意**：解不等式不能忽视定义域，解出的自变量的范围要与定义域求交集.

## 应用迁移

**1.** 设偶函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递增，则 $f(-\sqrt{7})$，$f(\pi)$，$f(-3)$ 的大小关系是 (　　)

A. $f(\pi)>f(-3)>f(-\sqrt{7})$

B. $f(\pi)>f(-\sqrt{7})>f(-3)$

C. $f(\pi)<f(-3)<f(-\sqrt{7})$

D. $f(\pi)<f(-\sqrt{7})<f(-3)$

A　**解析**：由于 $f(x)$ 为偶函数，故 $f(-\sqrt{7})=f(\sqrt{7})$，$f(-3)=f(3)$.

由于 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递增，$\pi>3>\sqrt{7}$，因此 $f(\pi)>f(-3)>f(-\sqrt{7})$. 故选 A.

**2.** 已知函数 $y=f(x)$ 在定义域 $[-1,1]$ 上既是奇函数又是减函数，$f(1-a^2)+f(1-a)<0$，则实数 $a$ 的取值范围是_____.

$[0,1)$　**解析**：(1)由 $f(1-a^2)+f(1-a)<0$，得 $f(1-a^2)<-f(1-a)$.

因为 $y=f(x)$ 在定义域 $[-1,1]$ 上是奇函数.

所以 $f(1-a^2)<-f(1-a)=f(a-1)$.

又 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减，

所以 $\begin{cases}-1\leqslant 1-a^2\leqslant 1,\\ -1\leqslant 1-a\leqslant 1,\\ 1-a^2>a-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}0\leqslant a^2\leqslant 2,\\ 0\leqslant a\leqslant 2,\\ -2<a<1.\end{cases}$ 所以 $0\leqslant a<1$.

所以 $a$ 的取值范围是 $[0,1)$.

# 课后素养评价(二十三)

## 基础落实

**1.** 下列函数是偶函数，且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是 (　　)

A. $y=\dfrac{1}{x^2}$　　B. $y=|x|$

C. $y=3x^2+x+1$　　D. $y=2x+1$

A　**解析**：对于 A，令 $y=f(x)$，则 $f(-x)=\dfrac{1}{x^2}=f(x)$，是偶函数，且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故选项 A 正确；

对于 B，令 $y=f(x)$，则 $f(-x)=|x|=f(x)$，是偶函数，但在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故选项 B 错误；

对于 C，令 $y=f(x)$，则 $f(-x)=3x^2-x+1$，是非奇非偶函数，故选项 C 错误；

对于 D，令 $y=f(x)$，则 $f(-x)=-2x+1$，是非奇非偶函数，故选项 D 错误. 故选 A.

**2.** 已知 $f(x)$ 是奇函数，且在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(-0.5)$，$f(-1)$，$f(0)$ 的大小关系是 (　　)

A. $f(-0.5)<f(0)<f(-1)$

B. $f(-1)<f(-0.5)<f(0)$

C. $f(0)<f(-0.5)<f(-1)$

D. $f(-1)<f(0)<f(-0.5)$

B　**解析**：因为函数 $f(x)$ 为奇函数，且在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增，所以 $f(-1)<f(-0.5)<f(0)$.

**3.** (多选)已知函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，则下列说法正确的有 (　　)

A. $f(0)=0$

B. 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有最小值 $-3$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上有最大值 3

C. 若 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增

D. $f(-1)=f(1)$

AB　**解析**：对于 A，因为 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，故 A 正确；对于 B，若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有最小值 $-3$，即当 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant -3$，所以当 $x<0$ 时，$-x>0$，所以 $f(-x)\geqslant -3$，因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(x)=-f(-x)\leqslant -(-3)=3$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上有最大值 3，故 B 正确；对于 C，根据奇函数在对称区域内的单调性一致，可知若 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上也单调递减，故 C 错误；对于 D，$f(-1)=-f(1)$，故 D 错误.

**4.** 已知函数 $f(x)$ 对一切实数 $x$ 都满足 $f(x)+f(-x)=0$，且当 $x<0$ 时，$f(x)=2x^2-x+1$，则 $f(x)=$_____.

$\begin{cases}-2x^2-x-1,x>0,\\ 0,x=0,\\ 2x^2-x+1,x<0\end{cases}$　**解析**：函数 $f(x)$ 对一切实数 $x$ 都满足 $f(x)+f(-x)=0$，所以 $f(0)=0$.

设 $x>0$，则 $-x<0$，$f(-x)=2x^2+x+1$.

又因为 $f(x)+f(-x)=0$，即 $f(x)=-f(-x)$，

所以 $f(x)=-2x^2-x-1$，

所以 $f(x)=\begin{cases}-2x^2-x-1,x>0,\\ 0,x=0,\\ 2x^2-x+1,x<0.\end{cases}$

**5.**已知 $f(x)$是定义在 **R** 上的奇函数，且$f(1)=4$.当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2+ax$.

(1)求 $a$ 的值；

(2)求函数 $f(x)$在 **R** 上的解析式；

(3)解方程 $f(x)=6$.

**解**：(1) $f(x)$是定义在 **R** 上的奇函数，$f(1)=-f(-1)=-(1-a)=4$，解得 $a=5$.

(2)当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2+5x$，$f(x)$是定义在 **R** 上的奇函数，

则当 $x>0$ 时，$-x<0$，则 $f(x)=-f(-x)=-[(-x)^2+5(-x)]=-x^2+5x$，$x=0$ 时也满足，

所以 $f(x)=\begin{cases}-x^2+5x,x\geqslant 0,\\ x^2+5x,x<0.\end{cases}$

(3) $f(x)=6$，即 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ -x^2+5x=6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0,\\ x^2+5x=6,\end{cases}$ 解得 $x=2$ 或 $x=3$ 或 $x=-6$，

所以方程 $f(x)=6$ 的解集为$\{-6,2,3\}$.

## 能力提升

**1.**已知函数 $f(x)=\begin{cases}ax+2\ 026,x<0,\\ 2\ 026x+b,x>0\end{cases}$是奇函数，则 $a+b=$　　(　　)

A.$-2\ 026$　　B.0

C.2 026　　D.4 052

B　**解析**：当 $x<0$ 时，$f(x)=ax+2\ 026$，此时 $-x>0$，$f(-x)=2\ 026(-x)+b=-2\ 026x+b$.

因为函数 $f(x)$为奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，所以 $-2\ 026x+b=-(ax+2\ 026)$，

即 $-2\ 026x+b=-ax-2\ 026$，则 $a=2\ 026$，$b=-2\ 026$，所以 $a+b=0$.故选 B.

**2.**已知定义在$[-4,4]$上的偶函数 $f(x)$在$[0,4]$上为减函数，且 $f(x+1)>f(-2)$，则实数 $x$ 的取值范围是　　(　　)

A.$(-3,+\infty)$　　B.$(-3,3]$

C.$(-3,1)$　　D.$(-1,3)$

C　**解析**：因为 $f(x)$为定义在$[-4,4]$上的偶函数，且 $f(x+1)>f(-2)$，可得 $f(|x+1|)>f(2)$，且 $f(x)$在$[0,4]$上为减函数，则 $0\leqslant|x+1|<2$，解得 $-3<x<1$，所以实数 $x$ 的取值范围是$(-3,1)$.故选 C.

**3.**数学课上老师引导学生复习函数的性质，让三个学生分别说出某个函数的一个性质.第一个学生说 $f(x)$是偶函数，第二个学生说 $f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，第三个学生说$f(x)$在$[0,+\infty)$上有最小值 1.同时满足前面三个学生所说性质的一个函数是$f(x)=$_____.

$x^2+1$(答案不唯一)　**解析**：因为函数 $y=x^2$ 是偶函数，且在$[0,+\infty)$上单调递增，最小值为 0，所以把函数 $y=x^2$ 的图象向上平移一个单位长度即可满足题意最小值为 1.

所以 $f(x)=x^2+1$ 同时满足前面三个学生所说性质.

故答案为：$x^2+1$(答案不唯一)

## 自我超越

(多选)已知函数 $f(x)$的定义域是 **R**，对任意实数 $x$，$y$ 都有 $f(x+y)f(x-y)+1=[f(x)]^2+[f(y)]^2$，且 $f(0)<0$，则　　(　　)

A.$f(0)=-1$

B.$f(2x)+1=2[f(x)]^2$

C.$f(x)$为奇函数

D.$f(x)$为偶函数

AD　**解析**：令 $x=y=0$，则 $f(0)f(0)+1=[f(0)]^2+[f(0)]^2$，所以$[f(0)]^2=1$，$f(0)=-1$，故选项 A 正确.

令 $x=y$，则 $f(2x)f(0)+1=2[f(x)]^2$，

所以$-f(2x)+1=2[f(x)]^2$，故选项 B 错误.

赋 $x$ 为 $y$，$y$ 为 $x$，则 $f(y+x)f(y-x)+1=[f(y)]^2+[f(x)]^2$，

即 $f(y+x)f(y-x)+1=f(x+y)f(x-y)+1$，

所以 $f(y+x)f(y-x)=f(x+y)f(x-y)$.

若 $f(y+x)=0$，则 $f(x)=0$，与 $f(0)=-1$ 不符，

所以 $f(y+x)\neq 0$，

于是 $f(y-x)=f(x-y)$，即 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$为偶函数，故选项 C 错误，选项 D 正确.故选 AD.

# 3.3　幂函数

**学习任务目标**

1.了解幂函数的概念，会求幂函数的解析式.

2.结合幂函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\frac{1}{x}$，$y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图象，掌握它们的性质.

3.能利用幂函数的性质解决简单的问题.

## ○ 问题式预习 ○

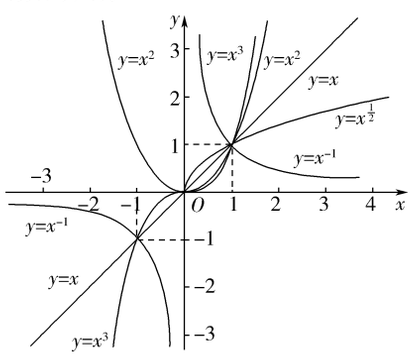
### 【知识清单】

**知识点一　幂函数的概念**

一般地，函数 $y=x^{\alpha}$ 叫做幂函数，其中 $x$ 是自变量，$\alpha$ 是常数.

**知识点二　幂函数的图象与性质**

1.五个幂函数的图象




2.五个幂函数的性质

| 函数 | $y=x$ | $y=x^2$ | $y=x^3$ | $y=x^{\frac{1}{2}}$ | $y=x^{-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 定义域 | **R** | **R** | **R** | $[0,+\infty)$ | $\{x\mid x\neq 0\}$ |
| 值域 | **R** | $[0,+\infty)$ | **R** | $[0,+\infty)$ | $\{y\mid y\neq 0\}$ |
| 奇偶性 | 奇 | 偶 | 奇 | 非奇非偶 | 奇 |

续表

| 函数 | $y=x$ | $y=x^2$ | $y=x^3$ | $y=x^{\frac{1}{2}}$ | $y=x^{-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 单调性 | 增 | 在 $[0,+\infty)$ 上增，在 $(-\infty,0]$ 上减 | 增 | 增 | 在 $(0,+\infty)$ 上减，在 $(-\infty,0)$ 上减 |

### 【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)函数 $y=x^0$ 是幂函数.　(　　)

(2)幂函数的图象都过原点.　(　　)

(3)幂函数一定具有奇偶性.　(　　)

(4)当 $\alpha>0$ 时，幂函数 $y=x^{\alpha}$ 是增函数.　(　　)

(1)√　**解析**：满足幂函数的特征.

(2)×　**解析**：幂函数 $y=x^{-1}$ 的图象不过原点.

(3)×　**解析**：$y=\sqrt{x}$ 是非奇非偶函数.

(4)×　**解析**：函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上是单调递减的.

2.已知幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 的图象过点 $(2,4)$，则 $f(4)=$_____.

16　**解析**：由 $f(2)=4$ 可知 $2^{\alpha}=4$，即 $\alpha=2$，所以幂函数 $f(x)=x^2$，所以 $f(4)=4^2=16$.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1　了解幂函数的概念

1.(多选)下列函数是幂函数的是　(　　)

A.$y=x^2$　　B.$y=2^x$

C.$y=\frac{1}{x^2}$　　D.$y=-x^2$

AC　**解析**：幂函数定义：一般地，函数 $y=x^{\alpha}$ 叫做幂函数，其中 $x$ 是自变量，$\alpha$ 是常数.又 $y=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$，所以 A，C 项正确.故选 AC.

2.已知函数 $f(x)=m^3x^{m+1}$ 是幂函数，则 $f(m+1)=$　(　　)

A.0　　B.1

C.2　　D.4

D　**解析**：由题意可知 $m^3=1$，解得 $m=1$，故 $f(x)=x^2$，故 $f(m+1)=f(2)=4$.故选 D.

3.(教材 P91 练习题 1 改编)已知幂函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(2,\sqrt{2})$，则 $f(9)=$　(　　)

A.$\sqrt{3}$　　B.1　　C.2　　D.3

D　**解析**：设 $f(x)=x^{\alpha}$，由 $f(2)=2^{\alpha}=\sqrt{2}$，得 $\alpha=\frac{1}{2}$，

所以 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，则 $f(9)=9^{\frac{1}{2}}=3$.故选 D.

【探究总结】

幂函数的判断及应用

(1)判断一个函数是否为幂函数的依据是该函数是否为 $y=x^{\alpha}$($\alpha$ 为常数)的形式,需满足:①指数为常数;②底数为自变量;③$x^{\alpha}$ 的系数为 1.形如 $y=(3x)^{\alpha}$,$y=2x^{\alpha}$,$y=x^{\alpha}+5$,…的函数都不是幂函数.

(2)若一个函数为幂函数,则该函数也必具有 $y=x^{\alpha}$($\alpha$ 为常数)这一形式.

## 任务2 掌握幂函数的图象及其应用

### 探究活动

**例 1**　已知点$(\sqrt{2},2)$与点$\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$分别在幂函数 $f(x)$,$g(x)$的图象上,当 $x$ 为何值时,有:

(1)$f(x)>g(x)$?

(2)$f(x)=g(x)$?

(3)$f(x)<g(x)$?

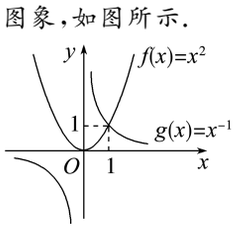
**解**:设 $f(x)=x^{\alpha}$,$g(x)=x^{\beta}$.

因为$(\sqrt{2})^{\alpha}=2$,$(-2)^{\beta}=-\frac{1}{2}$,

所以 $\alpha=2$,$\beta=-1$.

所以 $f(x)=x^{2}$,$g(x)=x^{-1}$.

分别作出它们的图象,如图所示.




由图象知,

(1)当 $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$时,$f(x)>g(x)$.

(2)当 $x=1$ 时,$f(x)=g(x)$.

(3)当 $x\in(0,1)$时,$f(x)<g(x)$.

【探究总结】

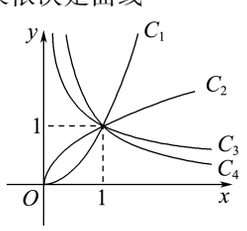
解决幂函数图象问题应把握的两个原则

(1)依据图象高低判断幂指数大小,相关结论为:在(0,1)上,指数越大,幂函数图象越靠近 $x$ 轴;在(1,+∞)上,指数越大,幂函数图象越远离 $x$ 轴.

(2)依据图象确定幂指数 $\alpha$ 与 0,1 的大小关系,一般根据幂函数在第一象限内的图象来判断.

### 应用迁移

**1.**如图,幂函数 $y=x^{2}$,$y=x^{-1}$,$y=x^{\frac{1}{3}}$,$y=x^{-\frac{1}{2}}$ 在第一象限内的图象依次是曲线　(　)

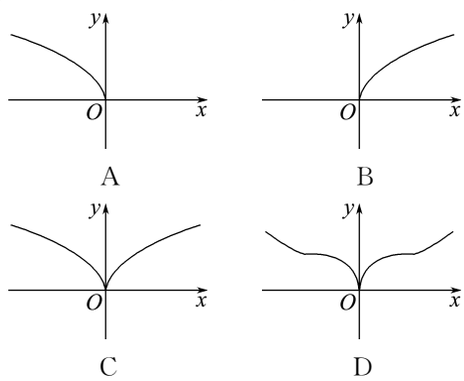



A.$C_1$,$C_2$,$C_3$,$C_4$　　B.$C_1$,$C_4$,$C_3$,$C_2$

C.$C_3$,$C_2$,$C_1$,$C_4$　　D.$C_1$,$C_4$,$C_2$,$C_3$

D　**解析**:根据幂函数 $y=x^{n}$ 的性质可知,在第一象限内的图象,当 $n>0$ 时,图象递增,且 $n$ 越大,图象递增速度越快,由此可判断 $C_1$ 是曲线 $y=x^{2}$,$C_2$ 是曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$;当 $n<0$ 时,图象递减,且$|n|$越大,图象越陡,由此可判断 $C_3$ 是曲线 $y=x^{-\frac{1}{2}}$,$C_4$ 是曲线 $y=x^{-1}$.综上所述,幂函数 $y=x^{2}$,$y=x^{-1}$,$y=x^{\frac{1}{3}}$,$y=x^{-\frac{1}{2}}$ 在第一象限内的图象依次是曲线 $C_1$,$C_4$,$C_2$,$C_3$.故选 D.

**2.**函数 $f(x)=|x|^{\frac{1}{2}}$ 的图象大致为　(　)




C　**解析**:$f(x)=|x|^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为 **R**,又 $f(-x)=|-x|^{\frac{1}{2}}=|x|^{\frac{1}{2}}=f(x)$,故 $f(x)=|x|^{\frac{1}{2}}$ 为偶函数,当 $x>0$ 时,$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$,结合幂函数的图象可知,C 正确.故选 C.

## 任务3 掌握幂函数性质的应用

### 探究活动

**例 2**　(1)幂函数 $f(x)=(m^{2}+5m-5)x^{m^{2}-3m}$($m\in\mathbf{Z}$)是偶函数,且在(0,+∞)上单调递减,则 $m$ 的值为　(　)

A.−6　　B.1

C.6　　D.1 或−6

(2)若 $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$,$b=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$,$c=(-2)^{3}$,则 $a$,$b$,$c$ 的大小关系为　(　)

A.$a<b<c$　　B.$c<a<b$

C.$b<a<c$　　D.$c<b<a$

(3)已知幂函数 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$.若 $f(10-2a)<f(a+1)$,则实数 $a$ 的取值范围是_____.

(1)B　**解析**:因为幂函数 $f(x)=(m^{2}+5m-5)\cdot x^{m^{2}-3m}$($m\in\mathbf{Z}$)是偶函数,且在(0,+∞)上单调递减,所以 $\begin{cases}m^{2}+5m-5=1,\\ m^{2}-3m<0,\end{cases}$ 且 $m^{2}-3m$ 为偶数,解得 $m=1$.

当 $m=1$ 时,$m^{2}-3m=-2$ 满足条件.

(2)D　**解析**:幂函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 在$[0,+\infty)$上单调递增,值域为$[0,+\infty)$,

由$\frac{1}{2}>\frac{1}{5}$,得$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}>\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}>0$,

又$(-2)^3=-8<0$,所以 $c<b<a$.故选 D.

(3)(3,5]　**解析**:$f(x)=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}\ (x\geqslant 0)$,易知 $f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增.又 $f(10-2a)<f(a+1)$,所以$\begin{cases}a+1\geqslant 0,\\10-2a\geqslant 0,\\a+1>10-2a,\end{cases}$　解得 $3<a\leqslant 5$.

[一题多思]

**思考 1**.本例(1)中,若把条件改为"幂函数 $f(x)=x^{m^2-m-3}(m\in\mathbf{N}^*$,且 $m\geqslant 2)$为奇函数,且在$(0,+\infty)$上单调递减",你能求出 $m$ 的值吗?

**提示**:因为幂函数 $f(x)=x^{m^2-m-3}(m\in\mathbf{N}^*$,且 $m\geqslant 2)$为奇函数且在$(0,+\infty)$上单调递减,

所以 $m^2-m-3<0$,解得$\frac{1-\sqrt{13}}{2}<m<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

又 $m\in\mathbf{N}^*$,且 $m\geqslant 2$,所以 $m=2$.

当 $m=2$ 时,$f(x)=x^{-1}$,为奇函数,故 $m=2$.

**思考 2**.在思考 1 的条件下,你能比较 $f(-2\,025)$与 $f(-2\,024)$的大小吗?

**提示**:因为 $f(x)$为奇函数,且在$(0,+\infty)$上单调递减,所以 $f(x)$在$(-\infty,0)$上也单调递减.又因为 $-2\,024>-2\,025$,所以 $f(-2\,025)>f(-2\,024)$.

## 【探究总结】

**幂值大小的比较方法**

(1)比较幂值的大小,一般先构造幂函数并明确其单调性,然后由单调性判断幂值的大小.当不便于利用单调性时,可先分别与 0 和 1 进行比较,这种方法常称为"搭桥法".

(2)解题的一般步骤:

①构造幂函数;

②比较底的大小;

③由单调性确定幂值的大小.

## 应用迁移

**1**.若幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 图象过点$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right)$,且$f(a+2)<f(2a)$,则 $a$ 的取值范围是　(　　)

A.$(-\infty,2)$　　B.$(2,+\infty)$

C.$(-2,2)$　　D.$(-2,+\infty)$

B　**解析**:由已知条件可得 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}=\frac{1}{8}$,解得 $\alpha=3$,则 $f(x)=x^3$,

所以,函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上为增函数,

由 $f(a+2)<f(2a)$可得 $a+2<2a$,解得 $a>2$.故选 B.

**2**.已知 $m$ 是常数,幂函数$f(x)=(m^2-3)x^m$ 在$(0,+\infty)$上单调递减,则 $f(2)=$　(　　)

A.2　　B.$\frac{1}{2}$

C.$\frac{1}{4}$　　D.4

C　**解析**:由幂函数的定义可知 $m^2-3=1$,解得 $m=\pm 2$.由幂函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,可得 $m=-2$,则 $f(x)=x^{-2}$,所以 $f(2)=2^{-2}=\frac{1}{4}$.

故选 C.

# 课后素养评价(二十四)

## 基础落实

**1**.下列函数是幂函数的是　(　　)

A.$y=(x+1)^2$　　B.$y=x+\frac{1}{x}$

C.$y=2x^3$　　D.$y=x^{\frac{1}{3}}$

D　**解析**:由幂函数的定义可知 $y=(x+1)^2$,$y=x+\frac{1}{x}$,$y=2x^3$ 均不是幂函数,$y=x^{\frac{1}{3}}$ 是幂函数.故选 D.

**2**.已知幂函数 $f(x)=(m^2-2m-2)\cdot x^{m-1}$ 的图象不经过坐标原点,则 $m=$　(　　)

A.$-1$　　B.3

C.1 或$-3$　　D.$-1$ 或 3

A　**解析**:令 $m^2-2m-2=1$,解得 $m=3$ 或$-1$,

当 $m=3$ 时,$f(x)=x^2$,图象经过坐标原点,不符合题意,

当 $m=-1$ 时,$f(x)=x^{-2}$,图象不经过坐标原点,符合题意.故选 A.

**3**.(多选)关于幂函数 $f(x)=x^{-2}$,下列结论正确的是　(AC)

A.$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

B.$f(x)$的值域为 $\mathbf{R}$

C.$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递减

D.$f(x)$的图象关于点$(0,0)$对称

AC　**解析**:A 选项,$f(x)=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,A 正确;

B 选项,由于 $f(x)=\frac{1}{x^2}>0$,所以值域为$(0,+\infty)$,

B 错误；

C 选项，由于$-2<0$，所以$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递减，C 正确；

D 选项，因为$f(x)=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数，故不关于原点对称，D 错误.故选 AC.

**4.**若$(a-1)^{-1}<(2a+1)^{-1}$，则实数$a$的取值范围为_____.

$(-\infty,-2)\cup\left(-\frac{1}{2},1\right)$　**解析：**考虑函数$y=x^{-1}$.

因为函数$y=x^{-1}$的单调递减区间为$(0,+\infty)$和$(-\infty,0)$，

所以不等式$(a-1)^{-1}<(2a+1)^{-1}$等价于

$$\begin{cases}a-1<0,\\2a+1<0,\\a-1>2a+1\end{cases}\text{或}\begin{cases}a-1<0,\\2a+1>0\end{cases}\text{或}\begin{cases}a-1>0,\\2a+1>0,\\a-1>2a+1,\end{cases}$$

解得$a<-2$或$-\frac{1}{2}<a<1$.

所以实数$a$的取值范围为$(-\infty,-2)\cup\left(-\frac{1}{2},1\right)$.

**5.**已知幂函数$y=f(x)$的图象经过点$\left(2,\frac{1}{8}\right)$.

(1)试求函数$f(x)$的解析式；

(2)判断函数$f(x)$的奇偶性，并写出函数的单调区间.

**解：**(1)设$f(x)=x^{\alpha}$，由题意，得$f(2)=2^{\alpha}=\frac{1}{8}$，即$\alpha=-3$.

故函数$f(x)$的解析式为$f(x)=x^{-3}$.

(2)因为$f(x)=x^{-3}$，所以要使函数$f(x)$有意义，则$x\neq0$，即定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

因为$f(-x)=(-x)^{-3}=-x^{-3}=-f(x)$，

所以该幂函数为奇函数.

当$x>0$时，根据幂函数的性质可知，$f(x)=x^{-3}$在$(0,+\infty)$上单调递减.

因为$f(x)$是奇函数，所以$f(x)$在$(-\infty,0)$上也单调递减.

故函数$f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$.

## 能力提升

**1.**若幂函数$f(x)=(m^2-m-11)x^m$为奇函数，则实数$m=$（　　）

A.4　　B.3

C.$-3$　　D.$-3$或4

C　**解析：**因为函数$f(x)=(m^2-m-11)x^m$是幂函数，

所以$m^2-m-11=1$，解得$m=-3$或$m=4$.

当$m=-3$时，$f(x)=x^{-3}$，$f(-x)=(-x)^{-3}=-x^{-3}=-f(x)$，是奇函数；

当$m=4$时，$f(x)=x^4$，$f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x)$，是偶函数.

所以$m=-3$.故选 C.

**2.**当$0<x<1$时，$f(x)=x^2$，$g(x)=x^{\frac{1}{2}}$，$h(x)=x^{-2}$的大小关系是（　　）

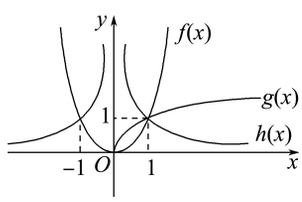
A.$h(x)<g(x)<f(x)$

B.$h(x)<f(x)<g(x)$

C.$g(x)<h(x)<f(x)$

D.$f(x)<g(x)<h(x)$

D　**解析：**在同一坐标系中分别作出$h(x)$，$g(x)$和$f(x)$的图象，如图所示.




由图象可知，当$0<x<1$时，$h(x)>g(x)>f(x)$.

故选 D.

**3.**写出一个同时具有下列三个性质的函数：$f(x)=$__$x^2$（答案不唯一）.

①$f(x)$为幂函数；

②$f(x)$为偶函数；

③$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减.

**4.**已知幂函数$y=f(x)$的图象过点$\left(4,\frac{1}{2}\right)$.

(1)求函数$f(x)$的解析式；

(2)根据单调性的定义，证明函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减；

(3)判断函数$f(x)$的奇偶性并说明理由.

(1)**解：**由题意，设$f(x)=x^{\alpha}$，则$\frac{1}{2}=4^{\alpha}=4^{-\frac{1}{2}}$，故$\alpha=-\frac{1}{2}$，所以$f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$.

(2)**证明：**设任意$x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且$x_1>x_2>0$，

则$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{\sqrt{x_1}}-\frac{1}{\sqrt{x_2}}=\frac{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1x_2}}$

$=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_1x_2}(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})}$，

而$x_2-x_1<0$，$\sqrt{x_1x_2}>0$，$\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}>0$，

故$f(x_1)-f(x_2)<0$，即$f(x_1)<f(x_2)$.

所以函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

(3)**解**：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，则函数 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

## 自我超越

已知幂函数 $f(x)=x^{m^2-2m-3}(m\in\mathbf{N}^*)$ 为偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，则满足不等式 $(2a+1)^{-\frac{2m}{3}}<(3-2a)^{-\frac{2m}{3}}$ 的实数 $a$ 的取值范围是　　(　　)

A.$a<\frac{1}{2}$ 且 $a\neq-\frac{1}{2}$　　B.$a>\frac{1}{2}$

C.$a>\frac{1}{2}$ 且 $a\neq\frac{3}{2}$　　D.$a<\frac{3}{2}$

C　**解析**：因为幂函数 $f(x)=x^{m^2-2m-3}(m\in\mathbf{N}^*)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $m^2-2m-3<0$，即 $(m-3)(m+1)<0$，解得 $-1<m<3$.

因为 $m\in\mathbf{N}^*$，所以 $m$ 的可能取值为 1，2.

因为幂函数 $f(x)$ 为偶函数，所以指数 $m^2-2m-3$ 为偶数.

当 $m=1$ 时，$1^2-2\times1-3=-4$，是偶数，符合条件；

当 $m=2$ 时，$2^2-2\times2-3=-3$，是奇数，不符合条件.

所以 $m=1$，所以不等式为 $(2a+1)^{-\frac{2}{3}}<(3-2a)^{-\frac{2}{3}}$①.

因为幂函数 $g(x)=x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ 的定义域为 $\{x|x\neq0\}$，

且对于定义域内的任意 $x$，都有 $g(-x)=\frac{1}{\sqrt[3]{(-x)^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=g(x)$，

所以幂函数 $g(x)=x^{-\frac{2}{3}}$ 是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

所以①式可化为 $\begin{cases}2a+1\neq0,\\3-2a\neq0,\\|2a+1|>|3-2a|\end{cases}$②，

将 $|2a+1|>|3-2a|$ 两边平方，可得 $(2a+1)^2>(3-2a)^2$，

即 $4a^2+4a+1>9-12a+4a^2$，即 $16a>8$，解得 $a>\frac{1}{2}$，

所以②式为 $\begin{cases}a\neq-\frac{1}{2},\\a\neq\frac{3}{2},\\a>\frac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $a>\frac{1}{2}$ 且 $a\neq\frac{3}{2}$.故选 C.

# 3.4　函数的应用(一)

**学习任务目标**

1.了解函数模型(如一次函数、二次函数、幂函数、分段函数等现实生活中普遍使用的函数模型)的广泛应用.

2.能够利用给定的函数模型或建立确定的函数模型解决实际问题.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点　函数模型**

1.一次函数模型

解析式为 $y=kx+b$，其中 $k$，$b$ 为常数且 $k\neq0$.

2.二次函数模型

解析式为 $y=ax^2+bx+c$ 或 $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$，其中 $a$，$b$，$c$ 为常数且 $a\neq0$.

3.幂函数型模型

(1)解析式：$y=ax^{\alpha}+b$($a$，$b$，$\alpha$ 为常数，$a\neq0$，$\alpha\neq1$).

(2)单调性：由 $\alpha$ 的值决定.

### 【概念辨析】

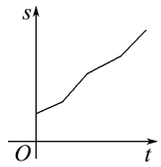
1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)利润＝销售单价×销售量.　　(×)

(2)实际应用问题中，自变量的取值范围由所得的函数解析式唯一确定.　　(×)

(3)解函数应用题的基本步骤可概括为“四步八字”，即“审题、建模、解模、还原”.　　(√)

2.一辆汽车在某段路程中的行驶路程 $s$ 关于时间 $t$ 变化的图象如图所示，那么图象所对应的函数模型是　　(C)



A.一次函数模型　　B.二次函数模型
C.分段函数模型　　D.无法确定

**3.**某人开汽车从A地出发，以80 km/h的速度行驶2 h到达B地，在B地停留2 h.若汽车与A地的距离$y$（单位：km）是时间$t$（单位：h）的函数，则该函数的解析式是$y=\begin{cases}80t,0\leqslant t\leqslant 2,\\160,2<t\leqslant 4\end{cases}$.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1 利用一次函数模型解决问题

**1.**一辆匀速行驶的汽车90 min行驶的路程为180 km，则这辆汽车行驶的路程$y$（单位：km）关于时间$t$（单位：h）的函数解析式是（　　）

A.$y=2t$　　B.$y=120t$
C.$y=2t(t\geqslant 0)$　　D.$y=120t(t\geqslant 0)$

D　**解析**：因为90 min=1.5 h，所以汽车的速度为180÷1.5=120(km/h).所以路程$y$与时间$t$之间的函数解析式是$y=120t(t\geqslant 0)$.

**2.**某厂日生产文具盒的总成本$y$（单位：元）与日产量$x$（单位：套）之间的关系为$y=6x+30\ 000$，而文具盒的出售价格为每套12元.要使该厂不亏本，每日至少生产文具盒（　　）

A.2 000套　　B.3 000套
C.4 000套　　D.5 000套

D　**解析**：设利润$z=12x-(6x+30\ 000)$，所以$z=6x-30\ 000$.由$z\geqslant 0$，解得$x\geqslant 5\ 000$.故每日至少生产文具盒5 000套.

**3.**一定范围内，某种产品的购买量$y$（单位：t）与单价$x$（单位：元/t）之间满足一次函数关系.若购买1 000 t，则每吨800元；若购买2 000 t，则每吨700元.某客户购买400 t，其价格为每吨_____元.

860　**解析**：设$y=kx+b$，由$\begin{cases}1\ 000=800k+b,\\2\ 000=700k+b,\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=-10,\\b=9\ 000.\end{cases}$

所以$y=-10x+9\ 000$.

令$-10x+9\ 000=400$，

解得$x=860$.

**【探究总结】**

**一次函数模型的特点和解题方法**

(1)一次函数模型的突出特点是其图象是一条直线.

(2)利用一次函数模型解决问题时，注意待定系数法的应用，主要步骤是：设元、列式、求解.

### 任务2 利用二次函数模型解决问题

#### 探究活动

**例1**　某水果批发商销售每箱进价为40元的苹果，假设每箱售价不得低于50元且不得高于55元.市场调查发现，若每箱以50元的价格销售，则平均每天销售90箱，且价格每提高1元，平均每天少销售3箱.

(1)求平均每天的销售量$y$（单位：箱）与销售单价$x$（单位：元/箱）之间的函数关系式.

(2)求该批发商平均每天的销售利润$w$（单位：元）与销售单价$x$（单位：元/箱）之间的函数关系式.

(3)当每箱苹果的售价为多少元时，该批发商可以获得最大日利润？最大日利润是多少？

**解**：(1)根据题意，得$y=90-3(x-50)$，

即$y=-3x+240(50\leqslant x\leqslant 55,x\in\mathbf{N})$.

(2)$w=(x-40)(-3x+240)=-3x^2+360x-9\ 600(50\leqslant x\leqslant 55,x\in\mathbf{N})$.

(3)因为$w=-3x^2+360x-9\ 600=-3(x-60)^2+1\ 200$，

所以当$x<60$时，$w$随$x$的增大而增大.

又$50\leqslant x\leqslant 55,x\in\mathbf{N}$，

所以当$x=55$时，$w$有最大值，最大值为1 125.

所以当每箱苹果的售价为55元时，该批发商可以获得最大日利润，且最大日利润为1 125元.

**【探究总结】**

**利用二次函数模型求最值的方法**

根据实际问题建立函数模型，求出解析式后，可利用配方法、判别式法、换元法以及函数的单调性等方法求最值，从而解决实际问题中的利润最大、用料最省等最值问题.

**注意**：实际问题中应考虑取得最值时的自变量的取值是否具有实际意义.

#### 应用迁移

某种商品的进价为4元/件，当售价为6元/件时，日均销售100件.若每件的售价增加1元，则日均销售

量减少 10 件.已知每天的固定成本为 20 元,则该商品在销售过程中,售价为_____元/件时,日利润最大.

10　**解析**:设售价为$(6+x)$元/件,则日均销售量为$(100-10x)$件,

则日利润 $y=(6+x-4)(100-10x)-20$

$=-10x^2+80x+180=-10(x-4)^2+340$,$0\leqslant x<10$,

所以当 $x=4$ 时,$y_{max}=340$.

即售价为 10 元/件时,日利润最大.

## 任务3 利用幂函数及分段函数模型解决问题

### 探究活动

**例 2**　按照《全国人民代表大会常务委员会关于实施渐进式延迟法定退休年龄的决定》,我国自 2025 年 1 月 1 日起,逐步将男职工的法定退休年龄从原 60 周岁延迟至 63 周岁.对于男职工,新方案按照出生时间延迟法定退休年龄,每 4 个月延迟 1 个月,当不满 4 个月时仍按延迟 1 个月计算.男职工延迟法定退休年龄部分对照表如下:

| 出生时间 | 1965 年 1 月至 4 月 | 1965 年 5 月至 8 月 | 1965 年 9 月至 12 月 | 1966 年 1 月至 4 月 | … |
|---|---|---|---|---|---|
| 改革后法定退休年龄 | 60 岁 1 个月 | 60 岁 2 个月 | 60 岁 3 个月 | 60 岁 4 个月 | … |

那么 1972 年 6 月出生的男职工退休年龄为　(　　)

A.61 岁　　B.61 岁 7 个月

C.61 岁 9 个月　　D.61 岁 11 个月

D　**解析**:设男职工出生于 $x$ 年 $y$ 月,$1965\leqslant x\leqslant 1976$,$1\leqslant y\leqslant 12$,$x,y\in\mathbf{N}^*$.

设退休延迟月数为 $z$,

当 $1\leqslant y\leqslant 4$ 时,$z=3(x-1\,965)+1$;

当 $5\leqslant y\leqslant 8$ 时,$z=3(x-1\,965)+2$;

当 $9\leqslant y\leqslant 12$ 时,$z=3(x-1\,965)+3$.

所以 1972 年 6 月出生的男职工退休延迟的时间为 $z=3(1\,972-1\,965)+2=23$(月).

所以 1972 年 6 月出生的男职工退休年龄为 61 岁 11 个月.故选 D.

[一题多思]

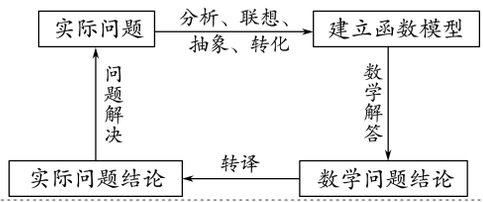
解决函数实际应用问题的关键是将实际问题转化为数学问题,即建立函数模型,通过对函数性质的研究解决数学问题,从而达到解决实际问题的目的.

**思考 1.** 解决函数实际应用问题的一般步骤是怎样的?

**提示**:审题、建模、求解模型、还原(回答实际问题).

**思考 2.** 你能把解函数应用题的步骤用框图表示吗?

**提示**:




### 【探究总结】

**应用分段函数时的三个注意点**

(1)分段函数的"段"一定要分得合理,不重不漏.

(2)分段函数的定义域为对应每一段自变量取值范围的并集.

(3)分段函数的值域求法:先逐段求函数值的范围,再取并集.

### 应用迁移

为了保护水资源,提倡节约用水,某城市对居民生活用水实行"阶梯水价",计费方法如表所示.若某户居民某月缴纳水费 90 元,则该月用水量为_____$m^3$.

| 每户每月用水量 | 水价 |
|---|---|
| 不超过 12 $m^3$ 的部分 | 3 元/$m^3$ |
| 超过 12 $m^3$ 但不超过 18 $m^3$ 的部分 | 6 元/$m^3$ |
| 超过 18 $m^3$ 的部分 | 9 元/$m^3$ |

20　**解析**:设用水量为 $x$ $m^3$,缴纳水费为 $y$ 元.由题意可知 $y=\begin{cases}3x,x\leqslant 12,\\36+6(x-12),12<x\leqslant 18,\\72+9(x-18),x>18.\end{cases}$

当 $x\leqslant 12$ 时,最大值为 36;当 $12<x\leqslant 18$ 时,最大值为 72,

所以 $72+9(x-18)=90$,

解得 $x=20$.

# 课后素养评价(二十五)

## 基础落实

**1.**把长为 8 cm 的细铁丝截成两段,各自围成一个正方形,那么这两个正方形面积之和的最小值是(　　)

A.4 $cm^2$　　B.3 $cm^2$

C.$2\sqrt{2}$ $cm^2$　　D.2 $cm^2$

D　**解析**:设铁丝的一段长度为 $x$ cm(其中 $0<x<8$),则另一段铁丝长为$(8-x)$cm,

两个正方形的面积之和为 $y$ $cm^2$,

根据题意,可得 $y=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{8-x}{4}\right)^2=\frac{1}{8}(x-4)^2+2$,

当且仅当 $x=4$ 时,$y$ 取得最小值,最小值为 2 $cm^2$.

故选 D.

**2.**某公司为降低成本、提高效益,引进智能机器人系统开展工作.已知购买 $x$ 台机器人的总成本为$P(x)=\frac{1}{300}x^2+x+300$(单位:万元).要使每台机器人的平均成本最低,则应购买机器人_____台.

300　**解析**:每台机器人的平均成本为$\frac{P(x)}{x}=\frac{1}{300}x+1+\frac{300}{x}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{300}x\cdot\frac{300}{x}}+1=3$,当且仅当$\frac{1}{300}x=\frac{300}{x}$,即 $x=300$ 时,等号成立.

因此应购买 300 台机器人,可使每台机器人的平均成本最低.

**3.**某乡镇为提升特色农产品的知名度,邀请了一家广告牌制作公司设计一个宽为 $x$ m、长为 $y$ m 的长方形展牌,其中 $y>x$,其面积为 $3(x-y+15)$ $m^2$.

(1)求 $y$ 关于 $x$ 的函数解析式,并求出 $x$ 的取值范围.

(2)如何设计展牌的长和宽,才能使展牌的周长最小?并求出周长的最小值.

**解**:(1)由题意,得 $xy=3(x-y+15)$,

整理得 $y=3+\frac{36}{x+3}$.

由 $y>x>0$,得 $3+\frac{36}{x+3}>x>0$,即$\begin{cases}x>0,\\x^2<45,\end{cases}$解得 $0<x<3\sqrt{5}$,所以 $y$ 关于 $x$ 的函数解析式是 $y=3+\frac{36}{x+3}$,$0<x<3\sqrt{5}$.

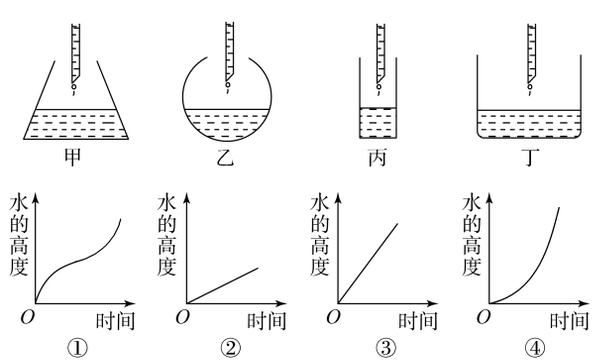
(2)展牌的周长 $L=2x+2y=2x+6+\frac{72}{x+3}=2(x+3)+\frac{72}{x+3}\geqslant 2\sqrt{2(x+3)\cdot\frac{72}{x+3}}=24$,

当且仅当 $2(x+3)=\frac{72}{x+3}$,即 $x=3$ 时取等号,此时 $y=3+\frac{36}{3+3}=9$,

所以设计展牌的长为 9 m、宽为 3 m 时,才能使展牌的周长最小,最小周长为 24 m.

## 能力提升

**1.**(多选)生活经验告诉我们,当把水注进容器时(设单位时间内进水量相同),容器内水的高度会随着时间的变化而变化.如图,下列选项中容器与图象匹配正确的是(　　)




A.甲—③　　B.乙—①

C.丙—④　　D.丁—②

BD　**解析**:甲容器下粗上细,水高变化为逐渐变快,故甲应匹配④;乙容器为球形,水高变化为先逐渐变慢,再逐渐变快,故乙应匹配①;丙、丁容器都是柱形,水高变化的速度都应是不变的,但丙容器细,丁容器粗,故丙容器水高变化快,丁容器水高变化慢,丙应匹配③,丁应匹配②.故选 BD.

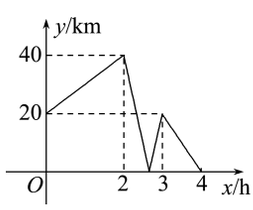
**2.**某辆汽车以 $x$ km/h(考虑到高速公路行车安全,要求 $60\leqslant x\leqslant 120$)的速度在高速公路上匀速行驶时,每小时的油耗(所需要的汽油量)为$\frac{1}{5}\left(x-k\right.$

$+\frac{4\,500}{x}\Big)$ L，其中 $k$ 为常数.若汽车以 120 km/h 的速度行驶，每小时的油耗为 11.5 L，则 $k=$_____.欲使每小时的油耗不超过9 L，则速度 $x$ 的取值范围为_____.

100　[60,100]　**解析**：设每小时的油耗为 $y$ L，根据题意得 $y=\frac{1}{5}\Big(x-k+\frac{4\,500}{x}\Big)$，则当 $x=120$ 时，$y=\frac{1}{5}\Big(120-k+\frac{4\,500}{120}\Big)=11.5$，解得 $k=100$，所以 $y=\frac{1}{5}\Big(x-100+\frac{4\,500}{x}\Big)$.若 $y\leqslant 9$，即 $\frac{1}{5}\Big(x-100+\frac{4\,500}{x}\Big)\leqslant 9$，解得 $45\leqslant x\leqslant 100$.又因为 $60\leqslant x\leqslant 120$，所以 $x$ 的取值范围为[60,100].

## 自我超越

(多选)同一条公路连接 A,B,C 三地，B 地在 A,C 两地之间.甲、乙两车分别从 A 地、B 地同时出发前往目的地 C 地.甲车速度始终保持不变，乙车中途停车休息一次，随后继续匀速行驶.甲、乙两车从出发到目的地过程中两车之间的距离 $y$(单位：km)与时间 $x$(单位：h)的函数关系如图所示.下列结论正确的是　(　　)



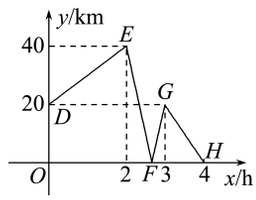

A.4 h 后两车同时到达 C 地

B.乙车中途休息 40 min

C.甲车的速度是 60 km/h

D.甲车行驶 $\frac{8}{3}$ h 与乙车相遇

ACD　**解析**：如图所示.




根据函数图象可得 $A$，$B$ 两地之间的距离为 20 km，两车行驶了 4 小时，同时到达 $C$ 地，故选项 A 正确，

$D-E$ 段：甲、乙同向行驶，甲在后追赶乙；

$E-F-G$ 段：乙休息，其中在 $E-F$ 段，甲在后追赶乙，在点 $F$ 时甲、乙相遇，在 $F-G$ 段，甲超过乙的休息地继续行驶，乙车中途休息 1 h，故选项 B 错误；

$G-H$ 段：乙在后追赶甲，在点 $H$ 时，甲、乙同时到达 $C$ 地.

在 $E-F-G$ 段，乙休息，$v_{甲}=\frac{40+20}{1}=60(\text{km/h})$，故选项 C 正确；

在 $D-E$ 段，$2v_{乙}+20-2v_{甲}=40$，

解得 $v_{乙}=70(\text{km/h})$，

因为在点 $E$ 时乙开始休息，当甲、乙相遇时，甲所需行驶里程为 $70\times 2+20=160(\text{km})$，

则甲、乙相遇时所用的时间 $t=\frac{160}{60}=\frac{8}{3}(\text{h})$，故选项 D 正确.故选 ACD.

★★★

# 迁　移　应　用

## 类型一　函数的值域

**例 1**　求下列函数的值域：

(1) $y=\dfrac{2x+1}{x-3}$；

(2) $y=\dfrac{x^2+8}{x-1}(x>1)$；

(3) $y=2x-\sqrt{x-1}$.

**解**：(1) $y=\dfrac{2x+1}{x-3}=\dfrac{2(x-3)+7}{x-3}=2+\dfrac{7}{x-3}$，

因为 $\dfrac{7}{x-3}\neq 0$，所以 $2+\dfrac{7}{x-3}\neq 2$，

所以 $y=\dfrac{2x+1}{x-3}$ 的值域为 $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) 由 $x>1$，知 $x-1>0$.

则 $y=\dfrac{x^2+8}{x-1}=\dfrac{(x-1)^2+2(x-1)+9}{x-1}=x-1+\dfrac{9}{x-1}+2\geqslant 2\sqrt{(x-1)\cdot\dfrac{9}{x-1}}+2=8$，当且仅当 $x-1=\dfrac{9}{x-1}$，即 $x=4$ 时，等号成立.

所以 $y=\dfrac{x^2+8}{x-1}(x>1)$ 的最小值为 8.

故函数 $y=\dfrac{x^2+8}{x-1}$ 的值域为 $[8,+\infty)$.

(3) 令 $\sqrt{x-1}=t$，则 $t\geqslant 0$ 且 $x=t^2+1$，所以 $y=2(t^2+1)-t=2t^2-t+2=2\left(t-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{15}{8}$，

则当 $t=\dfrac{1}{4}$ 时，$y_{\min}=\dfrac{15}{8}$，所以 $y=2x-\sqrt{x-1}$ 的值域为 $\left[\dfrac{15}{8},+\infty\right)$.

**【规律方法】**

**求函数值域的基本方法**

**1.** 单调性法：直接由函数的单调性求出值域.

**2.** 图象法：当我们遇到分段函数时，求函数的值域往往要分段讨论，此时利用图象法求值域通常会较为简洁清晰.

**3.** 配方法：与二次函数有关的函数，可用配方法求值域.

**4.** 换元法：当函数中出现根式或其他可以进行整体代换的结构时，通常利用换元法将函数转化为熟悉的、简单的函数再求值域，利用换元法求值域要注意新元的范围.

**5.** 分离常数法：对于分式结构的函数，通常采取分离常数法进行化简，若分子、分母次数一致，一般转化为反比例函数的形式求值域；若分子、分母次数不一致，一般利用基本不等式求值域.

**注意**：求函数的值域时，务必先考虑函数的定义域.

**【对点训练】**

(多选)下列函数中，值域正确的是　　(　　)

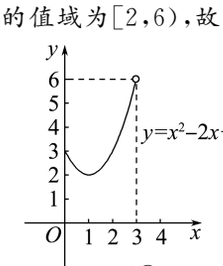
A. 当 $x\in[0,3)$ 时，函数 $y=x^2-2x+3$ 的值域为 $[2,6)$

B. 函数 $y=\dfrac{2x+1}{x-3}$ 的值域为 **R**

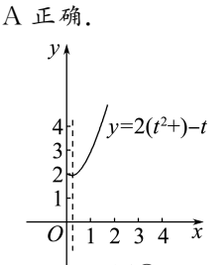
C. 函数 $y=2x-\sqrt{x-1}$ 的值域为 $\left[\dfrac{15}{8},+\infty\right)$

D. 函数 $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$ 的值域为 $[\sqrt{2},+\infty)$

ACD　**解析**：对于 A，$y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$，由 $x\in[0,3)$，再结合函数的图象(如图①所示)，可得函数的值域为 $[2,6)$，故选项 A 正确.



图①



图②

对于 B，$y=\dfrac{2x+1}{x-3}=\dfrac{2(x-3)+7}{x-3}=2+\dfrac{7}{x-3}$，显然 $\dfrac{7}{x-3}\neq 0$，所以 $y\neq 2$. 故函数的值域为 $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$，故选项 B 错误.

对于 C，设 $t=\sqrt{x-1}$，则 $x=t^2+1$，且 $t\geqslant 0$，所以 $y=2(t^2+1)-t=2\left(t-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{15}{8}$，由 $t\geqslant 0$，再结合函数的图象(如图②所示)，可得函数的值域为 $\left[\dfrac{15}{8},+\infty\right)$，故选项 C 正确.

对于 D，函数的定义域为 $[1,+\infty)$，因为 $y=\sqrt{x+1}$

与 $y=\sqrt{x-1}$ 在 $[1,+\infty)$ 上均单调递增，所以 $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$ 在 $[1,+\infty)$ 上为增函数，所以当 $x=1$ 时，$y_{\min}=\sqrt{2}$，即函数的值域为 $[\sqrt{2},+\infty)$，故选项 D 正确.故选 ACD.

## 类型二　函数对称性的应用

**例 2**　(1)(多选)已知 $f(x)$ 为定义在 **R** 上的偶函数，且 $f(x)$ 不是常函数，$F(x)=f(1-x)-1$，$g(x)=f(x+1)-1$.若 $g(x)$ 是奇函数，则　(　　)

A.$y=f(x)$ 的图象关于(1,1)对称

B.$f(x)=f(x+4)$

C.$F(x)$ 是奇函数

D.$F(x)$ 与 $g(x)$ 关于原点对称

(2)已知函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{1+x^2}$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的奇函数，且 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{5}$.

①确定函数 $f(x)$ 的解析式；

②用定义证明 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是增函数；

③解不等式：$f(t-1)+f(t)<0$.

(1)ABC　**解析**：因为 $g(x)$ 是奇函数，所以 $g(x)+g(-x)=0$，即 $f(x+1)-1+f(-x+1)-1=0$，整理得 $f(x+1)+f(-x+1)=2$，所以 $y=f(x)$ 的图象关于(1,1)对称，故选项 A 正确；

因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)+f(x-2)=f(x)+f(2-x)=2$，所以 $f(x-2)+f(x-4)=2$，$f(x)=f(x-4)$，所以 $f(x)=f(x+4)$，故选项 B 正确；

$F(x)+F(-x)=f(1-x)-1+f(1+x)-1=0$，故选项 C 正确；

因为 $F(-x)=g(x)$，所以 $F(x)$ 与 $g(x)$ 关于 $y$ 轴对称，不关于原点对称，故选项 D 错误.故选 ABC.

(2)①**解**：根据题意得 $\begin{cases}f(0)=0,\\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{5},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\dfrac{a\times0+b}{1+0^2}=0,\\ \dfrac{\frac{a}{2}+b}{1+\frac{1}{4}}=\dfrac{2}{5},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=0,\end{cases}$ 所以 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

②**证明**：任取 $x_1,x_2\in(-1,1)$，且令 $x_1<x_2$，

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+x_1^2}-\frac{x_2}{1+x_2^2}=\frac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}.$$

因为 $-1<x_1<x_2<1$，

所以 $x_1-x_2<0$，$1+x_1^2>0$，$1+x_2^2>0$，$1-x_1x_2>0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是增函数.

③**解**：$f(t-1)<-f(t)=f(-t)$.

因为 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是增函数，

所以 $\begin{cases}-1<t-1<1,\\ -1<-t<1,\\ t-1<-t,\end{cases}$ 解得 $0<t<\dfrac{1}{2}$.

所以不等式的解集为 $\left\{t\,\middle|\,0<t<\dfrac{1}{2}\right\}$.

**【规律方法】**

1.奇函数在关于坐标原点对称的区间上具有相同的单调性；偶函数在关于坐标原点对称的区间上具有相反的单调性.

2.已知函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的函数：

(1)若 $f(a+x)=f(b-x)$ 恒成立，则 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称.特别地，若 $f(a+x)=f(a-x)$ 恒成立，则 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.

(2)$f(a+x)+f(a-x)=0$，即 $f(x)=-f(2a-x)$ 恒成立，则 $y=f(x)$ 的图象关于点(1,0)中心对称.

**【对点训练】**

1.已知函数 $f(x)$ 是定义在区间 $[-a-1,2a]$ 上的偶函数，且在区间 $[0,2a]$ 上单调递增，则不等式 $f(x-1)<f(a)$ 的解集为　(　　)

A.$[-1,3]$　　B.$(0,2)$

C.$(0,1)\cup(2,3]$　　D.$[-1,0)\cup(1,2)$

B　**解析**：因为函数 $f(x)$ 是定义在区间 $[-a-1,2a]$ 上的偶函数，

所以 $-a-1+2a=0$，解得 $a=1$，故 $f(x-1)<f(a)$ 可化为 $f(|x-1|)<f(1)$.

因为 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上单调递增，所以 $|x-1|<1$，解得 $0<x<2$.故选 B.

2.已知函数 $y=f(x)$ 是定义域为 **R** 的函数，则函数 $y=f(x+2)$ 与 $y=f(4-x)$ 的图象　(　　)

A.关于直线 $x=1$ 对称

B.关于直线 $x=3$ 对称

C.关于直线 $y=3$ 对称

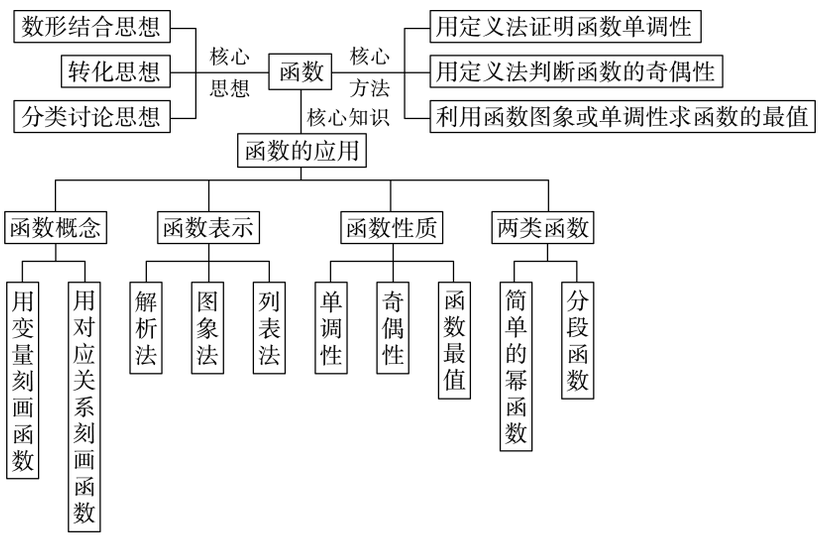
D.关于点(3,0)对称

A　**解析**：设 $P(x_0,y_0)$ 为 $y=f(x+2)$ 图象上任意一点，则 $y_0=f(x_0+2)=f(4-(2-x_0))$，所以点 $Q(2-x_0,y_0)$ 在函数 $y=f(4-x)$ 的图象上，而点 $P(x_0,y_0)$ 与点 $Q(2-x_0,y_0)$ 关于直线 $x=1$ 对称，所以函数 $y=f(x+2)$ 与 $y=f(4-x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称.故选 A.

★★★

# 重　构　拓　展

## 多维体系构建




**【问题探究】**

1.通过本章学习，你对函数概念有什么新的认识？

2.你能结合具体实例，分析、比较函数的各种表示方法的特点吗？

3.函数的性质一般包括哪些方面？为什么要研究这些性质？你能总结一下研究函数性质的一般过程和方法吗？

# 单元测试卷(三)

(考查范围:第三章　时间:120 分钟　分值:150 分)

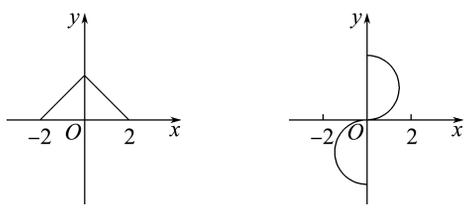
**一、单项选择题**:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

**1.**已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+1,x>0,\\ \pi,x=0,\\ x^2-1,x<0,\end{cases}$ 则 $f(f(-1))=$ (　　)

A.0　　B.$\pi$　　C.1　　D.2

B　**解析**:函数 $f(x)=\begin{cases}x+1,x>0,\\ \pi,x=0,\\ x^2-1,x<0,\end{cases}$ 则 $f(-1)=(-1)^2-1=0$,所以 $f(f(-1))=f(0)=\pi$.故选 B.

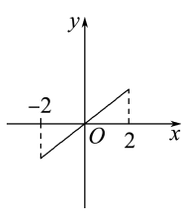
**2.**已知函数 $f(x)$既不是奇函数也不是偶函数,那么下列各图中最有可能是 $f(x)$的图象的是　　(　　)



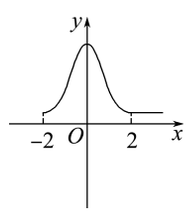
A



B



C



D

D　**解析**:对于 A,函数图象关于 $y$ 轴对称,该函数是偶函数,故选项 A 不符合题意;

对于 B,不满足函数的定义,故选项 B 不符合题意;

对于 C,函数图象关于原点对称,该函数是奇函数,故选项 C 不符合题意;

对于 D,函数图象不关于 $y$ 轴对称,且不关于原点对称,该函数既不是奇函数也不是偶函数,故选项 D 符合题意.故选 D.

**3.**函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{-x^2-3x+4}}{x}$的定义域为　　(　　)

A.$[-4,1]$　　B.$[-4,0)\cup(0,1)$

C.$[-4,0)\cup(0,1]$　　D.$(-\infty,-4)\cup[1,+\infty)$

C　**解析**:依题意,$\begin{cases}-x^2-3x+4\geqslant 0,\\ x\neq 0,\end{cases}$ 解得 $-4\leqslant x\leqslant 1$ 且 $x\neq 0$,所以 $f(x)$的定义域是$[-4,0)\cup(0,1]$.故选 C.

**4.**若函数 $f(x)=\dfrac{x}{(2x-1)(x+a)}$为奇函数,则实数 $a=$　　(　　)

A.$\dfrac{1}{2}$　　B.$\dfrac{2}{3}$　　C.$\dfrac{3}{4}$　　D.1

A　**解析**:由函数 $f(x)=\dfrac{x}{(2x-1)(x+a)}$为奇函数,可得 $f(-x)=-f(x)$,所以 $\dfrac{-x}{(-2x-1)(-x+a)}=-\dfrac{x}{(2x-1)(x+a)}$,所以 $-x(2x-1)(x+a)=-x\cdot(-2x-1)(-x+a)$,化简得 $2(2a-1)x^2=0$ 恒成立,所以 $2a-1=0$,即 $a=\dfrac{1}{2}$.故选 A.

**5.**函数 $f(x)=|4-x|\cdot(x-1)$的单调递减区间为　　(　　)

A.$\left(\dfrac{5}{2},4\right)$　　B.$(1,4)$

C.$(-\infty,4)$　　D.$\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right),(4,+\infty)$

A　**解析**:函数 $f(x)=|4-x|\cdot(x-1)=\begin{cases}(x-4)(x-1),x\geqslant 4,\\ (4-x)(x-1),x<4,\end{cases}$

即 $f(x)=\begin{cases}x^2-5x+4,x\geqslant 4,\\ -x^2+5x-4,x<4.\end{cases}$

当 $x\geqslant 4$ 时,$y=x^2-5x+4$ 单调递增;

当 $x<4$ 时,$y=-x^2+5x-4$ 的单调递增区间为 $\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right)$,单调递减区间为 $\left(\dfrac{5}{2},4\right)$.

所以函数 $f(x)$的单调递减区间为 $\left(\dfrac{5}{2},4\right)$.故选 A.

**6.**如果函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-ax+5,x\leqslant 1,\\ 3-x,x>1\end{cases}$在 **R** 上是减函数,则实数 $a$ 的取值范围是　　(　　)

A.$[2,4]$　　B.$[2,+\infty)$

C.$[2,8]$　　D.$(-\infty,-2]$

A　**解析**:当 $x\leqslant 1$ 时,$f(x)=x^2-ax+5=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+5-\dfrac{a^2}{4}$.

因为函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-ax+5,x\leqslant 1,\\ 3-x,x>1\end{cases}$在 **R** 上是减函数,所以 $\begin{cases}\dfrac{a}{2}\geqslant 1,\\ 1-a+5\geqslant 3-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a\geqslant 2,\\ a\leqslant 4.\end{cases}$

故实数 $a$ 的取值范围是$[2,4]$.故选 A.

**7.**已知函数 $f(x)=(m^2-m-5)x^{m^2-6}$ 是幂函数，对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，满足 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$.若 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a+b>0$，则 $f(a)+f(b)$ 的值　　（　　）

A.大于 0　　B.小于 0

C.等于 0　　D.无法判断

A　**解析：**因为 $f(x)=(m^2-m-5)x^{m^2-6}$ 是幂函数，所以 $m^2-m-5=1$，解得 $m=-2$ 或 $m=3$.因为对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，满足 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $m^2-6>0$，故 $m=3$，所以 $f(x)=x^3$ 为奇函数且为 $\mathbf{R}$ 上的增函数.若 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a+b>0$，则 $a>-b$，所以 $f(a)>f(-b)=-f(b)$，

所以 $f(a)+f(b)>0$.故选 A.

**8.**已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)-f(x_2)<x_1-x_2$ 成立，则关于 $x$ 的不等式 $f(1+x^2)+f(1-3x)<x^2-3x+2$ 的解集为　　（　　）

A.$(1,2)$　　B.$(1,3)$

C.$(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$　　D.$(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

A　**解析：**因为对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，若 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)-f(x_2)<x_1-x_2$ 成立，即 $f(x_1)-x_1<f(x_2)-x_2$ 成立，所以 $g(x)=f(x)-x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

因为 $f(1+x^2)+f(1-3x)<x^2-3x+2$，所以 $f(1+x^2)-(1+x^2)<-f(1-3x)-(3x-1)$.

又因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

所以 $-f(1-3x)=f(3x-1)$，

所以 $f(1+x^2)-(1+x^2)<f(3x-1)-(3x-1)$.

由 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增可知，$1+x^2<3x-1$，解得 $1<x<2$.

故选 A.

**二、多项选择题：**本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

**9.**下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的函数为　　（　　）

A.$y=x^2$　　B.$y=x$

C.$y=\left|\frac{1}{x}\right|$　　D.$y=|x|$

AD　**解析：**$y=x^2$ 是偶函数，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 A 满足；

$y=x$ 是奇函数，故 B 不满足；

$y=\left|\frac{1}{x}\right|$ 是偶函数，但在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 C 不满足；

$y=|x|$ 是偶函数，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 D 满足.

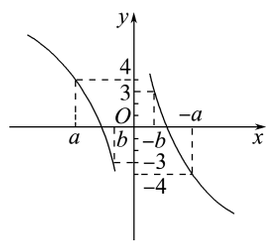
故选 AD.

**10.**已知奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且在区间 $[a,b]$ $(a<b<0)$ 上的值域为 $[-3,4]$，则在区间 $[-b,-a]$ 上　　（　　）

A.有最大值 4　　B.有最小值 $-4$

C.有最大值 3　　D.有最小值 $-3$

BC　**解析：**（方法一）根据题意可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也单调递减，作出函数 $y=f(x)$ 的简图，如图所示.由图知，B，C 正确.




（方法二）由题可知，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也单调递减.

当 $x\in[-b,-a]$ 时，$-x\in[a,b]$，

则有 $f(b)\leqslant f(-x)\leqslant f(a)$，

即 $-3\leqslant -f(x)\leqslant 4$，所以 $-4\leqslant f(x)\leqslant 3$.

故在区间 $[-b,-a]$ 上，$f(x)_{\min}=-4$，$f(x)_{\max}=3$.

**11.**给出定义：若 $m-\frac{1}{2}<x\leqslant m+\frac{1}{2}$ $(m\in\mathbf{Z})$，则称 $m$ 为离实数 $x$ 最近的整数，记作 $\{x\}=m$.下列关于函数 $f(x)=|x-\{x\}|$ 的结论正确的是　　（　　）

A.函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$

B.函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{k}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 对称

C.函数 $y=f(x)$ 是偶函数

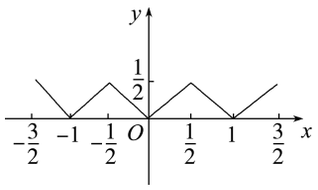
D.函数 $y=f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上单调递增

ABC　**解析：**根据 $\{x\}$ 的定义知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$\{x\}-\frac{1}{2}<x\leqslant\{x\}+\frac{1}{2}$，即 $-\frac{1}{2}<x-\{x\}\leqslant\frac{1}{2}$，所以 $0\leqslant|x-\{x\}|\leqslant\frac{1}{2}$，

函数 $y=f(x)$ 的值域为 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$，A 正确；

函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，由图可知 $y=$

$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{k}{2}(k\in\mathbf{Z})$对称，B正确；




由图象知函数$y=f(x)$是偶函数，C正确；

由图象知D不正确.

故选ABC.

**三、填空题**：本题共3小题，每小题5分，共15分.

**12.** 已知$f(x-1)=x^2-\frac{6}{x}$，则$f(1)=$<u>1</u>.

**13.** 设函数$f(x)=\frac{x^3+(x+1)^2}{x^2+1}$在区间$[-2,2]$上的最大值为$M$，最小值为$N$，则$(M+N-1)^{2\,025}$的值为_____.

1　**解析**：由题意知，$f(x)=\frac{x^3+2x}{x^2+1}+1$，设$g(x)=\frac{x^3+2x}{x^2+1}$，则$g(-x)=\frac{-x^3-2x}{x^2+1}=-g(x)$，所以$g(x)$为奇函数.所以$g(x)$在区间$[-2,2]$上的最大值与最小值的和为0，故$M+N=2$，$(M+N-1)^{2\,025}=(2-1)^{2\,025}=1$.

**14.** 已知$a\in\mathbf{R}$，函数$f(x)=\begin{cases}a^2-ax,x<1,\\x^2-ax,x\geqslant1.\end{cases}$若$f(f(a))=1$，则$a=$_____；若不等式$f(x)\geqslant f(1)$对任意$x\in\mathbf{R}$恒成立，则实数$a$的取值范围是_____.

$\pm1$　$[1,2]$　**解析**：当$a<1$时，$f(a)=a^2-a^2=0$，所以$f(f(a))=f(0)=a^2=1$，所以$a=-1$；当$a\geqslant1$时，$f(a)=a^2-a^2=0$，所以$f(f(a))=f(0)=a^2=1$，所以$a=1$.故$a=\pm1$.

因为不等式$f(x)\geqslant f(1)$对任意$x\in\mathbf{R}$恒成立，所以当$x=1$时，$f(x)$取得最小值，$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，在$(-\infty,1)$上单调递减，所以$\begin{cases}-a<0,\\\frac{a}{2}\leqslant1,\\a^2-a\times1\geqslant1^2-a\times1,\end{cases}$解得$1\leqslant a\leqslant2$.

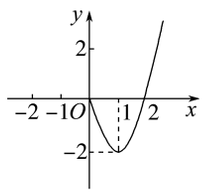
所以$a$的取值范围是$[1,2]$.

**四、解答题**：本题共5小题，共77分.解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

**15.**（13分）已知函数$f(x)$的部分图象如图所示，函数$f(x)$为奇函数，当$x\geqslant0$时，$f(x)=2x^2-4x$.

(1)求函数$f(x)$的解析式，补全函数$f(x)$的图象，并求不等式$xf(x)>0$的解集；

(2)若函数$f(x)$在区间$[-1,a-2]$上单调递减，求实数$a$的取值范围.

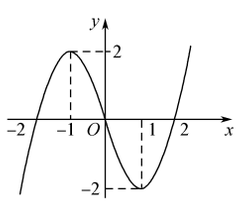



**解**：(1)当$x<0$时，$-x>0$，$f(-x)=2x^2+4x$.

由$f(x)$是奇函数，得$f(x)=-f(-x)=-2x^2-4x(x<0)$.

所以$f(x)=\begin{cases}2x^2-4x,x\geqslant0,\\-2x^2-4x,x<0.\end{cases}$

根据奇函数的图象关于原点对称这一性质即可补全函数$f(x)$的图象，如图所示.




对于不等式$xf(x)>0$，当$x>0$时，$f(x)>0$，由图可知$x>2$；

当$x<0$时，$f(x)<0$，由图可知$x<-2$.

综上，不等式$xf(x)>0$的解集为$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

(2)由(1)中图象可知，函数$f(x)$的单调递减区间是$[-1,1]$，

要使$f(x)$在$[-1,a-2]$上单调递减，

则$\begin{cases}a-2>-1,\\a-2\leqslant1,\end{cases}$解得$1<a\leqslant3$.

所以实数$a$的取值范围是$(1,3]$.

**16.**（15分）若点$(\sqrt{2},2)$在幂函数$f(x)$的图象上，点$\left(2,\frac{1}{2}\right)$在幂函数$g(x)$的图象上，函数$h(x)=\begin{cases}f(x),f(x)\leqslant g(x),\\g(x),f(x)>g(x),\end{cases}$求函数$h(x)$的最大值以及单调区间.

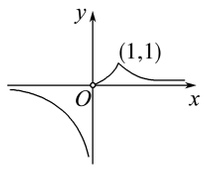
**解**：设$f(x)=x^\alpha$，因为点$(\sqrt{2},2)$在幂函数$f(x)$的图象上，所以$(\sqrt{2})^\alpha=2$，解得$\alpha=2$，所以$f(x)=x^2$.

设$g(x)=x^\beta$，因为点$\left(2,\frac{1}{2}\right)$在幂函数$g(x)$的图象上，所以$2^\beta=\frac{1}{2}$，解得$\beta=-1$，所以$g(x)=x^{-1}$.

在同一平面直角坐标系中画出函数$f(x)=x^2$和$g(x)=x^{-1}$的图象(图略).

由题意及图，可知$h(x)=\begin{cases}x^{-1},x<0\text{或}x>1,\\x^2,0<x\leqslant1.\end{cases}$

作出函数 $h(x)$ 的图象，如图所示.




由图可知函数 $h(x)$ 的最大值为 1，

$h(x)$ 的单调递增区间是 $(0,1)$，单调递减区间是 $(-\infty,0)$ 和 $(1,+\infty)$.

**17.**（15 分）函数 $f(x)=\dfrac{ax-b}{4-x^2}$ 是定义在 $(-2,2)$ 上的奇函数，且 $f(1)=\dfrac{1}{3}$.

(1)求 $f(x)$ 的解析式；

(2)解关于 $t$ 的不等式 $f(t-1)+f(t)<0$.

**解**：(1)因为函数 $f(x)=\dfrac{ax-b}{4-x^2}$ 是定义在 $(-2,2)$ 上的奇函数，所以 $f(0)=-\dfrac{b}{4}=0$，解得 $b=0$.

又 $f(1)=\dfrac{1}{3}$，即 $\dfrac{a-b}{3}=\dfrac{1}{3}$，解得 $a=1$，所以 $f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$.

又因为对 $\forall x\in(-2,2)$，$f(-x)=\dfrac{-x}{4-(-x)^2}=-\dfrac{x}{4-x^2}=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是奇函数，

所以函数 $f(x)$ 的解析式是 $f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$，$x\in(-2,2)$.

(2)任取 $x_1,x_2\in(-2,2)$，$x_1<x_2$，则 $f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{x_2}{4-x_2^2}-\dfrac{x_1}{4-x_1^2}=\dfrac{(x_2-x_1)(4+x_1x_2)}{(4-x_2^2)(4-x_1^2)}$.

因为 $-2<x_1<x_2<2$，所以 $x_2-x_1>0$，$4+x_1x_2>0$，$4-x_1^2>0$，$4-x_2^2>0$，

所以 $f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x_2)>f(x_1)$，

故 $f(x)$ 在 $(-2,2)$ 上单调递增.

由(1)知，不等式 $f(t-1)+f(t)<0\Leftrightarrow f(t-1)<-f(t)\Leftrightarrow f(t-1)<f(-t)$，

从而 $-2<t-1<-t<2$，解得 $-1<t<\dfrac{1}{2}$，

所以所求不等式的解集为 $\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

**18.**（17 分）经过市场调查，可知生产某种 LED 灯需投入的年固定成本为 3 万元，每生产 $x$ 万件该产品，需另投入变动成本 $W(x)$ 万元.在年产量不足 6 万件时，$W(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x$；在年产量不小于 6 万件时，$W(x)=7x+\dfrac{81}{x}-37$.每件产品售价为 6 元.假设该产品每年的销量等于当年的产量.

(1)写出年利润 $L(x)$（单位：万元）关于年产量 $x$（单位：万件）的函数解析式.（注：年利润＝年销售收入－固定成本－变动成本）

(2)年产量为多少万件时，年利润最大？最大年利润是多少？

**解**：(1)由题可知，$L(x)=6x-3-W(x)$，

所以 $L(x)=\begin{cases}6x-3-\left(\dfrac{1}{2}x^2+x\right),0<x<6,\\6x-3-\left(7x+\dfrac{81}{x}-37\right),x\geqslant 6\end{cases}$

$=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2+5x-3,0<x<6,\\-x-\dfrac{81}{x}+34,x\geqslant 6.\end{cases}$

(2)当 $0<x<6$ 时，$L(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+5x-3=-\dfrac{1}{2}\cdot(x-5)^2+\dfrac{19}{2}$.

由二次函数的性质知，图象的对称轴为直线 $x=5$，开口向下，

所以当 $x=5$ 时，$L(x)$ 取得最大值 $\dfrac{19}{2}$；

当 $x\geqslant 6$ 时，$L(x)=-x-\dfrac{81}{x}+34\leqslant -2\sqrt{x\cdot\dfrac{81}{x}}+34=16$，当且仅当 $x=\dfrac{81}{x}$，即 $x=9$ 时，等号成立.

因为 $16>\dfrac{19}{2}$，所以年产量为 9 万件时，年利润最大，最大年利润是 16 万元.

**19.**（17 分）已知函数 $f(x)=x+\dfrac{k}{x}(k\in\mathbf{R},k<0)$.

(1)判断函数 $f(x)$ 的奇偶性与单调性，并加以证明；

(2)设函数 $F(x)=x^2+\dfrac{4}{x^2}-2a\left(x-\dfrac{2}{x}\right)$，$x\in[1,2]$，$a\in\mathbf{R}$，利用(1)中的结论求函数 $F(x)$ 的最小值 $g(a)$.

**解**：(1)函数 $f(x)$ 为奇函数，在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 上单调递增.

证明如下：

由题意知函数 $f(x)=x+\dfrac{k}{x}(k\in\mathbf{R},k<0)$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$，

又 $f(-x)=-x+\dfrac{k}{-x}=-f(x)$，所以函数 $f(x)$

为奇函数.

任取 $0<x_1<x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=x_1+\frac{k}{x_1}-x_2-\frac{k}{x_2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-k)}{x_1x_2}$.

因为 $0<x_1<x_2$，$k<0$，所以 $x_1-x_2<0$，$-k>0$，$x_1x_2>0$，$x_1x_2-k>0$，

所以 $\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-k)}{x_1x_2}<0$，

所以 $f(x_1)<f(x_2)$，

即函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又因为 $f(x)$ 为奇函数，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也单调递增.

综上，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 上单调递增.

(2)$F(x)=x^2+\frac{4}{x^2}-2a\left(x-\frac{2}{x}\right)=\left(x-\frac{2}{x}\right)^2-2a\left(x-\frac{2}{x}\right)+4$，

设 $t=x-\frac{2}{x}$，$x\in[1,2]$，由(1)知 $t=x-\frac{2}{x}$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，则 $t\in[-1,1]$，

所以 $F(x)$ 即为 $h(t)=t^2-2at+4$，$t\in[-1,1]$，其图象的对称轴为直线 $t=a$.

当 $a\leqslant-1$ 时，$h(t)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增，则 $g(a)=h(-1)=5+2a$；

当 $-1<a<1$ 时，$h(t)$ 在 $(-1,a)$ 上单调递减，在 $(a,1)$ 上单调递增，

则 $g(a)=h(a)=-a^2+4$；

当 $a\geqslant1$ 时，$h(t)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减，则 $g(a)=h(1)=5-2a$.

综上，$g(a)=\begin{cases}5+2a,a\leqslant-1,\\-a^2+4,-1<a<1,\\5-2a,a\geqslant1.\end{cases}$

# 阶段测试卷

（考查范围：第一～三章　时间：120 分钟　分值：150 分）

**一、单项选择题**：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

**1.** 已知集合 $A=\{x\mid3x+2>0\}$，$B=\{x\mid|x+1|>1\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)=$　　(　　)

A.$\left(-\frac{2}{3},+\infty\right)$　　B.$\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right]$

C.$(0,+\infty)$　　D.$(-\infty,0]$

D　**解析**：$A=\{x\mid3x+2>0\}=\left\{x\mid x>-\frac{2}{3}\right\}$，$B=\{x\mid x>0$ 或 $x<-2\}$，则 $A\cap B=\{x\mid x>0\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)=(-\infty,0]$.故选 D.

**2.** 下列各组函数中是同一个函数的是　　(　　)

A.$f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$ 与 $g(x)=\frac{1}{x+1}$

B.$f(x)=|x|$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$

C.$f(x)=x^0$ 与 $g(x)=1$

D.$f(x)=\sqrt{(x-2\,025)^2}$ 与 $g(x)=x-2\,025$

B　**解析**：对于 A，$f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq\pm1\}$，而 $g(x)=\frac{1}{x+1}$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq-1\}$，定义域不同，故选项 A 不符合题意；

对于 B，两个函数的定义域均为 **R**，且 $g(x)=|x|=f(x)$，所以两个函数为同一个函数，故选项 B 符合题意；

对于 C，$f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq0\}$，而 $g(x)$ 的定义域为 **R**，定义域不同，故选项 C 不符合题意；

对于 D，$f(x)=|x-2\,025|$，两个函数的对应关系不同，故选项 D 不符合题意.故选 B.

**3.** 1921 年，萧楚女为激励学子刻苦学习，写下“前程万里，毛羽须丰，一旦奋飞何其雄”的诗句.这首诗后来被谱曲，成为宣城中学的校歌《奋飞曲》，在全校师生中争相传颂.“前程万里”是“毛羽须丰”的　　(　　)

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

A　**解析**：“前程万里，毛羽须丰”的意思就是要想前程万里，毛羽必须先丰满，

故题意即是“毛羽须丰”是实现“前程万里”的必要条件，所以“前程万里”是“毛羽须丰”的充分条件，但只有羽毛丰满，不奋飞，也不能“前程万里”，所以“前程万里”是“毛羽须丰”的不必要条件.综上所述，“前程万里”是“毛羽须丰”的充分不必要条件.故选 A.

**4.** 若函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x+6},x\in[-10,6],\\-\frac{1}{2}(x-6),x\in(6,8],\end{cases}$ 则　　(　　)

A.$-1\leqslant f(x)\leqslant4$　　B.$-1\leqslant f(x)\leqslant0$

C.$-4\leqslant f(x)\leqslant1$　　D.$0\leqslant f(x)<2$

A　**解析**：当 $x\in[-10,6]$ 时，$0\leqslant -x+6\leqslant 16$，则 $0\leqslant\sqrt{-x+6}\leqslant 4$；

当 $x\in(6,8]$ 时，$0<x-6\leqslant 2$，则 $-1\leqslant -\frac{1}{2}(x-6)<0$.所以函数 $f(x)$ 的值域为 $[-1,4]$.故选 A.

**5.** 函数 $g(x)=x|x+1|+1$ 的单调递减区间为　(B)

A.$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$　　B.$\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$

C.$[1,+\infty)$　　D.$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$

**6.** 已知 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 单调递增，且 $f(2)=0$，则 $xf(x)>0$ 的解集为　(D)

A.$(-2,2)$

B.$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

C.$(-2,0)\cup(0,2)$

D.$(-2,0)\cup(2,+\infty)$

**7.** 已知实数 $a,b,c$ 满足 $5a^2+b^2+c^2=4$，则 $a(2b+c)$ 的最大值为　(　　)

A.1　　B.2　　C.4　　D.8

B　**解析**：由基本不等式，可得 $a(2b+c)=2ab+ac\leqslant\frac{4a^2+b^2}{2}+\frac{a^2+c^2}{2}=\frac{5a^2+b^2+c^2}{2}=2$，当且仅当 $2a=b$，$a=c$ 时，等号成立，可取 $a=c=\frac{\sqrt{10}}{5}$，$b=\frac{2\sqrt{10}}{5}$，所以 $a(2b+c)$ 的最大值为 2.故选 B.

**8.** 若定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足对 $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，当 $x_1\neq x_2$ 时，有 $\frac{x_1f(x_1)-x_2f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，则称函数 $f(x)$ 为“理想函数”.根据此定义，下列函数为“理想函数”的是　(　　)

A.$f(x)=-1$　　B.$f(x)=\frac{1}{x^2}$

C.$f(x)=x-1$　　D.$f(x)=x-\frac{1}{x}$

D　**解析**：对于 A，当 $f(x)=-1$ 时，对 $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，当 $x_1\neq x_2$ 时，$\frac{x_1f(x_1)-x_2f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{-x_1+x_2}{x_1-x_2}=-1<0$，因此 $f(x)=-1$ 不是“理想函数”，故 A 错误.

对于 B，当 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 时，对 $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，当 $x_1\neq x_2$ 时，$\frac{x_1f(x_1)-x_2f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}}{x_1-x_2}=-\frac{1}{x_1x_2}<0$，所以 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 不是“理想函数”，故 B 错误.

对于 C，当 $f(x)=x-1$ 时，取 $x_1=\frac{1}{4}$，$x_2=\frac{3}{4}$，$\frac{x_1f(x_1)-x_2f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\frac{1}{4}\times\left(-\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}=0$，所以 $f(x)=x-1$ 不是“理想函数”，故 C 错误.

对于 D，当 $f(x)=x-\frac{1}{x}$ 时，对 $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，当 $x_1\neq x_2$ 时，$\frac{x_1f(x_1)-x_2f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1-x_2}=x_1+x_2>0$，所以 $f(x)=x-\frac{1}{x}$ 是“理想函数”，故 D 正确.故选 D.

**二、多项选择题**：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

**9.** 下列选项中错误的是　(　　)

A.空集是任何集合的子集

B.任何集合至少有两个子集

C.集合 $\{x\in\mathbf{N}|x^3=x\}$ 用列举法表示为 $\{0,1,-1\}$

D.坐标满足方程组 $\begin{cases}x+y=0,\\x-y=-1\end{cases}$ 的点集为 $\left\{x=-\frac{1}{2},y=\frac{1}{2}\right\}$

BCD　**解析**：对于 A，空集是任何集合的子集，故选项 A 正确；

对于 B，空集只有一个子集，即空集本身，故选项 B 错误；

对于 C，由 $x^3=x$，得 $x=0$ 或 $-1$ 或 1，因为 $x\in\mathbf{N}$，所以 $x=0$ 或 1，用列举法表示为 $\{0,1\}$，故选项 C 错误；

对于 D，由 $\begin{cases}x+y=0,\\x-y=-1,\end{cases}$ 得 $x=-\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$，点集为 $\left\{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$，故选项 D 错误.故选 BCD.

**10.** 下列命题中，正确的是　(BD)

A.若 $a<b$，则 $a^2<b^2$

B.若 $b>a>0$，$m>0$，则 $\frac{b}{a}>\frac{b+m}{a+m}$

C.若 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，则 $a>b$

D.若 $-2<a<3$，$1<b<4$，则 $-5<b-2a<8$

**11.**已知函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f\left(\frac{1}{4}\right)\neq 0$,若对 $\forall x,y\in\mathbf{R}$,都有 $f(x+y)+f(x)f(y)=16xy$,则(　　)

A.$f\left(-\frac{1}{4}\right)=0$

B.$f\left(\frac{1}{4}\right)=2$

C.函数 $f\left(x-\frac{1}{4}\right)$为奇函数

D.函数 $f\left(x+\frac{1}{4}\right)$为增函数

AC　**解析**:对于 A,令 $x=\frac{1}{4}$,$y=0$,则 $f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)f(0)=0$,结合 $f\left(\frac{1}{4}\right)\neq 0$,

可得 $1+f(0)=0$,所以 $f(0)=-1$.

令 $x=\frac{1}{4}$,$y=-\frac{1}{4}$,则 $f(0)+f\left(\frac{1}{4}\right)f\left(-\frac{1}{4}\right)=-1$,即 $f\left(\frac{1}{4}\right)f\left(-\frac{1}{4}\right)=0$,

而 $f\left(\frac{1}{4}\right)\neq 0$,故 $f\left(-\frac{1}{4}\right)=0$,故 A 正确.

对于 C,令 $x\in\mathbf{R}$,$y=-\frac{1}{4}$,则 $f\left(x-\frac{1}{4}\right)+f(x)\cdot f\left(-\frac{1}{4}\right)=-4x$,

即 $f\left(x-\frac{1}{4}\right)=-4x$,该函数为奇函数,故 C 正确.

对于 B,由 $f\left(x-\frac{1}{4}\right)=-4x$,令 $x=\frac{1}{2}$,则 $f\left(\frac{1}{4}\right)=-4\times\frac{1}{2}=-2$,故 B 错误.

对于 D,由于 $f\left(x-\frac{1}{4}\right)=-4x$,用 $x+\frac{1}{2}$代换 $x$,

可得 $f\left(x+\frac{1}{4}\right)=-4\left(x+\frac{1}{2}\right)=-4x-2$,

该函数为减函数,故 D 错误.故选 AC.

**三、填空题**:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

**12.**设 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,当 $x>0$ 时,$f(x)=x+1$,则 $f(-1)+f(0)=$_____.

$-2$　**解析**:根据题意,当 $x>0$ 时,$f(x)=x+1$,则 $f(1)=1+1=2$.

又 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $f(0)=0$,$f(-1)=-f(1)=-2$,故 $f(-1)+f(0)=-2$.

**13.**若"$\exists x\in\mathbf{R}$,$kx^2+kx+1\leqslant 0$"是假命题,则 $k$ 的取值范围为_____.

$[0,4)$　**解析**:"$\exists x\in\mathbf{R}$,$kx^2+kx+1\leqslant 0$"是假命题,则有 $\forall x\in\mathbf{R}$,$kx^2+kx+1>0$.

当 $k=0$ 时,$1>0$ 恒成立,满足题意;当 $k\neq 0$ 时,有 $\begin{cases}k>0,\\ \Delta=k^2-4k<0,\end{cases}$ 解得 $0<k<4$.

综上所述,$k$ 的取值范围为$[0,4)$.

**14.**已知函数 $f(x)=\frac{-ax}{x^2+1}(a>0)$,$g(x)=-x^2+x$,若对 $\forall x_1\in[1,3]$,$\exists x_2\in[2,3]$,使得 $f(x_1)=g(x_2)$,则实数 $a$ 的取值范围为_____.

$\left[\frac{20}{3},12\right]$　**解析**:由题得函数 $f(x)=\frac{-ax}{x^2+1}=\frac{-a}{x+\frac{1}{x}}$ $(a>0)$,因为 $y=x+\frac{1}{x}$在$[1,3]$上单调递增,

所以,由复合函数单调性知,函数 $f(x)$在区间$[1,3]$上单调递增,

$f(x)_{\max}=f(3)=\frac{-3a}{10}$,$f(x)_{\min}=f(1)=\frac{-a}{2}$.

易知函数 $g(x)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$在区间$[2,3]$上单调递减,

$g(x)_{\max}=g(2)=-2$,$g(x)_{\min}=g(3)=-6$.

由题意得 $f(x)_{\max}\leqslant g(x)_{\max}$ 且 $f(x)_{\min}\geqslant g(x)_{\min}$ 成立,

即 $-\frac{3a}{10}\leqslant -2$ 且 $-\frac{a}{2}\geqslant -6$,解得 $\frac{20}{3}\leqslant a\leqslant 12$.

所以实数 $a$ 的取值范围为$\left[\frac{20}{3},12\right]$.

**四、解答题**:本题共 5 小题,共 77 分.解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

**15.**(13 分)已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$,$f(0)=4$,不等式 $f(x)<1$ 的解集为$\{x\mid x<-1$,或 $x>3\}$.

(1)求 $f(x)$的解析式;

(2)设 $g(x)=kx^2+f(x)$,不等式 $g(x)<0$ 的解集为$\varnothing$,求实数 $k$ 的取值范围.

**解**:(1)由题设得 $f(0)=c=4$,

则 $ax^2+bx+4<1$,即 $ax^2+bx+3<0$ 的解集为$\{x\mid x<-1$,或 $x>3\}$,

所以 $\begin{cases}a<0,\\ -\frac{b}{a}=2,\\ \frac{3}{a}=-3,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=2,\end{cases}$ 故 $f(x)=-x^2+2x+4$.

(2)因为 $g(x)=(k-1)x^2+2x+4<0$ 的解集为∅，

所以 $\begin{cases}k-1>0,\\ \Delta=4-16(k-1)\leqslant 0,\end{cases}$ 可得 $k\geqslant\frac{5}{4}$.

所以实数 $k$ 的取值范围是 $\left[\frac{5}{4},+\infty\right)$.

**16.**(15分)已知全集为 $\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x^2+x<2\}$，$B=\{x\mid -1<2x+a<4\}$.

(1)当 $a=1$ 时，求 $A\cup B$；

(2)若“$x\in B$”是“$x\in A$”的充分不必要条件，求实数 $a$ 的取值范围.

**解**：(1)解不等式 $x^2+x<2$，即 $x^2+x-2<0$，得 $-2<x<1$，则 $A=\{x\mid -2<x<1\}$.

当 $a=1$ 时，$B=\{x\mid -1<2x+1<4\}=\left\{x\,\middle|\,-1<x<\frac{3}{2}\right\}$，

所以 $A\cup B=\left\{x\,\middle|\,-2<x<\frac{3}{2}\right\}$.

(2)依题意，$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{-1-a}{2}<x<\frac{4-a}{2}\right\}$，$B\neq\varnothing$，

由“$x\in B$”是“$x\in A$”的充分不必要条件，

得 $B$ 是 $A$ 的真子集.

又由(1)知 $A=\{x\mid -2<x<1\}$，

因此 $\begin{cases}\frac{-1-a}{2}\geqslant -2,\\ \frac{4-a}{2}\leqslant 1,\end{cases}$ 其中等号不能同时取到，解得 $2\leqslant a\leqslant 3$.

所以实数 $a$ 的取值范围是 $[2,3]$.

**17.**(15分)已知幂函数 $y=f(x)$ 的图象过点 $\left(3,\frac{1}{3}\right)$.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2)用定义证明函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

(3)求不等式 $f(|5-x|)<f(|x-1|)$ 的解集.

(1)**解**：设 $f(x)=x^{\alpha}$，将 $\left(3,\frac{1}{3}\right)$ 代入解析式得 $3^{\alpha}=\frac{1}{3}$，得 $\alpha=-1$，所以 $f(x)=x^{-1}=\frac{1}{x}$.

(2)**证明**：任取 $0<x_1<x_2$，$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}$，

因为 $x_2-x_1>0$，$x_1x_2>0$，所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

(3)**解**：$f(x)=\frac{1}{x}$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$，$f(-x)=\frac{1}{-x}=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 是奇函数.

由(2)可知函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减.

由 $f(|5-x|)<f(|x-1|)$ 得 $\begin{cases}5-x\neq 0,\\ x-1\neq 0,\\ |5-x|>|x-1|,\end{cases}$

即 $\begin{cases}5-x\neq 0,\\ x-1\neq 0,\\ |5-x|^2>|x-1|^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x\neq 5,\\ x\neq 1,\\ x<3.\end{cases}$

所以不等式 $f(|5-x|)<f(|x-1|)$ 的解集为 $(-\infty,1)\cup(1,3)$.

**18.**(17分)为了贯彻落实“绿水青山就是金山银山”的新发展理念，某县抓住机遇，利用得天独厚的绿色资源和天然氧吧，大力开发旅游康养中心游玩项目.当地某旅游公司计划在今年全年投入固定成本300万元，若该项目在今年有游客 $x$ 万人，则需另投入成本 $R(x)$ 万元，且 $R(x)=\begin{cases}35,0<x\leqslant 6,\\ x^2+20x-100,6<x\leqslant 25,\\ 61x+\frac{900}{x}-565,x>25.\end{cases}$ 该游玩项目的每张门票售价为100元.为吸引游客，该公司实行门票五折优惠活动.当地政府为鼓励企业更好发展，每年给该游玩项目财政补贴 $10x$ 万元.

(1)求今年该项目的利润 $W(x)$(单位：万元)关于游客人数 $x$(单位：万人)的函数解析式.(利润＝收入－成本)

(2)当今年的游客人数为多少时，该项目所获利润最大？最大利润是多少？

**解**：(1)该项目的门票收入为 $50x$ 万元，财政补贴收入为 $10x$ 万元，共 $60x$ 万元，则利润

$$W(x)=\begin{cases}60x-300-35,0<x\leqslant 6,\\ 60x-300-(x^2+20x-100),6<x\leqslant 25,\\ 60x-300-\left(61x+\frac{900}{x}-565\right),x>25,\end{cases}$$

化简得 $W(x)=\begin{cases}60x-335,0<x\leqslant 6,\\ -x^2+40x-200,6<x\leqslant 25,\\ -x-\frac{900}{x}+265,x>25.\end{cases}$

(2)①当 $0<x\leqslant 6$ 时,$W(x)$单调递增,

$W(x)_{\max}=W(6)=25$;

②当 $6<x\leqslant 25$ 时,对应二次函数的图象开口向下,对称轴为直线 $x=-\dfrac{40}{2\times(-1)}=20$,

则 $W(x)_{\max}=W(20)=200$;

③当 $x>25$ 时,$-\left(x+\dfrac{900}{x}\right)+265\leqslant -2\sqrt{x\cdot\dfrac{900}{x}}+265=205$.

当且仅当 $x=\dfrac{900}{x}$,即 $x=30$ 时,等号成立,

所以 $W(x)_{\max}=205$.

综上所述,当今年的游客人数为 30 万时,利润最大,最大利润为 205 万元.

**19.**(17 分)对于函数 $f(x)$,在其定义域内存在实数 $x_0$,使 $f(x_0)=x_0$ 成立,则称 $x_0$ 是 $f(x)$的一个不动点.已知函数 $f(x)=ax^2-(b+1)x+2-b$ $(a\neq 0)$,$g(x)=mx-1$.

(1)当 $a=1,b=2$ 时,求函数 $f(x)$的不动点;

(2)当 $a=2$ 时,若函数 $f(x)$有两个不动点 $x_1$,$x_2$,且 $0<x_1<1$,$x_2>1$,求实数 $b$ 的取值范围;

(3)若函数 $f(x)$的不动点为 $-1,2$,且对任意 $x_1\in[1,2]$,总存在 $x_2\in[-1,1]$,使得 $f(x_1)g(x_2)=1$ 成立,求实数 $m$ 的取值范围.

**解**:由题意可知,函数 $f(x)$的不动点即为 $f(x)-x=0$ 的实数根.

(1)当 $a=1,b=2$ 时,解方程 $x^2-4x=0$,得 $x=0$ 或 $x=4$,所以函数 $f(x)$的不动点为 0 和 4.

(2)由题意可得方程 $2x^2-(b+1)x+2-b=x$ 有两个不相等的实数根,

即 $2x^2-(b+2)x+2-b=0$ 有两个不相等的实数根 $x_1$,$x_2$,且 $0<x_1<1$,$x_2>1$.

设 $h(x)=2x^2-(b+2)x+2-b$,

则 $\begin{cases}h(0)=2-b>0,\\ h(1)=2-(b+2)+2-b<0,\end{cases}$ 解得 $1<b<2$.

所以实数 $b$ 的取值范围为(1,2).

(3)由题意可知 $-1,2$ 为方程 $f(x)=x$,即 $ax^2-(b+2)x+2-b=0$ 的两个根,

则 $\begin{cases}-1+2=\dfrac{b+2}{a},\\ -1\times 2=\dfrac{2-b}{a},\end{cases}$ 解得 $a=-4,b=-6$,

从而 $f(x)=-4x^2+5x+8$.

因为对任意 $x_1\in[1,2]$,总存在 $x_2\in[-1,1]$,使得 $f(x_1)g(x_2)=1$ 成立,即 $\dfrac{1}{f(x_1)}=g(x_2)$,

所以 $y=\dfrac{1}{f(x_1)}$的值域是 $y=g(x_2)$值域的子集.

因为 $f(x)=-4x^2+5x+8$ 在$[1,2]$上是单调递减的,所以 $f(x)\in[2,9]$,

所以 $y=\dfrac{1}{f(x_1)}$的值域为$\left[\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{2}\right]$.

因为 $g(x)=mx-1$ 且 $x\in[-1,1]$,

当 $m=0$ 时,$g(x)=-1$,不合题意.

当 $m>0$ 时,$g(x)=mx-1$ 在$[-1,1]$上单调递增,则 $-m-1\leqslant g(x)\leqslant m-1$.

因为$\left[\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{2}\right]\subseteq[-m-1,m-1]$,则$\begin{cases}-m-1\leqslant\dfrac{1}{9},\\ m-1\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $m\geqslant\dfrac{3}{2}$.

当 $m<0$ 时,$g(x)=mx-1$ 在$[-1,1]$上是减函数,则 $m-1\leqslant g(x)\leqslant -m-1$.

因为$\left[\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{2}\right]\subseteq[m-1,-m-1]$,则$\begin{cases}m-1\leqslant\dfrac{1}{9},\\ -m-1\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $m\leqslant-\dfrac{3}{2}$.

综上,$m$ 的取值范围是$\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.

# 第四章 指数函数与对数函数

## 单元概览

### 单元导航

初中学习了数的开平方、开立方以及二次根式等内容，又学习了整数指数幂及其运算法则，在此基础上将指数幂的概念扩充到有理数指数幂和实数指数幂.本单元研究两类具体的函数——指数函数和对数函数.指数函数、对数函数与幂函数一样，是最基本、应用最广泛的函数，是进一步学习数学的基础.通过学习用函数图象和代数运算的方法研究这些函数的性质，总结研究函数性质的一般方法；运用这些函数建立模型，解决简单的实际问题，体会这些函数在解决实际问题中的作用.

### 学习目标

**1.**探究指数函数、对数函数的图象与性质，并运用性质解决函数、方程、不等式等综合问题.

**2.**树立基本初等函数整体观，在生活中建立函数模型，刻画事物变化规律，解决最优化问题.

**3.**经历指数运算、对数运算，指数函数与对数函数的定义、图象、性质的学习过程，构建单元的知识结构，说明其逻辑关系.

### 核心概念

指数函数和对数函数是刻画客观世界中“指数爆炸”“对数增长”现象的重要数学模型，是最基本、应用最广泛的函数.

本章将利用数形结合思想研究指数函数、对数函数，形成新的函数模型及新的函数观，提升数学抽象、数形结合等素养.

### 学法指导

我们可先由初中的平方根、立方根的意义入手，将初中已学过的整数指数幂拓展到实数指数幂，从而学习实数指数幂的运算法则；然后通过指数增长方式的实例分析，研究指数函数概念，并用数形结合思想研究指数函数的图象与性质；再从对数与指数的相互联系，研究对数的概念、运算法则，进一步研究对数函数的概念、图象和性质；最后应用函数模型解决实际问题，体会运用函数模型发现和提出问题、分析和解决问题的方法.

★★★

# 探　究　构　建

## 4.1　指数

### 4.1.1　$n$ 次方根与分数指数幂

**学习任务目标**

1.理解根式的概念及分数指数幂的含义.
2.会进行根式与分数指数幂的互化.
3.掌握根式的运算性质和有理数指数幂的运算性质.

## ○ 问题式预习 ○

**【知识清单】**

**知识点一　$n$ 次方根**

(1)定义:一般地,如果 $x^n=a$,那么 $x$ 叫做 $a$ 的 $n$ 次方根,其中 $n>1$,且 $n\in\mathbf{N}^*$.

(2)性质:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $n$ 是奇数 | $a>0$ | $x>0$ | $x$ 仅有一个值,记为 $\sqrt[n]{a}$ |
| | $a<0$ | $x<0$ | |
| $n$ 是偶数 | $a>0$ | $x$ 有两个值,且互为相反数,记为 $\pm\sqrt[n]{a}$ | |
| | $a<0$ | $x$ 不存在 | |

**知识点二　根式**

(1)定义:式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式,这里 $n$ 叫做根指数,$a$ 叫做被开方数.

(2)性质:当 $n$ 为奇数时,$\sqrt[n]{a^n}=a$;

当 $n$ 为偶数时,$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a,a\geqslant 0,\\-a,a<0.\end{cases}$

**知识点三　分数指数幂的意义**

| | | |
|---|---|---|
| 分数指数幂 | 正分数指数幂 | $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*,n>1)$ |
| | 负分数指数幂 | $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*,n>1)$ |
| | 0 的分数指数幂 | 0 的正分数指数幂等于 0,0 的负分数指数幂没有意义 |

**知识点四　有理数指数幂的运算性质**

(1)$a^ra^s=a^{r+s}(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$;

(2)$(a^r)^s=a^{rs}(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$;

(3)$(ab)^r=a^rb^r(a>0,b>0,r\in\mathbf{Q})$.

**【概念辨析】**

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)实数 $a$ 的偶次方根有两个.　(　　)

(2)0 的任何次幂都等于 0.　(　　)

(3)$a^{\frac{m}{n}}$ 就是 $\frac{m}{n}$ 个 $a$ 相乘.　(　　)

(4)$(-2)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[6]{(-2)^2}$.　(　　)

(1)×　**解析**:当 $a<0$ 时,没有偶次方根.

(2)×　**解析**:0 的 0 次幂与负实数次幂都没有意义.

(3)×　**解析**:$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$,不是 $\frac{m}{n}$ 个 $a$ 相乘.

(4)×

2.计算:$4^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=$　(C)

A.−2　　B.−1

C.0　　D.1

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1　掌握根式的概念及运算

1.(多选)下列说法中正确的是　(　　)

A.$\sqrt[3]{-27}=3$

B.16 的 4 次方根是 ±2

C.$\sqrt[4]{81}=\pm 3$

D.$\sqrt{(x+y)^2}=|x+y|$

BD　**解析**：负数的3次方根是一个负数，$\sqrt[3]{-27}=-3$，故A错误；16的4次方根有两个，为$\pm2$，故B正确；$\sqrt[4]{81}=3$，故C错误；$\sqrt{(x+y)^2}$是非负数，所以$\sqrt{(x+y)^2}=|x+y|$，故D正确.

**2.**（教材P105例1改编）化简：

（1）$\sqrt[5]{(-2)^5}+(\sqrt[5]{-2})^5$；

（2）$\sqrt{(\pi-4)^2}+\sqrt[3]{(\pi-4)^3}$；

（3）$\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+6x+9}$（$x\leqslant-3$）.

**解**：（1）原式$=-2+(-2)=-4$.

（2）原式$=|\pi-4|+\pi-4=4-\pi+\pi-4=0$.

（3）原式$=\sqrt{(x-1)^2}-\sqrt{(x+3)^2}=|x-1|-|x+3|$.因为$x\leqslant-3$，所以$x-1<0$，$x+3\leqslant0$，

所以原式$=-(x-1)+(x+3)=4$.

［一题多思］

**思考1.**本题（1）若改为“$\sqrt[6]{(-2)^6}+(\sqrt[6]{2})^6$”，与原题答案相同吗？

**提示**：不同.$\sqrt[6]{(-2)^6}+(\sqrt[6]{2})^6=|-2|+2=2+2=4$.

**思考2.**本题（3）若把“$x\leqslant-3$”改为“$-3<x<3$”，化简结果会发生怎样的变化？

**提示**：$\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+6x+9}=\sqrt{(x-1)^2}-\sqrt{(x+3)^2}=|x-1|-|x+3|$.

因为$-3<x<3$，所以当$-3<x<1$时，

原式$=-(x-1)-(x+3)=-2x-2$；

当$1\leqslant x<3$时，原式$=x-1-(x+3)=-4$.

所以原式$=\begin{cases}-2x-2,-3<x<1,\\-4,1\leqslant x<3.\end{cases}$

## 【探究总结】

**根式化简与求值的思路及注意点**

（1）思路：首先要分清根式为奇次根式还是偶次根式，然后运用根式的性质进行化简.

（2）注意点：①正确区分$(\sqrt[n]{a})^n$与$\sqrt[n]{a^n}$两式.

②运算时注意变式、整体代换，以及平方差、立方差、完全平方和完全立方公式的运用，必要时要进行分类讨论.

# 任务2 掌握根式与分数指数幂的互化

## 探究活动

**例1**　（多选）下列根式与分数指数幂的互化正确的是（　　）

A.$-\sqrt{x}=(-x)^{\frac{1}{2}}$　　B.$\sqrt[6]{y^2}=y^{\frac{1}{3}}(y<0)$

C.$x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}(x\neq0)$　　D.$[\sqrt[3]{(-x)^2}]^{\frac{3}{4}}=x^{\frac{1}{2}}(x>0)$

CD　**解析**：因为$-\sqrt{x}=-x^{\frac{1}{2}}$，所以选项A错误；因为$\sqrt[6]{y^2}=y^{\frac{2}{6}}=-y^{\frac{1}{3}}(y<0)$，所以选项B错误；因为$x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$（$x\neq0$），所以选项C正确；因为$[\sqrt[3]{(-x)^2}]^{\frac{3}{4}}=(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}=x^{\frac{1}{2}}(x>0)$，所以选项D正确.故选CD.

## 【探究总结】

**根式与分数指数幂互化的规律**

（1）根指数$\xrightarrow{\text{化为}}$分数指数的分母，被开方数（式）的指数$\xrightarrow{\text{化为}}$分数指数的分子.

（2）在具体计算时，通常会把根式转化成分数指数幂的形式，然后利用有理数指数幂的运算性质解题.

## 应用迁移

用分数指数幂表示下列各式：

（1）$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{-a}(a<0)$；

（2）$(\sqrt[4]{b^{\frac{2}{3}}})^{\frac{2}{3}}(b<0)$；

（3）$\dfrac{1}{\sqrt[3]{x(\sqrt[5]{x^2})^2}}(x\neq0)$.

**解**：（1）原式$=a^{\frac{1}{3}}\cdot(-a)^{\frac{1}{6}}=-(-a)^{\frac{1}{3}}\cdot(-a)^{\frac{1}{6}}=-(-a)^{\frac{1}{2}}(a<0)$.

（2）原式$=b^{\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}}=(-b)^{\frac{1}{9}}(b<0)$.

（3）原式$=\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}}}=\dfrac{1}{x^{\frac{3}{5}}}=x^{-\frac{3}{5}}(x\neq0)$.

# 任务3 掌握分数指数幂的运算

## 探究活动

**例2**　（1）计算：$\left(2\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}}-(2\sqrt{3}-\pi)^0-\left(2\dfrac{10}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}+0.25^{-\frac{3}{2}}$；

（2）化简：$\dfrac{5a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{4}a^{-1}b^{\frac{1}{2}}\right)\left(-\frac{5}{6}a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}\right)}$.

**解**：（1）原式$=\left(\dfrac{25}{9}\right)^{\frac{1}{2}}-1-\left(\dfrac{64}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}+\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left[\left(\dfrac{5}{3}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}-1-\left[\left(\dfrac{4}{3}\right)^3\right]^{-\frac{1}{3}}+\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{5}{3}-1-\dfrac{3}{4}+8=\dfrac{95}{12}$.

（2）原式$=5\times(-4)\times\left(-\dfrac{6}{5}\right)\times a^{-\frac{2}{3}-(-1)-\frac{1}{3}}\times b^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{6}\right)}=24a^0b^{\frac{1}{6}}=24b^{\frac{1}{6}}$.

## 【探究总结】

**分数指数幂运算的常用技巧**

（1）有括号先算括号里的，无括号先进行指数运算.

（2）负指数幂化为正指数幂的倒数.

（3）底数是小数的，先化成分数；底数是带分数的，先化成假分数，然后尽可能用幂的形式表示，便于用有理数指数幂的运算性质进行运算.

## 应用迁移

计算：

（1）$\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-(-2)^0-\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}$；

（2）$2x^{\frac{1}{4}}(-3x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{3}})\div(-6x^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{4}{3}})(x,y>0)$；

(3)$\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{4b^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+a^{\frac{2}{3}}}\div\left(1-2\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)\cdot\sqrt[3]{a}$.

**解**:(1)原式$=\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}-1-\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^3\right]^{-\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{3}{2}-1-\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9}=\dfrac{1}{2}$.

(2)原式$=[2\times(-3)\div(-6)]x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}=x^2y$.

(3)原式$=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}(a-8b)}{4b^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}}\div\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}\cdot a^{\frac{1}{3}}$

$=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}[(a^{\frac{1}{3}})^3-(2b^{\frac{1}{3}})^3]}{4b^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}}\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}}\cdot a^{\frac{1}{3}}$

$=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}})}{4b^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}}\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}}\cdot a^{\frac{1}{3}}$

$=a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{3}}=a$.

# 课后素养评价(二十六)

## 基础落实

**1**.(多选)以下运算结果等于2的是　(　　)

A.$\sqrt{(\pi-4)^2}$　　B.$\sqrt[2\,025]{2^{2\,025}}$

C.$-\sqrt[3]{-2^3}$　　D.$\sqrt{(-2)^2}$

BCD　**解析**:对于A,$\sqrt{(\pi-4)^2}=|\pi-4|=4-\pi$,不合题意;

对于B,$\sqrt[2\,025]{2^{2\,025}}=2$,符合题意;

对于C,$-\sqrt[3]{-2^3}=-(-2)=2$,符合题意;

对于D,$\sqrt{(-2)^2}=|-2|=2$,符合题意.故选BCD.

**2**.设$a>0$,将$\dfrac{a^2}{\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a^2}}}$表示成分数指数幂,其结果是　(　　)

A.$a^{\frac{1}{2}}$　　B.$a^{\frac{5}{6}}$　　C.$a^{\frac{7}{6}}$　　D.$a^{\frac{3}{2}}$

C　**解析**:由题意$\dfrac{a^2}{\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a^2}}}=a^{2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=a^{\frac{7}{6}}$.故选C.

**3**.把$\sqrt[3]{-2\sqrt{2}}$化为分数指数幂的形式是　(　　)

A.$2^{\frac{1}{2}}$　　B.$-2^{\frac{1}{2}}$

C.$2^{-\frac{1}{2}}$　　D.$-2^{-\frac{1}{2}}$

B　**解析**:$\sqrt[3]{-2\sqrt{2}}=(-2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}=(-2\times2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=(-2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}=-2^{\frac{1}{2}}$.

**4**.$(-1)^0+8^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}=$_____.

9　**解析**:原式$=1+(2^3)^{\frac{2}{3}}+2^2=1+4+4=9$.

**5**.设$f(x)=\sqrt{x^2-4}$,若$0<a\leqslant1$,求$f\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$.

**解**:$f\left(a+\dfrac{1}{a}\right)=\sqrt{\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2-4}=\sqrt{a^2+\dfrac{1}{a^2}-2}$

$=\sqrt{\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2}=\left|a-\dfrac{1}{a}\right|$.

因为$0<a\leqslant1$,所以$a\leqslant\dfrac{1}{a}$,故$f\left(a+\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{1}{a}-a$.

## 能力提升

**1**.若$1<a<2$,则$\sqrt[3]{(1-a)^3}+\sqrt[4]{(2-a)^4}$的化简结果是　(　　)

A.1　　B.$-1$

C.$3-2a$　　D.$2a-3$

C　**解析**:原式可化为$1-a+|2-a|$.因为$1<a<2$,则$2-a>0$,所以原式$=1-a+2-a=3-2a$.故选C.

**2**.若$ab<0$,则化简$a\sqrt{-\dfrac{b}{a}}+b\sqrt{-\dfrac{a}{b}}$的结果是　(　　)

A.$-1$　　B.0　　C.1　　D.2

B　**解析**:$a\sqrt{-\dfrac{b}{a}}+b\sqrt{-\dfrac{a}{b}}=a\sqrt{-\dfrac{ab}{a^2}}+b\sqrt{-\dfrac{ab}{b^2}}$

$=\dfrac{a}{|a|}\sqrt{-ab}+\dfrac{b}{|b|}\sqrt{-ab}=\left(\dfrac{a}{|a|}+\dfrac{b}{|b|}\right)\sqrt{-ab}$.

因为$ab<0$,所以$a$,$b$异号,$a|b|+|a|b=0$,所以$\dfrac{a}{|a|}+\dfrac{b}{|b|}=\dfrac{a|b|+|a|b}{|a||b|}=0$,

所以$a\sqrt{-\dfrac{b}{a}}+b\sqrt{-\dfrac{a}{b}}=0$.故选B.

**3**.若$(1-2x)^{-\frac{3}{4}}$有意义,则$x$的取值范围为_____.

$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$　**解析**:将分数指数幂化为根式,可知需满足$1-2x>0$,解得$x<\dfrac{1}{2}$.

**4**.已知$\sqrt[4]{(a-1)^4}+1=a$,则$\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{(1-a)^2}+\sqrt[3]{(1-a)^3}=$_____.

$a-1$　**解析**:由$\sqrt[4]{(a-1)^4}+1=a$,

即$|a-1|=a-1$,知$a\geqslant1$.

所以原式$=a-1+(a-1)+(1-a)=a-1$.

**5**.(1)若$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,求$\dfrac{(a^{\frac{2}{3}}b^{-1})^{-\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{ab^5}}$的值;

(2)若$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,$b=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$,求$[a^{-\frac{3}{2}}b^2(ab^{-2})^{-\frac{1}{2}}]^2$的值.

**解**：(1)原式$=\dfrac{a^{\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)}b^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}}=a^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}\cdot b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}=a^{-1}=\dfrac{1}{a}=\sqrt{2}$.

(2)由题意，$a>0$，$b>0$，所以$[a^{-\frac{3}{2}}b^2(ab^{-2})^{-\frac{1}{2}}]^2=(a^{-2}b^3)^2=a^{-4}b^6$.

又$a=2^{-\frac{1}{2}}$，$b=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}=2^{-\frac{1}{3}}$，

所以原式$=(2^{-\frac{1}{2}})^{-4}\cdot(2^{-\frac{1}{3}})^6=2^2\cdot2^{-2}=1$.

## 自我超越

**1.**若$\sqrt[n]{a^n}+(\sqrt[n+1]{a})^{n+1}=0$，$a\neq0$，且$n\in\mathbf{N}^*$，则　(　　)

A.$a>0$，且$n$为偶数　B.$a<0$，且$n$为偶数

C.$a>0$，且$n$为奇数　D.$a<0$，且$n$为奇数

B　**解析**：由题意可得$(\sqrt[n+1]{a})^{n+1}=a$，$\sqrt[n]{a^n}=-a$，故$n$为偶数且$a<0$.

**2.**已知$a^m=9$，$a^n=2$，则$\sqrt{a^{m-2n}}=$_____.

$\dfrac{3}{2}$　**解析**：因为$a^m=9$，$a^n=2$，所以$a^{m-2n}=\dfrac{a^m}{a^{2n}}=\dfrac{9}{4}$，所以$\sqrt{a^{m-2n}}=\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}$.

# 4.1.2　无理数指数幂及其运算性质

**学习任务目标**

**1.**了解指数幂由有理数扩充到无理数的过程.

**2.**能进行实数指数幂的运算.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点　无理数指数幂及实数指数幂的运算性质**

一般地，无理数指数幂$a^\alpha(a>0,\alpha$为无理数$)$是一个确定的实数.整数指数幂的运算性质也适用于实数指数幂，即对于任意实数$r$，$s$，均有下面的运算性质.

(1)$a^ra^s=a^{r+s}(a>0,r,s\in\mathbf{R})$；

(2)$(a^r)^s=a^{rs}(a>0,r,s\in\mathbf{R})$；

(3)$(ab)^r=a^rb^r(a>0,b>0,r\in\mathbf{R})$.

### 【概念辨析】

**1.**判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)$\alpha$，$\beta$是实数，当$a>0$时，$(a^\alpha)^\beta=(a^\beta)^\alpha$.　(√)

(2)当$a>0$，$b>0$时，$(a^{\frac{\pi}{2}}+b^{\frac{\pi}{2}})(a^{\frac{\pi}{2}}-b^{\frac{\pi}{2}})=a^\pi-b^\pi$.　(√)

(3)当$a>0$时，$(a-a^{-1})^2=(a+a^{-1})^2-2$.　(×)

(4)$(a^{\sqrt{2}})^2=a^2$.　(×)

(5)$(3^{-2})^{\frac{1}{2}}\times(\sqrt{3})^{-2}=\dfrac{1}{9}$.　(√)

**2.**填空：

(1)$(3^{-\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{27}$.

(2)已知$5^\alpha=3$，$5^\beta=2$，则：

①$5^{\alpha+\beta}=\underline{6}$；②$5^{\alpha-\beta}=\dfrac{3}{2}$；

③$5^{-3\alpha}=\dfrac{1}{27}$；④$5^{\frac{\alpha}{2}}=\underline{\sqrt{3}}$.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1　掌握无理数指数幂的运算

#### 探究活动

**例1**　计算下列各式的值：

(1)$(\sqrt[3]{8^{\sqrt{3}}}\times\sqrt[3]{3^{\sqrt{3}}})^{\sqrt{3}}$；

(2)$\left(\dfrac{\pi^{\sqrt{2}}}{\sqrt{\pi^{\sqrt{2}}}}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

**解**：(1)原式$=[(2^3)^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\times3^{\frac{\sqrt{3}}{3}}]^{\sqrt{3}}=(2^3)^{\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}}\times3^{\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}}=2^3\times3=24$.

(2)原式$=\left(\dfrac{\pi^{\sqrt{2}}}{\pi^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=(\pi^{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}})^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\pi^{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\pi^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\pi}$.

**【探究总结】**

**无理数指数幂的运算方法**

(1)底数相同时，直接对指数上的无理数进行加减运算.

(2)若式子中含有根式，则先化为分数指数幂的形式再进行运算，一般指数中的根式可以保留.

#### 应用迁移

(教材P109练习题1改编)化简(式中各字母均为正数)：

(1)$(x^{\sqrt{2}}y^{\sqrt{3}})^{\sqrt{6}}$；

(2)$4x^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot3x^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}(-y^{\sqrt{3}})\cdot y^{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$；

(3)$3^{\pi}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{\pi}+(2^{2\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}+1^{\sqrt{5}}$.

**解**:(1)原式$=x^{\sqrt{2}\times\sqrt{6}}y^{\sqrt{3}\times\sqrt{6}}=x^{2\sqrt{3}}y^{3\sqrt{2}}$.

(2)原式$=-12x^{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}}y^{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}=-12y^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$.

(3)原式$=\left(3\times\frac{1}{3}\right)^{\pi}+2^{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}+1=1^{\pi}+2^4+1=18$.

## 任务2 掌握实数指数幂的化简与求值

### 探究活动

**例2**　已知$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$,则$x^2+x^{-2}=$_____.

7　**解析**:将$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$两边平方,得$x+x^{-1}+2=5$,则$x+x^{-1}=3$.将$x+x^{-1}=3$两边平方,得$x^2+x^{-2}+2=9$,所以$x^2+x^{-2}=7$.

[一题多思]

**思考1**.本例中,若已知$x+x^{-1}=3$,如何求$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$的值?

**提示**:可设$m=x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$,两边平方后整理得$m^2=x+x^{-1}+2$,代入$x+x^{-1}$的值即可求得$m^2=5$.

因为$m>0$,所以$m=\sqrt{5}$,即$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$.

**思考2**.本例中条件不变,如何求$x^2-x^{-2}$的值?

**提示**:将$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$两边平方,得$x+x^{-1}+2=5$,则$x+x^{-1}=3$,将$x+x^{-1}=3$两边平方,得$x^2+x^{-2}+2=9$,所以$x^2+x^{-2}=7$.因为$(x^2-x^{-2})^2=(x^2+x^{-2})^2-4=49-4=45$,所以$x^2-x^{-2}=\pm3\sqrt{5}$.

**思考3**.本例中,若把条件变为"$x+x^{-1}=7$",你能求出$x^3+x^{-3}$的值吗?

**提示**:由$x+x^{-1}=7$两边平方后整理可得$x^2+x^{-2}=47$,所以$x^3+x^{-3}=(x+x^{-1})(x^2+x^{-2}-1)=7\times46=322$.

### 【探究总结】

**利用整体代换法计算分数指数幂的策略**

(1)整体代换法是数学变形与计算常用的技巧方法,观察已知等式与待求值式子的结构特点,灵活运用恒等式是关键.

(2)利用整体代换法解决分数指数幂的计算问题,常常运用完全平方公式及其变形.

### 应用迁移

已知方程$x^2-8x+4=0$的两个根为$x_1,x_2(x_1<x_2)$.

(1)求$x_1^{-2}-x_2^{-2}$的值;

(2)求$x_1^{-\frac{1}{2}}-x_2^{-\frac{1}{2}}$的值.

**解**:由题意知$x_1+x_2=8$,$x_1x_2=4$.

(1)因为$x_1<x_2$,所以$x_1^{-2}-x_2^{-2}=\frac{(x_1+x_2)(x_2-x_1)}{(x_1x_2)^2}=\frac{x_2-x_1}{2}$

$=\frac{\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}}{2}=\frac{\sqrt{64-16}}{2}=2\sqrt{3}$.

(2)$x_1^{-\frac{1}{2}}-x_2^{-\frac{1}{2}}=\frac{x_2^{\frac{1}{2}}-x_1^{\frac{1}{2}}}{(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}}}{\sqrt{x_1x_2}}=\frac{\sqrt{8-2\times\sqrt{4}}}{2}=1$.

# 课后素养评价(二十七)

## 基础落实

**1**.已知$a$,$b$为正实数,则$\sqrt{\frac{a^3\times b^{-2}}{a^{-1}\times b^4}}$可化简为(　　)

A.$\frac{b^3}{a^2}$　　B.$\frac{a^2}{b^3}$　　C.$a^2b^3$　　D.$\frac{1}{a^2b^3}$

B　**解析**:$\sqrt{\frac{a^3\times b^{-2}}{a^{-1}\times b^4}}=\sqrt{\frac{a^4}{b^6}}=\sqrt{\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2}=\left|\frac{a^2}{b^3}\right|=\frac{a^2}{b^3}$.故选B.

**2**.已知$m>0$,则$\sqrt{m^{\frac{1}{2}}\sqrt{m^{\frac{5}{2}}\sqrt{m}}}$可化为(　　)

A.$m^{\frac{5}{4}}$　　B.$m^{\frac{5}{2}}$　　C.$m$　　D.1

C　**解析**:因为$m>0$,所以原式$=[(m^{\frac{5}{2}}\cdot m^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\cdot m^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}=(m^{\frac{3}{2}}\cdot m^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=m$.

**3**.若$3^a\cdot9^b=\frac{1}{3}$,则下列等式正确的是(　　)

A.$a+b=-1$　　B.$a+b=1$

C.$a+2b=-1$　　D.$a+2b=1$

C　**解析**:因为$3^a\cdot9^b=3^a\cdot3^{2b}=3^{a+2b}=\frac{1}{3}=3^{-1}$,所以$a+2b=-1$.

**4**.已知$a+a^{-1}=5$,则$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}$的值是_____.

$\pm\sqrt{3}$　**解析**:因为$a+a^{-1}=5$,所以$(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2=a+a^{-1}-2=3$,所以$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{3}$.

**5**.计算:$\frac{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\times\sqrt{2^{\sqrt{2}}}}{\sqrt[3]{8^{\sqrt{2}}}}=$_____.

1　**解析**:$\frac{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\times\sqrt{2^{\sqrt{2}}}}{\sqrt[3]{8^{\sqrt{2}}}}=\frac{2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{8^{\frac{\sqrt{2}}{3}}}=\frac{2^{\sqrt{2}}}{(2^3)^{\frac{\sqrt{2}}{3}}}=\frac{2^{\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}}}=1$.

**6**.若$10^x=3^{-\frac{1}{8}}$,$10^y=\sqrt[4]{27}$,则$10^{2x-y}=$_____.

$\frac{1}{3}$　**解析**:$10^{2x-y}=(10^x)^2\div10^y=(3^{-\frac{1}{8}})^2\div\sqrt[4]{27}=3^{-\frac{1}{4}}\div3^{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$.

## 能力提升

**1.**（多选）下列各式正确的是　　（　　）

A.$a^{\frac{4}{6}}=\sqrt[3]{a^2}$　　B.$\sqrt[4]{(-5)^4}=-5$

C.$(6^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=36$　　D.$a^{-\frac{2}{3}}=-\sqrt[3]{a^2}$

AC　**解析**：对于A，$a^{\frac{4}{6}}=a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$，故A正确；

对于B，$\sqrt[4]{(-5)^4}=5$，故B错误；

对于C，$(6^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=6^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=6^2=36$，故C正确；

对于D，$a^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$，故D错误.故选AC.

**2.**在算式$2^{\text{中}}+2^{\text{国}}+2^{\text{精}}+2^{\text{神}}=29$中，“中”“国”“精”“神”分别代表四个不同的数，且依次从大到小，则“国”字所对应的数为_____.

3　**解析**：由$29=16+8+4+1=2^4+2^3+2^2+2^0$，可得“国”字所对应的数为3.

**3.**方程$2^{2x+1}-9\cdot 2^x+4=0$的解集是_____.

$\{-1,2\}$　**解析**：令$t=2^x$，则$t>0$，

方程可化为$2t^2-9t+4=0$，解得$t=\dfrac{1}{2}$或$t=4$，

所以，$2^x=\dfrac{1}{2}$或$2^x=4$，解得$x=-1$或$x=2$.

所以，方程的解集为$\{-1,2\}$.

故答案为$\{-1,2\}$.

**4.**已知$10^{\alpha}=2^{-\frac{1}{2}}$，$10^{\beta}=32^{\frac{1}{3}}$，则$10^{\frac{3}{4}\beta+\frac{1}{2}\alpha}=$_____.

2　**解析**：$10^{\frac{3}{4}\beta+\frac{1}{2}\alpha}=(10^{\beta})^{\frac{3}{4}}\times(10^{\alpha})^{\frac{1}{2}}=(32^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{4}}\times(2^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=2^{5\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+(-\frac{1}{2})\times\frac{1}{2}}=2^1=2$.

**5.**已知$\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}=4$.

求值：(1)$a+a^{-1}$；(2)$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}$.

**解**：(1)因为$\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}=4$，

所以$a+\dfrac{1}{a}-2=16$，

即$a+\dfrac{1}{a}=18$.所以$a+a^{-1}=a+\dfrac{1}{a}=18$.

(2)由(1)知$a+\dfrac{1}{a}=18$，因为$a>0$，所以$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}>0$.

所以$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2}=\sqrt{a+a^{-1}+2}=\sqrt{18+2}=2\sqrt{5}$.

## 自我超越

**1.**在$\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$，$3^{\frac{1}{2}}$，$8^{-\frac{2}{3}}$，$\left(\dfrac{1}{4}\right)^0$中，最大的数是_____.

$3^{\frac{1}{2}}$　**解析**：因为$\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-1}=-3$，$3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$，$8^{-\frac{2}{3}}=2^{-2}=\dfrac{1}{4}$，$\left(\dfrac{1}{4}\right)^0=1$，所以$3^{\frac{1}{2}}>\left(\dfrac{1}{4}\right)^0>8^{-\frac{2}{3}}>\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$，

所以最大的数是$3^{\frac{1}{2}}$.

**2.**已知函数$f(x)=\dfrac{2^{2x}}{2+2^{2x}}$.

(1)求$f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f\left(\dfrac{2}{3}\right)$，$f(3)+f(-2)$的值；

(2)求$f(x)+f(1-x)$的值；

(3)利用(2)的结论求$f\left(\dfrac{1}{100}\right)+f\left(\dfrac{2}{100}\right)+f\left(\dfrac{3}{100}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{98}{100}\right)+f\left(\dfrac{99}{100}\right)$的值.

**解**：(1)$f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2^{\frac{2}{3}}}{2+2^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{2^{\frac{4}{3}}}{2+2^{\frac{4}{3}}}=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{3}}+1}+\dfrac{2^{\frac{1}{3}}}{1+2^{\frac{1}{3}}}=1$.

$f(3)+f(-2)=\dfrac{2^6}{2+2^6}+\dfrac{2^{-4}}{2+2^{-4}}=\dfrac{2^6}{2+2^6}+\dfrac{1}{2^5+1}=\dfrac{2^6}{2+2^6}+\dfrac{2}{2^6+2}=1$.

(2)$f(x)+f(1-x)=\dfrac{2^{2x}}{2+2^{2x}}+\dfrac{2^{2(1-x)}}{2+2^{2(1-x)}}=\dfrac{4^x}{2+4^x}+\dfrac{4^{1-x}}{2+4^{1-x}}=\dfrac{4^x}{2+4^x}+\dfrac{4}{2\cdot 4^x+4}=\dfrac{4^x}{2+4^x}+\dfrac{2}{4^x+2}=\dfrac{4^x+2}{2+4^x}=1$.

(3)由(2)知原式$=49\times 1+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=49+\dfrac{1}{2}=\dfrac{99}{2}$.

# 4.2　指数函数

## 4.2.1　指数函数的概念

**学习任务目标**

1.理解指数函数的概念.
2.了解指数函数中底数的限制条件的合理性.
3.会解决简单的指数增长问题.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　指数函数的概念**

一般地，函数 $y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq1$）叫做指数函数，其中指数 $x$ 是自变量，定义域是 **R**.

**知识点二　指数增长模型**

在实际问题中，经常会遇到指数增长模型：设原有量为 $N$，每次的增长率为 $p$，经过 $x$ 次增长，该量增长到 $y$，则 $y=N(1+p)^x$（$x\in\mathbf{N}$）.形如 $y=ka^x$（$k\in\mathbf{R}$，且 $k\neq0$；$a>0$，且 $a\neq1$）的函数是刻画指数增长或指数衰减变化规律非常有用的函数模型.

### 【概念辨析】

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

（1）$y=x^5$（$x>0$，且 $x\neq1$）是指数函数.　（　　）

（2）$y=(-2)^x$ 是指数函数.　（　　）

（3）指数函数的定义域为$(0,+\infty)$.　（　　）

（4）$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是指数衰减型函数模型.　（　　）

（1）×　**解析**：$y=x^5$ 是幂函数.

（2）×　**解析**：指数函数的底数不能为负数.

（3）×　**解析**：指数函数的定义域为 **R**.

（4）√

2.某工厂生产某种产品的月产量 $y$（单位：万件）与月份 $x$ 之间的关系满足 $y=a\left(\frac{3}{2}\right)^x+b$.现已知该厂今年 1 月、2 月分别生产该产品 3 万件、5 万件，则此工厂今年 3 月生产该产品_____万件.

8　**解析**：由已知得 $\begin{cases}\frac{3}{2}a+b=3,\\ \left(\frac{3}{2}\right)^2a+b=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{8}{3},\\ b=-1.\end{cases}$ 所以 $y=\frac{8}{3}\times\left(\frac{3}{2}\right)^x-1$.当 $x=3$ 时，$y=8$.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1　理解指数函数的概念

1.下列函数：①$y=2\times3^x$，②$y=3^{x+1}$，③$y=3^x$，④$y=x^3$中，指数函数的个数是　（　　）

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

B　**解析**：①中，$3^x$ 的系数是 2，故①不是指数函数；②中，$y=3^{x+1}$ 的指数是 $x+1$，故②不是指数函数；③中，$y=3^x$ 是指数函数；④中，底数 $x$ 为自变量，指数为常数，故④不是指数函数.所以指数函数的个数是 1.

2.若函数 $y=(a-2)^2a^x$ 是指数函数，则　（　　）

A.$a=1$ 或 $a=3$　　B.$a=1$

C.$a=3$　　D.$a>0$ 且 $a\neq1$

C　**解析**：由指数函数的定义知 $\begin{cases}(a-2)^2=1,\\ a>0,\text{且 }a\neq1,\end{cases}$ 解得 $a=3$.

3.若函数 $y=(2a-1)^x$（$x$ 是自变量）是指数函数，则实数 $a$ 的取值范围是　（　　）

A.$(0,1)\cup(1,+\infty)$　　B.$[0,1)\cup(1,+\infty)$

C.$\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$　　D.$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

C　**解析**：依题意得 $2a-1>0$，且 $2a-1\neq1$，解得 $a>\frac{1}{2}$，且 $a\neq1$，即实数 $a$ 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$.

[一题多思]

**思考 1.**指数函数的解析式具有怎样的结构特征？

**提示**：指数函数解析式的三个特征：

（1）底数 $a$ 为大于 0 且不等于 1 的常数；

（2）指数位置是自变量 $x$；

（3）$a^x$ 的系数是 1.

**思考 2.**函数 $y=4^{2x}$ 是指数函数吗？

**提示**：是.函数 $y=4^{2x}=16^x$ 是指数函数.

【探究总结】

**判断一个函数是否为指数函数的方法**

(1)底数 $a$ 是否满足 $a>0$，且 $a\neq1$.

(2)指数是否为自变量 $x$.

(3)$a^x$ 的系数是否为 1.

## 任务2 掌握指数函数的解析式及其应用

### 探究活动

**例1**　若函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}a-3\right)\cdot a^x$ 是指数函数，则 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 的值为　　(　　)

A.2　　B.$2\sqrt{2}$　　C.$-2\sqrt{2}$　　D.$-2$

B　**解析**：因为函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}a-3\right)\cdot a^x$ 是指数函数，所以 $\frac{1}{2}a-3=1$，$a>0$，且 $a\neq1$，解得 $a=8$，所以 $f(x)=8^x$，

所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.故选 B.

【探究总结】

(1)求指数函数的解析式时，一般采用待定系数法，即先设出函数的解析式，然后利用已知条件，求出解析式中的参数，从而得到函数的解析式.掌握指数函数的概念是解决这类问题的关键.

(2)求指数函数的值的关键是求出指数函数的解析式.

### 应用迁移

如果指数函数 $y=f(x)$ 的图象经过点 $\left(-2,\frac{1}{4}\right)$，那么 $f(4)f(2)=$　　(　　)

A.8　　B.16　　C.32　　D.64

D　**解析**：设指数函数 $f(x)=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$，由指数函数 $y=f(x)$ 的图象经过点 $\left(-2,\frac{1}{4}\right)$，可得 $a^{-2}=\frac{1}{4}=2^{-2}$，解得 $a=2$.所以指数函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2^x$，所以 $f(4)f(2)=2^4\times2^2=2^6=64$.故选 D.

## 任务3 掌握指数函数的实际应用

### 探究活动

**例2**　雾霾对人体健康的危害日益严重，某地患呼吸道疾病的人数明显增多.据不完全统计，该地在 2018 年到 2023 年间，患呼吸道疾病的人数平均每年上升 2%.按这个增长率进行研究，设从 2018 年开始经过 $x(x\in\mathbf{N}^*)$ 年，患呼吸道疾病的人数为 $y$，2023 年患病人数为11 万.(参考数据：$1.02^3\approx1.06$，$1.02^5\approx1.1$)

(1)试计算出 2018 年患呼吸道疾病的人数；

(2)写出 $x$，$y$ 之间的关系式，并计算 2026 年患呼吸道疾病的人数.

**解**：(1)设 2018 年患呼吸道疾病的人数为 $a$ 万，

则 $a(1+2\%)^5=11$，即 $a\times1.02^5=11$.

所以 $a=\frac{11}{1.02^5}\approx10$.

所以 2018 年患呼吸道疾病的人数约为 10 万.

(2)经过 1 年，患呼吸道疾病的人数为 $10+10\times2\%=10(1+2\%)$；

经过 2 年，患呼吸道疾病的人数为 $10(1+2\%)+10(1+2\%)\times2\%=10(1+2\%)^2$；

经过 3 年，患呼吸道疾病的人数为 $10(1+2\%)^2+10(1+2\%)^2\times2\%=10(1+2\%)^3$；

……

经过 $x$ 年，患呼吸道疾病的人数为 $10(1+2\%)^x$.

故 $y=10(1+2\%)^x=10\times1.02^x(x\in\mathbf{N}^*)$.

在 2026 年，$x=8$，故患呼吸道疾病的人数为 $y=10\times1.02^8=10\times1.02^5\times1.02^3\approx10\times1.1\times1.06=11.66$(万).

所以 2026 年患呼吸道疾病的人数约为 11.66 万.

【探究总结】

**函数 $y=ka^x$ 在实际问题中的应用**

(1)函数 $y=ka^x$ 是刻画指数增长或指数衰减变化规律非常有用的函数模型.当 $k>0$ 时，若 $a>1$，则刻画指数增长变化规律；若 $0<a<1$，则刻画指数衰减变化规律.

(2)解决此类问题可利用待定系数法，根据条件求出解析式后，利用指数运算解题.

### 应用迁移

**1.**某地区实施植树造林，森林面积在 20 年内增加了 5%.若按此规律，设 2023 年的森林面积为 $m$，从 2023 年起，$x$ 年后森林面积 $y$ 与 $x$ 的函数关系式为　　(　　)

A.$y=\frac{1.05mx}{20}$　　B.$y=\left(1-\frac{0.05x}{20}\right)m$

C.$y=m(1+5\%)^{\frac{x}{20}}$　　D.$y=[1+(5\%)^x]m$

C　**解析**：设平均每年增加 $a\%$，则 $(1+a\%)^{20}=1+5\%$，所以 $1+a\%=(1+5\%)^{\frac{1}{20}}$.可知，经过 $x$ 年后森林面积 $y$ 与 $x$ 的函数关系式为 $y=m(1+5\%)^{\frac{x}{20}}$.

**2.**某地下车库在排气扇发生故障的情况下，测得空气中一氧化碳的含量达到了危险状态，经抢修后恢复

正常.排气 4 min 后测得车库内一氧化碳浓度为 64 ppm(ppm 为浓度单位,1 ppm 表示百万分之一),再过 4 min 测得一氧化碳浓度为 32 ppm.经检验知,该地下车库一氧化碳浓度 $y$(单位:ppm)与排气时间 $t$(单位:min)之间满足函数关系 $y=c\left(\frac{1}{2}\right)^{mt}$($c$,$m$ 为常数),求 $c$,$m$ 的值.

**解**:由题意得 $\begin{cases}c\left(\frac{1}{2}\right)^{4m}=64,\\ c\left(\frac{1}{2}\right)^{8m}=32,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}c=128,\\ m=\frac{1}{4}.\end{cases}$ 故 $c$,$m$ 的值分别为 $128$,$\frac{1}{4}$.

# 课后素养评价(二十八)

## 基础落实

**1.**下列函数是指数函数的是　　(　　)

A.$y=x^{\frac{1}{3}}$　　B.$y=3^{x+1}$

C.$y=-3^x$　　D.$y=(\pi-3)^x$

D　**解析**:对于 A,$y=x^{\frac{1}{3}}$ 是幂函数,故错误;

对于 B,显然 $y=3^{x+1}=3\cdot 3^x$,前面系数不为 1,故错误;

对于 C,显然 $y=-3^x$ 前面系数不为 1,故错误;

对于 D,符合指数函数定义,故正确.故选 D.

**2.**已知指数函数 $f(x)=(a-1)b^x$ 的图象经过点(2,4),则 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=$　　(　　)

A.$2\sqrt{2}$　　B.$\sqrt{2}$

C.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D.$\frac{1}{2}$

C　**解析**:由指数函数 $f(x)=(a-1)b^x$ 的图象经过点(2,4),可得 $\begin{cases}a-1=1,\\ (a-1)b^2=4,\\ b>0\text{ 且 }b\neq 1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=2,\end{cases}$

所以 $f(x)=2^x$,$f\left(-\frac{1}{2}\right)=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.故选 C.

**3.**据报道,某淡水湖的湖水在 50 年内减少了 10%.若每年湖水以相同的衰减率呈指数衰减,按此规律,设 2025 年的湖水量为 $m$,从 2025 年起,$x$ 年后湖水量为 $y$,则 $y$ 与 $x$ 的函数关系式为　　(　　)

A.$y=0.9^{\frac{x}{50}}$　　B.$y=(1-0.1^{\frac{x}{50}})m$

C.$y=0.9^{\frac{x}{50}}m$　　D.$y=(1-0.1^{50x})m$

C　**解析**:设每年的衰减率为 $q\%$,

则 $(1-q\%)^{50}=0.9$.所以 $1-q\%=0.9^{\frac{1}{50}}$.

所以 $y=m(1-q\%)^x=0.9^{\frac{x}{50}}m$.

**4.**若函数 $y=(2a-3)^x$ 是指数函数,则 $a$ 的取值范围是_____.

$\left\{a\,\middle|\,a>\frac{3}{2}\text{,且 }a\neq 2\right\}$　**解析**:因为函数 $y=(2a-3)^x$ 是指数函数,所以 $\begin{cases}2a-3>0,\\ 2a-3\neq 1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a>\frac{3}{2},\\ a\neq 2.\end{cases}$

**5.**已知指数函数 $y=f(x)$,且 $f(3)=\pi$,求 $f(0)$,$f(1)$,$f(-3)$的值.

**解**:设 $f(x)=a^x(a>0$,且 $a\neq 1)$,

因为 $f(3)=\pi$,所以 $a^3=\pi$,解得 $a=\pi^{\frac{1}{3}}$,

所以 $f(x)=\pi^{\frac{x}{3}}$.

所以 $f(0)=\pi^0=1$,$f(1)=\pi^{\frac{1}{3}}$,$f(-3)=\pi^{-1}=\frac{1}{\pi}$.

## 能力提升

**1.**已知函数 $f(x)=2^x$,下列说法正确的是　　(　　)

A.$f(mn)=f(m)f(n)$

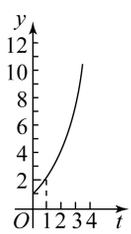
B.$f(mn)=f(m)+f(n)$

C.$f(m+n)=f(m)+f(n)$

D.$f(m)f(n)=f(m+n)$

D　**解析**:因为 $f(x)=2^x$,所以 $f(mn)=2^{mn}$,而 $f(m)f(n)=2^m\cdot 2^n=2^{m+n}=f(m+n)$,故选项 A,B 错误,选项 D 正确;$f(m+n)=2^{m+n}$,$f(m)+f(n)=2^m+2^n$,故选项 C 错误.故选 D.

**2.**(多选)如图,某湖泊的蓝藻面积 $y$(单位:$m^2$)与时间 $t$(单位:月)之间的关系满足 $y=a^t$,则下列说法正确的是　　(　　)




A.每个月蓝藻面积的增长率为 100%

B.每个月蓝藻增加的面积都相等

C.第 6 个月时,蓝藻面积就会超过 60 $m^2$

D.若蓝藻面积蔓延到 2 $m^2$,3 $m^2$,6 $m^2$ 所经过的时间分别是 $t_1$,$t_2$,$t_3$,则一定有 $t_1+t_2=t_3$

ACD　**解析**:由题图可知,函数 $y=a^t$ 的图象经过(1,2),即 $a^1=2$,则 $a=2$,所以 $y=2^t$.

又 $2^{t+1}-2^t=2^t$ 不是常数，则蓝藻每个月的面积是上个月的 2 倍，则每个月的增长率为 100%，A 正确，B 错误；当 $t=6$ 时，$y=2^6=64>60$，C 正确；

若蓝藻面积蔓延到 2 $m^2$，3 $m^2$，6 $m^2$ 所经过的时间分别是 $t_1$，$t_2$，$t_3$，则 $2^{t_1}=2$，$2^{t_2}=3$，$2^{t_3}=6$，则 $2^{t_1}\cdot 2^{t_2}=2\times 3$，即 $2^{t_1+t_2}=6=2^{t_3}$，所以 $t_1+t_2=t_3$，D 正确．故选 ACD．

**3.** 地震的震级越大，以地震波的形式从震源释放出的能量就越大．震级 $M$ 与所释放的能量 $E$（单位：J）的关系如下：$E=10^{4.8+1.5M}$．那么，7.5 级地震释放的能量是 5.5 级地震释放的能量的_____倍．

1 000　**解析**：设 7.5 级地震释放的能量为 $E_1$ J，5.5 级地震释放的能量为 $E_2$ J，

因为 $E_1=10^{4.8+1.5\times 7.5}=10^{16.05}$，$E_2=10^{4.8+1.5\times 5.5}=10^{13.05}$，所以 $\dfrac{E_1}{E_2}=1\,000$，

即 7.5 级地震释放的能量是 5.5 级地震释放的能量的 1 000 倍．

## 自我超越

已知函数 $y=f(x)$，$x\in\mathbf{R}$，且 $f(0)=2$，$\dfrac{f(0.5)}{f(0)}=2$，$\dfrac{f(1)}{f(0.5)}=2$，…，$\dfrac{f(0.5n)}{f(0.5(n-1))}=2$，$n\in\mathbf{N}^*$，则函数 $f(x)$ 的解析式可能为_____．

$f(x)=2\times 4^x$（答案不唯一）　**解析**：由题意，得 $\dfrac{f(1)}{f(0)}=4$，$\dfrac{f(2)}{f(0)}=4^2$，…，$\dfrac{f(x)}{f(0)}=4^x$，所以 $f(x)=2\times 4^x$．

# 4.2.2　指数函数的图象和性质

## 第 1 课时　指数函数的图象和性质

**学习任务目标**

1. 能画出具体指数函数的图象，探索并理解指数函数的单调性与图象所过特殊点．
2. 掌握指数函数的性质，能利用指数函数的单调性比较幂的大小及解不等式．

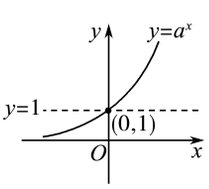
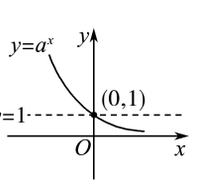
## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点　指数函数 $y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）的图象和性质**

1. 若点 $(x,y)$ 在指数函数 $y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）的图象上，则点 $(-x,y)$ 在指数函数 $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ 的图象上．反之亦然，即底数互为倒数的两个指数函数的图象关于 $y$ 轴对称．

2. 指数函数的图象和性质

| 函数 | $y=a^x$ | |
|---|---|---|
| | $a>1$ | $0<a<1$ |
| 图象 |  |  |
| 定义域 | $\mathbf{R}$ | |
| 值域 | $(0,+\infty)$ | |

续表

| 函数 | | $y=a^x$ | |
|---|---|---|---|
| | | $a>1$ | $0<a<1$ |
| 性质 | 定点 | 过定点 $(0,1)$，即 $x=0$ 时，$y=1$ | |
| | 函数值的变化 | 当 $x>0$ 时，$y>1$；当 $x<0$ 时，$0<y<1$ | 当 $x>0$ 时，$0<y<1$；当 $x<0$ 时，$y>1$ |
| | 单调性 | 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数 | 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数 |

### 【概念辨析】

1. 判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）．

（1）指数函数的图象一定在 $x$ 轴的上方．　（√）

（2）当 $a>1$ 时，对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 总有 $a^x>1$．　（×）

（3）函数 $f(x)=2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数．　（×）

2. 若函数 $y=(1-2a)^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，则实数 $a$ 的取值范围为_____．

$(-\infty,0)$　**解析**：由题意知，此函数为指数函数，且为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，所以 $1-2a>1$，解得 $a<0$．

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1 了解指数型函数的定义域

**1.** $y=0.3^{\frac{1}{x-1}}$的定义域为_____.

$\{x|x\neq1\}$　**解析**：由 $x-1\neq0$ 得 $x\neq1$，所以函数的定义域为$\{x|x\neq1\}$.

**2.** $y=3^{\sqrt{5x-1}}$的定义域为_____.

$\left\{x\left|x\geqslant\frac{1}{5}\right.\right\}$　**解析**：由 $5x-1\geqslant0$ 得 $x\geqslant\frac{1}{5}$，所以函数的定义域为$\left\{x\left|x\geqslant\frac{1}{5}\right.\right\}$.

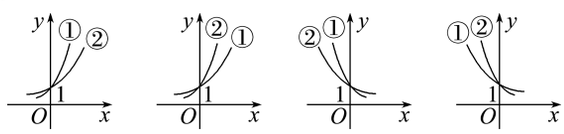
**【探究总结】**

函数 $y=a^{f(x)}$($a>0$，且 $a\neq1$)的定义域与 $f(x)$的定义域相同.

### 任务2 认识指数函数的图象

#### 探究活动

**例1**　(1)已知 $1>n>m>0$，则指数函数①$y=m^x$，②$y=n^x$ 的图象为　(　　)




A　　B　　C　　D

(2)函数 $f(x)=a^{x-1}+1$($a>0$，且 $a\neq1$)的图象恒过定点　(　　)

A.(0,1)　　B.(1,1)

C.(1,2)　　D.(−1,2)

(3)若 $a>1$，$-1<b<0$，则函数 $y=a^x+b$ 的图象一定在　(　　)

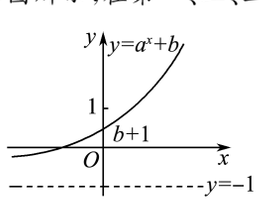
A.第一、二、三象限　　B.第一、三、四象限

C.第二、三、四象限　　D.第一、二、四象限

(1)C　**解析**：由于 $0<m<n<1$，所以 $y=m^x$ 与 $y=n^x$ 都是减函数，故排除 A，B.作直线 $x=1$ 与两条曲线相交(图略)，交点在下的曲线是函数 $y=m^x$ 的图象.

(2)C　**解析**：由函数 $f(x)=a^{x-1}+1$($a>0$，且 $a\neq1$)，令 $x-1=0$，即 $x=1$，可得 $f(1)=a^0+1=2$，所以函数 $f(x)$的图象恒过定点(1,2).故选 C.

(3)A　**解析**：因为 $a>1$，$-1<b<0$，故函数 $y=a^x+b$ 的大致图象如图所示，在第一、二、三象限.




[一题多思]

**思考1.**识别指数函数图象的关键点有哪些？

**提示**：(1)图象是上升的，还是下降的；(2)底数不同对图象位置的影响.

**思考2.**根据本例(2)，若函数 $f(x)=2a^{x+m}-n$($a>0$，且 $a\neq1$)的图象恒过点(−1,4)，你能求出 $m$，$n$ 的值吗？

**提示**：由函数 $f(x)=2a^{x+m}-n$($a>0$，且 $a\neq1$)的图象恒过点(−1,4)，得 $m-1=0$，$2\cdot a^{m-1}-n=4$，解得 $m=1$，$n=-2$.

**思考3.**本例(3)中，把条件“$-1<b<0$”改为“$b<-1$”，其他条件不变，应选哪个选项？

**提示**：B

**【探究总结】**

**1.**识别指数函数图象应把握两点：

(1)根据图象上升或下降确定底数 $a>1$ 或 $0<a<1$；

(2)在 $y$ 轴右侧，指数函数的图象“底大图高”.

**2.**形如 $y=k\cdot a^{x+c}+b$($k\neq0$，$a>0$，且 $a\neq1$)的函数图象过定点的问题的解决办法：

令指数 $x+c=0$，即 $x=-c$，得 $y=k+b$，函数图象过定点$(-c,k+b)$.

**3.**指数函数图象的平移，遵循“左加右减、上加下减”的原则.

#### 应用迁移

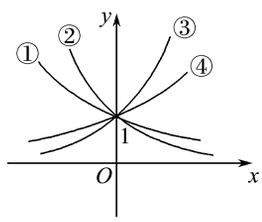
**1.**若幂函数 $f(x)=(m^2-2m-2)x^m$ 在(0,+∞)上单调递增，则 $g(x)=a^{x-m}+2$($a>1$)的图象过定点　(　　)

A.(−1,1)　　B.(−1,2)

C.(3,2)　　D.(3,3)

D　**解析**：因为幂函数 $f(x)=(m^2-2m-2)x^m$ 在(0,+∞)上单调递增，所以 $\begin{cases}m^2-2m-2=1,\\m>0,\end{cases}$ 解得 $m=3$，所以 $g(x)=a^{x-3}+2$($a>1$)，令 $x-3=0$ 得 $x=3$，所以 $g(3)=a^0+2=3$，所以 $g(x)=a^{x-m}+2$($a>1$)的图象过定点(3,3).故选 D.

**2.**下图是指数函数①$y=a^x$，②$y=b^x$，③$y=c^x$，④$y=d^x$ 的图象，则 $a$，$b$，$c$，$d$ 与 1 的大小关系是　(　　)



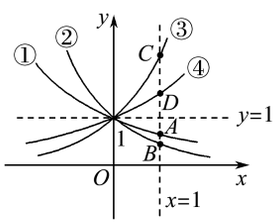
A.$a<b<1<c<d$　　B.$b<a<1<d<c$

C.$1<a<b<c<d$　　D.$a<b<1<d<c$

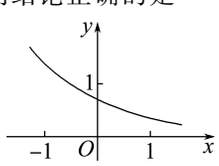
B　**解析**：（方法一）在 $y$ 轴的右侧，指数函数的图象由下到上，底数依次增大.

由指数函数图象的升降，知 $c>d>1$，$b<a<1$.所以 $b<a<1<d<c$.

（方法二）作直线 $x=1$，与四个图象分别交于 $A$，$B$，$C$，$D$ 四点.因为 $x=1$ 时的函数值等于底数的大小，所以四个交点的纵坐标越大，则底数越大.由图可知 $b<a<1<d<c$.故选 B.




**3.**（多选）函数 $f(x)=a^{x-b}$ 的图象如图所示，其中 $a$，$b$ 为常数，则下列结论正确的是　　（　　）




A.$0<a<1$　　B.$a>1$

C.$b<0$　　D.$b>0$

AC　**解析**：由 $f(x)=a^{x-b}$ 的图象可以观察出函数 $f(x)=a^{x-b}$ 在定义域上单调递减，所以 $0<a<1$，函数 $f(x)=a^{x-b}$ 的图象是在 $y=a^x$ 的图象的基础上向左平移得到的，所以 $b<0$.故选 AC.

## 任务3 利用指数函数的单调性比较大小

### 探究活动

**例2**　比较下列各题中两个值的大小：

（1）$1.5^{2.5}$，$1.5^{3.2}$；

（2）$0.6^{-1.2}$，$0.6^{-1.5}$；

（3）$1.7^{0.2}$，$0.9^{2.1}$；

（4）$a^{1.1}$，$a^{0.3}$（$a>0$，且 $a\neq1$）.

**解**：（1）$1.5^{2.5}$，$1.5^{3.2}$ 可看作函数 $y=1.5^x$ 的两个函数值.由于底数 $1.5>1$，所以函数 $y=1.5^x$ 在 **R** 上是增函数.因为 $2.5<3.2$，所以 $1.5^{2.5}<1.5^{3.2}$.

（2）$0.6^{-1.2}$，$0.6^{-1.5}$ 可看作函数 $y=0.6^x$ 的两个函数值.因为函数 $y=0.6^x$ 在 **R** 上是减函数，且 $-1.2>-1.5$，所以 $0.6^{-1.2}<0.6^{-1.5}$.

（3）由指数函数的性质得

$1.7^{0.2}>1.7^0=1$，$0.9^{2.1}<0.9^0=1$，

所以 $1.7^{0.2}>0.9^{2.1}$.

（4）当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 在 **R** 上是增函数，此时 $a^{1.1}>a^{0.3}$；

当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 在 **R** 上是减函数，此时 $a^{1.1}<a^{0.3}$.

### 【探究总结】

**比较幂的大小的方法**

（1）同底数两幂比较大小时，构造指数函数，根据其单调性比较.

（2）两幂指数相同、底数不同时，分别画出以两幂底数为底数的指数函数图象，当 $x$ 取相同幂指数时可观察得出两函数值（即两幂）的大小.

（3）两幂底数、指数都不相同时，取其中一幂的底数与另一幂的指数构造新幂与两幂比较，或借助“1”与两幂比较.

（4）当幂的底数含参数时，要按底数与 1 的大小分类讨论.

### 应用迁移

（教材 P119 习题 4.2 题 6 改编）比较下列各题中两个值的大小：

（1）$1.5^{0.3}$，$0.4^{3.1}$；

（2）$\left(\frac{5}{7}\right)^{-1.8}$，$\left(\frac{5}{7}\right)^{-2.5}$；

（3）$0.2^{0.3}$，$0.3^{0.2}$.

**解**：（1）因为 $1.5^{0.3}>1.5^0=1$，$0.4^{3.1}<0.4^0=1$，

所以 $1.5^{0.3}>0.4^{3.1}$.

（2）因为 $0<\frac{5}{7}<1$，所以函数 $y=\left(\frac{5}{7}\right)^x$ 在其定义域 **R** 上单调递减.又因为 $-1.8>-2.5$，所以 $\left(\frac{5}{7}\right)^{-1.8}<\left(\frac{5}{7}\right)^{-2.5}$.

（3）因为 $0<0.2<0.3<1$，所以指数函数 $y=0.2^x$ 与 $y=0.3^x$ 在定义域 **R** 上均是减函数，且在区间 $(0,+\infty)$ 上函数 $y=0.2^x$ 的图象在函数 $y=0.3^x$ 的图象的下方，所以 $0.2^{0.2}<0.3^{0.2}$.

又根据指数函数 $y=0.2^x$ 在 **R** 上是减函数，可得 $0.2^{0.3}<0.2^{0.2}$，所以 $0.2^{0.3}<0.3^{0.2}$.

## 任务4 利用指数函数的单调性解不等式

### 探究活动

**例3**　解关于 $x$ 的不等式 $a^{x^2-3x+1}<a^{x+6}$（$a>0$，且 $a\neq1$）.

**解**：①当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)=a^x$ 在 **R** 上是减函数.

所以 $x^2-3x+1>x+6$，所以 $x^2-4x-5>0$，

解得 $x<-1$ 或 $x>5$.

②当 $a>1$ 时，函数 $f(x)=a^x$ 在 **R** 上是增函数.

所以 $x^2-3x+1<x+6$，所以 $x^2-4x-5<0$，

解得 $-1<x<5$.

综上所述，当 $0<a<1$ 时，解集为 $\{x|x<-1$ 或 $x>5\}$；当 $a>1$ 时，解集为 $\{x|-1<x<5\}$.

**【探究总结】**

**利用指数函数的单调性解不等式的步骤**

(1)将不等式两边都化成底数相同的指数式.

(2)根据底数的取值，利用指数型函数的单调性去掉底数.

(3)求由指数构成的不等式的解集.

**注意**：若底数不确定，则需进行分类讨论.

## 应用迁移

求满足下列条件的 $x$ 的取值范围：

(1)$3^{x-1}>9^{x}$；

(2)$0.2^{x}<25$；

(3)$a^{-5x}>a^{x+7}$($a>0$，且 $a\neq1$).

**解**：(1)因为 $3^{x-1}>9^{x}$，所以 $3^{x-1}>3^{2x}$.

又 $y=3^{x}$ 在定义域 **R** 上是增函数，

所以 $x-1>2x$，所以 $x<-1$.

即 $x$ 的取值范围是 $(-\infty,-1)$.

(2)因为 $0<0.2<1$，所以指数函数 $f(x)=0.2^{x}$ 在 **R** 上是减函数.

又 $25=0.2^{-2}$，所以 $0.2^{x}<25$，即 $0.2^{x}<0.2^{-2}$，

所以 $x>-2$，即 $x$ 的取值范围是 $(-2,+\infty)$.

(3)当 $a>1$ 时，因为 $a^{-5x}>a^{x+7}$，所以 $-5x>x+7$，

解得 $x<-\frac{7}{6}$；

当 $0<a<1$ 时，因为 $a^{-5x}>a^{x+7}$，所以 $-5x<x+7$，

解得 $x>-\frac{7}{6}$.

综上所述，当 $a>1$ 时，$x$ 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{7}{6}\right)$；当 $0<a<1$ 时，$x$ 的取值范围是 $\left(-\frac{7}{6},+\infty\right)$.

# 课后素养评价(二十九)

## 基础落实

**1.** 函数 $y=a^{x-1}+1$($a>0$，且 $a\neq1$)的图象必经过一个定点，则这个定点的坐标是　(　　)

A.$(0,1)$　　B.$(1,2)$

C.$(2,3)$　　D.$(3,4)$

B　**解析**：当 $x=1$ 时，$y=a^{x-1}+1=a^{0}+1=2$，所以函数 $y=a^{x-1}+1$ 的图象过定点 $(1,2)$.

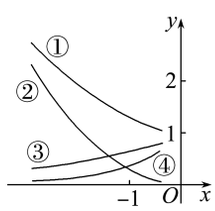
**2.** 下列式子正确的是　(　　)

A.$1.5^{2.9}>1.5^{3.4}$　　B.$1.7^{0.2}<0.9^{2.5}$

C.$0.8^{0.5}>0.9^{0.4}$　　D.$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

D　**解析**：对于选项 A，由 $y=1.5^{x}$ 在 **R** 上单调递增，且 $2.9<3.4$，所以 $1.5^{2.9}<1.5^{3.4}$，故选项 A 错误；对于选项 B，由 $y=1.7^{x}$ 在 **R** 上单调递增，所以 $1.7^{0.2}>1.7^{0}=1$，由 $y=0.9^{x}$ 在 **R** 上单调递减，所以 $0.9^{2.5}<0.9^{0}=1$，故 $1.7^{0.2}>0.9^{2.5}$，故选项 B 错误；对于选项 C，由 $y=0.8^{x}$，$y=0.9^{x}$ 在 **R** 上单调递减，且在第一象限底大图高，所以 $0.8^{0.5}<0.8^{0.4}<0.9^{0.4}$，故选项 C 错误；对于选项 D，由 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 在 **R** 上单调递增，且 $\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$，所以 $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$，故选项 D 正确.故选 D.

**3.** 如图，①②③④所表示的函数中，不属于函数 $y=2^{x}$，$y=6^{x}$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 中的一个的是　(　　)




A.①　　B.②　　C.③　　D.④

B　**解析**：任何一个指数函数的图象都过定点 $(0,1)$，图象②不过定点 $(0,1)$.故选 B.

**4.**(多选)若函数 $y=a^{x}+b-1$($a>0$，且 $a\neq1$)的图象不经过第二象限，则需同时满足　(AD)

A.$a>1$　　B.$0<a<1$

C.$b>0$　　D.$b\leqslant0$

**5.** 比较下列各组数中两个数的大小：

(1)$\left(\frac{2}{5}\right)^{0.3}$ 与 $\left(\frac{2}{5}\right)^{\pi}$；(2)$\left(\frac{2}{3}\right)^{3}$ 与 $2^{\frac{3}{2}}$；

(3)$\left(\frac{2}{5}\right)^{0.3}$ 与 $0.3^{\frac{2}{5}}$.

**解**：(1)因为 $0<\frac{2}{5}<1$，所以函数 $y=\left(\frac{2}{5}\right)^{x}$ 在 **R** 上单调递减.

又 $0.3<\pi$，所以 $\left(\frac{2}{5}\right)^{0.3}>\left(\frac{2}{5}\right)^{\pi}$.

(2)因为 $\left(\frac{2}{3}\right)^{3}<1$，$2^{\frac{3}{2}}>1$，

所以 $\left(\frac{2}{3}\right)^{3}<2^{\frac{3}{2}}$.

(3)函数 $y=x^{0.3}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

由 $\frac{2}{5}>0.3$，可得 $\left(\frac{2}{5}\right)^{0.3}>0.3^{0.3}$①.

又函数 $y=0.3^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上单调递减，

所以 $0.3^{0.3}>0.3^{\frac{2}{5}}$②.

由①②知$\left(\frac{2}{5}\right)^{0.3}>0.3^{\frac{2}{5}}$.

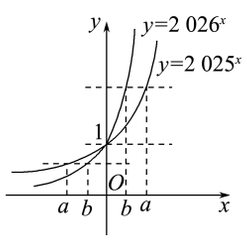
## 能力提升

**1.**(多选)已知实数 $a$，$b$ 满足等式 $2\,025^a=2\,026^b$，下列等式可能成立的是　　(　　)

A.$a=b=0$　　B.$a<b<0$

C.$0<a<b$　　D.$0<b<a$

ABD　**解析**：如图，观察易知，$a<b<0$ 或 $0<b<a$ 或 $a=b=0$.




**2.**(多选)设 $a$，$b$ 满足 $0<a<b<1$，则下列不等式中正确的是　　(　　)

A.$a^a<a^b$　　B.$b^a<b^b$

C.$a^a<b^a$　　D.$b^b>a^b$

CD　**解析**：对于 A，因为 $0<a<1$，所以函数 $f(x)=a^x$ 为减函数，又 $a<b$，所以 $a^a>a^b$，故选项 A 错误；对于 B，因为 $0<b<1$，所以函数 $f(x)=b^x$ 为减函数，又 $0<a<b$，所以 $b^a>b^b$，故选项 B 错误；对于 C，因为 $a>0$，所以函数 $f(x)=x^a$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，又 $0<a<b$，所以 $a^a<b^b$，故选项 C 正确；对于 D，因为 $b>0$，所以函数 $f(x)=x^b$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，又 $0<a<b$，所以 $b^b>a^b$，故选项 D 正确.故选 CD.

**3.**不等式 $4^x-3\cdot2^x+2>0$ 的解集是_____.

$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$　**解析**：由 $4^x-3\cdot2^x+2>0$ 可得$(2^x-1)(2^x-2)>0$，可得 $2^x<1=2^0$ 或 $2^x>2$.又因为函数 $y=2^x$ 为 **R** 上的增函数，则有 $x<0$ 或 $x>1$，故原不等式的解集为$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

## 自我超越

设 $f(x)$是定义在实数集 **R** 上的函数，且 $y=f(x+1)$ 是偶函数，当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$，则 $f\left(\frac{2}{3}\right)$，$f\left(\frac{3}{2}\right)$，$f\left(\frac{1}{3}\right)$的大小关系是　　(　　)

A.$f\left(\frac{2}{3}\right)>f\left(\frac{3}{2}\right)>f\left(\frac{1}{3}\right)$

B.$f\left(\frac{2}{3}\right)>f\left(\frac{1}{3}\right)>f\left(\frac{3}{2}\right)$

C.$f\left(\frac{3}{2}\right)>f\left(\frac{2}{3}\right)>f\left(\frac{1}{3}\right)$

D.$f\left(\frac{1}{3}\right)>f\left(\frac{3}{2}\right)>f\left(\frac{2}{3}\right)$

A　**解析**：函数 $y=f(x+1)$是偶函数，所以 $f(-x+1)=f(x+1)$，即函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称，

所以 $f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{4}{3}\right)$，$f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{5}{3}\right)$.

当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$ 单调递减，

由$\frac{4}{3}<\frac{3}{2}<\frac{5}{3}$，可得 $f\left(\frac{4}{3}\right)>f\left(\frac{3}{2}\right)>f\left(\frac{5}{3}\right)$，

即 $f\left(\frac{2}{3}\right)>f\left(\frac{3}{2}\right)>f\left(\frac{1}{3}\right)$.故选 A.

# 第 2 课时　指数函数的图象和性质的应用

**学习任务目标**

**1.**掌握指数函数的图象，会利用图象变换解决简单的问题.

**2.**掌握指数函数的性质，会利用指数函数的性质研究指数型函数的单调性与值域.

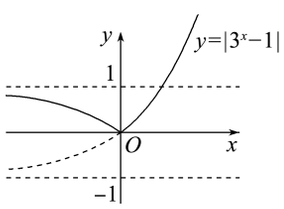
## ○ 任务型课堂 ○

### 任务 1　认识指数型函数的图象

#### 探究活动

**例 1**　若关于 $x$ 的方程 $|3^x-1|=k$ 仅有一解，则实数 $k$ 的取值范围是_____.

$\{0\}\cup[1,+\infty)$　**解析**：函数 $y=|3^x-1|$ 的图象是由函数 $y=3^x$ 的图象向下平移一个单位长度后，再把位于 $x$ 轴下方的图象沿 $x$ 轴翻折到 $x$ 轴上方得到的，函数图象如图所示.



当 $k=0$ 或 $k\geqslant 1$ 时，直线 $y=k$ 与函数 $y=|3^x-1|$ 的图象有唯一的交点，即方程 $|3^x-1|=k$ 仅有一解.

**【探究总结】**

**函数图象的翻折变换**

$y=|f(x)|$ 的图象：可将 $y=f(x)$ 的图象在 $x$ 轴下方的部分沿 $x$ 轴翻折到 $x$ 轴上方，其余部分不变

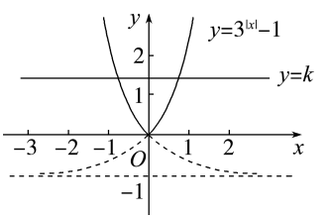
翻折变换

$y=f(|x|)$ 的图象：可先作出 $y=f(x)$ 在 $y$ 轴及其右边的图象，再作 $y$ 轴右边的图象关于 $y$ 轴对称的图象

## 应用迁移

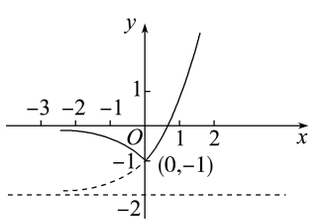
**1.** 若关于 $x$ 的方程 $3^{|x|}-1=k$ 有两个解，则实数 $k$ 的取值范围是_____.

$(0,+\infty)$　**解析：** 作出函数 $y=3^{|x|}-1$ 与 $y=k$ 的图象如图所示，数形结合可得 $k>0$.




**2.** 若函数 $y=|3^x-1|+k$ 的图象不经过第二象限，则实数 $k$ 的取值范围是_____.

$(-\infty,-1]$　**解析：** 作出函数 $y=|3^x-1|+k$ 的图象如图所示.




由图象知 $k\leqslant -1$，即 $k\in(-\infty,-1]$.

# 任务2 掌握指数型函数的单调性与值域

## 探究活动

**例 2**　判断函数 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x}$ 的单调性，并求其值域.

**解：** 令 $u=x^2-2x$，则原函数变为 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^u$.

因为 $u=x^2-2x=(x-1)^2-1$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递减，在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^u$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x}$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递增，在 $[1,+\infty)$ 上单调递减.

因为 $u=x^2-2x=(x-1)^2-1\geqslant -1$，

所以 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^u$，$u\in[-1,+\infty)$，所以 $0<\left(\frac{1}{3}\right)^u\leqslant\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$，所以原函数的值域为 $(0,3]$.

**[一题多思]**

**思考 1.** 指数型函数 $y=a^{f(x)}$（$a>0$，且 $a\neq 1$）是由哪些函数复合而成的？

**提示：** 由两个函数 $y=a^u$，$u=f(x)$ 复合而成.

**思考 2.** 指数型函数 $y=a^{f(x)}$（$a>0$，且 $a\neq 1$）的单调性是由哪些因素决定的？

**提示：** 一是底数；二是 $f(x)$ 的单调性.

**思考 3.** 你能确定函数 $y=9^x-2\cdot 3^x+3$ 的单调性吗？

**提示：** 令 $u=3^x$，则 $y=u^2-2u+3$，$u>0$.

$y=u^2-2u+3=(u-1)^2+2$，$u>0$.

当 $x<0$ 时，$u=3^x$ 单调递增，且 $0<u<1$.

又 $y=u^2-2u+3$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

所以 $y=9^x-2\cdot 3^x+3$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减.

当 $x\geqslant 0$ 时，$u=3^x$ 单调递增，且 $u\geqslant 1$.

又 $y=u^2-2u+3$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

所以函数 $y=9^x-2\cdot 3^x+3$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

综上，函数 $y=9^x-2\cdot 3^x+3$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

**【探究总结】**

**1.** 求复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 的单调区间，首先求出函数的定义域，然后把函数分解成 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，通过考察 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 的单调性，利用“同增异减”原则，求出 $y=f(\varphi(x))$ 的单调性.

**2.** (1) 求函数 $y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）在给定区间上的值域，直接利用函数的单调性即可.

(2) 求函数 $y=a^{f(x)}$（$a>0$，且 $a\neq 1$）的值域，需先确定 $f(x)$ 的值域，再根据指数函数 $y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）的单调性确定函数 $y=a^{f(x)}$（$a>0$，且 $a\neq 1$）的值域.

(3) 与指数函数有关的二次函数值域问题，通过换元转化为二次函数的最值问题，二次函数的定义域即所换元的取值范围，利用指数函数的值域可得.

## 应用迁移

**1.** 求下列函数的单调区间.

(1) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-x^2}$；

(2) $y=4^x-2\times 2^x+5$.

**解：** (1) 令 $u(x)=2x-x^2$，则 $u(x)=-(x-1)^2+1$，定义域为 **R**.

故 $u(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递增，在 $[1,+\infty)$ 上单调递减.

又 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^u$ 为减函数，根据复合函数“同增异减”

原则得$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-x^2}$在$(-\infty,1]$上单调递减，在$[1,+\infty)$上单调递增.

故函数$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-x^2}$的单调递增区间为$[1,+\infty)$，单调递减区间为$(-\infty,1]$.

(2)函数的定义域为$\mathbf{R}$，令$t=2^x$，$x\in\mathbf{R}$，则$t\in(0,+\infty)$.$y=(2^x)^2-2\times2^x+5=t^2-2t+5=(t-1)^2+4$，$t\in(0,+\infty)$.

当$t\geqslant1$时，$2^x\geqslant1$，$x\geqslant0$；当$0<t\leqslant1$时，$0<2^x\leqslant1$，$x\leqslant0$.

因为$y=(t-1)^2+4$在$[1,+\infty)$上单调递增，$t=2^x$在$[0,+\infty)$上单调递增，

所以$y=4^x-2\times2^x+5$的单调递增区间为$[0,+\infty)$.

同理可得单调递减区间为$(-\infty,0]$.

**2.**已知指数函数$f(x)=(3a^2-10a+4)a^x$在其定义域内单调递增.

(1)求函数$f(x)$的解析式；

(2)设函数$g(x)=f(2x)-4f(x)-3$，当$x\in[0,2]$时，求函数$g(x)$的值域.

**解**：(1)因为$f(x)$是指数函数，且在其定义域内单调递增，所以$3a^2-10a+4=1$，且$a>1$，

解得$a=3$或$a=\frac{1}{3}$(舍)，

所以$f(x)=3^x$.

(2)由(1)可得$g(x)=3^{2x}-4\cdot3^x-3=(3^x)^2-4\cdot3^x-3$，因为$x\in[0,2]$，

所以$3^x\in[1,9]$，令$t=3^x$，$t\in[1,9]$，

所以$y=t^2-4t-3$，$t\in[1,9]$，

所以$y_{\min}=2^2-4\times2-3=-7$，$y_{\max}=9^2-4\times9-3=42$.

所以$g(x)$的值域为$[-7,42]$.

## 任务3 掌握指数型函数的奇偶性

### 探究活动

**例3**　设函数$f(x)=ka^x-a^{-x}$($a>0$，且$a\neq1$)是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，求$k$的值.

**解**：因为$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，

所以$f(0)=0$，即$k-1=0$，所以$k=1$.

当$k=1$时，$f(x)=a^x-a^{-x}$，$f(-x)=a^{-x}-a^x=-(a^x-a^{-x})=-f(x)$，

故$k=1$符合题意.

### 【探究总结】

指数函数本身不具有奇偶性，但是与指数函数有关的函数可以具有奇偶性，判断该类函数的奇偶性一般是利用函数奇偶性的定义和性质.

### 应用迁移

(2023·全国乙卷)已知$f(x)=\frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{ax}-1}$是偶函数，则$a=$　　(　　)

A.$-2$　　B.$-1$

C.1　　D.2

D　**解析**：因为$f(x)=\frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{ax}-1}$为偶函数，

所以$f(x)-f(-x)=\frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{ax}-1}-\frac{(-x)\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-ax}-1}=\frac{x[\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{(a-1)x}]}{\mathrm{e}^{ax}-1}=0$.

又因为$x$不恒为0，可得$\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{(a-1)x}=0$，即$\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{(a-1)x}$，

所以$x=(a-1)x$，即$1=a-1$，解得$a=2$.故选D.

## 任务4 掌握指数型函数性质的综合应用

### 探究活动

**例4**　已知函数$f(x)=\frac{4^x-1}{2^x}$.

(1)判断函数$f(x)$的奇偶性，并说明理由；

(2)判断函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上的单调性，并用函数单调性的定义加以证明；

(3)解关于$x$的不等式$f(2x-a)+f(-x^2+ax-a)>0$.

**解**：(1)由题意可知，$f(x)=\frac{4^x-1}{2^x}=2^x-2^{-x}$.

因为$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，且$f(-x)=2^{-x}-2^x=-(2^x-2^{-x})=-f(x)$，

所以$f(x)$是奇函数.

(2)$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

证明如下：任取$x_1,x_2\in(0,+\infty)$，设$x_1<x_2$，则

$f(x_1)-f(x_2)=2^{x_1}-2^{-x_1}-2^{x_2}+2^{-x_2}=2^{x_1}-2^{x_2}+\left(\frac{1}{2^{x_2}}-\frac{1}{2^{x_1}}\right)=2^{x_1}-2^{x_2}+\frac{2^{x_1}-2^{x_2}}{2^{x_1+x_2}}=(2^{x_1}-2^{x_2})\left(1+\frac{1}{2^{x_1+x_2}}\right)=(2^{x_1}-2^{x_2})\cdot\frac{2^{x_1+x_2}+1}{2^{x_1+x_2}}$.

因为$x_1<x_2$，所以$2^{x_1}<2^{x_2}$，所以$2^{x_1}-2^{x_2}<0$.

又因为$x_1,x_2\in(0,+\infty)$，所以$2^{x_1+x_2}>1$，

所以$f(x_1)-f(x_2)<0$，即$f(x_1)<f(x_2)$.

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

(3)由(1)(2)知，$f(x)$是在$(0,+\infty)$上单调递增的奇函数，$f(0)=0$，

所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，

所以$f(2x-a)+f(-x^2+ax-a)>0$，可以转化为$f(2x-a)>f(x^2-ax+a)$，

可化为$2x-a>x^2-ax+a$，即$(x-2)(x-a)<0$.

①当$a=2$时，不等式为$(x-2)^2<0$，这时解集为$\varnothing$；

②当 $a>2$ 时，解不等式得到 $2<x<a$；

③当 $a<2$ 时，解不等式得到 $a<x<2$.

综上，当 $a=2$ 时，解集为 $\varnothing$；当 $a>2$ 时，解集为 $\{x\mid 2<x<a\}$；当 $a<2$ 时，解集为 $\{x\mid a<x<2\}$.

**【探究总结】**

**有关指数函数性质综合问题的求解策略**

(1)若奇函数在原点处有定义，则 $f(0)=0$.

(2)研究函数的单调性、奇偶性要遵循定义域优先的原则.

(3)解答此类问题的关键是理解并掌握指数函数的相关性质.

## 应用迁移

已知函数 $f(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}(a>0$，且 $a\neq 1)$.

(1)判断函数 $f(x)$ 的奇偶性；

(2)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(3)求 $f(x)$ 的值域.

**解**：(1)易知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

因为 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\dfrac{(a^{-x}-1)a^x}{(a^{-x}+1)a^x}=\dfrac{1-a^x}{1+a^x}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数.

(2)因为函数 $f(x)=\dfrac{a^x+1-2}{a^x+1}=1-\dfrac{2}{a^x+1}$，设 $x_1$，$x_2\in\mathbf{R}$，$x_1<x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=\left(1-\dfrac{2}{a^{x_1}+1}\right)-\left(1-\dfrac{2}{a^{x_2}+1}\right)=\dfrac{2}{a^{x_2}+1}-\dfrac{2}{a^{x_1}+1}=\dfrac{2(a^{x_1}-a^{x_2})}{(a^{x_1}+1)(a^{x_2}+1)}$.

当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，由 $x_1<x_2$，得 $a^{x_1}<a^{x_2}$，所以 $a^{x_1}-a^{x_2}<0$.

又 $a^{x_1}+1>0$，$a^{x_2}+1>0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，即此时 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

同理，当 $0<a<1$ 时，$f(x_1)>f(x_2)$，即此时 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

综上，当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

(3)令 $a^x=t$，则 $t>0$，

结合(2)知，原函数等价于 $y=1-\dfrac{2}{t+1}$，

易知 $y=1-\dfrac{2}{t+1}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $-1<1-\dfrac{2}{t+1}<1$，故 $f(x)$ 的值域为 $(-1,1)$.

# 课后素养评价(三十)

## 基础落实

**1.**已知 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x|}$，$x\in\mathbf{R}$，那么 $f(x)$ 是　(　　)

A.奇函数且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

B.偶函数且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

C.奇函数且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减

D.偶函数且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减

D　**解析**：由 $x\in\mathbf{R}$，且 $f(-x)=f(x)$ 知 $f(x)$ 是偶函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 单调递减.

**2.**若函数 $f(x)=3^{(2a-1)x+3}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，则实数 $a$ 的取值范围是　(　　)

A.$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$　　B.$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

C.$\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$　D.$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

A　**解析**：由于底数 $3\in(1,+\infty)$，

所以函数 $f(x)=3^{(2a-1)x+3}$ 的单调性与 $y=(2a-1)x+3$ 的单调性相同.

因为函数 $f(x)=3^{(2a-1)x+3}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，

所以 $y=(2a-1)x+3$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，

所以 $2a-1<0$，即 $a<\dfrac{1}{2}$，

从而实数 $a$ 的取值范围是 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$.故选 A.

**3.**函数 $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x^2+2x+3}$ 的值域是_____.

$\left(0,\dfrac{1}{16}\right]$　**解析**：令 $g(x)=x^2+2x+3=(x+1)^2+2\geqslant 2$，所以 $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x^2+2x+3}\leqslant\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}$.又 $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x^2+2x+3}>0$，所以函数的值域为 $\left(0,\dfrac{1}{16}\right]$.

**4.**已知指数函数 $f(x)=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的图象经过点 $(-3,27)$.

(1)求 $a$ 及 $f(-1)$ 的值；

(2)若 $f(x-1)>f(-x)$，求 $x$ 的取值范围.

**解**：(1)因为指数函数 $f(x)=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的图象经过点 $(-3,27)$，

所以 $a^{-3}=27$，所以 $a=\dfrac{1}{3}$，所以 $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.

所以 $f(-1)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}=3$.

(2)因为函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

所以原不等式等价于 $x-1<-x$，解得 $x<\dfrac{1}{2}$，即 $x$ 的取值范围为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$.

## 能力提升

**1.** 已知实数 $a>0$，且 $a\neq 1$，若函数 $f(x)=\begin{cases}6-x,x\leqslant 2,\\ a^x,x>2\end{cases}$ 的值域为$[4,+\infty)$，则 $a$ 的取值范围是（　　）

A.$(1,2)$　　B.$(2,+\infty)$

C.$(0,1)\cup(1,2]$　　D.$[2,+\infty)$

D　**解析**：当 $0<a<1$ 时，当 $x>2$ 时，$f(x)$ 的值域为$(0,a^2)$，与值域为$[4,+\infty)$矛盾，所以 $0<a<1$ 不成立.当 $a>1$ 时，对于函数 $f(x)=6-x,x\leqslant 2$，函数的值域为$[4,+\infty)$，所以只需当 $x>2$ 时，$a^x$ 的值域为$[4,+\infty)$的子集即可，即 $a^2\geqslant 4$，解得 $a\geqslant 2$（$a\leqslant -2$ 舍去）.

综上可知，$a$ 的取值范围为$[2,+\infty)$.

**2.** 已知函数 $f(x)=2^{|x-1|}$，若 $a<b<1$，且 $a+c>2$，则（　　）

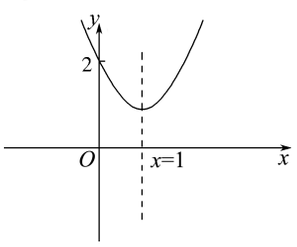
A.$f(a)<f(b)<f(c)$

B.$f(c)<f(b)<f(a)$

C.$f(b)<f(a)<f(c)$

D.$f(a)<f(c)<f(b)$

C　**解析**：作出 $f(x)$ 的图象，如图所示.




该函数在区间$(-\infty,1]$上单调递减，在$[1,+\infty)$上单调递增，且图象关于直线 $x=1$ 对称.因为 $a<b<1$，且 $a+c>2$，所以 $f(2-a)=f(a)>f(b)$，而 $c>2-a>1$，故 $f(c)>f(2-a)$，

所以 $f(b)<f(a)<f(c)$.

**3.** 若函数 $f(x)=\begin{cases}a^x,x>1,\\ \left(4-\frac{a}{2}\right)x+2,x\leqslant 1\end{cases}$ 在 **R** 上是增函数，则实数 $a$ 的取值范围是_____.

$[4,8)$　**解析**：由 $f(x)$ 在 **R** 上是增函数，

知 $\begin{cases}a>1,\\ 4-\frac{a}{2}>0,\\ a^1\geqslant\left(4-\frac{a}{2}\right)\times 1+2,\end{cases}$ 解得 $a\in[4,8)$.

## 自我超越

高斯是著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的称号.设 $x\in\mathbf{R}$，用$[x]$表示不超过 $x$ 的最大整数，则 $y=[x]$称为高斯函数，例如：$[-3.5]=-4$，$[2.1]=2$.已知函数 $f(x)=\frac{2e^x}{1+e^x}+\frac{1}{2}$，$g(x)=[f(x)]$，则下列叙述正确的是（　　）

A.$g(x)$是偶函数

B.$f(x)$在 **R** 上是增函数

C.$f(x)$的值域是$\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$

D.$g(x)$的值域是$\{-1,0,1\}$

B　**解析**：对于 A，根据题意知，$f(x)=\frac{2e^x}{1+e^x}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}-\frac{2}{1+e^x}$.因为 $g(2)=[f(2)]=\left[\frac{5}{2}-\frac{2}{1+e^2}\right]=2$，$g(-2)=[f(-2)]=\left[\frac{2e^{-2}}{1+e^{-2}}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{2}{e^2+1}+\frac{1}{2}\right]=0$，所以 $g(2)\neq g(-2)$，所以函数 $g(x)$ 不是偶函数，故 A 错误.对于 B，因为 $y=1+e^x$ 在 **R** 上是增函数，所以 $y=\frac{2}{1+e^x}$ 在 **R** 上是减函数，则 $f(x)=\frac{5}{2}-\frac{2}{1+e^x}$ 在 **R** 上是增函数，故 B 正确.对于 C，因为 $e^x>0$，所以 $1+e^x>1$，$0<\frac{2}{1+e^x}<2$，$-2<-\frac{2}{1+e^x}<0$，所以 $\frac{1}{2}<f(x)<\frac{5}{2}$，即 $f(x)$ 的值域是$\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$，故 C 错误.对于 D，因为 $f(x)$ 的值域是$\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$，所以 $g(x)$ 的值域是$\{0,1,2\}$，故 D 错误.

# 4.3　对数

## 4.3.1　对数的概念

**学习任务目标**

1.理解对数的概念，掌握对数的性质，能进行简单的对数计算.
2.理解指数式与对数式的等价关系，会进行对数式与指数式的互化.
3.理解常用对数、自然对数的概念及记法.

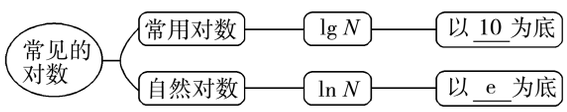
## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　对数的有关概念**

(1)一般地，如果 $a^x=N(a>0$，且 $a\neq1)$，那么数 $x$ 叫做以 $a$ 为底 $N$ 的对数，记作 $x=\log_aN$，其中 $a$ 叫做对数的底数，$N$ 叫做真数.

(2)常用对数与自然对数




(3)对数与指数间的关系

当 $a>0,a\neq1$ 时，$a^x=N\Leftrightarrow x=\log_aN$.

**知识点二　对数的性质**

(1)负数和 0 没有对数，即 $\log_aN$ 中 $N$ 必须大于 0.

(2)1 的对数为 0，即 $\log_a1=0(a>0$，且 $a\neq1)$.

(3)底数的对数为 1，即 $\log_aa=1(a>0$，且 $a\neq1)$.

(4)对数恒等式：$a^{\log_aN}=N(a>0$，且 $a\neq1)$.

### 【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)$(-2)^4=16$ 可化为 $\log_{(-2)}16=4$.　(×)

(2)对数的真数必须是非负数.　(×)

(3)若 $\log_63=m$，则 $6=3^m$.　(×)

2.$\ln1=0$，$\lg10=1$.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1 理解对数的概念

1.使式子 $\log_{(a-3)}(5-a)$ 有意义的实数 $a$ 的取值范围是(　　)

A.$(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$

B.$(3,5)$

C.$(3,4)$

D.$(3,4)\cup(4,5)$

D　**解析**：由题意知 $\begin{cases}a-3>0,\\a-3\neq1,\\5-a>0,\end{cases}$ 解得 $3<a<4$ 或 $4<a<5$，所以实数 $a$ 的取值范围是 $(3,4)\cup(4,5)$.故选 D.

2.已知 $4^a=2$，$\lg x=a$，则 $x=$_____.

$\sqrt{10}$　**解析**：因为 $4^a=2$，所以 $a=\frac{1}{2}$.

又 $\lg x=a$，所以 $x=10^a=\sqrt{10}$.

3.将下列指数式化为对数式，对数式化为指数式：

(1)$e^a=16$；

(2)$64^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$；

(3)$\log_39=2$；

(4)$\log_xy=z(x>0$，且 $x\neq1,y>0)$.

**解**：(1)由已知等式，两边取自然对数得 $\ln e^a=\ln16$，即 $a=\ln16$.

(2)由已知等式，两边取对数得 $\log_{64}64^{-\frac{1}{3}}=\log_{64}\frac{1}{4}$，即 $\log_{64}\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}$.

(3)由已知等式，可得 $3^{\log_39}=3^2$，即 $3^2=9$.

(4)由已知等式，可得 $x^{\log_xy}=x^z$，即 $x^z=y$.

**【探究总结】**

**指数式与对数式互化的思路**

(1)指数式化为对数式：将指数式的幂值作为真数，指数作为对数，底数不变，写出对数式.

(2)对数式化为指数式：将对数式的真数作为幂值，对数作为指数，底数不变，写出指数式.

### 任务2 掌握对数的计算

#### 探究活动

**例 1**　求下列各式中 $x$ 的值：

(1)$\log_x27=\frac{3}{2}$；

(2)$\log_2 x=-\frac{2}{3}$；

(3)$x=\log_{27}\frac{1}{9}$；

(4)$x=\log_{\frac{1}{2}}16$.

**解**：(1)由 $\log_x 27=\frac{3}{2}$，可得 $x^{\frac{3}{2}}=27$，

所以 $x=27^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}=3^2=9$.

(2)由 $\log_2 x=-\frac{2}{3}$，可得 $x=2^{-\frac{2}{3}}$，

所以 $x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.

(3)由 $x=\log_{27}\frac{1}{9}$，可得 $27^x=\frac{1}{9}$，

所以 $3^{3x}=3^{-2}$，所以 $x=-\frac{2}{3}$.

(4)由 $x=\log_{\frac{1}{2}}16$，可得 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=16$，

所以 $2^{-x}=2^4$，所以 $x=-4$.

## 【探究总结】

**对数式中求值的基本思想和方法**

(1)基本思想

在一定条件下求对数的值，或求对数式中参数字母的值，要注意利用方程思想求解.

(2)基本方法

①将对数式化为指数式，构建方程转化为指数问题；

②利用幂的运算性质和指数的性质计算.

## 应用迁移

**1.**利用指数式、对数式的互化求下列各式中 $x$ 的值：

(1)$\log_2 x=-\frac{1}{2}$；

(2)$\log_x 25=2$；

(3)$\log_5 x^2=2$.

**解**：(1)由 $\log_2 x=-\frac{1}{2}$，得 $2^{-\frac{1}{2}}=x$，所以 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)由 $\log_x 25=2$，得 $x^2=25$.

因为 $x>0$，且 $x\neq 1$，所以 $x=5$.

(3)由 $\log_5 x^2=2$，得 $x^2=5^2$，所以 $x=\pm 5$.

因为 $5^2=25>0$，$(-5)^2=25>0$，

所以 $x=5$ 或 $x=-5$.

**2.**若 $\log_{\frac{1}{2}}x=m$，$\log_{\frac{1}{4}}y=m+2$，求 $\frac{x^2}{y}$ 的值.

**解**：因为 $\log_{\frac{1}{2}}x=m$，所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^m=x$，$x^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$.

因为 $\log_{\frac{1}{4}}y=m+2$，

所以 $\left(\frac{1}{4}\right)^{m+2}=y$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+4}$.

所以 $\frac{x^2}{y}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+4}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-(2m+4)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=16$.

# 任务3 理解对数的性质

## 探究活动

**例2**　求下列各式中 $x$ 的值：

(1)$\log_5(\log_3 x)=0$；

(2)$5^{\log_5(2x-1)}=25$.

**解**：(1)设 $t=\log_3 x$，则 $\log_5 t=0$，所以 $t=1$，

即 $\log_3 x=1$，所以 $x=3$.

(2)因为 $5^{\log_5(2x-1)}=25$，所以 $2x-1=25$，解得 $x=13$.

[一题多思]

**思考1.**本例(1)若改为“$\log_3(\log_5 x)=0$”，求 $x$ 的值.

**提示**：因为 $\log_3(\log_5 x)=0$，所以 $\log_5 x=3^0=1$，所以 $x=5^1=5$.

**思考2.**本例(1)若改为“$\log_5(\log_3 x)=1$”，求 $x$ 的值.

**提示**：因为 $\log_5(\log_3 x)=1$，所以 $\log_3 x=5$，所以 $x=3^5=243$.

**思考3.**本例(2)若改为“$x=7^{1-\log_7 5}$”，如何求 $x$ 的值？

**提示**：$x=7^{1-\log_7 5}=7\div 7^{\log_7 5}=7\div 5=\frac{7}{5}$.

## 【探究总结】

**利用对数的性质求值的方法**

(1)求解此类问题时，应根据对数的两个结论 $\log_a 1=0(a>0$，且 $a\neq 1)$ 和 $\log_a a=1(a>0$，且 $a\neq 1)$ 进行变形.若已知对数值求真数，则可将其化为指数式进行运算.

(2)已知多重对数式的值，求变量值，应从外到内，逐层脱去“log”后再求解.

## 应用迁移

**1.**(多选)下列命题是真命题的是　　(　　)

A.$\lg(\lg 10)=0$　　B.$e^{\ln \pi}=\pi$

C.若 $e=\ln x$，则 $x=e^2$　　D.$\ln(\lg 1)=0$

AB　**解析**：$\lg(\lg 10)=\lg 1=0$，所以A正确；$e^{\ln \pi}=\pi$，满足对数的运算法则，所以B正确；若 $e=\ln x$，则 $x=e^e$，所以C不正确；$\ln(\lg 1)=\ln 0$，0没有对数，所以D不正确.故选AB.

**2.**求值：

(1)$25^{\frac{1}{2}\log_5 4}$；

(2)$\ln e+\ln 1+e^{\ln 3}$.

**解**：(1)$25^{\frac{1}{2}\log_5 4}=5^{\log_5 4}=4$.

(2)$\ln e+\ln 1+e^{\ln 3}=1+0+3=4$.

# 课后素养评价(三十一)

## 基础落实

**1.**已知$\log_3 a=2$,则 $a=$　　(　　)

A.6　　B.7

C.8　　D.9

D　**解析**:$\log_3 a=2$,则 $a=3^2=9$.故选 D.

**2.**(多选)下列指数式与对数式的互化正确的是　　(　　)

A.$10^0=1$ 与 $\lg 1=0$

B.$27^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$与$\log_{27}\frac{1}{3}=-3$

C.$\log_3 9=2$ 与$3^2=9$

D.$\log_5 5=1$ 与$5^1=5$

ACD　**解析**:对于 A,$10^0=1$,化为对数式是 $\lg 1=0$,选项 A 正确;对于 B,$27^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$,化为对数式是$\log_{27}\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$,所以选项 B 错误;对于 C,$\log_3 9=2$,化为指数式是$3^2=9$,选项 C 正确;对于 D,$\log_5 5=1$,化为指数式是$5^1=5$,选项 D 正确.故选 ACD.

**3.**(多选)下列结论正确的是　　(　　)

A.$\log_2 4=2$

B.$-\ln \mathrm{e}=1$

C.$3^{\log_3 2}=2$

D.若$\log_x 27=3$,则 $x=\pm 3$

AC　**解析**:由对数的运算可得 $\log_2 4=2$,$3^{\log_3 2}=2$,$-\ln \mathrm{e}=-1$,若$\log_x 27=3$,则 $x=3$,故 A,C 正确,B,D 错误.

**4.**对数式 $M=\log_{(a-3)}(10-2a)$中,实数 $a$ 的取值范围是　　(　　)

A.$(-\infty,5)$　　B.$(3,5)$

C.$(3,+\infty)$　　D.$(3,4)\cup(4,5)$

D　**解析**:根据题意,$M=\log_{(a-3)}(10-2a)$中,有$\begin{cases}a-3>0,\\ a-3\neq 1,\\ 10-2a>0,\end{cases}$解得 $3<a<4$ 或 $4<a<5$,即实数 $a$ 的取值范围为$(3,4)\cup(4,5)$.故选 D.

**5.**若 $a=\log_2 3$,则 $2^a+2^{-a}=$_____.

$\frac{10}{3}$　**解析**:因为 $a=\log_2 3$,所以 $2^a=2^{\log_2 3}=3$,所以 $2^a+2^{-a}=2^a+\frac{1}{2^a}=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$.

**6.**已知$\ln[\log_4(\log_2 x)]=0$,那么 $x^{-\frac{1}{2}}=$_____.

$\frac{1}{4}$　**解析**:由 $\ln[\log_4(\log_2 x)]=0$,得 $\log_4(\log_2 x)=1$,

则 $\log_2 x=4$,可得 $x=16$.

所以 $x^{-\frac{1}{2}}=16^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{16}}=\frac{1}{4}$.

## 能力提升

**1.**方程 $2^{\log_3 x}=\frac{1}{4}$的解是　　(　　)

A.$x=\frac{1}{9}$　　B.$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

C.$x=\sqrt{3}$　　D.$x=9$

A　**解析**:因为 $2^{\log_3 x}=2^{-2}$,

所以 $\log_3 x=-2$,所以 $x=3^{-2}=\frac{1}{9}$.

**2.**(多选)以下四个结论中正确的是　　(　　)

A.$\ln(\lg 10)=0$

B.$\ln(\ln \mathrm{e})=0$

C.若 $\mathrm{e}=\ln x$,则 $x=\mathrm{e}^2$

D.$\ln(\lg 1)=0$

AB　**解析**:因为 $\lg 10=\ln \mathrm{e}=1$,$\ln(\lg 10)=\ln 1=0$,$\ln(\ln \mathrm{e})=\ln 1=0$,所以 A,B 均正确;C 中,若 $\mathrm{e}=\ln x$,则 $x=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$,故 C 错误;D 中,$\lg 1=0$,而 $\ln 0$ 没有意义,故 D 错误.故选 AB.

**3.**设 $\log_4 5=2m$,则 $4^m=$　　(　　)

A.$\frac{1}{25}$　　B.25

C.$\frac{1}{5}$　　D.$\sqrt{5}$

D　**解析**:因为 $\log_4 5=2m$,所以 $m=\log_4\sqrt{5}$,所以 $4^m=4^{\log_4\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

**4.**利用对数恒等式 $a^{\log_a N}=N(a>0$,且 $a\neq 1,N>0)$,计算:

(1)$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1+\log_{0.5}4}$;

(2)$2^{3+\log_2 3}+3^{2-\log_3 9}$.

**解**:(1)$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1+\log_{0.5}4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}4}$

$=2\times 4$

$=8$.

(2)$2^{3+\log_2 3}+3^{2-\log_3 9}$

$=2^3\times 2^{\log_2 3}+\frac{3^2}{3^{\log_3 9}}$

$=8\times 3+\frac{9}{9}$

$=25$.

## 自我超越

1.若 $\ln x=6$，$\ln y=3$，则 $\frac{x}{y}=$（　　）

A. $\frac{1}{e^3}$　　B. $\frac{1}{e^2}$

C. $e^2$　　D. $e^3$

D　**解析**：因为 $\ln x=6$，$\ln y=3$，

所以 $x=e^6$，$y=e^3$，

所以 $\frac{x}{y}=\frac{e^6}{e^3}=e^3$. 故选 D.

2.已知 $\log_a b=\log_b a$（$a>0$，$a\neq1$，$b>0$，$b\neq1$，且 $a\neq b$），则 $\log_a b=$ _____.

$-1$　**解析**：设 $\log_a b=\log_b a=k$，

则 $b=a^k$，$a=b^k$，

所以 $b=(b^k)^k=b^{k^2}$.

因为 $b>0$，且 $b\neq1$，所以 $k^2=1$，

即 $k=\pm1$. 当 $k=-1$ 时，$a=\frac{1}{b}$，$\log_a b=-1$.

当 $k=1$ 时，$a=b$，舍去.

综上可知，$\log_a b=-1$.

# 4.3.2　对数的运算

**学习任务目标**

1.理解并掌握对数的运算性质.

2.理解并掌握换底公式.

3.能运用对数的运算性质及换底公式进行化简或求值.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　对数的运算性质**

如果 $a>0$，且 $a\neq1$，$M>0$，$N>0$，那么

(1) $\log_a(MN)=$ <u>$\log_a M+\log_a N$</u>；

(2) $\log_a\frac{M}{N}=$ <u>$\log_a M-\log_a N$</u>；

(3) $\log_a M^n=$ <u>$n\log_a M$</u>（$n\in\mathbf{R}$）.

**知识点二　对数换底公式**

$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$（$a>0$，且 $a\neq1$；$b>0$；$c>0$，且 $c\neq1$）.

特别地，$\log_a b\cdot\log_b a=$ <u>1</u>.

### 【概念辨析】

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)积、商的对数可以化为对数的和、差.　（√）

(2) $\log_a(xy)=\log_a x\cdot\log_a y$.　（×）

(3) $\log_2(-5)^2=2\log_2(-5)$.　（×）

(4)若 $a>0$，$b>0$，$c>0$，且 $a\neq1$，$b\neq1$，则 $\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c$.　（√）

2. $\log_2 9\times\log_3 2=$ _____.

2　**解析**：$\log_2 9\times\log_3 2=\frac{\lg 9}{\lg 2}\times\frac{\lg 2}{\lg 3}=2$.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1　掌握对数的运算性质

#### 探究活动

**例1**　(1)若 $\lg 2=a$，$\lg 3=b$，则 $\frac{\lg 12}{\lg 15}=$（　　）

A. $\frac{2a+b}{1-a+b}$　　B. $\frac{2a+b}{1+a+b}$

C. $\frac{a+2b}{1-a+b}$　　D. $\frac{a+2b}{1+a+b}$

(2)（教材 P126 练习题 1 改编）计算：

①$(\lg 5)^2+2\lg 2-(\lg 2)^2$；

②$\frac{\lg 3+\frac{2}{5}\lg 9+\frac{3}{5}\lg\sqrt{27}-\lg\sqrt{3}}{\lg 81-\lg 27}$；

③$\log_5 35-2\log_5\frac{7}{3}+\log_5 7-\log_5 1.8$.

(1) A　**解析**：$\frac{\lg 12}{\lg 15}=\frac{\lg(3\times4)}{\lg(3\times5)}=\frac{\lg 3+2\lg 2}{\lg 3+\lg 5}=\frac{2\lg 2+\lg 3}{\lg 3+1-\lg 2}=\frac{2a+b}{1-a+b}$.

(2)**解**：①原式 $=(\lg 5)^2+(2-\lg 2)\lg 2$

$=(\lg 5)^2+(1+\lg 5)\lg 2$

$=(\lg 5)^2+\lg 2\cdot\lg 5+\lg 2$

$=(\lg 5+\lg 2)\cdot\lg 5+\lg 2$

$=\lg 5+\lg 2=1$.

②原式 $=\frac{\lg 3+\frac{4}{5}\lg 3+\frac{9}{10}\lg 3-\frac{1}{2}\lg 3}{4\lg 3-3\lg 3}$

$=\dfrac{\left(1+\dfrac{4}{5}+\dfrac{9}{10}-\dfrac{1}{2}\right)\lg 3}{(4-3)\lg 3}=\dfrac{11}{5}$.

③原式$=\log_5(5\times7)-2(\log_5 7-\log_5 3)+\log_5 7-\log_5\dfrac{9}{5}=\log_5 5+\log_5 7-2\log_5 7+2\log_5 3+\log_5 7-2\log_5 3+\log_5 5=2\log_5 5=2$.

## 【探究总结】

**对数化简与求值的基本原则和方法**

(1)基本原则：对数的化简与求值一般是正用或逆用公式，对真数进行处理，选哪种方法，取决于问题的实际情况，一般本着便于真数化简的原则进行.

(2)两种常用的方法：①“收”，将同底的两对数的和(差)收成积(商)的对数；②“拆”，将积(商)的对数拆成同底的两对数的和(差).

## 应用迁移

**1.**已知 $\lg 2=a$，$\lg 3=b$，则 $\lg\dfrac{12}{5}=$_____.

$b+3a-1$　**解析：**$\lg\dfrac{12}{5}=\lg 12-\lg 5=\lg(3\times2^2)-(1-\lg 2)=\lg 3+\lg 2^2-1+\lg 2=\lg 3+3\lg 2-1=b+3a-1$.

**2.**计算下列各式的值：

(1)$\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{32}{49}-\dfrac{4}{3}\lg\sqrt{8}+\lg\sqrt{245}$；

(2)$\lg 25+\dfrac{2}{3}\lg 8+\lg 5\times\lg 20+(\lg 2)^2$.

**解：**(1)(方法一)原式$=\dfrac{1}{2}(5\lg 2-2\lg 7)-\dfrac{4}{3}\times\dfrac{3}{2}\times\lg 2+\dfrac{1}{2}(2\lg 7+\lg 5)$

$=\dfrac{5}{2}\lg 2-\lg 7-2\lg 2+\lg 7+\dfrac{1}{2}\lg 5$

$=\dfrac{1}{2}\lg 2+\dfrac{1}{2}\lg 5=\dfrac{1}{2}(\lg 2+\lg 5)$

$=\dfrac{1}{2}\lg 10=\dfrac{1}{2}$.

(方法二)原式$=\lg\dfrac{4\sqrt{2}}{7}-\lg 4+\lg 7\sqrt{5}$

$=\lg\dfrac{4\sqrt{2}\times7\sqrt{5}}{7\times4}=\lg(\sqrt{2}\times\sqrt{5})=\lg\sqrt{10}=\dfrac{1}{2}$.

(2)原式$=2\lg 5+2\lg 2+\lg 5\times(2\lg 2+\lg 5)+(\lg 2)^2$

$=2\lg 10+(\lg 5+\lg 2)^2=2+(\lg 10)^2=2+1=3$.

# 任务2 掌握对数的换底公式

## 探究活动

**例2**　(1)已知$3^x=5^y=a$，且$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2$，则 $a$ 的值为(　　)

A.$\sqrt{15}$　　B.15　　C.$\pm\sqrt{15}$　　D.225

(2)已知 $\log_{18}9=a$，$18^b=5$，求 $\log_{36}45$ 的值(用 $a$，$b$ 表示).

(1)A　**解析：**因为$3^x=5^y=a$，所以 $x\lg 3=y\lg 5=\lg a$，所以$\dfrac{1}{x}=\dfrac{\lg 3}{\lg a}$，$\dfrac{1}{y}=\dfrac{\lg 5}{\lg a}$，所以$2=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{\lg 3+\lg 5}{\lg a}=\dfrac{\lg 15}{\lg a}$，所以$\lg a^2=\lg 15$，

所以$a^2=15$.因为$a>0$，所以$a=\sqrt{15}$.故选 A.

(2)**解：**因为$18^b=5$，所以$\log_{18}5=b$.

(方法一)$\log_{36}45=\dfrac{\log_{18}45}{\log_{18}36}=\dfrac{\log_{18}(9\times5)}{\log_{18}\frac{18^2}{9}}$

$=\dfrac{\log_{18}9+\log_{18}5}{2\log_{18}18-\log_{18}9}=\dfrac{a+b}{2-a}$.

(方法二)因为$\dfrac{\lg 9}{\lg 18}=\log_{18}9=a$，所以$\lg 9=a\lg 18$，同理得$\lg 5=b\lg 18$，

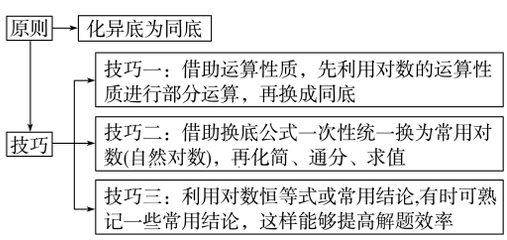
所以$\log_{36}45=\dfrac{\lg 45}{\lg 36}=\dfrac{\lg(9\times5)}{\lg\frac{18^2}{9}}=\dfrac{\lg 9+\lg 5}{2\lg 18-\lg 9}$

$=\dfrac{a\lg 18+b\lg 18}{2\lg 18-a\lg 18}=\dfrac{a+b}{2-a}$.

[一题多思]

**思考1.**利用换底公式进行化简与求值的原则和技巧分别是什么？

**提示：**




**思考2.**本例(1)条件若变为“已知$3^a=5^b=c$，且$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=2$”，你能求出 $c$ 的值吗？

**提示：**因为$3^a=5^b=c$，所以$c>0$，所以$a=\log_3 c$，$b=\log_5 c$，

所以$\dfrac{1}{a}=\log_c 3$，$\dfrac{1}{b}=\log_c 5$，所以$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\log_c 15$.

由$\log_c 15=2$，得$c^2=15$，即$c=\sqrt{15}$(负值舍去).

**思考3.**本例(2)条件不变，你能用 $a$，$b$ 表示 $\log_9 15$ 的值吗？

**提示：**因为$18^b=5$，所以$\log_{18}5=b$，

所以$\log_9 15=\dfrac{\log_{18}15}{\log_{18}9}=\dfrac{\log_{18}(3\times5)}{\log_{18}9}=\dfrac{\log_{18}3+\log_{18}5}{a}=\dfrac{\log_{18}\sqrt{9}+b}{a}=\dfrac{\log_{18}9^{\frac{1}{2}}+b}{a}=\dfrac{\frac{1}{2}\log_{18}9+b}{a}=\dfrac{\frac{1}{2}a+b}{a}=\dfrac{a+2b}{2a}$.

**【探究总结】**

**应用换底公式应注意的两个方面**

(1)将不同底的对数化成同底的对数时，要注意换底公式的正用、逆用以及变形应用.

(2)题目中有指数式和对数式时，要注意将指数式与对数式统一成一种形式.

## 应用迁移

**1.**设 $\lg 2=a$，$\lg 3=b$，则$\log_5 12$ 等于　　(　　)

A.$\dfrac{2a+b}{1+a}$　B.$\dfrac{a+2b}{1+a}$　C.$\dfrac{2a+b}{1-a}$　D.$\dfrac{a+2b}{1-a}$

C　**解析**：$\log_5 12=\dfrac{\lg 12}{\lg 5}=\dfrac{\lg 3+2\lg 2}{1-\lg 2}=\dfrac{2a+b}{1-a}$.故选 C.

**2.**计算：

(1)$\log_2 3\times\log_3 5\times\log_5 16$；

(2)$(\log_3 2+\log_9 2)(\log_4 3+\log_8 3)$；

(3)$(\log_2 125+\log_4 25+\log_8 5)\times(\log_5 2+\log_{25} 4+\log_{125} 8)$.

**解**：(1)原式$=\dfrac{\lg 3}{\lg 2}\times\dfrac{\lg 5}{\lg 3}\times\dfrac{\lg 16}{\lg 5}=\dfrac{\lg 16}{\lg 2}=\dfrac{4\lg 2}{\lg 2}=4$.

(2)原式$=\left(\dfrac{\lg 2}{\lg 3}+\dfrac{\lg 2}{\lg 9}\right)\left(\dfrac{\lg 3}{\lg 4}+\dfrac{\lg 3}{\lg 8}\right)=\left(\dfrac{\lg 2}{\lg 3}+\dfrac{\lg 2}{2\lg 3}\right)\left(\dfrac{\lg 3}{2\lg 2}+\dfrac{\lg 3}{3\lg 2}\right)=\dfrac{3\lg 2}{2\lg 3}\times\dfrac{5\lg 3}{6\lg 2}=\dfrac{5}{4}$.

(3)(方法一)原式$=$

$\left(\log_2 5^3+\dfrac{\log_2 25}{\log_2 4}+\dfrac{\log_2 5}{\log_2 8}\right)\left(\log_5 2+\dfrac{\log_5 4}{\log_5 25}+\dfrac{\log_5 8}{\log_5 125}\right)$

$=\left(3\log_2 5+\dfrac{2\log_2 5}{2\log_2 2}+\dfrac{\log_2 5}{3\log_2 2}\right)\left(\log_5 2+\dfrac{2\log_5 2}{2\log_5 5}+\dfrac{3\log_5 2}{3\log_5 5}\right)=\left(3+1+\dfrac{1}{3}\right)\log_2 5\times(3\log_5 2)$

$=13\log_2 5\times\dfrac{\log_2 2}{\log_2 5}=13$.

(方法二)原式$=\left(\dfrac{\lg 125}{\lg 2}+\dfrac{\lg 25}{\lg 4}+\dfrac{\lg 5}{\lg 8}\right)\left(\dfrac{\lg 2}{\lg 5}+\dfrac{\lg 4}{\lg 25}+\dfrac{\lg 8}{\lg 125}\right)=\left(\dfrac{3\lg 5}{\lg 2}+\dfrac{2\lg 5}{2\lg 2}+\dfrac{\lg 5}{3\lg 2}\right)\left(\dfrac{\lg 2}{\lg 5}+\dfrac{2\lg 2}{2\lg 5}+\dfrac{3\lg 2}{3\lg 5}\right)$

$=\dfrac{13\lg 5}{3\lg 2}\times\dfrac{3\lg 2}{\lg 5}=13$.

# 任务3 了解对数在实际中的应用

## 探究活动

**例3**　射线测厚技术原理公式为 $I=I_0 e^{-\rho\mu t}$，其中 $I_0$，$I$ 分别为射线穿过被测物前后的强度，e 是自然对数的底数，$t$ 为被测物厚度，$\rho$ 为被测物的密度，$\mu$ 是被测物对射线的吸收系数.工业上通常用镅 241($^{241}$Am)低能 $\gamma$ 射线测量钢板的厚度.若这种射线对钢板的半价层厚度为0.8，钢的密度为 7.6，则钢板对这种射线的吸收系数约为　　(　　)

(注：半价层厚度是指将已知射线强度减弱为一半的某种物质厚度，$\ln 2\approx 0.693\ 1$，结果精确到 0.001)

A.0.110　　B.0.112

C.0.114　　D.0.116

C　**解析**：由题意可得，$t=0.8$，$\rho=7.6$，$\dfrac{I}{I_0}=\dfrac{1}{2}$.因为 $I=I_0 e^{-\rho\mu t}$，所以 $\dfrac{1}{2}=e^{-7.6\times 0.8\times\mu}$，即 $\mu=\dfrac{\ln 2}{7.6\times 0.8}\approx\dfrac{0.693\ 1}{6.08}\approx 0.114$.所以钢板对这种射线的吸收系数约为 0.114.故选 C.

**【探究总结】**

对数在实际中的应用十分广泛，解决此类问题的关键在于理解题意，提炼出对数式，认真分析题目中给出的相关数据，将相关数据代入，准确利用对数运算性质、换底公式进行计算，必要时注意指数式与对数式的灵活转化.

## 应用迁移

在天文学中，天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述.两颗星的星等与亮度满足 $m_2-m_1=\dfrac{5}{2}\lg\dfrac{E_1}{E_2}$，其中星等为 $m_k$ 的星的亮度为 $E_k(k=1,2)$.已知太阳的星等是 $-26.7$，天狼星的星等是 $-1.45$，则太阳与天狼星的亮度的比值为　　(A)

A.$10^{10.1}$　　B.10.1

C.lg 10.1　　D.$10^{-10.1}$

# 课后素养评价(三十二)

## 基础落实

**1.**下列等式正确的是　　(　　)

A.$(\lg 5)^2+2\lg 2-(\lg 2)^2=1$

B.$\log_3 5\cdot\log_3 2\cdot\log_5 9=3$

C.$\log_{\sqrt{7}}2\sqrt{2}+e^{\ln 2}+\sqrt{(\pi-5)^2}=\pi$

D.$\sqrt{6\dfrac{1}{4}}+\sqrt[4]{0.062\ 5}\cdot\left[(0.064^{\frac{1}{3}})^{-2.5}\right]^{\frac{2}{5}}=1$

A　**解析**：A 中，由 $(\lg 5)^2+2\lg 2-(\lg 2)^2=(1-\lg 2)^2+2\lg 2-(\lg 2)^2=1$，所以 A 正确；

B 中，由$\log_3 5\cdot\log_3 2\cdot\log_5 9=\dfrac{\lg 5}{\lg 3}\cdot\dfrac{\lg 2}{\lg 3}\cdot\dfrac{2\lg 3}{\lg 5}=$

$\frac{2\lg 2}{\lg 3}\neq 3$，所以 B 错误；

C 中，由 $\log_{\sqrt{7}}2\sqrt{2}+e^{\ln 2}+\sqrt{(\pi-5)^2}=\log_7 8+2+5-\pi\neq\pi$，所以 C 错误；

D 中，由 $\sqrt{6\frac{1}{4}}+\sqrt[4]{0.062\,5}\cdot\left[(0.064^{\frac{1}{3}})^{-2.5}\right]^{\frac{2}{5}}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\times(0.4)^{-1}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\neq 1$，所以 D 错误.故选 A.

**2.**已知 $2^a=5$，则 $\lg 2=$　　(　　)

A.$\frac{a}{a+1}$　　B.$\frac{a}{a-1}$

C.$\frac{1}{a+1}$　　D.$\frac{1}{a-1}$

C　**解析：**由 $2^a=5$，得 $a=\log_2 5=\frac{\lg 5}{\lg 2}=\frac{1-\lg 2}{\lg 2}$，则 $\lg 2=\frac{1}{a+1}$.故选 C.

**3.**设 $a\log_3 4=2$，则 $4^{-a}=$　　(　　)

A.$\frac{1}{16}$　　B.$\frac{1}{9}$　　C.$\frac{1}{8}$　　D.$\frac{1}{6}$

B　**解析：**因为 $a\log_3 4=2$，则 $\log_3 4^a=2$，则 $4^a=3^2=9$，则 $4^{-a}=\frac{1}{4^a}=\frac{1}{9}$.故选 B.

**4.**计算：$\frac{1}{\log_3 21}+\frac{1}{\log_7 21}=$_____.

1　**解析：**$\frac{1}{\log_3 21}+\frac{1}{\log_7 21}=\log_{21}3+\log_{21}7=\log_{21}21=1$.

**5.**计算下列各式的值：

(1)$\frac{\lg 3+\frac{2}{5}\lg 9+\frac{3}{5}\lg\sqrt{27}-\lg\sqrt{3}}{\lg 81-\lg 27}$；

(2)$\log_4\frac{25}{9}+\log_2 3-\log_{0.5}\frac{1}{5}$；

(3)$(2\log_4 3+\log_8 3)(\log_3 2+\log_9 2)$.

**解：**(1)原式$=\frac{\lg 3+\frac{4}{5}\lg 3+\frac{9}{10}\lg 3-\frac{1}{2}\lg 3}{4\lg 3-3\lg 3}$

$=\frac{\left(1+\frac{4}{5}+\frac{9}{10}-\frac{1}{2}\right)\lg 3}{(4-3)\lg 3}=\frac{11}{5}$.

(2)原式$=\frac{\log_2\frac{25}{9}}{\log_2 4}+\log_2 3-\frac{\log_2\frac{1}{5}}{\log_2 0.5}$

$=\log_2\frac{5}{3}+\log_2 3-\log_2 5=\log_2\left(\frac{5}{3}\times 3\div 5\right)=\log_2 1=0$.

(3)原式$=(2\log_{2^2}3+\log_{2^3}3)\cdot(\log_3 2+\log_{3^2}2)$

$=\left(\log_2 3+\frac{1}{3}\log_2 3\right)\left(\log_3 2+\frac{1}{2}\log_3 2\right)$

$=\left(\frac{4}{3}\log_2 3\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\log_3 2\right)=2$.

## 能力提升

**1.**若对数 $\lg a$ 与 $\lg b$ 互为相反数，则有　　(　　)

A.$a+b=0$　　B.$a-b=0$

C.$ab=1$　　D.$\frac{a}{b}=1$

C　**解析：**因为 $\lg a=-\lg b$，所以 $\lg a+\lg b=0$，所以 $\lg(ab)=0$，所以 $ab=1$.故选 C.

**2.**若 $6^x=25$，$5^y=6$，则 $xy=$　　(　　)

A.3　　B.$\frac{1}{2}$

C.$\frac{3}{2}$　　D.2

D　**解析：**由 $6^x=25$，$5^y=6$，得 $x=\log_6 25$，$y=\log_5 6$，所以 $xy=\log_6 25\times\log_5 6=\frac{\ln 25}{\ln 6}\times\frac{\ln 6}{\ln 5}=2$.故选 D.

**3.**若 $2^a=5^b=10$，则 $2^{\frac{a}{b}}=$　　(　　)

A.2　　B.4　　C.5　　D.10

C　**解析：**因为 $2^a=5^b=10$，所以 $a=\log_2 10$，$b=\log_5 10$，

$\frac{a}{b}=\frac{\log_2 10}{\log_5 10}=\frac{\lg 5}{\lg 2}=\log_2 5$，则 $2^{\frac{a}{b}}=2^{\log_2 5}=5$.

**4.**计算：$\frac{(1-\log_6 3)^2+\log_6 2\times\log_6 18}{\log_6 4}=$_____.

1　**解析：**原式

$=\frac{1-2\log_6 3+(\log_6 3)^2+\log_6\frac{6}{3}\times\log_6(6\times 3)}{\log_6 4}$

$=\frac{1-2\log_6 3+(\log_6 3)^2+1-(\log_6 3)^2}{\log_6 4}$

$=\frac{2(1-\log_6 3)}{2\log_6 2}=\frac{\log_6 6-\log_6 3}{\log_6 2}$

$=\frac{\log_6 2}{\log_6 2}=1$.

## 自我超越

已知 $x$，$y$，$z$ 均为正数，$3^x=4^y=6^z$，且 $2x=py$.

(1)求 $p$ 的值；

(2)证明：$\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=\frac{1}{2y}$.

(1)**解：**设 $3^x=4^y=6^z=k$(显然 $k>1$)，

则 $x=\log_3 k$，$y=\log_4 k$，$z=\log_6 k$.

由 $2x=py$，

得 $2\log_3 k=p\log_4 k=p\cdot\frac{\log_3 k}{\log_3 4}$.

因为 $\log_3 k\neq 0$，

所以 $p=2\log_3 4=4\log_3 2$.

(2)**证明：**$\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=\frac{1}{\log_6 k}-\frac{1}{\log_3 k}$

$=\log_k 6-\log_k 3=\log_k 2=\frac{1}{2}\log_k 4=\frac{1}{2y}$.

# 4.4　对数函数

## 4.4.1　对数函数的概念

**学习任务目标**

1.理解对数函数的概念，能根据对数函数的定义，判断一个函数是否为对数函数.
2.会求对数函数的定义域.
3.了解对数函数在实际问题中的简单应用.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点　对数函数的概念**

一般地，函数 $y=\log_a x$（$a>0$，且 $a\neq1$）叫做对数函数，其中 $x$ 是自变量，定义域是 $(0,+\infty)$.

### 【概念辨析】

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)对数函数的定义域为 **R**.　（×）

(2)函数 $y=\log_2(2x)$ 是对数函数.　（×）

(3)$y=\log_5 x^2$ 的定义域为 **R**.　（×）

2.若函数 $f(x)=(a-1)\log_{(a+1)}x$ 是对数函数，则实数 $a=$ 2.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1 > 了解对数函数的概念及解析式

1.（多选）下列函数中为对数函数的是（　　）

A.$y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$　B.$y=\log_4 x^2$

C.$y=\ln x$　D.$y=\log_{(a^2+a+2)}x$（$a$ 是常数）

CD　**解析**：对于 A，真数是 $-x$，故 A 不是对数函数；对于 B，$y=\log_4 x^2=\log_2|x|$，真数是 $|x|$，不是 $x$，故 B 不是对数函数；对于 C，$\ln x$ 的系数为 1，真数是 $x$，故 C 是对数函数；对于 D，底数 $a^2+a+2=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>1$，真数是 $x$，故 D 是对数函数.

2.已知对数函数 $f(x)$ 的图象过点 $P(8,3)$，则 $f\left(\frac{1}{32}\right)=$ _____.

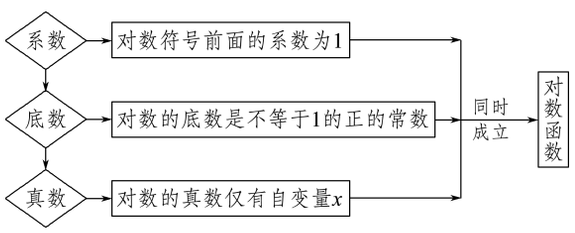
$-5$　**解析**：设对数函数 $f(x)=\log_a x$（$a>0$，且 $a\neq1$），

因为 $f(x)$ 的图象过点 $P(8,3)$，所以 $3=\log_a 8$，所以 $a^3=8$，$a=2$.

所以 $f(x)=\log_2 x$，则 $f\left(\frac{1}{32}\right)=\log_2\frac{1}{32}=-5$.

**【探究总结】**

**判断一个函数是对数函数的方法**




### 任务2 > 会求对数型函数的定义域

**探究活动**

**例1**　（教材 P131 练习题 1 改编）求下列函数的定义域：

(1)$f(x)=\log_a(x-3)+\log_a(x+3)$；

(2)$f(x)=\lg(x-2)+\frac{1}{x-3}$；

(3)$f(x)=\log_{(x+1)}(16-4x)$.

**解**：(1)由 $\begin{cases}x-3>0,\\x+3>0\end{cases}$ 得 $x>3$.

所以函数 $y=\log_a(x-3)+\log_a(x+3)$ 的定义域为 $\{x|x>3\}$.

(2)要使函数有意义，需满足 $\begin{cases}x-2>0,\\x-3\neq0,\end{cases}$

解得 $x>2$ 且 $x\neq3$.

所以函数的定义域为 $(2,3)\cup(3,+\infty)$.

(3)要使函数有意义，需满足 $\begin{cases}16-4x>0,\\x+1>0,\\x+1\neq1,\end{cases}$

解得 $-1<x<0$ 或 $0<x<4$.

所以函数的定义域为 $(-1,0)\cup(0,4)$.

［一题多思］

**思考1.**求对数型函数的定义域时要注意哪些问题？

**提示**：真数大于 0，底数大于 0 且不为 1.

**思考 2.** 本例(1)中，若将函数换为“$f(x)=\log_a[(x-3)(x+3)]$”，其定义域会变化吗？

**提示**：变化了.定义域为$(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$.

## 【探究总结】

**求与对数函数有关的函数的定义域时应遵循的原则**

(1)分母不能为0.

(2)根指数为偶数时，被开方数非负.

(3)对数的真数大于0，底数大于0且不为1.

## 应用迁移

**1.** 函数$f(x)=\dfrac{\ln(2-x)}{\sqrt{x+1}}$的定义域为　　(　　)

A.$(-1,2]$　　B.$(-1,2)$

C.$[-1,+\infty)$　　D.$(2,+\infty)$

B　**解析**：由题意得$\begin{cases}2-x>0,\\x+1\geqslant 0,\\x+1\neq 0\end{cases}\Rightarrow -1<x<2$，所以所求函数的定义域为$(-1,2)$.故选B.

**2.** 函数$f(x)=\sqrt{\lg x}+\lg(5-3x)$的定义域是_____.

$\left(1,\dfrac{5}{3}\right)$　**解析**：由$\begin{cases}\lg x>0\\x>0,\\5-3x>0,\end{cases}$　解得$1<x<\dfrac{5}{3}$.

所以函数$f(x)=\sqrt{\lg x}+\lg(5-3x)$的定义域是$\left(1,\dfrac{5}{3}\right)$.

# 任务3 掌握对数函数的实际应用

## 探究活动

**例2**　地震震级是根据测震仪记录的地震波振幅来测定的，一般采用里氏震级标准.震级$M_L$是根据离震中100 km处的标准测震仪(周期为0.8 s，衰减常数约等于1，放大倍率为2 800倍)所记录的地震波最大振幅值的对数来表示的.里氏震级的计算公式：$M_L=\lg\left(\dfrac{A_{\max}}{A_0}\right)$，其中$A_0$表示标准地震振幅(使用标准地震振幅是为了修正测震仪与实际震中的距离造成的偏差)，$A_{\max}$是指测震仪在距震中100 km处接收到的地震波的最大振幅.4.5级地震给人的震感已比较明显，那么6.5级地震的最大振幅是4.5级地震的最大振幅的　　(　　)

A.e倍　　B.10倍

C.100倍　　D.$e^2$倍

C　**解析**：由于$M_L=\lg\left(\dfrac{A_{\max}}{A_0}\right)$，所以$A_{\max}=A_0 10^{M_L}$，所以6.5级地震的最大振幅与4.5级地震的最大振幅的比值为$\dfrac{A_0 10^{6.5}}{A_0 10^{4.5}}=10^2=100$.

## 【探究总结】

**对数函数应用题的解题思路**

(1)依题意，找出或建立数学模型.

(2)依实际情况确定解析式中的参数.

(3)依题设数据解决数学问题.

(4)得出结论.

## 应用迁移

大西洋鲑鱼每年都要逆流而上，游回产地产卵.记鲑鱼的游速为$v$(单位：m/s)，鲑鱼的耗氧量的单位数为$Q$.研究中发现，$v$与$\log_3\dfrac{Q}{100}$成正比，且当$Q=900$时，$v=1$.

(1)求出$v$关于$Q$的函数解析式；

(2)计算鲑鱼的游速是1.5 m/s时耗氧量的单位数.

**解**：(1)设$v=k\cdot\log_3\dfrac{Q}{100}(k>0)$，因为当$Q=900$时，$v=1$，所以$1=k\cdot\log_3\dfrac{900}{100}$，所以$k=\dfrac{1}{2}$，

所以$v$关于$Q$的函数解析式为$v=\dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{Q}{100}$.

(2)令$v=1.5$，则$1.5=\dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{Q}{100}$，解得$Q=2\ 700$，即鲑鱼的游速是1.5 m/s时，耗氧量的单位数为2 700.

# 课后素养评价(三十三)

## 基础落实

**1.** 下列函数中，是对数函数的有　　(　　)

①$y=\log_a x(a\in\mathbf{R})$；②$y=\log_8 x$；③$y=\ln x$；④$y=\log_x(x+2)$.

A.1个　　B.2个

C.3个　　D.4个

B　**解析**：形如$y=\log_a x(a>0$，且$a\neq 1)$的函数为对数函数，符合此形式的函数解析式有②③，其他的均不符合.故选B.

**2.** “每天进步一点点”可以用数学来诠释.假如你今天的数学水平是1，以后每天比前一天提高千分之五，则$y$天后，你的数学水平$x$与$y$之间的函数关系式是　　(　　)

A.$y=\log_{1.05}x$　　B.$y=\log_{1.005}x$

C.$y=\log_{0.95}x$　　D.$y=\log_{0.995}x$

B　**解析**：由题意得 $x=(1+0.005)^y=1.005^y$，化为对数函数得 $y=\log_{1.005}x$.

**3.** 已知对数函数 $y=f(x)$ 的图象过点 $(4,2)$，求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 及 $f(2^{\lg 2})$ 的值.

**解**：设 $y=f(x)=\log_a x(a>0$，且 $a\neq 1)$，

则 $2=\log_a 4$，故 $a=2$，即 $f(x)=\log_2 x$.

因此 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_2\frac{1}{2}=-1$，$f(2^{\lg 2})=\log_2 2^{\lg 2}=\lg 2$.

**4.** 人们通常以分贝（符号是 dB）为单位来表示声音强度的等级，其中 0 dB 是人能听到的等级最低的声音.一般地，如果强度为 $x$ 的声音对应的等级为 $f(x)$ dB，那么有 $f(x)=10\lg\frac{x}{1\times 10^{-12}}$.

(1)求等级为 0 dB 的声音强度；

(2)计算出 90 dB 的声音与 60 dB 的声音的强度之比.

**解**：(1)由 $f(x)=0$，即 $10\lg\frac{x}{1\times 10^{-12}}=0$，

得 $x=1\times 10^{-12}$.

因此等级为 0 dB 的声音强度为 $1\times 10^{-12}$.

(2)设 $f(x_1)=90$，则 $10\lg\frac{x_1}{1\times 10^{-12}}=90$.

解得 $x_1=10^{-3}$.

设 $f(x_2)=60$，

同理，得 $x_2=10^{-6}$.

因此所求强度之比为 $\frac{x_1}{x_2}=\frac{10^{-3}}{10^{-6}}=1\ 000:1$.

## 能力提升

**1.** 函数 $f(x)=\log_3(x^2-1)$ 的定义域为　（　　）

A.$(-\infty,1)$

B.$\mathbf{R}$

C.$(0,+\infty)$

D.$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

D　**解析**：$f(x)=\log_3(x^2-1)$，则 $x^2-1>0$，解得 $x>1$ 或 $x<-1$.故选 D.

**2.** 设 $f(x)$ 是对数函数，且 $f(\sqrt[3]{4})=-\frac{2}{3}$，那么 $f(\sqrt{2})$ 等于　（　　）

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{1}{4}$　　C.$-\frac{1}{2}$　　D.$-\frac{1}{4}$

C　**解析**：设 $f(x)=\log_a x(a>0$，且 $a\neq 1)$，

由 $f(\sqrt[3]{4})=-\frac{2}{3}$，解得 $a=\frac{1}{2}$，所以 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$.

所以 $f(\sqrt{2})=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}=-\frac{1}{2}$.

**3.** 碳 14 是碳的一种具有放射性的同位素，它常用于确定生物体的死亡年代，即放射性碳定年法.在活的生物体内碳 14 的含量与自然界中碳 14 的含量一样且保持稳定，一旦生物死亡，碳 14 摄入停止，生物体内的碳 14 会按指数函数的规律衰减，大约经过 5 730 年衰减为原来的一半.通过测定生物遗体内碳 14 的含量就可以测定该生物的死亡年代.设生物遗体内的碳 14 的含量为 $P$，死亡年数为 $t$.

(1)试将 $P$ 表示为 $t$ 的函数；

(2)不久前，科学家发现一块生物化石上碳 14 的含量为自然界中碳 14 的含量的 8%，请推算该生物死亡的年代距今多少年.(参考数据：$\lg 2\approx 0.3$)

**解**：(1)已知碳 14 含量与死亡年数成指数函数关系.设 $P=a^t$，由碳 14 经过 5 730 年衰减为原来的一半，可得 $\frac{1}{2}=a^{5\,730}$.

故碳 14 的含量 $P$ 与死亡年数 $t$ 的函数关系式为 $P=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\,730}}$.

(2)由题意得 $\frac{t}{5\,730}=\log_{\frac{1}{2}}\frac{8}{100}=\frac{\lg\frac{8}{100}}{\lg\frac{1}{2}}=\frac{\lg 8-\lg 100}{-\lg 2}=\frac{2-3\lg 2}{\lg 2}\approx\frac{11}{3}$，

解得 $t\approx 5\ 730\times\frac{11}{3}=21\ 010$.

所以推算该生物死亡的年代距今 21 010 年.

## 自我超越

若函数 $f(x)$ 对任意正实数 $a,b$，都有 $f(ab)=f(a)+f(b)$，则函数 $f(x)$ 的解析式可以是 $f(x)=\lg x$（答案不唯一）.(写出一个即可)

# 4.4.2　对数函数的图象和性质

## 第 1 课时　对数函数的图象和性质

**学习任务目标**

1.掌握对数函数的图象和性质.
2.掌握对数函数图象与性质的简单应用.
3.知道同底的指数函数与对数函数互为反函数.

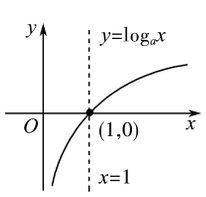
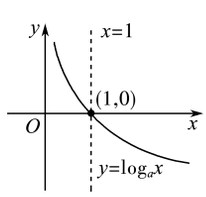
## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　对数函数的图象与性质**

1.因为点$(x,y)$与点$(x,-y)$关于 $x$ 轴对称，所以 $y=\log_2 x$ 图象上任意一点$(x,y)$关于 $x$ 轴的对称点$(x,-y)$都在 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的图象上，反之亦然.由此可知，底数互为倒数的两个对数函数的图象关于 $x$ 轴对称.

2.对数函数的图象与性质

| 函数 | $y=\log_a x$ | |
|---|---|---|
| | $a>1$ | $0<a<1$ |
| 图象 |  |  |
| 值域 | R | |
| 定义域 | $(0,+\infty)$ | |
| 单调性 | 在$(0,+\infty)$上是增函数 | 在$(0,+\infty)$上是减函数 |
| 共点性 | 过定点$(1,0)$，即 $x=1$ 时，$y=0$ | |
| 函数值的特点 | $x\in(0,1)$时，$y\in(-\infty,0)$；$x\in[1,+\infty)$时，$y\in[0,+\infty)$ | $x\in(0,1)$时，$y\in(0,+\infty)$；$x\in[1,+\infty)$时，$y\in(-\infty,0]$ |

**知识点二　反函数**

一般地，指数函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$与对数函数 $y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$互为反函数，它们的定义域与值域正好互换，图象关于直线 $y=x$ 对称.

### 【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).
(1)对数函数在其定义域上一定是单调函数.　(√)
(2)对数函数的图象一定在 $y$ 轴的右侧.　(√)
(3)函数 $y=\log_3 x$ 与 $y=x^3$ 互为反函数.　(×)
(4)若 $\log_a 2>\log_a 3$，则 $0<a<1$.　(√)

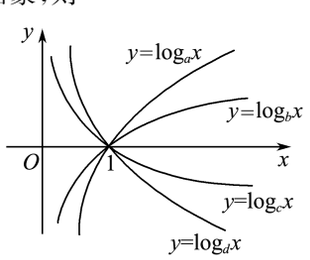
2.下列函数中，与函数 $y=\lg x$ 互为反函数的是(　　)
A.$y=10^x$　　B.$y=10^{-x}$
C.$y=-\lg x$　　D.$y=\lg(-x)$

A　**解析**：由 $y=\lg x$ 得 $x=10^y$.
对换 $x,y$ 的位置可得 $y=\lg x$ 的反函数为 $y=10^x$，所以与函数 $y=\lg x$ 互为反函数的是 $y=10^x$.故选 A.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务 1　认识对数函数的图象

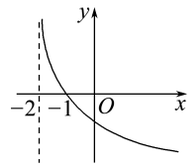
1.图中曲线分别为 $y=\log_a x$，$y=\log_b x$，$y=\log_c x$，$y=\log_d x$ 的图象，则(　　)



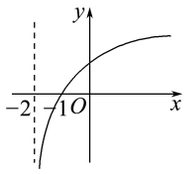

A.$0<a<b<1<d<c$
B.$0<b<a<1<c<d$
C.$0<d<c<1<a<b$
D.$0<c<d<1<a<b$

D　**解析**：由于在第一象限中，随着底数的增大，函数的图象越向 $x$ 轴靠近，所以 $0<c<d<1<a<b$.故选 D.

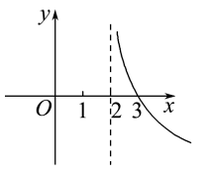
2.若函数 $f(x)=(k-1)a^x-a^{-x}(a>0$，且 $a\neq1)$在 R 上既是奇函数又是减函数，则 $g(x)=\log_a(x+k)$的大致图象是(　　)



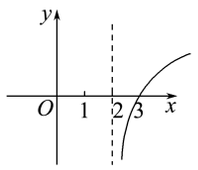

A




B




C




D

A　**解析**：$f(x)=(k-1)a^{x}-a^{-x}$（$a>0$，且$a\neq1$）在**R**上是奇函数，所以$f(0)=(k-1)a^{0}-a^{0}=k-2=0$，所以$k=2$.因为$f(x)$是减函数，所以$0<a<1$，所以$g(x)=\log_a(x+k)$的图象是选项A中的图象.

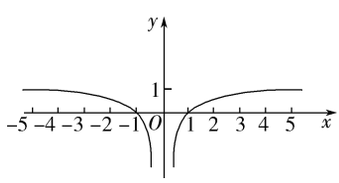
**3.**已知$f(x)=\log_a|x|$满足$f(-5)=1$，试画出函数$f(x)$的图象.

**解**：因为$f(x)=\log_a|x|$，

所以$f(-5)=\log_a5=1$，即$a=5$.

所以$f(x)=\log_5|x|$.

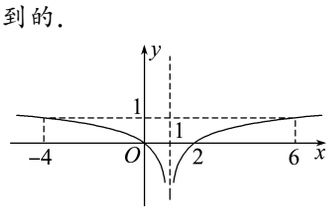
所以$f(x)$是偶函数，其图象如图所示.




［一题多思］

**思考1.**若本题条件不变，你能画出函数$g(x)=\log_a|x-1|$的图象吗？

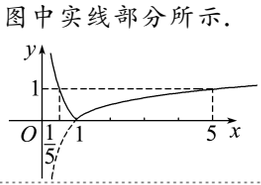
**提示**：因为$f(x)=\log_5|x|$，所以$g(x)=\log_5|x-1|$.如图，$g(x)$的图象是由$f(x)$的图象向右平移1个单位长度得到的.




**思考2.**若本题条件不变，你能画出函数$h(x)=|\log_ax|$的图象吗？

**提示**：因为$a=5$，所以$h(x)=|\log_5x|$.

$h(x)$的图象如图中实线部分所示.




## 【探究总结】

**1.**根据对数函数图象判断底数大小的方法：画直线$y=1$与所给图象相交，交点的横坐标即为对应的底数，根据第一象限内，自左向右，图象对应的对数函数的底数逐渐变大，可比较底数的大小.

**2.**对数型函数图象的识别一定要注意利用对数式的真数大于0确定函数的定义域，注意利用对数型函数图象所过定点，同时结合单调性进行判断，也可以利用函数图象的变换进行判断.

# 任务2 利用对数函数的单调性比较大小

## 探究活动

**例1**　（教材P135练习题2改编）比较下列各组中两个值的大小：

(1)$\ln0.3$，$\ln2$；

(2)$\log_a3.1$，$\log_a5.2$（$a>0$，且$a\neq1$）；

(3)$\log_30.2$，$\log_40.2$；

(4)$\log_3\pi$，$\log_\pi3$.

**解**：(1)$\ln0.3<\ln2$.

(2)当$a>1$时，$\log_a3.1<\log_a5.2$；

当$0<a<1$时，$\log_a3.1>\log_a5.2$.

(3)$\log_30.2<\log_40.2$.

(4)$\log_3\pi>\log_\pi3$.

## 【探究总结】

**比较对数值大小时常用的方法**

(1)若底数为同一常数，则可由对数函数的单调性直接进行比较.

(2)若底数为同一字母，则根据底数对对数函数单调性的影响，对底数进行分类讨论.

(3)若底数不同，真数相同，则可以先用换底公式化为同底后，再进行比较.

(4)若底数与真数都不同，则常借助1，0等中间量进行比较.

## 应用迁移

**1.**已知$a=\log_2e$，$b=\ln2$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$，则$a$，$b$，$c$的大小关系为　（　）

A.$a>b>c$　　B.$b>a>c$

C.$c>b>a$　　D.$c>a>b$

D　**解析**：因为$a=\log_2e>\log_22=1$，$0<b=\ln2<\ln e=1$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}=\log_23>\log_2e=a$，则$a$，$b$，$c$的大小关系$c>a>b$.故选D.

**2.**已知$a>0$且$a\neq1$，下列不等式成立的是　（　）

A.$\log_a5.1<\log_a5.9$

B.$\log_{\frac{1}{2}}2.1>\log_{\frac{1}{2}}2.2$

C.$\log_{1.1}(a+1)<\log_{1.1}a$

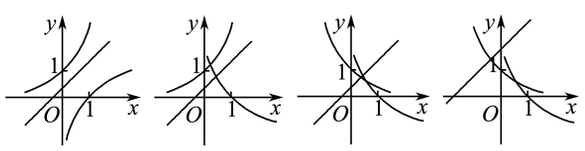
D.$\log_3 2.9<\log_{0.5} 2.2$

B　**解析**：对于选项 A，因为 $a$ 和 1 大小的关系不确定，无法确定对数函数的单调性，故 A 不成立；对于选项 B，因为以 $\frac{1}{2}$ 为底的对数函数是减函数，所以成立；对于选项 C，因为以 1.1 为底的对数函数是增函数，所以不成立；对于选项 D，$\log_3 2.9>0$，$\log_{0.5} 2.2<0$，故不成立.故选 B.

## 任务3 了解反函数

### 探究活动

**例 2**　(1)已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，函数 $y=\log_a x$，$y=a^x$，$y=x+a$ 在同一平面直角坐标系中的图象可能是（　　）




A　　B　　C　　D

(2)若函数 $f(x)$ 与 $g(x)=a^x$ 互为反函数，且函数 $g(x)$ 的图象过点 $(-2,4)$，则 $f(1)+f(2)=$（　　）

A.$-1$　　B.0　　C.1　　D.$\frac{1}{4}$

(1)C　**解析**：函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，排除 B；当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 在定义域内都是单调递增的，$y=x+a$ 在 $y$ 轴上的截距 $a>1$，排除 A；当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 在定义域内单调递减，$y=x+a$ 在 $y$ 轴上的截距 $0<a<1$，排除 D.故选 C.

(2)A　**解析**：由题意可得 $f(x)=\log_a x$.

因为函数 $g(x)$ 的图象过点 $(-2,4)$，所以函数 $f(x)$ 的图象过点 $(4,-2)$，即 $-2=\log_a 4$，解得 $a=\frac{1}{2}$.所以 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$.所以 $f(1)+f(2)=\log_{\frac{1}{2}} 1+\log_{\frac{1}{2}} 2=0-1=-1$.故选 A.

### 【探究总结】

**互为反函数的函数的性质**

(1)同底数的指数函数与对数函数互为反函数.

(2)互为反函数的两个函数定义域与值域互换.

(3)互为反函数的两个函数的图象关于直线 $y=x$ 对称.

### 应用迁移

如果直线 $y=ax+2$ 与直线 $y=3x-b$ 关于直线 $y=x$ 对称，那么（　　）

A.$a=\frac{1}{3}$，$b=6$　　B.$a=-\frac{1}{3}$，$b=6$

C.$a=3$，$b=-2$　　D.$a=3$，$b=6$

A　**解析**：因为直线 $y=ax+2$ 与直线 $y=3x-b$ 关于直线 $y=x$ 对称，显然 $b\neq 0$，

所以函数 $y=ax+2$ 与函数 $y=3x-b$ 互为反函数.

又因为 $y=3x-b$ 的反函数为 $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}b$，

所以 $\begin{cases}a=\frac{1}{3},\\2=\frac{1}{3}b,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=\frac{1}{3},\\b=6.\end{cases}$ 故选 A.

# 课后素养评价(三十四)

## 基础落实

**1.**已知函数 $f(x)=\log_a(4x-7)-3(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的图象恒过点 $P(m,n)$，则 $m+n=$（　　）

A.$-2$　　B.$-1$

C.1　　D.2

B　**解析**：函数 $f(x)=\log_a(4x-7)-3(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的图象恒过点 $P(m,n)$，令 $4x-7=1$，解得 $x=2$.又 $f(2)=\log_a(4\times 2-7)-3=-3$，所以函数 $f(x)=\log_a(4x-7)-3(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的图象恒过点 $(2,-3)$，即 $m=2$，$n=-3$，所以 $m+n=-1$.故选 B.

**2.**已知 $a=\log_2 0.2$，$b=2^{0.2}$，$c=0.2^{0.3}$，则（　　）

A.$a<b<c$　　B.$a<c<b$

C.$c<a<b$　　D.$b<c<a$

B　**解析**：因为 $a=\log_2 0.2<\log_2 1=0$，$b=2^{0.2}>2^0=1$，$0<c=0.2^{0.3}<0.2^0=1$，所以 $a<c<b$.故选 B.

**3.**若指数函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的反函数的图象过点 $(9,2)$，则 $a$ 的值为____.

3　**解析**：由函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的反函数的图象过点 $(9,2)$，可知函数 $y=a^x$ 的图象过点 $(2,9)$，所以 $a^2=9$.

又因为 $a>0$ 且 $a\neq 1$，所以 $a=3$.

**4.**若函数 $y=\log_{(3a-1)} x$ 是 $(0,+\infty)$ 上的减函数，则实数 $a$ 的取值范围是_____.

$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$　**解析**：由题意可得 $0<3a-1<1$，解得 $\frac{1}{3}<a<\frac{2}{3}$，所以实数 $a$ 的取值范围是 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

**5.**(1)已知 $\log_2 x>4$，求实数 $x$ 的取值范围；

(2)已知 $\log_2(2x)<\log_2(x+1)$，求 $x$ 的取值范围.

**解**：(1)因为 $\log_2 x>4=\log_2 16$，且 $y=\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $x>16$.

故实数 $x$ 的取值范围为 $\{x\mid x>16\}$.

(2)若 $\log_2(2x)<\log_2(x+1)$，则 $\begin{cases}2x>0,\\x+1>0,\\2x<x+1,\end{cases}$ 解得 $0<x<1$.

故 $x$ 的取值范围为(0,1).

## 能力提升

**1.**已知函数 $f(x)=\log_5 x$，$g(x)$是 $f(x)$的反函数，则 $f(1)+g(1)=$　　(　　)

A.10　　B.8　　C.5　　D.2

C　**解析**：因为函数 $f(x)=\log_5 x$，$g(x)$是 $f(x)$的反函数，故 $g(x)=5^x$，故 $f(1)+g(1)=\log_5 1+5^1=5$. 故选 C.

**2.**(多选)下列不等式成立的是　　(　　)

A.$\log_{0.2}0.3<\log_{0.2}0.4$　　B.$2^{0.3}>\log_3 2$

C.$\log_3 e>\ln 3$　　D.$\log_2 5>\log_3 5$

BD　**解析**：因为函数 $y=\log_{0.2}x$ 是减函数，所以 $\log_{0.2}0.3>\log_{0.2}0.4$，故 A 错误；

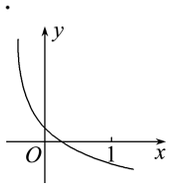
因为 $2^{0.3}>2^0=1$，$\log_3 2<\log_3 3=1$，

所以 $2^{0.3}>\log_3 2$，故 B 正确；

因为 $\log_3 e<\log_3 3=1$，$\ln 3>1$，所以 $\log_3 e<\ln 3$，故 C 错误；

因为 $\log_2 5=\dfrac{\lg 5}{\lg 2}$，$\log_3 5=\dfrac{\lg 5}{\lg 3}$，且 $1>\lg 5>\lg 3>\lg 2>0$，所以 $\log_2 5>\log_3 5$，故 D 正确.

**3.**已知函数 $y=\log_a(x+c)$($a$，$c$ 常数，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$)的图象如图所示，则下列结论成立的是　　(　　)




A.$a>1$，$c>1$

B.$a>1$，$0<c<1$

C.$0<a<1$，$c>1$

D.$0<a<1$，$0<c<1$

D　**解析**：由图可知，函数 $y=\log_a(x+c)$ 在定义域内单调递减，故 $0<a<1$；又函数 $y=\log_a(x+c)$ 的图象是由函数 $y=\log_a x$ 的图象向左平移 $c$ 个单位长度得到，所以 $0<c<1$. 故选 D.

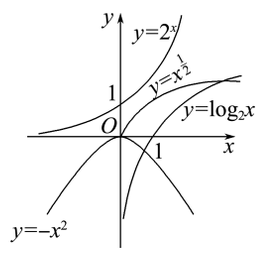
## 自我超越

**1.**(多选)任取 $x_1$，$x_2\in[a,b]$，且 $x_1\neq x_2$，若 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 恒成立，则称 $f(x)$为 $[a,b]$上的凸函数. 下列函数在其定义域上为凸函数的是　　(　　)

A.$y=2^x$　　B.$y=\log_2 x$

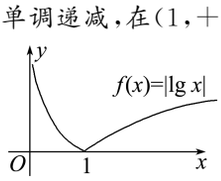
C.$y=-x^2$　　D.$y=x^{\frac{1}{2}}$

BCD　**解析**：由题意知，若函数 $f(x)$为凸函数，则在函数 $y=f(x)$的图象上任取两个不同的点 $A$，$B$，线段 $AB$(原点除外)总在 $f(x)$图象的下方. 分别作出四个函数的图象，如图所示. 观察各函数在定义域上的图象，知 $y=\log_2 x$，$y=-x^2$，$y=x^{\frac{1}{2}}$ 是凸函数. 故选 BCD.




**2.**已知 $f(x)=|\lg x|$，且 $\dfrac{1}{c}>a>b>1$，试借助 $f(x)$的图象比较 $f(a)$，$f(b)$，$f(c)$的大小.

**解**：先作出函数 $y=\lg x$ 的图象，再将图象位于 $x$ 轴下方的部分以 $x$ 轴为对称轴翻折到 $x$ 轴上方，得到 $f(x)=|\lg x|$ 的图象，如图所示. 由图象可知，$f(x)$在(0,1)上单调递减，在(1,+∞)上单调递增.




由 $\dfrac{1}{c}>a>b>1$，得 $f\left(\dfrac{1}{c}\right)>f(a)>f(b)$.

又 $f\left(\dfrac{1}{c}\right)=\left|\lg\dfrac{1}{c}\right|=|-\lg c|=|\lg c|=f(c)$.

所以 $f(c)>f(a)>f(b)$.

# 第 2 课时　对数函数的图象和性质的应用

**学习任务目标**

1.能够利用对数函数的单调性解简单的对数型不等式.
2.能够利用对数函数的性质研究与对数相关的复合函数的单调性、奇偶性等问题.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1 解对数不等式

1.若 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)}}$，则 $f(x)$ 的定义域为（　　）

A.$\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$　　B.$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

C.$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　　D.$(0,+\infty)$

A　**解析**：由题知 $\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)>0,\\2x+1>0,\end{cases}$

则 $0<2x+1<1$，解得 $-\dfrac{1}{2}<x<0$.

所以 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$.故选 A.

2.已知 $\log_a\dfrac{1}{2}>1$，则 $a$ 的取值范围为_____.

$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　**解析**：由 $\log_a\dfrac{1}{2}>1$ 得 $\log_a\dfrac{1}{2}>\log_a a$.

①当 $a>1$ 时，有 $a<\dfrac{1}{2}$，此时无解；

②当 $0<a<1$ 时，有 $\dfrac{1}{2}<a$，从而 $\dfrac{1}{2}<a<1$.

故 $a$ 的取值范围是 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

[一题多思]

**思考 1.** 解 $\log_a f(x)<\log_a g(x)$ 型不等式应注意哪些问题？

**提示**：(1)讨论 $a$ 与 1 的关系，确定单调性；(2)注意真数大于 0.

**思考 2.** 已知函数 $f(x)=\log_a(1-a^x)(a>0$，且 $a\neq1)$，你能解关于 $x$ 的不等式 $\log_a(1-a^x)>f(1)$ 吗？

**提示**：由 $f(x)=\log_a(1-a^x)$，得 $f(1)=\log_a(1-a)$，

则 $1-a>0$，所以 $0<a<1$.

原不等式化为 $\log_a(1-a^x)>\log_a(1-a)$，

所以 $\begin{cases}1-a^x>0,\\1-a^x<1-a,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a^x<1,\\a^x>a,\end{cases}$ 所以 $0<x<1$.

所以不等式的解集为 $(0,1)$.

3.已知 $a>0$ 且 $a\neq1$，解关于 $x$ 的不等式：$\log_a(x-4)-\log_a(2x-1)>0$.

**解**：原不等式化为 $\log_a(x-4)>\log_a(2x-1)$.

当 $a>1$ 时，不等式等价于 $\begin{cases}x-4>0,\\2x-1>0,\\x-4>2x-1,\end{cases}$ 无解；

当 $0<a<1$ 时，不等式等价于 $\begin{cases}x-4>0,\\2x-1>0,\\x-4<2x-1,\end{cases}$ 解得 $x>4$.

综上可知，当 $a>1$ 时，解集为 $\varnothing$；当 $0<a<1$ 时，解集为 $\{x\mid x>4\}$.

**【探究总结】**

**解对数型不等式的一般思路**

(1)把不等式两边均化为 $\log_a f(x)$ 的形式.
(2)利用对数函数的单调性，把不等式转化为真数的大小关系，得到新的不等式，要注意底数 $a$ 和 1 的大小关系.
(3)在真数大于 0 的前提下，解这个新的不等式.
(4)得出原不等式的解集.

### 任务2 求对数型函数的值域

#### 探究活动

**例 1**　(1)已知函数 $f(x)=\log_3\left(\dfrac{1}{3}x\right)\cdot\log_3(27x)$，$x\in\left[\dfrac{1}{9},3\right]$，求函数 $f(x)$ 的值域.

(2)设 $f(x)=\log_a(1+x)+\log_a(5-x)(a>0$，且 $a\neq1)$，且 $f(2)=-2$.

①求 $a$ 的值及 $f(x)$ 的定义域；

②求 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},4\right]$ 上的最值.

**解**：(1)$f(x)=\log_3\left(\dfrac{1}{3}x\right)\cdot\log_3(27x)=(-1+\log_3x)(3+\log_3x)$，$x\in\left[\dfrac{1}{9},3\right]$，

令 $t=\log_3x$，则 $t\in[-2,1]$.令 $g(t)=(-1+t)(3+t)=t^2+2t-3=(t+1)^2-4$，

当 $t=-1$ 时，$g(t)$ 取得最小值，$g(t)_{\min}=g(-1)=-4$；

当 $t=1$ 时，$g(t)$ 取得最大值，$g(t)_{\max}=g(1)=0$.

故函数 $f(x)$ 的值域为 $[-4,0]$.

(2)**解**：①因为 $f(x)=\log_a(1+x)+\log_a(5-x)(a>0$，且 $a\neq1)$，且 $f(2)=-2$，

所以 $f(2)=\log_a3+\log_a3=-2$，即 $\log_a3=-1$，解得 $a=\frac{1}{3}$.

故 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(1+x)+\log_{\frac{1}{3}}(5-x)$，令 $\begin{cases}1+x>0,\\5-x>0,\end{cases}$ 解得 $-1<x<5$.

故 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,5)$.

②由①可知，$f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(1+x)+\log_{\frac{1}{3}}(5-x)=\log_{\frac{1}{3}}[(1+x)(5-x)]=\log_{\frac{1}{3}}(-x^2+4x+5)$.

设 $t=-x^2+4x+5=-(x-2)^2+9$，$x\in\left[\frac{1}{2},4\right]$，

则 $x=2$ 时，$t$ 取最大值 $9$，$x=4$ 时，$t$ 取最小值 $5$，所以 $t\in[5,9]$.

因为函数 $y=\log_{\frac{1}{3}}t$ 在定义域内单调递减，

所以 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},4\right]$ 上的最大值为 $\log_{\frac{1}{3}}5$，最小值为 $\log_{\frac{1}{3}}9=-2$.

## 【探究总结】

**求对数型函数值域的思路**

(1)直接利用对数函数的单调性，可求对数函数 $y=\log_ax(a>0$，且 $a\neq1)$ 在给定区间上的值域.

(2)求形如 $y=\log_af(x)(a>0$，且 $a\neq1)$ 的复合函数值域的步骤：①将原函数拆分成 $y=\log_au(a>0$，且 $a\neq1)$，$u=f(x)$ 两个函数；②求 $f(x)$ 的定义域；③由 $f(x)$ 的定义域求 $u$ 的取值范围；④利用函数 $y=\log_au(a>0$，且 $a\neq1)$ 的单调性求值域.

## 应用迁移

求下列函数的值域：

(1)$f(x)=\log_2(3^x+1)$；

(2)$f(x)=\log_2\frac{x}{4}\times\log_2\frac{x}{2}(1\leqslant x\leqslant4)$.

**解**：(1)$f(x)$ 的定义域为 **R**.

因为 $3^x>0$，所以 $3^x+1>1$.

因为 $y=\log_2u$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $\log_2(3^x+1)>\log_21=0$，

所以 $f(x)$ 的值域为 $(0,+\infty)$.

(2)因为 $f(x)=\log_2\frac{x}{4}\times\log_2\frac{x}{2}=(\log_2x-2)\cdot(\log_2x-1)=\left(\log_2x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，$1\leqslant x\leqslant4$，

所以 $0\leqslant\log_2x\leqslant2$，

所以当 $\log_2x=\frac{3}{2}$，即 $x=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$ 时，$f(x)$ 取最小值 $-\frac{1}{4}$；

当 $\log_2x=0$，即 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $2$，

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{4},2\right]$.

# 任务3 掌握对数型函数的单调性

## 探究活动

**例 2**　已知函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-ax+a)$ 在区间 $(-\infty,\sqrt{2})$ 上是增函数，求实数 $a$ 的取值范围.

**解**：令 $u=g(x)=x^2-ax+a$，$g(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{a}{2}\right]$ 上单调递减.

因为 $0<\frac{1}{2}<1$，所以 $y=\log_{\frac{1}{2}}u$ 是减函数.

已知复合函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-ax+a)$ 在区间 $(-\infty,\sqrt{2})$ 上单调递增，

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,\sqrt{2})$ 上单调递减，且 $g(x)>0$ 在 $(-\infty,\sqrt{2})$ 上恒成立，

即 $\begin{cases}\sqrt{2}\leqslant\frac{a}{2},\\(\sqrt{2})^2-\sqrt{2}a+a\geqslant0,\end{cases}$ 解得 $2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant2(\sqrt{2}+1)$.

故实数 $a$ 的取值范围是 $[2\sqrt{2},2(\sqrt{2}+1)]$.

## 【探究总结】

**求对数型复合函数的单调区间的策略**

(1)首先求出函数的定义域，再利用复合函数单调性的复合法则“同增异减”求单调区间.

(2)若已知函数在某个区间上的单调性，则该区间为函数相应单调区间的子区间.

**注意**：函数在某区间上单调的前提是函数在该区间上有意义.

## 应用迁移

已知 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x^2-ax+5a)$.

(1)若 $a=2$，求 $f(x)$ 的值域；

(2)若 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，求 $a$ 的取值范围.

**解**：(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+10)$，

令 $t=x^2-2x+10=(x-1)^2+9$，

所以 $t\geqslant9$，$f(x)\leqslant\log_{\frac{1}{3}}9=-2$，

所以 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,-2]$.

(2)设 $u(x)=x^2-ax+5a$，因为 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $u(x)=x^2-ax+5a$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，且 $x>1$ 时 $u(x)>0$，

所以$\begin{cases}\frac{a}{2}\leqslant 1,\\ 1+4a\geqslant 0,\end{cases}$解得$-\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant 2$.

所以$a$的取值范围是$\left[-\frac{1}{4},2\right]$.

## 任务4 掌握对数型函数的性质的综合应用

### 探究活动

**例3**　已知函数$f(x)=\ln(x+6)-\ln(2-x)$.

(1)证明:$g(x)=f(x-2)$是奇函数;

(2)判断$f(x)$的单调性,并用定义证明;

(3)若对任意的$t\in[0,1]$,都有$f(4^t-3)+f(k\cdot 2^t)>0$,求实数$k$的取值范围.

(1)**证明**:$g(x)=f(x-2)=\ln(x-2+6)-\ln[2-(x-2)]=\ln\frac{x+4}{4-x}$,$x\in(-4,4)$.

对任意的$x\in(-4,4)$,都有$-x\in(-4,4)$,

且$g(-x)=\ln\frac{-x+4}{4+x}=-\ln\frac{x+4}{4-x}=-g(x)$,

所以$g(x)$是奇函数.

(2)**解**:由题易知,$f(x)$的定义域为$(-6,2)$.$f(x)$在$(-6,2)$内单调递增.证明如下:

在$(-6,2)$内任取两个数$x_1$,$x_2$,且$x_1<x_2$,

则$f(x_1)-f(x_2)=\ln\frac{x_1+6}{2-x_1}-\ln\frac{x_2+6}{2-x_2}$

$=\ln\frac{(x_1+6)(2-x_2)}{(2-x_1)(x_2+6)}$

$=\ln\frac{12-x_1x_2+2x_1-6x_2}{12-x_1x_2-6x_1+2x_2}$.

由$x_1<x_2$可知,$8(x_1-x_2)<0$,所以$2x_1-6x_2<2x_2-6x_1$,

所以$\frac{12-x_1x_2+2x_1-6x_2}{12-x_1x_2-6x_1+2x_2}<1$,所以$f(x_1)-f(x_2)<0$,即$f(x_1)<f(x_2)$,

所以$f(x)$在$(-6,2)$内单调递增.

(3)**解**:因为$g(x)=f(x-2)$是奇函数,所以$f(-x-2)=-f(x-2)$,

$f(4^t-3)+f(k\cdot 2^t)>0$,即$f(4^t-3)+f[(k\cdot 2^t+2)-2]>0$,

所以$f(4^t-3)>-f[(k\cdot 2^t+2)-2]=f[-(k\cdot 2^t+2)-2]$,即$f(4^t-3)>f(-k\cdot 2^t-4)$.

又因为$f(x)$在$(-6,2)$内单调递增,

所以$2>4^t-3>-k\cdot 2^t-4>-6$,

所以$\begin{cases}4^t-3>-k\cdot 2^t-4,\\ -k\cdot 2^t-4>-6,\end{cases}$即$-\left(2^t+\frac{1}{2^t}\right)<k<2^{1-t}$.

因为$2^t+\frac{1}{2^t}\geqslant 2$,当且仅当$2^t=1$,即$t=0$时,取等号,

所以$k>-2$.

由$t\in[0,1]$可知,$2^{1-t}\geqslant 1$,所以$k<1$.

故实数$k$的取值范围为$(-2,1)$.

### 【探究总结】

**解决对数型函数问题的关注点**

(1)增强定义域意识:求单调区间、判断奇偶性、解不等式都要先求定义域,满足定义域是前提.

(2)增强函数性质的应用意识:解对数不等式的关键是将不等式转化为常见的不等式,转化工具就是对数函数的单调性.

### 应用迁移

**1.**(2022·全国乙卷)若$f(x)=\ln\left|a+\frac{1}{1-x}\right|+b$是奇函数,则$a=$_____,$b=$_____.

$-\frac{1}{2}$　$\ln 2$　**解析**:若$a=0$,则$f(x)$的定义域为$\{x\mid x\neq 1\}$,不关于原点对称,所以$a\neq 0$.

若奇函数$f(x)=\ln\left|a+\frac{1}{1-x}\right|+b$有意义,则$x\neq 1$且$a+\frac{1}{1-x}\neq 0$,所以$x\neq 1$且$x\neq 1+\frac{1}{a}$.

因为函数$f(x)$为奇函数,定义域关于原点对称,所以$1+\frac{1}{a}=-1$,解得$a=-\frac{1}{2}$.

由$f(0)=0$,得$\ln\frac{1}{2}+b=0$,所以$b=\ln 2$.

**2.**判断函数$f(x)=\lg(\sqrt{1+x^2}-x)$的奇偶性.

**解**:(方法一)由$\sqrt{1+x^2}-x>0$可得$x\in\mathbf{R}$,

所以函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$.

又$f(-x)=\lg(\sqrt{1+x^2}+x)$

$=\lg\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}-x}$

$=\lg\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}$

$=-\lg(\sqrt{1+x^2}-x)=-f(x)$,

即$f(-x)=-f(x)$.

所以函数$f(x)=\lg(\sqrt{1+x^2}-x)$是奇函数.

(方法二)由$\sqrt{1+x^2}-x>0$可得$x\in\mathbf{R}$,

$f(x)+f(-x)=\lg(\sqrt{1+x^2}-x)+\lg(\sqrt{1+x^2}+x)$

$=\lg[(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)]$

$=\lg(1+x^2-x^2)=0$.

所以$f(-x)=-f(x)$.

所以函数$f(x)=\lg(\sqrt{1+x^2}-x)$是奇函数.

# 课后素养评价(三十五)

## 基础落实

**1.**函数 $f(x)=\sqrt{\log_{0.5}(x-1)}$ 的定义域是　　(　　)

A.$(1,2)$　　B.$(1,2]$

C.$[1,2]$　　D.$(1,+\infty)$

B　**解析**:由题意得,$\log_{0.5}(x-1)\geqslant 0$,即 $0<x-1\leqslant 1$,解得 $1<x\leqslant 2$,故函数 $(x)$ 的定义域是 $(1,2]$.故选 B.

**2.**函数 $f(x)=\ln(x^2-2x-8)$ 的单调递增区间是　　(　　)

A.$(-\infty,-2)$　　B.$(-\infty,-1)$

C.$(1,+\infty)$　　D.$(4,+\infty)$

D　**解析**:由 $x^2-2x-8>0$,得 $x\in(-\infty,-2)\cup(4,+\infty)$.令 $t=x^2-2x-8$,则 $y=\ln t$.因为 $x\in(-\infty,-2)$ 时,$t=x^2-2x-8$ 单调递减;$x\in(4,+\infty)$ 时,$t=x^2-2x-8$ 单调递增.又 $y=\ln t$ 为定义域内的增函数,故函数 $f(x)=\ln(x^2-2x-8)$ 的单调递增区间是 $(4,+\infty)$.故选 D.

**3.**(2023·新高考全国Ⅱ卷)若 $f(x)=(x+a)\cdot\ln\dfrac{2x-1}{2x+1}$ 为偶函数,则 $a=$　　(　　)

A.$-1$　　B.$0$

C.$\dfrac{1}{2}$　　D.$1$

B　**解析**:因为 $f(x)$ 为偶函数,则 $f(1)=f(-1)$,所以 $(1+a)\ln\dfrac{1}{3}=(-1+a)\ln 3$,解得 $a=0$.

当 $a=0$ 时,$f(x)=x\ln\dfrac{2x-1}{2x+1}$,$(2x-1)(2x+1)>0$,解得 $x>\dfrac{1}{2}$ 或 $x<-\dfrac{1}{2}$,

则其定义域为 $\left\{x\left|x>\dfrac{1}{2}\right.,\text{或}\ x<-\dfrac{1}{2}\right\}$,关于原点对称.

$f(-x)=(-x)\ln\dfrac{2(-x)-1}{2(-x)+1}=(-x)\ln\dfrac{2x+1}{2x-1}=(-x)\cdot\ln\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{-1}=x\ln\dfrac{2x-1}{2x+1}=f(x)$,

故此时 $f(x)$ 为偶函数.故选 B.

**4.**不等式 $\log_2(2-x)\leqslant\log_2(3x+6)$ 的解集为_____.

$[-1,2)$　**解析**:因为 $\log_2(2-x)\leqslant\log_2(3x+6)$,所以 $\begin{cases}2-x>0,\\3x+6>0,\\3x+6\geqslant 2-x,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant x<2$.故原不等式的解集为 $[-1,2)$.

**5.**已知函数 $f(x)=\log_2(x+1)-2$.

(1)若 $f(x)>0$,求 $x$ 的取值范围;

(2)若 $x\in(-1,3]$,求 $f(x)$ 的值域.

**解**:(1)函数 $f(x)=\log_2(x+1)-2$,

因为 $f(x)>0$,即 $\log_2(x+1)-2>0$,

所以 $\log_2(x+1)>2$,所以 $x+1>4$,所以 $x>3$.

故 $x$ 的取值范围是 $(3,+\infty)$.

(2)因为 $x\in(-1,3]$,所以 $x+1\in(0,4]$,

所以 $\log_2(x+1)\in(-\infty,2]$,

所以 $\log_2(x+1)-2\in(-\infty,0]$.

故 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,0]$.

## 能力提升

**1.**若函数 $y=\log_a(x^2-ax+1)$ 有最小值,则 $a$ 的取值范围是　　(　　)

A.$0<a<1$　　B.$0<a<2$,且 $a\neq 1$

C.$1<a<2$　　D.$a\geqslant 2$

C　**解析**:令 $g(x)=x^2-ax+1(a>0$,且 $a\neq 1)$,$g(x)$ 的图象开口向上.

①当 $a>1$ 时,$g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒为正,所以 $\Delta=a^2-4<0$,解得 $1<a<2$;

②当 $0<a<1$ 时,$x^2-ax+1$ 不能使函数 $y=\log_a(x^2-ax+1)$ 有最小值,不符合题意.综上所述,$1<a<2$.

**2.**设偶函数 $f(x)=\log_a|x-b|$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增,则 $f(a+1)$ 与 $f(b+2)$ 的大小关系是　　(D)

A.$f(a+1)<f(b+2)$

B.$f(a+1)\leqslant f(b+2)$

C.$f(a+1)\geqslant f(b+2)$

D.$f(a+1)>f(b+2)$

**3.**已知函数 $f(x)=a\cdot 2^x+b\ln x$,且 $f(1)=2$,$f(2)=4+\ln 2$.

(1)求 $a$,$b$ 的值;

(2)求 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},4\right]$ 上的值域.

**解**:(1)因为 $f(1)=2a=2$,$f(2)=4a+b\ln 2=4+\ln 2$,

所以 $a=1$,$b=1$.

(2)由(1)可知,$f(x)=2^x+\ln x$,由 $y=2^x$,$y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内均单调递增,

易知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增.

所以 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},4\right]$ 的最小值为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}+\ln\dfrac{1}{2}=\sqrt{2}-\ln 2$,

最大值为 $f(4)=2^4+\ln 4=16+2\ln 2$.

所以函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},4\right]$ 上的值域为 $[\sqrt{2}-\ln 2,16+2\ln 2]$.

**自我超越**

(2024·新高考全国Ⅰ卷)已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-a,x<0,\\ e^x+\ln(x+1),x\geqslant 0\end{cases}$ 在 **R** 上单调递增,则 $a$ 的取值范围是　(　　)

A.$(-\infty,0]$　　B.$[-1,0]$

C.$[-1,1]$　　D.$[0,+\infty)$

B　**解析**:因为 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增,且 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=e^x+\ln(x+1)$ 单调递增,

则需满足 $\begin{cases}-\frac{-2a}{2\times(-1)}\geqslant 0,\\ -a\leqslant e^0+\ln 1,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant a\leqslant 0$,

即 $a$ 的取值范围是 $[-1,0]$.故选 B.

## 4.4.3　不同函数增长的差异

**学习任务目标**

1.理解直线上升、指数爆炸、对数增长的含义.

2.能区分一次函数、指数函数、对数函数,以及幂函数增长速度的差异.

3.会选择适当的函数模型分析和解决一些实际问题.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点　三种常见函数模型的增长差异**

| 性质 | 函数 | | |
|---|---|---|---|
| | $y=a^x$ $(a>1)$ | $y=\log_a x$ $(a>1)$ | $y=kx$ $(k>0)$ |
| 在 $(0,+\infty)$ 上的单调性 | 单调递增 | 单调递增 | 单调递增 |
| 图象的变化 | 随 $x$ 的增大逐渐变“陡” | 随 $x$ 的增大逐渐趋于平缓 | 增长速度保持不变 |
| 增长速度 | $y=a^x(a>1)$ 的增长速度快于 $y=kx(k>0)$ 的增长速度,$y=kx(k>0)$ 的增长速度快于 $y=\log_a x(a>1)$ 的增长速度 | | |
| 增长结果 | 总会存在一个 $x_0$,当 $x>x_0$ 时,有 $a^x>kx>\log_a x$ | | |

### 【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 减小的速度越来越慢.　(√)

(2)在指数函数 $y=a^x(a>1)$ 中,底数 $a$ 越大,其增长速度越快.　(√)

(3)不存在一个实数 $m$,使得当 $x>m$ 时,$1.1^x>x^{100}$.　(×)

(4)当 $a>1,k>0$ 时,在区间 $(0,+\infty)$ 内,对任意 $x$,总有 $\log_a x<kx<a^x$ 成立.　(×)

2.若 $x\in(1,2)$,则下列结论正确的是　(　　)

A.$2x>x^{\frac{1}{2}}>\lg x$　　B.$2x>\lg x>x^{\frac{1}{2}}$

C.$x^{\frac{1}{2}}>2x>\lg x$　　D.$x^{\frac{1}{2}}>\lg x>2x$

A　**解析**:因为 $x\in(1,2)$,所以 $2x>2$,$x^{\frac{1}{2}}\in(1,\sqrt{2})$,$\lg x\in(0,\lg 2)$,所以 $2x>x^{\frac{1}{2}}>\lg x$.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1　了解不同函数增长的差异

1.下列函数中,增长速度最快的是　(　　)

A.$y=2\,025^x$

B.$y=x^{2\,025}$

C.$y=\log_{2\,025}x$

D.$y=2\,025x$

A　**解析**:指数函数 $y=a^x(a>0$,且 $a\neq 1)$,在 $a>1$ 时呈爆炸式增长,并且随 $a$ 值的增大,增长速度越来越快.故选 A.

2.已知三个变量 $y_1,y_2,y_3$ 随变量 $x$ 变化的数据如表:

| $x$ | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 2 | 4 | 16 | 64 | 256 | … |
| $y_2$ | 1 | 4 | 16 | 36 | 64 | … |
| $y_3$ | 0 | 1 | 2 | 2.585 | 3 | … |

则反映 $y_1,y_2,y_3$ 随 $x$ 变化的情况拟合较好的一组函数模型是　(　　)

A.$y_1=x^2$，$y_2=2^x$，$y_3=\log_2 x$

B.$y_1=2^x$，$y_2=x^2$，$y_3=\log_2 x$

C.$y_1=\log_2 x$，$y_2=x^2$，$y_3=2^x$

D.$y_1=2^x$，$y_2=\log_2 x$，$y_3=x^2$

B　**解析**：从题表格可以看出，三个变量$y_1$，$y_2$，$y_3$都是越来越大，但是增长速度不同，其中变量$y_1$的增长速度最快，呈指数型函数变化，变量$y_3$的增长速度最慢，呈对数型函数变化.故选B.

［一题多思］

**思考1.**第1题中，若把“最快”改为“最慢”，应该选哪个选项？

**提示**：C.

**思考2.**怎样合理选择指数函数与对数函数模型？

**提示**：当增长速度很快时，常选用指数函数模型；当不断增长，但又不会增长过快，也不会增长很大时，常选用对数函数模型.

## 【探究总结】

**指数函数、对数函数**
**增长模型的判断方法**

(1)根据函数值的变化量的情况对函数增长模型进行判断.

(2)根据图象辨别增长型指数函数、对数函数模型时，通常观察函数图象上升的快慢，即随着自变量的增大，图象变“陡”的是指数函数模型，图象趋于平缓的是对数函数模型.

# 任务2　掌握不同增长特点的函数模型的图象特征

## 探究活动

**例1**　下面对函数$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$，$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$与$h(x)=-\frac{x}{100}$在区间$(0,+\infty)$上的递减情况说法正确的是（　　）

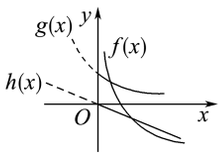
A.$f(x)$递减速度越来越慢，$g(x)$递减速度越来越快，$h(x)$递减速度比较平稳

B.$f(x)$递减速度越来越快，$g(x)$递减速度越来越慢，$h(x)$递减速度越来越快

C.$f(x)$递减速度越来越慢，$g(x)$递减速度越来越慢，$h(x)$递减速度比较平稳

D.$f(x)$递减速度越来越快，$g(x)$递减速度越来越快，$h(x)$递减速度越来越快

C　**解析**：函数$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$，$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，$h(x)=-\frac{x}{100}$在区间$(0,+\infty)$上的图象如下图所示.




函数$f(x)$的图象在区间$(0,1)$上递减较快，但递减速度逐渐变慢；函数$f(x)$在区间$(1,+\infty)$上递减较慢，且速度越来越慢.同样，函数$g(x)$的图象在区间$(0,+\infty)$上递减较慢，且递减速度越来越慢.函数$h(x)$的图象递减速度比较平稳.

## 【探究总结】

**常见的函数模型及增长特点**

(1)线性函数模型

线性函数模型$y=kx+b(k>0)$的增长特点是“直线上升”，其增长速度不变.

(2)指数函数模型

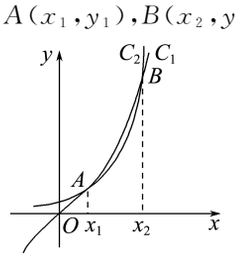
指数函数模型$y=a^x(a>1)$的增长特点是随着自变量的增大，函数值增大的速度越来越快，即增长速度急剧，形象地称为“指数爆炸”.

(3)对数函数模型

对数函数模型$y=\log_a x(a>1)$的增长特点是随着自变量的增大，函数值增大的速度越来越慢，即增长速度趋于平缓，可称为“对数增长”.

## 应用迁移

函数$f(x)=2^x$和$g(x)=x^3$的图象如图所示.设两函数的图象交于点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，且$x_1<x_2$.




(1)请指出图中曲线$C_1$，$C_2$分别对应的函数；

(2)结合函数图象，判断$f(6)$，$g(6)$，$f(2\,026)$，$g(2\,026)$的大小关系.

**解**：(1)$C_1$对应的函数为$g(x)=x^3$，$C_2$对应的函数为$f(x)=2^x$.

(2)因为$f(1)>g(1)$，$f(2)<g(2)$，$f(9)<g(9)$，$f(10)>g(10)$，

所以$1<x_1<2$，$9<x_2<10$，

所以$x_1<6<x_2$，$2\,026>x_2$，

从图象上可以看出，当$x_1<x<x_2$时，$f(x)<g(x)$，

所以$f(6)<g(6)$.

当$x>x_2$时，$f(x)>g(x)$，

所以$f(2\,026)>g(2\,026)$.

又因为$g(2\,026)>g(6)$，所以$f(2\,026)>g(2\,026)>g(6)>f(6)$.

## 任务3 掌握几类函数模型的实际应用

### 探究活动

**例2**　某皮鞋厂今年1月开始投产，并且前4个月的产量分别为1万双、1.2万双、1.3万双、1.37万双.由于产品质量好、款式新颖，前几个月的销售情况良好.为了推销员在推销产品时，接受订单不至于过多或过少，需要估计以后几个月的产量.厂里分析，产量的增加是由于工人熟练程度的提高和生产流程的优化.厂里暂时不准备增加设备和工人.针对月份 $x$ 与产量 $y$（单位：万双）给出三种函数模型：$y=ax+b$，$y=ax^2+bx+c$，$y=ab^x+c$.假如你是厂长，你将利用哪一种模型去估算以后几个月的产量？

**解**：由题意知，将产量随月份变化的离散量分别抽象为 $A(1,1)$，$B(2,1.2)$，$C(3,1.3)$，$D(4,1.37)$ 这四点.

①当函数为 $y=ax+b$ 时，将 $B$，$C$ 两点的坐标代入解析式，

得 $\begin{cases}3a+b=1.3,\\2a+b=1.2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0.1,\\b=1.\end{cases}$

所以 $y=0.1x+1$.

由此可得结论：在不增加工人和设备的条件下，产量会每月增加1 000双，这是不太现实的.

②当函数为 $y=ax^2+bx+c$ 时，将 $A$，$B$，$C$ 三点的坐标代入解析式，得 $\begin{cases}a+b+c=1,\\4a+2b+c=1.2,\\9a+3b+c=1.3,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-0.05,\\b=0.35,\\c=0.7.\end{cases}$

所以 $y=-0.05x^2+0.35x+0.7$.

由此函数计算4月份的产量为1.3万双，比实际产量少700双，而且由二次函数性质可知，产量自4月份开始将每月下降（图象开口向下，对称轴为 $x=3.5$），不符合实际.

③当函数为 $y=ab^x+c$ 时，将 $A$，$B$，$C$ 三点的坐标代入函数式，

得 $\begin{cases}ab+c=1,①\\ab^2+c=1.2,②\\ab^3+c=1.3.③\end{cases}$

由①，得 $ab=1-c$，代入②③，

得 $\begin{cases}b(1-c)+c=1.2,\\b^2(1-c)+c=1.3,\end{cases}$

则 $\begin{cases}c=\dfrac{1.2-b}{1-b},\\c=\dfrac{1.3-b^2}{1-b^2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=0.5,\\c=1.4.\end{cases}$

则 $a=\dfrac{1-c}{b}=-0.8$.

所以 $y=-0.8\times0.5^x+1.4$.

把 $x=4$ 代入得 $y=-0.8\times0.5^4+1.4=1.35$.

比较上述三个函数模型的优劣，既要考虑误差，又要考虑生产的实际，如：增产的趋势和可能性.经过筛选，模型 $y=ab^x+c$ 最合适，一是误差小，二是由于厂房新建，随着工人技术和管理效益逐渐提高，一段时间内产量会明显上升，但经过一段时间之后，如果不更新设备，产量必然趋于稳定，而该函数模型恰好反映了这种趋势.

因此选用模型 $y=ab^x+c$.

### 【探究总结】

**建立函数模型应遵循的三个原则**

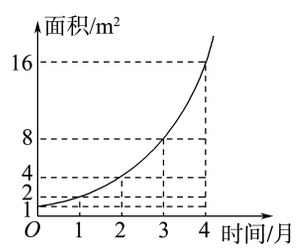
(1)简化原则：建立函数模型，模型要简化，抓主要因素、主要变量，尽量建立较低阶、较简便的模型.

(2)可推演原则：建立模型，一定要有意义，既能做理论分析，又能计算、推理，且能得出正确结论.

(3)反映性原则：建立模型，应与原型具有“相似性”，所得模型的解应具有说明问题的功能，能回到具体问题中解决问题.

### 应用迁移

**1.**（多选）某池塘中浮萍的面积与时间的函数关系的图象如图所示.假设该函数为指数函数，下列说法中正确的是　（　　）




A.此指数函数的底数为2

B.在第5个月时，浮萍的面积就会超过30 m²

C.浮萍从4 m²蔓延到12 m²只需1.5个月

D.设浮萍蔓延到2 m²，3 m²，6 m²所需的时间分别为 $t_1$，$t_2$，$t_3$，则有 $t_1+t_2=t_3$

ABD　**解析**：易知该指数函数的解析式为 $f(x)=2^x$，所以A正确；当 $x=5$ 时，$f(5)=32>30$，所以B正确；由 $f(x_1)=2^{x_1}=4$ 和 $f(x_2)=2^{x_2}=12$，得 $x_1=2$，$x_2=\log_212=2+\log_23$，所以 $x_2-x_1=\log_23>1.5$，所以C错误；设 $2^{t_1}=2$，$2^{t_2}=3$，$2^{t_3}=6$，则 $t_1=1$，$t_2=\log_23$，$t_3=\log_26$，所以 $t_1+t_2=1+\log_23=\log_2(2\times3)=\log_26=t_3$，所以D正确.

**2.**某研究团队经多次实验得到某种型号的汽车每小时耗油量 $Q$（单位：L）与速度 $v$（单位：km/h）（$40\leqslant v\leqslant120$）的关系，数据如下表：

| $v$ | 40 | 60 | 90 | 100 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|
| $Q$ | 5.2 | 6 | 8.325 | 10 | 15.6 |

为描述 $Q$ 与 $v$ 的关系，现有以下三种模型供选择：$Q(v)=0.9^v+a$，$Q(v)=0.04v+b$，$Q(v)=0.000\ 025v^3-0.004v^2+cv$.

(1)请选出你认为最符合实际的函数模型，并求出相应的函数解析式；

(2)选择一段长度为 100 km 的平坦高速路段进行测试，这辆车应以什么速度行驶才能使总耗油量最少？

**解**：(1)函数应为增函数，故第一种函数模型不符合；

若选择第二种模型，代入(40,5.2)得 $5.2=0.04\times40+b$，解得 $b=3.6$，

所以 $Q(v)=0.04v+3.6$，此时 $Q(90)=7.2$，$Q(100)=7.6$，$Q(120)=8.4$，与实际数据相差较大，故第二种不符合；

经观察，第三种函数模型最符合实际，

代入(40,5.2)，可得 $0.000\ 025\times40^3-0.004\times40^2+c\times40=5.2$，即 $1.6-6.4+c\times40=5.2$，解得 $c=0.25$，

所以 $Q(v)=0.000\ 025v^3-0.004v^2+0.25v$，

此时，$Q(60)=6$，$Q(90)=8.325$，$Q(100)=10$，$Q(120)=15.6$，符合题意，

所以 $Q(v)=0.000\ 025v^3-0.004v^2+0.25v$.

(2)设总耗油量为 $W$ L，

则 $W=\frac{100}{v}\times Q(v)=0.002\ 5v^2-0.4v+25$

$=0.002\ 5(v-80)^2+9$，$40\leqslant v\leqslant120$，

当 $v=80$ 时，$W$ 取得最小值为 9，

所以这辆车应以 80 km/h 的速度行驶才能使总耗油量最少.

# 课后素养评价(三十六)

## 基础落实

**1.**下列函数中，增长速度最慢的是　(　　)

A.$y=e^x$　　B.$y=\ln x$

C.$y=x^{100}$　　D.$y=2^x$

B　**解析**：$y=e^x$，$y=x^{100}$，$y=2^x$，随着 $x$ 的增大，函数值的增长速度越来越快，$y=\ln x$ 随着 $x$ 的增大，函数值的增长速度越来越慢.故选 B.

**2.**能使不等式 $\log_2x<x^2<2^x$ 一定成立的 $x$ 的取值区间是　(　　)

A.$(0,+\infty)$　　B.$(2,+\infty)$

C.$(-\infty,2)$　　D.$(4,+\infty)$

D　**解析**：当 $x>4$ 时，$\log_2x<x^2<2^x$.故选 D.

**3.**在某试验中，测得变量 $x$ 和变量 $y$ 之间的对应数据如下表：

| $x$ | 0.50 | 0.99 | 2.01 | 3.98 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | −1.01 | 0.01 | 0.98 | 2.00 |

则下列函数中，最能反映变量 $x$ 和 $y$ 之间的关系的是　(　　)

A.$y=2^x$　　B.$y=x^2-1$

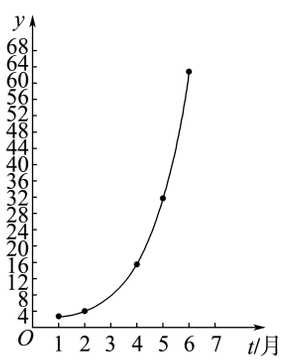
C.$y=2x-2$　　D.$y=\log_2x$

D　**解析**：根据 $x=0.50$，$y=-1.01$，代入计算，可以排除 A；根据 $x=2.01$，$y=0.98$，代入计算，可以排除 B，C；

将各数据代入函数 $y=\log_2x$，可知符合题意.

## 能力提升

**1.**红豆生南国，春来发几枝.如图是红豆生长时间 $t$(单位：月)与枝数 $y$ 的关系图象，最适合用来拟合红豆的枝数与生长时间的关系的函数是　(　　)




A.指数函数 $y=2^t$

B.对数函数 $y=\log_2t$

C.幂函数 $y=t^3$

D.二次函数 $y=2t^2$

A　**解析**：根据已知所给的关系图，观察得到图象在第一象限，且从左到右图象是上升的，并且增长速度越来越快，根据四个选项中函数的增长趋势可得，用指数函数拟合最好.

**2.**某食品的保鲜时间 $y$(单位：h)与储存温度 $x$(单位：℃)满足函数关系 $y=e^{kx+b}$(e 为自然对数的底数，$k$，$b$ 为常数).若该食品在 0 ℃的保鲜时间是 192 h，在22 ℃的保鲜时间是 48 h，则该食品在 33 ℃的保鲜时间是　(　　)

A.22 h　　B.23 h

C.33 h　　D.24 h

D　**解析**：由题意可得 $x=0$ 时，$y=192$，$x=22$ 时，$y=48$，代入 $y=e^{kx+b}$ 可得 $e^b=192$，$e^{22k+b}=48$，即有 $e^{11k}=\frac{1}{2}$，则当 $x=33$ 时，$y=e^{33k+b}=\left(\frac{1}{2}\right)^3\times192=24$.故选 D.

## 自我超越

研究某路段的交通时，道路密度等于该路段一定时间内通过的车辆数除以时间，车辆密度等于该路段一定时间内通过的车辆数除以该路段的长度.现定义交通流量为 $F=\frac{q}{x}$，$x$ 为道路密度，$q$ 为车辆密度.已知某路段的交通流量 $F=f(x)=\begin{cases}100-45a^{x},0<x<40,\\-\frac{7}{8}x+120,40\leqslant x\leqslant 80,\end{cases}$ 其中 $a>0$.当道路密度 $x=2$ 时，交通流量 $F=95$.

(1)求 $a$ 的值；

(2)若交通流量 $F>95$，求道路密度 $x$ 的取值范围；

(3)求车辆密度 $q$ 的最大值.

**解**：(1)依题意，$100-45a^{2}=95$，即 $a^{2}=\frac{1}{9}$.

又 $a>0$，所以 $a=\frac{1}{3}$.

(2)当 $40\leqslant x\leqslant 80$ 时，$F=f(x)=-\frac{7}{8}x+120$ 单调递减，$F$ 最大为 $f(40)=85$，故 $F>95$ 的解集为空集；当 $0<x<40$ 时，由 $100-45\times\left(\frac{1}{3}\right)^{x}>95$，解得 $x>2$，即 $2<x<40$，

所以，若交通流量 $F>95$，则道路密度 $x$ 的取值范围为 $(2,40)$.

(3)依题意，

$$q=F\cdot x=\begin{cases}\left[100-45\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\right]\cdot x,0<x<40,\\-\frac{7}{8}x^{2}+120x,40\leqslant x\leqslant 80,\end{cases}$$

所以，当 $0<x<40$ 时，$q<100\cdot x<4\ 000$；

当 $40\leqslant x\leqslant 80$ 时，$q=-\frac{7}{8}\left(x-\frac{480}{7}\right)^{2}+\frac{28\ 800}{7}\leqslant\frac{28\ 800}{7}$.

由于 $40<\frac{480}{7}<80$，所以，当 $x=\frac{480}{7}$ 时，$q$ 取得最大值 $\frac{28\ 800}{7}$.

因为 $\frac{28\ 800}{7}>4\ 000$，所以车辆密度 $q$ 的最大值为 $\frac{28\ 800}{7}$.

# 4.5　函数的应用(二)

## 4.5.1　函数的零点与方程的解

**学习任务目标**

1.理解函数的零点的概念及函数零点、方程的解与函数图象与 $x$ 轴交点的关系.

2.会求函数的零点.

3.掌握函数零点存在定理并会判断函数零点所在的大致区间及个数.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　函数的零点的概念**

对于一般函数 $y=f(x)$，我们把使 $f(x)=0$ 的实数 $x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的零点.

**知识点二　方程、函数、函数图象之间的关系**

方程 $f(x)=0$ 有实数解⇔函数 $y=f(x)$ 有零点⇔函数 $y=f(x)$ 的图象与 $x$ 轴有公共点.

**知识点三　函数零点存在定理**

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图象是一条连续不断的曲线，且有 $f(a)f(b)<0$，那么，函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内至少有一个零点，即存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)=0$，这个 $c$ 也就是方程 $f(x)=0$ 的解.

### 【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)函数的零点是一个点.　(×)

(2)所有的函数都有零点.　(×)

(3)若方程 $f(x)=0$ 有两个不相等的实数解 $x_1$，$x_2$，则函数 $y=f(x)$ 的零点为 $(x_1,0)$，$(x_2,0)$.　(×)

(4)函数的零点是函数 $y=f(x)$ 的图象与 $x$ 轴交点的横坐标，是方程 $f(x)=0$ 的实数解.　(√)

2.下列函数在区间(0,2)内必有零点的是　(D)

A.$y=x-3$　　B.$y=2^{x}$

C.$y=x^{3}$　　D.$y=\lg x$

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1 认识函数的零点

求下列函数的零点：

(1)$f(x)=x^3+8$；

(2)$f(x)=\dfrac{(x+2)\ln x}{x-3}$；

(3)$f(x)=\begin{cases}2^{-x}-4, & x\leqslant 0,\\ \lg x, & x>0.\end{cases}$

**解**：(1)令 $x^3+8=0$，得 $x=-2$.

所以函数 $f(x)=x^3+8$ 的零点为 $-2$.

(2)函数 $f(x)=\dfrac{(x+2)\ln x}{x-3}$ 的定义域为 $(0,3)\cup(3,+\infty)$. 令 $\dfrac{(x+2)\ln x}{x-3}=0$，得 $x+2=0$ 或 $\ln x=0$，

所以 $x=-2$(舍去)或 $x=1$.

所以函数 $f(x)=\dfrac{(x+2)\ln x}{x-3}$ 的零点为 1.

(3)当 $x\leqslant 0$ 时，令 $2^{-x}-4=0$，得 $x=-2$，满足要求；

当 $x>0$ 时，令 $\lg x=0$，得 $x=1$，满足要求.

所以函数 $f(x)$ 的零点是 $-2$，1.

**【探究总结】**

**函数零点的两种求法**

(1)代数法：求方程 $f(x)=0$ 的实数根，若存在实数根，则函数存在零点，否则函数不存在零点.

(2)几何法：与函数 $y=f(x)$ 的图象联系起来，图象与 $x$ 轴的交点的横坐标即为函数的零点.

### 任务2 判断函数零点所在的区间

#### 探究活动

**例1**　(1)(多选)若函数 $f(x)$ 的图象在 **R** 上连续不断，且满足 $f(0)<0$，$f(1)>0$，$f(2)>0$，则下列说法错误的是　(　　)

A. $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内一定有零点，在区间 $(1,2)$ 内一定没有零点

B. $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内一定没有零点，在区间 $(1,2)$ 内一定有零点

C. $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内一定有零点，在区间 $(1,2)$ 内可能有零点

D. $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可能有零点，在区间 $(1,2)$ 内一定有零点

(2)函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+x-2$ 的零点一定位于区间　(　　)

A. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　B. $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$

C. $\left(\dfrac{3}{2},2\right)$　　D. $\left(2,\dfrac{5}{2}\right)$

(3)方程 $2x+\ln x-5=0$ 的解所在区间为　(　　)

A. $(4,5)$　　B. $(3,4)$

C. $(2,3)$　　D. $(1,2)$

(1)ABD　**解析**：由题知 $f(0)f(1)<0$，所以根据函数零点存在定理可得，$f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内一定有零点. 又 $f(1)f(2)>0$，因此无法判断 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内是否有零点.

(2)C　**解析**：函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+x-2$ 是连续函数，$f(2)=\dfrac{1}{4}+2-2=\dfrac{1}{4}>0$，$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3}{2}-2=\dfrac{\sqrt{2}-2}{4}<0$，

可得 $f(2)f\left(\dfrac{3}{2}\right)<0$. 由函数零点存在定理可知，函数 $f(x)$ 的零点在 $\left(\dfrac{3}{2},2\right)$ 内. 故选 C.

(3)C　**解析**：令 $f(x)=2x+\ln x-5$，易知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的图象是一条连续不断的曲线，且 $f(x)$ 单调递增.

对于 A，因为 $f(4)=8+\ln 4-5=3+\ln 4>0$，$f(5)=10+\ln 5-5=5+\ln 5>0$，

所以 $f(x)$ 的零点不在 $(4,5)$ 内，所以 A 错误；

对于 B，因为 $f(4)>0$，$f(3)=6+\ln 3-5=1+\ln 3>0$，

所以 $f(x)$ 的零点不在 $(3,4)$ 内，所以 B 错误；

对于 C，因为 $f(3)>0$，$f(2)=4+\ln 2-5=\ln 2-1<0$，

所以 $f(x)$ 的零点在 $(2,3)$ 内，所以方程 $2x+\ln x-5=0$ 的解所在区间为 $(2,3)$，所以 C 正确；

对于 D，因为 $f(2)<0$，$f(1)=2+\ln 1-5=-3<0$，

所以 $f(x)$ 的零点不在 $(1,2)$ 内，所以 D 错误. 故选 C.

**【探究总结】**

**函数零点所在区间的确定**

确定函数的零点、方程的根所在的区间时，通常利用函数零点存在定理，转化为判断区间两端点对应的函数值的符号是否相反. 具体分为如下三个步骤.

(1)代入：将区间端点值代入函数解析式，求出函数值.

(2)判号：把所得的函数值相乘，并对乘积进行符号判断.

(3)定论：若符号为负且图象连续，则在该区间内至少有一个零点.

#### 应用迁移

1. 设函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x(x>0)$ 与 $g(x)=3-x$ 的图

象的交点坐标为$(x_0,y_0)$，则$x_0$所在的区间为（　　）

A.(0,1)　　B.(1,2)

C.(2,3)　　D.(3,4)

C　**解析**：令$h(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{3^x}+x-3$，$h(2)=f(2)-g(2)=\frac{1}{9}-1<0$，$h(3)=f(3)-g(3)=\frac{1}{27}>0$，故$h(2)\cdot h(3)<0$，故$x_0$所在的区间为(2,3).

**2.**已知函数$f(x)=\ln x-m$的零点位于区间(1,e)内，则实数$m$的取值范围是_____.

(0,1)　**解析**：由题意，函数$f(x)=\ln x-m$在定义域上单调递增，又因为函数零点位于区间(1,e)内，所以$f(1)=-m<0$，$f(e)=1-m>0$，解得$0<m<1$，故$m\in(0,1)$.

## 任务3 判断函数零点的个数

### 探究活动

**例2**　(1)函数$f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3,x\leqslant0,\\-2+\ln x,x>0\end{cases}$的零点个数为（　　）

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

(2)函数$f(x)=2^x+\lg(x+1)-2$有_____个零点.

(1)C　**解析**：当$x\leqslant0$时，令$x^2+2x-3=0$，解得$x=-3$或$x=1$(舍去)；

当$x>0$时，令$-2+\ln x=0$，

解得$x=e^2$.

所以函数$f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3,x\leqslant0,\\-2+\ln x,x>0\end{cases}$有2个零点.故选C.

(2)1　**解析**：因为$f(0)=1+0-2=-1<0$，

$f(1)=2+\lg 2-2>0$，

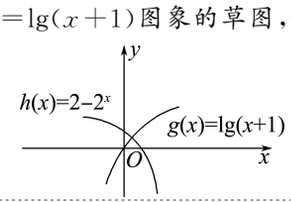
所以$f(x)$在(0,1)上存在零点.

又$f(x)=2^x+\lg(x+1)-2$在$(-1,+\infty)$上为增函数，故$f(x)$有且只有一个零点.

[一题多思]

**思考1.**本例(2)可以用哪些方法求解？如果你只用了一种方法，想一想还有其他方法吗？

**提示**：在同一平面直角坐标系中作出函数$h(x)=2-2^x$和$g(x)=\lg(x+1)$图象的草图，如图所示.



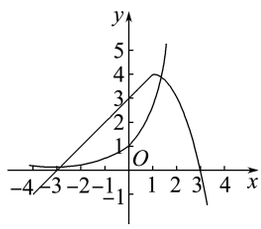

由图象知，函数$g(x)=\lg(x+1)$和$h(x)=2-2^x$的图象有且只有一个交点，

故$f(x)=2^x+\lg(x+1)-2$有且只有一个零点.

**思考2.**若$f(x)=\begin{cases}x+3,x\leqslant1,\\-x^2+2x+3,x>1,\end{cases}$则函数$g(x)=f(x)-e^x$有几个零点？

**提示**：函数$g(x)=f(x)-e^x$的零点个数即为函数$y=f(x)$与$y=e^x$的图象的交点个数.

作出函数图象如图所示.




由图可知，两函数图象有两个交点，

即函数$g(x)=f(x)-e^x$有两个零点.

**思考3.**若函数$f(x)=\begin{cases}2^x-a,x\leqslant0,\\\ln x,x>0\end{cases}$有两个零点，你能求出实数$a$的取值范围吗？

**提示**：当$x>0$时，由$f(x)=\ln x=0$，得$x=1$.

因为函数$f(x)$有两个不同的零点，

所以当$x\leqslant0$时，函数$f(x)=2^x-a$有一个零点，

令$f(x)=0$，得$a=2^x$.

因为$0<2^x\leqslant2^0=1$，所以$0<a\leqslant1$.

所以实数$a$的取值范围是(0,1].

### 【探究总结】

**判断函数零点个数的常用方法**

(1)利用函数零点与方程的根的关系，将问题转化为解方程，方程有几个不同的实数根函数就有几个零点.

(2)画出函数的图象，判定它与$x$轴的交点个数，从而判定零点的个数.

(3)结合单调性，利用函数零点存在定理，可判定$y=f(x)$在$(a,b)$内零点的个数.

(4)转化成两个函数图象的交点个数问题.

### 应用迁移

**1.**已知函数$y=f(x)$的图象是连续不断的，且$x$，$y$的对应关系如下表：

| $x$ | 1 | 1.5 | 1.75 | 1.875 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | −6 | −2.625 | −0.14 | 1.342 | −0.158 |

则$f(x)$在[1,2]内的零点（　　）

A.只有1个　　B.至少有2个

C.至多有2个　　D.只有2个

B　**解析**：因为函数$y=f(x)$的图象是连续不间断的，且$f(1.75)f(1.875)<0$，所以根据函数零点存

在定理，函数 $y=f(x)$ 在区间(1.75,1.875)内至少存在1个零点；同理，由 $f(1.875)f(2)<0$，可知函数 $f(x)$ 在区间(1.875,2)内至少存在1个零点.因此，函数 $f(x)$ 在区间[1,2]内至少存在2个零点.故选B.

**2.** 若函数 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}+m-1$ 的图象与 $x$ 轴有公共点，则实数 $m$ 的取值范围是_____.

[0,1)　**解析：** 函数 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}+m-1$ 的图象与 $x$ 轴有公共点，即 $m-1=-\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$ 有实数解.

由于 $-1\leqslant-\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}<0$，故 $-1\leqslant m-1<0$，解得 $0\leqslant m<1$.

# 课后素养评价(三十七)

## 基础落实

**1.** 函数 $f(x)=1-\lg(3^x+2)$ 的零点为　(　　)

A.$\log_3 8$　　B.2

C.$\log_3 7$　　D.$\log_2 5$

A　**解析：** 令 $f(x)=1-\lg(3^x+2)=0$，得 $3^x+2=10$，则 $x=\log_3 8$.故选A.

**2.** 函数 $f(x)=\ln x+2x-3$ 的零点所在的区间为　(　　)

A.$\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　B.$\left(\frac{1}{2},1\right)$

C.$\left(1,\frac{3}{2}\right)$　　D.$\left(\frac{3}{2},2\right)$

C　**解析：** 因为函数 $f(x)=\ln x+2x-3$ 在(0,+∞)上连续且单调递增，且 $\begin{cases}f(1)=-1<0,\\ f\left(\frac{3}{2}\right)=\ln\frac{3}{2}>0,\end{cases}$ 所以函数 $f(x)$ 的零点在区间 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 内.故选C.

**3.** 已知函数 $f(x)=12-x-\lg x$ 在区间 $(n,n+1)$ 上有唯一零点，则正整数 $n=$　(　　)

A.8　　B.9　　C.10　　D.11

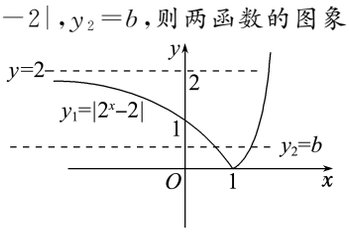
C　**解析：** 函数 $f(x)=12-x-\lg x$ 的定义域为(0,+∞)，且在(0,+∞)上单调递减.易得 $f(11)=12-11-\lg 11=1-\lg 11<0$，$f(10)=12-10-\lg 10=1>0$，所以 $f(11)f(10)<0$，根据函数零点存在定理及其单调性，可得函数 $f(x)$ 的唯一零点所在区间为(10,11)，所以 $n=10$.故选C.

**4.** 若函数 $f(x)=|2^x-2|-b$ 有两个零点，则实数 $b$ 的取值范围是_____.

(0,2)　**解析：** 因为 $y=f(x)$ 有两个零点，所以 $|2^x-2|-b=0$ 有两个实根，

即 $|2^x-2|=b$ 有两个实根.

令 $y_1=|2^x-2|$，$y_2=b$，则两函数的图象如图所示.




由图可知，当 $b\in(0,2)$ 时，两函数图象有两个交点，即 $f(x)$ 有两个零点.

**5.** 函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 的零点是 $-1$ 和2，判断函数 $g(x)=ax^3+bx+4$ 的零点所在的大致区间.

**解：** 因为 $-1$ 和2是函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 的零点，

所以 $-1$ 和2是方程 $x^2+ax+b=0$ 的两个实数解，

所以 $-1+2=-a$，$-1\times2=b$，即 $a=-1$，$b=-2$，

所以 $g(x)=-x^3-2x+4$.

因为 $g(1)=1$，$g(2)=-8$，$g(1)g(2)<0$，且 $g(x)$ 在(1,2)上的图象是连续不断的，

所以 $g(x)$ 在区间(1,2)内有零点.

又因为 $g(x)$ 在 **R** 上是单调函数，

所以 $g(x)$ 只有一个零点.

综上可知，函数 $g(x)$ 的零点所在的大致区间为(1,2).

## 能力提升

**1.** 函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-x^3-2$ 在区间(−1,0)内的零点个数是　(　　)

A.0　　B.1

C.2　　D.3

B　**解析：** 因为 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-x^3-2$ 在区间(−1,0)内连续且单调递减，又 $f(0)=-1<0$，$f(-1)=1>0$，

根据函数零点存在定理可得，$f(x)$ 在(−1,0)内有1个零点.故选B.

**2.** 设函数 $f(x)=x+\lg x$ 满足 $f(a)f(b)\cdot f(c)<0(a<b<c)$，$f(x)$ 的零点为 $x_0$，则下列结论一定错误的是　(　　)

A.$x_0\in(a,c)$

B.$x_0\in(a,b)$

C.$x_0\in(b,c)$

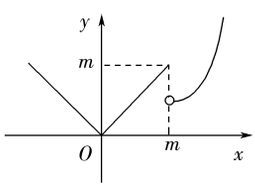
D.$x_0\in(c,+\infty)$

C　**解析**：函数 $f(x)=x+\lg x$ 的定义域为 $\{x|x>0\}$，函数是增函数，满足 $f(a)f(b)f(c)<0(a<b<c)$，说明 $f(a)$，$f(b)$，$f(c)$，有 1 个负数和 2 个正数或 3 个负数，$f(a)$ 一定是负数.由函数的零点存在定理可知，函数的零点可能在 $(a,c)$，或 $(a,b)$，或 $(c,+\infty)$，不可能在 $(b,c)$.

**3.**已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x|,x\leqslant m,\\ x^2-2mx+4m,x>m,\end{cases}$ 其中 $m>0$.若存在实数 $b$，使得关于 $x$ 的方程 $f(x)=b$ 有三个不同的根，则 $m$ 的取值范围是_____.

$(3,+\infty)$　**解析**：由题意知方程 $f(x)-b=0$ 有三个不同的根，即直线 $y=b$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象有三个不同的交点.

作出函数 $f(x)=\begin{cases}|x|,x\leqslant m,\\ x^2-2mx+4m,x>m\end{cases}$ 的图象，如图所示.




若存在实数 $b$，使方程 $f(x)-b=0$ 有三个不同的根，则 $m>-m^2+4m$，即 $m^2-3m>0$.

又因为 $m>0$，所以 $m>3$，即 $m$ 的取值范围为 $(3,+\infty)$.

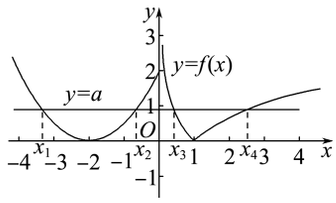
## 自我超越

**1.**(多选)设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+2x+2,x\leqslant 0,\\ |\ln x|,x>0,\end{cases}$ 若关于 $x$ 的方程 $f(x)=a$ 有四个不同的解 $x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$，且 $x_1<x_2<x_3<x_4$，则　(　　)

A.$x_1x_2>4$　　B.$0<a\leqslant 2$

C.$x_3+x_4>2$　　D.$\frac{1}{e^2}<x_4<e^2$

BC　**解析**：由函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+2x+2,x\leqslant 0,\\ |\ln x|,x>0,\end{cases}$ 作出函数 $y=f(x)$ 的图象，如图所示.




因为关于 $x$ 的方程 $f(x)=a$ 有四个不同的解 $x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$，且 $x_1<x_2<x_3<x_4$，

结合图象，可得 $-4\leqslant x_1<-2<x_2\leqslant 0<x_3<1<x_4$，且 $x_1+x_2=-4$，

则 $x_1x_2=x_1(-4-x_1)=-x_1^2-4x_1=-(x_1+2)^2+4$，其中 $-4\leqslant x_1<-2$，所以 $x_1x_2<4$，所以 A 不正确.

根据图象，要使得方程 $f(x)=a$ 有四个不同的解，可得 $0<a\leqslant 2$，所以 B 正确.

因为 $0<x_3<1<x_4$，且 $|\ln x_3|=|\ln x_4|$，

可得 $-\ln x_3=\ln x_4$，

所以 $\ln x_3+\ln x_4=\ln(x_3x_4)=0$，可得 $x_3x_4=1$.

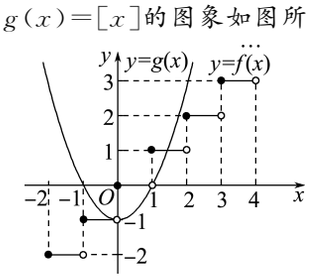
又由 $x_3+x_4\geqslant 2\sqrt{x_3x_4}=2$，当且仅当 $x_3=x_4=1$ 时，等号成立，

显然 $x_3\neq x_4$，所以 $x_3+x_4>2$，所以 C 正确.

令 $a=\ln x_4=2$，可得 $x_4=e^2$，结合图象，可得 $1<x_4\leqslant e^2$，所以 D 不正确.故选 BC.

**2.**设 $[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数，如 $[1.5]=1$，$[-1.5]=-2$，则函数 $f(x)=x^2-[x]-1$ 的零点为_____.

$\sqrt{2}$　**解析**：函数 $f(x)=x^2-[x]-1$ 的零点即方程 $x^2-[x]-1=0$ 的根，也就是函数 $f(x)=x^2-1$ 与 $g(x)=[x]$ 图象的交点横坐标，画出函数 $f(x)=x^2-1$ 与 $g(x)=[x]$ 的图象如图所示.




由图可知，两函数的图象只有一个交点，令 $x^2-1=1$，解得 $x=\sqrt{2}$ 或 $x=-\sqrt{2}$(舍去).

# 4.5.2　用二分法求方程的近似解

**学习任务目标**

1.通过具体实例理解二分法的概念及其使用条件.
2.了解二分法是求方程近似解的常用方法，能借助计算器用二分法求方程的近似解.
3.会用二分法思想解决其他的实际问题.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　二分法的概念**

对于在区间$[a,b]$上图象连续不断且$f(a)f(b)<0$的函数$y=f(x)$，通过不断地把它的零点所在区间一分为二，使所得区间的两个端点逐步逼近零点，进而得到零点近似值的方法叫做二分法.

**知识点二　用二分法求函数零点近似值的步骤**

给定精确度$\varepsilon$，用二分法求函数$y=f(x)$的零点$x_0$的近似值的一般步骤如下：

(1)确定零点$x_0$的初始区间$[a,b]$，验证$f(a)f(b)<0$.

(2)求区间$(a,b)$的中点$c$.

(3)计算$f(c)$，并进一步确定零点所在的区间：

①若$f(c)=0$(此时$x_0=c$)，则$c$就是函数的零点；

②若$f(a)f(c)<0$(此时$x_0\in(a,c)$)，则令$b=c$；

③若$f(c)f(b)<0$(此时$x_0\in(c,b)$)，则令$a=c$.

(4)判断是否达到精确度$\varepsilon$：若$|a-b|<\varepsilon$，则得到零点近似值$a$(或$b$)；否则重复步骤(2)～(4).

以上步骤可借助口诀记忆：定区间，找中点，中值计算两边看；同号去，异号算，零点落在异号间；周而复始怎么办？精确度上来判断.

### 【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)如果函数零点两侧函数值同号，不适合用二分法求此零点近似值.　(√)

(2)用二分法求函数零点近似值，必须先确定零点所在区间.　(√)

(3)用二分法一定能求出函数零点.　(×)

(4)用二分法求函数零点近似值，达到精确度后，所得区间内任一数均可视为零点的近似值.　(√)

2.用二分法研究函数$f(x)=x^3+x^2-2x-2$的零点时，已知$f(1)f(2)<0$.若$x_0$是$(1,2)$的中点，则$f(x_0)=$0.625.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1　理解二分法的概念

1.下列关于函数$f(x)$，$x\in[a,b]$的命题中，正确的是(　　)

A.若$x_0\in[a,b]$且满足$f(x_0)=0$，则$x_0$是$f(x)$的一个零点

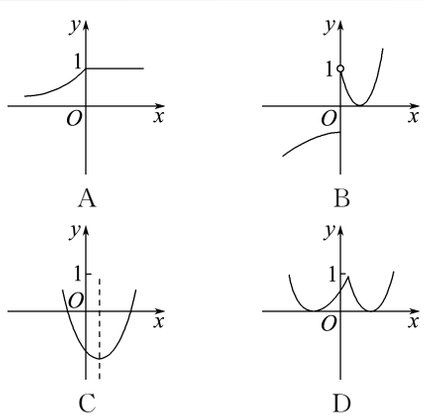
B.若$x_0$是$f(x)$在$[a,b]$内的零点，则可以用二分法求$x_0$的近似值

C.函数$f(x)$的零点是方程$f(x)=0$的根，但$f(x)=0$的根不一定是函数$f(x)$的零点

D.用二分法求方程的根时，得到的都是近似解

A　**解析**：对于A，$x_0\in[a,b]$且满足$f(x_0)=0$，则$x_0$是$f(x)$的一个零点，故A正确；对于B，函数$f(x)$不一定连续，故B错误；对于C，方程$f(x)=0$的根一定是函数$f(x)$的零点，故C错误；对于D，用二分法求方程的根时，得到的根也可能是精确值，故D错误.

2.下列图象表示的函数能用二分法求零点的是(　　)




C　**解析**：由函数图象可得，A中的函数没有零点，不能用二分法求零点，故排除A；B和D中的函数有零点，但函数在零点两侧的函数值符号相同，故不能用二分法求零点，排除B和D；只有C中的函数存在零点且函数在零点两侧的函数值的符号相反，故能用二分法求函数的零点.故选C.

3.(多选)下列函数中，能用二分法求函数零点的有(　　)

A.$f(x)=5x+2$

B.$f(x)=\log_5 x$

C.$f(x)=x^2+2x+1$

D.$f(x)=3^x-2$

ABD　**解析**：选项 A，由 $f(-1)f(1)=-3\times7<0$，可得 $f(x)=5x+2$ 在 $(-1,1)$ 上存在零点；选项 B，由 $f\left(\frac{1}{5}\right)f(5)=-1\times1<0$，可得 $f(x)=\log_5 x$ 在 $\left(\frac{1}{5},5\right)$ 上存在零点；选项 C，$f(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2\geqslant0$，则其零点为 $-1$，但不存在实数 $a$，$b$ 满足 $f(a)f(b)<0$，因而不能用二分法求此函数零点；选项 D，由 $f(0)f(1)=-1\times1<0$，可得 $f(x)=3^x-2$ 在 $(0,1)$ 上存在零点.

## 【探究总结】

**运用二分法求函数的零点应具备的条件**

(1)函数图象在零点附近连续不断.

(2)在该零点左右函数值异号.

只有同时满足上述两个条件，才可用二分法求函数零点.

## 任务2 用二分法求方程的近似解

### 探究活动

**例1**　(教材 P146 练习题 2 改编)用二分法求方程 $2x^3+3x-3=0$ 的一个正实数近似解.(精确度是 0.1)

**解**：令 $f(x)=2x^3+3x-3$，

经计算，$f(0)=-3<0$，$f(1)=2>0$，$f(0)f(1)<0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内存在零点，

即方程 $2x^3+3x-3=0$ 在 $(0,1)$ 内有解.

取 $(0,1)$ 的中点 0.5，经计算 $f(0.5)<0$.

又 $f(1)>0$，所以方程 $2x^3+3x-3=0$ 在 $(0.5,1)$ 内有解.

如此继续下去，得到方程的正实数解所在的区间，如下表：

| $(a,b)$ | 中点 $c$ | $f(a)$ | $f(b)$ | $f(c)$ |
|---|---|---|---|---|
| $(0,1)$ | 0.5 | $f(0)<0$ | $f(1)>0$ | $f(0.5)<0$ |
| $(0.5,1)$ | 0.75 | $f(0.5)<0$ | $f(1)>0$ | $f(0.75)>0$ |
| $(0.5,0.75)$ | 0.625 | $f(0.5)<0$ | $f(0.75)>0$ | $f(0.625)<0$ |
| $(0.625,0.75)$ | 0.687 5 | $f(0.625)<0$ | $f(0.75)>0$ | $f(0.687\ 5)<0$ |

由于 $|0.687\ 5-0.75|=0.062\ 5<0.1$，

所以方程 $2x^3+3x-3=0$ 的一个精确度为 0.1 的正实数近似解可取为 0.75.

[一题多思]

**思考1.**用二分法求方程的近似解，首先要选好计算的初始区间，选择初始区间应注意哪些问题？

**提示**：初始区间既要包含所求的根，又要使其长度尽量小.

**思考2.**二分法是通过不断地把函数零点所在区间一分为二，使所得区间的两个端点逐步逼近零点，进而得到零点近似值的方法，那么如何决定是停止计算还是继续计算呢？

**提示**：看区间的长度是否达到给定的精确度.

**思考3.**当 $|a-b|<\varepsilon$ 时，我们如何选择近似解？

**提示**：区间内的任一点都可以作为零点的近似解，一般取端点作为零点的近似解.

**思考4.**若本例中的“精确度是 0.1”改为“精确度是 0.05”，结果又如何？

**提示**：在本例的基础上，取区间 $(0.687\ 5,0.75)$ 的中点 $x=0.718\ 75$，因为 $f(0.718\ 75)<0$，$f(0.75)>0$，且 $|0.718\ 75-0.75|=0.031\ 25<0.05$，所以 $x=0.72$ 可作为方程的一个近似解.

## 【探究总结】

**利用二分法求方程的近似解的步骤**

(1)构造函数，利用图象确定方程的解所在的大致区间，通常取区间 $(n,n+1)$，$n\in\mathbf{Z}$.

(2)利用二分法求出满足精确度的方程的解所在的区间 $M$.

(3)区间 $M$ 内的任一实数均是方程的近似解，通常取区间 $M$ 的一个端点.

### 应用迁移

用二分法求函数 $f(x)=x^3-x-1$ 在区间 $(1,1.5)$ 内的一个零点的近似值(精确度为 0.1).(参考数据：$1.375^3\approx2.600$，$1.312\ 5^3\approx2.261$)

**解**：利用二分法，

$f(1)=-1<0$，$f(1.5)=\frac{27}{8}-\frac{3}{2}-1=\frac{7}{8}>0$，

$f(1.25)=\frac{125}{64}-\frac{5}{4}-1<2-\frac{5}{4}-1=-\frac{1}{4}<0$，

故零点在 $(1.25,1.5)$ 内，此时 $|1.5-1.25|=0.25>0.1$.

又 $\frac{1.25+1.5}{2}=1.375$，$f(1.375)\approx2.600-1.375-1=0.225>0$，

所以零点在区间 $(1.25,1.375)$ 内，此时 $|1.25-1.375|=0.125>0.1$.

又 $\frac{1.25+1.375}{2}=1.312\ 5$，$f(1.312\ 5)\approx2.261-1.312\ 5-1=-0.051\ 5<0$，

所以零点在区间(1.312 5,1.375)内，此时|1.375－1.312 5|＝0.062 5＜0.1，

故 $f(x)=x^3-x-1$ 在区间(1,1.5)内的一个零点的近似值是 1.312 5.

## 任务3 掌握二分法思想的应用

### 探究活动

**例 2**　在 26 枚崭新的金币中，有一枚外表与真金币完全相同的假币(质量轻一点).现在只有一台天平，利用二分法的思想，最多称几次就可以发现这枚假币？

**解**：将 26 枚金币平均分成两份，放在天平上，假币在轻的那 13 枚金币里面；将这 13 枚金币拿出 1 枚，将剩下的 12 枚平均分成两份，若天平平衡，则假币一定是拿出的那一枚，若不平衡，则假币一定在轻的那 6 枚金币里面；将这 6 枚金币平均分成两份，则假币一定在轻的那 3 枚金币里面；将这 3 枚金币任意拿出 2 枚放在天平上，若平衡，则剩下的那一枚是假币，若不平衡，则轻的那一枚是假币.依据上述分析，最多称 4 次就可以发现这枚假币.

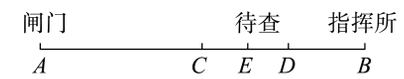
**【探究总结】**

二分法的思想在实际生活中应用十分广泛，二分法不仅可用于线路、水管、煤气管道故障的排查，还能用于实验设计、资料查询、资金分配等.

### 应用迁移

在一个风雨交加的夜里，从某水库闸门到防洪指挥所的电话线路发生了故障，这是一条长为 10 km，大约有 200 根电线杆的线路.请设计一个能迅速查出故障地点所在区域的方案，并确定维修线路的工人师傅最多检测几次就能找出故障地点所在区域.(精确到 100 m 范围内)

**解**：如图，




工人师傅首先从 $AB$ 段的中点 $C$ 检测，用随身带的话机向两端测试，若发现 $AC$ 段正常，则故障在 $BC$ 段；再从 $BC$ 段的中点 $D$ 检测，若发现 $BD$ 段正常，则故障在 $CD$ 段；再从 $CD$ 段的中点 $E$ 检测……由此类推，每查一次，可以把待查的线路长度缩减一半，可以算出经过 $n$ 次检测，所剩线路的长度为 $\frac{10\,000}{2^n}$ m，则有 $\frac{10\,000}{2^n}\leqslant 100$，即 $2^n\geqslant 100$.又因为 $2^6=64$，$2^7=128$，所以最多只要检测 7 次就能找到故障地点所在区域.

# 课后素养评价(三十八)

## 基础落实

**1.**下列函数中不能用二分法求零点的是　(　　)

A. $f(x)=3x+1$　　B. $f(x)=x^2$

C. $f(x)=x^3$　　D. $f(x)=\ln x$

B　**解析**：对于 A，$f(x)=3x+1$ 是单调函数，有唯一零点，且函数值在零点两侧异号，可用二分法求零点；对于 B，$f(x)=x^2$ 不是单调函数，虽然也有唯一的零点，但函数值在零点两侧都是正号，故不能用二分法求零点；对于 C，$f(x)=x^3$ 是单调函数，有唯一零点，且函数值在零点两侧异号，可用二分法求零点；对于 D，$f(x)=\ln x$ 是单调函数，有唯一零点，且函数值在零点两侧异号，可用二分法求零点.故选 B.

**2.**用二分法研究函数 $f(x)=x^5+8x^3-1$ 的零点时，第一次经过计算得 $f(0)<0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)>0$，则零点所在的区间和第二次应计算的函数值分别为　(　　)

A. $\left(\frac{1}{2},1\right)$，$f\left(\frac{3}{4}\right)$　　B. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$f\left(\frac{1}{8}\right)$

C. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$f\left(\frac{1}{4}\right)$　　D. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$f\left(\frac{3}{8}\right)$

C　**解析**：因为 $f(0)<0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)>0$，所以零点所在的区间为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，再计算 $f\left(\frac{1}{4}\right)$ 的符号.故选 C.

**3.**(多选)某同学求函数 $f(x)=\ln x+2x-6$ 的零点时，用计算器算得部分函数值如下所示.

$f(2)\approx-1.307$，$f(3)\approx1.099$，$f(2.5)\approx-0.084$，$f(2.75)\approx0.512$，$f(2.625)\approx0.215$，$f(2.562\,5)\approx0.066$.

则方程 $\ln x+2x-6=0$ 的近似解(精确度为0.1)可取为　(　　)

A.2.52　　B.2.56

C.2.66　　D.2.75

AB　**解析**：由表格函数值在 0 的左右两侧最接近的值，即 $f(2.5)\approx-0.084$，$f(2.562\,5)\approx0.066$，

可知方程 $\ln x+2x-6=0$ 的近似根在(2.5，2.562 5)内，

因此选项 A 中 2.52 符合，选项 B 中 2.56 也符合.

## 能力提升

**1.**(多选)若函数 $f(x)$ 的图象是连续的，且函数 $f(x)$ 的唯一零点同在区间(0,4)，(0,2)，$\left(1,\frac{3}{2}\right)$，$\left(\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right)$ 内，则下列函数值与 $f(0)$ 符号不同的是　(　　)

A.$f(4)$　　B.$f(2)$

C.$f(1)$　　D.$f\left(\frac{3}{2}\right)$

ABD　**解析**：由二分法的步骤可知，(1)零点在(0，4)内，则有$f(0)\cdot f(4)<0$，不妨设$f(0)>0$，$f(4)<0$，取中点2；(2)零点在(0，2)内，则有$f(0)\cdot f(2)<0$，则$f(0)>0$，$f(2)<0$，取中点1；(3)零点在(1，2)内，则有$f(1)\cdot f(2)<0$，则$f(1)>0$，$f(2)<0$，取中点$\frac{3}{2}$；(4)零点在$\left(1,\frac{3}{2}\right)$内，则有$f(1)\cdot f\left(\frac{3}{2}\right)<0$，则$f(1)>0$，$f\left(\frac{3}{2}\right)<0$，取中点$\frac{5}{4}$；(5)零点在$\left(\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right)$内，则有$f\left(\frac{5}{4}\right)\cdot f\left(\frac{3}{2}\right)<0$，则$f\left(\frac{5}{4}\right)>0$，$f\left(\frac{3}{2}\right)<0$，所以与$f(0)$符号不同的是$f(4)$，$f(2)$，$f\left(\frac{3}{2}\right)$.

**2.**(多选)在用二分法求函数$f(x)$零点近似值时，第一次所取的区间是$[-2,4]$，则第三次所取的区间可能是　　(　　)

A.$\left[1,\frac{5}{2}\right]$　　B.$[-2,1]$

C.$\left[-2,\frac{5}{2}\right]$　　D.$\left[-\frac{1}{2},1\right]$

AD　**解析**：因为第一次所取的区间是$[-2,4]$，所以第二次所取的区间可能为$[-2,1]$，$[1,4]$，所以第三次所取的区间可能为$\left[-2,-\frac{1}{2}\right]$，$\left[-\frac{1}{2},1\right]$，$\left[1,\frac{5}{2}\right]$，$\left[\frac{5}{2},4\right]$.

**3.**用二分法求函数$f(x)=\ln x+2x-6$在区间(2，3)内的零点近似值，至少经过_____次二等分后精确度达到0.1.

4　**解析**：开区间(2，3)的长度等于1，每经过一次操作，区间长度变为原来的一半，经过$n$次操作后，区间长度变为$\frac{1}{2^n}$，故有$\frac{1}{2^n}\leqslant 0.1$，即$2^n\geqslant 10$，则$n\geqslant 4$，所以至少需要操作4次.

**4.**用二分法求方程$x^2-2x=1$的一个正实数近似解(精确度为0.1).

**解**：设$f(x)=x^2-2x-1$.因为$f(2)=-1<0$，$f(3)=2>0$，

所以在区间(2，3)内，方程$x^2-2x-1=0$有一解，记为$x_0$.

取2与3的平均数2.5.

因为$f(2.5)=0.25>0$，所以$2<x_0<2.5$；

再取2与2.5的平均数2.25.

因为$f(2.25)=-0.437\ 5<0$，所以$2.25<x_0<2.5$；

如此继续下去，有

$f(2.375)<0$，$f(2.5)>0\Rightarrow x_0\in(2.375,2.5)$；

$f(2.375)<0$，$f(2.437\ 5)>0\Rightarrow x_0\in(2.375,2.437\ 5)$.

因为$|2.375-2.437\ 5|=0.062\ 5<0.1$，

所以方程$x^2-2x=1$的一个精确度为0.1的近似解可取为2.437 5.

## 自我超越

**1.**已知$y=f(x)$单调递增且其图象在$[a,b]$上是一条连续不断的曲线，在用二分法求该函数零点的过程中，依次确定了零点所在区间为$[a,b]$，$\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$，$\left[a+\frac{1}{3},\frac{b}{3}\right]$，则$b-a$的值是　　(　　)

A.1　　B.$\frac{4}{3}$　　C.$-\frac{2}{3}$　　D.$\frac{2}{3}$

B　**解析**：因为依次确定了零点所在区间为$[a,b]$，$\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$，$\left[a+\frac{1}{3},\frac{b}{3}\right]$，

可得$\begin{cases}\frac{a+b}{2}=\frac{b}{3},\\ \frac{\frac{a+b}{2}+a}{2}=a+\frac{1}{3},\end{cases}$即$\begin{cases}3a+b=0,\\ b-a=\frac{4}{3},\end{cases}$

解得$a=-\frac{1}{3}$，$b=1$.

所以$b-a=1-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$.故选B.

**2.**在12枚崭新的硬币中，有一枚外表与真币完全相同的假币(质量小一点).现在只有一台天平，则应用二分法的思想，最少称_____次就一定可以发现假币.

3　**解析**：先将12枚硬币平均分成两份，放在天平上，假币在轻的那6枚硬币里面；再将这6枚平均分成两份，则假币一定在轻的那3枚硬币里面；最后将这3枚硬币任拿出2枚放在天平上，若平衡，则剩下的那1枚即是假币，若不平衡，则轻的那1枚即是假币.依据上述分析，最少称3次就一定可以发现这枚假币.

# 4.5.3　函数模型的应用

**学习任务目标**

1.会利用已知函数模型解决实际问题.
2.能建立函数模型解决实际问题.
3.了解拟合函数并能解决实际问题.
4.认识函数模型的作用，提高数学建模、数据分析的能力.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点　常用函数模型**

| 常用函数模型 | |
|---|---|
| 指数函数模型 | $y=ba^x+c$（$a$，$b$，$c$ 为常数，$b\neq0$，$a>0$，且 $a\neq1$） |
| 对数函数模型 | $y=m\log_a x+n$（$m$，$a$，$n$ 为常数，$m\neq0$，$a>0$，且 $a\neq1$） |

### 【概念辨析】

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.
(1)银行利率、细胞分裂等增长率问题可以用指数函数模型来表述.　（√）
(2)在函数建模中，散点图可以帮助我们选择恰当的函数模型.　（√）
(3)在函数模型中，定义域只需使函数有意义.（×）
(4)用函数模型预测的结果和实际结果必须相等，否则函数模型就无存在意义了.　（×）

2.物体在空气中冷却，如果物体的初始温度为 $\theta_1$℃，空气温度为 $\theta_0$℃，那么 $t$ min 后物体的温度 $\theta$（单位：℃）满足 $\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$.若常数 $k=0.05$，空气温度为30 ℃，某物体的温度从 90 ℃下降到50 ℃，大约需要的时间为（参考数据：ln 3≈1.1）　（D）
A.16 min　　B.18 min
C.20 min　　D.22 min

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1 利用函数模型解决实际问题

1.某学校科技创新小组准备模拟东风-31 弹道导弹的发射过程，假设该小组采用的飞行器的飞行高度 $y$（单位：m）与飞行时间 $x$（单位：s）之间的关系可以近似用函数 $y=a\log_3 x+b$ 来表示.已知飞行器发射后经过 2 s时的高度为 10 m，经过 6 s 时的高度为 30 m，欲达到 50 m 的高度，需要　（　）
A.15 s　　B.16 s
C.18 s　　D.20 s

C　**解析**：对于 $y=a\log_3 x+b$，当 $x=2$ 时，$y=10$；当 $x=6$ 时，$y=30$，所以 $\begin{cases}10=a\log_3 2+b,\\30=a\log_3 6+b,\end{cases}$ 解得 $a=20$，$b=10-20\log_3 2$，所以 $y=20\log_3 x+10-20\log_3 2$.设达到 50 m 的高度需要 $x$ s，则 $20\log_3 x+10-20\log_3 2=50$，解得 $x=18$.所以达到 50 m 的高度需要 18 s.故选 C.

2.里氏震级 $M$ 的计算公式为 $M=\lg A-\lg A_0$，其中 $A$ 是测震仪记录的地震曲线的最大振幅，$A_0$ 是相应的标准地震的振幅.假设在一次地震中，测震仪记录的最大振幅是 1 000，此时标准地震的振幅为 0.001，则此次地震的震级为____级，9 级地震的最大振幅是 5 级地震最大振幅的_____倍.

6　10 000　**解析**：根据题意，假设在一次地震中，测震仪记录的最大振幅是 1 000，
此时标准地震的振幅为 0.001，则 $M=\lg A-\lg A_0=\lg 1\,000-\lg 0.001=3-(-3)=6$.
设 9 级地震的最大的振幅是 $x$，5 级地震最大振幅是 $y$，
则有 $9=\lg x-\lg 0.001$，$5=\lg y-\lg 0.001$，解得 $x=10^6$，$y=10^2$，
所以 $\dfrac{x}{y}=\dfrac{10^6}{10^2}=10\,000$.

**【探究总结】**

1.解决已给出函数模型的实际应用题，先考虑该题考查的是哪种函数，并注意定义域；然后结合所给模型，求出函数解析式；最后结合其实际意义解答.

2.已知函数模型解决实际问题，往往给出的函数解析式含有参数，需要将题中的数据代入函数模型，求得函数模型中的参数，再将问题转化为已知函数解析式求函数值或自变量的值.

## 任务2 建立函数模型解决实际问题

### 探究活动

**例1**　某地下车库在排气扇发生故障的情况下，测得空气中一氧化碳含量达到了危险状态，经抢修，排气扇恢复正常.排气4 min后，测得车库内的一氧化碳浓度为64 μL/L，继续排气4 min，又测得一氧化碳浓度为32 μL/L.经检测知该地下车库一氧化碳浓度$y$(单位：μL/L)与排气时间$t$(单位：min)存在函数关系：$y=c\left(\frac{1}{2}\right)^{mt}$($c$，$m$为常数).

(1)求$c$，$m$的值；

(2)若地下车库中一氧化碳浓度不高于0.5 μL/L为正常，问：至少排气多少分钟，这个地下车库中的一氧化碳浓度才能达到正常状态？

**解**：(1)由题意，可得方程组$\begin{cases}64=c\left(\frac{1}{2}\right)^{4m},\\32=c\left(\frac{1}{2}\right)^{8m},\end{cases}$

解得$\begin{cases}c=128,\\m=\frac{1}{4}.\end{cases}$

(2)由(1)知$y=128\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}t}$.

由题意，可得$128\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}t}\leqslant 0.5$，

即$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}t}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{8}$，即$\frac{t}{4}\geqslant 8$，解得$t\geqslant 32$.

所以至少排气32 min，这个地下车库中的一氧化碳浓度才能达到正常状态.

[一题多思]

**思考1.**哪些实际问题可以用指数函数模型解决？

**提示**：在实际问题中，有关人口增长、银行复利、细胞分裂等增长率问题常可以用指数函数模型表示，通常可以表示为$y=N(1+p)^x$(其中$N$为基础数，$p$为增长率，$x$为时间)的形式.

**思考2.**涉及较为复杂的指数运算时，我们常会选择怎样的策略？

**提示**：常常利用等式的两边取对数的方法，将指数运算转化为对数运算.

**思考3.**常见的对数函数模型应用题有何特点？解题策略是怎样的？

**提示**：对数型函数应用题一般都会给出含参数的函数解析式，解题策略：首先根据实际情况求出函数解析式中的参数，或从给出的具体情境中提炼出数据，代入解析式求值，然后根据数值回答其实际意义.

**【探究总结】**

**建立函数模型解决实际问题的关注点**

建立模型时主要抓住“求什么，设什么，列什么，限制什么”四个关键问题.

“求什么”就是弄清楚要解决什么问题，完成什么任务.

“设什么”就是弄清楚这个问题有哪些因素，谁是核心因素，通常设核心因素为自变量.

“列什么”就是把问题已知条件用所设变量表示出来，可以是方程、函数、不等式等.

“限制什么”主要是指自变量应满足的限制条件，在实际问题中，除了要使函数有意义外，还要考虑变量的实际含义，如人不能是半个等.

### 应用迁移

通信技术中经常用到香农公式$C=W\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$，它表示在受噪声干扰的信道中，最大信息传递速率$C$取决于信道带宽$W$、信道内信号的平均功率$S$、信道内部的高斯噪声功率$N$的大小，其中$\frac{S}{N}$叫做信噪比.当信噪比比较大时，公式中真数中的1可以忽略不计.按照香农公式，由于技术提升，带宽$W$在原来的基础上增加20%，信噪比$\frac{S}{N}$从1 000提升至5 000，则$C$大约增加了(附：lg 2≈0.301 0)　(　　)

A.48%　　B.37%

C.28%　　D.15%

A　**解析**：由题意可得，当$\frac{S}{N}=1\ 000$时，$C_1\approx W\log_2 1\ 000$，

当$\frac{S}{N}=5\ 000$时，$C_2\approx 1.2W\log_2 5\ 000$，

所以$\frac{C_2}{C_1}=\frac{1.2W\log_2 5\ 000}{W\log_2 1\ 000}=\frac{6\log_2 5\ 000}{5\log_2 1\ 000}=\frac{6\lg 5\ 000}{5\lg 1\ 000}=\frac{6(\lg 1\ 000+\lg 5)}{15}=\frac{2(3+1-\lg 2)}{5}=\frac{8-2\lg 2}{5}\approx\frac{8-2\times 0.301\ 0}{5}\approx 1.48$，

所以$C$的增长率约为48%.故选A.

## 任务3 选择拟合函数解决实际问题

### 探究活动

**例2**　某学校为更好地繁荣校园文化，展示阳光少年风采，举办了创意展演活动.该活动得到了许多同学的关注与肯定，并且随着活动的推进，也有越来越多的同学参与其中.已知前3周参与活动的同学人数如下表所示.

| 活动举办周数 $x$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 参与活动的同学人数 $y$ | 18 | 24 | 33 |

(1)依据表中数据，从下列三个模型中选择一个恰当的模型，估算 $x(x\in\mathbf{N}^*)$ 周后参与活动的同学人数 $y$，并求出你选择模型的解析式：①$y=\frac{t}{x}+b(t>0)$，②$y=d\cdot\log_r x+s(r>0$，且 $r\neq1)$，③$y=m\cdot a^x+n(a>0$，且 $a\neq1)$；

(2)已知该学校现有学生 300 人，请你计算几周后，全校将有超过一半的学生参与其中.(参考数据：$\lg 2\approx0.301$，$\lg 3\approx0.477$)

**解**：(1)从题表中数据可得，该函数单调递增，故不可能是①，

且函数增长的速度越来越快，所以选择③$y=m\cdot a^x+n(a>0$，且 $a\neq1)$.

代入表格中的三组数据，可得 $\begin{cases}18=ma+n,\\24=ma^2+n,\\33=ma^3+n,\end{cases}$ 解得

$\begin{cases}m=8,\\a=\frac{3}{2},\\n=6,\end{cases}$ 所以 $y=8\times\left(\frac{3}{2}\right)^x+6,x\in\mathbf{N}^*$.

(2)由(1)可知 $y=8\times\left(\frac{3}{2}\right)^x+6,x\in\mathbf{N}^*$，

令 $8\times\left(\frac{3}{2}\right)^x+6>\frac{1}{2}\times300$，

整理得 $x>\log_{\frac{3}{2}}18=\frac{\lg 18}{\lg\frac{3}{2}}=\frac{\lg 2+2\lg 3}{\lg 3-\lg 2}\approx\frac{0.301+2\times0.477}{0.477-0.301}\approx7.131$，且 $x\in\mathbf{N}^*$，则 $x\geqslant8$.

所以 8 周后，全校将有超过一半的学生参与其中.

## 【探究总结】

(1)此类问题求解的关键是首先利用待定系数法求出函数解析式，也就是借助数据信息，得到相关方程，进而求出参数.

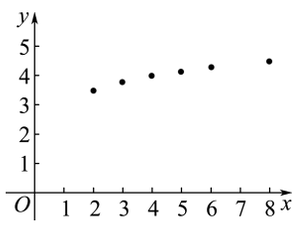
(2)函数模型的选择与数据的拟合是数学建模中最核心的内容，解题的关键在于通过对已知数据的分析，得出重要信息，根据解题积累的经验，从已有的各类型函数中选择拟合函数，进行数据的拟合.

## 应用迁移

在密闭培养环境中，某类细菌的繁殖在初期会较快，随着单位体积内细菌数量的增加，繁殖速度又会减慢.在一次实验中，检测到这类细菌在培养皿中的数量 $y$(单位：百万个)与培养时间 $x$(单位：h)的关系为：

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 3.5 | 3.8 | 4 | 4.16 | 4.3 | 4.5 |

根据表格中的数据画出散点图如下：




为了描述从第 2 h 开始细菌数量随时间变化的关系，现有以下三种模型供选择：

①$y=a\log_2 x+b$，②$y=a\sqrt{x-3}+b$，③$y=2^{x-a}+b$.

(1)选出你认为最符合实际的函数模型，并说明理由；

(2)利用(4,4)和(8,4.5)这两组数据求出你选择的函数模型的解析式，并预测从第 2 h 开始，至少再经过多少小时，细菌数量达到 5 百万个.

**解**：(1)依题意，所选函数必须满足三个条件：①定义域包含$[2,+\infty)$；②增函数；③随着自变量的增加，函数值的增长速度变小.

函数 $y=a\sqrt{x-3}+b$ 的定义域为$[3,+\infty)$，$x=2$ 时无意义；函数 $y=2^{x-a}+b$ 随着自变量的增加，函数值的增长速度变大；函数 $y=a\log_2 x+b$ 可以同时满足上述三个条件.

所以应该选择函数 $y=a\log_2 x+b$.

(2)依题意知 $\begin{cases}a\log_2 4+b=2a+b=4,\\a\log_2 8+b=3a+b=4.5,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\b=3,\end{cases}$

所以 $y=\frac{1}{2}\log_2 x+3$.

令 $y=\frac{1}{2}\log_2 x+3\geqslant5$，解得 $x\geqslant16$.

所以，至少再经过 14 h，细菌数量达到 5 百万个.

# 课后素养评价(三十九)

## 基础落实

**1.** 据研究者收集的信息,池塘里荷花开放的程度有如下规律:第一天开放的只是一小部分;第二天,它们会以前一天的两倍速度开放;到第29天时荷花恰好开放了一半,到第30天才会开满整个池塘.下列函数能较好地反映池塘里荷花开放的程度 $y$ 与时间 $x(1\leqslant x\leqslant 30,x\in\mathbf{N}^*)$ 之间的变化规律的是 (　　)

A.$y=2x$　　B.$y=2^x$

C.$y=x^2$　　D.$y=\log_2 x$

B　**解析**:由"到第29天时荷花恰好开满了一半,到第30天才会开满整个池塘"可得,当 $x=30$ 时的 $y$ 值是 $x=29$ 时的 $y$ 值的两倍,所以只有指数函数 $y=2^x$ 符合.故选B.

**2.** 某市生产总值连续两年持续增加.第一年的增长率为 $p$,第二年的增长率为 $q$,则该市这两年生产总值的年平均增长率为 (　　)

A.$\dfrac{p+q}{2}$　　B.$\dfrac{(1+p)(1+q)-1}{2}$

C.$\sqrt{pq}$　　D.$\sqrt{(1+p)(1+q)}-1$

D　**解析**:设年平均增长率为 $x$,原生产总值为 $a(a>0)$,则 $a(1+p)(1+q)=a(1+x)^2$,解得 $x=\sqrt{(1+p)(1+q)}-1$.故选D.

**3.** 设在海拔 $x$ m处的大气压强为 $y$ kPa,$y$ 与 $x$ 的函数关系可近似表示为 $y=100\mathrm{e}^{ax}$.已知在海拔1 000 m处的大气压强为90 kPa,根据函数关系式,在海拔2 000 m处的大气压强为_____kPa.

81　**解析**:将(1 000,90)代入 $y=100\mathrm{e}^{ax}$,可得 $a=\dfrac{\ln 0.9}{1\,000}$,$y$ 与 $x$ 的函数关系可近似地表示为 $y=100\mathrm{e}^{\frac{\ln 0.9}{1\,000}x}$.当 $x=2\,000$ 时,$y=100(\mathrm{e}^{\ln 0.9})^2=81$.

## 能力提升

**1.** 将甲桶中的 $a$ L水缓慢注入空桶乙中,$t$ min后甲桶中剩余的水量 $y$(单位:L)符合指数衰减规律,且 $y=a\mathrm{e}^{nt}$($n$ 为常数).若5 min后甲桶和乙桶的水量相等,又过了 $m$ min后甲桶中的水只有 $\dfrac{a}{8}$ L,则 $m$ 的值为 (　　)

A.7　　B.8

C.9　　D.10

D　**解析**:令 $\dfrac{1}{8}a=a\mathrm{e}^{nt}$,即 $\dfrac{1}{8}=\mathrm{e}^{nt}$.由已知得 $\dfrac{1}{2}=\mathrm{e}^{5n}$,故 $\dfrac{1}{8}=\mathrm{e}^{15n}$,比较知 $t=15$,$m=15-5=10$.

**2.** 已知函数 $t=-144\lg\left(1-\dfrac{N}{100}\right)$ 表示打字速度与所需学习时间的关系,其中 $t$(单位:h)表示打字速度达到 $N$(单位:字/min)所需的学习时间,则打字速度要达到90字/min的水平,所需的学习时间是 (　　)

A.144 h　　B.90 h

C.60 h　　D.40 h

A　**解析**:由 $N=90$ 可知,$t=-144\lg\left(1-\dfrac{90}{100}\right)=144$(h).

**3.** 燕子每年秋天都要从北方飞向南方过冬.专家发现两岁燕子的飞行速度 $v$(单位:m/s)可以表示为 $v=5\log_2\dfrac{Q}{10}$,其中 $Q$ 表示燕子耗氧量的单位数.某只两岁燕子耗氧量的单位数为 $Q_1$ 时的飞行速度为 $v_1$,耗氧量的单位数为 $Q_2$ 时的飞行速度为 $v_2$.若 $v_2-v_1=7.5$,则 $\dfrac{Q_1}{Q_2}$ 的值为_____.

$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　**解析**:因为 $v_2-v_1=7.5$,所以 $v_1-v_2=-7.5$,所以 $5\log_2\dfrac{Q_1}{10}-5\log_2\dfrac{Q_2}{10}=-7.5\Rightarrow\log_2\dfrac{Q_1}{Q_2}=-\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow\dfrac{Q_1}{Q_2}=2^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

## 自我超越

在一次排练演习中,某队伍长 $L$ m,以速度 $v_1$ 匀速前进,排尾的传令兵因传达命令赶赴排头,到达排头后立即返回,往返速度均为 $v_2$.当传令兵回到排尾时,全队正好前进了 $L$ m,则传令兵回到排尾时所走的路程为 (　　)

A.$(1+\sqrt{2})L$ m　　B.$(2+\sqrt{2})L$ m

C.$(1+\sqrt{3})L$ m　　D.$(2+\sqrt{3})L$ m

A　**解析**:设传令兵从排尾到排头的时间为 $t_1$,从排头返回排尾的时间为 $t_2$,总共用的时间为 $t$,传令兵回到排尾时所走的路程为 $S$,则 $(v_2-v_1)t_1=L$,得 $t_1=\dfrac{L}{v_2-v_1}$.$(v_2+v_1)t_2=L$,则 $t_2=\dfrac{L}{v_2+v_1}$,则 $v_1t=L$,所以 $v_1\left(\dfrac{L}{v_2-v_1}+\dfrac{L}{v_2+v_1}\right)=L$.故 $v_2=v_1(1+\sqrt{2})$ 或 $v_2=v_1(1-\sqrt{2})<0$ 舍去,则 $S=v_2\cdot t=v_2\cdot\dfrac{L}{v_1}=(1+\sqrt{2})v_1\cdot\dfrac{L}{v_1}=(1+\sqrt{2})L$.

★★★

# 迁　移　应　用

## 类型一　根据函数的零点情况求参数

**例 1**　(1)若函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有三个零点 $0,1,x_0$，且 $x_0\in(1,2)$，则 $a$ 的取值范围是（　　）

A.$(-2,0)$　　B.$(1,2)$

C.$(2,3)$　　D.$(-3,-2)$

(2)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-1,x\leqslant 0,\\-2+\ln x,x>0,\end{cases}$ 若函数 $y=f(x)-k$ 有三个零点，则实数 $k$ 的取值范围为（　　）

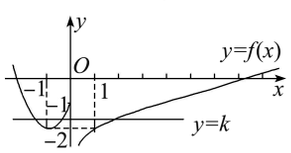
A.$(-2,-1]$　　B.$[-2,-1]$

C.$(1,2]$　　D.$[1,2)$

(1)D　**解析**：因为函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有三个零点 $0,1,x_0$，所以 $\begin{cases}f(0)=c=0,\\f(1)=1+a+b+c=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}c=0,\\a+b=-1,\end{cases}$ 所以 $f(x)=x^3+ax^2+(-1-a)x=x(x-1)(x+a+1)$，所以 $x_0=-1-a$. 又 $x_0\in(1,2)$，所以 $1<-1-a<2$，解得 $-3<a<-2$.

(2)A　**解析**：当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=(x+1)^2-2$；当 $x>0$ 时，$f(x)=-2+\ln x$，作出 $f(x)$ 的图象如图所示. 令 $f(x)-k=0$，得 $f(x)=k$，$y=f(x)-k$ 有三个零点，由图象知，$-2<k\leqslant -1$.




**【规律方法】**

**已知函数有零点（方程有根）求参数值（取值范围）的常用方法**

(1)直接法：直接求解方程得到方程的根，再通过解不等式确定参数范围.

(2)分离参数法：先将参数分离，转化成求函数的值域问题加以解决.

(3)数形结合法：先对解析式变形，进而构造两个函数，然后在同一平面直角坐标系中画出两个函数的图象，利用数形结合的方法求解.

**【对点训练】**

已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}$.

(1)证明：$f(x)$ 为奇函数.

(2)求方程 $f(x)=\frac{3}{2}$ 的解.

(3)若函数 $h(x)=\log_m f(x)(0<m<1)$ 在 $[1,2]$ 上的最大值为 $-1$，求 $m$ 的值.

(1)**证明**：函数 $f(x)=e^x-e^{-x}$ 的定义域为 **R**，

$f(-x)=e^{-x}-e^x=-(e^x-e^{-x})=-f(x)$，

所以函数 $f(x)=e^x-e^{-x}$ 为奇函数.

(2)**解**：令 $e^x=t(t>0)$，则 $f(x)=e^x-e^{-x}=\frac{3}{2}$ 等价于 $t^2-\frac{3}{2}t-1=0$，

即 $2t^2-3t-2=0$，解得 $t=-\frac{1}{2}$（舍），$t=2$，

所以 $e^x=2$，即 $x=\ln 2$，

所以方程 $f(x)=\frac{3}{2}$ 的解为 $x=\ln 2$.

(3)**解**：因为函数 $y=e^x$，$y=-e^{-x}$ 均为定义域 **R** 上的增函数，

所以函数 $f(x)=e^x-e^{-x}$ 在 **R** 上单调递增，故 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上也单调递增.

因为 $0<m<1$，函数 $y=\log_m u$ 为减函数，所以 $h(x)=\log_m f(x)(0<m<1)$ 在 $[1,2]$ 上单调递减，

所以函数 $h(x)$ 在 $[1,2]$ 上的最大值为 $h(1)=\log_m f(1)=-1$，即 $f(1)=e-\frac{1}{e}=\frac{1}{m}$，解得 $m=\frac{e}{e^2-1}$，

所以 $m=\frac{e}{e^2-1}$.

## 类型二　跨学科整合应用

**例 2**　物理学中，声波在单位时间内作用在与其传递方向垂直的单位面积上的能量称为声强 $I$（$W/cm^2$）. 但在实际生活中，常用声音的声强级 $D$（dB）来度量. 声强级 $D$（dB）与声强 $I$（$W/cm^2$）之间的函数关系可采用函数模型 $D=m\lg I+n$ 进行模拟，已知当声强 $I=10^{-11}\ W/cm^2$ 时，声强级 $D=10$ dB；当声强 $I=$

$10^{-10}$ W/cm$^2$ 时，声强级 $D=20$ dB.

(1)求上述模型的函数解析式；

(2)声强级 $D_1=16$ dB，对应的声强为 $I_1$，声强级 $D_2=36$ dB，对应的声强为 $I_2$，求$\frac{I_2}{I_1}$；

(3)当声强级 $D$ 大于 60 分贝时属于噪声，会产生噪声污染，城市中某点 $P$ 共受到两个声源的影响，这两个声源的声强分别是 $I_3$ 和 $I_4$，且$\frac{1}{I_3}+\frac{4}{I_4}=10^5$.已知点 $P$ 的声强等于声强 $I_3$ 与 $I_4$ 之和.请根据(1)中的函数模型，判断 $P$ 点是否受到噪声污染的干扰，并说明理由.($\lg 3\approx0.48$)

**解**：(1)由已知得$\begin{cases}10=m\lg 10^{-11}+n,\\20=m\lg 10^{-10}+n,\end{cases}$

所以$\begin{cases}-11m+n=10,\\-10m+n=20,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=10,\\n=120.\end{cases}$

所以 $D=10\lg I+120$.

(2)由(1)得，$D=10\lg I+120$.

将 $D_1=16$ dB，$D_2=36$ dB 代入上式，

得$\begin{cases}16=10\lg I_1+120,\\36=10\lg I_2+120,\end{cases}$

两式相减，得 $20=10(\lg I_2-\lg I_1)=10\lg\frac{I_2}{I_1}$，所以$\frac{I_2}{I_1}=100$.

(3)$I_3+I_4=(I_3+I_4)\left(\frac{1}{I_3}+\frac{4}{I_4}\right)\cdot10^{-5}=10^{-5}\left(5+\frac{I_4}{I_3}+\frac{4I_3}{I_4}\right)\geqslant9\times10^{-5}$，

当且仅当$\frac{I_4}{I_3}=\frac{4I_3}{I_4}$，即 $I_4=2I_3=6\times10^{-5}$ 时，等号成立.

所以点 $P$ 处的声强级 $D\geqslant10\lg(9\times10^{-5})+120=20\lg 3+70\approx79.6>60$，

所以 $P$ 点会受到噪声污染的干扰.

**【规律方法】**

**解答跨学科整合应用问题的解题技法**

**1.**提炼变量关系，建立数学模型：从背景中提取关键量，确定函数类型(如对数、指数)；

**2.**利用已知条件，求解模型参数：代入给定数据列方程组，解出待定系数；

**3.**运用模型运算，解答具体问题：进行代数计算、比较大小或求最值等数学操作；

**4.**结合问题情景，解释数学结论：将计算结果转化为实际学科结论，完成问题回答.

**【对点训练】**

手机实际充电过程中，为保护电池健康，在不同电量时往往采用不同的模式充电，在某次实验室针对某旧电池从某个电量开始充电到 100% 的模拟充电试验中，手机电量 $Q$(单位：%)与充电时间 $t$(单位：min)近似满足：当 $0\leqslant t\leqslant10$ 时，$Q(t)=55\cdot2^{\frac{t}{10}-1}$；当 $10<t\leqslant60$ 时，$Q(t)=at^2-\frac{t}{5}+b$；当 $t>60$ 时，$Q(t)=\sqrt{15t}+50$.设 $t=0$ 为该旧电池开始充电的时刻；当 $t=10$ 时，认为电量不产生跃变.已知$Q(60)=80$，$Q(t)$ 单调递增.

(1)求该旧电池开始充电时的电量及充满电的时刻；

(2)求 $a$，$b$ 的值.

**解**：(1)由题意，开始充电的时刻为 $t=0$，$Q(t)=55\cdot2^{\frac{t}{10}-1}$，

将 $t=0$ 代入得 $Q(0)=55\cdot2^{\frac{0}{10}-1}=55\cdot2^{-1}=27.5$，

故该旧电池开始充电时的电量为 27.5%.

充满电即电量达到 100%，即 $Q(t)=100$，

已知 $Q(t)$ 单调递增，且 $Q(60)=80$，故充满电的时刻 $t$ 必大于 60，此时 $Q(t)=\sqrt{15t}+50$，

令 $Q(t)=100$，即$\sqrt{15t}+50=100$，解得 $t=\frac{500}{3}$，

故充满电的时刻是$\frac{500}{3}$ min.

(2)由于当 $t=10$ 时，认为电量不产生跃变，故当 $t=10$ 时，第一段和第二段函数值相等，

由第一段函数知 $Q(10)=55\cdot2^{\frac{10}{10}-1}=55$，由第二段函数知 $Q(10)=100a-2+b$，

令两式相等得 $100a-2+b=55$，即 $100a+b=57$.

$t=60$ 时，$Q(60)=a\times60^2-\frac{60}{5}+b=80$，化简得 $3\,600a+b=92$.

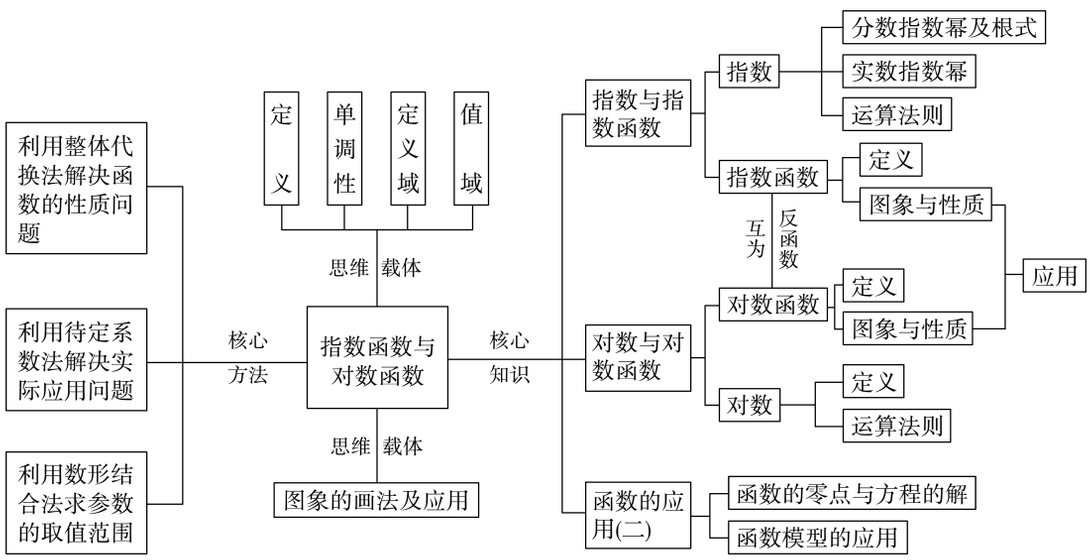
联立 $100a+b=57$，$3\,600a+b=92$，解得 $a=\frac{1}{100}$，$b=56$，

所以 $a=\frac{1}{100}$，$b=56$.

★★★

# 重　构　拓　展

## 多维体系构建




**【问题探究】**

1.指数和对数的概念都有现实背景，你能举出一些实际例子吗？

2.回忆指数函数、对数函数的研究过程，你能由此说说如何研究一类函数吗？例如研究的内容、过程和方法.

3.不同函数模型刻画了现实世界不同类型问题的变化规律，你能说说指数函数和对数函数分别刻画了怎样的变化规律吗？你能举出“直线上升”“对数增长”“指数爆炸”的实际例子吗？

4.你能举例说明函数的零点与方程的解的关系吗？在什么条件下，函数在$(a,b)$内一定有零点？

5.你能说说用二分法求方程近似解的一般步骤吗？

6.你能结合实例说明应用函数模型解决问题的基本过程吗？

# 单元测试卷(四)

(考查范围:第四章　时间:120 分钟　分值:150 分)

**一、单项选择题**:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

**1.**函数 $f(x)=\ln(x^2-x)$的定义域为　(　　)

A.$(0,1)$　　B.$[0,1]$

C.$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$　　D.$(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$

C　**解析**:由 $x^2-x>0$,得 $x>1$ 或 $x<0$.

**2.**函数 $f(x)=2a^{x-1}-1(a>0$,且 $a\neq1)$的图象恒过定点　(　　)

A.$(1,-1)$　　B.$(1,1)$

C.$(0,1)$　　D.$(0,-1)$

B　**解析**:令 $x-1=0$,得 $x=1$,则 $f(1)=1$,

所以函数 $f(x)$的图象恒过定点$(1,1)$.

**3.**设函数 $f(x)=\log_2x+2^x-3$,则函数 $f(x)$的零点所在的区间为　(　　)

A.$(0,1)$　　B.$(1,2)$

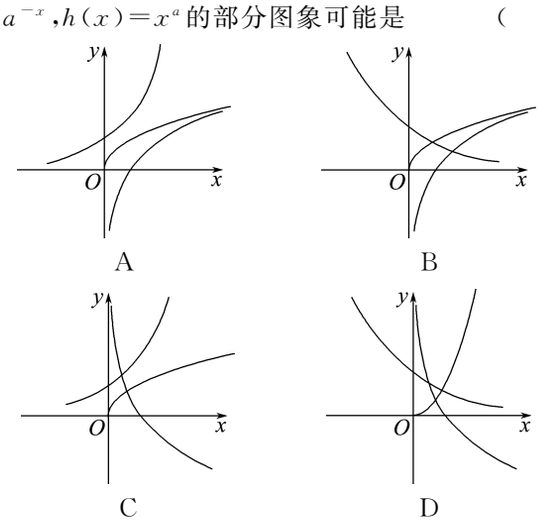
C.$(2,3)$　　D.$(3,4)$

B　**解析**:因为函数 $f(x)=\log_2x+2^x-3$ 在$(0,+\infty)$上单调递增,

且 $f(1)=\log_21+2^1-3=-1<0$,$f(2)=\log_22+2^2-3=2>0$,所以 $f(1)f(2)<0$.

根据函数零点存在定理可知,函数 $f(x)$的零点在区间$(1,2)$内.

**4.**在同一个直角坐标系中,函数 $f(x)=\log_ax$,$g(x)=a^{-x}$,$h(x)=x^a$的部分图象可能是　(　　)




C　**解析**:因为 $f(x)$与 $g(x)$的单调性一定相反,且 $f(x)$与 $g(x)$的图象均不过原点,故排除 AD;在 BC 选项中,过原点的图象为幂函数 $h(x)=x^a$的图象,由图象可知 $0<a<1$,所以 $f(x)=\log_ax$ 单调递减,$g(x)=a^{-x}$单调递增,故排除 B.故选 C.

**5.**设 $p:\log_2x\leqslant0$,$q:2^x\leqslant2$,则 $p$ 是 $q$ 的　(　　)

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

A　**解析**:因为 $\log_2x\leqslant0$,所以 $0<x\leqslant1$,即 $p:0<x\leqslant1$.因为 $2^x\leqslant2$,所以 $x\leqslant1$,即 $q:x\leqslant1$,所以 $p$ 是 $q$ 的充分不必要条件.故选 A.

**6.**根据有关资料,围棋状态空间复杂度的上限 $M$ 约为 $3^{361}$,而可观测宇宙中普通物质的原子总数 $N$ 约为 $10^{80}$,则下列各数中与$\dfrac{M}{N}$最接近的是(参考数据:$\lg3\approx0.48$)　(D)

A.$10^{33}$　　B.$10^{53}$　　C.$10^{73}$　　D.$10^{93}$

**7.**下列式子中,错误的是　(　　)

A.$2.1^{\frac{2}{3}}>2.3^{\frac{2}{3}}>2.1^{\frac{1}{3}}$

B.$2^{-0.2}<2^{1.6}<0.4^{-2.5}$

C.$\log_{0.9}0.7>\log_{0.9}0.8>\log_{0.8}0.9$

D.$\log_23>\log_34>\log_45$

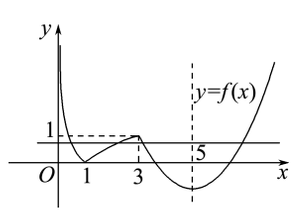
A　**解析**:因为 $2.3^{\frac{2}{3}}>2.1^{\frac{2}{3}}>2.1^{\frac{1}{3}}$,选项 A 错误;因为$0.4^{-2.5}=2.5^{2.5}>2^{2.5}>2^{1.6}>2^{-0.2}$,选项 B 正确;因为 $\log_{0.9}0.7>\log_{0.9}0.8>\log_{0.9}0.9>\log_{0.8}0.9$,选项 C 正确;$\log_23-\log_34=\dfrac{\lg3}{\lg2}-\dfrac{\lg4}{\lg3}=\dfrac{(\lg3)^2-\lg2\lg4}{\lg2\lg3}>\dfrac{(\lg3)^2-\left(\frac{\lg2+\lg4}{2}\right)^2}{\lg2\lg3}=\dfrac{(\lg9)^2-(\lg8)^2}{4\lg2\lg3}>0$,即 $\log_23>\log_34$,同理可得 $\log_34>\log_45$,即 $\log_23>\log_34>\log_45$,选项 D 正确.

**8.**已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\log_3x|,0<x\leqslant3,\\ \dfrac{1}{2}x^2-5x+\dfrac{23}{2},x>3,\end{cases}$若 $a<b<c<d$,$f(a)=f(b)=f(c)=f(d)$,则 $ab(c+d)=$　(　　)

A.25　　B.20

C.10　　D.5

C　**解析**:由 $f(x)=\begin{cases}|\log_3x|,0<x\leqslant3,\\ \dfrac{1}{2}x^2-5x+\dfrac{23}{2},x>3,\end{cases}$得其图象如下.



因为 $a<b<c<d$，且 $f(a)=f(b)=f(c)=f(d)$，所以 $0<a<1<b<3$，且 $\frac{c+d}{2}=5$，即 $c+d=10$；由 $f(a)=f(b)$，得 $|\log_3 a|=|\log_3 b|$，即 $-\log_3 a=\log_3 b$，可得 $\log_3(ab)=0$，即 $ab=1$，所以 $ab(c+d)=1\times10=10$. 故选 C.

**二、多项选择题**：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

**9.** 若函数 $y=a^x-(b+1)(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象过第一、三、四象限，则必有　（　）

A. $0<a<1$　　B. $a>1$

C. $b>0$　　D. $b<0$

BC　**解析**：若 $0<a<1$，则 $y=a^x-(b+1)$ 的图象必过第二象限，而函数 $y=a^x-(b+1)(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的图象过第一、三、四象限，所以 $a>1$.

当 $a>1$ 时，要使 $y=a^x-(b+1)$ 的图象过第一、三、四象限，则 $b+1>1$，即 $b>0$.

故选 BC.

**10.** 已知函数 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)$，则　（　）

A. $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内单调递增

B. $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递增，在 $(1,2)$ 内单调递减

C. $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称

D. $y=f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称

BC　**解析**：由题易知，$f(x)=\ln x+\ln(2-x)$ 的定义域为 $(0,2)$，$f(x)=\ln[x(2-x)]=\ln[-(x-1)^2+1]$. 由复合函数的单调性知，函数 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,2)$ 上单调递减，所以 A 错误，B 正确；$f(1-x)=\ln(1-x)+\ln(x+1)$，$f(1+x)=\ln(x+1)+\ln(1-x)$，所以 $f(1-x)=f(1+x)$，所以 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 C 正确；$f\left(\frac12\right)=\ln\frac12+\ln\left(2-\frac12\right)=\ln\frac34$，$f\left(\frac32\right)=\ln\frac32+\ln\left(2-\frac32\right)=\ln\frac34$，所以 $f\left(\frac12\right)=f\left(\frac32\right)=\ln\frac34$，所以 D 错误. 故选 BC.

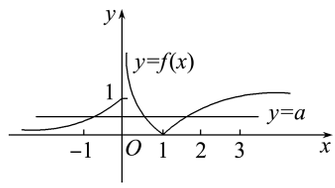
**11.** 设 $f(x)=\begin{cases}3^x,x\leqslant0,\\|\log_3 x|,x>0,\end{cases}$ 若 $f(x)-a=0$ 有三个不同的实数根，则实数 $a$ 的值可以是　（　）

A. $\frac12$　　B. 1

C. $-1$　　D. 2

AB　**解析**：由 $f(x)-a=0$，得 $a=f(x)$.

在同一平面直角坐标系中作出函数 $y=f(x)$ 及 $y=a$ 的图象，如图所示.




$f(x)-a=0$ 有三个不同的实数根等价于函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 有三个不同的交点. 由图象知，当 $0<a\leqslant1$ 时，直线 $y=a$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象有三个交点. 结合选项，可知实数 $a$ 的值可以是 $\frac12$ 或 1.

**三、填空题**：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

**12.** 用二分法求函数 $f(x)=x^3-2x-5$ 在区间 $(2,3)$ 内的零点时，取区间 $(2,3)$ 的中点 2.5，则 $f(x)$ 的下一个有零点的区间是_____.

$(2,2.5)$　**解析**：因为 $f(2)<0$，$f(2.5)>0$，所以下一个有零点的区间为 $(2,2.5)$.

**13.** 已知函数 $f(x)=ae^x+e^{-x}$ 的图象关于直线 $x=\ln2$ 对称，则 $a$ 的值为_____.

$\frac14$　**解析**：因为 $f(x)=ae^x+e^{-x}$ 的图象关于直线 $x=\ln2$ 对称，所以 $f(\ln2+x)=f(\ln2-x)$，即 $ae^{\ln2+x}+e^{-(\ln2+x)}=ae^{\ln2-x}+e^{-(\ln2-x)}$，即 $a(2\cdot e^x)+\frac{1}{2\cdot e^x}=a(2\cdot e^{-x})+\frac{e^x}{2}$，所以 $2a\cdot e^x+\frac{1}{2e^x}=\frac{2a}{e^x}+\frac{e^x}{2}$，即 $4a\cdot e^{2x}+1=4a+e^{2x}$，

即 $(4a-1)\cdot e^{2x}=4a-1$. 因为 $e^{2x}>0$，所以 $4a-1=0$，解得 $a=\frac14$.

**14.** 某地西红柿从 2 月 1 日开始上市，通过市场调查，得到西红柿种植成本 $Q$（单位：元/(100 kg)）与上市时间 $t$（单位：d）的数据如下表：

| 时间 $t$/d | 60 | 100 | 180 |
|---|---|---|---|
| 种植成本 $Q$/[元/(100 kg)] | 116 | 84 | 116 |

根据上表数据，从下列函数中选取一个函数描述西红柿种植成本 $Q$ 与上市时间 $t$ 的变化关系：$Q=at+b$，$Q=at^2+bt+c$，$Q=a\cdot b^t$，$Q=a\cdot\log_b t$. 利用你选取的函数，计算西红柿种植成本最低时的上市天数为_____，最低种植成本是_____元/(100 kg).

120　80　**解析**：因为随着时间的增加，种植成本先减少后增加，而且当 $t=60$ 和 $t=180$ 时种植成本相等，再结合题中给出的四种函数关系可知，种植成本与上市时间的变化关系应该用函数 $Q=$

$at^2+bt+c$ 描述.将表中数据(60,116),(100,84)和(180,116)代入解析式,

可得$\begin{cases}60^2a+60b+c=116,\\100^2a+100b+c=84,\\180^2a+180b+c=116,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=0.01,\\b=-2.4,\\c=224,\end{cases}$

所以 $Q=0.01t^2-2.4t+224=0.01(t-120)^2+80$.

故当上市天数为 120 时,种植成本取到最低,最低为 80 元/(100 kg).

故答案分别为 120 和 80.

**四、解答题**:本题共 5 小题,共 77 分.解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

**15.**(13 分)求下列各式的值.

(1)$\left(5\frac{1}{16}\right)^{0.5}-2\times\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}-2\times(\sqrt{2+\pi})^0\div\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$;

(2)$\log_5 35+2\log_{0.5}\sqrt{2}-\log_5\frac{1}{50}-\log_5 14+5^{\log_5 3}$.

**解**:(1)原式$=\left(\frac{9}{4}\right)^{2\times0.5}-2\times\left(\frac{4}{3}\right)^{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)}-2\times1\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{4}-2\times\frac{9}{16}-2\times\frac{9}{16}=0$.

(2)原式$=\log_5 35+\log_5 50-\log_5 14+\log_{2^{-1}}(\sqrt{2})^2+3=\log_5\left(\frac{35\times50}{14}\right)-1+3=\log_5 5^3-1+3=5$.

**16.**(15 分)某化工企业致力于改良工艺,使排放的废气中污染物的含量逐渐减少.设改良工艺前所排放的废气中污染物的含量为 $r_0$ mg/m$^3$,首次改良工艺后所排放的废气中污染物的含量为 $r_1$ mg/m$^3$,第 $n$ 次改良工艺后所排放的废气中污染物的含量为 $r_n$ mg/m$^3$,则可建立函数模型 $r_n=r_0-(r_0-r_1)\cdot5^{0.5n+p}(p\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}^*)$,其中 $n$ 是改良工艺的次数.现已知 $r_0=2$,$r_1=1.94$.

(1)试求改良工艺后所排放的废气中污染物的含量关于改良工艺的次数 $n$ 的函数解析式;

(2)若该地环保部门要求,企业所排放的废气中污染物的含量不能超过 0.08 mg/m$^3$,试问:至少进行多少次改良工艺才能使该企业所排放的废气中污染物的含量达标?(参考数据:lg 2≈0.3)

**解**:(1)由题意知,$r_0=2$,$r_1=1.94$,

所以当 $n=1$ 时,$r_1=r_0-(r_0-r_1)\cdot5^{0.5+p}$,

即 $1.94=2-(2-1.94)\times5^{0.5+p}$,解得 $p=-0.5$,

所以 $r_n=2-0.06\times5^{0.5n-0.5}(n\in\mathbf{N}^*)$.

故改良工艺后所排放的废气中污染物的含量关于改良工艺的次数 $n$ 的函数解析式为 $r_n=2-0.06\times5^{0.5n-0.5}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)由题意可得,$r_n=2-0.06\times5^{0.5n-0.5}\leqslant0.08$,

整理得 $5^{0.5n-0.5}\geqslant32$,

两边同时取常用对数,得 $0.5n-0.5\geqslant\frac{\lg 32}{\lg 5}$,

整理得 $n\geqslant2\times\frac{5\lg 2}{1-\lg 2}+1$.

将 $\lg 2\approx0.3$ 代入,得 $2\times\frac{5\lg 2}{1-\lg 2}+1\approx5.3$.

又 $n\in\mathbf{N}^*$,所以 $n\geqslant6$.

所以至少进行 6 次改良工艺才能使该企业所排放的废气中污染物的含量达标.

**17.**(15 分)已知函数 $f(x)=\log_2\frac{x}{8}\cdot\log_2(2x)$,$g(x)=4^x-2^{x+1}-3$.

(1)求函数 $f(x)$ 的值域;

(2)若不等式 $f(x)-g(a)\leqslant0$ 对任意实数 $a\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ 恒成立,试求实数 $x$ 的取值范围.

**解**:(1)$f(x)=\log_2\frac{x}{8}\cdot\log_2(2x)=(\log_2x-3)(\log_2x+1)=(\log_2x)^2-2\log_2x-3=(\log_2x-1)^2-4\geqslant-4$,

即 $f(x)$ 的值域为$[-4,+\infty)$.

(2)因为不等式 $f(x)-g(a)\leqslant0$ 对任意实数 $a\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ 恒成立,所以 $f(x)\leqslant g(a)_{\min}$.

$g(a)=4^a-2^{a+1}-3=(2^a)^2-2\times2^a-3=(2^a-1)^2-4$,

令 $t=2^a$,因为 $a\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,所以 $t\in[\sqrt{2},4]$.

设 $h(t)=(t-1)^2-4$,$t\in[\sqrt{2},4]$,

当 $t=\sqrt{2}$ 时,$h(t)$ 取得最小值 $-1-2\sqrt{2}$,

即 $g(a)_{\min}=-1-2\sqrt{2}$,

所以 $f(x)\leqslant-1-2\sqrt{2}$,即 $(\log_2x-1)^2-4\leqslant-1-2\sqrt{2}$,

所以 $1-\sqrt{2}\leqslant\log_2x-1\leqslant\sqrt{2}-1$,

即 $2-\sqrt{2}\leqslant\log_2x\leqslant\sqrt{2}$,解得 $2^{2-\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant2^{\sqrt{2}}$.

所以实数 $x$ 的取值范围为$[2^{2-\sqrt{2}},2^{\sqrt{2}}]$.

**18.**(17 分)已知函数 $f(x)=a\cdot3^x+\frac{1}{3^{x-1}}$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数.

(1)求 $a$ 的值;

(2)若 $g(x)=9^x+9^{-x}+mf(x)+m^2-1$,求函数

$g(x)$的最小值.

**解**:(1)因为 $f(x)=a\cdot 3^x+\frac{1}{3^{x-1}}=a\cdot 3^x+3\cdot 3^{-x}$,所以 $f(-x)=a\cdot 3^{-x}+3\cdot 3^x$.

又因为 $f(x)$是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数,所以 $a\cdot 3^{-x}+3\cdot 3^x=a\cdot 3^x+3\cdot 3^{-x}$,

即$(3-a)(3^x-3^{-x})=0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,则 $a=3$.

(2)由(1)知,$f(x)=3(3^x+3^{-x})$,则 $g(x)=3^{2x}+3^{-2x}+3m(3^x+3^{-x})+m^2-1=(3^x+3^{-x})^2+3m(3^x+3^{-x})+m^2-3$.

令 $t=3^x+3^{-x}$,由基本不等式可得 $t\geqslant 2$,当且仅当 $x=0$ 时,等号成立,

则 $h(t)=t^2+3mt+m^2-3$,$t\in[2,+\infty)$.

①当 $-\frac{3m}{2}\leqslant 2$,即 $m\geqslant-\frac{4}{3}$ 时,$h(t)=t^2+3mt+m^2-3$ 在$[2,+\infty)$上单调递增,

则 $h(t)_{\min}=h(2)=m^2+6m+1$,

即 $g(x)_{\min}=m^2+6m+1$;

②当 $-\frac{3m}{2}>2$,即 $m<-\frac{4}{3}$ 时,$h(t)=t^2+3mt+m^2-3$ 在$\left(2,-\frac{3m}{2}\right)$上单调递减,在$\left(-\frac{3m}{2},+\infty\right)$上单调递增,

则 $h(t)_{\min}=h\left(-\frac{3m}{2}\right)=\left(-\frac{3m}{2}\right)^2+3m\cdot\left(-\frac{3m}{2}\right)+m^2-3=-\frac{5}{4}m^2-3$,即 $g(x)_{\min}=-\frac{5}{4}m^2-3$.

综上所述,$g(x)_{\min}=\begin{cases}-\frac{5}{4}m^2-3, & m<-\frac{4}{3},\\ m^2+6m+1, & m\geqslant-\frac{4}{3}.\end{cases}$

**19.**(17分)若函数 $f(x)$满足对于任意正实数 $m$,$n$,都有 $f(m)>0$,$f(n)>0$,且 $f(m)+f(n)<f(m+n)$,则称函数 $f(x)$为“速增函数”.

(1)试判断函数 $f_1(x)=x^2$ 与 $f_2(x)=\log_2(x+1)$是不是“速增函数”;

(2)若函数 $g(x)=2^x-1+2a(2^{-x}-1)$为“速增函数”,求 $a$ 的取值范围;

(3)若函数 $f(x)$为“速增函数”,且 $f(1)=1$,求证:对任意 $x\in(2^{k-1},2^k)(k\in\mathbf{N}^*)$,都有$f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)>\frac{x}{2}-\frac{2}{x}$.

(1)**解**:对于函数 $f_1(x)=x^2$,当 $m>0$,$n>0$ 时,$f_1(m)=m^2>0$,$f_1(n)=n^2>0$.

又 $f_1(m)+f_1(n)-f_1(m+n)=m^2+n^2-(m+n)^2=-2mn<0$,

所以 $f_1(m)+f_1(n)<f_1(m+n)$,

故函数 $f_1(x)=x^2$ 是“速增函数”.

对于函数 $f_2(x)=\log_2(x+1)$,当 $m=n=1$ 时,$f_2(m)+f_2(n)=2>\log_2 3=f_2(m+n)$,

故函数 $f_2(x)=\log_2(x+1)$不是“速增函数”.

(2)**解**:当 $n>0$ 时,由函数 $g(x)=2^x-1+2a(2^{-x}-1)$是“速增函数”,

可知 $g(n)=2^n-1+2a(2^{-n}-1)>0$,即$(2^n-1)(2^n-2a)>0$ 对一切正实数 $n$ 恒成立.

又 $2^n-1>0$,可得 $2a<2^n$ 对一切正实数 $n$ 恒成立,所以 $a\leqslant\frac{1}{2}$.

由 $g(m)+g(n)<g(m+n)$,可得 $2^{m+n}-2^m-2^n+1+2a(2^{-m-n}-2^{-m}-2^{-n}+1)>0$,

即 $2^n(2^m-1)-(2^m-1)+2a(2^{-m}-1)(2^{-n}-1)=(2^m-1)(2^n-1)+2a(2^{-m}-1)(2^{-n}-1)=(2^m-1)(2^n-1)+2a\cdot 2^{-m-n}(2^m-1)(2^n-1)>0$,

故$(2^m-1)(2^n-1)(2^{m+n}+2a)>0$.

又$(2^n-1)(2^m-1)>0$,则 $2^{m+n}+2a>0$.

由 $2^{m+n}+2a>0$ 对一切正实数 $m$,$n$ 恒成立,可得 $2a+1\geqslant 0$,即 $a\geqslant-\frac{1}{2}$.

综上可知,$a$ 的取值范围是$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

(3)**证明**:由函数 $f(x)$为“速增函数”,可知对于任意正实数 $m$,$n$,

都有 $f(m)>0$,$f(n)>0$,且 $f(m)+f(n)<f(m+n)$.

令 $m=n$,可知 $f(2m)>2f(m)$,即$\frac{f(2m)}{f(m)}>2$,

故对于任意正整数 $k$ 与正数 $m$,都有$\frac{f(2^km)}{f(m)}=\frac{f(2^km)}{f(2^{k-1}m)}\cdot\frac{f(2^{k-1}m)}{f(2^{k-2}m)}\cdot\ldots\cdot\frac{f(2m)}{f(m)}>2^k$,

对任意 $x\in(2^{k-1},2^k)(k\in\mathbf{N}^*)$,可得$\frac{1}{x}\in(2^{-k},2^{1-k})$.

又 $f(1)=1$,所以 $f(x)>f(x-2^{k-1})+f(2^{k-1})>f(2^{k-1})\geqslant 2^{k-1}f(1)=\frac{2^k}{2}>\frac{x}{2}$,

同理 $f\left(\frac{1}{x}\right)<f(2^{1-k})-f\left(2^{1-k}-\frac{1}{x}\right)<f(2^{1-k})\leqslant 2^{1-k}f(1)=2^{1-k}<\frac{2}{x}$,

故 $f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)>\frac{x}{2}-\frac{2}{x}$.

# 第五章 三角函数

## 单元概览

### 单元导航

现实世界中许多运动和变化都有循环往复、周而复始的规律，这种变化规律就是周期性，而三角函数就是刻画周期性变化规律的函数模型.本单元重点研究三角函数是怎样的函数、具有哪些特性，并利用三角函数模型刻画各种周期性变化现象，提升数学建模素养.

### 学习目标

**1.**在弧度制下探究三角函数的定义、图象、性质，从形和数两个方面阐明参数 $\omega$，$\varphi$，$A$ 的意义，探究两角和与差的正弦、余弦、正切公式及它们之间的联系.

**2.**利用整体代换思想解决与三角函数有关的复合函数的性质问题，对生活中的周期性现象构建三角函数模型，解决简单的实际问题.

**3.**从整体上把握任意角和弧度制、三角函数的图象与性质、三角恒等变换，构建单元知识结构，说出本单元的逻辑及其在整个函数主题中的地位.

### 核心概念

弧度制的本质是用线段长度度量角的大小，它统一了三角函数自变量和函数值的单位，使三角函数成为从实数集到实数集的对应.

三角函数是一类最典型的周期函数，是描述一般周期函数的基石.三角函数是描述客观世界中周期性变化规律的重要数学模型，在数学和其他领域中具有重要的作用.

### 学法指导

通过生活实例感知角度范围扩充的必要性，从而掌握角度与弧度的互化，形成弧度制概念.利用单位圆探究三角函数的定义及延伸出的公式.研究正弦、余弦、正切函数的图象和性质，并进一步推导和(差)角公式及二倍角公式.利用三角函数的性质和复合函数思想，解决方程、不等式、函数性质等问题，并能用数学建模思想解决实际问题.

★★★

# 探　究　构　建

## 5.1　任意角和弧度制

### 5.1.1　任意角

**学习任务目标**

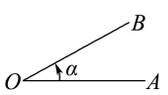
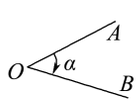
1.了解角的概念的推广，能正确区分正角、负角和零角.
2.了解象限角的概念.
3.理解并掌握终边相同的角的表示方法，并能判断角的终边所在的位置.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　角的概念**

(1)角的概念：角可以看成一条射线绕着它的端点旋转所成的图形.
(2)角的构成：顶点、始边、终边.
(3)分类：按旋转方向可将角分为如下三类.

| 类型 | 定义 | 图示 |
|---|---|---|
| 正角 | 一条射线绕其端点按逆时针方向旋转形成的角 |  |
| 负角 | 一条射线绕其端点按顺时针方向旋转形成的角 |  |
| 零角 | 如果一条射线没有做任何旋转，就称它形成了一个零角 |  |

**知识点二　角的运算**

(1)相等的角：设角 $\alpha$ 由射线 $OA$ 绕端点 $O$ 旋转而成，角 $\beta$ 由射线 $O'A'$ 绕端点 $O'$ 旋转而成.如果它们的旋转方向相同且旋转量相等，那么就称 $\alpha=\beta$.
(2)相反的角：把射线 $OA$ 绕端点 $O$ 按不同方向旋转相同的量所成的两个角叫做互为相反角.角 $\alpha$ 的相反角记为 $-\alpha$.
(3)角的运算
①角的加法：设 $\alpha,\beta$ 是任意两个角.我们规定，把角 $\alpha$ 的终边旋转角 $\beta$，这时终边所对应的角是 $\alpha+\beta$.
②角的减法：$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$.这样，角的减法可以转化为角的加法.

**知识点三　象限角**

(1)前提：①角的顶点与坐标原点重合，②角的始边与 $x$ 轴的非负半轴重合.
(2)结论：角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限角.如果角的终边在坐标轴上，那么就认为这个角不属于任何一个象限.

**知识点四　终边相同的角**

所有与角 $\alpha$ 终边相同的角，连同角 $\alpha$ 在内，可构成一个集合 $S=\{\beta\mid\beta=\alpha+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，即任一与角 $\alpha$ 终边相同的角，都可以表示成角 $\alpha$ 与整数个周角的和.

### 【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).
(1)第一象限的角都是锐角.　(×)
(2)小于 90°的角一定是锐角.　(×)
(3)终边相同的角不一定相等，但相等的角终边一定相同.　(√)
(4)终边相同的角有无数个，它们相差 360°的整数倍.　(√)

2.(多选)与 $-457^\circ$ 角终边相同的角的集合可以表示为　(BC)
A.$\{\alpha\mid\alpha=457^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$
B.$\{\alpha\mid\alpha=-97^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$
C.$\{\alpha\mid\alpha=263^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$
D.$\{\alpha\mid\alpha=-263^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1　了解任意角

1.经过 2 h，钟表的时针和分针转过的角分别是　(　　)
A.60°，720°
B.−60°，−720°
C.−30°，−360°
D.−60°，720°
B　**解析**：钟表的时针和分针都是顺时针旋转，因此

转过的角都是负的，而$\frac{2}{12}\times360°=60°$，$2\times360°=720°$，故钟表的时针和分针转过的角分别是$-60°$，$-720°$.

**2.**射线$OA$绕端点$O$逆时针旋转$120°$到达$OB$位置，由$OB$位置顺时针旋转$270°$到达$OC$位置，则$\angle AOC=$（　　）

A.$150°$　　B.$-150°$

C.$390°$　　D.$-390°$

B　**解析**：由题可知，$\angle AOC=120°+(-270°)=-150°$.故选B.

**3.**（多选）下列说法正确的是（　　）

A.所有的正角都比负角大

B.始边与终边重合的角一定是零角

C.第三象限角一定大于第二象限角

D.锐角一定是第一象限角，钝角一定是第二象限角

AD　**解析**：对于A，由正角和负角的定义得，所有的正角都比负角大，故A正确，

对于B，只有始边与终边没有做任何旋转，始边与终边重合的角才是零角，故B错误，

对于C，取一个第三象限的角为$225°$，一个第二象限的角为$480°$，

则$225°<480°$，可得第三象限的角不一定大于第二象限的角，故C错误，

对于D，设$\alpha$为锐角，$\beta$为钝角，由锐角的定义得$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

由第一象限角的定义得$\alpha$一定是第一象限角，

由第二象限角的定义得$\beta$一定是第二象限角，即锐角一定是第一象限角，钝角一定是第二象限角，故D正确.

## 【探究总结】

**理解任意角的概念的关键与技巧**

(1)关键：①弄清角的始边与终边及旋转方向与大小，②正确理解象限角与锐角、直角、钝角、平角、周角等概念.

(2)技巧：判断命题为真需要证明全部符合条件，而判断命题为假只要举出一个反例即可.

## 任务2 掌握终边相同的角及其应用

**1.**（教材P170例1改编）已知$\alpha=-1\,910°$.

(1)把$\alpha$写成$\beta+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z},0°\leqslant\beta<360°)$的形式，指出它是第几象限角；

(2)求$\theta$，使$\theta$与$\alpha$的终边相同，且$-720°\leqslant\theta<0°$.

**解**：(1)设$\alpha=\beta+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$，

则$\beta=-1\,910°-k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$，

令$-1\,910°-k\cdot360°\geqslant0°$，解得$k\leqslant-\frac{191}{36}$，

则$k$的最大整数解为$k=-6$，得$\beta=250°$，

于是$\alpha=250°-6\times360°$，它是第三象限角.

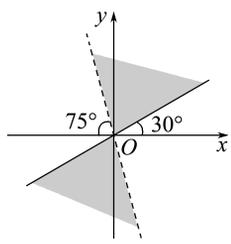
(2)令$\theta=250°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$，

取$-720°\leqslant\theta<0°$，

得$k=-1$或$-2$，

故$\theta=-110°$或$-470°$.

**2.**已知角$\alpha$的终边在图中阴影部分，试求出角$\alpha$的集合.




**解**：终边在$30°$角的终边所在直线上的角的集合为$S_1=\{\alpha\mid30°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$，

终边在$105°$角的终边所在直线上的角的集合为$S_2=\{\alpha\mid105°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$，

因此，终边在图中阴影部分的角$\alpha$的集合为$\{\alpha\mid30°+k\cdot180°\leqslant\alpha<105°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$.

## 【探究总结】

**1.终边相同的角的表示**

(1)与角$\alpha$终边相同的角都可以表示成$\alpha+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$的形式.

(2)终边相同的角相差$360°$的整数倍.

**2.表示终边在某个区域的角的三个步骤**

第一步：先按逆时针方向找到区域的起始边界和终止边界.

第二步：由小到大分别标出起始边界和终止边界对应的$-360°\sim360°$范围内的角$\alpha$和角$\beta$，写出最简集合$\{x\mid\alpha<x<\beta\}$，其中$0°<\beta-\alpha<360°$.

第三步：起始、终止边界对应角$\alpha$，$\beta$分别再加上$360°$的整数倍，即得终边在该区域的角的集合$\{x\mid\alpha+k\cdot360°<x<\beta+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

## 任务3 理解象限角

### 探究活动

**例**　已知$\alpha$是第三象限角，则$\frac{\alpha}{2}$是（　　）

A.第二或第四象限角

B.第一或第三象限角

C.第三或第四象限角

D.第一或第四象限角

A　**解析**：因为$\alpha$是第三象限角，所以$180°+k\cdot360°<\alpha<270°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$，所以$90°+k\cdot180°<\frac{\alpha}{2}<135°+k\cdot180°(k\in\mathbf{Z})$.当$k=0$时，$90°<\frac{\alpha}{2}<135°$，

在第二象限；当 $k=1$ 时，$270°<\frac{\alpha}{2}<315°$，在第四象限.故选 A.

［一题多思］

**思考 1.** 本例中，若 $\alpha$ 是第二象限角，能确定 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边所在位置吗？

**提示：** $\frac{\alpha}{2}$ 的终边位于第一或第三象限.

**思考 2.** 已知 $\alpha$ 是第几象限角，判断 $\frac{\alpha}{2}$，$\frac{\alpha}{3}$ 的终边所在位置时，有规律可循吗？

**提示：** 有.将直角坐标系的每个象限二等分，得到 8 个区域.自 $x$ 轴正向按逆时针方向把每个区域依次标上Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ……如图 1 所示，图中与角 $\alpha$ 所在象限标号一致的区域，即为 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边所在的区域.如 $\alpha$ 是第二象限角，与角 $\alpha$ 所在象限标号一致的区域Ⅱ，即为 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边所在的区域，所以 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边位于第一或第三象限.

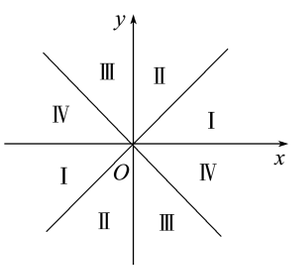



图1

将直角坐标系的每个象限三等分，得到 12 个区域.自 $x$ 轴正向按逆时针方向把每个区域依次标上Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ……如图 2 所示，图中与角 $\alpha$ 所在象限标号一致的区域，即为 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边所在的区域.如 $\alpha$ 是第三象限角，与角 $\alpha$ 所在象限标号一致的区域Ⅲ，即为 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边所在的区域，所以 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边位于第一、第三或第四象限.

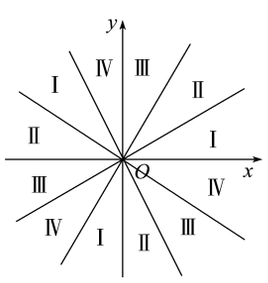



图2

## 【探究总结】

**象限角的判断**

(1)象限角的判断关键是看终边在哪个象限.

(2)若已知 $\alpha$ 是第几象限角，判断 $\frac{\alpha}{2}$，$\frac{\alpha}{3}$ 等是第几象限角，主要方法是由 $\alpha$ 的范围求出 $\frac{\alpha}{2}$，$\frac{\alpha}{3}$ 的范围，然后进行分类讨论，也可借助图形判断.

## 应用迁移

**1.**（多选）设 $\alpha$ 为第二象限角，则 $2\alpha$ 可能是　（　）

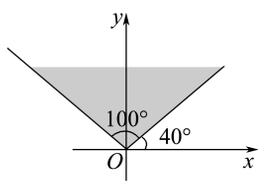
A.第一象限角　　B.第二象限角

C.第三象限角　　D.第四象限角

CD　**解析：** $\alpha$ 为第二象限角，故 $2k\cdot180°+\frac{1}{2}\times180°<\alpha<2k\cdot180°+180°(k\in\mathbf{Z})$，所以 $4k\cdot180°+180°<2\alpha<4k\cdot180°+2\times180°(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $2\alpha$ 可能是第三象限角，也可能是第四象限角，或终边在 $y$ 轴负半轴上的角.故选 CD.

**2.**（多选）如图，若角 $\alpha$ 的终边在阴影部分，则角 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边可能在　（　）




A.第一象限　　B.第二象限

C.第三象限　　D.第四象限

AC　**解析：** 由题图可得 $k\cdot360°+40°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360°+140°,k\in\mathbf{Z}$，

所以 $k\cdot180°+20°\leqslant\frac{\alpha}{2}\leqslant k\cdot180°+70°,k\in\mathbf{Z}$，

当 $k$ 为偶数时，$\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第一象限；当 $k$ 为奇数时，$\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第三象限.故选 AC.

**3.**（多选）已知角 $\alpha$ 的终边在第四象限，则 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边可能在　（　）

A.第一象限　　B.第二象限

C.第三象限　　D.第四象限

BCD　**解析：** 由 $\alpha$ 为第四象限角，得 $k\cdot360°-90°<\alpha<k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$，

得 $k\cdot120°-30°<\frac{\alpha}{3}<k\cdot120°,k\in\mathbf{Z}$.

当 $k=3n,n\in\mathbf{Z}$ 时，$3n\cdot120°-30°<\frac{\alpha}{3}<3n\cdot120°,n\in\mathbf{Z}$，得 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在第四象限；

当 $k=3n+1,n\in\mathbf{Z}$ 时，$3n\cdot120°+90°<\frac{\alpha}{3}<3n\cdot120°+120°,n\in\mathbf{Z}$，得 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在第二象限；

当 $k=3n+2,n\in\mathbf{Z}$ 时，$3n\cdot120°+210°<\frac{\alpha}{3}<3n\cdot120°+240°,n\in\mathbf{Z}$，得 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在第三象限.

# 课后素养评价(四十)

## 基础落实

**1.**(多选)下列说法不正确的是　　(　　)

A.第二象限角都是钝角

B.第二象限角大于第一象限角

C.若角 $\alpha$ 与角 $\beta$ 不相等,则 $\alpha$ 与 $\beta$ 的终边不可能重合

D.若角 $\alpha$ 与角 $\beta$ 的终边在同一条直线上,则 $\alpha-\beta=k\cdot 180^\circ(k\in\mathbf{Z})$

ABC　**解析**:对于 A,$495^\circ=135^\circ+360^\circ$ 是第二象限角,但不是钝角,故 A 错误;

对于 B,$\alpha=135^\circ$ 是第二象限角,$\beta=360^\circ+45^\circ$ 是第一象限角,但 $\alpha<\beta$,故 B 错误;

对于 C,$\alpha=360^\circ$,$\beta=720^\circ$,则 $\alpha\neq\beta$,但二者终边重合,故 C 错误;

对于 D,若角 $\alpha$ 与角 $\beta$ 的终边在同一条直线上,则二者的终边重合或关于原点对称,故 $\alpha-\beta=k\cdot 180^\circ(k\in\mathbf{Z})$,故 D 正确.故选 ABC.

**2.**下列各角中,与 $2\,286^\circ$ 角终边相同的角是　　(　　)

A.$126^\circ$　　B.$216^\circ$　　C.$-36^\circ$　　D.$-306^\circ$

A　**解析**:因为 $2\,286^\circ=360^\circ\times 6+126^\circ$,

所以与 $2\,286^\circ$ 角终边相同的角是 $126^\circ$.

**3.**$-2\,025^\circ$ 角的终边在　　(　　)

A.第一象限　　B.第二象限

C.第三象限　　D.第四象限

B　**解析**:因为 $-2\,025^\circ=-6\times 360^\circ+135^\circ$,易知 $135^\circ$ 角的终边在第二象限,所以 $-2\,025^\circ$ 角的终边在第二象限.

**4.**已知 $\alpha=2\,025^\circ$,若 $\beta$ 与 $\alpha$ 的终边相同,且 $0^\circ<\beta<360^\circ$,则 $\beta=$_____.

$225^\circ$　**解析**:依题意,$\alpha=5\times 360^\circ+225^\circ$,

又 $\beta$ 与 $\alpha$ 的终边相同,且 $0^\circ<\beta<360^\circ$,所以 $\beta=225^\circ$.故答案为 $225^\circ$.

**5.**时钟走了 3 时 20 分,则时针所转过的角的度数为_____,分针所转过的角的度数为_____.

$-100^\circ$　$-1\,200^\circ$　**解析**:因为时针每小时转 $30^\circ$ $\left(\text{时针转一圈为 12 h,所以每小时转}\dfrac{360^\circ}{12}\right)$,分针每小时转 $360^\circ$.又时针、分针都按顺时针方向旋转,形成的角为负角,

所以时针转过的角的度数为 $\left(-3\dfrac{1}{3}\right)\times 30^\circ=-100^\circ$,分针转过的角的度数为 $\left(-3\dfrac{1}{3}\right)\times 360^\circ=-1\,200^\circ$.

**6.**已知角 $\beta$ 的终边在直线 $\sqrt{3}x-y=0$ 上.

(1)写出角 $\beta$ 的集合 $S$;

(2)写出集合 $S$ 中满足不等式 $-360^\circ<\beta<720^\circ$ 的元素.

**解**:(1)因为角 $\beta$ 的终边在直线 $\sqrt{3}x-y=0$ 上,

且直线 $\sqrt{3}x-y=0$ 与 $x$ 轴正半轴的夹角为 $60^\circ$,

所以角 $\beta$ 的集合 $S=\{\beta\mid\beta=60^\circ+k\cdot 180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

(2)在 $S=\{\beta\mid\beta=60^\circ+k\cdot 180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$ 中,

取 $k=-2$,得 $\beta=-300^\circ$,取 $k=-1$,得 $\beta=-120^\circ$,

取 $k=0$,得 $\beta=60^\circ$,取 $k=1$,得 $\beta=240^\circ$,

取 $k=2$,得 $\beta=420^\circ$,取 $k=3$,得 $\beta=600^\circ$,

所以 $S$ 中满足不等式 $-360^\circ<\beta<720^\circ$ 的元素分别是 $-300^\circ$,$-120^\circ$,$60^\circ$,$240^\circ$,$420^\circ$,$600^\circ$.

## 能力提升

**1.**在 $360^\circ\sim 1\,440^\circ$ 范围内与 $-21^\circ16'$ 角终边相同的角有　　(　　)

A.1 个　　B.2 个

C.3 个　　D.4 个

C　**解析**:与 $-21^\circ16'$ 角终边相同的角可表示为 $\alpha=-21^\circ16'+k\cdot 360^\circ(k\in\mathbf{Z})$.由 $360^\circ\leqslant-21^\circ16'+k\cdot 360^\circ\leqslant 1\,440^\circ,k\in\mathbf{Z}$,得 $k=2,3,4$.故选 C.

**2.**(多选)已知角 $\alpha$ 的终边在第一象限,那么角 $\dfrac{\alpha}{2}$ 可能是　　(AC)

A.第一象限角　　B.第二象限角

C.第三象限角　　D.第四象限角

**3.**若 $\alpha$ 是第一象限角,则下列各角是第三象限角的是　　(　　)

A.$90^\circ-\alpha$　　B.$180^\circ-\alpha$

C.$270^\circ-\alpha$　　D.$-\alpha$

C　**解析**:若 $\alpha$ 是第一象限角,则 $k\cdot 360^\circ<\alpha<90^\circ+k\cdot 360^\circ,k\in\mathbf{Z}$,

$-90^\circ-k\cdot 360^\circ<-\alpha<-k\cdot 360^\circ,k\in\mathbf{Z}$,则 $-\alpha$ 是第四象限角,故 D 错误;

$-k\cdot 360^\circ<90^\circ-\alpha<90^\circ-k\cdot 360^\circ,k\in\mathbf{Z}$,则 $90^\circ-\alpha$ 是第一象限角,故 A 错误;

$90^\circ-k\cdot 360^\circ<180^\circ-\alpha<180^\circ-k\cdot 360^\circ,k\in\mathbf{Z}$,则 $180^\circ-\alpha$ 是第二象限角,故 B 错误;

$180^\circ-k\cdot 360^\circ<270^\circ-\alpha<270^\circ-k\cdot 360^\circ,k\in\mathbf{Z}$,则 $270^\circ-\alpha$ 是第三象限角,故 C 正确.

**4.**已知角 $\alpha$,$\beta$ 的终边关于 $y$ 轴对称,若 $\alpha=30^\circ$,则 $\beta=$_____.

$150°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$　**解析**：因为 $30°$ 角与 $150°$ 角的终边关于 $y$ 轴对称，所以角 $\beta$ 的终边与 $150°$ 角的终边相同.

所以 $\beta=150°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$.

**5.**若角 $\theta$ 的终边与 $60°$ 角的终边相同，则终边与角 $\frac{\theta}{3}$ 的终边相同的钝角为_____.

$140°$　**解析**：因为角 $\theta$ 的终边与 $60°$ 角的终边相同，可得 $\theta=60°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$，

则 $\frac{\theta}{3}=20°+k\cdot120°,k\in\mathbf{Z}$.令 $90°<\frac{\theta}{3}<180°$，

即 $90°<20°+k\cdot120°<180°,k\in\mathbf{Z}$，则 $\frac{7}{12}<k<\frac{4}{3}$，

又因为 $k\in\mathbf{Z}$，所以 $k=1$，

所以终边与角 $\frac{\theta}{3}$ 的终边相同的钝角为 $20°+1\times120°=140°$.

故答案为 $140°$.

**6.**终边在坐标轴上的角的集合为_____.

$\{\alpha|\alpha=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$　**解析**：终边在 $x$ 轴上的角的集合为 $\{\alpha|\alpha=2n\cdot90°,n\in\mathbf{Z}\}$，终边在 $y$ 轴上的角的集合为 $\{\alpha|\alpha=(2n+1)\cdot90°,n\in\mathbf{Z}\}$，所以终边在坐标轴上的角的集合为 $\{\alpha|\alpha=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$.

## 自我超越

设集合 $A=\{\alpha|\alpha=45°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=135°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$，集合 $B=\{\beta|\beta=45°+k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$，则　（　）

A.$A\cap B=\varnothing$　　B.$A\supsetneqq B$

C.$B\supsetneqq A$　　D.$A=B$

D　**解析**：$\alpha=45°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}$ 表示终边在直线 $y=x$ 上的角，$\alpha=135°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}$ 表示终边在直线 $y=-x$ 上的角，而 $\beta=45°+k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}$ 表示终边在四条射线上的角，四条射线分别是射线 $y=x,x\geqslant0$；$y=-x,x\leqslant0$；$y=x,x\leqslant0$；$y=-x,x\geqslant0$.它们构成直线 $y=x$ 与直线 $y=-x$，故 $A=B$.

# 5.1.2　弧度制

**学习任务目标**

**1.**了解弧度制的概念.

**2.**能进行弧度和角度的互化，体会引入弧度制的必要性.

**3.**会计算弧长和扇形的面积.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　弧度制的定义**

| | |
|---|---|
| 角度制 | ①定义：用度作为单位来度量角的单位制.<br>②1 度的角：周角的 $\frac{1}{360}$ |
| 弧度制 | ①定义：以弧度作为单位来度量角的单位制.<br>②1 弧度的角：长度等于半径长的圆弧所对的圆心角 |
| 任意角的弧度数与实数的对应关系 | 正角的弧度数是一个正数，负角的弧度数是一个负数，零角的弧度数是 0 |
| 计算公式 | 在半径为 $r$ 的圆中，弧长为 $l$ 的弧所对的圆心角为 $\alpha$ rad，那么 $\lvert\alpha\rvert=\frac{l}{r}$ |

**知识点二　角度制与弧度制的换算**

(1)角度制与弧度制的换算

$180°=\pi$ rad；

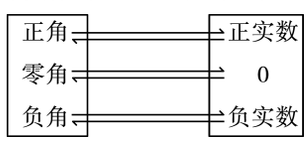
$1°=\frac{\pi}{180}$ rad$\approx0.017\ 45$ rad；

$1\text{ rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)°\approx57.30°$.

(2)一些特殊角的度数与弧度数的对应关系

| 度 | $0°$ | $1°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ | $120°$ | $135°$ | $150°$ | $180°$ | $270°$ | $360°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 弧度 | 0 | $\frac{\pi}{180}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |

(3)角的集合与实数集 $\mathbf{R}$ 之间的关系




**知识点三　弧度制下的弧长和扇形面积公式**

设扇形的半径为 $R$，弧长为 $l$，面积为 $S$，$\alpha(0<\alpha<2\pi)$ 为其圆心角，则

| 类别 | 角度制($\alpha=n^\circ$) | 弧度制 |
|---|---|---|
| 弧长 | $l=\frac{n\pi R}{180}$ | $l=\alpha R$ |
| 扇形的面积 | $S=\frac{n\pi R^2}{360}$ | $S=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}\alpha R^2$ |

**【概念辨析】**

**1.**判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)1 弧度就是 1°的圆心角所对的弧.　(×)

(2)1 弧度的角的大小和圆的半径大小无关.　(√)

(3)160°化为弧度制是$\frac{8}{9}\pi$ rad.　(√)

(4)若扇形的半径为 1 cm,圆心角为 30°,则扇形的弧长 $l=r|\alpha|=1\times30=30$(cm).　(×)

**2.**已知一个扇形的圆心角为 54°,半径 $r=20$ cm,则该扇形的周长为_____cm.

(40+6π)　**解析**:因为 $1^\circ=\frac{\pi}{180}$ rad,所以 $54^\circ=\frac{\pi}{180}\times54=\frac{3\pi}{10}$,则该扇形的弧长为 $l=\alpha r=\frac{3\pi}{10}\times20=6\pi$(cm).故该扇形的周长为(40+6π)cm.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1 > 了解弧度制

**1.**关于弧度制,下列说法正确的是　(　　)

A.正角或负角的弧度数都是正数

B.四分之一圆所对的圆心角是$\frac{\pi}{2}$

C.角的顶点在原点,始边与 $x$ 轴的非负半轴重合,角的终边旋转一周得到的角的大小等于 2π

D.用角度制和弧度制度量角,角的大小都与圆的半径有关

B　**解析**:正角的弧度数是一个正数,负角的弧度数是一个负数,A 错误;

整圆的圆心角是 2π,故四分之一圆所对的圆心角是$\frac{\pi}{2}$,B 正确;

角的终边顺时针旋转一周得到的角是 −2π,角的终边逆时针旋转一周得到的角是 2π,C 错误;

无论是角度制还是弧度制,角的大小都与圆的半径无关,D 错误.

**2.**(多选)下列说法正确的是　(　　)

A.1°化成弧度是 180 rad

B.$\frac{\pi}{10}$ rad 化成角度是 18°

C.−120°化成弧度是$-\frac{2\pi}{3}$ rad

D.$-\frac{10\pi}{3}$ rad 化成角度是−60°

BC　**解析**:对于 A,$1^\circ=\frac{\pi}{180}$ rad,故 A 项错误;

对于 B,$\frac{\pi}{10}$ rad$=\frac{\pi}{10}\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ=18^\circ$,故 B 项正确;

对于 C,$-120^\circ=-120\times\frac{\pi}{180}=-\frac{2\pi}{3}$ rad,故 C 项正确;

对于 D,$-\frac{10\pi}{3}$ rad$=-\frac{10\pi}{3}\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ=-600^\circ$,故 D 项错误.故选 BC.

**3.**已知相互啮合的两个齿轮,大齿轮 50 齿,小齿轮 20 齿.当小齿轮转动一周时,大齿轮转动的弧度数是　(　　)

A.$\frac{4\pi}{5}$　　B.$\frac{5\pi}{4}$　　C.$\frac{\pi}{5}$　　D.5π

A　**解析**:小齿轮转动一周时,大齿轮转动$\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$(周),故其转动的弧度数是$\frac{2}{5}\times2\pi=\frac{4\pi}{5}$.故选 A.

**【探究总结】**

**角度制与弧度制互化的关注点**

(1)关键:抓住互化公式 π rad=180°是关键.

(2)方法:度数$\times\frac{\pi}{180}$=弧度数;弧度数$\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$=度数.

**注意**:角度化弧度时,应先将分、秒化成度,再化成弧度.

### 任务2 > 用弧度表示角

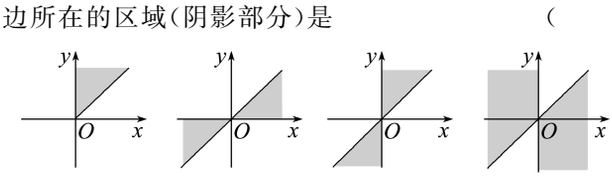
#### 探究活动

**例 1**　(1)3 rad 的角终边在　(　　)

A.第一象限　　B.第二象限

C.第三象限　　D.第四象限

(2)集合$\left\{\alpha\,\middle|\,k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$中的角的终边所在的区域(阴影部分)是　(　　)




A　　B　　C　　D

(3)将−1 125°写成 $\alpha+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$的形式,其中 $0\leqslant\alpha<2\pi$,并判断它是第几象限角.

(1)B　**解析**:因为$\frac{\pi}{2}<3<\pi$,所以 3 rad 的角终边在第二象限.

(2)C　**解析**：当 $k=2m(m\in\mathbf{Z})$ 时，$2m\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant 2m\pi+\frac{\pi}{2},m\in\mathbf{Z}$；当 $k=2m+1(m\in\mathbf{Z})$ 时，$2m\pi+\frac{5\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant 2m\pi+\frac{3\pi}{2},m\in\mathbf{Z}$.故选 C.

(3)**解**：$-1\ 125^\circ=-1\ 125\times\frac{\pi}{180}=-\frac{25\pi}{4}=-8\pi+\frac{7\pi}{4}$，

其中 $\frac{3\pi}{2}<\frac{7\pi}{4}<2\pi$，

所以 $\frac{7\pi}{4}$ 是第四象限角，

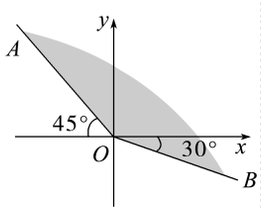
所以 $-1\ 125^\circ$ 是第四象限角.

[一题多思]

**思考 1**.若把本例(1)中“3 rad”换为“$-2$ rad”，其终边在第几象限？

**提示**：第三象限.

**思考 2**.若把本例(2)换为“用弧度制表示终边落在如图所示的阴影部分(包括边界)的角 $\theta$ 的集合”，你能表示出来吗？




**提示**：终边在射线 $OA$ 上的角为 $\theta=135^\circ+k\cdot 360^\circ,k\in\mathbf{Z}$，即 $\theta=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

终边在射线 $OB$ 上的角为 $\theta=-30^\circ+k\cdot 360^\circ,k\in\mathbf{Z}$，即 $\theta=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

故终边在阴影部分内(包括边界)的角 $\theta$ 的集合为 $\left\{\theta\left|-\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

**思考 3**.在本例(3)的条件下，你能写出在 $[-4\pi,4\pi]$ 范围内与 $\alpha$ 终边相同的角的集合吗？

**提示**：由本例(3)可得，与 $\alpha$ 终边相同的角为 $\frac{7\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

由 $-4\pi\leqslant\frac{7\pi}{4}+2k\pi\leqslant 4\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $k=-2,-1,0,1$，

所以所求角的集合为 $\left\{-\frac{9\pi}{4},-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\frac{15\pi}{4}\right\}$.

## 【探究总结】

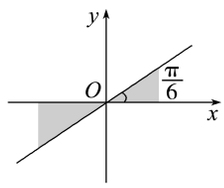
**用弧度制表示终边相同的角的两个注意点**

(1)弧度制下，与 $\alpha$ 终边相同的角表示为 $\alpha+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，其中 $2k\pi$ 是 $\pi$ 的偶数倍，而不是整数倍.

(2)注意角度制与弧度制不能混用.

## 应用迁移

**1**.终边落在图中阴影部分(包括边界)的角的集合为_____.




$\left\{\alpha\left|n\pi\leqslant\alpha\leqslant n\pi+\frac{\pi}{6},n\in\mathbf{Z}\right.\right\}$　**解析**：题图中第一象限阴影部分可表示为 $\left\{\alpha\left|2k\pi\leqslant\alpha\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，第三象限阴影部分可表示为 $\left\{\alpha\left|(2k+1)\pi\leqslant\alpha\leqslant(2k+1)\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，所以整个阴影部分可表示为 $\left\{\alpha\left|2k\pi\leqslant\alpha\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}\cup\left\{\alpha\left|(2k+1)\pi\leqslant\alpha\leqslant(2k+1)\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}=\left\{\alpha\left|n\pi\leqslant\alpha\leqslant n\pi+\frac{\pi}{6},n\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

**2**.已知 $\alpha=-800^\circ$.

(1)把 $\alpha$ 写成 $\beta+2k\pi(k\in\mathbf{Z},0\leqslant\beta<2\pi)$ 的形式，并指出 $\alpha$ 是第几象限角；

(2)求 $\gamma$，使 $\gamma$ 与 $\alpha$ 的终边相同，且 $\gamma\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

**解**：(1)因为 $-800^\circ=-3\times 360^\circ+280^\circ,280^\circ=\frac{14\pi}{9}$，且 $\frac{14\pi}{9}\in[0,2\pi)$，

所以 $\alpha=\frac{14\pi}{9}+(-3)\times 2\pi$.

所以 $\alpha$ 与 $\frac{14\pi}{9}$ 终边相同，是第四象限角.

(2)因为与 $\alpha$ 终边相同的角为 $\frac{14\pi}{9}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，而 $\gamma$ 与 $\alpha$ 的终边相同，且 $\gamma\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，

由 $-\frac{\pi}{2}<\frac{14\pi}{9}+2k\pi<\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，解得 $k=-1$，

所以 $\gamma=\frac{14\pi}{9}+(-1)\times 2\pi=-\frac{4\pi}{9}$.

# 任务3 掌握弧长与扇形的面积公式的应用

## 探究活动

**例 2**　已知扇形的半径为 $R$，圆心角是 $\alpha$，弧长为 $l$.

(1)若 $\alpha=60^\circ,R=10$ cm，求扇形的弧长 $l$；

(2)若扇形的周长为 20 cm，当扇形的圆心角 $\alpha$ 为多少弧度时，这个扇形的面积最大？

**解**：(1)因为 $\alpha=60^\circ=\frac{\pi}{3}$，所以 $l=10\times\frac{\pi}{3}=\frac{10\pi}{3}$(cm).

(2)由已知得 $l+2R=20$，所以 $S=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}(20-2R)R$
$=10R-R^2=-(R-5)^2+25$，
所以当 $R=5$ cm 时，$S$ 取得最大值 25 cm$^2$，
此时 $l=10$ cm，$\alpha=2$ rad.

## 【探究总结】

**弧长和扇形的面积的求解策略**

(1)记公式：弧度制下扇形的面积公式是 $S=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}\alpha R^2$(其中 $l$ 是扇形的弧长，$R$ 是扇形的半径，$\alpha$ 是扇形圆心角的弧度数，$0<\alpha<2\pi$).

(2)找关键：涉及扇形的周长、弧长、圆心角、面积等的计算问题，关键是先分析题目中已知哪些量、求哪些量，然后灵活运用弧长公式、扇形面积公式直接求解或列方程(组)求解.

## 应用迁移

**1.**折扇又名“撒扇”“纸扇”，是一种用竹木等材料做扇骨，韧纸或绫绢做扇面的能折叠的扇子，如图 1.其平面图是如图 2 所示的扇形 $AOB$，其中 $\angle AOB=135^\circ$，$OA=3OC=3$，则扇面(曲边四边形 $ABDC$)的面积是　(　　)



图1

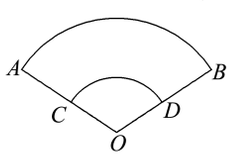



图2

A.$\frac{\pi}{3}$　　B.$3\pi$　　C.$\frac{8\pi}{3}$　　D.$\frac{4\pi}{3}$

B　**解析**：$\angle AOB=135^\circ$，即 $\angle AOB=\frac{3\pi}{4}$，

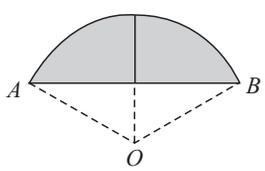
扇形 $AOB$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{3\pi}{4}\times3^2=\frac{27\pi}{8}$，

扇形 $COD$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{3\pi}{4}\times1^2=\frac{3\pi}{8}$，

则曲边四边形 $ABDC$ 的面积为 $\frac{27\pi}{8}-\frac{3\pi}{8}=3\pi$.

**2.**《九章算术》是我国古代数学成就的杰出代表之一.其中“方田”章给出计算弧田面积的经验公式：弧田面积$=\frac{1}{2}$(弦×矢＋矢$^2$).弧田由圆弧和其所对弦围成，公式中“弦”指圆弧所对弦长，“矢”等于半径长与圆心到弦的距离之差.按照上述经验公式计算所得的弧田面积与其实际面积之间存在误差.如图，现有圆弧所对圆心角为$\frac{2\pi}{3}$，弦长等于 $2\sqrt{3}$ m 的弧田.

(1)计算该弧田的实际面积；
(2)按照《九章算术》中计算弧田面积的经验公式计算所得结果与(1)中计算的弧田实际面积相差多少？(取 $\pi$ 的近似值为 3，$\sqrt{3}$ 的近似值为 1.7)




**解**：(1)设弧田所在圆的半径为 $r$，则 $r=\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2$，

所以 $S_{扇形OAB}=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times2^2=\frac{4\pi}{3}$.

又因为 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{\tan\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}$，

所以 $S_{实际}=S_{扇形OAB}-S_{\triangle AOB}=\left(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)$(m$^2$).

(2)由(1)可得，圆心到弦的距离为 1，所以矢长为 1.
按照弧田面积的经验公式计算得

$\frac{1}{2}$(弦×矢＋矢$^2$)$=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3}\times1+1^2)=\sqrt{3}+\frac{1}{2}$.

所以 $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)\approx0.1$(m$^2$).

故按照弧田面积的经验公式计算结果比实际少 0.1 m$^2$.

# 课后素养评价(四十一)

## 基础落实

**1.**已知扇形的面积为 $\pi$，圆心角为 $\frac{\pi}{2}$，则该扇形的弧长为　(　　)

A.$2\pi$　　B.$\frac{3\pi}{2}$

C.$\frac{5\pi}{4}$　　D.$\pi$

D　**解析**：设扇形的半径为 $r$，

由题意可得 $\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times r^2=\pi$，解得 $r=2$，

所以该扇形的弧长为 $l=2\times\frac{\pi}{2}=\pi$.

**2.**(多选)已知扇形的周长是 6 cm，面积是2 cm$^2$，下列说法可能正确的有　(　　)

A.圆的半径为 2 cm
B.圆的半径为 1 cm
C.圆心角的弧度数是 1

D.圆心角的弧度数是 2

ABC　**解析**：设扇形所在圆的半径为 $r$ cm，圆心角的弧度数为 $\alpha$.

由题意得 $\begin{cases}2r+\alpha r=6,\\ \frac{1}{2}\alpha r^2=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}r=1,\\ \alpha=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}r=2,\\ \alpha=1.\end{cases}$

可得圆的半径为 1 cm 或 2 cm，圆心角的弧度数是 4 或 1.

**3.** 已知弧长为 $\frac{2\pi}{3}$ 的弧所对的圆心角为 60°，则这条弧所在的圆的半径为　（　　）

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

B　**解析**：设这条弧所在的圆的半径为 $r$，

$60°=60\times1°=60\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{3}$，又 60°圆心角所对的弧长为 $\frac{2\pi}{3}$，

所以 $\frac{2\pi}{3}=r\times\frac{\pi}{3}$，解得 $r=2$.

**4.** (1)已知扇形的面积为 25 cm$^2$，当扇形的圆心角为多大时，扇形的周长取最小值？

(2)已知一扇形的周长为 40 cm，当它的半径和圆心角取什么值时，才能使扇形的面积最大？最大面积是多少？

**解**：(1)设扇形的圆心角为 $\alpha$，半径为 $R$ cm，弧长为 $l$ cm，扇形的周长为 $y$ cm，则 $y=l+2R$.

由题意，得 $\frac{1}{2}lR=25$，则 $l=\frac{50}{R}$，故 $y=\frac{50}{R}+2R(R>0)$.

利用函数单调性的定义，可以证明，当 $0<R\leqslant5$ 时，函数 $y=\frac{50}{R}+2R$ 单调递减；当 $R>5$ 时，函数 $y=\frac{50}{R}+2R$ 单调递增.所以当 $R=5$ 时，$y$ 取最小值 20，此时 $l=10$，$\alpha=\frac{l}{R}=2$，即当扇形的圆心角为 2 时，扇形的周长取最小值.

(2)设扇形的圆心角为 $\theta$，半径为 $r$，弧长为 $l$，面积为 $S$，则 $l+2r=40$，所以 $l=40-2r$，

所以 $S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times(40-2r)r=-(r-10)^2+100$.

所以，当半径 $r=10$ cm 时，扇形的面积最大，最大面积为 100 cm$^2$，此时 $\theta=\frac{l}{r}=\frac{40-2\times10}{10}=2$(rad).

## 能力提升

**1.** 已知扇形的面积是 4 cm$^2$，当扇形周长最小时，扇形的圆心角的大小为(单位：rad)　（　　）

A.$\frac{\pi}{4}$　　B.$\frac{\pi}{3}$　　C.1　　D.2

D　**解析**：设扇形的圆心角为 $\theta$，半径为 $r$，

则由题意可得 $\frac{1}{2}\theta r^2=4$，

所以 $2r+\theta r=2r+\frac{8}{r}\geqslant2\sqrt{2r\cdot\frac{8}{r}}=8$，

当且仅当 $2r=\frac{8}{r}$ 时，即 $r=2$，$\theta=2$ 时，等号成立.

所以当扇形的圆心角为 2 时，扇形的周长取得最小值 8.故选 D.

**2.** 一条弧所对的圆心角是 2 rad，它所对的弦长为 2，则这条弧的长是　（　　）

A.$\frac{1}{\sin1}$　　B.$\frac{1}{\sin2}$

C.$\frac{2}{\sin2}$　　D.$\frac{2}{\sin1}$

D　**解析**：因为一条弧所对的圆心角是 2 rad，它所对的弦长为 2，所以所在圆的半径为 $r=\frac{1}{\sin1}$，则这条弧的长 $l=2\times\frac{1}{\sin1}=\frac{2}{\sin1}$.

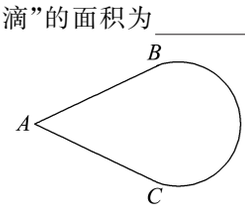
**3.** 从半径为 $r$ 的圆中剪下圆心角为 $\alpha$ rad，半径为 $r$ 的扇形，此扇形的周长为 $l_1$，剩余部分扇形的周长为 $l_2$.若 $\frac{l_1}{l_2}=\frac{3+\pi}{3+2\pi}$，则 $\alpha=$_____.

$\frac{2\pi}{3}$　**解析**：由题意，圆心角为 $\alpha$ rad，半径为 $r$ 的扇形，此扇形的周长为 $l_1$，剩余部分扇形的周长为 $l_2$，可得 $l_1=2r+\alpha r$，$l_2=2r+(2\pi-\alpha)r$，

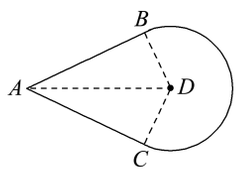
故 $\frac{l_1}{l_2}=\frac{2+\alpha}{2+2\pi-\alpha}=\frac{3+\pi}{3+2\pi}$，解得 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$.

## 自我超越

如图，“水滴”是由线段 $AB$，$AC$ 和圆的优弧 $BC$ 所围成的封闭图形，其中 $AB$，$AC$ 恰好与圆弧相切.若圆弧所在圆的半径为 2，点 $A$ 到圆弧所在圆的圆心的距离为 4，则该“水滴”的面积为_____.




$4\sqrt{3}+\frac{8\pi}{3}$　**解析**：如图，取优弧 $BC$ 所在圆的圆心 $D$，连接 $AD$，$BD$，$CD$，



则 $BD\perp AB$，$CD\perp AC$，由题意可知 $AD=4$，$BD=CD=2$，

所以 $\angle BAD=\angle CAD=\frac{\pi}{6}$，则 $\angle BDC=\frac{2\pi}{3}$.

故优弧 $BC$ 对应的圆心角为 $\frac{4\pi}{3}$，对应的扇形的面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{4\pi}{3}\times2^2=\frac{8\pi}{3}$.

而 $AB=AC=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，

则 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2=2\sqrt{3}$，

所以该“水滴”的面积为 $\frac{8}{3}\pi+S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=4\sqrt{3}+\frac{8\pi}{3}$.

# 5.2　三角函数的概念

## 5.2.1　三角函数的概念

## 第 1 课时　三角函数的概念(1)

**学习任务目标**

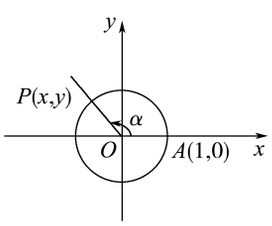
**1.**理解任意角的三角函数的定义.
**2.**会求给定角的三角函数值.
**3.**掌握任意角的正弦、余弦、正切的定义及应用.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　任意角的三角函数的定义**

如图，设 $\alpha$ 是一个任意角，$\alpha\in\mathbf{R}$，它的终边 $OP$ 与单位圆相交于点 $P(x,y)$.




(1)把点 $P$ 的纵坐标 $y$ 叫做 $\alpha$ 的正弦函数，记作 $\underline{\sin\alpha}$，即 $y=\sin\alpha$；

(2)把点 $P$ 的横坐标 $x$ 叫做 $\alpha$ 的余弦函数，记作 $\underline{\cos\alpha}$，即 $x=\cos\alpha$；

(3)把点 $P$ 的纵坐标与横坐标的比值 $\frac{y}{x}$ 叫做 $\alpha$ 的正切，记作 $\underline{\tan\alpha}$，即 $\frac{y}{x}=\tan\alpha(x\neq0)$.

$\frac{y}{x}=\tan\alpha(x\neq0)$ 也是以角为自变量，以单位圆上点的纵坐标与横坐标的比值为函数值的函数，称为正切函数.

我们将正弦函数、余弦函数和正切函数统称为三角函数.

**知识点二　三角函数的定义域**

| 函数名 | 定义域 |
|---|---|
| 正弦函数 | $\mathbf{R}$ |
| 余弦函数 | $\mathbf{R}$ |
| 正切函数 | $\underline{\left\{x\mid x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})\right\}}$ |

### 【概念辨析】

**1.**判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值与点 $P(x,y)$ 在角 $\alpha$ 终边上的位置无关.　(√)

(2)同一个三角函数值只能有唯一一个角与之对应.　(×)

(3)若角 $\alpha$ 终边上一点为 $P(2,3)$，则 $\sin\alpha=3$.　(×)

(4)若角 $\alpha$ 的终边为第一象限的角平分线，则 $\sin\alpha=\cos\alpha$.　(√)

(5)对于任意一个角 $\alpha$，都可以求出它的三个三角函数值.　(×)

**2.**已知角 $\alpha$ 的终边与单位圆交于点 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$，则 $\sin\alpha$ 的值为　(　　)

A.$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B.$-\frac{1}{2}$　　C.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D.$\frac{1}{2}$

B　**解析**：由正弦函数的定义得 $\sin\alpha=y=-\frac{1}{2}$，故选 B.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1 > 了解三角函数的概念

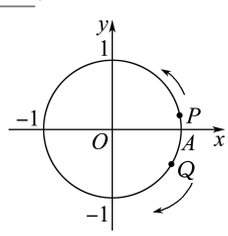
**1.** 如果角 $\alpha$，$\beta$ 的终边分别与单位圆交于点 $\left(\frac{12}{13},\frac{5}{13}\right)$ 和 $\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，那么 $\sin\alpha\cos\beta=$　　（　　）

A. $-\frac{36}{65}$　　B. $-\frac{3}{13}$

C. $\frac{4}{13}$　　D. $\frac{48}{65}$

B　**解析**：由三角函数的定义可知，$\sin\alpha=\frac{5}{13}$，$\cos\beta=-\frac{3}{5}$，所以 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{5}{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{3}{13}$. 故选 B.

**2.** 如图，在平面直角坐标系中，动点 $P$，$Q$ 从点 $A(1,0)$ 出发在单位圆上运动，点 $P$ 按逆时针方向每秒钟转动 $\frac{\pi}{12}$ rad，点 $Q$ 按顺时针方向每秒钟转动 $\frac{11\pi}{12}$ rad，则 $P$，$Q$ 两点在第1 804 次相遇时，点 $P$ 的坐标是_____.




$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　**解析**：相遇时间为 $t=1\ 804\times2\pi\div\left(\frac{\pi}{12}+\frac{11\pi}{12}\right)=3\ 608$（秒），

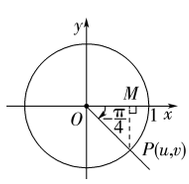
故点 $P$ 转过的角度为 $\frac{\pi}{12}\times3\ 608=300\pi+\frac{2\pi}{3}$，

故对应坐标为 $\left(\cos\frac{2\pi}{3},\sin\frac{2\pi}{3}\right)$，即 $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

故答案为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

**3.** 已知 $\alpha=-\frac{\pi}{4}$，利用单位圆.求角 $\alpha$ 的正弦值和余弦值.

**解**：如图，角 $\alpha$ 的顶点与原点重合，始边与 $x$ 轴的非负半轴重合，终边与单位圆交于点 $P$，过点 $P$ 作 $x$ 轴的垂线交 $x$ 轴于点 $M$.




设点 $P(u,v)$，则 $u=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$v=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\sin\alpha=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=v=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\alpha=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=u=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**【探究总结】**

**单位圆法求已知角的三角函数值**

(1) 确定角的终边与单位圆的交点的坐标.

(2) 根据三角函数的定义：$\sin\alpha=y$，$\cos\alpha=x$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}(x\neq0)$，求出已知角的三角函数值.

### 任务2 > 利用坐标法求三角函数值

#### 探究活动

**例**　(1) 已知角 $\alpha$ 的终边经过点 $P(3,-4)$，则 $\sin\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}=$　　（　　）

A. $-\frac{1}{5}$　　B. $\frac{37}{15}$

C. $\frac{37}{20}$　　D. $\frac{13}{15}$

(2) 已知角 $\alpha$ 的终边上一点 $P(m,\sqrt{3})$，且 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{4}$，求 $\sin\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

(1) D　**解析**：因为角 $\alpha$ 的终边经过点 $P(3,-4)$，所以 $x=3$，$y=-4$，$r=|OP|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$，$O$ 为坐标原点，所以 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，所以 $\sin\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}=-\frac{4}{5}+\frac{5}{3}=\frac{13}{15}$.

(2) **解**：由题意得 $x=m$，$y=\sqrt{3}$，

所以 $r=|OP|=\sqrt{m^2+3}$，$O$ 为坐标原点.

所以 $\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{m}{\sqrt{m^2+3}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$，

解得 $m=\sqrt{5}$. 所以 $r=2\sqrt{2}$.

所以 $\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

[一题多思]

**思考 1.** 利用三角函数的定义求一个角的三角函数值时，若已知角 $\alpha$ 终边上一点，则该点可能有哪些不同情况？

**提示**：(1) 若该点 $P(x,y)(x\neq0)$ 是单位圆上一点，则 $\sin\alpha=y$，$\cos\alpha=x$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

(2)若该点 $P(x,y)(x\neq0)$ 不是单位圆上一点，则先求 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，再求 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

**思考 2.** 若角 $\alpha$ 的终边经过点 $P(-3a,4a)(a\neq0)$，则 $2\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值为多少？

**提示：** $r=\sqrt{(-3a)^2+(4a)^2}=5|a|$.

①若 $a>0$，则 $r=5a$，角 $\alpha$ 在第二象限.

$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{4a}{5a}=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-3a}{5a}=-\frac{3}{5}$，

所以 $2\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}=1$.

②若 $a<0$，则 $r=-5a$，角 $\alpha$ 在第四象限.

$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{4a}{-5a}=-\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-3a}{-5a}=\frac{3}{5}$，

所以 $2\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{8}{5}+\frac{3}{5}=-1$.

**思考 3.** 已知角 $\alpha$ 的终边上一点 $P(-\sqrt{3},y)$，$y\neq0$，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}y$，你能求出 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值吗？

**提示：** 由 $\sin\alpha=\frac{y}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+y^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}y$，得 $y^2=5$，所以 $y=\pm\sqrt{5}$.

当 $y=\sqrt{5}$ 时，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{4}$，$\cos\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+5}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{\sqrt{15}}{3}$；

当 $y=-\sqrt{5}$ 时，$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{4}$，$\cos\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+5}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{15}}{3}$.

## 【探究总结】

**坐标法求已知角的三角函数值**

(1)已知角 $\alpha$ 的终边上一点 $P(x,y)$ 求三角函数值时，先求 $r=|OP|$（$O$ 为原点），再根据定义 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}(x\neq0)$ 确定三角函数值.

(2)若条件中含有参数，要注意对参数进行讨论.

## 应用迁移

**1.**（教材 P180 练习题 3 改编）若角 $\alpha$ 的终边经过点 $M(-12,5)$，则 $3\sin\alpha-2\cos\alpha=$（　　）

A. $\frac{29}{13}$　　B. 3　　C. $-\frac{2}{13}$　　D. $\frac{5}{13}$

B　**解析：** 因为角 $\alpha$ 的终边经过点 $M(-12,5)$，

则 $\sin\alpha=\frac{5}{\sqrt{(-12)^2+5^2}}=\frac{5}{13}$，$\cos\alpha=\frac{-12}{\sqrt{(-12)^2+5^2}}=-\frac{12}{13}$.

所以 $3\sin\alpha-2\cos\alpha=\frac{3\times5}{13}-\left(-\frac{2\times12}{13}\right)=3$.

**2.** 已知角 $\alpha$ 的终边在直线 $\sqrt{3}x+y=0$ 上，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

**解：** 因为角 $\alpha$ 的终边在直线 $\sqrt{3}x+y=0$ 上，所以在角 $\alpha$ 的终边上任取一点 $P(t,-\sqrt{3}t)(t\neq0)$，

则 $r=\sqrt{t^2+(-\sqrt{3}t)^2}=2|t|$.

当 $t>0$ 时，$r=2t$，$\sin\alpha=\frac{-\sqrt{3}t}{2t}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha=\frac{t}{2t}=\frac{1}{2}$，$\tan\alpha=\frac{-\sqrt{3}t}{t}=-\sqrt{3}$；

当 $t<0$ 时，$r=-2t$，$\sin\alpha=\frac{-\sqrt{3}t}{-2t}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\cos\alpha=\frac{t}{-2t}=-\frac{1}{2}$，$\tan\alpha=\frac{-\sqrt{3}t}{t}=-\sqrt{3}$.

# 课后素养评价（四十二）

## 基础落实

**1.** 若角 $\alpha$ 的终边过点 $P\left(2\sin\frac{\pi}{6},-2\cos\frac{\pi}{6}\right)$，则 $\sin\alpha$ 的值等于（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C　**解析：** 由已知可得 $P(1,-\sqrt{3})$，因为角 $\alpha$ 的终边过点 $P$，所以 $\sin\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**2.** 已知角 $\theta$ 的终边经过点 $M(m,3-m)$，且 $\tan\theta=\frac{1}{2}$，则 $m=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. $\frac{5}{2}$

C　**解析：** 因为角 $\theta$ 的终边经过点 $M(m,3-m)$，且 $\tan\theta=\frac{1}{2}=\frac{3-m}{m}$，所以 $m=2$.

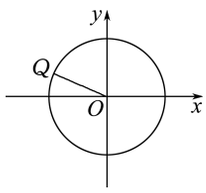
**3.** 点 $P$ 从点 $(0,-1)$ 出发，沿着单位圆顺时针转动到达点 $Q$. 若经过的弧长为 $\frac{8\pi}{3}$，则点 $Q$ 的坐标为（　　）

A.$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$　　B.$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

C.$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　D.$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

D　**解析**：由题意可得，以 $x$ 轴的非负半轴为始边，

以点 $Q$ 所在的射线 $OQ$ 为终边的最小正角为 $\frac{5\pi}{6}$，




由任意角的三角函数的定义可得，

点 $Q$ 的坐标为 $\left(\cos\frac{5\pi}{6},\sin\frac{5\pi}{6}\right)$，即 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$. 故选 D.

**4.** 已知点 $M$ 是单位圆上的点，以射线 $OM$ 为终边的角 $\alpha$ 的正弦值为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\tan\alpha=$ ±1.

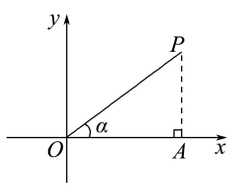
**5.** 在平面直角坐标系的第一象限内有一点 $P$，射线 $OP$ 与 $x$ 轴正半轴的夹角为 $\alpha$. 如果 $OP=10$，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，那么点 $P$ 的坐标为_____.

(8,6)　**解析**：如图，过点 $P$ 作 $PA\perp x$ 轴，垂足为 $A$. 在 Rt△$OAP$ 中，$OP=10$，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，

所以 $AP=OP\cdot\sin\alpha=6$，

所以 $OA=\sqrt{OP^2-AP^2}=8$，

所以点 $P$ 的坐标为(8,6).




## 能力提升

**1.** 在平面直角坐标系中，角 $\alpha$ 与角 $\beta$ 均以 $x$ 轴的非负半轴为始边，它们的终边关于直线 $y=-x$ 对称. 若 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，则 $\cos\beta=$　　(　　)

A.$\frac{3}{5}$　　B.$-\frac{3}{5}$　　C.$\frac{4}{5}$　　D.$-\frac{4}{5}$

B　**解析**：若角 $\alpha$ 的终边在第一象限，设终边上一点 $P(x,y)$，则点 $P$ 关于 $y=-x$ 的对称点 $P'(-y,-x)$ 在 $\beta$ 终边上，

此时 $\cos\beta=\frac{-y}{\sqrt{(-y)^2+(-x)^2}}=\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\sin\alpha=-\frac{3}{5}$；

若角 $\alpha$ 的终边在第二象限，设终边上一点 $Q(x,y)$，则点 $Q$ 关于 $y=-x$ 的对称点 $Q'(-y,-x)$ 在 $\beta$ 终边上，

此时 $\cos\beta=\frac{-y}{\sqrt{(-y)^2+(-x)^2}}=\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\sin\alpha=-\frac{3}{5}$. 综上所述，$\cos\beta=-\frac{3}{5}$.

**2.** (多选)若角 $\alpha$ 的终边上有一点 $P(a,-3a)(a\neq0)$，则 $\sin\alpha-2\cos\alpha$ 的值可以是　　(　　)

A.$-\frac{\sqrt{10}}{10}$　B.$-\frac{\sqrt{10}}{2}$　C.$\frac{\sqrt{10}}{10}$　D.$\frac{\sqrt{10}}{2}$

BD　**解析**：若 $\alpha$ 的终边上有一点 $P(a,-3a)(a\neq0)$，

当 $a>0$ 时，$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+(-3a)^2}}=\frac{a}{\sqrt{10}|a|}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\sin\alpha=\frac{-3a}{\sqrt{a^2+(-3a)^2}}=\frac{-3a}{\sqrt{10}|a|}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

此时 $\sin\alpha-2\cos\alpha=-\frac{3\sqrt{10}}{10}-2\times\frac{\sqrt{10}}{10}=-\frac{\sqrt{10}}{2}$；

当 $a<0$ 时，$\cos\alpha=\frac{\alpha}{\sqrt{a^2+(-3a)^2}}=\frac{a}{\sqrt{10}|a|}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\sin\alpha=\frac{-3a}{\sqrt{a^2+(-3a)^2}}=\frac{-3a}{\sqrt{10}|a|}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

此时 $\sin\alpha-2\cos\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}-2\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

## 自我超越

(多选)一般地，对任意角 $\alpha$，设 $\alpha$ 的终边上异于原点的任意一点 $P$ 的坐标为 $(x,y)$，它与原点的距离是 $r$. 我们规定：比值 $\frac{x}{y},\frac{r}{y},\frac{r}{x}$ 分别叫做角 $\alpha$ 的余切、余割、正割，分别记作 $\cot\alpha,\csc\alpha,\sec\alpha$，把 $y=\cot x,y=\csc x,y=\sec x$ 分别叫做余切函数、余割函数、正割函数. 下列叙述正确的有　　(　　)

A.$\cot\frac{5\pi}{4}=1$

B.$\sin\alpha\cdot\sec\alpha=1$

C.$f(x)=\sec x$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$

D.设角 $\alpha$ 的终边经过点 $P(2,4)$，则 $\csc\alpha+\sec\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{2}$

ACD　**解析**：$\cot\frac{5\pi}{4}=\frac{1}{\tan\frac{5\pi}{4}}=1$，故 A 正确；$\sin\alpha\cdot\sec\alpha=\sin\alpha\cdot\frac{1}{\cos\alpha}=1$ 不一定成立，故 B 不正确；$f(x)=\sec x=\frac{1}{\cos x}$，则 $\cos x\neq0$，即 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，故 C 正确；因为角 $\alpha$ 的终边经过点 $P(2,4)$，所以 $r=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，所以 $\csc\alpha=\frac{r}{y}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$\sec\alpha=\frac{r}{x}=\sqrt{5}$，所以 $\csc\alpha+\sec\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{2}$，故 D 正确.

# 第 2 课时　三角函数的概念(2)

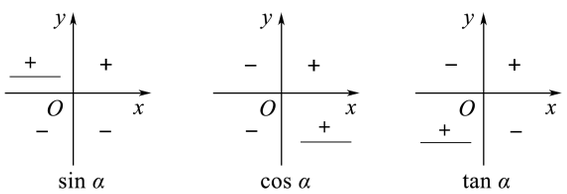
**学习任务目标**

1.借助任意角的三角函数的定义,理解并掌握正弦、余弦、正切函数值在各象限的符号.
2.通过对任意角的三角函数定义的理解,掌握诱导公式一.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　正弦、余弦、正切函数值在各象限的符号**




记忆口诀:一全正,二正弦,三正切,四余弦.

**知识点二　诱导公式一**

终边相同的角的同一三角函数的值相等.由此得到一组公式(公式一):

$\sin(\alpha+k\cdot 2\pi)=\sin\alpha$,

$\cos(\alpha+k\cdot 2\pi)=\cos\alpha$,

$\tan(\alpha+k\cdot 2\pi)=\tan\alpha$,

其中 $k\in\mathbf{Z}$.

### 【概念辨析】

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)同一个三角函数值能找到无数个角与之对应.(√)

(2)若 $\sin\alpha\cos\alpha>0$,则角 $\alpha$ 为第一象限角.(×)

(3)终边相同的角的同一三角函数的值相等.(√)

(4)若 $\sin\alpha>0$,则 $\alpha$ 为第一或第二象限角.(×)

2.计算:$\sin 405^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务 1 > 理解三角函数值在各象限的符号

1.已知 $\sin\alpha\cdot\tan\alpha>0$,则 $\alpha$ 是(　　)

A.第一或第二象限角

B.第一或第三象限角

C.第二或第三象限角

D.第一或第四象限角

D　**解析**:因为 $\sin\alpha\cdot\tan\alpha=\sin\alpha\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}>0$,所以 $\cos\alpha>0$,所以 $\alpha$ 是第一或第四象限角.

2.若 $\dfrac{\sin\alpha}{|\sin\alpha|}-\dfrac{\tan\alpha}{|\tan\alpha|}=2$,则 $\alpha$ 的终边位于(　　)

A.第一象限　　B.第二象限

C.第三象限　　D.第四象限

B　**解析**:因为 $\dfrac{\sin\alpha}{|\sin\alpha|}-\dfrac{\tan\alpha}{|\tan\alpha|}=2$,所以 $\dfrac{\sin\alpha}{|\sin\alpha|}=1$,$\dfrac{\tan\alpha}{|\tan\alpha|}=-1$,即 $\sin\alpha>0$,$\tan\alpha<0$,所以 $\alpha$ 是第二象限角.

3.判断下列三角函数值的符号:

(1)$\sin 3$,$\cos 4$,$\tan 5$;

(2)$\tan(-672^\circ 20')$.

**解**:(1)因为 $\dfrac{\pi}{2}<3<\pi<4<\dfrac{3\pi}{2}<5<2\pi$,

所以角 3,4,5 的终边分别在第二、三、四象限.

所以 $\sin 3>0$,$\cos 4<0$,$\tan 5<0$.

(2)由 $-672^\circ 20'=47^\circ 40'+(-2)\times 360^\circ$,

可知 $-672^\circ 20'$ 是第一象限角,所以 $\tan(-672^\circ 20')>0$.

[一题多思]

**思考**.由若干个三角函数值的符号,确定角的终边所在象限问题的解题策略是怎样的?

**提示**:依据题目中所有三角函数值的符号来分别确定角的终边所在的象限,它们的公共象限即为所求.

**【探究总结】**

**判断三角函数值符号的两个步骤**

(1)定象限:确定角 $\alpha$ 的终边所在的象限.

(2)定符号:利用三角函数值的符号规律,即"一全正,二正弦,三正切,四余弦"来判断.

### 任务 2 > 掌握诱导公式一

**探究活动**

**例**　(教材 P184 习题 5.2 题 3 改编)计算下列各式的值:

(1)$\sin 810^\circ+\cos 360^\circ-\tan 1\,125^\circ$;

(2)$\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)+\cos\frac{12\pi}{5}\tan 4\pi$;

(3)$\sin\frac{7\pi}{3}\cos\left(-\frac{23\pi}{6}\right)+\tan\left(-\frac{15\pi}{4}\right)\cos\frac{13\pi}{3}$.

**解**:(1)原式$=\sin(2\times360°+90°)+\cos(360°+0°)-\tan(3\times360°+45°)$

$=\sin 90°+\cos 0°-\tan 45°$

$=1+1-1$

$=1$.

(2)原式$=\sin\left(-2\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(2\pi+\frac{2\pi}{5}\right)\tan(4\pi+0)$

$=\sin\frac{\pi}{6}+0\times\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$.

(3)原式$=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-4\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(-4\pi+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1\times\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$.

**【探究总结】**

**利用诱导公式一进行化简、求值的步骤**

(1)定形:将已知的任意角写成$\alpha+2k\pi$的形式,其中$\alpha\in[0,2\pi)$,$k\in\mathbf{Z}$.

(2)转化:根据诱导公式,转化为求角$\alpha$的某个三角函数值.

(3)求值:若角$\alpha$为特殊角,可直接求出该角的三角函数值.

### 应用迁移

求下列各式的值:

(1)$\cos\frac{25\pi}{3}+\tan\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$;

(2)$\sin 810°+\tan 1\,125°+\cos 420°$.

**解**:(1)原式$=\cos\left(8\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(-4\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\cos\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$.

(2)原式$=\sin(2\times360°+90°)+\tan(3\times360°+45°)+\cos(360°+60°)=\sin 90°+\tan 45°+\cos 60°=1+1+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$.

# 课后素养评价(四十三)

## 基础落实

**1**.$\tan 300°+\cos 510°$的值为　(　　)

A.$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　B.$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}$

C.$-\frac{1}{2}-\sqrt{3}$　　D.$-\frac{5\sqrt{3}}{6}$

A　**解析**:$\tan 300°+\cos 510°=\tan(360°-60°)+\cos(360°+150°)=-\tan 60°+\cos 150°=-\tan 60°-\cos 30°=-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

**2**.点$A(\cos 2,\tan 2)$在平面直角坐标系中位于　(　　)

A.第一象限　　B.第二象限

C.第三象限　　D.第四象限

C　**解析**:因为$\frac{\pi}{2}\approx1.57$,$\pi\approx3.14$,且$\frac{\pi}{2}<2<\pi$,所以2弧度的角是第二象限角.

根据余弦函数的性质,在第二象限中,余弦值是负数,所以$\cos 2<0$.

根据正切函数的性质,在第二象限中,正切值是负数,所以$\tan 2<0$.

在平面直角坐标系中,横坐标小于0且纵坐标小于0的点在第三象限,

因为点$A(\cos 2,\tan 2)$中,$\cos 2<0$,$\tan 2<0$,所以点$A$在第三象限,

即点$A(\cos 2,\tan 2)$在平面直角坐标系中位于第三象限.

**3**.(多选)下列各式的符号为负的是　(　　)

A.$\sin\frac{7}{3}\pi$　　B.$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

C.$\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}$　　D.$\tan 2$

CD　**解析**:因为$\frac{7}{3}\pi=2\pi+\frac{\pi}{3}$,所以$\frac{7}{3}\pi$是第一象限角,所以$\sin\frac{7}{3}\pi>0$.

因为$-\frac{\pi}{4}$是第四象限角,所以$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)>0$.

因为$\frac{2\pi}{3}$是第二象限角,所以$\sin\frac{2\pi}{3}>0$,$\cos\frac{2\pi}{3}<0$,所以$\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}<0$.

因为$\frac{\pi}{2}<2<\pi$,所以2是第二象限角,所以$\tan 2<0$.故选CD.

**4**.已知角$\alpha$的终边经过点$P(3,4)$.

(1)$\tan(-6\pi+\alpha)$的值为_____;

(2)$\frac{\sin(\alpha-4\pi)}{\cos(6\pi+\alpha)}\cdot\sin(\alpha-2\pi)\cdot\cos(2\pi+\alpha)$的值为_____.

(1)$\frac{4}{3}$　(2)$\frac{16}{25}$　**解析**：由题意知 $r=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

所以 $\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{3}{5}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{4}{3}$.

(1)$\tan(-6\pi+\alpha)=\tan\alpha=\frac{4}{3}$.

(2)原式$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin^2\alpha=\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$.

**5.**求下列各式的值：

(1)$\cos\frac{25\pi}{4}+\tan\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$；

(2)$\sin 810^\circ+\tan 765^\circ-\cos 360^\circ$.

**解**：(1)原式$=\cos\left(6\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(-2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$.

(2)原式$=\sin(90^\circ+2\times360^\circ)+\tan(45^\circ+2\times360^\circ)-\cos 360^\circ=\sin 90^\circ+\tan 45^\circ-1=1+1-1=1$.

## 能力提升

**1.**若$\frac{\sin\theta}{\tan\theta}>0$，则 $\theta$ 为　(　　)

A.第一或第二象限角　B.第二或第三象限角

C.第一或第三象限角　D.第一或第四象限角

D　**解析**：因为$\frac{\sin\theta}{\tan\theta}>0$，所以 $\sin\theta$，$\tan\theta$ 同号.

当 $\theta$ 的终边在第一象限时，$\sin\theta>0$，$\tan\theta>0$；

当 $\theta$ 的终边在第四象限时，$\sin\theta<0$，$\tan\theta<0$.

所以 $\theta$ 是第一或第四象限角.

**2.**(多选)已知 $\alpha$ 是第一象限角，则下列结论中正确的是　(　　)

A.$\sin 2\alpha>0$　　B.$\cos 2\alpha>0$

C.$\cos\frac{\alpha}{2}>0$　　D.$\tan\frac{\alpha}{2}>0$

AD　**解析**：由 $\alpha$ 是第一象限角，得 $2k\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $4k\pi<2\alpha<\pi+4k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$2\alpha$ 的终边在 $x$ 轴上方，则 $\sin 2\alpha>0$，$\cos 2\alpha$ 的正负不确定；

又因为 $k\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以$\frac{\alpha}{2}$是第一或第三象限角，则 $\tan\frac{\alpha}{2}>0$，$\cos\frac{\alpha}{2}$的正负不确定.

**3.**设 $\alpha$ 是第一象限角，且$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\cos\frac{\alpha}{2}$，则$\frac{\alpha}{2}$的终边所在的象限是　(　　)

A.第一象限　　B.第二象限

C.第三象限　　D.第四象限

A　**解析**：因为 $\alpha$ 是第一象限角，所以$\frac{\alpha}{2}$是第一或第三象限角.

又因为$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\cos\frac{\alpha}{2}$，所以$\frac{\alpha}{2}$所在的象限是第一象限.

## 自我超越

已知 $\sin\theta<0$，$\tan\theta>0$.

(1)求角 $\theta$ 的集合；

(2)求$\frac{\theta}{2}$的终边所在的象限；

(3)试判断 $\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}$的符号.

**解**：(1)因为 $\sin\theta<0$，所以 $\theta$ 为第三或第四象限角，或角 $\theta$ 的终边与 $y$ 轴的负半轴重合.

因为 $\tan\theta>0$，所以 $\theta$ 为第一或第三象限角.

所以 $\theta$ 为第三象限角，

故角 $\theta$ 的集合为$\left\{\theta\left|2k\pi+\pi<\theta<2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

(2)由(1)可知，$k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<k\pi+\frac{3\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.

当 $k$ 是偶数时，$\frac{\theta}{2}$的终边在第二象限；

当 $k$ 是奇数时，$\frac{\theta}{2}$的终边在第四象限.

(3)由(2)可知，

当 $k$ 是偶数时，$\sin\frac{\theta}{2}>0$，$\cos\frac{\theta}{2}<0$，$\tan\frac{\theta}{2}<0$，

所以 $\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}>0$；

当 $k$ 是奇数时，$\sin\frac{\theta}{2}<0$，$\cos\frac{\theta}{2}>0$，$\tan\frac{\theta}{2}<0$，

所以 $\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}>0$.

综上可知，$\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}>0$，符号为正.

# 5.2.2　同角三角函数的基本关系

**学习任务目标**

1.能通过三角函数的定义推导出同角三角函数的基本关系.
2.理解同角三角函数的基本关系式.
3.能运用同角三角函数的基本关系式进行三角函数式的化简、求值和证明.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　同角三角函数的基本关系式**

(1)平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

(2)商数关系：$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha\left(\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right)$.

**知识点二　同角三角函数基本关系式的变形**

(1)$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 的变形：

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$；

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$.

(2)$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right)$ 的变形：

$\sin\alpha=\cos\alpha\tan\alpha$；

$\cos\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$.

### 【概念辨析】

**1.**判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)对于任意角 $\alpha,\beta$，均有 $\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$.　(×)

(2)存在角 $\alpha$，使得 $\sin\alpha=\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$.　(×)

(3)存在角 $\alpha$，使得 $\tan\alpha=1,\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.　(√)

(4)对于任意角 $\alpha$，$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ 都成立.　(×)

(5)$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha$.　(×)

**2.**若 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，且 $\alpha$ 是第二象限角，则 $\tan\alpha=$(　　)

A.$-\dfrac{4}{3}$　　B.$\dfrac{3}{4}$

C.$\pm\dfrac{3}{4}$　　D.$\pm\dfrac{4}{3}$

A　**解析**：因为 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，且 $\alpha$ 是第二象限角，所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{3}{5}$，所以 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{4}{3}$.故选 A.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1 理解同角三角函数基本关系

#### 探究活动

**例1**　(1)已知 $\theta$ 是第二象限角，且满足 $\sin\theta+2\cos\theta=0$，则 $\cos\theta$ 的值为(　　)

A.$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　B.$-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　C.$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　D.$-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

(2)(教材 P184 练习题 1 改编)已知 $\alpha$ 为第二象限角，$\cos\alpha=-\dfrac{12}{13}$，求 $\sin\alpha,\tan\alpha$ 的值.

(3)若 $\tan\alpha=-\dfrac{15}{8}$，求 $\sin\alpha$ 的值.

(1)D　**解析**：由 $\sin\theta+2\cos\theta=0$，移项可得 $\sin\theta=-2\cos\theta$.

由 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 及 $\sin\theta=-2\cos\theta$ 可得，

$(-2\cos\theta)^2+\cos^2\theta=1$，可得 $\cos^2\theta=\dfrac{1}{5}$，

得 $\cos\theta=\pm\sqrt{\dfrac{1}{5}}=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

因为 $\theta$ 是第二象限角，所以 $\cos\theta<0$，所以 $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

(2)**解**：因为 $\alpha$ 为第二象限角，且 $\cos\alpha=-\dfrac{12}{13}$，

所以 $\sin\alpha>0$，且 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{12}{13}\right)^2}=\dfrac{5}{13}$.

所以 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{5}{12}$.

(3)**解**：因为 $\tan\alpha=-\dfrac{15}{8}<0$，所以 $\alpha$ 是第二或第四象限角.

由$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{15}{8},\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\end{cases}$得$\sin^2\alpha=\left(\dfrac{15}{17}\right)^2$.

当$\alpha$是第二象限角时，$\sin\alpha=\dfrac{15}{17}$；

当$\alpha$是第四象限角时，$\sin\alpha=-\dfrac{15}{17}$.

## 【探究总结】

**三角函数求值问题的解题策略**

已知角$\alpha$的某个三角函数值，求角$\alpha$的其余三角函数值时，要注意公式的合理选择与变形；若角的终边所在的象限不确定，应分类讨论.

## 应用迁移

**1.**已知$\alpha\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$，$\tan\alpha=2$，则$\cos\alpha=$_____.

$-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　**解析：**由$\alpha\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$及$\tan\alpha=2$，得$\sin\alpha=2\cos\alpha<0$.又$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以$\cos^2\alpha=\dfrac{1}{5}$，$\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

**2.**若$\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$，且$\alpha$是第三象限角，求$\cos\alpha$，$\tan\alpha$的值.

**解：**因为$\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$，且$\alpha$是第三象限角，

所以$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{3}{5}$，

$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{4}{5}\times\left(-\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{4}{3}$.

# 任务2　掌握同角三角函数基本关系式的灵活应用

## 探究活动

**例2**　已知$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$，$\alpha\in(0,\pi)$，求：

(1)$\sin\alpha\cos\alpha$；(2)$\sin\alpha-\cos\alpha$.

**解：**(1)由$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$，两边平方得$2\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{24}{25}$，所以$\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{12}{25}$.

(2)由(1)知$\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{12}{25}$，所以$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1+\dfrac{24}{25}=\dfrac{49}{25}$，所以$\sin\alpha-\cos\alpha=\pm\dfrac{7}{5}$.

因为$\sin\alpha\cos\alpha<0$，所以$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$.

所以$\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$.

所以$\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{7}{5}$.

[一题多思]

**思考1.**本例涉及的三角恒等式有哪些？

**提示：**(1)$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$；

(2)$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta$；

(3)$(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2=2$；

(4)$(\sin\theta-\cos\theta)^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2-4\sin\theta\cos\theta$.

**思考2.**若已知$\sin\alpha\cos\alpha$的值，能否求出$\sin\alpha\pm\cos\alpha$的值？

**提示：**已知$\sin\alpha+\cos\alpha$，$\sin\alpha-\cos\alpha$，$\sin\alpha\cos\alpha$中任何一个式子的值，则另外两个式子的值均可求出.

**例3**　已知$\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=2$，计算下列各式的值：

(1)$\dfrac{3\sin\alpha-\cos\alpha}{2\sin\alpha+3\cos\alpha}$；

(2)$\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+1$.

**解：**由$\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=2$，化简得$\sin\alpha=3\cos\alpha$，

所以$\tan\alpha=3$.

(1)原式$=\dfrac{3\times3\cos\alpha-\cos\alpha}{2\times3\cos\alpha+3\cos\alpha}=\dfrac{8\cos\alpha}{9\cos\alpha}=\dfrac{8}{9}$.

(2)原式$=\dfrac{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}+1$

$=\dfrac{\tan^2\alpha-2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}+1=\dfrac{3^2-2\times3}{3^2+1}+1=\dfrac{13}{10}$.

## 【探究总结】

已知$\tan\alpha$的值，求关于$\sin\alpha$，$\cos\alpha$的$n$次齐次式的值时，可将分子、分母同时除以$\cos\alpha$的$n$次幂，进行弦化切；若无分母时，把分母看作1，并将1用$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$来代换.

## 应用迁移

**1.**(多选)已知$\theta\in(0,\pi)$，$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{5}$，则下列结论正确的是　(　　)

A. $\theta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$　　B.$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$

C.$\tan\theta=-\dfrac{3}{4}$　　D.$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{7}{5}$

ACD　**解析：**由$\theta\in(0,\pi)$，$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{5}$，得$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{25}$，解得$2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{24}{25}<0$.对于A，$\sin\theta>0$，则$\cos\theta<0$，$\theta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，A正确；对

于 D，$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}=\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}=\frac{7}{5}$，D 正确；对于 B，由 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{5}$，$\sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{5}$，得 $\sin\theta=\frac{3}{5}$，$\cos\theta=-\frac{4}{5}$，B 错误；对于 C，$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{3}{4}$，C 正确.故选 ACD.

**2.**已知 $\tan\alpha=2$，求下列各式的值：

(1)$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$；

(2)$\frac{3\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}{1-2\cos^2\alpha}$.

**解：**(1)$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\tan^2\alpha-1}{\tan^2\alpha+1}=\frac{3}{5}$.

(2)$\frac{3\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}{1-2\cos^2\alpha}=\frac{3\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\frac{3\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{3\tan\alpha-2}{\tan^2\alpha-1}=\frac{4}{3}$.

## 任务3 利用同角三角函数基本关系式化简与证明

### 探究活动

**例 4**　(1)化简：$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\left(\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi\right)$；

(2)证明：$\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}-\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\tan^2\theta-1}=\sin\theta+\cos\theta$.

(1)**解：**$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，则 $0<\cos\alpha<1$，$-1<\sin\alpha<0$，

所以 $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}}+\sqrt{\frac{(1+\cos\alpha)^2}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}+\frac{1+\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha+1+\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha}}=-\frac{2}{\sin\alpha}$.

(2)**证明：**$\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}-\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\tan^2\theta-1}=\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}-\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-1}=\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}-\frac{\cos^2\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\sin\theta+\cos\theta$.

### 【探究总结】

**1.利用同角三角函数基本关系式化简的常用方法**

(1)当要化简的式子中 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 同时存在时，一般应切化弦.

(2)对含根号的，应先把被开方式化为完全平方式，再去掉根号.

(3)对高次的三角函数式，可借助因式分解，或构造平方关系，进行降幂化简.

**2.证明恒等式的关注点**

(1)实质：清除等式两端的差异，有目的地化简.

(2)基本原则：由繁到简.例如，化切为弦，减少函数名称.

(3)常用方法：从等式的一边开始，通过恒等变形推出它等于另一边.

### 应用迁移

**1.**化简：$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\tan\alpha-\sin\alpha}{\tan\alpha+\sin\alpha}}$.

**解：**原式$=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\sin\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\sin\alpha}}$

$=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

$=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}}$

$=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{|\sin\alpha|}=\begin{cases}1,\sin\alpha>0,\\-1,\sin\alpha<0.\end{cases}$

**2.**已知 $\tan^2\alpha=2\tan^2\beta+1$，求证：$\sin^2\beta=2\sin^2\alpha-1$.

**证明：**(方法一)因为 $\tan^2\alpha=2\tan^2\beta+1$，

所以 $\tan^2\beta=\frac{\tan^2\alpha-1}{2}$①.

因为 $\tan^2\beta=\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}$，

所以 $\tan^2\beta=\frac{\sin^2\beta}{1-\sin^2\beta}$，

所以 $\sin^2\beta=\frac{\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}$②.

由①②，得 $\sin^2\beta=\frac{\frac{\tan^2\alpha-1}{2}}{1+\frac{\tan^2\alpha-1}{2}}=\frac{\tan^2\alpha-1}{\tan^2\alpha+1}=$

$\dfrac{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-1}{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1}=\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=2\sin^2\alpha-1$.

(方法二)因为 $\tan^2\alpha=2\tan^2\beta+1$,

所以 $\tan^2\alpha+1=2(\tan^2\beta+1)$.

所以 $\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2\cdot\dfrac{\sin^2\beta+\cos^2\beta}{\cos^2\beta}$.

所以 $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=\dfrac{2}{\cos^2\beta}$.

所以 $\cos^2\beta=2\cos^2\alpha$.所以 $1-\sin^2\beta=2(1-\sin^2\alpha)$.

所以 $\sin^2\beta=2\sin^2\alpha-1$.

# 课后素养评价(四十四)

## 基础落实

**1.**已知 $\sin\beta=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,$-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0$,则 $\cos\beta=$　(　　)

A.$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　B.$-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

C.$-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　D.$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

D　**解析**:因为 $\sin\beta=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,$-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0$,所以$\cos\beta>0$.又因为 $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$,所以 $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

**2.**已知 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{2}$,$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,则 $\sin\alpha-2\cos\alpha=$　(　　)

A.$\sqrt{5}$　　B.$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

C.1　　D.$-\sqrt{5}$

A　**解析**:因为 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{2}$,

所以 $\begin{cases}\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{1}{2},\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.\end{cases}$

又 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,所以 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,$\cos\alpha=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,所以 $\sin\alpha-2\cos\alpha=\sqrt{5}$.

**3.**已知 $\sin\theta=-2\cos\theta$,则 $\dfrac{3+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=$　(　　)

A.$-6$　　B.$-\dfrac{1}{2}$　　C.8　　D.$-8$

D　**解析**:因为 $\sin\theta=-2\cos\theta$,所以 $\tan\theta=-2$,

所以 $\dfrac{3+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{3\sin^2\theta+4\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{3\tan^2\theta+4}{\tan\theta}=-8$.

**4.**已知在$\triangle ABC$ 中,$\sin A+\cos A=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,则 $\sin A-\cos A=$　(　　)

A.$-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　B.$\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　　C.$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　D.$-\dfrac{3}{5}$

B　**解析**:因为 $\sin A+\cos A=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,则 $(\sin A+\cos A)^2=\sin^2A+2\sin A\cos A+\cos^2A=1+2\sin A\cos A=\dfrac{1}{5}$,

可得 $\sin A\cos A=-\dfrac{2}{5}<0$.

又 $A$ 为$\triangle ABC$ 的内角,所以 $A\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,即 $\sin A>0$,$\cos A<0$,可得 $\sin A-\cos A>0$.

又因为$(\sin A-\cos A)^2=\sin^2A-2\sin A\cos A+\cos^2A=1-2\sin A\cos A=\dfrac{9}{5}$,

所以 $\sin A-\cos A=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.故选 B.

**5.**若 $\theta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,且满足 $\dfrac{6}{\tan\theta}-\tan\theta=1$,则 $\sin\theta+\cos\theta=$　(　　)

A.$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　B.$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　C.$-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　D.$-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

A　**解析**:由 $\dfrac{6}{\tan\theta}-\tan\theta=1$,得$(\tan\theta-2)(\tan\theta+3)=0$,因为 $\theta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,$\tan\theta<0$,所以 $\tan\theta=-3$或 $\tan\theta=2$(舍去).由 $\begin{cases}\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-3,\\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1\end{cases}$及 $\sin\theta>0$,得 $\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$,所以 $\cos\theta=\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$,$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

**6.**化简:$(1+\tan^2 15^\circ)\cdot\cos^2 15^\circ=$_____.

1　**解析**:$(1+\tan^2 15^\circ)\cos^2 15^\circ=\left(1+\dfrac{\sin^2 15^\circ}{\cos^2 15^\circ}\right)\cdot\cos^2 15^\circ=\dfrac{\cos^2 15^\circ+\sin^2 15^\circ}{\cos^2 15^\circ}\cdot\cos^2 15^\circ=1$.

## 能力提升

**1.**已知关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2-\dfrac{1}{5}x+m=0$ 的两

根分别为 $\sin\alpha,\cos\alpha$，则 $m$ 的值为　　（　　）

A.$-\frac{24}{25}$　B.$\frac{24}{25}$　　C.$-\frac{12}{25}$　　D.$\frac{12}{25}$

C　**解析**：关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2-\frac{1}{5}x+m=0$ 的两根分别为 $\sin\alpha,\cos\alpha$，

由 $\Delta=\frac{1}{25}-4m>0$，可得 $m<\frac{1}{100}$.

又由一元二次方程根与系数的关系可得 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$，$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=m$，

所以 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{25}$，

解得 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{12}{25}$，即 $m=-\frac{12}{25}$.

**2.**已知 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{3}$，则 $\sin\theta-\cos\theta=$　　（　　）

A.$-\frac{\sqrt{14}}{3}$　　B.$\frac{\sqrt{14}}{3}$

C.$\pm\frac{\sqrt{14}}{3}$　　D.$-\frac{5\sqrt{10}}{3}$

A　**解析**：因为 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{3}$，

所以 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{4}{9}=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=1+2\sin\theta\cos\theta$，解得 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{5}{18}$.又 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\cos\theta>0$，则 $\sin\theta<0$，故 $\theta$ 是第四象限角，所以 $\sin\theta-\cos\theta<0$.又 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=1+\frac{5}{9}=\frac{14}{9}$，所以 $\sin\theta-\cos\theta=-\frac{\sqrt{14}}{3}$.

**3.**已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{13}$，$\alpha\in(0,\pi)$，则 $\tan\alpha=$_____.

$-\frac{12}{5}$　**解析**：（方法一：构建方程组）

因为 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{13}$①，

所以 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{49}{169}$，

即 $2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{120}{169}$.

因为 $\alpha\in(0,\pi)$，所以 $\sin\alpha>0,\cos\alpha<0$.

所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{17}{13}$②.

由①②解得 $\sin\alpha=\frac{12}{13}$，$\cos\alpha=-\frac{5}{13}$，

所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{12}{5}$.

（方法二：弦化切）同方法一，求出 $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{60}{169}$，

所以 $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=-\frac{60}{169}$，

所以 $\frac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=-\frac{60}{169}$，

整理得 $60\tan^2\alpha+169\tan\alpha+60=0$，

解得 $\tan\alpha=-\frac{5}{12}$ 或 $\tan\alpha=-\frac{12}{5}$.

由 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{13}>0$ 知 $|\sin\alpha|>|\cos\alpha|$.

故 $\tan\alpha=-\frac{12}{5}$.

**4.**已知 $\tan\alpha=2$，则 $2\sin\alpha+\cos\alpha=$__$\pm\sqrt{5}$__.

## 自我超越

已知 $f(\alpha)=\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}+\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$.

(1)化简 $f(\alpha)$；

(2)若 $\alpha$ 为第三象限角，且 $f(\alpha)=3$，求 $\sin\alpha,\tan\alpha$.

**解**：（1）$f(\alpha)=\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}}+\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}}=\frac{1+\sin\alpha}{|\cos\alpha|}+\frac{1-\sin\alpha}{|\cos\alpha|}=\frac{2}{|\cos\alpha|}$.

(2)因为 $\alpha$ 为第三象限角，所以 $\sin\alpha<0,\cos\alpha<0$.

又因为 $f(\alpha)=\frac{2}{|\cos\alpha|}=3$，所以 $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$.

故 $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

# 5.3　诱导公式

## 第 1 课时　诱导公式二～四

**学习任务目标**

1.理解并掌握诱导公式二、三、四的结构特征及记忆方法.
2.会运用诱导公式一、二、三、四解决求值、化简与证明问题.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点　诱导公式二～四**

(1)公式二：$\sin(\pi+\alpha)=\underline{\quad-\sin\alpha\quad}$，
$\cos(\pi+\alpha)=\underline{\quad-\cos\alpha\quad}$，
$\tan(\pi+\alpha)=\underline{\quad\tan\alpha\quad}$.
(2)公式三：$\sin(-\alpha)=\underline{\quad-\sin\alpha\quad}$，
$\cos(-\alpha)=\underline{\quad\cos\alpha\quad}$，
$\tan(-\alpha)=\underline{\quad-\tan\alpha\quad}$.
(3)公式四：$\sin(\pi-\alpha)=\underline{\quad\sin\alpha\quad}$，
$\cos(\pi-\alpha)=\underline{\quad-\cos\alpha\quad}$，
$\tan(\pi-\alpha)=\underline{\quad-\tan\alpha\quad}$.

### 【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)$\tan 210^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$.　(√)
(2)诱导公式中的角 $\alpha$ 一定是锐角.　(×)
(3)在△$ABC$ 中，$\sin(A+B)=\sin C$.　(√)
(4)$\sin(\alpha-\pi)=\sin\alpha$.　(×)

2.求下列三角函数值：

(1)$\sin 690^\circ=$_____；
(2)$\cos\left(-\frac{20\pi}{3}\right)=$_____；
(3)$\tan(-1\,845^\circ)=$_____.

(1)$-\frac{1}{2}$　(2)$-\frac{1}{2}$　(3)$-1$

**解析**：(1)$\sin 690^\circ=\sin(360^\circ+330^\circ)=\sin 330^\circ$
$=\sin(180^\circ+150^\circ)=-\sin 150^\circ$
$=-\sin(180^\circ-30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$.

(2)$\cos\left(-\frac{20\pi}{3}\right)=\cos\frac{20\pi}{3}$
$=\cos\left(6\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}$
$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

(3)$\tan(-1\,845^\circ)=\tan(-5\times360^\circ-45^\circ)$
$=\tan(-45^\circ)=-\tan 45^\circ=-1$.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务 1 > 掌握给角求值

#### 探究活动

**例 1**　(教材 P191 练习题 2 改编)利用公式求下列三角函数值：

(1)$\cos(-480^\circ)+\sin 210^\circ$；
(2)$\sin\left(-\frac{8\pi}{3}\right)\cdot\cos\frac{23\pi}{6}\cdot\tan\frac{37\pi}{6}$.

**解**：(1)原式$=\cos 480^\circ+\sin(180^\circ+30^\circ)$
$=\cos(360^\circ+120^\circ)-\sin 30^\circ=\cos 120^\circ-\frac{1}{2}$
$=\cos(180^\circ-60^\circ)-\frac{1}{2}$
$=-\cos 60^\circ-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1$.

(2)原式$=\sin\left(-4\pi+\frac{4\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(4\pi-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\tan\left(6\pi+\frac{\pi}{6}\right)$
$=\sin\frac{4\pi}{3}\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\tan\frac{\pi}{6}$
$=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{6}\cdot\tan\frac{\pi}{6}$
$=-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}\cdot\tan\frac{\pi}{6}$
$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

**【探究总结】**

**利用诱导公式求任意角三角函数值的步骤**

(1)负化正：用公式一或三将负角化为正角.
(2)大化小：用公式一将角化为 0°和 360°之间的角.
(3)小化锐：用公式二或四将大于 90°的角化为锐角.
(4)锐求值：得到锐角三角函数后求值.

## 应用迁移

求下列各式的值：

(1)$\tan\frac{3\pi}{4}+\cos\left(-\frac{55\pi}{6}\right)+\sin\frac{11\pi}{6}$；

(2)$\cos(-120^\circ)\sin(-150^\circ)+\tan 855^\circ$；

(3)$\sin\frac{4\pi}{3}\cdot\cos\frac{19\pi}{6}\cdot\tan\frac{21\pi}{4}$.

**解**：(1)原式$=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{55\pi}{6}+\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$=-\tan\frac{\pi}{4}+\cos\left(4\times2\pi+\frac{7\pi}{6}\right)-\sin\frac{\pi}{6}$

$=-1+\cos\frac{7\pi}{6}-\frac{1}{2}=-1+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$

$=-\frac{3}{2}-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2)原式$=\cos 120^\circ(-\sin 150^\circ)+\tan 855^\circ$

$=-\cos(180^\circ-60^\circ)\sin(180^\circ-30^\circ)+\tan(135^\circ+2\times360^\circ)$

$=\cos 60^\circ\sin 30^\circ+\tan 135^\circ$

$=\cos 60^\circ\sin 30^\circ+\tan(180^\circ-45^\circ)$

$=\cos 60^\circ\sin 30^\circ-\tan 45^\circ$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{4}$.

(3)原式$=\sin\frac{4\pi}{3}\cdot\cos\left(2\pi+\frac{7\pi}{6}\right)\cdot\tan\left(4\pi+\frac{5\pi}{4}\right)$

$=\sin\frac{4\pi}{3}\cdot\cos\frac{7\pi}{6}\cdot\tan\frac{5\pi}{4}$

$=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right)\cdot\tan\frac{\pi}{4}$

$=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times1=\frac{3}{4}$.

## 任务2 利用诱导公式化简求值

### 探究活动

**例2**　化简求值：

(1)$\frac{\sqrt{1-2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}}{\sin 170^\circ-\sqrt{1-\sin^2 170^\circ}}$；

(2)$\frac{\sin(180^\circ+\alpha)-\cos(-\alpha)}{-\sin(-\alpha)-2\cos(180^\circ-\alpha)-\cos(-\alpha)}$.

**解**：(1)原式$=\frac{\sqrt{\sin^2 10^\circ-2\sin 10^\circ\cos 10^\circ+\cos^2 10^\circ}}{\sin 170^\circ-|\cos 170^\circ|}$

$=\frac{|\sin 10^\circ-\cos 10^\circ|}{\sin(180^\circ-10^\circ)-|\cos(180^\circ-10^\circ)|}$

$=\frac{\cos 10^\circ-\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ-\cos 10^\circ}=-1$.

(2)$\frac{\sin(180^\circ+\alpha)-\cos(-\alpha)}{-\sin(-\alpha)-2\cos(180^\circ-\alpha)-\cos(-\alpha)}$

$=\frac{-\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+2\cos\alpha-\cos\alpha}=\frac{-(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}=-1$.

**【探究总结】**

**三角函数式化简的常用方法**

(1)利用诱导公式，将任意角的三角函数转化为锐角三角函数.

(2)切化弦：一般需将式中的正切函数转化为正弦、余弦函数.

(3)注意“1”的代换：$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\tan\frac{\pi}{4}$.

## 应用迁移

化简：(1)$\frac{\cos(\pi+\alpha)\sin(2\pi+\alpha)}{\sin(-\alpha-\pi)\cos(-\pi-\alpha)}$；

(2)$\frac{\sin(1\,440^\circ+\alpha)\cdot\cos(\alpha-1\,080^\circ)}{\cos(-180^\circ-\alpha)\cdot\sin(-\alpha-180^\circ)}$.

**解**：(1)原式$=\frac{-\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{-\sin(\pi+\alpha)\cdot\cos(\pi+\alpha)}$

$=\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=1$.

(2)原式$=\frac{\sin(4\times360^\circ+\alpha)\cos(\alpha-3\times360^\circ)}{\cos(180^\circ+\alpha)[-\sin(180^\circ+\alpha)]}$

$=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{-\cos\alpha\cdot\sin\alpha}=-1$.

## 任务3 掌握给值求值

### 探究活动

**例3**　(1)已知$\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则$\cos\left(\alpha+\frac{5\pi}{6}\right)=$_____.

(2)已知$\sin(\alpha+\pi)=\frac{4}{5}$，且$\sin\alpha\cos\alpha<0$.求$\frac{2\sin(\alpha-\pi)+3\tan(3\pi-\alpha)}{4\cos(\alpha-3\pi)}$的值.

(1)$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　**解析**：$\cos\left(\alpha+\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left[\pi-\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]=-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2)**解**：因为$\sin(\alpha+\pi)=\frac{4}{5}$，所以$\sin\alpha=-\frac{4}{5}$.

又因为$\sin\alpha\cos\alpha<0$，

所以$\cos\alpha>0$，$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{3}{5}$，

则$\tan\alpha=-\frac{4}{3}$.

所以原式$=\frac{-2\sin\alpha-3\tan\alpha}{-4\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha+3\tan\alpha}{4\cos\alpha}$

$=\frac{2\times\left(-\frac{4}{5}\right)+3\times\left(-\frac{4}{3}\right)}{4\times\frac{3}{5}}=-\frac{7}{3}$.

[一题多思]

**思考 1.** 本例(1)条件不变，能求出$\cos\left(\frac{7\pi}{6}-\alpha\right)$的值吗？

**提示：** $\cos\left(\frac{7\pi}{6}-\alpha\right)=\cos\left[\pi+\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]$

$=-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

**思考 2.** 本例(1)条件不变，能求出$\cos\left(\alpha-\frac{13\pi}{6}\right)$的值吗？

**提示：** $\cos\left(\alpha-\frac{13\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{13\pi}{6}-\alpha\right)$

$=\cos\left[2\pi+\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

**思考 3.** 本例(1)条件不变，能求出$\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$的值吗？

**提示：** $\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sin^2\left[-\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]$

$=\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=1-\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{2}{3}$.

**思考 4.** 若本例(1)条件变为“$\tan\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$”，则$\tan\left(\frac{7\pi}{6}-\alpha\right)$的值为多少？

**提示：** $\tan\left(\frac{7\pi}{6}-\alpha\right)=\tan\left[\pi+\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]$

$=\tan\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

## 【探究总结】

**解决条件求值问题的策略**

(1)解决条件求值问题，要仔细观察条件与所求式中的角、函数名称及有关运算之间的差异及联系.

(2)可以将已知式进行变形向所求式转化，或将所求式进行变形向已知式转化.

## 应用迁移

**1.** 已知$\sin\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$，则$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$的值为_____.

$\frac{1}{3}$　**解析：** 因为$\sin\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$，所以$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sin\left[-\pi-\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)\right]=\sin\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$.

**2.** 若$\cos\alpha=\frac{2}{3}$，$\alpha$是第四象限角，求$\frac{\sin(\alpha-2\pi)+\sin(-\alpha-3\pi)\cos(\alpha-3\pi)}{\cos(\pi-\alpha)-\cos(-\pi-\alpha)\cos(\alpha-4\pi)}$的值.

**解：** 由已知$\cos\alpha=\frac{2}{3}$，$\alpha$是第四象限角，得$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$，故$\frac{\sin(\alpha-2\pi)+\sin(-\alpha-3\pi)\cos(\alpha-3\pi)}{\cos(\pi-\alpha)-\cos(-\pi-\alpha)\cos(\alpha-4\pi)}$

$=\frac{\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{-\cos\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

# 课后素养评价(四十五)

## 基础落实

**1.** $\cos\frac{22\pi}{3}$的值为　(　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　B. $\frac{1}{2}$　C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　D. $-\frac{1}{2}$

D　**解析：** 由诱导公式可得，$\cos\frac{22\pi}{3}=\cos\left(7\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

**2.** 若$\sin(5\pi-\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{3}$，则$\sin\alpha=$　(　　)

A. $\frac{\sqrt{7}}{3}$　B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　C. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$　D. $-\frac{\sqrt{7}}{3}$

B　**解析：** 因为$\sin(5\pi-\alpha)=\sin(4\pi+\pi-\alpha)=\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$，所以$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

**3.** $\sqrt{1-2\sin(\pi+2)\cos(\pi-2)}=$_____.

$\sin 2-\cos 2$　**解析：** $\sqrt{1-2\sin(\pi+2)\cos(\pi-2)}=\sqrt{1-2\sin 2\cos 2}=\sqrt{(\sin 2-\cos 2)^2}=|\sin 2-\cos 2|$，因为2是第二象限角，所以$\sin 2>0$，$\cos 2<0$，所以原式化简为$\sin 2-\cos 2$.

**4.** 已知$\tan\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$，则$\tan\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)=$_____.

$-\frac{1}{3}$

**5.** 已知$f(\alpha)=\frac{\sin(\pi-\alpha)\cos(2\pi-\alpha)\cos(-\alpha)}{\cos(-\alpha-\pi)\sin(-\pi-\alpha)}$.

(1)化简$f(\alpha)$；

(2)若$\alpha$是第三象限角，且$\sin(\alpha-5\pi)=\frac{1}{5}$，求$f(\alpha)$的值；

(3)若$\alpha=-2\,220°$，求$f(\alpha)$的值.

**解：** (1) $f(\alpha)=\frac{\sin(\pi-\alpha)\cos(2\pi-\alpha)\cos(-\alpha)}{\cos(-\alpha-\pi)\sin(-\pi-\alpha)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\alpha}{-\cos\alpha\cdot\sin\alpha}=-\cos\alpha$.

(2)因为$\alpha$是第三象限角，且$\sin(\alpha-5\pi)=-\sin(\pi$

$-\alpha)=-\sin\alpha=\frac{1}{5}$，所以 $\sin\alpha=-\frac{1}{5}$，故 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$，

因此 $f(\alpha)=-\cos\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

(3)当 $\alpha=-2\ 220°$时，

$f(\alpha)=-\cos(-2\ 220°)=-\cos\ 2\ 220°=-\cos(6\times360°+60°)=-\cos\ 60°=-\frac{1}{2}$.

## 能力提升

**1.**(多选)已知角 $\alpha$ 的终边经过点 $P(-4,3)$，则下列选项正确的是　(AD)

A.$\sin(-\alpha)=-\frac{3}{5}$　B.$\cos(\pi-\alpha)=\frac{3}{5}$

C.$\tan(2\pi+\alpha)=\frac{3}{4}$　D.$\cos(\pi+\alpha)=\frac{4}{5}$

**2.**已知 $\cos 80°=k$，则 $\cos 620°$的值为　(B)

A.$k$　B.$-k$

C.$\pm k$　D.$\sqrt{1-k^2}$

**3.**设 $f(x)=a\sin(\pi x+\alpha)+b\cos(\pi x+\beta)+5$，$\alpha$，$\beta$ 均为实数，若 $f(2\ 024)=10$，则 $f(2\ 025)$的值为____.

0　**解析**：因为 $f(2\ 024)=a\sin(2\ 024\pi+\alpha)+b\cos(2\ 024\pi+\beta)+5=a\sin\alpha+b\cos\beta+5=10$，

所以 $a\sin\alpha+b\cos\beta=5$，

所以 $f(2\ 025)=a\sin(2\ 025\pi+\alpha)+b\cos(2\ 025\pi+\beta)+5=-a\sin\alpha-b\cos\beta+5=-5+5=0$.

**4.**已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, x<0,\\ f(x-1)-1, x>0,\end{cases}$ 则 $f\left(-\frac{11}{6}\right)+f\left(\frac{11}{6}\right)$的值为_____.

$-2$　**解析**：$f\left(-\frac{11}{6}\right)=\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)=\sin\left(-2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，

$f\left(\frac{11}{6}\right)=f\left(\frac{11}{6}-1\right)-1=f\left(\frac{5}{6}\right)-1=f\left(\frac{5}{6}-1\right)-2=f\left(-\frac{1}{6}\right)-2=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-2=-\sin\frac{\pi}{6}-2=-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{2}$，

所以 $f\left(-\frac{11}{6}\right)+f\left(\frac{11}{6}\right)=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=-2$.

## 自我超越

对于任意角 $\alpha$ 有 $\sin(n\pi+\alpha)=(-1)^n\sin\alpha(n\in\mathbf{Z})$，具体推导过程如下：

当 $n=2k(k\in\mathbf{Z})$时，由诱导公式有

$\sin(n\pi+\alpha)=\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha=(-1)^{2k}\sin\alpha(k\in\mathbf{Z})$；

当 $n=2k+1(k\in\mathbf{Z})$时，由诱导公式有

$\sin(n\pi+\alpha)=\sin(2k\pi+\pi+\alpha)=-\sin\alpha=(-1)^{2k+1}\sin\alpha(k\in\mathbf{Z})$.

综上，对任意角 $\alpha$ 有 $\sin(n\pi+\alpha)=(-1)^n\cdot\sin\alpha(n\in\mathbf{Z})$.

根据以上推导过程，你能推导下列各式的结果吗？

(1)$\cos(n\pi+\alpha)$；(2)$\sin(n\pi-\alpha)$；

(3)$\cos(n\pi-\alpha)$.

**解**：(1)$\cos(n\pi+\alpha)=(-1)^n\cos\alpha(n\in\mathbf{Z})$.

①当 $n=2k(k\in\mathbf{Z})$时，由诱导公式有

$\cos(n\pi+\alpha)=\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha=(-1)^{2k}\cos\alpha(k\in\mathbf{Z})$；

②当 $n=2k+1(k\in\mathbf{Z})$时，由诱导公式有

$\cos(n\pi+\alpha)=\cos(2k\pi+\pi+\alpha)=-\cos\alpha=(-1)^{2k+1}\cdot\cos\alpha(k\in\mathbf{Z})$.

综上，对任意角 $\alpha$ 有 $\cos(n\pi+\alpha)=(-1)^n\cos\alpha(n\in\mathbf{Z})$.

(2)$\sin(n\pi-\alpha)=(-1)^{n-1}\sin\alpha(n\in\mathbf{Z})$.

①当 $n=2k(k\in\mathbf{Z})$时，由诱导公式有

$\sin(n\pi-\alpha)=\sin(2k\pi-\alpha)=-\sin\alpha=(-1)^{2k-1}\sin\alpha(k\in\mathbf{Z})$；

②当 $n=2k+1(k\in\mathbf{Z})$时，由诱导公式有

$\sin(n\pi-\alpha)=\sin(2k\pi+\pi-\alpha)=\sin\alpha=(-1)^{2k}\sin\alpha(k\in\mathbf{Z})$.

综上，对任意角 $\alpha$ 有 $\sin(n\pi-\alpha)=(-1)^{n-1}\sin\alpha(n\in\mathbf{Z})$.

(3)$\cos(n\pi-\alpha)=(-1)^n\cos\alpha(n\in\mathbf{Z})$.

①当 $n=2k(k\in\mathbf{Z})$时，由诱导公式有

$\cos(n\pi-\alpha)=\cos(2k\pi-\alpha)=\cos\alpha=(-1)^{2k}\cos\alpha(k\in\mathbf{Z})$；

②当 $n=2k+1(k\in\mathbf{Z})$时，由诱导公式有

$\cos(n\pi-\alpha)=\cos(2k\pi+\pi-\alpha)=-\cos\alpha=(-1)^{2k+1}\cdot\cos\alpha(k\in\mathbf{Z})$.

综上，对任意角 $\alpha$ 有 $\cos(n\pi-\alpha)=(-1)^n\cos\alpha(n\in\mathbf{Z})$.

# 第 2 课时　诱导公式五、六

**学习任务目标**

1.掌握诱导公式五、六的推导，并能利用公式解决求值、化简与证明问题.
2.能对诱导公式一～六做综合归纳，体会六组公式的共性与个性，培养由特殊到一般的数学推理意识和能力.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点　诱导公式五、六**

(1)公式五：$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$<u>$\cos\alpha$</u>；

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$<u>$\sin\alpha$</u>.

(2)公式六：$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=$<u>$\cos\alpha$</u>；

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=$<u>$-\sin\alpha$</u>.

### 【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)诱导公式五、六中的角 $\alpha$ 只能是锐角.　(×)

(2)$\sin(90°+\alpha)=-\cos\alpha$.　(×)

(3)$\cos\alpha=-\sin\alpha$.　(×)

2.下列式子与 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$ 的值相等的为　(D)

A.$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

B.$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

C.$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)$

D.$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)$

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务 1 > 利用诱导公式化简与求值

#### 探究活动

**例 1**　(1)(教材 P193 例 4 改编)化简：

$$\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\tan(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(2\pi-\alpha)\tan(-\alpha-\pi)\sin(-\alpha-\pi)}$$

$=$_____.

(2)已知 $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{2}$，则 $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$ 的值为_____.

(1)$-\cos\alpha$

**解析**：$\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\tan(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(2\pi-\alpha)\tan(-\alpha-\pi)\sin(-\alpha-\pi)}$

$=\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)(-\sin\alpha)\tan\alpha(-\sin\alpha)}{\sin(-\alpha)(-\tan\alpha)[-\sin(\pi+\alpha)]}$

$=\frac{-\cos\alpha(-\sin\alpha)\tan\alpha(-\sin\alpha)}{-\sin\alpha(-\tan\alpha)\sin\alpha}=-\cos\alpha$.

(2)$\frac{1}{2}$　**解析**：$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{2}$.

[一题多思]

**思考 1**.若本例(2)条件改为“$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{1}{2}$”，你能求 $\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)$ 的值吗？

**提示**：$\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=-\frac{1}{2}$.

**思考 2**.若本例(2)增加条件“$\alpha$ 是第三象限角”，你能求 $\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\alpha\right)$ 的值吗？

**提示**：因为 $\alpha$ 是第三象限角，所以 $-\alpha$ 是第二象限角.又 $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{\pi}{3}-\alpha$ 是第二象限角，所以 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\alpha\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$

$=-\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

## 【探究总结】

**利用诱导公式化简、求值的策略**

(1)已知角求值问题，关键是利用诱导公式把任意角的三角函数值转化成锐角的三角函数值求解，转化过程中注意口诀“奇变偶不变，符号看象限”的应用.

(2)对式子进行化简或求值时，要注意要求的角与已知角之间的关系，并结合诱导公式进行转化，特别要注意角的范围.

(3)常见的互余的角：$\frac{\pi}{3}-\alpha$ 与 $\frac{\pi}{6}+\alpha$，$\frac{\pi}{4}+\alpha$ 与 $\frac{\pi}{4}-\alpha$ 等.常见的互补的角：$\frac{\pi}{6}+\alpha$ 与 $\frac{5\pi}{6}-\alpha$，$\frac{\pi}{3}+\alpha$ 与 $\frac{2\pi}{3}-\alpha$，$\frac{\pi}{4}+\alpha$ 与 $\frac{3\pi}{4}-\alpha$ 等.

## 应用迁移

**1.**已知 $\alpha$ 为第二象限角，若 $\sin\left(\frac{2\,025\pi}{2}-\alpha\right)=-\frac{1}{4}$，则 $\tan(\pi-\alpha)=$　　(　　)

A.$-\sqrt{15}$　　B.$\sqrt{15}$

C.$-\frac{\sqrt{15}}{15}$　　D.$\frac{\sqrt{15}}{15}$

B　**解析：**由 $\sin\left(\frac{2\,025\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(1\,012\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=-\frac{1}{4}$，又 $\alpha$ 为第二象限角，所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

所以 $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{15}$.

**2.**已知 $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{1}{2}$.

(1)求 $\frac{2\sin(\pi-\alpha)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{3\cos(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$ 的值；

(2)若 $\alpha$ 为第二象限角，求 $\sin\left(\alpha-\frac{7\pi}{2}\right)+3\cos(\alpha-13\pi)$ 的值.

**解：**(1)由 $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{2}$，解得 $\tan\alpha=-2$.

故 $\frac{2\sin(\pi-\alpha)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{3\cos(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{-3\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{2\tan\alpha-1}{-3-\tan\alpha}=5$.

(2)由(1)知 $\tan\alpha=-2$，

则 $\begin{cases}\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2,\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5},\\ \cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5},\\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}.\end{cases}$

又 $\alpha$ 为第二象限角，则 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$，故 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

所以 $\sin\left(\alpha-\frac{7\pi}{2}\right)+3\cos(\alpha-13\pi)=\cos\alpha-3\cos\alpha=-2\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

# 任务2 利用诱导公式证明

## 探究活动

**例2**　求证：

$$\frac{2\sin\left(\theta-\frac{3\pi}{2}\right)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)-1}{1-2\sin^2(\pi+\theta)}=\frac{\tan(9\pi+\theta)+1}{\tan(\pi+\theta)-1}.$$

**证明：**左边$=\frac{-2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\cdot(-\sin\theta)-1}{1-2\sin^2\theta}$

$=\frac{2\sin\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]\sin\theta-1}{1-2\sin^2\theta}$

$=\frac{-2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin\theta-1}{1-2\sin^2\theta}$

$=\frac{-2\cos\theta\sin\theta-1}{\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sin^2\theta}$

$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$，

右边$=\frac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$.

所以左边＝右边，故原式成立.

## 【探究总结】

**三角恒等式的证明策略**

对于三角恒等式的证明，应遵循化繁为简的原则，从左边推到右边或从右边推到左边，也可以用左右归一、变更论证的方法.常用定义法、切化弦法、拆项拆角法、“1”的代换法、公式变形法，要熟练掌握基本公式，从中选择巧妙、简捷的方法.

## 应用迁移

求证：$\frac{\sin(\theta-5\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\cos(3\pi-\theta)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)\sin(-4\pi-\theta)}=-1$.

**证明**：左边$=\dfrac{-\sin(5\pi-\theta)\sin\theta\cos\theta}{\cos(\pi-\theta)\sin\theta[-\sin(4\pi+\theta)]}$

$=\dfrac{-\sin(\pi-\theta)\sin\theta\cos\theta}{-\cos\theta\sin\theta(-\sin\theta)}=\dfrac{-\sin\theta}{\sin\theta}=-1=$右边，

故原式得证.

## 任务3 掌握诱导公式在三角形中的应用

### 探究活动

**例3**　(多选)已知$A,B,C$是$\triangle ABC$的内角，下列等式正确的是　(　　)

A.$\sin^2(A+B)+\cos^2C=1$

B.$\sin\dfrac{\pi-A}{4}=\cos\dfrac{\pi+A}{4}$

C.$\cos(A+B)=\cos C$

D.$\tan\dfrac{A+B}{2}\cdot\tan\dfrac{C}{2}=1$

ABD　**解析**：在$\triangle ABC$中，$A+B+C=\pi$.

对于A，$\sin^2(A+B)+\cos^2C=\sin^2C+\cos^2C=1$，A正确；

对于B，因为$\dfrac{\pi-A}{4}+\dfrac{\pi+A}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，所以$\sin\dfrac{\pi-A}{4}=\cos\dfrac{\pi+A}{4}$，B正确；

对于C，$\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C$，C错误；

对于D，$\tan\dfrac{A+B}{2}\cdot\tan\dfrac{C}{2}=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)\cdot\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)}\cdot\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{\cos\dfrac{C}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}\cdot\tan\dfrac{C}{2}=1$，D正确.

故选ABD.

**【探究总结】**

**三角形中的诱导公式**

在$\triangle ABC$中，有以下结论：

(1)$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$；

(2)$\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C$；

(3)$\tan(A+B)=\tan(\pi-C)=-\tan C$；

(4)$\sin\dfrac{A+B}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)=\cos\dfrac{C}{2}$；

(5)$\cos\dfrac{A+B}{2}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)=\sin\dfrac{C}{2}$.

**注意**：在$\triangle ABC$中，若$\sin A=\sin B$或$\cos A=\cos B$，均有$A=B$成立.

### 应用迁移

**1.**(多选)在$\triangle ABC$中，下列关系成立的是　(　　)

A.$\sin(A+B)=\sin C$

B.$\cos(B+C)=\cos A$

C.$\tan\dfrac{A+B}{2}=\tan\dfrac{C}{2}$

D.$\sin^2\dfrac{B+C}{2}+\sin^2\dfrac{A}{2}=1$

AD　**解析**：因为$A+B=\pi-C$，所以$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$，故A正确；

$\cos(B+C)=\cos(\pi-A)=-\cos A$，故B错误；

因为$\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}$，$\tan\dfrac{A+B}{2}=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)=\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)}=\dfrac{\cos\dfrac{C}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}=\dfrac{1}{\tan\dfrac{C}{2}}$，故C错误；

因为$\dfrac{B+C}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}$，所以$\sin^2\dfrac{B+C}{2}+\sin^2\dfrac{A}{2}=\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}\right)+\sin^2\dfrac{A}{2}=\cos^2\dfrac{A}{2}+\sin^2\dfrac{A}{2}=1$，故D正确.故选AD.

**2.**在$\triangle ABC$中，若$\sin(A+B-C)=\sin(A-B+C)$，则$\triangle ABC$必是　(　　)

A.等腰三角形

B.直角三角形

C.等腰三角形或直角三角形

D.等腰直角三角形

C　**解析**：因为$A+B+C=\pi$，

而$\sin(A+B-C)=\sin(A-B+C)$，

所以$\sin(\pi-2C)=\sin(\pi-2B)$，所以$\sin2C=\sin2B$.

所以$2C=2B$或$2C+2B=\pi$.

所以$C=B$或$C+B=\dfrac{\pi}{2}$.

所以$\triangle ABC$为等腰三角形或直角三角形.

# 课后素养评价(四十六)

## 基础落实

**1.**已知$\cos\left(\dfrac{2\,025\pi}{2}+\alpha\right)=-\dfrac{1}{4}$，那么$\sin\alpha=$　(　　)

A.$-\dfrac{1}{4}$　B.$\dfrac{1}{4}$　C.$-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$　D.$\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

B　**解析**：因为$\cos\left(\dfrac{2\,025\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(1\,012\pi+\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha=-\dfrac{1}{4}$，所以$\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$.故选B.

**2.** $\cos(\pi-x)+\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=$　　（　　）

A.$-2\cos x$　　B.0

C.$-2\sin x$　　D.$\cos x-\sin x$

A　**解析：**$\cos(\pi-x)+\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos x-\cos x=-2\cos x$.

**3.** 若 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{5}$，则 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=$　　（　　）

A.$\frac{3}{5}$　　B.$-\frac{3}{5}$　　C.$\frac{4}{5}$　　D.$-\frac{4}{5}$

D　**解析：**$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{4}{5}$.故选 D.

**4.** $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\frac{\cos(\pi+\alpha)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=$_____.

$\frac{1}{\tan\alpha}$　**解析：**原式$=-\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{-\cos\alpha-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\tan\alpha}$.

**5.** 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\sin^2\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}=\frac{5}{4}$，则 $\tan\frac{A+B}{2}=$_____.

$\frac{\sqrt{3}}{3}$　**解析：**因为$\sin^2\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}=\frac{5}{4}$，

即 $1-\cos^2\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}=\frac{5}{4}$，解得 $\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$.

又 $0<\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\frac{C}{2}=\sqrt{1-\cos^2\frac{C}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $\tan\frac{A+B}{2}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{\sin\frac{\pi-C}{2}}{\cos\frac{\pi-C}{2}}=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

## 能力提升

**1.** 已知 $\sin(3\pi-\alpha)=-2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$，则$\sin\alpha\cos\alpha$等于　　（　　）

A.$-\frac{2}{5}$　　B.$\frac{2}{5}$

C.$\frac{2}{5}$或$-\frac{2}{5}$　　D.$-\frac{1}{5}$

A　**解析：**因为 $\sin(3\pi-\alpha)=\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$，$-2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-2\cos\alpha$，

所以 $\sin\alpha=-2\cos\alpha$.又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

当 $\alpha$ 为第二象限角时，$\begin{cases}\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5},\\ \cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5},\end{cases}$

此时 $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{2}{5}$；

当 $\alpha$ 为第四象限角时，$\begin{cases}\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5},\\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5},\end{cases}$

此时 $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{2}{5}$.

综上，$\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{2}{5}$.

故选 A.

**2.** 已知非等腰三角形 $ABC$ 的内角分别为 $A$，$B$，$C$，若 $\sin 4A=\sin 4B$，则下列结论一定不正确的是　　（　　）

A.$\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B.$\sin A=\cos B$

C.$\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D.$\sin 2A=\sin 2B$

D　**解析：**在非等腰三角形 $ABC$ 中，$A\neq B$，$\begin{cases}0<A<\pi,\\ 0<B<\pi,\\ 0<A+B<\pi.\end{cases}$ 由 $\sin 4A=\sin 4B$，

得 $4A+4B=\pi$ 或 $4A+4B=3\pi$ 或 $4A=4B+2\pi\left(0<B<\frac{\pi}{4}\right)$或 $4B=4A+2\pi\left(0<A<\frac{\pi}{4}\right)$，

即 $A+B=\frac{\pi}{4}$或 $A+B=\frac{3\pi}{4}$或 $A=B+\frac{\pi}{2}\left(0<B<\frac{\pi}{4}\right)$或 $B=A+\frac{\pi}{2}\left(0<A<\frac{\pi}{4}\right)$.

当 $A+B=\frac{3\pi}{4}$ 时，$C=\frac{\pi}{4}$，则 $\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 AC 可能正确；

当 $A=B+\frac{\pi}{2}\left(0<B<\frac{\pi}{4}\right)$ 时，$\sin A=\sin\left(B+\frac{\pi}{2}\right)=\cos B$，B 可能正确；

对于 D，要 $\sin 2A=\sin 2B$，而 $A\neq B$，则必有 $2A+2B=\pi$，即 $A+B=\frac{\pi}{2}$，不成立，D 错误.故选 D.

**3.**设 $\alpha$ 为锐角，$2\tan(\pi-\alpha)-3\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=-5$，$\tan(\pi+\alpha)+6\sin(\pi+\beta)=1$，则 $\sin\alpha=$_____.

$\frac{3\sqrt{10}}{10}$　**解析**：由条件可知 $-2\tan\alpha+3\sin\beta=-5$①，$\tan\alpha-6\sin\beta=1$②，

①×2+②，可得 $\tan\alpha=3$，则 $\sin\alpha=3\cos\alpha$.

又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\alpha$ 为锐角，故可解得 $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

**4.**已知 $\alpha$ 是第三象限角，且 $\frac{\cos(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\tan(2\pi-\alpha)\sin(\pi+\alpha)}=\frac{1}{3}$.

(1)求 $\tan\alpha$ 的值；

(2)求 $\sin^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha$ 的值；

(3)角 $\beta$ 与角 $\alpha$ 的终边关于 $x$ 轴对称，求 $\frac{\sin(\pi-\beta)-2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)+\cos(5\pi+\beta)}$ 的值.

**解**：(1)$\frac{\cos(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\tan(2\pi-\alpha)\sin(\pi+\alpha)}$

$=\frac{(-\cos\alpha)(-\cos\alpha)}{\cos\alpha(-\tan\alpha)(-\sin\alpha)}$

$=\frac{1}{\tan^2\alpha}=\frac{1}{3}$，

因为 $\alpha$ 是第三象限角，所以 $\tan\alpha>0$，所以 $\tan\alpha=\sqrt{3}$.

(2)$\sin^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\frac{\tan^2\alpha+3\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{3+3\times\sqrt{3}}{3+1}=\frac{3+3\sqrt{3}}{4}$.

(3)因为 $\alpha$ 是第三象限角，且 $\tan\alpha=\sqrt{3}$，角 $\beta$ 与角 $\alpha$ 的终边关于 $x$ 轴对称，则 $\tan\beta=-\sqrt{3}$，

所以 $\frac{\sin(\pi-\beta)-2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)+\cos(5\pi+\beta)}=\frac{\sin\beta+2\cos\beta}{-2\sin\beta-\cos\beta}$

$=\frac{\tan\beta+2}{-2\tan\beta-1}=\frac{-\sqrt{3}+2}{-2\times(-\sqrt{3})-1}=\frac{3\sqrt{3}-4}{11}$.

## 自我超越

(多选)定义：角 $\theta$ 和 $\varphi$ 都是任意角，若 $\theta+\varphi=\frac{\pi}{2}$，则称 $\theta$ 与 $\varphi$“广义互余”.已知 $\sin\alpha=\frac{1}{4}$，满足下列条件的角 $\beta$ 中，可能与角 $\alpha$ 广义互余的是　(　　)

A.$\cos(\pi+\beta)=\frac{1}{4}$

B.$\tan\beta=\frac{\sqrt{15}}{4}$

C.$\cos(2\pi-\beta)=\frac{1}{4}$

D.$\sin\beta=\frac{\sqrt{15}}{4}$

CD　**解析**：对于选项 A，若角 $\alpha$ 和 $\beta$ 广义互余，则 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，即 $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$，

$\cos(\pi+\beta)=\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\sin\alpha=-\frac{1}{4}$，故 A 错误；

对于选项 B，$\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，解得 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{15}}{16}$，

则 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\neq1$，故 B 错误；

对于选项 C，$\cos(2\pi-\beta)=\cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=\frac{1}{4}$，故 C 正确；

对于选项 D，$\sin\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$，

即满足 $\sin\beta=\frac{\sqrt{15}}{4}$ 的角 $\beta$ 可能与角 $\alpha$ 广义互余，故 D 正确.

故选 CD.

# 5.4　三角函数的图象与性质

## 5.4.1　正弦函数、余弦函数的图象

**学习任务目标**

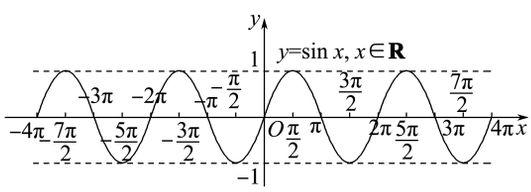
1.了解利用单位圆画正弦曲线的方法.
2.理解正弦曲线与余弦曲线之间的关系，能用“五点法”作出简单的正弦、余弦曲线.
3.会用正弦曲线与余弦曲线解决简单问题.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　正弦曲线**

正弦函数 $y=\sin x,x\in\mathbf{R}$ 的图象叫做正弦曲线，是一条“波浪起伏”的连续光滑曲线.




**知识点二　正弦曲线的画法**

(1)单位圆法

①利用单位圆画出 $y=\sin x,x\in[0,2\pi]$ 的图象；

②将图象不断向左、向右平移(每次移动 $2\pi$ 个单位长度).

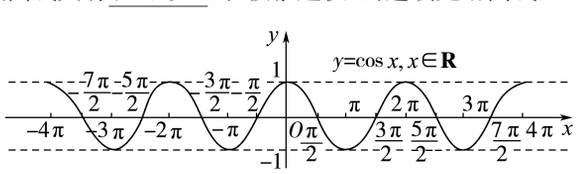
(2)五点法

①描出正弦函数 $y=\sin x,x\in[0,2\pi]$ 的图象上的五个关键点：$(0,0)$，$\left(\frac{\pi}{2},1\right)$，$(\pi,0)$，$\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$，$(2\pi,0)$，用光滑的曲线连接；

②将所得图象不断向左、向右平移(每次移动 $2\pi$ 个单位长度).

**知识点三　余弦曲线**

余弦函数 $y=\cos x,x\in\mathbf{R}$ 的图象叫做余弦曲线.它是与正弦曲线具有相同形状的“波浪起伏”的连续光滑曲线.




**知识点四　余弦函数图象的画法**

(1)要得到 $y=\cos x$ 的图象，只需把 $y=\sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度即可，这是由于 $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

(2)用“五点法”画余弦函数 $y=\cos x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图象时，所取的五个关键点分别为 $(0,1)$，$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$，$(\pi,-1)$，$\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$，$(2\pi,1)$，再用光滑的曲线连接.

### 【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)正弦函数 $y=\sin x(x\in\mathbf{R})$ 的图象关于 $x$ 轴对称.　(×)

(2)余弦函数 $y=\cos x(x\in\mathbf{R})$ 的图象与 $x$ 轴有无数个交点.　(√)

(3)函数 $y=\cos x$ 的图象与函数 $y=\sin x$ 的图象形状和位置都不一样.　(×)

(4)将函数 $y=\sin x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度可得到函数 $y=\cos x$ 的图象.　(×)

2.函数 $y=\cos x,x\in(0,2\pi)$ 的图象与直线 $y=\frac{1}{2}$ 的交点个数为 2.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1　认识正弦函数、余弦函数的图象

1.对于正弦函数 $y=\sin x$ 的图象，下列说法错误的是(　　)

A.向左、右无限伸展

B.与 $y=\cos x$ 的图象形状相同，只是位置不同

C.与 $x$ 轴有无数个交点

D.关于 $y$ 轴对称

D　**解析**：画出 $y=\sin x$ 的图象(图略)，由图可知，A，B，C 三个选项说法正确，D 选项说法错误.故选 D.

**2.** 在同一平面直角坐标系内，函数 $y=\sin x,x\in[0,2\pi]$ 与 $y=\cos x,x\in[2\pi,4\pi]$ 的图象　　(　　)

A.重合

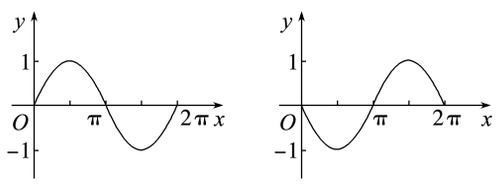
B.形状相同，位置不同

C.关于 $y$ 轴对称

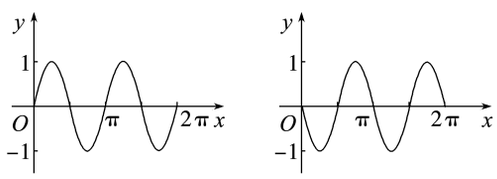
D.形状不同，位置不同

D　**解析**：分别画出 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的图象(图略)，由图可知，$y=\sin x,x\in[0,2\pi]$ 与 $y=\cos x,x\in[2\pi,4\pi]$ 的图象形状不同，位置不同.

**3.** 函数 $y=\sin(-x),x\in[0,2\pi]$ 的简图是　　(　　)




A　　B




C　　D

B　**解析**：$y=\sin(-x),x\in[0,2\pi]$ 的图象可看作由 $y=\sin x,x\in[0,2\pi]$ 的图象关于 $x$ 轴对称后得到.故选 B.

## 【探究总结】

**正弦函数、余弦函数图象的关注点**

(1)正弦曲线、余弦曲线的形状相同，只是在直角坐标系中的位置不同，相互可以通过平移得到.

(2)知道正弦曲线、余弦曲线在 $[-2\pi,2\pi]$ 内的特殊点(最高点、最低点及与 $x$ 轴的交点)的坐标，会求特殊点之间的横向距离.

# 任务2　用五点法画正弦函数、余弦函数简图

## 探究活动

**例1**　作出下列函数的简图：

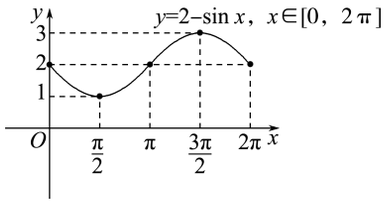
(1) $y=2-\sin x,x\in[0,2\pi]$；

(2) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right]$.

**解**：(1)由题知 $y=2-\sin x,x\in[0,2\pi]$，列表如下：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 |

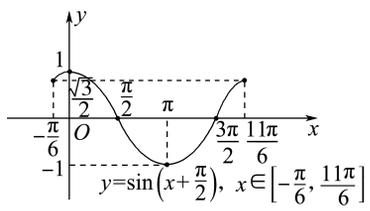
描点并用光滑的曲线连接起来，画图如下：




(2)由题知 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x,x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right]$，列表如下：

| $x$ | $-\frac{\pi}{6}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{11\pi}{6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | $-1$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |

描点并用光滑的曲线连接起来，画图如下：




## 【探究总结】

**作形如 $y=a\sin x+b$(或 $y=a\cos x+b$)，$x\in[0,2\pi]$ 的函数图象的步骤**

列表：在[0, 2π]内先分别找出确定所求函数图象的五个关键点，在表中列出相应的五点的坐标

描点：根据所列出的五个关键点的坐标，在平面直角坐标系中描出相应的点

连线：用光滑的曲线将所描出的五个关键点连接起来，便得到所求函数的图象

## 应用迁移

**1.** 用“五点法”作 $y=2\sin x$ 的图象时，首先描出的五个点的横坐标是　　(　　)

A.$0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$　　B.$0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi$

C.$0,\pi,2\pi,3\pi,4\pi$　　D.$0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$

A　**解析**：$y=2\sin x$ 与 $y=\sin x$ 对应五点的横坐标相同，则五点法对应五点的横坐标为 $0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$.

**2.** 用五点法作下列函数的图象：

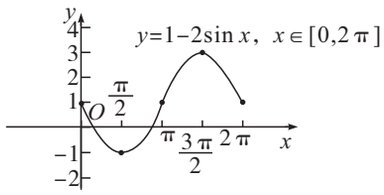
(1) $y=1-2\sin x,x\in[0,2\pi]$；

(2) $y=\cos x+\frac{1}{2},x\in[-\pi,\pi]$.

**解**：(1)列表：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | 0 | 1 | 0 | $-1$ | 0 |
| $1-2\sin x$ | 1 | $-1$ | 1 | 3 | 1 |

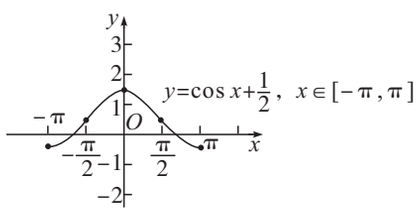
描点并用光滑的曲线连接起来，画图如下：




(2)列表：

| $x$ | $-\pi$ | $-\frac{\pi}{2}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | $-1$ | 0 | 1 | 0 | $-1$ |
| $\cos x+\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |

描点并用光滑的曲线连接起来，画图如下：



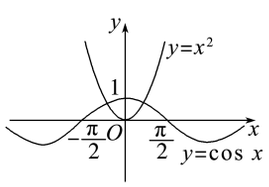

## 任务3 掌握正弦函数、余弦函数图象的应用

### 探究活动

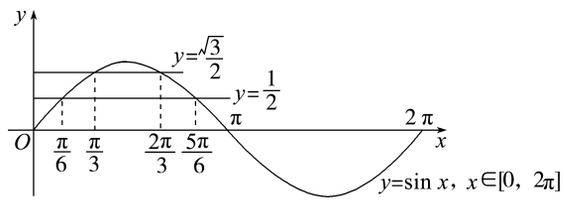
**例2**　(1)方程 $x^2-\cos x=0$ 的实数解的个数是_____，所有的实数解的和为_____.

(2)不等式 $\frac{1}{2}<\sin x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x\in[0,2\pi]$ 的解集为_____.

(1)2　0　**解析**：作出函数 $y=\cos x$ 与 $y=x^2$ 的图象，如图所示.由图象可知，两个函数图象有两个交点，且两个交点关于 $y$ 轴对称，故原方程有两个实数解，且两个实数解的和为 0.




(2)$\left\{x\middle|\frac{\pi}{6}<x\leqslant\frac{\pi}{3}\text{，或}\frac{2\pi}{3}\leqslant x<\frac{5\pi}{6}\right\}$　**解析**：作出正弦函数 $y=\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图象，作出直线 $y=\frac{1}{2}$ 和 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$，如图所示.



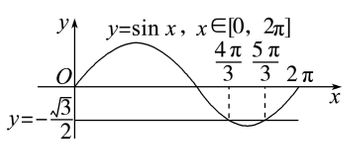

由图可知，在 $[0,2\pi]$ 上，当 $\frac{\pi}{6}<x\leqslant\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}\leqslant x<\frac{5\pi}{6}$ 时，不等式 $\frac{1}{2}<\sin x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$ 成立.

所以原不等式的解集为 $\left\{x\middle|\frac{\pi}{6}<x\leqslant\frac{\pi}{3}\text{，或}\frac{2\pi}{3}\leqslant x<\frac{5\pi}{6}\right\}$.

[一题多思]

**思考1.** 本例(2)中不等式若改为“$\sin x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x\in[0,2\pi]$”，你能求出它的解集吗？

**提示**：画出函数 $y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$ 的简图，作出直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，如图所示.




当 $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$x=\frac{4\pi}{3}$ 或 $x=\frac{5\pi}{3}$.

由图可知，不等式 $\sin x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 在 $[0,2\pi]$ 上的解集是 $\left(\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$.

**思考2.** 本例(2)中不等式若改为“$\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x\in[0,2\pi]$”，你能求出它的解集吗？

**提示**：因为 $0\leqslant x\leqslant2\pi$，由余弦曲线(图略)，得 $\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的解集为 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$.

**思考3.** 本例(2)中不等式不变，若把“$x\in[0,2\pi]$”改为“$x\in\mathbf{R}$”，解集有变化吗？

**提示**：有变化.原不等式的解集为 $\left\{x\middle|\frac{\pi}{6}+2k\pi<x\leqslant\frac{\pi}{3}+2k\pi\text{，或}\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leqslant x<\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

## 【探究总结】

**利用三角函数图象解 $\sin x>a$（或 $\cos x>a$）$(-1\leqslant a\leqslant 1)$的三个步骤**

(1)作出直线 $y=a$ 与 $y=\sin x$(或 $y=\cos x$)的图象.

(2)确定 $\sin x=a$(或 $\cos x=a$)时 $x$ 的值.

(3)确定 $\sin x>a$(或 $\cos x>a$)的解集.

**注意**:如果不限定 $x$ 的范围,一般先利用图象求出 $[0,2\pi]$范围内 $x$ 的取值范围,然后根据终边相同的角的同一三角函数值相等,写出原不等式的解集.

## 应用迁移

**1.**函数 $f(x)=\sqrt{1-2\cos x}+\ln\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$x\in[0,2\pi]$的定义域是　(　　)

A.$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$　　B.$\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{3}\right]$

C.$\left[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right)$　　D.$\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$

C　**解析**:由题意得$\begin{cases}1-2\cos x\geqslant 0,\\ \sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}>0,\\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi,\end{cases}$

解得$\begin{cases}\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{3},\\ \frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4},\end{cases}$所以$\frac{\pi}{3}\leqslant x<\frac{3\pi}{4}$,即函数的定义域为$\left[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right)$.故选 C.

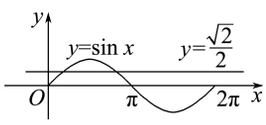
**2.**在$[0,2\pi]$上,函数$\sqrt{2\sin x-\sqrt{2}}$的定义域是(　　)

A.$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$　　B.$\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$

C.$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$　　D.$\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$

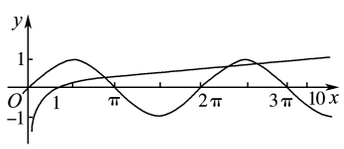
B　**解析**:在$[0,2\pi]$上,函数 $y=\sqrt{2\sin x-\sqrt{2}}$ 的定义域满足 $2\sin x-\sqrt{2}\geqslant 0$,

即 $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.如图所示,结合图象,可得 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$.




**3.**方程 $\sin x=\lg x$ 的解的个数是____.

3　**解析**:用五点法画出函数 $y=\sin x$,$x\in[0,2\pi]$的图象,再依次向左、向右连续平移 $2\pi$ 个单位长度,得到 $y=\sin x$ 的图象;描出点$\left(\frac{1}{10},-1\right)$,(1,0),(10,1),并用光滑曲线连接得到 $y=\lg x$ 的图象,如图所示.

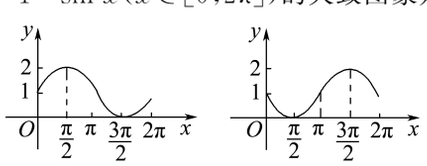



由图象可知,方程 $\sin x=\lg x$ 的解有 3 个.

# 课后素养评价(四十七)

## 基础落实

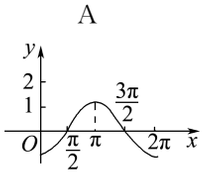
**1.**函数 $y=1-\sin x(x\in[0,2\pi])$的大致图象是　(B)



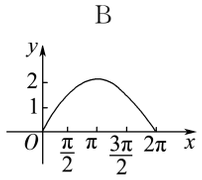

A




B




C




D

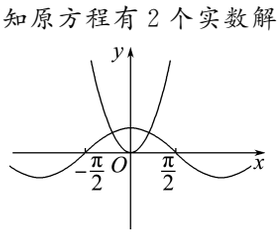
**2.**(多选)下列区间内$\cos x>\sin x$成立的是　(AC)

A.$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$　　B.$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$

C.$\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right)$　　D.$\left(\frac{\pi}{4},2\pi\right)$

**3.**方程 $x^2-\cos x=0$ 的实数解的个数是_____.

2　**解析**:作函数 $y=\cos x$ 与 $y=x^2$ 的图象,如图所示,由图象,可知原方程有 2 个实数解.




**4.**函数 $y=\cos x+4$,$x\in[0,2\pi]$的图象与直线 $y=4$ 的交点的坐标为_____.

$\left(\frac{\pi}{2},4\right),\left(\frac{3\pi}{2},4\right)$　**解析**:由$\begin{cases}y=\cos x+4,\\ y=4,\end{cases}$

解得 $\cos x=0$,

当 $x\in[0,2\pi]$时,$x=\frac{\pi}{2}$或 $x=\frac{3\pi}{2}$,

所以交点坐标为$\left(\frac{\pi}{2},4\right),\left(\frac{3\pi}{2},4\right)$.

**5.**用五点法作出下列函数在$[0,2\pi]$上的图象,并说明它们与 $y=\sin x$,$x\in[0,2\pi]$的图象的关系.

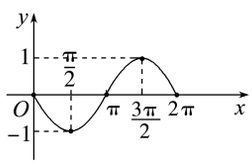
(1)$y=-\sin x$;

(2)$y=\sin x-1$.

**解**：(1)找五个关键点，列表：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | 0 | 1 | 0 | $-1$ | 0 |
| $-\sin x$ | 0 | $-1$ | 0 | 1 | 0 |

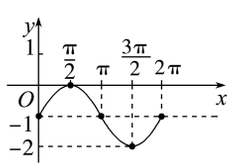
描点，连线，如图所示.函数 $y=-\sin x,x\in[0,2\pi]$ 的图象与函数 $y=\sin x,x\in[0,2\pi]$ 的图象关于 $x$ 轴对称.




(2)找五个关键点，列表：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | 0 | 1 | 0 | $-1$ | 0 |
| $\sin x-1$ | $-1$ | 0 | $-1$ | $-2$ | $-1$ |

描点，连线，如图所示.函数 $y=\sin x-1,x\in[0,2\pi]$ 的图象是将函数 $y=\sin x,x\in[0,2\pi]$ 的图象向下平移 1 个单位长度得到的.



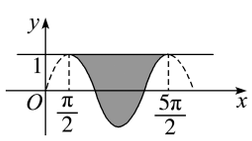

## 能力提升

**1.**若函数 $y=\sin x,x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$ 的图象与直线 $y=1$ 围成一个平面图形，则这个平面图形的面积是（　　）

A.2　　B.4

C.$2\pi$　　D.$4\pi$

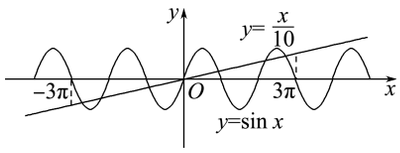
C　**解析**：如图，由正弦函数图象的对称性知，所围成平面图形的面积是长为 $\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=2\pi$、宽为 1 的矩形的面积，所以这个平面图形的面积为 $S=2\pi$.故选 C.




**2.**方程 $\sin x=\frac{x}{10}$ 的根的个数是（　　）

A.7　　B.8　　C.9　　D.10

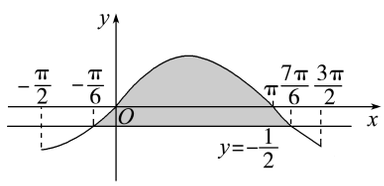
A　**解析**：在同一坐标系内画出 $y=\frac{x}{10}$ 和 $y=\sin x$ 的图象如图所示.




根据图象可知方程有 7 个根.故选 A.

**3.**函数 $y=\log_2(2\sin x+1)$ 的定义域为_____.

$\left\{x\left|-\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{7\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$　**解析**：要使函数有意义，则必有 $2\sin x+1>0$，即 $\sin x>-\frac{1}{2}$.画出 $y=\sin x,x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 的图象，如图所示.




当 $-\frac{\pi}{6}<x<\frac{7\pi}{6}$ 时，不等式 $\sin x>-\frac{1}{2}$ 成立，

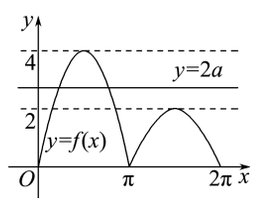
所以 $\sin x>-\frac{1}{2}$ 的解集为 $\left\{x\left|-\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{7\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

可知函数 $y=\log_2(2\sin x+1)$ 的定义域为 $\left\{x\left|-\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{7\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

**4.**若函数 $f(x)=\sin x+3|\sin x|$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图象与直线 $y=2a$ 有两个交点，则实数 $a$ 的取值范围是_____.

$(1,2)$　**解析**：依题意，$f(x)=\sin x+3|\sin x|=\begin{cases}4\sin x,x\in[0,\pi),\\-2\sin x,x\in[\pi,2\pi],\end{cases}$

画出函数 $y=f(x)$ 的图象，如图所示.




由图象知，当 $2a\in(2,4)$，即 $a\in(1,2)$ 时，函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=2a$ 有两个交点，

所以实数 $a$ 的取值范围是 $(1,2)$.

## 自我超越

已知函数 $y=1+\sin x,x\in[0,2\pi]$.

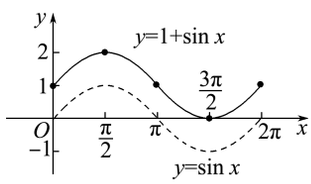
(1)用五点法画函数 $y=1+\sin x,x\in[0,2\pi]$ 的图象；

(2)讨论函数 $y=1+\sin x,x\in[0,2\pi]$ 的图象与直线 $y=t$（$t$ 为常数）的交点个数.

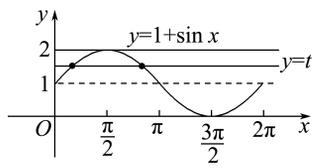
**解**：(1)由题意，列表：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | 0 | 1 | 0 | $-1$ | 0 |
| $\sin x+1$ | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 |

根据五点，作图：




(2)如图：




观察图象得：当 $t<0$ 或 $t>2$ 时，有 0 个交点；

当 $t=0$ 或 $t=2$ 时，有 1 个交点；

当 $0<t<1$ 或 $1<t<2$ 时，有 2 个交点；

当 $t=1$ 时，有 3 个交点.

## 5.4.2　正弦函数、余弦函数的性质

## 第 1 课时　正弦函数、余弦函数的周期性与奇偶性

**学习任务目标**

1.了解周期函数、周期、最小正周期的定义.

2.会求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 及 $y=A\cos(\omega x+\varphi)(A\neq0)$ 的周期.

3.掌握函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的奇偶性，会判断简单三角函数的奇偶性.

### ○ 问题式预习 ○

**【知识清单】**

**知识点一　周期性**

1.函数的周期性

(1)一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，如果存在一个非零常数 $T$，使得对每一个 $x\in D$，都有 $x+T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做周期函数.非零常数 $T$ 叫做这个函数的周期.

(2)如果在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在一个最小的正数，那么这个最小正数就叫做 $f(x)$ 的最小正周期.

2.正弦函数、余弦函数的周期性

由 $\sin(x+2k\pi)=\sin x(k\in\mathbf{Z})$，$\cos(x+2k\pi)=\cos x(k\in\mathbf{Z})$，故 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 都是周期函数，$2k\pi(k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq0)$ 都是它们的周期，且它们的最小正周期都是 $2\pi$.

**知识点二　正弦函数、余弦函数的奇偶性**

(1)对于 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$，恒有 $\sin(-x)=-\sin x$，所以正弦函数 $y=\sin x$ 是奇函数，正弦曲线关于原点对称.

(2)对于 $y=\cos x$，$x\in\mathbf{R}$，恒有 $\cos(-x)=\cos x$，所以余弦函数 $y=\cos x$ 是偶函数，余弦曲线关于 $y$ 轴对称.

**【概念辨析】**

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)因为函数 $f(x)=x^2$ 满足 $f(-3+6)=f(-3)$，所以 $f(x)=x^2$ 是以 6 为周期的周期函数.　(×)

(2)函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ 是偶函数.　(√)

(3)$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的图象既是中心对称图形又是轴对称图形.　(√)

(4)周期函数的定义域一定为无限集，且无上下界.　(√)

2.设函数 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$，$x\in\mathbf{R}$，则 $f(x)$ 是　(A)

A.最小正周期为 $\pi$ 的奇函数

B.最小正周期为 $\pi$ 的偶函数

C.最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的奇函数

D.最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的偶函数

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1 认识正弦函数、余弦函数的周期性

#### 探究活动

**例1**　求下列函数的最小正周期：

(1) $y=\cos 2x$；

(2) $y=3\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$；

(3) $y=|\sin x|(x\in\mathbf{R})$.

**解**：(1)(方法一)令 $z=2x$，

则 $\cos 2x=\cos z=\cos(z+2\pi)=\cos(2x+2\pi)=\cos[2(x+\pi)]$，

由周期函数的定义可知，原函数的最小正周期为 $\pi$.

(方法二)因为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，所以函数 $y=\cos 2x$ 的最小正周期为 $\pi$.

(2)(方法一)令 $z=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}$，则 $3\sin z=3\sin(z+2\pi)$

$=3\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}+2\pi\right)=3\sin\left(\frac{x+4\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$，

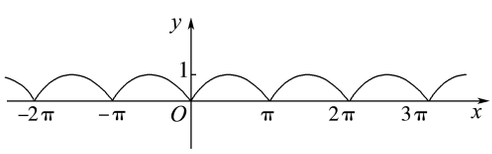
所以由周期函数的定义可知，原函数的最小正周期为 $4\pi$.

(方法二)因为 $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$，

所以函数 $y=3\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为 $4\pi$.

(3) $y=|\sin x|=\begin{cases}\sin x, 2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi,\\ -\sin x, 2k\pi+\pi<x<2k\pi+2\pi\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$.

其图象如图所示.




所以该函数的最小正周期为 $\pi$.

[一题多思]

**思考1.** 周期函数的周期是唯一的吗？

**提示**：周期函数的周期不唯一.若 $T$ 是函数 $f(x)$ 的最小正周期，则 $kT(k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq 0)$ 也是函数 $f(x)$ 的周期.

**思考2.** 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 和 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 是周期函数吗？它们的最小正周期与解析式中哪个参数有关，公式是什么？

**提示**：是周期函数.最小正周期与 $\omega$ 有关，$T=\frac{2\pi}{|\omega|}$.

**思考3.** 你能求出函数 $y=\left|\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right|$ 的最小正周期吗？

**提示**：因为函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 $\pi$，且函数 $y=\left|\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right|$ 的图象是将函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象在 $x$ 轴下方的部分对折到 $x$ 轴上方，并且保留 $x$ 轴上方的图象而得到的，由此可知，所求函数的最小正周期为 $T=\frac{\pi}{2}$.

【探究总结】

**求三角函数周期的方法**

(1)定义法：利用周期函数的定义求解.

(2)公式法：对形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)(A,\omega,\varphi$ 是常数，$A\neq 0,\omega\neq 0)$ 的函数，$T=\frac{2\pi}{|\omega|}$.

(3)图象法：通过观察函数图象求其周期.

#### 应用迁移

**1.** 若函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 的最小正周期为 $2\pi\omega$，则 $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=$_____.

$-\sqrt{3}$　**解析**：因为 $f(x)$ 的最小正周期为 $2\pi\omega$，则 $\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\omega$，结合 $\omega>0$ 可得 $\omega=1$，

则 $f(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，得 $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=2\sin\frac{4\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

**2.** 函数 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ 的最小正周期为_____.

$\frac{\pi}{2}$　**解析**：由诱导公式可知，$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=|\cos x|+|\sin x|=f(x)$，

当 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x+\alpha)=|\sin(x+\alpha)|+|\cos(x+\alpha)|$ 与 $f(x)$ 不恒相等，故 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$.

## 任务2 认识正弦函数、余弦函数的奇偶性

### 探究活动

**例2**　判断下列函数的奇偶性：

(1)$f(x)=|\sin x|+\cos x$；

(2)$f(x)=\cos(2\pi-x)-x^3\cdot\sin x$；

(3)$f(x)=x^2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$；

(4)$f(x)=\sin(\cos x)$.

**解**：(1)函数的定义域为**R**，

又$f(-x)=|\sin(-x)|+\cos(-x)=|\sin x|+\cos x=f(x)$，

所以$f(x)$是偶函数.

(2)函数的定义域为**R**，

因为$f(x)=\cos x-x^3\cdot\sin x$，

所以$f(-x)=\cos(-x)-(-x)^3\cdot\sin(-x)$

$=\cos x-x^3\cdot\sin x=f(x)$，

所以$f(x)$为偶函数.

(3)函数$f(x)$的定义域为**R**，

因为$f(x)=x^2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-x^2\sin x$，

所以$f(-x)=-(-x)^2\sin(-x)=x^2\sin x=-f(x)$，

所以$f(x)$为奇函数.

(4)函数$f(x)$的定义域为**R**，

因为$f(-x)=\sin[\cos(-x)]=\sin(\cos x)=f(x)$，

所以$f(x)$为偶函数.

### 【探究总结】

**判断函数奇偶性的方法**

(1)判断函数奇偶性应把握两个方面：

一看函数的定义域；二看$f(x)$与$f(-x)$的关系.

(2)对于三角函数奇偶性的判断，可根据诱导公式将函数化简后再判断.

### 应用迁移

**1.**函数$y=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\sin x\right)$　　(　　)

A.是偶函数

B.是奇函数

C.既是奇函数又是偶函数

D.是非奇非偶函数

A　**解析**：令$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\sin x\right)=\cos(\sin x)$，$x\in\mathbf{R}$，

又$f(-x)=\cos(\sin(-x))=\cos(-\sin x)=\cos(\sin x)=f(x)$，

所以函数$f(x)$是偶函数.故选A.

**2.**已知定义域为$[a-4,2a-2]$的奇函数$f(x)=x^3-\sin x+b+2$，则$f(a)+f(b)$的值为　　(　　)

A.$-3$　　B.1

C.0　　D.$-1$

C　**解析**：因为定义域为$[a-4,2a-2]$的奇函数$f(x)=x^3-\sin x+b+2$，

则$a-4+2a-2=0$，即$a=2$.

又$f(-x)+f(x)=0$，即$(-x)^3-\sin(-x)+b+2+x^3-\sin x+b+2=0$，

即$-x^3+\sin x+b+2+x^3-\sin x+b+2=0$，解得$b=-2$，

所以$f(x)=x^3-\sin x$，

则$f(a)+f(b)=f(2)+f(-2)=0$.故选C.

## 任务3 掌握函数周期性与奇偶性的综合应用

### 探究活动

**例3**　定义在**R**上的函数$f(x)$既是偶函数，又是周期函数.若$f(x)$的最小正周期为$\pi$，且当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$f(x)=\sin x$，则$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=$_____.

$\frac{\sqrt{3}}{2}$　**解析**：由题意知$f(x)=f(x-\pi)$，且$f(x)=f(-x)$，所以$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=f\left(\frac{5\pi}{3}-\pi\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}-\pi\right)=f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

[一题多思]

**思考1.**若将本例中的“偶函数”改为“奇函数”，其他条件不变，结果如何？

**提示**：$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=f\left(\frac{5\pi}{3}-\pi\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}-\pi\right)=f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**思考2.**若将本例条件改为“函数$f(x)$是定义在**R**上的偶函数，$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-f(x)$，且$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$”，你能求$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)$的值吗？

**提示**：因为$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-f(x)$，所以$f(x+\pi)=-f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f(x)$，所以函数$f(x)$的周期$T=\pi$.

又$f(x)$是偶函数，因此$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=f\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$.

**【探究总结】**

1.利用三角函数的性质求参数的值时，先利用诱导公式把函数化为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A\neq0,\omega>0)$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)(A\neq0,\omega>0)$ 的形式，再利用三角函数的奇偶性与周期性求参数的值.注意所给的函数中参数的范围.

2.利用周期函数的性质求函数值时，先把自变量加减整数个周期，将函数化简，再结合函数的奇偶性求解.

**应用迁移**

设 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的最小正周期为 2 的偶函数，已知当 $x\in[2,3]$ 时，$f(x)=x$，则当 $x\in[-2,0]$ 时，$f(x)=$　　（　　）

A.$x+4$

B.$2-x$

C.$3-|x+1|$

D.$2-|x+1|$

C　**解析**：因为 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的周期为 2 的偶函数，当 $x\in[2,3]$ 时，$f(x)=x$，所以当 $x\in[-2,-1]$ 时，$2+x\in[0,1]$，$4+x\in[2,3]$，此时 $f(x)=f(4+x)=4+x$；当 $x\in[-1,0]$ 时，$-x\in[0,1]$，$2-x\in[2,3]$，此时 $f(x)=f(-x)=f(2-x)=2-x$.综上可得，当 $x\in[-2,0]$ 时，$f(x)=3-|x+1|$.

# 课后素养评价（四十八）

## 基础落实

1.(2024·北京卷)设函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$.已知 $f(x_1)=-1$，$f(x_2)=1$，且 $|x_1-x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$，则 $\omega=$　　（　　）

A.1　　B.2

C.3　　D.4

B　**解析**：由题意可知，$x_1$ 为 $f(x)$ 的最小值点，$x_2$ 为 $f(x)$ 的最大值点，

则 $|x_1-x_2|_{\min}=\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，即 $T=\pi$，且 $\omega>0$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$.故选 B.

2.(多选)下列函数中，以 $\pi$ 为周期的函数有　　（　　）

A.$f(x)=|2\sin x+1|$

B.$f(x)=|\cos 2x-1|$

C.$f(x)=|\cos x|$

D.$f(x)=\cos|x|$

BC　**解析**：对于 A，因为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|2\sin\frac{\pi}{6}+1\right|=2$，所以 $f\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)=\left|2\sin\frac{7\pi}{6}+1\right|=0$，而 $f\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)\neq f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，故 A 错误；

对于 B，因为 $f(x)=|\cos 2x-1|=1-\cos 2x$，所以函数的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故 B 正确；对于 C，因为 $f(x+\pi)=|\cos(x+\pi)|=|-\cos x|=|\cos x|=f(x)$，故 C 正确；

对于 D，因为 $y=\cos x$ 为偶函数，所以 $f(x)=\cos|x|=\cos x$，其最小正周期为 $2\pi$，故 D 错误.

故选 BC.

3.(2024·天津卷)下列函数是偶函数的是　　（　　）

A.$y=\frac{e^x-x^2}{x^2+1}$　　B.$y=\frac{\cos x+x^2}{x^2+1}$

C.$y=\frac{e^x-x}{x+1}$　　D.$y=\frac{\sin x+4x}{e^{|x|}}$

B　**解析**：对于 A，设 $f(x)=\frac{e^x-x^2}{x^2+1}$，函数定义域为 **R**，但 $f(-1)=\frac{e^{-1}-1}{2}$，$f(1)=\frac{e-1}{2}$，则 $f(-1)\neq f(1)$，故 A 错误；

对于 B，设 $g(x)=\frac{\cos x+x^2}{x^2+1}$，函数定义域为 **R**，且 $g(-x)=\frac{\cos(-x)+(-x)^2}{(-x)^2+1}=\frac{\cos x+x^2}{x^2+1}=g(x)$，则 $g(x)$ 为偶函数，故 B 正确；

对于 C，设 $h(x)=\frac{e^x-x}{x+1}$，函数定义域为 $\{x\mid x\neq-1\}$，不关于原点对称，则 $h(x)$ 不是偶函数，故 C 错误；

对于 D，设 $\varphi(x)=\frac{\sin x+4x}{e^{|x|}}$，函数定义域为 **R**，因为 $\varphi(1)=\frac{\sin 1+4}{e}$，$\varphi(-1)=\frac{-\sin 1-4}{e}$，则 $\varphi(1)\neq\varphi(-1)$，则 $\varphi(x)$ 不是偶函数，故 D 错误.

故选 B.

4.(2025·全国Ⅰ卷)已知 $f(x)$ 是定义在 **R** 上且周期为 2 的偶函数，当 $2\leqslant x\leqslant3$ 时，$f(x)=5-2x$，则 $f\left(-\frac{3}{4}\right)=$　　（　　）

A.$-\frac{1}{2}$　　B.$-\frac{1}{4}$

C.$\frac{1}{4}$　　D.$\frac{1}{2}$

A　**解析**：当 $x\in[-1,0]$ 时，$-x+2\in[2,3]$，所以当 $x\in[-1,0]$ 时，$f(x)=f(-x)=f(-x+2)=$

$5-2(-x+2)=1+2x$，所以 $f\left(-\frac{3}{4}\right)=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$.故选 A.

**5.**已知 $f(x)$是最小正周期为 $\pi$ 的偶函数，且 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$f(x)=1-\sin x$，求 $f\left(\frac{10\pi}{3}\right)$，$f\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$.

**解**：因为 $T=\pi$，且 $f(x)$为偶函数，所以 $f\left(\frac{10\pi}{3}\right)=f\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1-\sin\frac{\pi}{3}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$f\left(-\frac{25\pi}{6}\right)=f\left(-4\pi-\frac{\pi}{6}\right)=f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1-\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

## 能力提升

**1.**下列函数既是奇函数又在区间$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上单调递增的是（　　）

A.$f(x)=\frac{3}{\cos x}$　　B.$f(x)=\sin 4x$

C.$f(x)=\sin|x|$　　D.$f(x)=\sin\frac{1}{2}x$

D　**解析**：对于 A，由 $\cos x\neq0$ 可得，$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以函数 $f(x)=\frac{3}{\cos x}$ 的定义域为$\left\{x\middle|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$，

又 $f(-x)=\frac{3}{\cos(-x)}=\frac{3}{\cos x}=f(x)$，

所以函数 $f(x)=\frac{3}{\cos x}$ 为偶函数.故 A 错误.

对于 B，易知函数 $f(x)=\sin 4x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

又 $f(-x)=\sin(-4x)=-\sin 4x=-f(x)$，所以函数 $f(x)=\sin 4x$ 为奇函数.

又 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，所以 $4x\in[0,2\pi]$.

正弦函数 $y=\sin x$ 在$[0,2\pi]$上既有增区间又有减区间，不满足题目要求，故 B 错误.

对于 C，易知函数 $f(x)=\sin|x|$的定义域为 $\mathbf{R}$，

又 $f(-x)=\sin|-x|=\sin|x|=f(x)$，

所以函数 $f(x)=\sin|x|$为偶函数.故 C 错误.

对于 D，易知函数 $f(x)=\sin\frac{1}{2}x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

又 $f(-x)=\sin\left(-\frac{1}{2}x\right)=-\sin\frac{1}{2}x=-f(x)$，所以函数 $f(x)=\sin\frac{1}{2}x$ 为奇函数.

又 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，所以 $\frac{x}{2}\in\left[0,\frac{\pi}{8}\right]$.正弦函数 $y=\sin x$在$\left[0,\frac{\pi}{8}\right]$上单调递增，故 D 正确.故选 D.

**2.**已知函数 $f(x)=2^x-2^{-x}+\alpha\sin x+1$，且 $f(m)=2$，则$f(-m)=$（　　）

A.$-2$　　B.$-1$　　C.0　　D.1

C　**解析**：因为 $f(m)=2$，所以 $f(m)=2^m-2^{-m}+\alpha\sin m+1$.

设 $f(-m)=2^{-m}-2^m-\alpha\sin m+1=t$，

可得 $f(m)+f(-m)=2^m-2^{-m}+\alpha\sin m+1+2^{-m}-2^m-\alpha\sin m+1=2=t+2$，解得 $t=0$.

**3.**(2023·全国甲卷)若 $f(x)=(x-1)^2+ax+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$为偶函数，则 $a=$_____.

2　**解析**：因为 $f(x)=(x-1)^2+ax+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=(x-1)^2+ax+\cos x$ 为偶函数，定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$，即 $\left(-\frac{\pi}{2}-1\right)^2-\frac{\pi}{2}a+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^2+\frac{\pi}{2}a+\cos\frac{\pi}{2}$，

则 $\pi a=\left(\frac{\pi}{2}+1\right)^2-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^2=2\pi$，故 $a=2$，

此时 $f(x)=(x-1)^2+2x+\cos x=x^2+1+\cos x$，

所以 $f(-x)=(-x)^2+1+\cos(-x)=x^2+1+\cos x=f(x)$.

又定义域为 $\mathbf{R}$，故 $f(x)$为偶函数，所以 $a=2$.

**4.**设函数 $f(x)=3\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，$\omega>0$，$x\in(-\infty,+\infty)$，且以$\frac{\pi}{2}$为最小正周期.若$f\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{9}{5}$，则 $\sin\alpha$的值为_____.

$\pm\frac{4}{5}$　**解析**：因为 $f(x)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$，$\omega>0$，

所以 $\omega=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$.所以 $f(x)=3\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$.

由 $f\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{12}\right)=3\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=3\cos\alpha=\frac{9}{5}$，

得 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

所以 $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\frac{4}{5}$.

## 自我超越

已知函数 $f(x)$ 对于任意实数 $x$ 满足条件 $f(x+2)=-\frac{1}{f(x)}(f(x)\neq0)$.

(1)证明：函数 $f(x)$ 是周期函数；

(2)若 $f(1)=-5$，求 $f(f(5))$ 的值.

(1)**证明**：因为 $f(x+2)=-\frac{1}{f(x)}$，

所以 $f(x+4)=-\frac{1}{f(x+2)}=-\frac{1}{-\frac{1}{f(x)}}=f(x)$，

所以函数 $f(x)$ 是周期函数，4 就是它的一个周期.

(2)**解**：因为 4 是 $f(x)$ 的一个周期，

所以 $f(5)=f(1)=-5$，则 $f(f(5))=f(-5)=f(-1)=\frac{-1}{f(-1+2)}=\frac{-1}{f(1)}=\frac{1}{5}$.

# 第 2 课时　正弦函数、余弦函数的单调性与最值

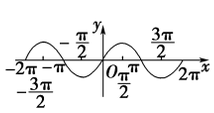
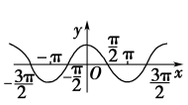
**学习任务目标**

1. 掌握正弦函数、余弦函数的单调性，能利用单调性比较大小.
2. 会求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 及 $y=A\cos(\omega x+\varphi)(A\neq0,\omega\neq0)$ 的单调区间.
3. 掌握正弦函数、余弦函数的最值和值域的求法.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点　正弦函数、余弦函数的性质**

| 函数 | $y=\sin x$ | $y=\cos x$ |
|---|---|---|
| 定义域 | $\mathbf{R}$ | |
| 值域 | $[-1,1]$ | |
| 图象 |  |  |
| 单调性 | 在 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$ 上单调递增；在 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$ 上单调递减 | 在 $[-\pi+2k\pi,2k\pi](k\in\mathbf{Z})$ 上单调递增；在 $[2k\pi,\pi+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$ 上单调递减 |
| 最值 | 当 $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\min}=-1$；当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\max}=1$ | 当 $x=\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\min}=-1$；当 $x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\max}=1$ |

续表

| 函数 | $y=\sin x$ | $y=\cos x$ |
|---|---|---|
| 对称轴 | $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$ | $x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$ |
| 对称中心 | $(k\pi,0),k\in\mathbf{Z}$ | $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,0\right),k\in\mathbf{Z}$ |

### 【概念辨析】

1. 判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)正弦函数在定义域上是单调函数.　（×）

(2)已知 $x$ 是第一象限角，则函数 $y=\sin x$ 的值随 $x$ 的增大而增大.　（×）

(3)存在实数 $x$，使得 $\cos x=\sqrt{2}$.　（×）

(4)余弦函数 $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减.　（√）

2. 函数 $y=\cos x-1$ 的最小值是　（C）

A. 0

B. 1

C. $-2$

D. $-1$

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务 1　求正弦函数、余弦函数的单调区间

**探究活动**

**例 1**　求函数 $y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的单调递增区间.

**解**：由 $2k\pi-\pi\leqslant2x-\frac{\pi}{6}\leqslant2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

得 $2k\pi-\frac{5\pi}{6}\leqslant2x\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $k\pi-\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.

所以函数 $y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$.

[一题多思]

**思考 1.** 本题的函数若换为“$y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$”，你能求其单调递增区间吗？

**提示：** $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，

令 $z=x-\frac{\pi}{3}$，又 $y=-\sin z$ 的单调递增区间是 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$，

所以令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

得 $\frac{5\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{11\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

所以函数 $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\frac{11\pi}{6}+2k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

**思考 2.** 本题的函数若换为“$y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$”，你能求其在 $[0,2\pi]$ 上的单调递增区间吗？

**提示：** 由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

得 $2k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$.

故函数 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的单调递增区间是 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{5\pi}{6}\right],k\in\mathbf{Z}$. 又 $x\in[0,2\pi]$，所以 $0\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}$ 或 $\frac{11\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2\pi$.

所以函数 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的单调递增区间为 $\left[0,\frac{5\pi}{6}\right]$ 和 $\left[\frac{11\pi}{6},2\pi\right]$.

## 【探究总结】

**求正弦函数、余弦函数的单调区间的两个技巧**

(1) 数形结合：结合正弦函数、余弦函数的图象，找出它们的单调区间.

(2) 整体代换：求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$）$(A\neq 0,\omega>0)$ 的单调区间时，采用换元法整体代换，将 $\omega x+\varphi$ 看作一个整体，可令 $z=\omega x+\varphi$，通过求 $y=A\sin z$（或 $y=A\cos z$）的单调区间而求出函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$）的单调区间. 若 $\omega<0$，则先利用诱导公式将 $x$ 的系数转化为正数，再重复 $\omega>0$ 时的步骤.

### 应用迁移

**1.** 函数 $f(x)=2\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的单调递减区间为（　　）

A. $\left[4k\pi-\frac{5\pi}{2},4k\pi-\frac{\pi}{2}\right],k\in\mathbf{Z}$

B. $\left[4k\pi+\frac{\pi}{2},4k\pi+\frac{5\pi}{2}\right],k\in\mathbf{Z}$

C. $\left[4k\pi-\frac{\pi}{2},4k\pi+\frac{3\pi}{2}\right],k\in\mathbf{Z}$

D. $\left[4k\pi-\frac{3\pi}{2},4k\pi+\frac{\pi}{2}\right],k\in\mathbf{Z}$

B　**解析：** 令 $2k\pi\leqslant\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $4k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 4k\pi+\frac{5\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.

所以 $f(x)=2\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的单调递减区间为 $\left[4k\pi+\frac{\pi}{2},4k\pi+\frac{5\pi}{2}\right],k\in\mathbf{Z}$.

**2.** 函数 $f(x)=2\,025\sin\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)-2\,025$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right],k\in\mathbf{Z}$.

## 任务 2　掌握正弦函数、余弦函数单调性的应用

### 探究活动

**例 2**　比较下列各组数的大小：

(1) $\sin\left(-\frac{37}{6}\pi\right)$ 与 $\sin\frac{49}{3}\pi$；

(2) $\cos 870^\circ$ 与 $\sin 980^\circ$.

**解：** (1) $\sin\left(-\frac{37}{6}\pi\right)=\sin\left(-6\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，

$\sin\frac{49}{3}\pi=\sin\left(16\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}$.

因为 $-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$，且 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，所以 $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)<\sin\frac{\pi}{3}$，

即 $\sin\left(-\frac{37}{6}\pi\right)<\sin\frac{49}{3}\pi$.

(2) $\cos 870^\circ=\cos(720^\circ+150^\circ)=\cos 150^\circ$，

$\sin 980^\circ=\sin(720^\circ+260^\circ)=\sin 260^\circ=\sin(90^\circ+170^\circ)=\cos 170^\circ$.

因为 $0°<150°<170°<180°$，且 $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减，

所以 $\cos 150°>\cos 170°$，即 $\cos 870°>\sin 980°$.

**例 3**　已知 $\omega$ 是正数，函数 $f(x)=2\sin \omega x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，求 $\omega$ 的取值范围.

**解**：由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\omega x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$\omega>0$，

得 $-\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[-\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega},\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

根据题意，得 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]\subseteq\left[-\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega},\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，

从而有 $\begin{cases}-\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\leqslant-\frac{\pi}{3},\\ \frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\geqslant\frac{\pi}{4},\\ \omega>0,k\in\mathbf{Z},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\omega\leqslant\frac{3}{2}-6k,\\ \omega\leqslant2+8k,\\ \omega>0,k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$

令 $k=0$，得 $0<\omega\leqslant\frac{3}{2}$.

故 $\omega$ 的取值范围是 $\left(0,\frac{3}{2}\right]$.

## 【探究总结】

**比较三角函数值大小的步骤**

(1)异名函数化为同名函数.

(2)利用诱导公式把已知角转化到同一单调区间上.

(3)利用函数的单调性比较大小.

## 应用迁移

**1.**(教材 P206 例 4 改编)下列结论正确的是　(　　)

A.$\sin 400°>\sin 50°$　　B.$\sin 220°<\sin 310°$

C.$\sin\frac{31\pi}{5}<\cos\frac{11\pi}{3}$　　D.$\cos\frac{35\pi}{12}>\sin\frac{97\pi}{13}$

D　**解析**：对于 A，$\sin 400°=\sin 40°<\sin 50°$，故 A 错误；

对于 B，$\sin 220°=\sin(180°+40°)=-\sin 40°$，$\sin 310°=\sin(360°-50°)=-\sin 50°$，

因为 $\sin 40°<\sin 50°$，则 $-\sin 40°>-\sin 50°$，即 $\sin 220°>\sin 310°$，故 B 错误；

对于 C，$\sin\frac{31\pi}{5}=\sin\left(6\pi+\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{\pi}{5}>\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，$\cos\frac{11\pi}{3}=\cos\left(4\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，

故 $\sin\frac{31\pi}{5}>\cos\frac{11\pi}{3}$，故 C 错误；

对于 D，$\cos\frac{35\pi}{12}=\cos\left(2\pi+\frac{11\pi}{12}\right)=\cos\frac{11\pi}{12}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)=-\cos\frac{\pi}{12}=-\sin\frac{5\pi}{12}=-\sin\frac{7\pi}{12}$，

$\sin\frac{97\pi}{13}=\sin\left(8\pi-\frac{7\pi}{13}\right)=-\sin\frac{7\pi}{13}$，

因为 $\sin\frac{7\pi}{13}>\sin\frac{7\pi}{12}$，则 $-\sin\frac{7\pi}{13}<-\sin\frac{7\pi}{12}$，

即 $\cos\frac{35\pi}{12}>\sin\frac{97\pi}{13}$，故 D 正确.

**2.**若函数 $y=\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0,m]$ 上单调递增，则 $m$ 的最大值为　(　　)

A.$\frac{1}{3}$　　B.$\frac{2}{3}$

C.1　　D.2

B　**解析**：对于函数 $y=\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{6}\right)$，令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\pi x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $-\frac{1}{3}+2k\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}+2k$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以函数 $y=\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{1}{3}+2k,\frac{2}{3}+2k\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，

当 $k=0$ 时，函数的一个单调递增区间为 $\left[-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$，

又函数 $y=\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0,m]$ 上单调递增，

所以 $0<m\leqslant\frac{2}{3}$，则 $m$ 的最大值为 $\frac{2}{3}$. 故选 B.

# 任务 3　求正弦函数、余弦函数的最值和值域

## 探究活动

**例 4**　求下列函数的最大值和最小值：

(1)$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$；

(2)$y=-2\cos^2x+2\sin x+3$，$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$.

**解**：(1)当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，

故 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

所以函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值分别为 1 和 $-\frac{1}{2}$.

(2)$y=-2(1-\sin^2 x)+2\sin x+3=2\sin^2 x+2\sin x+1=2\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$.

因为 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$,所以$\frac{1}{2}\leqslant\sin x\leqslant 1$.

当 $\sin x=1$,即 $x=\frac{\pi}{2}$时,$y_{\max}=5$;

当 $\sin x=\frac{1}{2}$,即 $x=\frac{\pi}{6}$或 $x=\frac{5\pi}{6}$时,$y_{\min}=\frac{5}{2}$.

**【探究总结】**

**三角函数值域(最值)问题的求解方法**

(1)形如 $y=a\sin x$(或 $y=a\cos x$)的函数,可利用正弦函数、余弦函数的有界性求解,注意对 $a$ 的正负的讨论.

(2)形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$(或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)+b$)的函数,可先由定义域求得 $\omega x+\varphi$ 的范围,然后求得 $\sin(\omega x+\varphi)$(或 $\cos(\omega x+\varphi)$)的范围,最后求得值域(最值).

(3)形如 $y=a\sin^2 x+b\sin x+c(a\neq 0)$的函数,可利用换元思想,设 $t=\sin x$,将原函数转化为二次函数 $y=at^2+bt+c$ 求最值.$t$ 的范围需要根据定义域来确定.

**应用迁移**

**1.**函数 $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})+\sin 2x+4$ 在[-2 025,2 025]上的最大值和最小值之和为　(　　)

A.2　　B.4

C.8　　D.4 050

C　**解析:**因为$\sqrt{1+x^2}>|x|\geqslant -x$,所以 $f(x)$在关于原点对称的区间[-2 025,2 025]上恒有意义,

且 $f(x)+f(-x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})+\lg(-x+\sqrt{1+x^2})+\sin 2x+\sin(-2x)+8$

$=\lg 1+8=8$.

令 $g(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})+\sin 2x$,则 $g(x)+g(-x)=0$,

所以 $g(x)$在[-2 025,2 025]上的图象关于原点对称.

所以函数 $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})+\sin 2x+4$ 在[-2 025,2 025]上的最大值和最小值之和为 8.

**2.**函数 $f(x)=2\cos^2 x+3\sin x$,$x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$的值域为_____.

$\left[3,\frac{25}{8}\right]$　**解析:**依题意 $f(x)=-2\sin^2 x+3\sin x+2$,

令 $\sin x=t$,又 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$,故 $y=-2t^2+3t+2=-2\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{25}{8}$,$t\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$.

故当 $t=\frac{3}{4}$时,$y_{\max}=\frac{25}{8}$;当 $t=1$ 时,$y_{\min}=3$.

故 $f(x)$在$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$上的值域为$\left[3,\frac{25}{8}\right]$.

# 课后素养评价(四十九)

## 基础落实

**1.**函数 $f(x)=3\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)-2$ 的图象的一条对称轴为　(　　)

A.$x=\frac{\pi}{24}$　　B.$x=\frac{\pi}{6}$

C.$x=-\frac{\pi}{24}$　　D.$x=\frac{11\pi}{24}$

A　**解析:**由题意得 $4x+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,解得 $x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{24}(k\in\mathbf{Z})$,

故函数图象的对称轴为直线 $x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{24}=\frac{(6k+1)\pi}{24}(k\in\mathbf{Z})$.

结合选项得直线 $x=\frac{\pi}{24}$为函数图象的一条对称轴.

故选 A.

**2.**函数 $y=2\sin^2 x+2\cos x-3$ 的最大值是　(C)

A.-1　　B.1

C.$-\frac{1}{2}$　　D.-5

**3.**已知 $a=\sin\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$,$b=\sin\left(-\frac{7\pi}{5}\right)$,$c=\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right)$,则　(　　)

A.$c>a>b$　　B.$b>a>c$

C.$a>b>c$　　D.$c>b>a$

B　**解析:**$a=\sin\left(-\frac{15\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{15\pi}{4}+4\pi\right)=\sin\frac{\pi}{4}$,$b=\sin\left(-\frac{7\pi}{5}\right)=-\sin\left(\pi+\frac{2\pi}{5}\right)=\sin\frac{2\pi}{5}$,$c=\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right)=\sin\frac{4\pi}{3}=-\sin\frac{\pi}{3}=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$,

而 $\sin\frac{2\pi}{5}>\sin\frac{\pi}{4}>\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$,故 $b>a>c$.故选 B.

**4.**若函数 $f(x)=2\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$

上单调递减，则 $\omega$ 的取值范围为　　（　　）

A.$\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　B.$(0,1]$

C.$\left(0,\frac{3}{2}\right]$　　D.$(0,2]$

D　**解析**：因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$，所以 $\frac{\pi}{3}\leqslant\omega x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3}$.

由函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减，可知 $\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3}\leqslant\pi$，解得 $\omega\leqslant2$.

综上可知，$\omega$ 的取值范围是 $(0,2]$. 故选 D.

**5.** 函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值是_____，最大值是_____.

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　1　**解析**：因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $2x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，所以 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，

所以 $f(x)_{\min}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$f(x)_{\max}=1$.

## 能力提升

**1.**（多选）函数 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调递减区间是　　（　　）

A.$\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{5\pi}{12}\right]$　　B.$\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$

C.$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right]$　　D.$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$

AB　**解析**：当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{7\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$. $y=\cos x$ 在 $\left[-\frac{7\pi}{6},-\pi\right]$，$\left[0,\frac{5\pi}{6}\right]$ 上单调递减，

又 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{7\pi}{6},-\pi\right]\Rightarrow x\in\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{5\pi}{12}\right]$，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[0,\frac{5\pi}{6}\right]\Rightarrow x\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$，

所以 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调递减区间是 $\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{5\pi}{12}\right]$，$\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$.

**2.**（2024·天津卷）已知函数 $f(x)=\sin 3\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$ $(\omega>0)$ 的最小正周期为 $\pi$，则 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$ 上的最小值是　　（　　）

A.$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B.$-\frac{3}{2}$

C.0　　D.$\frac{3}{2}$

A　**解析**：$f(x)=\sin 3\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin(3\omega x+\pi)=-\sin 3\omega x$，由 $T=\frac{2\pi}{3\omega}=\pi$，得 $\omega=\frac{2}{3}$，

即 $f(x)=-\sin 2x$. 当 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$ 时，$2x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，$\sin 2x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$，

所以 $f(x)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right]$，

所以，当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)_{\min}=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选 A.

**3.**（1）若 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\pi\right]$，求 $y=\sin^2x+2\sin x+2$ 的值域；

（2）求函数 $y=\frac{1-2\cos x}{1+2\cos x}$ 的值域.

**解**：（1）因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\pi\right]$，所以 $-\frac{1}{2}\leqslant\sin x\leqslant1$. 令 $t=\sin x$，$t\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，

所以 $y=\sin^2x+2\sin x+2=t^2+2t+2=(t+1)^2+1$.

又二次函数 $y=(t+1)^2+1$ 的图象开口向上，对称轴为 $t=-1$，所以当 $t\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$ 时，函数 $y=(t+1)^2+1$ 单调递增.

则当 $t=-\frac{1}{2}$ 时，$y=\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2+1=\frac{5}{4}$，

当 $t=1$ 时，$y=(1+1)^2+1=5$.

综上，函数 $y$ 的值域为 $\left[\frac{5}{4},5\right]$.

（2）因为 $y=\frac{1-2\cos x}{1+2\cos x}$，所以 $\cos x=\frac{1-y}{2+2y}$，且 $y\neq-1$.

又因为 $|\cos x|\leqslant1$，所以 $\left|\frac{1-y}{2+2y}\right|\leqslant1$，即 $(1-y)^2\leqslant(2+2y)^2$，

整理得 $(y+3)(3y+1)\geqslant0$，解得 $y\leqslant-3$ 或 $y\geqslant-\frac{1}{3}$.

综上，函数 $y$ 的值域为 $(-\infty,-3]\cup\left[-\frac{1}{3},+\infty\right)$.

## 自我超越

设 $a$ 为常数，函数 $f(x)=-2\sin^2 x-a\sin x+1$.

(1)当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的值域；

(2)若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上有两个不同的零点，求实数 $a$ 的取值范围.

**解**：(1)由题意得 $f(x)=-2\sin^2 x-a\sin x+1$，

令 $t=\sin x$，$t\in[-1,1]$，则 $g(t)=-2t^2-at+1$.

当 $a=1$ 时，$g(t)=-2t^2-t+1=-2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$，

所以当 $t=-\frac{1}{4}$ 时，$g(t)$ 取得最大值 $\frac{9}{8}$；

当 $t=1$ 时，$g(t)$ 取最小值 $-2$，

所以 $f(x)$ 的值域为 $\left[-2,\frac{9}{8}\right]$.

(2)由题意得，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上有两个不同的零点，即函数 $g(t)=-2t^2-at+1$ 在 $(0,1)$ 上仅有一个零点，因为 $g(0)=1>0$，所以由零点存在定理，只需 $g(1)=-a-1<0$，解得 $a>-1$. 所以实数 $a$ 的取值范围为 $(-1,+\infty)$.

# 5.4.3　正切函数的性质与图象

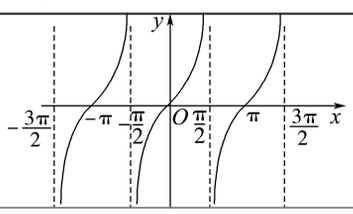
**学习任务目标**

1. 能够借助单位圆和正切线画出函数 $y=\tan x$ 的图象.
2. 掌握正切函数的定义域、值域、周期性、奇偶性、单调性.
3. 能利用正切函数的图象及性质解决有关问题.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点　正切函数 $y=\tan x$ 的图象和性质**

| | |
|---|---|
| 图象 |  |
| 定义域 | $\left\{x\middle\|x\in\mathbf{R},\text{且 }x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$ |
| 值域 | $\mathbf{R}$ |
| 奇偶性 | 奇函数 |
| 单调性 | 在 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right),k\in\mathbf{Z}$ 上单调递增 |
| 周期性 | 最小正周期 $T=\pi$ |
| 对称中心 | $\left(\frac{k\pi}{2},0\right)(k\in\mathbf{Z})$ |

### 【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)函数 $y=\tan x$ 在其定义域上是增函数.　(×)

(2)函数 $y=\tan x$ 的图象的对称中心是 $(k\pi,0)(k\in\mathbf{Z})$.　(×)

(3)正切函数 $y=\tan x$ 无单调递减区间.　(√)

(4)正切函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增.　(×)

2. 函数 $y=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ 的定义域是　(　　)

A. $\left\{x\middle|x\neq\frac{\pi}{4},x\in\mathbf{R}\right\}$

B. $\left\{x\middle|x\neq-\frac{\pi}{4},x\in\mathbf{R}\right\}$

C. $\left\{x\middle|x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{R}\right\}$

D. $\left\{x\middle|x\neq\frac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{R}\right\}$

D　**解析**：函数 $y=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，令 $x-\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $x\neq\frac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以函数的定义域是 $\left\{x\middle|x\neq\frac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{R}\right\}$.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1 了解正切函数的定义域、值域

1. (教材 P212 例 6 改编)函数 $f(x)=\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的定义域为_____.

$\left\{x\middle|x\neq k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$　**解析**：由 $x+\frac{\pi}{3}\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，得 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，

所以函数 $f(x)=\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的定义域为 $\left\{x\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

**2.** 当 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 时，函数 $f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$ 的值域为 $[-\sqrt{3},0]$.

**3.** 求函数 $y=-\tan^2x+4\tan x+1,x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 的值域.

**解**：因为 $-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$，

所以 $-1\leqslant\tan x\leqslant1$.

令 $t=\tan x$，则 $t\in[-1,1]$，

所以 $y=-t^2+4t+1=-(t-2)^2+5$.

所以，当 $t=-1$，

即 $x=-\frac{\pi}{4}$ 时，$y_{\min}=-4$；

当 $t=1$，即 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$y_{\max}=4$.

故所求函数的值域为 $[-4,4]$.

## 【探究总结】

**正切型函数的定义域、值域问题**

**1.** 定义域：除了求函数定义域的一般要求外，还要保证 $y=\tan x$ 有意义，即 $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

**2.** 值域：(1)求函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 的值域时，先求角 $\omega x+\varphi$ 的范围，再利用正切函数的单调性来求解；

(2)求函数 $y=a\tan^2x+b\tan x+c(a\neq0)$ 的值域时，先换元，再利用二次函数的性质求解.

# 任务2 掌握正切函数的单调性

## 探究活动

**例1**　(1)函数 $y=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ 的　　(　　)

A. 单调递增区间是 $\left(k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$

B. 单调递减区间是 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$

C. 单调递减区间是 $\left(k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$

D. 单调递增区间是 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$

(2)$\tan48°$，$\tan(-22°)$，$\tan114°$ 的大小关系为　　(　　)

A. $\tan114°>\tan48°>\tan(-22°)$

B. $\tan(-22°)>\tan114°>\tan48°$

C. $\tan(-22°)>\tan48°>\tan114°$

D. $\tan48°>\tan(-22°)>\tan114°$

(1)C　**解析**：$y=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，令 $k\pi-\frac{\pi}{2}<x-\frac{\pi}{4}<k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $k\pi-\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{3\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，所以 $y=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ 的单调递减区间为 $\left(k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

(2)D　**解析**：$\tan114°=\tan(180°-66°)=\tan(-66°)$，

因为函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，且 $-66°<-22°<48°$，

所以 $\tan(-66°)<\tan(-22°)<\tan48°$，

即 $\tan48°>\tan(-22°)>\tan114°$.

故选 D.

## 【探究总结】

**正切型函数的单调性问题**

(1)求 $y=\tan(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的单调区间，把 $\omega x+\varphi$ 看成一个整体，解 $-\frac{\pi}{2}+k\pi<\omega x+\varphi<\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 即可. 当 $\omega<0$ 时，先用诱导公式把 $x$ 的系数化为正值再求单调区间.

(2)运用正切函数的单调性比较大小的步骤：

①运用函数的周期性或诱导公式将角化到同一单调区间内；

②运用单调性比较大小.

## 应用迁移

**1.** 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}\tan(2x-\varphi)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的单调递增区间是 $\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$，则 $\varphi=$　　(　　)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{12}$

C　**解析**：令 $-\frac{\pi}{2}+k\pi<2x-\varphi<\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $-\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}+\frac{k\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

故 $-\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}=-\frac{\pi}{6}$ 且 $\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}=\frac{\pi}{3}$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$. 故选 C.

**2.** 下列各式中正确的是　　(　　)

A. $\tan1>-\tan2$

B. $\tan735°>\tan800°$

C. $\tan\frac{5\pi}{7}>\tan\frac{4\pi}{7}$

D. $\tan\frac{9\pi}{8}>\tan\frac{\pi}{7}$

C　**解析**：对于 A，由 $0<1<\frac{\pi}{3}$ 且 $\frac{\pi}{2}<2<\frac{2\pi}{3}$，以及正切函数 $y=\tan x$ 的性质，

可得 $0<\tan 1<\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，$\tan 2<0$ 且 $\tan 2<\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$，

所以 $-\tan 2>\sqrt{3}$，所以 $\tan 1<-\tan 2$，故 A 错误；

对于 B，由 $\tan 735°=\tan 15°$，$\tan 800°=\tan 80°$，以及正切函数 $y=\tan x$ 的单调性，可得 $\tan 15°<\tan 80°$，即 $\tan 735°<\tan 800°$，故 B 错误；

对于 C，因为正切函数 $y=\tan x$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递增，

又 $\frac{\pi}{2}<\frac{4\pi}{7}<\frac{5\pi}{7}<\pi$，所以 $\tan\frac{5\pi}{7}>\tan\frac{4\pi}{7}$，故 C 正确；

对于 D，由 $\tan\frac{9\pi}{8}=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{8}\right)=\tan\frac{\pi}{8}$，以及正切函数 $y=\tan x$ 的单调性，可得 $\tan\frac{\pi}{8}<\tan\frac{\pi}{7}$，

即 $\tan\frac{9\pi}{8}<\tan\frac{\pi}{7}$，故 D 错误．故选 C.

## 任务3 掌握正切函数性质的综合应用

### 探究活动

**例 2**　（多选）下列关于函数 $y=|\tan x|$ 性质的叙述正确的是　（　　）

A.最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$

B.值域为 $[0,+\infty)$

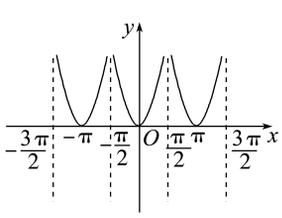
C.是偶函数

D.单调递减区间为 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

BCD　**解析**：由 $y=|\tan x|$，

得 $y=\begin{cases}\tan x, k\pi\leqslant x<\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z},\\ -\tan x, -\frac{\pi}{2}+k\pi<x<k\pi, k\in\mathbf{Z},\end{cases}$

其图象如图所示.




由图象可知，函数 $y=|\tan x|$ 的定义域为 $\left\{x\middle|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$，值域为 $[0,+\infty)$，是偶函数.

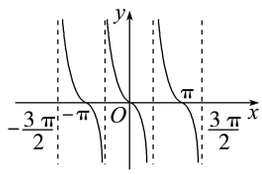
函数 $y=|\tan x|$ 的周期 $T=\pi$，

函数 $y=|\tan x|$ 的单调递增区间为 $\left(k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，单调递减区间为 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$.

［一题多思］

**思考 1.** 你能画出函数 $y=\tan(-x)$ 的图象吗？它与函数 $y=\tan x$ 的图象有怎样的关系？

**提示**：$y=\tan(-x)=-\tan x$，其图象如图所示，与函数 $y=\tan x$ 的图象关于 $y$ 轴对称.

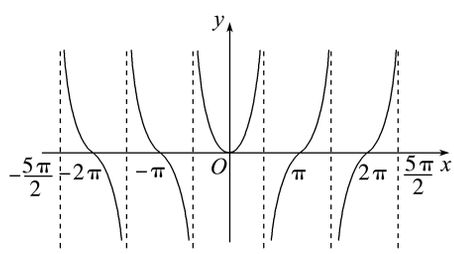



**思考 2.** 若把例题中函数换为“$f(x)=\tan|x|$”，你能判断其周期性、奇偶性，并求其单调递增区间吗？

**提示**：$f(x)=\tan|x|$ 可化为

$$f(x)=\begin{cases}\tan x, x\geqslant 0, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z},\\ -\tan x, x<0, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

根据 $y=\tan x$ 的图象，作出 $f(x)=\tan|x|$ 的图象如图所示.




由图象知，$f(x)$ 不是周期函数，是偶函数，单调递增区间为 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\left(k\pi+\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$，$k\in\mathbf{N}$.

### 【探究总结】

**解答正切型函数图象与性质问题的注意点**

(1)周期性：函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期 $T=\frac{\pi}{|\omega|}$.

(2)奇偶性：先求函数的定义域 $D$，判断其是否满足 $\forall x\in D$，$-x\in D$．若不满足，则该函数为非奇非偶函数；若满足，再判断 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系.

(3)对称性：正切函数图象的对称中心是 $\left(\frac{k\pi}{2},0\right)(k\in\mathbf{Z})$，不存在对称轴.

### 应用迁移

已知函数 $f(x)=\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$.

(1)求函数 $f(x)$ 的定义域、最小正周期、单调区间及图象的对称中心；

(2)求不等式 $-1\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{3}$ 的解集；

(3)作出函数 $y=f(x)$ 在一个周期内的简图.

**解**：(1)由 $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $x\neq\frac{5\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $f(x)$ 的定义域是 $\left\{x\left|x\neq\frac{5\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

因为 $\omega=\frac{1}{2}$，所以最小正周期 $T=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$.

由 $-\frac{\pi}{2}+k\pi<\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

得 $-\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{5\pi}{3}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$.

由 $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=\frac{2\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

故函数 $f(x)$ 图象的对称中心是 $\left(\frac{2\pi}{3}+k\pi,0\right),k\in\mathbf{Z}$.

(2)由 $-1\leqslant\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\sqrt{3}$，

得 $-\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

解得 $\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{4\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

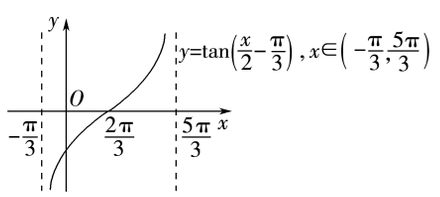
所以不等式 $-1\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{3}$ 的解集是 $\left\{x\left|\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{4\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

(3)令 $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=0$，则 $x=\frac{2\pi}{3}$；

令 $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，则 $x=\frac{5\pi}{3}$；

令 $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}$，则 $x=-\frac{\pi}{3}$.

所以函数 $y=\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象与 $x$ 轴的一个交点坐标是 $\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$，在这个交点左、右两侧相邻的两条渐近线方程分别是 $x=-\frac{\pi}{3},x=\frac{5\pi}{3}$.从而得到函数 $y=f(x)$ 在一个周期 $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$ 内的简图(如图).




# 课后素养评价(五十)

## 基础落实

**1.**函数 $y=\sqrt{2\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ 的定义域为　(　　)

A. $\left\{x\left|k\pi+\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

B. $\left\{x\left|k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x<\frac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

C. $\left\{x\left|k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

D. $\left\{x\left|k\pi\leqslant x<\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

B　**解析**：由题意得，$\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant0$，

所以 $k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

所以 $k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x<\frac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

所以函数的定义域为 $\left\{x\left|k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x<\frac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.故选 B.

**2.**(2025·全国Ⅰ卷)已知点 $(a,0)(a>0)$ 是函数 $y=2\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的一个对称中心，则 $a$ 的最小值为　(　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{4\pi}{3}$

B　**解析**：令 $x-\frac{\pi}{3}=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$，故 $y=2\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3},0\right),k\in\mathbf{Z}$.因为 $a>0$，所以当 $k=0$ 时，$a$ 取得最小值 $\frac{\pi}{3}$.故选 B.

**3.**(多选)已知函数 $f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-1$，则　(　　)

A. $f(x)$ 的最小正周期为 $\pi$

B. $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x\left|x\neq\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

C.$f(x)$的图象关于点$\left(-\frac{\pi}{8},0\right)$对称

D.$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}\right)$上单调递增

BD　**解析**：对于A，$f(x)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$，故A错误；对于B，由$2x+\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得$x\neq\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，故B正确；对于C，由$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得$x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，当$k=0$时，$f(x)$的图象关于点$\left(-\frac{\pi}{8},-1\right)$对称，故C错误；对于D，若$x\in\left(\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}\right)$，则$2x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，所以$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}\right)$上单调递增，故D正确.

**4.** 函数$y=\tan^2x-2\tan x+2$的最小值为_____.

1　**解析**：$y=\tan^2x-2\tan x+2=(\tan x-1)^2+1$，由于$\tan x\in\mathbf{R}$，所以当$\tan x=1$时，函数取得最小值1.

## 能力提升

**1.** 已知$x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$，则函数$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\tan x}$的值域是　(　)

A.$\left(0,\frac{1}{3}\right]$　　B.$\left(\frac{1}{3},3\right)$

C.$(0,3]$　　D.$[3+\infty)$

B　**解析**：令$t=\tan x$，则$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\tan x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{t}$.

因为$t=\tan x$在$x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$上单调递增，

所以$t=\tan x\in(-1,1)$.

又$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{t}$在$\mathbf{R}$上单调递减，且$t\in(-1,1)$，

所以$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{t}\in\left(\frac{1}{3},3\right)$，即$f(x)$的值域是$\left(\frac{1}{3},3\right)$.

**2.** 若$f(n)=\tan\frac{n\pi}{3}(n\in\mathbf{N}^*)$，则$f(1)+f(2)+\cdots+f(2\,025)=$　(　)

A.$-2\sqrt{3}$　　B.$-\sqrt{3}$　　C.0　　D.$\sqrt{3}$

C　**解析**：由题意知$f(n)=\tan\frac{n\pi}{3}(n\in\mathbf{N}^*)$的最小正周期为$\frac{\pi}{\frac{\pi}{3}}=3$，且$f(1)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，$f(2)=\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$，$f(3)=\tan\pi=0$，

故$f(1)+f(2)+\cdots+f(2\,025)=f(1)+f(2)+\cdots+f(675\times3)=675\times[f(1)+f(2)+f(3)]=0$.

故选C.

**3.**（多选）已知函数$f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，则下列说法正确的是　(　)

A.$f(x)$在定义域内是增函数

B.$f(x)$图象的对称中心是$\left(\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{6},0\right),k\in\mathbf{Z}$

C.直线$x=\frac{\pi}{12}$与函数$f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象不相交

D.$f(x)$是奇函数

BC　**解析**：对于A，令$2x+\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得$x\neq\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，所以函数$f(x)$的定义域为$\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，

由$k\pi-\frac{\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，有$\frac{k\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}<x<\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

所以函数$f(x)$的单调递增区间为$\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right),k\in\mathbf{Z}$，

由单调性的定义可知，$f(x)$在定义域内不具有单调性，故A错误；

对于B，令$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，解得$x=\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，所以$f(x)$图象的对称中心是$\left(\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{6},0\right),k\in\mathbf{Z}$，故B正确；

对于C，由$2x+\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，得$x\neq\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以函数图象与直线$x=\frac{\pi}{12}$不相交，故C正确；

对于D，$f(-x)=\tan\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，可知$f(x)$是非奇非偶函数，故D错误.

**4.** 已知函数$f(x)=\tan(2x+\varphi)\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$的图象关于点$\left(-\frac{\pi}{8},0\right)$中心对称，则$f\left(\frac{2\,025\pi}{4}\right)=$_____.

−1　**解析**：令$2x+\varphi=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，可得$x=-\frac{\varphi}{2}+$

$\frac{k\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，结合 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，

令 $k=0$，可得 $x=-\frac{\varphi}{2}$，得 $-\frac{\varphi}{2}=-\frac{\pi}{8}$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

所以 $f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，

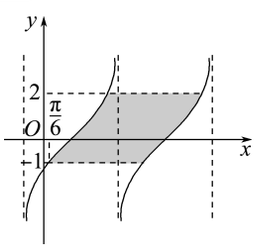
所以 $f\left(\frac{2\,025\pi}{4}\right)=\tan\left(2\times\frac{2\,025\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\tan\left(1\,012\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{-\sin\frac{\pi}{4}}=-1$.

## 自我超越

函数 $f(x)=\tan(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象如图所示，图中阴影部分的面积为 $6\pi$，则 $f\left(\frac{2\,026\pi}{3}\right)=$（　　）




A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $-\sqrt{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

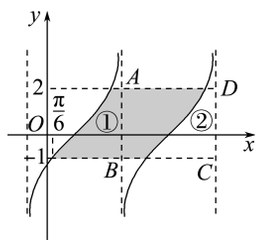
D　**解析**：如图，①和②的面积相等，故阴影部分的面积即为矩形 $ABCD$ 的面积，可得 $AB=3$. 设函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T$，则 $AD=T$.

由题意得 $3T=6\pi$，解得 $T=2\pi$，故 $\frac{\pi}{\omega}=2\pi$，得 $\omega=\frac{1}{2}$，

即 $f(x)=\tan\left(\frac{1}{2}x+\varphi\right)$.

因为 $f(x)$ 的图象过点 $\left(\frac{\pi}{6},-1\right)$，所以 $\tan\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=\tan\left(\frac{\pi}{12}+\varphi\right)=-1$，

又 $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\frac{\pi}{12}+\varphi\in\left(-\frac{5\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right)$，




所以 $\frac{\pi}{12}+\varphi=-\frac{\pi}{4}$，解得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

所以 $f(x)=\tan\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$.

故 $f\left(\frac{2\,026\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{2\,026\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{2\,024\pi}{6}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

# 5.5　三角恒等变换

## 5.5.1　两角和与差的正弦、余弦和正切公式

### 第1课时　两角差的余弦公式

**学习任务目标**

1. 了解两角差的余弦公式的推导过程，知道两角差的余弦公式的意义.
2. 熟记两角差的余弦公式的形式及符号特征，并能利用该公式解决问题.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点　两角差的余弦公式**

| | |
|---|---|
| 公式 | $C_{(\alpha-\beta)}:\cos(\alpha-\beta)=\underline{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$ |
| 适用条件 | 公式中的角 $\alpha$，$\beta$ 都是任意角 |
| 公式结构 | 公式右端的两部分为同名三角函数的积，连接符号与左边角的连接符号相反 |

### 【概念辨析】

1. 判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.
（1）存在角 $\alpha$，$\beta$，使得 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha-\cos\beta$.（√）
（2）任意角 $\alpha$，$\beta$，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.（×）
（3）任意角 $\alpha$，$\beta$，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.（√）

2. $\cos 44^\circ\cos 14^\circ+\sin 44^\circ\sin 14^\circ$ 的值为（C）
A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1 利用两角差的余弦公式求值

求下列各式的值：

(1)$\sin 75°=$_____；

(2)$\cos(-15°)=$_____；

(3)$\cos 69°\sin 66°+\sin 111°\sin 24°=$_____；

(4)$\sin 460°\sin(-160°)+\cos 560°\cos(-280°)=$_____；

(5)$\frac{1}{2}\cos 15°+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 15°=$_____.

(1)$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　(2)$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　(3)$\frac{\sqrt{2}}{2}$　(4)$-\frac{1}{2}$

(5)$\frac{\sqrt{2}}{2}$

**解析**：(1)原式$=\cos 15°=\cos(45°-30°)$

$=\cos 45°\cos 30°+\sin 45°\sin 30°$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

(2)原式$=\cos(30°-45°)=\cos 30°\cos 45°+\sin 30°\cdot\sin 45°=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

(3)原式$=\cos 69°\cos 24°+\sin 69°\sin 24°=\cos(69°-24°)=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(4)原式$=-\sin 100°\sin 160°+\cos 200°\cos 280°$

$=-\sin 100°\sin 20°-\cos 20°\cos 80°$

$=-(\cos 80°\cos 20°+\sin 80°\sin 20°)$

$=-\cos 60°=-\frac{1}{2}$.

(5)原式$=\cos 60°\cos 15°+\sin 60°\sin 15°$

$=\cos(60°-15°)=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**【探究总结】**

**利用两角差的余弦公式给角求值的一般思路**

(1)把非特殊角转化为特殊角的差，正用公式直接求值.

(2)在转化过程中，充分利用诱导公式，构造两角差的余弦公式的右边形式，然后逆用公式求值.

### 任务2 利用角的变换求值

#### 探究活动

**例1**　(1)已知$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{12}{13}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$，求$\cos\alpha$的值.

(2)设$\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=-\frac{1}{9}$，$\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\frac{2}{3}$，其中$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，求$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$的值.

**解**：(1)因为$\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$，所以$\frac{\pi}{3}+\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

所以$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}$

$=-\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=-\frac{5}{13}$.

因为$\alpha=\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\frac{\pi}{3}$，

所以$\cos\alpha=\cos\left[\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\frac{\pi}{3}\right]$

$=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cos\frac{\pi}{3}+\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\frac{\pi}{3}$

$=-\frac{5}{13}\times\frac{1}{2}+\frac{12}{13}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{12\sqrt{3}-5}{26}$.

(2)因为$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以$\alpha-\frac{\beta}{2}\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$，$\frac{\alpha}{2}-\beta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，

所以$\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}=\sqrt{1-\frac{1}{81}}$

$=\frac{4\sqrt{5}}{9}$，

$\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

所以$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)\right]$

$=\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)$

$=-\frac{1}{9}\times\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{4\sqrt{5}}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{7\sqrt{5}}{27}$.

[一题多思]

**思考1.**本例(1)中若条件改为“已知$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$，且$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$”，则$\cos\alpha$的值是多少？

**提示**：因为$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$，且$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，所以$\frac{\pi}{2}<\alpha+\frac{\pi}{4}<\pi$，

所以$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$，所以

$\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

**思考2.**结合本例及思考1，你能总结一下“拆角或凑角”问题的类型与求解方法吗？

**提示**：(1)已知条件中只有一个角，一般用该角与特殊角凑成所求角；(2)已知条件中有两个角，一般利用这两个角凑成所求角；(3)不能直接拼凑时，一般考虑用诱导公式转换.

【探究总结】

利用两角差的余弦公式给值求值的解题策略

(1)已知某些角的三角函数值，求另外一些角的三角函数值时，要注意观察已知角与所求式中角的关系，从而进行拆角或凑角.

(2)由于和、差角与单角是相对的，因此在解题过程中，需要灵活地进行拆角或凑角的变换.常见角的变换有：①$\alpha=(\alpha-\beta)+\beta$；②$\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}$；③$2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$；④$2\beta=(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)$.

## 应用迁移

**1.**已知 $\sin\alpha-\sin\beta=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{2}$，则 $\cos(\alpha-\beta)=$（　　）

A.$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B.$-\frac{1}{2}$　　C.$\frac{1}{2}$　　D.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

D　**解析：**因为 $\sin\alpha-\sin\beta=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{2}$，所以$(\sin\alpha-\sin\beta)^2=\frac{7}{4}-\sqrt{3}$，

$(\cos\alpha-\cos\beta)^2=\frac{1}{4}$.

两式相加，得 $2-2\cos(\alpha-\beta)=2-\sqrt{3}$.

所以 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**2.**（教材 P217 练习题 3 改编）已知 $\cos\alpha=\frac{12}{13}$，$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，求 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$的值.

**解：**因为 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，所以 $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$，

所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{12}{13}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{5}{13}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{26}$.

**3.**已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{16}{65}$，求 $\cos\beta$ 的值.

**解：**因为 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $0<\alpha+\beta<\pi$.

由 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{16}{65}$，得 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{63}{65}$.

又 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，

所以 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

所以 $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]$

$=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$

$=\left(-\frac{16}{65}\right)\times\frac{3}{5}+\frac{63}{65}\times\frac{4}{5}=\frac{204}{325}$.

# 任务3 利用两角差的余弦公式求角

## 探究活动

**例 2**　若 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$，且 $\alpha,\beta$ 均为锐角，$\alpha<\beta$，则 $\alpha+\beta=$_____.

$\frac{3\pi}{4}$　**解析：**因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，$\alpha<\beta$，所以 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<0$.

又 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin(\alpha-\beta)=-\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

又因为 $0<2\alpha<\pi$，$\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$，所以 $\sin 2\alpha=\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos[2\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos 2\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin 2\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.又 $0<\alpha+\beta<\pi$，故 $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$.

【探究总结】

利用两角差的余弦公式给值求角的解题策略

(1)要求角需先求这个角的三角函数值，然后根据角的范围得出角的大小.

(2)已知一个角的正弦值(余弦值)求余弦值(正弦值)时，要根据角的范围确定其符号.

## 应用迁移

已知 $\cos(\alpha-\beta)=-\frac{4}{5}$，$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$，$\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\pi$，$\frac{3\pi}{2}<\alpha+\beta<2\pi$，求 $\beta$ 的值.

**解：**因为 $\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\pi$，$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{4}{5}$，

所以 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$.因为 $\frac{3\pi}{2}<\alpha+\beta<2\pi$，$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$，所以 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$.

所以 $\cos 2\beta=\cos[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]$

$=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{4}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{3}{5}=-1$.

因为 $\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\pi$，$\frac{3\pi}{2}<\alpha+\beta<2\pi$，

所以 $\frac{\pi}{2}<2\beta<\frac{3\pi}{2}$，$2\beta=\pi$，所以 $\beta=\frac{\pi}{2}$.

# 课后素养评价(五十一)

## 基础落实

**1.** $\cos 26^\circ\cos 34^\circ-\sin 26^\circ\sin 34^\circ=$ (　　)

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

C.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D.1

A　**解析**:$\cos 26^\circ\cos 34^\circ-\sin 26^\circ\sin 34^\circ=\cos(26^\circ+34^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$.

**2.** 已知锐角$\alpha$,$\beta$满足$\cos\alpha=\frac{3}{5}$,$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{5}{13}$,则$\cos\beta$等于 (　　)

A.$\frac{33}{65}$　　B.$-\frac{33}{65}$

C.$\frac{54}{75}$　　D.$-\frac{54}{75}$

A　**解析**:因为$\alpha$,$\beta$为锐角,

$\cos\alpha=\frac{3}{5}$,$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{5}{13}$,

所以$\sin\alpha=\frac{4}{5}$,$\sin(\alpha+\beta)=\frac{12}{13}$.

所以$\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]$

$=\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha$

$=\left(-\frac{5}{13}\right)\times\frac{3}{5}+\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}=\frac{33}{65}$.

**3.** 在$\triangle ABC$中,$\sin A=\frac{4}{5}$,$\cos B=-\frac{12}{13}$,则$\cos(A-B)=$_____.

$-\frac{16}{65}$　**解析**:因为$\cos B=-\frac{12}{13}$,且$0<B<\pi$,

所以$\frac{\pi}{2}<B<\pi$,且$0<A<\frac{\pi}{2}$,

所以$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$,

$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$,

所以$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$,

$=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)+\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}=-\frac{16}{65}$.

**4.** $\frac{\cos 7^\circ-\sin 15^\circ\sin 8^\circ}{\cos 8^\circ}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

## 能力提升

**1.** 已知角$\alpha$的顶点与原点$O$重合,始边与$x$轴的非负半轴重合,它的终边过点$P\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$,若角$\beta$满足$\cos(\alpha+\beta)=\frac{12}{13}$,则$\cos\beta$的值为 (　　)

A.$\frac{33}{65}$　　B.$\frac{56}{65}$

C.$\frac{56}{65}$或$\frac{16}{65}$　　D.$\frac{33}{65}$或$\frac{63}{65}$

D　**解析**:由题意,得$\sin\alpha=\frac{\frac{3}{5}}{\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}}=\frac{3}{5}$,

$\cos\alpha=\frac{\frac{4}{5}}{\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}}=\frac{4}{5}$.

由$\cos(\alpha+\beta)=\frac{12}{13}$,可知$\sin(\alpha+\beta)=\pm\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\pm\sqrt{1-\frac{144}{169}}=\pm\sqrt{\frac{25}{169}}=\pm\frac{5}{13}$.

若$\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$,

则$\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha=\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}+\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}=\frac{63}{65}$;若$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{5}{13}$,则$\cos\beta=\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}+\left(-\frac{5}{13}\right)\times\frac{3}{5}=\frac{33}{65}$.故$\cos\beta$的值为$\frac{63}{65}$或$\frac{33}{65}$.

**2.** 若$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{5}$,$\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$,则$\tan\alpha\tan\beta=$_____.

$\frac{1}{2}$　**解析**:$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}$,

又$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{5}$,所以$\cos\alpha\cos\beta=\frac{2}{5}$,

$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{5}$,两式相除可得$\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{2}$.

**3.** 已知角$\alpha$的顶点与坐标原点重合,始边与$x$轴的非负半轴重合,终边过点$\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

(1)计算:

$$\frac{\sin\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\tan^2(2\pi-\alpha)\tan(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)};$$

(2)已知$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$,且$\sin\beta=-\frac{\sqrt{10}}{10}$,求$\cos(\alpha-\beta)$的值.

**解**:由题意知$\tan\alpha=2$.

(1)原式$=\frac{(-\cos\alpha)\cdot(-\cos\alpha)\cdot\tan^2\alpha\cdot(-\tan\alpha)}{\sin\alpha\cdot(-\sin\alpha)}$

$=\tan\alpha=2$.

(2)因为$\alpha$是第一象限角,且终边过点$\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$,

所以 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

因为 $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，且 $\sin\beta=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，

所以 $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

所以 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}+\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

**自我超越**

已知 $0<\beta<\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{3}{5}$，$\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)=\frac{5}{13}$，求 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值.

**解**：因为 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，所以 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}-\alpha<0$，

所以 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$.

又因为 $0<\beta<\frac{\pi}{4}$，所以 $\frac{3\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}+\beta<\pi$，

所以 $\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)=-\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13}$，

所以 $\sin(\alpha+\beta)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta\right)$

$=-\cos\left[\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]$

$=-\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$

$=-\left(-\frac{12}{13}\right)\times\frac{3}{5}-\frac{5}{13}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{56}{65}$.

# 第 2 课时　两角和与差的正弦、余弦、正切公式

**学习任务目标**

1. 能利用两角差的余弦公式，推导出两角和的余弦公式及两角和与差的正弦、正切公式.
2. 会用两角和与差的正弦、余弦、正切公式进行简单的三角函数式的求值、化简等.
3. 灵活运用两角和与差的正弦、余弦、正切公式，了解公式的正用、逆用以及角的变换的常用方法.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　两角和的余弦公式**

| 公式 | $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ |
|---|---|
| 简记符号 | $C_{(\alpha+\beta)}$ |
| 使用条件 | $\alpha,\beta$ 为任意角 |

**知识点二　两角和与差的正弦公式**

(1)两角和的正弦公式：$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.($S_{(\alpha+\beta)}$)

(2)两角差的正弦公式：$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$.($S_{(\alpha-\beta)}$)

**知识点三　两角和与差的正切公式**

| 名称 | 简记符号 | 公式 | 使用条件 |
|---|---|---|---|
| 两角和的正切 | $T_{(\alpha+\beta)}$ | $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ | $\alpha,\beta,\alpha+\beta$ 均不等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ |
| 两角差的正切 | $T_{(\alpha-\beta)}$ | $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ | $\alpha,\beta,\alpha-\beta$ 均不等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ |

### 【概念辨析】

1. 判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$ 一定不成立.　（×）

(2)$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha-\sin\beta$ 恒成立.　（×）

(3)存在 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，使 $\tan(\alpha+\beta)=\tan\alpha+\tan\beta$ 成立.　（√）

(4)对任意的 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ 都成立.　（×）

2. 若 $\tan\alpha=3$，$\tan\beta=\frac{4}{3}$，则 $\tan(\alpha-\beta)$ 等于（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. 3　　D. $-3$

A　**解析**：因为 $\tan\alpha=3$，$\tan\beta=\frac{4}{3}$，所以 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3-\frac{4}{3}}{1+3\times\frac{4}{3}}=\frac{1}{3}$.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1 利用公式的正用、逆用求值

**1.**(多选)下列四个选项中,结果正确的是　　(　　)

A.$\cos(-15^\circ)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

B.$\cos 15^\circ\cos 105^\circ+\sin 15^\circ\sin 75^\circ=0$

C.$\sin 166^\circ\cos 16^\circ+\sin 76^\circ\cos 74^\circ=\dfrac{1}{2}$

D.$\cos(\alpha-35^\circ)\cos(25^\circ+\alpha)+\sin(\alpha-35^\circ)\sin(25^\circ+\alpha)=-\dfrac{1}{2}$

BC　**解析**:$\cos(-15^\circ)=\cos(30^\circ-45^\circ)=\cos 30^\circ\cos 45^\circ+\sin 30^\circ\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,A 错误;

因为 $\sin 75^\circ=\sin(180-105)^\circ=\sin 105^\circ$,

所以 $\cos 15^\circ\cos 105^\circ+\sin 15^\circ\sin 75^\circ=\cos 15^\circ\cos 105^\circ+\sin 15^\circ\sin 105^\circ=\cos(15^\circ-105^\circ)=\cos(-90^\circ)=\cos 90^\circ=0$,B 正确;

因为 $\sin 166^\circ=\sin(90^\circ+76^\circ)=\cos 76^\circ$,$\cos 74^\circ=\cos(90^\circ-16^\circ)=\sin 16^\circ$,

所以 $\sin 166^\circ\cos 16^\circ+\sin 76^\circ\cos 74^\circ=\cos 76^\circ\cos 16^\circ+\sin 76^\circ\sin 16^\circ=\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$,C 正确;

$\cos(\alpha-35^\circ)\cos(25^\circ+\alpha)+\sin(\alpha-35^\circ)\sin(25^\circ+\alpha)=\cos(-60^\circ)=\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$,D 错误.

**2.** $\dfrac{2\sin 40^\circ+\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$的值为_____.

$\sqrt{3}$　**解析**:原式$=\dfrac{2\sin(60^\circ-20^\circ)+\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$

$=\dfrac{2\sin 60^\circ\cos 20^\circ-2\cos 60^\circ\sin 20^\circ+\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$

$=\dfrac{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ-2\times\dfrac{1}{2}\sin 20^\circ+\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$

$=\dfrac{\sqrt{3}\cos 20^\circ-\sin 20^\circ+\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\sqrt{3}$.

**3.**求值:

(1)$\dfrac{1-\tan 15^\circ}{1+\tan 15^\circ}$;

(2)$\tan 23^\circ+\tan 37^\circ+\sqrt{3}\tan 23^\circ\tan 37^\circ$.

**解**:(1)原式$=\dfrac{\tan 45^\circ-\tan 15^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 15^\circ}=\tan(45^\circ-15^\circ)=\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(2)原式$=\tan 60^\circ(1-\tan 23^\circ\tan 37^\circ)+\sqrt{3}\tan 23^\circ\cdot\tan 37^\circ=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan 23^\circ\tan 37^\circ+\sqrt{3}\tan 23^\circ\tan 37^\circ=\sqrt{3}$.

[一题多思]

**思考1.**本题(1)若变为"$\dfrac{1-\tan 15^\circ}{\sqrt{3}+\tan 60^\circ\tan 15^\circ}$",你能直接求出它的值吗?

**提示**:原式$=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1-\tan 15^\circ}{1+\tan 15^\circ}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\tan 45^\circ-\tan 15^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 15^\circ}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan(45^\circ-15^\circ)=\dfrac{\tan 30^\circ}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$.

**思考2.**本题(2)若变为"$(1+\tan 18^\circ)(1+\tan 27^\circ)$",其值是多少?

**提示**:原式$=1+(\tan 18^\circ+\tan 27^\circ)+\tan 18^\circ\cdot\tan 27^\circ=1+\tan 45^\circ(1-\tan 18^\circ\tan 27^\circ)+\tan 18^\circ\tan 27^\circ=1+1=2$.

**思考3.**结合本题,你能总结出公式 $T_{(\alpha\pm\beta)}$ 的逆用及变形应用的解题策略吗?

**提示**:(1)"1"的代换:在 $T_{(\alpha\pm\beta)}$ 中,如果分子中出现"1",常利用 $1=\tan\dfrac{\pi}{4}$ 来代换,以达到化简求值的目的,如$\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$,$\dfrac{\sqrt{3}\tan\alpha+\sqrt{3}}{1-\tan\alpha}=\sqrt{3}\cdot\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(2)整体意识:若化简的式子中出现了"$\tan\alpha\pm\tan\beta$"及"$\tan\alpha\tan\beta$"两个整体,常考虑 $\tan(\alpha\pm\beta)$ 的变形公式.

**【探究总结】**

**给角求值问题的解题策略**

(1)非特殊角的三角函数式求值,若符合和角公式或差角公式的形式,则整体变形,否则先进行局部的变形.

(2)三角函数式变形的一般途径有:将非特殊角化为特殊角的和或差的形式;构造可以正负相消的项并消项;变换分子、分母的形式进行约分.解题时要注意逆用公式或利用公式的变形.

### 任务2 利用角的变换求值

#### 探究活动

**例1**　(1)已知 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{2}{5}$,$\tan\left(\beta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$,那么 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 等于　　(　　)

A.$\dfrac{13}{18}$　　B.$\dfrac{13}{22}$　　C.$\dfrac{3}{22}$　　D.$\dfrac{3}{18}$

(2)已知 $\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{5}{13}$,$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\beta\right)=\dfrac{3}{5}$,且 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}<\beta<\dfrac{3\pi}{4}$,求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值.

(1)C　**解析**：$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left[(\alpha+\beta)-\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{\frac{2}{5}-\frac{1}{4}}{1+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}}=\frac{3}{22}$.

(2)**解**：因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}<\beta<\frac{3\pi}{4}$，

所以 $\frac{3\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}+\alpha<\pi$，$-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}-\beta<0$.

又因为 $\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{5}{13}$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)=\frac{3}{5}$，

所以 $\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)=-\frac{12}{13}$，$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)=-\frac{4}{5}$.

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\sin\left[\frac{\pi}{2}+(\alpha+\beta)\right]$

$=\sin\left[\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)\right]$

$=\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)$

$=\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}-\left(-\frac{12}{13}\right)\times\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{33}{65}$.

## 【探究总结】

**角的拼凑问题的解题策略**

(1)当已知角有两个时，所求角一般表示为两个已知角的和或差的形式.

(2)当已知角只有一个时，所求角一般表示为已知角和特殊角的和或差的形式，有时也利用诱导公式把所求角变成已知角.

## 应用迁移

**1.**(教材 P220 练习题 2 改编)已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3}{5}$，则 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$ 的值为　(　　)

A.$\frac{7\sqrt{2}}{10}$　B.$\frac{\sqrt{2}}{10}$　C.$\frac{7\sqrt{3}}{10}$　D.$\frac{\sqrt{3}}{10}$

A　**解析**：因为 $\alpha+\frac{\pi}{12}\in\left(\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right)$，$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3}{5}$，$\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=1$，

所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{4}{5}$，

所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\times\cos\frac{\pi}{4}+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\times\sin\frac{\pi}{4}=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

**2.**已知 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，$0<\beta<\frac{\pi}{4}$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=-\frac{3}{5}$，$\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)=\frac{5}{13}$.

(1)求 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值；

(2)求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

**解**：(1)因为 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，$\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}+\alpha<\pi$，

所以 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{4}{5}$.

因为 $0<\beta<\frac{\pi}{4}$，$\frac{3\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}+\beta<\pi$，

所以 $\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)}=-\frac{12}{13}$.

所以 $\sin(\alpha+\beta)=-\sin(\pi+\alpha+\beta)$

$=-\sin\left[\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)\right]$

$=-\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)\right]$

$=-\left[\frac{4}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{5}{13}\right]=\frac{63}{65}$.

(2)由(1)可知，$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{4}{5}$，$\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)=-\frac{12}{13}$，

所以 $\sin\left[\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)\right]$

$=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)$

$=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)-\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{5}{13}=-\frac{33}{65}$.

又因为 $\sin\left[\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)\right]=\sin\left[(\alpha-\beta)-\frac{\pi}{2}\right]=-\cos(\alpha-\beta)$，

从而 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{33}{65}$.

## 任务3 利用公式变换求角

### 探究活动

**例 2**　已知 $\alpha$，$\beta$ 为锐角，$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$，求 $\beta$ 的值.

**解**：因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$，

所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)>0$.又因为 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，

所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{3}}{14}\right)^2}=\frac{13}{14}$,

所以 $\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{13}{14}\times\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{14}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{7}$,

则 $\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

因为 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$,所以 $\sin(\alpha+\beta)>0$.

又因为 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$,所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\left(-\frac{11}{14}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

所以 $\sin\beta=\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha=\frac{5\sqrt{3}}{14}\times\frac{1}{7}-\left(-\frac{11}{14}\right)\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\beta=\frac{\pi}{3}$.

**【探究总结】**

**给值求角问题的关注点**

(1)解题步骤:

①求角的某个三角函数值;

②确定角的范围(范围过大或过小,会使求出的角不合题意或漏解),根据范围找出角.

(2)选取三角函数的原则:

①已知正切函数值,选正切函数.

②已知正弦或余弦函数值,选正弦或余弦函数.若角的范围是$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,选正弦或余弦函数均可;若角的范围是$(0,\pi)$,选余弦函数较好;若角的范围是$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,选正弦函数较好.

**应用迁移**

已知 $\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sqrt{10}}{10}$,且 $\alpha-\frac{\beta}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\beta-\frac{\alpha}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,求$\frac{\alpha+\beta}{2}$的值.

**解**:因为 $\alpha-\frac{\beta}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\beta-\frac{\alpha}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $0<\frac{\alpha+\beta}{2}<\pi$.

又因为 $\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sqrt{10}}{10}$,

所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$\cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

所以 $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)+\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$

$=\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)$

$=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{4}$.

# 课后素养评价(五十二)

## 基础落实

**1.**(2024·全国甲卷)已知$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$,则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$　(　　)

A.$2\sqrt{3}+1$　　B.$2\sqrt{3}-1$

C.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D.$1-\sqrt{3}$

B　**解析**:因为$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$,所以$\frac{1}{1-\tan\alpha}=\sqrt{3}$,解得 $\tan\alpha=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=2\sqrt{3}-1$.故选 B.

**2.**若 $\tan\alpha=4$,$\tan(\alpha-\beta)=\frac{1}{13}$,则 $\tan\beta=$　(　　)

A.$\frac{1}{3}$　　B.3

C.5　　D.$\frac{1}{5}$

B　**解析**:因为 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$,所以$\frac{4-\tan\beta}{1+4\tan\beta}=\frac{1}{13}$,解得 $\tan\beta=3$.

**3.**已知 $\sin\theta+\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=1$,则 $\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)=$　(　　)

A.$-\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B.$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

C.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D.$\frac{\sqrt{6}}{3}$

B　**解析**:因为 $\sin\theta+\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\theta+\frac{1}{2}\sin\theta$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\frac{3}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\sqrt{3}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=1$，

所以 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 $\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi+\theta-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

**4.**(2024·新高考全国Ⅰ卷)已知 $\cos(\alpha+\beta)=m$，$\tan\alpha\tan\beta=2$，则 $\cos(\alpha-\beta)=$　　(　　)

A.$-3m$　　B.$-\frac{m}{3}$

C.$\frac{m}{3}$　　D.$3m$

A　**解析**：因为 $\cos(\alpha+\beta)=m$，所以 $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta=m$，

而 $\tan\alpha\tan\beta=2$，所以 $\sin\alpha\sin\beta=2\cos\alpha\cos\beta$，

故 $\cos\alpha\cos\beta-2\cos\alpha\cos\beta=m$，即 $\cos\alpha\cos\beta=-m$，

从而 $\sin\alpha\sin\beta=-2m$，故 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-m-2m=-3m$.故选 A.

**5.**已知 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$，则 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)$ 的值为 2.

**6.**在△$ABC$ 中，若 $\tan A\tan B=\tan A+\tan B+1$，则 $\cos C$ 的值是_____.

$\frac{\sqrt{2}}{2}$　**解析**：由 $\tan A\tan B=\tan A+\tan B+1$，得 $\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-1$，即 $\tan(A+B)=-1$.

又 $A+B\in(0,\pi)$，所以 $A+B=\frac{3\pi}{4}$，则 $C=\frac{\pi}{4}$，

所以 $\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

## 能力提升

**1.**已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin\alpha\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{5}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，则 $\tan(\alpha+\beta)=$　　(　　)

A.7　　B.$\frac{1}{7}$

C.$-\frac{1}{7}$　　D.$-7$

D　**解析**：由 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，又因为 $\sin\alpha\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{5}$，所以 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{7\sqrt{2}}{10}-\frac{2\sqrt{2}}{5}=\frac{3\sqrt{2}}{10}$，则 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{3\sqrt{2}}{10}-\frac{2\sqrt{2}}{5}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$.又因为 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，可得 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$.由 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{2}}{10}<0$，可知 $\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，即 $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，所以 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\frac{7\sqrt{2}}{10}}{-\frac{\sqrt{2}}{10}}=-7$.故选 D.

**2.**已知 $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，则 $\alpha-\beta=$　　(　　)

A.$\frac{\pi}{4}$　　B.$\frac{3\pi}{4}$

C.$\frac{5\pi}{4}$　　D.$\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$

C　**解析**：因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

因为 $\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，所以 $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

故 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}-\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\times\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又因为 $\alpha-\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha-\beta=\frac{5\pi}{4}$.

**3.**已知 $\tan(\alpha+\beta)=3$，$\tan(\alpha-\beta)=5$，则 $4\tan\alpha+\tan\beta=$　　(　　)

A.13　　B.14

C.15　　D.16

C　**解析**：因为 $\tan(\alpha+\beta)=3$，$\tan(\alpha-\beta)=5$，

所以 $\begin{cases}\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=3,\\ \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=5,\end{cases}$

化简得 $\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta=3(1-\tan\alpha\tan\beta)①,\\ \tan\alpha-\tan\beta=5(1+\tan\alpha\tan\beta)②.\end{cases}$

①+②得 $\tan\alpha=4+\tan\alpha\tan\beta$，①−②得 $\tan\beta=-1-4\tan\alpha\tan\beta$.

所以 $4\tan\alpha+\tan\beta=16-1=15$.

## 自我超越

（多选）已知 $\alpha,\beta$ 为锐角，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$，$\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{4}$，则　　（　　）

A.$\sin\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}$　　B.$\cos(\alpha-\beta)=1$

C.$\tan\alpha+\tan\beta=4$　　D.$\sin\alpha\cos\beta=\frac{2}{5}$

BD　**解析**：对于 A，因为 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，$\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{4}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$，所以 $\frac{3}{5}=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=4\sin\alpha\sin\beta-\sin\alpha\sin\beta=3\sin\alpha\sin\beta$，解得 $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{5}$，$\cos\alpha\cos\beta=\frac{4}{5}$，故 A 错误；

对于 B，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=1$，故 B 正确；

对于 C，因为 $\alpha,\beta$ 为锐角，所以 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$，

又因为 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}>0$，所以 $\alpha+\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$，

$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=1$，故 C 错误；

对于 D，因为 $\alpha,\beta$ 为锐角，所以 $\alpha-\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，

又因为 $\cos(\alpha-\beta)=1$，所以只能 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=0$①，

又 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}$②，①＋②解得 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{2}{5}$，故 D 正确.

# 第 3 课时　二倍角的正弦、余弦、正切公式

**学习任务目标**

1.会推导二倍角的正弦、余弦、正切公式.
2.能够灵活运用二倍角公式解决求值、化简和证明等问题.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　倍角公式**

(1)$S_{2\alpha}$：$\sin 2\alpha=$ <u>$2\sin\alpha\cos\alpha$</u>；

(2)$C_{2\alpha}$：$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=$ <u>$1-2\sin^2\alpha$</u>；

(3)$T_{2\alpha}$：$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

**知识点二　倍角公式常用变形**

(1)$\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}=$ <u>$\cos\alpha$</u>，$\frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}=$ <u>$\sin\alpha$</u>；

(2)$(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=$ <u>$1\pm\sin 2\alpha$</u>；

(3)$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$，$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

### 【概念辨析】

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.　　（√）

(2)$\cos 4\alpha=\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha$.　　（√）

(3)对任意角 $\alpha$，$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.　　（×）

2.求值：$\frac{1}{2}-\cos^2\frac{\pi}{8}=$ <u>$-\frac{\sqrt{2}}{4}$</u>.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务 1　运用二倍角公式求值

（教材 P223 练习题 5 改编）化简、求值：

(1)$\cos^4\frac{\alpha}{2}-\sin^4\frac{\alpha}{2}$；

(2)$\sin\frac{\pi}{24}\cdot\cos\frac{\pi}{24}\cdot\cos\frac{\pi}{12}$；

(3)$1-2\sin^2 750°$；

(4)$\tan 150°+\frac{1-3\tan^2 150°}{2\tan 150°}$.

**解**：(1)原式$=\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\alpha$.

(2)原式$=\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{12}$

$=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}$

$=\frac{1}{4}\left(2\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{8}$.

(3)原式$=\cos(2\times750^\circ)=\cos1500^\circ$

$=\cos(4\times360^\circ+60^\circ)=\cos60^\circ=\frac{1}{2}$.

(4)原式$=\frac{2\tan^2150^\circ+1-3\tan^2150^\circ}{2\tan150^\circ}$

$=\frac{1-\tan^2150^\circ}{2\tan150^\circ}=\frac{1}{\tan(2\times150^\circ)}$

$=\frac{1}{\tan300^\circ}=\frac{1}{\tan(360^\circ-60^\circ)}=-\frac{1}{\tan60^\circ}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

**【探究总结】**

**运用二倍角公式求三角函数式的值的方法**

(1)注意观察式子的结构特点及角之间是否存在特殊的倍数关系，灵活正用或逆用二倍角公式.

(2)结合诱导公式恰当变化函数名称，灵活处理系数，构造二倍角公式的形式.

(3)切弦同时存在时，应注意用$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$“切化弦”.

(4)注意$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin2\alpha$，$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha)$，$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$的应用.

## 任务2 利用角的变换求值

### 探究活动

**例1**　(1)已知$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$，则$\sin2\theta$的值为_____.

(2)已知$\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{5}{13}$，$0<x<\frac{\pi}{4}$，求$\frac{\cos2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$的值.

(1)$-\frac{7}{9}$　**解析**：$\sin2\theta=-\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)$

$=-\left[1-2\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]=2\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-1=-\frac{7}{9}$.

(2)**解**：因为$0<x<\frac{\pi}{4}$，$\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{5}{13}$，所以$\frac{\pi}{4}-x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{12}{13}$.

利用诱导公式，得$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{12}{13}$.

所以原式$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$

$=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{24}{13}$.

[一题多思]

**思考1.**本例(1)中，若已知$\tan\theta=\frac{3}{4}$，如何求$\sin2\theta$的值？

**提示**：$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{2\tan\theta}{\tan^2\theta+1}$

$=\frac{24}{25}$.

**思考2.**若本例(2)的条件不变，则$\frac{\sin2x}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$的值是多少？

**提示**：$\sin2x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

$=1-2\times\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{119}{169}$.

因为$x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，所以$\frac{\pi}{4}-x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

又因为$\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{5}{13}$，所以$\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{12}{13}$，

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{12}{13}$，所以原式$=\frac{\frac{119}{169}}{\frac{12}{13}}=\frac{119}{156}$.

**思考3.**若本例(2)条件变为“$\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{3}{4}$”，其他条件不变，结果如何？

**提示**：因为$0<x<\frac{\pi}{4}$，所以$0<\frac{\pi}{4}-x<\frac{\pi}{4}$.

由$\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{3}{4}$，

得$\frac{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{3}{4}$，故$\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{4}{5}$，

$\frac{\cos2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]}=$

$\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{8}{5}$.

**【探究总结】**

(1)已知$\alpha$的某个三角函数值，求$2\alpha$的三角函数值，应先根据$\alpha$的范围，求出$\alpha$的其他三角函数值，再根据二倍角公式求$2\alpha$的三角函数值.

(2)若已知$\alpha$与一个确定的角$\left(\text{如}\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{12}\text{等}\right)$的和或

差的三角函数值，求 $2\alpha$ 与一个确定角的和或差的三角函数值，应分析已知角与待求角之间的关系，根据式子特点，构造出二倍角的形式后，整体代入求解.

(3)由于 $\frac{\pi}{4}-\alpha$ 与 $\frac{\pi}{4}+\alpha$ 互余，因此与 $\frac{\pi}{4}-\alpha$ 和 $\frac{\pi}{4}+\alpha$ 有关的三角函数求值问题，可先用诱导公式进行化简，再结合二倍角公式求解.

### 应用迁移

已知 $\tan\alpha=2\tan\beta$，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{3}{4}$，求 $\cos(2\alpha-2\beta)$ 的值.

**解**：由 $\tan\alpha=2\tan\beta$ 可得 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\sin\beta}{\cos\beta}$，即 $\sin\alpha\cos\beta=2\cos\alpha\sin\beta$，

由题意可得

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=2\cos\alpha\sin\beta,\\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{3}{4},\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2},\\ \cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{4},\end{cases}$

所以 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

因此 $\cos(2\alpha-2\beta)=1-2\sin^2(\alpha-\beta)=1-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{7}{8}$.

## 任务3 利用二倍角公式化简、证明

### 探究活动

**例2**　化简：

(1) $\frac{1}{1-\tan\theta}-\frac{1}{1+\tan\theta}$；

(2) $\frac{\sin 2\theta}{(\sin\theta+\cos\theta-1)(\sin\theta-\cos\theta+1)}$.

**解**：(1)原式 $=\frac{1+\tan\theta-(1-\tan\theta)}{(1-\tan\theta)(1+\tan\theta)}=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\tan 2\theta$.

(2)原式 $=$

$$\frac{\sin 2\theta}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin 2\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{\sin 2\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta}$$

$$=\frac{4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}.$$

**例3**　证明：

$$\frac{1+\sin 4\theta-\cos 4\theta}{2\tan\theta}=\frac{1+\sin 4\theta+\cos 4\theta}{1-\tan^2\theta}.$$

**证明**：原式等价于 $1+\sin 4\theta-\cos 4\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\cdot(1+\sin 4\theta+\cos 4\theta)$，

即 $1+\sin 4\theta-\cos 4\theta=\tan 2\theta(1+\sin 4\theta+\cos 4\theta)$①.

而①式右边 $=\tan 2\theta(1+\cos 4\theta+\sin 4\theta)$

$$=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}(2\cos^2 2\theta+2\sin 2\theta\cos 2\theta)$$

$=\sin 4\theta+1-\cos 4\theta=$左边，

所以①式成立，原式得证.

### 【探究总结】

**1.化简问题的解题策略**

(1)着手点：从“幂”的差异、“名”的差异、“角”的差异这三个方面，结合“形”的特征入手解决.

(2)化简方法：①弦切互化，异名化同名，异角化同角；②降幂或升幂；③利用重要结论：$(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=1\pm\sin 2\theta$.

**2.证明三角恒等式的方法**

(1)从复杂的一边入手，证明其等于另一边；(2)比较法：左边－右边$=0$，$\frac{\text{左边}}{\text{右边}}=1$；(3)分析法：从要证明的等式出发，一步步寻找等式成立的条件.

### 应用迁移

**1.**证明：$\frac{1+\sin\alpha-\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha+\sin\alpha}{1-\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$.

**证明**：原式左端 $=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}+\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}+\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2}{\sin\alpha}=\text{右端},$$

所以原等式成立.

**2.**某同学在一次研究性学习中发现，以下五个式子的值都等于同一个常数：

①$\sin^2 13^\circ+\cos^2 17^\circ-\sin 13^\circ\cos 17^\circ$；

②$\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ-\sin 15^\circ\cos 15^\circ$；

③$\sin^2 18^\circ+\cos^2 12^\circ-\sin 18^\circ\cos 12^\circ$；

④$\sin^2(-18°)+\cos^2 48°-\sin(-18°)\cos 48°$；

⑤$\sin^2(-25°)+\cos^2 55°-\sin(-25°)\cos 55°$.

(1)请根据②式，求出这个常数；

(2)根据(1)的计算结果，将该同学的发现推广为三角恒等式，并证明你的结论.

**解**：(1)$\sin^2 15°+\cos^2 15°-\sin 15°\cos 15°$

$=1-\frac{1}{2}\sin 30°=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

(2)三角恒等式为 $\sin^2\alpha+\cos^2(30°-\alpha)-\sin\alpha\cos(30°-\alpha)=\frac{3}{4}$.

(方法一)$\sin^2\alpha+\cos^2(30°-\alpha)-\sin\alpha\cos(30°-\alpha)$

$=\sin^2\alpha+(\cos 30°\cos\alpha+\sin 30°\sin\alpha)^2-\sin\alpha(\cos 30°\cos\alpha+\sin 30°\sin\alpha)$

$=\sin^2\alpha+\frac{3}{4}\cos^2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{4}\sin^2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\alpha$

$=\frac{3}{4}\sin^2\alpha+\frac{3}{4}\cos^2\alpha=\frac{3}{4}$.

(方法二)$\sin^2\alpha+\cos^2(30°-\alpha)-\sin\alpha\cos(30°-\alpha)$

$=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1+\cos(60°-2\alpha)}{2}-\sin\alpha(\cos 30°\cos\alpha+\sin 30°\sin\alpha)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\cos 60°\cos 2\alpha+\sin 60°\cdot\sin 2\alpha)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\alpha=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\alpha-\frac{1}{4}(1-\cos 2\alpha)$

$=1-\frac{1}{4}\cos 2\alpha-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 2\alpha=\frac{3}{4}$.

# 课后素养评价(五十三)

## 基础落实

**1.**已知 $0<\alpha<\pi$，$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos\alpha=$　　(　　)

A.$\frac{4}{9}$　　B.$-\frac{4}{9}$

C.$\frac{1}{3}$　　D.$-\frac{1}{3}$

D　**解析**：由二倍角公式得 $\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-1=-\frac{1}{3}$.

**2.**已知 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$，则 $\sin 2\alpha$ 的值为　　(　　)

A.$\frac{7}{8}$　　B.$-\frac{7}{8}$

C.$\frac{3}{4}$　　D.$-\frac{3}{4}$

A　**解析**：因为 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha=\frac{1}{4}$，所以 $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$，所以 $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1-\sin 2\alpha=\frac{1}{8}$，所以 $\sin 2\alpha=\frac{7}{8}$.

**3.**设 $\sin 2\alpha=-\sin\alpha$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $\tan 2\alpha$ 的值是_____.

$\sqrt{3}$　**解析**：因为 $\sin 2\alpha=-\sin\alpha$，所以 $2\sin\alpha\cos\alpha=-\sin\alpha$.由 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 知 $\sin\alpha\neq 0$，所以 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，所以 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$，所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\alpha=-\sqrt{3}$，所以 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times(-\sqrt{3})}{1-(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{3}$.

**4.**已知等腰三角形底角的正弦值为 $\frac{4}{5}$，则顶角的余弦值是_____.

$\frac{7}{25}$　**解析**：设等腰三角形的底角为 $\alpha$，则顶角为 $\pi-2\alpha$.所以 $\cos(\pi-2\alpha)=-\cos 2\alpha=-(1-2\sin^2\alpha)=2\sin^2\alpha-1=2\times\left(\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{7}{25}$.

**5.**已知 $\tan\alpha=2$，则 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$_____.

$\frac{\sqrt{2}}{10}$　**解析**：由题意 $\sin 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{1}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{4}{5}$，

$\cos 2\alpha=\frac{\cos 2\alpha}{1}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{3}{5}$，

所以 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

## 能力提升

**1.**(2025·全国Ⅱ卷)已知 $0<\alpha<\pi$,$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,则 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$ (　　)

A.$\frac{\sqrt{2}}{10}$　　B.$\frac{\sqrt{2}}{5}$　　C.$\frac{3\sqrt{2}}{10}$　　D.$\frac{7\sqrt{2}}{10}$

D　**解析**:$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=2\times\frac{1}{5}-1=-\frac{3}{5}$,因为 $0<\alpha<\pi$,所以 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$,所以 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{7}{5}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

**2.**黄金分割比是指将整体一分为二,较大部分与整体部分的比值等于较小部分与较大部分的比值,该比值约为 0.618,这一比值也可以表示为 $a=2\cos72°$,则 $\frac{1-2\sin^227°}{a\sqrt{4-a^2}}=$ (　　)

A.2　　B.1　　C.$\frac{1}{2}$　　D.$\frac{1}{4}$

C　**解析**:$\frac{1-2\sin^227°}{a\sqrt{4-a^2}}=\frac{\cos54°}{2\cos72°\sqrt{4-4\cos^272°}}=\frac{\cos54°}{2\cos72°\sqrt{4\sin^272°}}=\frac{\cos54°}{4\cos72°\sin72°}=\frac{\cos54°}{2\sin144°}=\frac{\sin36°}{2\sin36°}=\frac{1}{2}$.

**3.**已知 $\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$,则 $\sin\left(2\varphi+\frac{5\pi}{6}\right)=$ (　　)

A.$\frac{9}{25}$　　B.$\frac{7}{25}$　　C.$-\frac{9}{25}$　　D.$-\frac{7}{25}$

D　**解析**:由 $\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$知,

$\cos\left(2\varphi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[2\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)\right]=2\cos^2\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)-1=-\frac{7}{25}$,

所以 $\sin\left(2\varphi+\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}+\left(2\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\cos\left(2\varphi+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{7}{25}$.

**4.**若 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,且 $\tan(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$,$\tan\beta=\frac{1}{7}$,求 $2\alpha-\beta$ 的值.

**解**:因为 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $-\pi<\alpha-\beta<0$.

又因为 $\tan(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}>-1$,

所以 $-\frac{\pi}{4}<\alpha-\beta<0$.

由二倍角正切公式可得 $\tan[2(\alpha-\beta)]=\frac{2\tan(\alpha-\beta)}{1-\tan^2(\alpha-\beta)}=\frac{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{4}{3}$,

所以 $\tan(2\alpha-\beta)=\tan[2(\alpha-\beta)+\beta]=\frac{\tan2(\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan2(\alpha-\beta)\cdot\tan\beta}=\frac{-\frac{4}{3}+\frac{1}{7}}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)\times\frac{1}{7}}=-1$.

因为 $-\frac{\pi}{4}<\alpha-\beta<0$,$0<\beta<\frac{\pi}{2}$,所以 $-\frac{\pi}{2}<2(\alpha-\beta)+\beta<\frac{\pi}{2}$,即 $-\frac{\pi}{2}<2\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$,

因此 $2\alpha-\beta=-\frac{\pi}{4}$.

## 自我超越

在△$ABC$ 中,$\sin A\cos A=\sin B\cos B$,且 $A\neq B$.

(1)求证:$A+B=\frac{\pi}{2}$;

(2)求 $\sin A+\sin B$ 的取值范围;

(3)若$(\sin A\sin B)x=\sin A+\sin B$,试确定实数 $x$ 的取值范围.

(1)**证明**:因为 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$,

所以 $\sin2A=\sin2B$,

得 $2A=2B$ 或 $2A+2B=\pi$,

化简可得 $A=B$,或 $A+B=\frac{\pi}{2}$,

但 $A\neq B$,所以 $A+B=\frac{\pi}{2}$.

(2)**解**:由(1)可知 $A+B=\frac{\pi}{2}$,故 $\sin A+\sin B=\sin A+\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\sin A+\cos A=\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$,

因为 $0<A<\frac{\pi}{2}$,所以 $\frac{\pi}{4}<A+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$,

所以 $1<\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$,

故 $\sin A+\sin B$ 的取值范围是$(1,\sqrt{2}]$.

(3)**解**:由题意可知 $x=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A\sin B}=\frac{\sin A+\cos A}{\sin A\cos A}$,

设 $\sin A+\cos A=t\in(1,\sqrt{2}]$,

则 $t^2=1+2\sin A\cos A$,故 $\sin A\cos A=\frac{t^2-1}{2}$,代入得 $x=\frac{t}{\frac{t^2-1}{2}}=\frac{2t}{t^2-1}=\frac{2}{t-\frac{1}{t}}\geqslant\frac{2}{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}}=2\sqrt{2}$,

故实数 $x$ 的取值范围为$[2\sqrt{2},+\infty)$.

# 5.5.2　简单的三角恒等变换

## 第1课时　半角公式及其应用

**学习任务目标**

1.能通过二倍角公式推导出半角的正弦、余弦、正切公式.
2.能利用三角恒等变换对三角函数式进行化简、求值及证明.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　降幂公式**

$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$，$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$，

$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

**知识点二　半角公式**

$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$，$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$，

$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

### 【概念辨析】

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)$\sin 15^\circ=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}$.　（×）

(2)对于$\forall\alpha\in\mathbf{R}$，$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sin\alpha$都不成立.　（×）

(3)存在$\alpha\in\mathbf{R}$，使得$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\cos\alpha$.　（√）

(4)若$5\pi<\theta<6\pi$，$\cos\frac{\theta}{2}=a$，则$\cos\frac{\theta}{4}=\sqrt{\frac{1+a}{2}}$.　（×）

2.已知$2\pi<\theta<4\pi$，且$\sin\theta=-\frac{3}{5}$，$\cos\theta<0$，则$\tan\frac{\theta}{2}$的值为　（　）

A.$-3$　　B.3

C.$-\frac{1}{3}$　　D.$\frac{1}{3}$

A　**解析**：由题意知$\theta$为第三象限角，所以$\cos\theta=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}$，所以$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{-\frac{3}{5}}{1-\frac{4}{5}}=-3$.故选A.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1　利用半角公式求值

1.（教材P226练习题2改编）已知$\cos\alpha=\frac{7}{9}$，$\alpha\in(\pi,2\pi)$，则$\cos\frac{\alpha}{2}=$　（　）

A.$\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　B.$-\frac{1}{3}$　　C.$\frac{1}{3}$　　D.$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

D　**解析**：$\alpha\in(\pi,2\pi)$，故$\frac{\alpha}{2}\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，故$\cos\frac{\alpha}{2}<0$，所以$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{7}{9}}{2}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2.已知$\alpha$为钝角，$\beta$为锐角，且$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\sin\beta=\frac{12}{13}$，求$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$的值.

**解**：因为$\alpha$为钝角，$\beta$为锐角，且$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\sin\beta=\frac{12}{13}$，

所以$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，$\cos\beta=\frac{5}{13}$，

所以$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}+\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}=\frac{33}{65}$.

又因为$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，所以$0<\alpha-\beta<\pi$，

所以$0<\frac{\alpha-\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$，所以$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha-\beta)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{33}{65}}{2}}=\frac{7\sqrt{65}}{65}$.

【探究总结】

利用半角公式求值的思路

(1)观察角:已知三角函数式中的角是待求三角函数式中角的两倍.

(2)明范围:依据已知角的范围,确定相应半角的范围.

(3)选公式:涉及半角公式的正切值时,常用 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$,其优点是计算时可避免因开方带来的求角的范围问题;涉及半角公式的正、余弦值时,常利用 $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$,$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$ 计算.

## 任务2 利用半角公式化简三角函数式

### 探究活动

**例1**　已知 $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$,若 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,则 $f(\cos\alpha)+f(-\cos\alpha)=$　　(　　)

A. $\frac{1}{\sin\alpha}$　　B. $-\frac{1}{\sin\alpha}$

C. $-\frac{2}{\sin\alpha}$　　D. $\frac{2}{\sin\alpha}$

D　**解析:**因为 $\frac{\alpha}{2}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $f(\cos\alpha)+f(-\cos\alpha)=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\left|\tan\frac{\alpha}{2}\right|+\frac{1}{\left|\tan\frac{\alpha}{2}\right|}=\tan\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}+\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2}{\sin\alpha}$.

【探究总结】

化简三角函数式的方法

(1)统一角的形式,利用待化简式子中的角之间的差别与联系,将角进行合理的拆分与变形,涉及同一个角时,应正确利用角之间的“倍数”关系统一角.

(2)含根式的三角函数式的化简,常用二倍角公式去根号,如 $\sqrt{1+\sin\alpha}=\sqrt{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right|$,$\sqrt{1+\cos\alpha}=\sqrt{2}\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$,$\sqrt{1-\cos\alpha}=\sqrt{2}\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$ 等.

### 应用迁移

**1.**化简:$\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=$　　(　　)

A.$\sin\alpha$　　B.$\cos\alpha$

C.$\tan\alpha$　　D.$-\sin\alpha$

C　**解析:**$\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+(2\cos^2\alpha-1)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$.

**2.**化简:$\frac{(1-\sin\alpha-\cos\alpha)\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2-2\cos\alpha}}(-\pi<\alpha<0)$.

**解:**原式$=\frac{\left(2\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2\times 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$

$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$

$=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$

$=\frac{-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}$.

因为 $-\pi<\alpha<0$,所以 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<0$,所以 $\sin\frac{\alpha}{2}<0$,

所以原式$=\frac{-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{-\sin\frac{\alpha}{2}}=\cos\alpha$.

## 任务3 利用半角公式证明三角恒等式

### 探究活动

**例2**　求证:$\tan\frac{3x}{2}-\tan\frac{x}{2}=\frac{2\sin x}{\cos x+\cos 2x}$.

**证明:**左边$=\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}}-\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$

$=\frac{\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$=\frac{\sin x}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin x}{\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}\right)}$

$=\frac{2\sin x}{\cos 2x+\cos x}=$右边.

所以原等式成立.

[一题多思]

**思考1.** 你知道证明三角恒等式的常用方法有哪些吗？

**提示：**(1)执因索果法：证明的形式一般是化繁为简.

(2)左右归一法：证明左右两边都等于同一个式子.

(3)比较法：设法证明“左边－右边＝0”或“$\frac{\text{左边}}{\text{右边}}=1$”.

(4)分析法：从被证明的等式出发，逐步地探求使等式成立的条件，直到已知条件或明显的事实为止，就可以断定原等式成立.

**思考2.** $\frac{\sin 4x}{1+\cos 4x}\cdot\frac{\cos 2x}{1+\cos 2x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x}=\tan\frac{x}{2}$ 成立吗？

**提示：**成立. $\frac{\sin 4x}{1+\cos 4x}\cdot\frac{\cos 2x}{1+\cos 2x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x}=\frac{2\sin 2x\cos 2x}{2\cos^2 2x}\cdot\frac{\cos 2x}{1+\cos 2x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x}=\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x}=\frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}$.

**思考3.** $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}}=\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$ 成立吗？

**提示：**成立. $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\beta}{2}\right)+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\beta}{2}\right)-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$.

## 应用迁移

**1.** 证明：$\frac{1+\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha}}+\frac{1-\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}}=-\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$，$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

**证明：**因为 $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，

所以 $\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}$，

所以 $\cos\frac{\alpha}{2}<0$，$\sin\frac{\alpha}{2}>0$，

所以原式$=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}-\sqrt{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}+\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\sqrt{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$

$=\frac{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{-\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{-\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)$

$=-\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.

**2.** 证明：$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$.

**证明：**$\cos 3\theta=\cos(2\theta+\theta)$

$=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta$

$=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta$

$=4\cos^3\theta-3\cos\theta$.

# 课后素养评价（五十四）

## 基础落实

**1.**（2023·新高考全国Ⅱ卷）已知 $\alpha$ 为锐角，$\cos\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$，则 $\sin\frac{\alpha}{2}=$（　　）

A. $\frac{3-\sqrt{5}}{8}$　　B. $\frac{-1+\sqrt{5}}{8}$

C. $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$　　D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

D　**解析：**因为 $\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$，而 $\alpha$ 为锐角，解得 $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.故选D.

**2.** 已知 $\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{7}{25}$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)=$（　　）

A.$-\frac{3}{5}$　B.$\frac{3}{5}$　C.$\frac{4}{5}$　D.$-\frac{4}{5}$

B　**解析**：因为 $\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)-1=-\frac{7}{25}$，所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)=\pm\frac{3}{5}$.

又 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3}{5}$.

**3.**若△$ABC$ 中，$\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2C$，则此三角形的形状是　(　　)

A.直角三角形　B.等腰三角形

C.等边三角形　D.等腰直角三角形

A　**解析**：因为△$ABC$ 中，$\sin(A+B)=\sin C$，

所以已知等式变形得：$\sin C\sin(A-B)=\sin^2C$.

因为 $0<C<\pi$，$\sin C>0$，

所以 $\sin(A-B)=\sin C=\sin(A+B)$，

整理得 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，即 $2\cos A\sin B=0$，

所以 $\cos A=0$ 或 $\sin B=0$(不合题意，舍去).

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{2}$，

则此三角形为直角三角形.

**4.**若 $\theta$ 是第二象限角，且 $25\sin^2\theta+\sin\theta-24=0$，则 $\cos\frac{\theta}{2}=$_____.

$\pm\frac{3}{5}$　**解析**：由 $25\sin^2\theta+\sin\theta-24=0$，且 $\theta$ 是第二象限角，

得 $\sin\theta=\frac{24}{25}$ 或 $\sin\theta=-1$(舍去)，故 $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\frac{7}{25}$.

由 $\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}$，得 $\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{9}{25}$.又 $\frac{\theta}{2}$ 是第一或第三象限角，所以 $\cos\frac{\theta}{2}=\pm\frac{3}{5}$.

**5.**求证：$\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}+\frac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}=\frac{2}{\sin\theta}$.

**证明**：(方法一)左边$=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}+\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$

$=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}+\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{2}{\sin\theta}=$右边，

所以原等式成立.

(方法二)左边$=\frac{(1+\sin\theta-\cos\theta)^2+(1+\sin\theta+\cos\theta)^2}{(1+\sin\theta+\cos\theta)(1+\sin\theta-\cos\theta)}$

$=\frac{2(1+\sin\theta)^2+2\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2-\cos^2\theta}=\frac{4+4\sin\theta}{2\sin\theta+2\sin^2\theta}$

$=\frac{2}{\sin\theta}=$右边，

所以原等式成立.

## 能力提升

**1.**已知 $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{3\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin\alpha-3}{\sin\alpha}$，则 $\cos2\alpha$ 的值为　(　　)

A.$\frac{1}{5}$　B.$\frac{5}{13}$　C.$\frac{1}{3}$　D.$\frac{4}{5}$

B　**解析**：由 $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{3\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin\alpha-3}{\sin\alpha}$，

得 $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{3\cos\alpha+\sin\alpha-3}{\sin\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-6\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=1-3\tan\frac{\alpha}{2}$，

则 $\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2}{3}$，所以 $\cos2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{5}{13}$.

**2.**(多选)已知 $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2\cos\theta}+1$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\theta$ 的值可以为　(　　)

A.$\frac{\pi}{18}$　B.$\frac{\pi}{12}$　C.$\frac{\pi}{6}$　D.$\frac{\pi}{3}$

AC　**解析**：由 $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2\cos\theta}+1$，得 $2\sin\theta\cos\theta+2\sqrt{3}\cos^2\theta=\sqrt{3}+2\cos\theta$，即 $\sin2\theta+\sqrt{3}(2\cos^2\theta-1)=2\cos\theta$，故 $\sin2\theta+\sqrt{3}\cos2\theta=2\cos\theta$.由辅助角公式得 $2\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\theta$，即 $\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\theta$.因为 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $2\theta-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，

故 $2\theta-\frac{\pi}{6}=\theta$ 或 $2\theta-\frac{\pi}{6}+\theta=0$，解得 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 或 $\theta=\frac{\pi}{18}$.

**3.** 若 $\tan\frac{\theta}{2}=2$，则 $\sin 2\theta+\cos 2\theta=$_____.

$-\frac{31}{25}$　**解析：** $\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{4}{1-4}=-\frac{4}{3}$，

则 $\sin 2\theta+\cos 2\theta=2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$=\frac{2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

$=\frac{2\tan\theta+1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{-\frac{8}{3}+1-\frac{16}{9}}{1+\frac{16}{9}}=-\frac{31}{25}$.

**4.** 已知 $A$，$B$ 均为钝角，$\sin B=\frac{\sqrt{10}}{10}$，且 $\sin^2\frac{A}{2}+\cos\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5-\sqrt{15}}{10}$，则 $A+B=$_____.

$\frac{7\pi}{4}$　**解析：** $\sin^2\frac{A}{2}+\cos\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1-\cos A}{2}+\left(\frac{1}{2}\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)$，

即 $\frac{1-\sqrt{3}\sin A}{2}=\frac{5-\sqrt{15}}{10}$，得 $\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$. 由 $\sin B=\frac{\sqrt{10}}{10}$，且 $A$，$B$ 均为钝角，

所以 $\cos A=-\sqrt{1-\sin^2 A}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos B=-\sqrt{1-\sin^2 B}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

所以 $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\times\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

由 $\frac{\pi}{2}<A<\pi$，$\frac{\pi}{2}<B<\pi$，所以 $\pi<A+B<2\pi$，所以 $A+B=\frac{7\pi}{4}$.

## 自我超越

由正弦二倍角公式，我们发现一个有趣的事实：$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$，$\sin 4\alpha=2\sin 2\alpha\cos 2\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\Rightarrow\cos\alpha\cos 2\alpha=\frac{\sin 4\alpha}{4\sin\alpha}$，…，由此可计算 $\cos\frac{\pi}{15}\cdot\cos\frac{2\pi}{15}\cdot\sin\frac{7\pi}{30}\cdot\cos\frac{7\pi}{15}=$　（　）

A. $\frac{1}{8}$　　B. $-\frac{1}{8}$

C. $\frac{1}{16}$　　D. $-\frac{1}{16}$

C　**解析：** 由 $\cos\frac{7\pi}{15}=\cos\left(\pi-\frac{8\pi}{15}\right)=-\cos\frac{8\pi}{15}$，$\sin\frac{7\pi}{30}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{8\pi}{30}\right)=\cos\frac{4\pi}{15}$，得

原式 $=-\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}$，

由 $\sin\frac{16\pi}{15}=16\sin\frac{\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}$，

故原式 $=-\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}=-\frac{\sin\frac{16\pi}{15}}{16\sin\frac{\pi}{15}}=\frac{1}{16}$. 故选 C.

# 第 2 课时　三角恒等变换的综合应用

**学习任务目标**

1. 了解三角恒等变换的特点、变换技巧，掌握三角恒等变换的基本思想方法.
2. 能利用三角恒等变换对三角函数式进行化简、求值以及解决三角恒等式的证明和一些简单的应用问题.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点　辅助角公式**

$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$，其中 $\tan\theta=\frac{b}{a}$.

### 【概念辨析】

**1.**（多选）$\sin x-\cos x=$　（　）

A. $\sqrt{2}\sin(x-45°)$

B. $-\sqrt{2}\cos(x-45°)$

C. $\sqrt{2}\sin(x+45°)$

D. $-\sqrt{2}\cos(x+45°)$

AD　**解析：** $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$

$=-\sqrt{2}(\cos 45^\circ\cos x-\sin 45^\circ\sin x)$

$=-\sqrt{2}\cos(x+45^\circ)$

$=\sqrt{2}\sin(x-45^\circ)$.

**2.** 函数 $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$ 的最小正周期为（　　）

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\pi$　　C. $2\pi$　　D. $4\pi$

B　**解析：** $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$

$=2\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)$

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

因为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\pi$.

故选 B.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务 1 掌握辅助角公式及其应用

**1.** (2024·全国甲卷) 函数 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值是_____.

2　**解析：** $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$,

当 $x\in[0,\pi]$ 时，$x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$,

当 $x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{5\pi}{6}$ 时，$f(x)_{\max}=2$.

**2.** (教材 P230 习题 5.5 题 17 改编) 已知函数 $f(x)=2\sin x(\cos x-\sin x)+1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

(2) 设 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{5}$，求 $\sin\alpha$ 的值.

**解：** (1) $f(x)=2\sin x(\cos x-\sin x)+1$

$=\sin 2x+\cos 2x$

$=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$,

得 $-\frac{3\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{8}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{\pi}{8}+k\pi\right], k\in\mathbf{Z}$.

(2) 因为 $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{5}$,

所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$.

又 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\alpha+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$,

所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{4}{5}$,

所以 $\sin\alpha=\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]$

$=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

[一题多思]

**思考 1.** 辅助角公式的作用是什么？

**提示：** 作用是把三角函数式化为一个角的三角函数，从而可以更方便地研究三角函数的图象和性质.

**思考 2.** 已知 $f(x)=\sin^2 x-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，$x\in\mathbf{R}$，则 $f(x)$ 的最小正周期是多少？你能求出 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值吗？

**提示：** 由已知，得 $f(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$,

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$，所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减，在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，

且 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{4}$，$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$，最小值为 $-\frac{1}{2}$.

**【探究总结】**

研究三角函数的性质，如单调性、最值等，通常先把复杂的三角函数式通过恰当的三角变换，转化为简单的三角函数式，再研究转化后的函数的性质. 在这个过程中，通常利用辅助角公式，将 $y=a\sin x+b\cos x$ 转化为 $y=A\sin(x+\varphi)$ 或 $y=A\cos(x+\varphi)$ 的形式，以便研究函数的性质.

## 任务2 掌握三角函数式的化简、求值、证明

### 探究活动

**例1**　(1)化简：$\dfrac{1+\sin 2\theta-\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta+\cos 2\theta}$；

(2)求值：$\dfrac{\cos 10^\circ(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ)-2\sin 50^\circ}{\sin 5^\circ}$；

(3)证明：$\dfrac{(1+\cos 2\alpha)(2\sin^2\alpha-1)\tan\dfrac{\alpha}{2}}{\tan^2\dfrac{\alpha}{2}-1}=\dfrac{1}{4}\sin 4\alpha$.

(1)**解**：原式$=\dfrac{\sin 2\theta+(1-\cos 2\theta)}{\sin 2\theta+(1+\cos 2\theta)}$

$=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta+2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta}$

$=\dfrac{\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)}{\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)}$

$=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$.

(2)**解**：$\dfrac{\cos 10^\circ(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ)-2\sin 50^\circ}{\sin 5^\circ}$

$=\dfrac{\cos 10^\circ\left(\dfrac{\cos 10^\circ+\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}\right)-2\sin 50^\circ}{\sin 5^\circ}$

$=\dfrac{2\sin(10^\circ+30^\circ)-2\sin 50^\circ}{\sin 5^\circ}=\dfrac{2\sin 40^\circ-2\sin 50^\circ}{\sin 5^\circ}$,

又 $\sin 40^\circ-\sin 50^\circ=\sin(45^\circ-5^\circ)-\sin(45^\circ+5^\circ)$

$=-2\cos 45^\circ\sin 5^\circ=-2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 5^\circ=-\sqrt{2}\sin 5^\circ$,

故$\dfrac{\cos 10^\circ(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ)-2\sin 50^\circ}{\sin 5^\circ}$

$=\dfrac{2\sin 40^\circ-2\sin 50^\circ}{\sin 5^\circ}=\dfrac{-2\sqrt{2}\sin 5^\circ}{\sin 5^\circ}=-2\sqrt{2}$.

(3)**证明**：$\dfrac{(1+\cos 2\alpha)(2\sin^2\alpha-1)\tan\dfrac{\alpha}{2}}{\tan^2\dfrac{\alpha}{2}-1}$

$=2\cos^2\alpha\cdot(-\cos 2\alpha)\cdot\dfrac{\tan\dfrac{\alpha}{2}}{\tan^2\dfrac{\alpha}{2}-1}$

$=\cos^2\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\dfrac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$

$=\cos^2\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\tan\alpha$

$=\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\sin\alpha$

$=\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha=\dfrac{1}{4}\sin 4\alpha$.

所以原式成立.

**【探究总结】**

角的三种变换

(1)配角变换：$\alpha=2\cdot\dfrac{\alpha}{2}$，$\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$，$\alpha=\beta-(\beta-\alpha)$，$\alpha=\dfrac{1}{2}[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]$，$\beta=\dfrac{1}{2}[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]$，$\dfrac{\pi}{4}+\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$等.

(2)辅助角变换：$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$，其中 $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$.

(3)常值代换：$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$，$1=\sin 90^\circ=\tan 45^\circ$，$\dfrac{1}{2}=\sin 30^\circ$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ$等.

### 应用迁移

$\dfrac{\tan 12^\circ-\sqrt{3}}{\sin 6^\circ\sin 84^\circ}+32\cos^2 12^\circ$的值为　(　　)

A.4　　B.8

C.16　　D.32

C　**解析**：原式$=\dfrac{\tan 12^\circ-\tan 60^\circ}{\sin 6^\circ\cos 6^\circ}+16(2\cos^2 12^\circ-1)$

$+16=\dfrac{\dfrac{\sin 12^\circ}{\cos 12^\circ}-\dfrac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}}{\dfrac{1}{2}\sin 12^\circ}+16\cos 24^\circ+16$

$=\dfrac{\sin 12^\circ\cos 60^\circ-\cos 12^\circ\sin 60^\circ}{\dfrac{1}{2}\sin 12^\circ\cos 12^\circ\cos 60^\circ}+16\cos 24^\circ+16$

$=\dfrac{\sin(12^\circ-60^\circ)}{\dfrac{1}{8}\sin 24^\circ}+16\cos 24^\circ+16$

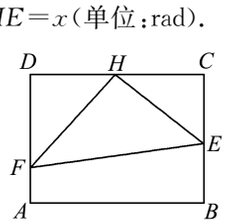
$=\dfrac{-2\sin 24^\circ\cos 24^\circ}{\dfrac{1}{8}\sin 24^\circ}+16\cos 24^\circ+16=16$.

## 任务3 掌握三角恒等变换在实际生活中的应用

### 探究活动

**例2**　某高校教学楼前现有一块矩形草坪 $ABCD$.已知草坪长 $AB=100$ m，宽 $BC=50\sqrt{3}$ m.该高校计划在这块草坪内铺设三条小路 $HE$，$HF$ 和 $EF$，并要求 $H$ 是 $CD$ 的中点，点 $E$ 在边 $BC$ 上，点 $F$ 在边 $AD$ 上，且 $\angle EHF$ 为直角，如图所示.设 $\angle CHE=x$(单位：rad).

(1)试将三条路的总长(即 $\triangle HEF$ 的周长)$L$(单位：m)表示成 $x$ 的函数，并求出此函数的定义域.



(2)铺设这三条路的预算价格为400元/m,如何设计才能使铺路的总费用最低?求出最低总费用.(结果保留整数)

参考数据:$\sqrt{3}\approx1.732$,$\sqrt{2}\approx1.414$.

**解**:(1)在 Rt△$CHE$ 中,因为 $CH=50$,$C=90°$,$\angle CHE=x$,所以 $HE=\dfrac{50}{\cos x}$.

在 Rt△$HDF$ 中,$HD=50$,$D=90°$,$\angle DFH=x$,所以 $HF=\dfrac{50}{\sin x}$.

又$\angle EHF=90°$,所以 $EF=\dfrac{50}{\sin x\cos x}$.

所以三条路的总长(即△$HEF$ 的周长)$L=\dfrac{50(\sin x+\cos x+1)}{\sin x\cos x}$.

当点 $F$ 与点 $A$ 重合时,角 $x$ 最小,求得此时 $x=\dfrac{\pi}{6}$;

当点 $E$ 与点 $B$ 重合时,角 $x$ 最大,求得此时 $x=\dfrac{\pi}{3}$.

故此函数的定义域为$\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$.

(2)由题意知,要求最低铺路总费用,只要求出△$HEF$ 的周长 $L$ 的最小值即可.

由(1)得 $L=\dfrac{50(\sin x+\cos x+1)}{\sin x\cos x}$,$x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$.

设 $\sin x+\cos x=t$,则 $\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$.

所以 $L=\dfrac{50(t+1)}{\frac{t^2-1}{2}}=\dfrac{100}{t-1}$.

由 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$,$x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$,得 $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$.

从而 $\sqrt{2}+1\leqslant\dfrac{1}{t-1}\leqslant\sqrt{3}+1$.

所以当 $x=\dfrac{\pi}{4}$,即 $CE=50$ m 时,$L_{\min}=100(\sqrt{2}+1)$ m.

此时,铺路总费用最低,为 $400\times100(\sqrt{2}+1)\approx96\ 560$(元).

所以,当 $CE=DF=50$ m 时,铺路总费用最低,最低总费用为 96 560 元.

## 【探究总结】

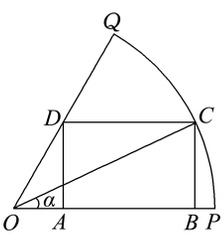
**用三角恒等变换解决实际应用问题的关键**

合理引入辅助角 $\alpha$,确定各量之间的关系,将实际问题转化为三角函数问题.

**注意**:①充分借助平面几何性质,寻找数量关系;②注意实际问题中变量(角 $\alpha$)的范围;③重视三角函数有界性的影响.

## 应用迁移

如图,已知扇形 $OPQ$ 的半径为 2,面积为$\dfrac{2\pi}{3}$,$C$ 是扇形弧上的动点,四边形 $ABCD$ 是扇形的内接矩形(点 $A$,$B$ 在半径 $OP$ 上,点 $D$ 在半径 $OQ$ 上).




(1)求弧$\overset{\frown}{PQ}$的长.

(2)记$\angle POC=\alpha$,当 $\alpha$ 取何值时,矩形 $ABCD$ 的面积最大?并求出这个最大面积.

**解**:(1)由已知得$\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\times\angle QOP\times2^2$,解得$\angle QOP=\dfrac{\pi}{3}$,则弧$\overset{\frown}{PQ}$的长为$\dfrac{\pi}{3}\times2=\dfrac{2\pi}{3}$.

(2)在 Rt△$OBC$ 中,$OB=2\cos\alpha$,$BC=2\sin\alpha$,

在 Rt△$OAD$ 中,$\dfrac{DA}{OA}=\tan60°=\sqrt{3}$,

所以 $OA=\dfrac{\sqrt{3}}{3}DA=\dfrac{\sqrt{3}}{3}BC=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\alpha$,$AB=OB-OA=2\cos\alpha-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\alpha$.

设矩形 $ABCD$ 的面积为 $S$,

则 $S=AB\cdot BC=\left(2\cos\alpha-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\alpha\right)\cdot2\sin\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times2\sin^2\alpha=2\sin2\alpha-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times(1-\cos2\alpha)=2\sin2\alpha+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cos2\alpha-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin2\alpha+\dfrac{1}{2}\cos2\alpha\right)-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

由 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$,得$\dfrac{\pi}{6}<2\alpha+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$,

所以当 $2\alpha+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$,即 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ 时,$S_{\max}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

故当 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ 时,矩形 $ABCD$ 的面积最大,最大面积为$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

# 课后素养评价（五十五）

## 基础落实

**1.** 已知 $\tan 20^\circ+4\sin\theta=\sqrt{3}$，满足条件的 $\theta$ 可以为（　　）

A. $40^\circ$　　B. $50^\circ$

C. $80^\circ$　　D. $160^\circ$

D　**解析：** 由 $\tan 20^\circ+4\sin\theta=\sqrt{3}$，得 $\dfrac{\sin 20^\circ+4\sin\theta\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\sqrt{3}\Rightarrow\sin 20^\circ+4\sin\theta\cos 20^\circ=\sqrt{3}\cos 20^\circ\Rightarrow\sin 20^\circ-\sqrt{3}\cos 20^\circ+4\sin\theta\cos 20^\circ=0\Rightarrow 2\sin(20^\circ-60^\circ)+4\sin\theta\cos 20^\circ=0$，

故 $2\sin 40^\circ=4\sin\theta\cos 20^\circ\Rightarrow\sin\theta=\sin 20^\circ$，

因此 $\theta=k\cdot 360^\circ+20^\circ$ 或 $\theta=k\cdot 360^\circ+160^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$.

则满足条件的 $\theta$ 可以为 $160^\circ$. 故选 D.

**2.** 已知函数 $f(x)=\sin 3x+a\cos 3x$，且 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴，则 $f(x)$ 的最小值为（　　）

A. $-1$　　B. $-\sqrt{2}$

C. $-\sqrt{3}$　　D. $-2$

B　**解析：** $f(x)=\sin 3x+a\cos 3x=\sqrt{1+a^2}\sin(3x+\theta)$，其中 $\tan\theta=a$，又 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴，

所以 $\left|\sin\left(3\times\dfrac{\pi}{12}\right)+a\cos\left(3\times\dfrac{\pi}{12}\right)\right|=\sqrt{1+a^2}$，解得 $a=1$，即 $\tan\theta=1$，可取 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

所以 $f(x)=\sin 3x+\cos 3x=\sqrt{2}\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

所以 $f(x)_{\min}=-\sqrt{2}$. 故选 B.

**3.** $(2\sqrt{3}\cos 20^\circ-\tan 70^\circ)\cos 10^\circ=$（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

C　**解析：** $(2\sqrt{3}\cos 20^\circ-\tan 70^\circ)\cos 10^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{3}\sin 40^\circ-\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}\cdot\cos 10^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{3}\sin(30^\circ+10^\circ)-\cos(30^\circ-10^\circ)}{\sin 20^\circ}\cdot\cos 10^\circ$

$=\dfrac{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{\sin 20^\circ}=\dfrac{1}{2}$.

**4.** 化简：$\dfrac{\cos 10^\circ(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ)}{\cos 70^\circ\sqrt{1+\cos 40^\circ}}=$_____.

$2\sqrt{2}$　**解析：** $\dfrac{\cos 10^\circ(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ)}{\cos 70^\circ\sqrt{1+\cos 40^\circ}}$

$=\dfrac{\cos 10^\circ\left(1+\dfrac{\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}\right)}{\sin 20^\circ\sqrt{2\cos^2 20^\circ}}$

$=\dfrac{\cos 10^\circ+\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sqrt{2}\sin 20^\circ\cos 20^\circ}$

$=\dfrac{2\left(\dfrac{1}{2}\cos 10^\circ+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}$

$=\dfrac{2\sin(30^\circ+10^\circ)}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 40^\circ}=\dfrac{2\sin 40^\circ}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 40^\circ}=2\sqrt{2}$.

**5.** 若 $3\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sqrt{3}\sin(x+\varphi)$，$\varphi\in(-\pi,\pi)$，则 $\varphi=$_____.

$-\dfrac{\pi}{6}$　**解析：** 因为 $3\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}\cos x\right)=2\sqrt{3}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 因为 $\varphi\in(-\pi,\pi)$，所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$.

**6.** 已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x+2\cos^2 x-1$.

(1) 写出 $f(x)$ 的最小正周期；

(2) 求出 $f(x)$ 的单调递增区间；

(3) 求出 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)$ 的最大值和最小值.

**解：** $f(x)=2\sin x\cos x+2\cos^2 x-1=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(1) $f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

(2) $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

由 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

得 $k\pi-\dfrac{3\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\dfrac{3\pi}{8},k\pi+\dfrac{\pi}{8}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

(3) 因为 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，所以 $2x+\dfrac{\pi}{4}\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right]$.

当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{8}$ 时，$f(x)$ 取到最大值 $\sqrt{2}$；

当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 取到最小值 $-1$.

## 能力提升

**1.** 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+\cos^2\omega x+\frac{1}{2}$（$\omega>0$）在区间 $[0,\pi]$ 上只有一个零点和两个最大值点，则 $\omega$ 的取值范围是（　　）

A. $\left[\frac{2}{3},\frac{11}{12}\right)$　　B. $\left[\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$

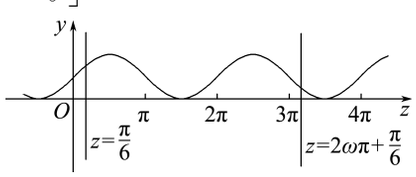
C. $\left[\frac{7}{6},\frac{5}{3}\right)$　　D. $\left[\frac{7}{6},\frac{11}{12}\right)$

C　**解析**：由 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+\cos^2\omega x+\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+\frac{1+\cos 2\omega x}{2}+\frac{1}{2}=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)+1$，

设 $z=2\omega x+\frac{\pi}{6}$，由 $x\in[0,\pi]$ 可得 $z\in\left[\frac{\pi}{6},2\omega\pi+\frac{\pi}{6}\right]$.

如图，作出函数 $y=\sin z+1$ 在 $z\in\left[\frac{\pi}{6},2\omega\pi+\frac{\pi}{6}\right]$ 上的图象.




由图，要使函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上只有一个零点和两个最大值点，需使 $\frac{5\pi}{2}\leqslant 2\omega\pi+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{2}$，解得 $\frac{7}{6}\leqslant\omega<\frac{5}{3}$.

**2.**（多选）已知函数 $f(x)=\cos^4x-2\sin x\cos x-\sin^4x$，则（　　）

A. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称

B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{3\pi}{8},0\right)$ 对称

C. 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$ 上单调递减

D. 函数 $f(x)$ 满足 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{f(x)}$

BC　**解析**：$f(x)=\cos^4x-2\sin x\cos x-\sin^4x=(\cos^2x+\sin^2x)(\cos^2x-\sin^2x)-2\sin x\cos x=\cos 2x-\sin 2x=\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

对于 A，由 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(2\times\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=-1\neq\pm\sqrt{2}$，得 $f(x)$ 的图象不关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称，A 错误；

对于 B，由 $f\left(-\frac{3\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\cos\left(-2\times\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)=0$，得函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{3\pi}{8},0\right)$ 对称，B 正确；

对于 C，当 $2x+\frac{\pi}{4}\in[2k\pi,\pi+2k\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $x\in\left[-\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{3\pi}{8}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$f(x)$ 单调递减，令 $k=0$，则函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$ 上单调递减，C 正确；

对于 D，取 $x=0$，则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}=-1$，$\frac{1}{f(0)}=\frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}}\neq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$，D 错误.

**3.**（2024·新高考全国Ⅱ卷）已知 $\alpha$ 为第一象限角，$\beta$ 为第三象限角，$\tan\alpha+\tan\beta=4$，$\tan\alpha\cdot\tan\beta=\sqrt{2}+1$，则 $\sin(\alpha+\beta)=$_____.

$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　**解析**：由题意得 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{4}{1-(\sqrt{2}+1)}=-2\sqrt{2}$.

因为 $\alpha\in\left(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，$\beta\in\left(2m\pi+\pi,2m\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$，$m\in\mathbf{Z}$，则 $\alpha+\beta\in((2m+2k)\pi+\pi,(2m+2k)\pi+2\pi)$，$k,m\in\mathbf{Z}$.

又因为 $\tan(\alpha+\beta)=-2\sqrt{2}<0$，

则 $\alpha+\beta\in\left((2m+2k)\pi+\frac{3\pi}{2},(2m+2k)\pi+2\pi\right)$，$k,m\in\mathbf{Z}$，则 $\sin(\alpha+\beta)<0$，

则 $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=-2\sqrt{2}$，联立 $\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)=1$，解得 $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

**4.** 已知函数 $f(x)=2\sin x+3\cos x$，$x_1,x_2\in\mathbf{R}$，则 $f(x_1)-f(x_2)$ 的最大值是_____.

$2\sqrt{13}$　**解析**：因为 $f(x)=2\sin x+3\cos x=\sqrt{13}\sin(x+\varphi)$（其中 $\tan\varphi=\frac{3}{2}$），

所以 $f(x)_{\max}=\sqrt{13}$，$f(x)_{\min}=-\sqrt{13}$.

因为 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，所以 $f(x_1)-f(x_2)$ 的最大值为

$f(x)_{\max}-f(x)_{\min}=\sqrt{13}-(-\sqrt{13})=2\sqrt{13}$.

## 自我超越

若函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)+\cos x\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最大值为$\sqrt{3}$，则常数 $\varphi$ 的值为_____.

$\frac{\pi}{6}$　**解析：**$f(x)=\sin(x+\varphi)+\cos x=\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi+\cos x=\cos\varphi\sin x+(\sin\varphi+1)\cos x=\sqrt{\cos^2\varphi+(\sin\varphi+1)^2}\sin(x+\theta)$，其中 $\tan\theta=\frac{\sin\varphi+1}{\cos\varphi}$.

又函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)+\cos x\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最大值为$\sqrt{3}$，所以$\sqrt{\cos^2\varphi+(\sin\varphi+1)^2}=\sqrt{3}$，整理得 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$.

又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.故答案为$\frac{\pi}{6}$.

# 5.6　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$

## 第 1 课时　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象变换

**学习任务目标**

**1.**理解 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$中 $\omega,\varphi,A$ 的意义.

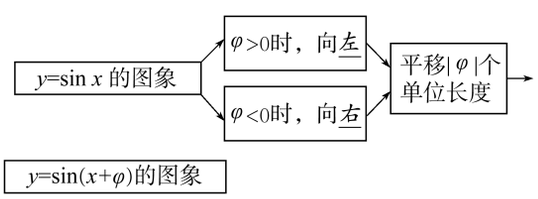
**2.**掌握 $y=\sin x$ 与 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$图象间的变换关系，并能正确地指出其变换步骤.

## ○ 问题式预习 ○

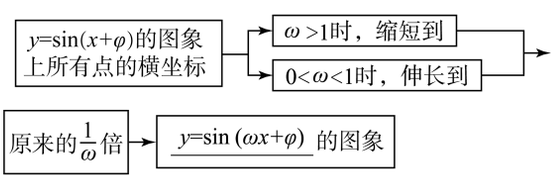
### 【知识清单】

**知识点一　$A,\omega,\varphi$ 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$图象的影响**

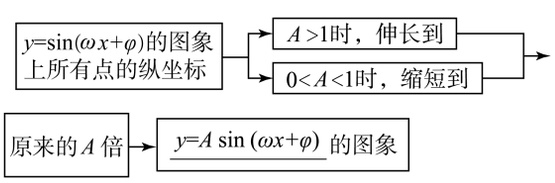
(1)$\varphi$ 对函数 $y=\sin(x+\varphi)$图象的影响：




(2)$\omega$ 对函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$图象的影响：




(3)$A$ 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$图象的影响：




**知识点二　由正弦曲线 $y=\sin x$ 到函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$的图象的变换过程**

$y=\sin x$ 的图象 $\xrightarrow[\text{平移}|\varphi|\text{个单位长度}]{\text{向左}(\varphi>0)\text{或向右}(\varphi<0)}$ $y=\sin(x+\varphi)$的图象 $\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{所有点的横坐标变为原来的}\frac{1}{\omega}\text{倍}}$ $y=\sin(\omega x+\varphi)$的图象 $\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{所有点的纵坐标变为原来的 }A\text{ 倍}}$ $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象.

### 【概念辨析】

**1.**判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)把函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象.　（×）

(2)要得到函数 $y=\sin\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象，可把函数 $y=\sin(-x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度.（×）

(3)把函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标变为原来的 2 倍(纵坐标不变)，得到 $y=\sin 2x$ 的图象.　（×）

(4)函数 $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象是由函数 $y=\cos x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度得到的.　（√）

**2.**将函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x$ 的图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍(横坐标不变)，再向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后得到函数 $g(x)$的图象，则 $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=$__3__.

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1 理解三角函数图象的平移变换

**1.**要得到函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，只需将 $y=\sin x$ 的图象　　(　　)

A.向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

B.向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

C.向上平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

D.向下平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

B　**解析**：函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，可以看作是把正弦曲线 $y=\sin x$ 上的所有点向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度而得到的.

[一题多思]

**思考1.**函数 $y=\sin x$ 的图象可以看作由 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象经过怎样的变换而得到？

**提示**：函数 $y=\sin x$ 的图象，可以看作由 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 图象上的所有点向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度而得到.

**思考2.**函数 $y=\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ 的图象可以看作由 $y=\sin(-x)$ 的图象经过怎样的变换而得到？

**提示**：因为 $y=\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sin\left[-\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]$，故 $y=\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ 的图象是由 $y=\sin(-x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到的.

**思考3.**函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象经过怎么样的变换，可以得到 $y=\cos x$ 的图象？

**提示**：因为 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，故只需将函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度即可得到 $y=\cos x$ 的图象.

**2.**将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到的图象所对应的函数的解析式为　　(　　)

A.$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$　　B.$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

C.$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$　　D.$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

B　**解析**：将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到 $y=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.故选 B.

**3.**要得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，可以将函数 $y=\sin 2x$ 的图象　　(　　)

A.向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

B.向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

C.向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

D.向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

A　**解析**：因为 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，所以将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到 $y=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

**【探究总结】**

**图象平移变换的关注点**

(1)解题关键：确定平移方向和平移的量.

(2)平移方法：

①当 $x$ 的系数是1时，若 $\varphi>0$，则左移 $\varphi$ 个单位长度；若 $\varphi<0$，则右移 $|\varphi|$ 个单位长度.

②当 $x$ 的系数是 $\omega(\omega>0)$ 时，若 $\varphi>0$，则左移 $\frac{\varphi}{\omega}$ 个单位长度；若 $\varphi<0$，则右移 $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$ 个单位长度.

### 任务2 认识三角函数图象的伸缩变换

**1.**(教材 P239 练习题2改编)为了得到余弦函数 $y=\cos x$ 的图象，只需把函数 $y=\cos\frac{x}{4}$ 图象上所有的点的　　(　　)

A.横坐标伸长为原来的4倍，纵坐标不变

B.横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{4}$，纵坐标不变

C.纵坐标伸长为原来的4倍，横坐标不变

D.纵坐标缩短为原来的$\frac{1}{4}$，横坐标不变

B　**解析**：把函数$y=\cos\frac{x}{4}$图象上所有的点横坐标缩短为原来的$\frac{1}{4}$，纵坐标不变，得到函数$y=\cos x$的图象.

**2.**将函数$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，再将所得图象上所有点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$，纵坐标不变，得到$y=f(x)$的图象，则(　　)

A.$f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{12}\right)$

B.$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)$

C.$f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{24}\right)$

D.$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

B　**解析**：将函数$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，可得函数$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$的图象；再将所得图象上所有点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$，纵坐标不变，可得$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)$的图象.

**3.**下列变换中，正确的是　　(A)

A.将$y=\sin 2x$图象上各点的横坐标伸长到原来的2倍(纵坐标不变)，就得到$y=\sin x$的图象

B.将$y=\sin 2x$图象上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$(纵坐标不变)，就得到$y=\sin x$的图象

C.将$y=-\sin 2x$图象上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，纵坐标变为原来的相反数，就得到$y=\sin x$的图象

D.将$y=-3\sin 2x$图象上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，纵坐标缩短到原来的$\frac{1}{3}$，且变为相反数，就得到$y=\sin x$的图象

**4.**把函数$f(x)=3\cos\left(x+\frac{\pi}{7}\right)$的图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍，纵坐标不变，得到的图象所对应的函数$g(x)$的解析式是　　(　　)

A.$g(x)=3\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{7}\right)$

B.$g(x)=3\cos\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{7}\right)$

C.$g(x)=3\cos\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)$

D.$g(x)=3\cos 2\left(x+\frac{\pi}{7}\right)$

A　**解析**：所有点的横坐标伸长到原来的2倍，纵坐标不变，则$g(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)=3\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{7}\right)$.故选A.

**【探究总结】**

**图象伸缩变换的关注点**

(1)两个弄清：弄清是横向还是纵向，弄清是伸长还是缩短.

(2)两个规律：$\omega>0$时，横向伸缩规律为“$\omega$乘伸缩倍数的倒数”；$A>0$时，纵向伸缩规律为“$A$乘伸缩的倍数”.

## 任务3　掌握三角函数图象变换的综合应用

### 探究活动

**例**　(1)将函数$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象先向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，然后将所得图象上所有的点的横坐标伸长到原来的2倍(纵坐标不变)，则所得到的图象对应的函数解析式为　　(　　)

A.$y=-\cos x$　　B.$y=\sin 4x$

C.$y=\sin x$　　D.$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

(2)把函数$y=f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，然后把所得图象上各点横坐标伸长到原来的2倍，纵坐标缩短到原来的$\frac{2}{3}$，所得图象对应的函数解析式是$y=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$，求函数$f(x)$的解析式.

(1) C　**解析**：$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象$\xrightarrow{\text{向左平移}\frac{\pi}{6}\text{个单位长度}}y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\sin 2x$的图象$\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标伸长到原来的2倍}}y=\sin x$的图象.

(2) **解**：$y=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象$\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标伸长到原来的}\frac{3}{2}\text{倍}}y=3\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象$\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标缩短到原来的}\frac{1}{2}}y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象

$\xrightarrow{\text{向左平移}\frac{\pi}{6}\text{个单位长度}} y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=3\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=3\cos x$ 的图象.

所以 $f(x)=3\cos x$.

## 【探究总结】

**三角函数图象变换的步骤**

先用诱导公式将不同名三角函数化为同名三角函数，再根据平移、伸缩变换，得出最终结果.

**注意**：由 $y=\sin x$ 的图象经过平移、伸缩变换得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象，若先左右平移，则向左(右)平移 $|\varphi|$ 个单位长度；若先在 $x$ 轴方向上伸缩再平移，则向左(右)平移 $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$ 个单位长度.

## 应用迁移

**1.** 若将 $f(x)=\cos x$ 的图象进行变换，使得其与 $g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象重合，则下列变换正确的是 (　　)

A. 先将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度，再将图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标不变)

B. 先将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，再将图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标不变)

C. 先将 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标不变)，再将图象向左平移 $\frac{7\pi}{8}$ 个单位长度

D. 先将 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标不变)，再将图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

C　**解析**：对于 A，先将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度，得到 $y=\cos\left(x-\frac{3\pi}{8}\right)$ 的图象，

再将图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$，

得到 $y=\cos\left(2x-\frac{3\pi}{8}\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}+\left(2x-\frac{3\pi}{8}\right)\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)$ 的图象，故 A 错误；

对于 B，先将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，得到 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象，

再将图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$，得到 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象，故 B 错误；

对于 C，先将 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$，得到 $y=\cos 2x$ 的图象，

再将图象向左平移 $\frac{7\pi}{8}$ 个单位长度，得到 $y=\cos\left(2x+\frac{7\pi}{4}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象，故 C 正确；

对于 D，先将 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$，得到 $y=\cos 2x$ 的图象，

再将图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，得到 $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2x$ 的图象，故 D 错误.故选 C.

**2.** 如何由函数 $y=\sin x$ 的图象得到函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象？

**解**：(方法一) $y=\sin x$ 的图象 $\xrightarrow{\text{向右平移}\frac{\pi}{3}\text{个单位长度}}$

$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象 $\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{将各点的横坐标缩短到原来的}\frac{1}{2}}$

$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象 $\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{将各点的纵坐标伸长到原来的 3 倍}}$

$y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

(方法二) $y=\sin x$ 的图象 $\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{将各点的横坐标缩短到原来的}\frac{1}{2}}$

$y=\sin 2x$ 的图象 $\xrightarrow{\text{向右平移}\frac{\pi}{6}\text{个单位长度}}$

$y=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象 $\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{将各点的纵坐标伸长到原来的 3 倍}}$

$y=3\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

# 课后素养评价(五十六)

## 基础落实

**1.**要得到函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象，只需将 $y=3\sin 2x$ 的图象　　(　　)

A.向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度

B.向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度

C.向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

D.向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

B　**解析**：由题意可得 $y=3\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度可得 $y=3\sin 2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象，故B正确.

**2.**(多选)函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)$ 的图象经过下列变换能得到函数 $y=\sin x$ 的图象的是　　(　　)

A.先向右平移 $\frac{\pi}{5}$ 个单位长度，再把所得图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标不变)

B.先向左平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度，再把所得图象上各点的横坐标伸长到原来的2倍(纵坐标不变)

C.先把图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标不变)，再把所得图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度

D.先把图象上各点的横坐标伸长到原来的2倍(纵坐标不变)，再把所得图象向左平移 $\frac{\pi}{5}$ 个单位长度

BD　**解析**：将函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)$ 的图象上所有的点，横坐标伸长到原来的2倍(纵坐标不变)，可得 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)$ 的图象，再向左平移 $\frac{\pi}{5}$ 个单位长度，可得函数 $y=\sin x$ 的图象，故D正确；又 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{10}\right)\right]$，所以将函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{10}\right)\right]$ 的图象，先向左平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度，得到函数 $y=\sin 2x$ 的图象，再把所得图象上各点的横坐标伸长到原来的2倍(纵坐标不变)，可得函数 $y=\sin x$ 的图象，故B正确.

**3.**把函数 $f(x)=\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向左平移 $a(a>0)$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象，$f(x)$ 图象的对称轴与 $g(x)$ 图象的对称轴重合，则 $a$ 的值可能为　　(　　)

A.$\frac{\pi}{6}$　　B.$\frac{\pi}{12}$　　C.$\frac{\pi}{4}$　　D.$\frac{\pi}{8}$

C　**解析**：由题意得 $g(x)=\sin\left[4(x+a)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(4x+4a+\frac{\pi}{3}\right)$，与函数 $f(x)=\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$ 图象的对称轴相同，则 $4a=k\pi,k\in\mathbf{N}^*$，得 $a=\frac{k\pi}{4},k\in\mathbf{N}^*$，所以 $a$ 的值可能为 $\frac{\pi}{4}$.

**4.**将函数 $y=3\sin 2x$ 的图象向左平移 $\varphi\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 个单位长度，所得图象关于 $y$ 轴对称，则 $\varphi=$_____.

$\frac{\pi}{4}$　**解析**：由题可知 $y=3\sin[2(x+\varphi)]=3\sin(2x+2\varphi)$ 为偶函数，所以 $2\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

**5.**将函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B(A>0,\omega>0,\varphi\in(0,2\pi))$ 的图象按以下顺序进行变换：①向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度；②横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变；③向上平移1个单位长度.若得到 $g(x)=\sin x$ 的图象，则 $f(x)=$_____.

$\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{23\pi}{12}\right)-1$　**解析**：函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，

得到 $f(x)=A\sin\left[\omega\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\varphi\right]+B=A\sin\left(\omega x+\frac{\omega\pi}{6}+\varphi\right)+B$ 的图象，

横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变，得到 $f(x)=A\sin\left(2\omega x+\frac{\omega\pi}{6}+\varphi\right)+B$ 的图象，

向上平移1个单位长度，得到 $f(x)=A\sin\left(2\omega x+\right.$

$\frac{\omega\pi}{6}+\varphi\Big)+B+1=\sin x$ 的图象，

则 $\begin{cases}2\omega=1,\\ \frac{\omega\pi}{6}+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z}),\\ B+1=0,\\ A=1.\end{cases}$ 又 $\varphi\in(0,2\pi)$，解得

$\begin{cases}A=1,\\ B=-1,\\ \omega=\frac{1}{2},\\ \varphi=\frac{23\pi}{12},\end{cases}$ 所以 $f(x)=\sin\Big(\frac{1}{2}x+\frac{23\pi}{12}\Big)-1$.

**6.** 已知函数 $y=\sqrt{2}\sin\Big(2x+\frac{\pi}{4}\Big)+2$.

(1)求函数的最小正周期及单调递增区间；

(2)函数的图象可由 $y=\sin x$ 的图象经过怎样的变换而得到？

**解**：(1)$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

得 $k\pi-\frac{3\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}$.

所以函数的单调递增区间为 $\Big[k\pi-\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{\pi}{8}\Big],k\in\mathbf{Z}$.

(2)$y=\sin x$ 的图象 $\xrightarrow{\text{向左平移}\frac{\pi}{4}\text{个单位长度}}$ $y=\sin\Big(x+\frac{\pi}{4}\Big)$ 的图象 $\xrightarrow{\text{横坐标缩短到原来的}\frac{1}{2}\text{(纵坐标不变)}}$ $y=\sin\Big(2x+\frac{\pi}{4}\Big)$ 的图象 $\xrightarrow{\text{纵坐标伸长到原来的}\sqrt{2}\text{倍(横坐标不变)}}$ $y=\sqrt{2}\sin\Big(2x+\frac{\pi}{4}\Big)$ 的图象 $\xrightarrow{\text{向上平移 2 个单位长度}}$ $y=\sqrt{2}\sin\Big(2x+\frac{\pi}{4}\Big)+2$ 的图象.

## 能力提升

**1.** 将函数 $f(x)=\sin\Big(\omega x+\frac{\pi}{3}\Big)(\omega>0)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到曲线 $C$.若 $C$ 关于 $y$ 轴对称，则 $\omega$ 的最小值是　　(　　)

A.$\frac{1}{6}$　　B.$\frac{1}{4}$　　C.$\frac{1}{3}$　　D.$\frac{1}{2}$

C　**解析**：由题意知，曲线 $C$ 为 $y=\sin\Big[\omega\Big(x+\frac{\pi}{2}\Big)+\frac{\pi}{3}\Big]=\sin\Big(\omega x+\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\Big)$ 的图象，又 $C$ 关于 $y$ 轴对称，则 $\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=\frac{1}{3}+2k,k\in\mathbf{Z}$.又 $\omega>0$，故当 $k=0$ 时，$\omega$ 取得最小值 $\frac{1}{3}$.故选 C.

**2.** 已知函数 $f(x)=\sin\Big(2x+\frac{\pi}{3}\Big)$，为了得到函数 $g(x)=\cos\Big(2x+\frac{\pi}{6}\Big)$ 的图象，可以将 $f(x)$ 的图象　　(　　)

A.向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

B.向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

C.向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

D.向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

B　**解析**：$g(x)=\cos\Big(2x+\frac{\pi}{6}\Big)=\sin\Big[\Big(2x+\frac{\pi}{6}\Big)+\frac{\pi}{2}\Big]=\sin\Big(2x+\frac{2\pi}{3}\Big)$，

将函数 $f(x)=\sin\Big(2x+\frac{\pi}{3}\Big)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，可得 $y=\sin\Big[2\Big(x+\frac{\pi}{6}\Big)+\frac{\pi}{3}\Big]=\sin\Big(2x+\frac{2\pi}{3}\Big)$ 的图象，即将函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，即可得到 $y=g(x)$ 的图象.

**3.**(多选)将函数 $y=\sin(2x+\varphi)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后，得到一个奇函数的图象，则 $\varphi$ 的可能取值为　　(　　)

A.$\frac{5\pi}{4}$　　B.$\frac{3\pi}{4}$　　C.$\frac{\pi}{4}$　　D.$-\frac{\pi}{4}$

BD　**解析**：将函数 $y=\sin(2x+\varphi)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后，得到的函数图象对应的函数解析式为 $y=\sin\Big[2\Big(x+\frac{\pi}{8}\Big)+\varphi\Big]=\sin\Big(2x+\frac{\pi}{4}+\varphi\Big)$.

因为函数 $y=\sin\Big(2x+\frac{\pi}{4}+\varphi\Big)$ 是奇函数，所以 $\frac{\pi}{4}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$.当 $k=1$ 时，$\varphi=\frac{3\pi}{4}$，当 $k=0$ 时，$\varphi=-\frac{\pi}{4}$，选项 B，D 满足，A，C 不满足.

**4.**将 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后与函数 $g(x)=\cos\omega x$ 的图象重合，则 $\omega$ 的最小值为（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{3}{2}$

C　**解析**：将 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后，

得到 $y=f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[\omega\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\omega x$ 的图象，

则 $\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=6k+\frac{3}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以当 $k=0$ 时，$\omega$ 的最小值为 $\frac{3}{4}$.

**5.**将函数 $f(x)$ 的图象先向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，再将得到的图象上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变，得到函数 $y=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象，则 $f(x)=$_____.

$2\sin\left(2x+\frac{5\pi}{12}\right)$　**解析**：把函数 $y=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍，纵坐标不变，得到函数 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象，再向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $f(x)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=2\sin\left(2x+\frac{5\pi}{12}\right)$ 的图象.故答案为 $2\sin\left(2x+\frac{5\pi}{12}\right)$.

## 自我超越

**1.**将函数 $f(x)=\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$ 图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}(\omega>0)$，纵坐标不变，得到 $g(x)$ 的图象，若 $g(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$ 上恰有两个零点，且在 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递减，则 $\omega$ 的取值范围为_____.

$\left[\frac{11}{4},4\right]$　**解析**：依题意可得 $g(x)=\cos\left(\omega x+\frac{2\pi}{3}\right)$，当 $0\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$ 时，$\frac{2\pi}{3}\leqslant\omega x+\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{2\omega\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}$.

因为 $g(x)=\cos\left(\omega x+\frac{2\pi}{3}\right)$ 在 $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$ 上恰有两个零点，

所以 $\frac{5\pi}{2}\leqslant\frac{2\omega\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}<\frac{7\pi}{2}$，解得 $\frac{11}{4}\leqslant\omega<\frac{17}{4}$.

令 $2k\pi\leqslant\omega x+\frac{2\pi}{3}\leqslant\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $-\frac{2\pi}{3\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}$，$k\in\mathbf{Z}$，令 $k=0$，得 $g(x)=\cos\left(\omega x+\frac{2\pi}{3}\right)$ 在 $\left[-\frac{2\pi}{3\omega},\frac{\pi}{3\omega}\right]$ 上单调递减，

所以 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]\subseteq\left[-\frac{2\pi}{3\omega},\frac{\pi}{3\omega}\right]$，所以 $\begin{cases}-\frac{2\pi}{3\omega}\leqslant-\frac{\pi}{12},\\ \frac{\pi}{3\omega}\geqslant\frac{\pi}{12},\end{cases}$

又 $\omega>0$，所以 $0<\omega\leqslant4$.

综上所述，$\frac{11}{4}\leqslant\omega\leqslant4$，即 $\omega$ 的取值范围是 $\left[\frac{11}{4},4\right]$.

**2.**已知函数 $f(x)=2\sin\omega x(\cos\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x)-\sqrt{3}(\omega>0)$ 的最小正周期为 $\pi$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

(2)将函数 $f(x)$ 的图象先向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，求函数 $g(x)$ 在区间 $[0,5\pi]$ 上所有零点的和.

**解**：(1) $f(x)=2\sin\omega x(\cos\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x)-\sqrt{3}=\sin2\omega x+2\sqrt{3}\cdot\frac{1-\cos2\omega x}{2}-\sqrt{3}=2\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$. 因为函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，所以 $\omega=1$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant2x-\frac{\pi}{3}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

(2)将函数 $f(x)$ 的图象先向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，可得 $y=2\sin2x$ 的图象；再向上平移 2 个单位长度，得到函数 $g(x)=2\sin2x+2$ 的图象.

令 $g(x)=0$，得 $\sin2x=-1$，所以 $2x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $x=k\pi-\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.函数 $g(x)$ 在区间 $[0,5\pi]$ 上所有零点的和为 $\frac{3\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}+\frac{11\pi}{4}+\frac{15\pi}{4}+\frac{19\pi}{4}=\frac{55\pi}{4}$.

# 第 2 课时　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的性质

**学习任务目标**

1. 会用“五点法”画函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象.
2. 能根据 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象，确定其解析式.
3. 掌握函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的性质，并能熟练运用.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　用五点法作 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$）的图象的步骤**

第一步：列表.

| $\omega x+\varphi$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-\frac{\varphi}{\omega}$ | $\frac{\pi}{2\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$ | $\frac{\pi}{\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$ | $\frac{3\pi}{2\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$ | $\frac{2\pi}{\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$ |
| $y$ | 0 | $A$ | 0 | $-A$ | 0 |

第二步：在平面直角坐标系中描出各点.

第三步：用光滑的曲线连接这些点，形成图象.

**知识点二　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$A>0$，$\omega>0$ 的性质**

| 定义域 | $\mathbf{R}$ |
|---|---|
| 值域 | $[-A,A]$ |
| 周期性 | $T=\frac{2\pi}{\omega}$ |
| 名称 | 性质 |
| 对称性 | 对称中心：$\left(\frac{k\pi-\varphi}{\omega},0\right)(k\in\mathbf{Z})$ |
| | 对称轴：$x=\frac{\pi}{2\omega}+\frac{k\pi-\varphi}{\omega}(k\in\mathbf{Z})$ |
| 奇偶性 | 当 $\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时是奇函数；<br>当 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时是偶函数 |

### 【概念辨析】

1. 判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

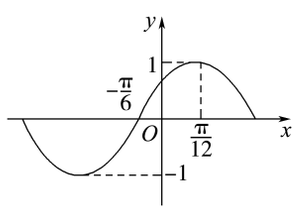
(1) 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象既是中心对称图形，又是轴对称图形.　（√）

(2) 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象相邻的两条对称轴之间的距离为 1 个周期.　（×）

(3) 函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的对称轴方程为 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.　（√）

(4) 函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的对称中心是 $\left(-k\pi+\frac{\pi}{3},0\right)(k\in\mathbf{Z})$.　（×）

2. 已知某函数的部分图象如图所示，则该函数的解析式为　(D)




A. $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$　　B. $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

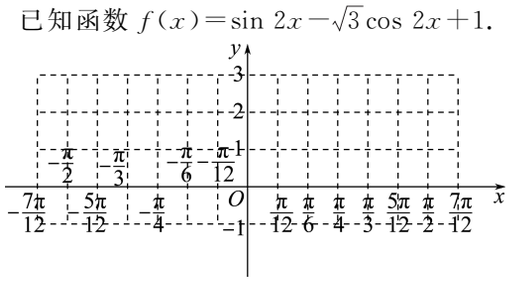
C. $y=\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$　　D. $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务 1　用五点法画函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象

#### 探究活动

**例 1**　已知函数 $f(x)=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x+1$.




(1) 用“五点法”在给定的坐标系中画出函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的图象，并写出 $y=f(x)$ 图象的对称中心；

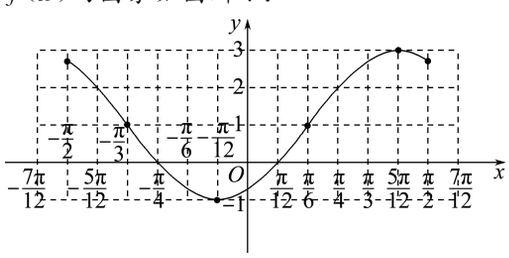
(2) 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{7\pi}{12}$ 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度，然后将各点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），得到函数 $g(x)$ 的图象，若函数 $g(x)$ 的图象经过点 $\left(\theta,\frac{8}{5}\right)$，$\theta\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，求 $\sin\theta$ 的值.

**解**：(1)$f(x)=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x+1=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$，

因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{4\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$.

| $2x-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{4\pi}{3}$ | $-\pi$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $f(x)$ | $\sqrt{3}+1$ | $1$ | $-1$ | $1$ | $3$ | $\sqrt{3}+1$ |

函数 $f(x)$的图象如图所示.




令 $2x-\frac{\pi}{3}=0+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，则 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

所以 $y=f(x)$图象的对称中心为$\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},1\right),k\in\mathbf{Z}$.

(2)将函数 $f(x)$的图象向左平移$\frac{7\pi}{12}$个单位长度，

得到函数 $y=2\sin\left[2\left(x+\frac{7\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{3}\right]+1=2\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)+1$，

再向下平移 1 个单位长度，得到函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$，

然后再将各点的横坐标伸长到原来的 2 倍得到函数 $g(x)=2\sin\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)$，

因为函数 $g(x)$的图象经过点$\left(\theta,\frac{8}{5}\right)$，

所以 $2\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{8}{5}$，

即 $\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$.

因为 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，所以 $\theta+\frac{5\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.

因为 $\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}>0$，所以 $\theta+\frac{5\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

所以 $\cos\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)}=-\frac{3}{5}$，

所以 $\sin\theta=\sin\left[\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)-\frac{5\pi}{6}\right]=\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)\cos\frac{5\pi}{6}-\cos\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$.

## 【探究总结】

**用五点法作函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\omega>0)$图象的关注点**

(1)实质：利用函数的三个零点、两个最值点画出函数在一个周期内的图象.

(2)步骤：

第一步：列表.

| $\omega x+\varphi$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-\frac{\varphi}{\omega}$ | $\frac{\pi}{2\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$ | $\frac{\pi}{\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$ | $\frac{3\pi}{2\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$ | $\frac{2\pi}{\omega}-\frac{\varphi}{\omega}$ |
| $y$ | $0$ | $A$ | $0$ | $-A$ | $0$ |

第二步：在平面直角坐标系中描出各点.

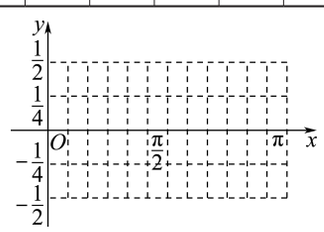
第三步：用光滑的曲线连接这些点，形成图象.

## 应用迁移

已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

(1)填写下表，并画出 $f(x)$在$[0,\pi]$上的图象；

| $2x+\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{3}$ | | | | | $\frac{7\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $0$ | | | | | $\pi$ |
| $f(x)$ | | | | | | |

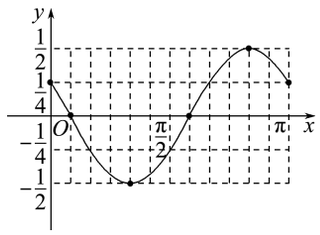



(2)将 $y=f(x)$的图象先向下平移 1 个单位长度，再将横坐标伸长为原来的 4 倍(纵坐标不变)，最后向左平移 $\pi$ 个单位长度，得到 $g(x)$的图象，求$g(x)$图象的对称中心.

**解**：(1)列表：

| $2x+\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ | $\frac{7\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{12}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
| $f(x)$ | $\frac{1}{4}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

描点、连线，如图所示：




(2)把 $f(x)$ 的图象先向下平移 1 个单位长度，得 $y=\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1$ 的图象；再将横坐标伸长为原来的4 倍(纵坐标不变)，得 $y=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)-1$ 的图象；最后将曲线向左平移 π 个单位长度，得 $g(x)=\frac{1}{2}\cos\left[\frac{1}{2}(x+\pi)+\frac{\pi}{3}\right]-1=-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)-1$ 的图象.

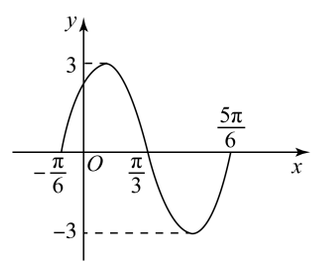
令 $\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=2k\pi-\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，

所以函数 $g(x)$ 的图象的对称中心为 $\left(2k\pi-\frac{2\pi}{3},-1\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$.

## 任务2 由图象求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的解析式

### 探究活动

**例 2**　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象的一部分如图所示，求此函数的解析式.




**解**：(方法一)由题图可知 $A=3$，

$T=\frac{5\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，

所以 $y=3\sin(2x+\varphi)$.

因为点 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 在函数图象上，

所以 $0=3\sin\left(-\frac{\pi}{6}\times2+\varphi\right)$.

所以 $-\frac{\pi}{6}\times2+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $\varphi=\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

所以 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

(方法二)由题图知 $A=3$.

因为图象过点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 和 $\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$，

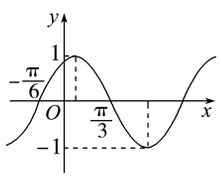
所以 $\begin{cases}\frac{5\pi\omega}{6}+\varphi=2\pi,\\ \frac{\pi\omega}{3}+\varphi=\pi,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\varphi=\frac{\pi}{3},\\ \omega=2.\end{cases}$

所以 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

(方法三)由题图可得 $A=3$，$T=\frac{5\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$. 点 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 在函数图象上，可知函数图象可由 $y=3\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度而得到，故所求函数为 $y=3\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，即 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

[一题多思]

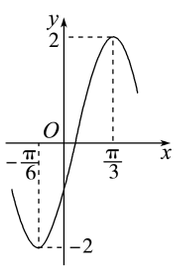
**思考 1.** 本例中函数的图象若换为下图，则 $\varphi$ 的值是多少？




**提示**：由题图可知 $A=1$，$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}$，故 $T=\pi$，$\omega=2$，$y=\sin(2x+\varphi)$.

又当 $x=\frac{-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{12}$ 时，$\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi\right)=1$，且 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

**思考 2.** 本例中函数的图象若换为下图，你能求出该函数的解析式吗？




**提示**：由题图可知 $A=2$，$T=2\times\left[\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\pi$，所以 $\omega=2$，故 $y=2\sin(2x+\varphi)$. 由函数图象经过点 $\left(\frac{\pi}{3},2\right)$，得 $2\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=2$，所以 $2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$. 所以函数的解析式为 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

**【探究总结】**

**已知图象求 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 解析式的方法**

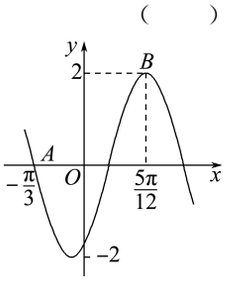
方法一：若从图象可确定最值和周期，则可先直接确定函数解析式 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中的参数 $A$ 和 $\omega$，再选取第一个零点（五点法作图中的第一个点的横坐标）的数据代入“$\omega x+\varphi=0$”（要注意正确判断哪一个点是第一个零点）求得 $\varphi$.

方法二：通过将若干特殊点的坐标代入函数解析式，可以求得待定系数 $A,\omega,\varphi$.这里需要注意的是，要认清所选择的点属于五个点中的哪一点，并能正确代入.

方法三：运用逆向思维的方法，先确定函数的基本解析式 $y=A\sin\omega x$，再根据图象的变换规律确定相关参数的值.

## 应用迁移

（教材 P241 习题 5.6 题 4 改编）已知函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\pi<\varphi<0)$ 的部分图象如图所示，则 $f(x)$ 的解析式为（　　）




A. $f(x)=2\cos\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)$

B. $f(x)=2\cos\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)$

C. $f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

D. $f(x)=2\cos\left(3x-\frac{5\pi}{6}\right)$

A　**解析**：由图象可知 $A=2,\frac{3T}{4}=\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}$，所以 $T=\pi$，

故 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$，所以 $f(x)=2\cos(2x+\varphi)$，

由图象 $f(x)$ 过点 $\left(\frac{5\pi}{12},2\right)$，所以 $2\cos\left(2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi\right)=2$，即 $\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\varphi\right)=1$，所以 $\frac{5\pi}{6}+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

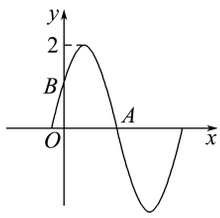
由于 $-\pi<\varphi<0$，所以 $\varphi=-\frac{5\pi}{6}$，

所以 $f(x)=2\cos\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)$.

## 任务3 掌握函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象与性质的综合应用

## 探究活动

**例3**　已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，图象与 $x$ 轴正半轴的第一个交点（从左到右）为 $A\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$，图象与 $y$ 轴的交点为 $B(0,1)$.




(1)求 $f(x)$ 的解析式及其图象的对称中心；

(2)$f(x)$ 的图象上各点的纵坐标保持不变，横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，再将所得图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，得到 $g(x)$ 的图象，求 $g(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的单调递减区间.

**解**：(1)因为 $f(x)$ 的图象过点 $B(0,1)$，所以 $2\sin\varphi=1$.又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$.

又 $f(x)$ 的图象过点 $A\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$，所以 $2\sin\left(\frac{5\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}\right)=0$，所以 $\frac{5\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}=\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

解得 $\omega=1+\frac{12k}{5},k\in\mathbf{Z}$.

因为 $\frac{T}{4}<\frac{5\pi}{6}<\frac{T}{2}$，所以 $\frac{3}{5}<\omega<\frac{6}{5}$，

所以 $\omega=1$.所以 $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

令 $x+\frac{\pi}{6}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $x=k\pi-\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，

所以 $f(x)$ 的图象的对称中心为 $\left(k\pi-\frac{\pi}{6},0\right),k\in\mathbf{Z}$.

(2)函数 $f(x)$ 的图象上各点的纵坐标保持不变，横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，得到 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象；

再将所得图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，得到 $g(x)=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3}{2}\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

得 $\frac{5}{12}\pi+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{11}{12}\pi+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

所以 $g(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{5}{12}\pi+k\pi,\frac{11}{12}\pi+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

因为 $x\in[0,\pi]$，所以 $k=0,x\in\left[\frac{5}{12}\pi,\frac{11}{12}\pi\right]$，

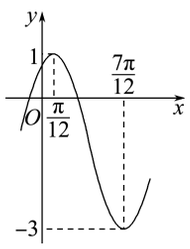
所以 $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调递减区间为 $\left[\frac{5}{12}\pi,\frac{11}{12}\pi\right]$.

## 【探究总结】

探究函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的性质，要注意整体思想的应用，视“$\omega x+\varphi$”为一个整体，结合正弦函数 $y=\sin x$ 的性质灵活应用.

## 应用迁移

**1.** 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示.




(1)求函数 $f(x)$ 的解析式及其图象的对称轴的方程.

(2)先把函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象. 若当 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$ 时，关于 $x$ 的方程 $g(x)+2a-1=0$ 有实数根，求实数 $a$ 的取值范围.

**解**：(1)由题图可得 $\begin{cases}A+B=1,\\-A+B=-3,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}A=2,\\B=-1,\end{cases}$

所以 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)-1$.

由题图可得 $\frac{T}{2}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$，所以 $T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，可得 $\omega=2$，

所以 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)-1$.

又 $f(x)$ 的图象过点 $\left(\frac{\pi}{12},1\right)$，所以 $2\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi\right)-1=1$，所以 $2\times\frac{\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，可得 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $k=0$，$\varphi=\frac{\pi}{3}$.

所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1$.

令 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，可得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $f(x)$ 的图象的对称轴的方程为 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.

(2)由题意可得 $g(x)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]-1+1=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$.

当 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$ 时，$2x+\frac{2\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$，

$\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，$g(x)\in[1,2]$.

若关于 $x$ 的方程 $g(x)+2a-1=0$ 有实数根，则 $1-2a=g(x)$ 有实数根，

所以 $1\leqslant1-2a\leqslant2$，可得 $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant0$.

所以实数 $a$ 的取值范围为 $\left[-\frac{1}{2},0\right]$.

**2.** 已知函数 $f(x)=2\sin\omega x\cos\omega x+2\sqrt{3}\cos^2\omega x-\sqrt{3}(0<\omega\leqslant3)$，且函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$.

(1)求 $\omega$ 的值；

(2)求 $f(x)$ 的单调递增区间；

(3)若 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},m\right]$ 上的值域是 $[-\sqrt{3},2]$，求 $m$ 的取值范围.

**解**：(1)$f(x)=2\sin\omega x\cos\omega x+2\sqrt{3}\cos^2\omega x-\sqrt{3}=\sin2\omega x+\sqrt{3}\cos2\omega x=2\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$，

因为函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$，

则 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=0$，

则 $-\frac{\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $\omega=1-3k,k\in\mathbf{Z}$.

因为 $0<\omega\leqslant3$，则当 $k=0$ 时，$\omega=1$.

(2)由(1)可知，$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $-\frac{5\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$；

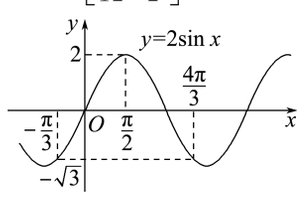
(3)$x\in\left[-\frac{\pi}{3},m\right]$，则 $2x+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},2m+\frac{\pi}{3}\right]$，

因为 $2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$，结合函数 $y=2\sin x$ 的图象可知，

欲使 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},m\right]$ 上的值域是 $[-\sqrt{3},2]$，

则 $\frac{\pi}{2}\leqslant2m+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{4\pi}{3}$，即 $\frac{\pi}{12}\leqslant m\leqslant\frac{\pi}{2}$，

故 $m$ 的取值范围为 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$.



# 课后素养评价（五十七）

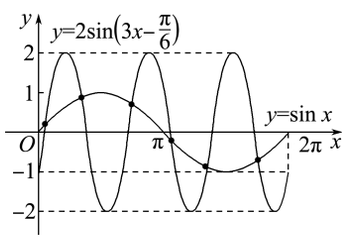
## 基础落实

**1.**（2024·新高考Ⅰ卷）当 $x\in[0,2\pi]$ 时，曲线 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的交点个数为　（　　）

A.3　　B.4　　C.6　　D.8

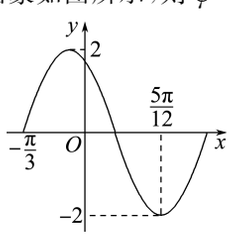
C　**解析**：因为函数 $y=\sin x$ 的最小正周期为 $2\pi$，函数 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$，所以在 $[0,2\pi]$ 上，函数 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 有三个周期.

在直角坐标系中结合五点法画出两函数图象，如图所示.




由图可知，两函数图象有 6 个交点.故选 C.

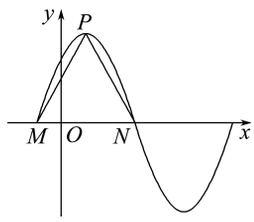
**2.**函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 在一个周期内的图象如图所示，则 $\varphi=$　（　　）




A.$\frac{\pi}{6}$　　B.$\frac{\pi}{3}$　　C.$\frac{2\pi}{3}$　　D.$\frac{5\pi}{6}$

C　**解析**：由函数图象可知 $A=2$，$\frac{3}{4}T=\frac{5\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $T=\pi$.又 $\omega>0$，所以 $\omega=2$.将 $\left(\frac{5\pi}{12},-2\right)$ 代入 $y=2\sin(2x+\varphi)$ 中得到 $\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\varphi\right)=-1$.因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\frac{5\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}+\varphi<\frac{11\pi}{6}$，故 $\frac{5\pi}{6}+\varphi=\frac{3\pi}{2}$，解得 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$.故选 C.

**3.**已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(\text{其中 }A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，点 $M,N$ 是函数图象与 $x$ 轴的交点，点 $P$ 是函数图象的最高点，且 $\triangle PMN$ 是边长为 2 的正三角形，$ON=3OM$，则函数 $f(x)$ 的解析式可以是　（　　）



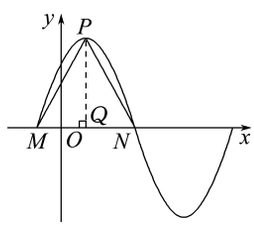

A.$f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$

B.$f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$

C.$f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$

D.$f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)$

A　**解析**：如图，过点 $P$ 作 $x$ 轴的垂线，垂足为 $Q$，则 $Q$ 为 $MN$ 的中点.




因为 $\triangle PMN$ 是边长为 2 的正三角形，$ON=3OM$，所以 $M\left(-\frac{1}{2},0\right)$，$N\left(\frac{3}{2},0\right)$，$PQ=\sqrt{3}$，所以 $P\left(\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)$，所以 $A=\sqrt{3}$.

又 $T=2MN=4$，所以 $\frac{2\pi}{\omega}=4$，解得 $\omega=\frac{\pi}{2}$，

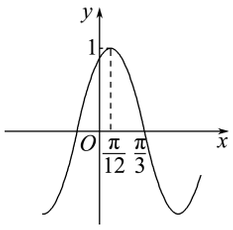
所以 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\varphi\right)$.

将点 $P\left(\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)$ 代入得 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}+\varphi\right)=\sqrt{3}$，所以 $\frac{\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，

所以 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$.

**4.**（多选）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则下列结论中正确的有　（　　）




A.$f(x)$的图象关于点$\left(-\frac{2\pi}{3},0\right)$对称

B.将函数$y=\sin 2x$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度可得到$f(x)$的图象

C.$f(x)$在$\left(-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right)$内单调递增

D.$f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的一个零点为$x=-\frac{\pi}{6}$

AB　**解析**：由图可知$f(x)$的最小正周期为$T=4\times\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)=\pi$，所以$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，所以$f(x)=\sin(2x+\varphi)$.又$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=1$，即$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$.

令$\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得$\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

对于A，可得$f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\sin(-\pi)=0$，所以A正确；

对于B，因为$f(x)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，所以B正确；

对于C，令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

解得$-\frac{5\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

当$k=0$时，得到$f(x)$的一个单调递增区间为$\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$，

下一个单调递增区间为$\left[\frac{7\pi}{12},\frac{13\pi}{12}\right]$，

所以$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right)$上不是单调递增的，所以C错误；

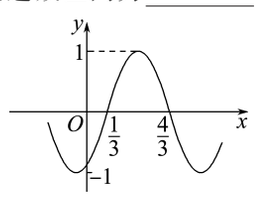
对于D，令$g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

则$g\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1\neq 0$，所以D错误.

**5.** 把函数$f(x)=-3\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象向右平移$m(m>0)$个单位长度，设所得图象对应的函数为$g(x)$，若$g(x)$是奇函数，则$m$的最小值是_____.

$\frac{5\pi}{12}$　**解析**：将函数$f(x)=-3\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象向右平移$m(m>0)$个单位长度，得到函数$g(x)=-3\cos\left[2(x-m)+\frac{\pi}{3}\right]=-3\cos\left(2x-2m+\frac{\pi}{3}\right)$的图象.若$g(x)$为奇函数，则$-2m+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以$m=-\frac{\pi}{12}-\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，则正数$m$的最小值为$-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{12}$.故答案为$\frac{5\pi}{12}$.

**6.** 已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示.若$f(x)$的图象上所有点的纵坐标不变，横坐标伸长到原来的2倍，得到函数$g(x)$的图象，则$g(x)=$_____，$g(x)$在$[1,2]$上的单调递减区间为_____.




$\sin\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$　$\left[\frac{5}{3},2\right]$　**解析**：由题图可得$A=1$，$T=2\times\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)=2$，则$\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi$，

则$f(x)=\sin(\pi x+\varphi)$，

当$x=\frac{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}{2}=\frac{5}{6}$时，$f(x)$取得最大值，则$\frac{5}{6}\pi+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得$\varphi=-\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

又因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，故$\varphi=-\frac{\pi}{3}$，

所以$f(x)=\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)$，则$g(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$.

令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则$\frac{5}{3}+4k$

$\leqslant x\leqslant\frac{11}{3}+4k(k\in\mathbf{Z})$，

故 $g(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{5}{3}+4k,\frac{11}{3}+4k\right](k\in\mathbf{Z})$.

则 $k=0$ 时，$g(x)$ 在 $[1,2]$ 上的单调递减区间为 $\left[\frac{5}{3},2\right]$.

**7.** 已知曲线 $y=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 上的一个最高点的坐标为 $\left(\frac{\pi}{8},\sqrt{2}\right)$，此点到相邻最低点间的曲线与 $x$ 轴交于点 $\left(\frac{3\pi}{8},0\right)$.

(1)试求这条曲线的函数解析式；

(2)画出(1)中函数在 $[0,\pi]$ 上的图象.

**解**：(1)由题意知 $A=\sqrt{2}$，$T=4\times\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\right)=\pi$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，所以 $y=\sqrt{2}\sin(2x+\varphi)$.

又因为一个最高点的坐标为 $\left(\frac{\pi}{8},\sqrt{2}\right)$，

所以 $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\times2+\varphi\right)=\sqrt{2}$，则 $\sin\left(\frac{\pi}{8}\times2+\varphi\right)=1$，

所以 $\frac{\pi}{4}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.

所以 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$.

又因为 $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

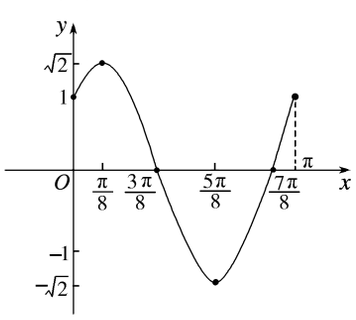
所以 $y=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

(2)因为 $0\leqslant x\leqslant\pi$，所以 $\frac{\pi}{4}\leqslant2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{9\pi}{4}$.

列出 $x,y$ 的对应值表：

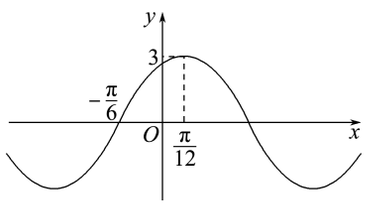
| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{8}$ | $\frac{3\pi}{8}$ | $\frac{5\pi}{8}$ | $\frac{7\pi}{8}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x+\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ | $\frac{9\pi}{4}$ |
| $y$ | $1$ | $\sqrt{2}$ | $0$ | $-\sqrt{2}$ | $0$ | $1$ |

描点，连线，如图所示.




## 能力提升

**1.**（多选）已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则下列说法正确的是（　　）




A. $f(0)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

B. $f(x)$ 图象的对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},0\right),k\in\mathbf{Z}$

C. 直线 $x=\pi$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴

D. 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后，得到函数 $y=3\cos2x$ 的图象

AB　**解析**：由函数图象可知，函数的最大值为 3，因为 $A>0$，且 $A$ 为正弦型函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的振幅，所以 $A=3$.

设函数的周期为 $T$，根据正弦函数图象的性质，$\frac{T}{4}=\frac{\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{4}$，则 $T=\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\pi}=2$，此时 $f(x)=3\sin(2x+\varphi)$.

已知函数图象过点 $\left(\frac{\pi}{12},3\right)$，将其代入 $f(x)=3\sin(2x+\varphi)$ 可得 $3=3\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi\right)$，即 $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$.

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$，那么 $f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

对于 A，将 $x=0$ 代入 $f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，得 $f(0)=3\sin\frac{\pi}{3}=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，故选项 A 正确.

对于 B，对于正弦函数 $y=\sin x$，其对称中心的横坐标满足 $x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

令 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，此时 $f(x)=0$，

所以 $f(x)$ 图象的对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，故选项 B 正确.

对于 C，对于正弦函数 $y=\sin x$，其图象的对称轴方程为 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

令 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.

当 $x=\pi$ 时，$2\pi+\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以直线 $x=\pi$ 不是 $f(x)$ 图象的一条对称轴，故选项 C 错误.

对于 D，将 $f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，根据“左加右减”的原则，得到 $y=3\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=3\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$.

根据诱导公式 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha$，$3\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=3\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\neq3\cos 2x$，所以选项 D 错误.

故选 AB.

**2.**（多选）已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B$（$A>0$，$\omega>0$，$0<\varphi<\pi$），部分自变量、函数值如表所示，下列结论正确的是（　　）

| $x$ | | | | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{12}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\omega x+\varphi$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
| $f(x)$ | 2 | 5 | | | |

A. 函数解析式为 $f(x)=3\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$

B. 函数 $f(x)$ 的图象的一条对称轴为直线 $x=-\frac{2\pi}{3}$

C. $\left(-\frac{5\pi}{12},2\right)$ 是函数 $f(x)$ 的图象的一个对称中心

D. 将函数 $f(x)$ 的图象先向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度所得图象对应的函数为奇函数

BCD　**解析**：由题表可得，$A\times0+B=2\Rightarrow B=2$，$A+B=5\Rightarrow A=3$.

又易知 $\frac{T}{4}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi\Rightarrow\omega=2$，所以 $2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\varphi=\frac{5\pi}{6}$，

所以 $f(x)=3\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)+2$，故 A 错误；

令 $g(x)=3\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$，

因为 $g\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=3\sin\left(-\frac{4\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)=-3$，

所以直线 $x=-\frac{2\pi}{3}$ 是函数 $g(x)$ 的图象的一条对称轴，即为函数 $f(x)$ 的图象的一条对称轴，故 B 正确；

因为 $g\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=3\sin\left(-\frac{5\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}\right)=0$，所以 $\left(-\frac{5\pi}{12},0\right)$ 是函数 $g(x)$ 的图象的一个对称中心，

所以 $\left(-\frac{5\pi}{12},2\right)$ 是函数 $f(x)$ 的图象的一个对称中心，故 C 正确；

将函数 $f(x)$ 的图象先向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度，所得图象对应的函数 $y=3\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{5\pi}{6}\right]+2-2=-3\sin 2x$ 为奇函数，故 D 正确.故选 BCD.

**3.**（多选）先将函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变，再将图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象.则下列结论正确的是（　　）

A. $g(0)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. 直线 $x=\frac{5\pi}{12}$ 是 $g(x)$ 图象的一条对称轴

C. $\left(-\frac{7\pi}{12},0\right)$ 是 $g(x)$ 图象的一个对称中心

D. $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right)$ 上单调递减

ABD　**解析**：先将函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变，可得 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，再将图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，可得 $g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.对于 A，$g(0)=\sin\left(2\times0-\frac{\pi}{3}\right)=$

$-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故A正确；对于B，$g\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\left(2\times\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$，所以直线$x=\frac{5\pi}{12}$是$g(x)$图象的一条对称轴，故B正确；对于C，$g\left(-\frac{7\pi}{12}\right)=\sin\left[2\times\left(-\frac{7\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=1$，所以$\left(-\frac{7\pi}{12},0\right)$不是$g(x)$图象的一个对称中心，故C错误；对于D，当$x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right)$时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)\subseteq\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$，且函数$y=\sin x$在$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$上单调递减，所以$g(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right)$上单调递减，故D正确.故选ABD.

**4.** 一个函数同时具有性质：①最小正周期是$\pi$；②图象关于直线$x=\frac{\pi}{3}$对称；③在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增.写出一个这样的函数：_____.

$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$（答案不唯一）　**解析**：设$y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$，

由①知$T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，得$\omega=2$.由②③知当$x=\frac{\pi}{3}$时，$y$取得最大值，故$A\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=A$，

所以$\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即$\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，$\varphi$可取$-\frac{\pi}{6}$，此时$y=A\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

故函数可为$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，答案不唯一.

**5.** 函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$在$\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$上单调递减，且$f(x)$的图象向左平移$\pi$个单位长度后与原来的图象重合.若方程$f(x)=\frac{9}{10}$在$\left(\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$上的解为$x_1,x_2$，则$\cos(x_1+x_2)=$_____.

$\frac{1}{2}$　**解析**：设$f(x)$的最小正周期为$T$，则$\frac{1}{2}T\geqslant\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3}$，故$T\geqslant\frac{2\pi}{3}$.又$f(x)$的图象向左平移$\pi$个单位长度后与原来的图象重合，故$\pi$为函数$f(x)$的一个周期，故最小正周期$T=\pi$，即$\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，解得$\omega=\pm2$.若$\omega=2$，则$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，$x\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，此时$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$在$\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$上单调递增，不符合题意；若$\omega=-2$，则$f(x)=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，$x\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$时，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)$，故$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$上单调递减，符合题意.由$x\in\left(\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$，得$-2x+\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{5\pi}{3},-\frac{2\pi}{3}\right)$.因为$\sin\left(-2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{9}{10}$在$\left(\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$上的解为$x_1,x_2$，由对称性可得$\frac{-2x_1+\frac{\pi}{6}-2x_2+\frac{\pi}{6}}{2}=-\frac{3\pi}{2}$，即$x_1+x_2=\frac{5\pi}{3}$，所以$\cos(x_1+x_2)=\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}$.故答案为$\frac{1}{2}$.

**6.** 已知函数$f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2x-1$.

(1)求函数$f(x)$的单调递增区间；

(2)将函数$f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，再将所得图象上所有点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变，得到函数$g(x)$的图象，若函数$h(x)=g(x)-m$在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上有两个零点，求实数$m$的取值范围.

**解**：(1)因为$f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2x-1=\sqrt{3}\sin2x+\cos2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得$-\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，函数$f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

(2)将函数$f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，可得$y=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象，

再将其图象上所有点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变，可得函数$g(x)=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象，

若函数 $h(x)=g(x)-m=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)-m$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上有两个零点，

则 $g(x)=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$ 与 $y=m$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上有两个交点，由 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，得 $4x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，由 $4x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，得 $x=\frac{\pi}{6}$，

所以结合正弦函数性质可得，$y=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递减，

因为 $g(0)=-1$，$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$，$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$，

所以要使 $g(x)=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$ 与 $y=m$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上有两个交点，只要 $1\leqslant m<2$，故 $m$ 的范围为 $[1,2)$.

## 自我超越

已知函数 $f(x)=2\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，$\omega>0$.

(1)若 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)$ 恒成立，且 $|x_1-x_2|_{\min}=\frac{\pi}{2}$，求函数 $f(x)$ 的图象的对称轴；

(2)已知 $0<\omega<5$，函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，$x=\frac{\pi}{3}$ 是 $g(x)$ 的一个零点，当 $x\in\left[\frac{\pi}{9},\frac{17\pi}{36}\right]$ 时，方程 $g(x)-a=0$ 恰有三个不相等的实数根 $x_1$，$x_2$，$x_3$（$x_1<x_2<x_3$），求实数 $a$ 的取值范围以及 $x_1+2x_2+x_3$ 的值.

**解**：(1)函数 $f(x)=2\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{|2\omega|}$，

由 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)$，$|x_1-x_2|_{\min}=\frac{\pi}{2}$，得函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\pi$，

则 $T=\frac{2\pi}{|2\omega|}=\pi$，而 $\omega>0$，

解得 $\omega=1$，$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

由 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

所以函数 $f(x)$ 的图象的对称轴为 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

(2)依题意，$g(x)=2\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\omega\right)+1$，由 $x=\frac{\pi}{3}$ 是 $g(x)$ 的一个零点，得 $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\omega\right)+1=0$，即 $\sin\left(\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，则 $\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}+2k_1\pi$，$k_1\in\mathbf{Z}$ 或 $\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}+2k_2\pi$，$k_2\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=3+6k_1$，$k_1\in\mathbf{Z}$ 或 $\omega=5+6k_2$，$k_2\in\mathbf{Z}$，又 $0<\omega<5$，于是 $\omega=3$，函数 $g(x)=2\sin\left(6x-\frac{5\pi}{6}\right)+1$，当 $\frac{\pi}{9}\leqslant x\leqslant\frac{17\pi}{36}$ 时，$-\frac{\pi}{6}\leqslant 6x-\frac{5\pi}{6}\leqslant 2\pi$，设 $t=6x-\frac{5\pi}{6}$，则 $t\in\left[-\frac{\pi}{6},2\pi\right]$，函数 $g(x)$ 化为 $h(t)=2\sin t+1$，$g(x)-a=0$ 即 $2\sin t=a-1$，依题意，函数 $y=2\sin t$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},2\pi\right]$ 内的图象与直线 $y=a-1$ 有 3 个不同的交点，作出 $y=2\sin t$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},2\pi\right]$ 上的图象（图略），则当 $-1\leqslant a-1\leqslant 0$，即 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时，$y=2\sin t$ 与 $y=a-1$ 恰有 3 个不同的交点，因此实数 $a$ 的取值范围为 $[0,1]$，设 $y=2\sin t$ 与 $y=a-1$ 的 3 个不同的交点的横坐标分别为 $t_1$，$t_2$，$t_3$（$t_1<t_2<t_3$），则 $t_1+t_2=\pi$，$t_2+t_3=3\pi$，于是 $t_1+2t_2+t_3=4\pi$，即 $\left(6x_1-\frac{5\pi}{6}\right)+2\left(6x_2-\frac{5\pi}{6}\right)+\left(6x_3-\frac{5\pi}{6}\right)=4\pi$，所以 $x_1+2x_2+x_3=\frac{11\pi}{9}$.

# 5.7　三角函数的应用

**学习任务目标**

1.了解 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的物理意义，能指出简谐运动中的振幅、周期、相位、初相.

2.会用三角函数解决一些简单的实际问题.

3.体会三角函数是描述周期变化现象的重要函数模型.

## ○ 问题式预习 ○

### 【知识清单】

**知识点一　描述简谐运动 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0),x\in[0,+\infty)$ 的物理量**

| 物理量 | 定义 | 意义 |
|---|---|---|
| 振幅 | $A$ 就是这个简谐运动的振幅 | 做简谐运动的物体离开平衡位置的最大距离 |
| 周期 | 这个简谐运动的周期是 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ | 做简谐运动的物体往复运动一次所需要的时间 |
| 频率 | 这个简谐运动的频率由公式 $f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$ 给出 | 做简谐运动的物体在单位时间内往复运动的次数 |
| 相位和初相 | $\omega x+\varphi$ 称为相位；$x=0$ 时的相位 $\varphi$ 称为初相 | — |

**知识点二　利用三角函数模型解决实际问题的一般步骤**

第一步：阅读理解，审清题意.

读题要做到逐字逐句，读懂题中的文字，理解题目所反映的实际背景，在此基础上分析出已知什么、求什么，从中提炼出相应的数学问题.

第二步：收集、整理数据，建立数学模型.

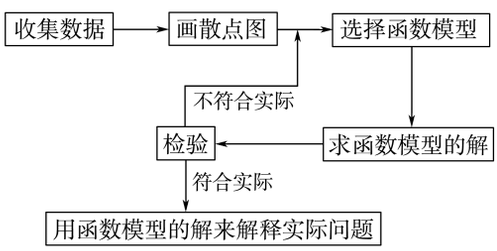
根据收集到的数据找出变化规律，运用已掌握的三角函数知识、物理知识及其他相关知识建立关系式，将实际问题转化为与三角函数有关的数学问题，即建立三角函数模型，从而实现实际问题的数学化.

第三步：利用所学的三角函数知识对得到的三角函数模型予以解答.

第四步：将所得结论“翻译”成实际问题的答案.

**知识点三　三角函数模型的建立程序**

三角函数模型的建立程序如图所示：




### 【概念辨析】

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)函数 $y=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)$ 表示的简谐运动的振幅是 $-2$.　（×）

(2)函数 $y=\frac{3}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 表示的简谐运动的初相是 $\frac{\pi}{4}$.　（×）

(3)函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象的对称轴方程是 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.　（√）

2.电流 $I$（单位：A）随时间 $t$（单位：s）变化的关系式是 $I=5\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$，则当 $t=\frac{1}{200}$ s 时，电流 $I$ 为　（B）

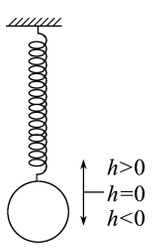
A.5 A　　B.2.5 A

C.2 A　　D.$-5$ A

## ○ 任务型课堂 ○

### 任务1　了解三角函数模型在物理中的应用

1.（多选）如图，弹簧挂着的小球做上下运动，它在 $t$ s 时相对于平衡位置的高度 $h$ cm 由关系式 $h(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$ 确定，其中 $A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi$.小球从最低点出发，经过2 s后，第一次回到最低点，则下列说法中正确的是　（　　）



A.$h(t)=A\sin\left(\pi t-\frac{\pi}{2}\right)$

B.$t=9$ s与$t=\frac{5}{3}$ s时小球偏离平衡位置的距离之比为2∶1

C.当$0<t<t_0$时，若小球有且只有三次到达最高点，则$t_0\in[5,7]$

D.当$0<t_1<t_2<2$时，若$t_1,t_2$时刻小球偏离平衡位置的距离相同，则$\sin\left(\frac{\pi}{t_1+t_2}\right)=1$

AB　**解析**：由题可知小球运动的周期$T=2$ s，又$\omega>0$，所以$\frac{2\pi}{\omega}=2$，解得$\omega=\pi$，

当$t=0$ s时，$A\sin\varphi=-A$，即$\sin\varphi=-1$，$|\varphi|<\pi$，所以$\varphi=-\frac{\pi}{2}$，

则$h(t)=A\sin\left(\pi t-\frac{\pi}{2}\right)=-A\cos\pi t$，故A正确；

因为$h(9)=-A\cos 9\pi=A$，$h\left(\frac{5}{3}\right)=-A\cos\frac{5}{3}\pi=-\frac{1}{2}A$，

所以$t=9$ s与$t=\frac{5}{3}$ s时小球偏离于平衡位置的距离之比为$\frac{A}{\left|-\frac{1}{2}A\right|}=2$，故B正确；

若$0<t<t_0$，则$0<\pi t<\pi t_0$，又当$0<t<t_0$时，小球有且只有三次到达最高点，

所以$5\pi<\pi t_0\leqslant 7\pi$，解得$5<t_0\leqslant 7$，即$t_0\in(5,7]$，故C错误；

因为$h(t)=-A\cos\pi t$，令$t_1=\frac{1}{4}$，$t_2=\frac{3}{4}$，

则$h(t_1)=-A\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}A$，$h(t_2)=-A\cos\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}A$，

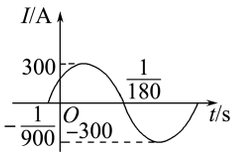
满足$0<t_1<t_2<2$且$t_1,t_2$时刻小球偏离于平衡位置的距离相同，

此时$\sin\left(\frac{\pi}{t_1+t_2}\right)=\sin\pi=0$，故D错误.

**2.** 已知电流$I$（单位：A）与时间$t$（单位：s）的关系为$I=A\sin(\omega t+\varphi)$.

（1）若如图所示的是$I=A\sin(\omega t+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$在一个周期内的图象，则根据图中数据，求出函数的解析式；

（2）若在任意一段$\frac{1}{150}$ s的时间内，电流都能取得最大值和最小值，则$\omega$的最小正整数值是多少？




**解**：（1）由题图知$A=300$，设$t_1=-\frac{1}{900}$，$t_2=\frac{1}{180}$，则周期$T=2\times(t_2-t_1)=2\times\left(\frac{1}{180}+\frac{1}{900}\right)=\frac{1}{75}$（s）.

所以$\omega=\frac{2\pi}{T}=150\pi$.又当$t=\frac{1}{180}$时，$I=0$，

即$\sin\left(150\pi\times\frac{1}{180}+\varphi\right)=0$，而$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$.

故所求的解析式为$I=300\sin\left(150\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$.

（2）依题意，周期$T\leqslant\frac{1}{150}$，即$\frac{2\pi}{\omega}\leqslant\frac{1}{150}(\omega>0)$，

所以$\omega\geqslant 300\pi>942$.

又$\omega\in\mathbf{N}^*$，故所求$\omega$的最小正整数值为943.

## 【探究总结】

**用三角函数解决物理学问题的策略**

（1）常涉及的物理学问题有单摆、光波、电流、机械波等，其共同的特点是具有周期性.

（2）明确物理概念的意义，此类问题往往涉及诸如频率、振幅等概念，因此要熟知其意义，并与对应的三角函数知识结合解题.

## 任务2 掌握三角函数模型在生活中的应用

### 探究活动

**例1**　某实验室一天的温度（单位：℃）随时间$t$（单位：时）的变化近似满足函数关系：$f(t)=10-2\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)$，$t\in[0,24]$.

（1）求实验室这一天的最大温差；

（2）若要求实验室温度不高于11 ℃，则在哪段时间实验室需要降温？

**解**：（1）因为$f(t)=10-2\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)$，$t\in[0,24]$，

所以$\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{7\pi}{3}$，$-1\leqslant\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$.

当 $t=2$ 时，$\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)=1$；

当 $t=14$ 时，$\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)=-1$，

所以 $f(t)$ 在 $[0,24]$ 上的最大值为 12，最小值为 8.

故实验室这一天的最高温度为 12 ℃，最低温度为 8 ℃，最大温差为 4 ℃.

(2)依题意得，当 $f(t)>11$ 时实验室需要降温.

令 $10-2\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)>11$，

即 $\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)<-\frac{1}{2}$.

又 $0\leqslant t\leqslant 24$，所以 $\frac{7\pi}{6}<\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}<\frac{11\pi}{6}$，

即 $10<t<18$.

故在 10 时至 18 时实验室需要降温.

[一题多思]

**思考 1.** 现实世界中有很多周期现象，在研究具体问题时，我们一般将如何做？

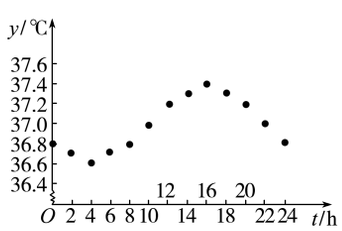
**提示：** 我们可以利用收集到的数据，首先画出相应的散点图，然后根据散点图进行函数拟合获得具体的函数模型，最后利用这个函数模型来解决相应的实际问题.

**思考 2.** 下表给出了某人 24 h 的体温变化情况(从夜间零点开始计时)：

| 时间/h | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 温度/℃ | 36.8 | 36.7 | 36.6 | 36.7 | 36.8 | 37.0 | 37.2 |
| 时间/h | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | — |
| 温度/℃ | 37.3 | 37.4 | 37.3 | 37.2 | 37.0 | 36.8 | — |

你能选用一个三角函数来近似描述这些数据吗？

**提示：** 散点图如图所示.




设 $t$ 时的体温 $y=A\sin(\omega t+\varphi)+c(A>0,\omega>0)$.

由题表知 $y_{\max}=37.4$，$y_{\min}=36.6$，则 $c=\frac{37.4+36.6}{2}=37$，$A=\frac{37.4-36.6}{2}=0.4$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{24}=\frac{\pi}{12}$.

所以 $y=0.4\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\varphi\right)+37$.

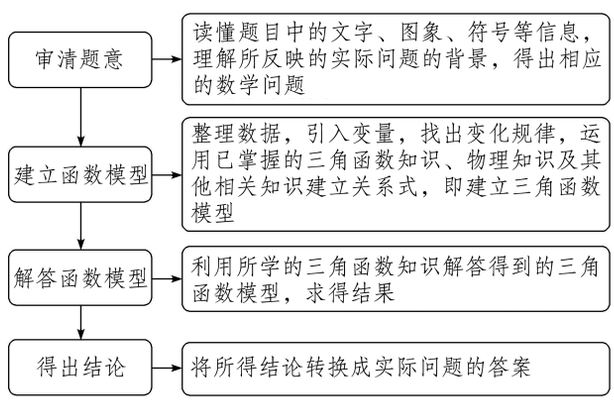
由 $0.4\sin\left(\frac{\pi}{12}\times 16+\varphi\right)+37=37.4$，得 $\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)=1$，即 $\frac{4\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $\varphi=2k\pi-\frac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$. 取 $\varphi=-\frac{5\pi}{6}$，

故可用函数 $y=0.4\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{5\pi}{6}\right)+37$ 来近似描述这些数据.

## 【探究总结】

**解决三角函数应用问题的基本步骤**

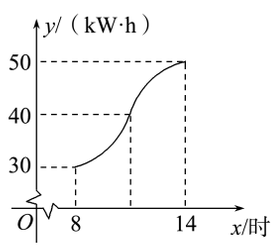



## 应用迁移

(教材 P245 例 1 改编)如图所示，某商店夏天每日 8～14 时的用电量变化曲线近似满足函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$，$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$.

(1)写出该段曲线的函数解析式；

(2)若每日 8～20 时的用电量也满足图中关系，当用电量大于或等于 45 kW·h 时，会导致供电设备供能紧张，求出每日供能紧张的时间段.




**解：**(1)根据图象可知从 8～14 时的图象是 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ 的半个周期的图象，$A=\frac{1}{2}\times(50-30)=10$，$b=\frac{1}{2}\times(50+30)=40$.

因为 $\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\omega}=14-8$，所以 $\omega=\frac{\pi}{6}$，所以 $y=10\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\varphi\right)+40$.

将 $x=8$，$y=30$ 代入上式，得 $30=10\sin\left(\frac{\pi}{6}\times8+\varphi\right)+40$，

所以 $\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)=-1$，即 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=1$.

又因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，因此 $y=10\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{6}\right)+40$，$x\in[8,14]$.

(2)根据题意得 $y=10\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{6}\right)+40\geqslant45$，

即 $\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{6}\right)\geqslant\frac{1}{2}$，

那么 $\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $12k\leqslant x\leqslant4+12k$，$k\in\mathbf{Z}$，

又因为 $x\in[8,20]$，所以 $x\in[12,16]$，

因此每日供能紧张的时间段为 12～16 时.

## 任务3 理解数据拟合模型

### 探究活动

**例 2**　下表是某地某年月平均气温(单位：℉)：

| 月份 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 平均气温 | 21.4 | 26.0 | 36.0 | 48.8 | 59.1 | 68.6 |
| 月份 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 平均气温 | 73.0 | 71.9 | 64.7 | 53.5 | 39.8 | 27.7 |

以月份为 $x$ 轴($x$=月份−1)，以平均气温为 $y$ 轴建立平面直角坐标系.

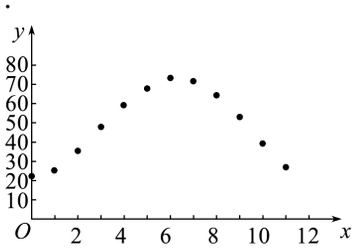
(1)根据表中数据画出月份和平均气温的散点图；

(2)用正弦型曲线去拟合这些数据，估计这个正弦型曲线的振幅 $A$ 和对应函数的最小正周期；

(3)下面三个函数模型中，哪一个最适合用来描述月份与平均气温的关系？

①$\frac{y}{A}=\cos\frac{\pi x}{6}$；②$\frac{y-46}{A}=\cos\frac{\pi x}{6}$；③$\frac{y-46}{-A}=\cos\frac{\pi x}{6}$.

**解**：(1)如图.




(2)最低气温为 1 月份 21.4 ℉，最高气温为 7 月份 73.0 ℉，故 $\frac{T}{2}=7-1=6$，所以 $T=12$.

因为 $2A$ 的值等于最高气温与最低气温的差，

即 $2A=73.0-21.4=51.6$，

所以 $A=25.8$.

(3)因为 $x$=月份−1，

所以不妨取 $x=2-1=1$，$y=26.0$.

代入①，得 $\frac{y}{A}=\frac{26.0}{25.8}>1\neq\cos\frac{\pi}{6}$，故①不适合；

代入②，得 $\frac{y-46}{A}=\frac{26.0-46}{25.8}<0\neq\cos\frac{\pi}{6}$，故②不适合；

代入③，得 $\frac{y-46}{-A}=\frac{26.0-46}{-25.8}>0$ 且 $\frac{26.0-46}{-25.8}<1$，故③适合，所以应选③.

### 【探究总结】

**处理数据拟合和预测问题的步骤**

(1)根据原始数据，绘出散点图.

(2)通过散点图，作出最贴近的直线或曲线，即拟合直线或拟合曲线.

(3)根据所学函数知识，求出拟合直线或拟合曲线的函数解析式.

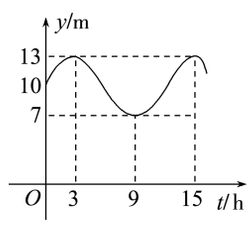
(4)利用函数解析式，根据条件对所给问题进行预测和控制，以便为决策和管理提供依据.

### 应用迁移

某港口水深 $y$(单位：m)是时间 $t$($0\leqslant t\leqslant24$，单位：时)的函数，下表是水深数据：

| $t$/h | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$/m | 10.0 | 13.0 | 9.9 | 7.0 | 10.0 | 13.0 | 10.1 | 7.0 | 10.0 |

根据上述数据绘成的曲线如图所示，经拟合，该曲线可近似地看成函数 $y=A\sin\omega t+b$ 的图象.




(1)试根据表中数据和曲线，求出函数的解析式.

(2)一般情况下，船舶航行时船底与海底的距离不小于 4.5 m 是安全的，如果某船的吃水深度(船底与水面的距离)为 7 m，那么该船在什么时间段能够安全进港？若该船欲当天安全离港，它在港内停留的时间最多不能超过多长时间？(忽略离港所用的时间)

**解**：(1)根据数据，$\begin{cases}A+b=13,\\-A+b=7,\end{cases}$

所以 $A=3$，$b=10$，$T=15-3=12$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{6}$，

所以函数的表达式为 $y=3\sin\frac{\pi}{6}t+10(0\leqslant t\leqslant24)$.

(2)由题意，水深 $y\geqslant 4.5+7$，

即 $3\sin\frac{\pi}{6}t+10\geqslant 11.5(0\leqslant t\leqslant 24)$，

所以 $\sin\frac{\pi}{6}t\geqslant\frac{1}{2}$，

所以 $\frac{\pi}{6}t\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{5\pi}{6}\right],k=0,1$，

所以 $t\in[1,5]$ 或 $t\in[13,17]$，

所以，该船在 1:00 至 5:00 或 13:00 至 17:00 能安全进港.

若欲于当天安全离港，它在港内停留的时间最多不能超过 16 h.

# 课后素养评价(五十八)

## 基础落实

**1.**某同学坐旋转摩天轮时距地面的高度 $y$(单位：m)与时间 $t$(单位：s)的部分数据如下表：

| $t$ | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 6 | 9 | 5.9 | 3 | 6 | 9 | 6.1 | 3 | 6 |

用函数模型 $y=A\sin\omega t+B$ 近似刻画 $y$ 与 $t$ 之间的对应关系，则该同学在第 25 s 时距地面的高度约为　　(　　)

A.7.5 m　　B.6.5 m

C.8.5 m　　D.5.5 m

A　**解析**：根据表格数据可知最大高度为 9 m，最小高度为 3 m.

不妨取 $A>0$，可得 $\begin{cases}A+B=9,\\-A+B=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=3,\\B=6.\end{cases}$

数据完成一个周期用时 12 s，因此周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=12$，可得 $\omega=\frac{\pi}{6}$，

因此函数模型为 $y=3\sin\frac{\pi}{6}t+6$.

代入 $t=25$，可得 $y=3\sin\left(\frac{\pi}{6}\times 25\right)+6=3\sin\frac{\pi}{6}+6=\frac{3}{2}+6=7.5$.故选 A.

**2.**商场人流量被定义为每分钟通过入口的人数.“五一”期间，某天某商场的人流量与时间 $t$ 的关系满足函数 $F(t)=50+4\sin\frac{t}{2}(t\geqslant 0)$，则人流量增加的时间段是　　(　　)

A.[0,5]　　B.[5,10]

C.[10,15]　　D.[15,20]

C　**解析**：由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{t}{2}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，知函数 $F(t)$ 的单调递增区间为 $[4k\pi-\pi,4k\pi+\pi],k\in\mathbf{Z}$.当 $k=1$ 时，$t\in[3\pi,5\pi]$，而 $[10,15]\subseteq[3\pi,5\pi]$.故选 C.

## 能力提升

**1.**(多选)已知某景区有一时钟花观花区，这种花的开闭与环境的温度有关，在花期内，时钟花每天可开闭一次，当温度达到 20 ℃时花才开放，当温度超过 30 ℃时花就会闭合.已知某季节该景区在 8 时到 16 时的气温 $y$(单位：℃)与时间 $t$(单位：时)近似满足函数关系式 $y=\frac{80}{3}+\frac{10\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\pi}{3}t+\frac{10}{3}\cos\frac{\pi}{3}t$.某游客在该季节的某日 8 时到 16 时的某时段到该景区观赏这种时钟花，则他能欣赏到这种花开放的时段是　　(　　)

A.8～10 时　　B.10～12 时

C.12～14 时　　D.14～16 时

**ABD**　**解析**：由题意可得 $y=\frac{80}{3}+\frac{10\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\pi}{3}t+\frac{10}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3}t=\frac{80}{3}+\frac{20}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{3}t+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}t\right)=\frac{80}{3}+\frac{20}{3}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6}\right)$.

令 $20\leqslant\frac{80}{3}+\frac{20}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 30$，则 $-1\leqslant\sin\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\frac{1}{2}$，

所以 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$ 或 $2k\pi+\frac{5\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，解得 $6k-2\leqslant t\leqslant 6k,k\in\mathbf{Z}$ 或 $6k+2\leqslant t\leqslant 6k+4,k\in\mathbf{Z}$.结合 $8\leqslant t\leqslant 16$，取 $k=1$ 时，$8\leqslant t\leqslant 10$，$k=2$ 时，$10\leqslant t\leqslant 12$ 或 $14\leqslant t\leqslant 16$，所以 $10\leqslant t\leqslant 12$ 或 $8\leqslant t\leqslant 10$ 或 $14\leqslant t\leqslant 16$，

所以他能欣赏到这种花开放的时段是 8～10 时，10～12 时，14～16 时.故选 ABD.

**2.**据市场调查，某种商品一年内每件出厂价在 7 千元的基础上，按月呈 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+b\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的模型波动($x$ 为月份).已知 3 月

份达到最高价 9 千元，7 月份价格最低为 5 千元，根据以上条件可确定 $f(x)$ 的解析式为

_____.

$f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)+7(1\leqslant x\leqslant 12,x\in\mathbf{N}^*)$

**解析**：因为 3 月份达到最高价 9 千元，7 月份价格最低为 5 千元，所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=2\times(7-3)=8$，则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{4}$.

由 $\begin{cases}A+b=9,\\-A+b=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=2,\\b=7,\end{cases}$ 所以 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\varphi\right)+7$.

由 $f(3)=2\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\varphi\right)+7=9$，可得 $\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\varphi\right)=1$，所以 $\frac{3\pi}{4}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，则 $\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$.

因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$，

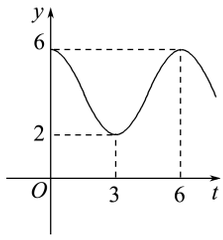
因此 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)+7(1\leqslant x\leqslant 12,x\in\mathbf{N}^*)$.

## 自我超越

已知甲、乙两车间的污水瞬时排放量 $y$（单位：$m^3/h$）关于时间 $t$（单位：h）的关系均近似地满足函数 $y=A\sin(\omega t+\varphi)+b(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$. 其图象如图所示.

(1)根据图象求函数的解析式；

(2)若甲车间先投产，1 h 后乙车间再投产，求两车间都投产时的最大污水排放量.




**解**：(1)由题图可得 $A=\frac{6-2}{2}=2$，$b=\frac{6+2}{2}=4$.

因为最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=6$，所以 $\omega=\frac{\pi}{3}$，

将(0,6)代入 $y=2\sin\left(\frac{\pi}{3}t+\varphi\right)+4$，得 $\sin\varphi=1$，$\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.

因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，所以 $y=2\sin\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{2}\right)+4=2\cos\frac{\pi}{3}t+4$，所求函数的解析式为 $y=2\cos\frac{\pi}{3}t+4(t\geqslant 0)$.

(2)设乙车间投产 $t$ h，甲、乙两车间污水排放量之和为 $W$ $m^3$，此时甲车间污水排放量为 $\left[2\cos\frac{\pi(t+1)}{3}+4\right]m^3$，乙车间污水排放量为 $\left(2\cos\frac{\pi t}{3}+4\right)m^3$，

故 $W=2\cos\frac{\pi(t+1)}{3}+2\cos\frac{\pi t}{3}+8=2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)\cos\frac{\pi}{3}-2\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)\sin\frac{\pi}{3}+2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)+8$

$=3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)-\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)+8=2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6}\right)+8$，所以 $W=2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6}\right)+8,t\geqslant 0$.

故两车间都投产时的最大污水排放量为 $(2\sqrt{3}+8)m^3$.

# 微专题培优(四)　三角函数中参数 $\omega$ 的取值范围问题

在对三角函数图象与性质的考查中，三角函数中 $\omega$ 的取值范围问题是考查的重点和热点. 主要结合三角函数的最值(值域)、单调性、对称性、零点、极值点等综合考查，难度中等偏上. 在以往的高考中主要以选择题、填空题的形式出现，试题灵活，不容易掌握，下面通过几道例题来体验处理这类问题常见的思路和方法.

## 类型 1 三角函数的最值（值域）与 $\omega$ 的取值范围

**例 1**　若函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 的值域为 $[-\sqrt{3},2]$，则 $\omega$ 的取值范围是　(　　)

A. $\left[\frac{5}{3},4\right]$　　B. $\left[\frac{5}{6},\frac{10}{3}\right]$

C. $\left[\frac{5}{6},\frac{5}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{5}{3},\frac{10}{3}\right]$

D　**解析**：根据题意可知若 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则可得 $\omega x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\omega-\frac{\pi}{3}\right]$.

显然当 $x=0$ 时，可得 $2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$.

由 $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3},2]$，利用三角函数的图象与性质可得 $\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}\omega-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{3}+\pi$，

解得 $\frac{5}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{10}{3}$，即 $\omega$ 的取值范围是 $\left[\frac{5}{3},\frac{10}{3}\right]$.

【规律方法】

若已知三角函数的最值或值域，则利用三角函数的最值与图象对称轴或周期的关系，列出关于 $\omega$，$\varphi$ 的不等式(组)，进而求出 $\omega$ 的值或取值范围，要注意自变量的范围.

【对点训练】

已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上既有最大值，又有最小值，则 $\omega$ 的取值范围是（　　）

A. $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$　　B. $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right]\cup\left(\frac{8}{3},+\infty\right)$

C. $\left(\frac{8}{3},+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)\cup\left(\frac{8}{3},+\infty\right)$

C　**解析**：因为 $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$，$\omega>0$，所以 $\frac{\pi}{6}\leqslant\omega x+\frac{\pi}{6}<\frac{(3\omega+1)\pi}{6}$. 由已知，$\frac{(3\omega+1)\pi}{6}>\frac{3}{2}\pi$，所以 $\omega>\frac{8}{3}$，所以 $\omega$ 的取值范围是 $\left(\frac{8}{3},+\infty\right)$. 故选 C.

## 类型2 三角函数的单调性与 $\omega$ 的取值范围

**例 2**　已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上单调递增，则 $\omega$ 的取值范围是（　　）

A. $\left[\frac{5}{8},\frac{9}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$

C. $\left(0,\frac{1}{4}\right]$　　D. $(0,2]$

C　**解析**：由题意得 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，$\omega>0$，则 $\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4},\pi\omega+\frac{\pi}{4}\right]$，

则 $\left[\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4},\pi\omega+\frac{\pi}{4}\right]\subseteq\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

当 $k=0$ 时，由 $\begin{cases}\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}\geqslant-\frac{\pi}{2},\\ \pi\omega+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得 $-\frac{3}{2}\leqslant\omega\leqslant\frac{1}{4}$，又 $\omega>0$，故 $0<\omega\leqslant\frac{1}{4}$；

当 $k=1$ 时，由 $\begin{cases}\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}\geqslant\frac{3\pi}{2},\\ \pi\omega+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{5\pi}{2},\end{cases}$ 得 $\omega$ 无解，同理当 $k\geqslant2$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$\omega$ 无解.

【规律方法】

**利用三角函数的单调性求 $\omega$ 的解题思路**

对于已知函数的单调区间的某一部分确定参数 $\omega$ 的范围的问题，首先，要明确已知的单调区间应为函数的单调区间的子区间；其次，要确定已知函数的单调区间，从而利用它们之间的关系求解. 另外，若是选择题，利用特殊值验证，使用排除法求解更为简捷.

【对点训练】

已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 在 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递减，则实数 $\omega$ 的取值范围为_____.

$\left[2,\frac{5}{2}\right]$　**解析**：函数 $f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$，

令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant\omega x-\frac{\pi}{6}\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，可得 $\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{2\pi}{3\omega}\leqslant x\leqslant\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{5\pi}{3\omega}$，$k\in\mathbf{Z}$，

即函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{2\pi}{3\omega},\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{5\pi}{3\omega}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

又因为函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递减，可得

$$\begin{cases}\frac{\pi}{3}\geqslant\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{2\pi}{3\omega},\\ \frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{5\pi}{3\omega},\end{cases}k\in\mathbf{Z},$$

解得 $6k+2\leqslant\omega\leqslant3k+\frac{5}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.

又由 $\frac{T}{2}\geqslant\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$，可得 $T\geqslant\frac{2\pi}{3}$，即 $\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\frac{2\pi}{3}$ 且 $\omega>0$，所以 $0<\omega\leqslant3$，

令 $k=0$，可得 $2\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{2}$，所以实数 $\omega$ 的取值范围为 $\left[2,\frac{5}{2}\right]$.

## 类型3 由三角函数的对称性求 $\omega$ 的取值范围

**例 3**　已知函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$，将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，所得函数 $g(x)$ 的图象关于 $y$ 轴对称，且 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{4}\right)$ 内单调递减，则 $\omega=$_____.

3　**解析**：由题意知 $g(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\omega\pi}{6}\right)$，$g(x)$ 的图象关于 $y$ 轴对称，

因此 $\frac{\omega\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=6k+3$，$k\in\mathbf{Z}$.

因为 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减，$\omega x+\frac{\omega\pi}{6}\in\left(\frac{\omega\pi}{10}+\frac{\omega\pi}{6},\frac{\omega\pi}{4}+\frac{\omega\pi}{6}\right)$，

所以 $\begin{cases}\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{\omega\pi}{10}+\frac{\omega\pi}{6},\\ \frac{\omega\pi}{4}+\frac{\omega\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$，解得 $\frac{15+60k}{8}\leqslant\omega\leqslant\frac{18+24k}{5}$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $\begin{cases}\frac{15+60k}{8}\leqslant 6k+3,\\ \frac{18+24k}{5}\geqslant 6k+3,\\ 6k+3>0,\end{cases}$ 所以 $-\frac{1}{2}<k\leqslant\frac{1}{2}$，即 $k=0$，$\omega=3$.

**【规律方法】**

三角函数图象的两条相邻对称轴或两个相邻对称中心之间的“水平间隔”为 $\frac{T}{2}$，相邻的对称轴和对称中心之间的“水平间隔”为 $\frac{T}{4}$，这就说明，我们可根据三角函数的对称性来研究其周期性.解决问题的关键在于运用整体代换的思想，建立关于 $\omega$ 的不等式组，进而可以求出 $\omega$ 的取值范围.

**【对点训练】**

已知函数 $f(x)=4\sin^2\left(\frac{\omega x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)-2(\omega>0)$ 的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$ 对称，且 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$ 内单调，则 $\omega$ 的值为_____.

$\frac{2}{3}$　**解析**：$f(x)=4\sin^2\left(\frac{\omega x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)-2=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)-2\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$

$=2\sqrt{2}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{2}\right)=-2\sqrt{2}\cos\omega x$.

因为函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$ 对称，所以 $\frac{3\pi}{4}\omega=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\omega=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}k(k\in\mathbf{Z})$.

又因为 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调，所以 $0<\frac{2\pi}{3}\omega\leqslant\pi$，解得 $0<\omega\leqslant\frac{3}{2}$.

综上所述，当 $k=0$ 时，$\omega=\frac{2}{3}$.

## 类型4 由三角函数图象的对称中心或对称轴情况求 $\omega$ 的取值范围

**例4**　当 $x\in[0,2\pi]$ 时，函数 $y=2$ 与 $y=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 的图象共有3个交点，则 $\omega$ 的取值范围是　（　）

A. $\left[\frac{9}{4},\frac{13}{4}\right)$　　B. $\left(\frac{9}{4},\frac{13}{4}\right]$

C. $\left[\frac{7}{3},\frac{10}{3}\right)$　　D. $\left(\frac{7}{3},\frac{10}{3}\right]$

C　**解析**：因为函数 $y=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$ 中的 $A=2$，则函数 $y=2$ 与 $y=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 的图象共有3个交点相当于 $y=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0,2\pi]$ 上存在三个最大值点，所以令 $\omega x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=\frac{2\pi}{3\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}=\frac{2\pi+6k\pi}{3\omega}$，$k\in\mathbf{Z}$.

因为当 $k=-1$ 时，$x=-\frac{4\pi}{3\omega}<0$，所以 $k=0,1,2$，即 $\begin{cases}\frac{14\pi}{3\omega}\leqslant 2\pi,\\ \frac{20\pi}{3\omega}>2\pi,\end{cases}$ 所以 $\frac{7}{3}\leqslant\omega<\frac{10}{3}$.故选 C.

**【规律方法】**

函数图象的对称轴问题与函数的极值点问题类似，但要求更加具体；函数图象的对称中心问题与函数的零点问题类似.

思路一：利用换元思想将 $\omega x+\varphi$ 整体代换，结合三角函数的对称性列出关于 $\omega$，$\varphi$ 的不等式求解，要注意自变量的取值范围；

思路二：利用解析式直接求出对称中心、对称轴、极值点、零点等，结合给定区间求解.

**【对点训练】**

已知偶函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$，图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 中心对称，且在区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调，则 $\omega=$_____.

$\frac{3}{2}$　**解析**：因为偶函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$，所以 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

即 $f(x)=\cos\omega x$ 或 $f(x)=-\cos\omega x$.

又 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 中心对称，

所以 $\cos\frac{\pi}{3}\omega=0$，即 $\frac{\pi}{3}\omega=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\omega=3k+\frac{3}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.

因为函数在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调，所以 $0\leqslant\omega x\leqslant\frac{\pi\omega}{4}\leqslant\pi$，即 $0<\omega\leqslant 4$，

所以当 $k=0$ 时，$\omega=\frac{3}{2}$ 符合条件.

★★★

# 迁　移　应　用

## 类型一　三角恒等变换与三角函数性质的综合问题

**例 1**　(2025·新高考Ⅱ卷)已知函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)$ $(0\leqslant\varphi<\pi)$，$f(0)=\frac{1}{2}$.

(1)求 $\varphi$；

(2)设函数 $g(x)=f(x)+f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，求 $g(x)$的值域和单调区间.

**解**：(1)因为 $f(0)=\cos\varphi=\frac{1}{2}$，且 $0\leqslant\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

(2)$g(x)=f(x)+f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x$

$=\cos 2x\cos\frac{\pi}{3}-\sin 2x\sin\frac{\pi}{3}+\cos 2x$

$=\frac{3}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$

$=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)$

$=\sqrt{3}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

因为余弦函数 $y=\cos\theta$ 的值域是$[-1,1]$，令 $\theta=2x+\frac{\pi}{6}$，那么函数 $y=\sqrt{3}\cos\theta$ 的值域就是$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$，所以 $g(x)$的值域为$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$.

令 $2k\pi-\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $k\pi-\frac{7\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi-\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$，所以 $g(x)$的单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{7\pi}{12},k\pi-\frac{\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$.

令 $2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$，所以 $g(x)$的单调递减区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$.

**【规律方法】**

求三角函数的值域、单调区间、图象变换、周期性、对称性等问题，一般先要通过三角恒等变换将函数表达式变形为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+k$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)+k$ 等形式，让角和三角函数名称尽量少，然后再根据化简后的三角函数，讨论其图象和性质，进行三角恒等变换时要抓住角、变函数名称、变结构，尤其是角之间的关系，注意公式的正用和变形用.

**【对点训练】**

**1.**(2024·新高考Ⅱ卷)(多选)对于函数 $f(x)=\sin 2x$ 和$g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，下列正确的有(　　)

A.$f(x)$与 $g(x)$有相同零点

B.$f(x)$与 $g(x)$有相同最大值

C.$f(x)$与 $g(x)$有相同的最小正周期

D.$f(x)$与 $g(x)$的图象有相同的对称轴

BC　**解析**：对于 A，令 $f(x)=\sin 2x=0$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即为 $f(x)$的零点，

令 $g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$，即为 $g(x)$的零点，

故 $f(x)$，$g(x)$零点不同，$f(0)=0$，$g(0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，故选项 A 错误；

对于 B，$f(x)\in[-1,1]$，$g(x)\in[-1,1]$，两函数值域相同，故选项 B 正确；

对于 C，显然两函数最小正周期都为 $\pi$，故选项 C 正确；

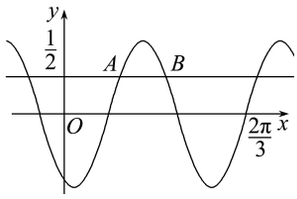
对于 D，由 $2x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得函数 $f(x)$图象的对称轴是 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，

由 $2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得函数 $g(x)$图象的对称轴是 $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，故选项 D 错误.

故选 BC.

**2.**(2023·新高考Ⅱ卷)已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$，如图，$A$，$B$ 是直线 $y=\frac{1}{2}$与曲线 $y=f(x)$的两

个交点，若$|AB|=\frac{\pi}{6}$，则$f(\pi)=$_____.




$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　**解析**：设$A\left(x_1,\frac{1}{2}\right)$，$B\left(x_2,\frac{1}{2}\right)$，由$|AB|=\frac{\pi}{6}$可得$x_2-x_1=\frac{\pi}{6}$，由$\sin x=\frac{1}{2}$可知，$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$或$x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，由题图可知，$\omega x_2+\varphi-(\omega x_1+\varphi)=\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$，即$\omega(x_2-x_1)=\frac{2\pi}{3}$，所以$\omega=4$.

因为$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\sin\left(\frac{8\pi}{3}+\varphi\right)=0$，所以$\frac{8\pi}{3}+\varphi=k\pi$，即$\varphi=-\frac{8}{3}\pi+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以$f(x)=\sin\left(4x-\frac{8}{3}\pi+k\pi\right)=\sin\left(4x-\frac{2}{3}\pi+k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，所以$f(x)=\sin\left(4x-\frac{2}{3}\pi\right)$或$f(x)=-\sin\left(4x-\frac{2}{3}\pi\right)$.

又因为$f(0)<0$，所以$f(x)=\sin\left(4x-\frac{2}{3}\pi\right)$，

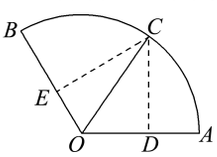
所以$f(\pi)=\sin\left(4\pi-\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

## 类型二　三角函数在生活中的应用

**例 2**　如图，在扇形$OAB$中，$\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$，半径$OA=2$.在$\overset{\frown}{AB}$上取一点$C$，向半径$OA$，$OB$分别作垂线，与线段$OA$，$OB$分别相交于$D$，$E$，得到一个四边形$CDOE$.

(1)设$\angle COD=x$，将四边形$CDOE$的面积$S$表示成$x$的函数；

(2)求四边形$CDOE$的面积$S$的最大值.




**解**：(1)$S=S_{\triangle COD}+S_{\triangle COE}$

$=\frac{1}{2}\times2\sin x\times2\cos x+\frac{1}{2}\times2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\times2\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=\sin 2x+\sin\left(\frac{4\pi}{3}-2x\right)$

$=\sin 2x+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)$

$=\frac{3}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$

$=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

要得到四边形$CDOE$，则$x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$.

(2)由(1)知，$S=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

因为$x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$

所以$2x-\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，

所以当$2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即$x=\frac{\pi}{3}$时，四边形$CDOE$的面积$S$的最大值为$\sqrt{3}$.

**【规律方法】**

三角函数的实际应用多与最值有关，解决这类问题的一般步骤如下：

(1)审读题意，合理地选取“角”为自变量，建立三角函数模型.

(2)利用和、差、倍、半角公式对函数模型进行化简整理，通常要整理为$y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$的形式.

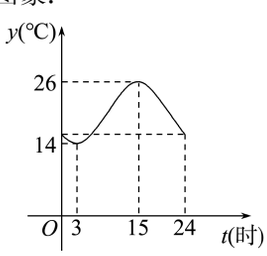
(3)在符合实际问题意义的情形下求目标式的最值.

**【对点训练】**

某市某日气温$y$(单位：℃)是时间$t$($0\leqslant t\leqslant24$，单位：时)的函数，下面是该天不同时间的气温预报数据：

| $t$(时) | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$(℃) | 15.7 | 14.0 | 15.7 | 20.0 | 24.2 | 26.0 | 24.2 | 20.0 | 15.7 |

根据上述数据描出的曲线如图所示，经拟合，该曲线可近似地看成函数$y=A\sin(\omega t+\varphi)+b$($A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\pi$)的图象.




(1)根据以上数据，试求函数$y=A\sin(\omega t+\varphi)+b$($A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\pi$)的表达式；

(2)大数据统计显示，某种特殊商品在室外销售可获

得3倍于室内销售的利润，但对室外温度的要求是气温不能低于23 ℃，根据(1)中所得模型，一个24小时营业的商家想获得最大利润，应在什么时间段(用区间表示)将该种商品放在室外销售？(忽略商品搬运时间及其他非主要因素)

**解**：(1)由 $f(x)$ 的图象，可得 $\begin{cases}A+b=26,\\-A+b=14,\end{cases}$ 解得 $b=20$，$A=6$.

又由 $\frac{T}{2}=15-3=12$，解得 $T=24$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{12}$.

因为 $t=3$ 时，可得 $y=14$，即 $6\sin\left(\frac{3\pi}{12}+\varphi\right)+20=14$，

解得 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=-1$，

即 $\frac{\pi}{4}+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

所以 $\varphi=\frac{5\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

又因为 $|\varphi|<\pi$，解得 $\varphi=-\frac{3\pi}{4}$，所以 $y=6\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{3\pi}{4}\right)+20,t\in[0,24]$.

(2)令 $y\geqslant23$，即 $6\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{3\pi}{4}\right)+20\geqslant23$，

可得 $\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{3\pi}{4}\right)\geqslant\frac{1}{2}$，

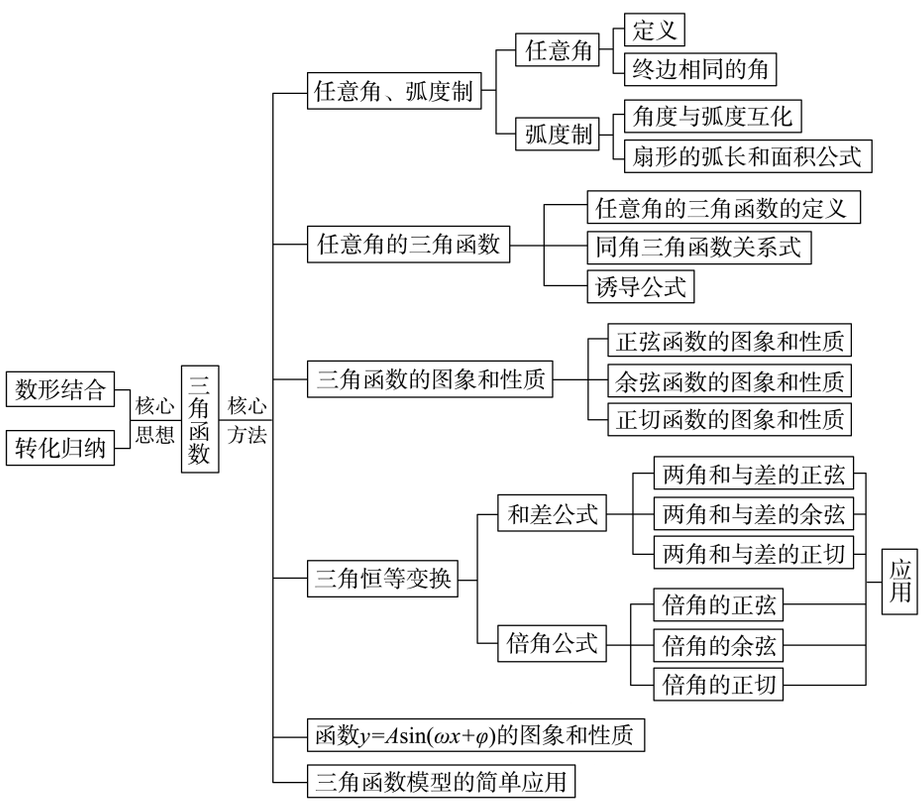
解得 $\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant\frac{\pi}{12}t-\frac{3\pi}{4}\leqslant\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $11+24k\leqslant t\leqslant19+24k,k\in\mathbf{Z}$.

又因为 $t\in[0,24]$，所以当 $k=0$ 时，可得 $11\leqslant t\leqslant19$，所以一个24小时营业的商家想获得最大利润，应在 $t\in[11,19]$ 时间段将该种商品放在室外销售.

★★★

# 重　构　拓　展

## 多维体系构建



【问题探究】

1.从本章的学习中可以看到，弧度制的引入为三角函数的研究奠定了基础.你能概括一下引入弧度制的必要性吗？

2.回顾三角函数的定义方法，说说它与幂函数、指数函数的定义方法的共性和差异性.

3.单位圆在三角函数的研究中有着非常重要的作用，你能借助单位圆归纳一下研究三角函数的图象与性质的过程和方法吗？

4.两角差的余弦公式 $C_{(\alpha-\beta)}$ 不仅是和(差)角公式的基础，也可以看成诱导公式的一般化.你能画一张本章公式的逻辑图吗？推导这些公式的过程中用到了哪些数学思想方法？

5.函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 在刻画周期现象时有着非常重要的作用，其中参数 $A$，$\omega$，$\varphi$ 都有相应的实际意义.你能借助匀速圆周运动或其他周期现象(如简谐振动、单摆等)，说明这些参数的意义，以及它们的变化对函数图象的影响吗？

6.你能针对现实生活中的某种周期现象，用适当的方法收集数据，并利用这些数据为这种周期现象建立一个函数模型吗？

# 单元测试卷（五）

（考查范围：第五章　时间：120 分钟　分值：150 分）

**一、单项选择题**：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

**1.** $-1\,630°$角的终边在（　　）

A.第一象限　　B.第二象限

C.第三象限　　D.第四象限

B　**解析**：因为$-1\,630°=170°-5\times360°$，且$170°$为第二象限角，所以$-1\,630°$角的终边在第二象限.故选 B.

**2.** 已知 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=2$，则$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=$（　　）

A.$-2$　　B.$-\frac{1}{2}$　　C.$\frac{1}{2}$　　D.2

B　**解析**：因为 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=2$，所以 $\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\alpha}=2$，即$\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=2$，所以$\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{2}$，所以$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}=-\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=-\frac{1}{2}$.故选 B.

**3.** 函数 $f(x)=3\cos x-\sqrt{3}\sin x$ 图象的一条对称轴的方程是（　　）

A.$x=\frac{5\pi}{6}$　　B.$x=\frac{2\pi}{3}$

C.$x=\frac{\pi}{3}$　　D.$x=-\frac{\pi}{3}$

A　**解析**：因为 $f(x)=3\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)=2\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，所以函数 $f(x)$的图象的对称轴方程为 $x+\frac{\pi}{6}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $x=k\pi-\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以当 $k=1$ 时，$x=\frac{5\pi}{6}$是其中的一条对称轴方程.

**4.** 将函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象向右平移 $\varphi(\varphi>0)$个单位长度所得图象对应的函数为$g(x)$，则“$\varphi=\frac{\pi}{3}$”是“$g(x)$为偶函数”的（　　）

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

A　**解析**：因为函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象向右平移 $\varphi(\varphi>0)$个单位长度后得到函数 $g(x)$的图象，所以 $g(x)=\sin\left(2x-2\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$.若 $g(x)$为偶函数，则$-2\varphi+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\varphi=-\frac{\pi}{6}-\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，当 $k=-1$ 时，$\varphi=\frac{\pi}{3}$.因为 $\varphi=\frac{\pi}{3}$可以推出函数 $g(x)$为偶函数，而函数$g(x)$为偶函数不能推出 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以“$\varphi=\frac{\pi}{3}$”是“$g(x)$为偶函数”的充分不必要条件.故选 A.

**5.** 在$\triangle ABC$ 中，若 $\cos A\cos B=-\cos^2\frac{C}{2}+1$，则$\triangle ABC$ 一定是（　　）

A.等腰直角三角形　　B.直角三角形

C.等边三角形　　D.等腰三角形

D　**解析**：由已知得 $2\cos A\cos B=-2\cos^2\frac{C}{2}+2=-\cos C+1=\cos(A+B)+1=\cos A\cos B-\sin A\sin B+1$，所以 $\cos A\cos B+\sin A\sin B=\cos(A-B)=1$.又$-\pi<A-B<\pi$，所以 $A-B=0$，即 $A=B$.故选 D.

**6.** 若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1}{3}$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)=$（　　）

A.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B.$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C.$\frac{5\sqrt{3}}{9}$　　D.$-\frac{\sqrt{6}}{9}$

C　**解析**：$\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)=\cos\left[\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$，因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+\alpha<\frac{3\pi}{4}$，所以 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.又$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，所以 $\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$.故选 C.

**7.**已知函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 的定义域为$[a,b]$，值域为$[-1,\sqrt{2}]$，则 $b-a$ 的取值范围是　　（　　）

A.$\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$　　B.$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$

C.$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$　　D.$\left[\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right]$

D　**解析**：$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，因为$x\in[a,b]$，所以$x+\frac{\pi}{4}\in\left[a+\frac{\pi}{4},b+\frac{\pi}{4}\right]$.又因为$-1\leqslant\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$，所以$-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant1$.

结合正弦函数 $y=\sin x$ 的图象(图略)可知，$(b-a)_{\max}=\frac{3\pi}{2}$，$(b-a)_{\min}=\frac{3\pi}{4}$，所以 $b-a$ 的取值范围是$\left[\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right]$.

故选 D.

**8.**已知函数 $y=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$在区间$\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$上单调递增，且在区间$[0,\pi]$上恰好取得一次最大值 1，则 $\omega$ 的取值范围是　　（　　）

A.$\left(0,\frac{1}{5}\right]$　　B.$\left[\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right]$

C.$\left[\frac{1}{6},\frac{1}{5}\right]$　　D.$\left[\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$

C　**解析**：令 $X=\omega x+\frac{\pi}{3}$，$\omega>0$，$-\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}$，则$-\frac{2\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3}\leqslant X\leqslant\frac{5\pi\omega}{6}+\frac{\pi}{3}$，所以函数 $y=\sin X$ 在区间$\left[-\frac{2\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3},\frac{5\pi\omega}{6}+\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增.由正弦函数的单调性可得$\begin{cases}-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant-\frac{2\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{3},\\ \frac{5\pi\omega}{6}+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,\end{cases}k\in\mathbf{Z}$.

分析可知 $k$ 取 0，则 $0<\omega\leqslant\frac{1}{5}$.当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，$\frac{\pi}{3}\leqslant X\leqslant\pi\omega+\frac{\pi}{3}$.因为函数 $y=\sin X$ 在区间$\left[\frac{\pi}{3},\pi\omega+\frac{\pi}{3}\right]$上恰好取得一次最大值 1，所以$\frac{\pi}{2}\leqslant\pi\omega+\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{2}$，解得$\frac{1}{6}\leqslant\omega<\frac{13}{6}$.

综上可知$\frac{1}{6}\leqslant\omega\leqslant\frac{1}{5}$.故选 C.

**二、多项选择题**：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

**9.**中国传统扇文化有着极其深厚的底蕴.一般情况下，折扇的扇面可看作由从一个圆面中剪下的扇形制作而成.如图，设扇形的面积为 $S_1$，其圆心角为 $\theta$，圆面中剩余部分的面积为 $S_2$，当 $S_1$ 与 $S_2$ 的比值为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$时，扇面为“美观扇面”，则下列结论正确的是(参考数据：$\sqrt{5}\approx2.236$)　　（　　）



A.$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\theta}{2\pi-\theta}$

B.若$\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{2}$，扇形的半径 $R=3$，则 $S_1=2\pi$

C.若扇面为“美观扇面”，则 $\theta\approx138°$

D.若扇面为“美观扇面”，扇形的半径 $R=20$，则此时扇形的面积为 $200(3-\sqrt{5})$

AC　**解析**：对于 A，设扇形的半径为 $R$，因为 $S_1$ 与 $S_2$ 所在扇形的圆心角分别为 $\theta$，$2\pi-\theta$，

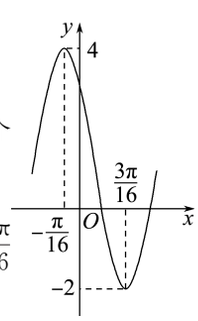
所以$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\theta\cdot R^2}{\frac{1}{2}(2\pi-\theta)\cdot R^2}=\frac{\theta}{2\pi-\theta}$，故 A 正确；

对于 B，因为$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\theta}{2\pi-\theta}=\frac{1}{2}$，所以 $\theta=\frac{2\pi}{3}$，所以 $S_1=\frac{1}{2}\cdot\theta\cdot R^2=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times9=3\pi$，故 B 错误；

对于 C，因为$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\theta}{2\pi-\theta}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，所以 $\theta=(3-\sqrt{5})\pi$，所以 $\theta\approx(3-2.236)\times180°\approx138°$，故 C 正确；

对于 D，$S_1=\frac{1}{2}\cdot\theta\cdot R^2=\frac{1}{2}\times(3-\sqrt{5})\pi\times400=200(3-\sqrt{5})\pi$，故 D 错误.故选 AC.

**10.**已知函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)+B\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，则　　（　　）




A.$f(x)=3\cos\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)+1$

B.点$\left(\frac{\pi}{16},1\right)$是 $f(x)$ 图象的一个对称中心

C.$f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{5\pi}{16}+\frac{k\pi}{2},-\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$

D.若实数 $x_1,x_2$ 满足 $f(x_1)=f(x_2)=\frac{5}{2}$，则 $|x_1-x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$

BCD　**解析**：由题图可知 $\begin{cases}A+B=4,\\-A+B=-2,\end{cases}$ 解得 $A=3,B=1$.

因为 $\frac{T}{2}=\frac{3\pi}{16}-\left(-\frac{\pi}{16}\right)=\frac{\pi}{4}$，所以 $T=\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=4$.

由五点作图法可知 $4\times\left(-\frac{\pi}{16}\right)+\varphi=0$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，

所以 $f(x)=3\cos\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)+1$，故选项 A 错误；

因为 $f\left(\frac{\pi}{16}\right)=3\cos\left(4\times\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{4}\right)+1=1$，所以 $\left(\frac{\pi}{16},1\right)$ 是 $f(x)$ 的图象的一个对称中心，故选项 B 正确；

当 $-\pi+2k\pi\leqslant4x+\frac{\pi}{4}\leqslant2k\pi$ 时，$-\frac{5\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\leqslant x\leqslant-\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，故选项 C 正确；

由 $f(x)=3\cos\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)+1=\frac{5}{2}$，得 $\cos\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$，所以 $4x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ 或 $4x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$，

故 $|x_1-x_2|_{\min}=\frac{\frac{2\pi}{3}}{4}=\frac{\pi}{6}$，故选项 D 正确.故选 BCD.

**11.** 若将函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则下列说法正确的是　（　　）

A.$g(x)=\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

B.$f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减

C.若 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上有且仅有 2 个零点，则实数 $a$ 的取值范围是 $\left[\frac{7\pi}{8},\frac{11\pi}{8}\right)$

D.若 $g(x)$ 在 $[0,t]$ 上的最大值为 $g(0)$，则实数 $t$ 的最大值为 $\frac{5\pi}{6}$

ABC　**解析**：对于 A，将函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，可得函数 $g(x)=\sqrt{2}\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，故选项 A 正确.

对于 B，$x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$t=2x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$，

又 $y=\sin t$ 在 $\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，故选项 B 正确.

对于 C，令 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0$，可得 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

解得 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}$，当 $k=1$ 时，$x=\frac{3\pi}{8}$；

当 $k=2$ 时，$x=\frac{7\pi}{8}$；当 $k=3$ 时，$x=\frac{11\pi}{8}$.

若 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上有且仅有 2 个零点，

则 $\frac{7\pi}{8}\leqslant a<\frac{11\pi}{8}$，即实数 $a$ 的取值范围是 $\left[\frac{7\pi}{8},\frac{11\pi}{8}\right)$，故选项 C 正确.

对于 D，$g(x)=\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，$g(0)=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}=1$.

令 $g(x)=\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1$，则 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 或 $2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 或 $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

若 $g(x)$ 在 $[0,t]$ 上的最大值为 $g(0)$，则实数 $t$ 的最大值为 $\frac{3\pi}{4}$，故选项 D 错误.故选 ABC.

**三、填空题**：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

**12.** 已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$3\sin\beta-\cos\alpha=\sqrt{3}$，$\sin\alpha+3\cos\beta=2$，则 $\alpha-\beta=$ _____.

$-\frac{\pi}{6}$　**解析**：将两式分别平方 $9\sin^2\beta+\cos^2\alpha-6\sin\beta\cos\alpha=3$，$\sin^2\alpha+9\cos^2\beta+6\sin\alpha\cos\beta=4$，相加得 $10+6\sin(\alpha-\beta)=7$，即 $\sin(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$.因为 $\alpha,\beta\in\left(0\ \frac{\pi}{2}\right)$，所以 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$，所以 $\alpha-\beta=-\frac{\pi}{6}$.

**13.**已知函数 $f(x)=3\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{12}\right)$ 内单调递增，则 $\omega$ 的最大值是_____.

4　**解析**：由函数 $f(x)=3\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{12}\right)$ 上单调递增，分析可得 $\omega\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}$，求得 $\omega\leqslant4$，故 $\omega$ 的最大值为 4.

故答案为 4.

**14.**已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$，其中 $\omega>0$，$0<\varphi<\pi$，且 $f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 恒成立.若 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内恰有 3 个零点，则 $\omega$ 的取值范围是_____.

$\frac{9}{2}<\omega<\frac{15}{2}$　**解析**：因为 $f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 恒成立，

所以 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{\pi\omega}{3}+\varphi\right)=2$，所以 $\frac{\pi\omega}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，则 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\omega}{3}(k\in\mathbf{Z})$，

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\varphi<\omega x+\varphi<\frac{\pi\omega}{2}+\varphi$.

因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $f(0)=\sin\varphi>0$，

因为 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上恰有 3 个零点，

所以 $\begin{cases}0<\varphi<\pi,\\3\pi<\frac{\pi\omega}{2}+\varphi\leqslant4\pi,\end{cases}$

即 $\begin{cases}0<2k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\omega}{3}<\pi,\\3\pi<\frac{\pi\omega}{2}+2k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\omega}{3}\leqslant4\pi,\end{cases}k\in\mathbf{Z}$，

解得 $\begin{cases}6k-\frac{3}{2}<\omega<6k+\frac{3}{2},\\15-12k<\omega\leqslant21-12k,\end{cases}k\in\mathbf{Z}$.

因为 $k\in\mathbf{Z}$，由题意可知 $k=1$.所以 $\begin{cases}\frac{9}{2}<\omega<\frac{15}{2},\\3<\omega\leqslant9,\end{cases}$ 可得 $\frac{9}{2}<\omega<\frac{15}{2}$，即 $\omega$ 的取值范围是 $\frac{9}{2}<\omega<\frac{15}{2}$.

**四、解答题**：本题共 5 小题，共 77 分.解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

**15.**(13 分)已知 $\sin x-2\cos x=0$.

(1)求 $2\sin^2x-\sin x\cos x+\cos^2x$ 的值；

(2)求 $\frac{2\sin^3x-\cos x}{\sin x+2\cos^3x}$ 的值.

**解**：由 $\sin x-2\cos x=0$，可得 $\tan x=2$.

$2\sin^2x-\sin x\cos x+\cos^2x$

$=\frac{2\sin^2x-\sin x\cos x+\cos^2x}{\sin^2x+\cos^2x}$

$=\frac{2\tan^2x-\tan x+1}{\tan^2x+1}=\frac{2\times2^2-2+1}{2^2+1}=\frac{7}{5}$.

(2)由方程组 $\begin{cases}\sin x-2\cos x=0,\\\sin^2x+\cos^2x=1,\end{cases}$ 可得 $\sin^2x=\frac{4}{5}$，$\cos^2x=\frac{1}{5}$.

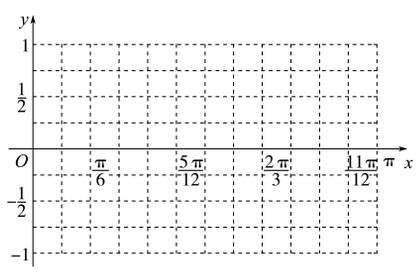
由(1)知 $\tan x=2$，可得 $\frac{2\sin^3x-\cos x}{\sin x+2\cos^3x}=\frac{2\sin^2x\tan x-1}{\tan x+2\cos^2x}=\frac{2\times\frac{4}{5}\times2-1}{2+2\times\frac{1}{5}}=\frac{11}{12}$.

**16.**(15 分)设 $x\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<0\right)$ 的最小正周期为 $\pi$，且 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求 $\omega$ 和 $\varphi$ 的值；

(2)在给定的坐标系中作出函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的图象；

(3)若 $f(x)>\frac{\sqrt{2}}{2}$，求 $x$ 的取值范围.



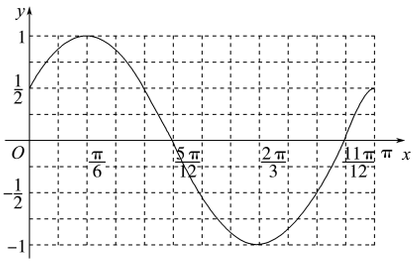

**解**：(1)因为函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以 $\omega=2$，$f(x)=\cos(2x+\varphi)$，

所以 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2\times\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=-\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$.因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)知 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，列表如下：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{12}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{12}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ |
| $f(x)$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | $-1$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |

$f(x)$在$[0,\pi]$上的图象如下：




(3)因为 $f(x)>\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)>\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $2k\pi-\frac{\pi}{4}<2x-\frac{\pi}{3}<2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，

则 $2k\pi+\frac{\pi}{12}<2x<2k\pi+\frac{7\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$，

即 $k\pi+\frac{\pi}{24}<x<k\pi+\frac{7\pi}{24}(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $x$ 的取值范围是$\left\{x\left|k\pi+\frac{\pi}{24}<x<k\pi+\frac{7\pi}{24},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

**17.**(15分)已知 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，函数 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x+\varphi)+\sin^2x$.

(1)若 $f(0)=\frac{3}{4}$，求 $\varphi$ 的值；

(2)若 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，求 $f(x)$的单调递增区间.

**解**：(1)因为 $f(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi=\frac{3}{4}$，

所以 $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又因为 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

(2)因为 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，

所以 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin^2x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2x-\frac{1}{2}\sin2x\right)+\sin^2x$

$=\frac{3}{4}\cos2x-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin2x+\frac{1-\cos2x}{2}$

$=\frac{1}{4}\cos2x-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin2x+\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}$.

令 $2k\pi-\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{3}\leqslant2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

得 $k\pi-\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi-\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，

所以 $f(x)$的单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{2\pi}{3},k\pi-\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$.

**18.**(17分)已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,0<\omega<5,|\varphi|<\pi)$，且 $f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=f(x)$，$f\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)+f(x)=0$，$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=2$.

(1)求 $\omega$ 的值；

(2)求 $f(x)$在区间$[0,\pi]$上的单调递减区间；

(3)若关于 $x$ 的方程$[f(x)]^2-2af(x)+a^2-1=0$ 在区间$[0,\pi]$上有且仅有4个不同的实数解，求实数 $a$ 的取值范围.

**解**：(1)因为 $f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=f(x)$，所以 $f(x)$的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{8}$对称.

又 $f\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)+f(x)=0$，所以 $f(x)$的图象关于点$\left(\frac{3\pi}{8},0\right)$对称，则有 $\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{8}=\frac{2k+1}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}(k\in\mathbf{N})$，即 $\omega=2(2k+1)(k\in\mathbf{N})$.

又因为 $0<\omega<5$，所以 $\omega=2$.

(2)因为 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=2$，即 $f(x)$在 $x=\frac{\pi}{8}$处取得最大值2，

所以 $A=2$，则 $2\times\frac{\pi}{8}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$. 又 $|\varphi|<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，

所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

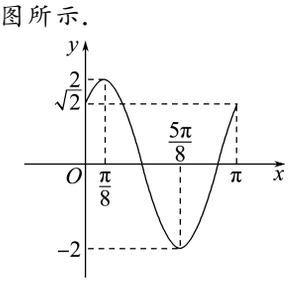
令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant2x+\frac{\pi}{4}\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，可得 $k\pi+\frac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$.

由 $x\in[0,\pi]$，可知 $k=0$，则 $\frac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{8}$，

所以 $f(x)$在区间$[0,\pi]$上的单调递减区间为$\left[\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}\right]$.

(3)方程$[f(x)]^2-2af(x)+a^2-1=0$ 可化为$[f(x)-(a+1)][f(x)-(a-1)]=0$，则 $f(x)=a+1$ 或 $f(x)=a-1$.

由(2)可知 $f(0)=f(\pi)=\sqrt{2}$，$f(x)$在区间$[0,\pi]$上的图象如图所示.



因为方程$[f(x)]^2-2af(x)+a^2-1=0$在区间$[0,\pi]$上有且仅有4个不同的实数解，

所以$\begin{cases}\sqrt{2}<a+1<2,\\-2<a-1<\sqrt{2}\end{cases}$或$\begin{cases}-2<a+1<\sqrt{2},\\-2<a-1<\sqrt{2},\end{cases}$

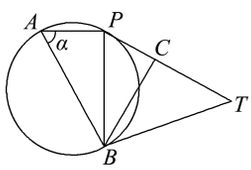
解得$\sqrt{2}-1<a<1$或$-1<a<\sqrt{2}-1$.

所以实数$a$的取值范围是$(-1,\sqrt{2}-1)\cup(\sqrt{2}-1,1)$.

**19.**(17分)如图，点$P$在直径$AB=1$的圆的弧$AB$上移动(点$P$不与$A,B$重合)，过点$P$作圆的切线$PT$，且$PT=1$，$\angle PAB=\alpha$.过点$B$作$BC\perp PT$于点$C$.

(1)当$\alpha$为何值时，四边形$ABTP$的面积最大？

(2)求$PA+PB+PC$的取值范围.




**解**：(1)因为$AB$为直径，且$AB=1$，所以$\angle APB=90°$，$PA=\cos\alpha$，$PB=\sin\alpha$.

因为$PT$切圆于点$P$，所以$\angle TPB=\angle PAB=\alpha$，

所以$BC=\sin\alpha\cdot PB=\sin^2\alpha$.

所以$S_{四边形ABTP}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle TPB}$

$=\frac{1}{2}PA\cdot PB+\frac{1}{2}PT\cdot BC$

$=\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin^2\alpha$

$=\frac{1}{4}\sin 2\alpha+\frac{1}{4}(1-\cos 2\alpha)$

$=\frac{1}{4}(\sin 2\alpha-\cos 2\alpha)+\frac{1}{4}$

$=\frac{\sqrt{2}}{4}\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{4}$.

因为$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以$-\frac{\pi}{4}<2\alpha-\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$，

所以当$2\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即$\alpha=\frac{3\pi}{8}$时，四边形$ABTP$的面积最大.

(2)$PA+PB+PC=\cos\alpha+\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha$.

设$t=\cos\alpha+\sin\alpha$，则$t^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\cos\alpha\sin\alpha=1+2\cos\alpha\sin\alpha$，所以$\cos\alpha\sin\alpha=\frac{t^2-1}{2}$，

则$PA+PB+PC=\frac{t^2-1}{2}+t=\frac{t^2}{2}+t-\frac{1}{2}$.

令$g(t)=\frac{t^2}{2}+t-\frac{1}{2}$，

因为$t=\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\in(1,\sqrt{2}]$，

又$g(t)$在$(1,\sqrt{2}]$上单调递增，

所以$g(t)\in\left(1,\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right]$，

故$PA+PB+PC$的取值范围是$\left(1,\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right]$.

# 模块测试卷

(考查范围：必修　第一册　时间：120分钟　分值：150分)

**一、单项选择题**：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

**1.**设全集$U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，集合$A=\{-1,2\}$，$B=\{x\mid x^2-3x=0\}$，则$\complement_U(A\cup B)=$　(　)

A.$\{1,3\}$　　B.$\{0,1,3\}$

C.$\{-2,1\}$　　D.$\{-2,0,1\}$

C　**解析**：因为$B=\{x\mid x^2-3x=0\}=\{0,3\}$，所以$A\cup B=\{-1,0,2,3\}$.

又$U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，

所以$\complement_U(A\cup B)=\{-2,1\}$.故选C.

**2.**“$m=-2$或$m=3$”是“幂函数$f(x)=(m^2-m-5)x^{m^2+m-3}$在$(0,+\infty)$上是减函数”的　(　)

A.充分不必要条件

B.充要条件

C.必要不充分条件

D.既不充分也不必要条件

C　**解析**：由幂函数$f(x)=(m^2-m-5)x^{m^2+m-3}$在$(0,+\infty)$上是减函数，

得$\begin{cases}m^2-m-5=1,\\m^2+m-3<0,\end{cases}$解得$m=-2$，

故“$m=-2$或$m=3$”是“幂函数$f(x)=(m^2-m-5)x^{m^2+m-3}$在$(0,+\infty)$上是减函数”的必要不充分条件.故选C.

**3.**命题“$\exists x\in\mathbf{R},x^2+2x+2\leqslant 0$”的否定是　(　)

A.$\forall x\in\mathbf{R},x^2+2x+2>0$

B.$\forall x\in\mathbf{R},x^2+2x+2\leqslant 0$

C.$\exists x\in\mathbf{R},x^2+2x+2>0$

D.$\exists x\in\mathbf{R},x^2+2x+2\geqslant 0$

A　**解析**：存在量词命题的否定是全称量词命题，且要注意否定结论.故选A.

**4.**已知函数$f(x)=2\cos(2x+\varphi)\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度后，得到函数$g(x)$的图象.若$g(x)$的图象关于原点对称，则$\varphi=$　(　)

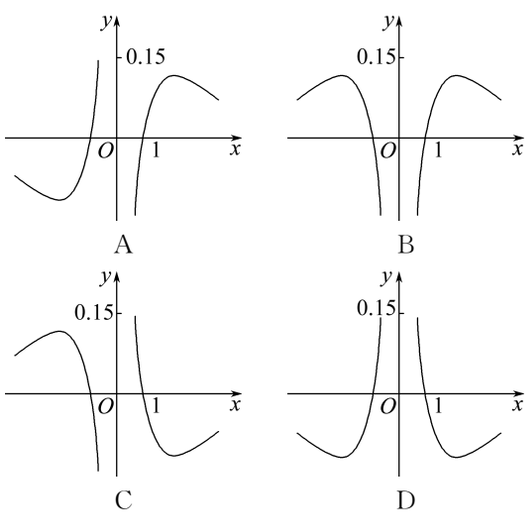
A.$\frac{\pi}{3}$　　B.$\frac{\pi}{4}$　　C.$\frac{\pi}{6}$　　D.$\frac{\pi}{12}$

C　**解析**：将函数 $f(x)=2\cos(2x+\varphi)\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得函数 $g(x)=2\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\varphi\right]=2\cos\left(2x+\varphi-\frac{2\pi}{3}\right)$ 的图象.又函数 $g(x)$ 的图象关于原点对称，则 $\varphi-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $\varphi=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+k\pi=\frac{7\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，则取 $k=-1,\varphi=\frac{\pi}{6}$.

**5.**设 $\alpha$ 为锐角，若 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$，则 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$ 的值为　　(B)

A.$\frac{12}{25}$　　B.$\frac{24}{25}$　　C.$-\frac{24}{25}$　　D.$-\frac{12}{25}$

**6.**函数 $y=\frac{\ln|x|}{x^2+2}$ 的图象大致为　　(　　)




B　**解析**：设 $y=f(x)=\frac{\ln|x|}{x^2+2}$，则函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq0\}$，

又 $f(-x)=\frac{\ln|-x|}{(-x)^2+2}=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为偶函数，排除 A，C；

当 $x\in(0,1)$ 时，$\ln|x|<0,x^2+2>0$，所以 $f(x)<0$，排除 D.故选 B.

**7.**已知函数 $f(x)=\log_2(x^2+2x)$，则下列结论正确的是　　(　　)

A.$f(x)$ 的定义域为 **R**

B.$f(x)$ 的值域是 $[0,+\infty)$

C.$f(x)$ 是偶函数

D.$f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,-2)$

D　**解析**：对于 A，要使函数 $f(x)$ 有意义，则 $x^2+2x>0$，解得 $x<-2$ 或 $x>0$，

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$，故选项 A 错误；

对于 B，由对数函数的性质可知，函数 $f(x)$ 的值域是 **R**，故选项 B 错误；

对于 C，因为函数 $f(x)$ 的定义域不关于原点对称，所以函数 $f(x)$ 不具有奇偶性，故选项 C 错误；

对于 D，令 $\mu=x^2+2x$，则 $f(\mu)=\log_2\mu$，

由二次函数的性质可知，$\mu=x^2+2x$ 在区间 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，

由对数函数的性质可知，$f(\mu)=\log_2\mu$ 在定义域内单调递增，

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，故选项 D 正确.故选 D.

**8.**已知函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数，若 $\forall a,b\in[0,+\infty)$，且 $a\neq b$，都有 $\frac{af(a)-bf(b)}{a-b}<0$ 成立，则不等式 $f\left(\frac{1}{t}\right)-(2t^2-t)f(2t-1)>0$ 的解集为　　(　　)

A.$(-1,0)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

B.$\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup(1,+\infty)$

C.$(-\infty,-1)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

D.$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$

D　**解析**：令 $g(x)=xf(x)$，由题意知 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为减函数，

又 $f(x)$ 为 **R** 上的偶函数，所以 $g(x)$ 为 **R** 上的奇函数.

又 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为减函数，$g(0)=0$，

所以 $g(x)$ 在 **R** 上为减函数.

① 当 $t>0$ 时，$\frac{1}{t}f\left(\frac{1}{t}\right)>(2t-1)f(2t-1)$，即 $g\left(\frac{1}{t}\right)>g(2t-1)$，所以 $\frac{1}{t}<2t-1$，所以 $1<2t^2-t$，解得 $t>1$；

② 当 $t<0$ 时，$\frac{1}{t}f\left(\frac{1}{t}\right)<(2t-1)f(2t-1)$，即 $g\left(\frac{1}{t}\right)<g(2t-1)$，所以 $\frac{1}{t}>2t-1$，所以 $1<2t^2-t$，解得 $t<-\frac{1}{2}$.

综上，$t<-\frac{1}{2}$ 或 $t>1$.

故选 D.

**二、多项选择题**：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

**9.** 已知 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$，下列关于该函数的说法错误的是 （　　）

A.$f(x)$的最小正周期为 $2\pi$

B.$f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$上单调递增

C.当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$时，$f(x)$的取值范围为$\left[-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$

D.函数 $f(x)$的图象可由函数 $g(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度得到

ACD　**解析**：因为 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$，所以 $f(x)$的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，A 不正确；令 $t=2x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，而 $y=\frac{1}{2}\sin t$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，所以 $f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$上单调递增，B 正确；因为 $t=2x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，$\sin t\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，所以 $f(x)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{2}\right]$，C 不正确；由于 $g(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right]$，所以函数 $f(x)$的图象可由函数 $g(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度得到，D 不正确.故选 ACD.

**10.** 下列不等式成立的是 （　　）

A.$\log_2 3<\log_2 5$　　B.$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{5}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$

C.$2^{0.3}>\log_3 2$　　D.$\log_2 3>\log_3 4$

ACD　**解析**：利用 $y=\log_2 x$ 是单调递增函数，可得$\log_2 3<\log_2 5$，故选项 A 正确；

利用指数函数的单调性可知$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{5}}>\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$，

利用幂函数的单调性可知$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}>\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$，所以$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{5}}>\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$，故选项 B 错误；

利用指数函数的单调性可知$2^{0.3}>2^0=1$，

利用对数函数的单调性可知$\log_3 2<\log_3 3=1$，所以$2^{0.3}>\log_3 2$，故选项 C 正确；

利用作商法$\frac{\log_2 3}{\log_3 4}=\frac{\log_2 3}{\frac{\log_2 4}{\log_2 3}}=\left(\frac{\log_2 3}{\sqrt{2}}\right)^2$，

因为 $2^{\sqrt{2}}<2^{1.5}=\sqrt{2^3}<\sqrt{9}=3$，

所以$\log_2 3>\log_2 2^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

即$\frac{\log_2 3}{\log_3 4}=\left(\frac{\log_2 3}{\sqrt{2}}\right)^2>1$，所以$\log_2 3>\log_3 4$，故选项 D 正确.

**11.** 已知函数 $f(x)=\log_4(1+4^x)-\frac{1}{2}x$，则下列说法正确的是 （　　）

A.函数 $f(x)$的图象关于原点对称

B.函数 $f(x)$的图象关于 $y$ 轴对称

C.函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上是减函数

D.函数 $f(x)$的值域为$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

BD　**解析**：因为 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x)=\log_4(1+4^x)-\log_4 4^{\frac{x}{2}}=\log_4\frac{1+4^x}{2^x}=\log_4(2^{-x}+2^x)$，

所以 $f(-x)=\log_4(2^x+2^{-x})=f(x)$，所以 $f(x)$为偶函数，所以 A 错误，B 正确；

令 $t=2^x$，则 $y=\log_4\left(t+\frac{1}{t}\right)$，

令 $s=t+\frac{1}{t}$，则 $y=\log_4 s$，

当 $x\in[0,+\infty)$时，$t\in[1,+\infty)$，所以 $s=t+\frac{1}{t}$为增函数，

又 $y=\log_4 s$ 为增函数，所以 $y=\log_4\left(t+\frac{1}{t}\right)$为增函数.

又 $t=2^x$ 为增函数，所以 $f(x)$在$[0,+\infty)$上是增函数.

又 $f(x)$为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，

所以 $f(x)\geqslant f(0)=\frac{1}{2}$，所以 $f(x)$的值域为$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

所以 C 错误，D 正确.

故选 BD.

**三、填空题**：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

**12.** 函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(\log_2 x)^2-1}}$的定义域为$\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$.

**13.** $\dfrac{1+\cos 20^\circ}{2\sin 20^\circ}-\sin 10^\circ\times\left(\dfrac{1}{\tan 5^\circ}-\tan 5^\circ\right)=$____.

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　**解析**：原式$=\dfrac{2\cos^2 10^\circ}{4\sin 10^\circ\cos 10^\circ}-\sin 10^\circ\times\left(\dfrac{\cos 5^\circ}{\sin 5^\circ}-\dfrac{\sin 5^\circ}{\cos 5^\circ}\right)=\dfrac{\cos 10^\circ}{2\sin 10^\circ}-2\cos 10^\circ=\dfrac{\cos 10^\circ-2\sin 20^\circ}{2\sin 10^\circ}=\dfrac{\cos 10^\circ-2\sin(30^\circ-10^\circ)}{2\sin 10^\circ}=\dfrac{\cos 10^\circ-2\sin 30^\circ\cos 10^\circ+2\cos 30^\circ\sin 10^\circ}{2\sin 10^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**14.** 已知正实数 $a$，$b$ 满足 $a+b=4$，则 $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+3}$ 的最小值为_____.

$\dfrac{1}{2}$　**解析**：因为正实数 $a$，$b$ 满足 $a+b=4$，

所以 $a+1>1$，$b+3>3$，$a+1+b+3=8$，

所以 $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+3}=\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+3}\right)[(a+1)+(b+3)]=\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{a+1}{b+3}+\dfrac{b+3}{a+1}+2\right)\geqslant\dfrac{1}{8}\left(2\sqrt{\dfrac{a+1}{b+3}\times\dfrac{b+3}{a+1}}+2\right)=\dfrac{1}{2}$.

当且仅当 $\dfrac{a+1}{b+3}=\dfrac{b+3}{a+1}$，即 $a=3$，$b=1$ 时取等号，

所以 $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+3}$ 的最小值为 $\dfrac{1}{2}$.

故答案为 $\dfrac{1}{2}$.

**四、解答题**：本题共 5 小题，共 77 分.解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

**15.**（13 分）已知集合 $A=\{x\mid a-1<x<2a+1\}$，函数 $y=\lg(x-x^2)$ 的定义域为集合 $B$.

（1）若 $a=1$，求集合 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)$；

（2）若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 $a$ 的取值范围.

**解**：（1）因为 $B=\{x\mid x-x^2>0\}=\{x\mid 0<x<1\}$，

所以 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid x\leqslant 0$，或 $x\geqslant 1\}$.

又 $a=1$ 时，$A=\{x\mid 0<x<3\}$，

所以 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x\mid 1\leqslant x<3\}$.

（2）若 $A=\varnothing$，则 $a-1\geqslant 2a+1$，

解得 $a\leqslant -2$，满足 $A\cap B=\varnothing$.

若 $A\neq\varnothing$，且由 $A\cap B=\varnothing$，

可知 $\begin{cases}2a+1>a-1,\\2a+1\leqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a+1>a-1,\\a-1\geqslant 1,\end{cases}$

解得 $-2<a\leqslant-\dfrac{1}{2}$ 或 $a\geqslant 2$.

综上，实数 $a$ 的取值范围是 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup[2,+\infty)$.

**16.**（15 分）已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)=\dfrac{-2^x+b}{2^{x+1}+a}$ 是奇函数.

（1）求 $a$，$b$ 的值；

（2）判断并证明函数 $f(x)$ 的单调性；

（3）若对任意的 $t\in\mathbf{R}$，不等式 $f(2kt^2+kt)+f(kt-kt^2+1)<0$ 恒成立，求 $k$ 的取值范围.

**解**：（1）因为 $f(x)=\dfrac{-2^x+b}{2^{x+1}+a}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

所以 $f(0)=\dfrac{-1+b}{2+a}=0$，即 $b=1$.

$-f(1)=-\dfrac{-2+1}{4+a}=f(-1)=\dfrac{-\frac{1}{2}+1}{1+a}$，解得 $a=2$.

所以 $f(x)=\dfrac{-2^x+1}{2^{x+1}+2}$，$f(-x)=\dfrac{-2^{-x}+1}{2^{-x+1}+2}=\dfrac{2^x-1}{2^{x+1}+2}=-f(x)$，符合题意.

（2）由（1）知 $f(x)=\dfrac{-2^x+1}{2^{x+1}+2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^x+1}$，

由指数函数的单调性，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

证明如下：设 $x_1$，$x_2\in\mathbf{R}$，$x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^{x_1}+1}-\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^{x_2}+1}\right)=\dfrac{2^{x_2}-2^{x_1}}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$.

由指数函数的单调性可知，$2^{x_2}>2^{x_1}$，即 $2^{x_1}-2^{x_2}>0$，

故 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

（3）因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

所以 $f(2kt^2+kt)+f(kt-kt^2+1)<0\Rightarrow f(2kt^2+kt)<-f(kt-kt^2+1)=f(-kt+kt^2-1)$.

因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

所以 $2kt^2+kt>-kt+kt^2-1$，即 $kt^2+2kt+1>0$，

从而对任意的 $t\in\mathbf{R}$，$kt^2+2kt+1>0$ 恒成立.

当 $k=0$ 时，不等式 $kt^2+2kt+1>0$ 恒成立，满足题意；

当 $k\neq 0$ 时，要使对任意的 $t\in\mathbf{R}$，$kt^2+2kt+1>0$ 恒成立，

只需 $\begin{cases}k>0,\\\Delta=4k^2-4k<0,\end{cases}$ 解得 $0<k<1$.

综上所述，$k$ 的取值范围为 $[0,1]$.

**17.**（15 分）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 为偶函数，且其图象上相邻的一个最高点和最低点之间的距离为 $\sqrt{4+\pi^2}$.

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2)若 $\tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\alpha}=5$,求 $\dfrac{\sqrt{2}f\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)-1}{1-\tan\alpha}$ 的值.

**解**:(1)设最高点为 $(x_1,1)$,相邻的最低点为 $(x_2,-1)$,则 $|x_1-x_2|=\dfrac{T}{2}(T>0)$.

由题意及勾股定理得 $(x_1-x_2)^2+[1-(-1)]^2=4+\pi^2$,

所以 $\dfrac{T^2}{4}+4=4+\pi^2$,所以 $T=2\pi=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

又 $\omega>0$,所以 $\omega=1$,

因此 $f(x)=\sin(x+\varphi)$.

由于函数 $f(x)$ 是偶函数,所以 $\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.

又 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$,则 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$,所以函数 $f(x)$ 的解析式为

$f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos x$.

(2)因为 $\tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\alpha}=5$,

所以 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=5$,

所以 $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$.

所以 $\dfrac{\sqrt{2}f\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)-1}{1-\tan\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)-1}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$

$=\dfrac{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha-1}{\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}}$

$=\dfrac{(2\sin\alpha\cos\alpha-2\sin^2\alpha)\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$

$=\dfrac{2\sin\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$

$=2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{2}{5}$.

**18.**(17 分)回顾巴黎奥运会,中国元素随处可见.这个盛夏,“中国智造”不仅为巴黎奥运会注入了新动力,也向世界展示了中国向“新”而行的活力,让人们在享受比赛的同时,感受到中国发展的脉搏.巴黎奥组委的数据显示,本届奥运会 80% 的吉祥物产自中国.据调查,国内某公司出售一款巴黎奥运会吉祥物,需要固定投入 300 万元费用.假设购进该款产品全部售出.若以 80 元的单价出售,可售出 15 万件,且每降价 1 元,销量增加五千件.若购进该产品数量不超过 30 万件,则经销商按照每件 30 元的成本收费;若购进 30 万件以上,则直接与玩具公司合作,以全新方式进行销售,此时利润 $P(x)$(单位:万元)与销量 $X$(单位:万件)的关系为 $P(x)=-x-\dfrac{2\,500}{x+10}+1\,000$.

(1)当购进产品数量为 10 万件时,利润是多少?

(2)写出利润 $W(x)$ 关于购进产品数量 $x$(单位:万件)的函数解析式?(利润=销售收入−成本)

(3)购进并销售产品多少万件时,利润最大?此时利润是多少?

**解**:(1)$(80-30)\times10-300=200$(万元).

所以当购进产品数量为 10 万件时,利润是 200 万元.

(2)当 $0<x\leqslant15$ 时,$W(x)=(80-30)x-300=50x-300$.

当 $15<x\leqslant30$ 时,不妨设降价 $t$ 元,购进产品全部售出,

则 $15+0.5t=x$,得到 $t=2x-30$,

所以 $W(x)=[80-(2x-30)]x-30x-300=-2x^2+80x-300$.

当 $x>30$ 时,$W(x)=-x-\dfrac{2\,500}{x+10}+1\,000$,

所以 $W(x)=\begin{cases}50x-300,0<x\leqslant15,\\-2x^2+80x-300,15<x\leqslant30,\\-x-\dfrac{2\,500}{x+10}+1\,000,x>30.\end{cases}$

(3)由(2)知,当 $x\leqslant15$ 时,$W(x)=50x-300$,

当 $x=15$ 时,利润最大,此时利润是 450 万元,

当 $15<x\leqslant30$ 时,$W(x)=-2x^2+80x-300=-2(x-20)^2+500$,

当 $x=20$ 时,利润最大,此时利润是 500 万元.

当 $x>30$ 时,$W(x)=-x-\dfrac{2\,500}{x+10}+1\,000=-\left[(x+10)+\dfrac{2\,500}{x+10}\right]+1\,010\leqslant-2\sqrt{(x+10)\times\dfrac{2\,500}{(x+10)}}+1\,010=910$,

当且仅当 $x+10=\dfrac{2\,500}{x+10}$,即 $x=40$ 时,等号成立,此时利润最大,利润是 910 万元.

因为 $910>500>450$,所以购进并销售产品 40 万件时,利润最大,此时利润是 910 万元.

**19.**(17 分)已知函数 $f(x)=\ln(e^x-1)-\ln(e^x+1)$.

(1)求函数 $f(x)$ 的定义域.

(2)试判断 $f(x)$ 的单调性,并说明理由.

(3)定义:若函数 $F(x)$ 在区间 $[m,n]$ 上的值域为 $[m,n]$,则称区间 $[m,n]$ 是函数 $F(x)$ 的“完美区间”.若函数 $g(x)=f(x)+\ln b$ 存在“完美区间”,求实数 $b$ 的取值范围.

**解**:(1)要使函数 $f(x)$ 有意义,须使 $e^x-1>0$,

解得 $x>0$,

所以函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$.

(2)$f(x)=\ln(e^x-1)-\ln(e^x+1)$在$(0,+\infty)$上单调递增.理由如下：

(方法一)因为$f(x)=\ln(e^x-1)-\ln(e^x+1)=\ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\ln\left(1-\dfrac{2}{e^x+1}\right)$，

又$y=e^x+1$在$(0,+\infty)$上为增函数，

所以$y=\dfrac{2}{e^x+1}$在$(0,+\infty)$上为减函数，

所以$y=1-\dfrac{2}{e^x+1}$在$(0,+\infty)$上为增函数，

所以$y=\ln\left(1-\dfrac{2}{e^x+1}\right)$在$(0,+\infty)$上为增函数，

故$f(x)=\ln(e^x-1)-\ln(e^x+1)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

(方法二)因为$f(x)=\ln(e^x-1)-\ln(e^x+1)=\ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$，

对任意$x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且$x_1<x_2$，可知$e^{x_2}>e^{x_1}>1$，

则$f(x_1)-f(x_2)=\ln\dfrac{e^{x_1}-1}{e^{x_1}+1}-\ln\dfrac{e^{x_2}-1}{e^{x_2}+1}=\ln\dfrac{(e^{x_1}-1)(e^{x_2}+1)}{(e^{x_1}+1)(e^{x_2}-1)}$.

又$(e^{x_1}-1)(e^{x_2}+1)-(e^{x_1}+1)(e^{x_2}-1)=2(e^{x_1}-e^{x_2})<0$，

可知$0<\dfrac{(e^{x_1}-1)(e^{x_2}+1)}{(e^{x_1}+1)(e^{x_2}-1)}<1$，

所以$\ln\dfrac{(e^{x_1}-1)(e^{x_2}+1)}{(e^{x_1}+1)(e^{x_2}-1)}<0$，即$f(x_1)<f(x_2)$.

故$f(x)=\ln(e^x-1)-\ln(e^x+1)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

(3)由(2)可知$g(x)=f(x)+\ln b$在$(0,+\infty)$上单调递增，设区间$[m,n]$是函数$g(x)=f(x)+\ln b$的“完美区间”，

则$g(m)=m$，$g(n)=n$.

可知方程$g(x)=x$在$(0,+\infty)$上至少存在两个不同的实数解，

即$b=\dfrac{e^x(e^x+1)}{e^x-1}$在$(0,+\infty)$上至少存在两个不同的实数解，

所以直线$y=b$与函数$y=\dfrac{e^x(e^x+1)}{e^x-1}$在$(0,+\infty)$上的图象至少存在两个不同的交点.

令$t=e^x-1$，则$t>0$，

所以$b=\dfrac{(t+1)(t+2)}{t}=\dfrac{t^2+3t+2}{t}=t+\dfrac{2}{t}+3\geqslant 3+2\sqrt{2}$，当且仅当$t=\sqrt{2}$时，取等号.

又$y=t+\dfrac{2}{t}+3$在$(0,\sqrt{2})$上单调递减，在$(\sqrt{2},+\infty)$上单调递增，

且当$t\to 0$时，$y\to+\infty$；当$t\to+\infty$时，$y\to+\infty$.

所以$b>3+2\sqrt{2}$.

故实数$b$的取值范围为$(3+2\sqrt{2},+\infty)$.