参考答案

第一章　空间向量与立体几何

1.1　空间向量及其运算

1.1.1　空间向量及其线性运算

第1课时　空间向量及其线性运算

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(1)大小　方向

(2)大小

(3)①有向线段　②$\overrightarrow{AB}$　$|\overrightarrow{AB}|$

知识点二

0　1　相等　相反　相同　相等　平行　重合

知识点三

(1)③$\boldsymbol{0}$

(2)$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$　$\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

【概念辨析】

1.(1)√　(2)×　(3)×

2.$\overrightarrow{AD}$　**解析：**$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

3.(1)**提示：**没有关系.

(2)**提示：**求向量的和时，可以首尾相接(三角形法则)，也可以共起点(平行四边形法则)；求向量的差时，必须共起点(三角形法则：共起点，指被减).

(3)**提示：**向量$\lambda\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{a}$一定是共线向量.

(4)**提示：**λ的正负影响着向量$\lambda\boldsymbol{a}$的方向，λ的绝对值的大小影响着向量$\lambda\boldsymbol{a}$的长度.

任务型课堂

任务1

1.D　**解析：**对于A，单位向量长度相等，方向不确定，故选项A错误；对于B，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$只能说明$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的长度相等而方向不确定，故选项B错误；对于C，向量作为矢量不能比较大小，故选项C错误；对于D，相等向量方向相同、大小相等，故选项D正确.

2.解：(1)向量$\overrightarrow{AA'}$，$\overrightarrow{A'A}$，$\overrightarrow{BB'}$，$\overrightarrow{B'B}$，$\overrightarrow{CC'}$，$\overrightarrow{C'C}$，$\overrightarrow{DD'}$，$\overrightarrow{D'D}$都是单位向量，而其他向量的模均不为1，故单位向量共有8个.

(2)由于长方体的左、右两侧面的对角线长均为$\sqrt{5}$，故模为$\sqrt{5}$的向量有$\overrightarrow{AD'}$，$\overrightarrow{D'A}$，$\overrightarrow{A'D}$，$\overrightarrow{DA'}$，$\overrightarrow{BC'}$，$\overrightarrow{C'B}$，$\overrightarrow{B'C}$，$\overrightarrow{CB'}$.

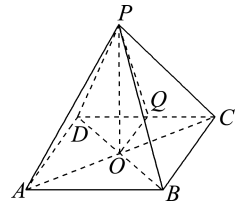
(3)与向量$\overrightarrow{AB}$相等的向量(除它自身之外)有$\overrightarrow{A'B'}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{D'C'}$.

(4)向量$\overrightarrow{AA'}$的相反向量有$\overrightarrow{A'A}$，$\overrightarrow{B'B}$，$\overrightarrow{C'C}$，$\overrightarrow{D'D}$.

任务2

[探究活动]

例1　**解：**(1)如图，$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}$，由向量加法的平行四边形法则可得$\overrightarrow{PO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA})$，故$\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}$.



所以$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PQ}$，

所以$x=-\frac{1}{2}$，$y=-\frac{1}{2}$.

(2)因为$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{PD}+2\overrightarrow{QO}$
$=\overrightarrow{PD}+2(\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{PQ})=\overrightarrow{PD}+2\overrightarrow{PO}-2\overrightarrow{PQ}$，

所以$x=2$，$y=-2$.

例2　**解：**(1)因为P是C_1D_1的中点，

所以$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1P}=\boldsymbol{a}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{D_1C_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

(2)因为N是BC的中点，

所以$\overrightarrow{A_1N}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

(3)因为M是AA_1的中点，

所以$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\left(\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\right)=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

[一题多思]

思考1.解：$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

思考2.解：$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\frac{2}{3}\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$.

[应用迁移]

1.A　**解析：**$\overrightarrow{DA}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{DA}-\frac{1}{2}(2\overrightarrow{DE})=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{AE}$.

2.解：(1)$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.

(2)$\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{C_1C}=\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{C_1C}=\overrightarrow{A_1C}$.

(3)$\frac{1}{2}(\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GB})-\overrightarrow{A_1O}=\frac{1}{2}\times2\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{GO}+$

$\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{GA_1}$.

3.解：(1)因为$\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD'}$

$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}$，

且$\overrightarrow{BD'}=x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AA'}$，

所以$x=1,y=-1,z=1$.

(2)因为$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'E}=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$

$=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'D'})$

$=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{A'D'}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}$，

且$\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AA'}$，

所以$x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2},z=1$.

第2课时　共线向量与共面向量

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(1)$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$

(2)$\lambda\boldsymbol{a}$　方向向量　方向向量　方向向量

知识点二

(1)平行　平行于　共面向量

(2)不共线　$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$

【概念辨析】

1.(1)√　(2)×　(3)×　(4)×

2.D　**解析**：当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线时，A项不正确；当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$是相反向量，$\lambda=\mu\neq0$时，$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$仍成立，故B项不正确；若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不共线，则与$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$共面的任意向量可以用$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$表示，对空间向量则不一定，故C项不正确，D项正确.

3.(1)**提示**：不能.若$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则对任意向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$都有$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$且$\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{c}$.

(2)**提示**：只需证明向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$(或$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$，或$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{BC}$)共线即可.

(3)**提示**：空间中任意两个向量都可以平移到同一个平面内，成为同一个平面内的两个向量，因此一定是共面向量.

任务型课堂

任务1

[探究活动]

例1　**证明**：因为E,H分别是AB,AD的中点，

所以$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，

所以$\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{CG}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CF}\right)=\frac{3}{4}(\overrightarrow{CG}-\overrightarrow{CF})=\frac{3}{4}\overrightarrow{FG}$，

所以$\overrightarrow{EH}\parallel\overrightarrow{FG}$，且$|\overrightarrow{EH}|=\frac{3}{4}|\overrightarrow{FG}|\neq|\overrightarrow{FG}|$.

又点F,G不在直线EH上，

所以四边形$EFGH$是梯形.

[应用迁移]

C　**解析**：对于A，对于空间中的任意向量，都有$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$，不能说明三点共线，故选项A错误；对于B，若$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$，则$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$，而$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$，据此可知$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}$，即$B,C$两点重合，故选项B错误；对于C，$\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{BC}$，则$A,B,C$三点共线，故选项C正确；对于D，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$，则线段$AB$的长度与线段$BC$的长度相等，不一定有$A,B,C$三点共线，故选项D错误.

任务2

[探究活动]

例2　**证明**：因为点M在BD上，且$BM=\frac{1}{3}BD$，

所以$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

同理，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$，

所以$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{BA}+\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$.

又$\overrightarrow{CD}$与$\overrightarrow{DE}$不共线，根据向量共面的充要条件可知，$\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DE}$共面.

[应用迁移]

1.D　**解析**：因为点M在平面ABC内，且$\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$，所以$\lambda+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=1$，解得$\lambda=\frac{7}{12}$.

2.解：因为M,N分别是AC,BF的中点，而四边形$ABCD$与四边形$ABEF$都是平行四边形，

所以$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FB}$.

又$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{AF}-\frac{1}{2}\overrightarrow{FB}$，

所以$\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{AF}-\frac{1}{2}\overrightarrow{FB}$.

所以$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB}=2(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FN})=2\overrightarrow{MN}$，

即$\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{MN}$，故$\overrightarrow{CE}$与$\overrightarrow{MN}$共线.

1.1.2　空间向量的数量积运算

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(1)夹角　$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$

(2)$0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$　$\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$　互相垂直　$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

知识点二

(1)$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$　$|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$

(2)$\overrightarrow{A'B'}$　投影向量　$\boldsymbol{a},\overrightarrow{A'B'}$

(3)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$　$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$　$-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$　$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle$

$\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} \leqslant \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$

(4)①$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$　②$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$　③$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)×　(4)√

2.D　**解析：**$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=2|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos 120°=2\times4-2\times5\times\left(-\frac{1}{2}\right)=13.$

3.(1)**提示：**不一定，也可能 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

(2)**提示：**不一定，当$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$ 时，也有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$，故当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$ 时，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$不一定是锐角.

(3)**提示：**不成立.

任务型课堂

任务 1

1.B　**解析：**$\overrightarrow{EB_1}\cdot\overrightarrow{EB}=(\overrightarrow{EA_1}+\overrightarrow{A_1B_1})\cdot(\overrightarrow{EA_1}+\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{EA_1}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{EA_1}+\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{EA_1}^2+\overrightarrow{EA_1}\cdot\overrightarrow{A_1A}+2\overrightarrow{EA_1}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}^2=1^2+2^2=5.$

2.解：设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，则$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{c}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$.

(1)$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED_1}=\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{A_1D_1}-\overrightarrow{A_1E})=\overrightarrow{BC}\cdot\left[\overrightarrow{A_1D_1}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB})\right]$

$=\boldsymbol{b}\cdot\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}\right]=|\boldsymbol{b}|^2=16.$

(2)$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB_1}=(\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{A_1F})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1})=(\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1F})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1})=\left(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{c}|^2-|\boldsymbol{a}|^2=0.$

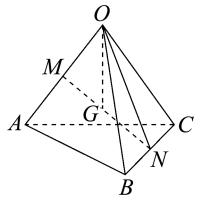
(3)$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FC_1}=(\overrightarrow{EA_1}+\overrightarrow{A_1F})\cdot(\overrightarrow{FD_1}+\overrightarrow{D_1C_1})=\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{A_1F}\right]\cdot(\overrightarrow{FD_1}+\overrightarrow{D_1C_1})$

$=\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right]\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\right)=\frac{1}{2}(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\right)=-\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|^2+\frac{1}{4}|\boldsymbol{b}|^2=2.$

任务 2

[探究活动]

例 1　**证明：**如图，连接 ON，设$\angle AOB=\angle BOC=\angle AOC=\theta$，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，则$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$.



又$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\right]=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$，所以$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=\frac{1}{4}(|\boldsymbol{a}|^2\cdot\cos\theta-|\boldsymbol{a}|^2\cdot\cos\theta-|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{a}|^2)=0.$

所以$\overrightarrow{OG}\perp\overrightarrow{BC}$，即 $OG\perp BC$.

[应用迁移]

证明：设$\overrightarrow{A_1B_1}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{A_1D_1}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{A_1A}=\boldsymbol{c}$，

则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$.

因为$\overrightarrow{A_1O}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{A_1A}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，

$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$，

所以$\overrightarrow{A_1O}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}^2)=\frac{1}{2}(|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2)=0$，

所以$\overrightarrow{A_1O}\perp\overrightarrow{BD}$，即 $A_1O\perp BD$.

同理可证$\overrightarrow{A_1O}\perp\overrightarrow{OG}$，即 $A_1O\perp OG$.

又因为 $OG\cap BD=O$，$OG\subset$平面 GBD，$BD\subset$平面 GBD，

所以 $A_1O\perp$平面 GBD.

任务 3

[探究活动]

例 2　**解：**因为$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，

所以$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2=\frac{1}{9}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{9}\overrightarrow{AD}^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}^2-\frac{2}{9}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{9}a^2+\frac{1}{9}a^2+\frac{4}{9}a^2-\frac{1}{9}a^2-\frac{2}{9}a^2+\frac{2}{9}a^2=\frac{5}{9}a^2.$

故$|\overrightarrow{MN}|=\frac{\sqrt{5}}{3}a.$

［一题多思］

思考 1.解：因为$\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，

所以$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{6}a^2+\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{6}a^2=\frac{2}{3}a^2$，

所以$\cos\langle\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\frac{2}{3}a^2}{\frac{\sqrt{5}}{3}a\cdot a}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，即异面直线 AC 与 MN 所成角的余弦值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

思考 2.解：$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

因为$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$两两的夹角均为$\frac{\pi}{3}$，且$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AD}|=a$，

所以$|\overrightarrow{MN}|^2=\left|-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right|^2=\frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2-2|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\frac{\pi}{3}-2|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cos\frac{\pi}{3}+2|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}a^2$，

故$|\overrightarrow{MN}|=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

［应用迁移］

1.D **解析**：由题意得，平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 所有棱长均为 1，$\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle BAD=60°$，

则$\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

又因为$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AA_1}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos\angle A_1AB=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，

同理可得$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}$，

则$\overrightarrow{A_1C}^2=(-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2=\overrightarrow{AA_1}^2+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2-2\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1+1+1-2\times\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}=2$，则$|\overrightarrow{A_1C}|=\sqrt{2}$.

2.B **解析**：设向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，且$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=60°$，

可得$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BD_1}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$，

则$\overrightarrow{AC}^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+1+2\times1\times1\times\frac{1}{2}=3$，所以$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$.

$\overrightarrow{BD_1}^2=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})^2=\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=1+1+1+2\times\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{2}=2$，

所以$|\overrightarrow{BD_1}|=\sqrt{2}$.

又$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD_1}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，

所以$\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD_1}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD_1}|}=\frac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

1.2 空间向量基本定理

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(1)两两垂直　$x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$　分向量

(2)不共面　$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$

知识点二

不共面　$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$　基向量　不共面

知识点三

两两垂直　1　单位正交基底　$x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$　正交分解

【概念辨析】

1.(1)√　(2)×　(3)√　(4)×

2.C **解析**：由题意知，$\overrightarrow{D_1A_1}$，$\overrightarrow{D_1C_1}$，$\overrightarrow{D_1D}$不共面，故$\{\overrightarrow{D_1A_1},\overrightarrow{D_1C_1},\overrightarrow{D_1D}\}$可以作为空间的一个基底.

3.(1) **提示**：不能.因为 **0** 与任意一个非零向量共线，与任意两个非零向量共面.

(2)**提示**：唯一.

(3)**提示**：不同基底下，同一向量的表达式一般不同.

任务型课堂

任务 1

1.B **解析**：对于 A，由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，所以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 共面，故 A 错误；对于 B，假设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$ 共面，设 $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+y\boldsymbol{c}$，所以 $x=2$，$y=3$，$y=2$，矛盾，所以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$ 不共面，故 B 正确；对于 C，由 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$，所以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 共面，故 C 错误；对于 D，由 $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+3(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，所以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$ 共面，故 D 错误.

2.解：假设$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$共面，

则存在实数 λ，μ 使得$\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}$，

所以 $\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3=\lambda(-3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3)+\mu(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)=(-3\lambda+\mu)\boldsymbol{e}_1+(\lambda+\mu)\boldsymbol{e}_2+(2\lambda-\mu)\boldsymbol{e}_3$.

因为 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 不共面，

所以$\begin{cases}-3\lambda+\mu=1,\\ \lambda+\mu=2,\\ 2\lambda-\mu=-1,\end{cases}$　此方程组无解，

所以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$不共面，

所以$\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$可以作为空间的一个基底.

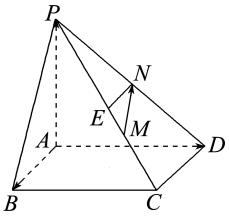
任务 2

［探究活动］

例 1 **解**：如图，取 PC 的中点 E，连接 NE，则$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EN}-\overrightarrow{EM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-(\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PE})=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\frac{1}{6}\overrightarrow{PC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}(-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AP}$.

因为$\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+z\overrightarrow{AP}$，

所以 $x=-\frac{2}{3}$，$y=-\frac{1}{6}$，$z=\frac{1}{6}$.



［一题多思］

思考 1.提示：(1)若基底确定，要充分利用向量加减运算的三角形法则和平行四边形法则，以及向量数乘运算的运算律.

(2)若没给定基底，首先选择基底.选择时，要尽量使所选的基向量能方便地表示其他向量，再就是看基向量的模及其夹角是否已知或易求.

思考 2.解：因为$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{PN}=2\overrightarrow{ND}$，

所以$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AD})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})$.

又$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，所以$\overrightarrow{NM}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AD})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AP}$.

［应用迁移］

1.C **解析**：M，N 分别是四面体 $OABC$ 的边 OA，BC 的中点，P 是 MN 靠近 N 的三等分点，

则$\overrightarrow{MP}=2\overrightarrow{PN}$，$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}=2(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OP})$，即 $3\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}$，

则$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{ON}$.因为 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，

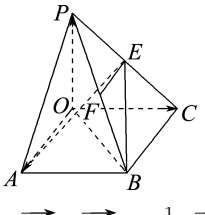
又 N 为 BC 的中点，则$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

因为 M 为 OA 的中点，所以$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，

故$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{ON}=\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right)=\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$.

2.解：(1)因为$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OP}$ 不共面，所以$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$能作为空间的一个基底.

(2)如图所示，连接 BO，



则$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP})=\frac{1}{2}(-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$，

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OP})=-\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$，

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC})=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}(-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$，

$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$.

任务 3

［探究活动］

例 2 **解**：(1)$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$.

(2)因为$|\overrightarrow{AC_1}|^2=\overrightarrow{AC_1}^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AA_1}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}$

$=1+1+4+0+2\times1\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+2\times1\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=2$，所以向量$\overrightarrow{AC_1}$的模为$\sqrt{2}$.

(3)因为$\overrightarrow{A_1D}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}$，

所以$|\overrightarrow{A_1D}|^2=(-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD})^2$

$=\overrightarrow{AA_1}^2+\overrightarrow{AD}^2-2\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=4+1-2\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=7$，所以$|\overrightarrow{A_1D}|=\sqrt{7}$.

又因为$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1D}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})\cdot(-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD})$

$=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AA_1}^2+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}=-1\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+0-1\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1-4+1\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$，

所以$\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{A_1D}\rangle=\frac{\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1D}}{|\overrightarrow{AC_1}|\cdot|\overrightarrow{A_1D}|}=\frac{-2}{\sqrt{2}\times\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{14}}{7}$，

所以直线 AC_1 与 A_1D 所成角的余弦值为$|\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{A_1D}\rangle|=\frac{\sqrt{14}}{7}$.

［应用迁移］

解：(1)$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

(2)根据题意可设$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，

则$\overrightarrow{BM}^2=\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\right)^2=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}^2+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{5}{4}$，

所以$|\overrightarrow{BM}|=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

所以$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AD}=\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\right)\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{3}{4}$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AD}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{BM}||\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{2}\times1}=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$，

所以直线 BM 与 AD 所成角的余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

1.3 空间向量及其运算的坐标表示

1.3.1 空间直角坐标系

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(1)坐标轴　$Oxyz$　原点　坐标向量　坐标平面

(2)右手　食指　中指

知识点二

(1)唯一　$A(x,y,z)$　横坐标　纵坐标　竖坐标

(2)$\boldsymbol{a}=(x,y,z)$

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)√

2.A　**解析**：点 A 的坐标中横、竖坐标不变，纵坐标变为原来的相反数，即得点 A' 的坐标为 $(-2,-3,-4)$.

3.(1)**提示**：如果以 O 为坐标原点，点 A 在空间直角坐标系中的坐标为 (x,y,z)，那么向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标也为 (x,y,z).

(2)**提示**：x 轴上的点的纵坐标、竖坐标都为 0，即 $(x,0,0)$；

y 轴上的点的横坐标、竖坐标都为 0，即 $(0,y,0)$；

z 轴上的点的横坐标、纵坐标都为 0，即 $(0,0,z)$.

(3)**提示**：求某点的坐标时，一般先找这一点在某一坐标平面内的射影，确定其两个坐标，再找出它在另一坐标轴上的射影(或者利用它到这个坐标平面的距离)进而确定第三个坐标.

任务型课堂

任务 1

1.A　**解析**：设点 A 在基底 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 下对应的向量为 $\boldsymbol{p}$，则 $\boldsymbol{p}=8\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}=8\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}+4\boldsymbol{k}+4\boldsymbol{i}=12\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k}$，故点 A 在基底 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 下的坐标是 $(12,14,10)$.

2.解：(1)显然 $D(0,0,0)$，

因为点 A 在 x 轴的正半轴上，且 $|AD|=3$，

所以 $A(3,0,0)$.同理，可得 $C(0,4,0)$，$D_1(0,0,5)$.

因为点 B 在坐标平面 Oxy 内，$BC\perp CD$，$BA\perp AD$，所以 $B(3,4,0)$.

同理，可得 $A_1(3,0,5)$，$C_1(0,4,5)$.

与 B 的坐标相比，点 B_1 的坐标中只有竖坐标不同，$|BB_1|=|AA_1|=5$，故 $B_1(3,4,5)$.

(2)由(1)知 $C(0,4,0)$，$C_1(0,4,5)$，

所以 C_1C 的中点 N 的坐标为 $\left(\dfrac{0+0}{2},\dfrac{4+4}{2},\dfrac{0+5}{2}\right)$，

故 $N\left(0,4,\dfrac{5}{2}\right)$.

任务 2

[探究活动]

例 1　**解**：(1)由于点 P 关于 x 轴对称后，它在 x 轴上的坐标不变，在 y 轴、z 轴上的坐标变为原来的相反数，所以对称点 P_1 的坐标为 $(-2,-1,-4)$.

(2)由于点 P 关于 Oxy 平面对称后，它在 x 轴、y 轴上的坐标不变，在 z 轴上的坐标变为原来的相反数，所以对称点 P_2 的坐标为 $(-2,1,-4)$.

(3)设对称点为 $P_3(x,y,z)$，则点 M 为线段 PP_3 的中点.由中点坐标公式，可得 $x=2\times2-(-2)=6$，$y=2\times(-1)-1=-3$，$z=2\times(-4)-4=-12$，所以 $P_3(6,-3,-12)$.

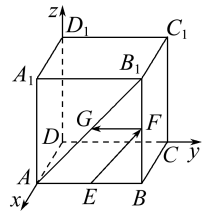
[应用迁移]

A　**解析**：因为点关于 Oxy 平面的对称点，横坐标、纵坐标不变，而竖坐标互为相反数，所以点 $(2,3,2)$ 关于 Oxy 平面的对称的点的坐标为 $(2,3,-2)$.故选 A.

任务 3

[探究活动]

例 2　**解**：如图，以 DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系 $Dxyz$.



由于正方体的棱长为 1，则 $D(0,0,0)$，$E\left(1,\dfrac{1}{2},0\right)$，$F\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$，$G\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DE}=\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{DG}-\overrightarrow{DF}=\left(0,-\dfrac{1}{2},0\right)$.

[一题多思]

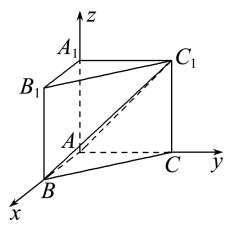
思考 1.提示：(1)起点在原点的向量，点 A 的坐标和向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标形式完全相同，其中 O 为坐标原点.

(2)起点不在原点的向量，其坐标可以通过向量的运算求得.

思考 2.解：由题图和例 2 的解析，知 $A_1(1,0,1)$，$F\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$，则 $\overrightarrow{A_1F}=\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DA_1}=\left(0,1,-\dfrac{1}{2}\right)$.

[应用迁移]

解：建立如图所示的空间直角坐标系，



设 $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{i}$，$\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{j}$，$\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{k}$，

则 $\overrightarrow{AB}=4\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}=(4,0,0)$，

$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AC}=0\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}=(0,4,4)$，

$\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}=-4\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}=(-4,4,4)$.

1.3.2　空间向量运算的坐标表示

问题式预习

【知识清单】

知识点一

$(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$　$(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$　$(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$　$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

知识点二

$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$　$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

知识点三

$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

【概念辨析】

1.(1)×　(2)√

2.D　**解析**：由题意得$(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，所以$2k|\boldsymbol{a}|^2-k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-|\boldsymbol{b}|^2=0$.

又$|\boldsymbol{a}|^2=2$，$|\boldsymbol{b}|^2=5$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$，所以$4k+k-2-5=0$，

解得$k=\frac{7}{5}$.

3.(1)**提示**：空间向量运算的坐标表示与平面向量运算的坐标表示完全一致，如一个空间向量的坐标等于表示此向量的有向线段的终点坐标减去起点坐标.

(2)**提示**：设原点为O，则$OA=|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

任务型课堂

任务 1

1.D　**解析**：$4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=4(3,2,1)-2(2,4,0)=(12,8,4)-(4,8,0)=(8,0,4)$.

2.B　**解析**：设$P(x,y,z)$，

因为$A(1,2,1)$，$B(4,11,4)$，$D(1,1,1)$，

所以$\overrightarrow{AP}=(x-1,y-2,z-1)$，$\overrightarrow{PB}=(4-x,11-y,4-z)$.

又因为$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$，

所以$x-1=8-2x$，$y-2=22-2y$，$z-1=8-2z$，解得$x=3$，$y=8$，$z=3$，

所以$P(3,8,3)$，$\overrightarrow{PD}=(-2,-7,-2)$，

所以$|\overrightarrow{PD}|=\sqrt{4+49+4}=\sqrt{57}$.

3.-19　**解析**：因为$\boldsymbol{a}=(-2,1,5)$，$\boldsymbol{b}=(1,3,-4)$，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2\times1+1\times3+5\times(-4)=-19$.

任务 2

[探究活动]

例 1　**解**：(1)由$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，得$(\lambda+1,1,2\lambda)=k(6,2m-1,2)$，

所以$\begin{cases}\lambda+1=6k,\\1=k(2m-1),\\2\lambda=2k,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=k=\frac{1}{5},\\m=3,\end{cases}$

所以$\lambda=\frac{1}{5}$，$m=3$.

(2)因为$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$，且$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，

所以$\begin{cases}(\lambda+1)^2+1^2+(2\lambda)^2=5,\\(\lambda+1,1,2\lambda)\cdot(2,-2\lambda,-\lambda)=0,\end{cases}$

化简，得$\begin{cases}5\lambda^2+2\lambda=3,\\2-2\lambda^2=0,\end{cases}$

解得$\lambda=-1$，

所以$\boldsymbol{a}=(0,1,-2)$.

[一题多思]

思考 1.提示：已知两向量平行或垂直求参数值，需利用平行、垂直的充要条件，将位置关系转化为坐标关系，列方程(组)求解.

思考 2.解：由题意得$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{d}|}=\frac{1+2\lambda}{\sqrt{5\lambda^2+2\lambda+2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得$\lambda=1$.

[应用迁移]

1.C　**解析**：因为$\boldsymbol{m}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{n}=x(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+y(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})+4(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$，

$\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$，所以存在实数$\lambda$，使$\boldsymbol{n}=\lambda\boldsymbol{m}$，

所以$x(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+y(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})+4(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})=\lambda(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$，

即$(x+4)\boldsymbol{a}+(-x+y)\boldsymbol{b}+(-y+4)\boldsymbol{c}=2\lambda\boldsymbol{a}+3\lambda\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{c}$，

所以$\begin{cases}x+4=2\lambda,\\-x+y=3\lambda,\\4-y=-\lambda,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=0,\\\lambda=2,\\y=6,\end{cases}$所以$x+y=6$.故选 C.

2.(1)4　(2)2　**解析**：(1)因为$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，所以$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

所以$\begin{cases}\lambda=-2,\\x\lambda=4,\\3\lambda=y,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=-2,\\x=-2,\\y=-6.\end{cases}$

所以$x-y=4$.

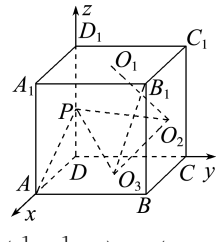
(2)因为$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2+4x+3y=0$，即$4x+3y=2$.

3.解：因为$\boldsymbol{a}=(1,2,3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,-4,-6)$，所以$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,-2,-3)$，所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{14}$.因为$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=7$，所以$\cos\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|}=\frac{1}{2}$，即$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$的夹角为$60°$.因为$\boldsymbol{a}=(1,2,3)$与$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,-2,-3)$的方向相反，所以$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{c}$的夹角为$120°$.

任务 3

[探究活动]

例 2　(1)**证明**：以D为坐标原点，DA，DC，DD_1所在直线分别为x轴、y轴、z轴，建立如图所示的空间直角坐标系$Dxyz$.



则$B_1(1,1,1)$，$O_3\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$P\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$，$A(1,0,0)$，所以$\overrightarrow{B_1O_3}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1\right)$，$\overrightarrow{PA}=\left(1,0,-\frac{1}{2}\right)$，

所以$\overrightarrow{B_1O_3}\cdot\overrightarrow{PA}=-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}=0$，

即$\overrightarrow{B_1O_3}\perp\overrightarrow{PA}$.

所以$B_1O_3\perp PA$.

(2)**解**：因为$O_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$，$O_2\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$，

所以$\overrightarrow{O_1O_2}=\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

又因为$\overrightarrow{PO_3}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，

所以$\cos\langle\overrightarrow{PO_3},\overrightarrow{O_1O_2}\rangle=\frac{\overrightarrow{PO_3}\cdot\overrightarrow{O_1O_2}}{|\overrightarrow{PO_3}||\overrightarrow{O_1O_2}|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以异面直线PO_3与O_1O_2所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

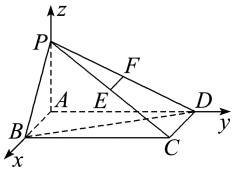
(3)**解**：因为$P\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$，$O_2\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$，

所以$|PO_2|=|\overrightarrow{PO_2}|$

$=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+(1-0)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

[**应用迁移**]

(1)**解**：由题意可知，$PA\perp$平面$ABCD$，$AB\perp AD$，以A为原点，AB所在直线为x轴，AD所在直线为y轴，AP所在直线为z轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则$A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,2,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,1)$，

所以$E\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$，$F\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{BF}=\left(-1,1,\frac{1}{2}\right)$，$|\overrightarrow{BF}|$

$=\frac{3}{2}$，即B，F两点间的距离为$\frac{3}{2}$.

(2)**证明**：由(1)知，$\overrightarrow{EF}=\left(-\frac{1}{2},0,0\right)$，$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，

所以$\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，即$\overrightarrow{EF}\parallel\overrightarrow{AB}$，即$EF\parallel AB$.

又$AB\subset$平面PAB，$EF\not\subset$平面PAB，

所以$EF\parallel$平面PAB.

(3)**证明**：由(1)知，$\overrightarrow{AP}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{DC}=(1,0,0)$，

所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DC}=(0,0,1)\cdot(1,0,0)=0$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}=(0,2,0)\cdot(1,0,0)=0$，

则$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{DC}$，即$AP\perp DC$，$AD\perp DC$.

又$AP\cap AD=A$，且AP，$AD\subset$平面PAD，

所以$DC\perp$平面PAD.

又$DC\subset$平面PDC，

所以平面$PAD\perp$平面PDC.

1.4 空间向量的应用

1.4.1 用空间向量研究直线、平面的位置关系

第1课时 空间中点、直线和平面的向量表示

问题式预习

【知识清单】

知识点一

$\overrightarrow{OP}$ $\overrightarrow{OP}$

知识点二

方向向量 $\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$

知识点三

(1)$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$ $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ (2)方向向量

$\{P\mid\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AP}=0\}$

【概念辨析】

1.(1)√ (2)√ (3)× (4)× (5)× (6)√

2.A **解析**：因为$\overrightarrow{AB}=(2,4,6)$，所以$(1,2,3)$是直线$l$的一个方向向量.

3.(1)**提示**：设l是空间中的一条直线，A，B是直线l上任意两点，则$\overrightarrow{AB}$及与$\overrightarrow{AB}$平行的非零向量均为直线l的方向向量.

(2)**提示**：设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是平面α内两个不共线的向量，$\boldsymbol{n}$为平面α的法向量，则求法向量的方程组为$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}=0.\end{cases}$

任务型课堂

任务1

1.A **解析**：因为$\overrightarrow{AB}=(2,4,6)$，所以$(1,2,3)$是直线$l$的一个方向向量.

2.A **解析**：已知$A(0,y,3)$和$B(-1,2,z)$，则$\overrightarrow{AB}=(-1,2-y,z-3)$.

因为直线l的一个方向向量为$\boldsymbol{m}=(2,-1,3)$，所以可设$\overrightarrow{AB}=k\boldsymbol{m}$.

所以$-1=2k$，$2-y=-k$，$z-3=3k$，

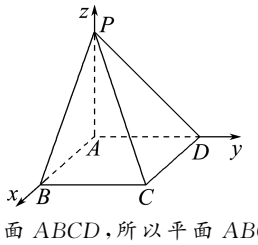
解得$k=-\frac{1}{2}$，$y=z=\frac{3}{2}$.

所以$y-z=0$.故选A.

任务2

[**探究活动**]

例 **解**：如图，建立空间直角坐标系$Axyz$.



(1)因为$PA\perp$平面$ABCD$，所以平面$ABCD$的一个法向量为$(0,0,1)$.

(2)因为$PA\perp$平面$ABCD$，$AD\subset$平面$ABCD$，所以$AD\perp PA$.因为$AD\perp AB$，PA，$AB\subset$平面PAB，$PA\cap AB=A$，

所以$AD\perp$平面PAB，

所以平面PAB的一个法向量为$(0,1,0)$.

(3)因为$B(3,0,0)$，$C(3,3,0)$，$P(0,0,3)$，

所以$\overrightarrow{PB}=(3,0,-3)$，$\overrightarrow{PC}=(3,3,-3)$.

设平面PBC的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$所以$\begin{cases}3x-3z=0,\\3x+3y-3z=0.\end{cases}$

取$x=1$，则$y=0$，$z=1$，于是$\boldsymbol{n}=(1,0,1)$为平面PBC的一个法向量.

(4)由(3)，同理可求得平面PCD的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(0,1,1)$.

［一题多思］

思考 1.提示：一个平面的法向量不唯一，有无数个，它们互相平行.

思考 2.解：由本例的解析，设 $M(0,y,0)$，$0\leqslant y\leqslant 3$，则 $\overrightarrow{PM}=(0,y,-3)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{a}=0,\\ \overrightarrow{PM}\cdot\boldsymbol{a}=0,\end{cases}$ 解得 $y=\frac{3}{2}$，

所以线段 AM 的长为 $\frac{3}{2}$.

［应用迁移］

1.$(1,1,1)$（答案不唯一） **解析**：设平面 α 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=-x+y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}=-x+z=0.\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=z=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$，

所以平面 α 的一个法向量为 $(1,1,1)$.

2.解：由题易知 $B(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$B_1(1,0,2)$，$A_1(0,0,2)$.

$(1)\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,2)$，

设平面 BCC_1B_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x_1+y_1=0,\\ 2z_1=0,\end{cases}$

取 $x_1=1$，则 $y_1=1$，$z_1=0$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,0)$，

所以平面 BCC_1B_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,1,0)$.

$(2)\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{BA_1}=(-1,0,2)$，

设平面 A_1BC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x_2+y_2=0,\\ -x_2+2z_2=0,\end{cases}$

取 $x_2=2$，则 $y_2=2$，$z_2=1$，所以 $\boldsymbol{m}=(2,2,1)$，

所以平面 A_1BC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(2,2,1)$.

第 2 课时　空间中直线、平面的平行

问题式预习

【知识清单】

知识点一

$\boldsymbol{u}_1\parallel\boldsymbol{u}_2$　$\lambda\boldsymbol{u}_2$

知识点二

$\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{n}$　0

知识点三

$\boldsymbol{n}_1\parallel\boldsymbol{n}_2$　$\lambda\boldsymbol{n}_2$

【概念辨析】

1.$(1)\times$　$(2)\surd$　$(3)\surd$　$(4)\surd$

2.D　**解析**：由 $l_1\parallel l_2$，得 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，即 $\frac{3}{2}=\frac{x}{3}=\frac{y}{5}$，解得 $x=\frac{9}{2}$，$y=\frac{15}{2}$. 故选 D.

3.(1)**提示**：不唯一，直线的方向向量（平面的法向量）有无数个，它们是共线向量.

(2)**提示**：证明直线与平面平行的关键是证明直线的方向向量与平面的法向量垂直.

任务型课堂

任务 1

1.解：(1)因为 $\boldsymbol{a}=(2,3,-1)$，$\boldsymbol{b}=(-6,-9,3)$，所以 $\boldsymbol{a}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$，

所以 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$. 所以 $l_1\parallel l_2$.

(2)因为 $\boldsymbol{a}=(5,0,2)$，$\boldsymbol{b}=(0,4,0)$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，

所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $l_1\perp l_2$.

2.解：(1)因为 $\boldsymbol{u}=(1,-1,2)$，$\boldsymbol{v}=\left(3,2,-\frac{1}{2}\right)$，

所以 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$，所以 $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$，所以 $\alpha\perp\beta$.

(2)因为 $\boldsymbol{u}=(0,3,0)$，$\boldsymbol{v}=(0,-5,0)$，

所以 $\boldsymbol{u}=-\frac{3}{5}\boldsymbol{v}$，

所以 $\boldsymbol{u}\parallel\boldsymbol{v}$，所以 $\alpha\parallel\beta$.

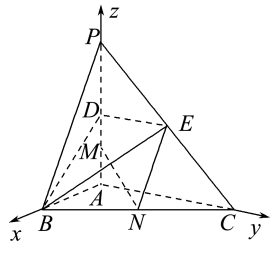
3.解：(1)因为 $\boldsymbol{u}=(2,2,-1)$，$\boldsymbol{a}=(-3,4,2)$，$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a}=0$，所以 $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{a}$，所以 $l\parallel\alpha$ 或 $l\subset\alpha$.

(2)因为 $\boldsymbol{u}=(0,2,-3)$，$\boldsymbol{a}=(0,-8,12)$，$\boldsymbol{u}=-\frac{1}{4}\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{u}\parallel\boldsymbol{a}$，所以 $l\perp\alpha$.

任务 2

［探究活动］

例 1　**证明**：如图，以 A 为原点，AB，AC，AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系.



依题意，可得 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(0,4,0)$，$P(0,0,4)$，$D(0,0,2)$，$E(0,2,2)$，$M(0,0,1)$，$N(1,2,0)$，

所以 $\overrightarrow{DE}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{DB}=(2,0,-2)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 BDE 的法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y=0,\\ 2x-2z=0.\end{cases}$

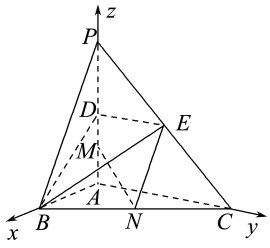
不妨取 $z=1$，可得 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$ 为平面 BDE 的一个法向量.

又 $\overrightarrow{MN}=(1,2,-1)$，所以 $\overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{n}=0$.

因为 $MN\not\subset$ 平面 BDE，所以 $MN\parallel$ 平面 BDE.

［一题多思］

思考. 证明：因为 $PA\perp$ 底面 ABC，$\angle BAC=90°$，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(0,4,0)$，$D(0,0,2)$，$E(0,2,2)$，$M(0,0,1)$，$N(1,2,0)$，$P(0,0,4)$，

所以 $\overrightarrow{DE}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{DB}=(2,0,-2)$. 又 $\overrightarrow{MN}=(1,2,-1)$，

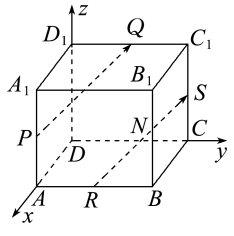
设 $\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{DE}+\mu\overrightarrow{DB}$，即 $(1,2,-1)=\lambda(0,2,0)+\mu(2,0,-2)$，解得 $\lambda=1$，$\mu=\frac{1}{2}$，

所以 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$，故 $\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{DB}$ 共面.

又因为 $MN\not\subset$ 平面 BDE，所以 $MN\parallel$ 平面 BDE.

［应用迁移］

1. 证明：(方法一) 以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $P(3,0,1)$，$Q(0,2,2)$，$R(3,2,0)$，$S(0,4,1)$，

所以 $\overrightarrow{PQ}=(-3,2,1)$，$\overrightarrow{RS}=(-3,2,1)$，

所以 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{RS}$，

所以 $\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{RS}$，即 $PQ\parallel RS$.

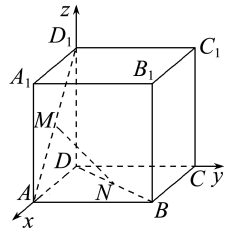
(方法二) 因为 $\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{RC}+\overrightarrow{CS}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DD_1}$，

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{A_1Q}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DD_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}$，

所以 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{RS}$，

所以 $\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{RS}$，即 $PQ\parallel RS$.

2. 证明：以 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系.



设正方体的棱长为 2，则 $A(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$D(0,0,0)$，$M(1,0,1)$，$N(1,1,0)$.

由正方体的性质，知 $AD\perp$ 平面 CC_1D_1D，

所以 $\overrightarrow{DA}=(2,0,0)$ 为平面 CC_1D_1D 的一个法向量.

由于 $\overrightarrow{MN}=(0,1,-1)$，

则 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{DA}=0\times2+1\times0+(-1)\times0=0$，

所以 $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{DA}$.

又 $MN\not\subset$ 平面 CC_1D_1D，

所以 $MN\parallel$ 平面 CC_1D_1D.

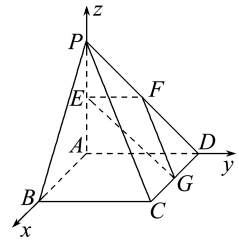
任务 3

［探究活动］

例 2　证明：因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 为正方形，$\triangle PAD$ 是直角三角形，

所以 AB，AP，AD 两两垂直.

以 A 为坐标原点，AB，AD，AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,2)$，$E(0,0,1)$，$F(0,1,1)$，$G(1,2,0)$，

所以 $\overrightarrow{PB}=(2,0,-2)$，$\overrightarrow{FE}=(0,-1,0)$，$\overrightarrow{FG}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$.

设 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 EFG 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{FE},\\ \boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{FG},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{FE}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{FG}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-y_1=0,\\ x_1+y_1-z_1=0.\end{cases}$

令 $z_1=1$，则 $x_1=1$，$y_1=0$，所以 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,1)$.

设 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$ 是平面 PBC 的一个法向量，

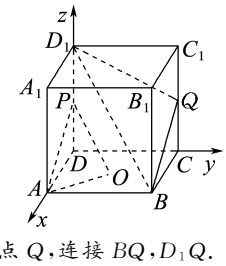
则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{PB},\\ \boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{BC},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x_2-2z_2=0,\\ 2y_2=0.\end{cases}$

令 $z_2=1$，则 $x_2=1$，$y_2=0$，所以 $\boldsymbol{n}_2=(1,0,1)$，

所以 $\boldsymbol{n}_1\parallel\boldsymbol{n}_2$，所以平面 $EFG\parallel$ 平面 PBC.

［应用迁移］

解：以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.



在 CC_1 上任取一点 Q，连接 BQ，D_1Q.

设正方体的棱长为 1，则 $O\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$P\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$，$A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$D_1(0,0,1)$，设 $Q(0,1,m)(0\leqslant m\leqslant1)$，

(方法一) 则 $\overrightarrow{AP}=\left(-1,0,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{BQ}=(-1,0,m)$，$\overrightarrow{OP}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{BD_1}=(-1,-1,1)$，

所以 $\overrightarrow{OP}\parallel\overrightarrow{BD_1}$，即 $OP\parallel BD_1$.

所以 $OP\parallel$ 平面 D_1BQ.

当 $m=\frac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BQ}$，即 $AP\parallel BQ$，所以 $AP\parallel$ 平面

D_1BQ.又 $OP\cap AP=P$,所以平面 PAO∥平面 D_1BQ.

故当 Q 为 CC_1 的中点时,平面 D_1BQ∥平面 PAO.

(方法二)则$\overrightarrow{OA}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$,$\overrightarrow{OP}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

设平面 PAO 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,

则有 $\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{OA}$,$\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{OP}$,

所以$\begin{cases}\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}y_1=0,\\-\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}z_1=0.\end{cases}$

取 $x_1=1$,则 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,2)$为平面 PAO 的一个法向量.

易知$\overrightarrow{BD_1}=(-1,-1,1)$,$\overrightarrow{QD_1}=(0,-1,1-m)$.

同理,可得 $\boldsymbol{n}_2=(m,1-m,1)$为平面 D_1BQ 的一个法向量.

要使平面 D_1BQ∥平面 PAO,需满足 $\boldsymbol{n}_1$∥$\boldsymbol{n}_2$.

因此$\frac{1}{m}=\frac{1}{1-m}=\frac{2}{1}$,解得 $m=\frac{1}{2}$,这时点 Q 的坐标为$\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$.

故当 Q 为 CC_1 的中点时,平面 D_1BQ∥平面 PAO.

第 3 课时　空间中直线、平面的垂直

问题式预习

【知识清单】

知识点一

$\boldsymbol{u}_1\perp\boldsymbol{u}_2$　0

知识点二

$\boldsymbol{u}$∥$\boldsymbol{n}$　$\lambda\boldsymbol{n}$

知识点三

$\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$　0

【概念辨析】

1.(1)√　(2)×　(3)√

2.B　**解析**:因为直线 $l\perp$平面 α,所以 $\boldsymbol{u}$∥$\boldsymbol{v}$,则$\frac{-2}{6}=\frac{2}{-6}=\frac{t}{12}$,解得 $t=-4$.故选 B.

3.(1)**提示**:垂直.

(2)**提示**:①若证线线垂直,则证两直线的方向向量垂直;

②若证线面垂直,则证直线的方向向量与平面的法向量平行;

③若证面面垂直,则证两平面的法向量垂直.

任务型课堂

任务 1

1.B　**解析**:因为 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=2\times1+(-1)\times1+(-1)\times1=0$,所以 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$,所以 $l_1\perp l_2$.

2.D　**解析**:因为 $\boldsymbol{u}=(3,a+b,a-b)(a,b\in\mathbf{R})$是直线 l 的一个方向向量,$\boldsymbol{n}=(1,1,3)$是平面 α 的一个法向量,且 $l\perp\alpha$,所以 $\boldsymbol{u}$∥$\boldsymbol{n}$,即$\frac{3}{1}=\frac{a+b}{1}=\frac{a-b}{3}$,即$\begin{cases}a+b=3,\\a-b=9,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=6,\\b=-3,\end{cases}$因此 $a+2b=6+2\times(-3)=0$.

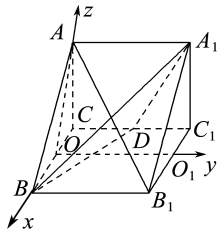
任务 2

[探究活动]

例 1　**证明**:(方法一)取 BC 的中点 O,B_1C_1 的中点 O_1,连接 AO,OO_1,则 $AO\perp BC$,$OO_1\perp BC$.

因为在正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,平面 $ABC\perp$平面 BCC_1B_1,所以 $AO\perp$平面 BCC_1B_1,所以 $AO\perp OO_1$.

如图,以 O 为原点,以 OB,OO_1,OA 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向,建立空间直角坐标系,



则$B(1,0,0)$,$D(-1,1,0)$,$A_1(0,2,\sqrt{3})$,$A(0,0,\sqrt{3})$,$B_1(1,2,0)$,

所以$\overrightarrow{AB_1}=(1,2,-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{BA_1}=(-1,2,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{BD}=(-2,1,0)$.

因为$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BA_1}=1\times(-1)+2\times2+(-\sqrt{3})\times\sqrt{3}=0$,

$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BD}=1\times(-2)+2\times1+(-\sqrt{3})\times0=0$,

所以$\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{BA_1}$,$\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{BD}$,

即 $AB_1\perp BA_1$,$AB_1\perp BD$.

又因为 $BA_1\cap BD=B$,$BA_1\subset$平面 A_1BD,$BD\subset$平面 A_1BD,

所以 $AB_1\perp$平面 A_1BD.

(方法二)建系同方法一.

设平面 A_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{BA_1},\\\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{BD},\end{cases}$即$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=-x+2y+\sqrt{3}z=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=-2x+y=0.\end{cases}$

令 $x=1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,2,-\sqrt{3})$为平面 A_1BD 的一个法向量.

又$\overrightarrow{AB_1}=(1,2,-\sqrt{3})$,所以 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB_1}$,即$\overrightarrow{AB_1}$∥$\boldsymbol{n}$,

所以 $AB_1\perp$平面 A_1BD.

[一题多思]

思考 1.证明：设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，

由题意得$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$，

则$\overrightarrow{AB_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{A_1B}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，

所以$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{A_1B}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{c}^2=0$，所以$\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{A_1B}$，即$AB_1\perp A_1B$，

因为$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BD}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right)=0-4+2+2-0+0=0$，所以$\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{BD}$，即$AB_1\perp BD$.

又$A_1B\cap BD=B$，所以$AB_1\perp$平面A_1BD.

思考 2.解：假设存在点$N(-1,y_0,0)$，$0\leqslant y_0\leqslant 2$，由例 1 的解析可知$M\left(\frac{1}{2},2,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以$\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{3}{2},y_0-2,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.因为$MN\perp$平面$A_1BD$，

所以$\overrightarrow{MN}\parallel\boldsymbol{n}$，即$\frac{-\frac{3}{2}}{1}=\frac{y_0-2}{2}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\sqrt{3}}$，无解，

所以在线段CC_1上不存在一点N，使得$MN\perp$平面A_1BD.

[应用迁移]

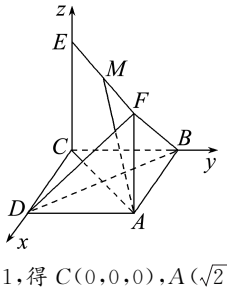
证明：(1)因为四边形$ACEF$为矩形，所以$CE\perp AC$.

因为平面$ABCD\perp$平面$ACEF$，平面$ABCD\cap$平面$ACEF=AC$，$CE\subset$平面$ACEF$，

所以$CE\perp$平面$ABCD$.又四边形$ABCD$为正方形，

所以以点C为坐标原点，CD，CB，CE所在直线分别为x轴、y轴、z轴，

建立如图所示的空间直角坐标系$Cxyz$.



由$AB=\sqrt{2}$，$AF=1$，得$C(0,0,0)$，$A(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$B(0,\sqrt{2},0)$，$D(\sqrt{2},0,0)$，

$E(0,0,1)$，$F(\sqrt{2},\sqrt{2},1)$，$M\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，

所以$\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，$\overrightarrow{BD}=(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$，

所以$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+(-\sqrt{2})\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+0\times1=0$，所以$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BD}$，

所以$AM\perp BD$.

(2)由(1)知，$\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，$\overrightarrow{DF}=(0,\sqrt{2},1)$，

所以$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DF}=0-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}+1=0$，

所以$AM\perp DF$.

又$AM\perp BD$，BD，$DF\subset$平面BDF，$BD\cap DF=D$，

所以$AM\perp$平面BDF.

任务 3

[探究活动]

例 2 **证明**：如图，取BC的中点O，连接PO.

因为平面$PBC\perp$平面$ABCD$，$\triangle PBC$为等边三角形，所以$PO\perp$平面$ABCD$.

以BC的中点O为坐标原点，以BC所在直线为x轴，过点O与AB平行的直线为y轴，OP所在直线为z轴，建立空间直角坐标系.

(1)不妨设$CD=1$，则$AB=BC=PB=PC=2$，所以$PO=\sqrt{3}$，

所以$A(1,-2,0)$，$B(1,0,0)$，$D(-1,-1,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，

所以$\overrightarrow{BD}=(-2,-1,0)$，$\overrightarrow{PA}=(1,-2,-\sqrt{3})$.

因为$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{PA}=(-2)\times1+(-1)\times(-2)+0\times(-\sqrt{3})=0$，

所以$\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{BD}$，即$PA\perp BD$.

(2)如图，取PA的中点M，连接DM，

则$M\left(\frac{1}{2},-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

因为$\overrightarrow{DM}=\left(\frac{3}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{PB}=(1,0,-\sqrt{3})$，

所以$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{3}{2}\times1+0\times0+\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-\sqrt{3})=0$，

所以$\overrightarrow{DM}\perp\overrightarrow{PB}$，即$DM\perp PB$.

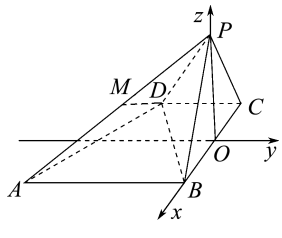
因为$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{PA}=\frac{3}{2}\times1+0\times(-2)+\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-\sqrt{3})=0$，

所以$\overrightarrow{DM}\perp\overrightarrow{PA}$，即$DM\perp PA$.

又因为$PA\cap PB=P$，$PA\subset$平面PAB，$PB\subset$平面PAB，

所以$DM\perp$平面PAB.

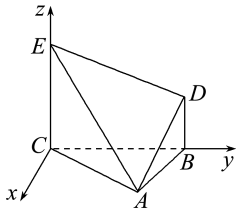
因为$DM\subset$平面PAD，所以平面$PAD\perp$平面PAB.



[应用迁移]

(1)**解**：因为$EC\perp$平面ABC，$CB\subset$平面ABC，所以$EC\perp CB$.

以C为原点，CB，CE所在的直线分别为y轴、z轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则$C(0,0,0)$，$A(\sqrt{3},1,0)$，$B(0,2,0)$，$E(0,0,2)$，$D(0,2,1)$，

所以$\overrightarrow{EA}=(\sqrt{3},1,-2)$,$\overrightarrow{ED}=(0,2,-1)$.

设平面 DEA 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EA}=\sqrt{3}a+b-2c=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ED}=2b-c=0,\end{cases}$令 $b=1$,则 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,2)$,

所以平面 DEA 的一个法向量为$(\sqrt{3},1,2)$.

(2)**证明**:由(1)知$\overrightarrow{CE}=(0,0,2)$,设平面 ECA 的一个法向量是 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EA}=\sqrt{3}x+y-2z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CE}=2z=0,\end{cases}$令 $x=1$,则 $\boldsymbol{m}=(1,-\sqrt{3},0)$.

因为 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1\times\sqrt{3}+(-\sqrt{3})\times1+0\times2=0$,所以 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$,所以平面 $DEA\perp$ 平面 ECA.

1.4.2 用空间向量研究距离、夹角问题

第 1 课时 用空间向量研究距离

问题式预习

【知识清单】

知识点一

$\sqrt{\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})^2}$

知识点二

$\dfrac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$

知识点三

(1)空间向量　点　直线　平面

(2)向量运算

(3)几何

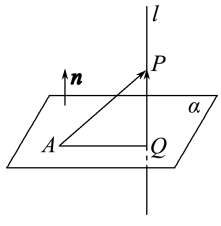
【概念辨析】

1.(1)×　(2)√　(3)√　(4)√

2.$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　**解析**:因为$\overrightarrow{PA}=(-2,0,-1)$,$\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$为 l 的一个单位方向向量,所以点 P 到 l 的距离 $d=\sqrt{|\overrightarrow{PA}|^2-(\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n})^2}=\sqrt{5-\left(-\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3.(1)**提示**:两条直线平行,两条直线的距离是其中一条直线上任一点到另一条直线的距离;一条直线和一个平面平行,直线与平面的距离就是这条直线上任一点到这个平面的距离;两个平面平行,平面与平面的距离就是一个平面上任一点到另一个平面的距离.

(2)**提示**:实质上,$\boldsymbol{n}$ 是直线 l 的方向向量,点 P 到平面 α 的距离就是$\overrightarrow{AP}$在直线 l 上的投影向量$\overrightarrow{QP}$的长度.



任务型课堂

任务 1

1.D　**解析**:由题意可得,与 $\boldsymbol{n}$ 同向的单位向量 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$,$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{PM}=(-1,1,0)$,$\boldsymbol{a}^2=2$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$,所以点 M 到直线 l 的距离 $d=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})^2}=\sqrt{2-\dfrac{1}{6}}=\sqrt{\dfrac{11}{6}}=\dfrac{\sqrt{66}}{6}$.

2.$\sqrt{17}$　**解析**:因为 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{2},-1)$,所以$\dfrac{\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{m}|}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$.

因为 $P(-1,1,-1)$,$A(4,1,-2)$,所以$\overrightarrow{PA}=(5,0,-1)$.

所以点 P 到直线 l 的距离为$\sqrt{\overrightarrow{PA}^2-\left(\overrightarrow{PA}\cdot\dfrac{\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{m}|}\right)^2}=\sqrt{26-9}=\sqrt{17}$.

任务 2

[探究活动]

例 1　**解**:以 D 为原点,DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴,建立空间直角坐标系(图略),

则 $M(2,\lambda,2)$,$D_1(0,0,2)$,$E(2,0,1)$,$F(2,2,1)$,

所以$\overrightarrow{ED_1}=(-2,0,1)$,$\overrightarrow{EF}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{EM}=(0,\lambda,1)$.

设平面 D_1EF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ED_1}=-2x+z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=2y=0.\end{cases}$

取 $x=1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,0,2)$为平面 D_1EF 的一个法向量,

所以点 M 到平面 D_1EF 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{EM}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

因为 N 为 ME 的中点,所以点 N 到平面 D_1EF 的距离为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

[一题多思]

思考 1.解:因为 $A_1B_1\parallel$ 平面 D_1EF,所以 A_1B_1 上任意一点到平面 D_1EF 的距离相等,且为定值.

又 N 为 ME 的中点,所以 N 到平面 D_1EF 的距离为定值.

思考 2.解:由例 1 的解析,易知 $N\left(2,\dfrac{\lambda}{2},\dfrac{3}{2}\right)$,$\overrightarrow{EN}=\left(0,\dfrac{\lambda}{2},\dfrac{1}{2}\right)$,

又平面 D_1EF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,2)$,所以点 N 到平面 D_1EF 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{EN}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

[应用迁移]

1.B　**解析**:由题意可知点 M 到平面 α 的距离即为$\overrightarrow{OM}$在 $\boldsymbol{n}$ 上的投影向量的长度.

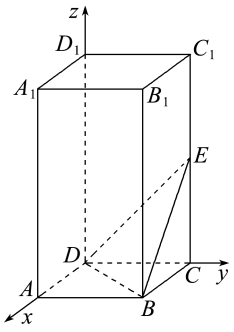
因为 $M(0,1,-2)$,所以$\overrightarrow{OM}=(0,1,-2)$.

所以$\overrightarrow{OM}\cdot\boldsymbol{n}=0\times1+1\times(-2)+(-2)\times2=-6$,

$|\boldsymbol{n}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$.

所以点 M 到平面 α 的距离为$\dfrac{|\overrightarrow{OM}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|-6|}{3}=2$.

2.解:以 D 为原点,建立如图所示的空间直角坐标系 $Dxyz$,



则 $D(0,0,0)$，$B(1,1,0)$，$D_1(0,0,2)$，$E(0,1,1)$，

所以$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{DE}=(0,1,1)$.

设平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DB}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DE}$，

所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x+y=0,\\ y+z=0.\end{cases}$

取 $x=1$，则 $y=-1$，$z=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$ 是平面 BDE 的一个法向量.

因为点 D_1 到平面 BDE 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{DD_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$，$\overrightarrow{DD_1}=(0,0,2)$，

所以$\overrightarrow{DD_1}\cdot\boldsymbol{n}=2$，$|\boldsymbol{n}|=\sqrt{3}$，

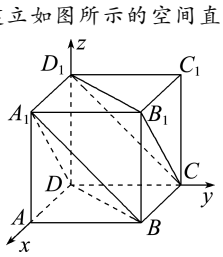
所以 $d=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

即点 D_1 到平面 BDE 的距离为$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

任务 3

［探究活动］

例 2 **解**：(1)以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $D(0,0,0)$，$B(2,2,0)$，$A_1(2,0,2)$，$B_1(2,2,2)$，$C(0,2,0)$，

所以$\overrightarrow{CB_1}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{DA_1}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$，所以$\overrightarrow{CB_1}/\!/\overrightarrow{DA_1}$，即 $CB_1/\!/DA_1$.

又 $CB_1\not\subset$平面 A_1BD，$DA_1\subset$平面 A_1BD，所以 $CB_1/\!/$平面 A_1BD，

所以直线 B_1C 到平面 A_1BD 的距离等于点 B_1 到平面 A_1BD 的距离.

设平面 A_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA_1}=2x+2z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=2x+2y=0.\end{cases}$令 $x=1$，则 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$ 为平面 A_1BD 的一个法向量.

又$\overrightarrow{A_1B_1}=(0,2,0)$，所以点 B_1 到平面 A_1BD 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2)由(1)知，$CB_1/\!/$平面 A_1BD.同理，$D_1B_1/\!/$平面 A_1BD，

又 $CB_1\cap D_1B_1=B_1$，CB_1，$D_1B_1\subset$平面 B_1CD_1，

所以平面 $A_1BD/\!/$平面 B_1CD_1，

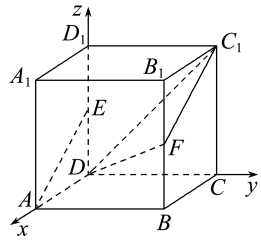
即平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 间的距离等于点 B_1 到平面 A_1BD 的距离.

由(1)知，点 B_1 到平面 A_1BD 的距离 $d=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 间的距离为$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

［应用迁移］

1.D **解析**：以 D 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $D(0,0,0)$，$F\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$，$C_1(0,1,1)$，$A(1,0,0)$，$E\left(0,0,\dfrac{1}{2}\right)$，所以$\overrightarrow{AE}=\left(-1,0,\dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{FC_1}=\left(-1,0,\dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{DC_1}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$，所以$\overrightarrow{AE}/\!/\overrightarrow{FC_1}$，即 $AE/\!/FC_1$.

因为 $AE\not\subset$平面 C_1DF，$FC_1\subset$平面 C_1DF，所以 $AE/\!/$平面 C_1DF，

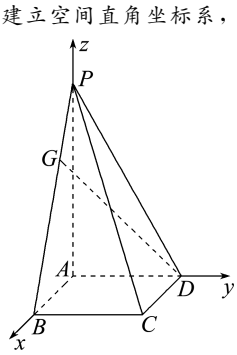
所以直线 AE 到平面 C_1DF 的距离为点 A 到平面 C_1DF 的距离.

设平面 C_1DF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{FC_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{DC_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x+\dfrac{1}{2}z=0,\\ y+z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，则 $z=2$，$y=-2$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,-2,2)$，

所以点 A 到平面 C_1DF 的距离为 $\dfrac{|\overrightarrow{DA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|1\times1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{1}{3}$.

2.A **解析**：如图，以 A 为原点，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}$的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系，



则 $B(3,0,0)$，$C(3,3,0)$，$D(0,3,0)$，$P(0,0,6)$，$G(1,0,4)$，

所以$\overrightarrow{DG}=(1,-3,4)$，$\overrightarrow{PC}=(3,3,-6)$，$\overrightarrow{DC}=(3,0,0)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为直线 PC 和 DG 的公垂线的方向向量，

则有$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DG}=x-3y+4z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=3x+3y-6z=0.\end{cases}$可取 $\boldsymbol{n}=(1,3,2)$，

所以异面直线 PC 和 DG 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{3\sqrt{14}}{14}$.故选 A.

第 2 课时　用空间向量研究夹角

问题式预习

【知识清单】

知识点

$|\cos\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle|$　$|\cos\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{n}\rangle|$　$|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|$

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)×

2.B　**解析**:设直线 l 与平面 α 所成的角为 θ,则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{\sqrt{3}}{2}$.又 $0°\leqslant\theta\leqslant90°$,所以 $\theta=60°$.

3.A　**解析**:已知直线 a 的一个方向向量是 $\boldsymbol{m}=(1,0,1)$,平面 α 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}=(-3,1,3)$,

设直线 a 与平面 α 所成的角为 θ,则 $0°\leqslant\theta\leqslant90°$,

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{0}{\sqrt{2}\times\sqrt{19}}=0$,

所以 $\theta=0°$,故直线 a 与平面 α 所成的角为 $0°$.

4.B　**解析**:$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$,

因为两个向量夹角的范围为$[0,\pi]$,

所以两个法向量的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$,故两个平面的夹角为 $\frac{\pi}{3}$,即 $60°$.故选 B.

5.(1)**提示**:不一样.二面角的范围为$[0,\pi]$,而两个平面的夹角是不大于直角的角,范围是 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(2)**提示**:平面与平面的夹角是两平面的法向量的夹角或其补角.

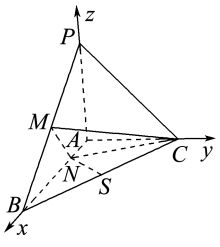
(3)**提示**:设 $\boldsymbol{n}$ 为平面 α 的法向量,$\boldsymbol{a}$ 为直线 a 的方向向量,直线 a 与平面 α 所成的角为 θ,则 $\theta=\begin{cases}\frac{\pi}{2}-\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\rangle,\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\rangle\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\\ \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\rangle-\frac{\pi}{2},\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\rangle\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right].\end{cases}$

任务型课堂

任务 1

[探究活动]

例 1　(1)**证明**:设 $PA=1$,以 A 为原点,AB,AC,AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $P(0,0,1)$,$C(0,1,0)$,$B(2,0,0)$.

又 $AB=4AN$,M,S 分别为 PB,BC 的中点,

所以 $N\left(\frac{1}{2},0,0\right)$,$M\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$,$S\left(1,\frac{1}{2},0\right)$.

所以 $\overrightarrow{CM}=\left(1,-1,\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{SN}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$,

所以 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{SN}=\left(1,-1,\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)=0$,

所以 $CM\perp SN$.

(2)**解**:$\overrightarrow{NC}=\left(-\frac{1}{2},1,0\right)$.

设平面 CMN 的法向量为 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$,

所以 $\overrightarrow{CM}\cdot\boldsymbol{a}=0$,$\overrightarrow{NC}\cdot\boldsymbol{a}=0$,

即 $\begin{cases}x-y+\frac{1}{2}z=0,\\ -\frac{1}{2}x+y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2y,\\ z=-2y.\end{cases}$

取 $y=1$,得 $\boldsymbol{a}=(2,1,-2)$为平面 CMN 的一个法向量.

因为 $\cos\langle\boldsymbol{a},\overrightarrow{SN}\rangle=\frac{-1-\frac{1}{2}}{3\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $\langle\boldsymbol{a},\overrightarrow{SN}\rangle=\frac{3}{4}\pi$.

所以 SN 与平面 CMN 所成的角为 $\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$.

[一题多思]

思考 1.提示:直线与平面所成的角的正弦值等于其方向向量与平面法向量夹角的余弦值的绝对值.

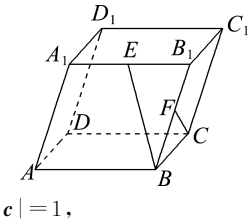
思考 2.解:设 $\overrightarrow{CE}=\lambda\overrightarrow{CB}=(2\lambda,-\lambda,0)(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,故 $E(2\lambda,1-\lambda,0)$,所以 $\overrightarrow{NE}=\left(2\lambda-\frac{1}{2},1-\lambda,0\right)$.

由例题解析可知,平面 CMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{a}=(2,1,-2)$,所以 $\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{NE}\cdot\boldsymbol{a}|}{|\overrightarrow{NE}||\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{3}$,解得 $\lambda=\frac{1}{4}$,

所以存在点 E,且满足 $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ 时,使得 EN 与平面 CMN 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$.

[应用迁移]

1.解:如图所示,设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$,



则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$,

$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=60°$,

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}$.

而 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1E}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$,

$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF}=-\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$,

所以 $|\overrightarrow{BE}|=\sqrt{\frac{1}{4}|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{c}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$|\overrightarrow{CF}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CF}=\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\right)\cdot\left(-\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right)=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\frac{1}{4}\boldsymbol{a}$

$\cdot \boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}^2=\frac{1}{8}$.

因为 $\cos\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CF}\rangle=\frac{\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CF}}{|\overrightarrow{BE}|\cdot|\overrightarrow{CF}|}=\frac{1}{6}$，

所以异面直线 BE 与 CF 所成角的余弦值是 $\frac{1}{6}$.

2.(1)**证明**：因为四边形 $ABCD$ 为矩形，所以 $BC\perp CD$，

又因为 $BC\perp DE$，CD，$DE\subset$ 平面 PCD，$CD\cap DE=D$，

所以 $BC\perp$ 平面 PCD.

因为 $PD\subset$ 平面 PCD，所以 $BC\perp PD$.

因为 $AD\parallel BC$，所以 $AD\perp PD$.

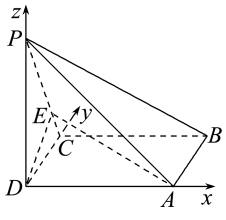
(2)**解**：由(1)知，$BC\perp$ 平面 PCD，

因为 $PC\subset$ 平面 PCD，所以 $BC\perp PC$.

在 Rt$\triangle BCP$ 中，$PC=\sqrt{PB^2-BC^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$，

所以 $PD^2+CD^2=5=PC^2$，所以 $PD\perp CD$.

以$\{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DP}\}$为正交基底建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $D(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$C(0,1,0)$，$P(0,0,2)$，$E\left(0,\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$，

所以$\overrightarrow{DE}=\left(0,\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,1,0)$，$\overrightarrow{AP}=(-2,0,2)$.

设平面 PAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=-2x+y=0,\\ \overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}=-2x+2z=0,\end{cases}$令 $x=1$，则 $\boldsymbol{n}=(1,2,1)$.

设直线 DE 与平面 PAC 所成角的大小为 $\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，

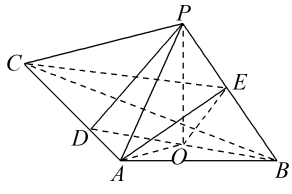
则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{DE}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{DE}|}=\frac{2}{\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$，即直线 DE 与平面 PAC 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$.

任务 2

［探究活动］

例 2 (1)**证明**：如图，延长 BO 交 AC 于点 D，连接 OA，PD.



因为 PO 是三棱锥 P-ABC 的高，所以 $PO\perp$ 平面 ABC.

因为 AO，$BO\subset$ 平面 ABC，所以 $PO\perp AO$，$PO\perp BO$.

又 $PA=PB$，所以$\triangle POA\cong\triangle POB$，所以 $OA=OB$，所以 $\angle OAB=\angle OBA$.

又 $AB\perp AC$，即$\angle BAC=90°$，所以$\angle OAB+\angle OAD=90°$，$\angle OBA+\angle ODA=90°$，

所以$\angle ODA=\angle OAD$，

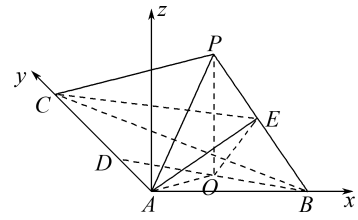
所以 $AO=DO$，即 $AO=DO=OB$，所以 O 是 BD 的中点.

又 E 是 PB 的中点，所以 $OE\parallel PD$.

因为 $OE\not\subset$ 平面 PAC，$PD\subset$ 平面 PAC，

所以 $OE\parallel$ 平面 PAC.

(2)**解**：过点 A 作 $Az\parallel OP$，建立如图所示的空间直角坐标系.



因为 $PO=3$，$AP=5$，所以 $OA=\sqrt{AP^2-PO^2}=4$.

又$\angle ABO=\angle CBO=30°$，所以 $BD=2OA=8$，$AD=4$，$AB=4\sqrt{3}$，

所以 $AC=12$，所以 $A(0,0,0)$，$O(2\sqrt{3},2,0)$，$B(4\sqrt{3},0,0)$，$P(2\sqrt{3},2,3)$，$C(0,12,0)$.

因为 E 是 PB 的中点，所以 $E\left(3\sqrt{3},1,\frac{3}{2}\right)$，

则$\overrightarrow{AE}=\left(3\sqrt{3},1,\frac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{AB}=(4\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{AC}=(0,12,0)$.

设平面 AEB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=3\sqrt{3}x+y+\frac{3}{2}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=4\sqrt{3}x=0.\end{cases}$

令 $z=2$，则 $y=-3$，$x=0$，所以 $\boldsymbol{n}=(0,-3,2)$是平面 AEB 的一个法向量.

同理，可得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},0,-6)$是平面 AEC 的一个法向量，

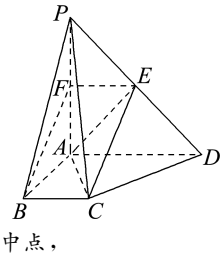
所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{-12}{\sqrt{13}\times\sqrt{39}}=-\frac{4\sqrt{3}}{13}$.

设平面 ACE 与平面 ABE 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=-\frac{4\sqrt{3}}{13}$，

所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{11}{13}$，即平面 ACE 与平面 ABE 的夹角的正弦值为 $\frac{11}{13}$.

［应用迁移］

1.(1)**证明**：如图 1，取 PA 的中点 F，连接 EF，BF.



因为 E 为 PD 的中点，

所以 $EF\parallel AD$，$EF=\frac{1}{2}AD$.

因为 $AD\parallel BC$，$AD=2BC$，

所以 $EF\parallel BC$，$EF=BC$，

所以四边形 $EFBC$ 为平行四边形，所以 $EC\parallel BF$.

又 $BF\subset$ 平面 PAB，$EC\not\subset$ 平面 PAB，

所以 $EC\parallel$ 平面 PAB.

(2)**解**：因为 $AB\perp AD$，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 AB，AD，AP 两两垂直，

故以 A 为原点，AB，AD，AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图 2 所示的空间直角坐标系.

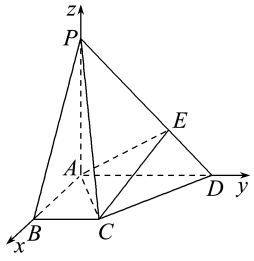


图2

则 $A(0,0,0)$，$P(0,0,2)$，$D(0,2,0)$，$C(1,1,0)$.

因为 $PE=2ED$，所以 $E\left(0,\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$，

所以 $\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{AE}=\left(0,\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$.

设平面 EAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=x+y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=\frac{4}{3}y+\frac{2}{3}z=0,\end{cases}$

取 $y=1$，得 $x=-1$，$z=-2$，所以 $\boldsymbol{n}=(-1,1,-2)$.

因为 $AB\perp AD$，$AP\perp AD$，$AB\cap AP=A$，AB，$AP\subset$ 平面 PAB，所以 $AD\perp$ 平面 PAB，

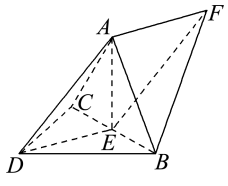
所以 $\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$ 为平面 PAB 的一个法向量.

设平面 EAC 与平面 PAB 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AD}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{AD}|}=\frac{2}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

所以平面 EAC 与平面 PAB 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

2.(1)**证明**：如图，连接 DE，AE.



因为 $DC=DB$，且 E 为 BC 的中点，

所以 $DE\perp BC$.

因为 $DA=DA$，$\angle ADB=\angle ADC=60°$，$DC=DB$，

所以 $\triangle ADB\cong\triangle ADC$(SAS)，

所以 $AC=AB$，所以 $AE\perp BC$.

因为 $DE\cap AE=E$，DE，$AE\subset$ 平面 ADE，

所以 $BC\perp$ 平面 ADE.

又 $DA\subset$ 平面 ADE，所以 $BC\perp DA$.

(2)**解**：由(1)知，$DE\perp BC$，$AE\perp BC$.

不妨设 $DA=DB=DC=2$.

因为 $\angle ADB=\angle ADC=60°$，

所以 $AB=AC=2$.

由题可知，$\triangle DBC$ 为等腰直角三角形，

故 $DE=EB=EC=\sqrt{2}$.

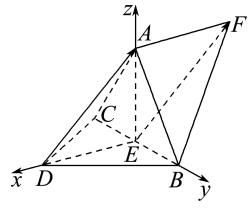
因为 $AE\perp BC$，

所以 $AE=\sqrt{AB^2-EB^2}=\sqrt{2}$.

在 $\triangle ADE$ 中，$AE^2+ED^2=AD^2$，所以 $AE\perp ED$.

所以 EA，ED，EB 两两垂直.

以 E 为原点，ED 所在直线为 x 轴，EB 所在直线为 y 轴，EA 所在直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $E(0,0,0)$，$D(\sqrt{2},0,0)$，$B(0,\sqrt{2},0)$，$A(0,0,\sqrt{2})$，所以 $\overrightarrow{DA}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BA}=(0,-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

设 $F(x_F,y_F,z_F)$.因为 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$，

所以 $(x_F,y_F,z_F)=(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，

即 $F(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，所以 $\overrightarrow{FA}=(\sqrt{2},0,0)$.

设平面 DAB 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{DA}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}z_1=0,\\ -\sqrt{2}y_1+\sqrt{2}z_1=0.\end{cases}$

取 $x_1=1$，则 $y_1=z_1=1$，所以 $\boldsymbol{m}=(1,1,1)$ 为平面 DAB 的一个法向量.

同理，可得 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$ 为平面 ABF 的一个法向量.

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

设二面角 D-AB-F 的平面角为 θ，

则 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以二面角 D-AB-F 的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

任务 3

[探究活动]

例 3 (1)**证明**：在 $\triangle ABC$ 中，因为 $|BC|=2|AB|$，$\angle ABC=60°$，

所以 $|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2-2|AB|\cdot|BC|\cos 60°=3|AB|^2$，

所以 $|AC|=\sqrt{3}|AB|$，所以 $|AC|^2+|AB|^2=|BC|^2$，即 $\angle BAC=90°$，

所以 $AC\perp AB$.又因为 $AC\perp PB$，$PB\cap AB=B$，PB，$AB\subset$ 平面 PAB，

所以 $AC\perp$ 平面 PAB.又因为 $AC\subset$ 平面 $ABCD$，

所以平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，即平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 $ABCD$.

(2)**解**：由四棱柱 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的性质可知 $C_1D_1\parallel A_1B_1\parallel AB$，

所以 $\angle B_1MB$ 即为异面直线 B_1M 与 C_1D_1 所成的角或其补角.

如图，连接 PM，因为 $\triangle PAB$ 是等边三角形，M 为 AB 的中

点，所以 $PM\perp AB$.

又因为 $|PB_1|=\frac{1}{2}|A_1B_1|$，$|MB|=\frac{1}{2}|AB|$，$|AB|=|A_1B_1|$，

所以四边形 $PMBB_1$ 是矩形.

因为 $\triangle PAB$ 是等边三角形，所以 $\angle PBM=60°$，

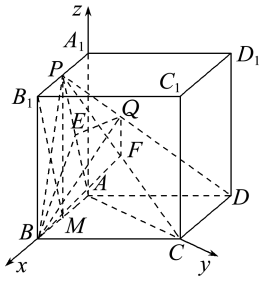
所以 $\angle B_1MB=60°$，即异面直线 B_1M 与 C_1D_1 所成的角为 $60°$.

(3)**解**：由(2)知，$PM\perp AB$，又因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$PM\subset$ 平面 PAB，所以 $PM\perp$ 平面 $ABCD$.

又因为 P，M 分别为 A_1B_1，AB 的中点，所以侧棱 $A_1A\perp$ 平面 $ABCD$，则 $A_1A\perp AB$，$A_1A\perp AC$.

又因为 $AC\perp AB$，所以 AC，AB，A_1A 两两互相垂直.

以 A 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，



设 $|AB|=2m$，则 $A(0,0,0)$，$B(2m,0,0)$，$D(-2m,2\sqrt{3}m,0)$，$C(0,2\sqrt{3}m,0)$，$P(m,0,\sqrt{3}m)$，

所以 $\overrightarrow{CD}=(-2m,0,0)$，$\overrightarrow{CP}=(m,-2\sqrt{3}m,\sqrt{3}m)$，$\overrightarrow{AC}=(0,2\sqrt{3}m,0)$，$\overrightarrow{BD}=(-4m,2\sqrt{3}m,0)$，$\overrightarrow{DP}=(3m,-2\sqrt{3}m,\sqrt{3}m)$.

因为 $QF\subset$ 平面 PCD，所以平面 $CDQF$ 即为平面 PCD.

设平面 PCD 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2mx_1=0,\\ mx_1-2\sqrt{3}my_1+\sqrt{3}mz_1=0,\end{cases}$

令 $y_1=1$，则平面 PCD 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}_1=(0,1,2)$.

因为 $\overrightarrow{DQ}=2\overrightarrow{QP}$，

所以 $\overrightarrow{DQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DP}=\left(2m,-\frac{4\sqrt{3}}{3}m,\frac{2\sqrt{3}}{3}m\right)$.

在平面 $BEQF$ 中，$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{BD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DP}$

$=\left(-2m,\frac{2\sqrt{3}}{3}m,\frac{2\sqrt{3}}{3}m\right)$.

设平面 $BEQF$ 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

又因为 $AC\parallel$ 平面 $BEQF$，则 $\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{AC}$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BQ}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$

则 $\begin{cases}-2mx_2+\frac{2\sqrt{3}}{3}my_2+\frac{2\sqrt{3}}{3}mz_2=0,\\ 2\sqrt{3}my_2=0,\end{cases}$

令 $x_2=1$，则平面 $BEQF$ 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}_2=(1,0,\sqrt{3})$.

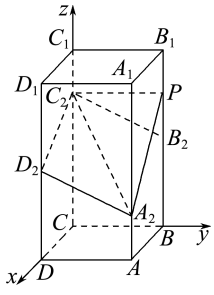
设平面 $BEQF$ 与平面 $CDQF$ 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times2}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，

所以平面 $BEQF$ 与平面 $CDQF$ 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

[**应用迁移**]

(1)**证明**：以 C 为原点，CD，CB，CC_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $C(0,0,0)$，$C_2(0,0,3)$，$B_2(0,2,2)$，$D_2(2,0,2)$，$A_2(2,2,1)$，

所以 $\overrightarrow{B_2C_2}=(0,-2,1)$，$\overrightarrow{A_2D_2}=(0,-2,1)$，所以 $\overrightarrow{B_2C_2}\parallel\overrightarrow{A_2D_2}$.

又 B_2C_2，A_2D_2 不在同一条直线上，所以 $B_2C_2\parallel A_2D_2$.

(2)**解**：设 $P(0,2,\lambda)(0\leqslant\lambda\leqslant4)$，

则 $\overrightarrow{A_2C_2}=(-2,-2,2)$，$\overrightarrow{PC_2}=(0,-2,3-\lambda)$，$\overrightarrow{D_2C_2}=(-2,0,1)$.

设平面 PA_2C_2 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_2C_2}=-2x-2y+2z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC_2}=-2y+(3-\lambda)z=0.\end{cases}$

令 $z=2$，则 $y=3-\lambda$，$x=\lambda-1$，所以 $\boldsymbol{n}=(\lambda-1,3-\lambda,2)$ 是平面 PA_2C_2 的一个法向量.

同理，可得 $\boldsymbol{m}=(1,1,2)$ 是平面 $A_2C_2D_2$ 的一个法向量，

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{6}{\sqrt{6}\times\sqrt{(\lambda-1)^2+(3-\lambda)^2+4}}=|\cos150°|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

化简，可得 $\lambda^2-4\lambda+3=0$，解得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=3$，

所以 $P(0,2,1)$ 或 $P(0,2,3)$，所以 $B_2P=1$.

微专题培优(一)　立体几何中的探索性问题

类型 1

例 1　(1)**证明**：因为平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\perp AD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $AB\perp$ 平面 PAD.

因为 $PD\subset$ 平面 PAD，所以 $AB\perp PD$.

又 $PD\perp PA$，$PA\cap AB=A$，$AB\subset$ 平面 PAB，$PA\subset$ 平面 PAB，所以 $PD\perp$ 平面 PAB.

(2)**解**：取 AD 中点为 O，连接 CO，PO.

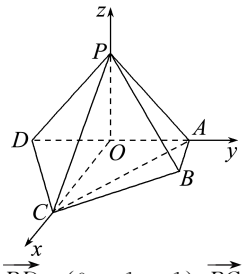
因为 $CD=AC=\sqrt{5}$，所以 $CO\perp AD$.

因为 $PA=PD$，所以 $PO\perp AD$.

因为平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$PO\subset$ 平面 PAD，所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$.

所以 OP，OC，OA 两两垂直.建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$，

则 $P(0,0,1)$，$B(1,1,0)$，$D(0,-1,0)$，$C(2,0,0)$，



$\overrightarrow{PB}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{PD}=(0,-1,-1)$，$\overrightarrow{PC}=(2,0,-1)$.

设平面 PDC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=-y-z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=2x-z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,-2,2)$.

假设存在点 M 使得 $BM\parallel$ 平面 PCD，设 $\dfrac{AM}{AP}=\lambda$，$M(0,y_0,z_0)$，

又 $A(0,1,0)$，$P(0,0,1)$，$\overrightarrow{AP}=(0,-1,1)$，$\overrightarrow{AM}=(0,y_0-1,z_0)$，

所以 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AP}$，解得 $M(0,1-\lambda,\lambda)$，

所以 $\overrightarrow{BM}=(-1,-\lambda,\lambda)$.

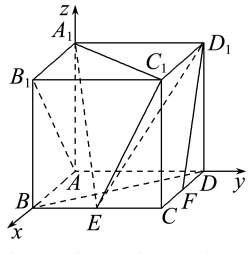
因为 $BM\parallel$ 平面 PCD，$\boldsymbol{n}$ 为平面 PCD 的一个法向量，

所以 $\overrightarrow{BM}\cdot\boldsymbol{n}=0$，即 $-1+2\lambda+2\lambda=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{4}$.

综上，存在点 M，即当 $\dfrac{PM}{PA}=\dfrac{3}{4}$ 时，使得 $BM\parallel$ 平面 PCD.

【对点训练】

(1)**证明**：在棱长为 2 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，以 A 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$，$A_1(0,0,2)$，$B_1(2,0,2)$，$C_1(2,2,2)$，$D_1(0,2,2)$，$E(2,1,0)$，

$\overrightarrow{AB_1}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{A_1D_1}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{A_1E}=(2,1,-2)$.

因为 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{A_1D_1}=2\times0+0\times2+2\times0=0$，$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{A_1E}=2\times2+0\times1+2\times(-2)=0$，

所以 $AB_1\perp A_1D_1$，$AB_1\perp A_1E$. 又 $A_1D_1\cap A_1E=A_1$，A_1D_1，$A_1E\subset$ 平面 A_1ED_1，

所以直线 $AB_1\perp$ 平面 A_1ED_1.

(2)**解**：由(1)知 $\overrightarrow{A_1C_1}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{EC_1}=(0,1,2)$，设平面 A_1EC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=2x+2y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC_1}=y+2z=0,\end{cases}$ 取 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$.

假定存在点 F，使直线 $D_1F\parallel$ 平面 A_1EC_1，设点 F 的坐标为 $(t,2,0)$，$0\leqslant t\leqslant2$，

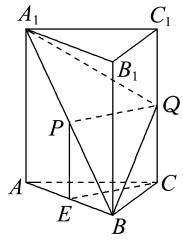
则 $\overrightarrow{FD_1}=(-t,0,2)$. 由 $\overrightarrow{FD_1}\perp\boldsymbol{n}$，得 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FD_1}=-2t+2=0$，解得 $t=1$.

又 $D_1F\not\subset$ 平面 A_1EC_1，则 $D_1F\parallel$ 平面 A_1EC_1，

所以存在点 F，使直线 $D_1F\parallel$ 平面 A_1EC_1，此时 DF 的长度为 1.

类型 2

例 2 (1)**证明**：设 AB 的中点为 E，连接 PE，PQ，CE，如图 1，



因为 P 为 A_1B 的中点，Q 为 C_1C 的中点，

所以 $PE\parallel A_1A$，$PE=\dfrac{1}{2}A_1A$，$QC=\dfrac{1}{2}C_1C$.

在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$A_1A\parallel C_1C$，$A_1A=C_1C$，

所以 $A_1A\parallel QC$，且 $\dfrac{1}{2}A_1A=QC$，所以 $PE\parallel\!\!\!=QC$，

所以四边形 $PECQ$ 为平行四边形，

则 $PQ\parallel EC$. 又 $PQ\not\subset$ 平面 ABC，$EC\subset$ 平面 ABC，

所以 $PQ\parallel$ 平面 ABC.

又平面 $A_1BQ\cap$ 平面 $ABC=l$，$PQ\subset$ 平面 A_1BQ，

所以 $PQ\parallel l$.

(2)**解**：在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$CC_1\perp$ 平面 ABC，$BC\perp AC$，

故可以 C 为原点，以 CB，CA，CC_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图 2 所示的空间直角坐标系，

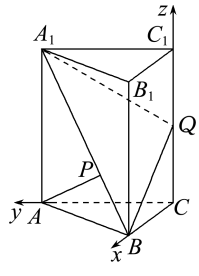


图2

因为 $CA=CB=\dfrac{1}{2}AA_1=1$，

所以 $B(1,0,0)$，$Q(0,0,1)$，$A_1(0,1,2)$，$A(0,1,0)$，

则 $\overrightarrow{BA_1}=(-1,1,2)$，$\overrightarrow{A_1Q}=(0,-1,-1)$，$\overrightarrow{AB}=(1,-1,0)$.

又 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BA_1}$ $(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则 $\overrightarrow{BP}=(-\lambda,\lambda,2\lambda)$，

所以 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=(1-\lambda,\lambda-1,2\lambda)$.

若 $AP\perp$ 平面 A_1BQ，则 $\begin{cases}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0,\\ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{A_1Q}=0,\end{cases}$

则 $\begin{cases}-(1-\lambda)+\lambda-1+4\lambda=0,\\ -(\lambda-1)-2\lambda=0,\end{cases}$ 解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，

所以线段 A_1B 上存在点 P，使得 $AP\perp$ 平面 A_1BQ，此时 $\lambda=\dfrac{1}{3}$.

【对点训练】

(1)**证明**：因为平面 $EFM\parallel$ 平面 SCD，平面 $ABCD\cap$ 平面 $EFM=EM$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $SCD=CD$，

所以 $EM\parallel CD$.

又因为 $CM\parallel DE$，则四边形 $CDEM$ 为平行四边形，所以 $CM=DE$.

因为 E 为 AD 的中点，则 $DE=\frac{1}{2}AD$，所以 $CM=DE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC$，

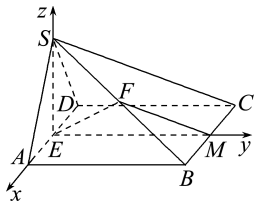
故 M 为线段 BC 的中点.

(2)**解**：因为 $SA=SD$，E 为 AD 的中点，则 $SE\perp AD$.

因为平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $SAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$SE\subset$ 平面 SAD，

所以 $SE\perp$ 平面 $ABCD$.

又因为四边形 $ABCD$ 为正方形，以点 E 为坐标原点，$\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{EM}$，$\overrightarrow{ES}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系，



因为 $SA=SD=AD=2$，所以 $S(0,0,\sqrt{3})$，$B(1,2,0)$，$C(-1,2,0)$.

设平面 SBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{CB}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{SC}=(-1,2,-\sqrt{3})$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CB}=2x_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{SC}=-x_1+2y_1-\sqrt{3}z_1=0,\end{cases}$ 取 $y_1=\sqrt{3}$，可得 $\boldsymbol{m}=(0,\sqrt{3},2)$.

易知平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，

则 $\sin\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\sqrt{1-\cos^2\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle}=\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，

所以 $\tan\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\sin\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle}{\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle}=\frac{\sqrt{21}}{7}\times\frac{7}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由图可知，二面角 S-BC-D 的平面角为锐角，

因此二面角 S-BC-D 的正切值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3)**解**：易知 $D(-1,0,0)$，$M(0,2,0)$，

设 $\overrightarrow{SN}=\lambda\overrightarrow{SC}=\lambda(-1,2,-\sqrt{3})=(-\lambda,2\lambda,-\sqrt{3}\lambda)$，其中 $0\leqslant\lambda\leqslant1$，

则 $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SN}=(1,0,\sqrt{3})+(-\lambda,2\lambda,-\sqrt{3}\lambda)=(1-\lambda,2\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$，$\overrightarrow{DM}=(1,2,0)$.

设平面 DMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{u}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{u}\cdot\overrightarrow{DM}=x_2+2y_2=0,\\ \boldsymbol{u}\cdot\overrightarrow{DN}=(1-\lambda)x_2+2\lambda y_2+(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)z_2=0,\end{cases}$

取 $x_2=2\sqrt{3}(1-\lambda)$，则 $\boldsymbol{u}=(2\sqrt{3}(1-\lambda),\sqrt{3}(\lambda-1),4\lambda-2)$.

因为平面 $DMN\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{u}$，

即 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}=4\lambda-2=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，

所以当 N 为 SC 的中点时，平面 $DMN\perp$ 平面 $ABCD$，故 $\frac{CN}{CS}=\frac{1}{2}$.

类型 3

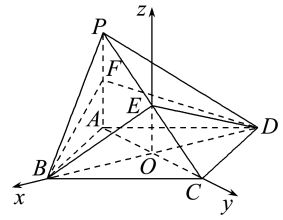
例 3 (1)**证明**：如图，连接 AC，与 BD 相交于点 O，连接 OE.

因为底面 $ABCD$ 为菱形，所以 O 为 AC 的中点.

因为 E 为 PC 的中点，所以 $OE\parallel PA$.

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $OE\perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $OE\subset$ 平面 BDE，所以平面 $BDE\perp$ 平面 $ABCD$.



(2)**解**：因为四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle BAD=120^\circ$，所以 $\triangle ABC$，$\triangle ADC$ 为等边三角形，

所以 $OB=OD=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=2\sqrt{3}$.

因为 $OE\perp$ 平面 $ABCD$，且底面 $ABCD$ 为菱形，所以 OB，OC，OE 两两垂直，

以 O 为原点，向量 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OE}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $O(0,0,0)$，$B(2\sqrt{3},0,0)$，$C(0,2,0)$，$D(-2\sqrt{3},0,0)$，

所以 $\overrightarrow{DB}=(4\sqrt{3},0,0)$.

设 $F(0,-2,t)(0\leqslant t\leqslant2)$，则 $\overrightarrow{FB}=(2\sqrt{3},2,-t)$.

设平面 BDF 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{FB}\cdot\boldsymbol{m}=2\sqrt{3}x+2y-tz=0,\\ \overrightarrow{DB}\cdot\boldsymbol{m}=4\sqrt{3}x=0,\end{cases}$ 令 $z=2$，可得 $\boldsymbol{m}=(0,t,2)$.

由题意得 $\overrightarrow{OC}=(0,2,0)$ 为平面 BDE 的一个法向量，

设平面 BDE 与平面 BDF 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{OC}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OC}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{OC}|}=\frac{2t}{2\sqrt{t^2+4}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

解得 $t=\frac{2}{3}$，

所以存在点 F 为棱 PA 靠近点 A 的三等分点，使得平面 BDE 与平面 BDF 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

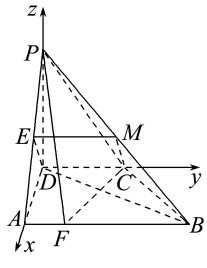
【对点训练】

(1)**证明**：如图，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，取 PB 的中点 M，连接 EM，CM. 由 E 是 PA 的中点，

得 $EM\parallel AB$，且 $EM=\frac{1}{2}AB=1$. 又 $AB\parallel CD$，$CD=1$，

则 $EM\parallel CD$ 且 $EM=CD$，所以四边形 $CDEM$ 为平行四边形，所以 $DE\parallel CM$.

又 $CM\subset$ 平面 PBC，$DE\not\subset$ 平面 PBC，所以 $DE\parallel$ 平面 BPC.



(2)**解**:由 $AB\parallel DC$,$AB\perp AD$,得 $AD\perp DC$,由 $PD\perp$ 平面 $ABCD$,AD,$DC\subset$ 平面 $ABCD$,得 $DP\perp DA$,$DP\perp DC$.

因为 $\angle PAD=45°$,所以 $DP=DA=1$.

以 D 为原点,直线 DA,DC,DP 分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $Dxyz$,

则 $A(1,0,0)$,$C(0,1,0)$,$B(1,2,0)$,$D(0,0,0)$,$P(0,0,1)$.

设 $F(1,y,0)(0\leqslant y\leqslant 2)$,则 $\overrightarrow{CF}=(1,y-1,0)$,$\overrightarrow{BD}=(-1,-2,0)$.

由 $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{BD}=0$,得 $-1-2y+2=0$,解得 $y=\frac{1}{2}$,即 $F\left(1,\frac{1}{2},0\right)$.

设平面 FPC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$,$\overrightarrow{PC}=(0,1,-1)$,$\overrightarrow{CF}=\left(1,-\frac{1}{2},0\right)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=y_1-z_1=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CF}=x_1-\frac{1}{2}y_1=0,\end{cases}$ 令 $y_1=2$,得 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$.

设平面 BPC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$,$\overrightarrow{PC}=(0,1,-1)$,$\overrightarrow{CB}=(1,1,0)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=y_2-z_2=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CB}=x_2+y_2=0,\end{cases}$ 令 $y_2=1$,得 $\boldsymbol{m}=(-1,1,1)$.

设二面角 F-PC-B 的大小为 θ,由题图得 θ 为锐角,

因此 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{3}{\sqrt{3}\times 3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以二面角 F-PC-B 的余弦值是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(3)假定存在点 Q 满足条件,设点 $Q(x_3,0,z_3)$,由 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{AP}=\lambda(-1,0,1)$,$\lambda\in[0,1]$,

得 $Q(-\lambda+1,0,\lambda)$,则 $\overrightarrow{FQ}=\left(-\lambda,-\frac{1}{2},\lambda\right)$.

又平面 PFC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$,

由 FQ 与平面 PFC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,得 $|\cos\langle\overrightarrow{FQ},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{FQ}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{FQ}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|\lambda-1|}{3\sqrt{2\lambda^2+\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

整理得 $20\lambda^2+8\lambda-1=0$.

又 $\lambda\in[0,1]$,解得 $\lambda=\frac{1}{10}$,此时 $|\overrightarrow{AQ}|=\frac{1}{10}|\overrightarrow{AP}|=\frac{\sqrt{2}}{10}$,

所以存在点 Q,使得 FQ 与平面 PFC 所成角的正弦值是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,AQ 的长为 $\frac{\sqrt{2}}{10}$.

微专题培优(二)　立体几何中的翻折问题

例　(1)**证明**:在直角梯形 $ABCD$ 中,连接 CE(图略),因为 $AE=\frac{1}{2}AD=1$,$AD\parallel BC$,$\angle BAD=\frac{\pi}{2}$,

所以四边形 $ABCE$ 为正方形,所以 $AC\perp BE$,所以 $EB\perp A_1O$,$EB\perp CO$.

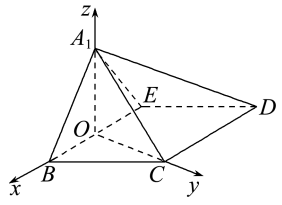
又 $A_1O\cap CO=O$,A_1O,$CO\subset$ 平面 A_1OC,所以 $EB\perp$ 平面 A_1OC.

又 $BC\parallel ED$,且 $BC=ED$,故四边形 $BCDE$ 为平行四边形,

所以 $CD\parallel EB$,所以 $CD\perp$ 平面 A_1OC.

(2)**解**:由题易知,$A_1O\perp BE$,$OC\perp BE$,因为平面 $A_1BE\perp$ 平面 $BCDE$,平面 $A_1BE\cap$ 平面 $BCDE=BE$,$A_1O\subset$ 平面 A_1BE,所以 $A_1O\perp$ 平面 $BCDE$.又 $OC\subset$ 平面 $BCDE$,

所以 $A_1O\perp OC$.以 O 为原点,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{OA_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系.



由题意知,$A_1\left(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$D\left(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$,$B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,0\right)$,$C\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$,则 $\overrightarrow{A_1C}=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$\overrightarrow{A_1B}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$\overrightarrow{CD}=(-\sqrt{2},0,0)$.

设平面 A_1CD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,平面 A_1BC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{A_1C}=\frac{\sqrt{2}}{2}y_1-\frac{\sqrt{2}}{2}z_1=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CD}=-\sqrt{2}x_1=0,\end{cases}$ 令 $y_1=1$,则 $z_1=1$,$x_1=0$,故 $\boldsymbol{n}_1=(0,1,1)$;

$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{A_1B}=\frac{\sqrt{2}}{2}x_2-\frac{\sqrt{2}}{2}z_2=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{A_1C}=\frac{\sqrt{2}}{2}y_2-\frac{\sqrt{2}}{2}z_2=0,\end{cases}$ 令 $y_2=1$,则 $z_2=1$,$x_2=1$,

故 $\boldsymbol{n}_2=(1,1,1)$.

设平面 A_1CD 与平面 A_1BC 的夹角为 θ,

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,

故平面 A_1BC 与平面 A_1CD 夹角的余弦值为 $\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}$.

【对点训练】

(1)**证明**:取 AC 中点为 E,连接 PE,BE,

因为 $PA=PC$,$AB=BC$,

所以 $PE\perp AC$,$BE\perp AC$.

又 $PE\cap BE=E$,PE,$BE\subset$ 平面 PBE,

所以 $AC\perp$ 平面 PBE.

又 $PB\subset$ 平面 PBE,所以 $AC\perp PB$.

(2)**解**:因为平面 $PAC\perp$ 平面 ACB,平面 $PAC\cap$ 平面 $ACB=AC$,$PE\perp AC$,$PE\subset$ 平面 PAC,

所以 $PE\perp$ 平面 ACB,易知 EA,EP,EB 两两互相垂直.

以 E 为原点,以 $\{EA,EB,EP\}$ 为基底,建立如图 1 所示的空间直角坐标系,

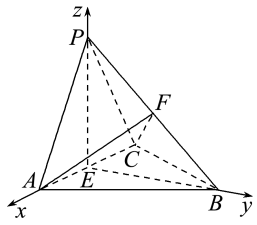


图1

则 $A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{2},0)$，$C(-1,0,0)$，$P(0,0,1)$，$F\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$，

所以$\overrightarrow{PB}=(0,\sqrt{2},-1)$，$\overrightarrow{CA}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{CF}=\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

设平面 ACF 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{CA}\cdot\boldsymbol{m}=2x_1=0,\\ \overrightarrow{CF}\cdot\boldsymbol{m}=x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}y_1+\frac{1}{2}z_1=0,\end{cases}$

取 $y_1=-1$，得 $\boldsymbol{m}=(0,-1,\sqrt{2})$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{PB},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{PB}||\boldsymbol{m}|}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

设直线 PB 与平面 ACF 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，又 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，

所以直线 PB 与平面 ACF 所成角的余弦值为 $\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}$.

(3)**解**：以 E 为原点，以 EA 为 x 轴，EB 为 y 轴，过点 E 且垂直于平面 ABC 的直线为 z 轴，建立如图 2 所示的空间直角坐标系，

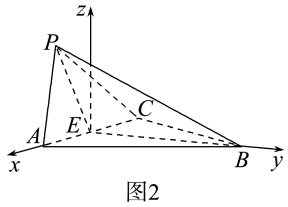


图2

因为$\triangle DAC$ 为等腰三角形，$DA=DC=\sqrt{2}$，

所以 $EP=1$，则 $A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{2},0)$，$C(-1,0,0)$.

设$\angle BEP=\theta$，则 $P(0,\cos\theta,\sin\theta)$，则$\overrightarrow{PC}=(-1,-\cos\theta,-\sin\theta)$，$\overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt{2},0)$，

故 $|\cos\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{AB}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{PC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|}\right|=\left|\frac{1-\sqrt{2}\cos\theta}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}\right|=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

所以 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{4}$或 $\cos\theta=\frac{5\sqrt{2}}{4}$(舍).

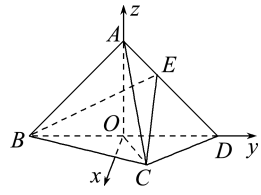
又 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\cos\alpha=|\cos\theta|=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

迁移应用

类型一

例 1 (1)**证明**：因为 $AB=AD$，O 为 BD 的中点，所以 $AO\perp BD$.又平面 $ABD\perp$平面 BCD，平面 $ABD\cap$平面 $BCD=BD$，$AO\subset$平面 ABD，所以 $AO\perp$平面 BCD.又 $CD\subset$平面 BCD，所以 $AO\perp CD$.

(2)**解**：如图所示，以 O 为坐标原点，OA 所在直线为 z 轴，OD 所在直线为 y 轴，平面 BCD 中垂直OD 且过点O 的直线为 x 轴，建立空间直角坐标系 $Oxyz$，



则 $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$D(0,1,0)$，$B(0,-1,0)$.设 $A(0,0,m)$，

因为 $DE=2EA$，所以 $E\left(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}m\right)$，所以 $\overrightarrow{EB}=\left(0,-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}m\right)$，$\overrightarrow{BC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面 EBC 的一个法向量，

则$\begin{cases}\overrightarrow{EB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-\frac{4}{3}y-\frac{2}{3}mz=0,\\ \frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{3}{2}y=0,\end{cases}$令 $y=1$，

得平面 EBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(-\sqrt{3},1,-\frac{2}{m}\right)$.

又平面 BCD 的一个法向量为$\overrightarrow{OA}=(0,0,m)$，所以$|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{OA}\rangle|=\left|\frac{-2}{m\cdot\sqrt{4+\frac{4}{m^2}}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

解得 $m=1$(负值舍去).

又点 C 到平面 ABD 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$V_{A\text{-}BCD}=V_{C\text{-}ABD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

所以三棱锥 $A\text{-}BCD$ 的体积为$\frac{\sqrt{3}}{6}$.

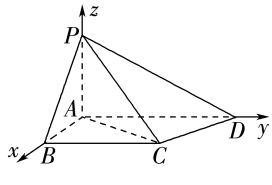
【对点训练】

1.(1)**证明**：因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，$AD\subset$平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AD$，

又 $AD\perp AB$，$PA\cap AB=A$，PA，$AB\subset$平面 PAB，所以 $AD\perp$平面 PAB，

又 $AD\subset$平面 PAD，所以平面 $PAD\perp$平面 PAB.

(2)①**证明**：以 A 为坐标原点，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}$的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $Axyz$，如图所示，



则 $B(\sqrt{2},0,0)$，$C(\sqrt{2},2,0)$，$D(0,1+\sqrt{3},0)$，$P(0,0,\sqrt{2})$，设 $O(a,b,c)$，

因为点 P，B，C，D 均在球 O 的球面上，所以$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$

$=|\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{OP}|$，

则$(a-\sqrt{2})^2+b^2+c^2=(a-\sqrt{2})^2+(b-2)^2+c^2=a^2+(b-1-\sqrt{3})^2+c^2=a^2+b^2+(c-\sqrt{2})^2$，

得$a=0,b=1,c=0$，即$O(0,1,0)$，

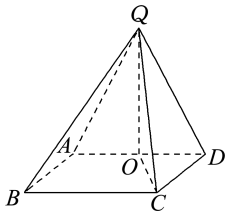
所以点O在AD上，即点O在平面$ABCD$内.

②**解**：$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{2},2,0),\overrightarrow{PO}=(0,1,-\sqrt{2})$，

则$\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{PO}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PO}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{PO}|}=\dfrac{2}{\sqrt{6}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，

所以直线AC与PO所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

2.(1)**证明**：如图1，取AD的中点为O，连接QO,CO.



因为$QA=QD,OA=OD$，则$QO\perp AD$.

因为$AD=2,QA=\sqrt{5}$，所以$QO=\sqrt{5-1}=2$.

在正方形$ABCD$中，因为$CD=2,DO=1$，所以$CO=\sqrt{5}$.

因为$QC=3$，所以$QC^2=QO^2+OC^2$，故$\triangle QOC$为直角三角形且$QO\perp OC$.

因为$OC\cap AD=O$，所以$QO\perp$平面$ABCD$.

因为$QO\subset$平面QAD，所以平面$QAD\perp$平面$ABCD$.

(2)如图2，连接BD，在平面$ABCD$内，过点O作$OT\parallel CD$，交BC交于点T，则$OT\perp AD$.

结合(1)中的$QO\perp$平面$ABCD$，故可建如图2所示的空间直角坐标系，

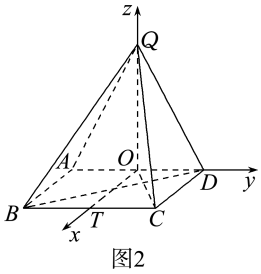


图2

则$D(0,1,0),Q(0,0,2),B(2,-1,0)$，故$\overrightarrow{BQ}=(-2,1,2),\overrightarrow{BD}=(-2,2,0)$.

设平面QBD的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BQ}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x+y+2z=0,\\ -2x+2y=0,\end{cases}$取$x=1$，则$y=1$，$z=\dfrac{1}{2}$，故$\boldsymbol{n}=\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$.

由题易知平面QAD的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(1,0,0)$，所以$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{1}{1\times\dfrac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}$.

又二面角B-QD-A的平面角为锐角，故其余弦值为$\dfrac{2}{3}$.

类型二

例2 **解**：(1)在直三棱柱ABC-$A_1B_1C_1$中，设点A到平面A_1BC的距离为h，则$V_{A\text{-}A_1BC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle A_1BC}\cdot h=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}h=V_{A_1\text{-}ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot A_1A=\dfrac{1}{3}V_{ABC\text{-}A_1B_1C_1}=\dfrac{4}{3}$，

解得$h=\sqrt{2}$，

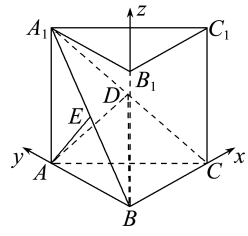
所以点A到平面A_1BC的距离为$\sqrt{2}$.

(2)取A_1B的中点E，连接AE，如图，因为$AA_1=AB$，所以$AE\perp A_1B$.

又平面$A_1BC\perp$平面ABB_1A_1，平面$A_1BC\cap ABB_1A_1=A_1B$，

且$AE\subset$平面ABB_1A_1，所以$AE\perp$平面A_1BC.

在直三棱柱ABC-$A_1B_1C_1$中，$BB_1\perp$平面ABC，由$BC\subset$平面A_1BC，$BC\subset$平面ABC，可得$AE\perp BC$，$BB_1\perp BC$.又$AE,BB_1\subset$平面ABB_1A_1且相交，所以$BC\perp$平面ABB_1A_1，所以BC,BA,BB_1两两垂直，以B为原点，建立空间直角坐标系，如图.



由(1)得$AE=\sqrt{2}$，所以$AA_1=AB=2,A_1B=2\sqrt{2}$，所以$BC=2$，

则$A(0,2,0),A_1(0,2,2),B(0,0,0),C(2,0,0)$，所以$A_1C$的中点$D(1,1,1)$，

$\overrightarrow{BD}=(1,1,1),\overrightarrow{BA}=(0,2,0),\overrightarrow{BC}=(2,0,0)$.

设平面ABD的一个法向量$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=x+y+z=0,\\ \boldsymbol{m}_1\cdot\overrightarrow{BA}=2y=0,\end{cases}$

可取$\boldsymbol{m}=(1,0,-1)$.

设平面BDC的一个法向量$\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=a+b+c=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=2a=0.\end{cases}$

可取$\boldsymbol{n}=(0,1,-1)$，

则$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$.

所以二面角A-BD-C的正弦值为$\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

【对点训练】

(1)**证明**：(方法一)因为$EB\parallel FC$，$EB\not\subset$平面$CD'F$，$FC\subset$平面$CD'F$，所以$EB\parallel$平面$CD'F$，

因为$A'E\parallel D'F$，$A'E\not\subset$平面$CD'F$，$D'F\subset$平面$CD'F$，所以$A'E\parallel$平面$CD'F$.

因为$EB\subset$平面$BA'E$，$A'E\subset$平面$BA'E$，$EB\cap A'E=E$，所以平面$BA'E\parallel$平面$CD'F$.

因为$A'B\subset$平面$BA'E$，所以$A'B\parallel$平面$CD'F$.

(方法二)如图1，延长DC至点G，使得$DG=AB$，连接GB,GD'，

因为$AB\parallel CD$，所以$AB\parallel DG$，又$AB=DG$，

所以四边形$ABGD$是平行四边形，所以$AD=BG,AD\parallel BG$.

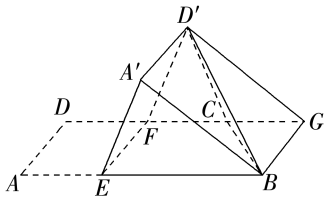


图 1

翻折后，$A'D'=BG$，$A'D'\parallel BG$，

所以四边形 $A'BGD'$ 是平行四边形，所以 $A'B\parallel D'G$.

因为 $A'B\not\subset$ 平面 $CD'F$，$D'G\subset$ 平面 $CD'F$，所以 $A'B\parallel$ 平面 $CD'F$.

(2)**解**：因为 $\angle DAB=90°$，$EF\parallel AD$，所以 $\angle FEB=90°$，即 $AB\perp EF$，翻折后，$A'E\perp EF$，$EB\perp EF$，

所以平面 $EFD'A'$ 与平面 $EFCB$ 所成二面角的平面角为 $\angle A'EB$，

即 $\angle A'EB=60°$，同理 $\angle D'FC=60°$.

设 $AD=1$，取 CF 的中点 O，连接 $D'O$，

在 $\triangle OD'F$ 中，$D'F=1$，$OF=\frac{1}{2}$，$\angle D'FO=60°$，由余弦定理得 $OD'=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $D'F^2=OF^2+OD'^2$，所以 $OD'\perp OF$.

在线段 EB 上取一点 M，使得 $EM=\frac{1}{2}$，连接 OM，则 $EM=OF$，又 $EM\parallel OF$，所以四边形 $EMOF$ 为平行四边形，

所以 $EF\parallel OM$.

因为 $D'F\perp EF$，$CF\perp EF$，$D'F\cap CF=F$，$D'F$，$CF\subset$ 平面 $CD'F$，

所以 $EF\perp$ 平面 $CD'F$，即 $OM\perp$ 平面 $CD'F$，

所以 OM，OC，OD' 两两垂直.

如图 2 所示，以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD'}$ 的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立空间直角坐标系，

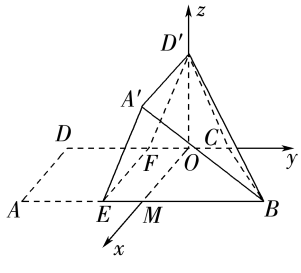


图 2

则 $B\left(1,\frac{3}{2},0\right)$，$C\left(0,\frac{1}{2},0\right)$，$D'\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$E\left(1,-\frac{1}{2},0\right)$，$F\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$，$\overrightarrow{CB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{CD'}=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{FE}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{FD'}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

设平面 BCD' 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{CD'}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1+y_1=0,\\ -\frac{1}{2}y_1+\frac{\sqrt{3}}{2}z_1=0,\end{cases}$ 取 $z_1=\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{m}=(-3,3,\sqrt{3})$.

设平面 $EFD'A'$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{FE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{FD'}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_2=0,\\ \frac{1}{2}y_2+\frac{\sqrt{3}}{2}z_2=0,\end{cases}$ 取 $z_2=\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{n}=(0,-3,\sqrt{3})$.

设平面 BCD' 与平面 $EFD'A'$ 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{6}{\sqrt{21}\times\sqrt{12}}=\frac{1}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$，

所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{7}}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{42}}{7}$，

所以平面 BCD' 与平面 $EFD'A'$ 所成二面角的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$.

类型三

例 3 (1)**证明**：因为 $AD=CD$，E 是 AC 的中点，所以 $AC\perp DE$.

因为 $\begin{cases}AD=CD,\\ \angle ADB=\angle CDB,\\ BD=BD,\end{cases}$ 所以 $\triangle ADB\cong\triangle CDB$，

所以 $AB=CB$，故 $AC\perp BE$.

因为 $DE\cap BE=E$，DE，$BE\subset$ 平面 BED，

所以 $AC\perp$ 平面 BED.

因为 $AC\subset$ 平面 ACD，所以平面 $BED\perp$ 平面 ACD.

(2)依题意得 $AB=BD=BC=2$，$\angle ACB=60°$，$\triangle ABC$ 是等边三角形，

所以 $AC=2$，$AE=CE=1$，$BE=\sqrt{3}$.

因为 $AD=CD$，$AD\perp CD$，所以 $\triangle ACD$ 是等腰直角三角形，所以 $DE=1$.

又 $DE^2+BE^2=BD^2$，所以 $DE\perp BE$.

因为 $AC\cap BE=E$，AC，$BE\subset$ 平面 ABC，所以 $DE\perp$ 平面 ABC.

因为 $\triangle ADB\cong\triangle CDB$，所以 $\angle FBA=\angle FBC$.

因为 $\begin{cases}AB=CB,\\ \angle FBA=\angle FBC,\\ BF=BF,\end{cases}$ 所以 $\triangle FBA\cong\triangle FBC$，

所以 $AF=CF$，连接 EF，则 $EF\perp AC$.

因为 $S_{\triangle AFC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot EF$，所以当 EF 最短，即 $EF\perp BD$ 时，$\triangle AFC$ 的面积最小.

在 Rt$\triangle BED$ 中，$\frac{1}{2}\cdot BE\cdot DE=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot EF$，解得 $EF=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $DF=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$，$BF=2-DF=\frac{3}{2}$，

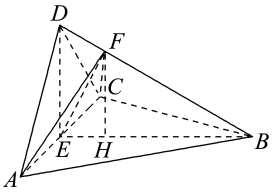
所以 $\frac{BF}{BD}=\frac{3}{4}$.

如图，过点 F 作 $FH\perp BE$，垂足为 H，则 $FH\parallel DE$，所以 $FH\perp$ 平面 ABC，且 $\frac{FH}{DE}=\frac{BF}{BD}=\frac{3}{4}$，

所以 $FH=\frac{3}{4}$，

所以 $V_{F\text{-}ABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot FH=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}\times\frac{3}{4}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}$.



【对点训练】

(1)**证明**:因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $BD\perp AC$.

又 $BD\perp PC$,AC,$PC\subset$平面 PAC,$AC\cap PC=C$,所以 $BD\perp$平面 PAC.

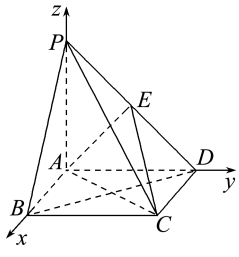
因为 $PA\subset$平面 PAC,所以 $BD\perp PA$.

又因为 $PB=\sqrt{2}AB=\sqrt{2}PA$,所以 $PB^2=AB^2+PA^2$,即 $AB\perp PA$.

因为 AB,$BD\subset$平面 $ABCD$,且 $AB\cap BD=B$,所以 $PA\perp$平面 $ABCD$.

(2)**解**:由(1)可知,$PA\perp$平面 $ABCD$,且 $AB\perp AD$,

如图,以 A 为坐标原点,AB,AD,AP 分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系,



不妨设 $PA=2$,则 $A(0,0,0)$,$C(2,2,0)$,$D(0,2,0)$,$P(0,0,2)$,

可得$\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$,$\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$,

则$\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PD}=(0,2\lambda,-2\lambda)$,$\lambda\in[0,1]$,可得$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PE}=(0,2\lambda,2-2\lambda)$.

设平面 AEC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2x+2y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=2\lambda y+(2-2\lambda)z=0,\end{cases}$

令 $y=1-\lambda$,则 $x=\lambda-1$,$z=-\lambda$,可得 $\boldsymbol{n}=(\lambda-1,1-\lambda,-\lambda)$.

由题易知平面 PAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$,

所以$|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{|1-\lambda|}{\sqrt{(\lambda-1)^2+(1-\lambda)^2+\lambda^2}}$

$=\frac{2}{3}$,

整理得 $3\lambda^2+2\lambda-1=0$,解得 $\lambda=\frac{1}{3}$或 $\lambda=-1$(舍去),

所以存在实数 λ,λ 的值为 $\frac{1}{3}$.

第二章　直线和圆的方程

2.1　直线的倾斜角与斜率

2.1.1　倾斜角与斜率

问题式预习

【知识清单】

知识点一

x　0°　倾斜程度

知识点二

(1)正切值　(2)$\tan\alpha$　(3)0　$(0,+\infty)$　$(-\infty,0)$

(4)$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$　(5)$\frac{y}{x}$

【概念辨析】

1.(1)√　(2)×　(3)√　(4)×

2.A　**解析**:由题意知,$\tan 45^\circ=\frac{2-3}{1-m}$,解得 $m=2$.

3.(1)**提示**:不是.若直线没有斜率,则其倾斜角为 90°.

(2)**提示**:斜率公式中分子与分母的位置不可以互换,但 y_1 与 y_2,x_1 与 x_2 可以同时互换位置,即斜率公式也可写为 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

(3)**提示**:当 $k=\tan\alpha<0$ 时,倾斜角 α 是钝角;

当 $k=\tan\alpha>0$ 时,倾斜角 α 是锐角;

当 $k=\tan\alpha=0$ 时,倾斜角 α 是 0°.

(4)**提示**:不是,在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内,k 随 α 的增大而增大,在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 内,k 也是随 α 的增大而增大,但当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时,斜率 k 不存在.

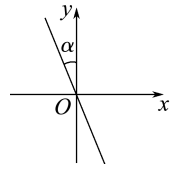
任务型课堂

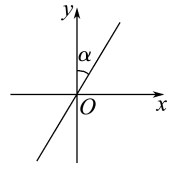
任务 1

1.D　**解析**:对于 A,直线 $y=x$ 的斜率为 1,而 $\tan\frac{5\pi}{4}=1$,显然$\frac{5\pi}{4}$不是直线 $y=x$ 的倾斜角,故 A 错误;对于 B,直线 $x=1$ 的倾斜角为$\frac{\pi}{2}$,而直线 $x=1$ 的斜率不存在,故 B 错误;对于 C,坐标平面内的任何一条直线均有倾斜角,而垂直于 x 轴的直线没有斜率,故 C 错误;对于 D,直线的倾斜角的取值范围是$[0,\pi)$,故 D 正确.

故选 D.

2.D　**解析**:如图,当 l 的倾斜角大于 90°时,倾斜角为 $90^\circ+\alpha$;当 l 的倾斜角小于 90°时,倾斜角为 $90^\circ-\alpha$.故选 D.





任务 2

[探究活动]

例 1　(1)$(0,-2)$　**解析**:因为点 Q 在 y 轴上,所以可设点 Q 的坐标为$(0,y)$.又因为 $\tan 120^\circ=-\sqrt{3}$,

所以$\frac{y-1}{0+\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$，解得 $y=-2$，

因此 $Q(0,-2)$.

(2)**解**：①$k=\frac{4-1}{2-1}=3>0$，所以倾斜角为锐角；

②$k=\frac{2-5}{0-(-3)}=-1<0$，所以倾斜角为钝角；

③由 $x_1=x_2=2$ 知 k 不存在，倾斜角是 $90°$；

④$k=\frac{-2-(-2)}{6-3}=0$，所以倾斜角为 $0°$.

[应用迁移]

1.C　**解析**：由题意，直线 l 的斜率为 $-\sqrt{3}$，结合斜率与倾斜角的关系，得直线 l 的倾斜角为 $\frac{2\pi}{3}$.

2.6　**解析**：由题可知 $k_{AB}=\frac{3-(-3)}{4-2}=3$，$k_{AC}=\frac{m-(-3)}{5-2}=\frac{m+3}{3}$.

因为 A,B,C 三点共线，所以 $k_{AB}=k_{AC}$，解得 $m=6$.

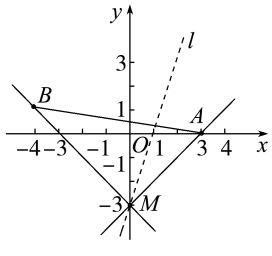
任务 3

[探究活动]

例 2　**解**：由题意与斜率公式可知，直线 AM 与 BM 的斜率分别为 $k_{AM}=\frac{0-(-3)}{3-0}=1$，

$k_{BM}=\frac{1-(-3)}{-4-0}=-1$.

如图，直线 l 相当于绕点 M 在直线 AM 与 BM 间旋转.



当 l 由 AM 位置旋转到 y 轴位置时，倾斜角增大到 $90°$，又 $k_{AM}=1$，所以 $k\geqslant 1$；当 l 从 y 轴位置旋转到 BM 位置时，倾斜角大于 $90°$，又 $k_{BM}=-1$，所以 $k\leqslant -1$.

综上所述，直线 l 的斜率 k 的取值范围是 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

[一题多思]

思考 1.**提示**：当倾斜角为锐角时，斜率为正，而且斜率随着倾斜角的增大而增大；当倾斜角为钝角时，斜率为负，而且斜率随着倾斜角的增大而增大.

思考 2.**解**：直线 AM 的斜率为 $k_{AM}=\frac{-3-0}{-5-3}=\frac{3}{8}$，直线 BM 的斜率为 $k_{BM}=\frac{-3-1}{-5-(-4)}=4$，

由图(图略)可知，直线 l 的斜率 k 的取值范围是 $\left[\frac{3}{8},4\right]$.

[应用迁移]

1.A　**解析**：设 $A(a,b)$ 是直线 l 上任意一点，则平移后得点 $A'(a+2,b-3)$，

则直线 l 的斜率 $k=k_{AA'}=\frac{b-3-b}{a+2-a}=-\frac{3}{2}$.

2.**解**：(方法一)设点 $P(x,0)$.如图 1，由光的反射原理知，反射角等于入射角，可得 $\beta=\alpha$，所以反射光线 PB 的倾斜角 β 与入射光线 PA 的倾斜角 $(180°-\alpha)$ 互补，所以 $k_{AP}=-k_{BP}$，即 $\frac{0-3}{x-(-2)}=-\frac{0-7}{x-5}$，解得 $x=\frac{1}{10}$，所以点 P 的坐标为 $\left(\frac{1}{10},0\right)$.

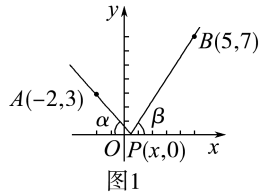


图1

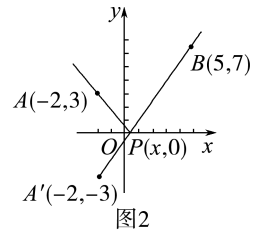


图2

(方法二)如图 2，由题意，易知入射点 $A(-2,3)$ 关于 x 轴的对称点为 $A'(-2,-3)$.

由光学知识知，点 A' 应在反射光线所在的直线上，即 A',P,B 三点共线.设点 $P(x,0)$，从而有 $k_{A'P}=k_{PB}$，即 $\frac{0+3}{x+2}=\frac{7}{5-x}$，解得 $x=\frac{1}{10}$，所以点 P 的坐标为 $\left(\frac{1}{10},0\right)$.

2.1.2　两条直线平行和垂直的判定

问题式预习

【知识清单】

知识点一

$k_1=k_2$　$l_1/\!/l_2$

知识点二

$k_1k_2=-1$　$l_1\perp l_2$

【概念辨析】

1.(1)×　(2)√　(3)√　(4)×　(5)√

2.B　**解析**：由题意知，直线 PQ 的斜率存在，由 $k_{PQ}=k_{MN}$，即 $\frac{2m-2}{3-(-m)}=\frac{4-(-1)}{-3-2}$，得 $m=-\frac{1}{3}$.

经检验知，$m=-\frac{1}{3}$ 符合题意.

3.(1)**提示**：不一定.只有在两条直线的斜率都存在的情况下斜率才相等.

(2)**提示**：①两条直线的斜率都存在；②两直线不重合.

(3)**提示**：不一定.当两条直线的斜率都存在时，$k_1k_2=-1$，若一条直线的斜率不存在，另一条直线的斜率为 0，此时 $l_1\perp l_2$，但 $k_1k_2=-1$ 不成立.

任务型课堂

任务 1

[探究活动]

例 1　**解**：(1)$k_1=\frac{1-(-2)}{2-(-1)}=1$，$k_2=\frac{-1-4}{-1-3}=\frac{5}{4}$，

$k_1\neq k_2$，故 l_1 与 l_2 不平行.

(2)$k_1=1$，$k_2=\frac{2-1}{2-1}=1$，$k_1=k_2$，

故 $l_1/\!/l_2$ 或 l_1 与 l_2 重合.

(3)$k_1=\frac{0-1}{1-0}=-1$，$k_2=\frac{0-3}{2-(-1)}=-1$，则有 $k_1=k_2$.

又 $k_{AM}=\frac{3-1}{-1-0}=-2\neq -1$，

则 A,B,M 三点不共线，故 $l_1 /\!/ l_2$.

(4)由已知点的坐标，得 l_1,l_2 均与 x 轴垂直且不重合，故 $l_1 /\!/ l_2$.

[应用迁移]

A　**解析**：依题意，直线 l_1 的斜率 $k_1=\tan 60°=\sqrt{3}$，直线 l_2 的斜率 $k_2=\dfrac{-\sqrt{3}-0}{-1-0}=\sqrt{3}$，

即 $k_1=k_2$，所以 $l_1 /\!/ l_2$ 或 l_1,l_2 重合.

任务 2

[探究活动]

例 2　**解**：(1)由题意可知，直线 l_1 的斜率不存在，直线 l_2 的斜率为 $\dfrac{1-1}{2-1}=0$，所以 $l_1 \perp l_2$.

(2)由题意知，直线 l_2 的斜率 k_2 一定存在，直线 l_1 的斜率可能不存在.

当直线 l_1 的斜率不存在时，$3=a-2$，即 $a=5$，

此时 $D(-1,3)$，$k_2=\dfrac{3-3}{2+1}=0$，所以 $l_1 \perp l_2$，满足题意.

当直线 l_1 的斜率 k_1 存在时，$a\neq 5$，

由斜率公式，

得 $k_1=\dfrac{3-a}{a-2-3}=\dfrac{3-a}{a-5}$，$k_2=\dfrac{a-2-3}{-1-2}=\dfrac{a-5}{-3}$.

由 $l_1 \perp l_2$ 知，$k_1k_2=-1$，即 $\dfrac{3-a}{a-5}\times\left(\dfrac{a-5}{-3}\right)=-1$，解得 $a=0$.

综上所述，a 的值为 0 或 5.

(3)由斜率公式，可得 $k_{AB}=\dfrac{5}{4}$，$k_{BC}=0$，$k_{AC}=5$.

因为 $k_{BC}=0$，

所以边 BC 上的高所在直线与 x 轴垂直，其斜率不存在.

设边 AB，AC 上的高所在直线的斜率分别为 k_1,k_2，

由 $k_1\cdot k_{AB}=-1$，$k_2\cdot k_{AC}=-1$，

得 $k_1\times\dfrac{5}{4}=-1$，$k_2\times 5=-1$，

解得 $k_1=-\dfrac{4}{5}$，$k_2=-\dfrac{1}{5}$.

综上所述，边 BC 上的高所在直线的斜率不存在；

边 AB 上的高所在直线的斜率为 $-\dfrac{4}{5}$；

边 AC 上的高所在直线的斜率为 $-\dfrac{1}{5}$.

[应用迁移]

1.BCD　**解析**：对于 A，$k_{l_1}=\tan 45°=1$，$k_{l_2}=1$，$k_{l_1}\cdot k_{l_2}\neq -1$，所以 A 不正确；

对于 B，$k_{l_2}=\dfrac{\sqrt{3}-0}{3-2}=\sqrt{3}$，$k_{l_1}\cdot k_{l_2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}=-1$，故 B 正确；

对于 C，$k_{l_1}=\dfrac{-5-1}{-4-2}=1$，$k_{l_2}=\dfrac{2-0}{-1-1}=-1$，$k_{l_1}\cdot k_{l_2}=-1$，故 C 正确；

对于 D，因为 $(1,m)\cdot\left(1,-\dfrac{1}{m}\right)=1-1=0$，所以两直线的方向向量互相垂直，故 $l_1 \perp l_2$，故 D 正确.

2.-1　**解析**：因为 $k_{PQ}=\dfrac{b-3+a}{a-3+b}=1$，所以线段 PQ 的垂直平分线的斜率为 -1.

任务 3

[探究活动]

例 3　**解**：由题意，得 $k_{AB}=\dfrac{0-1}{1-0}=-1$，$k_{CD}=\dfrac{3-2}{2-3}=-1$，

$k_{BC}=\dfrac{2-0}{3-1}=1$，$k_{DA}=\dfrac{3-1}{2-0}=1$，

所以 $k_{AB}=k_{CD}$，$k_{BC}=k_{DA}$，所以 $AB /\!/ CD$，$BC /\!/ DA$.

所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

又因为 $k_{AB}\cdot k_{BC}=-1$，所以 $AB \perp BC$，

即 $\angle ABC=90°$，所以平行四边形 $ABCD$ 为矩形，

故四边形 $ABCD$ 为矩形.

[一题多思]

思考 1.**解**：易知线段 AC 的中点为 $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，线段 BD 的中点为 $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，所以四边形 $ABCD$ 对角线的中点重合，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 又 $AC=\sqrt{(3-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{10}$，$BD=\sqrt{(2-1)^2+(3-0)^2}=\sqrt{10}$，所以 $AC=BD$，故平行四边形 $ABCD$ 为矩形，即四边形 $ABCD$ 为矩形.

思考 2.**解**：设 $D(x,y)$，由题意可得 $\begin{cases}\dfrac{y+1}{x-2}=\dfrac{1-0}{3-1},\\ \dfrac{1-(-1)}{3-2}=\dfrac{y-0}{x-1},\\ \dfrac{y-1}{x-3}\times\dfrac{0-(-1)}{1-2}=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\ y=-2,\end{cases}$ 所以点 D 的坐标为 $(0,-2)$.

[应用迁移]

1.D　**解析**：由题意可知，$k_{AB}=\dfrac{2+1}{2-1}=3$，$k_{CB}=\dfrac{2-0}{2-3}=-2$.

由 $CD \perp AB$，$CB /\!/ AD$，可知直线 AD，CD 的斜率存在.

设 $D(x,y)$，则 $k_{CD}=\dfrac{y-0}{x-3}=\dfrac{y}{x-3}$，$k_{AD}=\dfrac{y+1}{x-1}$，

则 $\begin{cases}k_{CD}\cdot k_{AB}=-1,\\ k_{AD}=k_{CB},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\dfrac{y}{x-3}\times 3=-1,\\ \dfrac{y+1}{x-1}=-2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=0,\\ y=1,\end{cases}$ 即 $D(0,1)$.

故选 D.

2.**证明**：因为 $k_{AD}=\dfrac{9-0}{-4-(-7)}=3$，$k_{BC}=\dfrac{6-(-3)}{5-2}=3$，所以 $AD /\!/ BC$.

又 $k_{AB}=\dfrac{-3-0}{2-(-7)}=-\dfrac{1}{3}$，$k_{CD}=\dfrac{9-6}{-4-5}=-\dfrac{1}{3}$，

所以 $AB /\!/ CD$，

所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

又 $k_{AB}\cdot k_{AD}=-\dfrac{1}{3}\times 3=-1$，所以 $AB \perp AD$，

所以四边形 $ABCD$ 为矩形.

因为 $k_{AC}=\dfrac{6-0}{5-(-7)}=\dfrac{1}{2}$，$k_{BD}=\dfrac{9+3}{-4-2}=-2$，

所以$k_{BD}\cdot k_{AC}=-1$，所以$AC\perp BD$，

即矩形$ABCD$的对角线互相垂直，

所以四边形$ABCD$为正方形.

2.2 直线的方程

2.2.1 直线的点斜式方程

问题式预习

【知识清单】

知识点二

(1)纵坐标b

【概念辨析】

1.(1)×　(2)√　(3)√

2.C　**解析**：由题意知，所求直线的斜率为$\sqrt{2}$，故由直线的点斜式方程知，所求直线方程为$y-1=\sqrt{2}(x+1)$.

3.(1)**提示**：不能.斜率存在的直线的方程才能写成点斜式，斜率不存在的直线，其方程都不能写成点斜式.

(2)**提示**：若$l_1/\!/l_2$，则$k_1=k_2$且$b_1\neq b_2$；若$l_1\perp l_2$，则$k_1\cdot k_2=-1$.

(3)**提示**：一次函数的解析式$y=kx+b$中x的系数$k\neq 0$，否则就不是一次函数，而直线的斜截式方程$y=kx+b$中的k可以是0.

任务型课堂

任务1

[探究活动]

例1　**解**：(1)由直线过点$P(-4,3)$，斜率$k=-3$，

得直线的点斜式方程为$y-3=-3(x+4)$.

(2)与x轴平行的直线，其斜率$k=0$，可得直线的点斜式方程为$y-(-4)=0\times(x-3)$，即$y+4=0$.

(3)过点$P(-2,3)$，$Q(5,-4)$的直线的斜率$k_{PQ}=\dfrac{-4-3}{5-(-2)}=\dfrac{-7}{7}=-1$，

又因为直线过点$P(-2,3)$，所以直线的点斜式方程为$y-3=-(x+2)$.

[应用迁移]

1.C　**解析**：由题意得$k_l=\dfrac{2}{-1}=-2$，又直线l过点$(4,5)$，代入点斜式方程得$y-5=-2(x-4)$.

2.解：直线MN的斜率$k=\dfrac{10-2}{3-(-1)}=2$，

因为直线l垂直于直线MN，所以直线l的斜率为$-\dfrac{1}{2}$.

又直线l过点$P(2,-3)$，所以直线l的方程为$y+3=-\dfrac{1}{2}(x-2)$.

任务2

[探究活动]

例2　**解**：因为$l_1\perp l$，直线$l_1:y=-2x+3$，

所以l的斜率为$\dfrac{1}{2}$.

因为l与l_2在y轴上的截距互为相反数，

直线l_2的方程为$y=4x-2$，所以l在y轴上的截距为2，

所以直线l的斜截式方程为$y=\dfrac{1}{2}x+2$.

[一题多思]

思考1.提示：截距不是距离，截距是一个实数，它是直线与坐标轴交点的横坐标或纵坐标，可以为正数、负数或0.当直线过原点时，它在x轴上的截距和在y轴上的截距都为0.

思考2.解：由直线的方程为$y=-2x+3$知，直线l_1的斜率$k_1=-2$，

因为$l/\!/l_1$，所以$k_l=-2$.

l_2在y轴上的截距为-2，

所以直线l在y轴上的截距也为-2.

故直线l的斜截式方程为$y=-2x-2$.

[应用迁移]

1.解：因为直线$y=-\sqrt{3}x+1$的斜率$k=-\sqrt{3}$，

所以其倾斜角$\alpha=120^\circ$.

由题意，得所求直线的倾斜角$\alpha_1=\dfrac{1}{4}\alpha=30^\circ$，

故所求直线的斜率$k_1=\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(1)因为所求直线经过点$(\sqrt{3},-1)$，斜率为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以所求直线方程是$y+1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-\sqrt{3})$.

(2)因为所求直线的斜率是$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，在y轴上的截距为-5，

所以所求直线的方程为$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-5$.

2.解：设直线l的方程为$y=\dfrac{1}{6}x+b$，则$x=0$时，$y=b$；

$y=0$时，$x=-6b$.

由已知，可得$\dfrac{1}{2}\cdot|b|\cdot|-6b|=3$，

即$6|b|^2=6$，所以$b=\pm 1$.

故直线l的斜截式方程为$y=\dfrac{1}{6}x+1$或$y=\dfrac{1}{6}x-1$.

任务3

[探究活动]

例3　**解**：(1)①中两直线平行，②中两直线重合.

(2)垂直.

[应用迁移]

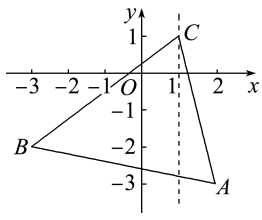
1.AC　**解析**：选项A，直线$y=ax-2a+3=a(x-2)+3$过定点$(2,3)$，故A正确；

选项B，直线$y+1=2x$，即$y=2x-1$，纵截距为-1，故B错误；

选项C，直线$\sqrt{3}y=-x-3$的斜率为$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以其倾斜角为150°，故C正确；

选项D，直线$l:mx+y-m-1=0$，即$m(x-1)+y-1=0$过定点$C(1,1)$，

画出图象如下图所示，



其中 $k_{AC}=\frac{-4}{1}=-4$，$k_{BC}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$，

又直线 l 的斜率为 $-m$，所以 $-m\geqslant\frac{3}{4}$ 或 $-m\leqslant-4$，

解得 $m\leqslant-\frac{3}{4}$ 或 $m\geqslant4$，故 D 错误.

故选 AC.

2.解：(1)由题意可知，$k_{l_1}=-1$，$k_{l_2}=a^2-2$，因为 $l_1/\!/l_2$，所以 $\begin{cases}a^2-2=-1,\\2a\neq2,\end{cases}$ 解得 $a=-1$.

故当 $a=-1$ 时，直线 l_1：$y=-x+2a$ 与直线 l_2：$y=(a^2-2)x+2$ 平行.

(2)由题意可知，$k_{l_1}=2a-1$，$k_{l_2}=4$，因为 $l_1\perp l_2$，所以 $4(2a-1)=-1$，解得 $a=\frac{3}{8}$.

故当 $a=\frac{3}{8}$ 时，直线 l_1：$y=(2a-1)x+3$ 与直线 l_2：$y=4x-3$ 垂直.

2.2.2 直线的两点式方程

问题式预习

【知识清单】

知识点

$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$　$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

【概念辨析】

1.(1)√　(2)×　(3)×　(4)×

2.-1　**解析**：由方程知，直线 $\frac{x}{4}-\frac{y}{5}=1$ 在 x 轴上的截距为 4，在 y 轴上的截距为 -5，故 $4+(-5)=-1$.

3.(1)**提示**：点斜式.若直线过两点可选择两点式或点斜式.

(2)**提示**：可选择斜截式或点斜式.

(3)**提示**：选择截距式较好.

任务型课堂

任务 1

[探究活动]

例 1　**解**：(1)由题意，可得 $\frac{y-2}{5-2}=\frac{x-1}{3-1}$，

即 $y-2=\frac{3}{2}(x-1)$，整理，可得 $3x-2y+1=0$.

(2)由题易知，直线 l 过点 $(0,-3)$，所以直线 l 的方程为 $\frac{y-(-3)}{1-(-3)}=\frac{x-0}{-2-0}$，即 $2x+y+3=0$.

[应用迁移]

1.-2　**解析**：将 $A(2,-1)$，$B(-3,4)$ 代入两点式，得 $\frac{y-(-1)}{4-(-1)}=\frac{x-2}{-3-2}$，即 $\frac{y+1}{5}=\frac{x-2}{-5}$，所以直线 AB 的方程为 $y+1=-x+2$.

因为点 $P(3,m)$ 在直线 AB 上，

所以 $m+1=-3+2$，得 $m=-2$.

2.(1)$3x+y-6=0$　(2)$x+2y-7=0$　**解析**：(1)边 BC 的中点 D 的坐标为 $(2,0)$，所以直线 AD 的方程为 $\frac{y-3}{0-3}=\frac{x-1}{2-1}$，即 $3x+y-6=0$.

(2)因为 $k_{AC}=\frac{3-(-1)}{1-(-1)}=2$，$BH\perp AC$，所以 $k_{BH}=-\frac{1}{2}$，所以直线 BH 的方程为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-5)$，即 $x+2y-7=0$.

任务 2

[探究活动]

例 2　**解**：(方法一)当直线 l 过原点时，它在两个坐标轴上的截距都是 0.

设直线 l 的方程为 $y=kx$.

因为直线 l 过点 $P(4,3)$，

所以 $3=4k$，故 $k=\frac{3}{4}$.

所以直线 l 的方程为 $y=\frac{3}{4}x$，即 $3x-4y=0$.

当直线 l 不过原点时，设直线 l 的截距式方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1(a\neq0)$.

又因为直线 l 过点 $P(4,3)$，所以 $\frac{4}{a}+\frac{3}{a}=1$，所以 $a=7$.

所以直线 l 的方程为 $\frac{x}{7}+\frac{y}{7}=1$，即 $x+y-7=0$.

综上可知，直线 l 的方程为 $3x-4y=0$ 或 $x+y-7=0$.

(方法二)由题意可知，直线 l 的斜率存在且不为 0，设直线 l 的斜率为 $k(k\neq0)$，则有 $y-3=k(x-4)$.

令 $x=0$，得 $y=3-4k$；令 $y=0$，得 $x=4-\frac{3}{k}$.

由直线 l 在两坐标轴上的截距相等，得 $3-4k=4-\frac{3}{k}$，解得 $k=-1$ 或 $k=\frac{3}{4}$，

所以直线 l 的方程为 $y-3=-(x-4)$ 或 $y-3=\frac{3}{4}(x-4)$，

即直线 l 的方程为 $x+y-7=0$ 或 $3x-4y=0$.

[一题多思]

思考 1.解：当直线 l 经过原点时，横、纵截距都为 0，设直线 l 的方程为 $y=kx$，因为直线 l 过点 $P(4,3)$，所以 $3=4k$，解得 $k=\frac{3}{4}$，所以直线 l 的方程为 $y=\frac{3}{4}x$，即 $3x-4y=0$.

当直线 l 不经过原点时，设直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$ $(a\neq0)$.

因为直线 l 过点 $P(4,3)$，所以 $\frac{4}{a}+\frac{3}{-a}=1$，得 $a=4-3=1$.

所以直线 l 的方程为 $x-y-1=0$.

综上，所求直线 l 的方程为 $3x-4y=0$ 或 $x-y-1=0$.

思考 2.解：设直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a,b\neq0)$，则

$$\begin{cases}\frac{4}{a}+\frac{3}{b}=1,\\ \frac{1}{2}|a||b|=\frac{49}{2},\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=7,\\ b=7\end{cases}\text{或}\begin{cases}a=\frac{28}{3},\\ b=\frac{21}{4},\end{cases}$$

所以直线 l 的方程为 $x+y-7=0$ 或 $9x+16y-84=0$.

[应用迁移]

B　**解析**：当直线在 x 轴和 y 轴上截距都为 0 时，设直线方程为 $y=kx$，将 $(1,2)$ 代入直线方程，解得 $k=2$，此时直线方程为 $2x-y=0$；

当直线在 x 轴和 y 轴上截距相等且不为 0 时，设直线方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$，将 $(1,2)$ 代入直线方程，解得 $a=3$，此时直线方程为 $x+y-3=0$.

所以满足题意的直线方程为 $x+y-3=0$ 或 $2x-y=0$.

任务 3

[探究活动]

例 3　**解**：(方法一)由题意可知，直线 l 在两坐标轴上的截距均不为 0，可设所求直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

因为点 $A(-2,3)$ 在直线 l 上，所以 $\frac{-2}{a}+\frac{3}{b}=1$.①

因为直线 l 与两坐标轴围成的三角形的面积为 4，

所以 $\frac{1}{2}|a||b|=4$.②

由①②，可得 $\begin{cases}-2b+3a=8,\\ ab=8,\end{cases}$③或 $\begin{cases}-2b+3a=-8,\\ ab=-8.\end{cases}$④

由③，得 $\begin{cases}a=-\frac{4}{3},\\ b=-6,\end{cases}$或 $\begin{cases}a=4,\\ b=2,\end{cases}$

④无解，

故所求直线 l 的方程为 $9x+2y+12=0$ 或 $x+2y-4=0$.

(方法二)显然，直线 l 不垂直于坐标轴.

设直线 l 的方程为 $y-3=k(x+2)(k\neq0)$.

令 $x=0$，得 $y=2k+3$；

令 $y=0$，得 $x=-\frac{3}{k}-2$.

所以直线 l 在 x 轴、y 轴上的截距分别为 $-\frac{3}{k}-2$ 和 $2k+3$.

由题意，得 $\frac{1}{2}|2k+3|\cdot\left|-\frac{3}{k}-2\right|=4$，

则 $(2k+3)\left(\frac{3}{k}+2\right)=8$ 或 $(2k+3)\left(\frac{3}{k}+2\right)=-8$.

若 $(2k+3)\left(\frac{3}{k}+2\right)=8$，则方程无解.

若 $(2k+3)\left(\frac{3}{k}+2\right)=-8$，解得 $k_1=-\frac{1}{2}$，$k_2=-\frac{9}{2}$.

所以直线 l 的方程为 $x+2y-4=0$ 或 $9x+2y+12=0$.

[应用迁移]

解：设直线 l 与两坐标轴的交点分别为 $(a,0)$，$(0,b)$，且 $a>0$，$b>0$，

由题意可得 $\begin{cases}S=\frac{1}{2}ab=2,\\ |a-b|=3,\end{cases}$解得 $\begin{cases}a=4,\\ b=1\end{cases}$或 $\begin{cases}a=1,\\ b=4,\end{cases}$

所以直线 l 的方程为 $\frac{x}{4}+y=1$ 或 $x+\frac{y}{4}=1$.

2.2.3　直线的一般式方程

问题式预习

【知识清单】

知识点

(1)一条直线　$Ax+By+C=0$

(2)$-\frac{A}{B}$　$-\frac{C}{B}$　$-\frac{C}{A}$　$-\frac{C}{A}$，$-\frac{C}{B}$

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)×

2.C　**解析**：由截距式得直线方程为 $\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}=1$，整理得 $4x-3y+12=0$.

3.(1)**提示**：能.因为平面内任意一条直线都可以用一个关于 x，y 的二元一次方程表示.

(2)**提示**：当 $A=0$，$B\neq0$ 时，方程变为 $y=-\frac{C}{B}$，当 $C\neq0$ 时，表示的直线平行于 x 轴，当 $C=0$ 时，表示的直线与 x 轴重合；当 $A\neq0$，$B=0$ 时，方程变为 $x=-\frac{C}{A}$，当 $C\neq0$ 时，表示的直线平行于 y 轴，当 $C=0$ 时，表示的直线与 y 轴重合.

任务型课堂

任务 1

[探究活动]

例 1　**解**：(1)由点斜式可得，所求直线的方程为 $y-3=\sqrt{3}(x-5)$，化为一般式为 $\sqrt{3}x-y+3-5\sqrt{3}=0$.

(2)由斜截式可得，所求直线的方程为 $y=4x+2$，化为一般式为 $4x-y+2=0$.

(3)由两点式可得，

所求直线的方程为 $\frac{y-5}{-1-5}=\frac{x-(-1)}{2-(-1)}$，

化为一般式为 $2x+y-3=0$.

(4)由截距式可得，所求直线的方程为 $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-1}=1$，化为一般式为 $x+3y+3=0$.

[应用迁移]

1.BD　**解析**：易知 $b\neq0$，由直线 $ax+by+c=0$，可得 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$.

根据题图可得 $-\frac{a}{b}<0$，$-\frac{c}{b}>0$，

所以若 $c<0$，则 $a>0$，$b>0$；若 $c>0$，则 $a<0$，$b<0$.

故选 BD.

2.C　**解析**：因为直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{n}=(-2,4)$，所以直线 l 的斜率 $k=\frac{4}{-2}=-2$. 因为直线 l 经过点 $(-1,4)$，所以直线 l 的点斜式方程为 $y-4=-2(x+1)$，斜截式方程为 $y=-2x+2$，截距式方程为 $x+\frac{y}{2}=1$，一般式方程为 $2x+y-2=0$.

任务 2

[探究活动]

例 2　(1)**解**：(方法一)由 $l_1:2x+(m+1)y+4=0$，$l_2:mx+3y-2=0$ 知，

①当 $m=0$ 时，显然 l_1 与 l_2 不平行；

②当 $m\neq0$ 时，要使 $l_1\parallel l_2$，需 $\frac{2}{m}=\frac{m+1}{3}\neq\frac{4}{-2}$，解得 $m=2$ 或 $m=-3$.

所以 m 的值为 2 或 -3.

(方法二)令 $2\times3=m(m+1)$，解得 $m=-3$ 或 $m=2$.

当 $m=-3$ 时，$l_1:x-y+2=0$，$l_2:3x-3y+2=0$.

显然 l_1 与 l_2 不重合，所以 $l_1\parallel l_2$；

当 $m=2$ 时，$l_1:2x+3y+4=0$，$l_2:2x+3y-2=0$，

显然 l_1 与 l_2 不重合，所以 $l_1\parallel l_2$，

所以 m 的值为 2 或 -3.

(2)**解**：(方法一)由题意知，直线 $l_1\perp l_2$.

①当 $1-a=0$，即 $a=1$ 时，直线 $l_1:3x-1=0$ 与直线 $l_2:5y+2=0$ 显然垂直.

②当 $2a+3=0$，即 $a=-\frac{3}{2}$ 时，直线 $l_1:x+5y-2=0$ 与直线 $l_2:5x-4=0$ 不垂直.

③当 $1-a\neq0$，且 $2a+3\neq0$ 时，直线 l_1，l_2 的斜率 k_1，k_2 都存在，且 $k_1=-\frac{a+2}{1-a}$，$k_2=-\frac{a-1}{2a+3}$.

当 $l_1\perp l_2$ 时，$k_1\cdot k_2=-1$，

即 $\left(-\frac{a+2}{1-a}\right)\cdot\left(-\frac{a-1}{2a+3}\right)=-1$，解得 $a=-1$.

综上可知，当 $a=1$ 或 $a=-1$ 时，直线 $l_1\perp l_2$.

(方法二)由题意知直线 $l_1\perp l_2$，

所以 $(a+2)(a-1)+(1-a)(2a+3)=0$，解得 $a=\pm1$.

将 $a=\pm1$ 代入直线方程，均满足题意，

故当 $a=1$ 或 $a=-1$ 时，直线 $l_1\perp l_2$.

[应用迁移]

1.A　**解析**：因为 $l_1\parallel l_2$，所以 $(a-1)(a-1)-(3a-5)\times1=0$ 且 $1\times(-2)-(-1)(a-1)\neq0$，解得 $a=2$.

当 $a=2$ 时，直线 $l_1:x+y-1=0$，$l_2:x+y-2=0$，显然 $l_1\parallel l_2$.

所以 $l_1\parallel l_2$ 的充要条件是 $a=2$.

2.C　**解析**：因为 $l_1\perp l_2$，所以 $2a+3\times2=0$，解得 $a=-3$.

任务 3

[探究活动]

例 3　**解**：(1)由题意可知，$a\neq-1$. 当直线 l 过原点时，其在 x 轴和 y 轴上的截距均为 0，所以 $2-a=0$，解得 $a=2$，此时直线 l 的方程为 $3x+y=0$；当直线 l 不过原点时，$a\neq2$，由 $\frac{a-2}{a+1}=a-2$，得 $a=0$，此时直线 l 的方程为 $x+y+2=0$.

综上所述，所求直线 l 的方程为 $3x+y=0$ 或 $x+y+2=0$.

(2)将直线 l 的方程化为 $y=-(a+1)x+a-2$.

要使 l 不经过第二象限，当且仅当 $\begin{cases}-(a+1)\geqslant0,\\a-2\leqslant0,\end{cases}$ 解得 $a\leqslant-1$.

故实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-1]$.

[一题多思]

思考.解：由题易知，$a\neq-1$. 由直线 l 的方程 $(a+1)x+y+2-a=0$，得直线 l 在 x 轴上的截距为 $\frac{a-2}{a+1}$，

即 $\frac{a-2}{a+1}=-3$，解得 $a=-\frac{1}{4}$.

[应用迁移]

1.**解**：(1)设点 $E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$.

因为直线 $EF\parallel AB$，且 $\triangle CEF$ 的面积是 $\triangle ABC$ 的面积的 $\frac{1}{4}$，所以 E，F 分别为边 AC，BC 的中点，

所以 $E\left(0,\frac{5}{2}\right)$，$F\left(2,\frac{7}{2}\right)$.

(2)由(1)知，点 $E\left(0,\frac{5}{2}\right)$，$F\left(2,\frac{7}{2}\right)$，

所以直线 l 的方程为 $\frac{y-\frac{5}{2}}{\frac{7}{2}-\frac{5}{2}}=\frac{x-0}{2-0}$，即 $x-2y+5=0$.

2.(1)**证明**：将直线 l 的方程 $kx-y+3k+1=0$ 整理得 $k(x+3)-y+1=0$，因为方程对任意实数 k 都成立，

所以 $\begin{cases}x+3=0,\\-y+1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-3,\\y=1,\end{cases}$

所以对任意实数 k，直线 l 都经过一个定点 $(-3,1)$.

(2)**解**：由已知条件可知 $k\neq0$，求得直线 l 与 x 轴、y 轴的交点分别为 $A\left(\frac{-3k-1}{k},0\right)$，$B(0,3k+1)$，

则有 $\frac{-3k-1}{k}=3k+1$，化简得 $(3k+1)(k+1)=0$，

当 $k=-\frac{1}{3}$ 时，直线 l 的方程为 $y=-\frac{1}{3}x$；

当 $k=-1$ 时，直线 l 的方程为 $y=-x-2$.

所以直线 l 的方程为 $y=-\frac{1}{3}x$ 或 $y=-x-2$.

2.3　直线的交点坐标与距离公式

2.3.1　两条直线的交点坐标

问题式预习

【知识清单】

知识点

$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$

【概念辨析】

1.(1)√　(2)×　(3)×　(4)√

2.B　**解析**:解方程组$\begin{cases}2x-y-1=0,\\x+3y-11=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=2,\\y=3.\end{cases}$

3.(1)**提示**:两条直线相交的充要条件是$A_1B_2-A_2B_1\neq0$.

(2)**提示**:直线$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$($\lambda\in\mathbf{R}$)是过直线$l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$与$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$交点的直线(不含$l_2$).

任务型课堂

任务 1

1.C　**解析**:解方程组$\begin{cases}3x+2y+6=0,\\2x+5y-7=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=-4,\\y=3.\end{cases}$

2.C　**解析**:由$\begin{cases}y=-2x-1,\\y=2x+3,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-1,\\y=1,\end{cases}$即所求直线的方程过点$(-1,1)$.

令直线$l_2:y=2x+3$的倾斜角为α,则$\tan\alpha=2$,显然α是锐角,

因此所求直线方程的斜率$k=\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2\times2}{1-2^2}=-\dfrac{4}{3}$,

所以所求直线的方程为$y-1=-\dfrac{4}{3}(x+1)$,即$4x+3y+1=0$.

3.$3x-2y+9=0$　**解析**:(方法一)解方程组$\begin{cases}x+y-2=0,\\x-y+4=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=-1,\\y=3,\end{cases}$即直线$l$过点$(-1,3)$.

因为直线l与直线$3x-2y+4=0$平行,所以直线l的斜率为$\dfrac{3}{2}$,

所以直线l的方程为$y-3=\dfrac{3}{2}(x+1)$,即$3x-2y+9=0$.

(方法二)因为直线$x+y-2=0$与$3x-2y+4=0$不平行,

所以可设直线l的方程为$x-y+4+\lambda(x+y-2)=0$,

整理得$(1+\lambda)x+(\lambda-1)y+4-2\lambda=0$.

因为直线l与直线$3x-2y+4=0$平行,

所以$\dfrac{1+\lambda}{3}=\dfrac{\lambda-1}{-2}\neq\dfrac{4-2\lambda}{4}$,解得$\lambda=\dfrac{1}{5}$.

所以直线l的方程为$\dfrac{6}{5}x-\dfrac{4}{5}y+\dfrac{18}{5}=0$,即$3x-2y+9=0$.

任务 2

[探究活动]

例 1　**解**:法一:(1)方程组$\begin{cases}2x-y-7=0,\\3x+2y-7=0\end{cases}$的解为$\begin{cases}x=3,\\y=-1,\end{cases}$

因此直线l_1和l_2相交,交点坐标为$(3,-1)$.

(2)方程组$\begin{cases}2x-6y+4=0,\\4x-12y+8=0\end{cases}$有无数个解,

这表明直线l_1和l_2重合.

(3)方程组$\begin{cases}4x+2y+4=0,\\2x+y-3=0\end{cases}$无解,

这表明直线l_1和l_2没有公共点,故$l_1\parallel l_2$.

法二:(1)因为$k_{l_1}=2$,$k_{l_2}=-\dfrac{3}{2}$,$k_{l_1}\neq k_{l_2}$,

所以l_1与l_2相交.

由$\begin{cases}2x-y-7=0,\\3x+2y-7=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=3,\\y=-1,\end{cases}$

故l_1与l_2的交点坐标为$(3,-1)$.

(2)由$\dfrac{2}{4}=\dfrac{-6}{-12}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$,知$l_1$与$l_2$重合.

(3)l_2的方程为$2x+y-3=0$,

由$\dfrac{4}{2}=\dfrac{2}{1}\neq\dfrac{4}{-3}$知直线$l_1$与$l_2$平行,没有公共点.

[应用迁移]

1.$\left(-\dfrac{3}{2},2\right)$　**解析**:由$\begin{cases}5x+4y=2a+1,\\2x+3y=a,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\dfrac{2a+3}{7},\\y=\dfrac{a-2}{7}.\end{cases}$

由题意得$\begin{cases}\dfrac{2a+3}{7}>0,\\\dfrac{a-2}{7}<0,\end{cases}$解得$-\dfrac{3}{2}<a<2$.

所以a的取值范围是$\left(-\dfrac{3}{2},2\right)$.

2.**解**:解方程组$\begin{cases}2x+3y+8=0,\\x-y-1=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=-1,\\y=-2,\end{cases}$所以两直线的交点坐标为$(-1,-2)$,

代入直线方程$x+by=0$得$b=-\dfrac{1}{2}$.

任务 3

[探究活动]

例 2　**证明**:(方法一)令$m=0$,得$x+y-1=0$,①

令$m=1$,得$4x-y+2=0$.②

联立①②,得$\begin{cases}x+y-1=0,\\4x-y+2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{5},\\y=\dfrac{6}{5}.\end{cases}$

把$x=-\dfrac{1}{5}$,$y=\dfrac{6}{5}$代入$(3m+1)x-(2m-1)y+3m-1=0$,

得$(3m+1)\times\left(-\dfrac{1}{5}\right)-\dfrac{6}{5}\times(2m-1)+3m-1=0$,

所以直线$(3m+1)x-(2m-1)y+3m-1=0$过定点$\left(-\dfrac{1}{5},\dfrac{6}{5}\right)$.

(方法二)方程可化为$(x+y-1)+m(3x-2y+3)=0$.

由m的任意性可知$\begin{cases}x+y-1=0,\\3x-2y+3=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{5},\\y=\dfrac{6}{5}.\end{cases}$

所以不论 m 取何值，直线都过定点 $\left(-\frac{1}{5},\frac{6}{5}\right)$.

[一题多思]

思考 1.证明：由例 2 的解析可知，直线 $(3m+1)x-(2m-1)y+3m-1=0$ 恒过第二象限内的定点 $\left(-\frac{1}{5},\frac{6}{5}\right)$，所以无论 m 为何值，直线总经过第二象限.

思考 2.解：由例 2 的解析可知，直线 $(3m+1)x-(2m-1)y+3m-1=0$ 过定点 $P\left(-\frac{1}{5},\frac{6}{5}\right)$.

由题可知，直线 $(3m+1)x-(2m-1)y+3m-1=0$ 的斜率存在，又 $k_{AP}=-1$，$k_{BP}=-11$，所以 $-11\leqslant\frac{3m+1}{2m-1}\leqslant-1$，解得 $0\leqslant m\leqslant\frac{2}{5}$. 故实数 m 的取值范围是 $\left[0,\frac{2}{5}\right]$.

[应用迁移]

1.D **解析**：直线 l：$(a+2)x+(1-a)y-3=0$，即 $a(x-y)+2x+y-3=0$.

由 $\begin{cases}x-y=0,\\2x+y-3=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$ 所以当 a 变化时，所有直线都经过点 $(1,1)$.

2.$(-1,-2)$ **解析**：直线方程化简为 $2x-mx+2my+y+3m+4=0$，

即 $(2x+y+4)+m(-x+2y+3)=0$，

由 $\begin{cases}2x+y+4=0,\\-x+2y+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1,\\y=-2,\end{cases}$

所以直线恒过定点 $(-1,-2)$.

2.3.2 两点间的距离公式

问题式预习

【知识清单】

知识点

(1) $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

(2)① $\sqrt{x^2+y^2}$ ② $|x_2-x_1|$ ③ $|y_2-y_1|$

【概念辨析】

1.(1)× (2)× (3)√

2.BCD **解析**：$\sqrt{x^2+2x+5}=\sqrt{(x+1)^2+4}$

$=\sqrt{(x+1)^2+(0\pm2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(-1-1)^2}$，

可看作点 $(x,0)$ 与点 $(-1,-2)$ 间的距离，可看作点 $(x,0)$ 与点 $(-1,2)$ 间的距离，可看作点 $(x,-1)$ 与点 $(-1,1)$ 间的距离，故选项 A 不正确.

3.(1)**提示**：无关. 公式中，x_2 与 x_1，y_2 与 y_1 的位置可以互换，不影响计算结果.

(2)**提示**：式子 $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$，表示平面内的点 (x,y) 到原点的距离.

任务型课堂

任务 1

1.B **解析**：由题意得，线段 BC 的中点坐标为 $\left(\frac{4+0}{2},\frac{-3+5}{2}\right)$，即 $(2,1)$，

则 $\triangle OBC$ 的边 BC 上的中线长为 $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$. 故选 B.

2.A **解析**：直线 l_1：$3ax-y-2=0$ 过定点 $A(0,-2)$，

直线 l_2：$(2a-1)x+5ay-1=0\Leftrightarrow a(2x+5y)-(x+1)=0$，则 $\begin{cases}2x+5y=0,\\x+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1,\\y=\frac{2}{5},\end{cases}$ 可得 l_2 过定点 $B\left(-1,\frac{2}{5}\right)$，

所以 $|AB|=\sqrt{(-1-0)^2+\left[\frac{2}{5}-(-2)\right]^2}=\frac{13}{5}$.

任务 2

[探究活动]

例 1 **解**：法一：设点 P 的坐标为 (x,y)，

则 $\begin{cases}3x-y+1=0,\\\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=1,\end{cases}$

所以点 P 的坐标为 $(0,1)$.

法二：由题意知，线段 AB 的中点 M 的坐标为 $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$，

AB 所在直线的斜率为 $k_{AB}=\frac{0-(-1)}{2-1}=1$，故线段 AB 的垂直平分线的方程为 $x+y-1=0$. ①

设 $P(x,y)$，又 $3x-y+1=0$， ②

联立①②得 $\begin{cases}3x-y+1=0,\\x+y-1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=1,\end{cases}$ 所以点 P 的坐标为 $(0,1)$.

[应用迁移]

解：设点 $P(x,0)$，则有

$|PA|=\sqrt{(x+3)^2+(0-4)^2}=\sqrt{x^2+6x+25}$，

$|PB|=\sqrt{(x-2)^2+(0-\sqrt{3})^2}=\sqrt{x^2-4x+7}$.

由 $|PA|=|PB|$，得 $x^2+6x+25=x^2-4x+7$，解得 $x=-\frac{9}{5}$，

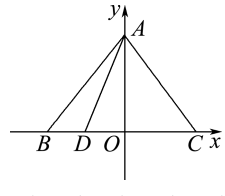
即点 P 的坐标为 $\left(-\frac{9}{5},0\right)$，

所以 $|PA|=\sqrt{\left(-\frac{9}{5}+3\right)^2+(0-4)^2}=\frac{2\sqrt{109}}{5}$.

任务 3

[探究活动]

例 2 **证明**：如图，取 BC 的中点 O，连接 AO，则 $AO\perp BC$，以 O 为坐标原点，边 BC 所在的直线为 x 轴，AO 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系.



设 $A(0,a)$，$B(-b,0)$，$C(b,0)$，$D(m,0)(-b<m<b)$，

则 $|AB|^2=(-b-0)^2+(0-a)^2=a^2+b^2$，

$|AD|^2=(m-0)^2+(0-a)^2=m^2+a^2$，

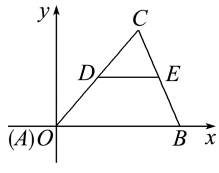
$|BD|\cdot|DC|=|m+b|\cdot|b-m|=(b+m)(b-m)=b^2-m^2$，

所以 $|AD|^2+|BD|\cdot|DC|=a^2+b^2$，

所以 $|AB|^2=|AD|^2+|BD|\cdot|DC|$.

[一题多思]

思考.证明：如图，在△ABC中，D，E分别为边AC和BC的中点，即证$|DE|=\frac{1}{2}|AB|$.以A为坐标原点，边AB所在直线为x轴，过点A垂直于AB的直线为y轴建立平面直角坐标系.



设$A(0,0)$，$B(c,0)$，$C(m,n)$，则$|AB|=|c|$.

又由中点坐标公式，得$D\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)$，$E\left(\frac{c+m}{2},\frac{n}{2}\right)$，

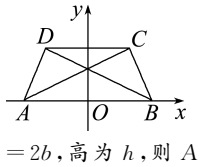
所以$|DE|=\left|\frac{c+m}{2}-\frac{m}{2}\right|=\left|\frac{c}{2}\right|$，

所以$|DE|=\frac{1}{2}|AB|$，

即三角形的中位线长度等于第三边长度的一半.

[应用迁移]

证明：如图，以等腰梯形$ABCD$的下底AB的中点O为坐标原点，AB所在直线为x轴，过点O且垂直于AB的直线为y轴建立平面直角坐标系.



设$|AB|=2a$，$|CD|=2b$，高为h，则$A(-a,0)$，$B(a,0)$，$C(b,h)$，$D(-b,h)$.由两点间的距离公式，得$|AC|=\sqrt{(-a-b)^2+(0-h)^2}=\sqrt{(a+b)^2+h^2}$，

$|BD|=\sqrt{[a-(-b)]^2+(0-h)^2}=\sqrt{(a+b)^2+h^2}$，

所以$|AC|=|BD|$.

2.3.3 点到直线的距离公式

问题式预习

【知识清单】

知识点

$$\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

【概念辨析】

1.(1)× (2)× (3)√

2.A **解析**：直线的方程$y=2x$可化为$2x-y=0$，所以点$(2,5)$到直线$y=2x$的距离为$\frac{|2\times2-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

3.(1)**提示**：要求直线的方程为一般式.

(2)**提示**：式子$\frac{|a-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$的几何意义是点$(a,1)$到直线$x-y+1=0$的距离.

任务型课堂

任务1

1.$\sqrt{2}-1$ **解析**：由点到直线的距离公式得$\frac{|a-2+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1$，解得$a=\pm\sqrt{2}-1$.

因为$a>0$，所以$a=\sqrt{2}-1$.

2.解：(1)把方程$y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$写成$3x-4y+1=0$，由点到直线的距离公式得$d=\frac{|3\times3-4\times(-2)+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{18}{5}$.

(2)因为直线$y=6$平行于x轴，

所以$d=|6-(-2)|=8$.

(3)因为直线$x=4$平行于y轴，

所以$d=|4-3|=1$.

任务2

[探究活动]

例1 C **解析**：联立$\begin{cases}3x-y-1=0,\\x+2y-5=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$即交点为$A(1,2)$，

所以点A到直线l：$x+by+2+b=0$的距离$d=\frac{|3+3b|}{\sqrt{1+b^2}}=\sqrt{9+\frac{18}{b+\frac{1}{b}}}$，当$b>0$时，$d\leqslant\sqrt{9+\frac{18}{2\sqrt{b\cdot\frac{1}{b}}}}=3\sqrt{2}$，

当且仅当$b=1$时取等号，

当$b=0$时，$d=3<3\sqrt{2}$，

当$b<0$时，$b+\frac{1}{b}\leqslant-2$，$0\leqslant d<3<3\sqrt{2}$，当且仅当$b=-1$时取等号.

故点A到直线l：$x+by+2+b=0$的距离的最大值为$3\sqrt{2}$.

[应用迁移]

ABD **解析**：对于A，由$A(1,3)$，$B(3,1)$可得边AB所在直线的方程为$y-3=\frac{1-3}{3-1}(x-1)$，化简得$x+y-4=0$，故A正确；

对于B，由$A(1,3)$，$B(3,1)$可知AB的中点坐标为$(2,2)$，且$k_{AB}=\frac{1-3}{3-1}=-1$，所以$AB$的垂直平分线的斜率为$k=1$，所以边$AB$的垂直平分线方程为$y-2=1\times(x-2)$，化简得$y=x$，故B正确；

对于C，由$A(1,3)$，$B(3,1)$可得$|AB|=\sqrt{(1-3)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$，故C错误；

对于D，由选项A和C可知，$|AB|=2\sqrt{2}$，边AB所在直线的方程为$x+y-4=0$，又$C(-1,0)$，所以点C到直线AB的距离为$d=\frac{|-1+0-4|}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{5\sqrt{2}}{2}=5$，故D正确.故选ABD.

任务3

[探究活动]

例2 **解**：由题可知，直线l_1：$y=kx+4$恒过定点$P(0,4)$，且$P(0,4)$关于点$M(1,2)$的对称点为$(2,0)$，

所以点$(2,0)$和$N(0,-1)$都在直线l_2上.

由直线方程的两点式，可得直线l_2的方程为$\frac{y-0}{-1-0}=\frac{x-2}{0-2}$，即$x-2y-2=0$，

所以点 M 到直线 l_2 的距离 $d=\dfrac{|1-4-2|}{\sqrt{1+2^2}}=\sqrt{5}$.

[一题多思]

思考 1.解：设点 $M(-3,4)$ 关于直线 $l:x-y+3=0$ 的对称点为 $M'(a,b)$，

则反射光线所在直线过点 M'，

由 $\begin{cases}\dfrac{b-4}{a-(-3)}=-1,\\ \dfrac{-3+a}{2}-\dfrac{b+4}{2}+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=0,\end{cases}$ 即 $M'(1,0)$.

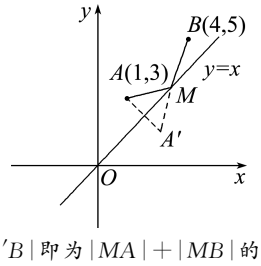
又反射光线经过点 $N(2,6)$，

所以反射光线所在直线的方程为 $\dfrac{y-0}{6-0}=\dfrac{x-1}{2-1}$，即 $6x-y-6=0$.

思考 2.解：设点 $A(1,3)$ 关于直线 $y=x$ 的对称点为 $A'(x,y)$，

则 $\begin{cases}\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{x+1}{2},\\ \dfrac{y-3}{x-1}=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\ y=1,\end{cases}$ 即 $A'(3,1)$.

根据题意画出图象，如图所示，



连接 $A'B$，则 $|A'B|$ 即为 $|MA|+|MB|$ 的最小值，

所以 $|A'B|=\sqrt{(3-4)^2+(1-5)^2}=\sqrt{17}$.

[应用迁移]

1.C　**解析**：设对称点的坐标为 (a,b)，

由题意可得 $\begin{cases}\dfrac{b-1}{a-2}\times(-1)=-1,\\ \dfrac{a+2}{2}+\dfrac{b+1}{2}+3=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=-4,\\ b=-5,\end{cases}$

所以对称点的坐标为 $(-4,-5)$.

2.$x-\sqrt{2}y+\sqrt{2}+1=0$　**解析**：在 l_1 上取一点 $P(0,2)$，

设点 P 关于直线 $y=-x+1$ 的对称点为 $P'(a,b)$，

则 $\begin{cases}\dfrac{b-2}{a}=1,\\ \dfrac{b+2}{2}=-\dfrac{a}{2}+1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=1,\end{cases}$ 故点 $P'(-1,1)$.

由 $\begin{cases}y=\sqrt{2}x+2,\\ y=-x+1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1-\sqrt{2},\\ y=\sqrt{2},\end{cases}$ 所以 l_1 与直线 $y=-x+1$ 的交点坐标为 $(1-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

易知直线 l_2 过点 $(1-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 和 $P'(-1,1)$，

所以直线 l_2 的斜率为 $\dfrac{\sqrt{2}-1}{-\sqrt{2}+2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以直线 l_2 的方程为 $y-1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+1)$，

即 $x-\sqrt{2}y+\sqrt{2}+1=0$.

2.3.4　两条平行直线间的距离

问题式预习

【知识清单】

知识点

(1)公垂线段　(2)直线　(3)$\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

【概念辨析】

1.(1)√　(2)×

2.C　**解析**：$5x+12y+3=0$ 可化为 $10x+24y+6=0$.

由两条平行直线间的距离公式，可得 $d=\dfrac{|6-5|}{\sqrt{10^2+24^2}}=\dfrac{1}{26}$.

3.(1)**提示**：两条平行直线的方程都是一般式，且 x，y 的系数应分别相等.

(2)**提示**：相等.两条平行直线间的距离处处相等.

(3)**提示**：公式 $d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 可以理解为坐标原点到两条平行直线间的距离之差(同侧时)或之和(异侧时).

任务型课堂

任务 1

[探究活动]

例 1　**解**：(方法一)在 l_1 上任取一点 $A(2,1)$，则点 A 到 l_2 的距离即为 l_1 与 l_2 间的距离.

又 l_2 的方程可化为 $6x+8y-15=0$，

所以 $d=\dfrac{|2\times6+8\times1-15|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$.

(方法二)l_1 可化为 $3x+4y-10=0$，

l_2 可化为 $3x+4y-\dfrac{15}{2}=0$，

所以 l_1 与 l_2 间的距离 $d=\dfrac{\left|-10-\left(-\dfrac{15}{2}\right)\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{\dfrac{5}{2}}{5}=\dfrac{1}{2}$.

[一题多思]

思考 1.解：可设为 $3x+4y=m(m\neq10)$.

思考 2.解：设直线 l 的方程为 $3x+4y=m\left(m\neq10\text{ 且 }m\neq\dfrac{15}{2}\right)$.

由题意，可得 $\dfrac{|10-m|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{\left|\dfrac{15}{2}-m\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}$，

解得 $m=\dfrac{35}{4}$，

则直线 l 的方程为 $3x+4y=\dfrac{35}{4}$，即 $12x+16y-35=0$.

[应用迁移]

1.D　**解析**：因为 $3x+2y-3=0$ 和 $6x+my+1=0$ 互相平行，

所以 $3m=2\times6$，解得 $m=4$.

直线 $6x+4y+1=0$ 可以转化为 $3x+2y+\dfrac{1}{2}=0$.

由两条平行直线间的距离公式可得 $d=\frac{\left|\frac{1}{2}-(-3)\right|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{\frac{7}{2}}{\sqrt{13}}=\frac{7\sqrt{13}}{26}$.

2.$\frac{6\sqrt{5}}{5}$　**解析**：由于 l_1 与 l_2 平行，则 $a(a-1)=2$，即 $a^2-a-2=0$，解得 $a=-1$ 或 $a=2$.

当 $a=2$ 时，两直线方程分别为 $2x+2y-6=0$，$x+y-3=0$，此时两直线重合，不符合题意；

当 $a=-1$ 时，两直线方程分别为 $x-2y+6=0$，$x-2y=0$，此时两直线平行，符合题意.

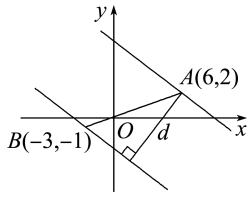
综上所述，$a=-1$，两直线方程分别为 $x-2y+6=0$，$x-2y=0$，

所以直线 l_1 与 l_2 之间的距离为 $d=\frac{|-6|}{\sqrt{1+(-2)^2}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

任务 2

［探究活动］

例 2　**解**：(1)如图，显然有 $0<d\leqslant|AB|$.



而 $|AB|=\sqrt{(6+3)^2+(2+1)^2}=3\sqrt{10}$.

所以 d 的取值范围为 $(0,3\sqrt{10}]$.

(2)由第(1)题图可知，当 d 取最大值时，两条平行直线与直线 AB 垂直，

又 $k_{AB}=\frac{2-(-1)}{6-(-3)}=\frac{1}{3}$，

所以两条平行直线的斜率为 -3.

故所求直线的方程为

$y-2=-3(x-6)$ 和 $y+1=-3(x+3)$，

即 $3x+y-20=0$ 和 $3x+y+10=0$.

［应用迁移］

1.A　**解析**：设与两直线平行的直线方程为 $6x+4y+m=0$，

又 l_1：$6x+4y-12=0$，l_2：$6x+4y-3=0$，则 $\frac{|m-(-12)|}{\sqrt{6^2+4^2}}=\frac{|m-(-3)|}{\sqrt{6^2+4^2}}$，

即 $|m+12|=|m+3|$，故 $m+12=m+3$ 或 $m+12+m+3=0$，解得 $m=-\frac{15}{2}$，

所以所求直线方程为 $6x+4y-\frac{15}{2}=0$，即 $12x+8y-15=0$.

2.解：(1)由题意可知，直线 l 过点 $A(2,-3)$ 和 $(0,3)$，

所以直线 l 的斜率 $k=\frac{-3-3}{2-0}=-3$，

所以所求直线 l 的方程为 $y=-3x+3$，即 $3x+y-3=0$.

(2)设直线 l 的方程为 $2x+y+n=0$，

则 $4-3+n=0$，得 $n=-1$，

即直线 l 的方程为 $2x+y-1=0$.

因为直线 l 与直线 $2x+y+b=0$ 间的距离为 $\sqrt{5}$，

所以 $\frac{|b+1|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，即 $|b+1|=5$.

又 $b<0$，所以 $b=-6$.

2.4　圆的方程

2.4.1　圆的标准方程

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(1)定点　定长

(2)圆心坐标　半径

(3)$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$　原点

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)×

2.D

3.(1)**提示**：圆心坐标确定圆的位置，半径确定圆的大小.

(2)**提示**：点 M 在圆 $x^2+y^2=r^2$ 内时，$|OM|<|r|$（O 为坐标原点），点 M 在圆 $x^2+y^2=r^2$ 外时，$|OM|>|r|$.

任务型课堂

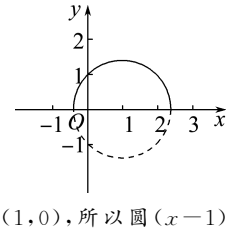
任务 1

1.C　**解析**：因为圆的标准方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的圆心为 (a,b)，半径为 r，所以圆 $(x-1)^2+(y-3)^2=4$ 的圆心和半径分别为 $(1,3)$，2.故选 C.

2.B　**解析**：圆 C：$(x-2)^2+(y+1)^2=3$ 的圆心坐标为 $(2,-1)$.故选 B.

3.B　**解析**：由 $y=\sqrt{2-(x-1)^2}$ 可得 $(x-1)^2+y^2=2$，$y\geqslant0$，

所以曲线 $y=\sqrt{2-(x-1)^2}$ 表示圆 $(x-1)^2+y^2=2$，$y\geqslant0$ 的部分，如图.



因为圆心坐标为 $(1,0)$，所以圆 $(x-1)^2+y^2=2$ 关于 x 轴对称，

所以曲线 $y=\sqrt{2-(x-1)^2}$ 与 x 轴所围成区域的面积为 $\frac{1}{2}\pi r^2=\pi$.故选 B.

任务 2

［探究活动］

例 1　**解**：(1)设圆的半径为 r，因为圆心为 $(3,4)$，

且圆经过坐标原点，所以 $r=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5$，

所以圆的标准方程为 $(x-3)^2+(y-4)^2=25$.

(2)设圆的半径为 r，

因为圆心为(1,1)且与直线 $x+y=4$ 相切,所以 $r=\frac{|1+1-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$,

故所求圆的标准方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

(3)设圆心为 (a,b),半径为 r,

由题意,得 $\begin{cases}a=\frac{2+2}{2}=2,\\ b=\frac{0-2}{2}=-1,\end{cases}$ 即圆心坐标为(2,-1),

所以 $r=\sqrt{(2-2)^2+(-1-0)^2}=1$,

所以所求圆的标准方程为 $(x-2)^2+(y+1)^2=1$.

(4)(方法一)设圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

依题意,得 $\begin{cases}(3-a)^2+(1-b)^2=r^2,\\ (-1-a)^2+(3-b)^2=r^2,\\ 3a-b-2=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=4,\\ r=\sqrt{10},\end{cases}$

故所求圆的标准方程是 $(x-2)^2+(y-4)^2=10$.

(方法二)设圆的半径为 r.由直线 AB 的斜率 $k=\frac{3-1}{-1-3}=-\frac{1}{2}$,

可知线段 AB 的垂直平分线 m 的斜率为 2.

又 AB 的中点的横坐标和纵坐标分别为 $x=\frac{3-1}{2}=1$,$y=\frac{1+3}{2}=2$,

因此直线 m 的方程为 $y-2=2(x-1)$,即 $2x-y=0$.

又圆心在直线 $3x-y-2=0$ 上,所以圆心是这两条直线的交点.

联立方程 $\begin{cases}2x-y=0,\\ 3x-y-2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\ y=4.\end{cases}$

所以圆心坐标为(2,4).

又 $r=\sqrt{(2-3)^2+(4-1)^2}=\sqrt{10}$,

故所求圆的标准方程是 $(x-2)^2+(y-4)^2=10$.

(方法三)设圆心为 C.

因为圆心在直线 $3x-y-2=0$ 上,所以可设圆心 C 的坐标为 $(a,3a-2)$.

又 $|CA|=|CB|$,

即 $\sqrt{(a-3)^2+(3a-3)^2}=\sqrt{(a+1)^2+(3a-5)^2}$,

解得 $a=2$,

所以圆心为(2,4),半径 $r=|CA|=\sqrt{10}$.

故所求圆的标准方程为 $(x-2)^2+(y-4)^2=10$.

[应用迁移]

1.C　**解析**:设圆心坐标为 $(2,-a)(a>0)$,则圆心到直线 $x+y=2\sqrt{2}$ 的距离 $d=\frac{|2-a-2\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=2$,所以 $a=2$,所以该圆的标准方程为 $(x-2)^2+(y+2)^2=4$.

2.B　**解析**:由题可知 $\overrightarrow{BA}=(0,-4)$,$\overrightarrow{BC}=(2,0)$,则 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$,

得△ABC 是直角三角形,且 $BA\perp BC$,

所以圆的半径为 $\frac{1}{2}|AC|=\frac{\sqrt{(-4+2)^2+(-2-2)^2}}{2}=\sqrt{5}$,圆心为(-3,0),

所以△ABC 的外接圆的标准方程是 $(x+3)^2+y^2=5$.

任务 3

[探究活动]

例 2　**解**:易知点 A,B,C 不共线,设 A,B,C 三点确定的圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$.

把 $A(0,5)$,$B(1,-2)$,$C(-3,-4)$ 的坐标代入,得

$\begin{cases}(0-a)^2+(5-b)^2=r^2,\\ (1-a)^2+(-2-b)^2=r^2,\\ (-3-a)^2+(-4-b)^2=r^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-3,\\ b=1,\\ r^2=25,\end{cases}$

所以 A,B,C 三点确定的圆的标准方程为 $(x+3)^2+(y-1)^2=25$.

把 $D(-7,-2)$ 代入上述圆的标准方程,等号成立,

所以点 D 在该圆上,

故 A,B,C,D 四点共圆.

[一题多思]

思考 1.解:易知 $\overrightarrow{AB}=(1,-7)$,$\overrightarrow{AD}=(-7,-7)$,$\overrightarrow{CB}=(4,2)$,$\overrightarrow{CD}=(-4,2)$,

所以 $\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|}=\frac{3}{5}$,

$\cos\langle\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\rangle=\frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CD}|}=-\frac{3}{5}$,

所以$\angle BAD+\angle BCD=\pi$,所以 A,B,C,D 四点共圆.

思考 2.解:因为线段 AB 的中点为 $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$,且直线 AB 的斜率为 -7,

所以线段 AB 的垂直平分线的方程为 $x-7y+10=0$.

同理,可得线段 BC 的垂直平分线的方程为 $2x+y+5=0$.

由 $\begin{cases}x-7y+10=0,\\ 2x+y+5=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-3,\\ y=1,\end{cases}$ 所以圆心为(-3,1),

半径为 $\sqrt{(-3-0)^2+(1-5)^2}=5$,

故所求的圆的方程为 $(x+3)^2+(y-1)^2=25$.

[应用迁移]

1.C　**解析**:因为点 $A(a+1,3)$ 在圆 C:$(x-a)^2+(y-1)^2=m$ 外,所以 $(a+1-a)^2+(3-1)^2>m$ 且 $m>0$,解得 $0<m<5$.

2.解:(1)因为点 $M(6,9)$ 在圆上,所以 $(6-5)^2+(9-6)^2=a^2$,即 $a^2=10$.

又 $a>0$,所以 $a=\sqrt{10}$.

(2)由已知,得圆心 $N(5,6)$.

因为 $|PN|=\sqrt{(3-5)^2+(3-6)^2}=\sqrt{13}$,

$|QN|=\sqrt{(5-5)^2+(3-6)^2}=3$,

$|PN|>|QN|$,所以点 P 在圆外,点 Q 在圆内,

所以 a 的取值范围是 $(3,\sqrt{13})$.

任务 4

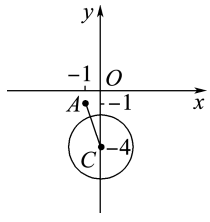
[探究活动]

例 3　**解**:设点 $P(x,y)$ 是圆 $x^2+(y+4)^2=4$ 上的任意一点,圆心为 $C(0,-4)$,半径 $r=2$,

则$\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}$表示点$A(-1,-1)$与该圆上的点的距离.

因为$|AC|^2=(-1)^2+(-1+4)^2=10>4$,

所以点$A(-1,-1)$在圆外,如图所示.



又$|AC|=\sqrt{10}$,

所以$\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}$的最大值为$|AC|+r=\sqrt{10}+2$,最小值为$|AC|-r=\sqrt{10}-2$.

[应用迁移]

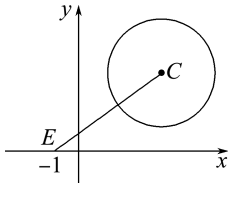
1.10　**解析**:由圆$C:x^2+y^2-6x-6y+14=0$可化为$(x-3)^2+(y-3)^2=4$,

可得圆心为$C(3,3)$,半径$r=2$.

如图所示,点P与点E距离的最大值为$|CE|+2$,点P与点E距离的最小值为$|CE|-2$.

又因为$|CE|=\sqrt{(3+1)^2+3^2}=5$,

所以圆上的点P到点E的距离的最大值为7,最小值为3,和为10.



2.$\sqrt{2}$　**解析**:因为$m\cdot1+(-1)\cdot m=0$,所以$l_1\perp l_2$.

又由直线$l_1:m(x-3)-(y-1)=0$,可得直线l_1恒过定点$A(3,1)$.

由直线$l_2:x-1+m(y-3)=0$,可得直线l_2恒过定点$B(1,3)$,

所以点P在以AB为直径的圆上,且$|AB|=\sqrt{(3-1)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}$,

所以半径为$\sqrt{2}$.

圆心C为线段AB的中点,即$C(2,2)$,

故点P所在的圆的方程为$(x-2)^2+(y-2)^2=2$,

可得$|OC|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$,

所以点P到坐标原点O的最小距离$|OP|_{\min}=|OC|-r=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

2.4.2　圆的一般方程

问题式预习

【知识清单】

知识点一

(1)$D^2+E^2-4F>0$

(2)$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$　$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$

知识点二

(1)一般方程　(2)D,E,F

知识点三

轨迹方程　轨迹　轨迹

【概念辨析】

1.(1)√　(2)×　(3)√　(4)×

2.C　**解析**:由$x^2+y^2+4x-6y-3=0$,得$(x+2)^2+(y-3)^2=16$,故圆心坐标为$(-2,3)$,半径为4.

3.(1)**提示**:将圆的标准方程展开成二元二次方程的形式即得一般方程,将圆的一般方程配方即得标准方程.

(2)**提示**:确定系数D,E,F.

任务型课堂

任务1

1.C　**解析**:方程$x^2+y^2-2ax+2ay+2a^2+a+1=0$可变形为$(x-a)^2+(y+a)^2=-a-1$,由题意知$-a-1>0$,得$a<-1$.

2.B　**解析**:$\odot C:x^2+y^2+2x-\sqrt{2}y+\frac{1}{2}=0\Rightarrow(x+1)^2+\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1$,故圆心坐标为$\left(-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,半径为1.

3.解:(1)(方法一:配方法)原方程等价于$(x+1)^2+(y+1)^2=0$,因此方程表示点$(-1,-1)$.

(方法二:公式法)因为$D^2+E^2-4F=2^2+2^2-4\times2=0$,所以方程表示点$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$,即$(-1,-1)$.

(2)原方程等价于$(x-1)^2+(y+2)^2=(\sqrt{11})^2$,因此方程表示圆心为$(1,-2)$,半径为$\sqrt{11}$的圆.

(3)因为$D^2+E^2-4F=4a^2+4b^2\geqslant0$,所以当$a=b=0$时,方程表示原点;当$a,b$不全为0时,方程表示以$(a,0)$为圆心,$\sqrt{a^2+b^2}$为半径的圆.

(4)原方程等价于$x^2+y^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}y-2=0$,配方,得$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{23}}{3}\right)^2$,因此方程表示圆心为$\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$,半径为$\frac{\sqrt{23}}{3}$的圆.

任务2

[探究活动]

例1　**解**:设$\triangle ABC$的外接圆方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

因为点A,B,C在圆上,

所以$\begin{cases}1+16+D+4E+F=0,\\4+9-2D+3E+F=0,\\16+25+4D-5E+F=0,\end{cases}$　解得$\begin{cases}D=-2,\\E=2,\\F=-23,\end{cases}$

所以$\triangle ABC$的外接圆方程为$x^2+y^2-2x+2y-23=0$,

即$(x-1)^2+(y+1)^2=25$,

所以圆心坐标为$(1,-1)$,半径为5.

[应用迁移]

1.C　**解析**:设圆的一般方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,圆心坐标为$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$.

因为圆C经过两点$A(0,2),B(4,6)$,且圆心C在直线$l:2x-y-3=0$上,

所以$\begin{cases}2\times\left(-\frac{D}{2}\right)-\left(-\frac{E}{2}\right)-3=0,\\0+2^2+2E+F=0,\\4^2+6^2+4D+6E+F=0,\end{cases}$　解得$\begin{cases}D=-6,\\E=-6,\\F=8,\end{cases}$

所以圆 C 的方程为 $x^2+y^2-6x-6y+8=0$.故选 C.

2.D　**解析**:设△OAB 的外接圆方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,

因为 $O(0,0)$,$A(4,3)$,$B(1,-3)$,

所以 $\begin{cases}F=0,\\4^2+3^2+4D+3E+F=0,\\1^2+(-3)^2+D-3E+F=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}D=-7,\\E=1,\\F=0,\end{cases}$

所以△OAB 的外接圆方程为 $x^2+y^2-7x+y=0$.

任务 3

[探究活动]

例 2　**解**:(1)设点 D 为线段 AB 的中点,直线 m 为线段 AB 的垂直平分线,则 $D\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

又 $k_{AB}=-3$,所以 $k_m=\frac{1}{3}$,

所以直线 m 的方程为 $x-3y-3=0$.

由 $\begin{cases}x-3y-3=0,\\x-y+1=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-3,\\y=-2,\end{cases}$ 即圆心 $C(-3,-2)$,

则半径 $r=|CA|=\sqrt{(-3-1)^2+(-2-1)^2}=5$,

所以圆 C 的方程为 $(x+3)^2+(y+2)^2=25$.

(2)设点 $M(x,y)$,$Q(x_0,y_0)$.

因为点 P 的坐标为 $(5,0)$,

所以 $\begin{cases}x=\frac{x_0+5}{2},\\y=\frac{y_0+0}{2},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_0=2x-5,\\y_0=2y.\end{cases}$

又点 $Q(x_0,y_0)$ 在圆 C:$(x+3)^2+(y+2)^2=25$ 上运动,

所以 $(x_0+3)^2+(y_0+2)^2=25$,

即 $(2x-5+3)^2+(2y+2)^2=25$.

整理,得 $(x-1)^2+(y+1)^2=\frac{25}{4}$,

即所求线段 PQ 的中点 M 的轨迹方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=\frac{25}{4}$.

[一题多思]

思考. 解:设线段 GF 的中点为 $N(a,b)$,连接 EN,CN,CG(图略).

在 Rt△GEF 中,$|EN|=|GN|$.

又 $CN\perp GF$,

所以在 Rt△GCN 中,$|CG|^2=|CN|^2+|GN|^2=|CN|^2+|EN|^2$,

所以 $(a+3)^2+(b+2)^2+(a+1)^2+(b+1)^2=25$,即 $a^2+b^2+4a+3b-5=0$.

因为 $4^2+3^2+4\times5>0$,

所以线段 GF 的中点 N 的轨迹是以 $\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$ 为圆心,半径为 $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ 的圆.

[应用迁移]

1. $x^2+y^2-2x=0(x\neq0$ 且 $x\neq2)$　**解析**:设 $M(x,y)$,$A(x_0,y_0)$,

因为 $C(2,0)$,M 是线段 AC 的中点,

由中点坐标公式得 $x=\frac{x_0+2}{2}$,$y=\frac{y_0+0}{2}$,所以 $x_0=2x-2$,$y_0=2y$,即 $A(2x-2,2y)$,

所以 $\overrightarrow{AC}=(4-2x,-2y)$,$\overrightarrow{AB}=(-2x,-2y)$.

由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,得 $(4-2x)(-2x)+(-2y)(-2y)=-8x+4x^2+4y^2=0$,即 $x^2+y^2-2x=0$.

又 A 不能与 B,C 重合,所以 $2x-2\neq-2$ 且 $2x-2\neq2$,解得 $x\neq0$ 且 $x\neq2$,

故动点 M 的轨迹方程为 $x^2+y^2-2x=0(x\neq0$ 且 $x\neq2)$.

2.解:根据题意,得 $|AC|=|AB|$,所以点 C 在以 A 为圆心的圆上,且半径 $r=|AB|=\sqrt{(3-4)^2+(5-2)^2}=\sqrt{10}$,故圆的方程为 $(x-4)^2+(y-2)^2=10$.

又因为 A,B,C 为三角形的三个顶点,所以 A,B,C 三点不共线,即点 B,C 不能重合且 B,C 不能为直径的两个端点,所以 $x\neq3$ 且 $\frac{x+3}{2}\neq4$,即 $x\neq3$ 且 $x\neq5$,所以端点 C 的轨迹方程为 $(x-4)^2+(y-2)^2=10(x\neq3$ 且 $x\neq5)$,所以端点 C 的轨迹是以 A 为圆心,$\sqrt{10}$ 为半径除去 $(3,5)$和$(5,-1)$两点的圆.

3.解:设点 Q 的坐标为 (x,y),点 P 的坐标为 (x',y'),则 $x=\frac{4+x'}{2}$ 且 $y=\frac{0+y'}{2}$,

即 $x'=2x-4$,$y'=2y$.

又点 P 在圆 $x^2+y^2=4$ 上,

所以 $x'^2+y'^2=4$.

由 $x'=2x-4$,$y'=2y$,得 $(2x-4)^2+(2y)^2=4$,

即 $(x-2)^2+y^2=1$,

故点 Q 的轨迹方程为 $(x-2)^2+y^2=1$.

2.5　直线与圆、圆与圆的位置关系

2.5.1　直线与圆的位置关系

第 1 课时　直线与圆的位置关系的判断

问题式预习

【知识清单】

知识点一

两个　一个　没有

知识点二

$<$　$=$　$>$　$>$　$=$　$<$

【概念辨析】

1.(1)×　(2)√　(3)√　(4)×

2.B　**解析**:由圆心到直线的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$,且直线 $y=x+1$ 不过圆心$(0,0)$,得直线与圆相交但不过圆心.故选 B.

3.(1)**提示**:几何法与代数法判断直线与圆的位置关系,是从不同的方面,不同的思路来判断的.几何法侧重于“形”,更多地结合了图形的几何性质;代数法则侧重于“数”,它倾向于“坐标”与“方程”.

(2)**提示**:一般采用几何法,即圆心到直线的距离等于

半径.

(3)**提示**:有两条.用点斜式要考虑斜率存在与不存在两种情况,当只求出一条直线时,另一条一定是直线 $x=x_0$.

任务型课堂

任务 1

[探究活动]

例 1 **解**:设过点 P 的直线的斜率为 k(由已知 k 存在),则直线方程为 $y=k(x-4)$.

(方法一)联立方程,得 $\begin{cases}y=k(x-4),\\x^2+y^2=8.\end{cases}$ 消去 y,得 $(1+k^2)x^2-8k^2x+16k^2-8=0$,$\Delta=(-8k^2)^2-4(1+k^2)(16k^2-8)=32(1-k^2)$.

(1)令 $\Delta>0$,即 $32(1-k^2)>0$,得 $-1<k<1$,

故当 $-1<k<1$ 时,直线与圆相交.

(2)令 $\Delta=0$,即 $32(1-k^2)=0$,得 $k=\pm1$,

故当 $k=\pm1$ 时,直线与圆相切,切线方程为 $x-y-4=0$ 或 $x+y-4=0$.

(3)令 $\Delta<0$,即 $32(1-k^2)<0$,得 $k>1$ 或 $k<-1$,

故当 $k>1$ 或 $k<-1$ 时,直线与圆相离.

(方法二)设圆心到直线的距离为 d,

则 $d=\dfrac{|k\cdot0-0-4k|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{4|k|}{\sqrt{1+k^2}}$.

(1)令 $d<r$,即 $\dfrac{4|k|}{\sqrt{1+k^2}}<2\sqrt{2}$,得 $k^2<1$,即 $-1<k<1$.

所以,当 $-1<k<1$ 时,直线与圆相交.

(2)令 $d=r$,即 $\dfrac{4|k|}{\sqrt{1+k^2}}=2\sqrt{2}$,得 $k^2=1$,即 $k=\pm1$.

所以,当 $k=\pm1$ 时,直线与圆相切,切线方程为 $x-y-4=0$ 或 $x+y-4=0$.

(3)令 $d>r$,即 $\dfrac{4|k|}{\sqrt{1+k^2}}>2\sqrt{2}$,得 $k^2>1$,即 $k>1$ 或 $k<-1$.

所以,当 $k>1$ 或 $k<-1$ 时,直线与圆相离.

[应用迁移]

1.A **解析**:圆 O 的圆心为 $(0,0)$,半径为 $\sqrt{2}$,

圆心到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|b|}{\sqrt{k^2+1}}$,若 $|b|<\sqrt{2}$,

则 $d=\dfrac{|b|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant|b|<\sqrt{2}$,直线与圆相交;

但直线与圆相交时,由 $d=\dfrac{|b|}{\sqrt{k^2+1}}<\sqrt{2}$ 可得 $|b|<\sqrt{2k^2+2}$,

不一定能推出 $|b|<\sqrt{2}$.故"$|b|<\sqrt{2}$"是"直线 l 与圆 O 相交"的充分不必要条件.

2.B **解析**:因为点 (a,b) 在圆 $M:x^2+y^2=2$ 外,所以 $a^2+b^2>2$.

圆 $M:x^2+y^2=2$ 的圆心坐标为 $(0,0)$,半径 $r=\sqrt{2}$,

根据点到直线的距离公式,圆心 $(0,0)$ 到直线 $ax+by=2$ 的距离 $d=\dfrac{|0\times a+0\times b-2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

由 $a^2+b^2>2$,可得 $\sqrt{a^2+b^2}>\sqrt{2}$,则 $\dfrac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}<\sqrt{2}$,即圆心到直线的距离 $d<r$,

所以直线 $ax+by=2$ 与圆 M 的位置关系是相交.

任务 2

[探究活动]

例 2 **解**:(1)因为 $(4-3)^2+(-3-1)^2=17>1$,

所以点 A 在圆外.

①若所求切线的斜率存在,设切线的斜率为 k,

则切线的方程为 $y+3=k(x-4)$.

设圆心为 C.

因为圆心 $C(3,1)$ 到切线的距离等于半径 1,

所以 $\dfrac{|3k-1-3-4k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$,

即 $|k+4|=\sqrt{k^2+1}$,

所以 $k^2+8k+16=k^2+1$,解得 $k=-\dfrac{15}{8}$,

所以切线的方程为 $y+3=-\dfrac{15}{8}(x-4)$,

即 $15x+8y-36=0$.

②若切线的斜率不存在,

则切线的方程为 $x=4$,

此时圆心 $C(3,1)$ 到直线 $x=4$ 的距离也为 1,

所以另一条切线的方程是 $x=4$.

综上所述,所求切线的方程为 $15x+8y-36=0$ 或 $x=4$.

(2)圆心 C 的坐标为 $(3,1)$.

设切点为 B,则 $\triangle ABC$ 为直角三角形,

$|AC|=\sqrt{(3-4)^2+(1+3)^2}=\sqrt{17}$,

又 $|BC|=1$,

所以 $|AB|=\sqrt{|AC|^2-|BC|^2}=\sqrt{(\sqrt{17})^2-1^2}=4$,

所以切线长为 4.

[一题多思]

思考 1.**解**:由本例(2)可知,$|AP|=4$,

所以 $S_{\triangle APC}=\dfrac{1}{2}|AP|\cdot|CP|=\dfrac{1}{2}\times4\times1=2$,

所以 $S_{四边形APCQ}=2S_{\triangle APC}=4$.

思考 2.**解**:当直线 $y=x+1$ 上的点到圆心 C 的距离最短时,切线长有最小值,又因为圆心 $C(3,1)$ 到直线 $y=x+1$ 的距离 $d=\dfrac{|3-1+1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$,

所以切线长的最小值为 $\sqrt{\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2-1^2}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

[应用迁移]

1.B **解析**:圆 $M:(x-5)^2+y^2=2$ 的圆心 $M(5,0)$,半径 $r=\sqrt{2}$,

由题意可得 $PA\perp AM$,则 $|PA|=\sqrt{|PM|^2-|AM|^2}=\sqrt{|PM|^2-r^2}=\sqrt{|PM|^2-2}$,

所以当 $|PM|$ 取得最小值时,线段 PA 的长度最小.

因为 $|PM|_{\min}=\dfrac{|5-0+1|}{\sqrt{1+1}}=3\sqrt{2}$,所以 $|PA|_{\min}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-2}=4$.

2.解：由题意，得圆心 $C(1,-2)$，半径 $r=\sqrt{10}$.

(1)设切线的方程为 $x+y+b=0(b\neq-4)$，

则 $\dfrac{|1-2+b|}{\sqrt{2}}=\sqrt{10}$，得 $b=1\pm2\sqrt{5}$，

所以切线的方程为 $x+y+1+2\sqrt{5}=0$ 或 $x+y+1-2\sqrt{5}=0$.

(2)设切线的方程为 $2x+y+m=0$，

则 $\dfrac{|2-2+m|}{\sqrt{5}}=\sqrt{10}$，得 $m=\pm5\sqrt{2}$，

所以切线的方程为 $2x+y+5\sqrt{2}=0$ 或 $2x+y-5\sqrt{2}=0$.

(3)因为 $k_{AC}=\dfrac{-2+1}{1-4}=\dfrac{1}{3}$，

所以切点为 $A(4,-1)$ 时，切线的斜率为 -3，

所以切点为 $A(4,-1)$ 时，切线的方程为 $y+1=-3(x-4)$，即 $3x+y-11=0$.

任务 3

［探究活动］

例 3 **解**：将圆的方程配方得 $(x+1)^2+(y-2)^2=25$，所以圆心为 $(-1,2)$，半径 $r=5$，由圆的性质，可得圆心到直线 l 的距离 $d=\sqrt{r^2-\left(\dfrac{|AB|}{2}\right)^2}=\sqrt{25-16}=3$.

当 l 的斜率不存在时，$x=-4$ 满足题意；

当 l 的斜率存在时，设方程为 $y=k(x+4)$，即 $kx-y+4k=0$，

由点到直线的距离公式，得

$\dfrac{|-k-2+4k|}{\sqrt{1+k^2}}=3$，解得 $k=-\dfrac{5}{12}$，

所以直线 l 的方程为 $5x+12y+20=0$.

综上所述，直线 l 的方程为 $x=-4$ 或 $5x+12y+20=0$.

［应用迁移］

1.9　**解析**：由题意圆的标准方程是 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$，圆的圆心为 $C(1,1)$，半径为 $r=\sqrt{2}$，又直线被圆截得的弦长为 $2\sqrt{2}$，则弦为直径，易知直线过圆心，

所以 $m+n-1=0$，即 $m+n=1$.

所以 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{4}{n}=(m+n)\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{4}{n}\right)=5+\dfrac{4m}{n}+\dfrac{n}{m}\geqslant5+2\sqrt{\dfrac{4m}{n}\times\dfrac{n}{m}}=9$，当且仅当 $\dfrac{4m}{n}=\dfrac{n}{m}$，即 $m=\dfrac{1}{3}$，$n=\dfrac{2}{3}$ 时，等号成立，所以 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{4}{n}$ 的最小值为 9.

2.解：(1)若直线 AB 的斜率不存在，则直线 AB：$x=0$，此时 $|AB|=2\sqrt{5}$，不符合题设.

由 C：$(x+2)^2+y^2=9$，则圆心 $C(-2,0)$，半径为 3，又 $|AB|=4\sqrt{2}$，

所以 $C(-2,0)$ 到直线 AB 的距离 $d=\sqrt{9-\dfrac{|AB|^2}{4}}=1$.

设直线 AB：$y=kx+1$，则 $\dfrac{|1-2k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，可得 $3k^2-4k=0$，故 $k=0$ 或 $k=\dfrac{4}{3}$，

所以直线 AB 的方程为 $y=1$ 或 $4x-3y+3=0$.

(2)由(1)知当直线 AB 的斜率不存在时，有 $|AB|=2\sqrt{5}$，又 $C(-2,0)$ 到直线 AB 的距离为 2，则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times2\times2\sqrt{5}=2\sqrt{5}$；

若直线 AB 的斜率存在，设 AB：$y=kx+1$，

此时 $C(-2,0)$ 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{|1-2k|}{\sqrt{1+k^2}}$，$|AB|=2\sqrt{9-d^2}=2\sqrt{9-\dfrac{(1-2k)^2}{1+k^2}}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times d\times|AB|=\dfrac{|1-2k|}{\sqrt{1+k^2}}\times\sqrt{9-\dfrac{(1-2k)^2}{1+k^2}}$.令 $t=\dfrac{|1-2k|}{\sqrt{1+k^2}}\geqslant0$，

则 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{t^2(9-t^2)}\leqslant\dfrac{t^2+9-t^2}{2}=\dfrac{9}{2}$，当且仅当 $t=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$，即 $k=-1$ 或 $k=-7$ 时，等号成立，

所以此时 $|AB|=2\sqrt{9-\dfrac{9}{2}}=3\sqrt{2}$.

综上，$\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\dfrac{9}{2}$，此时弦长 $|AB|=3\sqrt{2}$.

第 2 课时　直线与圆的位置关系的应用

问题式预习

【知识清单】

知识点

平面直角坐标系　几何要素　代数　几何结论

【概念辨析】

1.(1)√　(2)√

2.$\dfrac{7\sqrt{2}}{2}-2$　**解析**：由题意可知圆心为 $(2,-3)$，半径为 2，因为圆心 $(2,-3)$ 到直线 $x-y+2=0$ 的距离为 $\dfrac{|2+3+2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$，所以从村庄外围任一点到小路的最短距离为 $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}-2$.

3.(1)**提示**：建立平面直角坐标系的方式对解决问题有着直接的影响.因此，建立平面直角坐标系时，应使所给图形尽量对称，所需的几何元素的坐标或方程尽量简单.

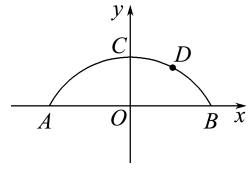
(2)**提示**：关键是把实际应用问题转化为数学问题.

任务型课堂

任务 1

［探究活动］

例 1　B　**解析**：如图，拱形桥 ACB，以 AB 所在直线为 x 轴，以线段 AB 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系，则 $A(-10,0)$，$B(10,0)$，$C(0,5)$，圆心 E 在 y 轴上.



设 $E(0,b)(b<0)$，则有 $|AE|=|CE|$，即 $\sqrt{100+b^2}=|5-b|$，

整理可得 $2b+15=0$，解得 $b=-\frac{15}{2}$，

所以圆心为 $E\left(0,-\frac{15}{2}\right)$，半径为 $|CE|=|5-b|=\frac{25}{2}$，

所以圆的方程为 $x^2+\left(y+\frac{15}{2}\right)^2=\frac{625}{4}$.

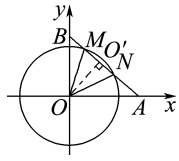
设 $D(x,3)$，则有 $x^2+\left(3+\frac{15}{2}\right)^2=\frac{625}{4}$，解得 $x=\pm\sqrt{46}$.

所以，要使小船通过圆拱桥，船宽最大为 $2\sqrt{46}$.

因为 $6.5<\sqrt{46}<7$，所以 $13<2\sqrt{46}<14$.

［应用迁移］

1.解：根据题意，以海监船的位置为坐标原点，其正东方向为 x 轴正方向，正北方向为 y 轴正方向，建立如图所示的平面直角坐标系，



所以 $A(40,0)$，$B(0,30)$，圆 O：$x^2+y^2=676$，所以 l_{AB}：$\frac{x}{40}+\frac{y}{30}=1$，即 l_{AB}：$3x+4y-120=0$.

记从点 N 处开始被监测，到点 M 处监测结束，过点 O 作 $OO'\perp AB$ 于点 O'.

因为点 O 到直线 AB 的距离 $|OO'|=\frac{|-120|}{\sqrt{3^2+4^2}}=24$ (km)，

所以 $|MN|=2\sqrt{|MO|^2-|OO'|^2}=20$(km).

因为 $\frac{20}{10}=2$(h)，

所以这艘轮船被海监船监测到的时间约为 2 h.

2.解：如图，设 l 与 x 轴交于点 $B(b,0)(b\neq-3)$，则 $k_{AB}=\frac{-3}{b+3}$.

根据光的反射定律，反射光线的斜率 $k_{反}=\frac{3}{b+3}$，

所以反射光线所在直线的方程为 $y=\frac{3}{b+3}(x-b)$，

即 $3x-(b+3)y-3b=0$.

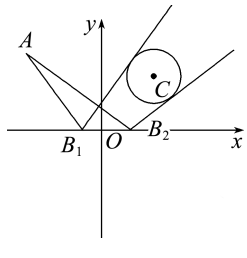
设圆心为 C，

将 $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ 化为 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$，可知，圆心 $C(2,2)$，半径为 1，

所以 $\frac{|6-(b+3)\times2-3b|}{\sqrt{9+(b+3)^2}}=1$，解得 $b_1=-\frac{3}{4}$，$b_2=1$，

所以 $k_{AB}=-\frac{4}{3}$ 或 $k_{AB}=-\frac{3}{4}$.

所以光线 l 所在直线的方程为 $y-3=-\frac{4}{3}(x+3)$ 或 $y-3=\frac{-3}{4}(x+3)$，即 $4x+3y+3=0$ 或 $3x+4y-3=0$.



任务 2

［探究活动］

例 2　解：(1)$\frac{y}{x}$ 可看作点 (x,y) 与原点连线的斜率，$\frac{y}{x}$ 的最大值和最小值就是与该圆有公共点且过原点的直线的斜率的最大值和最小值，即直线与圆相切时的斜率.

由题意知，圆心为 $(2,-3)$，半径为 1.

设过原点的直线的方程为 $y=kx$.

由直线与圆相切，得圆心到直线的距离等于半径，即 $\frac{|2k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，

解得 $k=-2+\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $k=-2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以 $\frac{y}{x}$ 的最大值为 $-2+\frac{2\sqrt{3}}{3}$，最小值为 $-2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2)设 $t=x+y$，则 $y=-x+t$，t 可看作直线 $y=-x+t$ 在 y 轴上的截距.

所以 $x+y$ 的最大值和最小值就是直线 $y=-x+t$ 与圆有公共点时直线纵截距的最大值和最小值，即直线 $y=-x+t$ 与圆相切时的纵截距.

由直线与圆相切，得圆心到直线的距离等于半径，

即 $\frac{|2+(-3)-t|}{\sqrt{2}}=1$，解得 $t=\sqrt{2}-1$ 或 $t=-\sqrt{2}-1$.

所以 $x+y$ 的最大值为 $\sqrt{2}-1$，最小值为 $-\sqrt{2}-1$.

［一题多思］

思考 1.解：因为 $(x-2)^2+(y+3)^2=1$，故可设 $x=2+\cos\alpha$，$y=-3+\sin\alpha$，$\alpha\in\mathbf{R}$，

所以 $x+y=-1+\cos\alpha+\sin\alpha=-1+\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，

故当 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1$ 时，$x+y$ 取得最大值 $-1+\sqrt{2}$；

当 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ 时，$x+y$ 取得最小值 $-1-\sqrt{2}$.

思考 2.解：根据题意，得圆 $(x-2)^2+(y+3)^2=1$ 的圆心为 $(2,-3)$，半径 $r=1$.

因为 $O(0,0)$，$A(0,2)$，所以 OA 所在的直线是 y 轴.

当点 M 到直线 AO 的距离最小时，$\triangle OAM$ 的面积最小，则点 M 到直线 AO 的距离的最小值为 $d=2-1=1$，

所以 $\triangle OAM$ 面积的最小值为 $S=\frac{1}{2}|OA|\cdot d=1$.

［应用迁移］

1.C　解析：(方法一)令 $x-y=k$，则 $x=k+y$，

代入圆的方程化简得 $2y^2+(2k-6)y+k^2-4k-4=0$.

因为存在实数 y，所以 $\Delta\geqslant0$，即 $(2k-6)^2-4\times2(k^2-4k-4)\geqslant0$，

化简得 $k^2-2k-17\leqslant0$，解得 $1-3\sqrt{2}\leqslant k\leqslant1+3\sqrt{2}$.

故 $x-y$ 的最大值是 $1+3\sqrt{2}$.

(方法二)将 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$，整理得 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$.

令 $x=3\cos\theta+2$，$y=3\sin\theta+1$，其中 $\theta\in[0,2\pi]$，

则 $x-y=3\cos\theta-3\sin\theta+1=3\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+1$.

因为 $\theta\in[0,2\pi]$，所以 $\theta+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{9\pi}{4}\right]$，当 $\theta+\frac{\pi}{4}=2\pi$，即 $\theta=\frac{7\pi}{4}$ 时，$x-y$ 取得最大值 $3\sqrt{2}+1$.

（方法三）由 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$，得 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$，可知圆心为 $(2,1)$，半径为 3.

设 $x-y=m$，则圆心到直线 $x-y=m$ 的距离 $d=\frac{|2-1-m|}{\sqrt{2}}\leqslant 3$，解得 $1-3\sqrt{2}\leqslant m\leqslant 3\sqrt{2}+1$.

故 $x-y$ 的最大值为 $3\sqrt{2}+1$.

2.ACD　**解析**：对于 A，方程 $x^2+y^2-4x+1=0$ 为 $(x-2)^2+y^2=3$，表示以 $C(2,0)$ 为圆心，$r=\sqrt{3}$ 为半径的圆，故 A 正确；

对于 B，因为 $(x-2)^2\geqslant 0$，所以 $y^2\leqslant 3$，所以 $-\sqrt{3}\leqslant y\leqslant\sqrt{3}$，所以 y 的最大值为 $\sqrt{3}$，故 B 错误；

对于 C，$\sqrt{x^2+(y-1)^2}$ 表示圆上点 (x,y) 到定点 $(0,1)$ 的距离，又圆心 $(2,0)$ 到定点 $(0,1)$ 的距离为 $d=\sqrt{(2-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{5}$，所以圆上点 (x,y) 到定点 $(0,1)$ 的距离的最大值为 $d+r=\sqrt{5}+\sqrt{3}$，故 C 正确；

对于 D，设 $x+y=t$，直线 $x+y-t=0$ 与圆 $(x-2)^2+y^2=3$ 有公共点，则有 $\frac{|2-t|}{\sqrt{2}}\leqslant\sqrt{3}$，解得 $2-\sqrt{6}\leqslant t\leqslant 2+\sqrt{6}$，所以 $x+y$ 的最大值为 $2+\sqrt{6}$，故 D 正确.

2.5.2　圆与圆的位置关系

问题式预习

【知识清单】

知识点

$d>r_1+r_2$　没有实数解　$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$　两组不同的实数解　$d=|r_1-r_2|(r_1\neq r_2)$　一组实数解　$0\leqslant d<|r_1-r_2|(r_1\neq r_2)$　没有实数解

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)×　(4)√

2.C　**解析**：两圆的方程可分别化为 $(x-1)^2+y^2=1$ 和 $x^2+(y+2)^2=4$，两圆的圆心距为 $\sqrt{(1-0)^2+(0+2)^2}=\sqrt{5}$，又 $2-1<\sqrt{5}<2+1$，所以两圆相交.

3.(1)**提示**：不一定，也可能内含.

(2)**提示**：不一定，也可能内切.

(3)**提示**：当两圆外离时有四条公切线，当两圆外切时有三条公切线，当两圆相交时有两条公切线，当两圆内切时只有一条公切线，当两圆内含时无公切线.

任务型课堂

任务 1

［探究活动］

例 1　**解**：(1)根据题意，得两圆的圆心分别为 $(-2,2)$，$(2,5)$，半径分别为 $r_1=1$，$r_2=4$，两圆的圆心距 $d=\sqrt{[2-(-2)]^2+(5-2)^2}=5$.因为 $d=r_1+r_2$，所以两圆外切.

(2)将圆的一般方程化成标准方程，得 $(x+3)^2+y^2=16$，$x^2+(y+3)^2=36$，故两圆的圆心分别为 $(-3,0)$，$(0,-3)$，半径分别为 $r_1=4$，$r_2=6$，两圆的圆心距 $d=\sqrt{(0+3)^2+(-3-0)^2}=3\sqrt{2}$.

因为 $6-4<3\sqrt{2}<6+4$，即 $|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$，所以两圆相交.

因为 $x^2+y^2+6x-7=0$ 和 $x^2+y^2+6y-27=0$ 两式相减，得 $3x-3y+10=0$，所以公共弦所在直线的方程为 $3x-3y+10=0$.

［应用迁移］

1.C　**解析**：圆 C_1 的圆心为 $C_1(0,0)$，半径 $r_1=9$，圆 C_2 的方程化为标准形式为 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$，圆心为 $C_2(3,4)$，半径 $r_2=4$，所以 $|C_1C_2|=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5$.因为 $r_1-r_2=5$，所以 $|C_1C_2|=r_1-r_2$，所以圆 C_1 和圆 C_2 内切.

2.C　**解析**：由 $C_1:(x+4)^2+(y-3)^2=9$，圆心为 $C_1(-4,3)$，半径为 $r_1=3$，

圆 $C_2:x^2+y^2-4x+10y+m=0$，即 $(x-2)^2+(y+5)^2=29-m$，

圆心为 $C_2(2,-5)$，半径为 $r_2=\sqrt{29-m}$，$m<29$.

又 $|C_1C_2|=\sqrt{36+64}=10$，且两圆外离，

则 $|C_1C_2|>r_1+r_2$，即 $10>3+\sqrt{29-m}$，解得 $m>-20$，

所以 $-20<m<29$，即 m 的取值范围是 $(-20,29)$.

任务 2

［探究活动］

例 2　**解**：圆 C 的方程可化为 $(x-1)^2+y^2=1$，圆心为 $C(1,0)$，半径为 1.

设所求圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$，

由题意，可得 $\begin{cases}\sqrt{(a-1)^2+b^2}=r+1,\\ \frac{b+\sqrt{3}}{a-3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-1,\\ \frac{|a+\sqrt{3}b|}{2}=r,\end{cases}$ 解得

$\begin{cases}a=4,\\ b=0,\\ r=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=0,\\ b=-4\sqrt{3},\\ r=6,\end{cases}$

所以所求圆的标准方程为 $(x-4)^2+y^2=4$ 或 $x^2+(y+4\sqrt{3})^2=36$.

［应用迁移］

C　**解析**：圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 的圆心为 $M(2,3)$，半径为 $R_1=1$，圆 $(x+1)^2+(y+1)^2=36$ 的圆心为 $N(-1,-1)$，半径为 $R_2=6$.

因为 $|MN|=\sqrt{(2+1)^2+(3+1)^2}=5=R_2-R_1$，

所以两个圆内切，因此与两圆均相切的直线 l 为两个圆的公共弦所在直线的方程.

所以 l 的方程为 $(x+1)^2+(y+1)^2-(x-2)^2-(y-3)^2=36-1$，整理得 $3x+4y-23=0$.

任务 3

［探究活动］

例 3　**解**：(1)圆 C_1 和圆 C_2 相交.理由如下：

将圆 C_1 和圆 C_2 的一般方程化为标准方程，得圆 $C_1:(x-1)^2+(y-3)^2=11$，圆 $C_2:(x-5)^2+(y-6)^2=16$，则圆心 $C_1(1,3)$，半径 $r_1=\sqrt{11}$，圆心 $C_2(5,6)$，半径 $r_2=4$.

又两圆的圆心距 $d=|C_1C_2|=\sqrt{(5-1)^2+(6-3)^2}=5$，

$r_1+r_2=\sqrt{11}+4$，$|r_1-r_2|=4-\sqrt{11}$，

所以 $|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$，

所以圆 C_1 和圆 C_2 相交.

(2)将圆 C_1 和圆 C_2 的方程相减，得 $4x+3y-23=0$，

所以两圆的公共弦所在直线的方程为 $4x+3y-23=0$.

因为圆心 $C_2(5,6)$ 到直线 $4x+3y-23=0$ 的距离

$d=\dfrac{|20+18-23|}{\sqrt{16+9}}=3$，

所以公共弦长为 $2\sqrt{r_2^2-d^2}=2\sqrt{16-9}=2\sqrt{7}$.

[应用迁移]

1.B　**解析**：两圆方程作差可得 $4x-4y=4-a$，即公共弦所在直线的方程为 $4x-4y+a-4=0$.

由圆 C_1：$x^2+y^2=4$，则圆心 $C_1(0,0)$，半径 $r=2$，

点 C_1 到公共弦所在直线的距离 $d=\dfrac{|a-4|}{\sqrt{16+16}}$，

公共弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{2}$，则 $4-\dfrac{(a-4)^2}{32}=2$，解得 $a=12$ 或 $a=-4$ 均满足题意.

由圆 C_2：$x^2+y^2-4x+4y=a$，整理可得 $(x-2)^2+(y+2)^2=a+8$，

则 $a+8>0$，所以 $a=12$ 或 $a=-4$.

2.解：由题可得 C_1：$(x+1)^2+(y+4)^2=25$，C_2：$(x-2)^2+(y-2)^2=10$，

则圆 C_1 的圆心为 $C_1(-1,-4)$，半径 $r_1=5$，圆 C_2 的圆心为 $C_2(2,2)$，半径 $r_2=\sqrt{10}$，

可得 $|C_1C_2|=\sqrt{(-1-2)^2+(-4-2)^2}=3\sqrt{5}$，$r_1+r_2=5+\sqrt{10}$，$r_1-r_2=5-\sqrt{10}$.

又 $|C_1C_2|^2=45$，$(r_1+r_2)^2=(5+\sqrt{10})^2=35+10\sqrt{10}>|C_1C_2|^2$，

$(r_1-r_2)^2=(5-\sqrt{10})^2=35-10\sqrt{10}<|C_1C_2|^2$，

故 $r_1-r_2<|C_1C_2|<r_1+r_2$，所以圆 C_1 与圆 C_2 的位置关系为相交.

将两圆方程相减可得

$(x^2+y^2+2x+8y-8)-(x^2+y^2-4x-4y-2)=0$，

化简得 $x+2y-1=0$，故公共弦所在直线的方程为 $x+2y-1=0$.

微专题培优(三)　直线中的对称问题

类型 1

例 1　C　**解析**：因为两点 $P(a,-b)$ 与 $Q(b+1,a-1)$ 关于点 $(3,4)$ 对称，

可得 $\begin{cases}\dfrac{a+b+1}{2}=3,\\ \dfrac{a-b-1}{2}=4,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a+b=5,\\ a-b=9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=7,\\ b=-2,\end{cases}$

所以 $ab=7\times(-2)=-14$.

【对点训练】

0　**解析**：由题意知 $\begin{cases}\dfrac{a+b-1}{2}=5,\\ \dfrac{a-b+1}{2}=6,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a+b=11,\\ a-b=11,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=11,\\ b=0,\end{cases}$ 故 $ab=0$.

类型 2

例 2　A　**解析**：因为 $A(1,0)$ 不在直线 l：$y=2x-4$ 上，

所以可设直线 l：$y=2x-4$ 关于点 $A(1,0)$ 对称的直线方程为 $y=2x+b$，

则 $\dfrac{|2-0-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|2-0+b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$，解得 $b=0$ 或 $b=-4$(舍去)，

故所求直线方程为 $y=2x$.

【对点训练】

B　**解析**：由 $ax+y+3a-1=0$，得 $(x+3)a+(y-1)=0$，

由 $\begin{cases}x+3=0,\\ y-1=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-3,\\ y=1,\end{cases}$ 所以 $M(-3,1)$.

设直线 $2x+3y-6=0$ 关于点 M 对称的直线方程为 $2x+3y+C=0(C\neq-6)$，

所以 $\dfrac{|-6+3-6|}{\sqrt{4+9}}=\dfrac{|-6+3+C|}{\sqrt{4+9}}$，解得 $C=12$ 或 $C=-6$(舍去)，

所以直线 $2x+3y-6=0$ 关于点 M 对称的直线方程为 $2x+3y+12=0$.

类型 3

例 3　C　**解析**：由题意可知，直线 l 为线段 AB 的垂直平分线，且 $k_{AB}=\dfrac{4-2}{2+1}=\dfrac{2}{3}$，

所以直线 l 的斜率为 $-\dfrac{3}{2}$.

又因为线段 AB 的中点为 $M\left(\dfrac{1}{2},3\right)$，所以直线 l 的方程为 $y-3=-\dfrac{3}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$，

整理可得 $6x+4y-15=0$.

【对点训练】

C　**解析**：设点 $P(2,-3)$ 关于直线 l：$y=x+1$ 的对称点为 $Q(x,y)$，

则满足 $\begin{cases}\dfrac{y+3}{x-2}\times1=-1,\\ \dfrac{y-3}{2}=\dfrac{x+2}{2}+1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-4,\\ y=3,\end{cases}$ 即 $Q(-4,3)$.

类型 4

例 4　B　**解析**：由 $\begin{cases}x-y-2=0,\\ 3x-y+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-\dfrac{5}{2},\\ y=-\dfrac{9}{2},\end{cases}$ 则交点坐标为 $P\left(-\dfrac{5}{2},-\dfrac{9}{2}\right)$.

取直线 $x-y-2=0$ 上一点 $A(0,-2)$，设点 A 关于直线 l：$3x-y+3=0$ 的对称点为 $A'(x',y')$，

则由 $k_{AA'}\cdot k_l=-1$，且线段 AA' 的中点在直线 l 上，

得 $\begin{cases}\dfrac{y'+2}{x'}\times3=-1,\\ 3\times\dfrac{0+x'}{2}-\dfrac{-2+y'}{2}+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x'=-3,\\ y'=-1,\end{cases}$

故所求直线过点 $P\left(-\dfrac{5}{2},-\dfrac{9}{2}\right)$，$(-3,-1)$.

所以所求直线方程为 $y+\frac{9}{2}=\frac{-1+\frac{9}{2}}{-3+\frac{5}{2}}\left(x+\frac{5}{2}\right)$，即 $7x+y+22=0$.

【对点训练】

D　**解析**：设所求直线上任意一点的坐标为 $P(x,y)$，该点关于直线 $x=1$ 对称的点的坐标为 $P'(x_0,y_0)$，

则 $\begin{cases}y=y_0,\\ \frac{x+x_0}{2}=1,\end{cases}$ 故对称点坐标为 $P'(2-x,y)$，代入直线 $x-2y+1=0$ 中，所以 $2-x-2y+1=0\Rightarrow x+2y-3=0$.

微专题培优(四)　圆中的对称问题

类型 1

例 1　D　**解析**：由题意可得圆的标准方程为 $(x+2)^2+y^2=5$，所以圆心为 $(-2,0)$，半径为 $\sqrt{5}$.

因为点 $(-2,0)$ 关于点 $(0,0)$ 的对称点为 $(2,0)$，

所以所求对称圆的标准方程为 $(x-2)^2+y^2=5$.

【对点训练】

$(x-3)^2+(y-2)^2=1$　**解析**：圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的圆心为 $(1,0)$，半径为 1.

设 $(1,0)$ 关于点 $(2,1)$ 的对称点为 (m,n)，

则 $\begin{cases}\frac{1+m}{2}=2,\\ \frac{0+n}{2}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=3,\\ n=2,\end{cases}$

故圆心 $(1,0)$ 关于点 $(2,1)$ 的对称点为 $(3,2)$，

所以对称圆的方程为 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$.

类型 2

例 2　A　**解析**：记点 $A(-2,1)$，设圆心 C 的坐标为 (a,b)，则 $k_{AC}=\frac{b-1}{a+2}=-1$，可得 $a+b+1=0$.

线段 AC 的中点 $M\left(\frac{a-2}{2},\frac{b+1}{2}\right)$ 在直线 $y=x-1$ 上，则 $\frac{b+1}{2}=\frac{a-2}{2}-1$，即 $b=a-5$，

由 $\begin{cases}a+b+1=0,\\ b=a-5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=-3,\end{cases}$ 即圆心 $C(2,-3)$，

因此，圆 C 的方程为 $(x-2)^2+(y+3)^2=1$.

【对点训练】

A　**解析**：设 $C_2(a,b)$，圆 C_1 的圆心 $C_1(-1,1)$，半径 $r_1=\sqrt{3}$，

由题意知 C_1 与 C_2 关于直线 $x-y-1=0$ 对称，

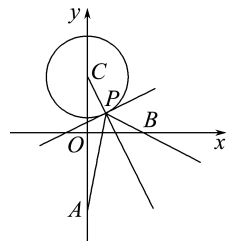
所以 $\begin{cases}\frac{b-1}{a+1}=-1,\\ \frac{-1+a}{2}-\frac{1+b}{2}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=-2,\end{cases}$

所以圆 C_2 的标准方程为 $(x-2)^2+(y+2)^2=3$.

类型 3

例 3　B　**解析**：设 $x^2+y^2-6y+4=0$ 的圆心为 C，由题意，知圆 C 的标准方程为 $x^2+(y-3)^2=5$，

作出圆 C 与射线 PA，PB，CP，如图，



则 PA 与 PB 关于 CP 对称. 由于 $C(0,3)$，$P(1,1)$，$A\left(0,-\frac{9}{2}\right)$，

故直线 CP 的方程为 $y=-2x+3$，直线 AP 的方程为 $y=\frac{11}{2}x-\frac{9}{2}$.

设 $B(t,0)$ 关于 CP 的对称点为 $B'(m,n)$，则 $\begin{cases}\frac{n-0}{m-t}=\frac{1}{2},\\ \frac{n}{2}=-2\cdot\frac{m+t}{2}+3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-\frac{3}{5}t+\frac{12}{5},\\ n=-\frac{4}{5}t+\frac{6}{5}.\end{cases}$

又点 B' 一定在直线 AP 上，

所以 $-\frac{4}{5}t+\frac{6}{5}=\frac{11}{2}\left(-\frac{3}{5}t+\frac{12}{5}\right)-\frac{9}{2}$，解得 $t=3$.

【对点训练】

解：(1)设圆心为 $C(3a,2a)$，

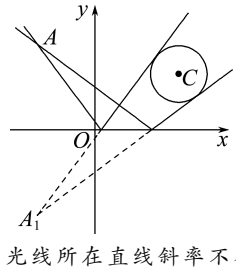
则 $r=\sqrt{(3a-2)^2+(2a-2)^2}=\sqrt{(3a-3)^2+(2a-1)^2}$，

即 $(3a-2)^2+(2a-2)^2=(3a-3)^2+(2a-1)^2$，解得 $a=1$，

所以 $r=\sqrt{(3-2)^2+(2-2)^2}=1$，

所以圆 C 的标准方程为 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$.

(2)如图，$A_1(-2,-3)$ 是点 A 关于 x 轴的对称点.



显然，当反射后的光线所在直线斜率不存在时，反射后的光线所在直线与圆不相切，

所以反射后的光线所在直线的斜率一定存在，

所以设反射光线所在的直线方程为 $y+3=k(x+2)$，即 l：$kx-y+2k-3=0$.

因为反射后的直线与圆相切，所以圆心 $C(3,2)$ 到直线 l 的距离 $d=r$，

所以 $\frac{|3k-2+2k-3|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，整理得 $12k^2-25k+12=0$，

解得 $k_1=\frac{4}{3}$ 或 $k_2=\frac{3}{4}$，

所以反射后的光线所在直线的方程为 $4x-3y-1=0$ 或 $3x-4y-6=0$.

迁移应用

类型一

例1 B **解析**：由题意得圆心$(0,-2)$到直线$y=\sqrt{3}x+2$的距离$d=2$.当$r=d-1=1$时，圆$x^2+(y+2)^2=r^2(r>0)$上到直线$y=\sqrt{3}x+2$的距离为1的点有且仅有一个，当$r=d+1=3$时，圆$x^2+(y+2)^2=r^2(r>0)$上到直线$y=\sqrt{3}x+2$的距离为1的点有且仅有三个，故当$1<r<3$时，圆$x^2+(y+2)^2=r^2(r>0)$上到直线$y=\sqrt{3}x+2$的距离为1的点有且仅有两个.故选B.

【对点训练】

解：(1)由圆C：$x^2+y^2-Dx-Ey-4=0$关于直线$y=x+1$对称，

即圆心$\left(\frac{D}{2},\frac{E}{2}\right)$在直线$y=x+1$上，则$E=D+2$，

所以圆C：$x^2+y^2-Dx-(D+2)y-4=0$.

又因为$(4,2)$在圆上，所以$4^2+2^2-4D-(D+2)\cdot 2-4=0$，解得$D=2$，$E=4$，

所以圆C的标准方程为$(x-1)^2+(y-2)^2=9$.

(2)由$(m+1)x-(2m+1)y-m-2=0$，可得$m(x-2y-1)+(x-y-2)=0$，

由方程组$\begin{cases}x-2y-1=0,\\x-y-2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=3,\\y=1,\end{cases}$即直线$l$过定点$P(3,1)$.

又由(1)知圆心为$C(1,2)$，可得$PC=\sqrt{5}$，因为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AC||BC|\sin\angle ACB$，

所以当$\angle ACB=90°$时，$\triangle ABC$的面积最大.

此时$\triangle ABC$为等腰直角三角形，$\triangle ABC$面积最大值为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}r^2=\frac{9}{2}$，其中$r$为圆$C$的半径，

此时点C到直线l的距离$d=\frac{r}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}<\sqrt{5}=PC$.

所以$\angle ACB$可以取到$90°$.所以$\frac{|m+1-2(2m+1)-m-2|}{\sqrt{(m+1)^2+(2m+1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$，解得$m=-\frac{6}{13}$或$m=0$，

故所求直线l的方程为$x-y-2=0$或$7x-y-20=0$.

类型二

例2 $\left[\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right]$ **解析**：因为$A(-2,3)$关于$y=a$对称的点的坐标为$A'(-2,2a-3)$，$B(0,a)$在直线$y=a$上，所以$A'B$所在直线即为直线l，所以直线l为$y=\frac{a-3}{-2}x+a$，即$(a-3)x+2y-2a=0$.圆C：$(x+3)^2+(y+2)^2=1$，圆心$C(-3,-2)$，半径$r=1$，

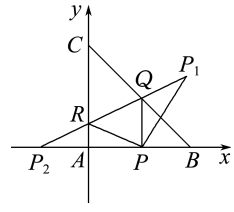
依题意圆心C到直线l的距离$d=\frac{|-3(a-3)-4-2a|}{\sqrt{(a-3)^2+2^2}}\leqslant 1$，

即$(5-5a)^2\leqslant(a-3)^2+2^2$，解得$\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$，

所以$a\in\left[\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right]$.

【对点训练】

1.B **解析**：如图，建立平面直角坐标系，则$A(0,0)$，$B(4,0)$，$C(0,4)$，$\triangle ABC$的重心坐标为$\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$，$BC$的方程为$x+y-4=0$.

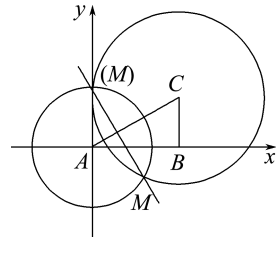


设$P(a,0)$，$0<a<4$.

根据光的反射原理及题意可知，点P关于BC的对称点P_1在QR的反向延长线上，点P关于y轴的对称点P_2在QR的延长线上，即P_1，P_2，Q，R四点共线.由已知可得点$P_1(x_1,y_1)$满足$\begin{cases}\frac{a+x_1}{2}+\frac{0+y_1}{2}=4,\\\frac{y_1-0}{x_1-a}\times(-1)=-1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x_1=4,\\y_1=4-a,\end{cases}$所以$P_1(4,4-a)$.易知$P_2(-a,0)$，因为$P_1$，$P_2$，$Q$，$R$四点共线，所以有直线$QR$的斜率为$k=\frac{4-a-0}{4-(-a)}=\frac{4-a}{4+a}$，所以直线$QR$的方程为$y=\frac{4-a}{4+a}(x+a)$.

由于直线QR过重心$\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$，所以有$\frac{4}{3}=\frac{4-a}{4+a}\left(\frac{4}{3}+a\right)$，整理可得$3a^2-4a=0$，解得$a=\frac{4}{3}$或$a=0$(舍去)，所以直线$QR$的方程为$y=\frac{4-\frac{4}{3}}{4+\frac{4}{3}}\left(x+\frac{4}{3}\right)$，整理可得$3x-6y+4=0$.所以点$R$的坐标为$\left(0,\frac{2}{3}\right)$.联立$QR$与$BC$的方程$\begin{cases}3x-6y+4=0,\\x+y-4=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\frac{20}{9},\\y=\frac{16}{9},\end{cases}$即$Q\left(\frac{20}{9},\frac{16}{9}\right)$，所以$|QR|=\sqrt{\left(\frac{20}{9}-0\right)^2+\left(\frac{16}{9}-\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{10}{9}\sqrt{5}$.

2.$2\sqrt{13}$或$\sqrt{7}$ **解析**：由题意，以A为原点，AB所在直线为x轴建立如图所示的平面直角坐标系，则$A(0,0)$，$B(3\sqrt{3},0)$，$C(3\sqrt{3},3)$.



以A为圆心，5为半径作圆A，以C为圆心，$\sqrt{31}$为半径作圆C，

则圆 A 的方程为 $x^2+y^2=25$，圆 C 的方程为 $(x-3\sqrt{3})^2+(y-3)^2=31$，

即 $x^2+y^2-6\sqrt{3}x-6y+5=0$，所以两圆的公共弦所在直线的方程为 $\sqrt{3}x+y-5=0$.

设 $M(x,y)$，则 $\begin{cases}x^2+y^2=25,\\ \sqrt{3}x+y=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\ y=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\dfrac{5\sqrt{3}}{2},\\ y=-\dfrac{5}{2},\end{cases}$

即 $M(0,5)$ 或 $M\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{2},-\dfrac{5}{2}\right)$，

所以 $|MB|=\sqrt{(0-3\sqrt{3})^2+5^2}=2\sqrt{13}$ 或 $|MB|=\sqrt{\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{2}-3\sqrt{3}\right)^2+\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{7}$.

第三章　圆锥曲线的方程

3.1　椭圆

3.1.1　椭圆及其标准方程

问题式预习

【知识清单】

知识点一

常数(大于 $|F_1F_2|$)　两个定点　两焦点　半焦距

知识点二

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$　$(0,-c),(0,c)$　a^2-b^2

【概念辨析】

1.(1)√　(2)×　(3)×　(4)√

2.B　**解析**：将椭圆方程化为标准方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{\frac{4}{k}}=1$，又其中一个焦点坐标为 $(0,1)$，故 $\dfrac{4}{k}-1=1$，解得 $k=2$.

3.(1)**提示**：点 P 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

(2)**提示**：相同点：它们的形状、大小都相同，都有 $a>b>0$，$a^2=b^2+c^2$；

不同点：两种椭圆的位置不同，它们的焦点坐标也不同.

(3)**提示**：比较含 x^2 项和含 y^2 项的分母，谁的分母大，焦点就在谁对应的坐标轴上.

任务型课堂

任务 1

[探究活动]

例 1　**解**：由已知，得 $a=2\sqrt{3}$，$b=\sqrt{3}$，所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{12-3}=3$，

所以 $|F_1F_2|=2c=6$.

在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由余弦定理，得

$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos 60°$，即 $36=|PF_1|^2+|PF_2|^2-|PF_1|\cdot|PF_2|$.①

由椭圆的定义，得 $|PF_1|+|PF_2|=4\sqrt{3}$，

即 $48=|PF_1|^2+|PF_2|^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|$.②

由②－①，得 $|PF_1|\cdot|PF_2|=4$，

所以 $S_{\triangle F_1PF_2}=\dfrac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\sin 60°=\sqrt{3}$.

[一题多思]

思考 1.提示：可以利用椭圆的定义，结合正弦定理、余弦定理、勾股定理、三角形的面积公式等知识点解决焦点三角形问题.

思考 2.解：由已知，得 $a=2\sqrt{3}$，$b=\sqrt{3}$，所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{12-3}=3$，

从而 $|F_1F_2|=2c=6$.

在 $\triangle F_1PF_2$ 中，因为 $\angle PF_1F_2=90°$，则由勾股定理，可得 $|PF_2|^2=|PF_1|^2+|F_1F_2|^2$，即 $|PF_2|^2=|PF_1|^2+36$.

又由椭圆的定义知，$|PF_1|+|PF_2|=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$，所以 $|PF_2|=4\sqrt{3}-|PF_1|$，

所以 $(4\sqrt{3}-|PF_1|)^2=|PF_1|^2+36$，解得 $|PF_1|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\triangle F_1PF_2$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}|PF_1|\cdot|F_1F_2|=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times6=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

[应用迁移]

1.B　**解析**：圆 C：$x^2+(y-1)^2=32$ 的圆心 $C(0,1)$，半径为 $r=4\sqrt{2}$，

由题意可知 $|QM|=|QA|$，又 M 是圆上的点，则 $|CM|=4\sqrt{2}$，

且 $|CM|=|CQ|+|QM|$，则 $|QC|+|QA|=4\sqrt{2}>2$.

由椭圆的定义可知，点 Q 的轨迹是以 C，A 为焦点的椭圆，其中 $a=2\sqrt{2}$，$c=1$，$b=\sqrt{7}$，

所以点 Q 的轨迹方程为 $\dfrac{y^2}{8}+\dfrac{x^2}{7}=1$.

2.B　**解析**：(方法一)因为 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，所以 $\angle F_1PF_2=90°$，从而 $S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\cdot\tan\dfrac{\angle F_1PF_2}{2}=1=\dfrac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|$，所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|=2$.

(方法二)因为 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，所以 $\angle F_1PF_2=90°$.

由椭圆方程可知，$c^2=5-1=4$，故 $c=2$，

所以 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2=4^2=16$.

又 $|PF_1|+|PF_2|=2a=2\sqrt{5}$，平方得

$|PF_1|^2+|PF_2|^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|=16+2|PF_1|\cdot|PF_2|=20$，所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|=2$.

任务 2

[探究活动]

例 2　**解**：(1)由题意，得 $c=4$，$a=5$，故 $b=3$.

又焦点在 x 轴上，所以椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

(2)由题意，得 $c=2$，且焦点在 y 轴上，所以设椭圆方程为 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{a^2-4}=1$.将 $\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right)$ 代入方程，得 $a=\sqrt{10}$，故椭圆的标准方程为 $\dfrac{y^2}{10}+\dfrac{x^2}{6}=1$.

[应用迁移]

1.A　**解析**：由方程 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 可知，其焦点的坐标为

$(-\sqrt{5},0)$和$(\sqrt{5},0)$，即$c=\sqrt{5}$.设所求椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，因为椭圆过点$(-3,2)$，代入方程得$\frac{9}{a^2}+\frac{4}{a^2-5}=1$，解得$a^2=15(a^2=3$舍去$)$.故所求椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$.

2.解：(1)由题意知$c=2$，且焦点坐标分别为$F_1(0,-2)$，$F_2(0,2)$.

由$|MF_1|+|MF_2|=2a$，得$2a=\sqrt{(3-0)^2+(2+2)^2}+\sqrt{(3-0)^2+(2-2)^2}=8$，

可得$a=4$，所以$b^2=a^2-c^2=16-4=12$.

又焦点在y轴上，所以所求椭圆的标准方程为$\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{12}=1$.

(2)椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$的焦点坐标为$(\pm1,0)$，则所求椭圆的焦距为$2c=2$.

因为所求椭圆过点$\left(1,\frac{3}{2}\right)$，所以$2a=\sqrt{(1+1)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{(1-1)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=4$，

所以$a=2$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(3)设所求的椭圆方程为$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1(m>0,n>0,m\neq n)$.

把$A\left(2,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$B\left(-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$两点坐标代入，得$\begin{cases}\frac{4}{m}+\frac{1}{2n}=1,\\ \frac{2}{m}+\frac{3}{4n}=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=8,\\ n=1,\end{cases}$

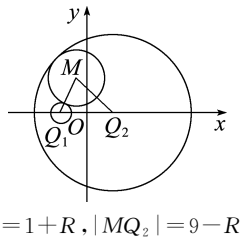
所以所求椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{8}+y^2=1$.

任务 3

［探究活动］

例 3 **解**：(1)由已知，得两个定圆的圆心和半径分别为$Q_1(-3,0)$，$R_1=1$；$Q_2(3,0)$，$R_2=9$.

设动圆圆心为$M(x,y)$，半径为R，如图所示.



由题意，得$|MQ_1|=1+R$，$|MQ_2|=9-R$，

所以$|MQ_1|+|MQ_2|=10>|Q_1Q_2|=6$.

由椭圆的定义知，点M在以Q_1，Q_2为焦点的椭圆上，且$a=5$，$c=3$，

所以$b^2=a^2-c^2=25-9=16$，

故动圆圆心的轨迹方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

(2)设点M的坐标为$(x_0,y_0)(y_0\neq0)$，点Q的坐标为(x,y)，则点N的坐标为$(0,y_0)$.因为$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$，所以$(x,y)=(x_0,2y_0)$，即$x_0=x$，$y_0=\frac{y}{2}$.又因为点$M$在圆$C$上，所以$x_0^2+y_0^2=4$，所以$x^2+\frac{y^2}{4}=4$.由$y_0\neq0$，得$y\neq0$，

所以动点Q的轨迹方程为$\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1(y\neq0)$.

［应用迁移］

1.解：由圆P：$(x+1)^2+y^2=36$，可得圆心$P(-1,0)$，半径为$r=6$.

由$Q(1,0)$，可得$|PQ|=2$.

因为线段MQ的垂直平分线交线段PM于点N，

所以$|NM|=|NQ|$，则$|NP|+|NQ|=|NP|+|NM|=|PM|=6>|PQ|=2$.

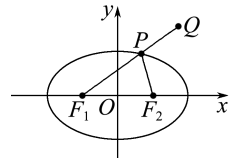
结合椭圆的定义，可得点N的轨迹是以P，Q为焦点的椭圆，

其中$2a=6$，$2c=2$，可得$a=3$，$c=1$，则$b^2=a^2-c^2=8$，

所以点N的轨迹方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

2.解：由题意知，$a=2$，$b=\sqrt{3}$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-3}=1$.

由题图，可得$|PF_1|+|PF_2|=4$.



又$|PQ|=|PF_2|$，所以$|PF_1|+|PQ|=4$，

即$|QF_1|=4$，

所以动点Q的轨迹是以$F_1(-1,0)$为圆心，4为半径的圆.

由题意知，$F_1(-1,0)$，

所以动点Q的轨迹方程是$(x+1)^2+y^2=16$.

3.1.2 椭圆的简单几何性质

第 1 课时 椭圆的简单几何性质

问题式预习

【知识清单】

知识点

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ $-a\leqslant x\leqslant a$，$-b\leqslant y\leqslant b$ $-b\leqslant x\leqslant b$，$-a\leqslant y\leqslant a$ $A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，$B_1(0,-b)$，$B_2(0,b)$ $A_1(0,-a)$，$A_2(0,a)$，$B_1(-b,0)$，$B_2(b,0)$ $2b$ $2a$ $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$ $F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$ $2c=2\sqrt{a^2-b^2}$ 坐标轴 原点 $\frac{c}{a}$

【概念辨析】

1.(1)× (2)× (3)√

2.B **解析**：将椭圆方程化为标准方程为$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$，则$a=5$，$b=3$，$c=4$，故长轴长、短轴长、离心率依次是10，6，$\frac{4}{5}$.

3.(1)**提示**：椭圆的焦点一定在它的长轴上.

(2)**提示**：椭圆上到其中心的距离最小的点是短轴的两个端点，到其中心的距离最大的点是长轴的两个端点.

(3)**提示**：椭圆上到焦点的距离最大和最小的点分别是长轴的两个端点，故距离的最大值为 $a+c$，最小值为 $a-c$.

任务型课堂

任务 1

1.CD　**解析**：将椭圆方程 $16x^2+4y^2=1$ 化为标准方程为 $\frac{y^2}{\frac{1}{4}}+\frac{x^2}{\frac{1}{16}}=1$，可得 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{4}$，$c=\frac{\sqrt{3}}{4}$，所以长轴长为 $2a=1$，短轴长为 $2b=\frac{1}{2}$，焦距为 $2c=\frac{\sqrt{3}}{2}$，焦点坐标为 $\left(0,\pm\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.故选 CD.

2.B　**解析**：由题意知，椭圆 C_1 的焦点在 x 轴上，椭圆 C_2 的焦点在 y 轴上，对于椭圆 C_1，焦距为 $2\times\sqrt{25-9}=8$，对于椭圆 C_2，焦距为 $2\sqrt{(25-k)-(9-k)}=8$.故选 B.

3.解：将方程变形为 $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$，得 $a=5$，$b=4$，所以 $c=3$，故椭圆的长轴长和短轴长分别为 $2a=10$ 和 $2b=8$，焦点坐标为 $(0,-3)$，$(0,3)$，顶点坐标为 $(0,-5)$，$(0,5)$，$(-4,0)$，$(4,0)$.

任务 2

[探究活动]

例 1　(1)$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$　**解析**：由题意，得 $\begin{cases}2b=8,\\ \frac{c}{a}=\frac{3}{5},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$　解得 $\begin{cases}a=5,\\ b=4,\\ c=3.\end{cases}$ 又椭圆的焦点在 x 轴上，故此椭圆的标准方程是 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

(2)$\frac{x^2}{3}+y^2=1$　**解析**：由题意，得椭圆 C 的半焦距 $c=\sqrt{2}$，且 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $a=\sqrt{3}$.

又 $b^2=a^2-c^2=1$，所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

[应用迁移]

1.D　**解析**：设椭圆的标准方程为 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，焦距为 $2c$，

由 $2c=2\sqrt{2}$，得 $c=\sqrt{2}$.由 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{3}$，得 $a=3$，

故 $b^2=a^2-c^2=7$，

所以该椭圆的方程为 $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{9}=1$.

2.$\frac{2y^2}{5}+\frac{4x^2}{5}=1$　**解析**：在椭圆 C_1 中，$a_1=\sqrt{2}$，$b_1=1$，$c_1=\sqrt{2-1}=1$，故椭圆 C_1 的离心率为 $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

对于 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，令 $x=1$ 得 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故 C_1，C_2 在第一象限内公共点的坐标为 $\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

设 C_2：$\frac{y^2}{a_2^2}+\frac{x^2}{b_2^2}=1(a_2>b_2>0)$，将 $\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 代入可得 $\frac{1}{2a_2^2}+\frac{1}{b_2^2}=1$，

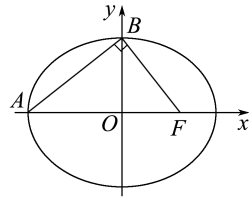
又 $\frac{\sqrt{a_2^2-b_2^2}}{a_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，联立以上两式解得 $b_2^2=\frac{5}{4}$，$a_2^2=\frac{5}{2}$.

故椭圆 C_2 的方程为 $\frac{2y^2}{5}+\frac{4x^2}{5}=1$.

任务 3

[探究活动]

例 2　$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$　**解析**：如图所示，由题意知 $|AO|=a$，$|OF|=c$，$|BF|=a$，$|AB|=\sqrt{a^2+b^2}$，$a^2=b^2+c^2$，



所以在 Rt$\triangle ABF$ 中，$a^2+b^2+a^2=(a+c)^2=a^2+2ac+c^2$，即 $a^2-c^2-ac=0$，两边同时除以 a^2，得 $e^2+e-1=0$，解得 $e=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $e=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$(舍去).

[一题多思]

思考 1.解：因为点 P 为椭圆上的动点，

所以设 $P(a\cos\theta,b\sin\theta)$.

又 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，所以 $k_1k_2=\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta+a}\cdot\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta-a}=\frac{b^2\sin^2\theta}{a^2(\cos^2\theta-1)}=-\frac{b^2}{a^2}=-\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)=e^2-1=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2-1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

思考 2.解：在$\triangle ABF$ 中，$|AB|^2=a^2+b^2$，$|BF|^2=a^2$，$|AF|^2=(a+c)^2$.

因为$\angle ABF$ 为锐角，所以 $a^2+b^2+a^2>(a+c)^2$，即 $a^2-ac-c^2>0$，所以 $1-e-e^2>0$，解得 $0<e<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

[应用迁移]

1.A　**解析**：由 $e_2=\sqrt{3}e_1$，得 $e_2^2=3e_1^2$，因此 $\frac{4-1}{4}=3\times\frac{a^2-1}{a^2}$.又 $a>1$，所以 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2.A　**解析**：如图，设 F_2 是椭圆 C 的右焦点，连接 MF_2，NF_2，

由对称性可知 $|OM|=|ON|$，$|OF|=|OF_2|$，

则四边形 FMF_2N 为平行四边形，所以 $|MF_2|=|FN|$，

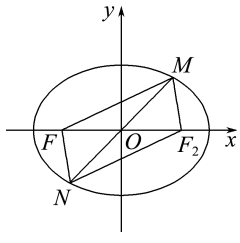
$\angle FMF_2=\frac{\pi}{3}$，即 $|FM|=3|MF_2|$.

因为$|FM|+|MF_2|=4|MF_2|=2a$，所以$|MF_2|=\frac{1}{2}a$，$|FM|=\frac{3}{2}a$，

在$\triangle FMF_2$中，由余弦定理可得$|FF_2|^2=|MF_2|^2+|FM|^2-2|MF_2|\cdot|FM|\cdot\cos\angle FMF_2$，

即$4c^2=\frac{1}{4}a^2+\frac{9}{4}a^2-2\times\frac{1}{2}a\times\frac{3}{2}a\times\frac{1}{2}$，解得$\frac{c^2}{a^2}=\frac{7}{16}$，

所以椭圆C的离心率为$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.



第2课时　椭圆几何性质的应用

问题式预习

【知识清单】

知识点一

$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$　$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<1$　$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}>1$

知识点二

2　>　1　=　0　<

【概念辨析】

1.(1)√　(2)×　(3)√　(4)√

2.A　**解析**：由$x+y-3=0$及$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，消去y，得$5x^2-24x+32=0$.

因为$\Delta=(-24)^2-4\times5\times32=-64<0$，所以直线与椭圆没有交点，即直线与椭圆相离.

3.(1)**提示**：直线$y=k(x-1)$过定点$(1,0)$，而该点在椭圆内部，所以直线和椭圆相交.

(2)**提示**：对称.

任务型课堂

任务1

1.C　**解析**：由$\begin{cases}y=kx+2,\\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$得$(3k^2+2)x^2+12kx+6=0$.

由题意得$\Delta=144k^2-24(3k^2+2)=0$，解得$k=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$.

2.解：(1)由题意椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的短轴长为$2\sqrt{2}$，离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

可知$b=\sqrt{2}$，$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2}$，解得$a=2$，$c=\sqrt{2}$，

所以所求椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=2x+m,\end{cases}$消去$y$，得$9x^2+8mx+2m^2-4=0$，

$\Delta=64m^2-36(2m^2-4)=-8m^2+144$.

当$\Delta=-8m^2+144=0$，即$m=\pm3\sqrt{2}$时，直线l与椭圆C相切，只有一个公共点；

当$\Delta=-8m^2+144>0$，即$-3\sqrt{2}<m<3\sqrt{2}$时，直线l与椭圆C相交，有两个公共点；

当$\Delta=-8m^2+144<0$，即$m<-3\sqrt{2}$或$m>3\sqrt{2}$时，直线l与椭圆C相离，无公共点.

综上所述，当$m=\pm3\sqrt{2}$时，直线l与椭圆C只有一个公共点；

当$-3\sqrt{2}<m<3\sqrt{2}$时，直线l与椭圆C有两个公共点；

当$m<-3\sqrt{2}$或$m>3\sqrt{2}$时，直线l与椭圆C无公共点.

任务2

[探究活动]

例1　**解**：(1)(方法一)易知直线的斜率存在，所求直线方程为$y-1=k(x-2)$，代入椭圆方程并整理，得$(4k^2+1)\cdot x^2-8(2k^2-k)x+4(2k-1)^2-16=0$，且$\Delta=64(2k^2-k)^2-4(4k^2+1)[4(2k-1)^2-16]>0$.

设直线与椭圆的交点为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则x_1，x_2是方程的两个根，

于是有$x_1+x_2=\frac{8(2k^2-k)}{4k^2+1}$.

又因为M为AB的中点，

所以$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4(2k^2-k)}{4k^2+1}=2$，解得$k=-\frac{1}{2}$，满足$\Delta>0$.

故此弦所在直线的方程为$x+2y-4=0$.

(方法二)设直线与椭圆的交点为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

又$M(2,1)$为AB的中点，所以$x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=2$.

又因为A，B两点在椭圆上，

则$x_1^2+4y_1^2=16$，$x_2^2+4y_2^2=16$，

两式相减得$(x_1^2-x_2^2)+4(y_1^2-y_2^2)=0$.

于是$(x_1+x_2)(x_1-x_2)+4(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$.

所以$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{x_1+x_2}{4(y_1+y_2)}=-\frac{1}{2}$，

即$k_{AB}=-\frac{1}{2}$.

又直线AB过点$M(2,1)$，

故此弦所在直线的方程为$x+2y-4=0$.

(2)设此弦的两端点分别为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.由(1)知直线AB的方程为$x+2y-4=0$，

由$\begin{cases}x+2y-4=0,\\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$

得$x^2-4x=0$，$\Delta=16>0$.

所以$x_1+x_2=4$，$x_1x_2=0$.

所以$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}\times\sqrt{4^2-4\times0}=2\sqrt{5}$，

故此弦的长为$2\sqrt{5}$.

[一题多思]

思考 1.解：将 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 代入椭圆方程，得 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{m}+\frac{y_1^2}{n}=1,\\ \frac{x_2^2}{m}+\frac{y_2^2}{n}=1,\end{cases}$ 两式作差并整理得 $\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{m}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{n}=0$. 已知弦 AB 的中点为 $M(x_0,y_0)$，则 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}$.

因为 $x_1\neq x_2$，所以 $\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}=-\frac{n}{m}$，

即 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_0}{x_0}=-\frac{n}{m}$，所以 $k_{AB}\cdot k_{OM}=-\frac{n}{m}$.

思考 2.解：设所求直线与椭圆的一个交点为 $A(x,y)$，另一个交点为 B.

由于弦 AB 的中点为 $M(2,1)$，所以 $B(4-x,2-y)$.

因为 A，B 两点都在椭圆上，

所以 $\begin{cases}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1,①\\ \frac{(4-x)^2}{16}+\frac{(2-y)^2}{4}=1.②\end{cases}$

①－②，化简，得 $x+2y-4=0$.

显然点 A 的坐标满足这个方程，代入验证可知，点 B 的坐标也满足这个方程，而过点 A，B 的直线只有一条，故所求直线的方程为 $x+2y-4=0$.

[应用迁移]

1. $2\sqrt{5}$　**解析**：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

因为 $P(2,1)$ 为 AB 的中点，

所以 $x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=2$.

又 A，B 两点在椭圆上，

则 $x_1^2+4y_1^2=16$，$x_2^2+4y_2^2=16$，

两式相减，得 $(x_1^2-x_2^2)+4(y_1^2-y_2^2)=0$，

所以 $(x_1+x_2)(x_1-x_2)+4(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$，

所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{x_1+x_2}{4(y_1+y_2)}=-\frac{4}{4\times2}=-\frac{1}{2}$，

所以 $k_{AB}=-\frac{1}{2}$.

所以直线 AB 的方程为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$，

即 $y=-\frac{1}{2}x+2$. 将 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 代入椭圆方程，可得 $x^2-4x=0$，

可得 $x=0$ 或 $x=4$. 不妨设 $A(0,2)$，$B(4,0)$，

则 $|AB|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

2.解：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，代入椭圆方程并作差，得 $a(x_1+x_2)(x_1-x_2)+b(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$. 而 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k_{AB}=-1$，$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=k_{OC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，结合上式，可得 $b=\sqrt{2}a$.

因为 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_2-x_1|=\sqrt{2}\,|x_2-x_1|=2\sqrt{2}$，所以 $|x_2-x_1|=2$.

又由 $\begin{cases}ax^2+by^2=1,\\ x+y-1=0,\end{cases}$ 得 $(a+b)x^2-2bx+b-1=0$，$\Delta=4b^2-4(a+b)(b-1)>0$，所以 $x_1+x_2=\frac{2b}{a+b}$，$x_1x_2=\frac{b-1}{a+b}$，

故 $|x_2-x_1|^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\left(\frac{2b}{a+b}\right)^2-4\cdot\frac{b-1}{a+b}=4$.

将 $b=\sqrt{2}a$ 代入，得 $a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{\sqrt{2}}{3}$，所以椭圆的方程是 $\frac{x^2}{3}+\frac{\sqrt{2}y^2}{3}=1$.

任务 3

[探究活动]

例 2　解：显然直线 $x=0$ 不满足题设条件，可设直线 l：$y=kx+2$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}y=kx+2,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 y，整理，得 $\left(k^2+\frac{1}{4}\right)x^2+4kx+3=0$.

由 $\Delta=(4k)^2-4\left(k^2+\frac{1}{4}\right)\times3=4k^2-3>0$，得 $k>\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $k<-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $x_1+x_2=-\frac{4k}{k^2+\frac{1}{4}}$，$x_1\cdot x_2=\frac{3}{k^2+\frac{1}{4}}$.

又 $0°<\angle AOB<90°$，所以 $\cos\angle AOB>0$，

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2>0$.

又 $y_1y_2=(kx_1+2)(kx_2+2)=k^2x_1x_2+2k(x_1+x_2)+4=\frac{3k^2}{k^2+\frac{1}{4}}+\frac{-8k^2}{k^2+\frac{1}{4}}+4=\frac{-k^2+1}{k^2+\frac{1}{4}}$，

故 $\frac{3}{k^2+\frac{1}{4}}+\frac{-k^2+1}{k^2+\frac{1}{4}}>0$，即 $k^2<4$，所以 $-2<k<2$.

故 $-2<k<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{2}<k<2$.

[应用迁移]

解：(1) 由已知得 $c=2$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $a=2\sqrt{2}$，

故 $b=\sqrt{a^2-c^2}=2$，

所以椭圆 G 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2) 设直线 l 的方程为 $y=x+m$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，AB 的中点 $E(x_0,y_0)$，

联立直线 l 与椭圆 G，消去 y，得 $3x^2+4mx+2m^2-8=0$①.

由韦达定理，得 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{2m}{3}$，$y_0=x_0+m=\frac{m}{3}$.

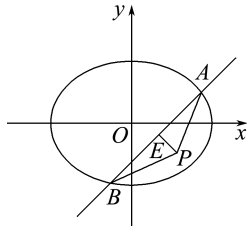
如图，由题意，得 $PE\perp AB$，因此 PE 的斜率为 $k=\frac{-\frac{4}{3}-\frac{m}{3}}{1+\frac{2m}{3}}=-1$，解得 $m=1$，

此时①式为 $3x^2+4x-6=0$，$|AB|=\sqrt{1+1}\times\frac{\sqrt{16+72}}{3}$

$=\frac{4\sqrt{11}}{3}$.

点 $P\left(1,-\frac{4}{3}\right)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{\left|1+\frac{4}{3}+1\right|}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{3}$，

所以△PAB 的面积 $S=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{10\sqrt{22}}{9}$.



任务 4

［探究活动］

例 3 **解**：(1)因为 $AB\parallel l$，且边 AB 过点 $O(0,0)$，

所以 AB 所在直线的方程为 $y=x$.

设 A，B 两点坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，

由 $\begin{cases}x^2+3y^2=4,\\y=x,\end{cases}$ 得 $x=\pm1$.

所以 $|AB|=\sqrt{2}|x_1-x_2|=2\sqrt{2}$.

又因为边 AB 上的高 h 等于原点到直线 l 的距离，

所以 $h=\frac{|0-0+2|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot h=2$.

(2)设与椭圆相切并与 l 平行的直线方程为 $y=\frac{3}{2}x+m$，

代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{7}=1$，

整理，得 $4x^2+3mx+m^2-7=0$.

$\Delta=9m^2-16(m^2-7)=0$，所以 $m^2=16$，所以 $m=\pm4$，

故切线方程为 $y=\frac{3}{2}x+4$ 或 $y=\frac{3}{2}x-4$.

显然直线 $y=\frac{3}{2}x-4$ 距直线 l 最近，此时点 P 的坐标为

$\left(\frac{3}{2},-\frac{7}{4}\right)$，所以最短距离 $d=\frac{\left|\frac{9}{2}+\frac{7}{2}-16\right|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{8}{\sqrt{13}}$

$=\frac{8\sqrt{13}}{13}$.

［应用迁移］

1.C **解析**：由 $\begin{cases}y=x+m,\\\frac{x^2}{3}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 y，得 $4x^2+6mx+3m^2-3=0$.

因为直线与椭圆交于 A，B 两点，则 $\Delta=36m^2-4\times4(3m^2-3)>0$，解得 $-2<m<2$.

设 F_1 到直线 AB 的距离为 d_1，F_2 到直线 AB 的距离为 d_2，易知 $F_1(-\sqrt{2},0)$，$F_2(\sqrt{2},0)$，

则 $d_1=\frac{|-\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}}$，$d_2=\frac{|\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}}$.

由题意可知

$\frac{S_{\triangle F_1AB}}{S_{\triangle F_2AB}}=\frac{\frac{|-\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}}}{\frac{|\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}}}=\frac{|-\sqrt{2}+m|}{|\sqrt{2}+m|}=2$，解得 $m=-\frac{\sqrt{2}}{3}$

或 $m=-3\sqrt{2}$(舍).

故选 C.

2.解：(1)由题意得 $\begin{cases}b=3,\\\frac{9}{a^2}+\frac{\frac{9}{4}}{b^2}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=3,\\a=2\sqrt{3},\end{cases}$

所以 $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{9}{12}}=\frac{1}{2}$.

(2)由(1)，可得椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$.

因为 $k_{AP}=\frac{3-\frac{3}{2}}{0-3}=-\frac{1}{2}$，所以直线 AP 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x+3$，即 $x+2y-6=0$，

且 $|AP|=\sqrt{(0-3)^2+\left(3-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

设点 B 到直线 AP 的距离为 d，则 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\cdot|AP|\cdot d$，

即 $\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{5}}{2}d=9$，解得 $d=\frac{12\sqrt{5}}{5}$，

所以将直线 AP 沿着与 AP 垂直的方向平移 $\frac{12\sqrt{5}}{5}$ 个单位长度，

此时该平行线与椭圆的交点即为点 B.

设该平行线的方程为 $x+2y+D=0$，

则 $\frac{|D+6|}{\sqrt{5}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$，解得 $D=6$ 或 $D=-18$.

当 $D=6$ 时，由 $\begin{cases}\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1,\\x+2y+6=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=0,\\y=-3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-3,\\y=-\frac{3}{2},\end{cases}$

即 $B(0,-3)$ 或 $B\left(-3,-\frac{3}{2}\right)$.

当 $B(0,-3)$ 时，$k_l=\frac{3}{2}$，直线 l 的方程为 $y=\frac{3}{2}x-3$，即 $3x-2y-6=0$；

当 $B\left(-3,-\frac{3}{2}\right)$ 时，$k_l=\frac{1}{2}$，直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x$，即 $x-2y=0$.

当 $D=-18$ 时，由 $\begin{cases}\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1,\\x+2y-18=0,\end{cases}$ 得 $2y^2-27y+117=0$，

$\Delta=27^2-4\times2\times117=-207<0$，此时该直线与椭圆无交点.

综上所述，直线 l 的方程为 $3x-2y-6=0$ 或 $x-2y=0$.

3.2 双曲线

3.2.1 双曲线及其标准方程

问题式预习

【知识清单】

知识点一

差的绝对值　两个定点　两焦点间的距离

知识点二

$(-c,0),(c,0)$　$(0,-c),(0,c)$　a^2+b^2

【概念辨析】

1.(1)×　(2)×　(3)×　(4)×

2.A　**解析**：因为已知方程表示双曲线，所以$(2+m)\cdot(2-m)>0$，所以$-2<m<2$.故 m 的取值范围是$(-2,2)$.

3.(1)**提示**：那么动点的轨迹为双曲线的一支.

(2)**提示**：相同点：它们的形状、大小都相同，都有 $a>0,b>0,a^2+b^2=c^2$；

不同点：两种双曲线的位置不同，它们的焦点坐标也不同.

(3)**提示**：若含 x^2 项的系数为正，则焦点在 x 轴上；若含 y^2 项的系数为正，则焦点在 y 轴上.

任务型课堂

任务 1

[探究活动]

例 1　$2\sqrt{3}$　**解析**：将 $x^2-y^2=2$ 化为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$，则 $a=b=\sqrt{2}$，$c=2$.不妨设点 P 在双曲线 C 的右支上，

则 $|PF_1|-|PF_2|=2a=2\sqrt{2}$.由题意知 $|F_1F_2|=2c=4$.

在$\triangle F_1PF_2$ 中，由余弦定理的推论，

得 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{1}{2}$，

所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|=8$，

所以 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$.

[一题多思]

思考 1.解：在$\triangle PF_1F_2$ 中，因为$\angle F_1PF_2=\theta$，

所以由余弦定理，可得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\theta=|F_1F_2|^2=4c^2$.①

由双曲线的定义，可得$||PF_1|-|PF_2||=2a$，两边平方，可得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|=4a^2$.②

由①－②，可得 $2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot(1-\cos\theta)=4c^2-4a^2$，

则 $|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{2b^2}{1-\cos\theta}$，

故 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\cdot\sin\theta=b^2\cdot\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=b^2\cdot\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$.

思考 2.解：由题易知 $|PF_1|>|PF_2|$，

则 $\begin{cases}|PF_1|-|PF_2|=2\sqrt{2},\\ |PF_1|=(2+\sqrt{3})|PF_2|,\end{cases}$ 解得 $|PF_1|=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，

$|PF_2|=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

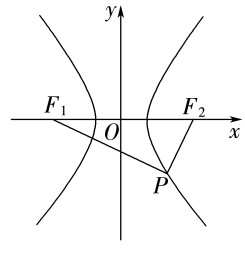
在$\triangle PF_1F_2$ 中，$|PF_1|=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$|PF_2|=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，$|F_1F_2|=4$，则 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$，

所以$\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形，且$\angle F_1PF_2=90^\circ$，所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|=2$.

[应用迁移]

1.C　**解析**：如图，由题意可知，点 P 必落在第四象限，$\angle F_1PF_2=90^\circ$.

设 $|PF_2|=m$，$\angle PF_2F_1=\theta_1$，$\angle PF_1F_2=\theta_2$，由 $k_{PF_2}=\tan\theta_1=2$，所以 $\sin\theta_1=\frac{2}{\sqrt{5}}$.



因为$\angle F_1PF_2=90^\circ$，所以 $k_{PF_1}\cdot k_{PF_2}=-1$，则 $k_{PF_1}=-\frac{1}{2}$，即 $\tan\theta_2=\frac{1}{2}$，$\sin\theta_2=\frac{1}{\sqrt{5}}$.由正弦定理可得，$|PF_1|:|PF_2|:|F_1F_2|=\sin\theta_1:\sin\theta_2:\sin 90^\circ=2:1:\sqrt{5}$，

则由 $|PF_2|=m$，得 $|PF_1|=2m$，$|F_1F_2|=2c=\sqrt{5}m$.

由 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot m=8$，得 $m=2\sqrt{2}$，

则 $|PF_2|=2\sqrt{2}$，$|PF_1|=4\sqrt{2}$，$|F_1F_2|=2c=2\sqrt{10}$，$c=\sqrt{10}$.

由双曲线的定义可得，$|PF_1|-|PF_2|=2a=2\sqrt{2}$，所以 $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{c^2-a^2}=2\sqrt{2}$，

所以双曲线的方程为$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{8}=1$.故选 C.

2.16 **解析**:由双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的实轴长为 4,得 $2a=4$,所以$|MF_1|-|MF_2|=2a=4$.

又$|MF_2|=4$,所以$|MF_1|=8$.

因为$|NF_1|-|NF_2|=4$,所以$|NF_1|=|NF_2|+4$.

又$|MN|=|MF_2|+|NF_2|=|NF_2|+4$,所以$|MN|=|NF_1|$.

又$\angle F_1MF_2=\frac{\pi}{4}$,所以$\triangle F_1MN$ 为等腰直角三角形.

由$|MF_1|=8$,得$|MN|=|NF_1|=4\sqrt{2}$,

所以$\triangle F_1MN$ 的面积为$\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times4\sqrt{2}=16$.

任务 2

[探究活动]

例 2 **解**:(1)由双曲线的焦点在 x 轴上,$c=5$,$b=3$,得 $a^2=c^2-b^2=16$,

所以所求双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

(2)由双曲线的焦点在 y 轴上,设双曲线的标准方程为$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,

由 $a=2\sqrt{5}$,且点 $A(2,-5)$在双曲线上,得$\begin{cases}a=2\sqrt{5},\\ \frac{25}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=20,\\ b^2=16,\end{cases}$

所以所求双曲线的标准方程为$\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{16}=1$.

(3)设所求双曲线方程为 $Ax^2+By^2=1(AB<0)$,由点 $P\left(3,\frac{15}{4}\right)$,$Q\left(-\frac{16}{3},5\right)$在双曲线上,

得$\begin{cases}9A+\frac{225}{16}B=1,\\ \frac{256}{9}A+25B=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}A=-\frac{1}{16},\\ B=\frac{1}{9},\end{cases}$

所以所求双曲线的标准方程为$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$.

[应用迁移]

解:(1)当焦点在 x 轴上时,

设所求双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$.

把点 A 的坐标代入,得$b^2=-\frac{16}{15}\times\frac{160}{9}<0$,不符合题意;

当焦点在 y 轴上时,

设所求双曲线的标准方程为$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{b^2}=1(b>0)$.

把点 A 的坐标代入,得 $b^2=9$,

故所求双曲线的标准方程为$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$.

(2)设双曲线的方程为 $mx^2+ny^2=1(mn<0)$.

因为双曲线经过点$(3,0)$,$(-6,-3)$,

所以$\begin{cases}9m+0=1,\\ 36m+9n=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=\frac{1}{9},\\ n=-\frac{1}{3},\end{cases}$

故所求双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$.

(3)因为所求双曲线与双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$有相同的焦点,

所以可设所求双曲线的方程为$\frac{x^2}{16-\lambda}-\frac{y^2}{4+\lambda}=1(-4<\lambda<16)$.

因为双曲线过点$(3\sqrt{2},2)$,所以$\frac{18}{16-\lambda}-\frac{4}{4+\lambda}=1$,

解得 $\lambda=4$ 或 $\lambda=-14$(舍去).

故所求双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$.

任务 3

[探究活动]

例 3 **解**:以 AB 所在的直线为 x 轴,AB 的中点为坐标原点建立平面直角坐标系(图略).根据题意,得 $A(-2,0)$,$B(2,0)$,所以 $C(3,\sqrt{3})$,所以$|AC|=\sqrt{(3+2)^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$.

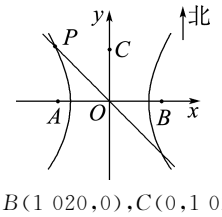
因为$|MA|-|MB|=2<|AB|$,所以点 M 的轨迹是双曲线$x^2-\frac{y^2}{3}=1$的右支.

由题意可知,总费用为$a|MB|+a|MC|=a(|MB|+|MC|)$.

因为$|MB|+|MC|=|MA|-2+|MC|\geqslant|AC|-2=2\sqrt{7}-2$,当 M,A,C 三点共线时,等号成立,所以总费用最低为$(2\sqrt{7}-2)a$ 万元.

[应用迁移]

解:如图,以指挥中心为坐标原点,正东、正北方向分别为 x 轴、y 轴的正方向建立平面直角坐标系,



则 $A(-1\,020,0)$,$B(1\,020,0)$,$C(0,1\,020)$.

设 $P(x,y)$ 为袭击位置,则$|PB|-|PA|=340\times4<|AB|$.

由双曲线的定义知,点 P 在以 A,B 为焦点的双曲线的左支上,且 $a=680$,$c=1\,020$,所以 $b^2=1\,020^2-680^2=5\times340^2$,

所以该双曲线的方程为$\frac{x^2}{680^2}-\frac{y^2}{5\times340^2}=1(x\leqslant-680)$.①

又$|PA|=|PC|$,所以点 P 在直线 $y=-x$ 上.

把 $y=-x$ 代入①式,得 $x=-680\sqrt{5}$,

所以 $P(-680\sqrt{5},680\sqrt{5})$,$|OP|=680\sqrt{10}$.

故该枚炮弹的袭击位置在指挥中心的北偏西 45°方向,距指挥中心 $680\sqrt{10}$ m 处.

3.2.2　双曲线的简单几何性质

第 1 课时　双曲线的简单几何性质

问题式预习

【知识清单】

知识点一

$F_1(-c,0),F_2(c,0)$　$F_1(0,-c),F_2(0,c)$　$2c$　$x\leqslant -a$　$x\geqslant a$　$y\leqslant -a$　$y\geqslant a$　坐标轴　原点　$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$　$A_1(0,-a),A_2(0,a)$　A_1A_2　$2a$　B_1B_2　$2b$　a　b　$(1,+\infty)$

知识点二

(1)对称中心

(2)实轴和虚轴等长　$\sqrt{2}$

【概念辨析】

1.(1)√　(2)√　(3)√　(4)√

2.ABD　**解析**：将双曲线方程 $x^2-8y^2=32$ 化为标准方程为 $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{4}=1$，可得 $a=4\sqrt{2}$，$b=2$，$c=6$，

所以双曲线的实轴长为 $8\sqrt{2}$，虚轴长为 4，焦距为 12，离心率为 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

3.(1)**提示**：不一定.

(2)**提示**：$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}=\sqrt{\frac{c^2-a^2}{a^2}}=\sqrt{e^2-1}$.

(3)**提示**：双曲线的离心率刻画了双曲线的“张口”大小，e 越大，张口越大.

任务型课堂

任务 1

1.BC　**解析**：因为双曲线方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$，所以 $a=1$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3}$，所以该双曲线的焦点坐标为 $(\pm\sqrt{3},0)$，故 A 错误；渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$，故 B 正确；离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$，故 C 正确；实轴长 $2a=2$，故 D 错误.

2.B　**解析**：对于椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$，$a=5$，$b=3$，$c=4$，所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$，焦距 $2c=8$，焦点为 $(-4,0),(4,0)$，顶点为 $(-5,0),(5,0),(0,3),(0,-3)$.

双曲线 $\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{4}=1$，$a=2\sqrt{3}$，$b=2$，$c=4$，则离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，焦距 $2c=8$，焦点为 $(0,4),(0,-4)$，顶点为 $(0,2\sqrt{3}),(0,-2\sqrt{3})$.

综上可知，椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 与双曲线 $\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{4}=1$ 有相同的焦距.故选 B.

任务 2

[探究活动]

例 1　**解**：(1)设所求双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$.

因为 $e=\frac{5}{3}$，所以 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=1+\frac{b^2}{a^2}=\frac{25}{9}$，所以 $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$.

又由题意，得 $\frac{9}{a^2}-\frac{12}{b^2}=1$，解得 $\begin{cases}a^2=\frac{9}{4},\\ b^2=4,\end{cases}$

故所求双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{\frac{9}{4}}-\frac{y^2}{4}=1$.

(2)(方法一)因为双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$.

当焦点在 x 轴上时，设所求双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$，则 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$①.

因为点 $A(2,-3)$ 在双曲线上，所以 $\frac{4}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1$②.

联立①②，方程组无解.

当焦点在 y 轴上时，设所求双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$，则 $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$③.

因为点 $A(2,-3)$ 在双曲线上，所以 $\frac{9}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$④.

联立③④，解得 $a^2=8$，$b^2=32$.

所以所求双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{32}=1$.

(方法二)因为双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$，所以可设双曲线方程为 $\frac{x^2}{2^2}-y^2=\lambda(\lambda\neq 0)$.

因为 $A(2,-3)$ 在双曲线上，所以 $\frac{2^2}{2^2}-(-3)^2=\lambda$，即 $\lambda=-8$.

故所求双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{32}=1$.

[应用迁移]

1. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$　**解析**：令双曲线 C 的实半轴长、虚半轴长分别为 a，b，显然双曲线 C 的中心为坐标原点，焦点在 x 轴上，其半焦距 $c=2$.由双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{2}$，得 $\frac{c}{a}=\sqrt{2}$，解得 $a=\sqrt{2}$，则 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{2}$，所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$.

2.解：(1)设所求双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 或 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$.

由题意知 $2b=12$，$\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$ 且 $c^2=a^2+b^2$，

所以 $b=6$，$c=10$，$a=8$，

所以所求双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ 或 $\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{36}=1$.

(2)双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点为 $F_1(-2\sqrt{5},0),F_2(2\sqrt{5},0)$.

设所求双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，

则有$\begin{cases}\frac{18}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1,\\ a^2+b^2=20,\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=12,\\ b^2=8.\end{cases}$

故所求双曲线的方程为$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$.

(3)设所求双曲线方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=\lambda(\lambda\neq0)$,

将点$(-3,2\sqrt{3})$代入得$\lambda=\frac{1}{4}$,

所以双曲线方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=\frac{1}{4}$,即$\frac{\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}{4}=1$.

任务 3

[探究活动]

例 2 **解**:由题意知,M 为双曲线右支上的点,由 $MF_1\perp MF_2$,$\angle MF_2F_1=60°$,$|F_1F_2|=2c$,得$|MF_1|=\sqrt{3}c$,$|MF_2|=c$,所以$|MF_1|-|MF_2|=(\sqrt{3}-1)c=2a$,

所以双曲线的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}=\frac{2c}{(\sqrt{3}-1)c}=\sqrt{3}+1$.

[一题多思]

思考 1.解:因为 $MF_1\perp MF_2$,$\tan\angle MF_1F_2=\frac{1}{2}$,$|F_1F_2|=2c$,所以 $\sin\angle MF_1F_2=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$|MF_2|=|F_1F_2|\cdot\sin\angle MF_1F_2=\frac{2\sqrt{5}c}{5}$,$|MF_1|=\frac{4\sqrt{5}c}{5}$.

又点 M 在双曲线上,所以$2a=|MF_1|-|MF_2|=\frac{2\sqrt{5}c}{5}$,所以$e=\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}=\sqrt{5}$.

思考 2.解:由题意,得$\begin{cases}|MF_1|=3|MF_2|,\\ |MF_1|-|MF_2|=2a,\end{cases}$解得$|MF_2|=a$,$|MF_1|=3a$.

因为$|MF_1|+|MF_2|\geqslant|F_1F_2|$,即$4a\geqslant2c$,所以$e=\frac{c}{a}\leqslant2$.又$e>1$,所以离心率 e 的取值范围是$(1,2]$.

[应用迁移]

B **解析**:由题意得$F(0,c)$,双曲线$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的渐近线方程为$ax\pm by=0$,

因为双曲线的上焦点 F 到下顶点的距离为 36,所以$a+c=36$.

因为 $F(0,c)$ 到渐近线的距离为 12,所以$\frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=b=12$,

所以$b^2=c^2-a^2=(c+a)(c-a)=144$,得$c-a=4$.

由$\begin{cases}c-a=4,\\ c+a=36,\end{cases}$得$\begin{cases}c=20,\\ a=16,\end{cases}$

所以双曲线的离心率为$e=\frac{c}{a}=\frac{20}{16}=\frac{5}{4}$.

第 2 课时　双曲线几何性质的应用

问题式预习

【知识清单】

知识点

(1)平行　相交于一点　(2)有两个公共点　相交　有一个公共点　相切　没有公共点　相离

【概念辨析】

1.(1)×　(2)√　(3)√

2.A　**解析**:由题易得,双曲线的渐近线方程为 $y=\pm2x$,故 $k\neq\pm2$.

将 $y=kx$ 代入 $4x^2-y^2=16$,得$(4-k^2)x^2-16=0$,

由$\Delta=64(4-k^2)>0$,得$-2<k<2$.

故实数 k 的取值范围为$(-2,2)$.

3.(1)**提示**:不一定,与双曲线只有一个公共点的直线有两种:一种是与渐近线平行的直线;另一种是与双曲线相切的直线.

(2)**提示**:利用方程$(b^2-a^2k^2)x^2-2a^2mkx-a^2m^2-a^2b^2=0$判断,

若$\frac{-a^2m^2-a^2b^2}{b^2-a^2k^2}>0$,则直线与双曲线的两个交点在一支上;

若$\frac{-a^2m^2-a^2b^2}{b^2-a^2k^2}<0$,则直线与双曲线的两个交点在两支上.

任务型课堂

任务 1

1. $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},-1\right)\cup\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$　**解析**:联立方程$\begin{cases}y=k(x-1),\\ x^2-y^2=4,\end{cases}$消去 y,得$(1-k^2)x^2+2k^2x-k^2-4=0$.由题意,设方程的两根为 x_1,x_2,

则$\begin{cases}1-k^2\neq0,\\ \Delta=4(4-3k^2)>0,\\ x_1+x_2=-\frac{2k^2}{1-k^2}>0,\\ x_1x_2=-\frac{k^2+4}{1-k^2}>0,\end{cases}$

解得$-\frac{2\sqrt{3}}{3}<k<-1$ 或 $1<k<\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

所以 k 的取值范围为$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},-1\right)\cup\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

2.解:由$\begin{cases}x^2-y^2=4,\\ y=k(x-1).\end{cases}$消去 y,

得$(1-k^2)x^2+2k^2x-k^2-4=0$.(*)

当 $1-k^2\neq0$,即 $k\neq\pm1$ 时,

$\Delta=(2k^2)^2-4(1-k^2)(-k^2-4)=4\times(4-3k^2)$.

(1)由$\begin{cases}4-3k^2>0,\\ 1-k^2\neq0,\end{cases}$得$-\frac{2\sqrt{3}}{3}<k<\frac{2\sqrt{3}}{3}$且 $k\neq\pm1$,

此时方程(*)有两个不同的实数根,

即直线 l 与双曲线有两个不同的公共点.

故实数 k 的取值范围为$\left\{k\,\middle|\,-\frac{2\sqrt{3}}{3}<k<\frac{2\sqrt{3}}{3},\text{且 }k\neq\pm1\right\}$.

(2)由$\begin{cases}4-3k^2=0,\\1-k^2\neq0,\end{cases}$得$k=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

此时方程(*)有两个相同的实数根,

即直线l与双曲线有且只有一个公共点.

当$1-k^2=0$,即$k=\pm1$时,

直线l与双曲线的渐近线平行,

方程(*)可化为$2x=5$,

故方程(*)只有一个实数根,即直线l与双曲线相交,有且只有一个公共点.

综上,当$k=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$或$k=\pm1$时,

直线l与双曲线有且只有一个公共点.

(3)由$\begin{cases}4-3k^2<0,\\1-k^2\neq0,\end{cases}$得$k<-\frac{2\sqrt{3}}{3}$或$k>\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

此时方程(*)无实数根,即直线l与双曲线没有公共点.

所以实数k的取值范围为$\left\{k\,\middle|\,k<-\frac{2\sqrt{3}}{3},\text{或}\,k>\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$.

任务2

[探究活动]

例1 解:(方法一)由题意知,直线的斜率存在,故可设直线方程为$y+1=k(x-3)$,即$y=kx-3k-1$.

由$\begin{cases}y=kx-3k-1,\\\frac{x^2}{4}-y^2=1,\end{cases}$消去$y$并整理,

得$(1-4k^2)x^2+8k(3k+1)x-36k^2-24k-8=0$,$\Delta=64k^2(3k+1)^2+4(1-4k^2)(36k^2+24k+8)>0$.

设$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

所以$x_1+x_2=\frac{8k(3k+1)}{4k^2-1}$.

因为$A(3,-1)$为MN的中点,

所以$\frac{x_1+x_2}{2}=3$,即$\frac{8k(3k+1)}{2(4k^2-1)}=3$,解得$k=-\frac{3}{4}$.

当$k=-\frac{3}{4}$时,满足$\Delta>0$,符合题意,

故所求直线MN的方程为$y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$,即$3x+4y-5=0$.

(方法二)设$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$.

因为M,N均在双曲线上,所以$\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}-y_1^2=1,\\\frac{x_2^2}{4}-y_2^2=1,\end{cases}$

两式相减,得$\frac{x_2^2-x_1^2}{4}=y_2^2-y_1^2$.

所以$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{x_2+x_1}{4(y_2+y_1)}$.

因为点$A(3,-1)$平分弦MN,所以$x_1+x_2=6$,$y_1+y_2=-2$.

所以$k_{MN}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{x_2+x_1}{4(y_2+y_1)}=-\frac{3}{4}$.

经验证,该直线MN存在.

所以所求直线MN的方程为$y+1=-\frac{3}{4}(x-3)$,即$3x+4y-5=0$.

[一题多思]

思考1. 解:将$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$代入双曲线方程,

得$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$

两式作差并整理,得$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}-\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=0$.

因为弦AB的中点为$M(x_0,y_0)$,且$x_1\neq x_2$,所以$\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}=\frac{b^2}{a^2}$,即$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_0}{x_0}=\frac{b^2}{a^2}$,所以$k_{OM}\cdot k_{AB}=\frac{b^2}{a^2}$.

思考2. 解:设$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,将其代入双曲线方程,得$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$两式相减,得$\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}-\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$,

即$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}-\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$.

由题知,$x_1\neq x_2$,两边同时除以x_1-x_2,得$\frac{x_1+x_2}{a^2}-\frac{y_1+y_2}{b^2}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=0$.

因为PQ的中点为$A(3,-1)$,直线PQ的斜率为-1,所以$x_1+x_2=6$,$y_1+y_2=-2$,$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-1$,

所以$\frac{6}{a^2}-\frac{2}{b^2}=0$,解得$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3}$,即$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以双曲线的渐近线方程是$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

[应用迁移]

1. 解:由题意,可得$F(5,0)$,

所以直线AB的方程为$y=x-5$,

代入双曲线方程,得$7x^2+90x-369=0$,$\Delta>0$.

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则

$x_1+x_2=-\frac{90}{7}$,$x_1x_2=-\frac{369}{7}$,

所以$|AB|=\sqrt{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{18\,432}}{7}=\frac{192}{7}$.

又$x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{45}{7}$,所以$y_M=-\frac{80}{7}$.

所以$|MF|=\sqrt{\left(-\frac{45}{7}-5\right)^2+\left(-\frac{80}{7}-0\right)^2}=\frac{80\sqrt{2}}{7}$.

2. 解:由$\begin{cases}y=\frac{1}{3}x+2,\\\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$得$x^2-4x-24=0$,$\Delta>0$.

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

则$\begin{cases}x_1+x_2=4,\\x_1x_2=-24,\end{cases}$

所以 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4\sqrt{7}$，

所以 $S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}\times2\times4\sqrt{7}=4\sqrt{7}$.

任务 3

［探究活动］

例 2 **解**：(1)由题意，得 $e=\frac{c}{a}=\frac{c}{1}=2$，则 $c=2$，$b=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$.

(2)当 $b=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 时，双曲线 $\Gamma:x^2-\frac{y^2}{\frac{8}{3}}=1$，$M(-2,0)$，$A_2(1,0)$.

因为 $\triangle MA_2P$ 为等腰三角形，则

①当以 MA_2 为底时，显然点 P 在直线 $x=-\frac{1}{2}$ 上，这与点 P 在第一象限矛盾，故舍去；

②当以 A_2P 为底时，$|MP|=|MA_2|=3$，

设 $P(m,n)$，则 $\begin{cases}m^2-\frac{3n^2}{8}=1,\\(m+2)^2+n^2=9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-\frac{23}{11},\\n=-\frac{8\sqrt{17}}{11}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=-\frac{23}{11},\\n=\frac{8\sqrt{17}}{11}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=1,\\n=0.\end{cases}$

因为点 P 在第一象限，显然以上均不符合题意，故舍去；

(或者由双曲线的性质知，$|MP|>|MA_2|$，矛盾，故舍去)

③当以 MP 为底时，$|A_2P|=|MA_2|=3$.

设 $P(x_0,y_0)$，其中 $x_0>0$，$y_0>0$，

则 $\begin{cases}(x_0-1)^2+y_0^2=9,\\x_0^2-\frac{y_0^2}{\frac{8}{3}}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=2,\\y_0=2\sqrt{2},\end{cases}$ 即 $P(2,2\sqrt{2})$.

综上所述，点 P 的坐标为 $(2,2\sqrt{2})$.

(3)由题意知，$A_1(-1,0)$，$A_2(1,0)$，

当直线 l 的斜率为 0 时，$\overrightarrow{A_1R}\cdot\overrightarrow{A_2P}=0$，不符合题意，所以 $k_l\neq0$.

设直线 $l:x=ty-2$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

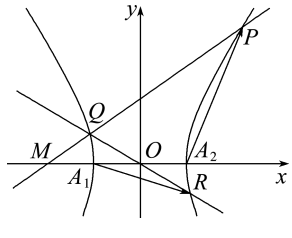
根据双曲线的对称性可知，$R(-x_2,-y_2)$，

由 $\begin{cases}x=ty-2,\\x^2-\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 消去 x 并整理，得 $(b^2t^2-1)y^2-4b^2ty+3b^2=0$，

显然二次项系数 $b^2t^2-1\neq0$，

$\Delta=(-4b^2t)^2-4(b^2t^2-1)3b^2=4b^4t^2+12b^2>0$，

$y_1+y_2=\frac{4b^2t}{b^2t^2-1}$，① $y_1y_2=\frac{3b^2}{b^2t^2-1}$.②



因为 $\overrightarrow{A_1R}=(-x_2+1,-y_2)$，$\overrightarrow{A_2P}=(x_1-1,y_1)$，

所以 $\overrightarrow{A_1R}\cdot\overrightarrow{A_2P}=(-x_2+1)(x_1-1)-y_1y_2=1$.

因为 P，Q 在直线 l 上，

所以 $x_1=ty_1-2$，$x_2=ty_2-2$，

所以 $\overrightarrow{A_1R}\cdot\overrightarrow{A_2P}=-(ty_2-3)(ty_1-3)-y_1y_2=1$，化简，得 $y_1y_2(t^2+1)-(y_1+y_2)3t+10=0$.

将①②代入上式，得 $(t^2+1)\cdot\frac{3b^2}{b^2t^2-1}-3t\cdot\frac{4b^2t}{b^2t^2-1}+10=0$，

即 $3b^2(t^2+1)-3t\cdot4b^2t+10(b^2t^2-1)=0$，

化简，得 $b^2t^2+3b^2-10=0$，

所以 $t^2=\frac{10}{b^2}-3$，代入到 $b^2t^2-1\neq0$，得 $b^2\neq3$，即 $b\neq\pm\sqrt{3}$，

因为 $t^2=\frac{10}{b^2}-3\geqslant0$，解得 $b^2\leqslant\frac{10}{3}$，即 $-\frac{\sqrt{30}}{3}\leqslant b\leqslant\frac{\sqrt{30}}{3}$，

又因为 $b>0$，所以 $0<b\leqslant\frac{\sqrt{30}}{3}$ 且 $b\neq\sqrt{3}$.

综上，$b\in(0,\sqrt{3})\cup\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{30}}{3}\right]$.

［应用迁移］

1.C **解析**：直线方程可化为 $y=ax+b$，曲线方程可化为 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$.若 $a>0$，$b>0$，则曲线表示椭圆，故 A 不正确.关于 B，D，由椭圆知直线斜率应满足 $a>0$，而选项 B，D 的图象中直线斜率均为负值，故 B，D 不正确.由 C 可知 $a>0$，$b<0$，故 C 正确.

2.解：(1)如图，设线段 F_1M 的中点为 P，

所以 P 在该双曲线的右支上，连接 PF_2.

因为 $\overrightarrow{F_1N}=2\overrightarrow{F_1F_2}$，

所以 F_2 是线段 F_1N 的中点，

所以 $|PF_2|=\frac{1}{2}|MN|$.

由双曲线的定义知，$2a=|PF_1|-|PF_2|=\frac{1}{2}(|MF_1|-|MN|)=2$，

所以 $a=1$，

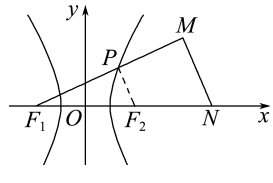
所以双曲线 C 的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$.

因为 $A(2,3)$ 为双曲线 C 上一点，

所以 $2^2-\frac{3^2}{b^2}=1$，

所以 $b=\sqrt{3}$，

所以双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$.



(2)由题意知，双曲线 C 的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$，

设直线 l 的方程为 $x=t(y-3)+2$，代入 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$，

整理得$(3t^2-1)y^2+(12t-18t^2)y+27t^2-36t+9=0$，

所以$3y_B=\dfrac{27t^2-36t+9}{3t^2-1}$，

所以$y_B=\dfrac{9t^2-12t+3}{3t^2-1}$，

所以$|AB|=\sqrt{1+t^2}\,|3-y_B|=\sqrt{1+t^2}\times\left|3-\dfrac{9t^2-12t+3}{3t^2-1}\right|=\dfrac{\sqrt{1+t^2}\,|12t-6|}{|3t^2-1|}$.

又点D到直线l的距离为$d=\dfrac{|0\times1-t\times3+3t-2|}{\sqrt{1^2+t^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+t^2}}$，

所以$S_{\triangle DAB}=\dfrac{1}{2}|AB|d=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{6\sqrt{t^2+1}\,|2t-1|}{|3t^2-1|}\times\dfrac{2}{\sqrt{t^2+1}}=\dfrac{6|2t-1|}{|3t^2-1|}=6$，

解得$t=0$或$t=\dfrac{2}{3}$或$t=-\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}$或$t=-\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$，

所以直线l的方程为$x=2$或$3x-2y=0$或$3x+(1+\sqrt{7})y-3\sqrt{7}-9=0$或$3x+(1-\sqrt{7})y-9+3\sqrt{7}=0$.

3.3 抛物线

3.3.1 抛物线及其标准方程

问题式预习

【知识清单】

知识点一

抛物线　焦点　准线

知识点二

$y^2=2px(p>0)$　$\left(\dfrac{p}{2},0\right)$　$x=-\dfrac{p}{2}$　$y^2=-2px(p>0)$　$\left(-\dfrac{p}{2},0\right)$　$x=\dfrac{p}{2}$　$x^2=2py(p>0)$　$\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$　$y=-\dfrac{p}{2}$　$x^2=-2py(p>0)$　$\left(0,-\dfrac{p}{2}\right)$　$y=\dfrac{p}{2}$

【概念辨析】

1.(1)√　(2)×　(3)√　(4)√

2.B　**解析**：由题意知，抛物线的焦点在x轴的负半轴上，$\dfrac{p}{2}=1$，即$p=2$，故抛物线的标准方程为$y^2=-4x$.

3.(1)**提示**：p的几何意义是焦点到准线的距离.

(2)**提示**：顶点在坐标原点，焦点在坐标轴上.

(3)**提示**：抛物线的焦点所在的坐标轴与标准方程中一次项变量一致，开口方向取决于标准方程中一次项系数的正负.

任务型课堂

任务1

1.D　**解析**：由已知可得双曲线的焦点为$(-\sqrt{2},0)$，$(\sqrt{2},0)$.设抛物线C的方程为$y^2=\pm2px(p>0)$，则$\dfrac{p}{2}=\sqrt{2}$，所以$p=2\sqrt{2}$，所以抛物线C的标准方程为$y^2=\pm4\sqrt{2}x$.

2.B　**解析**：抛物线的准线方程为$x=-\dfrac{p}{2}$，

所以点P到焦点的距离为$6-\left(-\dfrac{p}{2}\right)=9$，

所以$p=6$，抛物线的方程为$y^2=12x$.

3.(1)$x^2=-\dfrac{8}{3}y$　**解析**：因为抛物线的准线交y轴于正半轴，且$\dfrac{p}{2}=\dfrac{2}{3}$，所以$p=\dfrac{4}{3}$，所以所求抛物线的标准方程为$x^2=-\dfrac{8}{3}y$.

(2)$x^2=10y$或$x^2=-10y$　**解析**：已知抛物线的焦点在y轴上，故可设其方程为$x^2=2my(m\neq0)$.由焦点到准线的距离为5，知$|m|=5$，所以$m=\pm5$.所以满足条件的抛物线的标准方程为$x^2=10y$，$x^2=-10y$.

任务2

[探究活动]

例1　**解**：(1)相等.

(2)由抛物线的定义可知，动圆圆心M的轨迹是以$C(0,-3)$为焦点，$y=3$为准线的一条抛物线，其方程为$x^2=-12y$.

[一题多思]

思考1.解：由题意知，动圆圆心$M(x,y)$到定点$F(0,-2)$与到直线$y=2$的距离相等，

所以动圆圆心M的轨迹是以F为焦点，$y=2$为准线的抛物线，所以动圆圆心$M(x,y)$的轨迹方程为$x^2=-8y$.

思考2.提示：(1)将抛物线上的点到准线的距离化为该点到焦点的距离，利用“两点之间线段最短”来解决.

(2)将抛物线上的点到焦点的距离转化为该点到准线的距离，利用“垂线段最短”解决.

思考3.解：抛物线$x^2=-12y$的焦点为$F(0,-3)$，过点P作PP'垂直于准线$y=3$，垂足为P'(图略).

由抛物线的定义知，$|PF|=|PP'|$，所以$|PA|+|PP'|=|PA|+|PF|\geqslant|AF|=\sqrt{13}$.

故当P，A，F三点共线时，$|PA|+|PP'|$取到最小值为$\sqrt{13}$.

[应用迁移]

1.D　**解析**：由题意知抛物线$C:x^2=2py(p>0)$的准线为$y=-\dfrac{p}{2}$，

因为点A到C的焦点的距离为9，到x轴的距离为4，即点A的纵坐标为4，

所以$4-\left(-\dfrac{p}{2}\right)=9$，解得$p=10$.

2.解：当动点M位于y轴及y轴右侧或y轴上时，因为动点M到$F\left(\dfrac{1}{2},0\right)$的距离比它到$y$轴的距离大$\dfrac{1}{2}$，所以动点$M$到$F\left(\dfrac{1}{2},0\right)$的距离与它到直线$l:x=-\dfrac{1}{2}$的距离相等.由抛物线的定义知，动点$M$的轨迹是以$F$为焦点，$l$为准线的抛物线.设方程为$y^2=2px(p>0)$，其中$\dfrac{p}{2}=\dfrac{1}{2}$，解得$p=1$，故点$M$的轨迹方程为$y^2=2x$；

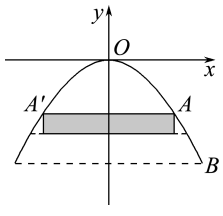
当动点 M 位于 y 轴左侧时，点 M 的轨迹为 x 轴的负半轴.

综上所述，点 M 的轨迹方程为 $y^2=2x$ 或 $y=0(x<0)$.

任务 3

[探究活动]

例 2 **解**：如图，以拱桥的拱顶为坐标原点，以过拱顶且平行于水面的直线为 x 轴，建立平面直角坐标系.



设抛物线方程为 $x^2=-2py(p>0)$，由题意可知，点 $B(4,-5)$ 在抛物线上，代入抛物线方程，得 $p=\frac{8}{5}$，故 $x^2=-\frac{16}{5}y$.

当船两侧和拱桥接触时，船不能通过.

由题意可知，船宽为 4 m，则 $A(2,y_A)$，

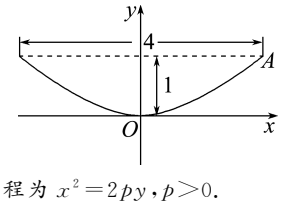
由 $2^2=-\frac{16}{5}y_A$，得 $y_A=-\frac{5}{4}$.

又因为船露出水面上的部分高为 0.75 m，所以 $h=|y_A|+0.75=2$，

所以水面上涨到与拱桥顶相距 2 m 时，小船开始不能通过.

[应用迁移]

1.A **解析**：如图，以抛物线的顶点为坐标原点，对称轴为 y 轴，建立平面直角坐标系.



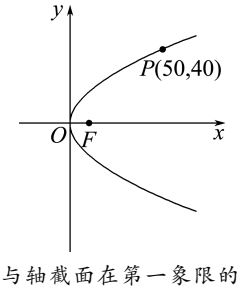
设抛物线的方程为 $x^2=2py$，$p>0$.

由题意可得抛物线上一点 $A(2,1)$，代入抛物线方程可得 $2^2=2p\times1$，所以 $p=2$，

即抛物线方程为 $x^2=4y$，则抛物线的焦点坐标为 $(0,1)$，故顶点到焦点的距离为 1 m.

故选 A.

2.60.5 **解析**：在反射镜的轴截面上建立平面直角坐标系，以抛物线的顶点为原点，以旋转轴为 x 轴(抛物线开口方向是 x 轴的正方向)，如图所示，则可设抛物线的方程为 $y^2=2px$.



由题可得灯口圆与轴截面在第一象限的交点 $P(50,40)$，代入抛物线方程得 $40^2=2p\times50$，

解得 $p=16$，所以抛物线的方程为 $y^2=32x$.

当灯口圆的直径增大到 88 cm 时，灯口圆与轴截面在第一象限的交点的纵坐标为 $\frac{88}{2}=44$，

将 $y=44$ 代入抛物线方程求得 $x=60.5$，此时探照灯的深度为 60.5 cm.

3.3.2 抛物线的简单几何性质

第 1 课时 抛物线的简单几何性质

问题式预习

【知识清单】

知识点一

x 轴 y 轴 $O(0,0)$ $e=1$ 向右 向左 向上 向下

知识点二

有一个或两个 有且只有一个 无

【概念辨析】

1.(1)√ (2)√ (3)√ (4)√

2.0 或 1 **解析**：当 $k=0$ 时，直线与抛物线有唯一交点.

当 $k\neq0$ 时，将 $y=kx+2$ 代入 $y^2=8x$，得 $k^2x^2+4(k-2)x+4=0$.

由题意 $\Delta=16(k-2)^2-16k^2=0$，解得 $k=1$.

综上，$k=0$ 或 $k=1$.

3.(1)**提示**：不一定.当直线与抛物线的对称轴平行或重合时，也只有一个公共点，此时二者不相切.

(2)**提示**："两点"是指抛物线的焦点和顶点；"两线"是指抛物线的准线和对称轴；"一率"是指离心率；"一方向"是指抛物线的开口方向.

(3)**提示**：抛物线的离心率等于 1，它只有一个焦点、一个顶点、一条对称轴和一条准线，它没有中心，通常称抛物线为无心圆锥曲线，而称椭圆和双曲线为有心圆锥曲线.

任务型课堂

任务 1

1.D **解析**：因为抛物线方程是 $y^2=4x$，所以 $F(1,0)$.又因为 $PF\perp x$ 轴，所以 $P(1,2)$.

把点 P 的坐标代入曲线方程 $y=\frac{k}{x}(k>0)$，即 $\frac{k}{1}=2$，所以 $k=2$.

2.4 **解析**：$z=x^2+\frac{1}{2}y^2+4=x^2+2x+4=(x+1)^2+3$.

因为 $y^2=4x\geqslant0$，所以 $x\in[0,+\infty)$，

所以当 $x=0$ 时，$z_{\min}=4$.

3.**解**：由已知，得 $\frac{c}{a}=2$，所以 $\frac{a^2+b^2}{a^2}=4$，解得 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，

即双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$.

因为抛物线的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，

则设 $A\left(-\frac{p}{2},-\frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$，$B\left(-\frac{p}{2},\frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$，

所以 $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}p\cdot\frac{p}{2}=\sqrt{3}$，解得 $p=2$，所以抛物线的标准方程为 $y^2=4x$.

任务 2

[探究活动]

例 1 **解**：设直线 l：$y-1=k(x-1)$.将 $x=-\frac{y^2}{2}$ 代入整理，得 $ky^2+2y+2k-2=0$.

①当 $k=0$ 时，把 $y=1$ 代入 $y^2=-2x$，得 $x=-\frac{1}{2}$，此时 l 与 C 只有一个公共点 $\left(-\frac{1}{2},1\right)$.

②当 $k\neq0$ 时，

$\Delta=4-4k(2k-2)=-8k^2+8k+4$.

由 $\Delta=0$，得 $k=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$，此时 l 与 C 有且只有一个公共点；

当 $\frac{1-\sqrt{3}}{2}<k<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 且 $k\neq0$ 时，$\Delta>0$，l 与 C 有两个公共点；

当 $k<\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ 或 $k>\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 时，$\Delta<0$，此时 l 与 C 无公共点.

综上所述，当 $k=0$ 或 $k=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ 时，l 与 C 有且只有一个公共点；当 $\frac{1-\sqrt{3}}{2}<k<0$ 或 $0<k<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 时，l 与 C 有两个公共点；当 $k<\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ 或 $k>\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 时，l 与 C 无公共点.

[一题多思]

思考.解：易知直线 $x-y+12=0$ 与抛物线 C：$y^2=12x$ 相离.

设直线 $y=x+m$ 与抛物线 C：$y^2=12x$ 相切.联立 $\begin{cases}y=x+m,\\y^2=12x.\end{cases}$ 消去 x，得 $y^2-12y+12m=0$，所以 $\Delta=144-48m=0$，解得 $m=3$，

所以直线 $y=x+3$ 与 $x-y+12=0$ 的距离 $d=\frac{|12-3|}{\sqrt{2}}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$，

故抛物线 C：$y^2=12x$ 上的点到直线 $x-y+12=0$ 的最小距离为 $\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

[应用迁移]

解：(1)由题意，得焦点 $F\left(\frac{m}{4},0\right)$，准线方程为 $x=-\frac{m}{4}$.

以 F 和 C 的准线上的两点为顶点可以构成边长为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 的等边三角形，

则这个等边三角形的高为 $\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}=2$，

即焦点到准线的距离 $\left|\frac{m}{2}\right|=2$，解得 $m=4$(负值舍去)，

所以 C 的方程为 $y^2=4x$.

(2)若直线 l 的斜率存在，设 l 的方程为 $y-1=k(x+2)$.

由方程组 $\begin{cases}y-1=k(x+2),\\y^2=4x,\end{cases}$ 可得 $ky^2-4y+4(2k+1)=0$.

①当 $k=0$ 时，解得 $x=\frac{1}{4}$，$y=1$，此时方程只有一个实数解，l 与 C 只有一个公共点.

②当 $k\neq0$ 时，$\Delta=-16(2k^2+k-1)$，

由 $\Delta=0$，解得 $k=-1$ 或 $k=\frac{1}{2}$，此时方程有两个相等的实数解，l 与 C 只有一个公共点；

由 $\Delta>0$，解得 $-1<k<0$ 或 $0<k<\frac{1}{2}$，此时方程有两个不等的实数解，l 与 C 有两个公共点；

由 $\Delta<0$，解得 $k<-1$ 或 $k>\frac{1}{2}$，此时方程没有实数解，l 与 C 没有公共点.

若直线 l 的斜率不存在，则直线 l 的方程为 $x=-2$，易知 l 与 C 没有公共点.

综上所述，当 l 的方程为 $x=-2$ 或 l 的斜率 $k<-1$ 或 $k>\frac{1}{2}$ 时，l 与 C 的交点个数为 0；当 l 的斜率 $k=0$ 或 $k=-1$ 或 $k=\frac{1}{2}$ 时，l 与 C 的交点个数为 1；当 l 的斜率 $k\in(-1,0)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，l 与 C 的交点个数为 2.

任务 3

[探究活动]

例 2 **解**：(方法一)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则由 $\begin{cases}y=kx-2,\\y^2=8x,\end{cases}$ 可得 $k^2x^2-(4k+8)x+4=0$.

因为直线与抛物线相交于两点，

所以 $k\neq0$ 且 $\Delta>0$，即 $k>-1$ 且 $k\neq0$.

因为线段 AB 中点的横坐标为 2，所以 $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4k+8}{2k^2}=2$，解得 $k=2$ 或 $k=-1$(舍去)，

故所求直线方程为 $y=2x-2$.

(方法二)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则有 $y_1^2=8x_1$，$y_2^2=8x_2$.

两式作差，得 $(y_1-y_2)(y_1+y_2)=8(x_1-x_2)$.

即 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{8}{y_1+y_2}$.

因为 $x_1+x_2=4$，所以 $y_1+y_2=kx_1-2+kx_2-2=k(x_1+x_2)-4=4k-4$.

所以 $k=\frac{8}{4k-4}$，故 $k=2$ 或 $k=-1$.

而当 $k=-1$ 时，直线 $y=-x-2$ 与抛物线 $y^2=8x$ 只有一个交点，不合题意.

从而所求直线的方程为 $y=2x-2$.

[应用迁移]

解：(1)设点 $T(x_0,y_0)$，由题意可知 $|TF|=y_0+1$，由抛物线的定义知 $|TF|=y_0+\frac{p}{2}$，

所以 $y_0+\frac{p}{2}=y_0+1$，所以 $p=2$，故抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$.

(2)易知 l 的斜率一定存在，设 l 的方程为 $y=kx+6$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}x^2=4y,\\y=kx+6,\end{cases}$ 消去 y，得 $x^2-4kx-24=0$，则 $\Delta=16k^2+96>0$，且 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-24$，

所以 $|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{(4k)^2-4\times(-24)}=4\sqrt{1+k^2}\sqrt{k^2+6}$.

由 $|AB|=24$，化简整理得 $k^4+7k^2-30=0$，解得 $k^2=-10$（舍去）或 $k^2=3$，

所以 $k=\pm\sqrt{3}$，即 l 的方程为 $\pm\sqrt{3}x-y+6=0$.

第 2 课时　抛物线几何性质的应用

问题式预习

【知识清单】

知识点

(1)相切　(3)p　(4)$\frac{p^2}{4}$　$-p^2$

【概念辨析】

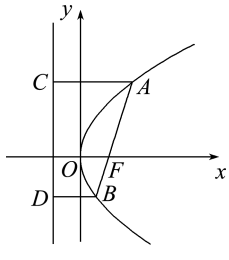
1.(1)√　**提示**：渐近线是圆锥曲线中双曲线的特有性质，抛物线没有渐近线.

(2)×　**提示**：过抛物线的焦点且垂直于对称轴的弦长为 $2p$，此弦长也称为通径长.

(3)×　**提示**：当直线与抛物线的对称轴平行或重合时，也只有一个公共点，此时不相切.

(4)√　**提示**：因为 $p>0$，$y^2\geqslant 0$，所以 $x\geqslant 0$.

2.$x_1+\frac{p}{2}$　$x_2+\frac{p}{2}$　x_1+x_2+p　**解析**：如图，过点 A，B 作准线的垂线，垂足分别为 C，D.



由抛物线的定义可知，$|AF|=|AC|=x_1+\frac{p}{2}$，$|BF|=|BD|=x_2+\frac{p}{2}$，

所以 $|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+p$.

3.6　**解析**：由 $y=\frac{1}{4}x^2$，得 $x^2=4y$，所以焦点为 $F(0,1)$，准线为 l：$y=-1$.

设弦 AB 中点的纵坐标为 $y_0=2$，

故 $|AB|=y_A+y_B+2=2y_0+2=6$.

任务型课堂

任务 1

[探究活动]

例 1　**解**：设抛物线 C 的方程为 $y^2=2px(p>0)$，直线 l 的方程为 $y=kx(k\neq 0)$.

(方法一)设点 $A(-1,0)$，$B(0,8)$ 关于直线 l 的对称点分别为 $A'(x_1,y_1)$，$B'(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}\frac{y_1}{2}=k\cdot\frac{x_1-1}{2},\\ \frac{y_1}{x_1+1}\cdot k=-1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1=\frac{k^2-1}{k^2+1},\\ y_1=\frac{-2k}{k^2+1};\end{cases}$

由 $\begin{cases}\frac{y_2+8}{2}=k\cdot\frac{x_2}{2},\\ \frac{y_2-8}{x_2}\cdot k=-1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_2=\frac{16k}{k^2+1},\\ y_2=\frac{8(k^2-1)}{k^2+1}.\end{cases}$

因为 A'，B' 在抛物线 C 上，

所以 $\begin{cases}\frac{4k^2}{(k^2+1)^2}=2p\cdot\frac{k^2-1}{k^2+1},\\ \frac{64(k^2-1)^2}{(k^2+1)^2}=2p\cdot\frac{16k}{k^2+1},\end{cases}$

两式相除，消去 p 并整理，得 $k^2-k-1=0$，故 $k=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

由 $x_2=\frac{16k}{k^2+1}>0$，得 $k>0$，从而 $k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

把 $k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 代入 $\frac{64(k^2-1)^2}{(k^2+1)^2}=2p\cdot\frac{16k}{k^2+1}$，得 $p=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

所以直线 l 的方程为 $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x$，抛物线 C 的方程为 $y^2=\frac{4\sqrt{5}}{5}x$.

(方法二)设点 A，B 关于 l 的对称点分别为 $A'(x_1,y_1)$，$B'(x_2,y_2)$，$\overrightarrow{OB'}$ 与 x 轴正方向的夹角为 α.

依题意，有 $|OA'|=|OA|=1$，$|OB'|=|OB|=8$，

故 $x_2=8\cos\alpha$，$y_2=8\sin\alpha$.

由 $\angle BOA=90^\circ$，知 $\angle B'OA'=90^\circ$，

所以 $x_1=\cos(\alpha-90^\circ)=\sin\alpha$，$y_1=\sin(\alpha-90^\circ)=-\cos\alpha$.

所以 $A'(\sin\alpha,-\cos\alpha)$，$B'(8\cos\alpha,8\sin\alpha)$.

将 A'，B' 的坐标代入抛物线方程，

得 $\begin{cases}\cos^2\alpha=2p\sin\alpha,\\ 64\sin^2\alpha=16p\cos\alpha,\end{cases}$

所以 $8\sin^3\alpha=\cos^3\alpha$，即 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$.

从而 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $p=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，得抛物线 C 的方程为 $y^2=\frac{4\sqrt{5}}{5}x$.

又直线 l 平分 $\angle B'OB$，得 l 的倾斜角为 $\alpha+\frac{90^\circ-\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}+45^\circ$.

所以 $k=\tan\left(\frac{\alpha}{2}+45^\circ\right)=\dfrac{\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}+1}{1-\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}$

$=\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

所以直线 l 的方程为 $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x$.

[应用迁移]

1.C　**解析**：对 l_{BF}：$y=-2x+2$，令 $y=0$，则 $x=1$，

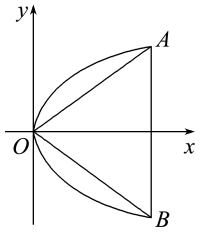
所以 $F(1,0)$，$p=2$，即抛物线 C：$y^2=4x$. 故抛物线的准

线方程为 $x=-1$，

可得 $B(-1,4)$，则 $y_A=4$.代入抛物线 $C:y^2=4x$，得 $x_A=4$，

所以 $|AF|=|AB|=x_A+\frac{p}{2}=4+1=5$.

2.解：如图，设正三角形 OAB 的顶点 A，B 在抛物线上，且坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，则 $y_1^2=2px_1$，$y_2^2=2px_2$.



又 $|OA|=|OB|$，所以 $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$，即 $x_1^2-x_2^2+2px_1-2px_2=0$，化简，得 $(x_1^2-x_2^2)+2p(x_1-x_2)=0$，整理，得 $(x_1-x_2)(x_1+x_2+2p)=0$.

因为 $x_1>0$，$x_2>0$，$2p>0$，所以 $x_1=x_2$.

所以 $|y_1|=|y_2|$，即线段 AB 关于 x 轴对称.

因为 AB 垂直于 x 轴且 $\angle AOx=30°$，

所以 $\frac{y_1}{x_1}=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

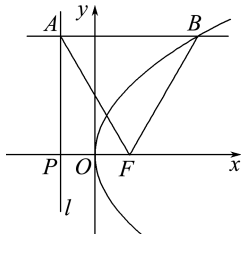
因为 $x_1=\frac{y_1^2}{2p}$，所以 $y_1=2\sqrt{3}p$.

所以 $|AB|=2y_1=4\sqrt{3}p$.

任务 2

［探究活动］

例 2 (1)4 **解析**：如图，由抛物线的定义可知 $|BF|=|AB|$，因为 $\angle AFB=60°$，所以 $\triangle ABF$ 为等边三角形，故 $|AF|=|AB|=|BF|$，$\angle BAF=60°$，所以 $\angle AFO=60°$.其中准线 l 与 x 轴交点为 P，则 $|PF|=2$，故 $|AF|=\frac{|PF|}{\cos 60°}=4$，所以 $|AB|=4$.



(2)12 **解析**：(方法一)由题意知抛物线焦点 $F\left(\frac{3}{4},0\right)$，所以直线 $AB:y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right)$.由 $\begin{cases}y^2=3x,\\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right),\end{cases}$ 得 $x^2-\frac{21}{2}x+\frac{9}{16}=0$，$\Delta>0$.设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则由抛物线的几何性质，得 $|AB|=x_1+x_2+p=\frac{21}{2}+\frac{3}{2}=12$.

(方法二)易知 $2p=3$，因为 $|AB|=\frac{2p}{\sin^2\theta}$，$\theta=30°$，所以 $|AB|=\frac{3}{\sin^2 30°}=12$.

［应用迁移］

1.AC **解析**：易知直线 $y=-\sqrt{3}(x-1)$ 与 x 轴的交点为 $(1,0)$，又直线 $y=-\sqrt{3}(x-1)$ 过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点，可得 $\frac{p}{2}=1$，所以 $p=2$，故 A 正确；

抛物线方程为 $y^2=4x$，

将直线方程代入抛物线方程可得 $3x^2-10x+3=0$，

$\Delta=10^2-4\times3\times3=64>0$，则 $x_M+x_N=\frac{10}{3}$，

所以 $|MN|=x_M+x_N+p=\frac{16}{3}$，故 B 错误；

因为 M，N 的中点的横坐标为 $\frac{5}{3}$，该点到抛物线的准线的距离为 $1+\frac{5}{3}=\frac{8}{3}$，

所以以 MN 为直径的圆与 l 相切，故 C 正确；

由 $3x^2-10x+3=0$，解得 $x=3$ 或 $x=\frac{1}{3}$，不妨取 $M(3,-2\sqrt{3})$，$N\left(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，

则 $|OM|=\sqrt{9+12}=\sqrt{21}$，$|ON|=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{12}{9}}=\frac{\sqrt{13}}{3}$，$|MN|=\frac{16}{3}$，

所以 $\triangle OMN$ 不是等腰三角形，故 D 不正确.

2.解：由题意设 $A\left(x+\frac{p}{2},\sqrt{3}x\right)$，

代入 $y^2=2px$，得 $(\sqrt{3}x)^2=2p\left(x+\frac{p}{2}\right)$，

解得 $x=p$(负值舍去).

所以 $A\left(\frac{3}{2}p,\sqrt{3}p\right)$，

所以 $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}p\right)^2+3p^2}=\frac{\sqrt{21}}{2}p$.

任务 3

［探究活动］

例 3 **解**：(1)选择①.因为抛物线 $y^2=2px(p>0)$，所以其准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$.由题意知 $3+\frac{p}{2}=5$，所以 $p=4$，所以抛物线方程为 $y^2=8x$.

选择②.设动点 $P(x,y)$，动点 P 到点 $F(2,0)$ 的距离比它到直线 $x=-1$ 的距离大 1，即动点 P 到点 $F(2,0)$ 的距离等于它到直线 $x=-2$ 的距离，所以 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=|x+2|$，等式两边平方，得 $(x-2)^2+y^2=(x+2)^2$，化简可得 $y^2=8x$.

选择③.抛物线 $C:y^2=2px$ 的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，圆 M 的圆心为 $M(-1,0)$，半径为 1，直线 $x=-\frac{p}{2}$ 与圆 M 相切，则 $\left|-1+\frac{p}{2}\right|=1$.因为 $p\neq0$，解得 $p=4$，所以抛物线 C 的方程为 $y^2=8x$.

(2)因为抛物线 C 的方程为 $y^2=8x$，所以 $F(2,0)$，抛物线 C 的准线方程为 $x=-2$.

因为方程 $(a-2)x+y-4a+6=0$ 可化为 $a(x-4)-2x+$

$y+6=0$，

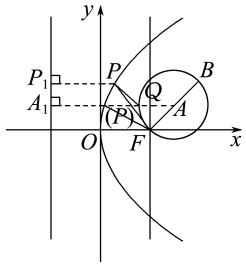
所以$(a-2)x+y-4a+6=0$过定点$B(4,2)$.设$Q(x,y)$，FB的中点为A，则$A(3,1)$.

因为$FQ\perp BQ$，Q为垂足，所以$|QA|=\frac{1}{2}|FB|=\sqrt{2}$，所以点$Q$的轨迹为以$A$为圆心，$\sqrt{2}$为半径的圆(不包含$B$，$F$)，即$(x-3)^2+(y-1)^2=2$.

过点P作准线$x=-2$的垂线，垂足为P_1(如图)，

则$|PP_1|=|PF|$，

所以$|PF|+|PQ|=|PP_1|+|PQ|\geqslant|PP_1|+|PA|-\sqrt{2}$，



当且仅当A，P，P_1三点共线且P在A，P_1之间时，等号成立.

过点A作准线$x=-2$的垂线，垂足为A_1(如图)，则$|PP_1|+|PA|\geqslant|AA_1|=5$，

当且仅当A_1，P，A三点共线时，等号成立，所以$|PF|+|PQ|\geqslant5-\sqrt{2}$，

当且仅当A_1，P，Q，A四点共线且Q在P，A之间时，等号成立，

所以$|PF|+|PQ|$的最小值为$5-\sqrt{2}$.

[**应用迁移**]

证明：设$k_{AB}=k(k\neq0)$.

因为直线AB，AC的倾斜角互补，

所以$k_{AC}=-k$，

则直线AB的方程是$y=k(x-4)+2$.

由方程组$\begin{cases}y=k(x-4)+2,\\y^2=x,\end{cases}$消去$y$后整理，得

$k^2x^2+(-8k^2+4k-1)x+16k^2-16k+4=0$，$\Delta=(-8k^2+4k-1)^2-4k^2(16k^2-16k+4)>0$，

所以$4\cdot x_B=\frac{16k^2-16k+4}{k^2}$，

即$x_B=\frac{4k^2-4k+1}{k^2}$.

以$-k$代换x_B中的k，得$x_C=\frac{4k^2+4k+1}{k^2}$，

所以$k_{BC}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}$

$=\frac{k(x_B-4)+2-[-k(x_C-4)+2]}{x_B-x_C}$

$=\frac{k(x_B+x_C-8)}{x_B-x_C}=\frac{k\left(\frac{8k^2+2}{k^2}-8\right)}{\frac{-8k}{k^2}}=-\frac{1}{4}$，

所以直线BC的斜率为定值.

微专题培优(五)　圆锥曲线中离心率问题

类型1

例1　A　**解析**：因为$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，所以$PF_1\perp PF_2$.

在$\mathrm{Rt}\triangle PF_1F_2$中，$\angle PF_1F_2=30^\circ$，

得$|PF_2|=c$，$|PF_1|=\sqrt{3}c$.

由$|PF_2|+|PF_1|=2a$，得$c+\sqrt{3}c=2a$，

所以椭圆的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$.

例2　D　**解析**：由题意，双曲线的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$，

当双曲线C的焦点在x轴上时，可得$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，所以$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=2$；

当双曲线C的焦点在y轴上时，可得$\frac{b}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，所以$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

综上，双曲线C的离心率为2或$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

例3　D　**解析**：因为P为椭圆C上的点，

所以$|PF_1|+|PF_2|=2a$.

因为$PF_2\perp F_1F_2$，且$\angle PF_1F_2=30^\circ$，所以$|PF_2|=\frac{2}{3}a$，

$|PF_1|=\frac{4}{3}a$.

在$\triangle PF_1F_2$中，$|F_1F_2|^2+|PF_2|^2=|PF_1|^2$，即$(2c)^2+\left(\frac{2}{3}a\right)^2=\left(\frac{4}{3}a\right)^2$，

整理得$c^2=\frac{1}{3}a^2$，即$e^2=\frac{1}{3}$，所以$e=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【对点训练】

1.B　**解析**：因为P在第一象限，所以$|PF_1|>|PF_2|$.又$\triangle PF_1F_2$为等腰三角形，

所以当$|PF_2|=|F_1F_2|=2c$时，

$|PF_1|=2|F_1F_2|\cos\angle PF_1F_2=2\cdot2c\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{2}c$.

又$|PF_1|-|PF_2|=\frac{7}{2}c-2c=\frac{3}{2}c=2a$，则$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{3}$；

当$|PF_1|=|F_1F_2|=2c$时，$|PF_2|=2c-2a$，

由余弦定理的推论得$\cos\angle PF_1F_2=\frac{|PF_1|^2+|F_1F_2|^2-|PF_2|^2}{2|PF_1|\cdot|F_1F_2|}=\frac{4c^2+4c^2-(2c-2a)^2}{2\cdot2c\cdot2c}=\frac{c^2+2ac-a^2}{2c^2}=\frac{7}{8}$，

解得$\frac{c}{a}=2$或$\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$(舍去)，则$e=\frac{c}{a}=2$.

故C的离心率为$\frac{4}{3}$或2.

2.$\frac{2}{3}$　**解析**：由题意知，$|F_1A|=13$，而$AB\perp x$轴，故

$|F_2A|=\frac{1}{2}|AB|=5$，

所以$|F_1A|+|F_2A|=2a=18$，解得$a=9$.

又$|F_1F_2|=\sqrt{|AF_1|^2-|AF_2|^2}=12=2c$，所以$c=6$，

所以椭圆C的离心率为$e=\frac{c}{a}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

类型 2

例 4 $\sqrt{3}+1$ **解析**：如图，因为直线$\sqrt{3}x+y=0$的斜率为$-\sqrt{3}$，倾斜角为$\frac{2\pi}{3}$，所以$\angle MOF=\frac{\pi}{3}$.

由于$|OM|=|OF|=c$，

所以$\triangle OMF$是等边三角形，所以$x_M=\frac{1}{2}c$，$y_M=-\frac{\sqrt{3}}{2}c$.

将$M\left(\frac{1}{2}c,-\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)$代入$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，

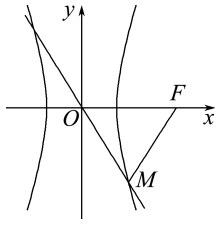
得$\frac{c^2}{4a^2}-\frac{3c^2}{4b^2}=\frac{c^2}{4a^2}-\frac{3c^2}{4(c^2-a^2)}=1$，

整理得$c^4-8a^2c^2+4a^4=0$.

两边除以a^4得$e^4-8e^2+4=0$，

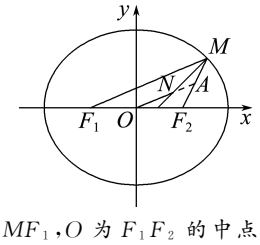
得$e^2=\frac{8\pm\sqrt{64-16}}{2}=4\pm2\sqrt{3}=(\sqrt{3}\pm1)^2$，

解得$e=\sqrt{3}+1$或$e=\sqrt{3}-1$(舍去).



【对点训练】

$\frac{2\sqrt{7}}{7}$ **解析**：设$|MF_1|=m$，$|MF_2|=n$，延长ON交MF_2于点A，如图所示.



由题意知$ON\parallel MF_1$，O为F_1F_2的中点，所以A为MF_2的中点.

又$\angle F_1MF_2=60°$，点N在$\angle F_1MF_2$的平分线上，

所以$\angle NMA=\angle ANM=30°$，所以$\triangle NAM$是等腰三角形，

所以$|AN|=|MA|=\frac{1}{2}|MF_2|=\frac{1}{2}n$，

则$|OA|=\frac{1}{2}|MF_1|=\frac{1}{2}m=|ON|+|AN|=b+\frac{1}{2}n$，所以$m-n=2b$.

又$m+n=2a$，所以$\begin{cases}m=a+b,\\n=a-b.\end{cases}$

又在$\triangle MF_1F_2$中，由余弦定理得$|MF_1|^2+|MF_2|^2-2|MF_1|\cdot|MF_2|\cdot\cos 60°=|F_1F_2|^2$，

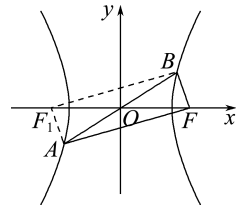
即$m^2+n^2-mn=4c^2$，即$(a+b)^2+(a-b)^2-(a+b)(a-b)=4c^2$，

化简得$a^2+3b^2=4c^2$.

又$b^2=a^2-c^2$，所以$4a^2=7c^2$，所以$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{4}{7}$，即$e=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

类型 3

例 5 A **解析**：如图所示：



设双曲线的左焦点为F_1，由双曲线的对称性可知，四边形$AFBF_1$为平行四边形，

又$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=0$，则$FA\perp FB$，所以平行四边形$AFBF_1$为矩形，故$|AB|=|FF_1|=2c$.

设$|AF_1|=n$，$|AF|=m$，则$|BF|=n$，

在Rt$\triangle ABF$中，$m-n=2a$，$m^2+n^2=4c^2$，

所以$2mn=4c^2-4a^2=4b^2$，则$mn=2b^2$，

所以$\frac{m}{n}+\frac{n}{m}=\frac{m^2+n^2}{mn}=\frac{2c^2}{b^2}$.

令$\frac{m}{n}=t$，得$t+\frac{1}{t}=\frac{2c^2}{b^2}$.

又由$|FB|<|FA|\leqslant3|FB|$，得$\frac{m}{n}=t\in(1,3]$.

因为对勾函数$y=t+\frac{1}{t}$在$(1,3]$上单调递增，所以$\frac{2c^2}{b^2}=t+\frac{1}{t}\in\left(2,\frac{10}{3}\right]$，

所以$\frac{c^2}{b^2}\in\left(1,\frac{5}{3}\right]$，即$\frac{a^2}{b^2}+1=\frac{a^2+b^2}{b^2}=\frac{c^2}{b^2}\in\left(1,\frac{5}{3}\right]$，

则$\frac{a^2}{b^2}\in\left(0,\frac{2}{3}\right]$，故$\frac{b^2}{a^2}\in\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$.

所以$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\in\left[\frac{\sqrt{10}}{2},+\infty\right)$，

所以双曲线C的离心率的取值范围是$\left[\frac{\sqrt{10}}{2},+\infty\right)$.

【对点训练】

B **解析**：由题设$\angle F_1PF_2$为锐角且$\cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{5}$，

设$|PF_1|=x$，则$|PF_2|=2a-x$且$|PQ|=\frac{3x}{5}$，$|F_1Q|=\frac{4x}{5}$，

故$|F_2Q|=\frac{3}{5}x-(2a-x)=\frac{8x}{5}-2a$.

因为Q在椭圆内部且Q在PF_2的延长线上，所以$\frac{8x}{5}-2a>0$且$\frac{4}{5}x+\frac{8}{5}x-2a<2a$.

故$\frac{5a}{4}<x<\frac{5a}{3}$.

而$4c^2=x^2+(2a-x)^2-2x\times(2a-x)\times\frac{3}{5}$，

整理得 $4c^2=\frac{16}{5}x^2-\frac{32}{5}ax+4a^2=\frac{16}{5}(x-a)^2+\frac{4a^2}{5}$.

又 $\frac{5a}{4}<x<\frac{5a}{3}$,

所以 $a^2<4c^2<\frac{100}{45}a^2$,即 $\frac{1}{2}<e<\frac{\sqrt{5}}{3}$.

综上可得 $e\in\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

迁移应用

类型一

例 1 (1)**解**:设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,由焦点坐标可知 $c=2\sqrt{5}$,

由 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$,得 $a=2$,$b=\sqrt{c^2-a^2}=4$,

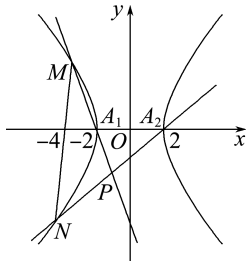
所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$.

(2)**证明**:由(1)可得 $A_1(-2,0)$,$A_2(2,0)$,设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

显然直线 MN 的斜率不为 0,所以设直线 MN 的方程为 $x=my-4$,且 $-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}$.

与 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$ 联立,消去 x,得 $(4m^2-1)y^2-32my+48=0$,且 $\Delta=64(4m^2+3)>0$,

则 $y_1+y_2=\frac{32m}{4m^2-1}$,$y_1y_2=\frac{48}{4m^2-1}$.



又直线 MA_1 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$,直线 NA_2 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$,

联立直线 MA_1 与直线 NA_2 的方程可得

$$\frac{x+2}{x-2}=\frac{y_2(x_1+2)}{y_1(x_2-2)}=\frac{y_2(my_1-2)}{y_1(my_2-6)}=\frac{my_1y_2-2(y_1+y_2)+2y_1}{my_1y_2-6y_1}$$

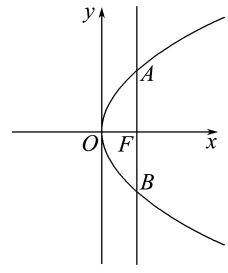
$$=\frac{m\cdot\frac{48}{4m^2-1}-2\cdot\frac{32m}{4m^2-1}+2y_1}{m\times\frac{48}{4m^2-1}-6y_1}=\frac{\frac{-16m}{4m^2-1}+2y_1}{\frac{48m}{4m^2-1}-6y_1}=-\frac{1}{3}.$$

由 $\frac{x+2}{x-2}=-\frac{1}{3}$,得 $x=-1$,即 $x_P=-1$,

据此可得点 P 在定直线 $x=-1$ 上.

【对点训练】

(1)**解**:如图所示,



抛物线 $C:y^2=2px$ 的焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$,则直线 $AB:x=\frac{p}{2}$.

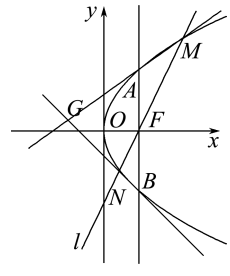
由 $\begin{cases}x=\frac{p}{2},\\ y^2=2px,\end{cases}$ 得 $|y|=p$,

依题得 $|AB|=2p=2$,解得 $p=1$,

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=2x$.

(2)**证明**:由抛物线的对称性,不妨令点 A 在 x 轴上方,由(1)知,$A\left(\frac{1}{2},1\right)$,$B\left(\frac{1}{2},-1\right)$,焦点 $F\left(\frac{1}{2},0\right)$,

显然直线 l 不垂直于坐标轴,设其方程为 $x=ty+\frac{1}{2}(t\neq0)$,如图所示.



由 $\begin{cases}x=ty+\frac{1}{2},\\ y^2=2x,\end{cases}$ 消去 x,得 $y^2-2ty-1=0$. 因为 $\Delta=(-2t)^2-4\times1\times(-1)>0$,

设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,$y_2<0<y_1$,所以 $y_1+y_2=2t$,$y_1y_2=-1$.

直线 AM 的斜率为 $k_{AM}=\frac{y_1-1}{x_1-\frac{1}{2}}=\frac{y_1-1}{\frac{y_1^2}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{2}{y_1+1}$,方程为 $y=\frac{2}{y_1+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)+1$,

直线 BN 的斜率为:$k_{BN}=\frac{y_2+1}{x_2-\frac{1}{2}}=\frac{y_2+1}{\frac{y_2^2}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{2}{y_2-1}$,方程为 $y=\frac{2}{y_2-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)-1$,

由 $\begin{cases}y=\frac{2}{y_1+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)+1,\\ y=\frac{2}{y_2+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)-1,\end{cases}$ 消去 y,

得 $\left(\frac{2}{y_1+1}-\frac{2}{y_2-1}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=-2$,

整理得 $x=\frac{1}{2}-\frac{1}{\frac{1}{y_1+1}-\frac{1}{y_2-1}}=\frac{1}{2}-\frac{(y_1+1)(y_2-1)}{(y_2-1)-(y_1+1)}$

$$=\frac{1}{2}-\frac{y_1y_2+y_2-y_1-1}{y_2-y_1-2}$$

$=\frac{1}{2}-\frac{-1+y_2-y_1-1}{y_2-y_1-2}=\frac{1}{2}-\frac{y_2-y_1-2}{y_2-y_1-2}=-\frac{1}{2}$，

因此点 G 的横坐标恒为 $-\frac{1}{2}$，所以点 G 在定直线 $x=-\frac{1}{2}$ 上.

类型二

例 2 (1)**解**：因为点 $A(-2,0)$ 在 C 上，所以 $\frac{4}{b^2}=1$，得 $b^2=4$.

因为椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，所以 $c^2=\frac{5}{9}a^2$. 又 $a^2=b^2+c^2=4+\frac{5}{9}a^2$，所以 $a^2=9$，$c^2=5$，

故椭圆 C 的方程为 $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$.

(2)**证明**：由题意知，直线 PQ 的斜率存在且不为 0，设 l_{PQ}：$y-3=k(x+2)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y-3=k(x+2),\\ \frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1,\end{cases}$ 消去 y，得 $(4k^2+9)x^2+(16k^2+24k)\cdot x+16k^2+48k=0$，

则 $\Delta=(16k^2+24k)^2-4(4k^2+9)(16k^2+48k)=-36\times 48k>0$，即 $k<0$，

故 $x_1+x_2=-\frac{16k^2+24k}{4k^2+9}$，$x_1x_2=\frac{16k^2+48k}{4k^2+9}$.

直线 AP：$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，令 $x=0$，解得 $y_M=\frac{2y_1}{x_1+2}$，同理得 $y_N=\frac{2y_2}{x_2+2}$，

则 $y_M+y_N=2\times\frac{y_1(x_2+2)+y_2(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}$

$=2\times\frac{(kx_1+2k+3)(x_2+2)+(kx_2+2k+3)(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}$

$=2\times\frac{2kx_1x_2+(4k+3)(x_1+x_2)+8k+12}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}$

$=2\times\frac{2k(16k^2+48k)+(4k+3)(-16k^2-24k)+(8k+12)(4k^2+9)}{16k^2+48k+2(-16k^2-24k)+4(4k^2+9)}$

$=2\times\frac{108}{36}$

$=6$.

所以 MN 的中点的纵坐标为 $\frac{y_M+y_N}{2}=3$，所以 MN 的中点为定点 $(0,3)$.

例 3 (1)**解**：由题意，得 $\begin{cases}2bc=4\sqrt{2},\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\sqrt{6},\\ b=\sqrt{2},\\ c=2,\end{cases}$

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)①**证明**：直线 OA，OB 的方程分别为 $y=k_1x$，$y=k_2x$.

设椭圆 C 的“卫星圆”的圆心为 (x_0,y_0).

因为直线 OA，OB 为“卫星圆”的两条切线，

所以 $\frac{|k_1x_0-y_0|}{\sqrt{1+k_1^2}}=\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$\frac{|k_2x_0-y_0|}{\sqrt{1+k_2^2}}=\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

化简，得 $(2x_0^2-3)k_1^2-4k_1x_0y_0+2y_0^2-3=0$，

$(2x_0^2-3)k_2^2-4k_2x_0y_0+2y_0^2-3=0$，

所以 k_1，k_2 为方程 $(2x_0^2-3)k^2-4kx_0y_0+2y_0^2-3=0$ 的两个根，故 $k_1k_2=\frac{2y_0^2-3}{2x_0^2-3}$.

又因为 $\frac{x_0^2}{6}+\frac{y_0^2}{2}=1$，

所以 $k_1k_2=\frac{2y_0^2-3}{2x_0^2-3}=\frac{2y_0^2-3}{9-6y_0^2}=-\frac{1}{3}$，

故 k_1k_2 为定值 $-\frac{1}{3}$.

②**解**：$|OA|^2+|OB|^2$ 是定值.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y_1=k_1x_1,\\ \frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{2}=1,\end{cases}$ $\begin{cases}y_2=k_2x_2,\\ \frac{x_2^2}{6}+\frac{y_2^2}{2}=1,\end{cases}$

解得 $x_1^2=\frac{6}{3k_1^2+1}$，$x_2^2=\frac{6}{3k_2^2+1}$，所以 $|OA|^2+|OB|^2=(1+k_1^2)\left(\frac{6}{3k_1^2+1}\right)+(1+k_2^2)\left(\frac{6}{3k_2^2+1}\right)$.

由 $k_1k_2=-\frac{1}{3}$，得 $k_2^2=\frac{1}{9k_1^2}$，

所以 $|OA|^2+|OB|^2=\frac{6(1+k_1^2)}{3k_1^2+1}+\frac{2(9k_1^2+1)}{3k_1^2+1}=\frac{8(1+3k_1^2)}{3k_1^2+1}=8$，

所以 $|OA|^2+|OB|^2$ 为定值 8.

【对点训练】

1.(1)**解**：方法一：设直线 OA_1 的方程为 $y=k_1x$，则由 $\begin{cases}y^2=4x,\\ y=k_1x,\end{cases}$ 得 $A_1\left(\frac{4}{k_1^2},\frac{4}{k_1}\right)$，所以 $|OA_1|=\left|\frac{4}{k_1}\right|\sqrt{\frac{1}{k_1^2}+1}$.

由 $\begin{cases}y^2=2px,\\ y=k_1x,\end{cases}$ 得 $A_2\left(\frac{2p}{k_1^2},\frac{2p}{k_1}\right)$，所以 $|OA_2|=\left|\frac{2p}{k_1}\right|\sqrt{\frac{1}{k_1^2}+1}$.

因为 $|OA_2|=2|OA_1|$，所以 $\left|\frac{2p}{k_1}\right|\sqrt{\frac{1}{k_1^2}+1}=2\times\left|\frac{4}{k_1}\right|\sqrt{\frac{1}{k_1^2}+1}$. 又因为 $p>0$，所以 $p=4$.

方法二：设 $A_1(x_1,y_1)$，$A_2(x_3,y_3)$. 由题意可知 $\begin{cases}x_3=2x_1,\\ y_3=2y_1.\end{cases}$ 因为 $y_1^2=4x_1^2$，所以 $\left(\frac{y_3}{2}\right)^2=4\times\frac{x_3}{2}$，所以 $y_3^2=8x_3$. 又 $y_3^2=2px_3$，所以 $2p=8$，$p=4$.

(2)**解**：设直线 l 的方程为 $x=my+1$，$A_1(x_1,y_1)$，$B_1(x_2,y_2)$，$A_2(x_3,y_3)$，$B_2(x_4,y_4)$，

则由 $\begin{cases}y^2=4x,\\ x=my+1,\end{cases}$ 得 $y^2-4my-4=0$，所以 $y_1y_2=-4$.

因为 $|OA_2|=2|OA_1|$，所以 $\triangle OA_2B_1$ 的面积是 $\triangle OA_1B_1$ 的面积的 2 倍.

因为 $S_{\triangle OA_1B_1}=S_{\triangle OA_1F_1}+S_{\triangle OF_1B_1}=\frac{1}{2}\times1\times|y_1|+\frac{1}{2}\times1\times|y_2|$，且 $y_1y_2=-4$，所以

$S_{\triangle OA_1B_1}=\frac{1}{2}|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\left|y_1+\frac{4}{y_1}\right|\geqslant\sqrt{y_1\times\frac{4}{y_1}}=2$，

当且仅当$|y_1|=2$时，等号成立，

所以$\triangle OA_1B_1$的面积的最小值是2，所以$\triangle OA_2B_1$的面积的最小值是4.

(3)**证明**：由$A_1\left(\frac{4}{k_1^2},\frac{4}{k_1}\right)$，$A_2\left(\frac{8}{k_1^2},\frac{8}{k_1}\right)$，可得$y_3=2y_1$.设直线$OB_1$的方程为$y=k_2x$，则由$\begin{cases}y^2=4x,\\y=k_2x,\end{cases}$得$B_1\left(\frac{4}{k_2^2},\frac{4}{k_2}\right)$.由$\begin{cases}y^2=8x,\\y=k_2x,\end{cases}$得$B_2\left(\frac{8}{k_2^2},\frac{8}{k_2}\right)$，所以$y_4=2y_2$.所以$y_3y_4=4y_1y_2=-16$.设直线$A_2B_2$的方程为$x=ny+t$，

又因为抛物线$C_2:y^2=8x$，由$\begin{cases}y^2=8x,\\x=ny+t,\end{cases}$消去$x$，得$y^2-8ny-8t=0$，

所以$y_3y_4=-8t$.所以$y_3y_4=-8t=-16$，所以$t=2$，

所以直线A_2B_2的方程为$x=ny+2$，所以直线A_2B_2过定点$(2,0)$.

2.解：(1)由题意得$A(-a,0)$，$B(a,0)$，$C(0,b)$，所以$\overrightarrow{CA}=(-a,-b)$，$\overrightarrow{CB}=(a,-b)$.

因为$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-4$，所以$-a^2+b^2=-4$①.

又离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{1}{2}$，解得$\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{4}$②，

联立①②解得$a^2=16$，$b^2=12$，

所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

(2)由$\begin{cases}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1,\\x=my+3,\end{cases}$消去$x$，得$(3m^2+4)y^2+18my-21=0$，$\Delta>0$，

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则$y_1+y_2=\frac{-18m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-21}{3m^2+4}$.

又$A(-4,0)$，$B(4,0)$，所以$k_1=\frac{y_1}{x_1+4}$，$k_2=\frac{y_2}{x_2-4}$，

所以$\frac{k_1}{k_2}=\frac{y_1(x_2-4)}{y_2(x_1+4)}=\frac{y_1(my_2-1)}{y_2(my_1+7)}=\frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+7y_2}=\frac{\frac{-21m}{3m^2+4}-\left(\frac{-18m}{3m^2+4}-y_2\right)}{\frac{-21m}{3m^2+4}+7y_2}=\frac{\frac{-3m}{3m^2+4}+y_2}{7\left(\frac{-3m}{3m^2+4}+y_2\right)}=\frac{1}{7}$.

类型三

例4 **解**：(1)由题意可设抛物线C的方程为$x^2=2py(p>0)$，

则$\frac{p}{2}=1$，所以$p=2$.

所以抛物线C的方程为$x^2=4y$.

(2)设点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线AB的方程为$y=kx+1$.

由$\begin{cases}y=kx+1,\\x^2=4y,\end{cases}$消去$y$并整理，得$x^2-4kx-4=0$，

则$\Delta=16k^2+16>0$，

所以$x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4$，

所以$|x_1-x_2|=4\sqrt{k^2+1}$.

由$\begin{cases}y=\frac{y_1}{x_1}x,\\y=x-2,\end{cases}$解得$x_M=\frac{2x_1}{x_1-y_1}=\frac{2x_1}{x_1-\frac{x_1^2}{4}}=\frac{8}{4-x_1}$.

同理，可得$x_N=\frac{8}{4-x_2}$，

所以$|MN|=\sqrt{2}|x_M-x_N|=\sqrt{2}\left|\frac{8}{4-x_1}-\frac{8}{4-x_2}\right|=8\sqrt{2}\cdot\left|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2-4(x_1+x_2)+16}\right|=\frac{8\sqrt{2}\cdot\sqrt{k^2+1}}{|4k-3|}$.

令$4k-3=t$，$t\neq0$，则$k=\frac{t+3}{4}$.

当$t>0$时，$|MN|=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{25}{t^2}+\frac{6}{t}+1}>2\sqrt{2}$；

当$t<0$时，$|MN|=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{5}{t}+\frac{3}{5}\right)^2+\frac{16}{25}}\geqslant\frac{8\sqrt{2}}{5}$.

综上所述，当$t=-\frac{25}{3}$，即$k=-\frac{4}{3}$时，$|MN|$取得最小值，最小值是$\frac{8\sqrt{2}}{5}$.

【对点训练】

解：(1)由题意知$\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以$\frac{c^2}{a^2}=\frac{8}{9}$.

设$a^2=9t$，$t>0$，则$c^2=8t$，所以$b^2=t$.

又$|AB|^2=a^2+b^2=10t=10$，

所以$t=1$，所以C的方程为$\frac{x^2}{9}+y^2=1$.

(2)①设$R(x,y)$，由(1)知$A(0,-1)$，又$P(m,n)$，$m\neq0$，

所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AR}=(m,n+1)\cdot(x,y+1)=mx+(n+1)(y+1)=|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AR}|\cdot\cos0=3$.①

由$k_{AP}=k_{AR}$，得$\frac{n+1}{m}=\frac{y+1}{x}$，②

由①②，得$x=\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}$，$y=\frac{n+2-m^2-n^2}{m^2+(n+1)^2}$，

故R的坐标为$\left(\frac{3m}{m^2+(n+1)^2},\frac{n+2-m^2-n^2}{m^2+(n+1)^2}\right)$.

②由①得$k_{OR}=\frac{n+2-m^2-n^2}{3m}=3k_{OP}=\frac{3n}{m}$，整理得$m^2+n^2+8n-2=0$，

即$m^2+(n+4)^2=18$，

所以点P的轨迹方程为$m^2+(n+4)^2=18(m\neq0)$.

由题意设$Q(3\cos\theta,\sin\theta)$，$K(0,-4)$，

则$|KQ|^2=(3\cos\theta)^2+(\sin\theta+4)^2=-8\sin^2\theta+8\sin\theta+25$.

设$s=\sin\theta(-1\leqslant s\leqslant1)$，则$|KQ|^2=-8s^2+8s+25=-8\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+27(-1\leqslant s\leqslant1)$，

当$s=\sin\theta=\frac{1}{2}$时，$|KQ|$取得最大值，且$|KQ|_{\max}=3\sqrt{3}$，

所以$|PQ|$的最大值为$|KQ|_{\max}+3\sqrt{2}=3(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

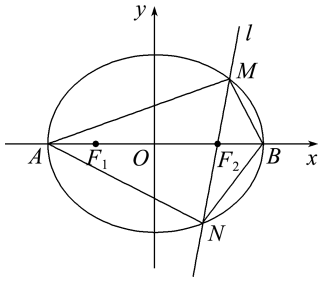
类型四

例5 **解**：由椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦距为4，可知，$c=2$.

由$\triangle F_1MN$的周长为12，可得$4a=12$，$a=3$，

所以$b^2=a^2-c^2=9-4=5$.

所以椭圆E的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$，如图所示.



(1)**证明**：设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，直线l方程为$x=my+2$.

由$\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1,\\ x=my+2,\end{cases}$得$(5m^2+9)y^2+20my-25=0$，

则$\Delta=900(m^2+1)>0$，

所以$y_1+y_2=\frac{-20m}{5m^2+9}$，$y_1y_2=\frac{-25}{5m^2+9}$，

所以$\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}=\frac{-20m}{-25}=\frac{4m}{5}$，即$my_1y_2=\frac{5}{4}(y_1+y_2)$.

则$\frac{k_1}{k_2}=\frac{\frac{y_1}{x_1+3}}{\frac{y_2}{x_2-3}}=\frac{y_1(x_2-3)}{y_2(x_1+3)}=\frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+5y_2}=\frac{\frac{5}{4}(y_1+y_2)-y_1}{\frac{5}{4}(y_1+y_2)+5y_2}=\frac{\frac{1}{4}(y_1+5y_2)}{\frac{5}{4}(y_1+5y_2)}=\frac{1}{5}$.

所以$\frac{k_1}{k_2}$为定值$\frac{1}{5}$.

(2)**解**：由题意可知，

$S_1+S_2=S_{\triangle MAB}+S_{\triangle NAB}$

$=\frac{1}{2}\times2\times3\times|y_1-y_2|=3|y_1-y_2|$

$=3\times\frac{\sqrt{(-20m)^2+4\times25\times(5m^2+9)}}{5m^2+9}$

$=\frac{90\sqrt{m^2+1}}{5m^2+9}$.

令$t=\sqrt{m^2+1}\geqslant1$，

则$S_1+S_2=\frac{90t}{5t^2+4}=\frac{90}{5t+\frac{4}{t}}$.

又$y=5t+\frac{4}{t}$在$[1,+\infty)$上单调递增，

所以当$t=1$，即$m=0$时，S_1+S_2取得最大值为$\frac{90}{5\times1+\frac{4}{1}}=10$，

所以S_1+S_2的最大值为10.

【对点训练】

解：(1)由题意知，$c=1$，

当直线l的斜率为1时，直线l恰好过椭圆的一个顶点，

所以$c=b=1$，所以$a=\sqrt{2}$，所以椭圆E的标准方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)①由题意可设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$Q(t,0)(t\neq-1)$，设直线l的方程为$x=my-1$，

由$\begin{cases}x=my-1,\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$消去$x$，得$(m^2+2)y^2-2my-1=0$，

则$y_1+y_2=\frac{2m}{m^2+2}$，$y_1y_2=\frac{-1}{m^2+2}$，得$y_1+y_2=-2my_1y_2$.

记直线QA的斜率为k_1，直线QB的斜率为k_2，则

$\frac{k_1}{k_2}=\frac{\frac{y_1}{x_1-t}}{\frac{y_2}{x_2-t}}=\frac{y_1(x_2-t)}{y_2(x_1-t)}=\frac{y_1(my_2-1-t)}{y_2(my_1-1-t)}=\frac{my_1y_2-(1+t)y_1}{my_1y_2-(1+t)y_2}=\frac{(3+2t)y_1+y_2}{y_1+(3+2t)y_2}$，

要使$\frac{k_1}{k_2}$为定值，则$\frac{3+2t}{1}=\frac{1}{3+2t}$，解得$t=-2$或$t=-1$(舍去)，此时$\frac{k_1}{k_2}=-1$，故在$x$轴上存在异于点$F$的定点$Q(-2,0)$，使得直线$QA$与直线$QB$的斜率比为定值.

②由①可得$y_1+y_2=\frac{2m}{m^2+2}$，$y_1y_2=\frac{-1}{m^2+2}$，$Q(-2,0)$，

则$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{\frac{4m^2}{(m^2+2)^2}+\frac{4}{m^2+2}}=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}$.

由$S_{\triangle ABQ}=S_{\triangle AFQ}+S_{\triangle BFQ}$，

得$S_{\triangle ABQ}=\frac{1}{2}|QF||y_1-y_2|=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}$

$=\frac{\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+1}+\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，

当且仅当$m=0$时，等号成立，所以$\triangle ABQ$面积的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

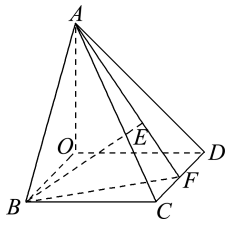
素养评价参考答案

课后素养评价(一)

基础落实

1.BCD　**解析**:对于选项 A,向量的模即向量的长度,是一个数量,所以任意两个空间向量的模可以比较大小;对于选项 B,其终点构成一个球面;对于选项 C,零向量不能用有向线段表示;对于选项 D,向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 不相等,它们的模可以相等.

2.B　**解析**:如图,连接 AE 并延长交 CD 于点 F.



因为 E 为 $\triangle ACD$ 的重心,则 F 为 CD 的中点,且 $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$,

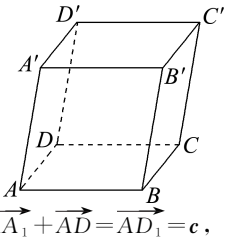
所以 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$.

3.D　**解析**:如图,对于 A,$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$,故 A 正确;

对于 B,因为 $\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{BC}$,所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}$,故 B 正确;

对于 C,$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{CC'}$,故 C 正确;

对于 D,因为 $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}$,所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{C'C}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{CC'})=\overrightarrow{AC}$,故 D 错误.故选 D.



4.B　**解析**:因为 $\begin{cases}\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD_1}=\boldsymbol{c},\\ \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b},\\ \overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB_1}=\boldsymbol{a},\end{cases}$

所以 $\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$.

能力提升

1.ACD　**解析**:利用图形及向量的运算可知,B 是相等向量,A,C,D 是相反向量.

2.BCD　**解析**:$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}\neq\overrightarrow{AC_1}$,故 A 错误;$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{AC_1}$,故 B 正确;$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AC_1}$,故 C 正确;$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AC_1}$,故 D 正确.故选 BCD.

3.B　**解析**:因为 $\overrightarrow{AE}=4\overrightarrow{AF}$,所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$.

因为 E 是 BC 的中点,

所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,

所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{8}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,

所以 $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$.

4.2　**解析**:由题意可知 $x=y=\frac{1}{2}$,$z=1$,故 $x+y+z=2$.

自我超越

解:(1)因为 G 为 $\triangle BCD$ 的重心,E,F 为边 CD,AD 的中点,

所以 $\overrightarrow{AG}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$,

所以 $\overrightarrow{AG}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AF}$.

(2)因为 E,F,H 分别为边 CD,AD 和 BC 的中点,

所以 $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(2\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AH}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FH}$.

(3)$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\times2\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AG}$.

课后素养评价(二)

基础落实

1.A　**解析**:由共面向量定理易得答案选 A.

2.A　**解析**:由 $m+n=1$ 可得 $m=1-n$.

结合题意可知 $\overrightarrow{OP}=(1-n)\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+n(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$,即 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=n(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$,所以 $\overrightarrow{AP}=n\overrightarrow{AB}$.据此可知 A,P,B 三点共线,点 P 一定在直线 AB 上.

3.C　**解析**:因为 $5\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{DA}$,所以 $5\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AD}$,即 $5\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AD}$,故 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

因为 $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1$,所以 P,B,C,D 四点共面,故 C 正确.

4.D　**解析**：由题意知，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共线，所以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不可以构成三角形.

5.D　**解析**：对于 A，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$ 是共面向量；对于 B，$-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+(-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，所以 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，$-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 是共面向量；对于 C，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$ 是共面向量；对于 D，令 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=x(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+y\boldsymbol{c}$，显然 x，y 无解，故 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不是共面向量.

6.2　**解析**：因为 A，B，C 三点共线，所以 $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{BC}$. 因为 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 不共面，所以有 $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3=x(\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2+\mu\boldsymbol{e}_3)$ $=x\boldsymbol{e}_1+x\lambda\boldsymbol{e}_2+x\mu\boldsymbol{e}_3$，故 $\begin{cases}x=1,\\x\lambda=1,\\x\mu=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=1,\\\mu=1,\end{cases}$ 所以 $\lambda+\mu$ $=1+1=2$.

能力提升

1.C　**解析**：由 $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PB_1}+7\overrightarrow{BA}+6\overrightarrow{AA_1}-4\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{PB_1}$ $+\overrightarrow{BA}+6\overrightarrow{BA_1}-4\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{PB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+6\overrightarrow{BA_1}-$ $4\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{PA_1}+6(\overrightarrow{PA_1}-\overrightarrow{PB})-4(\overrightarrow{PD_1}-\overrightarrow{PA_1})=$ $11\overrightarrow{PA_1}-6\overrightarrow{PB}-4\overrightarrow{PD_1}$，易知 M，B，A_1，D_1 四点共面. 故选 C.

2.A　**解析**：因为 M，A，B，C 四点共面，所以 $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\lambda=1$，解得 $\lambda=\frac{7}{12}$. 故选 A.

3.B　**解析**：由 $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}(x,y>0)$ 及 A，B，C，D 四点共面，得 $\frac{1}{2}+x+y=1$，即 $x+y=\frac{1}{2}$.

又 $x>0$，$y>0$，所以 $xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{16}$，当且仅当 $x=y$ $=\frac{1}{4}$ 时等号成立.

自我超越

解：(1)由题可得，

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=p\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+q\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(p-1)\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+(q-1)\boldsymbol{c}$，

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$.

因为 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AC}$，所以 $(p-1)\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+(q-1)\boldsymbol{c}=m(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})$，

即 $\begin{cases}p-1=m,\\3=3m,\\q-1=-3m,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=1,\\p=2,\\q=-2,\end{cases}$

所以 p，q 的值分别为 2，-2.

(2)因为 O，A，B，C 四点共面，所以存在 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$，使得 $\overrightarrow{OB}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OC}$，

即 $p\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+q\boldsymbol{c}=\lambda(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\mu(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})=(\lambda+2\mu)\cdot\boldsymbol{a}+(\mu-2\lambda)\boldsymbol{b}+(\lambda-2\mu)\boldsymbol{c}$，

所以 $\begin{cases}p=\lambda+2\mu,\\1=\mu-2\lambda,\\q=\lambda-2\mu,\end{cases}$

所以 $3p+5q=3(\lambda+2\mu)+5(\lambda-2\mu)=8\lambda-4\mu=-4(\mu-2\lambda)=-4$，

即 $3p+5q$ 的值为 -4.

课后素养评价(三)

基础落实

1.D　**解析**：由数量积运算的交换律可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$，故选项 A 正确. 由数量积运算的分配律可得 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，故选项 B 正确. 由数量积运算的数乘结合律可得 $\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，故选项 C 正确. $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 表示与 $\boldsymbol{c}$ 共线的向量，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 共线的向量，所以 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 不一定相等，故选项 D 错误.

2.B　**解析**：由题意可得 $AB\perp AD$，$AB\perp AA_1$，

所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，

所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$. 故选 B.

3.D　**解析**：在正三棱锥 P-ABC 中，O 为 $\triangle ABC$ 的中心，$PA=AB=2$，$OA=OB=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{2}{\sqrt{3}}$. 又 $PO\perp$ 平面 ABC，OA，$OB\subset$ 平面 ABC，所以 $PO\perp OA$，$PO\perp OB$，且 $PO^2=2^2-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{8}{3}$，所以 $\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})=\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB})=2\overrightarrow{PO}^2=2\times\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$.

4.45°　**解析**：由于 $\boldsymbol{a}$ 与 $2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 互相垂直，

所以 $\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=0$，

即 $2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-|\boldsymbol{a}|^2=0$，

所以 $2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=4$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{4}{2\times2\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 45°.

5.$(-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3})$　**解析**：由题意知 $\begin{cases}(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})<0,\\\cos\langle\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},\lambda\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}\rangle\neq-1,\end{cases}$

即 $\begin{cases}(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})<0,\\(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\neq-|\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}||\lambda\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|,\end{cases}$

得 $\lambda^2+2\lambda-2<0$，解得 $-1-\sqrt{3}<\lambda<-1+\sqrt{3}$.

故实数 λ 的取值范围是 $(-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3})$.

6.**解**：因为 $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$，所以 $|\overrightarrow{AC_1}|^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1})^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CC_1}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CC_1}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC_1}=1+1+1+2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cdot\cos60°+2|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{CC_1}|\cos60°+2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CC_1}|\cdot\cos60°=6$. 所以 $|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{6}$，故 AC_1 的长为 $\sqrt{6}$.

能力提升

1.C　**解析**：因为四棱锥 P-$ABCD$ 是正四棱锥，

所以四边形 $ABCD$ 为正方形，$PA=PB=PC=PD$.

因为 $PA=AB$，

所以 $\triangle PAB$ 和 $\triangle PAD$ 均为等边三角形且边长均相等，

所以 $AB\perp AD$，$\angle PAB=\angle PAD=60°$.

因为 M 为 PA 的中点，$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BN}$，

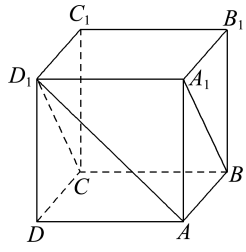
所以 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{\lambda}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AD}+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AB}$.

因为 $MN\perp AD$，所以 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，

即 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AD}=\left[-\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AD}+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AB}\right]\cdot\overrightarrow{AD}$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AD}^2+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\times|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AD}|\cos 60^\circ+\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AD}^2=-\frac{1}{4}|\overrightarrow{AD}|^2+\frac{1}{\lambda}|\overrightarrow{AD}|^2=0$，解得 $\lambda=4$.

2.AB　**解析**：如图，$(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})^2=(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})^2=\overrightarrow{A_1C}^2=3\overrightarrow{AB}^2$，故 A 正确；



由正方体的性质易证 $AB_1\perp$ 平面 A_1BC，因为 $A_1C\subset$ 平面 A_1BC，所以 $AB_1\perp A_1C$，所以 $\overrightarrow{A_1C}\cdot(\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{A_1A})=\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0$，故 B 正确；

$\overrightarrow{AD_1}$ 与 $\overrightarrow{A_1B}$ 的夹角是 $\overrightarrow{D_1C}$ 与 $\overrightarrow{D_1A}$ 夹角的补角，而 $\overrightarrow{D_1C}$ 与 $\overrightarrow{D_1A}$ 的夹角为 60°，故 $\overrightarrow{AD_1}$ 与 $\overrightarrow{A_1B}$ 的夹角为 120°，故 C 错误；

正方体的体积为 $|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{A_1A}||\overrightarrow{AD}|$，故 D 错误.

3.D　**解析**：由题意得，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AD}|=2$，$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=90^\circ$，$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\rangle=60^\circ$，$\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\rangle=60^\circ$，

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\times2\times\frac{1}{2}=2$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=2\times2\times\frac{1}{2}=2$.

因为 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，

所以 $|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)^2}=1$.

4.{1}　**解析**：由题意得 $x_i=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_i}=\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP_i})=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP_i}(i=1,2,\cdots,8)$. 又因为 $AB\perp$ 平面 $BP_2P_8P_6$，$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BP_i}$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP_i}=0$. 所以 $x_i=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP_i}=|\overrightarrow{AB}|^2=1$，则 $x_i=AB\cdot\overrightarrow{AP_i}(i=1,2,\cdots,8)=1$.

5.(1)**证明**：因为 $\angle BAD=90^\circ$，所以 $AB\perp AD$. 因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，AB，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AP\perp AB$，$AP\perp AD$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}=0$. 由题意知，$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{DC})=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$，则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{DM}=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AP}|^2=0$，

所以 $\overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{DM}$，即 $PB\perp DM$.

(2)**解**：设 $PA=AD=AB=2BC=2$.

因为 $\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，

所以 $|\overrightarrow{PD}|^2=|\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP}|^2=\overrightarrow{AD}^2-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AP}^2=8$，所以 $|\overrightarrow{PD}|=2\sqrt{2}$.

因为 $|\overrightarrow{AC}|^2=\left|\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AD}|^2=5$，所以 $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{5}$.

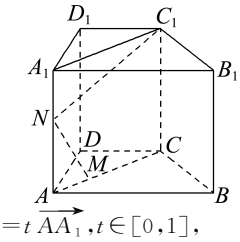
因为 $\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP})\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}|^2=2$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{PD},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{2}{2\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

故 AC 与 PD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

自我超越

B　**解析**：如图，



设 $AA_1=h$，$\overrightarrow{AN}=t\overrightarrow{AA_1}$，$t\in[0,1]$，

则 $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-t\overrightarrow{AA_1}$，$\overrightarrow{NC_1}=\overrightarrow{NA_1}+\overrightarrow{A_1C_1}=(1-t)\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AC}$，

$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NC_1}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-t\overrightarrow{AA_1}\right)\cdot[\overrightarrow{AC}+(1-t)\overrightarrow{AA_1}]=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}^2+t(t-1)\overrightarrow{AA_1}^2+\frac{1-4t}{3}\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

因为 $AC=3\sqrt{3}$，$AA_1\perp AC$，所以 $\overrightarrow{AC}^2=27$，$\overrightarrow{AA_1}^2=h^2$，$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

代入整理得，$t(t-1)h^2+9=0$，显然 $t(t-1)\neq0$，故 $h^2=\frac{9}{-t^2+t}=\frac{9}{-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$.

因为 $0<t<1$，所以当 $t=\frac{1}{2}$ 时，$y=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ 取得最大值 $\frac{1}{4}$，

此时 h^2 取得最小值为 36，故棱 AA_1 长度的最小值为 6.

课后素养评价(四)

基础落实

1.D　**解析**：因为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 为共面向量，所以不能作为基底，故 A 错误；因为 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 为共面向量，所以不能作为基底，故 B 错误；因为 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 为共面向量，所以不能作为基底，故 C 错误；因为 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 为不共面向量，所以能作为基底，故 D 正确. 故选 D.

2.B　**解析**：因为 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 为空间的一个单位正交基底，所以

$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0$，$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1$.

所以 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=(8\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k})\cdot(-\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})=-8\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+40\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}-32\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}-3\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+15\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}-12\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=-20$.故选 B.

3.0　**解析**：因为$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$是空间的一个基底，所以$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$为不共面向量.

又因为$\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2+v\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{0}$，所以$\lambda=\mu=v=0$，所以$\lambda^2+\mu^2+v^2=0$.

4.$\frac{3}{2}$　**解**：因为$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1})$，

则$x=y=z=\frac{1}{2}$，所以$x+y+z=\frac{3}{2}$.

5.解：(1)$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA}$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})+\lambda\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{c}$.

(2)因为三棱锥的各棱长都为 1，则$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{c}^2=1$，

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}$，

所以$|\overrightarrow{DE}|^2=\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{c}\right)^2$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\lambda^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\lambda\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

$=\frac{3}{4}+\lambda^2-\lambda=\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$，

故当$\lambda=\frac{1}{2}$时，$|\overrightarrow{DE}|$取得最小值，且$|\overrightarrow{DE}|_{\min}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

能力提升

1.D　**解析**：因为 N 为 BC 的中点，

所以$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$.

由题意可得$\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{GN}$，则$\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OM}=2(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OG})$，

所以$3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$，则$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$，

故$x=\frac{1}{6}$，$y=\frac{1}{3}$，$z=\frac{1}{3}$.

2.$-\frac{1}{12}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$　**解析**：由题意，连接 AE（图略），则$\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$=-\frac{1}{12}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

3.$\frac{5}{6}$　**解析**：在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$CC_1\parallel DD_1$，

则$\angle BD_1D$是异面直线BD_1与CC_1所成角或其补角.

因为$\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，$AB=1$，$AD=AA_1=2$，

所以$BD=\sqrt{AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\angle BAD}=\sqrt{3}$，

$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{AD_1}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$，

$|\overrightarrow{BD_1}|=$

$\sqrt{\overrightarrow{AA_1}^2+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}}$

$=\sqrt{2^2+2^2+1^2+2\times2\times2\times\frac{1}{2}-2\times2\times1\times\frac{1}{2}-2\times1\times2\times\frac{1}{2}}$

$=3$.

在$\triangle BDD_1$中，$\cos\angle BD_1D=\frac{BD_1^2+DD_1^2-BD^2}{2BD_1\cdot DD_1}=\frac{3^2+2^2-(\sqrt{3})^2}{2\times3\times2}=\frac{5}{6}$.

4.(1)**解**：设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，则

$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{c}|$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{c}|$.

因为$\overrightarrow{AC_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，

所以$|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2}$

$=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}$

$=\sqrt{2+|\boldsymbol{c}|^2+2|\boldsymbol{c}|}=\sqrt{26}$，

解得$|\boldsymbol{c}|=4$，所以$AA_1=4$.

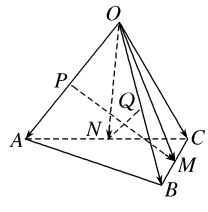
(2)**证明**：$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{MN}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)=0$，

所以$\overrightarrow{AC_1}\perp\overrightarrow{MN}$，故$AC_1\perp MN$.

5.证明：如图，取$\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$为空间的一个基底.

由题意得$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$，



所以$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OC})$，

$\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AB})$，

所以$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{QN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OC})\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2)$.

又因为$AB=OC$，则$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{OC}|$，所以$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{QN}=0$，即$PM\perp QN$.

自我超越

ABD　**解析**：由题意可知$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=2\times2\times\frac{1}{2}=2$.

对于 A，因为$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，故 A 正确；

对于 B，因为$\overrightarrow{BD_1}^2=(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=4+4+4-0+4-4=12$，所以$|\overrightarrow{BD_1}|=2\sqrt{3}$，即 BD_1 的长为 $2\sqrt{3}$，故 B 正确；

对于 C，因为$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，且$|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{2}$，

所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD_1}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-4+4+2+2=4$，

可得$\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD_1}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD_1}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD_1}|}=\dfrac{4}{2\sqrt{2}\times2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

所以异面直线 AC 与 BD_1 所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，故 C 错误；

对于 D，因为$\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，

且$\overrightarrow{B_1D_1}=\overrightarrow{A_1D_1}-\overrightarrow{A_1B_1}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，

则$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{B_1D_1}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-4+4+2-2=0$，

所以 $A_1C\perp B_1D_1$，故 D 正确.

课后素养评价(五)

基础落实

1.B　**解析**：在空间直角坐标系中，点 $A(4,-3,5)$，$B(-2,1,-7)$，则线段 AB 的中点坐标是$\left(\dfrac{4-2}{2},\dfrac{-3+1}{2},\dfrac{5-7}{2}\right)$，即$(1,-1,-1)$.故选 B.

2.A　**解析**：点 P 的纵坐标与竖坐标不变，只有横坐标发生变化，在空间中表示一条直线.故选 A.

3.A　**解析**：由题图可知，点 $A(1,-1,-1)$，所以点 A 关于 y 轴对称的点的坐标为$(-1,-1,1)$.故选 A.

4.$(-5,0,2)$　**解析**：因为$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$是空间的一个单位正交基底，则有 $\boldsymbol{b}=-5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}=(-5,0,2)$.

所以向量 $\boldsymbol{b}=-5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}$ 用坐标形式表示为$(-5,0,2)$.

5.解：(1)由于三条坐标轴两两互相垂直，所以 Oyz 平面与 x 轴垂直，Ozx 平面与 y 轴垂直，Oxy 平面与 z 轴垂直.

(2)过点 P 作 $PP_1\perp Oxy$ 平面(图略)，则射影为$(3,1,0)$，即点 P 在 Oxy 平面上的射影为$(3,1,0)$.同理，点 P 在 Oyz 平面上的射影为$(0,1,5)$，点 P 在 Ozx 平面上的射影为$(3,0,5)$.

能力提升

1.A　**解析**：在空间直角坐标系中，点 B 是点 $A(2,1,-5)$ 在坐标平面 Oyz 内的射影，所以点 B 的坐标为$(0,1,-5)$.

2.B　**解析**：设所求点的坐标为(x,y,z)，

根据关于平面 Oxy 对称的两个点的横纵坐标不变，竖坐标互为相反数，

得$\begin{cases}x=3,\\y=-4,\\z=-5,\end{cases}$故该点为$(3,-4,-5)$.

3.ACD　**解析**：因为在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=5$，$AD=4$，$AA_1=3$，

所以点 B_1 的坐标为$(4,5,3)$，故 A 正确.

易知 $C_1(0,5,3)$，$B(4,5,0)$，

设点 C_1 关于点 B 对称的点为(x_0,y_0,z_0)，

则$\dfrac{x_0}{2}=4$，$\dfrac{y_0+5}{2}=5$，$\dfrac{z_0+3}{2}=0$，

解得 $x_0=8$，$y_0=5$，$z_0=-3$.

则点 C_1 关于点 B 对称的点为$(8,5,-3)$，故 B 错误.

由立体几何的特征知，点 A 关于直线 BD_1 对称的点为 $C_1=(0,5,3)$，故 C 正确.

由立体几何的特征知，点 C 关于平面 ABB_1A_1 对称的点为$(8,5,0)$，故 D 正确.

故选 ACD.

4.ABC　**解析**：由题意得$\overrightarrow{AB}=(1,-3,-3)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,0,-3)$，$\overrightarrow{BC}=(-3,3,0)$.

设点 D 的坐标为(x,y,z)，

若四边形 $ABDC$ 为平行四边形，则$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，则$(1,-3,-3)=(x+1,y-2,z)$，

所以点 D 的坐标为$(0,-1,-3)$；

若四边形 $ABCD$ 为平行四边形，则$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，

则$(1,-3,-3)=(-x-1,-y+2,-z)$，所以点 D 的坐标为$(-2,5,3)$；

若四边形 $ADBC$ 为平行四边形，则$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$，

则$(x-1,y-2,z-3)=(3,-3,0)$，所以点 D 的坐标为$(4,-1,3)$.

5.$\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{b}{3},\dfrac{c}{3}\right)$　**解析**：由题意知 $A(a,0,0)$，$B(0,b,0)$，$C(0,0,c)$.

由重心坐标公式得点 G 的坐标为$\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{b}{3},\dfrac{c}{3}\right)$.

6.-3　**解析**：在空间直角坐标系中，两点 $P(5,1,a)$ 与 $Q(5,b,4)$ 关于坐标平面 Oxy 对称，

则 $b=1$，$a=-4$，所以 $a+b=-3$.

自我超越

C　**解析**：三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，因为侧面 BB_1C_1C 是边长为 2 的菱形，$\angle CBB_1=60°$，BC_1 交 B_1C 于点 O，所以 $\triangle BB_1C$ 为等边三角形，所以 $OB=\sqrt{3}$，$OB_1=OC=1$.又因为 $AO\perp$ 侧面 BB_1C_1C，且 $\triangle AB_1C$ 为等腰直角三角形，所以 $AO=1$，所以点 $A(0,0,1)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$B_1(0,1,0)$.设点 $A_1(x,y,z)$，$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},0,-1)$，$\overrightarrow{A_1B_1}=(-x,1-y,-z)$，又$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$，所以$\begin{cases}-x=\sqrt{3},\\1-y=0,\\-z=-1,\end{cases}$解得 $x=-\sqrt{3}$，$y=1$，$z=1$，故点 A_1 的坐标为$(-\sqrt{3},1,1)$.

课后素养评价(六)

基础落实

1.A　**解析**：因为 $2\boldsymbol{b}=(4,2,0)$，所以 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(-3,1,-2)$.故选 A.

2.A　**解析**：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\cos\alpha+\sin\alpha,2,\sin\alpha+\cos\alpha)$，

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(\cos\alpha-\sin\alpha,0,\sin\alpha-\cos\alpha)$，

所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，

所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.故选 A.

3.A　**解析**：与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量为$\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}\boldsymbol{b}$，

由 $\boldsymbol{a}=(0,1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,3)$，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0+2-3=-1$，

$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$，

所以向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{-1}{\sqrt{14}}\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}\boldsymbol{b}=-\frac{1}{14}\boldsymbol{b}$.故选 A.

4.BCD　**解析**：对于 A，$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2(-2,-1,1)+(3,4,5)=(-1,2,7)$，因为 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\neq\lambda\boldsymbol{a}$，所以不平行，故 A 错误；对于 B，因为 $5|\boldsymbol{a}|=5\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+1^2}=5\sqrt{6}$，$\sqrt{3}|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}\sqrt{3^2+4^2+5^2}=5\sqrt{6}$，所以 $5|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{b}|$，故 B 正确；对于 C，$5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}=5(-2,-1,1)+6(3,4,5)=(8,19,35)$，$\boldsymbol{a}\cdot(5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b})=-2\times8-1\times19+1\times35=0$，所以 $\boldsymbol{a}\perp(5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b})$，故 C 正确；对于 D，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值为 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{-6-4+5}{\sqrt{6}\cdot5\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$，故 D 正确.

5.$\left(\frac{3}{13},\frac{4}{13},\frac{12}{13}\right)$或$\left(-\frac{3}{13},-\frac{4}{13},-\frac{12}{13}\right)$　**解析**：设 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，由题意有 $\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ |\boldsymbol{a}|=1,\end{cases}$ 代入坐标可解得

$$\begin{cases}x=\frac{3}{13},\\ y=\frac{4}{13},\\ z=\frac{12}{13}\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=-\frac{3}{13},\\ y=-\frac{4}{13},\\ z=-\frac{12}{13}.\end{cases}$$

6.解：(1)因为 $\boldsymbol{a}=(-1,0,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2,0)$，

所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-2,2,1)$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{4+4+1}=3$.

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{2+0+1}{\sqrt{2}\times3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$.

(2)因为 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,-2,2)$，$\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}=(-1-t,2t,1)$，

又 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}$ 垂直，所以 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b})=0$，

即 $-1\times(-1-t)+2t\times(-2)+1\times2=0$，解得 $t=1$.

能力提升

1.B　**解析**：因为 $\boldsymbol{a}=(1,n,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,1,2)$，所以 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(4,2n-1,2)$.

因为 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，所以 $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以 $-8+2n-1+4=0$，解得 $n=\frac{5}{2}$，所以 $\boldsymbol{a}=\left(1,\frac{5}{2},2\right)$，所以 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1+\frac{25}{4}+4}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$.故选 B.

2.AC　**解析**：对于 A，由 $|\boldsymbol{a}|=2$，可得 $\sqrt{1^2+(-1)^2+m^2}=2$，解得 $m=\pm\sqrt{2}$，故 A 选项正确；对于 B，由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，可得 $-2-m+1+2m=0$，解得 $m=1$，故 B 选项错误；对于 C，若存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，则 $\begin{cases}1=-2\lambda,\\ -1=\lambda(m-1),\\ m=2\lambda,\end{cases}$ 显然 λ 无解，即不存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，故 C 选项正确；对于 D，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$，则 $-2-m+1+2m=-1$，解得 $m=0$，于是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,-2,2)$，故 D 选项错误.故选 AC.

3.B　**解析**：设 O 为坐标原点，因为 E,F 分别为线段 BC，AD 的中点，

所以 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})$，$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

所以 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD})=\frac{1}{2}[(3,-5,-2)+(-7,-1,-4)]$

$=\frac{1}{2}(-4,-6,-6)=(-2,-3,-3)$.

4.C　**解析**：由 P,A,B,C 四点共面，可得 $\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}$ 共面，

设 $\overrightarrow{PC}=x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}=(2x-y,x+2y,-3x+3y)=(\lambda,6,-9)$，

则 $\begin{cases}2x-y=\lambda,\\ x+2y=6,\\ -3x+3y=-9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=4,\\ y=1,\\ \lambda=7.\end{cases}$故选 C.

自我超越

B　**解析**：因为 $O(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,-1,1)$，

所以 $\overrightarrow{OA}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{OB}=(0,-1,1)$，

故 $\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}=(1,0,0)+\lambda(0,-1,1)=(1,-\lambda,\lambda)$.

所以 $|\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}|=\sqrt{1^2+(-\lambda)^2+\lambda^2}=\sqrt{1+2\lambda^2}$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$，

$(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OB}=1\times0+(-\lambda)\times(-1)+\lambda\times1=2\lambda$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB}\rangle=\frac{(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=\frac{2\lambda}{\sqrt{1+2\lambda^2}\times\sqrt{2}}$.

因为 $\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，

所以 $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{2\lambda}{\sqrt{1+2\lambda^2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

解得 $\lambda=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，

经检验 $\lambda=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 不合题意，舍去，所以 $\lambda=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

课后素养评价(七)

基础落实

1.A　**解析**：因为 $\overrightarrow{AB}=(-2-a,1,b+1)$，直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{m}=(3,-2,1)$，所以有向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\boldsymbol{m}$ 共线，所以 $\frac{-2-a}{3}=\frac{1}{-2}=\frac{b+1}{1}$，解得 $a=-\frac{1}{2}$，$b=-\frac{3}{2}$.所以 $a+b=-2$.故选 A.

2.A　**解析**：由题意，$\boldsymbol{a}=(1,2,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,3,2)$ 分别为直线 l_1,l_2 的方向向量.因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2+6-4=0$，所以 l_1 与 l_2 的位置关系是 $l_1\perp l_2$.故选 A.

3.D　**解析**：设平面 α 的单位法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1$①，

因为直线 a，b 均平行于平面 α，所以有 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{a}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{b}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-z=0②,\\ x-y=0③.\end{cases}$

由①②③可得 $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x=y=z=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4.BCD　**解析**：由题意得 $\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,2,1)$，$\overrightarrow{BC}=(-3,1,1)$.对于 A，因为 $\frac{2}{-1}\neq\frac{1}{2}$，所以 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 不是共线向量，故 A 错误；对于 B，与 $\overrightarrow{AC}$ 同向的单位向量是 $\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}}(-1,2,1)=\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$，故 B 正确；对于 C，$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 夹角的余弦值是 $\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{2\times(-3)+1\times1+0\times1}{\sqrt{2^2+1^2+0^2}\times\sqrt{(-3)^2+1^2+1^2}}=\frac{-5}{\sqrt{55}}=-\frac{\sqrt{55}}{11}$，故 C 正确；对于 D，记 $\boldsymbol{a}=(1,-2,5)\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{a}=2\times1+1\times(-2)+0\times5=0$，$\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{a}=-1\times1+2\times(-2)+1\times5=0$，从而平面 ABC 的一个法向量的坐标是 $(1,-2,5)$，故 D 正确.

5.$(0,1,1)$（答案不唯一）　**解析**：根据题意，设 $BD=AB=CD=1$，则 $D(0,1,0)$，$C(1,1,0)$，$A(0,0,1)$，所以 $\overrightarrow{DC}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{AD}=(0,1,-1)$.

设平面 ACD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则有 $\begin{cases}\overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{m}=x=0,\\ \overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{m}=y-z=0.\end{cases}$ 令 $y=1$，可得 $z=1$，$x=0$，所以 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$ 为平面 ACD 的一个法向量.

能力提升

1.A　**解析**：由题可得 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1,m-2,0)$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(3,0,k-3)$.

又 $\overrightarrow{OA}$ 为平面 ABC 的法向量，

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=1\times1+2\times(m-2)+3\times0=2m-3=0$，

解得 $m=\frac{3}{2}$，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times3+2\times0+3(k-3)=3k-6=0$，解得 $k=2$，所以 $mk=3$.故选 A.

2.B　**解析**：对于 B，$\overrightarrow{AP}=\left(-1,4,-\frac{1}{2}\right)$，则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=(3,1,2)\cdot\left(-1,4,-\frac{1}{2}\right)=0$，所以 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AP}$.

故点 $P\left(1,3,\frac{3}{2}\right)$ 在平面 α 内.故选 B.

3.A　**解析**：$\overrightarrow{BA}=(1,-2,1)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,-4,4)$，$\overrightarrow{BP}=(-3,x-3,3)$，设平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a-2b+c=0,①\\ -a-2b+2c=0.②\end{cases}$

①+②得 $-4b+3c=0$，

令 $c=4$，则 $b=3$，$a=2$，所以 $\boldsymbol{n}=(2,3,4)$.

因为 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{BP}$，所以 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0$，即 $-3\times2+3(x-3)+3\times4=0$，解得 $x=1$.

自我超越

B　**解析**：由题意得，$B(2,0,0)$，$E(1,1,2)$，设 $F(x,y,z)$，$0\leqslant x,y,z\leqslant2$，

所以 $\overrightarrow{BE}=(-1,1,2)$，$\overrightarrow{BF}=(x-2,y,z)$.

因为平面 BEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(8,2,3)$，

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=-8+2+6=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=8(x-2)+2y+3z=0,\end{cases}$ 即 $8x+2y+3z-16=0$.

若 F 在 AD 上，则 $x=0$，$z=0$，$y=8$，不符合题意，故 F 不在 AD 上；

若 F 在 CD 上，则 $x=\frac{3}{2}$，$y=2$，$z=0$，符合题意，故 F 可以在 CD 上；

若 F 在 CC_1 上，则 $x=2$，$y=2$，$z=-\frac{4}{3}$，不符合题意，故 F 不在 CC_1 上；

若 F 在 DD_1 上，则 $x=0$，$y=2$，$z=4$，不符合题意，故 F 不在 DD_1 上.

课后素养评价（八）

基础落实

1.D　**解析**：因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}=-3+4-1=0$，所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{u}$.所以 $l\parallel\alpha$ 或 $l\subset\alpha$.

2.A　**解析**：因为 $l\parallel\alpha$，所以 $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{n}$，则 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0$，

所以 $3\times1+(a+b)\times1+(a-b)\times3=0$，整理得 $2b-4a=3$.

3.D　**解析**：平面 α 的一个法向量是 $(2,-1,1)$，$\alpha\parallel\beta$.

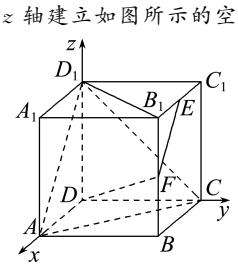
设平面 β 的法向量为 (x,y,z)，则 $(2,-1,1)=\lambda(x,y,z)$，$\lambda\neq0$.

对比四个选项可知，只有 D 符合要求.故选 D.

4.C　**解析**：因为 $\alpha\parallel\beta$，所以平面 α 的法向量 $(2,3,-1)$ 与平面 β 的法向量 $(4,\lambda,-2)$ 共线.

所以 $\frac{2}{4}=\frac{3}{\lambda}=\frac{-1}{-2}$，解得 $\lambda=6$.故选 C.

5.BC　**解析**：以 D 为坐标原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$，$D(0,0,0)$，$A_1(2,0,2)$，$B_1(2,2,2)$，$C_1(0,2,2)$，$D_1(0,0,2)$，$E(1,2,2)$，$F(2,2,1)$.

对于 A，$\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,2)$，$\overrightarrow{EF}=(1,0,-1)$，则 $\overrightarrow{AD_1}=-2\overrightarrow{EF}$，故 A 错误；

对于 B，$\overrightarrow{B_1D_1}=(-2,-2,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$，则 $\overrightarrow{B_1D_1}\cdot\overrightarrow{AC}=4-4=0$，故 B 正确；

对于 C，$\overrightarrow{DF}=(2,2,1)$，则 $|\overrightarrow{DF}|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$，故 C 正确；

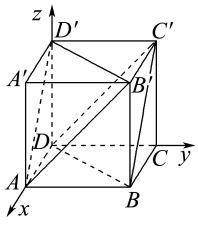
对于 D，$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AD_1}=-4+2\neq0$，所以 $\overrightarrow{DF}$ 不是平面 ACD_1 的一个法向量，故 D 错误.

6.-8　**解析**：因为 $l\parallel\alpha$，所以 l 的方向向量与 α 的法向量垂直.

所以$(2,m,1)\cdot\left(1,\frac{1}{2},2\right)=2+\frac{1}{2}m+2=0$，

解得 $m=-8$.

7.证明：设正方体的棱长为 1，建立如图所示的空间直角坐标系 $Dxyz$，



则 $A(1,0,0)$，$B'(1,1,1)$，$D'(0,0,1)$，$B(1,1,0)$，$D(0,0,0)$，$C'(0,1,1)$，

所以$\overrightarrow{AB'}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{D'B'}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{DC'}=(0,1,1)$.

设平面 $AB'D'$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{AB'}$，$\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{D'B'}$，即$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB'}=y_1+z_1=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{D'B'}=x_1+y_1=0.\end{cases}$

令 $y_1=1$，则 $x_1=-1$，$z_1=-1$，可得平面 $AB'D'$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(-1,1,-1)$.

设平面 BDC' 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{DB}$，$\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{DC'}$，即$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DB}=x_2+y_2=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DC'}=y_2+z_2=0.\end{cases}$

令 $y_2=1$，则 $x_2=-1$，$z_2=-1$，可得平面 BDC' 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(-1,1,-1)$.

因为 $\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{n}_2$，即 $\boldsymbol{n}_1\parallel\boldsymbol{n}_2$.

故平面 $AB'D'\parallel$ 平面 BDC'.

能力提升

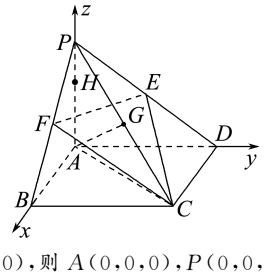
1.ABC　**解析**：由题意可知，所研究平面的法向量垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(4,2,2)$ 和向量 $\overrightarrow{PM}$.

而$\overrightarrow{PM}=(2,0,1)-(2,-2,-3)=(0,2,4)$.

选项 A，$(4,2,2)\cdot(-1,4,-2)=0$，$(0,2,4)\cdot(-1,4,-2)=0$ 满足垂直，故正确；同理可得 B，C 也满足题意.

故选 ABC.

2.C　**解析**：以 A 为坐标原点，AB，AD，AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



设 $AD=a(a>0)$，则 $A(0,0,0)$，$P(0,0,a)$，$C(a,a,0)$，$E\left(0,\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$，$F\left(\frac{a}{2},0,\frac{a}{2}\right)$，

所以$\overrightarrow{EF}=\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{2},0\right)$，$\overrightarrow{AP}=(0,0,a)$，$\overrightarrow{PC}=(a,a,-a)$，$\overrightarrow{EC}=\left(a,\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$.

设平面 EFC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{a}{2}x-\frac{a}{2}y=0,\\ \overrightarrow{EC}\cdot\boldsymbol{n}=ax+\frac{a}{2}y-\frac{a}{2}z=0.\end{cases}$　令 $x=1$，得 $y=1$，$z=3$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,3)$ 为平面 EFC 的一个法向量.

由$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{GP}$，得 G 是 PC 的中点，所以 $G\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$.

由 $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{HP}$，得 $H\left(0,0,\frac{\lambda a}{1+\lambda}\right)$，所以 $\overrightarrow{GH}=\left(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2},\frac{\lambda a}{1+\lambda}-\frac{a}{2}\right)$.

因为 $GH\parallel$ 平面 EFC，所以$\overrightarrow{GH}\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+\frac{3\lambda a}{1+\lambda}-\frac{3a}{2}=0$，解得 $\lambda=5$.故选 C.

3.-3　**解析**：设平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{AB}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(0,1,-1)$，

则有$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=x-z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=y-z=0.\end{cases}$

令 $z=1$，则 $x=1$，$y=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$ 为平面 ABC 的一个法向量.

因为直线 $l\parallel$ 平面 ABC，所以有 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=0$，

即 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=(1,1,1)\cdot(2,m,1)=2+m+1=0$，解得 $m=-3$.

4.$l\subset\alpha$ 或 $l\parallel\alpha$　**解析**：因为直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{a}=(2,0,4)$，平面 α 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(1,-2,-\frac{1}{2}\right)$，

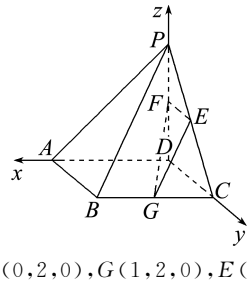
而 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=2\times1+0\times(-2)+4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{n}$，

则 $l\subset\alpha$ 或 $l\parallel\alpha$.

5.证明：由题意可知，底面 $ABCD$ 为正方形.

因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，DA，$DC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 DA，DC，DP 两两垂直.

如图，以 D 为原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DP}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $Dxyz$，



则 $P(0,0,2)$，$C(0,2,0)$，$G(1,2,0)$，$E(0,1,1)$，$F(0,0,1)$，$A(2,0,0)$，

所以$\overrightarrow{AP}=(-2,0,2)$，$\overrightarrow{EF}=(0,-1,0)$，$\overrightarrow{EG}=(1,1,-1)$.

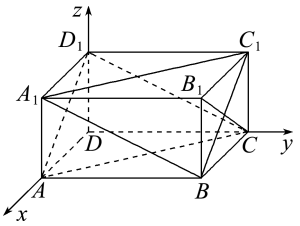
设平面 EFG 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=-y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EG}=x+y-z=0.\end{cases}$　取 $x=1$，则 $z=1$，$y=0$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$ 为平面 EFG 的一个法向量.

因为 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=-2+0+2=0$，又 AP 在平面 EFG 外，

所以 $AP\parallel$ 平面 EFG.

6.(1)**证明**：以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(3,0,0)$，$B(3,4,0)$，$C(0,4,0)$，$A_1(3,0,2)$，$B_1(3,4,2)$，$C_1(0,4,2)$，$D_1(0,0,2)$，

所以$\overrightarrow{A_1C_1}=(-3,4,0)$，$\overrightarrow{A_1B}=(0,4,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(-3,4,0)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-3,0,2)$.

设平面 A_1C_1B 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=-3x+4y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=4y-2z=0.\end{cases}$

取 $x=4$，则 $y=3$，$z=6$，所以 $\boldsymbol{n}=(4,3,6)$ 为平面 A_1C_1B 的一个法向量.

同理，可得 $\boldsymbol{m}=(4,3,6)$ 为平面 ACD_1 的一个法向量.

因为 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{n}$，即 $\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$，所以平面 $A_1C_1B\parallel$ 平面 ACD_1.

(2)**解**：设线段 B_1C 上存在点 P，使得 $A_1P\parallel$ 平面 ACD_1，$\overrightarrow{B_1P}=t\overrightarrow{B_1C}(0\leqslant t\leqslant 1)$.

由(1)，得$\overrightarrow{A_1B_1}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{B_1C}=(-3,0,-2)$，平面 ACD_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(4,3,6)$，

所以$\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1P}=\overrightarrow{A_1B_1}+t\overrightarrow{B_1C}=(-3t,4,-2t)$，

所以 $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1P}=-3t\times4+4\times3+(-2t)\times6=0$，解得 $t=\frac{1}{2}$，

所以当 P 为线段 B_1C 的中点时，$A_1P\parallel$ 平面 ACD_1.

自我超越

BD　**解析**：对于 A，当 $\lambda=\frac{1}{3}$ 时，$D_1P=\frac{1}{3}D_1B$，故点 P 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{2}{3}DD_1=\frac{4}{3}$，所以 $V_{A\text{-}PCE}=V_{P\text{-}ACE}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACE}\cdot\frac{4}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times2\times\frac{4}{3}=\frac{4}{9}$，故 A 错误.对于 B，在棱长为 2 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，建立如图 1 所示的空间直角坐标系，

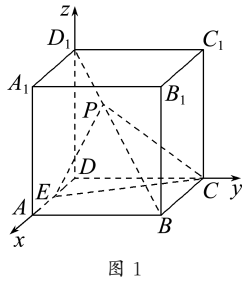


图 1

则 $A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$，$D_1(0,0,2)$，$B_1(2,2,2)$，$E(1,0,0)$.

所以$\overrightarrow{D_1B}=(2,2,-2)$，$\overrightarrow{D_1P}=\lambda\overrightarrow{D_1B}=(2\lambda,2\lambda,-2\lambda)$，故点 $P(2\lambda,2\lambda,2-2\lambda)$.

因为 $\lambda=\frac{1}{2}$，所以 $P(1,1,1)$，$\overrightarrow{EP}=(0,1,1)$.又$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{AB_1}=(0,2,2)$，

$\overrightarrow{D_1B}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times(-2)+2\times2=0$，$\overrightarrow{D_1B}\cdot\overrightarrow{AB_1}=2\times2-2\times2=0$，所以$\overrightarrow{D_1B}$是平面 AB_1C 的一个法向量.

因为$\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{D_1B}=0\times2+1\times2+1\times(-2)=0$，所以$\overrightarrow{EP}$平行于平面 AB_1C，即直线 EP 与平面 AB_1C 平行，故 B 正确.

对于 C，取 A_1D_1 的中点 F，连接 EF，C_1F，CE，如图 2，

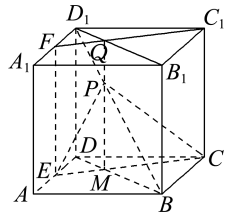


图 2

因为 E 为边 AD 的中点，所以 $EF\parallel DD_1\parallel CC_1$，当 $C_1\in$ 平面 CEP 时，$P\in$ 平面 $CEFC_1$.

连接 B_1D_1 交 C_1F 于点 Q，连接 BD 交 CE 于点 M，连接 MQ，显然平面 $CEFC_1\cap$ 平面 $BDD_1B_1=MQ$，

因此 $MQ\cap D_1B=P$，$BB_1\parallel CC_1$，$CC_1\subset$ 平面 $CEFC_1$，$BB_1\not\subset$ 平面 $CEFC_1$，所以 $BB_1\parallel$ 平面 $CEFC_1$，

故 $MQ\parallel BB_1$.因为$\frac{D_1Q}{QB_1}=\frac{D_1F}{B_1C_1}=\frac{1}{2}$，

所以$\lambda=\frac{D_1P}{D_1B}=\frac{D_1Q}{D_1B_1}=\frac{1}{3}$，故 C 错误.

对于 D，$\overrightarrow{AP}=(2\lambda-2,2\lambda,2-2\lambda)$，$\overrightarrow{PC}=(-2\lambda,2-2\lambda,2\lambda-2)$，

所以$|\overrightarrow{AP}|+|\overrightarrow{PC}|=2\sqrt{(2\lambda-2)^2+(2\lambda)^2+(2-2\lambda)^2}=4\sqrt{3\left(\lambda-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}}\geqslant\frac{4\sqrt{6}}{3}$，当且仅当 $\lambda=\frac{2}{3}$ 时取等号，故 D 正确.

课后素养评价(九)

基础落实

1.B　**解析**：因为 $\alpha\perp\beta$，所以平面 α，β 的法向量相互垂直.所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(-1,2,4)\cdot(x,-1,-2)=-x-2-8=0$，解得 $x=-10$.故选 B.

2.B　**解析**：因为 $\boldsymbol{n}=-2\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{n}\parallel\boldsymbol{a}$，所以 $l\perp\alpha$.故选 B.

3.B　**解析**：由 $\boldsymbol{u}=(-2,3,3)$，$\boldsymbol{v}=(3,-1,3)$，可知 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$，所以平面 α，β 垂直.故选 B.

4.C　**解析**：由题意，设正方体的边长为 2，以 D_1 为原点，D_1A_1 所在直线为 x 轴，D_1C_1 所在直线为 y 轴，D_1D 所在直线为 z 轴，建立空间直角坐标系(图略)，则 $D_1(0,0,0)$，$A(2,0,2)$，$C(0,2,2)$，$D(0,0,2)$，$B(2,2,2)$，$B_1(2,2,0)$，$E(1,0,1)$，$F(0,1,1)$，所以$\overrightarrow{D_1A}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{D_1C}=(0,2,2)$.

设平面 ACD_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{D_1A}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{D_1C}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2x+2z=0,\\ 2y+2z=0.\end{cases}$令 $x=1$，则 $z=-1$，$y=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,-1)$ 为平面 ACD_1 的一个法向量.

$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,-2)$，$\overrightarrow{BB_1}\cdot\boldsymbol{n}=2\neq0$，故 A 不正确.

同理，解得平面 BDC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(-1,1,1)$，$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=-1\neq0$，故 B 不正确.

因为$\overrightarrow{EF}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{D_1D}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{D_1B_1}=(2,2,0)$，则$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{D_1D}=0$，$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{D_1B_1}=0$，所以 $EF\perp D_1D$，$EF\perp$

D_1B_1. 又 $D_1D \cap D_1B_1 = D_1$，D_1D，$D_1B_1 \subset$ 平面 BDD_1B_1，所以 $EF \perp$ 平面 BDD_1B_1，故 C 正确.

平面 ABB_1A_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{p}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{p}=-1\neq 0$，故 D 不正确.故选 C.

5.垂直　**解析**：由题意，以 D 为原点，DA，DC，DP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系 $Dxyz$（图略），则 $E\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$P(0,0,1)$，$B(1,1,0)$，$C(0,1,0)$，$F\left(\frac{1}{2},0,0\right)$，所以 $\overrightarrow{EF}=\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{PB}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{PC}=(0,1,-1)$.

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

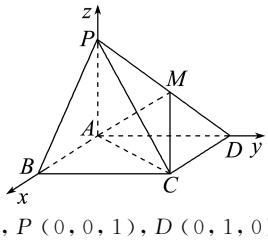
则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y-z=0,\\ y-z=0.\end{cases}$

令 $y=1$，得 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$ 为平面 PBC 的一个法向量.因为 $\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{n}$，所以 $\overrightarrow{EF}\parallel\boldsymbol{n}$.所以 $EF\perp$ 平面 PBC.

6.$\frac{21}{4}$　**解析**：因为 $A(-1,2,1)$，$B(2,s,t)$，所以 $\overrightarrow{AB}=(3,s-2,t-1)$.因为 $AB\perp\alpha$，所以 $\overrightarrow{AB}\parallel\boldsymbol{n}$，所以 $\frac{3}{4}=\frac{s-2}{1}=\frac{t-1}{2}$，所以 $s=\frac{11}{4}$，$t=\frac{5}{2}$，$s+t=\frac{21}{4}$.

7.证明：在四棱锥 P-$ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，侧棱 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 AB，AD，AP 两两垂直.

以 A 为原点，AB，AD，AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$，$P(0,0,1)$，$D(0,1,0)$，$C(1,1,0)$，$M\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{PD}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{CD}=(-1,0,0)$.

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PD}=y-z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=-x=0.\end{cases}$

令 $y=1$，则 $z=1$，$x=0$，所以 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$ 为平面 PCD 的一个法向量.

又 $\overrightarrow{AM}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$，

设平面 MAC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=a+b=0.\end{cases}$

令 $b=1$，则 $c=-1$，$a=-1$，所以 $\boldsymbol{n}=(-1,1,-1)$ 为平面 MAC 的一个法向量.

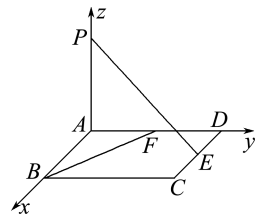
因为 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=(0,1,1)\cdot(-1,1,-1)=1-1=0$，

所以平面 $MAC\perp$ 平面 PCD.

能力提升

1.B　**解析**：建立如图所示的空间直角坐标系，设正方形 $ABCD$ 的边长为 1，$PA=a$，

则 $B(1,0,0)$，$E\left(\frac{1}{2},1,0\right)$，$P(0,0,a)$.



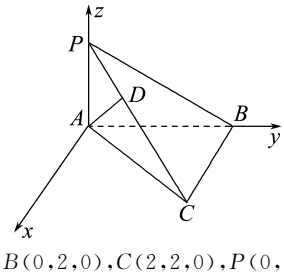
设 $F(0,y,0)$，则 $\overrightarrow{BF}=(-1,y,0)$，$\overrightarrow{PE}=\left(\frac{1}{2},1,-a\right)$.

因为 $BF\perp PE$，所以 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{PE}=(-1)\times\frac{1}{2}+y\times 1+0\times(-a)=0$，解得 $y=\frac{1}{2}$，

即 $F\left(0,\frac{1}{2},0\right)$，可知 F 是 AD 的中点，故 $\frac{AF}{FD}=1$.故选 B.

2.$\sqrt{2}$　**解析**：因为 $PA\perp$ 平面 ABC，AB，$BC\subset$ 平面 ABC，所以 $PA\perp AB$，$PA\perp BC$.

又 $AB\perp BC$，故 PA，AB，BC 两两垂直.以 A 为原点，AB，AP 所在直线分别为 y 轴、z 轴，过点 A 平行于 BC 的直线为 x 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



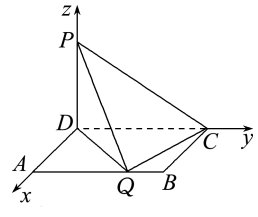
则 $A(0,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(2,2,0)$，$P(0,0,a)$.

因为 $PD=\frac{1}{3}PC$，所以 $D\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}a\right)$.

因为 $AD\perp PB$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{PB}=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}a\right)\cdot(0,2,-a)=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}a^2=0$，解得 $a=\sqrt{2}$（负值舍去）.

3.$\left(0,\frac{1}{2}\right]$　**解析**：因为在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$AD=a$，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，

所以以 DA，DC，DP 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $DP=b$，$AQ=x(0<x<1)$，

则 $P(0,0,b)$，$Q(a,x,0)$，$C(0,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{PQ}=(a,x,-b)$，$\overrightarrow{CQ}=(a,x-1,0)$.

由 $PQ\perp CQ$，得 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CQ}=a^2+x(x-1)=0$，

即 $x^2-x+a^2=0$.

若线段 AB 上存在点 Q，即方程在 $(0,1)$ 上有解，

设函数为 $f(x)=x^2-x+a^2$，$f(0)=a^2>0$，对称轴为直

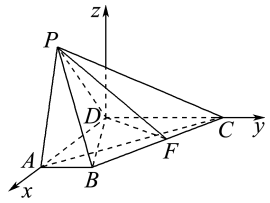
线 $x=\frac{1}{2}$，

则方程在(0,1)上有解需满足 $f\left(\frac{1}{2}\right)=a^2-\frac{1}{4}\leqslant 0$.

又因为 $a>0$，所以 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$.

4.(1)**证明**：因为平面 $ABCD\perp$ 平面 PCD，平面 $ABCD\cap$ 平面 $PCD=CD$，且 $AD\perp DC$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AD\perp$ 平面 PCD.

(2)**解**：以 D 为原点，DA，DC 所在直线分别为 x 轴、y 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $P(0,-1,\sqrt{3})$，$C(0,2,0)$，$A(2,0,0)$，$B(2,1,0)$.

假设存在符合题意的点 F，如图，连接 PF，DF，AC.

设 $\frac{BF}{BC}=\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$，则 $\overrightarrow{BF}=\lambda\overrightarrow{BC}$，所以 $\overrightarrow{PB}=(2,2,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(-2,1,0)$，$\overrightarrow{PA}=(2,1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PC}=(0,3,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PD}=(0,1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{PB}+\lambda\overrightarrow{BC}=(2-2\lambda,2+\lambda,-\sqrt{3})$.

设平面 PAC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+y-\sqrt{3}z=0,\\ 3y-\sqrt{3}z=0.\end{cases}$

令 $z=\sqrt{3}$，则 $y=1$，$x=1$，所以 $\boldsymbol{m}=(1,1,\sqrt{3})$ 为平面 PAC 的一个法向量.

设平面 PDF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{PD}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{PF}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}b-\sqrt{3}c=0,①\\ (2-2\lambda)a+(2+\lambda)b-\sqrt{3}c=0.②\end{cases}$

若平面 $PDF\perp$ 平面 PAC，则 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$，即 $a+b+\sqrt{3}c=0$.③

联立①②③，解得 $\lambda=\frac{3}{5}$，

所以线段 BC 上存在点 F，使得平面 $PDF\perp$ 平面 PAC，此时 $\frac{BF}{BC}=\frac{3}{5}$.

5.(1)**证明**：在 $\triangle ABC$ 中，因为点 D，E 分别为边 AC，AB 的中点，所以 $DE/\!/BC$.

又 $B=\frac{\pi}{2}$，所以 $AE\perp ED$.

又因为平面 $AED\perp$ 平面 $BCDE$，平面 $AED\cap$ 平面 $BCDE=ED$，$AE\subset$ 平面 AED，

所以 $AE\perp$ 平面 $BCDE$.

又因为 $DC\subset$ 平面 $BCDE$，所以 $DC\perp AE$.

(2)**解**：由(1)知，$AE\perp ED$，$AE\perp EB$，$EB\perp ED$.

以 E 为原点，EB，ED，EA 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系 $Exyz$(图略)，

则 $E(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,1,0)$，$A(0,0,2)$，

所以 $\overrightarrow{EA}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{AB}=(2,0,-2)$，$\overrightarrow{AD}=(0,1,-2)$，$\overrightarrow{ED}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{BD}=(-2,1,0)$，$\overrightarrow{DC}=(2,1,0)$.

设平面 ABD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x-2z=0,\\ y-2z=0.\end{cases}$ 取 $z=1$，则 $x=1$，$y=2$，

所以 $\boldsymbol{m}=(1,2,1)$ 为平面 ABD 的一个法向量.

假设在平面 ACD 内存在点 M，使得平面 $AEM\perp$ 平面 ABD，连接 AM.

若 $\overrightarrow{AM}/\!/\overrightarrow{DC}$，则设 $\overrightarrow{AM}=\mu\overrightarrow{DC}=(2\mu,\mu,0)$.

设平面 AEM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$.

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2c=0,\\ 2\mu a+\mu b=0.\end{cases}$ 取 $a=1$，则 $b=-2$，$c=0$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,-2,0)$ 为平面 AEM 的一个法向量.

因为平面 ABD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,2,1)$，所以由 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\neq 0$ 知，此情况不成立.

若 $\overrightarrow{AM}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 不共线，设 $AM\cap CD=N$，连接 EN，

设 $\overrightarrow{DN}=\lambda\overrightarrow{DC}=\lambda(2,1,0)=(2\lambda,\lambda,0)$，则 $\overrightarrow{EN}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DN}=(2\lambda,\lambda+1,0)$.

当 $\overrightarrow{EN}\cdot\overrightarrow{BD}=(2\lambda,\lambda+1,0)\cdot(-2,1,0)=0$，即 $\lambda=\frac{1}{3}$ 时，$BD\perp EN$.

又因为 $AE\perp BD$，$AE\cap EN=E$，AE，$EN\subset$ 平面 AEN，所以 $BD\perp$ 平面 AEN.

因为 $BD\subset$ 平面 ABD，所以平面 $ABD\perp$ 平面 AEN，

所以在平面 ACD 内存在点 M，当点 M 在直线 AN(点 N 在直线 CD 上且 $\overrightarrow{DN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$)上时，平面 $AEM\perp$ 平面 ABD.

自我超越

$\left(0,\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$ **解析**：设 $H(a,b,c)$，则 $\overrightarrow{PH}=(a,b-2,c)$，$\overrightarrow{OA}=(1,2,4)$，$\overrightarrow{OB}=(-1,2,4)$.

因为 $PH\perp$ 平面 OAB，OA，$OB\subset$ 平面 OAB，

所以 $PH\perp OA$，$PH\perp OB$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{OA}=a+2(b-2)+4c=0,\\ \overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{OB}=-a+2(b-2)+4c=0,\end{cases}$ 解得 $a=0$，$b=2-2c$，

所以 $H(0,2-2c,c)$.

因为 $PH\perp$ 平面 OAB，H 为垂足，

所以 O，A，B，H 四点共面，

则存在唯一的实数对 (x,y)，使得 $\overrightarrow{OH}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，

即 $(0,2-2c,c)=(x-y,2x+2y,4x+4y)$，

所以 $\begin{cases}0=x-y,\\ 2-2c=2x+2y,\\ c=4x+4y,\end{cases}$ 解得 $x=y=\frac{1}{10}$，$c=\frac{4}{5}$，

所以 $H\left(0,\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$.

课后素养评价(十)

基础落实

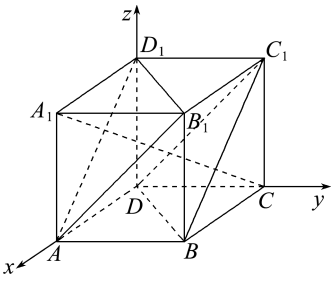
1.C **解析**：由题意取 $P(0,1,2)$，则 $\overrightarrow{AP}=(1,2,3)$，所以点 A 到 l 的距离为 $d=\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-\left(\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right)^2}=$

$\sqrt{(1^2+2^2+3^2)-\left(\frac{2+6}{\sqrt{1^2+2^2}}\right)^2}=\sqrt{14-\frac{64}{5}}=\frac{\sqrt{30}}{5}$.故选 C.

2.D　**解析**：由正方体的性质得 $AB_1 /\!/ DC_1$，$D_1B_1 /\!/ DB$，$AB_1 \cap D_1B_1=B_1$，$DC_1 \cap DB=D$，

且 $AB_1 \subset$ 平面 AB_1D_1，$D_1B_1 \subset$ 平面 AB_1D_1，$DC_1 \subset$ 平面 BDC_1，$DB \subset$ 平面 BDC_1，所以平面 $AB_1D_1 /\!/$ 平面 BDC_1，则两平面间的距离可转化为点 B 到平面 AB_1D_1 的距离.

以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示.



由正方体的棱长为 1，所以 $A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$A_1(1,0,1)$，$C(0,1,0)$，$B_1(1,1,1)$，$D_1(0,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{CA_1}=(1,-1,1)$，$\overrightarrow{BA}=(0,-1,0)$，$\overrightarrow{AB_1}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{B_1D_1}=(-1,-1,0)$.

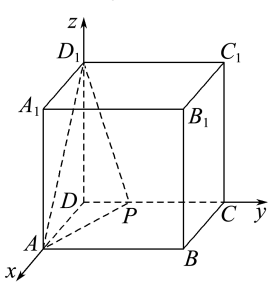
连接 A_1C，因为 $\overrightarrow{CA_1}\cdot\overrightarrow{AB_1}=(1,-1,1)\cdot(0,1,1)=1\times0+(-1)\times1+1\times1=0$，$\overrightarrow{CA_1}\cdot\overrightarrow{B_1D_1}=(1,-1,1)\cdot(-1,-1,0)=1\times(-1)+(-1)\times(-1)+1\times0=0$，

所以 $\overrightarrow{CA_1}\perp\overrightarrow{AB_1}\Rightarrow CA_1\perp AB_1$，$\overrightarrow{CA_1}\perp\overrightarrow{B_1D_1}\Rightarrow CA_1\perp B_1D_1$. 又 $AB_1\cap B_1D_1=B_1$，AB_1，$B_1D_1\subset$ 平面 AB_1D_1，所以 $CA_1\perp$ 平面 AB_1D_1，得平面 AB_1D_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{CA_1}=\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$.

故两平面间的距离 $d=\left|\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{0\times1+(-1)\times(-1)+0\times1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选 D.

3.BC　**解析**：如图，以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系，



则 $D(0,0,0)$，$A(3,0,0)$，$B(3,3,0)$，$D_1(0,0,3)$. 设 $P(0,t,0)(0<t<3)$，

所以 $\overrightarrow{AP}=(-3,t,0)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-3,0,3)$，$\overrightarrow{AB}=(0,3,0)$.

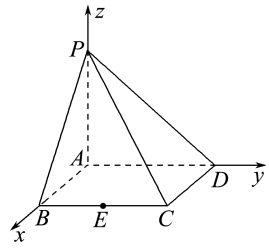
设平面 AD_1P 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=-3x+ty=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=-3x+3z=0.\end{cases}$ 取 $y=3$，则 $x=t$，$z=t$，所以 $\boldsymbol{n}=(t,3,t)$ 是平面 AD_1P 的一个法向量.

故点 B 到平面 AD_1P 的距离为 $d=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{9}{\sqrt{2t^2+9}}$.

因为 $0<t<3$，所以 $2t^2+9\in(9,27)$，所以 $d\in(\sqrt{3},3)$. 故选 BC.

4.D　**解析**：由题意建立如图所示的空间直角坐标系，则 $P(0,0,1)$，$D(0,1,0)$，$E\left(1,\frac{1}{2},0\right)$，



所以 $\overrightarrow{PD}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{DE}=\left(1,-\frac{1}{2},0\right)$，

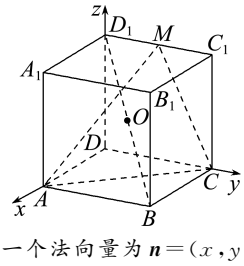
所以 $|\overrightarrow{DE}|=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$|\overrightarrow{PD}|=\sqrt{2}$，$\frac{\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{PD}}{|\overrightarrow{PD}|}=\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$，

所以点 E 到直线 PD 的距离是 $\sqrt{|\overrightarrow{DE}|^2-\left(\frac{\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{PD}}{|\overrightarrow{PD}|}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}-\frac{1}{8}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$. 故选 D.

5.$\frac{8\pi}{9}$　**解析**：由题意知该正方体的内切球的球心 O 为正方体中心，半径 $R=1$，以 D 为原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向建立空间直角坐标系，如图，

则 $A(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$M(0,1,2)$，$O(1,1,1)$，

$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{AM}=(-2,1,2)$，$\overrightarrow{AO}=(-1,1,1)$.



设平面 ACM 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x+2y=0,\\ -2x+y+2z=0,\end{cases}$

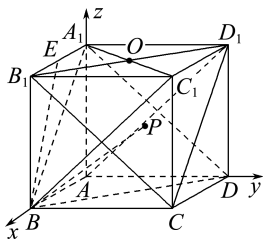
令 $x=2$，则 $y=2$，$z=1$，

所以 $\boldsymbol{n}=(2,2,1)$. 故点 O 到平面 AMC 的距离为 $d=\frac{|\overrightarrow{AO}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|-2+2+1|}{3}=\frac{1}{3}$，

截面圆半径满足 $r^2=R^2-d^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$，所以截面面积 $S=\pi r^2=\frac{8\pi}{9}$.

能力提升

1.AB　**解析**：如图，建立空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$D(0,1,0)$，$A_1(0,0,1)$，$C_1(1,1,1)$，$D_1(0,1,1)$，$E\left(\frac{1}{2},0,1\right)$，$O\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$，

所以$\overrightarrow{BA}=(-1,0,0)$，$\overrightarrow{BE}=\left(-\frac{1}{2},0,1\right)$.

设$\angle ABE=\theta$，则 $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BE}|}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BE}|}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故点 A 到直线 BE 的距离 $d_1=|\overrightarrow{BA}|\sin\theta=1\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，故 A 正确.

易知$\overrightarrow{C_1O}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$，平面 ABC_1D_1 的一个法向量为$\overrightarrow{DA_1}=(0,-1,1)$，

则点 O 到平面 ABC_1D_1 的距离 $d_2=\frac{|\overrightarrow{DA_1}\cdot\overrightarrow{C_1O}|}{|\overrightarrow{DA_1}|}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，故 B 正确.

$\overrightarrow{A_1B}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{A_1D}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{A_1D_1}=(0,1,0)$，

设平面 A_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x-z=0,\\ y-z=0.\end{cases}$

令 $z=1$，得 $y=1$，$x=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$ 为平面 A_1BD 的一个法向量.

所以点 D_1 到平面 A_1BD 的距离 $d_3=\frac{|\overrightarrow{A_1D_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

由题易知平面 A_1BD // 平面 B_1CD_1，

所以平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 间的距离等于点 D_1 到平面 A_1BD 的距离，

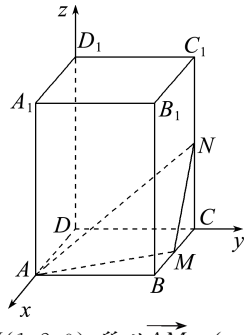
所以平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 间的距离为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 C 错误.

因为 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$，所以 $\overrightarrow{AP}=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$.

又$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，所以$\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{3}{4}$，

所以点 P 到直线 AB 的距离 $d_4=\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-\left|\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right|^2}=\sqrt{\frac{181}{144}-\frac{9}{16}}=\frac{5}{6}$，故 D 错误.故选 AB.

2.D　**解析**：由题意知，该几何体为长方体，建立空间直角坐标系如图所示，



则 $A(2,0,0)$，$M(1,2,0)$，所以$\overrightarrow{AM}=(-1,2,0)$.

设 $N(0,2,t)(0\leqslant t\leqslant 3)$，则$\overrightarrow{MN}=(-1,0,t)$.

设平面 AMN 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=-x+2y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}=-x+tz=0.\end{cases}$

令 $y=t$，则 $x=2t$，$z=2$，所以 $\boldsymbol{n}=(2t,t,2)$ 为平面 AMN 的一个法向量.

又$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,3)$，所以点 A_1 到平面 AMN 的距离为 $\left|\frac{\overrightarrow{AA_1}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{6}{\sqrt{5t^2+4}}$.

又 $0\leqslant t^2\leqslant 9$，$4\leqslant 5t^2+4\leqslant 49$，所以当 $t=3$，$5t^2+4=49$ 时，

点 A_1 到平面 AMN 的距离取得最小值为$\frac{6}{\sqrt{49}}=\frac{6}{7}$.

故选 D.

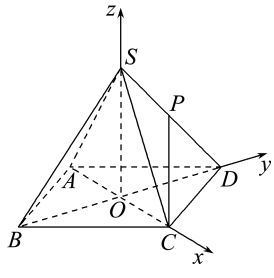
3.B　**解析**：因为 S-$ABCD$ 为正四棱锥，且点 O 是顶点 S 在底面 $ABCD$ 内的正投影，所以 $SO\perp$ 平面 $ABCD$.

如图，连接 AC，BD，则 $AC\perp BD$ 且交于点 O.

因为 OC，$OD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $SO\perp OC$，$SO\perp OD$，

以 O 为原点，以 OC，OD，OS 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.



因为 $SO=OD=\sqrt{2}$，

所以 $S(0,0,\sqrt{2})$，$D(0,\sqrt{2},0)$，$C(\sqrt{2},0,0)$，$B(0,-\sqrt{2},0)$，$P\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

所以$\overrightarrow{BD}=(0,2\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{PC}=\left(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

设异面直线 BD 与 PC 的公垂线的一个方向向量为 $\boldsymbol{n}=$

(x,y,z)，

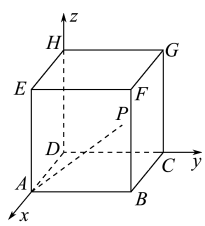
则有$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2\sqrt{2}y=0,\\ \sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y-\frac{\sqrt{2}}{2}z=0,\end{cases}$取$\boldsymbol{n}=(1,0,2)$.

又因为$\overrightarrow{CD}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，

所以异面直线BD与PC之间的距离$d=\frac{|\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|-\sqrt{2}|}{\sqrt{1+4}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

所以异面直线BD与PC之间的距离为$\frac{\sqrt{10}}{5}$.

4.$\frac{5}{6}$　**解析**：由题意，以D为原点，DA，DC，DH所在的直线分别为x轴、y轴、z轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则$A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$D(0,0,0)$，$E(1,0,1)$，所以$\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{AD}=(-1,0,0)$，$\overrightarrow{AE}=(0,0,1)$，则$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}(0,1,0)+\frac{1}{2}(-1,0,0)+\frac{2}{3}(0,0,1)=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{2}{3}\right)$.

设点P到直线AB的距离为d，

则$d=\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-\left(\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right)^2}=\sqrt{\frac{181}{144}-\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{100}{144}}=\frac{5}{6}$.

自我超越

(1)**证明**：取AE的中点O，连接OP，OC.因为$PA=PE$，所以$OP\perp AE$.

在Rt△APE中，$AP=PE=2$，所以$OP=\sqrt{2}$.在△OEC中，$OC^2=OE^2+CE^2-2OE\cdot CE\cos 135°=(\sqrt{2})^2+2^2-2\times\sqrt{2}\times2\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=10$.

在△POC中，$OP=\sqrt{2}$，$OC=\sqrt{10}$，$PC=2\sqrt{3}$，所以$OP^2+OC^2=PC^2$.

所以$OP\perp OC$.又因为$AE\cap OC=O$，AE，$OC\subset$平面$ABCE$，所以$OP\perp$平面$ABCE$，

又$OP\subset$平面PAE，所以平面$PAE\perp$平面$ABCE$.

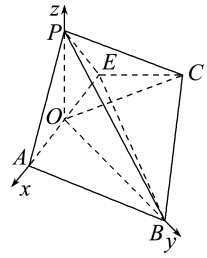
(2)**解**：如图，连接OB，BE，$BE=\sqrt{BC^2+CE^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，$AB=\sqrt{CD^2+(BC-AD)^2}=\sqrt{4^2+(4-2)^2}=2\sqrt{5}$，又$O$为$AE$中点，

所以$OB\perp AE$，且$OB=\sqrt{BE^2-OE^2}=\sqrt{20-2}=3\sqrt{2}$.由(1)可知$OP\perp$平面$ABCE$，

又因为OA，$OB\subset$平面$ABCE$，

所以$OP\perp OA$，$OP\perp OB$，所以OP，OA，OB两两垂直.

以O为原点建立如图所示的空间直角坐标系，



则$O(0,0,0)$，$B(0,3\sqrt{2},0)$，$C(-2\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$P(0,0,\sqrt{2})$，$E(-\sqrt{2},0,0)$，

$\overrightarrow{CB}=(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{PB}=(0,3\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{EP}=(\sqrt{2},0,\sqrt{2})$.

设平面PBC的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y=0,\\ 3\sqrt{2}y-\sqrt{2}z=0,\end{cases}$

取$x=1$，得$y=-1$，$z=-3$，则$\boldsymbol{n}=(1,-1,-3)$.

所以点E到平面PBC的距离$d=\frac{|\overrightarrow{EP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|\sqrt{2}-3\sqrt{2}|}{\sqrt{11}}=\frac{2\sqrt{22}}{11}$.

课后素养评价(十一)

基础落实

1.ABD　**解析**：当直线l的方向向量与平面α的法向量的夹角为$\frac{5\pi}{6}$时，直线l与平面α所成的角为$\frac{\pi}{3}$，A不正确；向量夹角的取值范围是$[0,\pi]$，而异面直线夹角的取值范围是$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，B不正确；二面角的取值范围是$[0,\pi]$，C正确；二面角的大小与其两个面的法向量的夹角的大小相等或互补，D不正确.故选ABD.

2.A　**解析**：$\overrightarrow{AB}=(2,-2,-1)$，$\overrightarrow{CD}=(-2,-3,-3)$，而$\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|}=\frac{5}{3\times\sqrt{22}}=\frac{5\sqrt{22}}{66}$，故直线$AB$和直线$CD$所成角的余弦值为$\frac{5\sqrt{22}}{66}$.故选A.

3.D　**解析**：设直线l与平面α所成的角为θ，则$\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{2\times\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$.

又因为$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以$\theta=\frac{\pi}{6}$，即直线$l$与平面$\alpha$所成的角为$\frac{\pi}{6}$.故选D.

4.B　**解析**：由两平面的法向量分别为$\boldsymbol{m}=(0,1,1)$，$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$，

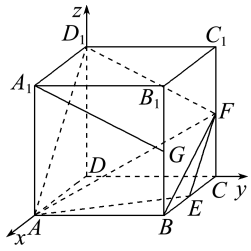
可得$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{0\times1+1\times1+1\times1}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

设两平面的夹角为θ，其中$\theta\in[0,\pi]$，可得$\cos\theta=\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

即两平面的夹角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.故选 B.

5.B　**解析**:对于 A,因为 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 为正方体,所以 $DD_1 /\!/ CC_1$.因为直线 AF 与直线 CC_1 不垂直,所以直线 AF 与直线 DD_1 不垂直,故 A 错误.

由题意建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(1,0,0)$,$E\left(\frac{1}{2},1,0\right)$,$F\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$,$G\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$,$A_1(1,0,1)$.

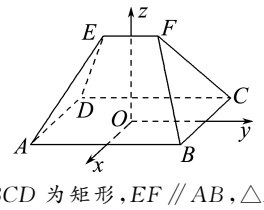
对于 B,$\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{1}{2},1,0\right)$,$\overrightarrow{AF}=\left(-1,1,\frac{1}{2}\right)$,设平面 AEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{1}{2}x+y=0,\\ \overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{n}=-x+y+\frac{1}{2}z=0.\end{cases}$ 令 $y=1$,则 $x=2$,$z=2$,所以 $\boldsymbol{n}=(2,1,2)$ 为平面 AEF 的一个法向量.因为 $\overrightarrow{A_1G}=\left(0,1,-\frac{1}{2}\right)$,所以 $\overrightarrow{A_1G}\cdot\boldsymbol{n}=0\times2+1\times1-\frac{1}{2}\times2=0$,所以 $\overrightarrow{A_1G}\perp\boldsymbol{n}$.因为 A_1G 在平面 AEF 外,所以直线 A_1G 与平面 AEF 平行,故 B 正确.

对于 C,$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}BE\cdot AB=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,所以三棱锥 $F\text{-}ABE$ 的体积为 $\frac{1}{3}S_{\triangle AEB}\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$,其中 h 为点 F 到底面 ABE 的距离,故 C 错误.

对于 D,$B(1,1,0)$,$C(0,1,0)$,$\overrightarrow{BC}=(-1,0,0)$,设直线 BC 与平面 AEF 所成的角为 θ,则 $\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{BC}|\,|\boldsymbol{n}|}=\frac{|-2|}{1\times\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{2}{3}$,故 D 错误.

故选 B.

6.$\frac{\pi}{2}$　**解析**:如图,以矩形 $ABCD$ 的中心 O 为原点,$\overrightarrow{CB}$ 的方向为 x 轴正方向,建立空间直角坐标系.



因为四边形 $ABCD$ 为矩形,$EF /\!/ AB$,$\triangle ADE$ 和 $\triangle BCF$ 都是正三角形,所以 $EF\subset$ 平面 Oyz,且 Oz 是线段 EF 的垂直平分线.设 $AB=3$,则 $EF=1$,$AD=2$,所以 $D\left(-1,-\frac{3}{2},0\right)$,$E\left(0,-\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$,$B\left(1,\frac{3}{2},0\right)$,$F\left(0,\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$,

所以 $\overrightarrow{DE}=(1,1,\sqrt{2})$,$\overrightarrow{BF}=(-1,-1,\sqrt{2})$.所以 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BF}=1\times(-1)+1\times(-1)+\sqrt{2}\times\sqrt{2}=0$,故 $\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{BF}$.所以异面直线 DE 与 BF 所成的角为 $\frac{\pi}{2}$.

7.$\frac{12}{5}$　**解析**:Oxy 平面的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$,设平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}-3x+4y=0,\\ -3x+az=0,\end{cases}$ 即 $3x=4y=az$.取 $z=1$,则 $x=\frac{a}{3}$,$y=\frac{a}{4}$,所以 $\boldsymbol{m}=\left(\frac{a}{3},\frac{a}{4},1\right)$ 为平面 α 的一个法向量.

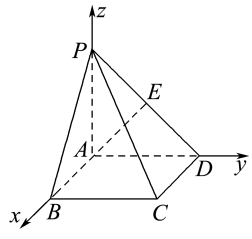
由题意得 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{9}+\frac{a^2}{16}+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

解得 $a=\pm\frac{12}{5}$.

又因为 $a>0$,所以 $a=\frac{12}{5}$.

能力提升

1.B　**解析**:如图所示,建立空间直角坐标系.



设 $PA=AB=1$,

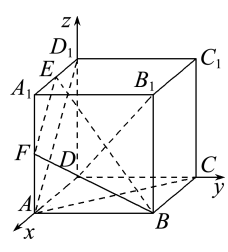
则 $A(0,0,0)$,$D(0,1,0)$,$P(0,0,1)$,

所以 $\overrightarrow{AD}=(0,1,0)$.取 PD 的中点 E,

则 $E\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,所以 $\overrightarrow{AE}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

易知 $\overrightarrow{AD}$ 是平面 PAB 的一个法向量,$\overrightarrow{AE}$ 是平面 PCD 的一个法向量,所以 $\cos\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\rangle=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故平面 PAB 与平面 PCD 的夹角为 $45°$.故选 B.

2.BC　**解析**:对于 A,以 D 为坐标原点,DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $B(2,2,0)$,$E(1,0,2)$,$A_1(2,0,2)$,$B_1(2,2,2)$,

$\overrightarrow{BE}=(1,0,2)-(2,2,0)=(-1,-2,2)$,$\overrightarrow{A_1B_1}=(2,2,2)-(2,0,2)=(0,2,0)$.

设直线 BE 与 A_1B_1 所成角为 θ,

则 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{A_1B_1}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}|}{|\overrightarrow{BE}|\,|\overrightarrow{A_1B_1}|}=\frac{|(-1,-2,2)\cdot(0,2,0)|}{\sqrt{1+4+4}\times2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$,

所以直线 BE 与 A_1B_1 所成角的余弦值为 $\frac{2}{3}$，故 A 错误.

对于 B，E，F 分别为棱 A_1D_1，AA_1 的中点，故 $EF\parallel AD_1$，

因为 $AD_1\not\subset$ 平面 BEF，$EF\subset$ 平面 BEF，

所以 $AD_1\parallel$ 平面 BEF，故 B 正确.

对于 C，$D(0,0,0)$，$B_1(2,2,2)$，$A(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，

故 $\overrightarrow{DB_1}=(2,2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(0,2,0)-(2,0,0)=(-2,2,0)$，

故 $\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{AC}=(2,2,2)\cdot(-2,2,0)=-4+4+0=0$，故 $B_1D\perp AC$，故 C 正确.

对于 D，$B(2,2,0)$，$E(1,0,2)$，$F(2,0,1)$，$A(2,0,0)$，

$\overrightarrow{BE}=(-1,-2,2)$，$\overrightarrow{EF}=(1,0,-1)$.

设平面 BEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则

$$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BE}=(x,y,z)\cdot(-1,-2,2)=-x-2y+2z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EF}=(x,y,z)\cdot(1,0,-1)=x-z=0,\end{cases}$$

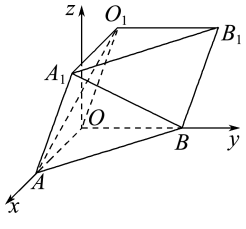
令 $x=1$，则 $z=1$，$y=\frac{1}{2}$，故 $\boldsymbol{m}=\left(1,\frac{1}{2},1\right)$.

其中 $\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$，设直线 AB 与平面 BEF 所成角的大小为 α，

则 $\sin\alpha=|\cos\langle\overrightarrow{AB},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{AB}||\boldsymbol{m}|}=\frac{\left(1,\frac{1}{2},1\right)\cdot(0,2,0)}{2\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}}=\frac{1}{3}$，

故直线 AB 与平面 BEF 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$，故 D 错误.

3. $\frac{1}{7}$ **解析**：以 O 为原点，OA，OB 所在直线分别为 x 轴、y 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



由题意得 $A(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,2,0)$，$A_1(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$，$O_1(0,1,\sqrt{3})$，

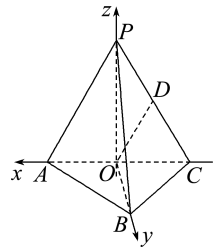
所以 $\overrightarrow{A_1B}=(-\sqrt{3},1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{O_1A}=(\sqrt{3},-1,-\sqrt{3})$.

设所求的角为 α，

则 $\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{O_1A}|}{|\overrightarrow{A_1B}||\overrightarrow{O_1A}|}=\frac{|-3-1+3|}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\frac{1}{7}$，

即异面直线 A_1B 与 O_1A 所成角的余弦值为 $\frac{1}{7}$.

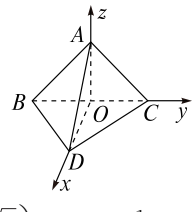
4. $\frac{\sqrt{210}}{30}$ **解析**：以 O 为原点，OA，OB，OP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $AB=a$，则 $OP=\frac{\sqrt{14}}{2}a$，所以 $O(0,0,0)$，$D\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}a,0,\frac{\sqrt{14}}{4}a\right)$，$P\left(0,0,\frac{\sqrt{14}}{2}a\right)$，$B\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，$C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$，所以 $\overrightarrow{PB}=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,-\frac{\sqrt{14}}{2}a\right)$，$\overrightarrow{BC}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，$\overrightarrow{OD}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}a,0,\frac{\sqrt{14}}{4}a\right)$，可求得平面 PBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(-1,1,\sqrt{\frac{1}{7}}\right)$.

设 $\overrightarrow{OD}$ 与平面 PBC 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\cos\langle\overrightarrow{OD},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{OD}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{OD}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{210}}{30}$.

5. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **解析**：取 BC 的中点 O，连接 AO，DO，建立如图所示的空间直角坐标系.



由题意得 $A\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$B\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$，$D\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$，

所以 $\overrightarrow{OA}=\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BA}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\overrightarrow{BD}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$.

显然 $\overrightarrow{OA}=\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 为平面 BCD 的一个法向量.

设平面 ABD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=0.\end{cases}$

取 $x=1$，则 $y=-\sqrt{3}$，$z=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},1)$ 是平面 ABD 的一个法向量.

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{OA}\rangle=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以平面 ABD 与平面 BDC 的夹角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

6.(1) **证明**：如图，连接 CE，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中有 $DC\perp$ 平面 BCC_1B_1. 又 $BC_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，

所以 $DC\perp BC_1$. 又因为四边形 BCC_1B_1 是正方形，E 是 BC_1 的中点，

所以 $CE\perp BC_1$. 又 $CE\cap CD=C$，CE，$CD\subset$ 平面 CDE，

所以 $BC_1\perp$ 平面 CDE.

(2)**解**:以 D 为坐标原点,分别以 DA,DC,DD_1 为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,

由棱长为 2,得 $D(0,0,0)$,$B(2,2,0)$,$D_1(0,0,2)$,$E(1,2,1)$,

所以$\overrightarrow{BD_1}=(-2,-2,2)$,$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{DE}=(1,2,1)$.

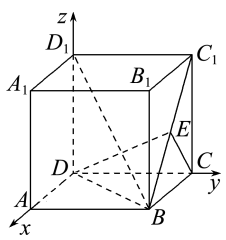
设平面 BDE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=2x+2y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=x+2y+z=0,\end{cases}$令 $x=1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$.

设直线 BD_1 与平面 BDE 所成角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{BD_1}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD_1}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{BD_1}|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$,

所以直线 BD_1 与平面 BDE 所成角的正弦值为 $\dfrac{1}{3}$.



自我超越

(1)**证明**:因为 $BO\perp AD$,$BC\parallel AD$,$\angle ADC=\angle BCD=90^\circ$,

所以四边形 $BODC$ 为矩形.

在$\triangle PDO$ 中,$PD=2$,$DO=BC=1$,$\angle PDA=60^\circ$,

则 $PO=\sqrt{PD^2+OD^2-2PD\cdot OD\cos 60^\circ}=\sqrt{3}$,

所以 $PO^2+DO^2=PD^2$,所以 $PO\perp AD$.

又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$,$PO\subset$ 平面 PAD,

平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$,

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$.

(2)**解**:由(1)知,OA,OB,OP 两两垂直,则以 O 为原点,OA 为 x 轴,OB 为 y 轴,OP 为 z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系.

因为 $PO=\sqrt{3}$,$\angle PAD=30^\circ$,所以 $AO=3$,

则 $O(0,0,0)$,$A(3,0,0)$,$P(0,0,\sqrt{3})$,$B(0,\sqrt{3},0)$,$C(-1,\sqrt{3},0)$.

设平面 APB 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,$\overrightarrow{PA}=(3,0,-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{PB}=(0,\sqrt{3},-\sqrt{3})$,

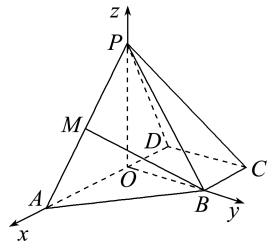
则$\begin{cases}\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{m}=3x-\sqrt{3}z=0,\\ \overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{m}=\sqrt{3}y-\sqrt{3}z=0.\end{cases}$取 $x=1$,则 $z=\sqrt{3}$,$y=\sqrt{3}$,所以 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$为平面 APB 的一个法向量.

同理,可得 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$为平面 CPB 的一个法向量,

故 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

因为二面角 A-PB-C 是钝角,

所以二面角 A-PB-C 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.



(3)**解**:设$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AP}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,则$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=(3,-\sqrt{3},0)+\lambda(-3,0,\sqrt{3})=(3-3\lambda,-\sqrt{3},\sqrt{3}\lambda)$.

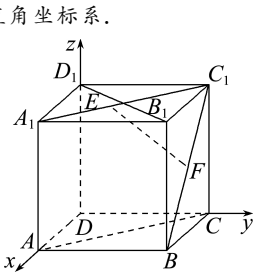
又平面 PAD 的一个法向量为$\overrightarrow{OB}=(0,\sqrt{3},0)$,

所以直线 BM 与平面 PAD 所成的角的正弦值为 $|\cos\langle\overrightarrow{OB},\overrightarrow{BM}\rangle|=\dfrac{3}{\sqrt{3}\times\sqrt{(3-3\lambda)^2+3+3\lambda^2}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$,

解得 $\lambda=\dfrac{3}{4}$,所以 $PM=\dfrac{1}{4}AP=\dfrac{1}{4}\sqrt{PO^2+OA^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

微专题培优集训(一)

1.D **解析**:在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中,以 D 为原点,DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系.



设正方体棱长为 2,则 $D(0,0,0)$,$F(1,2,1)$,$B(2,2,0)$,$A(2,0,0)$,$D_1(0,0,2)$,$B_1(2,2,2)$.

对于 A,由 E 在线段 A_1C_1 上运动,设 $E(m,2-m,2)(0\leqslant m\leqslant2)$,则$\overrightarrow{EF}=(1-m,m,-1)$,易知平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$,显然$\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}=-1\neq0$,则直线 EF 与平面 $ABCD$ 不平行,A 错误;

对于 C,$\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,2)$,设直线 EF 与 AD_1 所成角为 θ,则 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{EF}\rangle|=\dfrac{|m-2|}{2\sqrt{m^2-m+1}}$,显然当 $m=\dfrac{1}{2}$时,$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$\theta=30^\circ$,即存在点 E 使得直线 EF 与 AD_1 所成的角为 30°,C 错误;

对于 D,设平面 AB_1C_1D 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,$\overrightarrow{DA}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{AB_1}=(0,2,2)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DA}=2x=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB_1}=2y+2z=0,\end{cases}$令 $y=1$,得 $\boldsymbol{m}=(0,1,-1)$为平面 AB_1C_1D 的一个法向量,

当 $m=1$ 时,$\overrightarrow{EF}=(0,1,-1)=\boldsymbol{m}$,因此 $EF\perp$ 平面 AB_1C_1D,D 正确;

对于 B,点 E 在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的对角面矩形 ACC_1A_1 的边 A_1C_1 上,则 $S_{\triangle ACE}=\dfrac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$,而 $AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,$B_1D_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,则 $AA_1\perp B_1D_1$,又 $B_1D_1\perp A_1C_1$,$AA_1\cap A_1C_1=A_1$,所以 $B_1D_1\perp$ 平面 ACC_1A_1,点 B_1 到平面 ACE 的距离为$\sqrt{2}$,

则三棱锥 B_1-ACE 的体积为定值，B 错误.

2.(1)**证明**：如图，设线段 AD 的中点为 M，线段 BC 的中点为 N，连接 PM，MN，PN.

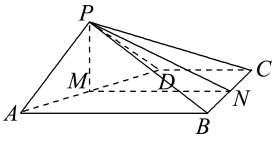
依题意，$PD=PA=1$，则 $PM\perp AD$.由 $PB=PC$，得 $PN\perp BC$.

而 $CD/\!/AB$，$AB\perp BC$，MN 是梯形 $ABCD$ 的中位线，所以 $MN/\!/AB$，$MN\perp BC$.

因为 MN，$PN\subset$平面 PMN，$MN\cap PN=N$，所以 $BC\perp$平面 PMN.

因为 $PM\subset$平面 PMN，所以 $BC\perp PM$.又 AD，$BC\subset$平面 $ABCD$，且 AD 和 BC 相交，

所以 $PM\perp$平面 $ABCD$.又 $PM\subset$平面 PAD，所以平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$.

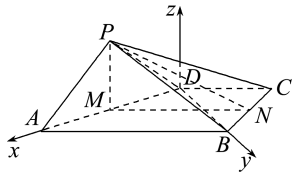


(2)**解**：依题意可求得 $AD=BD=\sqrt{2}$，则 $AD^2+BD^2=4=AB^2$，即 $AD\perp BD$.

由(1)知 $PM\perp$平面 $ABCD$，$BD\subset$平面 $ABCD$，则 $PM\perp BD$.

由 $AD\cap PM=M$，AD，$PM\subset$平面 PAD，可得 $BD\perp$平面 PAD.

过点 D 作 $Dz\perp$平面 $ABCD$，以 D 为原点，构建如图所示的空间直角坐标系 D-xyz，



则 $A(\sqrt{2},0,0)$，$B(0,\sqrt{2},0)$，$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，所以 $\overrightarrow{PB}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AP}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

令 $\overrightarrow{PT}=\lambda\overrightarrow{PB}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda,\sqrt{2}\lambda,-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$，则 $\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PT}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+1),\sqrt{2}\lambda,-\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda-1)\right)$.

由 $BD\perp$平面 PAD，则平面 PAD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$，

由题设 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{AT}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AT}}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{AT}|}\right|=\frac{|\sqrt{2}\lambda|}{\sqrt{\frac{1}{2}(\lambda+1)^2+2\lambda^2+\frac{1}{2}(\lambda-1)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，

所以 $\frac{2\lambda^2}{3\lambda^2+1}=\frac{1}{6}$，可得 $\lambda=\frac{1}{3}$(舍负值)，所以 $\frac{PT}{PB}=\frac{1}{3}$ 时满足题设.

3.(1)**证明**：在正方形 $ABCD$ 中，$BC\perp AB$，

因为平面 $ABCD\perp$平面 $ABMN$，平面 $ABCD\cap$平面 $ABMN=AB$，$BC\subset$平面 $ABCD$，

所以 $BC\perp$平面 $ABMN$.又 BM，$BN\subset$平面 $ABMN$，所以 $BC\perp BM$，$BC\perp BN$.

又 $BC=1$，$CN=\sqrt{6}$，则 $BN=\sqrt{CN^2-BC^2}=\sqrt{5}$.

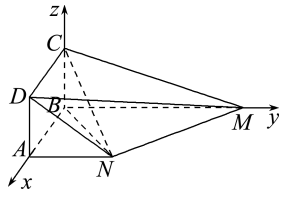
又 $AB=1$，$NA=2$，则 $BN^2=AB^2+AN^2$，即 $NA\perp AB$.

又 $BM/\!/NA$，则 $MB\perp AB$，$BC\cap AB=B$，AB，$BC\subset$平面 $ABCD$，

所以 $MB\perp$平面 $ABCD$.

(2)**解**：由(1)知，$MB\perp$平面 $ABCD$，$BC\perp AB$，

以 B 为原点，BA，BM，BC 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $B(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$C(0,0,1)$，$D(1,0,1)$，$N(1,2,0)$，$M(0,4,0)$.

设点 $E(x,y,z)$，$\overrightarrow{CE}=\lambda\overrightarrow{CM}$，$\lambda\in(0,1)$，

所以 $(x,y,z-1)=\lambda(0,4,-1)$，

所以 $\begin{cases}x=0,\\y=4\lambda,\\z=1-\lambda,\end{cases}$ 故 $E(0,4\lambda,1-\lambda)$，

所以 $\overrightarrow{BN}=(1,2,0)$，$\overrightarrow{BE}=(0,4\lambda,1-\lambda)$.

设平面 BEN 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{BN}\cdot\boldsymbol{m}=x_1+2y_1=0,\\\overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{m}=4\lambda y_1+(1-\lambda)z_1=0.\end{cases}$

令 $x_1=-2$，则 $y_1=1$，$z_1=\frac{4\lambda}{\lambda-1}$，

所以 $\boldsymbol{m}=\left(-2,1,\frac{4\lambda}{\lambda-1}\right)$ 为平面 BEN 的一个法向量.

又 $\overrightarrow{BD}=(1,0,1)$，设平面 BDN 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{BN}\cdot\boldsymbol{n}=x_2+2y_2=0,\\\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}=x_2+z_2=0,\end{cases}$

令 $x_2=2$，则 $y_2=-1$，$z_2=-2$，

所以 $\boldsymbol{n}=(2,-1,-2)$ 为平面 BDN 的一个法向量，

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\left|-4-1-\frac{8\lambda}{\lambda-1}\right|}{3\cdot\sqrt{5+\left(\frac{4\lambda}{\lambda-1}\right)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，解得 $\lambda=0$ 或 $\lambda=\frac{5}{4}$.

因为 $\lambda\in(0,1)$，

所以线段 CM 上(不含端点)不存在一点 E，使得平面 BEN 与平面 BDN 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

微专题培优集训(二)

1.A　**解析**：连接 BD，因为四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle A=60^\circ$，所以 $\triangle ABD$ 为等边三角形.

因为 E 为 AB 的中点，所以 $DE\perp AB$，所以 $DE\perp EB$，$DE\perp A'E$.

因为 $EB\cap A'E=E$，EB，$A'E\subset$平面 $A'EB$，所以 $DE\perp$平面 $A'EB$.

因为菱形 $ABCD$ 的边长为 4，所以 $AB=AD=CD=BC=4$，$DE=2\sqrt{3}$，$AE=BE=2$，

所以直角梯形 $BCDE$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times(2+4)\times2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$.

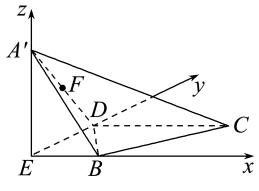
设四棱锥 A'-$EBCD$ 的高为 h，则 $\frac{1}{3}\times6\sqrt{3}h=4\sqrt{3}$，得 $h=2$，所以 $h=A'E$，所以 $A'E\perp$ 平面 $EBCD$.

所以以 E 为原点，EB，ED，EA' 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系，

则 $B(2,0,0)$，$C(4,2\sqrt{3},0)$，$F(0,\sqrt{3},1)$，所以 $\overrightarrow{BC}=(2,2\sqrt{3},0)$，

所以 $\boldsymbol{c}=\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{FB}=(2,-\sqrt{3},-1)$，

所以 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4+3+1}=2\sqrt{2}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$，所以点 F 到直线 BC 的距离为 $d=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})^2}=\sqrt{8-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{31}}{2}$.



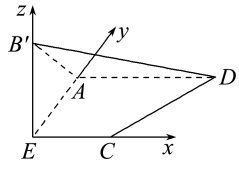
2. $\frac{3}{4}$　$\frac{2\sqrt{21}}{7}$　**解析**：在菱形 $ABCD$ 中，$\angle B=60°$，$BE=EC=1$，在 $\triangle ABE$ 中，由余弦定理得 $AE^2=AB^2+BE^2-2AB\cdot BE\cdot\cos60°=3$，所以 $AE=\sqrt{3}$，

所以 $BE^2+AE^2=AB^2$，即 $AE\perp BC$. 又 $AD/\!/BC$，所以 $AE\perp AD$.

在题图 2 中，$\angle DAB'=90°$，即 $AD\perp AB'$，又 $AB'\cap AE=A$，AB'，$AE\subset$ 平面 $AB'E$，

所以 $AD\perp$ 平面 $AB'E$，即 $EC\perp$ 平面 $AB'E$.

又 $B'E\subset$ 平面 $AB'E$，所以 $B'E\perp EC$. 如图，以 E 为原点，EC，EA，EB' 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系，



则 $E(0,0,0)$，$C(1,0,0)$，$D(2,\sqrt{3},0)$，$B'(0,0,1)$，$A(0,\sqrt{3},0)$，

所以 $\overrightarrow{AB'}=(0,-\sqrt{3},1)$，$\overrightarrow{CD}=(1,\sqrt{3},0)$. 故 $\cos\langle\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{CD}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB'}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}=\frac{0-3+0}{2\times2}=-\frac{3}{4}$，则异面直线 AB' 与 CD 所成的角的余弦值为 $\frac{3}{4}$.

又 $\overrightarrow{AC}=(1,-\sqrt{3},0)$，设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 是异面直线 AB' 与 CD 公垂线的方向向量，所以 $\begin{cases}\overrightarrow{AB'}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{3}y+z=0,\\ x+\sqrt{3}y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=\sqrt{3}y,\\ x=-\sqrt{3}y.\end{cases}$ 令 $y=1$，则 $\boldsymbol{m}=(-\sqrt{3},1,\sqrt{3})$，所以异面直线 AB' 与 CD 之间的距离为 $\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=\frac{|-\sqrt{3}-\sqrt{3}+0|}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

3.(1)**证明**：由题意得 $\angle BEC=\angle CED=\frac{\pi}{4}$，所以 $\angle BED=\frac{\pi}{2}$，则 $DE\perp BE$.

因为 $AB\perp AE$，所以 $A_1B\perp A_1E$.

又 $A_1B\perp A_1D$，$A_1E\cap A_1D=A_1$，A_1E，$A_1D\subset$ 平面 A_1ED，所以 $A_1B\perp$ 平面 A_1ED.

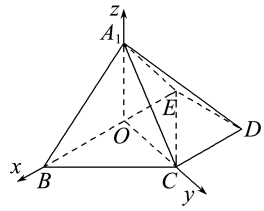
又 $DE\subset$ 平面 A_1ED，则 $DE\perp A_1B$.

又 $DE\perp BE$，$A_1B\cap BE=B$，$A_1B\subset$ 平面 A_1BE，$BE\subset$ 平面 A_1BE，所以 $DE\perp$ 平面 A_1BE.

(2)**解**：如图，取 BE 的中点 O，可知 $BE=2CD$，$OE=CD$，由 $DE\perp BE$，且 $CD\perp DE$ 可得 $OE/\!/CD$，

所以四边形 $OCDE$ 是平行四边形，所以 $CO/\!/DE$，则 $CO\perp$ 平面 A_1BE.

设 $BE=2$，以 O 为原点，OB，OC，OA_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系，如图，



则 $A_1(0,0,1)$，$E(-1,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$D(-1,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{EA_1}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{EC}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{ED}=(0,1,0)$.

设平面 A_1EC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{EA_1}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{EC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1+z_1=0,\\ x_1+y_1=0.\end{cases}$

取 $x_1=1$，则 $y_1=-1$，$z_1=-1$，所以 $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,-1)$ 为平面 A_1EC 的一个法向量.

设平面 A_1ED 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{EA_1}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{ED}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_2+z_2=0,\\ y_2=0.\end{cases}$ 取 $x_2=1$，则 $y_2=0$，$z_2=-1$，所以 $\boldsymbol{n}_2=(1,0,-1)$ 为平面 A_1ED 的一个法向量，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

由图可知，二面角 C-A_1E-D 为锐角，所以二面角 C-A_1E-D 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

4.解：(1)如图 1，以 O 为原点，OA，OD 所在直线分别为 x 轴、y 轴，建立空间直角坐标系 O-xyz.

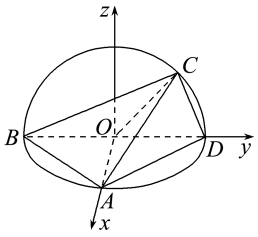


图 1

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，平面 $BAD\perp$ 平面 BCD，因为 $BD=4$，$\angle COD=\frac{\pi}{4}$，所以 $OA=OD=OC=2$，

则 $A(2,0,0)$，$C(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$，所以 $\overrightarrow{AC}=(-2,\sqrt{2},\sqrt{2})$.

易知平面 BAD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，

所以直线 AC 与平面 BAD 所成角的正弦值为 $|\cos\langle\overrightarrow{AC},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AC}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$.

(2)不存在.理由如下：

如图 2，过点 C 作 BD 的垂线，垂足为 E，延长 CE 与圆 O 交于点 F.翻折后(如图 3)，由 $CE\perp BD$，$FE\perp BD$ 知，$\theta=\angle CEF$.在将圆 O 沿直径 BD 翻折的过程中，点 C 在以 E 为圆心，$CE=\sqrt{2}$ 为半径的圆上，且该圆与直径 BD 垂直.

如图 3，以 O 为原点，OA，OD 所在直线分别为 x 轴、y 轴，建立空间直角坐标系 O-xyz.

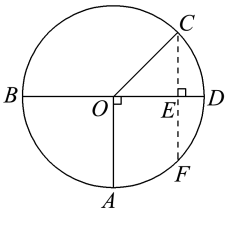


图 2

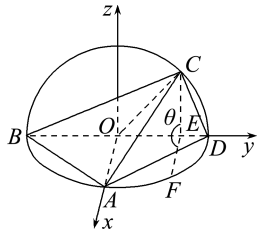


图 3

设 $C(x,\sqrt{2},z)$，$E(0,\sqrt{2},0)$，则 $|CE|=\sqrt{x^2+z^2}=\sqrt{2}$，即 $x^2+z^2=2$.

又 $A(2,0,0)$，$B(0,-2,0)$，$D(0,2,0)$，所以 $\overrightarrow{AC}=(x-2,\sqrt{2},z)$，$\overrightarrow{BD}=(0,4,0)$，

所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=4\sqrt{2}\neq0$.

因此不存在 θ 使得直线 AC 与直线 BD 垂直.

课后素养评价(十二)

基础落实

1.BCD　**解析**：根据斜率的定义知，当直线与 x 轴垂直时，斜率不存在，故 A 错误，其他选项正确.

2.C　**解析**：由题意可得 $\tan 30^\circ=\frac{4-m}{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}$，解得 $m=3$.故选 C.

3.AD　**解析**：由图象可知 $0<\alpha_3<\alpha_2<\frac{\pi}{2}<\alpha_1$，则 $k_1<0<k_3<k_2$.

4.AB　**解析**：由题意得 $k_{AB}=\frac{1+a-a}{1-a-3}=\frac{1}{-2-a}<0$，即 $2+a>0$，所以 $a>-2$.

5.C　**解析**：由题意可知，直线 AB，AC 的斜率存在并相等，即 $\frac{8-(-2)}{4-(-1)}=\frac{x-(-2)}{5-(-1)}$，解得 $x=10$.

能力提升

1.BC　**解析**：由于 y 轴正方向对应的直线的倾斜角为 90°，因此所求直线的倾斜角为 60°或 120°.

2.C　**解析**：(方法一)由直线上的两点 $A(4,y)$，$B(2,-3)$，得 $\overrightarrow{AB}=(-2,-3-y)$.

又直线 AB 的一个方向向量为 $\boldsymbol{n}=(-1,-1)$，

所以 $\boldsymbol{n}\parallel\overrightarrow{AB}$，

所以 $(-2)\times(-1)-(-3-y)\times(-1)=0$，解得 $y=-1$.

故选 C.

(方法二)由直线的一个方向向量为 $\boldsymbol{n}=(-1,-1)$，得直线的斜率为 $\frac{-1}{-1}=1$，所以 $\frac{y-(-3)}{4-2}=1$，解得 $y=-1$.故选 C.

3.C　**解析**：因为 $y=\tan\alpha$ 在 $60^\circ<\alpha<90^\circ$ 时单调递增，在 $90^\circ<\alpha\leqslant135^\circ$ 时也单调递增，

当 $60^\circ<\alpha<90^\circ$ 时，$k=\tan\alpha>\tan 60^\circ=\sqrt{3}$，

当 $90^\circ<\alpha\leqslant135^\circ$ 时，$k=\tan\alpha\leqslant\tan 135^\circ=-1$，

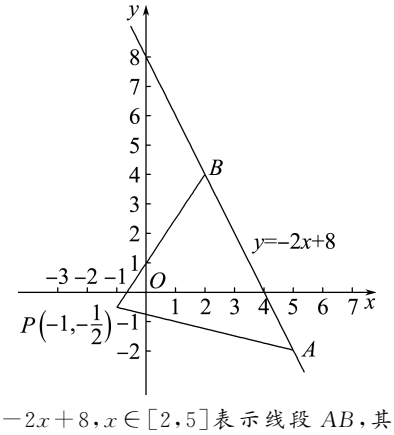
所以 k 的取值范围是 $(-\infty,-1]\cup(\sqrt{3},+\infty)$.

4.60°　**解析**：点 $A(-2,\sqrt{3})$ 关于 x 轴的对称点为 $A'(-2,-\sqrt{3})$，由物理知识知 $k_{BC}=k_{A'C}=\frac{2\sqrt{3}-(-\sqrt{3})}{1-(-2)}=\sqrt{3}$，所以所求倾斜角为 60°.

5.1 或 2　**解析**：由 $k_{AC}=3k_{BC}$，得 $\frac{4+m+3}{-1-m}=3\cdot\frac{4-m+1}{-1-2}$，即 $-\frac{m+7}{m+1}=m-5$，解得 $m=1$ 或 $m=2$.经验证均符合题意，故 m 的值为 1 或 2.

自我超越

1.$\left[-\frac{1}{2},3\right]$　**解析**：如图，



函数 $y=-2x+8$，$x\in[2,5]$ 表示线段 AB，其中 $A(5,-2)$，$B(2,4)$，

$\frac{2y+1}{x+1}=\frac{2\left(y+\frac{1}{2}\right)}{x+1}$ 的几何意义为线段 AB 上的动点 $M(x,y)$ 与定点 $P\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ 连线的斜率的 2 倍.因为

$k_{PA}=\dfrac{-2+\frac{1}{2}}{5+1}=-\dfrac{1}{4}$，$k_{PB}=\dfrac{4+\frac{1}{2}}{2+1}=\dfrac{3}{2}$，

所以$-\dfrac{1}{4}\leqslant k_{PM}\leqslant\dfrac{3}{2}$，

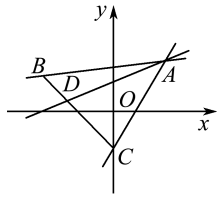
所以$\dfrac{2y+1}{x+1}$的取值范围是$\left[-\dfrac{1}{2},3\right]$.

2.解：(1)由斜率公式可得直线AB的斜率$k_{AB}=\dfrac{2-3}{-4-3}=\dfrac{1}{7}$，直线$AC$的斜率$k_{AC}=\dfrac{-2-3}{0-3}=\dfrac{5}{3}$，

所以直线AB的斜率为$\dfrac{1}{7}$，直线AC的斜率为$\dfrac{5}{3}$.

(2)如图，当点D由点B运动到点C时，直线AD的斜率由k_{AB}增大到k_{AC}，由(1)知，$k_{AB}=\dfrac{1}{7}$，$k_{AC}=\dfrac{5}{3}$，

所以直线AD的斜率的取值范围是$\left[\dfrac{1}{7},\dfrac{5}{3}\right]$.



课后素养评价(十三)

基础落实

1.ACD　**解析**：若两条直线垂直，则它们的斜率之积为-1或其中一条直线的斜率不存在，另一条直线的斜率为0，故A，C错误；两条直线平行，可能两条直线的斜率都不存在，故B正确；因为60°和120°的正弦值相等，但倾斜角为60°和倾斜角为120°的两条直线不平行，故D错误.

2.AD　**解析**：对于A，由题意知$k_{l_1}=\dfrac{5-1}{-3-2}=-\dfrac{4}{5}$，$k_{l_2}=\dfrac{-7+3}{8-3}=-\dfrac{4}{5}$，所以直线$l_1$与直线$l_2$平行或重合，又$k_{BC}=\dfrac{5-(-3)}{-3-3}=-\dfrac{4}{3}\neq-\dfrac{4}{5}$，故$l_1\parallel l_2$，A选项正确；

对于B，由题意知$k_{l_1}=\dfrac{-1-1}{-2-0}=1$，$k_{l_2}=\dfrac{3-4}{2-3}=1$，所以直线$l_1$与直线$l_2$平行或重合，又$k_{FG}=\dfrac{4-(-1)}{3-(-2)}=1$，故直线$l_1$与直线$l_2$重合，B选项错误；

对于C，由题意知$k_{l_1}=\tan 60°=\sqrt{3}$，$k_{l_2}=\dfrac{-2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{-2-1}=\sqrt{3}$，$k_{l_1}=k_{l_2}$，所以直线$l_1$与直线$l_2$平行或重合，C选项错误；

对于D，由题意知l_1的斜率不存在，且不是y轴，l_2的斜率也不存在，恰好是y轴，所以$l_1\parallel l_2$，D选项正确.故选AD.

3.B　**解析**：由$\dfrac{6-(-2)}{5-2}=\dfrac{-m-1}{-1-2m}$，解得$m=-\dfrac{5}{13}$.

4.B　**解析**：由题意得$k_1=\dfrac{1-m}{m-(-1)}=\dfrac{1-m}{m+1}$，$k_2=\dfrac{1-0}{-1-1}=-\dfrac{1}{2}$.因为$l_1\perp l_2$，所以$k_1\cdot k_2=-1$，即$\dfrac{1-m}{m+1}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$，解得$m=-\dfrac{1}{3}$.

5.C　**解析**：由题意得$k_{l_1}=\dfrac{m-n}{2}$，$k_{l_2}=\dfrac{n^2}{m}$.

因为$l_1\parallel l_2$，所以$k_{l_1}=k_{l_2}$，即$\dfrac{m-n}{2}=\dfrac{n^2}{m}$，

化简得$m^2-mn-2n^2=0$，所以$m=-n$或$m=2n$.

又由$mn\neq0$，得$\dfrac{m}{n}$的值为-1或2.故选C.

6.B　**解析**：当$m=0$时，直线AB与直线CD的斜率均不存在，此时直线AB的方程为$x=0$，直线CD的方程为$x=1$，故$AB\parallel CD$；

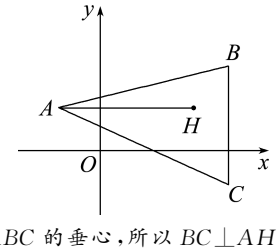
当$m\neq0$时，$k_{AB}=\dfrac{(m+4)-3}{2m-m}=\dfrac{m+1}{m}$，$k_{CD}=\dfrac{2-0}{(m+1)-1}=\dfrac{2}{m}$，

则$k_{AB}=k_{CD}$，即$\dfrac{m+1}{m}=\dfrac{2}{m}$，得$m=1$.

综上，$m=0$或$m=1$.

故选B.

7.(6，-2)　**解析**：如图，设点C的坐标为(x,y).



因为H为$\triangle ABC$的垂心，所以$BC\perp AH$.又直线AH的斜率$k_{AH}=\dfrac{2-2}{5+2}=0$，得直线$BC$的倾斜角为90°，而点$B$的横坐标为6，则$x=6$.

又直线BH的斜率$k_{BH}=\dfrac{4-2}{6-5}=2$，$BH\perp AC$，所以直线$AC$的斜率$k_{AC}=\dfrac{y-2}{6+2}=-\dfrac{1}{2}$，所以$y=-2$.

所以点C的坐标为(6，-2).

8.(3，4)　**解析**：设顶点D的坐标为(x,y).

因为$AB\parallel DC$，$AD\parallel BC$，所以$\begin{cases}\dfrac{0-1}{1-0}=\dfrac{3-y}{4-x},\\ \dfrac{y-1}{x-0}=\dfrac{3-0}{4-1},\end{cases}$解得$\begin{cases}x=3,\\ y=4.\end{cases}$所以顶点$D$的坐标为(3，4).

9.1或6　3或-4　**解析**：当$l_1\parallel l_2$时，$\dfrac{2-a}{a-1-3}=\dfrac{a+2-2}{-2-1}$，即$\dfrac{2-a}{a-4}=\dfrac{a}{-3}$，解得$a=1$或$a=6$，经验证均符合题意.

当$l_1\perp l_2$时，若l_2的斜率为0，即$a=0$，此时l_1的斜率存在，不符合题意；当l_2的斜率不为0，有$\dfrac{2-a}{a-4}\times\dfrac{a}{-3}=-1$，解得$a=3$或$a=-4$，经验证均符合题意.

能力提升

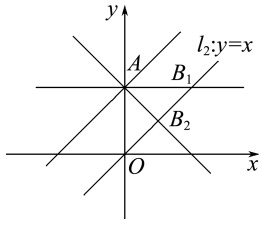
1.B　**解析**：由题意知$PQ\perp l$，则$k_{PQ}\cdot k_l=-1$，

所以$\dfrac{a+1-b}{b-1-a}\cdot k_l=-1$，得$k_l=1$.

设 l 的倾斜角为 α，$0°\leqslant\alpha<180°$，

所以 $\tan\alpha=1$，则 $\alpha=45°$.

2.C　**解析**：如图，当 $\triangle OAB$ 为直角三角形时，$OB\perp BA$ 或 $OA\perp BA$，此时 l_1 的斜率 $k=-1$ 或 $k=0$.



当 l_1 从 $k=-1$ 按顺时针方向旋转到 y 轴之间时，$\triangle OAB$ 为钝角三角形，此时 $k<-1$；

当 l_1 从 $k=0$ 按逆时针方向旋转到与直线 $l_2:y=x$ 平行之间时，$\triangle OAB$ 为钝角三角形，此时 $0<k<1$.

综上，$k\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

故选 C.

3.D　**解析**：因为 $k_{AB}=\dfrac{5-3}{2+4}=\dfrac{1}{3}$，$k_{CD}=\dfrac{3-0}{6+3}=\dfrac{1}{3}$，$k_{AD}=\dfrac{3-0}{-4-(-3)}=-3$，$k_{BC}=\dfrac{5-3}{2-6}=-\dfrac{1}{2}$，

所以 $AB/\!/CD$，$AD\perp AB$.

所以四边形 $ABCD$ 为直角梯形.

4.$7+4\sqrt{3}$　**解析**：依题意，两直线垂直，则两直线的方向向量垂直，其数量积为零，

可得 $b(1-a)+2a=0$，即 $2a+b=ab$，所以 $\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{a}=1$.

由 $a>0$，$b>0$，得 $3a+2b=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}\right)(3a+2b)=7+\dfrac{2b}{a}+\dfrac{6a}{b}\geqslant 7+4\sqrt{3}$，当且仅当 $\dfrac{2b}{a}=\dfrac{6a}{b}$，即 $a=\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$，$b=\dfrac{6+3\sqrt{3}}{3}$ 时，等号成立，所以 $3a+2b$ 的最小值为 $7+4\sqrt{3}$.

5.$(5,-5)$　**解析**：设 $B(x_1,-x_1)$，因为重心 $G(3,3)$，所以 $\begin{cases}3=\dfrac{5+x_1+x_C}{3},\\ 3=\dfrac{1-x_1+y_C}{3},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_C=4-x_1,\\ y_C=8+x_1.\end{cases}$

因为 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，所以 $BH\perp AC$，则 $-1\cdot\dfrac{8+x_1-1}{4-x_1-5}=-1$，解得 $x_1=-4$，所以 $B(-4,4)$，$C(8,4)$，$k_{BC}=0$，所以直线 AH 的斜率不存在，则 $x_H=x_A=5$，$y_H=-5$，所以 $H(5,-5)$.

6.解：易知，直线 l_1 的倾斜角为 $30°+30°=60°$，

所以直线 l_1 的斜率 $k_1=\tan 60°=\sqrt{3}$.

因为 $l_1/\!/l_2$，所以直线 l_2 的斜率 $k_2=\sqrt{3}$.

又 l_2 是线段 AB 的垂直平分线，所以直线 AB 的斜率存在，且 $k_{AB}=\dfrac{m-1-2}{1-m}=\dfrac{m-3}{1-m}$，所以 $\dfrac{m-3}{1-m}\cdot\sqrt{3}=-1$，

解得 $m=4+\sqrt{3}$.

综上，实数 m 的值为 $4+\sqrt{3}$.

7.解：(1)依题意，可得 $k_{AB}=k_{CD}$，

即 $\dfrac{2-0}{1-4}=\dfrac{-1-m}{7-m}$，解得 $m=\dfrac{11}{5}$.

又 $k_{AB}=\dfrac{2-0}{1-4}=-\dfrac{2}{3}$，$k_{AD}=\dfrac{-1-0}{7-4}=-\dfrac{1}{3}$，

所以 $k_{AB}\neq k_{AD}$，所以 A，B，C，D 四点不共线.

所以 $m=\dfrac{11}{5}$.

(2)若 A 为直角，则 $k_{AB}k_{AC}=-1$，即 $\dfrac{2-0}{1-4}\cdot\dfrac{m-0}{m-4}=-1$，

解得 $m=12$.

若 B 为直角，则 $k_{AB}k_{BC}=-1$，即 $\dfrac{2-0}{1-4}\cdot\dfrac{m-2}{m-1}=-1$，解得 $m=-1$.

若 C 为直角，则 $AC\perp BC$，此时直线 AC 与 BC 的斜率都存在，且 $k_{AC}\cdot k_{BC}=-1$，即 $\dfrac{m-0}{m-4}\cdot\dfrac{m-2}{m-1}=-1$，解得 $m=\dfrac{7\pm\sqrt{17}}{4}$.

综上，m 的值为 12 或 -1 或 $\dfrac{7\pm\sqrt{17}}{4}$.

自我超越

解：(1)由题意得 $k_{AB}=\dfrac{0-2}{5-1}=-\dfrac{1}{2}$，$k_{AC}=\dfrac{4-2}{3-1}=1$，$k_{BC}=\dfrac{4-0}{3-5}=-2$.

设 $D(a,b)$，

若四边形 $ABCD$ 是平行四边形，则 $k_{CD}=k_{AB}$，$k_{AD}=k_{BC}$，

即 $\begin{cases}\dfrac{b-4}{a-3}=-\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{b-2}{a-1}=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=6,\end{cases}$ 即 $D(-1,6)$；

若四边形 $ABDC$ 是平行四边形，则 $k_{CD}=k_{AB}$，$k_{BD}=k_{AC}$，

即 $\begin{cases}\dfrac{b-4}{a-3}=-\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{b-0}{a-5}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=7,\\ b=2,\end{cases}$ 即 $D(7,2)$；

若四边形 $ACBD$ 是平行四边形，则 $k_{BD}=k_{AC}$，$k_{AD}=k_{BC}$，

即 $\begin{cases}\dfrac{b-0}{a-5}=1,\\ \dfrac{b-2}{a-1}=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\ b=-2,\end{cases}$ 即 $D(3,-2)$.

综上，点 D 的坐标为 $(-1,6)$ 或 $(7,2)$ 或 $(3,-2)$.

(2)若点 D 的坐标为 $(-1,6)$，

因为 $k_{AC}=1$，$k_{BD}=\dfrac{6-0}{-1-5}=-1$，

所以 $k_{AC}\cdot k_{BD}=-1$，所以 $AC\perp BD$，

所以平行四边形 $ABCD$ 为菱形；

若点 D 的坐标为 $(7,2)$，

因为 $k_{BC}=-2$，$k_{AD}=\dfrac{2-2}{7-1}=0$，

所以 $k_{BC}\cdot k_{AD}=0\neq-1$，所以平行四边形 $ABDC$ 不是菱形；

若点 D 的坐标为 $(3,-2)$，

因为 $k_{AB}=-\dfrac{1}{2}$，直线 CD 的斜率不存在，所以平行四边形 $ACBD$ 不是菱形.

因此，平行四边形 $ABCD$ 为菱形，平行四边形 $ABDC$ 和平

行四边形 $ACBD$ 不是菱形.

课后素养评价(十四)

基础落实

1.C　**解析**:方程 $y+2=-x-1$ 可写成 $y+2=-(x+1)$,根据点斜式方程的定义可知,该直线的斜率为 -1,过点 $(-1,-2)$.

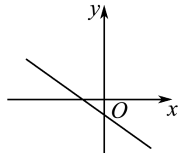
2.B　**解析**:因为直线 $l_2:y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$,

又直线 l_1 的倾斜角与 $l_2:y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 的倾斜角互余,所以 l_1 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$.

3.D　**解析**:依题意,所求直线的斜率为 $-\frac{3}{2}$,所以直线方程为 $y+3=-\frac{3}{2}(x-4)$.

4.B　**解析**:由 $a=2-a$,得 $a=1$.经检验符合条件.

5.B　**解析**:直线 $y=kx+b$ 经过第二、三、四象限,如图所示,由图可知 $k<0$,$b<0$.



6.$y-1=\sqrt{3}(x-\sqrt{2})$　**解析**:设直线 $y=-\sqrt{3}x+3$ 的倾斜角为 θ_1,则斜率 $k_1=\tan\theta_1=-\sqrt{3}$.又 $0\leqslant\theta_1<\pi$,故 $\theta_1=\frac{2\pi}{3}$.

设直线 l 的倾斜角为 θ,则 $\theta=\frac{\theta_1}{2}=\frac{\pi}{3}$,

所以直线 l 的斜率 $k=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

又直线 l 经过点 $P(\sqrt{2},1)$,

所以直线 l 的点斜式方程为 $y-1=\sqrt{3}(x-\sqrt{2})$.

7.$y-4=-(x-3)$　**解析**:由题意可知两直线互相垂直,所以直线 l 的斜率为 -1.

又直线 l 过点 $P(3,4)$,所以直线 l 的点斜式方程为 $y-4=-(x-3)$.

8.$y-2=-\sqrt{3}(x-1)$　**解析**:设线段 AB 的中点为 M,则 $M(1,2)$.

又所求直线的斜率 $k=\tan 120°=-\sqrt{3}$,

所以所求直线的点斜式方程为 $y-2=-\sqrt{3}(x-1)$.

9.$y=2x-1$　$y-1=-(x-1)$　**解析**:设直线 $y=2x+7$ 的斜率为 k_1,

与直线 $y=2x+7$ 平行的直线的斜率为 k_2,

与直线 $y=x-1$ 垂直的直线的斜率为 k_3.

由 $y=2x+7$ 得 $k_1=2$,

由两直线平行知 $k_2=2$,

所以与直线 $y=2x+7$ 平行的直线的斜截式方程为 $y-1=2(x-1)$,即 $y=2x-1$.

由两直线垂直知 $k_3=-1$,

所以与直线 $y=x-1$ 垂直的直线的点斜式方程为 $y-1=-(x-1)$.

能力提升

1.ABC　**解析**:在 A 中,若直线 $y=kx+b$ 经过第一、二、四象限,则 $k<0$,$b>0$,所以 (k,b) 在第二象限,故 A 正确.在 B 中,直线可化为 $y-2=a(x-3)$,所以直线过定点 $(3,2)$,故 B 正确.在 C 中,根据点斜式方程知 C 正确.在 D 中,所求斜截式方程为 $y=-2x+3$,故 D 错误.

2.B　**解析**:已知直线 $2x+y=1$ 的斜率为 -2,

所以 $\frac{4-m}{m+2}=-2$,解得 $m=-8$.

经检验,$m=-8$ 时两直线不重合,符合题意.

3.D　**解析**:直线 $l_1:y=x-1$,其斜率 $k_1=1$,设其倾斜角为 α_1,可得 $\tan\alpha_1=1$.又因为倾斜角 $\alpha_1\in[0,\pi)$,所以 $\alpha_1=\frac{\pi}{4}$.

因为直线 l_1 绕点 $(0,-1)$ 按逆时针方向旋转 $\frac{5}{12}\pi$,则直线 l_2 的倾斜角 $\alpha_2=\frac{\pi}{4}+\frac{5}{12}\pi=\frac{2\pi}{3}$,

所以直线 l_2 的斜率 $k_2=\tan\alpha_2=\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

因为直线 l_2 过点 $(0,-1)$,根据直线的点斜式方程,可得直线 l_2 的方程为 $y+1=-\sqrt{3}x$,即 $y=-\sqrt{3}x-1$.

因为直线 $y=-\sqrt{3}x-1$ 的斜率为负,在 y 轴上的截距为负,所以直线 l_2 不过第一象限.

4.B　**解析**:直线 $l_1:ax-y+b=0$,即 $y=ax+b$,斜率为 $k_{l_1}=a$ 且与 y 轴交于点 $(0,b)$,

直线 $l_2:bx-y+a=0$,即 $y=bx+a$,斜率为 $k_{l_2}=b$ 且与 y 轴交于点 $(0,a)$.

对于 A,直线 l_1 中 $a>0$,$b>0$,直线 l_2 中 $a>0$,$b>0$,且 $b>a$,则 $k_{l_2}>k_{l_1}$,所以 l_2 的倾斜角大于 l_1 的倾斜角,不符合题意,故 A 错误;

对于 B,直线 l_1 中 $a>0$,$b>0$,直线 l_2 中 $a>0$,$b>0$,且 $b>a$,则 $k_{l_2}>k_{l_1}$,所以 l_2 的倾斜角大于 l_1 的倾斜角,符合题意,故 B 正确;

对于 C,直线 l_1 中 $a<0$,$b>0$,直线 l_2 中 $a>0$,$b>0$,矛盾,故 C 错误;

对于 D,直线 l_1 中 $a>0$,$b<0$,直线 l_2 中 $a>0$,$b>0$,矛盾,故 D 错误.故选 B.

5.$y-(-\sqrt{3})=\sqrt{3}(x-2)$　**解析**:因为直线 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ 的倾斜角为 $30°$,所以所求直线的倾斜角为 $60°$,

即斜率 $k=\tan 60°=\sqrt{3}$.

又该直线过点 $A(2,-\sqrt{3})$,

故所求直线的点斜式方程为 $y-(-\sqrt{3})=\sqrt{3}(x-2)$.

6.$y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$　**解析**:由题意知,直线 l 的斜率为 $-\frac{2}{3}$,设其方程为 $y=-\frac{2}{3}x+b$,分别令 $x=0$,$y=0$,得直线 l 在 y,x 轴上的截距分别为 b,$\frac{3}{2}b$,

则 $b+\frac{3}{2}b=\frac{5}{6}$，解得 $b=\frac{1}{3}$，

故直线 l 的方程为 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$.

7.解：(1)因为 $A(-5,0)$，$B(1,-3)$，$C(0,2)$，边 AC，BC 的中点分别是 E，F，

所以 $E\left(-\frac{5}{2},1\right)$，$F\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，

所以 $k_{EF}=\frac{1+\frac{1}{2}}{-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$，

所以 EF 所在直线的点斜式方程为 $y-1=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{2}\right)$.

(2)设边 AB 上的高所在的直线为 l_h.

因为 $k_{l_h}\cdot k_{AB}=-1$，$k_{AB}=\frac{0-(-3)}{-5-1}=-\frac{1}{2}$，

所以 $k_{l_h}=2$.

又因为直线 l_h 过点 $C(0,2)$，

所以直线 l_h 的方程为 $y-2=2(x-0)$，即 $y=2x+2$.

所以边 AB 上的高所在直线的斜截式方程为 $y=2x+2$.

8.解：设直线 l 的方程为 $y=-x+b$，

则它与两个坐标轴的交点分别为 $A(b,0)$ 和 $B(0,b)$，

所以直线与坐标轴所围成的直角三角形的两条直角边长都为 $|b|$，故其面积为 $\frac{1}{2}b^2$.

由 $\frac{1}{2}b^2=\frac{1}{2}$，解得 $b=\pm1$，

故所求直线 l 的方程为 $y=-x+1$ 或 $y=-x-1$.

自我超越

解：(1)由题意知，l 的斜率存在且不为 0，设斜率为 k，

则 l 的点斜式方程为 $y-2=k(x+1)$，则它在两坐标轴上的截距分别为 $-1-\frac{2}{k}$ 和 $k+2$，

所以 $-1-\frac{2}{k}+k+2=0$，解得 $k=-2$ 或 $k=1$，

所以 l 的点斜式方程为 $y-2=-2(x+1)$ 或 $y-2=x+1$.

(2)由(1)知，$A\left(-\frac{2}{k}-1,0\right)$，$B(0,k+2)$，

所以 $\triangle AOB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\left|-\frac{2}{k}-1\right|\cdot|k+2|=\frac{(k+2)^2}{2k}=\frac{k}{2}+2+\frac{2}{k}\geqslant2\sqrt{\frac{k}{2}\cdot\frac{2}{k}}+2=4$，

当且仅当 $k=2$ 时，等号成立，所以 l 的斜截式方程为 $y=2x+4$.

课后素养评价(十五)

基础落实

1.A

2.D　**解析**：由题意可得 $\begin{cases}\frac{m+3}{2}=2,\\ \frac{5+n}{2}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=1,\\ n=-3,\end{cases}$

即 $A(1,5)$，$B(3,-3)$.

将点 A，B 的坐标代入两点式方程，可得 $\frac{y-5}{-3-5}=\frac{x-1}{3-1}$，

即 $4x+y-9=0$.

故选 D.

3.D　**解析**：当直线过原点时在两坐标轴上的截距都为 0，满足题意，

又因为直线过点 $A(1,4)$，所以直线的斜率为 $\frac{4-0}{1-0}=4$，

所以直线方程为 $y=4x$，即 $4x-y=0$.

当直线不过原点时，设直线方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$，

因为点 $A(1,4)$ 在直线上，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{4}{-a}=1$，解得 $a=-3$，

所以直线方程为 $x-y+3=0$.

故所求直线方程为 $4x-y=0$ 或 $x-y+3=0$.故选 D.

4.B　**解析**：直线 $\frac{x}{m}-\frac{y}{n}=1$ 在两坐标轴上的截距分别为 m，$-n$；直线 $\frac{x}{n}-\frac{y}{m}=1$ 在两坐标轴上的截距分别为 n，$-m$.所以符合题意为 B.

5.A　**解析**：由题意可求得点 M 的坐标为(2,4)，点 N 的坐标为(3,2)，由两点式方程得中位线 MN 所在直线的方程为 $\frac{y-2}{4-2}=\frac{x-3}{2-3}$，即 $2x+y-8=0$.

6.B　**解析**：取点 $M(3,2)$ 关于 x 轴的对称点 $A(3,-2)$，则直线 NA 即为所求直线.

所以反射光线所在直线的方程为 $\frac{y+2}{4+2}=\frac{x-3}{0-3}$，即 $2x+y-4=0$.

7.BCD　**解析**：A 中，与坐标轴垂直的直线也不能用截距式表示，故 A 错误.B 中，因为线段 AB 的中点为(4,1)，A 点在 x 轴上，B 点在 y 轴上，所以 $A(8,0)$，$B(0,2)$，故所求直线的方程为 $\frac{x}{8}+\frac{y}{2}=1$，故 B 正确.C 中，当直线过原点时，直线方程为 $y=x$，当直线不过原点时，设直线方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1(a\neq0)$，将点(1,1)代入方程并整理得直线方程为 $x+y=2$，故 C 正确.D 中，方程 $3x-2y=4$ 可化为 $\frac{x}{\frac{4}{3}}+\frac{y}{-2}=1$，故 D 正确.

8.5　**解析**：由题意可得直线 AB 的方程为 $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$，显然 xy 取得最大值时，$x>0$，$y>0$.

当 $x>0$，$y>0$ 时，$\frac{x}{4}+\frac{y}{5}\geqslant2\sqrt{\frac{xy}{20}}$，即 $2\sqrt{\frac{xy}{20}}\leqslant1$，解得 $xy\leqslant5$，当且仅当 $x=2$，$y=\frac{5}{2}$ 时取等号.

9.$y=3x$ 或 $x+y-4=0$　**解析**：当直线过原点时，直线 $y=3x$ 在 x 轴上的截距和在 y 轴上的截距相等，此时直线方程为 $y=3x$；

当直线不过原点时，设直线方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$，则 $\frac{1}{a}+\frac{3}{a}=1$，解得 $a=4$，此时直线方程为 $x+y-4=0$.

所以所求直线方程为 $y=3x$ 或 $x+y-4=0$.

能力提升

1.C　**解析**：直线方程 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$ 可化成斜截式方程 $y=-\frac{1}{2}x+2$，所以直线的斜率为 $-\frac{1}{2}$.

由直线方向向量与斜率的关系，即直线的方向向量为 (x,y)，则斜率为 $\frac{y}{x}$，

所以选项中 $(-2,1)$ 是直线 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$ 的方向向量，故 C 正确.

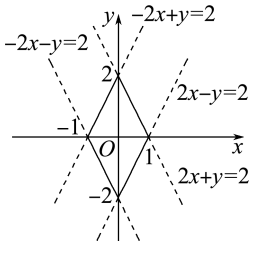
2.B　**解析**：当 $x\geqslant 0,y\geqslant 0$ 时，曲线方程为 $2x+y=2$；

当 $x\geqslant 0,y<0$ 时，曲线方程为 $2x-y=2$；

当 $x<0,y\geqslant 0$ 时，曲线方程为 $-2x+y=2$；

当 $x<0,y<0$ 时，曲线方程为 $-2x-y=2$.

作图如下，



所以围成的图形是一个菱形，面积为 $\frac{1}{2}\times 2\times 4=4$.

3.3　**解析**：一条是截距为 0，一条是截距相等（不为 0），一条是截距互为相反数（不为 0），共 3 条.

4.8　**解析**：因为直线 l 与 x 轴、y 轴分别交于 $A(a,0),B(0,b)(a>0,b>0)$ 两点，

所以可设直线 l 的截距式方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

因为直线 l 过点 $P(1,2)$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$，且 $a>0,b>0$，

所以 $2|OA|+|OB|=2a+b=(2a+b)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)=4+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\geqslant 4+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}=8$，

当且仅当 $\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{4a}{b},\\ \frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1,\end{cases}$ 即 $a=2,b=4$ 时，等号成立.

所以 $2|OA|+|OB|$ 的最小值为 8.

5.4　**解析**：设 $A(a,0),B(0,b)$，则直线 l 的截距式方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，依题意，$a>0,b>0$. 又因为点 $P(2,1)$ 在直线 l 上，所以 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$，即 $2b+a=ab$.

又因为 $\triangle OAB$ 面积为 $S=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{2}ab$，

所以 $S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}(2b+a)\geqslant\frac{2\sqrt{2ab}}{2}=\sqrt{2ab}$，

当且仅当 $2b=a$ 时，等号成立，

所以 $\frac{1}{2}ab\geqslant\sqrt{2ab}$，得 $ab\geqslant 8$.

所以 $S=\frac{1}{2}ab\geqslant 4$，当且仅当 $2b=a$ 时，S 取最小值 4.

6.解：(1)由题意可设 l 的方程为 $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1(m>0,n>0)$，

由 $A(2,3)$ 为 MN 的中点可知，$|OM|=m=4$，$|ON|=n=6$，

故 l 的方程为 $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$，即 $3x+2y-12=0$.

(2)设直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>0,b>0)$，将 $(2,3)$ 代入得 $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1$，

故 $|OM|+2|ON|=a+2b=(a+2b)\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)=2+6+\frac{4b}{a}+\frac{3a}{b}\geqslant 8+4\sqrt{3}$，

当且仅当 $\frac{4b}{a}=\frac{3a}{b}$，即 $a=2+2\sqrt{3}$，$b=3+\sqrt{3}$ 时，等号成立.

故 $|OM|+2|ON|$ 的最小值为 $8+4\sqrt{3}$.

7.解：设直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>0,b>0)$，则 $A(a,0),B(0,b)$.

(1)由 $|OA|=|OB|$，得 $a=b$.

又直线 l 过点 $P\left(\frac{4}{3},2\right)$，得 $\frac{4}{3a}+\frac{2}{a}=1$，解得 $a=\frac{10}{3}$，$b=\frac{10}{3}$，

所以直线 l 的方程为 $3x+3y-10=0$.

(2)由题意知，$\frac{1}{2}ab=6$，即 $ab=12$. 又直线 l 过点 $P\left(\frac{4}{3},2\right)$，所以 $\frac{4}{3a}+\frac{2}{b}=1$，解得 $\begin{cases}a=4,\\ b=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=2,\\ b=6,\end{cases}$

所以直线 l 的方程为 $3x+4y-12=0$ 或 $3x+y-6=0$.

自我超越

B　**解析**：设直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{ay}{2}=1(a\neq 0)$，

将点 $\left(\frac{1}{3},1\right)$ 代入，可得 $\frac{1}{3a}+\frac{a}{2}=1(a\neq 0)$，

即 $3a^2-6a+2=0$.

由于 $\Delta=36-4\times 3\times 2=12>0$，

所以方程 $3a^2-6a+2=0$ 有两个不相等的实数根，

故满足题意的直线 l 的条数为 2.

课后素养评价（十六）

基础落实

1.BC　**解析**：由题意可知，当 $2m^2+m-3\neq 0$，即 $m\neq -\frac{3}{2}$ 且 $m\neq 1$ 时，直线在 x 轴上的截距为 $\frac{4m-1}{2m^2+m-3}=1$，即 $2m^2-3m-2=0$，所以 $m=2$ 或 $m=-\frac{1}{2}$.

2.D　**解析**：当 $m^2-3m+2=0$ 时，$m=1$ 或 $m=2$；当 $m^2-m=0$ 时，$m=0$ 或 $m=1$.

若方程 $(m^2-3m+2)x+(m^2-m)y-m+4=0$ 表示一

条直线，

则 m^2-3m+2 与 m^2-m 不同时为零，所以 $m\neq1$.

3.B　**解析**：当 $m=0$ 或 $m=2$ 时，显然两条直线不平行.由题意知 $\frac{1}{m-2}=\frac{m}{3}\neq\frac{6}{2m}$，解得 $m=-1$（$m=3$ 舍去）.经检验，当 $m=-1$ 时两条直线平行，符合题意.

4.B　**解析**：因为坐标原点在直线 l 上的射影为点(2,1)，所以直线 l 的斜率 $k=-\frac{2}{1}=-2$.

又点(2,1)在直线 l 上，

所以所求直线的方程为 $y-1=-2(x-2)$，

即 $2x+y-5=0$.

5.D　**解析**：对于 A 选项，当 $A\neq0$，且 $B=0$ 时，直线斜率不存在，故错误.

对于 B 选项，当 $A=0$，且 $B\neq0$，$C\neq0$ 时，直线只与 y 轴相交；当 $A=0$，且 $B\neq0$，$C=0$ 时，直线与 x 轴重合，故错误.

对于 C 选项，当 $A\neq0$，且 $B\neq0$ 时，直线与两条坐标轴都相交，故错误.

对于 D 选项，当 $A\neq0$，且 $B=0$，$C=0$ 时，直线方程为 $x=0$，即 y 轴所在直线，故正确.

6.$2x+y+1=0$　**解析**：由题意得 $\begin{cases}2a_1+b_1+1=0,\\2a_2+b_2+1=0,\end{cases}$

所以 (a_1,b_1)，(a_2,b_2) 都在直线 $2x+y+1=0$ 上.

又两点确定一条直线，所以所求直线的方程为 $2x+y+1=0$.

7.$3x-4y+11=0$ 或 $3x+4y-29=0$　**解析**：因为 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，所以 $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\frac{4}{5}$，所以直线 l 的斜率 $k=\tan\alpha=\pm\frac{3}{4}$.又因为直线 l 经过点 $P(3,5)$，所以直线 l 的方程为 $y-5=\frac{3}{4}(x-3)$ 或 $y-5=-\frac{3}{4}(x-3)$，所以直线 l 的一般式方程为 $3x-4y+11=0$ 或 $3x+4y-29=0$.

8.解：点 B 应满足两个条件：①点 B 在直线 $y-1=0$ 上；②BA 的中点 D 在直线 $x-2y+1=0$ 上.

设 $B(x_B,1)$，则 AB 的中点 $D\left(\frac{x_B+1}{2},2\right)$.

因为点 D 在中线 CD：$x-2y+1=0$ 上，

所以 $\frac{x_B+1}{2}-2\times2+1=0$，

解得 $x_B=5$，故 $B(5,1)$.

因为点 C 在直线 $x-2y+1=0$ 上，故可设 $C(2y_C-1,y_C)$，因为 AC 边的中线为 $y-1=0$，所以 $y_C=-1$，则 $C(-3,-1)$.

根据两点式，得直线 AB 的方程为 $\frac{y-3}{1-3}=\frac{x-1}{5-1}$，即 $x+2y-7=0$，直线 BC 的方程为 $\frac{y+1}{1+1}=\frac{x+3}{5+3}$，即 $x-4y-1=0$，直线 AC 的方程为 $\frac{y+1}{3+1}=\frac{x+3}{1+3}$，即 $x-y+2=0$.

能力提升

1.C　**解析**：当 $\cos\theta=0$ 时，可知直线为 $x=3$，故倾斜角 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，当 $\cos\theta\neq0$ 时，由直线方程可知斜率 $k=-\frac{1}{\cos\theta}$，所以 $k\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，又 $\alpha\in[0,\pi)$，则 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$.

综上可知，$\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$.

2.AC　**解析**：直线 $x+y=0$ 与 $x-y=0$ 都经过原点，而无论 a 为何值，直线 $x+ay=3$ 都不经过原点，因此，要满足三条直线围成三角形，只需直线 $x+ay=3$ 与另外两条直线不平行，所以 $a\neq\pm1$.

3.C　**解析**：由题意可知，动直线 $x+my+1=0$ 经过定点 $A(-1,0)$，

动直线 $mx-y-m+2=0$，即 $m(x-1)-y+2=0$，经过定点 $B(1,2)$，

注意到动直线 $x+my+1=0$ 和动直线 $mx-y-m+2=0$ 始终垂直，

又 P 是两条直线的交点，

则有 $PA\perp PB$，

所以 $|PA|^2+|PB|^2=|AB|^2=8$.

故 $|PA|\cdot|PB|\leqslant\frac{|PA|^2+|PB|^2}{2}=4$（当且仅当 $|PA|=|PB|=2$ 时取等号）.

4.AB　**解析**：对于 A，若 $l_1\perp l_2$，则 $m\times4+1\times m=0$，所以 $m=0$，A 正确；

对于 B，当 $m=0$ 时，直线 l_1：$y-1=0$，

故 $\boldsymbol{n}=(1,0)$ 是直线 l_1 的一个方向向量，B 正确；

对于 C，当 $m=0$ 时，l_1：$y-1=0$，l_2：$x-1=0$，l_1 与 l_2 不平行，

故 $m\neq0$，则由 $l_1/\!/l_2$，可得 $k_{l_1}=k_{l_2}$，即 $-m=-\frac{4}{m}$，

得 $m=2$ 或 $m=-2$，

当 $m=2$ 时，l_1：$2x+y+1=0$，l_2：$4x+2y+2=0$，两直线重合，

当 $m=-2$ 时，l_1：$2x-y+3=0$，l_2：$2x-y-5=0$，即 $l_1/\!/l_2$，符合题意，

故 $l_1/\!/l_2$，则 $m=-2$，C 错误；

对于 D，由直线 l_2 在两坐标轴上的截距相等，可知 $m\neq0$，

对于 $4x+my+3m-4=0$，令 $x=0$，则 $y=\frac{4-3m}{m}$，

令 $y=0$，则 $x=\frac{4-3m}{4}$，则 $\frac{4-3m}{4}=\frac{4-3m}{m}$，

解得 $m=4$ 或 $m=\frac{4}{3}$，D 错误.

5.$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$　**解析**：因为直线方程为 $2x-y+1-4m=0$，即 $y=2x+1-4m$，

又因为直线过第一、三、四象限，所以直线在 y 轴上的截距小于 0，

即 $1-4m<0$，解得 $m>\frac{1}{4}$.

所以实数 m 的取值范围为 $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$.

6.$15x-3y-7=0$　**解析**：因为直线 $Ax+By+C=0$ 的斜

率为5，所以$B\neq0$，且$-\frac{A}{B}=5$，即$A=-5B$.又$A-2B+3C=0$，所以$-5B-2B+3C=0$，即$C=\frac{7}{3}B$.此时直线的方程化为$-5Bx+By+\frac{7}{3}B=0$，

即$-5x+y+\frac{7}{3}=0$.

故所求直线的方程为$15x-3y-7=0$.

7.$3x-y+3=0$　**解析**：线段AB的中点为$\left(\frac{4-2}{2},\frac{5+7}{2}\right)$，即$(1,6)$，直线$AB$的斜率$k_{AB}=\frac{7-5}{-2-4}=-\frac{1}{3}$，所以直线$l$的斜率$k_l=-\frac{1}{k_{AB}}=3$.由点斜式可得直线$l$的方程为$y-6=3(x-1)$，即$3x-y+3=0$.

8.解：(1)因为四边形$ABCD$为平行四边形，

所以$AB/\!/CD$.

设直线CD的方程为$2x-y+m=0(m\neq-2)$，

将$C(2,0)$代入上式，得$m=-4$.

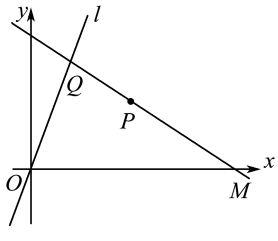
所以直线CD的方程为$2x-y-4=0$.

(2)由$AB\perp CE$，可设直线CE的方程为$x+2y+n=0$，

将$C(2,0)$代入上式，得$n=-2$.

所以直线CE的方程为$x+2y-2=0$.

9.解：如图，因为点Q在第一象限且在直线$y=4x$上，故可设点Q的坐标为$(t,4t)(t>0)$，



所以PQ所在直线的方程为$y-4=\frac{4t-4}{t-6}\cdot(x-6)$.

令$y=0$，得点M的坐标为$\left(\frac{5t}{t-1},0\right)$，

所以$\triangle OMQ$的面积为$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{5t}{t-1}\cdot4t$，

化简，得$10t^2-St+S=0$，

所以$\Delta=S^2-4\times10S\geqslant0$，

所以$S\geqslant40$，即$S_{\min}=40$，此时$t=2$，$4t=8$，

所以当$\triangle OMQ$的面积最小时，点Q的坐标为$(2,8)$.

自我超越

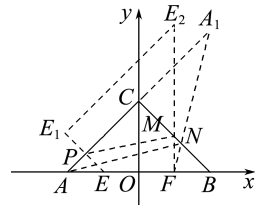
1.D　**解析**：设直线BC的方程为$y=kx+b$，则$\begin{cases}0=2k+b,\\2=b,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-1,\\b=2,\end{cases}$即直线$BC$：$y=-x+2$.同理可得直线$AC$的方程为$y=x+2$.

设$A(-2,0)$关于直线BC对称的点为$A_1(x,y)$，则$\begin{cases}\frac{y}{x+2}=1,\\\frac{x-2}{2}+\frac{y}{2}-2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2,\\y=4,\end{cases}$即$A_1(2,4)$，所以$k_{A_1F}=4$.

同理可得点$E(-1,0)$关于直线AC：$y=x+2$的对称点为$E_1(-2,1)$，

点$E_1(-2,1)$关于直线BC：$y=-x+2$的对称点为$E_2(1,4)$，

如图所示.



利用光线反射的性质可知，当这束光线反射后最终经过点A时，则其先经过点N；当这束光线反射后最终经过点E时，则其先经过点M，

所以点M，N之间为点D的移动范围.

因为$E_2(1,4)$，$F(1,0)$，所以直线FE_2的斜率不存在.而$k_{FN}=k_{A_1F}=4$，

所以$k_{FD}>k_{FN}=4$，即$k_{FD}\in(4,+\infty)$.

故选D.

2.$\frac{1}{6}$　**解析**：由题意得，直线$y=kx+1$过定点$P(0,1)$，

$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA||OB|=\frac{1}{2}\times3\times4=6$.

如图1，当直线$y=kx+1$与线段OA交于点C时，$|OC|\in(0,3]$，

$S_{\triangle OPC}=\frac{1}{2}|OC||OP|=\frac{1}{2}|OC|\in\left(0,\frac{3}{2}\right]$，不符合题意.

如图2，当直线$y=kx+1$与线段AB交于点D时，

由$A(3,0)$，$B(0,4)$，得直线AB的方程为$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$，即$4x+3y-12=0$.

在$\triangle PBD$中，设BP边上的高为h，则$S_{\triangle PBD}=\frac{1}{2}|PB|\cdot h=\frac{1}{2}S_{\triangle AOB}=3$，即$\frac{3}{2}h=3$，解得$h=2$，故$x_D=2$.

因为点D在直线$4x+3y-12=0$上，所以$y_D=\frac{4}{3}$，即$D\left(2,\frac{4}{3}\right)$，

所以$k=\frac{\frac{4}{3}-1}{2-0}=\frac{1}{6}$.

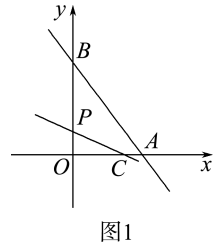


图1

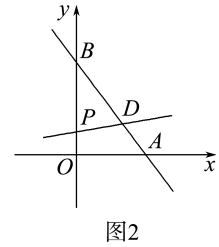


图2

课后素养评价(十七)

基础落实

1.A　**解析**：联立方程$\begin{cases}2x-3y+5=0,\\x+y-10=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=5,\\y=5,\end{cases}$故$l_1$

与 l_2 的交点坐标为(5,5).

2.B　**解析**:由 $\begin{cases}2x-y+1=0,\\x-y-2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-3,\\y=-5,\end{cases}$

所以直线 l_1:$2x-y+1=0$ 和 l_2:$x-y-2=0$ 的交点为(−3,−5).

又直线 l_1 的斜率为 2,故所求直线的斜率为 $-\frac{1}{2}$,

所以所求直线的方程为 $y+5=-\frac{1}{2}(x+3)$,即 $x+2y+13=0$.

3.C　**解析**:直线 $2x-y+3=0$ 与 $x+ay-1=0$ 互相垂直,可得 $2\times1+(-a)=0$,即 $a=2$.

把 $a=2$ 代入直线 $x+ay-1=0$,得到 $x+2y-1=0$.

由方程组 $\begin{cases}2x-y+3=0,\\x+2y-1=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=-1,\\y=1.\end{cases}$

所以交点坐标为(−1,1).

4.$4x+y-6=0$　**解析**:由 $\begin{cases}2x+y-4=0,\\3x-y-1=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$ 即直线 l 过点(1,2).

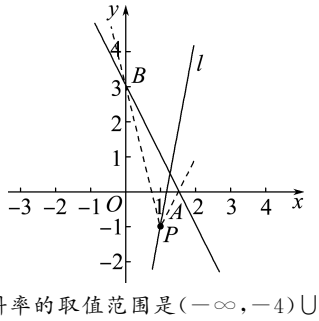
又由直线 l 在 y 轴上截距为 6,即直线 l 过点(0,6),所以斜率 $k=\frac{2-6}{1-0}=-4$,

所以所求直线的方程为 $y=-4x+6$,化为一般式方程为 $4x+y-6=0$.

5.$(-\infty,-4)\cup(2,+\infty)$　**解析**:设直线 $y=-2x+3$ 与 x 轴的交点为 A,与 y 轴的交点为 B,则 $A\left(\frac{3}{2},0\right)$,$B(0,3)$.

因为 $P(1,-1)$,所以 $k_{AP}=\frac{0-(-1)}{\frac{3}{2}-1}=2$,$k_{BP}=\frac{3-(-1)}{0-1}=-4$.

因为过点 $P(1,-1)$ 的直线 l 与直线 $y=-2x+3$ 的交点位于第一象限,



所以直线 l 斜率的取值范围是 $(-\infty,-4)\cup(2,+\infty)$.

6.(5,−2)　**解析**:直线 $(m-1)x+(2m-1)y=m-3(m\in\mathbf{R})$ 可化为 $m(x+2y-1)-x-y+3=0$,

令 $\begin{cases}x+2y-1=0,\\-x-y+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=5,\\y=-2.\end{cases}$

所以直线 $(m-1)x+(2m-1)y=m-3(m\in\mathbf{R})$ 恒过定点(5,−2).

能力提升

1.C　**解析**:由题意可得,三条直线中有两条直线互相平行.

因为直线 $x-y+1=0$ 和直线 $2x+y-4=0$ 不平行,

所以直线 $x-y+1=0$ 和直线 $ax-y+2=0$ 平行,或直线 $2x+y-4=0$ 和直线 $ax-y+2=0$ 平行.

因为直线 $x-y+1=0$ 的斜率为 1,直线 $2x+y-4=0$ 的斜率为 −2,直线 $ax-y+2=0$ 的斜率为 a,所以 $a=1$ 或 $a=-2$.经检验,当 $a=1$ 或 $a=-2$ 时,均满足三条直线共有两个交点.

2.C　**解析**:由直线 $3x-4y-27=0$,得 $y=\frac{3}{4}x-\frac{27}{4}$,则该直线的斜率 $k=\frac{3}{4}$,

所以过点 P 作与该直线垂直的垂线斜率为 $k'=-\frac{4}{3}$,

则过点 $P(2,1)$ 的垂线方程为 $y-1=-\frac{4}{3}(x-2)$,整理得 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{11}{3}$.

由方程组 $\begin{cases}y=\frac{3}{4}x-\frac{27}{4},\\y=-\frac{4}{3}x+\frac{11}{3},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=5,\\y=-3,\end{cases}$ 所以直线 $3x-4y-27=0$ 上到点 $P(2,1)$ 距离最近的点的坐标是(5,−3).

3.CD　**解析**:由 $\begin{cases}kx-y-k+1=0,\\ky-x-2k=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{k}{k-1},\\y=\frac{2k-1}{k-1},\end{cases}$

把各个选项代入验证即可.

4.C　**解析**:由 $\begin{cases}mx-y+m-1=0,\\x-y-2=0,\end{cases}$ 得 $x=\frac{-m-1}{m-1}$.

因为直线 l_1:$mx-y+m-1=0$ 与射线 l_2:$x-y-2=0$ $(x\geqslant0)$ 恒有公共点,

所以 $x=\frac{-m-1}{m-1}\geqslant0$,解得 $-1\leqslant m<1$.

所以 m 的取值范围是 $[-1,1)$.

5.$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$　**解析**:由 $\begin{cases}5x+4y-2m-1=0,\\2x+3y-m=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{2m+3}{7},\\y=\frac{m-2}{7},\end{cases}$ 所以两条直线的交点坐标为 $\left(\frac{2m+3}{7},\frac{m-2}{7}\right)$.

又此交点在第三象限,

所以 $\begin{cases}\frac{2m+3}{7}<0,\\\frac{m-2}{7}<0,\end{cases}$ 解得 $m<-\frac{3}{2}$.

所以实数 m 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$.

6.4　**解析**:令 $2x+y-6=0$ 中 $y=0$,得 $x=3$,所以直线 $2x+y-6=0$ 与 x 轴交于点 $A(3,0)$,

令 $x-2y+2=0$ 中 $x=0$,得 $y=1$,所以直线 $x-2y+2=0$ 与 y 轴交于点 $B(0,1)$.

由 $\begin{cases}2x+y-6=0,\\x-2y+2=0,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=2,\\y=2,\end{cases}$ 所以两直线交于点 $P(2,$

2)，

所以围成的四边形面积为 $S=\frac{(1+2)\times 2}{2}+\frac{2\times(3-2)}{2}$ $=4$.

自我超越

1.BCD　**解析**：当三条直线中有两条直线的斜率相等时，或者三条直线交于一点时，

不能构成三角形，可把空间分成 6 个部分.

因为直线 l_1 的斜率为 3，直线 l_2 的斜率为 $-\frac{1}{2}$，所以直线 l_1，l_2 一定相交，

交点坐标是方程组 $\begin{cases}3x-y-1=0,\\x+2y-5=0\end{cases}$ 的解，解得 $\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$

故交点坐标为(1,2).

当 $a=0$ 时，直线 l_3 与 x 轴垂直，方程为 $x=3$，不经过点(1,2)，

所以三条直线能构成三角形，不满足要求；

当 $a\neq 0$ 时，直线 l_3 的斜率为 $\frac{1}{a}$，

当直线 l_1 与直线 l_3 的斜率相等时，即 $\frac{1}{a}=3\Rightarrow a=\frac{1}{3}$，

此时这两直线平行，空间被分成 6 个部分，满足要求；

当直线 l_2 与直线 l_3 的斜率相等时，即 $\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}\Rightarrow a=-2$，

此时这两直线平行，空间被分成 6 个部分，满足要求；

当直线 l_3 过直线 l_1，l_2 交点(1,2)时，三条直线不能构成三角形，

即有 $1-2a-3=0\Rightarrow a=-1$，满足要求.

综上，a 的可能取值为 $\frac{1}{3}$，-2 或 -1.

2.D　**解析**：①$l_1\parallel l_2$ 时，则 $2m=7\times 1$，解得 $m=\frac{7}{2}$，经检验符合题意；

②$l_1\parallel l_3$ 时，则 $7m=2\times 1$，解得 $m=\frac{2}{7}$，经检验符合题意；

③$l_2\parallel l_3$ 时，则 $m^2=1\times 1$，解得 $m=\pm 1$，经检验符合题意；

④三条直线交于一点时，由 $\begin{cases}7x+2y+1=0,\\mx+y=0,\\x+my-1=0,\end{cases}$ 解得

$\begin{cases}m=2,\\x=-\frac{1}{3},\\y=\frac{2}{3},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=-4,\\x=-\frac{1}{15},\\y=-\frac{4}{15}.\end{cases}$

则实数 m 可取值的集合为 $\left\{\frac{7}{2},\frac{2}{7},-1,1,2,-4\right\}$，即符合题意的实数 m 的取值共 6 个.

课后素养评价(十八)

基础落实

1.B　**解析**：设 $A(x_1,\log_2 x_1)$，$B(x_2,\log_2 x_2)$，

因为 AB 的中点坐标为(5，2)，可得 $\begin{cases}\frac{x_1+x_2}{2}=5,\\\frac{\log_2 x_1+\log_2 x_2}{2}=2,\end{cases}$

整理得 $\begin{cases}x_1+x_2=10,\\x_1x_2=16,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=2,\\x_2=8\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=8,\\x_2=2.\end{cases}$

不妨设 A(2，1)，B(8，3)，所以 $|AB|=\sqrt{(2-8)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{10}$.

2.B　**解析**：因为 $|AB|=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$，

$|BC|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}$，$|AC|=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$，

所以△ABC 为等腰三角形.

3.B　**解析**：因为 $P(x,y)$ 到 A，B 距离相等，

则 $\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x+5)^2+(y-1)^2}$，

即 $3x+y+4=0$.

4.C　**解析**：由题意，因为直线 $y=kx+b$ 经过点(1,8)，所以 $k+b=8$，则 $b=8-k$，所以直线方程为 $y=kx+8-k$.

令 $x=0$，则 $y=8-k$，

令 $y=0$，则 $x=1-\frac{8}{k}$.

由题意得 $(8-k)^2+\left(1-\frac{8}{k}\right)^2=(5\sqrt{5})^2$，

化简得 $k^4-16k^3-60k^2-16k+64=0$，

即 $(k+2)(k^3-18k^2-24k+32)=0$，

即 $(k+2)^2(k^2-20k+16)=0$，

解得 $k=-2$ 或 $k=10+2\sqrt{21}$ 或 $k=10-2\sqrt{21}$.

故 k 的所有可能取值之和为 18.

5.A　**解析**：由题意得 $|AB|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$，$|AC|=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$，$|CB|=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$，

所以 $|AB|^2+|AC|^2=|CB|^2$，即 $AB\perp AC$，所以△ABC 的面积为 $S=\frac{1}{2}|AB|\cdot|AC|=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}=3$.

6.± 8　**解析**：因为 $A(a,-5)$ 与 $B(0,10)$ 两点间的距离是 17，所以 $\sqrt{(a-0)^2+(-5-10)^2}=17$，解得 $a=\pm 8$.

7.　2　$\sqrt{2}$　　**解析**：由 $\begin{cases}x-my-2=0,\\mx+y+2=0,\end{cases}$ 得 $Q\left(\frac{2-2m}{1+m^2},\frac{-2-2m}{1+m^2}\right)$，

所以 $|OQ|=\sqrt{\left(\frac{2-2m}{1+m^2}\right)^2+\left(\frac{-2-2m}{1+m^2}\right)^2}=\sqrt{\frac{8(1+m^2)}{(1+m^2)^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+m^2}}$.

若 $|OQ|$ 最大，则 $\sqrt{1+m^2}$ 最小，即 $1+m^2$ 最小，

而 $1+m^2\geqslant 1$，当且仅当 $m=0$ 时取等号，

此时 $|OQ|_{\max}=2\sqrt{2}$.

所以 $|OQ|$ 的最大值是 $2\sqrt{2}$.

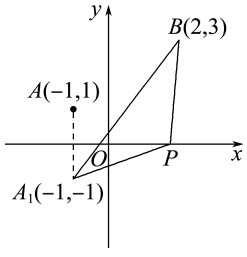
8.(9,0)或(−1,0)　**解析**：因为点 P 在 x 轴上，设 $P(x,0)$，因为点 P 与点 A 的距离等于 13，

所以 $\sqrt{(x-4)^2+(0-12)^2}=13$，解得 $x=9$ 或 $x=-1$.

所以点 P 的坐标为(9,0)或(−1,0).

能力提升

1.B　**解析**：如图，点 $A(-1,1)$ 关于 x 轴的对称点为 $A_1(-1,-1)$，



则 $|PA|+|PB|=|PA_1|+|PB|\geqslant|BA_1|$，当 B,P,A_1 三点共线时，等号成立.

又 $|BA_1|=\sqrt{(2+1)^2+(3+1)^2}=5$，故 $|PA|+|PB|$ 的最小值为 5.

2.C　**解析**：因为点 A 关于 x 轴的对称点为 $A'(-3,-5)$，

所以 $|A'B|=\sqrt{(-3-2)^2+(-5-10)^2}=5\sqrt{10}$.

由光的反射理论可知，此即为光线从 A 到 B 经过的路程.

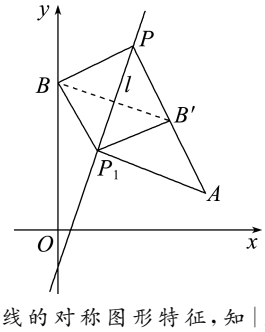
3.A　**解析**：设 $B(x,y)$，直线 AC,BC 的斜率分别为 k_{AC}，k_{BC}，由题意可得 $\begin{cases}k_{AC}\cdot k_{BC}=-1,\\|BC|=|AC|,\end{cases}$ 即

$\begin{cases}\dfrac{3-4}{3-0}\cdot\dfrac{y-3}{x-3}=-1,\\\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(3-4)^2},\end{cases}$ 解得

$\begin{cases}x=2,\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=4,\\y=6.\end{cases}$

所以点 B 的坐标是 $(2,0)$ 或 $(4,6)$.

4.C　**解析**：如图，作出点 B 关于直线 l 的对称点 B'，连接 AB' 并延长交直线 l 于点 P，



根据点关于直线的对称图形特征，知 $|PB|=|PB'|$，$\||PB|-|PA|\|=\||PB'|-|PA|\|=|B'A|$.

在直线 l 上任取点 P_1，连接 P_1A,P_1B,P_1B'，则 $|P_1B|=|P_1B'|$，$\||P_1B|-|P_1A|\|=\||P_1B'|-|P_1A|\|<|B'A|=\||PB|-|PA|\|=|B'A|$，故 $\||PB|-|PA|\|_{\max}=|B'A|$.

不妨设点 $B'(m,n)$，则有 $\begin{cases}\dfrac{n-4}{m-0}=-\dfrac{1}{3},\\3\times\dfrac{m}{2}-\dfrac{n+4}{2}-1=0,\end{cases}$ 解得

$\begin{cases}m=3,\\n=3,\end{cases}$ 即 $B'(3,3)$，

$\||PB|-|PA|\|_{\max}=|B'A|=\sqrt{(4-3)^2+(1-3)^2}=\sqrt{5}$.

5.$2\sqrt{10}$　**解析**：设 D 为 BC 的中点，则过点 A 的中线为线段 AD，易知 $D\left(\dfrac{3+5}{2},\dfrac{-6+2}{2}\right)$，即 $D(4,-2)$，

所以 $|AD|=\sqrt{(4-2)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{4+36}=2\sqrt{10}$.

6.$\dfrac{15}{2}$　**解析**：设 AB 的中点坐标为 $M(1,3)$，$k_{AB}=\dfrac{4-2}{3-(-1)}=\dfrac{1}{2}$，所以 AB 的中垂线方程为 $y-3=-2(x-1)$，即 $2x+y-5=0$. 令 $y=0$，则 $x=\dfrac{5}{2}$，即点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{5}{2},0\right)$. 又 $|AB|=\sqrt{(-1-3)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{5}$，点 P 到 AB 的距离为 $|PM|=\sqrt{\left(1-\dfrac{5}{2}\right)^2+3^2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$，

所以 $S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot|PM|=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\dfrac{3\sqrt{5}}{2}=\dfrac{15}{2}$.

7.$(1,4)$ 或 $(5,-4)$　$x=1$ 或 $3x+4y+1=0$　**解析**：根据题意，点 B 在直线 $l_1:2x+y-6=0$ 上，设点 B 的坐标为 $(t,6-2t)$.

又由 $|AB|=5$，得 $(t-1)^2+(7-2t)^2=25$，解得 $t=1$ 或 $t=5$.

当 $t=1$ 时，点 B 的坐标为 $(1,4)$，直线 l_2 的方程为 $x=1$；

当 $t=5$ 时，点 B 的坐标为 $(5,-4)$，此时直线 l_2 的斜率 $k=\dfrac{-4-(-1)}{5-1}=-\dfrac{3}{4}$，直线 l_2 的方程为 $y+1=-\dfrac{3}{4}(x-1)$，即 $3x+4y+1=0$.

故点 B 的坐标为 $(1,4)$ 或 $(5,-4)$，直线 l_2 的方程为 $x=1$ 或 $3x+4y+1=0$.

自我超越

1.$2\sqrt{10}+2\sqrt{2}$　**解析**：由直线 l_3 垂直于 l_1,l_2，则设 l_3 的方程为 $x+y=2m(m\in\mathbf{R})$.

由 $\begin{cases}x+y=2m,\\x-y=-2,\end{cases}$ 得 $A(m-1,m+1)$；由 $\begin{cases}x+y=2m,\\x-y=2,\end{cases}$ 得 $B(m+1,m-1)$.

由 $C(-4,0),D(4,0)$，得 $|CA|+|AB|+|BD|=\sqrt{(m+3)^2+(m+1)^2}+2\sqrt{2}+\sqrt{(m-3)^2+(m-1)^2}$.

$\sqrt{(m+3)^2+(m+1)^2}+\sqrt{(m-3)^2+(m-1)^2}$ 表示动点 $M(m,m)$ 到定点 $E(-3,-1)$ 与 $F(3,1)$ 的距离的和，动点 $M(m,m)$ 在直线 $y=x$ 上，点 $E(-3,-1)$ 与 $F(3,1)$ 在直线 $y=x$ 两侧，则有 $|ME|+|MF|\geqslant|EF|=2\sqrt{10}$，

当且仅当 M 是直线 $y=x$ 与线段 $EF:y=\dfrac{1}{3}x(-3\leqslant x\leqslant3)$ 的交点，即原点时取“=”，此时 $m=0$，

所以 $\sqrt{(m+3)^2+(m+1)^2}+\sqrt{(m-3)^2+(m-1)^2}$ 的最小值为 $2\sqrt{10}$，

则 $|CA|+|AB|+|BD|$ 的最小值为 $2\sqrt{10}+2\sqrt{2}$.

2.10　**解析**：由 $y-1=mx$，得 $A(0,1)$，

由 $my=-(x-3)$，得 $B(3,0)$.

当 $m=0$ 时，两直线垂直，

当 $m\neq0$ 时，两直线斜率之积等于 -1，

所以直线 $mx-y+1=0$ 和直线 $x+my-3=0$ 垂直，

则 $|PA|^2+|PB|^2=|AB|^2=(3-0)^2+(0-1)^2=10$.

课后素养评价(十九)

基础落实

1.B　**解析**：由点到直线的距离公式得 $d=\dfrac{|2-2\times1+2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

2.AB　**解析**：点 $A(a,1)$ 到直线 $3x-4y=1$ 的距离为 $\dfrac{|3a-4-1|}{5}=1$，即 $\dfrac{|3a-5|}{5}=1$，解得 $a=0$ 或 $a=\dfrac{10}{3}$.

3.C　**解析**：直线 $l:y=2x-1$ 可化为 $2x-y-1=0$，由题意得 $\dfrac{|2(1+t)-(1+3t)-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，整理得 $|t|=1$，所以 $t=1$ 或 $t=-1$.

当 $t=1$ 时，点 P 的坐标为(2,4)；

当 $t=-1$ 时，点 P 的坐标为(0,−2).故选 C.

4.$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　**解析**：由题意结合点到直线的距离公式可得 $\dfrac{1}{4}=\dfrac{|\sin\theta+\cos^2\theta-1|}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=|\sin\theta-\sin^2\theta|$，

又 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，故 $0<\sin\theta<1$，所以 $|\sin\theta-\sin^2\theta|=\sin\theta-\sin^2\theta=\dfrac{1}{4}$，

所以 $\sin^2\theta-\sin\theta+\dfrac{1}{4}=0$，解得 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$.又 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，故 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则这条直线的斜率 $k=-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

5.3　**解析**：当截距不为 0 时，由题意设所求直线方程为 $x+y=a(a\neq0)$，则 $\dfrac{|7-a|}{\sqrt{2}}=5$，解得 $a=7\pm5\sqrt{2}$，此时满足题意的直线方程为 $x+y=7+5\sqrt{2}$ 或 $x+y=7-5\sqrt{2}$；

当截距为 0 时，设原点为 $O(0,0)$，则 $|PO|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$k_{PO}=\dfrac{4}{3}$，

所以此时满足题意的直线方程是 $y=-\dfrac{3}{4}x$.

综上所述，满足条件的直线共有 3 条.

6.$\sqrt{2}$　**解析**：直线方程 $(1+k)x+y-k-2=0$ 可化为 $k(x-1)+(x+y-2)=0$，

令 $\begin{cases}x-1=0,\\x+y-2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$

所以此直线恒过点 $P(1,1)$.

由点到直线的距离公式，得点 P 到直线 $x-y-2=0$ 的距离 $d=\dfrac{|-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$.

能力提升

1.AD　**解析**：显然斜率不存在时 $x=2$ 不符合题意.设 l：$y-2=k(x-2)$，即 $kx-y+2-2k=0$.由题意可知 $\dfrac{|4-2k|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{|6k|}{\sqrt{k^2+1}}$，解得 $k=\dfrac{1}{2}$ 或 $k=-1$.

当 $k=\dfrac{1}{2}$ 时，因为 $k_{AB}=\dfrac{-2-2}{0-8}=\dfrac{1}{2}$，所以 $l\parallel AB$，直线 l 的方程为 $x-2y+2=0$；当 $k=-1$ 时，l 过 AB 的中点 $(4,0)$，方程为 $x+y-4=0$.

2.D　**解析**：因为 $(x-2)^2+y^2=(\sqrt{(x-2)^2+y^2})^2$，

所以问题可转化为求直线 $x-2y+3=0$ 上的点 (x,y) 到点(2,0)的距离的最小值的平方，

故求点(2,0)到直线 $x-2y+3=0$ 的距离即可.

因为距离 $d=\dfrac{|2-0+3|}{\sqrt{1+4}}=\sqrt{5}$，

所以 $(x-2)^2+y^2=(\sqrt{(x-2)^2+y^2})^2=(\sqrt{5})^2=5$.

3.A　**解析**：设点 $B(4,-2)$ 关于直线 $y=-x$ 的对称点为 $B'(x,y)$，

则入射光线所在直线经过点 B'，

且 $\begin{cases}\dfrac{x+4}{2}+\dfrac{y-2}{2}=0,\\\dfrac{y+2}{x-4}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=-4,\end{cases}$ 即 $B'(2,-4)$.

又入射光线经过点 $A(-1,2)$，所以入射光线所在直线的方程是 $\dfrac{y-2}{-4-2}=\dfrac{x+1}{2+1}$，即 $2x+y=0$.

4.B　**解析**：由 $kx+y+2-k=0$，得 $y+2=k(1-x)$，所以直线 l 过定点 $M(1,-2)$.

由题意可知，$|MP|$ 的最小值就是点 M 到直线 $2x-y+1=0$ 的距离.

由点到直线的距离公式可得 $|MP|_{\min}=\dfrac{|2+2+1|}{\sqrt{4+1}}=\sqrt{5}$.

5.$(-1,0)$ 或 $\left(\dfrac{5}{3},8\right)$　**解析**：设点 C 到直线 AB 的距离为 h，则 $\dfrac{1}{2}|AB|\cdot h=10$.又 $|AB|=\sqrt{(3+1)^2+(2-5)^2}=5$，所以 $h=4$.又直线 AB 的方程为 $\dfrac{y-5}{2-5}=\dfrac{x+1}{3+1}$，即 $3x+4y-17=0$，设 $C(x_0,y_0)$，则 $\dfrac{|3x_0+4y_0-17|}{5}=4$①.又点 C 在直线 $3x-y+3=0$ 上，所以 $3x_0-y_0+3=0$②.由①②联立方程组解得 $\begin{cases}x_0=-1,\\y_0=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=\dfrac{5}{3},\\y_0=8.\end{cases}$ 所以点 C 的坐标为 $(-1,0)$ 或 $\left(\dfrac{5}{3},8\right)$.

6.解：设点 A 关于直线 l 的对称点为 $A'(m,n)$，

则 $\begin{cases}\dfrac{n-0}{m-2}=-2,\\\dfrac{m+2}{2}-2\cdot\dfrac{n+0}{2}+8=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-2,\\n=8,\end{cases}$

所以点 A' 的坐标为 $(-2,8)$.

因为 P 为直线 l 上的一点，且 A,B 在直线 l 的同侧，所以当 B,P,A' 三点共线时，$|PA|+|PB|$ 取得最小值，为 $|A'B|$，点 P 即是直线 $A'B$ 与直线 l 的交点，则

$\begin{cases}x=-2,\\x-2y+8=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-2,\\y=3,\end{cases}$

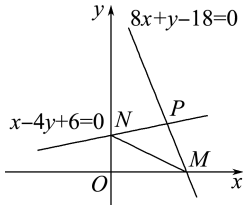
故所求点 P 的坐标为$(-2,3)$.

自我超越

1.$\frac{15}{4}$ **解析**：直线 $8x+y-18=0$ 与 x 轴的交点为 $M\left(\frac{9}{4},0\right)$，直线 $x-4y+6=0$ 与 y 轴的交点为 $N\left(0,\frac{3}{2}\right)$，

则 $|MN|=\sqrt{\left(\frac{9}{4}-0\right)^2+\left(0-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{13}}{4}$.

如图所示，



由两点式可得直线 MN 的方程为 $\frac{y-\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}}=\frac{x}{\frac{9}{4}}$，即 $4x+6y-9=0$.

由 $\begin{cases}x-4y+6=0,\\8x+y-18=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=2,\end{cases}$

所以两直线的交点 $P(2,2)$.

根据点到直线的距离公式可得点 P 到直线 MN 的距离为

$d=\frac{|4\times2+6\times2-9|}{\sqrt{4^2+6^2}}=\frac{11}{\sqrt{52}}=\frac{11\sqrt{13}}{26}$，

故 $S_{四边形OMPN}=S_{\triangle OMN}+S_{\triangle PMN}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{9}{4}\times\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{13}}{4}\times\frac{11\sqrt{13}}{26}=\frac{15}{4}$.

2.解：(1)设所求直线方程为 $x-y+4+\lambda(x-4y-2)=0$，

即$(1+\lambda)x-(1+4\lambda)y+4-2\lambda=0$，

由其与直线 $3x+4y-5=0$ 垂直可得 $3(1+\lambda)-4(1+4\lambda)=0$，解得 $\lambda=-\frac{1}{13}$，

所以所求直线方程为 $\left(1-\frac{1}{13}\right)x-\left(1-\frac{4}{13}\right)y+4+\frac{2}{13}=0$，化简得 $4x-3y+18=0$.

(2)因为 $-1-1+4>0$，$0-2+4>0$，所以两点 $A(-1,1)$，$B(0,2)$在直线 l_1 同侧.

由已知可知 $k_{l_1}=1$，

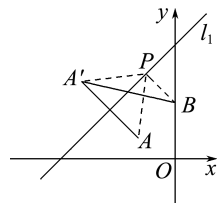
如图，设点 A 关于直线 l_1 的对称点为 $A'(x_0,y_0)$，则

$\begin{cases}\frac{1-y_0}{-1-x_0}=-1,\\\frac{-1+x_0}{2}-\frac{1+y_0}{2}+4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=-3,\\y_0=3,\end{cases}$ 即 $A'(-3,3)$.

因为 $|PA|=|PA'|$，所以 $|PA|+|PB|=|PA'|+|PB|\geqslant|A'B|=\sqrt{(-3-0)^2+(3-2)^2}=\sqrt{10}$，

当且仅当动点 P 位于 $A'B$ 与 l_1 交点时取等号，

所以 $|PA|+|PB|$ 的最小值为 $\sqrt{10}$.



课后素养评价(二十)

基础落实

1.C **解析**：由题意得 $2m-3\times4=0$，所以 $m=6$.

故两直线 $2x+3y+1=0$ 与 $4x+6y+7=0$ 即 $2x+3y+\frac{7}{2}=0$ 间的距离 $d=\frac{\left|1-\frac{7}{2}\right|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{5\sqrt{13}}{26}$.

2.AB **解析**：设直线 l_1 的方程为 $3x-4y+m=0$.

由题意得 $\frac{|m+20|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$，

解得 $m=-5$ 或 $m=-35$，

所以直线 l_1 的方程为 $3x-4y-5=0$ 或 $3x-4y-35=0$.

3.A **解析**：当两条平行直线与 AB 垂直时，两条平行直线间的距离最大，又 $k_{AB}=\frac{1-(-1)}{1-0}=2$，所以 $k_{l_1}=-\frac{1}{2}$.

又 l_1 过点 $A(1,1)$，所以 l_1 的方程为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$，即 $x+2y-3=0$.

4.C **解析**：由两平行线间的距离公式，得

$d=\frac{|-C-(-9)|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}$，

所以 $|9-C|=10$，解得 $C=-1$ 或 $C=19$.

5.$\frac{\sqrt{5}}{2}$ **解析**：由题意可知直线 l_1：$2x+y-2=0$，直线 l_2：$4x+2y+1=0$，即 l_2：$2x+y+\frac{1}{2}=0$，

则两直线斜率均为 -2，且两直线不重合，

所以 $l_1\parallel l_2$.

所以当 $AB\perp l_1$ 且 $AB\perp l_2$ 时，$|AB|$ 有最小值，

其最小值为平行直线 l_1 与 l_2 间的距离，

所以 $|AB|_{\min}=\frac{\left|-2-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

能力提升

1.A **解析**：设满足题意的点的坐标为 (x,y)，则 $\frac{|3x+2y-4|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{|3x+2y+8|}{\sqrt{3^2+2^2}}$，所以 $|3x+2y-4|=|3x+2y+8|$.将 $3x+2y$ 看成一个整体得 $3x+2y+2=0$.

2.D **解析**：设所求直线方程为 $3x-2y+C=0(C\neq-6)$，

由题意可知，所求直线到直线 l_2 的距离等于直线 l_1，l_2 间的距离，

所以 $\frac{|C-8|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{|-6-8|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}$.

因为 $C\neq-6$，所以 $C=22$.

因此，所求直线的方程为 $3x-2y+22=0$.

3.AC　**解析**：直线 l 被 l_1，l_2 截得的线段长为 $2\sqrt{2}$，

因为两平行直线间的距离 $d=\dfrac{|1-(-3)|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=2$，所以直线 l 和 l_1，l_2 的夹角为 $45°$.

又直线 l_1，l_2 的倾斜角为 $150°$，所以直线 l 的倾斜角可能是 $15°$ 或 $105°$.

4.3　**解析**：由直线 l_1，l_2 的方程可知，直线 $l_1 /\!/ l_2$，且 l_1：$2x-y+a=0$，即 $4x-2y+2a=0$，l_2：$4x-2y-1=0$，由题意得，l_1 与 l_2 间的距离为 $\dfrac{|-1-2a|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}=\dfrac{7\sqrt{5}}{10}$，整理得 $\dfrac{|2a+1|}{2\sqrt{5}}=\dfrac{7\sqrt{5}}{10}$，解得 $a=3$ 或 $a=-4$. 因为直线 l_1 不经过第四象限，所以 $a\geqslant 0$，所以 $a=3$.

5.5　**解析**：直线 l_1：$mx+y+2m-3=0$ 化简为 $m(x+2)+y-3=0$，

令 $x+2=0$ 且 $y-3=0$，解得 $x=-2$，$y=3$，

所以直线 l_1 过定点 $A(-2,3)$.

直线 l_2：$mx+y-m+1=0$ 化简为 $m(x-1)+y+1=0$，

令 $x-1=0$ 且 $y+1=0$，解得 $x=1$，$y=-1$，

所以直线 l_2 过定点 $B(1,-1)$.

当 AB 与直线 l_1，l_2 垂直时，直线 l_1，l_2 之间的距离最大，

且最大值为 $|AB|=\sqrt{(-2-1)^2+(3+1)^2}=5$.

自我超越

解：(1)因为 l_2 可化为 $2x-y-\dfrac{1}{2}=0$，所以 l_1 与 l_2 之间的距离为 $d=\dfrac{\left|a-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{7\sqrt{5}}{10}$.

因为 $a>0$，所以 $a=3$.

(2)设存在点 $P(x_0,y_0)$ 满足条件，则点 P 在与 l_1，l_2 平行的直线 l'：$2x-y+c=0$ 上，

且 $\dfrac{|c-3|}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\left|c+\dfrac{1}{2}\right|}{\sqrt{5}}$，得 $c=\dfrac{13}{2}$ 或 $c=\dfrac{11}{6}$，

所以满足条件②的点满足 $2x_0-y_0+\dfrac{13}{2}=0$ 或 $2x_0-y_0+\dfrac{11}{6}=0$.

若点 P 满足条件③，由点到直线的距离公式，得 $\dfrac{|2x_0-y_0+3|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{|x_0+y_0-1|}{\sqrt{2}}$，即 $|2x_0-y_0+3|=|x_0+y_0-1|$，

所以 $x_0-2y_0+4=0$ 或 $3x_0+2=0$. 因为点 P 在第一象限，所以 $3x_0+2=0$ 不成立.

联立方程 $\begin{cases}2x_0-y_0+\dfrac{13}{2}=0,\\ x_0-2y_0+4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=-3,\\ y_0=\dfrac{1}{2}\end{cases}$（舍去），

联立方程 $\begin{cases}2x_0-y_0+\dfrac{11}{6}=0,\\ x_0-2y_0+4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=\dfrac{1}{9},\\ y_0=\dfrac{37}{18}.\end{cases}$

所以 $P\left(\dfrac{1}{9},\dfrac{37}{18}\right)$ 即为同时满足条件的点.

课后素养评价(二十一)

基础落实

1.D　**解析**：因为 $M(2,0)$，$N(6,4)$，所以线段 MN 的中点为 $(4,2)$，

所以以线段 MN 为直径的圆的圆心坐标为 $(4,2)$.

2.D　**解析**：由题意设圆心为 $(0,b)$，则圆的方程为 $x^2+(y-b)^2=4$.

又点 $(2,4)$ 在圆上，所以 $2^2+(4-b)^2=4$，解得 $b=4$，所以圆的方程为 $x^2+(y-4)^2=4$.

故选 D.

3.A　**解析**：因为 $(m^2)^2+5^2>24$，所以点 P 在圆外.

4.B　**解析**：易知点 $M(3,4)$ 在圆 $x^2+y^2=1$ 外，且点 M 到圆心 $(0,0)$ 的距离为 5，所以圆 $x^2+y^2=1$ 上的点到 M 的距离的最小值为 $5-1=4$.

5.C　**解析**：设 $M(x_0,y_0)$ 为圆上的动点，则有 $x_0^2+y_0^2=1$.

设线段 MA 的中点为 $P(x,y)$，则 $x=\dfrac{x_0+3}{2}$，$y=\dfrac{y_0+0}{2}$，

则 $x_0=2x-3$，$y_0=2y$，代入 $x_0^2+y_0^2=1$，得 $(2x-3)^2+(2y)^2=1$，即 $(2x-3)^2+4y^2=1$.

6.$(x-2)^2+(y-4)^2=20$　**解析**：由 $\begin{cases}x-y+2=0,\\ 2x+y-8=0,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=2,\\ y=4,\end{cases}$ 即圆心为 $(2,4)$，

从而半径 $r=\sqrt{(2-0)^2+(4-0)^2}=2\sqrt{5}$，故圆的标准方程为 $(x-2)^2+(y-4)^2=20$.

7.$(0,10)$　**解析**：由题意知，$(1+2)^2+(-1)^2>m$，

所以 $m<10$.

又 $m=r^2>0$，所以 $0<m<10$.

故实数 m 的取值范围是 $(0,10)$.

8.$1+\sqrt{2}$　**解析**：$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$ 的几何意义是圆 $x^2+y^2=1$ 上的点 $P(x,y)$ 到点 $(1,1)$ 的距离，易知点 $(1,1)$ 在圆 $x^2+y^2=1$ 外，且点 $(1,1)$ 到圆心 $(0,0)$ 的距离为 $\sqrt{2}$，因此 $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$ 的最大值为 $\sqrt{2}+1$.

能力提升

1.CD　**解析**：因为圆心在 $y=x$ 上，所以设圆心为 (a,a).

因为圆的半径为 $\sqrt{2}$，所以圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-a)^2=2$.

因为该圆过原点，所以 $(-a)^2+(-a)^2=2$，解得 $a=\pm 1$，所以圆心为 $(1,1)$ 或 $(-1,-1)$.

当圆心为 $(1,1)$ 时，圆的标准方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$，D 正确；

当圆心为 $(-1,-1)$ 时，圆的标准方程为 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$.

故选 CD.

2.B　**解析**：因为四边形 $APBM$ 为正方形，且 $|MA|=|MB|=1$，所以 $|MP|=\sqrt{2}$，

故动点 P 的轨迹是以 M 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆，其方程为 $(x+2)^2+(y+3)^2=2$.

故选 B.

3.AD　**解析**：过点 P 可作圆的两条切线，说明点 P 在圆的外部，所以 $(5m+1-1)^2+(12m)^2>1$，解得 $m>\frac{1}{13}$ 或 $m<-\frac{1}{13}$，对照选项知 A，D 正确.

4.A　**解析**：易知线段 AB 的中点坐标为 $(2,5)$，斜率为 $\frac{6-4}{3-1}=1$，所以线段 AB 的垂直平分线的斜率为 -1，故线段 AB 的垂直平分线方程为 $y-5=-(x-2)$，即 $x+y-7=0$.

线段 AC 的中点坐标为 $(2,3)$，斜率为 $\frac{6-0}{3-1}=3$，所以线段 AC 的垂直平分线的斜率为 $-\frac{1}{3}$，故线段 AC 的垂直平分线方程为 $y-3=-\frac{1}{3}(x-2)$，即 $x+3y-11=0$.

由 $\begin{cases}x+y-7=0,\\x+3y-11=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=5,\\y=2.\end{cases}$

所以 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心坐标为 $(5,2)$.

5.C　**解析**：由 $y=\sqrt{36-x^2}$ 两边平方，得 $x^2+y^2=36(y\geqslant 0)$，故 $y=\sqrt{36-x^2}$ 表示半圆.

6.4　**解析**：记原点为 O，易知原点 O 在圆 $x^2+(y-2)^2=4$ 上，则 $\sqrt{m^2+n^2}=|OP|$，

所以 $\sqrt{m^2+n^2}$ 的最大值为圆 $x^2+(y-2)^2=4$ 的直径，故 $\sqrt{m^2+n^2}$ 的最大值为 $2\times 2=4$.

自我超越

A　**解析**：如图，圆 $(x-6)^2+y^2=16$ 的圆心坐标为 $C(6,0)$，半径 $R=4$.

因为 P 为线段 AB 的中点，$|AB|=4\sqrt{3}$，

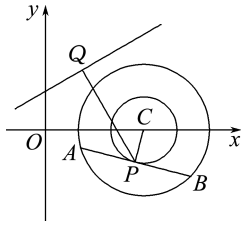
则 $|CP|=\sqrt{R^2-\left(\frac{1}{2}|AB|\right)^2}=\sqrt{16-(2\sqrt{3})^2}=2$，

所以点 P 的轨迹是以 $C(6,0)$ 为圆心，半径为 $r=2$ 的圆.

点 Q 在直线 $x-\sqrt{3}y+4=0$ 上，

可得圆心 $C(6,0)$ 到直线 $x-\sqrt{3}y+4=0$ 的距离 $d=\frac{10}{\sqrt{1+3}}=5$，

所以 $|PQ|$ 的最小值为 $d-r=5-2=3$.



课后素养评价(二十二)

基础落实

1.C　**解析**：由 $D^2+E^2-4F>0$，得 $(4m)^2+(-2)^2-4(4m^2-m)>0$，即 $4m+4>0$，解得 $m>-1$.

2.D　**解析**：由题意知 $a\neq 0$，由 $2a^2x^2+(a+1)y^2+2x+1=0$ 可得 $x^2+\frac{(a+1)y^2}{2a^2}+\frac{x}{a^2}+\frac{1}{2a^2}=0$，

所以 $\frac{a+1}{2a^2}=1$，即 $2a^2-a-1=0$，解得 $a=1$ 或 $a=-\frac{1}{2}$.

当 $a=1$ 时，方程为 $x^2+y^2+x+\frac{1}{2}=0$，可化为 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=-\frac{1}{4}$，不符合题意；

当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，方程为 $x^2+y^2+4x+2=0$，可化为 $(x+2)^2+y^2=2$，符合题意.

所以 $a=-\frac{1}{2}$.

3.A　**解析**：因为 $x^2+y^2-x-a=0$ 可化为 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=a+\frac{1}{4}$，则 $a+\frac{1}{4}>0$，所以 $a>-\frac{1}{4}$.

又点 $(1,1)$ 在圆 $x^2+y^2-x-a=0$ 的外部，所以 $1^2+1^2-1-a>0$，故 $a<1$.

综上，$-\frac{1}{4}<a<1$. 故选 A.

4.D　**解析**：将 $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ 整理得 $(x-1)^2+(y-4)^2=4$，所以圆心坐标为 $(1,4)$.

所以圆心到直线 $ax+y-1=0$ 的距离 $d=\frac{|a+4-1|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{2}$，整理得 $a^2-6a-7=0$，解得 $a=-1$ 或 $a=7$.

5.A　**解析**：由题意知圆心为 $(-a,-a)$，则圆心都在直线 $y=x$ 上.

6.$x^2+y^2-4x+6y+8=0$　**解析**：设圆的一般方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

由题意可知，$-4,-2$ 是方程 $y^2+Ey+F=0$ 的两个根，

所以 $\begin{cases}-4-2=-E,\\(-4)\times(-2)=F,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}E=6,\\F=8.\end{cases}$

又点 $\left(-\frac{D}{2},-3\right)$ 在直线 $2x-y-7=0$ 上，

所以 $-D+3-7=0$，即 $D=-4$.

所以圆的一般方程为 $x^2+y^2-4x+6y+8=0$.

7.$(x-1)^2+y^2=2$　**解析**：将 $x^2+y^2-2x=0$ 整理得 $(x-1)^2+y^2=1$.

设 $P(x,y)$，

圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的圆心为 $B(1,0)$，

则 $|PA|^2+1=|PB|^2$，

所以 $|PB|^2=2$.

所以点 P 的轨迹是以 $(1,0)$ 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆.

所以点 P 的轨迹方程是 $(x-1)^2+y^2=2$.

8.$x-2y-1=0$　**解析**：设动圆圆心为 (x,y)，由题意得

$$\begin{cases}x=\frac{4m+2}{2}=2m+1,\\y=\frac{2m}{2}=m,\end{cases}$$ 整理得 $x-2y-1=0$.

能力提升

1.D　**解析**：方程 $x^2+y^2+4x-2y-4=0$ 可化为 $(x+2)^2+(y-1)^2=9$，所以圆心为 $(-2,1)$，半径为 3.

而 x^2+y^2 表示圆上的点到原点的距离的平方，所以 x^2+y^2 的最大值为 $[\sqrt{(-2-0)^2+(1-0)^2}+3]^2=14+6\sqrt{5}$.

2.A　**解析**：圆 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 关于直线 $2ax-by+2=0(a,b\in\mathbf{R})$ 对称，则圆心 $(-1,2)$ 在该直线上，所以 $-2a-2b+2=0$，即 $a+b=1$，所以 $ab=a(1-a)=-a^2+a=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{4}$，所以 ab 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right]$.故选 A.

3.B　**解析**：由题易知 $k_{AB}=\frac{-1-3}{3+1}=-1$，所以线段 AB 的垂直平分线的斜率为 1.又线段 AB 的中点为 $(1,1)$，所以线段 AB 的垂直平分线方程为 $y=x$.

由 $\begin{cases}y=x,\\x-2y-1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1,\\y=-1,\end{cases}$ 即圆心坐标为 $(-1,-1)$，

半径为 $r=\sqrt{(-1+1)^2+(-1-3)^2}=4$，所以圆的方程为 $(x+1)^2+(y+1)^2=16$.

故选 B.

4.C　**解析**：将圆 $x^2+y^2-2ax+4ay+5a^2-9=0$ 化为 $(x-a)^2+(y+2a)^2=9$，

所以圆心坐标为 $(a,-2a)$，半径为 3.

因为圆上所有点都在第二象限，

所以 $\begin{cases}a<0,\\-2a>0,\\a+3<0,\\-2a-3>0,\end{cases}$ 解得 $a<-3$.

5.B　**解析**：设 $M(x,y)$，$B(x_0,y_0)$.

由点 M 是线段 AB 的中点，得 $\begin{cases}x=\frac{x_0-2}{2},\\y=\frac{y_0+0}{2},\end{cases}$

可得 $\begin{cases}x_0=2x+2,\\y_0=2y.\end{cases}$

又点 B 在圆 C 上运动，所以 $x_0^2+y_0^2=3$，

将上式代入，可得 $(2x+2)^2+(2y)^2=3$，

化简整理得点 M 的轨迹方程为 $(x+1)^2+y^2=\frac{3}{4}$.

6.$x^2+y^2+2x-4y=0$　**解析**：因为 $(a-1)x-y+a+1=0$ 可化为 $a(x+1)-x-y+1=0$，所以该直线恒过定点 $(-1,2)$，

所以所求圆的方程为 $(x+1)^2+(y-2)^2=5$，即 $x^2+y^2+2x-4y=0$.

7.$3-\sqrt{2}$　**解析**：易得 $|AB|=2\sqrt{2}$，直线 AB 的方程为 $x-y+2=0$，$x^2+y^2-2x=0$ 可化为 $(x-1)^2+y^2=1$，故圆心 $(1,0)$ 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|1-0+2|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}>1$，所以圆上任意一点到直线 AB 的最小距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}-1$.故 $\triangle ABC$ 的面积的最小值为 $\frac{1}{2}\times|AB|\times\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-1\right)=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-1\right)=3-\sqrt{2}$.

8.解：(1)因为点 $P(a,a+1)$ 在圆上，

所以 $a^2+(a+1)^2-4a-14(a+1)+45=0$，

解得 $a=4$，即 $P(4,5)$，

所以 $|PQ|=\sqrt{(4+2)^2+(5-3)^2}=2\sqrt{10}$，

$k_{PQ}=\frac{3-5}{-2-4}=\frac{1}{3}$.

(2)因为圆的方程可化为 $(x-2)^2+(y-7)^2=8$，

所以圆心 C 的坐标为 $(2,7)$，半径为 $2\sqrt{2}$，

所以 $|QC|=\sqrt{(2+2)^2+(7-3)^2}=4\sqrt{2}>2\sqrt{2}$，

所以点 Q 在圆外，

所以 $|MQ|_{\max}=4\sqrt{2}+2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$，

$|MQ|_{\min}=4\sqrt{2}-2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

自我超越

解：(1)当 $a=4$，$b=2$ 时，$f(x)=x^2+4x+2$，令 $f(x)=x^2+4x+2=0$，得 $x=-2\pm\sqrt{2}$，

不妨设 $A(-2+\sqrt{2},0)$，$B(-2-\sqrt{2},0)$，则 $AB=2\sqrt{2}$.

$f(x)=x^2+4x+2$ 中，令 $x=0$，得 $f(x)=2$，则 $C(0,2)$，

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2=2\sqrt{2}$.

(2)设所求圆的一般方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

由题意得 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R},b>0)$ 的图象与两坐标轴的三个交点即为圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 和坐标轴的交点，

令 $y=0$ 得，$x^2+Dx+F=0$，

由题意可得，这与 $x^2+ax+b=0$ 是同一个方程，故 $D=a$，$F=b$.

令 $x=0$，得 $y^2+Ey+F=0$，

由题意可得，方程 $x^2+ax+b=0$ 有一个根为 b，将 $y=b$ 代入 $y^2+Ey+F=0$，得 $E=-b-1$，

所以⊙M 的方程为 $x^2+y^2+ax-(b+1)y+b=0$.

(3)把⊙M 的方程改写为 $x^2+y^2-y+ax+b(1-y)=0$，

令 $\begin{cases}x=0,\\1-y=0,\\x^2+y^2-y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=1,\end{cases}$ 故⊙M 过定点 $(0,1)$.

课后素养评价(二十三)

基础落实

1.C　**解析**：由题知，圆心坐标为 $(0,0)$，半径为 $\sqrt{5}$.

将直线 $ax-y+2a=0$ 化为点斜式得 $y=a(x+2)$，

知该直线过定点 $(-2,0)$.

又 $(-2)^2+0^2<5$，故该定点在圆内，

所以该直线与圆 $x^2+y^2=5$ 必相交.

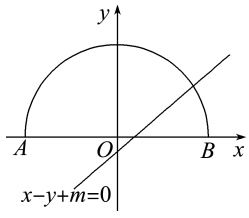
2.C　**解析**：由题意得 $\frac{|a+a+2|}{\sqrt{2}}=|2\sqrt{2}a|$，解得 $a=1$（负值舍），所以圆 M 的半径为 $2\sqrt{2}$.

故选 C.

3.C　**解析**：曲线 $y=\sqrt{4-x^2}$ 是圆 $x^2+y^2=4$ 的上半部分，如图所示，易知 m 为直线 $x-y+m=0$ 的纵截距，当直线 $x-y+m=0$ 与曲线 $y=\sqrt{4-x^2}$ 相切时，由 $\frac{|m|}{\sqrt{2}}=2$，得 $m=2\sqrt{2}$ 或 $-2\sqrt{2}$（舍去）.

结合图象可知，当点 B 在直线 $x-y+m=0$ 上时，$m=-2$，故 $m\geqslant-2$.

所以 $m\in[-2,2\sqrt{2}]$.故选 C.



4.BD　**解析**：$x^2+y^2-4x+3=0$ 整理得 $(x-2)^2+y^2=1$.

因为 $x=4,y=0$ 时，$x^2+y^2-4x+3=3>0$，所以点(4,0)在圆 M 外，A 错误；

因为圆心 $M(2,0)$ 在直线 $x+3y-2=0$ 上，所以圆 M 关于直线 $x+3y-2=0$ 对称，B 正确；

因为圆 M 的半径为 1，故 C 错误；

因为圆心 $M(2,0)$ 到直线 $x-\sqrt{3}y=0$ 的距离为 $d=\frac{|2|}{\sqrt{1+3}}=1$，与半径相等，所以直线 $x-\sqrt{3}y=0$ 与圆 M 相切，D 正确.

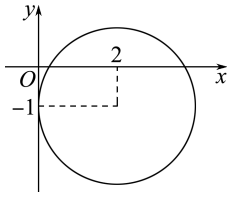
5.C　**解析**：由题意，圆的方程可化为 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$，则圆心为 $(2,-1)$，半径为 2.

当切线的斜率存在时，设切线方程为 $kx-y=0$.

由圆心 $(2,-1)$ 到切线的距离等于半径 2，即 $\frac{|2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得 $k=\frac{3}{4}$，

因此切线方程为 $y=\frac{3}{4}x$.

当切线的斜率不存在时，如图，y 轴是符合条件的切线，此时切线方程为 $x=0$.



综上，所求直线方程为 $y=\frac{3}{4}x$ 或 $x=0$.

6.0　**解析**：由 $|AB|=2\sqrt{3}$，圆半径 $r=2$，

得圆心 $(1,2)$ 到直线 $ax-y+3=0$ 的距离为 1，

即 $\frac{|a+1|}{\sqrt{a^2+1}}=1$，解得 $a=0$.

7.$3x+4y-5=0$(或 $7x-24y-25=0$ 或 $x+1=0$)

解析：显然直线的斜率不为 0，不妨设直线的方程为 $x+by+c=0$，

于是 $\frac{|c|}{\sqrt{1+b^2}}=1,\frac{|3+4b+c|}{\sqrt{1+b^2}}=4$.

故 $c^2=1+b^2$①，$|3+4b+c|=|4c|$，

于是 $3+4b+c=4c$ 或 $3+4b+c=-4c$.

再结合①解得 $\begin{cases}b=0,\\c=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b=-\frac{24}{7},\\c=-\frac{25}{7}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b=\frac{4}{3},\\c=-\frac{5}{3},\end{cases}$

所以直线有三条，分别为 $x+1=0,7x-24y-25=0,3x+4y-5=0$.

能力提升

1.A　**解析**：因为 $mx-y-2m-1=0$，所以 $m(x-2)-(y+1)=0$，

所以直线恒过点 $M(2,-1)$，所以 M 在圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=9$ 的内部，如图.

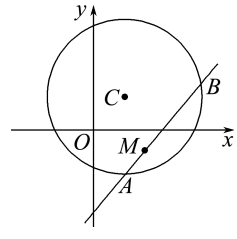
因为 $(x-1)^2+(y-1)^2=9$，圆心 $C(1,1)$，半径 $r=3$，

要使 $|AB|$ 最小，则圆心到直线 $mx-y-2m-1=0$ 的距离最大，

所以当直线 $mx-y-2m-1=0$ 与直线 CM 垂直时，圆心到直线 $mx-y-2m-1=0$ 的距离最大.

因为 $C(1,1)$，$M(2,-1)$，所以 $|CM|=\sqrt{(1-2)^2+(1+1)^2}=\sqrt{5}$，

则 $|AB|$ 的最小值为 $2\sqrt{r^2-|CM|^2}=2\sqrt{9-5}=4$.



2.C　**解析**：由题意，$|OA|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，圆 O 的半径为 1，故 $|AB|=|AC|=\sqrt{5-1}=2$，

故四边形 $OBAC$ 的周长为 $|OB|+|OC|+|AB|+|AC|=1+1+2+2=6$.

3.3　**解析**：圆的方程可化为 $(x+1)^2+(y+2)^2=8$，

所以圆心 $(-1,-2)$ 到直线 $x+y+1=0$ 的距离 $d=\frac{|-1-2+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

又圆的半径为 $2\sqrt{2}$，所以圆上到直线 $x+y+1=0$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 的点有 3 个.

4.$\frac{3}{4}$　**解析**：由 $(x-2)^2+y^2=2$，得圆心 $(2,0)$，半径 $r=\sqrt{2}$，

所以点 $(0,4)$ 与圆心的距离 $d=\sqrt{(0-2)^2+(4-0)^2}=2\sqrt{5}$，

所以 $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{r}{d}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

又 $\cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}=1-2\times\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$，则 $\sin\theta=\frac{3}{5}$，

所以 $\tan\theta=\frac{3}{4}$.

5.解：(1)由题意可知，圆心 $C(3,4)$，半径 $r=2$.

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l：$y=k(x-1)$，即 $kx-y-k=0$，

所以圆心 $C(3,4)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|3k-4-k|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，

解得 $k=\frac{3}{4}$，

此时直线 l 的方程为 $\frac{3}{4}x-y-\frac{3}{4}=0$，即 $3x-4y-3=0$；

当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=1$，满足

题意.

综上所述,直线 l 的方程为 $3x-4y-3=0$ 或 $x=1$.

(2)因为直线 m 的方程可化为 $y-3=k(x-2)$,所以直线 m 过定点 $P(2,3)$.

又点 $P(2,3)$ 在圆 C 内,所以当直线 m 与直线 CP 垂直时,直线 m 被圆 C 截得的弦 DF 的长 $|DF|$ 最小.

因为 $|CP|=\sqrt{(3-2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{2}$,$r=2$,

所以 $|DF|_{\min}=2\sqrt{r^2-|CP|^2}=2\sqrt{2}$,

所以 $|DF|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

自我超越

B　**解析**:圆 C:$x^2+y^2-2x=0$,即为 $(x-1)^2+y^2=1$,圆心 $C(1,0)$,

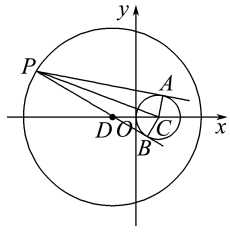
圆 $x^2+y^2+2x-15=0$,即为 $(x+1)^2+y^2=16$,设圆心为 D,半径为 r,则 $D(-1,0)$,$r=4$.

因为 P 是圆 $x^2+y^2+2x-15=0$ 上一动点,

所以 $|PC|_{\max}=|CD|+r=2+4=6$.

因为 PA,PB 分别切圆 C 于 A,B,$|PC|$ 为四边形 $PACB$ 的外接圆的直径,

所以四边形 $PACB$ 的外接圆的面积的最大值为 $S=\pi\times3^2=9\pi$.

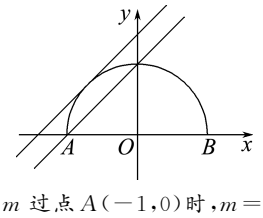


课后素养评价(二十四)

基础落实

1.C　**解析**:由 $y=\sqrt{1-x^2}$,得到 $x^2+y^2=1(y\geqslant0)$,

所以曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 表示以原点为圆心,1 为半径的 x 轴上方的半圆,如图.



当直线 $y=x+m$ 过点 $A(-1,0)$ 时,$m=1$,此时 $y=x+m$ 与曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 有两个不同的交点,

当直线 $y=x+m$ 与曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 相切时,由 $\frac{|m|}{\sqrt{2}}=1$,解得 $m=\sqrt{2}$ 或 $m=-\sqrt{2}$(舍).

由图可知,实数 m 的取值范围是 $[1,\sqrt{2})$.

2.C　**解析**:设 AB 的中点为 C,则 $OC\perp AB$.

因为 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|\geqslant\sqrt{3}|\overrightarrow{AB}|$,

所以 $|2\overrightarrow{OC}|\geqslant\sqrt{3}|\overrightarrow{AB}|$,所以 $|\overrightarrow{AB}|\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}|\overrightarrow{OC}|$.

因为 $|\overrightarrow{OC}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2=4\Rightarrow\frac{4}{3}|\overrightarrow{OC}|^2\geqslant4$,即 $|\overrightarrow{OC}|^2\geqslant3$.

又因为直线 $x+y-k=0(k>0)$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 交于不同的两点 A,B,

所以 $|\overrightarrow{OC}|^2<4$,故 $4>|\overrightarrow{OC}|^2\geqslant3$,

则 $4>\left(\frac{|-k|}{\sqrt{2}}\right)^2\geqslant3$.

因为 $k>0$,所以 $\sqrt{6}\leqslant k<2\sqrt{2}$.

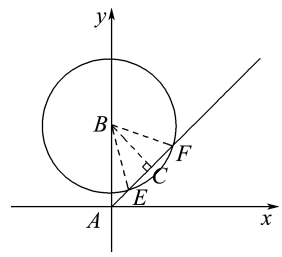
3.$x+y=0$　**解析**:因为圆 C:$x^2+y^2-4y=0$ 的圆心为 $C(0,2)$,又点 $P(-1,1)$,

所以直线 CP 的斜率为 $k_{CP}=\frac{2-1}{0+1}=1$.

因为 AB 是圆 C 的一条弦,P 为线段 AB 的中点,所以 $AB\perp CP$,所以 $k_{AB}=-1$,即直线 l 的斜率为 -1.

因此,直线 l 的方程为 $y-1=-(x+1)$,即 $x+y=0$.

4.**解**:以 A 为坐标原点,正北方向为纵轴正方向,正东方向为横轴正方向,建立如图所示的平面直角坐标系.



因为台风中心从 A 地以 10 km/h 的速度向东北方向移动,所以运动轨迹所在直线 AF 与坐标轴成 45°角.

设以点 B 为圆心,15 km 为半径的圆交 AF 于点 E,F,连接 BE,BF.

过点 B 作 $BC\perp AF$,交 AF 于点 C.

在等腰直角三角形 ABC 中,$AB=20$ km,$BC=\frac{\sqrt{2}}{2}\times20=10\sqrt{2}$(km).

在 Rt△BCE 中,$BC=10\sqrt{2}$ km,$BE=15$ km,所以 $CE=\sqrt{BE^2-BC^2}=5$(km),所以 $EF=2CE=10$(km).

因为台风中心从 A 地以 10 km/h 的速度向东北方向移动,且当台风中心在线段 EF 上时城市 B 处于危险地区内,所以城市 B 处于危险地区内的时间为 $\frac{10}{10}=1$(h).

5.**解**:圆的方程 $x^2+y^2-4x-14y+45=0$ 可化为 $(x-2)^2+(y-7)^2=8$,所以圆心为 $C(2,7)$,半径 $r=2\sqrt{2}$.

(1)设 $m+2n=t$,则将 $m+2n=t$ 看成是关于 m,n 的方程.

因为该直线与圆 C 有公共点,所以圆心 C 到该直线的距离 $d=\frac{|2+2\times7-t|}{\sqrt{1^2+2^2}}\leqslant2\sqrt{2}$,

解得 $16-2\sqrt{10}\leqslant t\leqslant16+2\sqrt{10}$,

所以 $m+2n$ 的最大值为 $16+2\sqrt{10}$.

(2)设点 $Q(-2,3)$,则 $\frac{n-3}{m+2}$ 表示直线 MQ 的斜率.

设直线 MQ 的方程为 $y-3=k(x+2)$,即 $kx-y+2k+3=0$.

因为直线 MQ 与圆 C 有公共点,所以圆心 C 到直线 MQ 的距离 $\frac{|2k-7+2k+3|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant2\sqrt{2}$,解得 $2-\sqrt{3}\leqslant k\leqslant2+\sqrt{3}$,

所以$\frac{n-3}{m+2}$的最大值为$2+\sqrt{3}$，最小值为$2-\sqrt{3}$.

(3)设$\mu=m^2+n^2=(m-0)^2+(n-0)^2$，表示圆$C$上的点到原点的距离的平方，

则$\mu_{max}=[\sqrt{(2-0)^2+(7-0)^2}+r]^2=(\sqrt{53}+2\sqrt{2})^2=61+4\sqrt{106}$，

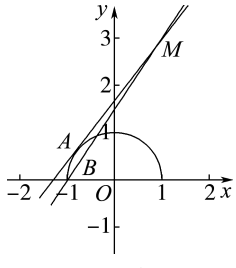
$\mu_{min}=[\sqrt{(2-0)^2+(7-0)^2}-r]^2=(\sqrt{53}-2\sqrt{2})^2=61-4\sqrt{106}$，

所以m^2+n^2的最大值为$61+4\sqrt{106}$，最小值为$61-4\sqrt{106}$.

能力提升

1.B　**解析**：因为关于x的方程$kx+3-k=\sqrt{1-x^2}$恰有两个实数根，

所以函数$y=k(x-1)+3$与$y=\sqrt{1-x^2}$的图象恰有两个交点，即直线$y=k(x-1)+3$与半圆$y=\sqrt{1-x^2}$恰有两个交点，如图所示.



已知直线$y=k(x-1)+3$经过定点$M(1,3)$，

当直线$y=k(x-1)+3$与半圆$y=\sqrt{1-x^2}$相切于点A时，由$\frac{|3-k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得$k=\frac{4}{3}$.

当直线$y=k(x-1)+3$经过点$B(-1,0)$时，$k=\frac{3}{2}$.

所以满足函数$y=k(x-1)+3$与$y=\sqrt{1-x^2}$的图象恰有两个交点的k的取值范围为$\left(\frac{4}{3},\frac{3}{2}\right]$.

2.B　**解析**：点M在直线$3x-4y+c=0$上，设点M的坐标为$\left(x,\frac{3x+c}{4}\right)$.

由直线$3x-4y+c=0$上存在点M满足$|MA|=2|MO|$，则$|MA|^2=4|MO|^2$，

所以$(x-3)^2+\left(\frac{3x+c}{4}\right)^2=4\left[x^2+\left(\frac{3x+c}{4}\right)^2\right]$，

整理可得$25x^2+(6c+32)x+c^2-48=0$.

由$\Delta=(6c+32)^2-100(c^2-48)\geqslant 0$，得$c^2-6c-91\leqslant 0$，解得$-7\leqslant c\leqslant 13$，

所以实数c的取值范围为$[-7,13]$.

3.A　**解析**：由圆C的方程可得圆心$C(1,2)$，半径$r=5$.

直线l的方程可整理为$m(x-3)-y+1=0$，

令$\begin{cases}x-3=0,\\-y+1=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=3,\\y=1,\end{cases}$

所以直线l恒过定点$D(3,1)$.

由题意知，当AB与CD垂直时，弦长$|AB|$最小，

此时，$k_{CD}=\frac{2-1}{1-3}=-\frac{1}{2}$，所以$k_{AB}=2$，直线$l$：$2x-y-5=0$.

因为点C到直线l的距离$d=\frac{|2-2-5|}{\sqrt{4+1}}=\sqrt{5}$，

所以$|AB|_{min}=2\sqrt{r^2-d^2}=2\times\sqrt{25-5}=4\sqrt{5}$.

4.C　**解析**：圆的标准方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=1$，圆心为$C(1,1)$，半径为$r=1$，

圆心$C(1,1)$到直线l：$3x-4y+11=0$的距离$d=\frac{|3-4+11|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2>r=1$，

所以圆C与直线l相离.

根据对称性可知，四边形$PACB$的面积为$2S_{\triangle APC}=2\times\frac{1}{2}\times|PA|\times r=|PA|=\sqrt{|PC|^2-r^2}=\sqrt{|PC|^2-1}$，

要使四边形$PACB$的面积最小，则只需$|PC|$最小.

又$|PC|$的最小值为圆心C到直线l：$3x-4y+11=0$的距离$d=2$，

所以四边形$PACB$面积的最小值为$\sqrt{|PC|^2_{min}-1}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$.

故选C.

5.4π　**解析**：圆C的方程可化为$x^2+(y-a)^2=a^2+2$，可得圆心为$C(0,a)$，半径$r=\sqrt{a^2+2}$，所以圆心C到直线$x-y+2a=0$的距离为$\frac{|-a+2a|}{\sqrt{2}}=\frac{|a|}{\sqrt{2}}$. 由题意得$\left(\frac{|a|}{\sqrt{2}}\right)^2+(\sqrt{3})^2=(\sqrt{a^2+2})^2$，解得$a^2=2$，所以圆$C$的半径为2，所以圆$C$的面积为$4\pi$.

6.10　**解析**：由题意知，设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，因为$PR\perp QR$，所以$\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{QR}=(1-x_1,1-y_1)\cdot(1-x_2,1-y_2)=1-(x_1+x_2)+x_1x_2+1-(y_1+y_2)+y_1y_2=5-2(x_1+x_2)+\frac{5}{4}x_1x_2=0$.

由$\begin{cases}x^2+y^2-x-8y+m=0,\\x+2y-6=0,\end{cases}$消去$y$，得$5x^2+4m-60=0$，

所以$x_1+x_2=0$，$x_1x_2=\frac{4m-60}{5}$，

所以$5+\frac{5}{4}\times\frac{4m-60}{5}=m-10=0$，得$m=10$.

7.解：(1)由题意可知，$A(40,40)$，$B(20,0)$.

设过O，A，B三点的圆C的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

则$\begin{cases}F=0,\\40^2+40^2+40D+40E+F=0,\\20^2+20D+F=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}D=-20,\\E=-60,\\F=0,\end{cases}$

所以圆C的方程为$x^2+y^2-20x-60y=0$，即圆C的标准方程为$(x-10)^2+(y-30)^2=1\ 000$.

(2)由(1)知，圆C的圆心$C(10,30)$，半径$r=10\sqrt{10}$.

易知$D(-20,-20\sqrt{3})$，且该船航线所在直线l的斜率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故直线l的方程为$\sqrt{3}x-3y-40\sqrt{3}=0$.

由于圆心 $C(10,30)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|10\sqrt{3}-3\times30-40\sqrt{3}|}{\sqrt{3+9}}=15(\sqrt{3}+1)>10\sqrt{10}$，

所以该船没有触礁的危险.

自我超越

解：(1)如图 1，以 BC，BA 所在直线分别为 x 轴、y 轴，建立平面直角坐标系，则 $E(0,5)$，$F(0,2)$.

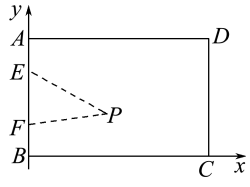


图 1

设成功点 $P(x,y)$，可得 $\frac{|PF|}{v}=\frac{|PE|}{2v}$，即 $\frac{\sqrt{x^2+(y-2)^2}}{v}=\frac{\sqrt{x^2+(y-5)^2}}{2v}$，

化简得 $x^2+(y-1)^2=4$.

因为点 P 需在矩形场地内，所以 $0\leqslant x\leqslant2$，

故所求轨迹方程为 $x^2+(y-1)^2=4(0\leqslant x\leqslant2,y\geqslant0)$.

(2)如图 2，当线段 EN 与(1)中的圆相切时，$\sin\angle BEP=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，所以 $\angle BEP=30°$，所以 $|BN|=5\tan30°=\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

若机器犬在线段 EN 上都能逃脱，则点 N 的横坐标的取值范围是 $\left(\frac{5\sqrt{3}}{3},12\right]$.

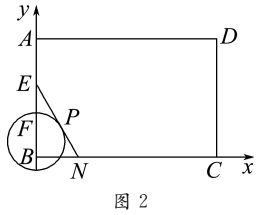


图 2

课后素养评价(二十五)

基础落实

1.C　**解析**：因为圆 $C_1:x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 的圆心为 $C_1(2,-1)$，半径为 $r_1=2$，

圆 $C_2:x^2+y^2+4x-4y-1=0$ 的圆心为 $C_2(-2,2)$，半径为 $r_2=3$，

又 $|C_1C_2|=\sqrt{(2+2)^2+(-1-2)^2}=5=r_1+r_2$，所以两圆的位置关系为外切.

故选 C.

2.B　**解析**：由圆 $C_1:x^2+y^2+2x+3y+1=0$，得 $(x+1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$，则其圆心为 $C_1\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$，半径 $r_1=\frac{3}{2}$，

由圆 $C_2:x^2+y^2+4x+3y+2=0$，得 $(x+2)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{17}{4}$，则其圆心为 $C_2\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$，半径 $r_2=\frac{\sqrt{17}}{2}$，

则两圆的圆心距为 $|C_1C_2|=1$，$r_1+r_2=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$，$r_2-r_1=\frac{\sqrt{17}-3}{2}$.

因为 $r_2-r_1<|C_1C_2|<r_2+r_1$，则两圆相交，

所以圆 C_1 与圆 C_2 的公切线有 2 条.故选 B.

3.B　**解析**：圆 $x^2+y^2+2x-4y-5=0$，即 $(x+1)^2+(y-2)^2=10$，

所以圆心为 $(-1,2)$，半径为 $\sqrt{10}$.

圆 $x^2+y^2+2x-1=0$，即 $(x+1)^2+y^2=2$，

所以圆心为 $(-1,0)$，半径为 $\sqrt{2}$.

所以两圆圆心距为 $\sqrt{(-1+1)^2+(2-0)^2}=2\in(\sqrt{10}-\sqrt{2},\sqrt{10}+\sqrt{2})$，

所以两圆相交，两圆方程作差得到 $y=-1$，即公共弦所在直线的方程为 $y=-1$.

又圆 $(x+1)^2+(y-2)^2=10$ 的圆心 $(-1,2)$ 到直线 $y=-1$ 的距离为 3，

所以公共弦 AB 的长为 $2\sqrt{(\sqrt{10})^2-3^2}=2$.故选 B.

4. B　**解析**：由题意可知，两圆的圆心距为 $\sqrt{(3-0)^2+(-4-0)^2}=5$，设圆 C 的半径为 r，

因为两圆外切，则 $5=r+1$，得 $r=4$，

所以圆 C 的方程为 $(x-3)^2+(y+4)^2=16$.

5.B　**解析**：由圆 $O_1:x^2+y^2+y=0$，可得 $x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，圆心为 $O_1\left(0,-\frac{1}{2}\right)$，

由圆 $O_2:x^2+y^2-2x=0$，可得 $(x-1)^2+y^2=1$，圆心为 $O_2(1,0)$，根据圆的对称性可知，O_1O_2 即线段 AB 的中垂线，故其方程为 $y=\frac{1}{2}(x-1)$，即 $x-2y-1=0$.故选 B.

6.B　**解析**：$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ 说明点 P 在以 AB 为直径的圆 $x^2+y^2=t^2$ 上，而点 P 又在圆 C 上，因此两圆有公共点，则两圆的圆心距位于半径差的绝对值与半径和的闭区间中，所以 $|t-1|\leqslant|OC|\leqslant t+1$. 又 $|OC|=\sqrt{(\sqrt{3}-0)^2+(1-0)^2}=2$，所以 $|t-1|\leqslant2\leqslant t+1$. 又 $t>0$，解得 $1\leqslant t\leqslant3$.故选 B.

7.$[\sqrt{5}-1,\sqrt{5}+1]$　**解析**：由 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$，得 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$，则圆心为 $(-1,2)$，半径为 1，两圆圆心之间的距离为 $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.因为两圆有公共点，所以 $|r-1|\leqslant\sqrt{5}\leqslant r+1$，所以 $\sqrt{5}-1\leqslant r\leqslant\sqrt{5}+1$，即 $-1\leqslant r-\sqrt{5}\leqslant1$，所以 $\sqrt{5}-1\leqslant r\leqslant\sqrt{5}+1$.

8. $0<m<6$　**解析**：由题意得圆 C_1 的圆心 $C_1\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$，半径 $r_1=\frac{3}{2}$.

将 $x^2+y^2+4x+3y+m=0$ 化为标准方程得 $(x+2)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}-m$，

易知圆 C_2 的圆心 $C_2\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$，半径 $r_2=\sqrt{\frac{25}{4}-m}$，

且 $m<\frac{25}{4}$.

又两圆有且只有两条公切线，故两圆相交，即$|C_1C_2|=1\in(|r_1-r_2|,r_1+r_2)$，显然$r_1+r_2>1$，

则$-1<r_1-r_2<1$，即$-1<\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{25}{4}-m}<1\Rightarrow\frac{1}{2}<\sqrt{\frac{25}{4}-m}<\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{4}<\frac{25}{4}-m<\frac{25}{4}$，

解得$0<m<6$.综上，$0<m<6$.

能力提升

1.A　**解析**：由题意得，所求直线即为两圆圆心$(1,0)$，$(-1,2)$连线所在的直线，故由$\frac{y-0}{2-0}=\frac{x-1}{-1-1}$，得$x+y-1=0$.

2.AD　**解析**：将圆$C_2:x^2+y^2-6x-8y-k=0$化为$(x-3)^2+(y-4)^2=25+k$，则$k>-25$，圆心为$C_2(3,4)$，半径为$\sqrt{25+k}$；

圆$C_1:x^2+y^2=1$的圆心为$C_1(0,0)$，半径为1.

要使圆C_1和圆C_2没有公共点，则$|C_1C_2|>\sqrt{25+k}+1$或$|C_1C_2|<\sqrt{25+k}-1$.

又$|C_1C_2|=5$，

所以$5>\sqrt{25+k}+1$或$5<\sqrt{25+k}-1$，

解得$-25<k<-9$或$k>11$.

所以实数k的取值范围是$(-25,-9)\cup(11,+\infty)$.

故选AD.

3.A　**解析**：以线段OM为直径的圆的方程为$x^2+y^2-4x+y=0$，经过两切点的直线就是两圆的公共弦所在的直线.将两圆的方程相减得$4x-y-4=0$，这就是经过两切点的直线方程.

4.ABC　**解析**：对于A，由圆$O_2:x^2+y^2+2x-4y=0$可得$(x+1)^2+(y-2)^2=5$，

所以圆O_2的圆心为$(-1,2)$，半径为$\sqrt{5}$，故A正确；

对于B，由圆$O_1:x^2+y^2-2x=0$与圆$O_2:x^2+y^2+2x-4y=0$的交点为A,B，

两式作差可得$4x-4y=0$，即公共弦AB所在直线的方程为$x-y=0$，故B正确；

对于C，圆$O_1:x^2+y^2-2x=0$的圆心为$(1,0)$，$k_{AB}=1$，则线段AB中垂线的斜率为-1，即线段AB中垂线的方程为$y-0=-1\times(x-1)$，整理可得$x+y-1=0$，故C正确；

对于D，圆心$O_2(-1,2)$到$x-y=0$的距离为$d=\frac{|-1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，圆$O_2$的半径为$\sqrt{5}$，所以点$P$到直线$AB$距离的最大值为$\frac{3\sqrt{2}}{2}+\sqrt{5}$，故D不正确.故选ABC.

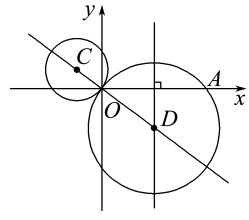
5.$(x-8)^2+(y+6)^2=100$　**解析**：圆$C:x^2+y^2+8x-6y=0$的标准方程为$(x+4)^2+(y-3)^2=25$，则圆心为$C(-4,3)$，半径$r=5$，圆C过原点.

如图，因为圆D与圆C相切于坐标原点O，且过点A，

所以圆D与圆C相外切，圆心D是线段OA的垂直平分线与直线CO的交点.

直线OC的方程为$3x+4y=0$，线段OA的垂直平分线的方程为$x=8$，所以$D(8,-6)$，

所以圆D的半径$R=|OD|=10$，所以圆D的标准方程为$(x-8)^2+(y+6)^2=100$.



6.$x+2y-8=0$　**解析**：把圆的方程化成标准方程为$(x-2)^2+(y-4)^2=4$，所以圆心为$(2,4)$，半径为2.

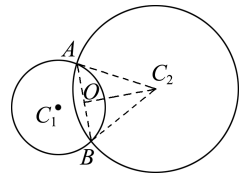
圆心到原点的距离为$\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，所以切线长为$\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4$，所以$P,Q$在以$(0,0)$为圆心，以4为半径的圆上，方程为$x^2+y^2=16$.

由$\begin{cases}x^2+y^2-4x-8y+16=0,\\x^2+y^2-16=0,\end{cases}$

得$x+2y-8=0$，即直线PQ的方程为$x+2y-8=0$.

7.**解**：(1)因为$C_1:x^2+y^2-2x=0$，$C_2:x^2+y^2-6x-4y+4=0$，所以两圆方程作差，得$4x+4y-4=0$，即$x+y-1=0$，所以公共弦AB所在直线的方程为$x+y-1=0$.

(2)如图，连接AB，AC_2，BC_2，取AB的中点O，连接C_2O.



根据圆的性质可得$C_2O\perp AB$.

因为圆C_2的方程$x^2+y^2-6x-4y+4=0$可整理为$(x-3)^2+(y-2)^2=9$，所以$C_2(3,2)$，$|AC_2|=3$.

由(1)，得点C_2到直线AB的距离$|C_2O|=\frac{|3+2-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$，

所以在$\mathrm{Rt}\triangle AOC_2$中，$|AO|=\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=1$，

所以$|AB|=2$.

故$S_{\triangle ABC_2}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|C_2O|=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

自我超越

(1)**解**：由圆C_2与两条坐标轴均相切，圆C_2的圆心在第二象限，半径为1，

可得圆C_2的圆心坐标为$(-1,1)$，

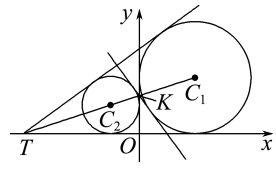
故圆C_2的标准方程为$(x+1)^2+(y-1)^2=1$.

(2)**解**：由$C_1(2,2)$，$C_2(-1,1)$，有$|C_1C_2|=\sqrt{10}$.

又由$\sqrt{10}>1+2=3$，可得圆C_1和圆C_2相外离，所以圆C_1和圆C_2共有4条公切线.

又由$C_1(2,2)$，$C_2(-1,1)$，圆C_1和圆C_2的半径分别为1，2，

如图，在平面直角坐标系中画出圆C_1和圆C_2，可知x轴和y轴与圆C_1和圆C_2均相切，



直线 C_1C_2 的方程为 $y-1=\frac{2-1}{2-(-1)}(x+1)$，整理为 $x-3y+4=0$，可得直线 C_1C_2 与 x 轴的交点为 $T(-4,0)$.

设直线 C_1C_2 的倾斜角为 α，则 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$，则 $\tan 2\alpha=\frac{\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}$.

由 TC_1 为过点 T 的圆的两条外公切线的夹角平分线，可得圆 C_1 和圆 C_2 的另一条外公切线的斜率为 $\frac{3}{4}$，

可得另一条外公切线的方程为 $y=\frac{3}{4}(x+4)$，整理为 $3x-4y+12=0$.

y 轴与直线 C_1C_2 的交点为 $K\left(0,\frac{4}{3}\right)$，可知点 K 在圆 C_1 和圆 C_2 的另一条内公切线上.

设另一条内公切线的方程为 $y=kx+\frac{4}{3}$，整理为 $3kx-3y+4=0$，

有 $\frac{|1-3k|}{\sqrt{9k^2+9}}=1$，解得 $k=-\frac{4}{3}$.

所以另一条内公切线的方程为 $-4x-3y+4=0$，整理为 $4x+3y-4=0$.

故圆 C_1 和圆 C_2 的公切线的方程为 $x=0$，$y=0$，$3x-4y+12=0$ 和 $4x+3y-4=0$.

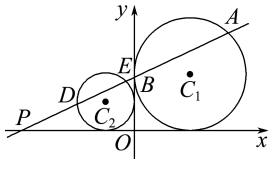
(3)**证明**：如图，设过点 P 的直线 l 的方程为 $y=m(x+4)$，整理为 $mx-y+4m=0$，

点 C_1 到直线 l 的距离为 $d_1=\frac{|6m-2|}{\sqrt{m^2+1}}$，点 C_2 到直线 l 的距离为 $d_2=\frac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$，

可得 $d_1=2d_2$.

又由 $|AB|=2\sqrt{4-d_1^2}=2\sqrt{4-4d_2^2}=4\sqrt{1-d_2^2}$，$|DE|=2\sqrt{1-d_2^2}$.

所以 $|AB|=2|DE|$.



微专题培优集训(三)

1.D　**解析**：设 $M(x,y)$，则 $\frac{3+x}{2}=1$，$\frac{2+y}{2}=4$，所以 $x=-1$，$y=6$，所以点 $M(-1,6)$.

2.D　**解析**：由题意，在直线 $x+y+2=0$ 中，斜率为 -1，则垂直于直线 $x+y+2=0$ 且过点 $P(2,3)$ 的直线方程为 $y-3=1\times(x-2)$，即 $y=x+1$.

设两直线交点为 A，由 $\begin{cases}y=x+1,\\x+y+2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-\frac{3}{2},\\y=-\frac{1}{2},\end{cases}$ 所以 $A\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$，所以点 P 关于直线 $x+y+2=0$ 的对称点的坐标 $P'\left(-\frac{3}{2}\times2-2,-\frac{1}{2}\times2-3\right)$，

即 $P'(-5,-4)$.

3.D　**解析**：设直线 $3x-4y+5=0$ 上一点 $Q(x_1,y_1)$ 关于坐标原点 $(0,0)$ 对称的点为 $P(x,y)$，则 $\begin{cases}\frac{x+x_1}{2}=0,\\\frac{y+y_1}{2}=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=-x,\\y_1=-y,\end{cases}$

代入 $3x-4y+5=0$，得 $3x-4y-5=0$，

即所求直线的方程为 $3x-4y-5=0$.

4.C　**解析**：易知直线 $l_1:y=kx-k+1$ 恒过点 $(1,1)$，所以可得直线 l_2 一定过 $(1,1)$ 关于直线 $l:x-y+1=0$ 的对称点.

设对称点坐标为 (a,b)，可得 $\begin{cases}\frac{b-1}{a-1}=-1,\\\frac{a+1}{2}-\frac{b+1}{2}+1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0,\\b=2,\end{cases}$

即直线 l_2 一定过定点 $(0,2)$.

5.$3x+4y-23=0$　**解析**：设 $B(-2,10)$ 关于直线 $l:y=x+1$ 的对称点为 $B'(a,b)$，

则 $\begin{cases}\frac{b-10}{a+2}=-1,\\\frac{b+10}{2}=\frac{a-2}{2}+1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=9,\\b=-1,\end{cases}$

即得 $B(-2,10)$ 关于 $l:y=x+1$ 的对称点 $B'(9,-1)$.

因为 $A(1,5)$，

所以 $k_{AB'}=\frac{5-(-1)}{1-9}=-\frac{3}{4}$，

所以入射光线所在直线的方程为 $y-5=-\frac{3}{4}(x-1)$，

化简得 $3x+4y-23=0$.

6.1　**解析**：设点 $(-3,4)$ 为点 A，点 $(-4,a)$ 为点 B，所以线段 AB 的中点为 $E\left(\frac{-7}{2},\frac{4+a}{2}\right)$. 设点 $(-1,2)$ 为点 C，设点 $\left(-2,\frac{b}{2}\right)$ 为点 D，所以线段 CD 的中点为 $F\left(\frac{-3}{2},\frac{4+b}{4}\right)$.

由题意可知 $k_{AB}=k_{CD}$，$k_{EF}\cdot k_{AB}=-1$，

于是有 $\begin{cases}\frac{a-4}{-4+3}=\frac{\frac{b}{2}-2}{-2+1},\\\frac{\frac{a+4}{2}-\frac{4+b}{4}}{-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}}\times\frac{a-4}{-4+3}=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3,\\b=2\end{cases}\Rightarrow a-b=1$.

7.$x-7y-1=0$　**解析**：由 $\begin{cases}x+y-1=0,\\3x-y-3=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=0,\end{cases}$ 则两

直线的交点为 $A(1,0)$.

在直线 $l_1:x+y-1=0$ 上取点 $B(0,1)$，设其关于 $l_2:3x-y-3=0$ 的对称点为 $C(a,b)$，

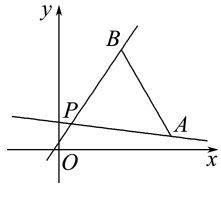
则 $\begin{cases}\dfrac{b-1}{a}=-\dfrac{1}{3},\\ 3\times\dfrac{a}{2}-\dfrac{b+1}{2}-3=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=\dfrac{12}{5},\\ b=\dfrac{1}{5},\end{cases}$ 所以 $C\left(\dfrac{12}{5},\dfrac{1}{5}\right)$.

故直线 $l_1:x+y-1=0$ 关于直线 $l_2:3x-y-3=0$ 的对称直线为 AC.

又 $k_{AC}=\dfrac{\frac{1}{5}-0}{\frac{12}{5}-1}=\dfrac{1}{7}$，所以直线 $AC:y=\dfrac{1}{7}(x-1)$，即 $x-7y-1=0$.

8. $\left[-\dfrac{1}{8},\dfrac{3}{2}\right]$ **解析**：设点 $P(x_0,y_0)$，有 $\begin{cases}\dfrac{0-y_0}{3-x_0}=-1,\\ \dfrac{x_0+3}{2}-\dfrac{y_0}{2}-1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=1,\\ y_0=2,\end{cases}$ 所以 $P(1,2)$.

$k_{PA}=\dfrac{2-1}{1-9}=-\dfrac{1}{8}$，$k_{PB}=\dfrac{2-8}{1-5}=\dfrac{3}{2}$，结合图可知，$k\in\left[-\dfrac{1}{8},\dfrac{3}{2}\right]$.



9. $2-\sqrt{3}$ **解析**：设点 $P(1,-\sqrt{3})$ 关于直线 $y=kx$ 的对称点为 Q，

显然 Q 在 $C:x^2+(y-4)^2=4$ 上，由对称性可知，$|OQ|=|OP|=\sqrt{1+3}=2$，

故点 Q 在以原点为圆心，2 为半径的圆上，即 $x^2+y^2=4$.

由 $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ x^2+(y-4)^2=4,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0,\\ y=2,\end{cases}$ 故点 Q 的坐标为 $(0,2)$.

显然 PQ 的中点在 $y=kx$ 上，

即 $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}=k\cdot\dfrac{1+0}{2}$，解得 $k=2-\sqrt{3}$.

10. $(-1,1)$ **解析**：设直线 l_2 上任一点为 (x,y)，则其关于 $P(1,1)$ 的对称点 (a,b) 在直线 l_1 上，

所以 $\dfrac{x+a}{2}=1$，$\dfrac{y+b}{2}=1$，且 $a-b+1=0$，

所以 $(2-x)-(2-y)+1=0$，即 $x-y-1=0$，

所以直线 $l_2:x-y-1=0$.

因为圆 $C:x^2+y^2+2x+m=0$，即 $(x+1)^2+y^2=1-m$，

所以圆心 $C(-1,0)$，半径 $r=\sqrt{1-m}$，且 $1-m>0$，

所以圆心 $C(-1,0)$ 到直线 $l_2:x-y-1=0$ 的距离 $d=\dfrac{|-1-0-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

因为直线 l_2 与圆 C 相离，

所以 $d>r$，即 $\sqrt{2}>\sqrt{1-m}$. 又 $1-m>0$，解得 $-1<m<1$.

微专题培优集训(四)

1. C **解析**：圆 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$ 的圆心为 $(1,-2)$，圆心关于原点的对称点为 $(-1,2)$，故对称的圆的方程为 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$.

2. A **解析**：由题意，两圆半径相等，所以 $\sqrt{5-a}=2$，解得 $a=1$.

3. A **解析**：由题意可得，圆 C_1 的圆心坐标为 $(0,0)$，圆 C_1 和圆 C_2 的半径均为 2，

设圆心 $C_1(0,0)$ 关于直线 $2x+y+5=0$ 的对称点为 $C_2(a,b)$，

则 $\begin{cases}\dfrac{b}{a}\times(-2)=-1,\\ 2\times\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}+5=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-4,\\ b=-2,\end{cases}$

所以圆 C_2 的标准方程为 $(x+4)^2+(y+2)^2=4$.

4. D **解析**：将圆 $x^2+y^2-2x+4y+4=0$ 化为 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$，

所以圆心为 $A(1,-2)$，半径为 1.

在直线 $2ax-by-2=0(a>0,b>0)$ 中，

圆关于该直线对称，

所以直线过圆心 $A(1,-2)$，

所以 $2a+2b-2=0$，即 $a+b=1$.

因为 $a+b=1\geqslant 2\sqrt{ab}$，解得 $ab\leqslant\dfrac{1}{4}$，

当且仅当 $a=b=\dfrac{1}{2}$ 时，等号成立，

所以 ab 的最大值为 $\dfrac{1}{4}$.

故选 D.

5. A **解析**：由题意，直线 $l:ax+by=2$ 过圆心 $C(2,4)$，则 $2a+4b=2\Rightarrow a+2b=1$，且 $a>0,b>0$，

所以 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right)(a+2b)=4+\dfrac{4b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant 4+2\sqrt{\dfrac{4b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}=8$，

当且仅当 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{4}$ 时，等号成立，故 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为 8.

6. D **解析**：圆 $C:x^2+y^2+4x+2y+1=0$ 的圆心坐标为 $C(-2,-1)$，

圆 C 上存在两点关于直线 l 对称，则直线 l 过圆心，即 $-2a-b+1=0$，有 $b=-2a+1$，

所以 $(a-2)^2+(b-7)^2=(a-2)^2+(-2a-6)^2=5a^2+20a+40=5[(a+2)^2+4]$，

当 $a=-2$ 时，$(a-2)^2+(b-7)^2$ 有最小值 20.

7. C **解析**：结合题意，圆 C_1 的标准方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=a$，圆心 $C_1(1,1)$，

圆 C_2 的标准方程为 $(x-3)^2+(y-3)^2=18-8a$，圆心 $C_2(3,3)$.

要存在点 P，使得 C_1,C_2 关于点 P 对称，则 C_1,C_2 的半径相等，

所以 $a=18-8a$，$a=2$，

此时 C_1，C_2 的半径都是$\sqrt{2}$.

又 $|C_1C_2|=\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$，所以 C_1，C_2 外切.

8.C　**解析**：由 $x^2+y^2+2kx+2my-4=0$，得 $(x+k)^2+(y+m)^2=k^2+m^2+4$，

所以圆心为 $C(-k,-m)$，半径为 $r=\sqrt{k^2+m^2+4}$.

由题意可得直线 $x-y+1=0$ 经过圆心 $C(-k,-m)$，

故有 $-k+m+1=0$，即 $k=m+1$，

所以 $r=\sqrt{k^2+m^2+4}=\sqrt{(m+1)^2+m^2+4}=\sqrt{2\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}}\geqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

当 $m=-\frac{1}{2}$ 时，圆 C 的半径的最小值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

9.$2\sqrt{2}$　**解析**：圆 $C:x^2+y^2+2x-4y+3=0$ 化为 $(x+1)^2+(y-2)^2=2$，

圆 C 的圆心坐标为 $(-1,2)$，半径为 $r=\sqrt{2}$.

因为圆 $C:x^2+y^2+2x-4y+3=0$ 关于直线 $2ax+by+6=0$ 对称，

所以 $(-1,2)$ 在直线上，可得 $-2a+2b+6=0$，

即 $a=b+3$. 因为 $M(a,b)$，

相当于 M 为直线 $x=y+3$ 上的动点，且直线 $x-y-3=0$ 与圆相离，

而 A 是圆 C 上一动点，所以 $|AM|_{\min}=|CM|_{\min}-r$.

又因为 $|CM|$ 的最小值为圆心 $(-1,2)$ 到直线 $x-y-3=0$ 的距离，

$|CM|_{\min}=\frac{|-1-2-3|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$，

所以 $|AM|_{\min}=|CM|_{\min}-r=3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

10.3　**解析**：因为一条过点 $(0,-\sqrt{3})$ 的光线将圆分成面积相等的两部分，

所以该光线经过圆心 $(3,0)$，

所以该光线所在直线的斜率为 $k=\frac{-\sqrt{3}-0}{0-3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以该光线所在直线的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}$，倾斜角为 $30°$.

如图，因为该光线碰到直线 $x=6$ 后反射，那么反射光线与 x 轴正方向的夹角为 $150°$，

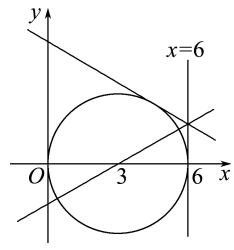
在 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}$ 中，当 $x=6$ 时，$y=\sqrt{3}$，

从而反射光线所在直线的斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$，且直线经过点 $(6,\sqrt{3})$，

所以反射光线所在直线的方程为 $y-\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-6)$，即 $x+\sqrt{3}y-9=0$.

又该直线恰好与圆相切，所以圆心 $(3,0)$ 到该直线的距离为圆的半径，

即 $r=\frac{|3-9|}{\sqrt{3+1}}=3$.



11.$2\sqrt{10}-3$　**解析**：圆 $C_1:x^2+y^2+2x+4y+4=0$，即 $(x+1)^2+(y+2)^2=1$，

圆心为 $(-1,-2)$，半径 $R=1$，

圆 $C_2:x^2+y^2-4x+2y+1=0$，即 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$，

圆心为 $(2,-1)$，半径 $r=2$.

设点 $(-1,-2)$ 关于直线 $l:y=x+2$ 对称的点为 (a,b)，

则 $\begin{cases}\frac{b+2}{a+1}=-1,\\ \frac{b-2}{2}=\frac{a-1}{2}+2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-4,\\ b=1.\end{cases}$

设圆 C_1 关于直线 $l:y=x+2$ 对称的圆为圆 C'，

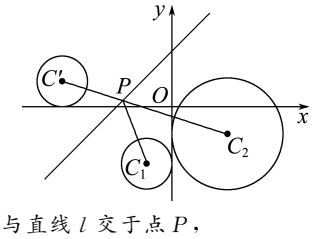
其圆心为 $(-4,1)$，半径 $R'=1$，

则其方程为 $(x+4)^2+(y-1)^2=1$.

设圆 C' 上的点 M' 与圆 C_1 上点 M 对称，则有 $|PM|=|PM'|$，

原问题可以转化为 P 到圆 C' 和圆 C_2 上的动点距离之和最小值问题，

如图所示.



连接 C_2C'，与直线 l 交于点 P，

此时点 P 是满足 $|PN|+|PM'|$ 的值最小的点，

此时 $|PN|+|PM'|=|C_2C'|-3=2\sqrt{10}-3$，

即 $|MP|+|NP|$ 的最小值为 $2\sqrt{10}-3$.

课后素养评价(二十六)

基础落实

1.C　**解析**：若点 M 到点 F_1，F_2 的距离之和恰好为 F_1，F_2 两点之间的距离，则点 M 的轨迹不是椭圆，所以前者不能推出后者. 根据椭圆的定义，椭圆上的点到两焦点的距离之和为常数 $2a$，所以后者能推出前者，故前者是后者的必要不充分条件. 故选 C.

2.B　**解析**：根据椭圆的定义可得 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，

因为椭圆 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ 上一点 P 到焦点 F_1 的距离等于 6，所以 $6+|PF_2|=20$，所以 $|PF_2|=14$. 故选 B.

3.AD　**解析**：因为椭圆的焦距为 $2c=4$，则 $c=2$.

当焦点在 x 轴上时，有 $m=8+2^2=12$，即 $m=12$；

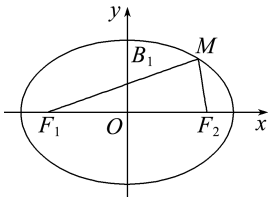
当焦点在 y 轴上时，有 $8=m+2^2$，解得 $m=4$.

故 $m=4$ 或 $m=12$.

4.D　**解析**：由方程$\frac{x^2}{k-1}+\frac{y^2}{5-k}=1$表示的曲线是椭圆，则

$\begin{cases}k-1>0,\\5-k>0,\\k-1\neq5-k\end{cases}\Rightarrow1<k<5$且$k\neq3$.

5.AC　**解析**：如图.



因为椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$，所以$a=4,b=\sqrt{7},c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-7}=3$.

因为点M在第一象限，且$\triangle MF_1F_2$是等腰三角形，

所以$|F_1F_2|=|MF_1|$.

根据椭圆的定义，$|MF_2|=2a-|MF_1|=2a-|F_1F_2|=2a-2c=2$，故A正确；

在$\triangle MF_1F_2$中，$|MF_1|=|F_1F_2|=6,|MF_2|=2$，由余弦定理的推论得$\cos\angle MF_2F_1=\frac{|MF_2|^2+|F_1F_2|^2-|MF_1|^2}{2|MF_2|\cdot|F_1F_2|}=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$，故B错误；

由$\cos\angle MF_2F_1=\frac{1}{6}$，得$\sin\angle MF_2F_1=\frac{\sqrt{35}}{6}$，得点$M$到$x$轴的距离为$|MF_2|\cdot\sin\angle MF_2F_1=2\times\frac{\sqrt{35}}{6}=\frac{\sqrt{35}}{3}$，故C正确；

$S_{\triangle MF_1F_2}=\frac{1}{2}\times6\times\frac{\sqrt{35}}{3}=\sqrt{35}$，故D错误.

故选AC.

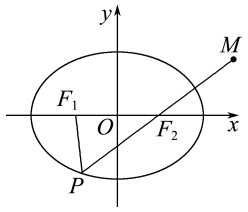
6.$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　**解析**：设椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，由题意可得$\begin{cases}a+c=3,\\a-c=1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=2,\\c=1,\end{cases}$故$b^2=a^2-c^2=3$，

所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

7.15　**解析**：由椭圆的方程可得$a=5,b=4,c=3$，

所以$F_1(-3,0),F_2(3,0)$，如图所示.



由椭圆的定义，得$|PF_1|+|PF_2|=2a=10$，

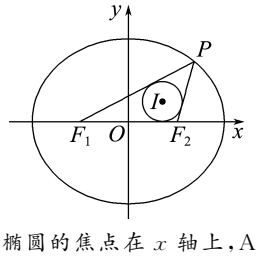
所以$|PM|+|PF_1|=|PM|+2a-|PF_2|=10+(|PM|-|PF_2|)\leqslant10+|MF_2|=10+\sqrt{3^2+4^2}=15$，

当M,F_2,P三点共线时取到最大值，所以$|PM|+|PF_1|$的最大值为15.

8.$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{100}{9}}=1(x\neq\pm5)$　**解析**：设点M的坐标为(x,y)，则$k_{AM}=\frac{y}{x+5}(x\neq-5),k_{BM}=\frac{y}{x-5}(x\neq5)$.由已知有$\frac{y}{x+5}\cdot\frac{y}{x-5}=-\frac{4}{9}$，化简即可得点$M$的轨迹方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{100}{9}}=1(x\neq\pm5)$.

能力提升

1.B　**解析**：如图，设椭圆C的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，由$P(4,3)$在$C$上，得$\frac{16}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1$.显然$\triangle PF_1F_2$的内切圆与直线$F_1F_2$相切，则该圆半径为1.而$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}(2a+2c)\cdot1=a+c$，又$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\cdot2c\cdot3=3c$，所以$a=2c,b^2=a^2-c^2=\frac{3}{4}a^2$，所以$\frac{16}{a^2}+\frac{12}{a^2}=1$，解得$a^2=28,b^2=21$，所以椭圆$C$的标准方程是$\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{21}=1$.



2.CD　**解析**：显然椭圆的焦点在x轴上，A错误.设椭圆C的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，且$c=1$.因为过点$F_2$且垂直于$x$轴的直线与椭圆$C$交于$A,B$两点，设$A(c,y_1)$，代入方程可得$\frac{c^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，求得$y_1^2=\frac{b^4}{a^2}$.由于$|AB|=3$，所以$\frac{b^2}{a}=\frac{3}{2}$.又$b^2=a^2-c^2$，解得$a=2$，所以$a^2=4,b^2=a^2-c^2=4-1=3$，所以椭圆$C$的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，D正确.$\triangle ABF_1$的周长为$4a=8$，$\triangle AF_1F_2$的周长为$2a+2c=6$，B错误，C正确.

3.AC　**解析**：由题知$2c=|F_1F_2|=2\sqrt{3}$，所以$c=\sqrt{3}$.

因为$2a=|PF_1|+|PF_2|=2|F_1F_2|=4\sqrt{3}$，

所以$a=2\sqrt{3}$.所以$b^2=a^2-c^2=9$.

故椭圆C的标准方程是$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$或$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{12}=1$.

4.D　**解析**：依题意$a=2,b=1,c=\sqrt{3}$，设椭圆C的左焦点为$F_1(-\sqrt{3},0)$，

圆$M:x^2+(y-3)^2=1$的圆心为$M(0,3)$，半径为1，

$|PQ|+|PF|=|PQ|+2a-|PF_1|=4+|PQ|-|PF_1|\leqslant4+|QF_1|$，

当P,F_1,Q三点共线，且F_1在P,Q之间时等号成立.

而$|QF_1|\leqslant|MF_1|+1=\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}+1=2\sqrt{3}+1$，

所以$|PQ|+|PF|\leqslant4+2\sqrt{3}+1=5+2\sqrt{3}$，

当 P,F_1,M,Q 四点共线，且 F_1 在 P,Q 之间，Q 是 F_1M 的延长线与圆 M 的交点时等号成立.

故选 D.

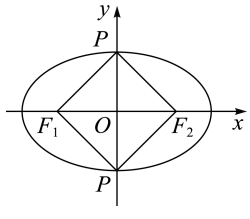
5. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ **解析**：由题意知 $c=1$，$a^2-b^2=c^2=1$①.

又椭圆经过点 $P\left(1,\frac{3}{2}\right)$，所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{\frac{9}{4}}{b^2}=1$②.

联立①②，解得 $a^2=4$，$b^2=3$.

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

6. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ **解析**：由已知可得 $2c=8$，$c=4$，如图，当点 P 在 y 轴上时，$\triangle PF_1F_2$ 的面积最大，

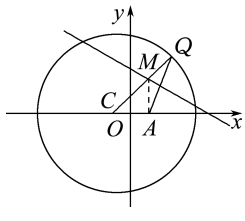


所以 $\frac{1}{2}\times 8\times b=12$，所以 $b=3$.

所以 $a^2=b^2+c^2=25$.

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

7. **解**：如图所示，连接 MA，由题意知点 M 在线段 CQ 上，从而有 $|CQ|=|MQ|+|MC|$.



又点 M 在 AQ 的垂直平分线上，

所以 $|MA|=|MQ|$.

因为点 Q 在圆 C：$(x+1)^2+y^2=25$ 上，所以 $|CQ|=5$，

故 $|MA|+|MC|=|CQ|=5$.

又 $A(1,0)$，$C(-1,0)$，$|MA|+|MC|=5>2$，

所以点 M 的轨迹是以 $A(1,0)$，$C(-1,0)$ 为焦点的椭圆，

且 $2a=5$，$c=1$，故 $a=\frac{5}{2}$，$b^2=a^2-c^2=\frac{25}{4}-1=\frac{21}{4}$.

故点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{\frac{25}{4}}+\frac{y^2}{\frac{21}{4}}=1$.

8. **解**：(1)因为点 P 在椭圆 C 上，所以 $|PF_1|+|PF_2|=3+5=8=2a$，解得 $a=4$.

因为 $PF_1\perp F_1F_2$，$|PF_1|=3$，$|PF_2|=5$，

所以 $|F_1F_2|^2=25-9=16$，即 $2c=|F_1F_2|=4$，解得 $c=2$.

所以 $b^2=a^2-c^2=12$，

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

(2)设 $M(x_0,y_0)$.

因为 $\triangle MF_1F_2$ 的面积为 $2\sqrt{3}$，

所以 $\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_0|=2\sqrt{3}$，即 $\frac{1}{2}\times 4\times|y_0|=2\sqrt{3}$，

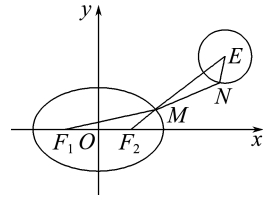
解得 $|y_0|=\sqrt{3}$.

因为点 M 在椭圆 C 上，所以 $\frac{x_0^2}{16}+\frac{3}{12}=1$，解得 $x_0=\pm 2\sqrt{3}$，

所以点 M 的坐标为 $(2\sqrt{3},\sqrt{3})$ 或 $(2\sqrt{3},-\sqrt{3})$ 或 $(-2\sqrt{3},\sqrt{3})$ 或 $(-2\sqrt{3},-\sqrt{3})$.

自我超越

B **解析**：如图，



由 M 为椭圆 C 上任意一点，得 $|MF_1|+|MF_2|=4$.

又 N 为圆 E：$(x-5)^2+(y-3)^2=2$ 上任意一点，且 $E(5,3)$，

则 $|MN|\geqslant|ME|-|EN|=|ME|-\sqrt{2}$（当且仅当点 M,N,E 共线且点 N 在点 M,E 之间时取等号）.

又 $|MN|-|MF_1|=|MN|-(4-|MF_2|)=|MN|+|MF_2|-4$

$\geqslant(|ME|-\sqrt{2})+|MF_2|-4\geqslant|EF_2|-4-\sqrt{2}$，

当且仅当点 M,N,E,F_2 共线且点 M,N 在点 E,F_2 之间时等号成立.

因为 $F_2(1,0)$，$E(5,3)$，所以 $|EF_2|=\sqrt{(5-1)^2+(3-0)^2}=5$，

故 $|MN|-|MF_1|$ 的最小值为 $1-\sqrt{2}$.

课后素养评价(二十七)

基础落实

1. A **解析**：由题意知 $\frac{a^2}{4}+\frac{1}{2}<1$，解得 $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$.

2. BC **解析**：由椭圆 C：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$，可得 $a=4$，$b=3$，则 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{7}$.

对于 A，椭圆 C 的焦点坐标为 $(\pm\sqrt{7},0)$，所以 A 错误；

对于 B，椭圆 C 的长轴长为 $2a=8$，所以 B 正确；

对于 C，椭圆 C 的短轴长为 $2b=6$，所以 C 正确；

对于 D，顶点坐标为 $(\pm 4,0)$ 和 $(0,\pm 3)$，所以 D 错误.

3. B **解析**：因为离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{1}{3}$，解得 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{8}{9}$，所以 $b^2=\frac{8}{9}a^2$.

因为 A_1,A_2 分别为 C 的左、右顶点，B 为上顶点，则 $A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，$B(0,b)$，所以 $\overrightarrow{BA_1}=(-a,-b)$，$\overrightarrow{BA_2}=(a,-b)$.

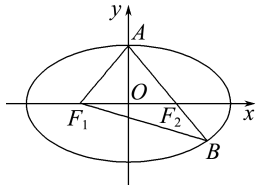
因为 $\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BA_2}=-1$，所以 $-a^2+b^2=-1$.

将 $b^2=\frac{8}{9}a^2$ 代入，解得 $a^2=9$，$b^2=8$，

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

4.D　**解析**：椭圆 C 上不存在点 P 使 $\angle F_1PF_2\geqslant\frac{\pi}{3}$，即 $\angle F_1PF_2<\frac{\pi}{3}$ 恒成立，当点 P 在短轴端点时，$\angle F_1PF_2$ 最大，即 $\sin\angle F_1PO=\frac{c}{a}<\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，即 $e<\frac{1}{2}$. 故选 D.

5.B　**解析**：由椭圆 E 的焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，得 $c=1$.



如图，设 $|F_2B|=n$，则 $|AF_2|=2n$，$|BF_1|=|AB|=3n$.

由椭圆的定义有 $2a=|BF_1|+|BF_2|=4n$，所以 $|AF_1|=2a-|AF_2|=2n$.

在 $\triangle AF_1B$ 中，由余弦定理的推论得 $\cos\angle F_1AB=\frac{4n^2+9n^2-9n^2}{2\cdot2n\cdot3n}=\frac{1}{3}$；

在 $\triangle AF_1F_2$ 中，由余弦定理得 $4n^2+4n^2-2\cdot2n\cdot2n\cdot\frac{1}{3}=4$，解得 $n=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $2a=4n=2\sqrt{3}$，所以 $a=\sqrt{3}$，

所求椭圆 E 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6.B　**解析**：因为 $m+6>m-3$，

所以 $a^2=m+6$，$b^2=m-3$，则 $m-3>0$，可得 $m>3$，

$c^2=a^2-b^2=(m+6)-(m-3)=9$，则 $c=3$.

因为 $e\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$，所以 $\frac{c}{a}=\frac{3}{\sqrt{m+6}}\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$，可得 $3<\sqrt{m+6}<2\sqrt{3}$，解得 $3<m<6$，

所以实数 m 的取值范围为 $(3,6)$.

7.$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$　**解析**：由题意，知 $2a=12$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $a=6$，$c=3\sqrt{3}$，所以 $b=3$，

故椭圆的方程为 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$.

8.$[1,2]$　**解析**：因为 $P(m,n)$ 是椭圆 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 上的一个动点，所以 $m^2+\frac{n^2}{2}=1$，

即 $n^2=2-2m^2$，所以 $m^2+n^2=2-m^2$.

又因为 $-1\leqslant m\leqslant1$，所以 $1\leqslant2-m^2\leqslant2$，所以 $1\leqslant m^2+n^2\leqslant2$. 故 m^2+n^2 的取值范围是 $[1,2]$.

9.$\frac{1}{2}$　**解析**：设椭圆 C 的焦距 $|F_1F_2|=2c$.

因为 C 的上顶点为 A，$\triangle AF_1F_2$ 是等边三角形，

所以 $\begin{cases}|AF_1|=|AF_2|=|F_1F_2|,\\|AF_1|+|AF_2|=2a,\end{cases}$ 所以 $|AF_1|=|AF_2|=|F_1F_2|=a$，

即 $a=2c$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.

能力提升

1.C　**解析**：选项 A，$a^2=4$，$b^2=1$，则 $c^2=a^2-b^2=3$，即 $a=2$，$c=\sqrt{3}$，故 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，满足条件；

选项 B，$a^2=4$，$b^2=1$，则 $c^2=a^2-b^2=3$，即 $a=2$，$c=\sqrt{3}$，故 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，满足条件；

选项 C，$a^2=2$，$b^2=1$，则 $c^2=a^2-b^2=1$，即 $a=\sqrt{2}$，$c=1$，故 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，不满足条件；

选项 D，$a^2=8$，$b^2=2$，则 $c^2=a^2-b^2=6$，即 $a=2\sqrt{2}$，$c=\sqrt{6}$，故 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，满足条件. 故选 C.

2.B　**解析**：由题可知，当点 M 位于短轴端点时，$\angle F_1MF_2$ 最大，

此时在 $\triangle F_1MF_2$ 中，由余弦定理的推论得 $\cos\angle F_1MF_2=\frac{a^2+a^2-4c^2}{2a^2}=\frac{a^2-2c^2}{a^2}>0$，所以 $a>\sqrt{2}c$.

所以 $e=\frac{c}{a}<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又因为 $0<e<1$，所以 $0<e<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.BD　**解析**：记椭圆的两个焦点分别为 F_1，F_2，

有 $|PF_1|+|PF_2|=2a=10$，

则知 $m=|PF_1|\cdot|PF_2|\leqslant\left(\frac{|PF_1|+|PF_2|}{2}\right)^2=25$，

当且仅当 $|PF_1|=|PF_2|=5$，即点 P 位于椭圆的短轴的端点处时，m 取得最大值 25.

所以点 P 的坐标为 $(-4,0)$ 或 $(4,0)$.

4.$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$ 或 $\frac{y^2}{8}+\frac{x^2}{6}=1$　**解析**：由题意得，椭圆 $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{3}=1$ 的长轴长为 $4\sqrt{2}$，

所以 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\2a=4\sqrt{2},\end{cases}$

解得 $a=2\sqrt{2}$，$c=\sqrt{2}$，故 $b^2=a^2-c^2=6$.

又因为所求椭圆的焦点既可在 x 轴上，也可在 y 轴上，

所以其标准方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$ 或 $\frac{y^2}{8}+\frac{x^2}{6}=1$.

5.$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$　**解析**：由题意可设椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

由离心率为 $\frac{1}{2}$，即 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，得 $a=2c$.

因为椭圆 C 的面积为 $8\sqrt{3}\pi$，所以由 $S=ab\pi=8\sqrt{3}\pi$，得 $ab=8\sqrt{3}$，

所以 $\begin{cases}a=2c,\\ab=8\sqrt{3},\\a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\b=2\sqrt{3},\\c=2.\end{cases}$

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

6. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 或 $-\frac{4\sqrt{2}}{3}$　**解析**：(方法一)由题意可得 $|PF_1|+|PF_2|=2a=4$，$|F_1F_2|=2c=2\sqrt{3}$.

在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由余弦定理可得

$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\angle F_1PF_2=(|PF_1|+|PF_2|)^2-3|PF_1|\cdot|PF_2|$，

所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{4}{3}$，

即 $\sqrt{(x_0+\sqrt{3})^2+y_0^2}\cdot\sqrt{(x_0-\sqrt{3})^2+y_0^2}=\sqrt{(x_0+\sqrt{3})^2+1-\frac{x_0^2}{4}}\cdot\sqrt{(x_0-\sqrt{3})^2+1-\frac{x_0^2}{4}}=\frac{4}{3}$，

即 $\left(\frac{3x_0^2}{4}+2\sqrt{3}x_0+4\right)\cdot\left(\frac{3x_0^2}{4}-2\sqrt{3}x_0+4\right)=\frac{16}{9}$，

整理得 $\left(\frac{3x_0^2}{4}-4\right)^2=\frac{16}{9}$，所以 $\frac{3x_0^2}{4}-4=\frac{4}{3}$ 或 $\frac{3x_0^2}{4}-4=-\frac{4}{3}$，

解得 $x_0=\pm\frac{8}{3}$ 或 $x_0=\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

又因为 $x_0\in(-2,2)$，所以 $x_0=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 或 $x_0=-\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

(方法二)易知 $a=2$，$b=1$，$c=\sqrt{3}$，$|F_1F_2|=2c=2\sqrt{3}$.已知 $P(x_0,y_0)$，由焦点三角形面积公式，得 $S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

又 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\cdot|F_1F_2|\cdot|y_0|=\sqrt{3}\cdot|y_0|$，

所以 $|y_0|=\frac{1}{3}$.

又因为 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，所以 $x_0=\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

故答案为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 或 $-\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

7. $\frac{1}{2}$　**解析**：易知 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$.

因为 $|PF_2|=|F_1F_2|$，则 $\sqrt{(a-c)^2+b^2}=2c$，

整理得 $2c^2+ac-a^2=0$.

两边同除以 a^2，得 $2\left(\frac{c}{a}\right)^2+\frac{c}{a}-1=0$，所以 $\frac{c}{a}=-1$(舍)或 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.

所以椭圆的离心率 $e=\frac{1}{2}$.

8. **解**：(1)由题意，可得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{2}{3},\\ \frac{8}{a^2}+\frac{5}{9b^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=9,\\ b^2=5,\\ c^2=4.\end{cases}$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

(2)在 $\triangle PF_1F_2$ 中，$\angle PF_1F_2=60^\circ$，$|F_1F_2|=2c=4$.

由 $|PF_1|+|PF_2|=2a=6$，得 $|PF_1|=6-|PF_2|$.

设 $|PF_2|=m$，则 $|PF_1|=6-m$.

在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理得 $|PF_2|^2=|PF_1|^2+|F_1F_2|^2-2|PF_1||F_1F_2|\cos 60^\circ$，

即 $m^2=(6-m)^2+16-4(6-m)$，解得 $m=\frac{7}{2}$，

所以 $|PF_2|=\frac{7}{2}$，$|PF_1|=\frac{5}{2}$，

所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times4\times\frac{5}{2}\times\sin 60^\circ=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

自我超越

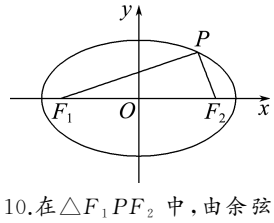
$\frac{\sqrt{3}}{3}$　**解析**：因为 $\frac{\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}}{|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|}=\frac{1}{2}$，即 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{1}{2}$，

所以 $\angle F_1PF_2=60^\circ$.

由椭圆方程 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$，可知 $a=5$，$b=3$，所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=4$，

所以 $|F_1F_2|=2c=8$.

如图，不妨取点 P 在第一象限内，设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，



则 $m+n=2a=10$.在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由余弦定理得 $|F_1F_2|^2=m^2+n^2-2mn\cos\angle F_1PF_2$，

即 $8^2=m^2+n^2-2mn\times\frac{1}{2}=m^2+n^2-mn=(m+n)^2-3mn=100-3mn$，

解得 $mn=12$.

所以 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}mn\sin\angle F_1PF_2=\frac{1}{2}\times12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$.

设 $\triangle F_1PF_2$ 内切圆的半径为 r，

则由等面积法可知 $S_{\triangle F_1PF_2}=3\sqrt{3}=\frac{1}{2}(m+n+|F_1F_2|)r=\frac{1}{2}\times(10+8)r$，

解得 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

课后素养评价(二十八)

基础落实

1. C　**解析**：因为直线 l 过点 $(3,-1)$，且 $\frac{3^2}{25}+\frac{(-1)^2}{36}<1$，所以点 $(3,-1)$ 在椭圆 C 的内部，故直线 l 与椭圆 C 有 2 个公共点.

2. AB　**解析**：把 $y=kx+2$ 代入 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$，得 $(3k^2+2)x^2+12kx+6=0$.因为直线与椭圆相切，所以 $\Delta=(12k)^2-4(3k^2+2)\times6=0$，解得 $k=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$.

3.D　**解析**：由$\begin{cases}y=x+m,\\5x^2+9y^2=45,\end{cases}$消去 y，得 $14x^2+18mx+9m^2-45=0$，

故 $\Delta=324m^2-56(9m^2-45)<0$，解得 $m<-\sqrt{14}$ 或 $m>\sqrt{14}$.

4.A　**解析**：设直线与椭圆交点为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则$\begin{cases}\frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{4}=1,①\\\frac{x_2^2}{16}+\frac{y_2^2}{4}=1.②\end{cases}$

由①－②，得

$$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{16}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{4}=0.$$

由题意得$\begin{cases}x_1+x_2=2,\\y_1+y_2=2,\end{cases}$所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{4(x_1+x_2)}{16(y_1+y_2)}=-\frac{1}{4}$.

所以所求直线的方程为 $y-1=-\frac{1}{4}(x-1)$，即 $x+4y-5=0$.

5.B　**解析**：易求得直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}(x+\sqrt{2})$.

由$\begin{cases}y=\sqrt{3}(x+\sqrt{2}),\\x^2+2y^2=4,\end{cases}$消去 y 并整理，得 $7x^2+12\sqrt{2}x+8=0$，$\Delta>0$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{12\sqrt{2}}{7}$，$x_1x_2=\frac{8}{7}$.

由弦长公式，得 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{12\sqrt{2}}{7}\right)^2-4\times\frac{8}{7}}=\frac{16}{7}$.

6.$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$　**解析**：由条件知，(b,kb) 在椭圆上，即 $\frac{b^2}{a^2}+\frac{k^2b^2}{b^2}=1$，

所以 $k^2=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{c^2}{a^2}=e^2=\frac{1}{2}$，所以 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　**解析**：由$\begin{cases}y=1-x,\\mx^2+ny^2=1,\end{cases}$消去 y，得 $(m+n)x^2-2nx+n-1=0$.

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $\Delta>0$，$x_1+x_2=\frac{2n}{m+n}$，$y_1+y_2=1-x_1+1-x_2=\frac{2m}{m+n}$. 因为 P 为线段 MN 的中点，所以 P 的坐标为 $\left(\frac{n}{m+n},\frac{m}{m+n}\right)$.

所以 $k_{OP}=\frac{m}{n}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8.$\frac{3}{5}$　**解析**：设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，MN 的中点为 $P(x_0,y_0)$，

则$\begin{cases}\frac{y_1^2}{a^2}+\frac{x_1^2}{b^2}=1,\\\frac{y_2^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$两式相减整理得 $b^2(y_1^2-y_2^2)+a^2(x_1^2-x_2^2)=0$，

则 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\right)$，即 $k_{MN}=-\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{1}{k_{OP}}$.

因为 $k_{MN}=-\frac{5}{4}$，$k_{OP}=\frac{5}{4}$，所以 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{16}{25}$，

所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{3}{5}$.

能力提升

1.AD　**解析**：由于直线 $y=kx+1$ 可以化为 $y-1=k(x-0)$，故恒过点 $(0,1)$，故 A 正确；而方程 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{m}=1$ 表示椭圆的条件为 $m>0$ 且 $m\neq5$，故 B，C 错误；若直线与椭圆总有公共点，则点 $(0,1)$ 必在椭圆内或椭圆上，则 $0<\frac{1}{m}\leqslant1$ 且 $m\neq5$，所以 $m\geqslant1$ 且 $m\neq5$，故 D 正确.

2.D　**解析**：依题意，$a^2-b^2=4$，设椭圆 C 的左焦点为 F'，则 $F'(-2,0)$.

因为 $|PA|+|PF|=10$，且 $|PF|+|PF'|=2a$，

所以 $|PA|+2a-|PF'|=10$，即 $|PA|-|PF'|=10-2a$，

于是 $|10-2a|\leqslant|AF'|=5$，解得 $\frac{5}{2}\leqslant a\leqslant\frac{15}{2}$.

而 $b^2=a^2-4$，点 $A(2,3)$ 为椭圆 C 内一点，

所以 $\frac{4}{a^2}+\frac{9}{a^2-4}<1$，整理得 $a^4-17a^2+16>0$.

又 $a>2$，解得 $a>4$.

所以 a 的取值范围是 $4<a\leqslant\frac{15}{2}$. 故选 D.

3.BCD　**解析**：对于 A，易知椭圆 C 的焦点在 y 轴上，由椭圆方程可得 $a^2=8$，$b^2=4$，则 $c=\sqrt{a^2-b^2}=2$，故其焦点坐标为 $(0,\pm2)$，故 A 错误；

对于 B，$a^2=8$，则 $a=2\sqrt{2}$，椭圆 C 的长轴长为 $2a=4\sqrt{2}$，故 B 正确；

对于 C，由题意，可设直线 l 的方程为 $x=m(y-2)+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=4$，联立直线与椭圆方程并整理得 $(2m^2+1)y^2+4m(1-2m)y+8m^2-8m-6=0$，则 $\Delta>0$，

所以 $y_1+y_2=\frac{4m(2m-1)}{2m^2+1}=4$，解得 $m=-1$，即直线 l 的方程为 $x+y-3=0$，故 C 正确；

对于 D，由 C 知 $y_1+y_2=4$，$y_1y_2=\frac{10}{3}$，则 $|AB|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，故 D 正确.

4.$2\sqrt{7}$　**解析**：根据题意设椭圆方程为 $\frac{x^2}{b^2+4}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$，将 $x=-\sqrt{3}y-4$ 代入椭圆方程，得 $4(b^2+1)y^2+8\sqrt{3}b^2y-b^4+12b^2=0$. 因为椭圆与直线 $x+\sqrt{3}y+4=0$ 有且仅有一个交点，所以 $\Delta=(8\sqrt{3}b^2)^2-4\cdot4(b^2+1)\cdot(-b^4+12b^2)=0$，即 $(b^2+4)(b^2-3)=0$，解得 $b^2=3$，

所以椭圆的长轴长为 $2\sqrt{b^2+4}=2\sqrt{7}$.

5.$5x-3y-13=0$　**解析**：由于直线 AB 过点 P，又 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，

所以点 P 为弦 AB 的中点.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=4$,$y_1+y_2=-2$,

所以 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{5}=1,\\ \frac{x_2^2}{6}+\frac{y_2^2}{5}=1,\end{cases}$ 两式作差整理得

$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{6}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{5}=0$,

所以 $\frac{4(x_1-x_2)}{6}-\frac{2(y_1-y_2)}{5}=0$,

即 $k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{5}{3}$.

所以直线方程为 $y+1=\frac{5}{3}(x-2)$,即 $5x-3y-13=0$.

6. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ $[0,12]$ **解析**:因为椭圆的上顶点到焦点的距离为 2,所以 $a=2$.

因为离心率 $e=\frac{1}{2}$,所以 $c=1$,$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$,

则椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

所以点 A 的坐标为 $(-2,0)$,点 F 的坐标为 $(-1,0)$.

设 $P(x,y)$,则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{FP}=(x+2,y)\cdot(x+1,y)=x^2+3x+2+y^2$.

由椭圆的方程,得 $y^2=3-\frac{3}{4}x^2$,

所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{FP}=x^2+3x-\frac{3}{4}x^2+5=\frac{1}{4}(x+6)^2-4$.

因为 $x\in[-2,2]$,所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{FP}\in[0,12]$.

7.解:(1)依题意可得 $\begin{cases}a=2,\\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a=2,\\ c=\sqrt{2},\end{cases}$ 则 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2}$,

所以椭圆 G 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)由题意知,直线 l 的斜率存在,设 l 的方程为 $y=kx-2$,

由方程组 $\begin{cases}y=kx-2,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 整理得到 $(1+2k^2)x^2-8kx+4=0$.

由 $\Delta=(-8k)^2-4(1+2k^2)\times4>0$,解得 $k^2>\frac{1}{2}$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\frac{8k}{1+2k^2}$,$x_1x_2=\frac{4}{1+2k^2}$,

所以 $\triangle OAB$ 的面积 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|0-(-2)||x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{\left(\frac{8k}{1+2k^2}\right)^2-4\times\frac{4}{1+2k^2}}=\frac{4}{1+2k^2}\sqrt{2k^2-1}=\sqrt{2}$,

平方化简得 $4k^4-12k^2+9=0$,解得 $k^2=\frac{3}{2}$,满足 $k^2>\frac{1}{2}$,所以 $k=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$,

所以 l 的方程为 $y=\frac{\sqrt{6}}{2}x-2$ 或 $y=-\frac{\sqrt{6}}{2}x-2$,

即直线 l 的方程为 $\sqrt{6}x-2y-4=0$ 或 $\sqrt{6}x+2y+4=0$.

自我超越

解:(1)由题意可知 $2a=4$,$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,得 $a=2$,$c=\sqrt{3}$.

由 $b^2=a^2-c^2$,得 $b^2=1$.

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)由题意可知直线的斜率存在,

设 $l:y=k(x+1)$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

由方程组 $\begin{cases}y=k(x+1),\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$

消去 y,得 $(1+4k^2)x^2+8k^2x+4k^2-4=0$.

因为 $\Delta>0$,$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-8k^2}{1+4k^2},\\ x_1x_2=\frac{4k^2-4}{1+4k^2},\end{cases}$

设 AB 的中点坐标为 (x_0,y_0),

则 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-4k^2}{1+4k^2}$,所以 $y_0=k(x_0+1)=\frac{k}{1+4k^2}=\frac{1}{5}$,

所以 $k=\frac{1}{4}$ 或 $k=1$.

当 $k=\frac{1}{4}$ 时,AB 的中点坐标为 $\left(-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$,直线 l 的方程为 $y-\frac{1}{5}=\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{5}\right)$,即 $x-4y+1=0$;

当 $k=1$ 时,AB 的中点坐标为 $\left(-\frac{4}{5},\frac{1}{5}\right)$,直线 l 的方程为 $y-\frac{1}{5}=x+\frac{4}{5}$,即 $x-y+1=0$.

课后素养评价(二十九)

基础落实

1.A **解析**:当 $||PF_1|-|PF_2||=\pm3$ 时,$||PF_1|-|PF_2||=3<|F_1F_2|=4$,满足双曲线的定义,所以点 P 的轨迹是双曲线.故选 A.

2.B **解析**:因为焦距为 10,所以 $2c=10$,所以 $c=5$.因为 $c^2=a^2+b^2$,所以 $a^2=25-16=9$,

所以 $a=3$.因为 M 是双曲线上的一点,所以 $||MF_2|-|MF_1||=2a=6$.

因为 $|MF_1|=7$,所以 $||MF_2|-7|=6$,所以 $|MF_2|=13$ 或 $|MF_2|=1$.

因为 $|MF_2|\geqslant c-a=5-3=2$,所以 $|MF_2|=1$ 舍去,所以 $|MF_2|=13$.

3.C **解析**:因为 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 1,$PF_1\perp PF_2$,所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|=2$.

由 $\begin{cases}|PF_1|\cdot|PF_2|=2,\\ |PF_1|^2+|PF_2|^2=(2\sqrt{5})^2,\end{cases}$

得 $(|PF_1|-|PF_2|)^2=16$,

即 $2a=4$,解得 $a=2$.又 $c=\sqrt{5}$,所以 $b=1$.

所以双曲线的方程为$\frac{x^2}{4}-y^2=1$.故选 C.

4.B　**解析**:由双曲线的定义,知
$|AF_1|-|AF_2|=2a$,$|BF_1|-|BF_2|=2a$.
又$|AF_2|+|BF_2|=|AB|$,所以$\triangle ABF_1$的周长为$|AF_1|+|BF_1|+|AB|=4a+2|AB|=4a+2m$.

5.9　**解析**:由题意知,$a=4$,$b=\sqrt{m}$,$c=5$,又由$a^2+b^2=c^2$,得$16+m=25$,所以$m=9$.

6.$y=0(x\geqslant 2)$　**解析**:设$F_1(-2,0)$,$F_2(2,0)$,由题意知动点M满足$|MF_1|-|MF_2|=4=|F_1F_2|$,故动点M的轨迹是射线$y=0(x\geqslant 2)$.

7.$\frac{y^2}{9}-x^2=1$　**解析**:在椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$中,$a^2=25$,$b^2=16$,所以$c^2=25-16=9$,
所以椭圆的焦点为$(0,\pm 3)$,所以双曲线的顶点为$(0,\pm 3)$.
设双曲线方程为$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{m^2}=1$,
由题意可得$\frac{36}{9}-\frac{3}{m^2}=1$,解得$m^2=1$,
所以所求双曲线的标准方程为$\frac{y^2}{9}-x^2=1$.

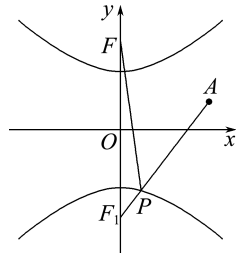
8.$(-\infty,3)$　**解析**:将双曲线方程化为标准方程为$\frac{x^2}{5-m}-\frac{y^2}{3-m}=1$,
则$\begin{cases}5-m>0,\\3-m>0,\end{cases}$解得$m<3$.

9.4　$\frac{50}{3}$　**解析**:由已知得$a=4$,$b=3$,
则$c=\sqrt{a^2+b^2}=5$,设点$P(x_P,y_P)$,
则$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times 2c\times|y_P|=\frac{1}{2}\times 10\times|y_P|=20$,所以$|y_P|=4$,即点$P$到$x$轴的距离为4.
由双曲线的对称性,不妨取点P的坐标为$\left(\frac{20}{3},4\right)$,得
$|PF_2|=\sqrt{\left(\frac{20}{3}-5\right)^2+4^2}=\frac{13}{3}$,
由双曲线的定义,得$|PF_1|=|PF_2|+2a=\frac{13}{3}+8=\frac{37}{3}$,
所以$|PF_1|+|PF_2|=\frac{37}{3}+\frac{13}{3}=\frac{50}{3}$.

能力提升

1.BCD　**解析**:当$t=\frac{5}{2}$时,曲线C表示圆,A错误.若C为双曲线,则$(4-t)(t-1)<0$,所以$t<1$或$t>4$,B正确.若曲线C为焦点在x轴上的椭圆,则$4-t>t-1>0$,所以$1<t<\frac{5}{2}$,C正确.若曲线C为焦点在y轴上的双曲线,则$\begin{cases}4-t<0,\\t-1>0,\end{cases}$所以$t>4$,D正确.

2.B　**解析**:由$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$,得$a=2$,$b=\sqrt{5}$,所以$c=\sqrt{a^2+b^2}=3$,所以上焦点$F(0,3)$,
则下焦点为$F_1(0,-3)$.又$A(3,1)$,由双曲线的定义得$|PF|+|PA|=2a+|PF_1|+|PA|\geqslant 2a+|AF_1|=4+\sqrt{3^2+(1+3)^2}=9$,
由图知,当A,P,F_1三点共线(P在线段AF_1上)时,$|PF|+|PA|$取得最小值9.



3.$\sqrt{3}$　**解析**:设F_1,F_2分别为左、右焦点,根据椭圆以及双曲线的定义可得$\begin{cases}|MF_1|+|MF_2|=2a,\\|MF_1|-|MF_2|=2,\end{cases}$所以$|MF_1|=a+1$,$|MF_2|=a-1$,
所以$|MF_1||MF_2|=a^2-1$,
由余弦定理可得$|F_1F_2|^2=(|MF_1|+|MF_2|)^2-2|MF_1||MF_2|-2|MF_1||MF_2|\cos\angle F_1MF_2=4(a^2-1)$,
所以$\cos\angle F_1MF_2=\frac{3-a^2}{a^2-1}$,故$\sin\angle F_1MF_2=\frac{\sqrt{4a^2-8}}{a^2-1}$,
因此$\triangle MF_1F_2$的面积为$\frac{1}{2}|MF_1||MF_2|\cdot\sin\angle F_1MF_2=\frac{1}{2}(a^2-1)\cdot\frac{\sqrt{4a^2-8}}{a^2-1}=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-8}=1$,
解得$a=\sqrt{3}$.

4.24　24　**解析**:由已知可得椭圆与双曲线具有共同的焦点$F_1(0,5)$,$F_2(0,-5)$.
由椭圆与双曲线的定义可得$\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=14,\\||PF_1|-|PF_2||=2,\end{cases}$
所以$\begin{cases}|PF_1|=8,\\|PF_2|=6\end{cases}$或$\begin{cases}|PF_1|=6,\\|PF_2|=8.\end{cases}$
又$|F_1F_2|=10$,所以$\triangle PF_1F_2$为直角三角形,且$\angle F_1PF_2=90°$,所以周长为$|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=14+10=24$,$S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=24$.

5.$3\sqrt{7}$　**解析**:因为$||PF_1|-|PF_2||=2a=6$①,$|F_1F_2|=2\sqrt{9+6}=2\sqrt{15}$,
所以由余弦定理得$|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\angle F_1PF_2=|F_1F_2|^2$,
即$|PF_1|^2+|PF_2|^2-\frac{8}{5}|PF_1||PF_2|=(2\sqrt{15})^2$②,联立①②,
解得$|PF_1||PF_2|=60$,$|PF_1|^2+|PF_2|^2=156$,
而$\overrightarrow{PO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2})$,所以$|OP|=|\overrightarrow{PO}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{PF_1}|^2+2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}+|\overrightarrow{PF_2}|^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{156+2\times60\times\frac{4}{5}}=3\sqrt{7}$.

6.解:(1)设两圆的圆心分别为 $A(-\sqrt{5},0)$,$B(\sqrt{5},0)$,半径均为 2,设圆 C 的半径为 r.

由题意,得 $|CA|=r-2$,$|CB|=r+2$ 或 $|CA|=r+2$,$|CB|=r-2$,

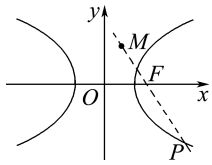
则 $|CA|-|CB|=-4$ 或 $|CA|-|CB|=4$,即 $||CA|-|CB||=4$.

因为 $4<2\sqrt{5}$,所以圆 C 的圆心轨迹为以 A,B 为焦点的双曲线,其中 $2a=4$,$c=\sqrt{5}$,$b^2=1$,

所以圆 C 的圆心轨迹 L 的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$.

(2)由(1)知,F 为双曲线 L 的一个焦点.

如图,连接 MF 并延长交双曲线于点 P,此时 $|MP|-|FP|=|MF|$ 为 $||MP|-|FP||$ 的最大值.



又 $|MF|=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}-\sqrt{5}\right)^2+\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2}=2$,

所以 $||MP|-|FP||$ 的最大值为 2.

自我超越

C　**解析**:由题意知 $F_1(-5,0)$,$F_2(5,0)$,$|PF_1|-|PF_2|=6$.

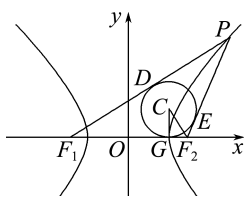
如图,设圆 C 与线段 PF_1,PF_2,F_1F_2 分别相切于点 D,E,G,则 $|PD|=|PE|$,$|F_1D|=|F_1G|$,$|F_2G|=|F_2E|$,所以 $|F_1G|-|F_2G|=|F_1D|-|F_2E|=|PF_1|-|PF_2|=6$,所以 $G(3,0)$,从而可知内切圆的圆心 C 在直线 $x=3$ 上.

因为 PF_2 的斜率为 $\sqrt{3}$,所以倾斜角为 60°.

因为 CF_2 是 $\angle PF_2F_1$ 的平分线,所以直线 CF_2 的倾斜角为 120°,方程为 $y=-\sqrt{3}(x-5)$.

将 $x=3$ 代入,得 $C(3,2\sqrt{3})$,所以 $|CG|=2\sqrt{3}$,即圆 C 的半径为 $2\sqrt{3}$,

得圆 C 的面积为 12π.



课后素养评价(三十)

基础落实

1.AB　**解析**:双曲线的方程为 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$,则双曲线的焦点在 y 轴上,渐近线方程为 $2x\pm\sqrt{5}y=0$,虚轴长为 $2\sqrt{5}$,离心率为 $\frac{3}{2}$,判断知 A,B 正确.

2.A　**解析**:因为 $a^2=9$,$b^2=7$,所以 $a=3$,$b=\sqrt{7}$,$c=\sqrt{a^2+b^2}=4$.

因为双曲线的焦点在 y 轴上,所以 C 的焦点坐标为 $(0,\pm4)$,顶点为 $(0,\pm3)$,离心率为 $\frac{4}{3}$,虚轴长为 $2\sqrt{7}$.

3.CD　**解析**:因为离心率为 2,当顶点为 $(\pm4,0)$ 时,$a=4$,$c=8$,$b=4\sqrt{3}$,双曲线方程为 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1$;当顶点为 $(0,\pm3)$ 时,$a=3$,$c=6$,$b=3\sqrt{3}$,双曲线方程为 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{27}=1$.

4.A　**解析**:因为椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$,焦点在 y 轴上,且 $c^2=36-16=20$,

又因为所求双曲线与双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$ 共渐近线,

所以设所求双曲线为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=\lambda(\lambda<0)$,即 $\frac{y^2}{-6\lambda}-\frac{x^2}{-4\lambda}=1$,

则 $c^2=-6\lambda-4\lambda=20$,解得 $\lambda=-2$.

所以所求双曲线的方程为 $\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{8}=1$.

5.A　**解析**:根据题意,可以求得双曲线的渐近线方程为 $x\pm ay=0$,而圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 的圆心为 $(2,0)$,半径为 1,结合题意有 $\frac{|2\pm0|}{\sqrt{1+a^2}}=1$,结合 $a>0$,得 $a=\sqrt{3}$,所以 $c=\sqrt{3+1}=2$,所以有 $e=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

6.$\sqrt{3}$　**解析**:设 $|PF_2|=x$,则 $|PF_1|=2x$,由双曲线的定义可得 $|PF_1|-|PF_2|=2x-x=2a$,

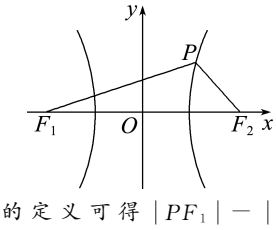
即 $x=2a$,所以 $|PF_2|=2a$,$|PF_1|=4a$.

又 $|F_1F_2|=2c$,$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$,

在 $\triangle PF_1F_2$ 中,由余弦定理的推论,得 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}$,

即 $\frac{(4a)^2+(2a)^2-(2c)^2}{2\cdot4a\cdot2a}=\frac{1}{2}$,解得 $c=\sqrt{3}a$,故离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$.

7.2　**解析**:不妨取点 P 在第一象限,如图所示.



根据双曲线的定义可得 $|PF_1|-|PF_2|=2a$,且 $|F_1F_2|=2c$.

由离心率为 2,即 $\frac{c}{a}=2$,可得 $c=2a$,即 $|F_1F_2|=4a$.

设 $|PF_2|=m>0$,则 $|PF_1|=2a+m$.

由 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为 $4\sqrt{3}$,可得 $\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\cdot\sin\angle F_1PF_2=\frac{1}{2}m(2a+m)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$,

$m(2a+m)=16$.

由余弦定理的推论可得 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}=-\frac{1}{2}$，

即 $\frac{(2a+m)^2+m^2-(4a)^2}{2m(2a+m)}=-\frac{1}{2}$，整理可得 $2m^2+4am-12a^2=-m(2a+m)$，

即 $12a^2=3m(2a+m)$，所以 $12a^2=48$，解得 $a=2$.

8. $y=\pm\sqrt{2}x$　**解析**：由已知得 $3^2-\frac{4^2}{b^2}=1$，解得 $b=\sqrt{2}$ 或 $b=-\sqrt{2}$. 又因为 $b>0$，所以 $b=\sqrt{2}$. 因为 $a=1$，所以双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$.

9. $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{12}=1$　**解析**：易知椭圆的焦点是 $(0,4),(0,-4)$，

所以 $c=4$，$e=\frac{4}{5}$，

所以双曲线的离心率为 $\frac{14}{5}-\frac{4}{5}=2$.

设双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$，

所以 $\frac{4}{a}=2$，所以 $a=2$，$b^2=4^2-2^2=12$.

所以双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{12}=1$.

10. $(4,+\infty)$　**解析**：因为等轴双曲线的离心率为 $\sqrt{2}$，且双曲线 C 的开口比等轴双曲线的开口更开阔，所以双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{m}=1$ 的离心率 $e>\sqrt{2}$，即 $\frac{4+m}{4}>2$，所以 $m>4$.

故实数 m 的取值范围是 $(4,+\infty)$.

能力提升

1. C　**解析**：由题意可知 $a=1$，$e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$，则 $c=\sqrt{5}$，$b^2=c^2-a^2=4$，所以 $b=2$，

所以双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{4}=1$，一条渐近线方程为 $2x-y=0$. 设双曲线的右焦点为 F_2，则 $F_2(\sqrt{5},0)$ 到渐近线 $2x-y=0$ 的距离为 $d=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=2$，所以 $|PF_2|$ 与 P 到 C 的一条渐近线的距离之和的最小值为 $d=2$.

又因为 $|PF|=2a+|PF_2|$，

所以 $|PF|$ 与 P 到 C 的一条渐近线的距离之和的最小值为 $2a+2=4$.

2. C　**解析**：由左、右焦点分别为 F_1,F_2 的双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 过点 $\left(\sqrt{15},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，可得 $\frac{15}{a^2}-\frac{6}{9}=1$，

解得 $a=3$. 又 $b=1$，所以 $c=\sqrt{10}$，$a+c>3$.

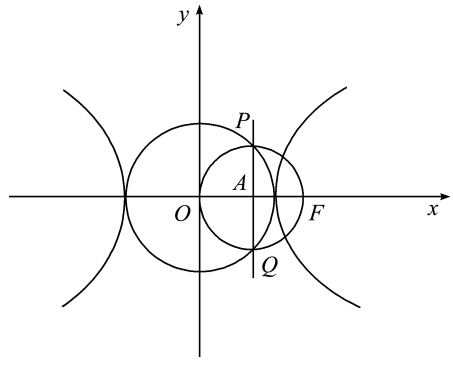
因为点 P 在双曲线 C 上，若 $|PF_1|=3$，可得 P 在双曲线的左支上，

则 $|PF_2|=2a+|PF_1|=6+3=9$. 故选 C.

3. A　**解析**：如图，设 PQ 与 x 轴交于点 A，由对称性可知 $PQ\perp x$ 轴.

又因为 $|PQ|=|OF|=c$，所以 $|PA|=\frac{c}{2}$，所以 PA 为以 OF 为直径的圆的半径，所以 $|OA|=\frac{c}{2}$，所以 $P\left(\frac{c}{2},\frac{c}{2}\right)$.

又点 P 在圆 $x^2+y^2=a^2$ 上，所以 $\frac{c^2}{4}+\frac{c^2}{4}=a^2$，即 $\frac{c^2}{2}=a^2$，所以 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=2$，所以 $e=\sqrt{2}$.



4. $[2,+\infty)$　**解析**：圆 $C:(x-2)^2+y^2=1$，双曲线 $D:\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的渐近线为 $ax\pm by=0$，因为圆 C 与双曲线 D 的渐近线有公共点，所以圆心 $C(2,0)$ 到渐近线的距离 $d=\frac{2a}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant 1$，所以 $3a^2\leqslant b^2$，所以 $c^2=a^2+b^2\geqslant 4a^2$，即 $\frac{c^2}{a^2}\geqslant 4$，所以 $e=\frac{c}{a}\geqslant 2$.

5. 3　**解析**：由题意知 $a=2$，又 $\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}=\sqrt{3}$，得 $b=2\sqrt{3}$，所以双曲线 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$，渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，即 $\sqrt{3}x\pm y=0$.

设 $P(s,t)$，则 $\frac{s^2}{4}-\frac{t^2}{12}=1$，即 $3s^2-t^2=12$，

所以点 P 到 E 的两条渐近线的距离之积为 $\frac{|\sqrt{3}s+t|}{2}\cdot\frac{|\sqrt{3}s-t|}{2}=\frac{|3s^2-t^2|}{4}=3$.

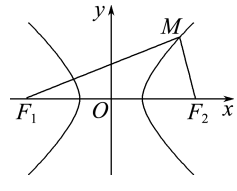
6. (1)**解**：因为 $e=\sqrt{2}$，所以可设双曲线的方程为 $x^2-y^2=\lambda(\lambda\neq 0)$.

因为双曲线过点 $P(4,-\sqrt{10})$，所以 $16-10=\lambda$，即 $\lambda=6$，

所以双曲线的方程为 $x^2-y^2=6$，即 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{6}=1$.

(2)**证明**：由(1)可知，$a=b=\sqrt{6}$，所以 $c=2\sqrt{3}$.

设 F_1,F_2 分别为双曲线的左、右焦点，则 $F_1(-2\sqrt{3},0)$，$F_2(2\sqrt{3},0)$，如图所示.



(方法一)因为 $k_{MF_1}=\frac{m}{3+2\sqrt{3}}$，$k_{MF_2}=\frac{m}{3-2\sqrt{3}}$，所以

$k_{MF_1}\cdot k_{MF_2}=\dfrac{m^2}{9-12}=-\dfrac{m^2}{3}$.

因为点 $M(3,m)$ 在双曲线上，所以 $9-m^2=6$，即 $m^2=3$，所以 $k_{MF_1}\cdot k_{MF_2}=-1$，

所以 $MF_1\perp MF_2$，所以 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$.

（方法二）因为 $\overrightarrow{MF_1}=(-2\sqrt{3}-3,-m)$，$\overrightarrow{MF_2}=(2\sqrt{3}-3,-m)$，

所以 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=(-2\sqrt{3}-3)\times(2\sqrt{3}-3)+m^2=-3+m^2$.

因为点 M 在双曲线上，所以 $9-m^2=6$，即 $m^2=3$，

所以 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$.

(3)**解**：由(2)知，$\triangle F_1MF_2$ 的底边长 $|F_1F_2|=4\sqrt{3}$，$\triangle F_1MF_2$ 的高 $h=|m|=\sqrt{3}$，所以 $S_{\triangle F_1MF_2}=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times\sqrt{3}=6$.

自我超越

B　**解析**：如图，记双曲线 C 的左焦点为 F_1，连接 MF_1，NF_1. 由对称性可知，四边形 MF_1NF 是平行四边形，所以 $|MF_1|=|NF|$.

因为 $|MF|-|MF_1|=2a$，则 $|MF|-|NF|=2a$.

设 $|MF|=m$，则 $|NF|=|MF_1|=m-2a$.

又 $|MF|\cdot|NF|=4$，

所以 $m(m-2a)=4$，即 $2a=m-\dfrac{4}{m}$，则 $4a^2=m^2+\dfrac{16}{m^2}-8$.

因为 $\angle MFN=60°$，所以 $\angle F_1MF=120°$.

在 $\triangle F_1MF$ 中，$|F_1F|^2=|MF_1|^2+|MF|^2-2|MF_1|\cdot|MF|\cos120°$，

即 $4c^2=(m-2a)^2+m^2+4=\dfrac{16}{m^2}+m^2+4=4a^2+12$，

所以 $e^2+\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{4c^2}{4a^2}+\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{4a^2+12}{4a^2}+\dfrac{a^2}{4}=1+\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{a^2}{4}\geqslant1+\sqrt{3}$，

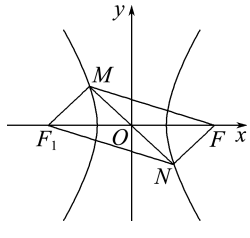
当且仅当 $a^2=2\sqrt{3}$ 时，等号成立.

此时由于 $m^2+\dfrac{16}{m^2}-8\geqslant2\sqrt{m^2\cdot\dfrac{16}{m^2}}-8=0$，当且仅当 $m=2$ 时，等号成立，

注意当 $m=2$ 时，$4a^2=m^2+\dfrac{16}{m^2}-8=0$，不满足题意，

故 $m^2+\dfrac{16}{m^2}-8>0$，所以当 $a^2=2\sqrt{3}$ 时，$m^2+\dfrac{16}{m^2}-8=8\sqrt{3}$ 有解，

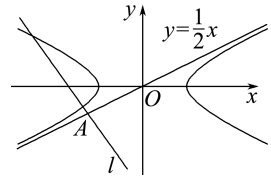
且由 $m(m-2a)=4>0$，得 $m-2a>0$ 满足题意，所以 $e^2+\dfrac{a^2}{4}$ 的最小值为 $1+\sqrt{3}$.



课后素养评价(三十一)

基础落实

1.B　**解析**：如图，



由 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 可知双曲线过第一和第三象限的渐近线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x$，

直线 l 与之垂直，则直线 l 的斜率为 -2.

又直线 l 过点 $(-3,-2)$，所以直线 l 的方程为 $y+2=-2(x+3)$，即 $2x+y+8=0$.

2.AD　**解析**：由 $\begin{cases}y=mx+1,\\x^2-y^2=1,\end{cases}$ 得 $(1-m^2)x^2-2mx-2=0$.

由题意知 $1-m^2=0$ 或 $\begin{cases}1-m^2\neq0,\\\Delta=4m^2+8(1-m^2)\geqslant0,\end{cases}$ 解得 $-\sqrt{2}\leqslant m\leqslant\sqrt{2}$. 经判断只有 A，D 符合题意.

3.B　**解析**：设等轴双曲线的方程为 $x^2-y^2=a^2(a>0)$，与 $y=\dfrac{1}{2}x$ 联立，得 $\dfrac{3}{4}x^2=a^2$，

所以 $|AB|=\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}\times\dfrac{4\sqrt{3}}{3}a=2\sqrt{15}$，

解得 $a=3$，所以该双曲线的方程为 $x^2-y^2=9$. 故选 B.

4.D　**解析**：双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 的右焦点为 $F(3,0)$，渐近线方程为 $\sqrt{5}x\pm2y=0$，F 到渐近线 $\sqrt{5}x+2y=0$ 的距离 $|FA|=\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5+4}}=\sqrt{5}$，则 $|OA|=\sqrt{|OF|^2-|FA|^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=2$.

所以 $S_{\triangle OAF}=\dfrac{1}{2}|FA|\cdot|OA|=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\times2=\sqrt{5}$.

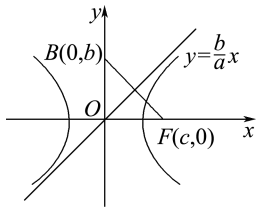
5.$\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{3},-1\right)$　**解析**：由 $\begin{cases}y=kx+2,\\x^2-y^2=6,\end{cases}$

得 $(1-k^2)x^2-4kx-10=0$.

由题意，得 $\begin{cases}1-k^2\neq0,\\\Delta=16k^2+40(1-k^2)>0,\\\dfrac{4k}{1-k^2}>0,\\\dfrac{10}{k^2-1}>0,\end{cases}$

解得 $-\dfrac{\sqrt{15}}{3}<k<-1$，所以 k 的取值范围是 $\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{3},-1\right)$.

6.$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　**解析**：不妨设双曲线的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，如图所示，双曲线的一条渐近线方程为 $y=\dfrac{b}{a}x$，



$k_{BF}=-\frac{b}{c}$.因为直线 BF 与直线 $y=\frac{b}{a}x$ 垂直，

所以 $\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{b}{c}\right)=-1$，整理得 $b^2=ac$，

所以 $c^2-a^2-ac=0$.

两边同除以 a^2，得 $e^2-e-1=0$，

解得 $e=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $e=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$（舍去）.

7.1　**解析**：由题意得右焦点 $F(5,0)$，所以过点 F 且垂直于 x 轴的直线是 $x=5$，代入 $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$，得 $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以此时弦长为 $\frac{\sqrt{5}}{2}\times2=\sqrt{5}$.当直线不垂直 x 轴，且与双曲线右支有两个交点时，那么弦长一定比 $\sqrt{5}$ 长.因为两顶点间的距离为 $4\sqrt{5}$，即左、右两支上的点的最短距离是 $4\sqrt{5}$，所以如果交于两支的话，那么弦长不可能为 $\sqrt{5}$.故这样的直线只有一条.

8.$y=\pm\frac{\sqrt{11}}{5}x$　**解析**：如图，令双曲线的右焦点为 F'，半焦距为 c，设 $|BF|=t$，则 $|AF|=4t$.

由双曲线定义得 $|BF'|=t+2a$，$|AF'|=4t+2a$.

由直线 AB 倾斜角为 $60°$，得 $\begin{cases}\angle BFF'=60°,\\ \angle AFF'=120°.\end{cases}$

由余弦定理得

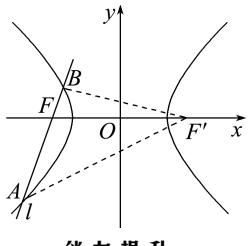
$$\begin{cases}|BF'|^2=|BF|^2+|FF'|^2-2|BF|\,|FF'|\cos 60°,\\ |AF'|^2=|AF|^2+|FF'|^2-2|AF|\,|FF'|\cos 120°,\end{cases}$$

即 $\begin{cases}(t+2a)^2=t^2+4c^2-2tc,\\ (4t+2a)^2=16t^2+4c^2+8tc,\end{cases}$

整理得 $\begin{cases}(2a+c)t=2c^2-2a^2,\\ (4a-2c)t=c^2-a^2,\end{cases}$

解得 $c=\frac{6}{5}a$，$t=\frac{11}{40}a$，$b=\frac{\sqrt{11}}{5}a$，

所以双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{11}}{5}x$.

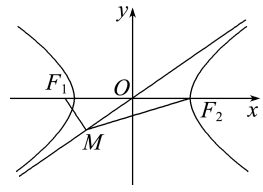


能力提升

1.B　**解析**：由条件知 $a^2+1=4$，因为 $a>0$，所以 $a=\sqrt{3}$.又 $PF_2\perp x$ 轴，把 $x=2$ 代入 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$，得 $y^2=\frac{1}{3}$，

所以 $|OP|=\sqrt{2^2+\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{39}}{3}$.

2.B　**解析**：如图.



由题意得 $F_1(-c,0)$，设一条渐近线的方程为 $bx-ay=0$，

所以 $|MF_1|=\frac{|-bc|}{\sqrt{b^2+(-a)^2}}=\frac{bc}{c}=b$，由勾股定理得 $|OM|=a$.

因为 MF_1 垂直于渐近线，所以 $\cos\angle MOF_1=\frac{a}{c}$.

因为 $|MF_2|=3|OM|$，所以 $|MF_2|=3a$.

又 $|OF_2|=c$，

在 $\triangle MOF_2$ 中，由余弦定理的推论得 $\cos\angle MOF_2=\frac{a^2+c^2-9a^2}{2ac}$.

因为 $\angle MOF_1+\angle MOF_2=\pi$，所以 $\frac{a^2+c^2-9a^2}{2ac}+\frac{a}{c}=0$，

化简得 $c^2=6a^2$，所以 $c=\sqrt{6}a$，故 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{6}$.故选 B.

3.ACD　**解析**：对于 A，易知 $E:x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 中实半轴长 $a=1$，虚半轴长 $b=\sqrt{3}$，半焦距 $c=\sqrt{a^2+b^2}=2$，则 E 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，故 A 正确；

对于 B，易得 E 的焦距为 4，$F_1(-2,0)$，故圆 T 的方程为 $(x+2)^2+y^2=16$，

即 $T:x^2+y^2+4x-12=0$，故 B 错误；

对于 C，由 $\begin{cases}(x+2)^2+y^2=16,\\ x^2-\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 y，得 $4x^2+4x-15=0$，

解得 $x=-\frac{5}{2}$（舍）或 $x=\frac{3}{2}$，代入 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 可得 $y^2=3\times\left(\frac{3}{2}\right)^2-3=\frac{15}{4}$.

不妨令 P 在第一象限，则 $P\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$，$Q\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$，

显然 $|PQ|=\sqrt{15}$，故 C 正确；

对于 D，显然 $|PF_1|=|QF_1|=|F_1F_2|=4$，

故由余弦定理的推论可得 $\cos\angle PF_1Q=\frac{|PF_1|^2+|QF_1|^2-|PQ|^2}{2\times|PF_1|\times|QF_1|}=\frac{16+16-15}{2\times4\times4}=\frac{17}{32}$，故 D 正确.

4.B　**解析**：设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

代入双曲线方程得 $\begin{cases}\frac{y_1^2}{a^2}-\frac{x_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{y_2^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 两式作差后整理得

$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{a^2}{b^2}$.

由题易知$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=1$，$x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=2$，

所以$\frac{2}{4}=\frac{a^2}{b^2}$.

又$c^2=a^2+b^2$，所以$\frac{1}{2}=\frac{a^2}{c^2-a^2}$，得$\frac{c}{a}=\sqrt{3}$.

5.$[2,+\infty)$　**解析**：由题意，知$\frac{b}{a}\geqslant\sqrt{3}$，则$\frac{b^2}{a^2}\geqslant3$，所以$c^2-a^2\geqslant3a^2$，即$c^2\geqslant4a^2$，所以$e^2=\frac{c^2}{a^2}\geqslant4$，所以$e\geqslant2$.

故双曲线的离心率e的取值范围是$[2,+\infty)$.

6.$4x-3y+1=0$　**解析**：设弦的两端点分别为$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则$2x_1^2-y_1^2=2$，$2x_2^2-y_2^2=2$，两式相减，得$2(x_1-x_2)(x_1+x_2)-(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$.

又$x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=6$，

所以$8(x_1-x_2)-6(y_1-y_2)=0$，即$k_{PQ}=\frac{4}{3}$.

因此直线PQ的方程为$y-3=\frac{4}{3}(x-2)$，即$4x-3y+1=0$.

经验证，直线$4x-3y+1=0$与双曲线相交.

因此所求直线方程为$4x-3y+1=0$.

7.$2\sqrt{2}$　**解析**：依题意，$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{2}x$，

不妨取渐近线l_1：$bx-2y=0$，则圆心$(3,0)$到l_1的距离$d=\frac{3b}{\sqrt{b^2+4}}$.

由圆的性质得$\left(\frac{3b}{\sqrt{b^2+4}}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2=(2\sqrt{2})^2$，所以$b=2\sqrt{2}$.

8.解：(1)由题意可知，双曲线C：$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$的右焦点为$F_2(3,0)$.

由直线l的倾斜角为$30°$，得斜率$k=\tan30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以直线l的方程为$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}$.

联立直线与双曲线的方程，可得$\begin{cases}y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3},\\ \frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1.\end{cases}$

消去y，并整理，得$x^2+12x-36=0$，易得$\Delta>0$.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$\begin{cases}x_1+x_2=-12,\\ x_1x_2=-36.\end{cases}$

由弦长公式，得$|AB|=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}\times\sqrt{12^2+4\times36}=8\sqrt{6}$.

(2)由题意可知，在$\triangle OAB$中，边AB上的高即为原点O到直线AB的距离d.

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}$，整理，得$\frac{\sqrt{3}}{3}x-y-\sqrt{3}=0$，

所以$d=\frac{|-\sqrt{3}|}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}}=\frac{3}{2}$，

所以$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\times8\sqrt{6}\times\frac{3}{2}=6\sqrt{6}$.

自我超越

解：(1)在椭圆Γ：$\frac{x^2}{3m}+\frac{y^2}{m}=1$中，离心率为$e_1=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{3m-m}{3m}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

在双曲线C：$m^2x^2-y^2=m^2$中，离心率为$e_2=\frac{c}{a}=\sqrt{1+m^2}$.

因为$e_1e_2=1$，

所以$\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}=1$，解得$m=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)因为$m=1$，所以Γ：$\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

对于直线l：$y=x+b$，椭圆Γ上总存在不同的两点A与B关于直线l对称，

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

所以可设直线AB的方程为$y=-x+t$.

由$\begin{cases}y=-x+t,\\ \frac{x^2}{3}+y^2=1,\end{cases}$消去$y$，得$4x^2-6tx+3t^2-3=0$，

由$\Delta=(-6t)^2-16(3t^2-3)=48-12t^2>0$，解得$-2<t<2$，

故$x_1+x_2=\frac{3t}{2}$，$x_1x_2=\frac{3}{4}(t^2-1)$，

所以$y_1+y_2=-x_1+t-x_2+t=-\frac{3t}{2}+2t=\frac{t}{2}$，

$y_1y_2=(-x_1+t)(-x_2+t)=x_1x_2-t(x_1+x_2)+t^2=\frac{3}{4}(t^2-1)-\frac{3t^2}{2}+t^2=\frac{1}{4}(t^2-3)$.

设线段AB的中点为$P(x_0,y_0)$，

则$x_0=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=\frac{3t}{4}$，$y_0=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{t}{4}$.

又点P在直线l上，所以$\frac{t}{4}=\frac{3t}{4}+b$，则$b=-\frac{1}{2}t$.

又因为$\overrightarrow{TA}=(x_1,y_1-2)$，$\overrightarrow{TB}=(x_2,y_2-2)$，

所以$\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}=x_1x_2+y_1y_2-2(y_1+y_2)+4=\frac{3}{4}(t^2-1)+\frac{1}{4}(t^2-3)-t+4=t^2-t+\frac{5}{2}$.

因为$\frac{9}{4}<\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}<\frac{5}{2}$，

所以$\frac{9}{4}<t^2-t+\frac{5}{2}<\frac{5}{2}$，解得$0<t<1$且$t\neq\frac{1}{2}$，

所以$b=-\frac{1}{2}t\in\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)\cup\left(-\frac{1}{4},0\right)$.

课后素养评价(三十二)

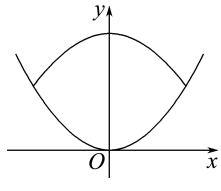
基础落实

1.C　**解析**:由题意得,$|MF|=\frac{p}{2}+x_M$,即 $4=\frac{p}{2}+3$,解得 $p=2$.故选 C.

2.BC　**解析**:由 $y=4x^2$,得 $x^2=\frac{1}{4}y$,所以该抛物线开口向上,焦点坐标为 $\left(0,\frac{1}{16}\right)$,准线方程为 $y=-\frac{1}{16}$.

3.B　**解析**:由题知抛物线 $y^2=mx(m\neq0)$ 的焦点在 x 轴上,又直线 $3x-4y-12=0$ 与 x 轴的交点为(4,0),故抛物线的焦点为(4,0),所以抛物线的方程为 $y^2=16x$.

4.C　**解析**:以碗体的最低点为原点,向上方向为 y 轴,建立如图所示的平面直角坐标系.



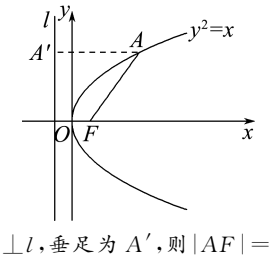
设碗体的抛物线方程为 $x^2=2py(p>0)$,将(5,6.25)代入,得 $5^2=2p\times6.25$,

解得 $p=2$,则 $x^2=4y$.

设盖上碗盖后,碗盖内部最高点到碗体内部最低的距离为 h cm,

则两抛物线在第一象限的交点为 $(4,h-3)$,代入 $x^2=4y$,得 $4^2=4(h-3)$,解得 $h=7$.

5.C　**解析**:如图,易知 $F\left(\frac{1}{4},0\right)$,准线 l 的方程为 $x=-\frac{1}{4}$.



过点 A 作 $AA'\perp l$,垂足为 A',则 $|AF|=|AA'|$,

即 $\frac{5}{4}x_0=x_0+\frac{1}{4}$,所以 $x_0=1$.

6.$x^2=8y$　**解析**:因为抛物线的焦点在 y 轴上,顶点为坐标原点 O,且经过点 $P(x_0,2)$,

所以可设抛物线的标准方程为 $x^2=2py(p>0)$.

由抛物线的定义可得 $2+\frac{p}{2}=4$,解得 $p=4$.

所以抛物线的方程为 $x^2=8y$.

7.$\frac{9}{4}$　**解析**:由题意可得 $(\sqrt{5})^2=2p\times1$,则 $2p=5$,抛物线的方程为 $y^2=5x$,

准线方程为 $x=-\frac{5}{4}$,故 A 到 C 的准线的距离为 $1-\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{9}{4}$.

8.解:依题意得 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$,设 $P\left(\frac{y_1^2}{2p},y_1\right)$,$Q\left(\frac{y_2^2}{2p},y_2\right)(y_1\neq y_2)$.

由抛物线定义及 $|PF|=|QF|$,得 $\frac{y_1^2}{2p}+\frac{p}{2}=\frac{y_2^2}{2p}+\frac{p}{2}$,

所以 $y_1^2=y_2^2$,所以 $y_1=-y_2$.

又 $|PQ|=2$,

因此 $|y_1|=|y_2|=1$,不妨令点 $P\left(\frac{1}{2p},1\right)$.

又点 P 位于该抛物线上,

由抛物线的定义得 $|PF|=\frac{1}{2p}+\frac{p}{2}=2$,

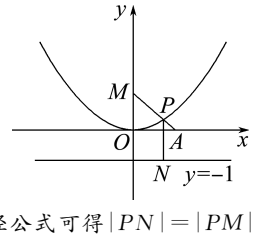
解得 $p=2\pm\sqrt{3}$.

能力提升

1.ACD　**解析**:抛物线 $y^2=10x$ 的焦点在 x 轴上,A 满足.设 $M(1,y_0)$ 是抛物线 $y^2=10x$ 上一点,则 $|MF|=1+\frac{p}{2}=1+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}\neq6$,B 不满足.因为 $y^2=10x$ 中 $p=5$,所以焦点到准线的距离为 5,C 满足.由于抛物线 $y^2=10x$ 的焦点为 $\left(\frac{5}{2},0\right)$,设过该焦点的直线方程为 $y=k\left(x-\frac{5}{2}\right)$,若由原点向该直线作垂线,垂足为(2,1),则 $k=-2$,此时直线存在,D 满足.

2.A　**解析**:抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2\Rightarrow x^2=4y$,焦点坐标为 $M(0,1)$,准线方程为 $y=-1$.

设 P 到 x 轴的距离为 d,过点 P 作 $PN\perp$ 准线 $y=-1$ 于点 N,如图.



由抛物线焦半径公式可得 $|PN|=|PM|$,$d=|PM|-1$,则 $|PA|+d=|PA|+|PM|-1\geqslant|AM|-1$,当且仅当 P,A,M 三点共线时,等号成立,

其中 $|AM|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,所以 P 到点 A 的距离与 P 到 x 轴的距离之和的最小值为 $\sqrt{2}-1$.

3.CD　**解析**:由双曲线方程知 $F(2,0)$,所以抛物线 C:$y^2=8x$.

对于 A,设 $P(x_0,y_0)$,则 $|PF|=x_0+2=6$,解得 $x_0=4$,A 错误;

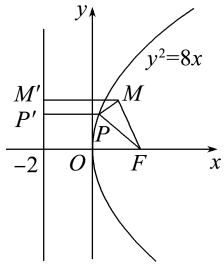
对于 B,抛物线准线方程为 $x=-2$,由 $\begin{cases}\frac{x^2}{3}-y^2=1,\\x=-2\end{cases}$ 得 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以抛物线的准线被双曲线截得的线段长度为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$,B 错误;

对于 C,因为 $\triangle POF$ 外接圆圆心在线段 OF 的中垂线上,则其横坐标为 1,

又该圆与抛物线准线相切，所以该圆的半径 $r=1+2=3$，所以该圆的面积 $S=\pi r^2=9\pi$，C 正确；

对于 D，设 P 和 M 在准线上的射影分别为 P'，M'，



由抛物线定义知 $|PF|=|PP'|$，

则 $|PF|+|PM|=|PP'|+|PM|\geqslant|MM'|$（当且仅当 M，P，P' 三点共线时取等号，此时 P'，M' 重合），

又 $|MM'|=1+2=3$，$|MF|=\sqrt{(1-2)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$，

所以 $\triangle PMF$ 周长的最小值为 $3+\sqrt{5}$，D 正确.

4.D　**解析**：方程 $a^2x^2+b^2y^2=1$ 与 $ax+by^2=0$ 可化为 $\dfrac{x^2}{\dfrac{1}{a^2}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{1}{b^2}}=1$ 与 $y^2=-\dfrac{a}{b}x$.

因为 $a>b>0$，所以 $\dfrac{1}{a^2}<\dfrac{1}{b^2}$，$-\dfrac{a}{b}<0$.所以椭圆的焦点在 y 轴上，抛物线的焦点在 x 轴负半轴上.

5.2　**解析**：设抛物线 $y^2=2x$ 的焦点为 $F\left(\dfrac{1}{2},0\right)$，准线方程为 $x=-\dfrac{1}{2}$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $|AF|+|BF|=x_1+\dfrac{1}{2}+x_2+\dfrac{1}{2}=5$，解得 $x_1+x_2=4$，所以线段 AB 的中点的横坐标为 2.故线段 AB 的中点到 y 轴的距离是 2.

6.1　**解析**：如图，因为在抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 上有横坐标为 2 的点 A，

所以设 $A(2,y_0)$，抛物线的准线方程为 $x=-\dfrac{p}{2}$.

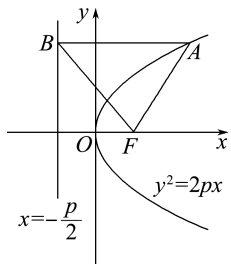
因为过点 A 作 AB 垂直于 C 的准线，垂足为 B，所以 $B\left(-\dfrac{p}{2},y_0\right)$，

所以 $|AB|=2+\dfrac{p}{2}$.因为抛物线 C 的焦点为 F，F 在 x 轴上，

所以 F 到 AB 的距离为 $d=|y_0|$.

因为 $S_{\triangle ABF}=\dfrac{5}{2}$，所以 $\dfrac{1}{2}\times|AB|\times d=\dfrac{5}{2}$，所以 $\dfrac{1}{2}\times\left(2+\dfrac{p}{2}\right)\times|y_0|=\dfrac{5}{2}$.

又因为 $A(2,y_0)$ 在抛物线上，所以 $y_0^2=4p$.由方程组 $\begin{cases}\dfrac{1}{2}\times\left(2+\dfrac{p}{2}\right)\times|y_0|=\dfrac{5}{2},\\ y_0^2=4p,\end{cases}$ 解得 $p=1$.



7.解：(1)准线方程为 $2y+4=0$，即 $y=-2$，则抛物线的焦点坐标为(0,2)，

所以所求抛物线的标准方程为 $x^2=8y$.

(2)设所求抛物线的标准方程为 $y^2=mx(m\neq0)$ 或 $x^2=ny(n\neq0)$，

则 $(-4)^2=3m$，解得 $m=\dfrac{16}{3}$，或 $3^2=-4n$，解得 $n=-\dfrac{9}{4}$，

所以所求抛物线的标准方程为 $y^2=\dfrac{16}{3}x$ 或 $x^2=-\dfrac{9}{4}y$.

(3)直线 $x+3y+15=0$ 交 y 轴于点(0，−5)，则以(0，−5)为焦点的抛物线的标准方程为 $x^2=-20y$；

直线 $x+3y+15=0$ 交 x 轴于点(−15，0)，则以(−15，0)为焦点的抛物线的标准方程为 $y^2=-60x$.

所以所求抛物线的标准方程为 $x^2=-20y$ 或 $y^2=-60x$.

自我超越

B　**解析**：把 $x=1$ 代入 $y^2=12x$，得 $y^2=12>(-2)^2$，

所以点 $M(1,-2)$ 在抛物线 $y^2=12x$ 里面，

圆 $(x-3)^2+y^2=1$ 的圆心记为 $C_2(3,0)$.

因为 $|PQ|$ 的最小值为 $|PC_2|-1$，而 C_2 正好是抛物线 $y^2=12x$ 的焦点，

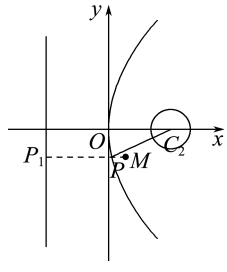
如图，过点 P 作抛物线准线 $x=-3$ 的垂线，垂足为 P_1，

则根据抛物线的定义得 $|PC_2|=|PP_1|$，

所以 $|PM|+|PQ|$ 的最小值等于求 $|PM|+|PP_1|-1$ 的最小值.

当 M，P，P_1 三点共线时 $|PM|+|PP_1|$ 的值最小，最小值为 $|MP_1|$，

故 $|PM|+|PP_1|-1$ 的最小值为 $|MP_1|-1=1-(-3)-1=3$.



课后素养评价(三十三)

基础落实

1.A　**解析**：直线 $y=k(x-1)+2$ 过定点(1，2)，因为 $1^2<4\times2$，

所以(1，2)在抛物线 $x^2=4y$ 内部，所以直线 $y=k(x-1)+2$ 与抛物线 $x^2=4y$ 相交.故选 A.

2.B　**解析**：因为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上一点 M 到其准线及对称轴的距离分别为 3 和 $2\sqrt{2}$，

所以 $\begin{cases}|y_M|=2\sqrt{2},\\ x_M+\dfrac{p}{2}=3,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}|y_M|=2\sqrt{2},\\ x_M=3-\dfrac{p}{2}.\end{cases}$ 代入抛物线方程可得 $8=2p\left(3-\dfrac{p}{2}\right)$，

整理得 $p^2-6p+8=0$，解得 $p=2$ 或 $p=4$.

3.D　**解析**：因为 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，所以 $\angle AOB=90°$.

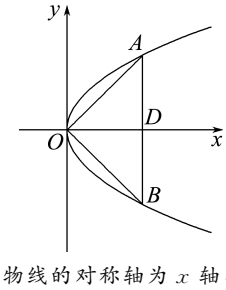
因为 $|AB|=4$，且 $AB\perp x$ 轴，

所以由抛物线的对称性 $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形.

如图，设 AB 与 x 轴的交点为 D，

所以 $AD=BD=OD=2$，即 $A(2,2)$，

所以将 $A(2,2)$ 代入 $y^2=2px$，得 $4=4p$，解得 $p=1$.



4.B　**解析**：因为抛物线的对称轴为 x 轴，内接三角形 AOB 为等腰直角三角形，所以由抛物线的对称性，知直线 AB 与抛物线的对称轴垂直，不妨设直线 OA 与 x 轴的夹角为 45°.

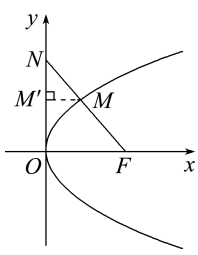
由方程组 $\begin{cases}y=x,\\ y^2=2px,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0,\\ y=0\end{cases}$（舍）或 $\begin{cases}x=2p,\\ y=2p,\end{cases}$ 所以 A，B 两点的坐标分别为 $(2p,2p)$ 和 $(2p,-2p)$.

所以 $|AB|=4p$，所以 $S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}\times4p\times2p=4p^2$.

5.4　$\pm2\sqrt{3}$　**解析**：由题意，得 $a>0$ 且 $\begin{cases}3a=m^2,\\ 3+\dfrac{a}{4}=4,\end{cases}$ 所以 $a=4$，$m=\pm2\sqrt{3}$.

6.$y^2=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{6}x$　**解析**：设抛物线方程为 $y^2=ax(a\neq0)$. 不妨设 $A\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，则有 $\dfrac{1}{4}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，解得 $a=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，所以所求抛物线的方程为 $y^2=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{6}x$.

7.6　**解析**：如图，过点 M 作 $MM'\perp y$ 轴，垂足为 M'，$|OF|=2$.



因为 M 为 FN 的中点，所以 $|MM'|=1$，所以 M 到准线的距离 $d=|MM'|+\dfrac{p}{2}=3$，所以 $|MF|=3$，所以 $|FN|=6$.

8.$y+1=0$　**解析**：由 $\begin{cases}x^2=2py,\\ x-y-1=0,\end{cases}$ 消去 y，得 $x^2-2px+2p=0$.

由题意 $\Delta=(-2p)^2-4\times2p=0$，解得 $p=2$，则抛物线的方程为 $x^2=4y$，

所以抛物线的准线方程为 $y=-1$.

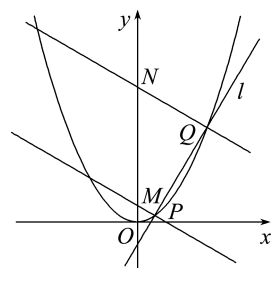
能力提升

1.A　**解析**：设抛物线 $y=-x^2$ 上一点 $(m,-m^2)$，该点到直线 $4x+3y-8=0$ 的距离 $d=\dfrac{|4m-3m^2-8|}{5}=\dfrac{\left|3\left(m-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{20}{3}\right|}{5}$，当 $m=\dfrac{2}{3}$ 时，d 取得最小值为 $\dfrac{4}{3}$.

2.CD　**解析**：由抛物线 $C:x^2=8y$ 知 $p=4$，所以焦点为 $F(0,2)$，准线方程为 $y=-2$.

由抛物线的定义，得 $|FM|=y_0+2$，因为以 F 为圆心、$|FM|$ 为半径的圆与准线相交，且圆心 $F(0,2)$ 到准线 $y=-2$ 的距离为 4，所以 $4<y_0+2$，从而 $y_0>2$.

3.2　**解析**：根据题意作图如下.



设直线 l 的倾斜角为 θ，则 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，易知 $|PQ|=|MN|\sin\theta=8$，

联立 $\begin{cases}x^2=4y,\\ y=\sqrt{3}x-a,\end{cases}$ 得 $x^2-4\sqrt{3}x+4a=0$，$\Delta>0$.

设 P，Q 的横坐标分别为 x_1，x_2，则 $\begin{cases}x_1+x_2=4\sqrt{3},\\ x_1x_2=4a.\end{cases}$

由弦长公式得 $|PQ|=\sqrt{1+3}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2\sqrt{48-16a}=8$，

得 $a=2$，且 $\Delta=(4\sqrt{3})^2-4\times8=16>0$，符合题意.

4.$x=0$ 或 $y=-1$ 或 $x+2y+2=0$　**解析**：当直线 l 的斜率不存在或为 0 时，显然满足题意，此时直线 l 的方程为 $x=0$ 或 $y=-1$.

当直线 l 的斜率存在且不为 0 时，设直线 l 的方程为 $y=kx-1$.

由 $\begin{cases}y=kx-1,\\ y^2=2x,\end{cases}$ 消去 y 整理得 $k^2x^2-(2k+2)x+1=0$.

由 $\Delta=(2k+2)^2-4k^2=0$，得 $8k+4=0$，即 $k=-\dfrac{1}{2}$，此时直线 l 的方程为 $y=-\dfrac{1}{2}x-1$，即 $x+2y+2=0$.

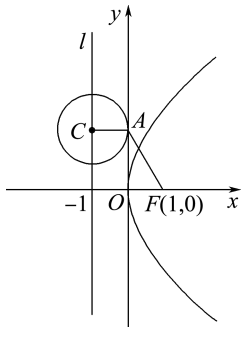
综上，直线 l 的方程为 $x=0$ 或 $y=-1$ 或 $x+2y+2=0$.

5.6　**解析**：因为抛物线 $x^2=2py$ 的准线 $y=-\dfrac{p}{2}$ 和双曲线 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 相交，交点的横坐标为 $x=\pm\sqrt{3+\dfrac{p^2}{4}}$，所

以由等边三角形的性质及抛物线的定义，得$2\sqrt{3+\frac{p^2}{4}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=p$，解得 $p=6$ 或 $p=-6$(舍).

6.$(x+1)^2+(y-\sqrt{3})^2=1$　**解析**：由 $y^2=4x$ 可得点 F 的坐标为(1,0)，准线 l 的方程为 $x=-1$.

由圆心 C 在 l 上，且圆 C 与 y 轴正半轴相切(如图)，

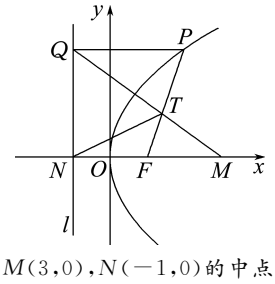


可得点 C 的横坐标为 -1，圆的半径为 1，$\angle CAO=90°$.又因为 $\angle FAC=120°$，所以 $\angle OAF=30°$，所以 $|OA|=\sqrt{3}$，所以点 C 的纵坐标为 $\sqrt{3}$.

所以圆的方程为 $(x+1)^2+(y-\sqrt{3})^2=1$.

自我超越

$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　**解析**：由题意，不妨设 $P(x_0,y_0)$，且在第一象限，作图如下：



因为 $F(1,0)$ 为 $M(3,0)$，$N(-1,0)$ 的中点，

所以 $\overrightarrow{TN}+\overrightarrow{TM}=2\overrightarrow{TF}=-\overrightarrow{TP}$，即 T 为 PF 靠近点 F 的三等分点，则 $|TP|=2|TF|$.

又因为 $PQ/\!/MF$，所以 $\triangle TMF\backsim\triangle TQP$，

所以 $\frac{|MF|}{|QP|}=\frac{|TF|}{|TP|}=\frac{1}{2}$，

所以 $|PQ|=2|MF|=4$.

则 $|PQ|=x_0+\frac{p}{2}=x_0+1=4$，所以 $x_0=3$.

因为点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线上，所以 $y_0=2\sqrt{3}$.

由 T 为 PF 靠近点 F 的三等分点，得 $y_T=\frac{1}{3}y_0=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

即点 T 到 x 轴的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

课后素养评价(三十四)

基础落实

1.A　**解析**：抛物线 $C:x^2=2py$ 的焦点为 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$，直线 $l:y-\frac{p}{2}=\sqrt{3}x$，可得 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(y-\frac{p}{2}\right)$，代入抛物线方程，得 $y^2-7py+\frac{1}{4}p^2=0$，$\Delta>0$，则 $y_1+y_2=7p$，$|AB|=y_1+y_2+p=7p+p=16$，解得 $p=2$.

2.D　**解析**：由题意知直线 MN 的方程为 $y=\frac{2}{3}(x+2)$，

由 $\begin{cases}y=\frac{2}{3}(x+2),\\ y^2=4x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\ y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=4,\\ y=4.\end{cases}$

不妨设 $M(1,2)$，$N(4,4)$.

又因为抛物线焦点为 $F(1,0)$，所以 $\overrightarrow{FM}=(0,2)$，$\overrightarrow{FN}=(3,4)$，所以 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0\times3+2\times4=8$.

3.A　**解析**：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，易得直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}(x-1)$.由 $\begin{cases}y=\sqrt{3}(x-1),\\ y^2=4x,\end{cases}$ 可得 $3x^2-10x+3=0$，解得 $x_1=3$，$x_2=\frac{1}{3}$($x_1>x_2$).

因为 $|FA|=x_1+1$，$|FB|=x_2+1$，所以 $\lambda=\frac{|FA|}{|FB|}=\frac{x_1+1}{x_2+1}=\frac{4}{\frac{4}{3}}=3$.

4.8　**解析**：分别过点 A，B，P 作准线的垂线，垂足分别为 M，N，Q(图略)，

根据抛物线上的点到焦点的距离等于该点到准线的距离，

得 $|AF|+|BF|=|AM|+|BN|=2|PQ|=2\times(1+3)=8$.

5.32　**解析**：设直线 AB 的方程为 $x=my+4$，代入 $y^2=4x$，得 $y^2-4my-16=0$，$\Delta=16m^2+64>0$，

则 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-16$，所以 $y_1^2+y_2^2=(y_1+y_2)^2-2y_1y_2=16m^2+32$，当 $m=0$ 时，$y_1^2+y_2^2$ 取得最小值为 32.

6.解：(1)设直线 l 的方程为 $x=my+6$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}x=my+6,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 得 $y^2-4my-24=0$，

显然 $\Delta>0$，$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-24$，$x_1x_2=36$，

可得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=12$.

(2)因为 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OM|\cdot|y_1-y_2|=3\sqrt{16m^2+96}=12\sqrt{m^2+6}=12\sqrt{10}$，

所以 $m^2=4$，$m=\pm2$.

故直线 l 的方程为 $x+2y-6=0$ 或 $x-2y-6=0$.

能力提升

1.D　**解析**：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，

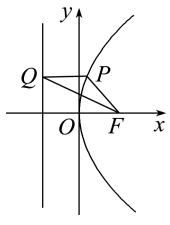
因为 $\triangle OAB$ 的重心为 F，所以 $\begin{cases}\frac{x_1+x_2+0}{3}=\frac{p}{2},\\ \frac{y_1+y_2+0}{3}=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{3p}{2},\\ y_1=-y_2.\end{cases}$

由 $y_1=-y_2$ 可知 A，B 关于 x 轴对称，即 $x_1=x_2$，则 x_1

$+x_2=2x_1=\frac{3p}{2}$，即 $x_1=\frac{3p}{4}$.

又因为 $|AF|=x_1+\frac{p}{2}=\frac{5p}{4}=5$，解得 $p=4$.

2.C　**解析**：如图所示，



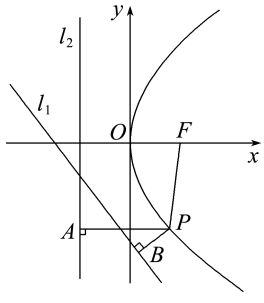
由抛物线的定义，可得 $|PF|=|PQ|$.

又 $\angle PQF=30°$，所以可得直线 PF 的倾斜角为 $120°$，

则可得 $\frac{1}{2}|PF|+|PQ|=\frac{1}{2}|PF|+|PF|=p=2$，从而 $|PF|=\frac{2}{1+\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}$，所以 $|PQ|=\frac{4}{3}$.

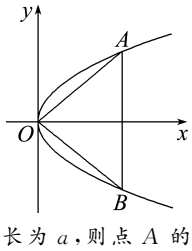
3.A　**解析**：抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 $F(1,0)$，直线 l_2：$x=-1$ 为抛物线的准线.

如图，$|PB|+|PA|=|PB|+|PF|\geqslant|FB|$，所以当点 F，P，B 共线且 $FB\perp l_1$ 时，抛物线 $y^2=4x$ 上一动点 P 到直线 l_1 和直线 l_2 的距离之和最小，



即距离和的最小值为点 F 到直线 l_1 的距离 $d=\frac{|4\times1+3\times0+6|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$.

4.6　**解析**：由题意可知等边三角形的一个顶点位于原点，另外两个顶点在抛物线 $y^2=\sqrt{3}x$ 上，则另外两个顶点关于 x 轴对称，如图所示.

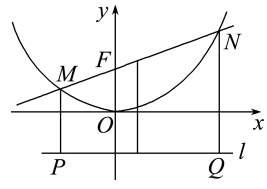


设等边三角形的边长为 a，则点 A 的横坐标为 $a\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，纵坐标为 $a\sin 30°=\frac{1}{2}a$，

则 $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{1}{2}a\right)$，代入 $y^2=\sqrt{3}x$ 得 $\left(\frac{1}{2}a\right)^2=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a$，解得 $a=6$（$a=0$ 舍），

故等边三角形的边长为 6.

5.4　**解析**：如图，分别过点 M，N 作抛物线 C 的准线的垂线，垂足分别为 P，Q，由抛物线的定义知，$|MP|=|MF|$，$|NQ|=|NF|$，则 $|MP|+|NQ|=|MN|=8$.线段 MN 的中点到抛物线 C 的准线的距离为梯形 $MNQP$ 的中位线的长度，即 $\frac{1}{2}\times(|MP|+|NQ|)=4$.



6.(1)**解**：设点 A，B 的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，则有 $k_{OA}=\frac{y_1}{x_1}$，$k_{OB}=\frac{y_2}{x_2}$.

因为 $OA\perp OB$，所以 $k_{OA}\cdot k_{OB}=-1$，所以 $x_1x_2+y_1y_2=0$.

因为 $y_1^2=2px_1$，$y_2^2=2px_2$，所以 $\frac{y_1^2}{2p}\cdot\frac{y_2^2}{2p}+y_1y_2=0$.

因为 $y_1\neq0$，$y_2\neq0$，所以 $y_1y_2=-4p^2$，所以 $x_1x_2=4p^2$.

(2)**证明**：因为 $y_1^2=2px_1$，$y_2^2=2px_2$，两式相减得 $(y_1-y_2)(y_1+y_2)=2p(x_1-x_2)$，

所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{2p}{y_1+y_2}$，所以 $k_{AB}=\frac{2p}{y_1+y_2}$，故直线 AB 的方程为 $y-y_1=\frac{2p}{y_1+y_2}(x-x_1)$，

所以 $y=\frac{2px}{y_1+y_2}+y_1-\frac{2px_1}{y_1+y_2}$，即 $y=\frac{2px}{y_1+y_2}+\frac{y_1^2-2px_1+y_1y_2}{y_1+y_2}$.

因为 $y_1^2=2px_1$，$y_1y_2=-4p^2$，代入整理得 $y=\frac{2px}{y_1+y_2}+\frac{-4p^2}{y_1+y_2}$，

所以 $y=\frac{2p}{y_1+y_2}(x-2p)$，即直线 AB 过定点 $(2p,0)$.

7.解：设直线 l：$y=\frac{3}{2}x+t$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

(1)由题意可设 $F\left(\frac{3}{4},0\right)$，则 $|AF|+|BF|=x_1+x_2+\frac{3}{2}$.

又 $|AF|+|BF|=4$，所以 $x_1+x_2=\frac{5}{2}$.

由 $\begin{cases}y=\frac{3}{2}x+t,\\y^2=3x.\end{cases}$ 消去 y，整理，可得 $9x^2+12(t-1)x+4t^2=0$，$\Delta>0$，所以 $x_1+x_2=-\frac{12(t-1)}{9}$，

所以 $-\frac{12(t-1)}{9}=\frac{5}{2}$，得 $t=-\frac{7}{8}$，

所以 l 的方程为 $y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{8}$.

(2)由 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，可得 $y_1=-3y_2$.

由 $\begin{cases}y=\frac{3}{2}x+t,\\y^2=3x.\end{cases}$ 消去 x，整理，可得 $y^2-2y+2t=0$，$\Delta>0$，所以 $y_1+y_2=2$，

所以$-3y_2+y_2=2$，解得$y_2=-1$，$y_1=3$.

将其代入C的方程，得$x_1=3$，$x_2=\frac{1}{3}$，

所以$|AB|=\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2}\times\left|3-\frac{1}{3}\right|=\frac{4\sqrt{13}}{3}$.

自我超越

D　**解析**：由题意知$F(2,0)$，直线AC的倾斜角$\alpha=45°$，则直线AC的方程为$y=x-2$，

联立$y^2=8x$，消去y，得$x^2-12x+4=0$，解得$x=6\pm4\sqrt{2}$，

所以$x_A=6+4\sqrt{2}$，$x_C=6-4\sqrt{2}$.

由抛物线的定义可得$|AF|=x_A+2=8+4\sqrt{2}$，$|CF|=x_C+2=8-4\sqrt{2}$，

根据抛物线的对称性结合AC，BD是过抛物线焦点F的两条互相垂直的弦，

可知$|DF|=|AF|=8+4\sqrt{2}$，$|BF|=|CF|=8-4\sqrt{2}$，

所以$S_{\triangle AFB}=\frac{1}{2}|AF|\times|BF|=\frac{1}{2}(8+4\sqrt{2})(8-4\sqrt{2})=16$，

故“蝴蝶形图案(阴影区域)”的面积为$2\times16=32$.

微专题培优集训(五)

1.B　**解析**：由$|F_1F_2|=12$，可得$c=6$，$F_1(-6,0)$，$F_2(6,0)$.

又$\triangle PF_1F_2$的面积为$24\sqrt{3}$，即$S=\frac{1}{2}\times2c\times y_P=6y_P=24\sqrt{3}$，

所以$y_P=4\sqrt{3}$.

又直线PF_2的斜率为$k_{PF_2}=\frac{y_P-0}{x_P-6}=\frac{4\sqrt{3}}{x_P-6}=-4\sqrt{3}$，

解得$x_P=5$，

所以点$P(5,4\sqrt{3})$.

则$|PF_1|=\sqrt{(5+6)^2+(4\sqrt{3}-0)^2}=13$，$|PF_2|=\sqrt{(5-6)^2+(4\sqrt{3}-0)^2}=7$，

所以$2a=|PF_1|+|PF_2|=13+7=20$，即$a=10$，

所以$e=\frac{c}{a}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

2.B　**解析**：因为$y=\sqrt{3}(x+c)$经过左焦点，且斜率为$\sqrt{3}$，则$\tan\angle MF_1F_2=\sqrt{3}$，又$\angle MF_1F_2$为三角形内角，所以$\angle MF_1F_2=60°$，所以$\angle MF_2F_1=30°$，则$MF_2\perp MF_1$.

设$|MF_1|=x$，则$|MF_2|=|MF_1|\tan60°=\sqrt{3}x$.由椭圆的定义可知，$|MF_1|+|MF_2|=2a$，即$x+\sqrt{3}x=2a$，解得$x=(\sqrt{3}-1)a$，所以$|MF_1|=(\sqrt{3}-1)a$，$|MF_2|=\sqrt{3}x=(3-\sqrt{3})a$.

在$\mathrm{Rt}\triangle MF_1F_2$中，由勾股定理得$|MF_1|^2+|MF_2|^2=|F_1F_2|^2$，即$(\sqrt{3}-1)^2a^2+(3-\sqrt{3})^2a^2=4c^2$，解得$\frac{c^2}{a^2}=4-2\sqrt{3}$，所以椭圆的离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$.

3.A　**解析**：设$P(x_0,y_0)$，则$Q(-x_0,y_0)$，$A(-a,0)$，

所以$k_{AP}\cdot k_{AQ}=\frac{y_0}{x_0+a}\cdot\frac{y_0}{-x_0+a}=\frac{y_0^2}{a^2-x_0^2}$.

由$P(x_0,y_0)$在双曲线上，得$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$，

即有$y_0^2=\frac{b^2}{a^2}(x_0^2-a^2)$，故$\frac{y_0^2}{a^2-x_0^2}=\frac{\frac{b^2}{a^2}(x_0^2-a^2)}{a^2-x_0^2}=-\frac{b^2}{a^2}$，

所以$-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{1}{4}$，即$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，

故$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

4.A　**解析**：依题意，$M(a,0)$，$N(0,b)$，$F(c,0)$，

设$B(x_1,y_1)$，$A(x_2,y_2)$，则AB的中点$P\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

因为点M为$\triangle NAB$的重心，则$a=\frac{0+x_1+x_2}{3}$，$\frac{b+y_1+y_2}{3}=0$，

所以AB的中点$P\left(\frac{3a}{2},-\frac{b}{2}\right)$.

因为$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$，$\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1$，

两式作差得$\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}=\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}$，化简得$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{b^2}{a^2}$，所以$k_{BA}\cdot k_{OP}=\frac{b^2}{a^2}$.

因为$k_{OP}=-\frac{b}{3a}$，又B，A，F，P四点共线，所以$k_{BA}=k_{FP}=\frac{\frac{b}{2}}{c-\frac{3a}{2}}$.

因此$\frac{\frac{b}{2}}{c-\frac{3a}{2}}\cdot\frac{-b}{3a}=\frac{b^2}{a^2}$，解得$3c=4a$，故$e=\frac{4}{3}$.

5.B　**解析**：因为离心率$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以$a^2=3c^2$，$b^2=2c^2$.设直线方程为$x=\frac{1}{k}y-c$，则与$2x^2+3y^2=6c^2$联立得$\left(3+\frac{2}{k^2}\right)y^2-\frac{4c}{k}y-4c^2=0$.设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，不妨令$y_1>y_2$，由$|AF|=2|FB|$，可得$y_1=-2y_2$，其中$y_1+y_2=\frac{4kc}{3k^2+2}$①，$y_1y_2=\frac{-4c^2k^2}{3k^2+2}$②.将$y_1=-2y_2$代入①②，可得$y_2=-\frac{4kc}{3k^2+2}$，$y_2^2=\frac{2c^2k^2}{3k^2+2}$，从而$\left(-\frac{4kc}{3k^2+2}\right)^2=\frac{2c^2k^2}{3k^2+2}$，解得$k^2=2$.因为$k>0$，所以$k=\sqrt{2}$.

6.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　**解析**：椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，左焦点$F(-c,0)$，下顶点$P(0,-b)$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

因为 AB 的中点为 $M\left(1,\frac{1}{2}\right)$，所以 $x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=1$.

因为 $PF\parallel l$，

所以 $k_{PF}=k_l=-\frac{b}{c}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

由 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$，两式相减得

$$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0,$$

可化为 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$，得 $-\frac{b}{c}=-\frac{2b^2}{a^2}$，即 $2bc=a^2$.

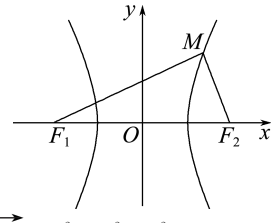
两边平方得 $4b^2c^2=4c^2(a^2-c^2)=a^4$，

化为 $4e^4-4e^2+1=0$，解得 $e^2=\frac{1}{2}$.

又 $0<e<1$，解得 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. $\left(1,\frac{7}{6}\right)$ **解析**：将 $x=c$ 代入双曲线的方程可得 $y=\pm b\cdot\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1}=\pm\frac{b^2}{a}$. 由 $|F_2Q|>|F_2A|$，可得 $\frac{3a}{2}>\frac{b^2}{a}$，即为 $3a^2>2b^2=2(c^2-a^2)$，即 $e=\frac{c}{a}<\frac{\sqrt{10}}{2}$①. 又 $|PF_1|+|PQ|>\frac{3}{2}|F_1F_2|$ 恒成立，只要求出 $|PF_1|+|PQ|$ 的最小值即可. 由双曲线的定义，可得 $|PF_1|=2a+|PF_2|$，$|F_1F_2|=2c$，即 $|PF_1|+|PQ|=|PF_2|+|PQ|+2a$. 当 F_2，P，Q 三点共线时，$|PF_2|+|PQ|$ 取得最小值 $|F_2Q|=\frac{3a}{2}$，可得 $3c<2a+\frac{3a}{2}$，即有 $e=\frac{c}{a}<\frac{7}{6}$②. 由 $e>1$，结合①②可得，e 的范围是 $\left(1,\frac{7}{6}\right)$.

8. $\sqrt{5}$ **解析**：设 $M(x,y)$，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，则 $\overrightarrow{MF_1}=(-c-x,-y)$，$\overrightarrow{MF_2}=(c-x,-y)$，



所以 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=x^2+y^2-c^2$.

又因为 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=-4a^2$，

所以 $x^2+y^2-c^2=-4a^2$①.

又 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow y^2=\frac{b^2x^2}{a^2}-b^2$②，

将②代入①，得 $x^2+\frac{b^2x^2}{a^2}-b^2-c^2=-4a^2$，

整理得 $b^2+c^2-4a^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2$. 因为 $x^2\geqslant a^2$，

所以 $b^2+c^2-4a^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2\geqslant\frac{a^2+b^2}{a^2}a^2=a^2+b^2$，

化简可得 $c^2\geqslant5a^2\Rightarrow\frac{c^2}{a^2}\geqslant5\Rightarrow e=\frac{c}{a}\geqslant\sqrt{5}$，

即双曲线 C 的离心率的最小值为 $\sqrt{5}$.

质量评估参考答案

质量评估(一)

1.C　**解析**:$\boldsymbol{a}=(1,-3,2)=-2\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},-1\right)$.

2.D　**解析**:因为 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})$,

所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,

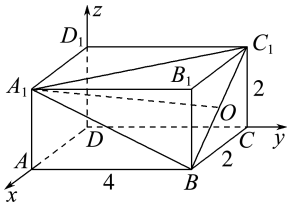
所以 $|\boldsymbol{a}|^2=\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,

所以 $14=\lambda(2+2+3)=7\lambda$,

解得 $\lambda=2$.故选 D.

3.A　**解析**:因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(x,4,5)\cdot(1,-2,2)=x-8+10=x+2$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$,所以 $\frac{\sqrt{2}}{6}=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4^2+5^2}\times\sqrt{1+4+4}}$,且 $x+2>0$,解得 $x=3$ 或 $x=-11$(舍去).故选 A.

4.A　**解析**:由题意建立如图所示的空间直角坐标系,



由 $D(0,0,0)$,$A(2,0,0)$,$B(2,4,0)$,$C_1(0,4,2)$,

得 $AB=4$,$BC=2$,$CC_1=2$.连接 A_1B,A_1C_1,BC_1,

所以 $A_1B=2\sqrt{5}$,$A_1C_1=2\sqrt{5}$,$BC_1=2\sqrt{2}$,

所以$\triangle A_1BC_1$ 是等腰三角形.

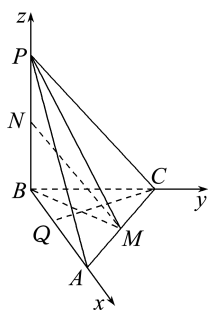
取 BC_1 的中点为 O,连接 OA_1,

则 $OA_1\perp BC_1$,即点 A_1 到直线 BC_1 的距离为 OA_1.

在 Rt$\triangle A_1OB$ 中,有 $OA_1=\sqrt{A_1B^2-OB^2}=\sqrt{20-2}=3\sqrt{2}$.

5.A　**解析**:在三棱锥 P-ABC 中,$AB=BC=2$,$AC=2\sqrt{2}$,所以 $BA\perp BC$.

因为 $PB\perp$ 平面 ABC,所以以 B 为原点,BA,BC,BP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,



可知 $B(0,0,0)$,$C(0,2,0)$,$M(1,1,0)$.因为 $BM=\sqrt{2}$,$MN=\sqrt{6}$,所以 $BN=\sqrt{MN^2-BM^2}=2$,所以 $PB=4$,则 $P(0,0,4)$.

设 $\frac{|\overrightarrow{BQ}|}{|\overrightarrow{BA}|}=\lambda$,且 $0<\lambda<1$,则 $Q(2\lambda,0,0)$,可知 $\overrightarrow{PM}=(1,1,-4)$,$\overrightarrow{CQ}=(2\lambda,-2,0)$,

所以 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{CQ}=1\times2\lambda+1\times(-2)+(-4)\times0=2\lambda-2$,

$|\overrightarrow{PM}|=\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}=3\sqrt{2}$,$|\overrightarrow{CQ}|=\sqrt{4\lambda^2+4}$.

因为异面直线 PM 与 CQ 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{34}}{34}$,

所以 $\frac{|\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{CQ}|}{|\overrightarrow{PM}|\cdot|\overrightarrow{CQ}|}=\frac{|2\lambda-2|}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{4\lambda^2+4}}=\frac{\sqrt{34}}{34}$,解得 $\lambda=\frac{1}{4}$ 或 $\lambda=4$(舍去),

所以 $\frac{|\overrightarrow{BQ}|}{|\overrightarrow{BA}|}=\frac{1}{4}$.

6.B　**解析**:因为 $\overrightarrow{OP}=(1,1,2)$,点 Q 在直线 OP 上运动,所以可设 $\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OP}=(\lambda,\lambda,2\lambda)$.

又向量 $\overrightarrow{OA}=(1,2,3)$,$\overrightarrow{OB}=(2,1,2)$,所以 $\overrightarrow{QA}=(1-\lambda,2-\lambda,3-2\lambda)$,$\overrightarrow{QB}=(2-\lambda,1-\lambda,2-2\lambda)$,

则 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=(1-\lambda)\times(2-\lambda)+(2-\lambda)\times(1-\lambda)+(3-2\lambda)\times(2-2\lambda)=6\lambda^2-16\lambda+10$.

易得当 $\lambda=\frac{4}{3}$ 时,$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$ 取得最小值 $-\frac{2}{3}$.故选 B.

7.A　**解析**:在平行六面体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中,四边形 DD_1C_1C 是平行四边形,侧面 A_1ADD_1 是正方形,

又 P 是 C_1D,CD_1 的交点,所以 P 是 CD_1 的中点.

因为 $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$,$\angle A_1AB=120°$,$\angle DAB=60°$,$AB=2$,

所以 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD})$,

所以 $|\overrightarrow{AP}|^2=\frac{1}{4}[\overrightarrow{AA_1}^2+\overrightarrow{AB}^2+4\overrightarrow{AD}^2+2(\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})]=\frac{1}{4}\left[4+4+4\times4+2\times2\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+0+2\times2\times2\times2\times\frac{1}{2}\right]=7$,

所以 $|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{7}$.

又因为 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AA_1}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos120°+|\overrightarrow{AB}|^2+2|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos60°)=\frac{1}{2}\left[2\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+2^2+2\times2\times2\times\frac{1}{2}\right]=3$,$|\overrightarrow{DC}|=2$,

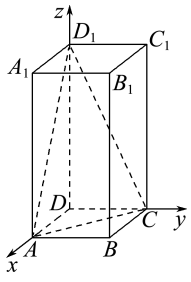
所以 $\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{DC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{DC}|}=\frac{3}{\sqrt{7}\times2}=\frac{3\sqrt{7}}{14}$,

所以异面直线 AP 与 DC 的夹角的余弦值为

$|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{DC}\rangle|=\frac{3\sqrt{7}}{14}$.

故选 A.

8.C　**解析**：以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $DD_1=a$，则 $A(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$D_1(0,0,a)$，$C_1(0,2,a)$，

所以$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,a)$，$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,a)$.

设平面 ACD_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}-2x+2y=0,\\ -2x+az=0.\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=1$，$z=\frac{2}{a}$，所以 $\boldsymbol{n}=\left(1,1,\frac{2}{a}\right)$ 是平面 ACD_1 的一个法向量.

故 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{CC_1}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{CC_1}|}=\frac{2}{\sqrt{\frac{4}{a^2}+2}\times a}=\frac{2}{\sqrt{2a^2+4}}$.

因为直线 CC_1 与平面 ACD_1 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$，所以 $\frac{2}{\sqrt{2a^2+4}}=\frac{1}{3}$，解得 $a=4$.

9.BC　**解析**：选项 A，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，则向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角是钝角或向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 反向共线，故 A 错误；

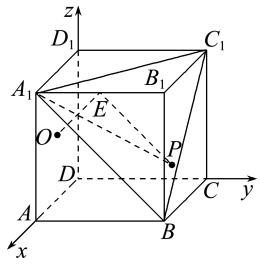
选项 B，$\overrightarrow{OD}=2(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA})-3(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DB})+2(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{OD}+2\overrightarrow{DA}-3\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}$，即有 $\overrightarrow{DB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$，故 A，B，C，D 四点共面，故 B 正确；

选项 C，假设 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{m}\}$ 不是空间的一个基底，则存在实数 x，y，使 $\boldsymbol{m}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，由向量 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 是空间的一个基底，则向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，故不存在这样的实数 x，y，即 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{m}\}$ 是空间的一个基底，故 C 正确；

选项 D，设直线 l 与平面 α 所成的角为 θ，则 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，由题意可得，$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{e},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{e}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{|-2+6|}{\sqrt{1+9}\times\sqrt{4+4}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\cos\theta=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，故 D 错误.

故选 BC.

10.AC　**解析**：以 D 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(1,0,0)$，$A_1(1,0,1)$，$B(1,1,0)$，$C_1(0,1,1)$，$O\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$，$E\left(1,\frac{1}{2},1\right)$，

所以$\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{A_1B}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{BC_1}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{OE}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

对于 A，设平面 A_1BC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=y-z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=-x+z=0.\end{cases}$ 令 $x=1$，则 $y=1$，$z=1$，

所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$ 是平面 A_1BC_1 的一个法向量，所以 $\boldsymbol{n}=2\overrightarrow{OE}$，即 $\boldsymbol{n}\parallel\overrightarrow{OE}$，

所以 $OE\perp$ 平面 A_1BC_1，故 A 正确；

对于 B，设 AB 与平面 A_1BC_1 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AB},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AB}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 B 错误；

对于 C，因为正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，所以正三角形 A_1BC_1 的边长为$\sqrt{2}$，

正方体的体对角线 $DB_1=\sqrt{3}$，

设点 B_1 到平面 A_1BC_1 的距离为 h，由 $V_{三棱锥B_1\text{-}A_1BC_1}=V_{三棱锥B\text{-}A_1B_1C_1}$，

则 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sin 60^\circ\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1$，

解得 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以点 D 到平面 A_1BC_1 的距离为$\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

因为$\frac{\sqrt{3}}{3}>\frac{\sqrt{3}}{6}$，

所以在以 B_1 为顶点的棱上，满足条件的点 P 共有 3 个，

又 AB 与平面 A_1BC_1 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以点 A 到平面 A_1BC_1 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，

因为$\frac{\sqrt{3}}{3}>\frac{\sqrt{3}}{6}$，所以在棱 AA_1，AB 上都存在满足条件的点 P，

同理在 CC_1，CB，D_1A_1，D_1C_1 都存在满足条件的点 P，

而棱 DA，DC，DD_1 到平面 A_1BC_1 最近的距离为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以不存在满足条件的点 P，

所以满足条件的点 P 共有 9 个，故 C 正确；

对于 D，设 $P(x',1,z')(0\leqslant x'\leqslant1,0\leqslant z'\leqslant1)$，则 $\overrightarrow{PE}$

$=\left(1-x',-\frac{1}{2},1-z'\right)$，

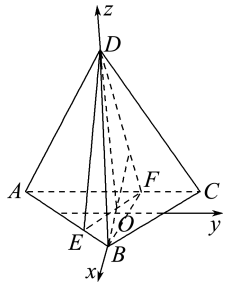
又$|PE|=1$，

所以$\sqrt{(1-x')^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(1-z')^2}=1$，即$(x'-1)^2+(z'-1)^2=\frac{3}{4}$，

则点P在侧面BCC_1B_1内，以B_1为圆心，$\frac{\sqrt{3}}{2}$为半径的一段圆弧上运动，

而当点P与点B或点C_1重合时，A_1P与BC_1所成角为$60°$，故D错误.

11.ABD　**解析**：如图，设正四面体D-ABC的底面中心为O，连接DO，OB，则$DO\perp$平面ABC.以O为原点，OB，OD所在直线分别为x轴、z轴，建立如图所示的空间直角坐标系.



设正四面体的棱长为2，则$A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-1,0\right)$，$C\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},1,0\right)$，$B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},0,0\right)$，$E\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{1}{3},0\right)$，$D\left(0,0,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

设$F\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\lambda,0\right)(-1\leqslant\lambda\leqslant1)$.

若存在某个位置，使得$DE\perp BF$，则$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BF}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\cdot(-\sqrt{3},\lambda,0)=0$，解得$\lambda=-3$，不合题意，故A错误.

若存在某个位置，使得$\angle FDB=\frac{\pi}{4}$，

即$\cos\langle\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DB}\rangle=\frac{\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{DF}||\overrightarrow{DB}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$\frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\lambda,-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\cdot\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},0,-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)}{\sqrt{\lambda^2+3}\times2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，此方程无解，故B错误.

$\overrightarrow{DA}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-1,-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，$\overrightarrow{DC}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},1,-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，

设平面DAC的法向量为$\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DA}=-\frac{\sqrt{3}}{3}x_1-y_1-\frac{2\sqrt{6}}{3}z_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC}=-\frac{\sqrt{3}}{3}x_1+y_1-\frac{2\sqrt{6}}{3}z_1=0.\end{cases}$

取$z_1=-1$，则$x_1=2\sqrt{2}$，$y_1=0$，所以$\boldsymbol{m}=(2\sqrt{2},0,-1)$是平面$DAC$的一个法向量.

设平面DEF的法向量为$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=\frac{\sqrt{3}}{3}x_2-\frac{1}{3}y_2-\frac{2\sqrt{6}}{3}z_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DF}=-\frac{\sqrt{3}}{3}x_2+\lambda y_2-\frac{2\sqrt{6}}{3}z_2=0.\end{cases}$

取$z_2=1$，得$\boldsymbol{n}=\left(\frac{6\sqrt{2}\lambda+2\sqrt{2}}{3\lambda-1},\frac{4\sqrt{6}}{3\lambda-1},1\right)$是平面$DEF$的一个法向量.

若存在某个位置，使得平面$DEF\perp$平面DAC，

则$2\sqrt{2}\times\frac{6\sqrt{2}\lambda+2\sqrt{2}}{3\lambda-1}-1=0$，

解得$\lambda=-\frac{3}{7}\in[-1,1]$，故C正确.

设平面DBF的法向量为$\boldsymbol{v}=(x_3,y_3,z_3)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{v}\cdot\overrightarrow{DB}=\frac{2\sqrt{3}}{3}x_3-\frac{2\sqrt{6}}{3}z_3=0,\\ \boldsymbol{v}\cdot\overrightarrow{DF}=-\frac{\sqrt{3}}{3}x_3+\lambda y_3-\frac{2\sqrt{6}}{3}z_3=0.\end{cases}$

取$x_3=\sqrt{2}$，得$\boldsymbol{v}=\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{6}}{\lambda},1\right)$是平面$DBF$的一个法向量.

若存在某个位置，使得$\alpha=\frac{\pi}{6}$，

则$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}=|\cos\langle\boldsymbol{v},\overrightarrow{DE}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{v}\cdot\overrightarrow{DE}}{|\boldsymbol{v}||\overrightarrow{DE}|}\right|=\frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{3\lambda}-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right|}{\sqrt{3+\frac{6}{\lambda^2}}\times\frac{2\sqrt{7}}{3}}$，整理得$5\lambda^2-4\lambda+12=0$，此方程无解，故D错误.故选ABD.

12.3　**解析**：设$\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，即$(1,2,m)=x(1,-1,0)+y(0,1,1)$，故$\begin{cases}x=1,\\ -x+y=2,\\ m=y,\end{cases}$解得$m=y=3$.

13.$\frac{1}{2}$　$\frac{1}{4}$　$\frac{1}{4}$　**解析**：因为D为BC的中点，E为AD的中点，

所以$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}+\frac{1}{4}\boldsymbol{c}$.

因为$\overrightarrow{OE}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$，所以$x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{4}$，$z=\frac{1}{4}$.

14.垂直　$\frac{\sqrt{21}}{7}$　**解析**：如图，连接BG，因为$BC/\!/AD$，$AD\perp$底面$AEFB$，所以$BC\perp$底面$AEFB$.

又$AG\subset$底面$AEFB$，所以$BC\perp AG$.

因为$AB/\!/EG$且$AB=EG$，$AB=AE$，

所以四边形$ABGE$为菱形，

所以$AG\perp BE$.

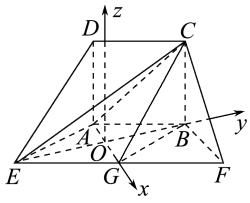
又$BC\cap BE=B$，$BE\subset$平面BCE，$BC\subset$平面BCE，

所以$AG\perp$平面BCE.

由以上证明知$AE=EG=BG=AB=4$，

设$AG\cap BE=O$，由题意知$OE=OB=2\sqrt{3}$，$OA=OG=2$.

以 O 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$，



则 $O(0,0,0)$，$A(-2,0,0)$，$E(0,-2\sqrt{3},0)$，$C(0,2\sqrt{3},4)$，$D(-2,0,4)$，

所以 $\overrightarrow{AC}=(2,2\sqrt{3},4)$，$\overrightarrow{AE}=(2,-2\sqrt{3},0)$.

设平面 ACE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}2x+2\sqrt{3}y+4z=0,\\ 2x-2\sqrt{3}y=0.\end{cases}$

令 $y=1$，则 $x=\sqrt{3}$，$z=-\sqrt{3}$，

所以 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,-\sqrt{3})$ 为平面 ACE 的一个法向量.

易知平面 AEF 的一个法向量为 $\overrightarrow{AD}=(0,0,4)$.

设二面角 C-AE-F 的大小为 θ，

由图易知 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times4}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

15.解：(1)$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,-6,4)+(-2,1,1)=(0,-5,5)$，故 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{0^2+(-5)^2+5^2}=5\sqrt{2}$.

(2)假设存在点 E，设 $\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AB}$，则 $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}=(-3,-1,4)+t(1,-1,-2)=(-3+t,-1-t,4-2t)$. 若 $\overrightarrow{OE}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{OE}\cdot\boldsymbol{b}=0$，

所以 $-2(-3+t)+(-1-t)+(4-2t)=0$，

解得 $t=\dfrac{9}{5}$. 因此存在点 E，使得 $\overrightarrow{OE}\perp\boldsymbol{b}$，

此时点 E 的坐标为 $\left(-\dfrac{6}{5},-\dfrac{14}{5},\dfrac{2}{5}\right)$.

16.(1)**证明**：取 PD 的中点 G，连接 FG，CG(图略)，

因为 F 为 PE 的中点，所以 $FG=\dfrac{1}{2}DE=1$，$FG\parallel DE$.

又 $BC=1$，$AD\parallel BC$，所以 $FG=BC$，$FG\parallel BC$，

所以四边形 $FGCB$ 为平行四边形，所以 $BF\parallel CG$.

又 $BF\not\subset$ 平面 PCD，$CG\subset$ 平面 PCD，

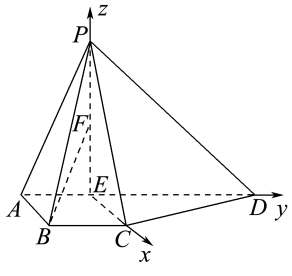
所以 $BF\parallel$ 平面 PCD.

(2)**解**：因为 $AB\perp$ 平面 PAD，$PE\subset$ 平面 PAD，所以 $AB\perp PE$.

又 $PE\perp AD$，$AB\cap AD=A$，AB，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PE\perp$ 平面 $ABCD$.

连接 EC，易知四边形 $ABCE$ 为矩形，则直线 EC，ED，EP 两两垂直，故以 E 为原点，EC，ED，EP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $P(0,0,2)$，$C(1,0,0)$，$D(0,2,0)$，$A(0,-1,0)$，$B(1,-1,0)$，所以 $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{AP}=(0,1,2)$，$\overrightarrow{PC}=(1,0,-2)$，$\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$.

设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=x_1=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AP}=y_1+2z_1=0.\end{cases}$ 令 $z_1=1$，则 $y_1=-2$，$x_1=0$，

所以 $\boldsymbol{n}_1=(0,-2,1)$ 为平面 PAB 的一个法向量.

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{PC}=x_2-2z_2=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{PD}=2y_2-2z_2=0.\end{cases}$ 令 $z_2=1$，则 $x_2=2$，$y_2=1$，

所以 $\boldsymbol{n}_2=(2,1,1)$ 为平面 PCD 的一个法向量.

设平面 PAB 与平面 PCD 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{\sqrt{30}}{30}$，

所以平面 PAB 与平面 PCD 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{30}}{30}$.

17.(1)**证明**：因为 $A_1C\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，所以 $A_1C\perp BC$.

因为 $\angle ACB=90°$，所以 $BC\perp AC$.

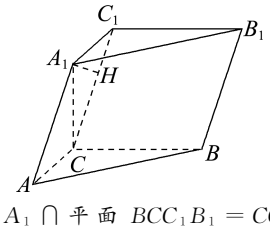
又 $AC\cap A_1C=C$，A_1C，$AC\subset$ 平面 ACC_1A_1，

所以 $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1.

又因为 $BC\subset$ 平面 BCC_1B_1，

所以平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 BCC_1B_1.

如图，过点 A_1 作 $A_1H\perp CC_1$，垂足为 H.



又平面 $ACC_1A_1\cap$ 平面 $BCC_1B_1=CC_1$，$A_1H\subset$ 平面 ACC_1A_1，

所以 $A_1H\perp$ 平面 BCC_1B_1(面面垂直的性质)，

即 A_1H 的长为点 A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离，所以 $A_1H=1$.

设 $AC=x$，则在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1CA$ 中，$A_1C=\sqrt{4-x^2}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CA_1C_1$ 中，由等面积法，得 $\dfrac{1}{2}A_1C_1\cdot A_1C=\dfrac{1}{2}CC_1\cdot A_1H$，即 $x\cdot\sqrt{4-x^2}=2\times1$，解得 $x=\sqrt{2}$，所以 $A_1C=AC=\sqrt{2}$，

故 $A_1C=AC$.

(2)**解**：如图，连接 B_1C，过点 C 作 $CQ\perp AA_1$，垂足为 Q，连接 BQ.

由(1)知，$BC\perp$ 平面 ACC_1A_1，又 $AA_1\subset$ 平面 ACC_1A_1，所以 $BC\perp AA_1$.

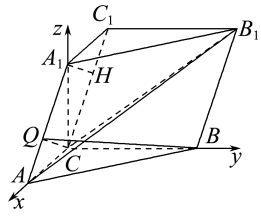
又 $CQ\cap BC=C$，CQ，$BC\subset$ 平面 BCQ，所以 $AA_1\perp$ 平面 BCQ.

因为 $BQ\subset$ 平面 BCQ，所以 $AA_1\perp BQ$.

又因为 $AA_1\parallel BB_1$，所以 $BB_1\perp BQ$，所以 BQ 的长为直线 AA_1 与 BB_1 之间的距离，即 $BQ=2$.

在 Rt△BCQ 中，$BQ=2$，$CQ=1$，所以 $BC=\sqrt{3}$.

由(1)知，CA，CB，CA_1 两两垂直，所以以 C 为原点，CA，CB，CA_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $C(0,0,0)$，$A(\sqrt{2},0,0)$，$A_1(0,0,\sqrt{2})$，$B(0,\sqrt{3},0)$，

所以 $\overrightarrow{CB}=(0,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{AA_1}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$.

又知 $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AA_1}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，所以 $B_1(-\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{2})$，所以 $\overrightarrow{CB_1}=(-\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AB_1}=(-2\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{2})$.

设平面 BCC_1B_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}y=0,\\ -\sqrt{2}x+\sqrt{3}y+\sqrt{2}z=0.\end{cases}$ 令 $x=1$，则 $y=0$，$z=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$ 为平面 BCC_1B_1 的一个法向量.

设直线 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AB_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{AB_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AB_1}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|-2\sqrt{2}\times1+\sqrt{2}\times1|}{\sqrt{8+3+2}\times\sqrt{1+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$，

所以直线 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

18.(1)**证明**：因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AD$.

又 $AD\perp PB$，$PB\cap PA=P$，PB，$PA\subset$ 平面 PAB，

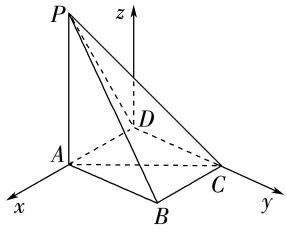
所以 $AD\perp$ 平面 PAB.

因为 $AB\subset$ 平面 PAB，所以 $AD\perp AB$.

由 $BC=1$，$AB=\sqrt{3}$，$AC=2$，可得 $BC^2+AB^2=AC^2$，所以 $BC\perp AB$，所以 $AD\parallel BC$.

又 $AD\not\subset$ 平面 PBC，$BC\subset$ 平面 PBC，所以 $AD\parallel$ 平面 PBC.

(2)**解**：由题意知，DC，AD，AP 两两垂直，则以 D 为原点，AD 所在直线为 x 轴，DC 所在直线为 y 轴，过点 D 且平行于 AP 的直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $D(0,0,0)$.设 $A(a,0,0)$，$a>0$，则 $CD=\sqrt{4-a^2}$，所以 $C(0,\sqrt{4-a^2},0)$，$P(a,0,2)$，所以 $\overrightarrow{CD}=(0,-\sqrt{4-a^2},0)$，$\overrightarrow{AC}=(-a,\sqrt{4-a^2},0)$，$\overrightarrow{CP}=(a,-\sqrt{4-a^2},2)$.

设平面 CPD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{CP}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{4-a^2}y=0,\\ ax-\sqrt{4-a^2}y+2z=0.\end{cases}$ 取 $x=2$，则 $y=0$，$z=-a$，所以 $\boldsymbol{n}=(2,0,-a)$ 是平面 CPD 的一个法向量.

设平面 ACP 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}ax_1-\sqrt{4-a^2}y_1+2z_1=0,\\ -ax_1+\sqrt{4-a^2}y_1=0.\end{cases}$ 取 $x_1=\sqrt{4-a^2}$，得 $y_1=a$，$z=0$，所以 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{4-a^2},a,0)$ 是平面 ACP 的一个法向量.

因为二面角 A-CP-D 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，

所以二面角 A-CP-D 的余弦值的绝对值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，

故 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2\sqrt{4-a^2}}{\sqrt{4-a^2+a^2}\cdot\sqrt{4+a^2}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

又 $a>0$，所以 $a=\sqrt{3}$，即 $AD=\sqrt{3}$.

19.(1)**证明**：因为 $BC'=C'D$，E 为 BD 的中点，

所以 $C'E\perp BD$.

又平面 $BC'D\perp$ 平面 ABD，平面 $BC'D\cap$ 平面 $ABD=BD$，$C'E\subset$ 平面 $BC'D$，

所以 $C'E\perp$ 平面 ABD.

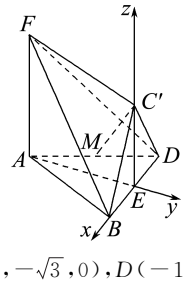
因为 $FA\perp$ 平面 ABD，所以 $FA\parallel C'E$.

因为 $C'E\subset$ 平面 $BC'D$，$FA\not\subset$ 平面 $BC'D$，所以 $FA\parallel$ 平面 $BC'D$.

(2)**解**：连接 AE.由(1)知，$C'E\perp$ 平面 ABD，AE，$BE\subset$ 平面 ABD，

所以 $C'E\perp AE$，$C'E\perp BE$.又四边形 $ABCD$ 为边长为 2 的菱形，$\angle BAD=60°$，所以 $AE\perp BD$，$BE=ED=1$，$AE=\sqrt{3}$，

故以 E 为原点，BD，AE，EC' 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $B(1,0,0)$，$A(0,-\sqrt{3},0)$，$D(-1,0,0)$，$F(0,-\sqrt{3},2\sqrt{3})$，$C'(0,0,\sqrt{3})$，所以 $\overrightarrow{FB}=(1,\sqrt{3},-2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC'}=(-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AD}=(-1,\sqrt{3},0)$.

设平面 FBC' 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{FB}=x+\sqrt{3}y-2\sqrt{3}z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC'}=-x+\sqrt{3}z=0.\end{cases}$

令 $z=1$，则 $x=\sqrt{3}$，$y=1$，所以 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,1)$ 为平面

FBC'的一个法向量.

假设在线段 AD 上存在 $M(a,b,c)$，使得 $C'M\perp$ 平面 FBC'.

设$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AD}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则$(a,b+\sqrt{3},c)=\lambda(-1,\sqrt{3},0)=(-\lambda,\sqrt{3}\lambda,0)$，

所以 $a=-\lambda,b=\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3},c=0$，

故$\overrightarrow{C'M}=(-\lambda,\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3},-\sqrt{3})$.

因为 $C'M\perp$ 平面 FBC'，且平面 FBC' 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,1)$，

所以 $\boldsymbol{m}\parallel\overrightarrow{C'M}$，即 $\boldsymbol{m}=t\overrightarrow{C'M}$，即$\begin{cases}\sqrt{3}=-\lambda t,\\1=t(\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3}),\\1=-\sqrt{3}t,\end{cases}$方程组无解，$\lambda$ 不存在.

所以在线段 AD 上不存在点 M，使得 $C'M\perp$ 平面 FBC'.

质量评估(二)

1.A　**解析**：已知 $A(-2,-3),B(1,0)$，则 $k_{AB}=\dfrac{-3-0}{-2-1}=1$.设直线 AB 的倾斜角为 θ，则 $\tan\theta=k_{AB}=1$，得 $\theta=45°$.

2.A　**解析**：因为 $l_1\parallel l_2\Leftrightarrow-m^2=2m-3\Leftrightarrow m=1$ 或 $m=-3$，所以“$m=-3$”是“$l_1\parallel l_2$”的充分不必要条件.故选 A.

3.A　**解析**：设所求直线的方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1(a>0,b>0)$，则有 $\dfrac{1}{2}ab=6$，且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{3}{b}=1$.由$\begin{cases}ab=12,\\\dfrac{1}{a}+\dfrac{3}{b}=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\b=6.\end{cases}$故所求直线的方程为 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{6}=1$，即为 $3x+y-6=0$.

4.A　**解析**：由题意两条直线平行，所以 $n=-2$.由两条平行直线间的距离公式，得 $d=\dfrac{|m+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|m+3|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，解得 $m=2$ 或 $m=-8$(舍去)，所以 $m+n=0$.

5.A　**解析**：由题意不妨设 $A(0,3),B(-4,0)$，圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

则$\begin{cases}9+3E+F=0,\\16-4D+F=0,\\F=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}D=4,\\E=-3,\\F=0,\end{cases}$

所以所求圆的方程为 $x^2+y^2+4x-3y=0$.

6.C　**解析**：根据题意，圆 $C:x^2+y^2-6x+5=0$ 即 $(x-3)^2+y^2=4$，圆心为 $C(3,0)$，半径 $r=2$.

设直线 l 的斜率为 k，则直线 l 的方程为 $y=kx$，即 $kx-y=0$，

若直线 l 与圆 C 相交于 A,B 两点且 $\triangle ABC$ 为正三角形，

则圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\sqrt{3}$，即 $\dfrac{|3k|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{3}$，解得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

7.C　**解析**：恰好存在两条直线 l，使得点 A,B 到 l 的距离分别为 $2\sqrt{2}$ 和 $6\sqrt{2}$，

以 A 为圆心，$2\sqrt{2}$ 为半径的圆，以 B 为圆心，$6\sqrt{2}$ 为半径的圆，这两圆有两条公切线，

因此这两个圆相交，即 $4\sqrt{2}<|AB|<8\sqrt{2}$.而 $|AB|=\sqrt{(a-1)^2+(a-1)^2}=\sqrt{2}|a-1|$，

则 $4<|a-1|<8$，解得 $5<a<9$ 或 $-7<a<-3$，

所以 a 的取值范围是 $(-7,-3)\cup(5,9)$.

8.C　**解析**：由题意可得圆心为 $(0,0)$，半径为 2，

所以圆心到直线的距离 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$，

则弦长为 $|MN|=2\sqrt{4-\dfrac{m^2}{k^2+1}}$.

当 $k=0$ 时，弦长 $|MN|$ 取得最小值为 $2\sqrt{4-m^2}=2$，解得 $m=\pm\sqrt{3}$.

9.ACD　**解析**：选项 A，$l_2:a(x-2y)+3y-1=0$，令$\begin{cases}x-2y=0,\\3y-1=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=\dfrac{2}{3},\\y=\dfrac{1}{3},\end{cases}$过点$\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$，故 A 正确；

选项 B，当 $a=1$ 时，l_1,l_2 重合，故 B 错误；

选项 C，当 $l_1\perp l_2$ 时，由 $1\times a+a\times(3-2a)=0$，得 $a=0$ 或 $a=2$，故 C 正确；

选项 D，当 $a>0$ 时，$l_1:y=-\dfrac{1}{a}x+1$ 始终过点 $(0,1)$，斜率为负，所以不会过第三象限，故 D 正确.

故选 ACD.

10.BCD　**解析**：由题意知，$O(0,0),C(3,3),r_O=2,r_C=\sqrt{10}$，则 $|OC|=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$，故 B 正确；

又 $2+\sqrt{10}>3\sqrt{2}>\sqrt{10}-2$，即 $r_C-r_O<|OC|<r_O+r_C$，所以圆 O 与圆 C 相交，有两条公切线，故 A 错误；

由$\begin{cases}(x-3)^2+(y-3)^2=10,\\x^2+y^2=4,\end{cases}$整理得 $x+y=2$，

故圆 O 与圆 C 的公共弦所在直线 l 的方程为 $x+y=2$，故 C 正确；

圆心 O 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{2}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$，

所以圆 O 与圆 C 的公共弦长为 $2\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$，故 D 正确.

11.AB　**解析**：设圆 C 的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，则点 C 到 x 轴、y 轴的距离分别为 $|b|,|a|$.

由题意可知$\begin{cases}r^2=2b^2,\\r^2=a^2+1,\\\dfrac{|a-2b|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5},\end{cases}$所以$\begin{cases}a=-1,\\b=-1,\\r^2=2\end{cases}$或$\begin{cases}a=1,\\b=1,\\r^2=2.\end{cases}$

故所求圆 C 的方程为 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$ 或 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

12.-2　$\sqrt{5}$　**解析**：由题意可知 $k_{AC}=-\dfrac{1}{2}$，所以直线 AC 的方程为 $y+1=-\dfrac{1}{2}(x+2)$.把 $(0,m)$ 代入直线 AC 的方程得 $m=-2$，此时 $r=|AC|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$.

13.$\sqrt{5}+2$(答案不唯一)　**解析**：由题意知，圆 $C:x^2+y^2+$

$2x=0$，即$(x+1)^2+y^2=1$，圆心为$C(-1,0)$，半径$r=1$.

设线段AB的中点为M.

因为$A(1,m)$，$B(1,2\sqrt{5}-m)$，

则$M(1,\sqrt{5})$，$|AB|=2|\sqrt{5}-m|$，

所以以AB为直径的圆M为$(x-1)^2+(y-\sqrt{5})^2=(\sqrt{5}-m)^2$.

因为圆C：$x^2+y^2+2x=0$上有且只有一点P，使得$PA\perp PB$，

所以圆C与圆M相切.

又$|MC|=\sqrt{(-1-1)^2+(0-\sqrt{5})^2}=3$，

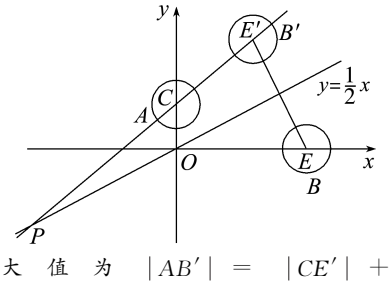
即有$|\sqrt{5}-m|+1=3$或$|\sqrt{5}-m|-1=3$，

解得$m=\sqrt{5}\pm2$或$m=\sqrt{5}\pm4$.

14. $\frac{\sqrt{130}}{5}+1$　**解析**：设$E(3,0)$关于直线$y=\frac{1}{2}x$的对称点为$E'(m,n)$，则$\begin{cases}\frac{n}{m-3}\cdot\frac{1}{2}=-1,\\ \frac{n}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{m+3}{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}m=\frac{9}{5},\\ n=\frac{12}{5},\end{cases}$所以$E'\left(\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$，

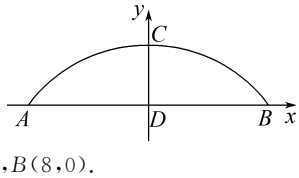
则圆E关于直线$y=\frac{1}{2}x$对称的圆E'的方程为$\left(x-\frac{9}{5}\right)^2+\left(y-\frac{12}{5}\right)^2=\frac{1}{4}$.

要使$|PB|-|PA|$的值最大，则P，A，B'（其中B'为圆E关于直线$y=\frac{1}{2}x$的对称圆E'上的点）三点共线，且该直线过C，E'两点，如图，



其最大值为$|AB'|=|CE'|+1=\sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^2+\left(\frac{12}{5}-1\right)^2}+1=\frac{\sqrt{130}}{5}+1$.

15.解：(1)以点D为坐标原点，AB，DC所在直线分别为x轴、y轴，建立如图所示的平面直角坐标系，



则点$C(0,4)$，$B(8,0)$.

由圆的对称性可知，圆心在y轴上，

设圆心坐标为$(0,b)$，圆的半径为r，则圆弧AB所在圆的方程为$x^2+(y-b)^2=r^2$.

因为点C，B在圆上，所以$\begin{cases}0+(4-b)^2=r^2,\\ 8^2+(0-b)^2=r^2,\end{cases}$解得$b=-6$，$r=10$.

所以圆弧AB所在圆的方程为$x^2+(y+6)^2=100$，

因此圆弧AB的方程为$x^2+(y+6)^2=100(0\leqslant y\leqslant4)$.

(2)此货车不能通过该洞门.理由如下：

由题意可知，隔离墙最右侧的坐标为$(1,0)$，而车宽2 m，车高3.6 m，

所以货车右侧的最高点的坐标为$(3,3.6)$.

因为$3^2+(3.6+6)^2>100$，

所以此货车不能通过该洞门.

16.解：(1)圆$x^2+y^2-6x-6y+14=0$可化为$(x-3)^2+(y-3)^2=4$，

即该圆以$(3,3)$为圆心，2为半径.

因为$\frac{y}{x}=\frac{y-0}{x-0}$，所以$\frac{y}{x}$即为$(0,0)$与该圆上一点确定的直线的斜率.

设过$(0,0)$与圆$(x-3)^2+(y-3)^2=4$相切的直线方程为$kx-y=0$(斜率不存在时直线与圆是相离的)，则有$2=\frac{|3k-3|}{\sqrt{k^2+1}}$，解得$k=\frac{9\pm2\sqrt{14}}{5}$.

所以$\left(\frac{y}{x}\right)_{\max}=\frac{9+2\sqrt{14}}{5}$，$\left(\frac{y}{x}\right)_{\min}=\frac{9-2\sqrt{14}}{5}$.

(2)$x^2+y^2+2x+3=(x+1)^2+y^2+2$表示点$(x,y)$与点$(-1,0)$距离的平方加上2.

因为点(x,y)在圆上，点$(-1,0)$在圆外，

所以所求最大值为$\left[\sqrt{(3+1)^2+(3-0)^2}+2\right]^2+2=51$，所求最小值为$\left[\sqrt{(3+1)^2+(3-0)^2}-2\right]^2+2=11$.

17.解：(1)若此方程表示圆，则$(-2)^2+4^2-4\times4m>0$，解得$m<\frac{5}{4}$.

因为m为正整数，所以$m=1$.

(2)在(1)的条件下，方程表示圆C：$(x-1)^2+(y+2)^2=1$.

由l_1恰好平分圆C，得l_1经过圆心$C(1,-2)$.

设点M关于直线$y=-x$的对称点为$N(x,y)$，

则直线MN与直线$y=-x$垂直，且线段MN的中点$\left(\frac{x-4}{2},\frac{y+1}{2}\right)$在直线$y=-x$上，

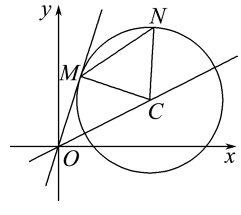
则有$\begin{cases}\frac{y-1}{x+4}\times(-1)=-1,\\ \frac{y+1}{2}=-\frac{x-4}{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-1,\\ y=4,\end{cases}$

所以$N(-1,4)$.

所以直线CN即为直线l_1，且$k_{l_1}=k_{CN}=\frac{-2-4}{1-(-1)}=-3$，

所以反射光线所在直线l_1的方程为$y+2=-3(x-1)$，即$3x+y-1=0$.

18.解：(1)如图.



由题意，过点 M 的直径所在直线的方程为 $y-3=-\frac{1}{3}(x-1)$，

由 $\begin{cases}y-3=-\frac{1}{3}(x-1),\\ y=\frac{1}{2}x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=4,\\ y=2.\end{cases}$

所以圆心坐标为 $(4,2)$，半径 $r^2=(4-1)^2+(2-3)^2=10$，

所以圆 C 的方程为 $(x-4)^2+(y-2)^2=10$.

(2)设圆心 C 到直线 MN 的距离为 d，

则 $\triangle CMN$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times d\times 2\sqrt{10-d^2}=d\sqrt{10-d^2}$.

由于 $S=\sqrt{d^2(10-d^2)}\leqslant\frac{d^2+(10-d^2)}{2}=5$，

当且仅当 $d^2=10-d^2$，即 $d=\sqrt{5}$ 时，等号成立，面积的最大值为 5.

当直线 MN 的斜率不存在时，直线方程为 $x=1$，此时 $C(4,2)$ 到 MN 的距离为 $3\neq d=\sqrt{5}$；

故直线 MN 的斜率存在，设为 k，则直线 MN 的方程为 $y-3=k(x-1)$，即 $kx-y+3-k=0$.

由 $C(4,2)$ 到 MN 的距离 $d=\frac{|4k-2+3-k|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{5}$，

解得 $k=-2$ 或 $k=\frac{1}{2}$，故此时直线方程为 $2x+y-5=0$ 或 $x-2y+5=0$.

19.解：(1)圆 C_1：$x^2+y^2+6x-2y+6=0$ 的标准方程为 $(x+3)^2+(y-1)^2=4$，则圆心 $C_1(-3,1)$，$r_1=2$，

圆 C_2：$x^2+y^2-8x-10y+41-r^2=0(r>0)$ 的标准方程为 $(x-4)^2+(y-5)^2=r^2(r>0)$，则圆心 $C_2(4,5)$，$r_2=r$，

所以 $|C_1C_2|=\sqrt{(4+3)^2+(5-1)^2}=\sqrt{65}$.

因为圆 C_1 与圆 C_2 相交，所以 $|r_1-r_2|<|C_1C_2|<r_1+r_2$，即 $|r-2|<\sqrt{65}<r+2$，解得 $\sqrt{65}-2<r<\sqrt{65}+2$，

所以 r 的取值范围为 $(\sqrt{65}-2,\sqrt{65}+2)$.

(2)已知直线 l：$y=kx+1$ 与圆 C_1 交于 P,Q 两点，

则可设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=kx+1,\\ (x+3)^2+(y-1)^2=4,\end{cases}$

得 $(1+k^2)x^2+6x+5=0$，

由 $\Delta=16-20k^2>0$，得 $k\in\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$，

所以 $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{6}{1+k^2},\\ x_1x_2=\frac{5}{1+k^2}.\end{cases}$

因为 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2=(1+k^2)x_1x_2+k(x_1+x_2)+1=\frac{-6k}{1+k^2}+6=4$，

解得 $k=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$，

又 $k\in\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$，所以 $k=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

(3)如图，设点 P 的坐标为 (m,n)，则直线 l_1，l_2 的方程分别为 $y-n=t(x-m)$，$y-n=-\frac{1}{t}(x-m)$，

即 $tx-y+n-tm=0$，$-\frac{1}{t}x-y+n+\frac{1}{t}m=0$.

因为直线 l_1 被圆 C_1 截得的弦长与直线 l_2 被圆 C_2 截得的弦长相等且两圆半径相等，

所以圆心 C_1 到直线 l_1 的距离与圆心 C_2 到直线 l_2 的距离相等，

即 $\frac{|-3t-1+n-tm|}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{\left|-\frac{4}{t}-5+n+\frac{1}{t}m\right|}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}$，

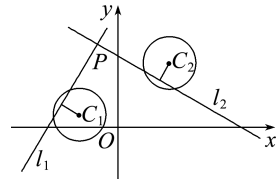
化简，得 $(2-m-n)t=m-n-3$ 或 $(m-n+8)t=m+n-5$.

因为存在过点 P 的无穷多对互相垂直的直线 l_1 和 l_2，所以关于 t 的方程有无穷多解，

则 $\begin{cases}2-m-n=0,\\ m-n-3=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m-n+8=0,\\ m+n-5=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m_1=\frac{5}{2},\\ n_1=-\frac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m_2=-\frac{3}{2},\\ n_2=\frac{13}{2},\end{cases}$

所以点 P 的坐标为 $\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{3}{2},\frac{13}{2}\right)$.



质量评估(三)

1.D **解析**：$3x^2-y^2=9$ 化为标准方程为 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$，

所以 $a^2=3$，$b^2=9$.

因为 $c^2=a^2+b^2=12$，所以 $c=2\sqrt{3}$，所以 $2c=4\sqrt{3}$.

2.A **解析**：由题意知抛物线 $y^2=-4x$ 的焦点为 $(-1,0)$，所以 $c=1$.

又离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以 $a=2$，所以 $b=\sqrt{3}$，

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

3.B **解析**：由题意得 $F(1,0)$，则 $|AF|=|BF|=2$，

即点 A 到准线 $x=-1$ 的距离为 2，所以点 A 的横坐标为 $-1+2=1$.

不妨设点 A 在 x 轴上方，代入得 $A(1,2)$，

所以 $|AB|=\sqrt{(3-1)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{2}$. 故选 B.

4.A **解析**：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $P(2,1)$ 是线段 AB 的中点，得 $x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=2$，将 A,B 代入双曲线方程得 $\begin{cases}x_1^2-\frac{y_1^2}{3}=1,\\ x_2^2-\frac{y_2^2}{3}=1,\end{cases}$

两式作差，得直线 l 的斜率为 $k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{3(x_1+x_2)}{y_1+y_2}=\dfrac{3\times4}{2}=6$.

又直线 l 过点 $P(2,1)$，所以直线 l 的方程为 $6x-y-11=0$.

经检验，此时直线 l 与双曲线有两个交点，满足题意.

5.A　**解析**：设点 $M(x_0,y_0)$，$y_0>0$，则 $P(x_0,2y_0)$.

又点 P 在曲线 C 上，

所以 $x_0^2+4y_0^2=16(y_0>0)$，即 $\dfrac{x_0^2}{16}+\dfrac{y_0^2}{4}=1(y_0>0)$，

故点 M 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1(y>0)$.故选 A.

6.C　**解析**：设 $F_1(0,-4)$，$F_2(0,4)$，$P(-6,4)$，

则 $|F_1F_2|=2c=8$，$|PF_1|=\sqrt{(-6-0)^2+(4+4)^2}=10$，$|PF_2|=\sqrt{(-6-0)^2+(4-4)^2}=6$，

则 $2a=|PF_1|-|PF_2|=10-6=4$，所以 $e=\dfrac{c}{a}=2$.

故选 C.

7.D　**解析**：因为椭圆的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$c^2=\dfrac{3}{4}a^2=a^2-b^2$，

所以 $b^2=\dfrac{1}{4}a^2$，即 $a^2=4b^2$.

双曲线的渐近线方程为 $y=\pm x$，

代入椭圆方程得 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$，即 $\dfrac{x^2}{4b^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=\dfrac{5x^2}{4b^2}=1$，

所以 $x^2=\dfrac{4}{5}b^2$，$x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}b$，$y^2=\dfrac{4}{5}b^2$，$y=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}b$，则在第一象限内双曲线的渐近线与椭圆 C 的交点坐标为 $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}b,\dfrac{2}{\sqrt{5}}b\right)$，所以四边形的面积为 $4\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}b\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}b=\dfrac{16}{5}b^2=16$，

解得 $b^2=5$，$a^2=4b^2=20$，

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

8.B　**解析**：因为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，所以双曲线的渐近线方程是 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$.

直线 $x=a$ 与双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线分别交于 D，E 两点，

不妨设 D 在第一象限，E 在第四象限.

由 $\begin{cases}x=a,\\y=\dfrac{b}{a}x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=a,\\y=b.\end{cases}$ 故 $D(a,b)$.

由 $\begin{cases}x=a,\\y=-\dfrac{b}{a}x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=a,\\y=-b.\end{cases}$ 故 $E(a,-b)$.

所以 $|ED|=2b$，

所以 $\triangle ODE$ 的面积为 $S_{\triangle ODE}=\dfrac{1}{2}\times a\times2b=ab=8$.

因为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，所以其焦距为 $2c=2\sqrt{a^2+b^2}\geqslant2\sqrt{2ab}=2\sqrt{16}=8$，当且仅当 $a=b=2\sqrt{2}$ 时，等号成立.

所以 C 的焦距的最小值为 8.

9.BC　**解析**：椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的长半轴长 $a=2$，短半轴长 $b=\sqrt{3}$，半焦距 $c=\sqrt{a^2-b^2}=1$.

对于 A，$|PF_1|+|PF_2|=2a=4$，A 错误；

对于 B，$|PF_1||PF_2|\leqslant\left(\dfrac{|PF_1|+|PF_2|}{2}\right)^2=4$，当且仅当 $|PF_1|=|PF_2|=2$ 时，等号成立，B 正确；

对于 C，$|PF_1|_{\max}=a+c=3$，C 正确；

对于 D，$\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}=\dfrac{(|PF_1|+|PF_2|)^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}-1$

$=\dfrac{(2a)^2-(2c)^2}{2|PF_1||PF_2|}-1=\dfrac{6}{|PF_1||PF_2|}-1\geqslant\dfrac{6}{4}-1=\dfrac{1}{2}$，

当且仅当 $|PF_1|=|PF_2|=2$ 时，等号成立，D 错误.

10.ABD　**解析**：A 选项，抛物线 $y^2=4x$ 的准线方程为 $x=-1$，

$\odot A$ 的圆心 $A(0,4)$ 到直线 $x=-1$ 的距离为 1，等于圆的半径，

故准线 l 与 $\odot A$ 相切，A 选项正确.

B 选项，当 P，A，B 三点共线时，即 $PA\perp l$，则 $y_P=4$，

由 $y_P^2=4x_P$，得 $x_P=4$，故 $P(4,4)$，

此时 $|PA|=4$，切线长 $|PQ|=\sqrt{|PA|^2-r^2}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$，B 选项正确.

C 选项，当 $|PB|=2$ 时，$x_P=1$，此时 $y_P^2=4x_P=4$，则 $y_P=\pm2$，故 $P(1,2)$ 或 $P(1,-2)$，

当 $P(1,2)$ 时，$B(-1,2)$，又 $A(0,4)$，所以 $k_{PA}=\dfrac{4-2}{0-1}=-2$，$k_{AB}=\dfrac{4-2}{0-(-1)}=2$，

不满足 $k_{PA}k_{AB}=-1$；

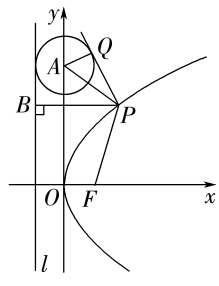
当 $P(1,-2)$ 时，$B(-1,-2)$，又 $A(0,4)$，所以 $k_{PA}=\dfrac{4-(-2)}{0-1}=-6$，$k_{AB}=\dfrac{4-(-2)}{0-(-1)}=6$，

不满足 $k_{PA}k_{AB}=-1$，

于是 $PA\perp AB$ 不成立，C 选项错误.

D 选项，（方法一：利用抛物线定义转化）

如图，根据抛物线的定义，可得 $|PB|=|PF|$，



于是$|PA|=|PB|$时点P的存在性问题转化成$|PA|=|PF|$时点P的存在性问题.

因为$A(0,4)$,$F(1,0)$,AF的中点为$\left(\frac{1}{2},2\right)$,所以线段$AF$中垂线的斜率为$-\frac{1}{k_{AF}}=\frac{1}{4}$,

线段AF的中垂线方程为$y=\frac{1}{4}x+\frac{15}{8}$.与抛物线方程$y^2=4x$联立消去$x$,可得$y^2-16y+30=0$,

$\Delta=16^2-4\times30=136>0$,所以$AF$的中垂线和抛物线有两个交点,

即存在两个点P,使得$|PA|=|PF|$,D选项正确.

(方法二:设点直接求解)

设$P\left(\frac{t^2}{4},t\right)$,由$PB\perp l$,可得$B(-1,t)$,又$A(0,4)$,$|PA|=|PB|$,

所以根据两点间的距离公式,得$\sqrt{\frac{t^4}{16}+(t-4)^2}=\frac{t^2}{4}+1$,整理得$t^2-16t+30=0$,

$\Delta=16^2-4\times30=136>0$,则关于$t$的方程有两个不相等的解,

即存在两个这样的点P,使得$|PA|=|PB|$,D选项正确.

故选ABD.

11.ABC　**解析**:由题意可知,椭圆的半焦距$c=2$,短半轴长$b=2$,得长半轴长$a=2\sqrt{2}$,则椭圆的长轴长为$2a=4\sqrt{2}$,故A正确;

因为$2\leqslant|OA|\leqslant2\sqrt{2}$,$|OB|=2$,所以$|AB|=|OA|+|OB|\in[4,2+2\sqrt{2}]$,故B正确;

因为点F,G是椭圆的两个焦点,所以$\triangle AFG$的周长为$|FG|+|AF|+|AG|=4+2a=4+4\sqrt{2}$,故C正确;

由题意知$|MF|<|MG|$,在$\triangle MFG$中,

$$\cos\angle FMG=\frac{|MF|^2+|MG|^2-|FG|^2}{2|MF|\cdot|MG|}=\frac{\frac{1}{2}[(|MF|+|MG|)^2+(|MF|-|MG|)^2]-|FG|^2}{2|MF|\cdot|MG|}>\frac{\frac{1}{2}\times(4\sqrt{2})^2-4^2}{2|MF|\cdot|MG|}=0,$$

所以$\angle FMG$不可能为直角,所以在x轴上方的半椭圆上不存在点M,使得$\angle FMG=\frac{\pi}{2}$,故D错误.

故选ABC.

12.$\frac{3}{2}$　**解析**:由题可知A,B,F_2三点横坐标相等,设A在第一象限,将$x=c$代入$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,

得$y=\pm\frac{b^2}{a}$,即$A\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$,$B\left(c,-\frac{b^2}{a}\right)$,所以$|AB|=\frac{2b^2}{a}=10$,$|F_2A|=\frac{b^2}{a}=5$.

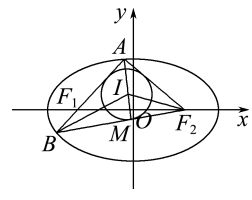
由$|F_1A|-|F_2A|=2a$,得$|F_1A|=|F_2A|+2a=5+2a=13$,解得$a=4$.代入$\frac{b^2}{a}=5$,得$b^2=20$,

则$c^2=a^2+b^2=36$,即$c=6$,所以$e=\frac{c}{a}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$.

13.$\frac{\sqrt{5}}{5}$　**解析**:因为$3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IF_2}=\mathbf{0}$,

所以$\frac{3}{8}\overrightarrow{IB}+\frac{5}{8}\overrightarrow{IF_2}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{IA}$.

如图,在BF_2上取一点M,使得$|BM|:|MF_2|=5:3$,



连接IM,则$\overrightarrow{IM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{IA}$,

则点I为AM上靠近点M的三等分点,

所以$S_{\triangle IAF_2}:S_{\triangle IBF_2}:S_{\triangle IBA}=3:4:5$,

所以$|AF_2|:|BF_2|:|AB|=3:4:5$.设$|AF_2|=3x$,则$|BF_2|=4x$,$|AB|=5x$,

由椭圆定义可知$|AF_2|+|BF_2|+|AB|=4a$,即$12x=4a$,

所以$x=\frac{a}{3}$,

所以$|AF_2|=a$,$|BF_2|=\frac{4}{3}a$,$|AB|=\frac{5}{3}a$,$|AF_1|=a$,

故点A与上顶点重合.

在$\triangle ABF_2$中,由余弦定理的推论,得$\cos\angle BAF_2=\frac{|AB|^2+|F_2A|^2-|F_2B|^2}{2|AB|\cdot|F_2A|}=\frac{\frac{25}{9}a^2+a^2-\frac{16}{9}a^2}{2\times\frac{5}{3}a^2}=\frac{3}{5}$,

在$\triangle AF_1F_2$中,由余弦定理的推论,得$\cos\angle BAF_2=\frac{a^2+a^2-4c^2}{2a^2}=\frac{3}{5}$,解得$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

所以椭圆的离心率是$\frac{\sqrt{5}}{5}$.

14.6　3　**解析**:因为$\triangle ABF_2$的内切圆的面积为π,

所以$\triangle ABF_2$内切圆的半径$r=1$,

所以$\triangle ABF_2$的面积$S=\frac{1}{2}\times1\times(|AB|+|AF_2|+|BF_2|)=2a=6$.

又$\triangle ABF_2$的面积$S=\frac{1}{2}|y_1-y_2|\times2c=\frac{1}{2}|y_1-y_2|\times2\times2=6$,

所以$|y_1-y_2|=3$.

15.解:由题意设双曲线C的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$.

由椭圆$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$,

求得两焦点分别为$(-2,0)$,$(2,0)$,

所以对于双曲线C可得$c=2$.

又$y=\sqrt{3}x$为双曲线C的一条渐近线,

所以$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，解得$a^2=1,b^2=3$，

所以双曲线C的方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

16.解：(1)由抛物线方程为$y^2=4x$，可得$p=2$且焦点$F(1,0)$，设点$M(x_1,y_1)$.

因为$|MF|=6$，由抛物线的定义，可得$|MF|=x_1+\frac{p}{2}=x_1+1=6$，

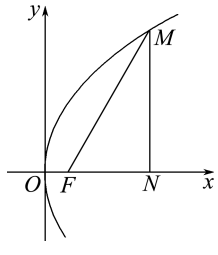
解得$x_1=5$，即点M的横坐标为5.

(2)由(1)知$x_1=5$，代入抛物线方程，可得$y_1^2=20$，解得$y_1=\pm2\sqrt{5}$.

又因为$MN\perp x$轴于点N(如图)，且$F(1,0)$，

所以$N(5,0)$，

所以$S_{\triangle MNF}=\frac{1}{2}|NF|\cdot|y_1|=\frac{1}{2}\times(5-1)\times2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$.



17.解：(1)由题意可知$b=\sqrt{2},c=\sqrt{2}$，

所以$a=\sqrt{b^2+c^2}=2$，

故椭圆E的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，直线AB的方程为$y=kx+t(k\neq0)$，

由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=kx+t,\end{cases}$得$(1+2k^2)x^2+4ktx+2t^2-4=0$.

所以$\Delta=(4kt)^2-4(1+2k^2)(2t^2-4)>0$，即$4k^2-t^2+2>0$.

由根与系数的关系得$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{4kt}{1+2k^2},\\ x_1x_2=\frac{2t^2-4}{1+2k^2},\end{cases}$ ①

因为直线BD的斜率为0，所以由椭圆的对称性可得$D(-x_2,y_2)$.

因为A,C,D三点共线，所以$k_{AC}=k_{CD}$，

所以$\frac{y_1-1}{x_1}=\frac{y_2-1}{-x_2}$，即$x_1y_2+x_2y_1-(x_1+x_2)=0$.

由$y_1=kx_1+t,y_2=kx_2+t$，得$x_1(kx_2+t)+x_2(kx_1+t)-(x_1+x_2)=0$，

整理得$2kx_1x_2+(t-1)(x_1+x_2)=0$， ②

所以$2k\cdot\frac{2t^2-4}{1+2k^2}+(t-1)\cdot\frac{-4kt}{1+2k^2}=0$，

解得$t=2$.

18.(1)**解**：因为$||PF_1|-|PF_2||=2$，由双曲线的定义知$2a=2$，所以$a=1$.

又因为$e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$，所以$c=\sqrt{3}$，所以$b^2=c^2-a^2=2$，

所以双曲线C的标准方程为$x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

(2)**证明**：设$P(x_0,y_0)$，则$x_0^2-\frac{y_0^2}{2}=1$.

因为$A(-1,0),B(1,0)$，

所以$k_1=\frac{y_0}{x_0+1},k_2=\frac{y_0}{x_0-1}$，

所以$k_1k_2=\frac{y_0}{x_0+1}\cdot\frac{y_0}{x_0-1}=\frac{y_0^2}{x_0^2-1}=\frac{y_0^2}{\left(1+\frac{y_0^2}{2}\right)-1}=2$.

故k_1k_2为定值2.

19.解：(1)根据题意，直线l_1,l_2的斜率均存在且不为0，

则直线l_1,l_2的方程分别为$y=kx+2,y=-\frac{1}{k}x+2$.

由$\begin{cases}y=kx+2,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1.\end{cases}$消去$y$，整理，可得$(4k^2+1)x^2+16kx+12=0$.

由$\Delta=(16k)^2-4\times12(4k^2+1)>0$，得$4k^2>3$，解得$k<-\frac{\sqrt{3}}{2}$或$k>\frac{\sqrt{3}}{2}$.

同理，$4\left(-\frac{1}{k}\right)^2>3$，解得$-\frac{2\sqrt{3}}{3}<k<\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

所以k的取值范围为$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

(2)设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

由(1)知，$(4k^2+1)x^2+16kx+12=0$，

所以$x_1+x_2=-\frac{16k}{4k^2+1}$，

则$x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{8k}{4k^2+1}$，

所以$y_M=kx_M+2=-\frac{8k^2}{4k^2+1}+2=\frac{2}{4k^2+1}$，所以$M\left(-\frac{8k}{4k^2+1},\frac{2}{4k^2+1}\right)$.

同理，$N\left(\frac{8k}{k^2+4},\frac{2k^2}{k^2+4}\right)$，

则直线MN的方程为$y-\frac{2}{4k^2+1}=\frac{\frac{2k^2}{k^2+4}-\frac{2}{4k^2+1}}{\frac{8k}{k^2+4}+\frac{8k}{4k^2+1}}\left(x+\frac{8k}{4k^2+1}\right)$，

化简、整理，得$y=\frac{k^2-1}{5k}x+\frac{2}{5}$，

因此直线MN经过一个定点，该定点的坐标为$\left(0,\frac{2}{5}\right)$.

综合质量评估

1.C　**解析**：设AB的中点为M，则M的坐标为$(1,2)$，又斜率$k=-\sqrt{3}$，所以直线的方程为$y-2=-\sqrt{3}(x-1)$，即$\sqrt{3}x+y-2-\sqrt{3}=0$.

2.A　**解析**：设椭圆方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则$\frac{2a}{2b}=2$且$2c=4\sqrt{3}$，得$a=4,b=2$，故椭圆方程为$\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1$.

3.B　**解析**：连接 ON，

因为 $\overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}$，点 N 为 BC 的中点，则 $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，

于是，$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

4.A　**解析**：设椭圆的焦距为 $2c$，长轴长为 $2a$，则由已知可得 $\rho=a+c-r$，$\mu=a-c-r$，两式相加可得 $\rho+\mu=2a-2r$，两式相减可得 $\rho-\mu=2c$，

则 $a=\frac{\rho+\mu+2r}{2}$，$c=\frac{\rho-\mu}{2}$，所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\rho-\mu}{\rho+\mu+2r}$.

5.C　**解析**：圆 C：$(x-1)^2+(y-2)^2=1$，圆心 $C(1,2)$，半径为 $r=1$，

则圆心 $C(1,2)$ 关于 x 轴的对称点为 $C_1(1,-2)$，

则 $(|PC_1|+|PN|)_{\min}=|NC_1|=\sqrt{(3-1)^2+(4+2)^2}=2\sqrt{10}$，

当且仅当 P，N，C_1 三点共线时取得最小值.

结合图象(图略)可知 $(|PM|+|PN|)_{\min}=|NC_1|-r=2\sqrt{10}-1$.

故选 C.

6.C　**解析**：由已知可得交点 $A(3,4)$ 到原点 O 的距离为圆的半径，

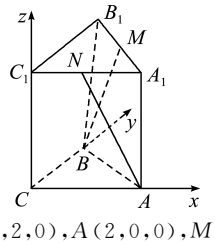
则半径 $r=\sqrt{3^2+4^2}=5$，故 $c=5$，

所以 $a^2+b^2=25$. 又双曲线的一条渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 过点 $A(3,4)$，即 $3b=4a$.

由 $\begin{cases}a^2+b^2=25,\\3b=4a,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\b=4.\end{cases}$

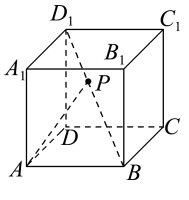
所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. 故选 C.

7.C　**解析**：由题意建立如图所示的空间直角坐标系 $Cxyz$，



设 $BC=2$，则 $B(0,2,0)$，$A(2,0,0)$，$M(1,1,2)$，$N(1,0,2)$，所以 $\overrightarrow{BM}=(1,-1,2)$，$\overrightarrow{AN}=(-1,0,2)$. 设 BM 与 AN 所成的角为 θ，所以 $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AN}|}{|\overrightarrow{BM}||\overrightarrow{AN}|}=\frac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{30}}{10}$.

8.C　**解析**：如图，



由题意，设 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BD_1}$，其中 $\lambda\in[0,1]$，$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP})=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BD_1})=\overrightarrow{AB}^2+\lambda\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD_1}=1+\sqrt{3}\lambda\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1-\lambda\in[0,1]$. 因此 $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的取值范围是 $[0,1]$.

9.CD　**解析**：对于 A，$|\overrightarrow{PA}|-|\overrightarrow{PB}|=k$，当 $k=0$ 时，动点 P 的运动轨迹为线段 AB 的垂直平分线，而非双曲线的一支，故 A 错误；

对于 B，由 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，可得 P 为弦 AB 的中点，不妨设在圆 C：$x^2+y^2=1$ 中，定点 $A(1,0)$，动点 $B(x_1,y_1)$，则 $x_1^2+y_1^2=1$(*)，

设 $P(x,y)$，则 $\begin{cases}x=\frac{1+x_1}{2},\\y=\frac{y_1}{2},\end{cases}$ 得到 $\begin{cases}x_1=2x-1,\\y_1=2y,\end{cases}$

代入(*)，可得 $(2x-1)^2+(2y)^2=1$，即 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$，

故动点 P 的轨迹方程是 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}(x\neq1)$，即动点 P 的轨迹不是椭圆，故 B 错误；

对于 C，方程 $2x^2-5x+2=0$ 的两根是 2 和 $\frac{1}{2}$，因为椭圆的离心率范围是 $(0,1)$，

双曲线的离心率范围是 $(1,+\infty)$，故 C 正确；

对于 D，由双曲线 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$，可得其焦点在 x 轴上，$c=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$，故其焦点为 $(\pm\sqrt{34},0)$，

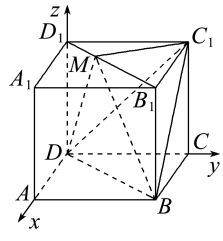
而由椭圆 $\frac{x^2}{35}+y^2=1$，可得其焦点在 x 轴上，$c=\sqrt{35-1}=\sqrt{34}$，故其焦点为 $(\pm\sqrt{34},0)$，故 D 正确.

10.ABC　**解析**：因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=0$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP}=0$，所以 $AB\perp AP$，$AD\perp AP$，故 A，B 正确.

又 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 不平行，所以 $\overrightarrow{AP}$ 是平面 $ABCD$ 的一个法向量，故 C 正确.

因为 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AP\perp BD$，故 D 不正确.

11.AB　**解析**：如图，以 D 为坐标原点，建立空间直角坐标系，



则 $D(0,0,0)$，$B(1,1,0)$，$D_1(0,0,1)$，$C_1(0,1,1)$，$C(0,1,0)$.

对于选项 A，$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{DD_1}=(0,0,1)$，设平面 BB_1D_1D 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=x+y=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DD_1}=z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，则 $y=-1$，$z=0$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,-1,0)$ 为平面 BB_1D_1D 的一个法向量，

当点 M 为 B_1D_1 中点时，则 $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$，可得$\overrightarrow{C_1M}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$，

因为 $\boldsymbol{n}=2\overrightarrow{C_1M}$，即 $\boldsymbol{n}$ 与$\overrightarrow{C_1M}$共线，所以 $C_1M\perp$ 平面 BB_1D_1D，故 A 正确；

对于选项 B，由选项 A 可知点 C_1 到平面 BB_1D_1D 的距离为 $\frac{1}{2}|\boldsymbol{n}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以三棱锥 C_1-BDM 的体积 $V_{C_1\text{-}BDM}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times1=\frac{1}{6}$，为定值，故 B 正确；

对于选项 C，当点 M 为 B_1D_1 中点时，则 $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$，可得$\overrightarrow{DM}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$，$\overrightarrow{CB}=(1,0,0)$，因为 $\cos\langle\overrightarrow{DM},\overrightarrow{CB}\rangle=\frac{\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{DM}||\overrightarrow{CB}|}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}\times1}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，所以直线 DM 与直线 BC 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{6}$，故 C 错误；

对于选项 D，设 $M(a,a,1)$，$a\in[0,1]$，则$\overrightarrow{BM}=(a-1,a-1,1)$，$\overrightarrow{BC_1}=(-1,0,1)$，

$\overrightarrow{BM}$在$\overrightarrow{BC_1}$上的投影为$\frac{\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{BC_1}|}=\frac{2-a}{\sqrt{2}}$，且$\overrightarrow{BM}^2=2(a-1)^2+1$，

则点 M 到线段 BC_1 的距离为$\sqrt{2(a-1)^2+1-\left(\frac{2-a}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}\left(a-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}}$，

所以当 $a=\frac{2}{3}$ 时，点 M 到线段 BC_1 距离取到最小值$\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 D 错误.

故选 AB.

12. 锐角　**解析**：因为$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}^2>0$，

所以$\angle CBD$ 为锐角.

同理可证$\angle BCD$，$\angle BDC$ 均为锐角，

故$\triangle BCD$ 是锐角三角形.

13. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　**解析**：双曲线 $y^2-\frac{x^2}{m^2}=1(m>0)$的渐近线为 $y=\pm\frac{x}{m}$，即 $x\pm my=0$，不妨取 $x+my=0$.

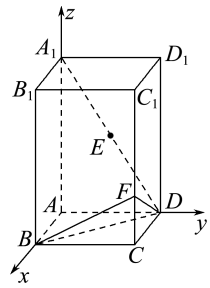
圆 $x^2+y^2-4y+3=0$，即 $x^2+(y-2)^2=1$，所以圆心为$(0,2)$，半径 $r=1$.

依题意圆心$(0,2)$到渐近线 $x+my=0$ 的距离 $d=\frac{|2m|}{\sqrt{1+m^2}}=1$，

解得 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$或 $m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$(舍去).

故答案为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

14. $\frac{4\sqrt{17}}{17}$　**解析**：以 A 为坐标原点，AB，AD，AA_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $B(1,0,0)$，$D(0,1,0)$，$A_1(0,0,2)$，$E\left(0,\frac{1}{2},1\right)$，$F\left(1,1,\frac{2}{3}\right)$，

所以 $\overrightarrow{BD}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{BF}=\left(0,1,\frac{2}{3}\right)$，$\overrightarrow{BE}=\left(-1,\frac{1}{2},1\right)$.

设平面 BDF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x+y=0,\\ y+\frac{2}{3}z=0.\end{cases}$

令 $z=-3$，则 $x=2$，$y=2$，所以 $\boldsymbol{n}=(2,2,-3)$为平面 BDF 的一个法向量，

所以点 E 到平面 BDF 的距离 $d=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{4}{\sqrt{17}}=\frac{4\sqrt{17}}{17}$.

15. **解**：(1)设圆心 $C(a,-2a)$，

则 $\sqrt{(a-2)^2+(-2a+1)^2}=\frac{|a-2a-1|}{\sqrt{2}}$，

化简，得 $a^2-2a+1=0$，解得 $a=1$.

所以圆心为 $C(1,-2)$，

半径 $r=|AC|=\sqrt{(1-2)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{2}$.

所以圆 C 的方程为$(x-1)^2+(y+2)^2=2$.

(2)①当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=0$，此时直线 l 被圆 C 截得的弦长为 2，满足条件.

②当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=kx$，由题意得$\frac{|k+2|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得 $k=-\frac{3}{4}$，

所以直线 l 的方程为 $y=-\frac{3}{4}x$，

即 $3x+4y=0$.

综上所述，直线 l 的方程为 $x=0$ 或 $3x+4y=0$.

16. **解**：(1)由一个焦点为$(-2\sqrt{5},0)$，可知 $c=2\sqrt{5}$，

又一条渐近线方程为 $2x-y=0$，所以$\frac{b}{a}=2$.

由 $c^2=a^2+b^2$，可得 $20=a^2+4a^2$，解得 $a^2=4$，$b^2=16$，

故双曲线 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$.

(2)设直线 l 的斜率为 k，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，线段 AB 中点的坐标为$(x_0,4)$，

则$\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}-\frac{y_1^2}{16}=1,\\ \frac{x_2^2}{4}-\frac{y_2^2}{16}=1,\end{cases}$

两式相减得$16(x_2^2-x_1^2)=4(y_2^2-y_1^2)$,

即$16(x_2-x_1)(x_2+x_1)=4(y_2-y_1)(y_2+y_1)$,

化简得$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4(x_2+x_1)}{y_2+y_1}=\frac{4x_0}{4}=x_0$,又$k=\tan\frac{3\pi}{4}=-1$,所以$x_0=-1$,

所以AB中点的坐标为$(-1,4)$.

所以直线l的方程为$y-4=-(x+1)$,即$x+y-3=0$.

由$x+y-3=0$,$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$,得$3x^2+6x-25=0$,$\Delta=36+4\times3\times25=336>0$,

则$x_1+x_2=-2$,$x_1x_2=-\frac{25}{3}$,

$|AB|=\sqrt{2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{2}\,\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\times\sqrt{4+4\times\frac{25}{3}}=\frac{4\sqrt{42}}{3}$.

17.(1)**解**:设$M(x,y)$,由题意得$\frac{|MO|}{|MA|}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x+3)^2+y^2}}=\frac{1}{2}$,化简整理得$(x-1)^2+y^2=4$①,

故曲线C是以$(1,0)$为圆心,2为半径的圆.

(2)①**证明**:如图,因为$PQ\perp QB$,$PR\perp RB$,所以点Q,R在以PB为直径的圆C_1上,

可求得圆C_1的方程为$(x+1)^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2=\frac{16+p^2}{4}$②,

所以直线QR为圆C_1与圆C的公共弦所在的直线.

由①-②,整理得$4x-py=0$,即直线QR的方程为$4x-py=0$,

故直线QR恒过定点$(0,0)$.

②**解**:当$p=0$时,点N,O重合,

当$p\neq0$时,因为$NB\perp QR$,点N,O在直线QR上,所以$NB\perp NO$.

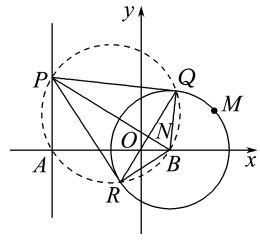
综上,点N在以BO为直径的圆上,圆的方程为$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$.

因为$S_{\triangle ABN}=\frac{1}{2}\times|AB|\times|y_N|=2|y_N|$,又$|y_N|\leqslant\frac{1}{2}$,

所以当$|y_N|=\frac{1}{2}$时,$\triangle ABN$的面积最大,此时$N\left(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$.

又由P,N,B三点共线,得$k_{PB}=k_{NB}$,即$-\frac{p}{4}=\pm1$,所以$p=\pm4$,

因此存在点P,使$\triangle ABN$的面积最大,此时点P的坐标为$(-3,\pm4)$.

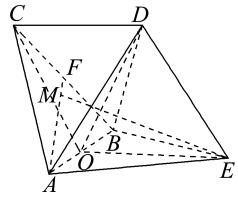


18.(1)**证明**:因为$CA=CB=4$,$CD=2\sqrt{3}$,$\cos\angle ACD=\cos\angle BCD=\frac{\sqrt{3}}{4}$,

所以由余弦定理,得$AD=\sqrt{AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cos\angle ACD}=4$.

同理,可得$BD=4$.

如图,取线段AB的中点O,连接CO,DO,OE,



所以$AB\perp CO$,$AB\perp DO$,$AB\perp OE$,所以$CO=DO=CD=2\sqrt{3}$,

所以$\angle OCD=\angle COD=\angle CDO=\frac{\pi}{3}$,$\angle DOE$为二面角$D$-$AB$-$E$的平面角,即$\angle DOE=\frac{\pi}{3}$.

易知点O,E,D,C共面,所以$CD/\!/OE$.

又因为$DO=DE=OE=2\sqrt{3}$,所以$OE=CD$,

所以四边形$COED$是平行四边形,

所以$DE/\!/CO$.

又因为$DE\not\subset$平面ABC,$CO\subset$平面ABC,

所以$DE/\!/$平面ABC.

(2)**解**:取线段CD的中点P,连接PO,

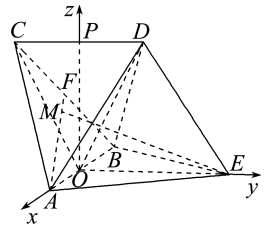
所以$PO\perp CD$,$PO\perp OE$.

又$AB\perp DO$,$AB\perp OE$,$OD\cap OE=O$,OD,$OE\subset$平面$OEDC$,

所以$AB\perp$平面$OEDC$.

所以OP,OA,OE两两垂直,

以点O为坐标原点,以$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OE}$,$\overrightarrow{OP}$方向分别为x轴、y轴、z轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系$Oxyz$,



所以$A(2,0,0)$,$B(-2,0,0)$,$C(0,-\sqrt{3},3)$,$D(0,\sqrt{3},3)$,$E(0,2\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{OA}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{OC}=(0,-\sqrt{3},3)$.

设平面ABC的法向量为$\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

所以$\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\boldsymbol{m}=2x_1=0,\\ \overrightarrow{OC}\cdot\boldsymbol{m}=-\sqrt{3}y_1+3z_1=0.\end{cases}$

令 $y_1=\sqrt{3}$，则 $x_1=0$，$z_1=1$，所以 $\boldsymbol{m}=(0,\sqrt{3},1)$ 为平面 ABC 的一个法向量.

由题意可知，$F\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$，所以 $\overrightarrow{AF}=\left(-3,-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$，

设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AF}=\left(-3\lambda,-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\frac{3}{2}\lambda\right)$，$\lambda\in(0,1)$，

因为 $\overrightarrow{AB}=(-4,0,0)$，$\overrightarrow{BE}=(2,2\sqrt{3},0)$，

所以 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\left(-3\lambda+4,-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\frac{3}{2}\lambda\right)$.

设平面 BEM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}=2x_2+2\sqrt{3}y_2=0,\\ \overrightarrow{BM}\cdot\boldsymbol{n}=(-3\lambda+4)x_2-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda y_2+\frac{3}{2}\lambda z_2=0.\end{cases}$

令 $x_2=\sqrt{3}$，则 $y_2=-1$，$z_2=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(5-\frac{8}{\lambda}\right)$，

所以 $\boldsymbol{n}=\left(\sqrt{3},-1,\frac{\sqrt{3}}{3}\left(5-\frac{8}{\lambda}\right)\right)$ 为平面 BEM 的一个法向量.

设平面 ABC 与平面 BEM 所成角为 θ，

则 $\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\left|-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\left(5-\frac{8}{\lambda}\right)\right|}{2\sqrt{4+\frac{1}{3}\left(5-\frac{8}{\lambda}\right)^2}}$.

令 $t=-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\left(5-\frac{8}{\lambda}\right)\in(-\infty,-2\sqrt{3})$，

则 $\cos\theta=\frac{|t|}{2\sqrt{4+(t+\sqrt{3})^2}}=\frac{1}{2\sqrt{7\left(\frac{1}{t}+\frac{\sqrt{3}}{7}\right)^2+\frac{4}{7}}}\leqslant\frac{\sqrt{7}}{4}$，当且仅当 $\frac{1}{t}=-\frac{\sqrt{3}}{7}$，即 $\lambda=\frac{|AM|}{|AF|}=\frac{8}{9}$ 时等号成立，

所以平面 ABC 与平面 BEM 夹角的余弦的最大值为 $\frac{\sqrt{7}}{4}$，此时 $\frac{|AM|}{|AF|}=\frac{8}{9}$.

19.解：(1)因为椭圆的离心率 $e=\frac{1}{2}$，

所以 $a=2c$，$b=\sqrt{3}c$，其中 c 为半焦距，

所以 $A(-2c,0)$，$B(0,-\sqrt{3}c)$，$C\left(0,-\frac{\sqrt{3}c}{2}\right)$，

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}c\times2c=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，解得 $c=\sqrt{3}$，

所以 $a=2\sqrt{3}$，$b=3$，

故椭圆的方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$.

(2)若过点 $\left(0,-\frac{3}{2}\right)$ 的动直线的斜率存在，

则可设该直线方程为 $y=kx-\frac{3}{2}$.

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$T(0,t)$，

则 $\begin{cases}\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1,\\ y=kx-\frac{3}{2}.\end{cases}$

消去 y，可得 $(3+4k^2)x^2-12kx-27=0$，

故 $\Delta=144k^2+108(3+4k^2)>0$，且 $x_1+x_2=\frac{12k}{3+4k^2}$，

$x_1x_2=-\frac{27}{3+4k^2}$.

因为 $\overrightarrow{TP}=(x_1,y_1-t)$，$\overrightarrow{TQ}=(x_2,y_2-t)$，

所以 $\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}=x_1x_2+(y_1-t)(y_2-t)$

$=x_1x_2+\left(kx_1-\frac{3}{2}-t\right)\left(kx_2-\frac{3}{2}-t\right)$

$=(1+k^2)x_1x_2-k\left(\frac{3}{2}+t\right)(x_1+x_2)+\left(\frac{3}{2}+t\right)^2$

$=\frac{[(3+2t)^2-12t-45]k^2+3\left(\frac{3}{2}+t\right)^2-27}{3+4k^2}$.

因为 $\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}\leqslant0$ 恒成立，

所以 $\begin{cases}(3+2t)^2-12t-45\leqslant0,\\ 3\left(\frac{3}{2}+t\right)^2-27\leqslant0,\end{cases}$

解得 $-3\leqslant t\leqslant\frac{3}{2}$.

若过点 $\left(0,-\frac{3}{2}\right)$ 的动直线的斜率不存在，

则 $P(0,3)$，$Q(0,-3)$ 或 $P(0,-3)$，$Q(0,3)$，

要使 $\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}\leqslant0$ 恒成立，则 $-3\leqslant t\leqslant3$.

所以 $-3\leqslant t\leqslant\frac{3}{2}$.

综上所述，点 T 纵坐标的取值范围是 $\left[-3,\frac{3}{2}\right]$.