winshare文轩教育

四川教育出版社

教师用书 点金训练 数学 选择性必修第二册 配人教A版

点金训练

教师用书

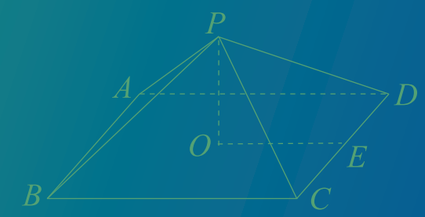
数学

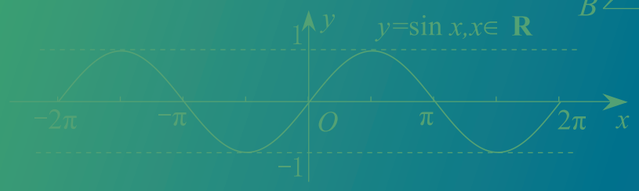
选择性必修第二册

配人教A版

《点金训练》编写组 编

DIANJIN XUNLIAN
SHUXUE
JIAOSHI YONGSHU





绿色印刷产品

扫码查看本书
配套资源包

赠 品

6662026025021

四川教育出版社

四川教育出版社

点金训练

教师用书

数学

选择性必修第二册

配人教A版

《点金训练》编写组　编

四川教育出版社

CONTENTS

目录

第四章 数列

○单元概览 …… 1

○探究构建 4.1 数列的概念 …… 2

第1课时 数列的概念 …… 2

第2课时 数列的递推公式及前 n 项和 …… 8

微专题培优(一) 由递推公式求数列通项公式的常见方法 …… 13

4.2 等差数列 …… 17

4.2.1 等差数列的概念 …… 17

第1课时 等差数列的概念 …… 17

第2课时 等差数列的性质及应用 …… 22

4.2.2 等差数列的前 n 项和公式 …… 28

第1课时 等差数列的前 n 项和 …… 28

第2课时 等差数列前 n 项和的应用 …… 33

4.3 等比数列 …… 40

4.3.1 等比数列的概念 …… 40

第1课时 等比数列的概念 …… 40

第2课时 等比数列的性质及应用 …… 46

4.3.2 等比数列的前 n 项和公式 …… 52

第1课时 等比数列的前 n 项和 …… 52

第2课时 等比数列前 n 项和的应用 …… 59

4.4* 数学归纳法 …… 65

微专题培优(二) 数列求和问题 …… 71

○迁移应用 类型一 数列与不等式交汇 …… 76

类型二 数列与函数的交汇 …… 77

○重构拓展 …… 78

质量评估(一) …… 79

第五章　一元函数的导数及其应用

○单元概览 …… 84

○探究构建　5.1　导数的概念及其意义 …… 85

5.1.1　变化率问题 …… 85

5.1.2　导数的概念及其几何意义 …… 90

第1课时　导数的概念 …… 90

第2课时　导数的几何意义 …… 95

5.2　导数的运算 …… 101

5.2.1　基本初等函数的导数 …… 101

5.2.2　导数的四则运算法则 …… 107

5.2.3　简单复合函数的导数 …… 112

微专题培优(三)　公切线问题 …… 118

5.3　导数在研究函数中的应用 …… 121

5.3.1　函数的单调性 …… 121

第1课时　函数的单调性 …… 121

第2课时　函数的单调性的应用 …… 127

5.3.2　函数的极值与最大(小)值 …… 133

第1课时　函数的极值 …… 133

第2课时　函数的最大(小)值 …… 141

第3课时　函数极值、最值的应用 …… 148

微专题培优(四)　利用导数研究不等式恒(能)成立问题 …… 157

微专题培优(五)　利用导数研究函数的零点问题 …… 160

○迁移应用　类型一　函数中的构造问题 …… 163

类型二　函数中的隐零点问题 …… 164

○重构拓展 …… 166

质量评估(二) …… 167

综合质量评估(一) …… 172

综合质量评估(二) …… 177

第四章 数列

单元概览

单元导航

数列是高中数学的重要研究对象，是刻画现实世界中一类具有递推规律的事物的数学模型，在数学领域有着广泛的应用.在整个中学数学教学内容中，数列是一个知识的汇合点，与很多知识都有着密切联系.以前学过的数、式、方程、函数、简易逻辑等知识在这一章均得到了较为充分的应用，而学习数列又为后续学习作了铺垫，具有承前启后的重要作用.

学习目标

1.理解数列的概念和基本形式，能够分清数列中的项数、首项、公差和公比等概念.

2.掌握数列的表示方法，包括图象法和通项公式法，并能够根据数列的表示方法求出数列的通项公式与前 n 项和公式.

3.能够根据实际生活中的问题抽象出数列模型，并运用所学知识解决实际问题，从而培养数学思维能力和创新能力，在学习数列的过程中体会数学的美妙和实际应用价值.

核心概念

数列是一种特殊的函数，以函数思想为核心，围绕递推规律展开.通过对数列的学习，可以更加深刻地理解函数，重点培养逻辑思维能力和数学抽象能力.通过对数列的学习，能够理解数列作为特殊函数的本质，提升运用函数思想解决实际问题的能力，发展数学建模素养，从而能够将实际问题转化为数学模型，并运用数列的相关知识分析和解决实际问题.

学法指导

1.学习数列的概念时，我们要结合生产生活中的实例，感受数列与周围事物的联系，感知数列的项的顺序性，并根据集合定义，明确数列的记法与集合的记法之间的区别，提升数学抽象的核心素养.

2.在等比数列的学习过程中，我们要采用类比的方法，分析等差数列与等比数列在定义、性质、公式、解题方法等方面的异同，培养类比推理能力.

★★★

探　究　构　建

4.1　数列的概念

第1课时　数列的概念

学习任务目标

1.理解数列的有关概念与数列的一般形式.
2.掌握数列的分类，了解数列的单调性.
3.理解数列的通项公式，并会用通项公式写出数列的任一项.
4.能根据数列的前几项写出数列的一个通项公式.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　数列的概念

数列	按照确定的顺序排列的一列数
项	数列中的每一个数叫做这个数列的项.数列的第一个位置上的数叫做这个数列的第1项，常用符号 a_1 表示，第二个位置上的数叫做这个数列的第2项，用 a_2 表示……第 n 个位置上的数叫做这个数列的第 n 项，用 a_n 表示.其中第1项也叫做首项
一般形式	$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，简记为 $\{a_n\}$

知识点二　数列的分类

分类标准	名称	含义
按项的个数	有穷数列	项数有限的数列
	无穷数列	项数无限的数列
单调性	递增数列	从第2项起，每一项都大于它的前一项的数列
	递减数列	从第2项起，每一项都小于它的前一项的数列
	常数列	各项都相等的数列

知识点三　数列与函数的关系

数列 $\{a_n\}$ 是从正整数集 $\mathbf{N}^*$（或它的有限子集 $\{1,2,\cdots,n\}$）到实数集 $\mathbf{R}$ 的函数，其自变量是序号 n，对应的函数值是数列的第 n 项 a_n，记为 $a_n=f(n)$.另一方面，对于函数 $y=f(x)$，如果 $f(n)(n\in\mathbf{N}^*)$ 有意义，那么 $f(1),f(2),\cdots,f(n),\cdots$ 构成了一个数列 $\{f(n)\}$.

知识点四　数列的通项公式

如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与它的序号 n 之间的对应关系可以用一个式子来表示，那么这个式子叫做这个数列的通项公式.通项公式就是数列的函数解析式，根据通项公式可以写出数列的各项.

知识点五　数列的简单表示方法

(1)通项公式法：如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与它的序号 n 之间的对应关系可以用一个式子来表示，那么这个式子叫做这个数列的通项公式.

(2)图象法：数列的图象是以 $(n,f(n))$ 为坐标的一系列孤立的点（无限或有限个）.

(3)列表法：列表法就是列出表格来表示数列的序号与项的关系的方法，形式如下表.

序号	1	2	3	4	…	n	…
项	a_1	a_2	a_3	a_4	…	a_n	…

【概念辨析】

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)数列中的项互换次序后还是原来的数列.　（　×　）

(2)数列可分为递增数列和递减数列两类.　（　×　）

(3)$\{a_n\}$ 与 a_n 的意义一样，都表示数列.　（　×　）

2.已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=(-1)^n\cdot(n^2-1)$，则 $a_6=$　（　　）

A.35　　B.−11　　C.−35　　D.11

A　**解析**：$a_6=(-1)^6\times(6^2-1)=35$.故选A.

3.请思考并回答下列问题：

(1)数列的记法和集合的记法有些相似，那么数列与集合的区别是什么？

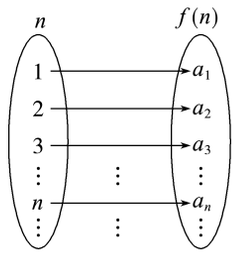
(2)数列可以用一群孤立的点表示吗？

(3)数列的通项公式 $a_n=f(n)$ 与函数解析式 $y=f(x)$ 有什么异同？

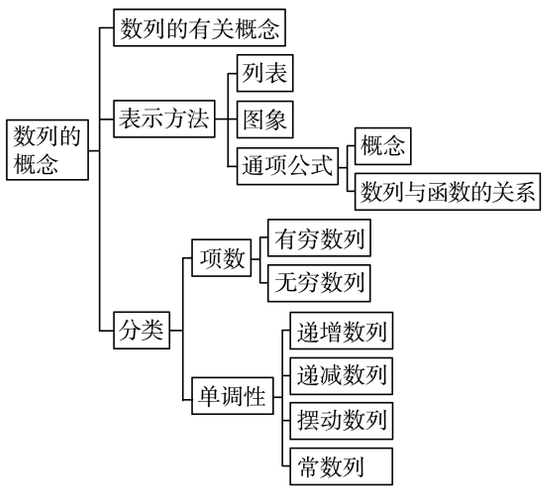
(1)**提示**：数列中的数讲究顺序，集合中的元素具有无序性；数列中可以出现相同的数，集合中的元素具有互异性；数列是离散的，而集合中的元素并不一定是离散的；数列本质上是函数，而集合不是函数.

(2)**提示**：可以.数列是特殊的函数，函数可用图象法表示，数列 $\{a_n\}$ 的图象由一群孤立的点 (n,a_n) $(n\in\mathbf{N}^*)$ 组成.

(3)**提示**：如图，数列 $\{a_n\}$ 可以看成以正整数集 $\mathbf{N}^*$ (或它的有限子集 $\{1,2,\cdots,n\}$) 为定义域的函数 $a_n=f(n)$，当自变量 n 按照从小到大的顺序依次取值时，所对应的函数值构成数列 $\{a_n\}$.不同之处是定义域，数列中的 n 必须是从 1 开始且取值连续的正整数，函数的定义域可以是任意非空数集.



整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 > 理解数列的概念

1.下列说法正确的是　　(　　)

A.1,2,3,4,…,n 是无穷数列

B.数列 3,5,7 与数列 7,5,3 是相同数列

C.同一个数在数列中不能重复出现

D.数列 $\{2n+1\}$ 的第 6 项是 13

D　**解析**：数列 1,2,3,4,…,n 共 n 项，是有穷数列，A 错误.数列中的项是有次序的，B 错误.数列中的数可以重复出现，C 错误.当 $n=6$ 时，$2\times6+1=13$，D 正确.故选 D.

2.下列对象是数列的是_____；是有穷数列的是_____；是无穷数列的是_____.

(1)$\{1,3,5,7,9\}$；(2)4,3,2,1,0；(3)所有无理数；(4)1,2,3,4,…；(5)2,2,2,2,2.

(2)(4)(5)　(2)(5)　(4)　**解析**：(1)是集合，不是数列；(3)不能构成数列，因为没有把所有的无理数按一定顺序排列起来；(2)(4)(5)是数列，其中(4)是无穷数列，(2)(5)是有穷数列.

【探究总结】

(1)判断一组元素能否构成数列的依据

①各项是否为“数”；

②各数是否按一定顺序排成一列.

(2)数列类型的判断

在判断数列是哪一种类型的数列时，要紧扣概念及数列的特点.例如，判断数列是有穷数列还是无穷数列时，要看项的个数是有限的还是无限的.

任务2 > 掌握数列的通项公式

探究活动

例 1　(教材 P5 例 2 改编)写出下列数列的一个通项公式：

(1)$\frac{1}{2},2,\frac{9}{2},8,\frac{25}{2},\cdots$；

(2)$1,-3,5,-7,9,\cdots$；

(3)$9,99,999,9\,999,\cdots$；

(4)$\frac{2^2-1}{1},\frac{3^2-2}{3},\frac{4^2-3}{5},\frac{5^2-4}{7},\cdots$；

(5)$-\frac{1}{1\times2},\frac{1}{2\times3},-\frac{1}{3\times4},\frac{1}{4\times5},\cdots$；

(6)4,0,4,0,4,0,….

解：(1)将各项都统一成分数：$\frac{1}{2},\frac{4}{2},\frac{9}{2},\frac{16}{2},\frac{25}{2},\cdots$，所以它的一个通项公式为 $a_n=\frac{n^2}{2}$.

(2)数列各项的绝对值构成数列 1,3,5,7,9,…，是连续的正奇数，其通项公式为 $A_n=2n-1$.考虑 $(-1)^{n+1}$ 具有转换符号的作用，所以原数列的一个通项公式为 $a_n=(-1)^{n+1}(2n-1)$.

(3)各项加1后，分别变为10，100，1 000，10 000，…，此数列的通项公式为$A_n=10^n$，可得原数列的一个通项公式为$a_n=10^n-1$.

(4)数列中的每一项均由三部分组成，分母是从1开始的连续奇数，其通项公式为$A_n=2n-1$.分子的前一部分是从2开始的连续自然数的平方，其通项公式为$B_n=(n+1)^2$；分子的后一部分是减去一个自然数，减去的自然数的通项公式为$C_n=n$.综合得原数列的一个通项公式为$a_n=\dfrac{(n+1)^2-n}{2n-1}$.

(5)这个数列的前4项的绝对值都等于序号与序号加1的积的倒数，且奇数项为负，偶数项为正，所以它的一个通项公式为$a_n=(-1)^n\cdot\dfrac{1}{n(n+1)}$.

(6)由于该数列中的奇数项全部都是4，偶数项全部都是0，因此可用分段函数的形式表示数列的通项公式，即$a_n=\begin{cases}4,n\text{ 为奇数},\\0,n\text{ 为偶数}.\end{cases}$该数列也可改写为2+2，2−2，2+2，2−2，2+2，2−2，…，因此其通项公式又可以表示为$a_n=2+2\times(-1)^{n+1}$.

［一题多思］

思考1.试以本例(1)(2)为例，说明将数列的前几项进行怎样的处理更有利于写出通项公式.

提示：将数列的前几项统一形式更有利于写出数列的通项公式.

如(1)改写为$\dfrac{1^2}{2},\dfrac{2^2}{2},\dfrac{3^2}{2},\dfrac{4^2}{2},\dfrac{5^2}{2},\cdots$，写出$a_n=\dfrac{n^2}{2}$；

(2)改写为$(-1)^2(2\times1-1),(-1)^3(2\times2-1),(-1)^4(2\times3-1),(-1)^5(2\times4-1),(-1)^6(2\times5-1),\cdots$，写出$a_n=(-1)^{n+1}(2n-1)$.

思考2.在本例(3)的基础上，你能写出数列5，55，555，5 555，…的一个通项公式吗？

提示：易知将数列9，99，999，9 999，…的每一项先除以9，再乘5，可得数列5，55，555，5 555，…，故所求数列的一个通项公式为$a_n=\dfrac{5}{9}(10^n-1)$.

【探究总结】

根据数列的前几项写出数列的一个通项公式的关键

(1)根据所给数列的前几项求其通项公式时，需仔细观察分析，抓住分式中分子、分母的特征，相邻项的变化特征，拆项后的特征，各项符号特征等，并对此进行归纳、联想.

(2)根据数列的前几项写出数列的一个通项公式运用的是不完全归纳法，它蕴含着“从特殊到一般”的思想.由不完全归纳法得出的结果不一定是可靠的，要注意代值检验，对于符号的正负变化，可用$(-1)^n$或$(-1)^{n+1}$来调整.

应用迁移

写出下列数列的一个通项公式：

(1)3，5，9，17，33，…；

(2)11，102，1 003，10 004，…；

(3)$1\dfrac{1}{2},2\dfrac{4}{5},3\dfrac{9}{10},4\dfrac{16}{17},\cdots$；

(4)2，−6，12，−20，30，−42，….

解：(1)因为$3=2^1+1,5=2^2+1,9=2^3+1,17=2^4+1,33=2^5+1,\cdots$，所以该数列的一个通项公式为$a_n=2^n+1$.

(2)这个数列可以改写为10+1，100+2，1 000+3，10 000+4，…，所以该数列的一个通项公式是$a_n=10^n+n$.

(3)因为$1\dfrac{1}{2}=1+\dfrac{1^2}{1^2+1},2\dfrac{4}{5}=2+\dfrac{2^2}{2^2+1},3\dfrac{9}{10}=3+\dfrac{3^2}{3^2+1},4\dfrac{16}{17}=4+\dfrac{4^2}{4^2+1},\cdots$，所以该数列的一个通项公式为$a_n=n+\dfrac{n^2}{n^2+1}$.

(4)将数列变形为$1\times2,-2\times3,3\times4,-4\times5,5\times6,-6\times7,\cdots$，所以该数列的一个通项公式为$a_n=(-1)^{n+1}n(n+1)$.

任务3 学习数列的函数特性

探究活动

例2　(1)已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\lambda n^2-2n$，若$\{a_n\}$是递增数列，则λ的取值范围是（　　）

A.$(0,+\infty)$　　B.$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

C.$\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$　　D.$(1,+\infty)$

C　**解析：**由数列$\{a_n\}$是递增数列可得$a_{n+1}>a_n$恒成立，即$\lambda(n+1)^2-2(n+1)-\lambda n^2+2n>0$，整理可得$\lambda>\dfrac{2}{2n+1}$，该式对任意$n\in\mathbf{N}^*$恒成立.又因为函数$y=\dfrac{2}{2x+1}$为$(0,+\infty)$上的单调递减函数，所以$\left(\dfrac{2}{2n+1}\right)_{\max}=\dfrac{2}{3}$，所以$\lambda>\dfrac{2}{3}$.故选C.

(2)在数列$\{a_n\}$中，$a_n=n^2-8n$.

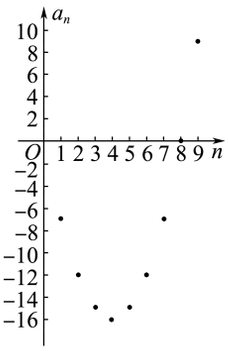
①画出$\{a_n\}$的图象；

②根据图象写出数列$\{a_n\}$的单调性.

解：①列表：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
a_n	−7	−12	−15	−16	−15	−12	−7	0	9	…

描点，画出$\{a_n\}$的图象如图所示.



②数列$\{a_n\}$在$n=1,2,3,4$时是递减的，在$n=4,5,6,7,\cdots$时是递增的.

【探究总结】

数列增减性的判断方法

(1)若已知数列的图象，则可以直接根据图象是上升的还是下降的来判断数列的增减性.

(2)若已知数列的通项公式，则常用作差法或作商法来比较相邻两项的大小.需注意：①作商时，要注意数列中项的正负；②对于通项公式是多项式的数列，常作差后进行因式分解；③对于通项公式含有根式的数列，常进行分子或分母有理化.

(3)通过考察函数的单调性来判断数列的增减性.

应用迁移

1.已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^2-5n+4$.

(1)数列$\{a_n\}$中有多少项为负数？

(2)当n为何值时，a_n有最小值？请求出最小值.

解：(1)由$n^2-5n+4<0$，得$1<n<4$.

又因为$n\in\mathbf{N}^*$，所以$n=2$或$n=3$.

所以数列$\{a_n\}$中有2项为负数.

(2)因为$a_n=n^2-5n+4=\left(n-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$，且$n\in\mathbf{N}^*$，所以当$n=2$或$n=3$时，$a_n$有最小值$-2$.

2.已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=(n+2)\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^n$，求数列$\{a_n\}$中的最大项.

解：设$a_n(n\geqslant 2)$为数列$\{a_n\}$中的最大项，

所以

$$\begin{cases}a_n\geqslant a_{n-1},\\ a_n\geqslant a_{n+1},\end{cases}\text{即}\begin{cases}(n+2)\left(\frac{9}{10}\right)^n\geqslant(n+1)\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1},\\ (n+2)\left(\frac{9}{10}\right)^n\geqslant(n+3)\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1},\end{cases}$$

整理得$\begin{cases}(n+2)\cdot\frac{9}{10}\geqslant n+1,\\ n+2\geqslant(n+3)\cdot\frac{9}{10},\end{cases}$解得$7\leqslant n\leqslant 8$.

故$\{a_n\}$中的最大项为$a_7=a_8=\frac{9^8}{10^7}$.

课后素养评价(一)

基础落实

1.(多选)下列关于数列的说法正确的有　　(　　)

A.按一定次序排列的一列数叫做数列

B.若$\{a_n\}$表示数列，则a_n表示数列的第n项，$a_n=f(n)$表示数列的通项公式

C.同一个数列的通项公式的形式不一定唯一

D.同一个数列的任意两项均不可能相同

ABC　**解析**：因为一个数列的每一项的值是可以相等的，如常数列，所以D项错误，A，B，C均正确.故选ABC.

2.(多选)下面四个数列中，既是无穷数列又是递增数列的为　　(　　)

A.$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$

B.$\sin\frac{1}{7}\pi,\sin\frac{2}{7}\pi,\sin\frac{3}{7}\pi,\cdots,\sin\frac{n}{7}\pi,\cdots$

C.$-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\cdots,-\frac{1}{2^{n-1}},\cdots$

D.$1,2,3,\cdots$

CD　**解析**：选项C，D既是无穷数列又是递增数列，而选项A是递减数列，选项B是摆动数列.故选CD.

3.下列说法正确的是　　(　　)

A.数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$是递增数列

B.数列$0,1,2,3,\cdots$的一个通项公式为$a_n=n$

C.数列$0,0,0,1,\cdots$是常数列

D.数列$2,4,6,8$与数列$8,6,4,2$是相同的数列

A　**解析**：对于A，设$a_n=\frac{n}{n+1}$，则$a_{n+1}-a_n=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{(n+1)^2-n(n+2)}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}>0$对$\forall n\in\mathbf{N}^*$恒成立，所以数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$是递增数列，故A正确；

对于B，当$n=1$时，$a_1=1$与第一项为0不符，故B错误；

对于C，数列中的项并不完全相同，故C错误；

对于D，根据数列的概念，数列与顺序有关，所以数列2，4，6，8与数列8，6，4，2不是相同的数列，故D错误.故选A.

4. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n^2-18n+5$，则数列$\{a_n\}$的最小项是　　（　　）

A.第4项

B.第5项

C.第6项

D.第4项或第5项

D　**解析：** 因为$a_n=2n^2-18n+5$，所以设$f(x)=2x^2-18x+5$，其图象的对称轴为$x=-\dfrac{-18}{2\times2}=\dfrac{9}{2}$，且开口向上.又因为$n\in\mathbf{N}^*$，所以$\{a_n\}$的最小项为第4项或第5项.故选D.

5. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1>0$，对一切$n\in\mathbf{N}^*$，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}$，则数列$\{a_n\}$是　　（　　）

A.递增数列　　B.递减数列

C.摆动数列　　D.不确定

B　**解析：** 因为$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}$，$a_1>0$，则$a_n>0$，所以$a_{n+1}<a_n$，故数列$\{a_n\}$是递减数列.故选B.

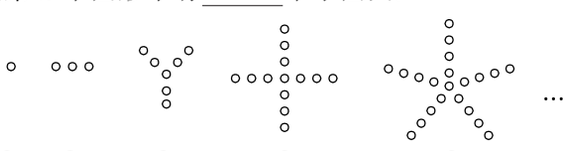
6. 若数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=\dfrac{2n}{n+1}$，则此数列是　　（　　）

A.递增数列　　B.递减数列

C.摆动数列　　D.不确定

A　**解析：** 因为$a_n=\dfrac{2n}{n+1}=\dfrac{2(n+1)-2}{n+1}=2-\dfrac{2}{n+1}$，所以$a_n-a_{n-1}=\left(2-\dfrac{2}{n+1}\right)-\left(2-\dfrac{2}{n}\right)=\dfrac{2}{n}-\dfrac{2}{n+1}=\dfrac{2}{n(n+1)}>0(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$.因此数列$\{a_n\}$是递增数列.故选A.

7. 观察下列5个图形中小圆圈的个数的变化规律，猜想第n个图形中有_____个小圆圈.



①　②　③　④　⑤

n^2-n+1　**解析：** 5个图形中小圆圈的个数分别为1，$1\times2+1$，$2\times3+1$，$3\times4+1$，$4\times5+1$，…，故第n个图形中小圆圈的个数为$(n-1)\cdot n+1=n^2-n+1$.

8. 根据下面的通项公式，写出数列的前5项.

(1)$a_n=\dfrac{n^2+1}{2n-1}$；

(2)$a_n=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{2n-1}{3n}$.

解： (1)当$n=1$时，$a_1=\dfrac{1^2+1}{2\times1-1}=2$；

当$n=2$时，$a_2=\dfrac{2^2+1}{2\times2-1}=\dfrac{5}{3}$；

当$n=3$时，$a_3=\dfrac{3^2+1}{2\times3-1}=2$；

当$n=4$时，$a_4=\dfrac{4^2+1}{2\times4-1}=\dfrac{17}{7}$；

当$n=5$时，$a_5=\dfrac{5^2+1}{2\times5-1}=\dfrac{26}{9}$.

(2)当$n=1$时，$a_1=(-1)^{1-1}\times\dfrac{2\times1-1}{3\times1}=\dfrac{1}{3}$；

当$n=2$时，$a_2=(-1)^{2-1}\times\dfrac{2\times2-1}{3\times2}=-\dfrac{1}{2}$；

当$n=3$时，$a_3=(-1)^{3-1}\times\dfrac{2\times3-1}{3\times3}=\dfrac{5}{9}$；

当$n=4$时，$a_4=(-1)^{4-1}\times\dfrac{2\times4-1}{3\times4}=-\dfrac{7}{12}$；

当$n=5$时，$a_5=(-1)^{5-1}\times\dfrac{2\times5-1}{3\times5}=\dfrac{3}{5}$.

能力提升

1. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$，则该数列的前4项依次为　　（　　）

A.1，0，1，0　　B.0，1，0，1

C.$\dfrac{1}{2}$，0，$\dfrac{1}{2}$，0　　D.2，0，0，2

A　**解析：** $a_1=\dfrac{1+(-1)^{1+1}}{2}=\dfrac{1+1}{2}=1$；

$a_2=\dfrac{1+(-1)^{2+1}}{2}=\dfrac{1-1}{2}=0$；

$a_3=\dfrac{1+(-1)^{3+1}}{2}=\dfrac{1+1}{2}=1$；

$a_4=\dfrac{1+(-1)^{4+1}}{2}=\dfrac{1-1}{2}=0$.故选A.

2. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$，则数列$\{a_n\}$中的最大项为　　（　　）

A.第2项　　B.第3项

C.第2项或第3项　　D.第4项

C　**解析：** $a_1=1\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$；$a_2=2\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{8}{9}$；$a_3=3\times\dfrac{8}{27}$

$=\frac{8}{9}=a_2$；$a_4=4\times\frac{16}{81}=\frac{64}{81}<a_3$.

当 $n\geqslant4$ 时，$a_{n+1}-a_n=(n+1)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{-n+2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n<0$，所以 $a_{n+1}<a_n$，

所以数列 $\{a_n\}$ 中的最大项为第 2 项或第 3 项.故选 C.

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\begin{cases}3n+1,n\text{ 为奇数},\\2^n-1,n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 则 $a_2a_3=$（　　）

A.13　　B.14

C.30　　D.49

C　**解析**：由 $a_n=\begin{cases}3n+1,n\text{ 为奇数},\\2^n-1,n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 得 $a_2=2^2-1=3$，$a_3=3\times3+1=10$，所以 $a_2a_3=30$.故选 C.

4.（多选）根据下列通项公式可以判断数列 $\{a_n\}$ 是递增数列的有（　　）

A.$a_n=n^2-3n+1$　　B.$a_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

C.$a_n=n+\frac{2}{n}$　　D.$a_n=\ln\frac{n}{n+1}$

BD　**解析**：对于 A，因为 $a_1=a_2=-1$，所以 $a_n=n^2-3n+1$ 时，$\{a_n\}$ 不是递增数列；

对于 B，$a_{n+1}-a_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}>0$，所以 $a_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 时，$\{a_n\}$ 是递增数列；

对于 C，因为 $a_1=a_2=3$，所以 $a_n=n+\frac{2}{n}$ 时，$\{a_n\}$ 不是递增数列；

对于 D，$a_{n+1}-a_n=\ln\frac{n+1}{n+2}-\ln\frac{n}{n+1}=\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\times\frac{n+1}{n}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)>0$，所以 $a_n=\ln\frac{n}{n+1}$ 时，$\{a_n\}$ 是递增数列.故选 BD.

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a^n+m(a<0,n\in\mathbf{N}^*)$，且满足 $a_1=2$，$a_2=4$，则 $a_3=$_____.

2　**解析**：由题意得 $\begin{cases}a_1=a+m=2,\\a_2=a^2+m=4,\end{cases}$

所以 $a^2-a=2$，解得 $a=2$ 或 $a=-1$.

又 $a<0$，所以 $a=-1$.

因为 $a+m=2$，所以 $m=3$.

所以 $a_n=(-1)^n+3$，所以 $a_3=(-1)^3+3=2$.

6.（传统文化）大衍数列来源于《乾坤谱》中对《易》传“大衍之数五十”作出的推论，主要用于解释中国传统文化中的太极衍生原理.其前 10 项依次是 0，2，4，8，12，18，24，32，40，50，则此数列的第 20 项与第 21 项的和为_____.

420　**解析**：由数列的前 10 项可知，数列的偶数项的一个通项公式为 $a_{2n}=2n^2$，

所以 $a_{20}=2\times10^2=200$.

奇数项的一个通项公式为 $a_{2n-1}=2n(n-1)$，

所以 $a_{21}=a_{2\times11-1}=2\times10\times11=220$.

所以 $a_{20}+a_{21}=200+220=420$.

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=cn+dn^{-1}$（$n\in\mathbf{N}^*$），且 $a_2=\frac{3}{2}$，$a_4=\frac{3}{2}$，求 a_n 和 a_{10}.

解：因为 $a_2=\frac{3}{2}$，$a_4=\frac{3}{2}$，代入通项公式中，

可得 $\begin{cases}\frac{3}{2}=2c+\frac{d}{2},\\\frac{3}{2}=4c+\frac{d}{4},\end{cases}$ 解得 $c=\frac{1}{4}$，$d=2$.

所以 $a_n=\frac{n}{4}+\frac{2}{n}$，所以 $a_{10}=\frac{10}{4}+\frac{2}{10}=\frac{27}{10}$.

8. 已知数列 $\{a_n\}$：25，37，49，61，73，…；

$\{b_n\}$：1，4，9，16，25，….

(1)根据前 5 项的特征，分别求出它们的一个通项公式.

(2)根据(1)中的两个通项公式，判断这两个数列是否有序号与值都相同的项.如果没有，请说明理由；如果有，请指明它们是第几项.

解：(1)$a_n=12n+13$，$b_n=n^2$.

(2)有序号与值都相同的项.令 $a_n=b_n$，即 $12n+13=n^2$，解得 $n=13$ 或 $n=-1$（舍去），所以两个数列有序号与值都相同的项，是两个数列的第 13 项.

自我超越

图 1 是第七届国际数学教育大会（简称 ICME-7）的会徽图案，会徽的主体图案是由如图 2 所示的一连串直角三角形演化而成的，其中 $OA_1=A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_7A_8=1$，那么 $OA_4=$__2__，如果把图 2 中的直角三角形继续作下去，记 OA_1，OA_2，…，OA_n 的长度构成的数列为 $\{a_n\}$，则此数列的通项公式为 $a_n=$__$\sqrt{n}$__.

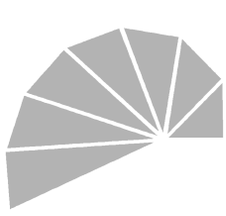


图 1

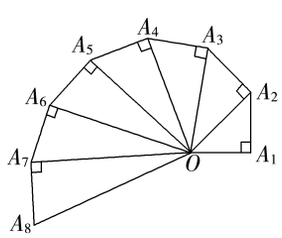


图 2

第2课时　数列的递推公式及前 n 项和

学习任务目标

1.会判断一个实数是否为某个数列的项.
2.掌握数列的递推公式及应用.
3.理解 S_n 与 a_n 的关系，能运用这个关系解决相关问题.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　数列的递推公式

如果一个数列的相邻两项或多项之间的关系可以用一个式子来表示，那么这个式子叫做这个数列的递推公式.

知识点二　数列的前 n 项和

(1)定义：数列 $\{a_n\}$ 从第1项起到第 n 项止的各项之和，称为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，记作 S_n，即 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

(2)前 n 项和公式：如果数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 与它的序号 n 之间的对应关系可以用一个式子来表示，那么这个式子叫做这个数列的前 n 项和公式.

(3) a_n 与 S_n 的关系：若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $a_n=\begin{cases}S_1,n=1,\\S_n-S_{n-1},n\geqslant 2.\end{cases}$

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)递推公式也是表示数列的一种方法.（　√　）

(2)已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_n=2-\dfrac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_2=\dfrac{3}{2}$.（　　）

√　**提示**：因为 $a_1=2$，$a_n=2-\dfrac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $a_2=2-\dfrac{1}{a_1}=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

(3)设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $a_n=S_n-S_{n-1}$.（　　）

×　**提示**：当 $n=1$ 时，$a_1=S_1$；当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$，所以 $a_n=\begin{cases}S_1,n=1,\\S_n-S_{n-1},n\geqslant 2.\end{cases}$

2.若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=n^2-10n$，则 $a_1=$_____，$a_2=$_____.

-9　-7　**解析**：因为 $S_n=n^2-10n$，所以 $a_1=S_1=1^2-10\times 1=-9$，$a_2=S_2-S_1=2^2-10\times 2-(-9)=-7$.

3.请思考并回答下列问题：

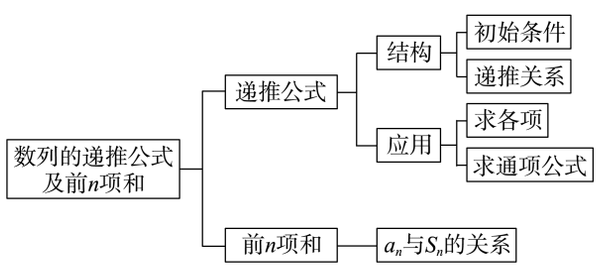
(1)所有数列都有递推公式吗？

(2)仅由数列 $\{a_n\}$ 满足的递推公式 $a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}^*)$ 能否确定这个数列？若已知 $a_1=1$ 呢？

(1)**提示**：不一定.例如，$\sqrt{2}$ 精确到1，0.1，0.01，0.001，…的不足近似值组成的数列：1，1.4，1.41，1.414，…没有递推公式.

(2)**提示**：仅由数列 $\{a_n\}$ 满足的递推公式 $a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}^*)$ 只能得出相邻两项的关系，无法确定这个数列.若已知 $a_1=1$，则可以确定这个数列为1，2，4，8，….

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1　掌握通项公式的应用

1.已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n^2-7n-8$.

(1)数列中为负数的项的个数是_____；

(2)该数列的最小项为_____.

(1)7　(2)-20　**解析**：(1)令 $a_n<0$，即 $n^2-7n-8<0$，得 $-1<n<8$.

又因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 n 的值为1，2，3，…，7，

所以数列从第1项至第7项均为负数，共7项.

(2)(方法一) $a_n=n^2-7n-8$ 是关于 n 的二次函数，图象的对称轴方程为 $n=\dfrac{7}{2}=3.5$，

所以当 $1\leqslant n\leqslant 3$ 时，$\{a_n\}$ 递减；

当 $n\geqslant 4$ 时，$\{a_n\}$ 递增.

所以当 $n=3$ 或 $n=4$ 时，a_n 最小，即 a_3，a_4 是数列中的最小项，且 $a_3=a_4=-20$.

(方法二)设 $a_n(n\geqslant 2)$ 为数列 $\{a_n\}$ 中的最小项.

则 $\begin{cases}a_n\leqslant a_{n-1},\\ a_n\leqslant a_{n+1},\end{cases}$

即 $\begin{cases}n^2-7n-8\leqslant (n-1)^2-7(n-1)-8,\\ n^2-7n-8\leqslant (n+1)^2-7(n+1)-8,\end{cases}$

解得 $3\leqslant n\leqslant 4$.

又因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以当 $n=3$ 或 $n=4$ 时，a_n 最小，即 a_3，a_4 是数列中的最小项，且 $a_3=a_4=-20$.

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3n^2-28n$.

(1)求这个数列的第 4 项和第 6 项.

(2)-49 是该数列的第几项？

(3)68 是该数列的项吗？

解：(1)根据 $a_n=3n^2-28n$，

得 $a_4=3\times 4^2-28\times 4=-64$，

$a_6=3\times 6^2-28\times 6=-60$.

(2)令 $3n^2-28n=-49$，

即 $3n^2-28n+49=0$，解得 $n=7$ 或 $n=\dfrac{7}{3}$(舍去).

所以 -49 是该数列的第 7 项.

(3)令 $3n^2-28n=68$，即 $3n^2-28n-68=0$，

解得 $n=-2$ 或 $n=\dfrac{34}{3}$，均不是正整数，

所以 68 不是数列 $\{a_n\}$ 中的项.

【探究总结】

(1)如果已知数列的通项公式，只要将相应序号 n 代入通项公式，就可以得出数列中的指定项.

(2)判断一个实数是否为某个数列中的一项，步骤如下：

①将所给的数代入通项公式中.

②解关于 n 的方程.

③若 n 为正整数，说明所给的数是该数列中的项；若 n 不是正整数，则所给的数不是该数列中的项.

任务 2 学习数列的递推公式

探究活动

例 1　(1)若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=6$，$a_{n+1}=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}$，则 $a_{985}=$　(　　)

A. $-\dfrac{7}{5}$　　B. $-\dfrac{1}{6}$

C. $\dfrac{5}{7}$　　D. 6

D　**解析**：因为 $a_1=6$，$a_{n+1}=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}$，所以 $a_2=\dfrac{1+6}{1-6}=-\dfrac{7}{5}$，$a_3=\dfrac{1-\frac{7}{5}}{1+\frac{7}{5}}=-\dfrac{1}{6}$，$a_4=\dfrac{1-\frac{1}{6}}{1+\frac{1}{6}}=\dfrac{5}{7}$，$a_5=\dfrac{1+\frac{5}{7}}{1-\frac{5}{7}}=6$，…，所以 $\{a_n\}$ 是周期为 4 的数列，故 $a_{985}=a_1=6$. 故选 D.

(2)(教材 P6 例 5 改编)已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_n=3a_{n-1}+\dfrac{(-1)^n}{2}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，写出数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项.

解：由题意，得 $a_2=3a_1+\dfrac{(-1)^2}{2}$，

又 $a_1=1$，所以 $a_2=3\times 1+\dfrac{(-1)^2}{2}=\dfrac{7}{2}$.

同理，$a_3=3a_2+\dfrac{(-1)^3}{2}=10$，

$a_4=3a_3+\dfrac{(-1)^4}{2}=\dfrac{61}{2}$，

$a_5=3a_4+\dfrac{(-1)^5}{2}=91$.

【探究总结】

由递推公式写出数列的项的方法

(1)根据递推公式写出数列的前几项，首先要弄清楚公式中各部分的关系，然后依次代入计算即可.

(2)若已知的是末项，则通常将所给公式整理成用后面的项表示前面的项的形式，如 $a_n=2a_{n+1}+1$.

(3)若已知的是首项，则通常将所给公式整理成用前面的项表示后面的项的形式，如 $a_{n+1}=\dfrac{a_n-1}{2}$.

应用迁移

1. 已知在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=-\dfrac{1}{4}$，$a_n=1-\dfrac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_{100}=$　(　　)

A. 5　　B. $-\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{4}{5}$　　D. $-\dfrac{4}{5}$

B　**解析**：因为 $a_1=-\dfrac{1}{4}$，$a_n=1-\dfrac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2)$，所以 $a_2=1-\dfrac{1}{a_1}=1-\dfrac{1}{-\frac{1}{4}}=5$，$a_3=1-\dfrac{1}{a_2}=1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$，$a_4=1-\dfrac{1}{a_3}=1-\dfrac{1}{\frac{4}{5}}=1-\dfrac{5}{4}=-\dfrac{1}{4}$，…，可知数

列$\{a_n\}$是以3为周期的周期数列.因为$100=33\times3+1$,所以$a_{100}=a_1=-\frac{1}{4}$.故选B.

2.已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=0$,$a_{n+1}=\frac{a_n-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n+1}$($n\in\mathbf{N}^*$),则$a_{20}=$（　　）

A.0　　B.$-\sqrt{3}$　　C.$\sqrt{3}$　　D.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

B　**解析:**因为$a_1=0$,$a_{n+1}=\frac{a_n-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n+1}$,所以$a_2=\frac{a_1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_1+1}=-\sqrt{3}$,$a_3=\frac{a_2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_2+1}=\sqrt{3}$,$a_4=\frac{a_3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_3+1}=0$,…,

所以数列$\{a_n\}$的各项依次为$0,-\sqrt{3},\sqrt{3},0,-\sqrt{3},\sqrt{3}$,…,周期为3.

因为$20=6\times3+2$,所以$a_{20}=a_2=-\sqrt{3}$.故选B.

3.在数列$\{a_n\}$中,若$a_1=10$,$a_n\in\mathbf{N}^*$,且$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{2},a_n\text{是偶数},\\a_n+3,a_n\text{是奇数}\end{cases}$($n=1,2,3,\cdots$),写出数列$\{a_n\}$的前5项.

解:由题意得,$a_1=10$,$a_2=\frac{a_1}{2}=5$,$a_3=a_2+3=8$,$a_4=\frac{a_3}{2}=4$,$a_5=\frac{a_4}{2}=2$.

任务3　了解a_n与S_n的关系

探究活动

例2　已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=5^n-1$,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解:当$n=1$时,$a_1=S_1=5^1-1=4$;

当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=(5^n-1)-(5^{n-1}-1)=5^n-5^{n-1}=4\times5^{n-1}$.

由于$a_1=4$也满足$a_n=4\times5^{n-1}$,

因此,数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=4\times5^{n-1}$.

[一题多思]

思考1.若将本例中的"$S_n=5^n-1$"换成"$S_n=5^n+1$",求数列$\{a_n\}$的通项公式.

提示:当$n=1$时,$a_1=S_1=5+1=6$;

当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=(5^n+1)-(5^{n-1}+1)=4\times5^{n-1}$.由于$a_1=6$不满足$a_n=4\times5^{n-1}$,所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\begin{cases}6,n=1,\\4\times5^{n-1},n\geqslant2.\end{cases}$

思考2.若将本例中的"$S_n=5^n-1$"换成"$S_n=3^n+r$($r\in\mathbf{R}$)",求数列$\{a_n\}$的通项公式.

提示:当$n=1$时,$a_1=S_1=3+r$;

当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(3^n+r)-(3^{n-1}+r)$

$=3\times3^{n-1}-3^{n-1}$

$=2\times3^{n-1}$.

令$3+r=2\times3^0$,解得$r=-1$.

所以当$r=-1$时,数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2\times3^{n-1}$;

当$r\neq-1$时,数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\begin{cases}3+r,n=1,\\2\times3^{n-1},n\geqslant2.\end{cases}$

【探究总结】

利用a_n与S_n的关系求通项公式的步骤

(1)当$n=1$时,$a_1=S_1$.

(2)当$n\geqslant2$时,根据S_n写出S_{n-1},化简$a_n=S_n-S_{n-1}$.

(3)如果a_1也满足当$n\geqslant2$时$a_n=S_n-S_{n-1}$的式子,那么数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=S_n-S_{n-1}$;如果a_1不满足当$n\geqslant2$时$a_n=S_n-S_{n-1}$的式子,那么数列$\{a_n\}$的通项公式要分段表示为$a_n=\begin{cases}S_1,n=1,\\S_n-S_{n-1},n\geqslant2.\end{cases}$

应用迁移

1.若数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=2^n+1$,则$\frac{a_5+a_6}{a_2}=$（　　）

A.7　　B.8　　C.12　　D.24

D　**解析:**由题意得$a_5+a_6=S_6-S_4=2^6-2^4=48$,$a_2=S_2-S_1=2^2-2^1=2$,所以$\frac{a_5+a_6}{a_2}=24$.故选D.

2.已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=32n-n^2+1$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)求数列$\{a_n\}$的前多少项和最大.

解:(1)由数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=32n-n^2+1$知,

当$n=1$时,$a_1=S_1=32-1+1=32$;

当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=(32n-n^2+1)-[32(n-1)-(n-1)^2+1]=33-2n$.

在$a_n=33-2n$中,

令$n=1$,得$a_1=33-2\times1=31$,不满足$a_1=32$.

所以数列的通项公式为$a_n=\begin{cases}32,n=1,\\33-2n,n\geqslant2.\end{cases}$

(2)因为$S_n=32n-n^2+1=-(n^2-32n)+1=-(n-16)^2+257$,

所以当$n=16$时,S_n有最大值为257.

所以前16项的和最大.

课后素养评价(二)

基础落实

1.数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=3n^2+n$,则$a_9=$(　　)

A.140　　B.120

C.40　　D.52

D　**解析**:由$S_n=3n^2+n$,得$a_9=S_9-S_8=3\times9^2+9-(3\times8^2+8)=52$.故选D.

2.数列$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots$的递推公式可以是(　　)

A.$a_n=\frac{1}{2^n}(n\in\mathbf{N}^*)$

B.$a_n=\frac{1}{2n}(n\in\mathbf{N}^*)$

C.$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n(n\in\mathbf{N}^*)$

D.$a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}^*)$

C　**解析**:数列第一项是1,AB是通项公式的形式,故AB错误;观察数列可知,数列从第二项起,每一项是前一项的$\frac{1}{2}$,所以递推公式为$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n(n\in\mathbf{N}^*)$,故C正确,D错误.故选C.

3.已知数列$\{a_n\}$对任意$m,n\in\mathbf{N}^*$,满足$a_{m+n}=a_m\cdot a_n$,且$a_3=8$,则$a_1=$(　　)

A.2　　B.1　　C.±2　　D.$\frac{1}{2}$

A　**解析**:令$m=n=1$,则$a_2=a_1\cdot a_1=a_1^2$.

令$m=1,n=2$,则$a_3=a_1\cdot a_2=a_1^3=8$,解得$a_1=2$.故选A.

4.在数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,且$a_{n+1}=\frac{1}{1-a_n}$,$n\in\mathbf{N}^*$,则$a_5=$(　　)

A.2　　B.-1　　C.$\frac{1}{2}$　　D.1

B　**解析**:因为$a_1=2$,所以$a_2=\frac{1}{1-a_1}=\frac{1}{1-2}=-1$,$a_3=\frac{1}{1-a_2}=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$,$a_4=\frac{1}{1-a_3}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$,…,所以$\{a_n\}$是以3为周期的数列,则$a_5=a_2=-1$.故选B.

5.(多选)符合递推关系式$a_n=\sqrt{2}a_{n-1}(n\geqslant2)$的数列可以是(　　)

A.1,2,3,4,…

B.1,$\sqrt{2}$,2,$2\sqrt{2}$,…

C.$\sqrt{2}$,2,$2\sqrt{2}$,4,…

D.0,$\sqrt{2}$,2,$2\sqrt{2}$,…

BC　**解析**:对于A,从第2项起,每一项与前一项的差为1,通项公式为$a_n=n$;对于B,C,从第2项起,每一项是前一项的$\sqrt{2}$倍,符合递推公式$a_n=\sqrt{2}\cdot a_{n-1}$;对于D,不符合递推公式.故选BC.

6.(传统文化)如图所示,九连环是中国传统民间益智玩具.把玩九连环时,按照一定的程序反复操作,可以将九个环全部从框架上解下或全部套上.解下或套上一个环算一步,且九连环的解下和套上是一对逆过程,解开九连环共需要256步.现将第n个圆环解下最少需要的步数记为$a_n(n\leqslant9,n\in\mathbf{N}^*)$,已知$a_1=1$,$a_2=1$,按规则有$a_n=a_{n-1}+3a_{n-2}+2(n\geqslant3,n\in\mathbf{N}^*)$,则解下第5个圆环最少需要的步数为(　　)



A.15　　B.21

C.27　　D.31

D　**解析**:由题意可知$a_3=a_2+3a_1+2=6$,$a_4=a_3+3a_2+2=11$,$a_5=a_4+3a_3+2=31$.故选D.

7.已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=1$,以后的各项由公式$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$给出,试写出这个数列的前5项.

解:因为$a_1=1$,$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$,

所以$a_2=\frac{2a_1}{a_1+2}=\frac{2\times1}{1+2}=\frac{2}{3}$,

$a_3=\frac{2a_2}{a_2+2}=\frac{2\times\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+2}=\frac{1}{2}$,

$a_4=\frac{2a_3}{a_3+2}=\frac{2\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+2}=\frac{2}{5}$,

$a_5=\frac{2a_4}{a_4+2}=\frac{2\times\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}+2}=\frac{1}{3}$.

故该数列的前5项分别为$1,\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{5},\frac{1}{3}$.

能力提升

1. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=n^2-5n$.若它的第k项满足$3<a_k<7$,则$k=$　　(　　)

A.4或5　　B.5或6

C.6或7　　D.7或8

B　**解析**:当$n=1$时,$S_1=-4$,即$a_1=-4$;

当$n\geqslant 2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-5n)-[(n-1)^2-5(n-1)]=2n-6$.

当$n=1$时,$a_1=2\times 1-6=-4$,上式依然成立,故$a_n=2n-6(n\in\mathbf{N}^*)$.

令$3<2k-6<7$,解得$\frac{9}{2}<k<\frac{13}{2}$.

又$k\in\mathbf{N}^*$,所以$k=5$或$k=6$.故选B.

2. 在数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_{n+1}=a_n+n^2+\frac{1}{n(n+1)}$,则$a_6=$　　(　　)

A.$\frac{341}{6}$　　B.$\frac{170}{3}$　　C.$\frac{343}{6}$　　D.$\frac{172}{3}$

A　**解析**:由题意得$a_{n+1}-a_n=n^2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,

即$a_2-a_1=1^2+1-\frac{1}{2}$,$a_3-a_2=2^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$,…,

$a_6-a_5=5^2+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$,

将上面5个式子两端分别相加得$a_6-a_1=(1^2+2^2+\cdots+5^2)+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)=55+1-\frac{1}{6}=\frac{335}{6}$,且$a_1=1$,所以$a_6=\frac{335}{6}+1=\frac{341}{6}$.

故选A.

3. 已知数列$\{a_n\}$满足$2a_1+2^2a_2+2^3a_3+\cdots+2^na_n=n\cdot 2^n$,则$\{a_n\}$的通项公式为　　(　　)

A.$a_n=\begin{cases}1,n=1,\\n+1,n\geqslant 2\end{cases}$

B.$a_n=\frac{n+1}{2}$

C.$a_n=n$

D.$a_n=\begin{cases}1,n=1,\\n-1,n\geqslant 2\end{cases}$

B　**解析**:当$n=1$时,有$2a_1=1\times 2^1$,所以$a_1=1$,

当$n\geqslant 2$时,$2a_1+2^2a_2+2^3a_3+\cdots+2^na_n=n\cdot 2^n$,$2a_1+2^2a_2+2^3a_3+\cdots+2^{n-1}a_{n-1}=(n-1)\cdot 2^{n-1}$,

两式相减得$2^na_n=n\cdot 2^n-(n-1)\cdot 2^{n-1}=(n+1)2^{n-1}$,

此时,$a_n=\frac{n+1}{2}$,$a_1=1$也满足该式,

所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{n+1}{2}$.

故选B.

4. 已知斐波那契数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$,$a_2=1$,$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.若$a_2+a_3+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{57}+a_{59}=a_k(k\in\mathbf{N}^*)$,则$k=$　　(　　)

A.2 024　　B.2 025

C.59　　D.60

D　**解析**:由$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$,得$a_2+a_3+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{57}+a_{59}=a_4+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{57}+a_{59}=a_6+a_7+a_9+\cdots+a_{57}+a_{59}=\cdots=a_{58}+a_{59}=a_{60}$,因此$k=60$.故选D.

5. 下列给出的图形中,星星的个数构成一个数列:1,3,6,10,…,则该数列的一个递推公式是_____.



①　②　③　④

$a_n=a_{n-1}+n(n\geqslant 2)$　**解析**:结合题图易知,$a_1=1$,$a_2=3=a_1+2$,$a_3=6=a_2+3$,$a_4=10=a_3+4$,所以$a_n=a_{n-1}+n(n\geqslant 2)$.

6. 若数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=n^2\cdot a_n$($n\geqslant 2$,$n\in\mathbf{N}^*$),且$a_1=1$,则$a_n=$_____.

$\frac{2}{n(n+1)}$　**解析**:已知$S_n=n^2\cdot a_n(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$,当$n\geqslant 3$时,$S_n-S_{n-1}=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}$,即$n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}=a_n$,进而得$(n^2-1)a_n=(n-1)^2a_{n-1}$.因为$n\geqslant 3$,所以$(n+1)a_n=(n-1)\cdot a_{n-1}\Rightarrow\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n+1}(n\geqslant 3)$,故$\frac{a_n}{a_2}=\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\frac{a_5}{a_4}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}\times\cdots\times\frac{n-1}{n+1}=\frac{6}{n(n+1)}(n\geqslant 3)$.因为$S_n=n^2\cdot a_n(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$,当$n=2$时,$a_1+a_2=4a_2$,又$a_1=1$,解得$a_2=\frac{1}{3}$,所以$\frac{a_n}{\frac{1}{3}}=\frac{6}{n(n+1)}(n\geqslant 3)$.所以$a_n=\frac{2}{n(n+1)}(n\geqslant 3)$.又$a_1=1=\frac{2}{1\times 2}$,$a_2=\frac{1}{3}=\frac{2}{2\times 3}$满足上式,所以$a_n=\frac{2}{n(n+1)}$.

7. 数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$,$a_{n+1}+2a_na_{n+1}-a_n=0$.

(1)写出此数列的前5项.

(2)由(1)写出数列$\{a_n\}$的一个通项公式.

(3)实数$\frac{1}{99}$是否为这个数列中的一项?若是,应为第几项?

解：(1)由已知可得 $a_1=1$，$a_2=\frac{1}{3}$，$a_3=\frac{1}{5}$，$a_4=\frac{1}{7}$，$a_5=\frac{1}{9}$.

(2)由(1)可得数列$\{a_n\}$中的每一项的分子均为1，分母依次为1,3,5,7,9,…，所以它的一个通项公式为 $a_n=\frac{1}{2n-1}$.

(3)实数$\frac{1}{99}$是这个数列中的一项.令$\frac{1}{99}=\frac{1}{2n-1}$，解得 $n=50$，故$\frac{1}{99}$是这个数列的第50项.

自我超越

1.设数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{2n}=a_{2n-1}+2$，$a_{2n+1}=a_{2n}-1$，$n\in\mathbf{N}^*$，则满足$|a_n-n|\leqslant 4$的n的最大值是　　(　　)

A.7　　B.9

C.12　　D.14

C　**解析**：由题意得 $a_{2n+2}=a_{2n+1}+2=a_{2n}-1+2=a_{2n}+1$，$a_{2n+1}=a_{2n}-1=a_{2n-1}+2-1=a_{2n-1}+1$.又 $a_1=1$，所以可将数列$\{a_n\}$写出为1,3,2,4,3,5,4,6,5,7,6,8,7,9,8,10,….容易看出，满足$|a_n-n|\leqslant 4$的n的最大值是12.故选C.

2.在数列$\{a_n\}$中，$a_n=\frac{n^2}{n^2+1}$.

(1)求数列$\{a_n\}$的第7项.

(2)求证：此数列的各项都在区间(0,1)内.

(3)区间$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$内有没有数列$\{a_n\}$中的项？若有，有几项？

(1)**解**：$a_7=\frac{7^2}{7^2+1}=\frac{49}{50}$.

(2)**证明**：因为 $a_n=\frac{n^2}{n^2+1}=1-\frac{1}{n^2+1}$，

所以 $0<a_n<1$，故此数列的各项都在区间(0,1)内.

(3)**解**：区间$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$内有数列$\{a_n\}$中的项.

令$\frac{1}{3}<\frac{n^2}{n^2+1}<\frac{2}{3}$，则$\frac{1}{2}<n^2<2$，$n\in\mathbf{N}^*$，

所以 $n=1$，即在区间$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$内有且只有1项数列$\{a_n\}$中的项，为 a_1.

微专题培优(一)　由递推公式求数列通项公式的常见方法

由数列递推公式求数列通项公式是数列中的核心问题之一，在高考和各类数学竞赛中经常出现.掌握常见求解方法，能有效提升解题效率.解决此类问题常见的方法有：(1)累加法；(2)累乘法；(3)待定系数法；(4)取倒数法.

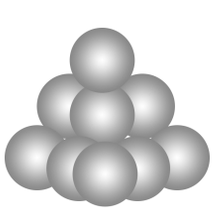
类型1　累加法

例1　(1)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_n-a_{n+1}=2^n a_n a_{n+1}$，则 $a_n=$　　(　　)

A.$\frac{2}{2^{n-1}+1}$　　B.$\frac{1}{2^{n-1}}$

C.$\frac{2^{n+1}-1}{2^n+1}$　　D.$\frac{1}{2^n-1}$

(2)如图是一个三角垛，最顶层有1个小球，第二层有3个，第三层有6个，第四层有10个，则第30层小球的个数为　　(　　)



A.462　　B.465

C.468　　D.475

(1)D　**解析**：因为 $a_n-a_{n+1}=2^n a_n a_{n+1}$，所以$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2^n$，即$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=2^{n-1}$.所以$\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\right)+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n-2}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)+\frac{1}{a_1}=2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1$，即$\frac{1}{a_n}=2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1=\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$，所以 $a_n=\frac{1}{2^n-1}(n\geqslant 2)$.又 $a_1=1$ 也符合该式，故 $a_n=\frac{1}{2^n-1}$.故选D.

(2)B　**解析**：记第n层有a_n个球，则 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=6$，$a_4=10$，$a_2-a_1=2$，$a_3-a_2=3$，$a_4-a_3=4$，…，$a_n-a_{n-1}=n(n\geqslant 2)$，则第30层的小球个数为 $a_{30}=(a_{30}-a_{29})+(a_{29}-a_{28})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=30+29+28+\cdots+2+1=\frac{30\times(30+1)}{2}=465$.故选B.

【规律方法】

累加法适用于相邻两项差为关于n的函数型递推关系，通过累加消去中间项求得数列通项.

【对点训练】

1.在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1\,023$，且$a_n=a_{n-1}+\lg\frac{n}{n-1}$（$n\geqslant2$），则$a_{1\,000}=$（　　）

A.1 026　　B.1 029

C.1 032　　D.1 035

A　**解析**：由题意可得$a_{1\,000}-a_{999}=\lg\frac{1\,000}{999}$，$a_{999}-a_{998}=\lg\frac{999}{998}$，…，$a_3-a_2=\lg\frac{3}{2}$，$a_2-a_1=\lg\frac{2}{1}$，各式相加可得$a_{1\,000}-a_1=\lg\frac{1\,000}{999}+\lg\frac{999}{998}+\cdots+\lg\frac{3}{2}+\lg\frac{2}{1}=\lg1\,000=3$.因为$a_1=1\,023$，所以$a_{1\,000}=1\,026$.故选A.

2.如图所示，第1个图案包含3粒点子，对任意正整数n，第$(n+1)$个图案由第n个图案加上$2n$粒点子组成，则第7个图案的点子数为（　　）



A.17　　B.23

C.33　　D.45

D　**解析**：设第n个图案的点子数为a_n，由题意得$a_1=3$，$a_{n+1}-a_n=2n$，$a_n-a_{n-1}=2(n-1)=2n-2$，则$a_2-a_1=2$，$a_3-a_2=4$，$a_4-a_3=6$，…，可得$a_2-a_1+\cdots+a_n-a_{n-1}=2+\cdots+2n-2=\frac{(n-1)(2+2n-2)}{2}$，则$a_n-3=n(n-1)$，即$a_n=n^2-n+3$，所以$a_7=45$.故选D.

类型2 累乘法

例2　(1)在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_n=\frac{n-1}{n}a_{n-1}$，$n\geqslant2$，$n\in\mathbf{N}^*$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为（　　）

A.$\frac{1}{2n-1}$　　B.$\frac{2}{n(n+1)}$

C.$\frac{1}{n}$　　D.$\frac{2}{n+1}$

(2)已知S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_2=1$，$2S_n=na_n$，则a_{25}的值为（　　）

A.23　　B.24

C.25　　D.26

(1)C　**解析**：因为$a_n=\frac{n-1}{n}a_{n-1}$，$n\geqslant2$，$n\in\mathbf{N}$，则$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n}$，$n\geqslant2$，$n\in\mathbf{N}$，所以$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\cdots\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{n}$.当$n=1$时，$a_1=1$，符合上式，故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{1}{n}$.故选C.

(2)B　**解析**：当$n=1$时，$2S_1=a_1\Rightarrow2a_1=a_1\Rightarrow a_1=0$.由$S_2=a_1+a_2=1$，得$a_2=1$.由$2S_n=na_n$，得$2S_{n+1}=(n+1)a_{n+1}$，两式相减得$2S_{n+1}-2S_n=(n+1)a_{n+1}-na_n\Rightarrow2a_{n+1}=(n+1)a_{n+1}-na_n\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n-1}$，所以$a_{25}=a_2\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\cdots\cdot\frac{a_{25}}{a_{24}}=1\times\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{24}{23}=24$.故选B.

【规律方法】

累乘法适用于相邻两项商为关于n的函数型递推关系，通过累乘消去中间项求得数列通项.

【对点训练】

1.已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=2$，$S_{n+1}=2^na_n+S_n$，则$a_8=$（　　）

A.2^{28}　　B.2^{29}

C.2^{30}　　D.2^{31}

B　**解析**：由题意得$a_{n+1}=2^na_n$，即$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2^n$，所以$\frac{a_2}{a_1}=2^1$，$\frac{a_3}{a_2}=2^2$，…，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2^{n-1}$.将上面$(n-1)$个式子两端分别相乘，可得$\frac{a_n}{a_1}=2^{1+2+3+\cdots+(n-1)}$，即$a_n=2\times2^{\frac{n(n-1)}{2}}=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}$，所以$a_8=2^{29}$.故选B.

2.若数列$\{a_n\}$满足$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_n}=k$（$k$为常数），则称数列$\{a_n\}$为等比和数列，$k$为公比和.已知数列$\{a_n\}$是以3为公比和的等比和数列，其中$a_1=1$，$a_2=2$，则$a_{2\,026}=$_____.

$2^{1\,013}$　**解析**：令$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$，则$b_n+b_{n+1}=3$①.又$b_{n+1}+b_{n+2}=3$②，由②－①得$b_{n+2}-b_n=0$，即$b_{n+2}=b_n$.因为$b_1=\frac{a_2}{a_1}=2$，所以$b_2=3-b_1=1$，所以$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\begin{cases}1,n=2k,k\in\mathbf{N}^*,\\2,n=2k-1,k\in\mathbf{N}^*,\end{cases}$所以$a_{2\,026}=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_{2\,025}}{a_{2\,024}}\times\frac{a_{2\,026}}{a_{2\,025}}=1\times2\times1\times2\times\cdots\times1\times2=2^{1\,013}$.

类型3 待定系数法

例3　已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=2a_n+3$，且$a_1=1$，则$a_{10}=$（　　）

A.2 048　　B.2 045　　C.2 051　　D.2 025

B　**解析**：因为 $a_{n+1}=2a_n+3$，所以 $a_{n+1}+3=2a_n+6=2(a_n+3)$，即 $\frac{a_{n+1}+3}{a_n+3}=2$.所以数列 $\{a_n+3\}$ 是以 $a_1+3=4$ 为首项，2 为公比的等比数列，则 $a_n+3=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$，即 $a_n=2^{n+1}-3$.所以 $a_{10}=2^{10+1}-3=2\,048-3=2\,045$.故选 B.

【规律方法】

对于形如 $a_{n+1}=Aa_n+B(A\neq 0$ 且 $A\neq 1,B\neq 0)$ 的递推关系，通常采用待定系数法将其转化为 $a_{n+1}+k=A(a_n+k)$ 的形式后可求得数列通项.

【对点训练】

已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\frac{1}{2}$，且 $\frac{2}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}+1$，则 $a_{10}=$（　　）

A.$\frac{2}{15}$　　B.$\frac{1}{5}$

C.$\frac{1}{7}$　　D.$\frac{2}{13}$

D　**解析**：由 $\frac{2}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}+1$，得 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}$.又 $\frac{1}{a_1}=2$，所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 2 为首项，$\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列，所以 $\frac{1}{a_n}=2+\frac{n-1}{2}=\frac{n+3}{2}$，即 $a_n=\frac{2}{n+3}$.所以 $a_{10}=\frac{2}{13}$.故选 D.

类型4 取倒数法

例 4　已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=$_____.

$\frac{2}{n+1}$　**解析**：因为 $a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$，$a_1=1$，所以 $a_n\neq 0$，所以 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2}$，即 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}$.又 $a_1=1$，则 $\frac{1}{a_1}=1$，所以 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 1 为首项，$\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列.所以 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)\times\frac{1}{2}=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}$.所以 $a_n=\frac{2}{n+1}$.

【规律方法】

形如 $a_{n+1}=\frac{Aa_n}{Ba_n+C}$（$A,B,C$ 为常数）的递推关系，可通过两边同时取倒数的方法构造新数列求得原数列的通项.

【对点训练】

在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+1}$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为（　　）

A.$a_n=\frac{2}{4n-3}$　　B.$a_n=\frac{2}{6n-5}$

C.$a_n=\frac{2}{4n+3}$　　D.$a_n=\frac{2}{2^n-1}$

B　**解析**：在数列 $\{a_n\}$ 中，由 $a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，可得 $\frac{1}{a_{n+1}}=3+\frac{1}{a_n}$，即 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=3$，所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$，公差为 3 的等差数列，所以 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}+3(n-1)=\frac{6n-5}{2}$，所以 $a_n=\frac{2}{6n-5}$.故选 B.

微专题培优集训(一)

1.在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$，则 $a_5=$（　　）

A.32　　B.33　　C.31　　D.30

C　**解析**：已知 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$，则 $a_2=2a_1+1=3$，$a_3=2a_2+1=7$，$a_4=2a_3+1=15$，$a_5=2a_4+1=31$.故选 C.

2.已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+2}$，则 $\{a_n\}$ 的前 7 项和为（　　）

A.$\frac{7}{6}$　　B.$\frac{5}{3}$

C.$\frac{7}{4}$　　D.$\frac{12}{7}$

C　**解析**：因为 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+2}$，$a_1=1$，所以 $\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\cdots\times\frac{n}{n+2}$，则 $\frac{a_{n+1}}{a_1}=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$，即 $a_{n+1}=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$，所以 $a_n=\frac{2}{n(n+1)}(n\geqslant 2)$.又 $a_1=1$，满足上式，所以 $a_n=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $\{a_n\}$ 的前 7 项和为 $2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)=\frac{7}{4}$.故选 C.

3.数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+1}$，则 $a_6=$（　　）

A.$\frac{1}{11}$　　B.$\frac{2}{11}$　　C.$\frac{2}{13}$　　D.$\frac{1}{13}$

B　**解析**：由题意得$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+1}{a_n}=1+\frac{1}{a_n}$，即$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1$.又$a_1=2$，所以数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是以$\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2}$为首项，1为公差的等差数列，所以$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}+(n-1)\times1=\frac{2n-1}{2}$.所以$a_n=\frac{2}{2n-1}$，$a_6=\frac{2}{2\times6-1}=\frac{2}{11}$.故选B.

4.在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，则$a_n$等于　（　　）

A.$2+n\ln n$　　B.$2n+(n-1)\ln n$

C.$2n+n\ln n$　　D.$1+n+n\ln n$

C　**解析**：因为$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，所以$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\ln(n+1)-\ln n$.当$n\geqslant2$时，

$\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{1}+\left(\frac{a_2}{2}-\frac{a_1}{1}\right)+\left(\frac{a_3}{3}-\frac{a_2}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n-1}}{n-1}\right)=2+(\ln2-\ln1)+(\ln3-\ln2)+\cdots+[\ln n-\ln(n-1)]=2+\ln n$，所以$a_n=2n+n\ln n$.显然，$a_1=2$满足上式，所以$a_n=2n+n\ln n$.故选C.

5.已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，且$a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^n(n\geqslant2)$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=$_____.

$\frac{n+2}{3^n}$　**解析**：因为$a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^n(n\geqslant2)$，所以$3^na_n=3^{n-1}a_{n-1}+1(n\geqslant2)$，即$3^na_n-3^{n-1}a_{n-1}=1(n\geqslant2)$.又$a_1=1$，$3^1\cdot a_1=3$，所以数列$\{3^na_n\}$是以3为首项，1为公差的等差数列，所以$3^na_n=3+(n-1)\times1=n+2$，所以数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=\frac{n+2}{3^n}$.

6.数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{4a_n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，则$a_n=$_____.

$\frac{1}{4n-3}$　**解析**：因为$a_{n+1}=\frac{a_n}{4a_n+1}$，所以$\frac{1}{a_{n+1}}=4+\frac{1}{a_n}$，所以$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=4$.又$\frac{1}{a_1}=1$，数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是以1为首项，4为公差的等差数列，所以$\frac{1}{a_n}=1+4(n-1)=4n-3$，所以$a_n=\frac{1}{4n-3}$.

7.在数列$\{a_n\}$中，已知$a_2=\frac{1}{3}$，$a_n=a_{n+1}+2a_na_{n+1}$，则$a_n=$_____.

$\frac{1}{2n-1}$　**解析**：因为$a_n=a_{n+1}+2a_na_{n+1}$，$a_2=\frac{1}{3}$，所以令$n=1$，得$a_1=a_2+2a_1a_2$，解得$a_1=1$.对$a_n=a_{n+1}+2a_na_{n+1}$两边同时除以a_na_{n+1}，得$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$，又因为$\frac{1}{a_1}=1$，所以$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是首项为1，公差为2的等差数列，所以$\frac{1}{a_n}=1+2(n-1)=2n-1$，所以$a_n=\frac{1}{2n-1}$.

8.设数列$\{a_n\}$是首项为1的正项数列，且$(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2+a_{n+1}\cdot a_n=0$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=$_____.

$\frac{1}{n}$　**解析**：由$(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2+a_{n+1}\cdot a_n=0$，得$[(n+1)a_{n+1}-na_n](a_{n+1}+a_n)=0$.又数列$\{a_n\}$为正项数列，即$a_n>0$，$a_1=1$，

所以$(n+1)a_{n+1}-na_n=0$，即$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}$，所以$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\cdots\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{n}(n\geqslant2)$.当$n=1$时，上式也成立，所以$a_n=\frac{1}{n}$.

9.设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=4$，$2S_n=a_{n+1}+2n-4$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解：因为数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=4$，$2S_n=a_{n+1}+2n-4$，

所以当$n\geqslant2$时，$2S_{n-1}=a_n+2n-6$，

两式相减可得$2S_n-2S_{n-1}=a_{n+1}+2n-4-(a_n+2n-6)$，即$2a_n=a_{n+1}-a_n+2$，

即$a_{n+1}=3a_n-2$，可得$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$，即$\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}=3$.

当$n=1$时，$2a_1=a_2+2-4$，所以$a_2=10$，所以$\frac{a_2-1}{a_1-1}=\frac{10-1}{4-1}=3$，

所以数列$\{a_n-1\}$是以3为首项，3为公比的等比数列，

所以$a_n-1=3^n$，即$a_n=3^n+1$，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3^n+1$.

4.2　等差数列

4.2.1　等差数列的概念

第 1 课时　等差数列的概念

学习任务目标

1.理解等差数列、等差中项的概念.
2.掌握等差数列的通项公式,并能运用通项公式解决一些简单的问题.
3.能够运用等差中项解决一些简单的问题.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　等差数列、等差中项的概念

等差数列	一般地,如果一个数列从第 2 项起,每一项与它的前一项的差都等于同一个常数,那么这个数列就叫做等差数列,这个常数叫做等差数列的公差,公差通常用字母 d 表示
等差中项	由三个数 a,A,b 组成的等差数列可以看成是最简单的等差数列.这时,A 叫做 a 与 b 的等差中项,且 $2A=a+b$

知识点二　等差数列的通项公式

(1)首项为 a_1,公差为 d 的等差数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d$.

(2)第 n 项与第 $m(m\neq n)$项的关系为 $a_n=a_m+(n-m)\cdot d$,从而变形可得 $d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$.

知识点三　等差数列的函数特性

(1)由于 $a_n=a_1+(n-1)d=dn+(a_1-d)$,所以当 $d\neq0$ 时,等差数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n 是一次函数 $f(x)=dx+(a_1-d)(x\in\mathbf{R})$当 $x=n$ 时的函数值,即 $a_n=f(n)$.

(2)任给一次函数 $f(x)=kx+b(k,b$ 为常数$)$,则 $f(1)=k+b$,$f(2)=2k+b$,…,$f(n)=nk+b$,…构成一个等差数列$\{nk+b\}$,其首项为 $k+b$,公差为 k.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)如果一个数列的每一项与它的前一项的差是一个常数,那么这个数列是等差数列.　(　×　)

(2)数列 0,0,0,0,…不是等差数列.　(　×　)

(3)在等差数列中,除第 1 项和最后一项外,其余各项都是它前一项和后一项的等差中项.　(　√　)

2.在等差数列$\{a_n\}$中,首项 $a_1=5$,公差 $d=3$,则当 $a_n=2\ 024$ 时,$n=$　(　)

A.671　　B.672　　C.673　　D.674

D　**解析**:因为 $a_1=5$,$d=3$,所以 $a_n=5+(n-1)\times3=3n+2$.令 $3n+2=2\ 024$,得 $n=674$.故选 D.

3.请思考并回答下列问题:

(1)已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\begin{cases}1,n=1,\\n+1,n\geqslant2,\end{cases}$那么$\{a_n\}$是等差数列吗?为什么?

(2)数列 1,2,1,2,1,2 的相邻两项的差(大减小)都是 1,这个数列是等差数列吗?为什么?

(3)任意两个数都有等差中项吗?

(4)等差数列$\{a_n\}$一定是递增数列吗?如果不是,有哪些可能的情况?

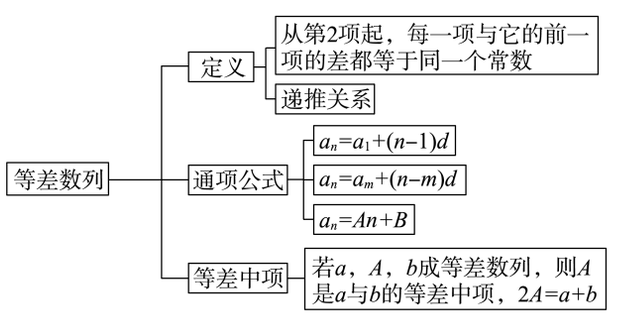
(1)**提示**:不是.该数列为 1,3,4,5,6,…,第 2 项与第 1 项的差是 2,从第 3 项起,每一项与它的前一项的差都是 1,不符合等差数列的定义.

(2)**提示**:不是.等差数列的定义中“每一项与它的前一项的差”是指“相邻两项中用后项减去前项”.

(3)**提示**:任意两个数都有等差中项.

(4)**提示**:不一定.若公差 $d>0$,则数列$\{a_n\}$为递增数列;若公差 $d<0$,则数列$\{a_n\}$为递减数列;若公差 $d=0$,则数列$\{a_n\}$为常数列.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 理解等差数列及等差中项的概念

1.（多选）下列说法正确的有　　（　　）

A.若 $a-b=b-c$，则 a,b,c 成等差数列

B.若 $a_n-a_{n-1}=n(n>1,n\in\mathbf{N}^*)$，则 $\{a_n\}$ 是等差数列

C.等差数列是相邻两项中的后项与前项之差都等于同一个常数的数列

D.等差数列的公差是该数列中任意两项的差

AC　**解析**：对于A，由 $a-b=b-c$ 及等差数列的定义，可得 a,b,c 成等差数列，A正确；对于B，n 不是常数，该数列不是等差数列，B错误；对于C，根据等差数列的定义可知，C正确；对于D，公差应为相邻两项中后项与前项之差，D错误.故选AC.

2.若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $a_n=an^2+n$，则实数 $a=$_____.

0　**解析**：因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，所以 $a_{n+1}-a_n$ 为常数，即 $[a(n+1)^2+(n+1)]-(an^2+n)=2an+a+1$ 为常数，所以 $2a=0$，解得 $a=0$.

3.若等差数列 $\{a_n\}$ 的前三项为 $1,a+1,a+3$，则实数 a 的值为_____.

2　**解析**：因为 $1,a+1,a+3$ 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前三项，所以 $2(a+1)=1+a+3$，解得 $a=2$.

【探究总结】

(1)判断一个数列是不是等差数列，要紧扣等差数列的定义，切记不可通过计算 a_2-a_1,a_3-a_2,a_4-a_3 等有限个式子的值后，根据它们的值都是同一个常数，就得出该数列为等差数列的结论（由以上3个式子的值仅可得出数列 $\{a_n\}$ 的前4项成等差数列），因为由特殊到一般得出的结论不一定正确.

(2)a,b,c 成等差数列的充要条件 $b=\dfrac{a+c}{2}$（或 $2b=a+c$）可用来进行等差数列的判断或解决有关等差中项的计算问题.如若 $\{a_n\}$ 为等差数列，则 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

任务2 掌握等差数列的通项公式

探究活动

例1　若等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=5$，$a_m=3$，则 a_{m+2} 等于　　（　　）

A.13　　B.$3-\dfrac{4}{m-1}$

C.$3-\dfrac{2}{m-1}$　　D.$5-\dfrac{2}{m-1}$

B　**解析**：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，因为 $a_1=5$，$a_m=3$，所以 $5+(m-1)d=3$，所以 $d=\dfrac{-2}{m-1}$.则 $a_{m+2}=5+(m+1)d=5-\dfrac{2(m+1)}{m-1}=3-\dfrac{4}{m-1}$.故选B.

【探究总结】

求等差数列通项公式的方法

(1)通过解方程组求得 a_1,d 的值，再利用 $a_n=a_1+(n-1)d$ 写出通项公式，这是求解这类问题的基本方法.

(2)已知等差数列中的两项 a_m 和 a_n，可用 $d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$ 直接求得公差，再利用 $a_n=a_m+(n-m)d$ 写出通项公式.

(3)抓住等差数列的通项公式的结构特点，通过 a_n 是关于 n 的一次函数，列出方程组求解.

应用迁移

1.已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_3=\dfrac{5}{4}$，$a_7=-\dfrac{7}{4}$，求 a_{15} 的值.

解：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

由 $\begin{cases}a_3=\dfrac{5}{4},\\ a_7=-\dfrac{7}{4},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a_1+2d=\dfrac{5}{4},\\ a_1+6d=-\dfrac{7}{4},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a_1=\dfrac{11}{4},\\ d=-\dfrac{3}{4}.\end{cases}$

所以 $a_{15}=a_1+(15-1)d=\dfrac{11}{4}+14\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{31}{4}$.

2.（教材P15练习题4改编）在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1+a_3+a_5=18$，$a_5+a_7=-6$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

由 $a_1+a_3+a_5=3a_3=18$，得 $a_3=6$，

由 $a_5+a_7=2a_6=-6$，得 $a_6=-3$，

故公差 $d=\dfrac{a_6-a_3}{6-3}=\dfrac{-3-6}{3}=-3$.

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_3+(n-3)d=6-3(n-3)=-3n+15$.

任务3 应用等差中项

探究活动

例2　已知$\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$成等差数列，判断$\frac{b+c}{a},\frac{a+c}{b},\frac{a+b}{c}$是否成等差数列.

解：因为$\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$成等差数列，所以$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$，

因此$2\cdot\frac{a+c}{b}-\frac{b+c}{a}-\frac{a+b}{c}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)(a+c)-\frac{b}{a}-\frac{c}{a}-\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=2-b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)=0$，

所以$\frac{b+c}{a},\frac{a+c}{b},\frac{a+b}{c}$成等差数列.

［一题多思］

思考1.在7和21之间插入3个数，使这5个数成等差数列，求插入的3个数.

提示：设这个等差数列为$\{a_n\}$，

则$a_3=\frac{a_1+a_5}{2}=\frac{7+21}{2}=14$，

$a_2=\frac{a_1+a_3}{2}=\frac{7+14}{2}=\frac{21}{2}$，

$a_4=\frac{a_3+a_5}{2}=\frac{14+21}{2}=\frac{35}{2}$，

所以插入的3个数依次为$\frac{21}{2},14,\frac{35}{2}$.

思考2.若m和$2n$的等差中项为4，$2m$和n的等差中项为5，求m和n的等差中项.

提示：由m和$2n$的等差中项为4，得$m+2n=8$.

又由$2m$和n的等差中项为5，得$2m+n=10$.

两式相加，得$m+n=6$.

所以m和n的等差中项为$\frac{m+n}{2}=3$.

【探究总结】

等差中项的应用

(1)由等差数列的定义知$a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，即$2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，从而由等差中项的定义可知，等差数列从第2项起的每一项都是它前一项与后一项的等差中项.

(2)在设等差数列的项时，可利用上述性质.

应用迁移

1.已知a和$2b$的等差中项是5，$3a$和$4b$的等差中项是7，求$2a$和$3b$的等差中项.

解：因为a和$2b$的等差中项是5，所以$a+2b=10$①.又因为$3a$和$4b$的等差中项是7，所以$3a+4b=14$②.

由①②解得$\begin{cases}a=-6,\\b=8.\end{cases}$

所以$2a$和$3b$的等差中项为$\frac{2\times(-6)+3\times 8}{2}=6$.

2.已知数列$\{x_n\}$的首项为$x_1=3$，通项公式为$x_n=2^np+nq(n\in\mathbf{N}^*,p,q$为常数$)$，且$x_1,x_4,x_5$成等差数列，求$p,q$的值.

解：由$x_1=3$，得$2p+q=3$①.

又$x_4=2^4p+4q=16p+4q$，$x_5=2^5p+5q=32p+5q$，且$x_1+x_5=2x_4$，

所以$3+32p+5q=32p+8q$，解得$q=1$②.

将②代入①，得$p=1$.

故$p=1,q=1$.

课后素养评价(三)

基础落实

1.已知$a=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，$b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，则$a,b$的等差中项为　(　　)

A.$\sqrt{2}$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C.$\sqrt{3}$　　D.± 1

C　**解析**：由$a=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，所以$a,b$的等差中项为$\frac{a+b}{2}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}=\sqrt{3}$.故选C.

2.在数列$\{a_n\}$中，若$a_1=3$，$a_{n+1}-a_n=2$，则$a_5=$　(　　)

A.9　　B.13　　C.10　　D.11

D　**解析**：在数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$a_{n+1}-a_n=2$，所以数列$\{a_n\}$是公差为2的等差数列，则$a_5=3+2\times 4=11$.故选D.

3.(多选)下列数列是等差数列的为　(　　)

A.1，4，7，10

B.lg 2，lg 4，lg 8，lg 16

C.$2^5,2^4,2^3,2^2$

D.10，8，6，4，2

ABD　**解析**：A，B，D均满足等差数列的定义，是等差数列；

C中，因为$2^4-2^5\neq2^3-2^4\neq2^2-2^3$，不满足等差数列的定义，所以不是等差数列.故选ABD.

4.在等差数列$\{a_n\}$中，$2a_3+5a_{10}=70$，则a_8的值为（　　）

A.5　　B.10

C.14　　D.35

B　**解析：**设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，因为$2a_3+5a_{10}=70$，所以$2(a_1+2d)+5(a_1+9d)=70$，化简得$7a_1+49d=70$，即$a_1+7d=10$，所以$a_8=a_1+7d=10$.故选B.

5.已知$\{a_n\}$是公差不为0的等差数列，若$a_m=a_{16}-a_5+a_3$，则$m=$（　　）

A.12　　B.13

C.14　　D.15

C　**解析：**设等差数列$\{a_n\}$的公差为$d(d\neq0)$，由题意得$a_1+(m-1)d=a_1+15d-(a_1+4d)+(a_1+2d)\Rightarrow m-1=13\Rightarrow m=14$.故选C.

6.在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=8$，$a_5=2$.若在相邻两项之间各插入一个数，使之成为一个新的等差数列，则新等差数列的公差为（　　）

A.$\frac{3}{4}$　　B.$-\frac{3}{4}$　　C.$-\frac{6}{7}$　　D.-1

B　**解析：**由题意，在新等差数列中，首项为8，第9项为2，所以新公差$d'=\frac{2-8}{9-1}=\frac{-6}{8}=-\frac{3}{4}$.故选B.

7.已知等差数列$\{a_n\}$：40，37，34，…，则该数列的第一个负数项是（　　）

A.第13项　　B.第14项

C.第15项　　D.第16项

C　**解析：**由$37-40=-3$可知等差数列$\{a_n\}$的公差为-3，又首项为40，则通项公式为$a_n=40+(n-1)\cdot(-3)=43-3n$.令$43-3n<0$，解得$n>\frac{43}{3}$，故第一个负数项是第15项.故选C.

8.（多选）下列命题正确的有（　　）

A.给出数列的有限项就可以唯一确定这个数列的通项公式

B.若等差数列$\{a_n\}$的公差$d>0$，则$\{a_n\}$是递增数列

C.若a，b，c成等差数列，则$\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$可能成等差数列

D.若数列$\{a_n\}$是等差数列，则数列$\{a_n+2a_{n+1}\}$也是等差数列

BCD　**解析：**A选项中，给出数列的有限项不一定可以唯一确定通项公式；B选项中，由等差数列的函数特性，知$d>0$时$\{a_n\}$必是递增数列；C选项中，$a=b=c=1$时，$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=1$，此时$\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$成等差数列；D选项中，设数列$\{a_n\}$的公差为$d$，所以$a_n+2a_{n+1}=a_1+(n-1)d+2a_1+2nd=3a_1+(3n-1)d$，$\{a_n+2a_{n+1}\}$也是等差数列.故选BCD.

9.已知等差数列$\{a_n\}$.

(1)若$a_5=4$，$a_{10}=-9$，求a_{20}；

(2)若$a_5-a_3=12$，$a_{12}=20$，求a_1和公差d；

(3)若$a_3a_4=-7$，$a_4-a_3=8$，求a_7.

解：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

(1)由$a_5=4$，$a_{10}=-9$，

得$\begin{cases}a_1+4d=4,\\a_1+9d=-9,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=\frac{72}{5},\\d=-\frac{13}{5}.\end{cases}$

所以$a_{20}=a_1+19d=-35$.

(2)因为$a_5-a_3=12$，所以公差$d=6$.又$a_{12}=20$，所以$a_1+11d=20$，解得$a_1=-46$.所以$a_1=-46$，$d=6$.

(3)因为$a_4-a_3=8$，所以$d=8$.

又因为$a_3a_4=-7$，所以$a_3(a_3+8)=-7$，解得$a_3=-1$或$a_3=-7$.

当$a_3=-1$时，$a_7=a_3+4d=31$；

当$a_3=-7$时，$a_7=a_3+4d=25$.

综上，a_7的值为31或25.

能力提升

1.若等差数列$\{a_n\}$的首项为70，公差为-9，则这个数列中绝对值最小的一项为（　　）

A.a_8　　B.a_9　　C.a_{10}　　D.a_{11}

B　**解析：**由已知得$a_n=a_1+(n-1)d=70+(n-1)\times(-9)=79-9n$，

所以$a_8=7$，$a_9=-2$，$a_{10}=-11$，故绝对值最小的一项为a_9.故选B.

2.已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且满足$a_1=1$，$\frac{1}{a_n^2}-\frac{1}{a_{n-1}^2}=1(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$，则$a_{1\,024}=$（　　）

A.$\frac{\sqrt{2}}{16}$　　B.$\frac{1}{16}$　　C.$\frac{\sqrt{2}}{32}$　　D.$\frac{1}{32}$

D　**解析：**因为数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且满足

$a_1=1,\frac{1}{a_n^2}-\frac{1}{a_{n-1}^2}=1(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，

所以数列$\left\{\frac{1}{a_n^2}\right\}$是首项为1，公差为1的等差数列.

所以$\frac{1}{a_n^2}=1+(n-1)=n$，解得$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$.

所以$a_{1\,024}=\frac{1}{\sqrt{1\,024}}=\frac{1}{32}$.故选D.

3.已知$\triangle ABC$内有2 024个点，其中任意三点不共线，把这2 024个点与$\triangle ABC$的三个顶点共2 027个点作为顶点构造互不相叠的小三角形，则一共可构造的小三角形的个数为_____.

4 049　**解析**：设$\triangle ABC$内有n个点时，小三角形有a_n个.

现增加一个点，则此点必落入某一个小三角形内，且此点与小三角形三个顶点的连线把此小三角形分成三个小三角形，故三角形总数多出了两个，即$a_{n+1}=a_n+2$.

因此数列$\{a_n\}$是以3为首项，2为公差的等差数列，所以$a_n=3+(n-1)\times 2=2n+1$，于是$a_{2\,024}=2\times 2\,024+1=4\,049$.

4.在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，对任意$m,n\in\mathbf{N}^*$，有$a_{m+n}=a_m+a_n$，若$a_ka_{k+1}=440$，则正整数$k=$_____.

10　**解析**：由$a_1=2,a_{m+n}=a_m+a_n$，令$m=1$，则$a_{n+1}-a_n=a_1=2$，

所以数列$\{a_n\}$是以2为首项，2为公差的等差数列，即$a_n=2+(n-1)\times 2=2n$.

又k为正整数，所以$a_ka_{k+1}=2k\times 2(k+1)=440$，即$k(k+1)=110$，解得$k=10$或$k=-11$(舍去).

5.已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2,a_{n+1}-2a_n=2^{n+1}$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为_____.

$a_n=n\cdot 2^n$　**解析**：由$a_{n+1}-2a_n=2^{n+1}$得$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=1$，且$\frac{a_1}{2}=1$，故$\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$为等差数列，首项为1，公差为1，

所以$\frac{a_n}{2^n}=1+(n-1)=n$，所以$a_n=n\cdot 2^n$.

6.数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_2=2,a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$.

(1)求a_3,a_4的值；

(2)设$b_n=a_{n+1}-a_n$，证明：$\{b_n\}$是等差数列.

(1)**解**：数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_2=2,a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$，

所以$a_3=2a_2-a_1+2=2\times 2-1+2=5,a_4=2a_3-a_2+2=2\times 5-2+2=10$.

(2)**证明**：因为$b_{n+1}-b_n=(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=2$，

所以$\{b_n\}$为等差数列.

自我超越

1.《中国共产党党旗党徽制作和使用的若干规定》指出，中国共产党党旗为旗面缀有金黄色党徽图案的红旗，通用规格有五种.这五种规格党旗的长a_1，a_2,a_3,a_4,a_5(单位：cm)成等差数列，对应的宽为b_1,b_2,b_3,b_4,b_5(单位：cm)，且党旗的长与宽之比为定值.已知$a_1=288,a_5=96,b_1=192$，则$b_3=$　(　　)

A.64　　B.96

C.108　　D.128

D　**解析**：由题意，知五种规格党旗的长a_1,a_2,a_3,a_4,a_5(单位：cm)成等差数列，设公差为d，因为$a_1=288,a_5=96$，可得$d=\frac{a_5-a_1}{5-1}=\frac{96-288}{4}=-48$，可得$a_3=288+(3-1)\times(-48)=192$.又党旗的长与宽之比为定值，且$b_1=192$，所以$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_3}{b_3}$，所以$b_3=\frac{a_3\cdot b_1}{a_1}=\frac{192\times 192}{288}=128$.故选D.

2.(多选)设d为正项等差数列$\{a_n\}$的公差.若$d>0$，$a_3=2$，则　(　　)

A.$a_2\cdot a_4<4$　　B.$a_2^2+a_4\geqslant\frac{15}{4}$

C.$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_5}>1$　　D.$a_1\cdot a_5>a_2\cdot a_4$

ABC　**解析**：由题意知$\begin{cases}a_1=2-2d>0,\\d>0,\end{cases}$解得$0<d<1$.

$a_2\cdot a_4=(2-d)\cdot(2+d)=4-d^2<4$，A正确；

$a_2^2+a_4=(2-d)^2+(2+d)=d^2-3d+6=\left(d-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>\frac{15}{4}$，B正确；

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_5}=\frac{1}{2-2d}+\frac{1}{2+2d}=\frac{1}{1-d^2}>1$，C正确；

$a_1\cdot a_5-a_2\cdot a_4=(2-2d)\cdot(2+2d)-(2-d)\cdot(2+d)=-3d^2<0$，所以$a_1\cdot a_5<a_2\cdot a_4$，D错误.

故选ABC.

第2课时　等差数列的性质及应用

学习任务目标

1.掌握等差数列的判定和证明方法.
2.能够根据等差数列的定义和通项公式推出等差数列的重要性质，并运用性质解决有关问题.
3.能够运用等差数列的知识解决简单的实际问题.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点　等差数列的性质

1.(1)若$\{a_n\}$，$\{b_n\}$分别是公差为d_1，d_2的等差数列，则数列$\{pa_n+qb_n\}$(p，$q\in\mathbf{R}$)是公差为$\underline{pd_1+qd_2}$的等差数列.

(2)若$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，则a_k，a_{k+m}，a_{k+2m}，…(k，$m\in\mathbf{N}^*$)是公差为$\underline{md}$的等差数列.

2.(1)等差数列的项的对称性：在有穷等差数列中，与首末两项“等距离”的两项之和等于首项与末项的和，即$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots$.

(2)在等差数列$\{a_n\}$中，若$m+n=p+q$(m，n，p，$q\in\mathbf{N}^*$)，则$\underline{a_m+a_n=a_p+a_q}$.特别地，若$m+n=2k$($m$，$n$，$k\in\mathbf{N}^*$)，则$\underline{a_m+a_n=2a_k}$.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_m+a_n=a_p+a_q$，则$m+n=p+q$.　(　×　)

(2)若$\{a_n\}$是等差数列，则数列$\{2a_n+n\}$也是等差数列.　(　　)

√　**提示**：设$\{a_n\}$的公差为d(d为常数)，则$2a_{n+1}+(n+1)-(2a_n+n)=2(a_{n+1}-a_n)+1=2d+1$，为常数，因此$\{2a_n+n\}$是等差数列.

(3)在等差数列$\{a_n\}$中，若$m+n+p=3t$(m，n，p，$t\in\mathbf{N}^*$)，则$a_m+a_n+a_p=3a_t$.　(　√　)

2.已知等差数列$\{a_n\}$，$a_7+a_{19}=19$，$a_9=1$，则a_{17}等于(　　)

A.20　　B.18　　C.15　　D.17

B　**解析**：因为$a_7+a_{19}=a_9+a_{17}=19$，且$a_9=1$，所以$a_{17}=19-a_9=18$.

3.请思考并回答下列问题：

(1)已知等差数列中任意两项，是否可以直接求公差？

(2)已知等差数列$\{a_n\}$，取其奇数项组成一个新数列，则此数列是否为等差数列？若取偶数项呢？

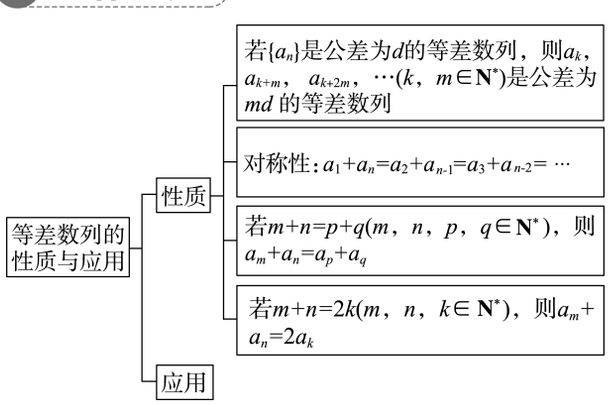
(3)若数列a_1，a_3，a_5，…和a_2，a_4，a_6，…都是公差为d的等差数列，则a_1，a_2，a_3，…是否为等差数列？

(1)**提示**：可以.因为等差数列$\{a_n\}$的图象是均匀分布在一条直线上的孤立的点，任选其中两点(n，a_n)，(m，a_m)($m\neq n$)，类比直线的斜率公式，可知公差$d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$.

(2)**提示**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，其奇数项为a_1，a_3，a_5，…，是公差为$2d$的等差数列.同样，偶数项也是公差为$2d$的等差数列.从等差数列中，每隔一定的距离抽取一项，组成的数列仍为等差数列.

(3)**提示**：不一定.例如：1，2，3，…和10，11，12，…都是公差为1的等差数列，但是1，10，2，11，3，12，…不是等差数列.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 理解等差数列的性质

探究活动

例1　(1)已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=70$，求a_1+a_9；

(2)已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都是等差数列，且$a_1=2$，$b_1=-3$，$a_7-b_7=17$，求$a_{19}-b_{19}$.

解：(1)由等差数列的性质，得$a_3+a_7=a_4+a_6=2a_5=a_1+a_9$，所以$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=5a_5=70$，得

$a_5=14$，故 $a_1+a_9=2a_5=28$.

(2)设等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的公差分别为 d_1，d_2.

由 $a_7-b_7=2+6d_1-(-3+6d_2)=5+6(d_1-d_2)=17$，得 $d_1-d_2=2$.

所以 $a_{19}-b_{19}=2+18d_1-(-3+18d_2)=5+18(d_1-d_2)=5+18\times2=41$.

【探究总结】

解决等差数列基本运算问题的两种方法

(1)利用基本量运算，借助于 a_1，d 建立方程组进行运算，这是最基本的方法.

(2)运用等差数列$\{a_n\}$的性质：若 $m+n=p+q=2\omega$ $(m,n,p,q,\omega\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_m+a_n=a_p+a_q=2a_\omega$.

应用迁移

1.若数列$\{a_n\}$是等差数列，且 $a_1+a_5+a_9=6$，则 $\tan\dfrac{\pi}{3a_5}=$　　(　　)

A.1　　B.-1　　C.$\sqrt{3}$　　D.$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

D　**解析**：因为$\{a_n\}$是等差数列，所以 $a_1+a_9=2a_5$，即 $a_1+a_5+a_9=3a_5=6$，解得 $a_5=2$，故 $\tan\dfrac{\pi}{3a_5}=\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.故选 D.

2.在等差数列$\{a_n\}$中，若 $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=80$，则 $a_7-\dfrac{1}{2}a_8$ 的值为　　(　　)

A.4　　B.6　　C.8　　D.10

C　**解析**：由 $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=5a_6=80$，所以 $a_6=16$，所以 $a_7-\dfrac{1}{2}a_8=\dfrac{1}{2}(2a_7-a_8)=\dfrac{1}{2}(a_6+a_8-a_8)=\dfrac{1}{2}a_6=8$.故选 C.

任务2　掌握等差数列的判定与证明

探究活动

例 2　已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，且 $na_{n+1}-(n+1)a_n=2n^2+2n$.

(1)求 a_2，a_3；

(2)证明数列$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$是等差数列，并求$\{a_n\}$的通项公式.

(1)**解**：由已知，得 $a_2-2a_1=4$，则 $a_2=2a_1+4$.

又 $a_1=1$，所以 $a_2=6$.由 $2a_3-3a_2=12$，

得 $2a_3=12+3a_2$，所以 $a_3=15$.

(2)**证明**：由 $na_{n+1}-(n+1)a_n=2n^2+2n$，

得 $\dfrac{na_{n+1}-(n+1)a_n}{n(n+1)}=2$，即 $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=2$.

所以数列$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$是首项为 1，公差为 $d=2$ 的等差数列.

所以 $\dfrac{a_n}{n}=1+2(n-1)=2n-1$.所以 $a_n=2n^2-n$.

[一题多思]

思考 1.用定义法证明数列$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$是等差数列时，需要证明一个什么样的等式成立？

提示：需要证明 $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=$常数.

思考 2.将数列$\{a_n\}$满足的条件改为“$a_1=1$，$a_2=3$，且 $2na_n=(n-1)a_{n-1}+(n+1)a_{n+1}(n\geqslant2)$”，能判断哪个数列是等差数列？如何进一步求数列$\{a_n\}$的通项公式？

提示：能判断数列$\{na_n\}$是等差数列.

因为 $2na_n=(n-1)a_{n-1}+(n+1)a_{n+1}(n\geqslant2)$，

所以 $na_n-(n-1)a_{n-1}=(n+1)a_{n+1}-na_n(n\geqslant2)$.

故数列$\{(n+1)a_{n+1}-na_n\}$为常数列，且 $2a_2-a_1=5$，

所以 $(n+1)a_{n+1}-na_n=5$，

因此数列$\{na_n\}$是以 1 为首项，5 为公差的等差数列.

所以 $na_n=1+5(n-1)=5n-4$，因此 $a_n=\dfrac{5n-4}{n}$.

【探究总结】

等差数列的判定方法

(1)定义法：$a_{n+1}-a_n=d$(常数)$(n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列；$a_n-a_{n-1}=d$(常数)$(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列.

(2)等差中项法：证明对任意正整数 n 都有 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$.

(3)通项公式法：得出 $a_n=pn+q$ 后，再根据定义判定数列$\{a_n\}$为等差数列.

应用迁移

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+1}$，若 $b_n=\dfrac{1}{a_n}$.

(1)求证：$\{b_n\}$是等差数列；

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

(1)**证明**：由 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+1}$，得 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+1}{a_n}=1+\dfrac{1}{a_n}$，

则 $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=1$，即 $b_{n+1}-b_n=1$.又 $b_1=\dfrac{1}{a_1}=1$，

所以数列$\{b_n\}$是以 1 为首项，1 为公差的等差数列.

(2)**解**：由(1)得，$b_n=\dfrac{1}{a_n}=1+(n-1)\times1=n$，则 $a_n=\dfrac{1}{n}$.

任务3 学习等差数列的实际应用

探究活动

例3　(1)某公司经销一种产品，第1年可获利200万元.从第2年起，由于市场竞争等方面的原因，其利润每年比上一年减少20万元.按照这一规律，如果公司不引进新产品，也不调整经营策略，那么从哪一年起，该公司经销这一产品将会亏损？

(2)通常情况下，从地面到10 km高空，高度每增加1 km，气温就下降某一个固定数值.已知1 km高度的气温是8.5 ℃，5 km高度的气温是－17.5 ℃，求2 km，4 km，8 km高度的气温.

解：(1)设第$n(n\in\mathbf{N}^*)$年的利润为a_n万元，

则$a_1=200$，$a_n-a_{n-1}=-20(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$.

所以每年的利润可构成一个等差数列$\{a_n\}$，且公差$d=-20$.

所以$a_n=a_1+(n-1)d=200+(n-1)\times(-20)=220-20n$.

若$a_n<0$，则该公司经销这一产品将会亏损.

由$a_n=220-20n<0$，得$n>11$.

故从第12年起，该公司经销这一产品将会亏损.

(2)由题易知，自下而上各高度的气温构成等差数列，设为$\{a_n\}$，公差为d，则$a_1=8.5$，$a_5=-17.5$.

由$a_5=a_1+4d=8.5+4d=-17.5$，解得$d=-6.5$.

所以$a_n=15-6.5n(1\leqslant n\leqslant 10,n\in\mathbf{N}^*)$.

所以$a_2=2$，$a_4=-11$，$a_8=-37$，

即2 km，4 km，8 km高度的气温分别为2 ℃，－11 ℃，－37 ℃.

【探究总结】

解答等差数列实际应用问题的基本步骤

(1)审题，即仔细阅读材料，认真理解题意；

(2)建模，即将已知条件翻译成数学(数列)语言，将实际问题转化成数学问题；

(3)判型，即判断该数列是否为等差数列；

(4)求解，即求出该问题的数学解；

(5)还原，即将所得数学解还原到实际问题中.

应用迁移

梯子的最高一级宽33 cm，最低一级宽110 cm，中间还有10级，各级的宽度成等差数列，计算中间各级的宽度.

解：用数列$\{a_n\}$表示梯子自上而下各级宽度所构成的等差数列，其公差设为d.

由已知，得$a_1=33$，$a_{12}=110$，$n=12$.

则$a_{12}=a_1+(12-1)d$，

即$110=33+11d$，解得$d=7$.

因此，$a_2=40$，$a_3=47$，$a_4=54$，$a_5=61$，$a_6=68$，$a_7=75$，$a_8=82$，$a_9=89$，$a_{10}=96$，$a_{11}=103$.

所以，梯子中间各级的宽度从上而下依次是40 cm，47 cm，54 cm，61 cm，68 cm，75 cm，82 cm，89 cm，96 cm，103 cm.

任务4 解决等差数列的综合问题

探究活动

例4　(1)已知递减等差数列$\{a_n\}$前三项的和为18，前三项的积为66，求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)已知两个等差数列2，5，8，…，197与2，7，12，…，197，求它们的相同项构成的数列的通项公式及相同项的个数.

解：(1)(方法一)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

依题意，得$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=18,\\ a_1a_2a_3=66,\end{cases}$

所以$\begin{cases}3a_1+3d=18,\\ a_1(a_1+d)(a_1+2d)=66,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=11,\\ d=-5\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=1,\\ d=5.\end{cases}$

因为数列$\{a_n\}$是递减等差数列，所以$d<0$.

故$a_1=11$，$d=-5$.

所以$a_n=11+(n-1)\times(-5)=-5n+16$，

即等差数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=-5n+16$.

(方法二)设等差数列$\{a_n\}$的前三项依次为$a-d$，a，$a+d$，则$\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=18,\\ a(a-d)(a+d)=66,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=6,\\ d=\pm 5.\end{cases}$

又因为数列$\{a_n\}$是递减等差数列，所以$d<0$，

所以$a=6$，$d=-5$.

所以等差数列$\{a_n\}$的首项为11，公差为－5.

所以$a_n=11+(n-1)\times(-5)=-5n+16$.

(2)记数列2，5，8，…，197为$\{a_n\}$，由已知得，数列$\{a_n\}$的首项为2，公差为3，

所以通项公式为$a_n=3n-1(1\leqslant n\leqslant 66)$.

记数列2，7，12，…，197为$\{b_m\}$，由已知得，数列$\{b_m\}$的首项为2，公差为5，则$b_m=5m-3(1\leqslant m\leqslant 40)$.

(方法一)若数列$\{a_n\}$的第n项与数列$\{b_m\}$的第m项相同，

即$a_n=b_m$，则$3n-1=5m-3$，

所以$n=\dfrac{5m-2}{3}=m+\dfrac{2(m-1)}{3}$.

又$n\in\mathbf{N}^*$，$1\leqslant m\leqslant 40$，所以$m-1=3k$，即$m=3k+1$$(k\in\mathbf{N})$.

所以$m=1,4,7,\cdots,40$.

所以两个数列的相同项为2，17，32，…，197.

记两个数列的相同项构成的数列为$\{c_n\}$，则$\{c_n\}$的通

项公式为 $c_n=15n-13$，共有 $\frac{40-1}{3}+1=14$（个）相同项.

（方法二）设它们的相同项构成的数列为 $\{c_n\}$，则 $c_1=2$.

因为数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 为等差数列，所以数列 $\{c_n\}$ 仍为等差数列，且公差 $d=15$.

所以 $c_n=c_1+(n-1)d=2+(n-1)\times15=15n-13$.

令 $2\leqslant15n-13\leqslant197$，得 $1\leqslant n\leqslant14$，所以两数列共有 14 个相同项.

【探究总结】

等差数列的项的常见设法

(1)通项法

设数列的通项公式，即设 $a_n=a_1+(n-1)d$.

(2)对称项法

①当等差数列 $\{a_n\}$ 的项数为奇数时，可设中间一项为 a，再以公差为 d 向两边分别设项：…，$a-2d$，$a-d$，a，$a+d$，$a+2d$，…；

②当等差数列 $\{a_n\}$ 的项数为偶数时，可设中间两项分别为 $a-d$，$a+d$，再以公差为 $2d$ 向两边分别设项：…，$a-3d$，$a-d$，$a+d$，$a+3d$，….

对称项法的优点：若有 n 个数构成等差数列，利用对称项法设出这个数列，则其各项和为 na.

应用迁移

已知四个数成等差数列，它们的和为 26，中间两项的积为 40，求这四个数.

解：设这四个数分别为 $a-3d$，$a-d$，$a+d$，$a+3d$.

根据题意，得

$$\begin{cases}(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=26,\\(a-d)(a+d)=40,\end{cases}$$

化简，得 $\begin{cases}4a=26,\\a^2-d^2=40,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{13}{2},\\d=\pm\frac{3}{2}.\end{cases}$

所以这四个数分别为 2，5，8，11 或 11，8，5，2.

课后素养评价（四）

基础落实

1. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_5+a_9=12$，$n\in\mathbf{N}^*$，则 $a_5=$（　　）

A.2　　B.4

C.5　　D.6

B　**解析**：已知等差数列 $\{a_n\}$，则 $a_1+a_5+a_9=3a_5=12$，可得 $a_5=4$.故选 B.

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_4+\frac{1}{2}a_7+a_{10}=10$，则 $a_3+a_{11}=$（　　）

A.2　　B.4

C.6　　D.8

D　**解析**：由等差数列的性质可知，$a_4+a_{10}=2a_7$，所以 $2a_7+\frac{1}{2}a_7=10$，解得 $a_7=4$，所以 $a_3+a_{11}=2a_7=8$.

故选 D.

3. 在 a 和 b 两数之间插入 n 个数，使它们与 a，b 组成等差数列，则该数列的公差为（　　）

A.$\frac{b-a}{n}$　　B.$\frac{b-a}{n+1}$

C.$\frac{a-b}{n+1}$　　D.$\frac{b-a}{n+2}$

B　**解析**：在 a 和 b 两数之间插入 n 个数，使它们与 a，b 组成等差数列，则这个数列共有 $(n+2)$ 项.设该数列的公差为 d，则 $d=\frac{b-a}{(n+2)-1}=\frac{b-a}{n+1}$.故选 B.

4.（多选）在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=3$，$a_1+a_2+a_3=21$，公差为 d，则（　　）

A.公差 $d=-4$

B.$a_2=7$

C.数列 $\{a_n\}$ 为递增数列

D.$a_3+a_4+a_5=84$

BC　**解析**：在等差数列 $\{a_n\}$ 中，因为 $a_1+a_2+a_3=21$，所以 $3a_2=21$，所以 $a_2=7$.因为 $a_1=3$，所以 $d=7-3=4>0$，

所以数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，$a_4=a_2+2d=15$，所以 $a_3+a_4+a_5=3a_4=45$.故选 BC.

5.（传统文化）《九章算术》是我国古代的数学名著，书中有如下问题：“今有五人分五钱，令上二人所得与下三人等.问各得几何.”其意思为，已知 A，B，C，D，E 五人分 5 钱，A，B 两人所得与 C，D，E 三人所得相同，且 A，B，C，D，E 每人所得成等差数列，问五人各得多少钱.在这个问题中，E 所得为（　　）

A.$\frac{2}{3}$ 钱　　B.$\frac{4}{3}$ 钱

C.$\frac{5}{6}$ 钱　　D.$\frac{3}{2}$ 钱

A　**解析**：由题意，设 A 所得为 $a-4d$，B 所得为 $a-3d$，C 所得为 $a-2d$，D 所得为 $a-d$，E 所得为

a，则$\begin{cases}5a-10d=5,\\2a-7d=3a-3d,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\dfrac{2}{3},\\d=-\dfrac{1}{6}.\end{cases}$故E所得为$\dfrac{2}{3}$钱.故选A.

6.设等差数列$\{a_n\}$满足$a_3+a_7=20$，$a_8=4$，则$\{a_n\}$的首项$a_1=$_____.

18　**解析：**设等差数列的公差为d，由题意得$\begin{cases}a_3+a_7=2a_5=20,\\a_8=a_5+3d=4,\end{cases}$则$\begin{cases}a_5=10,\\d=-2,\end{cases}$所以$a_1=a_5-4d=18$.

7.已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+a_{n-1}=2a_n(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，且$a_2=5$，$a_5=13$，则$a_8=$_____.

21　**解析：**由$a_{n+1}+a_{n-1}=2a_n(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，知数列$\{a_n\}$是等差数列.

由等差数列的性质，得$a_2+a_8=2a_5$，所以$a_8=2a_5-a_2=2\times 13-5=21$.

8.已知在递增的等差数列$\{a_n\}$中，$a_3a_7=55$，$a_4+a_6=16$.

(1)求a_3和a_7；

(2)求$\{a_n\}$的通项公式.

解：(1)因为$a_3+a_7=a_4+a_6=16$，所以$\begin{cases}a_3a_7=55,\\a_3+a_7=16,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_3=5,\\a_7=11\end{cases}$或$\begin{cases}a_3=11,\\a_7=5.\end{cases}$

又因为数列$\{a_n\}$为递增数列，所以$a_3=5$，$a_7=11$.

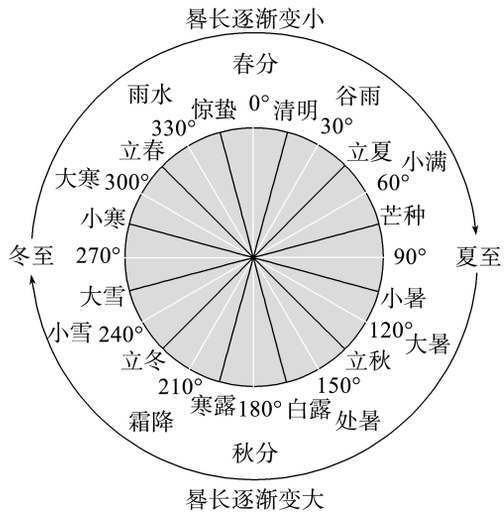
(2)设数列$\{a_n\}$的公差为$d(d>0)$，

由$a_3=5$，$a_7=11$，可得$\begin{cases}a_1+2d=5,\\a_1+6d=11,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=2,\\d=\dfrac{3}{2},\end{cases}$

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_1+(n-1)d=\dfrac{3}{2}n+\dfrac{1}{2}$.

能力提升

1.我国古代天文学和数学著作《周髀算经》中记载：一年有二十四个节气，每个节气的晷长损益相同（晷是按照日影测定时刻的仪器，晷长即为所测量影子的长度）.二十四节气及晷长变化如图所示，相邻两个节气晷长减少或增加的量相同，周而复始.已知雨水的晷长为9.5尺，立冬的晷长为10.5尺，则冬至的晷长为　（　　）



A.11.5尺　　B.13.5尺

C.12.5尺　　D.14.5尺

B　**解析：**设相邻两个节气晷长减少或增加的量为$d(d>0)$，则立冬到冬至晷长增加$3d$，冬至到雨水晷长减少$4d$.设冬至的晷长为x尺，则$\begin{cases}x-4d=9.5,\\10.5+3d=x,\end{cases}$解得$\begin{cases}d=1,\\x=13.5.\end{cases}$故选B.

2.(多选)已知点$(n,a_n)(n\in\mathbf{N}^*)$都在直线$3x-y-24=0$上，那么在数列$\{a_n\}$中，下列说法错误的有　（　　）

A.$a_7+a_9>0$　　B.$a_7+a_9<0$

C.$a_7+a_9=0$　　D.$a_7\cdot a_9=0$

ABD　**解析：**因为点$(n,a_n)(n\in\mathbf{N}^*)$都在直线$3x-y-24=0$上，所以$3n-a_n-24=0$，所以$a_n=3n-24$，所以数列$\{a_n\}$为等差数列，且$a_8=0$，$a_7=-3$，$a_9=3$.所以由等差数列的性质可得$a_7+a_9=2a_8=0$，且$a_7\cdot a_9=-9\neq 0$.故选ABD.

3.已知公差不为0的等差数列$\{a_n\}$满足$a_m+a_p=2a_5$，则$\dfrac{4}{m+2}+\dfrac{1}{p}$的最小值为　（　　）

A.1　　B.$\dfrac{5}{4}$　　C.$\dfrac{3}{4}$　　D.2

C　**解析：**根据等差数列的性质可得$m+p=10$，则$(m+2)+p=12$，

所以$\dfrac{4}{m+2}+\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{4}{m+2}+\dfrac{1}{p}\right)(m+2+p)=\dfrac{1}{12}\left(5+\dfrac{4p}{m+2}+\dfrac{m+2}{p}\right)\geqslant\dfrac{1}{12}\left(5+2\sqrt{\dfrac{4p}{m+2}\cdot\dfrac{m+2}{p}}\right)=\dfrac{3}{4}$.当且仅当$\dfrac{4p}{m+2}=\dfrac{m+2}{p}$，即$p=4$，$m=6$时，等号成立.故选C.

4.（多选）设正项等差数列$\{a_n\}$满足$(a_1+a_{10})^2=2a_2a_9+20$，则（　　）

A.a_2a_9的最大值为10

B.a_2+a_9的最大值为$2\sqrt{10}$

C.$\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_9^2}$的最大值为$\frac{1}{5}$

D.$a_2^4+a_9^4$的最小值为200

ABD　**解析**：因为正项等差数列$\{a_n\}$满足$(a_1+a_{10})^2=2a_2a_9+20$，

所以$(a_2+a_9)^2=2a_2a_9+20$，即$a_2^2+a_9^2=20$.

对于A，$a_2a_9\leqslant\frac{a_2^2+a_9^2}{2}=\frac{20}{2}=10$，当且仅当$a_2=a_9=\sqrt{10}$时，等号成立，故选项A正确；

对于B，由于$\left(\frac{a_2+a_9}{2}\right)^2\leqslant\frac{a_2^2+a_9^2}{2}=10$，所以$\frac{a_2+a_9}{2}\leqslant\sqrt{10}$，$a_2+a_9\leqslant2\sqrt{10}$，当且仅当$a_2=a_9=\sqrt{10}$时，等号成立，故选项B正确；

对于C，$\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_9^2}=\frac{a_2^2+a_9^2}{a_2^2a_9^2}=\frac{20}{a_2^2a_9^2}\geqslant\frac{20}{\left(\frac{a_2^2+a_9^2}{2}\right)^2}=\frac{20}{10^2}=\frac{1}{5}$，当且仅当$a_2=a_9=\sqrt{10}$时，等号成立，所以$\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_9^2}$的最小值为$\frac{1}{5}$，故选项C错误；

对于D，结合A选项的结论，有$a_2^4+a_9^4=(a_2^2+a_9^2)^2-2a_2^2a_9^2=400-2a_2^2a_9^2\geqslant400-2\times10^2=200$，当且仅当$a_2=a_9=\sqrt{10}$时，等号成立，故选项D正确.故选ABD.

5.设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都是等差数列，且$a_1=25$，$b_1=75$，$a_2+b_2=100$，则数列$\{a_n+b_n\}$的第37项为_____.

100　**解析**：因为$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是等差数列，

所以$\{a_n+b_n\}$是等差数列.

因为$a_1+b_1=100$，$a_2+b_2=100$，

所以数列$\{a_n+b_n\}$的公差$d=0$，所以$a_{37}+b_{37}=100$.

6.已知在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2+2a_3+a_4=12$.

(1)求a_5+a_7的值；

(2)若数列$\{b_n\}$满足$b_n=a_{2n}-1$，证明：数列$\{b_n\}$是等差数列.

(1)**解**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

因为$a_2+a_4=2a_3$，$a_2+2a_3+a_4=4a_3=12$，

所以$a_3=3$.

因为$a_3=a_1+2d$，即$1+2d=3$，所以$d=1$.

所以$a_5+a_7=2a_1+10d=12$.

(2)**证明**：由(1)可知$a_n=n$，

所以$b_n=a_{2n}-1=2n-1$.

因为$b_n-b_{n-1}=(2n-1)-[2(n-1)-1]=2(n\geqslant2)$，

$b_1=a_2-1=1$，

所以数列$\{b_n\}$是首项为1，公差为2的等差数列.

自我超越

1.已知圆O的半径为5，$OP=3$，过点P的2 021条弦的长度组成一个等差数列$\{a_n\}$，a_1为圆O过点P的最短弦的长，$a_{2\,021}$为圆O过点P的最长弦的长，则数列$\{a_n\}$的公差为（　　）

A.$\frac{1}{2\,020}$　　B.$\frac{1}{1\,010}$

C.$\frac{3}{1\,010}$　　D.$\frac{1}{505}$

B　**解析**：因为圆O的半径为5，$OP=3$，过点P的2 021条弦的长度组成一个等差数列$\{a_n\}$，最短弦长为$a_1=2\times\sqrt{5^2-3^2}=8$，最长弦长为过点$P$的直径，则$a_{2\,021}=2\times5=10$，所以公差$d=\frac{a_{2\,021}-a_1}{2\,020}=\frac{10-8}{2\,020}=\frac{1}{1\,010}$.故选B.

2.已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，$a_n\neq0$，$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，其中λ为常数.

(1)证明：$a_{n+2}-a_n=\lambda$.

(2)是否存在λ，使得$\{a_n\}$为等差数列？请说明理由.

(1)**证明**：由题意知，$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，$a_{n+1}a_{n+2}=\lambda S_{n+1}-1$，

两式相减得$a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=\lambda a_{n+1}$.

由于$a_{n+1}\neq0$，所以$a_{n+2}-a_n=\lambda$.

(2)**解**：存在.理由如下：

由题意知，$a_1=1$，$a_1a_2=\lambda S_1-1$，可得$a_2=\lambda-1$.

由(1)知，$a_3=\lambda+1$.

令$2a_2=a_1+a_3$，

解得$\lambda=4$.

故$a_{n+2}-a_n=4$，由此可得

$\{a_{2n-1}\}$是首项为1，公差为4的等差数列，$a_{2n-1}=4n-3$；

$\{a_{2n}\}$是首项为3，公差为4的等差数列，$a_{2n}=4n-1$.

所以$a_n=2n-1$，$a_{n+1}-a_n=2$.

因此存在实数$\lambda=4$，使得数列$\{a_n\}$为等差数列.

4.2.2　等差数列的前 n 项和公式

第 1 课时　等差数列的前 n 项和

学习任务目标

1.了解等差数列的前 n 项和公式的推导过程.
2.掌握等差数列的前 n 项和公式.
3.熟练掌握等差数列的五个量 a_1，d，n，a_n，S_n 的关系，能够由其中三个求出另外两个.
4.掌握等差数列的前 n 项和的简单性质.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　等差数列的前 n 项和公式

$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}$.

知识点二　等差数列前 n 项和的性质

(1)若数列$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列，S_n 为其前 n 项和，则数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$也是等差数列，且公差为 $\dfrac{d}{2}$.

(2)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，S_n 为其前 n 项和，则 S_m，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$，…$(m\in\mathbf{N}^*)$仍构成等差数列，且公差为 m^2d.

(3)设两个等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n，T_n，则$\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}$.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)等差数列的前 n 项和等于其首项与第 n 项的等差中项的 n 倍.　(　)

√　**提示**：根据等差数列的前 n 项和公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$可知，此说法正确.

(2)等差数列的前 n 项和 S_n 一定是关于 n 的二次函数.　(　×　)

(3)若等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，则 S_6，S_{12}，S_{18}也成等差数列.　(　×　)

2.在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{30}=30$，则前 30 项的和 S_{30}的值为　(　)

A.456　　B.465

C.930　　D.654

B　**解析**：$S_{30}=\dfrac{30\times(a_1+a_{30})}{2}=\dfrac{30\times(1+30)}{2}=465$.故选 B.

3.请思考并回答下列问题：

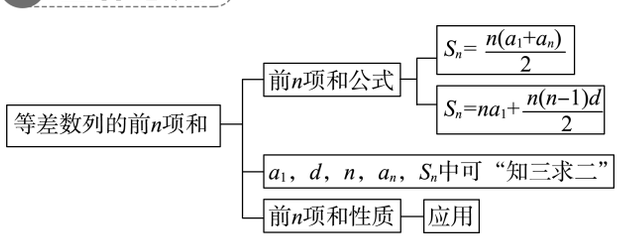
(1)由 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ 如何推出 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$？

(2)等差数列的前 n 项和的两个公式分别适用于什么情况？

(1)**提示**：把 $a_n=a_1+(n-1)d$ 代入 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$中，就可以得到 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$.

(2)**提示**：若已知等差数列$\{a_n\}$的首项 a_1、末项 a_n及项数 n，则用公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$来求和，其中$\dfrac{a_1+a_n}{2}$是 a_1 与 a_n 的等差中项，应用时要注意结合等差数列的性质.若已知等差数列$\{a_n\}$的首项 a_1、公差 d 及项数 n，则用公式 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$来求和.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务 1　掌握等差数列的前 n 项和公式与应用

探究活动

例 1　(1)设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_4=7$，$S_5=25$，则 $a_1=$　(　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.5

A　**解析**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，由 $a_4=7$ 且 $S_5=25$，可得$\begin{cases}a_1+3d=7,\\5a_1+\dfrac{5\times4}{2}d=25,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=2.\end{cases}$故选 A.

(2)记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和.若 $a_4+a_5=24$,$S_6=48$,则$\{a_n\}$的公差为　　(　　)

A.1　　B.2　　C.4　　D.8

C　**解析**:S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和,设公差为 d,因为 $a_4+a_5=24$,$S_6=48$,所以$\begin{cases}a_1+3d+a_1+4d=24,\\6a_1+\dfrac{6\times5}{2}d=48,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=-2,\\d=4,\end{cases}$所以$\{a_n\}$的公差为 4.故选 C.

(3)在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_n=-512$,前 n 项和 $S_n=-1\,022$,求公差 d.

解:由 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n\times(1-512)}{2}=-1\,022$,解得 $n=4$.

又由 $a_n=a_1+(n-1)d$,得 $-512=1+(4-1)\times d$,解得 $d=-171$.

【探究总结】

求等差数列的基本量的方法

(1)a_1,d,n 称为等差数列的三个基本量,a_n 和 S_n 都可以用这三个基本量来表示.五个量 a_1,d,n,a_n,S_n 中可"知三求二".

(2)已知等差数列的通项公式及前 n 项和公式的"知三求二"问题,一般是通过通项公式和前 n 项和公式列方程(组)来求解.这种方法是解决数列运算问题的基本方法,在具体求解过程中应注意已知量与未知量的联系及整体思想的运用.

应用迁移

1.(2025·全国二卷)记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和.若 $S_3=6$,$S_5=-5$,则 $S_6=$　　(　　)

A.-20　　B.-15

C.-10　　D.-5

B　**解析**:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,则由题意可得$\begin{cases}3a_1+3d=6,\\5a_1+10d=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=-3,\\a_1=5,\end{cases}$所以 $S_6=6a_1+15d=6\times5+15\times(-3)=-15$.故选 B.

2.(2024·新高考全国Ⅱ卷)记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和,若 $a_3+a_4=7$,$3a_2+a_5=5$,则 $S_{10}=$_____.

95　**解析**:设数列$\{a_n\}$的公差为 d.

由题意,得$\begin{cases}a_1+2d+a_1+3d=7,\\3(a_1+d)+a_1+4d=5,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=-4,\\d=3,\end{cases}$

则 $S_{10}=10a_1+\dfrac{10\times9}{2}d=10\times(-4)+45\times3=95$.

任务2 探究等差数列的前 n 项和的性质

探究活动

例 2　(1)两个等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n,T_n,且$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{5n+2}{n+3}$,则$\dfrac{a_2+a_{20}}{b_7+b_{15}}$等于(　　)

A.$\dfrac{107}{24}$　　B.$\dfrac{7}{27}$　　C.$\dfrac{149}{12}$　　D.$\dfrac{149}{3}$

A　**解析**:因为两个等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n,T_n,且$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{5n+2}{n+3}$,所以$\dfrac{a_2+a_{20}}{b_7+b_{15}}=\dfrac{a_1+a_{21}}{b_1+b_{21}}=\dfrac{\frac{a_1+a_{21}}{2}\times21}{\frac{b_1+b_{21}}{2}\times21}=\dfrac{S_{21}}{T_{21}}=\dfrac{5\times21+2}{21+3}=\dfrac{107}{24}$.故选 A.

(2)已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $S_{10}=310$,$S_{20}=1\,220$,求 S_{30}.

解:(方法一)设数列$\{a_n\}$的公差为 d.

由题意,得$\begin{cases}10a_1+\dfrac{1}{2}\times10\times9\times d=310,\\20a_1+\dfrac{1}{2}\times20\times19\times d=1\,220,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=4,\\d=6.\end{cases}$

所以 $S_{30}=30\times4+\dfrac{1}{2}\times30\times29\times6=2\,730$.

(方法二)因为数列$\{a_n\}$为等差数列,

所以 S_{10},$S_{20}-S_{10}$,$S_{30}-S_{20}$也成等差数列.

所以 $2(S_{20}-S_{10})=S_{10}+S_{30}-S_{20}$,

即 $2\times(1\,220-310)=310+S_{30}-1\,220$,

所以 $S_{30}=2\,730$.

(方法三)设 $S_n=An^2+Bn$(A,B 为常数).

由题意,得$\begin{cases}310=100A+10B,\\1\,220=400A+20B,\end{cases}$解得$\begin{cases}A=3,\\B=1.\end{cases}$

所以 $S_n=3n^2+n$.

所以 $S_{30}=3\times900+30=2\,730$.

(方法四)设数列$\{a_n\}$的公差为 d.

由 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$,

得$\dfrac{S_n}{n}=a_1+(n-1)\dfrac{d}{2}$,

所以$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$是以 a_1 为首项,$\dfrac{d}{2}$为公差的等差数列.

所以$\dfrac{S_{10}}{10}$,$\dfrac{S_{20}}{20}$,$\dfrac{S_{30}}{30}$成等差数列.

所以$\dfrac{S_{10}}{10}+\dfrac{S_{30}}{30}=2\times\dfrac{S_{20}}{20}$.

所以 $S_{30}=30\times\left(\dfrac{S_{20}}{10}-\dfrac{S_{10}}{10}\right)=30\times(122-31)=2\,730$.

［一题多思］

思考1. 若本例(1)中的“$\frac{S_n}{T_n}=\frac{5n+2}{n+3}$”改为“$\frac{S_{2n}}{T_n}=\frac{6n}{3n+4}$”，其他条件不变，则$\frac{a_3+a_{12}}{b_4}=$（　　）

A.$\frac{7}{25}$　　B.$\frac{14}{25}$　　C.$\frac{21}{25}$　　D.$\frac{42}{25}$

D　**解析：**依题意$\frac{a_3+a_{12}}{b_4}=2\cdot\frac{a_1+a_{14}}{2b_4}=2\cdot\frac{a_1+a_{14}}{b_1+b_7}=2\cdot\frac{\frac{a_1+a_{14}}{2}\times14}{\frac{b_1+b_7}{2}\times7}\times\frac{7}{14}=\frac{S_{14}}{T_7}$.

又因为$\frac{S_{2n}}{T_n}=\frac{6n}{3n+4}$，

所以$\frac{a_3+a_{12}}{b_4}=\frac{S_{14}}{T_7}=\frac{6\times7}{3\times7+4}=\frac{42}{25}$.

思考2. 若本例(1)中的条件不变，则$\frac{a_6}{b_5}$的值等于_____.

$\frac{19}{4}$　**解析：**$\frac{S_n}{T_n}=\frac{5n+2}{n+3}$，可设$S_n=kn(5n+2)$，$T_n=kn(n+3)$，$k\neq0$，则$\frac{a_6}{b_5}=\frac{S_6-S_5}{T_5-T_4}=\frac{6k(30+2)-5k(25+2)}{5k(5+3)-4k(4+3)}=\frac{19}{4}$.

【探究总结】

等差数列前n项和的性质

(1)若等差数列$\{a_n\}$的公差为d，前n项和为S_n，则

①数列S_k，$S_{2k}-S_k$，$S_{3k}-S_{2k}$，…($k\in\mathbf{N}^*$)是等差数列，且公差为k^2d.

②在等差数列$\{a_n\}$中，若$S_n=m$，$S_m=n$，$m\neq n$，则$S_{m+n}=-(m+n)$.

③在等差数列$\{a_n\}$中，若$S_n=S_m$，$m\neq n$，则$S_{m+n}=0$.

④数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，首项为$a_1$，公差为$\frac{d}{2}$.

(2)若$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都为等差数列，S_n，T_n分别为它们的前n项和，则$\frac{a_m}{b_m}=\frac{S_{2m-1}}{T_{2m-1}}$.

应用迁移

1.(教材P21例7改编)一个等差数列的前n项和为25，前$2n$项和为100，则前$3n$项和为_____.

225　**解析：**由题意，得$S_n=25$，$S_{2n}-S_n=75$.而S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$成等差数列，所以$S_{3n}-S_{2n}=125$.

所以$S_{3n}=100+125=225$.

2.设$\{a_n\}$为等差数列，S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_1=-2$，$S_7=7$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设T_n为数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$的前$n$项和，求$T_n$.

解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

则$S_n=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d$.

因为$S_7=7$，$a_1=-2$，

所以$7=7\times(-2)+\frac{7\times6}{2}d$，解得$d=1$.

所以$a_n=-2+(n-1)\times1=n-3$.

(2)因为$\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{1}{2}(n-1)d=-2+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n-5}{2}$，所以$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{1}{2}$.

又$\frac{S_1}{1}=\frac{a_1}{1}=-2$，

所以数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是首项为$-2$，公差为$\frac{1}{2}$的等差数列.

所以$T_n=n\times(-2)+\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}n^2-\frac{9}{4}n$.

课后素养评价(五)

基础落实

1.等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1=2$，$S_3=12$，则a_6等于（　　）

A.8　　B.10　　C.12　　D.14

C　**解析：**设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由题意可得$S_3=a_1+a_2+a_3=3a_2=12$，解得$a_2=4$，所以公差$d=a_2-a_1=4-2=2$，所以$a_6=a_1+5d=2+5\times2=12$.故选C.

2.(多选)设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_3=0$，$a_4=4$，则（　　）

A.$a_n=4n-8$　　B.$a_n=2n-4$

C.$S_n=2n^2-6n$　　D.$S_n=n^2-3n$

BD　**解析：**设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由题意可得$\begin{cases}3(a_1+d)=0,\\a_1+3d=4,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=-2,\\d=2,\end{cases}$所以$a_n=-2+2(n-1)=2n-4$，$S_n=-2n+\frac{n(n-1)}{2}\times2=n^2-3n$.故选BD.

3. 记等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_{10}=100$，$a_{10}=19$，则$S_{20}=$　　（　　）

A.320　　B.400

C.480　　D.560

B　**解析：**由$S_{10}=100$，得$\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=100$，而$a_{10}=19$，解得$a_1=1$，公差$d=\frac{a_{10}-a_1}{10-1}=2$，所以$S_{20}=20a_1+\frac{20\times(20-1)}{2}d=400$.故选B.

4. 设S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_4=2(S_2+S_3)$，$a_1=1$，则$a_6=$　　（　　）

A.-14　　B.-12

C.12　　D.14

A　**解析：**设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由$S_4=2(S_2+S_3)$，$a_1=1$，得$4+6d=2(2+d+3+3d)$，解得$d=-3$，所以$a_6=1+(6-1)d=-14$.故选A.

5. 已知一个项数有限的等差数列$\{a_n\}$，前4项的和是40，最后4项的和是80，所有项的和是210，则此数列的项数为　　（　　）

A.12　　B.14

C.16　　D.18

B　**解析：**由题意知$a_1+a_2+a_3+a_4=40$，$a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}=80$，两式相加整理得$a_1+a_n=30$.又因为$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{30n}{2}=210$，所以$n=14$.故选B.

6. 已知$\{a_n\}$为等差数列，$a_1+a_4+a_7=39$，$a_3+a_6+a_9=27$，则前9项和$S_9=$_____.

99　**解析：**在等差数列$\{a_n\}$中，由$a_1+a_4+a_7=39$，$a_3+a_6+a_9=27$，两式相加可得$a_1+a_4+a_7+a_3+a_6+a_9=66$.

由等差数列的性质可得$a_1+a_9=a_4+a_6=a_7+a_3=2a_5$，

故可得$6a_5=66$，解得$a_5=11$，故$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5=99$.

7. 等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_3=30$，$S_6=100$，则$S_9=$_____.

210　**解析：**因为S_3，S_6-S_3，S_9-S_6成等差数列，即30，70，S_9-100成等差数列，

所以$140=30+S_9-100$，所以$S_9=210$.

8. 在等差数列$\{a_n\}$中，S_n是其前n项和，$a_1=-11$，$\frac{S_{10}}{10}-\frac{S_8}{8}=2$，则$S_{11}=$_____.

-11　**解析：**由题意知，$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是等差数列，首项为$\frac{a_1}{1}=-11$.

设其公差为d，则$\frac{S_{10}}{10}-\frac{S_8}{8}=2d=2$，所以$d=1$，

所以$\frac{S_{11}}{11}=-11+10\times1=-1$.所以$S_{11}=-11$.

9. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_3=6$，$a_9=17$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n.

解：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

(1)因为$a_1+a_3=2a_2=6$，所以$a_2=3$，

所以$d=\frac{a_9-a_2}{9-2}=\frac{17-3}{9-2}=2$，

则$a_n=a_2+(n-2)d=3+(n-2)\times2=2n-1$.

(2)由(1)可得$a_1=1$，

所以$S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}=n^2$.

能力提升

1. 记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$3S_3=S_2+S_4$，$a_1=2$，则$a_5=$　　（　　）

A.-12　　B.-10

C.10　　D.12

B　**解析：**因为S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，$3S_3=S_2+S_4$，$a_1=2$，设公差为d，所以$3\times\left(3a_1+\frac{3\times2}{2}d\right)=a_1+a_1+d+4a_1+\frac{4\times3}{2}d$，可得$d=-3$，所以$a_5=2+4\times(-3)=-10$.故选B.

2. (多选)等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1>0$，则下列命题正确的有　　（　　）

A.若$a_3+a_7=4$，则$S_9=18$

B.若$S_{15}>0$，$S_{16}<0$，则$a_8^2>a_9^2$

C.若$a_1+a_2=5$，$a_3+a_4=9$，则$a_7+a_8=17$

D.若$a_8=S_{10}$，则$S_9>0$，$S_{10}<0$

ACD　**解析：**对于A，$a_3+a_7=4$，$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=\frac{9(a_3+a_7)}{2}=18$，故A正确；

对于B，$S_{15}=\frac{15(a_1+a_{15})}{2}=15a_8>0$，则$a_8>0$，$S_{16}=\frac{16(a_1+a_{16})}{2}=8(a_8+a_9)<0$，则$a_8+a_9<0$，$a_9<-a_8<0$，

因此$a_8^2-a_9^2=(a_8+a_9)(a_8-a_9)<0$，即$a_8^2<a_9^2$，故B错误；

对于C，$a_5+a_6=2(a_3+a_4)-(a_1+a_2)=13$，则 $a_7+a_8=2(a_5+a_6)-(a_3+a_4)=17$，故C正确；

对于D，设$\{a_n\}$的公差为 d，由 $a_8=S_{10}$，得 $a_1+7d=10a_1+45d$，解得 $d=-\frac{9}{38}a_1$，

则 $S_9=9a_1+36d=9\left(a_1-\frac{18}{19}a_1\right)>0$，

$S_{10}=10a_1+45d=5\left(2a_1-\frac{81}{38}a_1\right)<0$，故D正确.

故选ACD.

3.（多选）记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，则下列命题正确的有　　（　　）

A. $S_6=3(S_4-S_2)$

B.若$\{a_n\}$的公差不为0，$S_{15}=5(a_4+a_8+a_k)$，则 $k=10$

C. S_{2n}，$S_{4n}-S_{2n}$，$S_{6n}-S_{4n}$成等差数列

D. $\left\{\frac{S_{2n}}{2n}\right\}$是等差数列

ACD　**解析**：设$\{a_n\}$的公差为 d.

对于A，$S_6=6a_1+15d$，$3(S_4-S_2)=3[4a_1+6d-(2a_1+d)]=6a_1+15d$，所以 $S_6=3(S_4-S_2)$，故A正确；

对于B，$S_{15}=15a_1+\frac{15\times14}{2}d=15a_1+105d$，$5(a_4+a_8+a_k)=5[a_1+3d+a_1+7d+a_1+(k-1)d]=15a_1+5(k+9)d$，

又因为 $d\neq0$，所以 $S_{15}=5(a_4+a_8+a_k)\Leftrightarrow105=5(k+9)$，解得 $k=12$，故B错误；

对于C，$S_{2n}=2na_1+\frac{2n\times(2n-1)}{2}\times d=2na_1+(2n^2-n)d$，$S_{4n}=4na_1+\frac{4n\times(4n-1)}{2}\times d=4na_1+(8n^2-2n)d$，$S_{6n}=6na_1+\frac{6n\times(6n-1)}{2}\times d=6na_1+(18n^2-3n)d$，

所以 $S_{2n}+S_{6n}-S_{4n}=2na_1+(2n^2-n)d+6na_1+(18n^2-3n)d-[4na_1+(8n^2-2n)d]=4na_1+(12n^2-2n)d$，$S_{4n}-S_{2n}=4na_1+(8n^2-2n)d-[2na_1+(2n^2-n)\cdot d]=2na_1+(6n^2-n)d$，

所以 $S_{2n}+S_{6n}-S_{4n}=2(S_{4n}-S_{2n})$，所以 S_{2n}，$S_{4n}-S_{2n}$，$S_{6n}-S_{4n}$成等差数列，故C正确；

对于D，因为 $\frac{S_{2n}}{2n}=\frac{2na_1+(2n^2-n)d}{2n}=a_1+\left(n-\frac{1}{2}\right)d$，所以 $\frac{S_{2(n+1)}}{2(n+1)}-\frac{S_{2n}}{2n}=\left[a_1+\left(n+1-\frac{1}{2}\right)d\right]-\left[a_1+\left(n-\frac{1}{2}\right)d\right]=d$，所以 $\left\{\frac{S_{2n}}{2n}\right\}$是公差为 d 的等差数列，故D正确.

故选ACD.

4.在等差数列$\{a_n\}$中，S_n 为其前 n 项和.已知 $S_3=9$，$a_4+a_5+a_6=7$，则$S_9-S_6=$_____.

5　**解析**：因为 S_3，S_6-S_3，S_9-S_6 成等差数列，而 $S_3=9$，$S_6-S_3=a_4+a_5+a_6=7$，所以 $S_9-S_6=5$.

5.已知等差数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=-1$，公差 $d>1$.记$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n(n\in\mathbf{N}^*)$，若 $S_4-2a_2a_3+6=0$，求 S_n.

解：因为 $S_4-2a_2a_3+6=0$，$a_1=-1$，

所以$-4+6d-2(-1+d)(-1+2d)+6=0$，

整理得 $d^2-3d=0$.

又 $d>1$，所以 $d=3$，

所以 $a_n=3n-4$，

所以 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{3n^2-5n}{2}$.

6.已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_2+a_4=48$，$a_5=28$.若 $S_n+30>n\lambda$ 对任意$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，求 λ 的取值范围.

解：由题意得 $a_2+a_4=a_1+a_5=48$，因为 $a_5=28$，

所以 $a_1=20$，则公差 $d=\frac{28-20}{5-1}=2$，

所以 $S_n=20n+\frac{n(n-1)}{2}\times2=n(n+19)$.

由 $n(n+19)+30>n\lambda$，得 $\lambda<\frac{n^2+19n+30}{n}=n+\frac{30}{n}+19$ 恒成立.

设 $f(x)=x+\frac{30}{x}+19$，令 $x=\frac{30}{x}$，解得 $x=\pm\sqrt{30}$.

易知当 $x\in(0,\sqrt{30})$ 时，$f(x)$单调递减；当 $x\in(\sqrt{30},+\infty)$时，$f(x)$单调递增.

又因为 $5<\sqrt{30}<6$，$f(5)=f(6)=30$，

所以当 $n=5$ 或 $n=6$ 时，$n+\frac{30}{n}+19$ 取得最小值30，

所以 $\lambda<30$，即 λ 的取值范围是$(-\infty,30)$.

自我超越

1.（新定义）形如 $M=m^n(m,n\in\mathbf{N}^*)$的正整数表示为各项都是整数、公差为2的等差数列的前 m 项和，称作“对 M 的 m 项划分”.例如，$9=3^2=1+3+5$ 称作“对9的3项划分”，$64=4^3=13+15+17+19$ 称作“对64的4项划分”.据此，对324的18项划分中最大的项是_____.

35　**解析**：设对 324 的 18 项划分中最小的项为 a_1，最大的项为 a_{18}，

则 $\begin{cases}a_{18}=a_1+17\times2,\\ \dfrac{18(a_1+a_{18})}{2}=324,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=1,\\ a_{18}=35.\end{cases}$

2.已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $S_2=2$，$S_3=-6$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式和前 n 项和 S_n.

(2)是否存在 n，使 S_n，$S_{n+2}+2n$，S_{n+3} 成等差数列？若存在，求出 n 的值；若不存在，说明理由.

解：(1)设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

则 $\begin{cases}2a_1+d=2,\\ 3a_1+\dfrac{3\times2}{2}d=-6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=4,\\ d=-6,\end{cases}$

所以 $a_n=4-6(n-1)=10-6n$，

$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=7n-3n^2$.

(2)存在.$S_n+S_{n+3}=7n-3n^2+7(n+3)-3(n+3)^2=-6n^2-4n-6$，

$S_{n+2}=7(n+2)-3(n+2)^2=-3n^2-5n+2$，

$2(S_{n+2}+2n)=2(-3n^2-5n+2+2n)=-6n^2-6n+4$.

若存在 n，使 S_n，$S_{n+2}+2n$，S_{n+3} 成等差数列，

则 $-6n^2-4n-6=-6n^2-6n+4$，解得 $n=5$.

所以存在 $n=5$，使 S_n，$S_{n+2}+2n$，S_{n+3} 成等差数列.

第 2 课时　等差数列前 n 项和的应用

学习任务目标

1.了解等差数列前 n 项和的一些性质.
2.掌握解决等差数列前 n 项和的最值问题的方法.
3.会用裂项相消法求和.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点　等差数列前 n 项和的性质

(1)等差数列前 n 项和的“奇偶项”

①若等差数列的项数为 $2n$，则 $S_{2n}=n(a_n+a_{n+1})$，$S_{偶}-S_{奇}=nd$，$\dfrac{S_{偶}}{S_{奇}}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

②若等差数列的项数为 $2n+1$，则 $S_{2n+1}=(2n+1)a_{n+1}$，$S_{偶}-S_{奇}=-a_{n+1}$，$\dfrac{S_{偶}}{S_{奇}}=\dfrac{n}{n+1}$.

(2)等差数列前 n 项和 S_n 最大(小)值的情形：

①若 $a_1>0$，$d<0$，则 S_n 存在最大值，即所有非负项之和；

②若 $a_1<0$，$d>0$，则 S_n 存在最小值，即所有非正项之和.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)若等差数列 $\{a_n\}$ 共有 20 项，则 $\dfrac{S_{奇}}{S_{偶}}=\dfrac{a_8}{a_{10}}$.　(　×　)

(2)若无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d>0$，则其前 n 项和 S_n 不存在最大值.　(　√　)

(3)若两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n，B_n，则一定有 $\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{A_n}{B_n}$.　(　×　)

2.设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_2=-3$，$S_5=-10$，则 $a_5=$_____，S_n 的最小值为_____.

0　-10　**解析**：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $a_2=a_1+d=-3$，$S_5=5a_1+10d=-10$，即 $a_1+2d=-2$，解得 $a_1=-4$，$d=1$，所以 $a_5=a_1+4d=0$，$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{n^2-9n}{2}$.当 $n=4$ 或 $n=5$ 时，S_n 最小，最小值为 -10.

3.请思考并回答下列问题：

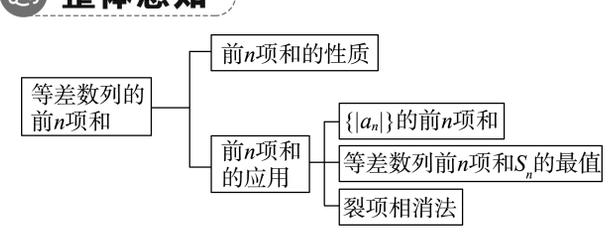
(1)若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_7+a_8+a_9>0$，$a_7+a_{10}<0$，则当 n 取何值时，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和最大？

(2)$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d(d\neq0)$ 与二次函数有什么关系？

(1)**提示**：因为 $a_7+a_8+a_9=3a_8>0$，$a_7+a_{10}=a_8+a_9<0$，所以 $a_8>0$，$a_9<0$，所以当 $n=8$ 时，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和最大.

(2)**提示**：$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$，所以 S_n 可以看成是二次函数 $f(x)=\dfrac{d}{2}x^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)x(x\in\mathbf{R})$ 当 $x=n$ 时的函数值.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 探究等差数列的“奇偶项”

探究活动

例1　（教材P23练习题5改编）项数为奇数的等差数列$\{a_n\}$奇数项之和为44，偶数项之和为33，求这个数列的中间项及项数.

解：设等差数列$\{a_n\}$共有$(2m+1)$项，则奇数项有$(m+1)$项，偶数项有m项，中间项是第$(m+1)$项，即a_{m+1}，所以$\dfrac{S_{奇}}{S_{偶}}=\dfrac{\frac{1}{2}(m+1)(a_1+a_{2m+1})}{\frac{1}{2}m(a_2+a_{2m})}=\dfrac{m+1}{m}=\dfrac{44}{33}=\dfrac{4}{3}$，解得$m=3$.

因为$S_{奇}=(m+1)a_{m+1}=44$，

所以$a_{m+1}=11$.

所以这个数列的中间项为11，共有$2m+1=7$(项).

［一题多思］

思考1. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为d，给出下列两个等式：

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1}=S_{奇}$，

$a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=S_{偶}$，

两式相减可得什么结果？

提示：两式相减得$S_{奇}-S_{偶}=a_1+\underbrace{d+\cdots+d}_{n个}=a_1+nd=a_{n+1}$.

思考2. 若将本例中的条件“项数为奇数”改为“项数为100”，求这个数列的公差.

解：设数列$\{a_n\}$的公差为d，则$50d=33-44$，解得$d=-\dfrac{11}{50}$.

【探究总结】

若等差数列的项数为$2n(n\in\mathbf{N}^*)$，则$S_{2n}=n(a_n+a_{n+1})$，且$S_{偶}-S_{奇}=nd$，$\dfrac{S_{偶}}{S_{奇}}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$；若等差数列的项数为$2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$，则$S_{2n-1}=(2n-1)a_n$($a_n$为中间项)，且$S_{奇}-S_{偶}=a_n$，$\dfrac{S_{偶}}{S_{奇}}=\dfrac{n-1}{n}$，其中$S_{奇}=na_n$，$S_{偶}=(n-1)a_n$.

应用迁移

已知等差数列$\{a_n\}$的奇数项的和为216，偶数项的和为192，首项为1，项数为奇数，求此数列的末项和通项公式.

解：设等差数列$\{a_n\}$的项数为$2m+1$，公差为d，则数列的中间项为a_{m+1}，奇数项有$(m+1)$项，偶数项有m项.

依题意，有$S_{奇}=(m+1)a_{m+1}=216$①，

$S_{偶}=ma_{m+1}=192$②.

①÷②，得$\dfrac{m+1}{m}=\dfrac{216}{192}$，解得$m=8$.

所以数列$\{a_n\}$共有$2m+1=17$(项).

把$m=8$代入②，得$a_9=24$.

又因为$a_1+a_{17}=2a_9$，

所以末项为$a_{17}=2a_9-a_1=47$，

公差$d=\dfrac{a_{17}-a_9}{17-9}=\dfrac{23}{8}$，

故$a_n=1+(n-1)\times\dfrac{23}{8}=\dfrac{23}{8}n-\dfrac{15}{8}$.

所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{23}{8}n-\dfrac{15}{8}(n\leqslant17,n\in\mathbf{N}^*)$.

任务2 研究等差数列前n项和的最值问题

探究活动

例2　已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_4=-2$，$S_{10}=25$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求S_n的最小值及取得最小值时n的值.

解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

由$a_4=-2$，$S_{10}=25$，得$\begin{cases}a_1+3d=-2,\\10a_1+\dfrac{10\times9}{2}d=25,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=-11,\\d=3,\end{cases}$

所以$a_n=a_1+(n-1)d=3n-14$.

(2)(方法一)由$d=3$知$\{a_n\}$是递增数列，

当$n\leqslant4$时，$a_n<0$；当$n\geqslant5$时，$a_n>0$.

所以$S_1>S_2>S_3>S_4$，且$S_4<S_5<\cdots$，

所以当$n=4$时，S_n最小，最小值为$S_4=4a_1+\dfrac{4\times3}{2}d=-26$.

(方法二)$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{25}{2}n=\dfrac{3}{2}\left(n-\dfrac{25}{6}\right)^2-\dfrac{625}{24}$，

又$n\in\mathbf{N}^*$，所以当$n=4$时，S_n最小，最小值为-26.

【探究总结】

求等差数列前n项和S_n最值的方法

(1)函数法：利用等差数列前n项和的函数表达式S_n

$=an^2+bn(a\neq0)$，通过配方或借助图象求二次函数最值的方法求解.

(2)邻项变号法：①若 $a_1>0$，$d<0$，则满足 $\begin{cases}a_m\geqslant0,\\a_{m+1}\leqslant0\end{cases}$ 的项数 m 使 S_n 取得最大值 S_m；

②若 $a_1<0$，$d>0$，则满足 $\begin{cases}a_m\leqslant0,\\a_{m+1}\geqslant0\end{cases}$ 的项数 m 使 S_n 取得最小值 S_m.

(3)一般地，在等差数列$\{a_n\}$中，若 $a_1>0$，且 $S_p=S_q$ $(p\neq q)$，则

①若 $p+q$ 为偶数，则当 $n=\dfrac{p+q}{2}$ 时，S_n 最大；

②若 $p+q$ 为奇数，则当 $n=\dfrac{p+q-1}{2}$ 或 $n=\dfrac{p+q+1}{2}$ 时，S_n 最大.

应用迁移

1. 在等差数列$\{a_n\}$中，前 n 项和为 S_n，$a_1=29$，$S_{10}=S_{20}$，则 S_n 的最大值为（　　）

A.S_{15}　B.S_{16}　C.S_{15}或S_{16}　D.S_{17}

A　**解析：**(方法一)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

因为 $a_1=29$，$S_{10}=S_{20}$，

所以 $10a_1+\dfrac{10\times9}{2}d=20a_1+\dfrac{20\times19}{2}d$，解得 $d=-2$.

所以 $S_n=29n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times(-2)=-n^2+30n=-(n-15)^2+225$. 所以当 $n=15$ 时，S_n 取得最大值. 故选 A.

(方法二)由方法一得 $d=-2$.

因为 $a_1=29>0$，

由 $\begin{cases}a_n=29-2(n-1)\geqslant0,\\a_{n+1}=29-2n\leqslant0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}n\leqslant15\ \dfrac{1}{2},\\n\geqslant14\ \dfrac{1}{2}.\end{cases}$

所以当 $n=15$ 时，S_n 有最大值，即数列$\{a_n\}$的前 15 项和最大. 故选 A.

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=7$，公差为 d，前 n 项和为 S_n，当且仅当 $n=8$ 时，S_n 取得最大值，则 d 的取值范围为_____.

$\left(-1,-\dfrac{7}{8}\right)$　**解析：**由题意，当且仅当 $n=8$ 时，S_n 取得最大值，

可得 $\begin{cases}d<0,\\a_8>0,\\a_9<0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}d<0,\\7+7d>0,\\7+8d<0,\end{cases}$ 解得 $-1<d<-\dfrac{7}{8}$.

故 d 的取值范围为 $\left(-1,-\dfrac{7}{8}\right)$.

任务3　研究与等差数列有关的前 n 项和问题

探究活动

例 3　(1)已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_3=3$，$S_4=10$，则 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{S_k}=$_____.

$\dfrac{2n}{n+1}$　**解析：**设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

由题意得 $\begin{cases}a_1+2d=3,\\4a_1+\dfrac{4\times3}{2}d=10,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=1,\\d=1.\end{cases}$

所以数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=n\times1+\dfrac{n(n-1)}{2}\times1=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

故 $\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2}{n(n+1)}$.

裂项可得 $\dfrac{1}{S_k}=\dfrac{2}{k(k+1)}=2\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$，

所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{S_k}$

$=2\left[\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]$

$=2\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{2n}{n+1}$.

(2)(2023·全国乙卷)记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，已知 $a_2=11$，$S_{10}=40$.

①求$\{a_n\}$的通项公式；

②求数列$\{|a_n|\}$的前 n 项和 T_n.

解：①设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

由题意可得 $\begin{cases}a_2=a_1+d=11,\\S_{10}=10a_1+\dfrac{10\times9}{2}d=40,\end{cases}$

即 $\begin{cases}a_1+d=11,\\2a_1+9d=8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=13,\\d=-2.\end{cases}$

所以 $a_n=13-2(n-1)=15-2n$.

②由①可求得 $S_n=\dfrac{n(13+15-2n)}{2}=14n-n^2$.

令 $a_n=15-2n>0$，解得 $n<\dfrac{15}{2}$，且 $n\in\mathbf{N}^*$.

当 $n\leqslant7$ 时，$a_n>0$，则 $T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n=14n-n^2$；

当 $n\geqslant8$ 时，$a_n<0$，则 $T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=(a_1+a_2+\cdots+a_7)-(a_8+\cdots+a_n)=S_7-(S_n-S_7)=2S_7-S_n=2(14\times7-7^2)-(14n-n^2)=n^2-14n+98$.

综上所述，$T_n=\begin{cases}14n-n^2,n\leqslant7,\\n^2-14n+98,n\geqslant8.\end{cases}$

[一题多思]

思考1. 若等差数列$\{a_n\}$的公差大于0，$a_{10}<0$，$a_{11}>0$，则数列$\{a_n\}$的前n项和S_n与数列$\{|a_n|\}$的前n项和T_n有什么关系？

提示： 易知当$1\leqslant n\leqslant 10$时，$a_n<0$，

当$n\geqslant 11$时，$a_n>0$.

所以$T_n=\begin{cases}-S_n,1\leqslant n\leqslant 10,\\-S_{10}+(S_n-S_{10}),n\geqslant 11.\end{cases}$

思考2. 若将本例(2)中的条件改为“数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=-\frac{3}{2}n^2+\frac{205}{2}n$”，则如何解答？

解： ①当$n=1$时，$a_1=S_1=-\frac{3}{2}\times1^2+\frac{205}{2}\times1=101$，

当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(-\frac{3}{2}n^2+\frac{205}{2}n\right)-\left[-\frac{3}{2}(n-1)^2+\frac{205}{2}(n-1)\right]=-3n+104$.

因为$a_1=101$也满足上式，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=-3n+104$.

②由$a_n=-3n+104\geqslant 0$，得$n\leqslant\frac{104}{3}$.

即当$n\leqslant 34$时，$a_n>0$；当$n\geqslant 35$时，$a_n<0$.

当$n\leqslant 34$时，$T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n=-\frac{3}{2}n^2+\frac{205}{2}n$.

当$n\geqslant 35$时，

$T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{34}|+|a_{35}|+\cdots+|a_n|$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_{34})-(a_{35}+a_{36}+\cdots+a_n)$

$=S_{34}-(S_n-S_{34})$

$=2S_{34}-S_n$

$=2\times\left(-\frac{3}{2}\times34^2+\frac{205}{2}\times34\right)-\left(-\frac{3}{2}n^2+\frac{205}{2}n\right)$

$=\frac{3}{2}n^2-\frac{205}{2}n+3\,502$.

综上所述，$T_n=\begin{cases}-\frac{3}{2}n^2+\frac{205}{2}n,n\leqslant 34,\\\frac{3}{2}n^2-\frac{205}{2}n+3\,502,n\geqslant 35.\end{cases}$

【探究总结】

特殊的求和方法——裂项相消法

把数列的通项拆成两项之差，即数列的每一项可按此方法拆成两项之差，在求和时一些正负项相抵消，于是前n项和变成首尾若干项之和，这一求和方法被称为裂项相消法.

常见的拆项公式（其中$n\in\mathbf{N}^*$）：

(1)$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$；

(2)$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$；

(3)$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$；

(4)若等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$，$\frac{1}{a_na_{n+2}}=\frac{1}{2d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$；

(5)$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$.

应用迁移

1. 计算：$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+99^2-100^2$.

解： $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+99^2-100^2$

$=(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+\cdots+(99^2-100^2)$

$=(1-2)\times(1+2)+(3-4)\times(3+4)+\cdots+(99-100)\times(99+100)$

$=-(1+2+3+4+\cdots+99+100)$

$=-5\,050$.

2. 已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$.

(1)若$b_n=\frac{1}{a_n}$，求证：$\{b_n\}$为等差数列；

(2)求数列$\{a_na_{n+1}\}$的前n项和S_n.

(1)**证明：** 因为$a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$，

所以$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{a_n}=2+\frac{1}{a_n}$，

即$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$，$b_{n+1}-b_n=2$.

又因为$b_1=\frac{1}{a_1}=1$，

所以$\{b_n\}$是以1为首项，2为公差的等差数列.

(2)**解：** 由(1)可得$b_n=\frac{1}{a_n}=2n-1$，则$a_n=\frac{1}{2n-1}$，

所以$a_na_{n+1}=\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

所以$S_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.

课后素养评价(六)

基础落实

1.已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$a_n=4n-17$,则当S_n取得最小值时,$n=$　　(　　)

A.3　　B.4

C.5　　D.6

B　**解析**:由$a_n=4n-17$,得当$1\leqslant n\leqslant 4$,$n\in\mathbf{N}^*$时,$a_n<0$,当$n\geqslant 5$,$n\in\mathbf{N}^*$时,$a_n>0$,所以当S_n取得最小值时,$n=4$.故选B.

2.已知等差数列$\{a_n\}$的项数为$2m+1(m\in\mathbf{N}^*)$,其中奇数项之和为140,偶数项之和为120,则$m=$　　(　　)

A.6　　B.7

C.12　　D.13

A　**解析**:项数为$2m+1$的数列$\{a_n\}$中奇数项共有$(m+1)$项,其和为$\frac{(m+1)(a_1+a_{2m+1})}{2}=\frac{(m+1)2a_{m+1}}{2}=(m+1)\cdot a_{m+1}=140$,

项数为$2m+1$的数列$\{a_n\}$中偶数项共有m项,其和为$\frac{m(a_2+a_{2m})}{2}=\frac{m\cdot 2a_{m+1}}{2}=ma_{m+1}=120$,

所以$\frac{(m+1)a_{m+1}}{ma_{m+1}}=\frac{140}{120}=\frac{7}{6}$,解得$m=6$.

故选A.

3.已知等差数列$\{a_n\}$,记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和,若$a_1=1$,$S_7=5a_5$,则数列$\{a_n\}$的公差$d=$　　(　　)

A.1　　B.2

C.-1　　D.-2

D　**解析**:在等差数列$\{a_n\}$中,S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和,$a_1=1$,由$S_7=5a_5$,可得$7a_1+\frac{7\times 6}{2}d=5(a_1+4d)$,即$7+21d=5+20d$,解得$d=-2$.故选D.

4.(多选)已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2-4n+1$,则　　(　　)

A.$a_n=2n-5$

B.$\{a_n\}$不是等差数列

C.数列$\{a_n\}$中a_2最小

D.$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{10}|=67$

BD　**解析**:因为$S_n=n^2-4n+1$,当$n=1$时,$a_1=S_1=1^2-4\times 1+1=-2$,

当$n\geqslant 2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-4n+1-[(n-1)^2-4(n-1)+1]=2n-5(n\geqslant 2)$,显然当$n=1$时,$a_n=2n-5$不成立,

所以$a_n=\begin{cases}-2,n=1,\\2n-5,n\geqslant 2,\end{cases}$所以数列$\{a_n\}$从第二项起是以2为公差的等差数列,

故数列$\{a_n\}$不是等差数列,故A错误,B正确.

数列$\{a_n\}$从第二项起为递增的等差数列,又$a_1<a_2$,

所以a_1为数列$\{a_n\}$中的最小项,故C错误.

因为$a_1<a_2<0<a_3<\cdots<a_{10}$,所以

$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{10}|=-a_1-a_2+a_3+\cdots+a_{10}=S_{10}-2(a_1+a_2)=-2+(-1)\times 9+\frac{9\times 8}{2}\times 2-2\times(-2-1)=67$,故D正确.

故选BD.

5.已知数列$\{a_n\}$满足$a_n=-2n+9$,$n\in\mathbf{N}^*$,则数列$\{|a_n|\}$的前12项和为　　(　　)

A.108　　B.28

C.62　　D.80

D　**解析**:设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,则$S_n=\frac{n[7+(-2n+9)]}{2}=8n-n^2$.因为当$n\leqslant 4$时,$a_n>0$,当$n\geqslant 5$时,$a_n<0$,所以$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{12}|=a_1+a_2+a_3+a_4-(a_5+\cdots+a_{12})=S_4-(S_{12}-S_4)=2S_4-S_{12}=80$.故选D.

6.已知等差数列$\{a_n\}$,$|a_5|=|a_9|$,公差$d>0$,则使得其前n项和S_n取得最小值的正整数n的值是_____.

6或7　**解析**:因为$d>0$,$|a_5|=|a_9|$,所以$a_5<0$,$a_9>0$,$-a_5=a_9$,即$a_5+a_9=2a_7=0$.

所以$a_7=0$,所以$a_6<0$,$a_8>0$.

所以$S_6=S_7$,为最小.

故使得前n项和S_n取得最小值的正整数n的值为6或7.

7.已知数列$\{a_n\}$为等差数列,其中$a_2+a_3=8$,$a_5=3a_2$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)记$b_n=\frac{2}{a_na_{n+1}}$,设$\{b_n\}$的前n项和为S_n,求使得$S_n>\frac{2\,024}{2\,025}$的正整数$n$的最小值.

解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,

依题意有$\begin{cases}2a_1+3d=8,\\a_1+4d=3a_1+3d,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}$

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-1$.

(2)因为$b_n=\dfrac{2}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}$,

所以$S_n=\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)=1-\dfrac{1}{2n+1}$.

令$1-\dfrac{1}{2n+1}>\dfrac{2\,024}{2\,025}$,解得$n>1\,012$,故$n=1\,013$.

能力提升

1.设等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n,T_n,若$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{2n+1}{3n-1}$,则$\dfrac{a_7}{b_5}$的值为　　(　　)

A.$\dfrac{19}{26}$　　B.$\dfrac{27}{26}$　　C.$\dfrac{27}{32}$　　D.$\dfrac{27}{38}$

B　**解析**:由$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{2n+1}{3n-1}$,设$S_n=n(2n+1)k$,$T_n=n(3n-1)k$,则$a_7=S_7-S_6=105k-78k=27k$,$b_5=T_5-T_4=70k-44k=26k$,则$\dfrac{a_7}{b_5}=\dfrac{27k}{26k}=\dfrac{27}{26}$.故选B.

2.(多选)设d,S_n分别为等差数列$\{a_n\}$的公差与前n项和.若$S_{10}=S_{20}$,则下列结论正确的有　　(　　)

A.当$n=15$时,S_n取得最大值

B.当$n=30$时,$S_n=0$

C.当$d>0$时,$a_{10}+a_{22}>0$

D.当$d<0$时,$|a_{10}|>|a_{22}|$

BC　**解析**:因为d,S_n分别为等差数列$\{a_n\}$的公差与前n项和,$S_{10}=S_{20}$,

所以$10a_1+\dfrac{10\times9}{2}d=20a_1+\dfrac{20\times19}{2}d$,

解得$a_1=-\dfrac{29}{2}d$,

$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=-\dfrac{29}{2}nd+\dfrac{d}{2}n^2-\dfrac{d}{2}n=\dfrac{d}{2}(n-15)^2-\dfrac{225}{2}d$.

若$d>0$,当$n=15$时,S_n取得最小值;若$d<0$,当$n=15$时,S_n取得最大值,故A错误.

当$n=30$时,$S_n=\dfrac{d}{2}(n-15)^2-\dfrac{225}{2}d=0$,故B正确.

当$d>0$时,$a_{10}+a_{22}=2a_1+30d=d>0$,故C正确.

当$d<0$时,$|a_{10}|=|a_1+9d|=-\dfrac{11}{2}d$,

$|a_{22}|=|a_1+21d|=-\dfrac{13}{2}d$,

所以$|a_{10}|<|a_{22}|$,故D错误.

故选BC.

3.(多选)设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$\dfrac{S_{n+1}}{n+1}-\dfrac{S_n}{n}=-1$,$S_1=32$,则下列说法正确的有　　(　　)

A.$\{a_n\}$是等差数列

B.S_3,S_6-S_3,S_9-S_6成等差数列,公差为-9

C.当$n=16$或$n=17$时,S_n取得最大值

D.当$S_n\geqslant0$时,n的最大值为33

ACD　**解析**:对于A,由已知$\dfrac{S_{n+1}}{n+1}-\dfrac{S_n}{n}=-1$可得,数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$是一个等差数列,首项$\dfrac{S_1}{1}=32$,公差为$-1$,

所以$\dfrac{S_n}{n}=32+(n-1)\times(-1)=-n+33$,

所以$S_n=-n^2+33n$.

当$n=1$时,$a_1=S_1=32$;

当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=-n^2+33n+(n-1)^2-33(n-1)=-2n+34$.

当$n=1$时,$-2\times1+34=32=a_1$,满足上式.

综上所述,$a_n=-2n+34$.

所以,当$n\geqslant2$时,$a_n-a_{n-1}=-2n+34+2(n-1)-34=-2$,所以$\{a_n\}$是等差数列,故A正确.

对于B,设$\{a_n\}$的公差为d,

由选项A知,$a_1=32$,$d=-2$,根据等差数列前n项和的性质可知,S_3,S_6-S_3,S_9-S_6成等差数列,$S_9-S_6-(S_6-S_3)=S_6-S_3-S_3=3\times3d=-18$,故B错误.

对于C,因为$a_1=32>0$,$d=-2<0$,

要使S_n取得最大值,则应有$\begin{cases}a_n\geqslant0,\\a_{n+1}\leqslant0,\end{cases}$

即$\begin{cases}-2n+34\geqslant0,\\-2(n+1)+34\leqslant0,\end{cases}$解得$16\leqslant n\leqslant17$.

又$n\in\mathbf{N}^*$,所以当$n=16$或$n=17$时,S_n取得最大值.故C正确.

对于D,由选项A知,$S_n=-n^2+33n$,

令$-n^2+33n\geqslant0$,可得$0\leqslant n\leqslant33$.

所以,当$S_n\geqslant0$时,n的最大值为33.故D正确.

故选ACD.

4.(多选)公差为d的等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,若$S_{11}>0$,$S_{12}<0$,则下列说法正确的有(　　)

A.$d<0$

B.$a_7>0$

C.$\{S_n\}$中S_5最大

D.$|a_4|<|a_9|$

AD　**解析**：由$S_{11}=\dfrac{11(a_1+a_{11})}{2}=11a_6>0$，得$a_6>0$.

又$S_{12}=\dfrac{12(a_1+a_{12})}{2}=6(a_6+a_7)<0$，得$a_6+a_7<0$，

所以$a_6>0$，$a_7<0$，数列$\{a_n\}$是递减数列，其前6项为正数，从第7项起均为负数.

由以上分析可知，公差$d<0$，故A正确；$a_7<0$，故B错误；前6项和最大，故C错误；

由$a_4>0$，$a_9<0$，有$|a_4|-|a_9|=a_4+a_9=a_6+a_7<0$，则$|a_4|<|a_9|$，故D正确.

故选AD.

5.若等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n，T_n，满足$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{2n-1}{3n+1}$，则$\dfrac{a_4}{b_4}=$_____.

$\dfrac{13}{22}$　**解析**：依题意可得$\dfrac{a_4}{b_4}=\dfrac{2a_4}{2b_4}=\dfrac{a_1+a_7}{b_1+b_7}=\dfrac{\frac{7}{2}(a_1+a_7)}{\frac{7}{2}(b_1+b_7)}=\dfrac{S_7}{T_7}=\dfrac{2\times7-1}{3\times7+1}=\dfrac{13}{22}$.

6.设数列$\{a_n\}$的各项都为正数，其前n项和为S_n.已知对任意$n\in\mathbf{N}^*$，S_n是a_n^2和a_n的等差中项.

(1)证明：数列$\{a_n\}$为等差数列，并求a_n；

(2)若数列$\{b_n\}$满足$b_n=-n+5$，求$a_n\cdot b_n$的最大值，并求出此时n的值.

(1)**证明**：由已知，得$2S_n=a_n^2+a_n$，且$a_n>0$.

当$n=1$时，$2a_1=a_1^2+a_1$，解得$a_1=1$.

当$n\geqslant2$时，$2S_{n-1}=a_{n-1}^2+a_{n-1}$，

所以$2S_n-2S_{n-1}=a_n^2-a_{n-1}^2+a_n-a_{n-1}$，

即$2a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+a_n-a_{n-1}$，

即$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1})=a_n+a_{n-1}$.

因为$a_n+a_{n-1}>0$，所以$a_n-a_{n-1}=1(n\geqslant2)$.

故数列$\{a_n\}$是首项为1，公差为1的等差数列，

所以$a_n=n$.

(2)**解**：由(1)可知$a_n=n$.设$c_n=a_n\cdot b_n$，

则$c_n=n(-n+5)=-n^2+5n=-\left(n-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{25}{4}$.

因为$n\in\mathbf{N}^*$，所以当$n=2$或$n=3$时，c_n的最大值为6.

故$a_n\cdot b_n$的最大值为6，此时$n=2$或$n=3$.

7.记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_1=1$，$\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$是公差为$\dfrac{1}{3}$的等差数列.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)证明：$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<2$.

(1)**解**：因为$a_1=1$，所以$S_1=a_1=1$，所以$\dfrac{S_1}{a_1}=1$.

因为$\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$是公差为$\dfrac{1}{3}$的等差数列，

所以$\dfrac{S_n}{a_n}=1+\dfrac{1}{3}(n-1)=\dfrac{n+2}{3}$，所以$S_n=\dfrac{(n+2)a_n}{3}$.

当$n\geqslant2$时，$S_{n-1}=\dfrac{(n+1)a_{n-1}}{3}$，

所以$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{(n+2)a_n}{3}-\dfrac{(n+1)a_{n-1}}{3}$，

整理得$(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}$，

又$a_n\neq0$，

则$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n+1}{n-1}$，

所以$a_n=a_1\times\dfrac{a_2}{a_1}\times\dfrac{a_3}{a_2}\times\cdots\times\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=1\times\dfrac{3}{1}\times\dfrac{4}{2}\times\cdots\times\dfrac{n}{n-2}\times\dfrac{n+1}{n-1}=\dfrac{n(n+1)}{2}$，即$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

显然上式对于$n=1$也成立，

所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

(2)**证明**：由(1)得$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，

所以$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}$

$=2\left[\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]$

$=2\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)<2$.

自我超越

1.在等差数列$\{a_n\}$中，前n项和为S_n，若$S_{15}>0$，$S_{16}<0$，则在$\dfrac{S_1}{a_1}$，$\dfrac{S_2}{a_2}$，…，$\dfrac{S_{15}}{a_{15}}$中最大的是　(　　)

A.$\dfrac{S_1}{a_1}$　　B.$\dfrac{S_8}{a_8}$

C.$\dfrac{S_9}{a_9}$　　D.$\dfrac{S_{15}}{a_{15}}$

B　**解析**：因为$S_{15}=15\times\dfrac{a_1+a_{15}}{2}=15a_8>0$，$S_{16}=$

$16\times\frac{a_1+a_{16}}{2}=8(a_8+a_9)<0$,所以 $a_8>0$,$a_9<0$,所以 $\frac{S_1}{a_1}>0$,…,$\frac{S_8}{a_8}>0$,后面的项都小于零.由于 $S_1<S_2<\cdots<S_8$,$a_1>a_2>\cdots>a_8>0$,所以最大项为 $\frac{S_8}{a_8}$.故选 B.

2.已知数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都是等差数列,$a_3=b_1=3$,$a_{15}=b_7=15$,设 $c_n=(-1)^{n-1}\cdot\frac{b_n}{a_na_{n+1}}$,则数列$\{c_n\}$的前 2 024 项和为_____.

$\frac{2\,024}{2\,025}$　**解析:**设数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的公差分别为 d_a,d_b.

由已知得 $a_{15}-a_3=12d_a=12$,$b_7-b_1=6d_b=12$,所以 $d_a=1$,$d_b=2$.

所以 $a_n=a_3+(n-3)d_a=n$,$b_n=b_1+(n-1)d_b=2n+1$.

所以 $c_n=(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=(-1)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$,

所以数列$\{c_n\}$的前 2 024 项和 $c_1+c_2+\cdots+c_{2\,024}=\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2\,023}+\frac{1}{2\,024}\right)-\left(\frac{1}{2\,024}+\frac{1}{2\,025}\right)=1-\frac{1}{2\,025}=\frac{2\,024}{2\,025}$.

4.3　等比数列

4.3.1　等比数列的概念

第 1 课时　等比数列的概念

学习任务目标

1.理解等比数列及等比中项的概念.

2.掌握等比数列的通项公式,能运用公式解决相关问题.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　等比数列、等比中项的概念

等比数列	一般地,如果一个数列从第 2 项起,每一项与它的前一项的比都等于同一个常数,那么这个数列叫做等比数列,这个常数叫做等比数列的公比,公比通常用字母 q 表示(显然 $q\neq0$)
等比中项	如果在 a 与 b 中间插入一个数 G,使 a,G,b 成等比数列,那么 G 叫做 a 与 b 的等比中项.此时,$G^2=ab$

知识点二　等比数列的通项公式

(1)首项为 a_1,公比为 q 的等比数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=a_1q^{n-1}$.

(2)第 n 项与第 m 项的关系为 $a_n=a_mq^{n-m}$,变形得 $q^{n-m}=\frac{a_n}{a_m}$.

(3)由 $a_n=\frac{a_1}{q}\cdot q^n$ 可知,当 $q>0$ 且 $q\neq1$ 时,等比数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n 是函数 $f(x)=\frac{a_1}{q}\cdot q^x(x\in\mathbf{R})$ 当 $x=n$ 时的函数值,即 $a_n=f(n)$.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)等比数列中不存在数值为 0 的项.　(　√　)

(2)常数列 a,a,a,a,…一定是等比数列.(　×　)

(3)若 $a_n=\begin{cases}3,n=1,\\2^{n-1},n\geqslant2,\end{cases}$ 则数列$\{a_n\}$是等比数列.

(　　)

×　**提示:**第 2 项与第 1 项的比是 $\frac{2}{3}$,从第 3 项开始每一项与前一项的比都是 2,不符合等比数列的定义.

(4)任何两个实数都有等比中项.　(　×　)

2.已知 1,$\sqrt{2}$,2,…为等比数列,当 $a_n=8\sqrt{2}$ 时,正整数 $n=$　(　　)

A.6　　B.7　　C.8　　D.9

C　**解析:**由题意知首项 $a_1=1$,公比 $q=\sqrt{2}$,$a_n=8\sqrt{2}=(\sqrt{2})^7$,故 $n-1=7$,即 $n=8$.故选 C.

3.请思考并回答下列问题:

(1)有既是等差数列又是等比数列的数列吗?若有,是什么数列?

(2)等比数列的公比可以是任意实数吗?

(3)若数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}^*)$,那么$\{a_n\}$是等比数列吗?

(4)已知数列$\{a_n\}$为等比数列,若$a_1=2,a_5=8$,则$a_3=\pm4$是否正确?

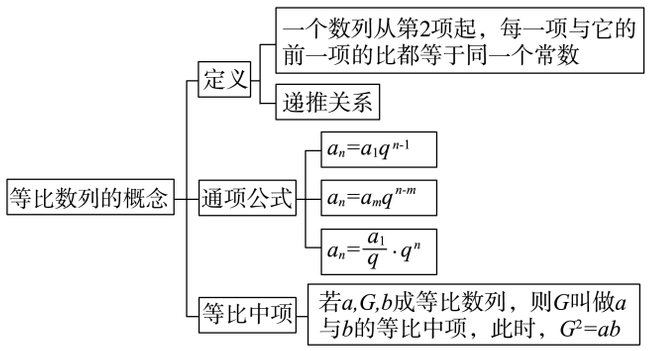
(1)**提示**:有.非零常数列既是等差数列又是等比数列.

(2)**提示**:不可以.等比数列的公比可以是正数、负数,但不能为零.

(3)**提示**:不一定.当$a_1=0$时,按所给递推关系式,该数列为常数列,且常数为0,此时$\{a_n\}$不是等比数列.

(4)**提示**:不正确.设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,则可得$q^4=\frac{a_5}{a_1}=4$,解得$q^2=2$,所以$a_3=a_1q^2=2\times2=4$.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 理解等比数列的概念

1.在公差不为0的等差数列$\{a_n\}$中,a_3,a_7,a_m是公比为2的等比数列,则$m=$(　　)

A.11　　B.13　　C.15　　D.17

C　**解析**:设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,则$d\neq0$.

因为a_3,a_7,a_m是公比为2的等比数列,

所以$\frac{a_1+6d}{a_1+2d}=2$①,

$\frac{a_1+(m-1)d}{a_1+6d}=2$②.

由①得$a_1=2d$,代入②,解得$m=15$.

故选C.

2.从集合$\{1,2,3,\cdots,10\}$中任意选出三个不同的数,使得这三个数成等比数列,则这样的等比数列的个数是(　　)

A.8　　B.10　　C.12　　D.16

A　**解析**:当公比为2时,等比数列可为1,2,4或2,4,8;当公比为3时,等比数列可为1,3,9;当公比为$\frac{3}{2}$时,等比数列可为4,6,9.同时,以上数列反向排列也是等比数列.综上,共8个等比数列.故选A.

3.下列数列一定是等比数列的是(　　)

A.$m,m^2,m^3,m^4,\cdots$

B.$2^2,4^2,6^2,8^2,\cdots$

C.$q-1,(q-1)^2,(q-1)^3,(q-1)^4,\cdots$

D.$\frac{1}{a},\frac{1}{a^2},\frac{1}{a^3},\frac{1}{a^4},\cdots$

D　**解析**:当$m=0,q=1$时,A,C均不是等比数列;$\frac{6^2}{4^2}\neq\frac{4^2}{2^2}$,所以B不是等比数列.故选D.

4.下列数列是等比数列的有_____.(填序号)

①$1,\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{9},\frac{1}{12},\cdots$;

②$10,10,10,10,10,\cdots$;

③$\frac{2}{3},\left(\frac{2}{3}\right)^2,\left(\frac{2}{3}\right)^3,\left(\frac{2}{3}\right)^4,\cdots$;

④$1,0,1,0,1,0,\cdots$;

⑤$1,-4,16,-64,256,\cdots$.

②③⑤　**解析**:①中$\frac{\frac{1}{3}}{1}\neq\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}$,故不是等比数列;②是等比数列,公比为1;③是等比数列,公比为$\frac{2}{3}$;④中有数0,故不是等比数列;⑤是等比数列,公比为-4.

【探究总结】

对等比数列概念的理解

等比数列从第2项起,每一项与它的前一项的比都等于同一个常数,且等比数列中任意一项都不能为0,对于含参数的数列需要分类讨论.

任务2 掌握等比数列的通项公式与等比中项

探究活动

例1　(1)在等比数列$\{a_n\}$中,已知$a_2=2,a_4a_6=2^8$,则公比$q=$(　　)

A.-2　　B.$\sqrt{2}$

C.2　　D.±2

D　**解析**:由$\{a_n\}$是等比数列,得$a_4a_6=a_2q^2a_2q^4=2^8$.又$a_2=2$,所以$2^2q^6=2^8$,即$q^6=2^6$,所以$q=\pm2$.故选D.

(2)若数列$-1,a,b,c,-9$为等比数列,则实数b的值为(　　)

A.-3　　B.3

C.±3　　D.不能确定

A　**解析**:因为$-1,a,b,c,-9$成等比数列,

所以$-1,a,b$成等比数列,a,b,c成等比数列,$b,c,-9$成等比数列.

所以$a^2=-b,b^2=ac,c^2=-9b$.

所以$b^4=a^2c^2=(-1)\times(-9)b^2$,所以$b^2=9$.

又$a^2=-b>0$,所以$b<0$.所以$b=-3$.故选A.

(3)已知数列$\{a_n\}$是等比数列.

①若$a_2=4,a_5=-\frac{1}{2}$,求a_n;

②若$a_2+a_5=18,a_3+a_6=9,a_n=1$,求$n$.

解:设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.

①根据题意,可知$\begin{cases}a_2=a_1q=4,\\a_5=a_1q^4=-\frac{1}{2},\end{cases}$

所以$\begin{cases}q=-\frac{1}{2},\\a_1=-8.\end{cases}$

所以$a_n=a_1q^{n-1}=-8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(-2)^{4-n}$.

②因为$a_3+a_6=(a_2+a_5)q$,

即$9=18q$,所以$q=\frac{1}{2}$.

由$a_1q+a_1q^4=18$,得$a_1=32$.

由$a_n=a_1q^{n-1}=1$,得$n=6$.

【探究总结】

对等比中项的理解

(1)在一个等比数列中,从第2项起,每一项(有穷数列的末项除外)都是它的前一项与后一项的等比中项.

(2)"a,G,b成等比数列"等价于"$G^2=ab$(a,b均不为0)",可以用它来判断或证明三个数成等比数列.应注意"a,G,b成等比数列"与"$G=\pm\sqrt{ab}$"不是等价的.

(3)当a,b同号时,a,b的等比中项有两个,且它们互为相反数;当a,b异号时,a,b没有等比中项.

应用迁移

1.已知等比数列$\{a_n\}$.

(1)若$a_3=9,a_6=243$,求a_5;

(2)若$a_1=\frac{9}{8},a_n=\frac{1}{3}$,公比$q=\frac{2}{3}$,求$n$;

(3)若$a_3+a_6=36,a_4+a_7=18,a_n=\frac{1}{2}$,求$n$.

解:设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.

(1)因为$a_6=a_3q^3$,即$243=9\cdot q^3$,

所以$q^3=27$,所以$q=3$.

所以$a_5=a_6\times\frac{1}{3}=81$.

(2)因为$a_n=a_1q^{n-1}$,

所以$\frac{1}{3}=\frac{9}{8}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$,所以$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^3$,

所以$n=4$.

(3)(方法一)因为$a_3+a_6=36,a_4+a_7=18$,

所以$\begin{cases}a_1q^2+a_1q^5=36①,\\a_1q^3+a_1q^6=18②.\end{cases}$

②÷①得$q=\frac{1}{2}$,代入①得$a_1=128$.

而$a_n=a_1q^{n-1}$,所以$\frac{1}{2}=128\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

所以$n=9$.

(方法二)$q=\frac{a_4+a_7}{a_3+a_6}=\frac{1}{2}$,

$a_3+a_6=a_3+a_3\cdot q^3=a_3(1+q^3)=36$,

所以$a_3=\frac{36}{1+q^3}=32$.

因为$a_n=a_3q^{n-3}$,

所以$\frac{1}{2}=32\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$,

所以$n=9$.

2.已知等比数列$\{a_n\}$的前三项和为168,$a_2-a_5=42$,求a_5,a_7的等比中项.

解:设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.

由已知得$\begin{cases}a_1+a_1q+a_1q^2=168,\\a_1q-a_1q^4=42,\end{cases}$

整理得$\begin{cases}a_1(1+q+q^2)=168①,\\a_1q(1-q^3)=42②.\end{cases}$

②÷①得$q(1-q)=\frac{1}{4}$,所以$q=\frac{1}{2}$.

所以$a_1=\frac{42}{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^4}=96$.

设G是a_5,a_7的等比中项,

则应有$G^2=a_5a_7=a_1q^4\cdot a_1q^6=a_1^2\cdot q^{10}$,

所以$G^2=96^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=9$,

所以$G=\pm3$.

所以a_5,a_7的等比中项是±3.

任务3 掌握成等比数列的几个数的设法

探究活动

例2　有四个实数，前三个数成等比数列，后三个数成等差数列，前三个数之积为27，中间两个数之和为9，求这四个数.

解：设前三个数分别为$\frac{a}{q}$，a，aq（$a\neq0$，$q\neq0$），则第四个数为$2aq-a$.

由题意得$\begin{cases}\frac{a}{q}\cdot a\cdot aq=27,\\ a+aq=9,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=3,\\ q=2.\end{cases}$

所以这四个数分别为$\frac{3}{2}$，3，6，9.

［一题多思］

思考1.四个数成等比数列，这四个数通常可设为什么形式？

提示：可设为a，aq，aq^2，aq^3（$q\neq0$）.若四个正数成等比数列，可设为$\frac{a}{q^3}$，$\frac{a}{q}$，aq，aq^3（$q\neq0$）.

思考2.若将本例中四个数满足的条件改为“前三个数成等差数列，后三个数成等比数列，中间两个数之积为16，首尾两个数之积为-128”，求这四个数.

解：设这四个数分别为$\frac{2a}{q}-a$，$\frac{a}{q}$，a，aq（$a\neq0$，$q\neq0$），由题意得$\begin{cases}\frac{a^2}{q}=16,\\ \left(\frac{2a}{q}-a\right)\cdot aq=-128,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=8,\\ q=4\end{cases}$或$\begin{cases}a=-8,\\ q=4\end{cases}$（$q=-2$舍去）.

因此所求的四个数为-4，2，8，32或4，-2，-8，-32.

【探究总结】

成等比数列的几个数的设法

（1）三个成等比数列的数可设为$\frac{a}{q}$，a，aq.

推广到一般：奇数个成等比数列的数可设为…，$\frac{a}{q^2}$，$\frac{a}{q}$，a，aq，aq^2，….

（2）四个符号相同的成等比数列的数可设为$\frac{a}{q^3}$，$\frac{a}{q}$，aq，aq^3.

推广到一般：偶数个符号相同成等比数列的数，可设为…，$\frac{a}{q^5}$，$\frac{a}{q^3}$，$\frac{a}{q}$，aq，aq^3，aq^5，….

（3）四个数成等比数列，不能确定它们的符号相同时，可设为a，aq，aq^2，aq^3.

应用迁移

（教材P30例3改编）有四个数，其中前三个数成等差数列，后三个数成等比数列，并且第一个数与第四个数的和是16，第二个数与第三个数的和是12，求这四个数.

解：（方法一）设这四个数依次为$a-d$，a，$a+d$，$\frac{(a+d)^2}{a}$（$a\neq0$，$a+d\neq0$），由条件得$\begin{cases}a-d+\frac{(a+d)^2}{a}=16,\\ a+a+d=12,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=4,\\ d=4\end{cases}$或$\begin{cases}a=9,\\ d=-6.\end{cases}$

当$a=4$，$d=4$时，所求的四个数分别为0，4，8，16；

当$a=9$，$d=-6$时，所求的四个数分别为15，9，3，1.

故所求的四个数分别为0，4，8，16或15，9，3，1.

（方法二）设这四个数依次为$\frac{2a}{q}-a$，$\frac{a}{q}$，a，aq（$a\neq0$，$q\neq0$），

由条件得$\begin{cases}\frac{2a}{q}-a+aq=16,\\ \frac{a}{q}+a=12,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=8,\\ q=2\end{cases}$或$\begin{cases}a=3,\\ q=\frac{1}{3}.\end{cases}$

当$a=8$，$q=2$时，所求的四个数分别为0，4，8，16；

当$a=3$，$q=\frac{1}{3}$时，所求的四个数分别为15，9，3，1.

故所求的四个数分别为0，4，8，16或15，9，3，1.

课后素养评价（七）

基础落实

1.若$4+\sqrt{15}$，m，$4-\sqrt{15}$三个数成等比数列，则$m=$（　　）

A.±1　　B.1　　C.±2　　D.2

A　**解析**：因为$4+\sqrt{15}$，m，$4-\sqrt{15}$成等比数列，所以由等比数列的性质得$m^2=(4+\sqrt{15})\times(4-\sqrt{15})=1$，解得$m=\pm1$.故选A.

2.已知等比数列$\{a_n\}$的公比$q=2$，$a_4=-8$，则首项$a_1=$（　　）

A.-2　　B.-1　　C.1　　D.2

B　**解析**：由题意知首项 $a_1=\frac{a_4}{q^3}=-1$.故选 B.

3.设 $a_n=(-1)^n$（$n\in\mathbf{N}^*$），则数列$\{a_n\}$是　（　）

A.等比数列　　B.等差数列

C.递增数列　　D.递减数列

A　**解析**：由已知数列 $a_n=(-1)^n(n\in\mathbf{N}^*)$的前 5 项为$-1,1,-1,1,-1$，明显数列$\{a_n\}$不是等差数列，也不是单调递增数列，也不是单调递减数列，排除 BCD.又当 $n\geqslant 2,n\in\mathbf{Z}$ 时，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}}=-1$为常数，故数列$\{a_n\}$是等比数列.故选 A.

4.在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=3,a_8=24$，则 $a_{12}=$　（　）

A.48　　B.72　　C.96　　D.192

C　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，则 $q^6=\frac{a_8}{a_2}=8$，可得 $q^2=2$，所以 $a_{12}=a_8q^4=24\times 2^2=96$.故选 C.

5.（多选）在等比数列$\{a_n\}$中，已知 $a_3+a_4=40,a_3-a_5=30$，则　（　）

A.公比为$\frac{1}{4}$

B.$a_{2\,023}=16a_{2\,025}$

C.当 $n\geqslant 6$ 时，$a_n<\frac{1}{2}$

D.$\{a_n\}$的前 10 项积为 1

ABD　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q.

对于 A，由 $\begin{cases}a_3+a_4=40,\\a_3-a_5=30,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a_3+a_3q=40,\\a_3-a_3q^2=30,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}q=\frac{1}{4},\\a_3=32,\end{cases}$ 故 A 正确；

对于 B，$a_{2\,025}=a_{2\,023}q^2=\frac{1}{16}a_{2\,023}$，则 $a_{2\,023}=16a_{2\,025}$，故 B 正确；

对于 C，$a_n=a_3q^{n-3}=2^{11-2n}$，当 $n\geqslant 6$ 时，$11-2n\leqslant -1$，则 $a_n\leqslant 2^{-1}=\frac{1}{2}$，故 C 错误；

对于 D，由 $a_5a_6=2\times\frac{1}{2}=1$，可得$\{a_n\}$的前 10 项积为$(a_5a_6)^5=1$，故 D 正确.

故选 ABD.

6.“$m=3$”是“$1,m,9$ 成等比数列”的　（　）

A.必要不充分条件

B.充分不必要条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

B　**解析**：$1,m,9$ 成等比数列，等价于 $m^2=1\times 9$，解得 $m=\pm 3$.

而“$m=3$”是“$m=\pm 3$”的充分不必要条件，

所以“$m=3$”是“$1,m,9$ 成等比数列”的充分不必要条件.

故选 B.

7.已知 a,b,c,d 成等比数列，给出下列三个数列：①a^2,b^2,c^2,d^2；②ab,bc,cd；③$a-b,b-c,c-d$.其中一定是等比数列的有　（　）

A.0 个　　B.1 个　　C.2 个　　D.3 个

C　**解析**：若 a,b,c,d 成等比数列，设公比为 q，则 a,b,c,d 均不为 0，且 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=q$，

则 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2}{b^2}=\frac{d^2}{c^2}=q^2$，故 a^2,b^2,c^2,d^2 成等比数列，且公比为 q^2；

$\frac{bc}{ab}=\frac{c}{a}=q^2,\frac{cd}{bc}=\frac{d}{b}=q^2$，因此 ab,bc,cd 成等比数列，且公比为 q^2；

$a-b=a(1-q),b-c=b(1-q)=aq(1-q),c-d=c(1-q)=aq^2(1-q)$，当 $q\neq 1$ 时，$a-b,b-c,c-d$ 成等比数列，且公比为 q，但当 $q=1$ 时，$a-b,b-c,c-d$ 不是等比数列.故选 C.

8.已知等比数列$\{a_n\}$的公比不为 1，且 a_3,a_2,a_4 成等差数列，则数列$\{a_n\}$的公比为_____.

-2　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q\neq 1)$.

由已知条件可知 $2a_2=a_4+a_3$，

又 $a_3=a_2\cdot q,a_4=a_2\cdot q^2$，且 $a_n\neq 0$，代入到 $2a_2=a_4+a_3$，

可得 $2a_2=a_2\cdot q^2+a_2\cdot q$，

化简得 $q^2+q-2=(q-1)(q+2)=0$，

解得 $q=-2$ 或 $q=1$（舍）.

9.在 320 与 5 之间插入 5 个数，使这 7 个数成等比数列，求所插入的 5 个数.

解：设所成的等比数列的公比为 q，则 $5=320q^6$，即 $q^6=\frac{1}{64}$，解得 $q=\pm\frac{1}{2}$.

当 $q=\frac{1}{2}$ 时，插入的 5 个数为 160，80，40，20，10；

当 $q=-\frac{1}{2}$ 时，插入的 5 个数为 $-160,80,-40,20,-10$.

能力提升

1.已知数列$\{a_n\}$为等比数列，则“公比 $q>1$”是“$\{a_n\}$为递增数列”的　（　）

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

D　**解析**：等比数列$\{a_n\}$为递增数列的充要条件是$\begin{cases}a_1>0,\\q>1\end{cases}$或$\begin{cases}a_1<0,\\0<q<1.\end{cases}$故“公比$q>1$”是“$\{a_n\}$为递增数列”的既不充分也不必要条件.故选D.

2.(多选)已知a,b,c为非零实数,则下列说法一定正确的有　(　　)

A.若a,b,c成等差数列,则a^2,b^2,c^2成等差数列

B.若a,b,c成等比数列,则$\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$成等比数列

C.若a,b,c成等差数列,则$2^a,2^b,2^c$成等比数列

D.若a^2,b^2,c^2成等比数列,则a,b,c成等比数列

BC　**解析**：对于A,1,2,3是等差数列,但是1,4,9不是等差数列,故A不正确;

对于B,a,b,c成等比数列,则$b^2=ac$,所以$\left(\frac{1}{b}\right)^2=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{c}$,所以$\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$成等比数列,故B正确;

对于C,a,b,c成等差数列,所以$2b=a+c$,所以$2^{2b}=2^{a+c}$,即$(2^b)^2=2^a\cdot2^c$,故C正确;

对于D,a^2,b^2,c^2成等比数列,所以$(b^2)^2=a^2c^2$,所以$b^2=ac$或$b^2=-ac$,若$b^2=-ac$,则a,b,c不成等比数列,故D不正确.

故选BC.

3.在数列$\{a_n\}$中,$a_1=4$,$a_{n+1}=3a_n-2$,则$a_n=$____.

3^n+1　**解析**：因为$a_{n+1}=3a_n-2(n\in\mathbf{N}^*)$,$a_1=4$,所以$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$,所以$\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}=3$,所以数列$\{a_n-1\}$是首项为3,公比为3的等比数列,所以$a_n-1=3\cdot3^{n-1}=3^n$,所以$a_n=3^n+1$.

4.已知一个等比数列的各项均为正数,且数列中的任何一项都等于它后面两项的和,则该数列的公比$q=$_____.

$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$　**解析**：设该等比数列为$\{a_n\}$,公比为q.依题意,得$a_n=a_{n+1}+a_{n+2}$,所以$a_n=a_nq+a_nq^2$.

因为$a_n>0$,所以$q^2+q-1=0$,

解得$q=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\left(q=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\text{舍去}\right)$.

5.在各项均为正偶数的数列a_1,a_2,a_3,a_4中,前3项成公差为$d(d>0)$的等差数列,后3项成公比为q的等比数列.若$a_4-a_1=88$,求q的所有可能的值构成的集合.

解：易知四个数依次为a_1,a_1+d,a_1+2d,a_1+88,其中a_1,d为正偶数.

因为后3项成公比为q的等比数列,

所以$(a_1+2d)^2=(a_1+d)(a_1+88)$,整理得$a_1=\frac{4d(22-d)}{3d-88}>0$,

所以$(d-22)(3d-88)<0$,解得$22<d<\frac{88}{3}$,

所以d可能的值为24,26,28.

当$d=24$时,$a_1=12$,$q=\frac{5}{3}$;

当$d=26$时,$a_1=\frac{208}{5}$(舍去);

当$d=28$时,$a_1=168$,$q=\frac{8}{7}$.

综上可得,q的所有可能的值构成的集合为$\left\{\frac{5}{3},\frac{8}{7}\right\}$.

自我超越

1.已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中,$2a_1,\frac{1}{2}a_3,a_2$成等差数列,则公比$q=$　(　　)

A.-1　　B.2

C.-1或2　　D.1或-2

B　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>0)$,因为$2a_1,\frac{1}{2}a_3,a_2$成等差数列,所以$2a_1+a_2=2\times\frac{1}{2}a_3$,即$2a_1+a_1q=a_1q^2$.显然$a_1>0$,所以$2+q=q^2$,解得$q=2$或$q=-1$(舍去).故选B.

2.(多选)将25个数排成5行5列:

$$\begin{array}{ccccc}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\\a_{51}&a_{52}&a_{53}&a_{54}&a_{55}\end{array}$$

已知第一行的数$a_{11},a_{12},a_{13},a_{14},a_{15}$成公差为$d$的等差数列,而每一列的数$a_{1j},a_{2j},a_{3j},a_{4j},a_{5j}(1\leqslant j\leqslant5)$都成公比为$q$的等比数列.若$a_{24}=2$,$a_{41}=-1$,$a_{43}=5$,则下列结论一定正确的有　(　　)

A.$d=\frac{3}{8}$　　B.$q=\pm2$

C.$a_{22}\cdot a_{44}=\frac{8}{3}$　　D.$a_{44}=8$

BD　**解析**：因为第一行的数$a_{11},a_{12},a_{13},a_{14},a_{15}$成公差为$d$的等差数列,每列的数成公比为$q$的等比数列,则$a_{24}=2=a_{14}q=(a_{11}+3d)q$,$a_{41}=-1=a_{11}q^3$,

$a_{43}=5=a_{13}q^3=(a_{11}+2d)q^3$,

联立以上式子,可解得 $2q^2=-1+9=8$,即 $q=\pm2$.

故 B 正确.

将 $q=\pm2$ 代入前面式子,

当 $q=2$ 时,$d=\frac{3}{8}$,$a_{11}=-\frac{1}{8}$,$a_{12}=\frac{1}{4}$,$a_{13}=\frac{5}{8}$,

$a_{14}=1$,$a_{15}=\frac{11}{8}$,

此时 $a_{44}=a_{14}q^3=1\times2^3=8$,

$a_{22}=a_{12}q=\frac{1}{4}\times2=\frac{1}{2}$,

则 $a_{22}\cdot a_{44}=\frac{1}{2}\times8=4\neq\frac{8}{3}$;

当 $q=-2$ 时,$d=-\frac{3}{8}$,$a_{11}=\frac{1}{8}$,$a_{12}=-\frac{1}{4}$,$a_{13}=-\frac{5}{8}$,$a_{14}=-1$,$a_{15}=-\frac{11}{8}$,此时 $a_{44}=a_{14}q^3=8$,$a_{22}=a_{12}q=\frac{1}{2}$,则 $a_{22}a_{44}=\frac{1}{2}\times8=4\neq\frac{8}{3}$.

综上所得,A,C 错误 B,D 正确.

故选 BD.

第 2 课时　等比数列的性质及应用

学习任务目标

1.掌握等比数列的判定和证明方法.
2.能够根据等比数列的定义和通项公式推出等比数列的常用性质,并运用性质解决有关问题.
3.能够运用等比数列的知识解决简单的实际问题.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　等比数列的性质

(1)若 $m+n=p+q(m,n,p,q\in\mathbf{N}^*)$,则 $a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$;

若 $m+n=2k(m,n,k\in\mathbf{N}^*)$,则 $a_k^2=a_m\cdot a_n$.

(2)若数列$\{a_n\}$是等比数列,则$\{|a_n|\}$,$\{a_n^2\}$,$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$仍为等比数列.

(3)若数列$\{a_n\}$是等差数列,则$\{b^{a_n}\}$为等比数列,其中 $b\neq0$.

(4)若数列$\{a_n\}$(各项均为正数)是等比数列,则$\{\log_b a_n\}$为等差数列,其中 $b>0$ 且$b\neq1$.

知识点二　等比数列性质的应用

一般来说,当三个数成等比数列时,可设这三个数分别为 a,aq,aq^2 或$\frac{a}{q}$,a,aq,此时公比为 q;当四个数成等比数列时,可设这四个数分别为 a,aq,aq^2,aq^3,公比为 q;当四个数均为正(负)数时,可设为$\frac{a}{q^3}$,$\frac{a}{q}$,aq,aq^3,公比为 q^2.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)在等比数列$\{a_n\}$中,若 $a_ma_n=a_pa_q$,则 $m+n=p+q$.　(　×　)

(2)若数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都是等比数列,则数列$\{a_n+b_n\}$也一定是等比数列.　(　×　)

(3)若数列$\{a_n\}$是等比数列,则数列$\{\lambda a_n\}$也是等比数列.　(　×　)

2.在等比数列$\{a_n\}$中,若 $a_2a_8=9$,则 $a_3a_7=$　(　　)

A.3　　B.±3　　C.9　　D.±9

C　**解析**:因为 $2+8=3+7$,所以 $a_3a_7=a_2a_8=9$.

故选 C.

3.请思考并回答下列问题:

(1)等差数列的单调性只与其公差有关,等比数列的单调性是否只与其公比有关呢?

(2)若$\{a_n\}$为等比数列,且 $m+n=p(m,n,p\in\mathbf{N}^*)$,$a_ma_n=a_p$ 一定成立吗?

(3)从公比为 q 的等比数列$\{a_n\}$中依次取相邻两项的乘积组成新的数列 a_1a_2,a_2a_3,a_3a_4,…,新数列是公比为 $2q$ 的等比数列吗?

(1)**提示**:等比数列的单调性与其首项 a_1 和公比 q 都有关系:

当 $q>1$,$a_1>0$ 或 $0<q<1$,$a_1<0$ 时,$\{a_n\}$是递增数列;

当 $q>1$,$a_1<0$ 或 $0<q<1$,$a_1>0$ 时,$\{a_n\}$是递减数列;

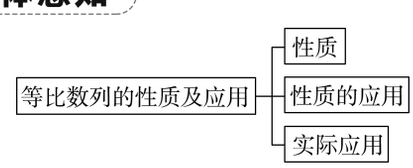
当 $q=1$ 时,$\{a_n\}$是常数列;

当 $q<0$ 时,$\{a_n\}$是摆动数列.

(2)**提示**:不一定.例如等比数列 1,2,4,8,…中,$a_1\cdot a_3\neq a_4$.

(3)**提示**:不是.由于$\frac{a_na_{n+1}}{a_{n-1}a_n}=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}=q\cdot q=q^2$,$n\geqslant2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$,所以$\{a_na_{n+1}\}$是以 q^2 为公比的等比数列.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 理解等比数列的性质

1.已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$a_5a_6=9$，则$\log_3a_1+\log_3a_2+\cdots+\log_3a_{10}=$　　(　　)

A.12　　B.10

C.8　　D.$2+\log_35$

B　**解析**：因为$a_5a_6=9$，所以$\log_3a_1+\log_3a_2+\cdots+\log_3a_{10}=\log_3(a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_{10})=\log_3(a_5a_6)^5=\log_39^5=\log_33^{10}=10$.故选B.

2.在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1a_3a_{10}=2a_4a_7$，且$a_{12}=54$，则$a_9=$　　(　　)

A.36　　B.27　　C.18　　D.9

C　**解析**：由等比数列的性质得$a_1a_{10}=a_4a_7$，故$a_1a_3a_{10}=a_3a_4a_7=2a_4a_7$，得$a_3=2$.由$a_{12}=a_3q^9=54$，得$q^9=27$，则$q^3=3$，所以$a_9=\dfrac{a_{12}}{q^3}=\dfrac{54}{3}=18$.故选C.

3.在等比数列$\{a_n\}$中，$a_7a_{11}=6$，$a_4+a_{14}=5$，求$\dfrac{a_{20}}{a_{10}}$.

解：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.

因为$a_7a_{11}=a_4a_{14}=6$，$a_4+a_{14}=5$，

所以$\begin{cases}a_4=2,\\a_{14}=3\end{cases}$或$\begin{cases}a_4=3,\\a_{14}=2.\end{cases}$所以$q^{10}=\dfrac{3}{2}$或$q^{10}=\dfrac{2}{3}$.

因为$\dfrac{a_{20}}{a_{10}}=q^{10}$，所以$\dfrac{a_{20}}{a_{10}}$的值为$\dfrac{3}{2}$或$\dfrac{2}{3}$.

【探究总结】

(1)解答等比数列问题的基本方法——基本量法

①基本思路：运用方程思想列出基本量a_1和q的方程组，求出a_1和q，然后利用通项公式求解；

②优缺点：适用面广，入手简单，思路清晰，但有时运算比较复杂.

(2)利用等比数列的性质解题

①基本思路：充分发挥项的“下标”的作用，分析等比数列项与项之间的关系，选择恰当的性质解题；

②优缺点：简便快捷，但适用面窄.

任务2 掌握等比数列的判定和证明

探究活动

例1　数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}\cdot S_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，求证：数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$为等比数列.

证明：易知$S_n\neq0$.因为$\dfrac{S_{n+1}}{n+1}=\dfrac{S_n+a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{S_n+\frac{n+2}{n}S_n}{n+1}=\dfrac{\frac{2n+2}{n}S_n}{n+1}=2\times\dfrac{S_n}{n}$，所以$\dfrac{\frac{S_{n+1}}{n+1}}{\frac{S_n}{n}}=2$.

又$\dfrac{S_1}{1}=\dfrac{a_1}{1}=1$，

所以数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$是以1为首项，2为公比的等比数列.

[一题多思]

思考1.本例中为了证明数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$为等比数列，需要先推出一个什么样的等式？为了得到这个等式，如何将已知条件变形？

提示：先推出$\dfrac{S_{n+1}}{n+1}$与$\dfrac{S_n}{n}$的关系式.

将$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}S_n$变为$S_{n+1}-S_n=\dfrac{n+2}{n}S_n$，

所以$S_{n+1}=\dfrac{2n+2}{n}S_n=\dfrac{2(n+1)}{n}S_n$，则$\dfrac{S_{n+1}}{n+1}=2\cdot\dfrac{S_n}{n}$.

思考2.将本例中数列$\{a_n\}$满足的条件变为“$a_1=2$，$a_{n+1}=4a_n-3n+1(n\in\mathbf{N}^*)$”，证明：数列$\{a_n-n\}$是等比数列.

证明：由$a_{n+1}=4a_n-3n+1$，得$a_{n+1}-(n+1)=4(a_n-n)$，$n\in\mathbf{N}^*$.

因为$a_1-1=1\neq0$，所以$a_n-n\neq0$，

所以$\dfrac{a_{n+1}-(n+1)}{a_n-n}=4$，

所以数列$\{a_n-n\}$是以1为首项，4为公比的等比数列.

思考3.若将本例中数列$\{a_n\}$满足的条件变为“$a_1=-2$，$a_{n+1}=2a_n+3$”.试利用此条件构造一个等比数列，进而求出数列$\{a_n\}$的通项公式.

解：因为$a_{n+1}=2a_n+3$，

所以$a_{n+1}+3=2a_n+6=2(a_n+3)$.

因为$a_1=-2$，所以$a_1+3=1$，所以$a_n+3\neq0$.

所以$\dfrac{a_{n+1}+3}{a_n+3}=2$，

所以$\{a_n+3\}$是以1为首项，2为公比的等比数列.

所以$a_n+3=1\times2^{n-1}$，所以$a_n=2^{n-1}-3$.

【探究总结】

判定一个数列是等比数列的方法

(1)定义法：若数列$\{a_n\}$满足$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$(q为常数且不

为0）或$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q$（$n\geqslant 2$，q为常数且不为0），则数列$\{a_n\}$是等比数列.

（2）等比中项法：对于数列$\{a_n\}$，若$a_{n+1}^2=a_n\cdot a_{n+2}$且$a_n\neq 0$，则数列$\{a_n\}$是等比数列.

（3）通项公式法：若数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_1q^{n-1}$（$a_1\neq 0$，$q\neq 0$），则数列$\{a_n\}$是等比数列.

应用迁移

数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=2(a_n-1)$.

（1）求证：数列$\{a_n\}$为等比数列；

（2）求数列$\{a_n\}$的通项公式.

（1）**证明**：因为$S_n=2(a_n-1)$①，

所以当$n\geqslant 2$时，$S_{n-1}=2(a_{n-1}-1)$②.

①－②，得$a_n=2a_n-2a_{n-1}$，即$a_n=2a_{n-1}$③.

又当$n=1$时，$a_1=2(a_1-1)$，即$a_1=2\neq 0$，所以$a_n\neq 0$.由③可得$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2(n\geqslant 2)$，

则数列$\{a_n\}$为以2为首项，2为公比的等比数列.

（2）**解**：由（1）知$a_n=2^n$.

任务3 学习等比数列的实际应用

探究活动

例2　（1）某种细菌在生长过程中，每10 min分裂一次（由一个分裂为两个），经过50 min，此细菌可由一个分裂成　　（　　）

A.15个　　B.31个

C.16个　　D.32个

D　**解析**：由题意可得一个细菌10 min后共有$2^1=2$个，20 min后共有$2^2=4$个……从而得到$10n$ min后共有2^n个，所以经过50 min，此细菌可由一个分裂成$2^5=32$个.故选D.

（2）某渔场养鱼，第一年鱼的产量增长率为200%，以后每年的产量增长率都是上一年增长率的一半.

①当饲养五年后，鱼的产量预计是原来的多少倍？

②如果由于某种原因，每年的损失是预计产量的10%，那么多少年后，鱼的产量开始减少？

解：①设鱼原来的产量为a，n年后鱼的产量为a_n，则

$a_1=a\times(1+2)=3a$，

$a_2=3a\times(1+1)=6a$，

$a_3=6a\times\left(1+\frac{1}{2}\right)=9a$，

$a_4=9a\times\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{45}{4}a$，

$a_5=\frac{45}{4}a\times\left(1+\frac{1}{8}\right)=\frac{405}{32}a$.

所以，五年后鱼的产量是原来的$\frac{405}{32}$倍，即$12\frac{21}{32}$倍.

②设n年后鱼的实际产量为b_n，则

$b_{n+1}=b_n\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\times\frac{9}{10}$.

由$b_n>b_{n+1}$，得$1>\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\times\frac{9}{10}$.

即$2^{n-1}>9$，解得$n\geqslant 5$.

因此，从第五年开始，鱼的产量开始减少.

【探究总结】

求解等比数列实际应用问题的关键点

求解此类问题应先把实际问题转化为等比数列问题，在建立等比数列模型后，往往要进行指数运算，要注意运算的准确性.对于近似计算问题，答案要符合题设中实际问题的需要.

应用迁移

某种放射性物质不断变化为其他物质，每经过一年，剩余的物质质量是原来的84%，这种物质的半衰期（放射性物质质量衰减到原来的一半所需要的时间称为该物质的半衰期）为多长？（参考数据：$\lg 0.5\approx -0.301\ 0$，$\lg 0.84\approx -0.075\ 7$，精确到1年）

解：设这种物质最初的质量是1，经过n年，剩余质量是a_n.由条件可得，数列$\{a_n\}$是一个等比数列，其中$a_1=0.84$，$q=0.84$.设$a_n=0.5$，则$0.84^n=0.5$，两边取常用对数，得$n=\frac{\lg 0.5}{\lg 0.84}\approx 4$.

故这种物质的半衰期大约为4年.

任务4 研究等比数列与等差数列的综合应用

探究活动

例3　已知$\{a_n\}$为等差数列，$a_1=1$且公差$d\neq 0$，a_4是a_2和a_8的等比中项.

（1）若数列$\{a_n\}$的前m项和$S_m=66$，求m的值；

（2）若a_1，a_2，a_{k_1}，a_{k_2}，…，a_{k_n}成等比数列，求数列$\{k_n\}$的通项公式.

解：（1）因为$\{a_n\}$是等差数列，

所以$a_2=a_1+d$，$a_4=a_1+3d$，$a_8=a_1+7d$.

因为a_4是a_2和a_8的等比中项，

所以$a_4^2=a_2\cdot a_8$，所以$(a_1+3d)^2=(a_1+d)\cdot(a_1+7d)$.

又$d\neq 0$，化简得$d=a_1=1$，所以$a_n=n$.

由$S_m=\frac{m(m+1)}{2}=66$，解得$m=11$（负值已舍去）.

（2）因为a_1，a_2，a_{k_1}，a_{k_2}，…，a_{k_n}成等比数列，

所以该数列的公比 $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{1}=2$，所以 $a_{k_n}=1\times 2^{(n+2)-1}=2^{n+1}$.

又因为$\{a_n\}$为等差数列，所以 $a_{k_n}=2^{n+1}=k_n$，

所以 $k_n=2^{n+1}$.

【探究总结】

解决等差数列与等比数列的综合问题应注意的四个方面

(1)灵活应用等差数列、等比数列的公式和性质.

(2)注意基本量及方程思想的应用.

(3)注重问题的转化，利用非等差数列、非等比数列构造出新的等差数列或等比数列，以便利用等差数列、等比数列的公式和性质解题.

(4)当题中出现多个数列时，既要纵向考虑单一数列的项与项之间的关系，又要横向考虑各数列之间的内在联系.

应用迁移

1.在公比大于 0 的等比数列$\{a_n\}$中，已知 $a_3a_5=a_4$，且 a_2，$3a_4$，a_3 成等差数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

(2)已知 $S_n=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$，当 n 为何值时，S_n 取得最大值？并求 S_n 的最大值.

解：(1)设数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q>0)$，

由 $a_3a_5=a_4=a_4^2$，得 $a_4=1$.

因为 a_2，$3a_4$，a_3 成等差数列，

所以 $a_2+a_3=6a_4$，

则 $6q^2-q-1=0$，

解得 $q=\frac{1}{2}$(负值已舍去)，所以 $a_1=8$.

所以 $a_n=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{4-n}$.

(2)$S_n=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=2^{3+2+1+\cdots+(4-n)}=2^{\frac{(7-n)n}{2}}$.

因为 $\frac{(7-n)n}{2}=-\frac{1}{2}\left(n-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{49}{8}$，

所以当 $n=3$ 或 $n=4$ 时，S_n 取得最大值，此时最大值为 $S_3=S_4=2^6=64$.

2.数列$\{a_n\}$的前 n 项和记为 S_n，$a_1=1$，$a_{n+1}=2S_n+1$ $(n\geqslant 1)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)等差数列$\{b_n\}$的各项均为正数，其前 n 项和为 T_n，且 $T_3=15$，又 a_1+b_1，a_2+b_2，a_3+b_3 成等比数列，求 T_n.

解：(1)由 $a_{n+1}=2S_n+1$，

可得 $a_n=2S_{n-1}+1(n\geqslant 2)$.

两式相减，得 $a_{n+1}-a_n=2a_n$，即 $a_{n+1}=3a_n(n\geqslant 2)$.

又因为 $a_2=2S_1+1=3$，所以 $a_2=3a_1$.

故$\{a_n\}$是以 1 为首项，3 为公比的等比数列，

所以 $a_n=3^{n-1}$.

(2)设$\{b_n\}$的公差为 d.

由 $T_3=15$，得 $b_1+b_2+b_3=15$，可得 $b_2=5$，

故 $b_1=5-d$，$b_3=5+d$.

又 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=9$，

由题意可得$(5-d+1)(5+d+9)=(5+3)^2$，

解得 $d=2$ 或 $d=-10$.

因为等差数列$\{b_n\}$的各项均为正数，

所以 $d>0$.

所以 $d=2$.所以 $b_1=3$.

所以 $T_n=3n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2+2n$.

课后素养评价(八)

基础落实

1.已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_1<0$，$a_3a_7=16$，则 a_5 等于 (　　)

A.± 4　　B.4

C.-4　　D.不确定

C　**解析**：由等比数列$\{a_n\}$，得 $a_3a_7=a_5^2=16$.因为 $a_1<0$，所以 $a_5<0$，所以 $a_5=-4$.故选 C.

2.在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1\cdot a_2\cdot a_3=27$，$a_2+a_6=15$，则 $a_4=$ (　　)

A.± 6　　B.-6　　C.36　　D.6

D　**解析**：在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1\cdot a_2\cdot a_3=a_2^3=27$，$a_2+a_6=15$，则 $a_2=3$，$a_6=12$.因为 a_4 与 a_2 的符号一致，

所以 $a_4=\sqrt{a_2a_6}=\sqrt{3\times 12}=6$.故选 D.

3.已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和是 S_n，$a_2=-2$，$\frac{S_4}{S_2}=\frac{5}{4}$，则 $a_1a_4a_7=$ (　　)

A.$\frac{1}{8}$　　B.$\frac{1}{4}$　　C.$-\frac{1}{4}$　　D.$-\frac{1}{8}$

D　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，显然 $q\neq 1$，则 $\frac{S_4}{S_2}=\frac{\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^2)}{1-q}}=1+q^2=\frac{5}{4}$，解得 $q^2=\frac{1}{4}$.又

$a_1a_4a_7=a_4^3=(a_2q^2)^3=\left(-2\times\frac{1}{4}\right)^3=-\frac{1}{8}$. 故选 D.

4. 画一个边长为 2 的正方形，再以这个正方形的一条对角线为边画第 2 个正方形，然后以第 2 个正方形的一条对角线为边画第 3 个正方形……这样共画了 10 个正方形，则第 10 个正方形的面积等于（　　）

A.2 024　　B.1 012

C.2 048　　D.4 096

C　**解析**：依题意，得这 10 个正方形的边长构成以 2 为首项，$\sqrt{2}$ 为公比的等比数列 $\{a_n\}$，所以 $a_n=2\times(\sqrt{2})^{n-1}$，

所以第 10 个正方形的面积 $S=a_{10}^2=[2\times(\sqrt{2})^9]^2=4\times2^9=2\,048$. 故选 C.

5.（多选）已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，下列结论正确的有（　　）

A. 数列 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 为等比数列

B. 数列 $\{a_na_{n+1}\}$ 为等比数列

C. 数列 $\{\lg|a_na_{n+1}|\}$ 为等差数列

D. 数列 $\{\lg(|a_n|+|a_{n+1}|)\}$ 为等差数列

BCD　**解析**：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q.

对于 A，当 $q=-1$ 时，$a_n+a_{n+1}=0$，故 A 错误；

对于 B，$a_na_{n+1}=a_1q^{n-1}\cdot a_1q^n=a_1^2q\cdot(q^2)^{n-1}$，所以 $\frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=q^2$，$\{a_na_{n+1}\}$ 是等比数列，故 B 正确；

对于 C，$\lg|a_{n+1}a_{n+2}|-\lg|a_na_{n+1}|=\lg\left|\frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}\right|=\lg|q^2|=2\lg|q|$，$\{\lg|a_n\cdot a_{n+1}|\}$ 是等差数列，故 C 正确；

对于 D，$\lg(|a_{n+1}|+|a_{n+2}|)-\lg(|a_n|+|a_{n+1}|)=\lg\frac{|a_{n+1}|+|a_{n+2}|}{|a_n|+|a_{n+1}|}=\lg\frac{|a_1q^n|+|a_1q^{n+1}|}{|a_1q^{n-1}|+|a_1q^n|}=\lg\frac{|a_1q^n|(1+|q|)}{|a_1q^{n-1}|(1+|q|)}=\lg|q|$，$\{\lg(|a_n|+|a_{n+1}|)\}$ 是等差数列，故 D 正确.

故选 BCD.

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_1=2$，$2S_n=a_{n+1}+2$，则 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.

$a_n=\begin{cases}2,n=1,\\2\times3^{n-2},n\geqslant2\end{cases}$　**解析**：当 $n=1$ 时，$2S_1=2a_1=a_2+2$，因为 $a_1=2$，所以 $a_2=2$，

当 $n\geqslant2$ 时，$2S_{n-1}=a_n+2$，

则 $2a_n=2S_n-2S_{n-1}=a_{n+1}-a_n$，

即 $3a_n=a_{n+1}$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$.

又 $\frac{a_2}{a_1}=1\neq3$，

所以 $\{a_n\}$ 从第 2 项起构成首项为 $a_2=2$，公比为 3 的等比数列，

则 $a_n=2\times3^{n-2}$，$n\geqslant2$.

所以 $a_n=\begin{cases}2,n=1,\\2\times3^{n-2},n\geqslant2.\end{cases}$

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\log_3a_n+1=\log_3a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，且 $a_2+a_4+a_6=9$，则 $\log_{\frac{1}{3}}(a_5+a_7+a_9)$ 的值为_____.

-5　**解析**：因为 $\log_3a_n+1=\log_3a_{n+1}$，

所以 $\log_3a_{n+1}-\log_3a_n=1$，所以 $\log_3\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$，

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$，所以 $\{a_n\}$ 是公比 $q=3$ 的等比数列.

所以 $\log_{\frac{1}{3}}(a_5+a_7+a_9)=\log_{\frac{1}{3}}[(a_2+a_4+a_6)q^3]=\log_{\frac{1}{3}}(9\times27)=-5$.

8. 设公比不为 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1a_2a_3=-\frac{1}{8}$，且 a_2，a_4，a_3 成等差数列，求 a_1.

解：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q\neq1)$，

因为 $a_1a_2a_3=a_2^3=-\frac{1}{8}$，所以 $a_2=-\frac{1}{2}$.

因为 a_2，a_4，a_3 成等差数列，所以 $2a_4=a_2+a_3$.

所以 $2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot q^2=-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot q$，

解得 $q=-\frac{1}{2}$ 或 $q=1$（舍）.

所以 $a_1=\frac{a_2}{q}=1$.

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-4n+2$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 证明：$\{a_n-2n\}$ 是等比数列；

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(1) **证明**：由 $a_{n+1}=3a_n-4n+2$，

得 $a_{n+1}-2(n+1)=3a_n-6n=3(a_n-2n)$.

又因为 $a_1-2=1$，

所以 $\{a_n-2n\}$ 是以 1 为首项，3 为公比的等比数列.

(2) **解**：由(1)知 $a_n-2n=3^{n-1}$，

则 $a_n=3^{n-1}+2n$.

能力提升

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，公比 $q\neq\pm1$. 若 $a_m=a_1a_2a_3a_4a_5$，则 m 等于（　　）

A.9　　B.10　　C.11　　D.12

C　**解析**：因为 $a_m=a_1a_2a_3a_4a_5=a_3^5=q^{10}=a_{11}$，所以 $m=11$. 故选 C.

2.（多选）已知递增等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则下列说法正确的有（　　）

A.当$a_1>0$时，$q>1$

B.当$a_1>0$时，$q<0$

C.当$a_1<0$时，$0<q<1$

D.$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<1$

AC　**解析**：对于A，当$a_1>0$，$q>1$时，从第二项起，数列的每一项都大于前一项，所以数列$\{a_n\}$为递增数列，故A正确.

对于B，当$a_1>0$，$q<0$时，$\{a_n\}$为摆动数列，故B错误.

对于C，当$a_1<0$，$0<q<1$时，数列$\{a_n\}$为递增数列，故C正确.

对于D，$a_{n+1}-a_n=a_1q^{n-1}(q-1)>0$，当$a_1>0$时，$q>1$，此时$0<\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<1$；当$a_1<0$时，$0<q<1$，$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}>1$，故D错误.

故选AC.

3.（多选）记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和.若$S_n=2a_n+3$，则（　　）

A.$a_1=-3$　　B.$a_2=6$

C.$a_n=-3\times2^{n-1}$　　D.$S_n=-3\times2^n+3$

ACD　**解析**：对于A，当$n=1$时，$a_1=2a_1+3$，解得$a_1=-3$，故选项A正确；对于C，当$n\geqslant2$时，$S_{n-1}=2a_{n-1}+3$，所以$a_n=2a_n-2a_{n-1}$，即$a_n=2a_{n-1}$，所以$\{a_n\}$是以-3为首项，2为公比的等比数列，所以$a_n=-3\times2^{n-1}$，故选项C正确；对于B，$a_2=-3\times2=-6$，故选项B错误；对于D，$S_n=2a_n+3=-6\times2^{n-1}+3=-3\times2^n+3$，故选项D正确.故选ACD.

4.“十二平均律”是通用的音律体系，明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例，为这个理论的发展做出了重要贡献.十二平均律将一个纯八度音程分成十二份，依次得到十三个单音，从第二个单音起，每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于$\sqrt[12]{2}$.若第一个单音的频率为f，则第六个单音的频率为（　　）

A.$\sqrt[3]{2}f$　　B.$\sqrt[3]{2^2}f$

C.$\sqrt[12]{2^5}f$　　D.$\sqrt[12]{2^7}f$

C　**解析**：因为每一个单音的频率与前一个单音的频率的比为$\sqrt[12]{2}$，所以$a_n=\sqrt[12]{2}\,a_{n-1}$（$n\geqslant2$，$n\in\mathbf{N}_+$），故$a_n=a_1q^{n-1}$，$q=\sqrt[12]{2}$.又$a_1=f$，所以$a_6=a_1q^5=(\sqrt[12]{2})^5f=\sqrt[12]{2^5}f$.故选C.

5.（多选）已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，公差为d，正项等比数列$\{b_n\}$的前n项积为T_n，公比为q，下列结论错误的有（　　）

A.若S_n有最大值，则$d<0$

B.若$d<0$，则S_n有最大值

C.若$T_{2\,024}>T_{2\,023}$，则$q>1$

D.若$T_{2\,024}<T_{2\,023}$，则$T_{2\,025}<T_{2\,024}$

ACD　**解析**：当$a_1<0$，$d=0$时，S_1最大，此时$d=0$，故A错误；

因为$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$，当$d<0$时，$S_n$有最大值，故B正确；

由$T_{2\,024}>T_{2\,023}$，可得$b_{2\,024}>1$，但$q>1$不一定成立，故C错误；

若$T_{2\,024}<T_{2\,023}$，则$b_{2\,024}<1$，但$b_{2\,025}$可以大于或等于1，此时$T_{2\,025}\geqslant T_{2\,024}$，故D错误.

故选ACD.

6.已知$\{a_n\}$是等比数列，且$a_n>0$，$a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$，则$a_3+a_5=$_____，a_4的最大值为_____.

5　$\dfrac{5}{2}$　**解析**：因为$\{a_n\}$是等比数列，$a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$，

所以$a_3^2+2a_3a_5+a_5^2=25$，即$(a_3+a_5)^2=25$.

因为$a_n>0$，

所以$a_3+a_5=5$.

故$a_3+a_5\geqslant2\sqrt{a_3a_5}=2a_4$，即$a_4\leqslant\dfrac{5}{2}$，当且仅当$a_3=a_5$时，等号成立.

7.已知数列$\{a_n\}$是首项为1，公比为q的等比数列.

(1)求证：当$0<q<1$时，$\{a_n\}$是递减数列；

(2)若对任意$k\in\mathbf{N}^*$，都有a_k，a_{k+2}，a_{k+1}成等差数列，求q的值.

(1)**证明**：因为$a_n=q^{n-1}$，

所以$a_{n+1}-a_n=q^n-q^{n-1}=q^{n-1}(q-1)$.

当$0<q<1$时，有$q^{n-1}>0$，$q-1<0$，

所以$a_{n+1}-a_n<0$，即$a_{n+1}<a_n$.

所以$\{a_n\}$为递减数列.

(2)**解**：因为a_k，a_{k+2}，a_{k+1}成等差数列，

所以$2a_{k+2}=a_k+a_{k+1}$.

所以$2q^{k+1}-(q^{k-1}+q^k)=0$，

即$q^{k-1}\cdot(2q^2-q-1)=0$.

因为$q\neq0$，所以$2q^2-q-1=0$，

解得$q=1$或$q=-\dfrac{1}{2}$.

自我超越

1.等比数列$\{a_n\}$的前n项积为T_n，$T_9=512$，则a_3+a_7的最小值是（　　）

A.2　　B.$2\sqrt{2}$

C.4　　D.$4\sqrt{2}$

C　**解析**：因为在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1a_9=a_2a_8=a_3a_7=a_4a_6=a_5^2$，由$T_9=a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_8a_9=512$，得$a_5^9=512$，解得$a_5=2$，所以$a_3a_7=4$.因为等比数列$\{a_n\}$中奇数项同号，所以$a_3>0$，$a_7>0$，于是$a_3+a_7\geqslant 2\sqrt{a_3a_7}=4$，当且仅当$a_3=a_7=2$时取得最小值.故选C.

2.已知圆O：$x^2+y^2=16$和点$P(3,\sqrt{6})$，若过点P的5条弦的长度构成一个递增的等比数列，则该数列公比的取值范围是（　　）

A.$(1,\sqrt{2}]$　　B.$(1,2]$

C.$(0,\sqrt{2}]$　　D.$(0,2]$

A　**解析**：过圆O：$x^2+y^2=16$内点$P(3,\sqrt{6})$作该圆的弦，其中最大弦长为8，最小弦长为$2\sqrt{r^2-OP^2}=2\sqrt{4^2-[3^2+(\sqrt{6})^2]}=2$，所以当$a_1=2$，$a_5=8$时，公比$q$取得最大值，此时$q^4=\dfrac{a_5}{a_1}=4$，即$q=\sqrt{2}$.因为过点$P$的5条弦的长度构成一个递增的等比数列，所以$q>1$，所以该数列公比的取值范围是$(1,\sqrt{2}]$.故选A.

4.3.2　等比数列的前n项和公式

第1课时　等比数列的前n项和

学习任务目标

1.掌握等比数列的前n项和公式及其应用.
2.掌握等比数列前n项和的性质.
3.会用错位相减法求数列的前n项和.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　等比数列的前n项和

已知量	首项a_1、公比q（$q\neq1$）与项数n	首项a_1、末项a_n与公比q（$q\neq1$）	首项a_1、公比$q=1$
求和公式	$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$	$S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$	$S_n=na_1$

知识点二　等比数列前n项和的性质

(1)若数列$\{a_n\}$为非常数列的等比数列，且其前n项和$S_n=A\cdot q^n+B(A\neq0,B\neq0,q\neq0,q\neq1)$，则必有$A+B=$0；反之，若某一非常数列的数列前$n$项和$S_n=A\cdot q^n-A(A\neq0,q\neq0,q\neq1)$，则该数列必为等比数列.

(2)若等比数列$\{a_n\}$的公比$q\neq-1$，前n项和为S_n，则S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$成等比数列，公比为q^n.

(3)当等比数列$\{a_n\}$的项数为偶数时，偶数项的和与奇数项的和之比$\dfrac{S_{偶}}{S_{奇}}=$q.

知识点三　等比数列前n项和公式与指数函数的关系

(1)当$q=1$时，$S_n=na_1$是关于n的正比例函数，点(n,S_n)是直线$y=a_1x$上的一群孤立的点.

(2)当$q\neq1$时，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1}{1-q}-\dfrac{a_1}{1-q}q^n$.记$A=\dfrac{a_1}{1-q}$，则$S_n=-Aq^n+A$是一个指数式与一个常数的和.当$q>0$且$q\neq1$时，$y=q^n$是指数函数，此时，点$(n,S_n)$是指数型函数$y=-Aq^n+A$图象上的一群孤立的点.

知识点四　错位相减法求和

推导等比数列前n项和的方法是错位相减法，一般适用于求一个等差数列与一个等比数列对应项乘积所构成数列的前n项和.

【概念辨析】

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)若首项为a的数列既是等比数列又是等差数列，则其前n项和等于na.（　√　）

(2)若$a\in\mathbf{R}$，则$1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}=\dfrac{1-a^n}{1-a}$.（　×　）

(3)若数列$\{a_n\}$是公比$q\neq1$的等比数列，则其前n项和公式可表示为$S_n=-Aq^n+A(A\neq0,q\neq0,$且$q\neq1,n\in\mathbf{N}^*)$.（　√　）

2.(多选)在等比数列$\{a_n\}$中,其前n项和为S_n,$a_1=2$,$S_3=26$,则公比q可能为　　(　　)

A.3　　B.-4

C.-3　　D.4

AB　**解析**:由题意可知$q\neq1$,且$S_3=\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\dfrac{2(1-q^3)}{1-q}=26$,所以$q^2+q-12=0$,解得$q=3$或$q=-4$.故选AB.

3.请思考并回答下列问题:

(1)用公式求等比数列前n项和时需注意什么问题?

(2)公比不等于1的等比数列的前n项和公式的推导还有其他的方法吗?

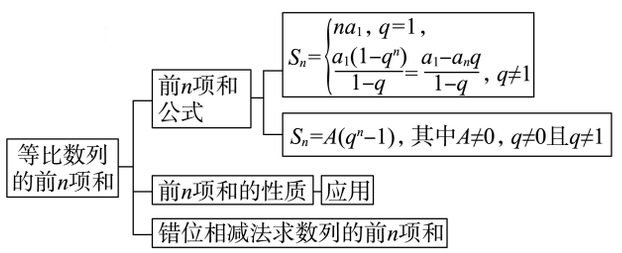
(3)错位相减法适用于求哪种结构特征的数列的前n项和?

(1)**提示**:在应用公式求和时,应注意到$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$的使用条件为$q\neq1$,当$q=1$时应按常数列求和,即$S_n=na_1$.

(2)**提示**:根据等比数列的定义,有$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{a_4}{a_3}=\cdots=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=q(q\neq1)$,则$\dfrac{a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}}=q$,即$\dfrac{S_n-a_1}{S_n-a_n}=q$,所以$S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$.

(3)**提示**:错位相减法一般适用于数列$\{a_n\cdot b_n\}$前n项和的求解,其中$\{a_n\}$为等差数列,$\{b_n\}$为等比数列,且等比数列$\{b_n\}$的公比$q\neq1$.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 掌握等比数列的前n项和

探究活动

例1　(1)已知正项等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,若$S_2=\dfrac{3}{2}$,$S_4=\dfrac{15}{2}$,则$\{a_n\}$的公比为　　(　　)

A.$\dfrac{1}{3}$　　B.$\dfrac{1}{2}$　　C.2　　D.3

C　**解析**:由题意可知,数列$\{a_n\}$的公比$q\neq1$,得$\dfrac{S_4}{S_2}=\dfrac{1-q^4}{1-q^2}=1+q^2=5$,$q^2=4$.因为$q>0$,所以$q=2$.故选C.

(2)在等比数列$\{a_n\}$中,若$a_1+a_n=66$,$a_2a_{n-1}=128$,$S_n=126$,求n和公比q.

解:由等比数列的性质得$a_1a_n=a_2a_{n-1}=128$.

因为$\begin{cases}a_1+a_n=66,\\ a_1a_n=128,\end{cases}$

所以a_1,a_n为方程$x^2-66x+128=0$的两根.

又方程的两根分别为2,64,

所以$\begin{cases}a_1=64,\\ a_n=2\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=2,\\ a_n=64.\end{cases}$

当$a_1=64$,$a_n=2$时,

由$S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}=126$,得$q=\dfrac{1}{2}$.

由$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$,得$2=64\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$,得$n=6$.

当$a_1=2$,$a_n=64$时,由$S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}=126$,得$q=2$.

由$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$,得$64=2\times2^{n-1}$,得$n=6$.

综上可知,$n=6$,$q=\dfrac{1}{2}$或$q=2$.

【探究总结】

(1)在等比数列中,对于a_1,q,n,a_n,S_n这五个量,若已知其中三个量,就可求出其余两个量.常常通过列方程组来解答这些问题,有时会涉及高次方程或指数方程.这时要注意观察表达式的特点,再采取必要的数学处理方法,如换元.

(2)在解决与等比数列前n项和有关的问题时,首先要对公比$q=1$或$q\neq1$进行判断,若两种情况都有可能,则要分类讨论.

应用迁移

1.(多选)在公比q为整数的等比数列$\{a_n\}$中,S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和.若$a_1+a_4=18$,$a_2+a_3=12$,则下列说法正确的有　　(　　)

A.$q=2$

B.数列$\{S_n+2\}$是等比数列

C.$S_8=510$

D.数列$\{\lg a_n\}$是公差为2的等差数列

ABC　**解析**:因为$a_1+a_4=18$,$a_2+a_3=12$,

所以$a_1(1+q^3)=18$,$a_1(q+q^2)=12$.

又公比q为整数,解得$a_1=q=2$.

所以 $a_n=2^n$，$S_n=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$.

所以 $S_8=2^9-2=510$.

因为 $S_n+2=2^{n+1}$，所以数列$\{S_n+2\}$是公比为2的等比数列.

因为 $\lg a_n=n\lg 2$，所以数列$\{\lg a_n\}$是公差为$\lg 2$的等差数列.

综上可得，A，B，C正确.故选ABC.

2. 在等比数列$\{a_n\}$中，其前n项和为S_n.若公比$q=-\dfrac{1}{2}$，$S_5=11$，则$a_1=$_____.

16　**解析：** 因为 $S_5=\dfrac{a_1\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^5\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{33}{32}a_1=11$，所以$a_1=16$.

3.（教材P37练习题1改编）在等比数列$\{a_n\}$中，S_n为其前n项和，解决下列问题：

（1）若$a_n=2^n$，求S_6；

（2）若$a_1+a_3=\dfrac{5}{4}$，$a_4+a_6=10$，求S_5；

（3）若$S_n=189$，公比$q=2$，$a_n=96$，求a_1和n.

解： 设数列$\{a_n\}$的公比为q.

（1）因为 $a_n=2^n=2\times2^{n-1}$，所以$a_1=2$，$q=2$.

所以 $S_6=\dfrac{2\times(1-2^6)}{1-2}=126$.

（2）由题意，得$\begin{cases}a_1+a_1q^2=\dfrac{5}{4},\\ a_1q^3+a_1q^5=10,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=\dfrac{1}{4},\\ q=2.\end{cases}$

从而 $S_5=\dfrac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\dfrac{\frac{1}{4}\times(1-2^5)}{1-2}=\dfrac{31}{4}$.

（3）（方法一）由$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，$a_n=a_1q^{n-1}$及已知条件，得$\begin{cases}189=\dfrac{a_1(1-2^n)}{1-2},\\ 96=a_1\cdot2^{n-1},\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=3,\\ n=6.\end{cases}$

（方法二）由公式$S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$及已知条件，

得$189=\dfrac{a_1-96\times2}{1-2}$，解得$a_1=3$.

又由$a_n=a_1q^{n-1}$，得$96=3\times2^{n-1}$，解得$n=6$.

任务2 探究等比数列前n项和的性质

探究活动

例2　（1）若等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$S_2=7$，$S_6=91$，则S_4为（　　）

A.28　　B.32

C.21　　D.28或−21

（2）若等比数列$\{a_n\}$共$2m(m\in\mathbf{N}^*)$项，其所有项的和为−240，且奇数项的和比偶数项的和大80，则公比$q=$_____.

（1）A　**解析：** 设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.

因为$\{a_n\}$为等比数列，

所以S_2，S_4-S_2，S_6-S_4也为等比数列，

即7，S_4-7，$91-S_4$成等比数列.

由$(S_4-7)^2=7\times(91-S_4)$，得$S_4=28$或$S_4=-21$.

又因为 $S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=a_1+a_2+a_1q^2+a_2q^2=(a_1+a_2)(1+q^2)=S_2(1+q^2)>S_2$，

所以$S_4=28$.

（2）2　**解析：** 根据题意得$\begin{cases}S_{奇}+S_{偶}=-240,\\ S_{奇}-S_{偶}=80,\end{cases}$

所以$\begin{cases}S_{奇}=-80,\\ S_{偶}=-160.\end{cases}$

所以 $q=\dfrac{S_{偶}}{S_{奇}}=\dfrac{-160}{-80}=2$.

［一题多思］

思考1. 把本例（1）中等比数列$\{a_n\}$满足的条件改为“$S_5=2$，$S_{10}=6$”，求$a_{16}+a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}$.

解： 设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，因为$S_{2n}-S_n=q^nS_n$，所以$S_{10}-S_5=q^5S_5$，所以$6-2=2q^5$，所以$q^5=2$.所以 $a_{16}+a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=a_1q^{15}+a_2q^{15}+a_3q^{15}+a_4q^{15}+a_5q^{15}=q^{15}(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)=q^{15}S_5=2^3\times2=16$.

思考2. 把本例（1）中等比数列$\{a_n\}$满足的条件改为“公比$q=2$，$S_{10}=10$”，求S_{20}.

解： $S_{20}=S_{10}+q^{10}S_{10}=10+2^{10}\times10=10\ 250$.

【探究总结】

应用等比数列前n项和性质的关注点

（1）运用等比数列的前n项和公式，要注意公比$q=1$和$q\neq1$两种情形，在解有关的方程（组）时，通常用约分或两式相除的方法进行消元.

（2）在解决等比数列前n项和问题时，当条件涉及奇数项和与偶数项和的时候，如果项数为偶数，可考虑利用奇数项和与偶数项和之间的关系求解.

（3）当已知条件含有片段和时，要考虑S_m，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$，…成等比数列.

应用迁移

1. 在等比数列$\{a_n\}$中，公比$q=3$，前80项的和$S_{80}=32$，则$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{80}=$_____.

24　**解析：** 设$A=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{80}$，

$B=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{79}$.

由$\frac{A}{B}=q=3$,得$B=\frac{1}{3}A$.

又$A+B=S_{80}=32$,所以$\frac{4}{3}A=32$,解得$A=24$.

所以$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{80}=24$.

2.若等比数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=2\times3^n+r$,则$r=$_____.

-2　**解析**:因为$S_n=2\times3^n+r$,

所以当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2\times3^n+r-(2\times3^{n-1}+r)=4\times3^{n-1}$.

当$n=1$时,$a_1=S_1=6+r$.

因为$\{a_n\}$为等比数列,所以$6+r=4$,解得$r=-2$.

任务3 应用错位相减法求数列的和

探究活动

例3　(1)已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且$a_n=n\cdot2^n$,则$S_n=$_____;

$(n-1)2^{n+1}+2$　**解析**:因为$a_n=n\cdot2^n$,

所以$S_n=1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n$①,

所以$2S_n=1\times2^2+2\times2^3+\cdots+(n-1)\times2^n+n\times2^{n+1}$②,

①$-$②,得

$-S_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\times2^{n+1}$

$=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n\times2^{n+1}$

$=2^{n+1}-2-n\times2^{n+1}$

$=(1-n)2^{n+1}-2$.

所以$S_n=(n-1)2^{n+1}+2$.

(2)求数列$\{(2n-1)a^{n-1}\}(a\neq0)$的前$n$项和.

解:设数列$\{(2n-1)a^{n-1}\}$的前n项和为S_n.

当$a=1$时,数列变成$1,3,5,7,\cdots,2n-1,\cdots$,

则$S_n=\frac{n[1+(2n-1)]}{2}=n^2$.

当$a\neq1$时,有$S_n=1+3a+5a^2+7a^3+\cdots+(2n-1)a^{n-1}$①,

$aS_n=a+3a^2+5a^3+7a^4+\cdots+(2n-3)a^{n-1}+(2n-1)a^n$②.

①$-$②,得$S_n-aS_n=1+2a+2a^2+2a^3+\cdots+2a^{n-1}-(2n-1)a^n$,

所以$(1-a)S_n=1-(2n-1)a^n+2(a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-1})=1-(2n-1)a^n+2\times\frac{a(1-a^{n-1})}{1-a}=1-(2n-1)a^n+\frac{2(a-a^n)}{1-a}$.

又$1-a\neq0$,

所以$S_n=\frac{1-(2n-1)a^n}{1-a}+\frac{2(a-a^n)}{(1-a)^2}$.

综上所述,$S_n=\begin{cases}n^2,a=1,\\ \frac{1-(2n-1)a^n}{1-a}+\frac{2(a-a^n)}{(1-a)^2},a\neq1.\end{cases}$

【探究总结】

错位相减法的适用范围及注意事项

(1)适用范围

主要适用于当$\{a_n\}$是等差数列,$\{b_n\}$是等比数列时,求数列$\{a_nb_n\}$的前n项和.

(2)注意事项

①利用错位相减法求和,在写S_n与qS_n的表达式时,应注意使两式交错对齐,以便于作差,正确写出$(1-q)S_n$的表达式;

②注意对公式的选择:常用$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq1)$;

③利用此法时要注意讨论公比q是否等于1.

应用迁移

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,满足$S_n=n^2$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若$b_n=2^na_n$,求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

解:(1)根据题意知$S_n=n^2$,

当$n\geqslant2$时,$S_{n-1}=(n-1)^2$,

两式相减即得$a_n=n^2-(n-1)^2=2n-1$.

当$n=1$时,$a_1=1$,满足上式,所以$a_n=2n-1$.

(2)由(1)得$b_n=2^na_n=(2n-1)\cdot2^n$,

则$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1\times2+3\times2^2+\cdots+(2n-1)\times2^n$,

$2T_n=1\times2^2+3\times2^3+\cdots+(2n-1)\times2^{n+1}$,

两式相减可得$-T_n=1\times2+2\times2^2+\cdots+2\times2^n-(2n-1)\times2^{n+1}$,

所以$-T_n=1\times2+2\times\frac{4(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n-1)\times2^{n+1}$

$=-6+(3-2n)\times2^{n+1}$,

故$T_n=(2n-3)\times2^{n+1}+6$.

课后素养评价（九）

基础落实

1. 已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1=-1$，$a_4=64$，则$S_5=$（　　）

A.51　　B.-13　　C.-205　　D.-256

C　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则$a_4=a_1q^3=-q^3=64$，解得$q=-4$，所以$S_5=\dfrac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\dfrac{-(1+1\,024)}{5}=-205$.故选C.

2. 设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$\dfrac{a_5}{a_2}=3$，则$\dfrac{S_6}{S_3}=$（　　）

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

D　**解析**：根据题意，设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，若$\dfrac{a_5}{a_2}=3$，即$q^3=3$，则$\dfrac{S_6}{S_3}=\dfrac{\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}}{\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}}=\dfrac{1-q^6}{1-q^3}=1+q^3=4$.

故选D.

3. 在各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，且a_2，a_4+2，a_5成等差数列，记S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，则$S_6=$（　　）

A.126　　B.124　　C.64　　D.62

A　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>0)$，

因为a_2，a_4+2，a_5成等差数列，

所以$a_2+a_5=2(a_4+2)$，

所以$a_1q+a_1q^4=2(a_1q^3+2)$，

即$2q+2q^4=2(2q^3+2)$，

解得$q=2$，

所以前6项和$S_6=\dfrac{2\times(1-2^6)}{1-2}=126$.

故选A.

4. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{8}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}=$（　　）

A.$\dfrac{2^n-n}{2^n}$　　B.$\dfrac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$

C.$\dfrac{2^n-n+1}{2^{n+1}}$　　D.$\dfrac{2^{n+1}-n+2}{2^n}$

B　**解析**：记$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{8}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}$为$S_n$，则$S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}$①，$\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^n}+\dfrac{n}{2^{n+1}}$②.

①－②得，$\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{n}{2^{n+1}}=\dfrac{\dfrac{1}{2}\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\dfrac{1}{2}}-\dfrac{n}{2^{n+1}}$，所以$S_n=\dfrac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$.故选B.

5. 已知各项均为正数的等比数列的前5项和为3，前15项和为39，则该数列的前10项和为（　　）

A.$3\sqrt{2}$　　B.$3\sqrt{13}$

C.12　　D.15

C　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n.由等比数列前n项和的性质可得S_5，$S_{10}-S_5$，$S_{15}-S_{10}$也为等比数列.

又$S_5=3$，$S_{15}=39$，故可得$(S_{10}-3)^2=3(39-S_{10})$，

解得$S_{10}=12$或$S_{10}=-9$.

因为等比数列的各项均为正数，所以$S_{10}=12$.

故选C.

6. 在等比数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=-3$，公比$q=-2$，前k项和$S_k=15(k\in\mathbf{N}^*)$，则k的值为_____.

4　**解析**：由题意可得$S_k=\dfrac{-3[1-(-2)^k]}{1-(-2)}=(-2)^k-1=15$，解得$k=4$.

7. 在等比数列$\{a_n\}$中，已知对任意正整数n，$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=2^n-1$，则$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2$等于_____.

$\dfrac{1}{3}(4^n-1)$　**解析**：当$n=1$时，$a_1=2^1-1=1$；

当$n\geqslant2$时，$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=2^n-1$，$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}=2^{n-1}-1$，

两式作差可得$a_n=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$.

当$n=1$时，$2^{1-1}=2^0=1=a_1$.

综上可得，数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^{n-1}$，故$a_n^2=(2^{n-1})^2=4^{n-1}$，

则数列$\{a_n^2\}$是首项为1，公比为4的等比数列，

其前n项和为$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=\dfrac{1\times(1-4^n)}{1-4}=\dfrac{1}{3}(4^n-1)$.

8. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$a_1=1$，$3a_n=2S_n+1$.

(1)证明数列$\{a_n\}$为等比数列，并求它的通项公式；

(2)设$b_n=n\cdot a_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

(1)**证明**：由题意知 $3a_{n+1}=2S_{n+1}+1$，则 $3(a_{n+1}-a_n)=2a_{n+1}$，

整理得 $a_{n+1}=3a_n$，即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$.

又 $a_1=1\neq0$，所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 3 的等比数列，则 $a_n=3^{n-1}$.

(2)**解**：由(1)可得 $b_n=n\cdot3^{n-1}$，则 $T_n=1\times3^0+2\times3^1+3\times3^2+\cdots+n\cdot3^{n-1}$，

所以 $3T_n=1\times3^1+2\times3^2+3\times3^3+\cdots+(n-1)\cdot3^{n-1}+n\cdot3^n$，

所以 $-2T_n=3^0+3^1+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1}-n\cdot3^n=\frac{1-3^n}{1-3}-n\cdot3^n$，

所以 $T_n=\frac{1}{4}+\frac{(2n-1)\cdot3^n}{4}$.

能力提升

1. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，前 n 项的倒数之和为 T_n，则 $\frac{S_n}{T_n}$ 的值为　　(　　)

A. a_1a_n　　B. $\frac{a_1}{a_n}$

C. $a_1^na_n^n$　　D. $\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^n$

A　**解析**：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

当 $q\neq1$ 时，则 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，$T_n=\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^n}{1-\frac{1}{q}}=\frac{1}{a_1q^{n-1}}\cdot\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{1}{a_n}\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$，

所以 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}}{\frac{1}{a_n}\cdot\frac{q^n-1}{q-1}}=a_1a_n$.

当 $q=1$ 时，则 $a_n=a_1$，$S_n=na_1$，$T_n=\frac{n}{a_1}$，

所以 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{na_1}{\frac{n}{a_1}}=a_1^2=a_1a_n$ 成立.

综上所述，$\frac{S_n}{T_n}=a_1a_n$.

故选 A.

2.(多选)已知 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列，S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $9S_3=S_6$，则　　(　　)

A. 公比 $q=2$

B. $S_9=2^9-1$

C. 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 5 项和为 $\frac{31}{16}$

D. $6S_3=S_9$

ABC　**解析**：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q\neq1)$，

因为 $9S_3=S_6$，所以 $9\times\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}$，

所以 $9=1+q^3$，所以 $q=2$.

所以 $S_9=\frac{1-2^9}{1-2}=2^9-1$，故选项 A，B 正确.

又 $6S_3=6\times(2^3-1)\neq S_9$，故选项 D 不正确.

易知 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等比数列，首项 $\frac{1}{a_1}=1$，公比为 $\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$，

设数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n'，

所以 $S_5'=\frac{1\times\left(1-\frac{1}{2^5}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{31}{16}$，故选项 C 正确.

故选 ABC.

3. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 若 $S_3=2$，$S_6=18$，则 $\frac{S_{10}}{S_5}$ 等于　　(　　)

A. -3　　B. 5　　C. -31　　D. 33

D　**解析**：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q\neq1)$，

因为 $S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=2$，$S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=18$，

两式作商，得 $1+q^3=9$，解得 $q=2$.

所以 $\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{1-q^{10}}{1-q^5}=1+q^5=33$. 故选 D.

4. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_{10}:S_5=1:2$，则 $\frac{S_5+S_{10}+S_{15}}{S_{10}-S_5}=$　　(　　)

A. $\frac{7}{2}$　　B. $-\frac{9}{2}$

C. $\frac{9}{2}$　　D. $-\frac{7}{2}$

B　**解析**：因为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_{10}:S_5=1:2$，所以 $(S_{10}-S_5):S_5=-1:2$. 由等比数列的性质得 $(S_{15}-S_{10}):(S_{10}-S_5):S_5=1:(-2):4$，所以 $S_{15}:S_5=3:4$，所以 $\frac{S_5+S_{10}+S_{15}}{S_{10}-S_5}=\frac{S_5+\frac{1}{2}S_5+\frac{3}{4}S_5}{\frac{1}{2}S_5-S_5}=-\frac{9}{2}$. 故选 B.

5. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_5a_7=3$，$a_3a_{10}=9$，则 $\frac{S_{10}}{S_5}=$　　(　　)

A. 243　　B. 244

C. 81　　D. 82

B　**解析**：由等比数列的性质可得 $a_3a_{10}=a_6a_7=9$，

设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则 $q=\frac{a_6a_7}{a_5a_7}=3$，

故$\dfrac{S_{10}}{S_5}=\dfrac{\dfrac{a_1(1-q^{10})}{1-q}}{\dfrac{a_1(1-q^5)}{1-q}}=\dfrac{1-q^{10}}{1-q^5}=1+q^5=244$.

故选 B.

6.设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.若 S_3,S_9,S_6 成等差数列，且 $a_8=3$，则 a_5 的值为_____.

-6　**解析：**设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q.

因为 S_3,S_9,S_6 成等差数列，

所以 $2S_9=S_3+S_6$.

显然公比 $q\neq1$，

所以 $2\times\dfrac{a_1(1-q^9)}{1-q}=\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}$.

所以 $2q^9-q^6-q^3=0$.所以 $q^3=-\dfrac{1}{2}$.

所以 $a_5=\dfrac{a_8}{q^3}=3\times(-2)=-6$.

7.已知等比数列$\{a_n\}$共有 $2n$ 项，若它的所有项的和是奇数项的和的 3 倍，则公比$q=$_____.

2　**解析：**设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，由已知可得 $q\neq1$，则奇数项也构成等比数列，其公比为 q^2，首项为 a_1，

$S_{2n}=\dfrac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}$，$S_{奇}=\dfrac{a_1[1-(q^2)^n]}{1-q^2}$.

由题意得$\dfrac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}=\dfrac{3a_1(1-q^{2n})}{1-q^2}$，所以 $1+q=3$，

所以 $q=2$.

8.在等比数列$\{a_n\}$中，公比 $q=2$，前 99 项的和 $S_{99}=56$，求 $a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{99}$的值.

解：（方法一）因为 $S_{99}=\dfrac{a_1(1-q^{99})}{1-q}=56$，

所以 $a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{99}=a_3(1+q^3+q^6+\cdots+q^{96})=a_1q^2\cdot\dfrac{1-(q^3)^{33}}{1-q^3}=a_1q^2\cdot\dfrac{1-q^{99}}{(1-q)(1+q+q^2)}=\dfrac{q^2}{1+q+q^2}\left[\dfrac{a_1(1-q^{99})}{1-q}\right]=\dfrac{4}{1+2+4}\times56=32$.

（方法二）设 $b_1=a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{97}$，

$b_2=a_2+a_5+a_8+\cdots+a_{98}$，

$b_3=a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{99}$，

则 $b_1q=b_2$，$b_2q=b_3$ 且 $b_1+b_2+b_3=56$，

所以 $b_1(1+q+q^2)=56$，所以 $b_1=\dfrac{56}{1+2+4}=8$，$b_3=b_1q^2=32$，

即 $a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{99}=32$.

9.已知数列$\{a_n\}$满足 $a_n=2n-10$，数列$\{b_n\}$满足 $b_1+\dfrac{b_2}{5}+\dfrac{b_3}{5^2}+\cdots+\dfrac{b_n}{5^{n-1}}=5n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）求数列$\{|a_n|\}$的前 15 项和；

（2）求数列$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$的前 n 项和 T_n.

解：（1）令 $a_n=2n-10\geqslant0$，解得 $n\geqslant5$，

所以$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{15}|$

$=-(a_1+a_2+a_3+a_4)+a_5+a_6+\cdots+a_{15}$

$=S_{15}-2S_4=\dfrac{15(a_1+a_{15})}{2}-2\times\dfrac{4(a_1+a_4)}{2}=130$.

（2）当 $n=1$ 时，$b_1=5$.

因为 $b_1+\dfrac{b_2}{5}+\dfrac{b_3}{5^2}+\cdots+\dfrac{b_n}{5^{n-1}}=5n$，

所以当 $n\geqslant2$ 时，$b_1+\dfrac{b_2}{5}+\dfrac{b_3}{5^2}+\cdots+\dfrac{b_{n-1}}{5^{n-2}}=5(n-1)$，

两式相减，得$\dfrac{b_n}{5^{n-1}}=5$，即 $b_n=5^n$.

又当 $n=1$ 时，$b_1=5$ 符合该式，

所以 $b_n=5^n$.

所以$\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{2n-10}{5^n}$，

$T_n=(-8)\times\dfrac{1}{5}+(-6)\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^2+\cdots+(2n-10)\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$，

故$\dfrac{1}{5}T_n=(-8)\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^2+(-6)\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^3+\cdots+(2n-10)\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}$，

两式相减得$\dfrac{4}{5}T_n=(-8)\times\dfrac{1}{5}+2\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^2+2\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^3+\cdots+2\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^n-(2n-10)\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}$，

即$\dfrac{4}{5}T_n=-\dfrac{8}{5}+\dfrac{\dfrac{2}{25}\left[1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}\right]}{1-\dfrac{1}{5}}-(2n-10)\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}$，

化简得 $T_n=\left(-\dfrac{1}{2}n+\dfrac{15}{8}\right)\left(\dfrac{1}{5}\right)^n-\dfrac{15}{8}$.

自我超越

1.设数列$\{na_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_n=2^n$，则使得 $S_n<10^4$ 成立的正整数 n 的最大值为　（　）

A.7　　B.8

C.9　　D.10

C　**解析：**因为 $a_n=2^n$，所以 $na_n=n\cdot2^n$，所以 S_n

$=1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\cdot2^n$①，$2S_n=1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+n\cdot2^{n+1}$②.①－②，得$-S_n=(2^1+2^2+\cdots+2^n)-n\cdot2^{n+1}$，整理得$S_n=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$.由于$S_n<10^4$，故$(n-1)\cdot2^{n+1}+2<10\,000$，而$n\in\mathbf{N}^*$，得$n$的最大值为9，则使得$S_n<10^4$成立的正整数$n$的最大值为9.故选C.

2.已知S_n是正项等比数列$\{a_n\}$的前n项和，且$S_6=3+4S_3$，则$a_7+a_8+a_9$的最小值为　　(　　)

A.20　　B.24

C.28　　D.36

D　**解析：**由题意可得$S_n>0$，$S_6-S_3=3S_3+3$，由等比数列的性质可得S_3，S_6-S_3，S_9-S_6成等比数列，

则$S_3(S_9-S_6)=(S_6-S_3)^2$，所以$a_7+a_8+a_9=S_9-S_6=\dfrac{(S_6-S_3)^2}{S_3}=\dfrac{(3S_3+3)^2}{S_3}=9\left(S_3+\dfrac{1}{S_3}+2\right)\geqslant9\times\left(2\sqrt{S_3\cdot\dfrac{1}{S_3}}+2\right)=36$，当且仅当$S_3=1$时，等号成立.综上，$a_7+a_8+a_9$的最小值为36.故选D.

第2课时　等比数列前n项和的应用

学习任务目标

1.能在具体的问题情境中，发现数列的等比关系，并解决相应的问题.

2.掌握等差数列与等比数列的综合应用.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点　分组求和

某些数列通过适当分组，可得出两个或几个等差数列或等比数列，再利用等差数列或等比数列的求和公式分别求和，从而得出原数列的和.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)如果数列$\{a_n\}$为等比数列，且公比不等于1，那么其前n项和$S_n=\dfrac{a_1-a_{n+1}}{1-q}$.　　(　　)

√　**提示：**等比数列前n项和公式$S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}=\dfrac{a_1-a_{n+1}}{1-q}(q\neq1)$.

(2)若$S_n=a+2a^2+3a^3+\cdots+na^n$，求$S_n$时只要把上式等号两边同时乘$a$，即可根据错位相减法求得.　　(　　)

×　**提示：**需满足a不等于0且不等于1.

(3)数列$\{2^n-1\}$的前n项和$S_n=2^{n+1}-2-n$.　　(　　)

√　**提示：**$S_n=(2^1-1)+(2^2-1)+(2^3-1)+\cdots+(2^n-1)=(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n)-n=2^{n+1}-2-n$.

2.若数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，$a_n+a_{n+1}=4\times3^{n-1}$，则$S_{2\,024}=$_____.

$\dfrac{3^{2\,024}-1}{2}$　**解析：**由题意得$S_{2\,024}=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{2\,023}+a_{2\,024})=4\times(3^0+3^2+3^4+\cdots+3^{2\,022})=4\times\dfrac{1\times(1-3^{2\,024})}{1-3^2}=\dfrac{3^{2\,024}-1}{2}$.

3.请思考并回答下列问题：

(1)应用等比数列前n项和公式时应先确定哪些信息？

(2)前面我们学习了哪些数列求和的方法？分别适用于什么情况？

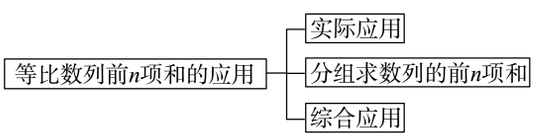
(1)**提示：**判断数列是否是等比数列，公比是多少，是否为1，首项、项数是多少.

(2)**提示：**①倒序相加法：如果一个数列的前n项满足与首末两项“等距离”的两项之和等于首末两项之和，那么这个数列的前n项和即可用此法来求.如等差数列前n项和公式就是用此方法推导的.

②裂项相消法：能把数列的通项拆成两项的差，正负相消后剩下首尾若干项.

③错位相减法：如果一个数列的各项是由一个等差数列和一个等比数列的对应项之积构成的，那么这个数列的前n项和即可用此法来求.如公比不为1的等比数列的前n项和公式就是用此法推导的.

整体感知

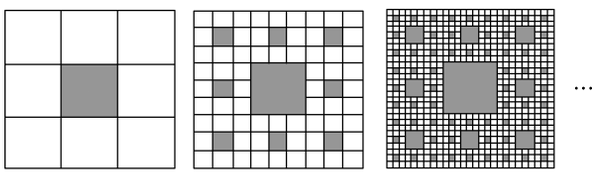


○ 任务型课堂 ○

任务1 应用等比数列的前 n 项和解决平面几何问题

探究活动

例1　把一个边长为1的正方形等分成九个全等的小正方形，将中间的一个正方形挖掉（如图①）；再将剩余的每个正方形都分成九个全等的小正方形，并将中间的一个正方形挖掉（如图②）；如此继续下去.



①　②　③

(1)图③中共挖掉了_____个正方形；

(2)第 n 个图形中，共挖掉了_____个正方形，这些挖掉的正方形的面积之和是_____.

(1)73　(2)$\frac{8^n-1}{7}$　$1-\left(\frac{8}{9}\right)^n$　**解析**：设第 n 个图形共挖掉 a_n 个正方形，则 $a_1=1$，$a_2-a_1=8$，$a_3-a_2=8^2$，…，$a_n-a_{n-1}=8^{n-1}$，所以 $a_n=1+8+8^2+\cdots+8^{n-1}=\frac{8^n-1}{7}$.故(1)的图③中共挖掉了 $\frac{8^3-1}{7}=73$ 个正方形；

(2)第 n 个图形共挖掉了 $\frac{8^n-1}{7}$ 个正方形.由于原正方形的边长为1，则这些被挖掉的正方形的面积和为

$$1\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+8\times\left(\frac{1}{3}\right)^4+8^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^6+\cdots+8^{n-1}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}=\frac{\frac{1}{9}\left[1-\left(\frac{8}{9}\right)^n\right]}{1-\frac{8}{9}}=1-\left(\frac{8}{9}\right)^n.$$

［一题多思］

思考　本例中若一直继续下去，则这些被挖掉的正方形面积之和趋近于多少？

提示：由本例解法，设被挖掉的正方形面积之和为 S_n，则 $S_n=1-\left(\frac{8}{9}\right)^n$.由于一直继续下去，即 n 无限增大时，$\left(\frac{8}{9}\right)^n$ 无限趋近于0，此时被挖掉的正方形面积之和趋近于1.

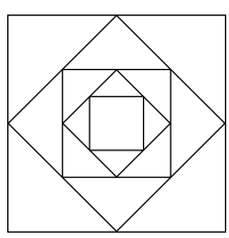
【探究总结】

1.识别等比模型：观察几何图形在迭代过程中，数量、边长或面积是否按固定比例缩放，从而抽象出等比数列的通项公式进行建模分析.

2.极限求和思想：对等比数列前 n 项和公式取极限，可求出无限次迭代后几何量的收敛值，常用于分形图形面积或周长的渐近计算.

应用迁移

1.（教材P38例10改编）如图，作一个边长为1的正方形，再将各边的中点相连作第二个正方形，依此类推，共作了 n 个正方形.设这 n 个正方形的面积之和为 S_n，则 $S_8=$　（　）



A.$\frac{127}{64}$　　B.$\frac{127}{128}$

C.$\frac{255}{128}$　　D.$\frac{255}{256}$

C　**解析**：根据题意，第一个正方形的边长为1，其面积为1，再将这个正方形的各相邻边的中点相连得到第二个正方形，依此类推每一个小正方形的面积都是前边正方形的面积的 $\frac{1}{2}$，这些正方形的面积组成以1为首项，$\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，则这8个正方形的面积和 $S_8=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8}{1-\frac{1}{2}}=\frac{255}{128}$.故选C.

2.作边长为3的正三角形的内切圆，然后作这个圆的内接正三角形，然后再作新三角形的内切圆.如此下去，则前 n 个内切圆的面积和为　（　）

A.$\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)\pi$　　B.$\left(1-\frac{1}{4^n}\right)\pi$

C.$\left(1-\frac{1}{4^{n-1}}\right)\pi$　　D.$3\left(1-\frac{1}{4^n}\right)\pi$

B　**解析**：设第 n 个正三角形的内切圆的面积为 a_n，从第二个正三角形开始每一个正三角形的边长是前一个正三角形边长的 $\frac{1}{2}$，则每一个正三角形的内切圆的半径也是前一个正三角形内切圆半径的 $\frac{1}{2}$，其面积为前一个正三角形内切圆面积的 $\frac{1}{4}$，则数列 $\{a_n\}$ 是公比为 $\frac{1}{4}$ 的等比数列.第一个正三角形

的边长为3，其内切圆的半径 $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$，其面积 $a_1=\pi r^2=\frac{3\pi}{4}$，

则前 n 个内切圆的面积和 $S=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{\frac{3\pi}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}=\left(1-\frac{1}{4^n}\right)\pi$.故选 B.

任务2 应用等比数列前 n 项和研究增长率问题

探究活动

例2　某家庭打算以一年定期的方式存款，计划从2020年起，每年年初到银行新存入 a 元，年利率 p 保持不变，并按复利计算，到2030年年初将所有存款和利息全部取出，共取回多少元？

解：设从2020年年初到2030年年初每年存入 a 元的本利和组成数列 $\{a_n\}(1\leqslant n\leqslant 10)$，

则 $a_1=a(1+p)^{10}$，$a_2=a(1+p)^9$，…，$a_{10}=a(1+p)$，故数列 $\{a_n\}(1\leqslant n\leqslant 10)$ 是以 $a_1=a(1+p)^{10}$ 为首项，$q=\frac{1}{1+p}$ 为公比的等比数列.

所以2030年初这个家庭应取出的钱数（单位：元）为

$$S_{10}=\frac{a(1+p)^{10}\left[1-\frac{1}{(1+p)^{10}}\right]}{1-\frac{1}{1+p}}=\frac{a}{p}[(1+p)^{11}-(1+p)].$$

［一题多思］

思考1.若将题中的复利改为单利，结果是多少？

解：$a_1=a(1+10p)$，$a_2=a(1+9p)$，$a_3=a(1+8p)$，…，$a_{10}=a(1+p)$，

$S_{10}=a(1+10p)+a(1+9p)+\cdots+a(1+p)=10a+\left(10\times1+\frac{10\times9}{2}\right)ap=10a+55ap$.

思考2.若将复利改为单利并且按规定，存款利息要纳税20%，则结果为多少？

解：要将复利改为单利由“思考1”知结果为 $10a+55ap$.

由存款利息按20%纳税，则最后结果为 $10a+55ap\times(1-20\%)=10a+44ap$.

【探究总结】

解决等比数列应用题的关键

(1)认真审题抓特点，仔细观察找规律.

(2)等比数列的特点是增加率或减少率固定.

(3)分析数列的规律，一般需先写出数列的一些项加以考察.

应用迁移

某市共有1万辆燃油型公交车.有关部门于2023年投入128辆电力型公交车，随后电力型公交车每年的投入比上一年增加50%.

(1)该市在2029年应该投入电力型公交车多少辆？

(2)到哪一年年底，电力型公交车的数量开始超过公交车总量的 $\frac{1}{3}$？

解：(1)每年投入电力型公交车的数量可构成等比数列 $\{a_n\}$，其中 $a_1=128$，$q=\frac{3}{2}$.

所以2029年应投入电力型公交车的数量为 $a_7=a_1q^6=128\times\left(\frac{3}{2}\right)^6=1\ 458$（辆）.

(2)设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_n=\frac{128\cdot\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{3}{2}}=256\cdot\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right]$.

由 $S_n>(10\ 000+S_n)\times\frac{1}{3}$，得 $S_n>5\ 000$，即 $256\cdot\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right]>5\ 000$，解得 $n>\frac{\lg 5\ 256-\lg 256}{\lg 3-\lg 2}\approx7.45$.

所以该市到2030年年底电力型公交车的数量开始超过该市公交车总量的 $\frac{1}{3}$.

任务3 探究递推公式在实际问题中的应用

探究活动

例3　某企业2021年年初有资金5千万元，由于引进了先进生产设备，资金年平均增长率可达到50%.每年年底扣除下一年的消费基金1.5千万元后，剩余资金投入再生产.设从2021年的年底起，每年年底企业扣除消费基金后的剩余资金依次为 a_1，a_2，a_3，….

(1)写出 a_1，a_2，a_3，并证明数列 $\{a_n-3\}$ 是等比数列；

(2)至少到哪一年的年底，企业的剩余资金会超过21千万元？（$\lg 2\approx0.301\ 0$，$\lg 3\approx0.477\ 1$）

(1)**证明**：由题意可知，$a_1=5\times1.5-1.5=6$，$a_2=6\times1.5-1.5=7.5$，$a_3=7.5\times1.5-1.5=9.75$.

因为 $a_{n+1}=1.5a_n-1.5$，所以 $a_{n+1}-3=1.5(a_n-3)$.

又因为 $a_1-3=3$，所以 $\{a_n-3\}$ 是首项为3，公比为1.5的等比数列.

(2)**解**：由(1)知，$a_n-3=3\times1.5^{n-1}$，所以 $a_n=3+3\times1.5^{n-1}$.

令 $3+3\times1.5^{n-1}>21$,解得 $n-1>\frac{\lg 6}{\lg 1.5}=\frac{\lg 3+\lg 2}{\lg 3-\lg 2}\approx4.42$,所以 $n>5.42$,

所以至少到2026年的年底,企业的剩余资金会超过21千万元.

【探究总结】

(1)用数列知识解决相关的实际问题,关键是列出相关信息,合理建立数学模型——数列模型,判断是等差数列还是等比数列模型;

(2)求解时,要明确目标,即搞清楚是求和、求通项还是求递推关系问题,所求结论对应的是解方程问题、解不等式问题还是最值问题,然后把经过数学推理与计算得出的结果,放回到实际问题中进行检验,最终得出结论.

应用迁移

为落实《中共中央、国务院关于进一步深化农村改革　扎实推进乡村全面振兴的意见》,某农村合作社拟引进先进技术提升某农产品的深加工工艺,以此达到10年内每年此农产品的销售额(单位:万元)等于上一年的1.4倍再减去4的目标.已知第一年(2024年)合作社该农产品的销售额为100万元,则按照计划合作社从2024年到2033年该农产品的销售总额约为(参考数据:$1.4^{10}\approx28.93$)　(　　)

A.6 384万元　　B.6 374万元

C.6 284万元　　D.6 274万元

A　**解析**:设该合作社在2024年,2025年,…,2033年的销售额分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$.由题意,可得 $a_{n+1}=1.4a_n-4(n=1,2,\cdots,9)$,则 $a_{n+1}-10=1.4(a_n-10)(n=1,2,\cdots,9)$.又因为 $a_1-10=90$,所以数列 $\{a_n-10\}$ 是首项为90,公比为1.4的等比数列,则 $a_n-10=90\times1.4^{n-1}$,即 $a_n=90\times1.4^{n-1}+10$.所以 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=10\times10+\frac{90\times(1-1.4^{10})}{1-1.4}\approx100+225\times(28.93-1)\approx6\ 384$,故从2024年到2033年该产品的销售总额约为6 384万元.故选A.

课后素养评价(十)

基础落实

1.设首项为1,公比为 $\frac{2}{3}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,则　(　　)

A.$S_n=2a_n-1$　　B.$S_n=3a_n-2$

C.$S_n=4-3a_n$　　D.$S_n=3-2a_n$

D　**解析**:在等比数列 $\{a_n\}$ 中,$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{1-a_n\times\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=3-2a_n$.故选D.

2.一个热气球在第一分钟上升了25 m的高度,在以后的每一分钟,它上升的高度都是它在前一分钟上升高度的80%,该热气球前3分钟上升的总高度为　(　　)

A.29 m　　B.45 m

C.61 m　　D.77 m

C　**解析**:由题意可知,热气球每分钟上升的高度构成等比数列,且首项 $a_1=25$,公比 $q=0.8$,则该热气球在前3分钟里上升的总高度为 $S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\frac{25\times(1-0.8^3)}{1-0.8}=61$ m.故选C.

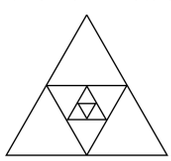
3.已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=2^{n-1}+1$,则数列 $\{a_n\}$ 的前10项中所有奇数项之和与所有偶数项之和的比值为　(　　)

A.$\frac{1}{2}$　　B.2　　C.$\frac{172}{341}$　　D.$\frac{341}{172}$

C　**解析**:当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n-2}$,又 $a_1=S_1=2$,即前10项分别为2,1,2,4,8,16,32,64,128,256,

所以数列 $\{a_n\}$ 的前10项中 $S_{偶}=\frac{1-4^5}{1-4}=\frac{1\ 023}{3}=341$,$S_{奇}=2+\frac{2\times(1-4^4)}{1-4}=2+\frac{510}{3}=172$,所以 $\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{172}{341}$.故选C.

4.如图,三角形蜘蛛网是由一些正三角形环绕而成的图形,每个正三角形的顶点都是其外接正三角形各边的中点.现用17 m长的铁丝材料制作一个网格数最多的三角形蜘蛛网,若该三角形蜘蛛网中最大的正三角形的边长为3 m,则最小的正三角形的边长为　(　　)



A.$\frac{3}{4}$ m　　B.$\frac{3}{8}$ m　　C.$\frac{3}{16}$ m　　D.$\frac{3}{32}$ m

B　**解析**：由题意可知，该三角形蜘蛛网中正三角形的周长从大到小是以 9 为首项，$\frac{1}{2}$为公比的等比数列，设最小的正三角形的边长为 $3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ m，则 $\frac{9\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]}{1-\frac{1}{2}}\leqslant 17$，则 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\geqslant\frac{1}{18}$，得 $n\leqslant 4$，故最小的正三角形的边长为 $3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{3}{8}$ m.故选 B.

5.设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_6=3S_3$，则$\frac{S_9}{S_3}$=　　（　　）

A.4　　B.6　　C.7　　D.9

C　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q.

由 $S_6=3S_3$，得 $a_4+a_5+a_6=S_6-S_3=2S_3$，

即 $a_1q^3+a_1q^4+a_1q^5=2(a_1+a_1q+a_1q^2)$，而 $a_1\neq 0$，$1+q+q^2\neq 0$，则 $q^3=2$.

因此 $S_9=S_6+a_7+a_8+a_9=3S_3+a_1q^6+a_1q^7+a_1q^8=3S_3+q^6S_3=7S_3$，所以$\frac{S_9}{S_3}=7$.故选 C.

6.设$\{a_n\}$是公比为正数的等比数列，$a_1=2$，$a_3=a_2+4$.设$\{b_n\}$的前 n 项和为 S_n，$S_n=n^2$.

(1)求$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{a_n+b_n\}$的前 n 项和 T_n；

(3)设 $c_n=\frac{1}{b_n\cdot b_{n+1}}$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 H_n.

解：(1)由题意$\{a_n\}$是公比为正数的等比数列，$a_1=2$，$a_3=a_2+4$.

设公比为 $q(q>0)$，则 $2q^2=2q+4$，所以 $q=2$，

故 $a_n=2^n$.

由$\{b_n\}$的前 n 项和为 S_n，$S_n=n^2$，得当 $n=1$ 时，$b_1=S_1=1$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$.

$b_1=1$ 也适合上式，故 $b_n=2n-1$.

(2)由题意可得 $T_n=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)=(2+2^2+\cdots+2^n)+[1+3+\cdots+(2n-1)]=2^{n+1}-2+n^2$.

(3)由(1)得 $c_n=\frac{1}{b_n\cdot b_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

故 $H_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.

能力提升

1.已知数列$\{a_n\}$满足 $a_n=2^n$，在 a_n 和 a_{n+1}之间插入 n 个 1，构成数列$\{b_n\}$：a_1，1，a_2，1，1，a_3，1，1，1，a_4，…，则数列$\{b_n\}$的前 18 项的和 S_{18}=　　（　　）

A.43　　B.44　　C.75　　D.76

C　**解析**：在 a_n 和 a_{n+1}之间插入 n 个 1，构成数列$\{b_n\}$：a_1，1，a_2，1，1，a_3，1，1，1，a_4，…，

则从 a_1 到 a_n 共有 $n+[1+2+\cdots+(n-1)]=n+\frac{(n-1)(1+n-1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$(个)数.

当 $n=5$ 时，$\frac{5^2+5}{2}=15$，当 $n=6$ 时，$\frac{6^2+6}{2}=21$.

由于 $a_n=2^n$，所以 $S_{18}=(a_1+a_2+\cdots+a_5)+(18-5)\times 1=\frac{2\times(1-2^5)}{1-2}+13=75$.故选 C.

2.(多选)计算机病毒危害很大，一直是计算机科学家研究的对象.当计算机内某文件感染病毒后，该病毒文件就不断地传染其他未感染的文件.计算机科学家们研究的计算机病毒传染指数 C_0，即一个病毒文件在 1 min 内平均传染的文件数.某计算机病毒的传染指数 $C_0=2$，一台计算机有 10^5 个文件，若该计算机有一半以上文件感染，则该计算机将处于瘫痪状态.该计算机现只有一个病毒文件，且未经杀毒处理，则下列说法中正确的有　　（　　）

A.在第 3 min 内，该计算机新感染的文件为 18 个

B.经过 5 min，该计算机共有 243 个病毒文件

C.10 min 后，该计算机处于瘫痪状态

D.该计算机瘫痪前，每分钟内新感染的文件数成公比为 2 的等比数列

ABC　**解析**：设第$(n+1)$min 之内新感染的文件数为 a_{n+1}，前 n min 内新感染的文件数之和为 S_n，则 $a_{n+1}=2(S_n+1)$，且 $a_1=2$.

由 $a_{n+1}=2(S_n+1)$，得当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=2(S_{n-1}+1)$，两式相减得 $a_{n+1}-a_n=2a_n$，

所以 $a_{n+1}=3a_n$.又 $a_2=2(S_1+1)=6$，$a_2=3a_1$，所以每分钟内新感染的文件数构成以 $a_1=2$ 为首项，3 为公比的等比数列，所以 $a_n=2\times 3^{n-1}$.

在第 3 min 内，新感染了 $a_3=2\times 3^{3-1}=18$(个)文件.故选项 A 正确.

经过 5 min，该计算机共有 $1+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1+\frac{2\times(1-3^5)}{1-3}=3^5=243$(个)病毒文件.故选项 B 正确.

10 min 后，该计算机感染病毒的文件总数为 $1+a_1$

$+a_2+\cdots+a_{10}=1+\dfrac{2\times(1-3^{10})}{1-3}=3^{10}>\dfrac{1}{2}\times10^5$,

所以该计算机处于瘫痪状态.故选项C正确.

该计算机瘫痪前,每分钟内新感染的文件数成公比为3的等比数列.故选项D不正确.

故选ABC.

3.设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,其前n项和为S_n,前n项积为T_n,并满足条件$a_1>1$,$a_{2\,023}a_{2\,024}>1$,$\dfrac{a_{2\,023}-1}{a_{2\,024}-1}<0$,则　(　　)

A.$S_{2\,023}<S_{2\,024}$

B.$a_{2\,023}a_{2\,024}-1<0$

C.$T_{2\,024}$是数列$\{T_n\}$中的最大项

D.数列$\{T_n\}$无最大项

A　**解析**:当$q<0$时,$a_{2\,023}a_{2\,024}=a_{2\,023}^2q<0$,不成立;

当$q\geqslant1$时,$a_{2\,023}>1$,$a_{2\,024}>1$,$\dfrac{a_{2\,023}-1}{a_{2\,024}-1}>0$,不成立.

故$0<q<1$,且$a_{2\,023}>1$,$0<a_{2\,024}<1$,故$S_{2\,024}>S_{2\,023}$,故A正确;

$a_{2\,023}a_{2\,024}-1>1-1=0$,故B错误;

因为$a_{2\,023}>1$,$0<a_{2\,024}<1$,所以$T_{2\,023}$是数列$\{T_n\}$中的最大项,故C,D错误.

故选A.

4.已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$,前n项和为S_n,$a_{n+1}\cdot a_n=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$,则$S_{2\,024}$等于　(　　)

A.$2^{2\,024}-1$

B.$3\times2^{1\,012}-1$

C.$3\times2^{1\,012}-2$

D.$3\times2^{1\,012}-3$

D　**解析**:在数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,由$a_{n+1}\cdot a_n=2^n$,得$a_2=2$,$a_{n+2}\cdot a_{n+1}=2^{n+1}$,则有$\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=2$,

因此数列$\{a_{2n-1}\}$是以1为首项,2为公比的等比数列,数列$\{a_{2n}\}$是以2为首项,2为公比的等比数列,所以$S_{2\,024}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2\,023})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2\,024})=\dfrac{1-2^{1\,012}}{1-2}+\dfrac{2\times(1-2^{1\,012})}{1-2}=3\times2^{1\,012}-3$.

故选D.

5.已知正项等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n.若-1,S_5,S_{10}成等差数列,则$S_{10}-2S_5=$_____,且$S_{15}-S_{10}$的最小值为_____.

1　4　**解析**:由题意知$2S_5=-1+S_{10}$,

所以$S_{10}-2S_5=1$.

由$\{a_n\}$为等比数列可知S_5,$S_{10}-S_5$,$S_{15}-S_{10}$成等比数列,所以$(S_{10}-S_5)^2=S_5(S_{15}-S_{10})$,$S_{15}-S_{10}=\dfrac{(S_{10}-S_5)^2}{S_5}=\dfrac{(2S_5+1-S_5)^2}{S_5}=\dfrac{1}{S_5}+S_5+2\geqslant2\sqrt{\dfrac{1}{S_5}\cdot S_5}+2=4$,当且仅当$S_5=1$时,等号成立.

6.去年某地产生的生活垃圾为20万吨,其中14万吨垃圾以填埋方式处理,6万吨垃圾以焚烧方式处理.预计生活垃圾的总量每年递增5%,同时,通过焚烧方式处理的垃圾量每年增加1.5万吨.记从今年起每年生活垃圾的总量(单位:万吨)构成数列$\{a_n\}$,每年以焚烧方式处理的垃圾量(单位:万吨)构成数列$\{b_n\}$.

(1)求数列$\{a_n\}$和数列$\{b_n\}$的通项公式;

(2)为了确定处理生活垃圾的预算,请求出从今年起n年内通过填埋方式处理的垃圾总量的计算公式,并计算从今年起5年内通过填埋方式处理的垃圾总量(精确到0.1万吨).(参考数据:$1.05^4\approx1.216$,$1.05^5\approx1.276$,$1.05^6\approx1.340$)

解:(1)由题意,从今年起每年生活垃圾的总量(单位:万吨)构成数列$\{a_n\}$,每年以焚烧方式处理的垃圾量(单位:万吨)构成数列$\{b_n\}$,

所以数列$\{a_n\}$是以$20(1+5\%)$为首项,$1+5\%$为公比的等比数列,

数列$\{b_n\}$是以$6+1.5=7.5$为首项,1.5为公差的等差数列,

故$a_n=20(1+5\%)^n$,$b_n=6+1.5n$.

(2)设今年起n年内通过填埋方式处理的垃圾总量为S_n,

则$S_n=(a_1-b_1)+\cdots+(a_n-b_n)=(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

$=(20\times1.05+20\times1.05^2+\cdots+20\times1.05^n)-(7.5+9+\cdots+6+1.5n)$

$=\dfrac{(20\times1.05)\times(1-1.05^n)}{1-1.05}-\dfrac{n}{2}(7.5+6+1.5n)=420\times1.05^n-\dfrac{3}{4}n^2-\dfrac{27}{4}n-420$,

当$n=5$时,$S_n\approx63.4$.

所以今年起5年内通过填埋方式处理的垃圾总量约为63.4万吨.

自我超越

在购买住房、轿车等商品时,一次性付款可能会超出一些买主的支付能力,贷款消费不失为一种可行的选择,但是也要量入为出,理智消费.某家庭计划在今年元旦从某银行贷款10万元购置一辆轿车,贷款时间

为18个月.该银行现提供了两种可选择的还款方案:方案一是以月利率0.4%的复利计息,每月底还款,每次还款金额相同;方案二是以季度利率1.2%的复利计息,每季度末还款,每次还款金额相同.(注:复利是指把前一期的利息与本金之和作为本金,再计算下一期的利息)

(1)分别计算选择方案一、方案二时,该家庭每次还款金额为多少万元.(结果精确到小数点后三位,参考数据:$1.004^{18}\approx1.074\ 5$,$1.012^{6}\approx1.074\ 2$)

(2)从每季度还款金额较少的角度看,该家庭应选择哪种方案?请说明理由.

解:(1)若选择方案一:

设该家庭每月应还款 a 万元,则 $a+a(1+0.004)+a(1+0.004)^2+\cdots+a(1+0.004)^{17}=10\times(1+0.004)^{18}$,

即 $a\left(\dfrac{1-1.004^{18}}{1-1.004}\right)=10\times1.004^{18}$,解得 $a=\dfrac{0.04\times1.004^{18}}{1.004^{18}-1}\approx0.577$(万元);

若选择方案二:

设该家庭每季度应还款 b 万元,则有 $b+b(1+0.012)+b(1+0.012)^2+\cdots+b(1+0.012)^5=10\times(1+0.012)^6$,

即 $b\left(\dfrac{1-1.012^{6}}{1-1.012}\right)=10\times1.012^{6}$,解得 $b=\dfrac{0.12\times1.012^{6}}{1.012^{6}-1}\approx1.737$ 万元.

(2)因为 $0.577\times3=1.731<1.737$,

所以该家庭应选择第一种方案.

4.4* 数学归纳法

学习任务目标

1.了解数学归纳法的原理.

2.掌握用数学归纳法证明命题的一般方法与步骤.

3.能用数学归纳法证明一些数学命题.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　数学归纳法的定义

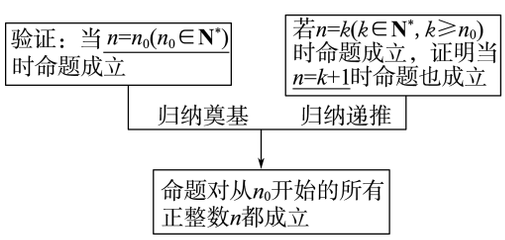
一般地,证明一个与正整数 n 有关的命题,可按下列步骤进行:

(1)(归纳奠基)证明当 $n=n_0(n_0\in\mathbf{N}^*)$ 时命题成立;

(2)(归纳递推)以"当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant n_0)$ 时命题成立"为条件,推出"当 $n=k+1$ 时命题也成立".

只要完成这两个步骤,就可以断定命题对从 n_0 开始的所有正整数 n 都成立,这种证明方法称为数学归纳法.

知识点二　数学归纳法的框图表示



【概念辨析】

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)与自然数 n 有关的命题都可以用数学归纳法进行证明.　(×)

(2)在利用数学归纳法证明命题时,只要推理过程正确,就可以不用进行假设.　(×)

(3)用数学归纳法证明等式时,由 $n=k$ 到 $n=k+1$,等式的项数一定增加了1.　(×)

2.当 $n=1$ 时,式子 $1+k+k^2+\cdots+k^n(n\in\mathbf{N}^*)$ 的值为　(B)

A.1　　B.$1+k$

C.$1+k+k^2$　　D.以上都不对

3.请思考并回答下列问题:

(1)用数学归纳法证明时,第一步中,n 的初始值 n_0 只能是1吗?举例说明.

(2)用数学归纳法证明时,在验证了 $n=1$ 时命题正确,假定 $n=k$ 时命题正确后,此时 k 的取值范围是什么?

(3)数学归纳法两个步骤之间有怎样的联系?

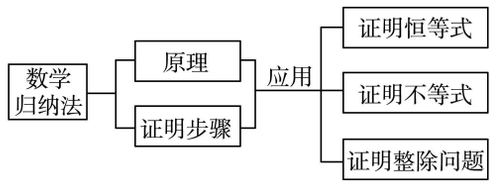
(1)**提示**:用数学归纳法证明时,第一步中,n 的初始值 n_0 应根据命题的具体情况来确定,不一定是1.如:用数学归纳法证明凸 n 边形的内角和为 $(n-2)\cdot180°$ 时,其初始值 $n_0=3$.

(2)**提示**:$k\geqslant1,k\in\mathbf{N}^*$.数学归纳法是证明关于正整数 n 的命题的一种方法,所以 k 是正整数.又因为第一步是递推的基础,所以 k 大于等于1.

(3)**提示**:第一步是验证命题递推的基础,第二步是

论证命题递推的依据，这两个步骤缺一不可，只完成第一步而缺少第二步就作出判断，可能得出不正确的结论.因为单靠第一步，无法递推下去，即我们无法判定 n 取 n_0 以后的数时命题是否正确.同样只有第二步而缺少第一步，也可能得出不正确的结论，缺少第一步这个基础，假设就失去了成立的前提，第二步也就没有意义了.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 加深对数学归纳法的理解

1. 用数学归纳法证明 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n(n>1,n\in\mathbf{N}^*)$ 时，第一步应验证不等式　　（　　）

A.$1+\frac{1}{2}<2$　　B.$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<3$

C.$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<2$　　D.$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}<3$

C　**解析**：用数学归纳法证明 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n(n\in\mathbf{N}^*,n>1)$，第一步先验证当 $n=2$ 时，不等式 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<2$ 是否成立.故选 C.

2. 已知 $f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}(n\in\mathbf{N}^*)$，从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时，$f(k+1)$ 比 $f(k)$ 共增加了（　　）

A.1 项　　B.2^{k-1} 项

C.2^{k+1} 项　　D.2^k 项

D　**解析**：由题意，当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，最后一项为 $\frac{1}{2^k}$，当 $n=k+1$ 时，最后一项为 $\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^k\times2}=\frac{1}{2^k+2^k}$，所以由 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时，增加的项为 $\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^k}$，增加了 2^k 项.故选 D.

【探究总结】

运用数学归纳法证明时的易错点

(1)在项数上出错，特别是寻找从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 项数发生什么变化时易弄错.

(2)不利用归纳假设.归纳假设是使用数学归纳法的关键一步，是起桥梁作用的.如果不利用这一步，就相当于桥梁断了，自然就无法得出最终结论.

(3)步骤不严谨、不规范.在利用假设后，不作任何推导或计算而直接写出所要的结论.

任务2 用数学归纳法证明与数列有关的等式

探究活动

例 1　(1)用数学归纳法证明：$1+3\times2+5\times2^2+\cdots+(2n-1)\times2^{n-1}=2^n(2n-3)+3(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)用数学归纳法证明：$\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{2}{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

证明：(1)①当 $n=1$ 时，左边 $=1$，右边 $=2\times(2-3)+3=1$，左边 $=$ 右边，等式成立.

②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，等式成立，即 $1+3\times2+5\times2^2+\cdots+(2k-1)\times2^{k-1}=2^k(2k-3)+3$，

则当 $n=k+1$ 时，$1+3\times2+5\times2^2+\cdots+(2k-1)\times2^{k-1}+(2k+1)\times2^k=2^k(2k-3)+3+(2k+1)\times2^k=2^k(4k-2)+3=2^{k+1}[2(k+1)-3]+3$，

即当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

由①②可知，等式对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

(2)①当 $n=1$ 时，左边 $=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，

右边 $=\frac{2}{1+2}=\frac{2}{3}$，等式成立.

②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，等式成立，

即 $\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{2}{k+2}$，

则当 $n=k+1$ 时，

$\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{k+2}\right)\times\left(1-\frac{1}{k+3}\right)=\frac{2}{k+2}\left(1-\frac{1}{k+3}\right)=\frac{2(k+2)}{(k+2)(k+3)}=\frac{2}{k+3}=\frac{2}{(k+1)+2}$，

即当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

由①②可知，等式对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

【探究总结】

用数学归纳法证明等式的注意点

(1)弄清 n 取第一个值 n_0 时等式两端项的情况.

(2)弄清从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时等式两端的项是如何变化的，即增加了哪些项，减少了哪些项.

(3)证明当 $n=k+1$ 时结论也成立，要设法将待证式与归纳假设建立联系，并向 $n=k+1$ 时证明的目标表达式进行变形.

应用迁移

1. 设 n 是正整数，证明：$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$.

证明：当 $n=1$ 时，左边 $=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，右边 $=\frac{1}{2}$，所以当 $n=1$ 时等式成立.

假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，等式成立，即 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}$，

则当 $n=k+1$ 时，

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2(k+1)-1}-\frac{1}{2(k+1)}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2(k+1)-1}-\frac{1}{2(k+1)}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}$.

即等式在 $n=k+1$ 时也成立.

综上所述，等式对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

2. 观察以下等式：

$1^3=1^2$，

$1^3+2^3=(1+2)^2$，

$1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$，

$1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2$，

……

(1)请用含 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 的等式归纳猜想出一般性结论，并用数学归纳法加以证明；

(2)设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_n=n^3+n$，求 S_{10}.

解：(1)猜想 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$.

证明：当 $n=1$ 时，左边 $=1$，右边 $=1$，等式成立.

假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，等式成立，即 $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=(1+2+3+\cdots+k)^2$，

则当 $n=k+1$ 时，

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$

$=(1+2+3+\cdots+k)^2+(k+1)^3$

$=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3=(k+1)^2\cdot\frac{k^2+4k+4}{4}$

$=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2=[1+2+\cdots+(k+1)]^2$，

即当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

综上所述，对任意的正整数 n，$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$.

(2)因为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_n=n^3+n$，

所以 $S_{10}=(1^3+2^3+\cdots+10^3)+(1+2+\cdots+10)$

$=(1+2+\cdots+10)^2+\frac{10\times11}{2}$

$=55^2+55=3\ 080$.

任务3 用数学归纳法证明与数列有关的不等式

探究活动

例2　用数学归纳法证明：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}>\frac{n}{2}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

证明：(1)当 $n=1$ 时，左边 $=1$，右边 $=\frac{1}{2}$，不等式成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，不等式成立，

即 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}>\frac{k}{2}$，

则当 $n=k+1$ 时，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k}>\frac{k}{2}+\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k}>\frac{k}{2}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}=\frac{k}{2}+(2^k-2^{k-1})\cdot\frac{1}{2^k}=\frac{k+1}{2}$.

即当 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

由(1)(2)可知，不等式对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

[一题多思]

思考1. 推证“当 $n=k+1$ 时，不等式也成立”的过程中必须要用到什么？关键点是什么？

提示：必须要用到归纳假设，即当 $n=k$ 时，不等式成立.

关键点是对不等式进行适当放缩.

思考2. 将本例要证的不等式改为“$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\leqslant\frac{1}{2}+n(n\in\mathbf{N}^*)$”，应如何证明？

证明：(1)当 $n=1$ 时，左边 $=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+1=$ 右边，不等式成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，不等式成立，

即 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}\leqslant\frac{1}{2}+k$，

则当 $n=k+1$ 时，

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^k}\leqslant\frac{1}{2}+k+\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^k}<\frac{1}{2}+k+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}+k+2^k\cdot\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}+(k+1)$，

即当 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

由(1)(2)可知，不等式对所有的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

【探究总结】

用数学归纳法证明不等式的注意点

(1)在归纳递推的证明过程中，方向不明确时，可采用分析法完成，经过分析找到推证的方向后，再用综合法、比较法等其他方法证明.

(2)在推证“$n=k+1$ 时不等式也成立”的过程中，常常要将表达式作适当的放缩、变形，以便于应用所作假设变换出要证明的结论.

应用迁移

1. 对不等式$\sqrt{n^2+n}<n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，某同学的证明过程如下：

(1)当 $n=1$ 时，$\sqrt{1^2+1}<1+1$，不等式成立；

(2)假设当 $n=k(k\geqslant1,k\in\mathbf{N}^*)$ 时，不等式成立，即 $\sqrt{k^2+k}<k+1$，则当 $n=k+1$ 时，$\sqrt{(k+1)^2+(k+1)}=\sqrt{k^2+3k+2}<\sqrt{k^2+3k+2+(k+2)}=\sqrt{(k+2)^2}=(k+1)+1$，所以当 $n=k+1$ 时，不等式也成立.上述证法　　(　　)

A.过程全部正确

B.当 $n=1$ 时的验证不正确

C.归纳假设不正确

D.从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 的推理不正确

D　**解析**：用数学归纳法证明不等式没有应用归纳假设，所以从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 的推理不正确.

2. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=2$，$na_{n+1}=(n+1)a_n+n(n+1)$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)求证：数列$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$为等差数列，并求出数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)记 $b_n=\frac{2}{(n+1)a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$，用数学归纳法证明：$b_1+b_2+\cdots+b_n<1-\frac{1}{(n+1)^2}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

证明：(1)由 $a_1=2$，$na_{n+1}=(n+1)a_n+n(n+1)$，

可得$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+1$，即$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=1$，

又$\frac{a_1}{1}=2$，

则数列$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$是首项为 2，公差为 1 的等差数列，

所以$\frac{a_n}{n}=2+n-1=n+1$.

故 $a_n=n(n+1)$.

(2)由(1)可得 $b_n=\frac{2}{(n+1)a_n}=\frac{2}{n(n+1)^2}$.

①当 $n=1$ 时，左边$=b_1=\frac{1}{2}$，右边$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，$\frac{1}{2}<\frac{3}{4}$，不等式成立.

②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，不等式成立，

即 $b_1+b_2+\cdots+b_k<1-\frac{1}{(k+1)^2}$.

当 $n=k+1$ 时，$b_1+b_2+\cdots+b_k+b_{k+1}<1-\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{2}{(k+1)(k+2)^2}=1-\frac{k^2+2k+2}{(k+1)^2(k+2)^2}<1-\frac{k^2+2k+1}{(k+1)^2(k+2)^2}=1-\frac{1}{(k+2)^2}$，

即当 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

由①②可知，$b_1+b_2+\cdots+b_n<1-\frac{1}{(n+1)^2}$对所有的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

任务4 用数学归纳法证明整除问题

探究活动

例 3　用数学归纳法证明：$a^{n+1}+(a+1)^{2n-1}(n\in\mathbf{N}^*,a\in\mathbf{R})$能被 a^2+a+1 整除.

证明：(1)当 $n=1$ 时，$a^2+(a+1)^1=a^2+a+1$，显然能被 a^2+a+1 整除，命题成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，命题成立，

即 $a^{k+1}+(a+1)^{2k-1}$ 能被 a^2+a+1 整除.

当 $n=k+1$ 时，

$a^{k+2}+(a+1)^{2k+1}=a\cdot a^{k+1}+(a+1)^2(a+1)^{2k-1}=a[a^{k+1}+(a+1)^{2k-1}]+(a+1)^2(a+1)^{2k-1}-a(a+1)^{2k-1}=a[a^{k+1}+(a+1)^{2k-1}]+(a^2+a+1)(a+1)^{2k-1}$.

因为 $a^{k+1}+(a+1)^{2k-1}$ 与 a^2+a+1 都能被 a^2+a+1 整除，

所以上式能被 a^2+a+1 整除，

即当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

由(1)(2)知，对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，$a\in\mathbf{R}$，命题都成立.

【探究总结】

用数学归纳法证明整除问题的策略

证明整除问题的关键是凑项，即采取增项、减项、拆项和因式分解等手段，凑出当 $n=k$ 时的情形，从而利用归纳递推使问题得以解决.

应用迁移

(教材 P52 习题 4.4 题 8 改编)用数学归纳法证明：$2^{3n}-1(n\in\mathbf{N}^*)$能被 7 整除.

证明：(1)当 $n=1$ 时，$2^{3\times1}-1=8-1=7$，能被 7 整除.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，$2^{3k}-1$ 能被 7 整除.

那么当 $n=k+1$ 时，$2^{3(k+1)}-1=8\times2^{3k}-1=8\times2^{3k}-8+7=8(2^{3k}-1)+7$.

因为 $2^{3k}-1$ 能被 7 整除，

所以 $8(2^{3k}-1)+7$ 能被 7 整除，

即当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

由(1)(2)可知，$2^{3n}-1(n\in\mathbf{N}^*)$能被 7 整除.

课后素养评价(十一)

基础落实

1.用数学归纳法证明等式 $1+2+3+\cdots+(n+3)=\frac{(n+3)(n+4)}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$ 时,第一步验证 $n=1$ 时等式成立,左边的式子是　　(　　)

A.1　　B.1+2

C.1+2+3　　D.1+2+3+4

D　**解析**:当 $n=1$ 时,$n+3=4$,故左边应为 $1+2+3+4$.故选 D.

2.利用数学归纳法证明不等式 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<f(n)(n\geqslant 2,且\ n\in\mathbf{N}^*)$ 的过程中,由 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时,左边增加了　　(　　)

A.2^{k-1}项　　B.2^k 项

C.$(k-1)$项　　D.k 项

B　**解析**:当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时,不等式左边为 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}$,

当 $n=k+1$ 时,不等式左边为 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}$,

增加的部分为 $\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}=\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^k-1}$,共有 2^k 项.

故选 B.

3.用数学归纳法证明 $1+a+a^2+\cdots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ $(a\neq 1,n\in\mathbf{N}^*)$,在验证等式对于 $n=1$ 成立时,左边的式子是　　(　　)

A.1　　B.1+a

C.1+a+a^2　　D.1+a+a^2+a^3

B　**解析**:当 $n=1$ 时,$a^n=a$,所以左边应为1+a.故选 B.

4.用数学归纳法证明当 n 为正奇数时,x^n+y^n 能被 $x+y$ 整除,第二步归纳递推应为　　(　　)

A.假设 $n=2k+1(k\in\mathbf{N}^*)$ 时正确,再推 $n=2k+3$ 时正确

B.假设 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$ 时正确,再推 $n=2k+1$ 时正确

C.假设 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时正确,再推 $n=k+1$ 时正确

D.假设 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时正确,再推 $n=k+2$ 时正确

B　**解析**:因为 n 为正奇数,所以在证明时,应假设 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$ 时正确,再推出 $n=2k+1$ 时正确.故选 B.

5.用数学归纳法证明 $1+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$ 的过程中,由 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时,左边增加的项是_____.

$(2k+1)^2$　**解析**:由题可知 $n=k$ 时,左边 $=1+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2$,

当 $n=k+1$ 时,左边 $=1+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2$,

所以等式左边增加的项是$(2k+1)^2$.

6.已知数列$\{a_n\}$的每一项均为正数,记$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$4S_n=a_n^2+2a_n$,尝试通过计算数列$\{a_n\}$的前四项,猜想数列$\{a_n\}$的通项公式,并用数学归纳法加以证明.

解:因为 $4S_n=a_n^2+2a_n$,所以当 $n=1$ 时,$4a_1=a_1^2+2a_1$,可得 $a_1(a_1-2)=0$,又 $a_n>0$,故 $a_1=2$;

当 $n=2$ 时,$4(a_1+a_2)=a_2^2+2a_2$,即 $a_2^2-2a_2-8=0$,即$(a_2-4)(a_2+2)=0$,故 $a_2=4$;

当 $n=3$ 时,$4(a_1+a_2+a_3)=a_3^2+2a_3$,即 $a_3^2-2a_3-24=0$,即$(a_3-6)(a_3+4)=0$,故 $a_3=6$;

当 $n=4$ 时,$4(a_1+a_2+a_3+a_4)=a_4^2+2a_4$,即 $a_4^2-2a_4-48=0$,

即$(a_4-8)(a_4+6)=0$,故 $a_4=8$.

由 $a_1=2,a_2=4,a_3=6,a_4=8$,可猜测 $a_n=2n$.

证明如下:

当 $n=1$ 时,$a_1=2$,猜想成立;

设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时,猜想成立,即 $a_k=2k$,

则当 $n=k+1$ 时,依题意,$4S_{k+1}=a_{k+1}^2+2a_{k+1}$①,

$4S_k=a_k^2+2a_k$②,

由①−②,可得,$4a_{k+1}=a_{k+1}^2+2a_{k+1}-(a_k^2+2a_k)$,

即 $a_{k+1}^2-2a_{k+1}-(4k^2+4k)=0$,

即$(a_{k+1}+2k)[a_{k+1}-2(k+1)]=0$,

因为 $a_n>0$,故得 $a_{k+1}=2(k+1)$,即猜想也成立.

综上,$a_n=2n$ 对任何正整数 n 都成立,即该数列的通项公式为 $a_n=2n$.

能力提升

1. 用数学归纳法证明$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<1(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，第二步由 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时，左边的变化是（　　）

A.增加了$\frac{1}{2k+1}$这一项

B.增加了$\frac{1}{2k+1}$和$\frac{1}{2k+2}$两项

C.增加了$\frac{1}{2k+1}$和$\frac{1}{2k+2}$两项，减少了$\frac{1}{k}$这一项

D.以上都不对

C　**解析**：当 $n=k$ 时，左边$=\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}$；当 $n=k+1$ 时，左边$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$，对比可知，C 正确.故选 C.

2. 已知 $f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$，用数学归纳法证明 $f(2^n)>\frac{n}{2}$ 时，$f(2^{k+1})-f(2^k)=$_____.

$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}$　**解析**：因为 $f(2^{k+1})=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}=f(2^k)+\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}$，

所以 $f(2^{k+1})-f(2^k)=\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}$.

3. 用数学归纳法证明$(n+1)\cdot(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+n)=2^n\times1\times3\times\cdots\times(2n-1)(n\in\mathbf{N}^*)$，从$n=k$ 到 $n=k+1$ 时，左端增乘的代数式为_____.

$2(2k+1)$　**解析**：令 $f(n)=(n+1)\cdot(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+n)$，则 $f(k)=(k+1)\cdot(k+2)\cdot\cdots\cdot(k+k)$，$f(k+1)=(k+2)\cdot(k+3)\cdot\cdots\cdot(k+k)\cdot(2k+1)\cdot(2k+2)$，

所以$\frac{f(k+1)}{f(k)}=\frac{(2k+1)(2k+2)}{k+1}=2(2k+1)$.

4. 用数学归纳法证明 n^3+5n 能被 6 整除的过程中，当 $n=k+1$ 时，式子$(k+1)^3+5(k+1)$应变形为_____.

$(k^3+5k)+3k(k+1)+6$　**解析**：$(k+1)^3+5(k+1)=k^3+1+3k^2+3k+5k+5=(k^3+5k)+3k^2+3k+6=(k^3+5k)+3k(k+1)+6$.

因为 $k(k+1)$为偶数，所以 $3k(k+1)$能被 6 整除，所以$(k+1)^3+5(k+1)$应变形为$(k^3+5k)+3k(k+1)+6$.

5. 用数学归纳法证明：$\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}<\frac{n(n+2)}{2},n\in\mathbf{N}^*$.

证明：当 $n=1$ 时，左边$=\sqrt{2}$，

右边$=\frac{1\times(1+2)}{2}=\frac{3}{2}$，不等式成立；

假设 $n=k$ 时，不等式成立，即$\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots+\sqrt{k(k+1)}<\frac{k(k+2)}{2}$，

则当 $n=k+1$ 时，

$\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots+\sqrt{k(k+1)}+\sqrt{(k+1)(k+2)}<\frac{k(k+2)}{2}+\sqrt{(k+1)(k+2)}$

$<\frac{k(k+2)}{2}+\frac{(k+1)+(k+2)}{2}=\frac{k^2+4k+3}{2}=\frac{(k+1)(k+3)}{2}=\frac{(k+1)[(k+1)+2]}{2}$，

所以当 $n=k+1$ 时，不等式成立.

综上，$\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}<\frac{n(n+2)}{2},n\in\mathbf{N}^*$.

6. 是否存在常数 a,b，使等式$1\times n+2\times(n-1)+3\times(n-2)+\cdots+(n-1)\times2+n\times1=\frac{1}{6}n(n+a)(n+b)$对一切正整数 n 都成立？猜测并用数学归纳法证明你的结论.

解：将 $n=1,n=2$ 分别代入，

得$\begin{cases}1=\frac{1}{6}\times1\times(a+1)(b+1),\\1\times2+2\times1=\frac{1}{6}\times2\times(a+2)(b+2),\end{cases}$

即$\begin{cases}a+b=3,\\ab=2,\end{cases}$

所以$\begin{cases}a=1,\\b=2\end{cases}$或$\begin{cases}a=2,\\b=1.\end{cases}$

猜测 $1\times n+2\times(n-1)+3\times(n-2)+\cdots+(n-1)\times2+n\times1=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$对一切正整数都成立.

证明：①当 $n=1$ 时，显然成立.

②假设当 $n=k$ 时，$1\times k+2(k-1)+3(k-2)+\cdots+(k-1)\times2+k\times1=\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)$成立.

则当 $n=k+1$ 时，

左边$=1\times(k+1)+2\times k+3\times(k-1)+\cdots+k\times2+(k+1)\times1$

$=1\times k+2(k-1)+3(k-2)+\cdots+(k-1)\times2+k\times1+[1+2+3+\cdots+k+(k+1)]$

$=\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)+[1+2+3+\cdots+k+(k+1)]$

$=\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)+\frac{1}{2}(k+2)(k+1)$

$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3)$，

所以当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

由①②可知等式对一切正整数 n 都成立.

自我超越

是否存在 a,b,c 使等式$\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2=\frac{an^2+bn+c}{n}$对一切$n\in\mathbf{N}^*$都成立？若存在，用数学归纳法证明你的结论；若不存在，请说明理由.

解：取 $n=1,2,3$ 可得$\begin{cases}a+b+c=1,\\8a+4b+2c=5,\\27a+9b+3c=14,\end{cases}$

解得 $a=\frac{1}{3},b=\frac{1}{2},c=\frac{1}{6}$.

下面用数学归纳法证明$\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2=\frac{2n^2+3n+1}{6n}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$.

即证 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

①$n=1$ 时，左边$=1$，右边$=1$，∴等式成立；

②假设 $n=k$ 时等式成立，即 $1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$成立，

则当 $n=k+1$ 时，等式左边$=1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}k\cdot(k+1)(2k+1)+(k+1)^2=\frac{1}{6}[k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2]=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)\cdot(2k+3)$，所以当 $n=k+1$ 时等式成立.

由数学归纳法，综合①②知，当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时等式成立.

故存在 $a=\frac{1}{3},b=\frac{1}{2},c=\frac{1}{6}$使已知等式成立.

微专题培优(二)　数列求和问题

数列求和是数列的核心内容之一，在各类考试中占有重要地位.掌握常见的求和方法能快速解决相关问题，常用方法如下：

(1)公式法；(2)分组求和法；(3)裂项相消法；(4)错位相减法；(5)并项求和法.

类型1 公式法

例1　(1)记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和.若 $S_7=14,S_9=-9$，则 $S_{10}=$　(　　)

A.$-\frac{41}{2}$　　B.-16　　C.-25　　D.-36

(2)记等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.若 $a_2-2a_1=0,S_2-S_1=4$，则 $S_{2\,025}=$　(　　)

A.$2^{2\,025}-1$　　B.$2^{2\,025}-2$

C.$2^{2\,026}-1$　　D.$2^{2\,026}-2$

(1)C　**解析**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，则由题意，得$\begin{cases}S_7=7a_1+21d=14,\\S_9=9a_1+36d=-9,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=11,\\d=-3,\end{cases}$所以 $S_{10}=10a_1+45d=110-135=-25$.故选 C.

(2)D　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，则 $a_1q-2a_1=0$，所以 $q=2$.因为 $S_2-S_1=a_1(1+q)-a_1=a_1q=4$，所以 $a_1=2$，所以 $S_{2\,025}=2\times\frac{1-2^{2\,025}}{1-2}=2\times(2^{2\,025}-1)=2^{2\,026}-2$.故选 D.

【规律方法】

公式法求和的两个注意点

(1)先判断数列类型(等差/等比)，准确选用对应的前 n 项和公式；

(2)确定首项、公差(或公比)、项数，代入公式并确保计算准确.

【对点训练】

1.已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=\frac{1}{3}$，$a_2+a_5=4$，则 $S_5=$　(　　)

A.$\frac{25}{3}$　　B.$\frac{26}{3}$　　C.8　　D.9

A　**解析**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，由 $a_1=\frac{1}{3}$，$a_2+a_5=4$，得$\frac{1}{3}+d+\frac{1}{3}+4d=4$，解得 $d=\frac{2}{3}$，所以 $a_1+a_5=2a_1+4d=2\times\frac{1}{3}+4\times\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$，所以 $S_5=\frac{5(a_1+a_5)}{2}=\frac{25}{3}$.故选 A.

2.已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{33}{32}$，则$\frac{a_5}{a_3}=$（　　）

A.4　　B.2　　C.$\frac{1}{4}$　　D.$\frac{1}{2}$

C　**解析**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.当$q=1$时，$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{10a_1}{5a_1}=2\neq\frac{33}{32}$，不满足要求，舍去；当$q\neq1$时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，所以$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}}=\frac{1-q^{10}}{1-q^5}=1+q^5=\frac{33}{32}$，所以$q^5=\frac{1}{32}$，解得$q=\frac{1}{2}$.所以$\frac{a_5}{a_3}=\frac{a_1q^4}{a_1q^2}=q^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.故选C.

类型2 分组求和法

例2　已知等差数列$\{a_n\}$的公差为$d(d\neq0)$，等比数列$\{b_n\}$的公比为$q(q>0$且$q\neq1)$，$a_1=b_1=1$，$a_2=b_2$，$a_4=b_3$.

(1)求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(2)设$c_n=a_n+b_n$，求数列$\{c_n\}$的前n项和S_n.

解：(1)由于$a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)d$，所以$a_2=1+d$，$a_4=1+3d$.

等比数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=b_1q^{n-1}=q^{n-1}$，故$b_2=q$，$b_3=q^2$.

根据题意列方程组$\begin{cases}1+d=q,\\1+3d=q^2,\end{cases}$得$1+3(q-1)=q^2$，即$q^2-3q+2=0$，

解得$q=1$(舍去，因为已知$q\neq1$)或$q=2$，故$d=1$.

所以等差数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n$，等比数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=2^{n-1}$.

(2)根据题意得$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k+\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$，

由(1)得$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{(1+n)n}{2}$，$\sum\limits_{k=1}^{n}b_k=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，

故$S_n=\frac{n(n+1)}{2}+2^n-1$.

【规律方法】

利用分组求和法进行数列求和时，注意识别结构(等差+等比等)，按可求和形式分组，分别用公式求和后再合并.

【对点训练】

1.若数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=3$($n\in\mathbf{N}^*$)，则其前2 025项的和为（　　）

A.1 517　　B.1 519　　C.1 521　　D.1 523

B　**解析**：因为$a_1=1$，$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=3$，所以$S_{2\,025}=a_1+(a_2+a_3+a_4+a_5)+(a_6+a_7+a_8+a_9)+\cdots+(a_{2\,022}+a_{2\,023}+a_{2\,024}+a_{2\,025})=1+506\times3=1\,519$.故选B.

2.已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\begin{cases}2n-1,n\text{为奇数},\\2^n,n\text{为偶数},\end{cases}$则数列$\{a_n\}$的前10项和$S_{10}=$（　　）

A.107　　B.1 409　　C.1 414　　D.112

B　**解析**：因为$a_n=\begin{cases}2n-1,n\text{为奇数},\\2^n,n\text{为偶数},\end{cases}$所以$S_{10}=(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)+(a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10})=\frac{5\times(1+17)}{2}+\frac{4\times(1-4^5)}{1-4}=1\,409$.故选B.

类型3 裂项相消法

例3　已知等差数列$\{a_n\}$的公差$d\neq0$，且$a_3=5$，a_1，a_2，a_5成等比数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=\frac{1}{a_n^2+4n-2}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n.

解：(1)由条件可知$\begin{cases}a_1+2d=5,\\(a_1+d)^2=a_1(a_1+4d),\end{cases}$且$d\neq0$，解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}$

所以$a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$.

(2)由(1)得$b_n=\frac{1}{a_n^2+4n-2}=\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

所以$S_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.

【规律方法】

裂项相消法求和的几个关注点

(1)识别裂项结构：分析通项形式，常见分母为乘积、根式或可分解因式的结构.

(2)拆分验证：将通项拆为两项之差，验证前后项是否能逐项抵消.

(3)保留首尾求结果：裂项抵消后，仅剩首尾若干项，直接计算得结果.

【对点训练】

已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2+2n$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若首项为3的数列$\{b_n\}$满足$b_{n+1}-b_n=a_{n+1}$，求数列$\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

解：(1)由题意可得 $S_n=n^2+2n$，当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=3$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+2n-(n-1)^2-2(n-1)=2n+1$.

因为 $a_1=3$ 满足上式，所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n+1$.

(2)因为 $b_{n+1}-b_n=a_{n+1}$，且 $b_1=3=a_1$，

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_n-b_{n-1})=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=S_n=n^2+2n$.

当 $n=1$ 时，$b_1=3$ 也符合上式，所以 $b_n=n^2+2n$.

所以 $\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$，

所以 $T_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$.

类型4 错位相减法

例4　(2024·全国甲卷)记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $4S_n=3a_n+4$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $b_n=(-1)^{n-1}na_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

解：(1)当 $n=1$ 时，$4S_1=4a_1=3a_1+4$，解得 $a_1=4$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$4S_{n-1}=3a_{n-1}+4$，所以 $4S_n-4S_{n-1}=4a_n=3a_n-3a_{n-1}$，即 $a_n=-3a_{n-1}$.

而 $a_1=4\neq 0$，则 $a_n\neq 0$，所以 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=-3$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 4 为首项，-3 为公比的等比数列，

所以 $a_n=4\times(-3)^{n-1}$.

(2)因为 $b_n=(-1)^{n-1}n\times 4\times(-3)^{n-1}=4n\cdot 3^{n-1}$，

所以 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=4\times 3^0+8\times 3^1+12\times 3^2+\cdots+4n\times 3^{n-1}$，

故 $3T_n=4\times 3^1+8\times 3^2+12\times 3^3+\cdots+4n\times 3^n$.

两式相减得 $-2T_n=4+4\times 3^1+4\times 3^2+\cdots+4\times 3^{n-1}-4n\times 3^n$

$=4+4\times\dfrac{3(1-3^{n-1})}{1-3}-4n\times 3^n$

$=4+2\times 3\times(3^{n-1}-1)-4n\cdot 3^n$

$=(2-4n)\cdot 3^n-2$，

所以 $T_n=(2n-1)\cdot 3^n+1$.

【规律方法】

错位相减法求和的几个关注点

(1)错位写式再对齐：写出 S_n 的表达式，两端同乘公比后得新式，两式错开一位对齐，便于相消；

(2)相减合并等比型：两式相减，右侧合并整理，主体部分可利用等比数列求和公式计算；

(3)化简整理并检查：对结果进行化简，并回代检验，确保项数正确.

【对点训练】

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2=-2$，$(n-1)a_{n+1}=na_n+4$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)求 $\{2^na_n\}$ 的前 n 项和.

解：(1)已知 $(n-1)a_{n+1}=na_n+4$，当 $n=1$ 时，解得 $a_1=-4$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$\dfrac{a_{n+1}}{n}=\dfrac{a_n}{n-1}+\dfrac{4}{n(n-1)}=\dfrac{a_n}{n-1}+\dfrac{4}{n-1}-\dfrac{4}{n}$，即 $\dfrac{a_{n+1}+4}{n}=\dfrac{a_n+4}{n-1}$，

所以数列 $\left\{\dfrac{a_n+4}{n-1}\right\}$ 为常数数列，且 $\dfrac{a_n+4}{n-1}=a_2+4=2$，得到 $a_n=2n-6$.

又当 $n=1$ 时，$a_1=-4=2\times 1-6$，所以 $a_n=2n-6$ 对 $n=1$ 也成立，

故可得 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-6$.

(2)设 $b_n=2^na_n=(2n-6)\cdot 2^n=(n-3)\cdot 2^{n+1}$，

设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 B_n，则 $B_n=-2\cdot 2^2-1\cdot 2^3-0\cdot 2^4+\cdots+(n-3)\cdot 2^{n+1}$，

$2B_n=-2\cdot 2^3-1\cdot 2^4-\cdots+(n-4)\cdot 2^{n+1}+(n-3)\cdot 2^{n+2}$，

两式相减得 $-B_n=-8+(2^3+2^4+\cdots+2^{n+1})-(n-3)\cdot 2^{n+2}=-8+\dfrac{2^3(1-2^{n-1})}{1-2}-(n-3)\cdot 2^{n+2}=(4-n)\cdot 2^{n+2}-16$.

所以 $B_n=(n-4)\cdot 2^{n+2}+16$.

类型5 并项求和法

例5　已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_n+a_{n+1}=(-1)^n$，则数列 $\{a_n\}$ 的前2 025项和为　(　　)

A.1 013　　B.-1 011

C.1 014　　D.-1 012

C　**解析**：由题意可知，当 n 为偶数时，$a_n+a_{n+1}=(-1)^n=1$，因此，数列 $\{a_n\}$ 的前 2 025 项和为 $S_{2\,025}=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{2\,024}+a_{2\,025})=2+1\times 1\,012=1\,014$.故选 C.

【规律方法】

并项求和法的注意事项

(1)识别适用类型：适用于项呈现周期规律或正负交替规律的数列，如第 n 项含因式含 $(-1)^n$ 的数列；

(2)合理合并项：将相邻两项或几项作为一组，转化为等差、等比等易求和的数列；

(3)注意项数与余项：明确分组后的项数变化，剩余未分组项需单独求和并计入最终结果.

【对点训练】

1.已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=(-1)^n\cdot n$，S_n 为其前 n 项和，则 $S_{985}=$　(　　)

A.-493　　B.-495　　C.493　　D.495

A　**解析**：在数列 $\{a_n\}$ 中，由 $a_n=(-1)^n\cdot n$，得

$a_{2n-1}+a_{2n}=-(2n-1)+2n=1$，所以 $S_{985}=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{983}+a_{984})+a_{985}=1\times492-985=-493$.故选 A.

2.已知等差数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=1$，公差 $d=1$，则数列$\{(-1)^{n+1}a_n\}$的前 2 025 项之和为　　（　　）

A.−1 013　　B.−505

C.505　　D.1 013

D　**解析：**因为 $d=1$，$a_1=1$，所以 $a_n=1+n-1=n$，此时令 $b_n=(-1)^{n+1}a_n=(-1)^{n+1}n$.所以$\{b_n\}$前2 025 项和为 $1-2+3-4+\cdots-2\,024+2\,025=(1-2)+(3-4)+\cdots+(2\,023-2\,024)+2\,025=1\,012\times(-1)+2\,025=1\,013$.故选 D.

微专题培优集训（二）

1.$\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{17\times19}=$　　（　　）

A.$\frac{7}{57}$　　B.$\frac{3}{19}$

C.$\frac{8}{57}$　　D.$\frac{2}{19}$

C　**解析：**由题意知$\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{17\times19}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{19}\right)=\frac{8}{57}$.故选 C.

2.若数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^n+2n-1$，则数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=$　　（　　）

A.2^n+n^2-2

B.$2^{n+1}+n^2-2$

C.2^n+n^2-1

D.$2^{n+1}+n^2-1$

B　**解析：**因为 $a_n=2^n+2n-1$，所以 $S_n=(2^1+2^2+\cdots+2^n)+2(1+2+\cdots+n)-n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}+2\cdot\frac{n}{2}\cdot(n+1)-n=2^{n+1}+n^2-2$.故选 B.

3.设 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，且 $a_n=n$，则数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $T_n=$　　（　　）

A.$\frac{n}{n+1}$

B.$n(n+1)$

C.$\frac{1}{n^2+2n}$

D.$\frac{n}{2n+3}$

A　**解析：**因为 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.故选 A.

4.在数列$\{a_n\}$中，$\frac{a_n}{2}=a_{n-1}+2^{n-1}$，$a_1=2$，则$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=$_____.若 $b_n=\frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{2a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}$，则$\{b_n\}$的前 99 项和 $S_{99}=$_____.

$n\cdot2^n$　9　**解析：**由$\frac{a_n}{2}=a_{n-1}+2^{n-1}$，得 $a_n=2a_{n-1}+2^n$，所以$\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+1$.所以数列$\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$是首项为$\frac{a_1}{2^1}=\frac{2}{2}=1$，公差为 1 的等差数列，则$\frac{a_n}{2^n}=1+(n-1)\times1=n$，所以 $a_n=n\cdot2^n$.所以 $b_n=\frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{2a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，从而 $S_{99}=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+\sqrt{100}-\sqrt{99}=10-1=9$.

5.数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=|25-2n|$，则该数列前 30 项和 $S_{30}=$_____.

468　**解析：**因为 $a_n=|25-2n|$，所以 $a_n=\begin{cases}25-2n,1\leqslant n\leqslant12,\\2n-25,n\geqslant13,\end{cases}$所以 $S_{30}=(a_1+a_2+\cdots+a_{12})+(a_{13}+\cdots+a_{30})$，所以 $S_{30}=(23+21+\cdots+1)+(1+3+5+\cdots+35)$，所以 $S_{30}=\frac{12\times(1+23)}{2}+\frac{18\times(1+35)}{2}=468$.

6.在数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{1}{3}$，$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+2^n+1$.

(1)证明：数列$\left\{\frac{1}{a_n}-2^n\right\}$是等差数列；

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(3)若 $b_n=\frac{1}{a_n}$，记数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 S_n，求 S_{10}.

(1)**证明**：因为$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+2^n+1$，所以$\frac{1}{a_{n+1}}-2^{n+1}=\frac{1}{a_n}+2^n-2^{n+1}+1=\frac{1}{a_n}-2^n+1$，

所以$\left(\frac{1}{a_{n+1}}-2^{n+1}\right)-\left(\frac{1}{a_n}-2^n\right)=1$，且$\frac{1}{a_1}-2^1=3-2=1$，

所以数列$\left\{\frac{1}{a_n}-2^n\right\}$是首项为 1，公差为 1 的等差数列.

(2)**解**：由(1)可知$\frac{1}{a_n}-2^n=1+(n-1)\times1=n$，

所以 $a_n=\frac{1}{2^n+n}$.

(3)**解**：由(2)得 $b_n=\frac{1}{a_n}=2^n+n$，

则 $S_{10}=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10}=(2^1+1)+(2^2+2)+(2^3+3)+\cdots+(2^{10}+10)$

$=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{10}+1+2+3+\cdots+10$

$=\frac{2\times(1-2^{10})}{1-2}+\frac{10\times(1+10)}{2}=2^{11}-2+55=2\ 101$.

7.等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$3a_2+a_4=a_9$，$S_3=15$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{(-1)^n a_n\}$的前 n 项和.

解：(1)因为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$3a_2+a_4=a_9$，

所以 $4a_1+6d=a_1+8d$，即 $3a_1=2d$.

又因为 $S_3=15$，所以 $a_1+d=5$，则有 $a_1=2$，$d=3$，

所以 $a_n=3n-1$.

(2)记数列$\{(-1)^n a_n\}$的前 n 项和为 T_n，

所以 $T_n=-2+5-8+11+\cdots+(-1)^n(3n-1)$.

当 n 为奇数时，$T_n=-2+\underbrace{(-3)+(-3)+\cdots+(-3)}_{\frac{n-1}{2}\text{个}}=-\frac{3}{2}n-\frac{1}{2}$；

当 n 为偶数时，$T_n=\underbrace{3+3+3+\cdots+3}_{\frac{n}{2}\text{个}}=\frac{3}{2}n$.

综上，$T_n=\begin{cases}-\frac{3}{2}n-\frac{1}{2},n\text{ 为奇数},\\ \frac{3}{2}n,n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

8.已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求证：数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$为等差数列；

(2)设 $b_n=a_n\cdot a_{n+1}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n；

(3)设 $c_n=\frac{1}{2^{n-1}a_n}$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 T_n.

(1)**证明**：由题意得 $a_n\neq0$，由 $a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$，得

$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{a_n}$，即$\frac{1}{a_{n+1}}=2+\frac{1}{a_n}$，

所以$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$.又$\frac{1}{a_1}=1$，

所以$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是以 1 为首项，2 为公差的等差数列.

(2)**解**：由(1)可得$\frac{1}{a_n}=1+2(n-1)=2n-1$，即 $a_n=\frac{1}{2n-1}$，

所以 $b_n=\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$.

所以 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.

(3)**解**：由 $a_n=\frac{1}{2n-1}$，知 $c_n=\frac{1}{2^{n-1}a_n}=\frac{2n-1}{2^{n-1}}$，

所以 $T_n=\frac{1}{2^0}+\frac{3}{2^1}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n-3}{2^{n-2}}+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$，

所以$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^{n-1}}+\frac{2n-1}{2^n}$，

两式相减得$\frac{1}{2}T_n=1+\frac{2}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{2}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^n}$

$=1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{2n+3}{2^n}$，

所以 $T_n=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$.

★★★

迁　移　应　用

类型一　数列与不等式交汇

例 1　设正项数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$2S_n=a_n^2+a_n$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=\dfrac{1}{a_n^2+a_{n+1}^2-1}$，记数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，求证：$T_n<\dfrac{1}{2}$.

(1)**解**：当 $n=1$ 时，由 $2S_1=a_1^2+a_1$，得 $a_1(a_1-1)=0$，又 $a_1>0$，得 $a_1=1$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$2S_{n-1}=a_{n-1}^2+a_{n-1}$，又 $2S_n=a_n^2+a_n$，作差得 $2a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+a_n-a_{n-1}$，

所以$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-1)=0$，又 $a_n+a_{n-1}>0$，则 $a_n-a_{n-1}=1$.

故数列$\{a_n\}$是首项为 1，公差为 1 的等差数列，故数列的通项公式为 $a_n=n$.

(2)**证明**：由(1)可得 $b_n=\dfrac{1}{a_n^2+a_{n+1}^2-1}=\dfrac{1}{n^2+(n+1)^2-1}=\dfrac{1}{2n(n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，

所以 $T_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$.

又 $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)<\dfrac{1}{2}$，所以 $T_n<\dfrac{1}{2}$.

【规律方法】

数列与不等式交汇问题的求解策略

(1)判断与数列有关的一些不等关系，可以借助数列的单调性或与数列对应的函数的单调性.

(2)以数列为载体的不等式恒成立问题，往往可转化为函数的最值的问题.

(3)与数列有关的不等式证明问题，一般采用放缩法进行证明，有时也可通过构造函数进行证明.

【对点训练】

1.已知递增数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3^n+\lambda(-2)^{n+1}$，则实数 λ 的取值范围为　(　　)

A.$\left(-\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{2}\right)$　　B.$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

C.$\left(-\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{4}\right)$　　D.$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right)$

A　**解析**：由题可知 $a_{n+1}>a_n$ 恒成立，即 $3^{n+1}+\lambda\cdot(-2)^{n+2}>3^n+\lambda(-2)^{n+1}$ 恒成立.当 n 为奇数时，$3^{n+1}-\lambda\cdot 2^{n+2}>3^n+\lambda\cdot 2^{n+1}$，$3\lambda<\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$，因为 $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ 的最小值是 $\dfrac{3}{2}$，所以 $3\lambda<\dfrac{3}{2}$，即 $\lambda<\dfrac{1}{2}$；当 n 为偶数时，$3^{n+1}+\lambda\cdot 2^{n+2}>3^n-\lambda\cdot 2^{n+1}$，$-3\lambda<\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$，因为 $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ 的最小值是 $\dfrac{9}{4}$，所以 $-3\lambda<\dfrac{9}{4}$，即 $\lambda>-\dfrac{3}{4}$.综上所述，$-\dfrac{3}{4}<\lambda<\dfrac{1}{2}$.故选 A.

2.已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1+\dfrac{1}{2}a_2+\dfrac{1}{3}a_3+\cdots+\dfrac{1}{n}a_n=n^2+n(n\in\mathbf{N}^*)$，设数列$\{b_n\}$满足 $b_n=\dfrac{2n+1}{a_na_{n+1}}$，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n.若 $T_n<\dfrac{n}{n+1}\lambda(n\in\mathbf{N}^*)$恒成立，则实数 λ 的取值范围为　(　　)

A.$\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$　　B.$\left(\dfrac{1}{4},+\infty\right)$

C.$\left[\dfrac{3}{8},+\infty\right)$　　D.$\left(\dfrac{3}{8},+\infty\right)$

D　**解析**：数列$\{a_n\}$满足 $a_1+\dfrac{1}{2}a_2+\dfrac{1}{3}a_3+\cdots+\dfrac{1}{n}a_n=n^2+n$①，

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_1+\dfrac{1}{2}a_2+\dfrac{1}{3}a_3+\cdots+\dfrac{1}{n-1}a_{n-1}=(n-1)^2+(n-1)$②，

①－②得 $\dfrac{1}{n}a_n=2n$，故 $a_n=2n^2$.

当 $n=1$ 时，$a_1=2$ 也满足上式.

故 $b_n=\dfrac{2n+1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{2n+1}{4n^2(n+1)^2}=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]$，

则 $T_n=\dfrac{1}{4}\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cdots+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]=\dfrac{1}{4}\left[1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]$.

$T_n<\dfrac{n}{n+1}\lambda(n\in\mathbf{N}^*)$，

即 $\dfrac{1}{4}\left[1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]<\dfrac{n}{n+1}\lambda$，整理得 $\lambda>\dfrac{n+2}{4n+4}$.

因为 $y=\dfrac{n+2}{4n+4}=\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)$在 $n\in\mathbf{N}^*$ 时单调递减，

所以当 $n=1$ 时，$\left(\dfrac{n+2}{4n+4}\right)_{\max}=\dfrac{3}{8}$，

所以 $\lambda>\dfrac{3}{8}$，即实数 λ 的取值范围为 $\left(\dfrac{3}{8},+\infty\right)$.故选 D.

类型二　数列与函数的交汇

例 2　(1)对于一切实数 x，令$[x]$为不大于 x 的最大整数，则函数$f(x)=[x]$称为高斯函数或取整函数.若 $a_n=f\left(\frac{n}{3}\right)$，$n\in\mathbf{N}^*$，$S_n$ 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，则 $S_{3n}=$　　(　　)

A.$\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n$　　B.$\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$

C.$3n^2-2n$　　D.$\frac{9}{2}n^2-\frac{3}{2}n$

(2)已知函数 $y=f(x)$为定义域 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，函数 $g(x)=f(x-5)+x$，数列$\{a_n\}$为等差数列，且公差不为 0.若 $g(a_1)+g(a_2)+\cdots+g(a_9)=45$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_9=$　　(　　)

A.45　　B.15

C.10　　D.0

(1)A　**解析**：由题意，知当 $n=3k$，$n=3k+1$，$n=3k+2$，$k\in\mathbf{N}^*$ 时均有 $a_n=f\left(\frac{n}{3}\right)=\left[\frac{n}{3}\right]=k$，所以 $S_{3n}=0+0+\underbrace{1+1+1}_{3个}+\underbrace{2+2+2}_{3个}+\cdots+\underbrace{(n-1)+(n-1)+(n-1)}_{3个}+n=3\times\frac{1+n-1}{2}\times(n-1)+n=\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n$.故选 A.

(2)A　**解析**：函数 $y=f(x)$为定义域 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，图象关于点(0,0)中心对称，那么 $y=f(x-5)$的图象关于点(5,0)中心对称.由等差中项的性质和图象对称性可知，$\frac{a_1-5+a_9-5}{2}=a_5-5$，故 $f(a_1-5)+f(a_9-5)=0$，所以 $f(a_2-5)+f(a_8-5)=f(a_3-5)+f(a_7-5)=f(a_4-5)+f(a_6-5)=2f(a_5-5)=0$.又 $g(x)=f(x-5)+x$，所以 $g(a_1)+g(a_2)+\cdots+g(a_9)=f(a_1-5)+f(a_2-5)+\cdots+f(a_9-5)+a_1+a_2+\cdots+a_9=45$，

即 $a_1+a_2+\cdots+a_9=45$.故选 A.

【规律方法】

数列与函数交汇问题的求解策略

(1)已知函数条件，解决数列问题：此类问题一般利用函数的性质、图象进行求解.

(2)已知数列条件，解决函数问题：解决此类问题一般要利用数列的通项公式、前 n 项和公式、求和方法等对式子进行化简变形.

【对点训练】

1.已知数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=n^2-9n+\frac{k}{n}$，a_4 是数列$\{a_n\}$的最小项，则实数 k 的取值范围是(　　)

A.$[-24,-16]$　　B.$[-24,0]$

C.$[-16,16]$　　D.$[-16,0]$

D　**解析**：由题意，知 $a_n=n^2-9n+\frac{k}{n}\geqslant\frac{k}{4}-20$，$n\in\mathbf{N}^*$，即$(n-4)(n-5)\geqslant\frac{k(n-4)}{4n}$，$n\in\mathbf{N}^*$.当 $1\leqslant n\leqslant3$ 时，$4n(n-5)\leqslant k$，将 1,2,3 分别代入求解，解得 $k\geqslant-16$；当 $n\geqslant5$ 时，$4n(n-5)\geqslant k$，令 $f(x)=4x(x-5)$，显然 $f(x)$在定义域$[5,+\infty)$内单调递增，解得 $k\leqslant0$.综上，$-16\leqslant k\leqslant0$.故选 D.

2.已知在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$n(a_{n+1}-a_n)=a_n+1$，$n\in\mathbf{N}^*$，若对于任意的 $a\in[-2,2]$，$n\in\mathbf{N}^*$，不等式 $\frac{a_{n+1}}{n+1}<2t^2+at-1$ 恒成立，则实数 t 的取值范围为(　　)

A.$(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

B.$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

C.$(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$

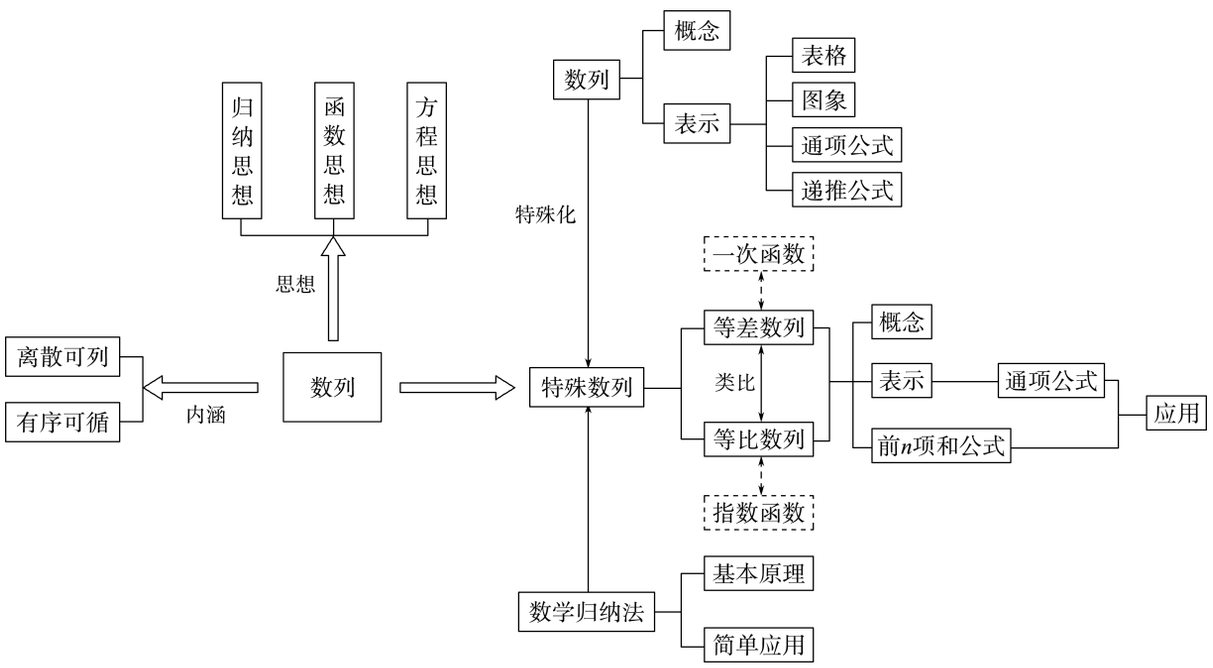
D.$[-2,2]$

B　**解析**：由题意得，$n(a_{n+1}-a_n)=a_n+1\Rightarrow na_{n+1}=(n+1)a_n+1$，即 $\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.由累加法可得 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\left(\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}\right)+\left(\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n-1}}{n-1}\right)+\cdots+\left(\frac{a_2}{2}-a_1\right)+a_1$，即 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{2}\right)+2=3-\frac{1}{n+1}<3$.对于任意的 $a\in[-2,2]$，$n\in\mathbf{N}^*$，不等式 $\frac{a_{n+1}}{n+1}<2t^2+at-1$ 恒成立，即 $2t^2+at-1\geqslant3\Rightarrow2t^2+at-4\geqslant0$.令 $f(a)=2t^2+at-4=at+2t^2-4$($a\in[-2,2]$)，可得 $f(2)\geqslant0$ 且 $f(-2)\geqslant0$，即 $\begin{cases}t^2+t-2\geqslant0,\\t^2-t-2\geqslant0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t\geqslant1\text{ 或 }t\leqslant-2,\\t\geqslant2\text{ 或 }t\leqslant-1,\end{cases}$ 可得 $t\geqslant2$ 或 $t\leqslant-2$.故选 B.

★★★

重　构　拓　展

多维体系构建



【问题探究】

1. 为什么说数列是一种特殊的函数？

2. 在什么情况下可以用通项公式表示数列？在什么情况下可以用递推公式表示数列？

3. 数列的前 n 项和公式与它的通项公式有什么关系？

4. 等差数列和等比数列的通项公式分别是什么？你是如何推导出它们的？等差数列和等比数列的图象分别有什么特点？

5. “等差中项”“等比中项”“平均数”之间有什么内在联系？等差数列、等比数列有许多有趣的性质，你能列举一些吗？

6. 推导等差数列、等比数列的前 n 项和公式时，各用了哪些巧妙的方法？

***7.** 为什么说数学归纳法的两个步骤（归纳奠基与归纳递推）缺一不可？你能说说两个步骤各自的作用吗？它们之间有怎样的关系？

质量评估(一)

(考查范围:第四章　时间:120分钟　分值:150分)

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.

1.已知在数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,$a_{n+1}=a_n+n(n\in\mathbf{N}^*)$,则$a_4$的值为　(　　)

A.5　　B.6　　C.7　　D.8

D　**解析**:因为$a_1=2$,$a_{n+1}=a_n+n$,

所以$a_2=a_1+1=2+1=3$,$a_3=a_2+2=3+2=5$,

$a_4=a_3+3=5+3=8$.故选D.

2.已知数列$\{a_n\}$为等差数列,且3^{a_1},3,3^{a_7}成等比数列,则a_4的值为　(　　)

A.1　　B.$\frac{21}{2}$　　C.15　　D.3

A　**解析**:设数列$\{a_n\}$的公差为d,

因为3^{a_1},3,3^{a_7}成等比数列,所以$3^{a_1}3^{a_7}=3^2$,

所以$a_1+a_7=2$,即$2a_1+6d=2$,

所以$a_1+3d=a_4=1$.

故选A.

3.设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,若$a_2=2$,且a_2,a_3,a_4-2成等差数列,则$S_5=$　(　　)

A.7　　B.12　　C.15　　D.31

D　**解析**:设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,$q\neq0$,

依题意得$\begin{cases}a_2=2,\\2a_3=a_2+a_4-2,\end{cases}$

则$\begin{cases}a_1q=2,\\2a_1q^2=a_1q+a_1q^3-2,\end{cases}$

所以$2(a_1q)q=a_1q+(a_1q)q^2-2$,

所以$4q=2+2q^2-2$,

所以$2q^2-4q=0$,

解得$q=2$,则$a_1=1$,所以$S_5=\frac{1\times(1-2^5)}{1-2}=31$.

故选D.

4.已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$a_3+2a_4+a_{13}=160$,则$S_{11}-5a_6=$　(　　)

A.240　　B.180　　C.120　　D.60

A　**解析**:设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,

$a_3+2a_4+a_{13}=4a_1+20d=160$,$a_1+5d=40$,

$S_{11}-5a_6=11a_1+55d-5(a_1+5d)=6a_1+30d=6(a_1+5d)=6\times40=240$.

故选A.

5.已知数列$\{a_n\}$,$a_3=2$,$a_5=1$.若$\left\{\frac{1}{1+a_n}\right\}$是等差数列,则$a_{11}$等于　(　　)

A.0　　B.$\frac{1}{6}$　　C.$\frac{1}{3}$　　D.$\frac{1}{2}$

A　**解析**:因为$\frac{1}{1+a_3}=\frac{1}{3}$,$\frac{1}{1+a_5}=\frac{1}{2}$,设数列$\left\{\frac{1}{1+a_n}\right\}$的公差为$d$,则$\begin{cases}\frac{1}{1+a_1}+2d=\frac{1}{3},\\\frac{1}{1+a_1}+4d=\frac{1}{2},\end{cases}$

解得$\begin{cases}\frac{1}{1+a_1}=\frac{1}{6},\\d=\frac{1}{12}.\end{cases}$所以$\frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{6}+(n-1)\cdot\frac{1}{12}$,

所以$\frac{1}{1+a_{11}}=\frac{1}{6}+\frac{11-1}{12}=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1$,所以$a_{11}=0$.

故选A.

6.设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,$a_1>0$,则"$a_5>0$"是"$d>0$"的　(　　)

A.充要条件

B.必要不充分条件

C.充分不必要条件

D.既不充分也不必要条件

B　**解析**:必要性成立:因为$a_1>0$,由等差数列$\{a_n\}$的公差$d>0$可知,$a_5=a_1+4d>0$;

充分性不成立:例如,由$a_1=5$,$a_5=1$得$d=-1$.

所以"$a_5>0$"是"$d>0$"的必要不充分条件.故选B.

7.若数列$\{a_n\}$满足$(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}(n\geqslant2)$,$a_1=2$,则满足不等式$a_n<930$的正整数$n$的最大值为　(　　)

A.28　　B.29　　C.30　　D.31

B　**解析**:依题意,数列$\{a_n\}$满足$(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}(n\geqslant2)$,$a_1=2$,则$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}(n\geqslant2)$,

所以$a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=2\times\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-2}\times\frac{n+1}{n-1}=n(n+1)$,

$a_1=2$也符合上式,所以$a_n=n(n+1)$,$\{a_n\}$是递增数列.

由 $a_n=n(n+1)<930$,得 $(n+31)(n-30)<0$,解得 $-31<n<30$.

又 $n\in\mathbf{N}^*$,所以 n 的最大值为 29.

故选 B.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$,$a_{n+1}=a_n-\frac{1}{3}a_n^2$($n\in\mathbf{N}^*$),则 (　　)

A. $2<100a_{100}<\frac{5}{2}$

B. $\frac{5}{2}<100a_{100}<3$

C. $3<100a_{100}<\frac{7}{2}$

D. $\frac{7}{2}<100a_{100}<4$

B　**解析**:因为 $a_1=1$,$a_{n+1}=a_n-\frac{1}{3}a_n^2=-\frac{1}{3}\left(a_n-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\leqslant\frac{3}{4}$,所以 $a_n\leqslant\frac{3}{4}(n\geqslant2)$,易知 $a_n\neq0$.

由 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{1}{3}a_n\geqslant\frac{3}{4}>0(n\geqslant2)$,得 $a_n>0(n\in\mathbf{N}^*)$.

由题意,$a_{n+1}=a_n\left(1-\frac{1}{3}a_n\right)$,即 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{a_n(3-a_n)}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{3-a_n}$,

所以 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3-a_n}>\frac{1}{3}$,即 $\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}>\frac{1}{3}$,$\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}>\frac{1}{3}$,$\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_3}>\frac{1}{3}$,…,$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}>\frac{1}{3}(n\geqslant2)$,

累加可得 $\frac{1}{a_n}-1>\frac{1}{3}(n-1)$,即 $\frac{1}{a_n}>\frac{1}{3}(n+2)(n\geqslant2)$,

所以 $a_n<\frac{3}{n+2}(n\geqslant2)$,即 $a_{100}<\frac{1}{34}$,$100a_{100}<\frac{100}{34}<3$.

又 $a_1=1$,所以 $a_n\leqslant\frac{3}{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

又 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3-a_n}\leqslant\frac{1}{3-\frac{3}{n+2}}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$,

所以 $\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\leqslant\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{1}{2}\right)$,$\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}\leqslant\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{1}{3}\right)$,$\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_3}\leqslant\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{1}{4}\right)$,…,$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\leqslant\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)(n\geqslant2)$,

累加可得 $\frac{1}{a_n}-1\leqslant\frac{1}{3}(n-1)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(n\geqslant2)$,

所以 $\frac{1}{a_{100}}-1\leqslant33+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}\right)<33+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times4+\frac{1}{6}\times96\right)=39$,

即 $\frac{1}{a_{100}}<40$,所以 $a_{100}>\frac{1}{40}$,即 $100a_{100}>\frac{5}{2}$.

综上,$\frac{5}{2}<100a_{100}<3$.故选 B.

二、多项选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,下列说法正确的是 (　　)

A. 若 $S_n=n^2-1$,则 $\{a_n\}$ 是等差数列

B. 若 $S_n=2^n-1$,则 $\{a_n\}$ 是等比数列

C. 若 $\{a_n\}$ 是等差数列,则 $S_{99}=99a_{50}$

D. 若 $\{a_n\}$ 是等比数列,且 $a_1>0$,公比 $q>0$,则 $S_{2n-1}S_{2n+1}>S_{2n}^2$

BC　**解析**:若 $S_n=n^2-1$,则有 $a_1=S_1=0$,$a_2=S_2-S_1=2^2-1^2=3$,$a_3=S_3-S_2=3^2-2^2=5$,$2a_2\neq a_1+a_3$,此时数列 $\{a_n\}$ 不是等差数列,故 A 错误;

若 $S_n=2^n-1$,则当 $n\geqslant2$ 时,有 $a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$,当 $n=1$ 时,有 $a_1=S_1=1$,满足上式,此时 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$,数列 $\{a_n\}$ 是等比数列,故 B 正确;

由等差数列的性质可得 $S_{99}=\frac{99(a_1+a_{99})}{2}=99a_{50}$,故 C 正确;

当 $a_1>0$,$q=1$ 时,有 $a_n=a_1$,$S_{2n-1}S_{2n+1}=(2n-1)\cdot(2n+1)a_1^2=(4n^2-1)a_1^2$,

$S_{2n}^2=(2na_1)^2=4n^2a_1^2$,此时 $S_{2n-1}S_{2n+1}<S_{2n}^2$,故 D 错误.故选 BC.

10. 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q,前 n 项积为 T_n,且 $0<a_1<1$,$a_{2\,023}+a_{2\,024}<2$,$(a_{2\,023}-1)(a_{2\,024}-1)<0$,则 (　　)

A. $0<q<1$

B. $a_{2\,023}a_{2\,025}>1$

C. 对任意的正整数 n,有 $T_n\geqslant T_{4\,047}$

D. 使得 $T_n>1$ 的正整数 n 的最小值为 4 047

BD　**解析**:依题意,$a_n>0$,$q>0$,$0<a_1<1$,

由于 $(a_{2\,023}-1)(a_{2\,024}-1)<0$,

所以$\begin{cases}0<a_{2\,023}<1,\\a_{2\,024}>1\end{cases}$或$\begin{cases}0<a_{2\,024}<1,\\a_{2\,023}>1.\end{cases}$

若$\begin{cases}0<a_{2\,024}<1,\\a_{2\,023}>1,\end{cases}$则$0<q<1$，则$0<a_1q^{2\,022}<1\Rightarrow a_{2\,023}<1$，矛盾，

所以$\begin{cases}0<a_{2\,023}<1,\\a_{2\,024}>1,\end{cases}$则$q>1$，故A错误.

$a_{2\,023}a_{2\,025}=(a_{2\,024})^2>1$，故B正确.

由于$\begin{cases}0<a_{2\,023}<1,\\a_{2\,024}>1,\end{cases}$所以$T_n$的最小值为$T_{2\,023}$，即$T_n\geqslant T_{2\,023}$，故C错误.

$T_{4\,047}=(a_1\times a_{4\,047})\cdot(a_2\times a_{4\,046})\cdot\cdots\cdot(a_{2\,023}\times a_{2\,025})\cdot a_{2\,024}=(a_{2\,024})^{4\,047}>1$，

由于$a_{2\,023}+a_{2\,024}<2$，

所以$2>a_{2\,023}+a_{2\,024}>2\sqrt{a_{2\,023}\cdot a_{2\,024}}$，

所以$a_{2\,023}\cdot a_{2\,024}<1$，

所以$T_{4\,046}=(a_1\times a_{4\,046})^{2\,023}=(a_{2\,023}\times a_{2\,024})^{2\,023}<1$.

由于$q>1$，且$\begin{cases}0<a_{2\,023}<1,\\a_{2\,024}>1,\end{cases}$所以当$n\leqslant 4\,046$时，$T_n\leqslant T_{4\,046}<1$.

综上所述，使得$T_n>1$的最小正整数n为4 047，故D正确.

故选BD.

11. 如果有穷数列$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m$（m为正整数）满足$a_1=a_m,a_2=a_{m-1},\cdots$，即$a_i=a_{m-i+1}(i=1,2,\cdots,m)$，我们称其为“对称数列”.例如，数列1,2,5,2,1与数列8,4,2,2,4,8都是“对称数列”.设$\{b_n\}$是项数为$2m(m>1,m\in\mathbf{N}^*)$的“对称数列”，且$1,2,2^2,2^3,\cdots,2^{m-1}$为该数列的前$m$项，则数列$\{b_n\}$的前100项和$S_{100}$可能的取值为（　　）

A.$2^{100}-1$　　B.$2^{51}-2$

C.$2^{26}-4$　　D.$2^{m+1}-2^{2m-100}-1$

ABD　**解析：**由题意知数列$\{b_n\}$为$1,2,2^2,2^3,\cdots,2^{m-1},2^{m-1},\cdots,2^3,2^2,2,1$.

若$m=50$，则$S_{100}=2\times\dfrac{1\times(1-2^{50})}{1-2}=2^{51}-2$，故B正确；

若$51\leqslant m<100$，则$S_{100}=2\times\dfrac{1\times(1-2^m)}{1-2}-\dfrac{1\times(1-2^{2m-100})}{1-2}=2^{m+1}-2^{2m-100}-1$，故D正确；

若$m\geqslant 100$，则$S_{100}=\dfrac{1\times(1-2^{100})}{1-2}=2^{100}-1$，故A正确.

故选ABD.

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\left|n-\dfrac{10}{3}\right|$，则$a_n$的最小值为_____.

$\dfrac{1}{3}$　**解析：**依题意，$a_n=\begin{cases}\dfrac{10}{3}-n(n\leqslant 3,n\in\mathbf{N}^*),\\n-\dfrac{10}{3}(n\geqslant 4,n\in\mathbf{N}^*),\end{cases}$

当$n\leqslant 3$且$n\in\mathbf{N}^*$时，最小值为$a_3=\dfrac{1}{3}$；

当$n\geqslant 4$且$n\in\mathbf{N}^*$时，最小值为$a_4=\dfrac{2}{3}$.

综上所述，a_n的最小值为$\dfrac{1}{3}$.

13. 在数列$\{a_n\}$中，若$a_1=2,a_{n+1}=a_n+n+1$，则$\{a_n\}$的通项公式为_____.

$a_n=\dfrac{n^2+n+2}{2}$　**解析：**由题意可知数列$\{a_n\}$中，$a_1=2,a_{n+1}=a_n+n+1$，

故$a_{n+1}-a_n=n+1$，所以当$n\geqslant 2$时，$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=2+2+3+\cdots+n=2+\dfrac{(n-1)(n+2)}{2}=\dfrac{n^2+n+2}{2}$，$a_1=2$符合该式，所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{n^2+n+2}{2}$.

14. 设等比数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_2=12,a_1-a_3=6$，则$a_n=$_____，$a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$的最大值为_____.

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-4}$　64　**解析：**设等比数列$\{a_n\}$的公比为q（$q\neq 0$），由$a_1+a_2=12,a_1-a_3=6$，得$\begin{cases}a_1+a_1q=12,\\a_1-a_1q^2=6,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=8,\\q=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

所以$a_n=8\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-4}$.

所以$a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3-2-1+0+1+\cdots+(n-4)}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-7)}{2}}$.

令 $f(n)=\frac{1}{2}n(n-7)=\frac{1}{2}(n^2-7n)=\frac{1}{2}\left(n-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{8}$，

所以当 $n=3$ 或 $n=4$ 时，$f(n)$ 有最小值，即 $f(n)_{\min}=-6$，

所以 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$ 的最大值为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}=64$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13 分）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_4=-90$，$a_{10}=15$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求 S_n 的最小值，并指出 n 取何值时 S_n 取得最小值.

解：（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

依题意，$\begin{cases}S_4=-90,\\a_{10}=15,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}4a_1+6d=-90,\\a_1+9d=15,\end{cases}$

解得 $a_1=-30$，$d=5$，

所以 $a_n=-30+(n-1)\times5=5n-35$.

（2）由 $a_n=5n-35\leqslant0$，解得 $1\leqslant n\leqslant7$，$n\in\mathbf{N}^*$，

所以当 $n=6$ 或 $n=7$ 时，S_n 取得最小值，

且 S_n 的最小值为 $S_6=6a_1+15d=-180+75=-105$.

16.（15 分）数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_n=3^{n+1}+2n-3$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $c_n=\frac{n(a_n-2)}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

解：（1）由题意 $a_1=S_1=3^{1+1}+2\times1-3=8$，

当 $n\geqslant2$，$n\in\mathbf{N}^*$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^{n+1}+2n-3)-(3^n+2n-5)=2\cdot3^n+2$.

当 $n=1$ 时，$a_1=2\times3^1+2=8$ 也满足上式.

综上所述，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2\cdot3^n+2(n\in\mathbf{N}^*)$.

（2）由（1）可知 $a_n=2\cdot3^n+2(n\in\mathbf{N}^*)$，所以由题意得 $c_n=\frac{n(a_n-2)}{2}=n\cdot3^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

所以 $T_n=1\times3^1+2\times3^2+\cdots+n\times3^n$，

$3T_n=1\times3^2+2\times3^3+\cdots+n\times3^{n+1}$，

两式相减得 $-2T_n=3^1+3^2+\cdots+3^n-n\cdot3^{n+1}=\frac{3\times(1-3^n)}{1-3}-n\cdot3^{n+1}$，

所以数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 $T_n=\frac{6n-3}{4}\cdot3^n+\frac{3}{4}(n\in\mathbf{N}^*)$.

17.（15 分）给出下列条件：①$a_3=5$，$a_5+a_7=22$；②$a_1=1$，$S_5=25$；③$S_n=n^2$.从这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，然后解答补充完整的题目.

已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且_____.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $c_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

解：（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

若选①，$a_3=5$，$a_5+a_7=22$，

则 $\begin{cases}a_1+2d=5,\\2a_1+10d=22,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}$ 所以 $a_n=2n-1$.

若选②，$a_1=1$，$S_5=25$，

则 $\begin{cases}a_1=1,\\5a_1+\frac{5\times(5-1)}{2}d=25,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}$ 所以 $a_n=2n-1$.

若选③，$S_n=n^2$，当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1^2=1$，

当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}=(n-1)^2$，

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$.

当 $n=1$ 时，$a_n=2n-1$ 也成立，所以 $a_n=2n-1$.

（2）由（1）知 $a_n=2n-1$，

$c_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

所以 $T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.

18.（17 分）（2023·新高考全国Ⅱ卷）已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$b_n=\begin{cases}a_n-6,n\text{ 为奇数},\\2a_n,n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 记 S_n，T_n 分别为数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和，$S_4=32$，$T_3=16$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）证明：当 $n>5$ 时，$T_n>S_n$.

(1)**解**:设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,

而$b_n=\begin{cases}a_n-6,n\text{ 为奇数},\\2a_n,n\text{ 为偶数},\end{cases}$

则$b_1=a_1-6$,$b_2=2a_2=2a_1+2d$,$b_3=a_3-6=a_1+2d-6$,

于是$\begin{cases}S_4=4a_1+6d=32,\\T_3=4a_1+4d-12=16,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=5,\\d=2,\end{cases}$

所以$a_n=a_1+(n-1)d=2n+3$.

所以数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=2n+3$.

(2)**证明**:由(1)知,$S_n=\dfrac{n(5+2n+3)}{2}=n^2+4n$,

$b_n=\begin{cases}2n-3,n\text{ 为奇数},\\4n+6,n\text{ 为偶数},\end{cases}$

当n为偶数时,$b_{n-1}+b_n=2(n-1)-3+4n+6=6n+1$,

$b_1+b_2=13$,则$T_n=\dfrac{13+(6n+1)}{2}\cdot\dfrac{n}{2}=\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{7}{2}n$,

当$n>5$时,$T_n-S_n=\left(\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{7}{2}n\right)-(n^2+4n)=\dfrac{1}{2}n(n-1)>0$,因此$T_n>S_n$;

当n为奇数时,$T_n=T_{n+1}-b_{n+1}=\dfrac{3}{2}(n+1)^2+\dfrac{7}{2}(n+1)-[4(n+1)+6]=\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{5}{2}n-5$,

当$n>5$时,$T_n-S_n=\left(\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{5}{2}n-5\right)-(n^2+4n)=\dfrac{1}{2}(n+2)(n-5)>0$,因此$T_n>S_n$.

综上所述,当$n>5$时,$T_n>S_n$.

19.(17分)已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且$a_1=1$,$S_{n+1}=2S_n+1$,$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)证明:$\{S_n+1\}$为等比数列,并求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)令$b_n=[\lg a_n]$,$[x]$表示不超过x的最大整数,求数列$\{b_n\}$的前15项和T_{15}.

(1)**证明**:由$S_{n+1}=2S_n+1$,得$S_{n+1}+1=2(S_n+1)$,又$S_1+1=a_1+1=2$,则$\dfrac{S_{n+1}+1}{S_n+1}=2$,

所以$\{S_n+1\}$是以2为首项,2为公比的等比数列,

则$S_n+1=2\times2^{n-1}=2^n$,即$S_n=2^n-1$.

当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-1-(2^{n-1}-1)=2^{n-1}$.

又$a_1=1$,符合$a_n=2^{n-1}$,

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^{n-1}$,$n\in\mathbf{N}^*$.

(2)**解**:$b_n=[\lg a_n]=[\lg 2^{n-1}]$,

若$[\lg 2^{n-1}]=0$,则$0\leqslant\lg 2^{n-1}<1$,得$1\leqslant n\leqslant4$;

若$[\lg 2^{n-1}]=1$,则$1\leqslant\lg 2^{n-1}<2$,得$5\leqslant n\leqslant7$;

若$[\lg 2^{n-1}]=2$,则$2\leqslant\lg 2^{n-1}<3$,得$8\leqslant n\leqslant10$;

若$[\lg 2^{n-1}]=3$,则$3\leqslant\lg 2^{n-1}<4$,得$11\leqslant n\leqslant14$;

若$[\lg 2^{n-1}]=4$,则$4\leqslant\lg 2^{n-1}<5$,得$15\leqslant n\leqslant17$.

故$T_{15}=4\times0+3\times1+3\times2+4\times3+1\times4=25$.

第五章 一元函数的导数及其应用

单元概览

单元导航

函数是刻画动态现象的重要概念，而在对函数的进一步研究中，数学家创立了微积分.本章所学习的导数就是微积分的核心内容之一，导数定量地刻画了函数的局部变化.通过本章的学习，可以在丰富的实际情境中理解导数的概念，掌握导数的基本运算，运用导数研究函数的性质，并解决增长率、膨胀率、效率、密度、速度、加速度等实际问题.

学习目标

1.研读教材，梳理导数的核心内容，体会导数的形成过程，明确逻辑关系.

2.用数学语言刻画导数的概念，借助导数的概念探究导数的运算，用导数分析函数的单调性、极值和最值，逐步形成用导数思想研究函数的方法，提升数学运算的学科素养.

3.在具体情境中构建出函数模型，解决生活中的最优化问题，总结导数在解决函数综合问题中的应用价值，提升数学建模、逻辑推理学科核心素养.

核心概念

导数是研究变化率、曲线的切线、函数性质和众多实际问题的重要工具.

导数可用于研究函数性质、探求函数的极值和最值、求曲线的斜率、证明不等式等，为解决中学数学问题提供了新的视角.导数在中学数学中的应用涉及函数、数列、不等式、向量、解析几何、立体几何等方面，利用导数可以十分方便地处理这些问题.同时，导数也是解决一些物理、化学等学科实际问题的有效工具.

学法指导

1.学习导数的概念时，我们要结合实例，感受平均速度、瞬时速度与平均变化率、瞬时变化率的联系，感知导数的物理含义，提升数学建模、数学抽象的核心素养.

2.学习导数的运算时，我们可以从常见函数出发，先用定义求出对应函数的导数，再归纳总结幂函数、指数函数、对数函数、三角函数等的导数公式，并推导出导数的四则运算法则及复合函数的求导法则，提升数学运算的核心素养.

3.解决导数的应用问题时，我们要注重利用数形结合的思想，理解导数的符号与函数的单调性之间的关系，进而解决函数极值、最值等问题；要注意把实际问题转化为导数问题，培养数学抽象、数学运算、数学建模的核心素养.

★★★

探　究　构　建

5.1　导数的概念及其意义

5.1.1　变化率问题

学习任务目标

1.了解平均速度的意义，会利用运动方程求某一区间内的平均速度.
2.体会由平均速度过渡到瞬时速度的过程，会利用运动方程求某一时刻的瞬时速度.
3.体会极限的思想，会求曲线在某点处的切线的斜率及切线方程.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　平均速度与瞬时速度

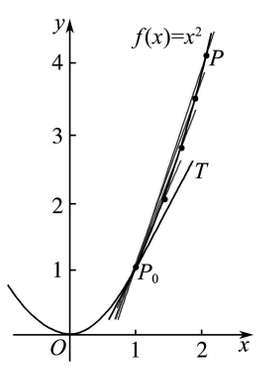
在一次跳水运动中，某运动员在运动过程中的重心相对于水面的高度 h（单位：m）与起跳后的时间 t（单位：s）存在函数关系 $h(t)$.

(1)平均速度：一般地，在 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 这段时间里，$\overline{v}=\dfrac{h(t_2)-h(t_1)}{t_2-t_1}$ 称为平均速度.

(2)瞬时速度：物体在某一时刻的速度称为瞬时速度. 设运动员在 t_0 时刻附近某一时间段内的平均速度是 $\overline{v}$，如果不断缩短这一时间段的长度，那么 $\overline{v}$ 将越来越趋近于运动员在 t_0 时刻的瞬时速度.

(3)为了求运动员在 $t=1$ 时的瞬时速度，在 $t=1$ 之后或之前，任意取一个时刻 $1+\Delta t$，Δt 是时间改变量，可以是正值，也可以是负值，但不为 0. 当 $\Delta t>0$ 时，把运动员在时间段 $[1,1+\Delta t]$ 内近似看成做匀速直线运动，计算时间段 $[1,1+\Delta t]$ 内的平均速度 $\overline{v}$，用平均速度 $\overline{v}$ 近似表示运动员在 $t=1$ 时的瞬时速度. 当 $\Delta t<0$ 时，在时间段 $[1+\Delta t,1]$ 内可作类似处理.

知识点二　抛物线 $f(x)=x^2$ 的切线与斜率



如图，当点 P 无限趋近于点 P_0 时，割线 P_0P 无限趋近于一个确定的位置，这个确定位置的直线 P_0T 称为抛物线 $f(x)=x^2$ 在点 $P_0(1,1)$ 处的切线，我们可以用割线 P_0P 的斜率 k 近似地表示切线 P_0T 的斜率 k_0.

【概念辨析】

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)瞬时速度就是一段时间内的平均速度.（　　）

× **提示**：瞬时速度是 Δt 趋近于 0 时的平均速度.

(2)若平均速度不断增大，则位移关于时间的函数图象“越来越陡”.（　　）

√ **提示**：时间段长度相同，平均速度不断增大，图象越来越“陡”.

(3)火箭发射 t s 后，其高度（单位：m）为 $h(t)=0.9t^2$，火箭在 $1\leqslant t\leqslant 2$ 这段时间内的平均速度为 2.7 m/s.（　　）

√ **提示**：由平均速度的定义可知 $\overline{v}=\dfrac{0.9\times4-0.9\times1}{1}=2.7(\text{m/s})$.

2.抛物线 $f(x)=2x^2-1$ 在点 $(1,1)$ 处的切线的方程为_____.

$y=4x-3$　**解析**：抛物线 $f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线斜率为 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=4$，切线方程为 $y=4x-3$.

3.请思考并回答下列问题：

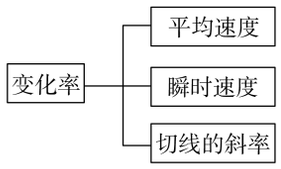
(1)若物体的位移 s 与时间 t 的关系是 $s(t)=5t^2$，则该物体在 $[1,1+\Delta t]$ 这段时间内的平均速度是多少？

(2)当 Δt 无限趋近于 0 时,上述问题(1)中的平均速度趋近于多少?怎样理解这一速度?

(1)**提示**:$\overline{v}=\dfrac{s(1+\Delta t)-s(1)}{(1+\Delta t)-1}=10+5\Delta t$.

(2)**提示**:当 Δt 无限趋近于 0 时,$\overline{v}$ 无限趋近于 10,这时的 10 即为当 $t=1$ 时物体的瞬时速度.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

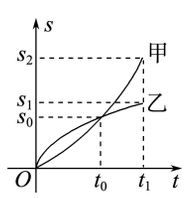
任务1 计算平均速度

1.一个物体做直线运动,位移 s(单位:m)与时间 t(单位:s)之间的函数关系为 $s(t)=5t^2+mt$,且这个物体在 $2\leqslant t\leqslant 3$ 这段时间里的平均速度为 26 m/s,则实数 m 的值为　　(　　)

A.2　　B.1　　C.−1　　D.6

B　**解析**:由已知,得 $\dfrac{s(3)-s(2)}{3-2}=26$,所以 $(5\times 3^2+3m)-(5\times 2^2+2m)=26$,解得 $m=1$.故选 B.

2.物体甲、乙在时间段 $[0,t_1]$ 内位移 s 的变化情况如图所示,下列说法正确的是_____.(填序号)



①在 $[0,t_0]$ 内,甲的平均速度大于乙的平均速度;

②在 $[0,t_0]$ 内,甲的平均速度小于乙的平均速度;

③在 $[t_0,t_1]$ 内,甲的平均速度大于乙的平均速度;

④在 $[t_0,t_1]$ 内,甲的平均速度小于乙的平均速度.

③　**解析**:在 $[0,t_0]$ 内,甲、乙的平均速度都为 $\dfrac{s_0}{t_0}$,故①②错误.

在 $[t_0,t_1]$ 内,甲的平均速度为 $\dfrac{s_2-s_0}{t_1-t_0}$,乙的平均速度为 $\dfrac{s_1-s_0}{t_1-t_0}$.

因为 $s_2-s_0>s_1-s_0$,$t_1-t_0>0$,所以 $\dfrac{s_2-s_0}{t_1-t_0}>\dfrac{s_1-s_0}{t_1-t_0}$,故③正确,④错误.

【探究总结】

求物体运动的平均速度的三个步骤

(1)求时间的改变量 x_2-x_1;

(2)求位移的改变量 $f(x_2)-f(x_1)$;

(3)求平均速度,$\overline{v}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

任务2 求瞬时速度

探究活动

例 1　某物体的位移 s(单位:m)与时间 t(单位:s)的关系可用 $s(t)=t^2+t+1$ 表示,求物体在 $t=1$ 时的瞬时速度.

解:因为 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{s(1+\Delta t)-s(1)}{\Delta t}$

$=\dfrac{(1+\Delta t)^2+(1+\Delta t)+1-(1^2+1+1)}{\Delta t}=3+\Delta t$,

所以 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(3+\Delta t)=3$,

即物体在 $t=1$ 时的瞬时速度为 3 m/s.

[一题多思]

思考 1.若本例中的条件不变,求物体的初速度.

解:求物体的初速度,即求物体在 $t=0$ 时的瞬时速度,

因为 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{s(0+\Delta t)-s(0)}{\Delta t}$

$=\dfrac{(0+\Delta t)^2+(0+\Delta t)+1-1}{\Delta t}=1+\Delta t$,

所以 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}(1+\Delta t)=1$.

即物体的初速度为 1 m/s.

思考 2.若本例中的条件不变,试问:物体在哪一时刻的瞬时速度为 9 m/s?

解:设物体在 t_0 时刻的瞬时速度为 9 m/s.

又 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=2t_0+1+\Delta t$,

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(2t_0+1+\Delta t)=2t_0+1$,则 $2t_0+1=9$,

所以 $t_0=4$.

则物体在 $t=4$ 时的瞬时速度为 9 m/s.

【探究总结】

求运动物体瞬时速度的三个步骤

(1)求时间改变量 Δt 和位移改变量 $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$;

(2)求平均速度 $\overline{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$;

(3)求瞬时速度,当 Δt 无限趋近于 0 时,$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 无限趋近于的常数 v 即为瞬时速度,即 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

应用迁移

(教材 P61 练习题 2 改编)若一物体运动的位移 s(单位:m)与时间 t(单位:s)的关系如下:

$$s=\begin{cases}3t^2+2, t\geqslant 3,\\ 29+3(t-3)^2, 0\leqslant t<3,\end{cases}$$ 求:

(1)物体在时间段[3,5]内的平均速度;

(2)物体的初速度 v_0;

(3)物体在 $t=1$ s 时的瞬时速度.

解:(1)因为物体在[3,5]内的时间变化量为 $\Delta t=5-3=2$,

物体在[3,5]内的位移变化量为 $\Delta s=3\times 5^2+2-(3\times 3^2+2)=3\times(5^2-3^2)=48$,

所以物体在[3,5]内的平均速度为 $\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{48}{2}=24$(m/s).

(2)求物体的初速度 v_0,即求物体在 $t=0$ 时的瞬时速度.

因为物体在 $t=0$ 附近的平均变化率为 $\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{29+3[(0+\Delta t)-3]^2-29-3(0-3)^2}{\Delta t}=3\Delta t-18$,

所以物体在 $t=0$ 时的瞬时速度为 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(3\Delta t-18)=-18$(m/s),即物体的初速度为 -18 m/s.

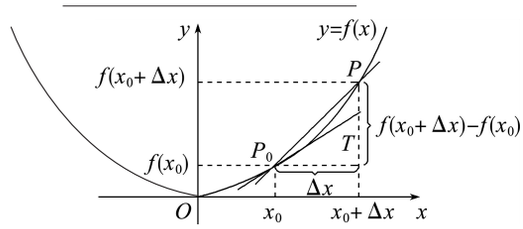
(3)因为物体在 $t=1$ 附近的平均变化率为 $\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{29+3[(1+\Delta t)-3]^2-29-3(1-3)^2}{\Delta t}=3\Delta t-12$,

所以物体在 $t=1$ 时的瞬时速度为 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(3\Delta t-12)=-12$(m/s).

任务3 分析曲线割线斜率与切线斜率的关系

探究活动

例 2　函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示,P_0P 是过点 $P_0(x_0,f(x_0))$ 与点 $P(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$ 的一条割线,此割线的斜率是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.当点 P 沿曲线趋近于点 P_0 时,割线 P_0P 绕点 P_0 转动,它的极限位置为直线 P_0T,这条直线 P_0T 叫做此曲线在点 P_0 处的切线.于是,当 $\Delta x\to 0$ 时,割线 P_0P 的斜率无限趋近于过点 P_0 的切线 P_0T 的斜率 k,即 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.



【探究总结】

函数的平均变化率的物理意义是运动物体在某段时间内的平均速度,几何意义是曲线过某两点的割线的斜率.

应用迁移

求曲线 $f(x)=x-\frac{1}{x}$ 在点(1,0)处的切线的方程.

解:曲线 $f(x)=x-\frac{1}{x}$ 在点(1,0)处的切线斜率 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{1}{1+\Delta x}\right)=2$.

故所求切线方程为 $y=2(x-1)$,

即 $2x-y-2=0$.

课后素养评价(十二)

基础落实

1.某物体做自由落体运动,位移 s(单位:m)与时间 t(单位:s)的函数关系为 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$,$g=9.8$ m/s^2,若 $\frac{s(1+\Delta t)-s(1)}{\Delta t}=24.5$ m/s,则24.5 m/s 是该物体(　　)

A.从 1 s 到(1+Δt)s 这段时间的平均速度

B.从 0 s 到 1 s 这段时间的平均速度

C.在 $t=1$ s 这一时刻的瞬时速度

D.在 $t=\Delta t$ s 这一时刻的瞬时速度

A　**解析**:$\frac{s(1+\Delta t)-s(1)}{\Delta t}=\frac{s(1+\Delta t)-s(1)}{(1+\Delta t)-1}=24.5$ m/s,所以 24.5 m/s 是该物体从 1 s 到(1+Δt)s

这段时间的平均速度.故选 A.

2.某跳水运动员相对于水面的高度 h(单位:m)与起跳后的时间 t(单位:s)存在函数关系 $h(t)=-4.9t^2+6.5t+10$,那么该运动员在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 这段时间内的平均速度为　　(　　)

A.1.6 m/s　　B.5.8 m/s

C.11.4 m/s　　D.11.6 m/s

A　**解析**:因为 $h(t)=-4.9t^2+6.5t+10$,所以 $\Delta h=h(1)-h(0)=-4.9+6.5+10-10=1.6$,$\Delta t=1-0=1$,所以平均速度 $\dfrac{\Delta h}{\Delta t}=\dfrac{1.6}{1}=1.6$.故选 A.

3.某物体沿直线运动,位移 s(单位:m)与时间 t(单位:s)的关系为 $s(t)=1-t+t^2$,则该物体在 $t=3$ s 时的瞬时速度是　　(　　)

A.2 m/s　　B.3 m/s

C.4 m/s　　D.5 m/s

D　**解析**:因为 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{1-(t+\Delta t)+(t+\Delta t)^2-1+t-t^2}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(\Delta t+2t-1)=2t-1$,所以当 $t=3$ 时,$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=2\times 3-1=5$,即该物体在 $t=3$ s 时的瞬时速度是 5 m/s.故选 D.

4.已知函数 $y=f(x)$,其中 $f(x)=x^2-1$,此函数在区间$[1,m]$上的平均变化率为 3,则实数 m 的值为_____.

2　**解析**:根据题意,函数 $f(x)=x^2-1$ 在区间$[1,m]$上的平均变化率为 $\dfrac{f(m)-f(1)}{m-1}=\dfrac{(m^2-1)-(1^2-1)}{m-1}=m+1=3$,所以 $m=2$.

5.已知函数 $f(x)=2x^2+1$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率为 -8,则 x_0 的值为_____,$f(x_0)$ 的值为_____.

-2　9　**解析**:因为 $f(x)=2x^2+1$,所以 $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{2(x+h)^2+1-2x^2-1}{h}=4x+2h$,

所以函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率为 $\lim\limits_{h\to 0}(4x_0+2h)=4x_0=-8$,

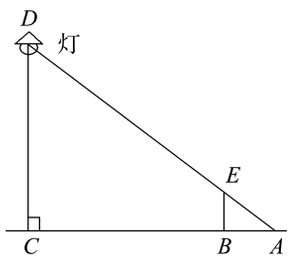
得 $x_0=-2$,所以 $f(-2)=9$.

6.路灯距地面 8 m,一个身高 1.6 m 的人以 84 m/min 的速度从路灯在地面上的射影 C 处沿某直线远离路灯.

(1)求人影子的长度 y(单位:m)与人离开点 C 的距离 x(单位:m)之间的关系式;

(2)求人离开点 C 第 10 s 时影子长度的瞬时变化率.

解:(1)如图所示,由题意得 $AB=y$ m,$BC=x$ m.



由于 $CD/\!/BE$,则 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BE}{CD}$,

即 $\dfrac{y}{y+x}=\dfrac{1.6}{8}$,所以 $y=\dfrac{1}{4}x(x>0)$.

(2)设人离开点 C 的时间为 t s,

因为 84 m/min=1.4 m/s,所以 $x=1.4t$.

所以 $y=\dfrac{1}{4}x=\dfrac{1}{4}\times 1.4t=\dfrac{7}{20}t$.

又 $\Delta y=\dfrac{7}{20}(10+\Delta t)-\dfrac{7}{20}\times 10=\dfrac{7}{20}\Delta t$,

所以 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta t}=\dfrac{7}{20}$,

即人离开点 C 第 10 s 时影子长度的瞬时变化率为 $\dfrac{7}{20}$.

能力提升

1.设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 等于　　(　　)

A.$-\dfrac{1}{a}$　　B.$\dfrac{2}{a}$　　C.$-\dfrac{1}{a^2}$　　D.$\dfrac{1}{a^2}$

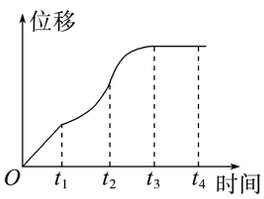
C　**解析**:$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a-x}{(x-a)\cdot xa}=-\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{ax}=-\dfrac{1}{a^2}$.

2.一质点 M 按运动方程 $s(t)=at^2+1$ 做直线运动(位移 s 的单位:m,时间 t 的单位:s),若质点 M 在 $t=2$ s 时的瞬时速度为8 m/s,则常数 a 的值为　　(　　)

A.1　　B.2　　C.4　　D.6

B　**解析**:$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{a(2+\Delta t)^2-4a}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(4a+a\Delta t)=4a$,由题可知 $4a=8$,解得 $a=2$.

3.一辆汽车在笔直的公路上行驶，位移关于时间的函数图象如图所示，给出下列四个结论：①汽车在$[0,t_1]$时间段内匀速行驶；②汽车在$[t_1,t_2]$时间段内不断加速行驶；③汽车在$[t_2,t_3]$时间段内不断减速行驶；④汽车在$[t_3,t_4]$时间段内处于静止状态.其中正确的结论有　　(　　)



A.1个　　B.2个

C.3个　　D.4个

D　**解析**：根据题意，

①在$[0,t_1]$时间段内，图象是一条斜率大于零的线段，则汽车在该时间段内匀速行驶，故①正确；

②在$[t_1,t_2]$时间段内，图象是一条斜率越来越大的曲线，则汽车在该时间段内不断加速行驶，故②正确；

③在$[t_2,t_3]$时间段内，图象是一条斜率越来越小的曲线，则汽车在该时间段内不断减速行驶，故③正确；

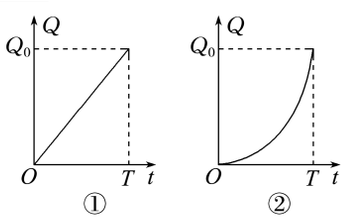
④在$[t_3,t_4]$时间段内，位移不变，则汽车在该时间段内静止不动，故④正确.

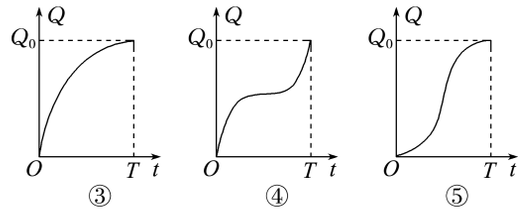
故选D.

4.过函数$y=x^3$图象上两点$P(1,1)$和$Q(1+\Delta x,1+\Delta y)$作曲线的割线，则当$\Delta x=0.1$时，割线的斜率为_____.

3.31　**解析**：当$\Delta x=0.1$时，$1+\Delta x=1.1$；故$1+\Delta y=1.1^3=1.331$.故$k_{PQ}=\dfrac{1.331-1}{1.1-1}=3.31$.

5.为缓解南方某地区电力用煤紧张的局面，某运输公司提出五种运输方案.据预测，这五种方案均能在规定时间T内完成预期的运输任务Q_0，各种方案的运煤总量Q与时间t的函数关系如图所示.在这五种方案中，运煤效率(单位时间的运煤量)逐步提高的是_____.(填写所有正确的图象的编号)





②　**解析**：曲线在每一时刻的斜率代表在该时刻的运煤效率，运煤效率逐步提高说明斜率越来越大，即Q增加得越来越快，符合条件的只有②.

6.航天飞机升空后一段时间内，第t s时的高度为$h(t)=5t^3+30t^2+45t+4$，其中h的单位为m.

(1)$h(0)$，$h(1)$，$h(2)$分别表示什么？

(2)求第2 s内的平均速度.

(3)求第2 s末的瞬时速度.

解：(1)$h(0)$表示航天飞机升空前的高度；

$h(1)$表示航天飞机升空后第1 s时的高度；

$h(2)$表示航天飞机升空后第2 s时的高度.

(2)航天飞机升空后第2 s内的平均速度

$$\overline{v}=\frac{h(2)-h(1)}{2-1}$$

$$=\frac{5\times2^3+30\times2^2+45\times2+4-(5\times1^3+30\times1^2+45\times1+4)}{1}$$

$=170(\mathrm{m/s})$.

(3)第2 s末的瞬时速度为$\lim\limits_{\Delta t\to0}\dfrac{\Delta h}{\Delta t}=$

$$\lim_{\Delta t\to0}\frac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t}=$$

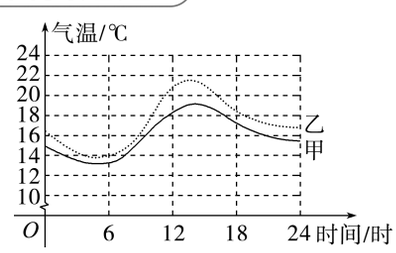
$$\lim_{\Delta t\to0}\frac{5(2+\Delta t)^3+30(2+\Delta t)^2+45(2+\Delta t)+4-(5\times2^3+30\times2^2+45\times2+4)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to0}\frac{5(\Delta t)^3+60(\Delta t)^2+225\Delta t}{\Delta t}=225(\mathrm{m/s}).$$

因此，第2 s末的瞬时速度为225 m/s.

自我超越

大面积绿化能提高地表的绿化覆盖率，调节小环境的气温，好的绿化有助于降低气温日较差(一天气温的最高值与最低值之差).如图是甲、乙两地某一天的气温曲线图.假设除绿化外，其他可能影响甲、乙两地温度的因素均一致，则下列结论中错误的是　　(　　)



A.由上图推测，甲地的绿化好于乙地

B.当日6时到12时，甲地气温的平均变化率小于乙地气温的平均变化率

C.当日12时到18时，甲地气温的平均变化率小于乙地气温的平均变化率

D.当日必存在一个时刻，甲、乙两地气温的瞬时变化率相同

C　**解析**：对于A，由题图可知，甲地的气温日较差明显小于乙地气温日较差，所以甲地的绿化好于乙地，故A正确；

对于B，由题图可知，甲、乙两地6时到12时气温的平均变化率为正数，且乙地的变化幅度更大，所以甲地气温的平均变化率小于乙地气温的平均变化率，故B正确；

对于C，由题图可知，甲、乙两地12时到18时气温的平均变化率为负数，且乙地的变化幅度更大，所以甲地气温的平均变化率大于乙地气温的平均变化率，故C错误；

对于D，由题图可知，存在一个时刻，使得甲、乙两地气温的瞬时变化率相同，故D正确.

故选C.

5.1.2　导数的概念及其几何意义

第1课时　导数的概念

学习任务目标

1. 理解函数在某点的平均变化率的概念并会求此变化率.
2. 体会由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，了解导数概念产生的实际背景，会求函数在自变量取某个值时的导数.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　平均变化率

对于函数 $y=f(x)$，设自变量 x 从 x_0 变化到 $x_0+\Delta x$，相应地，函数值 y 就从 $f(x_0)$ 变化到 $f(x_0+\Delta x)$. 这时，x 的变化量为 Δx，y 的变化量为 $\Delta y=\underline{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}$. 我们把比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$，即 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 叫做函数 $y=f(x)$ 从 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 的平均变化率.

知识点二　瞬时变化率

如果当 $\Delta x\to 0$ 时，平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 无限趋近于一个确定的值，即 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 有极限，则称 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处__可导__，并把这个确定的值叫做 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数（也称为瞬时变化率），记作 $\underline{f'(x_0)}$ 或 $\underline{y'|_{x=x_0}}$，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\underline{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$.

【概念辨析】

1. 判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

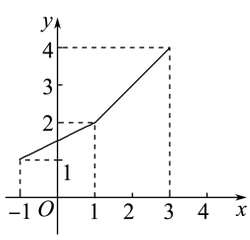
(1)若函数在某区间上的平均变化率为零，则说明此函数在此区间上的函数值都相等.　（　）

×　**提示**：函数 $f(x)=-2x^2+1$ 在区间 $[-1,1]$ 上的平均变化率为零，但是此函数在区间 $[-1,1]$ 上的函数值不都相等.

(2)函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数值与 Δx 的正、负无关.　（　√　）

(3)设 $x=x_0+\Delta x$，则 $\Delta x=x-x_0$，当 Δx 趋近于0时，x 趋近于 x_0，因此，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.　（　√　）

2. 如图，已知函数 $y=f(x)$ 的图象.



(1)函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的平均变化率为_____；

(2)函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的平均变化率为_____.

(1)$\frac{1}{2}$　(2)$\frac{3}{4}$　**解析**：(1)函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的平均变化率为 $\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$.

(2)由函数 $y=f(x)$ 的图象知，$f(x)=\begin{cases}\frac{x+3}{2},-1\leqslant x\leqslant 1,\\ x+1,1<x\leqslant 3,\end{cases}$ 所以函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的平均变化率为 $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{3-\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4}$.

3.请思考并回答下列问题：

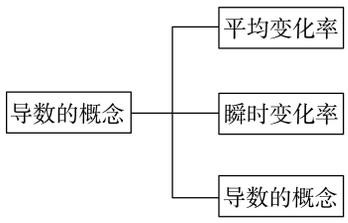
(1)Δx，Δy 一定是正值吗？平均变化率是否一定为正值？

(2)瞬时变化率的几何意义是什么？

(1)**提示**：Δx，Δy 可正可负，Δy 也可以为零，但 Δx 不能为零.平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}$可正，可负，可为零.

(2)**提示**：瞬时变化率的几何意义是曲线的切线斜率.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

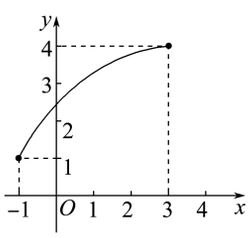
任务1 计算函数的平均变化率

1.函数 $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在区间[8,27]上的平均变化率为（　　）

A.1　　B.$\frac{1}{8}$　　C.$\frac{1}{19}$　　D.$\frac{1}{27}$

C　**解析**：$y=$函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在区间[8,27]上的平均变化率为$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(27)-f(8)}{27-8}=\frac{3-2}{19}=\frac{1}{19}$.故选 C.

2.如图是函数 $y=f(x)$ 的图象，则函数 $f(x)$ 在区间[−1,3]上的平均变化率为_____.



$\frac{3}{4}$　**解析**：由题中函数 $f(x)$ 的图象，知函数 $f(x)$ 在区间[−1,3]上的平均变化率为$\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{4-1}{3-(-1)}=\frac{3}{4}$.

3.已知函数 $y=\sin x$ 在区间$\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$和区间$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$上的平均变化率分别为 k_1，k_2，那么 k_1，k_2 的大小关系为_____.

$k_1>k_2$　**解析**：在区间$\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$上，平均变化率 $k_1=\frac{\sin\frac{\pi}{6}-\sin 0}{\frac{\pi}{6}}=\frac{3}{\pi}$；在区间$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$上，平均变化率 $k_2=\frac{\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}=\frac{3(2-\sqrt{3})}{\pi}$.所以 $k_1>k_2$.

【探究总结】

求平均变化率的步骤

已知函数 $y=f(x)$，求函数在区间$[x_0,x]$上的平均变化率的步骤：

(1)求自变量的改变量 $\Delta x=x-x_0$；

(2)求函数值的改变量 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$；

(3)求平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

任务2 计算函数在某一处的导数

探究活动

例 1　根据导数定义求函数 $y=x^2+\frac{1}{x}+5$ 在 $x=2$ 处的导数.

解：当 $x=2$ 时，

$$\Delta y=(2+\Delta x)^2+\frac{1}{2+\Delta x}+5-\left(2^2+\frac{1}{2}+5\right)=4\Delta x+(\Delta x)^2+\frac{-\Delta x}{2(2+\Delta x)},$$

所以$\frac{\Delta y}{\Delta x}=4+\Delta x-\frac{1}{4+2\Delta x}$，

所以 $y'|_{x=2}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(4+\Delta x-\frac{1}{4+2\Delta x}\right)=4+0-\frac{1}{4+2\times 0}=\frac{15}{4}.$$

[一题多思]

思考　若本例中的条件不变，试问：函数在何处的瞬时变化率为 1?

解：设函数在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率为 1.

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2+\frac{1}{x_0+\Delta x}+5-\left(x_0^2+\frac{1}{x_0}+5\right)$$

$$=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2+\frac{-\Delta x}{x_0\cdot(x_0+\Delta x)},$$

所以$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0+\Delta x-\frac{1}{x_0(x_0+\Delta x)}$，

因为 $f'(x_0)=1$，

所以 $2x_0-\frac{1}{x_0^2}=1$，

所以 $2x_0^3-x_0^2-1=0$，

所以 $x_0^2(x_0-1)+(x_0-1)(x_0^2+x_0+1)=0$，

所以 $(x_0-1)(2x_0^2+x_0+1)=0$，解得 $x_0=1$.

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的瞬时变化率为 1.

【探究总结】

求函数在 $x=x_0$ 处的导数的步骤

(1)求函数值的变化量：$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

(2)求平均变化率：$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(3)取极限：$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

应用迁移

1.(教材 P65 例 1 改编)求函数 $y=f(x)=x-\frac{4}{x}$ 在 $x=2$ 处的导数.

解：因为 $\Delta y=f(2+\Delta x)-f(2)=(2+\Delta x)-\frac{4}{2+\Delta x}-\left(2-\frac{4}{2}\right)=\Delta x+\frac{2\Delta x}{2+\Delta x}$，

所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x+\frac{2\Delta x}{2+\Delta x}}{\Delta x}=1+\frac{2}{2+\Delta x}$，

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{2}{2+\Delta x}\right)=2$，

从而 $f'(2)=2$.

2.设函数 $f(x)=x^2+x$.求：

(1)当自变量 x 由 1 变到 1.01 时，函数的平均变化率；

(2)函数在 $x=1$ 处的导数.

解：(1)当自变量 x 由 1 变到 1.01 时，函数的平均变化率为 $\frac{f(1.01)-f(1)}{1.01-1}=\frac{(1.01^2+1.01)-(1^2+1)}{1.01-1}=3.01$.

(2)$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2+1+\Delta x-(1^2+1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)\Delta x+\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(3+\Delta x)=3$.

任务3 应用导数定义

探究活动

例 2　(1)设 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的可导函数，若 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=2a$（$a$ 为常数），则 $f'(x_0)=$　　(　　)

A.$-2a$　　B.$-a$

C.a　　D.$2a$

(2)已知函数 $f(x)$ 在定义域 **R** 上可导，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-\Delta x)-f(1)}{-\Delta x}$ 等于　　(　　)

A.$f'(1)$　　B.$-f'(1)$

C.$\frac{1}{3}f'(1)$　　D.$3f'(1)$

(1)C　**解析**：由 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=2a$，得 $2\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=2a$，所以 $2f'(x_0)=2a$，所以 $f'(x_0)=a$.故选 C.

(2)A　**解析**：因为 $\Delta x\to 0$，所以 $-\Delta x\to 0$，

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-\Delta x)-f(1)}{-\Delta x}=f'(1)$.故选 A.

【探究总结】

正确理解导数定义式的变形

在导数的定义中，自变量的增量 Δx 可正，可负，但不能为零，它有多种表达形式.无论采用哪种表达形式，Δy 中自变量的增量 Δx 都必须用相同的形式，如将 Δx 变形为 $a\Delta x$，则 $\Delta y=f(x_0+a\Delta x)-f(x_0)$，只有这样，才能满足 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+a\Delta x)-f(x_0)}{a\Delta x}=f'(x_0)$.

应用迁移

1.若函数 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处的瞬时变化率为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$，且 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=4+\Delta x$，则 $f'(2)=$　　(　　)

A.2

B.4

C.$2+\Delta x$

D.$4+\Delta x$

B　**解析**：由导数的定义，知 $f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$.故选 B.

2.已知函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)>0$，且 $a=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，

$b=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，

$c=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，

$d=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$，

$e=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，

则 a，b，c，d，e 的大小关系为_____.

$c>a=d=e>b$　**解析**：$a=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$，

$b=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}$

$=-f'(x_0)$，

$c=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=2\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}$

$=2f'(x_0)$，

$d=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(x_0)$，

$e=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$.

因为 $f'(x_0)>0$，所以 $c>a=d=e>b$.

故答案为 $c>a=d=e>b$.

课后素养评价(十三)

基础落实

1.若函数 $y=f(x)=x^2$，则当自变量 x 由 1 变化到 1.1 时，函数 $f(x)$的平均变化率是　(　)

A.2　　B.2.1

C.2.2　　D.2.3

B　**解析**：$\Delta x=1.1-1=0.1$，$\Delta y=1.1^2-1^2=0.21$，所以函数的平均变化率为$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(1.1)-f(1)}{1.1-1}=\dfrac{0.21}{0.1}=2.1$.故选 B.

2.已知 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f'(2)=$　(　)

A.$-\dfrac{1}{4}$　　B.2　　C.$\dfrac{1}{4}$　　D.-2

A　**解析**：$f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\frac{1}{2+\Delta x}-\frac{1}{2}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{-1}{2(2+\Delta x)}=-\dfrac{1}{4}$.

3.若可导函数 $f(x)$的图象过原点，且满足$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}=-1$，则 $f'(0)=$　(　)

A.-2　　B.-1　　C.1　　D.2

B　**解析**：因为 $f(x)$的图象过原点，所以 $f(0)=0$，所以 $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}=-1$.

4.已知函数 $f(x)$的导函数为 $f'(x)$，若$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(2)-f(2+\Delta x)}{\Delta x}=-3$，则 $f'(2)=$　(　)

A.-3　　B.-2

C.2　　D.3

D　**解析**：由$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(2)-f(2+\Delta x)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=-3$，得 $f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=3$.故选 D.

5.已知函数 $f(x)=ax+4$，若 $f'(1)=2$，则实数 a 的值为_____.

2　**解析**：因为 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=a$，所以 $f'(1)=a=2$.

6.求出函数 $f(x)=x^2$ 在 $x=1,2,3$ 附近的平均变化率，若 Δx 都为$\dfrac{1}{3}$，则在哪一点附近的平均变化率最大？

解：在 $x=1$ 附近的平均变化率 $k_1=\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\dfrac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}=2+\Delta x$；在 $x=2$ 附近的平均变化率 $k_2=\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\dfrac{(2+\Delta x)^2-2^2}{\Delta x}=4+\Delta x$；在 $x=3$ 附近的平均变化率 $k_3=\dfrac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\dfrac{(3+\Delta x)^2-3^2}{\Delta x}=6+\Delta x$.

若 $\Delta x=\dfrac{1}{3}$，则 $k_1=2+\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}$，$k_2=4+\dfrac{1}{3}=\dfrac{13}{3}$，$k_3=6+\dfrac{1}{3}=\dfrac{19}{3}$.

因为 $k_1<k_2<k_3$，所以在 $x=3$ 附近的平均变化率最大.

7.在函数 $y=f(x)=x^2+3$ 的图象上取一点$P(1,4)$及附近一点$(1+\Delta x,4+\Delta y)$.

求：(1)$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$；(2)$f'(1)$.

解：(1)$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\dfrac{(1+\Delta x)^2+3-(1^2+3)}{\Delta x}=2+\Delta x$.

(2)$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}(2+\Delta x)=2$.

能力提升

1. 设函数 $f(x)=x^2-\frac{1}{x}$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$（　　）

A.6　　B.4　　C.3　　D.2

A　**解析**：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}=2f'(1)$，

又 $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2-\frac{1}{1+\Delta x}}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+3\Delta x+3}{1+\Delta x}$

$=3$，

则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=2\times 3=6$. 故选 A.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 附近有定义，且有 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=a\Delta x+b(\Delta x)^2$（$a$，$b$ 为常数），则（　　）

A. $f'(x)=a$　　B. $f'(x)=b$

C. $f'(x_0)=a$　　D. $f'(x_0)=b$

C　**解析**：因为 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a\Delta x+b(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(a+b\Delta x)=a$，所以 $f'(x_0)=a$.

3. 已知函数 $f(x)=-x^2+10$，则 $f(x)$ 在 $x=\frac{3}{2}$ 处的瞬时变化率是（　　）

A.3　　B.−3　　C.2　　D.−2

B　**解析**：$\frac{f\left(\frac{3}{2}+\Delta x\right)-f\left(\frac{3}{2}\right)}{\Delta x}$

$=\frac{-\left(\frac{3}{2}+\Delta x\right)^2+10-\left[-\left(\frac{3}{2}\right)^2+10\right]}{\Delta x}$

$=\frac{-(\Delta x)^2-3\Delta x}{\Delta x}=-\Delta x-3$，

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(\frac{3}{2}+\Delta x\right)-f\left(\frac{3}{2}\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(-\Delta x-3)=-3$.

4. 函数 $y=x^2$ 在 $x=$_____处的导数值等于其函数值.

0 或 2　**解析**：$y=f(x)=x^2$ 在 $x=x_0$ 处的导数值为 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x_0)=2x_0$.

由 $2x_0=x_0^2$，

解得 $x_0=0$ 或 $x_0=2$.

5. 已知函数 $y=f(x)=x^2$.

(1) 计算函数 $f(x)$ 从 $x=1$ 到 $x=1+\Delta x$ 的平均变化率，其中 Δx 的值为①2；②1；③0.1；④0.01.

(2) 当 Δx 越来越小时，函数 $f(x)$ 在区间 $[1,1+\Delta x]$ 上的平均变化率有怎样的变化趋势？

解：(1) 因为 $\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)^2-1^2=(\Delta x)^2+2\Delta x$，

所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^2+2\Delta x}{\Delta x}=\Delta x+2$.

① 当 $\Delta x=2$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x+2=4$；

② 当 $\Delta x=1$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x+2=3$；

③ 当 $\Delta x=0.1$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x+2=2.1$；

④ 当 $\Delta x=0.01$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x+2=2.01$.

(2) 由 (1) 可知 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^2+2\Delta x}{\Delta x}=\Delta x+2$，当 Δx 越来越小时，函数 $f(x)$ 在区间 $[1,1+\Delta x]$ 上的平均变化率逐渐变小，并趋近于 2.

6. 求 $y=x^2+\frac{1}{x}+5$ 在 $x=2$ 处的导数.

解：因为 $\Delta y=(2+\Delta x)^2+\frac{1}{2+\Delta x}+5-\left(2^2+\frac{1}{2}+5\right)=4\Delta x+(\Delta x)^2+\frac{-\Delta x}{2(2+\Delta x)}$，

所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=4+\Delta x-\frac{1}{4+2\Delta x}$.

所以 $y'|_{x=2}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(4+\Delta x-\frac{1}{4+2\Delta x}\right)=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$.

7. 已知函数 $f(x)=x^3-ax^2+b$（$a,b\in\mathbf{R}$）的图象过点 $(-1,0)$，且 $f'(2)=4$，求 a，b 的值.

解：因为函数 $f(x)=x^3-ax^2+b$ 的图象过点 $(-1,0)$，所以 $-1-a+b=0$①.

又 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=3x^2-2ax$，

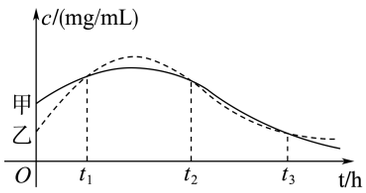
$f'(2)=4$，

所以 $f'(2)=3\times 2^2-2\times 2a=12-4a=4$②.

由①②解得 $a=2$，$b=3$.

自我超越

为评估某种治疗肺炎的药物的疗效，有关部门对该药物在人体血液中的药物浓度进行测量.设该药物在人体血液中的药物浓度 c（单位：mg/mL）与时间 t（单位：h）的关系为 $c=f(t)$.甲、乙两人服用该药物后，血液中的药物浓度 c 随时间 t 变化的关系如下图所示.



给出下列四个结论：

①在 t_1 时刻，甲、乙两人血液中的药物浓度相同；

②在 t_2 时刻，甲、乙两人血液中的药物浓度的瞬时变化率相同；

③在 $[t_2,t_3]$ 这个时间段内，甲、乙两人血液中的药物浓度的平均变化率相同；

④在 $[t_1,t_2]$，$[t_2,t_3]$ 两个时间段内，甲血液中的药物浓度的平均变化率相同.

其中所有正确结论的序号是　　（　　）

A.①②　　B.①③④

C.②③　　D.①③

D　**解析**：对于①，在 t_1 时刻，两图象相交，说明甲、乙两人血液中的药物浓度相同，故①正确；对于②，在 t_2 时刻，两图象的切线斜率不相等，即甲、乙两人血液中药物浓度的瞬时变化率不相同，故②错误；对于③，由平均变化率公式知，甲、乙两人在 $[t_2,t_3]$ 这个时间段内，血液中药物浓度的平均变化率均为 $\dfrac{f(t_3)-f(t_2)}{t_3-t_2}$，故③正确；对于④，在 $[t_1,t_2]$ 和 $[t_2,t_3]$ 两个时间段内，甲血液中药物浓度的平均变化率分别为 $\dfrac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$ 和 $\dfrac{f(t_3)-f(t_2)}{t_3-t_2}$，显然不相同，故④错误.故选 D.

第 2 课时　导数的几何意义

学习任务目标

1.通过函数图象直观地理解导数的几何意义.

2.能根据导数的几何意义求曲线在某点处的切线的方程.

3.正确理解曲线“过某点”的切线和“在某点”处的切线，并会求其方程.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　导数的几何意义

(1)在曲线 $y=f(x)$ 上任取一点 $P(x,f(x))$，如果当点 $P(x,f(x))$ 沿着曲线 $y=f(x)$ 无限趋近于点 $P_0(x_0,f(x_0))$ 时，割线 P_0P 无限趋近于一个确定的位置，这个确定位置的直线 P_0T 称为曲线 $y=f(x)$ 在点 P_0 处的切线.

(2)函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 就是切线 P_0T 的斜率 k_0，即 $k_0=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$.

知识点二　导函数的概念

当 x 变化时，$y=f'(x)$ 就是 x 的函数，我们称它为 $y=f(x)$ 的导函数（简称导数）.$y=f(x)$ 的导函数有时也记作 y'，即 $f'(x)=y'=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

【概念辨析】

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)函数在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 是一个常数.　（　√　）

(2)函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数值就是曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线的斜率.　（　√　）

(3)直线与曲线相切，则直线与曲线只有一个公共点.　（　　）

×　**提示**：直线与曲线相切，则直线与曲线除了切点之外，可能还有其他公共点.

2.曲线 $y=3x^2-4x$ 在点 $(1,-1)$ 处的切线的方程为_____.

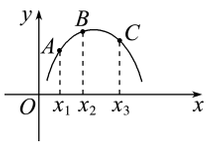
$y=2x-3$　**解析**：令 $y=f(x)=3x^2-4x$，则 $k=f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{3(1+\Delta x)^2-4(1+\Delta x)-(3\times1^2-4\times1)}{\Delta x}=2$.

所以切线方程为 $y+1=2(x-1)$，即 $y=2x-3$.

3.请思考并回答下列问题：

(1)若 $f'(x_0)>0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线的倾斜角为锐角；若 $f'(x_0)<0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线的倾斜角为钝角；若 $f'(x_0)=0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线与 x 轴平行或重合.这种说法正确吗？

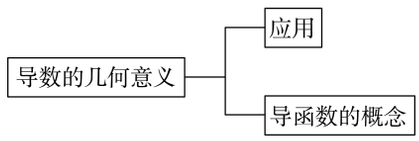
(2)函数 $y=f(x)$ 的部分图象如图所示，根据导数的几何意义，你能比较 $f'(x_1)$，$f'(x_2)$ 和 $f'(x_3)$ 的大小吗？



(1)**提示**：由导数的几何意义以及直线倾斜角的正切值的符号与角度的关系知此说法正确.

(2)**提示**：易知图象在点 A，B 处的切线的斜率大于零且 $k_A>k_B$，在点 C 处的切线斜率小于零，根据导数的几何意义，可得 $f'(x_1)>f'(x_2)>f'(x_3)$.

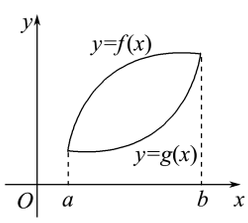
整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 分析函数图象的变化趋势

1.(多选)已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图象如图所示，则下列说法正确的有　　(　　)



A. $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均变化率大于 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均变化率

B. $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均变化率等于 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均变化率

C. 对于任意 $x_0\in(a,b)$，函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率总大于函数 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率

D. 存在 $x_0\in(a,b)$，使得函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率小于函数 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率

BD　**解析**：$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均变化率是 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，

$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均变化率是 $\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}$.

又因为 $f(b)=g(b)$，$f(a)=g(a)$，

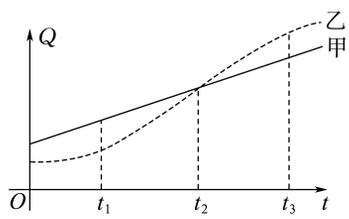
所以 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}$，所以 A 错误，B 正确.

易知函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，即曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线的斜率.

同理，函数 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是函数 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，即曲线 $y=g(x)$ 在该点处的切线的斜率.

由题中图象可知，当 $x_0\in(a,b)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处切线的斜率有可能大于曲线 $y=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处切线的斜率，也有可能小于曲线 $y=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处切线的斜率，故 C 错误，D 正确.

2.已知甲、乙两个小区在 $[0,t]$ 这段时间内的家庭厨余垃圾的分出量 Q 与时间 t 的关系如图所示.给出下列四个结论，其中结论正确的个数为　　(　　)



①在 $[t_1,t_2]$ 这段时间内，甲小区的分出量比乙小区增长得慢；

②在 $[t_2,t_3]$ 这段时间内，乙小区的分出量比甲小区增长得快；

③在 t_2 时刻，甲小区的分出量比乙小区增长得慢；

④乙小区在 t_2 时刻的分出量比 t_3 时刻增长得快.

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

D　**解析**：对于①，在 $[t_1,t_2]$ 这段时间内，甲小区分出量的增长量小于乙小区分出量的增长量，所以甲小区比乙小区的分出量增长得慢，说法①正确.对于②，在 $[t_2,t_3]$ 这段时间内，甲小区分出量的增长量小于乙小区分出量的增长量，所以乙小区比甲小区的分出量增长得快，说法②正确.对于③，在 t_2 时刻，乙的图象比甲的图象陡，瞬时增长率大，说法③正确.对于④，乙小区在 t_2 时刻比 t_3 时刻的更陡，故乙小区在 t_2 时刻的分出量比 t_3 时刻的分出量增长得快，说法④正确.综上所述，①②③④都正确.故选 D.

【探究总结】

(1)导数的几何意义就是切线的斜率，因此比较导数大小的问题可以用数形结合的思想来解决.

(2)曲线在某点处的切线的斜率大小反映了曲线在相应点处的变化情况，由切线的倾斜程度，可以判断出曲线升降的快慢.

任务2 求曲线在某点处的切线的方程

探究活动

例1　(教材P70练习题3改编)求抛物线 $f(x)=x^2+3$ 在点 $P(1,4)$ 处的切线的方程.

解：$\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\dfrac{(1+\Delta x)^2+3-(1^2+3)}{\Delta x}=2+\Delta x$，

所以所求切线的斜率

$k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2.$

所以，所求切线方程为 $y-4=2(x-1)$，即 $2x-y+2=0$.

[一题多思]

思考1. 在本例中的抛物线上求一点 A，使抛物线在该点处的切线垂直于直线 $2x-6y+5=0$.

解：设点 A 的坐标为 (x_0,y_0).

则抛物线 $f(x)=x^2+3$ 在点 A 处的切线的斜率

$k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[(x_0+\Delta x)^2+3]-(x_0^2+3)}{\Delta x}=2x_0$，

直线 $2x-6y+5=0$ 的斜率为 $\dfrac{1}{3}$，

由题设知 $2x_0\cdot\dfrac{1}{3}=-1$，解得 $x_0=-\dfrac{3}{2}$，

此时 $y_0=\dfrac{21}{4}$，

所以点 A 的坐标为 $\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{21}{4}\right)$.

思考2. 将本例中的抛物线方程改为“$y=-x^2+3$”，求此抛物线在 $x=1$ 处的切线的方程.

解：令 $y=f(x)$，则抛物线 $y=-x^2+3$ 在 $x=1$ 处的切线的斜率为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$.

而 $f(1+\Delta x)-f(1)=-(1+\Delta x)^2+3-2=-(\Delta x)^2-2\Delta x$，

所以抛物线 $y=-x^2+3$ 在 $x=1$ 处的切线的斜率为

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-(\Delta x)^2-2\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(-\Delta x-2)=-2.$

又 $f(1)=2$，

故抛物线 $y=-x^2+3$ 在 $x=1$ 处的切线的方程为 $y-2=-2(x-1)$，即 $2x+y-4=0$.

【探究总结】

利用导数的几何意义求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的方程的步骤如下：

(1)求函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$，即切线的斜率；

(2)根据已知点和切线斜率可得切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

应用迁移

1. 曲线 $y=x^3$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴、直线 $x=2$ 所围成的三角形的面积为_____.

$\dfrac{8}{3}$　**解析**：因为切线斜率 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(1+\Delta x)^3-1^3}{\Delta x}=3$，所以曲线在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 $y-1=3(x-1)$，

即 $y=3x-2$.

它与 x 轴的交点为 $\left(\dfrac{2}{3},0\right)$，与直线 $x=2$ 的交点为 $(2,4)$，所以围成三角形的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times\left(2-\dfrac{2}{3}\right)\times 4=\dfrac{8}{3}$.

2. 已知曲线 $y=f(x)=x^2$ 在点 P 处的切线满足下列条件，请分别求出点 P 的坐标.

(1)平行于直线 $y=6x-5$；

(2)垂直于直线 $x-3y+5=0$；

(3)倾斜角为 $135°$.

解：$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x$，

设 $P(x_0,y_0)$ 是满足条件的点.

(1)因为切线与直线 $y=6x-5$ 平行，

所以 $2x_0=6$，得 $x_0=3$，$y_0=9$，即 $P(3,9)$ 是满足条件的点.

(2)因为切线与直线 $x-3y+5=0$ 垂直，

所以 $2x_0\times\dfrac{1}{3}=-1$，得 $x_0=-\dfrac{3}{2}$，$y_0=\dfrac{9}{4}$，

即 $P\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{4}\right)$ 是满足条件的点.

(3)因为切线的倾斜角为 $135°$，

所以切线的斜率为 -1，即 $2x_0=-1$，得 $x_0=-\dfrac{1}{2}$，

$y_0=\dfrac{1}{4}$，即 $P\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$ 是满足条件的点.

任务3 求曲线过某点的切线的方程

探究活动

例2　求抛物线 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 过点 $\left(4,\dfrac{7}{4}\right)$ 的切线的方程.

解：设切点为 $\left(x_0,\dfrac{1}{4}x_0^2\right)$，切线的斜率为 k.

因为 $y'|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{1}{4}(x_0+\Delta x)^2-\frac{1}{4}x_0^2}{\Delta x}=\dfrac{1}{2}x_0$，

所以 $k=\dfrac{\frac{7}{4}-\frac{1}{4}x_0^2}{4-x_0}=\dfrac{1}{2}x_0$，

即 $x_0^2-8x_0+7=0$，解得 $x_0=7$ 或 $x_0=1$，

故 $k=\dfrac{1}{2}x_0=\dfrac{7}{2}$ 或 $\dfrac{1}{2}$.

所以所求切线方程为 $14x-4y-49=0$ 或 $2x-4y-1=0$.

［一题多思］

思考 1. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与曲线 $y=f(x)$ 过点 (x_0,y_0) 的切线有何不同？

提示： 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线时，点 $(x_0,f(x_0))$ 一定是切点，只要求出斜率 $f'(x_0)$，利用切点和所求斜率写出切线方程即可；而求曲线 $y=f(x)$ 过点 (x_0,y_0) 的切线时，给出的点 (x_0,y_0) 不一定在曲线上，即使在曲线上也不一定是切点.

思考 2. 将本例中的“抛物线 $y=\dfrac{1}{4}x^2$”换为“曲线 $y=\dfrac{1}{x}$”，求过点 $(2,0)$ 与此曲线相切的直线的方程.

解： 设切点为 $P(x_0,y_0)$.

由 $y'|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x\cdot(x_0+\Delta x)\cdot x_0}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}=-\dfrac{1}{x_0^2}$，

得所求切线方程为 $y-y_0=-\dfrac{1}{x_0^2}(x-x_0)$.

因为点 $(2,0)$ 在切线上，

所以 $x_0^2y_0=2-x_0$.

又点 $P(x_0,y_0)$ 在曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 上，所以 $x_0y_0=1$.

联立可解得 $x_0=1$，$y_0=1$，

故所求切线方程为 $x+y-2=0$.

【探究总结】

运用导数的几何意义解决切线问题时，一定要注意所给的点是否在曲线上. 若点在曲线上，则该点处的导数值就是该点处的切线的斜率；若点不在曲线上，应另设切点，再利用导数的几何意义求解.

应用迁移

已知函数 $f(x)=x^3$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1,1)$ 处的切线的方程；

(2) 若函数 $f(x)$ 的图象为曲线 C，过点 $P\left(\dfrac{2}{3},0\right)$ 作曲线 C 的切线，求切线的方程.

解： (1) 因为 $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{(1+\Delta x)^3-1^3}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{3\Delta x+3(\Delta x)^2}{\Delta x}=3$，

所以函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1,1)$ 处的切线的方程为 $y-1=3(x-1)$，即 $y=3x-2$.

(2) 设切点为 $Q(x_0,x_0^3)$，则切线的斜率为 $k=f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{(x_0+\Delta x)^3-x_0^3}{\Delta x}=3x_0^2$，

所以切线方程为 $y-x_0^3=3x_0^2(x-x_0)$，即 $y=3x_0^2x-2x_0^3$.

因为切线过点 $P\left(\dfrac{2}{3},0\right)$，所以 $2x_0^2-2x_0^3=0$，解得 $x_0=0$ 或 $x_0=1$，

从而切线方程为 $y=0$ 或 $y=3x-2$.

课后素养评价（十四）

基础落实

1. 设 $f'(x_0)=0$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线　（　B　）

A. 不存在

B. 与 x 轴平行或重合

C. 与 x 轴垂直

D. 与 x 轴斜交

2. （多选）下列说法正确的有　（　　）

A. 曲线的切线和曲线可能有两个交点

B. 过曲线上的一点作曲线的切线，该点一定是切点

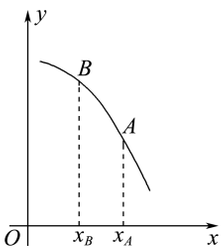
C. 若 $f'(x_0)$ 不存在，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处无切线

D. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处有切线，$f'(x_0)$ 不一定存在

AD　**解析：** 曲线的切线和曲线除有一个公共切点外，还可能有其他公共点，故 A 正确，B 不正确；$f'(x_0)$ 不存在，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处

切线的斜率不存在，但切线可能存在，为 $x=x_0$，故C不正确，D正确.

3.已知函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，则 $f'(x_A)$ 与 $f'(x_B)$ 的大小关系是　　(　　)



A.$f'(x_A)>f'(x_B)$　　B.$f'(x_A)<f'(x_B)$

C.$f'(x_A)=f'(x_B)$　　D.不能确定

B　**解析**：由题图可知，函数图象在点 A 处的切线斜率小于点 B 处的切线斜率，所以根据导数的几何意义可知 $f'(x_A)<f'(x_B)$.故选B.

4.设 $f(x)$ 为可导函数，且满足 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(3+\Delta x)-f(3)}{3\Delta x}=2$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(3,f(3))$ 处的切线的斜率是　　(　　)

A.6　　B.2　　C.3　　D.$\dfrac{2}{3}$

A　**解析**：因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(3+\Delta x)-f(3)}{3\Delta x}=2$，所以 $\dfrac{1}{3}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=2$，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=6$，即 $f'(3)=6$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(3,f(3))$ 处的切线的斜率是6.故选A.

5.已知曲线 $y=\dfrac{1}{2}x^2-2$ 上一点 $P\left(1,-\dfrac{3}{2}\right)$，则曲线在点 P 处的切线的倾斜角为　　(　　)

A.30°　　B.45°

C.135°　　D.165°

B　**解析**：因为 $y=\dfrac{1}{2}x^2-2$，所以 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(x+\dfrac{1}{2}\Delta x\right)=x$，所以曲线在点 $P\left(1,-\dfrac{3}{2}\right)$ 处的切线的斜率为1，所以曲线在点 P 处的切线的倾斜角为45°.

6.已知直线 l 经过 $(-1,0)$，$(0,1)$ 两点，且与曲线 $y=f(x)$ 切于点 $A(2,3)$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=$ _____.

1　**解析**：根据导数的定义可知，$f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$.因为直线 l 经过 $(-1,0)$，$(0,1)$ 两点，且与曲线 $y=f(x)$ 切于点 $A(2,3)$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $A(2,3)$ 处的导数即为直线 l 的斜率，所以 $f'(2)=\dfrac{0-1}{(-1)-0}=1$.

7.已知函数 $f(x)=x^2-4x+3$.

(1)求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率；

(2)求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(3,f(3))$ 处的切线的方程.

解：(1)由导数的几何意义可知，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率为 $f'(x_0)$，

则由导数的定义，可得

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-4(x_0+\Delta x)+3-(x_0^2-4x_0+3)}{\Delta x}$$

$=2x_0-4$.

即曲线 $y=f(x)$ 上任意一点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率为 $2x_0-4$.

(2)$f(3)=0$，由(1)知，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(3,f(3))$ 处的切线的斜率为 $f'(3)=2$，

所以切线方程为 $y-0=2(x-3)$，即 $2x-y-6=0$.

能力提升

1.已知曲线 $f(x)=ax^2+b$ 在点 $(1,3)$ 处的切线的斜率为2，则 $\dfrac{b}{a}$ 的值为　　(　　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.$\dfrac{1}{2}$

B　**解析**：由题意得 $f'(1)=2$，

所以 $\lim\limits_{d\to 0}\dfrac{f(1+d)-f(1)}{d}=\lim\limits_{d\to 0}\dfrac{a(1+d)^2+b-a-b}{d}=\lim\limits_{d\to 0}(2a+ad)=2a=2$，

解得 $a=1$.

又 $f(1)=a+b=3$，则 $b=2$，所以 $\dfrac{b}{a}=2$.

故选B.

2.已知曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与直线 $x+y-3=0$ 垂直，则 $f'(1)=$　　(　　)

A.2　　B.0　　C.1　　D.-1

C　**解析**：曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线的斜率为 $f'(1)$，直线 $x+y-3=0$ 的斜率为 -1，由题意知 $f'(1)\cdot(-1)=-1$，故 $f'(1)=1$.故选C.

3.直线 $y=kx+1$ 与曲线 $f(x)=ax^3+b$ 相切于点 $P(1,2)$，则 $b=$ _____.

$\dfrac{5}{3}$　**解析**：因为直线 $y=kx+1$ 与曲线 $f(x)=ax^3+b$ 相切于点 $P(1,2)$，

将 $P(1,2)$ 代入 $y=kx+1$，可得 $k+1=2$，解得 $k=1$.

因为 $f(x)=ax^3+b$，

所以 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=3ax^2$.

由 $f'(1)=3a=1$，解得 $a=\frac{1}{3}$，可得 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+b$.

因为点 $P(1,2)$ 在曲线 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+b$ 上，

所以 $f(1)=\frac{1}{3}+b=2$，解得 $b=\frac{5}{3}$.

4. 若曲线 $y=2x^2-4x+p$ 与直线 $y=1$ 相切，则 $p=$_____.

3　**解析：** 设 $y=f(x)=2x^2-4x+p$，切点为 $(x_0,1)$. 由 $y'|_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(4x_0-4+2\Delta x)=4x_0-4$，根据导数的几何意义有 $4x_0-4=0$，所以 $x_0=1$，即切点为 $(1,1)$，所以 $1=2-4+p$，所以 $p=3$.

5. 过点 $P(-1,2)$，且与曲线 $y=3x^2-4x+2$ 在点 $M(1,1)$ 处的切线平行的直线的方程为_____.

$2x-y+4=0$　**解析：** $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{3(1+\Delta x)^2-4(1+\Delta x)+2-(3\times 1^2-4\times 1+2)}{\Delta x}$ $=2$.

故所求直线方程为 $y-2=2(x+1)$，

即 $2x-y+4=0$.

6. 已知曲线 $f(x)=\frac{a}{x}-\sqrt{x}$ 在 $x=4$ 处的切线的方程为 $5x+16y+b=0$，则 $a=$_____，$b=$_____.

1　8　**解析：** 因为直线 $5x+16y+b=0$ 的斜率 $k=-\frac{5}{16}$，所以 $f'(4)=-\frac{5}{16}$.

而 $f'(4)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\frac{a}{4+\Delta x}-\sqrt{4+\Delta x}\right)-\left(\frac{a}{4}-\sqrt{4}\right)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\frac{a}{4+\Delta x}-\frac{a}{4}\right)-(\sqrt{4+\Delta x}-2)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\frac{-a}{4(4+\Delta x)}-\frac{1}{\sqrt{4+\Delta x}+2}\right]=-\frac{a+4}{16}$，

所以 $-\frac{a+4}{16}=-\frac{5}{16}$，解得 $a=1$.

所以 $f(x)=\frac{1}{x}-\sqrt{x}$，所以 $f(4)=\frac{1}{4}-\sqrt{4}=-\frac{7}{4}$，即切点为 $\left(4,-\frac{7}{4}\right)$.

因为 $\left(4,-\frac{7}{4}\right)$ 在切线 $5x+16y+b=0$ 上，

所以 $5\times 4+16\times\left(-\frac{7}{4}\right)+b=0$，得 $b=8$.

综上，$a=1$，$b=8$.

7. 已知直线 $l:y=x+a(a\neq 0)$ 和曲线 $C:y=x^3-x^2+1$ 相切，求 a 的值和切点的坐标.

解： 设直线 l 与曲线 C 相切于点 $P(x_0,y_0)$，令 $y=f(x)=x^3-x^2+1$，

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)^2+1-(x^3-x^2+1)}{\Delta x}$

$=3x^2-2x$.

由题意知，直线 l 的斜率 $k=1$，即 $3x_0^2-2x_0=1$，

解得 $x_0=-\frac{1}{3}$ 或 $x_0=1$.

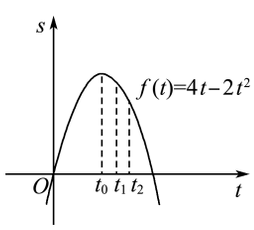
于是切点的坐标为 $\left(-\frac{1}{3},\frac{23}{27}\right)$ 或 $(1,1)$.

当切点为 $\left(-\frac{1}{3},\frac{23}{27}\right)$ 时，$\frac{23}{27}=-\frac{1}{3}+a$，所以 $a=\frac{32}{27}$.

当切点为 $(1,1)$ 时，$1=1+a$，$a=0$（舍去）.

所以 a 的值为 $\frac{32}{27}$，切点坐标为 $\left(-\frac{1}{3},\frac{23}{27}\right)$.

8. 表示某物体运动的位移 s 随时间 t 变化的函数 $s=f(t)=4t-2t^2$ 的图象如图所示，试根据图象，描述、比较曲线 $s=f(t)$ 在 t_0，t_1，t_2 附近的变化情况，并求出曲线在 $t=2$ 处的切线的方程.

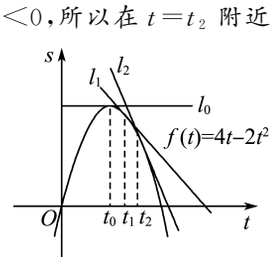


解： 如图，分别用曲线 $s=f(t)$ 在 $t=t_0$，$t=t_1$，$t=t_2$ 处的切线，刻画曲线 $s=f(t)$ 在上述三个时刻附近的变化情况.

① 当 $t=t_0$ 时，曲线 $s=f(t)$ 在 $t=t_0$ 处的切线 l_0 平行于 t 轴，所以在 $t=t_0$ 附近曲线比较平坦，几乎没有升降；

② 当 $t=t_1$ 时，曲线 $s=f(t)$ 在 $t=t_1$ 处的切线 l_1 的斜率 $f'(t_1)<0$，所以在 $t=t_1$ 附近曲线下降.

③ 当 $t=t_2$ 时，曲线 $s=f(t)$ 在 $t=t_2$ 处的切线 l_2 的斜率 $f'(t_2)<0$，所以在 $t=t_2$ 附近曲线下降.



由图象可以看出，直线 l_1 的倾斜程度小于直线 l_2 的

倾斜程度，说明曲线 $s=f(t)$ 在 $t=t_1$ 附近比在 $t=t_2$ 附近下降得慢.

当 $t=2$ 时，$f(2)=0$.

当 $t=2$ 时，切线的斜率

$$k=f'(2)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(2+\Delta t)-f(2)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{4(2+\Delta t)-2(2+\Delta t)^2-8+8}{\Delta t}$$

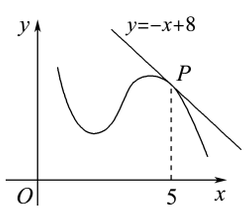
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{4\Delta t-2(\Delta t)^2-8\Delta t}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}(-2\Delta t-4)=-4.$$

所以切线方程为 $s=-4(t-2)$，即 $4t+s-8=0$.

自我超越

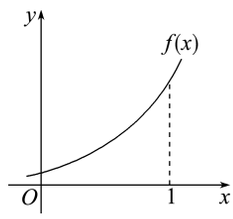
1. 如图，函数 $y=f(x)$ 的图象在点 P 处的切线方程是 $y=-x+8$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(5+\Delta x)-f(5)}{\Delta x}=$ （　　）



A.1　　B.3　　C.-3　　D.-1

D　**解析**：由导数的定义知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(5+\Delta x)-f(5)}{\Delta x}=f'(5)$，由题图知 $f'(5)=-1$.故选 D.

2. 已知函数 $f(x)$ 的部分图象如图所示，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，则（　　）



A.$f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$

B.$f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$

C.$f'(0)>f(1)-f(0)>f'(1)$

D.$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

D　**解析**：由导数的几何意义可知，$f'(0)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线斜率，$f'(1)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线斜率，$\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}$ 表示 $(0,f(0))$，$(1,f(1))$ 两点连线的斜率.

由题图可知，当 x 从 0 变化到 1 时，切线斜率越来越大，

所以 $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$.

对比选项可知，D 正确.

故选 D.

5.2　导数的运算

5.2.1　基本初等函数的导数

学习任务目标

1. 能根据导数的定义推导常用函数的导数.

2. 掌握基本初等函数的导数公式.

3. 利用基本初等函数的导数公式解决有关问题.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　几个常用函数的导数

函数	用定义法求导数
$y=f(x)=c$	$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{c-c}{\Delta x}$ $=\underline{0}$

续表

函数	用定义法求导数
$y=f(x)=x$	$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}$ $=\underline{1}$

续表

函数	用定义法求导数
$y=f(x)=x^2$	$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)$ $=\underline{2x}$
$y=f(x)=x^3$	$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2]$ $=\underline{3x^2}$
$y=f(x)=\dfrac{1}{x}$	$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(-\dfrac{1}{x^2+x\cdot\Delta x}\right)$ $=\underline{-\dfrac{1}{x^2}}$
$y=f(x)=\sqrt{x}$	$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$ $=\underline{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$

知识点二　基本初等函数的导数公式

(1)若 $f(x)=c$(c 是常数),则 $f'(x)=\underline{0}$.

(2)若 $f(x)=x^\alpha(\alpha\in\mathbf{R}$,且 $\alpha\neq 0)$,则 $f'(x)=\underline{\alpha x^{\alpha-1}}$.

(3)若 $f(x)=\sin x$,则 $f'(x)=\underline{\cos x}$.

(4)若 $f(x)=\cos x$,则 $f'(x)=\underline{-\sin x}$.

(5)若 $f(x)=a^x(a>0$,且 $a\neq 1)$,则 $f'(x)=\underline{a^x\ln a}$;特别地,若 $f(x)=\mathrm{e}^x$,则 $f'(x)=\underline{\mathrm{e}^x}$.

(6)若 $f(x)=\log_a x(a>0$,且 $a\neq 1)$,则 $f'(x)=\underline{\dfrac{1}{x\ln a}}$;特别地,若 $f(x)=\ln x$,则 $f'(x)=\underline{\dfrac{1}{x}}$.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)若 $f(x)=2$,则 $f'(x)=2$.　(　　)

×　**提示**:$f'(x)=0$.

(2)若 $f(x)=x^{-1}$,则 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.　(　√　)

(3)$(2^x)'=x2^{x-1}$.　(　　)

×　**提示**:$(2^x)'=2^x\ln 2$.

(4)$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.　(　√　)

2.(多选)下列求导正确的有　(　　)

A.若 $y=\ln 2$,则 $y'=\dfrac{1}{2}$

B.若 $y=\dfrac{1}{x^2}$,则 $y'|_{x=3}=-\dfrac{2}{27}$

C.若 $y=5^x$,则 $y'=5^x\ln 5$

D.若 $y=\log_2 x$,则 $y'=\dfrac{1}{x\ln 2}$

BCD　**解析**:对于 A,$y'=0$,故 A 错误;对于 B,因为 $y'=-\dfrac{2}{x^3}$,所以 $y'|_{x=3}=-\dfrac{2}{27}$,故 B 正确;显然 C,D 正确.故选 BCD.

3.请思考并回答下列问题:

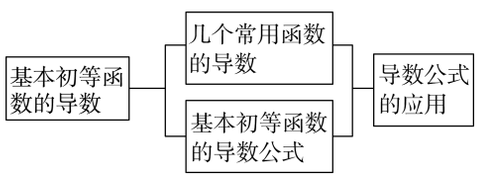
(1)常数函数的导数为 0 说明了什么?

(2)幂函数、指数函数的导数有何特点?正弦函数与余弦函数的导数有什么关系?

(1)**提示**:说明常数函数 $f(x)=c$ 图象上每一点处的切线的斜率都为 0,即每一点处的切线都与 x 轴平行(或重合).

(2)**提示**:幂函数的导数,系数为原函数的次数,次数是原函数的次数减去 1.指数函数的导数,系数为原函数底数的自然对数.正弦函数的导数为余弦函数,余弦函数的导数为正弦函数的相反数.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 利用导数公式求函数的导数

探究活动

例1　(1)(多选)下列结论正确的有　　(　　)

A.$\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)'=\cos\frac{\pi}{3}$　　B.$(x^{\frac{5}{3}})'=x^{\frac{2}{3}}$

C.$(\log_3 x)'=\frac{1}{x\ln 3}$　　D.$(2^x)'=2^x\ln 2$

(2)求下列函数的导数：

①$y=\frac{1}{x^4}$的导数为_____；

②$y=7^x$的导数为_____；

③$y=x^{12}$的导数为_____；

④$y=\sqrt[5]{x^3}$的导数为_____.

(1)CD　**解析**：$\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)'=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)'=0$，A 错误；$(x^{\frac{5}{3}})'=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$，B 错误；$(\log_3 x)'=\frac{1}{x\ln 3}$，C 正确；$(2^x)'=2^x\ln 2$，D 正确.故选 CD.

(2)①$y'=-\frac{4}{x^5}$　**解析**：$y'=\left(\frac{1}{x^4}\right)'=(x^{-4})'=-4x^{-5}=-\frac{4}{x^5}$.

②$y'=7^x\ln 7$　**解析**：$y'=(7^x)'=7^x\ln 7$.

③$y'=12x^{11}$　**解析**：$y'=(x^{12})'=12x^{11}$.

④$y'=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$　**解析**：$y'=(\sqrt[5]{x^3})'=(x^{\frac{3}{5}})'=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$.

【探究总结】

利用公式求导的注意点

(1)若函数的形式符合导数公式的使用条件，则直接利用公式求解最便捷.

(2)对于不能直接利用公式求解的类型，一般遵循“先化简，再求导”的基本原则，避免不必要的运算失误.比如对带根号的函数，一般先将其转化为分数指数幂的形式，再利用公式$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$进行求导.

(3)要特别注意“$\frac{1}{x}$与$\ln x$”“a^x与$\log_a x$”“$\sin x$与$\cos x$”的导数的区别.

应用迁移

(教材 P75 例 1 改编)求下列函数的导数：

(1)$y=\cos\frac{\pi}{10}$；(2)$y=\log_5 x$；

(3)$y=(x-1)(x^2+x+1)+1$.

解：(1)$y'=\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)'=0$.

(2)$y'=(\log_5 x)'=\frac{1}{x\ln 5}$.

(3)$y'=[(x-1)(x^2+x+1)+1]'=(x^3-1+1)'=(x^3)'=3x^2$.

任务2 计算函数在某一点处的导数

探究活动

例2　(1)已知函数$f(x)=\cos x-1$，则$\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(\pi+t)-f(\pi)}{t}=$　　(　　)

A.1　　B.0　　C.-1　　D.-2

B　**解析**：由题意，$f'(x)=-\sin x$，故$\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(\pi+t)-f(\pi)}{t}=f'(\pi)=-\sin\pi=0$.故选 B.

(2)已知一质点的运动方程是$s(t)=\sin t$，其中s(单位：m)是质点的位移，t(单位：s)是时间.

①求质点在$t=\frac{\pi}{3}$ s 时的速度；

②求质点运动的加速度.

解：①因为$s'(t)=\cos t$，

所以$s'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，

即质点在$t=\frac{\pi}{3}$时的速度为$\frac{1}{2}$.

②令$v(t)=\cos t$，

所以加速度为$v'(t)=(\cos t)'=-\sin t$.

【探究总结】

(1)速度是位移对时间的导数，加速度是速度对时间的导数.

(2)求函数$f(x)$在$x=x_0$处的导数的步骤：

①先求函数$f(x)$的导函数$f'(x)$；

②把$x=x_0$代入导函数$f'(x)$求相应的导数值$f'(x_0)$.

应用迁移

1.求函数$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$在$x=1$处的导数.

解：因为$f'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)'=(x^{-\frac{1}{3}})'=-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}=-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$，

所以$f'(1)=-\frac{1}{3\sqrt[3]{1}}=-\frac{1}{3}$.

2.求函数 $f(x)=\cos x$ 在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处的导数.

解:因为 $f'(x)=-\sin x$,

所以 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

任务3 综合应用导数公式解决问题

探究活动

例3　已知曲线 $y=\ln x$,点 $P(e,1)$ 是曲线上一点,求曲线在点 P 处的切线的方程.

解:因为 $y'=\frac{1}{x}$,所以切线斜率 $k=y'|_{x=e}=\frac{1}{e}$,

所以切线方程为 $y-1=\frac{1}{e}(x-e)$,即 $x-ey=0$.

[一题多思]

思考1.已知 $y=kx+1$ 是曲线 $y=\ln x$ 的一条切线,求实数 k 的值.

解:设切点坐标为 (x_0,y_0),由题意得 $y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}=k$.

又 $y_0=kx_0+1$,$y_0=\ln x_0$,解得 $y_0=2$,$x_0=e^2$.

所以 $k=\frac{1}{e^2}$.

思考2.求曲线 $y=\ln x$ 过点 $O(0,0)$ 的切线的方程.

解:因为 $O(0,0)$ 不在曲线 $y=\ln x$ 上,

所以设切点为 $Q(x_0,y_0)$,则切线的斜率 $k=\frac{1}{x_0}$.

又切线的斜率 $k=\frac{y_0-0}{x_0-0}=\frac{\ln x_0}{x_0}$,所以 $\frac{\ln x_0}{x_0}=\frac{1}{x_0}$,

即 $x_0=e$,所以 $Q(e,1)$,所以 $k=\frac{1}{e}$.

所以切线方程为 $y-1=\frac{1}{e}(x-e)$,即 $x-ey=0$.

【探究总结】

求曲线方程或切线方程时的注意点

(1)切点是曲线与切线的公共点,切点坐标既满足曲线方程也满足切线方程.

(2)曲线在点 (x_0,y_0) 处的切线的斜率,即对应函数在 $x=x_0$ 处的导数.

(3)必须明确已知点是不是切点,如果不是,应先设出切点.

应用迁移

1.已知曲线 $y=\frac{1}{x}$.

(1)求曲线在点 $P(1,1)$ 处的切线的方程;

(2)求曲线过点 $Q(1,0)$ 的切线的方程.

解:(1)因为点 $P(1,1)$ 在曲线 $y=\frac{1}{x}$ 上,且 $y'=-\frac{1}{x^2}$,

所以曲线在点 $P(1,1)$ 处的切线的斜率 $k=y'|_{x=1}=-1$.

所以曲线在点 $P(1,1)$ 处的切线的方程为 $y-1=-(x-1)$,即 $x+y-2=0$.

(2)设曲线 $y=\frac{1}{x}$ 过点 $Q(1,0)$ 的切线与曲线相切于点 $A\left(x_0,\frac{1}{x_0}\right)$,

则切线的斜率 $k=-\frac{1}{x_0^2}$,

所以切线方程为 $y-\frac{1}{x_0}=-\frac{1}{x_0^2}(x-x_0)$.

因为点 $Q(1,0)$ 在切线上,

所以 $-\frac{1}{x_0}=-\frac{1}{x_0^2}(1-x_0)$,解得 $x_0=\frac{1}{2}$,

故所求的切线方程为 $4x+y-4=0$.

2.求过曲线 $f(x)=\cos x$ 上一点 $P\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$ 且与曲线在这点处的切线垂直的直线的方程.

解:因为 $f(x)=\cos x$,

所以 $f'(x)=-\sin x$.

所以曲线 $f(x)=\cos x$ 在点 $P\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$ 处的切线的斜率为 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以所求直线的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

所求直线方程为 $y-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$,

即 $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi+\frac{1}{2}$.

课后素养评价(十五)

基础落实

1.已知函数 $f(x)=\log_2 x$,其导函数为 $f'(x)$,则 $f'(1)=$　(　)

A.0　　B.1

C.$\ln 2$　　D.$\dfrac{1}{\ln 2}$

D　**解析**:因为 $f(x)=\log_2 x$,所以 $f'(x)=(\log_2 x)'=\dfrac{1}{x\ln 2}$,所以 $f'(1)=\dfrac{1}{\ln 2}$.

2.已知函数 $f(x)=x^3$,$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数,若 $f'(x_0)=12$,则 $x_0=$　(　)

A.2　　B.-2

C.± 2　　D.$\pm\sqrt{2}$

C　**解析**:由题意,$f'(x)=3x^2$.因为 $f'(x_0)=3x_0^2=12$,所以 $x_0=\pm 2$.故选 C.

3.已知函数 $f(x)$ 为 **R** 上的奇函数,当 $x>0$ 时,$f(x)=x^2$,则 $f'(-1)=$　(　)

A.-2　　B.-1　　C.1　　D.2

D　**解析**:(方法一)设 $x<0$,则 $-x>0$.

所以 $f(-x)=(-x)^2=x^2$.又 $f(-x)=-f(x)$,

所以 $f(x)=-x^2(x<0)$.

所以当 $x<0$ 时,$f'(x)=-2x$,所以 $f'(-1)=-2\times(-1)=2$.

故选 D.

(方法二)因为当 $x>0$ 时,$f(x)=x^2$,则 $f'(x)=2x$,所以 $f'(1)=2$.

又因为 $f(x)$ 为 **R** 上的奇函数,所以 $f'(x)$ 为 **R** 上的偶函数,所以 $f'(-1)=f'(1)=2$.

故选 D.

4.曲线 $y=e^x$ 在点(0,1)处的切线与 y 轴交点的纵坐标是　(　)

A.e　　B.1

C.-1　　D.$-e$

B　**解析**:因为 $y'=e^x$,所以 $y'|_{x=0}=e^0=1$,所以切线方程为 $y-1=x$,即 $y=x+1$,令 $x=0$,则 $y=1$.

5.若曲线 $y=\sqrt{x}$ 在点(1,1)处的切线与直线 $y=kx$ 平行,则实数 $k=$　(　)

A.-2　　B.$-\dfrac{1}{2}$

C.$\dfrac{1}{2}$　　D.1

C　**解析**:由 $y=\sqrt{x}$,得 $y'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.因为曲线 $y=\sqrt{x}$ 在点(1,1)处的切线与直线 $y=kx$ 平行,所以 $k=y'|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$.故选 C.

6.设函数 $f(x)=\cos x$,$0<x_1<x_2<\pi$,若 $f'(x_1)=f'(x_2)$,则 $\cos(x_1+x_2)=$_____.

-1　**解析**:由于 $f'(x)=-\sin x$,由题得 $\sin x_1=\sin x_2$,

又 $0<x_1<x_2<\pi$,所以 $x_2=\pi-x_1$,

所以 $\cos(x_1+x_2)=\cos\pi=-1$.

7.已知直线 $y=kx$ 是曲线 $y=3^x$ 的切线,则 k 的值为_____.

$e\ln 3$　**解析**:设切点为 (x_0,y_0).

因为函数 $y=3^x$ 的导函数为 $y'=3^x\ln 3$,

所以 $k=3^{x_0}\ln 3$,

所以 $y=kx$ 化为 $y=(3^{x_0}\ln 3)\cdot x$.

又因为 (x_0,y_0) 在曲线 $y=3^x$ 上,

所以 $(3^{x_0}\ln 3)\cdot x_0=3^{x_0}$,

所以 $x_0=\dfrac{1}{\ln 3}=\log_3 e$.

所以 $k=e\ln 3$.

8.求下列函数的导数.

(1)$y=x\sqrt{x}$;

(2)$y=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$.

解:(1)因为 $y=x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}$,所以 $y'=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

(2)因为 $y=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=\sin x$,所以 $y'=\cos x$.

能力提升

1.已知 $f(x)=x^m(m\in\mathbf{Q}$,且 $m\neq 0)$,若 $f'(-1)=-2$,则 $m=$　(　)

A.2　　B.-2　　C.3　　D.-3

A　**解析**:$f'(x)=mx^{m-1}$,因为 $f'(-1)=-2$,所以 $m\times(-1)^{m-1}=-2$.若 $(-1)^{m-1}=-1$,则 $-m=-2$,解得 $m=2$,符合题意;若 $(-1)^{m-1}=1$,则 $m=-2$,不满足 $(-1)^{m-1}=1$,故舍去.综上所述,$m=2$.

故选 A.

2.(多选)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3,x<0,\\ \ln x,0<x<1,\end{cases}$ 若 $f'(a)=12$,则实数 a 的值可能为　　(　　)

A.2　　B.-2　　C.$\frac{1}{12}$　　D.4

BC　**解析**:对于 $f(x)=\begin{cases}x^3,x<0,\\ \ln x,0<x<1,\end{cases}$ 易知 $f'(x)=\begin{cases}3x^2,x<0,\\ \frac{1}{x},0<x<1.\end{cases}$ 当 $a<0$ 时,由 $f'(a)=3a^2=12$,解得 $a=-2$;当 $0<a<1$ 时,由 $f'(a)=\frac{1}{a}=12$,解得 $a=\frac{1}{12}$.故选 BC.

3.已知正弦曲线 $y=\sin x$ 上一点 P,直线 l 是曲线以点 P 为切点的切线,则直线 l 的倾斜角的取值范围是　　(　　)

A.$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

B.$[0,\pi)$

C.$\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$

D.$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$

A　**解析**:因为 $y'=\cos x$,而 $\cos x\in[-1,1]$.

所以直线 l 的斜率的取值范围是 $[-1,1]$,

所以直线 l 的倾斜角的取值范围是 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$.

4.若曲线 $y=x^{-\frac{1}{2}}$ 在点 $(a,a^{-\frac{1}{2}})$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积为 18,则 $a=$　　(　　)

A.64　　B.32　　C.16　　D.8

A　**解析**:因为 $y'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$,

所以曲线 $y=x^{-\frac{1}{2}}$ 在点 $(a,a^{-\frac{1}{2}})$ 处的切线方程为 $y-a^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}(x-a)$.

令 $x=0$,得 $y=\frac{3}{2}a^{-\frac{1}{2}}$;令 $y=0$,得 $x=3a$.

所以 $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}a^{-\frac{1}{2}}\cdot 3a=18$,解得 $a=64$.

5.我国古代数学家刘徽利用"割圆术",进行"以直代曲"的近似计算,用正 n 边形进行"内外夹逼"的办法求出了圆周率 π 的精度较高的近似值.借用"以直代曲"的近似计算方法,在切点附近,可以用曲线的切线代替切点附近的曲线来近似计算.设 $f(x)=\ln x$,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线的方程为_____,用此结论近似计算 $\sqrt[4\,000]{\mathrm{e}}$ 的值为_____.(结果用分数表示)

$y=x-1$　$\frac{4\,001}{4\,000}$　**解析**:由题得 $f'(x)=\frac{1}{x}$,$f'(1)=1$,所以切线方程为 $y=x-1$.设 $\sqrt[4\,000]{\mathrm{e}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{4\,000}}=x$,则 $\ln x=\frac{1}{4\,000}$.由切线方程得,得 $\frac{1}{4\,000}=x-1$,$x=1+\frac{1}{4\,000}=\frac{4\,001}{4\,000}$,所以 $\sqrt[4\,000]{\mathrm{e}}\approx\frac{4\,001}{4\,000}$.

6.曲线 $f(x)=x^2$ 上任意一点 P 到直线 $y=x-1$ 的最短距离是_____.

$\frac{3\sqrt{2}}{8}$　**解析**:与直线 $y=x-1$ 平行的曲线 $f(x)=x^2$ 的切线的切点到直线 $y=x-1$ 的距离最短.设切点为 (x_0,y_0),则 $f'(x_0)=2x_0=1$,

所以 $x_0=\frac{1}{2}$,$y_0=\frac{1}{4}$.即 $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ 到直线 $y=x-1$ 的距离最短.

所以最短距离为 $d=\frac{\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-1\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$.

7.已知函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x,x\leqslant 0,\\ \ln x,x>0,\end{cases}$ 过原点 $O(0,0)$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线,则切线方程为_____.

$x-\mathrm{e}y=0$　**解析**:当 $x\leqslant 0$ 时,函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$,可得 $f'(x)=\mathrm{e}^x$.

设切点为 $P(x_0,y_0)$,则 $f'(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}$,

所以切线方程为 $y-\mathrm{e}^{x_0}=\mathrm{e}^{x_0}(x-x_0)$.

因为切线过原点 $O(0,0)$,可得 $-\mathrm{e}^{x_0}=-x_0\mathrm{e}^{x_0}$,解得 $x_0=1$,不符合题意,舍去;

当 $x>0$ 时,函数 $f(x)=\ln x$,可得 $f'(x)=\frac{1}{x}$.

设切点为 $Q(x_1,y_1)$,则 $f'(x_1)=\frac{1}{x_1}$,

所以切线方程为 $y-\ln x_1=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$.

因为切点过原点 $O(0,0)$,可得 $\ln x_1=1$,解得 $x_1=\mathrm{e}$,

此时切线方程为 $y-1=\frac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})$,即 $x-\mathrm{e}y=0$.

8.(新定义)已知函数 $f(x)$ 的导数为 $f'(x)$,若存在 x_0 使得 $f(x_0)=f'(x_0)$,则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个"巧值点".下列函数中有"巧值点"的是_____.(填序号)

①$f(x)=\mathrm{e}^x$;②$f(x)=\ln x$;③$f(x)=\sin x$;④$f(x)=\sqrt{x}$.

①②③④　**解析**：①中，$f'(x)=e^x$，因为 $f(x)=f'(x)$，所以 $f(x)$ 有无数个“巧值点”；②中，$f'(x)=\frac{1}{x}$，令 $g(x)=\ln x-\frac{1}{x}(x>0)$，易知 $g(x)$ 的图象为 $(0,+\infty)$ 上一条连续不间断的曲线，且 $g(1)=-1<0$，$g(e)=1-\frac{1}{e}>0$，由函数零点存在定理，可知 $g(x)$ 在 $(1,e)$ 上必有零点，所以 $f(x)$ 有“巧值点”；③中，$f'(x)=\cos x$，由 $\sin x=\cos x$，得 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)$ 有“巧值点”；④中，$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，因为 $\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 有实数解，所以 $f(x)$ 有“巧值点”.

9. 已知函数 $f(x)=x^2$.

(1)求 $f(x)$ 在区间 $[2\ 024,2\ 025]$ 上的平均变化率；

(2)求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线的方程；

(3)求曲线 $y=f(x)$ 过点 $(2,0)$ 的切线的方程.

解：(1)$f(x)$ 在区间 $[2\ 024,2\ 025]$ 上的平均变化率为 $\frac{f(2\ 025)-f(2\ 024)}{2\ 025-2\ 024}=\frac{2\ 025^2-2\ 024^2}{2\ 025-2\ 024}=4\ 049$.

(2)因为 $f(x)=x^2$，所以 $f'(x)=2x$，所以 $f(2)=4$，$f'(2)=4$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线的方程为 $y-4=4(x-2)$，即 $4x-y-4=0$.

(3)设切点为 $P(t,t^2)$，

则切线方程为 $y-t^2=2t(x-t)$，又切线过点 $(2,0)$，所以 $-t^2=2t(2-t)$，解得 $t=0$ 或 $t=4$.

所以所求切线方程为 $y=0$ 或 $y-16=8(x-4)$，即 $y=0$ 或 $8x-y-16=0$.

自我超越

1. 记 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，$g(x)$ 是 $f'(x)$ 的导函数，若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的曲率 $K=|g(x_0)|\cdot\{1+[f'(x_0)]^2\}^{-\frac{3}{2}}$，则曲线 $y=f(x)=x^3$ 在点 $\left(\frac{2}{3},\frac{8}{27}\right)$ 处的曲率为　(　　)

A.$\frac{16}{27}$　　B.$\frac{27}{16}$　　C.$\frac{108}{125}$　　D.$\frac{125}{108}$

C　**解析**：由题意得 $f'(x)=3x^2$，$g(x)=6x$，则 $f'\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$，$g\left(\frac{2}{3}\right)=4$，则曲线 $y=f(x)=x^3$ 在点 $\left(\frac{2}{3},\frac{8}{27}\right)$ 处的曲率 $K=4\times\left[1+\left(\frac{4}{3}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}=\frac{108}{125}$.

故选 C.

2. 拉格朗日中值定理是微分学的基本定理之一，内容为：如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的图象连续不间断，在开区间 (a,b) 内的导数为 $f'(x)$，那么在区间 (a,b) 内至少存在一点 c，使得 $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ 成立，其中 c 叫做 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的“拉格朗日中值点”.根据这个定理，可得函数 $f(x)=\ln x$ 在 $[1,e]$ 上的“拉格朗日中值点”为_____.

e−1　**解析**：因为 $f(x)=\ln x$，$f'(x)=\frac{1}{x}$，根据拉格朗日中值定理得 $f(e)-f(1)=f'(c)(e-1)$，即 $1=\frac{1}{c}(e-1)$，可得 $c=e-1$.

5.2.2　导数的四则运算法则

学习任务目标

1. 掌握导数的四则运算法则.

2. 利用导数的四则运算法则解决有关问题.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点　导数的四则运算法则

(1)$[f(x)\pm g(x)]'=$_____.

(2)$[f(x)g(x)]'=$_____.

特别地，当 $g(x)=c$（c 为常数）时，

$[cf(x)]'=$_____.

(3)$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=$_____$(g(x)\neq0)$.

【概念辨析】

1. 判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)已知函数 $y=2\sin x-\cos x$，则 $y'=2\cos x+\sin x$.　(　　)

√　**提示**：若 $y=2\sin x-\cos x$，

则 $y'=(2\sin x)'-(\cos x)'=2\cos x+\sin x$.

(2)已知函数 $f(x)=(x+1)(x+2)$，则 $f'(x)=2x+1$.　(　　)

× **提示**:因为 $f(x)=(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$,所以 $f'(x)=2x+3$.

2.(多选)下列求导运算正确的有　　(　　)

A.$\left(x+\frac{1}{x^2}\right)'=1-\frac{1}{x^3}$

B.$(\log_2 x)'=\frac{1}{x\ln 2}$

C.$(x\ln x)'=\ln x+1$

D.$(3^x)'=3^x\log_3 e$

BC　**解析**:$\left(x+\frac{1}{x^2}\right)'=1-\frac{2}{x^3}$,$(\log_2 x)'=\frac{1}{x\ln 2}$,$(x\ln x)'=\ln x+1$,$(3^x)'=3^x\ln 3$,故A,D错误,B,C正确.

3.请思考并回答下列问题:

(1)两个可导函数的和差求导运算法则可推广到有限个函数的和差的导数运算吗?

(2)如果 $f(x)$,$g(x)$都是可导函数,且 $f(x)\neq 0$,那么下列关系式成立吗?

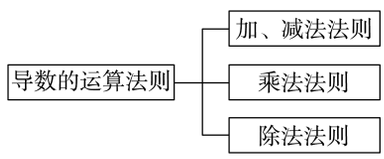
①$[af(x)+bg(x)]'=af'(x)+bg'(x)$($a$,$b$ 为常数);

②$\left[\frac{1}{f(x)}\right]'=-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$.

(1)**提示**:可以.$[u(x)\pm v(x)\pm\cdots\pm w(x)]'=u'(x)\pm v'(x)\pm\cdots\pm w'(x)$.

(2)**提示**:由导数的运算法则可知,这两个关系式都成立.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 利用导数的加法与减法运算法则求导

求下列函数的导函数:

(1)$f(x)=-2x^3+4x^2$;

(2)$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax+1(a>0)$;

(3)$f(x)=x+\cos x$,$x\in(0,1)$;

(4)$f(x)=-x^2+3x-\ln x(x>0)$.

解:(1)因为 $f(x)=-2x^3+4x^2$,

所以 $f'(x)=(-2x^3+4x^2)'=(-2x^3)'+(4x^2)'=-6x^2+8x$.

(2)因为 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax+1(a>0)$,

所以 $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+ax+1\right)'=\left(\frac{1}{3}x^3\right)'-(x^2)'+(ax)'+1'=x^2-2x+a$.

(3)因为 $f(x)=x+\cos x$,$x\in(0,1)$,

所以 $f'(x)=(x+\cos x)'=(x)'+(\cos x)'=1-\sin x$,$x\in(0,1)$.

(4)因为 $f(x)=-x^2+3x-\ln x(x>0)$,

所以 $f'(x)=(-x^2+3x-\ln x)'=(-x^2)'+(3x)'-(\ln x)'=-2x+3-\frac{1}{x}$,$x>0$.

【探究总结】

利用导数加法与减法法则求导的策略

先分析每一部分是哪种类型的基本初等函数,确定基本公式,再用导数运算的加法与减法法则求导.

任务2 利用导数的乘法与除法运算法则求导

探究活动

例1　(教材P77例4改编)求下列函数的导数:

(1)$f(x)=xe^x$;

(2)$f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$;

(3)$f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$;

(4)$f(x)=\cos^2\frac{x}{2}$.

解:(1)$f'(x)=x'\cdot e^x+x\cdot(e^x)'=e^x+xe^x=(1+x)e^x$.

(2)$f'(x)=\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'$

$=\frac{(2x)'(x^2+1)-2x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$.

(3)(方法一)

$f'(x)=\frac{(e^x+1)'(e^x-1)-(e^x+1)(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}$

$=\frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$.

(方法二)因为 $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}=1+\frac{2}{e^x-1}$,

所以 $f'(x)=\frac{2'(e^x-1)-2(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}=\frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$.

(4)$f(x)=\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x$,

所以 $f'(x)=\frac{1}{2}(-\sin x)=-\frac{1}{2}\sin x$.

【探究总结】

利用求导公式及法则解题的关注点

(1)熟记常见基本初等函数的求导公式是进行求导运算的前提.

(2)求导之前观察函数解析式的结构特点,看是否可以化简,再进行求导,可以避免反复使用求导法则,从而减少运算量.

(3)运算过程易出现失误的一个重要原因是不能正确理解求导法则,特别是商的求导法则.

(4)求导过程中对符号判断不清,也是导致错误的常见原因.

应用迁移

求下列函数的导数:

(1)$y=3x^2+x\sin x$;

(2)$y=(x^2+3)(e^x+\ln x)$;

(3)$y=\frac{x\ln x}{x+1}(x>0)$.

解:(1)$y'=(3x^2)'+(x\sin x)'=6x+\sin x+x(\sin x)'$
$=6x+\sin x+x\cos x$.

(2)$y'=(x^2+3)'(e^x+\ln x)+(x^2+3)(e^x+\ln x)'$
$=2x(e^x+\ln x)+(x^2+3)\left(e^x+\frac{1}{x}\right)$
$=e^x(x^2+2x+3)+2x\ln x+x+\frac{3}{x}$.

(3)$y'=\frac{(x\ln x)'(x+1)-x\ln x(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{(\ln x+1)(x+1)-x\ln x}{(x+1)^2}=\frac{\ln x+x+1}{(x+1)^2}$.

任务3 解决与切线有关的综合问题

探究活动

例2　已知曲线 $y=x\ln x$ 与直线 $2x-y-5=0$,曲线上是否存在一点 P,使曲线在点 P 处的切线与直线 $2x-y-5=0$ 平行?

解:存在.设 $P(x_0,y_0)$.因为 $y=x\ln x$,

所以 $y'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$.

所以曲线 $y=x\ln x$ 在点 P 处的切线的斜率 $k=1+\ln x_0$.

又 $k=2$,所以 $1+\ln x_0=2$,所以 $x_0=e$.

所以 $y_0=e\ln e=e$.

所以点 P 的坐标是(e,e).

[一题多思]

思考1.求曲线 $y=x\ln x$ 在 $x=e$ 处的切线的方程.

解:因为 $y=x\ln x$,所以 $y'=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$.

当 $x=e$ 时,$y=e$,故切点坐标为(e,e).

因为所求切线的斜率 $k=y'|_{x=e}=\ln e+1=2$,所以切线方程为 $y-e=2(x-e)$,即 $2x-y-e=0$.

思考2.求曲线 $y=x\ln x$ 上的点到直线 $x-y-2=0$ 的最短距离.

解:设曲线 $y=x\ln x$ 在点 (x_0,y_0) 处的切线与直线 $x-y-2=0$ 平行,则点 (x_0,y_0) 到直线 $x-y-2=0$ 的距离即为最短距离.

因为 $y'=\ln x+1$,所以 $y'|_{x=x_0}=\ln x_0+1=1$,解得 $x_0=1$,

所以 $y_0=0$,即切点坐标为(1,0).

所以切点(1,0)到直线 $x-y-2=0$ 的距离 $d=\frac{|1-0-2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

即曲线 $y=x\ln x$ 上的点到直线 $x-y-2=0$ 的最短距离是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【探究总结】

解决有关切线的问题的关注点

(1)此类问题往往涉及切点、切点处对应的导数、切线方程三个主要元素.

(2)准确利用求导公式求出导函数是解决此类问题的第一步,也是解题的关键,务必做到准确.

(3)分清已知点是否在曲线上,若不在曲线上,则要设出切点,这是解题时的易错点.另外有的点虽然在曲线上,但是经过该点的切线不一定只有一条,即该点有可能是切点,也可能是切线与曲线的交点,解题时注意不要漏解.

应用迁移

1.若曲线 $y=\frac{x+1}{x-1}$ 在点(3,2)处的切线与直线 $ax+y+1=0$ 垂直,则 a 等于　(　　)

A.2　　B.$\frac{1}{2}$　　C.$-\frac{1}{2}$　　D.-2

D　**解析**:因为 $y=\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$,

所以 $y'=-\frac{2}{(x-1)^2}$,

所以 $y=\frac{x+1}{x-1}$ 在 $x=3$ 处的导数为 $-\frac{1}{2}$.

所以 $-a\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$,即 $a=-2$.

2.已知函数 $f(x)=ax^2+bx+3(a\neq0)$,其导函数 $f'(x)=2x-8$.

(1)求 a,b 的值;

(2)设函数 $g(x)=e^x\sin x+f(x)$,求曲线 $y=g(x)$在$x=0$ 处的切线的方程.

解:(1)因为 $f(x)=ax^2+bx+3(a\neq0)$,

所以 $f'(x)=2ax+b$.

又知 $f'(x)=2x-8$,所以 $a=1$,$b=-8$.

(2)由(1)可知 $g(x)=e^x\sin x+x^2-8x+3$,

所以 $g'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x+2x-8$.

因为 $g'(0)=e^0\sin 0+e^0\cos 0+2\times0-8=-7$,

且 $g(0)=3$,所以曲线 $g(x)$在 $x=0$ 处的切线的方程为 $y-3=-7(x-0)$,即 $7x+y-3=0$.

课后素养评价(十六)

基础落实

1.函数 $f(x)=3^x+\ln 2$ 的导数为　　(　　)

A.$f'(x)=3^x\ln 3$

B.$f'(x)=3^x\ln 3+\frac{1}{2}$

C.$f'(x)=3^x+\frac{1}{2}$

D.$f'(x)=3^x$

A　**解析**:根据求导公式,得函数 $f(x)=3^x+\ln 2$ 的导数为 $f'(x)=3^x\ln 3$.故选 A.

2.已知函数 $f(x)=\frac{x^2}{\ln x}$,则 $f'(e)=$　　(　　)

A.1　　B.2

C.e　　D.2e

C　**解析**:因为 $f(x)=\frac{x^2}{\ln x}$,所以 $f'(x)=\frac{2x\ln x-x}{(\ln x)^2}$,则 $f'(e)=e$.故选 C.

3.设函数 $f(x)=x(x+1)(x+2)$,则$f'(0)=$(　　)

A.8　　B.4

C.2　　D.0

C　**解析**:由题可得 $f'(x)=(x+1)(x+2)+x[(x+1)(x+2)]'$,则 $f'(0)=1\times2=2$.故选 C.

4.已知函数 $f(x)=3f'(1)x-x^2+\ln x+\frac{1}{2}$,则 $f'(1)=$　　(　　)

A.1　　B.2

C.$\frac{1}{2}$　　D.$-\frac{1}{2}$

C　**解析**:因为 $f(x)=3f'(1)x-x^2+\ln x+\frac{1}{2}$,所以 $f'(x)=3f'(1)-2x+\frac{1}{x}$,所以 $f'(1)=3f'(1)-2\times1+\frac{1}{1}$,解得 $f'(1)=\frac{1}{2}$.故选 C.

5.(多选)下列求导运算正确的有　　(　　)

A.$\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)'=-\sin\frac{\pi}{7}$

B.$(x\ln x)'=\ln x+1$

C.$\left(\frac{x+1}{e^x}\right)'=\frac{-x}{e^x}$

D.$\left(\frac{1}{3}x^3-x+1\right)'=x^2-1$

BCD　**解析**:因为 $\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)'=0$,所以 A 错误;因为 $(x\ln x)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$,所以 B 正确;因为 $\left(\frac{x+1}{e^x}\right)'=\frac{e^x-(x+1)e^x}{(e^x)^2}=\frac{-x}{e^x}$,所以 C 正确;因为 $\left(\frac{1}{3}x^3-x+1\right)'=x^2-1$,所以 D 正确.故选 BCD.

6.(多选)函数 $f(x)$的导函数 $f'(x)$的图象关于 y 轴对称,则 $f(x)$的解析式可能为　　(　　)

A.$f(x)=3\cos x$

B.$f(x)=x^3+x$

C.$f(x)=x+\frac{1}{x}$

D.$f(x)=e^x+x$

BC　**解析**:对于 A,$f(x)=3\cos x$,其导函数 $f'(x)=-3\sin x$ 为奇函数,图象不关于 y 轴对称,不符合题意;对于 B,$f(x)=x^3+x$,其导函数 $f'(x)=3x^2+1$ 为偶函数,图象关于 y 轴对称,符合题意;对于 C,$f(x)=x+\frac{1}{x}$,其导函数 $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$为偶函数,图象关于 y 轴对称,符合题意;对于 D,$f(x)=e^x+x$,其导函数 $f'(x)=e^x+1$ 为非奇非偶函数,图象不关于 y 轴对称,不符合题意.故选 BC.

7.已知曲线 $y=e^x$ 在 $x=1$ 处的切线 l 恰好与曲线 $y=a+\ln x$ 相切,则实数 a 的值为_____.

2　**解析**:由 $y=e^x$ 得 $y'=e^x$,又切点为(1,e),故

$k=e$，切线 l 为 $y=ex$.

设 l 与曲线 $y=a+\ln x$ 的切点为 (x_0,ex_0)，$y'=\frac{1}{x}$，所以 $\frac{1}{x_0}=e$，解得切点为 $\left(\frac{1}{e},1\right)$，

所以 $a+\ln\frac{1}{e}=a-1=1$，解得 $a=2$.

8. 已知函数 $f(x)=ax\ln x$，$x\in(0,+\infty)$，其中 a 为实数，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.若 $f'(1)=3$，则 a 的值为_____.

3　**解析：** $f'(x)=a\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=a(1+\ln x)$.

由于 $f'(1)=a(1+\ln 1)=a$，又 $f'(1)=3$，所以 $a=3$.

9. 如果函数 $y=\frac{x^2+a^2}{x}(a>0)$ 在 $x=x_0$ 处的导数为 0，那么 x_0 等于_____.

$\pm a$　**解析：** $y'=\frac{2x\cdot x-(x^2+a^2)\cdot 1}{x^2}=\frac{x^2-a^2}{x^2}$.

由 $x_0^2-a^2=0$ 得 $x_0=\pm a$.

10. 求下列函数的导数.

(1) $y=x^3-2x+3$；

(2) $y=\frac{\ln x}{x}$；

(3) $f(x)=x^3\ln x$；

(4) $S(t)=3\sin t-6t+100$；

(5) $g(x)=x^4\cos x$.

解：(1) $y'=(x^3-2x+3)'=(x^3)'-(2x)'+3'=3x^2-2$.

(2) $y'=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot x'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

(3) $f'(x)=(x^3\ln x)'=(x^3)'\cdot\ln x+x^3\cdot(\ln x)'=3x^2\ln x+x^2$.

(4) $S'(t)=(3\sin t-6t+100)'=(3\sin t)'-(6t)'+100'=3\cos t-6$.

(5) $g'(x)=(x^4\cos x)'=(x^4)'\cdot\cos x+x^4\cdot(\cos x)'=4x^3\cos x-x^4\sin x$.

能力提升

1. 若 $f(x)=x^2-2x-4\ln x$，则 $f'(x)>0$ 的解集为　(　　)

A. $(0,+\infty)$　　B. $(-1,0)\cup(2,+\infty)$

C. $(2,+\infty)$　　D. $(-1,0)$

C　**解析：** 由题意得 $x>0$，因为 $f(x)=x^2-2x-4\ln x$，所以 $f'(x)=2x-2-\frac{4}{x}=\frac{2x^2-2x-4}{x}$，若 $f'(x)>0$，即 $\frac{2x^2-2x-4}{x}>0$，即 $x^2-x-2>0$，解得 $x>2$ 或 $x<-1$(舍去)，故不等式 $f'(x)>0$ 的解集为 $(2,+\infty)$.故选 C.

2. 设函数 $h(x)=\frac{f(x)+5}{g(x)}$，已知 $f(2)=5$，$f'(2)=3$，$g(2)=2$，$g'(2)=1$，则 $h'(2)=$　(　　)

A. -2　　B. -1

C. $\frac{1}{4}$　　D. 3

B　**解析：** 由已知可得 $h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)[f(x)+5]}{[g(x)]^2}$，

所以 $h'(2)=\frac{f'(2)g(2)-g'(2)[f(2)+5]}{[g(2)]^2}=\frac{6-10}{4}=-1$.故选 B.

3. (多选)已知曲线 $y=ae^x+x\ln x$ 在点 $(1,ae)$ 处的切线的方程为 $y=2x+b$，则　(　　)

A. $a=e$　　B. $a=e^{-1}$

C. $b=1$　　D. $b=-1$

BD　**解析：** 令 $f(x)=ae^x+x\ln x$，

则 $f'(x)=ae^x+\ln x+1$，$f'(1)=ae+1=2$，得 $a=\frac{1}{e}=e^{-1}$，$f(1)=ae=2+b$，可得 $b=-1$.

4. 曲线 $y=x\sin x$ 在点 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线与 x 轴、直线 $x=\pi$ 所围成的三角形的面积为　(　　)

A. $\frac{\pi^2}{2}$　　B. π^2

C. $2\pi^2$　　D. $\frac{1}{2}(2+\pi)^2$

A　**解析：** 由题易得曲线 $y=x\sin x$ 在点 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的方程为 $y=-x$，所围成的三角形的顶点为 $O(0,0)$，$A(\pi,0)$，$C(\pi,-\pi)$，所以三角形面积为 $\frac{\pi^2}{2}$.

5. 已知 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，$f(x)=\frac{x}{e^x}+2xf'(1)$，则 $f'(1)=$_____.

0　**解析：** 由题意可得，$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}+2f'(1)$，令 $x=1$，则 $f'(1)=\frac{1-1}{e}+2f'(1)$，解得 $f'(1)=0$.

6. 函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-4x,x<0,\\-\frac{1}{x}-\ln x,0<x<1.\end{cases}$ 若 $f'(a)=12$，则

实数 a 的值为_____.

$\frac{1}{4}$或-4　**解析**：由题意得 $f'(x)=\begin{cases}x^2-4,x<0,\\ \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x},0<x<1.\end{cases}$

因为 $f'(a)=12$，

所以 $\begin{cases}0<a<1,\\ \frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}=12\end{cases}$或$\begin{cases}a<0,\\ a^2-4=12,\end{cases}$解得 $a=\frac{1}{4}$或 $a=-4$.

7.（新定义）对于三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq0)$，定义：设 $f''(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的导数，若 $f''(x)=0$ 有实数解 x_0，则称点 $(x_0,f(x_0))$ 为函数 $y=f(x)$ 图象的“疑似拐点”. 已知 $f(x)=x^3-3x^2+2x-2$，则函数 $f(x)$ 图象的“疑似拐点”A 的坐标为_____.

$(1,-2)$　**解析**：因为 $f'(x)=3x^2-6x+2$，所以 $f''(x)=6x-6$.

令 $f''(x)=6x-6=0$，得 $x=1$，$f(1)=1-3+2-2=-2$. 所以“疑似拐点”A 的坐标为 $(1,-2)$.

8.已知 $f(x)=x^2+ax+b$，$g(x)=x^2+cx+d$，又 $f(2x+1)=4g(x)$，且 $f'(x)=g'(x)$，$f(5)=30$，求 $g(4)$.

解：由 $f(2x+1)=4g(x)$，得

$4x^2+2(a+2)x+(a+b+1)=4x^2+4cx+4d$，

所以 $a+2=2c$①，

$a+b+1=4d$②.

由 $f'(x)=g'(x)$，得 $2x+a=2x+c$，

所以 $a=c$③.

由①与③，得 $a=c=2$.

此时 $f(x)=x^2+2x+b$，

由 $f(5)=30$，得 $25+10+b=30$，

所以 $b=-5$. 再由②，得 $d=-\frac{1}{2}$.

从而 $g(x)=x^2+2x-\frac{1}{2}$，

故 $g(4)=16+8-\frac{1}{2}=\frac{47}{2}$.

自我超越

1. $f(x)$ 与 $g(x)$ 是定义在 **R** 上的两个可导函数，若 $f(x)$，$g(x)$ 满足 $f'(x)=g'(x)$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足　（　）

A. $f(x)=g(x)$

B. $f(x)=g(x)=0$

C. $f(x)-g(x)$ 为常数函数

D. $f(x)+g(x)$ 为常数函数

C　**解析**：由 $f'(x)=g'(x)$，得 $f'(x)-g'(x)=0$，即 $[f(x)-g(x)]'=0$，所以 $f(x)-g(x)=C$（C 为常数）. 故选 C.

2.已知 $f(x)$ 为偶函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=\ln(-x)+3x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,-3)$ 处的切线的方程是_____.

$2x+y+1=0$　**解析**：由 $f(x)$ 为偶函数，可得 $f(-x)=f(x)$. 当 $x<0$ 时，$f(x)=\ln(-x)+3x$；当 $x>0$ 时，$-x<0$，所以 $f(x)=f(-x)=\ln x-3x$，$f'(x)=\frac{1}{x}-3$，可得 $f(1)=\ln 1-3=-3$，$f'(1)=1-3=-2$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,-3)$ 处的切线的方程为 $y-(-3)=-2(x-1)$，即 $2x+y+1=0$.

5.2.3　简单复合函数的导数

学习任务目标

1.了解复合函数的概念.

2.理解复合函数的求导法则.

3.能求简单的复合函数的导数.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　复合函数的概念

一般地，对于两个函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$，如果通过中间变量 u，y 可以表示成 x 的函数，那么称这个函数为函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数，记作 $y=f(g(x))$.

知识点二　复合函数的求导法则

一般地，对于由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的函数 $y=f(g(x))$，它的导数与函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 的导数间的关系为 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$，即 y 对 x 的导数等于 y 对 u 的导数与 u 对 x 的导数的乘积.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)函数 $y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$ 与 $u=\sin x$ 复合而成的.　(　√　)

(2)研究函数 $y=2^{\ln x}$ 时,可引入中间变量 $u=\ln x$.　(　√　)

(3)若函数 $y=\ln(2x)$,则 $y'=\dfrac{1}{2x}$.　(　　)

×　**提示:**$y'=\dfrac{2}{2x}=\dfrac{1}{x}$.

(4)$y=x\cos x$ 是复合函数.　(　　)

×　**提示:**$y=x\cos x$ 是两个函数的积.

2.(多选)下列式子正确的有　(　　)

A.$\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)'=-\sin\dfrac{\pi}{6}$

B.$(e^{2x})'=2e^{2x}$

C.$(\sin 3x)'=3\cos x$

D.$[\ln(-x+1)]'=\dfrac{1}{x-1}$

BD　**解析:**$\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)'=0$,$(e^{2x})'=2e^{2x}$,$(\sin 3x)'=3\cos 3x$,$[\ln(-x+1)]'=\dfrac{-1}{-x+1}=\dfrac{1}{x-1}$,所以 B,D 正确.

3.请思考并回答下列问题:

(1)借助函数 $y=\ln(2x-1)$,说明如何分析一个复合函数是由哪些基本初等函数复合而成的.

(2)试用两种方法求函数 $y=\sin 2x$ 的导数,由此验证复合函数的求导法则.

(1)**提示:**计算自变量 $x=1$ 时 $y=\ln(2x-1)$ 的函数值,可分以下两步:

①计算 $2\times1-1=1$,用的函数是一次函数 $u=2x-1$;

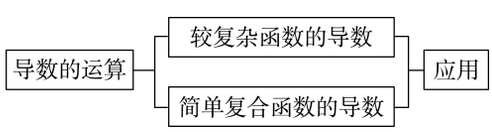
②计算 $y=\ln 1=0$,用的函数是对数函数 $y=\ln u$.

据此可知,函数 $y=\ln(2x-1)$ 是由内层一次函数 $u=2x-1$ 和外层对数函数 $y=\ln u$ 复合而成的.

(2)**提示:**(方法一)函数 $y=\sin 2x$ 可以看作函数 $y=\sin u$ 和 $u=2x$ 的复合函数,根据复合函数求导法则有 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=(\sin u)'\cdot(2x)'=2\cos u=2\cos 2x$.

(方法二)因为 $y=\sin 2x=2\sin x\cos x$,所以 $y'=2\cos^2 x-2\sin^2 x=2\cos 2x$.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 计算较复杂函数的导数

1.函数 $y=(1-\sqrt{x})\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ 的导数为_____.

$y'=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$　**解析:**因为 $y=(1-\sqrt{x})\cdot\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=1-\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1=x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}$,所以 $y'=(x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}})'=(x^{-\frac{1}{2}})'-(x^{\frac{1}{2}})'=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

2.函数 $y=\dfrac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$ 的导数为_____.

$y'=\sin x-\cos x$　**解析:**因为 $y=\dfrac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x-\cos x}=-\sin x-\cos x$,所以 $y'=(-\sin x-\cos x)'=\sin x-\cos x$.

3.函数 $y=\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ 的导数为_____.

$y'=\dfrac{2}{(1-x)^2}$　**解析:**因为 $y=\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-x}+\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\dfrac{2}{1-x}$,所以 $y'=\dfrac{2}{(1-x)^2}$.

【探究总结】

若待求导函数的解析式比较复杂,则需要对解析式先变形再求导,例如,将乘积式展开变为和式再求导,将商式变为乘积式再求导,将三角函数式恒等变形后再求导等.

任务2 计算复合函数的导数

探究活动

例1　求下列函数的导数:

(1)$y=(2x-1)^4$;

(2)$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$;

(3)$y=\sin\left(-2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$;

(4)$y=10^{2x+3}$.

解：(1)原函数可看作 $y=u^4$，$u=2x-1$ 的复合函数，则 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=(u^4)'\cdot(2x-1)'=4u^3\cdot 2=8(2x-1)^3$.

(2)$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}=(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$ 可看作 $y=u^{-\frac{1}{2}}$，$u=1-2x$ 的复合函数，

则 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=\left(-\dfrac{1}{2}\right)u^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2)=(1-2x)^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{(1-2x)\sqrt{1-2x}}$.

(3)原函数可看作 $y=\sin u$，$u=-2x+\dfrac{\pi}{3}$ 的复合函数，

则 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=\cos u\cdot(-2)=-2\cos\left(-2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=-2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

(4)原函数可看作 $y=10^u$，$u=2x+3$ 的复合函数，

则 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=10^{2x+3}\cdot\ln 10\cdot 2=(\ln 100)10^{2x+3}$.

【探究总结】

1.求复合函数的导数的步骤

分层——选择中间变量，写出内、外层函数

↓

分别求导——分别求各层函数对相应变量的导数

↓

相乘——把上述求导的结果相乘

↓

变量回代——把中间变量回代

2.求复合函数的导数的注意点

(1)分解得到的函数通常为基本初等函数；

(2)求导时分清是对哪个变量求导；

(3)计算结果尽量简洁.

应用迁移

求下列函数的导数：

(1)$y=\dfrac{x^2}{(2x+1)^3}$；

(2)$y=e^{-x}\sin 2x$；

(3)$y=\ln\sqrt{2x+1}-1$；

(4)$y=\cos(-2x)+3^{2x+1}$.

解：(1)因为 $y=\dfrac{x^2}{(2x+1)^3}$，所以 $y'=\dfrac{2x\cdot(2x+1)^3-x^2\cdot 3(2x+1)^2\cdot 2}{(2x+1)^6}=\dfrac{2x-2x^2}{(2x+1)^4}$.

(2)因为 $y=e^{-x}\sin 2x$，所以 $y'=-e^{-x}\sin 2x+2e^{-x}\cdot\cos 2x=e^{-x}(2\cos 2x-\sin 2x)$.

(3)因为 $y=\ln\sqrt{2x+1}-1=\dfrac{1}{2}\ln(2x+1)-1$，所以 $y'=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2x+1}\times(2x+1)'=\dfrac{1}{2x+1}$.

(4)因为 $y=\cos(-2x)+3^{2x+1}=\cos 2x+3^{2x+1}$，所以 $y'=-2\sin 2x+(2x+1)'3^{2x+1}\ln 3=-2\sin 2x+2\cdot 3^{2x+1}\ln 3$.

任务3 掌握复合函数求导数运算的应用

探究活动

例2　(教材P81练习题3改编)求曲线 $y=e^{-5x}$ 在点(0,1)处的切线的方程.

解：$y'=-5e^{-5x}$，曲线在点(0,1)处的切线的斜率 $k=y'|_{x=0}=-5$，故切线的方程为 $y-1=-5(x-0)$，即 $5x+y-1=0$.

[一题多思]

思考1.若直线 l 与直线 $5x+ey=0$ 平行且与本例中的曲线相切，求直线 l 的方程.

解：设切点为 (x_0,y_0)，因为 $y'=-5e^{-5x}$，由已知条件得 $-5e^{-5x_0}=-\dfrac{5}{e}$，整理得 $e^{-5x_0}=e^{-1}$，所以 $-5x_0=-1$，解得 $x_0=\dfrac{1}{5}$，所以 $y_0=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$.

故直线 l 的方程为 $y-\dfrac{1}{e}=-\dfrac{5}{e}\left(x-\dfrac{1}{5}\right)$，即 $5x+ey-2=0$.

思考2.将本例中的曲线方程改为“$y=e^{ax}$”，若此曲线在点(0,1)处的切线与直线 $x+2y+1=0$ 垂直，求实数 a 的值.

解：令 $y=f(x)$，则曲线 $y=e^{ax}$ 在点(0,1)处的切线的斜率为 $f'(0)$，又切线与直线 $x+2y+1=0$ 垂直，所以 $f'(0)=2$.因为 $f(x)=e^{ax}$，所以 $f'(x)=(e^{ax})'=e^{ax}\cdot(ax)'=ae^{ax}$，所以 $f'(0)=ae^0=a$，故 $a=2$.

【探究总结】

(1)求切线方程时的关键要素为切点，若切点已知便直接使用，若切点未知则需先设再求.两条直线平行与垂直的关系与直线的斜率密切相关，进而成为解出切点横坐标的关键条件.

(2)利用导数求参数的问题，能较全面地考查导数的应用，也能突出导数的工具性作用.

应用迁移

(多选)若直线 $y=\dfrac{1}{2}x+b$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条切线，则函数的解析式可以是　(　　)

A.$f(x)=\dfrac{1}{x}$

B.$f(x)=x^4$

C.$f(x)=\sin\dfrac{1}{2}x$

D.$f(x)=e^{2x}$

BCD　**解析**：直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 的斜率为 $k=\frac{1}{2}$.

$f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数为 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$，切线的斜率均小于 0，故 A 排除；

$f(x)=x^4$ 的导数为 $f'(x)=4x^3$，令 $4x^3=\frac{1}{2}$，解得 $x=\frac{1}{2}$，故 B 符合题意；

$f(x)=\sin\frac{1}{2}x$ 的导数为 $f'(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}$ 有解，故 C 符合题意；

$f(x)=e^{2x}$ 的导数为 $f'(x)=2e^{2x}$，令 $2e^{2x}=\frac{1}{2}$，解得 $x=-\ln 2$，故 D 符合题意.故选 BCD.

课后素养评价(十七)

基础落实

1.已知函数 $f(x)=e^{-2x+3}$，则 $f'(2)=$　(　)

A.2e　　B.e

C.$-\frac{1}{e}$　　D.$-\frac{2}{e}$

D　**解析**：设 $u=-2x+3$，$y=e^u$，则 $u'_x=-2$，$y'_u=e^u$，所以 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=-2e^u=-2e^{-2x+3}$，即 $f'(x)=-2e^{-2x+3}$，所以 $f'(2)=-2e^{-1}=-\frac{2}{e}$.故选 D.

2.函数 $y=\frac{1}{(3x-1)^2}$ 的导数是 $y'=$　(　)

A.$\frac{6}{(3x-1)^3}$　　B.$\frac{6}{(3x-1)^2}$

C.$-\frac{6}{(3x-1)^3}$　　D.$-\frac{6}{(3x-1)^2}$

C　**解析**：因为 $y=\frac{1}{(3x-1)^2}=(3x-1)^{-2}$，

所以 $y'=-2(3x-1)^{-3}\cdot(3x-1)'=\frac{-6}{(3x-1)^3}$.故选 C.

3.函数 $y=\sin 2x-\cos 2x$ 的导数是 $y'=$　(　)

A.$2\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

B.$\cos 2x+\sin x$

C.$\cos 2x-\sin 2x$

D.$2\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

A　**解析**：$y'=2\cos 2x+2\sin 2x=2\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

4.函数 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ 的导数是 $y'=$　(　)

A.$\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$　　B.$\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

C.e^x-e^{-x}　　D.e^x+e^{-x}

A　**解析**：$y'=\left(\frac{1}{2}e^x\right)'+\left(\frac{1}{2}e^{-x}\right)'=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}=\frac{1}{2}\cdot(e^x-e^{-x})$.

5.已知函数 $f(x)=\ln(3x)+4x$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$　(　)

A.5　　B.-5

C.-10　　D.10

C　**解析**：由题可得 $f'(x)=\frac{1}{x}+4$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=-2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-2\Delta x)-f(1)}{-2\Delta x}=-2f'(1)=-10$.故选 C.

6.曲线 $f(x)=x+e^{2x}$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线的方程为　(　)

A.$y=2x$　　B.$y=2x+1$

C.$y=3x$　　D.$y=3x+1$

D　**解析**：因为 $f(x)=x+e^{2x}$，所以 $f'(x)=1+2e^{2x}$，所以 $f'(0)=1+2=3$.

又 $f(0)=1$，所以曲线 $f(x)=x+e^{2x}$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线的方程为 $y=3x+1$.

故选 D.

7.若一质点的位移 s(单位：m)与时间 t(单位：s)的函数关系式为 $s(t)=\cos 2t$，则该质点在 $t=\frac{\pi}{6}$ s 时的瞬时速度为　(　)

A.$-\sqrt{3}$ m/s　　B.$\sqrt{3}$ m/s

C.$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ m/s　　D.$\frac{\sqrt{3}}{2}$ m/s

A　**解析**：设 $u=2t$，$y=\cos u$，则 $y'=-\sin u\cdot u'=-\sin 2t\cdot 2=-2\sin 2t$，即 $s'(t)=-2\sin 2t$.当 $t=\frac{\pi}{6}$ 时，$2t=2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$，则 $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $s'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$.故选 A.

8.函数 $f(x)=\sqrt{2x+1}$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=4$ 处的切线的斜率为_____.

$\frac{1}{3}$　**解析**：因为 $f(x)=\sqrt{2x+1}$，所以 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=4$ 处切线的斜率为 $f'(4)=\frac{1}{3}$.

9. 求下列函数的导数.

(1) $y=(x^2-4)^2$；

(2) $y=10^{3x-2}$；

(3) $y=\sqrt{2x-1}$；

(4) $y=\frac{\cos(2x+1)}{x}$；

(5) $y=\frac{x^2}{\cos 2x}$.

解：(1) $y'=2(x^2-4)(x^2-4)'=2(x^2-4)\cdot 2x=4x^3-16x$.

(2) $y'=(10^{3x-2}\ln 10)\cdot(3x-2)'=3\times 10^{3x-2}\times\ln 10=3\ln 10\times 10^{3x-2}$.

(3) $y'=\frac{1}{2\sqrt{2x-1}}\cdot(2x-1)'=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}=(2x-1)^{-\frac{1}{2}}$.

(4) $y'=\frac{[\cos(2x+1)]'\cdot x-\cos(2x+1)\cdot x'}{x^2}$

$=\frac{-2x\sin(2x+1)-\cos(2x+1)}{x^2}$

$=-\frac{2x\sin(2x+1)+\cos(2x+1)}{x^2}$.

(5) $y'=\left(\frac{x^2}{\cos 2x}\right)'$

$=\frac{(x^2)'\cos 2x-x^2(\cos 2x)'}{(\cos 2x)^2}$

$=\frac{2x\cos 2x-x^2(-2\sin 2x)}{(\cos 2x)^2}$

$=\frac{2x\cos 2x+2x^2\sin 2x}{(\cos 2x)^2}$.

能力提升

1. 已知函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$，则其导函数 $f'(x)$ 是　(　　)

A. 最小正周期为 2π 的奇函数

B. 最小正周期为 2π 的偶函数

C. 最小正周期为 π 的偶函数

D. 最小正周期为 π 的奇函数

D　**解析**：$f'(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin 2x$，最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，且为奇函数.

2. 随着科学技术的发展，放射性同位素已经广泛应用于医学、航天等众多领域，并取得了显著的经济效益. 假设在某种放射性同位素的衰变过程中，其含量 N（单位：贝克）与时间 t（单位：天）满足函数关系 $N(t)=N_0 2^{-\frac{t}{24}}$，其中 N_0 为 $t=0$ 时的含量. 已知 $t=24$ 时，含量的瞬时变化率为 $-8\ln 2$，则 $N(96)=$　(　　)

A. 12　　B. $12\ln 2$

C. 24　　D. $24\ln 2$

C　**解析**：由 $N(t)=N_0 2^{-\frac{t}{24}}$，得 $N'(t)=N_0 2^{-\frac{t}{24}}\times\ln 2\times\left(-\frac{1}{24}\right)$.

因为当 $t=24$ 时，$N'(24)=N_0 2^{-\frac{24}{24}}\times\ln 2\times\left(-\frac{1}{24}\right)=-8\ln 2$，解得 $N_0=384$，

所以 $N(t)=384\times 2^{-\frac{t}{24}}$，所以当 $t=96$ 时，$N(96)=384\times 2^{-\frac{96}{24}}=384\times 2^{-4}=24$.

3. (多选) 下列说法正确的有　(　　)

A. 若 $f(x)=x\sin x+\cos 2x$，则 $f'(x)=\sin x-x\cos x+2\sin 2x$

B. 设函数 $f(x)=x\ln x$，若 $f'(x_0)=2$，则 $x_0=e$

C. 已知函数 $f(x)=3x^2e^{2x}$，则 $f'(1)=12e$

D. 设函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且 $f(x)=x^2+3xf'(2)+\ln x$，则 $f'(2)=-\frac{9}{4}$

BD　**解析**：对 A，$f'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin 2x$，故 A 错误；

对 B，$f'(x)=\ln x+1\Rightarrow f'(x_0)=\ln x_0+1=2\Rightarrow x_0=e$，故 B 正确；

对 C，$f(x)=3x^2e^{2x}\Rightarrow f'(x)=6xe^{2x}+6x^2e^{2x}\Rightarrow f'(1)=12e^2$，故 C 错误；

对 D，$f(x)=x^2+3xf'(2)+\ln x\Rightarrow f'(x)=2x+3f'(2)+\frac{1}{x}\Rightarrow f'(2)=-\frac{9}{4}$，故 D 正确.

4. 已知 $a>0$，$b>0$，若直线 $x-y-a=0$ 与曲线 $y=1+\ln(x+b-1)$ 相切，则 $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为　(　　)

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

C　**解析**：设切点为 (m,n)，由题得 $y'=\frac{1}{x+b-1}$，

所以切线的斜率 $k=\frac{1}{m+b-1}$，且 $n=1+\ln(m+b-1)$，

所以切线方程为 $y=\frac{1}{m+b-1}(x-m)+1+\ln(m+b-1)$，

即 $y=\frac{1}{m+b-1}\cdot x+\frac{b-1}{m+b-1}+\ln(m+b-1)$，与 $y=x-a$ 相同，

所以 $\begin{cases}\frac{1}{m+b-1}=1,\\ \frac{b-1}{m+b-1}+\ln(m+b-1)=-a,\end{cases}$ 整理得 $a+b=1$，

所以 $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=5+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{4b}{a}\times\frac{a}{b}}=9$，

当且仅当 $a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{1}{3}$ 时，$\frac{4}{a}+\frac{1}{b}$ 取得最小值 9.

故选 C.

5.（多选）若直线 $y=-x+m$ 是曲线 $y=2x^2+3x+4$ 与曲线 $y=-e^{x+n}$ 的公切线，则（　　）

A. $m=-1$　　B. $m=2$

C. $n=3$　　D. $n=-3$

BD　**解析**：令 $f(x)=2x^2+3x+4$，则 $f'(x)=4x+3$.

令 $f'(x)=4x+3=-1$，有 $x=-1$，则 $f(-1)=2-3+4=3$，

所以切线方程为 $y-3=-(x+1)$，即 $y=-x+2$，故 $m=2$.

令 $g(x)=-e^{x+n}$，则 $g'(x)=-e^{x+n}$，

令 $g'(x)=-e^{x+n}=-1$，有 $x=-n$，则 $g(-n)=-e^0=-1$，

所以切线方程为 $y+1=-(x+n)$，即 $y=-x-n-1$，故有 $-n-1=2$，即 $n=-3$.

故选 BD.

6.曲线 $y=f(x)=(2x-2)^3$ 在点 $(2,8)$ 处的切线与 x 轴、直线 $x=2$ 所围成的三角形的面积是_____.

$\frac{4}{3}$　**解析**：设 $u=2x-2$，则 $f'(x)=(u^3)'\cdot u'=6(2x-2)^2$，所以 $f'(2)=6\times(4-2)^2=24$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,8)$ 处的切线的方程为 $y-8=24(x-2)$，即 $24x-y-40=0$.

所以切线与 x 轴的交点是 $\left(\frac{5}{3},0\right)$，与直线 $x=2$ 的交点是 $(2,8)$，

所以所围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times\left|2-\frac{5}{3}\right|\times 8=\frac{4}{3}$.

7.若曲线 $y=xe^{a-x}+bx$ 在 $x=2$ 处的切线方程为 $y=(e-1)x+4$，则 $a=$_____，$b=$_____.

2　e　**解析**：因为 $y=xe^{a-x}+bx$，

所以 $y'=(1-x)e^{a-x}+b$.

又曲线在 $x=2$ 处的切线的方程为 $y=(e-1)x+4$，

所以 $y'|_{x=2}=(1-2)e^{a-2}+b=e-1$，且 $2(e-1)+4=2e^{a-2}+2b$，

解得 $b=e$，$a=2$.

8.求函数 $y=\ln(2x+3)$ 的导数，并求函数图象在点 $\left(-\frac{1}{2},\ln 2\right)$ 处的切线的倾斜角.

解：令 $y=\ln u$，$u=2x+3$，

则 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=(\ln u)'\cdot(2x+3)'=\frac{1}{u}\cdot 2=\frac{2}{2x+3}$.

$y'|_{x=-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3-1}=1$，即函数图象在点 $\left(-\frac{1}{2},\ln 2\right)$ 处的切线的倾斜角的正切值为 1，所以倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$.

自我超越

1.曲线 $y=\ln(2x-1)$ 上的点到直线 $2x-y+8=0$ 的最短距离是（　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{5}$

C. $3\sqrt{5}$　　D. 0

B　**解析**：设曲线 $y=\ln(2x-1)$ 上的一点 $P(m,n)$，且过点 P 的切线与直线 $2x-y+8=0$ 平行.因为 $y'=\frac{2}{2x-1}$，所以切线的斜率为 $\frac{2}{2m-1}=2$，解得 $m=1$，$n=\ln(2-1)=0$.所以点 $P(1,0)$ 到直线 $2x-y+8=0$ 的距离最短是 $d=\frac{|2+8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}$.

故选 B.

2.已知函数 $f(x)$ 在 **R** 上可导，$F(x)=f(x^3-1)+f(1-x^3)$，则 $F'(1)=$_____.

0　**解析**：由题知 $F'(x)=3x^2f'(x^3-1)-3x^2f'(1-x^3)$，则 $F'(1)=3f'(0)-3f'(0)=0$.

微专题培优（三）　公切线问题

公切线是同时与两条（或以上）曲线相切的直线，是高考高频考点，侧重考查导数的几何意义与转化思想.常见的考查类型如下：
(1)求公切线方程；(2)已知公切线求参数；(3)根据公切线条数求参数.

类型1 求公切线方程

例1　已知函数 $f(x)=x^2+x$ 与函数 $g(x)=\ln x+2x$.

(1)求曲线 $y=f(x)$ 在点(0,0)处的切线方程；

(2)求曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 在公共点处的公切线的方程.

解：(1)因为 $f(x)=x^2+x$，所以 $f'(x)=2x+1$，所以 $f'(0)=1$，

则曲线 $y=f(x)$ 在点(0,0)处的切线的方程为 $y=x$.

(2)设曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 的公切点为 $P(x_0,y_0)$.

因为 $f(x)=x^2+x$，$g(x)=\ln x+2x$，所以 $f'(x)=2x+1$，$g'(x)=\dfrac{1}{x}+2$.

令 $f'(x_0)=g'(x_0)$，即 $2x_0+1=\dfrac{1}{x_0}+2$，

得 $x_0=1$ 或 $x_0=-\dfrac{1}{2}$（舍），所以 $P(1,2)$，$f'(1)=3$，

所以所求公切线方程为 $y-2=3(x-1)$ 即 $3x-y-1=0$.

【规律方法】

求公切线方程的核心技法

(1)设切点，列方程：分别设出两条曲线上的切点坐标，利用“在切点处导数相等且均等于公切线斜率”与“切点坐标满足曲线方程”分别建立方程.

(2)联立求解关键量：联立上述方程，消元求解，得出切点的坐标（注意检验坐标的合理性），进而确定公切线的斜率.

(3)求得公切线方程：由求得的切点坐标及公切线斜率，求得公切线方程.

【对点训练】

1.若直线 l 是曲线 $y=f(x)=e^{x-1}$ 与 $y=g(x)=e^x-1$ 的公切线，则直线 l 的方程为　（　）

A.$y=x-1$　　B.$y=x$

C.$y=x+1$　　D.$y=ex$

B　**解析**：设直线 l 与 $y=f(x)$ 的切点坐标为 (x_1,y_1)，直线 l 与 $y=g(x)$ 的切点坐标为 (x_2,y_2).

由 $f'(x)=e^{x-1}$，$g'(x)=e^x$，得 $e^{x_1-1}=e^{x_2}$，所以 $x_1-1=x_2$.所以 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=e^{x_2}$，即 $\dfrac{e^{x_1-1}-e^{x_2}+1}{x_1-x_2}=e^{x_2}$.

由 $x_1-1=x_2$，可得 $\dfrac{e^{x_2}-e^{x_2}+1}{1}=e^{x_2}$，解得 $x_2=0$，所以 $y_2=e^0-1=0$，直线 l 的斜率为 $k=e^{x_2}=1$，所以直线 l 的方程为 $y=x$.故选 B.

2.已知函数 $f(x)=e^x-2$（e 为自然对数的底数），$g(x)=\ln x$.若直线 l 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象的公切线，则直线 l 的方程为　（　）

A.$y=ex-2$

B.$y=x-1$

C.$y=ex-2$ 或 $y=x-1$

D.$y=x-1$ 或 $y=ex$

C　**解析**：设直线 l 与 $f(x)$，$g(x)$ 图象的切点坐标分别为 $(x_1,e^{x_1}-2)$，$(x_2,\ln x_2)$.因为 $f'(x)=e^x$，$g'(x)=\dfrac{1}{x}$，所以 $e^{x_1}=\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{\ln x_2+2-e^{x_1}}{x_2-x_1}$，所以 $e^{x_1}=\dfrac{\ln e^{-x_1}+2-e^{x_1}}{e^{-x_1}-x_1}$，整理得 $(x_1-1)(e^{x_1}-1)=0$，解得 $\begin{cases}x_1=1,\\ x_2=\dfrac{1}{e}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=0,\\ x_2=1,\end{cases}$ 所以直线 l 的方程为 $y-(e-2)=e\times(x-1)$ 或 $y+1=1\times(x-0)$，即 $y=ex-2$ 或 $y=x-1$.故选 C.

类型2 已知公切线求参数

例2　(2024·新高考全国Ⅰ卷)若曲线 $y=e^x+x$ 在点(0,1)处的切线也是曲线 $y=\ln(x+1)+a$ 的切线，则 $a=$_____.

ln 2　**解析**：由 $y=e^x+x$ 得 $y'=e^x+1$，$y'|_{x=0}=e^0+1=2$，故曲线 $y=e^x+x$ 在点(0,1)处的切线的方程为 $y=2x+1$；由 $y=\ln(x+1)+a$ 得 $y'=\dfrac{1}{x+1}$，设切线与曲线 $y=\ln(x+1)+a$ 切于点 $(x_0,\ln(x_0+1)+a)$，由两曲线有公切线得 $y'=\dfrac{1}{x_0+1}=2$，解得 $x_0=-\dfrac{1}{2}$，则切点为 $\left(-\dfrac{1}{2},a+\ln\dfrac{1}{2}\right)$，切线方程为 $y=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+a+\ln\dfrac{1}{2}=2x+1+a-\ln 2$.根据两切线重合，得 $a-\ln 2=0$，解得 $a=\ln 2$.

【规律方法】

已知公切线求参数的三步法

(1)先求已知曲线切线方程，明确公切线的斜率；

(2)设另一曲线切点坐标,利用斜率相等与两切线重合列方程组;

(3)解方程组得参数值,并检验合理性,确保公切线存在.

【对点训练】

斜率为1的直线 l 与曲线 $y=\ln(x+a)$ 和圆 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 都相切,则实数 a 的值为　　(　　)

A.0或2　　B.-2或0

C.-1或0　　D.0或1

A　**解析**:设直线 l 的方程为 $y=x+b$,由直线 l 和圆 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 相切,可得 $\frac{|b|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,解得 $b=\pm1$.当 $b=1$ 时,设直线 $y=x+1$ 和曲线 $y=\ln(x+a)$ 相切于点 (m,n),根据导数的几何意义,得 $\frac{1}{m+a}=1$,又切点同时在直线和曲线上,则 $\begin{cases}n=m+1,\\n=\ln(m+a),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}n=0,\\m=-1,\\a=2,\end{cases}$ 此时直线 $y=x+1$ 和曲线 $y=\ln(x+2)$ 相切;当 $b=-1$ 时,同理可得 $a=0$,此时直线 $y=x-1$ 和曲线 $y=\ln x$ 相切.综上所述,$a=2$ 或 $a=0$.

类型3 根据公切线条数求参数

例3　已知直线 $l:ax-4y+3=0$ 是曲线 $C_1:y=3\sqrt{x}$ 和 $C_2:y=kx^2$ 的一条公切线.

(1)求实数 a,k 的值;

(2)过点 $(0,m)$ 可作曲线 $y=f(x)=x^{-k}-mx^2+\frac{a}{6}$ 的三条不同的切线,求实数 m 的取值范围.

解:(1)设直线 $ax-4y+3=0$ 与曲线 $y=3\sqrt{x}$ 的切点坐标为 $M(x_0,y_0)$.

因为 $y=3\sqrt{x}$,所以 $y'=\frac{3}{2\sqrt{x}}$.

又因为直线 l 的斜率为 $\frac{a}{4}$,所以 $\frac{3}{2\sqrt{x_0}}=\frac{a}{4}$①,

且点 $M(x_0,y_0)$ 同时在直线 $ax-4y+3=0$ 和曲线 $y=3\sqrt{x}$ 上,

所以 $\begin{cases}ax_0-4y_0+3=0,\\y_0=3\sqrt{x_0}\end{cases}$ ②,联立①②可得 $a=12$.

故直线 l 的方程为 $12x-4y+3=0$.

联立 $\begin{cases}12x-4y+3=0,\\y=kx^2,\end{cases}$ 可得 $kx^2-3x-\frac{3}{4}=0$.

又因为直线与曲线相切,所以 $\Delta=9+3k=0$,解得 $k=-3$.

(2)由(1)得 $f(x)=x^3-mx^2+2$,$f'(x)=3x^2-2mx$.

设切点为 $P(x_1,y_1)$,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_1,y_1)$ 处的切线的方程为

$y-(x_1^3-mx_1^2+2)=(3x_1^2-2mx_1)(x-x_1)$.

又因为切线过点 $(0,m)$,所以 $(x_1-1)[2x_1^2+(2-m)\cdot x_1+(2-m)]=0$,

所以方程 $2x^2+(2-m)x+2-m=0$ 有两个不相等的实数根,且不为1,所以 $\begin{cases}\Delta=(2-m)^2-4\times2\times(2-m)>0,\\6-2m\neq0,\end{cases}$ 解得 $m<-6$ 或 $2<m<3$ 或 $m>3$.

所以实数 m 的取值范围为 $\{m\mid m<-6$ 或 $2<m<3$ 或 $m>3\}$.

【规律方法】

由公切线条数求参数的核心技法

1.设切点,列方程:设出曲线的切点坐标,利用导数的几何意义与切线定义,建立包含参数与切点坐标的方程.

2.转化切线条数:将"过某点的切线条数"问题,等价转化为"关于切点横坐标的方程根的个数"问题,实现从几何到代数的关键转化.

3.分析根求范围:讨论转化后方程(常为二次或三次)根的分布情况,结合判别式、根与系数的关系等,列出关于参数的不等式(组)求解.

【对点训练】

已知函数 $f(x)=x^3-ax^2+\left(\frac{2}{3}a+1\right)x(a\in\mathbf{R})$,若曲线 $y=f(x)$ 存在两条垂直于 y 轴的切线,则 a 的取值范围为　　(　　)

A.$(-\infty,-1)$

B.$(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

C.$(3,+\infty)$

D.$(-1,3)$

B　**解析**:因为 $f(x)=x^3-ax^2+\left(\frac{2}{3}a+1\right)x(a\in\mathbf{R})$,所以 $f'(x)=3x^2-2ax+\left(\frac{2}{3}a+1\right)$,因为曲线 $y=f(x)$ 存在两条垂直于 y 轴的切线,所以关于 x 的方程 $3x^2-2ax+\left(\frac{2}{3}a+1\right)=0$ 有两个不等的实根,则 $\Delta=4a^2-12\left(\frac{2}{3}a+1\right)>0$,即 $a^2-2a-3>0$,解得 $a>3$ 或 $a<-1$,所以 a 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.故选B.

微专题培优集训（三）

1. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x}$，$g(x)=a\ln x$，$a\in\mathbf{R}$，若曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 相交，且在交点处有相同的切线，则 a 的值为（　　）

A. $\frac{e}{2}$　　B. e^2

C. e　　D. $2e$

A　**解析：** 因为 $f(x)=\sqrt{x}$，$g(x)=a\ln x$，所以 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$g'(x)=\frac{a}{x}(x>0)$. 令 $\sqrt{x}=a\ln x$，$\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{a}{x}$，解得 $a=\frac{e}{2}$. 故选 A.

2. 已知曲线 $y=x+\ln x$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与曲线 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 有且仅有一个公共点，则实数 a 的值是（　　）

A. -8　　B. 0

C. 0 或 8　　D. 8

D　**解析：** 由 $y=x+\ln x$，得 $y'=\frac{1}{x}+1$，所以 $y'|_{x=1}=2$，所以曲线 $y=x+\ln x$ 在 $(1,1)$ 处的切线方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $y=2x-1$. 又切线与曲线 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 有且仅有一个公共点，所以 $ax^2+(a+2)x+1=2x-1$ 只有一个解，整理得 $ax^2+ax+2=0$，当 $a=0$ 时，显然不成立，当 $a\neq0$ 时，只需 $\Delta=a^2-8a=0$，所以 $a=8$. 故选 D.

3. 若曲线 $y=\ln x(x>0)$ 与 $y=(x+a)^2$ 有一条斜率为 1 的公切线，则 $a=$（　　）

A. -1　　B. $-\frac{3}{4}$

C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{3}{4}$

B　**解析：** 设公切线与曲线 $y=\ln x$ 相切的切点为 (m,n)，$y=\ln x$ 的导数为 $y'=\frac{1}{x}$. 由切线的斜率为 1，可得 $\frac{1}{m}=1$，即 $m=1$，则切点为 $(1,0)$，切线的方程为 $y=x-1$. 与 $y=(x+a)^2$ 联立，可得 $x^2+(2a-1)x+a^2+1=0$，由 $\Delta=(2a-1)^2-4(a^2+1)=0$，解得 $a=-\frac{3}{4}$. 故选 B.

4. 已知函数 $f(x)=x\cdot\ln x$，$g(x)=ax^2-x(a\neq0)$. 若经过点 $A(1,0)$ 存在一条直线 l 与曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 都相切，则 $a=$（　　）

A. -1　　B. 1

C. 2　　D. 3

B　**解析：** 因为 $f(x)=x\ln x$，所以 $f'(x)=1+\ln x$，所以 $f'(1)=1+\ln 1=1$，所以直线 l 的斜率 $k=1$，所以曲线 $y=f(x)$ 在 $A(1,0)$ 处的切线方程为 $y=x-1$. 由 $\begin{cases}y=x-1,\\y=ax^2-x,\end{cases}$ 得 $ax^2-2x+1=0$，由 $\Delta=4-4a=0$，解得 $a=1$. 故选 B.

5. 若直线 l 是曲线 $y=\ln x-1$ 与 $y=\ln(x-1)$ 的公切线，则直线 l 的方程为（　　）

A. $y=x-2$　　B. $y=x$

C. $y=x+1$　　D. $y=ex$

A　**解析：** 由 $y=\ln x-1$，得 $y'=\frac{1}{x}$，由 $y=\ln(x-1)$，得 $y'=\frac{1}{x-1}$. 设直线 l 与曲线 $y=\ln x-1$ 相切于点 $(x_1,\ln x_1-1)$，与曲线 $y=\ln(x-1)$ 相切于点 $(x_2,\ln(x_2-1))$，则 $\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2-1}$，故 $x_1=x_2-1$，又 $\frac{\ln(x_2-1)-(\ln x_1-1)}{x_2-x_1}=\frac{1}{x_1}$，

解得 $x_1=1$，$x_2=2$，所以直线 l 过点 $(1,-1)$，且斜率为 1，即直线 l 的方程为 $y=x-2$. 故选 A.

6. 若函数 $f(x)=x^2-ax$ 与函数 $g(x)=\ln x+2x$ 的图象在公共点处有相同的切线，则实数 $a=$（　　）

A. -2　　B. -1

C. e　　D. $-2e$

B　**解析：** 设函数 $f(x)=x^2-ax$ 与函数 $g(x)=\ln x+2x$ 图象的公共点坐标为 (x_0,y_0)，又 $f'(x)=2x-a$，$g'(x)=\frac{1}{x}+2$，依题意得 $\begin{cases}x_0^2-ax_0=\ln x_0+2x_0,\\2x_0-a=\frac{1}{x_0}+2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_0^2+\ln x_0-1=0,\\a=2x_0-\frac{1}{x_0}-2.\end{cases}$ 令 $h(x)=x^2+\ln x-1$，显然函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $h(1)=0$，则当 $h(x)=0$ 时，$x=1$，因此在 $x_0^2+\ln x_0-1=0$ 中，$x_0=1$，此时 $a=-1$. 经检验 $a=-1$ 符合题意，所以 $a=-1$. 故选 B.

7. （多选）已知曲线 $C_1:y=f(x)=e^x+a$ 和曲线 $C_2:y=g(x)=\ln(x+b)+a^2(a,b\in\mathbf{R})$，若存在斜率为 1 的直线与 C_1，C_2 同时相切，则 b 的值可以为（　　）

A. $-e$　　B. $\frac{9}{4}$　　C. 2　　D. e

ABC　**解析：** 由题知 $f'(x)=e^x$，$g'(x)=\frac{1}{x+b}$，设

斜率为1的切线与曲线C_1,C_2上的切点横坐标分别为x_1,x_2,由题知$e^{x_1}=\frac{1}{x_2+b}=1$,解得$x_1=0$,$x_2=1-b$,则切点分别为$(0,a+1)$和$(1-b,a^2)$,则两点处的切线方程分别为$y=x+(a+1)$和$y=x+a^2-1+b$.依题意,可得$a+1=a^2-1+b$,则$b=2+a-a^2=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\leqslant\frac{9}{4}$.故$b$的取值范围是$\left(-\infty,\frac{9}{4}\right]$.故选ABC.

8.若函数$y=f(x)$和$y=g(x)$的图象有公共点P,且各自在点P处的切线l_1和l_2重合,则称重合的切线为两个函数图象在公共点P处的公切线.

(1)分别求函数$y=x^2$和$y=\frac{1}{x}$的图象在交点P处的切线方程;

(2)若函数$y=\ln x$和$y=ax^2$的图象在公共点P处存在公切线,求a的值及点P的坐标.

解:(1)联立$\begin{cases}y=x^2,\\y=\frac{1}{x},\end{cases}$解得$x=1$,所以交点坐标为$(1,1)$.

对$y=x^2$求导,可得$y'=2x$,当$x=1$时,得切线斜率$k_1=2\times1=2$,

所以切线方程为$y-1=2(x-1)$,即$2x-y-1=0$;

对$y=\frac{1}{x}=x^{-1}$求导,可得$y'=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$,当$x=1$时,得切线斜率$k_2=-1$,

所以切线方程为$y-1=-1(x-1)$,即$x+y-2=0$.

所以两函数图象在交点P处的切线方程分别为$2x-y-1=0$,$x+y-2=0$.

(2)设公共点P的坐标为(x_0,y_0),$x_0>0$.

对$y=\ln x$求导,可得$y'=\frac{1}{x}$,则图象在点P处的切线的斜率$k_1=\frac{1}{x_0}$.

对$y=ax^2$求导,可得$y'=2ax$,则图象在点P处的切线的斜率$k_2=2ax_0$.

因为两函数图象在公共点P处存在公切线,所以$k_1=k_2$,即$\frac{1}{x_0}=2ax_0$①.

又因为点P在两函数图象上,所以$\ln x_0=ax_0^2$②.

由①得$a=\frac{1}{2x_0^2}$,将其代入②可得$\ln x_0=\frac{1}{2x_0^2}\times x_0^2=\frac{1}{2}$,即$\ln x_0=\frac{1}{2}$,解得$x_0=\sqrt{e}$.

将$x_0=\sqrt{e}$代入①,得$\frac{1}{\sqrt{e}}=2a\sqrt{e}$,解得$a=\frac{1}{2e}$.

将$x_0=\sqrt{e}$代入$y=\ln x$,得$y_0=\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2}$.

所以$a=\frac{1}{2e}$,点P的坐标为$\left(\sqrt{e},\frac{1}{2}\right)$.

5.3　导数在研究函数中的应用

5.3.1　函数的单调性

第1课时　函数的单调性

学习任务目标

1.结合实例,借助几何直观了解函数的单调性与导数的关系.
2.能利用导数研究函数的单调性.
3.能求不超过三次的多项式函数的单调区间.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点　函数的单调性与导数

在区间(a,b)内,函数$y=f(x)$的单调性与其导数$f'(x)$的关系:

$f'(x)$的正负	$f(x)$的单调性
$f'(x)>0$	单调递增
$f'(x)<0$	单调递减

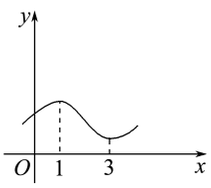
【概念辨析】

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)对于函数 $y=f(x)$，在区间 D 上，若 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在区间 D 上单调递减.　（ √ ）

(2)函数在某个区间上变化越快，函数在这个区间上的导数的绝对值越大.　（ √ ）

2.函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，则在区间(1,3)内，有（　　）



A. $f'(x)>0$　　B. $f'(x)<0$

C. $f'(x)=0$　　D. $f'(x)$ 的符号不确定

B　**解析**：在区间(1,3)内，函数 $y=f(x)$ 的图象是下降的，函数单调递减，所以 $f'(x)<0$.

3.请思考并回答下列问题：

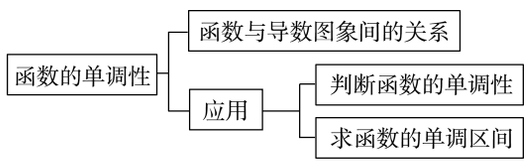
(1)如果在某个区间内恒有 $f'(x)=0$，那么函数 $y=f(x)$ 在这个区间内是什么函数？

(2)在区间 (a,b) 内，若 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在此区间上单调递增，反之也成立吗？

(1)**提示**：常数函数.

(2)**提示**：不一定成立. 比如 $y=x^3$ 在 **R** 上为增函数，但其在 $x=0$ 处的导数等于零，也就是说“$f'(x)>0$”是“$y=f(x)$ 在某个区间上单调递增”的充分不必要条件.

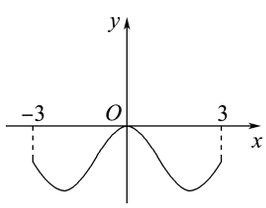
整体感知



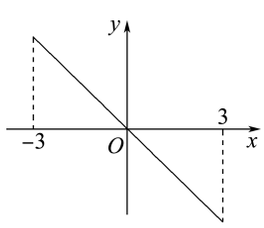
○ 任务型课堂 ○

任务1　辨析函数与导函数图象之间的关系

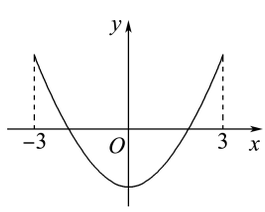
1.已知函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，则其导函数 $y=f'(x)$ 的图象可能是（　　）



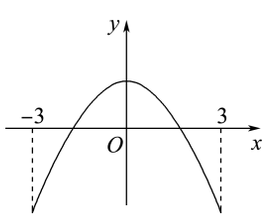
A



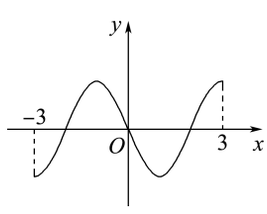
B



C

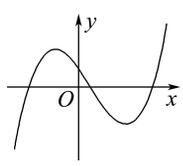


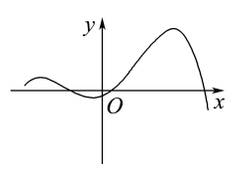
D



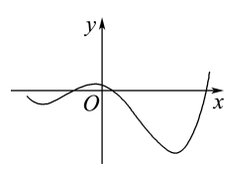
D　**解析**：原函数的图象在 $[-3,3]$ 上先减后增，再减再增，对应的导函数的值先负后正，再负再正，且原函数的图象在点(0,0)处与 x 轴相切，故 $f'(0)=0$，只有选项 D 的图象符合. 故选 D.

2.若函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示，则函数 $y=f(x)$ 的图象可能是（　　）

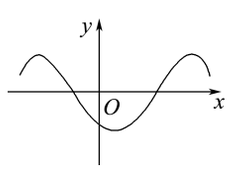




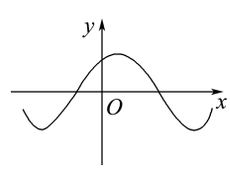
A



B



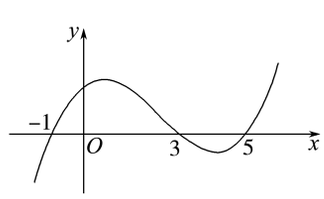
C



D

D　**解析**：根据已知导函数 $y=f'(x)$ 的图象可知，原函数先减再增，再减再增，且 $x=0$ 位于单调递增区间内. 故选 D.

3.（多选）已知函数 $f(x)$ 的导函数的图象如图所示，则（　　）



A. 函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增

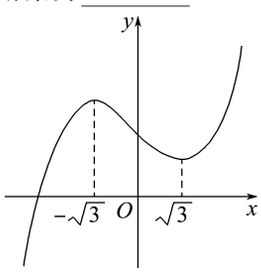
B. 函数 $y=f(x)$ 在 $(5,+\infty)$ 上单调递增

C. $f'(3)<f'(5)$

D. $f(-1)<f(3)$

BD　**解析**：当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)<0$，则函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，故 A 错误；同理，函数 $y=f(x)$ 在 $(5,+\infty)$ 上单调递增，故 B 正确；由题图可知，$f'(3)=f'(5)=0$，故 C 错误；函数 $y=f(x)$ 在 $[-1,3]$ 上单调递增，则 $f(-1)<f(3)$，故 D 正确.故选 BD.

4. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，其图象如图所示，$f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数，则不等式 $xf'(x)<0$ 的解集为_____.



$\{x\mid x<-\sqrt{3}$，或 $0<x<\sqrt{3}\}$　**解析**：由题图，知 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{3})$ 和 $(\sqrt{3},+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ 上单调递减.所以当 $x\in(-\infty,-\sqrt{3})$ 或 $x\in(\sqrt{3},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ 时，$f'(x)<0$.故不等式 $xf'(x)<0$ 的解集为 $\{x\mid x<-\sqrt{3}$，或 $0<x<\sqrt{3}\}$.

【探究总结】

研究函数图象与导函数图象关系的方法

研究一个函数的图象与导函数图象之间的关系时，注意抓住各自的关键要素.对于原函数，要注意其在哪个区间内单调递增，在哪个区间内单调递减；而对于导函数，则应注意其函数值在哪个区间内大于零，在哪个区间内小于零，并分析这些区间与原函数的单调区间是否一致.

任务 2　探究函数的单调性与导数的关系

探究活动

例 1　(1)关于函数 $y=x\ln x$ 在 $(0,5)$ 上的单调性，下列说法正确的是　(　　)

A.在 $(0,5)$ 上单调递增

B.在 $(0,5)$ 上单调递减

C.在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{e},5\right)$ 上单调递增

D.在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{e},5\right)$ 上单调递减

C　**解析**：$y'=\ln x+1$，令 $y'>0$，得 $x>\frac{1}{e}$，又 $x\in(0,5)$，故 $\frac{1}{e}<x<5$，令 $y'<0$，得 $0<x<\frac{1}{e}$，所以函数 $y=x\ln x$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{e},5\right)$ 上单调递增.故选 C.

(2)利用导数判断下列函数的单调性.

①$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x-5$；

②$f(x)=x-e^x(x>0)$.

解：①因为 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x-5$，$x\in\mathbf{R}$，

所以 $f'(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$，

所以函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x-5$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

②因为 $f(x)=x-e^x$，$x\in(0,+\infty)$，所以 $f'(x)=1-e^x<0$，所以 $f(x)=x-e^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

【探究总结】

运用导数研究函数单调性的方法

利用导数判断或证明函数的单调性时，一般是先确定函数的定义域，再求导数，最后判断导数在所给区间上的符号，从而确定函数的单调性.

应用迁移

1.（多选）下列函数中，在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增的有　(　　)

A.$f(x)=x^4$

B.$f(x)=x-\sin x$

C.$f(x)=xe^x$

D.$f(x)=e^x-e^{-x}-2x$

BD　**解析**：对于 A 选项，由 $f(x)=x^4$ 得 $f'(x)=4x^3$，当 $x>0$ 时，$f'(x)=4x^3>0$，则 $f(x)$ 单调递增；当 $x<0$ 时，$f'(x)=4x^3<0$，则 $f(x)$ 单调递减，故排除 A.对于 B 选项，由 $f(x)=x-\sin x$ 得 $f'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，显然 $f'(x)$ 不恒为零，所以 $f(x)=x-\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，故 B 满足题意.对于 C 选项，由 $f(x)=xe^x$ 得 $f'(x)=(1+x)e^x$，当 $x>-1$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增；当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减，故排除 C.对于 D 选项，由 $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$ 得 $f'(x)=e^x+e^{-x}-2\geqslant 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2=0$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，故 $f'(x)$ 不恒为零，所以 $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，故 D 满足题意.故选 BD.

2. 判断下列函数的单调性：

(1)$f(x)=x^2-2x+4$；(2)$f(x)=e^x-x$.

解：(1)因为 $f(x)=x^2-2x+4$，

所以 $f'(x)=2x-2=2(x-1)$.

令 $f'(x)>0$，即 $x-1>0$，解得 $x>1$；令 $f'(x)<0$，即 $x-1<0$，解得 $x<1$.

故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,1)$ 上单调递减.

（2）因为 $f(x)=e^x-x$，所以 $f'(x)=e^x-1$.

令 $f'(x)>0$，即 $e^x-1>0$，解得 $x>0$；

令 $f'(x)<0$，即 $e^x-1<0$，解得 $x<0$.

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,0)$ 上单调递减.

任务3 求函数的单调区间

探究活动

例2　（教材P89练习题1改编）求下列函数的单调区间.

（1）$f(x)=2x^3+3x^2-36x+1$；

（2）$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

解：（1）函数 $f(x)=2x^3+3x^2-36x+1$ 的定义域为 **R**.对 $f(x)$ 求导数，得 $f'(x)=6x^2+6x-36=6(x-2)(x+3)$.

由 $f'(x)>0$，解得 $x<-3$ 或 $x>2$；

由 $f'(x)<0$，解得 $-3<x<2$.

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,-3)$ 和 $(2,+\infty)$，单调递减区间是 $(-3,2)$.

（2）函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，对 $f(x)$ 求导数，得

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

令 $f'(x)>0$，即 $\dfrac{1-\ln x}{x^2}>0$，则 $\ln x<1$，解得 $0<x<e$；

令 $f'(x)<0$，即 $\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0$，则 $\ln x>1$，解得 $x>e$.

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,e)$，单调递减区间是 $(e,+\infty)$.

［一题多思］

思考1.求导后通常要对导函数做怎样的处理，才更有利于判断导函数的符号？

提示：通常要利用通分、配方、因式分解等方法将导函数化为非负（正）项之和、连乘式、分式等易于判断符号的结构形式.

思考2.将本例（2）中的函数改为“$f(x)=x\ln x$”，试求此函数的单调区间.

解：函数 $f(x)=x\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=x'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$.

令 $f'(x)>0$，则 $\ln x>-1$，解得 $x>\dfrac{1}{e}$；

令 $f'(x)<0$，则 $\ln x<-1$，解得 $0<x<\dfrac{1}{e}$.

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$，单调递减区间是 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$.

【探究总结】

利用导数求函数 $f(x)$ 的单调区间的关注点

（1）应先确定函数的定义域，忽视定义域研究单调性与单调区间是无意义的.

（2）实质上是转化为解不等式 $f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$，不等式的解集就是函数的单调区间.

（3）如果函数的单调区间不唯一，中间应用“，”或“和”隔开，不可用“∪”连接.

应用迁移

求下列函数的单调区间：

（1）$y=-x^3-2x^2-4x+5$；

（2）$y=(x+1)(x^2-1)$；

（3）$y=4x^2+\dfrac{1}{x}$；

（4）$y=x\ln x$.

解：（1）$y'=-3x^2-4x-4$，则 $\Delta=(-4)^2-4\times(-3)\times(-4)=-32<0$，

所以 $y'<0$ 在 **R** 上恒成立，所以函数的单调递减区间为 **R**，无单调递增区间.

（2）$y=(x+1)(x^2-1)=x^3+x^2-x-1$，则 $y'=3x^2+2x-1$.

令 $y'>0$，得 $x<-1$ 或 $x>\dfrac{1}{3}$；令 $y'<0$，得 $-1<x<\dfrac{1}{3}$.

所以函数的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$，$\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$，单调递减区间为 $\left(-1,\dfrac{1}{3}\right)$.

（3）函数的定义域为 $\{x\mid x\neq0\}$，$y'=8x-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{8x^3-1}{x^2}$.

令 $y'>0$，得 $x>\dfrac{1}{2}$；令 $y'<0$，得 $0<x<\dfrac{1}{2}$ 或 $x<0$.

所以函数的单调递减区间为 $(-\infty,0)$，$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，单调递增区间为 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

（4）函数的定义域为 $\{x\mid x>0\}$，$y'=\ln x+1$.

令 $y'>0$，得 $x>\dfrac{1}{e}$；令 $y'<0$，得 $0<x<\dfrac{1}{e}$.

所以函数的单调递减区间为 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$，单调递增区间为 $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$.

课后素养评价(十八)

基础落实

1.函数 $f(x)=x-x\ln x$ 的单调递增区间为　(　　)

A.$(-\infty,1)$　　B.$(0,1)$

C.$(0,e)$　　D.$(1,+\infty)$

B　**解析**:函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,$f'(x)=1-\ln x-x\cdot\frac{1}{x}=-\ln x$,令 $f'(x)>0$,得 $0<x<1$,即 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$.故选 B.

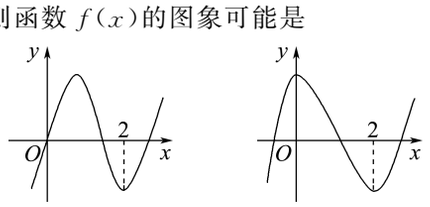
2.下列函数中,在区间 $(-1,1)$ 上单调递减的是　(　　)

A.$y=2-3x^2$　　B.$y=\ln x$

C.$y=\frac{1}{x-2}$　　D.$y=\sin x$

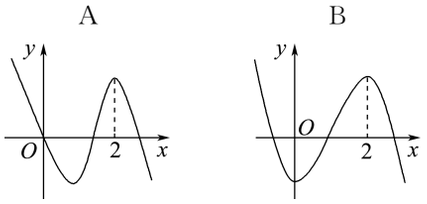
C　**解析**:对于函数 $y=\frac{1}{x-2}$,其导数 $y'=\frac{-1}{(x-2)^2}<0$,且函数在区间 $(-1,1)$ 上有意义,所以函数 $y=\frac{1}{x-2}$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递减,其余选项都不符合要求.

3.已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)=ax^2-2ax$,若 $a<0$,则函数 $f(x)$ 的图象可能是　(　　)



A

B

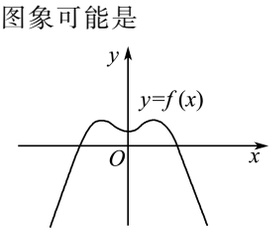


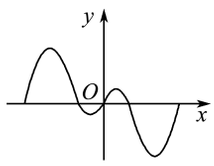
C

D

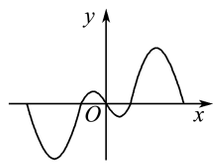
D　**解析**:函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)=ax^2-2ax=ax(x-2)$,因为 $a<0$,所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,在 $(0,2)$ 内单调递增,在 $(2,+\infty)$ 上单调递减,只有 D 符合.故选 D.

4.已知函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示,则其导函数 $y=f'(x)$ 的图象可能是　(　　)

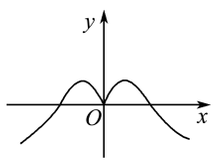




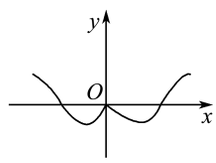
A



B



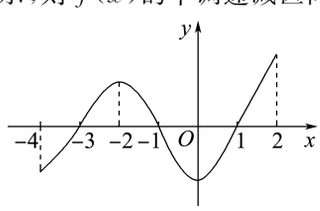
C



D

A　**解析**:$y=f(x)$ 的单调性变化情况为增、减、增、减,$y=f'(x)$ 的符号变化情况依次为大于零、小于零、大于零、小于零,故 A 正确.

5.设函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$,若 $y=xf'(x)$ 的图象如图所示,则 $f(x)$ 的单调递减区间为　(　　)



A.$(-3,-1)$ 和 $(0,1)$

B.$(-3,-1)\cup(0,1)$

C.$(-4,-3)$ 和 $(-1,1)$

D.$(-3,-1)$ 和 $(1,2)$

A　**解析**:根据 $y=xf'(x)$ 的图象可知,当 $x\in(-3,-1)\cup(0,1)$ 时,$f'(x)<0$,当 $x\in(-4,-3)\cup(-1,0)\cup(1,2)$ 时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $(-3,-1)$,$(0,1)$ 内单调递减,在 $(-4,-3)$,$(-1,0)$,$(1,2)$ 内单调递增.故选 A.

6.函数 $f(x)=\frac{1}{2}x+\sin x$,$x\in(0,\pi)$ 的单调递增区间是_____.

$\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$　**解析**:因为 $f(x)=\frac{1}{2}x+\sin x$,所以 $f'(x)=\frac{1}{2}+\cos x$.

令 $f'(x)>0$,得 $\cos x>-\frac{1}{2}$.又因为 $x\in(0,\pi)$,所以 $0<x<\frac{2\pi}{3}$.

所以函数 $f(x)=\frac{1}{2}x+\sin x$,$x\in(0,\pi)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$.

7.(1)求函数 $f(x)=x-\ln x$ 的单调区间；

(2)已知函数 $f(x)=(x^2+x+1)e^x$，求 $f(x)$ 的单调递增区间.

解：(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=1-\frac{1}{x}$.

令 $f'(x)>0$，即 $1-\frac{1}{x}>0$，解得 $x>1$；令 $f'(x)<0$，即 $1-\frac{1}{x}<0$，解得 $0<x<1$.

所以函数 $f(x)=x-\ln x$ 的单调递增区间为 $(1,+\infty)$，单调递减区间为 $(0,1)$.

(2)函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f'(x)=(2x+1)e^x+(x^2+x+1)e^x$.

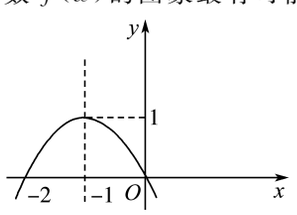
令 $f'(x)>0$，即 $(2x+1)e^x+(x^2+x+1)e^x>0$，

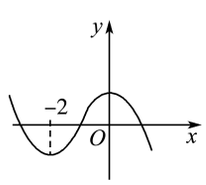
所以 $(2x+1)+(x^2+x+1)>0$，即 $x^2+3x+2>0$，解得 $x>-1$ 或 $x<-2$，

所以函数 $f(x)=(x^2+x+1)e^x$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-2)$ 和 $(-1,+\infty)$.

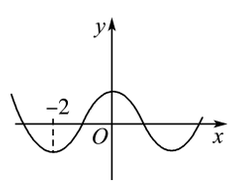
能力提升

1.已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示，那么函数 $f(x)$ 的图象最有可能是　(　　)

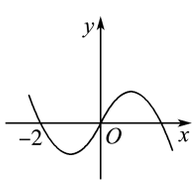




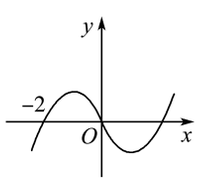
A



B



C



D

A　**解析**：由 $f'(x)$ 的符号易判断，选 A.

2.已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R})$，若 $a^2-3b<0$，则 $f(x)$ 是　(　　)

A.减函数

B.增函数

C.常函数

D.既不是减函数也不是增函数

B　**解析**：由题意知 $f'(x)=3x^2+2ax+b$，则方程 $3x^2+2ax+b=0$ 的根的判别式 $\Delta=4a^2-12b=4(a^2-3b)<0$，故 $f'(x)>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，即 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数.

3.函数 $f(x)=x-2\sin x+1$，$x\in(0,\pi)$ 的单调递增区间是　(　　)

A.$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$　　B.$\left(\frac{\pi}{6},\pi\right)$

C.$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$　　D.$\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$

D　**解析**：对 $f(x)=x-2\sin x+1$ 求导，得 $f'(x)=1-2\cos x$.

令 $f'(x)>0$，得 $\cos x<\frac{1}{2}$.

因为 $x\in(0,\pi)$，所以 $\frac{\pi}{3}<x<\pi$，

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$.

4.关于函数 $f(x)=\ln(e^x+1)-\frac{x}{2}$，下列说法正确的是　(　　)

A.$f(x)$ 是偶函数，且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增

B.$f(x)$ 是偶函数，且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减

C.$f(x)$ 是奇函数，且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增

D.$f(x)$ 既不是奇函数，也不是偶函数

A　**解析**：因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=\ln(e^{-x}+1)+\frac{x}{2}=\ln(e^x+1)-x+\frac{x}{2}=\ln(e^x+1)-\frac{x}{2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数.

当 $x>0$ 时，$f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{1}{2}=\frac{e^x-1}{2(e^x+1)}>0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.故选 A.

5.函数 $f(x)=x^2-5x+2\ln(2x)$ 的单调递增区间是_____.

$\left(0,\frac{1}{2}\right),(2,+\infty)$　**解析**：易知 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，

对 $f(x)$ 求导，得 $f'(x)=\frac{(2x-1)(x-2)}{x}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=2$.

当 $x>2$ 或 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(0,\frac{1}{2}\right),(2,+\infty)$.

6.判断函数 $f(x)=2x(e^x-1)-x^2$ 的单调性.

解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=2(e^x-1+xe^x-x)=2(e^x-1)(x+1)$.

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-1,0)$ 上单调递减.

自我超越

1.（多选）（新定义）如果对定义在 **R** 上的奇函数 $y=f(x)$，对任意两个不相等的实数 x_1，x_2，都有 $x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>x_1f(x_2)+x_2f(x_1)$，那么称函数 $y=f(x)$ 为“H 函数”.下列函数为 H 函数的有　　（　　）

A. $f(x)=\sin x$

B. $f(x)=e^x$

C. $f(x)=x^3+3x$

D. $f(x)=x|x|$

CD　**解析**：因为 $x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>x_1f(x_2)+x_2f(x_1)$，所以 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$，即 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增.

对于 A，由于 $f(x)=\sin x$ 在 **R** 上不具有单调性，故排除 A；对于 B，易知 $f(x)=e^x$ 为非奇非偶函数，故排除 B；对于 C，$f(x)=x^3+3x$，$f'(x)=3x^2+3>0$，所以 $f(x)$ 为奇函数且在 **R** 上单调递增，满足题意；对于 D，易知 $f(x)=x|x|$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，又 $f(x)$ 是奇函数，故 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增，满足题意.

2.（多选）我们常用以下方法求形如 $y=f(x)^{g(x)}$ 的函数的导数：先两边同取自然对数得 $\ln y=g(x)\cdot\ln f(x)$，再两边同时求导得 $\frac{1}{y}\cdot y'=g'(x)\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$，即 $y'=f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\cdot\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}f'(x)\right]$，运用此方法可求得函数 $y=x^x$ $(x>0)$ 在下列哪些区间内单调递增　　（　　）

A. $\left(0,\frac{1}{e}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{e},1\right)$

C. $(0,1)$　　D. (e,e^2)

BD　**解析**：由题意得 $\ln y=x\ln x$，两边同时求导得 $\frac{1}{y}\cdot y'=\ln x+1$，即 $y'=x^x(\ln x+1)(x>0)$. 令 $y'>0$，即 $\ln x+1>0$，解得 $x>\frac{1}{e}$，即函数的单调递增区间为 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$. 故选 BD.

第 2 课时　函数的单调性的应用

学习任务目标

1.进一步理解函数的导数与其单调性的关系.

2.能求简单的含参数的函数的单调区间.

3.能根据函数的单调性求参数的取值范围.

问题式预习

【知识清单】

知识点一　判断函数 $y=f(x)$ 的单调性的步骤

第 1 步，确定函数的定义域；

第 2 步，求出导数 $f'(x)$ 的零点；

第 3 步，用 $f'(x)$ 的零点将 $f(x)$ 的定义域划分为若干个区间，列表给出 $f'(x)$ 在各区间上的正负，由此得出函数 $y=f(x)$ 在定义域内的单调性.

知识点二　导数的绝对值与函数值变化的关系

一般地，设函数 $y=f(x)$，在区间 (a,b) 上：

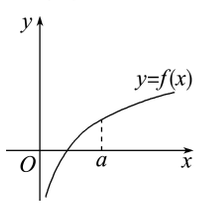
导数的绝对值	函数值变化	函数的图象
较大	较快	比较“陡峭”（向上或向下）
较小	较慢	比较“平缓”

【概念辨析】

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

（1）利用导数求函数的单调区间时，要先确定函数的定义域.　　（ √ ）

（2）如图所示，函数 $y=f(x)$ 的图象在 $(0,a)$ 内“陡峭”，在 $(a,+\infty)$ 上“平缓”.　　（ √ ）

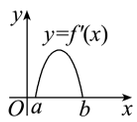


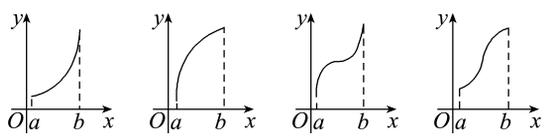
（3）函数 $y=ax^3-1(a\in\mathbf{R})$ 在 **R** 上单调递增.（　　）

×　**提示**：$y'=3ax^2$. 当 $a>0$ 时，$y'\geqslant0$，仅在 $x=0$ 时 $y'=0$，所以函数在 **R** 上单调递增；当 $a<0$ 时，

$y'\leqslant 0$，仅在 $x=0$ 时 $y'=0$，所以函数在 **R** 上单调递减；当 $a=0$ 时，$y'=0$，函数在 **R** 上不具备单调性.

2.已知 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，$f'(x)$ 的图象如图所示，则 $f(x)$ 的图象只可能是　　（　　）





A　　B　　C　　D

D　**解析**：从 $f'(x)$ 的图象可以看出，在区间 (a,b) 上，$f'(x)$ 先增后减，所以 $f(x)$ 的图象先越来越陡，之后越来越平缓，只有选项 D 符合.

3.请思考并回答下列问题：

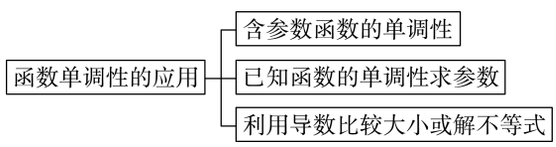
(1)若在某区间上有有限个点使 $f'(x)=0$，其余的点均使 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 仍单调递增吗？

(2)可导函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调递增的充要条件是什么？

(1)**提示**：$f(x)$ 仍单调递增（单调递减的情形类似）.

(2)**提示**：可导函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调递增的充要条件是对任意的 $x\in(a,b)$，都有 $f'(x)\geqslant 0$，且在 (a,b) 的任一非空子区间上 $f'(x)$ 不恒为 0.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 分析含参数的函数的单调性

探究活动

例1　(1)已知函数 $f(x)=ax-\ln x$，$a\in\mathbf{R}$，试判断函数 $f(x)$ 的单调性；

(2)已知函数 $f(x)=2a\ln x+x^2-(a+4)x$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

解：(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=a-\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax-1}{x}$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\dfrac{1}{a}$，

$x\in\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，$x\in\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 内单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增.

(2)由题意可得 $x>0$，$f'(x)=\dfrac{2a}{x}+2x-a-4=\dfrac{2x^2-(a+4)x+2a}{x}=\dfrac{(x-2)(2x-a)}{x}$.

若 $a\leqslant 0$，则当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；

若 $0<a<4$，则当 $x\in\left(\dfrac{a}{2},2\right)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in\left(0,\dfrac{a}{2}\right)\cup(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；

若 $a=4$，则 $f'(x)\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立；

若 $a>4$，则当 $x\in\left(2,\dfrac{a}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(0,2)\cup\left(\dfrac{a}{2},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$.

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,2)$ 内单调递减；当 $0<a<4$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{a}{2}\right)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{a}{2},2\right)$ 内单调递减；当 $a=4$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $a>4$ 时，$f(x)$ 在 $(0,2)$ 和 $\left(\dfrac{a}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(2,\dfrac{a}{2}\right)$ 上单调递减.

【探究总结】

讨论含参数函数的单调性的关键点

(1)涉及含参数函数的单调性问题，一定要判断参数对导数 $f'(x)$ 在某一区间内的正负是否有影响.若有影响，则必须分类讨论，讨论时要做到不重不漏，最后进行总结.

(2)求含参数函数 $y=f(x)$ 的单调区间，实质上就是解含参数的不等式 $f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$，所得不等式的解集就是函数的单调区间.

应用迁移

(2024·全国甲卷节选)已知函数 $f(x)=a(x-1)-\ln x+1$,求 $f(x)$的单调区间.

解:$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}$.当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)=\frac{ax-1}{x}<0$,故 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减;当 $a>0$ 时,令 $f'(x)=0$,解得 $x=\frac{1}{a}$.当 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增;当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减.综上所述,当 $a\leqslant 0$ 时,$f(x)$的单调递减区间为$(0,+\infty)$,无单调递增区间;当 $a>0$ 时,$f(x)$的单调递增区间为$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$,单调递减区间为$\left(0,\frac{1}{a}\right)$.

任务2 根据函数的单调性求参数

探究活动

例2　(1)已知函数 $f(x)=x^3-ax-1$ 为 **R** 上的增函数,则实数 a 的取值范围是_____.

$(-\infty,0]$　**解析**:由已知得 $f'(x)=3x^2-a$,

因为 $f(x)$为 **R** 上的增函数,

所以 $f'(x)=3x^2-a\geqslant 0$ 在 **R** 上恒成立,

即 $a\leqslant 3x^2$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.因为 $3x^2\geqslant 0$,所以只需 $a\leqslant 0$.

又因为当 $a=0$ 时,$f'(x)=3x^2\geqslant 0$,$f(x)=x^3-1$ 在 **R** 上是增函数.所以实数 a 的取值范围为$(-\infty,0]$.

(2)已知函数 $f(x)=2x^2-\ln x$,若 $f(x)$在区间$(2m,m+1)$上单调递增,求实数 m 的取值范围.

解:$f(x)=2x^2-\ln x$ 的定义域为$(0,+\infty)$,对$f(x)$求导数,得$f'(x)=4x-\frac{1}{x}$.令 $f'(x)=0$,解得 $x=\frac{1}{2}$,或 $x=-\frac{1}{2}$(舍去).当 $x>\frac{1}{2}$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$在区$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增.

因为 $f(x)$在区间$(2m,m+1)$上单调递增,所以$(2m,m+1)\subseteq\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

所以$\begin{cases}m+1>2m,\\2m\geqslant\frac{1}{2},\end{cases}$解得$\frac{1}{4}\leqslant m<1$.

因此,实数 m 的取值范围是$\left[\frac{1}{4},1\right)$.

[一题多思]

思考1.若本例(1)中的函数在$(-1,1)$内单调递减,求实数 a 的取值范围.

解:由题意可知 $f'(x)=3x^2-a\leqslant 0$ 在$(-1,1)$上恒成立,所以$\begin{cases}f'(-1)\leqslant 0,\\f'(1)\leqslant 0,\end{cases}$即$\begin{cases}3-a\leqslant 0,\\3-a\leqslant 0,\end{cases}$所以 $a\geqslant 3$,即实数 a 的取值范围是$[3,+\infty)$.

思考2.若本例(1)中的函数的单调递减区间为$(-1,1)$,求实数 a 的值.

解:对 $f(x)$求导数,得 $f'(x)=3x^2-a$.

当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)\geqslant 0$,且 $f'(x)$不恒为 0,

所以 $f(x)$在 **R** 上为增函数,不满足题意.

当 $a>0$ 时,令 $f'(x)=0$,解得 $x=-\frac{\sqrt{3a}}{3}$,或 $x=\frac{\sqrt{3a}}{3}$.当$-\frac{\sqrt{3a}}{3}<x<\frac{\sqrt{3a}}{3}$时,$f'(x)<0$,$f(x)$在区间$\left(-\frac{\sqrt{3a}}{3},\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)$内单调递减,即函数 $f(x)$的单调递减区间为$\left(-\frac{\sqrt{3a}}{3},\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)$.由已知函数 $f(x)$的单调递减区间为$(-1,1)$,所以$\frac{\sqrt{3a}}{3}=1$,即 $a=3$.

【探究总结】

已知函数单调性求参数的两种方法

(1)分离参数法

可导函数 $f(x)$在(a,b)上单调递增(减)等价于 $f'(x)\geqslant 0(f'(x)\leqslant 0)$在$(a,b)$上恒成立,将参数分离后可转化为求某个函数的值域问题,注意验证等号是否成立.

(2)子集法

若能较容易地求出函数的单调区间,则可利用子区间来解决.若 $f(x)$在(a,b)上单调递增(减),则区间(a,b)是相应单调区间的子集.

应用迁移

1.若函数 $f(x)=\frac{x^2-a}{e^x}$在 **R** 上存在单调递增区间,则实数 a 的取值范围是　(　　)

A.$[-1,+\infty)$　　B.$(-1,+\infty)$

C.$(-\infty,-1]$　　D.$(-\infty,-1)$

B　**解析**:因为 $f(x)=\frac{x^2-a}{e^x}$,所以 $f'(x)=\frac{2x-(x^2-a)}{e^x}=\frac{a+2x-x^2}{e^x}$.由题意可知,存在 $x\in\mathbf{R}$,使得 $f'(x)>0$,即存在 $x\in\mathbf{R}$,使得 $a>x^2-2x$.二次函数 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1\geqslant -1$,当且仅

当 $x=1$ 时，等号成立，所以 $a>-1$，即实数 a 的取值范围是 $(-1,+\infty)$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上的导函数为 $f'(x)$，$f'(x)$ 在 (a,b) 上的导函数记为 $f''(x)$. 若在 (a,b) 上 $f''(x)<0$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上为“凸函数”. 已知函数 $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{t}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2$ 在 $(1,4)$ 上为“凸函数”，则实数 t 的取值范围是　（　）

A. $[3,+\infty)$　　B. $(3,+\infty)$

C. $\left[\frac{51}{8},+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{51}{8},+\infty\right)$

C　**解析：** 由 $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{t}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2$ 可得 $f'(x)=x^3-tx^2+3x$，$f''(x)=3x^2-2tx+3$.

因为函数 $f(x)$ 在 $(1,4)$ 上为“凸函数”，所以 $3x^2-2tx+3<0$ 在 $(1,4)$ 上恒成立，

即 $t>\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$ 在 $(1,4)$ 上恒成立.

令 $g(x)=\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$，

易知 $g(x)$ 在 $(1,4)$ 上单调递增，所以 $t\geqslant g(4)=\frac{51}{8}$，所以 $t\geqslant\frac{51}{8}$.

所以实数 t 的取值范围是 $\left[\frac{51}{8},+\infty\right)$. 故选 C.

3. 已知函数 $f(x)=2ax-\frac{1}{x^2}$，$x\in(0,1]$，若 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，求实数 a 的取值范围.

解： 由题意得 $f'(x)=2a+\frac{2}{x^3}$.

因为 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，

所以 $f'(x)\geqslant0$，即 $a\geqslant-\frac{1}{x^3}$ 在 $(0,1]$ 上恒成立.

令 $g(x)=-\frac{1}{x^3}$，则 $g(x)=-\frac{1}{x^3}$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，

所以 $g(x)_{\max}=g(1)=-1$，所以 $a\geqslant-1$.

当 $a=-1$ 时，$f'(x)=-2+\frac{2}{x^3}$，

$\forall x\in(0,1]$，$f'(x)\geqslant0$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立，所以 $a=-1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增时，实数 a 的取值范围是 $[-1,+\infty)$.

任务3　应用函数单调性比较大小或解不等式

探究活动

例3　(1) 已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}$，当 $1<x<3$ 时，下列关系正确的是　（　）

A. $f(\sqrt{x})<f(x)<[f(x)]^2$

B. $f(x)<f(\sqrt{x})<[f(x)]^2$

C. $[f(x)]^2<f(\sqrt{x})<f(x)$

D. $[f(x)]^2<f(x)<f(\sqrt{x})$

(2) 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f'(x)>2$，$f(2)=0$，则不等式 $f(x)-2x+4>0$ 的解集为　（　）

A. $(2,+\infty)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $(-\infty,1)$　　D. $(-\infty,2)$

(1) A　**解析：** 由题意得 $f'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$，当 $1<x<3$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,3)$ 上单调递增. 又 $1<\sqrt{x}<x<3$，所以 $f(\sqrt{x})<f(x)$. 由 $f(x)$ 在 $(1,3)$ 上单调递增，可知当 $x\in(1,3)$ 时，$f(x)>f(1)=e$，所以 $[f(x)]^2>f(x)$. 所以 $f(\sqrt{x})<f(x)<[f(x)]^2$.

(2) A　**解析：** 令 $g(x)=f(x)-2x+4$，则 $g'(x)=f'(x)-2>0$，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

又 $g(2)=f(2)-2\times2+4=0$，

则不等式 $f(x)-2x+4>0$ 等价于 $g(x)>g(2)$，所以 $x>2$. 故选 A.

【探究总结】

在比较两数(式)的大小时，首先要判断所给函数的单调性，再根据函数的单调性来比较大小. 有时还需要根据待比较式的结构特征构造新的函数，由新函数的单调性来比较大小.

应用迁移

1. 已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)=(x^2+1)e^x$，则下列选项正确的是　（　）

A. $f(2)<f(e)<f(\pi)$

B. $f(\pi)<f(e)<f(2)$

C. $f(e)<f(2)<f(\pi)$

D. $f(2)<f(\pi)<f(e)$

A　**解析：** 已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)=(x^2+1)e^x$，由 $\begin{cases}x^2+1\geqslant1,\\e^x>0,\end{cases}$ $x\in\mathbf{R}\Rightarrow f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 因为 $2<e<\pi$，所以 $f(2)<f(e)<f(\pi)$. 故选 A.

2. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(2)=0$. 若当 $x>0$ 时，$xf'(x)+f(x)>0$，则不等式 $xf(x)>0$ 的解集是_____.

$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　**解析：** 设 $g(x)=xf(x)$，则 $g'(x)=xf'(x)+f(x)$. 因为当 $x>0$ 时，

$xf'(x)+f(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.因为 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，所以 $g(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数.又 $f(2)=0$，则 $g(2)=2f(2)=0$，所以不等式 $xf(x)>0$ 等价于 $g(x)>0=g(2)$，所以 $|x|>2$，解得 $x<-2$ 或 $x>2$，所以不等式 $xf(x)>0$ 的解集是 $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

课后素养评价(十九)

基础落实

1.已知函数 $f(x)$，若在区间 $[a,b]$ 上有 $f'(x)>0$，且 $f(a)\geqslant 0$，则在 (a,b) 上有　　(　　)

A.$f(x)>0$

B.$f(x)<0$

C.$f(x)=0$

D.$f(x)$ 符号不能确定

A　**解析**：由 $f'(x)>0$，得 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增.

所以当 $x\in(a,b)$ 时，$f(x)>f(a)\geqslant 0$.

2.若 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2$ 的单调递减区间是 $(0,2)$，则正数 a 的值是　　(　　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

A　**解析**：$f'(x)=x^2-2ax$，令 $f'(x)<0$，由于 $a>0$，故解得 $0<x<2a$，故 $2a=2$，即 $a=1$.

3.已知函数 $f(x)=x^2+\frac{a}{x}$，若 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围为　　(　　)

A.$(-\infty,16]$

B.$(-\infty,8)$

C.$(-\infty,-8)\cup(8,+\infty)$

D.$(-\infty,-16]\cup[16,+\infty)$

A　**解析**：若 $f(x)=x^2+\frac{a}{x}$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，则 $f'(x)=2x-\frac{a}{x^2}=\frac{2x^3-a}{x^2}\geqslant 0$ 在 $[2,+\infty)$ 上恒成立.

则 $a\leqslant 2x^3$ 在 $[2,+\infty)$ 上恒成立.所以 $a\leqslant 16$.故选 A.

4.若函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-bx$ 存在单调递减区间，则实数 b 的取值范围为　　(　　)

A.$[2,+\infty)$　　B.$(2,+\infty)$

C.$(-\infty,2)$　　D.$(-\infty,2]$

B　**解析**：由 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-bx$，可得 $f'(x)=\frac{x^2-bx+1}{x}(x>0)$.由题意可得存在 $x>0$，使得 $f'(x)=\frac{x^2-bx+1}{x}<0$，即存在 $x>0$，使得 $x^2-bx+1<0$，等价于 $b>x+\frac{1}{x}$.由函数性质易得 $b>2$.故选 B.

5.已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$e<a<b$，则　　(　　)

A.$f(a)=f(b)$

B.$f(a)<f(b)$

C.$f(a)>f(b)$

D.$f(a)$，$f(b)$ 的大小关系不能确定

C　**解析**：令 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=0$，解得 $x=e$，当 $x\in(0,e)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,e)$ 内单调递增，当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，又 $e<a<b$，所以 $f(a)>f(b)$.故选 C.

6.设定义在 **R** 上的函数 $f(x)$，$g(x)$ 的导函数都存在，且 $f'(x)<g'(x)$，则当 $x\in(a,b)$ 时　　(　　)

A.$f(x)<g(x)$

B.$f(x)>g(x)$

C.$f(x)+g(a)<g(x)+f(a)$

D.$f(x)+g(b)<g(x)+f(b)$

C　**解析**：设 $h(x)=f(x)-g(x)$，则 $h'(x)=f'(x)-g'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 **R** 上单调递减.因为 $a<x<b$，所以 $h(a)>h(x)>h(b)$，即 $f(a)-g(a)>f(x)-g(x)>f(b)-g(b)$，所以 $f(x)+g(a)<g(x)+f(a)$，$f(x)+g(b)>g(x)+f(b)$，即选项 C 正确，D 错误，而选项 A 和 B 无法判断.故选 C.

7.(新定义)定义运算 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$，若函数 $f(x)=\begin{vmatrix} x^2-1 & 1 \\ -x & x+m \end{vmatrix}$ 的单调递减区间是 $(0,2)$，则实数 $m=$_____.

-3　**解析**：由题意可知 $f(x)=(x^2-1)(x+m)-1\times(-x)=x^3+mx^2-x-m+x=x^3+mx^2-m$，所以 $f'(x)=3x^2+2mx$.令 $f'(x)=0$，得 $x_1=0$，$x_2=-\frac{2m}{3}$.因为函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,2)$，所以 $-\frac{2m}{3}=2$，解得 $m=-3$.

8. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2$.

(1)若 $a=1$,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的方程;

(2)若 $a>0$,求函数 $f(x)$ 的单调区间.

解:(1)因为 $a=1$,所以 $f(x)=x^3+x^2-x+2$,

所以 $f'(x)=3x^2+2x-1$,则 $f'(1)=4$.

又 $f(1)=3$,所以切点坐标为 $(1,3)$,

所以所求切线方程为 $y-3=4(x-1)$,即 $4x-y-1=0$.

(2)对 $f(x)$ 求导,得 $f'(x)=3x^2+2ax-a^2=(x+a)\cdot(3x-a)$.

由 $f'(x)=0$,得 $x=-a$ 或 $x=\frac{a}{3}$.

又 $a>0$,当 $-a<x<\frac{a}{3}$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减;

当 $x<-a$ 或 $x>\frac{a}{3}$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增.

故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(-a,\frac{a}{3}\right)$,单调递增区间为 $(-\infty,-a)$ 和 $\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$.

能力提升

1. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+x+1$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(3,+\infty)$ 上单调递增,在 $(1,2)$ 上单调递减,则实数 a 的取值范围为 (　　)

A.$(-\infty,-1]$　　B.$\left[-\frac{5}{3},-\frac{5}{4}\right]$

C.$\left(-\frac{5}{3},-1\right]$　　D.$\left(-\frac{5}{3},-\frac{5}{4}\right)$

B　**解析**:由 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+x+1$,得 $f'(x)=x^2+2ax+1$.

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(3,+\infty)$ 上单调递增,在 $(1,2)$ 上单调递减,

所以 $\begin{cases}f'(0)\geqslant 0,\\ f'(1)\leqslant 0,\\ f'(2)\leqslant 0,\\ f'(3)\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}1\geqslant 0,\\ 1+2a+1\leqslant 0,\\ 4+4a+1\leqslant 0,\\ 9+6a+1\geqslant 0,\end{cases}$

解得 $-\frac{5}{3}\leqslant a\leqslant -\frac{5}{4}$.所以实数 a 的取值范围为 $\left[-\frac{5}{3},-\frac{5}{4}\right]$.故选 B.

2. (多选)已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)>-f'(x)$,则下列结论成立的有 (　　)

A.$f(2\,023)<ef(2\,024)$

B.$ef(2\,023)>f(2\,024)$

C.$f(x)$ 在 **R** 上单调递增

D.若 $t>0$,则有 $f(x)<e^tf(x+t)$

AD　**解析**:由 $f(x)>-f'(x)$,得 $e^xf(x)+e^xf'(x)>0$,即 $[e^xf(x)]'>0$,所以函数 $y=e^xf(x)$ 在 **R** 上单调递增,故 $e^{2\,023}f(2\,023)<e^{2\,024}\cdot f(2\,024)$,所以 $f(2\,023)<ef(2\,024)$,故 A 正确,B 不正确;函数 $y=e^xf(x)$ 在 **R** 上单调递增时,$f(x)$ 不一定单调递增,如 $y=e^x\left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{e}{2}\right)^x$ 在 **R** 上单调递增,但 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 **R** 上单调递减,故 C 不正确;因为函数 $y=e^xf(x)$ 在 **R** 上单调递增,所以当 $t>0$ 时,有 $e^xf(x)<e^{x+t}f(x+t)$,故有 $f(x)<e^tf(x+t)$ 成立,故 D 正确.

3. 函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax-5$ 在区间 $[-1,2]$ 上不单调,则实数 a 的取值范围是 (　　)

A.$(-\infty,-3]$

B.$(-3,1)$

C.$[1,+\infty)$

D.$(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$

B　**解析**:$f'(x)=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$,

如果函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax-5$ 在区间 $[-1,2]$ 上单调,

那么 $a-1\geqslant 0$ 或 $\begin{cases}f'(-1)\leqslant 0,\\ f'(2)\leqslant 0,\end{cases}$

即 $a\geqslant 1$ 或 $\begin{cases}1+2+a\leqslant 0,\\ 4-4+a\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant 1$ 或 $a\leqslant -3$,

所以当函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax-5$ 在区间 $[-1,2]$ 上不单调时,$-3<a<1$.故选 B.

4. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,$f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$,若 $xf'(x)-1<0$,$f(e)=2$,则关于 x 的不等式 $f(e^x)<x+1$ 的解集为_____.

$(1,+\infty)$　**解析**:令函数 $g(x)=f(x)-\ln x$,$x>0$,则 $g'(x)=f'(x)-\frac{1}{x}=\frac{xf'(x)-1}{x}<0$,因此函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,$g(e)=f(e)-\ln e=1$,因此 $f(e^x)<x+1\Leftrightarrow f(e^x)-x<1\Leftrightarrow g(e^x)<g(e)$,即 $e^x>e$,解得 $x>1$,

所以不等式 $f(e^x)<x+1$ 的解集为 $(1,+\infty)$.

5. 已知函数 $f(x)=ax-\ln x$.若 $f(x)>1$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上恒成立,求实数 a 的取值范围.

解：由已知得 $a>\dfrac{1+\ln x}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，

设 $g(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$，则 $g'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}<0(x>1)$.

所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $g(x)<g(1)$.

因为 $g(1)=1$，所以 $\dfrac{1+\ln x}{x}<1$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立.

所以 $a\geqslant 1$，即实数 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$.

6. 已知函数 $f(x)=x+a\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2)当 $a=1$ 时，如果函数 $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{2}x^2+tx$ 在定义域内单调递增，求实数 t 的取值范围.

解：(1)定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=1+\dfrac{a}{x}=\dfrac{x+a}{x}$.

①当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

②当 $a<0$ 时，当 $x\in(0,-a)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(-a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

即 $f(x)$ 在 $(0,-a)$ 上单调递减，在 $(-a,+\infty)$ 上单调递增.

综上，当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,-a)$ 上单调递减，在 $(-a,+\infty)$ 上单调递增.

(2)当 $a=1$ 时，$g(x)=x+\ln x+\dfrac{1}{2}x^2+tx$，

$g'(x)=1+\dfrac{1}{x}+x+t$.

由题意 $g'(x)\geqslant 0$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

即 $t\geqslant -x-\dfrac{1}{x}-1$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立.

因为 $-x-\dfrac{1}{x}-1=-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-1\leqslant -2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}-1=-3$，所以 $t\geqslant -3$，即实数 t 的取值范围为 $[-3,+\infty)$.

自我超越

1. 如果函数 $f(x)$ 满足条件：①在闭区间 $[a,b]$ 上的图象是连续不断的，②在开区间 (a,b) 上都有导数，那么在开区间 (a,b) 上至少存在一个实数 t，使得 $f(b)-f(a)=f'(t)(b-a)$，其中 t 被称为拉格朗日中值.函数 $f(x)=2^x+x^2$ 在区间 $[0,4]$ 上的拉格朗日中值 t 所在的区间为　　(　　)

A.$(0,1)$　　B.$(1,2)$

C.$(2,3)$　　D.$(3,4)$

C　**解析**：由题可知 $f(0)=1$，$f(4)=32$，$f'(x)=2^x\ln 2+2x$，则 $32-1=f'(t)(4-0)$，$t\in(0,4)$，即 $f'(t)=\dfrac{31}{4}$.由指数函数 $y=2^x$ 和一次函数 $y=2x$ 的单调性可知 $f'(x)=2^x\ln 2+2x$ 在 $[0,4]$ 上单调递增，又 $f'(2)=4\ln 2+4<3+4<\dfrac{31}{4}$，$f'(3)=8\ln 2+6>8>\dfrac{31}{4}$，所以 t 所在的区间为 $(2,3)$.故选 C.

2. 已知函数 $f(x)=x^2-8\ln x$，若对 $\forall x_1,x_2\in(a,a+1)$ 均满足 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，则 a 的取值范围为_____.

$[0,1]$　**解析**：$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，因为对 $\forall x_1,x_2\in(a,a+1)$ 均满足 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，所以 $f(x)$ 在 $(a,a+1)$ 内单调递减.因为 $f(x)=x^2-8\ln x$，所以 $f'(x)=2x-\dfrac{8}{x}$，因为函数 $f(x)$ 在 $(a,a+1)$ 内单调递减，所以 $f'(x)=2x-\dfrac{8}{x}\leqslant 0$ 在 $(a,a+1)$ 内恒成立.令 $f'(x)=2x-\dfrac{8}{x}\leqslant 0$，解得 $x\in(0,2]$，所以 $(a,a+1)\subseteq(0,2]$，所以 $0\leqslant a\leqslant 1$.

5.3.2　函数的极值与最大(小)值

第 1 课时　函数的极值

学习任务目标

1. 了解极值、极值点的概念.

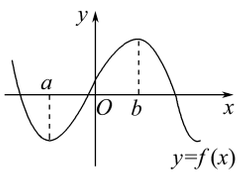
2. 理解函数在某点取得极值的条件.

3. 掌握求函数极值的方法步骤.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　极值点与极值



如图，函数 $y=f(x)$ 在点 $x=a$ 处的函数值 $f(a)$ 比它在点 $x=a$ 附近其他点处的函数值都小，$f'(a)=0$；而且在点 $x=a$ 附近的左侧 $f'(x)<0$，右侧 $f'(x)>0$.类似地，函数 $y=f(x)$ 在点 $x=b$ 处的函数值 $f(b)$ 比它在点 $x=b$ 附近其他点处的函数值都大，$f'(b)=0$；而且在点 $x=b$ 附近的左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$.我们把 a 叫做函数 $y=f(x)$ 的极小值点，$f(a)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的极小值；b 叫做函数 $y=f(x)$ 的极大值点，$f(b)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的极大值.极小值点、极大值点统称为极值点，极小值和极大值统称为极值.

知识点二　求函数 $y=f(x)$ 的极值的方法

解方程 $f'(x)=0$，当 $f'(x_0)=0$ 时：

(1)如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$，那么 $f(x_0)$ 是极大值；

(2)如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)<0$，右侧 $f'(x)>0$，那么 $f(x_0)$ 是极小值.

【概念辨析】

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)导数值为 0 的点一定是函数的极值点.（　　）

×　**提示**：不一定，如 $f(x)=x^3$，$f'(0)=0$，但 $x=0$ 不是 $f(x)=x^3$ 的极值点.

(2)在可导函数的极值点处，函数图象的切线与 x 轴平行.（　　）

×　**提示**：切线不一定与 x 轴平行.

(3)函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 无极值.（　√　）

(4)函数的极小值可能大于它的极大值.（　√　）

2.函数 $y=2x^3-x^2$ 的极大值为（　　）

A.0　　B.-9

C.0，$\dfrac{27}{16}$　　D.$\dfrac{27}{16}$

A　**解析**：$y'=6x^2-2x$，令 $y'=0$，得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{1}{3}$.当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$y'>0$；当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ 时，$y'<0$；当 $x\in\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$ 时，$y'>0$.故 $x=0$ 是极大值点，则极大值 $y=0$.

3.请思考并回答下列问题：

(1)如果函数定义在 $[a,b]$ $(a<b)$ 上且存在极值，那么函数的极值点一定出现在区间的内部，区间的端点不能成为极值点.这种说法正确吗？

(2)函数的极值点与函数的单调区间有什么关系？

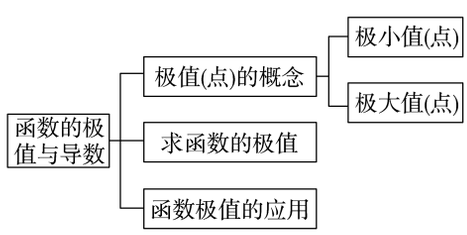
(3)若函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上是单调函数，则函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上有极值吗？

(1)**提示**：正确.

(2)**提示**：极大值点是函数单调递增区间与单调递减区间的分界点，极小值点是函数单调递减区间与单调递增区间的分界点.

(3)**提示**：依据极值的定义可知，若函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上是单调函数，则函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上没有极值.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1　辨析函数极值的概念

1.设 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则“x_0 是 $y=f(x)$ 的极值点”是“$f'(x_0)=0$”的（　　）

A.充分不必要条件

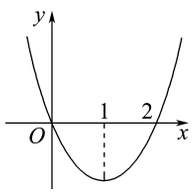
B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

A　**解析**：根据函数极值点的定义可知，若 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的极值点，则必有 $f'(x_0)=0$；反之，当 $f'(x_0)=0$ 时，x_0 不一定为函数 $y=f(x)$ 的极值点，比如 $f(x)=x^3$，$f'(x)=3x^2$，满足 $f'(0)=0$，但 $f(x)=x^3$ 在 **R** 上单调递增，即 0 不是函数 $f(x)=x^3$ 的极值点，故“x_0 是函数 $y=f(x)$ 的极值点”是“$f'(x_0)=0$”的充分不必要条件.故选 A.

2.若函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示，则　　(　　)



A.$x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点

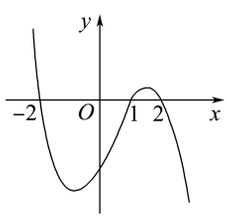
B.$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点

C.$x=2$ 是 $f(x)$ 的极小值点

D.函数 $f(x)$ 在(1,2)内单调递增

C　**解析**：由题图可得，当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在(0,2)内单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极小值点，$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.故选 C.

3.设函数 $f(x)$ 在 **R** 上可导，其导函数为 $f'(x)$，且函数 $y=(1-x)\cdot f'(x)$ 的图象如图所示，则下列结论一定成立的是　　(　　)



A.函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(1)$

B.函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(-2)$

C.函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(1)$

D.函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(2)$

D　**解析**：由题图可知，$f'(-2)=0$，$f'(2)=0$，且当 $x<-2$ 时，$f'(x)>0$，当 $-2<x<1$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$.又当 $1<x<2$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，故函数 $f(x)$ 有极小值 $f(2)$.故选 D.

【探究总结】

理解极值概念需要注意的几点

(1)极值点不是点.

(2)极值是函数的局部性质.

(3)函数的极值不唯一.

(4)极大值与极小值两者的大小不确定.

(5)极值点出现在区间的内部，区间端点不能是极值点.

(6)若 $f'(x_0)=0$，则 x_0 不一定是极值点，即“$f'(x_0)=0$”是“$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取到极值”的必要不充分条件，函数 $y=f'(x)$ 的变号零点，才是函数的极值点.

任务2 计算函数的极值

探究活动

例 1　(教材 P91 例 5 改编)求下列函数的极值：

(1)$f(x)=x^3-3x^2-9x+5$；

(2)$f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$；

(3)$f(x)=2x+\frac{8}{x}$.

解：(1)$f'(x)=3x^2-6x-9$.令 $f'(x)=0$，即 $3x^2-6x-9=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=3$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以当 $x=-1$ 时，函数 $f(x)$ 有极大值，且极大值为 $f(-1)=10$；当 $x=3$ 时，函数 $f(x)$ 有极小值，且极小值为 $f(3)=-22$.

(2)函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-x$，解方程 $f'(x)=0$，得 $x_1=1$，$x_2=-1$(舍去).

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减

由表可知，$x=1$ 为函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$ 的极大值点，且极大值为 $f(1)=-\frac{1}{2}$.

函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$ 不存在极小值.

(3)函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

且 $f'(x)=2-\frac{8}{x^2}$.令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm2$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减		单调递减	极小值	单调递增

因此，当 $x=-2$ 时，$f(x)$ 有极大值，且极大值为 $f(-2)=-8$；

当 $x=2$ 时，$f(x)$ 有极小值，且极小值为 $f(2)=8$.

【探究总结】

(1)讨论函数的性质时，要把握定义域优先的原则，若忽略了定义域，则容易求错极值.

(2)利用导数求函数的极值时,常列表判断导数值为0的点x_0的左、右两侧的导数值是否异号.若异号,则$f(x_0)$是极值;否则,$f(x_0)$不是极值.利用表格可使函数在极值点两侧的单调性一目了然.

应用迁移

求下列函数的极值.

(1)$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+3$;

(2)$f(x)=x^2e^{-x}$.

解:(1)函数$f(x)$的定义域为**R**,$f'(x)=x^2-2x-3$.

令$f'(x)=0$,得$x=3$或$x=-1$.

当x变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增	极大值$\frac{14}{3}$	单调递减	极小值-6	单调递增

由上表可以看出,$x=-1$是$f(x)$的极大值点,$x=3$是$f(x)$的极小值点.

所以$f(x)_{极大值}=\frac{14}{3}$,$f(x)_{极小值}=-6$.

(2)函数的定义域为**R**.

$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$.

令$f'(x)=0$,得$x=0$或$x=2$.

当x变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下表:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递减	0	单调递增	$4e^{-2}$	单调递减

由上表可以看出,当$x=0$时,函数有极小值,且$f(0)=0$;当$x=2$时,函数有极大值,且$f(2)=\frac{4}{e^2}$.

任务3 求解与函数极值有关的参数问题

探究活动

例2　(1)(2023·新高考全国Ⅱ卷)(多选)若函数$f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}(a\neq0)$既有极大值也有极小值,则　(　　)

A.$bc>0$　　B.$ab>0$

C.$b^2+8ac>0$　　D.$ac<0$

BCD　**解析**:函数$f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}$的定义域为$(0,+\infty)$,求导得$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}-\frac{2c}{x^3}=\frac{ax^2-bx-2c}{x^3}$.

因为函数$f(x)$既有极大值也有极小值,所以函数$f'(x)$在$(0,+\infty)$上有两个变号零点,而$a\neq0$,

因此方程$ax^2-bx-2c=0$有两个不相等的正根x_1,x_2.

于是$\begin{cases}\Delta=b^2+8ac>0,\\ x_1+x_2=\frac{b}{a}>0,\\ x_1x_2=-\frac{2c}{a}>0,\end{cases}$即有$b^2+8ac>0$,$ab>0$,$ac<0$,显然$a^2bc<0$,即$bc<0$,A错误,B,C,D正确.故选BCD.

(2)已知函数$f(x)=x^3-3x+a$(a为实数).

①函数$f(x)$的极大值与极小值分别为多少?

②若方程$f(x)=0$有唯一一个实数根,求实数a的取值范围.

解:①令$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)=0$,解得$x_1=-1$,$x_2=1$.

当$x<-1$时,$f'(x)>0$;当$-1<x<1$时,$f'(x)<0$;当$x>1$时,$f'(x)>0$.

所以当$x=-1$时,$f(x)$有极大值,且$f(-1)=2+a$;

当$x=1$时,$f(x)$有极小值,且$f(1)=-2+a$.

②由①知,$2+a<0$或$-2+a>0$,即$a<-2$或$a>2$.

所以实数a的取值范围是$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

[一题多思]

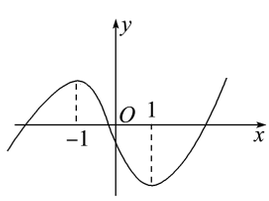
思考1.若本例(2)②中的方程$f(x)=0$恰有两个实数根,则实数a的值是多少?

解:由①知,$2+a=0$或$-2+a=0$,即$a=-2$或$a=2$.

思考2.若本例(2)②中的方程$f(x)=0$有三个不同的实数根,求实数a的取值范围.

解:因为方程$f(x)=0$有三个不同的实数根,

所以$y=f(x)$的图象与x轴有三个交点,如图所示.



由①知,应有$\begin{cases}2+a>0,\\ -2+a<0,\end{cases}$

解得$-2<a<2$,故实数a的取值范围是$(-2,2)$.

【探究总结】

利用函数的极值确定参数值的关注点

(1)利用函数的极值确定参数的值,常根据极值点处导数为0和此处函数值为极值两个条件列方程组,利用待定系数法求解.

(2)因为“导数值等于零”不是“此点为极值点”的充要条件,所以利用待定系数法求解后,必须验证根的合理性.

应用迁移

1.已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$ 在 $x=1$ 处取得极值 $\frac{5}{2}$.

(1)求实数 a,b 的值;

(2)求函数的另一个极值.

解:(1)因为 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$,

所以 $f'(x)=3x^2+2ax+b$.

依题意可得 $f'(1)=0$,$f(1)=\frac{5}{2}$,

即 $\begin{cases}3+2a+b=0,\\1+a+b+4=\frac{5}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\b=-2,\end{cases}$ 经验证成立.

(2)由(1)知 $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+4$,

$f'(x)=3x^2-x-2=(3x+2)(x-1)$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=-\frac{2}{3}$ 或 $x=1$.

当 x 变化时,$f'(x)$,$f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以函数的另一个极值在 $x=-\frac{2}{3}$ 处取得,是极大值,极大值为 $f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{130}{27}$.

2.已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{a}{x}$,a 为实数.

(1)若曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线经过点(0,1),求 a 的值;

(2)若 $f(x)$ 有极小值,且极小值大于2,求 a 的取值范围.

解:(1)因为 $f(x)=\ln x-\frac{a}{x}$,所以 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}$,所以 $f'(1)=1+a$,

又 $f(1)=-a$,

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线的方程为 $y+a=(1+a)(x-1)$.

因为切线经过点(0,1),所以 $1+a=(1+a)(0-1)$,解得 $a=-1$.

(2)由(1)知 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}=\frac{x+a}{x^2}$,函数 $f(x)$ 的定义域为(0,+∞).

当 $a\geqslant 0$ 时,$f'(x)>0$ 在(0,+∞)上恒成立,

所以 $f(x)$ 在(0,+∞)上单调递增,无极值;

当 $a<0$ 时,令 $f'(x)=0$,得 $x=-a$,

所以当 $0<x<-a$ 时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$ 在(0,$-a$)内单调递减,

当 $x>-a$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 在($-a$,+∞)上单调递增,

所以当 $x=-a$ 时,函数 $f(x)$ 有极小值,极小值为 $f(-a)=\ln(-a)+1$,

由 $\ln(-a)+1>2$,得 $a<-\mathrm{e}$,所以 a 的取值范围为($-\infty$,$-\mathrm{e}$).

课后素养评价(二十)

基础落实

1.函数 $f(x)=\begin{cases}-x^3,x\leqslant 0,\\x^3,x>0\end{cases}$ 是　　(　　)

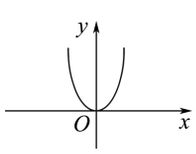
A.偶函数,且没有极值点

B.偶函数,且有一个极值点

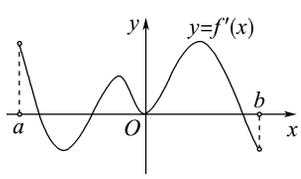
C.奇函数,且没有极值点

D.奇函数,且有一个极值点

B　**解析**:画出 $y=f(x)$ 的图象,如图所示,函数 $f(x)$ 是偶函数,函数 $f(x)$ 有一个极大值点.故选B.



2.已知函数 $f(x)$ 的定义域为(a,b),导函数 $f'(x)$ 在(a,b)内的图象如图所示,则函数 $f(x)$ 在(a,b)内极小值点的个数为　　(　　)



A.1　　B.2

C.3　　D.4

A　**解析**:由题图可知 $f(x)$ 在 (a,b) 内从左到右的单调性依次为增→减→增→减,根据极值点的定义可知在 (a,b) 内只有一个极小值点.故选 A.

3.已知函数 $f(x)=2f'(1)\ln x-\frac{x}{3}$,则 $f(x)$ 的极大值点为　(　　)

A.$\frac{1}{3}$　　B.$\frac{1}{2}$

C.2　　D.3

C　**解析**:$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,$f(x)=2f'(1)\ln x-\frac{x}{3}$,$f'(x)=\frac{2f'(1)}{x}-\frac{1}{3}$,令 $x=1$,可得 $f'(1)=2f'(1)-\frac{1}{3}$,所以 $f'(1)=\frac{1}{3}$,所以 $f'(x)=\frac{2}{3x}-\frac{1}{3}$.令 $f'(x)=0$,可得 $x=2$,当 $0<x<2$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增;当 $x>2$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,所以 $f(x)$ 的极大值点为 2.故选 C.

4.已知函数 $f(x)=e^x+kx$ 在 $x=0$ 处有极值,则 $k=$　(　　)

A.-1　　B.0

C.1　　D.e

A　**解析**:$f'(x)=e^x+k$,因为函数 $f(x)=e^x+kx$ 在 $x=0$ 处有极值,所以 $f'(0)=e^0+k=0$,解得 $k=-1$.代入检验,满足题意.

5.已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-mx^2+mx+9$ 在 **R** 上无极值,则实数 m 的取值范围为　(　　)

A.$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

B.$(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$

C.$(0,1)$

D.$[0,1]$

D　**解析**:函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-mx^2+mx+9$ 在 **R** 上无极值$\Leftrightarrow f'(x)=x^2-2mx+m$ 在 **R** 上无变号零点$\Leftrightarrow\Delta=4m^2-4m\leqslant0\Leftrightarrow0\leqslant m\leqslant1$.故选 D.

6.函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2\ln x+x$ 的极值点是_____.

1　**解析**:$f(x)=\frac{1}{2}x^2-2\ln x+x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,$f'(x)=x-\frac{2}{x}+1=\frac{1}{x}(x+2)(x-1)$,

令 $f'(x)>0$,解得 $x>1$,

令 $f'(x)<0$,解得 $0<x<1$,

所以 $x=1$ 为 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2\ln x+x$ 的极值点.

7.已知函数 $f(x)=ax^3+3x^2-6ax+b$ 在 $x=2$ 处取得极值 9,则 $a+2b=$_____.

-24　**解析**:$f'(x)=3ax^2+6x-6a$,因为 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极值 9,

所以 $\begin{cases}f'(2)=0,\\f(2)=9,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}12a+12-6a=0,\\8a+12-12a+b=9,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-2,\\b=-11,\end{cases}$

所以 $a+2b=-2-22=-24$.

8.若函数 $f(x)=(x^2-a)e^x$ 在区间 $(-2,2)$ 内只有极小值,无极大值,则实数 a 的取值范围是_____.

$[0,8)$　**解析**:因为 $f(x)=(x^2-a)e^x$ 在区间 $(-2,2)$ 内只有极小值,无极大值,所以 $f'(x)=(x^2+2x-a)e^x=0$ 在区间 $(-2,2)$ 内只有一个函数值左负右正的实根,即关于 x 的方程 $x^2+2x-a=0$ 在区间 $(-2,2)$ 内只有一个函数值左负右正的实根,所以 $\begin{cases}(-2)^2+2\times(-2)-a\leqslant0,\\2^2+2\times2-a>0,\end{cases}$ 得 $a\in[0,8)$.

9.已知函数 $f(x)=x(x-c)^2$ 在 $x=1$ 处取得极小值,求 $f(x)$ 的极大值.

解:因为 $f(x)=x(x-c)^2=x^3-2cx^2+c^2x$,所以 $f'(x)=3x^2-4cx+c^2=3(x-c)\left(x-\frac{c}{3}\right)$.由 $f'(x)=0$,解得 $x=c$ 或 $x=\frac{c}{3}$.依题意,$c=1$ 或 $c=3$.当 $c=3$ 时,$f(x)$ 在 $x=3$ 处取得极小值,与题意不符;当 $c=1$ 时,$f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值.所以 $c=1$.所以当 $x=\frac{1}{3}$ 时,$f(x)$ 取得极大值 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}-1\right)^2=\frac{4}{27}$.

能力提升

1.已知函数 $f(x)=2f'(1)\cdot\ln x-x$,则 $f(x)$ 的极大值为　(　　)

A.$2\ln2-2$　　B.$2\ln2+2$

C.$\ln2-2$　　D.$\ln2+2$

A　**解析**:因为 $f'(x)=\frac{2f'(1)}{x}-1$,$x\in(0,+\infty)$,

所以 $f'(1)=2f'(1)-1$,$f'(1)=1$,

所以 $f(x)=2\ln x-x$,$f'(x)=\frac{2}{x}-1$.

易知当 $x\in(0,2)$ 时,$f'(x)>0$;当 $x\in(2,+\infty)$

时，$f'(x)<0$.

故 $x=2$ 是其极大值点，$f(x)_{极大值}=f(2)=2\ln 2-2$.

故选 A.

2. 设 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\cos x$，则函数 $f(x)$　　(　　)

A.有且仅有一个极小值

B.有且仅有一个极大值

C.有无数个极值

D.没有极值

A　**解析**：$f'(x)=x-\sin x$，令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=1-\cos x\geqslant 0$.

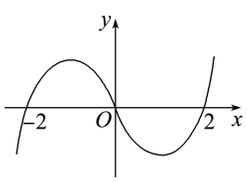
所以 $f'(x)$ 单调递增且 $f'(0)=0$.

所以当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增.

故 $f(x)$ 有且仅有一个极小值.故选 A.

3. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 **R** 且导函数为 $f'(x)$，如图是函数 $y=xf'(x)$ 的图象，则下列说法正确的是　　(　　)



A.函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-2,0)$，$(2,+\infty)$

B.函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,-2)$，$(2,+\infty)$

C.$x=-2$ 是函数的极小值点

D.$x=2$ 是函数的极小值点

D　**解析**：由题图及题意知，当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$；当 $-2<x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x<-2$ 时，$f'(x)>0$.

则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-2,2)$ 上单调递减，

因此函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 时取得极小值，在 $x=-2$ 时取得极大值.

故 A，B，C 错误，D 正确.故选 D.

4. 函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-2x+1$ 在 $(1,3)$ 内存在极值点，则　　(　　)

A.$-\frac{7}{6}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$

B.$-\frac{7}{6}<a<\frac{1}{2}$

C.$a\leqslant-\frac{1}{2}$ 或 $a\geqslant\frac{1}{2}$

D.$a<\frac{1}{2}$ 或 $a>\frac{1}{2}$

B　**解析**：$f'(x)=x^2+2ax-2$，$\Delta=4a^2+8>0$，

令 $f'(x)=x^2+2ax-2=0$，由于 $x\in(1,3)$，

所以 $2a=\frac{2-x^2}{x}=\frac{2}{x}-x$，

$y=\frac{2}{x}-x$ 在 $(1,3)$ 上单调递减.当 $x=1$ 时，$y=1$；

当 $x=3$ 时，$y=-\frac{7}{3}$.

由于函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-2x+1$ 在 $(1,3)$ 内存在极值点，

所以 $-\frac{7}{3}<2a<1$，即 $-\frac{7}{6}<a<\frac{1}{2}$.故选 B.

5. 若 $x=2$ 是函数 $f(x)=x(x-m)^2$ 的极大值点，则函数 $f(x)$ 的极大值为_____.

32　**解析**：$f'(x)=3x^2-4mx+m^2=(x-m)\cdot(3x-m)$.

令 $f'(x)=0$，则 $x=m$ 或 $x=\frac{m}{3}$.

由题设知 $m=2$ 或 $m=6$.

当 $m=2$ 时，极大值点为 $x=\frac{2}{3}$，与题意不符；

当 $m=6$ 时，极大值为 $f(2)=32$.

6. 设函数 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$（$a,b,c\in\mathbf{R}$），$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1)若 $a=b=c$，$f(4)=8$，求 a 的值；

(2)若 $a\neq b$，$b=c$，且 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的零点均在集合 $\{-3,1,3\}$ 中，求 $f(x)$ 的极小值.

解：(1)因为 $a=b=c$，所以 $f(x)=(x-a)(x-b)\cdot(x-c)=(x-a)^3$.

因为 $f(4)=8$，所以 $(4-a)^3=8$，解得 $a=2$.

(2)因为 $b=c$，所以 $f(x)=(x-a)(x-b)^2=x^3-(a+2b)x^2+b(2a+b)x-ab^2$，

从而 $f'(x)=3(x-b)\left(x-\frac{2a+b}{3}\right)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=b$ 或 $x=\frac{2a+b}{3}$.

因为 a，b，$\frac{2a+b}{3}$ 都在集合 $\{-3,1,3\}$ 中，且 $a\neq b$，所以 $\frac{2a+b}{3}=1$，$a=3$，$b=-3$.

此时令 $f'(x)=0$，得 $x=-3$ 或 $x=1$.列表如下：

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=(1-3)\times(1+3)^2=-32$.

自我超越

1. 已知 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-ex^2$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的极小值点和极大值点.若 $x_1<x_2$，则 a 的取值范围是_____.

$\left(\frac{1}{e},1\right)$　**解析：**（方法一：将函数零点问题转化为两个函数图象的交点问题）因为 $f'(x)=2\ln a\cdot a^x-2ex$，

所以方程 $2\ln a\cdot a^x-2ex=0$ 的两个根为 x_1,x_2，

即方程 $\ln a\cdot a^x=ex$ 的两个根为 x_1,x_2，

即函数 $y=\ln a\cdot a^x$ 与函数 $y=ex$ 的图象有两个不同的交点.

因为 $x=x_1,x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-ex^2$ 的极小值点和极大值点，且 $x_1<x_2$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减，在 (x_1,x_2) 上单调递增，

所以在区间 $(-\infty,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上，$f'(x)<0$，即 $y=ex$ 的图象在 $y=\ln a\cdot a^x$ 图象的上方；

在区间 (x_1,x_2) 上，$f'(x)>0$，即 $y=ex$ 的图象在 $y=\ln a\cdot a^x$ 图象的下方.

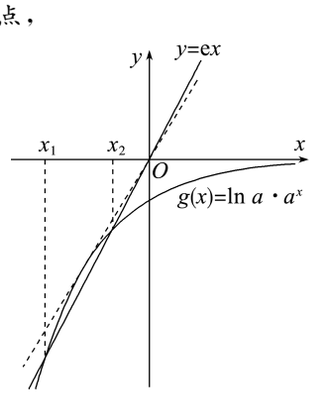
当 $a>1$ 时，图象显然不符合题意，所以 $0<a<1$.

令 $g(x)=\ln a\cdot a^x$，则 $g'(x)=(\ln a)^2\cdot a^x$，$0<a<1$，如图，设过原点的直线与函数 $y=g(x)$ 的图象相切于点 $(x_0,\ln a\cdot a^{x_0})$.

则切线的斜率为 $g'(x_0)=(\ln a)^2\cdot a^{x_0}$，故切线方程为 $y-\ln a\cdot a^{x_0}=(\ln a)^2\cdot a^{x_0}(x-x_0)$.

则有 $-\ln a\cdot a^{x_0}=-x_0(\ln a)^2\cdot a^{x_0}$，解得 $x_0=\frac{1}{\ln a}$，则切线的斜率为 $(\ln a)^2\cdot a^{\frac{1}{\ln a}}=e(\ln a)^2$.

因为函数 $y=\ln a\cdot a^x$ 与函数 $y=ex$ 的图象有两个不同的交点，



所以 $e(\ln a)^2<e$，解得 $\frac{1}{e}<a<e$.又 $0<a<1$，所以 $\frac{1}{e}<a<1$.综上所述，a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{e},1\right)$.

（方法二：构造新函数，二次求导）$f'(x)=2\ln a\cdot a^x-2ex=0$ 的两个根为 x_1,x_2.

因为 $x=x_1,x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-ex^2$ 的极小值点和极大值点，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减，在 (x_1,x_2) 上单调递增.

设函数 $g(x)=f'(x)=2(a^x\ln a-ex)$，则 $g'(x)=2a^x(\ln a)^2-2e$.

若 $a>1$，则 $g'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，此时若 $g'(x_0)=0$，则 $f'(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，此时若有 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-ex^2$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的极小值点和极大值点，则 $x_1>x_2$，不符合题意.

若 $0<a<1$，则 $g'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，此时若 $g'(x_0)=0$，则 $f'(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，令 $g'(x_0)=0$，则 $a^{x_0}=\frac{e}{(\ln a)^2}$，此时若有 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-ex^2$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的极小值点和极大值点，且 $x_1<x_2$，则需满足 $f'(x_0)>0$，$f'(x_0)=2(a^{x_0}\ln a-ex_0)=2\left(\frac{e}{\ln a}-ex_0\right)>0$，即 $x_0<\frac{1}{\ln a}$，$x_0\ln a>1$.故 $x_0\ln a=\ln a^{x_0}=\ln\frac{e}{(\ln a)^2}>1$，所以 $\frac{1}{e}<a<e$.又因为 $0<a<1$，所以 $\frac{1}{e}<a<1$，即实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{e},1\right)$.

2. 已知函数 $f(x)=x-\frac{a}{x}-(a+1)\ln x$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若 $a>1$，且 $f(x)$ 的极小值小于 $2-4\ln3$，求 a 的取值范围.

解：(1)$f'(x)=1+\frac{a}{x^2}-\frac{a+1}{x}=\frac{(x-a)(x-1)}{x^2}$，

①当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

②当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 内单调递增，在 $(a,1)$ 内单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

③当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

④当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递增，在 $(1,a)$ 内单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

综上，当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$，单调递增区间为 $(1,+\infty)$；

当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(a,1)$，单调递增区间为 $(0,a)$ 和 $(1,+\infty)$；

当 $a=1$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，无单调递减区间；

当 $a>1$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(1,a)$，单调递增区间为 $(0,1)$ 和 $(a,+\infty)$.

(2)已知 $a>1$，由(1)知 $f(x)_{极小值}=f(a)=a-1-(a+1)\ln a$.

令 $g(a)=a-1-(a+1)\ln a$，$a>1$，则 $g'(a)=1-\left(\ln a+\dfrac{a+1}{a}\right)=-\ln a-\dfrac{1}{a}<0$，

所以 $g(a)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，且 $g(3)=2-4\ln 3$，所以 $a>3$.

所以 a 的取值范围为 $(3,+\infty)$.

第 2 课时　函数的最大(小)值

学习任务目标

1.了解函数的最大值、最小值的定义.

2.理解导数与函数最值的关系.

3.掌握利用导数求函数最值的方法.

4.体会导数与单调性、极值、最大(小)值的关系.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点　函数的最值

1.一般地，如果在区间 $[a,b]$ 上函数 $y=f(x)$ 的图象是一条连续不断的曲线，那么它必有最大值和最小值.

2.一般地，求函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值与最小值的步骤如下：

(1)求函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内的极值；

(2)将函数 $y=f(x)$ 的各极值与端点处的函数值 $f(a)$，$f(b)$ 比较，其中最大的一个是最大值，最小的一个是最小值.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)函数的极大值一定是函数的最大值.　(　×　)

(2)开区间上的单调连续函数无最值.　(　√　)

(3)函数的最值一定是极值.　(　×　)

(4)在闭区间上图象连续的函数一定存在最值.　(　√　)

2.函数 $f(x)=x^3-3x+3$ 在 $[-3,3]$ 上的最小值为(　　)

A.1　　B.5

C.12　　D.−15

D　**解析**：$f'(x)=3x^2-3$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\pm1$，且 $f(1)=1$，$f(-1)=5$，$f(-3)=-15$，$f(3)=21$.故选 D.

3.请思考并回答下列问题：

(1)函数的极值是针对函数在某一点附近的局部而言的，它是比较极值点附近的函数值得出的，函数的最值是否也是一个局部性概念？

(2)一个函数的极值可以有多个，最大(小)值是否可以有多个？

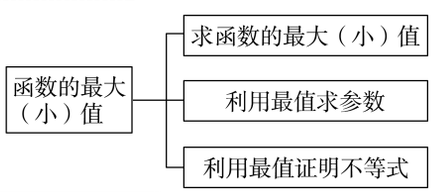
(3)极值只能在区间内取得，不能在端点处取得，最值是否也是如此？

(1)**提示**：不是.函数的最值是一个整体性概念，函数的最值是比较整个定义区间的函数值得出的.

(2)**提示**：不可以.一个函数的最大(小)值是唯一的.

(3)**提示**：最值可以在区间内取得，也可以在端点处取得.极值有可能为最值，最值不在端点处取得时一定是极值.

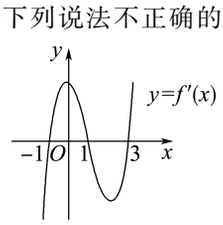
整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1　辨析函数最值、极值的概念

1.函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示，关于函数 $f(x)$，下列说法不正确的是(　　)



A.函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$，$(3,+\infty)$ 上单调递增

B.函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(1,3)$ 上单调递减

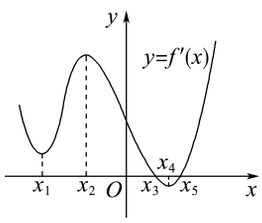
C.函数 $f(x)$ 存在两个极值点

D.函数 $f(x)$ 有最小值，但是无最大值

C　**解析**：根据题图可知，在 $(-1,1)$ 和 $(3,+\infty)$ 上 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，故选项 A 正确；在 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,3)$ 上 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，故选项 B 正确；所以 $f(x)$ 的极小值点为 -1，3，极

大值点为1，故选项C错误；由上述分析可知，函数$f(x)$的最小值是$f(-1)$和$f(3)$两者中较小的一个，没有最大值，故选项D正确.故选C.

2.（多选）已知函数$y=f(x)$的导函数$y=f'(x)$的图象如图所示，则（　　）



A.$f(x)$在(x_2,x_4)上单调递减

B.$f(x)$在$(x_5,+\infty)$上单调递增

C.$f(x)$的一个极小值为$f(x_1)$

D.$f(x)$在$[x_1,x_5]$上的最大值为$f(x_3)$

BD　**解析**：由题图可知，当$x\in(-\infty,x_3)\cup(x_5,+\infty)$时，$f'(x)>0$，当$x\in(x_3,x_5)$时，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$(x_3,x_5)$上单调递减，在$(-\infty,x_3)$，$(x_5,+\infty)$上单调递增，极小值为$f(x_5)$，在$[x_1,x_5]$上的最大值为$f(x_3)$，所以选项A和C错误，选项B和D正确.故选BD.

3.已知函数$f(x)=\sin x-\frac{1}{3}x$，$x\in[0,\pi]$，$\cos x_0=\frac{1}{3}$，$x_0\in[0,\pi]$.给出下列命题：

①$f(x)$的最大值为$f(x_0)$；②$f(x)$的最小值为$f(x_0)$；③$f(x)$在$[0,x_0]$上单调递减；④$f(x_0)$为$f(x)$的极大值.

其中真命题的序号是_____.

①④　**解析**：$f'(x)=\cos x-\frac{1}{3}$，由$f'(x)=0$，得$\cos x=\frac{1}{3}$.因为$x\in[0,\pi]$，$\cos x_0=\frac{1}{3}$，$x_0\in[0,\pi]$，所以$x=x_0$.当$0\leqslant x<x_0$时，$f'(x)>0$；当$x_0<x\leqslant\pi$时，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$[0,x_0)$上单调递增，在$(x_0,\pi]$上单调递减，

所以$f(x_0)$为$f(x)$的极大值且为最大值.真命题为①④.

【探究总结】

1.最值与极值的区别与联系

（1）区别：极值是函数在局部范围内的最值，不一定为整个定义域内的最值；而最值是函数在整个定义域内的最大值或最小值.

（2）联系：函数在闭区间上的最值可能出现在极值点或区间端点处，极值是求最值的重要依据.

2.解答此类问题的两个角度

（1）分析导函数符号变化：根据导数为正或负，直接判断原函数在各区间上的单调性.

（2）确定极值点条件：在导数为零的点，通过左右导数值的符号变化区分极大值点或极小值点，结合单调性验证.

任务2 计算函数的最值

探究活动

例1　（教材P93例6改编）求下列函数的最值.

（1）$f(x)=x^3-3x^2-10$，$x\in[-1,1]$；

（2）$f(x)=\frac{x-1}{x^2+3}$.

解：（1）$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$，令$f'(x)=0$，得$x=0$或$x=2$（舍去）.

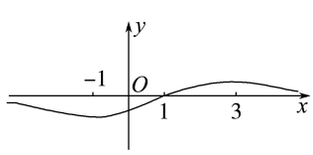
当x变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-14	单调递增	极大值-10	单调递减	-12

所以当$x=-1$时，函数取最小值$f(-1)=-14$；当$x=0$时，函数取最大值$f(0)=-10$.

（2）$f'(x)=\frac{-(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}$，

令$f'(x)=0$，得$x=-1$或$x=3$.容易验证函数在$x=-1$处取得极小值，在$x=3$处取得极大值.又因为当$x=1$时，$f(x)=0$，当$x<1$时，$f(x)<0$，当$x>1$时，$f(x)>0$，所以可以画出函数的大致图象，如图所示.



由图象可知，函数的最大值为$f(3)=\frac{3-1}{3^2+3}=\frac{1}{6}$，最小值为$f(-1)=\frac{-1-1}{(-1)^2+3}=-\frac{1}{2}$.

【探究总结】

求函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上的最值的步骤

（1）求函数$f(x)$的导函数$f'(x)$.

（2）计算函数$f(x)$在区间(a,b)内使得$f'(x)=0$的所有点处的函数值以及端点处的函数值$f(a)$与$f(b)$.

（3）比较以上各个函数值，其中最大的是函数的最大值，最小的是函数的最小值.

应用迁移

求下列各函数的最值.

（1）$f(x)=3x^3-9x+5$，$x\in[-2,2]$；

(2)$f(x)=\sin 2x-x,x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

解:(1)$f'(x)=9x^2-9=9(x+1)(x-1)$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=-1$ 或 $x=1$.

当 x 变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下表:

x	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,2)$	2
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	-1	单调递增	极大值 11	单调递减	极小值 -1	单调递增	11

从表中可以看出,当 $x=-2$ 或 1 时,函数 $f(x)$取得最小值-1.

当 $x=-1$ 或 2 时,函数 $f(x)$取得最大值 11.

(2)$f'(x)=2\cos 2x-1$.令 $f'(x)=0$,得 $\cos 2x=\frac{1}{2}$.

又因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $2x\in[-\pi,\pi]$.

所以 $2x=\pm\frac{\pi}{3}$,$x=\pm\frac{\pi}{6}$.

易知函数 $f(x)$在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的两个极值分别为

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$,$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}$.

又 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$,$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

比较以上函数值可得 $f(x)_{\max}=\frac{\pi}{2}$,$f(x)_{\min}=-\frac{\pi}{2}$.

任务3 利用导数证明不等式

探究活动

例 2　(2023·新高考全国Ⅰ卷)已知函数$f(x)=a(e^x+a)-x$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性;

(2)证明:当 $a>0$ 时,$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$.

(1)**解**:因为 $f(x)=a(e^x+a)-x$,定义域为 **R**,所以 $f'(x)=ae^x-1$.

当 $a\leqslant 0$ 时,由于 $e^x>0$,则 $ae^x\leqslant 0$,故 $f'(x)=ae^x-1<0$ 恒成立,

所以 $f(x)$在 **R** 上单调递减.

当 $a>0$ 时,令 $f'(x)=ae^x-1=0$,解得 $x=-\ln a$,

当 $x<-\ln a$ 时,$f'(x)<0$,则 $f(x)$在$(-\infty,-\ln a)$上单调递减;

当 $x>-\ln a$ 时,$f'(x)>0$,则 $f(x)$在$(-\ln a,+\infty)$上单调递增.

综上,当 $a\leqslant 0$ 时,$f(x)$在 **R** 上单调递减;

当 $a>0$ 时,$f(x)$在$(-\infty,-\ln a)$上单调递减,在$(-\ln a,+\infty)$上单调递增.

(2)**证明**:由(1)得,$a>0$ 时,$f(x)_{\min}=f(-\ln a)=a(e^{-\ln a}+a)+\ln a=1+a^2+\ln a$.

要证 $f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$恒成立,即证 $1+a^2+\ln a>2\ln a+\frac{3}{2}$,即证 $a^2-\frac{1}{2}-\ln a>0$ 恒成立.

令 $g(a)=a^2-\frac{1}{2}-\ln a(a>0)$,

则 $g'(a)=2a-\frac{1}{a}=\frac{2a^2-1}{a}$.

令 $g'(a)<0$,得 $0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$;令 $g'(a)>0$,得 $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $g(a)$在$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$上单调递增,

所以 $g(a)_{\min}=g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\ln\sqrt{2}>0$,所以 $g(a)>0$ 恒成立.

因此,当 $a>0$ 时,$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$恒成立.

【探究总结】

利用函数的最值证明不等式的两种常用方法

(1)证明 $f(x)>g(x)$的一般方法是转化为证明 $h(x)=f(x)-g(x)>0$,则只需证明$h(x)_{\min}>0$,进而将证明不等式转化为求函数的最值.

(2)必要时,还可将证明 $f(x)>g(x)$转化为证明 $f(x)_{\min}>g(x)_{\max}$.

应用迁移

1.(1)证明:不等式 $e^x\geqslant x+1$.

(2)证明:当 $x\geqslant 0$ 时,不等式 $e^x\geqslant\frac{1}{2}x^2+x+1$ 恒成立.

证明:(1)构造函数 $f(x)=e^x-x-1$,则 $f'(x)=e^x-1$,

$x\in(-\infty,0)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,$x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,

所以 $x=0$ 是函数 $f(x)$的极小值点,也是最小值点,即 $f(x)\geqslant f(0)=0$,即 $e^x\geqslant x+1$.

(2)构造函数 $g(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$,则 $g'(x)=e^x-x-1$,

由(1)可知,$g'(x)\geqslant 0$,

所以函数 $g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,即 $g(x)\geqslant g(0)=0$,即 $e^x\geqslant\frac{1}{2}x^2+x+1$.

2. 证明不等式：$x-\sin x<\tan x-x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

证明：令 $f(x)=\tan x-2x+\sin x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

则 $f'(x)=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'-(2x)'+(\sin x)'$

$=\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}-2+\cos x$

$=\frac{1+\cos^3x-2\cos^2x}{\cos^2x}$

$=\frac{1-\cos^2x+\cos^3x-\cos^2x}{\cos^2x}$

$=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x-\cos^2x)}{\cos^2x}$

$=\frac{(1-\cos x)(\cos x+\sin^2x)}{\cos^2x}$.

因为 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $1-\cos x>0$，$\cos x+\sin^2x>0$，

所以 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增.

所以 $f(x)>f(0)=0$，即 $\tan x-2x+\sin x>0$，

即 $x-\sin x<\tan x-x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

课后素养评价（二十一）

基础落实

1. 图象连续的函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上　（　　）

A. 一定存在极小值

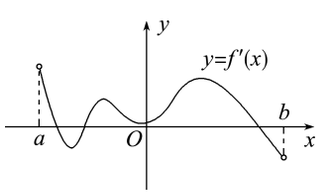
B. 一定存在极大值

C. 一定存在最大值

D. 极小值一定比极大值小

C　**解析**：由函数的最值与极值的概念，可知 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定存在最大值. 故选 C.

2. $f(x)$ 是定义在 (a,b) 上的函数，其导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 上的图象如图所示，则下列说法错误的是　（　　）



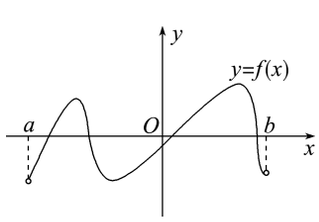
A. 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上一定存在最小值

B. 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上只有一个极小值点

C. 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有两个极大值点

D. 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上可能没有零点

A　**解析**：由导函数的图象可知原函数的大致图象如图所示.



对于 A，由于不能确定端点值与极小值的大小关系，同时端点值取不到，故 $f(x)$ 不一定有最小值，A 错误；

对于 B，由图象可知 $f(x)$ 只有一个极小值，B 正确；

对于 C，由图象可知 $f(x)$ 有两个极大值，C 正确；

对于 D，函数两个极大值与 0 的大小关系不确定，故 $f(x)$ 在 (a,b) 可能没有零点，D 正确.

故选 A.

3. 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-1,2)$，且在该区间上图象连续，在 $(-1,2)$ 上函数 $y=f(x)$ 有唯一的极大值 $f(1)$，则下列说法正确的是　（　　）

A. 函数 $f(x)$ 有最大值 $f(1)$

B. 函数 $f(x)$ 有最大值，但不一定是 $f(1)$

C. 函数 $f(x)$ 的最小值也可能是 $f(1)$

D. 函数 $f(x)$ 不一定有最大值

D　**解析**：函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-1,2)$，是开区间，则当 x 趋近于 -1 或 2 时，若 $f(x)$ 趋于正无穷大，此时函数 $f(x)$ 没有最大值，故 AB 错误，D 正确；因为函数 $y=f(x)$ 有唯一的极大值 $f(1)$，所以在 $x=1$ 附近，函数值小于 $f(1)$，所以函数 $f(x)$ 的最小值不可能是 $f(1)$，故 C 错误. 故选 D.

4. 已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 均为 $[a,b]$ 上的可导函数，在 $[a,b]$ 上图象均连续且 $f'(x)<g'(x)$，则 $f(x)-g(x)$ 的最大值为　（　　）

A. $f(a)-g(a)$　　B. $f(b)-g(b)$

C. $f(a)-g(b)$　　D. $f(b)-g(a)$

A　**解析**：令 $F(x)=f(x)-g(x)$，所以 $F'(x)=f'(x)-g'(x)<0$，所以 $F'(x)<0$，所以 $F(x)$ 在

$[a,b]$上单调递减，所以$F(x)_{max}=f(a)-g(a)$.故选 A.

5.已知函数$f(x)=x^2+a\ln x$的图象在点$(1,f(1))$处的切线经过坐标原点，则函数$y=f(x)$的最小值为（　　）

A.$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$　　B.$\frac{1}{4}+\ln 2$

C.$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$　　D.1

C　**解析**：已知$f(x)=x^2+a\ln x$，则$f(1)=1^2+a\ln 1=1$，

且$f'(x)=2x+\frac{a}{x}$，所以$f'(1)=2+a$，

所以$f'(1)=\frac{f(1)-0}{1-0}=1=2+a$，解得$a=-1$，

所以$f(x)=x^2-\ln x(x>0)$，

$f'(x)=2x-\frac{1}{x}$.

令$f'(x)>0$，即$2x-\frac{1}{x}>0$，解得$x>\frac{\sqrt{2}}{2}$，

令$f'(x)<0$，即$2x-\frac{1}{x}<0$，解得$0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以函数在区间$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$上单调递减，在区间$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$上单调递增.

所以$f(x)_{min}=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$.

故选 C.

6.已知$x=2$是$f(x)=2\ln x+ax^2-3x$的极值点，则$f(x)$在$\left[\frac{1}{3},3\right]$上的最大值是（　　）

A.$2\ln 3-\frac{9}{2}$　　B.$-\frac{5}{2}$

C.$-2\ln 3-\frac{17}{8}$　　D.$2\ln 2-4$

A　**解析**：由题意，函数的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{2}{x}+2ax-3$且$f'(2)=0$，所以$a=\frac{1}{2}$，

则$f'(x)=\frac{2}{x}+x-3=\frac{x^2-3x+2}{x}=\frac{(x-1)(x-2)}{x}$，

所以当$1<x<2$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

当$0<x<1$或$x>2$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

所以$f(x)$在$\left[\frac{1}{3},1\right)$和$(2,3]$上单调递增，在$(1,2]$上单调递减.

又因为$\ln 3>\ln e=1$，所以$2\ln 3>2$，所以$2\ln 3-\frac{9}{2}>2-\frac{9}{2}$，

所以$f(3)=2\ln 3-\frac{9}{2}>f(1)=-\frac{5}{2}$，所以$f(x)$在$\left[\frac{1}{3},3\right]$上的最大值是$2\ln 3-\frac{9}{2}$.

故选 A.

7.若函数$f(x)=-x^3+3x^2-1$在区间$(m,m+5)$内存在最大值，则实数m的取值范围是（　　）

A.$[-1,2)$　　B.$(-1,2)$

C.$[-3,2)$　　D.$(-3,2)$

A　**解析**：$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$，

$f'(x)>0\Rightarrow 0<x<2$，$f'(x)<0\Rightarrow x<0$或$x>2$，

所以$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,2)$上单调递增，在$(2,+\infty)$上单调递减，

所以$f(x)$有极大值$f(2)=3$.

要使$f(x)$在$(m,m+5)$上有最大值，则极大值 3 即为该最大值，

则$2\in(m,m+5)\Rightarrow\begin{cases}m<2,\\m+5>2\end{cases}\Rightarrow -3<m<2$.

又$f(x)=3\Rightarrow -x^3+3x^2-1=3\Rightarrow x^3-3x^2+4=0\Rightarrow(x-2)^2(x+1)=0\Rightarrow x=2$或$x=-1$，

所以$m\geqslant -1$.

综上，$-1\leqslant m<2$.

故选 A.

8.已知函数$f(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$.

(1)求$f(x)$的最小值；

(2)证明：$x\ln x-x^2e^{1-x}+1\geqslant 0$.

(1)**解**：由$f(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1(x>0)$，得$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$.

当$0<x<1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x>1$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

所以$f(x)$的最小值为$f(1)=0$.

(2)**证明**：由(1)知，$f(x)\geqslant 0$，即$\ln x\geqslant 1-\frac{1}{x}$，从而$x\ln x\geqslant x-1$，即$x\ln x+1\geqslant x$①.

又$\ln x\geqslant 1-\frac{1}{x}$，得$\ln\frac{1}{x}\geqslant 1-x$，从而$\frac{1}{x}\geqslant e^{1-x}$，$xe^{1-x}\leqslant 1$，$x^2e^{1-x}\leqslant x$，

$-x^2e^{1-x}\geqslant -x$②.

由①②得 $x\ln x-x^2e^{1-x}+1\geqslant 0$.

能力提升

1.若函数 $f(x)=-x^3+3ax^2+2$ 在 $x=2$ 处取得极值，则 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上的最小值为　　(　　)

A.2　　B.3

C.4　　D.6

A　**解析**：因为 $f(x)=-x^3+3ax^2+2$，则 $f'(x)=-3x^2+6ax$，由已知可得 $f'(2)=-12+12a=0$，解得 $a=1$，

则 $f(x)=-x^3+3x^2+2$，$f'(x)=-3x^2+6x$，由 $f'(x)=0$ 可得 $x=0$ 或 $x=2$，列表如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增	极大值	单调递减

当 $x\in[1,3]$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，在 $[2,3]$ 上单调递减，且 $f(1)=4$，$f(3)=2$，则 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上的最小值为 2.故选 A.

2.已知直线 $x=a$ 与函数 $f(x)=e^x$，$g(x)=x$ 的图象分别交于点 A，B，当 $|AB|$ 取得最小值时，$a=$　　(　　)

A.0　　B.1

C.e　　D.$\frac{1}{e}$

A　**解析**：由题意可得 $|AB|=|f(a)-g(a)|=|e^a-a|$.

令函数 $h(x)=f(x)-g(x)=e^x-x$，则 $h'(x)=e^x-1$.

由 $h'(x)<0$ 可得 $x<0$，由 $h'(x)>0$ 可得 $x>0$，所以，函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以，$h(x)_{\min}=h(0)=1$，即 $|AB|$ 的最小值为 1，此时 $a=0$.故选 A.

3.(多选)已知函数 $f(x)=x^3+3x^2-9x+1$.若 $f(x)$ 在区间 $(k,2]$ 上的最大值为 28，则实数 k 的值可以是　　(　　)

A.−5　　B.−4

C.−3　　D.−2

AB　**解析**：因为 $f(x)=x^3+3x^2-9x+1$，所以 $f'(x)=3x^2+6x-9$.

令 $f'(x)=3x^2+6x-9=0$，解得 $x_1=-3$，$x_2=1$，所以在 $(-\infty,-3)$ 和 $(1,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$；在 $(-3,1)$ 上，$f'(x)<0$.所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-3)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-3,1)$ 上单调递减.

则 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，所以在 $[1,2]$ 上，$f(2)$ 最大；

$f(x)$ 在 $(-3,1)$ 上单调递减，所以在 $[-3,1]$ 上，$f(-3)$ 最大；

$f(x)$ 在 $(-\infty,-3)$ 上单调递增，所以在 $(-\infty,-3]$ 上，$f(-3)$ 最大.

因为 $f(2)=3$，$f(-3)=28$，且 $f(x)$ 在区间 $(k,2]$ 上的最大值为 28，

所以 $k<-3$，即 k 的取值范围是 $(-\infty,-3)$.故选 AB.

4.已知函数 $f(x)=(x-1)e^x$.若对于区间 $(-\infty,1)$ 上的任意 x_1，x_2，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant t$，则　　(　　)

A.t 的最小值是 1

B.t 的最小值小于 1

C.t 的最大值是 1

D.这样的 t 不存在

A　**解析**：由题意，函数 $f(x)=(x-1)e^x$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上有 $f(x)_{\max}-f(x)_{\min}\leqslant t$.

因为 $f(x)=(x-1)e^x$，所以 $f'(x)=xe^x$，且 $x\in(-\infty,1)$.

由 $f'(x)<0$，可得 $x<0$；由 $f'(x)>0$，可得 $0<x<1$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,1)$ 上单调递增，

所以函数的最小值为 $f(0)=-1$.

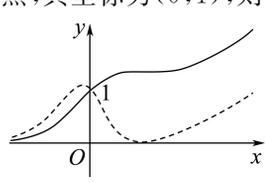
又当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f(x)=(x-1)e^x<0$，

而 $f(1)=0$，

所以 $-1\leqslant f(x)<0$，所以 $t\geqslant 1$，即 t 的最小值是 1.

故选 A.

5.在同一平面直角坐标系内，函数 $y=f(x)$ 及其导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示，已知两个图象有且仅有一个公共点，其坐标为 $(0,1)$，则　　(　　)



A.函数 $y=f(x)\cdot e^x$ 的最大值为 1

B.函数 $y=f(x)\cdot e^x$ 的最小值为 1

C.函数 $y=\frac{f(x)}{e^x}$ 的最大值为 1

D.函数 $y=\frac{f(x)}{e^x}$ 的最小值为 1

C　**解析**：由题意可知，两个函数图象都在 x 轴上方，判断可知，虚线部分为 $y=f'(x)$，实线部分为 $y=f(x)$，则 A，B 显然错误；对于 C，D，易得 $y'=$

$\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$，由题图可知，$x\in(-\infty,0)$，$y'>0$，$y=\frac{f(x)}{e^x}$单调递增，$x\in(0,+\infty)$，$y'<0$，$y=\frac{f(x)}{e^x}$单调递减，所以函数 $y=\frac{f(x)}{e^x}$在 $x=0$ 处取得最大值为 1.故选 C.

6.(多选)对于函数 $f(x)=e^x\cos x-x$，$x\in(0,\pi)$，下列结论正确的有　　(　　)

A.$f'(x)$在$(0,\pi)$内单调递减

B.$f'(x)$存在极小值

C.$f(x)$存在最大值

D.$f(x)$无最小值

AD　**解析**：令 $g(x)=f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)-1$，则 $g'(x)=-2e^x\sin x$.因为当 $x\in(0,\pi)$时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$在$(0,\pi)$内单调递减，所以 $f'(x)$在$(0,\pi)$内单调递减，无极值，故 A 正确，B 错误.又 $f'(0)=0$，故当 $x\in(0,\pi)$时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$在$(0,\pi)$内单调递减，无最值，故 C 错误，D 正确.故选 AD.

7.在信号处理中，形如$f(x)=x^ne^{-ax}$(其中 e 是自然对数的底数)的函数称为“衰减多项式包络”，常用于描述电磁波、声波在介质中的能量衰减以及神经元膜电位的发放后的电位衰减等.某学习小组对 $n=2$ 的情况开展研究，请回答下列问题.

(1)当 $a=1$ 时，求 $f(x)$的图象在 $x=1$ 处的切线的方程；

(2)当 $a>0$ 且 $x>0$ 时，$f(x)\leqslant\frac{4}{ae}$恒成立，求正实数 a 的取值范围.

解：(1)当 $a=1$ 时，函数 $f(x)=x^2e^{-x}$，求导得 $f'(x)=(2x-x^2)e^{-x}$，则 $f'(1)=\frac{1}{e}$，而 $f(1)=\frac{1}{e}$，

所以函数 $f(x)$的图象在 $x=1$ 处的切线的方程为 $y-\frac{1}{e}=\frac{1}{e}(x-1)$，即 $x-ey=0$.

(2)函数 $f(x)=x^2e^{-ax}$，当 $a>0$ 且 $x>0$ 时，不等式$f(x)\leqslant\frac{4}{ae}$即$\frac{x^2}{e^{ax}}-\frac{4}{ae}\leqslant0$恒成立.

令函数 $g(x)=\frac{x^2}{e^{ax}}-\frac{4}{ae}$，$x>0$，求导得 $g'(x)=\frac{2x-ax^2}{e^{ax}}$.

由 $g'(x)>0$，得 $0<x<\frac{2}{a}$，由 $g'(x)<0$，得 $x>\frac{2}{a}$，

函数 $g(x)$在$\left(0,\frac{2}{a}\right)$内单调递增，在$\left(\frac{2}{a},+\infty\right)$上单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g\left(\frac{2}{a}\right)=\frac{4}{a^2e^2}-\frac{4}{ae}$.

依题意，$\frac{4}{a^2e^2}-\frac{4}{ae}\leqslant0$，解得 $a\geqslant\frac{1}{e}$.

所以正实数 a 的取值范围是$\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

8.已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$，$g(x)=\frac{2}{x+1}-\frac{a}{x}$，曲线 $y=f(x)$与曲线 $y=g(x)$在$x=1$ 处的切线重合.

(1)求实数 a 的值；

(2)求证：$f(x)\geqslant g(x)$在$(0,+\infty)$上恒成立.

(1)**解**：因为 $f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$，$g(x)=\frac{2}{x+1}-\frac{a}{x}$，

所以 $f'(x)=\frac{\frac{x+1}{x}-\ln x}{(x+1)^2}$，$g'(x)=\frac{-2}{(x+1)^2}+\frac{a}{x^2}$.

由题意得 $f'(1)=g'(1)$，

所以$\frac{1}{2}=a-\frac{1}{2}$，解得 $a=1$.

(2)**证明**：由(1)知，$f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$，$g(x)=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x}$，

所以 $f(x)-g(x)=\frac{\ln x}{x+1}-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x}=\frac{x\ln x-x+1}{x(x+1)}$，$x>0$.

令 $h(x)=x\ln x-x+1$，$x>0$，则 $h'(x)=\ln x$.

当 $x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增；

当 $x\in(0,1)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减.

故当 $x=1$ 时，$h(x)$取得最小值 $h(1)=0$，所以 $h(x)\geqslant0$.

因为 $x>0$，所以 $x(x+1)>0$，即 $f(x)-g(x)\geqslant0$，所以 $f(x)\geqslant g(x)$在$(0,+\infty)$上恒成立.

9.设函数 $f(x)$是定义在$[-1,0)\cup(0,1]$上的奇函数，当 $x\in[-1,0)$时，$f(x)=2ax+\frac{1}{x^2}(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $x\in(0,1]$时，求 $f(x)$的解析式；

(2)若 $a>-1$，试判断 $f(x)$在$(0,1]$上的单调性，并证明你的结论；

(3)是否存在 a，使得当 $x\in(0,1]$时，$f(x)$有最大值-6?

解:(1)设 $x\in(0,1]$,则 $-x\in[-1,0)$,$f(-x)=-2ax+\frac{1}{x^2}$.

因为 $f(x)$是奇函数,所以 $f(-x)=-f(x)$,

所以 $f(x)=2ax-\frac{1}{x^2}$,$x\in(0,1]$.

(2)当 $a>-1$ 时,$f(x)$在$(0,1]$上单调递增.证明如下:

当 $x\in(0,1]$时,$f(x)=2ax-\frac{1}{x^2}$,

$f'(x)=2a+\frac{2}{x^3}=2\left(a+\frac{1}{x^3}\right)$.

因为 $a>-1$,$x\in(0,1]$,$\frac{1}{x^3}\geqslant 1$,

所以 $a+\frac{1}{x^3}>0$,即$f'(x)>0$.

所以当 $a>-1$ 时,$f(x)$在$(0,1]$上单调递增.

(3)当 $x\in(0,1]$时,$f(x)=2ax-\frac{1}{x^2}$,由(2)知当 $a>-1$ 时,$f(x)$在$(0,1]$上单调递增.

由 $f(x)_{\max}=f(1)=-6$,得 $a=-\frac{5}{2}$(不合题意,舍去);

当 $a\leqslant -1$ 时,令 $f'(x)=2\left(a+\frac{1}{x^3}\right)=0$,得 $x=\sqrt[3]{-\frac{1}{a}}$.

列表如下:

x	$\left(0,\sqrt[3]{-\frac{1}{a}}\right)$	$\sqrt[3]{-\frac{1}{a}}$	$\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{a}},1\right)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减

可知 $f(x)_{\max}=f\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{a}}\right)=-6$,解得 $a=-2\sqrt{2}$.

此时 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\in(0,1]$.

所以存在 $a=-2\sqrt{2}$,使得 $f(x)$在$(0,1]$上有最大值-6.

自我超越

1.已知函数 $f(x)=x^3-3x$ 的值域为$[-2,2]$,则 $f(x)$的定义域可以是_____.(写出一个符合条件的定义域即可)

$[-1,1]$　**解析**:因为 $f(x)=x^3-3x$,所以 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$,令 $f'(x)>0$ 得 $x<-1$ 或 $x>1$,令 $f'(x)<0$ 得$-1<x<1$,所以函数 $f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,-1)$和$(1,+\infty)$,函数 $f(x)$的单调递减区间为$(-1,1)$,所以-1 和 1 为函数 $f(x)$的极值点,当 $x=1$ 时,$f(1)=-2$,当 $x=-1$ 时,$f(-1)=2$,所以函数$f(x)$的定义域可以为$[-1,1]$.

2.解不等式 $\ln x>\frac{1}{2}$时,可以采用如下方法:$\ln x>\frac{1}{2}$等价于 $e^{\ln x}>e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.根据以上思路求解:函数$f(x)=x^x$,$x\in(0,+\infty)$的最小值为_____.

$e^{-\frac{1}{e}}$　**解析**:因为 $x\in(0,+\infty)$,所以 $f(x)=x^x>0$ 恒成立.令 $g(x)=\ln f(x)=x\ln x$,$x\in(0,+\infty)$,则$g'(x)=\ln x+1$.

由 $g'(x)=0$,得 $x=e^{-1}$,当 $x\in(0,e^{-1})$时,$g'(x)<0$,$g(x)$在$(0,e^{-1})$内单调递减,当 $x\in(e^{-1},+\infty)$时,$g'(x)>0$,$g(x)$在$(e^{-1},+\infty)$上单调递增,所以 $g(x)_{\min}=g(e^{-1})=e^{-1}\ln e^{-1}=-e^{-1}$,即 $\ln f(x)$的最小值为$-e^{-1}$.又 $y=\ln f(x)$为增函数,所以 $g(x)_{\min}=\ln[f(x)_{\min}]=-e^{-1}$,即 $f(x)_{\min}=e^{-e^{-1}}=e^{-\frac{1}{e}}$.

第3课时　函数极值、最值的应用

学习任务目标

1.了解画函数大致图象的步骤.

2.掌握利用导数解决实际问题中的求最大(小)值的方法.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　画函数 $f(x)$大致图象的步骤

(1)求出函数 $f(x)$的定义域;

(2)求导数 $f'(x)$及函数 $f'(x)$的零点;

(3)用 $f'(x)$的零点将 $f(x)$的定义域划分为若干个区间,列表给出 $f'(x)$在各区间上的正负,并得出 $f(x)$的单调性与极值;

(4)确定 $f(x)$的图象所经过的一些特殊点,以及图象的变化趋势;

(5)画出 $f(x)$的大致图象.

知识点二　导数在实际问题中的应用

导数在实际问题中的应用，主要体现在：利润最大问题、用料最省问题、效率最高问题、体积最值问题等方面.

【概念辨析】

1.某工厂要围建一个面积为 512 m^2 的矩形堆料场，一边可以利用原有的墙壁，其他三边需要砌新的墙壁.若使新砌墙壁所用的材料最省，则堆料场的长和宽应分别为(单位：m)　　(　　)

A.32，16　　B.30，15

C.40，20　　D.36，18

A　**解析**：要使材料最省，则要求新砌的墙壁的总长最短.设堆料场的宽为 x m，则长为 $\frac{512}{x}$ m，因此新砌墙壁总长 $L=2x+\frac{512}{x}(x>0)$，则 $L'=2-\frac{512}{x^2}$.令 $L'=0$，得 $x=16$ 或 $x=-16$(舍去).此时长为 $\frac{512}{16}=32$(m)，可使 L 最短.

2.已知圆锥内接于半径为 R 的球，当圆锥的体积最大时，圆锥的高为　　(　　)

A.R　　B.$2R$

C.$\frac{4}{3}R$　　D.$\frac{3}{4}R$

C　**解析**：设圆锥高为 h，底面半径为 r，则 $R^2=(h-R)^2+r^2$，

所以 $r^2=2Rh-h^2$.

所以 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi}{3}h(2Rh-h^2)=\frac{2}{3}\pi Rh^2-\frac{\pi}{3}h^3$.

$V'=\frac{4}{3}\pi Rh-\pi h^2$.令 $V'=0$，得 $h=\frac{4}{3}R$.

当 $0<h<\frac{4}{3}R$ 时，$V'>0$；

当 $\frac{4}{3}R<h<2R$ 时，$V'<0$.

故当 $h=\frac{4}{3}R$ 时，圆锥的体积最大.

3.请思考并回答下列问题：

(1)应用导数解决实际问题时，求函数的定义域应注意什么？

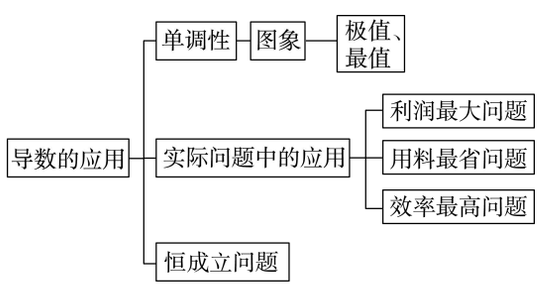
(2)解决生活中的优化问题时应注意什么？

(1)**提示**：在求函数定义域时，不仅要考虑函数解析式本身的限制条件，还要注意实际问题中变量的取值范围.

(2)**提示**：①在建立函数模型时，应根据实际问题确定出函数的定义域.

②求实际问题的最优解时，一定要从问题的实际意义出发，不符合实际意义的应舍去，如：长度、宽度应大于零，销售价格为正数等.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1　应用数形结合思想分析函数极值与最值

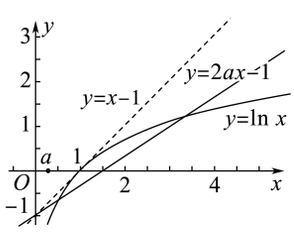
探究活动

例 1　已知函数 $f(x)=x(\ln x-ax)$ 有两个极值点，则实数 a 的取值范围是　　(　　)

A.$(-\infty,0)$　　B.$\left(0,\frac{1}{2}\right)$

C.$(0,1)$　　D.$(0,+\infty)$

B　**解析**：函数 $f(x)=x(\ln x-ax)$，则 $f'(x)=\ln x-ax+x\left(\frac{1}{x}-a\right)=\ln x-2ax+1$，令 $f'(x)=\ln x-2ax+1=0$，得 $\ln x=2ax-1$.函数 $f(x)=x(\ln x-ax)$ 有两个极值点，等价于 $f'(x)=\ln x-2ax+1$ 有两个变号零点，等价于函数 $y=\ln x$ 与 $y=2ax-1$ 的图象有两个交点，在同一坐标系中作出它们的图象(如图).



当 $a=\frac{1}{2}$ 时，直线 $y=2ax-1$ 与 $y=\ln x$ 的图象相切，由图可知，当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$y=\ln x$ 与 $y=2ax-1$ 的图象有两个交点，则实数 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.故选 B.

【探究总结】

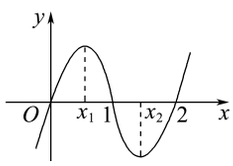
1.极值点问题转化为导函数零点问题，再转化为两个函数图象的交点问题；

2.数形结合分析交点个数，注意临界情况，如相切、端点等；

3.利用图象特征与趋势确定参数范围，注意定义域影响.

应用迁移

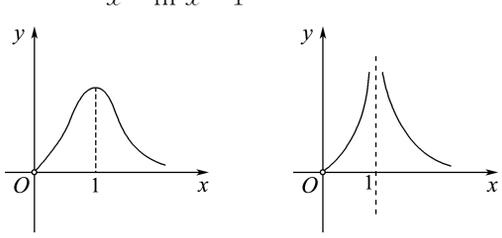
1.已知函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx$ 的图象如图所示，则 $x_1^2+x_2^2$ 等于　　（　　）



A.$\frac{2}{3}$　　B.$\frac{4}{3}$　　C.$\frac{8}{3}$　　D.$\frac{16}{3}$

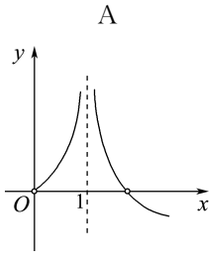
C　**解析**：由题中图象可知 $f(x)$ 的图象经过点(1，0)与(2，0)，x_1，x_2 是函数 $f(x)$ 的极值点，所以 $1+b+c=0$，$8+4b+2c=0$，解得 $b=-3$，$c=2$，所以 $f(x)=x^3-3x^2+2x$，所以 $f'(x)=3x^2-6x+2$，x_1，x_2 是方程 $3x^2-6x+2=0$ 的两根，所以 $x_1+x_2=2$，$x_1\cdot x_2=\frac{2}{3}$，所以 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4-2\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$.故选 C.

2.函数 $f(x)=\frac{1}{x-\ln x-1}$ 的图象大致是　　（　　）

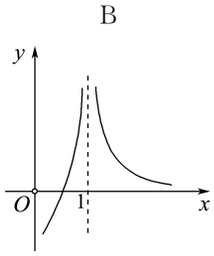


A

B



C



D

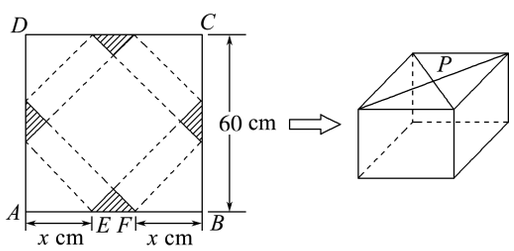
B　**解析**：由 $f(x)=\frac{1}{x-\ln x-1}$ 得函数的定义域为 $\{x|x>0$ 且 $x\neq1\}$，排除 A；令 $g(x)=x-\ln x-1$，则 $g'(x)=1-\frac{1}{x}$，

由 $g'(x)>0$，得 $x>1$，即函数 $g(x)$ 在(1，$+\infty$)上单调递增，由 $g'(x)<0$ 得 $0<x<1$，即函数 $g(x)$ 在(0，1)上单调递减，所以当 $x=1$ 时，函数 $g(x)$ 有最小值，$g(x)_{\min}=g(1)=0$，于是对任意的 $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，有 $g(x)>0$，故 $f(x)>0$，排除 C，D.故选 B.

任务2 运用导数解决实际问题中的优化模型

探究活动

例2　如图所示，四边形 $ABCD$ 表示边长为 60 cm 的正方形硬纸片，切去阴影部分所示的四个全等的等腰直角三角形，再沿虚线折起，使得 A，B，C，D 四个点重合于图中的点 P，正好形成一个正四棱柱形状的包装盒，点 E，F 在 AB 上，是被切去的一个等腰直角三角形斜边的两个端点，设 $AE=FB=x$ cm.



若要求包装盒的容积 V（单位：cm^3）最大，则 x 应取何值？并求出此时包装盒的高与底面边长的比值.

解：设包装盒的高为 h cm，底面边长为 a cm.

由已知得 $a=\sqrt{2}x$，$h=\frac{60-2x}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(30-x)$，$0<x<30$，

所以 $V=a^2h=2\sqrt{2}(-x^3+30x^2)$，

$V'=6\sqrt{2}x(20-x)$.

由 $V'=0$，得 $x=0$（舍去）或 $x=20$，

当 $x\in(0,20)$ 时，$V'>0$；当 $x\in(20,30)$ 时，$V'<0$，

所以当 $x=20$ 时，V 取得极大值，也是最大值.

此时 $\frac{h}{a}=\frac{1}{2}$，即包装盒的高与底面边长的比值为 $\frac{1}{2}$.

［一题多思］

思考1.本例条件下，若要使包装盒的侧面积 S（单位：cm^2）最大，则 x 应取何值？

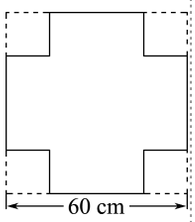
解：设包装盒的高为 h cm，底面边长为 a cm.

由已知得 $a=\sqrt{2}x$，$h=\frac{60-2x}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(30-x)$，$0<x<30$，

所以 $S=4ah=8x(30-x)=-8(x-15)^2+1\,800$，

所以当 $x=15$ 时，S 取得最大值.

思考 2.(教材 P98 习题 5.3 题 8 改编)如图,在硬纸片的四个角上切去四个相同的小正方形,制成一个无盖的小盒子,小正方形的边长 x(单位:cm)为多少时,盒子的容积最大?



解:由题意,制成盒子的高为 x cm,$0<x<30$,底面边长为$(60-2x)$cm,

盒子的容积 $V=(60-2x)(60-2x)x=4x^3-240x^2+3\ 600x$,

$V'=12x^2-480x+3\ 600$.

令 $V'=0$,得 $x=10$ 或 $x=30$(舍去),

当 $x\in(0,10)$ 时,$V'>0$;

当 $x\in(10,30)$ 时,$V'<0$;

所以当 $x=10$ 时,$V_{最大值}=16\ 000$.

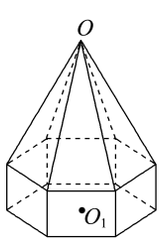
即当小正方形的边长为 10 cm 时,盒子的容积最大.

【探究总结】

求面积与体积的最值问题是实际生产生活中的常见问题.解决这类问题的关键是熟练掌握相关的面积、体积公式,能够依据题意确定出自变量的取值范围,建立准确的函数解析式,然后利用导数加以解决.必要时,可选择建立坐标系,通过点的坐标建立函数解析式或曲线方程解决问题.

应用迁移

1.一个帐篷如图所示,它下部的形状是高为 1 m 的正六棱柱,上部的形状是侧棱长为 3 m 的正六棱锥.试问:当帐篷的顶点 O 到底面中心点 O_1 的距离为多少时,帐篷的体积最大?



解:设 OO_1 为 x m,则 $1<x<4$.

由题设可得正六棱锥的底面边长为 $\sqrt{3^2-(x-1)^2}=\sqrt{8+2x-x^2}$,

故底面正六边形的面积为

$6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{8+2x-x^2})^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot(8+2x-x^2)$.

帐篷的体积为

$$V(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}(8+2x-x^2)\left[\frac{1}{3}(x-1)+1\right]$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(16+12x-x^3),$$

求导得 $V'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(12-3x^2)$.

令 $V'(x)=0$,解得 $x=-2$(不合题意,舍去)或 $x=2$.

当 $1<x<2$ 时,$V'(x)>0$,$V(x)$单调递增;

当 $2<x<4$ 时,$V'(x)<0$,$V(x)$单调递减.

故当 $x=2$ 时,$V(x)$最大,且最大值 $V(2)=16\sqrt{3}$.

所以当 OO_1 为 2 m 时,帐篷的体积最大,最大体积为 $16\sqrt{3}$ m^3.

2.有关统计数据显示,从上午6时到中午 12 时,车辆通过某市某一路段的用时 y(单位:min)与车辆进入该路段的时刻 t 之间的关系可近似用如下函数表示:

$$y=\begin{cases}-\frac{1}{8}t^3-\frac{3}{4}t^2+36t-\frac{629}{4},6\leqslant t<9,\\ \frac{t}{8}+\frac{55}{4},9\leqslant t\leqslant 10,\\ -3t^2+66t-345,10<t\leqslant 12.\end{cases}$$

求在这段时间内通过该路段用时最多的时刻.

解:当 $6\leqslant t<9$ 时,$y'=-\frac{3}{8}t^2-\frac{3}{2}t+36=-\frac{3}{8}(t^2+4t-96)=-\frac{3}{8}(t+12)(t-8)$.

令 $y'=0$,得 $t_1=-12$(舍去),$t_2=8$.

当 $6\leqslant t<8$ 时,$y'>0$;当 $8<t<9$ 时,$y'<0$.

所以当 $t=8$ 时,y 有最大值,$y_{max}=18.75$.

当 $9\leqslant t\leqslant 10$ 时,$y=\frac{t}{8}+\frac{55}{4}$单调递增,

所以当 $t=10$ 时,y 有最大值,$y_{max}=15$.

当 $10<t\leqslant 12$ 时,$y=-3(t-11)^2+18$,

所以当 $t=11$ 时,y 有最大值,$y_{max}=18$.

综上所述,通过该路段用时最多的时刻为上午 8 时.

任务3 探究函数最值中参数求解策略

探究活动

例 3　(1)已知 $a\in\mathbf{R}$,设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+2a,x\leqslant 1,\\ x-a\ln x,x>1,\end{cases}$若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,则 a 的取值范围为　(　)

A.$[0,1]$　　B.$[0,2]$

C.$[0,e]$　　D.$[1,e]$

C　**解析**:由 $f(0)\geqslant 0$,可得 $a\geqslant 0$.

当 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时,$\forall x\in(-\infty,1]$,$f(x)=x^2-2ax+2a=(x-a)^2+2a-a^2\geqslant 2a-a^2=a(2-a)>0$;

当 $a>1$ 时,$f(x)\geqslant f(1)=1>0$.

故当 $a\geqslant 0$ 时,$x^2-2ax+2a\geqslant 0$ 在$(-\infty,1]$上恒成立.

若 $x-a\ln x\geqslant 0$ 在$(1,+\infty)$上恒成立,即 $a\leqslant\frac{x}{\ln x}$在$(1,+\infty)$上恒成立,

令 $g(x)=\dfrac{x}{\ln x}$,则 $g'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$,

当 $x>e$ 时,函数 $g(x)$ 单调递增;当 $0<x<e$ 时,函数 $g(x)$ 单调递减,

故 $g(x)_{min}=g(e)=e$,所以 $a\leqslant e$.

综上可知,a 的取值范围是$[0,e]$.

故选 C.

(2)已知函数 $f(x)=2\ln x+x^2-ax$.

①当 $a=1$ 时,求 $f(x)$的单调区间;

②若对任意 x_1,x_2,且 $0<x_1<x_2$,都有$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>1$,求 a 的取值范围.

解:①当 $a=1$ 时,$f(x)=2\ln x+x^2-x$,

可知 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,且 $f'(x)=\dfrac{2}{x}+2x-1=\dfrac{2x^2-x+2}{x}>0$,

所以 $f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$,无单调递减区间.

②因为 $x_2>x_1>0$,$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>1$,

所以 $f(x_2)-f(x_1)>x_2-x_1$,

即 $f(x_1)-x_1<f(x_2)-x_2$.

设函数 $g(x)=f(x)-x=2\ln x+x^2-(a+1)x$,$x>0$,可知 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

且 $g'(x)=\dfrac{2}{x}+2x-a-1=\dfrac{2x^2-(a+1)x+2}{x}$,

则 $g'(x)\geqslant 0$ 在$(0,+\infty)$恒成立,即 $2x^2-(a+1)x+2\geqslant 0$,也即 $a+1\leqslant 2x+\dfrac{2}{x}$恒成立.

又因为 $2x+\dfrac{2}{x}\geqslant 2\sqrt{2x\cdot\dfrac{2}{x}}=4$,当且仅当 $x=1$ 时,等号成立,

可得 $a+1\leqslant 4$,即 $a\leqslant 3$.

所以 a 的取值范围是$(-\infty,3]$.

【探究总结】

利用导数解决不等式恒成立问题的两种情形

(1)若函数的最值可以通过导数求得,则可先利用导数研究函数的单调性,将不等式恒成立问题转化为求函数的最值问题来解决:

①$f(x)>k\Rightarrow f(x)_{min}>k$;

②$f(x)<k\Rightarrow f(x)_{max}<k$.

(2)若函数的最值无法通过导数求得,即导函数的零点无法精确求出,则一般从下面两个方向思考:

①将要处理的函数拆分成两个可求最值的函数的和或积,分别求其最值,进而解决问题;

②利用“虚设”和“代换”的方法求解.

应用迁移

1.已知 $x\ln x-ax-x+1\geqslant 0$ 对于 $x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$恒成立,求实数 a 的取值范围.

解:由题可知 $a\leqslant\dfrac{1-x}{x}+\ln x$ 对于 $x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$恒成立,

令 $g(x)=\dfrac{1-x}{x}+\ln x$,$x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$,则 $a\leqslant g(x)_{min}$,

而 $g'(x)=\dfrac{-x-(1-x)}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x^2}$.

当 $x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$时,$g'(x)<0$;

当 $x\in(1,2]$时,$g'(x)>0$.

所以 $g(x)=\dfrac{1-x}{x}+\ln x$ 在$\left[\dfrac{1}{2},1\right)$上单调递减,在$(1,2]$上单调递增,

所以当 $x=1$ 时,$g(x)=\dfrac{1-x}{x}+\ln x$ 取得的极小值,也是最小值,

所以 $g(x)_{min}=g(1)=0$,故 $a\leqslant 0$.

所以实数 a 的取值范围是$(-\infty,0]$.

2.已知函数 $f(x)=\ln x+a(1-x)$.

(1)当 $a=2$ 时,求曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线的方程;

(2)当 $f(x)$有最大值,且最大值小于 $3a-3$ 时,求 a 的取值范围.

解:(1)函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,

当 $a=2$ 时,$f(x)=\ln x+2(1-x)$,则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-2$,则 $f'(1)=-1$,$f(1)=0$,

所以,所求切线方程为 $y=-(x-1)$,即 $x+y-1=0$.

(2)函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a=\dfrac{1-ax}{x}$.

若 $a\leqslant 0$,则 $f'(x)>0$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,无最大值;

若 $a>0$,则当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$内单调递增,

当 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，

所以，函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{a}$ 时取得最大值，

最大值为 $f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}+a\left(1-\frac{1}{a}\right)=-\ln a+a-1$.

由题可知 $f\left(\frac{1}{a}\right)<3a-3$，可得 $\ln a+2a-2>0$.

令 $g(a)=\ln a+2a-2$，其中 $a>0$，则 $g'(a)=\frac{1}{a}+2>0$，

所以，函数 $g(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $g(1)=0$.

由 $g(a)>0=g(1)$ 可得 $a>1$，所以 a 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

课后素养评价(二十二)

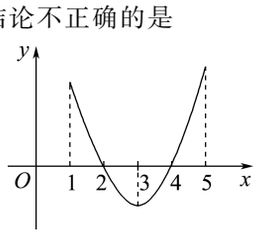
基础落实

1. 已知某商品的生产成本 C 与产量 q 的函数关系式为 $C=100+3q$，单价 p 与产量 q 的函数关系式为 $p=101-\frac{1}{6}q^2$，则利润最大时，$q=$　　(　　)

A.10　　B.12　　C.14　　D.16

C　**解析**：设利润为 y，则 $y=pq-C=\left(101-\frac{1}{6}q^2\right)q-(100+3q)=-\frac{1}{6}q^3+98q-100$，因为 $y'=-\frac{1}{2}q^2+98$，所以当 $0<q<14$ 时，$y'>0$，函数单调递增，当 $q>14$ 时，$y'<0$，函数单调递减，故利润最大时的 $q=14$.故选 C.

2. 函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，其导数的部分图象如图所示，则下面结论不正确的是　　(　　)



A.在(4,5)内函数 $f(x)$ 单调递增

B.在(2,4)内函数 $f(x)$ 单调递减

C.在(3,5)内函数 $f(x)$ 有极小值

D.在(1,5)内函数 $f(x)$ 必有最大值

D　**解析**：由题图可知，当 $1<x<2$ 或 $4<x<5$ 时，$f'(x)>0$，当 $2<x<4$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在(1,2)和(4,5)内单调递增，在(2,4)内单调递减，所以 $x=2$ 为极大值点，$x=4$ 为极小值点，所以 ABC 正确；函数 $f(x)$ 在(1,5)上不一定有最大值，所以 D 错误.故选 D.

3. 设定义在区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 的图象是一条连续不断的曲线，且 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上可导，有以下三个命题：

①若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值，则这个最大值必是 $[a,b]$ 上的极大值；

②若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最小值，则这个最小值必是 $[a,b]$ 上的极小值；

③若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最值，则最值必在 $x=a$ 或 $x=b$ 处取得.

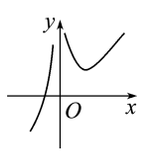
其中正确的命题共有　　(　　)

A.0 个　　B.1 个

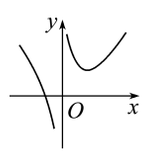
C.2 个　　D.3 个

A　**解析**：由于函数的最值可能在区间 $[a,b]$ 的端点处取得，也可能在区间 (a,b) 内取得，故当在区间 (a,b) 内取得时，最值必是相应的极值，如 $y=x^2$，$x\in[-1,2]$，当 $x=0$ 时，取得最小值，当 $x=2$ 时，取得最大值.而当最值在区间端点处取得时，其最值必不是极值，因此命题①②③都不正确.故选 A.

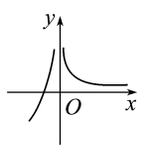
4. 已知函数 $f(x)=2x-\ln|x|$，则 $f(x)$ 的大致图象为　　(　　)



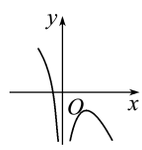
A



B



C



D

A　**解析**：当 $x<0$ 时，$f(x)=2x-\ln(-x)$，$f'(x)=2-\frac{1}{-x}\cdot(-1)=2-\frac{1}{x}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，故 B，D 错误；当 $x>0$ 时，$f(x)=2x-\ln x$，$f'(x)=2-\frac{1}{x}=\frac{2x-1}{x}$，令 $f'(x)>0$，得 $x>\frac{1}{2}$，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<\frac{1}{2}$，则

$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增，故A正确.

5.已知在正四棱锥$P\text{-}ABCD$中，$PA=4$，则当该正四棱锥的体积最大时，它的高h等于_____.

$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　**解析：**设正四棱锥$P\text{-}ABCD$的底面边长为a.

因为$PA=4$，所以$\frac{a^2}{2}+h^2=16$，即$a^2=32-2h^2$.

所以正四棱锥$P\text{-}ABCD$的体积$V=\frac{1}{3}a^2h=\frac{32}{3}h-\frac{2}{3}h^3(0<h<4)$.

所以$V'=\frac{32}{3}-2h^2$.

令$V'=0$，解得$h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

当$0<h<\frac{4\sqrt{3}}{3}$时，$V'>0$，所以函数在$\left(0,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$上单调递增；

当$\frac{4\sqrt{3}}{3}<h<4$时，$V'<0$，所以函数在$\left(\frac{4\sqrt{3}}{3},4\right)$上单调递减.

所以当$h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$时，正四棱锥$P\text{-}ABCD$的体积取得最大值.

6.若关于x的不等式$2x^2+a-\ln x<0$有解，则实数a的取值范围是_____.

$\left(-\infty,-\ln 2-\frac{1}{2}\right)$　**解析：**由$2x^2+a-\ln x<0$有解，得$a<\ln x-2x^2$有解.

令$f(x)=\ln x-2x^2(x>0)$，则$f'(x)=\frac{1}{x}-4x=\frac{1-4x^2}{x}(x>0)$.

当$0<x<\frac{1}{2}$时，$f'(x)>0$；当$x>\frac{1}{2}$时，$f'(x)<0$.

所以$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递减.

所以当$x=\frac{1}{2}$时，$f(x)$取得最大值$f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{4}=-\ln 2-\frac{1}{2}$.

所以实数a的取值范围是$\left(-\infty,-\ln 2-\frac{1}{2}\right)$.

7.设函数$f(x)=a^2x^2+ax-3\ln x+1$，其中$a>0$.

(1)讨论$f(x)$的单调性；

(2)若$y=f(x)$的图象与x轴没有公共点，求a的取值范围.

解：(1)函数定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=2a^2x+a-\frac{3}{x}=\frac{2a^2x^2+ax-3}{x}=\frac{(2ax+3)(ax-1)}{x}$.

令$f(x)=0$，得$x=\frac{1}{a}$或$x=-\frac{3}{2a}$.

因为$a>0$，$x>0$，所以$-\frac{3}{2a}<0<\frac{1}{a}$，

所以在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

综上所述，$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增.

(2)由(1)可知，$f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{a}\right)=a^2\times\left(\frac{1}{a}\right)^2+a\times\frac{1}{a}-3\ln\frac{1}{a}+1=3+3\ln a$.

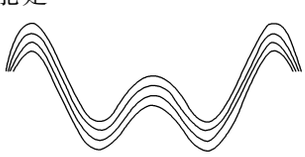
又$f(1)=a^2+a+1>0$，且$y=f(x)$的图象与x轴没有公共点，

所以$y=f(x)$的图象在x轴的上方，所以$3+3\ln a>0$，所以$a>\frac{1}{e}$.

所以a的取值范围为$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

能力提升

1.为了激发同学们学习数学的热情，某学校开展利用数学知识设计徽标的比赛，其中某位同学利用函数图象设计了如图所示的徽标，那么该同学所选的函数最有可能是（　　）



A.$f(x)=x\sin x-\cos x$

B.$f(x)=\cos x-x\sin x$

C.$f(x)=x^2+2\cos x$

D.$f(x)=\sin x-x\cos x$

B　**解析：**由题图可知，所选函数为偶函数，且在图象对称轴右侧附近单调递减.

对于A选项，函数$f(x)=x\sin x-\cos x$的定义域为**R**，

$f(-x)=(-x)\sin(-x)-\cos(-x)=x\sin x-\cos x=f(x)$，所以函数 $f(x)=x\sin x-\cos x$ 为偶函数，$f'(x)=x\cos x+2\sin x$，

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f'(x)=x\cos x+2\sin x>0$，

则函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，A 不满足；

对于 B 选项，函数 $f(x)=\cos x-x\sin x$ 的定义域为 **R**，$f(-x)=\cos(-x)-(-x)\sin(-x)=\cos x-x\sin x=f(x)$，所以函数 $f(x)=\cos x-x\sin x$ 为偶函数，$f'(x)=-x\cos x-2\sin x$，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f'(x)=-x\cos x-2\sin x<0$，则函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，B 满足；

对于 C 选项，函数 $f(x)=x^2+2\cos x$ 的定义域为 **R**，且为偶函数，$f'(x)=2x-2\sin x$，令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=2-2\cos x\geqslant 0$ 且 $g'(x)$ 不恒为零，

所以 $f'(x)$ 在定义域上单调递增，

当 $x>0$ 时，$f'(x)=2x-2\sin x>f'(0)=0$，则函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，C 不满足；

对于 D 选项，函数 $f(x)=\sin x-x\cos x$ 的定义域为 **R**，则 $f(-x)=\sin(-x)-(-x)\cos(-x)=x\cos x-\sin x=-f(x)$，

所以函数 $f(x)=\sin x-x\cos x$ 为奇函数，D 不满足.

2. 若函数 $f(x)=2\ln x+4x^2+bx+5$ 的图象上的任意一点处的切线的斜率都大于 0，则实数 b 的取值范围是（　　）

A.$(-\infty,-8)$　　B.$(-8,+\infty)$

C.$(-\infty,8)$　　D.$(8,+\infty)$

B　**解析**：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{2}{x}+8x+b$.

因为 $f(x)$ 图象在任意一点处的切线的斜率都大于 0，

所以 $f'(x)=\frac{2}{x}+8x+b>0$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立.

所以 $b>-\frac{2}{x}-8x$.

设 $g(x)=-\frac{2}{x}-8x$，则 $b>g(x)_{\max}$，$g'(x)=\frac{2}{x^2}-8$.

令 $g'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$，负根舍去.

所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减.

所以当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$g(x)$ 取得最大值，最大值为 $g\left(\frac{1}{2}\right)=-8$，

所以 $b>-8$. 故选 B.

3.（多选）已知函数 $f(x)=e^x(x^2-x+1)$，则下列说法正确的有（　　）

A.函数 $f(x)$ 的极小值为 1

B.函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增

C.当 $x\in[-2,2]$ 时，函数 $f(x)$ 的最大值为 $3e^2$

D.当 $k<\frac{3}{e}$ 时，方程 $f(x)=k$ 恰有 3 个不等实根

AC　**解析**：对于 A，B，因为 $f'(x)=e^x(x^2-x+1)+e^x(2x-1)=e^x(x^2+x)$，

所以当 $x\in(-\infty,-1)$ 或 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

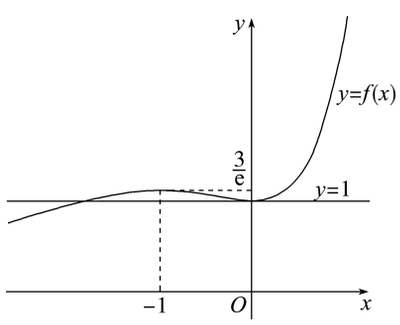
当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(-1)=e^{-1}[(-1)^2-(-1)+1]=3e^{-1}$，

$f(x)$ 的极小值为 $f(0)=e^0(0-0+1)=1$，故 A 正确，B 错误；

对于 C，由函数单调性知，$f(x)$ 在 $[-2,-1)$ 上单调递增，在 $(-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,2]$ 上单调递增，且 $f(-1)=3e^{-1}$，$f(2)=e^2(4-2+1)=3e^2$，$3e^{-1}<3e^2$，故函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值为 $3e^2$，故 C 正确；

对于 D，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to 0$，$x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，且 $f(x)$ 的极大值为 $f(-1)=3e^{-1}>0$，$f(x)$ 的极小值为 $f(0)=1>0$，由上述分析可知，$f(x)$ 的图象如图所示.



由图象可得当 $0<k<1$ 或 $k>\frac{3}{e}$ 时，$f(x)=k$ 有 1 个实数根，

当 $k=1$ 或 $k=\frac{3}{e}$ 时，$f(x)=k$ 有 2 个实数根，

当 $1<k<\frac{3}{e}$ 时,$f(x)=k$ 有 3 个实数根,故 D 错误.

故选 AC.

4.已知海轮每小时的燃料费与它的航行速度的立方成正比,某海轮的最大航速为 30 n mile/h,当速度为 10 n mile/h 时,它每小时的燃料费是 25 元,每小时的其他费用(无论速度如何)都是 400 元.若甲、乙两地相距 800 n mile,则要使该海轮从甲地航行到乙地的总费用最低,它的航速应为　　(　　)

A.30 n mile/h　　B.25 n mile/h

C.20 n mile/h　　D.10 n mile/h

C　**解析**:海轮每小时的燃料费与它的航行速度的立方成正比,设船速为 x n mile/h($0<x\leqslant 30$),每小时的燃料费用为 W 元,比例系数为 k,则满足 $W=kx^3$.

当速度为 10 n mile/h 时,它每小时的燃料费是 25 元,代入上式可得 $25=k\times 10^3$,解得 $k=\frac{1}{40}$.

若甲、乙两地相距 800 n mile,则所需时间为 $\frac{800}{x}$ h.

所以总费用为 $f(x)=\left(\frac{1}{40}x^3+400\right)\times\frac{800}{x}=\frac{20x^3+320\,000}{x}(0<x\leqslant 30)$,

所以 $f'(x)=\frac{40\times(x^3-8\,000)}{x^2}$.

令 $f'(x)=0$,解得 $x=20$.

当 $0<x<20$ 时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在(0,20)上单调递减;

当 $20<x\leqslant 30$ 时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在(20,30]上单调递增.

所以当 $x=20$ 时,海轮从甲地航行到乙地的总费用最低.故选 C.

5.某商场销售某种商品,经验表明,该商品每日的销售量 y(单位:kg)与销售价格 x(单位:元/kg)满足关系式 $y=\frac{2}{x-3}+10(x-6)^2$,$x\in(3,6)$.若该商品的成本为 3 元/kg,则当销售价格为_____元/kg 时,该商场每日销售该商品所获得的利润最大.

4　**解析**:设该商场每日销售该商品所获得的利润为

$f(x)=(x-3)\left[\frac{2}{x-3}+10(x-6)^2\right]=2+10(x-3)\cdot(x-6)^2$,$3<x<6$,

$f'(x)=10[(x-6)^2+2(x-3)(x-6)]=30(x-4)\cdot(x-6)$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=4$ 或 $x=6$(舍去).

所以函数 $f(x)$ 在(3,4)上单调递增,在(4,6)上单调递减,

所以当 $x=4$ 时,函数 $f(x)$ 取得最大值 $f(4)=42$.

故当销售价格为 4 元/kg 时,该商场每日销售该商品所获得的利润最大.

6.某地政府向当地企业发放补助款,其中对纳税额 x(单位:万元)满足 $x\in[4,8]$ 的小微企业设计的补助款发放方案要同时具备下列两个条件:①补助款 $f(x)$(单位:万元)随企业原纳税额 x 的增加而增加;②补助款不低于原纳税额的 50%.经测算,政府决定采用函数 $f(x)=\frac{x}{4}-\frac{m}{x}+4$(其中 m 为使用参数)表示的补助款发放方案.

(1)当使用参数 $m=13$ 时,$f(x)$ 是否满足条件?并说明理由.

(2)求同时满足条件①②的使用参数 m 的取值范围.

解:(1)不满足条件.理由如下:当 $m=13$ 时,函数 $f(x)=\frac{x}{4}-\frac{13}{x}+4$,可得 $f'(x)=\frac{1}{4}+\frac{13}{x^2}>0$.

所以 $f(x)$ 在[4,8]上单调递增,满足条件①.

又因为 $f(4)=\frac{7}{4}<2=\frac{1}{2}\times 4$,所以当 $m=13$ 时,$f(x)$ 不满足条件②.

综上,当使用参数 $m=13$ 时,$f(x)$ 不满足条件.

(2)由函数 $f(x)=\frac{x}{4}-\frac{m}{x}+4$,

可得 $f'(x)=\frac{1}{4}+\frac{m}{x^2}=\frac{x^2+4m}{4x^2}$.

所以当 $m\geqslant 0$ 时,$f'(x)>0$,满足条件①.

当 $m<0$ 时,由 $f'(x)=0$,可得 $x=2\sqrt{-m}$.

当 $x\in[2\sqrt{-m},+\infty)$ 时,$f'(x)\geqslant 0$,$f(x)$ 单调递增.

所以 $2\sqrt{-m}\leqslant 4$,解得 $-4\leqslant m<0$.

综上,$m\geqslant -4$ 时,$f'(x)>0$,满足条件①.

由条件②可知,$f(x)\geqslant\frac{x}{2}$,即不等式 $\frac{x}{4}+\frac{m}{x}\leqslant 4$ 在[4,8]上恒成立,

等价于 $m\leqslant -\frac{1}{4}x^2+4x=-\frac{1}{4}(x-8)^2+16$ 在[4,8]上恒成立.

函数 $y=-\frac{1}{4}(x-8)^2+16$ 在[4,8]上单调递增,

当 $x=4$ 时,$y=-\frac{1}{4}(x-8)^2+16$ 取得最小值 12,

所以 $m\leqslant 12$.

综上，使用参数 m 的取值范围是 $[-4,12]$.

自我超越

已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+a\ln x$.

(1)若 $a=-1$，求函数 $f(x)$ 的极值，并指出是极大值还是极小值；

(2)若 $a=1$，求证：在区间 $[1,+\infty)$ 上，函数 $f(x)$ 的图象在函数 $g(x)=\frac{2}{3}x^3$ 的图象的下方.

(1)**解**：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

当 $a=-1$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x$，

$f'(x)=x-\frac{1}{x}=\frac{(x+1)(x-1)}{x}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$ 或 $x=-1$(舍去).

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得的极小值为 $f(1)=\frac{1}{2}$.

(2)**证明**：设 $F(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^2+\ln x-\frac{2}{3}x^3$，

则 $F'(x)=x+\frac{1}{x}-2x^2$

$=\frac{-2x^3+x^2+1}{x}$

$=\frac{-(x-1)(2x^2+x+1)}{x}$，

当 $x\geqslant 1$ 时，$F'(x)\leqslant 0$，

故 $F(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递减.

又 $F(1)=-\frac{1}{6}<0$，

所以在区间 $[1,+\infty)$ 上，$F(x)<0$ 恒成立，

即 $f(x)<g(x)$ 恒成立.

因此当 $a=1$ 时，在区间 $[1,+\infty)$ 上，函数 $f(x)$ 的图象在函数 $g(x)$ 的图象的下方.

微专题培优(四)　利用导数研究不等式恒(能)成立问题

利用导数研究不等式恒(能)成立问题，是高考导数综合题的高频核心考点.它综合考查函数分析、参数处理与转化思想，常作为压轴题出现.

解决问题主要涉及以下三种方法：(1)分离参数法；(2)直接讨论(最值转化)法；(3)等价转化(存在性转化)法.

类型1 分离参数法

例1　已知函数 $f(x)=\ln(ax)+\frac{a}{x}$，其中 $a>0$.

(1)当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线的方程；

(2)若 $f(x)\geqslant\ln a$ 恒成立，求 a 的取值范围.

解：(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$，

所以 $f'(1)=0$，又 $f(1)=1$，则所求切线方程为 $y=1$.

(2)$f(x)\geqslant\ln a\Leftrightarrow\ln(ax)+\frac{a}{x}\geqslant\ln a\Leftrightarrow\ln x+\frac{a}{x}\geqslant 0$，其中 $x>0$，

所以问题转化为 $a\geqslant -x\ln x(x>0)$ 恒成立.

记 $g(x)=-x\ln x$，则 $g'(x)=-\ln x-1$.

令 $g'(x)>0$，得 $0<x<\frac{1}{e}$；令 $g'(x)<0$，得 $x>\frac{1}{e}$.

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递减，

则 $g(x)$ 的最大值为 $g\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}$，所以 $a\geqslant\frac{1}{e}$.

所以 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

【规律方法】

分离参数法解题核心技法

(1)分离变量构造函数：将参数与主变量分离至不等式两侧，构造不含参数的新函数，将恒成立问题转化为求新函数最值问题；

(2)求导分析定最值：对新函数求导，分析其单调性、极值点，确定其在定义域内的最大值或最小值；

(3)比较最值得出范围：根据不等式方向(≥或≤)，令参数大于等于(或小于等于)新函数的最值.求得参数范围，注意验证端点.

【对点训练】

已知函数 $f(x)=x\ln x-ax^2$.

(1)当 $a=\frac{1}{2}$ 时,求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2)当 $f(x)<2x$ 恒成立时,求实数 a 的取值范围.

解:(1)当 $a=\frac{1}{2}$ 时,$f(x)=x\ln x-\frac{1}{2}x^2$,

$f'(x)=\ln x+1-x$.令 $g(x)=f'(x)$,则 $g'(x)=\frac{1}{x}-1$,令 $g'(x)=0$,解得 $x=1$.

当 $x\in(0,1)$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增;当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减.

$g(x)_{max}=g(1)=0$,所以 $f'(x)\leqslant 0$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,+\infty)$,无单调递增区间.

(2)因为 $x>0$,$f(x)<2x$,所以 $a>\frac{\ln x-2}{x}$ 恒成立.

设 $h(x)=\frac{\ln x-2}{x}$,则 $h'(x)=\frac{3-\ln x}{x^2}$,

令 $h'(x)=0$,解得 $x=e^3$.

当 $x\in(0,e^3)$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$ 单调递增;当 $x\in(e^3,+\infty)$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$ 单调递减.

则 $h(x)_{max}=h(e^3)=e^{-3}$.所以 $a>e^3$.

所以实数 a 的取值范围是 $(e^{-3},+\infty)$.

类型2 直接讨论(最值转化)法

例2　已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+(2a-1)x-2a\ln x(a>0)$.

(1)当 $a=\frac{1}{2}$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线的方程;

(2)若 $f(x)\geqslant\frac{a^2}{2}-3$ 恒成立,求 a 的取值范围.

解:(1)当 $a=\frac{1}{2}$ 时,$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x$,而 $f(2)=2-\ln 2$,则切点坐标为 $(2,2-\ln 2)$.

易得 $f'(x)=x-\frac{1}{x}$,得到切线斜率为 $f'(2)=\frac{3}{2}$,

故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线的方程为 $y-(2-\ln 2)=\frac{3}{2}(x-2)$,即 $3x-2y-2-2\ln 2=0$.

(2)由题意得 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,且 $f'(x)=x+2a-1-\frac{2a}{x}=\frac{(x+2a)(x-1)}{x}$,

而 $a>0$,令 $f'(x)>0$,得 $x\in(1,+\infty)$,令 $f'(x)<0$,得 $x\in(0,1)$,

即 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$,单调递增区间为 $(1,+\infty)$,

则当 $x=1$ 时,$f(x)$ 有最小值 $f(1)=2a-\frac{1}{2}$,得到 $2a-\frac{1}{2}\geqslant\frac{a^2}{2}-3$,解得 $-1\leqslant a\leqslant 5$.

因为 $a>0$,所以 $0<a\leqslant 5$,即 a 的取值范围为 $(0,5]$.

【规律方法】

直接讨论(最值转化)法解题核心技法

(1)转化最值关系:将不等式恒成立问题,等价转化为函数在给定区间上的最大值≤0(或最小值≥0)问题.

(2)求导分析定最值:对含参函数求导,讨论其在区间内的单调性、极值点,从而确定其最值点(通常为端点或极值点).

(3)列不等式解参数:将求得的最值表达式代入最值关系式中,列出关于参数的方程或不等式(组),求解并验证参数取值范围.

【对点训练】

已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2$.

(1)当 $a=1$ 时,求 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线的方程;

(2)若 $\forall x\in(0,+\infty)$,$f(x)<0$,求实数 a 的取值范围.

解:(1)当 $a=1$ 时,$f(x)=\ln x-x^2$,$f'(x)=\frac{1}{x}-2x$.

$f(1)=\ln 1-1^2=-1$,$f'(1)=\frac{1}{1}-2\times 1=-1$,

所以 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线的方程为 $y+1=-(x-1)$,即 $x+y=0$.

(2)$f(x)=\ln x-ax^2(x>0)$,则 $f'(x)=\frac{1}{x}-2ax=\frac{1-2ax^2}{x}$.

当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)>0$,即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

当 $x=1$ 时,$f(1)=-a>0$,与题意不符.

当 $a>0$ 时,令 $f'(x)=0$,得 $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2a}}$.当 $x\in\left(0,\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)$ 内单调递增;

当 $x\in\left(\sqrt{\frac{1}{2a}},+\infty\right)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 在 $\left(\sqrt{\frac{1}{2a}},+\infty\right)$ 上单调递减.

所以当 $x=\sqrt{\frac{1}{2a}}$ 时,$f(x)$ 取得最大值,即 $f(x)_{max}=f\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)=-\frac{1}{2}\ln(2a)-\frac{1}{2}$.

由题意可得 $f(x)_{max}<0$,解得 $a>\frac{1}{2e}$,即实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2e},+\infty\right)$.

类型3 等价转化(存在性转化)法

例3　已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2$.

(1)求函数 $f(x)$的图象在 $x=3$ 处的切线的方程;

(2)若 $f(x)\leqslant m$ 在 $x\in[0,3]$时有解,求 m 的取值范围.

解:(1)$f'(x)=x^2-2x$,$f'(3)=3^2-2\times3=3$,$f(3)=\frac{1}{3}\times3^3-3^2=0$,

所以函数 $f(x)$的图象在 $x=3$ 处的切线的方程为 $y=3(x-3)=3x-9$.

(2)由(1)知 $f'(x)=x^2-2x$,令 $f'(x)=0$,得 $x=0$ 或 $x=2$.

所以当 $0<x<2$ 时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$单调递减,当 $2<x\leqslant3$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$单调递增,

所以 $f(x)_{\min}=f(2)=-\frac{4}{3}$.

又 $f(x)\leqslant m$ 在 $x\in[0,3]$时有解,所以 $m\geqslant[f(x)]_{\min}=-\frac{4}{3}$.

故 m 的取值范围为$\left[-\frac{4}{3},+\infty\right)$.

【规律方法】

等价转化(存在性转化)法解题核心技法

(1)转化问题本质:将“存在 x 使不等式成立”的问题,等价转化为函数在区间上的值域与参数的关系问题;

(2)求函数最值:对目标函数求导,分析其在给定区间上的单调性,准确求出其最大值和最小值,确定值域;

(3)建立不等关系:根据“有解”(能成立)的条件,建立参数大于等于最小值或小于等于最大值的不等式,求解范围.

【对点训练】

已知函数 $f(x)=e^x-2ax$,$a\in\mathbf{R}$.

(1)若 $a=\frac{1}{2}$,求函数 $f(x)$的极小值.

(2)存在 $x_0\in[2,3]$,使得 $f(x_0)\leqslant0$ 成立,求实数 a 的取值范围.

解:(1)当 $a=\frac{1}{2}$时,$f(x)=e^x-x$,则 $f'(x)=e^x-1$,

令 $f'(x)=0$,得 $x=0$.

当 $x>0$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;

当 $x<0$ 时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减.

所以函数 $f(x)$的极小值为 $f(0)=e^0-0=1$.

(2)由题设,存在 $x_0\in[2,3]$,使得$f(x_0)\leqslant0$ 成立,即存在 $x_0\in[2,3]$,使得 $2a\geqslant\frac{e^{x_0}}{x_0}$ 成立,所以 $2a\geqslant\left(\frac{e^x}{x}\right)_{\min}$.

设 $g(x)=\frac{e^x}{x}$,则 $g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$,显然当 $x\in[2,3]$时,$g'(x)>0$ 恒成立,

所以 $g(x)$在$[2,3]$上单调递增,则 $g(x)_{\min}=g(2)=\frac{e^2}{2}$,

所以 $2a\geqslant\frac{e^2}{2}\Rightarrow a\geqslant\frac{e^2}{4}$,故 a 的取值范围为$\left[\frac{e^2}{4},+\infty\right)$.

微专题培优集训(四)

1.已知函数 $f(x)=(x+a)e^x$.

(1)若 $f(x)$在 $x=2$ 处取得极值,求实数 a 的值;

(2)若 $f(x)<e^{2x}$恒成立,求实数 a 的取值范围.

解:(1)因为 $f(x)=(x+a)e^x$ 在 $x=2$ 处取得极值,所以 2 为 $f'(x)$的变号零点.

函数 $f(x)=(x+a)e^x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$f'(x)=e^x+(x+a)e^x=(x+a+1)e^x$,

所以 $f'(2)=(a+3)e^2=0$,得 $a=-3$.

此时,$f'(x)=(x-2)e^x$,当 $x<2$ 时,$f'(x)<0$,当 $x>2$ 时,$f'(x)>0$,

所以 $f(x)$在$(-\infty,2)$上单调递减,在$(2,+\infty)$上单调递增,

所以 $f(x)$在 $x=2$ 处取得极小值,符合题意.故实数 a 的值为 -3.

(2)因为 $e^x>0$,所以 $f(x)<e^{2x}$ 可转化为 $x+a<e^x$,即 $a<e^x-x$ 恒成立.

令 $g(x)=e^x-x$,则 $g'(x)=e^x-1$,

令 $g'(x)=0$,可得 $x=0$.

当 $x<0$ 时,$g'(x)<0$,函数 $g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,

当 $x>0$ 时,$g'(x)>0$,函数 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,

所以 $g(x)_{\min}=g(0)=1$,所以 $a<1$.

故实数 a 的取值范围为$(-\infty,1)$.

2.已知函数 $f(x)=\ln(ax)+x(a<0)$.

(1)若直线 $y=-1$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切,求 a 的值;

(2)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(3)若 $f(x)\leqslant 0$ 在定义域内恒成立,求 a 的取值范围.

解:(1)因为 $f(x)=\ln(ax)+x(a<0)$,则 $f'(x)=\frac{1}{x}+1$.

由 $f'(x)=\frac{1}{x}+1=0$,可得 $x=-1$,所以直线 $y=-1$ 与曲线 $y=f(x)$ 的切点坐标为 $(-1,-1)$,

故 $f(-1)=\ln(-a)-1=-1$,解得 $a=-1$.

(2)因为 $a<0$,所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)$.

由 $f'(x)=\frac{x+1}{x}<0$,可得 $-1<x<0$,由 $f'(x)=\frac{x+1}{x}>0$,可得 $x<-1$,

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$,单调递减区间为 $(-1,0)$.

(3)由(2)可得 $f(x)_{\max}=f(-1)=\ln(-a)-1\leqslant 0$,解得 $a\geqslant -\mathrm{e}$.

又 $a<0$,故实数 a 的取值范围是 $[-\mathrm{e},0)$.

3.已知函数 $f(x)=\frac{a}{2}x^2+(2a-1)x-2\ln x$,$a\in\mathbf{R}$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)对于 $\forall x\in[1,\mathrm{e}]$,$\exists b\in[2,+\infty)$,使得 $f(x)\geqslant b$,求实数 a 的取值范围.

解:(1)由题设得 $f'(x)=ax+2a-1-\frac{2}{x}=\frac{ax^2+(2a-1)x-2}{x}=\frac{(ax-1)(x+2)}{x}$,且 $x\in(0,+\infty)$.

当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减;

当 $a>0$ 时,令 $f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{a}$,

当 $0<x<\frac{1}{a}$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 内单调递减;当 $x>\frac{1}{a}$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增.

综上所述,所以当 $a\leqslant 0$ 时,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减;当 $a>0$ 时,$f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增,在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 内单调递减.

(2)由题设知 $f(x)_{\min}\geqslant b_{\min}=2$ 对 $\forall x\in[1,\mathrm{e}]$ 恒成立.

当 $a<1$ 时,此时 $f(1)=\frac{5a}{2}-1<2$,不合题设,舍去.

当 $a\geqslant 1$ 时,$f'(x)\geqslant 0$,$f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上单调递增,只需 $f(1)=\frac{5a}{2}-1\geqslant 2\Rightarrow a\geqslant\frac{6}{5}$,符合题意.

综上,实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{6}{5},+\infty\right)$.

微专题培优(五)　利用导数研究函数的零点问题

利用导数研究函数的零点问题是高考导数综合题的核心考点与难点,综合性强,常作为压轴题出现.它主要考查学生运用导数工具研究函数性质以解决零点个数、参数范围等问题的能力,主要考查类型如下:

(1)讨论或判断函数零点个数;(2)由函数零点个数求参数范围.

类型1 讨论或判断函数零点个数

例1　已知函数 $f(x)=x-\frac{3}{x}-4\ln x$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间;

(2)判断 $f(x)$ 在 $(0,10]$ 上的零点个数,并说明理由.(提示:$\ln 10\approx 2.303$)

解:(1)$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

$f'(x)=1+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x}=\frac{x^2-4x+3}{x^2}=\frac{(x-1)(x-3)}{x^2}$,

令 $f'(x)=0$,得 $x=1$ 或 $x=3$.

当 $f'(x)<0$,即 $1<x<3$ 时,$f(x)$ 单调递减,当 $f'(x)>0$,即 $0<x<1$ 或 $x>3$ 时,$f(x)$ 单调递增,

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,1)$ 和 $(3,+\infty)$,单调递减区间是 $(1,3)$.

(2)$f(1)=1-3-4\times 0=-2<0$,

$f(3)=3-1-4\ln 3=2-4\ln 3<0$,$f(10)=10-\frac{3}{10}-4\ln 10=\frac{97}{10}-4\ln 10\approx 9.7-4\times 2.303>0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,10]$ 上的零点只有一个.

【规律方法】

利用导数确定函数零点的常用方法

(1)图象法:根据题目要求画出函数的图象,标明函数极(最)值的位置,借助数形结合的思想分析问题(画

草图时注意，有时候需要使用极限）；

(2)利用函数零点存在定理：先用该定理判定函数在某区间上有零点，然后利用导数研究函数的单调性、极值(最值)及区间端点值的符号，进而判断函数在该区间上零点的个数.

【对点训练】

若函数 $f(x)$ 是 **R** 上的偶函数，$g(x)$ 是 **R** 上的奇函数，且满足 $f(x)-g(x)=\cos 2x+e^{-x}-e^{x}$.

(1)求 $f(x)$，$g(x)$ 的解析式；

(2)令 $h(x)=f(x)+g(x)$，证明函数 $h(x)$ 有且只有一个零点.

(1)**解**：$f(x)-g(x)=\cos 2x+e^{-x}-e^{x}$①，

把 x 换成 $-x$ 可得 $f(-x)-g(-x)=\cos(-2x)+e^{x}-e^{-x}=\cos 2x+e^{x}-e^{-x}$.

因为函数 $f(x)$ 是 **R** 上的偶函数，$g(x)$ 是 **R** 上的奇函数，

所以 $f(x)=f(-x)$，$g(-x)=-g(x)$，

所以有 $f(-x)-g(-x)=f(x)+g(x)=\cos 2x+e^{x}-e^{-x}$②.

联立①②可得 $f(x)=\cos 2x$，$g(x)=e^{x}-e^{-x}$.

(2)**证明**：由(1)可知 $h(x)=f(x)+g(x)=\cos 2x+e^{x}-e^{-x}$，

$h'(x)=-2\sin 2x+e^{x}+e^{-x}\geqslant -2\sin 2x+2\sqrt{e^{x}\cdot e^{-x}}=2-2\sin 2x\geqslant 0$，

所以 $h(x)$ 在 **R** 上单调递增，又 $h(0)=1$，当 $x\to-\infty$ 时，$h(x)\to-\infty$，

所以函数 $h(x)$ 有且只有一个零点.

类型2 由函数零点个数求参数范围

例2　已知函数 $f(x)=e^{x}-a(x+2)$.

(1)当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

解：由题意，$f(x)$ 的定义域为 **R**，且 $f'(x)=e^{x}-a$.

(1)当 $a=1$ 时，$f'(x)=e^{x}-1$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$，

所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

(2)①当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)=e^{x}-a>0$ 恒成立，

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，不合题意；

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\ln a$，

当 $x\in(-\infty,\ln a)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(\ln a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

所以 $f(x)$ 的极小值也是最小值为 $f(\ln a)=a-a(\ln a+2)=-a(1+\ln a)$.

又当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，

所以要使 $f(x)$ 有两个零点，只要 $f(\ln a)<0$ 即可，则 $1+\ln a>0$，可得 $a>\frac{1}{e}$.

综上，若 $f(x)$ 有两个零点，则 a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

【规律方法】

利用函数的零点求参数取值范围的方法

(1)分离参数($a=g(x)$)后，将原问题转化为 $y=g(x)$ 的值域(最值)问题或转化为直线 $y=a$ 与 $y=g(x)$ 的图象的交点个数问题(优先分离、次选分类)求解；

(2)利用函数零点存在定理构建不等式求解；

(3)转化为两个熟悉的函数图象的位置关系问题，从而构建不等式求解.

【对点训练】

已知函数 $f(x)=e^{-x}+(1-a)x$.

(1)若 $a=0$，求函数 $f(x)$ 的极值；

(2)若函数 $f(x)$ 无零点，求实数 a 的取值范围.

解：(1)当 $a=0$ 时，$f(x)=e^{-x}+x$，

所以 $f'(x)=-e^{-x}+1=\frac{e^{x}-1}{e^{x}}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=0$.

所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

所以 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点，极小值为 $f(0)=1$，$f(x)$ 无极大值.

(2)由 $f(x)=e^{-x}+(1-a)x$，得 $f'(x)=-e^{-x}+(1-a)=\frac{(1-a)e^{x}-1}{e^{x}}$.

①当 $a=1$ 时，$f(x)=e^{-x}>0$，此时函数 $f(x)$ 没有零点，符合题意.

②当 $a>1$ 时，$f'(x)<0$，所以函数 $f(x)$ 单调递减.

又 $f(0)=1>0$，且 $f\left(\frac{1}{a-1}\right)=e^{\frac{1}{1-a}}-1<0$，所以函数 $f(x)$ 有零点，不符合题意.

③当 $a<1$ 时，令 $f'(x)=\frac{(1-a)e^{x}-1}{e^{x}}=0$，则 $x=-\ln(1-a)$.

当 $x\in(-\infty,-\ln(1-a))$ 时，$f'(x)<0$，所以函数 $f(x)$ 单调递减；当 $x\in(-\ln(1-a),+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 单调递增.

所以 $f(x)_{\min}=f(-\ln(1-a))=(1-a)[1-\ln(1-a)]$.

若函数 $f(x)$ 没有零点，则需 $f(x)_{\min}>0$，即 $(1-a)\cdot[1-\ln(1-a)]>0$，得 $1-e<a<1$.

综上所述，若函数 $f(x)$ 无零点，则实数 a 的取值范围为 $(1-e,1]$.

微专题培优集训（五）

1. 已知函数 $f(x)=(x+2)e^x$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间及最值；

(2)求方程 $f(x)=k(k\in\mathbf{R})$ 的解的个数.

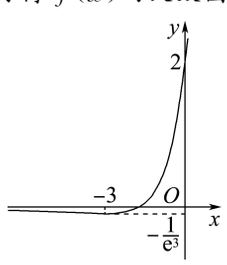
解：(1)由题可得 $f'(x)=(x+3)e^x$，故 $x<-3$ 时有 $f'(x)<0$，$x>-3$ 时有 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-3)$ 上单调递减，在 $(-3,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(x)\geqslant f(-3)=-\frac{1}{e^3}$.

当 x 趋于 $-\infty$ 时，$f(x)$ 趋于 0，当 x 趋于 $+\infty$ 时，$f(x)$ 趋于 $+\infty$，故 $f(x)\in\left[-\frac{1}{e^3},+\infty\right)$.

综上，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-3)$，单调递增区间为 $(-3,+\infty)$，最小值为 $-\frac{1}{e^3}$，无最大值.

(2)由(1)分析，可得 $f(x)$ 的大致图象如图所示.



由图可知，当 $k<-\frac{1}{e^3}$ 时，$f(x)=k$ 无解；当 $-\frac{1}{e^3}<k<0$ 时，$f(x)=k$ 有两个不同解；当 $k=-\frac{1}{e^3}$ 或 $k\geqslant 0$ 时，$f(x)=k$ 有且仅有一个解.

2. 已知函数 $f(x)=\frac{\ln x+1}{e^x}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的最值；

(2)讨论函数 $g(x)=ae^x-\ln x-1$ 的零点个数.

解：(1)由 $f(x)=\frac{\ln x+1}{e^x}$，$x\in(0,+\infty)$，得 $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}e^x-(\ln x+1)e^x}{(e^x)^2}=\frac{\frac{1}{x}-(\ln x+1)}{e^x}$.

令 $h(x)=\frac{1}{x}-(\ln x+1)$，则 $h'(x)=-\frac{1+x}{x^2}<0$ 恒成立，

则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且 $h(1)=0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，即当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $f(1)=\frac{1}{e}$，无最小值.

(2)函数 $g(x)=ae^x-\ln x-1$ 的零点个数就是方程 $ae^x-\ln x-1=0$ 的解的个数，

整理得 $a=\frac{\ln x+1}{e^x}$，即 $a=f(x)=\frac{\ln x+1}{e^x}$，$x\in(0,+\infty)$.

由(1)可知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{e}$，

当 x 趋近于 0 时，$f(x)$ 趋近于 $-\infty$；当 x 趋近于 $+\infty$ 时，$f(x)$ 大于 0 且趋近于 0；

所以当 $a>\frac{1}{e}$ 时，函数 $g(x)$ 没有零点；当 $a=\frac{1}{e}$ 或 $a\leqslant 0$ 时，函数 $g(x)$ 只有一个零点；当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，函数 $g(x)$ 有两个零点.

★★★

迁　移　应　用

类型一　函数中的构造问题

角度1　构造 $y=f(x)\pm g(x)$ 型可导函数

例1　定义在 **R** 上的函数 $f(x)$，满足 $f(1)=1$，且对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f'(x)<\frac{1}{2}$，则不等式 $f(\lg x)>\frac{\lg x+1}{2}$ 的解集为_____.

$(0,10)$　**解析**：由题意构造函数 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x$，则 $g'(x)=f'(x)-\frac{1}{2}<0$，所以 $g(x)$ 在定义域内是减函数.因为 $f(1)=1$，所以 $g(1)=f(1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.由 $f(\lg x)>\frac{\lg x+1}{2}$，得 $f(\lg x)-\frac{1}{2}\lg x>\frac{1}{2}$，即 $g(\lg x)=f(\lg x)-\frac{1}{2}\lg x>\frac{1}{2}=g(1)$，所以 $\lg x<1$，解得 $0<x<10$.所以原不等式的解集为 $(0,10)$.

【规律方法】

当题设条件中存在或通过变形出现特征式“$f'(x)\pm g'(x)$”时，不妨联想、逆用“$f'(x)\pm g'(x)=[f(x)\pm g(x)]'$”，构造可导函数 $y=f(x)\pm g(x)$，然后利用该函数的性质巧妙地解决问题.

【对点训练】

设函数 $f(x)$ 在 **R** 上的导函数为 $f'(x)$，且 $2f(x)+xf'(x)>x^2$，则下列不等式在 **R** 上恒成立的是　(　　)

A. $f(x)>0$　　B. $f(x)<0$

C. $f(x)>x$　　D. $f(x)<x$

A　**解析**：令 $g(x)=x^2f(x)-\frac{1}{4}x^4$，则 $g'(x)=2x\cdot f(x)+x^2f'(x)-x^3=x[2f(x)+xf'(x)-x^2]$.当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)>g(0)$，即 $x^2f(x)-\frac{1}{4}x^4>0$，从而 $f(x)>\frac{1}{4}x^2>0$；当 $x<0$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)>g(0)$，即 $x^2f(x)-\frac{1}{4}x^4>0$，从而 $f(x)>\frac{1}{4}x^2>0$；当 $x=0$ 时，由题意可得 $2f(0)>0$，所以 $f(0)>0$.综上可知，$f(x)>0$.故选 A.

角度2　构造 $y=f(x)\cdot g(x)$ 型可导函数

例2　设 $f(x)$，$g(x)$ 分别是定义在 **R** 上的奇函数和偶函数，当 $x<0$ 时，$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0$，且 $g(-3)=0$，则不等式 $f(x)g(x)<0$ 的解集为_____.

$(-\infty,-3)\cup(0,3)$　**解析**：当 $x<0$ 时，由 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0$，可得 $[f(x)\cdot g(x)]'>0$，所以函数 $y=f(x)g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增.又由题意可得，函数 $y=f(x)g(x)$ 为奇函数，所以其图象关于原点对称，且过点 $(-3,0)$，$(3,0)$.数形结合可求得不等式 $f(x)g(x)<0$ 的解集为 $(-\infty,-3)\cup(0,3)$.

【规律方法】

当题设条件中存在或通过变形出现特征式“$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$”时，可联想、逆用“$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=[f(x)g(x)]'$”，构造可导函数 $y=f(x)\cdot g(x)$，然后利用该函数的性质巧妙地解决问题.

【对点训练】

设定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)+f(x)=3x^2e^{-x}$，且 $f(0)=0$，则下列结论正确的是　(　　)

A. $f(x)$ 在 **R** 上单调递减

B. $f(x)$ 在 **R** 上单调递增

C. $f(x)$ 在 **R** 上有最大值

D. $f(x)$ 在 **R** 上有最小值

C　**解析**:构造 $F(x)=e^x f(x)$,则有 $F'(x)=e^x\cdot[f'(x)+f(x)]=e^x\cdot 3x^2e^{-x}=3x^2$,故 $F(x)=x^3+c$(c 为常数),所以 $f(x)=\dfrac{x^3+c}{e^x}$.又 $f(0)=0$,所以 $c=0$,故 $f(x)=\dfrac{x^3}{e^x}$.因为 $f'(x)=\dfrac{3x^2-x^3}{e^x}=\dfrac{x^2(3-x)}{e^x}$,易知 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,3]$ 上单调递增,在 $[3,+\infty)$ 上单调递减,所以 $f(x)_{max}=f(3)=\dfrac{27}{e^3}$,无最小值.故选 C.

角度 3　构造 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 型可导函数

例 3　设 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 的导函数,$f(-1)=0$,当 $x>0$ 时,$xf'(x)-f(x)<0$,则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是　(　　)

A.$(-\infty,-1)\cup(0,1)$

B.$(-1,0)\cup(1,+\infty)$

C.$(-\infty,-1)\cup(-1,0)$

D.$(0,1)\cup(1,+\infty)$

A　**解析**:令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$,则 $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.由题意知,当 $x>0$ 时,$g'(x)<0$,所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.因为 $f(x)$ 是奇函数,$f(-1)=0$,所以 $f(1)=-f(-1)=0$,所以 $g(1)=f(1)=0$.所以当 $x\in(0,1)$ 时,$g(x)>0$,从而 $f(x)>0$;当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$g(x)<0$,从而 $f(x)<0$.又因为 $f(x)$ 是奇函数,所以当 $x\in(-\infty,-1)$ 时,$f(x)>0$;当 $x\in(-1,0)$ 时,$f(x)<0$.综上,所求 x 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$.故选 A.

【规律方法】

当题设条件中存在或通过变形出现特征式"$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$"时,可联想、逆用"$\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}=\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'$",构造可导函数 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$,然后利用该函数的性质巧妙地解决问题.

【对点训练】

已知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的导函数为 $f'(x)$,且 $xf'(x)>2f(x)$,则下列不等式成立的是　(　　)

A.$2\,021^2f(2\,022)>2\,022^2f(2\,021)$

B.$2\,021^2f(2\,022)<2\,022^2f(2\,021)$

C.$2\,021f(2\,022)>2\,022f(2\,021)$

D.$2\,021f(2\,022)<2\,022f(2\,021)$

A　**解析**:令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$,$x\in(0,+\infty)$,则 $g'(x)=\dfrac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=\dfrac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}>0$,则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,即 $\dfrac{f(2\,022)}{2\,022^2}>\dfrac{f(2\,021)}{2\,021^2}$,所以 $2\,021^2\cdot f(2\,022)>2\,022^2f(2\,021)$.故选 A.

类型二　函数中的隐零点问题

例 4　已知函数 $f(x)=e^x-\ln(x+m)$.

(1)当 $m=0$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的方程;

(2)当 $m\leqslant 2$ 时,求证:$f(x)>0$.

(1)**解**:当 $m=0$ 时,$f(x)=e^x-\ln x$,则 $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$.

又 $f(1)=e$,$f'(1)=e-1$,

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的方程为 $y-e=(e-1)(x-1)$,即 $(e-1)x-y+1=0$.

(2)**证明**:当 $m\leqslant 2$,$x\in(-m,+\infty)$ 时,$\ln(x+m)\leqslant\ln(x+2)$,

则有 $f(x)=e^x-\ln(x+m)\geqslant e^x-\ln(x+2)$,故只需证明当 $m=2$ 时,$f(x)>0$.

当 $m=2$ 时,函数 $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+2}$ 在区间 $(-2,+\infty)$ 上单调递增.

又 $f'(-1)<0$,$f'(0)>0$,

故 $f'(x)=0$ 在区间 $(-2,+\infty)$ 上有唯一实根 x_0,且 $x_0\in(-1,0)$.

当 $x\in(-2,x_0)$ 时,$f'(x)<0$,当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,

从而当 $x=x_0$ 时，$f(x)$取得最小值.

由 $f'(x_0)=0$，得 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0+2}$，$\ln(x_0+2)=-x_0$，

故 $f(x)\geqslant f(x_0)=\frac{1}{x_0+2}+x_0=\frac{(x_0+1)^2}{x_0+2}>0$.

综上，当 $m\leqslant 2$ 时，$f(x)>0$.

【规律方法】

隐零点问题通用解题技法

(1)虚设代换：当导数零点不可解时，先设其存在，再利用其满足的方程进行整体代换化简.

(2)最值转化：通过隐零点确定函数极值点，将不等式证明问题转化为该点函数值的符号判断问题.

【对点训练】

已知函数 $f(x)=ae^x+\frac{a+1}{x}-2(a+1)\geqslant 0$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$恒成立，其中 $a>0$，求 a 的取值范围.

解：由已知得 $f(x)_{\min}\geqslant 0(a>0,x>0)$，

$f'(x)=ae^x-\frac{a+1}{x^2}=\frac{ae^x x^2-(a+1)}{x^2}$.

令 $g(x)=ae^x x^2-(a+1)(a>0,x>0)$，

则 $g'(x)=a(2x+x^2)e^x>0$，所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

又 $g(0)=-(a+1)<0$，而 $g(x)=ae^x x^2-(a+1)>ax^2-(a+1)$，

所以 $g\left(\sqrt{\frac{a+1}{a}}\right)>0$.

存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $g(x_0)=0$，即 $ae^{x_0}=\frac{a+1}{x_0^2}$.

当 $0<x<x_0$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当 $x>x_0$ 时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

故 $f(x)_{\min}=f(x_0)=ae^{x_0}+\frac{a+1}{x_0}-2(a+1)=\frac{a+1}{x_0^2}+\frac{a+1}{x_0}-2(a+1)\geqslant 0$，得 $0<x_0\leqslant 1$.

又因为 $g(x)=ae^x x^2-(a+1)$在$(0,+\infty)$上单调递增，且 $0<x_0\leqslant 1$，

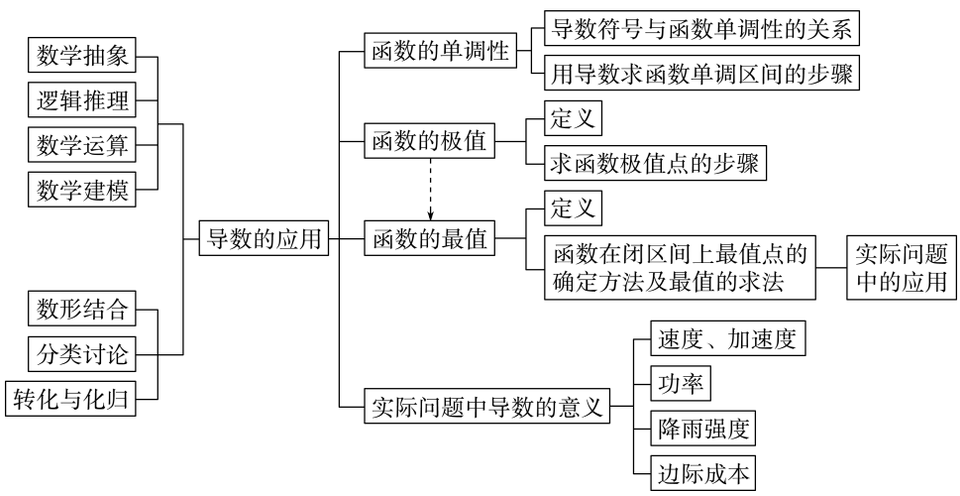
所以 $0=g(x_0)\leqslant g(1)$，由 $g(1)\geqslant 0$，得 $a\geqslant\frac{1}{e-1}$.

综上，a 的取值范围为$\left[\frac{1}{e-1},+\infty\right)$.

★★★

重　构　拓　展

多维体系构建



【问题探究】

1. 你能从物理和几何两方面解释导数的意义吗？

2. 利用导数定义推导函数 $y=f(x)$ 的导数时，其基本步骤是什么？

3. 利用导数研究函数性质的基本步骤是什么？

质量评估(二)

(考查范围:第五章　时间:120分钟　分值:150分)

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.

1. 函数 $f(x)=x^2+x$ 在 $x=1$ 处的导数 $f'(1)=$ (　　)

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

D　**解析**:因为 $f(x)=x^2+x$,所以 $f'(x)=2x+1$,所以 $f'(1)=2\times1+1=3$.故选D.

2. 利用导数的定义计算 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\ln(\mathrm{e}+2\Delta x)-1}{\Delta x}$ 的值为 (　　)

A.1　　B.$\dfrac{2}{\mathrm{e}}$　　C.0　　D.2

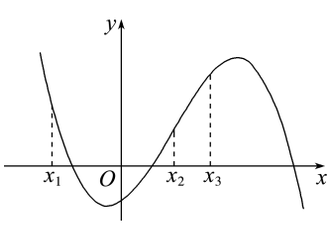
B　**解析**:因为 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\ln(\mathrm{e}+2\Delta x)-1}{\Delta x}=2\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\ln(\mathrm{e}+2\Delta x)-\ln\mathrm{e}}{2\Delta x}$,

而 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\ln(x+2\Delta x)-\ln x}{2\Delta x}=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$,

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\ln(\mathrm{e}+2\Delta x)-\ln\mathrm{e}}{2\Delta x}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$,

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\ln(\mathrm{e}+2\Delta x)-1}{\Delta x}=\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.故选B.

3. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$,$f(x)$ 的图象如图所示,则 (　　)



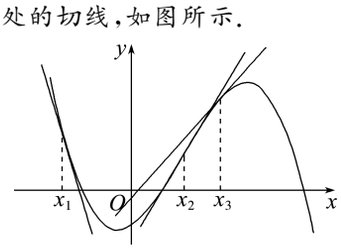
A.$f'(x_1)>f'(x_2)>f'(x_3)$

B.$f'(x_2)>f'(x_3)>f'(x_1)$

C.$f'(x_3)>f'(x_2)>f'(x_1)$

D.$f'(x_1)>f'(x_3)>f'(x_2)$

B　**解析**:分别作出函数 $f(x)$ 的图象在 $x=x_1$,$x=x_2$,$x=x_3$ 处的切线,如图所示.



根据导数的几何意义及图中切线的斜率可知,$f'(x_2)>f'(x_3)>0>f'(x_1)$.故选B.

4. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\sin x$ 的零点个数为 (　　)

A.1　　B.0

C.3　　D.2

A　**解析**:由 $\dfrac{1+x}{1-x}>0$,可得 $-1<x<1$,即 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$,

所以 $f'(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1-x}{1+x}\times\dfrac{2}{(1-x)^2}-\cos x=\dfrac{1}{1-x^2}-\cos x$.

由于 $1-x^2\in(0,1]$,故 $\dfrac{1}{1-x^2}-\cos x\geqslant0$,

即 $f'(x)\geqslant0$,当且仅当 $x=0$ 时取等号,

故 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递增.又 $f(0)=0$,

所以 $f(x)$ 仅有一个零点.

故选A.

5. 函数 $f(x)=2x-\ln 2x$ 的单调递减区间为 (　　)

A.$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　B.$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

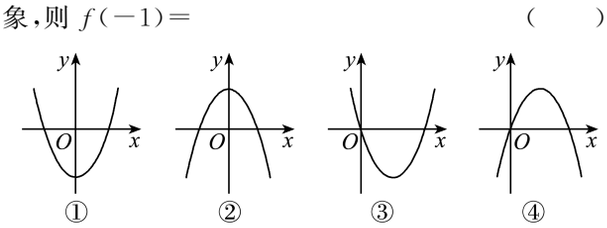
C.$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　D.$\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$

A　**解析**:由题得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

$f'(x)=2-2\times\dfrac{1}{2x}=\dfrac{2x-1}{x}$,令 $f'(x)<0$,解得 $0<x<\dfrac{1}{2}$.所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

故选A.

6. 下面四个图象中,有一个是函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+ax^2+(a^2-1)x+1(a\in\mathbf{R})$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象,则 $f(-1)=$ (　　)



A.$\frac{1}{3}$　　B.$-\frac{2}{3}$

C.$\frac{7}{3}$　　D.$-\frac{1}{3}$或$\frac{5}{3}$

D　**解析**：因为 $f'(x)=x^2+2ax+a^2-1$，所以 $y=f'(x)$ 的图象开口向上，排除②④.若 $y=f'(x)$ 的图象为①，则 $a=0$，$f(-1)=\frac{5}{3}$.若 $y=f'(x)$ 的图象为③，则 $a^2-1=0$，得 $a=\pm1$.又对称轴 $x=-a>0$，所以 $a=-1$，所以 $f(-1)=-\frac{1}{3}$.

7.已知当 $x=1$ 时，函数 $f(x)=a\ln x+bx^2+3$ 取得最大值 2，则 $f(3)=$　　（　　）

A.$2\ln 3+2$　　B.$-\frac{16}{3}$

C.$2\ln 3-6$　　D.-4

C　**解析**：$f'(x)=\frac{a}{x}+2bx$，因为当 $x=1$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值 2，

所以 $\begin{cases}f(1)=2,\\f'(1)=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}b+3=2,\\a+2b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-1,\\a=2,\end{cases}$

所以 $f(x)=2\ln x-x^2+3$，$f'(x)=\frac{2}{x}-2x=\frac{2(1-x)(1+x)}{x}$.

令 $f'(x)>0$，得 $0<x<1$；令 $f'(x)<0$，得 $x>1$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

则 $f(x)_{\max}=f(1)=2$，符合题意，所以 $f(3)=2\ln 3-6$.

故选 C.

8.（2024·全国甲卷）设函数 $f(x)=\frac{e^x+2\sin x}{1+x^2}$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为　　（　　）

A.$\frac{1}{6}$　　B.$\frac{1}{3}$

C.$\frac{1}{2}$　　D.$\frac{2}{3}$

A　**解析**：对 $f(x)$ 求导可得 $f'(x)=\frac{(e^x+2\cos x)(1+x^2)-(e^x+2\sin x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$，所以 $f'(0)=3$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线的方程为 $y-1=3(x-0)$，即 $3x-y+1=0$，切线与两坐标轴的交点分别为 $(0,1)$，$\left(-\frac{1}{3},0\right)$，所以切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.故选 A.

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9.（2024·新高考全国Ⅰ卷）设函数 $f(x)=(x-1)^2\cdot(x-4)$，则　　（　　）

A.$x=3$ 是 $f(x)$ 的极小值点

B.当 $0<x<1$ 时，$f(x)<f(x^2)$

C.当 $1<x<2$ 时，$-4<f(2x-1)<0$

D.当 $-1<x<0$ 时，$f(2-x)>f(x)$

ACD　**解析**：对 A 选项，因为函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，而 $f'(x)=2(x-1)(x-4)+(x-1)^2=3(x-1)(x-3)$，

易知当 $x\in(1,3)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,3)$ 上单调递减，在 $(3,+\infty)$ 上单调递增，所以 $x=3$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，故 A 正确；

对 B 选项，当 $0<x<1$ 时，$x-x^2=x(1-x)>0$，所以 $1>x>x^2>0$，

由 A 选项可知，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $f(x)>f(x^2)$，故 B 错误；

对 C 选项，当 $1<x<2$ 时，$1<2x-1<3$，由 A 选项可知，函数 $f(x)$ 在 $(1,3)$ 上单调递减，

所以 $f(1)>f(2x-1)>f(3)$，即 $-4<f(2x-1)<0$，故 C 正确；

对 D 选项，当 $-1<x<0$ 时，$f(2-x)-f(x)=(1-x)^2(-2-x)-(x-1)^2(x-4)=(x-1)^2(2-2x)>0$，所以 $f(2-x)>f(x)$，故 D 正确.故选 ACD.

10.已知函数 $f(x)=x^3-x+1$，则　　（　　）

A.$f(x)$ 有两个极值点

B.$f(x)$ 有三个零点

C.点 $(0,1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心

D.直线 $y=2x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线

AC　**解析**：由题得 $f'(x)=3x^2-1$，令 $f'(x)>0$ 得 $x>\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$；令 $f'(x)<0$ 得 $-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 上单调

递增，在$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$上单调递减，所以$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$是极值点，故A正确.

因为$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1+\frac{2\sqrt{3}}{9}>0$，$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1-\frac{2\sqrt{3}}{9}>0$，$f(-2)=-5<0$，所以，函数$f(x)$在$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$上有一个零点，当$x\geqslant-\frac{\sqrt{3}}{3}$时，$f(x)\geqslant f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)>0$，即函数$f(x)$在$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$上无零点.综上所述，函数$f(x)$有一个零点，故B错误.

令$h(x)=x^3-x$，该函数的定义域为$\mathbf{R}$，$h(-x)=(-x)^3-(-x)=-x^3+x=-h(x)$，所以$h(x)$是奇函数，点$(0,0)$是$h(x)$图象的对称中心.将$h(x)$的图象向上平移1个单位长度得到$f(x)$的图象，所以点$(0,1)$是曲线$y=f(x)$的对称中心，故C正确.

令$f'(x)=3x^2-1=2$，可得$x=\pm1$.又$f(1)=f(-1)=1$，所以当切点为$(1,1)$时，切线方程为$y=2x-1$；当切点为$(-1,1)$时，切线方程为$y=2x+3$，故D错误.

故选AC.

11.已知函数$f(x)=\frac{x}{\ln x}$，下列说法正确的有（　　）

A.$f(x)$在$(1,\mathrm{e})$上单调递增，在$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递减

B.若方程$f(|x|)=k$有4个不相等的实根，则$k>\mathrm{e}$

C.当$0<x_1<x_2<1$时，$x_1\ln x_2<x_2\ln x_1$

D.设$g(x)=x^2+a$，若$\forall x_1\in\mathbf{R}$，$\exists x_2\in(1,+\infty)$，使得$g(x_1)=f(x_2)$成立，则$a\geqslant\mathrm{e}$

BD　**解析：**函数$f(x)=\frac{x}{\ln x}$的定义域为$(0,1)\cup(1,+\infty)$，$f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$.当$0<x<1$或$1<x<\mathrm{e}$时，$f'(x)<0$，当$x>\mathrm{e}$时，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$(0,1)$和$(1,\mathrm{e})$上单调递减，在$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递增，故A不正确.

当$x\in(0,1)$时，$f(x)$的图象在x轴下方，当$x\in(1,+\infty)$时，$f(x)$的图象在x轴上方，且当$x=\mathrm{e}$时，$f(x)=\mathrm{e}$，显然$f(|x|)$是偶函数，所以在方程$f(|x|)=k$中，当$k<0$或$k=\mathrm{e}$时，方程有两个不相等的实根；当$0\leqslant k<\mathrm{e}$时，方程无实根；当$k>\mathrm{e}$时，方程有4个不相等的实根，故B正确.

因为$0<x_1<x_2<1$，所以$f(x_2)<f(x_1)<0$，即$\frac{x_2}{\ln x_2}<\frac{x_1}{\ln x_1}<0$，于是得$x_2\ln x_1<x_1\ln x_2$，故C不正确.

当$x\in\mathbf{R}$时，$g(x)$的值域为$[a,+\infty)$，当$x\in(1,+\infty)$时，$f(x)$的值域为$[\mathrm{e},+\infty)$.因为$\forall x_1\in\mathbf{R}$，$\exists x_2\in(1,+\infty)$，使得$g(x_1)=f(x_2)$成立，从而$[a,+\infty)\subseteq[\mathrm{e},+\infty)$，即得$a\geqslant\mathrm{e}$，故D正确.故选BD.

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12.已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$的导函数$f'(x)>1$，且$f(2m)<f(m+1)$，则实数m的取值范围为_____.

$(-\infty,1)$　**解析：**因为定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$的导函数$f'(x)>1>0$，所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增.由$f(2m)<f(m+1)$，得$2m<m+1$，即$m<1$，所以实数m的取值范围为$(-\infty,1)$.

13.设函数$f(x)=x^3+ax^2+bx(x>0)$的图象与直线$y=4$相切于点$M(1,4)$，则$y=f(x)$在区间$(0,4]$上的最大值为_____，最小值为_____.

4　0　**解析：**$f'(x)=3x^2+2ax+b(x>0)$.

依题意，得$\begin{cases}f'(1)=0,\\f(1)=4,\end{cases}$即$\begin{cases}3+2a+b=0,\\1+a+b=4,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-6,\\b=9.\end{cases}$所以$f(x)=x^3-6x^2+9x$.

令$f'(x)=3x^2-12x+9=0$，解得$x=1$或$x=3$.当x变化时，$f'(x)$，$f(x)$在区间$(0,4]$上的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,4)$	4
$f'(x)$	+	0	−	0	+	
$f(x)$	单调递增	4	单调递减	0	单调递增	4

又当$x\to0$时，$f(x)\to0$，所以函数$f(x)=x^3-6x^2+9x$在区间$(0,4]$上的最大值是4，最小值是0.

14.函数$f(x)$的导函数为$f'(x)$，若在$f(x)$的定义域内存在一个区间D，$f(x)$在区间D上单调递增，$f'(x)$在区间D上单调递减，则称区间D为函数$f(x)$的一个“渐缓增区间”.若函数$f(x)=a\mathrm{e}^x-x^2$，区间$\left(0,\frac{1}{2}\right)$是$f(x)$的一个渐缓增区间，则实数$a$的取值范围是_____.

$\left[\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}},\frac{2\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}}\right]$　**解析：**对于函数$f(x)=a\mathrm{e}^x-x^2$，

$f'(x)=a\mathrm{e}^x-2x$.由题知，$\left(0,\frac{1}{2}\right)$为$f(x)$的一个渐缓增区间.

令$g(x)=a\mathrm{e}^x-2x$，则$g'(x)=a\mathrm{e}^x-2$，

因为$f'(x)$在区间$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调递减，

所以$a\mathrm{e}^x-2\leqslant 0$恒成立，即$a\leqslant\frac{2}{\mathrm{e}^x}$恒成立.

又$\frac{2}{\mathrm{e}^x}>\frac{2}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$，所以$a\leqslant\frac{2\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}}$.

又$f(x)$在区间$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调递增，

所以$f'(x)=a\mathrm{e}^x-2x\geqslant 0$恒成立，即$a\geqslant\frac{2x}{\mathrm{e}^x}$恒成立.

令$h(x)=\frac{2x}{\mathrm{e}^x}$，则$h'(x)=\frac{2(1-x)}{\mathrm{e}^x}>0$，

所以$h(x)<h\left(\frac{1}{2}\right)$，即$\frac{2x}{\mathrm{e}^x}<\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}}$，所以$a\geqslant\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}}$.

综合得$\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}}\leqslant a\leqslant\frac{2\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}}$，

即实数a的取值范围是$\left[\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}},\frac{2\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}}\right]$.

四、解答题：本题共5小题，共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.(13分)已知函数$f(x)=x^3+ax^2-2$在$x=-2$处取得极值.

(1)求实数a的值；

(2)求$f(x)$在区间$[-1,2]$上的最大值与最小值.

解：(1)因为$f(x)=x^3+ax^2-2$，所以$f'(x)=3x^2+2ax$，

所以$f'(-2)=12-4a=0$，解得$a=3$.经检验成立.

(2)由(1)知$f(x)=x^3+3x^2-2$，

所以$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$.

所以当$x\in(-1,0)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x\in(0,2)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

所以$f(x)_{\min}=f(0)=-2$.

因为$f(-1)=0$，$f(2)=18$，所以$f(x)_{\max}=18$.

16.(15分)已知函数$f(x)=\frac{ax^2-x\ln x-a}{x}$.

(1)当$a=2$时，求函数$f(x)$的图象在点$(1,f(1))$处的切线的方程；

(2)讨论$f(x)$的单调性；

解：(1)由题意可知$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

当$a=2$时，$f(x)=2x-\ln x-\frac{2}{x}$，则$f'(x)=2-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$，

所以$f(1)=0$，$f'(1)=2-\frac{1}{1}+\frac{2}{1}=3$，

所以函数$f(x)$的图象在$x=1$处的切线的方程为$y-0=3(x-1)$，即$3x-y-3=0$.

(2)$f'(x)=\frac{ax^2-x+a}{x^2}(x>0)$.

①若$a\leqslant 0$，因为$x>0$，$f'(x)<0$恒成立，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

②若$a>0$，令$f'(x)=0$，即$ax^2-x+a=0$，$\Delta=1-4a^2$.

当$0<a<\frac{1}{2}$时，得$x_1=\frac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2a}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a}$，$0<x_1<1<x_2$，

当$x\in(0,x_1)$或$x\in(x_2,+\infty)$时，$f'(x)>0$，则$f(x)$在$(0,x_1)$，$(x_2,+\infty)$上单调递增；

当$x\in(x_1,x_2)$时，$f'(x)<0$，则$f(x)$在(x_1,x_2)上单调递减.

若$a\geqslant\frac{1}{2}$时，$\Delta=1-4a^2\leqslant 0$，则$f'(x)\geqslant 0$恒成立，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

综上所述，当$a\leqslant 0$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减；

当$0<a<\frac{1}{2}$时，$f(x)$在$\left(0,\frac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2a}\right)$和$\left(\frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2a},\frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a}\right)$上单调递减；

当$a\geqslant\frac{1}{2}$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

17.(15分)已知函数$f(x)=\frac{x-1}{\mathrm{e}^x}-a(2x-1)-b$，其中$a$，$b$是实数.

(1)若$a=0$，求$f(x)$的单调区间；

(2)若函数$f(x)$不具有单调性，求实数a的取值范围.

解：(1)当$a=0$时，$f(x)=\frac{x-1}{\mathrm{e}^x}-b$，则$f'(x)=\frac{2-x}{\mathrm{e}^x}$，

令$f'(x)=0$，解得$x=2$.当$x<2$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，当$x>2$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调

递减，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减.

(2)因为函数 $f(x)$ 的图象是连续的，且 $f(x)$ 不具有单调性，

所以 $f'(x)=\dfrac{2-x}{e^x}-2a$ 的函数值有正有负($f'(x)$ 有异号零点).

记 $g(x)=f'(x)=\dfrac{2-x}{e^x}-2a$，则 $g'(x)=\dfrac{x-3}{e^x}$.

当 $x\in(-\infty,3)$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in(3,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，

所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,3)$ 上单调递减，在 $(3,+\infty)$ 上单调递增.

存在 $x_1=-|2a|$，使得 $f'(x_1)=\dfrac{2+|2a|}{e^{-|2a|}}-2a=(2+|2a|)e^{|2a|}-2a>0$，

故只需 $f'(x)_{\min}=f'(3)=-\dfrac{1}{e^3}-2a<0$，得 $a>-\dfrac{1}{2e^3}$，即实数 a 的取值范围是 $\left(-\dfrac{1}{2e^3},+\infty\right)$.

18.(17 分)某村庄拟修建一个无盖的圆柱形蓄水池(不计厚度).设该蓄水池的底面半径为 r m，高为 h m，体积为 V m^3.假设建造成本仅与表面积有关，侧面的建造成本为 100 元/m^2，底面的建造成本为 160 元/m^2，该蓄水池的总建造成本为 12 000π 元(π 为圆周率).

(1)将 V 表示成 r 的函数 $V(r)$，并求该函数的定义域；

(2)讨论函数 $V(r)$ 的单调性，并确定 r 和 h 为何值时该蓄水池的体积最大.

解：(1)因为蓄水池侧面的总成本为 $100\cdot 2\pi rh=200\pi rh$(元)，

底面的总成本为 $160\pi r^2$ 元，所以修建蓄水池的总成本为 $(200\pi rh+160\pi r^2)$ 元.

根据题意得 $200\pi rh+160\pi r^2=12\,000\pi$，

所以 $h=\dfrac{1}{5r}(300-4r^2)$，

从而 $V(r)=\pi r^2h=\dfrac{\pi}{5}(300r-4r^3)$.

由 $r>0$，$h>0$，可得 $0<r<5\sqrt{3}$，

故函数 $V(r)$ 的定义域为 $(0,5\sqrt{3})$.

(2)因为 $V(r)=\dfrac{\pi}{5}(300r-4r^3)$，$0<r<5\sqrt{3}$，

所以 $V'(r)=\dfrac{\pi}{5}(300-12r^2)$.

令 $V'(r)=0$，解得 $r_1=5$，$r_2=-5$(舍去).

当 $r\in(0,5)$ 时，$V'(r)>0$，故 $V(r)$ 在 $(0,5)$ 上单调递增；

当 $r\in(5,5\sqrt{3})$ 时，$V'(r)<0$，故 $V(r)$ 在 $(5,5\sqrt{3})$ 上单调递减.

由此可知，$V(r)$ 在 $r=5$ 时取得最大值 $V(5)=200\pi$，此时 $h=8$.

故当 $r=5$，$h=8$ 时，该蓄水池的体积最大.

19.(17 分)函数 $f(x)=e^{\lambda x}-4\sin x+\lambda-2$ 的图象在 $x=0$ 处的切线为 $y=ax-a-3$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)求 λ 的值；

(2)求 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上零点的个数.

解：(1)因为 $f(x)=e^{\lambda x}-4\sin x+\lambda-2$，$f'(x)=\lambda e^{\lambda x}-4\cos x$，

所以 $f'(0)=\lambda-4$，所以切线斜率为 $\lambda-4$，即 $a=\lambda-4$，

所以切线方程为 $y=(\lambda-4)x-\lambda+1$.

又 $f(0)=\lambda-1$，所以切点坐标为 $(0,\lambda-1)$，代入得

$\lambda-1=-\lambda+1$，解得 $\lambda=1$.

(2)由(1)得 $f(x)=e^x-4\sin x-1$，$f'(x)=e^x-4\cos x$，

令 $g(x)=f'(x)=e^x-4\cos x$，则 $g'(x)=e^x+4\sin x$，

当 $x\geqslant\pi$ 时，$f'(x)=e^x-4\cos x>0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $[\pi,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)\geqslant f(\pi)=e^\pi-4\sin\pi-1=e^\pi-1>0$.

因此 $f(x)$ 在 $[\pi,+\infty)$ 上无零点.

当 $0<x<\pi$ 时，$g'(x)=e^x+4\sin x>0$ 恒成立，所以 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增，

又 $f'(0)=-3<0$，$f'(\pi)=e^\pi+4>0$，

所以 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上存在唯一的零点 x_0，

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_0,\pi)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

又 $f(0)=0$，$f(x_0)<f(0)=0$，$f(\pi)=e^\pi-1>0$，

因此 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上仅有 1 个零点.

综上，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上仅有 1 个零点.

综合质量评估（一）

（考查范围：选择性必修·第二册　时间：120分钟　分值：150分）

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

1. 若函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1-\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}=4$，则 $f'(1)=$　　（　　）

A.-2　　B.2　　C.-8　　D.8

C　**解析**：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1-\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}=-\dfrac{1}{2}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1-\Delta x)-f(1)}{-\Delta x}=-\dfrac{1}{2}f'(1)=4$，所以 $f'(1)=-8$.

故选C.

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_1+a_2+a_3=6$，$a_4+a_6=-20$，则 $a_8=$　　（　　）

A.-12　　B.-13　　C.-22　　D.-23

C　**解析**：由题意得 $a_1+a_2+a_3=3a_2=6$，解得 $a_2=2$，

$a_4+a_6=2a_5=-20$，解得 $a_5=-10$，

故等差数列的公差 $d=\dfrac{a_5-a_2}{5-2}=\dfrac{-10-2}{3}=-4$，

故 $a_8=a_2+6d=2-6\times 4=-22$.

故选C.

3. 设 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=e^x+a\cdot e^{-x}$ 的导函数是 $f'(x)$，且 $f'(x)$ 是奇函数.若曲线 $y=f(x)$ 的一条切线的斜率是 $\dfrac{3}{2}$，则切点的横坐标为　　（　　）

A.$-\dfrac{\ln 2}{2}$　　B.$-\ln 2$　　C.$\dfrac{\ln 2}{2}$　　D.$\ln 2$

D　**解析**：由题可知 $x\in\mathbf{R}$，因为函数 $f(x)=e^x+a\cdot e^{-x}$，所以 $f'(x)=e^x-\dfrac{a}{e^x}$.

又因为 $f'(x)$ 是奇函数，所以 $f'(0)=1-a=0$，

所以 $a=1$，经检验，符合题意，

所以 $f(x)=e^x+\dfrac{1}{e^x}$，$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{e^x}$.

因为曲线 $y=f(x)$ 的一条切线的斜率是 $\dfrac{3}{2}$，

所以 $\dfrac{3}{2}=e^x-\dfrac{1}{e^x}$，解方程可得 $x=\ln 2$.

故选D.

4. 已知公差为负数的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 a_3，a_4，a_7 成等比数列，则当 S_n 取最大值时，$n=$　　（　　）

A.2或3　　B.2　　C.3　　D.4

B　**解析**：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d<0)$，由 a_3，a_4，a_7 成等比数列，

得 $(a_1+3d)^2=(a_1+2d)(a_1+6d)$，

解得 $a_1=-\dfrac{3}{2}d$，则 $a_n=a_1+(n-1)d=\left(n-\dfrac{5}{2}\right)d$.

显然等差数列 $\{a_n\}$ 是递减数列，当 $n\leqslant 2$ 时，$a_n>0$，当 $n\geqslant 3$ 时，$a_n<0$，

所以当 S_n 取最大值时，$n=2$.

故选B.

5. 若函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\ln x$ 在区间 $\left(m,m+\dfrac{1}{3}\right)$ 上不单调，则实数 m 的取值范围为　　（　　）

A.$0<m<\dfrac{2}{3}$　　B.$\dfrac{2}{3}<m<1$

C.$\dfrac{2}{3}\leqslant m\leqslant 1$　　D.$m>1$

B　**解析**：函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-1}{x}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$.

因为 $f(x)$ 在区间 $\left(m,m+\dfrac{1}{3}\right)$ 上不单调，

所以 $\begin{cases}m>0,\\ m<1<m+\dfrac{1}{3},\end{cases}$ 解得 $\dfrac{2}{3}<m<1$.

故选B.

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\dfrac{n}{n+2}a_n$，$a_1=1$，则 $a_n=$　　（　　）

A.$\dfrac{2}{(n+1)^2}$　　B.$\dfrac{2}{n(n+1)}$

C.$\dfrac{1}{2^n-1}$　　D.$\dfrac{1}{2n-1}$

B　**解析**：由 $a_{n+1}=\frac{n}{n+2}a_n$ 且 $a_1=1$，得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+2}$，

所以 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{3}$，$\frac{a_3}{a_2}=\frac{2}{4}$，$\frac{a_4}{a_3}=\frac{3}{5}$，…，$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\frac{n-2}{n}$，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n+1}(n\geqslant 2)$.

所以 $\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\cdots\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\cdots\times\frac{n-2}{n}\times\frac{n-1}{n+1}$，所以 $\frac{a_n}{a_1}=\frac{2}{n(n+1)}$.

因为 $a_1=1$，所以 $a_n=\frac{2}{n(n+1)}$.

因为 $a_1=1$ 满足上式，所以 $a_n=\frac{2}{n(n+1)}$.

故选 B.

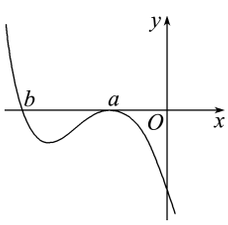
7. 设 $a\neq 0$，若 a 为函数 $f(x)=a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点，则　（　）

A.$a<b$　　B.$a>b$　　C.$ab<a^2$　　D.$ab>a^2$

D　**解析**：若 $a=b$，则 $f(x)=a(x-a)^3$ 为单调函数，无极值点，不符合题意，故 $a\neq b$.

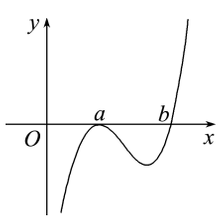
所以 $f(x)$ 有 a 和 b 两个不同零点，且在 $x=a$ 左右附近是不变号的，在 $x=b$ 左右附近是变号的.依题意，a 为函数 $f(x)=a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点，所以在 $x=a$ 左右附近 $f(x)$ 都是小于零的.

当 $a<0$ 时，由 $x>b$ 时，$f(x)\leqslant 0$，画出 $f(x)$ 的图象如图所示.



由图可知 $b<a$，$a<0$，故 $ab>a^2$.

当 $a>0$ 时，由 $x>b$ 时，$f(x)>0$，画出 $f(x)$ 的图象如图所示.



由图可知 $b>a$，$a>0$，故 $ab>a^2$.

综上所述，$ab>a^2$ 成立.

故选 D.

8. 南宋数学家杨辉在《详解九章算法》中提出了高阶等差数列的问题.若一个数列 $\{a_n\}$ 本身不是等差数列，但从数列 $\{a_n\}$ 中的第二项开始，每一项与前一项的差构成等差数列 $\{b_n\}$，则称数列 $\{a_n\}$ 为一阶等差数列；或者 $\{b_n\}$ 仍旧不是等差数列，但从数列 $\{b_n\}$ 中的第二项开始，每一项与前一项的差构成等差数列 $\{c_n\}$，则称数列 $\{a_n\}$ 为二阶等差数列.一阶等差数列、二阶等差数列等统称高阶等差数列.类比高阶等差数列的定义，我们亦可定义高阶等比数列，设数列 1，1，2，8，64，…是一阶等比数列，则该数列的第 8 项是　（　）

A.2^5　　B.2　　C.2^{21}　　D.2^{28}

C　**解析**：记数列 1，1，2，8，64，… 为 $\{a_n\}$，设 $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$，

则 $b_1=1$，$b_2=2$，$b_3=4$，$b_4=8$，…，

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列，所以 $b_n=2^{n-1}$，

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=b_{n-1}\cdot b_{n-2}\cdot b_{n-3}\cdot\cdots\cdot b_1\cdot a_1=2^{1+2+3+\cdots+(n-2)}=2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$，所以 $a_8=2^{\frac{7\times 6}{2}}=2^{21}$.

故选 C.

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $2a_1+2^2a_2+\cdots+2^na_n=\frac{3n^2+5n}{2}$，设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，其中 $c_n=\frac{1}{2^{2n+1}\cdot a_n\cdot a_{n+1}}$，则下列四个结论中，正确的有　（　）

A.a_1 的值为 2

B.数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=(3n+1)\times 2^n$

C.数列 $\{a_n\}$ 为递减数列

D.$S_n=\frac{n}{12n+16}$

ACD　**解析**：对于 A，$2a_1=\frac{3\times 1^2+5\times 1}{2}=4$，即 $a_1=2$，故 A 正确.

对于 B，$2a_1+2^2a_2+\cdots+2^na_n=\frac{3n^2+5n}{2}$①，$2a_1+2^2a_2+\cdots+2^{n-1}a_{n-1}=\frac{3(n-1)^2+5(n-1)}{2}(n\geqslant 2)$②，

①－②得 $2^na_n=3n+1$，$a_n=\frac{3n+1}{2^n}$.

当 $n=1$ 时，$a_1=\frac{3\times 1+1}{2^1}=2$，

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{3n+1}{2^n}$，故 B 错误.

对于C，令 $a_{n+1}-a_n=\frac{3n+4}{2^{n+1}}-\frac{3n+1}{2^n}=\frac{3n+4-(6n+2)}{2^{n+1}}=\frac{-3n+2}{2^{n+1}}$，

因为 $n\geqslant 1$，所以 $a_{n+1}-a_n=\frac{-3n+2}{2^{n+1}}<0$，数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，故C正确.

对于D，$c_n=\frac{1}{2^{2n+1}\cdot\frac{3n+1}{2^n}\cdot\frac{3n+4}{2^{n+1}}}=\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\right)$，

$S_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+4}\right)=\frac{n}{12n+16}$，故D正确.

故选ACD.

10. 关于函数 $f(x)=e^x+\sin x$，$x\in(-\pi,+\infty)$，下列结论正确的有　　（　　）

A. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增的

B. $f(x)$ 存在唯一极小值点

C. $f(x)$ 在 $(-\pi,+\infty)$ 上有一个零点

D. $f(x)$ 在 $(-\pi,+\infty)$ 上有两个零点

ABD　**解析：** 由已知 $f(x)=e^x+\sin x$，$x\in(-\pi,+\infty)$，得 $f'(x)=e^x+\cos x$，令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=e^x-\sin x$，

当 $x\in(-\pi,0]$ 时，$e^x>0$，$-\sin x\geqslant 0$，$g'(x)>0$，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$e^x>1$，$-\sin x\in[-1,1]$，$g'(x)>0$，

即当 $x\in(-\pi,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$ 恒成立，

$f'(x)$ 在 $(-\pi,+\infty)$ 上单调递增.

又 $f'\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=e^{-\frac{3\pi}{4}}-\frac{\sqrt{2}}{2}<0$，$f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}>0$，$f'(0)=2>0$，

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>f'(0)>0$，且存在唯一实数 $x_0\in\left(-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2}\right)$，使 $f'(x_0)=0$，即 $e^{x_0}=-\cos x_0$，

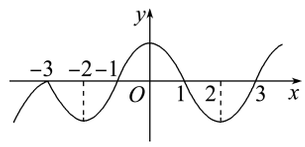
所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增的，且 $f(x)$ 存在唯一极小值点 x_0，故A，B选项正确.

由上述知 $f(x)$ 在 $(-\pi,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $f(-\pi)=e^{-\pi}+0>0$，$f(x_0)=e^{x_0}+\sin x_0=\sin x_0-\cos x_0=\sqrt{2}\sin\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)<0$，$f(0)=1>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\pi,+\infty)$ 上有两个零点，故D选项正确，C选项错误.

故选ABD.

11. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示，下列说法正确的有　　（　　）



A. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x-2)-f(-2)}{\Delta x}<0$

B. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减

C. 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值

D. 函数 $f(x)$ 有最大值

ABC　**解析：** 对于A，由题图可知，

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x-2)-f(-2)}{\Delta x}=f'(-2)<0$，故A正确；

对于B，由题图可知，当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)\leqslant 0$ 恒成立，

故函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，故B正确；

对于C，由题图可知，当 $x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(1,2)$，$f'(x)<0$，

故函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，故C正确；

对于D，由题图可知，当 $x\in(3,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，

故 $f(x)$ 在 $(3,+\infty)$ 上单调递增，无最大值，故D错误.

故选ABC.

三、填空题： 本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. 已知 $a=4+2\sqrt{3}$，$c=4-2\sqrt{3}$. 若 a，b，c 三个数成等差数列，则 $b=$_____；若 a，b，c 三个数成等比数列，则 $b=$_____.

4　± 2　**解析：** 若 a，b，c 三个数成等差数列，

则 $b=\frac{a+c}{2}=\frac{4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}}{2}=4$.

若 a，b，c 三个数成等比数列，

则 $b^2=ac=(4+2\sqrt{3})\times(4-2\sqrt{3})=4\Rightarrow b=\pm 2$.

13. 若曲线 $y=(x+a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线，则 a 的取值范围是_____.

$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$　**解析：** 因为 $y=(x+a)\cdot e^x$，所以 $y'=(x+1+a)e^x$.

设切点为 (x_0,y_0)，则 $y_0=(x_0+a)e^{x_0}$，切线斜率 $k=(x_0+1+a)e^{x_0}$，

切线方程为 $y-(x_0+a)e^{x_0}=(x_0+1+a)e^{x_0}(x-x_0)$.

因为切线过原点，所以 $-(x_0+a)e^{x_0}=(x_0+1+a)\cdot e^{x_0}(-x_0)$，

整理得 $x_0^2+ax_0-a=0$.

因为切线有两条，所以 $\Delta=a^2+4a>0$，解得 $a<-4$ 或 $a>0$，

所以 a 的取值范围是 $(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$.

14. 已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$.若 $f(t+3)+f(t-t^2)>0$ 成立，则实数 t 的取值范围为_____.

$(-1,3)$　**解析**：由题得函数的定义域为 **R**.因为 $f(-x)=e^{-x}-e^x+2x=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是奇函数.又 $f'(x)=e^x+e^{-x}-2\geqslant 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2=0$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立.

所以函数 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增，$f(t+3)+f(t-t^2)>0$ 等价于 $f(t+3)>-f(t-t^2)=f(t^2-t)$，

所以 $t+3>t^2-t$，所以 $t^2-2t-3<0$，解得 $-1<t<3$.

所以实数 t 的取值范围为 $(-1,3)$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13 分）（2023·全国甲卷）已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=1$，设 S_n 为 $\{a_n\}$ 前 n 项和，$2S_n=na_n$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\left\{\dfrac{a_n+1}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

解：（1）因为 $2S_n=na_n$，所以

当 $n=1$ 时，$2a_1=a_1$，即 $a_1=0$，

当 $n=3$ 时，$2(0+1+a_3)=3a_3$，即 $a_3=2$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$2S_{n-1}=(n-1)a_{n-1}$，所以 $2(S_n-S_{n-1})=na_n-(n-1)a_{n-1}$，即 $2a_n=na_n-(n-1)a_{n-1}$，

化简得，$(n-2)a_n=(n-1)a_{n-1}$，当 $n\geqslant 3$ 时，$\dfrac{a_n}{n-1}=\dfrac{a_{n-1}}{n-2}=\cdots=\dfrac{a_3}{2}=1$，即 $a_n=n-1$，当 $n=1,2,3$ 时 $a_n=n-1$ 仍成立，所以 $a_n=n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

（2）因为 $\dfrac{a_n+1}{2^n}=\dfrac{n}{2^n}$，所以 $T_n=1\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^1+2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\cdots+n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，$\dfrac{1}{2}T_n=1\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\cdots+(n-1)\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.

两式相减得，

$$\frac{1}{2}T_n=\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{\frac{1}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=1-\left(1+\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

则 $T_n=2-(2+n)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

16.（15 分）已知函数 $g(x)=e^x+\dfrac{a}{2}x^2$，其中 $a\in\mathbf{R}$，$e=2.718\,28\cdots$ 是自然对数的底数，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的导函数.

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=g(x)$ 在点 $(1,g(1))$ 处的切线的方程；

（2）当 $f(x)$ 存在极值时，证明：$f(x)$ 的极值小于或等于 1.

（1）**解**：由题设 $f(x)=e^x+ax$.当 $a=1$ 时，$g(x)=e^x+\dfrac{1}{2}x^2$，$f(x)=e^x+x$，则 $f(1)=e+1$，$g(1)=e+\dfrac{1}{2}$，

故曲线 $y=g(x)$ 在点 $(1,g(1))$ 处的切线的方程为 $y-g(1)=f(1)(x-1)$，

整理得 $2(e+1)x-2y-1=0$.

（2）**证明**：由（1）得 $f(x)=e^x+ax$，求导得 $f'(x)=e^x+a$.

当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，故 $f(x)$ 不存在极值.

当 $a<0$ 时，存在 $x_0\in\mathbf{R}$，

使得 $f'(x_0)=0$，且 $x_0=\ln(-a)$，

在 $(-\infty,x_0)$ 上 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

在 $(x_0,+\infty)$ 上 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

此时 $f(x)$ 存在极值 $f(x_0)$.

由计算得 $f(x_0)=f(\ln(-a))=e^{\ln(-a)}+a\ln(-a)=-a+a\ln(-a)$.

设 $h(a)=-a+a\ln(-a)$，$a<0$，则 $h'(a)=-1+\ln(-a)+1=\ln(-a)$.

当 $a<-1$ 时，$h'(a)=\ln(-a)>0$；当 $-1<a<0$ 时，$h'(a)=\ln(-a)<0$，

所以 $a=-1$ 时，$h(a)$ 取得极大值，也是最大值，故 $h(a)\leqslant h(-1)=1-\ln 1=1$，

即 $f(x)$ 的极值小于或等于 1.

17.（15 分）设函数 $f(x)=x-x^3e^{ax+b}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的方程为 $y=-x+1$.

（1）求 a，b 的值；

（2）设函数 $g(x)=f'(x)$，求 $g(x)$ 的单调区间.

解：（1）因为 $f(x)=x-x^3e^{ax+b}$，$x\in\mathbf{R}$，所以 $f'(x)=1-(3x^2+ax^3)e^{ax+b}$.

因为曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线的方程为 $y=-x+1$，

所以 $f(1)=0$，$f'(1)=-1$，

则$\begin{cases}1-1^3\times e^{a+b}=0,\\1-(3+a)e^{a+b}=-1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-1,\\b=1,\end{cases}$

所以$a=-1,b=1$.

(2)由(1)得$g(x)=f'(x)=1-(3x^2-x^3)e^{-x+1}$($x\in\mathbf{R}$),

则$g'(x)=-x(x^2-6x+6)e^{-x+1}$.

令$x^2-6x+6=0$,解得$x=3\pm\sqrt{3}$,不妨设$x_1=3-\sqrt{3}$,$x_2=3+\sqrt{3}$,则$0<x_1<x_2$,

易知$e^{-x+1}>0$恒成立,

所以令$g'(x)<0$,解得$0<x<x_1$或$x>x_2$;令$g'(x)>0$,解得$x<0$或$x_1<x<x_2$.

所以$g(x)$在$(0,x_1)$和$(x_2,+\infty)$上单调递减,在$(-\infty,0)$和(x_1,x_2)上单调递增,

即$g(x)$的单调递减区间为$(0,3-\sqrt{3})$和$(3+\sqrt{3},+\infty)$,单调递增区间为$(-\infty,0)$和$(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$.

18.(17分)在等差数列$\{a_n\}$中,其前n项和为S_n,且$S_n=\left(\frac{a_n+1}{2}\right)^2$;在等比数列$\{b_n\}$中,其前$n$项和为$T_n$,且$T_n=\left(\frac{b_n+1}{2}\right)^2$($n\in\mathbf{N}^*$).

(1)求a_n,b_n;

(2)求$\{a_nb_n\}$的前n项和M_n.

解:(1)由$S_1=\left(\frac{a_1+1}{2}\right)^2=a_1$,解得$a_1=1$.

又$S_2=a_1+a_2=1+a_2=\left(\frac{a_2+1}{2}\right)^2$,所以$a_2=3$或$-1$.

因为$a_2=-1$时,$a_3=-3$,此时$S_3=a_1+a_2+a_3=-3\neq\left(\frac{a_3+1}{2}\right)^2=1$,故$a_2=-1$舍去.

所以等差数列$\{a_n\}$的公差$d=a_2-a_1=2$,

所以$a_n=2n-1$.

同理可得$b_1=1$,$b_2=3$或-1.

因为$b_2=3$时,$b_3=9$,此时$T_3=b_1+b_2+b_3=13\neq\left(\frac{b_3+1}{2}\right)^2=25$,故$b_2=3$舍去.

又$\{b_n\}$为等比数列,所以$b_n=(-1)^{n-1}$.

(2)因为$M_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$,

所以$M_n=1\times(-1)^0+3\times(-1)^1+5\times(-1)^2+\cdots+(2n-1)\times(-1)^{n-1}$①,

则$-M_n=1\times(-1)^1+3\times(-1)^2+5\times(-1)^3+\cdots+(2n-1)\times(-1)^n$②,

①-②得$2M_n=1+2\times(-1)^1+2\times(-1)^2+2\times(-1)^3+\cdots+2\times(-1)^{n-1}-(2n-1)\times(-1)^n=1+2\times\frac{(-1)-(-1)^{n-1}\times(-1)}{1-(-1)}-(2n-1)\times(-1)^n$,

所以$M_n=n\times(-1)^{n-1}$.

19.(17分)已知函数$f(x)=\frac{x^2}{e^x}$,$g(x)=\ln x-ax+e$,其中e是自然对数的底数.

(1)求函数$f(x)$的极值;

(2)对$\forall x_1\in[-1,0]$,$\exists x_2\in[2,e^2]$,使$f(x_1)\leqslant g(x_2)$成立,求实数a的取值范围.

解:(1)因为$f(x)=\frac{x^2}{e^x}$,该函数的定义域为$\mathbf{R}$,所以$f'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}$.

令$f'(x)=0$,得$x=0$或$x=2$,当x变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下表:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增	极大值	单调递减

由表可得$f(x)_{极小值}=f(0)=0$,$f(x)_{极大值}=f(2)=\frac{4}{e^2}$.

(2)由题意可得,$\forall x_1\in[-1,0]$,$\exists x_2\in[2,e^2]$,使$f(x_1)_{max}\leqslant g(x_2)$成立.

由(1)可知$f(x_1)$在$[-1,0]$上单调递减,

所以$f(x_1)_{max}=f(-1)=e$,所以$\ln x_2-ax_2+e\geqslant e$在$[2,e^2]$上有解,即$a\leqslant\frac{\ln x_2}{x_2}$在$[2,e^2]$上有解.

令$h(x_2)=\frac{\ln x_2}{x_2}$,$x_2\in[2,e^2]$,则$h'(x_2)=\frac{1-\ln x_2}{x_2^2}$,令$h'(x_2)=0$,得$x_2=e$.

当x_2变化时,$h'(x_2)$,$h(x_2)$的变化情况如下表:

x_2	2	$(2,e)$	e	(e,e^2)	e^2
$h'(x_2)$		+	0	−	
$h(x_2)$	$\frac{\ln 2}{2}$	单调递增	极大值$\frac{1}{e}$	单调递减	$\frac{2}{e^2}$

所以$h(x_2)_{max}=\frac{1}{e}$,所以$a\leqslant\frac{1}{e}$.故实数a的取值范围为$\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$.

综合质量评估(二)

（考查范围：选择性必修·第二册　时间：120分钟　分值：150分）

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

1.已知在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2=1$，$a_3+a_5=4$，则该数列的公差为　（　）

A.$\frac{1}{2}$　　B.1

C.$\frac{3}{2}$　　D.2

A　**解析**：设数列$\{a_n\}$的公差为d.

因为在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2=1$，$a_3+a_5=4$，

所以$\begin{cases}a_1+d=1,\\2a_1+6d=4,\end{cases}$

解得$d=\frac{1}{2}$，$a_1=\frac{1}{2}$，所以该数列的公差为$\frac{1}{2}$.故选A.

2.已知数列$\{a_n\}$为等比数列，$a_1=2$，$a_5=4$，则a_3的值为　（　）

A.$\pm2\sqrt{2}$　　B.$2\sqrt{2}$　　C.±2　　D.2

B　**解析**：因为数列$\{a_n\}$为等比数列，

$a_1=2$，$a_5=4$，所以$a_3^2=a_1\cdot a_5=8$，

得$a_3=\pm2\sqrt{2}$.

又a_1，a_3，a_5的符号相同，故$a_3=2\sqrt{2}$.故选B.

3.等比数列$\{a_n\}$是递减数列，前n项的积为T_n.若$T_{13}=4T_9$，则$a_8a_{15}=$　（　）

A.±2　　B.±4　　C.2　　D.4

C　**解析**：因为$T_{13}=4T_9$，

所以$a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_9\cdot a_{10}\cdot a_{11}\cdot a_{12}\cdot a_{13}=4a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_9$，

所以$a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}=4$.

又因为$a_{10}a_{13}=a_{11}a_{12}=a_8a_{15}$，

所以$(a_8a_{15})^2=4$，所以$a_8a_{15}=\pm2$.

又因为$\{a_n\}$为递减数列，所以$q>0$，所以$a_8a_{15}=2$.

故选C.

4.设函数$f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$.若$f(x)$为奇函数，则曲线$y=f(x)$在点$(0,0)$处的切线的方程为　（　）

A.$y=-2x$　　B.$y=-x$

C.$y=2x$　　D.$y=x$

D　**解析**：因为函数$f(x)$是奇函数，

所以$a-1=0$，解得$a=1$.

所以$f(x)=x^3+x$，$f'(x)=3x^2+1$，

所以$f'(0)=1$，$f(0)=0$，

所以曲线$y=f(x)$在点$(0,0)$处的切线的方程为$y=x$.故选D.

5.设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_n+n=2a_n-1$，则$a_5=$　（　）

A.16　　B.31　　C.47　　D.63

C　**解析**：因为数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n+n=2a_n-1$，

所以当$n\geqslant2$时，$S_{n-1}+(n-1)=2a_{n-1}-1$，

两式相减得$a_n+1=2a_n-2a_{n-1}$，即$a_n=2a_{n-1}+1$，

可得$a_n+1=2(a_{n-1}+1)$.

当$n=1$时，可得$S_1+1=2a_1-1$，即$a_1+1=2a_1-1$，解得$a_1=2$，

所以数列$\{a_n+1\}$是首项为$a_1+1=3$，公比为2的等比数列.

所以$a_n+1=3\cdot2^{n-1}$，即$a_n=3\cdot2^{n-1}-1$，所以$a_5=3\cdot2^4-1=47$.

故选C.

6.若正方形底无盖长方体水箱的容积为256，则用料最省时，它的高为　（　）

A.4　　B.6　　C.4.5　　D.8

A　**解析**：设水箱的底面边长为x，高为h，

则容积$V=x^2\cdot h=256$，

所以$h=\frac{256}{x^2}$.

所以表面积$S=x^2+4xh=x^2+4x\cdot\frac{256}{x^2}$

$=x^2+\frac{1\,024}{x}$，

所以$S'=2x-\frac{1\,024}{x^2}$.

令$S'=0$，解得$x=8$.

易知当$x=8$时，S取得最小值.

此时$h=\frac{256}{8^2}=4$.故选A.

7.已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+a$，$g(x)=x^2-3x$，它们的定义域均为$[1,+\infty)$，并且函数$f(x)$的图象始终在函数 $g(x)$图象的上方，那么实数 a 的取值范围是　　(　　)

A.$(0,+\infty)$　　B.$(-\infty,0)$

C.$\left(-\frac{4}{3},+\infty\right)$　　D.$\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)$

A　**解析**：设 $h(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+a-x^2+3x=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+a$，

则 $h'(x)=x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$，

所以当 $x\in[1,3)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减；

当 $x\in(3,+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增.

所以当 $x=3$ 时，函数 $h(x)$取得的极小值也是最小值.

因为 $f(x)$的图象始终在 $g(x)$的图象上方，

所以 $h(x)_{\min}>0$，即 $h(3)=a>0$，

所以实数 a 的取值范围是$(0,+\infty)$.故选 A.

8.已知可导函数 $f(x)$的导函数为 $f'(x)$，若对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)>f'(x)+1$，且$y=f(x)-2\,024$为奇函数，则不等式 $f(x)-2\,023e^x<1$ 的解集为　　(　　)

A.$(0,+\infty)$　　B.$(-\infty,0)$

C.$\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$　　D.$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$

A　**解析**：构造函数 $g(x)=\frac{f(x)-1}{e^x}$，

则 $g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)+1}{e^x}<0$，

所以函数 $g(x)=\frac{f(x)-1}{e^x}$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

由于函数 $y=f(x)-2\,024$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

所以 $f(0)-2\,024=0$，得 $f(0)=2\,024$，

所以 $g(0)=\frac{f(0)-1}{e^0}=2\,023$.

由 $f(x)-2\,023e^x<1$，

得 $f(x)-1<2\,023e^x$，

所以$\frac{f(x)-1}{e^x}<2\,023$，即 $g(x)<g(0)$.

由于函数 $g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

因此 $x>0$.故选 A.

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9.若 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $S_n=2a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，则下列说法正确的有　　(　　)

A.$a_5=-16$

B.$S_5=-63$

C.数列$\{a_n\}$是等比数列

D.数列$\{S_n+1\}$是等比数列

AC　**解析**：因为 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $S_n=2a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $S_1=2a_1+1$，

因此 $a_1=-1$.

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$，

即 $a_n=2a_{n-1}$，所以数列$\{a_n\}$是以-1 为首项，2 为公比的等比数列，故 C 正确；

因此 $a_5=-1\times2^4=-16$，故 A 正确；

又 $S_n=2a_n+1$，所以 $S_5=2a_5+1=-31$，故 B 错误；

因为 $S_1+1=0$，所以数列$\{S_n+1\}$不是等比数列，故 D 错误.故选 AC.

10.已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则　　(　　)

A.$f(2)>f(5)$

B.若 $f(x)=m$ 有两个不相等的正实根 x_1，x_2，则 $x_1+x_2<2e$

C.$\ln2>\sqrt{\frac{2}{e}}$

D.若 $2^x=3^y$，x，y 均为正数，则 $2x>3y$

AD　**解析**：对于 A，$f(2)=\frac{\ln2}{2}=\ln\sqrt{2}$，

$f(5)=\frac{\ln5}{5}=\ln\sqrt[5]{5}$，又$(\sqrt{2})^{10}=2^5=32$，

$(\sqrt[5]{5})^{10}=25$，$32>25$，所以$\sqrt{2}>\sqrt[5]{5}$，则 $\ln\sqrt{2}>\ln\sqrt[5]{5}$，

即 $f(2)>f(5)$，A 正确.

对于 B，$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x\in(0,e)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；当 $x\in(e,+\infty)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减.

所以 $f(x)$有极大值 $f(e)=\frac{1}{e}$.

若 $f(x)=m$ 有两个不相等的正实根 x_1，x_2，不妨取$x_2=e^3$，显然 $x_2>2e$，此时不满足 $x_1+x_2<2e$，

B 不正确.

对于 C，由 B 可知，$f(x)$在$(0,e)$上单调递增，则有 $f(2)<f(e)$，即$\frac{\ln 2}{2}<\frac{\ln e}{e}$，则有 $\ln 2<\frac{2}{e}<\sqrt{\frac{2}{e}}$，C 不正确.

对于 D，令 $2^x=3^y=m$，x,y 均为正数，则 $m>1$，可得$x=\log_2 m=\frac{\ln m}{\ln 2}$，$y=\log_3 m=\frac{\ln m}{\ln 3}$，所以 $2x-3y=\frac{2\ln m}{\ln 2}-\frac{3\ln m}{\ln 3}=\left(\frac{2}{\ln 2}-\frac{3}{\ln 3}\right)\ln m$. 因为 $(\sqrt{2})^6=2^3<3^2=(\sqrt[3]{3})^6$，所以$\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$，$\ln\sqrt{2}<\ln\sqrt[3]{3}$，即 $0<\frac{\ln 2}{2}<\frac{\ln 3}{3}$，所以$\frac{2}{\ln 2}-\frac{3}{\ln 3}>0$，所以 $2x-3y>0$，D 正确.故选 AD.

11.已知函数 $f(x)=x^3-ax^2-2x$，下列命题正确的有（　　）

A.若 1 是函数 $f(x)$的极值点，则 $a=\frac{1}{2}$

B.若 1 是函数 $f(x)$的极值点，则 $f(x)$在$[0,2]$上的最小值为$-\frac{3}{2}$

C.若 $f(x)$在$(1,2)$上单调递减，则 $a\geqslant\frac{5}{2}$

D.若 $x^2\ln x\geqslant f(x)$在$[1,2]$上恒成立，则 $a\geqslant-1$

ABC　**解析：**对于 A，由 $f(x)=x^3-ax^2-2x$，得 $f'(x)=3x^2-2ax-2$.若 1 是函数 $f(x)$的极值点，

则 $f'(1)=3-2a-2=0$，得 $a=\frac{1}{2}$，经检验，1 是函数 $f(x)$的极小值点，所以 A 正确.

对于 B，由选项 A 的分析可知 $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$，

则 $f'(x)=3x^2-x-2$.由 $f'(x)>0$，得 $x<-\frac{2}{3}$或$x>1$；由 $f'(x)<0$，得$-\frac{2}{3}<x<1$.所以当 $x\in[0,2]$时，$f(x)$在$[0,1)$上单调递减，在$(1,2]$上单调递增，故当 $x=1$ 时，$f(x)$取得最小值 $f(1)=1-\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$，所以 B 正确.

对于 C，因为 $f(x)$在$(1,2)$上单调递减，所以 $f'(x)=3x^2-2ax-2\leqslant0$，即 $a\geqslant\frac{3}{2}x-\frac{1}{x}$在$(1,2)$上恒成立.令$g(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{x}$，$x\in(1,2)$，则 $g'(x)=\frac{3}{2}+\frac{1}{x^2}>0$，所以 $g(x)$在$(1,2)$上单调递增，所以 $g(1)<g(x)<g(2)$，即$\frac{1}{2}<g(x)<\frac{5}{2}$，所以 $a\geqslant\frac{5}{2}$，所以 C 正确.

对于 D，由 $x^2\ln x\geqslant f(x)$在$[1,2]$上恒成立，得 $x^2\ln x\geqslant x^3-ax^2-2x$ 在$[1,2]$上恒成立，

即 $a\geqslant x-\ln x-\frac{2}{x}$在$[1,2]$上恒成立.

令 $h(x)=x-\ln x-\frac{2}{x}$，$x\in[1,2]$，

则 $h'(x)=1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=\frac{x^2-x+2}{x^2}>0$，

所以 $h(x)$在$[1,2]$上单调递增，

所以 $h(x)_{\max}=h(2)=2-\ln 2-1=1-\ln 2$，

所以 $a\geqslant1-\ln 2$，所以 D 错误.故选 ABC.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12.已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}+k\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)$.若 1 是函数 $f(x)$的唯一极值点，则实数 k 的取值范围是_____.

$[-1,+\infty)$　**解析：**$f(x)=\frac{e^x}{x}+k\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)$的定义域为$(0,+\infty)$，

所以 $f'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}+k\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)$

$=\frac{(e^x+k)(x-1)}{x^2}$.

因为 1 是函数 $f(x)$的唯一极值点，

所以 1 是方程 $f'(x)=0$ 的唯一根.

①当 $e^x+k=0$ 在$(0,+\infty)$上无实数根时，

令 $g(x)=e^x+k$，则 $g'(x)=e^x>0$，

所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

又 $g(0)=1+k$，所以 $1+k\geqslant0$，解得 $k\geqslant-1$.

②当 $g(x)=e^x+k$ 在$(0,+\infty)$上有零点 1 时，

此时 $e+k=0$，解得 $k=-e$，

此时 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，不符合题意.所以 k 的取值范围是$[-1,+\infty)$.

13.已知函数 $f(x)=\ln x-ax-2$ 在区间$(1,2)$上不单调，则实数 a 的取值范围为_____.

$\left(\frac{1}{2},1\right)$　**解析：**易知 $f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$ $(x>0)$.

①当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$单调递增，不合题意；

②当 $a>0$ 时,函数 $f(x)$的极值点为$\frac{1}{a}$.

若函数 $f(x)$在区间(1,2)上不单调,必有 $1<\frac{1}{a}<2$,解得$\frac{1}{2}<a<1$.

14.在数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_2=2$,数列$\{b_n\}$满足 $b_n=a_{n+1}+(-1)^n a_n$,$n\in\mathbf{N}^*$.若 $b_{2n}-b_{2n-1}=0$,$b_{2n+1}+b_{2n}=\frac{6}{2^n}$,$n\in\mathbf{N}^*$,则数列$\{a_n\}$的前 2 024 项和为_____.

$4-\left(\frac{1}{2}\right)^{1\,010}$　**解析**:由已知得 $b_{2n}=a_{2n+1}+a_{2n}$,$b_{2n+1}=a_{2n+2}-a_{2n+1}$,所以 $b_{2n}+b_{2n+1}=a_{2n+2}+a_{2n}=\frac{6}{2^n}$,即数列$\{a_n\}$的前 2 024 项中偶数项的和为$(a_2+a_4)+(a_6+a_8)+\cdots+(a_{2\,022}+a_{2\,024})=\frac{6}{2^1}+\frac{6}{2^3}+\frac{6}{2^5}+\cdots+\frac{6}{2^{1\,011}}=\frac{6}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{506}}{1-\frac{1}{4}}=4-\left(\frac{1}{2}\right)^{1\,010}$.

又由已知得 $b_{2n}=a_{2n+1}+a_{2n}$,$b_{2n-1}=a_{2n}-a_{2n-1}$,且 $b_{2n}=b_{2n-1}$,所以 $a_{2n+1}=-a_{2n-1}$,即数列$\{a_n\}$的奇数项为首项为 1,公比为 −1 的等比数列,即 $a_{2n-1}=(-1)^{n-1}$($n\in\mathbf{N}^*$),即数列$\{a_n\}$的前 2 024 项中奇数项的和为 0.

综上所述,数列$\{a_n\}$的前 2 024 项和为 $4-\left(\frac{1}{2}\right)^{1\,010}$.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.(13 分)已知函数 $f(x)=x-\sin x-\cos x$.

(1)求曲线 $y=f(x)$在 $x=0$ 处的切线的方程;

(2)求 $f(x)$在区间$[0,2\pi]$上的最值.

解:由 $f(x)=x-\sin x-\cos x$,

得 $f'(x)=1-\cos x+\sin x$,

所以 $f(0)=-1$,$f'(0)=0$.

所以曲线 $y=f(x)$在 $x=0$ 处的切线的方程为 $y+1=0$,即 $y=-1$.

(2)令 $f'(x)=1+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$,

得$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

因此$-\frac{\pi}{4}+2k\pi<x-\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

所以 $2k\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$.

由于 $x\in[0,2\pi]$,

故函数 $f(x)$在$\left[0,\frac{3\pi}{2}\right)$上单调递增,

在$\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$上单调递减.

所以 $f(x)_{\max}=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{2}+1$,

又 $f(0)=-1$,$f(2\pi)=2\pi-1$,所以 $f(x)_{\min}=-1$.

16.(15 分)某企业计划对甲、乙两个项目共投资 200 万元,且每个项目至少投资 10 万元.依据前期市场调研可知,甲项目的收益 p(单位:万元)与投资金额 t(单位:万元)满足关系式 $p(t)=at^3+21t$;乙项目的收益 g(单位:万元)与投资金额 t(单位:万元)满足关系式 $g(t)=-2a(t-b)^2$($b<200$).设对甲项目投资 x 万元,两个项目的总收益为 W(单位:万元),$W=f(x)$,且当对甲项目投资 30 万元时,甲项目的收益为 180 万元,乙项目的收益为 120 万元.

(1)求 $f(x)$的解析式;

(2)试问:如何安排甲、乙这两个项目的投资金额,才能使总收益最大?并求出的最大总收益.

解:(1)由题意可得 $27\,000a+630=180$,

解得 $a=-\frac{1}{60}$.

当对甲项目投资 30 万元时,对乙项目投资 170 万元,

则 $-2a(170-b)^2=\frac{1}{30}(170-b)^2=120$,

解得 $b=110$.

当对甲项目的投资金额为 x 万元时,则对乙项目的投资金额为$(200-x)$万元,

则 $\begin{cases}x\geqslant 10,\\200-x\geqslant 10,\end{cases}$

解得 $10\leqslant x\leqslant 190$.

故 $f(x)=-\frac{1}{60}x^3+21x+\frac{1}{30}[(200-x)-110]^2$

$=-\frac{1}{60}(x^3-2x^2-900x-16\,200)(10\leqslant x\leqslant 190)$.

(2)设 $h(x)=x^3-2x^2-900x-16\,200(10\leqslant x\leqslant 190)$,

则 $h'(x)=3x^2-4x-900=(3x+50)(x-18)$.

当 $x\in[10,18)$时,$h'(x)<0$,

当 $x\in(18,190]$时,$h'(x)>0$,

所以 $h(x)$ 在 $[10,18)$ 上单调递减，在 $(18,190]$ 上单调递增，则 $h(x)_{\min}=h(18)=-27\ 216$.

故 $f(x)_{\max}=453.6$.

即对甲项目投资 18 万元，对乙项目投资 182 万元时，

才能使总收益最大，最大总收益为 453.6 万元.

17.(15 分)已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列，且 $b_2=3$，$b_3=9$，$a_1=b_1$，$a_{14}=b_4$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $c_n=a_n+b_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.

解：(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，$\{b_n\}$ 的公比为 q，

由 $\begin{cases}b_2=b_1q=3,\\ b_3=b_1q^2=9,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}b_1=1,\\ q=3.\end{cases}$

所以 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=b_1q^{n-1}=3^{n-1}$.

又 $a_1=b_1=1$，$a_{14}=b_4=3^{4-1}=27$，

所以 $1+(14-1)d=27$，解得 $d=2$.

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)\times2=2n-1$.

(2)设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.

因为 $c_n=a_n+b_n=2n-1+3^{n-1}$，

所以 $S_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n$

$=2\times1-1+3^0+2\times2-1+3^1+2\times3-1+3^2+\cdots$

$+2n-1+3^{n-1}=2(1+2+\cdots+n)-n+(3^0+3^1+\cdots$

$+3^{n-1})=2\times\dfrac{(n+1)n}{2}-n+\dfrac{3^0\times(1-3^n)}{1-3}=n^2$

$+\dfrac{3^n-1}{2}$.

所以数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 $n^2+\dfrac{3^n-1}{2}$.

18.(17 分)已知函数 $f(x)=\ln x-ax(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $f(x)$ 仅有一个零点，求实数 a 的取值范围.

解：(1)由题意知 $f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a=\dfrac{1-ax}{x}$.

当 $a\leqslant0$ 时，$1-ax>0$，

则 $f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{1}{a}>0$，

易知当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x\in\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减.

综上所述，当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减.

(2)$f(x)$ 仅有一个零点等价于 $\ln x-ax=0$ 有且仅有一个根，即 $a=\dfrac{\ln x}{x}$ 有且仅有一个根.

令 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $f(x)$ 仅有一个零点等价于 $y=a$ 与 $y=g(x)$ 的图象有且仅有一个交点.

因为 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

所以当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$g'(x)>0$；

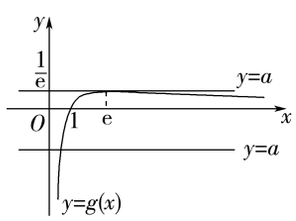
当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$g'(x)<0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

又 $g(1)=0$，所以当 $x>1$ 时，$g(x)>0$，

函数 $y=g(x)$ 的大致图象如图所示.



由图象可知，当 $a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 或 $a\leqslant0$ 时，$y=a$ 与 $y=g(x)$ 的图象有且仅有一个交点.

所以若 $f(x)$ 仅有一个零点，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,0]\cup\left\{\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right\}$.

19.(17 分)给出下列条件：①$2S_{n+1}=S_n+1$；②$a_2=\dfrac{1}{4}$；③$S_n=1-2a_{n+1}$.从这三个条件中选择两个，补充在下面问题中，给出解答.(注：如果选择多个条件分别解答，那么按第一个解答计分.)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，满足_____，_____；又知正项等差数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=3$，且 b_1，b_3-2，b_7 成等比数列.

(1)求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $c_n=\dfrac{b_n}{a_n}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

解：(1)选择①②.

由 $2S_{n+1}=S_n+1$，得当 $n\geqslant 2$ 时，有 $2S_n=S_{n-1}+1$，

两式相减得 $2a_{n+1}=a_n$，即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$，$n\geqslant 2$.

又当 $n=1$ 时，有 $2S_2=2(a_1+a_2)=S_1+1$，

且 $a_2=\frac{1}{4}$，

所以 $a_1=\frac{1}{2}$，且 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$ 也适合上式，

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项、公比均为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，

所以 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

选择②③.

由 $S_n=1-2a_{n+1}$，得当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=1-2a_n$，

两式相减得 $a_n=-2a_{n+1}+2a_n$，即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$，$n\geqslant 2$.

又当 $n=1$ 时，有 $S_1=1-2a_2=a_1$.

且 $a_2=\frac{1}{4}$，所以 $a_1=\frac{1}{2}$，$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$ 也适合上式，

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项、公比均为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，

所以 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

选择①③.

由 $2S_{n+1}=S_n+1$，$S_n=1-2a_{n+1}$，

得 $2S_{n+1}=2-2a_{n+1}$，

即 $S_{n+1}=1-a_{n+1}$，所以 $S_n=1-a_n(n\geqslant 2)$，

两式相减可得 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n(n\geqslant 2)$.

当 $n=1$ 时，由 $2S_{n+1}=S_n+1$，得 $2S_2=S_1+1$，

即 $2(a_1+a_2)=a_1+1$，即 $a_1+2a_2=1$.

由 $S_n=1-2a_{n+1}$，得 $S_1=1-2a_2$，

即 $a_1=1-2a_2$，与上式相同，不能求出 a_1 的值.

故不能选择①③.

设正项等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d，

因为 $b_1=3$，且 b_1，b_3-2，b_7 成等比数列，

所以 $(b_3-2)^2=b_1b_7$，即 $(3+2d-2)^2=3(3+6d)$，

解得 $d=4$ 或 $d=-\frac{1}{2}$（舍），

所以 $b_n=3+4(n-1)=4n-1$.

故 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$b_n=4n-1$.

(2)由题可知 $c_n=\frac{b_n}{a_n}=(4n-1)\times 2^n$，

所以 $T_n=3\times 2^1+7\times 2^2+11\times 2^3+\cdots+(4n-1)\times 2^n$，

则 $2T_n=3\times 2^2+7\times 2^3+\cdots+(4n-5)\times 2^n+(4n-1)\times 2^{n+1}$，

两式相减得

$-T_n=6+4(2^2+2^3+\cdots+2^n)-(4n-1)\times 2^{n+1}$

$=6+4\times\frac{4(1-2^{n-1})}{1-2}-(4n-1)\times 2^{n+1}$

$=-10+2^{n+1}(5-4n)$.

所以 $T_n=10+2^{n+1}(4n-5)$.