点金训练

教师用书

数学

选择性必修第一册

配人教A版

《点金训练》编写组　编

四川教育出版社

CONTENTS

目录

第一章　空间向量与立体几何

○单元概览 …… 1
○探究构建　1.1　空间向量及其运算 …… 2
1.1.1　空间向量及其线性运算 …… 2
第 1 课时　空间向量及其线性运算 …… 2
第 2 课时　共线向量与共面向量 …… 7
1.1.2　空间向量的数量积运算 …… 11
1.2　空间向量基本定理 …… 17
1.3　空间向量及其运算的坐标表示 …… 23
1.3.1　空间直角坐标系 …… 23
1.3.2　空间向量运算的坐标表示 …… 28
1.4　空间向量的应用 …… 33
1.4.1　用空间向量研究直线、平面的位置关系 …… 33
第 1 课时　空间中点、直线和平面的向量表示 …… 33
第 2 课时　空间中直线、平面的平行 …… 37
第 3 课时　空间中直线、平面的垂直 …… 45
1.4.2　用空间向量研究距离、夹角问题 …… 52
第 1 课时　用空间向量研究距离 …… 52
第 2 课时　用空间向量研究夹角 …… 60
微专题培优(一)　立体几何中的探索性问题 …… 72
微专题培优(二)　立体几何中的翻折问题 …… 78
○迁移应用　类型一　空间位置关系的证明 …… 82
类型二　空间夹角和距离问题 …… 83
类型三　立体几何中的动态问题 …… 86
○重构拓展 …… 88
质量评估(一) …… 89

第二章　直线和圆的方程

○单元概览 …… 98
○探究构建　2.1　直线的倾斜角与斜率 …… 99
2.1.1　倾斜角与斜率 …… 99
2.1.2　两条直线平行和垂直的判定 …… 103
2.2　直线的方程 …… 110
2.2.1　直线的点斜式方程 …… 110
2.2.2　直线的两点式方程 …… 116
2.2.3　直线的一般式方程 …… 121
2.3　直线的交点坐标与距离公式 …… 128
2.3.1　两条直线的交点坐标 …… 128
2.3.2　两点间的距离公式 …… 133
2.3.3　点到直线的距离公式 …… 138
2.3.4　两条平行直线间的距离 …… 143

2.4 圆的方程 …… 147
2.4.1 圆的标准方程 …… 147
2.4.2 圆的一般方程 …… 152
2.5 直线与圆、圆与圆的位置关系 …… 158
2.5.1 直线与圆的位置关系 …… 158
第 1 课时 直线与圆的位置关系的判断 …… 158
第 2 课时 直线与圆的位置关系的应用 …… 164
2.5.2 圆与圆的位置关系 …… 171
微专题培优(三) 直线中的对称问题 …… 178
微专题培优(四) 圆中的对称问题 …… 182
○迁移应用 类型一 用数形结合解决与圆有关的最值和范围问题 …… 186
类型二 用坐标法解决平面几何问题 …… 186
○重构拓展 …… 188
质量评估(二) …… 189

第三章 圆锥曲线的方程

○单元概览 …… 194
○探究构建 3.1 椭圆 …… 195
3.1.1 椭圆及其标准方程 …… 195
3.1.2 椭圆的简单几何性质 …… 202
第 1 课时 椭圆的简单几何性质 …… 202
第 2 课时 椭圆几何性质的应用 …… 209
3.2 双曲线 …… 218
3.2.1 双曲线及其标准方程 …… 218
3.2.2 双曲线的简单几何性质 …… 225
第 1 课时 双曲线的简单几何性质 …… 225
第 2 课时 双曲线几何性质的应用 …… 232
3.3 抛物线 …… 241
3.3.1 抛物线及其标准方程 …… 241
3.3.2 抛物线的简单几何性质 …… 247
第 1 课时 抛物线的简单几何性质 …… 247
第 2 课时 抛物线几何性质的应用 …… 253
微专题培优(五) 圆锥曲线中的离心率问题 …… 260
○迁移应用 类型一 圆锥曲线中的定直线问题 …… 266
类型二 圆锥曲线中的定值、定点问题 …… 267
类型三 圆锥曲线中的最值问题 …… 270
类型四 非对称结构问题 …… 271
○重构拓展 …… 273
质量评估(三) …… 274
综合质量评估 …… 280

第一章 空间向量与立体几何

单元概览

单元导航

本章属于课程标准中“几何与代数”主线的内容，在“平面向量”和“立体几何初步”的基础上学习空间向量及其运算、空间向量基本定理，并利用空间向量解决立体几何问题.因此，可以借助类比思想，将平面向量推广到空间向量：实际背景－空间向量及其相关概念－空间向量的运算－空间向量基本定理－空间向量及其运算的坐标表示－空间向量的应用.

学习目标

1.了解空间向量的概念，空间向量的基本定理及其意义，掌握空间向量的正交分解、线性运算、数量积及其坐标表示.

2.运用向量的坐标判断向量的共线与垂直，理解直线的方向向量与平面的法向量.

3.能用向量方法证明有关线、面位置关系的判定定理.

4.能用向量方法解决线线、线面、面面的夹角的计算问题及一些简单的距离问题.

5.经历向量有关概念及其运算等内容由平面推广到空间的过程，体会类比思想；经历向量语言与几何语言之间的转化过程，掌握用向量方法解决几何问题的思想方法.

核心概念

类比平面向量理解空间向量的概念和运算，用空间向量的运算（基向量法、坐标法）解决立体几何问题（长度、夹角、位置关系）.

立足于平面向量，理解空间向量知识，体会类比思想，发展数学抽象和逻辑推理素养；利用空间向量及其运算的几何意义和坐标表示实现形与数的统一，体会数形结合思想，培养直观想象素养；通过对线线、线面、面面的夹角和距离的研究，体现数形结合、转化与化归思想，培养逻辑推理和数学运算素养.

学法指导

1.注意利用类比的方法理解空间向量的概念、运算、基本定理及其坐标表示，在此过程中体会平面向量与空间向量的共性和差异.

2.在运用向量的方法研究空间基本图形的位置关系和数量关系的过程中，体会向量方法与综合几何方法的共性和差异.

3.关注数学语言：一是注意语言表述的规范化；二是在用向量法解决立体几何问题时，重视向量语言与几何语言之间的转化.

★★★

探　究　构　建

1.1　空间向量及其运算

1.1.1　空间向量及其线性运算

第1课时　空间向量及其线性运算

学习任务目标

1.了解空间向量的概念，掌握空间向量的几何表示法和字母表示法.
2.会用图形表示空间向量的加法、减法以及它们的运算律.
3.培养数学运算、数形结合的能力.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　空间向量的有关概念

(1)定义：在空间，我们把具有大小和方向的量叫做空间向量.

(2)空间向量的长度：空间向量的大小叫做空间向量的长度或模.

(3)表示法

①几何表示法：空间向量用有向线段表示.

②字母表示法：若向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点是 A，终点是 B，则向量 $\boldsymbol{a}$ 也可以记作 $\overrightarrow{AB}$，其模记为 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$.

知识点二　几类特殊向量

特殊向量	定义	表示法
零向量	长度为0的向量	$\boldsymbol{0}$
单位向量	模为1的向量	$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=1$ 或 $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=1$
相反向量	与向量 $\boldsymbol{a}$ 长度相等而方向相反的向量	$-\boldsymbol{a}$
相等向量	方向相同且模相等的向量	$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 或 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$
共线向量	表示若干空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合	$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$

知识点三　空间向量的线性运算

(1)空间向量的加法、减法以及数乘运算

①如图1，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$.

②如图1，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CA}$.

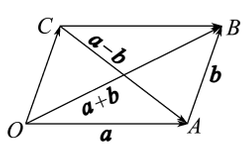


图1

③如图2，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{PQ}$；

当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{MN}$；

当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\underline{\boldsymbol{0}}$.

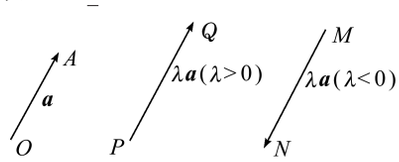


图2

(2)空间向量的线性运算满足的运算律(其中 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$)

交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\underline{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}}$；

结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\underline{\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}}$.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)相等向量一定是共线向量.　　(　√　)

(2)三个空间向量一定是共面向量.　　(　×　)

(3)零向量没有方向.　　(　×　)

2.化简：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=$_____.

$\overrightarrow{AD}$　**解析**：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

3.思考并回答下列问题：

(1)向量运算的结果与向量起点的选择有关系吗？

提示：没有关系.

(2)进行空间向量的加减运算时，两个向量必须共起点吗？

提示：求向量的和时，可以首尾相接(三角形法则)，也可以共起点(平行四边形法则)；求向量的差时，必须共起点(三角形法则：共起点，指被减).

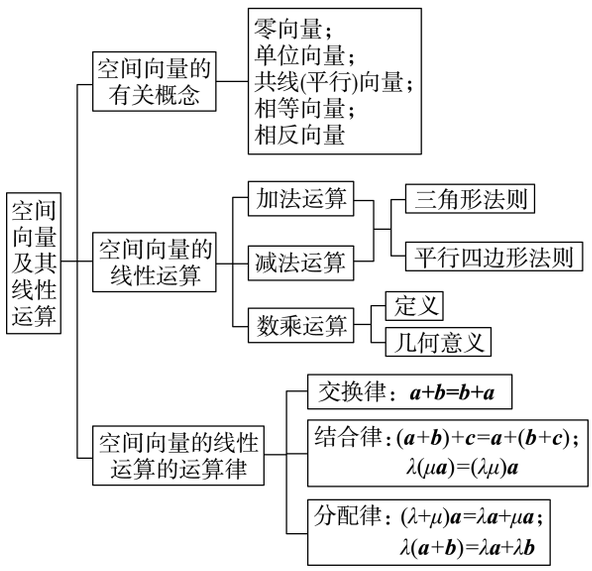
(3)向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 是什么关系？

提示：向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 一定是共线向量.

(4)λ 的正负和绝对值的大小对向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 分别有什么影响？

提示：λ 的正负影响着向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向，λ 的绝对值的大小影响着向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的长度.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 梳理向量的相关概念

1.下列关于空间向量的说法正确的是　　(　　)

A.单位向量都相等

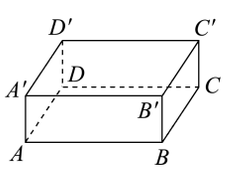
B.若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的长度相等而方向相同或相反

C.若向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$ 满足 $|\overrightarrow{AB}|>|\overrightarrow{CD}|$，则 $\overrightarrow{AB}>\overrightarrow{CD}$

D.相等向量的方向必相同

D　**解析**：对于 A，单位向量长度相等，方向不确定，故选项 A 错误；对于 B，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 只能说明 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的长度相等而方向不确定，故选项 B 错误；对于 C，向量作为矢量不能比较大小，故选项 C 错误；对于 D，相等向量方向相同、大小相等，故选项 D 正确.

2.如图，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，$AB=3$，$AD=2$，$AA'=1$，以长方体的顶点为向量的起点和终点.



(1)单位向量共有多少个？

(2)试写出模为 $\sqrt{5}$ 的向量.

(3)试写出与向量 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量.

(4)试写出向量 $\overrightarrow{AA'}$ 的相反向量.

解：(1)向量 $\overrightarrow{AA'}$，$\overrightarrow{A'A}$，$\overrightarrow{BB'}$，$\overrightarrow{B'B}$，$\overrightarrow{CC'}$，$\overrightarrow{C'C}$，$\overrightarrow{DD'}$，$\overrightarrow{D'D}$ 都是单位向量，而其他向量的模均不为 1，故单位向量共有 8 个.

(2)由于长方体的左、右两侧面的对角线长均为 $\sqrt{5}$，故模为 $\sqrt{5}$ 的向量有 $\overrightarrow{AD'}$，$\overrightarrow{D'A}$，$\overrightarrow{A'D}$，$\overrightarrow{DA'}$，$\overrightarrow{BC'}$，$\overrightarrow{C'B}$，$\overrightarrow{B'C}$，$\overrightarrow{CB'}$.

(3)与向量 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量(除它自身之外)有 $\overrightarrow{A'B'}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{D'C'}$.

(4)向量 $\overrightarrow{AA'}$ 的相反向量有 $\overrightarrow{A'A}$，$\overrightarrow{B'B}$，$\overrightarrow{C'C}$，$\overrightarrow{D'D}$.

【探究总结】

解决空间向量问题的方法

(1)在空间中，向量、向量的模、相等向量的概念和平面中向量的相关概念完全一致.因此可以类比平面向量的有关方法解题；

(2)判断有关向量的命题时，要抓住向量的两个要素：大小与方向.两者缺一不可，且相互制约.

任务2 理解向量的线性运算

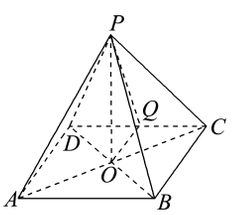
探究活动

例 1　已知四边形 $ABCD$ 为正方形，P 是四边形 $ABCD$ 所在平面外的一点，P 在平面 $ABCD$ 上的射影恰好是正方形 $ABCD$ 的中心 O，Q 是 CD 的中点.求下列各式中 x，y 的值.

(1)$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{PQ}+x\overrightarrow{PC}+y\overrightarrow{PA}$；

(2)$\overrightarrow{PA}=x\overrightarrow{PO}+y\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PD}$.

解：(1)如图，$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}$，由向量加法的平行四边形法则可得 $\overrightarrow{PO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA})$，故 $\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}$.



所以$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PQ}$，

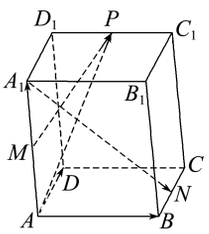
所以 $x=-\frac{1}{2}$，$y=-\frac{1}{2}$.

(2)因为$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{PD}+2\overrightarrow{QO}$
$=\overrightarrow{PD}+2(\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{PQ})=\overrightarrow{PD}+2\overrightarrow{PO}-2\overrightarrow{PQ}$，

所以 $x=2$，$y=-2$.

例 2　如图，在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，设$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}$，$M$，$N$，$P$ 分别是 AA_1，BC，C_1D_1 的中点.试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示下列向量：

(1)$\overrightarrow{AP}$；(2)$\overrightarrow{A_1N}$；(3)$\overrightarrow{MP}$.



解：(1)因为 P 是 C_1D_1 的中点，

所以$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1P}=\boldsymbol{a}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{D_1C_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

(2)因为 N 是 BC 的中点，

所以$\overrightarrow{A_1N}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

(3)因为 M 是 AA_1 的中点，

所以$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\left(\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\right)=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

［一题多思］

思考 1.本例涉及线段的中点，若$\triangle ABC$ 的边 BC 的中点为 G，如何用向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$表示向量$\overrightarrow{AG}$？

解：$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

思考 2.若把本例中“P 是 C_1D_1 的中点”改为“P 在线段 C_1D_1 上，且$\frac{C_1P}{PD_1}=\frac{1}{2}$”，其他条件不变，如何表示$\overrightarrow{AP}$？

解：$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\frac{2}{3}\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$.

【探究总结】

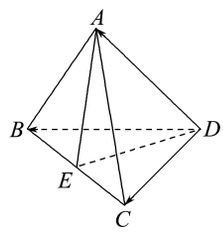
空间向量加减运算的方法

(1)空间向量的运算仍然遵循三角形法则和平行四边形法则，在进行加法、减法运算时，要注意找准向量所在的三角形或平行四边形；

(2)向量减法是向量加法的逆运算，在进行减法运算时，可以将减去一个向量转化为加上这个向量的相反向量.

应用迁移

1.(教材 P5 练习题 4 改编)如图，在四面体 $ABCD$ 中，E 为棱 BC 的中点，则$\overrightarrow{DA}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})=$　　(　　)



A.$-\overrightarrow{AE}$　　B.$-\overrightarrow{AB}$

C.$\overrightarrow{AE}$　　D.$\overrightarrow{AB}$

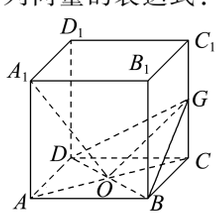
A　**解析**：$\overrightarrow{DA}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{DA}-\frac{1}{2}(2\overrightarrow{DE})=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{AE}$.

2.如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，AC，BD 交于点 O，G 为 CC_1 的中点，化简下列向量的表达式：

(1)$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$；

(2)$\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{C_1C}$；

(3)$\frac{1}{2}(\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GB})-\overrightarrow{A_1O}$.

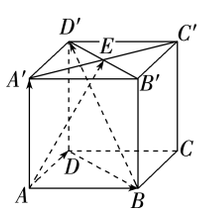


解：(1)$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.

(2)$\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{C_1C}=\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{C_1C}=\overrightarrow{A_1C}$.

(3)$\frac{1}{2}(\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GB})-\overrightarrow{A_1O}=\frac{1}{2}\times2\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{GA_1}$.

3.如图，已知正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，点 E 是上底面 $A'B'C'D'$ 的中心，求下列各式中 x，y，z 的值.



(1)$\overrightarrow{BD'}=x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AA'}$；

(2)$\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AA'}$.

解：(1)因为$\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}$，

且$\overrightarrow{BD'}=x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AA'}$，

所以 $x=1$，$y=-1$，$z=1$.

(2)因为$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'E}=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$

$=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'D'})$

$=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{A'D'}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}$，

且$\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AA'}$，

所以 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$，$z=1$.

课后素养评价(一)

基础落实

1.(多选)下列命题中,为假命题的有　　(　　)

A.任意两个空间向量的模均能比较大小

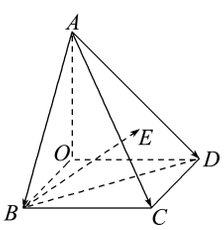
B.将空间中所有的单位向量移到同一个起点,则它们的终点构成一个圆

C.空间向量就是空间中的一条有向线段

D.不相等的两个空间向量的模必不相等

BCD　**解析**:对于选项 A,向量的模即向量的长度,是一个数量,所以任意两个空间向量的模可以比较大小;对于选项 B,其终点构成一个球面;对于选项 C,零向量不能用有向线段表示;对于选项 D,向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 不相等,它们的模可以相等.

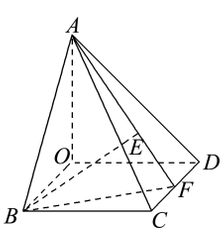
2.如图,在四棱锥 $A\text{-}OBCD$ 中,E 为△ACD 的重心.若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}$,则 $\overrightarrow{BE}=$　　(　　)



A.$-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$　　B.$-\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$

C.$\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$　　D.$-\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$

B　**解析**:如图,连接 AE 并延长交 CD 于点 F.



因为 E 为△ACD 的重心,则 F 为 CD 的中点,且 $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$,

所以 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$.

3.已知平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$,则下列选项错误的是　　(　　)

A.$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}$

B.$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{CC'}$

C.$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{CC'}$

D.$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{C'C}=\overrightarrow{AC'}$

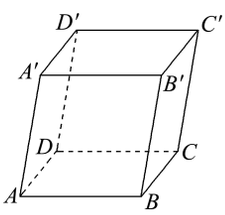
D　**解析**:如图,对于 A,$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$,故 A 正确;

对于 B,因为 $\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{BC}$,所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}$,故 B 正确;

对于 C,$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{CC'}$,故 C 正确;

对于 D,因为 $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}$,所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{C'C}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{CC'})=\overrightarrow{AC}$,故 D 错误.

故选 D.



4.已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$,设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB_1}$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$,$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AD_1}$,则 $\overrightarrow{AB}=$　　(　　)

A.$\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$　　B.$\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$

C.$\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$　　D.$\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$

B　**解析**:因为 $\begin{cases}\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD_1}=\boldsymbol{c},\\ \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b},\\ \overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB_1}=\boldsymbol{a},\end{cases}$

所以 $\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$.

能力提升

1.(多选)已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的中心为 O,则下列结论正确的有　　(　　)

A.$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}$ 与 $\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}$ 是一对相反向量

B.$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$ 与 $\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OD_1}$ 是一对相反向量

C.$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$与$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OD_1}$是一对相反向量

D.$\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC_1}$是一对相反向量

ACD　**解析**：利用图形及向量的运算可知，B是相等向量，A，C，D是相反向量.

2.（多选）在正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，下列各式，运算结果为$\overrightarrow{AC_1}$的有（　　）

A.$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

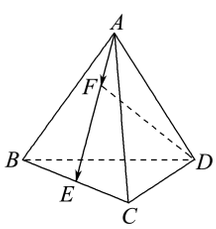
B.$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{D_1C_1}$

C.$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{B_1C_1}$

D.$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{B_1C_1}$

BCD　**解析**：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}\neq\overrightarrow{AC_1}$，故A错误；$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{AC_1}$，故B正确；$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AC_1}$，故C正确；$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AC_1}$，故D正确.故选BCD.

3.如图，在四面体$ABCD$中，E是BC的中点，$\overrightarrow{AE}=4\overrightarrow{AF}$，则（　　）



A.$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$

B.$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$

C.$\overrightarrow{DF}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

D.$\overrightarrow{DF}=-\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

B　**解析**：因为$\overrightarrow{AE}=4\overrightarrow{AF}$，所以$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$.

因为E是BC的中点，

所以$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

所以$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{8}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

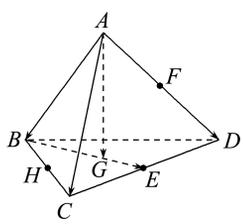
所以$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$.

4.在正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，若点O是底面正方形$A_1B_1C_1D_1$的中心，且$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+z\overrightarrow{AA_1}$，则$x+y+z=$_____.

2　**解析**：由题意可知$x=y=\frac{1}{2}$，$z=1$，故$x+y+z=2$.

自我超越

如图，在空间四边形$ABCD$中，已知G为$\triangle BCD$的重心，E，F，H分别为边CD，AD和BC的中点.化简下列各式：



（1）$\overrightarrow{AG}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$；

（2）$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})$；

（3）$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

解：（1）因为G为$\triangle BCD$的重心，E，F为边CD，AD的中点，

所以$\overrightarrow{AG}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=$

$\overrightarrow{AE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$，

所以$\overrightarrow{AG}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AF}$.

（2）因为E，F，H分别为边CD，AD和BC的中点，

所以$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(2\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AH}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FH}$.

（3）$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\times 2\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AG}$.

第 2 课时　共线向量与共面向量

学习任务目标

1.经历由平面向量的线性运算及其法则推广到空间向量的过程，掌握空间向量的数乘运算及其运算律.
2.了解空间向量共线、共面的概念，掌握它们的表示方法，能判断空间向量是否共线、共面.
3.了解空间直线的方向向量.
4.通过用向量的方法解决共线、共面的问题，培养数形结合的能力.

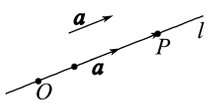
○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　向量共线的充要条件

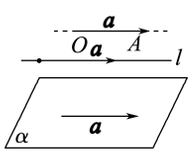
(1)对任意两个空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$，$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 的充要条件是存在实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

(2)如图，O 是直线 l 上一点，在直线 l 上取非零向量 $\boldsymbol{a}$，则对于直线 l 上任意一点 P，由数乘向量的定义及向量共线的充要条件可知，存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{OP}=\lambda\boldsymbol{a}$.我们把与向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的非零向量称为直线 l 的方向向量.这样，直线 l 上任意一点都可以由直线 l 上的一点和它的方向向量表示，也就是说，直线可以由其上一点和它的方向向量确定.



知识点二　向量共面的充要条件

(1)如图，如果表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 所在的直线 OA 与直线 l 平行或重合，那么称向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于直线 l.如果直线 OA 平行于平面 α 或在平面 α 内，那么称向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于平面 α.平行于同一个平面的向量，叫做共面向量.



(2)如果两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，那么向量 $\boldsymbol{p}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面的充要条件是存在唯一的有序实数对 (x,y)，使 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)若 A，B，C 三点共线，则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 共线.　(　√　)

(2)若向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{CD}$ 是共线向量，则点 A，B，C，D 必在同一条直线上.　(　×　)

(3)若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面，则表示这三个向量的有向线段所在的直线共面.　(　×　)

(4)空间中任意三个向量一定是共面向量.　(　×　)

2.若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是平面 α 内的两个向量，则下列命题中，是真命题的是　(　　)

A.α 内任一向量 $\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$

B.若存在 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$，使 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\lambda=\mu=0$

C.若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，则空间任一向量 $\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$

D.若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，则平面 α 内任一向量 $\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$

D　**解析**：当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线时，A 项不正确；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是相反向量，$\lambda=\mu\neq0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 仍成立，故 B 项不正确；若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，则与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面的任意向量可以用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示，对空间向量则不一定，故 C 项不正确，D 项正确.

3.思考并回答下列问题：

(1)对于空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{c}$，是否可以得到 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{c}$？

提示：不能.若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则对任意向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}$ 都有 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{c}$.

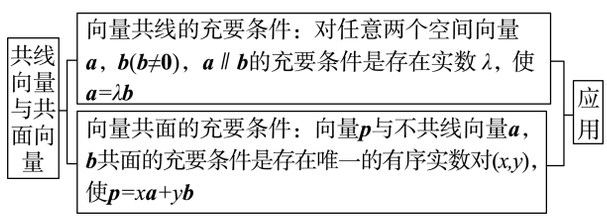
(2)怎样利用向量共线证明 A，B，C 三点共线？

提示：只需证明向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$(或 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$，或 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BC}$)共线即可.

(3)空间中任意两个向量一定是共面向量吗？

提示：空间中任意两个向量都可以平移到同一个平面内，成为同一个平面内的两个向量，因此一定是共面向量.

整体感知

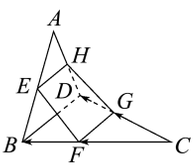


○ 任务型课堂 ○

任务1 理解向量共线的充要条件

探究活动

例1　如图，已知四边形 $ABCD$ 是空间四边形，E，H 分别是边 AB，AD 的中点，F，G 分别是边 CB，CD 上的点，且 $\overrightarrow{CF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$.



求证：四边形 $EFGH$ 是梯形.

证明：因为 E，H 分别是 AB，AD 的中点，

所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，

所以 $\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{CG}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CF}\right)=\frac{3}{4}(\overrightarrow{CG}-\overrightarrow{CF})=\frac{3}{4}\overrightarrow{FG}$，

所以 $\overrightarrow{EH}/\!/\overrightarrow{FG}$，且 $|\overrightarrow{EH}|=\frac{3}{4}|\overrightarrow{FG}|\neq|\overrightarrow{FG}|$.

又点 F，G 不在直线 EH 上，

所以四边形 $EFGH$ 是梯形.

【探究总结】

1. 利用向量共线的充要条件可以证明三点共线或两直线平行，解题时应注意向量共线与两直线平行的区别.
2. 判断或证明两向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$（$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$）共线，就是寻找实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 成立，为此常结合已知图形，运用空间向量的线性运算法则将目标向量化简或用同一组向量表示.

应用迁移

下列条件中，能说明空间中不重合的三点 A，B，C 共线的是（　　）

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$　　B. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

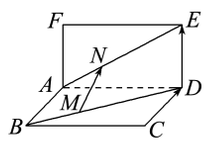
C. $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{BC}$　　D. $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$

C　**解析**：对于 A，对于空间中的任意向量，都有 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$，不能说明三点共线，故选项 A 错误；对于 B，若 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$，则 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$，而 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$，据此可知 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}$，即 B，C 两点重合，故选项 B 错误；对于 C，$\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{BC}$，则 A，B，C 三点共线，故选项 C 正确；对于 D，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$，则线段 AB 的长度与线段 BC 的长度相等，不一定有 A，B，C 三点共线，故选项 D 错误.

任务2 掌握向量共面的充要条件

探究活动

例2　如图，已知矩形 $ABCD$ 所在的平面和矩形 $ADEF$ 所在的平面互相垂直，点 M，N 分别在对角线 BD，AE 上，且 $BM=\frac{1}{3}BD$，$AN=\frac{1}{3}AE$. 求证：向量 $\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DE}$ 共面.



证明：因为点 M 在 BD 上，且 $BM=\frac{1}{3}BD$，

所以 $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

同理，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$，

所以 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{BA}+\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$.

又 $\overrightarrow{CD}$ 与 $\overrightarrow{DE}$ 不共线，根据向量共面的充要条件可知，$\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DE}$ 共面.

【探究总结】

对于空间四点 P，M，A，B，可通过证明下列结论成立来证明四点共面：（其中 x，y，$z\in\mathbf{R}$）

（1）$\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$；

（2）对空间任意一点 O，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$；

（3）对空间任意一点 O，$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OM}$（$x+y+z=1$）；

（4）$\overrightarrow{PM}/\!/\overrightarrow{AB}$（或 $\overrightarrow{PA}/\!/\overrightarrow{MB}$，或 $\overrightarrow{PB}/\!/\overrightarrow{AM}$）.

应用迁移

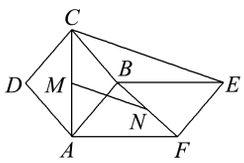
1. 已知点 M 在平面 ABC 内，且对于平面 ABC 外一点 O，满足 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$，则 $\lambda=$（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{5}{12}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{7}{12}$

D　**解析**：因为点 M 在平面 ABC 内，且 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$，所以 $\lambda+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=1$，解得 $\lambda=\frac{7}{12}$.

2. （教材 P5 例 1 改编）如图，四边形 $ABCD$ 与四边形 $ABEF$ 都是平行四边形且不共面，M，N 分别是

AC，BF 的中点.试判断$\overrightarrow{CE}$与$\overrightarrow{MN}$是否共线.



解：因为 M，N 分别是 AC，BF 的中点，而四边形 $ABCD$ 与四边形 $ABEF$ 都是平行四边形，

所以$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FB}$.

又$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{AF}-\frac{1}{2}\overrightarrow{FB}$，

所以$\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{AF}-\frac{1}{2}\overrightarrow{FB}$.

所以$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB}=2(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FN})=2\overrightarrow{MN}$，

即$\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{MN}$，

故$\overrightarrow{CE}$与$\overrightarrow{MN}$共线.

课后素养评价(二)

基础落实

1.对于空间中的三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，它们一定是　　(　　)

A.共面向量

B.共线向量

C.不共面向量

D.既不共线也不共面的向量

A　**解析**：由共面向量定理易得答案选 A.

2.设空间四点 O，A，B，P 满足$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，其中 $m+n=1$，则　　(　　)

A.点 P 一定在直线 AB 上

B.点 P 一定不在直线 AB 上

C.点 P 不一定在直线 AB 上

D.以上都不对

A　**解析**：由 $m+n=1$ 可得 $m=1-n$.

结合题意可知$\overrightarrow{OP}=(1-n)\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+n(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$，即$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=n(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$，所以$\overrightarrow{AP}=n\overrightarrow{AB}$.据此可知 A，P，B 三点共线，点 P 一定在直线 AB 上.

3.已知 A，B，C，D 是空间不共面的四点，点 P 满足 $5\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{DA}$，则　　(　　)

A.P，A，B，C 四点共面

B.P，A，B，D 四点共面

C.P，B，C，D 四点共面

D.P，A，C，D 四点共面

C　**解析**：因为 $5\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{DA}$，所以 $5\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AD}$，即 $5\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AD}$，故$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

因为$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1$，所以 P，B，C，D 四点共面，故 C 正确.

4.若 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$　　(　　)

A.可构成锐角三角形

B.可构成直角三角形

C.可构成钝角三角形

D.不可以构成三角形

D　**解析**：由题意知，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共线，所以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不可以构成三角形.

5.若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是空间中的一组不共面的向量，则下列各组向量不共面的为　　(　　)

A.$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$

B.$-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，$-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

C.$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$

D.$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$

D　**解析**：对于 A，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$ 是共面向量；对于 B，$-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+(-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，所以 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，$-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 是共面向量；对于 C，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$ 是共面向量；对于 D，令 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=x(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+y\boldsymbol{c}$，显然 x，y 无解，故 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不是共面向量.

6.已知 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 不共面，若$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2+\mu\boldsymbol{e}_3$，且 A，B，C 三点共线，则 $\lambda+\mu=$_____

2　**解析**：因为 A,B,C 三点共线，所以 $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{BC}$. 因为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 不共面，所以有 $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3=x(\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2+\mu\boldsymbol{e}_3)=x\boldsymbol{e}_1+x\lambda\boldsymbol{e}_2+x\mu\boldsymbol{e}_3$，故 $\begin{cases}x=1,\\x\lambda=1,\\x\mu=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=1,\\\mu=1,\end{cases}$ 所以 $\lambda+\mu=1+1=2$..

能力提升

1.已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，P,M 为空间任意两点，如果有 $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PB_1}+7\overrightarrow{BA}+6\overrightarrow{AA_1}-4\overrightarrow{A_1D_1}$，那么点 M　　（　　）

A.在平面 BAD_1 内

B.在平面 BA_1D 内

C.在平面 BA_1D_1 内

D.在平面 AB_1C_1 内

C　**解析**：由 $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PB_1}+7\overrightarrow{BA}+6\overrightarrow{AA_1}-4\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{PB_1}+\overrightarrow{BA}+6\overrightarrow{BA_1}-4\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{PB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+6\overrightarrow{BA_1}-4\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{PA_1}+6(\overrightarrow{PA_1}-\overrightarrow{PB})-4(\overrightarrow{PD_1}-\overrightarrow{PA_1})=11\overrightarrow{PA_1}-6\overrightarrow{PB}-4\overrightarrow{PD_1}$，易知 M,B,A_1,D_1 四点共面.故选 C.

2.已知四面体 $OABC$，空间的一点 M 满足 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{OC}$.若 M,A,B,C 四点共面，则 λ 的值为　　（　　）

A.$\frac{7}{12}$　　B.$\frac{1}{3}$　　C.$\frac{5}{12}$　　D.$\frac{1}{2}$

A　**解析**：因为 M,A,B,C 四点共面，所以 $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\lambda=1$，解得 $\lambda=\frac{7}{12}$.故选 A.

3.已知 A,B,C 三点不共线，点 O 不在平面 ABC 内，$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}(x>0,y>0)$.若 A,B,C,D 四点共面，则 xy 的最大值为　　（　　）

A.$\frac{1}{8}$　　B.$\frac{1}{16}$　　C.1　　D.2

B　**解析**：由 $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}(x,y>0)$ 及 A,B,C,D 四点共面，得 $\frac{1}{2}+x+y=1$，即 $x+y=\frac{1}{2}$.

又 $x>0,y>0$，所以 $xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{16}$，当且仅当 $x=y=\frac{1}{4}$ 时等号成立.

自我超越

已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是空间中不共面的三个向量，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{OB}=p\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+q\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{OC}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$.

(1)若 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AC}$，$m\in\mathbf{R}$，求 p,q 的值；

(2)若 O,A,B,C 四点共面，求 $3p+5q$ 的值.

解：(1)由题可得，

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=p\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+q\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(p-1)\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+(q-1)\boldsymbol{c}$，

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$.

因为 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AC}$，所以 $(p-1)\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+(q-1)\boldsymbol{c}=m(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})$，

即 $\begin{cases}p-1=m,\\3=3m,\\q-1=-3m,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=1,\\p=2,\\q=-2,\end{cases}$

所以 p,q 的值分别为 $2,-2$.

(2)因为 O,A,B,C 四点共面，所以存在 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$，使得 $\overrightarrow{OB}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OC}$，

即 $p\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+q\boldsymbol{c}=\lambda(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\mu(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})=(\lambda+2\mu)\boldsymbol{a}+(\mu-2\lambda)\boldsymbol{b}+(\lambda-2\mu)\boldsymbol{c}$，

所以 $\begin{cases}p=\lambda+2\mu,\\1=\mu-2\lambda,\\q=\lambda-2\mu,\end{cases}$

所以 $3p+5q=3(\lambda+2\mu)+5(\lambda-2\mu)=8\lambda-4\mu=-4(\mu-2\lambda)=-4$，

即 $3p+5q$ 的值为 -4.

1.1.2　空间向量的数量积运算

学习任务目标

1.了解空间向量的夹角、模的概念及其表示.

2.掌握空间向量的数量积及其运算律,了解空间向量投影的概念及投影向量的意义.

3.能运用向量的数量积解决立体几何中简单的垂直、长度等问题.

4.培养利用向量的方法解决立体几何问题的能力.

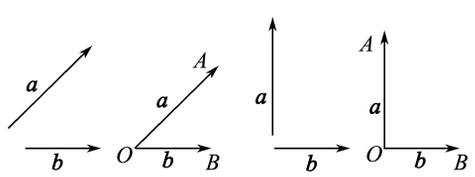
○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　空间向量的夹角

(1)定义

如图,已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,在空间任取一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则 $\angle AOB$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的夹角,记作 $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.



(2)夹角的范围

通常规定,$0\leqslant\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$.这样,两个向量的夹角是唯一确定的,且 $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$.如果 $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$,那么向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 互相垂直,记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

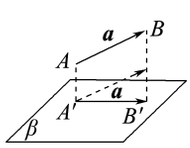
知识点二　空间向量的数量积、运算律

(1)定义

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,则 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 叫做 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的数量积,记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.其中,$|\boldsymbol{a}|\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量.特别地,零向量与任意向量的数量积为 0.

(2)线面角

如图,向量 $\boldsymbol{a}$ 向平面 β 投影,就是分别由向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点 A 和终点 B 作平面 β 的垂线,垂足分别为 A',B',得到向量 $\overrightarrow{A'B'}$,向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在平面 β 上的投影向量.这时,向量 $\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{A'B'}$ 的夹角就是向量 $\boldsymbol{a}$ 所在直线与平面 β 所成的角.



(3)两个空间向量的数量积的性质

向量数量积的性质	垂直	若 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是非零向量,则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$
	共线	同向:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$, 反向:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$
	模	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle=|\boldsymbol{a}|^2$, $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$, $\lvert\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\rvert\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$
	夹角	若 θ 为 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的夹角,则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$

(4)空间向量的数量积满足的运算律

①$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$,$\lambda\in\mathbf{R}$;

②$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$(交换律);

③$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$(分配律).

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)对于非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 与 $\langle \boldsymbol{a},-\boldsymbol{b}\rangle$ 相等.　(　×　)

(2)对于任意向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$,都有 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$.　(　×　)

(3)若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$,且 $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$.　(　×　)

(4)$(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=9|\boldsymbol{a}|^2-4|\boldsymbol{b}|^2$.　(　√　)

2.已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°,且 $|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=5$,则 $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=$　(　)

A.12　　B.$8+\sqrt{13}$

C.4　　D.13

D　**解析:**$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=2|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{a}|\cdot$

$|\boldsymbol{b}|\cos 120°=2\times4-2\times5\times\left(-\frac{1}{2}\right)=13.$

3.思考并回答下列问题：

(1)若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则一定有 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 吗？

提示：不一定，也可能 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

(2)若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$，则$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$一定是锐角吗？

提示：不一定，当$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$ 时，也有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$，故当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$ 时，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$不一定是锐角.

(3)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\Rightarrow\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ 成立吗？

提示：不成立.

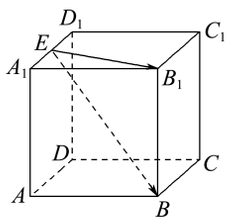
整体感知

空间向量的数量积
- 定义：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$
- 性质：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$
- 运算律：①$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\lambda\in\mathbf{R})$；②$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；③$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$
- 应用：利用数量积证明空间中的垂直关系；利用数量积求向量的夹角和模

○ 任务型课堂 ○

任务1 理解空间向量数量积的运算

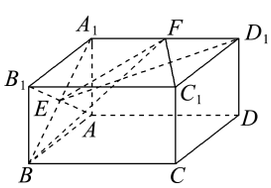
1.如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是棱 A_1D_1 的中点，则$\overrightarrow{EB_1}\cdot\overrightarrow{EB}=$　　(　　)



A.4　　B.5　　C.6　　D.$4\sqrt{2}$

B　**解析**：$\overrightarrow{EB_1}\cdot\overrightarrow{EB}=(\overrightarrow{EA_1}+\overrightarrow{A_1B_1})\cdot(\overrightarrow{EA_1}+\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{EA_1}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{EA_1}+\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{EA_1}^2+\overrightarrow{EA_1}\cdot\overrightarrow{A_1A}+2\overrightarrow{EA_1}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}^2=1^2+2^2=5.$

2.如图，已知长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AA_1=2$，$AD=4$，E 为 AB_1 的中点，F 为 A_1D_1 的中点.试计算：



(1)$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED_1}$；(2)$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB_1}$；

(3)$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FC_1}$.

解：设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，则$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{c}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$.

(1)$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED_1}=\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{A_1D_1}-\overrightarrow{A_1E})=\overrightarrow{BC}\cdot\left[\overrightarrow{A_1D_1}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB})\right]$

$=\boldsymbol{b}\cdot\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}\right]=|\boldsymbol{b}|^2=16.$

(2)$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB_1}=(\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{A_1F})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1})=(\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1F})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1})=\left(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{c}|^2-|\boldsymbol{a}|^2=0.$

(3)$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FC_1}=(\overrightarrow{EA_1}+\overrightarrow{A_1F})\cdot(\overrightarrow{FD_1}+\overrightarrow{D_1C_1})=\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{A_1F}\right]\cdot(\overrightarrow{FD_1}+\overrightarrow{D_1C_1})$

$=\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right]\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\right)=\frac{1}{2}(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\right)=-\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|^2+\frac{1}{4}|\boldsymbol{b}|^2=2.$

【探究总结】

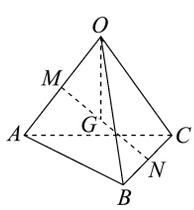
1.只有两个非零空间向量才有夹角，当两个非零空间向量共线同向时，夹角为 0，共线反向时，夹角为 π.

2.对空间任意两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 有：(1)$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$；(2)$\langle-\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{a},-\boldsymbol{b}\rangle=\pi-\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$；(3)$\langle-\boldsymbol{a},-\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

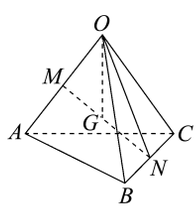
任务2 利用数量积证明空间中的垂直关系

探究活动

例 1　如图，在空间四边形 $OABC$ 中，已知 $\angle AOB=\angle BOC=\angle AOC$，且 $OA=OB=OC$，M,N 分别是 OA,BC 的中点，G 是 MN 的中点.求证：$OG\perp BC$.



证明：如图，连接 ON，设$\angle AOB=\angle BOC=\angle AOC=\theta$，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，则$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$.



又$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\right]=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$，所以$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=\frac{1}{4}(|\boldsymbol{a}|^2\cdot\cos\theta-|\boldsymbol{a}|^2\cdot\cos\theta$

$-|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{a}|^2)=0$.

所以$\overrightarrow{OG}\perp\overrightarrow{BC}$，即$OG\perp BC$.

【探究总结】

用向量法证明空间中垂直关系的步骤

(1)把几何问题转化为向量问题；

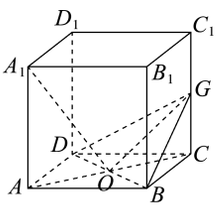
(2)用已知向量表示关键向量；

(3)结合向量的数量积公式和运算律证明数量积为0；

(4)从向量问题返回到几何问题.

应用迁移

如图，在正方体$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$中，O为AC与BD的交点，G为CC_1的中点.求证：$A_1O\perp$平面GBD.



证明：设$\overrightarrow{A_1B_1}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{A_1D_1}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{A_1A}=\boldsymbol{c}$，

则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$.

因为$\overrightarrow{A_1O}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{A_1A}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，

$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$，

所以$\overrightarrow{A_1O}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}^2)=\frac{1}{2}(|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2)=0$，

所以$\overrightarrow{A_1O}\perp\overrightarrow{BD}$，即$A_1O\perp BD$.

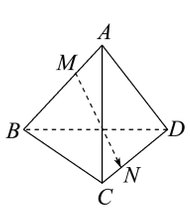
同理可证$\overrightarrow{A_1O}\perp\overrightarrow{OG}$，即$A_1O\perp OG$.

又因为$OG\cap BD=O$，$OG\subset$平面GBD，$BD\subset$平面GBD，所以$A_1O\perp$平面GBD.

任务3 利用数量积求向量的夹角和模

探究活动

例2　如图，正四面体$ABCD$的棱长为a，M，N分别是棱AB，CD上的点，且$MB=2AM$，$CN=\frac{1}{2}ND$.求$|\overrightarrow{MN}|$的值.



解：因为$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，

所以$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2=\frac{1}{9}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{9}\overrightarrow{AD}^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}^2-\frac{2}{9}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{9}a^2+\frac{1}{9}a^2+\frac{4}{9}a^2-\frac{1}{9}a^2-\frac{2}{9}a^2+\frac{2}{9}a^2=\frac{5}{9}a^2$.

故$|\overrightarrow{MN}|=\frac{\sqrt{5}}{3}a$.

[一题多思]

思考1.若本例的条件不变，求异面直线AC与MN所成角的余弦值.

解：因为$\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，

所以$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{6}a^2+\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{6}a^2=\frac{2}{3}a^2$，

所以$\cos\langle\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\frac{2}{3}a^2}{\frac{\sqrt{5}}{3}a\cdot a}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，即异面直线$AC$与$MN$所成角的余弦值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

思考2.若把本例中的条件“$MB=2AM$，$CN=\frac{1}{2}ND$”改为“M，N分别是AB，CD的中点”，求$|\overrightarrow{MN}|$的值.

解：$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

因为$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$两两的夹角均为$\frac{\pi}{3}$，且$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AD}|=a$，

所以$|\overrightarrow{MN}|^2=\left|-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right|^2=\frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2-2|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\frac{\pi}{3}-2|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cos\frac{\pi}{3}+2|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}a^2$，

故$|\overrightarrow{MN}|=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

【探究总结】

1.利用数量积求异面直线所成角θ的余弦值的步骤：

(1)分别在两条异面直线上取向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$；

(2)求向量夹角的余弦值$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$；

(3)得结果，即$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle|$.

2. 利用数量积求两点间距离的步骤：

(1)用向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度表示此距离；

(2)用其他已知向量表示向量 $\boldsymbol{a}$；

(3)用公式 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$，求 $|\boldsymbol{a}|$.

应用迁移

1. (教材 P9 练习题 3 改编)已知平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长均为 1，$\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle BAD=60^\circ$，则对角线 A_1C 的长为　(　　)

A.$\sqrt{6}$　　B.2

C.$\sqrt{3}$　　D.$\sqrt{2}$

D　**解析**：由题意得，平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 所有棱长均为 1，$\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle BAD=60^\circ$，

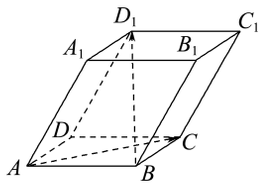
则 $\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

又因为 $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AA_1}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos\angle A_1AB=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，

同理可得 $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}$，

则 $\overrightarrow{A_1C}^2=(-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2=\overrightarrow{AA_1}^2+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2-2\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1+1+1-2\times\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}=2$，则 $|\overrightarrow{A_1C}|=\sqrt{2}$.

2. 如图所示，在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，以顶点 A 为端点的三条棱的长度都为 1，且两两夹角为 60°，则 $\overrightarrow{BD_1}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 夹角的余弦值为　(　　)



A.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B.$\frac{\sqrt{6}}{6}$　　C.$\frac{\sqrt{3}}{4}$　　D.$\frac{\sqrt{3}}{6}$

B　**解析**：设向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=60^\circ$，

可得 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BD_1}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$，

则 $\overrightarrow{AC}^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+1+2\times1\times1\times\frac{1}{2}=3$，所以 $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$.

$\overrightarrow{BD_1}^2=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})^2=\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=1+1+1+2\times\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{2}=2$，

所以 $|\overrightarrow{BD_1}|=\sqrt{2}$.

又 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD_1}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD_1}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD_1}|}=\frac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

课后素养评价(三)

基础落实

1. 关于空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，下列运算错误的是　(　　)

A.$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

B.$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

C.$\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，其中 $\lambda\in\mathbf{R}$

D.$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$

D　**解析**：由数量积运算的交换律可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$，故选项 A 正确.由数量积运算的分配律可得 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，故选项 B 正确.由数量积运算的数乘结合律可得 $\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，故选项 C 正确.$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 表示与 $\boldsymbol{c}$ 共线的向量，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 共线的向量，所以 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 不一定相等，故选项 D 错误.

2. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ 的值为　(　　)

A.1　　B.0

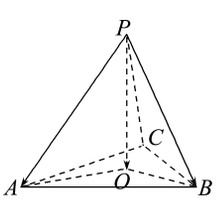
C.-1　　D.-2

B　**解析**：由题意可得 $AB\perp AD$，$AB\perp AA_1$，

所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，

所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$.故选 B.

3. 如图，在正三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，O 是 $\triangle ABC$ 的中心，连接 PO，OA，OB.若 $PA=AB=2$，则 $\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})=$　(　　)



A.$\frac{10}{9}$　　B.$\frac{2\sqrt{6}}{3}$

C.$\frac{8\sqrt{2}}{3}$　　D.$\frac{16}{3}$

D　**解析**：在正三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，O 为 $\triangle ABC$ 的中心，$PA=AB=2$，$OA=OB=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{2}{\sqrt{3}}$.又

$PO\perp$平面ABC，OA，$OB\subset$平面ABC，所以$PO\perp OA$，$PO\perp OB$，且$PO^2=2^2-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{8}{3}$，所以$\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})=\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB})=2\overrightarrow{PO}^2=2\times\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$.

4.已知$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，且$\boldsymbol{a}$与$2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$互相垂直，则向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为_____.

45°　**解析**：由于$\boldsymbol{a}$与$2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$互相垂直，

所以$\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=0$，

即$2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-|\boldsymbol{a}|^2=0$，

所以$2|\boldsymbol{a}\|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=4$，

所以$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{4}{2\times2\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为45°.

5.已知$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=60°$，则使向量$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$与$\lambda\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$的夹角为钝角的实数$\lambda$的取值范围是_____.

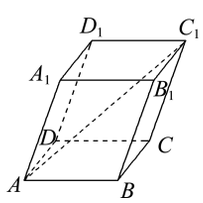
$(-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3})$　**解析**：由题意知$\begin{cases}(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})<0,\\ \cos\langle\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},\lambda\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}\rangle\neq-1,\end{cases}$

即$\begin{cases}(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})<0,\\ (\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\neq-|\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}||\lambda\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|,\end{cases}$

得$\lambda^2+2\lambda-2<0$，解得$-1-\sqrt{3}<\lambda<-1+\sqrt{3}$.

故实数λ的取值范围是$(-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3})$.

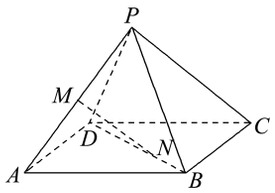
6.如图，在平行六面体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，以顶点A为端点的三条棱的长都为1，且两两夹角都为60°.求AC_1的长.



解：因为$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$，所以$|\overrightarrow{AC_1}|^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1})^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CC_1}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CC_1}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC_1}=1+1+1+2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos60°+2|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{CC_1}|\cos60°+2|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CC_1}|\cdot\cos60°=6$.所以$|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{6}$，故$AC_1$的长为$\sqrt{6}$.

能力提升

1.如图，在正四棱锥$P\text{-}ABCD$中，$PA=AB$，M为PA的中点，$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BN}$.若$MN\perp AD$，则实数$\lambda$的值为（　　）



A.2　　B.3　　C.4　　D.5

C　**解析**：因为四棱锥$P\text{-}ABCD$是正四棱锥，

所以四边形$ABCD$为正方形，$PA=PB=PC=PD$.

因为$PA=AB$，

所以$\triangle PAB$和$\triangle PAD$均为等边三角形且边长均相等，

所以$AB\perp AD$，$\angle PAB=\angle PAD=60°$.

因为M为PA的中点，$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BN}$，

所以$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{\lambda}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AD}+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AB}$.

因为$MN\perp AD$，所以$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，

即$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AD}=\left[-\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AD}+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AB}\right]\cdot\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AD}^2+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cos60°+\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AD}^2=-\frac{1}{4}|\overrightarrow{AD}|^2+\frac{1}{\lambda}|\overrightarrow{AD}|^2=0$，解得$\lambda=4$.

2.（多选）在正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，下列结论正确的有（　　）

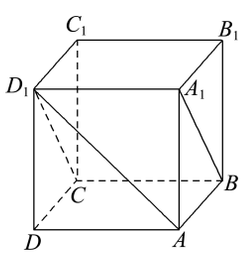
A.$(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})^2=3\overrightarrow{AB}^2$

B.$\overrightarrow{A_1C}\cdot(\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{A_1A})=0$

C.$\overrightarrow{AD_1}$与$\overrightarrow{A_1B}$的夹角为60°

D.正方体的体积为$|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A_1A}\cdot\overrightarrow{AD}|$

AB　**解析**：如图，$(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})^2=(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})^2=\overrightarrow{A_1C}^2=3\overrightarrow{AB}^2$，故A正确；

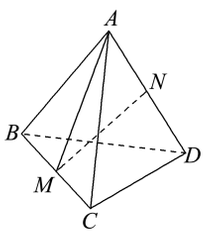


由正方体的性质易证$AB_1\perp$平面A_1BC，因为$A_1C\subset$平面A_1BC，所以$AB_1\perp A_1C$，所以$\overrightarrow{A_1C}\cdot(\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{A_1A})=\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0$，故B正确；

$\overrightarrow{AD_1}$与$\overrightarrow{A_1B}$的夹角是$\overrightarrow{D_1C}$与$\overrightarrow{D_1A}$夹角的补角，而$\overrightarrow{D_1C}$与$\overrightarrow{D_1A}$的夹角为60°，故$\overrightarrow{AD_1}$与$\overrightarrow{A_1B}$的夹角为120°，故C错误；

正方体的体积为$|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{A_1A}||\overrightarrow{AD}|$，故D错误.

3. 如图，在三棱锥A-BCD中，$AB=AC=AD=2$，$\angle BAC=90°$，$\angle BAD=\angle CAD=60°$，$M$，$N$分别为$BC$，$AD$的中点，则$|MN|=$（　　）



A.$2\sqrt{2}$　　B.2

C.$\sqrt{2}$　　D.1

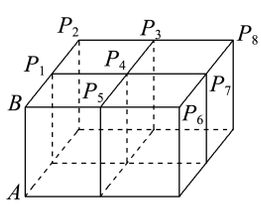
D　**解析**：由题意得，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AD}|=2$，$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=90°$，$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\rangle=60°$，$\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\rangle=60°$，

所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\times2\times\frac{1}{2}=2$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=2\times2\times\frac{1}{2}=2$.

因为$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，

所以$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)^2}=1$.

4. 如图，四个棱长为1的正方体组成一个正四棱柱，AB是一条侧棱，P_i（$i=1,2,\cdots,8$）是上底面上的八个点，$x_i=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_i}$（$i=1,2,\cdots,8$），则用列举法表示$x_i$组成的集合为_____.

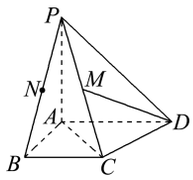


{1}　**解析**：由题意得$x_i=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_i}=\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP_i})=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP_i}$（$i=1,2,\cdots,8$）.又因为$AB\perp$平面$BP_2P_8P_6$，$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BP_i}$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP_i}=0$.所以$x_i=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP_i}=|\overrightarrow{AB}|^2=1$，则$x_i=AB\cdot\overrightarrow{AP_i}$（$i=1,2,\cdots,8$）$=1$.

5. 如图，在四棱锥P-$ABCD$中，底面$ABCD$为直角梯形，$AD/\!/BC$，$\angle BAD=90°$，$PA\perp$底面$ABCD$，且$PA=AD=AB=2BC$，M，N分别为PC，PB的中点.

(1)求证：$PB\perp DM$；

(2)求AC与PD所成角的余弦值.



(1)**证明**：因为$\angle BAD=90°$，所以$AB\perp AD$.因为$PA\perp$平面$ABCD$，AB，$AD\subset$平面$ABCD$，所以$AP\perp AB$，$AP\perp AD$，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}=0$.由题意知，$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{DC})=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$，则$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{DM}=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AP}|^2=0$，

所以$\overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{DM}$，即$PB\perp DM$.

(2)**解**：设$PA=AD=AB=2BC=2$.

因为$\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，

所以$|\overrightarrow{PD}|^2=|\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP}|^2=\overrightarrow{AD}^2-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AP}^2=8$，所以$|\overrightarrow{PD}|=2\sqrt{2}$.

因为$|\overrightarrow{AC}|^2=\left|\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AD}|^2=5$，所以$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{5}$.

因为$\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP})\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}|^2=2$，

所以$\cos\langle\overrightarrow{PD},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{2}{2\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

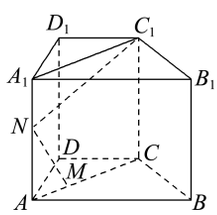
故AC与PD所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$.

自我超越

已知在直棱柱$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$中，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，且$AC=3\sqrt{3}$，$N$是棱$AA_1$上的一点，且满足$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NC_1}=0$，则棱$AA_1$长度的最小值为（　　）

A.$3\sqrt{3}$　　B.6　　C.3　　D.$6\sqrt{3}$

B　**解析**：如图，



设$AA_1=h$，$\overrightarrow{AN}=t\overrightarrow{AA_1}$，$t\in[0,1]$，

则$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-t\overrightarrow{AA_1}$，$\overrightarrow{NC_1}=\overrightarrow{NA_1}+\overrightarrow{A_1C_1}=(1-t)\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AC}$，

$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NC_1}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-t\overrightarrow{AA_1}\right)\cdot[\overrightarrow{AC}+(1-t)\overrightarrow{AA_1}]$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}^2+t(t-1)\overrightarrow{AA_1}^2+\frac{1-4t}{3}\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

因为$AC=3\sqrt{3}$，$AA_1\perp AC$，所以$\overrightarrow{AC}^2=27$，$\overrightarrow{AA_1}^2=h^2$，$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

代入整理得，$t(t-1)h^2+9=0$，显然$t(t-1)\neq0$，故$h^2=\frac{9}{-t^2+t}=\frac{9}{-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$.

因为$0<t<1$，所以当$t=\frac{1}{2}$时，$y=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$取得最大值$\frac{1}{4}$，

此时h^2取得最小值为36，故棱AA_1长度的最小值为6.

1.2　空间向量基本定理

学习任务目标

1.了解空间向量的基本定理及其意义.
2.掌握空间向量的正交分解.
3.会在简单问题中选用空间三个不共面向量作为基向量表示其他向量.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　空间向量基本定理

(1)分向量

如果$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$是空间三个两两垂直的向量，那么对任意一个空间向量$\boldsymbol{p}$，存在唯一的有序实数组$(x,y,z)$，使得$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.我们称$x\boldsymbol{i},y\boldsymbol{j},z\boldsymbol{k}$分别为向量$\boldsymbol{p}$在$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$上的分向量.

(2)空间向量基本定理

如果三个向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$不共面，那么对任意一个空间向量$\boldsymbol{p}$，存在唯一的有序实数组$(x,y,z)$，使得$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$.

知识点二　基底

如果三个向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$不共面，那么所有空间向量组成的集合就是$\{\boldsymbol{p}\mid\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c},x,y,z\in\mathbf{R}\}$.这个集合可看作由向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$生成的，我们把$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$叫做空间的一个基底，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$都叫做基向量.空间任意三个不共面的向量都可以构成空间的一个基底.

知识点三　正交分解

特别地，如果空间的一个基底中的三个基向量两两垂直，且长度都为1，那么这个基底叫做单位正交基底，常用$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$表示.由空间向量基本定理可知，对空间中的任意向量$\boldsymbol{a}$，均可以分解为三个向量$x\boldsymbol{i},y\boldsymbol{j},z\boldsymbol{k}$，使$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.像这样，把一个空间向量分解为三个两两垂直的向量，叫做把空间向量进行正交分解.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)若$\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$不能作为空间的一个基底，则$O,A,B,C$四点共面.　(　√　)

(2)空间中的任何一个向量都可用三个给定向量表示.　(　×　)

(3)若向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$与任何向量都不能构成空间的一个基底，则一定有$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线.　(　√　)

(4)任何三个不共线的向量都可构成空间的一个基底.　(　×　)

2.在长方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，可以作为空间的一个基底的是　(　　)

A.$\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\}$

B.$\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{AB_1}\}$

C.$\{\overrightarrow{D_1A_1},\overrightarrow{D_1C_1},\overrightarrow{D_1D}\}$

D.$\{\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{A_1C},\overrightarrow{CC_1}\}$

C　**解析**：由题意知，$\overrightarrow{D_1A_1},\overrightarrow{D_1C_1},\overrightarrow{D_1D}$不共面，故$\{\overrightarrow{D_1A_1},\overrightarrow{D_1C_1},\overrightarrow{D_1D}\}$可以作为空间的一个基底.

3.思考并回答下列问题：

(1)零向量能不能作为一个基向量？

提示：不能.因为$\boldsymbol{0}$与任意一个非零向量共线，与任意两个非零向量共面.

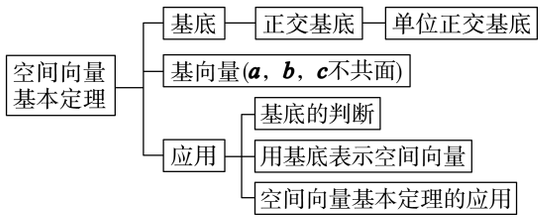
(2)当基底确定后，空间向量基本定理中的实数组(x,y,z)是否唯一？

提示：唯一.

(3)不同基底下，同一向量的表达式相同吗？

提示：不同基底下，同一向量的表达式一般不同.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 了解基底的概念

1.已知$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$是空间的一个基底，则下列向量不共面的是（　　）

A.$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

B.$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$

C.$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

D.$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$

B　**解析**：对于A，由$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，所以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$共面，故A错误；对于B，假设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$共面，设$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+y\boldsymbol{c}$，所以$x=2,y=3,y=2$，矛盾，所以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$不共面，故B正确；对于C，由$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$，所以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$共面，故C错误；对于D，由$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+3(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，所以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$共面，故D错误.

2.已知$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$是空间的一个基底，且$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$，$\overrightarrow{OB}=-3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$.试判断$\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$能否作为空间的一个基底.

解：假设$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$共面，

则存在实数λ,μ使得$\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}$，

所以$\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3=\lambda(-3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3)+\mu(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)=(-3\lambda+\mu)\boldsymbol{e}_1+(\lambda+\mu)\boldsymbol{e}_2+(2\lambda-\mu)\boldsymbol{e}_3$.

因为$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$不共面，

所以$\begin{cases}-3\lambda+\mu=1,\\ \lambda+\mu=2,\\ 2\lambda-\mu=-1,\end{cases}$　此方程组无解，

所以$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$不共面，

所以$\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$可以作为空间的一个基底.

【探究总结】

判断向量能否构成基底的基本思路及方法

(1)基本思路

判断三个空间向量是否共面，若共面，则不能构成基底；若不共面，则能构成基底.

(2)方法

①若向量中存在零向量，则不能构成基底；若其中某个向量可以用其他向量线性表示，则它们不能构成基底.

②假设$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}$，运用空间向量基本定理，建立关于$\lambda,\mu$的方程组.若方程组有解，则$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$共面，不能构成基底；若方程组无解，则$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$不共面，能构成基底.

任务2 用基底表示空间向量

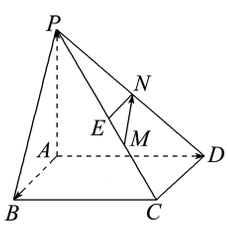
探究活动

例1　已知点P是矩形$ABCD$所在平面外一点，且$PA\perp$平面$ABCD$，M,N分别是PC,PD上的点，且$PM=\frac{2}{3}PC$，$PN=ND$.试求出满足$\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+z\overrightarrow{AP}$的实数$x,y,z$的值.

解：如图，取PC的中点E，连接NE，则$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EN}-\overrightarrow{EM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-(\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PE})=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\frac{1}{6}\overrightarrow{PC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}(-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AP}$.

因为$\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+z\overrightarrow{AP}$，

所以$x=-\frac{2}{3},y=-\frac{1}{6},z=\frac{1}{6}$.



[一题多思]

思考 1. 用基底表示向量需要注意哪些问题？

提示：(1)若基底确定，要充分利用向量加减运算的三角形法则和平行四边形法则，以及向量数乘运算的运算律.

(2)若没给定基底，首先选择基底.选择时，要尽量使所选的基向量能方便地表示其他向量，再就是看基向量的模及其夹角是否已知或易求.

思考 2. 把本例中的“$PM=\frac{2}{3}PC$，$PN=ND$”改为“$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{PN}=2\overrightarrow{ND}$”.试用基底$\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}\}$表示向量$\overrightarrow{NM}$.

解：因为$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{PN}=2\overrightarrow{ND}$，

所以$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AD})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})$.

又$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，所以$\overrightarrow{NM}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AD})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AP}$.

【探究总结】

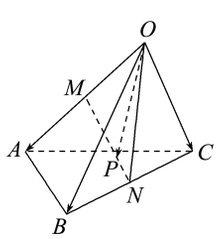
基向量的选择和使用方法

(1)尽可能选择具有垂直关系的、起点相同的三个不共面的向量作为基向量.

(2)用基向量表示一个向量时，若此向量的起点与基向量的起点相同，一般考虑向量的加法，否则考虑向量的减法；若此向量与一个易求的向量共线，则可以用向量的数乘运算.

应用迁移

1.(教材 P12 例 1 改编)如图，M，N 分别是四面体 $OABC$ 的边 OA，BC 的中点，P 是 MN 靠近 N 的三等分点.若向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，则$\overrightarrow{OP}=$（　　）



A. $\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{6}\boldsymbol{b}+\frac{1}{6}\boldsymbol{c}$　　B. $\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{6}\boldsymbol{c}$

C. $\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$　　D. $\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\frac{3}{8}\boldsymbol{b}+\frac{3}{8}\boldsymbol{c}$

C　**解析：**M，N 分别是四面体 $OABC$ 的边 OA，BC 的中点，P 是 MN 靠近 N 的三等分点，

则$\overrightarrow{MP}=2\overrightarrow{PN}$，$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}=2(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OP})$，即 $3\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}$，

则$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{ON}$.因为 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，

又 N 为 BC 的中点，则$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

因为 M 为 OA 的中点，所以$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，

故$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{ON}=\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right)=\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$.

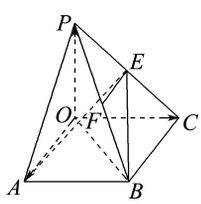
2.已知四棱锥 P-$OABC$ 的底面为矩形，$PO\perp$平面 $OABC$.设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{c}$，$E$，$F$ 分别是 PC 和 PB 的中点.

(1)判断$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$能否作为空间的一个基底；

(2)若$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$可以作为空间的一个基底，则用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示$\overrightarrow{BF}$，$\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{EF}$.

解：(1)因为$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OP}$不共面，所以$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$能作为空间的一个基底.

(2)如图所示，连接 BO，



则$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP})=\frac{1}{2}(-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$，

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OP})=-\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$，

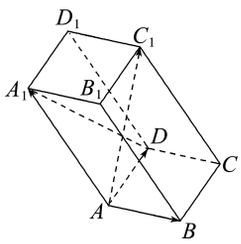
$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC})=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}(-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$，

$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$.

任务3 掌握空间向量基本定理的应用

探究活动

例2　如图，在平行六面体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$是边长为1的正方形，$AA_1=2$，$\angle A_1AB=\angle A_1AD=120°$.



(1)若选取$\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA_1}\}$作为一个基底，试表示向量$\overrightarrow{AC_1}$；

(2)求向量$\overrightarrow{AC_1}$的模；

(3)求直线AC_1与A_1D所成角的余弦值.

解：(1)$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$.

(2)因为$|\overrightarrow{AC_1}|^2=\overrightarrow{AC_1}^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AA_1}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}$

$=1+1+4+0+2\times1\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+2\times1\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=2$，所以向量$\overrightarrow{AC_1}$的模为$\sqrt{2}$.

(3)因为$\overrightarrow{A_1D}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}$，

所以$|\overrightarrow{A_1D}|^2=(-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD})^2$

$=\overrightarrow{AA_1}^2+\overrightarrow{AD}^2-2\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=4+1-2\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=7$，所以$|\overrightarrow{A_1D}|=\sqrt{7}$.

又因为$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1D}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})\cdot(-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD})$

$=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AA_1}^2+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}=-1\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+0-1\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1-4+1\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$，

所以$\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{A_1D}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1D}}{|\overrightarrow{AC_1}|\cdot|\overrightarrow{A_1D}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{2}\times\sqrt{7}}=-\dfrac{\sqrt{14}}{7}$，

所以直线AC_1与A_1D所成角的余弦值为$|\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{A_1D}\rangle|=\dfrac{\sqrt{14}}{7}$.

【探究总结】

利用空间向量证明两直线垂直或平行的方法

(1)要证明两直线垂直，只需选取三个不共线的已知向量(通常是已知它们的模及两两的夹角)为基向量，将两条直线的方向向量表示出来，随后证明两个方向向量的数量积为0.

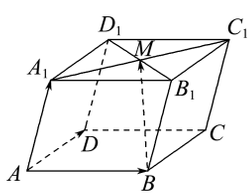
(2)要证明两直线平行，只需选取三个不共线的已知向量(通常已知它们的模及两两的夹角)为基向量，将两条直线的方向向量表示出来，而后进行相应的运算证明它们共线即可.

应用迁移

如图，在平行六面体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，M为A_1C_1与B_1D_1的交点，且AB，AD，AA_1两两夹角均为60°，且长度相等，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$.

(1)试用$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$表示$\overrightarrow{BM}$；

(2)求直线BM与AD所成角的余弦值.



解：(1)$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

(2)根据题意可设$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，

则$\overrightarrow{BM}^2=\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\right)^2=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}^2+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{5}{4}$，

所以$|\overrightarrow{BM}|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

所以$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AD}=\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\right)\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{3}{4}$，

所以$\cos\langle\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AD}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{BM}||\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{2}\times1}=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$，

所以直线BM与AD所成角的余弦值为$\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

课后素养评价(四)

基础落实

1.已知$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$是空间的一个基底,则可以与向量$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$构成基底的向量是　　(　　)

A.$\boldsymbol{a}$　　B.$\boldsymbol{b}$

C.$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$　　D.$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{c}$

D　**解析**:因为$\boldsymbol{a},\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$为共面向量,所以不能作为基底,故A错误;因为$\boldsymbol{b},\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$为共面向量,所以不能作为基底,故B错误;因为$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b},\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$为共面向量,所以不能作为基底,故C错误;因为$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{c},\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$为不共面向量,所以能作为基底,故D正确.故选D.

2.设$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$为空间的一个单位正交基底,$\boldsymbol{m}=8\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$,则$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=$　　(　　)

A.7　　B.-20

C.23　　D.11

B　**解析**:因为$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$为空间的一个单位正交基底,所以$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0$,$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1$.

所以$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=(8\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k})\cdot(-\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})=-8\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+40\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}-32\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}-3\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+15\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}-12\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=-20$.故选B.

3.已知$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$是空间的一个基底.若$\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2+v\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{0}(\lambda,\mu,v\in\mathbf{R})$,则$\lambda^2+\mu^2+v^2=$_____.

0　**解析**:因为$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$是空间的一个基底,所以$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$为不共面向量.

又因为$\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2+v\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{0}$,所以$\lambda=\mu=v=0$,所以$\lambda^2+\mu^2+v^2=0$.

4.已知正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中,点O为AC_1与BD_1的交点,$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{BC}+z\overrightarrow{CC_1}$,则$x+y+z=$_____.

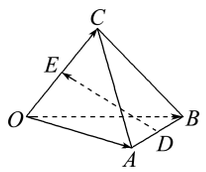
$\frac{3}{2}$　**解**:因为$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1})$,

则$x=y=z=\frac{1}{2}$,所以$x+y+z=\frac{3}{2}$.

5.如图,三棱锥$O\text{-}ABC$各棱长都是1,点D是棱AB的中点,点E在棱OC上,且$OE=\lambda OC$.设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$.

(1)用向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$表示向量$\overrightarrow{DE}$;

(2)求$|\overrightarrow{DE}|$的最小值.



解:(1)$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA}$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})+\lambda\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{c}$.

(2)因为三棱锥的各棱长都为1,则$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{c}^2=1$,

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}$,

所以$|\overrightarrow{DE}|^2=\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{c}\right)^2$

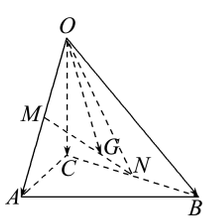
$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\lambda^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\lambda\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

$=\frac{3}{4}+\lambda^2-\lambda=\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$,

故当$\lambda=\frac{1}{2}$时,$|\overrightarrow{DE}|$取得最小值,且$|\overrightarrow{DE}|_{\min}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

能力提升

1.如图,已知空间四边形$OABC$,其对角线为OB,AC,M,N分别是边OA,BC的中点,点G在线段MN上,且$MG=2GN$.现用基向量$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$表示向量$\overrightarrow{OG}$,设$\overrightarrow{OG}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$,则$x$,$y$,$z$的值分别为　　(　　)



A.$x=\frac{1}{3},y=\frac{1}{3},z=\frac{1}{3}$

B.$x=\frac{1}{3},y=\frac{1}{3},z=\frac{1}{6}$

C.$x=\frac{1}{3},y=\frac{1}{6},z=\frac{1}{3}$

D.$x=\frac{1}{6},y=\frac{1}{3},z=\frac{1}{3}$

D　**解析**:因为N为BC的中点,

所以$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}$

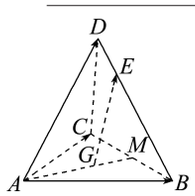
$-\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$.

由题意可得$\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{GN}$，则$\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OM}=2(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OG})$，

所以$3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$，则$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$，

故$x=\frac{1}{6}$，$y=\frac{1}{3}$，$z=\frac{1}{3}$.

2.如图，在空间四边形$ABCD$中，G为$\triangle ABC$的重心，E是BD上一点，$BE=3ED$.若以$\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\}$为基底，则$\overrightarrow{GE}=$_____.



$-\frac{1}{12}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$　**解析：**由题意，连接AE（图略），则$\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$=-\frac{1}{12}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

3.已知在平行六面体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，$\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，$AB=1$，$AD=AA_1=2$，则异面直线$BD_1$与$CC_1$所成角的余弦值为_____.

$\frac{5}{6}$　**解析：**在平行六面体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，$CC_1/\!/DD_1$，

则$\angle BD_1D$是异面直线BD_1与CC_1所成角或其补角.

因为$\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，$AB=1$，$AD=AA_1=2$，

所以$BD=\sqrt{AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\angle BAD}=\sqrt{3}$，

$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{AD_1}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$，

$|\overrightarrow{BD_1}|=$

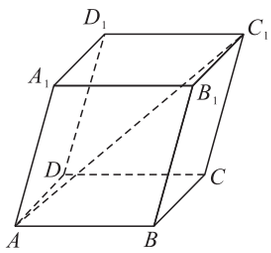
$\sqrt{\overrightarrow{AA_1}^2+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}}$

$=\sqrt{2^2+2^2+1^2+2\times2\times2\times\frac{1}{2}-2\times2\times1\times\frac{1}{2}-2\times1\times2\times\frac{1}{2}}$

$=3$.

在$\triangle BDD_1$中，$\cos\angle BD_1D=\frac{BD_1^2+DD_1^2-BD^2}{2BD_1\cdot DD_1}=\frac{3^2+2^2-(\sqrt{3})^2}{2\times3\times2}=\frac{5}{6}$.

4.如图，在平行六面体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$是边长为1的正方形，$\angle BAA_1=\angle DAA_1=\frac{\pi}{3}$，$AC_1=\sqrt{26}$.



(1)求侧棱AA_1的长；

(2)若M，N分别为D_1C_1，C_1B_1的中点，求证：$AC_1\perp MN$.

(1)**解：**设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，则

$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{c}|$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{c}|$.

因为$\overrightarrow{AC_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，

所以$|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}=\sqrt{2+|\boldsymbol{c}|^2+2|\boldsymbol{c}|}=\sqrt{26}$，

解得$|\boldsymbol{c}|=4$，所以$AA_1=4$.

(2)**证明：**$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

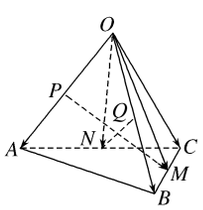
$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{MN}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)=0$，

所以$\overrightarrow{AC_1}\perp\overrightarrow{MN}$，故$AC_1\perp MN$.

5.已知空间四边形$OABC$中，M为BC的中点，N为AC的中点，P为OA的中点，Q为OB的中点.若$AB=OC$.求证：$PM\perp QN$.

证明：如图，取$\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$为空间的一个基底.

由题意得$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$，



所以$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OC})$，

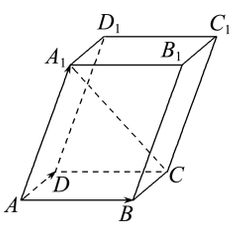
$\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AB})$，

所以$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{QN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OC})\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2)$.

又因为$AB=OC$，则$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{OC}|$，所以$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{QN}=0$，即$PM\perp QN$.

自我超越

（多选）如图，在棱长均为2的平行六面体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$是正方形，且$\angle A_1AB=\angle A_1AD=60°$.设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，则下列选项正确的有（　　）



A.$\overrightarrow{BD_1}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

B.BD_1的长为$2\sqrt{3}$

C.异面直线AC与BD_1所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$

D.$A_1C\perp B_1D_1$

ABD　**解析**：由题意可知$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=2\times2\times\frac{1}{2}=2$.

对于A，因为$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，故A正确；

对于B，因为$\overrightarrow{BD_1}^2=(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=4+4+4-0+4-4=12$，所以$|\overrightarrow{BD_1}|=2\sqrt{3}$，即$BD_1$的长为$2\sqrt{3}$，故B正确；

对于C，因为$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，且$|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{2}$，所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD_1}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-4+4+2+2=4$，

可得$\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD_1}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD_1}|}=\frac{4}{2\sqrt{2}\times2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，

所以异面直线AC与BD_1所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{6}$，故C错误；

对于D，因为$\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，

且$\overrightarrow{B_1D_1}=\overrightarrow{A_1D_1}-\overrightarrow{A_1B_1}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，

则$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{B_1D_1}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-4+4+2-2=0$，

所以$A_1C\perp B_1D_1$，故D正确.

1.3　空间向量及其运算的坐标表示

1.3.1　空间直角坐标系

学习任务目标

1.类比平面直角坐标系学习空间直角坐标系.

2.掌握空间中点和向量的坐标表示.

问题式预习

【知识清单】

知识点一　空间直角坐标系

(1)在空间选定一点O和一个单位正交基底$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$.以点$O$为原点，分别以$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$的方向为正方向、以它们的长为单位长度建立三条数轴：x轴、y轴、z轴，它们都叫做坐标轴.这时我们就建立了一个空间直角坐标系$Oxyz$，O叫做原点，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$都叫做坐标向量，通过每两条坐标轴的平面叫做坐标平面，分别称为Oxy平面，Oyz平面，Ozx平面.

(2)在空间直角坐标系中，让右手拇指指向x轴的正方向，食指指向y轴的正方向，如果中指指向z轴的正方向，则称这个坐标系为右手直角坐标系.

知识点二　空间直角坐标系中向量的坐标表示

(1)在空间直角坐标系$Oxyz$中，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$为坐标向量，对空间任意一点$A$，对应一个向量$\overrightarrow{OA}$，且点$A$的位置由向量$\overrightarrow{OA}$唯一确定，由空间向量基本定理，存在唯一的有序实数组(x,y,z)，使$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.在单位正交基底$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$下与向量$\overrightarrow{OA}$对应的有序实数组$(x,y,z)$，叫做点$A$在空间直角坐标系中的坐标，记作$A(x,y,z)$，其中$x$叫做点$A$的横坐标，$y$叫做点$A$的纵坐标，$z$叫做点$A$的竖坐标.

(2)在空间直角坐标系$Oxyz$中，给定向量$\boldsymbol{a}$.由空间向量基本定理，存在唯一的有序实数组(x,y,z)，使

$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.有序实数组$(x,y,z)$叫做$\boldsymbol{a}$在空间直角坐标系$Oxyz$中的坐标，可简记作$\boldsymbol{a}=(x,y,z)$.

【概念辨析】

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)若向量$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$，则$\boldsymbol{a}$的坐标是$(x,y,z)$.　（　×　）

(2)若向量$\overrightarrow{AB}=(x,y,z)$，则点$B$的坐标是$(x,y,z)$.　（　×　）

(3)若四边形$ABCD$是平行四边形，则向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{DC}$的坐标相同.　（　√　）

2.点$A(-2,3,-4)$关于坐标平面Ozx的对称点A'的坐标为　（　　）

A.$(-2,-3,-4)$　B.$(2,-3,4)$

C.$(-2,-3,4)$　D.$(2,3,-4)$

A　**解析**：点A的坐标中横、竖坐标不变，纵坐标变为原来的相反数，即得点A'的坐标为$(-2,-3,-4)$.

3.思考并回答下列问题：

(1)空间向量的坐标和点的坐标有什么关系？

提示：如果以O为坐标原点，点A在空间直角坐标系中的坐标为(x,y,z)，那么向量$\overrightarrow{OA}$的坐标也为(x,y,z).

(2)在空间直角坐标系中，坐标轴上点的坐标有何特征？

提示：x轴上的点的纵坐标、竖坐标都为0，即$(x,0,0)$；

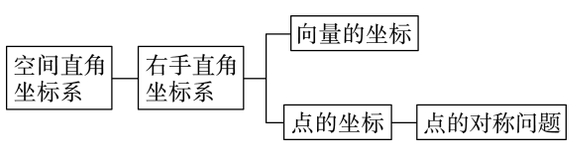
y轴上的点的横坐标、竖坐标都为0，即$(0,y,0)$；

z轴上的点的横坐标、纵坐标都为0，即$(0,0,z)$.

(3)如何求空间直角坐标系中某点的坐标？

提示：求某点的坐标时，一般先找这一点在某一坐标平面内的射影，确定其两个坐标，再找出它在另一坐标轴上的射影（或者利用它到这个坐标平面的距离）进而确定第三个坐标.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 理解空间中点的坐标

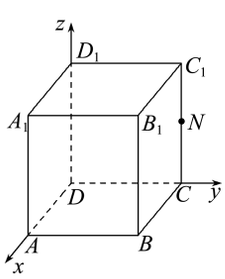
1.已知点A在基底$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$下的坐标为$(8,6,4)$，其中$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{k}+\boldsymbol{i}$，则点$A$在基底$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$下的坐标是　（　　）

A.$(12,14,10)$　B.$(10,12,14)$

C.$(14,12,10)$　D.$(4,3,2)$

A　**解析**：设点A在基底$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$下对应的向量为$\boldsymbol{p}$，则$\boldsymbol{p}=8\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}=8\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}+4\boldsymbol{k}+4\boldsymbol{i}=12\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k}$，故点$A$在基底$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$下的坐标是$(12,14,10)$.

2.如图，在长方体$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$中，$|AB|=4$，$|AD|=3$，$|AA_1|=5$，N为棱CC_1的中点，分别以DA，DC，DD_1所在的直线为x轴、y轴、z轴，建立空间直角坐标系.



(1)求点A，B，C，D，A_1，B_1，C_1，D_1的坐标；

(2)求点N的坐标.

解：(1)显然$D(0,0,0)$，

因为点A在x轴的正半轴上，且$|AD|=3$，

所以$A(3,0,0)$.同理，可得$C(0,4,0)$，$D_1(0,0,5)$.

因为点B在坐标平面Oxy内，$BC\perp CD$，$BA\perp AD$，所以$B(3,4,0)$.

同理，可得$A_1(3,0,5)$，$C_1(0,4,5)$.

与B的坐标相比，点B_1的坐标中只有竖坐标不同，$|BB_1|=|AA_1|=5$，故$B_1(3,4,5)$.

(2)由(1)知$C(0,4,0)$，$C_1(0,4,5)$，

所以C_1C的中点N的坐标为$\left(\frac{0+0}{2},\frac{4+4}{2},\frac{0+5}{2}\right)$，

故$N\left(0,4,\frac{5}{2}\right)$.

【探究总结】

确定空间直角坐标系中某点的坐标的方法

设该点为P，点P在x轴、y轴、z轴上的射影分别为A，B，C，则$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.若点$A$，$B$，$C$在$x$轴、$y$轴、$z$轴上的坐标分别为$x$，$y$，$z$，则点$P$的坐标为$(x,y,z)$，且$\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$.

任务2 掌握空间中点的对称

探究活动

例1　（教材P22复习巩固题2改编）在空间直角坐标系中，已知点$P(-2,1,4)$.

(1)求点P关于x轴的对称点的坐标；

(2)求点P关于Oxy平面的对称点的坐标；

(3)求点P关于点$M(2,-1,-4)$的对称点的坐标.

解：(1)由于点P关于x轴对称后，它在x轴上的坐标不变，在y轴、z轴上的坐标变为原来的相反数，所

以对称点 P_1 的坐标为(−2,−1,−4).

(2)由于点 P 关于 Oxy 平面对称后,它在 x 轴、y 轴上的坐标不变,在 z 轴上的坐标变为原来的相反数,所以对称点 P_2 的坐标为(−2,1,−4).

(3)设对称点为 $P_3(x,y,z)$,则点 M 为线段 PP_3 的中点.由中点坐标公式,可得 $x=2\times2-(-2)=6$,$y=2\times(-1)-1=-3$,$z=2\times(-4)-4=-12$,所以 $P_3(6,-3,-12)$.

【探究总结】

在空间直角坐标系中,任一点 $P(a,b,c)$ 的几种特殊的对称点的坐标如下:

已知点	对称轴或对称中心	对称点坐标
$P(a,b,c)$	x 轴	$(a,-b,-c)$
	y 轴	$(-a,b,-c)$
	z 轴	$(-a,-b,c)$
	Oxy 平面	$(a,b,-c)$
	Oyz 平面	$(-a,b,c)$
	Ozx 平面	$(a,-b,c)$
	原点	$(-a,-b,-c)$

应用迁移

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,点(2,3,2)关于 Oxy 平面对称的点的坐标为　(　　)

A.(2,3,−2)　　B.(−2,−3,−2)

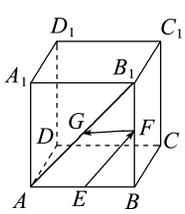
C.(−2,−3,2)　　D.(2,−3,−2)

A　**解析**:因为点关于 Oxy 平面的对称点,横坐标、纵坐标不变,而竖坐标互为相反数,所以点(2,3,2)关于 Oxy 平面的对称的点的坐标为(2,3,−2).故选 A.

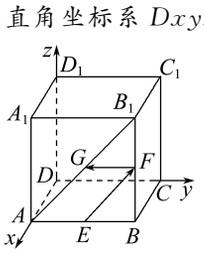
任务3 掌握空间中向量的坐标

探究活动

例 2　如图,在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,E 是 AB 的中点,F 是 BB_1 的中点,G 是 AB_1 的中点.试建立适当的空间直角坐标系,并确定 E,F,G 三点的坐标及向量 $\overrightarrow{EF}$,$\overrightarrow{FG}$ 的坐标.



解:如图,以 DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴,建立空间直角坐标系 $Dxyz$.



由于正方体的棱长为 1,则 $D(0,0,0)$,$E\left(1,\frac{1}{2},0\right)$,$F\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$,$G\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,

所以 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DE}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{DG}-\overrightarrow{DF}=\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$.

[一题多思]

思考 1.如何求向量的坐标?

提示:(1)起点在原点的向量,点 A 的坐标和向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标形式完全相同,其中 O 为坐标原点.

(2)起点不在原点的向量,其坐标可以通过向量的运算求得.

思考 2.若本例的条件不变,求向量 $\overrightarrow{A_1F}$ 的坐标.

解:由题图和例 2 的解析,知 $A_1(1,0,1)$,$F\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$,则 $\overrightarrow{A_1F}=\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DA_1}=\left(0,1,-\frac{1}{2}\right)$.

【探究总结】

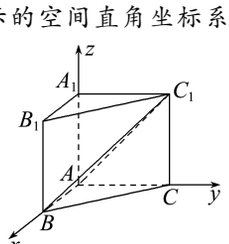
1.空间中向量的坐标:在空间直角坐标系中,$\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$ 为坐标向量,由空间向量基本定理知,存在唯一的有序实数组 (x,y,z) 使得空间向量 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.当 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 为单位正交基底时,(x,y,z) 即为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标,也可先求出向量两个端点的坐标,进而求出向量的坐标.

2.在空间直角坐标系中,若点 A,B 的坐标分别为 (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),则线段 AB 的中点坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

应用迁移

已知在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,$\angle BAC=90^\circ$,$AB=AC=AA_1=4$.试建立适当的空间直角坐标系,分别求出向量 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC_1}$,$\overrightarrow{BC_1}$ 的坐标.

解:建立如图所示的空间直角坐标系,



设 $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{i}$,$\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{j}$,$\frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{k}$,

则 $\overrightarrow{AB}=4\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}=(4,0,0)$,

$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AC}=0\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}=(0,4,4)$,

$\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}=-4\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}=(-4,4,4)$.

课后素养评价（五）

基础落实

1. 在空间直角坐标系中，已知点 $A(4,-3,5)$，$B(-2,1,-7)$，则线段 AB 的中点坐标是　　（　　）

A.$(2,-2,-2)$　　B.$(1,-1,-1)$

C.$(1,1,1)$　　D.$(2,2,2)$

B　**解析**：在空间直角坐标系中，点 $A(4,-3,5)$，$B(-2,1,-7)$，则线段 AB 的中点坐标是 $\left(\frac{4-2}{2},\frac{-3+1}{2},\frac{5-7}{2}\right)$，即$(1,-1,-1)$.故选 B.

2. 在空间直角坐标系中，点 $P(x,2\,024,2\,025)(x\in\mathbf{R})$的集合表示　　（　　）

A.一条直线

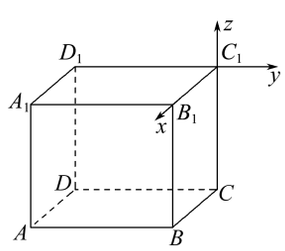
B.一个平行于 Oxy 平面的平面

C.一个平行于 Ozx 平面的平面

D.两条直线

A　**解析**：点 P 的纵坐标与竖坐标不变，只有横坐标发生变化，在空间中表示一条直线.故选 A.

3. 在如图所示的空间直角坐标系中，单位正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A 关于 y 轴对称的点的坐标是　　（　　）



A.$(-1,-1,1)$　　B.$(1,-1,1)$

C.$(1,-1,-1)$　　D.$(-1,-1,-1)$

A　**解析**：由题图可知，点 $A(1,-1,-1)$，所以点 A 关于 y 轴对称的点的坐标为$(-1,-1,1)$.故选 A.

4. 已知$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$是空间的一个单位正交基底，则向量 $\boldsymbol{b}=-5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}$ 用坐标形式可表示为_____.

$(-5,0,2)$　**解析**：因为$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$是空间的一个单位正交基底，则有 $\boldsymbol{b}=-5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}=(-5,0,2)$.

所以向量 $\boldsymbol{b}=-5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}$ 用坐标形式表示为$(-5,0,2)$.

5. 已知空间直角坐标系 $Oxyz$.

(1)哪个坐标平面与 x 轴垂直？哪个坐标平面与 y 轴垂直？哪个坐标平面与 z 轴垂直？

(2)写出点 $P(3,1,5)$在三个坐标平面内的射影的坐标.

解：(1)由于三条坐标轴两两互相垂直，所以 Oyz 平面与 x 轴垂直，Ozx 平面与 y 轴垂直，Oxy 平面与 z 轴垂直.

(2)过点 P 作 $PP_1\perp Oxy$ 平面(图略)，则射影为$(3,1,0)$，即点 P 在 Oxy 平面上的射影为$(3,1,0)$.同理，点 P 在 Oyz 平面上的射影为$(0,1,5)$，点 P 在 Ozx 平面上的射影为$(3,0,5)$.

能力提升

1. 已知在空间直角坐标系中，点 B 是点 $A(2,1,-5)$在坐标平面 Oyz 内的射影，则 B 的坐标为　　（　　）

A.$(0,1,-5)$　　B.$(2,0,-5)$

C.$(2,1,0)$　　D.$(2,-1,-5)$

A　**解析**：在空间直角坐标系中，点 B 是点 $A(2,1,-5)$在坐标平面 Oyz 内的射影，所以点 B 的坐标为$(0,1,-5)$.

2. 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，点$(3,-4,5)$关于平面 Oxy 对称的点为　　（　　）

A.$(-3,4,-5)$

B.$(3,-4,-5)$

C.$(3,4,-5)$

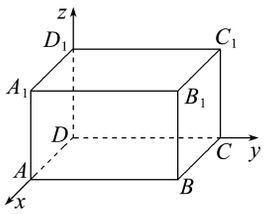
D.$(-3,-4,-5)$

B　**解析**：设所求点的坐标为(x,y,z)，

根据关于平面 Oxy 对称的两个点的横纵坐标不变，竖坐标互为相反数，

得 $\begin{cases}x=3,\\ y=-4,\\ z=-5,\end{cases}$ 故该点为$(3,-4,-5)$.

3. (多选)如图，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=5$，$AD=4$，$AA_1=3$，以直线 DA，DC，DD_1 分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系 $Dxyz$，则下列结论正确的有　　（　　）



A.点 B_1 的坐标为(4,5,3)

B.点 C_1 关于点 B 对称的点为(5,8,−3)

C.点 A 关于直线 BD_1 对称的点为(0,5,3)

D.点 C 关于平面 ABB_1A_1 对称的点为(8,5,0)

ACD　**解析**：因为在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=5$，$AD=4$，$AA_1=3$，

所以点 B_1 的坐标为(4,5,3)，故 A 正确.

易知 $C_1(0,5,3)$，$B(4,5,0)$，

设点 C_1 关于点 B 对称的点为 (x_0,y_0,z_0)，

则 $\frac{x_0}{2}=4$，$\frac{y_0+5}{2}=5$，$\frac{z_0+3}{2}=0$，

解得 $x_0=8$，$y_0=5$，$z_0=-3$.

则点 C_1 关于点 B 对称的点为(8,5,−3)，故 B 错误.

由立体几何的特征知，点 A 关于直线 BD_1 对称的点为 $C_1=(0,5,3)$，故 C 正确.

由立体几何的特征知，点 C 关于平面 ABB_1A_1 对称的点为(8,5,0)，故 D 正确.

故选 ACD.

4.(多选)在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，若以 $A(1,2,3)$，$B(2,-1,0)$，$C(-1,2,0)$，D 四点为顶点可以构成一个平行四边形，则点 D 的坐标可以为(　　)

A.(0,−1,−3)　　B.(−2,5,3)

C.(4,−1,3)　　D.(3,−2,0)

ABC　**解析**：由题意得 $\overrightarrow{AB}=(1,-3,-3)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,0,-3)$，$\overrightarrow{BC}=(-3,3,0)$.

设点 D 的坐标为 (x,y,z)，

若四边形 $ABDC$ 为平行四边形，则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，则 $(1,-3,-3)=(x+1,y-2,z)$，

所以点 D 的坐标为(0,−1,−3)；

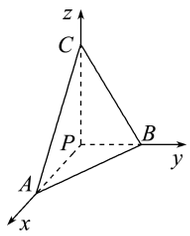
若四边形 $ABCD$ 为平行四边形，则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，

则 $(1,-3,-3)=(-x-1,-y+2,-z)$，所以点 D 的坐标为(−2,5,3)；

若四边形 $ADBC$ 为平行四边形，则 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$，

则 $(x-1,y-2,z-3)=(3,-3,0)$，所以点 D 的坐标为(4,−1,3).

5.在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，PA，PB，PC 两两垂直，且 $PA=a$，$PB=b$，$PC=c$.以 1 为单位长度，建立如图所示的空间直角坐标系，则△ABC 的重心 G 的坐标是_____.



$\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3},\frac{c}{3}\right)$　**解析**：由题意知 $A(a,0,0)$，$B(0,b,0)$，$C(0,0,c)$.

由重心坐标公式得点 G 的坐标为 $\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3},\frac{c}{3}\right)$.

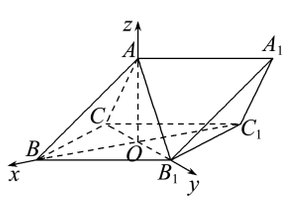
6.在空间直角坐标系中，已知点 $P(5,1,a)$ 与 $Q(5,b,4)$ 关于坐标平面 Oxy 对称，则 $a+b=$_____.

−3　**解析**：在空间直角坐标系中，两点 $P(5,1,a)$ 与 $Q(5,b,4)$ 关于坐标平面 Oxy 对称，

则 $b=1$，$a=-4$，所以 $a+b=-3$.

自我超越

如图，在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，侧面 BB_1C_1C 是边长为 2 的菱形，$\angle CBB_1=60°$，BC_1 交 B_1C 于点 O，$AO\perp$ 侧面 BB_1C_1C，且△AB_1C 为等腰直角三角形，建立空间直角坐标系 $Oxyz$，则点 A_1 的坐标为(　　)



A.$(-1,\sqrt{3},1)$　　B.$(-1,2,\sqrt{3})$

C.$(-\sqrt{3},1,1)$　　D.$(-\sqrt{3},0,1)$

C　**解析**：三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，因为侧面 BB_1C_1C 是边长为 2 的菱形，$\angle CBB_1=60°$，BC_1 交 B_1C 于点 O，所以△BB_1C 为等边三角形，所以 $OB=\sqrt{3}$，$OB_1=OC=1$.又因为 $AO\perp$ 侧面 BB_1C_1C，且△AB_1C 为等腰直角三角形，所以 $AO=1$，所以点 $A(0,0,1)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$B_1(0,1,0)$.设点 $A_1(x,y,z)$，$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},0,-1)$，$\overrightarrow{A_1B_1}=(-x,1-y,-z)$，又 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$，所以 $\begin{cases}-x=\sqrt{3},\\1-y=0,\\-z=-1,\end{cases}$ 解得 $x=-\sqrt{3}$，$y=1$，$z=1$，故点 A_1 的坐标为 $(-\sqrt{3},1,1)$.

1.3.2　空间向量运算的坐标表示

学习任务目标

1.掌握空间向量及其线性运算的坐标表示.
2.掌握空间向量的数量积的坐标表示.
3.会根据向量的坐标判断两个向量是否共线或垂直.
4.掌握向量的长度公式、两向量的夹角公式.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　空间向量的坐标运算

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$.

向量运算	坐标表示
加法	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$
减法	$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$
数乘	$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3),\lambda\in\mathbf{R}$
数量积	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

知识点二　空间向量的平行、垂直及模、夹角

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$.

名称	向量表示	坐标表示
平行	$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ $(\lambda\in\mathbf{R})$	$a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2,a_3=\lambda b_3$ $(\lambda\in\mathbf{R})$
垂直	$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$
模	$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$	$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$
夹角	$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert}$	$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

知识点三　空间两点间的距离公式

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间中任意两点，则 $P_1P_2=\lvert\overrightarrow{P_1P_2}\rvert=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

【概念辨析】

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)若 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$.　（　×　）

(2)若 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$.　（　√　）

2.已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1,0)$，$\boldsymbol{b}=(-1,0,2)$，且 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 互相垂直，则 k 的值是　（　　）

A.1　　B.$\dfrac{1}{5}$　　C.$\dfrac{3}{5}$　　D.$\dfrac{7}{5}$

D　**解析**：由题意得 $(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，所以 $2k\lvert\boldsymbol{a}\rvert^2-k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\lvert\boldsymbol{b}\rvert^2=0$.

又 $\lvert\boldsymbol{a}\rvert^2=2$，$\lvert\boldsymbol{b}\rvert^2=5$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$，所以 $4k+k-2-5=0$，解得 $k=\dfrac{7}{5}$.

3.思考并回答下列问题：

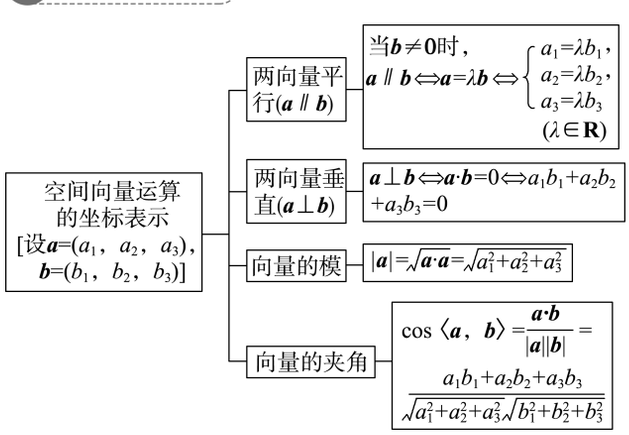
(1)空间向量运算的坐标表示与平面向量运算的坐标表示有何联系？

提示：空间向量运算的坐标表示与平面向量运算的坐标表示完全一致，如一个空间向量的坐标等于表示此向量的有向线段的终点坐标减去起点坐标.

(2)已知点 $A(x,y,z)$，则点 A 到原点的距离是多少？

提示：设原点为 O，则 $OA=\lvert\overrightarrow{OA}\rvert=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 掌握空间向量的坐标运算

1.(教材 P22 练习题 1 改编)已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,2,1)$,$\boldsymbol{b}=(2,4,0)$,则 $4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=$　　(　　)

A.$(16,0,4)$　　B.$(8,16,4)$

C.$(8,-16,4)$　　D.$(8,0,4)$

D　**解析**:$4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=4(3,2,1)-2(2,4,0)=(12,8,4)-(4,8,0)=(8,0,4)$.

2.已知点 $A(1,2,1)$,$B(4,11,4)$,$D(1,1,1)$,若点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$,则 $|\overrightarrow{PD}|=$　　(　　)

A.37　　B.$\sqrt{57}$

C.57　　D.$2\sqrt{57}$

B　**解析**:设 $P(x,y,z)$,

因为 $A(1,2,1)$,$B(4,11,4)$,$D(1,1,1)$,

所以 $\overrightarrow{AP}=(x-1,y-2,z-1)$,$\overrightarrow{PB}=(4-x,11-y,4-z)$.

又因为 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$,

所以 $x-1=8-2x$,$y-2=22-2y$,$z-1=8-2z$,

解得 $x=3$,$y=8$,$z=3$,

所以 $P(3,8,3)$,$\overrightarrow{PD}=(-2,-7,-2)$,

所以 $|\overrightarrow{PD}|=\sqrt{4+49+4}=\sqrt{57}$.

3.已知空间向量 $\boldsymbol{a}=(-2,1,5)$,$\boldsymbol{b}=(1,3,-4)$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$_____.

-19　**解析**:因为 $\boldsymbol{a}=(-2,1,5)$,$\boldsymbol{b}=(1,3,-4)$,

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2\times1+1\times3+5\times(-4)=-19$.

【探究总结】

1.一个向量的坐标等于表示这个向量的有向线段的终点坐标减去起点坐标.

2.在确定了向量的坐标后,可应用空间向量的加减、数乘、数量积的坐标运算公式进行计算,且要熟练应用下列公式:

(1)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$;

(2)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$.

任务2 掌握空间向量平行、垂直及两向量夹角的坐标表示

探究活动

例 1　已知向量 $\boldsymbol{a}=(\lambda+1,1,2\lambda)$,$\boldsymbol{b}=(6,2m-1,2)$.

(1)若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,分别求 λ 与 m 的值;

(2)若 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}=(2,-2\lambda,-\lambda)$ 垂直,求 $\boldsymbol{a}$.

解:(1)由 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,得 $(\lambda+1,1,2\lambda)=k(6,2m-1,2)$,

所以 $\begin{cases}\lambda+1=6k,\\1=k(2m-1),\\2\lambda=2k,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=k=\dfrac{1}{5},\\m=3,\end{cases}$

所以 $\lambda=\dfrac{1}{5}$,$m=3$.

(2)因为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$,

所以 $\begin{cases}(\lambda+1)^2+1^2+(2\lambda)^2=5,\\(\lambda+1,1,2\lambda)\cdot(2,-2\lambda,-\lambda)=0,\end{cases}$

化简,得 $\begin{cases}5\lambda^2+2\lambda=3,\\2-2\lambda^2=0,\end{cases}$

解得 $\lambda=-1$,

所以 $\boldsymbol{a}=(0,1,-2)$.

[一题多思]

思考 1.如何根据两个向量平行或垂直求参数?

提示:已知两向量平行或垂直求参数值,需利用平行、垂直的充要条件,将位置关系转化为坐标关系,列方程(组)求解.

思考 2.在本例中,若向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{d}=(0,1,1)$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$,求实数 λ 的值.

解:由题意得 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{d}|}=\dfrac{1+2\lambda}{\sqrt{5\lambda^2+2\lambda+2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,解得 $\lambda=1$.

【探究总结】

1.向量平行与垂直问题主要有两种题型:

(1)平行与垂直的判断;

(2)利用平行与垂直求参数的值或解决其他问题,即平行与垂直的应用.

解题时要注意:

(1)适当引入参数(比如向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ 平行,可设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$),建立关于参数的方程(组);

(2)最好选择坐标形式,以达到简化运算的目的.

2.向量夹角的坐标表示比较复杂,可以熟记公式 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$,再将坐标代入计算即可.

应用迁移

1.已知 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 是空间的一个基底,$\boldsymbol{m}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{n}=x(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+y(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})+4(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$,若 $\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$,则 $x+y=$　　(　　)

A.0　　B.-6

C.6　　D.5

C　**解析**:因为 $\boldsymbol{m}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{n}=x(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+y(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})+4(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$,

$\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$,所以存在实数 λ,使 $\boldsymbol{n}=\lambda\boldsymbol{m}$,

所以 $x(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+y(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})+4(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})=\lambda(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$,

即$(x+4)\boldsymbol{a}+(-x+y)\boldsymbol{b}+(-y+4)\boldsymbol{c}=2\lambda\boldsymbol{a}+3\lambda\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{c}$，

所以$\begin{cases}x+4=2\lambda,\\-x+y=3\lambda,\\4-y=-\lambda,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=0,\\\lambda=2,\\y=6,\end{cases}$所以$x+y=6$.故选C.

2.已知向量$\boldsymbol{a}=(1,x,3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,4,y)$.

(1)若$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则$x-y=$_____；

(2)若$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则$4x+3y=$_____.

(1)4　(2)2　**解析**：(1)因为$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，所以$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

所以$\begin{cases}\lambda=-2,\\x\lambda=4,\\3\lambda=y,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=-2,\\x=-2,\\y=-6.\end{cases}$

所以$x-y=4$.

(2)因为$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2+4x+3y=0$，即$4x+3y=2$.

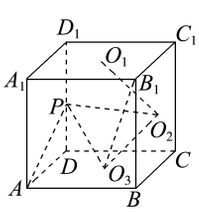
3.已知向量$\boldsymbol{a}=(1,2,3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,-4,-6)$，$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{14}$.若$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=7$，求$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{c}$的夹角.

解：因为$\boldsymbol{a}=(1,2,3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,-4,-6)$，所以$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,-2,-3)$，所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{14}$.因为$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=7$，所以$\cos\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\dfrac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|}=\dfrac{1}{2}$，即$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$的夹角为$60°$.因为$\boldsymbol{a}=(1,2,3)$与$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,-2,-3)$的方向相反，所以$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{c}$的夹角为$120°$.

任务3　掌握空间向量坐标运算的应用

探究活动

例2　在棱长为1的正方体$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$中，P为DD_1的中点，O_1，O_2，O_3分别是平面$A_1B_1C_1D_1$，平面BB_1C_1C，平面$ABCD$的中心.

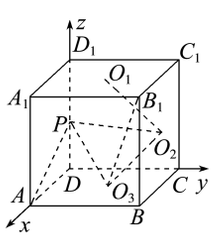


(1)求证：$B_1O_3\perp PA$；

(2)求异面直线PO_3与O_1O_2所成角的余弦值；

(3)求PO_2的长.

(1)**证明**：以D为坐标原点，DA，DC，DD_1所在直线分别为x轴、y轴、z轴，建立如图所示的空间直角坐标系$Dxyz$.



则$B_1(1,1,1)$，$O_3\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$，$P\left(0,0,\dfrac{1}{2}\right)$，$A(1,0,0)$，所以$\overrightarrow{B_1O_3}=\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},-1\right)$，$\overrightarrow{PA}=\left(1,0,-\dfrac{1}{2}\right)$，

所以$\overrightarrow{B_1O_3}\cdot\overrightarrow{PA}=-\dfrac{1}{2}+0+\dfrac{1}{2}=0$，

即$\overrightarrow{B_1O_3}\perp\overrightarrow{PA}$.

所以$B_1O_3\perp PA$.

(2)**解**：因为$O_1\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1\right)$，$O_2\left(\dfrac{1}{2},1,\dfrac{1}{2}\right)$，

所以$\overrightarrow{O_1O_2}=\left(0,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$.

又因为$\overrightarrow{PO_3}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$，

所以$\cos\langle\overrightarrow{PO_3},\overrightarrow{O_1O_2}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{PO_3}\cdot\overrightarrow{O_1O_2}}{|\overrightarrow{PO_3}||\overrightarrow{O_1O_2}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

所以异面直线PO_3与O_1O_2所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(3)**解**：因为$P\left(0,0,\dfrac{1}{2}\right)$，$O_2\left(\dfrac{1}{2},1,\dfrac{1}{2}\right)$，

所以$|PO_2|=|\overrightarrow{PO_2}|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}-0\right)^2+(1-0)^2+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

【探究总结】

1.空间向量的数量积应用很广泛，其主要用途有

(1)求向量的模：$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$；

(2)求向量的夹角：$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$；

(3)证明向量垂直：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

2.利用向量数量积的坐标公式求异面直线所成角的步骤：

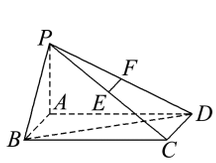
(1)根据几何图形的特点建立适当的空间直角坐标系；

(2)利用已知条件写出相关点的坐标，进而求得相关向量的坐标；

(3)利用向量数量积的坐标运算求得异面直线上有关向量的夹角，并将其转化为异面直线所成的角.

应用迁移

如图，在底面是矩形的四棱锥P-$ABCD$中，$PA\perp$底面$ABCD$，E，F分别是PC，PD的中点，$PA=AB=1$，$BC=2$.



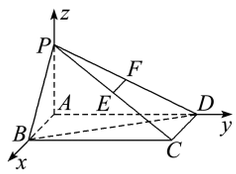
(1)求B，F两点间的距离；

(2)求证：$EF\parallel$平面PAB；

(3)求证：平面$PAD\perp$平面PDC.

(1)**解**：由题意可知，$PA\perp$平面$ABCD$，$AB\perp AD$，以A为原点，AB所在直线为x轴，AD所在直线为y

轴，AP 所在直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,2,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,1)$，所以 $E\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$，$F\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{BF}=\left(-1,1,\frac{1}{2}\right)$，$|\overrightarrow{BF}|=\frac{3}{2}$，即 B，F 两点间的距离为 $\frac{3}{2}$.

(2)**证明**：由(1)知，$\overrightarrow{EF}=\left(-\frac{1}{2},0,0\right)$，$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，所以 $\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，即 $\overrightarrow{EF}\parallel\overrightarrow{AB}$，即 $EF\parallel AB$.

又 $AB\subset$ 平面 PAB，$EF\not\subset$ 平面 PAB，

所以 $EF\parallel$ 平面 PAB.

(3)**证明**：由(1)知，$\overrightarrow{AP}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{DC}=(1,0,0)$，

所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DC}=(0,0,1)\cdot(1,0,0)=0$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}=(0,2,0)\cdot(1,0,0)=0$，

则 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{DC}$，即 $AP\perp DC$，$AD\perp DC$.

又 $AP\cap AD=A$，且 AP，$AD\subset$ 平面 PAD，

所以 $DC\perp$ 平面 PAD.

又 $DC\subset$ 平面 PDC，

所以平面 $PAD\perp$ 平面 PDC.

课后素养评价(六)

基础落实

1.已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,3,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,0)$，则 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=$　　(　　)

A.$(-3,1,-2)$　　B.$(5,5,-2)$

C.$(3,-1,2)$　　D.$(-5,-5,2)$

A　**解析**：因为 $2\boldsymbol{b}=(4,2,0)$，所以 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(-3,1,-2)$.故选 A.

2.已知 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,1,\sin\alpha)$，$\boldsymbol{b}=(\sin\alpha,1,\cos\alpha)$，则向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角是　　(　　)

A.90°　　B.60°　　C.45°　　D.30°

A　**解析**：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\cos\alpha+\sin\alpha,2,\sin\alpha+\cos\alpha)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(\cos\alpha-\sin\alpha,0,\sin\alpha-\cos\alpha)$，

所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，

所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.故选 A.

3.空间向量 $\boldsymbol{a}=(0,1,-1)$ 在 $\boldsymbol{b}=(1,2,3)$ 上的投影向量为　　(　　)

A.$-\frac{1}{14}\boldsymbol{b}$　　B.$-\frac{\sqrt{14}}{14}\boldsymbol{b}$

C.$-\frac{1}{14}$　　D.$-\frac{\sqrt{14}}{14}$

A　**解析**：与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量为 $\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}\boldsymbol{b}$，由 $\boldsymbol{a}=(0,1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,3)$，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0+2-3=-1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$，

所以向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{-1}{\sqrt{14}}\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}\boldsymbol{b}=-\frac{1}{14}\boldsymbol{b}$.故选 A.

4.(多选)已知空间向量 $\boldsymbol{a}=(-2,-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(3,4,5)$，则下列结论正确的有　　(　　)

A.$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\parallel\boldsymbol{a}$

B.$5|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{b}|$

C.$\boldsymbol{a}\perp(5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b})$

D.$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

BCD　**解析**：对于 A，$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2(-2,-1,1)+(3,4,5)=(-1,2,7)$，因为 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\neq\lambda\boldsymbol{a}$，所以不平行，故 A 错误；对于 B，因为 $5|\boldsymbol{a}|=5\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+1^2}=5\sqrt{6}$，$\sqrt{3}|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}\sqrt{3^2+4^2+5^2}=5\sqrt{6}$，所以 $5|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{b}|$，故 B 正确；对于 C，$5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}=5(-2,-1,1)+6(3,4,5)=(8,19,35)$，$\boldsymbol{a}\cdot(5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b})=-2\times8-1\times19+1\times35=0$，所以 $\boldsymbol{a}\perp(5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b})$，故 C 正确；对于 D，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值为 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{-6-4+5}{\sqrt{6}\cdot5\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$，故 D 正确.

5.若 $\overrightarrow{AB}=(-4,6,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(4,3,-2)$，$|\boldsymbol{a}|=1$，且 $\boldsymbol{a}\perp\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{a}\perp\overrightarrow{AC}$，则 $\boldsymbol{a}=$_____.

$\left(\frac{3}{13},\frac{4}{13},\frac{12}{13}\right)$ 或 $\left(-\frac{3}{13},-\frac{4}{13},-\frac{12}{13}\right)$　**解析**：设 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，由题意有 $\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ |\boldsymbol{a}|=1,\end{cases}$ 代入坐标可解得 $\begin{cases}x=\frac{3}{13},\\ y=\frac{4}{13},\\ z=\frac{12}{13}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{3}{13},\\ y=-\frac{4}{13},\\ z=-\frac{12}{13}.\end{cases}$

6.已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,0,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2,0)$.

(1)求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角；

(2)若 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}$ 垂直，求实数 t 的值.

解：(1)因为 $\boldsymbol{a}=(-1,0,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2,0)$，

所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-2,2,1)$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{4+4+1}=3$.

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\dfrac{2+0+1}{\sqrt{2}\times3}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$.

(2)因为 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,-2,2)$，$\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}=(-1-t,2t,1)$，

又 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}$ 垂直，所以 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b})=0$，即 $-1\times(-1-t)+2t\times(-2)+1\times2=0$，解得 $t=1$.

能力提升

1.已知空间向量 $\boldsymbol{a}=(1,n,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,1,2)$，若 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，则 $|\boldsymbol{a}|=$　　(　　)

A.$\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$　　B.$\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

C.$\dfrac{\sqrt{37}}{2}$　　D.$\dfrac{\sqrt{21}}{2}$

B　**解析**：因为 $\boldsymbol{a}=(1,n,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,1,2)$，所以 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(4,2n-1,2)$.

因为 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，所以 $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以 $-8+2n-1+4=0$，解得 $n=\dfrac{5}{2}$，所以 $\boldsymbol{a}=\left(1,\dfrac{5}{2},2\right)$，所以 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1+\dfrac{25}{4}+4}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.故选 B.

2.(多选)已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1,m)$，$\boldsymbol{b}=(-2,m-1,2)$，则下列结论正确的有　　(　　)

A.若 $|\boldsymbol{a}|=2$，则 $m=\pm\sqrt{2}$

B.若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $m=-1$

C.不存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$

D.若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,-2,-2)$

AC　**解析**：对于 A，由 $|\boldsymbol{a}|=2$，可得 $\sqrt{1^2+(-1)^2+m^2}=2$，解得 $m=\pm\sqrt{2}$，故 A 选项正确；对于 B，由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，可得 $-2-m+1+2m=0$，解得 $m=1$，故 B 选项错误；对于 C，若存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，则 $\begin{cases}1=-2\lambda,\\-1=\lambda(m-1),\\m=2\lambda,\end{cases}$ 显然 λ 无解，即不存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，故 C 选项正确；对于 D，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$，则 $-2-m+1+2m=-1$，解得 $m=0$，于是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,-2,2)$，故 D 选项错误.故选 AC.

3.在空间四边形 $ABCD$ 中，若向量 $\overrightarrow{AB}=(-3,5,2)$，$\overrightarrow{CD}=(-7,-1,-4)$，$E$，$F$ 分别为线段 BC，AD 的中点，则 $\overrightarrow{EF}$ 的坐标为　　(　　)

A.$(2,3,3)$　　B.$(-2,-3,-3)$

C.$(5,-2,1)$　　D.$(-5,2,-1)$

B　**解析**：设 O 为坐标原点，因为 E，F 分别为线段 BC，AD 的中点，

所以 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OF}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})$，$\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

所以 $\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

$=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD})=\dfrac{1}{2}[(3,-5,-2)+(-7,-1,-4)]$

$=\dfrac{1}{2}(-4,-6,-6)=(-2,-3,-3)$.

4.已知 $\overrightarrow{PA}=(2,1,-3)$，$\overrightarrow{PB}=(-1,2,3)$，$\overrightarrow{PC}=(\lambda,6,-9)$，若 P，A，B，C 四点共面，则 $\lambda=$　　(　　)

A.3　　B.-3　　C.7　　D.-7

C　**解析**：由 P，A，B，C 四点共面，可得 $\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PC}$ 共面，

设 $\overrightarrow{PC}=x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}=(2x-y,x+2y,-3x+3y)=(\lambda,6,-9)$，

则 $\begin{cases}2x-y=\lambda,\\x+2y=6,\\-3x+3y=-9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=4,\\y=1,\\\lambda=7.\end{cases}$ 故选 C.

自我超越

已知 $O(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,-1,1)$，$\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$，则 $\lambda=$　　(　　)

A.$\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B.$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C.$-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$　　D.$\pm\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

B　**解析**：因为 $O(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,-1,1)$，

所以 $\overrightarrow{OA}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{OB}=(0,-1,1)$，

故 $\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}=(1,0,0)+\lambda(0,-1,1)=(1,-\lambda,\lambda)$.

所以 $|\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}|=\sqrt{1^2+(-\lambda)^2+\lambda^2}=\sqrt{1+2\lambda^2}$，

$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$，

$(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OB}=1\times0+(-\lambda)\times(-1)+\lambda\times1=2\lambda$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB}\rangle=\dfrac{(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=\dfrac{2\lambda}{\sqrt{1+2\lambda^2}\times\sqrt{2}}$.

因为 $\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$，

所以 $\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{2\lambda}{\sqrt{1+2\lambda^2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

解得 $\lambda=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

经检验 $\lambda=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 不合题意，舍去，所以 $\lambda=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1.4　空间向量的应用

1.4.1　用空间向量研究直线、平面的位置关系

第1课时　空间中点、直线和平面的向量表示

学习任务目标

1.能用向量语言表示空间中的点、直线与平面.
2.能用自己的语言解释直线的方向向量、平面的法向量的含义.
3.能说出求直线的方向向量与平面的法向量的一般步骤,会求直线的方向向量与平面的法向量.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　空间中点的向量表示

在空间中,我们取一定点 O 作为基点,那么空间中任意一点 P 就可以用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示.我们把向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为点 P 的位置向量.

知识点二　空间中直线的向量表示

条件	已知直线 l 上一点 A,表示直线 l 方向的向量 $\boldsymbol{a}$(即直线 l 的方向向量)
形式	在直线 l 上取 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,设 P 是直线 l 上的任意一点,由向量共线的条件可知,点 P 在直线 l 上的充要条件是存在实数 t,使得 $\overrightarrow{AP}=t\boldsymbol{a}$,即 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$

取定空间中的任意一点 O,可以得到点 P 在直线 AB 上的充要条件是存在实数 t,使 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$.

知识点三　空间中平面的向量表示

(1)通过平面 α 内的一个定点 O 和两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 来确定:

条件	已知平面 α 内两条相交直线的方向向量分别为 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,交点为 O
形式	对于平面 α 内任意一点 P,存在唯一的有序实数对 (x,y),使得 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$

取定空间任意一点 O,可以得到空间一点 P 位于平面 ABC 内的充要条件是存在实数 x,y,使 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.

(2)通过平面 α 内的一个定点 A 和平面 α 的法向量来确定:

平面的法向量	直线 $l\perp\alpha$,直线 l 的方向向量叫做平面 α 的法向量
确定平面位置	给定一个点 A 和一个向量 $\boldsymbol{a}$,那么过点 A,且以向量 $\boldsymbol{a}$ 为法向量的平面完全确定,可以表示为集合 $\{P\mid\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AP}=0\}$

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)零向量不能作为直线的方向向量.　(　√　)

(2)若向量 $\boldsymbol{v}$ 是直线 l 的方向向量,则 $\lambda\boldsymbol{v}$ $(\lambda\neq0)$ 也是直线 l 的方向向量.　(　√　)

(3)直线 l 的方向向量都平行,且方向相同.　(　×　)

(4)平面 α 的所有法向量都平行,且同向.(　×　)

(5)若 $\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的一个法向量,则 $\lambda\boldsymbol{n}$ $(\lambda\in\mathbf{R})$ 也是平面 α 的一个法向量.　(　×　)

(6)向量 $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$ 是坐标平面 Oyz 的一个法向量.　(　√　)

2.若 $A(3,6,-5)$,$B(5,10,1)$ 在直线 l 上,则直线 l 的一个方向向量为　(　　)

A.$(1,2,3)$　　B.$(1,3,2)$

C.$(2,1,3)$　　D.$(3,2,1)$

A　**解析**:因为 $\overrightarrow{AB}=(2,4,6)$,所以 $(1,2,3)$ 是直线 l 的一个方向向量.

3.思考并回答下列问题:

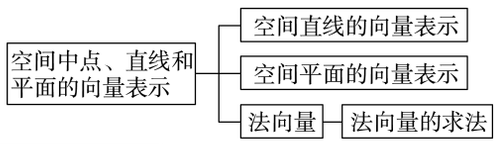
(1)如何确定直线的方向向量?

提示:设 l 是空间中的一条直线,A,B 是直线 l 上任意两点,则 $\overrightarrow{AB}$ 及与 $\overrightarrow{AB}$ 平行的非零向量均为直线 l 的方向向量.

(2)如何确定平面的法向量?

提示:设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是平面 α 内两个不共线的向量,$\boldsymbol{n}$ 为平面 α 的法向量,则求法向量的方程组为 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}=0.\end{cases}$

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 理解空间中直线的方向向量

1.若 $A(-1,0,1)$,$B(1,4,7)$ 在直线 l 上,则直线 l 的一个方向向量为　(　　)

A.$(1,2,3)$　　B.$(1,3,2)$

C.$(2,1,3)$　　D.$(3,2,1)$

A　**解析**:因为 $\overrightarrow{AB}=(2,4,6)$,所以 $(1,2,3)$ 是直线 l 的一个方向向量.

2.已知直线 l 的一个方向向量 $\boldsymbol{m}=(2,-1,3)$,且直线 l 过 $A(0,y,3)$ 和 $B(-1,2,z)$ 两点,则 $y-z=$　(　　)

A.0　　B.1　　C.$\frac{3}{2}$　　D.3

A　**解析**:已知 $A(0,y,3)$ 和 $B(-1,2,z)$,则 $\overrightarrow{AB}=(-1,2-y,z-3)$.

因为直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{m}=(2,-1,3)$,所以可设 $\overrightarrow{AB}=k\boldsymbol{m}$.

所以 $-1=2k$,$2-y=-k$,$z-3=3k$,

解得 $k=-\frac{1}{2}$,$y=z=\frac{3}{2}$.

所以 $y-z=0$.故选 A.

【探究总结】

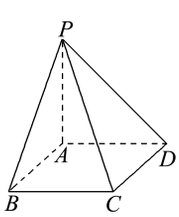
1.已知直线上 A,B 两点,则与向量 $\overrightarrow{AB}$ 共线的非零向量均是直线 AB 的方向向量.

2.已知直线的方向向量和直线上的两点求参数,只需利用向量共线的坐标表示即可求解.

任务2 求平面的法向量

探究活动

例　如图,在四棱锥 P-$ABCD$ 中,已知 $PA\perp$ 平面 $ABCD$,$PA=AB=3$,底面 $ABCD$ 为正方形.试建立适当的空间直角坐标系,分别求出下列平面的一个法向量.



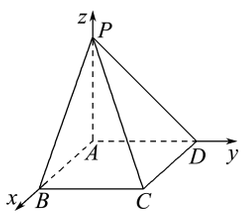
(1)平面 $ABCD$;

(2)平面 PAB;

(3)平面 PBC;

(4)平面 PCD.

解:如图,建立空间直角坐标系 $Axyz$.



(1)因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$,所以平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $(0,0,1)$.

(2)因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$,$AD\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $AD\perp PA$.因为 $AD\perp AB$,PA,$AB\subset$ 平面 PAB,$PA\cap AB=A$,所以 $AD\perp$ 平面 PAB,

所以平面 PAB 的一个法向量为 $(0,1,0)$.

(3)因为 $B(3,0,0)$,$C(3,3,0)$,$P(0,0,3)$,

所以 $\overrightarrow{PB}=(3,0,-3)$,$\overrightarrow{PC}=(3,3,-3)$.

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}3x-3z=0,\\ 3x+3y-3z=0.\end{cases}$

取 $x=1$,则 $y=0$,$z=1$,于是 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$ 为平面 PBC 的一个法向量.

(4)由(3),同理可求得平面 PCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$.

[一题多思]

思考1.一个平面的法向量是唯一的吗?

提示:一个平面的法向量不唯一,有无数个,它们互相平行.

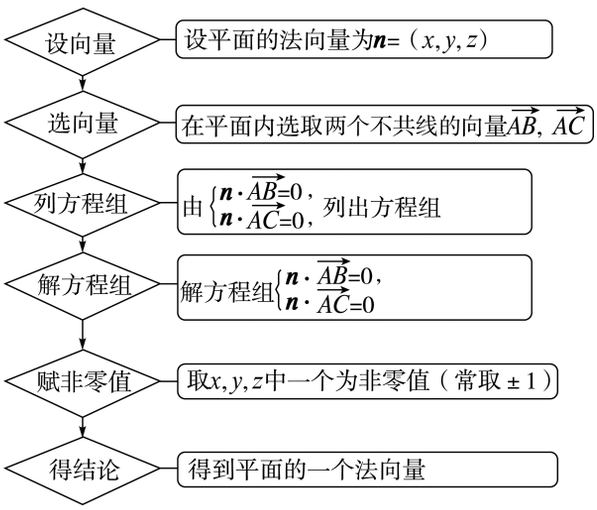
思考2.在本例中,若点 M 是线段 AD 上一点,平面 PBM 的一个法向量是 $\boldsymbol{a}=(1,2,1)$,求线段 AM 的长.

解:由本例的解析,设 $M(0,y,0)$,$0\leqslant y\leqslant 3$,则 $\overrightarrow{PM}=(0,y,-3)$,则 $\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{a}=0,\\ \overrightarrow{PM}\cdot\boldsymbol{a}=0,\end{cases}$ 解得 $y=\frac{3}{2}$,

所以线段 AM 的长为 $\frac{3}{2}$.

【探究总结】

求平面法向量的步骤



应用迁移

1.已知平面α内两个向量$\boldsymbol{a}=(-1,1,0)$,$\boldsymbol{b}=(-1,0,1)$,则平面α的一个法向量为_____.

$(1,1,1)$(答案不唯一)　**解析**:设平面α的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=-x+y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}=-x+z=0.\end{cases}$

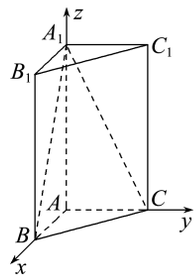
令$x=1$,则$y=z=1$,所以$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$,

所以平面α的一个法向量为$(1,1,1)$(答案不唯一).

2.如图,在直三棱柱$ABC\text{-}A_1B_1C_1$中,$AB\perp AC$,$AB=AC=1$,$AA_1=2$.以A为原点,建立如图所示的空间直角坐标系.

(1)求平面BCC_1B_1的一个法向量;

(2)求平面A_1BC的一个法向量.



解:由题易知$B(1,0,0)$,$C(0,1,0)$,$B_1(1,0,2)$,$A_1(0,0,2)$.

(1)$\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$,$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,2)$,

设平面BCC_1B_1的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x_1+y_1=0,\\ 2z_1=0,\end{cases}$

取$x_1=1$,则$y_1=1$,$z_1=0$,所以$\boldsymbol{n}=(1,1,0)$,

所以平面BCC_1B_1的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(1,1,0)$.

(2)$\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$,$\overrightarrow{BA_1}=(-1,0,2)$,

设平面A_1BC的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x_2+y_2=0,\\ -x_2+2z_2=0,\end{cases}$

取$x_2=2$,则$y_2=2$,$z_2=1$,所以$\boldsymbol{m}=(2,2,1)$,

所以平面A_1BC的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(2,2,1)$.

课后素养评价(七)

基础落实

1.已知直线l的一个方向向量$\boldsymbol{m}=(3,-2,1)$,且直线l经过$A(a,2,-1)$和$B(-2,3,b)$两点,则$a+b=$(　　)

A.-2　　B.-1　　C.1　　D.2

A　**解析**:因为$\overrightarrow{AB}=(-2-a,1,b+1)$,直线$l$的一个方向向量为$\boldsymbol{m}=(3,-2,1)$,所以有向量$\overrightarrow{AB}$与向量$\boldsymbol{m}$共线,所以$\dfrac{-2-a}{3}=\dfrac{1}{-2}=\dfrac{b+1}{1}$,解得$a=-\dfrac{1}{2}$,$b=-\dfrac{3}{2}$.所以$a+b=-2$.故选A.

2.若$\boldsymbol{a}=(1,2,-2)$,$\boldsymbol{b}=(-2,3,2)$分别为直线l_1,l_2的方向向量,则l_1与l_2的位置关系是(　　)

A.$l_1\perp l_2$

B.$l_1/\!/l_2$

C.l_1,l_2相交但不垂直

D.不能确定

A　**解析**:由题意,$\boldsymbol{a}=(1,2,-2)$,$\boldsymbol{b}=(-2,3,2)$分别为直线l_1,l_2的方向向量.因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2+6-4=0$,所以$l_1$与$l_2$的位置关系是$l_1\perp l_2$.故选A.

3.已知$\boldsymbol{a}=(1,0,-1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$分别为直线a,b的方向向量,且直线a,b均平行于平面α,则平面α的单位法向量为(　　)

A.$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

B.$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

C.$(1,1,1)$

D.$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$或$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

D　**解析**：设平面α的单位法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1$①，

因为直线a，b均平行于平面α，所以有$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{a}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{b}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-z=0②,\\ x-y=0③.\end{cases}$

由①②③可得$x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$或$x=y=z=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4.（多选）已知空间中三点$A(0,1,0)$，$B(2,2,0)$，$C(-1,3,1)$，则下列说法正确的有　（　）

A.$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$是共线向量

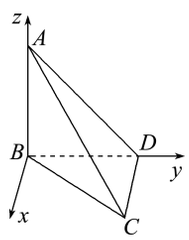
B.与$\overrightarrow{AC}$同向的单位向量的坐标是$\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

C.$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$夹角的余弦值是$-\frac{\sqrt{55}}{11}$

D.平面ABC的一个法向量的坐标是$(1,-2,5)$

BCD　**解析**：由题意得$\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,2,1)$，$\overrightarrow{BC}=(-3,1,1)$.对于A，因为$\frac{2}{-1}\neq\frac{1}{2}$，所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$不是共线向量，故A错误；对于B，与$\overrightarrow{AC}$同向的单位向量是$\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}}(-1,2,1)=\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$，故B正确；对于C，$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$夹角的余弦值是$\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{2\times(-3)+1\times1+0\times1}{\sqrt{2^2+1^2+0^2}\times\sqrt{(-3)^2+1^2+1^2}}=\frac{-5}{\sqrt{55}}=-\frac{\sqrt{55}}{11}$，故C正确；对于D，记$\boldsymbol{a}=(1,-2,5)\neq\boldsymbol{0}$，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{a}=2\times1+1\times(-2)+0\times5=0$，$\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{a}=-1\times1+2\times(-2)+1\times5=0$，从而平面$ABC$的一个法向量的坐标是$(1,-2,5)$，故D正确.

5.《九章算术》中，将四个面都为直角三角形的四面体称为“鳖臑”.如图，在“鳖臑”A-BCD中，$AB\perp$平面BCD，$\angle BDC=90°$，$BD=AB=CD$.若建立如图所示的空间直角坐标系，则平面ACD的一个法向量为_____.



(0,1,1)（答案不唯一）　**解析**：根据题意，设$BD=AB=CD=1$，则$D(0,1,0)$，$C(1,1,0)$，$A(0,0,1)$，所以$\overrightarrow{DC}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{AD}=(0,1,-1)$.

设平面ACD的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则有$\begin{cases}\overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{m}=x=0,\\ \overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{m}=y-z=0.\end{cases}$令$y=1$，可得$z=1$，$x=0$，所以$\boldsymbol{m}=(0,1,1)$为平面$ACD$的一个法向量.

能力提升

1.已知向量$\overrightarrow{OA}=(1,2,3)$，$\overrightarrow{OB}=(2,m,3)$，$\overrightarrow{OC}=(4,2,k)$.若$\overrightarrow{OA}$是平面$ABC$的法向量，则$mk$的值是　（　）

A.3　　B.2　　C.6　　D.4

A　**解析**：由题可得$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1,m-2,0)$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(3,0,k-3)$.

又$\overrightarrow{OA}$为平面ABC的法向量，

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=1\times1+2\times(m-2)+3\times0=2m-3=0$，解得$m=\frac{3}{2}$，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times3+2\times0+3(k-3)=3k-6=0$，解得$k=2$，所以$mk=3$.故选A.

2.已知平面α内有一个点$A(2,-1,2)$，平面α的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(3,1,2)$，则下列各点中，在平面α内的是　（　）

A.$(1,-1,1)$　　B.$\left(1,3,\frac{3}{2}\right)$

C.$\left(1,-3,\frac{3}{2}\right)$　　D.$\left(11,3,-\frac{3}{2}\right)$

B　**解析**：对于B，$\overrightarrow{AP}=\left(-1,4,-\frac{1}{2}\right)$，则$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=(3,1,2)\cdot\left(-1,4,-\frac{1}{2}\right)=0$，所以$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AP}$.

故点$P\left(1,3,\frac{3}{2}\right)$在平面$\alpha$内.故选B.

3.已知空间三点$A(1,1,1)$，$B(0,3,0)$，$C(-2,-1,4)$，点$P(-3,x,3)$在平面ABC内，则实数x的值为　（　）

A.1　　B.-2　　C.0　　D.-1

A　**解析**：$\overrightarrow{BA}=(1,-2,1)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,-4,4)$，$\overrightarrow{BP}=(-3,x-3,3)$，设平面$ABC$的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}a-2b+c=0,①\\ -a-2b+2c=0.②\end{cases}$

①+②得$-4b+3c=0$，

令 $c=4$，则 $b=3$，$a=2$，所以 $\boldsymbol{n}=(2,3,4)$.

因为 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{BP}$，所以 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0$，即 $-3\times2+3(x-3)+3\times4=0$，解得 $x=1$.

自我超越

已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 E 是上底面正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心，点 F 是正方体棱上的点，以点 A 为坐标原点，分别以 AB，AD，AA_1 所在的直线为 x 轴、y 轴和 z 轴建立空间直角坐标系.若平面 BEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(8,2,3)$，则点 F 所在的棱可能是　　(　　)

A.AD　　B.CD

C.CC_1　　D.DD_1

B　**解析**：由题意得，$B(2,0,0)$，$E(1,1,2)$，设 $F(x,y,z)$，$0\leqslant x,y,z\leqslant2$，所以 $\overrightarrow{BE}=(-1,1,2)$，$\overrightarrow{BF}=(x-2,y,z)$.

因为平面 BEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(8,2,3)$，

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=-8+2+6=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=8(x-2)+2y+3z=0,\end{cases}$ 即 $8x+2y+3z-16=0$.

若 F 在 AD 上，则 $x=0$，$z=0$，$y=8$，不符合题意，故 F 不在 AD 上；

若 F 在 CD 上，则 $x=\frac{3}{2}$，$y=2$，$z=0$，符合题意，故 F 可以在 CD 上；

若 F 在 CC_1 上，则 $x=2$，$y=2$，$z=-\frac{4}{3}$，不符合题意，故 F 不在 CC_1 上；

若 F 在 DD_1 上，则 $x=0$，$y=2$，$z=4$，不符合题意，故 F 不在 DD_1 上.

第 2 课时　空间中直线、平面的平行

学习任务目标

1.能用向量语言表述直线与直线、直线与平面、平面与平面的平行关系.

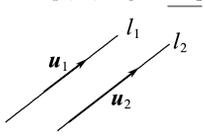
2.能用向量方法证明直线与平面、平面与平面平行的有关判定定理.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

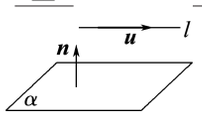
知识点一　直线与直线平行

如图，设 $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ 分别是直线 l_1，l_2 的方向向量，则 $l_1\parallel l_2\Leftrightarrow\underline{\boldsymbol{u}_1\parallel\boldsymbol{u}_2}\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbf{R}$，使得 $\boldsymbol{u}_1=\underline{\lambda\boldsymbol{u}_2}$.



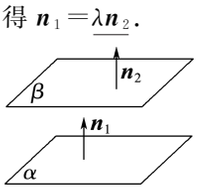
知识点二　直线与平面平行

如图，设 $\boldsymbol{u}$ 是直线 l 的方向向量，$\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的法向量，$l\not\subset\alpha$，则 $l\parallel\alpha\Leftrightarrow\underline{\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{n}}\Leftrightarrow\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=\underline{\quad0\quad}$.



知识点三　平面与平面平行

如图，设 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 分别是平面 α，β 的法向量，则 $\alpha\parallel\beta\Leftrightarrow\underline{\boldsymbol{n}_1\parallel\boldsymbol{n}_2}\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbf{R}$，使得 $\boldsymbol{n}_1=\underline{\lambda\boldsymbol{n}_2}$.



【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)直线的方向向量一定是单位向量.　　(　×　)

(2)若直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{a}=(-1,2,1)$，平面 α 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(-1,-1,1)$，$l\not\subset\alpha$，则 $l\parallel\alpha$.　　(　√　)

(3)若 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 分别是平面 α，β 的法向量，则 $\boldsymbol{n}_1\parallel\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow\alpha\parallel\beta$.　　(　√　)

(4)已知点 $A(-1,0,1)$，$B(1,4,7)$ 在直线 l 上，若点 P 在直线 l 上，则 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$，$t\in\mathbf{R}$.　　(　√　)

2.已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,3,5)$，$\boldsymbol{b}=(3,x,y)$ 分别是直线 l_1，l_2 的方向向量，若 $l_1\parallel l_2$，则　　(　　)

A.$x=\frac{9}{2}$，$y=15$

B.$x=3$，$y=\frac{15}{2}$

C.$x=3$，$y=15$

D.$x=\frac{9}{2}$，$y=\frac{15}{2}$

D　**解析**：由 $l_1 /\!/ l_2$，得 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$，即 $\frac{3}{2}=\frac{x}{3}=\frac{y}{5}$，解得 $x=\frac{9}{2}$，$y=\frac{15}{2}$.故选 D.

3.思考并回答下列问题：

(1)直线的方向向量(平面的法向量)是否唯一？

提示：不唯一，直线的方向向量(平面的法向量)有无数个，它们是共线向量.

(2)证明直线与平面平行的关键是什么？

提示：证明直线与平面平行的关键是证明直线的方向向量与平面的法向量垂直.

整体感知

空间中直线、平面的平行(设 $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ 分别是直线 l_1，l_2 的方向向量，$\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 分别是平面 α，β 的法向量)

- 线线平行：$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{u}_1 /\!/ \boldsymbol{u}_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}$，使得 $\boldsymbol{u}_1=\lambda \boldsymbol{u}_2$
- 线面平行：$l_1 /\!/ \alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{u}_1 \perp \boldsymbol{n}_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1=0$
- 面面平行：$\alpha /\!/ \beta \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}$，使得 $\boldsymbol{n}_1=\lambda \boldsymbol{n}_2$

○ 任务型课堂 ○

任务1 利用空间向量判断线线、线面平行

1.设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 分别是直线 l_1，l_2 的方向向量，试根据条件判断 l_1，l_2 的位置关系：

(1)$\boldsymbol{a}=(2,3,-1)$，$\boldsymbol{b}=(-6,-9,3)$；

(2)$\boldsymbol{a}=(5,0,2)$，$\boldsymbol{b}=(0,4,0)$.

解：(1)因为 $\boldsymbol{a}=(2,3,-1)$，$\boldsymbol{b}=(-6,-9,3)$，所以 $\boldsymbol{a}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$，

所以 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$.所以 $l_1 /\!/ l_2$.

(2)因为 $\boldsymbol{a}=(5,0,2)$，$\boldsymbol{b}=(0,4,0)$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $l_1\perp l_2$.

2.设 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 分别是平面 α，β 的法向量，试根据条件判断 α，β 的位置关系：

(1)$\boldsymbol{u}=(1,-1,2)$，$\boldsymbol{v}=\left(3,2,-\frac{1}{2}\right)$；

(2)$\boldsymbol{u}=(0,3,0)$，$\boldsymbol{v}=(0,-5,0)$.

解：(1)因为 $\boldsymbol{u}=(1,-1,2)$，$\boldsymbol{v}=\left(3,2,-\frac{1}{2}\right)$，

所以 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$，所以 $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$，所以 $\alpha\perp\beta$.

(2)因为 $\boldsymbol{u}=(0,3,0)$，$\boldsymbol{v}=(0,-5,0)$，

所以 $\boldsymbol{u}=-\frac{3}{5}\boldsymbol{v}$，

所以 $\boldsymbol{u} /\!/ \boldsymbol{v}$，所以 $\alpha /\!/ \beta$.

3.设 $\boldsymbol{a}$ 是直线 l 的方向向量，$\boldsymbol{u}$ 是平面 α 的法向量，试根据条件判断 l，α 的位置关系：

(1)$\boldsymbol{a}=(-3,4,2)$，$\boldsymbol{u}=(2,2,-1)$；

(2)$\boldsymbol{a}=(0,-8,12)$，$\boldsymbol{u}=(0,2,-3)$.

解：(1)因为 $\boldsymbol{u}=(2,2,-1)$，$\boldsymbol{a}=(-3,4,2)$，$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a}=0$，所以 $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{a}$，所以 $l /\!/ \alpha$ 或 $l\subset\alpha$.

(2)因为 $\boldsymbol{u}=(0,2,-3)$，$\boldsymbol{a}=(0,-8,12)$，$\boldsymbol{u}=-\frac{1}{4}\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{u} /\!/ \boldsymbol{a}$，所以 $l\perp\alpha$.

【探究总结】

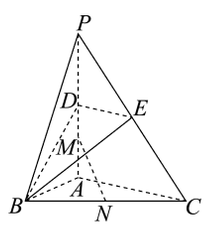
1.若证线线平行，则证直线的方向向量共线，即设 $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ 分别是直线 l_1，l_2 的方向向量，则 $l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{u}_1 /\!/ \boldsymbol{u}_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}$，使得 $\boldsymbol{u}_1=\lambda\boldsymbol{u}_2$.

2.若证线面平行，则证直线的方向向量与平面的法向量垂直，即设 $\boldsymbol{u}$ 是直线 l 的方向向量，$\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的法向量，$l\not\subset\alpha$，则 $l /\!/ \alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{n} \Leftrightarrow \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0$.

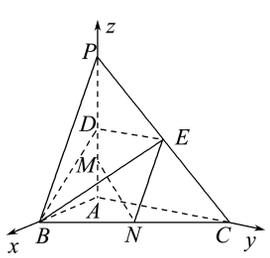
任务2 利用空间向量证明线线、线面平行

探究活动

例1　如图，在三棱锥 P-ABC 中，$PA\perp$ 底面 ABC，$\angle BAC=90^\circ$，点 D，E，N 分别为棱 PA，PC，BC 的中点，M 是线段 AD 的中点，$PA=AC=4$，$AB=2$.求证：$MN /\!/$ 平面 BDE.



证明：如图，以 A 为原点，AB，AC，AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系.



依题意，可得 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(0,4,0)$，$P(0,0,4)$，$D(0,0,2)$，$E(0,2,2)$，$M(0,0,1)$，$N(1,2,0)$，

所以 $\overrightarrow{DE}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{DB}=(2,0,-2)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 BDE 的法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y=0,\\ 2x-2z=0.\end{cases}$

不妨取 $z=1$，可得 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$ 为平面 BDE 的一个法向量.

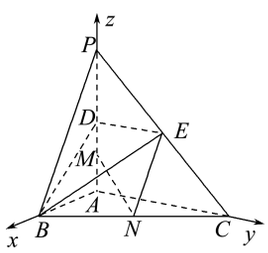
又$\overrightarrow{MN}=(1,2,-1)$，所以$\overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{n}=0$.

因为$MN\not\subset$平面BDE，所以$MN\parallel$平面BDE.

［一题多思］

思考.在本例中，你还能用其他方法证明$MN\parallel$平面BDE吗？

证明：因为$PA\perp$底面ABC，$\angle BAC=90°$，建立如图所示的空间直角坐标系，



则$A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(0,4,0)$，$D(0,0,2)$，$E(0,2,2)$，$M(0,0,1)$，$N(1,2,0)$，$P(0,0,4)$，

所以$\overrightarrow{DE}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{DB}=(2,0,-2)$.又$\overrightarrow{MN}=(1,2,-1)$，

设$\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{DE}+\mu\overrightarrow{DB}$，即$(1,2,-1)=\lambda(0,2,0)+\mu(2,0,-2)$，解得$\lambda=1$，$\mu=\frac{1}{2}$，

所以$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$，故$\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{DB}$共面.

又因为$MN\not\subset$平面BDE，所以$MN\parallel$平面BDE.

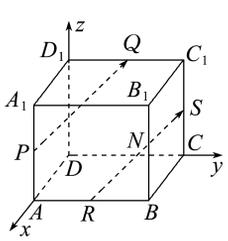
【探究总结】

证明直线与平面平行，可以证明直线的方向向量与平面的法向量的数量积为0，或证明直线的方向向量与平面内的两个不共线的向量共面，或证明直线的方向向量与平面内某直线的方向向量平行，然后说明直线不在平面内即可.这样就把几何证明问题转化为向量运算问题.

应用迁移

1.在长方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，$AB=4$，$AD=3$，$AA_1=2$，P，Q，R，S分别是AA_1，D_1C_1，AB，CC_1的中点.求证：$PQ\parallel RS$.

证明：（方法一）以D为原点，DA，DC，DD_1所在直线分别为x轴、y轴、z轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则$P(3,0,1)$，$Q(0,2,2)$，$R(3,2,0)$，$S(0,4,1)$，

所以$\overrightarrow{PQ}=(-3,2,1)$，$\overrightarrow{RS}=(-3,2,1)$，

所以$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{RS}$，

所以$\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{RS}$，即$PQ\parallel RS$.

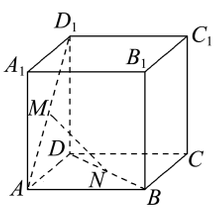
（方法二）因为$\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{RC}+\overrightarrow{CS}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DD_1}$，

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{A_1Q}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DD_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}$，

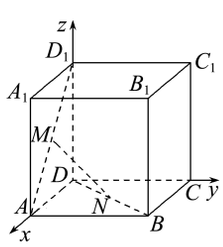
所以$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{RS}$，

所以$\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{RS}$，即$PQ\parallel RS$.

2.（教材P31练习题3改编）如图，已知在正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，M，N分别是AD_1，BD的中点.求证：$MN\parallel$平面CC_1D_1D.



证明：以D为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$的方向分别为x轴、y轴、z轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系.



设正方体的棱长为2，则$A(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$D(0,0,0)$，$M(1,0,1)$，$N(1,1,0)$.

由正方体的性质，知$AD\perp$平面CC_1D_1D，

所以$\overrightarrow{DA}=(2,0,0)$为平面$CC_1D_1D$的一个法向量.

由于$\overrightarrow{MN}=(0,1,-1)$，

则$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{DA}=0\times2+1\times0+(-1)\times0=0$，

所以$\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{DA}$.

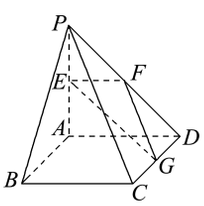
又$MN\not\subset$平面CC_1D_1D，

所以$MN\parallel$平面CC_1D_1D.

任务3　利用空间向量证明面面平行

探究活动

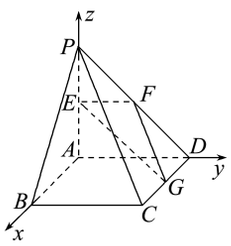
例2　如图，在四棱锥$P\text{-}ABCD$中，平面$PAD\perp$平面$ABCD$，四边形$ABCD$为正方形，$\triangle PAD$是直角三角形，且$PA=AD=2$，E，F，G分别是线段PA，PD，CD的中点.求证：平面$EFG\parallel$平面PBC.



证明：因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 为正方形，$\triangle PAD$ 是直角三角形，

所以 AB，AP，AD 两两垂直.

以 A 为坐标原点，AB，AD，AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,2)$，$E(0,0,1)$，$F(0,1,1)$，$G(1,2,0)$，

所以 $\overrightarrow{PB}=(2,0,-2)$，$\overrightarrow{FE}=(0,-1,0)$，$\overrightarrow{FG}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$.

设 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 EFG 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{FE},\\ \boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{FG},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{FE}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{FG}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-y_1=0,\\ x_1+y_1-z_1=0.\end{cases}$

令 $z_1=1$，则 $x_1=1$，$y_1=0$，所以 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,1)$.

设 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$ 是平面 PBC 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{PB},\\ \boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{BC},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x_2-2z_2=0,\\ 2y_2=0.\end{cases}$

令 $z_2=1$，则 $x_2=1$，$y_2=0$，所以 $\boldsymbol{n}_2=(1,0,1)$，

所以 $\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2$，所以平面 $EFG/\!/$ 平面 PBC.

【探究总结】

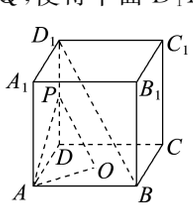
证明面面平行的方法

(1)转化为相应的线线平行或线面平行；

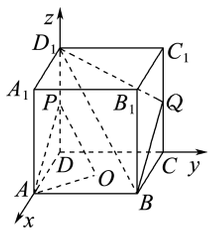
(2)分别求出这两个平面的法向量，然后证明这两个法向量平行.

应用迁移

如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，O 为底面 $ABCD$ 的中心，P 是 DD_1 的中点.设 Q 是 CC_1 上的点，则是否存在点 Q，使得平面 $D_1BQ/\!/$ 平面 PAO？



解：以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.



在 CC_1 上任取一点 Q，连接 BQ，D_1Q.

设正方体的棱长为 1，则 $O\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$P\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$，$A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$D_1(0,0,1)$，设 $Q(0,1,m)(0\leqslant m\leqslant 1)$，

(方法一)则 $\overrightarrow{AP}=\left(-1,0,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{BQ}=(-1,0,m)$，$\overrightarrow{OP}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{BD_1}=(-1,-1,1)$，

所以 $\overrightarrow{OP}/\!/\overrightarrow{BD_1}$，即 $OP/\!/BD_1$.

所以 $OP/\!/$ 平面 D_1BQ.

当 $m=\frac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BQ}$，即 $AP/\!/BQ$，所以 $AP/\!/$ 平面 D_1BQ. 又 $OP\cap AP=P$，所以平面 $PAO/\!/$ 平面 D_1BQ.

故当 Q 为 CC_1 的中点时，平面 $D_1BQ/\!/$ 平面 PAO.

(方法二)则 $\overrightarrow{OA}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$，$\overrightarrow{OP}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

设平面 PAO 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

则有 $\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{OP}$，

所以 $\begin{cases}\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}y_1=0,\\ -\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}z_1=0.\end{cases}$

取 $x_1=1$，则 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,2)$ 为平面 PAO 的一个法向量.

易知 $\overrightarrow{BD_1}=(-1,-1,1)$，$\overrightarrow{QD_1}=(0,-1,1-m)$.

同理，可得 $\boldsymbol{n}_2=(m,1-m,1)$ 为平面 D_1BQ 的一个法向量.

要使平面 $D_1BQ/\!/$ 平面 PAO，需满足 $\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2$.

因此 $\frac{1}{m}=\frac{1}{1-m}=\frac{2}{1}$，解得 $m=\frac{1}{2}$，这时点 Q 的坐标为 $\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$.

故当 Q 为 CC_1 的中点时，平面 $D_1BQ/\!/$ 平面 PAO.

课后素养评价(八)

基础落实

1.已知直线 l 的一个方向向量是 $\boldsymbol{a}=(3,2,1)$,平面 α 的一个法向量是 $\boldsymbol{u}=(-1,2,-1)$,则 l 与 α 的位置关系是　　(　　)

A.$l\perp\alpha$

B.$l/\!/\alpha$

C.l 与 α 相交但不垂直

D.$l/\!/\alpha$ 或 $l\subset\alpha$

D　**解析**:因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}=-3+4-1=0$,所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{u}$.所以 $l/\!/\alpha$ 或 $l\subset\alpha$.

2.已知 $\boldsymbol{u}=(3,a+b,a-b)(a,b\in\mathbf{R})$是直线 l 的一个方向向量,$\boldsymbol{n}=(1,1,3)$是平面 α 的一个法向量.若 $l/\!/\alpha$,则 $2b-4a=$　　(　　)

A.3　　B.4

C.5　　D.6

A　**解析**:因为 $l/\!/\alpha$,所以 $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{n}$,则 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0$,

所以 $3\times1+(a+b)\times1+(a-b)\times3=0$,整理得 $2b-4a=3$.

3.已知平面 α 的一个法向量是$(2,-1,1)$,$\alpha/\!/\beta$,则下列向量可作为平面 β 的一个法向量的是　　(　　)

A.$(4,2,-2)$　　B.$(2,0,4)$

C.$(2,-1,-5)$　　D.$(4,-2,2)$

D　**解析**:平面 α 的一个法向量是$(2,-1,1)$,$\alpha/\!/\beta$.设平面 β 的法向量为(x,y,z),则$(2,-1,1)=\lambda(x,y,z)$,$\lambda\neq0$.

对比四个选项可知,只有 D 符合要求.故选 D.

4.已知平面 α 的一个法向量是$(2,3,-1)$,平面 β 的一个法向量是$(4,\lambda,-2)$.若$\alpha/\!/\beta$,则 λ 的值是　　(　　)

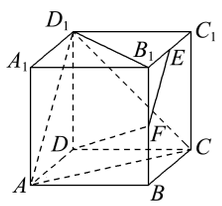
A.$-\dfrac{3}{10}$　　B.-6

C.6　　D.$\dfrac{10}{3}$

C　**解析**:因为 $\alpha/\!/\beta$,所以平面 α 的法向量$(2,3,-1)$与平面 β 的法向量$(4,\lambda,-2)$共线.

所以$\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{\lambda}=\dfrac{-1}{-2}$,解得 $\lambda=6$.故选 C.

5.(多选)如图,已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2,E,F 分别为棱 B_1C_1,B_1B 的中点,则下列结论正确的有　　(　　)



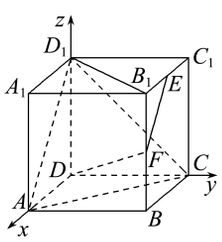
A.$\overrightarrow{AD_1}=2\overrightarrow{EF}$

B.$\overrightarrow{B_1D_1}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

C.$|\overrightarrow{DF}|=3$

D.$\overrightarrow{DF}$为平面 ACD_1 的一个法向量

BC　**解析**:以 D 为坐标原点,DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(2,0,0)$,$B(2,2,0)$,$C(0,2,0)$,$D(0,0,0)$,$A_1(2,0,2)$,$B_1(2,2,2)$,$C_1(0,2,2)$,$D_1(0,0,2)$,$E(1,2,2)$,$F(2,2,1)$.

对于 A,$\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,2)$,$\overrightarrow{EF}=(1,0,-1)$,则 $\overrightarrow{AD_1}=-2\overrightarrow{EF}$,故 A 错误;

对于 B,$\overrightarrow{B_1D_1}=(-2,-2,0)$,$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$,则 $\overrightarrow{B_1D_1}\cdot\overrightarrow{AC}=4-4=0$,故 B 正确;

对于 C,$\overrightarrow{DF}=(2,2,1)$,则 $|\overrightarrow{DF}|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$,故 C 正确;

对于 D,$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AD_1}=-4+2\neq0$,所以$\overrightarrow{DF}$不是平面 ACD_1 的一个法向量,故 D 错误.

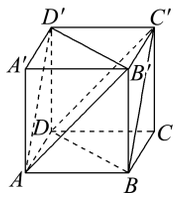
6.已知直线 l 的一个方向向量为$(2,m,1)$,平面 α 的一个法向量为$\left(1,\dfrac{1}{2},2\right)$,且 $l/\!/\alpha$,则 $m=$_____.

-8　**解析**:因为 $l/\!/\alpha$,所以 l 的方向向量与 α 的法向量垂直.

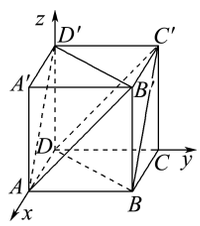
所以$(2,m,1)\cdot\left(1,\dfrac{1}{2},2\right)=2+\dfrac{1}{2}m+2=0$,

解得 $m=-8$.

7. 如图，已知正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，求证：平面 $AB'D'$ ∥ 平面 BDC'.



证明：设正方体的棱长为 1，建立如图所示的空间直角坐标系 $Dxyz$，



则 $A(1,0,0)$，$B'(1,1,1)$，$D'(0,0,1)$，$B(1,1,0)$，$D(0,0,0)$，$C'(0,1,1)$，

所以 $\overrightarrow{AB'}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{D'B'}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{DC'}=(0,1,1)$.

设平面 $AB'D'$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{AB'}$，$\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{D'B'}$，即 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB'}=y_1+z_1=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{D'B'}=x_1+y_1=0.\end{cases}$

令 $y_1=1$，则 $x_1=-1$，$z_1=-1$，可得平面 $AB'D'$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(-1,1,-1)$.

设平面 BDC' 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{DB}$，$\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{DC'}$，即 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DB}=x_2+y_2=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DC'}=y_2+z_2=0.\end{cases}$

令 $y_2=1$，则 $x_2=-1$，$z_2=-1$，可得平面 BDC' 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(-1,1,-1)$.

因为 $\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{n}_2$，即 $\boldsymbol{n}_1$ ∥ $\boldsymbol{n}_2$.

故平面 $AB'D'$ ∥ 平面 BDC'.

能力提升

1. （多选）已知直线 l 过点 $P(2,-2,-3)$，且直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{a}=(4,2,2)$. 若直线 l 与点 $M(2,0,1)$ 在平面 α 内，则下列向量中，为平面 α 的法向量的有（　　）

A. $(-1,4,-2)$　　B. $\left(\frac{1}{4},-1,\frac{1}{2}\right)$

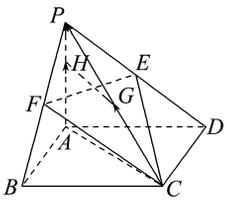
C. $\left(-\frac{1}{2},2,-1\right)$　　D. $(0,-1,1)$

ABC　**解析**：由题意可知，所研究平面的法向量垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(4,2,2)$ 和向量 $\overrightarrow{PM}$.

而 $\overrightarrow{PM}=(2,0,1)-(2,-2,-3)=(0,2,4)$.

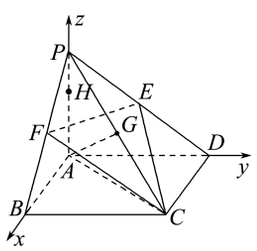
选项 A，$(4,2,2)\cdot(-1,4,-2)=0$，$(0,2,4)\cdot(-1,4,-2)=0$ 满足垂直，故正确；同理可得 B，C 也满足题意. 故选 ABC.

2. （数学文化）《九章算术》是我国古代数学名著，书中将底面为矩形，且有一条侧棱垂直于底面的四棱锥称为“阳马”. 如图，在“阳马”$P\text{-}ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是正方形，$PA=AB$，E，F 分别为 PD，PB 的中点，$\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{HP}$，$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{GP}$. 若 GH ∥ 平面 EFC，则 $\lambda=$（　　）



A.3　　B.4　　C.5　　D.6

C　**解析**：以 A 为坐标原点，AB，AD，AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



设 $AD=a(a>0)$，则 $A(0,0,0)$，$P(0,0,a)$，$C(a,a,0)$，$E\left(0,\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$，$F\left(\frac{a}{2},0,\frac{a}{2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{EF}=\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{2},0\right)$，$\overrightarrow{AP}=(0,0,a)$，$\overrightarrow{PC}=(a,a,-a)$，$\overrightarrow{EC}=\left(a,\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$.

设平面 EFC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{a}{2}x-\frac{a}{2}y=0,\\ \overrightarrow{EC}\cdot\boldsymbol{n}=ax+\frac{a}{2}y-\frac{a}{2}z=0.\end{cases}$ 令 $x=1$，得 $y=1$，$z=3$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,3)$ 为平面 EFC 的一个法向量.

由 $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{GP}$，得 G 是 PC 的中点，

所以 $G\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$.

由 $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{HP}$，得 $H\left(0,0,\frac{\lambda a}{1+\lambda}\right)$，所以 $\overrightarrow{GH}=\left(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2},\frac{\lambda a}{1+\lambda}-\frac{a}{2}\right)$.

因为 GH ∥平面 EFC，所以 $\overrightarrow{GH}\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+\frac{3\lambda a}{1+\lambda}-\frac{3a}{2}=0$，解得 $\lambda=5$.故选 C.

3.已知 $A(0,0,1)$，$B(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，直线 l ∥平面 ABC，且 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{a}=(2,m,1)$，则实数 m 的值是_____.

-3　**解析**：设平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{AB}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(0,1,-1)$，

则有 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=x-z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=y-z=0.\end{cases}$

令 $z=1$，则 $x=1$，$y=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$ 为平面 ABC 的一个法向量.

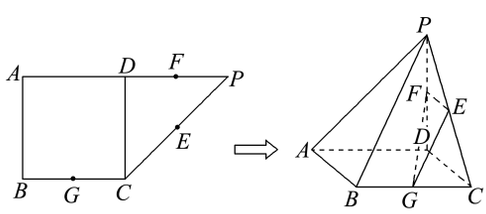
因为直线 l ∥平面 ABC，所以有 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=0$，

即 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=(1,1,1)\cdot(2,m,1)=2+m+1=0$，解得 $m=-3$.

4.直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{a}=(2,0,4)$，平面 α 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(1,-2,-\frac{1}{2}\right)$，则直线 l 与平面 α 的位置关系为_____.

$l\subset\alpha$ 或 l ∥α　**解析**：因为直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{a}=(2,0,4)$，平面 α 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(1,-2,-\frac{1}{2}\right)$，而 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=2\times1+0\times(-2)+4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{n}$，则 $l\subset\alpha$ 或 l ∥α.

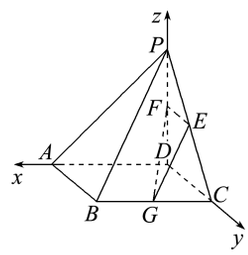
5.如图，在直角梯形 $ABCP$ 中，AP ∥BC，$AP\perp AB$，$AB=BC=\frac{1}{2}AP=2$，D 是 AP 的中点，E，F，G 分别为 PC，PD，CB 的中点，将△PCD 沿 CD 折起，使得 $PD\perp$平面 $ABCD$，得到四棱柱 P-$ABCD$.试用向量方法证明 AP ∥平面 EFG.



证明：由题意可知，底面 $ABCD$ 为正方形.

因为 $PD\perp$平面 $ABCD$，DA，$DC\subset$平面 $ABCD$，所以 DA，DC，DP 两两垂直.

如图，以 D 为原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DP}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $Dxyz$，



则 $P(0,0,2)$，$C(0,2,0)$，$G(1,2,0)$，$E(0,1,1)$，$F(0,0,1)$，$A(2,0,0)$，

所以 $\overrightarrow{AP}=(-2,0,2)$，$\overrightarrow{EF}=(0,-1,0)$，$\overrightarrow{EG}=(1,1,-1)$.

设平面 EFG 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=-y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EG}=x+y-z=0.\end{cases}$ 取 $x=1$，则 $z=1$，$y=0$，

所以 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$ 为平面 EFG 的一个法向量.

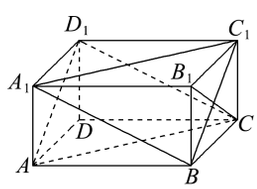
因为 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=-2+0+2=0$，又 AP 在平面 EFG 外，

所以 AP ∥平面 EFG.

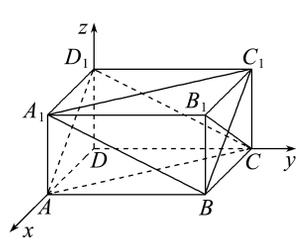
6.如图，在长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4$，$BC=3$，$CC_1=2$.

(1)求证：平面 A_1C_1B ∥平面 ACD_1.

(2)线段 B_1C 上是否存在点 P，使得 A_1P ∥平面 ACD_1？若存在，求出点 P 的位置；若不存在，请说明理由.



(1)**证明**：以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(3,0,0)$，$B(3,4,0)$，$C(0,4,0)$，$A_1(3,0,2)$，$B_1(3,4,2)$，$C_1(0,4,2)$，$D_1(0,0,2)$，

所以 $\overrightarrow{A_1C_1}=(-3,4,0)$，$\overrightarrow{A_1B}=(0,4,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(-3,4,0)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-3,0,2)$.

设平面 A_1C_1B 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=-3x+4y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=4y-2z=0.\end{cases}$

取 $x=4$，则 $y=3$，$z=6$，所以 $\boldsymbol{n}=(4,3,6)$ 为平面 A_1C_1B 的一个法向量.

同理，可得 $\boldsymbol{m}=(4,3,6)$ 为平面 ACD_1 的一个法向量.

因为 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{n}$，即 $\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$，所以平面 $A_1C_1B\parallel$ 平面 ACD_1.

(2)**解**：设线段 B_1C 上存在点 P，使得 $A_1P\parallel$ 平面 ACD_1，$\overrightarrow{B_1P}=t\overrightarrow{B_1C}(0\leqslant t\leqslant 1)$.

由(1)，得 $\overrightarrow{A_1B_1}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{B_1C}=(-3,0,-2)$，平面 ACD_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(4,3,6)$，

所以 $\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1P}=\overrightarrow{A_1B_1}+t\overrightarrow{B_1C}=(-3t,4,-2t)$，

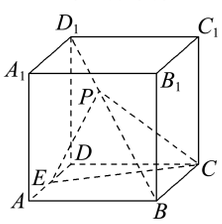
所以 $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1P}=-3t\times4+4\times3+(-2t)\times6=0$，

解得 $t=\dfrac{1}{2}$，

所以当 P 为线段 B_1C 的中点时，$A_1P\parallel$ 平面 ACD_1.

自我超越

（多选）如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 AD 的中点，点 P 为线段 D_1B 上的动点.设 $D_1P=\lambda D_1B$，则有　　(　　)



A.当 $\lambda=\dfrac{1}{3}$ 时，三棱锥 A-PCE 的体积为 $\dfrac{1}{3}$

B.当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，$EP\parallel$ 平面 AB_1C

C.当 $\lambda=\dfrac{1}{4}$ 时，$C_1\in$ 平面 CEP

D.$|PA|+|PC|$ 的最小值为 $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

BD　**解析**：对于 A，当 $\lambda=\dfrac{1}{3}$ 时，$D_1P=\dfrac{1}{3}D_1B$，故点 P 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\dfrac{2}{3}DD_1=\dfrac{4}{3}$，所以 $V_{A\text{-}PCE}=V_{P\text{-}ACE}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ACE}\cdot\dfrac{4}{3}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times1\times2\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{4}{9}$，故 A 错误.对于 B，在棱长为 2 的正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，建立如图 1 所示的空间直角坐标系，

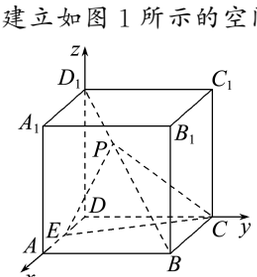


图 1

则 $A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$，$D_1(0,0,2)$，$B_1(2,2,2)$，$E(1,0,0)$.

所以 $\overrightarrow{D_1B}=(2,2,-2)$，$\overrightarrow{D_1P}=\lambda\overrightarrow{D_1B}=(2\lambda,2\lambda,-2\lambda)$，故点 $P(2\lambda,2\lambda,2-2\lambda)$.

因为 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，所以 $P(1,1,1)$，$\overrightarrow{EP}=(0,1,1)$.又 $\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{AB_1}=(0,2,2)$，

$\overrightarrow{D_1B}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times(-2)+2\times2=0$，$\overrightarrow{D_1B}\cdot\overrightarrow{AB_1}=2\times2-2\times2=0$，所以 $\overrightarrow{D_1B}$ 是平面 AB_1C 的一个法向量.

因为 $\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{D_1B}=0\times2+1\times2+1\times(-2)=0$，所以 $\overrightarrow{EP}$ 平行于平面 AB_1C，即直线 EP 与平面 AB_1C 平行，故 B 正确.

对于 C，取 A_1D_1 的中点 F，连接 EF，C_1F，CE，如图 2，

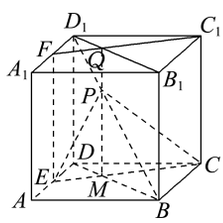


图 2

因为 E 为边 AD 的中点，所以 $EF\parallel DD_1\parallel CC_1$，当 $C_1\in$ 平面 CEP 时，$P\in$ 平面 $CEFC_1$.

连接 B_1D_1 交 C_1F 于点 Q，连接 BD 交 CE 于点 M，连接 MQ，显然平面 $CEFC_1\cap$ 平面 $BDD_1B_1=MQ$，因此 $MQ\cap D_1B=P$，$BB_1\parallel CC_1$，$CC_1\subset$ 平面 $CEFC_1$，$BB_1\not\subset$ 平面 $CEFC_1$，所以 $BB_1\parallel$ 平面 $CEFC_1$，

故 $MQ\parallel BB_1$.因为 $\dfrac{D_1Q}{QB_1}=\dfrac{D_1F}{B_1C_1}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $\lambda=\dfrac{D_1P}{D_1B}=\dfrac{D_1Q}{D_1B_1}=\dfrac{1}{3}$，故 C 错误.

对于 D，$\overrightarrow{AP}=(2\lambda-2,2\lambda,2-2\lambda)$，$\overrightarrow{PC}=(-2\lambda,2-2\lambda,2\lambda-2)$，

所以 $|\overrightarrow{AP}|+|\overrightarrow{PC}|$

$=2\sqrt{(2\lambda-2)^2+(2\lambda)^2+(2-2\lambda)^2}$

$=4\sqrt{3\left(\lambda-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}}\geqslant\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$，当且仅当 $\lambda=\dfrac{2}{3}$ 时取等号，故 D 正确.

第3课时　空间中直线、平面的垂直

学习任务目标

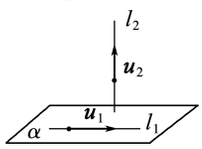
1.能用向量语言表述直线与直线、直线与平面、平面与平面的垂直关系.
2.能用向量方法证明直线与平面、平面与平面垂直的有关判定定理.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

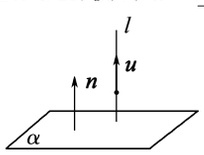
知识点一　线线垂直

如图,设直线 l_1,l_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{u}_1$,$\boldsymbol{u}_2$,则 $l_1\perp l_2\Leftrightarrow\underline{\boldsymbol{u}_1\perp\boldsymbol{u}_2}\Leftrightarrow\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2=\underline{0}$.



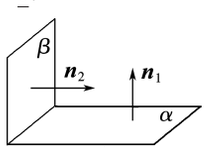
知识点二　线面垂直

如图,设直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{u}$,平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$,则 $l\perp\alpha\Leftrightarrow\underline{\boldsymbol{u}/\!/\boldsymbol{n}}\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbf{R}$,使得 $\boldsymbol{u}=\underline{\lambda\boldsymbol{n}}$.



知识点三　面面垂直

如图,设平面 α,β 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1$,$\boldsymbol{n}_2$,则 $\alpha\perp\beta\Leftrightarrow\underline{\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2}\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=\underline{0}$.



【概念辨析】

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)同一个平面的法向量均为共线向量.　(　√　)

(2)若 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是平面 α 内的向量,且 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=0$,$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}=0$,则 $\boldsymbol{n}$ 可以作为平面 α 的一个法向量.　(　×　)

(3)若点 A,B 是平面 α 内的任意两点,$\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的法向量,则 $\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=0$.　(　√　)

2.设直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{u}=(-2,2,t)$,平面 α 的一个法向量为 $\boldsymbol{v}=(6,-6,12)$,若直线 $l\perp$ 平面 α,则实数 t 的值为　(　)

A.4　　B.−4　　C.2　　D.−2

B　**解析**:因为直线 $l\perp$ 平面 α,所以 $\boldsymbol{u}/\!/\boldsymbol{v}$,则 $\frac{-2}{6}=\frac{2}{-6}=\frac{t}{12}$,解得 $t=-4$.故选 B.

3.思考并回答下列问题:

(1)若一个平面内的一条直线的方向向量与另一个平面的法向量共线,则这两个平面是否垂直?

提示:垂直.

(2)怎样利用直线的方向向量与平面的法向量证明垂直关系?

提示:①若证线线垂直,则证两直线的方向向量垂直;

②若证线面垂直,则证直线的方向向量与平面的法向量平行;

③若证面面垂直,则证两平面的法向量垂直.

整体感知

空间中直线、平面的垂直(设直线 l_1,l_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{u}_1$,$\boldsymbol{u}_2$,平面 α,β 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1$,$\boldsymbol{n}_2$)

- 线线垂直:$l_1\perp l_2\Leftrightarrow\boldsymbol{u}_1\perp\boldsymbol{u}_2\Leftrightarrow\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2=0$
- 线面垂直:$l_1\perp\alpha\Leftrightarrow\boldsymbol{u}_1/\!/\boldsymbol{n}_1\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbf{R}$,$\boldsymbol{u}_1=\lambda\boldsymbol{n}_1$
- 面面垂直:$\alpha\perp\beta\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$

○ 任务型课堂 ○

任务1　利用空间向量判断位置关系

1.若 $\boldsymbol{m}=(2,-1,-1)$,$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$ 分别为直线 l_1,l_2 的方向向量,则这两条直线　(　)

A.平行　　B.垂直

C.异面垂直　　D.垂直相交

B　**解析**:因为 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=2\times1+(-1)\times1+(-1)\times1=0$,所以 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$,所以 $l_1\perp l_2$.

2.(教材 P33 练习题 1 改编)已知 $\boldsymbol{u}=(3,a+b,a-b)$ $(a,b\in\mathbf{R})$是直线 l 的一个方向向量,$\boldsymbol{n}=(1,1,3)$是平面 α 的一个法向量.若 $l\perp\alpha$,则 $a+2b=$　(　)

A.$\frac{15}{2}$　　B.$-\frac{3}{2}$　　C.6　　D.0

D　**解析**:因为 $\boldsymbol{u}=(3,a+b,a-b)(a,b\in\mathbf{R})$是直线 l 的一个方向向量,$\boldsymbol{n}=(1,1,3)$是平面 α 的一个法向量,且 $l\perp\alpha$,所以 $\boldsymbol{u}/\!/\boldsymbol{n}$,即 $\frac{3}{1}=\frac{a+b}{1}=\frac{a-b}{3}$,即 $\begin{cases}a+b=3,\\a-b=9,\end{cases}$解得 $\begin{cases}a=6,\\b=-3,\end{cases}$因此 $a+2b=6+2\times(-3)=0$.

【探究总结】

1.若两条直线的方向向量垂直，则这两条直线垂直.

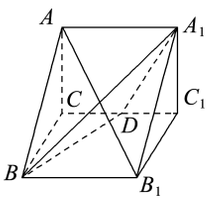
2.若直线的方向向量与平面的法向量平行，则直线与平面垂直.

3.若两平面的法向量垂直，则这两个平面垂直.

任务2 利用空间向量证明线线、线面垂直

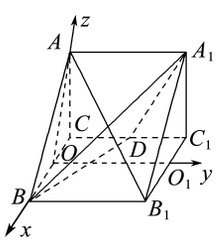
探究活动

例1 如图，正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的所有棱长都为2，D 为 CC_1 的中点.求证：$AB_1\perp$ 平面 A_1BD.



证明：(方法一)取 BC 的中点 O，B_1C_1 的中点 O_1，连接 AO，OO_1，则 $AO\perp BC$，$OO_1\perp BC$.

因为在正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，平面 $ABC\perp$ 平面 BCC_1B_1，所以 $AO\perp$ 平面 BCC_1B_1，所以 $AO\perp OO_1$.



如图，以 O 为原点，以 OB，OO_1，OA 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立空间直角坐标系，

则 $B(1,0,0)$，$D(-1,1,0)$，$A_1(0,2,\sqrt{3})$，$A(0,0,\sqrt{3})$，$B_1(1,2,0)$，

所以 $\overrightarrow{AB_1}=(1,2,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BA_1}=(-1,2,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BD}=(-2,1,0)$.

因为 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BA_1}=1\times(-1)+2\times2+(-\sqrt{3})\times\sqrt{3}=0$，

$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BD}=1\times(-2)+2\times1+(-\sqrt{3})\times0=0$，

所以 $\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{BA_1}$，$\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{BD}$，

即 $AB_1\perp BA_1$，$AB_1\perp BD$.

又因为 $BA_1\cap BD=B$，$BA_1\subset$ 平面 A_1BD，$BD\subset$ 平面 A_1BD，

所以 $AB_1\perp$ 平面 A_1BD.

(方法二)建系同方法一.

设平面 A_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{BA_1},\\ \boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{BD},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=-x+2y+\sqrt{3}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=-2x+y=0.\end{cases}$

令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,2,-\sqrt{3})$ 为平面 A_1BD 的一个法向量.

又 $\overrightarrow{AB_1}=(1,2,-\sqrt{3})$，所以 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB_1}$，即 $\overrightarrow{AB_1}\parallel\boldsymbol{n}$，

所以 $AB_1\perp$ 平面 A_1BD.

[一题多思]

思考1. 在本例中，你还能用其他方法证明 $AB_1\perp$ 平面 A_1BD 吗？

证明：设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，

由题意得 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$，

则 $\overrightarrow{AB_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{A_1B}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，

所以 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{A_1B}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{c}^2=0$，所以 $\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{A_1B}$，即 $AB_1\perp A_1B$，

因为 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BD}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right)=0-4+2+2-0+0=0$，所以 $\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{BD}$，即 $AB_1\perp BD$.

又 $A_1B\cap BD=B$，所以 $AB_1\perp$ 平面 A_1BD.

思考2. 在本例中，设 M 是 A_1B_1 的中点，在线段 CC_1 上是否存在一点 N，使得 $MN\perp$ 平面 A_1BD？

解：假设存在点 $N(-1,y_0,0)$，$0\leqslant y_0\leqslant2$，由例1的解析可知 $M\left(\frac{1}{2},2,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以 $\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{3}{2},y_0-2,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.因为 $MN\perp$ 平面 A_1BD，

所以 $\overrightarrow{MN}\parallel\boldsymbol{n}$，即 $\frac{-\frac{3}{2}}{1}=\frac{y_0-2}{2}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\sqrt{3}}$，无解，

所以在线段 CC_1 上不存在一点 N，使得 $MN\perp$ 平面 A_1BD.

【探究总结】

用向量证明线线、线面垂直的方法

(1)线线垂直：证明两直线的方向向量互相垂直，即证明它们的数量积为0；

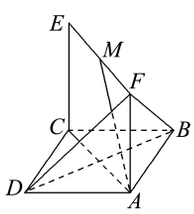
(2)线面垂直：证明直线的方向向量与平面的法向量共线，或将线面垂直的判定定理用向量表示.

应用迁移

如图，已知正方形 $ABCD$ 和矩形 $ACEF$ 所在的平面互相垂直，$AB=\sqrt{2}$，$AF=1$，M 是线段 EF 的中点.

(1)求证：$AM\perp BD$；

(2)求证：$AM\perp$ 平面 BDF.



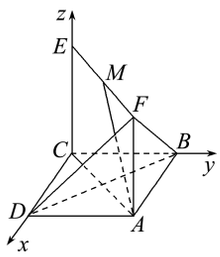
证明：(1)因为四边形 $ACEF$ 为矩形，所以 $CE\perp AC$.

因为平面 $ABCD\perp$ 平面 $ACEF$，平面 $ABCD\cap$ 平面

$ACEF=AC$，$CE\subset$平面$ACEF$，

所以$CE\perp$平面$ABCD$.又四边形$ABCD$为正方形，所以以点C为坐标原点，CD，CB，CE所在直线分别为x轴、y轴、z轴，

建立如图所示的空间直角坐标系$Cxyz$.



由$AB=\sqrt{2}$，$AF=1$，得$C(0,0,0)$，$A(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$B(0,\sqrt{2},0)$，$D(\sqrt{2},0,0)$，$E(0,0,1)$，$F(\sqrt{2},\sqrt{2},1)$，$M\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，

所以$\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，$\overrightarrow{BD}=(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$，

所以$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+(-\sqrt{2})\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+0\times1=0$，所以$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BD}$，

所以$AM\perp BD$.

(2)由(1)知，$\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，$\overrightarrow{DF}=(0,\sqrt{2},1)$，

所以$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DF}=0-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}+1=0$，

所以$AM\perp DF$.

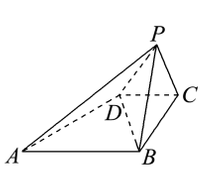
又$AM\perp BD$，BD，$DF\subset$平面BDF，$BD\cap DF=D$，

所以$AM\perp$平面BDF.

任务3 利用空间向量证明面面垂直

探究活动

例2　如图，已知四棱锥P-$ABCD$的底面是直角梯形，$\angle ABC=\angle BCD=90^\circ$，$AB=BC=PB=PC=2CD$，侧面$PBC\perp$底面$ABCD$.



求证：(1)$PA\perp BD$；

(2)平面$PAD\perp$平面PAB.

证明：如图，取BC的中点O，连接PO.

因为平面$PBC\perp$平面$ABCD$，$\triangle PBC$为等边三角形，所以$PO\perp$平面$ABCD$.

以BC的中点O为坐标原点，以BC所在直线为x轴，过点O与AB平行的直线为y轴，OP所在直线为z轴，建立空间直角坐标系.

(1)不妨设$CD=1$，则$AB=BC=PB=PC=2$，所以$PO=\sqrt{3}$，

所以$A(1,-2,0)$，$B(1,0,0)$，$D(-1,-1,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，

所以$\overrightarrow{BD}=(-2,-1,0)$，$\overrightarrow{PA}=(1,-2,-\sqrt{3})$.

因为$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{PA}=(-2)\times1+(-1)\times(-2)+0\times(-\sqrt{3})=0$，

所以$\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{BD}$，即$PA\perp BD$.

(2)如图，取PA的中点M，连接DM，

则$M\left(\frac{1}{2},-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

因为$\overrightarrow{DM}=\left(\frac{3}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{PB}=(1,0,-\sqrt{3})$，

所以$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{3}{2}\times1+0\times0+\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-\sqrt{3})=0$，

所以$\overrightarrow{DM}\perp\overrightarrow{PB}$，即$DM\perp PB$.

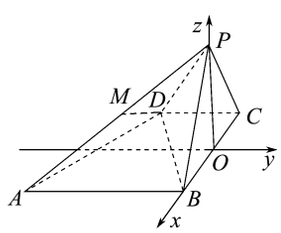
因为$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{PA}=\frac{3}{2}\times1+0\times(-2)+\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-\sqrt{3})=0$，

所以$\overrightarrow{DM}\perp\overrightarrow{PA}$，即$DM\perp PA$.

又因为$PA\cap PB=P$，$PA\subset$平面PAB，$PB\subset$平面PAB，

所以$DM\perp$平面PAB.

因为$DM\subset$平面PAD，所以平面$PAD\perp$平面PAB.

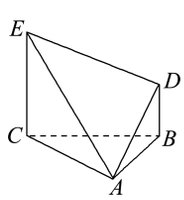


【探究总结】

1. 利用空间向量证明面面垂直通常有两个途径：一是利用两个平面垂直的判定定理将面面垂直转化为线面垂直，进而转化为线线垂直；二是直接求出两个平面的法向量，由两个法向量垂直，得面面垂直.
2. 向量法证明面面垂直的优越性主要体现在不必考虑图形中的位置关系，只需建立适当的空间直角坐标系或选定基向量后，经过向量运算就可得到要证明的结果.思路方法“公式化”，降低了思维难度.

应用迁移

如图，$\triangle ABC$是一个正三角形，$EC\perp$平面ABC，$BD\parallel CE$，且$CE=CA=2BD=2$.

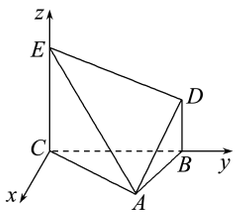


(1)求平面DEA的一个法向量；

(2)求证：平面$DEA\perp$平面ECA.

(1)**解**：因为$EC\perp$平面ABC，$CB\subset$平面ABC，所以$EC\perp CB$.

以 C 为原点，CB，CE 所在的直线分别为 y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $C(0,0,0)$，$A(\sqrt{3},1,0)$，$B(0,2,0)$，$E(0,0,2)$，$D(0,2,1)$，

所以 $\overrightarrow{EA}=(\sqrt{3},1,-2)$，$\overrightarrow{ED}=(0,2,-1)$.

设平面 DEA 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EA}=\sqrt{3}a+b-2c=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ED}=2b-c=0,\end{cases}$ 令 $b=1$，则 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,2)$，

所以平面 DEA 的一个法向量为 $(\sqrt{3},1,2)$.

(2)**证明**：由(1)知 $\overrightarrow{CE}=(0,0,2)$，设平面 ECA 的一个法向量是 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EA}=\sqrt{3}x+y-2z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CE}=2z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，则 $\boldsymbol{m}=(1,-\sqrt{3},0)$.

因为 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1\times\sqrt{3}+(-\sqrt{3})\times1+0\times2=0$，所以 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，所以平面 $DEA\perp$ 平面 ECA.

课后素养评价（九）

基础落实

1. 若 $\boldsymbol{a}=(-1,2,4)$，$\boldsymbol{b}=(x,-1,-2)$ 分别为平面 α，β 的法向量，且 $\alpha\perp\beta$，则 x 的值为　　(　　)

A. 10　　B. -10

C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

B　**解析**：因为 $\alpha\perp\beta$，所以平面 α，β 的法向量相互垂直.所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(-1,2,4)\cdot(x,-1,-2)=-x-2-8=0$，解得 $x=-10$.故选 B.

2. 若直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{a}=(-1,0,-2)$，平面 α 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,0,4)$，则　　(　　)

A. $l\parallel\alpha$

B. $l\perp\alpha$

C. $l\subset\alpha$

D. l 与 α 相交但不垂直

B　**解析**：因为 $\boldsymbol{n}=-2\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{n}\parallel\boldsymbol{a}$，所以 $l\perp\alpha$.故选 B.

3. 已知 $\boldsymbol{u}=(-2,3,3)$，$\boldsymbol{v}=(3,-1,3)$ 分别为平面 α，β 的法向量，则　　(　　)

A. $\alpha\parallel\beta$

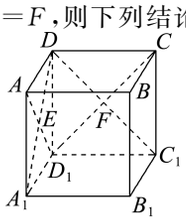
B. $\alpha\perp\beta$

C. α，β 相交但不垂直

D. 以上都不正确

B　**解析**：由 $\boldsymbol{u}=(-2,3,3)$，$\boldsymbol{v}=(3,-1,3)$，可知 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$，所以平面 α，β 垂直.故选 B.

4. 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$A_1D\cap AD_1=E$，$CD_1\cap C_1D=F$，则下列结论正确的是　　(　　)



A. $BB_1\parallel$ 平面 ACD_1

B. 平面 $BDC_1\perp$ 平面 ACD_1

C. $EF\perp$ 平面 BDD_1B_1

D. 平面 ABB_1A_1 内存在与 EF 平行的直线

C　**解析**：由题意，设正方体的边长为 2，以 D_1 为原点，D_1A_1 所在直线为 x 轴，D_1C_1 所在直线为 y 轴，D_1D 所在直线为 z 轴，建立空间直角坐标系(图略)，则 $D_1(0,0,0)$，$A(2,0,2)$，$C(0,2,2)$，$D(0,0,2)$，$B(2,2,2)$，$B_1(2,2,0)$，$E(1,0,1)$，$F(0,1,1)$，

所以 $\overrightarrow{D_1A}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{D_1C}=(0,2,2)$.

设平面 ACD_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{D_1A}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{D_1C}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+2z=0,\\ 2y+2z=0.\end{cases}$ 令 $x=1$，则 $z=-1$，$y=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,-1)$ 为平面 ACD_1 的一个法向量.

$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,-2)$，$\overrightarrow{BB_1}\cdot\boldsymbol{n}=2\neq0$，故 A 不正确.

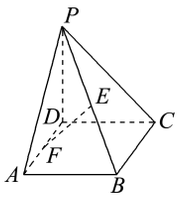
同理，解得平面 BDC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(-1,1,1)$，

$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=-1\neq0$，故 B 不正确.

因为 $\overrightarrow{EF}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{D_1D}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{D_1B_1}=(2,2,0)$，则 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{D_1D}=0$，$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{D_1B_1}=0$，所以 $EF\perp D_1D$，$EF\perp D_1B_1$.又 $D_1D\cap D_1B_1=D_1$，D_1D，$D_1B_1\subset$ 平面 BDD_1B_1，所以 $EF\perp$ 平面 BDD_1B_1，故 C 正确.

平面 ABB_1A_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{p}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{p}=-1\neq0$，故 D 不正确.故选 C.

5. 如图，四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，且 $PD=1$.若 E，F 分别为 PB，AD 的中点，则直线 EF 与平面 PBC 的位置关系是_____.



垂直　**解析**：由题意，以 D 为原点，DA，DC，DP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系 $Dxyz$（图略），则 $E\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$P(0,0,1)$，$B(1,1,0)$，$C(0,1,0)$，$F\left(\frac{1}{2},0,0\right)$，所以 $\overrightarrow{EF}=\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{PB}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{PC}=(0,1,-1)$.

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

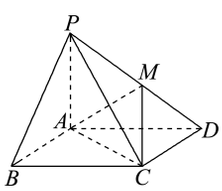
则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y-z=0,\\ y-z=0.\end{cases}$

令 $y=1$，得 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$ 为平面 PBC 的一个法向量. 因为 $\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{n}$，所以 $\overrightarrow{EF}\parallel\boldsymbol{n}$. 所以 $EF\perp$ 平面 PBC.

6. 已知平面 α 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(4,1,2)$，点 $A(-1,2,1)$，$B(2,s,t)$，且 $AB\perp\alpha$，则 $s+t=$_____.

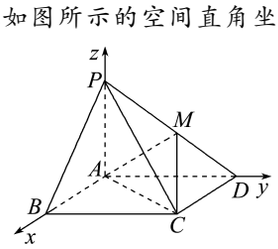
$\frac{21}{4}$　**解析**：因为 $A(-1,2,1)$，$B(2,s,t)$，所以 $\overrightarrow{AB}=(3,s-2,t-1)$. 因为 $AB\perp\alpha$，所以 $\overrightarrow{AB}\parallel\boldsymbol{n}$，所以 $\frac{3}{4}=\frac{s-2}{1}=\frac{t-1}{2}$，所以 $s=\frac{11}{4}$，$t=\frac{5}{2}$，$s+t=\frac{21}{4}$.

7. 如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，点 M 为 PD 的中点，$PA=AD=1$. 求证：平面 $MAC\perp$ 平面 PCD.



证明：在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，侧棱 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 AB，AD，AP 两两垂直.

以 A 为原点，AB，AD，AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$，$P(0,0,1)$，$D(0,1,0)$，$C(1,1,0)$，$M\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{PD}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{CD}=(-1,0,0)$.

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PD}=y-z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=-x=0.\end{cases}$

令 $y=1$，则 $z=1$，$x=0$，所以 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$ 为平面 PCD 的一个法向量.

又 $\overrightarrow{AM}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$，

设平面 MAC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=a+b=0.\end{cases}$

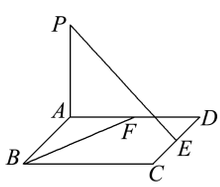
令 $b=1$，则 $c=-1$，$a=-1$，所以 $\boldsymbol{n}=(-1,1,-1)$ 为平面 MAC 的一个法向量.

因为 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=(0,1,1)\cdot(-1,1,-1)=1-1=0$，

所以平面 $MAC\perp$ 平面 PCD.

能力提升

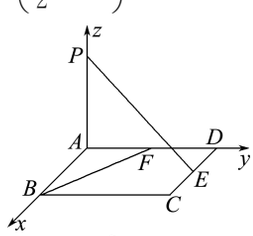
1. 如图，已知 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 为正方形，E 为 CD 的中点，F 是 AD 上一点，则当 $BF\perp PE$ 时，$\frac{AF}{FD}=$　　(　　)



A.$\frac{1}{2}$　　B.1　　C.2　　D.3

B　**解析**：建立如图所示的空间直角坐标系，设正方形 $ABCD$ 的边长为 1，$PA=a$，

则 $B(1,0,0)$，$E\left(\frac{1}{2},1,0\right)$，$P(0,0,a)$.

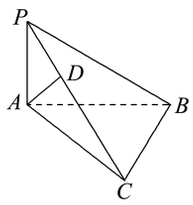


设 $F(0,y,0)$，则 $\overrightarrow{BF}=(-1,y,0)$，$\overrightarrow{PE}=\left(\frac{1}{2},1,-a\right)$.

因为 $BF\perp PE$，所以 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{PE}=(-1)\times\frac{1}{2}+y\times1+0\times(-a)=0$，解得 $y=\frac{1}{2}$，

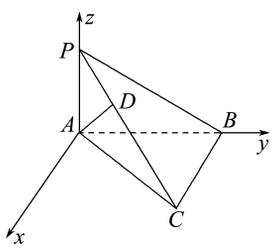
即 $F\left(0,\frac{1}{2},0\right)$，可知 F 是 AD 的中点，故 $\frac{AF}{FD}=1$. 故选 B.

2.如图，在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$AB\perp BC$，且 $AB=BC=2$，$AP=a$．若 D 是棱 PC 上的点，满足 $PD=\frac{1}{3}PC$，且 $AD\perp PB$，则 $a=$_____．



$\sqrt{2}$　**解析：**因为 $PA\perp$ 平面 ABC，AB，$BC\subset$ 平面 ABC，所以 $PA\perp AB$，$PA\perp BC$．

又 $AB\perp BC$，故 PA，AB，BC 两两垂直．以 A 为原点，AB，AP 所在直线分别为 y 轴、z 轴，过点 A 平行于 BC 的直线为 x 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

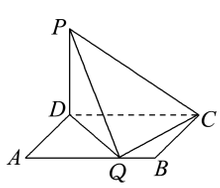


则 $A(0,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(2,2,0)$，$P(0,0,a)$．

因为 $PD=\frac{1}{3}PC$，所以 $D\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}a\right)$．

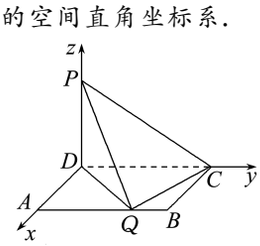
因为 $AD\perp PB$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{PB}=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}a\right)\cdot(0,2,-a)=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}a^2=0$，解得 $a=\sqrt{2}$（负值舍去）．

3.设常数 $a>0$，如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$AD=a$，$PD\perp$ 平面 $ABCD$．若线段 AB 上存在点 Q（不包含端点），使得 $PQ\perp CQ$，则 a 的取值范围是_____．



$\left(0,\frac{1}{2}\right]$　**解析：**因为在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$AD=a$，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，

所以以 DA，DC，DP 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系．



设 $DP=b$，$AQ=x(0<x<1)$，

则 $P(0,0,b)$，$Q(a,x,0)$，$C(0,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{PQ}=(a,x,-b)$，$\overrightarrow{CQ}=(a,x-1,0)$．

由 $PQ\perp CQ$，得 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CQ}=a^2+x(x-1)=0$，

即 $x^2-x+a^2=0$．

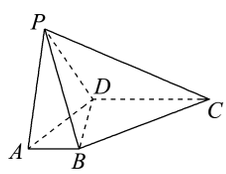
若线段 AB 上存在点 Q，即方程在 $(0,1)$ 上有解，

设函数为 $f(x)=x^2-x+a^2$，$f(0)=a^2>0$，对称轴为直线 $x=\frac{1}{2}$，

则方程在 $(0,1)$ 上有解需满足 $f\left(\frac{1}{2}\right)=a^2-\frac{1}{4}\leqslant 0$．

又因为 $a>0$，所以 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$．

4.如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，平面 $ABCD\perp$ 平面 PCD，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AB\parallel CD$，$AD\perp DC$，且 $AB=1$，$AD=DC=DP=2$，$\angle PDC=120^\circ$．

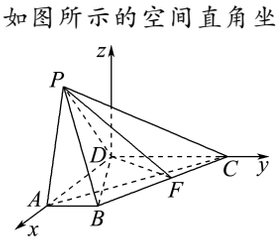


(1)求证：$AD\perp$ 平面 PCD．

(2)线段 BC 上是否存在点 F，使得平面 $PDF\perp$ 平面 PAC？若存在，求 $\frac{BF}{BC}$ 的值；若不存在，请说明理由．

(1)**证明：**因为平面 $ABCD\perp$ 平面 PCD，平面 $ABCD\cap$ 平面 $PCD=CD$，且 $AD\perp DC$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AD\perp$ 平面 PCD．

(2)**解：**以 D 为原点，DA，DC 所在直线分别为 x 轴、y 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $P(0,-1,\sqrt{3})$，$C(0,2,0)$，$A(2,0,0)$，$B(2,1,0)$．

假设存在符合题意的点 F，如图，连接 PF，DF，AC．

设 $\frac{BF}{BC}=\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$，则 $\overrightarrow{BF}=\lambda\overrightarrow{BC}$，所以 $\overrightarrow{PB}=(2,2,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(-2,1,0)$，$\overrightarrow{PA}=(2,1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PC}=(0,3,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PD}=(0,1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{PB}+\lambda\overrightarrow{BC}=(2-2\lambda,2+\lambda,-\sqrt{3})$．

设平面 PAC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+y-\sqrt{3}z=0,\\ 3y-\sqrt{3}z=0.\end{cases}$

令 $z=\sqrt{3}$，则 $y=1$，$x=1$，所以 $\boldsymbol{m}=(1,1,\sqrt{3})$ 为平

面 PAC 的一个法向量.

设平面 PDF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{PD}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{PF}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}b-\sqrt{3}c=0,①\\ (2-2\lambda)a+(2+\lambda)b-\sqrt{3}c=0.②\end{cases}$

若平面 $PDF\perp$ 平面 PAC,则 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$,即 $a+b+\sqrt{3}c=0.③$

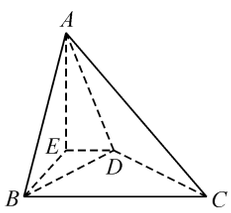
联立①②③,解得 $\lambda=\frac{3}{5}$,

所以线段 BC 上存在点 F,使得平面 $PDF\perp$ 平面 PAC,此时 $\frac{BF}{BC}=\frac{3}{5}$.

5. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $B=\frac{\pi}{2}$,$AB=2BC=4$,点 D,E 分别为边 AC,AB 的中点,将 $\triangle AED$ 沿 DE 折起,使得平面 $AED\perp$ 平面 $BCDE$,得到如图所示的四棱锥 $A\text{-}BCDE$.

(1)求证:$DC\perp AE$.

(2)在平面 ACD 内是否存在点 M,使得平面 $AEM\perp$ 平面 ABD? 若存在,指出点 M 的位置;若不存在,请说明理由.



(1)**证明**:在 $\triangle ABC$ 中,因为点 D,E 分别为边 AC,AB 的中点,所以 $DE/\!/BC$.

又 $B=\frac{\pi}{2}$,所以 $AE\perp ED$.

又因为平面 $AED\perp$ 平面 $BCDE$,平面 $AED\cap$ 平面 $BCDE=ED$,$AE\subset$ 平面 AED,

所以 $AE\perp$ 平面 $BCDE$.

又因为 $DC\subset$ 平面 $BCDE$,所以 $DC\perp AE$.

(2)**解**:由(1)知,$AE\perp ED$,$AE\perp EB$,$EB\perp ED$.

以 E 为原点,EB,ED,EA 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴,建立空间直角坐标系 $Exyz$(图略),

则 $E(0,0,0)$,$B(2,0,0)$,$C(2,2,0)$,$D(0,1,0)$,$A(0,0,2)$,

所以 $\overrightarrow{EA}=(0,0,2)$,$\overrightarrow{AB}=(2,0,-2)$,$\overrightarrow{AD}=(0,1,-2)$,

$\overrightarrow{ED}=(0,1,0)$,$\overrightarrow{BD}=(-2,1,0)$,$\overrightarrow{DC}=(2,1,0)$.

设平面 ABD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x-2z=0,\\ y-2z=0.\end{cases}$ 取 $z=1$,则 $x=1$,$y=2$,所以 $\boldsymbol{m}=(1,2,1)$ 为平面 ABD 的一个法向量.

假设在平面 ACD 内存在点 M,使得平面 $AEM\perp$ 平面 ABD,连接 AM.

若 $\overrightarrow{AM}/\!/\overrightarrow{DC}$,则设 $\overrightarrow{AM}=\mu\overrightarrow{DC}=(2\mu,\mu,0)$.

设平面 AEM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$.

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2c=0,\\ 2\mu a+\mu b=0.\end{cases}$ 取 $a=1$,则 $b=-2$,$c=0$,所以 $\boldsymbol{n}=(1,-2,0)$ 为平面 AEM 的一个法向量.

因为平面 ABD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,2,1)$,所以由 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\neq0$ 知,此情况不成立.

若 $\overrightarrow{AM}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 不共线,设 $AM\cap CD=N$,连接 EN,

设 $\overrightarrow{DN}=\lambda\overrightarrow{DC}=\lambda(2,1,0)=(2\lambda,\lambda,0)$,则 $\overrightarrow{EN}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DN}=(2\lambda,\lambda+1,0)$.

当 $\overrightarrow{EN}\cdot\overrightarrow{BD}=(2\lambda,\lambda+1,0)\cdot(-2,1,0)=0$,即 $\lambda=\frac{1}{3}$ 时,$BD\perp EN$.

又因为 $AE\perp BD$,$AE\cap EN=E$,AE,$EN\subset$ 平面 AEN,所以 $BD\perp$ 平面 AEN.

因为 $BD\subset$ 平面 ABD,所以平面 $ABD\perp$ 平面 AEN,

所以在平面 ACD 内存在点 M,当点 M 在直线 AN(N 点在直线 CD 上且 $\overrightarrow{DN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$)上时,平面 $AEM\perp$ 平面 ABD.

自我超越

已知点 $P(0,2,0)$,$O(0,0,0)$,$A(1,2,4)$,$B(-1,2,4)$,过点 P 作 $PH\perp$ 平面 OAB,H 为垂足,则点 H 的坐标是_____.

$\left(0,\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$　**解析**:设 $H(a,b,c)$,则 $\overrightarrow{PH}=(a,b-2,c)$,$\overrightarrow{OA}=(1,2,4)$,$\overrightarrow{OB}=(-1,2,4)$.

因为 $PH\perp$ 平面 OAB,OA,$OB\subset$ 平面 OAB,

所以 $PH\perp OA$,$PH\perp OB$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{OA}=a+2(b-2)+4c=0,\\ \overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{OB}=-a+2(b-2)+4c=0,\end{cases}$ 解得 $a=0$,$b=2-2c$,

所以 $H(0,2-2c,c)$.

因为 $PH\perp$ 平面 OAB,H 为垂足,

所以 O,A,B,H 四点共面,

则存在唯一的实数对 (x,y),使得 $\overrightarrow{OH}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$,

即 $(0,2-2c,c)=(x-y,2x+2y,4x+4y)$,

所以 $\begin{cases}0=x-y,\\ 2-2c=2x+2y,\\ c=4x+4y,\end{cases}$ 解得 $x=y=\frac{1}{10}$,$c=\frac{4}{5}$,

所以 $H\left(0,\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$.

1.4.2　用空间向量研究距离、夹角问题

第1课时　用空间向量研究距离

学习任务目标

1.能用向量方法解决点到直线、点到平面、两条平行直线、两个平行平面的距离问题，并能描述解决这一类问题的步骤.

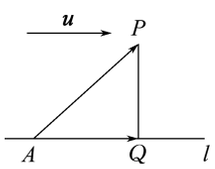
2.体会向量方法在研究几何问题中的作用.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

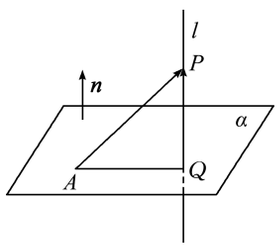
知识点一　直线外一点到直线的距离

如图，设$\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{a}$，直线$l$的单位方向向量为$\boldsymbol{u}$，则向量$\overrightarrow{AP}$在直线$l$上的投影向量$\overrightarrow{AQ}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$.在Rt△$APQ$中，由勾股定理，得$PQ=\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-|\overrightarrow{AQ}|^2}=\underline{\sqrt{\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})^2}}$.



知识点二　平面外一点到平面的距离

如图，已知平面α的法向量为$\boldsymbol{n}$，A是平面α内的定点，P是平面α外一点.过点P作平面α的垂线l，交平面α于点Q，则$\boldsymbol{n}$是直线l的方向向量，且点P到平面α的距离就是$\overrightarrow{AP}$在直线l上的投影向量$\overrightarrow{QP}$的长度.因此$PQ=\left|\overrightarrow{AP}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\underline{\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}}$.



知识点三　用空间向量解决立体几何问题的“三步曲”

(1)建立立体图形与空间向量的联系，用空间向量表示问题中涉及的点、直线、平面，把立体几何问题转化为向量问题；

(2)通过向量运算，研究点、直线、平面之间的位置关系以及它们之间的距离和夹角等问题；

(3)把向量运算的结果“翻译”成相应的几何结论.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)平面α外一点A到平面α的距离，就是以点A为起点，以平面α内一点B为终点的向量$\overrightarrow{AB}$的长度.　(　×　)

(2)若直线l∥平面α，则直线l到平面α的距离就是直线l上的任一点到平面α的距离.　(　√　)

(3)若平面α∥平面β，则两平面的距离可转化为平面α内某条直线到平面β的距离，也可转化为平面α内某点到平面β的距离.　(　√　)

(4)已知l_1与l_2为异面直线，在l_1上任取一点P，在l_2上任取一点Q，则$|\overrightarrow{PQ}|$的最小值就是l_1与l_2的距离.　(　√　)

2.已知直线l经过点$A(2,3,1)$，且向量$\boldsymbol{n}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$为$l$的一个单位方向向量，则点$P(4,3,2)$到$l$的距离为_____.

$\frac{\sqrt{2}}{2}$　**解析**：因为$\overrightarrow{PA}=(-2,0,-1)$，$\boldsymbol{n}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$为$l$的一个单位方向向量，所以点$P$到$l$的距离$d=\sqrt{|\overrightarrow{PA}|^2-(\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n})^2}=\sqrt{5-\left(-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.思考并回答下列问题：

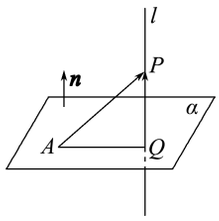
(1)怎样利用向量方法求直线与直线的距离、直线到平面的距离、平面与平面的距离？

提示：两条直线平行，两条直线的距离是其中一条直线上任一点到另一条直线的距离；一条直线和一个平面平行，直线与平面的距离就是这条直线上任一点到这个平面的距离；两个平面平行，平面与平面的距离就是一个平面上任一点到另一个平面的距离.

(2)已知平面α的法向量为$\boldsymbol{n}$，A是平面α内的定点，P是平面α外一点，l是过点P的平面α的垂

线，则点 P 到平面 α 的距离与 $\overrightarrow{AP}$ 在直线 l 上的投影向量有什么关系？

提示：实质上，$\boldsymbol{n}$ 是直线 l 的方向向量，点 P 到平面 α 的距离就是 $\overrightarrow{AP}$ 在直线 l 上的投影向量 $\overrightarrow{QP}$ 的长度.



整体感知

用空间向量研究距离(设 $\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{u}$ 为直线的单位方向向量，$\boldsymbol{n}$ 为平面的法向量)

- 点到直线的距离：$d=\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-|\overrightarrow{AQ}|^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})^2}$
- 点到平面的距离：$d=\left|\overrightarrow{AP}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$
- 直线到平面、平面与平面的距离：转化为点到平面的距离

○ 任务型课堂 ○

任务1 利用空间向量求点到直线的距离

1. 在空间直角坐标系中，直线 l 经过点 $P(2,-1,-2)$，且一个方向向量为 $\boldsymbol{n}=(1,2,-1)$，则点 $M(1,0,-2)$ 到直线 l 的距离为（　　）

A.$\sqrt{3}$　　B.$\sqrt{6}$　　C.3　　D.$\frac{\sqrt{66}}{6}$

D　**解析**：由题意可得，与 $\boldsymbol{n}$ 同向的单位向量 $\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{PM}=(-1,1,0)$，$\boldsymbol{a}^2=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}=\frac{1}{\sqrt{6}}$，

所以点 M 到直线 l 的距离 $d=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})^2}=\sqrt{2-\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{11}{6}}=\frac{\sqrt{66}}{6}$.

2. 已知 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{2},-1)$ 为直线 l 的方向向量.若点 $P(-1,1,-1)$ 为直线 l 外一点，$A(4,1,-2)$ 为直线 l 上一点，则点 P 到直线 l 的距离为_____.

$\sqrt{17}$　**解析**：因为 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{2},-1)$，所以 $\frac{\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{m}|}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

因为 $P(-1,1,-1)$，$A(4,1,-2)$，所以 $\overrightarrow{PA}=(5,0,-1)$.所以点 P 到直线 l 的距离为 $\sqrt{\overrightarrow{PA}^2-\left(\overrightarrow{PA}\cdot\frac{\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{m}|}\right)^2}=\sqrt{26-9}=\sqrt{17}$.

【探究总结】

用向量法求点到直线的距离的一般步骤

(1)建立空间直角坐标系，并求相应点的坐标；

(2)求直线的方向向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，并求 $|\boldsymbol{a}|$；

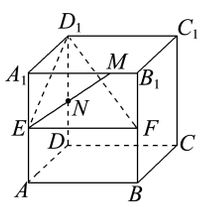
(3)求以直线上某一特殊点为起点，已知直线外的点为终点的向量 $\boldsymbol{b}$ 的坐标，并求 $\boldsymbol{b}^2$，计算 $\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$；

(4)利用 $\sqrt{\boldsymbol{b}^2-\left(\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right)^2}$，求点到直线的距离.

任务2 利用空间向量求点到平面的距离

探究活动

例1　如图，在棱长为2的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为棱 AA_1，BB_1 的中点，M 为棱 A_1B_1 上的一点，且 $A_1M=\lambda(0<\lambda<2)$.设 N 为 ME 的中点，求点 N 到平面 D_1EF 的距离.



解：以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系(图略)，

则 $M(2,\lambda,2)$，$D_1(0,0,2)$，$E(2,0,1)$，$F(2,2,1)$，

所以 $\overrightarrow{ED_1}=(-2,0,1)$，$\overrightarrow{EF}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{EM}=(0,\lambda,1)$.

设平面 D_1EF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ED_1}=-2x+z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=2y=0.\end{cases}$

取 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,0,2)$ 为平面 D_1EF 的一个法向量，

所以点 M 到平面 D_1EF 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{EM}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.因为 N 为 ME 的中点，所以点 N 到平面 D_1EF 的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

［一题多思］

思考1. 本例中的点 M 是棱 A_1B_1 上的动点，为什么求出的点 N 到平面 D_1EF 的距离为定值？

解： 因为 $A_1B_1 /\!/$ 平面 D_1EF，所以 A_1B_1 上任意一点到平面 D_1EF 的距离相等，且为定值.

又 N 为 ME 的中点，所以 N 到平面 D_1EF 的距离为定值.

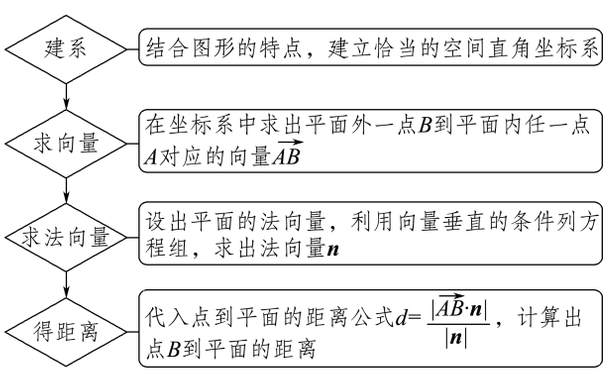
思考2. 在本例中，你还有什么方法求点 N 到平面 D_1EF 的距离？

解： 由例1的解析，易知 $N\left(2,\frac{\lambda}{2},\frac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{EN}=\left(0,\frac{\lambda}{2},\frac{1}{2}\right)$，

又平面 D_1EF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,2)$，所以点 N 到平面 D_1EF 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{EN}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

【探究总结】

用向量法求点到平面的距离的四个步骤



应用迁移

1. 已知点 $M(0,1,-2)$，平面 α 过原点，且垂直于向量 $\boldsymbol{n}=(1,-2,2)$，则点 M 到平面 α 的距离为（　　）

A.$\sqrt{3}$　　B.2　　C.6　　D.$\sqrt{6}$

B　**解析：** 由题意可知点 M 到平面 α 的距离即为 $\overrightarrow{OM}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 上的投影向量的长度.

因为 $M(0,1,-2)$，所以 $\overrightarrow{OM}=(0,1,-2)$.

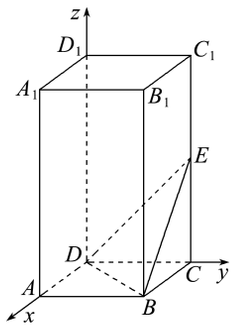
所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\boldsymbol{n}=0\times1+1\times(-2)+(-2)\times2=-6$，

$|\boldsymbol{n}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$.

所以点 M 到平面 α 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{OM}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|-6|}{3}=2$.

2. 已知正四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，$AB=1$，$AA_1=2$，点 E 为 CC_1 的中点，求点 D_1 到平面 BDE 的距离.

解： 以 D 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $Dxyz$，



则 $D(0,0,0)$，$B(1,1,0)$，$D_1(0,0,2)$，$E(0,1,1)$，

所以 $\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{DE}=(0,1,1)$.

设平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DB}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DE}$，

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y=0,\\ y+z=0.\end{cases}$

取 $x=1$，则 $y=-1$，$z=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$ 是平面 BDE 的一个法向量.

因为点 D_1 到平面 BDE 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{DD_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$，

$\overrightarrow{DD_1}=(0,0,2)$，

所以 $\overrightarrow{DD_1}\cdot\boldsymbol{n}=2$，$|\boldsymbol{n}|=\sqrt{3}$，

所以 $d=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

即点 D_1 到平面 BDE 的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

任务3 利用空间向量求直线与平面、平面与平面、异面直线间的距离

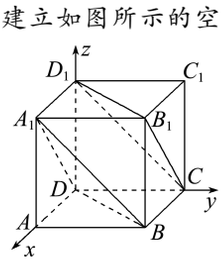
探究活动

例2　设正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2.

(1)求直线 B_1C 到平面 A_1BD 的距离；

(2)求平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 间的距离.

解： (1)以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $D(0,0,0)$，$B(2,2,0)$，$A_1(2,0,2)$，$B_1(2,2,2)$，$C(0,2,0)$，

所以 $\overrightarrow{CB_1}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{DA_1}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$，

所以 $\overrightarrow{CB_1}/\!/\overrightarrow{DA_1}$，即 $CB_1 /\!/ DA_1$.

又 $CB_1\not\subset$ 平面 A_1BD，$DA_1\subset$ 平面 A_1BD，所以 $CB_1 /\!/$ 平面 A_1BD，

所以直线 B_1C 到平面 A_1BD 的距离等于点 B_1 到平面 A_1BD 的距离.

设平面 A_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA_1}=2x+2z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=2x+2y=0.\end{cases}$ 令 $x=1$，则 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$ 为平面 A_1BD 的一个法向量.

又 $\overrightarrow{A_1B_1}=(0,2,0)$，所以点 B_1 到平面 A_1BD 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2) 由(1)知，$CB_1\parallel$ 平面 A_1BD. 同理，$D_1B_1\parallel$ 平面 A_1BD，

又 $CB_1\cap D_1B_1=B_1$，CB_1，$D_1B_1\subset$ 平面 B_1CD_1，

所以平面 $A_1BD\parallel$ 平面 B_1CD_1，

即平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 间的距离等于点 B_1 到平面 A_1BD 的距离.

由(1)知，点 B_1 到平面 A_1BD 的距离 $d=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

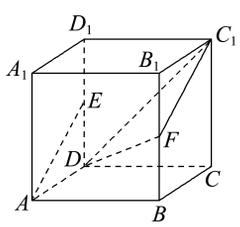
所以平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 间的距离为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

【探究总结】

直线到平面的距离、两平行平面间的距离，均可以转化为点到平面的距离来求解.

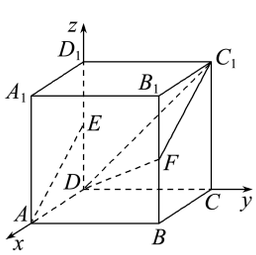
应用迁移

1. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为线段 DD_1 的中点，F 为线段 BB_1 的中点，则直线 AE 到平面 C_1DF 的距离为 (　　)



A. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{30}}{5}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

D　**解析：**



以 D 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系，则 $D(0,0,0)$，$F\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$，$C_1(0,1,1)$，$A(1,0,0)$，$E\left(0,0,\dfrac{1}{2}\right)$，所以 $\overrightarrow{AE}=\left(-1,0,\dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{FC_1}=\left(-1,0,\dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{DC_1}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$，所以 $\overrightarrow{AE}\parallel\overrightarrow{FC_1}$，即 $AE\parallel FC_1$.

因为 $AE\not\subset$ 平面 C_1DF，$FC_1\subset$ 平面 C_1DF，所以 $AE\parallel$ 平面 C_1DF，

所以直线 AE 到平面 C_1DF 的距离为点 A 到平面 C_1DF 的距离.

设平面 C_1DF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{FC_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{DC_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+\dfrac{1}{2}z=0,\\ y+z=0,\end{cases}$

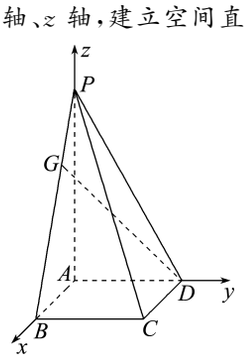
令 $x=1$，则 $z=2$，$y=-2$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,-2,2)$，

所以点 A 到平面 C_1DF 的距离为 $\dfrac{|\overrightarrow{DA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|1\times1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{1}{3}$.

2. 在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=6$，点 G 在侧棱 PB 上，且满足 $2PG=GB$，则异面直线 PC 和 DG 的距离为 (　　)

A. $\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$　　B. $\dfrac{3\sqrt{15}}{15}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$　　D. $\dfrac{3\sqrt{77}}{77}$

A　**解析：**如图，以 A 为原点，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系，



则 $B(3,0,0)$，$C(3,3,0)$，$D(0,3,0)$，$P(0,0,6)$，$G(1,0,4)$，

所以 $\overrightarrow{DG}=(1,-3,4)$，$\overrightarrow{PC}=(3,3,-6)$，$\overrightarrow{DC}=(3,0,0)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为直线 PC 和 DG 的公垂线的方向向量，

则有 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DG}=x-3y+4z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=3x+3y-6z=0.\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(1,3,2)$，

所以异面直线 PC 和 DG 的距离为 $\dfrac{|\overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{3}{\sqrt{14}}=\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$，故选 A.

课后素养评价(十)

基础落实

1.已知点 $A(-1,-1,-1)$，直线 l 过原点且一个方向向量为 $\boldsymbol{a}=(0,1,2)$，则点 A 到 l 的距离为　　(　　)

A.$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　B.1

C.$\frac{\sqrt{30}}{5}$　　D.$\frac{\sqrt{35}}{5}$

C　**解析**：由题意取 $P(0,1,2)$，则 $\overrightarrow{AP}=(1,2,3)$，所以点 A 到 l 的距离为 $d=\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-\left(\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right)^2}$ $=\sqrt{(1^2+2^2+3^2)-\left(\frac{2+6}{\sqrt{1^2+2^2}}\right)^2}=\sqrt{14-\frac{64}{5}}=\frac{\sqrt{30}}{5}$.故选 C.

2.若正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，则平面 AB_1D_1 与平面 BDC_1 的距离为　　(　　)

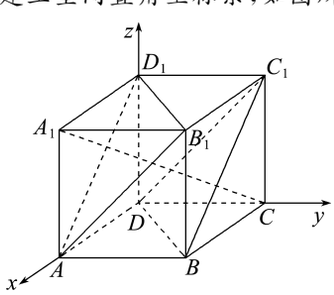
A.$\sqrt{2}$　　B.$\sqrt{3}$

C.$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D.$\frac{\sqrt{3}}{3}$

D　**解析**：由正方体的性质得 $AB_1\parallel DC_1$，$D_1B_1\parallel DB$，$AB_1\cap D_1B_1=B_1$，$DC_1\cap DB=D$，

且 $AB_1\subset$ 平面 AB_1D_1，$D_1B_1\subset$ 平面 AB_1D_1，$DC_1\subset$ 平面 BDC_1，$DB\subset$ 平面 BDC_1，所以平面 $AB_1D_1\parallel$ 平面 BDC_1，则两平面间的距离可转化为点 B 到平面 AB_1D_1 的距离.

以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示.



由正方体的棱长为 1，所以 $A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$A_1(1,0,1)$，$C(0,1,0)$，$B_1(1,1,1)$，$D_1(0,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{CA_1}=(1,-1,1)$，$\overrightarrow{BA}=(0,-1,0)$，$\overrightarrow{AB_1}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{B_1D_1}=(-1,-1,0)$.

连接 A_1C，因为 $\overrightarrow{CA_1}\cdot\overrightarrow{AB_1}=(1,-1,1)\cdot(0,1,1)=1\times0+(-1)\times1+1\times1=0$，$\overrightarrow{CA_1}\cdot\overrightarrow{B_1D_1}=(1,-1,1)\cdot(-1,-1,0)=1\times(-1)+(-1)\times(-1)+1\times0=0$，

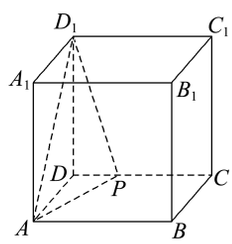
所以 $\overrightarrow{CA_1}\perp\overrightarrow{AB_1}\Rightarrow CA_1\perp AB_1$，$\overrightarrow{CA_1}\perp\overrightarrow{B_1D_1}\Rightarrow CA_1\perp B_1D_1$.又 $AB_1\cap B_1D_1=B_1$，AB_1，$B_1D_1\subset$ 平面 AB_1D_1，

所以 $CA_1\perp$ 平面 AB_1D_1，得平面 AB_1D_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{CA_1}=\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$.

故两平面间的距离 $d=\left|\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{0\times1+(-1)\times(-1)+0\times1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选 D.

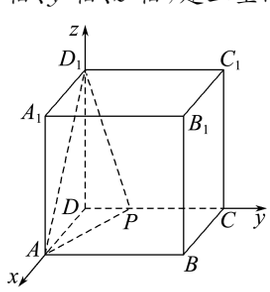
3.(多选)如图，在棱长为 3 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 在棱 DC 上运动(不与顶点重合)，则点 B 到平面 AD_1P 的距离可能为　　(　　)



A.1　　B.$\sqrt{6}$

C.2　　D.3

BC　**解析**：如图，以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系，



则 $D(0,0,0)$，$A(3,0,0)$，$B(3,3,0)$，$D_1(0,0,3)$.设 $P(0,t,0)(0<t<3)$，

所以 $\overrightarrow{AP}=(-3,t,0)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-3,0,3)$，$\overrightarrow{AB}=(0,3,0)$.

设平面 AD_1P 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=-3x+ty=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=-3x+3z=0.\end{cases}$ 取 $y=3$，则 $x=t$，$z=t$，所以 $\boldsymbol{n}=(t,3,t)$ 是平面 AD_1P 的一个法向量.

故点 B 到平面 AD_1P 的距离为 $d=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=$

$\frac{9}{\sqrt{2t^2+9}}$.

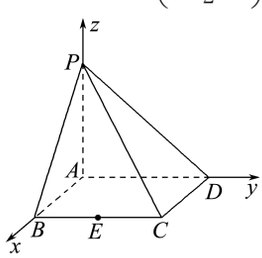
因为 $0<t<3$，所以 $2t^2+9\in(9,27)$，所以 $d\in(\sqrt{3},3)$.故选 BC.

4.已知四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面为正方形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=AB=1$，点 E 是 BC 的中点，则点 E 到直线 PD 的距离是　　(　　)

A.$\frac{\sqrt{5}}{4}$　　B.$\frac{\sqrt{5}}{2}$

C.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D.$\frac{3\sqrt{2}}{4}$

D　**解析**：由题意建立如图所示的空间直角坐标系，则 $P(0,0,1)$，$D(0,1,0)$，$E\left(1,\frac{1}{2},0\right)$，



所以 $\overrightarrow{PD}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{DE}=\left(1,-\frac{1}{2},0\right)$，

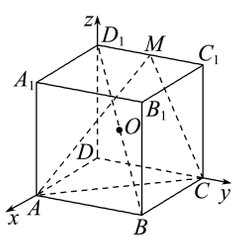
所以 $|\overrightarrow{DE}|=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$|\overrightarrow{PD}|=\sqrt{2}$，$\frac{\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{PD}}{|\overrightarrow{PD}|}=\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$，

所以点 E 到直线 PD 的距离是 $\sqrt{|\overrightarrow{DE}|^2-\left(\frac{\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{PD}}{|\overrightarrow{PD}|}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}-\frac{1}{8}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.故选 D.

5.已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，M 为棱 C_1D_1 的中点，则平面 ACM 截该正方体的内切球所得截面的面积为_____.

$\frac{8\pi}{9}$　**解析**：由题意知该正方体的内切球的球心 O 为正方体中心，半径 $R=1$，以 D 为原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向建立空间直角坐标系，如图，

则 $A(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$M(0,1,2)$，$O(1,1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{AM}=(-2,1,2)$，$\overrightarrow{AO}=(-1,1,1)$.



设平面 ACM 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x+2y=0,\\ -2x+y+2z=0,\end{cases}$

令 $x=2$，则 $y=2$，$z=1$，

所以 $\boldsymbol{n}=(2,2,1)$.故点 O 到平面 AMC 的距离为 $d=\frac{|\overrightarrow{AO}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|-2+2+1|}{3}=\frac{1}{3}$，

截面圆半径满足 $r^2=R^2-d^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$，所以截面面积 $S=\pi r^2=\frac{8\pi}{9}$.

能力提升

1.(多选)已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 E，O 分别是 A_1B_1，A_1C_1 的中点，点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$，则下列说法正确的有　　(　　)

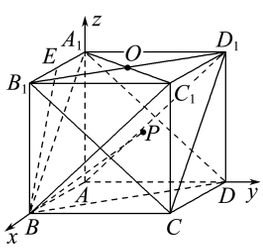
A.点 A 到直线 BE 的距离是 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

B.点 O 到平面 ABC_1D_1 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

C.平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 间的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D.点 P 到直线 AB 的距离为 $\frac{25}{36}$

AB　**解析**：如图，建立空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$D(0,1,0)$，$A_1(0,0,1)$，$C_1(1,1,1)$，$D_1(0,1,1)$，$E\left(\frac{1}{2},0,1\right)$，$O\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$，

所以 $\overrightarrow{BA}=(-1,0,0)$，$\overrightarrow{BE}=\left(-\frac{1}{2},0,1\right)$.

设 $\angle ABE=\theta$，则 $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BE}|}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BE}|}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故点 A 到直线 BE 的距离 $d_1=|\overrightarrow{BA}|\sin\theta=1\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，故 A 正确.

易知 $\overrightarrow{C_1O}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$，平面 ABC_1D_1 的一个

法向量为$\overrightarrow{DA_1}=(0,-1,1)$，

则点O到平面ABC_1D_1的距离$d_2=\dfrac{|\overrightarrow{DA_1}\cdot\overrightarrow{C_1O}|}{|\overrightarrow{DA_1}|}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，故B正确.

$\overrightarrow{A_1B}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{A_1D}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{A_1D_1}=(0,1,0)$，

设平面A_1BD的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0,\end{cases}$所以$\begin{cases}x-z=0,\\ y-z=0.\end{cases}$

令$z=1$，得$y=1$，$x=1$，所以$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$为平面A_1BD的一个法向量.

所以点D_1到平面A_1BD的距离$d_3=\dfrac{|\overrightarrow{A_1D_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

由题易知平面A_1BD∥平面B_1CD_1，

所以平面A_1BD与平面B_1CD_1间的距离等于点D_1到平面A_1BD的距离，

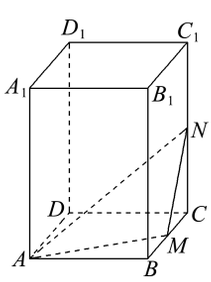
所以平面A_1BD与平面B_1CD_1间的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故C错误.

因为$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$，所以$\overrightarrow{AP}=\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right)$.

又$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，所以$\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{3}{4}$，

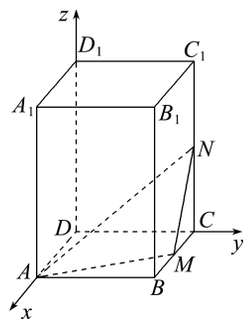
所以点P到直线AB的距离$d_4=\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-\left|\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right|^2}=\sqrt{\dfrac{181}{144}-\dfrac{9}{16}}=\dfrac{5}{6}$，故D错误.故选AB.

2. 如图，在直四棱柱$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$是正方形，$AB=2$，$AA_1=3$，M是BC的中点，点N是棱CC_1上的一个动点，则点A_1到平面AMN的距离的最小值为（　　）



A.1　　B.$\dfrac{1}{2}$　　C.$\dfrac{2}{3}$　　D.$\dfrac{6}{7}$

D　**解析**：由题意知，该几何体为长方体，建立空间直角坐标系如图所示，



则$A(2,0,0)$，$M(1,2,0)$，所以$\overrightarrow{AM}=(-1,2,0)$.

设$N(0,2,t)(0\leqslant t\leqslant 3)$，则$\overrightarrow{MN}=(-1,0,t)$.

设平面AMN的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=-x+2y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}=-x+tz=0.\end{cases}$

令$y=t$，则$x=2t$，$z=2$，所以$\boldsymbol{n}=(2t,t,2)$为平面AMN的一个法向量.

又$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,3)$，所以点$A_1$到平面$AMN$的距离为$\left|\dfrac{\overrightarrow{AA_1}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{6}{\sqrt{5t^2+4}}$.

又$0\leqslant t^2\leqslant 9$，$4\leqslant 5t^2+4\leqslant 49$，所以当$t=3$，$5t^2+4=49$时，

点A_1到平面AMN的距离取得最小值为$\dfrac{6}{\sqrt{49}}=\dfrac{6}{7}$.

故选D.

3. 在正四棱锥$S\text{-}ABCD$中，点O为顶点S在底面$ABCD$内的正投影，P为侧棱SD的中点，且$SO=OD=\sqrt{2}$，则异面直线PC与BD之间的距离为（　　）

A.$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　B.$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　C.$\dfrac{\sqrt{5}}{10}$　　D.$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

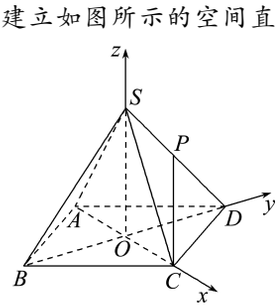
B　**解析**：因为$S\text{-}ABCD$为正四棱锥，且点O是顶点S在底面$ABCD$内的正投影，所以$SO\perp$平面$ABCD$.

如图，连接AC，BD，则$AC\perp BD$且交于点O.

因为OC，$OD\subset$平面$ABCD$，

所以$SO\perp OC$，$SO\perp OD$，

以O为原点，以OC，OD，OS所在直线分别为x轴、y轴、z轴建立如图所示的空间直角坐标系.



因为 $SO=OD=\sqrt{2}$，

所以 $S(0,0,\sqrt{2})$，$D(0,\sqrt{2},0)$，$C(\sqrt{2},0,0)$，$B(0,-\sqrt{2},0)$，$P\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{BD}=(0,2\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{PC}=\left(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

设异面直线 BD 与 PC 的公垂线的一个方向向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

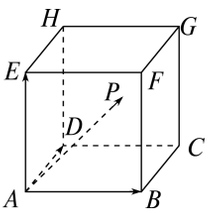
则有 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2\sqrt{2}y=0,\\ \sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y-\frac{\sqrt{2}}{2}z=0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{n}=(1,0,2)$.

又因为 $\overrightarrow{CD}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，

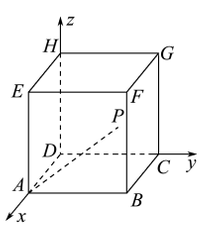
所以异面直线 BD 与 PC 之间的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|-\sqrt{2}|}{\sqrt{1+4}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

所以异面直线 BD 与 PC 之间的距离为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

4. 如图，正方体 $ABCD\text{-}EFGH$ 的棱长为 1.若点 P 在正方体的内部且满足 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$，则点 P 到直线 AB 的距离为_____.



$\frac{5}{6}$　**解析**：由题意，以 D 为原点，DA，DC，DH 所在的直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$D(0,0,0)$，$E(1,0,1)$，所以 $\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{AD}=(-1,0,0)$，$\overrightarrow{AE}=(0,0,1)$，则 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}(0,1,0)+\frac{1}{2}(-1,0,0)+\frac{2}{3}(0,0,1)=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{2}{3}\right)$.

设点 P 到直线 AB 的距离为 d，

则 $d=\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-\left(\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right)^2}=\sqrt{\frac{181}{144}-\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{100}{144}}=\frac{5}{6}$.

自我超越

如图 1，在梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$\angle ADC=90°$，$BC=CD=2AD=4$，E 是 CD 的中点，将 $\triangle ADE$ 沿 AE 折起，使点 D 到达点 P 的位置，如图 2 所示，且 $PC=2\sqrt{3}$.

(1)求证：平面 $PAE\perp$ 平面 $ABCE$；

(2)求点 E 到平面 PBC 的距离.

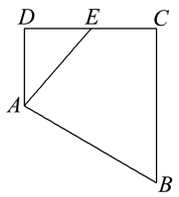


图1

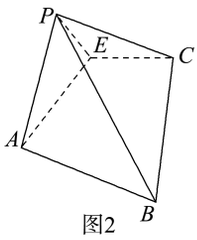


图2

(1)**证明**：取 AE 的中点 O，连接 OP，OC.因为 $PA=PE$，所以 $OP\perp AE$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle APE$ 中，$AP=PE=2$，所以 $OP=\sqrt{2}$.在 $\triangle OEC$ 中，$OC^2=OE^2+CE^2-2OE\cdot CE\cos 135°=(\sqrt{2})^2+2^2-2\times\sqrt{2}\times 2\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=10$.

在 $\triangle POC$ 中，$OP=\sqrt{2}$，$OC=\sqrt{10}$，$PC=2\sqrt{3}$，所以 $OP^2+OC^2=PC^2$.

所以 $OP\perp OC$.又因为 $AE\cap OC=O$，AE，$OC\subset$ 平面 $ABCE$，所以 $OP\perp$ 平面 $ABCE$，

又 $OP\subset$ 平面 PAE，所以平面 $PAE\perp$ 平面 $ABCE$.

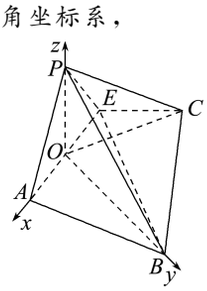
(2)**解**：如图，连接 OB，BE，$BE=\sqrt{BC^2+CE^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，$AB=\sqrt{CD^2+(BC-AD)^2}=\sqrt{4^2+(4-2)^2}=2\sqrt{5}$，又 O 为 AE 中点，

所以 $OB\perp AE$，且 $OB=\sqrt{BE^2-OE^2}=\sqrt{20-2}=3\sqrt{2}$.由(1)可知 $OP\perp$ 平面 $ABCE$，

又因为 OA，$OB\subset$ 平面 $ABCE$，

所以 $OP\perp OA$，$OP\perp OB$，所以 OP，OA，OB 两两垂直.

以 O 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $O(0,0,0)$，$B(0,3\sqrt{2},0)$，$C(-2\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$P(0,0,\sqrt{2})$，$E(-\sqrt{2},0,0)$，

$\overrightarrow{CB}=(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{PB}=(0,3\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{EP}=(\sqrt{2},0,\sqrt{2})$.

设平面 PBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y=0,\\ 3\sqrt{2}y-\sqrt{2}z=0,\end{cases}$

取 $x=1$，得 $y=-1$，$z=-3$，则 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-3)$.

所以点 E 到平面 PBC 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{EP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|\sqrt{2}-3\sqrt{2}|}{\sqrt{11}}=\frac{2\sqrt{22}}{11}$.

第2课时　用空间向量研究夹角

学习任务目标

1.利用图形，能用向量语言表述直线与直线、直线与平面、平面与平面的夹角.
2.能用向量方法解决线线、线面、面面夹角的计算问题，体会向量方法在研究几何问题中的作用.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点　空间角的向量求法

角	向量求法	与相应向量夹角的关系	范围
异面直线所成的角	设异面直线 l_1，l_2 所成的角为 θ，其方向向量分别是 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，则 $\cos\theta=\underline{|\cos\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle|}=\frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$	与 $\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle$ 相等或互补	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$
直线与平面所成的角	设直线 l 与平面 α 所成的角为 θ，直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{u}$，平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，则 $\sin\theta=\underline{|\cos\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{n}\rangle|}=\frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{n}|}$	$\theta=\left\|\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{n}\rangle-\frac{\pi}{2}\right\|$	$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
平面与平面的夹角	设平面 α，β 的法向量分别是 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$，平面 α 与平面 β 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\underline{|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|}=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$	与 $\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle$ 相等或互补	$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

【概念辨析】

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)两异面直线所成的角与两直线的方向向量所成的角相等.　（　×　）

(2)直线 l 的方向向量与平面 α 的法向量的夹角的余角就是直线 l 与平面 α 所成的角.　（　×　）

(3)若平面 α 和 β 的夹角为 θ，平面 α，β 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$，则 $\theta=\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle$.　（　×　）

2.已知 $\boldsymbol{m}$ 是直线 l 的方向向量，$\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的法向量，若 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，则直线 l 与平面 α 所成的角为　（　）

A.30°　　B.60°

C.150°　　D.120°

B　**解析**：设直线 l 与平面 α 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{\sqrt{3}}{2}$.又 $0°\leqslant\theta\leqslant90°$，所以 $\theta=60°$.

3.若直线 a 的一个方向向量是 $\boldsymbol{m}=(1,0,1)$，平面 α 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}=(-3,1,3)$，则直线 a 与平面 α 所成的角为　（　）

A.0°　　B.45°

C.60°　　D.90°

A　**解析**：已知直线 a 的一个方向向量是 $\boldsymbol{m}=(1,0,1)$，平面 α 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}=(-3,1,3)$，

设直线 a 与平面 α 所成的角为 θ，则 $0°\leqslant\theta\leqslant90°$，

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{0}{\sqrt{2}\times\sqrt{19}}=0$，

所以 $\theta=0°$，故直线 a 与平面 α 所成的角为 0°.

4.已知 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$，$\boldsymbol{n}=(1,-1,0)$ 分别为两个平面的法向量，则这两个平面的夹角为　（　）

A.30°　　B.60°

C.60°或 120°　　D.120°

B　**解析**：$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$，

因为两个向量夹角的范围为 $[0,\pi]$，

所以两个法向量的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$，故两个平面的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，即 60°.故选 B.

5.思考并回答下列问题：

(1)二面角与两个平面的夹角范围一样吗？

提示：不一样.二面角的范围为 $[0,\pi]$，而两个平面的夹角是不大于直角的角，范围是 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(2)两个平面的夹角与两个平面的法向量的夹角有何关系？

提示：平面与平面的夹角是两平面的法向量的夹角或其补角.

(3)直线与平面所成的角和直线的方向向量与平面的法向量所成的角有怎样的关系？

提示：设 $\boldsymbol{n}$ 为平面 α 的法向量，$\boldsymbol{a}$ 为直线 a 的方向向量，直线 a 与平面 α 所成的角为 θ，则 $\theta=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}-\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\rangle,\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\rangle\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\\ \langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\rangle-\dfrac{\pi}{2},\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\rangle\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right].\end{cases}$

整体感知

用空间向量研究夹角(设异面直线 l_1,l_2 的方向向量分别是 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$；直线 AB 的方向向量为 $\boldsymbol{u}$，平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$；平面 α，β 的法向量分别是 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$)

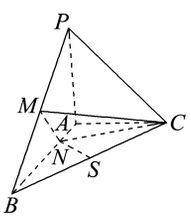
- 线线角：$\cos\theta=|\cos\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}\right|=\dfrac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$
- 线面角：$\sin\theta=|\cos\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{n}|}$
- 面面角：$\cos\theta=|\cos\langle \boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}\right|=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$

○ 任务型课堂 ○

任务1 利用空间向量求线线角、线面角

探究活动

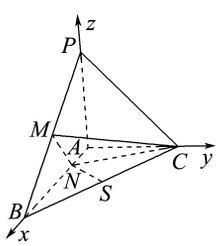
例1　如图，在三棱锥 P-ABC 中，$PA\perp$平面 ABC，$AB\perp AC$，$PA=AC=\dfrac{1}{2}AB$，N 为 AB 上一点，$AB=4AN$，M,S 分别为 PB,BC 的中点.



(1)求证：$CM\perp SN$；

(2)求 SN 与平面 CMN 所成角的大小.

证明：设 $PA=1$，以 A 为原点，AB,AC,AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $P(0,0,1),C(0,1,0),B(2,0,0)$.

又 $AB=4AN$，M,S 分别为 PB,BC 的中点，

所以 $N\left(\dfrac{1}{2},0,0\right),M\left(1,0,\dfrac{1}{2}\right),S\left(1,\dfrac{1}{2},0\right)$.

所以 $\overrightarrow{CM}=\left(1,-1,\dfrac{1}{2}\right),\overrightarrow{SN}=\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$，

所以 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{SN}=\left(1,-1,\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)=0$，

所以 $CM\perp SN$.

(2)**解**：$\overrightarrow{NC}=\left(-\dfrac{1}{2},1,0\right)$.

设平面 CMN 的法向量为 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，

所以 $\overrightarrow{CM}\cdot\boldsymbol{a}=0,\overrightarrow{NC}\cdot\boldsymbol{a}=0$，

即 $\begin{cases}x-y+\dfrac{1}{2}z=0,\\ -\dfrac{1}{2}x+y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2y,\\ z=-2y.\end{cases}$

取 $y=1$，得 $\boldsymbol{a}=(2,1,-2)$ 为平面 CMN 的一个法向量.

因为 $\cos\langle \boldsymbol{a},\overrightarrow{SN}\rangle=\dfrac{-1-\dfrac{1}{2}}{3\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\langle \boldsymbol{a},\overrightarrow{SN}\rangle=\dfrac{3}{4}\pi$.

所以 SN 与平面 CMN 所成的角为 $\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{4}$.

[一题多思]

思考1.我们知道求直线与平面所成角的公式为 $\sin\theta=|\cos\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{n}|}$.为了更好地理解和记忆公式，你能用一句话来解释它吗？

提示：直线与平面所成的角的正弦值等于其方向向量与平面法向量夹角的余弦值的绝对值.

思考2.本例中，在线段 BC 上是否存在一点 E，使 EN 与平面 CMN 所成角的正弦值为 $\dfrac{1}{3}$？若存在，求出点 E 的位置；若不存在，说明理由.

解：设 $\overrightarrow{CE}=\lambda\overrightarrow{CB}=(2\lambda,-\lambda,0)(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，故 $E(2\lambda,1-\lambda,0)$，所以 $\overrightarrow{NE}=\left(2\lambda-\dfrac{1}{2},1-\lambda,0\right)$.

由例题解析可知，平面 CMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{a}=(2,1,-2)$，所以 $\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{NE}\cdot\boldsymbol{a}|}{|\overrightarrow{NE}||\boldsymbol{a}|}=\dfrac{1}{3}$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{4}$，

所以存在点 E，且满足 $\overrightarrow{CE}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ 时，使得 EN 与平面 CMN 所成角的正弦值为 $\dfrac{1}{3}$.

【探究总结】

1. 求异面直线所成角的步骤：

(1)确定两条异面直线的方向向量；

(2)确定两个向量夹角的余弦值的绝对值；

(3)得出两条异面直线所成的角.

2. 利用平面的法向量求直线与平面所成角的基本步骤：

(1)建立空间直角坐标系；

(2)求直线的方向向量 $\boldsymbol{u}$；

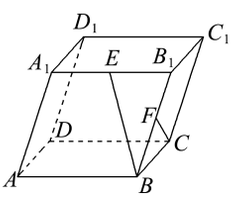
(3)求平面的法向量 $\boldsymbol{n}$；

(4)设直线与平面所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{n}|}$.

应用迁移

1. 已知平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长都是1，且 $\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle BAD=60^\circ$，$E$，$F$ 分别为 A_1B_1，BB_1 的中点.求异面直线 BE 与 CF 所成角的余弦值.

解：如图所示，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，



则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，

$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=60^\circ$，

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\dfrac{1}{2}$.

而 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1E}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，

$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF}=-\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{c}$，

所以 $|\overrightarrow{BE}|=\sqrt{\dfrac{1}{4}|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{c}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$|\overrightarrow{CF}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CF}=\left(-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\right)\cdot\left(-\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{c}\right)=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{c}^2=\dfrac{1}{8}$.

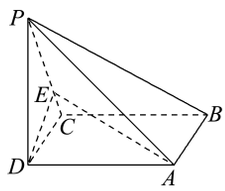
因为 $\cos\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CF}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CF}}{|\overrightarrow{BE}|\cdot|\overrightarrow{CF}|}=\dfrac{1}{6}$，

所以异面直线 BE 与 CF 所成角的余弦值是 $\dfrac{1}{6}$.

2. 如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$AD=PD=2CD=2$，$PB=3$，点 E 为棱 PC 上的点，且 $BC\perp DE$.

(1)求证：$AD\perp PD$；

(2)若 $PE=2CE$，求直线 DE 与平面 PAC 所成角的大小.



(1)**证明**：因为四边形 $ABCD$ 为矩形，所以 $BC\perp CD$，

又因为 $BC\perp DE$，CD，$DE\subset$ 平面 PCD，$CD\cap DE=D$，

所以 $BC\perp$ 平面 PCD.

因为 $PD\subset$ 平面 PCD，所以 $BC\perp PD$.

因为 $AD/\!/BC$，所以 $AD\perp PD$.

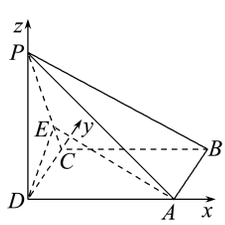
(2)**解**：由(1)知，$BC\perp$ 平面 PCD，

因为 $PC\subset$ 平面 PCD，所以 $BC\perp PC$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCP$ 中，$PC=\sqrt{PB^2-BC^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$，

所以 $PD^2+CD^2=5=PC^2$，所以 $PD\perp CD$.

以 $\{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DP}\}$ 为正交基底建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $D(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$C(0,1,0)$，$P(0,0,2)$，$E\left(0,\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$，

所以 $\overrightarrow{DE}=\left(0,\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,1,0)$，$\overrightarrow{AP}=(-2,0,2)$.

设平面 PAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=-2x+y=0,\\ \overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}=-2x+2z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，则 $\boldsymbol{n}=(1,2,1)$.

设直线 DE 与平面 PAC 所成角的大小为 $\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{DE}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{DE}|}=\dfrac{2}{\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\sqrt{6}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，即直线 DE 与平面 PAC 所成角的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$.

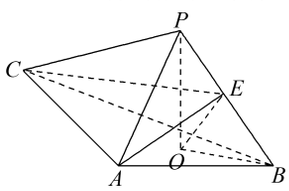
任务2 利用空间向量求平面与平面的夹角

探究活动

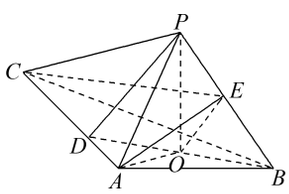
例2　如图，PO 是三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的高，$PA=PB$，$AB\perp AC$，E 是 PB 的中点.

(1)求证：$OE\parallel$ 平面 PAC；

(2)若 $\angle ABO=\angle CBO=30^\circ$，$PO=3$，$PA=5$，求平面 ACE 与平面 ABE 的夹角的正弦值.



(1)**证明**：如图，延长 BO 交 AC 于点 D，连接 OA，PD.



因为 PO 是三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的高，所以 $PO\perp$ 平面 ABC.

因为 AO，$BO\subset$ 平面 ABC，所以 $PO\perp AO$，$PO\perp BO$.

又 $PA=PB$，所以 $\triangle POA\cong\triangle POB$，所以 $OA=OB$，所以 $\angle OAB=\angle OBA$.

又 $AB\perp AC$，即 $\angle BAC=90^\circ$，所以 $\angle OAB+\angle OAD=90^\circ$，$\angle OBA+\angle ODA=90^\circ$，

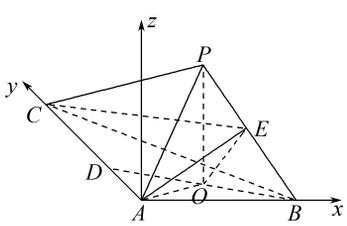
所以 $\angle ODA=\angle OAD$，

所以 $AO=DO$，即 $AO=DO=OB$，所以 O 是 BD 的中点.又 E 是 PB 的中点，所以 $OE\parallel PD$.

因为 $OE\not\subset$ 平面 PAC，$PD\subset$ 平面 PAC，

所以 $OE\parallel$ 平面 PAC.

(2)**解**：过点 A 作 $Az\parallel OP$，建立如图所示的空间直角坐标系.



因为 $PO=3$，$AP=5$，所以 $OA=\sqrt{AP^2-PO^2}=4$.

又 $\angle ABO=\angle CBO=30^\circ$，所以 $BD=2OA=8$，$AD=4$，$AB=4\sqrt{3}$，

所以 $AC=12$，所以 $A(0,0,0)$，$O(2\sqrt{3},2,0)$，$B(4\sqrt{3},0,0)$，$P(2\sqrt{3},2,3)$，$C(0,12,0)$.

因为 E 是 PB 的中点，所以 $E\left(3\sqrt{3},1,\dfrac{3}{2}\right)$，

则 $\overrightarrow{AE}=\left(3\sqrt{3},1,\dfrac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{AB}=(4\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{AC}=(0,12,0)$.

设平面 AEB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=3\sqrt{3}x+y+\dfrac{3}{2}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=4\sqrt{3}x=0.\end{cases}$

令 $z=2$，则 $y=-3$，$x=0$，所以 $\boldsymbol{n}=(0,-3,2)$ 是平面 AEB 的一个法向量.

同理，可得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},0,-6)$ 是平面 AEC 的一个法向量，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{-12}{\sqrt{13}\times\sqrt{39}}=-\dfrac{4\sqrt{3}}{13}$.

设平面 ACE 与平面 ABE 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=-\dfrac{4\sqrt{3}}{13}$，

所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{11}{13}$，即平面 ACE 与平面 ABE 的夹角的正弦值为 $\dfrac{11}{13}$.

【探究总结】

求平面与平面的夹角的步骤

(1)建立空间直角坐标系；

(2)分别求出两个平面的法向量；

(3)求两个法向量的夹角；

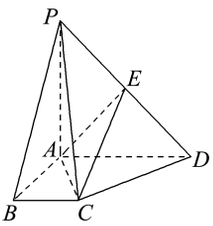
(4)确定平面与平面的夹角的大小.

应用迁移

1.(教材 P37 例 8 改编)如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AB\perp AD$，$AD\parallel BC$，$AD=AP=2AB=2BC=2$，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，E 为棱 PD 上的动点.

(1)当 E 为棱 PD 的中点时，求证：$EC\parallel$ 平面 PAB；

(2)若 $PE=2ED$，求平面 EAC 与平面 PAB 夹角的余弦值.



(1)**证明**：如图1，取PA的中点F，连接EF，BF.

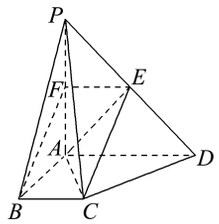


图1

因为E为PD的中点，

所以$EF\parallel AD$，$EF=\frac{1}{2}AD$.

因为$AD\parallel BC$，$AD=2BC$，

所以$EF\parallel BC$，$EF=BC$，

所以四边形$EFBC$为平行四边形，所以$EC\parallel BF$.

又$BF\subset$平面PAB，$EC\not\subset$平面PAB，

所以$EC\parallel$平面PAB.

(2)**解**：因为$AB\perp AD$，$PA\perp$平面$ABCD$，所以AB，AD，AP两两垂直，

故以A为原点，AB，AD，AP所在直线分别为x轴、y轴、z轴建立如图2所示的空间直角坐标系.

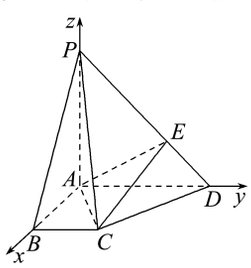


图2

则$A(0,0,0)$，$P(0,0,2)$，$D(0,2,0)$，$C(1,1,0)$.

因为$PE=2ED$，所以$E\left(0,\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$，

所以$\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{AE}=\left(0,\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$.

设平面EAC的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=x+y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=\frac{4}{3}y+\frac{2}{3}z=0,\end{cases}$

取$y=1$，得$x=-1$，$z=-2$，所以$\boldsymbol{n}=(-1,1,-2)$.

因为$AB\perp AD$，$AP\perp AD$，$AB\cap AP=A$，AB，$AP\subset$平面PAB，所以$AD\perp$平面PAB，

所以$\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$为平面$PAB$的一个法向量.

设平面EAC与平面PAB的夹角为θ，

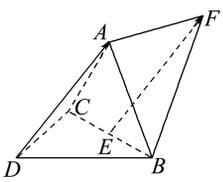
则$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AD}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{AD}|}=\frac{2}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

所以平面EAC与平面PAB夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{6}$.

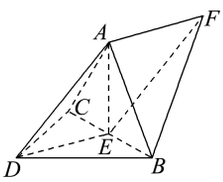
2.(2023·新高考全国Ⅱ卷)如图，在三棱锥A-BCD中，$DA=DB=DC$，$BD\perp CD$，$\angle ADB=\angle ADC=60^\circ$，$E$为$BC$的中点.

(1)求证：$BC\perp DA$；

(2)若点F满足$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$，求二面角$D$-$AB$-$F$的正弦值.



(1)**证明**：如图，连接DE，AE.



因为$DC=DB$，且E为BC的中点，

所以$DE\perp BC$.

因为$DA=DA$，$\angle ADB=\angle ADC=60^\circ$，$DC=DB$，

所以$\triangle ADB\cong\triangle ADC$(SAS)，

所以$AC=AB$，所以$AE\perp BC$.

因为$DE\cap AE=E$，DE，$AE\subset$平面ADE，

所以$BC\perp$平面ADE.

又$DA\subset$平面ADE，所以$BC\perp DA$.

(2)**解**：由(1)知，$DE\perp BC$，$AE\perp BC$.

不妨设$DA=DB=DC=2$.

因为$\angle ADB=\angle ADC=60^\circ$，

所以$AB=AC=2$.

由题可知，$\triangle DBC$为等腰直角三角形，

故$DE=EB=EC=\sqrt{2}$.

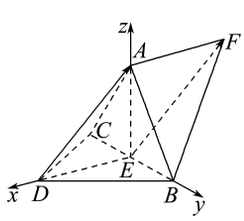
因为$AE\perp BC$，

所以$AE=\sqrt{AB^2-EB^2}=\sqrt{2}$.

在$\triangle ADE$中，$AE^2+ED^2=AD^2$，所以$AE\perp ED$.

所以EA，ED，EB两两垂直.

以E为原点，ED所在直线为x轴，EB所在直线为y轴，EA所在直线为z轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则$E(0,0,0)$，$D(\sqrt{2},0,0)$，$B(0,\sqrt{2},0)$，$A(0,0,$

$\sqrt{2}$),所以$\overrightarrow{DA}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$,$\overrightarrow{BA}=(0,-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

设$F(x_F,y_F,z_F)$.因为$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$,

所以$(x_F,y_F,z_F)=(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$,

即$F(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$,所以$\overrightarrow{FA}=(\sqrt{2},0,0)$.

设平面DAB的法向量为$\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{DA}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}z_1=0,\\ -\sqrt{2}y_1+\sqrt{2}z_1=0.\end{cases}$

取$x_1=1$,则$y_1=z_1=1$,所以$\boldsymbol{m}=(1,1,1)$为平面DAB的一个法向量.

同理,可得$\boldsymbol{n}=(0,1,1)$为平面ABF的一个法向量.

所以$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

设二面角D-AB-F的平面角为θ,

则$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

所以二面角D-AB-F的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

任务3 空间向量的综合应用

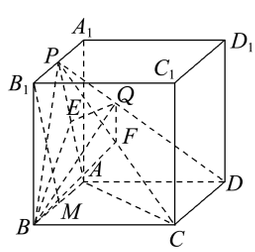
探究活动

例3　如图,在四棱柱$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$中,底面$ABCD$是平行四边形,P为A_1B_1的中点,$\triangle PAB$是等边三角形,$BC=2AB$,$\angle ABC=60°$,$PB\perp AC$.

(1)求证:平面$ABB_1A_1\perp$平面$ABCD$;

(2)设M为AB的中点,求异面直线B_1M与C_1D_1所成的角;

(3)点Q满足$\overrightarrow{DQ}=2\overrightarrow{QP}$,过线段$BQ$且平行于直线$AC$的平面$BEQF$分别交$PA$,$PC$于点$E$,$F$,求平面$BEQF$与平面$CDQF$的夹角的余弦值.



(1)**证明**:在$\triangle ABC$中,因为$|BC|=2|AB|$,$\angle ABC=60°$,

所以$|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2-2|AB|\cdot|BC|\cdot\cos 60°=3|AB|^2$,

所以$|AC|=\sqrt{3}|AB|$,所以$|AC|^2+|AB|^2=|BC|^2$,即$\angle BAC=90°$,

所以$AC\perp AB$.又因为$AC\perp PB$,$PB\cap AB=B$,PB,$AB\subset$平面PAB,

所以$AC\perp$平面PAB.又因为$AC\subset$平面$ABCD$,

所以平面$PAB\perp$平面$ABCD$,即平面$ABB_1A_1\perp$平面$ABCD$.

(2)**解**:由四棱柱$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$的性质可知$C_1D_1/\!/A_1B_1/\!/AB$,

所以$\angle B_1MB$即为异面直线B_1M与C_1D_1所成的角或其补角.

如图,连接PM,因为$\triangle PAB$是等边三角形,M为AB的中点,所以$PM\perp AB$.

又因为$|PB_1|=\dfrac{1}{2}|A_1B_1|$,$|MB|=\dfrac{1}{2}|AB|$,$|AB|=|A_1B_1|$,

所以四边形$PMBB_1$是矩形.

因为$\triangle PAB$是等边三角形,所以$\angle PBM=60°$,

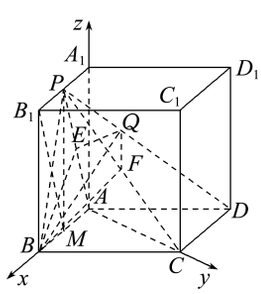
所以$\angle B_1MB=60°$,即异面直线B_1M与C_1D_1所成的角为$60°$.

(3)**解**:由(2)知,$PM\perp AB$,又因为平面$PAB\perp$平面$ABCD$,平面$PAB\cap$平面$ABCD=AB$,$PM\subset$平面PAB,所以$PM\perp$平面$ABCD$.

又因为P,M分别为A_1B_1,AB的中点,所以侧棱$A_1A\perp$平面$ABCD$,则$A_1A\perp AB$,$A_1A\perp AC$.

又因为$AC\perp AB$,所以AC,AB,A_1A两两互相垂直.

以A为坐标原点,建立如图所示的空间直角坐标系,



设$|AB|=2m$,则$A(0,0,0)$,$B(2m,0,0)$,$D(-2m,2\sqrt{3}m,0)$,$C(0,2\sqrt{3}m,0)$,$P(m,0,\sqrt{3}m)$,

所以$\overrightarrow{CD}=(-2m,0,0)$,$\overrightarrow{CP}=(m,-2\sqrt{3}m,\sqrt{3}m)$,$\overrightarrow{AC}=(0,2\sqrt{3}m,0)$,$\overrightarrow{BD}=(-4m,2\sqrt{3}m,0)$,$\overrightarrow{DP}=(3m,-2\sqrt{3}m,\sqrt{3}m)$.

因为$QF\subset$平面PCD,所以平面$CDQF$即为平面PCD.

设平面 PCD 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2mx_1=0,\\ mx_1-2\sqrt{3}my_1+\sqrt{3}mz_1=0,\end{cases}$

令 $y_1=1$，则平面 PCD 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}_1=(0,1,2)$.

因为 $\overrightarrow{DQ}=2\overrightarrow{QP}$，所以 $\overrightarrow{DQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DP}=\left(2m,-\frac{4\sqrt{3}}{3}m,\frac{2\sqrt{3}}{3}m\right)$.

在平面 $BEQF$ 中，$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{BD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DP}=\left(-2m,\frac{2\sqrt{3}}{3}m,\frac{2\sqrt{3}}{3}m\right)$.

设平面 $BEQF$ 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

又因为 AC // 平面 $BEQF$，则 $\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{AC}$，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BQ}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$

则 $\begin{cases}-2mx_2+\frac{2\sqrt{3}}{3}my_2+\frac{2\sqrt{3}}{3}mz_2=0,\\ 2\sqrt{3}my_2=0,\end{cases}$

令 $x_2=1$，则平面 $BEQF$ 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}_2=(1,0,\sqrt{3})$.

设平面 $BEQF$ 与平面 $CDQF$ 的夹角为 θ，

$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times2}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，

所以平面 $BEQF$ 与平面 $CDQF$ 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

【探究总结】

解决与折叠有关的问题的方法

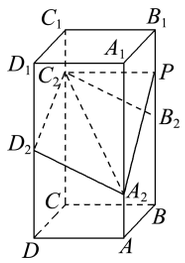
解决与折叠有关的问题的关键是明确折叠前后的变化量和不变量.一般情况下，线段的长度是不变量，而位置关系往往会发生变化，抓住不变量是解决问题的突破口.

应用迁移

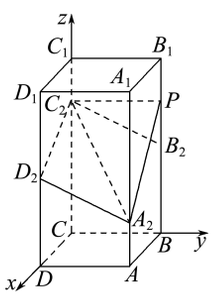
（2023·新高考全国Ⅰ卷）如图，在正四棱柱 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$AA_1=4$，点 A_2，B_2，C_2，D_2 分别在棱 AA_1，BB_1，CC_1，DD_1 上，$AA_2=1$，$BB_2=DD_2=2$，$CC_2=3$.

（1）求证：$B_2C_2\parallel A_2D_2$；

（2）点 P 在棱 BB_1 上，当二面角 P-A_2C_2-D_2 为 $150°$ 时，求 B_2P 的长.



（1）**证明**：以 C 为原点，CD，CB，CC_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $C(0,0,0)$，$C_2(0,0,3)$，$B_2(0,2,2)$，$D_2(2,0,2)$，$A_2(2,2,1)$，

所以 $\overrightarrow{B_2C_2}=(0,-2,1)$，$\overrightarrow{A_2D_2}=(0,-2,1)$，所以 $\overrightarrow{B_2C_2}\parallel\overrightarrow{A_2D_2}$.

又 B_2C_2，A_2D_2 不在同一条直线上，所以 $B_2C_2\parallel A_2D_2$.

（2）**解**：设 $P(0,2,\lambda)(0\leqslant\lambda\leqslant4)$，

则 $\overrightarrow{A_2C_2}=(-2,-2,2)$，$\overrightarrow{PC_2}=(0,-2,3-\lambda)$，$\overrightarrow{D_2C_2}=(-2,0,1)$.

设平面 PA_2C_2 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_2C_2}=-2x-2y+2z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC_2}=-2y+(3-\lambda)z=0.\end{cases}$

令 $z=2$，则 $y=3-\lambda$，$x=\lambda-1$，所以 $\boldsymbol{n}=(\lambda-1,3-\lambda,2)$ 是平面 PA_2C_2 的一个法向量.

同理，可得 $\boldsymbol{m}=(1,1,2)$ 是平面 $A_2C_2D_2$ 的一个法向量，

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{6}{\sqrt{6}\times\sqrt{(\lambda-1)^2+(3-\lambda)^2+4}}$

$=|\cos150°|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

化简，可得 $\lambda^2-4\lambda+3=0$，解得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=3$，

所以 $P(0,2,1)$ 或 $P(0,2,3)$，所以 $B_2P=1$.

课后素养评价(十一)

基础落实

1.(多选)下列说法不正确的有　　(　　)

A.若直线 l 的方向向量与平面 α 的法向量的夹角等于 $\frac{5\pi}{6}$,则直线 l 与平面 α 所成的角等于 $\frac{\pi}{6}$

B.两条异面直线的夹角等于它们的方向向量的夹角

C.二面角的取值范围是 $[0,\pi]$

D.二面角的大小等于其两个面的法向量的夹角的大小

ABD　**解析**:当直线 l 的方向向量与平面 α 的法向量的夹角为 $\frac{5\pi}{6}$ 时,直线 l 与平面 α 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$,A 不正确;向量夹角的取值范围是 $[0,\pi]$,而异面直线夹角的取值范围是 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$,B 不正确;二面角的取值范围是 $[0,\pi]$,C 正确;二面角的大小与其两个面的法向量的夹角的大小相等或互补,D 不正确.故选 ABD.

2.已知 $A(0,1,1)$,$B(2,-1,0)$,$C(3,5,7)$,$D(1,2,4)$,则直线 AB 和直线 CD 所成角的余弦值为　　(　　)

A. $\frac{5\sqrt{22}}{66}$　　B. $-\frac{5\sqrt{22}}{66}$

C. $\frac{5\sqrt{22}}{22}$　　D. $-\frac{5\sqrt{22}}{22}$

A　**解析**:$\overrightarrow{AB}=(2,-2,-1)$,$\overrightarrow{CD}=(-2,-3,-3)$,而 $\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|}=\frac{5}{3\times\sqrt{22}}=\frac{5\sqrt{22}}{66}$,故直线 AB 和直线 CD 所成角的余弦值为 $\frac{5\sqrt{22}}{66}$.故选 A.

3.若平面 α 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{2},1,-1)$,直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,\sqrt{3})$,则直线 l 与平面 α 所成的角为　　(　　)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

D　**解析**:设直线 l 与平面 α 所成的角为 θ,则 $\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{2\times\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$.

又因为 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$,所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$,即直线 l 与平面 α 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$.故选 D.

4.已知 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$,$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$ 分别为两个平面的法向量,则两个平面的夹角的正弦值为　　(　　)

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

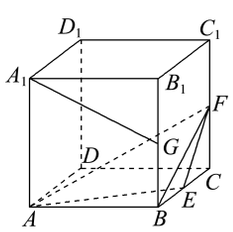
B　**解析**:由两平面的法向量分别为 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$,$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$,

可得 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{0\times1+1\times1+1\times1}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

设两平面的夹角为 θ,其中 $\theta\in[0,\pi]$,可得 $\cos\theta=\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\sqrt{6}}{3}$,$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

即两平面的夹角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.故选 B.

5.如图,正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1,点 E,F,G 分别为 BC,CC_1,BB_1 的中点,则下列说法正确的是　　(　　)



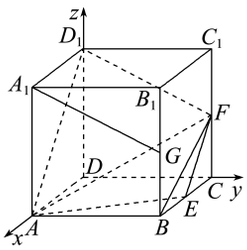
A.直线 D_1D 与直线 AF 垂直

B.直线 A_1G 与平面 AEF 平行

C.三棱锥 $F\text{-}ABE$ 的体积为 $\frac{1}{8}$

D.直线 BC 与平面 AEF 所成的角为 $45°$

B　**解析**:对于 A,因为 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 为正方体,所以 $DD_1\parallel CC_1$.因为直线 AF 与直线 CC_1 不垂直,所以直线 AF 与直线 DD_1 不垂直,故 A 错误.由题意建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(1,0,0)$，$E\left(\frac{1}{2},1,0\right)$，$F\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，$G\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$，$A_1(1,0,1)$.

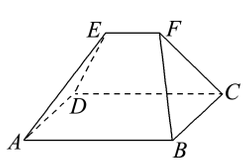
对于 B，$\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{1}{2},1,0\right)$，$\overrightarrow{AF}=\left(-1,1,\frac{1}{2}\right)$，设平面 AEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{1}{2}x+y=0,\\ \overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{n}=-x+y+\frac{1}{2}z=0.\end{cases}$ 令 $y=1$，则 $x=2$，$z=2$，所以 $\boldsymbol{n}=(2,1,2)$ 为平面 AEF 的一个法向量. 因为 $\overrightarrow{A_1G}=\left(0,1,-\frac{1}{2}\right)$，所以 $\overrightarrow{A_1G}\cdot\boldsymbol{n}=0\times2+1\times1-\frac{1}{2}\times2=0$，所以 $\overrightarrow{A_1G}\perp\boldsymbol{n}$. 因为 A_1G 在平面 AEF 外，所以直线 A_1G 与平面 AEF 平行，故 B 正确.

对于 C，$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}BE\cdot AB=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，所以三棱锥 $F\text{-}ABE$ 的体积为 $\frac{1}{3}S_{\triangle AEB}\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$，其中 h 为点 F 到底面 ABE 的距离，故 C 错误.

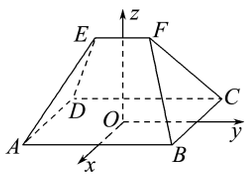
对于 D，$B(1,1,0)$，$C(0,1,0)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,0,0)$，设直线 BC 与平面 AEF 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{BC}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|-2|}{1\times\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{2}{3}$，故 D 错误.

故选 B.

6.（数学文化）《九章算术》是我国古代的一部数学专著，书中记载了一种名为“刍甍”的五面体（如图），其中四边形 $ABCD$ 为矩形，$EF\parallel AB$. 若 $AB=3EF$，$\triangle ADE$ 和 $\triangle BCF$ 都是正三角形，且 $AD=2EF$，则异面直线 DE 与 BF 所成角的大小为_____.



$\frac{\pi}{2}$　**解析：**如图，以矩形 $ABCD$ 的中心 O 为原点，$\overrightarrow{CB}$ 的方向为 x 轴正方向，建立空间直角坐标系.



因为四边形 $ABCD$ 为矩形，$EF\parallel AB$，$\triangle ADE$ 和 $\triangle BCF$ 都是正三角形，所以 $EF\subset$ 平面 Oyz，且 Oz 是线段 EF 的垂直平分线. 设 $AB=3$，则 $EF=1$，$AD=2$，所以 $D\left(-1,-\frac{3}{2},0\right)$，$E\left(0,-\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$，$B\left(1,\frac{3}{2},0\right)$，$F\left(0,\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$，所以 $\overrightarrow{DE}=(1,1,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BF}=(-1,-1,\sqrt{2})$. 所以 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BF}=1\times(-1)+1\times(-1)+\sqrt{2}\times\sqrt{2}=0$，故 $\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{BF}$. 所以异面直线 DE 与 BF 所成的角为 $\frac{\pi}{2}$.

7.已知在空间直角坐标系中，平面 α 过点 $(3,0,0)$，$(0,4,0)$ 及 z 轴上一点 $(0,0,a)(a>0)$. 若平面 α 与 Oxy 平面的夹角为 $45°$，则 $a=$_____.

$\frac{12}{5}$　**解析：**Oxy 平面的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，设平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}-3x+4y=0,\\ -3x+az=0,\end{cases}$ 即 $3x=4y=az$. 取 $z=1$，则 $x=\frac{a}{3}$，$y=\frac{a}{4}$，所以 $\boldsymbol{m}=\left(\frac{a}{3},\frac{a}{4},1\right)$ 为平面 α 的一个法向量.

由题意得 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{9}+\frac{a^2}{16}+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

解得 $a=\pm\frac{12}{5}$.

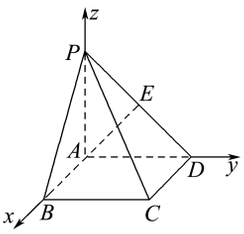
又因为 $a>0$，所以 $a=\frac{12}{5}$.

能力提升

1.已知点 P 为正方形 $ABCD$ 所在平面外一点，$PA\perp$ 平面 $ABCD$. 若 $PA=AB$，则平面 PAB 与平面 PCD 的夹角为　（　）

A. $30°$　　B. $45°$　　C. $60°$　　D. $90°$

B　**解析：**如图所示，建立空间直角坐标系.



设 $PA=AB=1$，

则 $A(0,0,0)$，$D(0,1,0)$，$P(0,0,1)$，

所以$\overrightarrow{AD}=(0,1,0)$.取 PD 的中点 E，

则 $E\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，所以$\overrightarrow{AE}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

易知$\overrightarrow{AD}$是平面 PAB 的一个法向量，$\overrightarrow{AE}$是平面 PCD 的一个法向量，所以 $\cos\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\rangle=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故平面 PAB 与平面 PCD 的夹角为 $45°$.故选 B.

2.（多选）在棱长为 2 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为棱 A_1D_1，AA_1 的中点，则下列结论正确的有（　　）

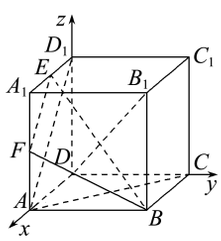
A.直线 BE 与 A_1B_1 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{3}$

B.AD_1∥平面 BEF

C.$B_1D\perp AC$

D.直线 AB 与平面 BEF 所成角的正弦值为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

BC　**解析**：对于 A，以 D 为坐标原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $B(2,2,0)$，$E(1,0,2)$，$A_1(2,0,2)$，$B_1(2,2,2)$，$\overrightarrow{BE}=(1,0,2)-(2,2,0)=(-1,-2,2)$，$\overrightarrow{A_1B_1}=(2,2,2)-(2,0,2)=(0,2,0)$.

设直线 BE 与 A_1B_1 所成角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{A_1B_1}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}|}{|\overrightarrow{BE}||\overrightarrow{A_1B_1}|}=\frac{|(-1,-2,2)\cdot(0,2,0)|}{\sqrt{1+4+4}\times2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，

所以直线 BE 与 A_1B_1 所成角的余弦值为 $\frac{2}{3}$，故 A 错误.

对于 B，E，F 分别为棱 A_1D_1，AA_1 的中点，故 EF∥AD_1，

因为 $AD_1\not\subset$平面 BEF，$EF\subset$平面 BEF，

所以 AD_1∥平面 BEF，故 B 正确.

对于 C，$D(0,0,0)$，$B_1(2,2,2)$，$A(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，

故$\overrightarrow{DB_1}=(2,2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(0,2,0)-(2,0,0)=(-2,2,0)$，

故$\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{AC}=(2,2,2)\cdot(-2,2,0)=-4+4+0=0$，故 $B_1D\perp AC$，故 C 正确.

对于 D，$B(2,2,0)$，$E(1,0,2)$，$F(2,0,1)$，$A(2,0,0)$，

$\overrightarrow{BE}=(-1,-2,2)$，$\overrightarrow{EF}=(1,0,-1)$.

设平面 BEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则

$$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BE}=(x,y,z)\cdot(-1,-2,2)=-x-2y+2z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EF}=(x,y,z)\cdot(1,0,-1)=x-z=0,\end{cases}$$

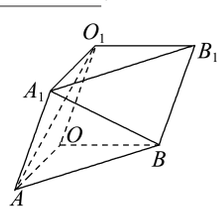
令 $x=1$，则 $z=1$，$y=\frac{1}{2}$，故 $\boldsymbol{m}=\left(1,\frac{1}{2},1\right)$.

其中$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$，设直线 AB 与平面 BEF 所成角的大小为 α，

则 $\sin\alpha=|\cos\langle\overrightarrow{AB},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{AB}||\boldsymbol{m}|}=\frac{\left(1,\frac{1}{2},1\right)\cdot(0,2,0)}{2\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}}=\frac{1}{3}$，

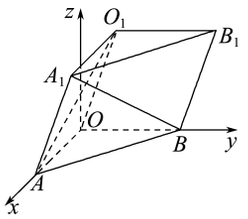
故直线 AB 与平面 BEF 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$，故 D 错误.

3.如图，在三棱柱 $OAB\text{-}O_1A_1B_1$ 中，平面 $OBB_1O_1\perp$ 平面 OAB，且 $\angle O_1OB=60°$，$\angle AOB=90°$，$OB=OO_1=2$，$OA=\sqrt{3}$，则异面直线 A_1B 与 O_1A 所成角的余弦值为_____.



$\frac{1}{7}$　**解析**：以 O 为原点，OA，OB 所在直线分别为 x

轴、y 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



由题意得 $A(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,2,0)$，$A_1(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$，$O_1(0,1,\sqrt{3})$，

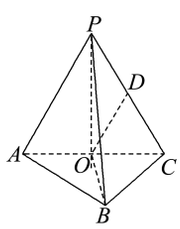
所以 $\overrightarrow{A_1B}=(-\sqrt{3},1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{O_1A}=(\sqrt{3},-1,-\sqrt{3})$.

设所求的角为 α，

则 $\cos\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{O_1A}|}{|\overrightarrow{A_1B}||\overrightarrow{O_1A}|}=\dfrac{|-3-1+3|}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\dfrac{1}{7}$，

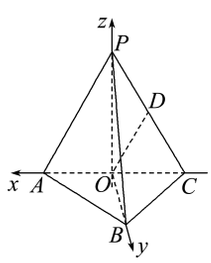
即异面直线 A_1B 与 O_1A 所成角的余弦值为 $\dfrac{1}{7}$.

4. 如图，在三棱锥 P-ABC 中，$AB\perp BC$，$AB=BC=\dfrac{1}{2}PA$，点 O，D 分别是 AC，PC 的中点，$OP\perp$ 底面 ABC，则直线 OD 与平面 PBC 所成角的正弦值为_____.



$\dfrac{\sqrt{210}}{30}$　**解析**：以 O 为原点，OA，OB，OP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.

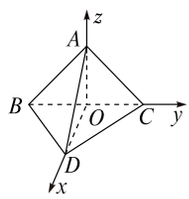
设 $AB=a$，则 $OP=\dfrac{\sqrt{14}}{2}a$，所以 $O(0,0,0)$，$D\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}a,0,\dfrac{\sqrt{14}}{4}a\right)$，$P\left(0,0,\dfrac{\sqrt{14}}{2}a\right)$，$B\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，$C\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$，所以 $\overrightarrow{PB}=\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,-\dfrac{\sqrt{14}}{2}a\right)$，$\overrightarrow{BC}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，$\overrightarrow{OD}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}a,0,\dfrac{\sqrt{14}}{4}a\right)$，可求得平面 PBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(-1,1,\sqrt{\dfrac{1}{7}}\right)$.



设 $\overrightarrow{OD}$ 与平面 PBC 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\cos\langle\overrightarrow{OD},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{OD}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{OD}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{210}}{30}$.

5. 若将边长为 1，$\angle A=60^\circ$ 的菱形 $ABDC$ 沿对角线 BC 折成直二面角，则平面 ABD 与平面 BDC 的夹角的正弦值为_____.

$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　**解析**：取 BC 的中点 O，连接 AO，DO，建立如图所示的空间直角坐标系.



由题意得 $A\left(0,0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$B\left(0,-\dfrac{1}{2},0\right)$，$D\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$，

所以 $\overrightarrow{OA}=\left(0,0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BA}=\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\overrightarrow{BD}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$.

显然 $\overrightarrow{OA}=\left(0,0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 为平面 BCD 的一个法向量.

设平面 ABD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}\dfrac{1}{2}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0,\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{2}y=0.\end{cases}$

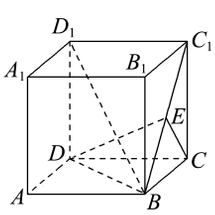
取 $x=1$，则 $y=-\sqrt{3}$，$z=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},1)$ 是平面 ABD 的一个法向量.

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{OA}\rangle=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，所以平面 ABD 与平面 BDC 的夹角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

6. 如图，正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，E 是 BC_1 的中点.

(1) 求证：$BC_1\perp$ 平面 CDE；

(2) 求直线 BD_1 与平面 BDE 所成角的正弦值.



(1) **证明**：如图，连接 CE，在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中有 $DC\perp$ 平面 BCC_1B_1. 又 $BC_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，

所以 $DC\perp BC_1$. 又因为四边形 BCC_1B_1 是正方形，E 是 BC_1 的中点，

所以 $CE\perp BC_1$. 又 $CE\cap CD=C$，CE，$CD\subset$ 平面 CDE，

所以 $BC_1\perp$ 平面 CDE.

(2)**解**：以 D 为坐标原点，分别以 DA，DC，DD_1 为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，

由棱长为 2，得 $D(0,0,0)$，$B(2,2,0)$，$D_1(0,0,2)$，$E(1,2,1)$，

所以 $\overrightarrow{BD_1}=(-2,-2,2)$，$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{DE}=(1,2,1)$.

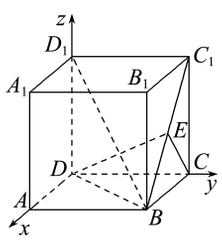
设平面 BDE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=2x+2y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=x+2y+z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$.

设直线 BD_1 与平面 BDE 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{BD_1}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD_1}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{BD_1}|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$，

所以直线 BD_1 与平面 BDE 所成角的正弦值为 $\dfrac{1}{3}$.



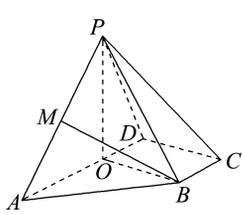
自我超越

如图，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$\angle ADC=\angle BCD=90^\circ$，$BC=1$，$CD=\sqrt{3}$，$PD=2$，$\angle PDA=60^\circ$，$\angle PAD=30^\circ$，且平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，在平面 $ABCD$ 内过点 B 作 $BO\perp AD$，交 AD 于点 O，连接 PO.

(1)求证：$PO\perp$ 平面 $ABCD$；

(2)求二面角 A-PB-C 的正弦值；

(3)在线段 PA 上存在一点 M，使直线 BM 与平面 PAD 所成的角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，求 PM 的长.



(1)**证明**：因为 $BO\perp AD$，$BC/\!/AD$，$\angle ADC=\angle BCD=90^\circ$，

所以四边形 $BODC$ 为矩形.

在 $\triangle PDO$ 中，$PD=2$，$DO=BC=1$，$\angle PDA=60^\circ$，

则 $PO=\sqrt{PD^2+OD^2-2PD\cdot OD\cos 60^\circ}=\sqrt{3}$，

所以 $PO^2+DO^2=PD^2$，所以 $PO\perp AD$.

又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$PO\subset$ 平面 PAD，

平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$.

(2)**解**：由(1)知，OA，OB，OP 两两垂直，则以 O 为原点，OA 为 x 轴，OB 为 y 轴，OP 为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.

因为 $PO=\sqrt{3}$，$\angle PAD=30^\circ$，所以 $AO=3$，

则 $O(0,0,0)$，$A(3,0,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$C(-1,\sqrt{3},0)$.

设平面 APB 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{PA}=(3,0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PB}=(0,\sqrt{3},-\sqrt{3})$，

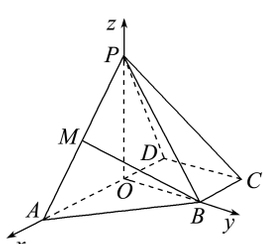
则 $\begin{cases}\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{m}=3x-\sqrt{3}z=0,\\ \overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{m}=\sqrt{3}y-\sqrt{3}z=0.\end{cases}$ 取 $x=1$，则 $z=\sqrt{3}$，$y=\sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$ 为平面 APB 的一个法向量.

同理，可得 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$ 为平面 CPB 的一个法向量，

故 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

因为二面角 A-PB-C 是钝角，

所以二面角 A-PB-C 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.



(3)**解**：设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AP}$ $(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=(3,-\sqrt{3},0)+\lambda(-3,0,\sqrt{3})=(3-3\lambda,-\sqrt{3},\sqrt{3}\lambda)$.

又平面 PAD 的一个法向量为 $\overrightarrow{OB}=(0,\sqrt{3},0)$，

所以直线 BM 与平面 PAD 所成的角的正弦值为 $|\cos\langle\overrightarrow{OB},\overrightarrow{BM}\rangle|=\dfrac{3}{\sqrt{3}\times\sqrt{(3-3\lambda)^2+3+3\lambda^2}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，

解得 $\lambda=\dfrac{3}{4}$，所以 $PM=\dfrac{1}{4}AP=\dfrac{1}{4}\sqrt{PO^2+OA^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

微专题培优(一)　立体几何中的探索性问题

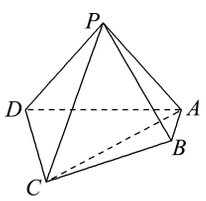
探索性问题是立体几何的重要题型之一，是近几年的命题热点.与空间向量有关的探究性问题主要有两类：一类是探究线面的位置关系；另一类是探究线面角、面面角或点、线、面距离满足特定要求时的存在性问题.解决这两类探索性问题的策略是先建立空间直角坐标系，引入参数(有些是题中已给出)，再设出关键点的坐标，然后探究这样的点是否存在或参数是否满足要求，从而作出判断.

类型1 线面平行的探索性问题

例1　如图，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$PA\perp PD$，$PA=PD$，$AB\perp AD$，$AB=1$，$AD=2$，$AC=CD=\sqrt{5}$.

(1)求证：$PD\perp$ 平面 PAB.

(2)在棱 PA 上是否存在点 M，使得 $BM\parallel$ 平面 PCD？若存在，求出 $\dfrac{PM}{PA}$ 的值；若不存在，请说明理由.



(1)**证明**：因为平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\perp AD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AB\perp$ 平面 PAD.

因为 $PD\subset$ 平面 PAD，所以 $AB\perp PD$.

又 $PD\perp PA$，$PA\cap AB=A$，$AB\subset$ 平面 PAB，$PA\subset$ 平面 PAB，所以 $PD\perp$ 平面 PAB.

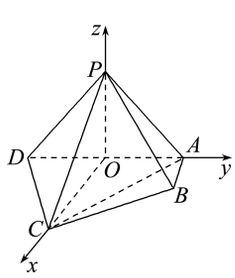
(2)**解**：取 AD 中点为 O，连接 CO，PO.

因为 $CD=AC=\sqrt{5}$，所以 $CO\perp AD$.

因为 $PA=PD$，所以 $PO\perp AD$.

因为平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$PO\subset$ 平面 PAD，所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$.

所以 OP，OC，OA 两两垂直.建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$，



则 $P(0,0,1)$，$B(1,1,0)$，$D(0,-1,0)$，$C(2,0,0)$，

$\overrightarrow{PB}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{PD}=(0,-1,-1)$，$\overrightarrow{PC}=(2,0,-1)$.

设平面 PDC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=-y-z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=2x-z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,-2,2)$.

假设存在点 M 使得 $BM\parallel$ 平面 PCD，设 $\dfrac{AM}{AP}=\lambda$，$M(0,y_0,z_0)$，

又 $A(0,1,0)$，$P(0,0,1)$，$\overrightarrow{AP}=(0,-1,1)$，$\overrightarrow{AM}=(0,y_0-1,z_0)$，

所以 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AP}$，解得 $M(0,1-\lambda,\lambda)$，

所以 $\overrightarrow{BM}=(-1,-\lambda,\lambda)$.

因为 $BM\parallel$ 平面 PCD，$\boldsymbol{n}$ 为平面 PCD 的一个法向量，

所以 $\overrightarrow{BM}\cdot\boldsymbol{n}=0$，即 $-1+2\lambda+2\lambda=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{4}$.

综上，存在点 M，即当 $\dfrac{PM}{PA}=\dfrac{3}{4}$ 时，使得 $BM\parallel$ 平面 PCD.

【规律方法】

用向量法解决线面平行的探索性问题的步骤

(1)建立坐标系：以特殊点(如顶点、垂足)为原点，建立空间直角坐标系；

(2)设参数表示点的坐标：设与动点相关的参数(如线段长度的比值为 λ)，写出相关点的坐标；

(3)转化为向量关系：直线的方向向量与平面的法向量垂直(数量积为 0)，且直线上的点不在平面内；

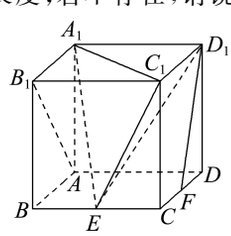
(4)解方程求参数：通过向量垂直的条件列方程，解出参数值，确定动点的位置.

【对点训练】

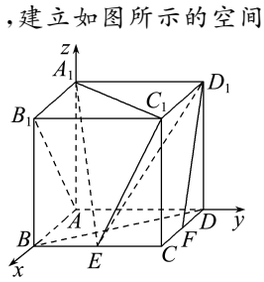
如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 BC 的中点，F 为棱 CD 上的一点.请用向量方法解决以下问题.

(1)求证：直线 $AB_1\perp$ 平面 A_1ED_1.

(2)是否存在点 F，使直线 $D_1F\parallel$ 平面 A_1EC_1？若存在，求出 DF 的长度；若不存在，请说明理由.



(1)**证明**：在棱长为 2 的正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，以 A 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$，$A_1(0,0,2)$，$B_1(2,0,2)$，$C_1(2,2,2)$，

$D_1(0,2,2)$，$E(2,1,0)$，

$\overrightarrow{AB_1}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{A_1D_1}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{A_1E}=(2,1,-2)$.

因为$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{A_1D_1}=2\times0+0\times2+2\times0=0$，$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{A_1E}=2\times2+0\times1+2\times(-2)=0$，

所以 $AB_1\perp A_1D_1$，$AB_1\perp A_1E$. 又 $A_1D_1\cap A_1E=A_1$，A_1D_1，$A_1E\subset$平面 A_1ED_1，

所以直线 $AB_1\perp$平面 A_1ED_1.

(2)**解**：由(1)知$\overrightarrow{A_1C_1}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{EC_1}=(0,1,2)$，设平面 A_1EC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=2x+2y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC_1}=y+2z=0,\end{cases}$取 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$.

假定存在点 F，使直线 $D_1F\parallel$平面 A_1EC_1，设点 F 的坐标为$(t,2,0)$，$0\leqslant t\leqslant2$，

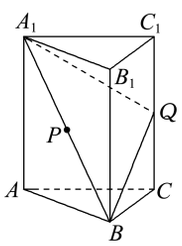
则$\overrightarrow{FD_1}=(-t,0,2)$. 由$\overrightarrow{FD_1}\perp\boldsymbol{n}$，得 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FD_1}=-2t+2=0$，解得 $t=1$.

又 $D_1F\not\subset$平面 A_1EC_1，则 $D_1F\parallel$平面 A_1EC_1，

所以存在点 F，使直线 $D_1F\parallel$平面 A_1EC_1，此时 DF 的长度为 1.

类型2 线面垂直的探索性问题

例 2　如图，在直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，$CA=CB=\frac{1}{2}AA_1=1$，$BC\perp AC$，P 为 A_1B 上的动点，Q 为棱 C_1C 的中点.



(1)设平面 $A_1BQ\cap$平面 $ABC=l$.若 P 为 A_1B 的中点，求证：$PQ\parallel l$；

(2)设$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BA_1}$，则线段 A_1B 上是否存在点 P，使得 $AP\perp$平面 A_1BQ？若存在，求出实数 λ 的值；若不存在，请说明理由.

(1)**证明**：设 AB 的中点为 E，连接 PE，PQ，CE，如图 1，

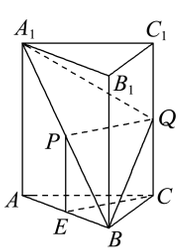


图1

因为 P 为 A_1B 的中点，Q 为 C_1C 的中点，

所以 $PE\parallel A_1A$，$PE=\frac{1}{2}A_1A$，$QC=\frac{1}{2}C_1C$.

在直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，$A_1A\parallel C_1C$，$A_1A=C_1C$，

所以 $A_1A\parallel QC$，且$\frac{1}{2}A_1A=QC$，所以 $PE\parallel\!\!\!=QC$，

所以四边形 $PECQ$ 为平行四边形，

则 $PQ\parallel EC$. 又 $PQ\not\subset$平面 ABC，$EC\subset$平面 ABC，

所以 $PQ\parallel$平面 ABC.

又平面 $A_1BQ\cap$平面 $ABC=l$，$PQ\subset$平面 A_1BQ，

所以 $PQ\parallel l$.

(2)**解**：在直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，$CC_1\perp$平面 ABC，$BC\perp AC$，

故可以 C 为原点，以 CB，CA，CC_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图 2 所示的空间直角坐标系，

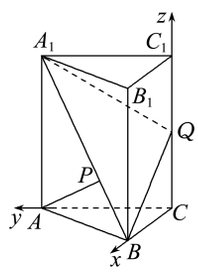


图2

因为 $CA=CB=\frac{1}{2}AA_1=1$，

所以 $B(1,0,0)$，$Q(0,0,1)$，$A_1(0,1,2)$，$A(0,1,0)$，

则$\overrightarrow{BA_1}=(-1,1,2)$，$\overrightarrow{A_1Q}=(0,-1,-1)$，$\overrightarrow{AB}=(1,-1,0)$.

又$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BA_1}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则$\overrightarrow{BP}=(-\lambda,\lambda,2\lambda)$，

所以$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=(1-\lambda,\lambda-1,2\lambda)$.

若 $AP\perp$平面 A_1BQ，则$\begin{cases}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0,\\ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{A_1Q}=0,\end{cases}$

则$\begin{cases}-(1-\lambda)+\lambda-1+4\lambda=0,\\ -(\lambda-1)-2\lambda=0,\end{cases}$解得 $\lambda=\frac{1}{3}$，

所以线段 A_1B 上存在点 P，使得 $AP\perp$平面 A_1BQ，此时 $\lambda=\frac{1}{3}$.

【规律方法】

解决线面垂直的探索性问题，核心方法是先假设存在满足条件的点、线、参数，再利用线面垂直的判定定理推导验证，最后结合几何图形的性质确定结论.

具体的方法可分为三步：

(1)假设存在

根据问题设问，假设存在符合条件的点(如线段上的动点)、直线或参数值，并明确目标直线与平面的位置关系.

(2)推导验证

①建立空间直角坐标系(优先选择两两垂直的直线为坐标轴，如正方体的棱、长方体的棱等)，写出相关点的坐标，进而得到向量坐标，设平面内两条相交直线的方向向量，若目标直线的方向向量与这两个方向向量均垂直(向量数量积为 0)，则满足线面垂直的判定条件；

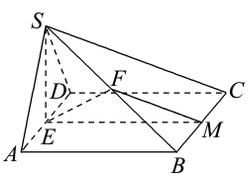
②若不建立空间直角坐标系，则可利用几何定理（如等腰三角形三线合一、矩形邻边垂直）寻找平面内与目标直线垂直的两条相交直线.

(3)确定结论

根据推导结果判断是否存在符合条件的元素，若存在，则求出具体位置或参数值；若推导结果出现矛盾（如参数超出取值范围），则判定其不存在.

【对点训练】

如图，在四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 中，平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$，$SA=SD=AD=2$，四边形 $ABCD$ 为正方形，E 为 AD 的中点，F 为 SB 上一点，M 为 BC 上一点，且平面 $EFM\parallel$ 平面 SCD.



(1)求证：M 为线段 BC 的中点.

(2)求二面角 $S\text{-}BC\text{-}D$ 的正切值.

(3)在棱 SC 上是否存在点 N，使得平面 $DMN\perp$ 平面 $ABCD$？若存在，求出 $\dfrac{CN}{CS}$ 的值；若不存在，请说明理由.

(1)**证明**：因为平面 $EFM\parallel$ 平面 SCD，平面 $ABCD\cap$ 平面 $EFM=EM$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $SCD=CD$，

所以 $EM\parallel CD$.

又因为 $CM\parallel DE$，则四边形 $CDEM$ 为平行四边形，

所以 $CM=DE$.

因为 E 为 AD 的中点，则 $DE=\dfrac{1}{2}AD$，所以 $CM=DE=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{2}BC$，

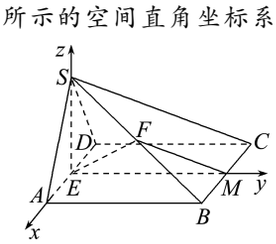
故 M 为线段 BC 的中点.

(2)**解**：因为 $SA=SD$，E 为 AD 的中点，则 $SE\perp AD$.

因为平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $SAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$SE\subset$ 平面 SAD，

所以 $SE\perp$ 平面 $ABCD$.

又因为四边形 $ABCD$ 为正方形，以点 E 为坐标原点，$\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{EM}$，$\overrightarrow{ES}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系，



因为 $SA=SD=AD=2$，所以 $S(0,0,\sqrt{3})$，$B(1,2,0)$，$C(-1,2,0)$.

设平面 SBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{CB}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{SC}=(-1,2,-\sqrt{3})$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CB}=2x_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{SC}=-x_1+2y_1-\sqrt{3}z_1=0,\end{cases}$ 取 $y_1=\sqrt{3}$，可得 $\boldsymbol{m}=(0,\sqrt{3},2)$.

易知平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，

则 $\sin\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\sqrt{1-\cos^2\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle}=\sqrt{1-\left(\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

所以 $\tan\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\sin\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle}{\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}\times\dfrac{7}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

由图可知，二面角 $S\text{-}BC\text{-}D$ 的平面角为锐角，

因此二面角 $S\text{-}BC\text{-}D$ 的正切值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(3)**解**：易知 $D(-1,0,0)$，$M(0,2,0)$，

设 $\overrightarrow{SN}=\lambda\overrightarrow{SC}=\lambda(-1,2,-\sqrt{3})=(-\lambda,2\lambda,-\sqrt{3}\lambda)$，其中 $0\leqslant\lambda\leqslant1$，

则 $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SN}=(1,0,\sqrt{3})+(-\lambda,2\lambda,-\sqrt{3}\lambda)=(1-\lambda,2\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$，$\overrightarrow{DM}=(1,2,0)$.

设平面 DMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{u}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{u}\cdot\overrightarrow{DM}=x_2+2y_2=0,\\ \boldsymbol{u}\cdot\overrightarrow{DN}=(1-\lambda)x_2+2\lambda y_2+(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)z_2=0,\end{cases}$

取 $x_2=2\sqrt{3}(1-\lambda)$，则 $\boldsymbol{u}=(2\sqrt{3}(1-\lambda),\sqrt{3}(\lambda-1),4\lambda-2)$.

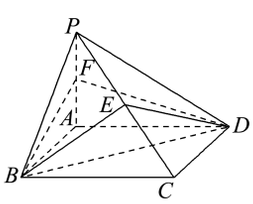
因为平面 $DMN\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{u}$，

即 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}=4\lambda-2=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，

所以当 N 为 SC 的中点时，平面 $DMN\perp$ 平面 $ABCD$，故 $\dfrac{CN}{CS}=\dfrac{1}{2}$.

类型3 与空间角有关的探索性问题

例 3　如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle BAD=120^\circ$，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=2$，$AB=4$，E 为棱 PC 的中点，F 为棱 PA 上的动点.



(1)求证：平面 $BDE\perp$ 平面 $ABCD$.

(2)是否存在点 F，使得平面 BDE 与平面 BDF 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$？若存在，求出点 F 的位置；若不存在，请说明理由.

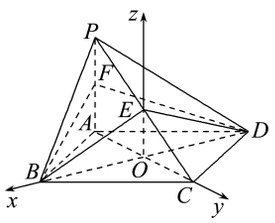
(1)**证明**：如图，连接 AC，与 BD 相交于点 O，连接 OE.

因为底面 $ABCD$ 为菱形，所以 O 为 AC 的中点.

因为 E 为 PC 的中点，所以 $OE\parallel PA$.

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $OE\perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $OE\subset$ 平面 BDE，所以平面 $BDE\perp$ 平面 $ABCD$.



(2)**解**：因为四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle BAD=120^\circ$，所以 $\triangle ABC$，$\triangle ADC$ 为等边三角形，

所以 $OB=OD=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=2\sqrt{3}$.

因为 $OE\perp$ 平面 $ABCD$，且底面 $ABCD$ 为菱形，所以 OB，OC，OE 两两垂直，

以 O 为原点，向量 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OE}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $O(0,0,0)$，$B(2\sqrt{3},0,0)$，$C(0,2,0)$，$D(-2\sqrt{3},0,0)$，

所以 $\overrightarrow{DB}=(4\sqrt{3},0,0)$.

设 $F(0,-2,t)(0\leqslant t\leqslant 2)$，则 $\overrightarrow{FB}=(2\sqrt{3},2,-t)$.

设平面 BDF 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{FB}\cdot\boldsymbol{m}=2\sqrt{3}x+2y-tz=0,\\ \overrightarrow{DB}\cdot\boldsymbol{m}=4\sqrt{3}x=0,\end{cases}$ 令 $z=2$，可得 $\boldsymbol{m}=(0,t,2)$.

由题意得 $\overrightarrow{OC}=(0,2,0)$ 为平面 BDE 的一个法向量，

设平面 BDE 与平面 BDF 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{OC}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OC}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{OC}|}=\frac{2t}{2\sqrt{t^2+4}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，解得 $t=\frac{2}{3}$，

所以存在点 F 为棱 PA 靠近点 A 的三等分点，使得平面 BDE 与平面 BDF 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

【规律方法】

解决与空间角有关的探索性问题的方法

(1)建系设参：根据几何体的特征建立空间直角坐标系，设出待探索点的坐标(常用参数 λ 表示线段数量关系，如 $AP=\lambda AF$).

(2)求方向向量、法向量：写出相关直线的方向向量、相关平面的法向量.

(3)列角的表达式

①线线角 θ：$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\left(\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$；

②线面角 θ：$\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{n}|}\left(\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$；

③二面角 θ：$|\cos\theta|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$(需结合图形判断 θ 为锐角还是钝角).

(4)解方程、分析参数：根据角的定值条件列方程，求参数 λ 的值或范围.若方程有解，则存在；若方程无解，则不存在.

【对点训练】

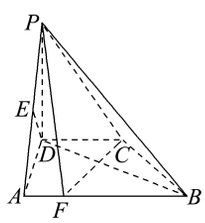
如图，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\parallel DC$，$AB\perp AD$，$DC=AD=1$，$AB=2$，$\angle PAD=45^\circ$，E 是 PA 的中点，F 在线段 AB 上，且满足 $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

(1)求证：$DE\parallel$ 平面 PBC.

(2)求二面角 F-PC-B 的余弦值.

(3)在线段 PA 上是否存在点 Q，使得 FQ 与平面 PFC 所成角的正弦值是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$？若存在，求出 AQ 的长；若不存在，请说明理由.

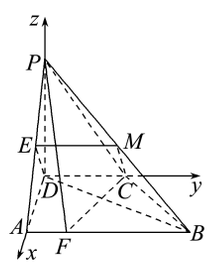
(1)**证明**：如图，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，取 PB 的中点 M，连接 EM，CM.由 E 是 PA 的中点，



得 $EM\parallel AB$，且 $EM=\frac{1}{2}AB=1$.又 $AB\parallel CD$，$CD=1$，

则 $EM\parallel CD$ 且 $EM=CD$，所以四边形 $CDEM$ 为平行四边形，所以 $DE\parallel CM$.

又 $CM\subset$ 平面 PBC，$DE\not\subset$ 平面 PBC，所以 $DE\parallel$ 平面 BPC.



(2)**解**：由 $AB\parallel DC$，$AB\perp AD$，得 $AD\perp DC$，由 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，AD，$DC\subset$ 平面 $ABCD$，得 $DP\perp DA$，$DP\perp DC$.

因为 $\angle PAD=45^\circ$，所以 $DP=DA=1$.

以 D 为原点，直线 DA，DC，DP 分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $Dxyz$，

则 $A(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$B(1,2,0)$，$D(0,0,0)$，$P(0,0,1)$.

设 $F(1,y,0)(0\leqslant y\leqslant 2)$，则 $\overrightarrow{CF}=(1,y-1,0)$，$\overrightarrow{BD}=(-1,-2,0)$.

由 $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，得 $-1-2y+2=0$，解得 $y=\frac{1}{2}$，

即 $F\left(1,\frac{1}{2},0\right)$.

设平面 FPC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{PC}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{CF}=\left(1,-\frac{1}{2},0\right)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=y_1-z_1=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CF}=x_1-\frac{1}{2}y_1=0,\end{cases}$ 令 $y_1=2$，得 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$.

设平面 BPC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{PC}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{CB}=(1,1,0)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=y_2-z_2=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CB}=x_2+y_2=0,\end{cases}$ 令 $y_2=1$，得 $\boldsymbol{m}=(-1,1,1)$.

设二面角 F-PC-B 的大小为 θ，由题图得 θ 为锐角，

因此 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{3}{\sqrt{3}\times3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以二面角 F-PC-B 的余弦值是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(3)假定存在点 Q 满足条件，设点 $Q(x_3,0,z_3)$，由 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{AP}=\lambda(-1,0,1)$，$\lambda\in[0,1]$，

得 $Q(-\lambda+1,0,\lambda)$，则 $\overrightarrow{FQ}=\left(-\lambda,-\frac{1}{2},\lambda\right)$.

又平面 PFC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$，

由 FQ 与平面 PFC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，得

$$|\cos\langle\overrightarrow{FQ},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{FQ}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{FQ}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|\lambda-1|}{3\sqrt{2\lambda^2+\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

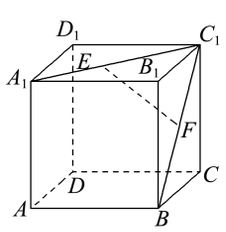
整理得 $20\lambda^2+8\lambda-1=0$.

又 $\lambda\in[0,1]$，解得 $\lambda=\frac{1}{10}$，此时 $|\overrightarrow{AQ}|=\frac{1}{10}|\overrightarrow{AP}|=\frac{\sqrt{2}}{10}$，

所以存在点 Q，使得 FQ 与平面 PFC 所成角的正弦值是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，AQ 的长为 $\frac{\sqrt{2}}{10}$.

微专题培优集训(一)

1. 如图，已知正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，F 为线段 BC_1 的中点，E 为线段 A_1C_1 上的动点，则下列结论正确的是（　　）



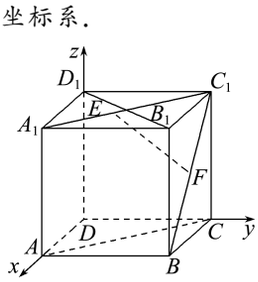
A. 存在点 E，使 $EF\parallel$ 平面 $ABCD$

B. 三棱锥 B_1-ACE 的体积随动点 E 的位置变化而变化

C. 直线 EF 与 AD_1 所成的角不可能等于 $30°$

D. 存在点 E，使 $EF\perp$ 平面 AB_1C_1D

D　**解析**：在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.



设正方体棱长为 2，则 $D(0,0,0)$，$F(1,2,1)$，$B(2,2,0)$，$A(2,0,0)$，$D_1(0,0,2)$，$B_1(2,2,2)$.

对于 A，由 E 在线段 A_1C_1 上运动，设 $E(m,2-m,2)(0\leqslant m\leqslant2)$，则 $\overrightarrow{EF}=(1-m,m,-1)$，易知平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，显然 $\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}=-1\neq0$，则直线 EF 与平面 $ABCD$ 不平行，A 错误；

对于 C，$\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,2)$，设直线 EF 与 AD_1 所成角为 θ，则 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{EF}\rangle|=\frac{|m-2|}{2\sqrt{m^2-m+1}}$，显然当 $m=\frac{1}{2}$ 时，$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\theta=30°$，即存在点 E 使得直线 EF 与 AD_1 所成的角为 $30°$，C 错误；

对于 D，设平面 AB_1C_1D 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{DA}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{AB_1}=(0,2,2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DA}=2x=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB_1}=2y+2z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，得 $\boldsymbol{m}=(0,1,-1)$ 为平面 AB_1C_1D 的一个法向量，

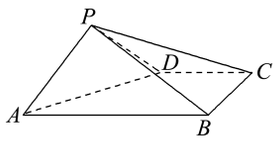
当 $m=1$ 时，$\overrightarrow{EF}=(0,1,-1)=\boldsymbol{m}$，因此 $EF\perp$ 平面 AB_1C_1D，D 正确；

对于 B，点 E 在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的对角面矩形 ACC_1A_1 的边 A_1C_1 上，则 $S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，而 $AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，$B_1D_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，则 $AA_1\perp B_1D_1$，又 $B_1D_1\perp A_1C_1$，$AA_1\cap A_1C_1=A_1$，所以 $B_1D_1\perp$ 平面 ACC_1A_1，点 B_1 到平面 ACE 的距离为 $\sqrt{2}$，则三棱锥 B_1-ACE 的体积为定值，B 错误.

2. 如图，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AB=2DC$，$\angle ABC=90°$，$AB=2$，$\triangle PAD$ 为等腰直角三角形，AD 为斜边，$PD=BC=1$，$PB=PC$.

(1)求证:平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$.

(2)线段 PB 上是否存在一点 T,使得 AT 与平面 PAD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$?若存在,求出 $\frac{PT}{PB}$ 的值;若不存在,请说明理由.



(1)**证明**:如图,设线段 AD 的中点为 M,线段 BC 的中点为 N,连接 PM,MN,PN.

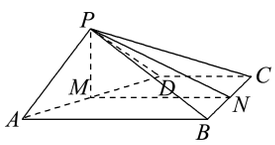
依题意,$PD=PA=1$,则 $PM\perp AD$.由 $PB=PC$,得 $PN\perp BC$.

而 $CD/\!/AB$,$AB\perp BC$,MN 是梯形 $ABCD$ 的中位线,所以 $MN/\!/AB$,$MN\perp BC$.

因为 MN,$PN\subset$ 平面 PMN,$MN\cap PN=N$,所以 $BC\perp$ 平面 PMN.

因为 $PM\subset$ 平面 PMN,所以 $BC\perp PM$.又 AD,$BC\subset$ 平面 $ABCD$,且 AD 和 BC 相交,

所以 $PM\perp$ 平面 $ABCD$.又 $PM\subset$ 平面 PAD,所以平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$.

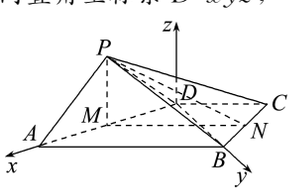


(2)**解**:依题意可求得 $AD=BD=\sqrt{2}$,则 $AD^2+BD^2=4=AB^2$,即 $AD\perp BD$.

由(1)知 $PM\perp$ 平面 $ABCD$,$BD\subset$ 平面 $ABCD$,则 $PM\perp BD$.

由 $AD\cap PM=M$,AD,$PM\subset$ 平面 PAD,可得 $BD\perp$ 平面 PAD.

过点 D 作 $Dz\perp$ 平面 $ABCD$,以 D 为原点,构建如图所示的空间直角坐标系 $D\text{-}xyz$,



则 $A(\sqrt{2},0,0)$,$B(0,\sqrt{2},0)$,$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,所以

$\overrightarrow{PB}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$\overrightarrow{AP}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

令 $\overrightarrow{PT}=\lambda\overrightarrow{PB}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda,\sqrt{2}\lambda,-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)$,$0\leqslant\lambda\leqslant1$,则

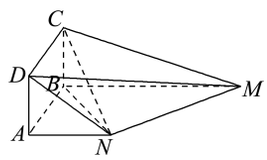
$\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PT}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+1),\sqrt{2}\lambda,-\frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda-1)\right)$.

由 $BD\perp$ 平面 PAD,则平面 PAD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$,

由题设 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{AT}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AT}}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{AT}|}\right|=\frac{|\sqrt{2}\lambda|}{\sqrt{\frac{1}{2}(\lambda+1)^2+2\lambda^2+\frac{1}{2}(\lambda-1)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$,

所以 $\frac{2\lambda^2}{3\lambda^2+1}=\frac{1}{6}$,可得 $\lambda=\frac{1}{3}$(舍负值),所以 $\frac{PT}{PB}=\frac{1}{3}$ 时满足题设.

3. 如图,正方形 $ABCD$ 所在平面与梯形 $ABMN$ 所在平面垂直,$BM/\!/NA$,$AB=1$,$NA=2$,$BM=4$,$CN=\sqrt{6}$.



(1)求证:$MB\perp$ 平面 $ABCD$.

(2)在线段 CM 上(不含端点)是否存在一点 E,使得平面 BEN 与平面 BDN 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$?若存在,求出 $\frac{CE}{EM}$ 的值;若不存在,请说明理由.

(1)**证明**:在正方形 $ABCD$ 中,$BC\perp AB$,

因为平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABMN$,平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABMN=AB$,$BC\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $BC\perp$ 平面 $ABMN$.又 BM,$BN\subset$ 平面 $ABMN$,所以 $BC\perp BM$,$BC\perp BN$.

又 $BC=1$,$CN=\sqrt{6}$,则 $BN=\sqrt{CN^2-BC^2}=\sqrt{5}$.

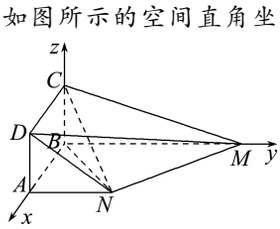
又 $AB=1$,$NA=2$,则 $BN^2=AB^2+AN^2$,即 $NA\perp AB$.

又 $BM/\!/NA$,则 $MB\perp AB$,$BC\cap AB=B$,AB,$BC\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $MB\perp$ 平面 $ABCD$.

(2)**解**:由(1)知,$MB\perp$ 平面 $ABCD$,$BC\perp AB$,

以 B 为原点,BA,BM,BC 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $B(0,0,0)$,$A(1,0,0)$,$C(0,0,1)$,$D(1,0,1)$,$N(1,2,0)$,$M(0,4,0)$.

设点 $E(x,y,z)$,$\overrightarrow{CE}=\lambda\overrightarrow{CM}$,$\lambda\in(0,1)$,

所以 $(x,y,z-1)=\lambda(0,4,-1)$,

所以 $\begin{cases}x=0,\\y=4\lambda,\\z=1-\lambda,\end{cases}$ 故 $E(0,4\lambda,1-\lambda)$,

所以$\overrightarrow{BN}=(1,2,0)$，$\overrightarrow{BE}=(0,4\lambda,1-\lambda)$.

设平面BEN的法向量为$\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

所以$\begin{cases}\overrightarrow{BN}\cdot\boldsymbol{m}=x_1+2y_1=0,\\ \overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{m}=4\lambda y_1+(1-\lambda)z_1=0.\end{cases}$

令$x_1=-2$，则$y_1=1$，$z_1=\dfrac{4\lambda}{\lambda-1}$，

所以$\boldsymbol{m}=\left(-2,1,\dfrac{4\lambda}{\lambda-1}\right)$为平面$BEN$的一个法向量.

又$\overrightarrow{BD}=(1,0,1)$，设平面$BDN$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

所以$\begin{cases}\overrightarrow{BN}\cdot\boldsymbol{n}=x_2+2y_2=0,\\ \overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}=x_2+z_2=0,\end{cases}$

令$x_2=2$，则$y_2=-1$，$z_2=-2$，

所以$\boldsymbol{n}=(2,-1,-2)$为平面BDN的一个法向量，

所以$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\left|-4-1-\dfrac{8\lambda}{\lambda-1}\right|}{3\cdot\sqrt{5+\left(\dfrac{4\lambda}{\lambda-1}\right)^2}}$

$=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，解得$\lambda=0$或$\lambda=\dfrac{5}{4}$.

因为$\lambda\in(0,1)$，

所以线段CM上（不含端点）不存在一点E，使得平面BEN与平面BDN夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

微专题培优（二）　立体几何中的翻折问题

翻折问题是立体几何的重要题型之一，是近几年高考的重点题型.解决该类问题的关键是对比折叠前后的图形，明确哪些线、面的位置关系和数学量没有发生变化，哪些发生了变化，在证明和求解的过程中恰当地加以利用.

例　如图1，在直角梯形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，$\angle BAD=\dfrac{\pi}{2}$，$AB=BC=1$，$AD=2$，$E$是$AD$的中点，$O$是$AC$与$BE$的交点.将$\triangle ABE$沿$BE$折起到$\triangle A_1BE$的位置，使得平面$A_1BE\perp$平面$BCDE$，如图2所示.

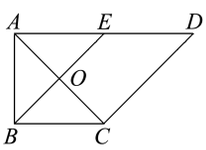


图1

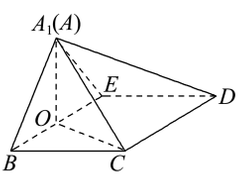


图2

(1)求证：$CD\perp$平面A_1OC；

(2)求平面A_1BC与平面A_1CD夹角的余弦值.

(1)**证明**：在直角梯形$ABCD$中，连接CE（图略），因为$AE=\dfrac{1}{2}AD=1$，$AD\parallel BC$，$\angle BAD=\dfrac{\pi}{2}$，

所以四边形$ABCE$为正方形，所以$AC\perp BE$，所以$EB\perp A_1O$，$EB\perp CO$.

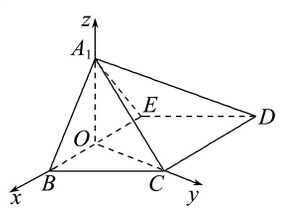
又$A_1O\cap CO=O$，A_1O，$CO\subset$平面A_1OC，所以$EB\perp$平面A_1OC.

又$BC\parallel ED$，且$BC=ED$，故四边形$BCDE$为平行四边形，

所以$CD\parallel EB$，所以$CD\perp$平面A_1OC.

(2)**解**：由题易知，$A_1O\perp BE$，$OC\perp BE$，因为平面$A_1BE\perp$平面$BCDE$，平面$A_1BE\cap$平面$BCDE=BE$，$A_1O\subset$平面A_1BE，所以$A_1O\perp$平面$BCDE$.又$OC\subset$平面$BCDE$，

所以$A_1O\perp OC$.以O为原点，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OA_1}$的方向分别为x轴、y轴、z轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系.



由题意知，$A_1\left(0,0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$D\left(-\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，$B\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,0\right)$，$C\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，则$\overrightarrow{A_1C}=\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{A_1B}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{CD}=(-\sqrt{2},0,0)$.

设平面A_1CD的一个法向量为$\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，平面$A_1BC$的一个法向量为$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{A_1C}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}y_1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}z_1=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CD}=-\sqrt{2}x_1=0,\end{cases}$令$y_1=1$，则$z_1=1$，$x_1=0$，故$\boldsymbol{n}_1=(0,1,1)$；

$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{A_1B}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}z_2=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{A_1C}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}y_2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}z_2=0,\end{cases}$令$y_2=1$，则$z_2=1$，$x_2=1$，故$\boldsymbol{n}_2=(1,1,1)$.

设平面A_1CD与平面A_1BC的夹角为θ，

则$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

故平面A_1BC与平面A_1CD夹角的余弦值为$\sqrt{1-\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\dfrac{1}{3}$.

【规律方法】

解决折叠问题的一般步骤

(1)确定折叠前后各个量之间的关系,弄清折叠前后的变化量和不变量;

(2)在折叠后的图形中确定线和面的位置关系,明确需要用到的线和面;

(3)利用判定定理或性质定理解决问题.

【对点训练】

如图1,$\triangle ABC$ 是底边为2的等腰三角形,且 $BA=BC=\sqrt{3}$,$\triangle DAC$ 为等腰直角三角形,$\angle CDA=90°$,将$\triangle DAC$ 沿 AC 翻折到$\triangle PAC$ 的位置,且点 P 不在平面 ABC 内(如图2),F 为线段 PB 的中点.

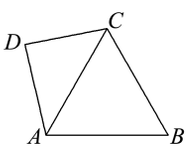


图1

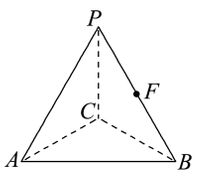


图2

(1)求证:$AC\perp PB$;

(2)当平面 $PAC\perp$ 平面 ACB 时,求直线 PB 与平面 ACF 所成角的余弦值;

(3)当直线 PC 与 AB 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{4}$时,设平面 PAC 与平面 ABC 的夹角为 α,求 $\cos\alpha$ 的值.

(1)**证明**:取 AC 中点为 E,连接 PE,BE,

因为 $PA=PC$,$AB=BC$,

所以 $PE\perp AC$,$BE\perp AC$.

又 $PE\cap BE=E$,PE,$BE\subset$平面 PBE,

所以 $AC\perp$平面 PBE.

又 $PB\subset$平面 PBE,所以 $AC\perp PB$.

(2)**解**:因为平面 $PAC\perp$平面 ACB,平面 $PAC\cap$平面 $ACB=AC$,$PE\perp AC$,$PE\subset$平面 PAC,

所以 $PE\perp$平面 ACB,易知 EA,EP,EB 两两互相垂直.

以 E 为原点,以$\{EA,EB,EP\}$为基底,建立如图1所示的空间直角坐标系,

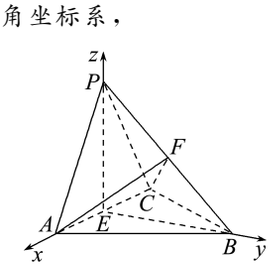


图1

则 $A(1,0,0)$,$B(0,\sqrt{2},0)$,$C(-1,0,0)$,$P(0,0,1)$,$F\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$,

所以 $\overrightarrow{PB}=(0,\sqrt{2},-1)$,$\overrightarrow{CA}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{CF}=\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

设平面 ACF 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,则

$$\begin{cases}\overrightarrow{CA}\cdot\boldsymbol{m}=2x_1=0,\\ \overrightarrow{CF}\cdot\boldsymbol{m}=x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}y_1+\frac{1}{2}z_1=0,\end{cases}$$

取 $y_1=-1$,得 $\boldsymbol{m}=(0,-1,\sqrt{2})$,

所以 $\cos\langle\overrightarrow{PB},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{PB}||\boldsymbol{m}|}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

设直线 PB 与平面 ACF 所成角为 θ,则 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

又 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

所以直线 PB 与平面 ACF 所成角的余弦值为 $\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}$.

(3)**解**:以 E 为原点,以 EA 为 x 轴,EB 为 y 轴,过点 E 且垂直于平面 ABC 的直线为 z 轴,建立如图2所示的空间直角坐标系,

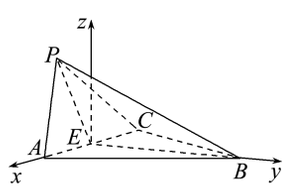


图2

因为$\triangle DAC$ 为等腰三角形,$DA=DC=\sqrt{2}$,

所以 $EP=1$,则 $A(1,0,0)$,$B(0,\sqrt{2},0)$,$C(-1,0,0)$.

设$\angle BEP=\theta$,则 $P(0,\cos\theta,\sin\theta)$,则$\overrightarrow{PC}=(-1,-\cos\theta,-\sin\theta)$,$\overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt{2},0)$,

故 $|\cos\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{AB}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{PC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|}\right|=\left|\frac{1-\sqrt{2}\cos\theta}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}\right|=\frac{\sqrt{6}}{4}$,

所以 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{4}$或 $\cos\theta=\frac{5\sqrt{2}}{4}$(舍).

又 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $\cos\alpha=|\cos\theta|=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

微专题培优集训(二)

1. 如图，已知菱形 $ABCD$ 的边长为 4，$\angle A=60^\circ$，E 为 AB 的中点(如图 1)，将 $\triangle ADE$ 沿直线 DE 翻折至 $\triangle A'DE$ 处(如图 2)，连接 $A'B$，$A'C$. 若四棱锥 A'-$EBCD$ 的体积为 $4\sqrt{3}$，F 为 $A'D$ 的中点，则点 F 到直线 BC 的距离为 (　　)

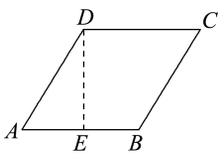


图1

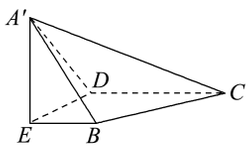


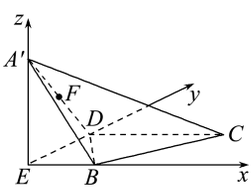
图2

A. $\frac{\sqrt{31}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{23}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{31}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{23}}{4}$

A　**解析**：连接 BD，因为四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle A=60^\circ$，所以 $\triangle ABD$ 为等边三角形.

因为 E 为 AB 的中点，所以 $DE\perp AB$，所以 $DE\perp EB$，$DE\perp A'E$.



因为 $EB\cap A'E=E$，EB，$A'E\subset$ 平面 $A'EB$，所以 $DE\perp$ 平面 $A'EB$.

因为菱形 $ABCD$ 的边长为 4，所以 $AB=AD=CD=BC=4$，$DE=2\sqrt{3}$，$AE=BE=2$，

所以直角梯形 $BCDE$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times(2+4)\times2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$.

设四棱锥 A'-$EBCD$ 的高为 h，则 $\frac{1}{3}\times6\sqrt{3}h=4\sqrt{3}$，得 $h=2$，所以 $h=A'E$，所以 $A'E\perp$ 平面 $EBCD$.

所以以 E 为原点，EB，ED，EA' 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系，

则 $B(2,0,0)$，$C(4,2\sqrt{3},0)$，$F(0,\sqrt{3},1)$，所以 $\overrightarrow{BC}=(2,2\sqrt{3},0)$，

所以 $\boldsymbol{c}=\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{FB}=(2,-\sqrt{3},-1)$，所以 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4+3+1}=2\sqrt{2}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$，所以点 F 到直线 BC 的距离为 $d=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})^2}=\sqrt{8-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{31}}{2}$.

2. 如图 1，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle B=60^\circ$，$BE=EC=1$. 沿着 AE 将 $\triangle BAE$ 折起到 $\triangle B'AE$ 的位置，使得 $\angle DAB'=90^\circ$，如图 2 所示.

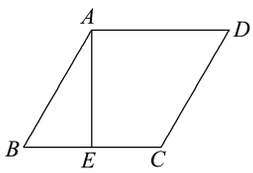


图1

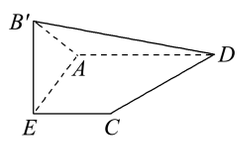


图2

则异面直线 AB' 与 CD 所成的角的余弦值为_____；异面直线 AB' 与 CD 之间的距离为_____.

$\frac{3}{4}$　$\frac{2\sqrt{21}}{7}$　**解析**：在菱形 $ABCD$ 中，$\angle B=60^\circ$，$BE=EC=1$，在 $\triangle ABE$ 中，由余弦定理得 $AE^2=AB^2+BE^2-2AB\cdot BE\cdot\cos60^\circ=3$，所以 $AE=\sqrt{3}$，

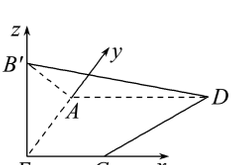
所以 $BE^2+AE^2=AB^2$，即 $AE\perp BC$. 又 $AD/\!/BC$，所以 $AE\perp AD$.

在题图 2 中，$\angle DAB'=90^\circ$，即 $AD\perp AB'$，又 $AB'\cap AE=A$，AB'，$AE\subset$ 平面 $AB'E$，

所以 $AD\perp$ 平面 $AB'E$，即 $EC\perp$ 平面 $AB'E$.

又 $B'E\subset$ 平面 $AB'E$，所以 $B'E\perp EC$. 如图，以 E 为原点，EC，EA，EB' 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系，

则 $E(0,0,0)$，$C(1,0,0)$，$D(2,\sqrt{3},0)$，$B'(0,0,1)$，$A(0,\sqrt{3},0)$，



所以 $\overrightarrow{AB'}=(0,-\sqrt{3},1)$，$\overrightarrow{CD}=(1,\sqrt{3},0)$. 故 $\cos\langle\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{CD}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB'}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}=\frac{0-3+0}{2\times2}=-\frac{3}{4}$，则异面直线 AB' 与 CD 所成的角的余弦值为 $\frac{3}{4}$.

又 $\overrightarrow{AC}=(1,-\sqrt{3},0)$，设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 是异面直线 AB' 与 CD 公垂线的方向向量，所以 $\begin{cases}\overrightarrow{AB'}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{3}y+z=0,\\ x+\sqrt{3}y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=\sqrt{3}y,\\ x=-\sqrt{3}y.\end{cases}$ 令 $y=1$，则 $\boldsymbol{m}=(-\sqrt{3},1,\sqrt{3})$，所以异面直线 AB' 与 CD 之间的距离为 $\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=\frac{|-\sqrt{3}-\sqrt{3}+0|}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

3.如图1，在五边形 $ABCDE$ 中，四边形 $ABCE$ 为正方形，$CD\perp DE$，$CD=DE$.如图2，将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折起，使得点 A 至点 A_1 处，且 $A_1B\perp A_1D$.

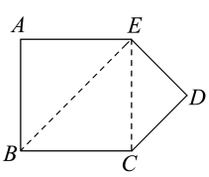


图1

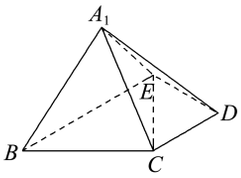


图2

(1)求证：$DE\perp$ 平面 A_1BE；

(2)求二面角 C-A_1E-D 的余弦值.

(1)**证明**：由题意得 $\angle BEC=\angle CED=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $\angle BED=\dfrac{\pi}{2}$，则 $DE\perp BE$.

因为 $AB\perp AE$，所以 $A_1B\perp A_1E$.

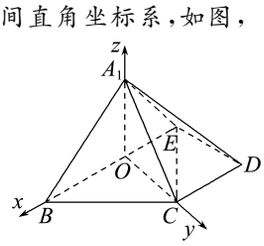
又 $A_1B\perp A_1D$，$A_1E\cap A_1D=A_1$，A_1E，$A_1D\subset$ 平面 A_1ED，所以 $A_1B\perp$ 平面 A_1ED.

又 $DE\subset$ 平面 A_1ED，则 $DE\perp A_1B$.

又 $DE\perp BE$，$A_1B\cap BE=B$，$A_1B\subset$ 平面 A_1BE，$BE\subset$ 平面 A_1BE，所以 $DE\perp$ 平面 A_1BE.

(2)**解**：如图，取 BE 的中点 O，可知 $BE=2CD$，$OE=CD$，由 $DE\perp BE$，且 $CD\perp DE$ 可得 $OE\parallel CD$，所以四边形 $OCDE$ 是平行四边形，所以 $CO\parallel DE$，则 $CO\perp$ 平面 A_1BE.

设 $BE=2$，以 O 为原点，OB，OC，OA_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系，如图，则 $A_1(0,0,1)$，$E(-1,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$D(-1,1,0)$，所以 $\overrightarrow{EA_1}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{EC}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{ED}=(0,1,0)$.



设平面 A_1EC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{EA_1}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{EC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1+z_1=0,\\ x_1+y_1=0.\end{cases}$

取 $x_1=1$，则 $y_1=-1$，$z_1=-1$，所以 $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,-1)$ 为平面 A_1EC 的一个法向量.

设平面 A_1ED 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{EA_1}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{ED}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_2+z_2=0,\\ y_2=0.\end{cases}$ 取 $x_2=1$，则 $y_2=0$，$z_2=-1$，所以 $\boldsymbol{n}_2=(1,0,-1)$ 为平面 A_1ED 的一个法向量，所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

由图可知，二面角 C-A_1E-D 为锐角，所以二面角 C-A_1E-D 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

4.如图1，BD 是圆 O 的直径，$BD=4$，$OA\perp BD$，$\angle COD=\dfrac{\pi}{4}$，现将圆 O 沿直径 BD 翻折，如图2所示，记二面角 C-BD-A 的大小为 $\theta(0<\theta<\pi)$.

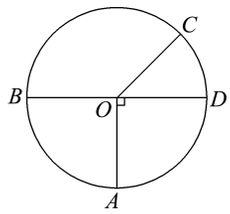


图1

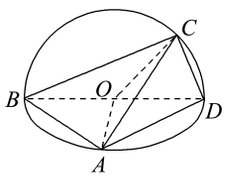


图2

(1)当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，求直线 AC 与平面 BAD 所成角的正弦值.

(2)是否存在 θ，使得直线 AC 与直线 BD 垂直？若存在，求出 $\cos\theta$ 的值；若不存在，请说明理由.

解：(1)如图1，以 O 为原点，OA，OD 所在直线分别为 x，y 轴，过点 O 作 z 轴垂直平面 xOy，建立空间直角坐标系 O-xyz.

当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，平面 $BAD\perp$ 平面 BCD，因为 $BD=4$，$\angle COD=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $OA=OD=OC=2$，

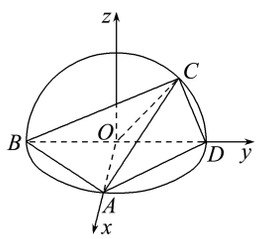


图1

则 $A(2,0,0)$，$C(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$，所以 $\overrightarrow{AC}=(-2,\sqrt{2},\sqrt{2})$.

易知平面 BAD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，所以直线 AC 与平面 BAD 所成角的正弦值为 $|\cos\langle\overrightarrow{AC},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AC}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$.

(2)不存在.理由如下：

如图2，过点 C 作 BD 的垂线，垂足为 E，延长 CE 与圆 O 交于点 F.翻折后(如图3)，由 $CE\perp BD$，$FE\perp BD$ 知，$\theta=\angle CEF$.在将圆 O 沿直径 BD 翻折的过程中，点 C 在以 E 为圆心，$CE=\sqrt{2}$ 为半径的圆上，且该圆与直径 BD 垂直.

如图3，以 O 为原点，OA，OD 所在直线分别为 x 轴、y 轴，建立空间直角坐标系 O-xyz.

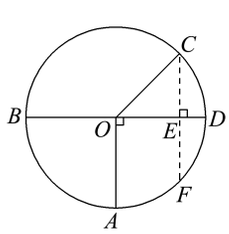


图2

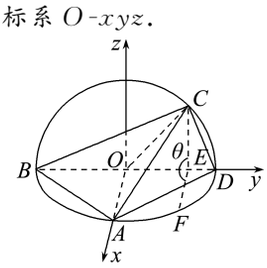


图3

设 $C(x,\sqrt{2},z)$，$E(0,\sqrt{2},0)$，则 $|CE|=\sqrt{x^2+z^2}=\sqrt{2}$，即 $x^2+z^2=2$.

又 $A(2,0,0)$，$B(0,-2,0)$，$D(0,2,0)$，所以 $\overrightarrow{AC}=(x-2,\sqrt{2},z)$，$\overrightarrow{BD}=(0,4,0)$，

所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=4\sqrt{2}\neq0$.

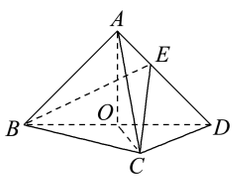
因此不存在 θ 使得直线 AC 与直线 BD 垂直.

★★★

迁　移　应　用

类型一　空间位置关系的证明

例 1　如图，在三棱锥 A-BCD 中，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，$AB=AD$，O 为 BD 的中点.

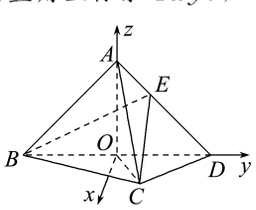


(1)求证：$OA\perp CD$；

(2)若$\triangle OCD$ 是边长为 1 的等边三角形，点 E 在棱 AD 上，$DE=2EA$，且二面角 E-BC-D 的大小为 $45°$，求三棱锥 A-BCD 的体积.

(1)**证明**：因为 $AB=AD$，O 为 BD 的中点，所以 $AO\perp BD$. 又平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=BD$，$AO\subset$ 平面 ABD，所以 $AO\perp$ 平面 BCD. 又 $CD\subset$ 平面 BCD，所以 $AO\perp CD$.

(2)**解**：如图所示，以 O 为坐标原点，OA 所在直线为 z 轴，OD 所在直线为 y 轴，平面 BCD 中垂直 OD 且过点 O 的直线为 x 轴，建立空间直角坐标系 $Oxyz$，



则 $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$D(0,1,0)$，$B(0,-1,0)$. 设 $A(0,0,m)$，因为 $DE=2EA$，所以 $E\left(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}m\right)$，所以 $\overrightarrow{EB}=\left(0,-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}m\right)$，$\overrightarrow{BC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 EBC 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{EB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\frac{4}{3}y-\frac{2}{3}mz=0,\\ \frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{3}{2}y=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，

得平面 EBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(-\sqrt{3},1,-\frac{2}{m}\right)$.

又平面 BCD 的一个法向量为 $\overrightarrow{OA}=(0,0,m)$，所以

$$|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{OA}\rangle|=\left|\frac{-2}{m\cdot\sqrt{4+\frac{4}{m^2}}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

解得 $m=1$（负值舍去）.

又点 C 到平面 ABD 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $V_{A\text{-}BCD}=V_{C\text{-}ABD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

所以三棱锥 A-BCD 的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

【规律方法】

用向量知识解决立体几何问题有两种基本思路：一种是用向量表示几何量；另一种是用向量的坐标表示几何量. 求解过程共分三步：

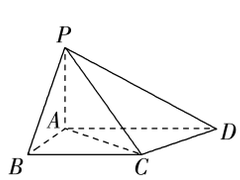
(1)建立立体几何与空间向量的联系，用空间向量（或坐标）表示问题中所涉及的点、线、面，把立体几何问题转化为向量问题；

(2)通过向量运算，研究点、线、面之间的位置关系；

(3)根据运算结果的几何意义来解释相关问题.

【对点训练】

1.（2025·全国一卷）如图，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AB\perp AD$，$BC/\!/AD$.



(1)求证：平面 $PAB\perp$ 平面 PAD.

(2)设 $PA=AB=\sqrt{2}$，$BC=2$，$AD=1+\sqrt{3}$，且点 P，B，C，D 均在球 O 的表面上.

①求证：点 O 在平面 $ABCD$ 内；

②求直线 AC 与 PO 所成角的余弦值.

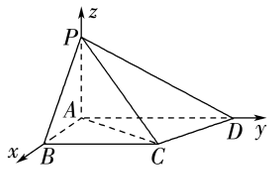
(1)**证明**：因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AD$，

又 $AD\perp AB$，$PA\cap AB=A$，PA，$AB\subset$ 平面 PAB，所以 $AD\perp$ 平面 PAB，

又 $AD\subset$ 平面 PAD，所以平面 $PAD\perp$ 平面 PAB.

(2)①**证明**：以 A 为坐标原点，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立空间直角坐

标系 $Axyz$，如图所示，



则 $B(\sqrt{2},0,0)$，$C(\sqrt{2},2,0)$，$D(0,1+\sqrt{3},0)$，$P(0,0,\sqrt{2})$，设 $O(a,b,c)$，

因为点 P,B,C,D 均在球 O 的球面上，所以 $|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{OP}|$，

则 $(a-\sqrt{2})^2+b^2+c^2=(a-\sqrt{2})^2+(b-2)^2+c^2=a^2+(b-1-\sqrt{3})^2+c^2=a^2+b^2+(c-\sqrt{2})^2$，

得 $a=0,b=1,c=0$，即 $O(0,1,0)$，

所以点 O 在 AD 上，即点 O 在平面 $ABCD$ 内.

②**解**：$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{2},2,0)$，$\overrightarrow{PO}=(0,1,-\sqrt{2})$，

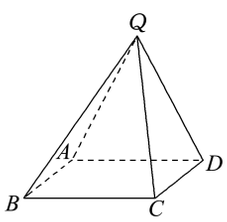
则 $\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{PO}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PO}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{PO}|}=\dfrac{2}{\sqrt{6}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，

所以直线 AC 与 PO 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

2. 如图，在四棱锥 Q-$ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，$AD=2$，$QD=QA=\sqrt{5}$，$QC=3$.

(1)求证：平面 $QAD\perp$ 平面 $ABCD$；

(2)求二面角 B-QD-A 的余弦值.



(1)**证明**：如图 1，取 AD 的中点为 O，连接 QO，CO.

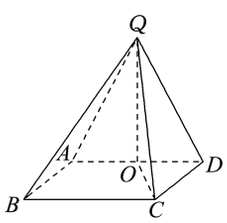


图1

因为 $QA=QD$，$OA=OD$，则 $QO\perp AD$.

因为 $AD=2$，$QA=\sqrt{5}$，所以 $QO=\sqrt{5-1}=2$.

在正方形 $ABCD$ 中，因为 $CD=2$，$DO=1$，所以 $CO=\sqrt{5}$.

因为 $QC=3$，所以 $QC^2=QO^2+OC^2$，故 $\triangle QOC$ 为直角三角形且 $QO\perp OC$.

因为 $OC\cap AD=O$，所以 $QO\perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $QO\subset$ 平面 QAD，所以平面 $QAD\perp$ 平面 $ABCD$.

(2)如图 2，连接 BD，在平面 $ABCD$ 内，过点 O 作 $OT/\!/CD$，交 BC 交于点 T，则 $OT\perp AD$.

结合(1)中的 $QO\perp$ 平面 $ABCD$，故可建如图 2 所示的空间直角坐标系，

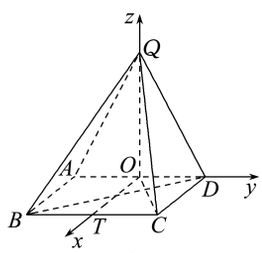


图2

则 $D(0,1,0)$，$Q(0,0,2)$，$B(2,-1,0)$，故 $\overrightarrow{BQ}=(-2,1,2)$，$\overrightarrow{BD}=(-2,2,0)$.

设平面 QBD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BQ}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x+y+2z=0,\\ -2x+2y=0,\end{cases}$ 取 $x=1$，则 $y=1$，$z=\dfrac{1}{2}$，故 $\boldsymbol{n}=\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$.

由题易知平面 QAD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{1}{1\times\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}$.

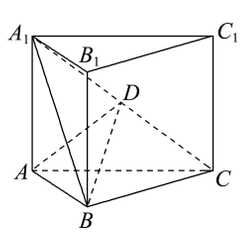
又二面角 B-QD-A 为锐角，故其余弦值为 $\dfrac{2}{3}$.

类型二　空间夹角和距离问题

例 2　如图，直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 的体积为 4，$\triangle A_1BC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$.

(1)求点 A 到平面 A_1BC 的距离；

(2)设 D 为 A_1C 的中点，$AA_1=AB$，平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，求二面角 A-BD-C 的正弦值.



解：(1)在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，设点 A 到平面 A_1BC 的距离为 h，则 $V_{A\text{-}A_1BC}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BC}\cdot h=\frac{2\sqrt{2}}{3}h=V_{A_1\text{-}ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot A_1A=\frac{1}{3}V_{ABC\text{-}A_1B_1C_1}=\frac{4}{3}$，

解得 $h=\sqrt{2}$，

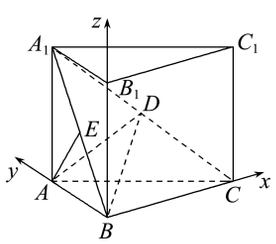
所以点 A 到平面 A_1BC 的距离为 $\sqrt{2}$.

(2)取 A_1B 的中点 E，连接 AE，如图，因为 $AA_1=AB$，所以 $AE\perp A_1B$.

又平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，平面 $A_1BC\cap ABB_1A_1=A_1B$，

且 $AE\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $AE\perp$ 平面 A_1BC.

在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$BB_1\perp$ 平面 ABC，由 $BC\subset$ 平面 A_1BC，$BC\subset$ 平面 ABC，可得 $AE\perp BC$，$BB_1\perp BC$.又 AE，$BB_1\subset$ 平面 ABB_1A_1 且相交，所以 $BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，所以 BC，BA，BB_1 两两垂直，以 B 为原点，建立空间直角坐标系，如图.



由(1)得 $AE=\sqrt{2}$，所以 $AA_1=AB=2$，$A_1B=2\sqrt{2}$，所以 $BC=2$，

则 $A(0,2,0)$，$A_1(0,2,2)$，$B(0,0,0)$，$C(2,0,0)$，所以 A_1C 的中点 $D(1,1,1)$，

$\overrightarrow{BD}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{BA}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BC}=(2,0,0)$.

设平面 ABD 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=x+y+z=0,\\ \boldsymbol{m}_1\cdot\overrightarrow{BA}=2y=0,\end{cases}$

可取 $\boldsymbol{m}=(1,0,-1)$.

设平面 BDC 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=a+b+c=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=2a=0.\end{cases}$

可取 $\boldsymbol{n}=(0,1,-1)$，

则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$.

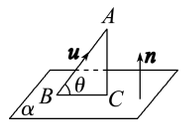
所以二面角 $A\text{-}BD\text{-}C$ 的正弦值为 $\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【规律方法】

1.异面直线所成的角(注意所成角的范围)

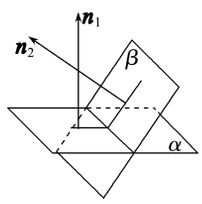
若异面直线 l_1，l_2 所成的角为 θ，其方向向量分别是 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$.

2.直线与平面所成的角(注意所成角的范围)



如图，直线 AB 与平面 α 相交于点 B，设直线 AB 与平面 α 所成的角为 θ，直线 AB 的方向向量为 $\boldsymbol{u}$，平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{n}|}$.

3.平面与平面的夹角(与二面角在范围上有区别)

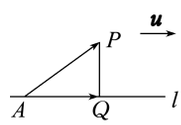


如图，平面 α 与平面 β 相交，形成四个二面角，我们把这四个二面角中不大于 $90°$ 的二面角称为平面 α 与平面 β 的夹角.

若平面 α，β 的法向量分别是 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$，则平面 α 与平面 β 的夹角即为向量 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 的夹角或其补角.设平面 α 与平面 β 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$.

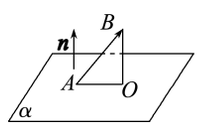
4.利用空间向量求距离

(1)点到直线的距离



如图，已知直线 l 的单位方向向量为 $\boldsymbol{u}$，A 是直线 l 上的定点，P 是直线 l 外一点，$\overrightarrow{AQ}$ 是 $\overrightarrow{AP}$ 在直线 l 上的投影向量，则点 P 到直线 l 的距离 $PQ=\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-(\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{u})^2}$.

(2)点到平面的距离



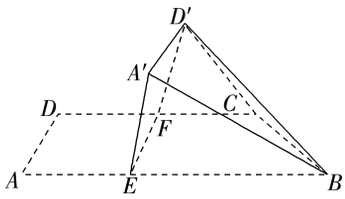
如图，已知 A 为平面 α 内的一定点，$\boldsymbol{n}$ 为平面 α 的法向量，点 O 是平面外一点 B 在平面 α 内的射影，则点 B 到平面 α 的距离 $BO=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$.

【对点训练】

(2025·全国二卷)如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$\angle DAB=90°$，F 为 CD 的中点，点 E 在 AB 上，$EF\parallel AD$，$AB=3AD$，$CD=2AD$.将四边形 $EFDA$ 沿 EF 翻折至四边形 $EFD'A'$ 的位置，使得平面 $EFD'A'$ 与平面 $EFCB$ 所成的二面角为 $60°$.

(1)求证：$A'B\parallel$ 平面 $CD'F$；

(2)求平面 BCD' 与平面 $EFD'A'$ 所成的二面角的正弦值.



(1)**证明**:(方法一)因为 $EB\parallel FC$,$EB\not\subset$ 平面 $CD'F$,$FC\subset$ 平面 $CD'F$,所以 $EB\parallel$ 平面 $CD'F$,

因为 $A'E\parallel D'F$,$A'E\not\subset$ 平面 $CD'F$,$D'F\subset$ 平面 $CD'F$,所以 $A'E\parallel$ 平面 $CD'F$.

因为 $EB\subset$ 平面 $BA'E$,$A'E\subset$ 平面 $BA'E$,$EB\cap A'E=E$,所以平面 $BA'E\parallel$ 平面 $CD'F$.

因为 $A'B\subset$ 平面 $BA'E$,所以 $A'B\parallel$ 平面 $CD'F$.

(方法二)如图 1,延长 DC 至点 G,使得 $DG=AB$,连接 GB,GD',

因为 $AB\parallel CD$,所以 $AB\parallel DG$,又 $AB=DG$,

所以四边形 $ABGD$ 是平行四边形,所以 $AD=BG$,$AD\parallel BG$.

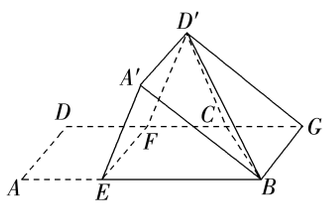


图 1

翻折后,$A'D'=BG$,$A'D'\parallel BG$,

所以四边形 $A'BGD'$ 是平行四边形,所以 $A'B\parallel D'G$.

因为 $A'B\not\subset$ 平面 $CD'F$,$D'G\subset$ 平面 $CD'F$,所以 $A'B\parallel$ 平面 $CD'F$.

(2)**解**:因为 $\angle DAB=90°$,$EF\parallel AD$,所以 $\angle FEB=90°$,即 $AB\perp EF$,翻折后,$A'E\perp EF$,$EB\perp EF$,

所以平面 $EFD'A'$ 与平面 $EFCB$ 所成二面角的平面角为 $\angle A'EB$,

即 $\angle A'EB=60°$,同理 $\angle D'FC=60°$.

设 $AD=1$,取 CF 的中点 O,连接 $D'O$,

在 $\triangle OD'F$ 中,$D'F=1$,$OF=\dfrac{1}{2}$,$\angle D'FO=60°$,由余弦定理得 $OD'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $D'F^2=OF^2+OD'^2$,所以 $OD'\perp OF$.

在线段 EB 上取一点 M,使得 $EM=\dfrac{1}{2}$,连接 OM,则 $EM=OF$,又 $EM\parallel OF$,所以四边形 $EMOF$ 为平行四边形,

所以 $EF\parallel OM$.

因为 $D'F\perp EF$,$CF\perp EF$,$D'F\cap CF=F$,$D'F$,$CF\subset$ 平面 $CD'F$,

所以 $EF\perp$ 平面 $CD'F$,即 $OM\perp$ 平面 $CD'F$,

所以 OM,OC,OD' 两两垂直.

如图 2 所示,以 O 为坐标原点,$\overrightarrow{OM}$,$\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{OD'}$ 的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向,建立空间直角坐标系,

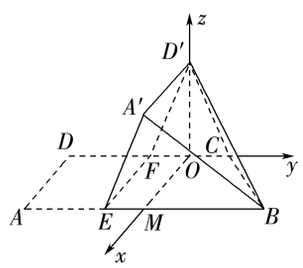


图 2

则 $B\left(1,\dfrac{3}{2},0\right)$,$C\left(0,\dfrac{1}{2},0\right)$,$D'\left(0,0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$E\left(1,-\dfrac{1}{2},0\right)$,$F\left(0,-\dfrac{1}{2},0\right)$,$\overrightarrow{CB}=(1,1,0)$,$\overrightarrow{CD'}=\left(0,-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{FE}=(1,0,0)$,$\overrightarrow{FD'}=\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

设平面 BCD' 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{CD'}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1+y_1=0,\\ -\dfrac{1}{2}y_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z_1=0,\end{cases}$ 取 $z_1=\sqrt{3}$,

则 $\boldsymbol{m}=(-3,3,\sqrt{3})$.

设平面 $EFD'A'$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{FE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{FD'}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_2=0,\\ \dfrac{1}{2}y_2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z_2=0,\end{cases}$ 取 $z_2=\sqrt{3}$,则 $\boldsymbol{n}=(0,-3,\sqrt{3})$.

设平面 BCD' 与平面 $EFD'A'$ 的夹角为 θ,

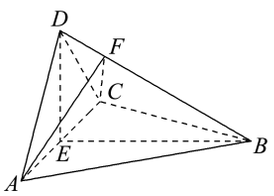
则 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{6}{\sqrt{21}\times\sqrt{12}}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$,

所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{7}}{7}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$,

所以平面 BCD' 与平面 $EFD'A'$ 所成二面角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

类型三　立体几何中的动态问题

例 3　如图，在四面体 $ABCD$ 中，$AD\perp CD$，$AD=CD$，$\angle ADB=\angle BDC$，E 为 AC 的中点.



(1)求证：平面 $BED\perp$ 平面 ACD；

(2)设 $AB=BD=2$，$\angle ACB=60°$，点 F 在 BD 上，当 $\triangle AFC$ 的面积最小时，求三棱锥 $F\text{-}ABC$ 的体积.

(1)**证明**：因为 $AD=CD$，E 是 AC 的中点，所以 $AC\perp DE$.

因为 $\begin{cases}AD=CD,\\ \angle ADB=\angle CDB,\text{所以}\triangle ADB\cong\triangle CDB,\\ BD=BD,\end{cases}$

所以 $AB=CB$，故 $AC\perp BE$.

因为 $DE\cap BE=E$，DE，$BE\subset$ 平面 BED，

所以 $AC\perp$ 平面 BED.

因为 $AC\subset$ 平面 ACD，所以平面 $BED\perp$ 平面 ACD.

(2)依题意得 $AB=BD=BC=2$，$\angle ACB=60°$，$\triangle ABC$ 是等边三角形，

所以 $AC=2$，$AE=CE=1$，$BE=\sqrt{3}$.

因为 $AD=CD$，$AD\perp CD$，所以 $\triangle ACD$ 是等腰直角三角形，所以 $DE=1$.

又 $DE^2+BE^2=BD^2$，所以 $DE\perp BE$.

因为 $AC\cap BE=E$，AC，$BE\subset$ 平面 ABC，所以 $DE\perp$ 平面 ABC.

因为 $\triangle ADB\cong\triangle CDB$，所以 $\angle FBA=\angle FBC$.

因为 $\begin{cases}AB=CB,\\ \angle FBA=\angle FBC,\text{所以}\triangle FBA\cong\triangle FBC,\\ BF=BF,\end{cases}$

所以 $AF=CF$，连接 EF，则 $EF\perp AC$.

因为 $S_{\triangle AFC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot EF$，所以当 EF 最短，即 $EF\perp BD$ 时，$\triangle AFC$ 的面积最小.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BED$ 中，$\frac{1}{2}\cdot BE\cdot DE=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot EF$，解得 $EF=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $DF=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$，$BF=2-DF=\frac{3}{2}$，

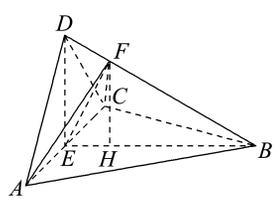
所以 $\frac{BF}{BD}=\frac{3}{4}$.

如图，过点 F 作 $FH\perp BE$，垂足为 H，则 $FH/\!/DE$，

所以 $FH\perp$ 平面 ABC，且 $\frac{FH}{DE}=\frac{BF}{BD}=\frac{3}{4}$，

所以 $FH=\frac{3}{4}$，

所以 $V_{F\text{-}ABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot FH=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}\times\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.



【规律方法】

1. 空间位置关系问题常见的解决方法：

(1)利用点、线、面位置关系的相关定理解决；

(2)建立空间直角坐标系解决.

2. 空间动点的轨迹判断或轨迹长度问题常见解决方法：先根据点、线、面的位置关系的判定定理和性质定理求出动点的轨迹(或利用空间向量的坐标运算求出动点的轨迹方程)，再进行判断或长度计算.

3. 与空间图形有关的长度、角度、距离、面积、体积等最值问题，常见的解决方法如下：

(1)从图形的几何特征入手，充分利用空间图形的几何性质去解决；

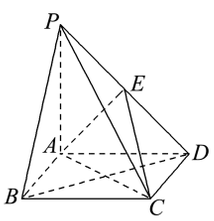
(2)找出问题中的代数关系，建立目标函数，利用代数方法求目标函数的最值.

【对点训练】

如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$BD\perp PC$，四边形 $ABCD$ 是正方形，$PB=\sqrt{2}AB=\sqrt{2}PA$，E 是棱 PD 上的动点，且 $\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PD}$.

(1)求证：$PA\perp$ 平面 $ABCD$.

(2)是否存在实数 λ，使得平面 PAB 与平面 AEC 的夹角的余弦值是 $\frac{2}{3}$？若存在，求出 λ 的值；若不存在，请说明理由.



(1)**证明**：因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $BD\perp AC$.

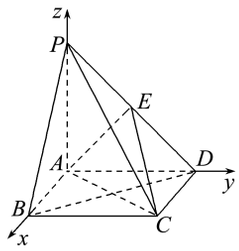
又 $BD\perp PC$，AC，$PC\subset$ 平面 PAC，$AC\cap PC=C$，所以 $BD\perp$ 平面 PAC.

因为 $PA\subset$ 平面 PAC，所以 $BD\perp PA$.

又因为 $PB=\sqrt{2}AB=\sqrt{2}PA$，所以 $PB^2=AB^2+PA^2$，即 $AB\perp PA$.

因为 AB，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，且 $AB\cap BD=B$，所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$.

(2)**解**：由(1)可知，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，且 $AB\perp AD$，如图，以 A 为坐标原点，AB，AD，AP 分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，



不妨设 $PA=2$，则 $A(0,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,2)$，

可得 $\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$，

则 $\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PD}=(0,2\lambda,-2\lambda)$，$\lambda\in[0,1]$，可得 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PE}=(0,2\lambda,2-2\lambda)$.

设平面 AEC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2x+2y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=2\lambda y+(2-2\lambda)z=0,\end{cases}$$

令 $y=1-\lambda$，则 $x=\lambda-1$，$z=-\lambda$，可得 $\boldsymbol{n}=(\lambda-1,1-\lambda,-\lambda)$.

由题易知平面 PAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$，

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{|1-\lambda|}{\sqrt{(\lambda-1)^2+(1-\lambda)^2+\lambda^2}}=\frac{2}{3}$，

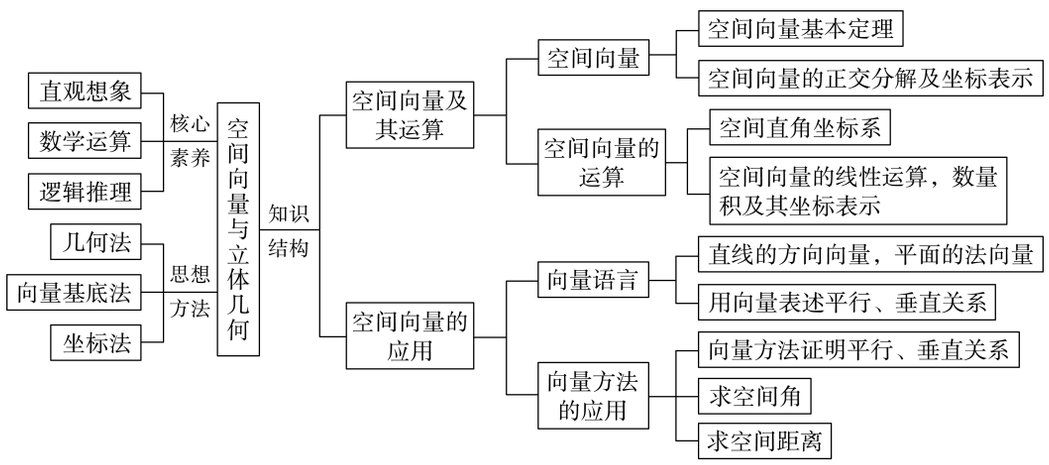
整理得 $3\lambda^2+2\lambda-1=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{3}$ 或 $\lambda=-1$(舍去)，

所以存在实数 λ，λ 的值为 $\frac{1}{3}$.

★★★

重　构　拓　展

多维体系构建



【问题探究】

1.空间向量由平面向量推广而来，空间向量与平面向量有许多共同性质.如果我们把平面称为二维空间，把普通的空间称为三维空间，那么我们能不能把向量的概念推广到四维空间（例如由“长”“宽”“高”“时间”四个维度构成的空间）、五维空间中去呢？它们是否也与平面向量、空间向量有许多共同的性质？

2.因为向量可以用有向线段表示，所以我们用几何方式引入空间向量的运算法则，如向量加法的平行四边形法则.在空间直角坐标系中，我们还可以把这种由几何方式引入的向量运算转化成代数运算（实数运算）.对于这样的做法给空间向量运算带来的方便，你有什么体会？

3.从数量及其运算的角度理解向量及其运算，数的运算律对于向量仍然成立的有哪些？不成立的有哪些？

4.如何理解空间向量可以由三个不共面的向量唯一表示？你认为应如何根据问题的条件选择空间的基底？

5.我们是如何利用直线的方向向量和平面的法向量来表示直线和平面的？我们又是如何利用直线的方向向量和平面的法向量来刻画空间直线、平面的平行和垂直关系的？

6.距离和角度是立体几何中的基本度量.本章我们如何把点到直线、点到平面、平行直线、平行平面间的距离问题转化为投影向量的长度问题？如何把直线与平面、平面与平面所成角的问题转化为直线的方向向量或平面的法向量之间的夹角问题？请结合具体实例，谈谈你的体会.

质量评估(一)

(考查范围:第一章　时间:120 分钟　分值:150 分)

得分 ____

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.下列向量中与向量 $\boldsymbol{a}=(1,-3,2)$ 平行的是 (　　)

A.$\left(\frac{1}{3},1,1\right)$　　B.$(-1,-3,2)$

C.$\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},-1\right)$　　D.$(\sqrt{2},-3,-2\sqrt{2})$

C　**解析:**$\boldsymbol{a}=(1,-3,2)=-2\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},-1\right)$.

2.已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,1,3)$,$\boldsymbol{b}=(-1,2,1)$,若 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})$,则实数 λ 的值为 (　　)

A.-2　　B.$-\frac{14}{3}$　　C.$\frac{14}{5}$　　D.2

D　**解析:**因为 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})$,

所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,

所以 $|\boldsymbol{a}|^2=\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,

所以 $14=\lambda(2+2+3)=7\lambda$,

解得 $\lambda=2$.故选 D.

3.若向量 $\boldsymbol{a}=(x,4,5)$,$\boldsymbol{b}=(1,-2,2)$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$,则 $x=$ (　　)

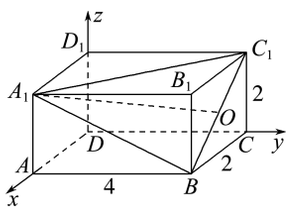
A.3　　B.-3　　C.-11　　D.3 或 -11

A　**解析:**因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(x,4,5)\cdot(1,-2,2)=x-8+10=x+2$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$,所以 $\frac{\sqrt{2}}{6}=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4^2+5^2}\times\sqrt{1+4+4}}$,且 $x+2>0$,解得 $x=3$ 或 $x=-11$(舍去).故选 A.

4.已知在空间直角坐标系中,长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 $D(0,0,0)$,$A(2,0,0)$,$B(2,4,0)$,$C_1(0,4,2)$,则点 A_1 到直线 BC_1 的距离为 (　　)

A.$3\sqrt{2}$　　B.2　　C.$\frac{12}{5}$　　D.$\frac{5}{2}$

A　**解析:**由题意建立如图所示的空间直角坐标系,



由 $D(0,0,0)$,$A(2,0,0)$,$B(2,4,0)$,$C_1(0,4,2)$,得 $AB=4$,$BC=2$,$CC_1=2$.连接 A_1B,A_1C_1,BC_1,

所以 $A_1B=2\sqrt{5}$,$A_1C_1=2\sqrt{5}$,$BC_1=2\sqrt{2}$,

所以 $\triangle A_1BC_1$ 是等腰三角形.

取 BC_1 的中点为 O,连接 OA_1,

则 $OA_1\perp BC_1$,即点 A_1 到直线 BC_1 的距离为 OA_1.

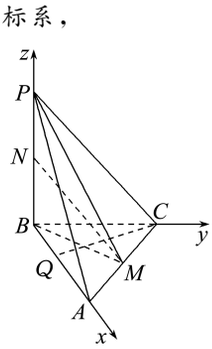
在 Rt $\triangle A_1OB$ 中,有 $OA_1=\sqrt{A_1B^2-OB^2}=\sqrt{20-2}=3\sqrt{2}$.

5.已知在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中,$AB=BC=2$,$AC=2\sqrt{2}$,$PB\perp$ 平面 ABC,M,N 分别为 AC,PB 的中点,$MN=\sqrt{6}$,Q 为线段 AB 上的点,使得异面直线 PM 与 CQ 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{34}}{34}$,则 $\frac{|\overrightarrow{BQ}|}{|\overrightarrow{BA}|}=$ (　　)

A.$\frac{1}{4}$　　B.$\frac{1}{3}$　　C.$\frac{1}{2}$　　D.$\frac{3}{4}$

A　**解析:**在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中,$AB=BC=2$,$AC=2\sqrt{2}$,所以 $BA\perp BC$.

因为 $PB\perp$ 平面 ABC,所以以 B 为原点,BA,BC,BP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,



可知 $B(0,0,0)$,$C(0,2,0)$,$M(1,1,0)$.因为 $BM=\sqrt{2}$,$MN=\sqrt{6}$,所以 $BN=\sqrt{MN^2-BM^2}=2$,所以 $PB=4$,则 $P(0,0,4)$.

设 $\frac{|\overrightarrow{BQ}|}{|\overrightarrow{BA}|}=\lambda$,且 $0<\lambda<1$,则 $Q(2\lambda,0,0)$,可知 $\overrightarrow{PM}$

$=(1,1,-4)$，$\overrightarrow{CQ}=(2\lambda,-2,0)$，

所以$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{CQ}=1\times2\lambda+1\times(-2)+(-4)\times0=2\lambda-2$，$|\overrightarrow{PM}|=\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}=3\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{CQ}|=\sqrt{4\lambda^2+4}$.

因为异面直线PM与CQ所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{34}}{34}$，

所以$\frac{|\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{CQ}|}{|\overrightarrow{PM}|\cdot|\overrightarrow{CQ}|}=\frac{|2\lambda-2|}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{4\lambda^2+4}}=\frac{\sqrt{34}}{34}$，解得$\lambda=\frac{1}{4}$或$\lambda=4$（舍去），

所以$\frac{|\overrightarrow{BQ}|}{|\overrightarrow{BA}|}=\frac{1}{4}$.

6. 设O为坐标原点，向量$\overrightarrow{OA}=(1,2,3)$，$\overrightarrow{OB}=(2,1,2)$，$\overrightarrow{OP}=(1,1,2)$，点$Q$在直线$OP$上运动，则$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$的最小值为（　　）

A.$\frac{2}{3}$　　B.$-\frac{2}{3}$　　C.$\frac{1}{3}$　　D.$-\frac{1}{3}$

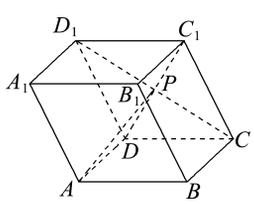
B　**解析**：因为$\overrightarrow{OP}=(1,1,2)$，点$Q$在直线$OP$上运动，所以可设$\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OP}=(\lambda,\lambda,2\lambda)$.

又向量$\overrightarrow{OA}=(1,2,3)$，$\overrightarrow{OB}=(2,1,2)$，所以$\overrightarrow{QA}=(1-\lambda,2-\lambda,3-2\lambda)$，$\overrightarrow{QB}=(2-\lambda,1-\lambda,2-2\lambda)$，

则$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=(1-\lambda)\times(2-\lambda)+(2-\lambda)\times(1-\lambda)+(3-2\lambda)\times(2-2\lambda)=6\lambda^2-16\lambda+10$.

易得当$\lambda=\frac{4}{3}$时，$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$取得最小值$-\frac{2}{3}$，故选B.

7. 如图，在平行六面体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$是菱形，侧面A_1ADD_1是正方形，且$\angle A_1AB=120^\circ$，$\angle DAB=60^\circ$，$AB=2$.若P是C_1D与CD_1的交点，则异面直线AP与DC的夹角的余弦值为（　　）



A.$\frac{3\sqrt{7}}{14}$　　B.$\frac{\sqrt{6}}{4}$

C.$\frac{\sqrt{7}}{4}$　　D.$\frac{\sqrt{6}}{14}$

A　**解析**：在平行六面体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，四边形DD_1C_1C是平行四边形，侧面A_1ADD_1是正方形，

又P是C_1D，CD_1的交点，所以P是CD_1的中点.

因为$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$，$\angle A_1AB=120^\circ$，$\angle DAB=60^\circ$，$AB=2$，

所以$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD})$，

所以$|\overrightarrow{AP}|^2=\frac{1}{4}[\overrightarrow{AA_1}^2+\overrightarrow{AB}^2+4\overrightarrow{AD}^2+2(\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})]=\frac{1}{4}\left[4+4+4\times4+2\times2\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+0+2\times2\times2\times2\times\frac{1}{2}\right]=7$，

所以$|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{7}$.

又因为$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AB}$

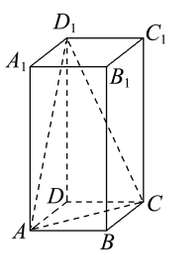
$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AA_1}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos120^\circ+|\overrightarrow{AB}|^2+2|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos60^\circ)=\frac{1}{2}\left[2\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+2^2+2\times2\times2\times\frac{1}{2}\right]=3$，$|\overrightarrow{DC}|=2$，

所以$\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{DC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{DC}|}=\frac{3}{\sqrt{7}\times2}=\frac{3\sqrt{7}}{14}$，

所以异面直线AP与DC的夹角的余弦值为$|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{DC}\rangle|=\frac{3\sqrt{7}}{14}$.

故选A.

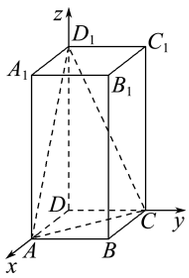
8. 如图，在正四棱柱$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，底面边长为2，直线CC_1与平面ACD_1所成角的正弦值为$\frac{1}{3}$，则正四棱柱的高为（　　）



A.2　　B.3

C.4　　D.5

C　**解析**：以D为原点，DA，DC，DD_1所在直线分别为x轴、y轴、z轴，建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $DD_1=a$，则 $A(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$D_1(0,0,a)$，$C_1(0,2,a)$，

所以 $\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,a)$，$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,a)$.

设平面 ACD_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}-2x+2y=0,\\ -2x+az=0.\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=1$，$z=\dfrac{2}{a}$，所以 $\boldsymbol{n}=\left(1,1,\dfrac{2}{a}\right)$ 是平面 ACD_1 的一个法向量.

故 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{CC_1}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{CC_1}|}=\dfrac{2}{\sqrt{\frac{4}{a^2}+2}\times a}=\dfrac{2}{\sqrt{2a^2+4}}$.

因为直线 CC_1 与平面 ACD_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{1}{3}$，所以 $\dfrac{2}{\sqrt{2a^2+4}}=\dfrac{1}{3}$，解得 $a=4$.

得分 ［　　］ **二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.**

9. 下列命题中，是真命题的有　　（　　）

A.若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，则向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角是钝角

B.若 $\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$ 是空间的一个基底，且 $\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}$，则 A,B,C,D 四点共面

C.若 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 是空间的一个基底，向量 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，则 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{m}\}$ 也是空间的一个基底

D.若直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{e}=(1,0,3)$，平面 α 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(-2,0,2)$，则直线 l 与平面 α 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

BC　**解析：**选项 A，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，则向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角是钝角或向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向共线，故 A 错误；

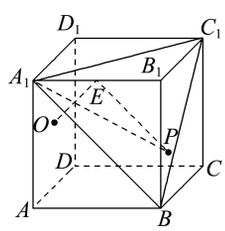
选项 B，$\overrightarrow{OD}=2(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA})-3(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DB})+2(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{OD}+2\overrightarrow{DA}-3\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}$，即有 $\overrightarrow{DB}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DC}$，故 A,B,C,D 四点共面，故 B 正确；

选项 C，假设 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{m}\}$ 不是空间的一个基底，则存在实数 x,y，使 $\boldsymbol{m}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，由向量 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 是空间的一个基底，则向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，故不存在这样的实数 x,y，即 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{m}\}$ 是空间的一个基底，故 C 正确；

选项 D，设直线 l 与平面 α 所成的角为 θ，则 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，由题意可得，$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{e},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{e}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|-2+6|}{\sqrt{1+9}\times\sqrt{4+4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\cos\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，故 D 错误.

故选 BC.

10. 如图，P 是棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的表面上一个动点，E 为棱 A_1B_1 的中点，O 为侧面 ADD_1A_1 的中心，则下列结论正确的有　　（　　）



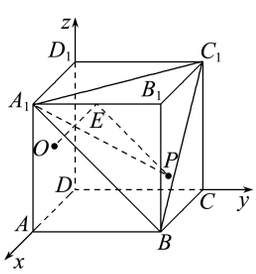
A.$OE\perp$ 平面 A_1BC_1

B.AB 与平面 A_1BC_1 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

C.若点 P 在各棱上，且到平面 A_1BC_1 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，则满足条件的点 P 有 9 个

D.若点 P 在侧面 BCC_1B_1 内运动，且满足 $|PE|=1$，则存在点 P，使得 A_1P 与 BC_1 所成角为 60°

AC　**解析：**以 D 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(1,0,0)$，$A_1(1,0,1)$，$B(1,1,0)$，$C_1(0,1,1)$，$O\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$，$E\left(1,\frac{1}{2},1\right)$，

所以 $\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{A_1B}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{BC_1}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{OE}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

对于 A，设平面 A_1BC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=y-z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=-x+z=0.\end{cases}$ 令 $x=1$，则 $y=1$，$z=1$，

所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$ 是平面 A_1BC_1 的一个法向量，所以 $\boldsymbol{n}=2\overrightarrow{OE}$，即 $\boldsymbol{n}\parallel\overrightarrow{OE}$，

所以 $OE\perp$ 平面 A_1BC_1，故 A 正确；

对于 B，设 AB 与平面 A_1BC_1 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AB},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AB}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 B 错误；

对于 C，因为正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，所以正三角形 A_1BC_1 的边长为 $\sqrt{2}$，

正方体的体对角线 $DB_1=\sqrt{3}$，

设点 B_1 到平面 A_1BC_1 的距离为 h，由 $V_{三棱锥B_1\text{-}A_1BC_1}=V_{三棱锥B\text{-}A_1B_1C_1}$，

则 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sin 60^\circ\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1$，解得 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以点 D 到平面 A_1BC_1 的距离为 $\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

因为 $\frac{\sqrt{3}}{3}>\frac{\sqrt{3}}{6}$，

所以在以 B_1 为顶点的棱上，满足条件的点 P 共有 3 个，

又 AB 与平面 A_1BC_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以点 A 到平面 A_1BC_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，

因为 $\frac{\sqrt{3}}{3}>\frac{\sqrt{3}}{6}$，所以在棱 AA_1，AB 上都存在满足条件的点 P，

同理在 CC_1，CB，D_1A_1，D_1C_1 都存在满足条件的点 P，

而棱 DA，DC，DD_1 到平面 A_1BC_1 最近的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以不存在满足条件的点 P，

所以满足条件的点 P 共有 9 个，故 C 正确；

对于 D，设 $P(x',1,z')(0\leqslant x'\leqslant1,0\leqslant z'\leqslant1)$，则 $\overrightarrow{PE}=\left(1-x',-\frac{1}{2},1-z'\right)$，

又 $|PE|=1$，

所以 $\sqrt{(1-x')^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(1-z')^2}=1$，即 $(x'-1)^2+(z'-1)^2=\frac{3}{4}$，

则点 P 在侧面 BCC_1B_1 内，以 B_1 为圆心，$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 为半径的一段圆弧上运动，

而当点 P 与点 B 或点 C_1 重合时，A_1P 与 BC_1 所成角为 60°，故 D 错误.

11. 已知在正四面体 $D\text{-}ABC$ 中，点 E 在棱 AB 上，满足 $AE=2EB$，点 F 为线段 AC 上的动点.设直线 DE 与平面 DBF 所成的角为 α，则下列说法不正确的有　（　）

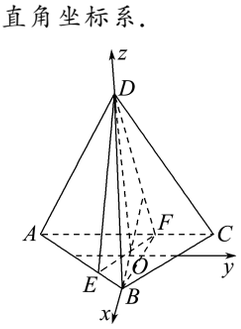
A.存在某个位置，使得 $DE\perp BF$

B.存在某个位置，使得 $\angle FDB=\frac{\pi}{4}$

C.存在某个位置，使得平面 $DEF\perp$ 平面 DAC

D.存在某个位置，使得 $\alpha=\frac{\pi}{6}$

ABD　**解析**：如图，设正四面体 $D\text{-}ABC$ 的底面中心为 O，连接 DO，OB，则 $DO\perp$ 平面 ABC.以 O 为原点，OB，OD 所在直线分别为 x 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.



设正四面体的棱长为 2，则 $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-1,0\right)$，$C\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},1,0\right)$，$B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},0,0\right)$，$E\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{1}{3},0\right)$，$D\left(0,0,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

设 $F\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\lambda,0\right)(-1\leqslant\lambda\leqslant1)$.

若存在某个位置，使得 $DE\perp BF$，则 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BF}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\cdot(-\sqrt{3},\lambda,0)=0$，解得 $\lambda=-3$，不合题意，故 A 错误.

若存在某个位置，使得 $\angle FDB=\frac{\pi}{4}$，

即 $\cos\langle\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DB}\rangle=\frac{\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{DF}||\overrightarrow{DB}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\lambda,-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\cdot\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},0,-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)}{\sqrt{\lambda^2+3}\times2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

此方程无解，故 B 错误.

$\overrightarrow{DA}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-1,-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right),\overrightarrow{DC}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},1,-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，

设平面 DAC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

$$\text{则}\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DA}=-\frac{\sqrt{3}}{3}x_1-y_1-\frac{2\sqrt{6}}{3}z_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC}=-\frac{\sqrt{3}}{3}x_1+y_1-\frac{2\sqrt{6}}{3}z_1=0.\end{cases}$$

取 $z_1=-1$，则 $x_1=2\sqrt{2}$，$y_1=0$，所以 $\boldsymbol{m}=(2\sqrt{2},0,-1)$ 是平面 DAC 的一个法向量.

设平面 DEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

$$\text{则}\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=\frac{\sqrt{3}}{3}x_2-\frac{1}{3}y_2-\frac{2\sqrt{6}}{3}z_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DF}=-\frac{\sqrt{3}}{3}x_2+\lambda y_2-\frac{2\sqrt{6}}{3}z_2=0.\end{cases}$$

取 $z_2=1$，得 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{6\sqrt{2}\lambda+2\sqrt{2}}{3\lambda-1},\frac{4\sqrt{6}}{3\lambda-1},1\right)$ 是平面 DEF 的一个法向量.

若存在某个位置，使得平面 $DEF\perp$ 平面 DAC，

则 $2\sqrt{2}\times\frac{6\sqrt{2}\lambda+2\sqrt{2}}{3\lambda-1}-1=0$，

解得 $\lambda=-\frac{3}{7}\in[-1,1]$，故 C 正确.

设平面 DBF 的法向量为 $\boldsymbol{v}=(x_3,y_3,z_3)$，

$$\text{则}\begin{cases}\boldsymbol{v}\cdot\overrightarrow{DB}=\frac{2\sqrt{3}}{3}x_3-\frac{2\sqrt{6}}{3}z_3=0,\\ \boldsymbol{v}\cdot\overrightarrow{DF}=-\frac{\sqrt{3}}{3}x_3+\lambda y_3-\frac{2\sqrt{6}}{3}z_3=0.\end{cases}$$

取 $x_3=\sqrt{2}$，得 $\boldsymbol{v}=\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{6}}{\lambda},1\right)$ 是平面 DBF 的一个法向量.

若存在某个位置，使得 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，

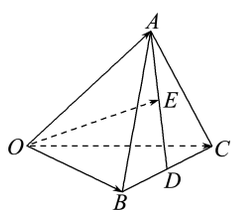
则 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}=|\cos\langle\boldsymbol{v},\overrightarrow{DE}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{v}\cdot\overrightarrow{DE}}{|\boldsymbol{v}||\overrightarrow{DE}|}\right|=\frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{3\lambda}-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right|}{\sqrt{3+\frac{6}{\lambda^2}}\times\frac{2\sqrt{7}}{3}}$，整理得 $5\lambda^2-4\lambda+12=0$，此方程无解，故 D 错误.故选 ABD.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

得分 □ **12.** 已知空间向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1,0)$，$\boldsymbol{b}=(0,1,1)$，$\boldsymbol{c}=(1,2,m)$ 共面，则实数 $m=$_____.

3　**解析：** 设 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，即 $(1,2,m)=x(1,-1,0)+y(0,1,1)$，故 $\begin{cases}x=1,\\-x+y=2,\\m=y,\end{cases}$ 解得 $m=y=3$.

得分 □ **13.** 如图，在四面体 O-ABC 中，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，$D$ 为 BC 的中点，E 为 AD 的中点. 若 $\overrightarrow{OE}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$，其中 $x,y,z\in\mathbf{R}$，则 $x=$_____，$y=$_____，$z=$_____.



$\frac{1}{2}$　$\frac{1}{4}$　$\frac{1}{4}$　**解析：** 因为 D 为 BC 的中点，E 为 AD 的中点，

所以 $\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}+\frac{1}{4}\boldsymbol{c}$.

因为 $\overrightarrow{OE}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$，所以 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{4}$，$z=\frac{1}{4}$.

得分 □ **14.** 如图 1，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，$AB=AE=BF=\frac{1}{2}EF$，$AB\parallel EF$. 把四边形

$ABCD$ 沿 AB 折起，使得 $AD\perp$ 平面 $AEFB$，得到如图 2 所示几何体，G 是 EF 的中点，则 AG 与平面 BCE 的位置关系为_____，二面角 C-AE-F 的余弦值为_____.

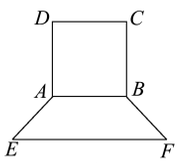


图1

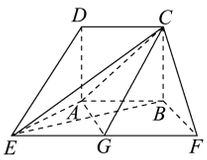


图2

垂直　$\frac{\sqrt{21}}{7}$　**解析**：如图，连接 BG，因为 $BC\parallel AD$，$AD\perp$ 底面 $AEFB$，所以 $BC\perp$ 底面 $AEFB$.

又 $AG\subset$ 底面 $AEFB$，所以 $BC\perp AG$.

因为 $AB\parallel EG$ 且 $AB=EG$，$AB=AE$，

所以四边形 $ABGE$ 为菱形，

所以 $AG\perp BE$.

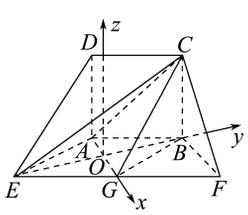
又 $BC\cap BE=B$，$BE\subset$ 平面 BCE，$BC\subset$ 平面 BCE，

所以 $AG\perp$ 平面 BCE.

由以上证明知 $AE=EG=BG=AB=4$，

设 $AG\cap BE=O$，由题意知 $OE=OB=2\sqrt{3}$，$OA=OG=2$.

以 O 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$，



则 $O(0,0,0)$，$A(-2,0,0)$，$E(0,-2\sqrt{3},0)$，$C(0,2\sqrt{3},4)$，$D(-2,0,4)$，

所以 $\overrightarrow{AC}=(2,2\sqrt{3},4)$，$\overrightarrow{AE}=(2,-2\sqrt{3},0)$.

设平面 ACE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}2x+2\sqrt{3}y+4z=0,\\ 2x-2\sqrt{3}y=0.\end{cases}$

令 $y=1$，则 $x=\sqrt{3}$，$z=-\sqrt{3}$，

所以 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,-\sqrt{3})$ 为平面 ACE 的一个法向量.

易知平面 AEF 的一个法向量为 $\overrightarrow{AD}=(0,0,4)$.

设二面角 C-AE-F 的大小为 θ，

由图易知 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AD}|}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times4}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分　　**15.**(13 分)已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-3,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,1,1)$，点 $A(-3,-1,4)$，$B(-2,-2,2)$.

(1)求 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$；

(2)在直线 AB 上，是否存在一点 E，使得 $\overrightarrow{OE}\perp\boldsymbol{b}$？($O$ 为原点)

解：(1)$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,-6,4)+(-2,1,1)=(0,-5,5)$，故 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{0^2+(-5)^2+5^2}=5\sqrt{2}$.

(2)假设存在点 E，设 $\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AB}$，则 $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}=(-3,-1,4)+t(1,-1,-2)=(-3+t,-1-t,4-2t)$.若 $\overrightarrow{OE}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{OE}\cdot\boldsymbol{b}=0$，

所以 $-2(-3+t)+(-1-t)+(4-2t)=0$，

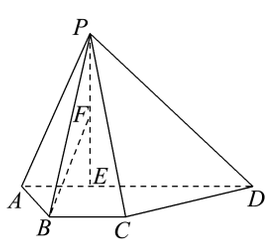
解得 $t=\frac{9}{5}$.因此存在点 E，使得 $\overrightarrow{OE}\perp\boldsymbol{b}$，

此时点 E 的坐标为 $\left(-\frac{6}{5},-\frac{14}{5},\frac{2}{5}\right)$.

得分　　**16.**(15 分)(2024·北京卷)如图，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，$BC\parallel AD$，$AB=BC=1$，$AD=3$，点 E 在 AD 上，且 $PE\perp AD$，$PE=DE=2$.

(1)若 F 为线段 PE 的中点，求证：$BF\parallel$ 平面 PCD；

(2)若 $AB\perp$ 平面 PAD，求平面 PAB 与平面 PCD 夹角的余弦值.



(1)**证明**：取 PD 的中点 G，连接 FG，CG(图略)，

因为 F 为 PE 的中点，所以 $FG=\frac{1}{2}DE=1$，$FG\parallel DE$.

又 $BC=1$，$AD\parallel BC$，所以 $FG=BC$，$FG\parallel BC$，

所以四边形 $FGCB$ 为平行四边形，所以 $BF\parallel CG$.

又 $BF\not\subset$ 平面 PCD，$CG\subset$ 平面 PCD，

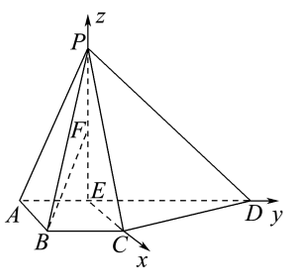
所以 $BF\parallel$ 平面 PCD.

(2)**解**：因为 $AB\perp$ 平面 PAD，$PE\subset$ 平面 PAD，所以 $AB\perp PE$.

又 $PE\perp AD$，$AB\cap AD=A$，AB，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PE\perp$ 平面 $ABCD$.

连接 EC，易知四边形 $ABCE$ 为矩形，则直线 EC，ED，EP 两两垂直，故以 E 为原点，EC，ED，EP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $P(0,0,2)$，$C(1,0,0)$，$D(0,2,0)$，$A(0,-1,0)$，$B(1,-1,0)$，所以 $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{AP}=(0,1,2)$，$\overrightarrow{PC}=(1,0,-2)$，$\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$.

设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=x_1=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AP}=y_1+2z_1=0.\end{cases}$ 令 $z_1=1$，则 $y_1=-2$，$x_1=0$，

所以 $\boldsymbol{n}_1=(0,-2,1)$ 为平面 PAB 的一个法向量.

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{PC}=x_2-2z_2=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{PD}=2y_2-2z_2=0.\end{cases}$ 令 $z_2=1$，则 $x_2=2$，$y_2=1$，

所以 $\boldsymbol{n}_2=(2,1,1)$ 为平面 PCD 的一个法向量.

设平面 PAB 与平面 PCD 的夹角为 θ，

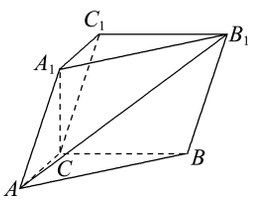
则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{\sqrt{30}}{30}$，

所以平面 PAB 与平面 PCD 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{30}}{30}$.

得分 ____ **17.**(15 分)(2023·全国甲卷)如图，在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=2$，$A_1C\perp$ 平面 ABC，$\angle ACB=90^\circ$，点 A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离为 1.

(1)求证：$AC=A_1C$；

(2)若直线 AA_1 与 BB_1 的距离为 2，求 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值.



(1)**证明**：因为 $A_1C\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，所以 $A_1C\perp BC$.

因为 $\angle ACB=90^\circ$，所以 $BC\perp AC$.

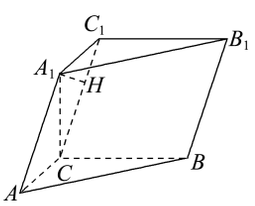
又 $AC\cap A_1C=C$，A_1C，$AC\subset$ 平面 ACC_1A_1，

所以 $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1.

又因为 $BC\subset$ 平面 BCC_1B_1，

所以平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 BCC_1B_1.

如图，过点 A_1 作 $A_1H\perp CC_1$，垂足为 H.



又平面 $ACC_1A_1\cap$ 平面 $BCC_1B_1=CC_1$，$A_1H\subset$ 平面 ACC_1A_1，

所以 $A_1H\perp$ 平面 BCC_1B_1(面面垂直的性质)，

即 A_1H 的长为点 A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离，所以 $A_1H=1$.

设 $AC=x$，则在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1CA$ 中，$A_1C=\sqrt{4-x^2}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CA_1C_1$ 中，由等面积法，得 $\dfrac{1}{2}A_1C_1\cdot A_1C=\dfrac{1}{2}CC_1\cdot A_1H$，即 $x\cdot\sqrt{4-x^2}=2\times1$，解得 $x=\sqrt{2}$，

所以 $A_1C=AC=\sqrt{2}$，

故 $A_1C=AC$.

(2)**解**：如图，连接 B_1C，过点 C 作 $CQ\perp AA_1$，垂足为 Q，连接 BQ.

由(1)知，$BC\perp$ 平面 ACC_1A_1，又 $AA_1\subset$ 平面 ACC_1A_1，所以 $BC\perp AA_1$.

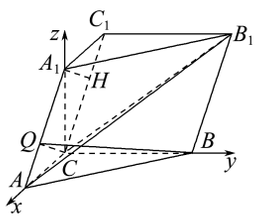
又 $CQ\cap BC=C$，CQ，$BC\subset$ 平面 BCQ，所以 $AA_1\perp$ 平面 BCQ.

因为 $BQ\subset$平面 BCQ，所以 $AA_1\perp BQ$.

又因为 $AA_1\parallel BB_1$，所以 $BB_1\perp BQ$，所以 BQ 的长为直线 AA_1 与 BB_1 之间的距离，即 $BQ=2$.

在 Rt$\triangle BCQ$ 中，$BQ=2$，$CQ=1$，所以 $BC=\sqrt{3}$.

由(1)知，CA，CB，CA_1 两两垂直，所以以 C 为原点，CA，CB，CA_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $C(0,0,0)$，$A(\sqrt{2},0,0)$，$A_1(0,0,\sqrt{2})$，$B(0,\sqrt{3},0)$，

所以$\overrightarrow{CB}=(0,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{AA_1}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$.

又知$\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AA_1}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，所以 $B_1(-\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{2})$，所以 $\overrightarrow{CB_1}=(-\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AB_1}=(-2\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{2})$.

设平面 BCC_1B_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}y=0,\\ -\sqrt{2}x+\sqrt{3}y+\sqrt{2}z=0.\end{cases}$ 令 $x=1$，则 $y=0$，$z=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$ 为平面 BCC_1B_1 的一个法向量.

设直线 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成的角为 θ，

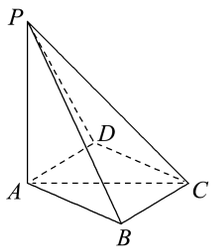
则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AB_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{AB_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AB_1}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|-2\sqrt{2}\times1+\sqrt{2}\times1|}{\sqrt{8+3+2}\times\sqrt{1+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$，

所以直线 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

得分 ____ **18.**(17 分)(2024·新高考全国Ⅰ卷)如图，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，$PA\perp$平面 $ABCD$，$PA=AC=2$，$BC=1$，$AB=\sqrt{3}$.

(1)若 $AD\perp PB$，求证：$AD\parallel$平面 PBC；

(2)若 $AD\perp DC$，且二面角 A-CP-D 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，求 AD 的长.



(1)**证明**：因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，$AD\subset$平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AD$.

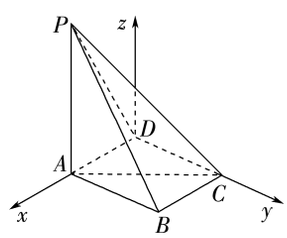
又 $AD\perp PB$，$PB\cap PA=P$，PB，$PA\subset$平面 PAB，所以 $AD\perp$平面 PAB.

因为 $AB\subset$平面 PAB，所以 $AD\perp AB$.

由 $BC=1$，$AB=\sqrt{3}$，$AC=2$，可得 $BC^2+AB^2=AC^2$，所以 $BC\perp AB$，所以 $AD\parallel BC$.

又 $AD\not\subset$平面 PBC，$BC\subset$平面 PBC，所以 $AD\parallel$平面 PBC.

(2)**解**：由题意知，DC，AD，AP 两两垂直，则以 D 为原点，AD 所在直线为 x 轴，DC 所在直线为 y 轴，过点 D 且平行于 AP 的直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $D(0,0,0)$. 设 $A(a,0,0)$，$a>0$，则 $CD=\sqrt{4-a^2}$，所以 $C(0,\sqrt{4-a^2},0)$，$P(a,0,2)$，所以 $\overrightarrow{CD}=(0,-\sqrt{4-a^2},0)$，$\overrightarrow{AC}=(-a,\sqrt{4-a^2},0)$，$\overrightarrow{CP}=(a,-\sqrt{4-a^2},2)$.

设平面 CPD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{CP}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{4-a^2}y=0,\\ ax-\sqrt{4-a^2}y+2z=0.\end{cases}$ 取 $x=2$，则 $y=0$，$z=-a$，所以 $\boldsymbol{n}=(2,0,-a)$ 是平面 CPD 的一个法向量.

设平面 ACP 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}ax_1-\sqrt{4-a^2}y_1+2z_1=0,\\ -ax_1+\sqrt{4-a^2}y_1=0.\end{cases}$ 取 $x_1=\sqrt{4-a^2}$，得 $y_1=a$，$z=0$，所以 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{4-a^2},a,0)$ 是平面 ACP 的一个法向量.

因为二面角 A-CP-D 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，

所以二面角 $A\text{-}CP\text{-}D$ 的余弦值的绝对值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$，

故 $|\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle| = \frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|} = \frac{2\sqrt{4-a^2}}{\sqrt{4-a^2+a^2}\cdot\sqrt{4+a^2}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$.

又 $a>0$，所以 $a=\sqrt{3}$，即 $AD=\sqrt{3}$.

得分 ____

19.（17 分）如图 1，在边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=60°$，将 $\triangle BCD$ 沿对角线 BD 折起到 $\triangle BC'D$ 的位置，使得平面 $BC'D\perp$ 平面 ABD，得到如图 2 所示的几何体，E 是 BD 的中点，$FA\perp$ 平面 ABD，且 $FA=2\sqrt{3}$.

（1）求证：$FA\parallel$ 平面 $BC'D$.

（2）在线段 AD 上是否存在一点 M，使得 $C'M\perp$ 平面 FBC'？若存在，求 $\frac{AM}{AD}$ 的值；若不存在，请说明理由.

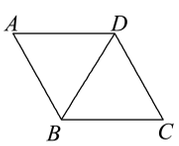


图1

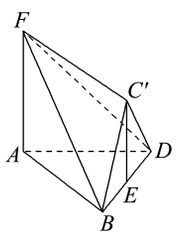


图2

（1）**证明**：因为 $BC'=C'D$，E 为 BD 的中点，

所以 $C'E\perp BD$.

又平面 $BC'D\perp$ 平面 ABD，平面 $BC'D\cap$ 平面 $ABD=BD$，$C'E\subset$ 平面 $BC'D$，

所以 $C'E\perp$ 平面 ABD.

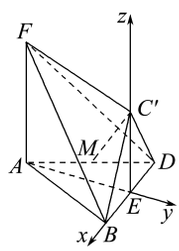
因为 $FA\perp$ 平面 ABD，所以 $FA\parallel C'E$.

因为 $C'E\subset$ 平面 $BC'D$，$FA\not\subset$ 平面 $BC'D$，所以 $FA\parallel$ 平面 $BC'D$.

（2）**解**：连接 AE. 由（1）知，$C'E\perp$ 平面 ABD，AE，$BE\subset$ 平面 ABD，

所以 $C'E\perp AE$，$C'E\perp BE$. 又四边形 $ABCD$ 为边长为 2 的菱形，$\angle BAD=60°$，所以 $AE\perp BD$，$BE=ED=1$，$AE=\sqrt{3}$，

故以 E 为原点，BD，AE，EC' 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $B(1,0,0)$，$A(0,-\sqrt{3},0)$，$D(-1,0,0)$，$F(0,-\sqrt{3},2\sqrt{3})$，$C'(0,0,\sqrt{3})$，所以 $\overrightarrow{FB}=(1,\sqrt{3},-2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC'}=(-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AD}=(-1,\sqrt{3},0)$.

设平面 FBC' 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{FB}=x+\sqrt{3}y-2\sqrt{3}z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC'}=-x+\sqrt{3}z=0.\end{cases}$

令 $z=1$，则 $x=\sqrt{3}$，$y=1$，所以 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,1)$ 为平面 FBC' 的一个法向量.

假设在线段 AD 上存在 $M(a,b,c)$，使得 $C'M\perp$ 平面 FBC'.

设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AD}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则 $(a,b+\sqrt{3},c)=\lambda(-1,\sqrt{3},0)=(-\lambda,\sqrt{3}\lambda,0)$，

所以 $a=-\lambda$，$b=\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3}$，$c=0$，

故 $\overrightarrow{C'M}=(-\lambda,\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3},-\sqrt{3})$.

因为 $C'M\perp$ 平面 FBC'，且平面 FBC' 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,1)$，

所以 $\boldsymbol{m}\parallel\overrightarrow{C'M}$，即 $\boldsymbol{m}=t\overrightarrow{C'M}$，即 $\begin{cases}\sqrt{3}=-\lambda t,\\ 1=t(\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3}),\\ 1=-\sqrt{3}t,\end{cases}$ 方程组无解，λ 不存在.

所以在线段 AD 上不存在点 M，使得 $C'M\perp$ 平面 FBC'.

第二章 直线和圆的方程

单元概览

单元导航

本章用解析几何的方法对直线和圆进行再研究，可以使学生体会解析几何方法的特点.先在平面直角坐标系中，探索确定直线的位置和圆的几何要素；然后用代数方法刻画直线的斜率、两点间的距离，在此基础上，建立直线和圆的方程；再用方程研究两条直线的位置关系、交点坐标，点到直线的距离，以及直线与圆、圆与圆的位置关系；最后解决简单的数学问题和实际问题，初步感悟平面解析几何中蕴含的数学思想.

学习目标

1.理解直线的倾斜角和斜率的概念，掌握过两点的直线斜率的计算公式.
2.根据确定直线位置所需的几何要素，探索并掌握直线方程的三种形式：点斜式、两点式、一般式.
3.探索并掌握平面上两点间的距离公式、点到直线的距离公式，会求两条平行直线间的距离.
4.探索并掌握圆的标准方程与一般方程.
5.能根据给定的直线、圆的方程，判断直线与圆、圆与圆的位置关系.
6.能用直线和圆的方程解决一些简单的数学问题与实际问题.

核心概念

1.通过斜率概念的建立和斜率公式的推导，利用直线的斜率判断直线的平行和垂直以及直线方程的建立，经历几何问题代数化的过程，经历从特殊到一般、从感性到理性的认知过程，体会数形结合、转化与化归思想，提升直观想象、逻辑推理、数学建模等核心素养.
2.通过对两点间的距离公式、点到直线的距离公式及两条平行直线间的距离公式的探索，体会几何度量“距离”的研究方法，进一步体会“坐标法”的思想，体会通过代数方法研究几何问题的一般思路. 在两点间的距离公式、点到直线的距离公式及两条平行直线间的距离公式的探究和推导中，蕴含着丰富的转化与化归、数形结合、函数与方程等重要的数学思想，有利于发展数学运算、逻辑推理等核心素养.
3.通过对圆的标准方程和圆的一般方程的探索，体会类比的数学思想、转化与化归的思想，发展数学推理、数学运算、几何直观等核心素养.
4.通过图形位置关系与方程的解、几何问题与代数方法的相互转化，学习用方程研究两个图形的位置关系的方法，体会数形结合、转化与化归思想.

学法指导

1.在建立直线的方程、圆的方程的过程中，认识曲线与方程之间的关系.曲线与方程之间的一一对应反映了数量关系与空间形式之间的关系.有了这种关系，就可以用方程表示曲线，对曲线进行“运算”；建立方程的几何直观表达，把方程“形象化”，进一步体会数形结合的思想.
2.注重对坐标法思想的宏观认识，注意体会坐标系作为一个参照系，在刻画直线位置时的作用，理解以一个点和一个方向作为确定直线位置的几何要素的合理性.同时要理解斜率的概念及斜率与倾斜角的关系.
3.重视直线的点斜式方程的学习.因为点斜式方程是其他所有形式方程的基础，实际上，它是经过两点的直线斜率公式的一种“变式”表达.在得出点斜式方程后，通过特殊化、其他方式表达、方程形式的共性归纳等，得出直线方程的其他形式，建立各种方程的内在联系.在此过程中，要体会斜率的核心地位.
4.联系直线点斜式方程的建立过程，按照建立曲线方程的基本步骤得出圆的方程，并进行求曲线方程的训练.

★★★

探　究　构　建

2.1　直线的倾斜角与斜率

2.1.1　倾斜角与斜率

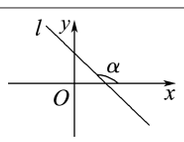
学习任务目标

1.在平面直角坐标系中，结合具体图形，探索确定直线位置的几何要素.
2.理解直线的倾斜角和斜率的概念，经历用代数方法刻画直线斜率的过程.
3.掌握过两点的直线斜率的计算公式.

○ 问题式预习 ○

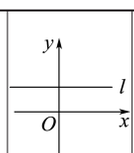
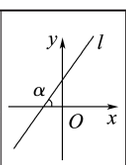
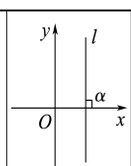
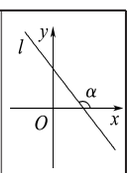
【知识清单】

知识点一　倾斜角的相关概念

定义	当直线 l 与 x 轴相交时，以 x 轴为基准，x 轴正向与直线 l 向上的方向之间所成的角 α 叫做直线 l 的倾斜角.当直线 l 与 x 轴平行或重合时，规定直线 l 的倾斜角为 $0°$
图示	
范围	$0°\leqslant\alpha<180°$
作用	用倾斜角表示平面直角坐标系中一条直线的倾斜程度，也就表示了直线的方向.确定平面直角坐标系中一条直线位置的几何要素：直线上的一个定点以及它的倾斜角

知识点二　斜率的概念及斜率公式

(1)定义：倾斜角 $\alpha(\alpha\neq90°)$ 的正切值.
(2)记法：$k=\tan\alpha$.
(3)斜率与倾斜角的对应关系：

图示				
倾斜角 α	$0°$	$(0°,90°)$	$90°$	$(90°,180°)$
斜率	0	$(0,+\infty)$	不存在	$(-\infty,0)$

(4)经过两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$ 的直线的斜率公式：$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.
(5)若直线 l 的斜率为 k，它的一个方向向量的坐标为 (x,y)，则 $k=\dfrac{y}{x}$.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).
(1)任意一条直线都有唯一的倾斜角.　　(　√　)
(2)一条直线的倾斜角可以为 $-30°$.　　(　×　)
(3)倾斜角为 $0°$ 的直线有无数条.　　(　√　)
(4)若直线的倾斜角为 α，则 $\sin\alpha\in(0,1)$.　　(　×　)

2.若经过 $A(m,3)$，$B(1,2)$ 两点的直线的倾斜角为 $45°$，则 m 的值为　　(　　)
A.2　　B.1　　C.-1　　D.-2

A　**解析**：由题意知，$\tan45°=\dfrac{2-3}{1-m}$，解得 $m=2$.

3.思考并回答下列问题：
(1)所有直线都有斜率吗？如果一条直线没有斜率，那么这条直线的倾斜角是多少？
提示：不是.若直线没有斜率，则其倾斜角为 $90°$.
(2)在斜率公式 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 中，分子与分母的位置是否可以互换？y_1 与 y_2，x_1 与 x_2 的位置呢？
提示：斜率公式中分子与分母的位置不可以互换，但 y_1 与 y_2，x_1 与 x_2 可以同时互换位置，即斜率公式也可写为 $k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.
(3)直线斜率的正负与倾斜角的范围有什么关系？

提示：当 $k=\tan\alpha<0$ 时，倾斜角 α 是钝角；

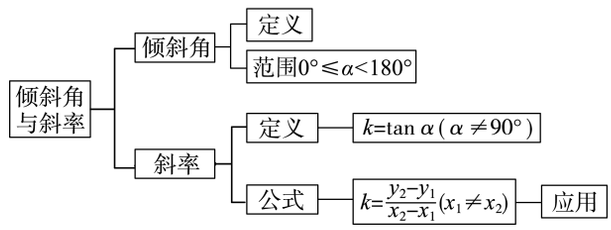
当 $k=\tan\alpha>0$ 时，倾斜角 α 是锐角；

当 $k=\tan\alpha=0$ 时，倾斜角 α 是 $0°$.

(4)直线的斜率 k 随倾斜角 α 的增大而增大吗？

提示：不是，在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内，k 随 α 的增大而增大，在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 内，k 也是随 α 的增大而增大，但当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，斜率 k 不存在.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 直线的倾斜角

1.下列四个命题中，正确的是　　(　　)

A.若一条直线的斜率为 $\tan\alpha$，则此直线的倾斜角为 α

B.若一条直线的倾斜角为 α，则此直线的斜率为 $\tan\alpha$

C.坐标平面内的任何一条直线均有倾斜角和斜率

D.直线的倾斜角的取值范围是 $[0,\pi)$

D　**解析**：对于A，直线 $y=x$ 的斜率为1，而 $\tan\frac{5\pi}{4}=1$，显然 $\frac{5\pi}{4}$ 不是直线 $y=x$ 的倾斜角，故A错误；对于B，直线 $x=1$ 的倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$，而直线 $x=1$ 的斜率不存在，故B错误；对于C，坐标平面内的任何一条直线均有倾斜角，而垂直于 x 轴的直线没有斜率，故C错误；对于D，直线的倾斜角的取值范围是 $[0,\pi)$，故D正确.

故选D.

2.若一条直线 l 与 x 轴相交，其向上方向与 y 轴正方向所成的角为 $\alpha(0°<\alpha<90°)$，则其倾斜角为　　(　　)

A.α

B.$180°-\alpha$

C.$180°-\alpha$ 或 $90°-\alpha$

D.$90°+\alpha$ 或 $90°-\alpha$

D　**解析**：如图，当 l 的倾斜角大于 $90°$ 时，倾斜角为 $90°+\alpha$；当 l 的倾斜角小于 $90°$ 时，倾斜角为 $90°-\alpha$.

故选D.

【探究总结】

理解直线的倾斜角的概念时，要注意三个条件：(1)x 轴的正向；(2)直线向上的方向；(3)小于 $180°$ 的非负角.

任务2 直线的斜率

探究活动

例1　(1)已知点 $P(-\sqrt{3},1)$，点 Q 在 y 轴上，直线 PQ 的倾斜角为 $120°$，则点 Q 的坐标为_____.

$(0,-2)$　**解析**：因为点 Q 在 y 轴上，所以可设点 Q 的坐标为 $(0,y)$. 又因为 $\tan 120°=-\sqrt{3}$，

所以 $\frac{y-1}{0+\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$，解得 $y=-2$，

因此 $Q(0,-2)$.

(2)求经过下列两点的直线的斜率，并判断其倾斜角是什么类型的角.

①$(1,1),(2,4)$；②$(-3,5),(0,2)$；

③$(2,3),(2,5)$；④$(3,-2),(6,-2)$.

解：①$k=\frac{4-1}{2-1}=3>0$，所以倾斜角为锐角；

②$k=\frac{2-5}{0-(-3)}=-1<0$，所以倾斜角为钝角；

③由 $x_1=x_2=2$ 知 k 不存在，倾斜角是 $90°$；

④$k=\frac{-2-(-2)}{6-3}=0$，所以倾斜角为 $0°$.

【探究总结】

求直线的斜率的两种方法

(1)利用定义：已知直线的倾斜角为 α，且 $\alpha\neq90°$，则 $k=\tan\alpha$；

(2)利用斜率公式：已知直线上两点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，$x_1\neq x_2$，则 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

应用迁移

1.(教材P55练习题5改编)已知直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{l}=(1,-\sqrt{3})$，则直线 l 的倾斜角为　(　　)

A.$\frac{\pi}{6}$　　B.$\frac{\pi}{3}$　　C.$\frac{2\pi}{3}$　　D.$\frac{5\pi}{6}$

C　**解析**：由题意，直线 l 的斜率为 $-\sqrt{3}$，结合斜率与倾斜角的关系，得直线 l 的倾斜角为 $\frac{2\pi}{3}$.

2.若 $A(2,-3),B(4,3),C(5,m)$ 三点在同一条直线上，则实数 $m=$_____.

6　**解析**：由题可知 $k_{AB}=\frac{3-(-3)}{4-2}=3$，$k_{AC}=$

$\frac{m-(-3)}{5-2}=\frac{m+3}{3}$.

因为 A,B,C 三点共线，所以 $k_{AB}=k_{AC}$，解得 $m=6$.

任务3 直线斜率的应用

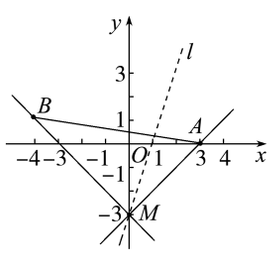
探究活动

例2　若过点 $M(0,-3)$ 的直线 l 与以点 $A(3,0)$，$B(-4,1)$ 为端点的线段 AB 有公共点，求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

解：由题意与斜率公式可知，直线 AM 与 BM 的斜率分别为 $k_{AM}=\frac{0-(-3)}{3-0}=1$，

$k_{BM}=\frac{1-(-3)}{-4-0}=-1$.

如图，直线 l 相当于绕点 M 在直线 AM 与 BM 间旋转.



当 l 由 AM 位置旋转到 y 轴位置时，倾斜角增大到 $90°$，又 $k_{AM}=1$，所以 $k\geqslant 1$；当 l 从 y 轴位置旋转到 BM 位置时，倾斜角大于 $90°$，又 $k_{BM}=-1$，所以 $k\leqslant -1$.

综上所述，直线 l 的斜率 k 的取值范围是 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

［一题多思］

思考1. 如何借助正切函数的单调性理解直线的斜率随倾斜角的变化而变化？

提示：当倾斜角为锐角时，斜率为正，而且斜率随着倾斜角的增大而增大；当倾斜角为钝角时，斜率为负，而且斜率随着倾斜角的增大而增大.

思考2. 在本例中，若把点 M 的坐标改为 $(-5,-3)$，其余条件不变，求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

解：直线 AM 的斜率为 $k_{AM}=\frac{-3-0}{-5-3}=\frac{3}{8}$，直线 BM 的斜率为 $k_{BM}=\frac{-3-1}{-5-(-4)}=4$，

由图（图略）可知，直线 l 的斜率 k 的取值范围是 $\left[\frac{3}{8},4\right]$.

【探究总结】

1. 直线的倾斜角 α 与斜率 k 的关系：$k=\tan\alpha(\alpha\neq 90°)$. 由直线的倾斜角能求斜率，反之，由直线的斜率也能求倾斜角. 注意倾斜角 α 的范围为 $0°\leqslant\alpha<180°$.

2. 当 $0°<\alpha<90°$ 时，$k>0$，且 k 随着 α 的增大而增大；当 $90°<\alpha<180°$ 时，$k<0$，且 k 随着 α 的增大而增大. 但当 $0°<\alpha<180°$ 时，k 并不是随着 α 的增大而增大的.

3. 涉及直线与线段有交点的问题，常结合图形利用斜率公式求解.

应用迁移

1. 若将直线 l 沿 x 轴正方向平移2个单位长度，再沿 y 轴负方向平移3个单位长度，又回到了原来的位置，则 l 的斜率是　（　）

A. $-\frac{3}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $-\frac{2}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

A　**解析**：设 $A(a,b)$ 是直线 l 上任意一点，则平移后得点 $A'(a+2,b-3)$，

则直线 l 的斜率 $k=k_{AA'}=\frac{b-3-b}{a+2-a}=-\frac{3}{2}$.

2. 一条光线从点 $A(-2,3)$ 射出，交 x 轴于点 P，经 x 轴反射后，通过点 $B(5,7)$，求点 P 的坐标.

解：（方法一）设点 $P(x,0)$. 如图1，由光的反射原理知，反射角等于入射角，可得 $\beta=\alpha$，所以反射光线 PB 的倾斜角 β 与入射光线 PA 的倾斜角 $(180°-\alpha)$ 互补，所以 $k_{AP}=-k_{BP}$，即 $\frac{0-3}{x-(-2)}=-\frac{0-7}{x-5}$，

解得 $x=\frac{1}{10}$，所以点 P 的坐标为 $\left(\frac{1}{10},0\right)$.

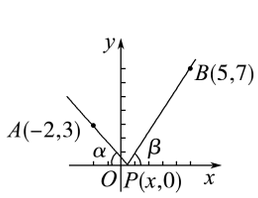


图1

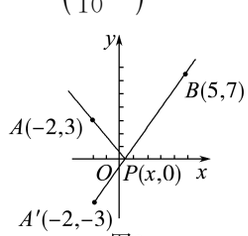


图2

（方法二）如图2，由题意，易知入射点 $A(-2,3)$ 关于 x 轴的对称点为 $A'(-2,-3)$.

由光学知识知，点 A' 应在反射光线所在的直线上，即 A',P,B 三点共线. 设点 $P(x,0)$，从而有 $k_{A'P}=k_{PB}$，即 $\frac{0+3}{x+2}=\frac{7}{5-x}$，解得 $x=\frac{1}{10}$，所以点 P 的坐标为 $\left(\frac{1}{10},0\right)$.

课后素养评价(十二)

基础落实

1.(多选)下列叙述正确的有　　(　　)

A.任意一条直线都有倾斜角和斜率

B.直线的倾斜角 α 的取值范围是 $0°\leqslant\alpha<180°$

C.若一条直线的倾斜角为 $\alpha(\alpha\neq90°)$,则此直线的斜率为 $\tan\alpha$

D.平面直角坐标系内与坐标轴垂直的直线的倾斜角是 $0°$ 或 $90°$

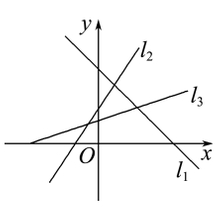
BCD　**解析**:根据斜率的定义知,当直线与 x 轴垂直时,斜率不存在,故 A 错误,其他选项正确.

2.若经过 $A(\sqrt{3},m)$,$B(2\sqrt{3},4)$ 两点的直线的倾斜角为 $30°$,则 $m=$　　(　　)

A.6　　B.-6　　C.3　　D.-3

C　**解析**:由题意可得 $\tan30°=\dfrac{4-m}{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}$,解得 $m=3$.故选 C.

3.(多选)如图,直线 l_1,l_2,l_3 的斜率分别为 k_1,k_2,k_3,倾斜角分别为 α_1,α_2,α_3,则下列选项正确的有　　(　　)



A.$k_1<k_3<k_2$　　B.$k_3<k_2<k_1$

C.$\alpha_1<\alpha_3<\alpha_2$　　D.$\alpha_3<\alpha_2<\alpha_1$

AD　**解析**:由图象可知 $0<\alpha_3<\alpha_2<\dfrac{\pi}{2}<\alpha_1$,则 $k_1<0<k_3<k_2$.

4.(多选)若经过点 $A(1-a,1+a)$,$B(3,a)$ 的直线的倾斜角为钝角,则实数 a 的值不可能为　　(　　)

A.-3　　B.-2　　C.1　　D.2

AB　**解析**:由题意得 $k_{AB}=\dfrac{1+a-a}{1-a-3}=\dfrac{1}{-2-a}<0$,即 $2+a>0$,所以 $a>-2$.

5.若 $A(-1,-2)$,$B(4,8)$,$C(5,x)$ 三点共线,则 $x=$　　(　　)

A.-2　　B.5　　C.10　　D.12

C　**解析**:由题意可知,直线 AB,AC 的斜率存在并相等,即 $\dfrac{8-(-2)}{4-(-1)}=\dfrac{x-(-2)}{5-(-1)}$,解得 $x=10$.

能力提升

1.(多选)若直线 l 向上方向与 y 轴的正方向成 $30°$ 角,则直线 l 的倾斜角可能为　　(　　)

A.$30°$　　B.$60°$　　C.$120°$　　D.$150°$

BC　**解析**:由于 y 轴正方向对应的直线的倾斜角为 $90°$,因此所求直线的倾斜角为 $60°$ 或 $120°$.

2.若过 $A(4,y)$,$B(2,-3)$ 两点的直线的一个方向向量为 $\boldsymbol{n}=(-1,-1)$,则 $y=$　　(　　)

A.$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B.$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C.-1　　D.1

C　**解析**:(方法一)由直线上的两点 $A(4,y)$,$B(2,-3)$,得 $\overrightarrow{AB}=(-2,-3-y)$.

又直线 AB 的一个方向向量为 $\boldsymbol{n}=(-1,-1)$,

所以 $\boldsymbol{n}\parallel\overrightarrow{AB}$,

所以 $(-2)\times(-1)-(-3-y)\times(-1)=0$,解得 $y=-1$.

故选 C.

(方法二)由直线的一个方向向量为 $\boldsymbol{n}=(-1,-1)$,得直线的斜率为 $\dfrac{-1}{-1}=1$,所以 $\dfrac{y-(-3)}{4-2}=1$,解得 $y=-1$.故选 C.

3.已知直线 l 的倾斜角 α 满足 $60°<\alpha\leqslant135°$,则 l 的斜率 k 的取值范围是　　(　　)

A.$[-1,\sqrt{3})$

B.$[-\sqrt{3},1]$

C.$(-\infty,-1]\cup(\sqrt{3},+\infty)$

D.$(-\infty,-\sqrt{3}]\cup(-1,+\infty)$

C　**解析**:因为 $y=\tan\alpha$ 在 $60°<\alpha<90°$ 时单调递增,在 $90°<\alpha\leqslant135°$ 时也单调递增,

当 $60°<\alpha<90°$ 时,$k=\tan\alpha>\tan60°=\sqrt{3}$,

当 $90°<\alpha\leqslant135°$ 时,$k=\tan\alpha\leqslant\tan135°=-1$,

所以 k 的取值范围是 $(-\infty,-1]\cup(\sqrt{3},+\infty)$.

4.已知一条光线从点 $A(-2,\sqrt{3})$ 出发,与 x 轴交于点 B,经 x 轴反射,这时反射光线恰好过点 $C(1,2\sqrt{3})$,则反射光线所在直线的倾斜角为_____.

$60°$　**解析**:点 $A(-2,\sqrt{3})$ 关于 x 轴的对称点为 $A'(-2,-\sqrt{3})$,由物理知识知 $k_{BC}=k_{A'C}=\dfrac{2\sqrt{3}-(-\sqrt{3})}{1-(-2)}=\sqrt{3}$,所以所求倾斜角为 $60°$.

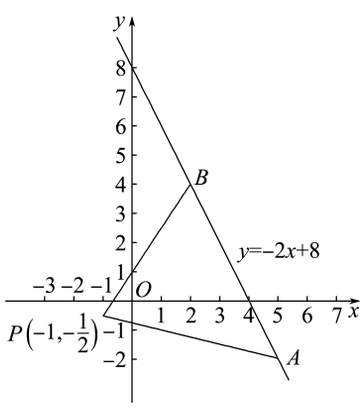
5.设坐标平面内三点$A(m,-m-3)$，$B(2,m-1)$，$C(-1,4)$.若直线AC的斜率等于直线BC的斜率的3倍，则实数m的值为_____.

1或2　**解析：**由$k_{AC}=3k_{BC}$，得$\dfrac{4+m+3}{-1-m}=3\cdot\dfrac{4-m+1}{-1-2}$，即$-\dfrac{m+7}{m+1}=m-5$，解得$m=1$或$m=2$.经验证均符合题意，故$m$的值为1或2.

自我超越

1.若点$M(x,y)$在一次函数$y=-2x+8$的图象上，则当$x\in[2,5]$时，$\dfrac{2y+1}{x+1}$的取值范围是_____.

$\left[-\dfrac{1}{2},3\right]$　**解析：**如图，



函数$y=-2x+8$，$x\in[2,5]$表示线段AB，其中$A(5,-2)$，$B(2,4)$，

$\dfrac{2y+1}{x+1}=\dfrac{2\left(y+\frac{1}{2}\right)}{x+1}$的几何意义为线段$AB$上的动点$M(x,y)$与定点$P\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$连线的斜率的2倍.因为$k_{PA}=\dfrac{-2+\frac{1}{2}}{5+1}=-\dfrac{1}{4}$，$k_{PB}=\dfrac{4+\frac{1}{2}}{2+1}=\dfrac{3}{2}$，

所以$-\dfrac{1}{4}\leqslant k_{PM}\leqslant\dfrac{3}{2}$，

所以$\dfrac{2y+1}{x+1}$的取值范围是$\left[-\dfrac{1}{2},3\right]$.

2.已知点$A(3,3)$，$B(-4,2)$，$C(0,-2)$.

(1)求直线AB和AC的斜率；

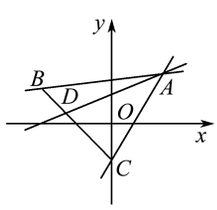
(2)若点D在线段BC上(包括端点)移动，求直线AD的斜率的取值范围.

解：(1)由斜率公式可得直线AB的斜率$k_{AB}=\dfrac{2-3}{-4-3}=\dfrac{1}{7}$，直线$AC$的斜率$k_{AC}=\dfrac{-2-3}{0-3}=\dfrac{5}{3}$，

所以直线AB的斜率为$\dfrac{1}{7}$，直线AC的斜率为$\dfrac{5}{3}$.

(2)如图，当点D由点B运动到点C时，直线AD的斜率由k_{AB}增大到k_{AC}，由(1)知，$k_{AB}=\dfrac{1}{7}$，$k_{AC}=\dfrac{5}{3}$，

所以直线AD的斜率的取值范围是$\left[\dfrac{1}{7},\dfrac{5}{3}\right]$.



2.1.2　两条直线平行和垂直的判定

学习任务目标

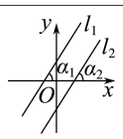
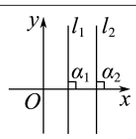
1.理解并掌握两条直线平行与垂直的判定方法.

2.能根据斜率判定两条直线平行或垂直.

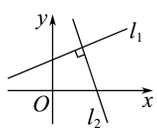
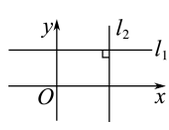
○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　两条直线平行与斜率之间的关系

前提条件	$\alpha_1=\alpha_2\neq90°$	$\alpha_1=\alpha_2=90°$
对应关系	$l_1/\!/l_2\Leftrightarrow$ $k_1=k_2$	$l_1/\!/l_2\Leftrightarrow$两条直线的斜率都不存在
图示		

知识点二　两条直线垂直与斜率之间的关系

对应关系	若直线l_1与l_2的斜率都存在，分别为k_1，k_2，则$l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1$	若直线l_1与l_2中的一条斜率不存在，另一条斜率为0，则l_1与l_2的位置关系是$l_1\perp l_2$
图示		

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)若两条直线的倾斜角相等,则这两条直线一定平行.　(　×　)

(2)若两条直线平行,则这两条直线的倾斜角一定相等.　(　√　)

(3)若两条直线的斜率都不存在且两直线不重合,则这两条直线平行.　(　√　)

(4)若两条直线中有一条直线的斜率不存在,另一条直线的斜率存在,则这两条直线垂直.　(　×　)

(5)已知直线 l_1,l_2 的斜率分别为 k_1,k_2,若 $k_1=2$,$k_2=-\frac{1}{2}$,则 l_1 与 l_2 垂直.　(　√　)

2.若过点 $P(3,2m)$ 和点 $Q(-m,2)$ 的直线与过点 $M(2,-1)$ 和点 $N(-3,4)$ 的直线平行,则 m 的值是　(　　)

A.$\frac{1}{3}$　　B.$-\frac{1}{3}$　　C.2　　D.-2

B　**解析**:由题意知,直线 PQ 的斜率存在,由 $k_{PQ}=k_{MN}$,即 $\frac{2m-2}{3-(-m)}=\frac{4-(-1)}{-3-2}$,得 $m=-\frac{1}{3}$.

经检验知,$m=-\frac{1}{3}$ 符合题意.

3.思考并回答下列问题:

(1)如果两条直线平行,那么这两条直线的斜率一定相等吗?

提示:不一定.只有在两条直线的斜率都存在的情况下斜率才相等.

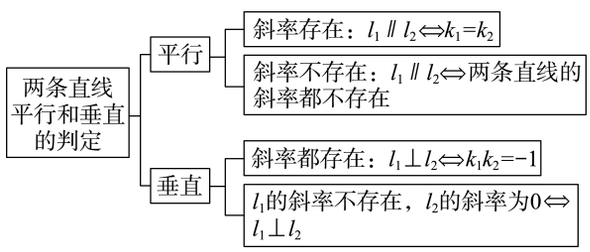
(2)直线 $l_1/\!/l_2\Leftrightarrow k_1=k_2$ 成立的前提条件是什么?

提示:①两条直线的斜率都存在;②两直线不重合.

(3)如果 $l_1\perp l_2$,那么一定有 $k_1k_2=-1$ 吗?为什么?

提示:不一定.当两条直线的斜率都存在时,$k_1k_2=-1$,若一条直线的斜率不存在,另一条直线的斜率为 0,此时 $l_1\perp l_2$,但 $k_1k_2=-1$ 不成立.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1　两条直线平行的判定及应用

探究活动

例 1　判断下列各题中的直线 l_1 与 l_2 是否平行:

(1)l_1 经过点 $A(-1,-2)$,$B(2,1)$,l_2 经过点 $M(3,4)$,$N(-1,-1)$;

(2)l_1 的斜率为 1,l_2 经过点 $A(1,1)$,$B(2,2)$;

(3)l_1 经过点 $A(0,1)$,$B(1,0)$,l_2 经过点 $M(-1,3)$,$N(2,0)$;

(4)l_1 经过点 $A(-3,2)$,$B(-3,10)$,l_2 经过点 $M(5,-2)$,$N(5,5)$.

解:(1)$k_1=\frac{1-(-2)}{2-(-1)}=1$,$k_2=\frac{-1-4}{-1-3}=\frac{5}{4}$,

$k_1\neq k_2$,故 l_1 与 l_2 不平行.

(2)$k_1=1$,$k_2=\frac{2-1}{2-1}=1$,$k_1=k_2$,

故 $l_1/\!/l_2$ 或 l_1 与 l_2 重合.

(3)$k_1=\frac{0-1}{1-0}=-1$,$k_2=\frac{0-3}{2-(-1)}=-1$,则有 $k_1=k_2$.

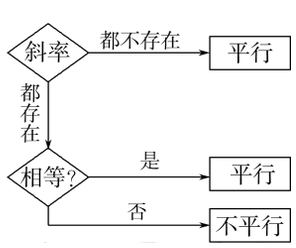
又 $k_{AM}=\frac{3-1}{-1-0}=-2\neq-1$,

则 A,B,M 三点不共线,故 $l_1/\!/l_2$.

(4)由已知点的坐标,得 l_1,l_2 均与 x 轴垂直且不重合,故 $l_1/\!/l_2$.

【探究总结】

判断两条不重合的直线是否平行的方法



应用迁移

(教材 P56 例 2 改编)已知直线 l_1 的倾斜角为 60°,直线 l_2 经过点 $A(-1,-\sqrt{3})$,$B(0,0)$,则直线 l_1,l_2 的位置关系是　(　　)

A.平行或重合　　B.平行

C.垂直　　D.重合

A　**解析**:依题意,直线 l_1 的斜率 $k_1=\tan 60°=\sqrt{3}$,

直线 l_2 的斜率 $k_2=\frac{-\sqrt{3}-0}{-1-0}=\sqrt{3}$,

即 $k_1=k_2$,所以 $l_1/\!/l_2$ 或 l_1,l_2 重合.

任务2 两条直线垂直的判定及应用

探究活动

例2　(1)直线 l_1 经过点 $A(3,2)$，$B(3,-1)$，直线 l_2 经过点 $M(1,1)$，$N(2,1)$，判断 l_1 与 l_2 是否垂直；

(2)已知直线 l_1 经过点 $A(3,a)$，$B(a-2,3)$，直线 l_2 经过点 $C(2,3)$，$D(-1,a-2)$.若 $l_1\perp l_2$，求 a 的值；

(3)已知 $\triangle ABC$ 三个顶点分别为 $A(-2,-4)$，$B(6,6)$，$C(0,6)$，求此三角形三边上的高所在直线的斜率.

解：(1)由题意可知，直线 l_1 的斜率不存在，直线 l_2 的斜率为 $\dfrac{1-1}{2-1}=0$，所以 $l_1\perp l_2$.

(2)由题意知，直线 l_2 的斜率 k_2 一定存在，直线 l_1 的斜率可能不存在.

当直线 l_1 的斜率不存在时，$3=a-2$，即 $a=5$，

此时 $D(-1,3)$，$k_2=\dfrac{3-3}{2+1}=0$，所以 $l_1\perp l_2$，满足题意.

当直线 l_1 的斜率 k_1 存在时，$a\neq5$，

由斜率公式，

得 $k_1=\dfrac{3-a}{a-2-3}=\dfrac{3-a}{a-5}$，$k_2=\dfrac{a-2-3}{-1-2}=\dfrac{a-5}{-3}$.

由 $l_1\perp l_2$ 知，$k_1k_2=-1$，即 $\dfrac{3-a}{a-5}\times\left(\dfrac{a-5}{-3}\right)=-1$，解得 $a=0$.

综上所述，a 的值为 0 或 5.

(3)由斜率公式，可得 $k_{AB}=\dfrac{5}{4}$，$k_{BC}=0$，$k_{AC}=5$.

因为 $k_{BC}=0$，

所以边 BC 上的高所在直线与 x 轴垂直，其斜率不存在.

设边 AB，AC 上的高所在直线的斜率分别为 k_1，k_2，

由 $k_1\cdot k_{AB}=-1$，$k_2\cdot k_{AC}=-1$，

得 $k_1\times\dfrac{5}{4}=-1$，$k_2\times5=-1$，

解得 $k_1=-\dfrac{4}{5}$，$k_2=-\dfrac{1}{5}$.

综上所述，边 BC 上的高所在直线的斜率不存在；

边 AB 上的高所在直线的斜率为 $-\dfrac{4}{5}$；

边 AC 上的高所在直线的斜率为 $-\dfrac{1}{5}$.

【探究总结】

利用斜率公式判定两条直线是否垂直的步骤

(1)一看：看直线上两点的横坐标是否相等，若相等，则这条直线的斜率不存在，这时看另一条直线上两点的纵坐标是否相等，若相等，则垂直；若不相等，则不垂直.否则，进行第二步.

(2)二代：将点的坐标代入斜率公式.

(3)三求：计算斜率的值，进行判断.

注意：当点的坐标中含有参数时，应用斜率公式时要对参数进行讨论.

应用迁移

1.(多选)满足下列条件的直线 l_1 与 l_2，其中 $l_1\perp l_2$ 的有　(　　)

A.l_1 的倾斜角为 $45°$，l_2 的斜率为 1

B.l_1 的斜率为 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，l_2 经过点 $A(2,0)$，$B(3,\sqrt{3})$

C.l_1 经过点 $P(2,1)$，$Q(-4,-5)$，l_2 经过点 $M(-1,2)$，$N(1,0)$

D.l_1 的一个方向向量为 $(1,m)$，l_2 的一个方向向量为 $\left(1,-\dfrac{1}{m}\right)$

BCD　**解析**：对于 A，$k_{l_1}=\tan 45°=1$，$k_{l_2}=1$，$k_{l_1}\cdot k_{l_2}\neq-1$，所以 A 不正确；

对于 B，$k_{l_2}=\dfrac{\sqrt{3}-0}{3-2}=\sqrt{3}$，$k_{l_1}\cdot k_{l_2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}=-1$，故 B 正确；

对于 C，$k_{l_1}=\dfrac{-5-1}{-4-2}=1$，$k_{l_2}=\dfrac{2-0}{-1-1}=-1$，$k_{l_1}\cdot k_{l_2}=-1$，故 C 正确；

对于 D，因为 $(1,m)\cdot\left(1,-\dfrac{1}{m}\right)=1-1=0$，所以两直线的方向向量互相垂直，故 $l_1\perp l_2$，故 D 正确.

2.若不同的两点 P，Q 的坐标分别为 (a,b)，$(3-b,3-a)$，则线段 PQ 的垂直平分线的斜率为_____.

-1　**解析**：因为 $k_{PQ}=\dfrac{b-3+a}{a-3+b}=1$，所以线段 PQ 的垂直平分线的斜率为 -1.

任务3 两条直线平行与垂直的综合应用

探究活动

例3　已知点 $A(0,1)$，$B(1,0)$，$C(3,2)$，$D(2,3)$，试判断四边形 $ABCD$ 的形状.

解：由题意，得 $k_{AB}=\dfrac{0-1}{1-0}=-1$，$k_{CD}=\dfrac{3-2}{2-3}=-1$，

$k_{BC}=\dfrac{2-0}{3-1}=1$，$k_{DA}=\dfrac{3-1}{2-0}=1$，

所以 $k_{AB}=k_{CD}$，$k_{BC}=k_{DA}$，所以 $AB\parallel CD$，$BC\parallel DA$.

所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

又因为 $k_{AB}\cdot k_{BC}=-1$，所以 $AB\perp BC$，

即 $\angle ABC=90°$，所以平行四边形 $ABCD$ 为矩形，

故四边形 $ABCD$ 为矩形.

[一题多思]

思考1. 你还有什么方法判断四边形 $ABCD$ 的形状？

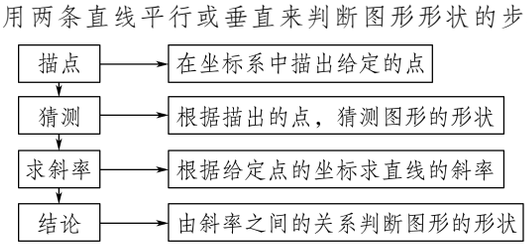
解： 易知线段 AC 的中点为 $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$，线段 BD 的中点为 $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$，所以四边形 $ABCD$ 对角线的中点重合，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 又 $AC=\sqrt{(3-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{10}$，$BD=\sqrt{(2-1)^2+(3-0)^2}=\sqrt{10}$，所以 $AC=BD$，故平行四边形 $ABCD$ 为矩形，即四边形 $ABCD$ 为矩形.

思考2. 已知点 $A(1,0)$，$B(3,1)$，$C(2,-1)$，求点 D 的坐标，使四边形 $ABCD$ 是菱形.

解： 设 $D(x,y)$，由题意可得 $\begin{cases}\frac{y+1}{x-2}=\frac{1-0}{3-1},\\ \frac{1-(-1)}{3-2}=\frac{y-0}{x-1},\\ \frac{y-1}{x-3}\times\frac{0-(-1)}{1-2}=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\ y=-2,\end{cases}$ 所以点 D 的坐标为 $(0,-2)$.

【探究总结】

1. 利用两条直线平行或垂直来判断图形形状的步骤：



2. 利用两直线平行、垂直关系的关键在于正确求出斜率，特别是当斜率的表达式中含参数时，必须要分类讨论，注意斜率不存在的情况.

应用迁移

1. 已知 $A(1,-1)$，$B(2,2)$，$C(3,0)$ 三点，且有一点 D 满足 $CD\perp AB$，$CB\parallel AD$，则点 D 的坐标为（　　）

A. $(-1,0)$　　B. $(0,-1)$

C. $(1,0)$　　D. $(0,1)$

D　**解析：** 由题意可知，$k_{AB}=\frac{2+1}{2-1}=3$，$k_{CB}=\frac{2-0}{2-3}=-2$.

由 $CD\perp AB$，$CB\parallel AD$，可知直线 AD，CD 的斜率存在.

设 $D(x,y)$，则 $k_{CD}=\frac{y-0}{x-3}=\frac{y}{x-3}$，$k_{AD}=\frac{y+1}{x-1}$，

则 $\begin{cases}k_{CD}\cdot k_{AB}=-1,\\ k_{AD}=k_{CB},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{y}{x-3}\times 3=-1,\\ \frac{y+1}{x-1}=-2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=0,\\ y=1,\end{cases}$ 即 $D(0,1)$.

故选 D.

2. 已知四边形 $ABCD$ 的顶点为 $A(-7,0)$，$B(2,-3)$，$C(5,6)$，$D(-4,9)$，求证：四边形 $ABCD$ 为正方形.

证明： 因为 $k_{AD}=\frac{9-0}{-4-(-7)}=3$，$k_{BC}=\frac{6-(-3)}{5-2}=3$，所以 $AD\parallel BC$.

又 $k_{AB}=\frac{-3-0}{2-(-7)}=-\frac{1}{3}$，$k_{CD}=\frac{9-6}{-4-5}=-\frac{1}{3}$，

所以 $AB\parallel CD$，

所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

又 $k_{AB}\cdot k_{AD}=-\frac{1}{3}\times 3=-1$，所以 $AB\perp AD$，

所以四边形 $ABCD$ 为矩形.

因为 $k_{AC}=\frac{6-0}{5-(-7)}=\frac{1}{2}$，$k_{BD}=\frac{9+3}{-4-2}=-2$，

所以 $k_{BD}\cdot k_{AC}=-1$，所以 $AC\perp BD$，

即矩形 $ABCD$ 的对角线互相垂直，

所以四边形 $ABCD$ 为正方形.

课后素养评价（十三）

基础落实

1.（多选）下列说法错误的有（　　）

A. 若直线 $l_1\perp l_2$，则它们的斜率之积为 -1

B. 若直线 $l_1\parallel l_2$，则两条直线的斜率相等或都不存在

C. 若两条直线中，一条直线的斜率存在，而另一条直线的斜率不存在，则两条直线一定垂直

D. 若两条不重合的直线的倾斜角的正弦值相等，则这两条直线平行

ACD　**解析：** 若两条直线垂直，则它们的斜率之积为 -1 或其中一条直线的斜率不存在，另一条直线的斜率为 0，故 A，C 错误；两条直线平行，可能两条直线的斜率都不存在，故 B 正确；因为 $60°$ 和 $120°$ 的正弦值相等，但倾斜角为 $60°$ 和倾斜角为 $120°$ 的两条直线不平行，故 D 错误.

2.（多选）下列各组直线中，l_1 与 l_2 一定平行的有（　　）

A. l_1 经过点 $A(2,1)$，$B(-3,5)$，l_2 经过点 $C(3,-3)$，$D(8,-7)$

B. l_1 经过点 $E(0,1)$，$F(-2,-1)$，l_2 经过点 $G(3,$

4),$H(2,3)$

C.l_1 的倾斜角为 $60°$,l_2 经过点 $M(1,\sqrt{3})$,$N(-2,-2\sqrt{3})$

D.l_1 平行于 y 轴,l_2 经过点 $P(0,-2)$,$Q(0,5)$

AD　**解析**:对于 A,由题意知 $k_{l_1}=\frac{5-1}{-3-2}=-\frac{4}{5}$,$k_{l_2}=\frac{-7+3}{8-3}=-\frac{4}{5}$,所以直线 l_1 与直线 l_2 平行或重合,又 $k_{BC}=\frac{5-(-3)}{-3-3}=-\frac{4}{3}\neq-\frac{4}{5}$,故 $l_1\parallel l_2$,A 选项正确;

对于 B,由题意知 $k_{l_1}=\frac{-1-1}{-2-0}=1$,$k_{l_2}=\frac{3-4}{2-3}=1$,所以直线 l_1 与直线 l_2 平行或重合,又 $k_{FG}=\frac{4-(-1)}{3-(-2)}=1$,故直线 l_1 与直线 l_2 重合,B 选项错误;

对于 C,由题意知 $k_{l_1}=\tan 60°=\sqrt{3}$,$k_{l_2}=\frac{-2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{-2-1}=\sqrt{3}$,$k_{l_1}=k_{l_2}$,所以直线 l_1 与直线 l_2 平行或重合,C 选项错误;

对于 D,由题意知 l_1 的斜率不存在,且不是 y 轴,l_2 的斜率也不存在,恰好是 y 轴,所以 $l_1\parallel l_2$,D 选项正确.故选 AD.

3.若过点 $A(2,-2)$,$B(5,6)$ 的直线与过点 $P(2m,1)$,$Q(-1,-m)$ 的直线平行,则 m 的值为　(　　)

A.-1　　B.$-\frac{5}{13}$　　C.2　　D.$\frac{1}{2}$

B　**解析**:由 $\frac{6-(-2)}{5-2}=\frac{-m-1}{-1-2m}$,解得 $m=-\frac{5}{13}$.

4.已知直线 l_1 过点 $A(-1,m)$,$B(m,1)$,直线 l_2 过点 $C(-1,1)$,$D(1,0)$,且 $l_1\perp l_2$,则 m 的值为　(　　)

A.-3　　B.$-\frac{1}{3}$

C.3　　D.$\frac{1}{3}$

B　**解析**:由题意得 $k_1=\frac{1-m}{m-(-1)}=\frac{1-m}{m+1}$,$k_2=\frac{1-0}{-1-1}=-\frac{1}{2}$.因为 $l_1\perp l_2$,所以 $k_1\cdot k_2=-1$,即 $\frac{1-m}{m+1}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$,解得 $m=-\frac{1}{3}$.

5.已知经过点 $A(3,n)$,$B(5,m)$ 的直线 l_1 与经过点 $P(-m,0)$,$Q(0,n^2)(mn\neq0)$ 的直线 l_2 平行,则 $\frac{m}{n}$ 的值为　(　　)

A.-1　　B.-2

C.-1 或 2　　D.-2 或 1

C　**解析**:由题意得 $k_{l_1}=\frac{m-n}{2}$,$k_{l_2}=\frac{n^2}{m}$.

因为 $l_1\parallel l_2$,所以 $k_{l_1}=k_{l_2}$,即 $\frac{m-n}{2}=\frac{n^2}{m}$,

化简得 $m^2-mn-2n^2=0$,所以 $m=-n$ 或 $m=2n$.

又由 $mn\neq0$,得 $\frac{m}{n}$ 的值为 -1 或 2.故选 C.

6.已知点 $A(m,3)$,$B(2m,m+4)$,$C(m+1,2)$,$D(1,0)$,且直线 AB 与直线 CD 平行,则 m 的值为　(　　)

A.-1 或 0　　B.0 或 1

C.1　　D.2

B　**解析**:当 $m=0$ 时,直线 AB 与直线 CD 的斜率均不存在,此时直线 AB 的方程为 $x=0$,直线 CD 的方程为 $x=1$,故 $AB\parallel CD$;

当 $m\neq0$ 时,$k_{AB}=\frac{(m+4)-3}{2m-m}=\frac{m+1}{m}$,$k_{CD}=\frac{2-0}{(m+1)-1}=\frac{2}{m}$,

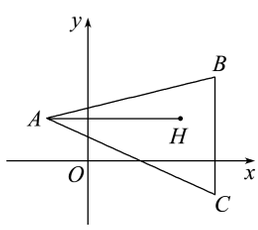
则 $k_{AB}=k_{CD}$,即 $\frac{m+1}{m}=\frac{2}{m}$,得 $m=1$.

综上,$m=0$ 或 $m=1$.

故选 B.

7.已知点 $A(-2,2)$,$B(6,4)$,$H(5,2)$,H 是 $\triangle ABC$ 的垂心,则点 C 的坐标为_____.

$(6,-2)$　**解析**:如图,设点 C 的坐标为 (x,y).



因为 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心,所以 $BC\perp AH$.又直线 AH 的斜率 $k_{AH}=\frac{2-2}{5+2}=0$,得直线 BC 的倾斜角为 $90°$,而点 B 的横坐标为 6,则 $x=6$.

又直线 BH 的斜率 $k_{BH}=\frac{4-2}{6-5}=2$,$BH\perp AC$,所以直线 AC 的斜率 $k_{AC}=\frac{y-2}{6+2}=-\frac{1}{2}$,所以 $y=-2$.

所以点 C 的坐标为 $(6,-2)$.

8.已知 $\square ABCD$ 的三个顶点分别为 $A(0,1)$,$B(1,0)$,$C(4,3)$,则顶点 D 的坐标为_____.

(3,4)　**解析**：设顶点 D 的坐标为 (x,y).

因为 $AB\parallel DC$，$AD\parallel BC$，所以 $\begin{cases}\dfrac{0-1}{1-0}=\dfrac{3-y}{4-x},\\ \dfrac{y-1}{x-0}=\dfrac{3-0}{4-1},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\ y=4.\end{cases}$ 所以顶点 D 的坐标为 $(3,4)$.

9. 已知直线 l_1 经过点 $A(3,a)$，$B(a-1,2)$，直线 l_2 经过点 $C(1,2)$，$D(-2,a+2)$. 若 $l_1\parallel l_2$，则 a 的值为_____；若 $l_1\perp l_2$，则 a 的值为_____.

1 或 6　3 或 -4　**解析**：当 $l_1\parallel l_2$ 时，$\dfrac{2-a}{a-1-3}=\dfrac{a+2-2}{-2-1}$，即 $\dfrac{2-a}{a-4}=\dfrac{a}{-3}$，解得 $a=1$ 或 $a=6$，经验证均符合题意.

当 $l_1\perp l_2$ 时，若 l_2 的斜率为 0，即 $a=0$，此时 l_1 的斜率存在，不符合题意；当 l_2 的斜率不为 0，有 $\dfrac{2-a}{a-4}\times\dfrac{a}{-3}=-1$，解得 $a=3$ 或 $a=-4$，经验证均符合题意.

能力提升

1. 若点 $P(a,b)$ 与点 $Q(b-1,a+1)$ 关于直线 l 对称，则 l 的倾斜角为　(　)

A.135°　　B.45°

C.30°　　D.60°

B　**解析**：由题意知 $PQ\perp l$，则 $k_{PQ}\cdot k_l=-1$，

所以 $\dfrac{a+1-b}{b-1-a}\cdot k_l=-1$，得 $k_l=1$.

设 l 的倾斜角为 α，$0°\leqslant\alpha<180°$，

所以 $\tan\alpha=1$，则 $\alpha=45°$.

2. 已知直线 l_1 过点 $A(0,1)$，直线 l_1 与直线 $l_2:y=x$ 的交点 B 在第一象限，点 O 为坐标原点. 若 $\triangle OAB$ 为钝角三角形，则直线 l_1 的斜率的取值范围是　(　)

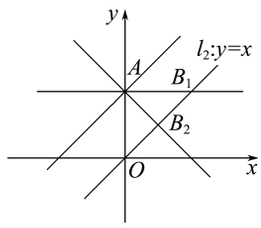
A.$(-\infty,-1]$

B.$(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

C.$(-\infty,-1)\cup(0,1)$

D.$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C　**解析**：如图，当 $\triangle OAB$ 为直角三角形时，$OB\perp BA$ 或 $OA\perp BA$，此时 l_1 的斜率 $k=-1$ 或 $k=0$.



当 l_1 从 $k=-1$ 按顺时针方向旋转到 y 轴之间时，$\triangle OAB$ 为钝角三角形，此时 $k<-1$；

当 l_1 从 $k=0$ 按逆时针方向旋转到与直线 $l_2:y=x$ 平行之间时，$\triangle OAB$ 为钝角三角形，此时 $0<k<1$.

综上，$k\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

故选 C.

3. 已知 $A(-4,3)$，$B(2,5)$，$C(6,3)$，$D(-3,0)$ 四点，则四边形 $ABCD$ 的形状是　(　)

A.平行四边形　　B.矩形

C.菱形　　D.直角梯形

D　**解析**：因为 $k_{AB}=\dfrac{5-3}{2+4}=\dfrac{1}{3}$，$k_{CD}=\dfrac{3-0}{6+3}=\dfrac{1}{3}$，

$k_{AD}=\dfrac{3-0}{-4-(-3)}=-3$，$k_{BC}=\dfrac{5-3}{2-6}=-\dfrac{1}{2}$，

所以 $AB\parallel CD$，$AD\perp AB$.

所以四边形 $ABCD$ 为直角梯形.

4. 已知直线 l_1 的一个方向向量为 (b,a)，直线 l_2 的一个方向向量为 $(1-a,2)$，其中 a，b 为正数. 若 $l_1\perp l_2$，则 $3a+2b$ 的最小值为_____.

$7+4\sqrt{3}$　**解析**：依题意，两直线垂直，则两直线的方向向量垂直，其数量积为零，

可得 $b(1-a)+2a=0$，即 $2a+b=ab$，所以 $\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{a}=1$.

由 $a>0$，$b>0$，得 $3a+2b=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}\right)(3a+2b)=7+\dfrac{2b}{a}+\dfrac{6a}{b}\geqslant 7+4\sqrt{3}$，当且仅当 $\dfrac{2b}{a}=\dfrac{6a}{b}$，即 $a=\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$，$b=\dfrac{6+3\sqrt{3}}{3}$ 时，等号成立，所以 $3a+2b$ 的最小值为 $7+4\sqrt{3}$.

5. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(5,1)$，重心 $G(3,3)$，垂心为 H. 若 B，H 都在直线 $y=-x$ 上，则点 H 的坐标为_____.

$(5,-5)$　**解析**：设 $B(x_1,-x_1)$，因为重心 $G(3,3)$，所以 $\begin{cases}3=\dfrac{5+x_1+x_C}{3},\\ 3=\dfrac{1-x_1+y_C}{3},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_C=4-x_1,\\ y_C=8+x_1.\end{cases}$

因为 H 为$\triangle ABC$ 的垂心，所以 $BH\perp AC$，则$-1\cdot\frac{8+x_1-1}{4-x_1-5}=-1$，解得 $x_1=-4$，所以 $B(-4,4)$，$C(8,4)$，$k_{BC}=0$，所以直线 AH 的斜率不存在，则 $x_H=x_A=5$，$y_H=-5$，所以 $H(5,-5)$.

6.已知直线 l 的倾斜角为 $30°$，点 $P(2,1)$在直线 l 上，直线 l 绕点 $P(2,1)$按逆时针方向旋转 $30°$后到达直线 l_1 的位置，直线 l_1 与 l_2 平行，且 l_2 是线段 AB 的垂直平分线，线段 AB 的端点为 $A(1,m-1)$，$B(m,2)$.试求实数 m 的值.

解：易知，直线 l_1 的倾斜角为 $30°+30°=60°$，

所以直线 l_1 的斜率 $k_1=\tan 60°=\sqrt{3}$.

因为 $l_1/\!/l_2$，所以直线 l_2 的斜率 $k_2=\sqrt{3}$.

又 l_2 是线段 AB 的垂直平分线，所以直线 AB 的斜率存在，且 $k_{AB}=\frac{m-1-2}{1-m}=\frac{m-3}{1-m}$，所以 $\frac{m-3}{1-m}\cdot\sqrt{3}=-1$，

解得 $m=4+\sqrt{3}$.

综上，实数 m 的值为 $4+\sqrt{3}$.

7.已知 $A(4,0)$，$B(1,2)$，$C(m,m)$，$D(7,-1)$.

(1)若直线 AB 与 CD 平行，求 m 的值；

(2)若$\triangle ABC$ 为直角三角形，求 m 的值.

解：(1)依题意，可得 $k_{AB}=k_{CD}$，

即 $\frac{2-0}{1-4}=\frac{-1-m}{7-m}$，解得 $m=\frac{11}{5}$.

又 $k_{AB}=\frac{2-0}{1-4}=-\frac{2}{3}$，$k_{AD}=\frac{-1-0}{7-4}=-\frac{1}{3}$，

所以 $k_{AB}\neq k_{AD}$，所以 A，B，C，D 四点不共线.

所以 $m=\frac{11}{5}$.

(2)若 A 为直角，则 $k_{AB}k_{AC}=-1$，即 $\frac{2-0}{1-4}\cdot\frac{m-0}{m-4}=-1$，解得 $m=12$.

若 B 为直角，则 $k_{AB}k_{BC}=-1$，即 $\frac{2-0}{1-4}\cdot\frac{m-2}{m-1}=-1$，解得 $m=-1$.

若 C 为直角，则 $AC\perp BC$，此时直线 AC 与 BC 的斜率都存在，且 $k_{AC}\cdot k_{BC}=-1$，即 $\frac{m-0}{m-4}\cdot\frac{m-2}{m-1}=-1$，解得 $m=\frac{7\pm\sqrt{17}}{4}$.

综上，m 的值为 12 或 -1 或 $\frac{7\pm\sqrt{17}}{4}$.

自我超越

已知 $A(1,2)$，$B(5,0)$，$C(3,4)$.

(1)若以 A，B，C，D 为顶点可以构成平行四边形，求点 D 的坐标；

(2)在(1)的条件下，判断以 A，B，C，D 为顶点构成的平行四边形是否为菱形.

解：(1)由题意得 $k_{AB}=\frac{0-2}{5-1}=-\frac{1}{2}$，$k_{AC}=\frac{4-2}{3-1}=1$，$k_{BC}=\frac{4-0}{3-5}=-2$.

设 $D(a,b)$，

若四边形 $ABCD$ 是平行四边形，则 $k_{CD}=k_{AB}$，$k_{AD}=k_{BC}$，

即 $\begin{cases}\frac{b-4}{a-3}=-\frac{1}{2},\\ \frac{b-2}{a-1}=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=6,\end{cases}$ 即 $D(-1,6)$；

若四边形 $ABDC$ 是平行四边形，则 $k_{CD}=k_{AB}$，$k_{BD}=k_{AC}$，

即 $\begin{cases}\frac{b-4}{a-3}=-\frac{1}{2},\\ \frac{b-0}{a-5}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=7,\\ b=2,\end{cases}$ 即 $D(7,2)$；

若四边形 $ACBD$ 是平行四边形，则 $k_{BD}=k_{AC}$，$k_{AD}=k_{BC}$，

即 $\begin{cases}\frac{b-0}{a-5}=1,\\ \frac{b-2}{a-1}=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\ b=-2,\end{cases}$ 即 $D(3,-2)$.

综上，点 D 的坐标为$(-1,6)$或$(7,2)$或$(3,-2)$.

(2)若点 D 的坐标为$(-1,6)$，

因为 $k_{AC}=1$，$k_{BD}=\frac{6-0}{-1-5}=-1$，

所以 $k_{AC}\cdot k_{BD}=-1$，所以 $AC\perp BD$，

所以平行四边形 $ABCD$ 为菱形；

若点 D 的坐标为$(7,2)$，

因为 $k_{BC}=-2$，$k_{AD}=\frac{2-2}{7-1}=0$，

所以 $k_{BC}\cdot k_{AD}=0\neq -1$，所以平行四边形 $ABDC$ 不是菱形；

若点 D 的坐标为$(3,-2)$，

因为 $k_{AB}=-\frac{1}{2}$，直线 CD 的斜率不存在，所以平行四边形 $ACBD$ 不是菱形.

因此，平行四边形 $ABCD$ 为菱形，平行四边形 $ABDC$ 和平行四边形 $ACBD$ 不是菱形.

2.2　直线的方程

2.2.1　直线的点斜式方程

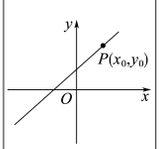
学习任务目标

1.根据确定直线位置的要素，探究直线的点斜式方程.
2.掌握直线的点斜式方程与斜截式方程.
3.了解斜截式方程与一次函数的关系.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　直线的点斜式方程

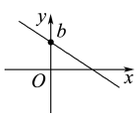
名称	已知条件	示意图	方程	适用范围
点斜式	过点 $P(x_0,y_0)$，斜率为 k		$y-y_0=k(x-x_0)$	斜率存在的直线

知识点二　直线的斜截式方程

(1)直线 l 在 y 轴上的截距

直线 l 与 y 轴的交点$(0,b)$的纵坐标 b 叫做直线 l 在 y 轴上的截距.

(2)直线的斜截式方程

名称	已知条件	示意图	方程	适用范围
斜截式	斜率为 k，直线在 y 轴上的截距为 b		$y=kx+b$	斜率存在的直线

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)直线的点斜式方程 $y-y_0=k(x-x_0)$ 也可写成 $k=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$.　（　×　）

(2)直线 $y-3=k(x+1)$ 恒过定点$(-1,3)$.　（　√　）

(3)直线 $y-2=3(x+1)$ 的斜率是 3.　（　√　）

2.经过点$(-1,1)$，且斜率是直线 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-2$ 的斜率的 2 倍的直线的方程是　（　）

A.$x=-1$　　B.$y=1$

C.$y-1=\sqrt{2}(x+1)$　　D.$y-1=2\sqrt{2}(x+1)$

C　**解析**：由题意知，所求直线的斜率为$\sqrt{2}$，故由直线的点斜式方程知，所求直线方程为 $y-1=\sqrt{2}(x+1)$.

3.思考并回答下列问题：

(1)直线的点斜式方程能否表示坐标平面内的所有直线呢？

提示：不能.斜率存在的直线的方程才能写成点斜式，斜率不存在的直线，其方程都不能写成点斜式.

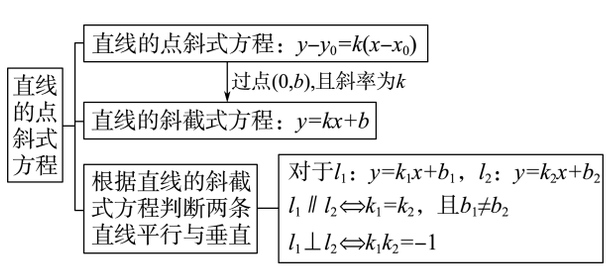
(2)已知直线 $l_1:y=k_1x+b_1$，$l_2:y=k_2x+b_2$，若 $l_1/\!/l_2$，k_1，b_1，k_2，b_2 应满足什么条件？若$l_1\perp l_2$，k_1，b_1，k_2，b_2 应满足什么条件？

提示：若 $l_1/\!/l_2$，则 $k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$；若 $l_1\perp l_2$，则 $k_1\cdot k_2=-1$.

(3)一次函数的解析式 $y=kx+b$ 与直线的斜截式方程 $y=kx+b$ 有什么不同？

提示：一次函数的解析式 $y=kx+b$ 中 x 的系数 $k\neq0$，否则就不是一次函数，而直线的斜截式方程 $y=kx+b$ 中的 k 可以是 0.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 直线的点斜式方程

探究活动

例1　求满足下列条件的直线的点斜式方程：

(1)过点 $P(-4,3)$，斜率 $k=-3$；

(2)过点 $P(3,-4)$，且与 x 轴平行；

(3)过 $P(-2,3)$，$Q(5,-4)$两点.

解：(1)由直线过点 $P(-4,3)$，斜率 $k=-3$，

得直线的点斜式方程为 $y-3=-3(x+4)$.

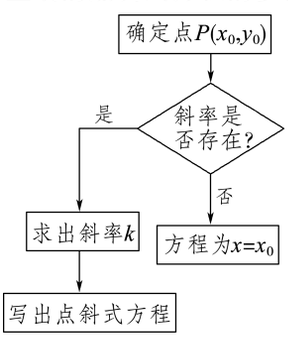
(2)与 x 轴平行的直线，其斜率 $k=0$，可得直线的点斜式方程为 $y-(-4)=0\times(x-3)$，即 $y+4=0$.

(3)过点 $P(-2,3)$，$Q(5,-4)$的直线的斜率 $k_{PQ}=\dfrac{-4-3}{5-(-2)}=\dfrac{-7}{7}=-1$，

又因为直线过点 $P(-2,3)$，所以直线的点斜式方程为 $y-3=-(x+2)$.

【探究总结】

求直线的点斜式方程的步骤



应用迁移

1.(教材 P61 练习题 1(1)改编)已知直线 l 过点(4,5)，且一个方向向量为(−1,2)，则直线 l 的方程为（　　）

A. $y-5=-\dfrac{1}{2}(x-4)$

B. $y-5=\dfrac{1}{2}(x-4)$

C. $y-5=-2(x-4)$

D. $y-5=2(x-4)$

C　**解析**：由题意得 $k_l=\dfrac{2}{-1}=-2$，又直线 l 过点(4,5)，代入点斜式方程得 $y-5=-2(x-4)$.

2.已知直线 l 过点 $P(2,-3)$，且与过点 $M(-1,2)$，$N(3,10)$的直线垂直.求直线 l 的点斜式方程.

解：直线 MN 的斜率 $k=\dfrac{10-2}{3-(-1)}=2$，

因为直线 l 垂直于直线 MN，所以直线 l 的斜率为 $-\dfrac{1}{2}$.

又直线 l 过点 $P(2,-3)$，所以直线 l 的方程为 $y+3=-\dfrac{1}{2}(x-2)$.

任务2 直线的斜截式方程

探究活动

例2　已知直线 l_1 的方程为 $y=-2x+3$，l_2 的方程为 $y=4x-2$，直线 l 与 l_1 垂直，且与 l_2 在 y 轴上的截距互为相反数.求直线 l 的斜截式方程.

解：因为 $l_1\perp l$，直线 l_1：$y=-2x+3$，

所以 l 的斜率为 $\dfrac{1}{2}$.

因为 l 与 l_2 在 y 轴上的截距互为相反数，

直线 l_2 的方程为 $y=4x-2$，所以 l 在 y 轴上的截距为 2，

所以直线 l 的斜截式方程为 $y=\dfrac{1}{2}x+2$.

[一题多思]

思考1.截距是距离吗？

提示：截距不是距离，截距是一个实数，它是直线与坐标轴交点的横坐标或纵坐标，可以为正数、负数或0.当直线过原点时，它在 x 轴上的截距和在 y 轴上的截距都为 0.

思考2.已知直线 l_1 的方程为 $y=-2x+3$，l_2 的方程为 $y=4x-2$，直线 l 与 l_1 平行，且与 l_2 在 y 轴上的截距相同，求直线 l 的斜截式方程.

解：由直线的方程为 $y=-2x+3$ 知，直线 l_1 的斜率 $k_1=-2$，

因为 $l\parallel l_1$，所以 $k_l=-2$.

l_2 在 y 轴上的截距为 −2，

所以直线 l 在 y 轴上的截距也为 −2.

故直线 l 的斜截式方程为 $y=-2x-2$.

【探究总结】

求直线的斜截式方程的相关知识点

(1)先求参数 k 和 b，再写出斜截式方程；

(2)斜率既可以是已知的，又可以利用倾斜角求出，还可以利用平行、垂直关系求出；

(3)b 是直线在 y 轴上的截距，即直线与 y 轴交点的纵坐标，不是交点到原点的距离.

应用迁移

1.求倾斜角是直线 $y=-\sqrt{3}x+1$ 的倾斜角的 $\dfrac{1}{4}$，且分别满足下列条件的直线方程：

(1)经过点 $(\sqrt{3},-1)$；

(2)在 y 轴上的截距是 -5.

解:因为直线 $y=-\sqrt{3}x+1$ 的斜率 $k=-\sqrt{3}$,所以其倾斜角 $\alpha=120°$.

由题意,得所求直线的倾斜角 $\alpha_1=\frac{1}{4}\alpha=30°$,

故所求直线的斜率 $k_1=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(1)因为所求直线经过点 $(\sqrt{3},-1)$,斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以所求直线方程是 $y+1=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-\sqrt{3})$.

(2)因为所求直线的斜率是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,在 y 轴上的截距为 -5,

所以所求直线的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-5$.

2.已知直线 l 的斜率为 $\frac{1}{6}$,且和两坐标轴围成的三角形面积为 3,求直线 l 的斜截式方程.

解:设直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{6}x+b$,则 $x=0$ 时,$y=b$;

$y=0$ 时,$x=-6b$.

由已知,可得 $\frac{1}{2}\cdot|b|\cdot|-6b|=3$,

即 $6|b|^2=6$,所以 $b=\pm1$.

故直线 l 的斜截式方程为 $y=\frac{1}{6}x+1$ 或 $y=\frac{1}{6}x-1$.

任务3 直线的点斜式、斜截式方程的综合应用

探究活动

例 3　观察下列各组直线的方程:

①$l_1:y=2x+1$,$l_2:y=2x-1$;

②$l_1:y=2x+1$,$l_2:y=2x+1$;

③$l_1:y=2x+1$,$l_2:y=-\frac{1}{2}x+1$.

(1)①②中的两条直线分别有怎样的位置关系?

(2)③中的两条直线有怎样的位置关系?

解:(1)①中两直线平行,②中两直线重合.

(2)垂直.

【探究总结】

已知两条直线的斜截式方程,判断两条直线的位置关系的方法

设直线 l_1 的方程为 $y=k_1x+b_1$,直线 l_2 的方程为 $y=k_2x+b_2$.

(1)$l_1\parallel l_2\Leftrightarrow k_1=k_2$,且 $b_1\neq b_2$;

(2)l_1 与 l_2 重合$\Leftrightarrow k_1=k_2$,且 $b_1=b_2$;

(3)$l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1\cdot k_2=-1$.

应用迁移

1.(多选)下列说法正确的有　　(　　)

A.直线 $y=ax-2a+3(a\in\mathbf{R})$ 必过定点 $(2,3)$

B.直线 $y+1=2x$ 在 y 轴上的截距为 1

C.直线 $\sqrt{3}y=-x-3$ 的倾斜角为 $150°$

D.已知点 $A(2,-3)$,$B(-3,-2)$,若直线 $l:mx+y-m-1=0$ 与线段 AB 相交,则 $m\leqslant\frac{3}{4}$ 或 $m\geqslant4$

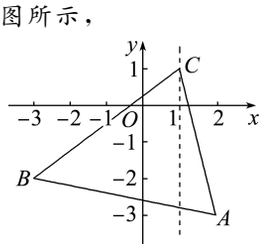
AC　**解析**:选项 A,直线 $y=ax-2a+3=a(x-2)+3$ 过定点 $(2,3)$,故 A 正确;

选项 B,直线 $y+1=2x$,即 $y=2x-1$,纵截距为 -1,故 B 错误;

选项 C,直线 $\sqrt{3}y=-x-3$ 的斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以其倾斜角为 $150°$,故 C 正确;

选项 D,直线 $l:mx+y-m-1=0$,即 $m(x-1)+y-1=0$ 过定点 $C(1,1)$,

画出图象如下图所示,



其中 $k_{AC}=\frac{-4}{1}=-4$,$k_{BC}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$,

又直线 l 的斜率为 $-m$,所以 $-m\geqslant\frac{3}{4}$ 或 $-m\leqslant-4$,

解得 $m\leqslant-\frac{3}{4}$ 或 $m\geqslant4$,故 D 错误.

故选 AC.

2.(1)当 a 为何值时,直线 $l_1:y=-x+2a$ 与直线 $l_2:y=(a^2-2)x+2$ 平行?

(2)当 a 为何值时,直线 $l_1:y=(2a-1)x+3$ 与直线 $l_2:y=4x-3$ 垂直?

解:(1)由题意可知,$k_{l_1}=-1$,$k_{l_2}=a^2-2$,因为 $l_1\parallel l_2$,

所以 $\begin{cases}a^2-2=-1,\\2a\neq2,\end{cases}$ 解得 $a=-1$.

故当 $a=-1$ 时,直线 $l_1:y=-x+2a$ 与直线 $l_2:y=(a^2-2)x+2$ 平行.

(2)由题意可知,$k_{l_1}=2a-1$,$k_{l_2}=4$,因为 $l_1\perp l_2$,

所以 $4(2a-1)=-1$,解得 $a=\frac{3}{8}$.

故当 $a=\frac{3}{8}$ 时,直线 $l_1:y=(2a-1)x+3$ 与直线 $l_2:y=4x-3$ 垂直.

课后素养评价(十四)

基础落实

1.已知直线的方程是 $y+2=-x-1$,则　　(　　)

A.直线经过点$(-1,2)$,斜率为-1

B.直线经过点$(-1,2)$,斜率为 1

C.直线经过点$(-1,-2)$,斜率为-1

D.直线经过点$(-1,-2)$,斜率为 1

C　**解析**:方程 $y+2=-x-1$ 可写成 $y+2=-(x+1)$,根据点斜式方程的定义可知,该直线的斜率为-1,过点$(-1,-2)$.

2.已知直线 l_1 的倾斜角与 $l_2:y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 的倾斜角互余,则 l_1 的倾斜角为　　(　　)

A.$\frac{\pi}{6}$　　B.$\frac{\pi}{3}$　　C.$\frac{5\pi}{6}$　　D.$\frac{2\pi}{3}$

B　**解析**:因为直线 $l_2:y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 的斜率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$,倾斜角为$\frac{\pi}{6}$,

又直线 l_1 的倾斜角与 $l_2:y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 的倾斜角互余,所以 l_1 的倾斜角为$\frac{\pi}{3}$.

3.与直线 $y=-\frac{3}{2}x$ 的斜率相等,且过点$(4,-3)$的直线的方程为　　(　　)

A.$y-3=-\frac{3}{2}(x+4)$

B.$y+3=\frac{3}{2}(x-4)$

C.$y-3=\frac{3}{2}(x+4)$

D.$y+3=-\frac{3}{2}(x-4)$

D　**解析**:依题意,所求直线的斜率为$-\frac{3}{2}$,所以直线方程为 $y+3=-\frac{3}{2}(x-4)$.

4.已知直线 $y=ax-2$ 和 $y=(2-a)x+1$ 互相平行,则 a 的值为　　(　　)

A.2　　B.1

C.0　　D.-1

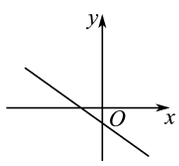
B　**解析**:由 $a=2-a$,得 $a=1$.经检验符合条件.

5.若直线 $y=kx+b$ 经过第二、三、四象限,则斜率 k 和在 y 轴上的截距 b 满足的条件为　　(　　)

A.$k>0,b>0$　　B.$k<0,b<0$

C.$k>0,b<0$　　D.$k<0,b>0$

B　**解析**:直线 $y=kx+b$ 经过第二、三、四象限,如图所示,由图可知 $k<0,b<0$.



6.已知直线 l 经过点 $P(\sqrt{2},1)$,且倾斜角等于直线 $y=-\sqrt{3}x+3$ 的倾斜角的一半,则直线 l 的点斜式方程为_____.

$y-1=\sqrt{3}(x-\sqrt{2})$　**解析**:设直线 $y=-\sqrt{3}x+3$ 的倾斜角为 θ_1,则斜率 $k_1=\tan\theta_1=-\sqrt{3}$.又 $0\leqslant\theta_1<\pi$,故 $\theta_1=\frac{2\pi}{3}$.

设直线 l 的倾斜角为 θ,则 $\theta=\frac{\theta_1}{2}=\frac{\pi}{3}$,

所以直线 l 的斜率 $k=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

又直线 l 经过点 $P(\sqrt{2},1)$,

所以直线 l 的点斜式方程为 $y-1=\sqrt{3}(x-\sqrt{2})$.

7.若直线 $y=x+1$ 绕点 $P(3,4)$ 逆时针旋转 $90°$ 后得到直线 l,则直线 l 的点斜式方程为_____.

$y-4=-(x-3)$　**解析**:由题意可知两直线互相垂直,所以直线 l 的斜率为-1.

又直线 l 过点 $P(3,4)$,所以直线 l 的点斜式方程为 $y-4=-(x-3)$.

8.已知 $A(3,4)$,$B(-1,0)$,则过线段 AB 的中点且倾斜角为$120°$的直线的点斜式方程是_____.

$y-2=-\sqrt{3}(x-1)$　**解析**:设线段 AB 的中点为 M,则 $M(1,2)$.

又所求直线的斜率 $k=\tan 120°=-\sqrt{3}$,

所以所求直线的点斜式方程为 $y-2=-\sqrt{3}(x-1)$.

9.经过点$(1,1)$,与直线 $y=2x+7$ 平行的直线的斜截

式方程为_____；与直线 $y=x-1$ 垂直的直线的点斜式方程为_____.

$y=2x-1$　$y-1=-(x-1)$　**解析**：设直线 $y=2x+7$ 的斜率为 k_1，

与直线 $y=2x+7$ 平行的直线的斜率为 k_2，

与直线 $y=x-1$ 垂直的直线的斜率为 k_3.

由 $y=2x+7$ 得 $k_1=2$，

由两直线平行知 $k_2=2$，

所以与直线 $y=2x+7$ 平行的直线的斜截式方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $y=2x-1$.

由两直线垂直知 $k_3=-1$，

所以与直线 $y=x-1$ 垂直的直线的点斜式方程为 $y-1=-(x-1)$.

能力提升

1.（多选）下列说法正确的有　（　）

A.若直线 $y=kx+b$ 经过第一、二、四象限，则点 (k,b) 在第二象限

B.直线 $y=ax-3a+2$ 过定点 $(3,2)$

C.过点 $(2,-1)$ 且斜率为 $-\sqrt{3}$ 的直线的点斜式方程为 $y+1=-\sqrt{3}(x-2)$

D.斜率为 -2，在 y 轴上的截距为 3 的直线的方程为 $y=-2x\pm3$

ABC　**解析**：在 A 中，若直线 $y=kx+b$ 经过第一、二、四象限，则 $k<0,b>0$，所以 (k,b) 在第二象限，故 A 正确.在 B 中，直线可化为 $y-2=a(x-3)$，所以直线过定点 $(3,2)$，故 B 正确.在 C 中，根据点斜式方程知 C 正确.在 D 中，所求斜截式方程为 $y=-2x+3$，故 D 错误.

2.已知过点 $A(-2,m)$ 和点 $B(m,4)$ 的直线与直线 $2x+y=1$ 平行，则 m 的值为　（　）

A.0　　B.-8　　C.2　　D.10

B　**解析**：已知直线 $2x+y=1$ 的斜率为 -2，

所以 $\dfrac{4-m}{m+2}=-2$，解得 $m=-8$.

经检验，$m=-8$ 时两直线不重合，符合题意.

3.已知直线 $l_1:y=x-1$ 绕点 $(0,-1)$ 按逆时针方向旋转 $\dfrac{5}{12}\pi$ 得到直线 l_2，则 l_2 不过　（　）

A.第四象限　　B.第三象限

C.第二象限　　D.第一象限

D　**解析**：直线 $l_1:y=x-1$，其斜率 $k_1=1$，设其倾斜角为 α_1，可得 $\tan\alpha_1=1$.又因为倾斜角 $\alpha_1\in[0,\pi)$，所以 $\alpha_1=\dfrac{\pi}{4}$.

因为直线 l_1 绕点 $(0,-1)$ 按逆时针方向旋转 $\dfrac{5}{12}\pi$，

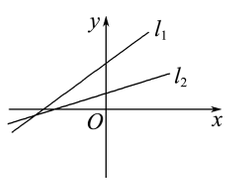
则直线 l_2 的倾斜角 $\alpha_2=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{5}{12}\pi=\dfrac{2\pi}{3}$，

所以直线 l_2 的斜率 $k_2=\tan\alpha_2=\tan\dfrac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

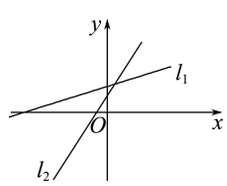
因为直线 l_2 过点 $(0,-1)$，根据直线的点斜式方程，可得直线 l_2 的方程为 $y+1=-\sqrt{3}x$，即 $y=-\sqrt{3}x-1$.

因为直线 $y=-\sqrt{3}x-1$ 的斜率为负，在 y 轴上的截距为负，所以直线 l_2 不过第一象限.

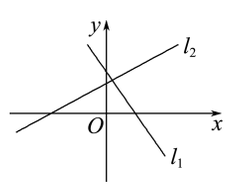
4.直线 $l_1:ax-y+b=0$ 与 $l_2:bx-y+a=0$（其中 $a\neq0,b\neq0,a\neq b$）在同一平面直角坐标系中的位置可能为　（　）



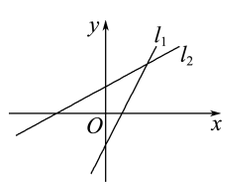
A



B



C



D

B　**解析**：直线 $l_1:ax-y+b=0$，即 $y=ax+b$，斜率为 $k_{l_1}=a$ 且与 y 轴交于点 $(0,b)$，

直线 $l_2:bx-y+a=0$，即 $y=bx+a$，斜率为 $k_{l_2}=b$ 且与 y 轴交于点 $(0,a)$.

对于 A，直线 l_1 中 $a>0,b>0$，直线 l_2 中 $a>0,b>0$，且 $b>a$，则 $k_{l_2}>k_{l_1}$，所以 l_2 的倾斜角大于 l_1 的倾斜角，不符合题意，故 A 错误；

对于 B，直线 l_1 中 $a>0,b>0$，直线 l_2 中 $a>0,b>0$，且 $b>a$，则 $k_{l_2}>k_{l_1}$，所以 l_2 的倾斜角大于 l_1 的倾斜角，符合题意，故 B 正确；

对于 C，直线 l_1 中 $a<0,b>0$，直线 l_2 中 $a>0,b>0$，矛盾，故 C 错误；

对于 D，直线 l_1 中 $a>0,b<0$，直线 l_2 中 $a>0,b>0$，矛盾，故 D 错误.故选 B.

5.已知一条直线经过点 $A(2,-\sqrt{3})$，且它的倾斜角等于直线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ 的倾斜角的2倍，则这条直线的点

斜式方程是_____.

$y-(-\sqrt{3})=\sqrt{3}(x-2)$　**解析**：因为直线 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ 的倾斜角为 30°，所以所求直线的倾斜角为 60°，

即斜率 $k=\tan 60°=\sqrt{3}$.

又该直线过点 $A(2,-\sqrt{3})$，

故所求直线的点斜式方程为 $y-(-\sqrt{3})=\sqrt{3}(x-2)$.

6. 与直线 $2x+3y+5=0$ 平行，且与 x 轴、y 轴交点的横、纵坐标之和为 $\frac{5}{6}$ 的直线 l 的方程为_____.

$y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$　**解析**：由题意知，直线 l 的斜率为 $-\frac{2}{3}$，设其方程为 $y=-\frac{2}{3}x+b$，分别令 $x=0$，$y=0$，得直线 l 在 y，x 轴上的截距分别为 b，$\frac{3}{2}b$，

则 $b+\frac{3}{2}b=\frac{5}{6}$，解得 $b=\frac{1}{3}$，

故直线 l 的方程为 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$.

7. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(-5,0)$，$B(1,-3)$，$C(0,2)$，边 AC，BC 的中点分别是 E，F.

(1)求 EF 所在直线的点斜式方程；

(2)求边 AB 上的高所在直线的斜截式方程.

解：(1)因为 $A(-5,0)$，$B(1,-3)$，$C(0,2)$，边 AC，BC 的中点分别是 E，F，

所以 $E\left(-\frac{5}{2},1\right)$，$F\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，

所以 $k_{EF}=\frac{1+\frac{1}{2}}{-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$，

所以 EF 所在直线的点斜式方程为 $y-1=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{2}\right)$.

(2)设边 AB 上的高所在的直线为 l_h.

因为 $k_{l_h}\cdot k_{AB}=-1$，$k_{AB}=\frac{0-(-3)}{-5-1}=-\frac{1}{2}$，

所以 $k_{l_h}=2$.

又因为直线 l_h 过点 $C(0,2)$，

所以直线 l_h 的方程为 $y-2=2(x-0)$，即 $y=2x+2$.

所以边 AB 上的高所在直线的斜截式方程为 $y=2x+2$.

8. 已知直线 l 的斜率为 -1，且它与两坐标轴围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2}$.求直线 l 的方程.

解：设直线 l 的方程为 $y=-x+b$，

则它与两个坐标轴的交点分别为 $A(b,0)$ 和 $B(0,b)$，

所以直线与坐标轴所围成的直角三角形的两条直角边长都为 $|b|$，故其面积为 $\frac{1}{2}b^2$.

由 $\frac{1}{2}b^2=\frac{1}{2}$，解得 $b=\pm1$，

故所求直线 l 的方程为 $y=-x+1$ 或 $y=-x-1$.

自我超越

已知直线 l 经过点 $P(-1,2)$.

(1)若直线 l 在两条坐标轴上的截距之和为 0，求 l 的点斜式方程；

(2)设 l 的斜率 $k>0$，l 与 x 轴、y 轴的交点分别为 A，B，则当 $\triangle AOB$（O 为原点）的面积最小时，求 l 的斜截式方程.

解：(1)由题意知，l 的斜率存在且不为 0，设斜率为 k，则 l 的点斜式方程为 $y-2=k(x+1)$，则它在两坐标轴上的截距分别为 $-1-\frac{2}{k}$ 和 $k+2$，

所以 $-1-\frac{2}{k}+k+2=0$，解得 $k=-2$ 或 $k=1$，

所以 l 的点斜式方程为 $y-2=-2(x+1)$ 或 $y-2=x+1$.

(2)由(1)知，$A\left(-\frac{2}{k}-1,0\right)$，$B(0,k+2)$，

所以 $\triangle AOB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\left|-\frac{2}{k}-1\right|\cdot|k+2|=\frac{(k+2)^2}{2k}=\frac{k}{2}+2+\frac{2}{k}\geqslant 2\sqrt{\frac{k}{2}\cdot\frac{2}{k}}+2=4$，

当且仅当 $k=2$ 时，等号成立，所以 l 的斜截式方程为 $y=2x+4$.

2.2.2　直线的两点式方程

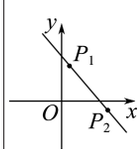
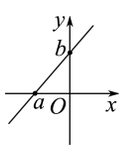
学习任务目标

1.掌握直线两点式方程的形式特点及适用范围.
2.了解直线截距式方程的形式特点及适用范围.
3.根据确定直线位置的几何要素，探索并掌握直线的两点式和截距式方程.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点　直线的两点式、截距式方程

名称	已知条件	示意图	方程	适用范围
两点式	经过两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，其中 $x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$		$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$	斜率存在且不为0
截距式	在 x 轴、y 轴上的截距分别为 a，b，且 $a\neq 0$，$b\neq 0$		$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	斜率存在且不为0，不过原点

【概念辨析】

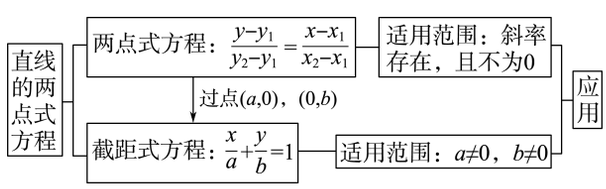
1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.
(1)能用两点式方程表示的直线也可用点斜式方程表示.　（　√　）
(2)方程 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ 和方程 $(y-y_1)\cdot(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1)$ 的适用范围相同.（　×　）
(3)过点(1,3)和(1,5)的直线可以用两点式方程来表示.　（　×　）
(4)所有的直线都可以用两点式方程表示.　（　×　）

2.直线 $\frac{x}{4}-\frac{y}{5}=1$ 在两条坐标轴上的截距之和为_____.

−1　**解析**：由方程知，直线 $\frac{x}{4}-\frac{y}{5}=1$ 在 x 轴上的截距为4，在 y 轴上的截距为 -5，故 $4+(-5)=-1$.

3.思考并回答下列问题：
(1)若已知直线的斜率，且直线过一定点，选择哪种形式的方程较好？若已知直线过两个定点呢？
提示：点斜式.若直线过两点可选择两点式或点斜式.
(2)若已知直线的斜率，可选择哪种形式的方程？
提示：可选择斜截式或点斜式.
(3)若已知直线与两坐标轴的交点，选择哪种形式的方程较好？
提示：选择截距式较好.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1　直线的两点式方程

探究活动

例1　(1)直线 l 经过 $P_1(1,2)$，$P_2(3,5)$ 两点，求直线 l 的方程；
(2)已知直线 l 在 y 轴上的截距是 -3，且经过点 $(-2,1)$，求直线 l 的方程.

解：(1)由题意，可得 $\frac{y-2}{5-2}=\frac{x-1}{3-1}$，
即 $y-2=\frac{3}{2}(x-1)$，整理，可得 $3x-2y+1=0$.
(2)由题易知，直线 l 过点 $(0,-3)$，所以直线 l 的方程为 $\frac{y-(-3)}{1-(-3)}=\frac{x-0}{-2-0}$，即 $2x+y+3=0$.

【探究总结】

利用两点式求直线的方程的注意点

当已知两点的坐标，求过这两点的直线的方程时，要先判断是否满足两点式方程的适用条件：两点的连线不平行于坐标轴.若满足，则运用两点式方程.

应用迁移

1.若点 $P(3,m)$ 在过点 $A(2,-1)$，$B(-3,4)$ 的直线

上，则 $m=$_____.

-2　**解析**：将 $A(2,-1)$，$B(-3,4)$ 代入两点式，得 $\frac{y-(-1)}{4-(-1)}=\frac{x-2}{-3-2}$，即 $\frac{y+1}{5}=\frac{x-2}{-5}$，所以直线 AB 的方程为 $y+1=-x+2$.

因为点 $P(3,m)$ 在直线 AB 上，

所以 $m+1=-3+2$，得 $m=-2$.

2. 在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(1,3)$，$B(5,1)$，$C(-1,-1)$.

(1)边 BC 上的中线 AD 所在直线的方程为_____；

(2)边 AC 上的高 BH 所在直线的方程为_____.

(1)$3x+y-6=0$　(2)$x+2y-7=0$　**解析**：(1)边 BC 的中点 D 的坐标为 $(2,0)$，所以直线 AD 的方程为 $\frac{y-3}{0-3}=\frac{x-1}{2-1}$，即 $3x+y-6=0$.

(2)因为 $k_{AC}=\frac{3-(-1)}{1-(-1)}=2$，$BH\perp AC$，所以 $k_{BH}=-\frac{1}{2}$，所以直线 BH 的方程为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-5)$，即 $x+2y-7=0$.

任务2 直线的截距式方程

探究活动

例2　已知直线 l 经过点 $P(4,3)$，且在两条坐标轴上的截距相等，求直线 l 的方程.

解：(方法一)当直线 l 过原点时，它在两条坐标轴上的截距都是 0.

设直线 l 的方程为 $y=kx$.

因为直线 l 过点 $P(4,3)$，

所以 $3=4k$，故 $k=\frac{3}{4}$.

所以直线 l 的方程为 $y=\frac{3}{4}x$，即 $3x-4y=0$.

当直线 l 不过原点时，设直线 l 的截距式方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1(a\neq0)$.

又因为直线 l 过点 $P(4,3)$，所以 $\frac{4}{a}+\frac{3}{a}=1$，所以 $a=7$.

所以直线 l 的方程为 $\frac{x}{7}+\frac{y}{7}=1$，即 $x+y-7=0$.

综上可知，直线 l 的方程为 $3x-4y=0$ 或 $x+y-7=0$.

(方法二)由题意可知，直线 l 的斜率存在且不为 0，设直线 l 的斜率为 $k(k\neq0)$，则有 $y-3=k(x-4)$.

令 $x=0$，得 $y=3-4k$；令 $y=0$，得 $x=4-\frac{3}{k}$.

由直线 l 在两坐标轴上的截距相等，得 $3-4k=4-\frac{3}{k}$，解得 $k=-1$ 或 $k=\frac{3}{4}$，

所以直线 l 的方程为 $y-3=-(x-4)$ 或 $y-3=\frac{3}{4}(x-4)$，

即直线 l 的方程为 $x+y-7=0$ 或 $3x-4y=0$.

[一题多思]

思考1. 已知直线 l 经过点 $P(4,3)$，且在两条坐标轴上的截距互为相反数，求直线 l 的方程.

解：当直线 l 经过原点时，横、纵截距都为 0，设直线 l 的方程为 $y=kx$，因为直线 l 过点 $P(4,3)$，所以 $3=4k$，解得 $k=\frac{3}{4}$，所以直线 l 的方程为 $y=\frac{3}{4}x$，即 $3x-4y=0$.

当直线 l 不经过原点时，设直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1(a\neq0)$.

因为直线 l 过点 $P(4,3)$，所以 $\frac{4}{a}+\frac{3}{-a}=1$，得 $a=4-3=1$.

所以直线 l 的方程为 $x-y-1=0$.

综上，所求直线 l 的方程为 $3x-4y=0$ 或 $x-y-1=0$.

思考2. 已知直线 l 经过点 $P(4,3)$，且直线 l 与两条坐标轴围成的三角形的面积为 $\frac{49}{2}$，求直线 l 的方程.

解：设直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a,b\neq0)$，则

$$\begin{cases}\frac{4}{a}+\frac{3}{b}=1,\\ \frac{1}{2}|a||b|=\frac{49}{2},\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=7,\\ b=7\end{cases}\text{或}\begin{cases}a=\frac{28}{3},\\ b=\frac{21}{4},\end{cases}$$

所以直线 l 的方程为 $x+y-7=0$ 或 $9x+16y-84=0$.

【探究总结】

利用截距式求直线的方程的策略

(1)如果问题中涉及直线与坐标轴相交，那么求直线方程时可以考虑选用截距式，用待定系数法确定其系数即可；

(2)若求直线方程时选用截距式，则需考虑直线是否过原点以及是否与坐标轴垂直.如果题目中出现直线在两条坐标轴上的“截距相等”“截距互为相反数”等条件，那么求直线方程时，要考虑截距为 0 的情况.

应用迁移

经过点 $(1,2)$，且在 x 轴和 y 轴上截距相等的直线方程是　(　　)

A.$x+y-3=0$

B.$x+y-3=0$ 或 $2x-y=0$

C.$x-y+1=0$

D.$x-y+1=0$ 或 $2x-y=0$

B　**解析**：当直线在 x 轴和 y 轴上截距都为 0 时，设直线方程为 $y=kx$，将(1,2)代入直线方程，解得 $k=2$，此时直线方程为 $2x-y=0$；

当直线在 x 轴和 y 轴上截距相等且不为 0 时，设直线方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$，将(1,2)代入直线方程，解得 $a=3$，此时直线方程为 $x+y-3=0$.

所以满足题意的直线方程为 $x+y-3=0$ 或 $2x-y=0$.

任务3 直线方程形式的灵活应用

探究活动

例3　已知直线 l 过定点 $A(-2,3)$，且与两条坐标轴围成的三角形的面积为 4，求直线 l 的方程.

解：(方法一)由题意可知，直线 l 在两坐标轴上的截距均不为 0，可设所求直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

因为点 $A(-2,3)$ 在直线 l 上，所以 $\frac{-2}{a}+\frac{3}{b}=1$.①

因为直线 l 与两坐标轴围成的三角形的面积为 4，

所以 $\frac{1}{2}|a||b|=4$.②

由①②，可得 $\begin{cases}-2b+3a=8,\\ ab=8,\end{cases}$ ③ 或 $\begin{cases}-2b+3a=-8,\\ ab=-8.\end{cases}$ ④

由③，得 $\begin{cases}a=-\frac{4}{3},\\ b=-6,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=4,\\ b=2,\end{cases}$

④无解，

故所求直线 l 的方程为 $9x+2y+12=0$ 或 $x+2y-4=0$.

(方法二)显然，直线 l 不垂直于坐标轴.

设直线 l 的方程为 $y-3=k(x+2)(k\neq 0)$.

令 $x=0$，得 $y=2k+3$；

令 $y=0$，得 $x=-\frac{3}{k}-2$.

所以直线 l 在 x 轴、y 轴上的截距分别为 $-\frac{3}{k}-2$ 和 $2k+3$.

由题意，得 $\frac{1}{2}|2k+3|\cdot\left|-\frac{3}{k}-2\right|=4$，

则 $(2k+3)\left(\frac{3}{k}+2\right)=8$ 或 $(2k+3)\left(\frac{3}{k}+2\right)=-8$.

若 $(2k+3)\left(\frac{3}{k}+2\right)=8$，则方程无解.

若 $(2k+3)\left(\frac{3}{k}+2\right)=-8$，解得 $k_1=-\frac{1}{2}$，$k_2=-\frac{9}{2}$.

所以直线 l 的方程为 $x+2y-4=0$ 或 $9x+2y+12=0$.

【探究总结】

直线方程的灵活应用

直线方程的应用涉及图形的周长、面积、对称性等.解题时，首先要明确直线方程，然后从不同的角度，分别对直线的斜率、截距等进行分析，注意解题规范.

应用迁移

已知直线 l 与两条坐标轴在第一象限所围成的三角形的面积为 2，两个截距之差的绝对值为 3，求直线 l 的方程.

解：设直线 l 与两坐标轴的交点分别为 $(a,0)$，$(0,b)$，且 $a>0$，$b>0$，

由题意可得 $\begin{cases}S=\frac{1}{2}ab=2,\\ |a-b|=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\ b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1,\\ b=4,\end{cases}$

所以直线 l 的方程为 $\frac{x}{4}+y=1$ 或 $x+\frac{y}{4}=1$.

课后素养评价(十五)

基础落实

1.已知直线 l 经过点 $A(1,-2)$，$B(-3,2)$，则直线 l 的方程为　(　A　)

A.$x+y+1=0$　　B.$x-y+1=0$

C.$x+2y+1=0$　　D.$x+2y-1=0$

2.已知点 $A(m,5)$，$B(3,n)$，若 AB 的中点坐标为(2,1)，则直线 AB 的方程为　(　　)

A.$x+4y-9=0$　　B.$x+4y+9=0$

C.$4x+y+9=0$　　D.$4x+y-9=0$

D　**解析**：由题意可得 $\begin{cases}\frac{m+3}{2}=2,\\ \frac{5+n}{2}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=1,\\ n=-3,\end{cases}$

即 $A(1,5)$，$B(3,-3)$.

将点 A，B 的坐标代入两点式方程，可得 $\frac{y-5}{-3-5}$

$=\frac{x-1}{3-1}$，

即 $4x+y-9=0$.

故选 D.

3. 若过点 $A(1,4)$ 的直线在两条坐标轴上的截距之和为 0，则该直线的方程为（　　）

A. $x-y+3=0$

B. $x+y-5=0$

C. $4x-y=0$ 或 $x+y-5=0$

D. $4x-y=0$ 或 $x-y+3=0$

D　**解析**：当直线过原点时在两坐标轴上的截距都为 0，满足题意，

又因为直线过点 $A(1,4)$，所以直线的斜率为 $\frac{4-0}{1-0}=4$，

所以直线方程为 $y=4x$，即 $4x-y=0$.

当直线不过原点时，设直线方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$，

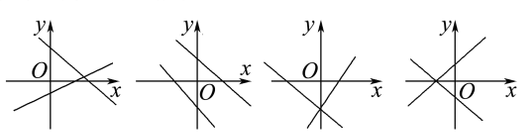
因为点 $A(1,4)$ 在直线上，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{4}{-a}=1$，解得 $a=-3$，

所以直线方程为 $x-y+3=0$.

故所求直线方程为 $4x-y=0$ 或 $x-y+3=0$. 故选 D.

4. 直线 $\frac{x}{m}-\frac{y}{n}=1$ 与 $\frac{x}{n}-\frac{y}{m}=1$ 在同一平面直角坐标系中的位置可能是（　　）



A　　B　　C　　D

B　**解析**：直线 $\frac{x}{m}-\frac{y}{n}=1$ 在两坐标轴上的截距分别为 m，$-n$；直线 $\frac{x}{n}-\frac{y}{m}=1$ 在两坐标轴上的截距分别为 n，$-m$. 所以符合题意为 B.

5. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(1,2)$，$B(3,6)$，$C(5,2)$，M 为 AB 的中点，N 为 AC 的中点，则中位线 MN 所在直线的方程为（　　）

A. $2x+y-8=0$

B. $2x-y+8=0$

C. $2x+y-12=0$

D. $2x-y-12=0$

A　**解析**：由题意可求得点 M 的坐标为 $(2,4)$，点 N 的坐标为 $(3,2)$，由两点式方程得中位线 MN 所在直线的方程为 $\frac{y-2}{4-2}=\frac{x-3}{2-3}$，即 $2x+y-8=0$.

6. 若一束光线从点 $M(3,2)$ 射到 x 轴上，经 x 轴反射后反射光线与 y 轴交于点 $N(0,4)$，则反射光线所在直线的方程为（　　）

A. $x+2y-2=0$

B. $2x+y-4=0$

C. $x+y-4=0$

D. $2x+3y-12=0$

B　**解析**：取点 $M(3,2)$ 关于 x 轴的对称点 $A(3,-2)$，则直线 NA 即为所求直线.

所以反射光线所在直线的方程为 $\frac{y+2}{4+2}=\frac{x-3}{0-3}$，即 $2x+y-4=0$.

7.（多选）下列说法正确的有（　　）

A. 不经过原点的直线都可以表示为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

B. 若直线 l 与 x 轴、y 轴的交点分别为 A，B，且线段 AB 的中点为 $(4,1)$，则直线的方程为 $\frac{x}{8}+\frac{y}{2}=1$

C. 过点 $(1,1)$ 且在两条坐标轴上的截距相等的直线的方程为 $y=x$ 或 $x+y=2$

D. 直线 $3x-2y=4$ 的截距式方程为 $\frac{x}{\frac{4}{3}}+\frac{y}{-2}=1$

BCD　**解析**：A 中，与坐标轴垂直的直线也不能用截距式表示，故 A 错误. B 中，因为线段 AB 的中点为 $(4,1)$，A 点在 x 轴上，B 点在 y 轴上，所以 $A(8,0)$，$B(0,2)$，故所求直线的方程为 $\frac{x}{8}+\frac{y}{2}=1$，故 B 正确. C 中，当直线过原点时，直线方程为 $y=x$，当直线不过原点时，设直线方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1(a\neq 0)$，将点 $(1,1)$ 代入方程并整理得直线方程为 $x+y=2$，故 C 正确. D 中，方程 $3x-2y=4$ 可化为 $\frac{x}{\frac{4}{3}}+\frac{y}{-2}=1$，故 D 正确.

8. 已知点 $A(4,0)$，$B(0,5)$，$P(x,y)$ 为直线 AB 上一动点，则 xy 的最大值是_____.

5　**解析**：由题意可得直线 AB 的方程为 $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$，显然 xy 取得最大值时，$x>0$，$y>0$.

当 $x>0$，$y>0$ 时，$\frac{x}{4}+\frac{y}{5}\geqslant 2\sqrt{\frac{xy}{20}}$，即 $2\sqrt{\frac{xy}{20}}\leqslant 1$，

解得 $xy\leqslant 5$，当且仅当 $x=2$，$y=\frac{5}{2}$ 时取等号.

9. 过点 $P(1,3)$，在 x 轴上的截距和在 y 轴上的截距相等的直线的方程为_____.

$y=3x$ 或 $x+y-4=0$　**解析**：当直线过原点时，直线 $y=3x$ 在 x 轴上的截距和在 y 轴上的截距相等，此时直线方程为 $y=3x$；

当直线不过原点时，设直线方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$，则 $\frac{1}{a}+\frac{3}{a}=1$，解得 $a=4$，此时直线方程为 $x+y-4=0$.

所以所求直线方程为 $y=3x$ 或 $x+y-4=0$.

能力提升

1. 直线 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$ 的一个方向向量是　（　　）

A.$(1,2)$　　B.$(1,-2)$

C.$(-2,1)$　　D.$(-2,-1)$

C　**解析**：直线方程 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$ 可化成斜截式方程 $y=-\frac{1}{2}x+2$，所以直线的斜率为 $-\frac{1}{2}$.

由直线方向向量与斜率的关系，即直线的方向向量为 (x,y)，则斜率为 $\frac{y}{x}$，

所以选项中 $(-2,1)$ 是直线 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$ 的方向向量，故 C 正确.

2. 由曲线 $2|x|+|y|=2$ 围成的图形的面积为　（　　）

A.2　　B.4　　C.5　　D.8

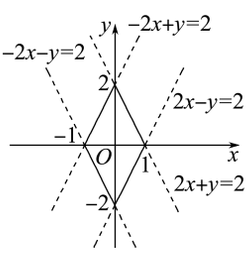
B　**解析**：当 $x\geqslant 0,y\geqslant 0$ 时，曲线方程为 $2x+y=2$；

当 $x\geqslant 0,y<0$ 时，曲线方程为 $2x-y=2$；

当 $x<0,y\geqslant 0$ 时，曲线方程为 $-2x+y=2$；

当 $x<0,y<0$ 时，曲线方程为 $-2x-y=2$.

作图如下，



所以围成的图形是一个菱形，面积为 $\frac{1}{2}\times 2\times 4=4$.

3. 过点 $A(1,4)$ 且在两条坐标轴上的截距的绝对值相等的直线共有_____条.

3　**解析**：一条是截距为 0，一条是截距相等（不为 0），一条是截距互为相反数（不为 0），共 3 条.

4. 已知直线 l 过点 $P(1,2)$，且与 x 轴、y 轴分别交于 $A(a,0),B(0,b)(a>0,b>0)$ 两点，O 为坐标原点，则 $2|OA|+|OB|$ 的最小值为_____.

8　**解析**：因为直线 l 与 x 轴、y 轴分别交于 $A(a,0),B(0,b)(a>0,b>0)$ 两点，

所以可设直线 l 的截距式方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

因为直线 l 过点 $P(1,2)$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$，且 $a>0$，$b>0$，

所以 $2|OA|+|OB|=2a+b=(2a+b)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)=4+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\geqslant 4+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}=8$，

当且仅当 $\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{4a}{b},\\ \frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1,\end{cases}$ 即 $a=2,b=4$ 时，等号成立.

所以 $2|OA|+|OB|$ 的最小值为 8.

5. 已知直线 l 过点 $P(2,1)$，且与 x 轴、y 轴的正半轴分别交于 A,B 两点，O 为坐标原点，则 $\triangle OAB$ 的面积的最小值为_____.

4　**解析**：设 $A(a,0),B(0,b)$，则直线 l 的截距式方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，依题意，$a>0,b>0$. 又因为点 $P(2,1)$ 在直线 l 上，所以 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$，即 $2b+a=ab$.

又因为 $\triangle OAB$ 面积为 $S=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{2}ab$，

所以 $S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}(2b+a)\geqslant\frac{2\sqrt{2ab}}{2}=\sqrt{2ab}$，

当且仅当 $2b=a$ 时，等号成立，

所以 $\frac{1}{2}ab\geqslant\sqrt{2ab}$，得 $ab\geqslant 8$.

所以 $S=\frac{1}{2}ab\geqslant 4$，当且仅当 $2b=a$ 时，S 取最小值 4.

6. 已知直线 l 过点 $A(2,3)$，且与 x 轴的正半轴交于点 M，与 y 轴的正半轴交于点 N.

(1) 若 A 为 MN 的中点，求直线 l 的方程；

(2) 求 $|OM|+2|ON|$ 的最小值.

解：(1) 由题意可设 l 的方程为 $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1(m>0,n>0)$，

由 $A(2,3)$ 为 MN 的中点可知，$|OM|=m=4$，$|ON|=n=6$，

故 l 的方程为 $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$，即 $3x+2y-12=0$.

(2) 设直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>0,b>0)$，将 $(2,3)$ 代入得 $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1$，

故$|OM|+2|ON|=a+2b=(a+2b)\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)=2+6+\frac{4b}{a}+\frac{3a}{b}\geqslant 8+4\sqrt{3}$，

当且仅当$\frac{4b}{a}=\frac{3a}{b}$，即$a=2+2\sqrt{3}$，$b=3+\sqrt{3}$时，等号成立.

故$|OM|+2|ON|$的最小值为$8+4\sqrt{3}$.

7.已知直线l过点$P\left(\frac{4}{3},2\right)$，且与$x$轴、$y$轴的正半轴分别交于$A$，$B$两点，$O$为坐标原点.

(1)当$OA=OB$时，求直线l的方程；

(2)当$\triangle AOB$的面积为6时，求直线l的方程.

解：设直线l的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>0,b>0)$，则$A(a,0)$，$B(0,b)$.

(1)由$|OA|=|OB|$，得$a=b$.

又直线l过点$P\left(\frac{4}{3},2\right)$，得$\frac{4}{3a}+\frac{2}{a}=1$，解得$a=\frac{10}{3}$，$b=\frac{10}{3}$，

所以直线l的方程为$3x+3y-10=0$.

(2)由题意知，$\frac{1}{2}ab=6$，即$ab=12$.又直线l过点$P\left(\frac{4}{3},2\right)$，所以$\frac{4}{3a}+\frac{2}{b}=1$，解得$\begin{cases}a=4,\\b=3\end{cases}$或$\begin{cases}a=2,\\b=6,\end{cases}$

所以直线l的方程为$3x+4y-12=0$或$3x+y-6=0$.

自我超越

过点$\left(\frac{1}{3},1\right)$作直线$l$，则满足在两坐标轴上截距之积为2的直线$l$的条数为（　　）

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

B　**解析**：设直线l的方程为$\frac{x}{a}+\frac{ay}{2}=1(a\neq 0)$，

将点$\left(\frac{1}{3},1\right)$代入，可得$\frac{1}{3a}+\frac{a}{2}=1(a\neq 0)$，

即$3a^2-6a+2=0$.

由于$\Delta=36-4\times 3\times 2=12>0$，

所以方程$3a^2-6a+2=0$有两个不相等的实数根，

故满足题意的直线l的条数为2.

2.2.3　直线的一般式方程

学习任务目标

1.明确直线的一般式方程的形式特征.

2.会把直线的一般式方程化为斜截式方程，进而求斜率和截距.

3.会把直线的点斜式、两点式方程化为一般式方程.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点　直线的一般式方程

(1)关于x，y的二元一次方程都表示一条直线.我们把关于x，y的二元一次方程$Ax+By+C=0$（其中A，B不同时为0）叫做直线的一般式方程，简称一般式.

(2)对于直线$Ax+By+C=0$，当$B\neq 0$时，其斜率为$-\frac{A}{B}$，在y轴上的截距为$-\frac{C}{B}$；当$B=0$，$A\neq 0$时，直线在x轴上的截距为$-\frac{C}{A}$；当$AB\neq 0$时，直线在x轴、y轴上的截距分别为$-\frac{C}{A}$，$-\frac{C}{B}$.

(3)直线的一般式方程的结构特征：

①方程是关于x，y的二元一次方程；

②方程中等号的左侧自左向右一般按x，y，常数的先后顺序排列；

③x的系数一般不为分数和负数；

④虽然直线的一般式方程中有三个参数，但是只需两个独立的条件即可求得直线的方程.

【概念辨析】

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)任何一条直线的一般式方程都能与其他四种形式互化.（　×　）

(2)对于二元一次方程$Ax+By+C=0$，当$A=0$，$B\neq 0$时，方程表示斜率不存在的直线.（　×　）

(3)当A，B同时为0时，方程$Ax+By+C=0$也可以表示一条直线.（　×　）

2.过点$(-3,0)$和$(0,4)$的直线的一般式方程为（　　）

A.$4x+3y+12=0$　　B.$4x+3y-12=0$

C.$4x-3y+12=0$　　D.$4x-3y-12=0$

C　**解析**：由截距式得直线方程为$\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}=1$，整理得$4x-3y+12=0$.

3.思考并回答下列问题：

(1)任何直线的方程都能表示为一般式吗？

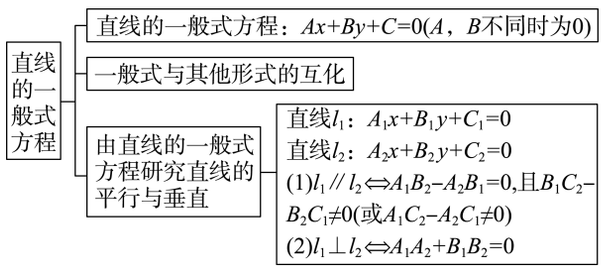
提示：能.因为平面内任意一条直线都可以用一个关于 x，y 的二元一次方程表示.

(2)在方程 $Ax+By+C=0$(A，B 不同时为 0)中，A，B，C 为何值时，方程表示的直线分别满足下列条件：

①平行于 x 轴？②平行于 y 轴？③与 x 轴重合？④与 y 轴重合？

提示：当 $A=0$，$B\neq0$ 时，方程变为 $y=-\frac{C}{B}$，当 $C\neq0$ 时，表示的直线平行于 x 轴，当 $C=0$ 时，表示的直线与 x 轴重合；当 $A\neq0$，$B=0$ 时，方程变为 $x=-\frac{C}{A}$，当 $C\neq0$ 时，表示的直线平行于 y 轴，当 $C=0$ 时，表示的直线与 y 轴重合.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 直线的一般式方程

探究活动

例 1　根据下列条件，分别写出直线的方程，并化为一般式方程：

(1)斜率是 $\sqrt{3}$，且经过点 $A(5,3)$；

(2)斜率为 4，在 y 轴上的截距为 2；

(3)经过 $A(-1,5)$，$B(2,-1)$ 两点；

(4)在 x 轴、y 轴上的截距分别是 -3，-1.

解：(1)由点斜式可得，所求直线的方程为 $y-3=\sqrt{3}(x-5)$，化为一般式为 $\sqrt{3}x-y+3-5\sqrt{3}=0$.

(2)由斜截式可得，所求直线的方程为 $y=4x+2$，化为一般式为 $4x-y+2=0$.

(3)由两点式可得，

所求直线的方程为 $\frac{y-5}{-1-5}=\frac{x-(-1)}{2-(-1)}$，

化为一般式为 $2x+y-3=0$.

(4)由截距式可得，所求直线的方程为 $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-1}=1$，

化为一般式为 $x+3y+3=0$.

【探究总结】

根据已知条件求直线方程的策略

求直线方程时，常用的方法是根据给定条件先用直线方程的四种特殊形式之一求出方程，再化为一般式方程.选用策略如下：

(1)已知直线的斜率和直线上点的坐标时，选用点斜式；

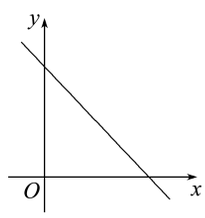
(2)已知直线的斜率和在 y 轴上的截距时，选用斜截式；

(3)已知直线上两点的坐标时，选用两点式；

(4)已知直线在 x 轴、y 轴上的截距时，选用截距式.

应用迁移

1.(多选)已知直线 $ax+by+c=0$ 在平面直角坐标系中的位置如图所示，则下列结论正确的有　(　　)



A.若 $c>0$，则 $a>0$，$b>0$

B.若 $c>0$，则 $a<0$，$b<0$

C.若 $c<0$，则 $a>0$，$b<0$

D.若 $c<0$，则 $a>0$，$b>0$

BD　**解析**：易知 $b\neq0$，由直线 $ax+by+c=0$，可得 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$.

根据题图可得 $-\frac{a}{b}<0$，$-\frac{c}{b}>0$，

所以若 $c<0$，则 $a>0$，$b>0$；若 $c>0$，则 $a<0$，$b<0$.

故选 BD.

2.(教材 P65 例 5 改编)已知直线 l 经过点 $(-1,4)$，且它的一个方向向量为 $\boldsymbol{n}=(-2,4)$，则　(　　)

A.直线 l 的点斜式方程为 $y-4=-\frac{1}{2}(x+1)$

B.直线 l 的斜截式方程为 $x=-\frac{1}{2}y+1$

C.直线 l 的截距式方程为 $x+\frac{y}{2}=1$

D.直线 l 的一般式方程为 $x+2y-7=0$

C　**解析**：因为直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{n}=(-2,4)$，所以直线 l 的斜率 $k=\frac{4}{-2}=-2$.因为直线 l 经过点 $(-1,4)$，所以直线 l 的点斜式方程为 $y-4=-2(x+1)$，斜截式方程为 $y=-2x+2$，截距式方程为 $x+\frac{y}{2}=1$，一般式方程为 $2x+y-2=0$.

任务2 一般式下的直线平行与垂直问题

探究活动

例2　(1)已知直线 $l_1:2x+(m+1)y+4=0$ 与直线 $l_2:mx+3y-2=0$ 平行，试求 m 的值；

(2)当 a 为何值时，直线 $l_1:(a+2)x+(1-a)y-1=0$ 与直线 $l_2:(a-1)x+(2a+3)y+2=0$ 互相垂直？

(1)**解**：(方法一)由 $l_1:2x+(m+1)y+4=0$，$l_2:mx+3y-2=0$ 知，

①当 $m=0$ 时，显然 l_1 与 l_2 不平行；

②当 $m\neq0$ 时，要使 $l_1\parallel l_2$，需 $\frac{2}{m}=\frac{m+1}{3}\neq\frac{4}{-2}$，解得 $m=2$ 或 $m=-3$.

所以 m 的值为 2 或 -3.

(方法二)令 $2\times3=m(m+1)$，解得 $m=-3$ 或 $m=2$.

当 $m=-3$ 时，$l_1:x-y+2=0$，$l_2:3x-3y+2=0$.

显然 l_1 与 l_2 不重合，所以 $l_1\parallel l_2$；

当 $m=2$ 时，$l_1:2x+3y+4=0$，$l_2:2x+3y-2=0$，

显然 l_1 与 l_2 不重合，所以 $l_1\parallel l_2$，

所以 m 的值为 2 或 -3.

(2)**解**：(方法一)由题意知，直线 $l_1\perp l_2$.

①当 $1-a=0$，即 $a=1$ 时，直线 $l_1:3x-1=0$ 与直线 $l_2:5y+2=0$ 显然垂直.

②当 $2a+3=0$，即 $a=-\frac{3}{2}$ 时，直线 $l_1:x+5y-2=0$ 与直线 $l_2:5x-4=0$ 不垂直.

③当 $1-a\neq0$，且 $2a+3\neq0$ 时，直线 l_1，l_2 的斜率 k_1，k_2 都存在，且 $k_1=-\frac{a+2}{1-a}$，$k_2=-\frac{a-1}{2a+3}$.

当 $l_1\perp l_2$ 时，$k_1\cdot k_2=-1$，

即 $\left(-\frac{a+2}{1-a}\right)\cdot\left(-\frac{a-1}{2a+3}\right)=-1$，解得 $a=-1$.

综上可知，当 $a=1$ 或 $a=-1$ 时，直线 $l_1\perp l_2$.

(方法二)由题意知直线 $l_1\perp l_2$，

所以 $(a+2)(a-1)+(1-a)(2a+3)=0$，解得 $a=\pm1$.

将 $a=\pm1$ 代入直线方程，均满足题意，

故当 $a=1$ 或 $a=-1$ 时，直线 $l_1\perp l_2$.

【探究总结】

1.利用一般式解决直线平行与垂直问题的策略

已知直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$，直线 $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$.

(1)$l_1\parallel l_2\Leftrightarrow A_1B_2-A_2B_1=0$ 且 $B_1C_2-B_2C_1\neq0$(或 $A_1C_2-A_2C_1\neq0$)；

(2)$l_1\perp l_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$.

2.与已知直线平行(垂直)的直线的方程

(1)与直线 $Ax+By+C=0$ 平行的直线的方程可设为 $Ax+By+m=0(m\neq C)$；

(2)与直线 $Ax+By+C=0$ 垂直的直线的方程可设为 $Bx-Ay+m=0$.

应用迁移

1.已知直线 $l_1:(a-1)x+y-1=0$，$l_2:(3a-5)x+(a-1)y-2=0$，则 $l_1\parallel l_2$ 的充要条件是　(　　)

A.$a=2$　　B.$a=3$

C.$a=2$ 或 3　　D.$a=4$

A　**解析**：因为 $l_1\parallel l_2$，所以 $(a-1)(a-1)-(3a-5)\times1=0$ 且 $1\times(-2)-(-1)(a-1)\neq0$，解得 $a=2$.

当 $a=2$ 时，直线 $l_1:x+y-1=0$，$l_2:x+y-2=0$，显然 $l_1\parallel l_2$.

所以 $l_1\parallel l_2$ 的充要条件是 $a=2$.

2.已知直线 $l_1:2x+3y+1=0$，$l_2:ax+2y-2=0$，若 $l_1\perp l_2$，则实数 a 的值为　(　　)

A.3　　B.$\frac{1}{3}$

C.-3　　D.$-\frac{1}{3}$

C　**解析**：因为 $l_1\perp l_2$，所以 $2a+3\times2=0$，解得 $a=-3$.

任务3 直线方程的综合应用

探究活动

例3　设直线 l 的方程为 $(a+1)x+y+2-a=0(a\in\mathbf{R})$.

(1)若直线 l 在两条坐标轴上的截距相等，求直线 l 的方程；

(2)若直线 l 不经过第二象限，求实数 a 的取值范围.

解：(1)由题意可知，$a\neq-1$.当直线 l 过原点时，其在 x 轴和 y 轴上的截距均为 0，所以 $2-a=0$，解得 $a=2$，此时直线 l 的方程为 $3x+y=0$；当直线 l 不过原点时，$a\neq2$，由 $\frac{a-2}{a+1}=a-2$，得 $a=0$，此时直线 l 的方程为 $x+y+2=0$.

综上所述，所求直线 l 的方程为 $3x+y=0$ 或 $x+y+2=0$.

(2)将直线 l 的方程化为 $y=-(a+1)x+a-2$.

要使 l 不经过第二象限，当且仅当 $\begin{cases}-(a+1)\geqslant0,\\a-2\leqslant0,\end{cases}$ 解得 $a\leqslant-1$.

故实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-1]$.

[一题多思]

思考.在本例中，若直线 l 在 x 轴上的截距为 -3，求实数 a 的值.

解：由题易知，$a\neq-1$.由直线 l 的方程 $(a+1)x+y+2-a=0$，得直线 l 在 x 轴上的截距为 $\frac{a-2}{a+1}$，

即 $\frac{a-2}{a+1}=-3$，解得 $a=-\frac{1}{4}$.

【探究总结】

含参直线方程的研究策略

(1)若方程 $Ax+By+C=0$ 表示直线，则需满足 A，B 不同时为 0；

(2)令 $x=0$ 可得直线在 y 轴上的截距，令 $y=0$ 可得直线在 x 轴上的截距.若确定直线斜率存在，则可将一般式化为斜截式；

(3)解分式方程时要注意验根.

应用迁移

1.已知△ABC 的顶点是 $A(-1,-1)$，$B(3,1)$，$C(1,6)$，直线 l 平行于 AB，分别交 AC，BC 于点 E，F，且△CEF 的面积是△ABC 的面积的 $\frac{1}{4}$.

(1)求点 E，F 的坐标；

(2)求直线 l 的方程.

解：(1)设点 $E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$.

因为直线 $EF\parallel AB$，且△CEF 的面积是△ABC 的面积的 $\frac{1}{4}$，所以 E，F 分别为边 AC，BC 的中点，

所以 $E\left(0,\frac{5}{2}\right)$，$F\left(2,\frac{7}{2}\right)$.

(2)由(1)知，点 $E\left(0,\frac{5}{2}\right)$，$F\left(2,\frac{7}{2}\right)$，

所以直线 l 的方程为 $\frac{y-\frac{5}{2}}{\frac{7}{2}-\frac{5}{2}}=\frac{x-0}{2-0}$，即 $x-2y+5=0$.

2.已知直线 l：$kx-y+3k+1=0(k\in\mathbf{R})$.

(1)求证：对任意实数 k，直线 l 都经过一个定点；

(2)若直线 l 在 x 轴、y 轴上的截距相等，求直线 l 的方程.

(1)**证明：**将直线 l：$kx-y+3k+1=0$ 整理得 $k(x+3)-y+1=0$，因为方程对任意实数 k 都成立，

所以 $\begin{cases}x+3=0,\\-y+1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-3,\\y=1,\end{cases}$

所以对任意实数 k，直线 l 都经过一个定点 $(-3,1)$.

(2)**解：**由已知条件可知 $k\neq0$，求得直线 l 与 x 轴、y 轴的交点分别为 $A\left(\frac{-3k-1}{k},0\right)$，$B(0,3k+1)$，

则有 $\frac{-3k-1}{k}=3k+1$，化简得 $(3k+1)(k+1)=0$，

当 $k=-\frac{1}{3}$ 时，直线 l 的方程为 $y=-\frac{1}{3}x$；

当 $k=-1$ 时，直线 l 的方程为 $y=-x-2$.

所以直线 l 的方程为 $y=-\frac{1}{3}x$ 或 $y=-x-2$.

课后素养评价(十六)

基础落实

1.(多选)若直线 $(2m^2+m-3)x+(m^2-m)y=4m-1$ 在 x 轴上的截距为 1，则实数 m 的值可能为（　　）

A.1　　B.2　　C.$-\frac{1}{2}$　　D.-1

BC　**解析：**由题意可知，当 $2m^2+m-3\neq0$，即 $m\neq-\frac{3}{2}$ 且 $m\neq1$ 时，直线在 x 轴上的截距为 $\frac{4m-1}{2m^2+m-3}=1$，即 $2m^2-3m-2=0$，所以 $m=2$ 或 $m=-\frac{1}{2}$.

2.若方程 $(m^2-3m+2)x+(m^2-m)y-m+4=0$ 表示一条直线，则实数 m 满足（　　）

A.$m\neq0$　　B.$m\neq2$

C.$m\neq1$，$m\neq2$，$m\neq0$　　D.$m\neq1$

D　**解析：**当 $m^2-3m+2=0$ 时，$m=1$ 或 $m=2$；当 $m^2-m=0$ 时，$m=0$ 或 $m=1$.

若方程 $(m^2-3m+2)x+(m^2-m)y-m+4=0$ 表示一条直线，

则 m^2-3m+2 与 m^2-m 不同时为零，所以 $m\neq1$.

3.已知直线 $x+my+6=0$ 和 $(m-2)x+3y+2m=0$ 互相平行，则实数 m 的值为（　　）

A.-1 或 3　　B.-1

C.-3　　D.1 或 -3

B　**解析**：当 $m=0$ 或 $m=2$ 时，显然两条直线不平行.由题意知 $\frac{1}{m-2}=\frac{m}{3}\neq\frac{6}{2m}$，解得 $m=-1$（$m=3$ 舍去）.经检验，当 $m=-1$ 时两条直线平行，符合题意.

4. 若坐标原点在直线 l 上的射影为点(2,1)，则直线 l 的方程是　（　）

A.$x+2y-5=0$

B.$2x+y-5=0$

C.$2x+3y-7=0$

D.$3x+2y-8=0$

B　**解析**：因为坐标原点在直线 l 上的射影为点(2,1)，所以直线 l 的斜率 $k=-\frac{2}{1}=-2$.

又点(2,1)在直线 l 上，

所以所求直线的方程为 $y-1=-2(x-2)$，

即 $2x+y-5=0$.

5. 已知直线 $Ax+By+C=0$（A，B 不同时为 0），则下列说法正确的是　（　）

A.无论 A，B 取何值，直线斜率都存在

B.当 $A=0$，且 $B\neq0$ 时，直线只与 x 轴相交

C.当 $A\neq0$，或 $B\neq0$ 时，直线与两条坐标轴都相交

D.当 $A\neq0$，且 $B=0$，$C=0$ 时，直线与 y 轴重合

D　**解析**：对于 A 选项，当 $A\neq0$，且 $B=0$ 时，直线斜率不存在，故错误.

对于 B 选项，当 $A=0$，且 $B\neq0$，$C\neq0$ 时，直线只与 y 轴相交；当 $A=0$，且 $B\neq0$，$C=0$ 时，直线与 x 轴重合，故错误.

对于 C 选项，当 $A\neq0$，且 $B\neq0$ 时，直线与两条坐标轴都相交，故错误.

对于 D 选项，当 $A\neq0$，且 $B=0$，$C=0$ 时，直线方程为 $x=0$，即 y 轴所在直线，故正确.

6. 已知直线 $a_1x+b_1y+1=0$ 和 $a_2x+b_2y+1=0$ 都过点 $A(2,1)$，则过 $P_1(a_1,b_1)$，$P_2(a_2,b_2)$ 两点的直线的一般式方程为_____.

$2x+y+1=0$　**解析**：由题意得 $\begin{cases}2a_1+b_1+1=0,\\2a_2+b_2+1=0,\end{cases}$ 所以 (a_1,b_1)，(a_2,b_2) 都在直线 $2x+y+1=0$ 上.又两点确定一条直线，所以所求直线的方程为 $2x+y+1=0$.

7. 已知直线 l 的倾斜角为 α，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，且直线 l 经过点 $P(3,5)$，则直线 l 的一般式方程为_____.

$3x-4y+11=0$ 或 $3x+4y-29=0$　**解析**：因为 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，所以 $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\frac{4}{5}$，所以直线 l 的斜率 $k=\tan\alpha=\pm\frac{3}{4}$.又因为直线 l 经过点 $P(3,5)$，所以直线 l 的方程为 $y-5=\frac{3}{4}(x-3)$ 或 $y-5=-\frac{3}{4}(x-3)$，所以直线 l 的一般式方程为 $3x-4y+11=0$ 或 $3x+4y-29=0$.

8. 在 $\triangle ABC$ 中，已知点 A 的坐标为(1,3)，边 AB，AC 上的中线所在直线的方程分别为 $x-2y+1=0$ 和 $y-1=0$.求 $\triangle ABC$ 各边所在直线的方程.

解：点 B 应满足两个条件：①点 B 在直线 $y-1=0$ 上；②BA 的中点 D 在直线 $x-2y+1=0$ 上.

设 $B(x_B,1)$，则 AB 的中点 $D\left(\frac{x_B+1}{2},2\right)$.

因为点 D 在中线 CD：$x-2y+1=0$ 上，

所以 $\frac{x_B+1}{2}-2\times2+1=0$，

解得 $x_B=5$，故 $B(5,1)$.

因为点 C 在直线 $x-2y+1=0$ 上，故可设 $C(2y_C-1,y_C)$，因为 AC 边的中线为 $y-1=0$，所以 $y_C=-1$，则 $C(-3,-1)$.

根据两点式，得直线 AB 的方程为 $\frac{y-3}{1-3}=\frac{x-1}{5-1}$，即 $x+2y-7=0$，直线 BC 的方程为 $\frac{y+1}{1+1}=\frac{x+3}{5+3}$，即 $x-4y-1=0$，直线 AC 的方程为 $\frac{y+1}{3+1}=\frac{x+3}{1+3}$，即 $x-y+2=0$.

能力提升

1. 已知直线 l：$x+y\cos\theta-3=0$，则 l 的倾斜角 α 的取值范围是　（　）

A.$[0,\pi)$　　B.$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$

C.$\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$　　D.$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$

C　**解析**：当 $\cos\theta=0$ 时，可知直线为 $x=3$，故倾斜角 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，当 $\cos\theta\neq0$ 时，由直线方程可知斜率 $k=-\frac{1}{\cos\theta}$，

所以 $k\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，又 $\alpha\in[0,\pi)$，则 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$.

综上可知，$\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$.

2.（多选）已知三条直线：$x+y=0$，$x-y=0$，$x+ay=3$ 可以围成三角形，则 a 的值不可能为　（　）

A.1　　B.2

C.-1　　D.-2

AC　**解析**：直线 $x+y=0$ 与 $x-y=0$ 都经过原点，而无论 a 为何值，直线 $x+ay=3$ 都不经过原

点，因此，要满足三条直线围成三角形，只需直线 $x+ay=3$ 与另外两条直线不平行，所以 $a\neq\pm1$.

3. 已知 $m\in\mathbf{R}$，过定点 A 的直线 $x+my+1=0$ 与过定点 B 的直线 $mx-y-m+2=0$ 交于点 P，则 $|PA|\cdot|PB|$ 的最大值为　（　）

A.2　　B.3

C.4　　D.5

C　**解析**：由题意可知，动直线 $x+my+1=0$ 经过定点 $A(-1,0)$，

动直线 $mx-y-m+2=0$，即 $m(x-1)-y+2=0$，经过定点 $B(1,2)$，

注意到动直线 $x+my+1=0$ 和动直线 $mx-y-m+2=0$ 始终垂直，

又 P 是两条直线的交点，

则有 $PA\perp PB$，

所以 $|PA|^2+|PB|^2=|AB|^2=8$.

故 $|PA|\cdot|PB|\leqslant\dfrac{|PA|^2+|PB|^2}{2}=4$（当且仅当 $|PA|=|PB|=2$ 时取等号）.

4.（多选）已知直线 $l_1:mx+y+m-1=0$，$l_2:4x+my+3m-4=0$，则下列命题中，是真命题的有　（　）

A.若 $l_1\perp l_2$，则 $m=0$

B.当 $m=0$ 时，$\boldsymbol{n}=(1,0)$ 是直线 l_1 的一个方向向量

C.若 $l_1/\!/l_2$，则 $m=2$ 或 $m=-2$

D.若直线 l_2 在两条坐标轴上的截距相等，则实数 $m=4$

AB　**解析**：对于 A，若 $l_1\perp l_2$，则 $m\times4+1\times m=0$，所以 $m=0$，A 正确；

对于 B，当 $m=0$ 时，直线 $l_1:y-1=0$，

故 $\boldsymbol{n}=(1,0)$ 是直线 l_1 的一个方向向量，B 正确；

对于 C，当 $m=0$ 时，$l_1:y-1=0$，$l_2:x-1=0$，l_1 与 l_2 不平行，

故 $m\neq0$，则由 $l_1/\!/l_2$，可得 $k_{l_1}=k_{l_2}$，即 $-m=-\dfrac{4}{m}$，

得 $m=2$ 或 $m=-2$，

当 $m=2$ 时，$l_1:2x+y+1=0$，$l_2:4x+2y+2=0$，两直线重合，

当 $m=-2$ 时，$l_1:2x-y+3=0$，$l_2:2x-y-5=0$，即 $l_1/\!/l_2$，符合题意，

故 $l_1/\!/l_2$，则 $m=-2$，C 错误；

对于 D，由直线 l_2 在两坐标轴上的截距相等，可知 $m\neq0$，

对于 $4x+my+3m-4=0$，令 $x=0$，则 $y=\dfrac{4-3m}{m}$，

令 $y=0$，则 $x=\dfrac{4-3m}{4}$，则 $\dfrac{4-3m}{4}=\dfrac{4-3m}{m}$，

解得 $m=4$ 或 $m=\dfrac{4}{3}$，D 错误.

5. 若直线 $2x-y+1-4m=0$ 过第一、三、四象限，则实数 m 的取值范围为_____.

$\left(\dfrac{1}{4},+\infty\right)$　**解析**：因为直线方程为 $2x-y+1-4m=0$，即 $y=2x+1-4m$，

又因为直线过第一、三、四象限，所以直线在 y 轴上的截距小于 0，

即 $1-4m<0$，解得 $m>\dfrac{1}{4}$.

所以实数 m 的取值范围为 $\left(\dfrac{1}{4},+\infty\right)$.

6. 已知直线 $Ax+By+C=0$ 的斜率为 5，且 $A-2B+3C=0$，则直线的方程是_____.

$15x-3y-7=0$　**解析**：因为直线 $Ax+By+C=0$ 的斜率为 5，所以 $B\neq0$，且 $-\dfrac{A}{B}=5$，即 $A=-5B$. 又 $A-2B+3C=0$，所以 $-5B-2B+3C=0$，即 $C=\dfrac{7}{3}B$. 此时直线的方程化为 $-5Bx+By+\dfrac{7}{3}B=0$，

即 $-5x+y+\dfrac{7}{3}=0$.

故所求直线的方程为 $15x-3y-7=0$.

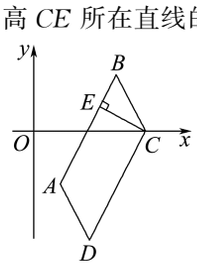
7. 若点 $A(4,5)$ 关于直线 l 的对称点为 $B(-2,7)$，则 l 的方程为_____.

$3x-y+3=0$　**解析**：线段 AB 的中点为 $\left(\dfrac{4-2}{2},\dfrac{5+7}{2}\right)$，即 $(1,6)$，直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\dfrac{7-5}{-2-4}=-\dfrac{1}{3}$，所以直线 l 的斜率 $k_l=-\dfrac{1}{k_{AB}}=3$. 由点斜式可得直线 l 的方程为 $y-6=3(x-1)$，即 $3x-y+3=0$.

8. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，边 AB 所在直线的方程为 $2x-y-2=0$，点 $C(2,0)$.

(1)求直线 CD 的方程；

(2)求边 AB 上的高 CE 所在直线的方程.



解：(1)因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

所以 $AB/\!/CD$.

设直线 CD 的方程为 $2x-y+m=0(m\neq-2)$，

将 $C(2,0)$ 代入上式，得 $m=-4$.

所以直线 CD 的方程为 $2x-y-4=0$.

(2)由 $AB\perp CE$，可设直线 CE 的方程为 $x+2y+n$

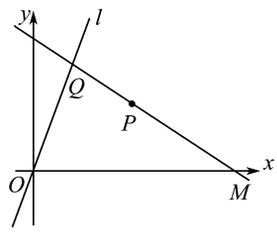
$=0$，

将 $C(2,0)$ 代入上式，得 $n=-2$.

所以直线 CE 的方程为 $x+2y-2=0$.

9. 已知直线 $l:y=4x$ 和定点 $P(6,4)$，点 Q 为第一象限内的点，且在直线 l 上，直线 PQ 交 x 轴正半轴于点 M. 求 $\triangle OMQ$（O 为原点）的面积最小时点 Q 的坐标.

解：如图，因为点 Q 在第一象限且在直线 $y=4x$ 上，故可设点 Q 的坐标为 $(t,4t)(t>0)$，



所以 PQ 所在直线的方程为 $y-4=\dfrac{4t-4}{t-6}\cdot(x-6)$.

令 $y=0$，得点 M 的坐标为 $\left(\dfrac{5t}{t-1},0\right)$，

所以 $\triangle OMQ$ 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5t}{t-1}\cdot 4t$，

化简，得 $10t^2-St+S=0$，

所以 $\Delta=S^2-4\times 10S\geqslant 0$，

所以 $S\geqslant 40$，即 $S_{\min}=40$，此时 $t=2$，$4t=8$，

所以当 $\triangle OMQ$ 的面积最小时，点 Q 的坐标为 $(2,8)$.

自我超越

1. 已知 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，$C(0,2)$，$E(-1,0)$，$F(1,0)$，一束光线从点 F 处发射到 BC 上的点 D，经 BC 反射后，再经 AC 反射，落到线段 AE 上（不含端点），则直线 FD 的斜率的取值范围是　　（　　）

A. $(-\infty,2)$　　B. $(0,+\infty)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $(4,+\infty)$

D　**解析**：设直线 BC 的方程为 $y=kx+b$，则 $\begin{cases}0=2k+b,\\2=b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=2,\end{cases}$ 即直线 $BC:y=-x+2$.

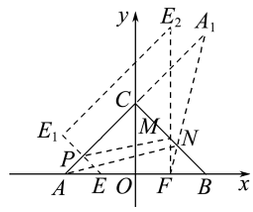
同理可得直线 AC 的方程为 $y=x+2$.

设 $A(-2,0)$ 关于直线 BC 对称的点为 $A_1(x,y)$，则 $\begin{cases}\dfrac{y}{x+2}=1,\\\dfrac{x-2}{2}+\dfrac{y}{2}-2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=4,\end{cases}$ 即 $A_1(2,4)$，所以 $k_{A_1F}=4$.

同理可得点 $E(-1,0)$ 关于直线 $AC:y=x+2$ 的对称点为 $E_1(-2,1)$，

点 $E_1(-2,1)$ 关于直线 $BC:y=-x+2$ 的对称点为 $E_2(1,4)$，

如图所示.



利用光线反射的性质可知，当这束光线反射后最终经过点 A 时，则其先经过点 N；当这束光线反射后最终经过点 E 时，则其先经过点 M，

所以点 M，N 之间为点 D 的移动范围.

因为 $E_2(1,4)$，$F(1,0)$，所以直线 FE_2 的斜率不存在. 而 $k_{FN}=k_{A_1F}=4$，

所以 $k_{FD}>k_{FN}=4$，即 $k_{FD}\in(4,+\infty)$.

故选 D.

2. 已知 $A(3,0)$，$B(0,4)$，直线 $y=kx+1$ 将 $\triangle AOB$（O 为坐标原点）分割成面积相等的两个部分，则 $k=$_____.

$\dfrac{1}{6}$　**解析**：由题意得，直线 $y=kx+1$ 过定点 $P(0,1)$，$S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}|OA||OB|=\dfrac{1}{2}\times 3\times 4=6$.

如图 1，当直线 $y=kx+1$ 与线段 OA 交于点 C 时，$|OC|\in(0,3]$，

$S_{\triangle OPC}=\dfrac{1}{2}|OC||OP|=\dfrac{1}{2}|OC|\in\left(0,\dfrac{3}{2}\right]$，不符合题意.

如图 2，当直线 $y=kx+1$ 与线段 AB 交于点 D 时，由 $A(3,0)$，$B(0,4)$，得直线 AB 的方程为 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=1$，即 $4x+3y-12=0$.

在 $\triangle PBD$ 中，设 BP 边上的高为 h，则 $S_{\triangle PBD}=\dfrac{1}{2}|PB|h=\dfrac{1}{2}S_{\triangle AOB}=3$，即 $\dfrac{3}{2}h=3$，解得 $h=2$，故 $x_D=2$.

因为点 D 在直线 $4x+3y-12=0$ 上，所以 $y_D=\dfrac{4}{3}$，即 $D\left(2,\dfrac{4}{3}\right)$，

所以 $k=\dfrac{\frac{4}{3}-1}{2-0}=\dfrac{1}{6}$.

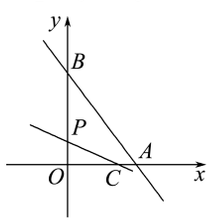


图1

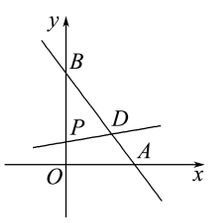


图2

2.3　直线的交点坐标与距离公式

2.3.1　两条直线的交点坐标

学习任务目标

1.掌握两条直线的交点坐标的求法.
2.理解两条直线的交点坐标和二元一次方程组的解之间的联系.
3.掌握过两条直线交点的直线方程的求法.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点　两条直线的交点坐标

已知直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$ 与 $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$ 相交，交点为 P，则点 P 既在直线 l_1 上，也在直线 l_2 上，所以点 P 的坐标既满足直线 l_1 的方程 $A_1x+B_1y+C_1=0$，也满足直线 l_2 的方程 $A_2x+B_2y+C_2=0$，即点 P 的坐标是方程组 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$ 的解.

【概念辨析】

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)若两条直线相交，则交点坐标一定是两条直线方程所组成的二元一次方程组的解.　（　√　）

(2)无论 m 为何值，直线 $x-y+1=0$ 与 $x-2my+3=0$ 必相交.　（　×　）

(3)若两条直线的方程组成的方程组有解，则两条直线相交.　（　×　）

(4)直线 $x+3y-4=0$ 与直线 $3x+2y-6=0$ 相交.　（　√　）

2.直线 $l_1:2x-y-1=0$ 与 $l_2:x+3y-11=0$ 的交点坐标为　（　　）

A.(3,2)　　B.(2,3)

C.(−2,−3)　　D.(−3,−2)

B　**解析**：解方程组 $\begin{cases}2x-y-1=0,\\x+3y-11=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2,\\y=3.\end{cases}$

3.思考并回答下列问题：

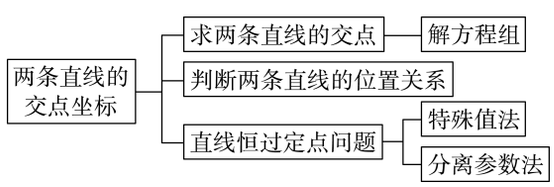
(1)直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0(A_1^2+B_1^2\neq0)$ 和 $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0(A_2^2+B_2^2\neq0)$ 相交的充要条件是什么？

提示：两条直线相交的充要条件是 $A_1B_2-A_2B_1\neq0$.

(2)直线 $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$（$\lambda\in\mathbf{R}$）与直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$ 有什么关系？

提示：直线 $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0(\lambda\in\mathbf{R})$ 是过直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$ 与 $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$ 交点的直线（不含 l_2）.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 > 两条直线的交点问题

1.直线 $3x+2y+6=0$ 与 $2x+5y-7=0$ 的交点坐标为　（　　）

A.(−4,−3)　　B.(4,3)

C.(−4,3)　　D.(3,4)

C　**解析**：解方程组 $\begin{cases}3x+2y+6=0,\\2x+5y-7=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-4,\\y=3.\end{cases}$

2.经过直线 $l_1:y=-2x-1$ 和 $l_2:y=2x+3$ 的交点，且倾斜角是直线 l_2 的倾斜角的2倍的直线方程为　（　　）

A.$2x+y+1=0$　　B.$x-4y+3=0$

C.$4x+3y+1=0$　　D.$3x+4y-1=0$

C　**解析**：由 $\begin{cases}y=-2x-1,\\y=2x+3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1,\\y=1,\end{cases}$ 即所求直线的方程过点(−1,1).

令直线 $l_2:y=2x+3$ 的倾斜角为 α，则 $\tan\alpha=2$，显然 α 是锐角，

因此所求直线方程的斜率 $k=\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2\times2}{1-2^2}=-\dfrac{4}{3}$，

所以所求直线的方程为 $y-1=-\dfrac{4}{3}(x+1)$，即 $4x+3y+1=0$.

3.若直线 l 过直线 $x+y-2=0$ 和直线 $x-y+4=0$

的交点，且与直线 $3x-2y+4=0$ 平行，则直线 l 的方程为_____.

$3x-2y+9=0$　**解析**：（方法一）解方程组 $\begin{cases}x+y-2=0,\\x-y+4=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-1,\\y=3,\end{cases}$ 即直线 l 过点 $(-1,3)$.

因为直线 l 与直线 $3x-2y+4=0$ 平行，所以直线 l 的斜率为 $\frac{3}{2}$，

所以直线 l 的方程为 $y-3=\frac{3}{2}(x+1)$，即 $3x-2y+9=0$.

（方法二）因为直线 $x+y-2=0$ 与 $3x-2y+4=0$ 不平行，

所以可设直线 l 的方程为 $x-y+4+\lambda(x+y-2)=0$，

整理得 $(1+\lambda)x+(\lambda-1)y+4-2\lambda=0$.

因为直线 l 与直线 $3x-2y+4=0$ 平行，

所以 $\frac{1+\lambda}{3}=\frac{\lambda-1}{-2}\neq\frac{4-2\lambda}{4}$，解得 $\lambda=\frac{1}{5}$.

所以直线 l 的方程为 $\frac{6}{5}x-\frac{4}{5}y+\frac{18}{5}=0$，即 $3x-2y+9=0$.

【探究总结】

过两条相交直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$ 交点的直线方程可设为 $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$（不含直线 l_2）.

任务2 判断两条直线的位置关系并求交点坐标

探究活动

例1　（教材 P72 练习题 2 改编）分别判断下列直线是否相交，若相交，求出它们的交点.

(1) $l_1:2x-y=7$ 和 $l_2:3x+2y-7=0$；

(2) $l_1:2x-6y+4=0$ 和 $l_2:4x-12y+8=0$；

(3) $l_1:4x+2y+4=0$ 和 $l_2:y=-2x+3$.

解：（方法一）(1) 方程组 $\begin{cases}2x-y-7=0,\\3x+2y-7=0\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=3,\\y=-1,\end{cases}$

因此直线 l_1 和 l_2 相交，交点坐标为 $(3,-1)$.

(2) 方程组 $\begin{cases}2x-6y+4=0,\\4x-12y+8=0\end{cases}$ 有无数个解，

这表明直线 l_1 和 l_2 重合.

(3) 方程组 $\begin{cases}4x+2y+4=0,\\2x+y-3=0\end{cases}$ 无解，

这表明直线 l_1 和 l_2 没有公共点，故 $l_1\parallel l_2$.

（方法二）(1) 因为 $k_{l_1}=2$，$k_{l_2}=-\frac{3}{2}$，$k_{l_1}\neq k_{l_2}$，

所以 l_1 与 l_2 相交.

由 $\begin{cases}2x-y-7=0,\\3x+2y-7=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=3,\\y=-1,\end{cases}$

故 l_1 与 l_2 的交点坐标为 $(3,-1)$.

(2) 由 $\frac{2}{4}=\frac{-6}{-12}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$，知 l_1 与 l_2 重合.

(3) l_2 的方程为 $2x+y-3=0$，

由 $\frac{4}{2}=\frac{2}{1}\neq\frac{4}{-3}$ 知直线 l_1 与 l_2 平行，没有公共点.

【探究总结】

两条直线相交的判定方法

(1) 联立直线方程解方程组，若有一解，则两条直线相交；

(2) 两条直线的斜率都存在，且斜率不相等；

(3) 两条直线的斜率一个存在，另一个不存在.

应用迁移

1. 已知直线 $5x+4y=2a+1$ 与直线 $2x+3y=a$ 的交点位于第四象限，则 a 的取值范围是_____.

$\left(-\frac{3}{2},2\right)$　**解析**：由 $\begin{cases}5x+4y=2a+1,\\2x+3y=a,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=\frac{2a+3}{7},\\y=\frac{a-2}{7}.\end{cases}$

由题意得 $\begin{cases}\frac{2a+3}{7}>0,\\\frac{a-2}{7}<0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{3}{2}<a<2$.

所以 a 的取值范围是 $\left(-\frac{3}{2},2\right)$.

2. 若三条直线 $2x+3y+8=0$，$x-y-1=0$，$x+by=0$ 相交于一点，求 b 的值.

解：解方程组 $\begin{cases}2x+3y+8=0,\\x-y-1=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-1,\\y=-2,\end{cases}$ 所以两直线的交点坐标为 $(-1,-2)$，

代入直线方程 $x+by=0$ 得 $b=-\frac{1}{2}$.

任务3 直线过定点问题

探究活动

例2　求证：不论 m 为何值，直线 $(3m+1)x-(2m-1)y+3m-1=0$ 都过一个定点，并求这个定点的坐标.

证明：（方法一）令 $m=0$，得 $x+y-1=0$，①

令 $m=1$，得 $4x-y+2=0$.②

联立①②，得 $\begin{cases}x+y-1=0,\\4x-y+2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-\frac{1}{5},\\y=\frac{6}{5}.\end{cases}$

把 $x=-\frac{1}{5}$，$y=\frac{6}{5}$ 代入 $(3m+1)x-(2m-1)y+3m-1=0$，

得 $(3m+1)\times\left(-\frac{1}{5}\right)-\frac{6}{5}\times(2m-1)+3m-1=0$，

所以直线 $(3m+1)x-(2m-1)y+3m-1=0$ 过定点 $\left(-\frac{1}{5},\frac{6}{5}\right)$.

（方法二）方程可化为 $(x+y-1)+m(3x-2y+3)=0$.

由 m 的任意性可知 $\begin{cases}x+y-1=0,\\3x-2y+3=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=-\frac{1}{5},\\y=\frac{6}{5}.\end{cases}$

所以不论 m 取何值，直线都过定点 $\left(-\frac{1}{5},\frac{6}{5}\right)$.

［一题多思］

思考 1. 求证：不论 m 为何值，直线 $(3m+1)x-(2m-1)y+3m-1=0$ 总经过第二象限.

证明： 由例 2 的解析可知，直线 $(3m+1)x-(2m-1)y+3m-1=0$ 恒过第二象限内的定点 $\left(-\frac{1}{5},\frac{6}{5}\right)$，所以无论 m 为何值，直线总经过第二象限.

思考 2. 已知点 $A(1,0)$，$B(0,-1)$，若直线 $(3m+1)x-(2m-1)y+3m-1=0$ 和线段 AB 有交点，求实数 m 的取值范围.

解： 由例 2 的解析可知，直线 $(3m+1)x-(2m-1)y+3m-1=0$ 过定点 $P\left(-\frac{1}{5},\frac{6}{5}\right)$.

由题可知，直线 $(3m+1)x-(2m-1)y+3m-1=0$ 的斜率存在，又 $k_{AP}=-1$，$k_{BP}=-11$，所以 $-11\leqslant\frac{3m+1}{2m-1}\leqslant-1$，解得 $0\leqslant m\leqslant\frac{2}{5}$. 故实数 m 的取值范围是 $\left[0,\frac{2}{5}\right]$.

【探究总结】

求直线所过定点的方法

(1) 特殊值法：给方程中的参数取两个特殊值，可得两条直线的方程，两条直线的交点即为所求的定点；

(2) 分离参数法：将含参数 m 的直线方程化为 $A_1x+B_1y+C_1+m(A_2x+B_2y+C_2)=0$ 的形式，直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 与 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交点即为所求的定点.

应用迁移

1. 已知直线 $l:(a+2)x+(1-a)y-3=0(a\in\mathbf{R})$，则直线 l 过定点　（　）

A.$(0,0)$　　B.$(0,1)$

C.$(-2,1)$　　D.$(1,1)$

D　**解析：** 直线 $l:(a+2)x+(1-a)y-3=0$，即 $a(x-y)+2x+y-3=0$.

由 $\begin{cases}x-y=0,\\2x+y-3=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$ 所以当 a 变化时，所有直线都经过点 $(1,1)$.

2. 直线 $(2-m)x+(2m+1)y+3m+4=0$ 恒过定点_____.

$(-1,-2)$　**解析：** 直线方程化简为 $2x-mx+2my+y+3m+4=0$，

即 $(2x+y+4)+m(-x+2y+3)=0$，

由 $\begin{cases}2x+y+4=0,\\-x+2y+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1,\\y=-2,\end{cases}$

所以直线恒过定点 $(-1,-2)$.

课后素养评价（十七）

基础落实

1. 直线 $l_1:2x-3y+5=0$ 与 $l_2:x+y-10=0$ 的交点坐标是　（　）

A.$(5,5)$　　B.$(2,3)$

C.$(3,7)$　　D.$(8,5)$

A　**解析：** 联立方程 $\begin{cases}2x-3y+5=0,\\x+y-10=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=5,\\y=5,\end{cases}$ 故 l_1 与 l_2 的交点坐标为 $(5,5)$.

2. 经过直线 $l_1:2x-y+1=0$ 和 $l_2:x-y-2=0$ 的交点，且垂直于直线 l_1 的直线的方程为　（　）

A.$2x-y+13=0$　B.$x+2y+13=0$

C.$2x-y-13=0$　D.$x+2y-13=0$

B　**解析：** 由 $\begin{cases}2x-y+1=0,\\x-y-2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-3,\\y=-5,\end{cases}$

所以直线 $l_1:2x-y+1=0$ 和 $l_2:x-y-2=0$ 的交点为 $(-3,-5)$.

又直线 l_1 的斜率为 2，故所求直线的斜率为 $-\frac{1}{2}$，

所以所求直线的方程为 $y+5=-\frac{1}{2}(x+3)$，即 $x+2y+13=0$.

3.若直线 $2x-y+3=0$ 与 $x+ay-1=0$ 互相垂直，则这两条直线的交点坐标为　　(　　)

A.$(1,5)$　　B.$(-1,-1)$

C.$(-1,1)$　　D.$(-2,-1)$

C　**解析**：直线 $2x-y+3=0$ 与 $x+ay-1=0$ 互相垂直，可得 $2\times1+(-a)=0$，即 $a=2$.

把 $a=2$ 代入直线 $x+ay-1=0$，得到 $x+2y-1=0$.

由方程组 $\begin{cases}2x-y+3=0,\\x+2y-1=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=-1,\\y=1.\end{cases}$

所以交点坐标为 $(-1,1)$.

4.经过直线 $2x+y-4=0$ 与直线 $3x-y-1=0$ 的交点，且在 y 轴上截距为 6 的直线 l 的方程是_____.

$4x+y-6=0$　**解析**：由 $\begin{cases}2x+y-4=0,\\3x-y-1=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$ 即直线 l 过点 $(1,2)$.

又由直线 l 在 y 轴上截距为 6，即直线 l 过点 $(0,6)$，所以斜率 $k=\dfrac{2-6}{1-0}=-4$，

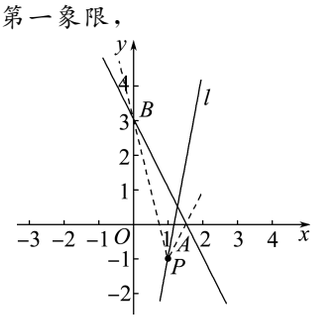
所以所求直线的方程为 $y=-4x+6$，化为一般式方程为 $4x+y-6=0$.

5.若过点 $P(1,-1)$ 的直线 l 与直线 $y=-2x+3$ 的交点位于第一象限，则直线 l 斜率的取值范围是_____.

$(-\infty,-4)\cup(2,+\infty)$　**解析**：设直线 $y=-2x+3$ 与 x 轴的交点为 A，与 y 轴的交点为 B，则 $A\left(\dfrac{3}{2},0\right)$，$B(0,3)$.

因为 $P(1,-1)$，所以 $k_{AP}=\dfrac{0-(-1)}{\frac{3}{2}-1}=2$，$k_{BP}=\dfrac{3-(-1)}{0-1}=-4$.

因为过点 $P(1,-1)$ 的直线 l 与直线 $y=-2x+3$ 的交点位于第一象限，



所以直线 l 斜率的取值范围是 $(-\infty,-4)\cup(2,+\infty)$.

6.直线 $(m-1)x+(2m-1)y=m-3(m\in\mathbf{R})$ 恒过定点_____.

$(5,-2)$　**解析**：直线 $(m-1)x+(2m-1)y=m-3(m\in\mathbf{R})$ 可化为 $m(x+2y-1)-x-y+3=0$，

令 $\begin{cases}x+2y-1=0,\\-x-y+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=5,\\y=-2.\end{cases}$

所以直线 $(m-1)x+(2m-1)y=m-3(m\in\mathbf{R})$ 恒过定点 $(5,-2)$.

能力提升

1.若三条直线 $2x+y-4=0$，$x-y+1=0$ 与 $ax-y+2=0$ 共有两个交点，则实数 a 的值为　　(　　)

A.1　　B.-2　　C.1 或 -2　D.-1

C　**解析**：由题意可得，三条直线中有两条直线互相平行.

因为直线 $x-y+1=0$ 和直线 $2x+y-4=0$ 不平行，

所以直线 $x-y+1=0$ 和直线 $ax-y+2=0$ 平行，或直线 $2x+y-4=0$ 和直线 $ax-y+2=0$ 平行.

因为直线 $x-y+1=0$ 的斜率为 1，直线 $2x+y-4=0$ 的斜率为 -2，直线 $ax-y+2=0$ 的斜率为 a，所以 $a=1$ 或 $a=-2$. 经检验，当 $a=1$ 或 $a=-2$ 时，均满足三条直线共有两个交点.

2.直线 $3x-4y-27=0$ 上到点 $P(2,1)$ 距离最近的点的坐标是　　(　　)

A.$(1,-6)$　　B.$\left(3,-\dfrac{9}{2}\right)$

C.$(5,-3)$　　D.$\left(7,-\dfrac{3}{2}\right)$

C　**解析**：由直线 $3x-4y-27=0$，得 $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{27}{4}$，

则该直线的斜率 $k=\dfrac{3}{4}$，

所以过点 P 作与该直线垂直的垂线斜率为 $k'=-\dfrac{4}{3}$，

则过点 $P(2,1)$ 的垂线方程为 $y-1=-\dfrac{4}{3}(x-2)$，

整理得 $y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{11}{3}$.

由方程组 $\begin{cases}y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{27}{4},\\y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{11}{3},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=5,\\y=-3,\end{cases}$ 所以直线 $3x-4y-27=0$ 上到点 $P(2,1)$ 距离最近的点的坐标是 $(5,-3)$.

3.(多选)当 $0<k<\dfrac{1}{2}$ 时，直线 $l_1:kx-y-k+1=0$ 与直线 $l_2:ky-x-2k=0$ 的交点可能为　　(　　)

A.$(2,3)$　　B.$(1,2)$

C.$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$　　D.$\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

CD　**解析**：由 $\begin{cases}kx-y-k+1=0,\\ky-x-2k=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\dfrac{k}{k-1},\\y=\dfrac{2k-1}{k-1},\end{cases}$

把各个选项代入验证即可.

4.已知直线 $l_1:mx-y+m-1=0$ 与射线 $l_2:x-y-2=0(x\geqslant 0)$ 恒有公共点，则 m 的取值范围是（　　）

A.$(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)$

B.$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

C.$[-1,1)$

D.$[-1,1]$

C　**解析**：由 $\begin{cases}mx-y+m-1=0,\\x-y-2=0,\end{cases}$ 得 $x=\dfrac{-m-1}{m-1}$.

因为直线 $l_1:mx-y+m-1=0$ 与射线 $l_2:x-y-2=0(x\geqslant 0)$ 恒有公共点，

所以 $x=\dfrac{-m-1}{m-1}\geqslant 0$，解得 $-1\leqslant m<1$.

所以 m 的取值范围是 $[-1,1)$.

5.若直线 $5x+4y-2m-1=0$ 与直线 $2x+3y-m=0$ 的交点在第三象限，则实数 m 的取值范围是_____.

$\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right)$　**解析**：由 $\begin{cases}5x+4y-2m-1=0,\\2x+3y-m=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\dfrac{2m+3}{7},\\y=\dfrac{m-2}{7},\end{cases}$ 所以两条直线的交点坐标为 $\left(\dfrac{2m+3}{7},\dfrac{m-2}{7}\right)$.

又此交点在第三象限，

所以 $\begin{cases}\dfrac{2m+3}{7}<0,\\\dfrac{m-2}{7}<0,\end{cases}$ 解得 $m<-\dfrac{3}{2}$.

所以实数 m 的取值范围是 $\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right)$.

6.直线 $x-2y+2=0$ 和 $2x+y-6=0$ 与两条坐标轴的正半轴围成的四边形的面积为_____.

4　**解析**：令 $2x+y-6=0$ 中 $y=0$，得 $x=3$，所以直线 $2x+y-6=0$ 与 x 轴交于点 $A(3,0)$，

令 $x-2y+2=0$ 中 $x=0$，得 $y=1$，所以直线 $x-2y+2=0$ 与 y 轴交于点 $B(0,1)$.

由 $\begin{cases}2x+y-6=0,\\x-2y+2=0,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=2,\\y=2,\end{cases}$ 所以两直线交于点 $P(2,2)$，

所以围成的四边形面积为 $S=\dfrac{(1+2)\times 2}{2}+\dfrac{2\times(3-2)}{2}=4$.

自我超越

1.（多选）已知直线 $l_1:3x-y-1=0$，$l_2:x+2y-5=0$，$l_3:x-ay-3=0$ 把平面分成 6 个部分，则实数 a 的取值可能有（　　）

A.1　　B.$\dfrac{1}{3}$

C.-2　　D.-1

BCD　**解析**：当三条直线中有两条直线的斜率相等时，或者三条直线交于一点时，

不能构成三角形，可把空间分成 6 个部分.

因为直线 l_1 的斜率为 3，直线 l_2 的斜率为 $-\dfrac{1}{2}$，所以直线 l_1，l_2 一定相交，

交点坐标是方程组 $\begin{cases}3x-y-1=0,\\x+2y-5=0\end{cases}$ 的解，解得 $\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$

故交点坐标为 $(1,2)$.

当 $a=0$ 时，直线 l_3 与 x 轴垂直，方程为 $x=3$，不经过点 $(1,2)$，

所以三条直线能构成三角形，不满足要求；

当 $a\neq 0$ 时，直线 l_3 的斜率为 $\dfrac{1}{a}$，

当直线 l_1 与直线 l_3 的斜率相等时，即 $\dfrac{1}{a}=3\Rightarrow a=\dfrac{1}{3}$，此时这两直线平行，空间被分成 6 个部分，满足要求；

当直线 l_2 与直线 l_3 的斜率相等时，即 $\dfrac{1}{a}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow a=-2$，

此时这两直线平行，空间被分成 6 个部分，满足要求；

当直线 l_3 过直线 l_1，l_2 交点 $(1,2)$ 时，三条直线不能构成三角形，

即有 $1-2a-3=0\Rightarrow a=-1$，满足要求.

综上，a 的可能取值为 $\dfrac{1}{3}$，-2 或 -1.

2.已知直线 $l_1:7x+2y+1=0$，$l_2:mx+y=0$，$l_3:x+my-1=0$.若三条直线无法围成三角形，则实数 m 可取的值的个数为（　　）

A.3　　B.4　　C.5　　D.6

D　**解析**：①$l_1\parallel l_2$ 时，则 $2m=7\times 1$，解得 $m=\dfrac{7}{2}$，经检验符合题意；

②$l_1\parallel l_3$ 时，则 $7m=2\times 1$，解得 $m=\dfrac{2}{7}$，经检验符合题意；

③$l_2\parallel l_3$ 时，则 $m^2=1\times 1$，解得 $m=\pm 1$，经检验符合题意；

④三条直线交于一点时，由 $\begin{cases}7x+2y+1=0,\\mx+y=0,\\x+my-1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=2,\\x=-\dfrac{1}{3},\\y=\dfrac{2}{3},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=-4,\\x=-\dfrac{1}{15},\\y=-\dfrac{4}{15}.\end{cases}$

则实数 m 可取值的集合为 $\left\{\dfrac{7}{2},\dfrac{2}{7},-1,1,2,-4\right\}$，即符合题意的实数 m 的取值共 6 个.

2.3.2　两点间的距离公式

学习任务目标

1.通过两点间距离公式的推导，体会数形结合思想.
2.掌握并会用两点间的距离公式.
3.能用坐标法解决简单的几何问题.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点　两点间的距离

(1)平面内的两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 间的距离公式：$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

(2)两点间距离的特殊情况

①原点 $O(0,0)$ 与任一点 $P(x,y)$ 间的距离 $|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$.

②当 $P_1P_2\parallel x$ 轴时，$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 两点间的距离 $|P_1P_2|=|x_2-x_1|$.

③当 $P_1P_2\parallel y$ 轴时，$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 两点间的距离 $|P_1P_2|=|y_2-y_1|$.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)点 $P_1(0,a)$ 与 $P_2(b,0)$ 之间的距离为 $a-b$.　(　×　)

(2)当 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点的连线与坐标轴平行或垂直时，两点间的距离公式不适用.　(　×　)

(3)平面内两点间的距离等于这两点的横坐标之差与纵坐标之差的平方和的算术平方根.　(　√　)

2.(多选)对于 $\sqrt{x^2+2x+5}$，下列说法正确的有(　　)

A.可看作点 $(x,0)$ 与点 $(1,2)$ 间的距离

B.可看作点 $(x,0)$ 与点 $(-1,-2)$ 间的距离

C.可看作点 $(x,0)$ 与点 $(-1,2)$ 间的距离

D.可看作点 $(x,-1)$ 与点 $(-1,1)$ 间的距离

BCD　**解析**：$\sqrt{x^2+2x+5}=\sqrt{(x+1)^2+4}$

$=\sqrt{(x+1)^2+(0\pm2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(-1-1)^2}$，可看作点 $(x,0)$ 与点 $(-1,-2)$ 间的距离，可看作点 $(x,0)$ 与点 $(-1,2)$ 间的距离，可看作点 $(x,-1)$ 与点 $(-1,1)$ 间的距离，故选项 A 不正确.

3.思考并回答下列问题：

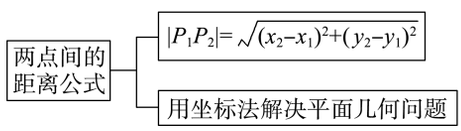
(1)平面内两点间的距离公式与两点坐标顺序是否有关？

提示：无关.公式中，x_2 与 x_1，y_2 与 y_1 的位置可以互换，不影响计算结果.

(2)式子 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的几何意义是什么？

提示：式子 $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$，表示平面内的点 (x,y) 到原点的距离.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1　两点间的距离公式

1.已知 $B(4,-3)$，$C(0,5)$，O 为原点，则 $\triangle OBC$ 的边 BC 上的中线长为(　　)

A.2　　B.$\sqrt{5}$　　C.$\sqrt{3}$　　D.5

B　**解析**：由题意得，线段 BC 的中点坐标为 $\left(\frac{4+0}{2},\frac{-3+5}{2}\right)$，即 $(2,1)$，

则 $\triangle OBC$ 的边 BC 上的中线长为 $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.故选 B.

2.已知直线 $l_1:3ax-y-2=0$ 和直线 $l_2:(2a-1)x+5ay-1=0$ 分别过定点 A 和 B，则 $|AB|=$(　　)

A.$\frac{13}{5}$　　B.$\frac{17}{5}$　　C.$\frac{11}{5}$　　D.$\frac{\sqrt{89}}{5}$

A　**解析**：直线 $l_1:3ax-y-2=0$ 过定点 $A(0,-2)$，

直线 $l_2:(2a-1)x+5ay-1=0\Leftrightarrow a(2x+5y)-(x+1)=0$，则 $\begin{cases}2x+5y=0,\\x+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1,\\y=\frac{2}{5},\end{cases}$ 可得 l_2 过定点 $B\left(-1,\frac{2}{5}\right)$，

所以 $|AB|=\sqrt{(-1-0)^2+\left[\frac{2}{5}-(-2)\right]^2}=\frac{13}{5}$.

任务2 利用坐标法进行平面几何计算

探究活动

例1　（教材P73例3改编）在直线l：$3x-y+1=0$上求一点P，使点P到$A(1,-1)$，$B(2,0)$两点的距离相等.

解：（方法一）设点P的坐标为(x,y)，

则$\begin{cases}3x-y+1=0,\\ \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2},\end{cases}$解得$\begin{cases}x=0,\\ y=1,\end{cases}$

所以点P的坐标为$(0,1)$.

（方法二）由题意知，线段AB的中点M的坐标为$\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$，$AB$所在直线的斜率为$k_{AB}=\frac{0-(-1)}{2-1}=1$，故线段$AB$的垂直平分线的方程为$x+y-1=0$.　①

设$P(x,y)$，又$3x-y+1=0$，　②

联立①②得$\begin{cases}3x-y+1=0,\\ x+y-1=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=0,\\ y=1,\end{cases}$所以点$P$的坐标为$(0,1)$.

【探究总结】

用坐标法解决平面几何问题的常见步骤

(1)建立平面直角坐标系，用坐标表示有关的量；

(2)进行有关的代数运算；

(3)把代数运算的结果“翻译”成几何结论.

应用迁移

已知点$A(-3,4)$，$B(2,\sqrt{3})$，在x轴上找一点P，使$|PA|=|PB|$，并求$|PA|$的值.

解：设点$P(x,0)$，则有

$|PA|=\sqrt{(x+3)^2+(0-4)^2}=\sqrt{x^2+6x+25}$，

$|PB|=\sqrt{(x-2)^2+(0-\sqrt{3})^2}=\sqrt{x^2-4x+7}$.

由$|PA|=|PB|$，得$x^2+6x+25=x^2-4x+7$，解得$x=-\frac{9}{5}$，

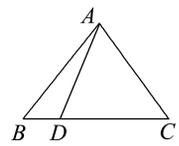
即点P的坐标为$\left(-\frac{9}{5},0\right)$，

所以$|PA|=\sqrt{\left(-\frac{9}{5}+3\right)^2+(0-4)^2}=\frac{2\sqrt{109}}{5}$.

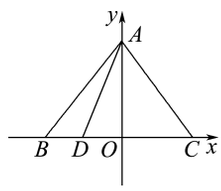
任务3 利用坐标法进行平面几何证明

探究活动

例2　如图，在$\triangle ABC$中，$|AB|=|AC|$，D是边BC上异于B，C的任意一点.求证：$|AB|^2=|AD|^2+|BD|\cdot|DC|$.



证明：如图，取BC的中点O，连接AO，则$AO\perp BC$，以O为坐标原点，边BC所在的直线为x轴，AO所在直线为y轴建立平面直角坐标系.



设$A(0,a)$，$B(-b,0)$，$C(b,0)$，$D(m,0)(-b<m<b)$，

则$|AB|^2=(-b-0)^2+(0-a)^2=a^2+b^2$，

$|AD|^2=(m-0)^2+(0-a)^2=m^2+a^2$，

$|BD|\cdot|DC|=|m+b|\cdot|b-m|=(b+m)(b-m)=b^2-m^2$，

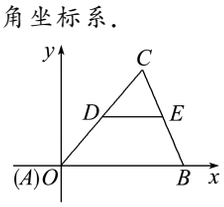
所以$|AD|^2+|BD|\cdot|DC|=a^2+b^2$，

所以$|AB|^2=|AD|^2+|BD|\cdot|DC|$.

[一题多思]

思考.求证：三角形的中位线长度等于第三边长度的一半.

证明：如图，在$\triangle ABC$中，D，E分别为边AC和BC的中点，即证$|DE|=\frac{1}{2}|AB|$.以A为坐标原点，边AB所在直线为x轴，过点A垂直于AB的直线为y轴建立平面直角坐标系.



设$A(0,0)$，$B(c,0)$，$C(m,n)$，则$|AB|=|c|$.

又由中点坐标公式，得$D\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)$，$E\left(\frac{c+m}{2},\frac{n}{2}\right)$，

所以$|DE|=\left|\frac{c+m}{2}-\frac{m}{2}\right|=\left|\frac{c}{2}\right|$，

所以$|DE|=\frac{1}{2}|AB|$，

即三角形的中位线长度等于第三边长度的一半.

【探究总结】

利用坐标法解决平面几何问题时，建立平面直角坐标系的原则主要有两点：

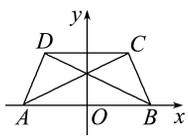
(1)让尽可能多的点落在坐标轴上，这样便于运算.

(2)如果条件中有互相垂直的两条直线，可考虑将它们作为坐标轴；如果图形为中心对称图形，可考虑将其对称中心作为原点；如果图形为轴对称图形，可考虑将其对称轴作为坐标轴.

应用迁移

已知等腰梯形 $ABCD$，建立适当的坐标系，求证：$|AC|=|BD|$.

证明：如图，以等腰梯形 $ABCD$ 的下底 AB 的中点 O 为坐标原点，AB 所在直线为 x 轴，过点 O 且垂直于 AB 的直线为 y 轴建立平面直角坐标系.



设 $|AB|=2a$，$|CD|=2b$，高为 h，则 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，$C(b,h)$，$D(-b,h)$. 由两点间的距离公式，得 $|AC|=\sqrt{(-a-b)^2+(0-h)^2}=\sqrt{(a+b)^2+h^2}$，

$|BD|=\sqrt{[a-(-b)]^2+(0-h)^2}=\sqrt{(a+b)^2+h^2}$，

所以 $|AC|=|BD|$.

课后素养评价（十八）

基础落实

1. 设点 A，B 在曲线 $y=\log_2 x$ 上. 若 AB 的中点坐标为 $(5,2)$，则 $|AB|=$（　　）

A.6　　B.$2\sqrt{10}$　　C.$4\sqrt{3}$　　D.$4\sqrt{5}$

B　**解析**：设 $A(x_1,\log_2 x_1)$，$B(x_2,\log_2 x_2)$，

因为 AB 的中点坐标为 $(5,2)$，可得

$$\begin{cases}\dfrac{x_1+x_2}{2}=5,\\ \dfrac{\log_2 x_1+\log_2 x_2}{2}=2,\end{cases}$$

整理得 $\begin{cases}x_1+x_2=10,\\ x_1x_2=16,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=2,\\ x_2=8\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=8,\\ x_2=2.\end{cases}$

不妨设 $A(2,1)$，$B(8,3)$，所以 $|AB|=\sqrt{(2-8)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{10}$.

2. 以 $A(5,5)$，$B(1,4)$，$C(4,1)$ 为顶点的三角形是（　　）

A.直角三角形　　B.等腰三角形

C.等边三角形　　D.等腰直角三角形

B　**解析**：因为 $|AB|=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$，

$|BC|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}$，$|AC|=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$，

所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

3. 到点 $A(1,3)$，$B(-5,1)$ 的距离相等的动点 $P(x,y)$ 的坐标满足的方程是（　　）

A.$3x-y-8=0$　　B.$3x+y+4=0$

C.$3x-y+6=0$　　D.$3x+y+2=0$

B　**解析**：因为 $P(x,y)$ 到 A，B 距离相等，

则 $\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x+5)^2+(y-1)^2}$，

即 $3x+y+4=0$.

4. 若直线 $y=kx+b$ 经过点 $(1,8)$，且被两条坐标轴截得的线段长为 $5\sqrt{5}$，则 k 的所有可能取值之和为（　　）

A.14　　B.16　　C.18　　D.20

C　**解析**：由题意，因为直线 $y=kx+b$ 经过点 $(1,8)$，所以 $k+b=8$，则 $b=8-k$，所以直线方程为 $y=kx+8-k$.

令 $x=0$，则 $y=8-k$，

令 $y=0$，则 $x=1-\dfrac{8}{k}$.

由题意得 $(8-k)^2+\left(1-\dfrac{8}{k}\right)^2=(5\sqrt{5})^2$，

化简得 $k^4-16k^3-60k^2-16k+64=0$，

即 $(k+2)(k^3-18k^2-24k+32)=0$，

即 $(k+2)^2(k^2-20k+16)=0$，

解得 $k=-2$ 或 $k=10+2\sqrt{21}$ 或 $k=10-2\sqrt{21}$.

故 k 的所有可能取值之和为 18.

5. 已知点 $A(1,0)$，$B(0,1)$，$C(-2,-3)$，则 $\triangle ABC$ 的面积为（　　）

A.3　　B.2　　C.1　　D.$\dfrac{1}{2}$

A　**解析**：由题意得 $|AB|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$，$|AC|=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$，$|CB|=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$，

所以 $|AB|^2+|AC|^2=|CB|^2$，即 $AB\perp AC$，所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot|AC|=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=3$.

6. 已知 $A(a,-5)$ 与 $B(0,10)$ 两点间的距离是 17，则 a 的值为_____.

±8　**解析**：因为 $A(a,-5)$ 与 $B(0,10)$ 两点间的距离是 17，所以 $\sqrt{(a-0)^2+(-5-10)^2}=17$，解得 $a=\pm8$.

7. 已知直线 $l_1:x-my-2=0$ 与直线 $l_2:mx+y+2=0$ 交于点 Q，m 是实数，O 为坐标原点，则 $|OQ|$ 的最大值是_____.

$2\sqrt{2}$　**解析**：由$\begin{cases}x-my-2=0,\\mx+y+2=0,\end{cases}$

得$Q\left(\frac{2-2m}{1+m^2},\frac{-2-2m}{1+m^2}\right)$，

所以$|OQ|=\sqrt{\left(\frac{2-2m}{1+m^2}\right)^2+\left(\frac{-2-2m}{1+m^2}\right)^2}=\sqrt{\frac{8(1+m^2)}{(1+m^2)^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+m^2}}$.

若$|OQ|$最大，则$\sqrt{1+m^2}$最小，即$1+m^2$最小，

而$1+m^2\geqslant1$，当且仅当$m=0$时取等号，

此时$|OQ|_{\max}=2\sqrt{2}$.

所以$|OQ|$的最大值是$2\sqrt{2}$.

8.已知点$A(4,12)$，P为x轴上的一点，且点P与点A的距离等于13，则点P的坐标为_____.

$(9,0)$或$(-1,0)$　**解析**：因为点P在x轴上，设$P(x,0)$，因为点P与点A的距离等于13，

所以$\sqrt{(x-4)^2+(0-12)^2}=13$，解得$x=9$或$x=-1$.

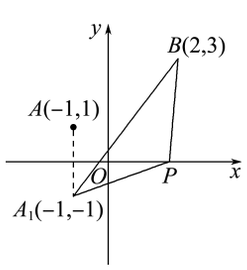
所以点P的坐标为$(9,0)$或$(-1,0)$.

能力提升

1.已知点$A(-1,1)$，$B(2,3)$，点P在x轴上，则$|PA|+|PB|$的最小值为　（　）

A.$2\sqrt{7}$　B.5　C.4　D.$\sqrt{13}$

B　**解析**：如图，点$A(-1,1)$关于x轴的对称点为$A_1(-1,-1)$，



则$|PA|+|PB|=|PA_1|+|PB|\geqslant|BA_1|$，当$B$，$P$，$A_1$三点共线时，等号成立.

又$|BA_1|=\sqrt{(2+1)^2+(3+1)^2}=5$，故$|PA|+|PB|$的最小值为5.

2.若光线从点$A(-3,5)$射到x轴上，经x轴反射以后经过点$B(2,10)$，则光线从A到B经过的路程为　（　）

A.$5\sqrt{2}$　B.$2\sqrt{5}$　C.$5\sqrt{10}$　D.$10\sqrt{5}$

C　**解析**：因为点A关于x轴的对称点为$A'(-3,-5)$，

所以$|A'B|=\sqrt{(-3-2)^2+(-5-10)^2}=5\sqrt{10}$.

由光的反射理论可知，此即为光线从A到B经过的路程.

3.已知在等腰直角三角形ABC中，$\angle C=90°$.若点A，C的坐标分别为$(0,4)$，$(3,3)$，则点B的坐标是　（　）

A.$(2,0)$或$(4,6)$　B.$(2,0)$或$(6,4)$

C.$(4,6)$　D.$(0,2)$

A　**解析**：设$B(x,y)$，直线AC，BC的斜率分别为k_{AC}，k_{BC}，由题意可得$\begin{cases}k_{AC}\cdot k_{BC}=-1,\\|BC|=|AC|,\end{cases}$即

$\begin{cases}\frac{3-4}{3-0}\cdot\frac{y-3}{x-3}=-1,\\\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(3-4)^2},\end{cases}$解得

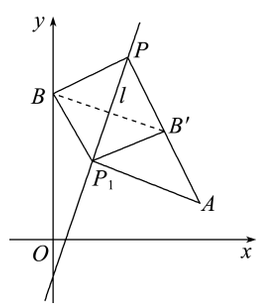
$\begin{cases}x=2,\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=4,\\y=6.\end{cases}$

所以点B的坐标是$(2,0)$或$(4,6)$.

4.已知点$A(4,1)$，$B(0,4)$，直线l：$3x-y-1=0$，点P在直线l上，则$\|PB|-|PA\|$的最大值为　（　）

A.$\sqrt{2}$　B.$2\sqrt{2}$　C.$\sqrt{5}$　D.2

C　**解析**：如图，作出点B关于直线l的对称点B'，连接AB'并延长交直线l于点P，



根据点关于直线的对称图形特征，知$|PB|=|PB'|$，$\|PB|-|PA\|=\|PB'|-|PA\|=|B'A|$.

在直线l上任取点P_1，连接P_1A，P_1B，P_1B'，则$|P_1B|=|P_1B'|$，$\|P_1B|-|P_1A\|=\|P_1B'|-|P_1A\|<|B'A|=||PB|-|PA||=|B'A|$，故$\|PB|-|PA\|_{\max}=|B'A|$.

不妨设点$B'(m,n)$，则有$\begin{cases}\frac{n-4}{m-0}=-\frac{1}{3},\\3\times\frac{m}{2}-\frac{n+4}{2}-1=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=3,\\n=3,\end{cases}$即$B'(3,3)$，

$\|PB|-|PA\|_{\max}=|B'A|=\sqrt{(4-3)^2+(1-3)^2}=\sqrt{5}$.

5.已知△ABC的三个顶点为$A(2,4)$,$B(3,-6)$,$C(5,2)$,则边BC上的中线的长为_____.

$2\sqrt{10}$　**解析**:设D为BC的中点,则过点A的中线为线段AD,易知$D\left(\frac{3+5}{2},\frac{-6+2}{2}\right)$,即$D(4,-2)$,所以$|AD|=\sqrt{(4-2)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{4+36}=2\sqrt{10}$.

6.已知点$A(-1,2)$,$B(3,4)$,P是x轴上一点,且$|PA|=|PB|$,则△PAB的面积为_____.

$\frac{15}{2}$　**解析**:设AB的中点坐标为$M(1,3)$,$k_{AB}=\frac{4-2}{3-(-1)}=\frac{1}{2}$,所以$AB$的中垂线方程为$y-3=-2(x-1)$,即$2x+y-5=0$.令$y=0$,则$x=\frac{5}{2}$,即点$P$的坐标为$\left(\frac{5}{2},0\right)$.又$|AB|=\sqrt{(-1-3)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{5}$,

点P到AB的距离为$|PM|=\sqrt{\left(1-\frac{5}{2}\right)^2+3^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$,

所以$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|PM|=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\frac{3\sqrt{5}}{2}=\frac{15}{2}$.

7.已知直线$l_1:2x+y-6=0$和点$A(1,-1)$,过点A作直线l_2与直线l_1相交于点B,且$|AB|=5$,则点B的坐标为_____,直线l_2的方程为_____.

$(1,4)$或$(5,-4)$　$x=1$或$3x+4y+1=0$　**解析**:根据题意,点B在直线$l_1:2x+y-6=0$上,设点B的坐标为$(t,6-2t)$.

又由$|AB|=5$,得$(t-1)^2+(7-2t)^2=25$,解得$t=1$或$t=5$.

当$t=1$时,点B的坐标为$(1,4)$,直线l_2的方程为$x=1$;

当$t=5$时,点B的坐标为$(5,-4)$,此时直线l_2的斜率$k=\frac{-4-(-1)}{5-1}=-\frac{3}{4}$,直线$l_2$的方程为$y+1=-\frac{3}{4}(x-1)$,即$3x+4y+1=0$.

故点B的坐标为$(1,4)$或$(5,-4)$,直线l_2的方程为$x=1$或$3x+4y+1=0$.

自我超越

1.已知直线$l_1:x-y+2=0$,$l_2:x-y-2=0$,直线l_3垂直于l_1,l_2,且垂足分别为A,B.若$C(-4,0)$,$D(4,0)$,则$|CA|+|AB|+|BD|$的最小值为_____.

$2\sqrt{10}+2\sqrt{2}$　**解析**:由直线l_3垂直于l_1,l_2,则设l_3的方程为$x+y=2m(m\in\mathbf{R})$.

由$\begin{cases}x+y=2m,\\x-y=-2,\end{cases}$得$A(m-1,m+1)$;由$\begin{cases}x+y=2m,\\x-y=2,\end{cases}$得$B(m+1,m-1)$.

由$C(-4,0)$,$D(4,0)$,得$|CA|+|AB|+|BD|=\sqrt{(m+3)^2+(m+1)^2}+2\sqrt{2}+\sqrt{(m-3)^2+(m-1)^2}$.

$\sqrt{(m+3)^2+(m+1)^2}+\sqrt{(m-3)^2+(m-1)^2}$表示动点$M(m,m)$到定点$E(-3,-1)$与$F(3,1)$的距离的和,

动点$M(m,m)$在直线$y=x$上,点$E(-3,-1)$与$F(3,1)$在直线$y=x$两侧,则有$|ME|+|MF|\geqslant|EF|=2\sqrt{10}$,

当且仅当M是直线$y=x$与线段$EF:y=\frac{1}{3}x(-3\leqslant x\leqslant3)$的交点,即原点时取"=",此时$m=0$,

所以$\sqrt{(m+3)^2+(m+1)^2}+\sqrt{(m-3)^2+(m-1)^2}$的最小值为$2\sqrt{10}$,

则$|CA|+|AB|+|BD|$的最小值为$2\sqrt{10}+2\sqrt{2}$.

2.若过定点A的直线$mx-y+1=0$与过定点B的直线$x+my-3=0$交于点P,则$|PA|^2+|PB|^2=$_____.

10　**解析**:由$y-1=mx$,得$A(0,1)$,

由$my=-(x-3)$,得$B(3,0)$.

当$m=0$时,两直线垂直,

当$m\neq0$时,两直线斜率之积等于-1,

所以直线$mx-y+1=0$和直线$x+my-3=0$垂直,

则$|PA|^2+|PB|^2=|AB|^2=(3-0)^2+(0-1)^2=10$.

2.3.3　点到直线的距离公式

学习任务目标

1.掌握点到直线的距离公式.
2.能用点到直线的距离公式求点到直线的距离.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点　点到直线的距离

点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $l:Ax+By+C=0$ 的距离 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

【概念辨析】

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)当点 $P(x_0,y_0)$ 在直线 $l:Ax+By+C=0$ 上时，点到直线的距离公式不适用.　（　×　）

(2)点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $y=kx+b$ 的距离为 $\dfrac{|kx_0+b|}{\sqrt{1+k^2}}$.　（　×　）

(3)直线外一点与直线上一点的距离的最小值是直线外一点到该直线的距离.　（　√　）

2.点(2,5)到直线 $y=2x$ 的距离为（　　）

A.$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　B.$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

C.$\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　　D.$\sqrt{5}$

A　**解析**：直线的方程 $y=2x$ 可化为 $2x-y=0$，所以点(2,5)到直线 $y=2x$ 的距离为 $\dfrac{|2\times2-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

3.思考并回答下列问题：

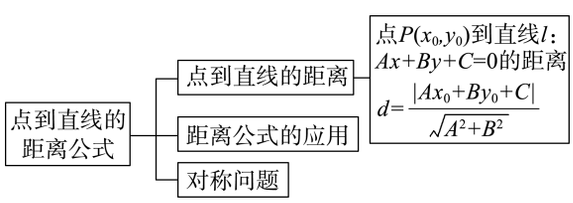
(1)在使用点到直线的距离公式时，对直线方程有什么要求？

提示：要求直线的方程为一般式.

(2)式子 $\dfrac{|a-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$ 的几何意义是什么？

提示：式子 $\dfrac{|a-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$ 的几何意义是点 $(a,1)$ 到直线 $x-y+1=0$ 的距离.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1　点到直线的距离

1.已知点 $A(a,2)(a>0)$ 到直线 $l:x-y+3=0$ 的距离为1，则 a 的值为_____.

$\sqrt{2}-1$　**解析**：由点到直线的距离公式得 $\dfrac{|a-2+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1$，解得 $a=\pm\sqrt{2}-1$.

因为 $a>0$，所以 $a=\sqrt{2}-1$.

2.（教材P77练习题1改编）求点 $P(3,-2)$ 到下列直线的距离：

(1)$y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{4}$；

(2)$y=6$；

(3)$x=4$.

解：(1)把方程 $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{4}$ 写成 $3x-4y+1=0$，由点到直线的距离公式得 $d=\dfrac{|3\times3-4\times(-2)+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{18}{5}$.

(2)因为直线 $y=6$ 平行于 x 轴，

所以 $d=|6-(-2)|=8$.

(3)因为直线 $x=4$ 平行于 y 轴，

所以 $d=|4-3|=1$.

【探究总结】

运用点到直线的距离公式的注意点

(1)直线方程应为一般式，若给出其他形式，要先化为一般式；

(2)点在直线上时，点到直线的距离为0，公式仍然适用；

(3)直线方程 $Ax+By+C=0$ 中，$A=0$ 或 $B=0$ 时公式也成立，但由于直线是特殊直线（与某一坐标轴垂直），故也可数形结合求解.

任务2 点到直线的距离公式的应用

探究活动

例1　设直线 $l_1:3x-y-1=0$ 与直线 $l_2:x+2y-5=0$ 的交点为 A，则点 A 到直线 $l:x+by+2+b=0$ 的距离的最大值为　　(　　)

A.4　　B.$\sqrt{10}$　　C.$3\sqrt{2}$　　D.$\sqrt{11}$

C　**解析**：联立 $\begin{cases}3x-y-1=0,\\x+2y-5=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$ 即交点为 $A(1,2)$，

所以点 A 到直线 $l:x+by+2+b=0$ 的距离 $d=\dfrac{|3+3b|}{\sqrt{1+b^2}}=\sqrt{9+\dfrac{18}{b+\dfrac{1}{b}}}$，当 $b>0$ 时，$d\leqslant\sqrt{9+\dfrac{18}{2\sqrt{b\cdot\dfrac{1}{b}}}}=3\sqrt{2}$，

当且仅当 $b=1$ 时取等号，

当 $b=0$ 时，$d=3<3\sqrt{2}$，

当 $b<0$ 时，$b+\dfrac{1}{b}\leqslant-2$，$0\leqslant d<3<3\sqrt{2}$，当且仅当 $b=-1$ 时取等号.

故点 A 到直线 $l:x+by+2+b=0$ 的距离的最大值为 $3\sqrt{2}$.

【探究总结】

1.一个点到过定点的直线的距离的最大值即这个点与定点之间的距离.

2.利用点到直线的距离公式，可以求未知量的值、范围.

应用迁移

(教材 P77 例 6 改编)(多选)已知△ABC 的三个顶点分别是 $A(1,3)$，$B(3,1)$，$C(-1,0)$，则下列结论正确的有　　(　　)

A.边 AB 所在直线的方程为 $x+y-4=0$

B.边 AB 的垂直平分线方程为 $y=x$

C.$|AB|=2$

D.△ABC 的面积是 5

ABD　**解析**：对于 A，由 $A(1,3)$，$B(3,1)$ 可得边 AB 所在直线的方程为 $y-3=\dfrac{1-3}{3-1}(x-1)$，化简得 $x+y-4=0$，故 A 正确；

对于 B，由 $A(1,3)$，$B(3,1)$ 可知 AB 的中点坐标为 $(2,2)$，且 $k_{AB}=\dfrac{1-3}{3-1}=-1$，所以 AB 的垂直平分线的斜率为 $k=1$，所以边 AB 的垂直平分线方程为 $y-2=1\times(x-2)$，化简得 $y=x$，故 B 正确；

对于 C，由 $A(1,3)$，$B(3,1)$ 可得 $|AB|=\sqrt{(1-3)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$，故 C 错误；

对于 D，由选项 A 和 C 可知，$|AB|=2\sqrt{2}$，边 AB 所在直线的方程为 $x+y-4=0$，又 $C(-1,0)$，所以点 C 到直线 AB 的距离为 $d=\dfrac{|-1+0-4|}{\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\dfrac{5\sqrt{2}}{2}=5$，故 D 正确.故选 ABD.

任务3 对称问题

探究活动

例2　若直线 $l_1:y=kx+4$ 与直线 l_2 关于点 $M(1,2)$ 对称，当 l_2 经过点 $N(0,-1)$ 时，求点 M 到直线 l_2 的距离.

解：由题可知，直线 $l_1:y=kx+4$ 恒过定点 $P(0,4)$，且 $P(0,4)$ 关于点 $M(1,2)$ 的对称点为 $(2,0)$，

所以点 $(2,0)$ 和 $N(0,-1)$ 都在直线 l_2 上.

由直线方程的两点式，可得直线 l_2 的方程为 $\dfrac{y-0}{-1-0}=\dfrac{x-2}{0-2}$，即 $x-2y-2=0$，

所以点 M 到直线 l_2 的距离 $d=\dfrac{|1-4-2|}{\sqrt{1+2^2}}=\sqrt{5}$.

[一题多思]

思考1.已知入射光线经过点 $M(-3,4)$，被直线 $l:x-y+3=0$ 反射，反射光线经过点 $N(2,6)$.求反射光线所在直线的方程.

解：设点 $M(-3,4)$ 关于直线 $l:x-y+3=0$ 的对称点为 $M'(a,b)$，

则反射光线所在直线过点 M'，

由 $\begin{cases}\dfrac{b-4}{a-(-3)}=-1,\\\dfrac{-3+a}{2}-\dfrac{b+4}{2}+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=0,\end{cases}$ 即 $M'(1,0)$.

又反射光线经过点 $N(2,6)$，

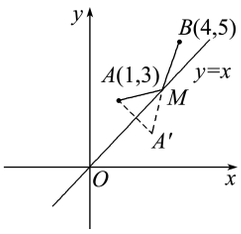
所以反射光线所在直线的方程为 $\dfrac{y-0}{6-0}=\dfrac{x-1}{2-1}$，即 $6x-y-6=0$.

思考2.已知两点 $A(1,3)$，$B(4,5)$，动点 M 在直线 $y=x$ 上运动.求 $|MA|+|MB|$ 的最小值.

解：设点 $A(1,3)$ 关于直线 $y=x$ 的对称点为 $A'(x,y)$，

则 $\begin{cases}\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{x+1}{2},\\\dfrac{y-3}{x-1}=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\y=1,\end{cases}$ 即 $A'(3,1)$.

根据题意画出图象，如图所示，



连接$A'B$，则$|A'B|$即为$|MA|+|MB|$的最小值，

所以$|A'B|=\sqrt{(3-4)^2+(1-5)^2}=\sqrt{17}$.

【探究总结】

1.若点$P(a,b)$，$P'(m,n)(a\neq m$且$b\neq n)$关于直线$l:Ax+By+C=0(A,B$均不为$0)$对称，则$\begin{cases}\dfrac{n-b}{m-a}=\dfrac{B}{A},\\ A\cdot\dfrac{m+a}{2}+B\cdot\dfrac{n+b}{2}+C=0.\end{cases}$

2.直线l_1关于直线l_2对称的问题，可以转化为直线l_1上的点关于直线l_2对称的问题.

应用迁移

1.点$A(2,1)$关于直线$x+y+3=0$对称的点的坐标为　（　　）

A.$(-2,-3)$

B.$(-3,-4)$

C.$(-4,-5)$

D.$(-5,-6)$

C　**解析：**设对称点的坐标为(a,b)，

由题意可得$\begin{cases}\dfrac{b-1}{a-2}\times(-1)=-1,\\ \dfrac{a+2}{2}+\dfrac{b+1}{2}+3=0,\end{cases}$得$\begin{cases}a=-4,\\ b=-5,\end{cases}$

所以对称点的坐标为$(-4,-5)$.

2.已知直线$l_1:y=\sqrt{2}x+2$，直线l_2与l_1关于直线$y=-x+1$对称，则直线l_2的方程为_____.

$x-\sqrt{2}y+\sqrt{2}+1=0$　**解析：**在l_1上取一点$P(0,2)$，

设点P关于直线$y=-x+1$的对称点为$P'(a,b)$，

则$\begin{cases}\dfrac{b-2}{a}=1,\\ \dfrac{b+2}{2}=-\dfrac{a}{2}+1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-1,\\ b=1,\end{cases}$故点$P'(-1,1)$.

由$\begin{cases}y=\sqrt{2}x+2,\\ y=-x+1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1-\sqrt{2},\\ y=\sqrt{2},\end{cases}$所以$l_1$与直线$y=-x+1$的交点坐标为$(1-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

易知直线l_2过点$(1-\sqrt{2},\sqrt{2})$和$P'(-1,1)$，

所以直线l_2的斜率为$\dfrac{\sqrt{2}-1}{-\sqrt{2}+2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以直线l_2的方程为$y-1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+1)$，

即$x-\sqrt{2}y+\sqrt{2}+1=0$.

课后素养评价（十九）

基础落实

1.点$(2,1)$到直线$l:x-2y+2=0$的距离为　（　　）

A.$\dfrac{2}{5}$　　B.$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　C.$\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$　　D.0

B　**解析：**由点到直线的距离公式得$d=\dfrac{|2-2\times1+2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

2.（多选）若点$A(a,1)$到直线$3x-4y=1$的距离为1，则a的值可能为　（　　）

A.0　　B.$\dfrac{10}{3}$　　C.5　　D.$-\dfrac{10}{3}$

AB　**解析：**点$A(a,1)$到直线$3x-4y=1$的距离为$\dfrac{|3a-4-1|}{5}=1$，即$\dfrac{|3a-5|}{5}=1$，解得$a=0$或$a=\dfrac{10}{3}$.

3.已知点$P(1+t,1+3t)$到直线$l:y=2x-1$的距离为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，则点P的坐标为　（　　）

A.$(0,-2)$　　B.$(2,4)$

C.$(0,-2)$或$(2,4)$　　D.$(1,1)$

C　**解析：**直线$l:y=2x-1$可化为$2x-y-1=0$，

由题意得$\dfrac{|2(1+t)-(1+3t)-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，整理得$|t|=1$，所以$t=1$或$t=-1$.

当$t=1$时，点P的坐标为$(2,4)$；

当$t=-1$时，点P的坐标为$(0,-2)$.故选C.

4.若$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，点$(1,\cos\theta)$到直线$x\sin\theta+y\cos\theta-1=0$的距离是$\dfrac{1}{4}$，则这条直线的斜率是_____.

$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　**解析**：由题意结合点到直线的距离公式可得

$\frac{1}{4}=\frac{|\sin\theta+\cos^2\theta-1|}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=|\sin\theta-\sin^2\theta|$，

又 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，故 $0<\sin\theta<1$，所以 $|\sin\theta-\sin^2\theta|=\sin\theta-\sin^2\theta=\frac{1}{4}$，

所以 $\sin^2\theta-\sin\theta+\frac{1}{4}=0$，解得 $\sin\theta=\frac{1}{2}$. 又 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，故 $\theta=\frac{\pi}{6}$，所以 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则这条直线的斜率 $k=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. 已知点 $P(3,4)$ 到直线 l 的距离为 5，且直线 l 在两条坐标轴上的截距相等，则满足条件的直线共有_____条.

3　**解析**：当截距不为 0 时，由题意设所求直线方程为 $x+y=a(a\neq0)$，则 $\frac{|7-a|}{\sqrt{2}}=5$，解得 $a=7\pm5\sqrt{2}$，此时满足题意的直线方程为 $x+y=7+5\sqrt{2}$ 或 $x+y=7-5\sqrt{2}$；

当截距为 0 时，设原点为 $O(0,0)$，则 $|PO|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$k_{PO}=\frac{4}{3}$，

所以此时满足题意的直线方程是 $y=-\frac{3}{4}x$.

综上所述，满足条件的直线共有 3 条.

6. 已知直线 $(1+k)x+y-k-2=0$ 恒过定点 P，则点 P 到直线 $x-y-2=0$ 的距离为_____.

$\sqrt{2}$　**解析**：直线方程 $(1+k)x+y-k-2=0$ 可化为 $k(x-1)+(x+y-2)=0$，

令 $\begin{cases}x-1=0,\\x+y-2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$

所以此直线恒过点 $P(1,1)$.

由点到直线的距离公式，得点 P 到直线 $x-y-2=0$ 的距离 $d=\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$.

能力提升

1.（多选）下列过点 $(2,2)$ 的直线中，$A(0,-2)$，$B(8,2)$ 两点到直线的距离相等的有（　　）

A. $x+y-4=0$　　B. $x=2$

C. $2x+y-6=0$　　D. $x-2y+2=0$

AD　**解析**：显然斜率不存在时 $x=2$ 不符合题意. 设 $l:y-2=k(x-2)$，即 $kx-y+2-2k=0$. 由题意可知 $\frac{|4-2k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|6k|}{\sqrt{k^2+1}}$，解得 $k=\frac{1}{2}$ 或 $k=-1$.

当 $k=\frac{1}{2}$ 时，因为 $k_{AB}=\frac{-2-2}{0-8}=\frac{1}{2}$，所以 $l\parallel AB$，直线 l 的方程为 $x-2y+2=0$；当 $k=-1$ 时，l 过 AB 的中点 $(4,0)$，方程为 $x+y-4=0$.

2. 已知 $x-2y+3=0$，则 $(x-2)^2+y^2$ 的最小值为（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

D　**解析**：因为 $(x-2)^2+y^2=(\sqrt{(x-2)^2+y^2})^2$，所以问题可转化为求直线 $x-2y+3=0$ 上的点 (x,y) 到点 $(2,0)$ 的距离的最小值的平方，

故求点 $(2,0)$ 到直线 $x-2y+3=0$ 的距离即可.

因为距离 $d=\frac{|2-0+3|}{\sqrt{1+4}}=\sqrt{5}$，

所以 $(x-2)^2+y^2=(\sqrt{(x-2)^2+y^2})^2=(\sqrt{5})^2=5$.

3. 已知光线从点 $A(-1,2)$ 射出，经直线 $y=-x$ 反射，且反射光线过点 $B(4,-2)$，则入射光线所在直线的方程是（　　）

A. $2x+y=0$　　B. $2x+y+4=0$

C. $x-2y+5=0$　　D. $x+2y-3=0$

A　**解析**：设点 $B(4,-2)$ 关于直线 $y=-x$ 的对称点为 $B'(x,y)$，

则入射光线所在直线经过点 B'，

且 $\begin{cases}\frac{x+4}{2}+\frac{y-2}{2}=0,\\\frac{y+2}{x-4}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=-4,\end{cases}$ 即 $B'(2,-4)$.

又入射光线经过点 $A(-1,2)$，所以入射光线所在直线的方程是 $\frac{y-2}{-4-2}=\frac{x+1}{2+1}$，即 $2x+y=0$.

4. 已知直线 $l:kx+y+2-k=0$ 过定点 M，点 $P(x,y)$ 在直线 $2x-y+1=0$ 上，则 $|MP|$ 的最小值是（　　）

A. 5　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

B　**解析**：由 $kx+y+2-k=0$，得 $y+2=k(1-x)$，所以直线 l 过定点 $M(1,-2)$.

由题意可知，$|MP|$ 的最小值就是点 M 到直线 $2x-y+1=0$ 的距离.

由点到直线的距离公式可得 $|MP|_{\min}=\frac{|2+2+1|}{\sqrt{4+1}}=\sqrt{5}$.

5. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(3,2)$，$B(-1,5)$，点 C 在直

线 $3x-y+3=0$ 上.若 $\triangle ABC$ 的面积为 10，则点 C 的坐标为_____.

$(-1,0)$ 或 $\left(\frac{5}{3},8\right)$　**解析**：设点 C 到直线 AB 的距离为 h，则 $\frac{1}{2}|AB|\cdot h=10$. 又 $|AB|=\sqrt{(3+1)^2+(2-5)^2}=5$，所以 $h=4$. 又直线 AB 的方程为 $\frac{y-5}{2-5}=\frac{x+1}{3+1}$，即 $3x+4y-17=0$，设 $C(x_0,y_0)$，则 $\frac{|3x_0+4y_0-17|}{5}=4$①. 又点 C 在直线 $3x-y+3=0$ 上，所以 $3x_0-y_0+3=0$②. 由①②联立方程组解得 $\begin{cases}x_0=-1,\\y_0=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=\frac{5}{3},\\y_0=8.\end{cases}$ 所以点 C 的坐标为 $(-1,0)$ 或 $\left(\frac{5}{3},8\right)$.

6. 已知直线 $l:x-2y+8=0$ 和点 $A(2,0)$，$B(-2,-4)$，在直线 l 上确定一点 P，使 $|PA|+|PB|$ 的值最小.

解：设点 A 关于直线 l 的对称点为 $A'(m,n)$，

则 $\begin{cases}\frac{n-0}{m-2}=-2,\\\frac{m+2}{2}-2\cdot\frac{n+0}{2}+8=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-2,\\n=8,\end{cases}$

所以点 A' 的坐标为 $(-2,8)$.

因为 P 为直线 l 上的一点，且 A,B 在直线 l 的同侧，所以当 B,P,A' 三点共线时，$|PA|+|PB|$ 取得最小值，为 $|A'B|$，点 P 即是直线 $A'B$ 与直线 l 的交点，则 $\begin{cases}x=-2,\\x-2y+8=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-2,\\y=3,\end{cases}$

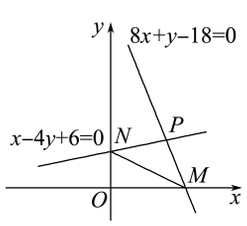
故所求点 P 的坐标为 $(-2,3)$.

自我超越

1. 直线 $x-4y+6=0$ 和 $8x+y-18=0$ 与两条坐标轴围成的四边形的面积为_____.

$\frac{15}{4}$　**解析**：直线 $8x+y-18=0$ 与 x 轴的交点为 $M\left(\frac{9}{4},0\right)$，直线 $x-4y+6=0$ 与 y 轴的交点为 $N\left(0,\frac{3}{2}\right)$，则 $|MN|=\sqrt{\left(\frac{9}{4}-0\right)^2+\left(0-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{13}}{4}$.

如图所示，



由两点式可得直线 MN 的方程为 $\frac{y-\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}}=\frac{x}{\frac{9}{4}}$，即 $4x+6y-9=0$.

由 $\begin{cases}x-4y+6=0,\\8x+y-18=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=2,\end{cases}$

所以两直线的交点 $P(2,2)$.

根据点到直线的距离公式可得点 P 到直线 MN 的距离为

$$d=\frac{|4\times2+6\times2-9|}{\sqrt{4^2+6^2}}=\frac{11}{\sqrt{52}}=\frac{11\sqrt{13}}{26},$$

故 $S_{四边形OMPN}=S_{\triangle OMN}+S_{\triangle PMN}$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{9}{4}\times\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{13}}{4}\times\frac{11\sqrt{13}}{26}=\frac{15}{4}.$$

2. 已知两条直线 $l_1:x-y+4=0$，$l_2:x-4y-2=0$.

(1) 求过两条直线的交点，且垂直于直线 $3x+4y-5=0$ 的直线的方程；

(2) 已知 $A(-1,1)$，$B(0,2)$ 两点，动点 P 在直线 l_1 上运动，求 $|PA|+|PB|$ 的最小值.

解：(1) 设所求直线方程为 $x-y+4+\lambda(x-4y-2)=0$，即 $(1+\lambda)x-(1+4\lambda)y+4-2\lambda=0$，

由其与直线 $3x+4y-5=0$ 垂直可得 $3(1+\lambda)-4(1+4\lambda)=0$，解得 $\lambda=-\frac{1}{13}$，

所以所求直线方程为 $\left(1-\frac{1}{13}\right)x-\left(1-\frac{4}{13}\right)y+4+\frac{2}{13}=0$，化简得 $4x-3y+18=0$.

(2) 因为 $-1-1+4>0$，$0-2+4>0$，所以两点 $A(-1,1)$，$B(0,2)$ 在直线 l_1 同侧.

由已知可知 $k_{l_1}=1$，

如图，设点 A 关于直线 l_1 的对称点为 $A'(x_0,y_0)$，

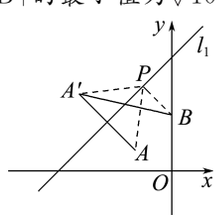
则 $\begin{cases}\frac{1-y_0}{-1-x_0}=-1,\\\frac{-1+x_0}{2}-\frac{1+y_0}{2}+4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=-3,\\y_0=3,\end{cases}$

即 $A'(-3,3)$.

因为 $|PA|=|PA'|$，所以 $|PA|+|PB|=|PA'|+|PB|\geqslant|A'B|=\sqrt{(-3-0)^2+(3-2)^2}=\sqrt{10}$，

当且仅当动点 P 位于 $A'B$ 与 l_1 交点时取等号，

所以 $|PA|+|PB|$ 的最小值为 $\sqrt{10}$.



2.3.4　两条平行直线间的距离

学习任务目标

1.理解两条平行直线间的距离公式的推导.
2.会求两条平行直线间的距离.
3.通过两条平行直线间的距离公式的推导,培养运用等价转化、数形结合等数学思想方法解决问题的能力.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点　两条平行直线间的距离

(1)概念:夹在两条平行直线间的公垂线段的长就是这两条平行直线间的距离.

(2)求法:将两条平行直线间的距离转化为点到直线的距离.

(3)公式:两条平行直线 $l_1:Ax+By+C_1=0$ 与 $l_2:Ax+By+C_2=0$ 间的距离为 $d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)当两条直线平行时,一条直线上任一点到另一条直线的距离都相等.　(　√　)

(2)在用两条平行直线间的距离公式时,两个直线方程中 x,y 的系数对应成比例即可.　(　×　)

2.两条平行直线 $5x+12y+3=0$ 与 $10x+24y+5=0$ 之间的距离是　(　　)

A.$\dfrac{2}{13}$　　B.$\dfrac{1}{13}$

C.$\dfrac{1}{26}$　　D.$\dfrac{5}{26}$

C　**解析**:$5x+12y+3=0$ 可化为 $10x+24y+6=0$.

由两条平行直线间的距离公式,可得 $d=\dfrac{|6-5|}{\sqrt{10^2+24^2}}=\dfrac{1}{26}$.

3.思考并回答下列问题:

(1)在应用两条平行直线间的距离公式时,对直线方程有什么要求?

提示:两条平行直线的方程都是一般式,且 x,y 的系数应分别相等.

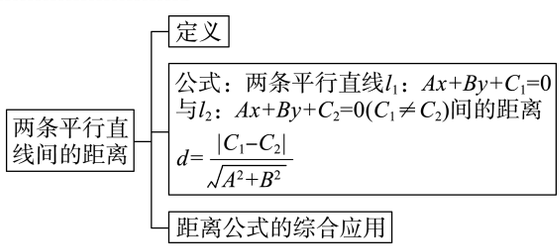
(2)如果过点 $P(x_0,y_0)$ 的直线 l' 与 $l:Ax+By+C=0$ 平行,那么点 P 到 l 的距离和 l' 与 l 之间的距离相等吗?

提示:相等.两条平行直线间的距离处处相等.

(3)怎样理解两条平行直线间的距离公式?

提示:公式 $d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 可以理解为坐标原点到两条平行直线间的距离之差(同侧时)或之和(异侧时).

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 两条平行直线间的距离

探究活动

例1　求两条平行直线 $l_1:3x+4y=10$ 与 $l_2:6x+8y=15$ 间的距离.

解:(方法一)在 l_1 上任取一点 $A(2,1)$,则点 A 到 l_2 的距离即为 l_1 与 l_2 间的距离.

又 l_2 的方程可化为 $6x+8y-15=0$,

所以 $d=\dfrac{|2\times6+8\times1-15|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$.

(方法二)l_1 可化为 $3x+4y-10=0$,

l_2 可化为 $3x+4y-\dfrac{15}{2}=0$,

所以 l_1 与 l_2 间的距离 $d=\dfrac{\left|-10-\left(-\dfrac{15}{2}\right)\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{\dfrac{5}{2}}{5}=\dfrac{1}{2}$.

[一题多思]

思考1.与直线 $3x+4y=10$ 平行的直线的方程可以设为什么形式?

解:可设为 $3x+4y=m(m\neq10)$.

思考2.若直线 l 与本例中直线 l_1 和 l_2 的距离相等,求直线 l 的方程.

解:设直线 l 的方程为 $3x+4y=m\left(m\neq10\text{ 且 }m\neq\dfrac{15}{2}\right)$.

由题意,可得 $\dfrac{|10-m|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{\left|\dfrac{15}{2}-m\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}$,

解得 $m=\dfrac{35}{4}$,

则直线 l 的方程为 $3x+4y=\dfrac{35}{4}$,即 $12x+16y-35=0$.

【探究总结】

求两条平行直线间的距离的两种思路

(1)将两条平行直线间的距离转化为一条直线上任意一点到另一条直线的距离；

(2)直接利用两条平行直线间的距离公式 $d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，但必须注意两个直线方程中 x，y 的系数对应相等.

应用迁移

1.已知直线 $3x+2y-3=0$ 和 $6x+my+1=0$ 互相平行，则它们之间的距离是　　(　　)

A.4　　B.$\frac{5\sqrt{13}}{13}$　　C.$\frac{5\sqrt{13}}{26}$　　D.$\frac{7\sqrt{13}}{26}$

D　**解析**：因为 $3x+2y-3=0$ 和 $6x+my+1=0$ 互相平行，

所以 $3m=2\times6$，解得 $m=4$.

直线 $6x+4y+1=0$ 可以转化为 $3x+2y+\frac{1}{2}=0$.

由两条平行直线间的距离公式可得 $d=\frac{\left|\frac{1}{2}-(-3)\right|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{\frac{7}{2}}{\sqrt{13}}=\frac{7\sqrt{13}}{26}$.

2.(教材 P79 练习题 2 改编)若直线 $l_1:ax+2y-6=0$ 与直线 $l_2:x+(a-1)y-a-1=0$ 平行，则直线 l_1 与 l_2 之间的距离为_____.

$\frac{6\sqrt{5}}{5}$　**解析**：由于 l_1 与 l_2 平行，则 $a(a-1)=2$，即 $a^2-a-2=0$，解得 $a=-1$ 或 $a=2$.

当 $a=2$ 时，两直线方程分别为 $2x+2y-6=0$，$x+y-3=0$，此时两直线重合，不符合题意；

当 $a=-1$ 时，两直线方程分别为 $x-2y+6=0$，$x-2y=0$，此时两直线平行，符合题意.

综上所述，$a=-1$，两直线方程分别为 $x-2y+6=0$，$x-2y=0$，

所以直线 l_1 与 l_2 之间的距离为 $d=\frac{|-6|}{\sqrt{1+(-2)^2}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

任务2 两条平行直线间的距离公式的应用

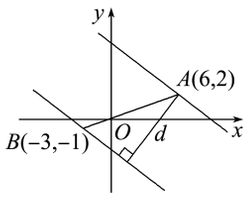
探究活动

例 2　两条互相平行的直线分别过点 $A(6,2)$ 和 $B(-3,-1)$，并且各自绕着点 A，B 旋转，已知两条平行直线间的距离为 d.

(1)求 d 的取值范围；

(2)当 d 取最大值时，求两条直线的方程.

解：(1)如图，显然有 $0<d\leqslant|AB|$.



而 $|AB|=\sqrt{(6+3)^2+(2+1)^2}=3\sqrt{10}$.

所以 d 的取值范围为 $(0,3\sqrt{10}]$.

(2)由第(1)题图可知，当 d 取最大值时，两条平行直线与直线 AB 垂直，

又 $k_{AB}=\frac{2-(-1)}{6-(-3)}=\frac{1}{3}$，

所以两条平行直线的斜率为 -3.

故所求直线的方程为

$y-2=-3(x-6)$ 和 $y+1=-3(x+3)$，

即 $3x+y-20=0$ 和 $3x+y+10=0$.

【探究总结】

常见的距离公式应用问题的解题策略

(1)求最值问题：

①求点到直线的距离的最大值，可转化为求两点间的距离；

②求代数式的最值，可根据所求式子的几何意义，将其转化为两点间的距离或点到直线的距离；

③利用距离公式求最值时，可将问题转化为二次函数的最值问题.

(2)求参数问题：利用距离公式建立关于参数的方程或方程组，通过解方程或方程组求参数的值.

(3)求直线方程的问题：立足于确定直线的几何要素，利用直线方程的各种形式，结合直线间的位置关系，巧设直线方程，在此基础上借助距离公式求解.

应用迁移

1.与两平行线 $l_1:3x+2y-6=0$，$l_2:6x+4y-3=0$ 等距离的直线的方程为　　(　　)

A.$12x+8y-15=0$

B.$9x+6y-5=0$

C.$12x+8y-15=0$ 或 $9x+6y-5=0$

D.$6x+4y-15=0$

A　**解析**：设与两直线平行的直线方程为 $6x+4y+m=0$，

又 $l_1:6x+4y-12=0$，$l_2:6x+4y-3=0$，则 $\frac{|m-(-12)|}{\sqrt{6^2+4^2}}=\frac{|m-(-3)|}{\sqrt{6^2+4^2}}$，

即 $|m+12|=|m+3|$，故 $m+12=m+3$ 或 $m+12+m+3=0$，解得 $m=-\frac{15}{2}$，

所以所求直线方程为 $6x+4y-\frac{15}{2}=0$，即 $12x+8y-15=0$.

2.已知直线 l 过点 $A(2,-3)$.

(1)若直线 l 在 y 轴上的截距为 3，求直线 l 的方程；

(2)若直线 l 与直线 $2x+y+b=0(b<0)$ 平行，且两条平行直线间的距离为 $\sqrt{5}$，求 b 的值.

解：(1)由题意可知，直线 l 过点 $A(2,-3)$ 和 $(0,3)$，

所以直线 l 的斜率 $k=\dfrac{-3-3}{2-0}=-3$，

所以所求直线 l 的方程为 $y=-3x+3$，即 $3x+y-3=0$.

(2)设直线 l 的方程为 $2x+y+n=0$，

则 $4-3+n=0$，得 $n=-1$，

即直线 l 的方程为 $2x+y-1=0$.

因为直线 l 与直线 $2x+y+b=0$ 间的距离为 $\sqrt{5}$，

所以 $\dfrac{|b+1|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，即 $|b+1|=5$.

又 $b<0$，所以 $b=-6$.

课后素养评价(二十)

基础落实

1.若直线 $2x+3y+1=0$ 与 $4x+my+7=0$ 平行，则它们之间的距离为 (　　)

A.4　　B.$\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$　　C.$\dfrac{5\sqrt{13}}{26}$　　D.$\dfrac{5\sqrt{10}}{20}$

C　**解析**：由题意得 $2m-3\times4=0$，所以 $m=6$.

故两直线 $2x+3y+1=0$ 与 $4x+6y+7=0$ 即 $2x+3y+\dfrac{7}{2}=0$ 间的距离 $d=\dfrac{\left|1-\dfrac{7}{2}\right|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\dfrac{5\sqrt{13}}{26}$.

2.(多选)若直线 l_1 与直线 $l:3x-4y-20=0$ 平行且距离为 3，则直线 l_1 的方程可能为 (　　)

A.$3x-4y-5=0$　　B.$3x-4y-35=0$

C.$3x-4y-23=0$　　D.$3x-4y-17=0$

AB　**解析**：设直线 l_1 的方程为 $3x-4y+m=0$.

由题意得 $\dfrac{|m+20|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$，

解得 $m=-5$ 或 $m=-35$，

所以直线 l_1 的方程为 $3x-4y-5=0$ 或 $3x-4y-35=0$.

3.已知 l_1,l_2 是分别经过 $A(1,1),B(0,-1)$ 两点的两条平行直线，则当 l_1 与 l_2 间的距离最大时，直线 l_1 的方程为 (　　)

A.$x+2y-3=0$　　B.$x-2y-3=0$

C.$2x-y-1=0$　　D.$2x-y-3=0$

A　**解析**：当两条平行直线与 AB 垂直时，两条平行直线间的距离最大，又 $k_{AB}=\dfrac{1-(-1)}{1-0}=2$，所以 $k_{l_1}=-\dfrac{1}{2}$.

又 l_1 过点 $A(1,1)$，所以 l_1 的方程为 $y-1=-\dfrac{1}{2}(x-1)$，即 $x+2y-3=0$.

4.若直线 $x+3y-9=0$ 与直线 $x+3y-C=0$ 间的距离为 $\sqrt{10}$，则 C 的值为 (　　)

A.-1　　B.19

C.-1 或 19　　D.1 或 -19

C　**解析**：由两平行线间的距离公式，得

$d=\dfrac{|-C-(-9)|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}$，

所以 $|9-C|=10$，解得 $C=-1$ 或 $C=19$.

5.已知点 A,B 分别是直线 $l_1:2x+y-2=0$ 与直线 $l_2:4x+2y+1=0$ 上的点，则 $|AB|$ 的最小值为_____.

$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　**解析**：由题意可知直线 $l_1:2x+y-2=0$，直线 $l_2:4x+2y+1=0$，即 $l_2:2x+y+\dfrac{1}{2}=0$，

则两直线斜率均为 -2，且两直线不重合，

所以 $l_1\parallel l_2$.

所以当 $AB\perp l_1$ 且 $AB\perp l_2$ 时，$|AB|$ 有最小值，

其最小值为平行直线 l_1 与 l_2 间的距离，

所以 $|AB|_{\min}=\dfrac{\left|-2-\dfrac{1}{2}\right|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

能力提升

1.到直线 $3x+2y-4=0$ 和 $3x+2y+8=0$ 的距离相等的点的轨迹是 (　　)

A.直线 $3x+2y+2=0$

B.直线 $3x+2y-2=0$

C.直线 $3x+2y\pm2=0$

D.以上都不对

A　**解析**：设满足题意的点的坐标为 (x,y)，则 $\dfrac{|3x+2y-4|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\dfrac{|3x+2y+8|}{\sqrt{3^2+2^2}}$，所以 $|3x+2y-4|=|3x+2y+8|$.将 $3x+2y$ 看成一个整体得 $3x+2y+2=0$.

2.已知直线 $l_1:3x-2y-6=0,l_2:3x-2y+8=0$，则直线 l_1 关于直线 l_2 对称的直线的方程为 (　　)

A.$3x-2y+24=0$　　B.$3x-2y-10=0$

C.$3x-2y-20=0$　　D.$3x-2y+22=0$

D　**解析**：设所求直线方程为 $3x-2y+C=0(C\neq-6)$，

由题意可知，所求直线到直线 l_2 的距离等于直线

l_1，l_2 间的距离，

所以$\dfrac{|C-8|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\dfrac{|-6-8|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}$.

因为 $C\neq-6$，所以 $C=22$.

因此，所求直线的方程为 $3x-2y+22=0$.

3.（多选）已知两条平行直线 $l_1:x+\sqrt{3}y+1=0$，$l_2:x+\sqrt{3}y-3=0$.若直线 l 被 l_1，l_2 截得的线段长为 $2\sqrt{2}$，则直线 l 的倾斜角可能为　　（　　）

A.15°　　B.75°　　C.105°　　D.165°

AC　**解析**：直线 l 被 l_1，l_2 截得的线段长为 $2\sqrt{2}$，因为两平行直线间的距离 $d=\dfrac{|1-(-3)|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=2$，所以直线 l 和 l_1，l_2 的夹角为 45°.

又直线 l_1，l_2 的倾斜角为 150°，所以直线 l 的倾斜角可能是 15°或 105°.

4.已知直线 $l_1:2x-y+a=0$，$l_2:4x-2y-1=0$.若直线 l_1 与 l_2 间的距离为$\dfrac{7\sqrt{5}}{10}$，且直线 l_1 不经过第四象限，则 $a=$_____.

3　**解析**：由直线 l_1，l_2 的方程可知，直线 $l_1\parallel l_2$，且 $l_1:2x-y+a=0$，即 $4x-2y+2a=0$，$l_2:4x-2y-1=0$，由题意得，l_1 与 l_2 间的距离为 $\dfrac{|-1-2a|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}=\dfrac{7\sqrt{5}}{10}$，整理得$\dfrac{|2a+1|}{2\sqrt{5}}=\dfrac{7\sqrt{5}}{10}$，解得 $a=3$ 或 $a=-4$.因为直线 l_1 不经过第四象限，所以 $a\geqslant0$，所以 $a=3$.

5.已知直线 $l_1:mx+y+2m-3=0$，$l_2:mx+y-m+1=0$，则直线 l_1 与 l_2 之间的距离的最大值为_____.

5　**解析**：直线 $l_1:mx+y+2m-3=0$ 化简为 $m(x+2)+y-3=0$，

令 $x+2=0$ 且 $y-3=0$，解得 $x=-2$，$y=3$，

所以直线 l_1 过定点 $A(-2,3)$.

直线 $l_2:mx+y-m+1=0$ 化简为 $m(x-1)+y+1=0$，

令 $x-1=0$ 且 $y+1=0$，解得 $x=1$，$y=-1$，

所以直线 l_2 过定点 $B(1,-1)$.

当 AB 与直线 l_1，l_2 垂直时，直线 l_1，l_2 之间的距离最大，

且最大值为 $|AB|=\sqrt{(-2-1)^2+(3+1)^2}=5$.

自我超越

已知三条直线 $l_1:2x-y+a=0(a>0)$，$l_2:-4x+2y+1=0$ 和 $l_3:x+y-1=0$，且 l_1 与 l_2 之间的距离是$\dfrac{7\sqrt{5}}{10}$.

(1)求 a 的值.

(2)能否找到一点 P，同时满足下列三个条件？

①P 是第一象限的点；②点 P 到 l_1 的距离是点 P 到 l_2 的距离的$\dfrac{1}{2}$；③点 P 到 l_1 的距离与点 P 到 l_3 的距离之比是$\sqrt{2}:\sqrt{5}$.若能，求点 P 的坐标；若不能，请说明理由.

解：(1)因为 l_2 可化为 $2x-y-\dfrac{1}{2}=0$，所以 l_1 与 l_2 之间的距离为 $d=\dfrac{\left|a-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{7\sqrt{5}}{10}$.

因为 $a>0$，所以 $a=3$.

(2)设存在点 $P(x_0,y_0)$ 满足条件，则点 P 在与 l_1，l_2 平行的直线 $l':2x-y+c=0$ 上，

且$\dfrac{|c-3|}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\left|c+\dfrac{1}{2}\right|}{\sqrt{5}}$，得 $c=\dfrac{13}{2}$或 $c=\dfrac{11}{6}$，

所以满足条件②的点满足 $2x_0-y_0+\dfrac{13}{2}=0$ 或 $2x_0-y_0+\dfrac{11}{6}=0$.

若点 P 满足条件③，由点到直线的距离公式，得$\dfrac{|2x_0-y_0+3|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{|x_0+y_0-1|}{\sqrt{2}}$，即 $|2x_0-y_0+3|=|x_0+y_0-1|$，

所以 $x_0-2y_0+4=0$ 或 $3x_0+2=0$.因为点 P 在第一象限，所以 $3x_0+2=0$ 不成立.

联立方程$\begin{cases}2x_0-y_0+\dfrac{13}{2}=0,\\ x_0-2y_0+4=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x_0=-3,\\ y_0=\dfrac{1}{2}\end{cases}$（舍去），

联立方程$\begin{cases}2x_0-y_0+\dfrac{11}{6}=0,\\ x_0-2y_0+4=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x_0=\dfrac{1}{9},\\ y_0=\dfrac{37}{18}.\end{cases}$

所以 $P\left(\dfrac{1}{9},\dfrac{37}{18}\right)$即为同时满足条件的点.

2.4　圆的方程

2.4.1　圆的标准方程

学习任务目标

1.掌握圆的标准方程的推导过程.
2.能根据圆心坐标、半径熟练地写出圆的标准方程.
3.能根据圆的标准方程熟练地写出圆心坐标和半径.
4.会根据已知条件求出圆的标准方程,会判断点与圆的位置关系.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　圆的标准方程

(1)圆的定义:平面上到定点的距离等于定长的点的集合叫做圆,定点称为圆心,定长称为圆的半径.

(2)确定圆的要素是圆心坐标和半径.

(3)圆的标准方程:圆心为 $A(a,b)$,半径为 r 的圆的标准方程是 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

当 $a=b=0$ 时,方程为 $x^2+y^2=r^2$,表示圆心在原点,半径为 r 的圆.

知识点二　点与圆的位置关系

圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,圆心为 $A(a,b)$,半径为 r.设所给点为 $M(x_0,y_0)$,则点 M 与圆的位置关系如下表所示.

位置关系	判断方法	
	几何法	代数法
点在圆上	$\|MA\|=r$	$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$
点在圆内	$\|MA\|<r$	$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2$
点在圆外	$\|MA\|>r$	$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2$

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打"√",错误的打"×").

(1)方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=m^2$ 一定表示圆.　(　×　)

(2)圆 $(x+1)^2+(y+2)^2=4$ 的圆心坐标是(1,2),半径是4.　(　×　)

(3)若圆的标准方程是 $(x+m)^2+(y+n)^2=a^2(a\neq0)$,则圆的半径一定是 a.　(　×　)

2.圆心是点(−3,4),半径为5的圆的标准方程为(　D　)

A.$(x-3)^2+(y+4)^2=5$

B.$(x-3)^2+(y+4)^2=25$

C.$(x+3)^2+(y-4)^2=5$

D.$(x+3)^2+(y-4)^2=25$

3.思考并回答下列问题:

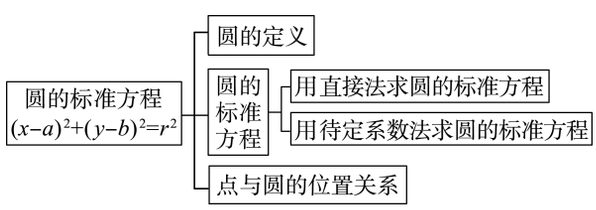
(1)确定圆的要素与圆有怎样的关系?

提示:圆心坐标确定圆的位置,半径确定圆的大小.

(2)点 $M(x_0,y_0)$ 在圆 $x^2+y^2=r^2$ 内的条件是什么?在圆 $x^2+y^2=r^2$ 外的条件又是什么?

提示:点 M 在圆 $x^2+y^2=r^2$ 内时,$|OM|<|r|$(O 为坐标原点),点 M 在圆 $x^2+y^2=r^2$ 外时,$|OM|>|r|$.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1　圆的标准方程的有关概念

1.已知圆的方程是 $(x-1)^2+(y-3)^2=4$,其圆心和半径分别是(　　)

A.(−1,−3),2　　B.(1,3),4

C.(1,3),2　　D.(−1,−3),4

C　**解析**:因为圆的标准方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的圆心为 (a,b),半径为 r,所以圆 $(x-1)^2+(y-3)^2=4$ 的圆心和半径分别为(1,3),2.故选C.

2.圆 $C:(x-2)^2+(y+1)^2=3$ 的圆心坐标为(　　)

A.(2,1)　　B.(2,−1)

C.(−2,1)　　D.(−2,−1)

B　**解析**:圆 $C:(x-2)^2+(y+1)^2=3$ 的圆心坐标为(2,−1).故选B.

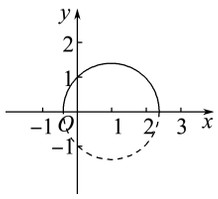
3.曲线 $y=\sqrt{2-(x-1)^2}$ 与 x 轴所围成区域的面积为(　　)

A.$\frac{\pi}{2}$　　B.π

C.2π　　D.4π

B　**解析**:由 $y=\sqrt{2-(x-1)^2}$ 可得 $(x-1)^2+y^2=2$,$y\geqslant0$,

所以曲线 $y=\sqrt{2-(x-1)^2}$ 表示圆 $(x-1)^2+y^2=2$，$y\geqslant 0$ 的部分，如图.



因为圆心坐标为(1,0)，所以圆 $(x-1)^2+y^2=2$ 关于 x 轴对称，

所以曲线 $y=\sqrt{2-(x-1)^2}$ 与 x 轴所围成区域的面积为 $\frac{1}{2}\pi r^2=\pi$.故选 B.

【探究总结】

1.用直接法求圆的标准方程的关键

圆的标准方程由圆心坐标和半径决定，因此求出圆心坐标和半径即可写出圆的标准方程.

2.几种特殊位置的圆的标准方程

特殊位置	标准方程
圆心在 x 轴上	$(x-a)^2+y^2=r^2$
圆心在 y 轴上	$x^2+(y-b)^2=r^2$
与 x 轴相切	$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
与 y 轴相切	$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$

任务2 求圆的标准方程

探究活动

例 1　求满足下列条件的圆的标准方程：

(1)圆心为(3,4)且经过坐标原点；

(2)圆心为(1,1)且与直线 $x+y=4$ 相切；

(3)过点 $A(2,0)$，$B(2,-2)$，且以 AB 为直径；

(4)经过点 $A(3,1)$，$B(-1,3)$，且圆心在直线 $3x-y-2=0$ 上.

解：(1)设圆的半径为 r，因为圆心为(3,4)，

且圆经过坐标原点，所以 $r=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5$，

所以圆的标准方程为 $(x-3)^2+(y-4)^2=25$.

(2)设圆的半径为 r，

因为圆心为(1,1)且与直线 $x+y=4$ 相切，所以 $r=\frac{|1+1-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$，

故所求圆的标准方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

(3)设圆心为 (a,b)，半径为 r，

由题意，得 $\begin{cases}a=\frac{2+2}{2}=2,\\ b=\frac{0-2}{2}=-1,\end{cases}$ 即圆心坐标为(2,-1)，

所以 $r=\sqrt{(2-2)^2+(-1-0)^2}=1$，

所以所求圆的标准方程为 $(x-2)^2+(y+1)^2=1$.

(4)(方法一)设圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

依题意，得 $\begin{cases}(3-a)^2+(1-b)^2=r^2,\\ (-1-a)^2+(3-b)^2=r^2,\\ 3a-b-2=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=4,\\ r=\sqrt{10},\end{cases}$

故所求圆的标准方程是 $(x-2)^2+(y-4)^2=10$.

(方法二)设圆的半径为 r.由直线 AB 的斜率 $k=\frac{3-1}{-1-3}=-\frac{1}{2}$，

可知线段 AB 的垂直平分线 m 的斜率为 2.

又 AB 的中点的横坐标和纵坐标分别为 $x=\frac{3-1}{2}=1$，$y=\frac{1+3}{2}=2$，

因此直线 m 的方程为 $y-2=2(x-1)$，即 $2x-y=0$.

又圆心在直线 $3x-y-2=0$ 上，所以圆心是这两条直线的交点.

联立方程 $\begin{cases}2x-y=0,\\ 3x-y-2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\ y=4.\end{cases}$

所以圆心坐标为(2,4).

又 $r=\sqrt{(2-3)^2+(4-1)^2}=\sqrt{10}$，

故所求圆的标准方程是 $(x-2)^2+(y-4)^2=10$.

(方法三)设圆心为 C.

因为圆心在直线 $3x-y-2=0$ 上，所以可设圆心 C 的坐标为 $(a,3a-2)$.

又 $|CA|=|CB|$，

即 $\sqrt{(a-3)^2+(3a-3)^2}=\sqrt{(a+1)^2+(3a-5)^2}$，

解得 $a=2$，

所以圆心为(2,4)，半径 $r=|CA|=\sqrt{10}$.

故所求圆的标准方程为 $(x-2)^2+(y-4)^2=10$.

【探究总结】

用待定系数法求圆的标准方程的一般步骤

(1)设——设所求圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$；

(2)列——由已知条件，建立关于 a，b，r 的方程组；

(3)解——解方程组，求出 a，b，r；

(4)代——将 a，b，r 代入所设方程，得所求圆的标准方程.

应用迁移

1.已知半径为 2 的圆 C 的圆心在第四象限，且与直线 $x=0$ 和 $x+y=2\sqrt{2}$ 均相切，则该圆的标准方程为（　　）

A.$(x-1)^2+(y+2)^2=4$

B.$(x-2)^2+(y+2)^2=2$

C.$(x-2)^2+(y+2)^2=4$

D.$(x-2\sqrt{2})^2+(y+2\sqrt{2})^2=4$

C　**解析**：设圆心坐标为$(2,-a)(a>0)$，则圆心到直线$x+y=2\sqrt{2}$的距离$d=\frac{|2-a-2\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=2$，所以$a=2$，所以该圆的标准方程为$(x-2)^2+(y+2)^2=4$.

2.（教材P83例2改编）已知$\triangle ABC$的三个顶点分别是$A(-4,-2)$，$B(-4,2)$，$C(-2,2)$，则$\triangle ABC$的外接圆的标准方程是（　　）

A.$x^2+(y-3)^2=20$　　B.$(x+3)^2+y^2=5$

C.$x^2+(y+3)^2=5$　　D.$(x-3)^2+y^2=20$

B　**解析**：由题可知$\overrightarrow{BA}=(0,-4)$，$\overrightarrow{BC}=(2,0)$，则$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，

得$\triangle ABC$是直角三角形，且$BA\perp BC$，

所以圆的半径为$\frac{1}{2}|AC|=\frac{\sqrt{(-4+2)^2+(-2-2)^2}}{2}=\sqrt{5}$，圆心为$(-3,0)$，

所以$\triangle ABC$的外接圆的标准方程是$(x+3)^2+y^2=5$.

任务3　点与圆的位置关系

探究活动

例2　判断$A(0,5)$，$B(1,-2)$，$C(-3,-4)$，$D(-7,-2)$四点是否共圆.

解：易知点A，B，C不共线，设A，B，C三点确定的圆的标准方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$.

把$A(0,5)$，$B(1,-2)$，$C(-3,-4)$的坐标代入，得

$$\begin{cases}(0-a)^2+(5-b)^2=r^2,\\(1-a)^2+(-2-b)^2=r^2,\\(-3-a)^2+(-4-b)^2=r^2,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=-3,\\b=1,\\r^2=25,\end{cases}$$

所以A，B，C三点确定的圆的标准方程为$(x+3)^2+(y-1)^2=25$.

把$D(-7,-2)$代入上述圆的标准方程，等号成立，所以点D在该圆上，

故A，B，C，D四点共圆.

［一题多思］

思考1.在本例中，还有什么方法可判断四点是否共圆？

解：易知$\overrightarrow{AB}=(1,-7)$，$\overrightarrow{AD}=(-7,-7)$，$\overrightarrow{CB}=(4,2)$，$\overrightarrow{CD}=(-4,2)$，

所以$\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|}=\frac{3}{5}$，

$\cos\langle\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\rangle=\frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CD}|}=-\frac{3}{5}$，

所以$\angle BAD+\angle BCD=\pi$，所以$A$，$B$，$C$，$D$四点共圆.

思考2.在本例中，有什么方法可以求由A，B，C三点所确定的圆的方程？

解：因为线段AB的中点为$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$，且直线$AB$的斜率为$-7$，

所以线段AB的垂直平分线的方程为$x-7y+10=0$.

同理，可得线段BC的垂直平分线的方程为$2x+y+5=0$.

由$\begin{cases}x-7y+10=0,\\2x+y+5=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-3,\\y=1,\end{cases}$所以圆心为$(-3,1)$，

半径为$\sqrt{(-3-0)^2+(1-5)^2}=5$，

故所求的圆的方程为$(x+3)^2+(y-1)^2=25$.

【探究总结】

判断点(x_0,y_0)与圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$的位置关系，只需将(x_0,y_0)代入圆的标准方程.若$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2$，则点(x_0,y_0)在圆内；若$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$，则点(x_0,y_0)在圆上；若$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2$，则点(x_0,y_0)在圆外.

应用迁移

1.若点$A(a+1,3)$在圆$C:(x-a)^2+(y-1)^2=m$外，则实数m的取值范围是（　　）

A.$(-\infty,\sqrt{5})$　　B.$(-\infty,5)$

C.$(0,5)$　　D.$(0,\sqrt{5})$

C　**解析**：因为点$A(a+1,3)$在圆$C:(x-a)^2+(y-1)^2=m$外，所以$(a+1-a)^2+(3-1)^2>m$且$m>0$，解得$0<m<5$.

2.已知圆N的标准方程为$(x-5)^2+(y-6)^2=a^2(a>0)$.

(1)若点$M(6,9)$在圆上，求a的值；

(2)若点$P(3,3)$与$Q(5,3)$有一点在圆内，另一点在圆外，求a的取值范围.

解：(1)因为点$M(6,9)$在圆上，所以$(6-5)^2+(9-6)^2=a^2$，即$a^2=10$.

又$a>0$，所以$a=\sqrt{10}$.

(2)由已知，得圆心$N(5,6)$.

因为$|PN|=\sqrt{(3-5)^2+(3-6)^2}=\sqrt{13}$，

$|QN|=\sqrt{(5-5)^2+(3-6)^2}=3$，

$|PN|>|QN|$，所以点P在圆外，点Q在圆内，

所以a的取值范围是$(3,\sqrt{13})$.

任务4 圆的标准方程的应用

探究活动

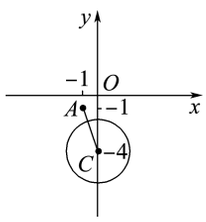
例3　已知 x,y 满足 $x^2+(y+4)^2=4$，求 $\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}$ 的最大值与最小值.

解：设点 $P(x,y)$ 是圆 $x^2+(y+4)^2=4$ 上的任意一点，圆心为 $C(0,-4)$，半径 $r=2$，

则 $\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}$ 表示点 $A(-1,-1)$ 与该圆上的点的距离.

因为 $|AC|^2=(-1)^2+(-1+4)^2=10>4$，

所以点 $A(-1,-1)$ 在圆外，如图所示.



又 $|AC|=\sqrt{10}$，

所以 $\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}$ 的最大值为 $|AC|+r=\sqrt{10}+2$，最小值为 $|AC|-r=\sqrt{10}-2$.

【探究总结】

与圆有关的最值问题，利用数形结合法是解题的关键.

(1) 设圆上任意一点的坐标为 (x,y)，则 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 表示圆上的点到点 (a,b) 的距离；

(2) 求圆外的点到圆上的点的距离的最值，先求该点到圆心的距离，再加减半径即可；

(3) 求圆上的点到一条直线的距离的最值，先求圆心到直线的距离，再根据直线与圆的位置关系求最值.

应用迁移

1. 已知圆 $C:x^2+y^2-6x-6y+14=0$，则圆上的点 $P(x,y)$ 到点 $E(-1,0)$ 的距离的最大值与最小值的和为_____.

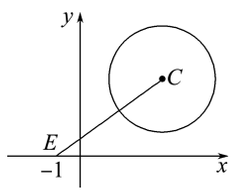
10　**解析**：由圆 $C:x^2+y^2-6x-6y+14=0$ 可化为 $(x-3)^2+(y-3)^2=4$，

可得圆心为 $C(3,3)$，半径 $r=2$.

如图所示，点 P 与点 E 距离的最大值为 $|CE|+2$，点 P 与点 E 距离的最小值为 $|CE|-2$.

又因为 $|CE|=\sqrt{(3+1)^2+3^2}=5$，

所以圆上的点 P 到点 E 的距离的最大值为 7，最小值为 3，和为 10.



2. 已知直线 $l_1:mx-y-3m+1=0$ 与直线 $l_2:x+my-3m-1=0$ 相交于点 P，$m\in\mathbf{R}$，则点 P 到坐标原点 O 的距离的最小值为_____.

$\sqrt{2}$　**解析**：因为 $m\cdot1+(-1)\cdot m=0$，所以 $l_1\perp l_2$.

又由直线 $l_1:m(x-3)-(y-1)=0$，可得直线 l_1 恒过定点 $A(3,1)$.

由直线 $l_2:x-1+m(y-3)=0$，可得直线 l_2 恒过定点 $B(1,3)$，

所以点 P 在以 AB 为直径的圆上，且 $|AB|=\sqrt{(3-1)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}$，

所以半径为 $\sqrt{2}$.

圆心 C 为线段 AB 的中点，即 $C(2,2)$，

故点 P 所在的圆的方程为 $(x-2)^2+(y-2)^2=2$，

可得 $|OC|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

所以点 P 到坐标原点 O 的最小距离 $|OP|_{\min}=|OC|-r=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

课后素养评价(二十一)

基础落实

1. 已知点 $M(2,0)$，$N(6,4)$，则以线段 MN 为直径的圆的圆心坐标为　(　)

A. $(2,2)$　　B. $(2,4)$

C. $(8,4)$　　D. $(4,2)$

D　**解析**：因为 $M(2,0)$，$N(6,4)$，所以线段 MN 的中点为 $(4,2)$，

所以以线段 MN 为直径的圆的圆心坐标为 $(4,2)$.

2. 圆心在 y 轴上，半径为 2，且过点 $(2,4)$ 的圆的方程为　(　)

A. $x^2+(y-1)^2=1$

B. $(x-2)^2+y^2=4$

C. $(x-2)^2+(y-4)^2=4$

D. $x^2+(y-4)^2=4$

D　**解析**：由题意设圆心为 $(0,b)$，则圆的方程为 $x^2+(y-b)^2=4$.

又点 $(2,4)$ 在圆上，所以 $2^2+(4-b)^2=4$，解得 $b=4$，所以圆的方程为 $x^2+(y-4)^2=4$.

故选 D.

3. 点 $P(m^2,5)$ 与圆 $x^2+y^2=24$ 的位置关系是　(　)

A. 点 P 在圆外　　B. 点 P 在圆内

C. 点 P 在圆上　　D. 不确定

A　**解析**：因为$(m^2)^2+5^2>24$，所以点P在圆外.

4.圆$x^2+y^2=1$上的点到点$M(3,4)$的距离的最小值是（　　）

A.1　　B.4　　C.5　　D.6

B　**解析**：易知点$M(3,4)$在圆$x^2+y^2=1$外，且点M到圆心$(0,0)$的距离为5，所以圆$x^2+y^2=1$上的点到M的距离的最小值为$5-1=4$.

5.当一个动点在圆$x^2+y^2=1$上移动时，它与定点$A(3,0)$连线的中点的轨迹方程是（　　）

A.$(x+3)^2+y^2=4$

B.$(x-3)^2+y^2=1$

C.$(2x-3)^2+4y^2=1$

D.$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{2}$

C　**解析**：设$M(x_0,y_0)$为圆上的动点，则有$x_0^2+y_0^2=1$.设线段MA的中点为$P(x,y)$，则$x=\frac{x_0+3}{2}$，$y=\frac{y_0+0}{2}$，则$x_0=2x-3$，$y_0=2y$，代入$x_0^2+y_0^2=1$，得$(2x-3)^2+(2y)^2=1$，即$(2x-3)^2+4y^2=1$.

6.圆心为直线$x-y+2=0$与直线$2x+y-8=0$的交点，且过原点的圆的标准方程是_____.

$(x-2)^2+(y-4)^2=20$　**解析**：由$\begin{cases}x-y+2=0,\\2x+y-8=0,\end{cases}$可得$\begin{cases}x=2,\\y=4,\end{cases}$即圆心为$(2,4)$，

从而半径$r=\sqrt{(2-0)^2+(4-0)^2}=2\sqrt{5}$，故圆的标准方程为$(x-2)^2+(y-4)^2=20$.

7.已知点$P(1,-1)$在圆$(x+2)^2+y^2=m$的外部，则实数m的取值范围是_____.

$(0,10)$　**解析**：由题意知，$(1+2)^2+(-1)^2>m$，所以$m<10$.

又$m=r^2>0$，所以$0<m<10$.

故实数m的取值范围是$(0,10)$.

8.已知点$P(x,y)$在圆$x^2+y^2=1$上，则$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$的最大值为_____.

$1+\sqrt{2}$　**解析**：$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$的几何意义是圆$x^2+y^2=1$上的点$P(x,y)$到点$(1,1)$的距离，易知点$(1,1)$在圆$x^2+y^2=1$外，且点$(1,1)$到圆心$(0,0)$的距离为$\sqrt{2}$，因此$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$的最大值为$\sqrt{2}+1$.

能力提升

1.（多选）下列方程中，表示圆心在直线$y=x$上，半径为$\sqrt{2}$，且过原点的圆的有（　　）

A.$(x-1)^2+(y-1)^2=\sqrt{2}$

B.$(x-1)^2+(y+1)^2=\sqrt{2}$

C.$(x+1)^2+(y+1)^2=2$

D.$(x-1)^2+(y-1)^2=2$

CD　**解析**：因为圆心在$y=x$上，所以设圆心为(a,a).

因为圆的半径为$\sqrt{2}$，所以圆的标准方程为$(x-a)^2+(y-a)^2=2$.

因为该圆过原点，所以$(-a)^2+(-a)^2=2$，解得$a=\pm1$，所以圆心为$(1,1)$或$(-1,-1)$.

当圆心为$(1,1)$时，圆的标准方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=2$，D正确；

当圆心为$(-1,-1)$时，圆的标准方程为$(x+1)^2+(y+1)^2=2$.

故选CD.

2.由动点P向圆M：$(x+2)^2+(y+3)^2=1$作两条切线PA，PB，切点分别为A，B.若四边形$APBM$为正方形，则动点P的轨迹方程为（　　）

A.$(x+2)^2+(y+3)^2=4$

B.$(x+2)^2+(y+3)^2=2$

C.$(x-2)^2+(y-3)^2=4$

D.$(x-2)^2+(y-3)^2=2$

B　**解析**：因为四边形$APBM$为正方形，且$|MA|=|MB|=1$，所以$|MP|=\sqrt{2}$，

故动点P的轨迹是以M为圆心，$\sqrt{2}$为半径的圆，其方程为$(x+2)^2+(y+3)^2=2$.

故选B.

3.（多选）若经过点$P(5m+1,12m)$可以作出圆$(x-1)^2+y^2=1$的两条切线，则实数m的值可能为（　　）

A.$\frac{1}{10}$　　B.$\frac{1}{13}$　　C.$-\frac{1}{13}$　　D.$-\frac{1}{2}$

AD　**解析**：过点P可作圆的两条切线，说明点P在圆的外部，所以$(5m+1-1)^2+(12m)^2>1$，解得$m>\frac{1}{13}$或$m<-\frac{1}{13}$，对照选项知A，D正确.

4.已知点$A(3,6)$，$B(1,4)$，$C(1,0)$，则$\triangle ABC$外接圆的圆心坐标为（　　）

A.$(5,2)$　　B.$(-5,2)$

C.$(2,5)$　　D.$(5,-2)$

A　**解析**：易知线段AB的中点坐标为$(2,5)$，斜率为$\frac{6-4}{3-1}=1$，所以线段AB的垂直平分线的斜率为-1，故线段AB的垂直平分线方程为$y-5=-(x-2)$，即$x+y-7=0$.

线段AC的中点坐标为$(2,3)$，斜率为$\frac{6-0}{3-1}=3$，所以线段AC的垂直平分线的斜率为$-\frac{1}{3}$，故线段

AC 的垂直平分线方程为 $y-3=-\frac{1}{3}(x-2)$，即 $x+3y-11=0$.

由 $\begin{cases}x+y-7=0,\\x+3y-11=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=5,\\y=2.\end{cases}$

所以△ABC 外接圆的圆心坐标为(5,2).

5.方程 $y=\sqrt{36-x^2}$ 表示的曲线是　　(　　)

A.一个圆　　B.两条射线

C.半圆　　D.一条射线

C　**解析**：由 $y=\sqrt{36-x^2}$ 两边平方，得 $x^2+y^2=36(y\geqslant 0)$，故 $y=\sqrt{36-x^2}$ 表示半圆.

6.已知圆 $x^2+(y-2)^2=4$ 上一点 $P(m,n)$，则 $\sqrt{m^2+n^2}$ 的最大值为_____.

4　**解析**：记原点为 O，易知原点 O 在圆 $x^2+(y-2)^2=4$ 上，则 $\sqrt{m^2+n^2}=|OP|$，

所以 $\sqrt{m^2+n^2}$ 的最大值为圆 $x^2+(y-2)^2=4$ 的直径，故 $\sqrt{m^2+n^2}$ 的最大值为 $2\times 2=4$.

自我超越

已知 A,B 为圆 $(x-6)^2+y^2=16$ 上两点，$|AB|=4\sqrt{3}$，P 为线段 AB 的中点，Q 为直线 $x-\sqrt{3}y+4=0$ 上的动点，则 $|PQ|$ 的最小值为　　(　　)

A.3　　B.4

C.5　　D.$3\sqrt{3}$

A　**解析**：如图，圆 $(x-6)^2+y^2=16$ 的圆心坐标为 $C(6,0)$，半径 $R=4$.

因为 P 为线段 AB 的中点，$|AB|=4\sqrt{3}$，

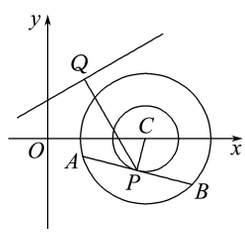
则 $|CP|=\sqrt{R^2-\left(\frac{1}{2}|AB|\right)^2}=\sqrt{16-(2\sqrt{3})^2}=2$，

所以点 P 的轨迹是以 $C(6,0)$ 为圆心，半径为 $r=2$ 的圆.

点 Q 在直线 $x-\sqrt{3}y+4=0$ 上，

可得圆心 $C(6,0)$ 到直线 $x-\sqrt{3}y+4=0$ 的距离 $d=\frac{10}{\sqrt{1+3}}=5$，

所以 $|PQ|$ 的最小值为 $d-r=5-2=3$.



2.4.2　圆的一般方程

学习任务目标

1.在掌握圆的标准方程的基础上，理解圆的一般方程的代数特征，并能由圆的一般方程确定圆的圆心和半径.

2.掌握方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 表示圆的条件.

3.掌握求轨迹方程的常用方法.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　圆的一般方程

(1)圆的一般方程的概念

当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，二元二次方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 叫做圆的一般方程.

(2)对方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 的说明

方程	条件	图形
$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$	$D^2+E^2-4F<0$	不表示任何图形
	$D^2+E^2-4F=0$	表示一个点$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$
	$D^2+E^2-4F>0$	表示以$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$为圆心，$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$为半径的圆

知识点二　用待定系数法求圆的方程的步骤

(1)根据题意，选择标准方程或一般方程；

(2)根据条件列出关于 a,b,r 或 D,E,F 的方程组；

(3)解出 a,b,r 或 D,E,F，得到标准方程或一般方程.

知识点三　轨迹方程与轨迹

点 M 的轨迹方程是指点 M 的坐标 (x,y) 满足的关系式.点 M 的轨迹是指点 M 在运动变化过程中形成的图形.在解析几何中，我们常常把图形看作点的轨迹(集合).

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)圆的一般方程可以化为圆的标准方程.　(　√　)

(2)二元二次方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 一定是某个圆的方程.　(　×　)

(3)若方程 $x^2+y^2-2x+Ey+1=0$ 表示圆，则 $E\neq 0$.　　(　√　)

(4)方程 $x^2+y^2+x+1=0$ 表示圆.　　(　×　)

2.圆 $x^2+y^2+4x-6y-3=0$ 的圆心坐标和半径分别为　　(　　)

A.$(4,-6)$,16　　B.$(2,-3)$,4

C.$(-2,3)$,4　　D.$(2,-3)$,16

C　**解析**：由 $x^2+y^2+4x-6y-3=0$，得 $(x+2)^2+(y-3)^2=16$，故圆心坐标为 $(-2,3)$，半径为 4.

3.思考并回答下列问题：

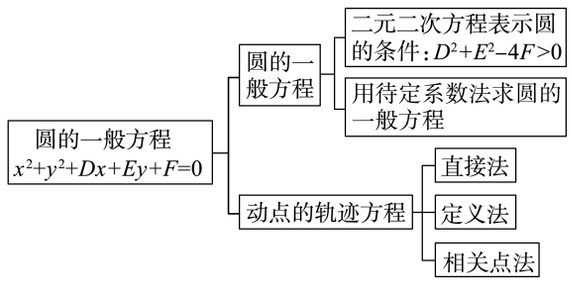
(1)如何进行圆的一般方程与标准方程的互化？

提示：将圆的标准方程展开成二元二次方程的形式即得一般方程，将圆的一般方程配方即得标准方程.

(2)求圆的一般方程的关键是什么？

提示：确定系数 D,E,F.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 圆的一般方程的概念辨析

1.若方程 $x^2+y^2-2ax+2ay+2a^2+a+1=0$ 表示圆，则实数 a 的取值范围是　　(　　)

A.$(-1,+\infty)$　　B.$(-\infty,-1]$

C.$(-\infty,-1)$　　D.$[-1,+\infty)$

C　**解析**：方程 $x^2+y^2-2ax+2ay+2a^2+a+1=0$ 可变形为 $(x-a)^2+(y+a)^2=-a-1$，由题意知 $-a-1>0$，得 $a<-1$.

2.已知⊙C：$x^2+y^2+2x-\sqrt{2}y+\frac{1}{2}=0$，则该圆的圆心坐标和半径分别为　　(　　)

A.$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,1　　B.$\left(-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,1

C.$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D.$\left(-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\frac{\sqrt{2}}{2}$

B　**解析**：⊙C：$x^2+y^2+2x-\sqrt{2}y+\frac{1}{2}=0\Rightarrow(x+1)^2+\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1$，故圆心坐标为 $\left(-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，半径为 1.

3.判断下列方程分别表示什么图形：

(1)$x^2+y^2+2x+2y+2=0$；

(2)$x^2+y^2-2x+4y-6=0$；

(3)$x^2+y^2-2ax-b^2=0$；

(4)$3x^2+3y^2-2x+4y-6=0$.

解：(1)(方法一：配方法)原方程等价于 $(x+1)^2+(y+1)^2=0$，因此方程表示点 $(-1,-1)$.

(方法二：公式法)因为 $D^2+E^2-4F=2^2+2^2-4\times 2=0$，所以方程表示点 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$，即 $(-1,-1)$.

(2)原方程等价于 $(x-1)^2+(y+2)^2=(\sqrt{11})^2$，因此方程表示圆心为 $(1,-2)$，半径为 $\sqrt{11}$ 的圆.

(3)因为 $D^2+E^2-4F=4a^2+4b^2\geqslant 0$，所以当 $a=b=0$ 时，方程表示原点；当 a,b 不全为 0 时，方程表示以 $(a,0)$ 为圆心，$\sqrt{a^2+b^2}$ 为半径的圆.

(4)原方程等价于 $x^2+y^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}y-2=0$，配方，得 $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{23}}{3}\right)^2$，因此方程表示圆心为 $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$，半径为 $\frac{\sqrt{23}}{3}$ 的圆.

【探究总结】

判断方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 是否表示圆的两种方法

(1)配方法：对形如 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 的二元二次方程，可以通过配方将其变形成“标准”形式后，再观察它是否表示圆；

(2)运用圆的一般方程满足的条件判断，即通过判断 D^2+E^2-4F 是否大于 0 来确定它是否表示圆.

任务2 求圆的一般方程

探究活动

例 1　已知△ABC 的三个顶点为 $A(1,4)$，$B(-2,3)$，$C(4,-5)$，求△ABC 的外接圆的方程、圆心坐标和半径.

解：设△ABC 的外接圆方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

因为点 A,B,C 在圆上，

所以 $\begin{cases}1+16+D+4E+F=0,\\4+9-2D+3E+F=0,\\16+25+4D-5E+F=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}D=-2,\\E=2,\\F=-23,\end{cases}$

所以△ABC 的外接圆方程为 $x^2+y^2-2x+2y-23=0$，

即 $(x-1)^2+(y+1)^2=25$，

所以圆心坐标为 $(1,-1)$，半径为 5.

【探究总结】

求圆的方程时，如果由已知条件容易求得圆心坐标、半径，或需利用圆心坐标或半径列方程，那么一般采用圆的标准方程，再用待定系数法求出 a,b,r；如果已知条件与圆心和半径都无直接关系，那么一般采用圆的一般方程，再用待定系数法求出 D,E,F.

应用迁移

1. 已知圆 C 经过两点 $A(0,2),B(4,6)$，且圆心 C 在直线 $l:2x-y-3=0$ 上，则圆 C 的方程为（　　）

A. $x^2+y^2-6x-6y-16=0$

B. $x^2+y^2-2x+2y-8=0$

C. $x^2+y^2-6x-6y+8=0$

D. $x^2+y^2-2x+2y-56=0$

C　**解析**：设圆的一般方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，圆心坐标为 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$.

因为圆 C 经过两点 $A(0,2),B(4,6)$，且圆心 C 在直线 $l:2x-y-3=0$ 上，

所以 $\begin{cases}2\times\left(-\frac{D}{2}\right)-\left(-\frac{E}{2}\right)-3=0,\\0+2^2+2E+F=0,\\4^2+6^2+4D+6E+F=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}D=-6,\\E=-6,\\F=8,\end{cases}$

所以圆 C 的方程为 $x^2+y^2-6x-6y+8=0$. 故选 C.

2.（教材 P86 例 4 改编）已知 $O(0,0),A(4,3),B(1,-3)$，则 $\triangle OAB$ 的外接圆方程为（　　）

A. $x^2+y^2-4x-3y=0$

B. $x^2+y^2-x+3y=0$

C. $x^2+y^2-5x-5y=0$

D. $x^2+y^2-7x+y=0$

D　**解析**：设 $\triangle OAB$ 的外接圆方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

因为 $O(0,0),A(4,3),B(1,-3)$，

所以 $\begin{cases}F=0,\\4^2+3^2+4D+3E+F=0,\\1^2+(-3)^2+D-3E+F=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}D=-7,\\E=1,\\F=0,\end{cases}$

所以 $\triangle OAB$ 的外接圆方程为 $x^2+y^2-7x+y=0$.

任务3 求动点的轨迹方程

探究活动

例 2　已知圆 C 经过点 $A(1,1),B(2,-2)$，且圆心 C 在直线 $l:x-y+1=0$ 上.

(1)求圆 C 的方程；

(2)若线段 PQ 的端点 P 的坐标是 $(5,0)$，端点 Q 在圆 C 上运动，求线段 PQ 的中点 M 的轨迹方程.

解：(1)设点 D 为线段 AB 的中点，直线 m 为线段 AB 的垂直平分线，则 $D\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

又 $k_{AB}=-3$，所以 $k_m=\frac{1}{3}$，

所以直线 m 的方程为 $x-3y-3=0$.

由 $\begin{cases}x-3y-3=0,\\x-y+1=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-3,\\y=-2,\end{cases}$ 即圆心 $C(-3,-2)$，

则半径 $r=|CA|=\sqrt{(-3-1)^2+(-2-1)^2}=5$，

所以圆 C 的方程为 $(x+3)^2+(y+2)^2=25$.

(2)设点 $M(x,y),Q(x_0,y_0)$.

因为点 P 的坐标为 $(5,0)$，

所以 $\begin{cases}x=\frac{x_0+5}{2},\\y=\frac{y_0+0}{2},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_0=2x-5,\\y_0=2y.\end{cases}$

又点 $Q(x_0,y_0)$ 在圆 $C:(x+3)^2+(y+2)^2=25$ 上运动，

所以 $(x_0+3)^2+(y_0+2)^2=25$，

即 $(2x-5+3)^2+(2y+2)^2=25$.

整理，得 $(x-1)^2+(y+1)^2=\frac{25}{4}$，

即所求线段 PQ 的中点 M 的轨迹方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=\frac{25}{4}$.

[一题多思]

思考. 在本例中，若点 $E(-1,-1)$ 是圆 C 内一点，F,G 为圆 C 上的动点，且 $\angle GEF=90°$，求线段 GF 的中点 N 的轨迹.

解：设线段 GF 的中点为 $N(a,b)$，连接 EN,CN,CG（图略）.

在 $\mathrm{Rt}\triangle GEF$ 中，$|EN|=|GN|$.

又 $CN\perp GF$，

所以在 $\mathrm{Rt}\triangle GCN$ 中，$|CG|^2=|CN|^2+|GN|^2=|CN|^2+|EN|^2$，

所以 $(a+3)^2+(b+2)^2+(a+1)^2+(b+1)^2=25$，

即 $a^2+b^2+4a+3b-5=0$.

因为 $4^2+3^2+4\times5>0$，

所以线段 GF 的中点 N 的轨迹是以 $\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$ 为圆心，半径为 $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ 的圆.

【探究总结】

求动点的轨迹方程的常用方法

(1)直接法：根据题目的条件，建立平面直角坐标系，设动点坐标，找出动点所满足的条件，并用坐标表示，化简即得轨迹方程；

(2)定义法：当动点的轨迹符合圆的定义时，可直接写出动点的轨迹方程；

(3)相关点法：若动点 $P(x,y)$ 随着圆上一动点

$Q(x_1,y_1)$的运动而运动，且x_1,y_1可用x,y表示，则可将用x,y表示后的点Q的坐标代入已知圆的方程，即可得动点P的轨迹方程.

应用迁移

1.已知Rt△ABC的斜边为BC，且$B(-2,0)$，$C(2,0)$，则直角边AC中点M的轨迹方程是_____.

$x^2+y^2-2x=0(x\neq0$且$x\neq2)$　**解析：**设$M(x,y)$，$A(x_0,y_0)$，

因为$C(2,0)$，M是线段AC的中点，

由中点坐标公式得$x=\dfrac{x_0+2}{2}$，$y=\dfrac{y_0+0}{2}$，所以$x_0=2x-2$，$y_0=2y$，即$A(2x-2,2y)$，

所以$\overrightarrow{AC}=(4-2x,-2y)$，$\overrightarrow{AB}=(-2x,-2y)$.

由$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，得$(4-2x)(-2x)+(-2y)\cdot(-2y)=-8x+4x^2+4y^2=0$，即$x^2+y^2-2x=0$.

又A不能与B，C重合，所以$2x-2\neq-2$且$2x-2\neq2$，解得$x\neq0$且$x\neq2$，

故动点M的轨迹方程为$x^2+y^2-2x=0(x\neq0$且$x\neq2)$.

2.已知等腰三角形ABC中，$|AB|=|AC|$，且顶点A，B的坐标分别为$(4,2)$，$B(3,5)$，求另一个顶点C的轨迹方程，并说明它的轨迹是什么.

解：根据题意，得$|AC|=|AB|$，所以点C在以A为圆心的圆上，且半径$r=|AB|=\sqrt{(3-4)^2+(5-2)^2}=\sqrt{10}$，故圆的方程为$(x-4)^2+(y-2)^2=10$.

又因为A，B，C为三角形的三个顶点，所以A，B，C三点不共线，即点B，C不能重合且B，C不能为直径的两个端点，所以$x\neq3$且$\dfrac{x+3}{2}\neq4$，即$x\neq3$且$x\neq5$，所以端点C的轨迹方程为$(x-4)^2+(y-2)^2=10(x\neq3$且$x\neq5)$，所以端点$C$的轨迹是以$A$为圆心，$\sqrt{10}$为半径除去$(3,5)$和$(5,-1)$两点的圆.

3.已知定点$A(4,0)$，点P是圆$x^2+y^2=4$上一动点，点Q是AP的中点，求点Q的轨迹方程.

解：设点Q的坐标为(x,y)，点P的坐标为(x',y')，则$x=\dfrac{4+x'}{2}$且$y=\dfrac{0+y'}{2}$，

即$x'=2x-4$，$y'=2y$.

又点P在圆$x^2+y^2=4$上，

所以$x'^2+y'^2=4$.

由$x'=2x-4$，$y'=2y$，得$(2x-4)^2+(2y)^2=4$，

即$(x-2)^2+y^2=1$，

故点Q的轨迹方程为$(x-2)^2+y^2=1$.

课后素养评价(二十二)

基础落实

1.若方程$x^2+y^2+4mx-2y+4m^2-m=0$表示圆，则实数m的取值范围是　(　　)

A.$m<-1$　　B.$m<1$

C.$m>-1$　　D.$m\geqslant-1$

C　**解析：**由$D^2+E^2-4F>0$，得$(4m)^2+(-2)^2-4(4m^2-m)>0$，即$4m+4>0$，解得$m>-1$.

2.已知$2a^2x^2+(a+1)y^2+2x+1=0$表示圆，则实数a的值为　(　　)

A.-1　　B.1

C.$\dfrac{1}{2}$　　D.$-\dfrac{1}{2}$

D　**解析：**由题意知$a\neq0$，由$2a^2x^2+(a+1)y^2+2x+1=0$可得$x^2+\dfrac{(a+1)y^2}{2a^2}+\dfrac{x}{a^2}+\dfrac{1}{2a^2}=0$，

所以$\dfrac{a+1}{2a^2}=1$，即$2a^2-a-1=0$，解得$a=1$或$a=-\dfrac{1}{2}$.

当$a=1$时，方程为$x^2+y^2+x+\dfrac{1}{2}=0$，可化为$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=-\dfrac{1}{4}$，不符合题意；

当$a=-\dfrac{1}{2}$时，方程为$x^2+y^2+4x+2=0$，可化为$(x+2)^2+y^2=2$，符合题意.

所以$a=-\dfrac{1}{2}$.

3.若点$(1,1)$在圆$x^2+y^2-x-a=0$的外部，则a的取值范围为　(　　)

A.$\left(-\dfrac{1}{4},1\right)$　　B.$\left(\dfrac{1}{4},1\right)$

C.$(-\infty,1)$　　D.$(1,+\infty)$

A　**解析：**因为$x^2+y^2-x-a=0$可化为$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=a+\dfrac{1}{4}$，则$a+\dfrac{1}{4}>0$，所以$a>-\dfrac{1}{4}$.

又点$(1,1)$在圆$x^2+y^2-x-a=0$的外部，所以$1^2+1^2-1-a>0$，故$a<1$.

综上，$-\dfrac{1}{4}<a<1$.故选A.

4.若圆$x^2+y^2-2x-8y+13=0$的圆心到直线$ax+y-1$

$=0$ 的距离为$\sqrt{2}$，则 $a=$　　（　　）

A.0 或 -1　　B.0

C.7　　D.-1 或 7

D　**解析**：将 $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ 整理得 $(x-1)^2+(y-4)^2=4$，所以圆心坐标为 $(1,4)$.

所以圆心到直线 $ax+y-1=0$ 的距离 $d=\dfrac{|a+4-1|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{2}$，整理得 $a^2-6a-7=0$，解得 $a=-1$ 或 $a=7$.

5.当实数 a 取不同的值时，方程 $x^2+y^2+2ax+2ay-1=0$ 可以表示不同的圆，则　　（　　）

A.这些圆的圆心都在直线 $y=x$ 上

B.这些圆的圆心都在直线 $y=-x$ 上

C.这些圆的圆心都在直线 $y=x$ 或 $y=-x$ 上

D.这些圆的圆心不在同一条直线上

A　**解析**：由题意知圆心为 $(-a,-a)$，则圆心都在直线 $y=x$ 上.

6.若圆心在直线 $2x-y-7=0$ 上的圆 C 与 y 轴交于 $A(0,-4)$，$B(0,-2)$ 两点，则圆 C 的一般方程为_____.

$x^2+y^2-4x+6y+8=0$　**解析**：设圆的一般方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

由题意可知，-4，-2 是方程 $y^2+Ey+F=0$ 的两个根，

所以 $\begin{cases}-4-2=-E,\\(-4)\times(-2)=F,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}E=6,\\F=8.\end{cases}$

又点 $\left(-\dfrac{D}{2},-3\right)$ 在直线 $2x-y-7=0$ 上，

所以 $-D+3-7=0$，即 $D=-4$.

所以圆的一般方程为 $x^2+y^2-4x+6y+8=0$.

7.已知 A 是圆 $x^2+y^2-2x=0$ 上的动点，PA 是圆的切线，且 $|PA|=1$，则点 P 的轨迹方程是_____.

$(x-1)^2+y^2=2$　**解析**：将 $x^2+y^2-2x=0$ 整理得 $(x-1)^2+y^2=1$.

设 $P(x,y)$，

圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的圆心为 $B(1,0)$，

则 $|PA|^2+1=|PB|^2$，

所以 $|PB|^2=2$.

所以点 P 的轨迹是以 $(1,0)$ 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆.

所以点 P 的轨迹方程是 $(x-1)^2+y^2=2$.

8.动圆 $x^2+y^2-(4m+2)x-2my+4m^2+4m+1=0$ 的圆心的轨迹方程为_____.

$x-2y-1=0$　**解析**：设动圆圆心为 (x,y)，由题意得 $\begin{cases}x=\dfrac{4m+2}{2}=2m+1,\\y=\dfrac{2m}{2}=m,\end{cases}$ 整理得 $x-2y-1=0$.

能力提升

1.已知 $x^2+y^2+4x-2y-4=0$，则 x^2+y^2 的最大值是　　（　　）

A.9　　B.14

C.$14-6\sqrt{5}$　　D.$14+6\sqrt{5}$

D　**解析**：方程 $x^2+y^2+4x-2y-4=0$ 可化为 $(x+2)^2+(y-1)^2=9$，所以圆心为 $(-2,1)$，半径为 3.

而 x^2+y^2 表示圆上的点到原点的距离的平方，所以 x^2+y^2 的最大值为 $[\sqrt{(-2-0)^2+(1-0)^2}+3]^2=14+6\sqrt{5}$.

2.若圆 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 关于直线 $2ax-by+2=0(a,b\in\mathbf{R})$ 对称，则 ab 的取值范围是　　（　　）

A.$\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right]$　　B.$\left(0,\dfrac{1}{4}\right]$

C.$\left(-\dfrac{1}{4},0\right)$　　D.$\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right)$

A　**解析**：圆 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 关于直线 $2ax-by+2=0(a,b\in\mathbf{R})$ 对称，则圆心 $(-1,2)$ 在该直线上，所以 $-2a-2b+2=0$，即 $a+b=1$，所以 $ab=a(1-a)=-a^2+a=-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\leqslant\dfrac{1}{4}$，所以 ab 的取值范围是 $\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right]$. 故选 A.

3.过点 $A(-1,3)$，$B(3,-1)$，且圆心在直线 $x-2y-1=0$ 上的圆的方程为　　（　　）

A.$(x+1)^2+(y+1)^2=4$

B.$(x+1)^2+(y+1)^2=16$

C.$(x-1)^2+y^2=13$

D.$(x-1)^2+y^2=5$

B　**解析**：由题易知 $k_{AB}=\dfrac{-1-3}{3+1}=-1$，所以线段 AB 的垂直平分线的斜率为 1. 又线段 AB 的中点为 $(1,1)$，所以线段 AB 的垂直平分线方程为 $y=x$.

由 $\begin{cases}y=x,\\x-2y-1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1,\\y=-1,\end{cases}$ 即圆心坐标为 $(-1,-1)$，

半径为 $r=\sqrt{(-1+1)^2+(-1-3)^2}=4$，所以圆的方程为 $(x+1)^2+(y+1)^2=16$.

故选 B.

4.已知圆 $x^2+y^2-2ax+4ay+5a^2-9=0$ 上所有点都在第二象限，则 a 的取值范围为　　（　　）

A.$\left[-3,-\dfrac{3}{2}\right]$　　B.$\left(-3,-\dfrac{3}{2}\right)$

C.$(-\infty,-3)$　　D.$(-\infty,-3]$

C　**解析**：将圆 $x^2+y^2-2ax+4ay+5a^2-9=0$ 化为 $(x-a)^2+(y+2a)^2=9$，

所以圆心坐标为 $(a,-2a)$，半径为 3.

因为圆上所有点都在第二象限，

所以$\begin{cases}a<0,\\-2a>0,\\a+3<0,\\-2a-3>0,\end{cases}$　解得 $a<-3$.

5.已知圆 $C:x^2+y^2=3$，直线 l 过点 $A(-2,0)$，线段 AB 的端点 B 在圆 C 上运动，则线段 AB 的中点 M 的轨迹方程为　（　　）

A.$(x-1)^2+y^2=\frac{3}{4}$

B.$(x+1)^2+y^2=\frac{3}{4}$

C.$x^2+(y-1)^2=\frac{3}{4}$

D.$(x+1)^2+y^2=\frac{4}{3}$

B　**解析**：设 $M(x,y)$，$B(x_0,y_0)$.

由点 M 是线段 AB 的中点，得$\begin{cases}x=\frac{x_0-2}{2},\\y=\frac{y_0+0}{2},\end{cases}$

可得$\begin{cases}x_0=2x+2,\\y_0=2y.\end{cases}$

又点 B 在圆 C 上运动，所以 $x_0^2+y_0^2=3$，

将上式代入，可得$(2x+2)^2+(2y)^2=3$，

化简整理得点 M 的轨迹方程为$(x+1)^2+y^2=\frac{3}{4}$.

6.当 a 为任意实数时，直线$(a-1)x-y+a+1=0$ 恒过定点 C，则以 C 为圆心，半径为$\sqrt{5}$的圆的一般方程为_____.

$x^2+y^2+2x-4y=0$　**解析**：因为$(a-1)x-y+a+1=0$ 可化为 $a(x+1)-x-y+1=0$，所以该直线恒过定点$(-1,2)$，

所以所求圆的方程为$(x+1)^2+(y-2)^2=5$，即 $x^2+y^2+2x-4y=0$.

7.已知 $A(-2,0)$，$B(0,2)$两点，点 C 是圆 $x^2+y^2-2x=0$ 上任意一点，则$\triangle ABC$ 的面积的最小值是_____.

$3-\sqrt{2}$　**解析**：易得$|AB|=2\sqrt{2}$，直线 AB 的方程为 $x-y+2=0$，$x^2+y^2-2x=0$ 可化为$(x-1)^2+y^2=1$，故圆心$(1,0)$到直线 AB 的距离 $d=\frac{|1-0+2|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}>1$，所以圆上任意一点到直线 AB 的最小距离为$\frac{3\sqrt{2}}{2}-1$.故$\triangle ABC$ 的面积的最小值为 $\frac{1}{2}\times|AB|\times\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-1\right)=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-1\right)=3-\sqrt{2}$.

8.已知圆 $C:x^2+y^2-4x-14y+45=0$，点 $Q(-2,3)$.

(1)若点 $P(a,a+1)$在圆上，求线段 PQ 的长及直线 PQ 的斜率；

(2)若 M 为圆 C 上任意一点，求$|MQ|$的最大值和最小值.

解：(1)因为点 $P(a,a+1)$在圆上，

所以 $a^2+(a+1)^2-4a-14(a+1)+45=0$，

解得 $a=4$，即 $P(4,5)$，

所以$|PQ|=\sqrt{(4+2)^2+(5-3)^2}=2\sqrt{10}$，

$k_{PQ}=\frac{3-5}{-2-4}=\frac{1}{3}$.

(2)因为圆的方程可化为$(x-2)^2+(y-7)^2=8$，

所以圆心 C 的坐标为$(2,7)$，半径为 $2\sqrt{2}$，

所以$|QC|=\sqrt{(2+2)^2+(7-3)^2}=4\sqrt{2}>2\sqrt{2}$，

所以点 Q 在圆外，

所以$|MQ|_{\max}=4\sqrt{2}+2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$，

$|MQ|_{\min}=4\sqrt{2}-2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

自我超越

在平面直角坐标系 xOy 中，二次函数 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R},b>0)$的图象与 x 轴交于 A，B 两点，与 y 轴交于点 C，经过 A，B，C 三个点的圆记为$\odot M$.

(1)当 $a=4$，$b=2$ 时，求$\triangle ABC$ 的面积；

(2)求$\odot M$ 的方程；

(3)$\odot M$ 是否经过定点(其坐标与 a，b 的值无关)？请证明你的结论.

解：(1)当 $a=4$，$b=2$ 时，$f(x)=x^2+4x+2$，令$f(x)=x^2+4x+2=0$，得 $x=-2\pm\sqrt{2}$，

不妨设 $A(-2+\sqrt{2},0)$，$B(-2-\sqrt{2},0)$，则 $AB=2\sqrt{2}$.

$f(x)=x^2+4x+2$ 中，令 $x=0$，得 $f(x)=2$，则$C(0,2)$，

所以$\triangle ABC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2=2\sqrt{2}$.

(2)设所求圆的一般方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

由题意得 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R},b>0)$的图象与两坐标轴的三个交点即为圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 和坐标轴的交点，

令 $y=0$ 得，$x^2+Dx+F=0$，

由题意可得，这与 $x^2+ax+b=0$ 是同一个方程，故 $D=a$，$F=b$.

令 $x=0$，得 $y^2+Ey+F=0$，

由题意可得，方程 $x^2+ax+b=0$ 有一个根为 b，将 $y=b$ 代入 $y^2+Ey+F=0$，得 $E=-b-1$，

所以$\odot M$ 的方程为 $x^2+y^2+ax-(b+1)y+b=0$.

(3)把$\odot M$ 的方程改写为 $x^2+y^2-y+ax+b(1-y)=0$，

令$\begin{cases}x=0,\\1-y=0,\\x^2+y^2-y=0,\end{cases}$　解得$\begin{cases}x=0,\\y=1,\end{cases}$故$\odot M$ 过定点$(0,1)$.

2.5　直线与圆、圆与圆的位置关系

2.5.1　直线与圆的位置关系

第1课时　直线与圆的位置关系的判断

学习任务目标

1.理解直线与圆的三种位置关系，掌握其判定方法和性质.
2.会求直线与圆相切时的切线方程和直线与圆相交时的弦长.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　直线与圆的三种位置关系

位置关系	交点个数
相交	有两个公共点
相切	只有一个公共点
相离	没有公共点

知识点二　直线与圆的位置关系的判断

已知直线：$Ax+By+C=0$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，则

判断方法		相交	相切	相离
几何法	圆心到直线的距离 $d=\dfrac{\lvert Aa+Bb+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$	$d\leq r$	$d=r$	$d\geq r$
代数法	由 $\begin{cases}Ax+By+C=0,\\(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,\end{cases}$ 消元得到关于 x（或 y）的一元二次方程的根的判别式 Δ	$\Delta\geq 0$	$\Delta=0$	$\Delta\leq 0$

【概念辨析】

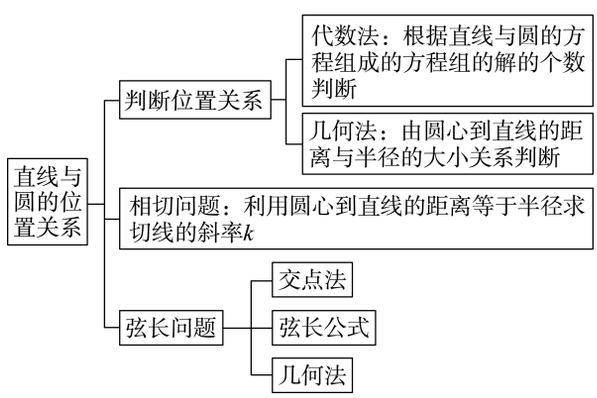
1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.
(1)若直线与圆有公共点，则直线与圆相交.　（　×　）
(2)若直线与圆的方程组成的方程组有解，则直线和圆相交或相切.　（　√　）
(3)若圆心到直线的距离大于半径，则直线与圆的方程联立消元后得到的一元二次方程无解.　（　√　）
(4)过圆外一点的直线与圆相离.　（　×　）

2.直线 $y=x+1$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 的位置关系是（　　）
A.相切
B.相交但直线不过圆心
C.直线过圆心
D.相离

B　**解析**：由圆心到直线的距离 $d=\dfrac{1}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}<1$，且直线 $y=x+1$ 不过圆心 $(0,0)$，得直线与圆相交但不过圆心.故选B.

3.思考并回答下列问题：
(1)用代数法与几何法判断直线与圆的位置关系各有什么特点？
提示：几何法与代数法判断直线与圆的位置关系，是从不同的方面，不同的思路来判断的.几何法侧重于“形”，更多地结合了图形的几何性质；代数法则侧重于“数”，它倾向于“坐标”与“方程”.
(2)怎样解决直线与圆相切的问题？
提示：一般采用几何法，即圆心到直线的距离等于半径.
(3)当点 (x_0,y_0) 在圆外时，过该点有几条直线与圆相切？当用点斜式只求出一条直线时怎么办？
提示：有两条.用点斜式要考虑斜率存在与不存在两种情况，当只求出一条直线时，另一条一定是直线 $x=x_0$.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 直线与圆的位置关系的判断

探究活动

例1　已知圆 $x^2+y^2=8$，定点 $P(4,0)$，过点 P 的直线的斜率在什么范围内取值时，直线与已知圆的位置分别满足下列条件：(1)直线与圆相交；(2)直线与圆相切；(3)直线与圆相离.

解：设过点 P 的直线的斜率为 k(由已知 k 存在)，则直线方程为 $y=k(x-4)$.

(方法一)联立方程，得 $\begin{cases}y=k(x-4),\\x^2+y^2=8.\end{cases}$ 消去 y，得 $(1+k^2)x^2-8k^2x+16k^2-8=0$，$\Delta=(-8k^2)^2-4(1+k^2)(16k^2-8)=32(1-k^2)$.

(1)令 $\Delta>0$，即 $32(1-k^2)>0$，得 $-1<k<1$，

故当 $-1<k<1$ 时，直线与圆相交.

(2)令 $\Delta=0$，即 $32(1-k^2)=0$，得 $k=\pm1$，

故当 $k=\pm1$ 时，直线与圆相切，切线方程为 $x-y-4=0$ 或 $x+y-4=0$.

(3)令 $\Delta<0$，即 $32(1-k^2)<0$，得 $k>1$ 或 $k<-1$，

故当 $k>1$ 或 $k<-1$ 时，直线与圆相离.

(方法二)设圆心到直线的距离为 d，

则 $d=\dfrac{|k\cdot0-0-4k|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{4|k|}{\sqrt{1+k^2}}$.

(1)令 $d<r$，即 $\dfrac{4|k|}{\sqrt{1+k^2}}<2\sqrt{2}$，得 $k^2<1$，即 $-1<k<1$.

所以，当 $-1<k<1$ 时，直线与圆相交.

(2)令 $d=r$，即 $\dfrac{4|k|}{\sqrt{1+k^2}}=2\sqrt{2}$，得 $k^2=1$，即 $k=\pm1$.

所以，当 $k=\pm1$ 时，直线与圆相切，切线方程为 $x-y-4=0$ 或 $x+y-4=0$.

(3)令 $d>r$，即 $\dfrac{4|k|}{\sqrt{1+k^2}}>2\sqrt{2}$，得 $k^2>1$，即 $k>1$ 或 $k<-1$.

所以，当 $k>1$ 或 $k<-1$ 时，直线与圆相离.

【探究总结】

判断直线与圆的位置关系的常用方法

(1)几何法：根据圆心到直线的距离 d 与圆的半径 r 的大小关系判断.

(2)代数法：根据直线与圆的方程组成的方程组的解的个数判断.

(3)动直线法：若动直线过定点 P，则当点 P 在圆内时，直线与圆相交；当点 P 在圆上时，直线与圆相切或相交；当点 P 在圆外时，直线与圆的位置关系不确定.

应用迁移

1.已知直线 $l:y=kx+b$，圆 $O:x^2+y^2=2$，则“$|b|<\sqrt{2}$”是“直线 l 与圆 O 相交”的　　(　　)

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

A　**解析**：圆 O 的圆心为 $(0,0)$，半径为 $\sqrt{2}$，

圆心到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|b|}{\sqrt{k^2+1}}$，若 $|b|<\sqrt{2}$，

则 $d=\dfrac{|b|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant|b|<\sqrt{2}$，直线与圆相交；

但直线与圆相交时，由 $d=\dfrac{|b|}{\sqrt{k^2+1}}<\sqrt{2}$ 可得 $|b|<\sqrt{2k^2+2}$，

不一定能推出 $|b|<\sqrt{2}$.故“$|b|<\sqrt{2}$”是“直线 l 与圆 O 相交”的充分不必要条件.

2.若点 (a,b) 在圆 $M:x^2+y^2=2$ 外，则直线 $ax+by=2$ 与圆 M 的位置关系是　　(　　)

A.相切　　B.相交

C.相离　　D.相切或相离

B　**解析**：因为点 (a,b) 在圆 $M:x^2+y^2=2$ 外，所以 $a^2+b^2>2$.

圆 $M:x^2+y^2=2$ 的圆心坐标为 $(0,0)$，半径 $r=\sqrt{2}$，

根据点到直线的距离公式，圆心 $(0,0)$ 到直线 $ax+by=2$ 的距离 $d=\dfrac{|0\times a+0\times b-2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

由 $a^2+b^2>2$，可得 $\sqrt{a^2+b^2}>\sqrt{2}$，则 $\dfrac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}<\sqrt{2}$，

即圆心到直线的距离 $d<r$，

所以直线 $ax+by=2$ 与圆 M 的位置关系是相交.

任务2 直线与圆相切的有关问题

探究活动

例2　过点 $A(4,-3)$ 作圆 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$ 的切线.

(1)求此切线的方程；

(2)求切线长.

解：(1)因为 $(4-3)^2+(-3-1)^2=17>1$，

所以点 A 在圆外.

①若所求切线的斜率存在，设切线的斜率为 k，

则切线的方程为 $y+3=k(x-4)$.

设圆心为 C.

因为圆心 $C(3,1)$ 到切线的距离等于半径 1，

所以$\frac{|3k-1-3-4k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，

即$|k+4|=\sqrt{k^2+1}$，

所以$k^2+8k+16=k^2+1$，解得$k=-\frac{15}{8}$，

所以切线的方程为$y+3=-\frac{15}{8}(x-4)$，

即$15x+8y-36=0$.

②若切线的斜率不存在，

则切线的方程为$x=4$，

此时圆心$C(3,1)$到直线$x=4$的距离也为1，

所以另一条切线的方程是$x=4$.

综上所述，所求切线的方程为$15x+8y-36=0$或$x=4$.

(2)圆心C的坐标为(3,1).

设切点为B，则$\triangle ABC$为直角三角形，

$|AC|=\sqrt{(3-4)^2+(1+3)^2}=\sqrt{17}$，

又$|BC|=1$，

所以$|AB|=\sqrt{|AC|^2-|BC|^2}=\sqrt{(\sqrt{17})^2-1^2}=4$，

所以切线长为4.

[一题多思]

思考1.在本例中，设切点为P，Q，圆心为C，求四边形$APCQ$的面积.

解：由本例(2)可知，$|AP|=4$，

所以$S_{\triangle APC}=\frac{1}{2}|AP|\cdot|CP|=\frac{1}{2}\times4\times1=2$，

所以$S_{四边形APCQ}=2S_{\triangle APC}=4$.

思考2.由直线$y=x+1$上任意一点向圆$(x-3)^2+(y-1)^2=1$作切线，求切线长的最小值.

解：当直线$y=x+1$上的点到圆心C的距离最短时，切线长有最小值，又因为圆心$C(3,1)$到直线$y=x+1$的距离$d=\frac{|3-1+1|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

所以切线长的最小值为$\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2-1^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}$.

【探究总结】

如果所求切线过已知点M，那么务必确定该点在圆上还是在圆外.

(1)如果点M在圆上，那么圆心和点M的连线与切线垂直，从而求得切线的斜率，用直线的点斜式方程可求得切线的方程；

(2)如果点M在圆外，那么过这点的切线有两条.用点斜式求出的切线可能只有一条，这是因为过这点的另一条切线的斜率可能不存在.

应用迁移

1.若过直线$y=x+1$上一动点P作圆M：$(x-5)^2+y^2=2$的一条切线l，切点为A，则线段PA长度的最小值为　　(　　)

A.6　　B.4

C.$3\sqrt{2}$　　D.$\sqrt{2}$

B　**解析**：圆M：$(x-5)^2+y^2=2$的圆心$M(5,0)$，半径$r=\sqrt{2}$，

由题意可得$PA\perp AM$，则$|PA|=\sqrt{|PM|^2-|AM|^2}=\sqrt{|PM|^2-r^2}=\sqrt{|PM|^2-2}$，

所以当$|PM|$取得最小值时，线段PA的长度最小.

因为$|PM|_{\min}=\frac{|5-0+1|}{\sqrt{1+1}}=3\sqrt{2}$，所以$|PA|_{\min}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-2}=4$.

2.已知圆C：$(x-1)^2+(y+2)^2=10$，求满足下列条件的圆的切线方程：

(1)与直线l_1：$x+y-4=0$平行；

(2)与直线l_2：$x-2y+4=0$垂直；

(3)切点为$A(4,-1)$.

解：由题意，得圆心$C(1,-2)$，半径$r=\sqrt{10}$.

(1)设切线的方程为$x+y+b=0(b\neq-4)$，

则$\frac{|1-2+b|}{\sqrt{2}}=\sqrt{10}$，得$b=1\pm2\sqrt{5}$，

所以切线的方程为$x+y+1+2\sqrt{5}=0$或$x+y+1-2\sqrt{5}=0$.

(2)设切线的方程为$2x+y+m=0$，

则$\frac{|2-2+m|}{\sqrt{5}}=\sqrt{10}$，得$m=\pm5\sqrt{2}$，

所以切线的方程为$2x+y+5\sqrt{2}=0$或$2x+y-5\sqrt{2}=0$.

(3)因为$k_{AC}=\frac{-2+1}{1-4}=\frac{1}{3}$，

所以切点为$A(4,-1)$时，切线的斜率为-3，

所以切点为$A(4,-1)$时，切线的方程为$y+1=-3(x-4)$，即$3x+y-11=0$.

任务3 圆的弦长问题

探究活动

例3　已知过点$(-4,0)$作直线l与圆$x^2+y^2+2x-4y-20=0$交于A，B两点，若$|AB|=8$，求直线l的方程.

解：将圆的方程配方得$(x+1)^2+(y-2)^2=25$，所以圆心为$(-1,2)$，半径$r=5$，由圆的性质，可得圆心到

直线 l 的距离 $d=\sqrt{r^2-\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2}=\sqrt{25-16}=3$.

当 l 的斜率不存在时，$x=-4$ 满足题意；

当 l 的斜率存在时，设方程为 $y=k(x+4)$，即 $kx-y+4k=0$，

由点到直线的距离公式，得

$\frac{|-k-2+4k|}{\sqrt{1+k^2}}=3$，解得 $k=-\frac{5}{12}$，

所以直线 l 的方程为 $5x+12y+20=0$.

综上所述，直线 l 的方程为 $x=-4$ 或 $5x+12y+20=0$.

【探究总结】

求直线与圆相交所得弦长的三种方法

(1)交点法：将直线的方程与圆的方程联立，求出交点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 的坐标，根据两点间的距离公式 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 求解；

(2)弦长公式：如图 1，设两个交点分别是 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot|y_1-y_2|$（直线 l 的斜率 k 存在且不为 0）；

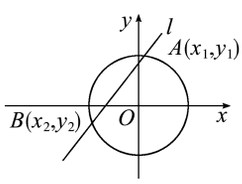


图 1

(3)几何法：如图 2，直线 l 与圆 C 交于 A，B 两点，设弦心距为 d，圆的半径为 r，弦长为 $|AB|$，则有 $\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2+d^2=r^2$，即 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}$.

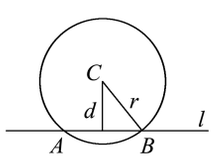


图 2

应用迁移

1.(教材 P93 练习题 3 改编)已知直线 $mx+ny-1=0(m>0,n>0)$ 被圆 $x^2-2x+y^2-2y=0$ 截得的弦长为 $2\sqrt{2}$，则 $\frac{1}{m}+\frac{4}{n}$ 的最小值为_____.

9　**解析**：由题意圆的标准方程是 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$，圆的圆心为 $C(1,1)$，半径为 $r=\sqrt{2}$，又直线被圆截得的弦长为 $2\sqrt{2}$，则弦为直径，易知直线过圆心，

所以 $m+n-1=0$，即 $m+n=1$.

所以 $\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=(m+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{4}{n}\right)=5+\frac{4m}{n}+\frac{n}{m}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{4m}{n}\times\frac{n}{m}}=9$，当且仅当 $\frac{4m}{n}=\frac{n}{m}$，即 $m=\frac{1}{3}$，$n=\frac{2}{3}$ 时，等号成立，所以 $\frac{1}{m}+\frac{4}{n}$ 的最小值为 9.

2.已知圆 $C:(x+2)^2+y^2=9$ 及点 $P(0,1)$，过点 P 的直线与圆交于 A，B 两点.

(1)若弦长 $|AB|=4\sqrt{2}$，求直线 AB 的方程；

(2)求 $\triangle ABC$ 面积的最大值及此时弦长 $|AB|$ 的值.

解：(1)若直线 AB 的斜率不存在，则直线 $AB:x=0$，此时 $|AB|=2\sqrt{5}$，不符合题设.

由 $C:(x+2)^2+y^2=9$，则圆心 $C(-2,0)$，半径为 3，又 $|AB|=4\sqrt{2}$，

所以 $C(-2,0)$ 到直线 AB 的距离 $d=\sqrt{9-\frac{|AB|^2}{4}}=1$.

设直线 $AB:y=kx+1$，则 $\frac{|1-2k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，可得 $3k^2-4k=0$，故 $k=0$ 或 $k=\frac{4}{3}$，

所以直线 AB 的方程为 $y=1$ 或 $4x-3y+3=0$.

(2)由(1)知当直线 AB 的斜率不存在时，有 $|AB|=2\sqrt{5}$，

又 $C(-2,0)$ 到直线 AB 的距离为 2，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{5}=2\sqrt{5}$；

若直线 AB 的斜率存在，设 $AB:y=kx+1$，

此时 $C(-2,0)$ 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|1-2k|}{\sqrt{1+k^2}}$，

$|AB|=2\sqrt{9-d^2}=2\sqrt{9-\frac{(1-2k)^2}{1+k^2}}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times d\times|AB|=\frac{|1-2k|}{\sqrt{1+k^2}}\times\sqrt{9-\frac{(1-2k)^2}{1+k^2}}$.令 $t=\frac{|1-2k|}{\sqrt{1+k^2}}\geqslant0$，

则 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{t^2(9-t^2)}\leqslant\frac{t^2+9-t^2}{2}=\frac{9}{2}$，当且仅当 $t=\frac{3}{\sqrt{2}}$，即 $k=-1$ 或 $k=-7$ 时，等号成立，

所以此时 $|AB|=2\sqrt{9-\frac{9}{2}}=3\sqrt{2}$.

综上，$\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{9}{2}$，此时弦长 $|AB|=3\sqrt{2}$.

课后素养评价(二十三)

基础落实

1.直线 $ax-y+2a=0(a\in\mathbf{R})$ 与圆 $x^2+y^2=5$ 的位置关系为　　(　　)

A.相离　　B.相切

C.相交　　D.不确定

C　**解析**:由题知,圆心坐标为(0,0),半径为$\sqrt{5}$.

将直线 $ax-y+2a=0$ 化为点斜式得 $y=a(x+2)$,

知该直线过定点(−2,0).

又$(-2)^2+0^2<5$,故该定点在圆内,

所以该直线与圆 $x^2+y^2=5$ 必相交.

2.若直线 $x+y+2=0$ 与圆 $M:(x-a)^2+(y-a)^2=8a^2(a>0)$ 相切,则圆 M 的半径为　　(　　)

A.2　　B.4　　C.$2\sqrt{2}$　　D.8

C　**解析**:由题意得 $\dfrac{|a+a+2|}{\sqrt{2}}=|2\sqrt{2}a|$,解得 $a=1$(负值舍),所以圆 M 的半径为 $2\sqrt{2}$.

故选 C.

3.若直线 $x-y+m=0$ 与曲线 $y=\sqrt{4-x^2}$ 相交,则 m 的取值范围是　　(　　)

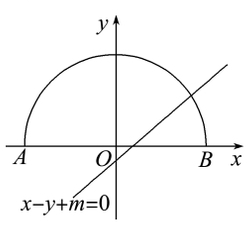
A.$[-2,2]$　　B.$[-2,2\sqrt{2}]$

C.$[-2,2\sqrt{2})$　　D.$(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$

C　**解析**:曲线 $y=\sqrt{4-x^2}$ 是圆 $x^2+y^2=4$ 的上半部分,如图所示,易知 m 为直线 $x-y+m=0$ 的纵截距,当直线 $x-y+m=0$ 与曲线 $y=\sqrt{4-x^2}$ 相切时,由 $\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}=2$,得 $m=2\sqrt{2}$ 或 $-2\sqrt{2}$(舍去).

结合图象可知,当点 B 在直线 $x-y+m=0$ 上时,$m=-2$,故 $m\geqslant-2$.

所以 $m\in[-2,2\sqrt{2})$.故选 C.



4.(多选)已知圆 $M:x^2+y^2-4x+3=0$,则下列说法正确的有　　(　　)

A.点(4,0)在圆 M 内

B.圆 M 关于直线 $x+3y-2=0$ 对称

C.圆 M 的半径为$\sqrt{3}$

D.直线 $x-\sqrt{3}y=0$ 与圆 M 相切

BD　**解析**:$x^2+y^2-4x+3=0$ 整理得 $(x-2)^2+y^2=1$.

因为 $x=4,y=0$ 时,$x^2+y^2-4x+3=3>0$,所以点(4,0)在圆 M 外,A 错误;

因为圆心 $M(2,0)$ 在直线 $x+3y-2=0$ 上,所以圆 M 关于直线 $x+3y-2=0$ 对称,B 正确;

因为圆 M 的半径为 1,故 C 错误;

因为圆心 $M(2,0)$ 到直线 $x-\sqrt{3}y=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|2|}{\sqrt{1+3}}=1$,与半径相等,所以直线 $x-\sqrt{3}y=0$ 与圆 M 相切,D 正确.

5.过原点且与圆 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 相切的直线的方程是　　(　　)

A.$y=\dfrac{3}{4}x$　　B.$y=\dfrac{3}{4}x$ 或 $y=0$

C.$y=\dfrac{3}{4}x$ 或 $x=0$　　D.$y=\dfrac{4}{3}x$ 或 $x=0$

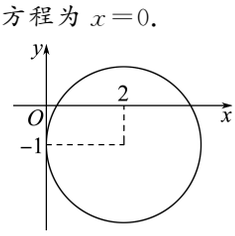
C　**解析**:由题意,圆的方程可化为 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$,则圆心为(2,−1),半径为 2.

当切线的斜率存在时,设切线方程为 $kx-y=0$.

由圆心(2,−1)到切线的距离等于半径 2,即 $\dfrac{|2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=2$,解得 $k=\dfrac{3}{4}$,

因此切线方程为 $y=\dfrac{3}{4}x$.

当切线的斜率不存在时,如图,y 轴是符合条件的切线,此时切线方程为 $x=0$.



综上,所求直线方程为 $y=\dfrac{3}{4}x$ 或 $x=0$.

6.已知直线 $ax-y+3=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 相交于 A,B 两点,且 $|AB|=2\sqrt{3}$,则 $a=$_____.

0　**解析**:由 $|AB|=2\sqrt{3}$,圆半径 $r=2$,

得圆心(1,2)到直线 $ax-y+3=0$ 的距离为 1,

即 $\dfrac{|a+1|}{\sqrt{a^2+1}}=1$,解得 $a=0$.

7.写出与圆 $x^2+y^2=1$ 和 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 都相切的一条直线的方程:_____.

$3x+4y-5=0$(或 $7x-24y-25=0$ 或 $x+1=0$)

解析:显然直线的斜率不为 0,不妨设直线的方程为 $x+by+c=0$,

于是$\frac{|c|}{\sqrt{1+b^2}}=1$,$\frac{|3+4b+c|}{\sqrt{1+b^2}}=4$.

故 $c^2=1+b^2$①,$|3+4b+c|=|4c|$,

于是 $3+4b+c=4c$ 或 $3+4b+c=-4c$.

再结合①解得$\begin{cases}b=0,\\c=1\end{cases}$或$\begin{cases}b=-\frac{24}{7},\\c=-\frac{25}{7}\end{cases}$或$\begin{cases}b=\frac{4}{3},\\c=-\frac{5}{3},\end{cases}$

所以直线有三条,分别为 $x+1=0$,$7x-24y-25=0$,$3x+4y-5=0$.

能力提升

1.已知直线 $mx-y-2m-1=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=9$ 交于 A,B 两点,则 $|AB|$ 的最小值为 (　　)

A.4　　B.3　　C.$4\sqrt{5}$　　D.$2\sqrt{5}$

A　**解析**:因为 $mx-y-2m-1=0$,所以 $m(x-2)-(y+1)=0$,

所以直线恒过点 $M(2,-1)$,所以 M 在圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=9$ 的内部,如图.

因为 $(x-1)^2+(y-1)^2=9$,圆心 $C(1,1)$,半径 $r=3$,

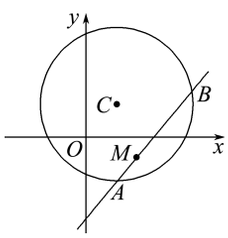
要使 $|AB|$ 最小,则圆心到直线 $mx-y-2m-1=0$ 的距离最大,

所以当直线 $mx-y-2m-1=0$ 与直线 CM 垂直时,

圆心到直线 $mx-y-2m-1=0$ 的距离最大.

因为 $C(1,1)$,$M(2,-1)$,所以 $|CM|=\sqrt{(1-2)^2+(1+1)^2}=\sqrt{5}$,

则 $|AB|$ 的最小值为 $2\sqrt{r^2-|CM|^2}=2\sqrt{9-5}=4$.



2.根据圆的性质,过圆 O 外的一点 A 可以作圆 O 的两条切线,设切点为 B,C,我们把四边形 $OBAC$ 称为圆 O 的“切点四边形”.已知圆 O:$x^2+y^2=1$,圆外有一点 $A(1,2)$,则圆 O 的“切点四边形”的周长为 (　　)

A.2　　B.4　　C.6　　D.8

C　**解析**:由题意,$|OA|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$,圆 O 的半径为 1,故 $|AB|=|AC|=\sqrt{5-1}=2$,

故四边形 $OBAC$ 的周长为 $|OB|+|OC|+|AB|+|AC|=1+1+2+2=6$.

3.圆 $x^2+y^2+2x+4y-3=0$ 上到直线 $x+y+1=0$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 的点有_____个.

3　**解析**:圆的方程可化为 $(x+1)^2+(y+2)^2=8$,所以圆心 $(-1,-2)$ 到直线 $x+y+1=0$ 的距离 $d=\frac{|-1-2+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

又圆的半径为 $2\sqrt{2}$,所以圆上到直线 $x+y+1=0$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 的点有 3 个.

4.若过点 $(0,4)$ 且与圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 相切的两条直线的夹角为 θ,则 $\tan\theta=$_____.

$\frac{3}{4}$　**解析**:由 $(x-2)^2+y^2=2$,得圆心 $(2,0)$,半径 $r=\sqrt{2}$,

所以点 $(0,4)$ 与圆心的距离 $d=\sqrt{(0-2)^2+(4-0)^2}=2\sqrt{5}$,

所以 $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{r}{d}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

又 $\cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}=1-2\times\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$,则 $\sin\theta=\frac{3}{5}$,

所以 $\tan\theta=\frac{3}{4}$.

5.已知圆 C:$(x-3)^2+(y-4)^2=4$.

(1)若直线 l 过定点 $A(1,0)$ 且与圆 C 相切,求直线 l 的方程;

(2)若直线 m:$kx-y-2k+3=0$ 与圆 C 交于 D,F 两点,求 $|DF|$ 的最小值.

解:(1)由题意可知,圆心 $C(3,4)$,半径 $r=2$.

当直线 l 的斜率存在时,设直线 l:$y=k(x-1)$,即 $kx-y-k=0$,

所以圆心 $C(3,4)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|3k-4-k|}{\sqrt{k^2+1}}=2$,解得 $k=\frac{3}{4}$,

此时直线 l 的方程为 $\frac{3}{4}x-y-\frac{3}{4}=0$,即 $3x-4y-3=0$;

当直线 l 的斜率不存在时,直线 l 的方程为 $x=1$,满足题意.

综上所述,直线 l 的方程为 $3x-4y-3=0$ 或 $x=1$.

(2)因为直线 m 的方程可化为 $y-3=k(x-2)$,所以直线 m 过定点 $P(2,3)$.

又点 $P(2,3)$ 在圆 C 内，所以当直线 m 与直线 CP 垂直时，直线 m 被圆 C 截得的弦 DF 的长 $|DF|$ 最小.

因为 $|CP|=\sqrt{(3-2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{2}$，$r=2$，

所以 $|DF|_{\min}=2\sqrt{r^2-|CP|^2}=2\sqrt{2}$，

所以 $|DF|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

自我超越

已知 P 是圆 $x^2+y^2+2x-15=0$ 上一动点，过点 P 作圆 C：$x^2+y^2-2x=0$ 的两条切线，切点分别为 A，B，则四边形 $PACB$ 的外接圆的面积的最大值为（　　）

A.8π　　B.9π　　C.16π　　D.36π

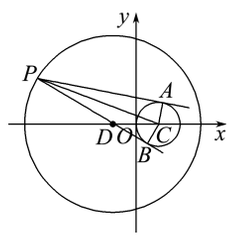
B　**解析**：圆 C：$x^2+y^2-2x=0$，即为 $(x-1)^2+y^2=1$，圆心 $C(1,0)$，圆 $x^2+y^2+2x-15=0$，即为 $(x+1)^2+y^2=16$，设圆心为 D，半径为 r，则 $D(-1,0)$，$r=4$.

因为 P 是圆 $x^2+y^2+2x-15=0$ 上一动点，

所以 $|PC|_{\max}=|CD|+r=2+4=6$.

因为 PA，PB 分别切圆 C 于 A，B，$|PC|$ 为四边形 $PACB$ 的外接圆的直径，

所以四边形 $PACB$ 的外接圆的面积的最大值为 $S=\pi\times3^2=9\pi$.



第 2 课时　直线与圆的位置关系的应用

学习任务目标

1.会用坐标法解决平面几何问题.
2.能用直线与圆的方程解决实际问题.
3.能解决直线与圆的位置关系的综合问题.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点　直线与圆的方程的应用

用坐标法解决平面几何问题的“三步曲”

第一步：建立适当的平面直角坐标系，用坐标和方程表示问题中的几何要素，如点、直线、圆，把平面几何问题转化为代数问题；第二步：通过代数运算，解决代数问题；第三步：把代数运算的结果“翻译”成几何结论.

【概念辨析】

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)在解决直线和圆的实际问题时，所建的坐标系不同，得到的直线或圆的方程也可能不同.（　√　）

(2)通过代数运算解决平面几何问题时，最后要将代数运算的结果“翻译”成几何结论.（　√　）

2.设村庄外围所在曲线可用方程 $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ 表示，村外一条小路所在直线可用方程 $x-y+2=0$ 表示，则村庄外围任一点到小路的最短距离为_____.

$\frac{7\sqrt{2}}{2}-2$　**解析**：由题意可知圆心为 $(2,-3)$，半径为 2，因为圆心 $(2,-3)$ 到直线 $x-y+2=0$ 的距离为 $\frac{|2+3+2|}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$，所以从村庄外围任一点到小路的最短距离为 $\frac{7\sqrt{2}}{2}-2$.

3.思考并回答下列问题：

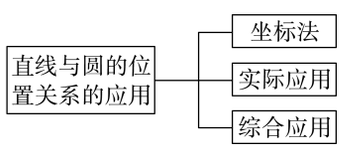
(1)解决平面几何问题时，如何建立平面直角坐标系？

提示：建立平面直角坐标系的方式对解决问题有着直接的影响.因此，建立平面直角坐标系时，应使所给图形尽量对称，所需的几何元素的坐标或方程尽量简单.

(2)你认为解决直线与圆的实际应用问题的关键是什么？

提示：关键是把实际应用问题转化为数学问题.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 直线与圆的位置关系的实际应用

探究活动

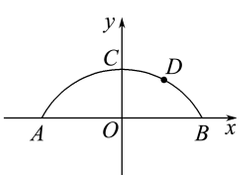
例1 “陶辛水韵”于1999年被评为芜湖市新十景之一，每年入夏后，千亩水面莲叶接天，荷花映日，吸引远道游客纷至沓来，坐上游船穿过一座座圆拱桥，可以直达“香湖岛”赏荷.如图所示圆拱桥的圆拱的水面跨度为20 m，拱高约5 m.现有一船，水面以上高3 m，欲通过该圆拱桥，船宽最大约为　　(　　)



A.12 m　　B.13 m

C.14 m　　D.15 m

B　**解析**：如图，拱形桥ACB，以AB所在直线为x轴，以线段AB的垂直平分线为y轴，建立平面直角坐标系，则$A(-10,0)$，$B(10,0)$，$C(0,5)$，圆心E在y轴上.



设$E(0,b)(b<0)$，则有$|AE|=|CE|$，即$\sqrt{100+b^2}=|5-b|$，

整理可得$2b+15=0$，解得$b=-\frac{15}{2}$，

所以圆心为$E\left(0,-\frac{15}{2}\right)$，半径为$|CE|=|5-b|=\frac{25}{2}$，

所以圆的方程为$x^2+\left(y+\frac{15}{2}\right)^2=\frac{625}{4}$.

设$D(x,3)$，则有$x^2+\left(3+\frac{15}{2}\right)^2=\frac{625}{4}$，解得$x=\pm\sqrt{46}$.

所以，要使小船通过圆拱桥，船宽最大为$2\sqrt{46}$.

因为$6.5<\sqrt{46}<7$，所以$13<2\sqrt{46}<14$.

【探究总结】

直线与圆的方程的实际应用问题的解题步骤

(1)审题：认真审题，明确题意，从题目中抽象出几何模型，明确已知和未知；

(2)建系：建立平面直角坐标系，根据实际问题求出相关点的坐标，从而求出直线与圆的方程；

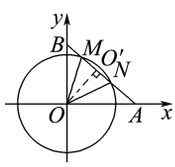
(3)求解：利用直线与圆的方程的有关知识求解；

(4)还原：将运算结果还原到实际问题中去.

应用迁移

1. 一艘海监船上配有雷达，其监测范围是半径为26 km的圆形区域.一艘轮船从位于海监船正东40 km的A处出发，径直驶向位于海监船正北30 km的B处，船速为10 km/h，则这艘轮船能被海监船监测到的时间约为多少小时？

解：根据题意，以海监船的位置为坐标原点，其正东方向为x轴正方向，正北方向为y轴正方向，建立如图所示的平面直角坐标系，



所以$A(40,0)$，$B(0,30)$，圆O：$x^2+y^2=676$，所以l_{AB}：$\frac{x}{40}+\frac{y}{30}=1$，即$l_{AB}$：$3x+4y-120=0$.

记从点N处开始被监测，到点M处监测结束，过点O作$OO'\perp AB$于点O'.

因为点O到直线AB的距离$|OO'|=\frac{|-120|}{\sqrt{3^2+4^2}}=24$(km)，

所以$|MN|=2\sqrt{|MO|^2-|OO'|^2}=20$(km).

因为$\frac{20}{10}=2$(h)，

所以这艘轮船被海监船监测到的时间约为2 h.

2. 从点$A(-3,3)$发出的光线l射到x轴上，被x轴反射，其反射光线所在直线与圆$x^2+y^2-4x-4y+7=0$相切.求光线l所在直线的方程.

解：如图，设l与x轴交于点$B(b,0)(b\neq-3)$，则$k_{AB}=\frac{-3}{b+3}$.

根据光的反射定律，反射光线的斜率$k_{反}=\frac{3}{b+3}$，

所以反射光线所在直线的方程为$y=\frac{3}{b+3}(x-b)$，

即$3x-(b+3)y-3b=0$.

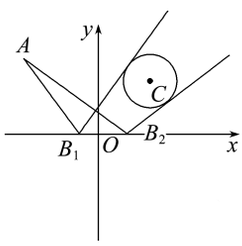
设圆心为C，

将$x^2+y^2-4x-4y+7=0$化为$(x-2)^2+(y-2)^2=1$，可知，圆心$C(2,2)$，半径为1，

所以$\frac{|6-(b+3)\times2-3b|}{\sqrt{9+(b+3)^2}}=1$，解得$b_1=-\frac{3}{4}$，$b_2=1$，

所以$k_{AB}=-\frac{4}{3}$或$k_{AB}=-\frac{3}{4}$.

所以光线l所在直线的方程为$y-3=-\frac{4}{3}(x+3)$或$y-3=\frac{-3}{4}(x+3)$，即$4x+3y+3=0$或$3x+4y-3=0$.



任务2 与圆有关的最值问题

探究活动

例2　已知点(x,y)在圆$(x-2)^2+(y+3)^2=1$上.

(1)求$\frac{y}{x}$的最大值和最小值；

(2)求$x+y$的最大值和最小值.

解：(1)$\frac{y}{x}$可看作点(x,y)与原点连线的斜率，$\frac{y}{x}$的最大值和最小值就是与该圆有公共点且过原点的直线的斜率的最大值和最小值，即直线与圆相切时的斜率.

由题意知，圆心为$(2,-3)$，半径为1.

设过原点的直线的方程为$y=kx$.

由直线与圆相切，得圆心到直线的距离等于半径，即$\frac{|2k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，

解得$k=-2+\frac{2\sqrt{3}}{3}$或$k=-2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以$\frac{y}{x}$的最大值为$-2+\frac{2\sqrt{3}}{3}$，最小值为$-2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2)设$t=x+y$，则$y=-x+t$，t可看作直线$y=-x+t$在y轴上的截距.

所以$x+y$的最大值和最小值就是直线$y=-x+t$与圆有公共点时直线纵截距的最大值和最小值，即直线$y=-x+t$与圆相切时的纵截距.

由直线与圆相切，得圆心到直线的距离等于半径，即$\frac{|2+(-3)-t|}{\sqrt{2}}=1$，解得$t=\sqrt{2}-1$或$t=-\sqrt{2}-1$.

所以$x+y$的最大值为$\sqrt{2}-1$，最小值为$-\sqrt{2}-1$.

[一题多思]

思考1.本例(2)还有其他解法吗？

解：因为$(x-2)^2+(y+3)^2=1$，故可设$x=2+\cos\alpha$，$y=-3+\sin\alpha$，$\alpha\in\mathbf{R}$，

所以$x+y=-1+\cos\alpha+\sin\alpha=-1+\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，

故当$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1$时，$x+y$取得最大值$-1+\sqrt{2}$；

当$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-1$时，$x+y$取得最小值$-1-\sqrt{2}$.

思考2.已知点$O(0,0)$，$A(0,2)$，点M是圆$(x-2)^2+(y+3)^2=1$上的动点，求$\triangle OAM$面积的最小值.

解：根据题意，得圆$(x-2)^2+(y+3)^2=1$的圆心为$(2,-3)$，半径$r=1$.

因为$O(0,0)$，$A(0,2)$，所以OA所在的直线是y轴.

当点M到直线AO的距离最小时，$\triangle OAM$的面积最小，

则点M到直线AO的距离的最小值为$d=2-1=1$，

所以$\triangle OAM$面积的最小值为$S=\frac{1}{2}|OA|\cdot d=1$.

【探究总结】

代数式最值问题的常见类型

(1)$u=\frac{y-b}{x-a}$的最值问题，可转化为过点(a,b)和点(x,y)的直线的斜率的最值问题；

(2)$t=ax+by$的最值问题，可转化为直线$y=-\frac{a}{b}x+\frac{t}{b}$的纵截距的最值问题；

(3)$(x-a)^2+(y-b)^2$的最值问题，可转化为动点(x,y)到定点(a,b)的距离的平方的最值问题.

应用迁移

1.(2023·全国乙卷)已知实数x，y满足$x^2+y^2-4x-2y-4=0$，则$x-y$的最大值是　(　　)

A.$1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B.4

C.$1+3\sqrt{2}$　　D.7

C　**解析**：(方法一)令 $x-y=k$，则 $x=k+y$，

代入圆的方程化简得 $2y^2+(2k-6)y+k^2-4k-4=0$.

因为存在实数 y，所以 $\Delta\geqslant 0$，即 $(2k-6)^2-4\times 2(k^2-4k-4)\geqslant 0$，

化简得 $k^2-2k-17\leqslant 0$，解得 $1-3\sqrt{2}\leqslant k\leqslant 1+3\sqrt{2}$.

故 $x-y$ 的最大值是 $1+3\sqrt{2}$.

(方法二)将 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$，整理得 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$.

令 $x=3\cos\theta+2$，$y=3\sin\theta+1$，其中 $\theta\in[0,2\pi]$，

则 $x-y=3\cos\theta-3\sin\theta+1=3\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+1$.

因为 $\theta\in[0,2\pi]$，所以 $\theta+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{9\pi}{4}\right]$，当 $\theta+\frac{\pi}{4}=2\pi$，即 $\theta=\frac{7\pi}{4}$ 时，$x-y$ 取得最大值 $3\sqrt{2}+1$.

(方法三)由 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$，得 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$，可知圆心为 $(2,1)$，半径为 3.

设 $x-y=m$，则圆心到直线 $x-y=m$ 的距离 $d=\frac{|2-1-m|}{\sqrt{2}}\leqslant 3$，解得 $1-3\sqrt{2}\leqslant m\leqslant 3\sqrt{2}+1$.

故 $x-y$ 的最大值为 $3\sqrt{2}+1$.

2.(多选)已知实数 x,y 满足方程 $x^2+y^2-4x+1=0$，则下列说法正确的有　(　)

A.圆心坐标为 $(2,0)$

B.y 的最大值为 2

C.$\sqrt{x^2+(y-1)^2}$ 的最大值为 $\sqrt{5}+\sqrt{3}$

D.$x+y$ 的最大值为 $2+\sqrt{6}$

ACD　**解析**：对于 A，方程 $x^2+y^2-4x+1=0$ 为 $(x-2)^2+y^2=3$，表示以 $C(2,0)$ 为圆心，$r=\sqrt{3}$ 为半径的圆，故 A 正确；

对于 B，因为 $(x-2)^2\geqslant 0$，所以 $y^2\leqslant 3$，所以 $-\sqrt{3}\leqslant y\leqslant\sqrt{3}$，所以 y 的最大值为 $\sqrt{3}$，故 B 错误；

对于 C，$\sqrt{x^2+(y-1)^2}$ 表示圆上点 (x,y) 到定点 $(0,1)$ 的距离，又圆心 $(2,0)$ 到定点 $(0,1)$ 的距离为 $d=\sqrt{(2-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{5}$，所以圆上点 (x,y) 到定点 $(0,1)$ 的距离的最大值为 $d+r=\sqrt{5}+\sqrt{3}$，故 C 正确；

对于 D，设 $x+y=t$，直线 $x+y-t=0$ 与圆 $(x-2)^2+y^2=3$ 有公共点，则有 $\frac{|2-t|}{\sqrt{2}}\leqslant\sqrt{3}$，解得 $2-\sqrt{6}\leqslant t\leqslant 2+\sqrt{6}$，所以 $x+y$ 的最大值为 $2+\sqrt{6}$，故 D 正确.

课后素养评价(二十四)

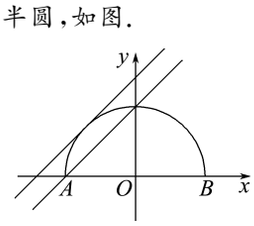
基础落实

1.已知直线 $y=x+m$ 和曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 有两个不同的交点，则实数 m 的取值范围是　(　)

A.$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$　　B.$[-1,\sqrt{2}]$

C.$[1,\sqrt{2})$　　D.$[1,\sqrt{2}]$

C　**解析**：由 $y=\sqrt{1-x^2}$，得到 $x^2+y^2=1(y\geqslant 0)$，所以曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 表示以原点为圆心，1 为半径的 x 轴上方的半圆，如图.



当直线 $y=x+m$ 过点 $A(-1,0)$ 时，$m=1$，此时 $y=x+m$ 与曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 有两个不同的交点，

当直线 $y=x+m$ 与曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 相切时，由 $\frac{|m|}{\sqrt{2}}=1$，解得 $m=\sqrt{2}$ 或 $m=-\sqrt{2}$(舍).

由图可知，实数 m 的取值范围是 $[1,\sqrt{2})$.

2.已知直线 $x+y-k=0(k>0)$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 交于不同的两点 A,B，O 是坐标原点，且有 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|\geqslant\sqrt{3}|\overrightarrow{AB}|$，则实数 k 的取值范围是　(　)

A.$(\sqrt{3},\sqrt{6})$　　B.$[\sqrt{2},\sqrt{6})$

C.$[\sqrt{6},2\sqrt{2})$　　D.$[\sqrt{6},2\sqrt{3})$

C　**解析**：设 AB 的中点为 C，则 $OC\perp AB$.

因为 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|\geqslant\sqrt{3}|\overrightarrow{AB}|$，

所以 $|2\overrightarrow{OC}|\geqslant\sqrt{3}|\overrightarrow{AB}|$，所以 $|\overrightarrow{AB}|\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}|\overrightarrow{OC}|$.

因为 $|\overrightarrow{OC}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2=4\Rightarrow\frac{4}{3}|\overrightarrow{OC}|^2\geqslant 4$，

即 $|\overrightarrow{OC}|^2\geqslant 3$.

又因为直线 $x+y-k=0(k>0)$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 交于不同的两点 A,B，

所以$|\overrightarrow{OC}|^2<4$，故$4>|\overrightarrow{OC}|^2\geqslant 3$，

则$4>\left(\frac{|-k|}{\sqrt{2}}\right)^2\geqslant 3$.

因为$k>0$，所以$\sqrt{6}\leqslant k<2\sqrt{2}$.

3.已知直线l与圆C：$x^2+y^2-4y=0$相交于A，B两点，且线段AB的中点P的坐标为$(-1,1)$，则直线l的方程为_____.

$x+y=0$　**解析**：因为圆C：$x^2+y^2-4y=0$的圆心为$C(0,2)$，又点$P(-1,1)$，

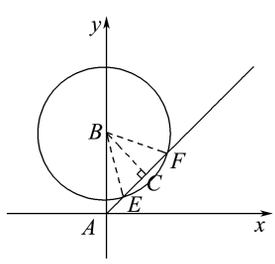
所以直线CP的斜率为$k_{CP}=\frac{2-1}{0+1}=1$.

因为AB是圆C的一条弦，P为线段AB的中点，所以$AB\perp CP$，所以$k_{AB}=-1$，即直线l的斜率为-1.

因此，直线l的方程为$y-1=-(x+1)$，即$x+y=0$.

4.我国东南沿海一个台风中心从A地以10 km/h的速度向东北方向移动，离台风中心15 km内的地区为危险地区.若城市B在A地正北20 km处，试确定城市B处于危险地区的时间.

解：以A为坐标原点，正北方向为纵轴正方向，正东方向为横轴正方向，建立如图所示的平面直角坐标系.



因为台风中心从A地以10 km/h的速度向东北方向移动，所以运动轨迹所在直线AF与坐标轴成$45°$角.

设以点B为圆心，15 km为半径的圆交AF于点E，F，连接BE，BF.

过点B作$BC\perp AF$，交AF于点C.

在等腰直角三角形ABC中，$AB=20$ km，$BC=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 20=10\sqrt{2}$(km).

在Rt$\triangle BCE$中，$BC=10\sqrt{2}$ km，$BE=15$ km，所以$CE=\sqrt{BE^2-BC^2}=5$(km)，所以$EF=2CE=10$(km).

因为台风中心从A地以10 km/h的速度向东北方向移动，且当台风中心在线段EF上时城市B处于危险地区内，所以城市B处于危险地区内的时间为$\frac{10}{10}=1$(h).

5.已知$M(m,n)$为圆C：$x^2+y^2-4x-14y+45=0$上任意一点.

(1)求$m+2n$的最大值；

(2)求$\frac{n-3}{m+2}$的最大值和最小值；

(3)求m^2+n^2的最大值和最小值.

解：圆的方程$x^2+y^2-4x-14y+45=0$可化为$(x-2)^2+(y-7)^2=8$，所以圆心为$C(2,7)$，半径$r=2\sqrt{2}$.

(1)设$m+2n=t$，则将$m+2n=t$看成是关于m，n的方程.

因为该直线与圆C有公共点，所以圆心C到该直线的距离$d=\frac{|2+2\times 7-t|}{\sqrt{1^2+2^2}}\leqslant 2\sqrt{2}$，

解得$16-2\sqrt{10}\leqslant t\leqslant 16+2\sqrt{10}$，

所以$m+2n$的最大值为$16+2\sqrt{10}$.

(2)设点$Q(-2,3)$，则$\frac{n-3}{m+2}$表示直线MQ的斜率.

设直线MQ的方程为$y-3=k(x+2)$，即$kx-y+2k+3=0$.

因为直线MQ与圆C有公共点，所以圆心C到直线MQ的距离$\frac{|2k-7+2k+3|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant 2\sqrt{2}$，解得$2-\sqrt{3}\leqslant k\leqslant 2+\sqrt{3}$，

所以$\frac{n-3}{m+2}$的最大值为$2+\sqrt{3}$，最小值为$2-\sqrt{3}$.

(3)设$\mu=m^2+n^2=(m-0)^2+(n-0)^2$，表示圆$C$上的点到原点的距离的平方，

则$\mu_{\max}=[\sqrt{(2-0)^2+(7-0)^2}+r]^2=(\sqrt{53}+2\sqrt{2})^2=61+4\sqrt{106}$，

$\mu_{\min}=[\sqrt{(2-0)^2+(7-0)^2}-r]^2=(\sqrt{53}-2\sqrt{2})^2=61-4\sqrt{106}$，

所以m^2+n^2的最大值为$61+4\sqrt{106}$，最小值为$61-4\sqrt{106}$.

能力提升

1.若关于x的方程$kx+3-k=\sqrt{1-x^2}$恰有两个实数根，则实数k的取值范围是（　　）

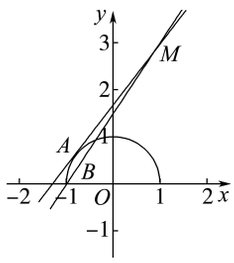
A.$\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$　　B.$\left(\frac{4}{3},\frac{3}{2}\right]$

C.$\left(0,\frac{4}{3}\right)$　　D.$\left(\frac{4}{3},\frac{3}{2}\right)$

B　**解析**：因为关于x的方程$kx+3-k=\sqrt{1-x^2}$

恰有两个实数根，

所以函数 $y=k(x-1)+3$ 与 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的图象恰有两个交点，即直线 $y=k(x-1)+3$ 与半圆 $y=\sqrt{1-x^2}$ 恰有两个交点，如图所示.



已知直线 $y=k(x-1)+3$ 经过定点 $M(1,3)$，

当直线 $y=k(x-1)+3$ 与半圆 $y=\sqrt{1-x^2}$ 相切于点 A 时，由 $\frac{|3-k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=\frac{4}{3}$.

当直线 $y=k(x-1)+3$ 经过点 $B(-1,0)$ 时，$k=\frac{3}{2}$.

所以满足函数 $y=k(x-1)+3$ 与 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的图象恰有两个交点的 k 的取值范围为 $\left(\frac{4}{3},\frac{3}{2}\right]$.

2.（新定义）如果动点 M 与两定点 A,B 的距离之比为 $\lambda(\lambda>0,\lambda\neq1)$，那么点 M 的轨迹是一个圆，这个圆称为“阿氏圆”.已知 $A(3,0)$，$O(0,0)$，若直线 $3x-4y+c=0$ 上存在点 M 满足 $|MA|=2|MO|$，则实数 c 的取值范围是　　（　　）

A.$(-7,13)$　　B.$[-7,13]$

C.$(-11,9)$　　D.$[-11,9]$

B　**解析**：点 M 在直线 $3x-4y+c=0$ 上，设点 M 的坐标为 $\left(x,\frac{3x+c}{4}\right)$.

由直线 $3x-4y+c=0$ 上存在点 M 满足 $|MA|=2|MO|$，则 $|MA|^2=4|MO|^2$，

所以 $(x-3)^2+\left(\frac{3x+c}{4}\right)^2=4\left[x^2+\left(\frac{3x+c}{4}\right)^2\right]$，

整理可得 $25x^2+(6c+32)x+c^2-48=0$.

由 $\Delta=(6c+32)^2-100(c^2-48)\geqslant0$，得 $c^2-6c-91\leqslant0$，解得 $-7\leqslant c\leqslant13$，

所以实数 c 的取值范围为 $[-7,13]$.

3.已知圆 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=25$，直线 $l:mx-y-3m+1=0$ 与 C 相交于 A,B 两点，则 $|AB|$ 的最小值为　　（　　）

A.$4\sqrt{5}$　　B.2

C.4　　D.$2\sqrt{5}$

A　**解析**：由圆 C 的方程可得圆心 $C(1,2)$，半径 $r=5$.

直线 l 的方程可整理为 $m(x-3)-y+1=0$，

令 $\begin{cases}x-3=0,\\-y+1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\y=1,\end{cases}$

所以直线 l 恒过定点 $D(3,1)$.

由题意知，当 AB 与 CD 垂直时，弦长 $|AB|$ 最小，

此时，$k_{CD}=\frac{2-1}{1-3}=-\frac{1}{2}$，所以 $k_{AB}=2$，直线 $l:2x-y-5=0$.

因为点 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{|2-2-5|}{\sqrt{4+1}}=\sqrt{5}$，

所以 $|AB|_{\min}=2\sqrt{r^2-d^2}=2\times\sqrt{25-5}=4\sqrt{5}$.

4.已知 P 是直线 $l:3x-4y+11=0$ 上的动点，PA，PB 是圆 $C:x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 的两条切线，则四边形 $PACB$ 面积的最小值是　　（　　）

A.$\sqrt{2}$　　B.$2\sqrt{2}$

C.$\sqrt{3}$　　D.$2\sqrt{3}$

C　**解析**：圆的标准方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$，圆心为 $C(1,1)$，半径为 $r=1$，

圆心 $C(1,1)$ 到直线 $l:3x-4y+11=0$ 的距离 $d=\frac{|3-4+11|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2>r=1$，

所以圆 C 与直线 l 相离.

根据对称性可知，四边形 $PACB$ 的面积为 $2S_{\triangle APC}=2\times\frac{1}{2}\times|PA|\times r=|PA|=\sqrt{|PC|^2-r^2}=\sqrt{|PC|^2-1}$，

要使四边形 $PACB$ 的面积最小，则只需 $|PC|$ 最小.

又 $|PC|$ 的最小值为圆心 C 到直线 $l:3x-4y+11=0$ 的距离 $d=2$，

所以四边形 $PACB$ 面积的最小值为 $\sqrt{|PC|_{\min}^2-1}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$.

故选 C.

5.设直线 $y=x+2a$ 与圆 $C:x^2+y^2-2ay-2=0$ 相交于 A,B 两点.若 $|AB|=2\sqrt{3}$，则圆 C 的面积为_____.

4π　**解析**：圆 C 的方程可化为 $x^2+(y-a)^2=a^2+2$，可得圆心为 $C(0,a)$，半径 $r=\sqrt{a^2+2}$，所以圆心 C 到直线 $x-y+2a=0$ 的距离为 $\frac{|-a+2a|}{\sqrt{2}}=\frac{|a|}{\sqrt{2}}$.由题意得 $\left(\frac{|a|}{\sqrt{2}}\right)^2+(\sqrt{3})^2=(\sqrt{a^2+2})^2$，解得 $a^2=2$，所以圆 C 的半径为 2，所以圆 C 的面积为 4π.

6.已知圆 $C:x^2+y^2-x-8y+m=0$ 和直线 $x+2y$

$-6=0$ 交于 P，Q 两点，定点 $R(1,1)$．若 $PR\perp QR$，则 m 的值为_____．

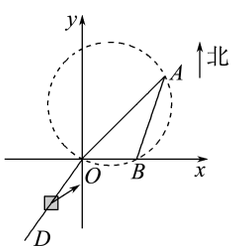
10　**解析**：由题意知，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，因为 $PR\perp QR$，所以 $\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{QR}=(1-x_1,1-y_1)\cdot(1-x_2,1-y_2)=1-(x_1+x_2)+x_1x_2+1-(y_1+y_2)+y_1y_2=5-2(x_1+x_2)+\frac{5}{4}x_1x_2=0$．

由 $\begin{cases}x^2+y^2-x-8y+m=0,\\x+2y-6=0,\end{cases}$ 消去 y，得 $5x^2+4m-60=0$，

所以 $x_1+x_2=0$，$x_1x_2=\frac{4m-60}{5}$，

所以 $5+\frac{5}{4}\times\frac{4m-60}{5}=m-10=0$，得 $m=10$．

7. 如图，某海面上有 O，A，B 三个小岛（面积大小忽略不计），A 岛在 O 岛的北偏东 $45°$ 方向距 O 岛 $40\sqrt{2}$ km 处，B 岛在 O 岛的正东方向距 O 岛 20 km 处，以 O 为坐标原点，O 的正东方向为 x 轴的正方向，1 km为单位长度，建立平面直角坐标系，圆 C 经过 O，A，B 三点．



(1)求圆 C 的标准方程；

(2)若圆 C 区域内有未知暗礁，现有一船在 O 岛的南偏西 $30°$ 方向距 O 岛 40 km 的 D 处，沿着北偏东 $60°$ 方向行驶，如果不改变方向，那么该船有没有触礁的危险？

解：(1)由题意可知，$A(40,40)$，$B(20,0)$．

设过 O，A，B 三点的圆 C 的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

则 $\begin{cases}F=0,\\40^2+40^2+40D+40E+F=0,\\20^2+20D+F=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}D=-20,\\E=-60,\\F=0,\end{cases}$

所以圆 C 的方程为 $x^2+y^2-20x-60y=0$，即圆 C 的标准方程为 $(x-10)^2+(y-30)^2=1\,000$．

(2)由(1)知，圆 C 的圆心 $C(10,30)$，半径 $r=10\sqrt{10}$．

易知 $D(-20,-20\sqrt{3})$，且该船航线所在直线 l 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，

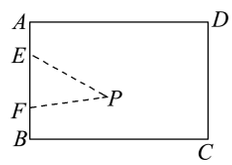
故直线 l 的方程为 $\sqrt{3}x-3y-40\sqrt{3}=0$．

由于圆心 $C(10,30)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|10\sqrt{3}-3\times30-40\sqrt{3}|}{\sqrt{3+9}}=15(\sqrt{3}+1)>10\sqrt{10}$，

所以该船没有触礁的危险．

自我超越

如图，在某次机器人及人工智能大赛总决赛中，主办方设计了一个矩形场地 $ABCD$（包含地界和内部），BC 长为 12 m，在 AB 边上距离 B 点 5 m 的 E 处放置一只机器犬，在距离 B 点 2 m 的 F 处放置一个机器人，机器人行走的速度为 v，机器犬行走的速度为 $2v$．若机器犬和机器人在场地内沿着直线方向同时到达场地内某点 P，则机器犬将被机器人捕获，点 P 为成功点．



(1)求在这个矩形场地内成功点 P 的轨迹方程；

(2)若 N 为矩形场地 BC 边上的一点，机器犬在线段 EN 上都能逃脱，N 点应在何处？

解：(1)如图 1，以 BC，BA 所在直线分别为 x 轴、y 轴，建立平面直角坐标系，则 $E(0,5)$，$F(0,2)$．

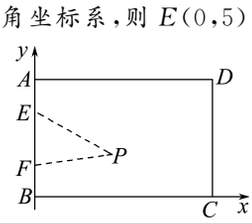


图 1

设成功点 $P(x,y)$，可得 $\frac{|PF|}{v}=\frac{|PE|}{2v}$，即 $\frac{\sqrt{x^2+(y-2)^2}}{v}=\frac{\sqrt{x^2+(y-5)^2}}{2v}$，

化简得 $x^2+(y-1)^2=4$．

因为点 P 需在矩形场地内，所以 $0\leqslant x\leqslant2$，

故所求轨迹方程为 $x^2+(y-1)^2=4(0\leqslant x\leqslant2,y\geqslant0)$．

(2)如图 2，当线段 EN 与(1)中的圆相切时，$\sin\angle BEP=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，所以 $\angle BEP=30°$，所以 $|BN|=5\tan30°=\frac{5\sqrt{3}}{3}$．

若机器犬在线段 EN 上都能逃脱，则点 N 的横坐标的取值范围是 $\left[\frac{5\sqrt{3}}{3},12\right]$．

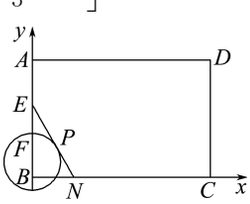


图 2

2.5.2　圆与圆的位置关系

学习任务目标

1.能根据给定的方程判断圆与圆的位置关系.

2.初步了解用代数方法处理几何问题的思想,学会用数形结合思想处理问题.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点　圆与圆的位置关系

已知圆 $O_1:(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2(r_1>0)$,

圆 $O_2:(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2(r_2>0)$,则两圆的位置关系如下:

位置关系	几何法:圆心距 d 与 r_1,r_2 的关系	代数法:两圆的方程组成的方程组的解的情况
外离	$d>r_1+r_2$	没有实数解
外切	$d=r_1+r_2$	一组实数解
相交	$\lvert r_1-r_2\rvert<d<r_1+r_2$	两组不同的实数解
内切	$d=\lvert r_1-r_2\rvert(r_1\neq r_2)$	一组实数解
内含	$0\leqslant d<\lvert r_1-r_2\rvert(r_1\neq r_2)$	没有实数解

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)若两个圆的方程组成的方程组只有一组实数解,则两圆外切.　(　×　)

(2)若两圆的圆心距小于两圆的半径之和,则两圆相交.　(　×　)

(3)由两圆的方程消去二次项后得到的二元一次方程是两圆的公共弦所在直线的方程.　(　×　)

(4)若两圆有公共点,则两圆的半径 r_1,r_2 与圆心距 d 满足 $\lvert r_1-r_2\rvert\leqslant d\leqslant r_1+r_2$.　(　√　)

2.圆 $x^2+y^2-2x=0$ 和圆 $x^2+y^2+4y=0$ 的位置关系是　(　)

A.相离　B.外切　C.相交　D.内切

C　**解析**:两圆的方程可分别化为 $(x-1)^2+y^2=1$ 和 $x^2+(y+2)^2=4$,两圆的圆心距为 $\sqrt{(1-0)^2+(0+2)^2}=\sqrt{5}$,又 $2-1<\sqrt{5}<2+1$,所以两圆相交.

3.思考并回答下列问题:

(1)利用代数法判断两圆的位置关系,当方程组无解时,两圆一定是外离吗?

提示:不一定,也可能内含.

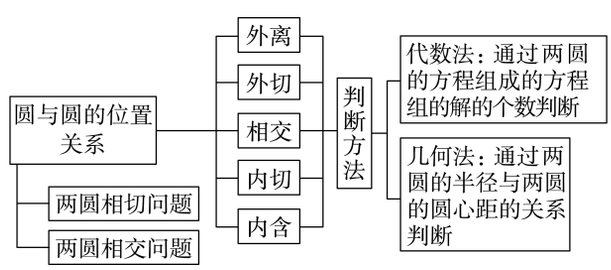
(2)利用代数法判断两圆的位置关系,当方程组有一组解时,两圆一定是外切吗?

提示:不一定,也可能内切.

(3)两圆的位置关系与其公切线的条数有什么关系?

提示:当两圆外离时有四条公切线,当两圆外切时有三条公切线,当两圆相交时有两条公切线,当两圆内切时只有一条公切线,当两圆内含时无公切线.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1　圆与圆位置关系的判断

探究活动

例1　判断下列各组中两圆的位置关系.若相交,请写出公共弦所在直线的方程.

(1)圆 $(x+2)^2+(y-2)^2=1$ 和圆 $(x-2)^2+(y-5)^2=16$;

(2)圆 $x^2+y^2+6x-7=0$ 和圆 $x^2+y^2+6y-27=0$.

解:(1)根据题意,得两圆的圆心分别为 $(-2,2)$,$(2,5)$,半径分别为 $r_1=1$,$r_2=4$,两圆的圆心距 $d=\sqrt{[2-(-2)]^2+(5-2)^2}=5$.因为 $d=r_1+r_2$,所以

两圆外切.

(2)将圆的一般方程化成标准方程,得$(x+3)^2+y^2=16$,$x^2+(y+3)^2=36$,故两圆的圆心分别为$(-3,0)$,$(0,-3)$,半径分别为$r_1=4$,$r_2=6$,两圆的圆心距$d=\sqrt{(0+3)^2+(-3-0)^2}=3\sqrt{2}$.

因为$6-4<3\sqrt{2}<6+4$,即$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$,所以两圆相交.

因为$x^2+y^2+6x-7=0$和$x^2+y^2+6y-27=0$两式相减,得$3x-3y+10=0$,所以公共弦所在直线的方程为$3x-3y+10=0$.

【探究总结】

判断两圆的位置关系或利用两圆的位置关系求参数的取值范围有以下几个步骤:

(1)利用圆的标准方程,写出圆心坐标和半径;

(2)计算两圆的圆心距d;

(3)通过d与r_1+r_2和$|r_1-r_2|$的关系来判断两圆的位置关系或求参数的取值范围,必要时可借助于图形,数形结合.

应用迁移

1.已知两圆分别为圆$C_1:x^2+y^2=81$和圆$C_2:x^2+y^2-6x-8y+9=0$,则这两圆的位置关系是　　(　　)

A.相离　　B.相交

C.内切　　D.外切

C　**解析:**圆C_1的圆心为$C_1(0,0)$,半径$r_1=9$,圆C_2的方程化为标准形式为$(x-3)^2+(y-4)^2=16$,圆心为$C_2(3,4)$,半径$r_2=4$,所以$|C_1C_2|=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5$.因为$r_1-r_2=5$,所以$|C_1C_2|=r_1-r_2$,所以圆$C_1$和圆$C_2$内切.

2.已知圆$C_1:(x+4)^2+(y-3)^2=9$与圆$C_2:x^2+y^2-4x+10y+m=0$外离,则m的取值范围是　　(　　)

A.$(-\infty,29)$　　B.$(-20,+\infty)$

C.$(-20,29)$　　D.$(-28,29)$

C　**解析:**由$C_1:(x+4)^2+(y-3)^2=9$,圆心为$C_1(-4,3)$,半径为$r_1=3$,

圆$C_2:x^2+y^2-4x+10y+m=0$,即$(x-2)^2+(y+5)^2=29-m$,

圆心为$C_2(2,-5)$,半径为$r_2=\sqrt{29-m}$,$m<29$.

又$|C_1C_2|=\sqrt{36+64}=10$,且两圆外离,

则$|C_1C_2|>r_1+r_2$,即$10>3+\sqrt{29-m}$,解得$m>-20$,

所以$-20<m<29$,即m的取值范围是$(-20,29)$.

任务2 两圆相切问题

探究活动

例2　求与圆$C:x^2+y^2-2x=0$外切,且与直线$l:x+\sqrt{3}y=0$相切于点$M(3,-\sqrt{3})$的圆的方程.

解:圆C的方程可化为$(x-1)^2+y^2=1$,圆心为$C(1,0)$,半径为1.

设所求圆的标准方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$,

由题意,可得$\begin{cases}\sqrt{(a-1)^2+b^2}=r+1,\\ \dfrac{b+\sqrt{3}}{a-3}\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=-1,\\ \dfrac{|a+\sqrt{3}b|}{2}=r,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=4,\\ b=0,\\ r=2\end{cases}$或$\begin{cases}a=0,\\ b=-4\sqrt{3},\\ r=6,\end{cases}$

所以所求圆的标准方程为$(x-4)^2+y^2=4$或$x^2+(y+4\sqrt{3})^2=36$.

【探究总结】

两圆相切时常用的性质

(1)设两圆的圆心分别为O_1,O_2,半径分别为r_1,r_2,则$\begin{cases}\text{内切}\Leftrightarrow|O_1O_2|=|r_1-r_2|,\\ \text{外切}\Leftrightarrow|O_1O_2|=r_1+r_2;\end{cases}$

(2)两圆相切时,两圆圆心所在的直线过切点(两圆相交时,两圆圆心所在的直线垂直平分公共弦).

应用迁移

已知直线l与圆$(x-2)^2+(y-3)^2=1$和圆$(x+1)^2+(y+1)^2=36$均相切,则l的方程为　　(　　)

A.$x+2y-23=0$　　B.$x+2y+23=0$

C.$3x+4y-23=0$　　D.$3x+4y+23=0$

C　**解析:**圆$(x-2)^2+(y-3)^2=1$的圆心为$M(2,3)$,半径为$R_1=1$,圆$(x+1)^2+(y+1)^2=36$的圆心为$N(-1,-1)$,半径为$R_2=6$.

因为$|MN|=\sqrt{(2+1)^2+(3+1)^2}=5=R_2-R_1$,

所以两个圆内切,因此与两圆均相切的直线l为两个圆的公共弦所在直线的方程.

所以l的方程为$(x+1)^2+(y+1)^2-(x-2)^2-(y-3)^2=36-1$,整理得$3x+4y-23=0$.

任务3 两圆相交问题

探究活动

例3　已知圆 $C_1:x^2+y^2-2x-6y-1=0$ 和圆 $C_2:x^2+y^2-10x-12y+45=0$.

(1)判断圆 C_1 和圆 C_2 的位置关系，并说明理由；

(2)求圆 C_1 和圆 C_2 的公共弦所在直线的方程和公共弦的长.

解：(1)圆 C_1 和圆 C_2 相交.理由如下：

将圆 C_1 和圆 C_2 的一般方程化为标准方程，得圆 $C_1:(x-1)^2+(y-3)^2=11$，圆 $C_2:(x-5)^2+(y-6)^2=16$，则圆心 $C_1(1,3)$，半径 $r_1=\sqrt{11}$，圆心 $C_2(5,6)$，半径 $r_2=4$.

又两圆的圆心距 $d=|C_1C_2|=\sqrt{(5-1)^2+(6-3)^2}=5$，$r_1+r_2=\sqrt{11}+4$，$|r_1-r_2|=4-\sqrt{11}$，

所以 $|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$，

所以圆 C_1 和圆 C_2 相交.

(2)将圆 C_1 和圆 C_2 的方程相减，得 $4x+3y-23=0$，所以两圆的公共弦所在直线的方程为 $4x+3y-23=0$.

因为圆心 $C_2(5,6)$ 到直线 $4x+3y-23=0$ 的距离 $d=\dfrac{|20+18-23|}{\sqrt{16+9}}=3$，

所以公共弦长为 $2\sqrt{r_2^2-d^2}=2\sqrt{16-9}=2\sqrt{7}$.

【探究总结】

1. 求两圆的公共弦所在直线的方程的方法：将两圆的方程相减即得两圆公共弦所在直线的方程，但必须注意，只有当两圆方程中的二次项系数相同时才能如此求解，否则应先调整系数.
2. 求两圆公共弦的长的方法：一是联立两圆的方程求出交点坐标，再用两点间的距离公式求解；二是先求出两圆的公共弦所在直线的方程，再利用以半径、弦心距和弦长的一半为三边长的直角三角形求解.
3. 已知圆 $C_1:x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 与圆 $C_2:x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 相交，则过两圆交点的圆的方程可设为 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0(\lambda\neq-1)$.

应用迁移

1. 圆 $C_1:x^2+y^2=4$ 与圆 $C_2:x^2+y^2-4x+4y=a$ 的公共弦长为 $2\sqrt{2}$，则 a 的值为　　(　　)

A.12 或 4　　B.12 或 −4

C.16 或 4　　D.16 或 −4

B　**解析**：两圆方程作差可得 $4x-4y=4-a$，即公共弦所在直线的方程为 $4x-4y+a-4=0$.

由圆 $C_1:x^2+y^2=4$，则圆心 $C_1(0,0)$，半径 $r=2$，

点 C_1 到公共弦所在直线的距离 $d=\dfrac{|a-4|}{\sqrt{16+16}}$，

公共弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{2}$，则 $4-\dfrac{(a-4)^2}{32}=2$，

解得 $a=12$ 或 $a=-4$ 均满足题意.

由圆 $C_2:x^2+y^2-4x+4y=a$，整理可得 $(x-2)^2+(y+2)^2=a+8$，

则 $a+8>0$，所以 $a=12$ 或 $a=-4$.

2. (教材 P98 练习题 2 改编)已知圆 $C_1:x^2+y^2+2x+8y-8=0$，圆 $C_2:x^2+y^2-4x-4y-2=0$.试判断圆 C_1 与圆 C_2 的位置关系，若相交，则求出公共弦所在直线的方程.

解：由题可得 $C_1:(x+1)^2+(y+4)^2=25$，$C_2:(x-2)^2+(y-2)^2=10$，

则圆 C_1 的圆心为 $C_1(-1,-4)$，半径 $r_1=5$，圆 C_2 的圆心为 $C_2(2,2)$，半径 $r_2=\sqrt{10}$，

可得 $|C_1C_2|=\sqrt{(-1-2)^2+(-4-2)^2}=3\sqrt{5}$，$r_1+r_2=5+\sqrt{10}$，$r_1-r_2=5-\sqrt{10}$.

又 $|C_1C_2|^2=45$，$(r_1+r_2)^2=(5+\sqrt{10})^2=35+10\sqrt{10}>|C_1C_2|^2$，

$(r_1-r_2)^2=(5-\sqrt{10})^2=35-10\sqrt{10}<|C_1C_2|^2$，

故 $r_1-r_2<|C_1C_2|<r_1+r_2$，所以圆 C_1 与圆 C_2 的位置关系为相交.

将两圆方程相减可得

$(x^2+y^2+2x+8y-8)-(x^2+y^2-4x-4y-2)=0$，

化简得 $x+2y-1=0$，故公共弦所在直线的方程为 $x+2y-1=0$.

课后素养评价(二十五)

基础落实

1.圆 $C_1:x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 与圆 $C_2:x^2+y^2+4x-4y-1=0$ 的位置关系是　　(　　)

A.内切　　B.相交

C.外切　　D.外离

C　**解析**:因为圆 $C_1:x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 的圆心为 $C_1(2,-1)$,半径为 $r_1=2$,

圆 $C_2:x^2+y^2+4x-4y-1=0$ 的圆心为 $C_2(-2,2)$,半径为 $r_2=3$,

又 $|C_1C_2|=\sqrt{(2+2)^2+(-1-2)^2}=5=r_1+r_2$,所以两圆的位置关系为外切.

故选 C.

2.已知圆 $C_1:x^2+y^2+2x+3y+1=0$,圆 $C_2:x^2+y^2+4x+3y+2=0$,则圆 C_1 与圆 C_2 的公切线的条数为　　(　　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

B　**解析**:由圆 $C_1:x^2+y^2+2x+3y+1=0$,得 $(x+1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$,则其圆心为 $C_1\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$,半径 $r_1=\frac{3}{2}$,

由圆 $C_2:x^2+y^2+4x+3y+2=0$,得 $(x+2)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{17}{4}$,则其圆心为 $C_2\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$,半径 $r_2=\frac{\sqrt{17}}{2}$,

则两圆的圆心距为 $|C_1C_2|=1$,$r_1+r_2=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$,

$r_2-r_1=\frac{\sqrt{17}-3}{2}$.

因为 $r_2-r_1<|C_1C_2|<r_2+r_1$,则两圆相交,

所以圆 C_1 与圆 C_2 的公切线有 2 条.故选 B.

3.若圆 $x^2+y^2+2x-4y-5=0$ 与 $x^2+y^2+2x-1=0$ 相交于 A,B 两点,则公共弦 AB 的长是　　(　　)

A.1　　B.2

C.3　　D.4

B　**解析**:圆 $x^2+y^2+2x-4y-5=0$,即 $(x+1)^2+(y-2)^2=10$,

所以圆心为 $(-1,2)$,半径为 $\sqrt{10}$.

圆 $x^2+y^2+2x-1=0$,即 $(x+1)^2+y^2=2$,

所以圆心为 $(-1,0)$,半径为 $\sqrt{2}$.

所以两圆圆心距为 $\sqrt{(-1+1)^2+(2-0)^2}=2\in(\sqrt{10}-\sqrt{2},\sqrt{10}+\sqrt{2})$,

所以两圆相交,两圆方程作差得到 $y=-1$,即公共弦所在直线的方程为 $y=-1$.

又圆 $(x+1)^2+(y-2)^2=10$ 的圆心 $(-1,2)$ 到直线 $y=-1$ 的距离为 3,

所以公共弦 AB 的长为 $2\sqrt{(\sqrt{10})^2-3^2}=2$.故选 B.

4.以 $(3,-4)$ 为圆心,且与圆 $x^2+y^2=1$ 外切的圆 C 的方程为　　(　　)

A.$(x+3)^2+(y+4)^2=4$

B.$(x-3)^2+(y+4)^2=16$

C.$(x-3)^2+(y-4)^2=16$

D.$(x-3)^2+(y+4)^2=4$

B　**解析**:由题意可知,两圆的圆心距为 $\sqrt{(3-0)^2+(-4-0)^2}=5$,设圆 C 的半径为 r,

因为两圆外切,则 $5=r+1$,得 $r=4$,

所以圆 C 的方程为 $(x-3)^2+(y+4)^2=16$.

5.若圆 $O_1:x^2+y^2+y=0$ 和圆 $O_2:x^2+y^2-2x=0$ 的交点为 A,B,则线段 AB 的中垂线方程为(　　)

A.$x-y-2=0$

B.$x-2y-1=0$

C.$2x-y-1=0$

D.$x-2y=0$

B　**解析**:由圆 $O_1:x^2+y^2+y=0$,可得 $x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,圆心为 $O_1\left(0,-\frac{1}{2}\right)$,

由圆 $O_2:x^2+y^2-2x=0$,可得 $(x-1)^2+y^2=1$,圆心为 $O_2(1,0)$,根据圆的对称性可知,O_1O_2 即线

段 AB 的中垂线，故其方程为 $y=\frac{1}{2}(x-1)$，即 $x-2y-1=0$.故选 B.

6.已知圆 $C:(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=1$ 和点 $A(-t,0)$，$B(t,0)(t>0)$，若圆 C 上存在点 P，使得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，则 t 的取值范围为　　(　　)

A.$(0,1]$　　B.$[1,3]$

C.$[2,3]$　　D.$[3,4]$

B　**解析：**$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ 说明点 P 在以 AB 为直径的圆 $x^2+y^2=t^2$ 上，而点 P 又在圆 C 上，因此两圆有公共点，则两圆的圆心距位于半径差的绝对值与半径和的闭区间中，所以 $|t-1|\leqslant|OC|\leqslant t+1$.又 $|OC|=\sqrt{(\sqrt{3}-0)^2+(1-0)^2}=2$，所以 $|t-1|\leqslant 2\leqslant t+1$.又 $t>0$，解得 $1\leqslant t\leqslant 3$.故选 B.

7.若圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 与圆 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$ 有公共点，则实数 r 的取值范围是_____.

$[\sqrt{5}-1,\sqrt{5}+1]$　**解析：**由 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$，得 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$，则圆心为 $(-1,2)$，半径为 1，两圆圆心之间的距离为 $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.因为两圆有公共点，所以 $|r-1|\leqslant\sqrt{5}\leqslant r+1$，所以 $\sqrt{5}-1\leqslant r\leqslant\sqrt{5}+1$，即 $-1\leqslant r-\sqrt{5}\leqslant 1$，所以 $\sqrt{5}-1\leqslant r\leqslant\sqrt{5}+1$.

8.已知圆 $C_1:(x+1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ 与圆 $C_2:x^2+y^2+4x+3y+m=0$ 有且只有两条公切线，则实数 m 的取值范围是_____.

$0<m<6$　**解析：**由题意得圆 C_1 的圆心 $C_1\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$，半径 $r_1=\frac{3}{2}$.

将 $x^2+y^2+4x+3y+m=0$ 化为标准方程得 $(x+2)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}-m$，

易知圆 C_2 的圆心 $C_2\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$，半径 $r_2=\sqrt{\frac{25}{4}-m}$，且 $m<\frac{25}{4}$.

又两圆有且只有两条公切线，故两圆相交，即 $|C_1C_2|=1\in(|r_1-r_2|,r_1+r_2)$，显然 $r_1+r_2>1$，

则 $-1<r_1-r_2<1$，即 $-1<\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{25}{4}-m}<1\Rightarrow\frac{1}{2}<\sqrt{\frac{25}{4}-m}<\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{4}<\frac{25}{4}-m<\frac{25}{4}$，

解得 $0<m<6$.综上，$0<m<6$.

能力提升

1.已知圆 $x^2+y^2-2x-5=0$ 和圆 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 的交点为 A,B，则线段 AB 的垂直平分线的方程为　　(　　)

A.$x+y-1=0$

B.$2x-y+1=0$

C.$x-2y+1=0$

D.$x-y+1=0$

A　**解析：**由题意得，所求直线即为两圆圆心 $(1,0)$，$(-1,2)$ 连线所在的直线，故由 $\frac{y-0}{2-0}=\frac{x-1}{-1-1}$，得 $x+y-1=0$.

2.(多选)若圆 $C_1:x^2+y^2=1$ 和圆 $C_2:x^2+y^2-6x-8y-k=0$ 没有公共点，则实数 k 的值可能为　　(　　)

A.-16　　B.-9

C.11　　D.12

AD　**解析：**将圆 $C_2:x^2+y^2-6x-8y-k=0$ 化为 $(x-3)^2+(y-4)^2=25+k$，则 $k>-25$，圆心为 $C_2(3,4)$，半径为 $\sqrt{25+k}$；

圆 $C_1:x^2+y^2=1$ 的圆心为 $C_1(0,0)$，半径为 1.

要使圆 C_1 和圆 C_2 没有公共点，则 $|C_1C_2|>\sqrt{25+k}+1$ 或 $|C_1C_2|<\sqrt{25+k}-1$.

又 $|C_1C_2|=5$，

所以 $5>\sqrt{25+k}+1$ 或 $5<\sqrt{25+k}-1$，

解得 $-25<k<-9$ 或 $k>11$.

所以实数 k 的取值范围是 $(-25,-9)\cup(11,+\infty)$.

故选 AD.

3.若过圆 $x^2+y^2=4$ 外一点 $M(4,-1)$ 作圆的两条切线，则经过两切点的直线的方程为　　(　　)

A.$4x-y-4=0$

B.$4x+y-4=0$

C.$4x+y+4=0$

D.$4x-y+4=0$

A　**解析**：以线段OM为直径的圆的方程为$x^2+y^2-4x+y=0$，经过两切点的直线就是两圆的公共弦所在的直线.将两圆的方程相减得$4x-y-4=0$，这就是经过两切点的直线方程.

4.（多选）圆$O_1:x^2+y^2-2x=0$和圆$O_2:x^2+y^2+2x-4y=0$的交点为A,B，则有　　（　　）

A.圆O_2的圆心为$(-1,2)$，半径为$\sqrt{5}$

B.公共弦AB所在直线的方程为$x-y=0$

C.线段AB中垂线的方程为$x+y-1=0$

D.若P为圆O_2上一动点，则点P到直线AB距离的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}+1$

ABC　**解析**：对于A，由圆$O_2:x^2+y^2+2x-4y=0$可得$(x+1)^2+(y-2)^2=5$，

所以圆O_2的圆心为$(-1,2)$，半径为$\sqrt{5}$，故A正确；

对于B，由圆$O_1:x^2+y^2-2x=0$与圆$O_2:x^2+y^2+2x-4y=0$的交点为A,B，

两式作差可得$4x-4y=0$，即公共弦AB所在直线的方程为$x-y=0$，故B正确；

对于C，圆$O_1:x^2+y^2-2x=0$的圆心为$(1,0)$，$k_{AB}=1$，

则线段AB中垂线的斜率为-1，即线段AB中垂线的方程为$y-0=-1\times(x-1)$，整理可得$x+y-1=0$，故C正确；

对于D，圆心$O_2(-1,2)$到$x-y=0$的距离为$d=\frac{|-1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，圆$O_2$的半径为$\sqrt{5}$，所以点$P$到直线$AB$距离的最大值为$\frac{3\sqrt{2}}{2}+\sqrt{5}$，故D不正确.

故选ABC.

5.已知圆D经过点$A(16,0)$，且与圆$C:x^2+y^2+8x-6y=0$相切于坐标原点O，则圆D的标准方程为_____.

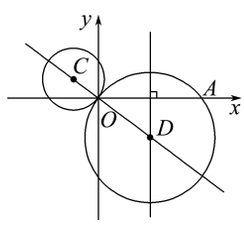
$(x-8)^2+(y+6)^2=100$　**解析**：圆$C:x^2+y^2+8x-6y=0$的标准方程为$(x+4)^2+(y-3)^2=25$，则圆心为$C(-4,3)$，半径$r=5$，圆C过原点.

如图，因为圆D与圆C相切于坐标原点O，且过点A，

所以圆D与圆C相外切，圆心D是线段OA的垂直平分线与直线CO的交点.

直线OC的方程为$3x+4y=0$，线段OA的垂直平分线的方程为$x=8$，所以$D(8,-6)$，

所以圆D的半径$R=|OD|=10$，所以圆D的标准方程为$(x-8)^2+(y+6)^2=100$.



6.过原点O作圆$x^2+y^2-4x-8y+16=0$的两条切线，设切点分别为P,Q，则直线PQ的方程为_____.

$x+2y-8=0$　**解析**：把圆的方程化成标准方程为$(x-2)^2+(y-4)^2=4$，所以圆心为$(2,4)$，半径为2.

圆心到原点的距离为$\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，所以切线长为$\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4$，所以$P,Q$在以$(0,0)$为圆心，以4为半径的圆上，方程为$x^2+y^2=16$.

由$\begin{cases}x^2+y^2-4x-8y+16=0,\\x^2+y^2-16=0,\end{cases}$

得$x+2y-8=0$，即直线PQ的方程为$x+2y-8=0$.

7.已知圆$C_1:x^2+y^2-2x=0$和圆$C_2:x^2+y^2-6x-4y+4=0$相交，交点为A,B.

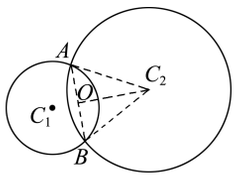
(1)求公共弦AB所在直线的方程；

(2)求$\triangle ABC_2$的面积.

解：(1)因为$C_1:x^2+y^2-2x=0$，$C_2:x^2+y^2-6x-4y+4=0$，所以两圆方程作差，得$4x+4y-4=0$，即$x+y-1=0$，所以公共弦AB所在直线的方程为$x+y-1=0$.

(2)如图，连接AB,AC_2,BC_2，取AB的中点O，连

接 C_2O.



根据圆的性质可得 $C_2O\perp AB$.

因为圆 C_2 的方程 $x^2+y^2-6x-4y+4=0$ 可整理为 $(x-3)^2+(y-2)^2=9$，所以 $C_2(3,2)$，$|AC_2|=3$.

由(1)，得点 C_2 到直线 AB 的距离 $|C_2O|=\dfrac{|3+2-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$，

所以在 $\mathrm{Rt}\triangle AOC_2$ 中，$|AO|=\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=1$，所以 $|AB|=2$.

故 $S_{\triangle ABC_2}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot|C_2O|=\dfrac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

自我超越

已知圆 $C_1:(x-2)^2+(y-2)^2=4$，半径为 1 的圆 C_2 的圆心在第二象限，圆 C_2 与两条坐标轴均相切.

(1)求圆 C_2 的标准方程；

(2)求圆 C_1 和圆 C_2 的公切线的方程；

(3)过点 $P(-4,0)$ 的直线 l 与圆 C_1 交于 A,B 两点，与圆 C_2 交于 D,E 两点.求证：$|AB|=2|DE|$.

(1)**解**：由圆 C_2 与两条坐标轴均相切，圆 C_2 的圆心在第二象限，半径为 1，

可得圆 C_2 的圆心坐标为 $(-1,1)$，

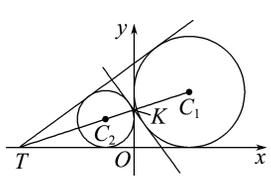
故圆 C_2 的标准方程为 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$.

(2)**解**：由 $C_1(2,2)$，$C_2(-1,1)$，有 $|C_1C_2|=\sqrt{10}$.

又由 $\sqrt{10}>1+2=3$，可得圆 C_1 和圆 C_2 相外离，所以圆 C_1 和圆 C_2 共有 4 条公切线.

又由 $C_1(2,2)$，$C_2(-1,1)$，圆 C_1 和圆 C_2 的半径分别为 1，2，

如图，在平面直角坐标系中画出圆 C_1 和圆 C_2，可知 x 轴和 y 轴与圆 C_1 和圆 C_2 均相切，



直线 C_1C_2 的方程为 $y-1=\dfrac{2-1}{2-(-1)}(x+1)$，整理为 $x-3y+4=0$，可得直线 C_1C_2 与 x 轴的交点为 $T(-4,0)$.

设直线 C_1C_2 的倾斜角为 α，则 $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$，则 $\tan2\alpha=\dfrac{\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{3}{4}$.

由 TC_1 为过点 T 的圆的两条外公切线的夹角平分线，可得圆 C_1 和圆 C_2 的另一条外公切线的斜率为 $\dfrac{3}{4}$，

可得另一条外公切线的方程为 $y=\dfrac{3}{4}(x+4)$，整理为 $3x-4y+12=0$.

y 轴与直线 C_1C_2 的交点为 $K\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$，可知点 K 在圆 C_1 和圆 C_2 的另一条内公切线上.

设另一条内公切线的方程为 $y=kx+\dfrac{4}{3}$，整理为 $3kx-3y+4=0$，

有 $\dfrac{|1-3k|}{\sqrt{9k^2+9}}=1$，解得 $k=-\dfrac{4}{3}$.

所以另一条内公切线的方程为 $-4x-3y+4=0$，整理为 $4x+3y-4=0$.

故圆 C_1 和圆 C_2 的公切线的方程为 $x=0$，$y=0$，$3x-4y+12=0$ 和 $4x+3y-4=0$.

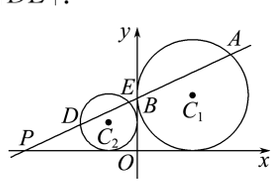
(3)**证明**：如图，设过点 P 的直线 l 的方程为 $y=m(x+4)$，整理为 $mx-y+4m=0$，

点 C_1 到直线 l 的距离为 $d_1=\dfrac{|6m-2|}{\sqrt{m^2+1}}$，点 C_2 到直线 l 的距离为 $d_2=\dfrac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$，

可得 $d_1=2d_2$.

又由 $|AB|=2\sqrt{4-d_1^2}=2\sqrt{4-4d_2^2}=4\sqrt{1-d_2^2}$，$|DE|=2\sqrt{1-d_2^2}$.

所以 $|AB|=2|DE|$.



微专题培优（三）　直线中的对称问题

直线中的对称问题是解析几何的重要题型之一，是近几年的命题热点.与直线有关的对称问题主要有四类：第一类是点关于点对称，第二类是直线关于点对称，第三类是点关于直线对称，第四类是直线关于直线对称.解决这四类问题的核心思路是利用中点坐标公式和互相垂直的两条直线的斜率乘积为-1建立方程.

类型1 点关于点对称

例1　已知不同的两点$P(a,-b)$与$Q(b+1,a-1)$关于点$(3,4)$对称，则$ab=$　　（　　）

A.-5　　B.14

C.-14　　D.5

C　**解析**：因为两点$P(a,-b)$与$Q(b+1,a-1)$关于点$(3,4)$对称，

可得$\begin{cases}\dfrac{a+b+1}{2}=3,\\ \dfrac{a-b-1}{2}=4,\end{cases}$即$\begin{cases}a+b=5,\\ a-b=9,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=7,\\ b=-2,\end{cases}$

所以$ab=7\times(-2)=-14$.

【规律方法】

点关于点对称问题的核心解题技巧是紧扣中点坐标公式，将对称中心视为两点连线的中点来建立方程.

(1)明确核心关系：若点$P(x_1,y_1)$关于对称中心$M(a,b)$的对称点为$P'(x_2,y_2)$，则M是线段PP'的中点.

(2)套用中点坐标公式列方程：$\begin{cases}a=\dfrac{x_1+x_2}{2},\\ b=\dfrac{y_1+y_2}{2}.\end{cases}$

(3)变形求解对称点坐标：直接推导出公式$\begin{cases}x_2=2a-x_1,\\ y_2=2b-y_1,\end{cases}$代入数值即可快速计算.

(4)拓展应用技巧：若已知两点P,P'，求对称中心，直接反向套用中点坐标公式；若涉及多条线段共对称中心，可利用该公式建立方程组求解参数.

【对点训练】

已知不重合的$P(a,-b)$，$Q(b-1,a+1)$两点关于点$(5,6)$对称，则$ab=$_____.

0　**解析**：由题意知$\begin{cases}\dfrac{a+b-1}{2}=5,\\ \dfrac{a-b+1}{2}=6,\end{cases}$即$\begin{cases}a+b=11,\\ a-b=11,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=11,\\ b=0,\end{cases}$故$ab=0$.

类型2 直线关于点对称

例2　直线$l:y=2x-4$关于点$A(1,0)$对称的直线方程为　　（　　）

A.$y=2x$　　B.$y=-2x$

C.$y=2x-8$　　D.$y=2x+4$

A　**解析**：因为$A(1,0)$不在直线$l:y=2x-4$上，

所以可设直线$l:y=2x-4$关于点$A(1,0)$对称的直线方程为$y=2x+b$，

则$\dfrac{|2-0-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|2-0+b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$，解得$b=0$或$b=-4$(舍去)，

故所求直线方程为$y=2x$.

【规律方法】

解决直线关于点对称问题的方法

(1)若两条直线关于某点对称，则该点到两条直线的距离相等，据此列方程求解.

(2)两直线关于点对称的问题，可以转化为两直线上的点关于点对称的问题.

【对点训练】

若直线$ax+y+3a-1=0$恒过定点M，则直线$2x+3y-6=0$关于点M对称的直线方程为　　（　　）

A.$2x+3y-12=0$　　B.$2x+3y+12=0$

C.$3x-2y-6=0$　　D.$2x+3y+6=0$

B　**解析**：由$ax+y+3a-1=0$，得$(x+3)a+(y-1)=0$，

由$\begin{cases}x+3=0,\\ y-1=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=-3,\\ y=1,\end{cases}$所以$M(-3,1)$.

设直线$2x+3y-6=0$关于点M对称的直线方程为$2x+3y+C=0(C\neq-6)$，

所以$\dfrac{|-6+3-6|}{\sqrt{4+9}}=\dfrac{|-6+3+C|}{\sqrt{4+9}}$，解得$C=12$或$C=-6$(舍去)，

所以直线$2x+3y-6=0$关于点M对称的直线方程为$2x+3y+12=0$.

类型3 点关于直线对称

例3　已知点$A(2,4)$关于直线l对称的点为$B(-1,2)$，则直线l的方程为　　（　　）

A.$4x-6y+15=0$　　B.$6x+4y+15=0$

C.$6x+4y-15=0$　　D.$4x-6y-15=0$

C　**解析**：由题意可知，直线l为线段AB的垂直平分线，且$k_{AB}=\dfrac{4-2}{2+1}=\dfrac{2}{3}$，

所以直线l的斜率为$-\dfrac{3}{2}$.

又因为线段AB的中点为$M\left(\dfrac{1}{2},3\right)$，所以直线$l$的方

程为 $y-3=-\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$，

整理可得 $6x+4y-15=0$.

【规律方法】

解决点关于直线对称问题的方法

(1)若点 $P(a,b)$，$P'(m,n)$($a\neq m$ 且 $b\neq n$)关于直线 $l:Ax+By+C=0$(A,B 均不为 0)对称，则

$$\begin{cases}\frac{n-b}{m-a}=\frac{B}{A},\\ A\cdot\frac{m+a}{2}+B\cdot\frac{n+b}{2}+C=0.\end{cases}$$

(2)若直线的斜率为 0 或不存在，则可直接利用几何直观求解.

【对点训练】

点 $P(2,-3)$关于直线 $l:y=x+1$ 的对称点为　　(　　)

A.$(-3,4)$

B.$(-4,-3)$

C.$(-4,3)$

D.$(-3,-4)$

C　**解析**：设点 $P(2,-3)$关于直线 $l:y=x+1$ 的对称点为 $Q(x,y)$，

则满足 $\begin{cases}\frac{y+3}{x-2}\times1=-1,\\ \frac{y-3}{2}=\frac{x+2}{2}+1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-4,\\ y=3,\end{cases}$ 即 $Q(-4,3)$.

类型 4 直线关于直线对称

例 4　直线 $x-y-2=0$ 关于直线 $l:3x-y+3=0$ 对称的直线方程为　　(　　)

A.$7x-y-22=0$

B.$7x+y+22=0$

C.$6x-y+22=0$

D.$6x+y+22=0$

B　**解析**：由 $\begin{cases}x-y-2=0,\\ 3x-y+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-\frac{5}{2},\\ y=-\frac{9}{2},\end{cases}$ 则交点坐标为 $P\left(-\frac{5}{2},-\frac{9}{2}\right)$.

取直线 $x-y-2=0$ 上一点 $A(0,-2)$，设点 A 关于直线 $l:3x-y+3=0$ 的对称点为 $A'(x',y')$，

则由 $k_{AA'}\cdot k_l=-1$，且线段 AA' 的中点在直线 l 上，

得 $\begin{cases}\frac{y'+2}{x'}\times3=-1,\\ 3\times\frac{0+x'}{2}-\frac{-2+y'}{2}+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x'=-3,\\ y'=-1,\end{cases}$

故所求直线过点 $P\left(-\frac{5}{2},-\frac{9}{2}\right)$，$(-3,-1)$.

所以所求直线方程为 $y+\frac{9}{2}=\frac{-1+\frac{9}{2}}{-3+\frac{5}{2}}\left(x+\frac{5}{2}\right)$，即 $7x+y+22=0$.

【规律方法】

求直线 l_1 关于直线 l 的对称直线 l_2，关键是利用两点确定一条直线：先找 l_1 上两点关于 l 的对称点，再由两对称点坐标求 l_2 的方程；若 l_1 与 l 相交，则交点必然在 l_2 上，只需再找一个对称点即可.

(1)求交点(若相交)

联立 l_1 与 l 的方程，求得交点 $P(x_0,y_0)$，该点在对称直线 l_2 上.

(2)求对称点

在 l_1 上取异于交点的点 $A(x,y)$，设其关于 l 的对称点为 $A'(x',y')$，则

①AA' 与 l 垂直，即 $k_{AA'}\cdot k_l=-1$(l 斜率存在时)；

②AA' 的中点 $\left(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2}\right)$ 在 l 上.

由此得出 $A'(x',y')$.

(3)求对称直线方程

已知点 P 和点 A'，用两点式方程或点斜式方程写出 l_2 的方程.

特殊情况：

(1)若 $l_1\parallel l$，则 $l_2\parallel l$，且 l_1 与 l 之间的距离等于 l_2 与 l 之间的距离，可设出 l_2 的方程，用平行线间距离公式求解；

(2)若 l_1 与 l 重合，则对称直线就是 l_1 本身.

【对点训练】

直线 $x-2y+1=0$ 关于直线 $x=1$ 对称的直线方程是　　(　　)

A.$x+2y-1=0$　　B.$2x+y-1=0$

C.$x+2y+3=0$　　D.$x+2y-3=0$

D　**解析**：设所求直线上任意一点的坐标为 $P(x,y)$，该点关于直线 $x=1$ 对称的点的坐标为 $P'(x_0,y_0)$，

则 $\begin{cases}y=y_0,\\ \frac{x+x_0}{2}=1,\end{cases}$ 故对称点坐标为 $P'(2-x,y)$，代入直线 $x-2y+1=0$ 中，所以 $2-x-2y+1=0\Rightarrow x+2y-3=0$.

微专题培优集训(三)

1.点 $P(3,2)$ 关于点 $Q(1,4)$ 的对称点 M 的坐标为（　　）

A.$(1,6)$　　B.$(6,1)$

C.$(1,-6)$　　D.$(-1,6)$

D　**解析**：设 $M(x,y)$，则 $\frac{3+x}{2}=1$，$\frac{2+y}{2}=4$，所以 $x=-1$，$y=6$，所以点 $M(-1,6)$.

2.点 $P(2,3)$ 关于直线 $x+y+2=0$ 的对称点的坐标为（　　）

A.$(-3,-2)$　　B.$(-2,-3)$

C.$(-4,-5)$　　D.$(-5,-4)$

D　**解析**：由题意，在直线 $x+y+2=0$ 中，斜率为 -1，

则垂直于直线 $x+y+2=0$ 且过点 $P(2,3)$ 的直线方程为 $y-3=1\times(x-2)$，即 $y=x+1$.

设两直线交点为 A，由 $\begin{cases}y=x+1,\\x+y+2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-\frac{3}{2},\\y=-\frac{1}{2},\end{cases}$ 所以 $A\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$，所以点 P 关于直线 $x+y+2=0$ 的对称点的坐标

$P'\left(-\frac{3}{2}\times2-2,-\frac{1}{2}\times2-3\right)$，即 $P'(-5,-4)$.

3.与直线 $3x-4y+5=0$ 关于坐标原点对称的直线的方程为（　　）

A.$4x+3y-5=0$

B.$3x+4y+5=0$

C.$4x-3y+5=0$

D.$3x-4y-5=0$

D　**解析**：设直线 $3x-4y+5=0$ 上一点 $Q(x_1,y_1)$ 关于坐标原点 $(0,0)$ 对称的点为 $P(x,y)$，则 $\begin{cases}\frac{x+x_1}{2}=0,\\\frac{y+y_1}{2}=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=-x,\\y_1=-y,\end{cases}$

代入 $3x-4y+5=0$，得 $3x-4y-5=0$，

即所求直线的方程为 $3x-4y-5=0$.

4.若直线 $l_1:y=kx-k+1$ 与直线 l_2 关于直线 $l:x-y+1=0$ 对称，则直线 l_2 一定过定点（　　）

A.$(2,0)$　　B.$(0,-2)$

C.$(0,2)$　　D.$(-2,0)$

C　**解析**：易知直线 $l_1:y=kx-k+1$ 恒过点 $(1,1)$，所以可得直线 l_2 一定过 $(1,1)$ 关于直线 $l:x-y+1=0$ 的对称点.

设对称点坐标为 (a,b)，可得 $\begin{cases}\frac{b-1}{a-1}=-1,\\\frac{a+1}{2}-\frac{b+1}{2}+1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0,\\b=2,\end{cases}$

即直线 l_2 一定过定点 $(0,2)$.

5.已知光线从点 $A(1,5)$ 射出，经过直线 $l:y=x+1$ 反射，反射光线经过点 $B(-2,10)$，则入射光线所在直线的方程为_____.

$3x+4y-23=0$　**解析**：设 $B(-2,10)$ 关于直线 $l:y=x+1$ 的对称点为 $B'(a,b)$，

则 $\begin{cases}\frac{b-10}{a+2}=-1,\\\frac{b+10}{2}=\frac{a-2}{2}+1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=9,\\b=-1,\end{cases}$

即得 $B(-2,10)$ 关于 $l:y=x+1$ 的对称点 $B'(9,-1)$.

因为 $A(1,5)$，

所以 $k_{AB'}=\frac{5-(-1)}{1-9}=-\frac{3}{4}$，

所以入射光线所在直线的方程为 $y-5=-\frac{3}{4}(x-1)$，

化简得 $3x+4y-23=0$.

6.若将一张坐标纸折叠一次，使得点 $(-3,4)$ 与点 $(-4,a)$ 重合，点 $(-1,2)$ 与点 $\left(-2,\frac{b}{2}\right)$ 重合，则 $a-b=$_____.

1　**解析**：设点 $(-3,4)$ 为点 A，点 $(-4,a)$ 为点 B，所以线段 AB 的中点为 $E\left(\frac{-7}{2},\frac{4+a}{2}\right)$. 设点 $(-1,2)$ 为点 C，设点 $\left(-2,\frac{b}{2}\right)$ 为点 D，所以线段 CD 的中点为 $F\left(\frac{-3}{2},\frac{4+b}{4}\right)$.

由题意可知 $k_{AB}=k_{CD}$，$k_{EF}\cdot k_{AB}=-1$，

于是有 $\begin{cases}\frac{a-4}{-4+3}=\frac{\frac{b}{2}-2}{-2+1},\\\frac{\frac{a+4}{2}-\frac{4+b}{4}}{-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}}\times\frac{a-4}{-4+3}=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3,\\b=2\end{cases}\Rightarrow a-b=1.$

7.直线 $l_1:x+y-1=0$ 关于直线 $l_2:3x-y-3=0$ 对称的直线方程为_____.(用一般式方程表示)

$x-7y-1=0$　**解析**：由 $\begin{cases}x+y-1=0,\\3x-y-3=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=0,\end{cases}$ 则两直线的交点为 $A(1,0)$.

在直线 $l_1:x+y-1=0$ 上取点 $B(0,1)$，设其关于 $l_2:3x-y-3=0$ 的对称点为 $C(a,b)$，

则 $\begin{cases}\dfrac{b-1}{a}=-\dfrac{1}{3},\\3\times\dfrac{a}{2}-\dfrac{b+1}{2}-3=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=\dfrac{12}{5},\\b=\dfrac{1}{5},\end{cases}$

所以 $C\left(\dfrac{12}{5},\dfrac{1}{5}\right)$.

故直线 $l_1:x+y-1=0$ 关于直线 $l_2:3x-y-3=0$ 的对称直线为 AC.

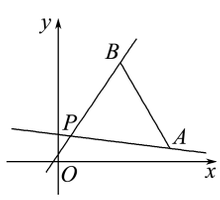
又 $k_{AC}=\dfrac{\frac{1}{5}-0}{\frac{12}{5}-1}=\dfrac{1}{7}$，所以直线 $AC:y=\dfrac{1}{7}(x-1)$，

即 $x-7y-1=0$.

8.已知点 $M(3,0)$ 关于直线 $x-y-1=0$ 的对称点为 P，经过点 P 作直线 l.若直线 l 与连接 $A(9,1)$，$B(5,8)$ 两点的线段总有公共点，则直线 l 的斜率 k 的取值范围为_____.

$\left[-\dfrac{1}{8},\dfrac{3}{2}\right]$　**解析**：设点 $P(x_0,y_0)$，有 $\begin{cases}\dfrac{0-y_0}{3-x_0}=-1,\\\dfrac{x_0+3}{2}-\dfrac{y_0}{2}-1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=1,\\y_0=2,\end{cases}$ 所以 $P(1,2)$.

$k_{PA}=\dfrac{2-1}{1-9}=-\dfrac{1}{8}$，$k_{PB}=\dfrac{2-8}{1-5}=\dfrac{3}{2}$，结合图可知，$k\in\left[-\dfrac{1}{8},\dfrac{3}{2}\right]$.



9.已知点 $P(1,-\sqrt{3})$ 关于直线 $y=kx$ 的对称点在圆 $C:x^2+(y-4)^2=4$ 上，则 $k=$_____.

$2-\sqrt{3}$　**解析**：设点 $P(1,-\sqrt{3})$ 关于直线 $y=kx$ 的对称点为 Q，

显然 Q 在 $C:x^2+(y-4)^2=4$ 上，由对称性可知，$|OQ|=|OP|=\sqrt{1+3}=2$，

故点 Q 在以原点为圆心，2 为半径的圆上，即 $x^2+y^2=4$.

由 $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\x^2+(y-4)^2=4,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0,\\y=2,\end{cases}$ 故点 Q 的坐标为 $(0,2)$.

显然 PQ 的中点在 $y=kx$ 上，

即 $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}=k\cdot\dfrac{1+0}{2}$，解得 $k=2-\sqrt{3}$.

10.已知直线 $l_1:x-y+1=0$ 关于 $P(1,1)$ 对称的直线 l_2 与圆 $C:x^2+y^2+2x+m=0$ 相离，则 m 的取值范围为_____.

$(-1,1)$　**解析**：设直线 l_2 上任一点为 (x,y)，则其关于 $P(1,1)$ 的对称点 (a,b) 在直线 l_1 上，

所以 $\dfrac{x+a}{2}=1$，$\dfrac{y+b}{2}=1$，且 $a-b+1=0$，

所以 $(2-x)-(2-y)+1=0$，即 $x-y-1=0$，

所以直线 $l_2:x-y-1=0$.

因为圆 $C:x^2+y^2+2x+m=0$，即 $(x+1)^2+y^2=1-m$，

所以圆心 $C(-1,0)$，半径 $r=\sqrt{1-m}$，且 $1-m>0$，

所以圆心 $C(-1,0)$ 到直线 $l_2:x-y-1=0$ 的距离 $d=\dfrac{|-1-0-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

因为直线 l_2 与圆 C 相离，

所以 $d>r$，即 $\sqrt{2}>\sqrt{1-m}$.又 $1-m>0$，解得 $-1<m<1$.

微专题培优（四）　圆中的对称问题

圆中的对称问题是解析几何的重要题型之一，是近几年的命题热点.与圆有关的对称问题主要有两类：第一类是圆关于点对称；第二类是圆关于直线对称.圆的对称问题围绕圆心展开，因为圆是中心对称且轴对称的图形，半径始终保持不变，所以只需确定对称后的圆心坐标，就能写出对称圆的方程.

类型1 圆关于点对称

例1　圆 $x^2+y^2+4x-1=0$ 关于点(0,0)对称的圆的标准方程为　　(　　)

A.$x^2+y^2-4x-1=0$

B.$x^2+(y-2)^2=5$

C.$x^2+y^2+8x+15=0$

D.$(x-2)^2+y^2=5$

D　**解析**：由题意可得圆的标准方程为 $(x+2)^2+y^2=5$，所以圆心为(−2,0)，半径为 $\sqrt{5}$.

因为点(−2,0)关于点(0,0)的对称点为(2,0)，

所以所求对称圆的标准方程为 $(x-2)^2+y^2=5$.

【规律方法】

解决圆关于点对称问题的方法技巧

(1)核心原理

若圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 关于点 $P(x_0,y_0)$ 对称的圆为 C'，则点 P 是圆心 $C(a,b)$ 与圆心 $C'(a',b')$ 连线的中点.

(2)计算步骤

①由中点坐标公式，得 $\begin{cases}x_0=\dfrac{a+a'}{2},\\ y_0=\dfrac{b+b'}{2},\end{cases}$ 求得 $C'(2x_0-a,2y_0-b)$；

②对称圆 C' 的方程为 $(x-2x_0+a)^2+(y-2y_0+b)^2=r^2$.

【对点训练】

已知圆 C 与圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 关于点(2,1)对称，则圆 C 的方程为_____.

$(x-3)^2+(y-2)^2=1$　**解析**：圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的圆心为(1,0)，半径为 1.

设(1,0)关于点(2,1)的对称点为 (m,n)，

则 $\begin{cases}\dfrac{1+m}{2}=2,\\ \dfrac{0+n}{2}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=3,\\ n=2,\end{cases}$

故圆心(1,0)关于点(2,1)的对称点为(3,2)，

所以对称圆的方程为 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$.

类型2 圆关于直线对称

例2　若圆 C 与圆 $(x+2)^2+(y-1)^2=1$ 关于直线 $y=x-1$ 对称，则圆 C 的方程是　　(　　)

A.$(x-2)^2+(y+3)^2=1$

B.$(x-2)^2+(y-3)^2=1$

C.$(x+2)^2+(y+3)^2=1$

D.$(x+3)^2+(y-2)^2=1$

A　**解析**：记点 $A(-2,1)$，设圆心 C 的坐标为 (a,b)，则 $k_{AC}=\dfrac{b-1}{a+2}=-1$，可得 $a+b+1=0$.

线段 AC 的中点 $M\left(\dfrac{a-2}{2},\dfrac{b+1}{2}\right)$ 在直线 $y=x-1$ 上，则 $\dfrac{b+1}{2}=\dfrac{a-2}{2}-1$，即 $b=a-5$，

由 $\begin{cases}a+b+1=0,\\ b=a-5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=-3,\end{cases}$ 即圆心 $C(2,-3)$，

因此，圆 C 的方程为 $(x-2)^2+(y+3)^2=1$.

【规律方法】

解决圆关于直线对称问题的方法技巧

(1)核心原理

若圆 C 关于直线 l 对称的圆为 C'，则直线 l 是圆心 $C(a,b)$ 与圆心 $C'(a',b')$ 连线的垂直平分线，且两圆半径相等.

(2)计算步骤

①设圆心 $C(a,b)$ 关于直线的对称点为 $C'(a',b')$，则直线 CC' 与直线 l 垂直，即 $k_{CC'}\cdot k_l=-1$（l 斜率存在时）且线段 CC' 的中点 $\left(\dfrac{a+a'}{2},\dfrac{b+b'}{2}\right)$ 在直线 l 上，据此列方程组求出 $C'(a',b')$.

②对称圆 C' 的方程为 $(x-a')^2+(y-b')^2=r^2$.

(3)特殊情况

若直线 l 经过圆 C 的圆心，则圆 C 关于直线 l 的对称圆就是其本身.

【对点训练】

已知圆 $C_1:(x+1)^2+(y-1)^2=3$，圆 C_2 与圆 C_1 关于直线 $x-y-1=0$ 对称，则圆 C_2 的标准方程为　　(　　)

A.$(x-2)^2+(y+2)^2=3$

B.$(x+2)^2+(y+2)^2=3$

C.$(x+2)^2+(y-2)^2=3$

D.$(x-2)^2+(y-2)^2=3$

A　**解析**：设 $C_2(a,b)$，圆 C_1 的圆心 $C_1(-1,1)$，半径 $r_1=\sqrt{3}$，

由题意知 C_1 与 C_2 关于直线 $x-y-1=0$ 对称，

所以 $\begin{cases}\dfrac{b-1}{a+1}=-1,\\ \dfrac{-1+a}{2}-\dfrac{1+b}{2}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=-2,\end{cases}$

所以圆 C_2 的标准方程为 $(x-2)^2+(y+2)^2=3$.

类型3 光的反射问题

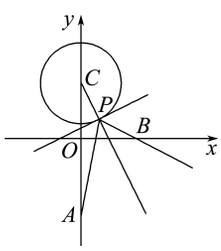
例3　已知一束光线照射到曲面上一点 P 后发生反射，反射光线和入射光线与点 P 处的法线（即曲线过点 P 的切线的垂线）的夹角相等.从平面直角坐标系内一点 $A\left(0,-\dfrac{9}{2}\right)$ 发出的光线，照射到圆 $x^2+y^2-6y+4=0$ 上的点 $P(1,1)$，反射后交 x 轴于点 $B(t,0)$，则 t 的值为　（　　）

A.2　　B.3

C.4　　D.$\dfrac{9}{11}$

B　**解析**：设 $x^2+y^2-6y+4=0$ 的圆心为 C，由题意，知圆 C 的标准方程为 $x^2+(y-3)^2=5$，

作出圆 C 与射线 PA，PB，CP，如图，



则 PA 与 PB 关于 CP 对称.由于 $C(0,3)$，$P(1,1)$，$A\left(0,-\dfrac{9}{2}\right)$，

故直线 CP 的方程为 $y=-2x+3$，直线 AP 的方程为 $y=\dfrac{11}{2}x-\dfrac{9}{2}$.

设 $B(t,0)$ 关于 CP 的对称点为 $B'(m,n)$，则

$\begin{cases}\dfrac{n-0}{m-t}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{n}{2}=-2\cdot\dfrac{m+t}{2}+3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-\dfrac{3}{5}t+\dfrac{12}{5},\\ n=-\dfrac{4}{5}t+\dfrac{6}{5}.\end{cases}$

又点 B' 一定在直线 AP 上，

所以 $-\dfrac{4}{5}t+\dfrac{6}{5}=\dfrac{11}{2}\left(-\dfrac{3}{5}t+\dfrac{12}{5}\right)-\dfrac{9}{2}$，解得 $t=3$.

【规律方法】

光的反射现象中，反射光线的反向延长线过入射点关于反射面的对称点.解决光的反射问题时，先找到入射点关于反射面的对称点，再连接对称点与反射点，进而确定反射光线所在直线.

【对点训练】

已知圆 C 的圆心在直线 $2x-3y=0$ 上，且经过点 $(2,2)$ 和点 $(3,1)$.

(1)求圆 C 的标准方程；

(2)一条光线从点 $A(-2,3)$ 射出，经 x 轴反射后，与圆 C 相切，求反射后的光线所在直线的方程.

解：(1)设圆心为 $C(3a,2a)$，

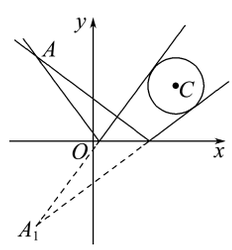
则 $r=\sqrt{(3a-2)^2+(2a-2)^2}=\sqrt{(3a-3)^2+(2a-1)^2}$，

即 $(3a-2)^2+(2a-2)^2=(3a-3)^2+(2a-1)^2$，解得 $a=1$，

所以 $r=\sqrt{(3-2)^2+(2-2)^2}=1$，

所以圆 C 的标准方程为 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$.

(2)如图，$A_1(-2,-3)$ 是点 A 关于 x 轴的对称点.



显然，当反射后的光线所在直线斜率不存在时，反射后的光线所在直线与圆不相切，

所以反射后的光线所在直线的斜率一定存在，

所以设反射光线所在的直线方程为 $y+3=k(x+2)$，即 $l:kx-y+2k-3=0$.

因为反射后的直线与圆相切，所以圆心 $C(3,2)$ 到直线 l 的距离 $d=r$，

所以 $\dfrac{|3k-2+2k-3|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，整理得 $12k^2-25k+12=0$，

解得 $k_1=\dfrac{4}{3}$ 或 $k_2=\dfrac{3}{4}$，

所以反射后的光线所在直线的方程为 $4x-3y-1=0$ 或 $3x-4y-6=0$.

微专题培优集训(四)

1.与圆$(x-1)^2+(y+2)^2=1$关于原点对称的圆的方程为（　　）

A.$(x-1)^2+(y-2)^2=1$

B.$(x+1)^2+(y+2)^2=1$

C.$(x+1)^2+(y-2)^2=1$

D.$(x-2)^2+(y+1)^2=1$

C　**解析**：圆$(x-1)^2+(y+2)^2=1$的圆心为$(1,-2)$，圆心关于原点的对称点为$(-1,2)$，故对称的圆的方程为$(x+1)^2+(y-2)^2=1$.

2.若存在点P，使得圆$C_1:x^2+y^2=4$与圆$C_2:x^2+y^2-4x+2y+a=0$关于点P对称，则$a=$（　　）

A.1　　B.-1

C.2　　D.-2

A　**解析**：由题意，两圆半径相等，所以$\sqrt{5-a}=2$，解得$a=1$.

3.已知圆$C_1:x^2+y^2=4$与圆C_2关于直线$2x+y+5=0$对称，则圆C_2的标准方程为（　　）

A.$(x+4)^2+(y+2)^2=4$

B.$(x-4)^2+(y-2)^2=4$

C.$(x+2)^2+(y+4)^2=4$

D.$(x-2)^2+(y-4)^2=4$

A　**解析**：由题意可得，圆C_1的圆心坐标为$(0,0)$，圆C_1和圆C_2的半径均为2，

设圆心$C_1(0,0)$关于直线$2x+y+5=0$的对称点为$C_2(a,b)$，

则$\begin{cases}\dfrac{b}{a}\times(-2)=-1,\\ 2\times\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}+5=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-4,\\ b=-2,\end{cases}$

所以圆C_2的标准方程为$(x+4)^2+(y+2)^2=4$.

4.已知圆$x^2+y^2-2x+4y+4=0$关于直线$2ax-by-2=0(a>0,b>0)$对称，则ab的最大值为（　　）

A.2　　B.1　　C.$\dfrac{1}{2}$　　D.$\dfrac{1}{4}$

D　**解析**：将圆$x^2+y^2-2x+4y+4=0$化为$(x-1)^2+(y+2)^2=1$，

所以圆心为$A(1,-2)$，半径为1.

在直线$2ax-by-2=0(a>0,b>0)$中，

圆关于该直线对称，

所以直线过圆心$A(1,-2)$，

所以$2a+2b-2=0$，即$a+b=1$.

因为$a+b=1\geqslant 2\sqrt{ab}$，解得$ab\leqslant\dfrac{1}{4}$，

当且仅当$a=b=\dfrac{1}{2}$时，等号成立，

所以ab的最大值为$\dfrac{1}{4}$.

故选D.

5.已知圆$C:(x-2)^2+(y-4)^2=4$，若圆C关于直线$l:ax+by=2(a>0,b>0)$对称，则$\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}$的最小值为（　　）

A.8　　B.1　　C.16　　D.$4\sqrt{2}$

A　**解析**：由题意，直线$l:ax+by=2$过圆心$C(2,4)$，则$2a+4b=2\Rightarrow a+2b=1$，且$a>0,b>0$，

所以$\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right)(a+2b)=4+\dfrac{4b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant 4+2\sqrt{\dfrac{4b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}=8$，

当且仅当$a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{1}{4}$时，等号成立，故$\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}$的最小值为8.

6.已知直线$l:ax+by+1=0$，圆$C:x^2+y^2+4x+2y+1=0$，若圆C上存在两点关于直线l对称，则$(a-2)^2+(b-7)^2$的最小值是（　　）

A.5　　B.$\sqrt{5}$　　C.$2\sqrt{5}$　　D.20

D　**解析**：圆$C:x^2+y^2+4x+2y+1=0$的圆心坐标为$C(-2,-1)$，

圆C上存在两点关于直线l对称，则直线l过圆心，即$-2a-b+1=0$，有$b=-2a+1$，

所以$(a-2)^2+(b-7)^2=(a-2)^2+(-2a-6)^2=5a^2+20a+40=5[(a+2)^2+4]$，

当$a=-2$时，$(a-2)^2+(b-7)^2$有最小值20.

7.已知圆$C_1:x^2+y^2-2x-2y+2-a=0$，圆$C_2:x^2+y^2-6x-6y+8a=0$.若存在点P，使得C_1,C_2关于点P对称，则C_1,C_2的位置关系是（　　）

A.相离　　B.相交　　C.外切　　D.内切

C　**解析**：结合题意，圆C_1的标准方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=a$，圆心$C_1(1,1)$，

圆C_2的标准方程为$(x-3)^2+(y-3)^2=18-8a$，圆心$C_2(3,3)$.

要存在点P，使得C_1,C_2关于点P对称，则C_1,C_2的半径相等，

所以$a=18-8a$，$a=2$，

此时C_1,C_2的半径都是$\sqrt{2}$.

又$|C_1C_2|=\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$，所以$C_1$，$C_2$外切.

8.若点M,N在圆$C:x^2+y^2+2kx+2my-4=0$上，且M,N两点关于直线$x-y+1=0$对称，则圆C的半径的（　　）

A.最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B.最小值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

C.最小值为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D.最大值为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

C　**解析**：由$x^2+y^2+2kx+2my-4=0$，得$(x+k)^2+(y+m)^2=k^2+m^2+4$，

所以圆心为$C(-k,-m)$，半径为$r=\sqrt{k^2+m^2+4}$.

由题意可得直线$x-y+1=0$经过圆心$C(-k,-m)$，

故有$-k+m+1=0$，即$k=m+1$，

所以$r=\sqrt{k^2+m^2+4}=\sqrt{(m+1)^2+m^2+4}=\sqrt{2\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}}\geqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

当$m=-\frac{1}{2}$时，圆C的半径的最小值为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

9.若圆$C:x^2+y^2+2x-4y+3=0$关于直线$2ax+by+6=0$对称，A是圆C上一动点，点$M(a,b)$，则$|AM|$的最小值为_____.

$2\sqrt{2}$　**解析**：圆$C:x^2+y^2+2x-4y+3=0$化为$(x+1)^2+(y-2)^2=2$，

圆C的圆心坐标为$(-1,2)$，半径为$r=\sqrt{2}$.

因为圆$C:x^2+y^2+2x-4y+3=0$关于直线$2ax+by+6=0$对称，

所以$(-1,2)$在直线上，可得$-2a+2b+6=0$，

即$a=b+3$.因为$M(a,b)$，

相当于M为直线$x=y+3$上的动点，且直线$x-y-3=0$与圆相离，

而A是圆C上一动点，所以$|AM|_{\min}=|CM|_{\min}-r$.

又因为$|CM|$的最小值为圆心$(-1,2)$到直线$x-y-3=0$的距离，

$|CM|_{\min}=\frac{|-1-2-3|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$，

所以$|AM|_{\min}=|CM|_{\min}-r=3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

10.已知圆$O:(x-3)^2+y^2=r^2$，一条过点$(0,-\sqrt{3})$的光线将圆O分成面积相等的两部分，且该光线在碰到直线$x=6$后反射，反射光线恰好和圆O相切，则r的值为_____.

3　**解析**：因为一条过点$(0,-\sqrt{3})$的光线将圆分成面积相等的两部分，

所以该光线所在直线经过圆心$(3,0)$，

所以该光线所在直线的斜率为$k=\frac{-\sqrt{3}-0}{0-3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以该光线所在直线的方程为$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}$，倾斜角为$30°$.

如图，因为该光线碰到直线$x=6$后反射，那么反射光线所在直线与x轴正方向的夹角为$150°$，

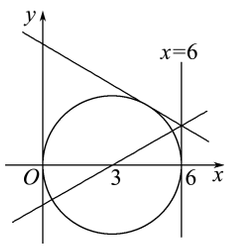
在$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}$中，当$x=6$时，$y=\sqrt{3}$，

从而直线的斜率为$-\frac{\sqrt{3}}{3}$，且直线经过点$(6,\sqrt{3})$，

所以直线方程为$y-\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-6)$，即$x+\sqrt{3}y-9=0$.

又该直线恰好与圆相切，所以圆心$(3,0)$到该直线的距离为圆的半径，

即$r=\frac{|3-9|}{\sqrt{3+1}}=3$.



11.已知圆$C_1:x^2+y^2+2x+4y+4=0$，圆$C_2:x^2+y^2-4x+2y+1=0$，M,N分别为圆C_1和圆C_2上的动点，P为直线$l:y=x+2$上的动点，则$|MP|+|NP|$的最小值为_____.

$2\sqrt{10}-3$　**解析**：圆$C_1:x^2+y^2+2x+4y+4=0$，即$(x+1)^2+(y+2)^2=1$，

圆心为$(-1,-2)$，半径$R=1$，

圆$C_2:x^2+y^2-4x+2y+1=0$，即$(x-2)^2+(y+1)^2=4$，

圆心为$(2,-1)$，半径$r=2$.

设点$(-1,-2)$关于直线$l:y=x+2$对称的点为(a,b)，

则$\begin{cases}\frac{b+2}{a+1}=-1,\\ \frac{b-2}{2}=\frac{a-1}{2}+2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-4,\\ b=1.\end{cases}$

设圆C_1关于直线$l:y=x+2$对称的圆为圆C'，

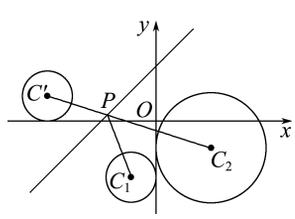
其圆心为$(-4,1)$，半径$R'=1$，

则其方程为$(x+4)^2+(y-1)^2=1$.

设圆C'上的点M'与圆C_1上点M对称，则有$|PM|=|PM'|$，

原问题可以转化为P到圆C'和圆C_2上的动点距离之和最小值问题，

如图所示.



连接C_2C'，与直线l交于点P，

此时点P是满足$|PN|+|PM'|$的值最小的点，

此时$|PN|+|PM'|=|C_2C'|-3=2\sqrt{10}-3$，

即$|MP|+|NP|$的最小值为$2\sqrt{10}-3$.

★★★

迁　移　应　用

类型一　用数形结合解决与圆有关的最值和范围问题

例 1　(2025·全国一卷)已知圆 $x^2+(y+2)^2=r^2(r>0)$ 上到直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 的距离为 1 的点有且仅有两个，则 r 的取值范围是　　(　　)

A.$(0,1)$　　B.$(1,3)$

C.$(3,+\infty)$　　D.$(0,+\infty)$

B　**解析**：由题意得圆心$(0,-2)$到直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 的距离 $d=2$.当 $r=d-1=1$ 时，圆 $x^2+(y+2)^2=r^2(r>0)$ 上到直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 的距离为 1 的点有且仅有一个，当 $r=d+1=3$ 时，圆 $x^2+(y+2)^2=r^2(r>0)$ 上到直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 的距离为 1 的点有且仅有三个，故当 $1<r<3$ 时，圆 $x^2+(y+2)^2=r^2(r>0)$ 上到直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 的距离为 1 的点有且仅有两个.故选 B.

【规律方法】

在点运动时，动点到直线或圆上一点的距离会发生变化，在变化过程中，就会出现一些最值问题，如距离最小、最大等.这些问题常常涉及平面几何知识，需利用数形结合思想进行求解.

(1)圆上的点到定点(点在圆外)的距离的最值问题

一般都是转化为定点到圆心的距离问题，定点到圆心的距离，加上半径为最大值，减去半径为最小值.

(2)圆上的点到直线的距离的最值问题

已知圆 C 和圆外的一条直线 l，则圆上的点到直线 l 距离的最小值为 $d-r$，距离的最大值为 $d+r$，其中 d 为圆心到直线 l 的距离.

(3)过圆内定点的弦长的最值问题

已知圆 C 及圆内一定点 P，则过点 P 的所有弦中最长的为直径，最短的为与该直径垂直的弦.

【对点训练】

已知圆 $C:x^2+y^2-Dx-Ey-4=0$ 关于直线 $y=x+1$ 对称，且点$(4,2)$在圆上.

(1)求圆 C 的标准方程；

(2)若直线 $l:(m+1)x-(2m+1)y-m-2=0$ 与圆 C 交于点 A,B，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值及此时直线 l 的方程.

解：(1)由圆 $C:x^2+y^2-Dx-Ey-4=0$ 关于直线 $y=x+1$ 对称，

即圆心 $\left(\frac{D}{2},\frac{E}{2}\right)$ 在直线 $y=x+1$ 上，则 $E=D+2$，

所以圆 $C:x^2+y^2-Dx-(D+2)y-4=0$.

又因为$(4,2)$在圆上，所以 $4^2+2^2-4D-(D+2)\cdot 2-4=0$，解得 $D=2,E=4$，

所以圆 C 的标准方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=9$.

(2)由 $(m+1)x-(2m+1)y-m-2=0$，

可得 $m(x-2y-1)+(x-y-2)=0$，

由方程组 $\begin{cases}x-2y-1=0,\\x-y-2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\y=1,\end{cases}$ 即直线 l 过定点 $P(3,1)$.

又由(1)知圆心为 $C(1,2)$，可得 $PC=\sqrt{5}$，因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AC||BC|\sin\angle ACB$，

所以当 $\angle ACB=90°$ 时，$\triangle ABC$ 的面积最大.

此时 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$\triangle ABC$ 面积最大值为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}r^2=\frac{9}{2}$，其中 r 为圆 C 的半径，

此时点 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{r}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}<\sqrt{5}=PC$.

所以 $\angle ACB$ 可以取到 $90°$.所以 $\frac{|m+1-2(2m+1)-m-2|}{\sqrt{(m+1)^2+(2m+1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$，解得 $m=-\frac{6}{13}$ 或 $m=0$，

故所求直线 l 的方程为 $x-y-2=0$ 或 $7x-y-20=0$.

类型二　用坐标法解决平面几何问题

例 2　设点 $A(-2,3),B(0,a)$，若直线 AB 关于直线 $y=a$ 对称的直线 l 与圆 $C:(x+3)^2+(y+2)^2=1$ 有公共点，则 a 的取值范围是_____.

$\left[\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right]$　**解析**：因为 $A(-2,3)$ 关于 $y=a$ 对称的点的坐标为 $A'(-2,2a-3)$，$B(0,a)$ 在直线 $y=a$ 上，所以 $A'B$ 所在直线即为直线 l，所以直线 l 为 $y=\frac{a-3}{-2}x+a$，即 $(a-3)x+2y-2a=0$.圆 $C:(x+3)^2+(y+2)^2=1$，圆心 $C(-3,-2)$，半径 $r=1$，

依题意圆心 C 到直线 l 的距离 $d=$

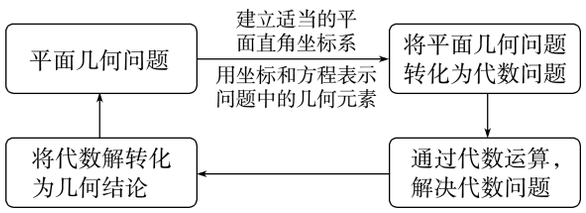
$\frac{|-3(a-3)-4-2a|}{\sqrt{(a-3)^2+2^2}}\leqslant 1$，

即$(5-5a)^2\leqslant(a-3)^2+2^2$，解得$\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$，

所以$a\in\left[\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right]$.

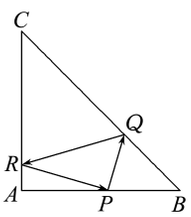
【规律方法】

用坐标法解决平面几何问题的基本过程



【对点训练】

1.已知在等腰直角三角形ABC中，$AB=AC=4$，点P是边AB上异于A，B的一点，光线从点P出发，经BC，CA反射后又回到点P（如图）.若光线QR经过$\triangle ABC$的重心，则QR的长度为（　　）

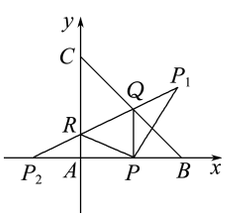


A.$\frac{10\sqrt{7}}{9}$　　B.$\frac{10\sqrt{5}}{9}$

C.$\frac{10\sqrt{3}}{9}$　　D.$\frac{10\sqrt{2}}{9}$

B　**解析**：如图，建立平面直角坐标系，则$A(0,0)$，$B(4,0)$，$C(0,4)$，$\triangle ABC$的重心坐标为$\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$，$BC$的方程为$x+y-4=0$.

设$P(a,0)$，$0<a<4$.

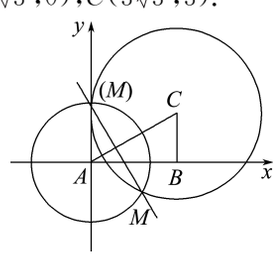


根据光的反射原理及题意可知，点P关于BC的对称点P_1在QR的反向延长线上，点P关于y轴的对称点P_2在QR的延长线上，即P_1，P_2，Q，R四点共线.由已知可得点$P_1(x_1,y_1)$满足$\begin{cases}\frac{a+x_1}{2}+\frac{0+y_1}{2}=4,\\ \frac{y_1-0}{x_1-a}\times(-1)=-1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x_1=4,\\ y_1=4-a,\end{cases}$所以$P_1(4,4-a)$.易知$P_2(-a,0)$，因为$P_1$，$P_2$，$Q$，$R$四点共线，所以有直线$QR$的斜率为$k=\frac{4-a-0}{4-(-a)}=\frac{4-a}{4+a}$，所以直线$QR$的方程为$y=\frac{4-a}{4+a}(x+a)$.

由于直线QR过重心$\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$，所以有$\frac{4}{3}=\frac{4-a}{4+a}\left(\frac{4}{3}+a\right)$，整理可得$3a^2-4a=0$，解得$a=\frac{4}{3}$或$a=0$（舍去），所以直线$QR$的方程为$y=\frac{4-\frac{4}{3}}{4+\frac{4}{3}}\left(x+\frac{4}{3}\right)$，整理可得$3x-6y+4=0$.所以点$R$的坐标为$\left(0,\frac{2}{3}\right)$.联立$QR$与$BC$的方程$\begin{cases}3x-6y+4=0,\\ x+y-4=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\frac{20}{9},\\ y=\frac{16}{9},\end{cases}$即$Q\left(\frac{20}{9},\frac{16}{9}\right)$，所以$|QR|=\sqrt{\left(\frac{20}{9}-0\right)^2+\left(\frac{16}{9}-\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{10}{9}\sqrt{5}$.

2.为保护环境，建设美丽乡村，某镇政府决定为A，B，C三个自然村建造一座垃圾处理站，集中处理A，B，C三个自然村的垃圾，受当地条件限制，垃圾处理站M只能建在与A村相距5 km，且与C村相距$\sqrt{31}$ km的地方.已知B村在A村的正东方向，相距$3\sqrt{3}$ km，C村在B村的正北方向，相距3 km，则垃圾处理站M与B村相距_____ km.

$2\sqrt{13}$或$\sqrt{7}$　**解析**：由题意，以A为原点，AB所在直线为x轴建立如图所示的平面直角坐标系，则$A(0,0)$，$B(3\sqrt{3},0)$，$C(3\sqrt{3},3)$.



以A为圆心，5为半径作圆A，以C为圆心，$\sqrt{31}$为半径作圆C，

则圆A的方程为$x^2+y^2=25$，圆C的方程为$(x-3\sqrt{3})^2+(y-3)^2=31$，

即$x^2+y^2-6\sqrt{3}x-6y+5=0$，所以两圆的公共弦所在直线的方程为$\sqrt{3}x+y-5=0$.

设$M(x,y)$，则$\begin{cases}x^2+y^2=25,\\ \sqrt{3}x+y=5,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=0,\\ y=5\end{cases}$或$\begin{cases}x=\frac{5\sqrt{3}}{2},\\ y=-\frac{5}{2},\end{cases}$

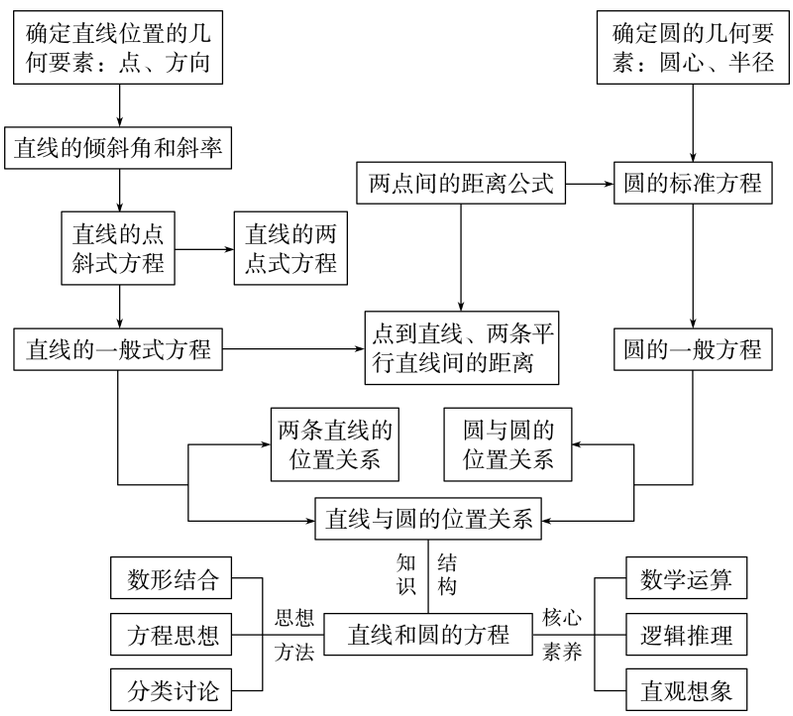
即$M(0,5)$或$M\left(\frac{5\sqrt{3}}{2},-\frac{5}{2}\right)$，

所以$|MB|=\sqrt{(0-3\sqrt{3})^2+5^2}=2\sqrt{13}$或$|MB|=\sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}-3\sqrt{3}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{7}$.

★★★

重　构　拓　展

多维体系构建



【问题探究】

1.在平面直角坐标系中，我们是如何探索确定直线位置的几何要素的？它与平面几何中确定直线位置的几何要素有什么差异？

2.直线的倾斜程度、倾斜角、斜率三者之间有什么关系？如何用直线上两点的坐标表示这条直线的斜率？直线的方向向量在刻画直线的倾斜角、斜率方面有什么作用？

3.你能写出两点间的距离公式、点到直线的距离公式吗？比较用坐标法和向量法推导点到直线的距离公式的过程，你有何体会？

4.位置关系是图形间的一种重要关系.直线与直线、直线与圆、圆与圆分别有哪些位置关系？我们是如何通过方程来研究这些位置关系的？你能说说用方程研究图形位置关系的基本思路与具体步骤吗？

5.坐标法是研究和解决平面几何问题的重要方法.你能举例说明用坐标法解决平面几何问题“三步曲”中的第一步、第二步和第三步的具体含义吗？

6.数形结合是重要的数学思想方法，坐标系把图形性质与代数运算结合起来，由此产生了解析几何这门学科.我们常说，两点间的距离公式是勾股定理的坐标表示.用“数”表示“形”，用“形”解释“数”，在解析几何的学习中经常遇到.你还能举出一些这方面的例子吗？

质量评估(二)

(考查范围:第二章　时间:120分钟　分值:150分)

得分 ____

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.过$A(-2,-3)$,$B(1,0)$两点的直线的倾斜角是(　　)

A.45°　　B.60°　　C.120°　　D.135°

A　**解析:**已知$A(-2,-3)$,$B(1,0)$,则$k_{AB}=\frac{-3-0}{-2-1}=1$.设直线$AB$的倾斜角为$\theta$,则$\tan\theta=k_{AB}=1$,得$\theta=45°$.

2.已知直线$l_1:-m^2x+y-1=0$,直线$l_2:(2m-3)x+y-3=0$,则"$m=-3$"是"$l_1\parallel l_2$"的(　　)

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

A　**解析:**因为$l_1\parallel l_2\Leftrightarrow -m^2=2m-3\Leftrightarrow m=1$或$m=-3$,所以"$m=-3$"是"$l_1\parallel l_2$"的充分不必要条件.故选A.

3.过点$P(1,3)$,且与x轴、y轴的正半轴围成三角形的面积等于6的直线的方程是(　　)

A.$3x+y-6=0$　　B.$x+3y-10=0$

C.$3x-y=0$　　D.$x-3y+8=0$

A　**解析:**设所求直线的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>0,b>0)$,则有$\frac{1}{2}ab=6$,且$\frac{1}{a}+\frac{3}{b}=1$.由$\begin{cases}ab=12,\\ \frac{1}{a}+\frac{3}{b}=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\ b=6.\end{cases}$故所求直线的方程为$\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1$,即为$3x+y-6=0$.

4.已知直线$x-2y+m=0(m>0)$与直线$x+ny-3=0$互相平行,且它们之间的距离是$\sqrt{5}$,则$m+n=$(　　)

A.0　　B.1　　C.-1　　D.2

A　**解析:**由题意两条直线平行,所以$n=-2$.由两条平行直线间的距离公式,得$d=\frac{|m+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|m+3|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$,解得$m=2$或$m=-8$(舍去),所以$m+n=0$.

5.若直线$3x-4y+12=0$与两条坐标轴的交点为A,B,则过A,B及原点O三点的圆的方程是(　　)

A.$x^2+y^2+4x-3y=0$

B.$x^2+y^2-4x-3y=0$

C.$x^2+y^2+4x-3y-4=0$

D.$x^2+y^2-4x-3y+8=0$

A　**解析:**由题意不妨设$A(0,3)$,$B(-4,0)$,圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,

则$\begin{cases}9+3E+F=0,\\ 16-4D+F=0,\\ F=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}D=4,\\ E=-3,\\ F=0,\end{cases}$

所以所求圆的方程为$x^2+y^2+4x-3y=0$.

6.已知过原点的直线l与圆$C:x^2+y^2-6x+5=0$相交于A,B两点,若$\triangle ABC$为正三角形,则直线l的斜率为(　　)

A.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B.$\sqrt{2}$　　C.$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D.$\pm\sqrt{2}$

C　**解析:**根据题意,圆$C:x^2+y^2-6x+5=0$即$(x-3)^2+y^2=4$,圆心为$C(3,0)$,半径$r=2$.

设直线l的斜率为k,则直线l的方程为$y=kx$,即$kx-y=0$,

若直线l与圆C相交于A,B两点且$\triangle ABC$为正三角形,

则圆心C到直线l的距离$d=\sqrt{3}$,即$\frac{|3k|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{3}$,

解得$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7.已知点$A(1,-1)$,$B(a,a-2)$到直线l的距离分别为$2\sqrt{2}$和$6\sqrt{2}$.若这样的直线l恰有两条,则a的取值范围是(　　)

A.$(5,9)$　　B.$(9,+\infty)$

C.$(-7,-3)\cup(5,9)$　　D.$(-3,5)\cup(9,+\infty)$

C　**解析:**恰好存在两条直线l,使得点A,B到l的距离分别为$2\sqrt{2}$和$6\sqrt{2}$,

以A为圆心,$2\sqrt{2}$为半径的圆,以B为圆心,$6\sqrt{2}$为半径的圆,这两圆有两条公切线,

因此这两个圆相交,即$4\sqrt{2}<|AB|<8\sqrt{2}$.而$|AB|=\sqrt{(a-1)^2+(a-1)^2}=\sqrt{2}|a-1|$,

则$4<|a-1|<8$,解得$5<a<9$或$-7<a<-3$,

所以a的取值范围是$(-7,-3)\cup(5,9)$.

8.已知直线 $y=kx+m$（m 为常数）与圆 $x^2+y^2=4$ 交于点 M,N，当 k 的值变化时，$|MN|$ 的最小值为 2，则 $m=$（　　）

A.±1　　B.$\pm\sqrt{2}$　　C.$\pm\sqrt{3}$　　D.±2

C　**解析**：由题意可得圆心为 $(0,0)$，半径为 2，

所以圆心到直线的距离 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$，

则弦长为 $|MN|=2\sqrt{4-\dfrac{m^2}{k^2+1}}$.

当 $k=0$ 时，弦长 $|MN|$ 取得最小值为 $2\sqrt{4-m^2}=2$，解得 $m=\pm\sqrt{3}$.

得分　　**二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.**

9.已知直线 $l_1:x+ay-a=0$ 和直线 $l_2:ax-(2a-3)y-1=0$，则下列说法正确的有（　　）

A.l_2 始终过定点 $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$

B.若 $l_1/\!/l_2$，则 $a=1$ 或 $a=-3$

C.若 $l_1\perp l_2$，则 $a=0$ 或 $a=2$

D.当 $a>0$ 时，l_1 始终不过第三象限

ACD　**解析**：选项 A，$l_2:a(x-2y)+3y-1=0$，令 $\begin{cases}x-2y=0,\\3y-1=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\dfrac{2}{3},\\y=\dfrac{1}{3},\end{cases}$ 过点 $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$，故 A 正确；

选项 B，当 $a=1$ 时，l_1,l_2 重合，故 B 错误；

选项 C，当 $l_1\perp l_2$ 时，由 $1\times a+a\times(3-2a)=0$，得 $a=0$ 或 $a=2$，故 C 正确；

选项 D，当 $a>0$ 时，$l_1:y=-\dfrac{1}{a}x+1$ 始终过点 $(0,1)$，斜率为负，所以不会过第三象限，故 D 正确.

故选 ACD.

10.已知圆 $O:x^2+y^2=4$ 和圆 $C:(x-3)^2+(y-3)^2=10$，则下列说法正确的有（　　）

A.圆 O 与圆 C 有四条公切线

B.$|OC|=3\sqrt{2}$

C.圆 O 与圆 C 的公共弦所在直线的方程为 $x+y=2$

D.圆 O 与圆 C 的公共弦的长为 $2\sqrt{2}$

BCD　**解析**：由题意知，$O(0,0)$，$C(3,3)$，$r_O=2$，$r_C=\sqrt{10}$，则 $|OC|=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$，故 B 正确；

又 $2+\sqrt{10}>3\sqrt{2}>\sqrt{10}-2$，即 $r_C-r_O<|OC|<r_O+r_C$，所以圆 O 与圆 C 相交，有两条公切线，故 A 错误；

由 $\begin{cases}(x-3)^2+(y-3)^2=10,\\x^2+y^2=4,\end{cases}$ 整理得 $x+y=2$，

故圆 O 与圆 C 的公共弦所在直线 l 的方程为 $x+y=2$，故 C 正确；

圆心 O 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{2}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$，

所以圆 O 与圆 C 的公共弦长为 $2\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$，故 D 正确.

11.已知圆 C 截 y 轴所得的弦长为 2，圆心 C 到直线 $l:x-2y=0$ 的距离为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，且圆 C 被 x 轴分成的两段弧长之比为 3∶1，则圆 C 的方程可能为（　　）

A.$(x+1)^2+(y+1)^2=2$

B.$(x-1)^2+(y-1)^2=2$

C.$(x+1)^2+(y-1)^2=2$

D.$(x-1)^2+(y+1)^2=2$

AB　**解析**：设圆 C 的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，则点 C 到 x 轴、y 轴的距离分别为 $|b|,|a|$.

由题意可知 $\begin{cases}r^2=2b^2,\\r^2=a^2+1,\\\dfrac{|a-2b|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5},\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a=-1,\\b=-1,\text{或}\\r^2=2\end{cases}$

$\begin{cases}a=1,\\b=1,\\r^2=2.\end{cases}$

故所求圆 C 的方程为 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$ 或 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

得分　　**12.**已知圆 C 的圆心坐标是 $(0,m)$，半径是 r.若直线 $2x-y+3=0$ 与圆 C 相切于点 $A(-2,-1)$，则 $m=$_____，$r=$_____.

-2　$\sqrt{5}$　**解析**：由题意可知 $k_{AC}=-\dfrac{1}{2}$，所以直线 AC 的方程为 $y+1=-\dfrac{1}{2}(x+2)$.把 $(0,m)$ 代入直线 AC 的方程得 $m=-2$，此时 $r=|AC|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$.

得分　　**13.**已知点 $A(1,m)$，$B(1,2\sqrt{5}-m)$.若圆 $C:x^2+y^2+2x=0$ 上有且只有一点 P，使得 $PA\perp PB$，则实数 m 的一个值为_____.（写出满足条件的一个值即可）

$\sqrt{5}+2$（答案不唯一）　**解析**：由题意知，圆 $C:x^2+$

$y^2+2x=0$，即$(x+1)^2+y^2=1$，圆心为$C(-1,0)$，半径$r=1$.

设线段AB的中点为M.

因为$A(1,m)$，$B(1,2\sqrt{5}-m)$，

则$M(1,\sqrt{5})$，$|AB|=2|\sqrt{5}-m|$，

所以以AB为直径的圆M为$(x-1)^2+(y-\sqrt{5})^2=(\sqrt{5}-m)^2$.

因为圆C：$x^2+y^2+2x=0$上有且只有一点P，使得$PA\perp PB$，

所以圆C与圆M相切.

又$|MC|=\sqrt{(-1-1)^2+(0-\sqrt{5})^2}=3$，

即有$|\sqrt{5}-m|+1=3$或$|\sqrt{5}-m|-1=3$，

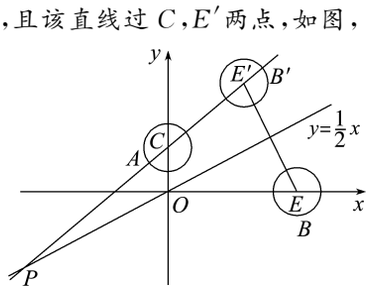
解得$m=\sqrt{5}\pm2$或$m=\sqrt{5}\pm4$.

得分　　**14.**已知A为圆C：$x^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$上的动点，B为圆E：$(x-3)^2+y^2=\frac{1}{4}$上的动点，P为直线$y=\frac{1}{2}x$上的动点，则$|PB|-|PA|$的最大值为_____.

$\frac{\sqrt{130}}{5}+1$　**解析**：设$E(3,0)$关于直线$y=\frac{1}{2}x$的对称点为$E'(m,n)$，则$\begin{cases}\frac{n}{m-3}\cdot\frac{1}{2}=-1,\\ \frac{n}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{m+3}{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}m=\frac{9}{5},\\ n=\frac{12}{5},\end{cases}$所以$E'\left(\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$，

则圆E关于直线$y=\frac{1}{2}x$对称的圆E'的方程为$\left(x-\frac{9}{5}\right)^2+\left(y-\frac{12}{5}\right)^2=\frac{1}{4}$.

要使$|PB|-|PA|$的值最大，则P，A，B'（其中B'为圆E关于直线$y=\frac{1}{2}x$的对称圆E'上的点）三点共线，且该直线过C，E'两点，如图，



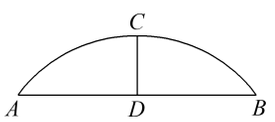
其最大值为$|AB'|=|CE'|+1=\sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^2+\left(\frac{12}{5}-1\right)^2}+1=\frac{\sqrt{130}}{5}+1$.

四、解答题：本题共5小题，共77分.解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

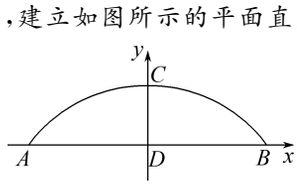
得分　　**15.**(13分)我国的隧道样式多种多样，它们或傍山而过，上方构筑顶棚形成“明洞”；或挂于峭壁，每隔一段开出“天窗”形成挂壁公路；但是更多时候它们都隐伏于山体之中，只露出窄窄的出入口洞门.某学生学过圆的知识后受到启发，为山体隧道设计了一个圆弧形洞门样式，如图所示，路宽为16 m($AB=16$ m)，洞门最高处距路面4 m($CD=4$ m).

(1)建立适当的平面直角坐标系，求圆弧AB的方程；

(2)为使双向行驶的车辆更加安全，该同学进一步优化了设计方案，在路中间建造了2 m宽的隔离墙.某货车装满货物后整体呈长方体状，宽2 m，高3.6 m，则此货车能否通过该洞门？并说明理由.



解：(1)以点D为坐标原点，AB，DC所在直线分别为x轴、y轴，建立如图所示的平面直角坐标系，



则点$C(0,4)$，$B(8,0)$.

由圆的对称性可知，圆心在y轴上，

设圆心坐标为$(0,b)$，圆的半径为r，则圆弧AB所在圆的方程为$x^2+(y-b)^2=r^2$.

因为点C，B在圆上，所以$\begin{cases}0+(4-b)^2=r^2,\\ 8^2+(0-b)^2=r^2,\end{cases}$解得$b=-6$，$r=10$.

所以圆弧AB所在圆的方程为$x^2+(y+6)^2=100$，

因此圆弧AB的方程为$x^2+(y+6)^2=100(0\leqslant y\leqslant4)$.

(2)此货车不能通过该洞门.理由如下：

由题意可知，隔离墙最右侧的坐标为$(1,0)$，而车宽2 m，车高3.6 m，

所以货车右侧的最高点的坐标为$(3,3.6)$.

因为$3^2+(3.6+6)^2>100$，

所以此货车不能通过该洞门.

得分　　**16.**(15分)已知点$P(x,y)$在圆x^2+y^2

$-6x-6y+14=0$ 上.

(1)求$\frac{y}{x}$的最大值和最小值；

(2)求 x^2+y^2+2x+3 的最大值与最小值.

解：(1) 圆 $x^2+y^2-6x-6y+14=0$ 可化为 $(x-3)^2+(y-3)^2=4$，

即该圆以(3,3)为圆心，2 为半径.

因为$\frac{y}{x}=\frac{y-0}{x-0}$，所以$\frac{y}{x}$即为(0,0)与该圆上一点确定的直线的斜率.

设过(0,0)与圆 $(x-3)^2+(y-3)^2=4$ 相切的直线方程为 $kx-y=0$(斜率不存在时直线与圆是相离的)，则有 $2=\frac{|3k-3|}{\sqrt{k^2+1}}$，解得 $k=\frac{9\pm2\sqrt{14}}{5}$.

所以$\left(\frac{y}{x}\right)_{\max}=\frac{9+2\sqrt{14}}{5}$，$\left(\frac{y}{x}\right)_{\min}=\frac{9-2\sqrt{14}}{5}$.

(2)$x^2+y^2+2x+3=(x+1)^2+y^2+2$ 表示点(x,y)与点$(-1,0)$距离的平方加上 2.

因为点(x,y)在圆上，点$(-1,0)$在圆外，

所以所求最大值为$[\sqrt{(3+1)^2+(3-0)^2}+2]^2+2=51$，所求最小值为$[\sqrt{(3+1)^2+(3-0)^2}-2]^2+2=11$.

得分　　**17.**(15 分)已知方程 $x^2+y^2-2x+4y+4m=0$.

(1)若此方程表示圆，求正整数 m 的值；

(2)在(1)的条件下，设方程表示的圆为圆 C，若从点 $M(-4,1)$ 发出的光线经过直线 $y=-x$ 反射，反射光线恰好平分圆 C，求反射光线所在直线 l_1 的一般式方程.

解：(1)若此方程表示圆，则$(-2)^2+4^2-4\times4m>0$，解得 $m<\frac{5}{4}$.

因为 m 为正整数，所以 $m=1$.

(2)在(1)的条件下，方程表示圆 C：$(x-1)^2+(y+2)^2=1$.

由 l_1 恰好平分圆 C，得 l_1 经过圆心 $C(1,-2)$.

设点 M 关于直线 $y=-x$ 的对称点为 $N(x,y)$，

则直线 MN 与直线 $y=-x$ 垂直，且线段 MN 的中点$\left(\frac{x-4}{2},\frac{y+1}{2}\right)$在直线 $y=-x$ 上，

则有$\begin{cases}\frac{y-1}{x+4}\times(-1)=-1,\\ \frac{y+1}{2}=-\frac{x-4}{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-1,\\ y=4,\end{cases}$

所以 $N(-1,4)$.

所以直线 CN 即为直线 l_1，且 $k_{l_1}=k_{CN}=\frac{-2-4}{1-(-1)}=-3$，

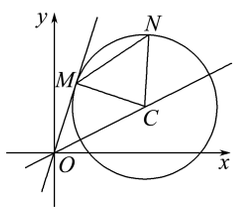
所以反射光线所在直线 l_1 的方程为 $y+2=-3(x-1)$，即 $3x+y-1=0$.

得分　　**18.**(17 分)已知圆 C 的圆心在直线 $y=\frac{1}{2}x$ 上，且过圆 C 上一点 $M(1,3)$ 的切线方程为 $y=3x$.

(1)求圆 C 的方程；

(2)设过点 M 的直线 l 与圆交于另一点 N，求 $\triangle CMN$ 面积的最大值及此时的直线 l 的方程.

解：(1)如图.



由题意，过点 M 的直径所在直线的方程为 $y-3=-\frac{1}{3}(x-1)$，

由$\begin{cases}y-3=-\frac{1}{3}(x-1),\\ y=\frac{1}{2}x,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=4,\\ y=2.\end{cases}$

所以圆心坐标为 $(4,2)$，半径 $r^2=(4-1)^2+(2-3)^2=10$，

所以圆 C 的方程为$(x-4)^2+(y-2)^2=10$.

(2)设圆心 C 到直线 MN 的距离为 d，

则 $\triangle CMN$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times d\times2\sqrt{10-d^2}=d\sqrt{10-d^2}$.

由于 $S=\sqrt{d^2(10-d^2)}\leqslant\frac{d^2+(10-d^2)}{2}=5$，

当且仅当 $d^2=10-d^2$，即 $d=\sqrt{5}$ 时，等号成立，面积的最大值为 5.

当直线 MN 的斜率不存在时，直线方程为 $x=1$，此时 $C(4,2)$到 MN 的距离为 $3\neq d=\sqrt{5}$；

故直线 MN 的斜率存在，设为 k，则直线 MN 的方程为 $y-3=k(x-1)$，即 $kx-y+3-k=0$.

由 $C(4,2)$到 MN 的距离 $d=\frac{|4k-2+3-k|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{5}$，

解得 $k=-2$ 或 $k=\frac{1}{2}$，故此时直线方程为 $2x+y-5=0$ 或 $x-2y+5=0$.

得分 | | **19.**(17 分)已知圆 $C_1:x^2+y^2+6x-2y+6=0$ 和圆 $C_2:x^2+y^2-8x-10y+41-r^2=0(r>0)$.

(1)若圆 C_1 与圆 C_2 相交,求 r 的取值范围;

(2)若直线 $l:y=kx+1$ 与圆 C_1 交于 P,Q 两点,且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=4$($O$ 为原点),求实数 k 的值;

(3)若 $r=2$,设 P 为平面上的点,且满足:存在过点 P 的无穷多对互相垂直的直线 l_1 和 l_2,它们分别与圆 C_1 和圆 C_2 相交,且直线 l_1 被圆 C_1 截得的弦的长与直线 l_2 被圆 C_2 截得的弦的长相等,试求所有满足条件的点 P 的坐标.

解:(1)圆 $C_1:x^2+y^2+6x-2y+6=0$ 的标准方程为 $(x+3)^2+(y-1)^2=4$,则圆心 $C_1(-3,1)$,$r_1=2$,

圆 $C_2:x^2+y^2-8x-10y+41-r^2=0(r>0)$ 的标准方程为 $(x-4)^2+(y-5)^2=r^2(r>0)$,则圆心 $C_2(4,5)$,$r_2=r$,

所以 $|C_1C_2|=\sqrt{(4+3)^2+(5-1)^2}=\sqrt{65}$.

因为圆 C_1 与圆 C_2 相交,所以 $|r_1-r_2|<|C_1C_2|<r_1+r_2$,即 $|r-2|<\sqrt{65}<r+2$,解得 $\sqrt{65}-2<r<\sqrt{65}+2$,

所以 r 的取值范围为 $(\sqrt{65}-2,\sqrt{65}+2)$.

(2)已知直线 $l:y=kx+1$ 与圆 C_1 交于 P,Q 两点,

则可设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases}y=kx+1,\\(x+3)^2+(y-1)^2=4,\end{cases}$

得 $(1+k^2)x^2+6x+5=0$,

由 $\Delta=16-20k^2>0$,得 $k\in\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$,

所以 $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{6}{1+k^2},\\x_1x_2=\frac{5}{1+k^2}.\end{cases}$

因为 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2=(1+k^2)x_1x_2+k(x_1+x_2)+1=\frac{-6k}{1+k^2}+6=4$,

解得 $k=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$,

又 $k\in\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$,所以 $k=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

(3)如图,设点 P 的坐标为 (m,n),则直线 l_1,l_2 的方程分别为 $y-n=t(x-m)$,$y-n=-\frac{1}{t}(x-m)$,

即 $tx-y+n-tm=0$,$-\frac{1}{t}x-y+n+\frac{1}{t}m=0$.

因为直线 l_1 被圆 C_1 截得的弦长与直线 l_2 被圆 C_2 截得的弦长相等且两圆半径相等,

所以圆心 C_1 到直线 l_1 的距离与圆心 C_2 到直线 l_2 的距离相等,

即 $\frac{|-3t-1+n-tm|}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{\left|-\frac{4}{t}-5+n+\frac{1}{t}m\right|}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}$,

化简,得 $(2-m-n)t=m-n-3$ 或 $(m-n+8)t=m+n-5$.

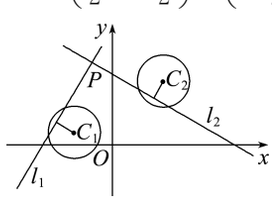
因为存在过点 P 的无穷多对互相垂直的直线 l_1 和 l_2,

所以关于 t 的方程有无穷多解,

则 $\begin{cases}2-m-n=0,\\m-n-3=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m-n+8=0,\\m+n-5=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m_1=\frac{5}{2},\\n_1=-\frac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m_2=-\frac{3}{2},\\n_2=\frac{13}{2},\end{cases}$

所以点 P 的坐标为 $\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{3}{2},\frac{13}{2}\right)$.



第三章 圆锥曲线的方程

单元概览

单元导航

本章内容是在学习了直线和圆的基础上，进一步运用坐标法研究几何问题.本章结合具体情境探索椭圆、双曲线和抛物线的几何特征，利用确定三类圆锥曲线的几何要素（如定点、定直线等）合理地建立坐标系，用代数语言描述这些特征，得到相应的标准方程；运用代数方法进一步认识圆锥曲线的性质以及它们与直线的位置关系，并用圆锥曲线的方程解决一些简单问题.

学习目标

1.了解圆锥曲线的实际背景，例如行星运行轨道、抛体运动轨迹、探照灯的镜面，感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用.

2.经历从具体情境中抽象出椭圆的过程，掌握椭圆的定义、标准方程及其简单的几何性质.

3.掌握抛物线与双曲线的定义、几何图形和标准方程，以及它们的简单的几何性质.

4.通过对圆锥曲线与方程的学习，进一步体会数形结合的思想.

5.掌握椭圆、双曲线和抛物线的简单应用，能用坐标法解决一些与圆锥曲线有关的简单的几何问题（如直线与圆锥曲线的位置关系）和实际问题.

核心概念

通过图形探究圆锥曲线的几何特征，建立圆锥曲线的方程，并通过方程研究其简单的几何性质.

依托对圆锥曲线（几何图形）的研究，在现实情境或数学情境中，概括出数学对象的一般特征，并解决一些实际应用问题，注重数学思想和坐标法的引领性，提升思考和表达问题的能力，发展数学抽象、直观想象、数学运算、逻辑推理、数学建模等素养.

学法指导

1.以坐标法为核心和纽带.在学习中理解解析几何的学科特点，抓住它的核心，体会其中蕴含的数学思想，用坐标法解决一些几何、代数的问题.

2.重视对研究对象几何特征的分析.解析几何是以代数方法研究几何问题，要注意代数运算与几何直观的相互结合. 体验先用几何眼光观察，再用坐标法推理、论证和求解的基本思路.

3.正确理解解析几何中的运算.为了更好地把握坐标法的基本思想，必须控制代数运算的难度，但必要的运算是不可避免的，关键是要把握解析几何中的运算特点.解析几何中的运算是建立在几何背景下的代数运算，所以要先用几何眼光观察，分析清楚几何图形的要素及图形间的基本关系，再用代数语言表达，而且在运算过程中要时刻注意利用图形的几何特征及图形间的关系来简化运算.

4.注意用好教科书中的例题、习题.教科书中的例题与习题能帮助理解圆锥曲线的几何特征.对有关题目进行适当的变式拓展，熟练运用坐标法研究圆锥曲线的性质以及它们与直线的位置关系，并能解决有一定综合性的问题，通过解题感悟解析几何中蕴含的数学思想.

5.解析几何的学科特点就在于它的综合性，综合解决问题的能力需要逐步培养.目光要聚焦在核心概念上，从整体上更好地把握圆锥曲线.

★★★

探　究　构　建

3.1　椭圆

3.1.1　椭圆及其标准方程

学习任务目标

1.经历从具体情境中抽象出椭圆模型的过程.
2.掌握椭圆的定义、标准方程.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　椭圆的定义

我们把平面内与两个定点 F_1,F_2 的距离的和等于常数(大于$|F_1F_2|$)的点的轨迹叫做椭圆.这两个定点叫做椭圆的焦点,两焦点间的距离叫做椭圆的焦距,焦距的一半称为半焦距.

知识点二　椭圆的标准方程

焦点的位置	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$
焦点坐标	$(-c,0),(c,0)$	$(0,-c),(0,c)$
a,b,c 的关系	$c^2=a^2-b^2$	

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).
(1)已知点 $F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$,动点 P 满足$|PF_1|+|PF_2|=4$,则点 P 的轨迹是椭圆.　　(　√　)
(2)已知点 $F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$,动点 P 满足$|PF_1|+|PF_2|=2$,则点 P 的轨迹是椭圆.　　(　×　)
(3)已知点 $F_1(0,-1)$,$F_2(0,1)$,动点 P 满足$|PF_1|+|PF_2|=1$,则点 P 的轨迹是椭圆.　　(　×　)
(4)椭圆定义中动点到两定点的距离之和是常数,而不是变量.　　(　√　)

2.已知椭圆 $4x^2+ky^2=4$ 的一个焦点坐标是$(0,1)$,则实数 k 的值是　　(　　)
A.1　　B.2　　C.3　　D.4

B　**解析**:将椭圆方程化为标准方程为 $x^2+\frac{y^2}{\frac{4}{k}}=1$,又其中一个焦点坐标为$(0,1)$,故$\frac{4}{k}-1=1$,解得 $k=2$.

3.思考并回答下列问题:
(1)在平面直角坐标系中,已知点 $A(-4,0)$,$B(4,0)$,若$|PA|+|PB|=10$,则点 P 的轨迹方程是什么?

提示:点 P 的轨迹方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

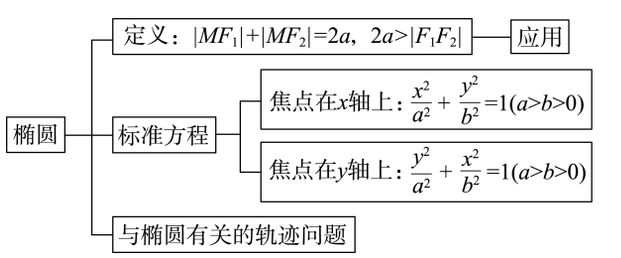
(2)两种椭圆:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$和$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$有什么相同点和不同点?

提示:相同点:它们的形状、大小都相同,都有 $a>b>0$,$a^2=b^2+c^2$;
不同点:两种椭圆的位置不同,它们的焦点坐标也不同.

(3)如何根据椭圆的标准方程判断焦点的位置?

提示:比较含 x^2 项和含 y^2 项的分母,谁的分母大,焦点就在谁对应的坐标轴上.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 椭圆定义的应用

探究活动

例1　已知 P 为椭圆 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$ 上一点，F_1，F_2 分别是椭圆的左、右焦点，$\angle F_1PF_2=60°$.求 $\triangle F_1PF_2$ 的面积.

解：由已知，得 $a=2\sqrt{3}$，$b=\sqrt{3}$，所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{12-3}=3$，

所以 $|F_1F_2|=2c=6$.

在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由余弦定理，得

$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos 60°$，即 $36=|PF_1|^2+|PF_2|^2-|PF_1|\cdot|PF_2|$. ①

由椭圆的定义，得 $|PF_1|+|PF_2|=4\sqrt{3}$，

即 $48=|PF_1|^2+|PF_2|^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|$. ②

由②－①，得 $|PF_1|\cdot|PF_2|=4$，

所以 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\sin 60°=\sqrt{3}$.

［一题多思］

思考1. 以椭圆上一点 P 与椭圆的两个焦点 F_1，F_2 为顶点的 $\triangle PF_1F_2$ 称为焦点三角形，解决焦点三角形问题要用到哪些知识点？

提示：可以利用椭圆的定义，结合正弦定理、余弦定理、勾股定理、三角形的面积公式等知识点解决焦点三角形问题.

思考2. 若将本例中“$\angle F_1PF_2=60°$”变为“$\angle PF_1F_2=90°$”，其他条件不变，求 $\triangle F_1PF_2$ 的面积.

解：由已知，得 $a=2\sqrt{3}$，$b=\sqrt{3}$，所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{12-3}=3$，

从而 $|F_1F_2|=2c=6$.

在 $\triangle F_1PF_2$ 中，因为 $\angle PF_1F_2=90°$，则由勾股定理，可得

$|PF_2|^2=|PF_1|^2+|F_1F_2|^2$，即 $|PF_2|^2=|PF_1|^2+36$.

又由椭圆的定义知，$|PF_1|+|PF_2|=2\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$，所以 $|PF_2|=4\sqrt{3}-|PF_1|$，

所以 $(4\sqrt{3}-|PF_1|)^2=|PF_1|^2+36$，解得 $|PF_1|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\triangle F_1PF_2$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|F_1F_2|=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

【探究总结】

椭圆定义的应用技巧

(1)利用椭圆的定义能够对椭圆上的点到焦点的距离进行转化；

(2)以椭圆上一点 P 与椭圆的两个焦点 F_1，F_2 为顶点的 $\triangle PF_1F_2$ 称为焦点三角形，可以利用椭圆的定义，结合正弦定理、余弦定理、三角形的面积公式等解决焦点三角形的问题；

(3)若椭圆的焦点三角形为 $\triangle PF_1F_2$，且 $\angle F_1PF_2=\theta$，则焦点三角形的面积 $S=b^2\tan\frac{\theta}{2}$.

应用迁移

1. 已知 $A(0,-1)$，M 是圆 $C:x^2+y^2-2y-31=0$ 上的动点，线段 AM 的垂直平分线与线段 CM 交于点 Q，则当点 M 在圆 C 上运动时，点 Q 的轨迹方程是（　　）

A. $x^2+y^2=2$　　B. $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{8}=1$

C. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{7}=1$　　D. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{9}=1$

B　**解析**：圆 $C:x^2+(y-1)^2=32$ 的圆心 $C(0,1)$，半径为 $r=4\sqrt{2}$，

由题意可知 $|QM|=|QA|$，又 M 是圆上的点，则 $|CM|=4\sqrt{2}$，

且 $|CM|=|CQ|+|QM|$，则 $|QC|+|QA|=4\sqrt{2}>2$.

由椭圆的定义可知，点 Q 的轨迹是以 C，A 为焦点的椭圆，其中 $a=2\sqrt{2}$，$c=1$，$b=\sqrt{7}$，

所以点 Q 的轨迹方程为 $\frac{y^2}{8}+\frac{x^2}{7}=1$.

2.（2023·全国甲卷）设 F_1，F_2 为椭圆 $C:\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 的两个焦点，点 P 在 C 上.若 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，则 $|PF_1|\cdot|PF_2|=$（　　）

A.1　　B.2　　C.4　　D.5

B　**解析**：(方法一)因为 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，所以 $\angle F_1PF_2=90°$，从而 $S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\cdot\tan\frac{\angle F_1PF_2}{2}=1=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|$，所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|=2$.

(方法二)因为 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，所以 $\angle F_1PF_2=90°$.

由椭圆方程可知，$c^2=5-1=4$，故 $c=2$，

所以 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2=4^2=16$.

又$|PF_1|+|PF_2|=2a=2\sqrt{5}$，平方得$|PF_1|^2+|PF_2|^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|=16+2|PF_1|\cdot|PF_2|=20$，所以$|PF_1|\cdot|PF_2|=2$.

任务2 求椭圆的标准方程

探究活动

例2　求满足下列条件的椭圆的标准方程：

(1)两个焦点的坐标分别是$(-4,0),(4,0)$，椭圆上一点P到两个焦点的距离之和等于10；

(2)两个焦点的坐标分别是$(0,-2),(0,2)$，并且椭圆经过点$\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$.

解：(1)由题意，得$c=4,a=5$，故$b=3$.

又焦点在x轴上，所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

(2)由题意，得$c=2$，且焦点在y轴上，所以设椭圆方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{a^2-4}=1$.将$\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$代入方程，得$a=\sqrt{10}$，故椭圆的标准方程为$\frac{y^2}{10}+\frac{x^2}{6}=1$.

【探究总结】

求椭圆的标准方程的方法

(1)求椭圆的标准方程多采用定义法和待定系数法；

(2)利用定义法求椭圆方程，要注意条件$2a>|F_1F_2|$.利用待定系数法要先定形(焦点位置)，再定量(a,b,c的值)，也可把椭圆方程设为$mx^2+ny^2=1(m>0,n>0,m\neq n)$的形式.

应用迁移

1.过点$(-3,2)$且与$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$有相同焦点的椭圆的标准方程为　(　　)

A.$\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$　　B.$\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{100}=1$

C.$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{15}=1$　　D.$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{225}=1$

A　**解析**：由方程$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$可知，其焦点的坐标为$(-\sqrt{5},0)$和$(\sqrt{5},0)$，即$c=\sqrt{5}$.设所求椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，因为椭圆过点$(-3,2)$，代入方程得$\frac{9}{a^2}+\frac{4}{a^2-5}=1$，解得$a^2=15(a^2=3$舍去).故所求椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$.

2.(教材P109练习题2改编)求适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1)焦点在y轴上，焦距是4，且经过点$M(3,2)$；

(2)与椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$有相同的焦点，且经过点$\left(1,\frac{3}{2}\right)$；

(3)经过$A\left(2,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),B\left(-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$两点.

解：(1)由题意知$c=2$，且焦点坐标分别为$F_1(0,-2),F_2(0,2)$.

由$|MF_1|+|MF_2|=2a$，得$2a=\sqrt{(3-0)^2+(2+2)^2}+\sqrt{(3-0)^2+(2-2)^2}=8$，

可得$a=4$，所以$b^2=a^2-c^2=16-4=12$.

又焦点在y轴上，所以所求椭圆的标准方程为$\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{12}=1$.

(2)椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$的焦点坐标为$(\pm1,0)$，则所求椭圆的焦距为$2c=2$.

因为所求椭圆过点$\left(1,\frac{3}{2}\right)$，所以$2a=\sqrt{(1+1)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{(1-1)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=4$，

所以$a=2,b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(3)设所求的椭圆方程为$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1(m>0,n>0,m\neq n)$.

把$A\left(2,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),B\left(-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$两点坐标代入，得$\begin{cases}\frac{4}{m}+\frac{1}{2n}=1,\\ \frac{2}{m}+\frac{3}{4n}=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=8,\\ n=1,\end{cases}$

所以所求椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{8}+y^2=1$.

任务3 与椭圆有关的轨迹问题

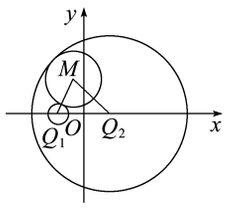
探究活动

例3　(1)一个动圆与圆$Q_1:(x+3)^2+y^2=1$外切，与圆$Q_2:(x-3)^2+y^2=81$内切，试求这个动圆圆心的轨迹方程；

(2)已知圆$C:x^2+y^2=4$，过圆C上一动点M作平行于x轴的直线m.设直线m与y轴的交点为N.若向量$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$，试求动点$Q$的轨迹方程.

解：(1)由已知，得两个定圆的圆心和半径分别为$Q_1(-3,0),R_1=1;Q_2(3,0),R_2=9$.

设动圆圆心为$M(x,y)$，半径为R，如图所示.



由题意，得$|MQ_1|=1+R$，$|MQ_2|=9-R$，

所以$|MQ_1|+|MQ_2|=10>|Q_1Q_2|=6$.

由椭圆的定义知，点M在以Q_1，Q_2为焦点的椭圆上，且$a=5$，$c=3$，

所以$b^2=a^2-c^2=25-9=16$，

故动圆圆心的轨迹方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

(2)设点M的坐标为$(x_0,y_0)(y_0\neq0)$，点Q的坐标为(x,y)，则点N的坐标为$(0,y_0)$.因为$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$，所以$(x,y)=(x_0,2y_0)$，即$x_0=x$，$y_0=\frac{y}{2}$.又因为点$M$在圆$C$上，所以$x_0^2+y_0^2=4$，所以$x^2+\frac{y^2}{4}=4$.

由$y_0\neq0$，得$y\neq0$，

所以动点Q的轨迹方程为$\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1(y\neq0)$.

【探究总结】

求与椭圆有关的轨迹方程的常用方法

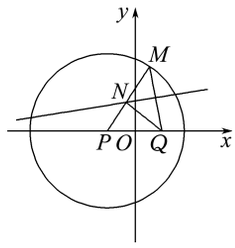
(1)定义法：若动点的轨迹特点符合某一基本图形(如椭圆、圆等)的定义，则可用定义法求解；

(2)直接法：根据题设条件，建立适当的平面直角坐标系，设出动点的坐标，写出动点坐标所满足的关系式，化简得到轨迹方程；

(3)相关点法：若动点$P(x,y)$随着某已知图形上的另一动点$Q(x_1,y_1)$的运动而运动，且x_1，y_1可以用x，y表示，则可将点Q的坐标代入已知图形的方程，即可得到动点P的轨迹方程.

应用迁移

1.如图，已知M为圆P：$(x+1)^2+y^2=36$上的一个动点，定点$Q(1,0)$，线段MQ的垂直平分线交线段PM于点N.求点N的轨迹方程.



解：由圆P：$(x+1)^2+y^2=36$，可得圆心$P(-1,0)$，半径为$r=6$.

由$Q(1,0)$，可得$|PQ|=2$.

因为线段MQ的垂直平分线交线段PM于点N，

所以$|NM|=|NQ|$，则$|NP|+|NQ|=|NP|+|NM|=|PM|=6>|PQ|=2$.

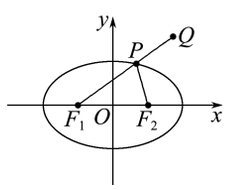
结合椭圆的定义，可得点N的轨迹是以P，Q为焦点的椭圆，

其中$2a=6$，$2c=2$，可得$a=3$，$c=1$，则$b^2=a^2-c^2=8$，

所以点N的轨迹方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

2.已知P是椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$上的一个动点，$F_1$，$F_2$是椭圆的左、右焦点，延长$F_1P$到点$Q$，使得$|PQ|=|PF_2|$.求动点$Q$的轨迹方程.

解：由题意知，$a=2$，$b=\sqrt{3}$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-3}=1$.由题图，可得$|PF_1|+|PF_2|=4$.



又$|PQ|=|PF_2|$，所以$|PF_1|+|PQ|=4$，

即$|QF_1|=4$，

所以动点Q的轨迹是以$F_1(-1,0)$为圆心，4为半径的圆.

由题意知，$F_1(-1,0)$，

所以动点Q的轨迹方程是$(x+1)^2+y^2=16$.

课后素养评价(二十六)

基础落实

1.已知点 M 是平面 α 内的动点,F_1,F_2 是平面 α 内的两个定点,则"点 M 到点 F_1,F_2 的距离之和为定值"是"点 M 的轨迹是以 F_1,F_2 为焦点的椭圆"的 (　　)

A.充要条件

B.充分不必要条件

C.必要不充分条件

D.既不充分也不必要条件

C　**解析**:若点 M 到点 F_1,F_2 的距离之和恰好为 F_1,F_2 两点之间的距离,则点 M 的轨迹不是椭圆,所以前者不能推出后者.根据椭圆的定义,椭圆上的点到两焦点的距离之和为常数 $2a$,所以后者能推出前者,故前者是后者的必要不充分条件.故选 C.

2.如果椭圆 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ 上一点 P 到焦点 F_1 的距离等于 6,那么点 P 到另一个焦点 F_2 的距离是 (　　)

A.12　　B.14　　C.16　　D.20

B　**解析**:根据椭圆的定义可得 $|PF_1|+|PF_2|=2a$,

因为椭圆 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ 上一点 P 到焦点 F_1 的距离等于 6,所以 $6+|PF_2|=20$,所以 $|PF_2|=14$.故选 B.

3.(多选)已知椭圆 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{8}=1$ 的焦距为 4,则 m 的值可能为 (　　)

A.12　　B.10　　C.6　　D.4

AD　**解析**:因为椭圆的焦距为 $2c=4$,则 $c=2$.

当焦点在 x 轴上时,有 $m=8+2^2=12$,即 $m=12$;

当焦点在 y 轴上时,有 $8=m+2^2$,解得 $m=4$.

故 $m=4$ 或 $m=12$.

4.已知方程 $\frac{x^2}{k-1}+\frac{y^2}{5-k}=1$ 表示的曲线是椭圆,则实数 k 的取值范围是 (　　)

A.(1,3)　　B.(3,5)

C.(1,5)　　D.(1,3)∪(3,5)

D　**解析**:由方程 $\frac{x^2}{k-1}+\frac{y^2}{5-k}=1$ 表示的曲线是椭圆,则 $\begin{cases}k-1>0,\\5-k>0,\\k-1\neq5-k\end{cases}\Rightarrow1<k<5$ 且 $k\neq3$.

5.(多选)已知椭圆的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$,$F_1$,$F_2$ 是椭圆的两个焦点,点 M 为椭圆上一点且在第一象限.若 $\triangle MF_1F_2$ 是等腰三角形,则下列结论正确的有 (　　)

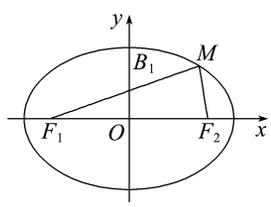
A.$|MF_2|=2$

B.$\cos\angle MF_2F_1=\frac{17}{18}$

C.点 M 到 x 轴的距离为 $\frac{\sqrt{35}}{3}$

D.$S_{\triangle MF_1F_2}=9$

AC　**解析**:如图.



因为椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$,所以 $a=4$,$b=\sqrt{7}$,$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-7}=3$.

因为点 M 在第一象限,且 $\triangle MF_1F_2$ 是等腰三角形,

所以 $|F_1F_2|=|MF_1|$.

根据椭圆的定义,$|MF_2|=2a-|MF_1|=2a-|F_1F_2|=2a-2c=2$,故 A 正确;

在 $\triangle MF_1F_2$ 中,$|MF_1|=|F_1F_2|=6$,$|MF_2|=2$,由余弦定理的推论得 $\cos\angle MF_2F_1=\frac{|MF_2|^2+|F_1F_2|^2-|MF_1|^2}{2|MF_2|\cdot|F_1F_2|}=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$,故 B 错误;

由 $\cos\angle MF_2F_1=\frac{1}{6}$,得 $\sin\angle MF_2F_1=\frac{\sqrt{35}}{6}$,得点 M 到 x 轴的距离为 $|MF_2|\cdot\sin\angle MF_2F_1=2\times\frac{\sqrt{35}}{6}=\frac{\sqrt{35}}{3}$,故 C 正确;

$S_{\triangle MF_1F_2}=\frac{1}{2}\times6\times\frac{\sqrt{35}}{3}=\sqrt{35}$,故 D 错误.

故选 AC.

6.已知椭圆中心在坐标原点,焦点在 x 轴上,椭圆与 x 轴的交点到两个焦点的距离分别为 3 和 1,则椭圆的标准方程为_____.

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　**解析**:设椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=$

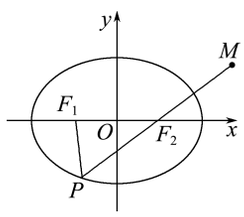
$1(a>b>0)$，由题意可得$\begin{cases}a+c=3,\\a-c=1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=2,\\c=1,\end{cases}$故$b^2=a^2-c^2=3$，

所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

7.设F_1，F_2分别是椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$的左、右焦点，$P$为椭圆上任意一点，点$M$的坐标为$(6,4)$，则$|PM|+|PF_1|$的最大值为_____.

15　**解析**：由椭圆的方程可得$a=5$，$b=4$，$c=3$，所以$F_1(-3,0)$，$F_2(3,0)$，如图所示.

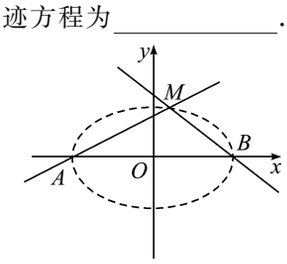


由椭圆的定义，得$|PF_1|+|PF_2|=2a=10$，

所以$|PM|+|PF_1|=|PM|+2a-|PF_2|=10+(|PM|-|PF_2|)\leqslant 10+|MF_2|=10+\sqrt{3^2+4^2}=15$，

当M，F_2，P三点共线时取到最大值，所以$|PM|+|PF_1|$的最大值为15.

8.如图，设A，B的坐标分别为$(-5,0)$，$(5,0)$，直线AM，BM相交于点M，且它们的斜率之积为$-\frac{4}{9}$，则点M的轨迹方程为_____.



$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{100}{9}}=1(x\neq\pm5)$　**解析**：设点M的坐标为(x,y)，则$k_{AM}=\frac{y}{x+5}(x\neq-5)$，$k_{BM}=\frac{y}{x-5}(x\neq5)$.由已知有$\frac{y}{x+5}\cdot\frac{y}{x-5}=-\frac{4}{9}$，化简即可得点$M$的轨迹方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{100}{9}}=1(x\neq\pm5)$.

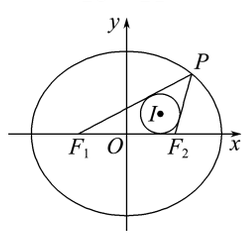
能力提升

1.已知点F_1，F_2分别是椭圆C的左、右焦点，$P(4,3)$是C上一点，$\triangle PF_1F_2$的内切圆的圆心为$I(m,1)$，则椭圆C的标准方程是　（　）

A.$\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{27}=1$　　B.$\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{21}=1$

C.$\frac{x^2}{52}+\frac{y^2}{13}=1$　　D.$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{12}=1$

B　**解析**：如图，设椭圆C的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，由$P(4,3)$在$C$上，得$\frac{16}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1$.显然$\triangle PF_1F_2$的内切圆与直线$F_1F_2$相切，则该圆半径为1.而$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}(2a+2c)\cdot1=a+c$，又$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\cdot2c\cdot3=3c$，所以$a=2c$，$b^2=a^2-c^2=\frac{3}{4}a^2$，所以$\frac{16}{a^2}+\frac{12}{a^2}=1$，解得$a^2=28$，$b^2=21$，所以椭圆$C$的标准方程是$\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{21}=1$.



2.（多选）已知$F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$是椭圆C的两个焦点，过点F_2且垂直于x轴的直线与椭圆C交于A，B两点，且$|AB|=3$，则有　（　）

A.椭圆的焦点在y轴上

B.$\triangle ABF_1$的周长为6

C.$\triangle AF_1F_2$的周长为6

D.椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

CD　**解析**：显然椭圆的焦点在x轴上，A错误.设椭圆C的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，且$c=1$.因为过点$F_2$且垂直于$x$轴的直线与椭圆$C$交于$A$，$B$两点，设$A(c,y_1)$，代入方程可得$\frac{c^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，求得$y_1^2=\frac{b^4}{a^2}$.由于$|AB|=3$，所以$\frac{b^2}{a}=\frac{3}{2}$.又$b^2=a^2-c^2$，解得$a=2$，所以$a^2=4$，$b^2=a^2-c^2=4-1=3$，所以椭圆$C$的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，D正确.$\triangle ABF_1$的周长为$4a=8$，$\triangle AF_1F_2$的周长为$2a+2c=6$，B错误，C正确.

3.（多选）已知P为椭圆C上一点，F_1，F_2为椭圆的焦点，且$|F_1F_2|=2\sqrt{3}$.若$|PF_1|+|PF_2|=2|F_1F_2|$，则椭圆C的标准方程可能为　（　）

A.$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$　　B.$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{48}=1$

C.$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{12}=1$　　D.$\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{45}=1$

AC　**解析**：由题知 $2c=|F_1F_2|=2\sqrt{3}$，所以 $c=\sqrt{3}$.

因为 $2a=|PF_1|+|PF_2|=2|F_1F_2|=4\sqrt{3}$，

所以 $a=2\sqrt{3}$.所以 $b^2=a^2-c^2=9$.

故椭圆 C 的标准方程是$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$ 或$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{12}=1$.

4.已知 F 为椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的右焦点，P 为 C 上一点，Q 为圆 M：$x^2+(y-3)^2=1$ 上一点，则 $|PQ|+|PF|$ 的最大值为（　　）

A.5　　B.6

C.$4+2\sqrt{3}$　　D.$5+2\sqrt{3}$

D　**解析**：依题意 $a=2$，$b=1$，$c=\sqrt{3}$，设椭圆 C 的左焦点为 $F_1(-\sqrt{3},0)$，

圆 M：$x^2+(y-3)^2=1$ 的圆心为 $M(0,3)$，半径为 1，$|PQ|+|PF|=|PQ|+2a-|PF_1|=4+|PQ|-|PF_1|\leqslant 4+|QF_1|$，

当 P，F_1，Q 三点共线，且 F_1 在 P，Q 之间时等号成立.

而 $|QF_1|\leqslant|MF_1|+1=\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}+1=2\sqrt{3}+1$，

所以 $|PQ|+|PF|\leqslant 4+2\sqrt{3}+1=5+2\sqrt{3}$，

当 P，F_1，M，Q 四点共线，且 F_1 在 P，Q 之间，Q 是 F_1M 的延长线与圆 M 的交点时等号成立.

故选 D.

5.已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，且过点 $P\left(1,\frac{3}{2}\right)$，则椭圆 C 的标准方程为_____.

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　**解析**：由题意知 $c=1$，$a^2-b^2=c^2=1$①.

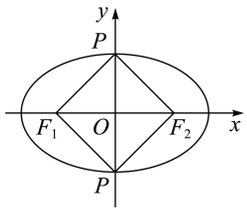
又椭圆经过点 $P\left(1,\frac{3}{2}\right)$，所以$\frac{1}{a^2}+\frac{\frac{9}{4}}{b^2}=1$②.

联立①②，解得 $a^2=4$，$b^2=3$.

故椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

6.已知椭圆的两个焦点为 $F_1(-4,0)$，$F_2(4,0)$，点 P 在椭圆上.若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积最大为 12，则椭圆的标准方程为_____.

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$　**解析**：由已知可得 $2c=8$，$c=4$，如图，当点 P 在 y 轴上时，$\triangle PF_1F_2$ 的面积最大，

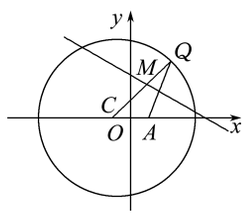


所以$\frac{1}{2}\times 8\times b=12$，所以 $b=3$.

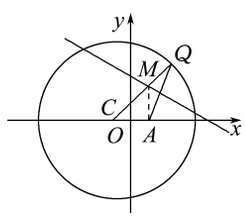
所以 $a^2=b^2+c^2=25$.

所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

7.如图，在圆 C：$(x+1)^2+y^2=25$ 内有一点 $A(1,0)$，Q 为圆 C 上一点，AQ 的垂直平分线与 C，Q 的连线交于点 M.求点 M 的轨迹方程.



解：如图所示，连接 MA，由题意知点 M 在线段 CQ 上，从而有 $|CQ|=|MQ|+|MC|$.



又点 M 在 AQ 的垂直平分线上，

所以 $|MA|=|MQ|$.

因为点 Q 在圆 C：$(x+1)^2+y^2=25$ 上，所以 $|CQ|=5$，故 $|MA|+|MC|=|CQ|=5$.

又 $A(1,0)$，$C(-1,0)$，$|MA|+|MC|=5>2$，

所以点 M 的轨迹是以 $A(1,0)$，$C(-1,0)$ 为焦点的椭圆，

且 $2a=5$，$c=1$，故 $a=\frac{5}{2}$，$b^2=a^2-c^2=\frac{25}{4}-1=\frac{21}{4}$.

故点 M 的轨迹方程为$\frac{x^2}{\frac{25}{4}}+\frac{y^2}{\frac{21}{4}}=1$.

8.设椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点为 F_1，F_2，点 P 在椭圆 C 上，且 $PF_1\perp F_1F_2$，$|PF_1|=3$，$|PF_2|=5$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)若点 M 在椭圆 C 上，且 $\triangle MF_1F_2$ 的面积为 $2\sqrt{3}$，求点 M 的坐标.

解：(1)因为点 P 在椭圆 C 上，所以 $|PF_1|+|PF_2|=3+5=8=2a$，解得 $a=4$.

因为 $PF_1\perp F_1F_2$，$|PF_1|=3$，$|PF_2|=5$，

所以 $|F_1F_2|^2=25-9=16$，即 $2c=|F_1F_2|=4$，解得 $c=2$.

所以 $b^2=a^2-c^2=12$，

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

(2)设 $M(x_0,y_0)$.

因为$\triangle MF_1F_2$ 的面积为 $2\sqrt{3}$，

所以 $\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_0|=2\sqrt{3}$，即 $\frac{1}{2}\times4\times|y_0|=2\sqrt{3}$，解得 $|y_0|=\sqrt{3}$.

因为点 M 在椭圆 C 上，所以 $\frac{x_0^2}{16}+\frac{3}{12}=1$，解得 $x_0=\pm2\sqrt{3}$，

所以点 M 的坐标为 $(2\sqrt{3},\sqrt{3})$ 或 $(2\sqrt{3},-\sqrt{3})$ 或 $(-2\sqrt{3},\sqrt{3})$ 或 $(-2\sqrt{3},-\sqrt{3})$.

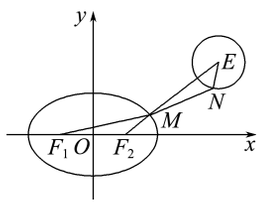
自我超越

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，M 为椭圆 C 上任意一点，N 为圆 $E:(x-5)^2+(y-3)^2=2$ 上任意一点，则 $|MN|-|MF_1|$ 的最小值为（　　）

A.$3\sqrt{5}-\sqrt{2}$　　B.$1-\sqrt{2}$

C.$5-\sqrt{2}$　　D.$2\sqrt{2}-1$

B　**解析**：如图，



由 M 为椭圆 C 上任意一点，得 $|MF_1|+|MF_2|=4$.

又 N 为圆 $E:(x-5)^2+(y-3)^2=2$ 上任意一点，且 $E(5,3)$，

则 $|MN|\geqslant|ME|-|EN|=|ME|-\sqrt{2}$（当且仅当点 M,N,E 共线且点 N 在点 M,E 之间时取等号）.

又 $|MN|-|MF_1|=|MN|-(4-|MF_2|)=|MN|+|MF_2|-4$

$\geqslant(|ME|-\sqrt{2})+|MF_2|-4\geqslant|EF_2|-4-\sqrt{2}$，

当且仅当点 M,N,E,F_2 共线且点 M,N 在点 E,F_2 之间时等号成立.

因为 $F_2(1,0)$，$E(5,3)$，所以 $|EF_2|=\sqrt{(5-1)^2+(3-0)^2}=5$，

故 $|MN|-|MF_1|$ 的最小值为 $1-\sqrt{2}$.

3.1.2　椭圆的简单几何性质

第 1 课时　椭圆的简单几何性质

学习任务目标

1.掌握椭圆的几何图形和简单几何性质.

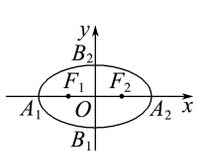
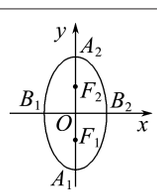
2.掌握椭圆标准方程中的 a,b,c 及椭圆的离心率 e 的几何意义和它们之间的关系.

3.了解解析几何中研究曲线性质的代数方法.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点　椭圆的简单几何性质

焦点的位置	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
图形		
标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$
范围	$-a\leqslant x\leqslant a$，$-b\leqslant y\leqslant b$	$-b\leqslant x\leqslant b$，$-a\leqslant y\leqslant a$

续表

焦点的位置	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
顶点	$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，$B_1(0,-b)$，$B_2(0,b)$	$A_1(0,-a)$，$A_2(0,a)$，$B_1(-b,0)$，$B_2(b,0)$
轴长	短轴长 $=2b$，长轴长 $=2a$	
焦点	$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$
焦距	$\|F_1F_2\|=2c=2\sqrt{a^2-b^2}$	
对称性	对称轴是坐标轴，对称中心是原点	
离心率	$e=\frac{c}{a}$，$0<e<1$	

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).

(1)椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的长轴长是$a$.

(　×　)

(2)若椭圆的对称轴为坐标轴,长轴长与短轴长分别为10,8,则椭圆的方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.　(　×　)

(3)设F为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个焦点,$M$为椭圆上任一点,则$|MF|$的最大值为$a+c$($c$为椭圆的半焦距).　(　√　)

2.椭圆$25x^2+9y^2=225$的长轴长、短轴长、离心率依次是　(　)

A.5,3,$\frac{4}{5}$　　B.10,6,$\frac{4}{5}$

C.5,3,$\frac{3}{5}$　　D.10,6,$\frac{3}{5}$

B　**解析**:将椭圆方程化为标准方程为$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$,则$a=5,b=3,c=4$,故长轴长、短轴长、离心率依次是10,6,$\frac{4}{5}$.

3.思考并回答下列问题:

(1)椭圆的焦点一定在它的长轴上吗?

提示:椭圆的焦点一定在它的长轴上.

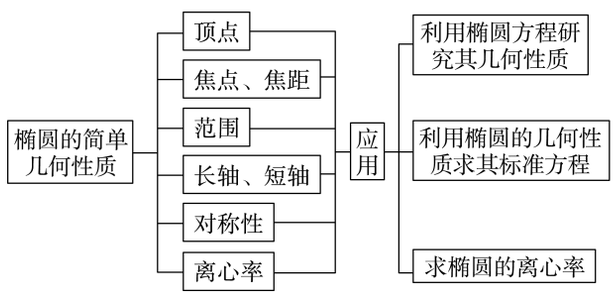
(2)椭圆上到其中心的距离最小与最大的点分别是哪些?

提示:椭圆上到其中心的距离最小的点是短轴的两个端点,到其中心的距离最大的点是长轴的两个端点.

(3)椭圆上到焦点的距离最大与最小的点分别是哪些?距离的最大值与最小值各是多少?

提示:椭圆上到焦点的距离最大和最小的点分别是长轴的两个端点,故距离的最大值为$a+c$,最小值为$a-c$.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 利用椭圆的方程研究其几何性质

1.(多选)已知椭圆$C:16x^2+4y^2=1$,则下列结论正确的有　(　)

A.长轴长为$\frac{1}{2}$

B.焦距为$\frac{\sqrt{3}}{4}$

C.焦点坐标为$\left(0,\pm\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

D.离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$

CD　**解析**:将椭圆方程$16x^2+4y^2=1$化为标准方程为$\frac{y^2}{\frac{1}{4}}+\frac{x^2}{\frac{1}{16}}=1$,可得$a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{4},c=\frac{\sqrt{3}}{4}$,所以长轴长为$2a=1$,短轴长为$2b=\frac{1}{2}$,焦距为$2c=\frac{\sqrt{3}}{2}$,焦点坐标为$\left(0,\pm\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$,离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.故选CD.

2.下列关于椭圆$C_1:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$和椭圆$C_2:\frac{x^2}{9-k}+\frac{y^2}{25-k}=1(0<k<9)$的说法,正确的是　(　)

A.长轴长相等　　B.焦距相等

C.离心率相等　　D.短轴长相等

B　**解析**:由题意知,椭圆C_1的焦点在x轴上,椭圆C_2的焦点在y轴上,对于椭圆C_1,焦距为$2\times\sqrt{25-9}=8$,对于椭圆C_2,焦距为$2\sqrt{(25-k)-(9-k)}=8$.故选B.

3.求椭圆$25x^2+16y^2=400$的长轴长、短轴长、焦点坐标和顶点坐标.

解:将方程变形为$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$,得$a=5,b=4$,所以$c=3$,

故椭圆的长轴长和短轴长分别为$2a=10$和$2b=8$,焦点坐标为(0,−3),(0,3),顶点坐标为(0,−5),(0,5),(−4,0),(4,0).

【探究总结】

利用椭圆的方程研究其几何性质的注意点

(1)已知椭圆的方程讨论椭圆的性质时,若不是标准方程,应先化为标准方程,再确定焦点的位置,进而确定椭圆的几何性质;

(2)焦点位置不确定时要分类讨论,找准a与b,利用$c^2=a^2-b^2$求出焦点坐标,再写出顶点坐标.同时要注意长轴长、短轴长、焦距不是a,b,c,而是$2a,2b,2c$.

任务2 利用椭圆的几何性质求椭圆的标准方程

探究活动

例1　(1)焦点在x轴上,短轴长为8,离心率为$\frac{3}{5}$的椭圆的标准方程是_____.

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$　**解析**：由题意，得$\begin{cases}2b=8,\\ \frac{c}{a}=\frac{3}{5},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$　解得$\begin{cases}a=5,\\ b=4,\\ c=3.\end{cases}$又椭圆的焦点在 x 轴上，故此椭圆的标准方程是$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

(2)已知椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，右焦点为 $F(\sqrt{2},0)$，且离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，则椭圆 C 的标准方程为_____.

$\frac{x^2}{3}+y^2=1$　**解析**：由题意，得椭圆 C 的半焦距 $c=\sqrt{2}$，且 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $a=\sqrt{3}$.

又 $b^2=a^2-c^2=1$，所以椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

【探究总结】

求椭圆的标准方程的方法

(1)根据已知条件求椭圆的标准方程的步骤：

①确定焦点所在的坐标轴；

②求出 a^2，b^2 的值；

③写出标准方程.

(2)在求 a^2，b^2 的值时，通常由关系式 $a^2=b^2+c^2$，$e=\frac{c}{a}$ 等构造方程(或方程组)加以求解.

应用迁移

1.(教材 P112 练习题 3 改编)已知焦点在 y 轴上的椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{3}$，焦距为 $2\sqrt{2}$，则该椭圆的方程为(　　)

A.$x^2+\frac{y^2}{3}=1$　　B.$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{7}=1$

C.$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{28}=1$　　D.$\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{9}=1$

D　**解析**：设椭圆的标准方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，焦距为 $2c$，

由 $2c=2\sqrt{2}$，得 $c=\sqrt{2}$. 由 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{3}$，得 $a=3$，

故 $b^2=a^2-c^2=7$，

所以该椭圆的方程为$\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{9}=1$.

2.若焦点在 y 轴上且中心为原点的椭圆 C_2 与椭圆 C_1：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的离心率相同，且 C_1，C_2 在第一象限内公共点的横坐标为 1，则椭圆 C_2 的方程为_____.

$\frac{2y^2}{5}+\frac{4x^2}{5}=1$　**解析**：在椭圆 C_1 中，$a_1=\sqrt{2}$，$b_1=1$，$c_1=\sqrt{2-1}=1$，故椭圆 C_1 的离心率为$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

对于$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，令 $x=1$ 得 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故 C_1，C_2 在第一象限内公共点的坐标为$\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

设 C_2：$\frac{y^2}{a_2^2}+\frac{x^2}{b_2^2}=1(a_2>b_2>0)$，将$\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$代入可得$\frac{1}{2a_2^2}+\frac{1}{b_2^2}=1$，

又$\frac{\sqrt{a_2^2-b_2^2}}{a_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，联立以上两式解得 $b_2^2=\frac{5}{4}$，$a_2^2=\frac{5}{2}$.

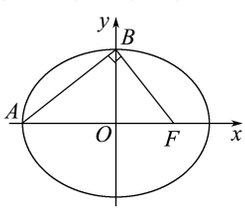
故椭圆 C_2 的方程为$\frac{2y^2}{5}+\frac{4x^2}{5}=1$.

任务3 求椭圆的离心率

探究活动

例 2　已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$A$ 是左顶点，F 是右焦点，B 是短轴的一个端点. 若$\angle ABF=90°$，则该椭圆的离心率为_____.

$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$　**解析**：如图所示，由题意知 $|AO|=a$，$|OF|=c$，$|BF|=a$，$|AB|=\sqrt{a^2+b^2}$，$a^2=b^2+c^2$，



所以在 Rt$\triangle ABF$ 中，$a^2+b^2+a^2=(a+c)^2=a^2+2ac+c^2$，即 $a^2-c^2-ac=0$，两边同时除以 a^2，得 $e^2+e-1=0$，解得 $e=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $e=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$(舍去).

[一题多思]

思考 1.已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，左、右顶点分别为 A，B，椭圆上有一动点 P(异于椭圆的左、右顶点). 设直线 PA，PB 的斜率分别为 k_1，k_2，求 k_1k_2 的值.

解：因为点 P 为椭圆上的动点，

所以设 $P(a\cos\theta,b\sin\theta)$.

又 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，所以 $k_1k_2=\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta+a}\cdot\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta-a}=\frac{b^2\sin^2\theta}{a^2(\cos^2\theta-1)}=-\frac{b^2}{a^2}=-\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)=e^2-1=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2-1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

思考 2. 若将本例中的“$\angle ABF=90°$”改为“$\angle ABF$ 为锐角”，其他条件不变，求椭圆的离心率 e 的取值范围.

解：在 $\triangle ABF$ 中，$|AB|^2=a^2+b^2$，$|BF|^2=a^2$，$|AF|^2=(a+c)^2$.

因为 $\angle ABF$ 为锐角，所以 $a^2+b^2+a^2>(a+c)^2$，即 $a^2-ac-c^2>0$，所以 $1-e-e^2>0$，解得 $0<e<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

【探究总结】

求椭圆的离心率的方法

(1)直接法：求出 a，c 后用 $e=\frac{c}{a}$ 求出离心率，或求出 a，b 后用 $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ 求出离心率；

(2)转化法：将条件转化为关于 a，b，c 的关系式，利用 $b^2=a^2-c^2$ 消去 b，构造关于 $\frac{c}{a}$ 的方程求离心率.

应用迁移

1.(2023·新高考全国Ⅰ卷)设椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$，$C_2:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的离心率分别为 e_1，e_2. 若 $e_2=\sqrt{3}e_1$，则 $a=$ (　　)

A.$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　B.$\sqrt{2}$　C.$\sqrt{3}$　D.$\sqrt{6}$

A　**解析**：由 $e_2=\sqrt{3}e_1$，得 $e_2^2=3e_1^2$，因此 $\frac{4-1}{4}=3\times\frac{a^2-1}{a^2}$. 又 $a>1$，所以 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2.已知 F 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点，直线 $y=kx(k\neq0)$ 交椭圆 C 于 M，N 两点. 若 $|FM|=3|FN|$，$\angle MFN=\frac{2\pi}{3}$，则椭圆 C 的离心率为 (　　)

A.$\frac{\sqrt{7}}{4}$　B.$\frac{\sqrt{2}}{4}$　C.$\frac{\sqrt{3}}{4}$　D.$\frac{\sqrt{5}}{4}$

A　**解析**：如图，设 F_2 是椭圆 C 的右焦点，连接 MF_2，NF_2，

由对称性可知 $|OM|=|ON|$，$|OF|=|OF_2|$，

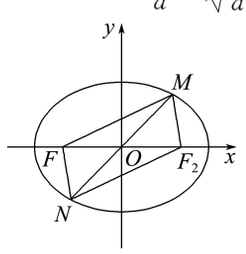
则四边形 FMF_2N 为平行四边形，所以 $|MF_2|=|FN|$，$\angle FMF_2=\frac{\pi}{3}$，即 $|FM|=3|MF_2|$.

因为 $|FM|+|MF_2|=4|MF_2|=2a$，所以 $|MF_2|=\frac{1}{2}a$，$|FM|=\frac{3}{2}a$，

在 $\triangle FMF_2$ 中，由余弦定理可得 $|FF_2|^2=|MF_2|^2+|FM|^2-2|MF_2|\cdot|FM|\cdot\cos\angle FMF_2$，

即 $4c^2=\frac{1}{4}a^2+\frac{9}{4}a^2-2\times\frac{1}{2}a\times\frac{3}{2}a\times\frac{1}{2}$，解得 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{7}{16}$，

所以椭圆 C 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.



课后素养评价(二十七)

基础落实

1.若点 $A(a,1)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 的内部，则 a 的取值范围是 (　　)

A.$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

B.$(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$

C.$(-2,2)$

D.$(-1,1)$

A　**解析**：由题意知 $\frac{a^2}{4}+\frac{1}{2}<1$，解得 $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$.

2.(多选)已知椭圆 $C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$，则有 (　　)

A.C 的焦点坐标为$(\pm5,0)$

B.C 的长轴长为 8

C.C 的短轴长为 6

D.C 的一个顶点为$(0,-4)$

BC　**解析**：由椭圆 $C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$，可得 $a=4$，$b=3$，则 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{7}$.

对于 A，椭圆 C 的焦点坐标为$(\pm\sqrt{7},0)$，所以 A 错误；

对于 B，椭圆 C 的长轴长为 $2a=8$，所以 B 正确；

对于 C，椭圆 C 的短轴长为 $2b=6$，所以 C 正确；

对于 D，顶点坐标为$(\pm4,0)$和$(0,\pm3)$，所以 D 错误.

3.已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{3}$，A_1，A_2 分别为 C 的左、右顶点，B 为 C 的上顶点. 若 $\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BA_2}=-1$，则 C 的方程为 (　　)

A.$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{16}=1$　B.$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$

C.$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　D.$\frac{x^2}{2}+y^2=1$

B　**解析**：因为离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{1}{3}$，解得 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{8}{9}$，所以 $b^2=\frac{8}{9}a^2$.

因为 A_1,A_2 分别为 C 的左、右顶点，B 为上顶点，则 $A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，$B(0,b)$，所以 $\overrightarrow{BA_1}=(-a,-b)$，$\overrightarrow{BA_2}=(a,-b)$.

因为 $\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BA_2}=-1$，所以 $-a^2+b^2=-1$.

将 $b^2=\frac{8}{9}a^2$ 代入，解得 $a^2=9$，$b^2=8$，

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

4. 已知 F_1,F_2 分别是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，椭圆 C 上不存在点 P 使 $\angle F_1PF_2\geqslant\frac{\pi}{3}$，则椭圆 C 的离心率的取值范围是　（　）

A.$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　　B.$\left(\frac{1}{2},1\right)$

C.$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　D.$\left(0,\frac{1}{2}\right)$

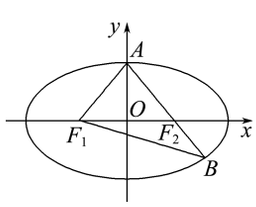
D　**解析**：椭圆 C 上不存在点 P 使 $\angle F_1PF_2\geqslant\frac{\pi}{3}$，即 $\angle F_1PF_2<\frac{\pi}{3}$ 恒成立，当点 P 在短轴端点时，$\angle F_1PF_2$ 最大，即 $\sin\angle F_1PO=\frac{c}{a}<\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，即 $e<\frac{1}{2}$. 故选 D.

5. 已知椭圆 E 的焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，过点 F_2 的直线与椭圆 E 交于 A,B 两点. 若 $|AB|=|BF_1|$，$|AF_2|=2|F_2B|$，则椭圆 E 的离心率为　（　）

A.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{3}$

C.$\frac{1}{2}$　　D.$\frac{\sqrt{5}}{5}$

B　**解析**：由椭圆 E 的焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，得 $c=1$.



如图，设 $|F_2B|=n$，则 $|AF_2|=2n$，$|BF_1|=|AB|=3n$.

由椭圆的定义有 $2a=|BF_1|+|BF_2|=4n$，所以 $|AF_1|=2a-|AF_2|=2n$.

在 $\triangle AF_1B$ 中，由余弦定理的推论得 $\cos\angle F_1AB=\frac{4n^2+9n^2-9n^2}{2\cdot2n\cdot3n}=\frac{1}{3}$；

在 $\triangle AF_1F_2$ 中，由余弦定理得 $4n^2+4n^2-2\cdot2n\cdot2n\cdot\frac{1}{3}=4$，解得 $n=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $2a=4n=2\sqrt{3}$，所以 $a=\sqrt{3}$，

所求椭圆 E 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. 记椭圆 $C:\frac{x^2}{m+6}+\frac{y^2}{m-3}=1$ 的离心率为 e. 若 $e\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$，则实数 m 的取值范围为　（　）

A.$(3,4)$　　B.$(3,6)$

C.$(4,5)$　　D.$(4,6)$

B　**解析**：因为 $m+6>m-3$，

所以 $a^2=m+6$，$b^2=m-3$，则 $m-3>0$，可得 $m>3$，

$c^2=a^2-b^2=(m+6)-(m-3)=9$，则 $c=3$.

因为 $e\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$，所以 $\frac{c}{a}=\frac{3}{\sqrt{m+6}}\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$，可得 $3<\sqrt{m+6}<2\sqrt{3}$，解得 $3<m<6$，

所以实数 m 的取值范围为 $(3,6)$.

7. 已知椭圆的中心在坐标原点，焦点在 x 轴上，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且椭圆上一点到两个焦点的距离之和为 12，则椭圆的方程为_____.

$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$　**解析**：由题意，知 $2a=12$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $a=6$，$c=3\sqrt{3}$，所以 $b=3$，

故椭圆的方程为 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$.

8. 已知 $P(m,n)$ 是椭圆 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 上的一个动点，则 m^2+n^2 的取值范围是_____.

$[1,2]$　**解析**：因为 $P(m,n)$ 是椭圆 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 上的一个动点，所以 $m^2+\frac{n^2}{2}=1$，

即 $n^2=2-2m^2$，所以 $m^2+n^2=2-m^2$.

又因为 $-1\leqslant m\leqslant1$，所以 $1\leqslant2-m^2\leqslant2$，所以 $1\leqslant m^2+n^2\leqslant2$. 故 m^2+n^2 的取值范围是 $[1,2]$.

9. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$C$ 的上顶点为 A，两个焦点为 F_1,F_2，$\triangle AF_1F_2$ 是等边三角形，则椭圆 C 的离心率是_____.

$\frac{1}{2}$　**解析**：设椭圆 C 的焦距 $|F_1F_2|=2c$.

因为 C 的上顶点为 A，$\triangle AF_1F_2$ 是等边三角形，

所以 $\begin{cases}|AF_1|=|AF_2|=|F_1F_2|,\\ |AF_1|+|AF_2|=2a,\end{cases}$ 所以 $|AF_1|=|AF_2|=|F_1F_2|=a$，

即 $a=2c$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.

能力提升

1. 已知椭圆的离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则下列椭圆中，不满足条件的为（　　）

A. $\frac{x^2}{4}+y^2=1$　　B. $\frac{y^2}{4}+x^2=1$

C. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　D. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$

C　**解析**：选项 A，$a^2=4$，$b^2=1$，则 $c^2=a^2-b^2=3$，即 $a=2$，$c=\sqrt{3}$，故 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，满足条件；

选项 B，$a^2=4$，$b^2=1$，则 $c^2=a^2-b^2=3$，即 $a=2$，$c=\sqrt{3}$，故 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，满足条件；

选项 C，$a^2=2$，$b^2=1$，则 $c^2=a^2-b^2=1$，即 $a=\sqrt{2}$，$c=1$，故 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，不满足条件；

选项 D，$a^2=8$，$b^2=2$，则 $c^2=a^2-b^2=6$，即 $a=2\sqrt{2}$，$c=\sqrt{6}$，故 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，满足条件．故选 C.

2. 设 F_1，F_2 是椭圆的两个焦点．若椭圆上任意一点 M 都满足 $\angle F_1MF_2$ 为锐角，则椭圆离心率的取值范围是（　　）

A. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　B. $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

C. $(0,1)$　　D. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

B　**解析**：由题可知，当点 M 位于短轴端点时，$\angle F_1MF_2$ 最大，

此时在 $\triangle F_1MF_2$ 中，由余弦定理的推论得 $\cos\angle F_1MF_2=\frac{a^2+a^2-4c^2}{2a^2}=\frac{a^2-2c^2}{a^2}>0$，

所以 $a>\sqrt{2}c$.

所以 $e=\frac{c}{a}<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又因为 $0<e<1$，所以 $0<e<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. （多选）若椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ 上的一点 P 到椭圆两个焦点的距离的乘积为 m，则当 m 取最大值时，点 P 的坐标不可能为（　　）

A. $(4,0)$　　B. $(0,5)$

C. $(-4,0)$　　D. $(0,-5)$

BD　**解析**：记椭圆的两个焦点分别为 F_1，F_2，有 $|PF_1|+|PF_2|=2a=10$，

则知 $m=|PF_1|\cdot|PF_2|\leqslant\left(\frac{|PF_1|+|PF_2|}{2}\right)^2=25$，

当且仅当 $|PF_1|=|PF_2|=5$，即点 P 位于椭圆的短轴的端点处时，m 取得最大值 25.

所以点 P 的坐标为 $(-4,0)$ 或 $(4,0)$.

4. 与椭圆 $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$ 有相同的离心率，且长轴长与椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{3}=1$ 的长轴长相等的椭圆的标准方程为_____.

$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$ 或 $\frac{y^2}{8}+\frac{x^2}{6}=1$　**解析**：由题意得，椭圆 $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{3}=1$ 的长轴长为 $4\sqrt{2}$，

所以 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\2a=4\sqrt{2},\end{cases}$

解得 $a=2\sqrt{2}$，$c=\sqrt{2}$，故 $b^2=a^2-c^2=6$.

又因为所求椭圆的焦点既可在 x 轴上，也可在 y 轴上，所以其标准方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$ 或 $\frac{y^2}{8}+\frac{x^2}{6}=1$.

5. （新定义）阿基米德不仅是著名的物理学家，也是著名的数学家，他利用“逼近法”得到了椭圆的面积公式．设椭圆的长半轴长、短半轴长分别为 a，b，则椭圆的面积公式为 $S=ab\pi$．若椭圆 C 的焦点在 x 轴上，离心率为 $\frac{1}{2}$，面积为 $8\sqrt{3}\pi$，则椭圆 C 的标准方程为_____.

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$　**解析**：由题意可设椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

由离心率为 $\frac{1}{2}$，即 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，得 $a=2c$.

因为椭圆 C 的面积为 $8\sqrt{3}\pi$，

所以由 $S=ab\pi=8\sqrt{3}\pi$，得 $ab=8\sqrt{3}$，

所以 $\begin{cases}a=2c,\\ab=8\sqrt{3},\\a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\b=2\sqrt{3},\\c=2.\end{cases}$

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

6. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，F_1，F_2 分别为椭圆 C 的左、右焦点，$P(x_0,y_0)$ 为椭圆 C 上一点，$\angle F_1PF_2=60°$，则 $x_0=$_____.

$\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 或 $-\frac{4\sqrt{2}}{3}$　**解析**：（方法一）由题意可得 $|PF_1|+|PF_2|=2a=4$，$|F_1F_2|=2c=2\sqrt{3}$.

在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由余弦定理可得 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\angle F_1PF_2=(|PF_1|+|PF_2|)^2-3|PF_1|\cdot|PF_2|$，

所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{4}{3}$，

即 $\sqrt{(x_0+\sqrt{3})^2+y_0^2}\cdot\sqrt{(x_0-\sqrt{3})^2+y_0^2}=\sqrt{(x_0+\sqrt{3})^2+1-\frac{x_0^2}{4}}\cdot\sqrt{(x_0-\sqrt{3})^2+1-\frac{x_0^2}{4}}=$

$\frac{4}{3}$，

即$\left(\frac{3x_0^2}{4}+2\sqrt{3}x_0+4\right)\cdot\left(\frac{3x_0^2}{4}-2\sqrt{3}x_0+4\right)=\frac{16}{9}$，

整理得$\left(\frac{3x_0^2}{4}-4\right)^2=\frac{16}{9}$，所以$\frac{3x_0^2}{4}-4=\frac{4}{3}$或$\frac{3x_0^2}{4}-4=-\frac{4}{3}$，

解得$x_0=\pm\frac{8}{3}$或$x_0=\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

又因为$x_0\in(-2,2)$，所以$x_0=\frac{4\sqrt{2}}{3}$或$x_0=-\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

（方法二）易知$a=2,b=1,c=\sqrt{3}$，$|F_1F_2|=2c=2\sqrt{3}$.已知$P(x_0,y_0)$，由焦点三角形面积公式，得$S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

又$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\cdot|F_1F_2|\cdot|y_0|=\sqrt{3}\cdot|y_0|$，

所以$|y_0|=\frac{1}{3}$.

又因为$\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，所以$x_0=\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

故答案为$\frac{4\sqrt{2}}{3}$或$-\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

7.设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，点$P(a,b)$满足$|PF_2|=|F_1F_2|$，则椭圆的离心率为_____.

$\frac{1}{2}$　**解析：**易知$F_1(-c,0),F_2(c,0)$.

因为$|PF_2|=|F_1F_2|$，则$\sqrt{(a-c)^2+b^2}=2c$，

整理得$2c^2+ac-a^2=0$.

两边同除以a^2，得$2\left(\frac{c}{a}\right)^2+\frac{c}{a}-1=0$，所以$\frac{c}{a}=-1$（舍）或$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.

所以椭圆的离心率$e=\frac{1}{2}$.

8.已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{2}{3}$，且椭圆$C$经过点$\left(2\sqrt{2},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$，$F_1,F_2$是椭圆$C$的左、右焦点.

(1)求椭圆C的方程；

(2)若P为椭圆C上一点，$\angle PF_1F_2=60°$，求$\triangle PF_1F_2$的面积.

解：(1)由题意，可得$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{2}{3},\\ \frac{8}{a^2}+\frac{5}{9b^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=9,\\ b^2=5,\\ c^2=4.\end{cases}$

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

(2)在$\triangle PF_1F_2$中，$\angle PF_1F_2=60°$，$|F_1F_2|=2c=4$.

由$|PF_1|+|PF_2|=2a=6$，得$|PF_1|=6-|PF_2|$.

设$|PF_2|=m$，则$|PF_1|=6-m$.

在$\triangle PF_1F_2$中，由余弦定理得$|PF_2|^2=|PF_1|^2+|F_1F_2|^2-2|PF_1||F_1F_2|\cos 60°$，

即$m^2=(6-m)^2+16-4(6-m)$，解得$m=\frac{7}{2}$，

所以$|PF_2|=\frac{7}{2}$，$|PF_1|=\frac{5}{2}$，

所以$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times4\times\frac{5}{2}\times\sin 60°=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

自我超越

已知P是椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$上的点，$F_1,F_2$分别是椭圆的左、右焦点.若$\frac{\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}}{|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|}=\frac{1}{2}$，则$\triangle F_1PF_2$内切圆的半径为_____.

$\frac{\sqrt{3}}{3}$　**解析：**因为$\frac{\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}}{|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|}=\frac{1}{2}$，

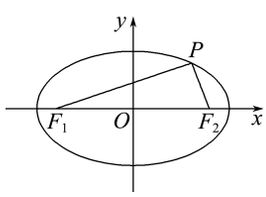
即$\cos\angle F_1PF_2=\frac{1}{2}$，

所以$\angle F_1PF_2=60°$.

由椭圆方程$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$，可知$a=5,b=3$，所以$c=\sqrt{a^2-b^2}=4$，

所以$|F_1F_2|=2c=8$.

如图，不妨取点P在第一象限内，设$|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，



则$m+n=2a=10$.在$\triangle F_1PF_2$中，由余弦定理得$|F_1F_2|^2=m^2+n^2-2mn\cos\angle F_1PF_2$，

即$8^2=m^2+n^2-2mn\times\frac{1}{2}=m^2+n^2-mn=(m+n)^2-3mn=100-3mn$，

解得$mn=12$.

所以$S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}mn\sin\angle F_1PF_2=\frac{1}{2}\times12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$.

设$\triangle F_1PF_2$内切圆的半径为r，

则由等面积法可知$S_{\triangle F_1PF_2}=3\sqrt{3}=\frac{1}{2}(m+n+|F_1F_2|)r=\frac{1}{2}\times(10+8)r$，

解得$r=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

第 2 课时　椭圆几何性质的应用

学习任务目标

1.进一步掌握椭圆的方程及其性质的应用，会判断直线与椭圆的位置关系.

2.能运用直线与椭圆的位置关系解决相关的弦长、中点弦问题.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　点与椭圆的位置关系

点 $P(x_0,y_0)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的位置关系：

点 P 在椭圆上 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$；

点 P 在椭圆的内部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<1$；

点 P 在椭圆的外部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}>1$.

知识点二　直线与椭圆的位置关系

直线 $y=kx+m$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的位置关系的判断方法：

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 消去 y 得到一个关于 x 的一元二次方程，根据一元二次方程根的判别式 Δ 的大小判断直线与椭圆的位置关系，具体见下表.

位置关系	解的个数	Δ 的大小
相交	2	$\Delta>0$
相切	1	$\Delta=0$
相离	0	$\Delta<0$

【概念辨析】

1.判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）.

(1)若直线的斜率一定，则当直线过椭圆的中心时，相交所得弦最长.　（ √ ）

(2)已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与点 $P(b,0)$，过点 P 可作出该椭圆的一条切线.　（ × ）

(3)直线 $y=k(x-a)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的位置关系是相交.　（ √ ）

(4)直线与椭圆的位置关系有相离、相切、相交三种.　（ √ ）

2.已知直线 $l:x+y-3=0$，椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，则直线与椭圆的位置关系是　（　）

A.相离　　B.相切

C.相交　　D.相交或相切

A　**解析**：由 $x+y-3=0$ 及 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，消去 y，得 $5x^2-24x+32=0$.

因为 $\Delta=(-24)^2-4\times5\times32=-64<0$，所以直线与椭圆没有交点，即直线与椭圆相离.

3.思考并回答下列问题：

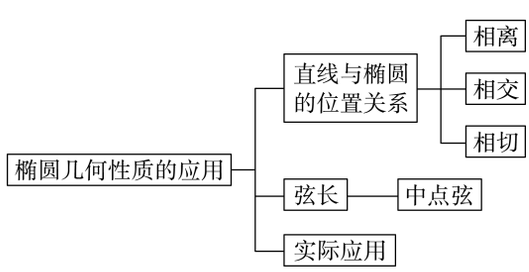
(1)直线 $y=k(x-1)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的位置关系如何？

提示：直线 $y=k(x-1)$ 过定点 $(1,0)$，而该点在椭圆内部，所以直线和椭圆相交.

(2)过原点的直线和椭圆相交，交点关于原点对称吗？

提示：对称.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 直线与椭圆的位置关系

1.若直线 $y=kx+2$ 与椭圆 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ 相切，则斜率 k 的值是（　　）

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B. $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

C. $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

C　**解析**：由 $\begin{cases}y=kx+2,\\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 得 $(3k^2+2)x^2+12kx+6=0$.

由题意得 $\Delta=144k^2-24(3k^2+2)=0$，解得 $k=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$.

2.（教材 P114 例 7 改编）已知直线 $l:y=2x+m$，椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的短轴长为 $2\sqrt{2}$，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)讨论直线 l 与椭圆 C 的公共点的个数.

解：(1)由题意椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的短轴长为 $2\sqrt{2}$，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，

可知 $b=\sqrt{2}$，$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2}$，解得 $a=2$，$c=\sqrt{2}$，

所以所求椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=2x+m,\end{cases}$ 消去 y，得 $9x^2+8mx+2m^2-4=0$，

$\Delta=64m^2-36(2m^2-4)=-8m^2+144$.

当 $\Delta=-8m^2+144=0$，即 $m=\pm3\sqrt{2}$ 时，直线 l 与椭圆 C 相切，只有一个公共点；

当 $\Delta=-8m^2+144>0$，即 $-3\sqrt{2}<m<3\sqrt{2}$ 时，直线 l 与椭圆 C 相交，有两个公共点；

当 $\Delta=-8m^2+144<0$，即 $m<-3\sqrt{2}$ 或 $m>3\sqrt{2}$ 时，直线 l 与椭圆 C 相离，无公共点.

综上所述，当 $m=\pm3\sqrt{2}$ 时，直线 l 与椭圆 C 只有一个公共点；

当 $-3\sqrt{2}<m<3\sqrt{2}$ 时，直线 l 与椭圆 C 有两个公共点；

当 $m<-3\sqrt{2}$ 或 $m>3\sqrt{2}$ 时，直线 l 与椭圆 C 无公共点.

【探究总结】

判断直线与椭圆的位置关系的方法

(1)直线与椭圆有相交、相切和相离三种位置关系，它们的几何特征分别是直线与椭圆有两个公共点、直线与椭圆有且只有一个公共点、直线与椭圆无公共点，反之亦然；

(2)判断直线与椭圆的位置关系主要使用代数法，即先将直线方程与椭圆方程联立，消去一个未知数 y（或 x），得到关于 x（或 y）的一个一元二次方程，再根据判别式 Δ 的大小（$\Delta>0$，$\Delta<0$，$\Delta=0$）判断方程解的个数，从而得到直线与椭圆的公共点的个数.由此可见，判断直线与椭圆的位置关系时，准确计算出判别式 Δ 是解题的关键.

任务2 弦长及中点弦问题

探究活动

例 1　过椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 内一点 $M(2,1)$ 作一条弦，使该弦被点 M 平分.

(1)求此弦所在直线的方程；

(2)求此弦的长.

解：(1)(方法一)易知直线的斜率存在，所求直线方程为 $y-1=k(x-2)$，代入椭圆方程并整理，得 $(4k^2+1)x^2-8(2k^2-k)x+4(2k-1)^2-16=0$，且 $\Delta=64(2k^2-k)^2-4(4k^2+1)[4(2k-1)^2-16]>0$.

设直线与椭圆的交点为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 x_1，x_2 是方程的两个根，

于是有 $x_1+x_2=\frac{8(2k^2-k)}{4k^2+1}$.

又因为 M 为 AB 的中点，

所以 $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4(2k^2-k)}{4k^2+1}=2$，解得 $k=-\frac{1}{2}$，满足 $\Delta>0$.

故此弦所在直线的方程为 $x+2y-4=0$.

(方法二)设直线与椭圆的交点为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

又 $M(2,1)$ 为 AB 的中点，所以 $x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=2$.

又因为 A，B 两点在椭圆上，

则 $x_1^2+4y_1^2=16$，$x_2^2+4y_2^2=16$，

两式相减得 $(x_1^2-x_2^2)+4(y_1^2-y_2^2)=0$.

于是 $(x_1+x_2)(x_1-x_2)+4(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$.

所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{x_1+x_2}{4(y_1+y_2)}=-\frac{1}{2}$，

即 $k_{AB}=-\frac{1}{2}$.

又直线 AB 过点 $M(2,1)$，

故此弦所在直线的方程为 $x+2y-4=0$.

(2)设此弦的两端点分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.由(1)知直线 AB 的方程为 $x+2y-4=0$，

由 $\begin{cases}x+2y-4=0,\\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$

得 $x^2-4x=0$，$\Delta=16>0$.

所以 $x_1+x_2=4$，$x_1x_2=0$.

所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}\times\sqrt{4^2-4\times0}=2\sqrt{5}$，

故此弦的长为 $2\sqrt{5}$.

[一题多思]

思考 1. 已知椭圆的方程为 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1(m>0,n>0,m\neq n)$，一条直线与椭圆相交于点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$，弦 AB 的中点为 $M(x_0,y_0)$.你能求出 $k_{AB}\cdot k_{OM}$(O 为原点)的值吗？

解： 将 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 代入椭圆方程，得 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{m}+\frac{y_1^2}{n}=1,\\ \frac{x_2^2}{m}+\frac{y_2^2}{n}=1,\end{cases}$ 两式作差并整理得

$$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{m}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{n}=0.$$

已知弦 AB 的中点为 $M(x_0,y_0)$，则 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}$.

因为 $x_1\neq x_2$，所以 $\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}=-\frac{n}{m}$，

即 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_0}{x_0}=-\frac{n}{m}$，所以 $k_{AB}\cdot k_{OM}=-\frac{n}{m}$.

思考 2. 你还有其他方法求解本例(1)吗？

解： 设所求直线与椭圆的一个交点为 $A(x,y)$，另一个交点为 B.

由于弦 AB 的中点为 $M(2,1)$，所以 $B(4-x,2-y)$.

因为 A，B 两点都在椭圆上，

所以 $\begin{cases}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1,①\\ \frac{(4-x)^2}{16}+\frac{(2-y)^2}{4}=1.②\end{cases}$

①－②，化简，得 $x+2y-4=0$.

显然点 A 的坐标满足这个方程，代入验证可知，点 B 的坐标也满足这个方程，而过点 A，B 的直线只有一条，故所求直线的方程为 $x+2y-4=0$.

【探究总结】

求直线与椭圆相交所得弦的长的方法

求直线与椭圆相交所得弦的长，其常规思路是先把直线方程与椭圆方程联立消元，再应用一元二次方程根与系数的关系结合弦长公式求解.

弦长公式：

设直线与椭圆的交点为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $|AB|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{\left(1+\frac{1}{k^2}\right)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}$($k$ 为直线斜率且不为 0).

应用迁移

1. 若椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 的弦 AB 的中点为 $P(2,1)$，则弦 AB 的长为_____.

$2\sqrt{5}$　**解析：** 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

因为 $P(2,1)$ 为 AB 的中点，

所以 $x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=2$.

又 A，B 两点在椭圆上，

则 $x_1^2+4y_1^2=16$，$x_2^2+4y_2^2=16$，

两式相减，得$(x_1^2-x_2^2)+4(y_1^2-y_2^2)=0$，

所以$(x_1+x_2)(x_1-x_2)+4(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$，

所以$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{x_1+x_2}{4(y_1+y_2)}=-\dfrac{4}{4\times2}=-\dfrac{1}{2}$，

所以 $k_{AB}=-\dfrac{1}{2}$.

所以直线 AB 的方程为 $y-1=-\dfrac{1}{2}(x-2)$，

即 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$.将 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$ 代入椭圆方程，

可得 $x^2-4x=0$，

可得 $x=0$ 或 $x=4$.不妨设 $A(0,2)$，$B(4,0)$，

则 $|AB|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

2.已知椭圆 $ax^2+by^2=1$ 与直线 $x+y-1=0$ 相交于 A，B 两点，C 是 AB 的中点.若 $|AB|=2\sqrt{2}$，直线 OC（O 为坐标原点）的斜率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求椭圆的方程.

解：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，代入椭圆方程并作差，得 $a(x_1+x_2)(x_1-x_2)+b(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$.而 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k_{AB}=-1$，$\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=k_{OC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，结合上式，可得 $b=\sqrt{2}a$.

因为 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_2-x_1|=\sqrt{2}\,|x_2-x_1|=2\sqrt{2}$，所以 $|x_2-x_1|=2$.

又由 $\begin{cases}ax^2+by^2=1,\\x+y-1=0,\end{cases}$ 得 $(a+b)x^2-2bx+b-1=0$，

$\Delta=4b^2-4(a+b)(b-1)>0$，所以 $x_1+x_2=\dfrac{2b}{a+b}$，$x_1x_2=\dfrac{b-1}{a+b}$，

故 $|x_2-x_1|^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\left(\dfrac{2b}{a+b}\right)^2-4\cdot\dfrac{b-1}{a+b}=4$.

将 $b=\sqrt{2}a$ 代入，得 $a=\dfrac{1}{3}$，$b=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，所以椭圆的方程是 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{\sqrt{2}y^2}{3}=1$.

任务3 直线与椭圆的相交问题

探究活动

例 2　已知 F_1，F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右焦点，过定点 $M(0,2)$ 的直线 l 与椭圆交于不同的 A，B 两点，且 $\angle AOB$（O 为坐标原点）为锐角.求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

解：显然直线 $x=0$ 不满足题设条件，可设直线 l：$y=kx+2$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}y=kx+2,\\\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 y，整理，得 $\left(k^2+\dfrac{1}{4}\right)x^2+4kx+3=0$.

由 $\Delta=(4k)^2-4\left(k^2+\dfrac{1}{4}\right)\times3=4k^2-3>0$，得 $k>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $k<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $x_1+x_2=-\dfrac{4k}{k^2+\dfrac{1}{4}}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{3}{k^2+\dfrac{1}{4}}$.

又 $0°<\angle AOB<90°$，所以 $\cos\angle AOB>0$，

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2>0$.

又 $y_1y_2=(kx_1+2)(kx_2+2)=k^2x_1x_2+2k(x_1+x_2)+4$

$=\dfrac{3k^2}{k^2+\dfrac{1}{4}}+\dfrac{-8k^2}{k^2+\dfrac{1}{4}}+4=\dfrac{-k^2+1}{k^2+\dfrac{1}{4}}$，

故 $\dfrac{3}{k^2+\dfrac{1}{4}}+\dfrac{-k^2+1}{k^2+\dfrac{1}{4}}>0$，即 $k^2<4$，所以 $-2<k<2$.

故 $-2<k<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}<k<2$.

【探究总结】

解决直线与椭圆相交问题时，应用一元二次方程根与系数的关系的前提是方程有两个实数根，即不能漏掉条件 $\Delta>0$.

应用迁移

已知椭圆 G：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，右

焦点为$(2,0)$，点$P\left(1,-\frac{4}{3}\right)$.

(1)求椭圆G的方程；

(2)设斜率为1的直线l与椭圆G交于A,B两点，若$\triangle PAB$是以P为顶点的等腰三角形，求$\triangle PAB$的面积.

解：(1)由已知得$c=2$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得$a=2\sqrt{2}$，

故$b=\sqrt{a^2-c^2}=2$，

所以椭圆G的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)设直线l的方程为$y=x+m$，

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，AB的中点$E(x_0,y_0)$，

联立直线l与椭圆G，消去y，得$3x^2+4mx+2m^2-8=0$①.

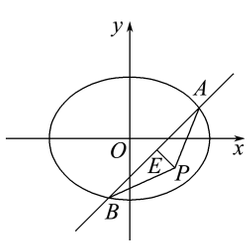
由韦达定理，得$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{2m}{3}$，$y_0=x_0+m=\frac{m}{3}$.

如图，由题意，得$PE\perp AB$，因此PE的斜率为$k=\frac{-\frac{4}{3}-\frac{m}{3}}{1+\frac{2m}{3}}=-1$，解得$m=1$，

此时①式为$3x^2+4x-6=0$，$|AB|=\sqrt{1+1}\times\frac{\sqrt{16+72}}{3}=\frac{4\sqrt{11}}{3}$.

点$P\left(1,-\frac{4}{3}\right)$到直线$l$的距离$d=\frac{\left|1+\frac{4}{3}+1\right|}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{3}$，

所以$\triangle PAB$的面积$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{10\sqrt{22}}{9}$.



任务4 与椭圆有关的综合问题

探究活动

例3　(1)已知$\triangle ABC$的顶点A,B在椭圆$x^2+3y^2=4$上，点C在直线$l:y=x+2$上，且$AB\parallel l$.当边AB过坐标原点O时，求AB的长及$\triangle ABC$的面积；

(2)在椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{7}=1$上求一点$P$，使它到直线$l:3x-2y-16=0$的距离最短，并求出最短距离.

解：(1)因为$AB\parallel l$，且边AB过点$O(0,0)$，

所以AB所在直线的方程为$y=x$.

设A,B两点坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，

由$\begin{cases}x^2+3y^2=4,\\y=x,\end{cases}$得$x=\pm1$.

所以$|AB|=\sqrt{2}|x_1-x_2|=2\sqrt{2}$.

又因为边AB上的高h等于原点到直线l的距离，

所以$h=\frac{|0-0+2|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$，所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot h=2$.

(2)设与椭圆相切并与l平行的直线方程为$y=\frac{3}{2}x+m$，代入$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{7}=1$，

整理，得$4x^2+3mx+m^2-7=0$.

$\Delta=9m^2-16(m^2-7)=0$，所以$m^2=16$，所以$m=\pm4$，

故切线方程为$y=\frac{3}{2}x+4$或$y=\frac{3}{2}x-4$.

显然直线$y=\frac{3}{2}x-4$距直线l最近，此时点P的坐标为$\left(\frac{3}{2},-\frac{7}{4}\right)$，所以最短距离$d=\frac{\left|\frac{9}{2}+\frac{7}{2}-16\right|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{8}{\sqrt{13}}=\frac{8\sqrt{13}}{13}$.

【探究总结】

解决与椭圆有关的综合问题的思路

直线与椭圆的综合问题常与不等式、三角函数、平面向量以及函数的最值等知识联系在一起.解决这类问题常需要挖掘出题目中隐含的数量关系、位置关系等，然后利用一元二次方程的根与系数的关系构造等式或利用函数关系式进行合理的转化，特别要注意利用根的判别式来确定参数的限制条件.

应用迁移

1.(2023·新高考全国Ⅱ卷)已知椭圆$C:\frac{x^2}{3}+y^2=1$的左、右焦点分别为F_1,F_2，直线$y=x+m$与C交

于A,B两点.若$\triangle F_1AB$面积是$\triangle F_2AB$面积的2倍,则$m=$　　(　　)

A.$\frac{2}{3}$　　B.$\frac{\sqrt{2}}{3}$

C.$-\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D.$-\frac{2}{3}$

C　**解析**:由$\begin{cases}y=x+m,\\ \frac{x^2}{3}+y^2=1,\end{cases}$消去$y$,得$4x^2+6mx+3m^2-3=0$.

因为直线与椭圆交于A,B两点,则$\Delta=36m^2-4\times4(3m^2-3)>0$,解得$-2<m<2$.

设F_1到直线AB的距离为d_1,F_2到直线AB的距离为d_2,易知$F_1(-\sqrt{2},0)$,$F_2(\sqrt{2},0)$,

则$d_1=\frac{|-\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}}$,$d_2=\frac{|\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}}$.

由题意可知

$\frac{S_{\triangle F_1AB}}{S_{\triangle F_2AB}}=\frac{\frac{|-\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}}}{\frac{|\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}}}=\frac{|-\sqrt{2}+m|}{|\sqrt{2}+m|}=2$,解得$m=-\frac{\sqrt{2}}{3}$或$m=-3\sqrt{2}$(舍).

故选C.

2.(2024·新高考全国Ⅰ卷)已知$A(0,3)$和$P\left(3,\frac{3}{2}\right)$为椭圆$C$:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上两点.

(1)求C的离心率;

(2)若过点P的直线l交椭圆C于另一点B,且$\triangle ABP$的面积为9,求l的方程.

解:(1)由题意得$\begin{cases}b=3,\\ \frac{9}{a^2}+\frac{\frac{9}{4}}{b^2}=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=3,\\ a=2\sqrt{3},\end{cases}$

所以$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{9}{12}}=\frac{1}{2}$.

(2)由(1),可得椭圆C的方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$.

因为$k_{AP}=\frac{3-\frac{3}{2}}{0-3}=-\frac{1}{2}$,所以直线$AP$的方程为$y=-\frac{1}{2}x+3$,即$x+2y-6=0$,

且$|AP|=\sqrt{(0-3)^2+\left(3-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

设点B到直线AP的距离为d,则$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\cdot|AP|\cdot d$,即$\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{5}}{2}d=9$,解得$d=\frac{12\sqrt{5}}{5}$,

所以将直线AP沿着与AP垂直的方向平移$\frac{12\sqrt{5}}{5}$个单位长度,

此时该平行线与椭圆的交点即为点B.

设该平行线的方程为$x+2y+D=0$,

则$\frac{|D+6|}{\sqrt{5}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$,解得$D=6$或$D=-18$.

当$D=6$时,由$\begin{cases}\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1,\\ x+2y+6=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=0,\\ y=-3\end{cases}$或$\begin{cases}x=-3,\\ y=-\frac{3}{2},\end{cases}$

即$B(0,-3)$或$B\left(-3,-\frac{3}{2}\right)$.

当$B(0,-3)$时,$k_l=\frac{3}{2}$,直线l的方程为$y=\frac{3}{2}x-3$,即$3x-2y-6=0$;

当$B\left(-3,-\frac{3}{2}\right)$时,$k_l=\frac{1}{2}$,直线$l$的方程为$y=\frac{1}{2}x$,即$x-2y=0$.

当$D=-18$时,由$\begin{cases}\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1,\\ x+2y-18=0,\end{cases}$得$2y^2-27y+117=0$,

$\Delta=27^2-4\times2\times117=-207<0$,此时该直线与椭圆无交点.

综上所述,直线l的方程为$3x-2y-6=0$或$x-2y=0$.

课后素养评价(二十八)

基础落实

1. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$，直线 l 过点 $(3,-1)$，则直线 l 与椭圆 C 的公共点的个数为　　(　　)

A.1　　B.1 或 2

C.2　　D.0

C　**解析**：因为直线 l 过点 $(3,-1)$，且 $\frac{3^2}{25}+\frac{(-1)^2}{36}<1$，所以点 $(3,-1)$ 在椭圆 C 的内部，故直线 l 与椭圆 C 有 2 个公共点.

2. (多选)若直线 $y=kx+2$ 与椭圆 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ 相切，则 k 的值可能为　　(　　)

A.$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B.$-\frac{\sqrt{6}}{3}$

C.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D.$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

AB　**解析**：把 $y=kx+2$ 代入 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$，得 $(3k^2+2)x^2+12kx+6=0$. 因为直线与椭圆相切，所以 $\Delta=(12k)^2-4(3k^2+2)\times 6=0$，解得 $k=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$.

3. 若直线 $l:y=x+m$ 与椭圆 $C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 没有公共点，则 m 的取值范围为　　(　　)

A.$(-2,2)$

B.$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

C.$(-\sqrt{14},\sqrt{14})$

D.$(-\infty,-\sqrt{14})\cup(\sqrt{14},+\infty)$

D　**解析**：由 $\begin{cases}y=x+m,\\5x^2+9y^2=45,\end{cases}$ 消去 y，得 $14x^2+18mx+9m^2-45=0$，

故 $\Delta=324m^2-56(9m^2-45)<0$，解得 $m<-\sqrt{14}$ 或 $m>\sqrt{14}$.

4. 在椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 内，过点 $M(1,1)$，且被这点平分的弦所在直线的方程为　　(　　)

A.$x+4y-5=0$　　B.$x-4y-5=0$

C.$4x+y-5=0$　　D.$4x-y-5=0$

A　**解析**：设直线与椭圆交点为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{4}=1,①\\\frac{x_2^2}{16}+\frac{y_2^2}{4}=1.②\end{cases}$

由①－②，得

$$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{16}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{4}=0.$$

由题意得 $\begin{cases}x_1+x_2=2,\\y_1+y_2=2,\end{cases}$

所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{4(x_1+x_2)}{16(y_1+y_2)}=-\frac{1}{4}$.

所以所求直线的方程为 $y-1=-\frac{1}{4}(x-1)$，即 $x+4y-5=0$.

5. 若过椭圆 $x^2+2y^2=4$ 的左焦点作倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线，交椭圆于 A,B 两点，则弦 AB 的长为　　(　　)

A.$\frac{6}{7}$　　B.$\frac{16}{7}$

C.$\frac{7}{16}$　　D.$\frac{7}{6}$

B　**解析**：易求得直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}(x+\sqrt{2})$.

由 $\begin{cases}y=\sqrt{3}(x+\sqrt{2}),\\x^2+2y^2=4,\end{cases}$ 消去 y 并整理，得 $7x^2+12\sqrt{2}x+8=0$，$\Delta>0$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{12\sqrt{2}}{7}$，$x_1x_2=\frac{8}{7}$.

由弦长公式，得 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{12\sqrt{2}}{7}\right)^2-4\times\frac{8}{7}}=\frac{16}{7}$.

6. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 若直线 $y=kx$ 与椭圆一个交点的横坐标为 b，则 k 的值为_____.

$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$　**解析**：由条件知，(b,kb) 在椭圆上，即 $\frac{b^2}{a^2}+\frac{k^2b^2}{b^2}=1$，

所以 $k^2=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{c^2}{a^2}=e^2=\frac{1}{2}$，所以 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7.已知椭圆 $mx^2+ny^2=1$ 与直线 $y=1-x$ 交于 M，N 两点，过原点 O 与线段 MN 的中点 P 的直线的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\frac{m}{n}$ 的值是_____.

$\frac{\sqrt{2}}{2}$　**解析：**由 $\begin{cases}y=1-x,\\mx^2+ny^2=1,\end{cases}$ 消去 y，得 $(m+n)x^2-2nx+n-1=0$.

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $\Delta>0$，$x_1+x_2=\frac{2n}{m+n}$，$y_1+y_2=1-x_1+1-x_2=\frac{2m}{m+n}$. 因为 P 为线段 MN 的中点，所以 P 的坐标为 $\left(\frac{n}{m+n},\frac{m}{m+n}\right)$.

所以 $k_{OP}=\frac{m}{n}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8.已知直线 $5x+4y-1=0$ 交椭圆 $C:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 于 M，N 两点，设 MN 的中点为 P，O 为坐标原点，直线 OP 的斜率为 $\frac{5}{4}$，则椭圆 C 的离心率为_____.

$\frac{3}{5}$　**解析：**设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，MN 的中点为 $P(x_0,y_0)$，

则 $\begin{cases}\frac{y_1^2}{a^2}+\frac{x_1^2}{b^2}=1,\\\frac{y_2^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 两式相减整理得 $b^2(y_1^2-y_2^2)+a^2(x_1^2-x_2^2)=0$，

则 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\right)$，即 $k_{MN}=-\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{1}{k_{OP}}$.

因为 $k_{MN}=-\frac{5}{4}$，$k_{OP}=\frac{5}{4}$，所以 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{16}{25}$，

所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{3}{5}$.

能力提升

1.（多选）已知直线 $y=kx+1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{m}=1$，则有（　　）

A.直线 $y=kx+1$ 恒过定点 $(0,1)$

B.$m>0$

C.$0<m<5$

D.若直线与椭圆总有公共点，则 m 的取值范围是 $[1,5)\cup(5,+\infty)$

AD　**解析：**由于直线 $y=kx+1$ 可以化为 $y-1=k(x-0)$，故恒过点 $(0,1)$，故 A 正确；而方程 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{m}=1$ 表示椭圆的条件为 $m>0$ 且 $m\neq5$，故 B，C 错误；若直线与椭圆总有公共点，则点 $(0,1)$ 必在椭圆内或椭圆上，则 $0<\frac{1}{m}\leqslant1$ 且 $m\neq5$，所以 $m\geqslant1$ 且 $m\neq5$，故 D 正确.

2.已知 $F(2,0)$ 为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点，$A(2,3)$ 为椭圆 C 内一点. 若在椭圆 C 上存在一点 P，使得 $|PA|+|PF|=10$，则 a 的取值范围是（　　）

A.$(4,7]$　　B.$(5,7]$

C.$\left(5,\frac{15}{2}\right]$　　D.$\left(4,\frac{15}{2}\right]$

D　**解析：**依题意，$a^2-b^2=4$，设椭圆 C 的左焦点为 F'，则 $F'(-2,0)$.

因为 $|PA|+|PF|=10$，且 $|PF|+|PF'|=2a$，

所以 $|PA|+2a-|PF'|=10$，即 $|PA|-|PF'|=10-2a$，

于是 $|10-2a|\leqslant|AF'|=5$，解得 $\frac{5}{2}\leqslant a\leqslant\frac{15}{2}$.

而 $b^2=a^2-4$，点 $A(2,3)$ 为椭圆 C 内一点，

所以 $\frac{4}{a^2}+\frac{9}{a^2-4}<1$，整理得 $a^4-17a^2+16>0$.

又 $a>2$，解得 $a>4$.

所以 a 的取值范围是 $4<a\leqslant\frac{15}{2}$. 故选 D.

3.（多选）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1$ 内一点 $M(1,2)$，过 M 的直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点，且 M 为线段 AB 的中点，则下列结论正确的有（　　）

A.椭圆 C 的焦点坐标为 $(2,0)$，$(-2,0)$

B.椭圆 C 的长轴长为 $4\sqrt{2}$

C.直线 l 的方程为 $x+y-3=0$

D.$|AB|=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

BCD　**解析：**对于 A，易知椭圆 C 的焦点在 y 轴上，由椭圆方程可得 $a^2=8$，$b^2=4$，则 $c=\sqrt{a^2-b^2}=2$，故其焦点坐标为 $(0,\pm2)$，故 A 错误；

对于 B，$a^2=8$，则 $a=2\sqrt{2}$，椭圆 C 的长轴长为 $2a=4\sqrt{2}$，故 B 正确；

对于 C，由题意，可设直线 l 的方程为 $x=m(y-2)+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=4$，联立直线与椭圆方程并整理得 $(2m^2+1)y^2+4m(1-2m)\cdot y+8m^2-8m-6=0$，则 $\Delta>0$，

所以 $y_1+y_2=\frac{4m(2m-1)}{2m^2+1}=4$，解得 $m=-1$，即直

线 l 的方程为 $x+y-3=0$，故 C 正确；

对于 D，由 C 知 $y_1+y_2=4$，$y_1y_2=\frac{10}{3}$，则 $|AB|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，故 D 正确.

4. 已知以 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$ 为焦点的椭圆与直线 $x+\sqrt{3}y+4=0$ 有且仅有一个交点，则椭圆的长轴长为_____.

$2\sqrt{7}$　**解析**：根据题意设椭圆方程为 $\frac{x^2}{b^2+4}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b>0)$，将 $x=-\sqrt{3}y-4$ 代入椭圆方程，得 $4(b^2+1)y^2+8\sqrt{3}b^2y-b^4+12b^2=0$. 因为椭圆与直线 $x+\sqrt{3}y+4=0$ 有且仅有一个交点，所以 $\Delta=(8\sqrt{3}b^2)^2-4\cdot4(b^2+1)\cdot(-b^4+12b^2)=0$，即 $(b^2+4)(b^2-3)=0$，解得 $b^2=3$，

所以椭圆的长轴长为 $2\sqrt{b^2+4}=2\sqrt{7}$.

5. 若过椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=1$ 内的一点 $P(2,-1)$ 的直线交椭圆于 A，B 两点，且满足 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$（$O$ 为原点），则这条直线的方程是_____.

$5x-3y-13=0$　**解析**：由于直线 AB 过点 P，又 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，

所以点 P 为弦 AB 的中点.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=-2$，

所以 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{5}=1,\\ \frac{x_2^2}{6}+\frac{y_2^2}{5}=1,\end{cases}$ 两式作差整理得

$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{6}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{5}=0$，

所以 $\frac{4(x_1-x_2)}{6}-\frac{2(y_1-y_2)}{5}=0$，

即 $k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{5}{3}$.

所以直线方程为 $y+1=\frac{5}{3}(x-2)$，即 $5x-3y-13=0$.

6. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 A，左焦点为 F. 若该椭圆的上顶点到焦点的距离为 2，离心率 $e=\frac{1}{2}$，则椭圆的标准方程是_____；若点 P 为椭圆上任意一点，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{FP}$ 的取值范围是_____.

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　$[0,12]$　**解析**：因为椭圆的上顶点到焦点的距离为 2，所以 $a=2$.

因为离心率 $e=\frac{1}{2}$，所以 $c=1$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，

则椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

所以点 A 的坐标为 $(-2,0)$，点 F 的坐标为 $(-1,0)$.

设 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{FP}=(x+2,y)\cdot(x+1,y)=x^2+3x+2+y^2$.

由椭圆的方程，得 $y^2=3-\frac{3}{4}x^2$，

所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{FP}=x^2+3x-\frac{3}{4}x^2+5=\frac{1}{4}(x+6)^2-4$.

因为 $x\in[-2,2]$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{FP}\in[0,12]$.

7. 已知椭圆 G：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点为 $(2,0)$，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求椭圆 G 的方程；

(2) 过点 $M(0,-2)$ 的直线 l 与椭圆 G 交于 A，B 两点，O 为坐标原点. 若 $\triangle OAB$ 的面积为 $\sqrt{2}$，求直线 l 的方程.

解：(1) 依题意可得 $\begin{cases}a=2,\\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a=2,\\ c=\sqrt{2},\end{cases}$ 则 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2}$，

所以椭圆 G 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2) 由题意知，直线 l 的斜率存在，设 l 的方程为 $y=kx-2$，

由方程组 $\begin{cases}y=kx-2,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 整理得到 $(1+2k^2)x^2-8kx+4=0$.

由 $\Delta=(-8k)^2-4(1+2k^2)\times4>0$，解得 $k^2>\frac{1}{2}$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{8k}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{4}{1+2k^2}$，

所以 $\triangle OAB$ 的面积 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|0-(-2)||x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{\left(\frac{8k}{1+2k^2}\right)^2-4\times\frac{4}{1+2k^2}}=\frac{4}{1+2k^2}\sqrt{2k^2-1}$

$=\sqrt{2}$，

平方化简得 $4k^4-12k^2+9=0$，解得 $k^2=\frac{3}{2}$，满足 $k^2>\frac{1}{2}$，所以 $k=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$，

所以 l 的方程为 $y=\frac{\sqrt{6}}{2}x-2$ 或 $y=-\frac{\sqrt{6}}{2}x-2$，

即直线 l 的方程为 $\sqrt{6}x-2y-4=0$ 或 $\sqrt{6}x+2y+4=0$.

自我超越

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，椭圆上任意一点到椭圆的两个焦点的距离之和为 4.若直线 l 过点 $(-1,0)$，且与椭圆相交于不同的两点 A，B.

(1)求椭圆的标准方程；

(2)若线段 AB 的中点的纵坐标为 $\frac{1}{5}$，求直线 l 的方程.

解：(1)由题意可知 $2a=4$，$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $a=2$，$c=\sqrt{3}$.

由 $b^2=a^2-c^2$，得 $b^2=1$.

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)由题意可知直线的斜率存在，

设 $l:y=k(x+1)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由方程组 $\begin{cases}y=k(x+1),\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$

消去 y，得 $(1+4k^2)x^2+8k^2x+4k^2-4=0$.

因为 $\Delta>0$，$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-8k^2}{1+4k^2},\\ x_1x_2=\frac{4k^2-4}{1+4k^2},\end{cases}$

设 AB 的中点坐标为 (x_0,y_0)，

则 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-4k^2}{1+4k^2}$，所以 $y_0=k(x_0+1)=\frac{k}{1+4k^2}=\frac{1}{5}$，

所以 $k=\frac{1}{4}$ 或 $k=1$.

当 $k=\frac{1}{4}$ 时，AB 的中点坐标为 $\left(-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$，直线 l 的方程为 $y-\frac{1}{5}=\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{5}\right)$，即 $x-4y+1=0$；

当 $k=1$ 时，AB 的中点坐标为 $\left(-\frac{4}{5},\frac{1}{5}\right)$，直线 l 的方程为 $y-\frac{1}{5}=x+\frac{4}{5}$，即 $x-y+1=0$.

3.2　双曲线

3.2.1　双曲线及其标准方程

学习任务目标

1.理解双曲线的定义、几何图形和标准方程的推导过程.
2.掌握双曲线的标准方程及其求法.
3.会利用双曲线的定义和标准方程解决简单的问题.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　双曲线的定义

一般地，我们把平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离的差的绝对值等于非零常数(小于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹叫做双曲线.这两个定点叫做双曲线的焦点，两焦点间的距离叫做双曲线的焦距.

知识点二　双曲线的标准方程

焦点的位置	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
标准方程	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$

续表

焦点的位置	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
焦点坐标	$(-c,0),(c,0)$	$(0,-c),(0,c)$
a,b,c 的关系	$c^2=a^2+b^2$	

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)平面内到两定点的距离的差等于常数(小于两定点间距离)的点的轨迹是双曲线.　（　×　）

(2)平面内到点 $F_1(0,4)$，$F_2(0,-4)$ 的距离之差的绝对值等于 8 的点的轨迹是双曲线.　（　×　）

(3)在双曲线的标准方程中，a，b 的大小关系是 $a>b$.　(　×　)

(4)双曲线的标准方程中 a，b，c 之间的关系与椭圆的标准方程中 a，b，c 之间的关系相同.　(　×　)

2.若方程 $\frac{x^2}{2+m}-\frac{y^2}{2-m}=1$ 表示双曲线，则 m 的取值范围是　(　　)

A.$(-2,2)$　　B.$(0,+\infty)$

C.$[0,+\infty)$　　D.$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

A　**解析**：因为已知方程表示双曲线，所以$(2+m)\cdot(2-m)>0$，所以 $-2<m<2$.故 m 的取值范围是 $(-2,2)$.

3.思考并回答下列问题：

(1)若将双曲线定义中的“绝对值”删掉，动点的轨迹是什么？

提示：那么动点的轨迹为双曲线的一支.

(2)两种双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的相同点和不同点分别是什么？

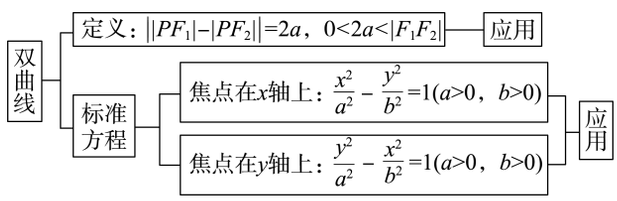
提示：相同点：它们的形状、大小都相同，都有 $a>0$，$b>0$，$a^2+b^2=c^2$；

不同点：两种双曲线的位置不同，它们的焦点坐标也不同.

(3)如何根据双曲线的标准方程确定双曲线的焦点位置？

提示：若含 x^2 项的系数为正，则焦点在 x 轴上；若含 y^2 项的系数为正，则焦点在 y 轴上.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1　双曲线定义的应用

探究活动

例1　已知 F_1，F_2 为双曲线 C：$x^2-y^2=2$ 的左、右焦点，点 P 在 C 上，$\angle F_1PF_2=60°$，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为_____.

$2\sqrt{3}$　**解析**：将 $x^2-y^2=2$ 化为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$，则 $a=b=\sqrt{2}$，$c=2$.不妨设点 P 在双曲线 C 的右支上，

则 $|PF_1|-|PF_2|=2a=2\sqrt{2}$.由题意知 $|F_1F_2|=2c=4$.

在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由余弦定理的推论，

得 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{1}{2}$，

所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|=8$，

所以 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\sin 60°=2\sqrt{3}$.

[一题多思]

思考1.若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1，F_2，点 P 在双曲线上，且 $\angle F_1PF_2=\theta$，求 $\triangle PF_1F_2$ 的面积.

解：在 $\triangle PF_1F_2$ 中，因为 $\angle F_1PF_2=\theta$，

所以由余弦定理，可得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\theta=|F_1F_2|^2=4c^2$.①

由双曲线的定义，可得 $||PF_1|-|PF_2||=2a$，两边平方，可得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|=4a^2$.②

由①－②，可得 $2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot(1-\cos\theta)=4c^2-4a^2$，

则 $|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{2b^2}{1-\cos\theta}$，

故 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\cdot\sin\theta=b^2\cdot\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

$=b^2\cdot\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$.

思考2.若把本例中“$\angle F_1PF_2=60°$”改为“$|PF_1|=(2+\sqrt{3})|PF_2|$”，其他条件不变，求 $\triangle PF_1F_2$ 的面积.

解：由题易知 $|PF_1|>|PF_2|$，

则 $\begin{cases}|PF_1|-|PF_2|=2\sqrt{2},\\ |PF_1|=(2+\sqrt{3})|PF_2|,\end{cases}$ 解得 $|PF_1|=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$|PF_2|=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

在 $\triangle PF_1F_2$ 中，$|PF_1|=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$|PF_2|=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，$|F_1F_2|=4$，则 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$，

所以 $\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形，且 $\angle F_1PF_2=90°$，所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|=2$.

【探究总结】

1.双曲线定义的应用，要注意以下三点：

(1)$2a$是双曲线上的点到两个焦点的距离之差的绝对值；

(2)$2a<|F_1F_2|$；

(3)焦点所在的坐标轴.

2.在焦点三角形PF_1F_2中，常利用正弦定理、余弦定理或勾股定理，并结合$||PF_1|-|PF_2||=2a$，建立a与$|PF_1|\cdot|PF_2|$的联系.

应用迁移

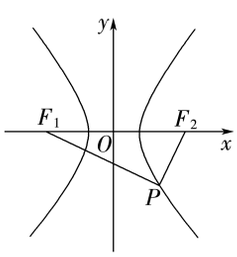
1.(2024·天津卷)已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，$P$是双曲线右支上一点，直线$PF_2$的斜率为2，且$\triangle PF_1F_2$是面积为8的直角三角形，则双曲线的方程为　　(　　)

A.$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=1$　　B.$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$

C.$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{8}=1$　　D.$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1$

C　**解析**：如图，由题意可知，点P必落在第四象限，$\angle F_1PF_2=90°$.

设$|PF_2|=m$，$\angle PF_2F_1=\theta_1$，$\angle PF_1F_2=\theta_2$，由$k_{PF_2}=\tan\theta_1=2$，所以$\sin\theta_1=\frac{2}{\sqrt{5}}$.



因为$\angle F_1PF_2=90°$，所以$k_{PF_1}\cdot k_{PF_2}=-1$，则$k_{PF_1}=-\frac{1}{2}$，即$\tan\theta_2=\frac{1}{2}$，$\sin\theta_2=\frac{1}{\sqrt{5}}$.由正弦定理可得，$|PF_1|:|PF_2|:|F_1F_2|=\sin\theta_1:\sin\theta_2:\sin 90°=2:1:\sqrt{5}$，

则由$|PF_2|=m$，得$|PF_1|=2m$，$|F_1F_2|=2c=\sqrt{5}m$.

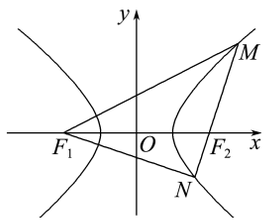
由$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot m=8$，得$m=2\sqrt{2}$，

则$|PF_2|=2\sqrt{2}$，$|PF_1|=4\sqrt{2}$，$|F_1F_2|=2c=2\sqrt{10}$，$c=\sqrt{10}$.

由双曲线的定义可得，$|PF_1|-|PF_2|=2a=2\sqrt{2}$，所以$a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{c^2-a^2}=2\sqrt{2}$，

所以双曲线的方程为$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{8}=1$.故选C.

2.如图，已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的实轴长为4，左、右焦点分别为$F_1,F_2$，过点$F_2$的直线$l$交双曲线的右支于点$M,N$.若$|MF_2|=4$，$\angle F_1MF_2=\frac{\pi}{4}$，则$\triangle F_1MN$的面积为_____.



16　**解析**：由双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的实轴长为4，得$2a=4$，所以$|MF_1|-|MF_2|=2a=4$.

又$|MF_2|=4$，所以$|MF_1|=8$.

因为$|NF_1|-|NF_2|=4$，所以$|NF_1|=|NF_2|+4$.

又$|MN|=|MF_2|+|NF_2|=|NF_2|+4$，所以$|MN|=|NF_1|$.

又$\angle F_1MF_2=\frac{\pi}{4}$，所以$\triangle F_1MN$为等腰直角三角形.

由$|MF_1|=8$，得$|MN|=|NF_1|=4\sqrt{2}$，

所以$\triangle F_1MN$的面积为$\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}=16$.

任务2　求双曲线的标准方程

探究活动

例2　(教材P121练习题1改编)求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1)$c=5$，$b=3$，焦点在x轴上；

(2)$a=2\sqrt{5}$，经过点$A(2,-5)$，焦点在y轴上；

(3)过$P\left(3,\frac{15}{4}\right)$，$Q\left(-\frac{16}{3},5\right)$两点.

解：(1)由双曲线的焦点在x轴上，$c=5$，$b=3$，得$a^2=c^2-b^2=16$，

所以所求双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

(2)由双曲线的焦点在y轴上，设双曲线的标准方程为$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，

由$a=2\sqrt{5}$，且点$A(2,-5)$在双曲线上，得$\begin{cases}a=2\sqrt{5},\\ \frac{25}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=20,\\ b^2=16,\end{cases}$

所以所求双曲线的标准方程为$\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{16}=1$.

(3)设所求双曲线方程为$Ax^2+By^2=1(AB<0)$，由点$P\left(3,\frac{15}{4}\right)$，$Q\left(-\frac{16}{3},5\right)$在双曲线上，

得$\begin{cases}9A+\dfrac{225}{16}B=1,\\ \dfrac{256}{9}A+25B=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}A=-\dfrac{1}{16},\\ B=\dfrac{1}{9},\end{cases}$

所以所求双曲线的标准方程为$\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{16}=1$.

【探究总结】

1.双曲线标准方程的两种求法

(1)定义法：根据双曲线的定义得到相应的a，b，c的值，再写出双曲线的标准方程；

(2)待定系数法：先设出双曲线的标准方程$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$或$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$($a$，$b$均为正数)，然后根据条件求出待定系数即可得到所求方程.

2.当焦点位置不确定时，可设双曲线方程为$mx^2+ny^2=1$($mn<0$)，因为它包括焦点在x轴上($m>0$，$n<0$)和焦点在y轴上($m<0$，$n>0$)两种情况，可以避免分类讨论，从而简化运算.

应用迁移

求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1)$a=4$，经过点$A\left(1,-\dfrac{4\sqrt{10}}{3}\right)$；

(2)经过点$(3,0)$，$(-6,-3)$；

(3)与双曲线$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$有相同的焦点，且经过点$(3\sqrt{2},2)$.

解：(1)当焦点在x轴上时，

设所求双曲线的标准方程为$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$.

把点A的坐标代入，得$b^2=-\dfrac{16}{15}\times\dfrac{160}{9}<0$，不符合题意；

当焦点在y轴上时，

设所求双曲线的标准方程为$\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{b^2}=1(b>0)$.

把点A的坐标代入，得$b^2=9$，

故所求双曲线的标准方程为$\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{9}=1$.

(2)设双曲线的方程为$mx^2+ny^2=1(mn<0)$.

因为双曲线经过点$(3,0)$，$(-6,-3)$，

所以$\begin{cases}9m+0=1,\\ 36m+9n=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=\dfrac{1}{9},\\ n=-\dfrac{1}{3},\end{cases}$

故所求双曲线的标准方程为$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{3}=1$.

(3)因为所求双曲线与双曲线$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$有相同的焦点，

所以可设所求双曲线的方程为$\dfrac{x^2}{16-\lambda}-\dfrac{y^2}{4+\lambda}=1(-4<\lambda<16)$.

因为双曲线过点$(3\sqrt{2},2)$，所以$\dfrac{18}{16-\lambda}-\dfrac{4}{4+\lambda}=1$，

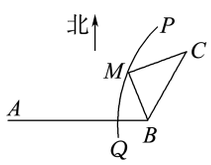
解得$\lambda=4$或$\lambda=-14$(舍去).

故所求双曲线的标准方程为$\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{8}=1$.

任务3 双曲线的实际应用

探究活动

例3　如图，B地在A地的正东方向4 km处，C地在B地的北偏东30°方向2 km处，河岸PQ(曲线)上任意一点到A地的距离比到B地的距离远2 km.现要在河岸PQ上选一处M建码头，并修建两条公路MB，MC，以便向B，C两地转运货物.经测算，公路的造价是a万元/km，则修建这两条公路的总费用最低是多少？



解：以AB所在的直线为x轴，AB的中点为坐标原点建立平面直角坐标系(图略).根据题意，得$A(-2,0)$，$B(2,0)$，所以$C(3,\sqrt{3})$，所以$|AC|=\sqrt{(3+2)^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$.

因为$|MA|-|MB|=2<|AB|$，所以点M的轨迹是双曲线$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$的右支.

由题意可知，总费用为$a|MB|+a|MC|=a(|MB|+|MC|)$.

因为$|MB|+|MC|=|MA|-2+|MC|\geqslant|AC|-2=2\sqrt{7}-2$，当$M$，$A$，$C$三点共线时，等号成立，所以总费用最低为$(2\sqrt{7}-2)a$万元.

【探究总结】

利用双曲线解决实际问题的基本步骤

(1)建立适当的平面直角坐标系；

(2)求出双曲线的标准方程；

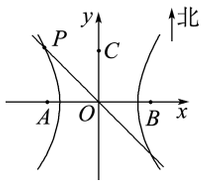
(3)根据双曲线的方程及定义解决实际应用问题.

应用迁移

某部队进行军事演习，一方指挥中心接到其正西、正东、正北方向三个观测点A，B，C的报告：正西、正北两个观测点同时听到了炮弹的爆炸声，正东观测点听到爆炸声的时间比其他两个观测点晚4 s.已知各观

测点到该指挥中心的距离都是 1 020 m，试确定该枚炮弹的袭击位置.（设声音的传播速度为 340 m/s，相关各点均在同一平面内）

解：如图，以指挥中心为坐标原点，正东、正北方向分别为 x 轴、y 轴的正方向建立平面直角坐标系，



则 $A(-1\,020,0)$，$B(1\,020,0)$，$C(0,1\,020)$.

设 $P(x,y)$ 为袭击位置，则 $|PB|-|PA|=340\times4<|AB|$.

由双曲线的定义知，点 P 在以 A，B 为焦点的双曲线的左支上，且 $a=680$，$c=1\,020$，所以 $b^2=1\,020^2-680^2=5\times340^2$，

所以该双曲线的方程为 $\dfrac{x^2}{680^2}-\dfrac{y^2}{5\times340^2}=1(x\leqslant-680)$.①

又 $|PA|=|PC|$，所以点 P 在直线 $y=-x$ 上.

把 $y=-x$ 代入①式，得 $x=-680\sqrt{5}$，

所以 $P(-680\sqrt{5},680\sqrt{5})$，$|OP|=680\sqrt{10}$.

故该枚炮弹的袭击位置在指挥中心的北偏西 45°方向，距指挥中心 $680\sqrt{10}$ m 处.

课后素养评价（二十九）

基础落实

1. 已知平面内两定点 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，则下列条件中，使得动点 P 的轨迹为双曲线的是（　　）

A. $|PF_1|-|PF_2|=\pm3$

B. $|PF_1|-|PF_2|=\pm4$

C. $|PF_1|-|PF_2|=\pm5$

D. $|PF_1|^2-|PF_2|^2=\pm4$

A　**解析**：当 $|PF_1|-|PF_2|=\pm3$ 时，$||PF_1|-|PF_2||=3<|F_1F_2|=4$，满足双曲线的定义，所以点 P 的轨迹是双曲线.故选 A.

2. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{16}=1(a>0)$ 的两个焦点分别是 F_1，F_2，焦距为 10，M 是双曲线上的一点，且 $|MF_1|=7$，则 $|MF_2|$ 的值为（　　）

A. 1　　B. 13

C. 1 或 13　　D. 3

B　**解析**：因为焦距为 10，所以 $2c=10$，所以 $c=5$.

因为 $c^2=a^2+b^2$，所以 $a^2=25-16=9$，

所以 $a=3$.因为 M 是双曲线上的一点，所以 $||MF_2|-|MF_1||=2a=6$.

因为 $|MF_1|=7$，所以 $||MF_2|-7|=6$，所以 $|MF_2|=13$ 或 $|MF_2|=1$.

因为 $|MF_2|\geqslant c-a=5-3=2$，所以 $|MF_2|=1$ 舍去，所以 $|MF_2|=13$.

3. 已知双曲线的中心在原点，两个焦点 F_1，F_2 的坐标分别为 $(\sqrt{5},0)$ 和 $(-\sqrt{5},0)$，点 P 在双曲线上，且 $PF_1\perp PF_2$，$\triangle PF_1F_2$ 的面积为 1，则双曲线的方程为（　　）

A. $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{2}=1$

C. $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$　　D. $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$

C　**解析**：因为 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 1，$PF_1\perp PF_2$，所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|=2$.

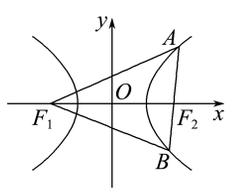
由 $\begin{cases}|PF_1|\cdot|PF_2|=2,\\ |PF_1|^2+|PF_2|^2=(2\sqrt{5})^2,\end{cases}$

得 $(|PF_1|-|PF_2|)^2=16$，

即 $2a=4$，解得 $a=2$.又 $c=\sqrt{5}$，所以 $b=1$.

所以双曲线的方程为 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$.故选 C.

4. 如图，已知双曲线的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，点 A，B 均在双曲线的右支上，线段 AB 经过双曲线的右焦点 F_2，$|AB|=m$，F_1 为双曲线的左焦点，则 $\triangle ABF_1$ 的周长为（　　）



A. $2a+2m$　　B. $4a+2m$

C. $a+m$　　D. $2a+4m$

B　**解析**：由双曲线的定义，知

$|AF_1|-|AF_2|=2a$，$|BF_1|-|BF_2|=2a$.

又 $|AF_2|+|BF_2|=|AB|$，所以 $\triangle ABF_1$ 的周长为 $|AF_1|+|BF_1|+|AB|=4a+2|AB|=4a+2m$.

5. 若双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{m}=1$ 的焦距为 10，则 $m=$_____.

9　**解析**：由题意知，$a=4$，$b=\sqrt{m}$，$c=5$，又由 $a^2+b^2=c^2$，得 $16+m=25$，所以 $m=9$.

6. 已知动点 $M(x,y)$ 满足 $\sqrt{(x+2)^2+y^2}-\sqrt{(x-2)^2+y^2}=4$，则动点 M 的轨迹方程是_____.

$y=0(x\geqslant 2)$　**解析**：设 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，由题意知动点 M 满足 $|MF_1|-|MF_2|=4=|F_1F_2|$，故动点 M 的轨迹是射线 $y=0(x\geqslant 2)$.

7. 以椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ 的焦点为顶点，且过点 $(-\sqrt{3},6)$ 的双曲线标准方程是_____.

$\frac{y^2}{9}-x^2=1$　**解析**：在椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ 中，$a^2=25$，$b^2=16$，所以 $c^2=25-16=9$，

所以椭圆的焦点为 $(0,\pm 3)$，所以双曲线的顶点为 $(0,\pm 3)$.

设双曲线方程为 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{m^2}=1$，

由题意可得 $\frac{36}{9}-\frac{3}{m^2}=1$，解得 $m^2=1$，

所以所求双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{9}-x^2=1$.

8. 若方程 $\frac{x^2}{5-m}+\frac{y^2}{m-3}=1$ 表示焦点在 x 轴上的双曲线，则实数 m 的取值范围是_____.

$(-\infty,3)$　**解析**：将双曲线方程化为标准方程为 $\frac{x^2}{5-m}-\frac{y^2}{3-m}=1$，

则 $\begin{cases}5-m>0,\\3-m>0,\end{cases}$ 解得 $m<3$.

9. 已知点 P 在双曲线 $C:\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 上，F_1，F_2 分别是双曲线 C 的左、右焦点.若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 20，则点 P 到 x 轴的距离为_____，且 $|PF_1|+|PF_2|=$_____.

4　$\frac{50}{3}$　**解析**：由已知得 $a=4$，$b=3$，

则 $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$，设点 $P(x_P,y_P)$，

则 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times 2c\times|y_P|=\frac{1}{2}\times 10\times|y_P|=20$，

所以 $|y_P|=4$，即点 P 到 x 轴的距离为 4.

由双曲线的对称性，不妨取点 P 的坐标为 $\left(\frac{20}{3},4\right)$，

得 $|PF_2|=\sqrt{\left(\frac{20}{3}-5\right)^2+4^2}=\frac{13}{3}$，

由双曲线的定义，得 $|PF_1|=|PF_2|+2a=\frac{13}{3}+8=\frac{37}{3}$，

所以 $|PF_1|+|PF_2|=\frac{37}{3}+\frac{13}{3}=\frac{50}{3}$.

能力提升

1.（多选）已知方程 $\frac{x^2}{4-t}+\frac{y^2}{t-1}=1$ 表示的曲线为 C，则下列结论正确的有　（　）

A. 当 $1<t<4$ 时，曲线 C 为椭圆

B. 当 $t>4$ 或 $t<1$ 时，曲线 C 为双曲线

C. 若曲线 C 为焦点在 x 轴上的椭圆，则 $1<t<\frac{5}{2}$

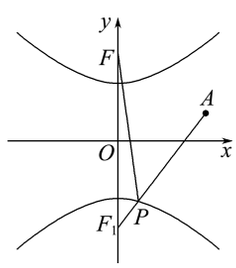
D. 若曲线 C 为焦点在 y 轴上的双曲线，则 $t>4$

BCD　**解析**：当 $t=\frac{5}{2}$ 时，曲线 C 表示圆，A 错误.若 C 为双曲线，则 $(4-t)(t-1)<0$，所以 $t<1$ 或 $t>4$，B 正确.若曲线 C 为焦点在 x 轴上的椭圆，则 $4-t>t-1>0$，所以 $1<t<\frac{5}{2}$，C 正确.若曲线 C 为焦点在 y 轴上的双曲线，则 $\begin{cases}4-t<0,\\t-1>0,\end{cases}$ 所以 $t>4$，D 正确.

2. 已知 F 是双曲线 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$ 的上焦点，P 是双曲线下支上的动点，点 $A(3,1)$，则 $|PF|+|PA|$ 的最小值为　（　）

A. 11　　B. 9

C. $\sqrt{13}$　　D. 5



B　**解析**：由 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$，得 $a=2$，$b=\sqrt{5}$，所以 $c=\sqrt{a^2+b^2}=3$，所以上焦点 $F(0,3)$，

则下焦点为 $F_1(0,-3)$.又 $A(3,1)$，由双曲线的定义得 $|PF|+|PA|=2a+|PF_1|+|PA|\geqslant 2a+|AF_1|=4+\sqrt{3^2+(1+3)^2}=9$，

由图知，当 A，P，F_1 三点共线（P 在线段 AF_1 上）时，$|PF|+|PA|$ 取得最小值 9.

3. 已知双曲线 $C_1:x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 与椭圆 $C_2:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>\sqrt{2})$ 有公共的焦点 F_1，F_2，且 C_1 与 C_2 在第一象限的交点为 M.若 $\triangle MF_1F_2$ 的面积为 1，则 a 的值为_____.

$\sqrt{3}$　**解析**：设 F_1，F_2 分别为左、右焦点，根据椭圆以及双曲线的定义可得 $\begin{cases}|MF_1|+|MF_2|=2a,\\|MF_1|-|MF_2|=2,\end{cases}$ 所以 $|MF_1|=a+1$，$|MF_2|=a-1$，

所以$|MF_1||MF_2|=a^2-1$，

由余弦定理可得$|F_1F_2|^2=(|MF_1|+|MF_2|)^2-2|MF_1||MF_2|-2|MF_1||MF_2|\cos\angle F_1MF_2=4(a^2-1)$，

所以$\cos\angle F_1MF_2=\frac{3-a^2}{a^2-1}$，故$\sin\angle F_1MF_2=\frac{\sqrt{4a^2-8}}{a^2-1}$，

因此$\triangle MF_1F_2$的面积为$\frac{1}{2}|MF_1||MF_2|\cdot\sin\angle F_1MF_2=\frac{1}{2}(a^2-1)\cdot\frac{\sqrt{4a^2-8}}{a^2-1}=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-8}=1$，

解得$a=\sqrt{3}$.

4.若椭圆$\frac{y^2}{49}+\frac{x^2}{24}=1$与双曲线$y^2-\frac{x^2}{24}=1$有公共点$P$，则以$P$与椭圆两焦点为顶点的三角形的周长为_____，面积为_____.

24　24　**解析：**由已知可得椭圆与双曲线具有共同的焦点$F_1(0,5)$，$F_2(0,-5)$.

由椭圆与双曲线的定义可得$\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=14,\\||PF_1|-|PF_2||=2,\end{cases}$

所以$\begin{cases}|PF_1|=8,\\|PF_2|=6\end{cases}$或$\begin{cases}|PF_1|=6,\\|PF_2|=8.\end{cases}$

又$|F_1F_2|=10$，所以$\triangle PF_1F_2$为直角三角形，且$\angle F_1PF_2=90°$，所以周长为$|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=14+10=24$，$S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=24$.

5.设O为坐标原点，F_1，F_2为双曲线$C:\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{6}=1$的两个焦点.若点$P$在双曲线$C$上，$\cos\angle F_1PF_2=\frac{4}{5}$，则$|OP|=$_____.

$3\sqrt{7}$　**解析：**因为$||PF_1|-|PF_2||=2a=6$①，$|F_1F_2|=2\sqrt{9+6}=2\sqrt{15}$，

所以由余弦定理得$|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\angle F_1PF_2=|F_1F_2|^2$，

即$|PF_1|^2+|PF_2|^2-\frac{8}{5}|PF_1||PF_2|=(2\sqrt{15})^2$②，联立①②，

解得$|PF_1||PF_2|=60$，$|PF_1|^2+|PF_2|^2=156$，

而$\overrightarrow{PO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2})$，

所以$|OP|=|\overrightarrow{PO}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|$

$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{PF_1}|^2+2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}+|\overrightarrow{PF_2}|^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{156+2\times60\times\frac{4}{5}}=3\sqrt{7}$.

6.设圆C与圆$A:(x+\sqrt{5})^2+y^2=4$，圆$B:(x-\sqrt{5})^2+y^2=4$中的一个内切，与另一个外切.

(1)求圆C的圆心轨迹L的方程；

(2)已知点$M\left(\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$，$F(\sqrt{5},0)$，且$P$为$L$上的动点，求$||MP|-|FP||$的最大值.

解：(1)设两圆的圆心分别为$A(-\sqrt{5},0)$，$B(\sqrt{5},0)$，半径均为2，设圆C的半径为r.

由题意，得$|CA|=r-2$，$|CB|=r+2$或$|CA|=r+2$，$|CB|=r-2$，

则$|CA|-|CB|=-4$或$|CA|-|CB|=4$，

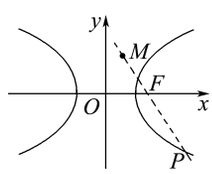
即$||CA|-|CB||=4$.

因为$4<2\sqrt{5}$，所以圆C的圆心轨迹为以A，B为焦点的双曲线，其中$2a=4$，$c=\sqrt{5}$，$b^2=1$，

所以圆C的圆心轨迹L的方程为$\frac{x^2}{4}-y^2=1$.

(2)由(1)知，F为双曲线L的一个焦点.

如图，连接MF并延长交双曲线于点P，此时$|MP|-|FP|=|MF|$为$||MP|-|FP||$的最大值.



又$|MF|=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}-\sqrt{5}\right)^2+\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2}=2$，

所以$||MP|-|FP||$的最大值为2.

自我超越

已知双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点$P$在双曲线的右支上且位于第一象限.若直线$PF_2$的斜率为$\sqrt{3}$，则$\triangle PF_1F_2$的内切圆面积为　(　　)

A.4π　　B.6π

C.12π　　D.16π

C　**解析：**由题意知$F_1(-5,0)$，$F_2(5,0)$，$|PF_1|-|PF_2|=6$.

如图，设圆C与线段PF_1，PF_2，F_1F_2分别相切于点D，E，G，则$|PD|=|PE|$，$|F_1D|=|F_1G|$，$|F_2G|=|F_2E|$，所以$|F_1G|-|F_2G|=|F_1D|-|F_2E|=$

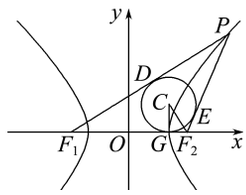
$|PF_1|-|PF_2|=6$，所以 $G(3,0)$，从而可知内切圆的圆心 C 在直线 $x=3$ 上.

因为 PF_2 的斜率为 $\sqrt{3}$，所以倾斜角为 $60°$.

因为 CF_2 是 $\angle PF_2F_1$ 的平分线，所以直线 CF_2 的倾斜角为 $120°$，方程为 $y=-\sqrt{3}(x-5)$.

将 $x=3$ 代入，得 $C(3,2\sqrt{3})$，所以 $|CG|=2\sqrt{3}$，即圆 C 的半径为 $2\sqrt{3}$，

得圆 C 的面积为 12π.



3.2.2　双曲线的简单几何性质

第 1 课时　双曲线的简单几何性质

学习任务目标

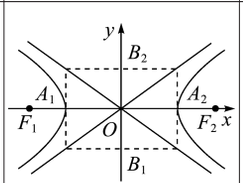
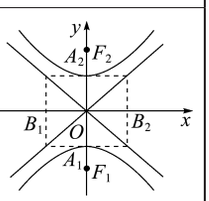
1.掌握双曲线的简单几何性质.

2.掌握双曲线标准方程中的 a，b，c 及双曲线的离心率 e 的几何意义和它们之间的关系.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　双曲线的几何性质

标准方程	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$
图形		
焦点	$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$
焦距	$\|F_1F_2\|=2c$	
范围	$x\leqslant -a$ 或 $x\geqslant a$，$y\in\mathbf{R}$	$y\leqslant -a$ 或 $y\geqslant a$，$x\in\mathbf{R}$
对称性	对称轴：坐标轴；对称中心：原点	
顶点	$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)$，$A_2(0,a)$
轴	实轴：线段 A_1A_2，长：$2a$；虚轴：线段 B_1B_2，长：$2b$；实半轴长：a，虚半轴长：b	
离心率	$e=\frac{c}{a}\in(1,+\infty)$	
渐近线	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$

知识点二　双曲线的中心和等轴双曲线

(1)双曲线的中心

双曲线的对称中心叫做双曲线的中心.

(2)等轴双曲线

实轴和虚轴等长的双曲线叫做等轴双曲线，其离心率 $e=\sqrt{2}$.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 与 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的形状相同.　(　√　)

(2)等轴双曲线的渐近线方程为 $x\pm y=0$.　(　√　)

(3)离心率是 $\sqrt{2}$ 的双曲线为等轴双曲线.　(　√　)

(4)双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ 的渐近线方程是 $3x\pm 2y=0$.　(　√　)

2.(多选)已知双曲线的方程为 $x^2-8y^2=32$，则有　(　　)

A.实轴长为 $8\sqrt{2}$　　B.虚轴长为 4

C.焦距为 6　　D.离心率为 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

ABD　**解析**：将双曲线方程 $x^2-8y^2=32$ 化为标准方程为 $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{4}=1$，可得 $a=4\sqrt{2}$，$b=2$，$c=6$，

所以双曲线的实轴长为 $8\sqrt{2}$，虚轴长为 4，焦距为 12，离心率为 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

3.思考并回答下列问题：

(1)渐近线相同的双曲线的方程一定相同吗？

提示：不一定.

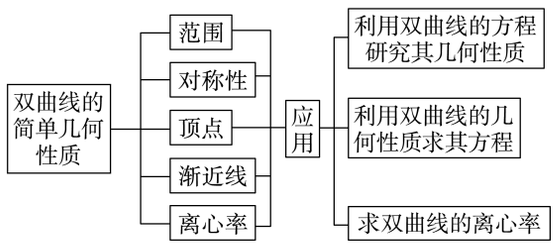
(2)双曲线的离心率 e 和 $\frac{b}{a}$ 有什么关系？

提示：$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}=\sqrt{\frac{c^2-a^2}{a^2}}=\sqrt{e^2-1}$.

(3)双曲线的离心率是如何影响双曲线的形状的？

提示：双曲线的离心率刻画了双曲线的“张口”大小，e 越大，张口越大.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 利用双曲线的方程研究其几何性质

1.(多选)已知双曲线方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$，则有（　　）

A.焦点坐标为(±1,0)

B.渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$

C.离心率为$\sqrt{3}$

D.实轴长为 $2\sqrt{2}$

BC　**解析：**因为双曲线方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$，所以 $a=1$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3}$，所以该双曲线的焦点坐标为($\pm\sqrt{3}$,0)，故A错误；渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$，故B正确；离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$，故C正确；实轴长 $2a=2$，故D错误.

2.关于椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 与双曲线 $\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{4}=1$，下列说法正确的是（　　）

A.有相同的离心率　　B.有相等的焦距

C.有相同的焦点　　D.有相同的顶点

B　**解析：**对于椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$，$a=5$，$b=3$，$c=4$，所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$，焦距 $2c=8$，焦点为(-4,0)，(4,0)，顶点为(-5,0)，(5,0)，(0,3)，(0,-3).

双曲线 $\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{4}=1$，$a=2\sqrt{3}$，$b=2$，$c=4$，则离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，焦距 $2c=8$，焦点为(0,4)，(0,-4)，顶点为(0,$2\sqrt{3}$)，(0,$-2\sqrt{3}$).

综上可知，椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 与双曲线 $\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{4}=1$ 有相同的焦距.故选B.

【探究总结】

根据双曲线的方程研究其几何性质的方法

(1)已知双曲线方程讨论其几何性质时，应先将方程化为标准形式，找出对应的 a，b，利用 $c^2=a^2+b^2$ 求出 c，再按定义求出其焦点坐标、焦距、实轴长、虚轴长、顶点坐标、离心率、渐近线方程；

(2)已知双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 或 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，求双曲线的渐近线方程时，直接将标准方程等号右边的1变为0，即可得出渐近线方程.

任务2 利用双曲线的几何性质求双曲线的方程

探究活动

例1　求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1)焦点在 x 轴上，离心率为 $\frac{5}{3}$，且经过点 $M(-3,2\sqrt{3})$；

(2)渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$，且经过点 $A(2,-3)$.

解：(1)设所求双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$.

因为 $e=\frac{5}{3}$，所以 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=1+\frac{b^2}{a^2}=\frac{25}{9}$，所以 $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$.

又由题意，得 $\frac{9}{a^2}-\frac{12}{b^2}=1$，解得 $\begin{cases}a^2=\frac{9}{4},\\b^2=4,\end{cases}$

故所求双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{\frac{9}{4}}-\frac{y^2}{4}=1$.

(2)(方法一)因为双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$.

当焦点在 x 轴上时,设所求双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,则 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$①.

因为点 $A(2,-3)$ 在双曲线上,所以 $\frac{4}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1$②.

联立①②,方程组无解.

当焦点在 y 轴上时,设所求双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,则 $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$③.

因为点 $A(2,-3)$ 在双曲线上,所以 $\frac{9}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$④.

联立③④,解得 $a^2=8,b^2=32$.

所以所求双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{32}=1$.

(方法二)因为双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$,所以可设双曲线方程为 $\frac{x^2}{2^2}-y^2=\lambda(\lambda\neq0)$.

因为 $A(2,-3)$ 在双曲线上,所以 $\frac{2^2}{2^2}-(-3)^2=\lambda$,即 $\lambda=-8$.

故所求双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{32}=1$.

【探究总结】

利用双曲线的几何性质求双曲线的方程的方法

(1)若双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{n}{m}x(m>0,n>0)$,则双曲线方程可设为 $\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=\lambda(\lambda\neq0)$.

(2)与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 共渐近线的双曲线的方程可设为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda\neq0)$;与双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 共渐近线的双曲线的方程可设为 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=\lambda(\lambda\neq0)$.

应用迁移

1.(2023·北京卷)已知双曲线 C 的焦点为 $(-2,0)$ 和 $(2,0)$,离心率为 $\sqrt{2}$,则 C 的方程为_____.

$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$　**解析**:令双曲线 C 的实半轴长、虚半轴长分别为 a,b,显然双曲线 C 的中心为坐标原点,焦点在 x 轴上,其半焦距 $c=2$.由双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{2}$,得 $\frac{c}{a}=\sqrt{2}$,解得 $a=\sqrt{2}$,则 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{2}$,所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$.

2.求适合下列条件的双曲线的标准方程:

(1)虚轴长为 12,离心率为 $\frac{5}{4}$;

(2)与双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ 有公共焦点,且经过点 $(3\sqrt{2},2)$;

(3)与双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 有共同渐近线,且过点 $(-3,2\sqrt{3})$.

解:(1)设所求双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 或 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$.

由题意知 $2b=12,\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$ 且 $c^2=a^2+b^2$,

所以 $b=6,c=10,a=8$,

所以所求双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ 或 $\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{36}=1$.

(2)双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点为 $F_1(-2\sqrt{5},0)$,$F_2(2\sqrt{5},0)$.

设所求双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,

则有 $\begin{cases}\frac{18}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1,\\ a^2+b^2=20,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=12,\\ b^2=8.\end{cases}$

故所求双曲线的方程为 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$.

(3)设所求双曲线方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=\lambda(\lambda\neq0)$,

将点 $(-3,2\sqrt{3})$ 代入得 $\lambda=\frac{1}{4}$,

所以双曲线方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=\frac{1}{4}$,即 $\frac{x^2}{\frac{9}{4}}-\frac{y^2}{4}=1$.

任务3 求双曲线的离心率

探究活动

例 2　已知 F_1,F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点,M 为双曲线上的点.若 $MF_1\perp MF_2$,$\angle MF_2F_1=60°$,求双曲线的离心率.

解:由题意知,M 为双曲线右支上的点,由 $MF_1\perp$

MF_2，$\angle MF_2F_1=60°$，$|F_1F_2|=2c$，得$|MF_1|=\sqrt{3}c$，$|MF_2|=c$，所以$|MF_1|-|MF_2|=(\sqrt{3}-1)c=2a$，

所以双曲线的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}=\frac{2c}{(\sqrt{3}-1)c}=\sqrt{3}+1$.

［一题多思］

思考1. 若把本例中的“$\angle MF_2F_1=60°$”改为“$\tan\angle MF_1F_2=\frac{1}{2}$”，其他条件不变，求双曲线的离心率.

解： 因为$MF_1\perp MF_2$，$\tan\angle MF_1F_2=\frac{1}{2}$，$|F_1F_2|=2c$，所以$\sin\angle MF_1F_2=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$|MF_2|=|F_1F_2|\cdot\sin\angle MF_1F_2=\frac{2\sqrt{5}c}{5}$，$|MF_1|=\frac{4\sqrt{5}c}{5}$.

又点M在双曲线上，所以$2a=|MF_1|-|MF_2|=\frac{2\sqrt{5}c}{5}$，所以$e=\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}=\sqrt{5}$.

思考2. 若把本例中的“$MF_1\perp MF_2$，$\angle MF_2F_1=60°$”改为“$|MF_1|=3|MF_2|$”，其他条件不变，求双曲线离心率e的取值范围.

解： 由题意，得$\begin{cases}|MF_1|=3|MF_2|,\\|MF_1|-|MF_2|=2a,\end{cases}$解得$|MF_2|=a$，$|MF_1|=3a$.

因为$|MF_1|+|MF_2|\geqslant|F_1F_2|$，即$4a\geqslant2c$，所以$e=\frac{c}{a}\leqslant2$.又$e>1$，所以离心率$e$的取值范围是$(1,2]$.

【探究总结】

求双曲线离心率的三种方法

(1)若可求得a，c，则直接利用$e=\frac{c}{a}$求解；

(2)若已知a，b，则可直接利用$e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$求解；

(3)若得到的是关于a，c的二次齐次方程$rc^2+s\cdot ac+ta^2=0(r,s,t$为常数，且$r\neq0)$，则方程两边同除以$a^2$可转化为关于$e$的一元二次方程$re^2+se+t=0$，进而求解.

应用迁移

已知焦点在y轴上的双曲线$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，该双曲线的上焦点$F$到下顶点的距离为36，到渐近线的距离为12，则该双曲线的离心率为　（　）

A.$\frac{5}{3}$　　B.$\frac{5}{4}$　　C.$\frac{4}{3}$　　D.$\frac{4}{5}$

B　**解析：** 由题意得$F(0,c)$，双曲线$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的渐近线方程为$ax\pm by=0$，

因为双曲线的上焦点F到下顶点的距离为36，所以$a+c=36$.

因为$F(0,c)$到渐近线的距离为12，所以$\frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=b=12$，

所以$b^2=c^2-a^2=(c+a)(c-a)=144$，得$c-a=4$.

由$\begin{cases}c-a=4,\\c+a=36,\end{cases}$得$\begin{cases}c=20,\\a=16,\end{cases}$

所以双曲线的离心率为$e=\frac{c}{a}=\frac{20}{16}=\frac{5}{4}$.

课后素养评价（三十）

基础落实

1.（多选）已知双曲线的方程为$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$，则下列说法正确的有　（　）

A.焦点在y轴上

B.渐近线方程为$2x\pm\sqrt{5}y=0$

C.虚轴长为4

D.离心率为$\frac{3}{5}$

AB　**解析：** 双曲线的方程为$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$，则双曲线的焦点在$y$轴上，渐近线方程为$2x\pm\sqrt{5}y=0$，虚轴长为$2\sqrt{5}$，离心率为$\frac{3}{2}$，判断知A，B正确.

2. 已知双曲线C：$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$，则下列说法不正确的是　（　）

A.C的焦点坐标为$(\pm4,0)$

B.C的顶点坐标为$(0,\pm3)$

C.C的离心率为$\frac{4}{3}$

D.C的虚轴长为$2\sqrt{7}$

A　**解析：** 因为$a^2=9$，$b^2=7$，所以$a=3$，$b=\sqrt{7}$，$c=\sqrt{a^2+b^2}=4$.

因为双曲线的焦点在y轴上，所以C的焦点坐标为$(0,\pm4)$，顶点为$(0,\pm3)$，离心率为$\frac{4}{3}$，虚轴长为$2\sqrt{7}$.

3.(多选)以椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$的顶点为顶点,离心率为2的双曲线的方程可能为　　(　　)

A.$\frac{x^2}{80}-\frac{y^2}{16}=1$　　B.$\frac{y^2}{45}-\frac{x^2}{9}=1$

C.$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1$　　D.$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{27}=1$

CD　**解析**:因为离心率为2,当顶点为$(\pm4,0)$时,$a=4$,$c=8$,$b=4\sqrt{3}$,双曲线方程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1$;当顶点为$(0,\pm3)$时,$a=3$,$c=6$,$b=3\sqrt{3}$,双曲线方程为$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{27}=1$.

4.与椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$共焦点,且与双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$共渐近线的双曲线的方程为　　(　　)

A.$\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{8}=1$　　B.$\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{12}=1$

C.$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$　　D.$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{12}=1$

A　**解析**:因为椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$,焦点在$y$轴上,且$c^2=36-16=20$,

又因为所求双曲线与双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$共渐近线,

所以设所求双曲线为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=\lambda(\lambda<0)$,即$\frac{y^2}{-6\lambda}-\frac{x^2}{-4\lambda}=1$,

则$c^2=-6\lambda-4\lambda=20$,解得$\lambda=-2$.

所以所求双曲线的方程为$\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{8}=1$.

5.已知双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$,其中$a>0$,双曲线的渐近线与圆$(x-2)^2+y^2=1$相切,则双曲线的离心率为　　(　　)

A.$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B.$\sqrt{3}$　　C.$\sqrt{2}$　　D.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

A　**解析**:根据题意,可以求得双曲线的渐近线方程为$x\pm ay=0$,而圆$(x-2)^2+y^2=1$的圆心为$(2,0)$,半径为1,结合题意有$\frac{|2\pm0|}{\sqrt{1+a^2}}=1$,结合$a>0$,得$a=\sqrt{3}$,所以$c=\sqrt{3+1}=2$,所以有$e=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

6.已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$,$F_2$,点$P$在双曲线上,且$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$,$|PF_1|=2|PF_2|$,则双曲线的离心率$e=$____.

$\sqrt{3}$　**解析**:设$|PF_2|=x$,则$|PF_1|=2x$,由双曲线的定义可得$|PF_1|-|PF_2|=2x-x=2a$,

即$x=2a$,所以$|PF_2|=2a$,$|PF_1|=4a$.

又$|F_1F_2|=2c$,$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$,

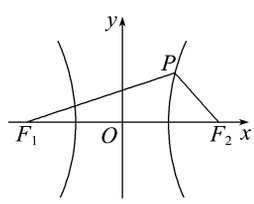
在$\triangle PF_1F_2$中,由余弦定理的推论,

得$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}$,

即$\frac{(4a)^2+(2a)^2-(2c)^2}{2\cdot4a\cdot2a}=\frac{1}{2}$,解得$c=\sqrt{3}a$,故离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$.

7.设双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$,$F_2$,离心率为2,$P$为$C$上一点,且$\angle F_1PF_2=120°$.若$\triangle F_1PF_2$的面积为$4\sqrt{3}$,则$a=$_____.

2　**解析**:不妨取点P在第一象限,如图所示.



根据双曲线的定义可得$|PF_1|-|PF_2|=2a$,且$|F_1F_2|=2c$.

由离心率为2,即$\frac{c}{a}=2$,可得$c=2a$,即$|F_1F_2|=4a$.

设$|PF_2|=m>0$,则$|PF_1|=2a+m$.

由$\triangle F_1PF_2$的面积为$4\sqrt{3}$,可得$\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\cdot\sin\angle F_1PF_2=\frac{1}{2}m(2a+m)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$,

$m(2a+m)=16$.

由余弦定理的推论可得$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}=-\frac{1}{2}$,

即$\frac{(2a+m)^2+m^2-(4a)^2}{2m(2a+m)}=-\frac{1}{2}$,整理可得$2m^2+4am-12a^2=-m(2a+m)$,

即$12a^2=3m(2a+m)$,所以$12a^2=48$,解得$a=2$.

8.若双曲线$x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$经过点$(3,4)$,则该双曲线的渐近线方程是_____.

$y=\pm\sqrt{2}x$　**解析**：由已知得 $3^2-\frac{4^2}{b^2}=1$，解得 $b=\sqrt{2}$ 或 $b=-\sqrt{2}$.又因为 $b>0$，所以 $b=\sqrt{2}$.因为 $a=1$，所以双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$.

9. 与椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ 共焦点，离心率之和为 $\frac{14}{5}$ 的双曲线的标准方程为_____.

$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{12}=1$　**解析**：易知椭圆的焦点是 $(0,4),(0,-4)$，

所以 $c=4$，$e=\frac{4}{5}$，

所以双曲线的离心率为 $\frac{14}{5}-\frac{4}{5}=2$.

设双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$，

所以 $\frac{4}{a}=2$，所以 $a=2$，$b^2=4^2-2^2=12$.

所以双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{12}=1$.

10. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{m}=1$ 的开口比等轴双曲线的开口更开阔，则实数 m 的取值范围是_____.

$(4,+\infty)$　**解析**：因为等轴双曲线的离心率为 $\sqrt{2}$，且双曲线 C 的开口比等轴双曲线的开口更开阔，所以双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{m}=1$ 的离心率 $e>\sqrt{2}$，即 $\frac{4+m}{4}>2$，所以 $m>4$.

故实数 m 的取值范围是 $(4,+\infty)$.

能力提升

1.（数学文化）图 1 为陕西历史博物馆收藏的唐金筐宝钿团花纹金杯，杯身曲线内收，玲珑娇美，巧夺天工，是唐代金银细作的典范之作.该杯的主体部分可以近似看作是离心率为 $\sqrt{5}$ 的双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的右支与 y 轴及平行于 x 轴的两条直线围成的曲边四边形 $ABMN$ 绕 y 轴旋转一周得到的几何体.如图 2，若 P 为 C 右支上的一点，F 为 C 的左焦点，则 $|PF|$ 与 P 到 C 的一条渐近线的距离之和的最小值为　（　）



图1

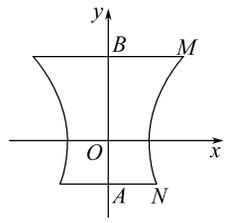


图2

A.2　　B.3　　C.4　　D.5

C　**解析**：由题意可知 $a=1$，$e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$，则 $c=\sqrt{5}$，$b^2=c^2-a^2=4$，所以 $b=2$，

所以双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{4}=1$，一条渐近线方程为 $2x-y=0$.设双曲线的右焦点为 F_2，则 $F_2(\sqrt{5},0)$ 到渐近线 $2x-y=0$ 的距离为 $d=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=2$，所以 $|PF_2|$ 与 P 到 C 的一条渐近线的距离之和的最小值为 $d=2$.

又因为 $|PF|=2a+|PF_2|$，

所以 $|PF|$ 与 P 到 C 的一条渐近线的距离之和的最小值为 $2a+2=4$.

2. 已知左、右焦点分别为 F_1,F_2 的双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 过点 $\left(\sqrt{15},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，点 P 在双曲线 C 上.若 $|PF_1|=3$，则 $|PF_2|=$　（　）

A.3　　B.6　　C.9　　D.12

C　**解析**：由左、右焦点分别为 F_1,F_2 的双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 过点 $\left(\sqrt{15},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，可得 $\frac{15}{a^2}-\frac{6}{9}=1$，

解得 $a=3$.又 $b=1$，所以 $c=\sqrt{10}$，$a+c>3$.

因为点 P 在双曲线 C 上，若 $|PF_1|=3$，可得 P 在双曲线的左支上，

则 $|PF_2|=2a+|PF_1|=6+3=9$.故选 C.

3. 设 F 为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点，O 为坐标原点，以 OF 为直径的圆与圆 $x^2+y^2=a^2$ 交于 P,Q 两点.若 $|PQ|=|OF|$，则 C 的离心率为　（　）

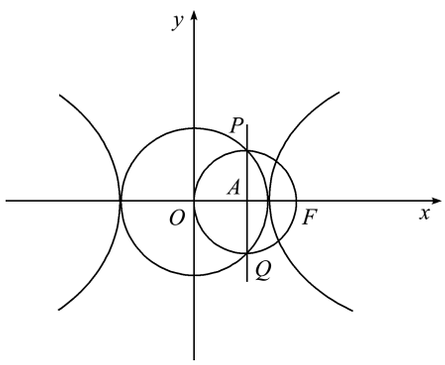
A.$\sqrt{2}$　　B.$\sqrt{3}$　　C.2　　D.$\sqrt{5}$

A　**解析**：如图，设 PQ 与 x 轴交于点 A，由对称性可知 $PQ\perp x$ 轴.

又因为 $|PQ|=|OF|=c$，所以 $|PA|=\frac{c}{2}$，所以 PA 为以 OF 为直径的圆的半径，所以 $|OA|=\frac{c}{2}$，所以

$P\left(\frac{c}{2},\frac{c}{2}\right)$.

又点 P 在圆 $x^2+y^2=a^2$ 上，所以 $\frac{c^2}{4}+\frac{c^2}{4}=a^2$，即 $\frac{c^2}{2}=a^2$，所以 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=2$，所以 $e=\sqrt{2}$.



4. 已知圆 $C:x^2+y^2-4x+3=0$ 与双曲线 $D:\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的渐近线有公共点，则双曲线 D 的离心率的取值范围为_____.

$[2,+\infty)$　**解析**：圆 $C:(x-2)^2+y^2=1$，双曲线 $D:\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的渐近线为 $ax\pm by=0$，因为圆 C 与双曲线 D 的渐近线有公共点，所以圆心 $C(2,0)$ 到渐近线的距离 $d=\frac{2a}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant 1$，所以 $3a^2\leqslant b^2$，所以 $c^2=a^2+b^2\geqslant 4a^2$，即 $\frac{c^2}{a^2}\geqslant 4$，所以 $e=\frac{c}{a}\geqslant 2$.

5. 已知双曲线 $E:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的离心率为 2，点 P 是 E 上的动点，则点 P 到 E 的两条渐近线的距离之积为_____.

3　**解析**：由题意知 $a=2$，又 $\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}=\sqrt{3}$，得 $b=2\sqrt{3}$，所以双曲线 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$，渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，即 $\sqrt{3}x\pm y=0$.

设 $P(s,t)$，则 $\frac{s^2}{4}-\frac{t^2}{12}=1$，即 $3s^2-t^2=12$，

所以点 P 到 E 的两条渐近线的距离之积为 $\frac{|\sqrt{3}s+t|}{2}\cdot\frac{|\sqrt{3}s-t|}{2}=\frac{|3s^2-t^2|}{4}=3$.

6. 已知双曲线的中心在原点，焦点 F_1,F_2 在坐标轴上，离心率为 $\sqrt{2}$，且过点 $P(4,-\sqrt{10})$.

(1)求双曲线的方程；

(2)若点 $M(3,m)$ 在双曲线上，求证：$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$；

(3)在(2)的条件下，求 $\triangle F_1MF_2$ 的面积.

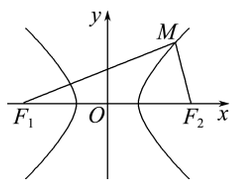
(1)**解**：因为 $e=\sqrt{2}$，所以可设双曲线的方程为 $x^2-y^2=\lambda(\lambda\neq 0)$.

因为双曲线过点 $P(4,-\sqrt{10})$，所以 $16-10=\lambda$，即 $\lambda=6$，

所以双曲线的方程为 $x^2-y^2=6$，即 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{6}=1$.

(2)**证明**：由(1)可知，$a=b=\sqrt{6}$，所以 $c=2\sqrt{3}$.

设 F_1,F_2 分别为双曲线的左、右焦点，则 $F_1(-2\sqrt{3},0)$，$F_2(2\sqrt{3},0)$，如图所示.



(方法一)因为 $k_{MF_1}=\frac{m}{3+2\sqrt{3}}$，$k_{MF_2}=\frac{m}{3-2\sqrt{3}}$，所以 $k_{MF_1}\cdot k_{MF_2}=\frac{m^2}{9-12}=-\frac{m^2}{3}$.

因为点 $M(3,m)$ 在双曲线上，所以 $9-m^2=6$，即 $m^2=3$，所以 $k_{MF_1}\cdot k_{MF_2}=-1$，

所以 $MF_1\perp MF_2$，所以 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$.

(方法二)因为 $\overrightarrow{MF_1}=(-2\sqrt{3}-3,-m)$，$\overrightarrow{MF_2}=(2\sqrt{3}-3,-m)$，

所以 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=(-2\sqrt{3}-3)\times(2\sqrt{3}-3)+m^2=-3+m^2$.

因为点 M 在双曲线上，所以 $9-m^2=6$，即 $m^2=3$，所以 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$.

(3)**解**：由(2)知，$\triangle F_1MF_2$ 的底边长 $|F_1F_2|=4\sqrt{3}$，$\triangle F_1MF_2$ 的高 $h=|m|=\sqrt{3}$，所以 $S_{\triangle F_1MF_2}=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times\sqrt{3}=6$.

自我超越

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，离心率为 e，过原点的直线与 C 的左、右两支分别交于 M,N 两点.若 $|MF|\cdot|NF|=4$，$\angle MFN=60°$，则 $e^2+\frac{a^2}{4}$ 的最小值为　(　　)

A. $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$　　B. $1+\sqrt{3}$

C. $1+2\sqrt{2}$　　D. $2+\sqrt{3}$

B　**解析**：如图，记双曲线 C 的左焦点为 F_1，连接 MF_1，NF_1．由对称性可知，四边形 MF_1NF 是平行四边形，所以 $|MF_1|=|NF|$．

因为 $|MF|-|MF_1|=2a$，则 $|MF|-|NF|=2a$．

设 $|MF|=m$，则 $|NF|=|MF_1|=m-2a$．又 $|MF|\cdot|NF|=4$，

所以 $m(m-2a)=4$，即 $2a=m-\dfrac{4}{m}$，则 $4a^2=m^2+\dfrac{16}{m^2}-8$．

因为 $\angle MFN=60°$，所以 $\angle F_1MF=120°$．

在 $\triangle F_1MF$ 中，$|F_1F|^2=|MF_1|^2+|MF|^2-2|MF_1|\cdot|MF|\cos 120°$，

即 $4c^2=(m-2a)^2+m^2+4=\dfrac{16}{m^2}+m^2+4=4a^2+12$，

所以 $e^2+\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{4c^2}{4a^2}+\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{4a^2+12}{4a^2}+\dfrac{a^2}{4}=1+\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{a^2}{4}\geqslant 1+\sqrt{3}$，

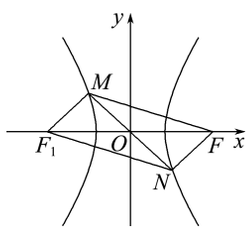
当且仅当 $a^2=2\sqrt{3}$ 时，等号成立．

此时由于 $m^2+\dfrac{16}{m^2}-8\geqslant 2\sqrt{m^2\cdot\dfrac{16}{m^2}}-8=0$，当且仅当 $m=2$ 时，等号成立，

注意当 $m=2$ 时，$4a^2=m^2+\dfrac{16}{m^2}-8=0$，不满足题意，

故 $m^2+\dfrac{16}{m^2}-8>0$，所以当 $a^2=2\sqrt{3}$ 时，$m^2+\dfrac{16}{m^2}-8=8\sqrt{3}$ 有解，

且由 $m(m-2a)=4>0$，得 $m-2a>0$ 满足题意，所以 $e^2+\dfrac{a^2}{4}$ 的最小值为 $1+\sqrt{3}$．



第 2 课时　双曲线几何性质的应用

学习任务目标

1. 从数与形两方面理解直线与双曲线的位置关系．

2. 会解决直线与双曲线相交的相关问题．

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点　直线与双曲线的位置关系

设直线 l 的方程为 $y=kx+m(m\neq 0)$①，

双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$②，

把①代入②，得 $(b^2-a^2k^2)x^2-2a^2mkx-a^2m^2-a^2b^2=0$．

(1) 当 $b^2-a^2k^2=0$，即 $k=\pm\dfrac{b}{a}$ 时，直线 l 与双曲线 C 的渐近线平行，直线 l 与双曲线 C 相交于一点．

(2) 当 $b^2-a^2k^2\neq 0$，即 $k\neq\pm\dfrac{b}{a}$ 时，$\Delta=(-2a^2mk)^2-4(b^2-a^2k^2)(-a^2m^2-a^2b^2)$．

$\Delta>0\Rightarrow$ 直线 l 与双曲线 C 有两个公共点，此时称直线 l 与双曲线 C 相交；

$\Delta=0\Rightarrow$ 直线 l 与双曲线 C 有一个公共点，此时称直线 l 与双曲线 C 相切；

$\Delta<0\Rightarrow$ 直线 l 与双曲线 C 没有公共点，此时称直线 l 与双曲线 C 相离．

【概念辨析】

1. 判断正误（正确的打“√”，错误的打“×”）．

(1) 过点 $A(1,0)$ 作直线 l 与双曲线 $x^2-y^2=1$ 只有一个公共点，则这样的直线可作两条．（　×　）

(2) 直线 $l:y=x$ 与双曲线 $C:2x^2-y^2=2$ 有两个公共点．（　√　）

(3) 直线与双曲线有唯一交点是直线与双曲线相切的必要不充分条件．（　√　）

2. 若直线 $y=kx$ 与双曲线 $4x^2-y^2=16$ 相交，则实数 k 的取值范围为（　　）

A. $(-2,2)$　　B. $[-2,2)$

C. $(-2,2]$　　D. $[-2,2]$

A　**解析**：由题易得，双曲线的渐近线方程为 $y=\pm 2x$，故 $k\neq\pm 2$．

将 $y=kx$ 代入 $4x^2-y^2=16$，得 $(4-k^2)x^2-16=0$，

由 $\Delta=64(4-k^2)>0$，得 $-2<k<2$．

故实数 k 的取值范围为 $(-2,2)$．

3.思考并回答下列问题：

(1)与双曲线只有一个公共点的直线是双曲线的切线吗？

提示：不一定，与双曲线只有一个公共点的直线有两种：一种是与渐近线平行的直线；另一种是与双曲线相切的直线.

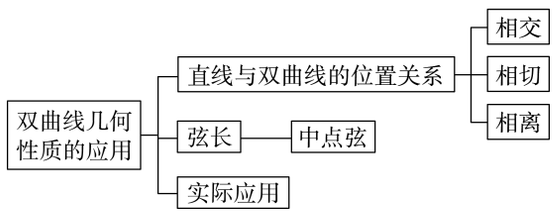
(2)如何判断直线 $y=kx+m(m\neq0)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0(a>0,b>0)$ 的两个交点是在同一支上，还是在两支上？

提示：利用方程 $(b^2-a^2k^2)x^2-2a^2mkx-a^2m^2-a^2b^2=0$ 判断，

若 $\frac{-a^2m^2-a^2b^2}{b^2-a^2k^2}>0$，则直线与双曲线的两个交点在一支上；

若 $\frac{-a^2m^2-a^2b^2}{b^2-a^2k^2}<0$，则直线与双曲线的两个交点在两支上.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 直线与双曲线的位置关系

1.若直线 $l:y=k(x-1)$ 与双曲线 $x^2-y^2=4$ 的右支有两个交点，则 k 的取值范围为_____.

$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},-1\right)\cup\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$　**解析**：联立方程 $\begin{cases}y=k(x-1),\\x^2-y^2=4,\end{cases}$ 消去 y，得 $(1-k^2)x^2+2k^2x-k^2-4=0$.由题意，设方程的两根为 x_1,x_2，

则 $\begin{cases}1-k^2\neq0,\\\Delta=4(4-3k^2)>0,\\x_1+x_2=-\frac{2k^2}{1-k^2}>0,\\x_1x_2=-\frac{k^2+4}{1-k^2}>0,\end{cases}$

解得 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}<k<-1$ 或 $1<k<\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以 k 的取值范围为 $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},-1\right)\cup\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

2.已知双曲线 $x^2-y^2=4$，直线 $l:y=k(x-1)$，试确定满足下列条件的实数 k 的取值范围.

(1)直线 l 与双曲线有两个不同的公共点；

(2)直线 l 与双曲线有且只有一个公共点；

(3)直线 l 与双曲线没有公共点.

解：由 $\begin{cases}x^2-y^2=4,\\y=k(x-1).\end{cases}$ 消去 y，

得 $(1-k^2)x^2+2k^2x-k^2-4=0.(*)$

当 $1-k^2\neq0$，即 $k\neq\pm1$ 时，

$\Delta=(2k^2)^2-4(1-k^2)(-k^2-4)=4\times(4-3k^2)$.

(1)由 $\begin{cases}4-3k^2>0,\\1-k^2\neq0,\end{cases}$ 得 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}<k<\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 且 $k\neq\pm1$，

此时方程(*)有两个不同的实数根，

即直线 l 与双曲线有两个不同的公共点.

故实数 k 的取值范围为 $\left\{k\left|-\frac{2\sqrt{3}}{3}<k<\frac{2\sqrt{3}}{3},\text{且 }k\neq\pm1\right.\right\}$.

(2)由 $\begin{cases}4-3k^2=0,\\1-k^2\neq0,\end{cases}$ 得 $k=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

此时方程(*)有两个相同的实数根，

即直线 l 与双曲线有且只有一个公共点.

当 $1-k^2=0$，即 $k=\pm1$ 时，

直线 l 与双曲线的渐近线平行，

方程(*)可化为 $2x=5$，

故方程(*)只有一个实数根，即直线 l 与双曲线相交，有且只有一个公共点.

综上，当 $k=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $k=\pm1$ 时，

直线 l 与双曲线有且只有一个公共点.

(3)由 $\begin{cases}4-3k^2<0,\\1-k^2\neq0,\end{cases}$ 得 $k<-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $k>\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

此时方程(*)无实数根，即直线 l 与双曲线没有公共点.

所以实数 k 的取值范围为 $\left\{k\left|k<-\frac{2\sqrt{3}}{3},\text{或 }k>\frac{2\sqrt{3}}{3}\right.\right\}$.

【探究总结】

判断直线与双曲线的位置关系的注意点

(1)判断直线与双曲线的位置关系时，不仅要考虑消元后得到的一元二次方程的判别式，还要注意二次项

系数为0时，直线与双曲线的渐近线平行的特殊情况；

(2)注意对直线的斜率是否存在进行讨论.

任务2 弦长与中点弦问题

探究活动

例1　已知双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$，求过点$A(3,-1)$且被点A平分的弦MN所在直线的方程.

解：(方法一)由题意知，直线的斜率存在，故可设直线方程为$y+1=k(x-3)$，即$y=kx-3k-1$.

由$\begin{cases}y=kx-3k-1,\\ \frac{x^2}{4}-y^2=1,\end{cases}$消去$y$并整理，

得$(1-4k^2)x^2+8k(3k+1)x-36k^2-24k-8=0$，$\Delta=64k^2(3k+1)^2+4(1-4k^2)(36k^2+24k+8)>0$.

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

所以$x_1+x_2=\frac{8k(3k+1)}{4k^2-1}$.

因为$A(3,-1)$为MN的中点，

所以$\frac{x_1+x_2}{2}=3$，即$\frac{8k(3k+1)}{2(4k^2-1)}=3$，解得$k=-\frac{3}{4}$.

当$k=-\frac{3}{4}$时，满足$\Delta>0$，符合题意，

故所求直线MN的方程为$y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$，即$3x+4y-5=0$.

(方法二)设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

因为M，N均在双曲线上，所以$\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}-y_1^2=1,\\ \frac{x_2^2}{4}-y_2^2=1,\end{cases}$

两式相减，得$\frac{x_2^2-x_1^2}{4}=y_2^2-y_1^2$.

所以$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{x_2+x_1}{4(y_2+y_1)}$.

因为点$A(3,-1)$平分弦MN，所以$x_1+x_2=6$，$y_1+y_2=-2$.

所以$k_{MN}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{x_2+x_1}{4(y_2+y_1)}=-\frac{3}{4}$.

经验证，该直线MN存在.

所以所求直线MN的方程为$y+1=-\frac{3}{4}(x-3)$，即$3x+4y-5=0$.

[一题多思]

思考1. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，一条直线与双曲线相交于点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$，弦$AB$的中点为$M(x_0,y_0)$，$O$为原点.你能求出$k_{OM}\cdot k_{AB}$的值吗？

解：将$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$代入双曲线方程，得$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$

两式作差并整理，得$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}-\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=0$.

因为弦AB的中点为$M(x_0,y_0)$，且$x_1\neq x_2$，所以$\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}=\frac{b^2}{a^2}$，即$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_0}{x_0}=\frac{b^2}{a^2}$，所以$k_{OM}\cdot k_{AB}=\frac{b^2}{a^2}$.

思考2. 已知斜率为-1的直线与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$交于$P$，$Q$两点.若线段$PQ$的中点为$A(3,-1)$，求双曲线的渐近线方程.

解：设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，将其代入双曲线方程，得$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$两式相减，得$\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}-\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$，

即$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}-\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$.

由题知，$x_1\neq x_2$，两边同时除以x_1-x_2，得$\frac{x_1+x_2}{a^2}-\frac{y_1+y_2}{b^2}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=0$.

因为PQ的中点为$A(3,-1)$，直线PQ的斜率为-1，所以$x_1+x_2=6$，$y_1+y_2=-2$，$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-1$，

所以$\frac{6}{a^2}-\frac{2}{b^2}=0$，解得$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3}$，即$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以双曲线的渐近线方程是$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

【探究总结】

解决弦长和中点弦问题的方法

(1)解决弦长问题和中点弦问题时，要注意一元二次方程根与系数的关系、弦长公式和中点坐标公式的应用，也可以考虑应用点差法；

(2)弦长公式

若斜率为 $k(k\neq0)$ 的直线与双曲线相交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点，则

$|AB|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$=\sqrt{\left(1+\frac{1}{k^2}\right)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}$.

应用迁移

1. 已知过双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的右焦点 F 且倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线与双曲线交于 A，B 两点，求弦 AB 的长及 AB 的中点 M 到右焦点 F 的距离.

解：由题意，可得 $F(5,0)$，

所以直线 AB 的方程为 $y=x-5$，

代入双曲线方程，得 $7x^2+90x-369=0$，$\Delta>0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则

$x_1+x_2=-\frac{90}{7}$，$x_1x_2=-\frac{369}{7}$，

所以 $|AB|=\sqrt{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{18\,432}}{7}=\frac{192}{7}$.

又 $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{45}{7}$，所以 $y_M=-\frac{80}{7}$.

所以 $|MF|=\sqrt{\left(-\frac{45}{7}-5\right)^2+\left(-\frac{80}{7}-0\right)^2}=\frac{80\sqrt{2}}{7}$.

2. 已知直线 $y=\frac{1}{3}x+2$ 与双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ 相交于点 A，B，O 为原点，求 $\triangle ABO$ 的面积.

解：由 $\begin{cases}y=\frac{1}{3}x+2,\\ \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 得 $x^2-4x-24=0$，$\Delta>0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $\begin{cases}x_1+x_2=4,\\ x_1x_2=-24,\end{cases}$

所以 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4\sqrt{7}$，

所以 $S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}\times2\times4\sqrt{7}=4\sqrt{7}$.

任务3 直线与双曲线的综合应用

探究活动

例2　(2024·上海卷)已知双曲线 $\Gamma:x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1，A_2，过点 $M(-2,0)$ 的直线 l 交双曲线 Γ 于 P，Q 两点.

(1)若双曲线 Γ 的离心率 $e=2$，求 b 的值；

(2)若 $b=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$\triangle MA_2P$ 为等腰三角形时，且点 P 在第一象限，求点 P 的坐标；

(3)连接 QO(O 为原点)并延长，交双曲线 Γ 于另一点 R，若 $\overrightarrow{A_1R}\cdot\overrightarrow{A_2P}=1$，求 b 的取值范围.

解：(1)由题意，得 $e=\frac{c}{a}=\frac{c}{1}=2$，则 $c=2$，$b=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$.

(2)当 $b=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 时，双曲线 $\Gamma:x^2-\frac{y^2}{\frac{8}{3}}=1$，$M(-2,0)$，$A_2(1,0)$.

因为 $\triangle MA_2P$ 为等腰三角形，则

①当以 MA_2 为底时，显然点 P 在直线 $x=-\frac{1}{2}$ 上，这与点 P 在第一象限矛盾，故舍去；

②当以 A_2P 为底时，$|MP|=|MA_2|=3$，

设 $P(m,n)$，则 $\begin{cases}m^2-\frac{3n^2}{8}=1,\\ (m+2)^2+n^2=9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-\frac{23}{11},\\ n=-\frac{8\sqrt{17}}{11}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=-\frac{23}{11},\\ n=\frac{8\sqrt{17}}{11}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=1,\\ n=0.\end{cases}$

因为点 P 在第一象限，显然以上均不符合题意，故舍去；

(或者由双曲线的性质知，$|MP|>|MA_2|$，矛盾，故舍去)

③当以 MP 为底时，$|A_2P|=|MA_2|=3$.

设 $P(x_0,y_0)$，其中 $x_0>0$，$y_0>0$，

则 $\begin{cases}(x_0-1)^2+y_0^2=9,\\ x_0^2-\frac{y_0^2}{\frac{8}{3}}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=2,\\ y_0=2\sqrt{2},\end{cases}$ 即 $P(2,2\sqrt{2})$.

综上所述，点 P 的坐标为 $(2,2\sqrt{2})$.

(3)由题意知，$A_1(-1,0)$，$A_2(1,0)$，

当直线 l 的斜率为 0 时，$\overrightarrow{A_1R}\cdot\overrightarrow{A_2P}=0$，不符合题意，所以 $k_l\neq0$.

设直线 $l:x=ty-2$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

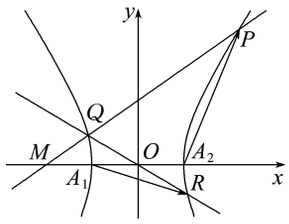
根据双曲线的对称性可知，$R(-x_2,-y_2)$，

由 $\begin{cases}x=ty-2,\\ x^2-\frac{y^2}{b^2}=1.\end{cases}$ 消去 x 并整理，得 $(b^2t^2-1)y^2-4b^2ty+3b^2=0$，

显然二次项系数 $b^2t^2-1\neq0$，

$\Delta=(-4b^2t)^2-4(b^2t^2-1)3b^2=4b^4t^2+12b^2>0$，

$y_1+y_2=\frac{4b^2t}{b^2t^2-1}$，①　$y_1y_2=\frac{3b^2}{b^2t^2-1}$.②



因为$\overrightarrow{A_1R}=(-x_2+1,-y_2)$，$\overrightarrow{A_2P}=(x_1-1,y_1)$，

所以$\overrightarrow{A_1R}\cdot\overrightarrow{A_2P}=(-x_2+1)(x_1-1)-y_1y_2=1$.

因为P，Q在直线l上，

所以$x_1=ty_1-2$，$x_2=ty_2-2$，

所以$\overrightarrow{A_1R}\cdot\overrightarrow{A_2P}=-(ty_2-3)(ty_1-3)-y_1y_2=1$，

化简，得$y_1y_2(t^2+1)-(y_1+y_2)3t+10=0$.

将①②代入上式，得$(t^2+1)\cdot\dfrac{3b^2}{b^2t^2-1}-3t\cdot\dfrac{4b^2t}{b^2t^2-1}+10=0$，

即$3b^2(t^2+1)-3t\cdot4b^2t+10(b^2t^2-1)=0$，

化简，得$b^2t^2+3b^2-10=0$，

所以$t^2=\dfrac{10}{b^2}-3$，代入到$b^2t^2-1\neq0$，得$b^2\neq3$，即$b\neq\pm\sqrt{3}$，

因为$t^2=\dfrac{10}{b^2}-3\geqslant0$，解得$b^2\leqslant\dfrac{10}{3}$，即$-\dfrac{\sqrt{30}}{3}\leqslant b\leqslant\dfrac{\sqrt{30}}{3}$，

又因为$b>0$，所以$0<b\leqslant\dfrac{\sqrt{30}}{3}$且$b\neq\sqrt{3}$.

综上，$b\in(0,\sqrt{3})\cup\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{30}}{3}\right]$.

【探究总结】

利用设而不求的方法解决直线与双曲线相交问题的步骤

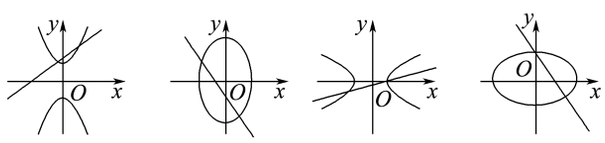
(1)设直线与双曲线的两个交点为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$；

(2)将直线方程与双曲线方程联立，消元后得到关于x的一元二次方程；

(3)结合一元二次方程根与系数的关系可求得x_1+x_2，x_1x_2，从而弦长问题、参数取值范围问题等都可以根据x_1+x_2，x_1x_2应满足的条件来解决.

应用迁移

1.如图，直线$ax-y+b=0$和曲线$bx^2+ay^2=ab(ab\neq0)$在同一平面直角坐标系中的位置可能是（　　）



A　　B　　C　　D

C　**解析：**直线方程可化为$y=ax+b$，曲线方程可化为$\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}=1$.若$a>0$，$b>0$，则曲线表示椭圆，故A不正确.关于B，D，由椭圆知直线斜率应满足$a>0$，而选项B，D的图象中直线斜率均为负值，故B，D不正确.由C可知$a>0$，$b<0$，故C正确.

2.已知F_1，F_2分别是双曲线C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，$M$为平面内一点，线段$F_1M$的中点在该双曲线右支上，$N$在$x$轴上，$\overrightarrow{F_1N}=2\overrightarrow{F_1F_2}$，$|MF_1|-|MN|=4$，$A(2,3)$为双曲线$C$上一点.

(1)求双曲线C的渐近线方程；

(2)已知过A的直线l交该双曲线于另一点B，$D(0,3)$，$\triangle DAB$的面积为6，求直线l的方程.

解：(1)如图，设线段F_1M的中点为P，

所以P在该双曲线的右支上，连接PF_2.

因为$\overrightarrow{F_1N}=2\overrightarrow{F_1F_2}$，

所以F_2是线段F_1N的中点，

所以$|PF_2|=\dfrac{1}{2}|MN|$.

由双曲线的定义知，$2a=|PF_1|-|PF_2|=\dfrac{1}{2}(|MF_1|-|MN|)=2$，

所以$a=1$，

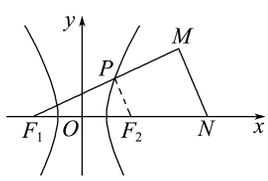
所以双曲线C的标准方程为$x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

因为$A(2,3)$为双曲线C上一点，

所以$2^2-\dfrac{3^2}{b^2}=1$，

所以$b=\sqrt{3}$，

所以双曲线C的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$.



(2)由题意知，双曲线C的标准方程为$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$，

设直线l的方程为$x=t(y-3)+2$，代入$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$，

整理得$(3t^2-1)y^2+(12t-18t^2)y+27t^2-36t+9=0$，

所以$3y_B=\dfrac{27t^2-36t+9}{3t^2-1}$，

所以$y_B=\dfrac{9t^2-12t+3}{3t^2-1}$，

所以 $|AB|=\sqrt{1+t^2}\,|3-y_B|=\sqrt{1+t^2}\left|3-\dfrac{9t^2-12t+3}{3t^2-1}\right|=\dfrac{\sqrt{1+t^2}\,|12t-6|}{|3t^2-1|}$.

又点 D 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{|0\times1-t\times3+3t-2|}{\sqrt{1^2+t^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+t^2}}$,

所以 $S_{\triangle DAB}=\dfrac{1}{2}|AB|d=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{6\sqrt{t^2+1}\,|2t-1|}{|3t^2-1|}\times\dfrac{2}{\sqrt{t^2+1}}=\dfrac{6|2t-1|}{|3t^2-1|}=6$,

解得 $t=0$ 或 $t=\dfrac{2}{3}$ 或 $t=-\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}$ 或 $t=-\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$,

所以直线 l 的方程为 $x=2$ 或 $3x-2y=0$ 或 $3x+(1+\sqrt{7})y-3\sqrt{7}-9=0$ 或 $3x+(1-\sqrt{7})y-9+3\sqrt{7}=0$.

课后素养评价(三十一)

基础落实

1.若直线 l 过点$(-3,-2)$,且与双曲线$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 过第一和第三象限的渐近线互相垂直,则直线 l 的方程为　(　　)

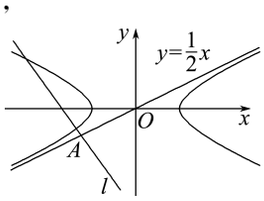
A.$2x+y-8=0$

B.$2x+y+8=0$

C.$2x-y+8=0$

D.$2x-y-6=0$

B　**解析**:如图,



由$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 可知双曲线过第一和第三象限的渐近线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x$,

直线 l 与之垂直,则直线 l 的斜率为-2.

又直线 l 过点$(-3,-2)$,所以直线 l 的方程为 $y+2=-2(x+3)$,即 $2x+y+8=0$.

2.(多选)若直线 $y=mx+1$ 与双曲线 $x^2-y^2=1$ 有公共点,则 m 的值不可能为　(　　)

A.-2　　B.-1

C.1　　D.2

AD　**解析**:由$\begin{cases}y=mx+1,\\x^2-y^2=1,\end{cases}$得$(1-m^2)x^2-2mx-2=0$.

由题意知 $1-m^2=0$ 或$\begin{cases}1-m^2\neq0,\\\Delta=4m^2+8(1-m^2)\geqslant0,\end{cases}$解得$-\sqrt{2}\leqslant m\leqslant\sqrt{2}$.经判断只有 A,D 符合题意.

3.已知等轴双曲线的中心在原点,焦点在 x 轴上,与直线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 交于 A,B 两点.若$|AB|=2\sqrt{15}$,则该双曲线的方程为　(　　)

A.$x^2-y^2=6$　　B.$x^2-y^2=9$

C.$x^2-y^2=16$　　D.$x^2-y^2=25$

B　**解析**:设等轴双曲线的方程为 $x^2-y^2=a^2(a>0)$,与 $y=\dfrac{1}{2}x$ 联立,得$\dfrac{3}{4}x^2=a^2$,

所以$|AB|=\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}\times\dfrac{4\sqrt{3}}{3}a=2\sqrt{15}$,

解得 $a=3$,所以该双曲线的方程为 $x^2-y^2=9$.故选 B.

4.已知双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 的右焦点为 F,过点 F 作一条直线与双曲线的一条渐近线垂直,垂足为 A,O 为坐标原点,则 $S_{\triangle OAF}=$　(　　)

A.3　　B.$3\sqrt{5}$

C.$2\sqrt{5}$　　D.$\sqrt{5}$

D　**解析**:双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 的右焦点为 $F(3,0)$,渐近线方程为$\sqrt{5}x\pm2y=0$,F 到渐近线$\sqrt{5}x+2y=0$ 的距离 $|FA|=\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5+4}}=\sqrt{5}$,则 $|OA|=\sqrt{|OF|^2-|FA|^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=2$.

所以 $S_{\triangle OAF}=\dfrac{1}{2}|FA|\cdot|OA|=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\times2=\sqrt{5}$.

5.若直线 $y=kx+2$ 与双曲线$x^2-y^2=6$ 的右支交于不同的两点,则 k 的取值范围是_____.

$\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{3},-1\right)$　**解析**:由$\begin{cases}y=kx+2,\\x^2-y^2=6,\end{cases}$

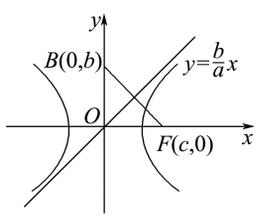
得$(1-k^2)x^2-4kx-10=0$.

由题意,得$\begin{cases}1-k^2\neq0,\\\Delta=16k^2+40(1-k^2)>0,\\\dfrac{4k}{1-k^2}>0,\\\dfrac{10}{k^2-1}>0,\end{cases}$

解得 $-\frac{\sqrt{15}}{3}<k<-1$，所以 k 的取值范围是 $\left(-\frac{\sqrt{15}}{3},-1\right)$.

6. 设双曲线的一个焦点为 F，虚轴的一个端点为 B. 如果直线 BF 与该双曲线的一条渐近线垂直，那么此双曲线的离心率为_____.

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　**解析：** 不妨设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$，如图所示，双曲线的一条渐近线方程为 $y=\frac{b}{a}x$，



$k_{BF}=-\frac{b}{c}$. 因为直线 BF 与直线 $y=\frac{b}{a}x$ 垂直，

所以 $\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{b}{c}\right)=-1$，整理得 $b^2=ac$，

所以 $c^2-a^2-ac=0$.

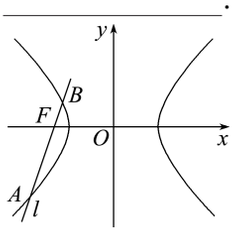
两边同除以 a^2，得 $e^2-e-1=0$，

解得 $e=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $e=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$（舍去）.

7. 若过双曲线 $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$ 的右焦点的直线被双曲线所截得的弦长为 $\sqrt{5}$，则这样的直线有_____条.

1　**解析：** 由题意得右焦点 $F(5,0)$，所以过点 F 且垂直于 x 轴的直线是 $x=5$，代入 $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$，得 $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以此时弦长为 $\frac{\sqrt{5}}{2}\times2=\sqrt{5}$. 当直线不垂直 x 轴，且与双曲线右支有两个交点时，那么弦长一定比 $\sqrt{5}$ 长. 因为两顶点间的距离为 $4\sqrt{5}$，即左、右两支上的点的最短距离是 $4\sqrt{5}$，所以如果交于两支的话，那么弦长不可能为 $\sqrt{5}$. 故这样的直线只有一条.

8. 如图，设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 F，过 F 作倾斜角为 $60°$ 的直线 l 与双曲线 C 的左支交于 A,B 两点. 若 $\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{FB}$，则双曲线 C 的渐近线方程为_____.



$y=\pm\frac{\sqrt{11}}{5}x$　**解析：** 如图，令双曲线的右焦点为 F'，半焦距为 c，设 $|BF|=t$，则 $|AF|=4t$.

由双曲线定义得 $|BF'|=t+2a$，$|AF'|=4t+2a$.

由直线 AB 倾斜角为 $60°$，得 $\begin{cases}\angle BFF'=60°,\\ \angle AFF'=120°.\end{cases}$

由余弦定理得

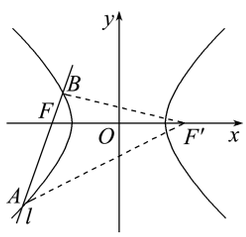
$$\begin{cases}|BF'|^2=|BF|^2+|FF'|^2-2|BF||FF'|\cos 60°,\\ |AF'|^2=|AF|^2+|FF'|^2-2|AF||FF'|\cos 120°,\end{cases}$$

即 $\begin{cases}(t+2a)^2=t^2+4c^2-2tc,\\ (4t+2a)^2=16t^2+4c^2+8tc,\end{cases}$

整理得 $\begin{cases}(2a+c)t=2c^2-2a^2,\\ (4a-2c)t=c^2-a^2,\end{cases}$

解得 $c=\frac{6}{5}a$，$t=\frac{11}{40}a$，$b=\frac{\sqrt{11}}{5}a$，

所以双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{11}}{5}x$.



能力提升

1. 若点 O 和点 $F_1(-2,0)$ 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$ $(a>0)$ 的中心和左焦点，点 P 为双曲线右支上的一点，并且过点 P 与双曲线的右焦点 F_2 的直线垂直于 x 轴，则线段 OP 的长为　（　）

A. $\frac{13}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{39}}{3}$　　C. $\frac{7}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{21}}{3}$

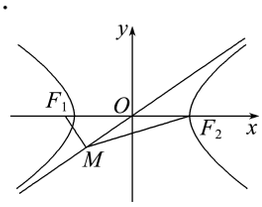
B　**解析：** 由条件知 $a^2+1=4$，因为 $a>0$，所以 $a=\sqrt{3}$. 又 $PF_2\perp x$ 轴，把 $x=2$ 代入 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$，得 $y^2=\frac{1}{3}$，

所以 $|OP|=\sqrt{2^2+\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{39}}{3}$.

2. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，O 为坐标原点，过 F_1 作 C 的一条渐近线的垂线，垂足为 M，且 $|MF_2|=3|OM|$，则双曲线 C 的离心率为　（　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{6}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 3

B　**解析：** 如图.



由题意得 $F_1(-c,0)$，设一条渐近线的方程为 $bx-$

$ay=0$，

所以$|MF_1|=\dfrac{|-bc|}{\sqrt{b^2+(-a)^2}}=\dfrac{bc}{c}=b$，由勾股定理得$|OM|=a$.

因为MF_1垂直于渐近线，所以$\cos\angle MOF_1=\dfrac{a}{c}$.

因为$|MF_2|=3|OM|$，所以$|MF_2|=3a$. 又$|OF_2|=c$，

在$\triangle MOF_2$中，由余弦定理的推论得$\cos\angle MOF_2=\dfrac{a^2+c^2-9a^2}{2ac}$.

因为$\angle MOF_1+\angle MOF_2=\pi$，所以$\dfrac{a^2+c^2-9a^2}{2ac}+\dfrac{a}{c}=0$，

化简得$c^2=6a^2$，所以$c=\sqrt{6}a$，故$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{6}$. 故选B.

3.（多选）记F_1，F_2分别为双曲线$E:x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$的左、右焦点，以F_1为圆心，以E的焦距为半径的圆T与E的右支交于P，Q两点，则有　　（　　）

A.E的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$

B.圆T的方程为$x^2+y^2+4x-10=0$

C.$|PQ|=\sqrt{15}$

D.$\cos\angle PF_1Q=\dfrac{17}{32}$

ACD　**解析**：对于A，易知$E:x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$中实半轴长$a=1$，虚半轴长$b=\sqrt{3}$，半焦距$c=\sqrt{a^2+b^2}=2$，则E的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$，故A正确；

对于B，易得E的焦距为4，$F_1(-2,0)$，故圆T的方程为$(x+2)^2+y^2=16$，

即$T:x^2+y^2+4x-12=0$，故B错误；

对于C，由$\begin{cases}(x+2)^2+y^2=16,\\ x^2-\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$消去$y$，得$4x^2+4x-15=0$，

解得$x=-\dfrac{5}{2}$（舍）或$x=\dfrac{3}{2}$，代入$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$可得$y^2=3\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-3=\dfrac{15}{4}$.

不妨令P在第一象限，则$P\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$，$Q\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$，

显然$|PQ|=\sqrt{15}$，故C正确；

对于D，显然$|PF_1|=|QF_1|=|F_1F_2|=4$，

故由余弦定理的推论可得$\cos\angle PF_1Q=\dfrac{|PF_1|^2+|QF_1|^2-|PQ|^2}{2\times|PF_1|\times|QF_1|}=\dfrac{16+16-15}{2\times4\times4}=\dfrac{17}{32}$，故D正确.

4.若过点$M(2,1)$作斜率为1的直线，交双曲线$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$于$A$，$B$两点，点$M$为$AB$的中点，则该双曲线的离心率为　　（　　）

A.$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　B.$\sqrt{3}$　　C.$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D.$\sqrt{2}$

B　**解析**：设点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

代入双曲线方程得$\begin{cases}\dfrac{y_1^2}{a^2}-\dfrac{x_1^2}{b^2}=1,\\ \dfrac{y_2^2}{a^2}-\dfrac{x_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$两式作差后整理得$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\dfrac{a^2}{b^2}$.

由题易知$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=1$，$x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=2$，

所以$\dfrac{2}{4}=\dfrac{a^2}{b^2}$.

又$c^2=a^2+b^2$，所以$\dfrac{1}{2}=\dfrac{a^2}{c^2-a^2}$，得$\dfrac{c}{a}=\sqrt{3}$.

5.已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F$. 若过点$F$且倾斜角为60°的直线$l$与双曲线的右支有且只有一个交点，则此双曲线的离心率e的取值范围是_____.

$[2,+\infty)$　**解析**：由题意，知$\dfrac{b}{a}\geqslant\sqrt{3}$，则$\dfrac{b^2}{a^2}\geqslant3$，所以$c^2-a^2\geqslant3a^2$，即$c^2\geqslant4a^2$，所以$e^2=\dfrac{c^2}{a^2}\geqslant4$，所以$e\geqslant2$.

故双曲线的离心率e的取值范围是$[2,+\infty)$.

6.已知双曲线的方程为$2x^2-y^2=2$，则以点$A(2,3)$为中点的双曲线的弦所在的直线的方程为_____.

$4x-3y+1=0$　**解析**：设弦的两端点分别为$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则$2x_1^2-y_1^2=2$，$2x_2^2-y_2^2=2$，两式相减，得$2(x_1-x_2)(x_1+x_2)-(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$.

又$x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=6$，

所以$8(x_1-x_2)-6(y_1-y_2)=0$，即$k_{PQ}=\dfrac{4}{3}$.

因此直线PQ的方程为$y-3=\dfrac{4}{3}(x-2)$，即$4x-3y+1=0$.

经验证，直线$4x-3y+1=0$与双曲线相交.

因此所求直线方程为$4x-3y+1=0$.

7.已知双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$，其一条渐近线被圆

$(x-3)^2+y^2=8$ 截得的弦长为 $2\sqrt{2}$，则 $b=$_____.

$2\sqrt{2}$　**解析**：依题意，$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{2}x$，

不妨取渐近线 l_1：$bx-2y=0$，则圆心 $(3,0)$ 到 l_1 的距离 $d=\frac{3b}{\sqrt{b^2+4}}$.

由圆的性质得 $\left(\frac{3b}{\sqrt{b^2+4}}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2=(2\sqrt{2})^2$，所以 $b=2\sqrt{2}$.

8. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点为 F_2，直线 l 过点 F_2 且与双曲线 C 交于 A，B 两点，直线 l 的倾斜角为 $30°$，O 为坐标原点.

(1)求 $|AB|$；

(2)求 $\triangle AOB$ 的面积.

解：(1)由题意可知，双曲线 C：$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点为 $F_2(3,0)$.

由直线 l 的倾斜角为 $30°$，得斜率 $k=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以直线 l 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}$.

联立直线与双曲线的方程，可得 $\begin{cases}y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3},\\ \frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1.\end{cases}$

消去 y，并整理，得 $x^2+12x-36=0$，易得 $\Delta>0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases}x_1+x_2=-12,\\ x_1x_2=-36.\end{cases}$

由弦长公式，得 $|AB|=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}\times\sqrt{12^2+4\times36}=8\sqrt{6}$.

(2)由题意可知，在 $\triangle OAB$ 中，边 AB 上的高即为原点 O 到直线 AB 的距离 d.

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}$，整理，得 $\frac{\sqrt{3}}{3}x-y-\sqrt{3}=0$，

所以 $d=\frac{|-\sqrt{3}|}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}}=\frac{3}{2}$，

所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\times8\sqrt{6}\times\frac{3}{2}=6\sqrt{6}$.

自我超越

已知椭圆 Γ：$\frac{x^2}{3m}+\frac{y^2}{m}=1(m>0)$ 与双曲线 C：$m^2x^2-y^2=m^2$ 的离心率分别为 e_1，e_2.

(1)若 $e_1e_2=1$，求 m 的值；

(2)当 $m=1$ 时，设点 $T(0,2)$，若对于直线 l：$y=x+b$，椭圆 Γ 上总存在不同的两点 A 与 B 关于直线 l 对称，且 $\frac{9}{4}<\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}<\frac{5}{2}$，求 b 的取值范围.

解：(1)在椭圆 Γ：$\frac{x^2}{3m}+\frac{y^2}{m}=1$ 中，离心率为 $e_1=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{3m-m}{3m}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

在双曲线 C：$m^2x^2-y^2=m^2$ 中，离心率为 $e_2=\frac{c}{a}=\sqrt{1+m^2}$.

因为 $e_1e_2=1$，

所以 $\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}=1$，解得 $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)因为 $m=1$，所以 Γ：$\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

对于直线 l：$y=x+b$，椭圆 Γ 上总存在不同的两点 A 与 B 关于直线 l 对称，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

所以可设直线 AB 的方程为 $y=-x+t$.

由 $\begin{cases}y=-x+t,\\ \frac{x^2}{3}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 y，得 $4x^2-6tx+3t^2-3=0$，

由 $\Delta=(-6t)^2-16(3t^2-3)=48-12t^2>0$，解得 $-2<t<2$，

故 $x_1+x_2=\frac{3t}{2}$，$x_1x_2=\frac{3}{4}(t^2-1)$，

所以 $y_1+y_2=-x_1+t-x_2+t=-\frac{3t}{2}+2t=\frac{t}{2}$，

$y_1y_2=(-x_1+t)(-x_2+t)=x_1x_2-t(x_1+x_2)+t^2=\frac{3}{4}(t^2-1)-\frac{3t^2}{2}+t^2=\frac{1}{4}(t^2-3)$.

设线段 AB 的中点为 $P(x_0,y_0)$，

则 $x_0=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=\frac{3t}{4}$，$y_0=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{t}{4}$.

又点 P 在直线 l 上，所以 $\frac{t}{4}=\frac{3t}{4}+b$，则 $b=-\frac{1}{2}t$.

又因为 $\overrightarrow{TA}=(x_1,y_1-2)$，$\overrightarrow{TB}=(x_2,y_2-2)$，

所以 $\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}=x_1x_2+y_1y_2-2(y_1+y_2)+4=\frac{3}{4}(t^2-1)+\frac{1}{4}(t^2-3)-t+4=t^2-t+\frac{5}{2}$.

因为 $\frac{9}{4}<\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}<\frac{5}{2}$，

所以 $\frac{9}{4}<t^2-t+\frac{5}{2}<\frac{5}{2}$，解得 $0<t<1$ 且 $t\neq\frac{1}{2}$，

所以 $b=-\frac{1}{2}t\in\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)\cup\left(-\frac{1}{4},0\right)$.

3.3　抛物线

3.3.1　抛物线及其标准方程

学习任务目标

1.掌握抛物线的定义、焦点及准线的概念.
2.掌握抛物线的标准方程及其推导过程.
3.掌握抛物线标准方程中 p 的几何意义,并能解决简单的求抛物线标准方程的问题.

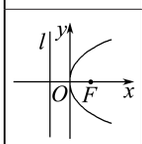
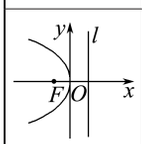
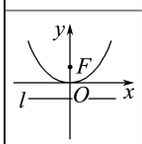
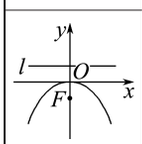
○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　抛物线的定义

把平面内与一个定点 F 和一条定直线 l(l 不经过点 F)的距离相等的点的轨迹叫做抛物线.点 F 叫做抛物线的焦点,直线 l 叫做抛物线的准线.

知识点二　抛物线的标准方程

图形	标准方程	焦点坐标	准线方程
	$y^2=2px(p>0)$	$\left(\frac{p}{2},0\right)$	$x=-\frac{p}{2}$
	$y^2=-2px(p>0)$	$\left(-\frac{p}{2},0\right)$	$x=\frac{p}{2}$
	$x^2=2py(p>0)$	$\left(0,\frac{p}{2}\right)$	$y=-\frac{p}{2}$
	$x^2=-2py(p>0)$	$\left(0,-\frac{p}{2}\right)$	$y=\frac{p}{2}$

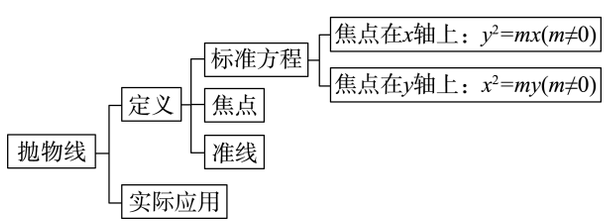
【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).
(1)若点 P 到点 $F(1,0)$的距离和到直线 $x=-1$的距离相等,则点 P 的轨迹是抛物线.　　(√)
(2)若点 P 到点 $F(1,0)$的距离和到直线 $x+y-1=0$ 的距离相等,则点 P 的轨迹是抛物线.(×)
(3)若点 P 到点 $F(1,0)$的距离比到直线 $x=-2$的距离小 1,则点 P 的轨迹是抛物线.　　(√)
(4)抛物线的准线与坐标轴的交点和抛物线的焦点关于原点对称.　　(√)

2.准线为 $x=1$ 的抛物线的标准方程为　　(　　)
A.$y^2=4x$　　B.$y^2=-4x$
C.$x^2=4y$　　D.$x^2=-4y$
B　**解析**:由题意知,抛物线的焦点在 x 轴的负半轴上,$\frac{p}{2}=1$,即 $p=2$,故抛物线的标准方程为 $y^2=-4x$.

3.思考并回答下列问题:
(1)抛物线的标准方程中 p 的几何意义是什么?
提示:p 的几何意义是焦点到准线的距离.
(2)方程为标准方程的抛物线的结构特征是什么?
提示:顶点在坐标原点,焦点在坐标轴上.
(3)如何判断抛物线的焦点位置和开口方向?
提示:抛物线的焦点所在的坐标轴与标准方程中一次项变量一致,开口方向取决于标准方程中一次项系数的正负.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1　求抛物线的标准方程

1.已知抛物线 C 与双曲线 $x^2-y^2=1$ 有相同的焦点,且顶点在原点,则抛物线 C 的标准方程是　　(　　)
A.$y^2=\pm2\sqrt{2}x$　　B.$y^2=\pm2x$
C.$y^2=\pm4x$　　D.$y^2=\pm4\sqrt{2}x$
D　**解析**:由已知可得双曲线的焦点为$(-\sqrt{2},0)$,$(\sqrt{2},0)$.设抛物线 C 的方程为 $y^2=\pm2px(p>0)$,则 $\frac{p}{2}=\sqrt{2}$,所以 $p=2\sqrt{2}$,所以抛物线 C 的标准方程为 $y^2=\pm4\sqrt{2}x$.

2.(教材 P132 例 1(2)改编)若抛物线 $y^2=2px(p>0)$上一点 $P(6,y_0)$到其焦点的距离为 9,则该抛物

线的方程为　　（　　）

A.$y^2=16x$　　B.$y^2=12x$

C.$y^2=8x$　　D.$y^2=6x$

B　**解析**：抛物线的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，

所以点 P 到焦点的距离为 $6-\left(-\frac{p}{2}\right)=9$，

所以 $p=6$，抛物线的方程为 $y^2=12x$.

3.(1)准线方程为 $y=\frac{2}{3}$ 的抛物线的标准方程为_____；

(2)焦点在 y 轴上，焦点到准线的距离为 5 的抛物线的标准方程为_____.

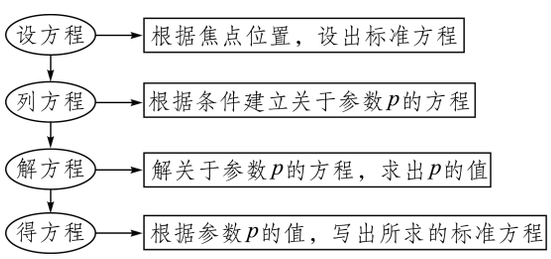
(1)$x^2=-\frac{8}{3}y$　**解析**：因为抛物线的准线交 y 轴于正半轴，且 $\frac{p}{2}=\frac{2}{3}$，所以 $p=\frac{4}{3}$，所以所求抛物线的标准方程为 $x^2=-\frac{8}{3}y$.

(2)$x^2=10y$ 或 $x^2=-10y$　**解析**：已知抛物线的焦点在 y 轴上，故可设其方程为 $x^2=2my(m\neq0)$. 由焦点到准线的距离为 5，知 $|m|=5$，所以 $m=\pm5$. 所以满足条件的抛物线的标准方程为 $x^2=10y$，$x^2=-10y$.

【探究总结】

求抛物线的标准方程的方法

(1)待定系数法，步骤如下：



(2)当抛物线的类型没有确定时，可设方程为 $y^2=mx(m\neq0)$ 或 $x^2=ny(n\neq0)$，这样可以避免分类讨论.

任务2 抛物线定义的应用

探究活动

例 1　已知动圆 M 与直线 $y=2$ 相切，且与定圆 C：$x^2+(y+3)^2=1$ 外切，设动圆圆心为 $M(x,y)$，半径为 r.

(1)点 M 到定圆圆心 $C(0,-3)$ 的距离与到直线 $y=3$ 的距离有什么关系？

(2)点 M 的轨迹是什么？求出其轨迹方程.

解：(1)相等.

(2)由抛物线的定义可知，动圆圆心 M 的轨迹是以 $C(0,-3)$ 为焦点，$y=3$ 为准线的一条抛物线，其方程为 $x^2=-12y$.

[一题多思]

思考 1.设定点 $F(0,-2)$，动圆 M 过点 F，且与直线 $y=2$ 相切，求动圆圆心 $M(x,y)$ 的轨迹方程.

解：由题意知，动圆圆心 $M(x,y)$ 到定点 $F(0,-2)$ 与到直线 $y=2$ 的距离相等，

所以动圆圆心 M 的轨迹是以 F 为焦点，$y=2$ 为准线的抛物线，所以动圆圆心 $M(x,y)$ 的轨迹方程为 $x^2=-8y$.

思考 2.与抛物线的定义有关的最值问题常进行哪些方面的转化？

提示：(1)将抛物线上的点到准线的距离化为该点到焦点的距离，利用“两点之间线段最短”来解决.

(2)将抛物线上的点到焦点的距离转化为该点到准线的距离，利用“垂线段最短”解决.

思考 3.设点 P 是抛物线 $x^2=-12y$ 上的一个动点，求点 P 到点 $A(2,0)$ 的距离与点 P 到该抛物线准线的距离之和的最小值.

解：抛物线 $x^2=-12y$ 的焦点为 $F(0,-3)$，过点 P 作 PP' 垂直于准线 $y=3$，垂足为 P'（图略）.

由抛物线的定义知，$|PF|=|PP'|$，所以 $|PA|+|PP'|=|PA|+|PF|\geqslant|AF|=\sqrt{13}$.

故当 P，A，F 三点共线时，$|PA|+|PP'|$ 取到最小值为 $\sqrt{13}$.

【探究总结】

抛物线定义的两种应用

(1)实现距离转换：根据抛物线的定义，抛物线上任意一点到焦点的距离等于它到准线的距离. 因此，由抛物线的定义可以实现点到点之间的距离与点到直线的距离的相互转换，从而简化某些问题；

(2)解决最值问题：求抛物线上一动点到焦点的距离与抛物线内部另一点的距离之和的最小值时，往往用抛物线的定义进行转化，即化折线为直线来解决最值问题.

应用迁移

1.已知 A 是抛物线 C：$x^2=2py(p>0)$ 上一点，点 A 到 C 的焦点的距离为 9，到 x 轴的距离为 4，则 $p=$　　（　　）

A.4　　B.5　　C.8　　D.10

D　**解析**：由题意知抛物线 C：$x^2=2py(p>0)$ 的准线为 $y=-\frac{p}{2}$，

因为点 A 到 C 的焦点的距离为 9，到 x 轴的距离为 4，即点 A 的纵坐标为 4，

所以 $4-\left(-\frac{p}{2}\right)=9$，解得 $p=10$.

2.若动点 M 到点 $F\left(\frac{1}{2},0\right)$ 的距离比它到 y 轴的距离大 $\frac{1}{2}$，求点 M 的轨迹方程.

解：当动点 M 位于 y 轴及 y 轴右侧或 y 轴上时，因为动点 M 到 $F\left(\frac{1}{2},0\right)$ 的距离比它到 y 轴的距离大 $\frac{1}{2}$，所以动点 M 到 $F\left(\frac{1}{2},0\right)$ 的距离与它到直线 l：$x=-\frac{1}{2}$ 的距离相等.由抛物线的定义知，动点 M 的轨迹是以 F 为焦点，l 为准线的抛物线.设方程为 $y^2=2px(p>0)$，其中 $\frac{p}{2}=\frac{1}{2}$，解得 $p=1$，故点 M 的轨迹方程为 $y^2=2x$；

当动点 M 位于 y 轴左侧时，点 M 的轨迹为 x 轴的负半轴.

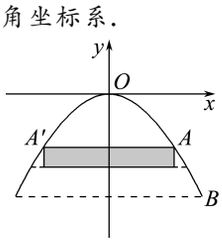
综上所述，点 M 的轨迹方程为 $y^2=2x$ 或 $y=0(x<0)$.

任务3 抛物线的实际应用

探究活动

例2　河上有一抛物线形拱桥，当水面距拱顶 5 m 时，水面宽度为 8 m.一条小船宽 4 m，高 2 m，载货后船露出水面的部分高 0.75 m.水面上涨到与拱桥顶相距多远时，小船开始不能通过？

解：如图，以拱桥的拱顶为坐标原点，以过拱顶且平行于水面的直线为 x 轴，建立平面直角坐标系.



设抛物线方程为 $x^2=-2py(p>0)$，由题意可知，点 $B(4,-5)$ 在抛物线上，代入抛物线方程，得 $p=\frac{8}{5}$，故 $x^2=-\frac{16}{5}y$.

当船两侧和拱桥接触时，船不能通过.

由题意可知，船宽为 4 m，则 $A(2,y_A)$，

由 $2^2=-\frac{16}{5}y_A$，得 $y_A=-\frac{5}{4}$.

又因为船露出水面上的部分高为 0.75 m，所以 $h=|y_A|+0.75=2$，

所以水面上涨到与拱桥顶相距 2 m 时，小船开始不能通过.

【探究总结】

解决抛物线实际应用问题的五个步骤

(1)建立适当的坐标系；

(2)设合适的抛物线标准方程；

(3)通过计算求出抛物线的标准方程；

(4)利用抛物线的性质进行计算；

(5)将计算结果还原到实际问题中，从而解决实际问题.

应用迁移

1.被称为“中国天眼”的 500 米口径球面射电望远镜(FAST)是目前世界上口径最大、灵敏度最高的单口径射电望远镜(图 1).其轴截面可以看作抛物线的一部分.某学校科技小组制作了一个 FAST 模型，观测时呈口径为 4 m、高为 1 m 的抛物面，则其轴截面所在的抛物线(图 2)的顶点到焦点的距离为(　　)

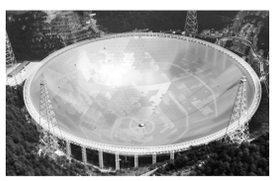


图 1

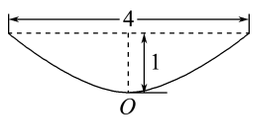
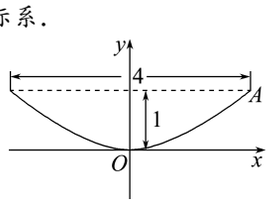


图 2

A.1 m　　B.2 m　　C.4 m　　D.8 m

A　**解析**：如图，以抛物线的顶点为坐标原点，对称轴为 y 轴，建立平面直角坐标系.



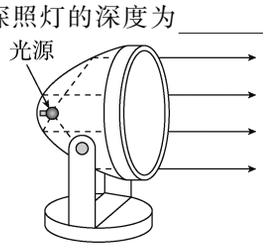
设抛物线的方程为 $x^2=2py$，$p>0$.

由题意可得抛物线上一点 $A(2,1)$，代入抛物线方程可得 $2^2=2p\times1$，所以 $p=2$，

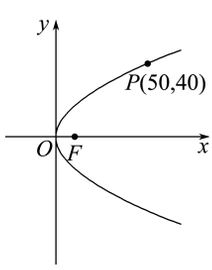
即抛物线方程为 $x^2=4y$，则抛物线的焦点坐标为 $(0,1)$，故顶点到焦点的距离为 1 m.

故选 A.

2.如图，探照灯反射镜曲面可看作由抛物线的一部分绕对称轴旋转而成，光源位于抛物线的焦点处，这样可以保证发出的光线经过反射之后平行射出.已知当灯口圆的直径为 80 cm 时，灯的深度为 50 cm.为了使反射的光更亮，增大反射镜的面积，将灯口圆的直径增大到88 cm，并且保持光源与顶点的距离不变，此时探照灯的深度为_____cm.



60.5　**解析**：在反射镜的轴截面上建立平面直角坐标系，以抛物线的顶点为原点，以旋转轴为 x 轴(抛物线开口方向是 x 轴的正方向)，如图所示，则可设抛物线的方程为 $y^2=2px$.



由题可得灯口圆与轴截面在第一象限的交点 $P(50,40)$，代入抛物线方程得 $40^2=2p\times50$，

解得 $p=16$，所以抛物线的方程为 $y^2=32x$.

当灯口圆的直径增大到 88 cm 时，灯口圆与轴截面在第一象限的交点的纵坐标为 $\frac{88}{2}=44$，

将 $y=44$ 代入抛物线方程求得 $x=60.5$，此时探照灯的深度为 60.5 cm.

课后素养评价(三十二)

基础落实

1.已知 M 为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上一点，且 M 到抛物线焦点 F 的距离为 4，到 y 轴的距离为 3，则 $p=$（　　）

A.4　　B.3

C.2　　D.1

C　**解析**：由题意得，$|MF|=\frac{p}{2}+x_M$，即 $4=\frac{p}{2}+3$，解得 $p=2$.故选 C.

2.（多选）关于抛物线 $y=4x^2$，下列描述正确的有（　　）

A.焦点坐标为(0,1)

B.焦点坐标为 $\left(0,\frac{1}{16}\right)$

C.准线方程为 $y=-\frac{1}{16}$

D.准线方程为 $y=-1$

BC　**解析**：由 $y=4x^2$，得 $x^2=\frac{1}{4}y$，所以该抛物线开口向上，焦点坐标为 $\left(0,\frac{1}{16}\right)$，准线方程为 $y=-\frac{1}{16}$.

3.如果抛物线 $y^2=mx(m\neq0)$ 的焦点在直线 $3x-4y-12=0$ 上，那么抛物线的方程是（　　）

A.$y^2=12x$　　B.$y^2=16x$

C.$y^2=4x$　　D.$y^2=8x$

B　**解析**：由题知抛物线 $y^2=mx(m\neq0)$ 的焦点在 x 轴上，又直线 $3x-4y-12=0$ 与 x 轴的交点为(4,0)，故抛物线的焦点为(4,0)，所以抛物线的方程为 $y^2=16x$.

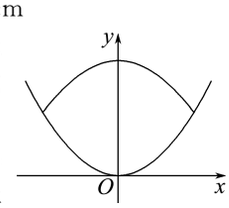
4.如图，某盖碗的碗体和碗盖的纵截面的形状均可近似看作抛物线的一部分，碗盖深为3 cm，碗盖口直径为8 cm，碗体口直径为10 cm，碗体深6.25 cm，则盖上碗盖后，碗盖内部最高点到碗体内部最低点的距离为（碗和碗盖的厚度忽略不计）（　　）



A.5 cm　　B.6 cm

C.7 cm　　D.8.25 cm

C　**解析**：以碗体的最低点为原点，向上方向为 y 轴，建立如图所示的平面直角坐标系.



设碗体的抛物线方程为 $x^2=2py(p>0)$，将(5,6.25)代入，得 $5^2=2p\times6.25$，

解得 $p=2$，则 $x^2=4y$.

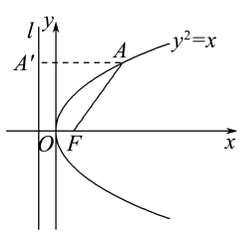
设盖上碗盖后，碗盖内部最高点到碗体内部最低的距离为 h cm，

则两抛物线在第一象限的交点为 $(4,h-3)$，代入 $x^2=4y$，得 $4^2=4(h-3)$，解得 $h=7$.

5.已知抛物线 $C:y^2=x$ 的焦点为 F，$A(x_0,y_0)$ 是 C 上一点，$|AF|=\frac{5}{4}x_0$，则 x_0 的值为（　　）

A.4　　B.2　　C.1　　D.8

C　**解析**：如图，易知 $F\left(\frac{1}{4},0\right)$，准线 l 的方程为 $x=-\frac{1}{4}$.



过点 A 作 $AA'\perp l$，垂足为 A'，则 $|AF|=|AA'|$，即 $\frac{5}{4}x_0=x_0+\frac{1}{4}$，所以 $x_0=1$.

6.已知抛物线的焦点在 y 轴上，顶点为坐标原点 O，且经过点 $P(x_0,2)$.若点 P 到该抛物线焦点的距离为 4，则该抛物线的方程为_____.

$x^2=8y$　**解析**：因为抛物线的焦点在 y 轴上，顶点为坐标原点 O，且经过点 $P(x_0,2)$，

所以可设抛物线的标准方程为 $x^2=2py(p>0)$.

由抛物线的定义可得 $2+\frac{p}{2}=4$，解得 $p=4$.

所以抛物线的方程为 $x^2=8y$.

7.（2023·全国乙卷）已知点 $A(1,\sqrt{5})$ 在抛物线 $C:y^2=2px$ 上，则 A 到 C 的准线的距离为_____.

$\frac{9}{4}$　**解析**：由题意可得 $(\sqrt{5})^2=2p\times1$，则 $2p=5$，抛物线的方程为 $y^2=5x$，

准线方程为 $x=-\frac{5}{4}$，故 A 到 C 的准线的距离为 $1-\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{9}{4}$.

8.已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，P，Q 是抛物线上的两个点.若 $\triangle PQF$ 是边长为 2 的正三角形，求 p 的值.

解：依题意得 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，设 $P\left(\frac{y_1^2}{2p},y_1\right)$，$Q\left(\frac{y_2^2}{2p},y_2\right)$ $(y_1\neq y_2)$.

由抛物线定义及$|PF|=|QF|$，得$\frac{y_1^2}{2p}+\frac{p}{2}=\frac{y_2^2}{2p}+\frac{p}{2}$，

所以$y_1^2=y_2^2$，所以$y_1=-y_2$.

又$|PQ|=2$，

因此$|y_1|=|y_2|=1$，不妨令点$P\left(\frac{1}{2p},1\right)$.

又点P位于该抛物线上，

由抛物线的定义得$|PF|=\frac{1}{2p}+\frac{p}{2}=2$，

解得$p=2\pm\sqrt{3}$.

能力提升

1.(多选)下列关于抛物线$y^2=10x$的说法正确的有（　　）

A.焦点在x轴上

B.抛物线上横坐标为1的点到焦点的距离等于6

C.焦点到准线的距离为5

D.由原点向过焦点的直线作垂线，垂足坐标可能为$(2,1)$

ACD　**解析**：抛物线$y^2=10x$的焦点在x轴上，A满足.设$M(1,y_0)$是抛物线$y^2=10x$上一点，则$|MF|=1+\frac{p}{2}=1+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}\neq6$，B不满足.因为$y^2=10x$中$p=5$，所以焦点到准线的距离为5，C满足.由于抛物线$y^2=10x$的焦点为$\left(\frac{5}{2},0\right)$，设过该焦点的直线方程为$y=k\left(x-\frac{5}{2}\right)$，若由原点向该直线作垂线，垂足为$(2,1)$，则$k=-2$，此时直线存在，D满足.

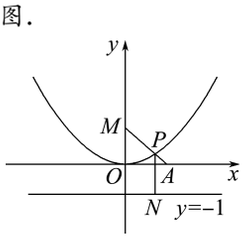
2.已知P是抛物线$y=\frac{1}{4}x^2$上的动点，定点$A(1,0)$，则P到点A的距离与P到x轴的距离之和的最小值为（　　）

A.$\sqrt{2}-1$　　B.$\frac{1}{2}$

C.$\sqrt{3}-1$　　D.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

A　**解析**：抛物线$y=\frac{1}{4}x^2\Rightarrow x^2=4y$，焦点坐标为$M(0,1)$，准线方程为$y=-1$.

设P到x轴的距离为d，过点P作$PN\perp$准线$y=-1$于点N，如图.



由抛物线焦半径公式可得$|PN|=|PM|$，$d=|PM|-1$，

则$|PA|+d=|PA|+|PM|-1\geqslant|AM|-1$，当且仅当$P$，$A$，$M$三点共线时，等号成立，

其中$|AM|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，所以$P$到点$A$的距离与$P$到$x$轴的距离之和的最小值为$\sqrt{2}-1$.

3.(多选)已知$M(1,2)$，O为坐标原点，P是抛物线$C:y^2=2px(p>0)$上的一点，F为C的焦点.若F与双曲线$\frac{x^2}{3}-y^2=1$的右焦点重合，则下列说法正确的有（　　）

A.若$|PF|=6$，则点P的横坐标为6

B.该抛物线的准线被双曲线截得的线段的长度为$\frac{\sqrt{3}}{3}$

C.若$\triangle POF$的外接圆与抛物线C的准线相切，则该圆面积为9π

D.$\triangle PMF$周长的最小值为$3+\sqrt{5}$

CD　**解析**：由双曲线方程知$F(2,0)$，所以抛物线$C:y^2=8x$.

对于A，设$P(x_0,y_0)$，则$|PF|=x_0+2=6$，解得$x_0=4$，A错误；

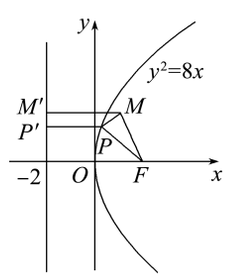
对于B，抛物线准线方程为$x=-2$，由$\begin{cases}\frac{x^2}{3}-y^2=1,\\x=-2\end{cases}$得$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以抛物线的准线被双曲线截得的线段长度为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，B错误；

对于C，因为$\triangle POF$外接圆圆心在线段OF的中垂线上，则其横坐标为1，

又该圆与抛物线准线相切，所以该圆的半径$r=1+2=3$，所以该圆的面积$S=\pi r^2=9\pi$，C正确；

对于D，设P和M在准线上的射影分别为P'，M'，



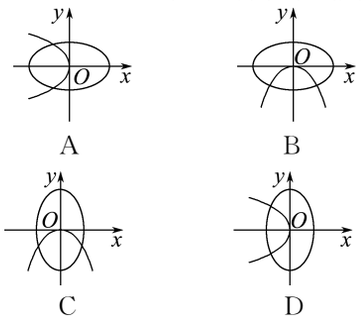
由抛物线定义知$|PF|=|PP'|$，

则$|PF|+|PM|=|PP'|+|PM|\geqslant|MM'|$(当且仅当$M$，$P$，$P'$三点共线时取等号，此时$P'$，$M'$重合)，

又$|MM'|=1+2=3$，$|MF|=\sqrt{(1-2)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$，

所以$\triangle PMF$周长的最小值为$3+\sqrt{5}$，D正确.

4.在同一平面直角坐标系中，方程 $a^2x^2+b^2y^2=1$ 与 $ax+by^2=0(a>b>0)$ 表示的曲线可能是　（　　）



A　　B

C　　D

D　**解析：**方程 $a^2x^2+b^2y^2=1$ 与 $ax+by^2=0$ 可化为 $\frac{x^2}{\frac{1}{a^2}}+\frac{y^2}{\frac{1}{b^2}}=1$ 与 $y^2=-\frac{a}{b}x$.

因为 $a>b>0$，所以 $\frac{1}{a^2}<\frac{1}{b^2}$，$-\frac{a}{b}<0$.所以椭圆的焦点在 y 轴上，抛物线的焦点在 x 轴负半轴上.

5.若抛物线 $y^2=2x$ 上的两点 A，B 到焦点的距离之和是 5，则线段 AB 的中点到 y 轴的距离是_____.

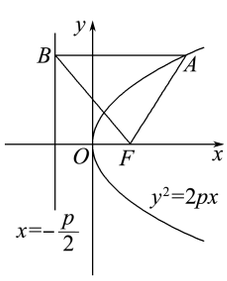
2　**解析：**设抛物线 $y^2=2x$ 的焦点为 $F\left(\frac{1}{2},0\right)$，准线方程为 $x=-\frac{1}{2}$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $|AF|+|BF|=x_1+\frac{1}{2}+x_2+\frac{1}{2}=5$，解得 $x_1+x_2=4$，所以线段 AB 的中点的横坐标为 2.故线段 AB 的中点到 y 轴的距离是 2.

6.已知在抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上有横坐标为 2 的点 A，过点 A 作 AB 垂直于 C 的准线，垂足为 B，记 C 的焦点为 F，连接 AF，BF.若 $\triangle ABF$ 的面积为 $\frac{5}{2}$，则 p 的值为_____.

1　**解析：**如图，因为在抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上有横坐标为 2 的点 A，

所以设 $A(2,y_0)$，抛物线的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$.

因为过点 A 作 AB 垂直于 C 的准线，垂足为 B，所以 $B\left(-\frac{p}{2},y_0\right)$，



所以 $|AB|=2+\frac{p}{2}$.因为抛物线 C 的焦点为 F，F 在 x 轴上，所以 F 到 AB 的距离为 $d=|y_0|$.

因为 $S_{\triangle ABF}=\frac{5}{2}$，所以 $\frac{1}{2}\times|AB|\times d=\frac{5}{2}$，所以 $\frac{1}{2}\times\left(2+\frac{p}{2}\right)\times|y_0|=\frac{5}{2}$.

又因为 $A(2,y_0)$ 在抛物线上，所以 $y_0^2=4p$.由方程组 $\begin{cases}\frac{1}{2}\times\left(2+\frac{p}{2}\right)\times|y_0|=\frac{5}{2},\\ y_0^2=4p,\end{cases}$ 解得 $p=1$.

7.分别求满足下列条件的抛物线的标准方程：

(1)准线方程为 $2y+4=0$；

(2)过点 $(3,-4)$；

(3)焦点在直线 $x+3y+15=0$ 上.

解：(1)准线方程为 $2y+4=0$，即 $y=-2$，则抛物线的焦点坐标为 $(0,2)$，

所以所求抛物线的标准方程为 $x^2=8y$.

(2)设所求抛物线的标准方程为 $y^2=mx(m\neq0)$ 或 $x^2=ny(n\neq0)$，

则 $(-4)^2=3m$，解得 $m=\frac{16}{3}$，或 $3^2=-4n$，解得 $n=-\frac{9}{4}$，

所以所求抛物线的标准方程为 $y^2=\frac{16}{3}x$ 或 $x^2=-\frac{9}{4}y$.

(3)直线 $x+3y+15=0$ 交 y 轴于点 $(0,-5)$，则以 $(0,-5)$ 为焦点的抛物线的标准方程为 $x^2=-20y$；

直线 $x+3y+15=0$ 交 x 轴于点 $(-15,0)$，则以 $(-15,0)$ 为焦点的抛物线的标准方程为 $y^2=-60x$.

所以所求抛物线的标准方程为 $x^2=-20y$ 或 $y^2=-60x$.

自我超越

已知点 $M(1,-2)$，点 P 在抛物线 $y^2=12x$ 上运动，点 Q 在圆 $(x-3)^2+y^2=1$ 上运动，则 $|PM|+|PQ|$ 的最小值为　（　　）

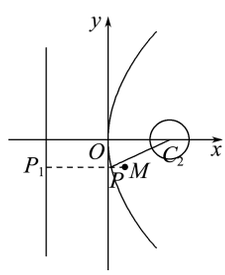
A.2　　B.3

C.4　　D.5

B　**解析：**把 $x=1$ 代入 $y^2=12x$，得 $y^2=12>(-2)^2$，

所以点 $M(1,-2)$ 在抛物线 $y^2=12x$ 里面，

圆 $(x-3)^2+y^2=1$ 的圆心记为 $C_2(3,0)$.



因为 $|PQ|$ 的最小值为 $|PC_2|-1$，而 C_2 正好是抛物线 $y^2=12x$ 的焦点，

如图，过点 P 作抛物线准线 $x=-3$ 的垂线，垂足为 P_1，

则根据抛物线的定义得 $|PC_2|=|PP_1|$，

所以 $|PM|+|PQ|$ 的最小值等于求 $|PM|+|PP_1|-1$ 的最小值.

当 M，P，P_1 三点共线时 $|PM|+|PP_1|$ 的值最小，最小值为 $|MP_1|$，

故 $|PM|+|PP_1|-1$ 的最小值为 $|MP_1|-1=1-(-3)-1=3$.

3.3.2　抛物线的简单几何性质

第 1 课时　抛物线的简单几何性质

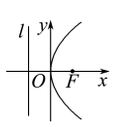
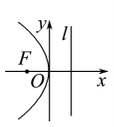
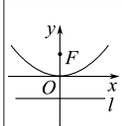
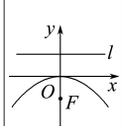
学习任务目标

1.掌握抛物线的几何性质.
2.会判断直线与抛物线的位置关系.
3.能利用方程及数形结合思想解决与抛物线的弦有关的问题.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点一　抛物线的几何性质

类型		$y^2=2px$ $(p>0)$	$y^2=-2px$ $(p>0)$	$x^2=2py$ $(p>0)$	$x^2=-2py$ $(p>0)$
图象					
性质	焦点	$F\left(\frac{p}{2},0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2},0\right)$	$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$	$F\left(0,-\frac{p}{2}\right)$
	准线	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
	范围	$x\geqslant 0$, $y\in\mathbf{R}$	$x\leqslant 0$, $y\in\mathbf{R}$	$x\in\mathbf{R}$, $y\geqslant 0$	$x\in\mathbf{R}$, $y\leqslant 0$
	对称轴	x 轴		y 轴	
	顶点	$O(0,0)$			
	离心率	$e=1$			
	开口方向	向右	向左	向上	向下

知识点二　直线与抛物线的位置关系

直线 $y=kx+b(k,b\in\mathbf{R})$ 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的位置关系及判定方法如下表所示.

位置关系	公共点情况	判定方法
相交	有一个或两个公共点	$k=0$ 或 $\begin{cases}k\neq 0,\\ \Delta>0\end{cases}$
相切	有且只有一个公共点	$\Delta=0$
相离	无公共点	$\Delta<0$

其中,Δ 为联立直线与抛物线的方程,消去 y 后得到的关于 x 的一元二次方程的根的判别式.

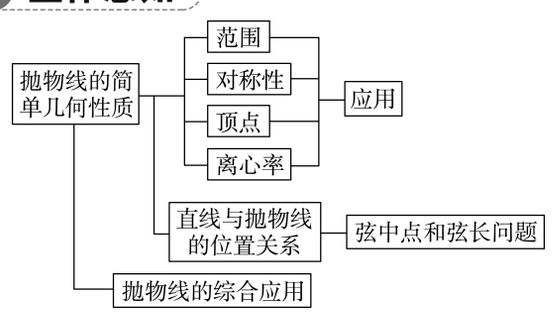
【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”,错误的打“×”).
(1)抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 有一条对称轴为 y 轴. (　√　)
(2)抛物线只有一个焦点、一条对称轴,无对称中心. (　√　)
(3)抛物线的标准方程虽然各不相同,但是其离心率都相同. (　√　)
(4)抛物线方程 $x^2=4y$ 与 $y^2=4x$ 中,x,y 的范围是不同的,但是两条抛物线的焦点到准线的距离是相同的,离心率也相同. (　√　)

2.若直线 $y=kx+2$ 与抛物线 $y^2=8x$ 有且只有一个公共点,则 $k=$_____.
0 或 1　**解析**:当 $k=0$ 时,直线与抛物线有唯一交点.
当 $k\neq 0$ 时,将 $y=kx+2$ 代入 $y^2=8x$,得 $k^2x^2+4(k-2)x+4=0$.
由题意 $\Delta=16(k-2)^2-16k^2=0$,解得 $k=1$.
综上,$k=0$ 或 $k=1$.

3.思考并回答下列问题:
(1)若一条直线与抛物线只有一个公共点,则二者一定相切吗?
提示:不一定.当直线与抛物线的对称轴平行或重合时,也只有一个公共点,此时二者不相切.
(2)掌握抛物线的性质,重点应抓住“两点”“两线”“一率”“一方向”,它们分别指的是什么?
提示:“两点”是指抛物线的焦点和顶点;“两线”是指抛物线的准线和对称轴;“一率”是指离心率;“一方向”是指抛物线的开口方向.
(3)抛物线的性质与椭圆和双曲线的性质的主要区别有哪些?
提示:抛物线的离心率等于 1,它只有一个焦点、一个顶点、一条对称轴和一条准线,它没有中心,通常称抛物线为无心圆锥曲线,而称椭圆和双曲线为有心圆锥曲线.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 抛物线几何性质的应用

1.已知 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，曲线 $y=\frac{k}{x}(k>0)$ 与 C 交于点 P，$PF\perp x$ 轴，则 $k=$　　（　　）

A.$\frac{1}{2}$　　B.1　　C.$\frac{3}{2}$　　D.2

D　**解析：**因为抛物线方程是 $y^2=4x$，所以 $F(1,0)$.又因为 $PF\perp x$ 轴，所以 $P(1,2)$.

把点 P 的坐标代入曲线方程 $y=\frac{k}{x}(k>0)$，即 $\frac{k}{1}=2$，所以 $k=2$.

2.已知点 $P(x,y)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上，则 $z=x^2+\frac{1}{2}y^2+4$ 的最小值为_____.

4　**解析：**$z=x^2+\frac{1}{2}y^2+4=x^2+2x+4=(x+1)^2+3$.因为 $y^2=4x\geqslant 0$，所以 $x\in[0,+\infty)$，

所以当 $x=0$ 时，$z_{\min}=4$.

3.已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线分别交于 A,B 两点，O 为坐标原点.若双曲线的离心率为 2，$\triangle AOB$ 的面积为 $\sqrt{3}$，求抛物线的标准方程.

解：由已知，得 $\frac{c}{a}=2$，所以 $\frac{a^2+b^2}{a^2}=4$，解得 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，

即双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$.

因为抛物线的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，

则设 $A\left(-\frac{p}{2},-\frac{\sqrt{3}p}{2}\right),B\left(-\frac{p}{2},\frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$，

所以 $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}p\cdot\frac{p}{2}=\sqrt{3}$，解得 $p=2$，所以抛物线的标准方程为 $y^2=4x$.

【探究总结】

抛物线的几何性质在解决与抛物线有关的问题时具有广泛的应用.在解题时，应先注意开口方向、焦点位置，确定标准方程的形式，然后利用条件求解.要注意运用数形结合思想，根据抛物线的定义，将抛物线上的点到焦点的距离与到准线的距离相互转化.

任务2 直线与抛物线的位置关系

探究活动

例1　已知抛物线 $C:y^2=-2x$，过点 $P(1,1)$ 的直线 l 的斜率为 k，则当 k 取何值时，l 与 C 有且只有一个公共点？有两个公共点？无公共点？

解：设直线 $l:y-1=k(x-1)$.将 $x=-\frac{y^2}{2}$ 代入整理，得 $ky^2+2y+2k-2=0$.

①当 $k=0$ 时，把 $y=1$ 代入 $y^2=-2x$，得 $x=-\frac{1}{2}$，此时 l 与 C 只有一个公共点 $\left(-\frac{1}{2},1\right)$.

②当 $k\neq 0$ 时，

$\Delta=4-4k(2k-2)=-8k^2+8k+4$.

由 $\Delta=0$，得 $k=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$，此时 l 与 C 有且只有一个公共点；

当 $\frac{1-\sqrt{3}}{2}<k<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 且 $k\neq 0$ 时，$\Delta>0$，l 与 C 有两个公共点；

当 $k<\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ 或 $k>\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 时，$\Delta<0$，此时 l 与 C 无公共点.

综上所述，当 $k=0$ 或 $k=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ 时，l 与 C 有且只有一个公共点；当 $\frac{1-\sqrt{3}}{2}<k<0$ 或 $0<k<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 时，l 与 C 有两个公共点；当 $k<\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ 或 $k>\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 时，l 与 C 无公共点.

[一题多思]

思考. 求抛物线 $C:y^2=12x$ 上的点到直线 $x-y+12=0$ 的最小距离.

解：易知直线 $x-y+12=0$ 与抛物线 $C:y^2=12x$ 相离.

设直线 $y=x+m$ 与抛物线 $C:y^2=12x$ 相切.联立 $\begin{cases}y=x+m,\\y^2=12x.\end{cases}$ 消去 x，得 $y^2-12y+12m=0$，所以 $\Delta=144-48m=0$，解得 $m=3$，

所以直线 $y=x+3$ 与 $x-y+12=0$ 的距离 $d=\frac{|12-3|}{\sqrt{2}}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$，

故抛物线 $C:y^2=12x$ 上的点到直线 $x-y+12=0$ 的最小距离为 $\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

【探究总结】

直线与抛物线交点个数的判断方法

设直线 $l:y=kx+m(k,m\in\mathbf{R})$，抛物线：$y^2=2px(p>0)$.

将直线方程与抛物线方程联立，消去 y 后得到关于 x 的方程 $k^2x^2+(2km-2p)x+m^2=0$.

(1)若 $k\neq0$，

当 $\Delta>0$ 时，直线与抛物线相交，有两个交点；

当 $\Delta=0$ 时，直线与抛物线相切，有一个交点；

当 $\Delta<0$ 时，直线与抛物线相离，无交点.

(2)若 $k=0$，则直线与抛物线有一个交点，此时直线平行于抛物线的对称轴或与对称轴重合.

应用迁移

已知抛物线 $C:y^2=mx(m>0)$ 的焦点为 F，以 F 和 C 的准线上的两点为顶点可以构成边长为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 的等边三角形.

(1)求 C 的方程；

(2)讨论过点 $(-2,1)$ 的直线 l 与 C 的交点个数.

解：(1)由题意，得焦点 $F\left(\frac{m}{4},0\right)$，准线方程为 $x=-\frac{m}{4}$.

以 F 和 C 的准线上的两点为顶点可以构成边长为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 的等边三角形，

则这个等边三角形的高为 $\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}=2$，

即焦点到准线的距离 $\left|\frac{m}{2}\right|=2$，解得 $m=4$（负值舍去），

所以 C 的方程为 $y^2=4x$.

(2)若直线 l 的斜率存在，设 l 的方程为 $y-1=k(x+2)$.

由方程组 $\begin{cases}y-1=k(x+2),\\y^2=4x,\end{cases}$ 可得 $ky^2-4y+4(2k+1)=0$.

①当 $k=0$ 时，解得 $x=\frac{1}{4}$，$y=1$，此时方程只有一个实数解，l 与 C 只有一个公共点.

②当 $k\neq0$ 时，$\Delta=-16(2k^2+k-1)$，

由 $\Delta=0$，解得 $k=-1$ 或 $k=\frac{1}{2}$，此时方程有两个相等的实数解，l 与 C 只有一个公共点；

由 $\Delta>0$，解得 $-1<k<0$ 或 $0<k<\frac{1}{2}$，此时方程有两个不等的实数解，l 与 C 有两个公共点；

由 $\Delta<0$，解得 $k<-1$ 或 $k>\frac{1}{2}$，此时方程没有实数解，l 与 C 没有公共点.

若直线 l 的斜率不存在，则直线 l 的方程为 $x=-2$，易知 l 与 C 没有公共点.

综上所述，当 l 的方程为 $x=-2$ 或 l 的斜率 $k<-1$ 或 $k>\frac{1}{2}$ 时，l 与 C 的交点个数为 0；当 l 的斜率 $k=0$ 或 $k=-1$ 或 $k=\frac{1}{2}$ 时，l 与 C 的交点个数为 1；当 l 的斜率 $k\in(-1,0)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，l 与 C 的交点个数为 2.

任务3 与抛物线的弦有关的问题

探究活动

例 2　若直线 $y=kx-2$ 与抛物线 $y^2=8x$ 交于 A,B 两点，且线段 AB 中点的横坐标为 2，求此直线的方程.

解：(方法一)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则由 $\begin{cases}y=kx-2,\\y^2=8x,\end{cases}$ 可得 $k^2x^2-(4k+8)x+4=0$.

因为直线与抛物线相交于两点，

所以 $k\neq0$ 且 $\Delta>0$，即 $k>-1$ 且 $k\neq0$.

因为线段 AB 中点的横坐标为 2，所以 $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4k+8}{2k^2}=2$，解得 $k=2$ 或 $k=-1$(舍去)，

故所求直线方程为 $y=2x-2$.

(方法二)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则有 $y_1^2=8x_1$，$y_2^2=8x_2$.

两式作差，得 $(y_1-y_2)(y_1+y_2)=8(x_1-x_2)$.

即 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{8}{y_1+y_2}$.

因为 $x_1+x_2=4$，所以 $y_1+y_2=kx_1-2+kx_2-2=k(x_1+x_2)-4=4k-4$.

所以 $k=\frac{8}{4k-4}$，故 $k=2$ 或 $k=-1$.

而当 $k=-1$ 时，直线 $y=-x-2$ 与抛物线 $y^2=8x$ 只有一个交点，不合题意.

从而所求直线的方程为 $y=2x-2$.

【探究总结】

直线与抛物线相交问题，可联立直线与抛物线的方程，消元后利用一元二次方程根与系数的关系列出方程求解.若已知条件与直线斜率及弦的中点坐标有关，则可考虑利用点差法求解.

应用迁移

已知 O 为坐标原点，F 为抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点，T 是 C 上异于 O 的一点，且点 T 到 F 的距离比到 x 轴的距离大 1.

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)若经过点(0,6)的直线 l 与抛物线 C 相交于 A,B 两点,且 $|AB|=24$,求 l 的方程.

解:(1)设点 $T(x_0,y_0)$,由题意可知 $|TF|=y_0+1$,由抛物线的定义知 $|TF|=y_0+\frac{p}{2}$,

所以 $y_0+\frac{p}{2}=y_0+1$,所以 $p=2$,故抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$.

(2)易知 l 的斜率一定存在,设 l 的方程为 $y=kx+6$,设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}x^2=4y,\\y=kx+6,\end{cases}$ 消去 y,得 $x^2-4kx-24=0$,则 $\Delta=16k^2+96>0$,且 $x_1+x_2=4k$,$x_1x_2=-24$,

所以 $|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(4k)^2-4\times(-24)}=4\sqrt{1+k^2}\sqrt{k^2+6}$.

由 $|AB|=24$,化简整理得 $k^4+7k^2-30=0$,解得 $k^2=-10$(舍去)或 $k^2=3$,

所以 $k=\pm\sqrt{3}$,即 l 的方程为 $\pm\sqrt{3}x-y+6=0$.

课后素养评价(三十三)

基础落实

1.直线 $y=k(x-1)+2$ 与抛物线 $x^2=4y$ 的位置关系为　(　　)

A.相交　　B.相切

C.相离　　D.不能确定

A　**解析**:直线 $y=k(x-1)+2$ 过定点(1,2),因为 $1^2<4\times2$,

所以(1,2)在抛物线 $x^2=4y$ 内部,所以直线 $y=k(x-1)+2$ 与抛物线 $x^2=4y$ 相交.故选 A.

2.已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上一点 M 到其准线及对称轴的距离分别为 3 和 $2\sqrt{2}$,则 $p=$　(　　)

A.2　　B.2 或 4

C.1 或 2　　D.1

B　**解析**:因为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上一点 M 到其准线及对称轴的距离分别为 3 和 $2\sqrt{2}$,

所以 $\begin{cases}|y_M|=2\sqrt{2},\\x_M+\frac{p}{2}=3,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}|y_M|=2\sqrt{2},\\x_M=3-\frac{p}{2}.\end{cases}$ 代入抛物线方程可得 $8=2p\left(3-\frac{p}{2}\right)$,

整理得 $p^2-6p+8=0$,解得 $p=2$ 或 $p=4$.

3.已知 O 为坐标原点,垂直于抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的轴的直线与抛物线 C 交于 A,B 两点.若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$,$|AB|=4$,则 $p=$　(　　)

A.4　　B.3　　C.2　　D.1

D　**解析**:因为 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$,所以 $\angle AOB=90°$.

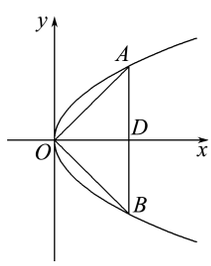
因为 $|AB|=4$,且 $AB\perp x$ 轴,

所以由抛物线的对称性 $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形.

如图,设 AB 与 x 轴的交点为 D,

所以 $AD=BD=OD=2$,即 $A(2,2)$,

所以将 $A(2,2)$ 代入 $y^2=2px$,得 $4=4p$,解得 $p=1$.



4.已知等腰直角三角形 AOB 内接于抛物线 $y^2=2px(p>0)$,O 为抛物线的顶点,$OA\perp OB$,则 $\triangle AOB$ 的面积是　(　　)

A.$8p^2$　　B.$4p^2$　　C.$2p^2$　　D.p^2

B　**解析**:因为抛物线的对称轴为 x 轴,内接三角形 AOB 为等腰直角三角形,所以由抛物线的对称性,知直线 AB 与抛物线的对称轴垂直,不妨设直线 OA 与 x 轴的夹角为 45°.

由方程组 $\begin{cases}y=x,\\y^2=2px,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0,\\y=0\end{cases}$(舍)或 $\begin{cases}x=2p,\\y=2p,\end{cases}$ 所以 A,B 两点的坐标分别为 $(2p,2p)$ 和 $(2p,-2p)$.

所以 $|AB|=4p$,所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times4p\times2p=4p^2$.

5.若抛物线 $y^2=ax$ 上有一点 $P(3,m)$,它到焦点的距离等于 4,则 $a=$_____,$m=$_____.

4　$\pm2\sqrt{3}$　**解析**:由题意,得 $a>0$ 且 $\begin{cases}3a=m^2,\\3+\frac{a}{4}=4,\end{cases}$ 所以 $a=4$,$m=\pm2\sqrt{3}$.

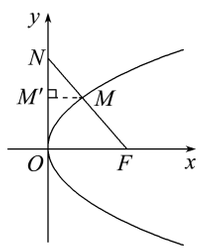
6.已知在边长为 1 的等边三角形 AOB 中,O 为坐标原点,$AB\perp x$ 轴,则以 O 为顶点,且过 A,B 两点

的抛物线的方程是_____.

$y^2=\pm\frac{\sqrt{3}}{6}x$　**解析**：设抛物线方程为 $y^2=ax(a\neq0)$.不妨设 $A\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，则有 $\frac{1}{4}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a$，解得 $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{6}$，所以所求抛物线的方程为 $y^2=\pm\frac{\sqrt{3}}{6}x$.

7.已知 F 是抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点，M 是 C 上一点，FM 的延长线交 y 轴于点 N.若 M 是 FN 的中点，则 $|FN|=$_____.

6　**解析**：如图，过点 M 作 $MM'\perp y$ 轴，垂足为 M'，$|OF|=2$.



因为 M 为 FN 的中点，所以 $|MM'|=1$，所以 M 到准线的距离 $d=|MM'|+\frac{p}{2}=3$，所以 $|MF|=3$，所以 $|FN|=6$.

8.已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$，C 的一条切线的方程为 $x-y-1=0$，则 C 的准线方程为_____.

$y=-1$　**解析**：由 $\begin{cases}x^2=2py,\\x-y-1=0,\end{cases}$ 消去 y，得 $x^2-2px+2p=0$.

由题意 $\Delta=(-2p)^2-4\times2p=0$，解得 $p=2$，则抛物线的方程为 $x^2=4y$，

所以抛物线的准线方程为 $y=-1$.

能力提升

1.抛物线 $y=-x^2$ 上的点到直线 $4x+3y-8=0$ 的距离的最小值是　(　)

A.$\frac{4}{3}$　　B.$\frac{7}{5}$　　C.$\frac{8}{5}$　　D.3

A　**解析**：设抛物线 $y=-x^2$ 上一点 $(m,-m^2)$，该点到直线 $4x+3y-8=0$ 的距离 $d=\frac{|4m-3m^2-8|}{5}=\frac{\left|3\left(m-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{20}{3}\right|}{5}$，当 $m=\frac{2}{3}$ 时，d 取得最小值为 $\frac{4}{3}$.

2.(多选)设 $M(x_0,y_0)$ 为抛物线 $C:x^2=8y$ 上一点，F 为抛物线 C 的焦点，以 F 为圆心、$|FM|$ 为半径的圆和抛物线 C 的准线相交，则 y_0 的值可能为　(　)

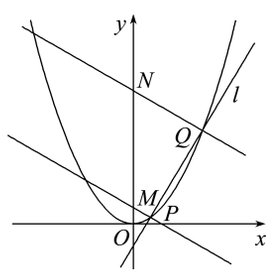
A.0　　B.2　　C.4　　D.6

CD　**解析**：由抛物线 $C:x^2=8y$ 知 $p=4$，所以焦点为 $F(0,2)$，准线方程为 $y=-2$.

由抛物线的定义，得 $|FM|=y_0+2$，因为以 F 为圆心、$|FM|$ 为半径的圆与准线相交，且圆心 $F(0,2)$ 到准线 $y=-2$ 的距离为 4，所以 $4<y_0+2$，从而 $y_0>2$.

3.已知直线 $l:\sqrt{3}x-y-a=0$ 与抛物线 $x^2=4y$ 交于 P，Q 两点，过 P，Q 分别作 l 的垂线与 y 轴交于 M，N 两点.若 $|MN|=\frac{16\sqrt{3}}{3}$，则 $a=$_____.

2　**解析**：根据题意作图如下.



设直线 l 的倾斜角为 θ，则 $\theta=\frac{\pi}{3}$，易知 $|PQ|=|MN|\sin\theta=8$，

联立 $\begin{cases}x^2=4y,\\y=\sqrt{3}x-a,\end{cases}$ 得 $x^2-4\sqrt{3}x+4a=0$，$\Delta>0$.

设 P，Q 的横坐标分别为 x_1，x_2，则 $\begin{cases}x_1+x_2=4\sqrt{3},\\x_1x_2=4a.\end{cases}$

由弦长公式得 $|PQ|=\sqrt{1+3}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2\sqrt{48-16a}=8$，

得 $a=2$，且 $\Delta=(4\sqrt{3})^2-4\times8=16>0$，符合题意.

4.若过点 $P(0,-1)$ 的直线 l 与抛物线 $y^2=2x$ 恰有一个公共点，则直线 l 的方程为_____.

$x=0$ 或 $y=-1$ 或 $x+2y+2=0$　**解析**：当直线 l 的斜率不存在或为 0 时，显然满足题意，此时直线 l 的方程为 $x=0$ 或 $y=-1$.

当直线 l 的斜率存在且不为 0 时，设直线 l 的方程为 $y=kx-1$.

由 $\begin{cases}y=kx-1,\\y^2=2x,\end{cases}$ 消去 y 整理得 $k^2x^2-(2k+2)x+1=0$.

由 $\Delta=(2k+2)^2-4k^2=0$，得 $8k+4=0$，即 $k=-\frac{1}{2}$，此时直线 l 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x-1$，即 $x+2y+2=0$.

综上，直线 l 的方程为 $x=0$ 或 $y=-1$ 或 $x+2y+2=0$.

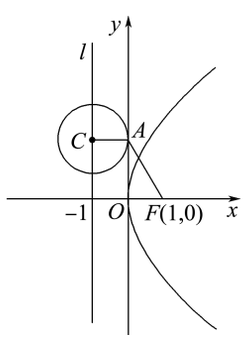
5. 设抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，其准线与双曲线 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$ 相交于 A,B 两点.若 $\triangle ABF$ 为等边三角形，则 $p=$_____.

6　**解析**：因为抛物线 $x^2=2py$ 的准线 $y=-\frac{p}{2}$ 和双曲线 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$ 相交，交点的横坐标为 $x=\pm\sqrt{3+\frac{p^2}{4}}$，所以由等边三角形的性质及抛物线的定义，得 $2\sqrt{3+\frac{p^2}{4}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=p$，解得 $p=6$ 或 $p=-6$（舍）.

6. 设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l.已知点 C 在 l 上，以 C 为圆心的圆与 y 轴的正半轴相切于点 A.若 $\angle FAC=120°$，则圆的方程为_____.

$(x+1)^2+(y-\sqrt{3})^2=1$　**解析**：由 $y^2=4x$ 可得点 F 的坐标为 $(1,0)$，准线 l 的方程为 $x=-1$.

由圆心 C 在 l 上，且圆 C 与 y 轴正半轴相切（如图），



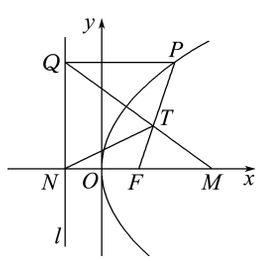
可得点 C 的横坐标为 -1，圆的半径为 1，$\angle CAO=90°$.又因为 $\angle FAC=120°$，所以 $\angle OAF=30°$，所以 $|OA|=\sqrt{3}$，所以点 C 的纵坐标为 $\sqrt{3}$.

所以圆的方程为 $(x+1)^2+(y-\sqrt{3})^2=1$.

自我超越

设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，N 是 l 与 x 轴的交点，$M(3,0)$.过此抛物线上一点 P 作直线 l 的垂线，垂足记为点 Q，PF 与 MQ 相交于点 T.若 $\overrightarrow{TN}+\overrightarrow{TM}=-\overrightarrow{TP}$，则点 T 到 x 轴的距离为_____.

$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　**解析**：由题意，不妨设 $P(x_0,y_0)$，且在第一象限，作图如下：



因为 $F(1,0)$ 为 $M(3,0)$，$N(-1,0)$ 的中点，

所以 $\overrightarrow{TN}+\overrightarrow{TM}=2\overrightarrow{TF}=-\overrightarrow{TP}$，即 T 为 PF 靠近点 F 的三等分点，则 $|TP|=2|TF|$.

又因为 $PQ\parallel MF$，所以 $\triangle TMF\backsim\triangle TQP$，

所以 $\frac{|MF|}{|QP|}=\frac{|TF|}{|TP|}=\frac{1}{2}$，

所以 $|PQ|=2|MF|=4$.

则 $|PQ|=x_0+\frac{p}{2}=x_0+1=4$，所以 $x_0=3$.

因为点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线上，所以 $y_0=2\sqrt{3}$.

由 T 为 PF 靠近点 F 的三等分点，得 $y_T=\frac{1}{3}y_0=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

即点 T 到 x 轴的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

第 2 课时　抛物线几何性质的应用

学习任务目标

1.能利用抛物线的性质解决与抛物线有关的问题.
2.能利用方程与数形结合思想解决焦点弦问题.
3.能解决直线与圆锥曲线的综合应用问题.

○ 问题式预习 ○

【知识清单】

知识点　抛物线的焦点弦

设抛物线 $y^2=2px(p>0)$，AB 为过焦点的一条弦，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，AB 的中点为 $M(x_0,y_0)$，则有以下结论：

(1)以 AB 为直径的圆与准线相切；

(2)$|AB|=2\left(x_0+\frac{p}{2}\right)$（焦点弦长与中点坐标的关系）；

(3)$|AB|=x_1+x_2+p$；

(4)A，B 两点的横坐标之积、纵坐标之积为定值，即 $x_1x_2=\frac{p^2}{4}$，$y_1y_2=-p^2$.

【概念辨析】

1.判断正误(正确的打“√”，错误的打“×”).

(1)抛物线没有渐近线.　(　　)

√　**提示**：渐近线是圆锥曲线中双曲线的特有性质，抛物线没有渐近线.

(2)过抛物线的焦点且垂直于抛物线对称轴的弦的长为 p.　(　　)

×　**提示**：过抛物线的焦点且垂直于对称轴的弦长为 $2p$，此弦长也称为通径长.

(3)若一条直线与抛物线只有一个公共点，则二者一定相切.　(　　)

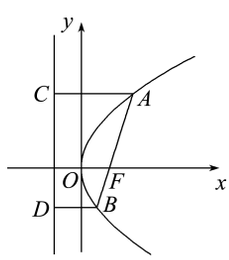
×　**提示**：当直线与抛物线的对称轴平行或重合时，也只有一个公共点，此时不相切.

(4)抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上的点的横坐标的取值范围是 $[0,+\infty)$.　(　　)

√　**提示**：因为 $p>0$，$y^2\geqslant 0$，所以 $x\geqslant 0$.

2.已知过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A，B 两点，则称 AB 为抛物线的焦点弦. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由抛物线的定义知，$|AF|=$ _____，$|BF|=$ _____，故 $|AB|=$ _____.

$x_1+\frac{p}{2}$　$x_2+\frac{p}{2}$　x_1+x_2+p　**解析**：如图，过点 A，B 作准线的垂线，垂足分别为 C，D.



由抛物线的定义可知，$|AF|=|AC|=x_1+\frac{p}{2}$，$|BF|=|BD|=x_2+\frac{p}{2}$，

所以 $|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+p$.

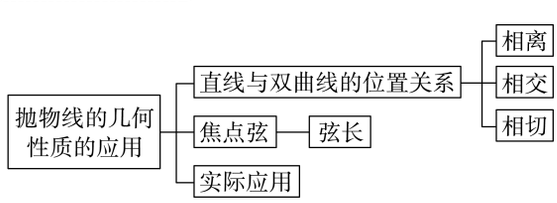
3.过抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A，B 两点，若弦 AB 中点的纵坐标为 2，则 $|AB|=$ _____.

6　**解析**：由 $y=\frac{1}{4}x^2$，得 $x^2=4y$，所以焦点为 $F(0,1)$，准线为 $l:y=-1$.

设弦 AB 中点的纵坐标为 $y_0=2$，

故 $|AB|=y_A+y_B+2=2y_0+2=6$.

整体感知



○ 任务型课堂 ○

任务1 抛物线的几何性质的应用

探究活动

例1　已知直线 l 过原点，抛物线 C 的顶点在原点，焦点在 x 轴的正半轴上，且点 $A(-1,0)$ 和点 $B(0,8)$ 关于直线 l 的对称点都在 C 上.求直线 l 和抛物线 C 的方程.

解：设抛物线 C 的方程为 $y^2=2px(p>0)$，直线 l 的方程为 $y=kx(k\neq0)$.

（方法一）设点 $A(-1,0)$，$B(0,8)$ 关于直线 l 的对称点分别为 $A'(x_1,y_1)$，$B'(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}\dfrac{y_1}{2}=k\cdot\dfrac{x_1-1}{2},\\ \dfrac{y_1}{x_1+1}\cdot k=-1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1=\dfrac{k^2-1}{k^2+1},\\ y_1=\dfrac{-2k}{k^2+1};\end{cases}$

由 $\begin{cases}\dfrac{y_2+8}{2}=k\cdot\dfrac{x_2}{2},\\ \dfrac{y_2-8}{x_2}\cdot k=-1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_2=\dfrac{16k}{k^2+1},\\ y_2=\dfrac{8(k^2-1)}{k^2+1}.\end{cases}$

因为 A'，B' 在抛物线 C 上，

所以 $\begin{cases}\dfrac{4k^2}{(k^2+1)^2}=2p\cdot\dfrac{k^2-1}{k^2+1},\\ \dfrac{64(k^2-1)^2}{(k^2+1)^2}=2p\cdot\dfrac{16k}{k^2+1},\end{cases}$

两式相除，消去 p 并整理，得 $k^2-k-1=0$，故 $k=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

由 $x_2=\dfrac{16k}{k^2+1}>0$，得 $k>0$，从而 $k=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

把 $k=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 代入 $\dfrac{64(k^2-1)^2}{(k^2+1)^2}=2p\cdot\dfrac{16k}{k^2+1}$，得 $p=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

所以直线 l 的方程为 $y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x$，抛物线 C 的方程为 $y^2=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}x$.

（方法二）设点 A，B 关于 l 的对称点分别为 $A'(x_1,y_1)$，$B'(x_2,y_2)$，$\overrightarrow{OB'}$ 与 x 轴正方向的夹角为 α.

依题意，有 $|OA'|=|OA|=1$，$|OB'|=|OB|=8$，

故 $x_2=8\cos\alpha$，$y_2=8\sin\alpha$.

由 $\angle BOA=90°$，知 $\angle B'OA'=90°$，

所以 $x_1=\cos(\alpha-90°)=\sin\alpha$，$y_1=\sin(\alpha-90°)=-\cos\alpha$.

所以 $A'(\sin\alpha,-\cos\alpha)$，$B'(8\cos\alpha,8\sin\alpha)$.

将 A'，B' 的坐标代入抛物线方程，

得 $\begin{cases}\cos^2\alpha=2p\sin\alpha,\\ 64\sin^2\alpha=16p\cos\alpha,\end{cases}$

所以 $8\sin^3\alpha=\cos^3\alpha$，即 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$.

从而 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $p=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，得抛物线 C 的方程为 $y^2=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}x$.

又直线 l 平分 $\angle B'OB$，得 l 的倾斜角为 $\alpha+\dfrac{90°-\alpha}{2}=\dfrac{\alpha}{2}+45°$.

所以 $k=\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}+45°\right)=\dfrac{\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}+1}{1-\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}$

$=\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

所以直线 l 的方程为 $y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x$.

【探究总结】

对称问题，利用基本方法，虽然思路明确，但是运算量大，若不仔细，难以求得正确结果；利用对称图形的性质，技巧性较强，一时难以想到求解方法，但可简化运算，避免出错.

应用迁移

1. 设抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 A 在 C 上，过点 A 作 C 的准线的垂线，垂足为 B.若直线 BF 的方程为 $y=-2x+2$，则 $|AF|=$（　　）

A.3　　B.4　　C.5　　D.6

C　**解析**：对 $l_{BF}:y=-2x+2$，令 $y=0$，则 $x=1$，

所以 $F(1,0)$，$p=2$，即抛物线 $C:y^2=4x$.故抛物线的准线方程为 $x=-1$，

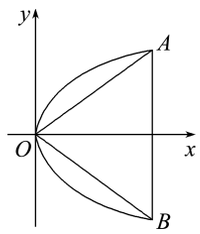
可得 $B(-1,4)$，则 $y_A=4$.代入抛物线 $C:y^2=4x$，得 $x_A=4$，

所以 $|AF|=|AB|=x_A+\dfrac{p}{2}=4+1=5$.

2. 已知正三角形的一个顶点位于坐标原点，另外两个顶点在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上.求这个正三角形

的边长.

解：如图，设正三角形 OAB 的顶点 A，B 在抛物线上，且坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，则 $y_1^2=2px_1$，$y_2^2=2px_2$.



又 $|OA|=|OB|$，所以 $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$，即 $x_1^2-x_2^2+2px_1-2px_2=0$，化简，得 $(x_1^2-x_2^2)+2p(x_1-x_2)=0$，

整理，得 $(x_1-x_2)(x_1+x_2+2p)=0$.

因为 $x_1>0$，$x_2>0$，$2p>0$，所以 $x_1=x_2$.

所以 $|y_1|=|y_2|$，即线段 AB 关于 x 轴对称.

因为 AB 垂直于 x 轴且 $\angle AOx=30°$，

所以 $\dfrac{y_1}{x_1}=\tan 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

因为 $x_1=\dfrac{y_1^2}{2p}$，所以 $y_1=2\sqrt{3}p$.

所以 $|AB|=2y_1=4\sqrt{3}p$.

任务2 抛物线的焦半径和焦点弦

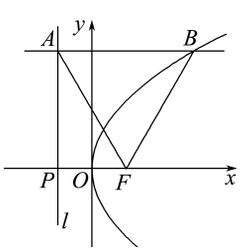
探究活动

例2　(1)已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，与 x 轴平行的直线与 l 和 C 分别交于 A，B 两点，且 $\angle AFB=60°$，则 $|AB|=$_____.

4　**解析**：如图，由抛物线的定义可知 $|BF|=|AB|$，因为 $\angle AFB=60°$，所以 $\triangle ABF$ 为等边三角形，

故 $|AF|=|AB|=|BF|$，$\angle BAF=60°$，所以 $\angle AFO=60°$.

其中准线 l 与 x 轴交点为 P，则 $|PF|=2$，故 $|AF|=\dfrac{|PF|}{\cos 60°}=4$，所以 $|AB|=4$.



(2)已知 F 为抛物线 $C:y^2=3x$ 的焦点，过点 F 且倾斜角为 30°的直线交 C 于 A，B 两点，则 $|AB|=$_____.

12　**解析**：(方法一)由题意知抛物线焦点 $F\left(\dfrac{3}{4},0\right)$，所以直线 AB：$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\dfrac{3}{4}\right)$. 由 $\begin{cases}y^2=3x,\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\dfrac{3}{4}\right),\end{cases}$ 得 $x^2-\dfrac{21}{2}x+\dfrac{9}{16}=0$，$\Delta>0$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则由抛物线的几何性质，得 $|AB|=x_1+x_2+p=\dfrac{21}{2}+\dfrac{3}{2}=12$.

(方法二)易知 $2p=3$，因为 $|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2\theta}$，$\theta=30°$，所以 $|AB|=\dfrac{3}{\sin^2 30°}=12$.

【探究总结】

抛物线焦点弦的相关结论

设 AB 是过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 的弦. 若 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，α 为直线 AB 的倾斜角，则

(1)焦半径 $|AF|=x_1+\dfrac{p}{2}=\dfrac{p}{1-\cos\alpha}$，$|BF|=x_2+\dfrac{p}{2}=\dfrac{p}{1+\cos\alpha}$；

(2)$x_1x_2=\dfrac{p^2}{4}$，$y_1y_2=-p^2$；

(3)弦长 $|AB|=x_1+x_2+p=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}$；

(4)$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}$；

(5)以弦 AB 为直径的圆与抛物线的准线相切；

(6)$S_{\triangle OAB}=\dfrac{p^2}{2\sin\alpha}$($O$ 为抛物线的顶点).

应用迁移

1.(2023·新高考全国Ⅱ卷)(多选)设 O 为坐标原点，直线 $y=-\sqrt{3}(x-1)$ 过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点，且与 C 交于 M，N 两点，l 为 C 的准线，则有　(　　)

A.$p=2$

B.$|MN|=\dfrac{8}{3}$

C.以 MN 为直径的圆与 l 相切

D.$\triangle OMN$ 为等腰三角形

AC　**解析**：易知直线 $y=-\sqrt{3}(x-1)$ 与 x 轴的交点为 $(1,0)$，又直线 $y=-\sqrt{3}(x-1)$ 过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点，可得 $\dfrac{p}{2}=1$，所以 $p=2$，故 A 正确；

抛物线方程为 $y^2=4x$，

将直线方程代入抛物线方程可得 $3x^2-10x+3=0$，

$\Delta=10^2-4\times3\times3=64>0$，则 $x_M+x_N=\dfrac{10}{3}$，

所以$|MN|=x_M+x_N+p=\frac{16}{3}$，故B错误；

因为M,N的中点的横坐标为$\frac{5}{3}$，该点到抛物线的准线的距离为$1+\frac{5}{3}=\frac{8}{3}$，

所以以MN为直径的圆与l相切，故C正确；

由$3x^2-10x+3=0$，解得$x=3$或$x=\frac{1}{3}$，不妨取$M(3,-2\sqrt{3})$，$N\left(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，

则$|OM|=\sqrt{9+12}=\sqrt{21}$，$|ON|=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{12}{9}}=\frac{\sqrt{13}}{3}$，$|MN|=\frac{16}{3}$，

所以$\triangle OMN$不是等腰三角形，故D不正确.

2. 设O是坐标原点，F是抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点，A是抛物线上一点，若$\overrightarrow{FA}$与x轴正方向的夹角为$60°$，求$|\overrightarrow{OA}|$的值.

解：由题意设$A\left(x+\frac{p}{2},\sqrt{3}x\right)$，

代入$y^2=2px$，得$(\sqrt{3}x)^2=2p\left(x+\frac{p}{2}\right)$，

解得$x=p$（负值舍去）.

所以$A\left(\frac{3}{2}p,\sqrt{3}p\right)$，

所以$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}p\right)^2+3p^2}=\frac{\sqrt{21}}{2}p$.

任务3 直线与抛物线的综合问题

探究活动

例3　在平面直角坐标系xOy中，抛物线$C:y^2=2px(p>0)$，焦点为F，P是抛物线C上的一点，并且_____.

①点P的横坐标是3，它到焦点的距离是5；

②点P到点$F(2,0)$的距离比它到直线$l:x=-1$的距离大1；

③抛物线C的准线与圆$M:(x+1)^2+y^2=1$相切.

从条件①②③中选择一个填在上面的横线上，并解答下列问题：

(1)求抛物线C的标准方程；

(2)过点F作直线$(a-2)x+y-4a+6=0(a\neq1)$的垂线，垂足为Q，求$|PF|+|PQ|$的最小值.

解：(1)选择①.因为抛物线$y^2=2px(p>0)$，所以其准线方程为$x=-\frac{p}{2}$.由题意知$3+\frac{p}{2}=5$，所以$p=4$，所以抛物线方程为$y^2=8x$.

选择②.设动点$P(x,y)$，动点P到点$F(2,0)$的距离比它到直线$x=-1$的距离大1，即动点P到点$F(2,0)$的距离等于它到直线$x=-2$的距离，所以$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=|x+2|$，等式两边平方，得$(x-2)^2+y^2=(x+2)^2$，化简可得$y^2=8x$.

选择③.抛物线$C:y^2=2px$的准线方程为$x=-\frac{p}{2}$，圆M的圆心为$M(-1,0)$，半径为1，直线$x=-\frac{p}{2}$与圆M相切，则$\left|-1+\frac{p}{2}\right|=1$.因为$p\neq0$，解得$p=4$，所以抛物线$C$的方程为$y^2=8x$.

(2)因为抛物线C的方程为$y^2=8x$，所以$F(2,0)$，抛物线C的准线方程为$x=-2$.

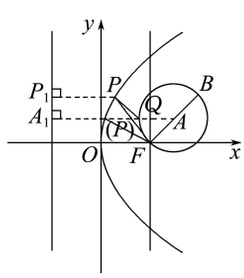
因为方程$(a-2)x+y-4a+6=0$可化为$a(x-4)-2x+y+6=0$，

所以$(a-2)x+y-4a+6=0$过定点$B(4,2)$.设$Q(x,y)$，FB的中点为A，

则$A(3,1)$.因为$FQ\perp BQ$，Q为垂足，所以$|QA|=\frac{1}{2}|FB|=\sqrt{2}$，所以点$Q$的轨迹为以$A$为圆心，$\sqrt{2}$为半径的圆（不包含$B,F$），即$(x-3)^2+(y-1)^2=2$.

过点P作准线$x=-2$的垂线，垂足为P_1（如图），则$|PP_1|=|PF|$，

所以$|PF|+|PQ|=|PP_1|+|PQ|\geqslant|PP_1|+|PA|-\sqrt{2}$，



当且仅当A,P,P_1三点共线且P在A,P_1之间时，等号成立.

过点A作准线$x=-2$的垂线，垂足为A_1（如图），则$|PP_1|+|PA|\geqslant|AA_1|=5$，

当且仅当A_1,P,A三点共线时，等号成立，所以$|PF|+|PQ|\geqslant5-\sqrt{2}$，

当且仅当A_1,P,Q,A四点共线且Q在P,A之间时，等号成立，

所以$|PF|+|PQ|$的最小值为$5-\sqrt{2}$.

【探究总结】

解决直线与圆锥曲线的综合问题的方法

(1)求参数的最值、范围的方法：

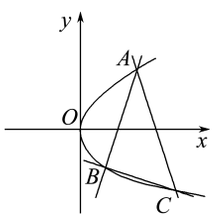
①利用一元二次方程根的判别式构造不等关系，从而确定参数的取值范围；

②利用已知参数的范围，求新参数的范围，关键是在

两个参数之间建立等量关系；
③利用隐含或已知的不等关系建立不等式，从而求出参数的取值范围；
④利用基本不等式求出参数的取值范围；
⑤利用函数的值域，确定参数的取值范围.
(2)圆锥曲线中定点问题的两种解决方法：
①引入参数法：引入动点的坐标或动直线方程中的系数为参数表示变化量，再研究变化量与参数何时没有关系，从而找到定点；
②特殊到一般法：根据动点或动直线的特殊情况找到定点，再证明该定点与变量无关.

应用迁移

如图，过抛物线 $y^2=x$ 上一点 $A(4,2)$ 作倾斜角互补的两条直线 AB，AC，交抛物线于 B，C 两点.求证：直线 BC 的斜率是定值.



证明：设 $k_{AB}=k(k\neq0)$.

因为直线 AB，AC 的倾斜角互补，
所以 $k_{AC}=-k$，
则直线 AB 的方程是 $y=k(x-4)+2$.

由方程组 $\begin{cases}y=k(x-4)+2,\\y^2=x,\end{cases}$ 消去 y 后整理，得 $k^2x^2+(-8k^2+4k-1)x+16k^2-16k+4=0$，$\Delta=(-8k^2+4k-1)^2-4k^2(16k^2-16k+4)>0$，

所以 $4\cdot x_B=\dfrac{16k^2-16k+4}{k^2}$，

即 $x_B=\dfrac{4k^2-4k+1}{k^2}$.

以 $-k$ 代换 x_B 中的 k，得 $x_C=\dfrac{4k^2+4k+1}{k^2}$，

所以 $k_{BC}=\dfrac{y_B-y_C}{x_B-x_C}$

$=\dfrac{k(x_B-4)+2-[-k(x_C-4)+2]}{x_B-x_C}$

$=\dfrac{k(x_B+x_C-8)}{x_B-x_C}=\dfrac{k\left(\dfrac{8k^2+2}{k^2}-8\right)}{\dfrac{-8k}{k^2}}=-\dfrac{1}{4}$，

所以直线 BC 的斜率为定值.

课后素养评价(三十四)

基础落实

1. 设抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，过 F 且倾斜角为 $60°$ 的直线 l 交 C 于 A，B 两点.若 $|AB|=16$，则 $p=$ (　　)

A.2　　B.4
C.6　　D.12

A　**解析**：抛物线 $C:x^2=2py$ 的焦点为 $F\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$，直线 $l:y-\dfrac{p}{2}=\sqrt{3}x$，可得 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(y-\dfrac{p}{2}\right)$，代入抛物线方程，得 $y^2-7py+\dfrac{1}{4}p^2=0$，$\Delta>0$，则 $y_1+y_2=7p$，$|AB|=y_1+y_2+p=7p+p=16$，解得 $p=2$.

2. 设抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，过点 $(-2,0)$，且斜率为 $\dfrac{2}{3}$ 的直线与 C 交于 M，N 两点，则 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=$ (　　)

A.5　　B.6
C.7　　D.8

D　**解析**：由题意知直线 MN 的方程为 $y=\dfrac{2}{3}(x+2)$，

由 $\begin{cases}y=\dfrac{2}{3}(x+2),\\y^2=4x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=4,\\y=4.\end{cases}$

不妨设 $M(1,2)$，$N(4,4)$.
又因为抛物线焦点为 $F(1,0)$，所以 $\overrightarrow{FM}=(0,2)$，$\overrightarrow{FN}=(3,4)$，所以 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0\times3+2\times4=8$.

3. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 作斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线，交抛物线于 A，B 两点，若 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}(\lambda>1)$，则 $\lambda=$ (　　)

A.3　　B.4
C.5　　D.6

A　**解析**：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，易得直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}(x-1)$. 由 $\begin{cases}y=\sqrt{3}(x-1),\\y^2=4x,\end{cases}$ 可得 $3x^2-10x+3=0$，解得 $x_1=3$，$x_2=\dfrac{1}{3}(x_1>x_2)$.

因为 $|FA|=x_1+1$，$|FB|=x_2+1$，所以 $\lambda=\dfrac{|FA|}{|FB|}$

$=\dfrac{x_1+1}{x_2+1}=\dfrac{4}{\frac{4}{3}}=3$.

4.设抛物线 $x^2=12y$ 的焦点为 F，经过点 $P(2,1)$ 的直线 l 与抛物线相交于 A,B 两点.若点 P 恰为 AB 的中点，则 $|AF|+|BF|=$_____.

8　**解析**：分别过点 A,B,P 作准线的垂线，垂足分别为 M,N,Q（图略），

根据抛物线上的点到焦点的距离等于该点到准线的距离，

得 $|AF|+|BF|=|AM|+|BN|=2|PQ|=2\times(1+3)=8$.

5.已知抛物线 $y^2=4x$，过点 $P(4,0)$ 的直线与抛物线相交于 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 两点，则 $y_1^2+y_2^2$ 的最小值是_____.

32　**解析**：设直线 AB 的方程为 $x=my+4$，代入 $y^2=4x$，得 $y^2-4my-16=0$，$\Delta=16m^2+64>0$，

则 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-16$，所以 $y_1^2+y_2^2=(y_1+y_2)^2-2y_1y_2=16m^2+32$，当 $m=0$ 时，$y_1^2+y_2^2$ 取得最小值为 32.

6.已知抛物线 $y^2=4x$ 和点 $M(6,0)$，O 为坐标原点，直线 l 过点 M，且与抛物线交于 A,B 两点.

(1)求 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的值；

(2)若 $\triangle OAB$ 的面积等于 $12\sqrt{10}$，求直线 l 的方程.

解：(1)设直线 l 的方程为 $x=my+6$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}x=my+6,\\y^2=4x,\end{cases}$ 得 $y^2-4my-24=0$，

显然 $\Delta>0$，$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-24$，$x_1x_2=36$，

可得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=12$.

(2)因为 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}|OM|\cdot|y_1-y_2|=3\sqrt{16m^2+96}=12\sqrt{m^2+6}=12\sqrt{10}$，

所以 $m^2=4$，$m=\pm2$.

故直线 l 的方程为 $x+2y-6=0$ 或 $x-2y-6=0$.

能力提升

1.设 A,B 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上不同的两点，点 F 是抛物线的焦点，且 $\triangle OAB$（O 为原点）的重心恰为 F.若 $|AF|=5$，则 $p=$　　(　　)

A.1　　B.2

C.3　　D.4

D　**解析**：设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，

因为 $\triangle OAB$ 的重心为 F，所以 $\begin{cases}\dfrac{x_1+x_2+0}{3}=\dfrac{p}{2},\\\dfrac{y_1+y_2+0}{3}=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{3p}{2},\\y_1=-y_2.\end{cases}$

由 $y_1=-y_2$ 可知 A,B 关于 x 轴对称，即 $x_1=x_2$，

则 $x_1+x_2=2x_1=\dfrac{3p}{2}$，即 $x_1=\dfrac{3p}{4}$.

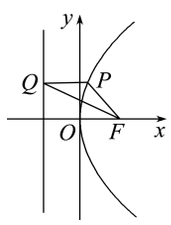
又因为 $|AF|=x_1+\dfrac{p}{2}=\dfrac{5p}{4}=5$，解得 $p=4$.

2.设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，过抛物线上一点 P 作其准线的垂线，垂足为 Q.若 $\angle PQF=30^\circ$，则 $|PQ|=$　　(　　)

A.$\dfrac{2}{3}$　　B.$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

C.$\dfrac{4}{3}$　　D.$\sqrt{3}$

C　**解析**：如图所示，



由抛物线的定义，可得 $|PF|=|PQ|$.

又 $\angle PQF=30^\circ$，所以可得直线 PF 的倾斜角为 120°，

则可得 $\dfrac{1}{2}|PF|+|PQ|=\dfrac{1}{2}|PF|+|PF|=p=2$，

从而 $|PF|=\dfrac{2}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{4}{3}$，所以 $|PQ|=\dfrac{4}{3}$.

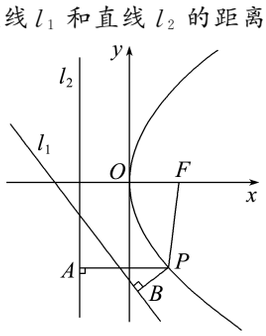
3.已知直线 $l_1:4x+3y+6=0$ 和直线 $l_2:x=-1$，则抛物线 $y^2=4x$ 上一动点 P 到直线 l_1 和直线 l_2 的距离之和的最小值是　　(　　)

A.2　　B.3

C.$\dfrac{11}{5}$　　D.$\dfrac{37}{16}$

A　**解析**：抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 $F(1,0)$，直线 $l_2:x=-1$ 为抛物线的准线.

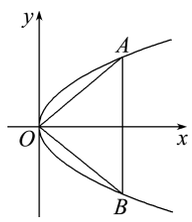
如图，$|PB|+|PA|=|PB|+|PF|\geqslant|FB|$，所以当点 F,P,B 共线且 $FB\perp l_1$ 时，抛物线 $y^2=4x$ 上一动点 P 到直线 l_1 和直线 l_2 的距离之和最小，



即距离和的最小值为点 F 到直线 l_1 的距离 $d=\dfrac{|4\times1+3\times0+6|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$.

4.已知等边三角形的一个顶点位于原点，另外两个顶点在抛物线 $y^2=\sqrt{3}x$ 上，则这个等边三角形的边长为_____.

6　**解析**：由题意可知等边三角形的一个顶点位于原点，另外两个顶点在抛物线 $y^2=\sqrt{3}x$ 上，则另外两个顶点关于 x 轴对称，如图所示.



设等边三角形的边长为 a，则点 A 的横坐标为 $a\cos 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，纵坐标为 $a\sin 30°=\dfrac{1}{2}a$，

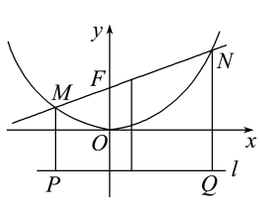
则 $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,\dfrac{1}{2}a\right)$，代入 $y^2=\sqrt{3}x$ 得 $\left(\dfrac{1}{2}a\right)^2=\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，

解得 $a=6$（$a=0$ 舍），

故等边三角形的边长为 6.

5.已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，过点 F 的直线与抛物线 C 交于 M,N 两点，且 $|MN|=8$，则线段 MN 的中点到抛物线 C 的准线的距离为_____.

4　**解析**：如图，分别过点 M,N 作抛物线 C 的准线的垂线，垂足分别为 P,Q，由抛物线的定义知，$|MP|=|MF|$，$|NQ|=|NF|$，则 $|MP|+|NQ|=|MN|=8$. 线段 MN 的中点到抛物线 C 的准线的距离为梯形 $MNQP$ 的中位线的长度，即 $\dfrac{1}{2}\times(|MP|+|NQ|)=4$.



6.已知点 A,B 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上的两点，O 为原点，且 $OA\perp OB$.

(1)求 A,B 两点的横坐标之积和纵坐标之积；

(2)求证：直线 AB 过定点.

(1)**解**：设点 A,B 的坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，则有 $k_{OA}=\dfrac{y_1}{x_1},k_{OB}=\dfrac{y_2}{x_2}$.

因为 $OA\perp OB$，所以 $k_{OA}\cdot k_{OB}=-1$，所以 $x_1x_2+y_1y_2=0$.

因为 $y_1^2=2px_1,y_2^2=2px_2$，所以 $\dfrac{y_1^2}{2p}\cdot\dfrac{y_2^2}{2p}+y_1y_2=0$.

因为 $y_1\neq0,y_2\neq0$，所以 $y_1y_2=-4p^2$，所以 $x_1x_2=4p^2$.

(2)**证明**：因为 $y_1^2=2px_1,y_2^2=2px_2$，两式相减得 $(y_1-y_2)(y_1+y_2)=2p(x_1-x_2)$，

所以 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{2p}{y_1+y_2}$，所以 $k_{AB}=\dfrac{2p}{y_1+y_2}$，故直线 AB 的方程为 $y-y_1=\dfrac{2p}{y_1+y_2}(x-x_1)$，

所以 $y=\dfrac{2px}{y_1+y_2}+y_1-\dfrac{2px_1}{y_1+y_2}$，即 $y=\dfrac{2px}{y_1+y_2}+\dfrac{y_1^2-2px_1+y_1y_2}{y_1+y_2}$.

因为 $y_1^2=2px_1,y_1y_2=-4p^2$，代入整理得 $y=\dfrac{2px}{y_1+y_2}+\dfrac{-4p^2}{y_1+y_2}$，

所以 $y=\dfrac{2p}{y_1+y_2}(x-2p)$，即直线 AB 过定点 $(2p,0)$.

7.已知抛物线 $C:y^2=3x$ 的焦点为 F，斜率为 $\dfrac{3}{2}$ 的直线 l 与 C 的交点为 A,B，与 x 轴的交点为 P.

(1)若 $|AF|+|BF|=4$，求 l 的方程；

(2)若 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，求 $|AB|$.

解：设直线 $l:y=\dfrac{3}{2}x+t$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

(1)由题意可设 $F\left(\dfrac{3}{4},0\right)$，则 $|AF|+|BF|=x_1+x_2+\dfrac{3}{2}$.

又 $|AF|+|BF|=4$，所以 $x_1+x_2=\dfrac{5}{2}$.

由 $\begin{cases}y=\dfrac{3}{2}x+t,\\y^2=3x.\end{cases}$ 消去 y，整理，可得 $9x^2+12(t-1)x+4t^2=0$，$\Delta>0$，所以 $x_1+x_2=-\dfrac{12(t-1)}{9}$，

所以 $-\dfrac{12(t-1)}{9}=\dfrac{5}{2}$，得 $t=-\dfrac{7}{8}$，

所以 l 的方程为 $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{7}{8}$.

(2)由 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，可得 $y_1=-3y_2$.

由 $\begin{cases}y=\dfrac{3}{2}x+t,\\y^2=3x.\end{cases}$ 消去 x，整理，可得 $y^2-2y+2t=$

$0,\Delta>0$，所以 $y_1+y_2=2$，

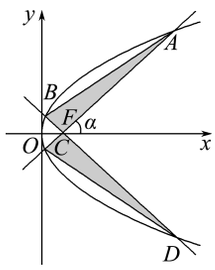
所以 $-3y_2+y_2=2$，解得 $y_2=-1$，$y_1=3$.

将其代入 C 的方程，得 $x_1=3$，$x_2=\frac{1}{3}$，

所以 $|AB|=\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2}\times\left|3-\frac{1}{3}\right|=\frac{4\sqrt{13}}{3}$.

自我超越

已知抛物线 $C:y^2=8x$，其中 AC，BD 是过抛物线焦点 F 的两条互相垂直的弦，直线 AC 的倾斜角为 α，则当 $\alpha=45°$ 时，如图所示的“蝴蝶形图案（阴影区域）”的面积为　（　　）



A.4　　B.8　　C.16　　D.32

D　**解析**：由题意知 $F(2,0)$，直线 AC 的倾斜角 $\alpha=45°$，则直线 AC 的方程为 $y=x-2$，

联立 $y^2=8x$，消去 y，得 $x^2-12x+4=0$，解得 $x=6\pm4\sqrt{2}$，

所以 $x_A=6+4\sqrt{2}$，$x_C=6-4\sqrt{2}$.

由抛物线的定义可得 $|AF|=x_A+2=8+4\sqrt{2}$，$|CF|=x_C+2=8-4\sqrt{2}$，

根据抛物线的对称性结合 AC，BD 是过抛物线焦点 F 的两条互相垂直的弦，

可知 $|DF|=|AF|=8+4\sqrt{2}$，$|BF|=|CF|=8-4\sqrt{2}$，

所以 $S_{\triangle AFB}=\frac{1}{2}|AF|\times|BF|=\frac{1}{2}(8+4\sqrt{2})(8-4\sqrt{2})=16$，

故“蝴蝶形图案（阴影区域）”的面积为 $2\times16=32$.

微专题培优（五）　圆锥曲线中的离心率问题

圆锥曲线中的离心率问题是解析几何的重要题型之一，是近几年的命题热点.与离心率相关的问题主要有三类：第一类是利用公式或定义求离心率；第二类是构造齐次式求离心率；第三类是求离心率的范围或最值.

类型1　利用公式或定义求圆锥曲线的离心率

例1　设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 P 在 C 上.若 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，$\angle PF_1F_2=30°$，则 C 的离心率为　（　　）

A.$\sqrt{3}-1$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C.$\frac{1}{2}$　　D.$\frac{1}{3}$

A　**解析**：因为 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，所以 $PF_1\perp PF_2$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PF_1F_2$ 中，$\angle PF_1F_2=30°$，

得 $|PF_2|=c$，$|PF_1|=\sqrt{3}c$.

由 $|PF_2|+|PF_1|=2a$，得 $c+\sqrt{3}c=2a$，

所以椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$.

例2　已知双曲线 C 的中心为坐标原点，焦点在坐标轴上，且双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，则双曲线 C 的离心率为　（　　）

A.2　　B.3

C.3 或 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D.2 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D　**解析**：由题意，双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，

当双曲线 C 的焦点在 x 轴上时，可得 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=2$；

当双曲线 C 的焦点在 y 轴上时，可得 $\frac{b}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

综上，双曲线 C 的离心率为 2 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

例3　已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，P 为 C 上一点.若 $PF_2\perp F_1F_2$，且 $\angle PF_1F_2=30°$，则椭圆 C 的离心率为　（　　）

A.$\frac{1}{6}$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{6}$

C.$\frac{1}{3}$　　D.$\frac{\sqrt{3}}{3}$

D　**解析**：因为 P 为椭圆 C 上的点，

所以 $|PF_1|+|PF_2|=2a$.

因为 $PF_2\perp F_1F_2$，且$\angle PF_1F_2=30°$，所以$|PF_2|=\frac{2}{3}a$，$|PF_1|=\frac{4}{3}a$.

在$\triangle PF_1F_2$中，$|F_1F_2|^2+|PF_2|^2=|PF_1|^2$，即$(2c)^2+\left(\frac{2}{3}a\right)^2=\left(\frac{4}{3}a\right)^2$，

整理得$c^2=\frac{1}{3}a^2$，即$e^2=\frac{1}{3}$，所以$e=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【规律方法】

利用公式或定义求圆锥曲线离心率的方法

解题的关键是借助图形建立关于a，b，c的关系式(等式或不等式)，从而求出离心率e，常用方法如下：

(1)直接求出a，c，再利用离心率公式$e=\frac{c}{a}$求解；

(2)由a与b的关系求离心率，利用变形公式$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$(椭圆)或$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$(双曲线)求解；

(3)利用圆锥曲线的定义，结合余弦定理得出a与c之间的关系式，进而求出离心率.

【对点训练】

1.已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$P$为第一象限内$C$上的一点.若$\triangle PF_1F_2$为等腰三角形，且$\cos\angle PF_1F_2=\frac{7}{8}$，则$C$的离心率为　　(　　)

A.$\sqrt{3}$或$\sqrt{2}$　　B.2或$\frac{4}{3}$

C.2或$\sqrt{2}$　　D.$\sqrt{3}$或$\frac{4}{3}$

B　**解析**：因为P在第一象限，所以$|PF_1|>|PF_2|$.又$\triangle PF_1F_2$为等腰三角形，

所以当$|PF_2|=|F_1F_2|=2c$时，$|PF_1|=2|F_1F_2|$

$\cos\angle PF_1F_2=2\cdot 2c\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{2}c$.

又$|PF_1|-|PF_2|=\frac{7}{2}c-2c=\frac{3}{2}c=2a$，则$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{3}$；

当$|PF_1|=|F_1F_2|=2c$时，$|PF_2|=2c-2a$，

由余弦定理的推论得$\cos\angle PF_1F_2=\frac{|PF_1|^2+|F_1F_2|^2-|PF_2|^2}{2|PF_1|\cdot|F_1F_2|}=\frac{4c^2+4c^2-(2c-2a)^2}{2\cdot 2c\cdot 2c}=\frac{c^2+2ac-a^2}{2c^2}=\frac{7}{8}$，

解得$\frac{c}{a}=2$或$\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$(舍去)，则$e=\frac{c}{a}=2$.

故C的离心率为$\frac{4}{3}$或2.

2.设椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过点$F_2$作平行于$y$轴的直线交$C$于$A$，$B$两点.若$|F_1A|=13$，$|AB|=10$，则$C$的离心率为_____.

$\frac{2}{3}$　**解析**：由题意知，$|F_1A|=13$，而$AB\perp x$轴，故

$|F_2A|=\frac{1}{2}|AB|=5$，

所以$|F_1A|+|F_2A|=2a=18$，解得$a=9$.

又$|F_1F_2|=\sqrt{|AF_1|^2-|AF_2|^2}=12=2c$，所以$c=6$，

所以椭圆C的离心率为$e=\frac{c}{a}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

类型2 构造齐次式求圆锥曲线的离心率

例4　已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F$，直线$\sqrt{3}x+y=0$与双曲线的右支交于点$M$.若$|OM|=|OF|$($O$为原点)，则该双曲线的离心率为_____.

$\sqrt{3}+1$　**解析**：如图，因为直线$\sqrt{3}x+y=0$的斜率为$-\sqrt{3}$，倾斜角为$\frac{2\pi}{3}$，所以$\angle MOF=\frac{\pi}{3}$.

由于$|OM|=|OF|=c$，

所以$\triangle OMF$是等边三角形，所以$x_M=\frac{1}{2}c$，$y_M=-\frac{\sqrt{3}}{2}c$.

将$M\left(\frac{1}{2}c,-\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)$代入$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，

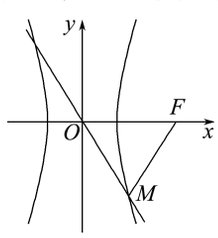
得$\frac{c^2}{4a^2}-\frac{3c^2}{4b^2}=\frac{c^2}{4a^2}-\frac{3c^2}{4(c^2-a^2)}=1$，

整理得$c^4-8a^2c^2+4a^4=0$.

两边除以a^4得$e^4-8e^2+4=0$，

得$e^2=\frac{8\pm\sqrt{64-16}}{2}=4\pm 2\sqrt{3}=(\sqrt{3}\pm 1)^2$，

解得$e=\sqrt{3}+1$或$e=\sqrt{3}-1$(舍去).



【规律方法】

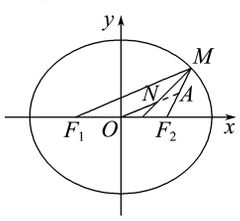
利用齐次式求离心率的方法

根据题设条件给出的关系式，借助 a,b,c 之间的关系，构造关于 a,c 的齐次式（特别是二次齐次式），进而得到关于 e 的一元方程，从而通过解方程得出离心率 e 的值.利用方程法求解双曲线的离心率问题，关键是构造相应的方程，解方程时要注意双曲线的离心率的范围，对方程的根加以取舍.

【对点训练】

已知 M 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的一点，F_1,F_2 分别是 C 的左、右焦点，且 $\angle F_1MF_2=60°$，点 N 在 $\angle F_1MF_2$ 的平分线上，O 为原点，$ON\parallel MF_1$，$|ON|=b$，则 C 的离心率为_____.

$\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$　**解析：**设 $|MF_1|=m$，$|MF_2|=n$，延长 ON 交 MF_2 于点 A，如图所示.



由题意知 $ON\parallel MF_1$，O 为 F_1F_2 的中点，所以 A 为 MF_2 的中点.

又 $\angle F_1MF_2=60°$，点 N 在 $\angle F_1MF_2$ 的平分线上，所以 $\angle NMA=\angle ANM=30°$，所以 $\triangle NAM$ 是等腰三角形，

所以 $|AN|=|MA|=\dfrac{1}{2}|MF_2|=\dfrac{1}{2}n$，

则 $|OA|=\dfrac{1}{2}|MF_1|=\dfrac{1}{2}m=|ON|+|AN|=b+\dfrac{1}{2}n$，

所以 $m-n=2b$.

又 $m+n=2a$，所以 $\begin{cases}m=a+b,\\n=a-b.\end{cases}$

又在 $\triangle MF_1F_2$ 中，由余弦定理得 $|MF_1|^2+|MF_2|^2-2|MF_1|\cdot|MF_2|\cdot\cos 60°=|F_1F_2|^2$，

即 $m^2+n^2-mn=4c^2$，即 $(a+b)^2+(a-b)^2-(a+b)(a-b)=4c^2$，

化简得 $a^2+3b^2=4c^2$.

又 $b^2=a^2-c^2$，所以 $4a^2=7c^2$，所以 $e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{4}{7}$，即 $e=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

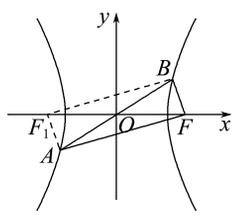
类型3 求圆锥曲线的离心率的范围或最值

例5　设双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，双曲线 C 上的 A,B 两点关于原点对称，且满足 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=0$，$|FB|<|FA|\leqslant 3|FB|$，则双曲线 C 的离心率的取值范围是　（　）

A. $\left[\dfrac{\sqrt{10}}{2},+\infty\right)$　　B. $[\sqrt{2},+\infty)$

C. $\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2},+\infty\right)$　　D. $(\sqrt{2},+\infty)$

A　**解析：**如图所示，



设双曲线的左焦点为 F_1，由双曲线的对称性可知，四边形 $AFBF_1$ 为平行四边形，

又 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=0$，则 $FA\perp FB$，所以平行四边形 $AFBF_1$ 为矩形，故 $|AB|=|FF_1|=2c$.

设 $|AF_1|=n$，$|AF|=m$，则 $|BF|=n$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中，$m-n=2a$，$m^2+n^2=4c^2$，

所以 $2mn=4c^2-4a^2=4b^2$，则 $mn=2b^2$，

所以 $\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}=\dfrac{m^2+n^2}{mn}=\dfrac{2c^2}{b^2}$.

令 $\dfrac{m}{n}=t$，得 $t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{2c^2}{b^2}$.

又由 $|FB|<|FA|\leqslant 3|FB|$，得 $\dfrac{m}{n}=t\in(1,3]$.

因为对勾函数 $y=t+\dfrac{1}{t}$ 在 $(1,3]$ 上单调递增，所以 $\dfrac{2c^2}{b^2}=t+\dfrac{1}{t}\in\left(2,\dfrac{10}{3}\right]$，

所以 $\dfrac{c^2}{b^2}\in\left(1,\dfrac{5}{3}\right]$，即 $\dfrac{a^2}{b^2}+1=\dfrac{a^2+b^2}{b^2}=\dfrac{c^2}{b^2}\in\left(1,\dfrac{5}{3}\right]$，

则 $\dfrac{a^2}{b^2}\in\left(0,\dfrac{2}{3}\right]$，故 $\dfrac{b^2}{a^2}\in\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.

所以 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}\in\left[\dfrac{\sqrt{10}}{2},+\infty\right)$，

所以双曲线 C 的离心率的取值范围是 $\left[\dfrac{\sqrt{10}}{2},+\infty\right)$.

【规律方法】

求离心率的取值范围或最值的方法

(1)利用曲线的范围和几何性质：通过分析曲线的几何性质，如椭圆的焦点、顶点等，建立不等式确定离心率的范围；

(2)利用定义和焦半径的范围：根据圆锥曲线的定义和焦半径的性质，建立不等式确定离心率的范围；

(3)利用点与圆锥曲线的位置关系：通过分析点与圆锥曲线的位置关系，如点在椭圆内部或外部，建立不

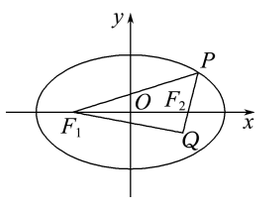
等式确定离心率的范围；

(4)利用均值不等式或函数的值域：通过均值不等式或函数的值域建立不等式，从而确定离心率的范围；

(5)利用三角函数的有界性：通过三角函数的有界性建立不等式，进而确定离心率的范围.

【对点训练】

如图，点 P 在以 F_1，F_2 为左、右焦点的椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，椭圆内存在一点 Q 在 PF_2 的延长线上，且满足 $QF_1\perp QP$.若 $\sin\angle F_1PQ=\frac{4}{5}$，则椭圆 C 的离心率的取值范围是　　(　　)



A.$\left(\frac{1}{3},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$　　B.$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

C.$\left(\frac{\sqrt{5}}{3},1\right)$　　D.$\left(0,\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

B　**解析**：由题设 $\angle F_1PF_2$ 为锐角且 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{5}$，

设 $|PF_1|=x$，则 $|PF_2|=2a-x$ 且 $|PQ|=\frac{3x}{5}$，

$|F_1Q|=\frac{4x}{5}$，

故 $|F_2Q|=\frac{3}{5}x-(2a-x)=\frac{8x}{5}-2a$.

因为 Q 在椭圆内部且 Q 在 PF_2 的延长线上，所以 $\frac{8x}{5}-2a>0$ 且 $\frac{4}{5}x+\frac{8}{5}x-2a<2a$.

故 $\frac{5a}{4}<x<\frac{5a}{3}$.

而 $4c^2=x^2+(2a-x)^2-2x\times(2a-x)\times\frac{3}{5}$，

整理得 $4c^2=\frac{16}{5}x^2-\frac{32}{5}ax+4a^2=\frac{16}{5}(x-a)^2+\frac{4a^2}{5}$.

又 $\frac{5a}{4}<x<\frac{5a}{3}$，

所以 $a^2<4c^2<\frac{100}{45}a^2$，即 $\frac{1}{2}<e<\frac{\sqrt{5}}{3}$.

综上可得 $e\in\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

微专题培优集训(五)

1.已知 P 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点，且在 x 轴上方，F_1，F_2 分别是椭圆的左、右焦点，$|F_1F_2|=12$，直线 PF_2 的斜率为 $-4\sqrt{3}$，$\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $24\sqrt{3}$，则椭圆的离心率为　　(　　)

A.$\frac{1}{3}$　　B.$\frac{3}{5}$　　C.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

B　**解析**：由 $|F_1F_2|=12$，可得 $c=6$，$F_1(-6,0)$，$F_2(6,0)$.

又 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $24\sqrt{3}$，即 $S=\frac{1}{2}\times2c\times y_P=6y_P=24\sqrt{3}$，

所以 $y_P=4\sqrt{3}$.

又直线 PF_2 的斜率为 $k_{PF_2}=\frac{y_P-0}{x_P-6}=\frac{4\sqrt{3}}{x_P-6}=-4\sqrt{3}$，解得 $x_P=5$，

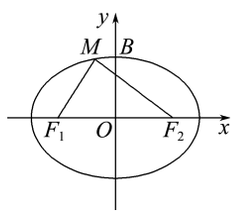
所以点 $P(5,4\sqrt{3})$.

则 $|PF_1|=\sqrt{(5+6)^2+(4\sqrt{3}-0)^2}=13$，$|PF_2|=\sqrt{(5-6)^2+(4\sqrt{3}-0)^2}=7$，

所以 $2a=|PF_1|+|PF_2|=13+7=20$，即 $a=10$，

所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

2.如图，已知椭圆的左、右焦点分别是 F_1，F_2，焦距为 $2c$.若直线 $y=\sqrt{3}(x+c)$ 与椭圆交于 M 点，且满足 $\angle MF_1F_2=2\angle MF_2F_1$，则椭圆的离心率是(　　)



A.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B.$\sqrt{3}-1$　　C.$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　D.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

B　**解析**：因为 $y=\sqrt{3}(x+c)$ 经过左焦点，且斜率为 $\sqrt{3}$，则 $\tan\angle MF_1F_2=\sqrt{3}$，又 $\angle MF_1F_2$ 为三角形内角，所以 $\angle MF_1F_2=60°$，所以 $\angle MF_2F_1=30°$，则 $MF_2\perp MF_1$.

设$|MF_1|=x$，则$|MF_2|=|MF_1|\tan 60°=\sqrt{3}x$.由椭圆的定义可知，$|MF_1|+|MF_2|=2a$，即$x+\sqrt{3}x=2a$，解得$x=(\sqrt{3}-1)a$，所以$|MF_1|=(\sqrt{3}-1)a$，$|MF_2|=\sqrt{3}x=(3-\sqrt{3})a$.

在Rt$\triangle MF_1F_2$中，由勾股定理得$|MF_1|^2+|MF_2|^2=|F_1F_2|^2$，即$(\sqrt{3}-1)^2a^2+(3-\sqrt{3})^2a^2=4c^2$，解得$\dfrac{c^2}{a^2}=4-2\sqrt{3}$，所以椭圆的离心率$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$.

3.已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左顶点为$A$，点$P,Q$均在双曲线上且关于$y$轴对称.若直线$AP,AQ$的斜率之积为$-\dfrac{1}{4}$，则双曲线的离心率为（　　）

A.$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　B.$\sqrt{5}$　　C.$\dfrac{5}{4}$　　D.5

A　**解析：**设$P(x_0,y_0)$，则$Q(-x_0,y_0)$，$A(-a,0)$，

所以$k_{AP}\cdot k_{AQ}=\dfrac{y_0}{x_0+a}\cdot\dfrac{y_0}{-x_0+a}=\dfrac{y_0^2}{a^2-x_0^2}$.

由$P(x_0,y_0)$在双曲线上，得$\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$，

即有$y_0^2=\dfrac{b^2}{a^2}(x_0^2-a^2)$，故$\dfrac{y_0^2}{a^2-x_0^2}=\dfrac{\frac{b^2}{a^2}(x_0^2-a^2)}{a^2-x_0^2}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，

所以$-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{1}{4}$，即$\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{4}$，

故$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

4.已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，$M$和$N$分别为实轴的右端点和虚轴的上端点，过右焦点$F$的直线$l$交$C$的右支于$A,B$两点.若存在直线$l$使得点$M$为$\triangle NAB$的重心，则$C$的离心率为（　　）

A.$\dfrac{4}{3}$　　B.$\sqrt{2}$　　C.2　　D.$\sqrt{5}$

A　**解析：**依题意，$M(a,0)$，$N(0,b)$，$F(c,0)$，

设$B(x_1,y_1)$，$A(x_2,y_2)$，则AB的中点$P\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$.

因为点M为$\triangle NAB$的重心，则$a=\dfrac{0+x_1+x_2}{3}$，$\dfrac{b+y_1+y_2}{3}=0$，

所以AB的中点$P\left(\dfrac{3a}{2},-\dfrac{b}{2}\right)$.

因为$\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$，$\dfrac{x_2^2}{a^2}-\dfrac{y_2^2}{b^2}=1$，

两式作差得$\dfrac{x_1^2-x_2^2}{a^2}=\dfrac{y_1^2-y_2^2}{b^2}$，化简得$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\dfrac{b^2}{a^2}$，所以$k_{BA}\cdot k_{OP}=\dfrac{b^2}{a^2}$.

因为$k_{OP}=-\dfrac{b}{3a}$，又B,A,F,P四点共线，所以$k_{BA}=k_{FP}=\dfrac{\frac{b}{2}}{c-\frac{3a}{2}}$.

因此$\dfrac{\frac{b}{2}}{c-\frac{3a}{2}}\cdot\dfrac{-b}{3a}=\dfrac{b^2}{a^2}$，解得$3c=4a$，故$e=\dfrac{4}{3}$.

5.已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，过左焦点$F$作一条斜率为$k(k>0)$的直线，与椭圆交于$A,B$两点，满足$|AF|=2|FB|$，则实数$k$的值为（　　）

A.1　　B.$\sqrt{2}$　　C.$\sqrt{3}$　　D.2

B　**解析：**因为离心率$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以$a^2=3c^2$，$b^2=2c^2$.设直线方程为$x=\dfrac{1}{k}y-c$，则与$2x^2+3y^2=6c^2$联立得$\left(3+\dfrac{2}{k^2}\right)y^2-\dfrac{4c}{k}y-4c^2=0$.设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，不妨令$y_1>y_2$，由$|AF|=2|FB|$，可得$y_1=-2y_2$，其中$y_1+y_2=\dfrac{4kc}{3k^2+2}$①，$y_1y_2=\dfrac{-4c^2k^2}{3k^2+2}$②.将$y_1=-2y_2$代入①②，可得$y_2=-\dfrac{4kc}{3k^2+2}$，$y_2^2=\dfrac{2c^2k^2}{3k^2+2}$，从而$\left(-\dfrac{4kc}{3k^2+2}\right)^2=\dfrac{2c^2k^2}{3k^2+2}$，解得$k^2=2$.因为$k>0$，所以$k=\sqrt{2}$.

6.已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，点$F$为左焦点，点$P$为下顶点，平行于$FP$的直线$l$交椭圆于$A,B$两点，且$AB$的中点为$M\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$，则椭圆的离心率为_____.

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　**解析：**椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，左焦点$F(-c,0)$，下顶点$P(0,-b)$，

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

因为 AB 的中点为 $M\left(1,\frac{1}{2}\right)$，所以 $x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=1$.

因为 $PF/\!/l$，

所以 $k_{PF}=k_l=-\frac{b}{c}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

由 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$，两式相减得

$$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0,$$

可化为 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$，得 $-\frac{b}{c}=-\frac{2b^2}{a^2}$，即 $2bc=a^2$.

两边平方得 $4b^2c^2=4c^2(a^2-c^2)=a^4$，

化为 $4e^4-4e^2+1=0$，解得 $e^2=\frac{1}{2}$.

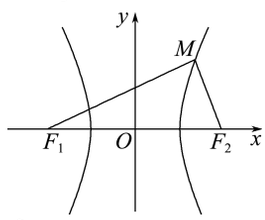
又 $0<e<1$，解得 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. 设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过点 F_2 作 x 轴的垂线与双曲线在第一象限的交点为 A.已知 $Q\left(c,\frac{3a}{2}\right)$，$|F_2Q|>|F_2A|$，$P$ 是双曲线 C 右支上的动点，且 $|PF_1|+|PQ|>\frac{3}{2}|F_1F_2|$ 恒成立，则双曲线 C 的离心率的取值范围是_____.

$\left(1,\frac{7}{6}\right)$　**解析：** 将 $x=c$ 代入双曲线的方程可得 $y=\pm b\cdot\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1}=\pm\frac{b^2}{a}$.由 $|F_2Q|>|F_2A|$，可得 $\frac{3a}{2}>\frac{b^2}{a}$，即为 $3a^2>2b^2=2(c^2-a^2)$，即 $e=\frac{c}{a}<\frac{\sqrt{10}}{2}$①.又 $|PF_1|+|PQ|>\frac{3}{2}|F_1F_2|$ 恒成立，只要求出 $|PF_1|+|PQ|$ 的最小值即可.由双曲线的定义，可得 $|PF_1|=2a+|PF_2|$，$|F_1F_2|=2c$，即 $|PF_1|+|PQ|=|PF_2|+|PQ|+2a$.当 F_2,P,Q 三点共线时，$|PF_2|+|PQ|$ 取得最小值 $|F_2Q|=\frac{3a}{2}$，可得 $3c<2a+\frac{3a}{2}$，即有 $e=\frac{c}{a}<\frac{7}{6}$②.由 $e>1$，结合①②可得，e 的范围是 $\left(1,\frac{7}{6}\right)$.

8. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2.若 C 上存在点 M 满足 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=-4a^2$，则双曲线 C 的离心率的最小值为_____.

$\sqrt{5}$　**解析：** 设 $M(x,y)$，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，则 $\overrightarrow{MF_1}=(-c-x,-y)$，$\overrightarrow{MF_2}=(c-x,-y)$，



所以 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=x^2+y^2-c^2$.

又因为 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=-4a^2$，

所以 $x^2+y^2-c^2=-4a^2$①.

又 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow y^2=\frac{b^2x^2}{a^2}-b^2$②，

将②代入①，得 $x^2+\frac{b^2x^2}{a^2}-b^2-c^2=-4a^2$，

整理得 $b^2+c^2-4a^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2$.因为 $x^2\geqslant a^2$，

所以 $b^2+c^2-4a^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2\geqslant\frac{a^2+b^2}{a^2}a^2=a^2+b^2$，

化简可得 $c^2\geqslant5a^2\Rightarrow\frac{c^2}{a^2}\geqslant5\Rightarrow e=\frac{c}{a}\geqslant\sqrt{5}$，

即双曲线 C 的离心率的最小值为 $\sqrt{5}$.

★★★

迁　移　应　用

类型一　圆锥曲线中的定直线问题

例 1　(2023·新高考全国Ⅱ卷)已知双曲线 C 的中心为坐标原点,左焦点为$(-2\sqrt{5},0)$,离心率为$\sqrt{5}$.

(1)求 C 的方程;

(2)记 C 的左、右顶点分别为 A_1,A_2,过点$(-4,0)$的直线与 C 的左支交于 M,N 两点,M 在第二象限,直线 MA_1 与 NA_2 交于点 P.求证:点 P 在定直线上.

(1)**解**:设双曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,由焦点坐标可知 $c=2\sqrt{5}$,

由 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$,得 $a=2$,$b=\sqrt{c^2-a^2}=4$,

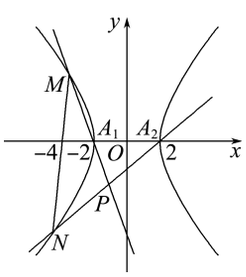
所以双曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$.

(2)**证明**:由(1)可得 $A_1(-2,0)$,$A_2(2,0)$,设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

显然直线 MN 的斜率不为 0,所以设直线 MN 的方程为 $x=my-4$,且$-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}$.

与$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$ 联立,消去 x,得$(4m^2-1)y^2-32my+48=0$,且 $\Delta=64(4m^2+3)>0$,

则 $y_1+y_2=\frac{32m}{4m^2-1}$,$y_1y_2=\frac{48}{4m^2-1}$.



又直线 MA_1 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$,直线 NA_2 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$,

联立直线 MA_1 与直线 NA_2 的方程可得

$$\frac{x+2}{x-2}=\frac{y_2(x_1+2)}{y_1(x_2-2)}=\frac{y_2(my_1-2)}{y_1(my_2-6)}$$

$$=\frac{my_1y_2-2(y_1+y_2)+2y_1}{my_1y_2-6y_1}$$

$$=\frac{m\cdot\frac{48}{4m^2-1}-2\cdot\frac{32m}{4m^2-1}+2y_1}{m\times\frac{48}{4m^2-1}-6y_1}=\frac{\frac{-16m}{4m^2-1}+2y_1}{\frac{48m}{4m^2-1}-6y_1}=$$

$$-\frac{1}{3}.$$

由$\frac{x+2}{x-2}=-\frac{1}{3}$,得 $x=-1$,即 $x_P=-1$,

据此可得点 P 在定直线 $x=-1$ 上.

【规律方法】

解决定直线问题的方法策略

定直线问题是指因图形变化或点的移动而产生的动点在定直线上的问题.解决这类问题,一般可以采用求轨迹方程的通用方法,也可以根据其本身特点采用一些特殊方法.

(1)一般策略

①联立方程消去参数;

②由图形的对称性,解出动点的横坐标或纵坐标;

③将横、纵坐标分别用参数表示,再消参;

④建立关于横、纵坐标的方程,对方程变形得到定直线.

(2)解题技巧

题设:某动点 $P(x_0,y_0)$在某定直线上.

目标:需要消去关于动点横坐标或纵坐标的所有参数,从而建立一个无参数的直线方程,此时会分为三种情况:

①$x_0=a$,即动点在直线 $x=a$ 上;

②$y_0=b$,即动点在直线 $y=b$ 上;

③$y_0=f(x_0)$,即动点在直线 $y=f(x)$上.

【对点训练】

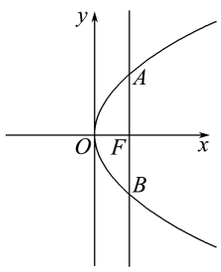
已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点为 F,过点 F 且与 x 轴垂直的直线交 C 于 A,B 两点,且$|AB|=2$.

(1)求抛物线 C 的方程;

(2)已知过焦点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 M,N 两

点(异于A,B两点),且M,A位于x轴同一侧,直线AM与直线BN相交于点G.求证:点G在定直线上.

(1)**解**:如图所示,



抛物线$C:y^2=2px$的焦点$F\left(\frac{p}{2},0\right)$,则直线$AB:x=\frac{p}{2}$.

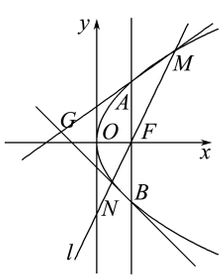
由$\begin{cases}x=\frac{p}{2},\\y^2=2px,\end{cases}$得$|y|=p$,

依题得$|AB|=2p=2$,解得$p=1$,

所以抛物线C的方程为$y^2=2x$.

(2)**证明**:由抛物线的对称性,不妨令点A在x轴上方,由(1)知,$A\left(\frac{1}{2},1\right)$,$B\left(\frac{1}{2},-1\right)$,焦点$F\left(\frac{1}{2},0\right)$,

显然直线l不垂直于坐标轴,设其方程为$x=ty+\frac{1}{2}$$(t\neq0)$,如图所示.



由$\begin{cases}x=ty+\frac{1}{2},\\y^2=2x,\end{cases}$消去$x$,得$y^2-2ty-1=0$.因为$\Delta=(-2t)^2-4\times1\times(-1)>0$,

设$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,$y_2<0<y_1$,所以$y_1+y_2=2t$,$y_1y_2=-1$.

直线AM的斜率为$k_{AM}=\frac{y_1-1}{x_1-\frac{1}{2}}=\frac{y_1-1}{\frac{y_1^2}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{2}{y_1+1}$,

方程为$y=\frac{2}{y_1+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)+1$,

直线BN的斜率为:$k_{BN}=\frac{y_2+1}{x_2-\frac{1}{2}}=\frac{y_2+1}{\frac{y_2^2}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{2}{y_2-1}$,方程为$y=\frac{2}{y_2-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)-1$,

由$\begin{cases}y=\frac{2}{y_1+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)+1,\\y=\frac{2}{y_2+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)-1,\end{cases}$消去$y$,得$\left(\frac{2}{y_1+1}-\frac{2}{y_2-1}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=-2$,

整理得$x=\frac{1}{2}-\frac{1}{\frac{1}{y_1+1}-\frac{1}{y_2-1}}=\frac{1}{2}-\frac{(y_1+1)(y_2-1)}{(y_2-1)-(y_1+1)}=\frac{1}{2}-\frac{y_1y_2+y_2-y_1-1}{y_2-y_1-2}$

$=\frac{1}{2}-\frac{-1+y_2-y_1-1}{y_2-y_1-2}=\frac{1}{2}-\frac{y_2-y_1-2}{y_2-y_1-2}=-\frac{1}{2}$,

因此点G的横坐标恒为$-\frac{1}{2}$,所以点G在定直线$x=-\frac{1}{2}$上.

类型二　圆锥曲线中的定值、定点问题

例2　(2023·全国乙卷)已知椭圆$C:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{5}}{3}$,点$A(-2,0)$在$C$上.

(1)求C的方程;

(2)过点$(-2,3)$的直线交C于P,Q两点,直线AP,AQ与y轴的交点分别为M,N,证明:线段MN的中点为定点.

(1)**解**:因为点$A(-2,0)$在C上,所以$\frac{4}{b^2}=1$,得$b^2=4$.

因为椭圆的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$,所以$c^2=\frac{5}{9}a^2$.又$a^2=b^2+c^2=4+\frac{5}{9}a^2$,所以$a^2=9$,$c^2=5$,

故椭圆C的方程为$\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$.

(2)**证明**:由题意知,直线PQ的斜率存在且不为0,设$l_{PQ}:y-3=k(x+2)$,$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,

由$\begin{cases}y-3=k(x+2),\\\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1,\end{cases}$消去$y$,得$(4k^2+9)x^2+(16k^2+24k)x+16k^2+48k=0$,

则$\Delta=(16k^2+24k)^2-4(4k^2+9)(16k^2+48k)=-36\times48k>0$,即$k<0$,

故$x_1+x_2=-\frac{16k^2+24k}{4k^2+9}$,$x_1x_2=\frac{16k^2+48k}{4k^2+9}$.

直线 AP：$y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，令 $x=0$，解得 $y_M=\dfrac{2y_1}{x_1+2}$，同理得 $y_N=\dfrac{2y_2}{x_2+2}$，

则 $y_M+y_N=2\times\dfrac{y_1(x_2+2)+y_2(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}$

$=2\times\dfrac{(kx_1+2k+3)(x_2+2)+(kx_2+2k+3)(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}$

$=2\times\dfrac{2kx_1x_2+(4k+3)(x_1+x_2)+8k+12}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}$

$=2\times\dfrac{2k(16k^2+48k)+(4k+3)(-16k^2-24k)+(8k+12)(4k^2+9)}{16k^2+48k+2(-16k^2-24k)+4(4k^2+9)}$

$=2\times\dfrac{108}{36}$

$=6$.

所以 MN 的中点的纵坐标为 $\dfrac{y_M+y_N}{2}=3$，所以 MN 的中点为定点 $(0,3)$.

例 3　已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，以两个焦点与短轴两个端点为顶点的四边形的面积为 $4\sqrt{2}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程.

(2)我们称圆心在椭圆 C 上运动、半径为 $\dfrac{a}{2}$ 的圆是椭圆 C 的“卫星圆”，过原点 O 作椭圆 C 的“卫星圆”的两条切线，分别交椭圆 C 于 A，B 两点，若直线 OA，OB 的斜率存在，设为 k_1，k_2.

①求证：k_1k_2 为定值.

②$|OA|^2+|OB|^2$ 是定值吗？若是，求出该定值；若不是，请说明理由.

(1)**解**：由题意，得 $\begin{cases}2bc=4\sqrt{2},\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\sqrt{6},\\ b=\sqrt{2},\\ c=2,\end{cases}$

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

(2)①**证明**：直线 OA，OB 的方程分别为 $y=k_1x$，$y=k_2x$.

设椭圆 C 的“卫星圆”的圆心为 (x_0,y_0).

因为直线 OA，OB 为“卫星圆”的两条切线，

所以 $\dfrac{|k_1x_0-y_0|}{\sqrt{1+k_1^2}}=\dfrac{a}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$\dfrac{|k_2x_0-y_0|}{\sqrt{1+k_2^2}}=\dfrac{a}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

化简，得 $(2x_0^2-3)k_1^2-4k_1x_0y_0+2y_0^2-3=0$，

$(2x_0^2-3)k_2^2-4k_2x_0y_0+2y_0^2-3=0$，

所以 k_1，k_2 为方程 $(2x_0^2-3)k^2-4kx_0y_0+2y_0^2-3=0$ 的两个根，故 $k_1k_2=\dfrac{2y_0^2-3}{2x_0^2-3}$.

又因为 $\dfrac{x_0^2}{6}+\dfrac{y_0^2}{2}=1$，

所以 $k_1k_2=\dfrac{2y_0^2-3}{2x_0^2-3}=\dfrac{2y_0^2-3}{9-6y_0^2}=-\dfrac{1}{3}$，

故 k_1k_2 为定值 $-\dfrac{1}{3}$.

②**解**：$|OA|^2+|OB|^2$ 是定值.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y_1=k_1x_1,\\ \dfrac{x_1^2}{6}+\dfrac{y_1^2}{2}=1,\end{cases}$ $\begin{cases}y_2=k_2x_2,\\ \dfrac{x_2^2}{6}+\dfrac{y_2^2}{2}=1,\end{cases}$

解得 $x_1^2=\dfrac{6}{3k_1^2+1}$，$x_2^2=\dfrac{6}{3k_2^2+1}$，所以 $|OA|^2+|OB|^2$

$=(1+k_1^2)\left(\dfrac{6}{3k_1^2+1}\right)+(1+k_2^2)\left(\dfrac{6}{3k_2^2+1}\right)$.

由 $k_1k_2=-\dfrac{1}{3}$，得 $k_2^2=\dfrac{1}{9k_1^2}$，

所以 $|OA|^2+|OB|^2=\dfrac{6(1+k_1^2)}{3k_1^2+1}+\dfrac{2(9k_1^2+1)}{3k_1^2+1}=\dfrac{8(1+3k_1^2)}{3k_1^2+1}=8$，

所以 $|OA|^2+|OB|^2$ 为定值 8.

【规律方法】

1. 定点问题

(1)参数法

利用参数法解决定点问题的思路：①引入动点的坐标或动直线中的参数表示变化量，即确定题目中的核心变量（此处设为 k）；②利用条件找到 k 与过定点的曲线 $F(x,y)=0$ 之间的关系，得到关于 k 与 x，y 的等式，再对等式进行合理变形，找到定点.

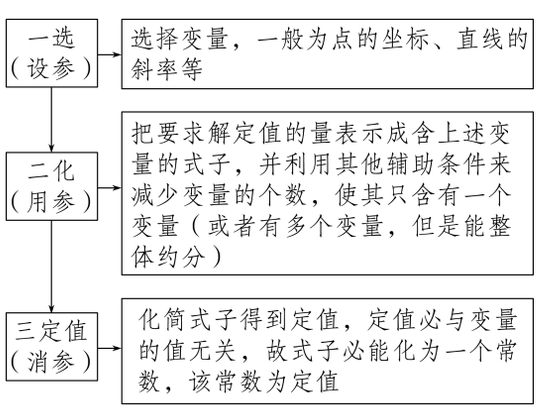
(2)由特殊到一般法

利用由特殊到一般法解决定点问题时，常根据动点或动直线的特殊情况找出定点，再证明该定点与变量无关.

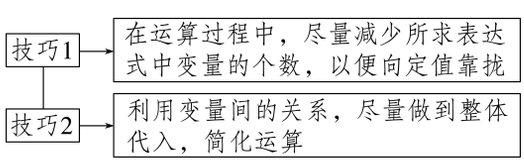
2. 定值问题

(1)直接消参法

一般步骤如下：



(2)由特殊到一般法



【对点训练】

1.已知在平面直角坐标系 Oxy 中，抛物线 $C_1:y^2=4x$ 的焦点为 F_1，过点 F_1 的直线 l 与抛物线 C_1 交于 A_1,B_1.连接 OA_1,OB_1 并延长，分别交抛物线 $C_2:y^2=2px\ (p>0)$ 于点 A_2,B_2，且 $|OA_2|=2|OA_1|$.

(1)求 p 的值；

(2)求△OA_2B_1 面积的最小值；

(3)求证：直线 A_2B_2 过定点.

(1)**解**：(方法一)设直线 OA_1 的方程为 $y=k_1x$，则由 $\begin{cases}y^2=4x,\\y=k_1x,\end{cases}$ 得 $A_1\left(\frac{4}{k_1^2},\frac{4}{k_1}\right)$，所以 $|OA_1|=\left|\frac{4}{k_1}\right|\sqrt{\frac{1}{k_1^2}+1}$.由 $\begin{cases}y^2=2px,\\y=k_1x,\end{cases}$ 得 $A_2\left(\frac{2p}{k_1^2},\frac{2p}{k_1}\right)$，所以 $|OA_2|=\left|\frac{2p}{k_1}\right|\sqrt{\frac{1}{k_1^2}+1}$.

因为 $|OA_2|=2|OA_1|$，所以 $\left|\frac{2p}{k_1}\right|\sqrt{\frac{1}{k_1^2}+1}=2\times\left|\frac{4}{k_1}\right|\sqrt{\frac{1}{k_1^2}+1}$.又因为 $p>0$，所以 $p=4$.

(方法二)设 $A_1(x_1,y_1),A_2(x_3,y_3)$.由题意可知 $\begin{cases}x_3=2x_1,\\y_3=2y_1.\end{cases}$ 因为 $y_1^2=4x_1^2$，所以 $\left(\frac{y_3}{2}\right)^2=4\times\frac{x_3}{2}$，所以 $y_3^2=8x_3$.又 $y_3^2=2px_3$，所以 $2p=8,p=4$.

(2)**解**：设直线 l 的方程为 $x=my+1$，$A_1(x_1,y_1)$，$B_1(x_2,y_2)$，$A_2(x_3,y_3)$，$B_2(x_4,y_4)$，

则由 $\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+1,\end{cases}$ 得 $y^2-4my-4=0$，所以 $y_1y_2=-4$.

因为 $|OA_2|=2|OA_1|$，所以△OA_2B_1 的面积是△OA_1B_1 的面积的 2 倍.

因为 $S_{\triangle OA_1B_1}=S_{\triangle OA_1F_1}+S_{\triangle OF_1B_1}=\frac{1}{2}\times1\times|y_1|+\frac{1}{2}\times1\times|y_2|$，且 $y_1y_2=-4$，所以

$S_{\triangle OA_1B_1}=\frac{1}{2}|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\left|y_1+\frac{4}{y_1}\right|\geqslant\sqrt{y_1\times\frac{4}{y_1}}=2$，当且仅当 $|y_1|=2$ 时，等号成立，

所以△OA_1B_1 的面积的最小值是 2，所以△OA_2B_1 的面积的最小值是 4.

(3)**证明**：由 $A_1\left(\frac{4}{k_1^2},\frac{4}{k_1}\right),A_2\left(\frac{8}{k_1^2},\frac{8}{k_1}\right)$，可得 $y_3=2y_1$.设直线 OB_1 的方程为 $y=k_2x$，则由 $\begin{cases}y^2=4x,\\y=k_2x,\end{cases}$ 得 $B_1\left(\frac{4}{k_2^2},\frac{4}{k_2}\right)$.由 $\begin{cases}y^2=8x,\\y=k_2x,\end{cases}$ 得 $B_2\left(\frac{8}{k_2^2},\frac{8}{k_2}\right)$，所以 $y_4=2y_2$.所以 $y_3y_4=4y_1y_2=-16$.设直线 A_2B_2 的方程为 $x=ny+t$，

又因为抛物线 $C_2:y^2=8x$，由 $\begin{cases}y^2=8x,\\x=ny+t,\end{cases}$ 消去 x，得 $y^2-8ny-8t=0$，

所以 $y_3y_4=-8t$.所以 $y_3y_4=-8t=-16$，所以 $t=2$，

所以直线 A_2B_2 的方程为 $x=ny+2$，所以直线 A_2B_2 过定点(2,0).

2.已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，A,B 分别为椭圆的左、右顶点，C 为椭圆的上顶点，且 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-4$.

(1)求椭圆的标准方程；

(2)若直线 $l:x=my+3$ 交椭圆于 M,N 两点，直线 AM 的斜率为 k_1，直线 BN 的斜率为 k_2，求 $\frac{k_1}{k_2}$ 的值.

解：(1)由题意得 $A(-a,0),B(a,0),C(0,b)$，所以 $\overrightarrow{CA}=(-a,-b),\overrightarrow{CB}=(a,-b)$.

因为 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-4$，所以 $-a^2+b^2=-4$①.

又离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{1}{2}$，解得 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{4}$②，

联立①②解得 $a^2=16,b^2=12$，

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

(2)由 $\begin{cases}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1,\\x=my+3,\end{cases}$ 消去 x，得 $(3m^2+4)y^2+18my-21=0$，$\Delta>0$，

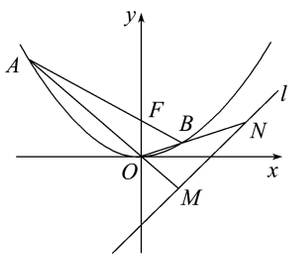
设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\frac{-18m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-21}{3m^2+4}$.

又 $A(-4,0),B(4,0)$，所以 $k_1=\frac{y_1}{x_1+4},k_2=\frac{y_2}{x_2-4}$，

所以 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{y_1(x_2-4)}{y_2(x_1+4)}=\frac{y_1(my_2-1)}{y_2(my_1+7)}=\frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+7y_2}=\frac{\frac{-21m}{3m^2+4}-\left(\frac{-18m}{3m^2+4}-y_2\right)}{\frac{-21m}{3m^2+4}+7y_2}=\frac{\frac{-3m}{3m^2+4}+y_2}{7\left(\frac{-3m}{3m^2+4}+y_2\right)}=\frac{1}{7}$.

类型三　圆锥曲线中的最值问题

例 4　(2024·浙江卷)如图,已知抛物线 C 的顶点为 $O(0,0)$,焦点为 $F(0,1)$.



(1)求抛物线 C 的方程;

(2)过点 F 作直线交抛物线 C 于 A,B 两点.若直线 AO,BO 分别交直线 $l:y=x-2$ 于 M,N 两点,求 $|MN|$ 的最小值.

解:(1)由题意可设抛物线 C 的方程为 $x^2=2py(p>0)$,

则 $\frac{p}{2}=1$,所以 $p=2$.

所以抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$.

(2)设点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,直线 AB 的方程为 $y=kx+1$.

由 $\begin{cases}y=kx+1,\\x^2=4y,\end{cases}$ 消去 y 并整理,得 $x^2-4kx-4=0$,

则 $\Delta=16k^2+16>0$,

所以 $x_1+x_2=4k$,$x_1x_2=-4$,

所以 $|x_1-x_2|=4\sqrt{k^2+1}$.

由 $\begin{cases}y=\frac{y_1}{x_1}x,\\y=x-2,\end{cases}$ 解得 $x_M=\frac{2x_1}{x_1-y_1}=\frac{2x_1}{x_1-\frac{x_1^2}{4}}=\frac{8}{4-x_1}$.

同理,可得 $x_N=\frac{8}{4-x_2}$,

所以 $|MN|=\sqrt{2}|x_M-x_N|=\sqrt{2}\left|\frac{8}{4-x_1}-\frac{8}{4-x_2}\right|=8\sqrt{2}\cdot\left|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2-4(x_1+x_2)+16}\right|=\frac{8\sqrt{2}\cdot\sqrt{k^2+1}}{|4k-3|}$.

令 $4k-3=t$,$t\neq0$,则 $k=\frac{t+3}{4}$.

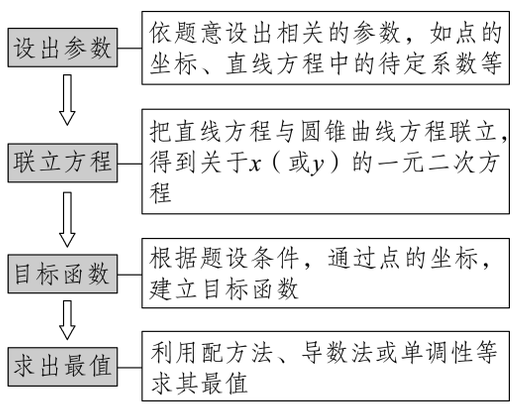
当 $t>0$ 时,$|MN|=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{25}{t^2}+\frac{6}{t}+1}>2\sqrt{2}$;

当 $t<0$ 时,$|MN|=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{5}{t}+\frac{3}{5}\right)^2+\frac{16}{25}}\geqslant\frac{8\sqrt{2}}{5}$.

综上所述,当 $t=-\frac{25}{3}$,即 $k=-\frac{4}{3}$ 时,$|MN|$ 取得最小值,最小值是 $\frac{8\sqrt{2}}{5}$.

【规律方法】

1.解决圆锥曲线中最值问题的方法



2.解决圆锥曲线中取值范围问题的方法

(1)利用圆锥曲线的几何性质或一元二次方程根的判别式构造不等关系,从而确定参数的取值范围;

(2)利用已知参数的范围,求新参数的范围,核心是建立两个参数之间的等量关系;

(3)利用已知的不等关系构造不等式,从而求出参数的取值范围;

(4)利用隐含的不等关系建立不等式,从而求出参数的取值范围;

(5)将参数表示为其他变量的函数,利用求函数值域的方法求出函数值域,从而确定参数的取值范围.

【对点训练】

(2025·全国一卷)已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$,下顶点为 A,右顶点为 B,$|AB|=\sqrt{10}$.

(1)求 C 的方程.

(2)已知动点 P 不在 y 轴上,点 R 在射线 AP 上,且满足 $|AP|\cdot|AR|=3$.

①设 $P(m,n)$,求 R 的坐标(用 m,n 表示);

②设 O 为坐标原点,Q 是 C 上的动点,直线 OR 的斜率是直线 OP 的斜率的 3 倍,求 $|PQ|$ 的最大值.

解:(1)由题意知 $\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,所以 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{8}{9}$.

设 $a^2=9t$,$t>0$,则 $c^2=8t$,所以 $b^2=t$.

又 $|AB|^2=a^2+b^2=10t=10$,

所以 $t=1$,所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$.

(2)①设 $R(x,y)$,由(1)知 $A(0,-1)$,又 $P(m,n)$,$m\neq0$,

所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AR}=(m,n+1)\cdot(x,y+1)=mx+(n+1)(y+1)=|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AR}|\cdot\cos 0=3$.①

由$k_{AP}=k_{AR}$,得$\frac{n+1}{m}=\frac{y+1}{x}$,②

由①②,得$x=\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}$,$y=\frac{n+2-m^2-n^2}{m^2+(n+1)^2}$,

故R的坐标为$\left(\frac{3m}{m^2+(n+1)^2},\frac{n+2-m^2-n^2}{m^2+(n+1)^2}\right)$.

②由①得$k_{OR}=\frac{n+2-m^2-n^2}{3m}=3k_{OP}=\frac{3n}{m}$,整理得$m^2+n^2+8n-2=0$,

即$m^2+(n+4)^2=18$,

所以点P的轨迹方程为$m^2+(n+4)^2=18(m\neq 0)$.

由题意设$Q(3\cos\theta,\sin\theta)$,$K(0,-4)$,

则$|KQ|^2=(3\cos\theta)^2+(\sin\theta+4)^2=-8\sin^2\theta+8\sin\theta+25$.

设$s=\sin\theta(-1\leqslant s\leqslant 1)$,则$|KQ|^2=-8s^2+8s+25=-8\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+27(-1\leqslant s\leqslant 1)$,

当$s=\sin\theta=\frac{1}{2}$时,$|KQ|$取得最大值,且$|KQ|_{\max}=3\sqrt{3}$,

所以$|PQ|$的最大值为$|KQ|_{\max}+3\sqrt{2}=3(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

类型四　非对称结构问题

例5　已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦距为4,左、右顶点分别为$A$,$B$,左、右焦点分别为$F_1$,$F_2$,过右焦点$F_2$的直线$l$交椭圆$E$于$M$,$N$两点,$\triangle F_1MN$的周长为12.

(1)设直线AM的斜率为k_1,直线BN的斜率为k_2,求证:$\frac{k_1}{k_2}$为定值;

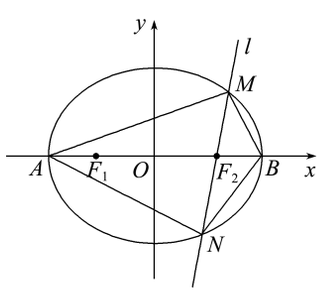
(2)设$\triangle AMN$的面积为S_1,$\triangle BMN$的面积为S_2,求S_1+S_2的最大值.

解:由椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦距为4,可知,$c=2$.

由$\triangle F_1MN$的周长为12,可得$4a=12$,$a=3$,

所以$b^2=a^2-c^2=9-4=5$.

所以椭圆E的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$,如图所示.



(1)**证明**:设$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,直线l方程为$x=my+2$.

由$\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1,\\ x=my+2,\end{cases}$得$(5m^2+9)y^2+20my-25=0$,

则$\Delta=900(m^2+1)>0$,

所以$y_1+y_2=\frac{-20m}{5m^2+9}$,$y_1y_2=\frac{-25}{5m^2+9}$,

所以$\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}=\frac{-20m}{-25}=\frac{4m}{5}$,即$my_1y_2=\frac{5}{4}(y_1+y_2)$.

则$\frac{k_1}{k_2}=\frac{\frac{y_1}{x_1+3}}{\frac{y_2}{x_2-3}}=\frac{y_1(x_2-3)}{y_2(x_1+3)}=\frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+5y_2}=\frac{\frac{5}{4}(y_1+y_2)-y_1}{\frac{5}{4}(y_1+y_2)+5y_2}=\frac{\frac{1}{4}(y_1+5y_2)}{\frac{5}{4}(y_1+5y_2)}=\frac{1}{5}$.

所以$\frac{k_1}{k_2}$为定值$\frac{1}{5}$.

(2)**解**:由题意可知,

$S_1+S_2=S_{\triangle MAB}+S_{\triangle NAB}$

$=\frac{1}{2}\times 2\times 3\times|y_1-y_2|=3|y_1-y_2|$

$=3\times\frac{\sqrt{(-20m)^2+4\times 25\times(5m^2+9)}}{5m^2+9}$

$=\frac{90\sqrt{m^2+1}}{5m^2+9}$.

令$t=\sqrt{m^2+1}\geqslant 1$,

则$S_1+S_2=\frac{90t}{5t^2+4}=\frac{90}{5t+\frac{4}{t}}$.

又$y=5t+\frac{4}{t}$在$[1,+\infty)$上单调递增,

所以当$t=1$,即$m=0$时,S_1+S_2取得最大值为$\frac{90}{5\times 1+\frac{4}{1}}=10$,

所以S_1+S_2的最大值为10.

【规律方法】

非对称结构问题常用的处理方式

(1)和积互换法：如例5中根据 y_1+y_2 与 y_1y_2 的关系，整体代换.若不能直接得出关系，可以用待定系数法，设 $y_1y_2=m(y_1+y_2)+n$，求出 m，n；

(2)配凑代换法：通过部分代换将分子配凑成能与分母约分的形式；

(3)先猜后证法：先找特殊情况得到定值，再证明一般情况也成立；

(4)使用圆锥曲线的第三定义.

【对点训练】

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 $F(-1,0)$，过点 F 且与 x 轴不重合的直线 l 交 E 于点 A，B，当直线 l 的斜率为1时，直线 l 恰好过椭圆的一个顶点.

(1)求椭圆 E 的标准方程.

(2)若在 x 轴上存在异于 F 的定点 Q，使得直线 QA 与直线 QB 的斜率比为定值，求：

①定点 Q 的坐标；

②$\triangle ABQ$ 面积的最大值.

解：(1)由题意知，$c=1$，

当直线 l 的斜率为1时，直线 l 恰好过椭圆的一个顶点，

所以 $c=b=1$，所以 $a=\sqrt{2}$，所以椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)①由题意可设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$Q(t,0)(t\neq-1)$，设直线 l 的方程为 $x=my-1$，

由 $\begin{cases}x=my-1,\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 x，得 $(m^2+2)y^2-2my-1=0$，

则 $y_1+y_2=\frac{2m}{m^2+2}$，$y_1y_2=\frac{-1}{m^2+2}$，得 $y_1+y_2=-2my_1y_2$.

记直线 QA 的斜率为 k_1，直线 QB 的斜率为 k_2，则

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{\frac{y_1}{x_1-t}}{\frac{y_2}{x_2-t}}=\frac{y_1(x_2-t)}{y_2(x_1-t)}=\frac{y_1(my_2-1-t)}{y_2(my_1-1-t)}=\frac{my_1y_2-(1+t)y_1}{my_1y_2-(1+t)y_2}=\frac{(3+2t)y_1+y_2}{y_1+(3+2t)y_2},$$

要使 $\frac{k_1}{k_2}$ 为定值，则 $\frac{3+2t}{1}=\frac{1}{3+2t}$，解得 $t=-2$ 或 $t=-1$(舍去)，此时 $\frac{k_1}{k_2}=-1$，故在 x 轴上存在异于点 F 的定点 $Q(-2,0)$，使得直线 QA 与直线 QB 的斜率比为定值.

②由①可得 $y_1+y_2=\frac{2m}{m^2+2}$，$y_1y_2=\frac{-1}{m^2+2}$，$Q(-2,0)$，

则 $|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{\frac{4m^2}{(m^2+2)^2}+\frac{4}{m^2+2}}=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}$.

由 $S_{\triangle ABQ}=S_{\triangle AFQ}+S_{\triangle BFQ}$，

得 $S_{\triangle ABQ}=\frac{1}{2}|QF||y_1-y_2|=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}$

$=\frac{\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}$

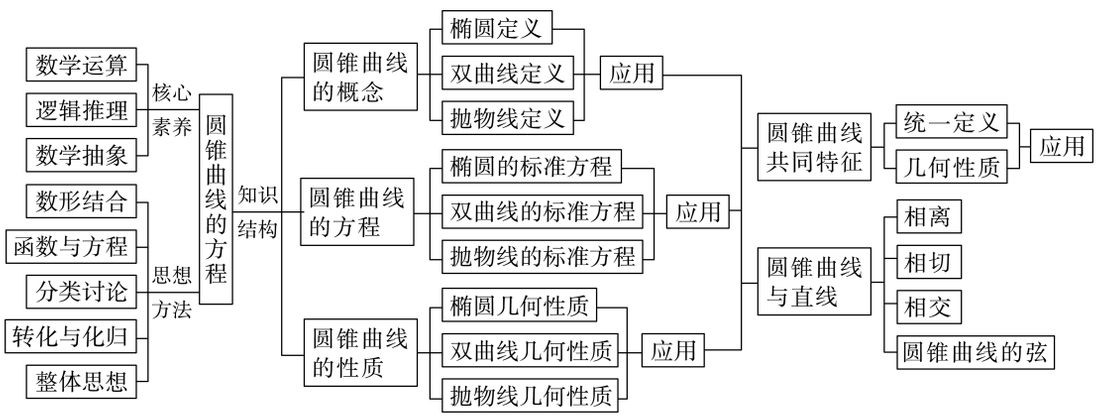
$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+1}+\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，

当且仅当 $m=0$ 时，等号成立，所以 $\triangle ABQ$ 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

★★★

重　构　拓　展

多维体系构建



【问题探究】

1.在椭圆、双曲线、抛物线这三类圆锥曲线的研究中，椭圆是第一类被研究的圆锥曲线.对双曲线、抛物线的研究，我们采用的是类比的方法.你能说说具体的类比内容吗？

2.椭圆、双曲线、抛物线的几何特征分别有哪些？这些几何特征在研究圆锥曲线时有什么作用？

3.圆锥曲线的几何性质主要包括哪些方面？如何用代数方法研究这些几何性质？

4.圆锥曲线的“统一性”体现在哪些方面？你如何理解圆锥曲线的“统一性”？

5.如何用直线与圆锥曲线的方程判断它们之间的位置关系？

6.数形结合在圆锥曲线的研究中具有重要作用，你能举例说明吗？

质量评估(三)

（考查范围:第三章　时间:120 分钟　分值:150 分）

得分 ____

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.双曲线 $3x^2-y^2=9$ 的焦距为　　(　　)

A.$\sqrt{6}$　　B.$2\sqrt{6}$　　C.$2\sqrt{3}$　　D.$4\sqrt{3}$

D　**解析:**$3x^2-y^2=9$ 化为标准方程为 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$,所以 $a^2=3,b^2=9$.

因为 $c^2=a^2+b^2=12$,所以 $c=2\sqrt{3}$,所以 $2c=4\sqrt{3}$.

2.已知椭圆的中心在原点,离心率 $e=\frac{1}{2}$,且它的一个焦点与抛物线 $y^2=-4x$ 的焦点重合,则此椭圆的方程为　　(　　)

A.$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　B.$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$

C.$\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　D.$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

A　**解析:**由题意知抛物线 $y^2=-4x$ 的焦点为 $(-1,0)$,所以 $c=1$.

又离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,所以 $a=2$,所以 $b=\sqrt{3}$,

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

3.设 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点,点 A 在 C 上,点 $B(3,0)$.若 $|AF|=|BF|$,则 $|AB|=$　　(　　)

A.2　　B.$2\sqrt{2}$　　C.3　　D.$3\sqrt{2}$

B　**解析:**由题意得 $F(1,0)$,则 $|AF|=|BF|=2$,即点 A 到准线 $x=-1$ 的距离为 2,所以点 A 的横坐标为 $-1+2=1$.

不妨设点 A 在 x 轴上方,代入得 $A(1,2)$,

所以 $|AB|=\sqrt{(3-1)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{2}$.故选 B.

4.已知过点 $P(2,1)$ 的直线 l 与双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 相交于 A,B 两点.若 P 是线段 AB 的中点,则直线 l 的方程是　　(　　)

A.$6x-y-11=0$　　B.$6x+y-13=0$

C.$2x-3y-1=0$　　D.$3x-2y-4=0$

A　**解析:**设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,由 $P(2,1)$ 是线段 AB 的中点,得 $x_1+x_2=4,y_1+y_2=2$,将 A,B 代入双曲线方程得 $\begin{cases}x_1^2-\frac{y_1^2}{3}=1,\\ x_2^2-\frac{y_2^2}{3}=1,\end{cases}$

两式作差,得直线 l 的斜率为 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{3(x_1+x_2)}{y_1+y_2}=\frac{3\times4}{2}=6$.

又直线 l 过点 $P(2,1)$,所以直线 l 的方程为 $6x-y-11=0$.

经检验,此时直线 l 与双曲线有两个交点,满足题意.

5.(2024·新高考全国Ⅱ卷)已知曲线 $C:x^2+y^2=16(y>0)$,从 C 上任意一点 P 向 x 轴作垂线段 PP',P'为垂足,则线段 PP'的中点 M 的轨迹方程为　　(　　)

A.$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1(y>0)$　　B.$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1(y>0)$

C.$\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1(y>0)$　　D.$\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{8}=1(y>0)$

A　**解析:**设点 $M(x_0,y_0),y_0>0$,则 $P(x_0,2y_0)$.

又点 P 在曲线 C 上,

所以 $x_0^2+4y_0^2=16(y_0>0)$,即 $\frac{x_0^2}{16}+\frac{y_0^2}{4}=1(y_0>0)$,

故点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1(y>0)$.故选 A.

6.(2024·全国甲卷)已知双曲线的两个焦点分别为 $(0,4),(0,-4)$,点 $(-6,4)$ 在该双曲线上,则该双曲线的离心率为　　(　　)

A.4　　B.3　　C.2　　D.$\sqrt{2}$

C　**解析:**设 $F_1(0,-4),F_2(0,4),P(-6,4)$,

则 $|F_1F_2|=2c=8$,$|PF_1|=\sqrt{(-6-0)^2+(4+4)^2}=10$,$|PF_2|=\sqrt{(-6-0)^2+(4-4)^2}=6$,

则 $2a=|PF_1|-|PF_2|=10-6=4$,所以 $e=\frac{c}{a}=2$.

故选 C.

7.已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，双曲线 $x^2-y^2=1$ 的渐近线与椭圆 C 有四个交点，以这四个交点为顶点的四边形的面积为 16，则椭圆 C 的方程为　　(　　)

A. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$　　B. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1$

C. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$　　D. $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$

D　**解析**：因为椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$c^2=\frac{3}{4}a^2=a^2-b^2$，

所以 $b^2=\frac{1}{4}a^2$，即 $a^2=4b^2$.

双曲线的渐近线方程为 $y=\pm x$，

代入椭圆方程得 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$，即 $\frac{x^2}{4b^2}+\frac{x^2}{b^2}=\frac{5x^2}{4b^2}=1$，

所以 $x^2=\frac{4}{5}b^2$，$x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}b$，$y^2=\frac{4}{5}b^2$，$y=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}b$，则在第一象限内双曲线的渐近线与椭圆 C 的交点坐标为 $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}b,\frac{2}{\sqrt{5}}b\right)$，所以四边形的面积为 $4\times\frac{2}{\sqrt{5}}b\times\frac{2}{\sqrt{5}}b=\frac{16}{5}b^2=16$，

解得 $b^2=5$，$a^2=4b^2=20$，

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$.

8.设 O 为坐标原点，直线 $x=a$ 与双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线分别交于 D,E 两点.若 $\triangle ODE$ 的面积为 8，则 C 的焦距的最小值为　　(　　)

A. 4　　B. 8　　C. 16　　D. 32

B　**解析**：因为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，

所以双曲线的渐近线方程是 $y=\pm\frac{b}{a}x$.

直线 $x=a$ 与双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线分别交于 D,E 两点，

不妨设 D 在第一象限，E 在第四象限.

由 $\begin{cases}x=a,\\y=\frac{b}{a}x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=a,\\y=b.\end{cases}$ 故 $D(a,b)$.

由 $\begin{cases}x=a,\\y=-\frac{b}{a}x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=a,\\y=-b.\end{cases}$ 故 $E(a,-b)$.

所以 $|ED|=2b$，

所以 $\triangle ODE$ 的面积为 $S_{\triangle ODE}=\frac{1}{2}\times a\times 2b=ab=8$.

因为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，所以其焦距为 $2c=2\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 2\sqrt{2ab}=2\sqrt{16}=8$，当且仅当 $a=b=2\sqrt{2}$ 时，等号成立.

所以 C 的焦距的最小值为 8.

得分　　**二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.**

9.已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，P 是 C 上的动点，则有　　(　　)

A. $|PF_1|+|PF_2|=8$

B. $|PF_1||PF_2|$ 的最大值为 4

C. $|PF_1|$ 的最大值为 3

D. $\cos\angle F_1PF_2$ 的最小值为 $\frac{1}{4}$

BC　**解析**：椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的长半轴长 $a=2$，短半轴长 $b=\sqrt{3}$，半焦距 $c=\sqrt{a^2-b^2}=1$.

对于 A，$|PF_1|+|PF_2|=2a=4$，A 错误；

对于 B，$|PF_1||PF_2|\leqslant\left(\frac{|PF_1|+|PF_2|}{2}\right)^2=4$，当且仅当 $|PF_1|=|PF_2|=2$ 时，等号成立，B 正确；

对于 C，$|PF_1|_{\max}=a+c=3$，C 正确；

对于 D，$\cos\angle F_1PF_2$

$=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}$

$=\frac{(|PF_1|+|PF_2|)^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}-1$

$=\frac{(2a)^2-(2c)^2}{2|PF_1||PF_2|}-1=\frac{6}{|PF_1||PF_2|}-1\geqslant\frac{6}{4}-1=\frac{1}{2}$，当且仅当 $|PF_1|=|PF_2|=2$ 时，等号成立，D 错误.

10.(2024·新高考全国Ⅱ卷)设抛物线 $C:y^2=4x$ 的准线为 l，P 为 C 上的动点.过 P 作 $\odot A:x^2+(y-$

$4)^2=1$ 的一条切线，Q 为切点.过 P 作 l 的垂线，垂足为 B，则有　　（　　）

A.l 与⊙A 相切

B.当 P,A,B 三点共线时，$|PQ|=\sqrt{15}$

C.当 $|PB|=2$ 时，$PA\perp AB$

D.满足 $|PA|=|PB|$ 的点 P 有且仅有 2 个

ABD　**解析**：A 选项，抛物线 $y^2=4x$ 的准线方程为 $x=-1$，

⊙A 的圆心 $A(0,4)$ 到直线 $x=-1$ 的距离为 1，等于圆的半径，

故准线 l 与⊙A 相切，A 选项正确.

B 选项，当 P,A,B 三点共线时，即 $PA\perp l$，则 $y_P=4$，

由 $y_P^2=4x_P$，得 $x_P=4$，故 $P(4,4)$，

此时 $|PA|=4$，切线长 $|PQ|=\sqrt{|PA|^2-r^2}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$，B 选项正确.

C 选项，当 $|PB|=2$ 时，$x_P=1$，此时 $y_P^2=4x_P=4$，则 $y_P=\pm2$，故 $P(1,2)$ 或 $P(1,-2)$，

当 $P(1,2)$ 时，$B(-1,2)$，又 $A(0,4)$，所以 $k_{PA}=\frac{4-2}{0-1}=-2$，$k_{AB}=\frac{4-2}{0-(-1)}=2$，

不满足 $k_{PA}k_{AB}=-1$；

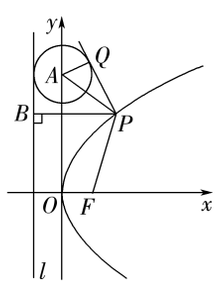
当 $P(1,-2)$ 时，$B(-1,-2)$，又 $A(0,4)$，所以 $k_{PA}=\frac{4-(-2)}{0-1}=-6$，$k_{AB}=\frac{4-(-2)}{0-(-1)}=6$，

不满足 $k_{PA}k_{AB}=-1$，

于是 $PA\perp AB$ 不成立，C 选项错误.

D 选项，（方法一：利用抛物线定义转化）

如图，根据抛物线的定义，可得 $|PB|=|PF|$，



于是 $|PA|=|PB|$ 时点 P 的存在性问题转化成 $|PA|=|PF|$ 时点 P 的存在性问题.

因为 $A(0,4)$，$F(1,0)$，AF 的中点为 $\left(\frac{1}{2},2\right)$，所以线段 AF 中垂线的斜率为 $-\frac{1}{k_{AF}}=\frac{1}{4}$，

线段 AF 的中垂线方程为 $y=\frac{1}{4}x+\frac{15}{8}$.与抛物线方程 $y^2=4x$ 联立消去 x，可得 $y^2-16y+30=0$，$\Delta=16^2-4\times30=136>0$，所以 AF 的中垂线和抛物线有两个交点，

即存在两个点 P，使得 $|PA|=|PF|$，D 选项正确.

（方法二：设点直接求解）

设 $P\left(\frac{t^2}{4},t\right)$，由 $PB\perp l$，可得 $B(-1,t)$，又 $A(0,4)$，$|PA|=|PB|$，

所以根据两点间的距离公式，得 $\sqrt{\frac{t^4}{16}+(t-4)^2}=\frac{t^2}{4}+1$，整理得 $t^2-16t+30=0$，

$\Delta=16^2-4\times30=136>0$，则关于 t 的方程有两个不相等的解，

即存在这样的点 P，使得 $|PA|=|PB|$，D 选项正确.

故选 ABD.

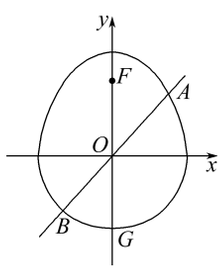
11. 某载人飞船返回舱的轴截面可近似地看作是由半圆和半椭圆组成的“曲圆”，如图所示.在平面直角坐标系中，半圆的圆心在坐标原点，半圆所在的圆过椭圆的焦点 $F(0,2)$，椭圆的短轴与半圆的直径重合，半圆与 y 轴交于点 G.若过原点 O 的直线与半椭圆交于点 A，与半圆交于点 B，则有　　（　　）

A.椭圆的长轴长为 $4\sqrt{2}$

B.线段 AB 长度的最大值为 $2+2\sqrt{2}$

C.$\triangle AFG$ 的周长为 $4+4\sqrt{2}$

D.在 x 轴上方的半椭圆上存在两个点 M,N，使得 $\angle FMG=\angle FNG=\frac{\pi}{2}$



ABC　**解析**：由题意可知，椭圆的半焦距 $c=2$，短半轴长 $b=2$，得长半轴长 $a=2\sqrt{2}$，则椭圆的长轴长为 $2a=4\sqrt{2}$，故 A 正确；

因为 $2\leqslant|OA|\leqslant2\sqrt{2}$，$|OB|=2$，所以 $|AB|=|OA|+|OB|\in[4,2+2\sqrt{2}]$，故 B 正确；

因为点 F,G 是椭圆的两个焦点，所以 $\triangle AFG$ 的周长为 $|FG|+|AF|+|AG|=4+2a=4+4\sqrt{2}$，故 C 正确；

由题意知 $|MF|<|MG|$，在 $\triangle MFG$ 中，

$\cos\angle FMG=\dfrac{|MF|^2+|MG|^2-|FG|^2}{2|MF|\cdot|MG|}=\dfrac{\frac{1}{2}[(|MF|+|MG|)^2+(|MF|-|MG|)^2]-|FG|^2}{2|MF|\cdot|MG|}$

$>\dfrac{\frac{1}{2}\times(4\sqrt{2})^2-4^2}{2|MF|\cdot|MG|}=0$，所以$\angle FMG$不可能为直角，所以在$x$轴上方的半椭圆上不存在点$M$，使得$\angle FMG=\dfrac{\pi}{2}$，故D错误.

故选ABC.

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

得分　　**12.**(2024·新高考全国Ⅰ卷)设双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，过$F_2$作平行于$y$轴的直线交$C$于$A,B$两点.若$|F_1A|=13$，$|AB|=10$，则$C$的离心率为_____.

$\dfrac{3}{2}$　**解析：**由题可知A,B,F_2三点横坐标相等，设A在第一象限，将$x=c$代入$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，

得$y=\pm\dfrac{b^2}{a}$，即$A\left(c,\dfrac{b^2}{a}\right),B\left(c,-\dfrac{b^2}{a}\right)$，所以$|AB|=\dfrac{2b^2}{a}=10$，$|F_2A|=\dfrac{b^2}{a}=5$.

由$|F_1A|-|F_2A|=2a$，得$|F_1A|=|F_2A|+2a=5+2a=13$，解得$a=4$.代入$\dfrac{b^2}{a}=5$，得$b^2=20$，

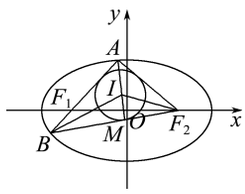
则$c^2=a^2+b^2=36$，即$c=6$，所以$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$.

得分　　**13.**已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，经过点$F_1$的直线交椭圆于$A,B$，$\triangle ABF_2$的内切圆的圆心为$I$.若$3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IF_2}=\mathbf{0}$，则该椭圆的离心率是_____.

$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　**解析：**因为$3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IF_2}=\mathbf{0}$，

所以$\dfrac{3}{8}\overrightarrow{IB}+\dfrac{5}{8}\overrightarrow{IF_2}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{IA}$.

如图，在BF_2上取一点M，使得$|BM|:|MF_2|=5:3$，



连接IM，则$\overrightarrow{IM}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{IA}$，

则点I为AM上靠近点M的三等分点，

所以$S_{\triangle IAF_2}:S_{\triangle IBF_2}:S_{\triangle IBA}=3:4:5$，

所以$|AF_2|:|BF_2|:|AB|=3:4:5$.设$|AF_2|=3x$，则$|BF_2|=4x$，$|AB|=5x$，

由椭圆定义可知$|AF_2|+|BF_2|+|AB|=4a$，即$12x=4a$，

所以$x=\dfrac{a}{3}$，

所以$|AF_2|=a$，$|BF_2|=\dfrac{4}{3}a$，$|AB|=\dfrac{5}{3}a$，$|AF_1|=a$，

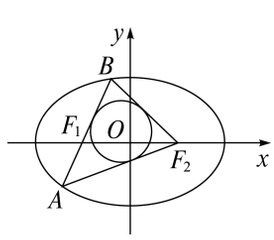
故点A与上顶点重合.

在$\triangle ABF_2$中，由余弦定理的推论，得$\cos\angle BAF_2=\dfrac{|AB|^2+|F_2A|^2-|F_2B|^2}{2|AB|\cdot|F_2A|}=\dfrac{\frac{25}{9}a^2+a^2-\frac{16}{9}a^2}{2\times\frac{5}{3}a^2}=\dfrac{3}{5}$，

在$\triangle AF_1F_2$中，由余弦定理的推论，得$\cos\angle BAF_2=\dfrac{a^2+a^2-4c^2}{2a^2}=\dfrac{3}{5}$，解得$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

所以椭圆的离心率是$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

得分　　**14.**如图，设椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，过焦点$F_1$的直线交椭圆于$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$两点.若$\triangle ABF_2$的内切圆的面积为$\pi$，则$\triangle ABF_2$的面积为_____，$|y_1-y_2|=$_____.



6　3　**解析：**因为$\triangle ABF_2$的内切圆的面积为π，所以$\triangle ABF_2$内切圆的半径$r=1$，

所以$\triangle ABF_2$的面积$S=\frac{1}{2}\times1\times(|AB|+|AF_2|+|BF_2|)=2a=6$.

又$\triangle ABF_2$的面积$S=\frac{1}{2}|y_1-y_2|\times2c=\frac{1}{2}|y_1-y_2|\times2\times2=6$，

所以$|y_1-y_2|=3$.

四、解答题：本题共5小题，共77分.解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分　　**15.**(13分)已知双曲线C与椭圆$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$有相同的焦点，直线$y=\sqrt{3}x$为$C$的一条渐近线.求双曲线$C$的方程.

解：由题意设双曲线C的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$.

由椭圆$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$，

求得两焦点分别为$(-2,0),(2,0)$，

所以对于双曲线C可得$c=2$.

又$y=\sqrt{3}x$为双曲线C的一条渐近线，

所以$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，解得$a^2=1,b^2=3$，

所以双曲线C的方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

得分　　**16.**(15分)已知抛物线$y^2=4x$的焦点为F，点M在抛物线上，且$|MF|=6$，MN垂直于x轴点N.

(1)求点M的横坐标；

(2)求$\triangle MNF$的面积.

解：(1)由抛物线方程为$y^2=4x$，可得$p=2$且焦点$F(1,0)$，设点$M(x_1,y_1)$.

因为$|MF|=6$，由抛物线的定义，可得$|MF|=x_1+\frac{p}{2}=x_1+1=6$，

解得$x_1=5$，即点M的横坐标为5.

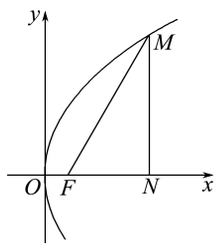
(2)由(1)知$x_1=5$，代入抛物线方程，可得$y_1^2=20$，

解得$y_1=\pm2\sqrt{5}$.

又因为$MN\perp x$轴于点N(如图)，且$F(1,0)$，

所以$N(5,0)$，

所以$S_{\triangle MNF}=\frac{1}{2}|NF|\cdot|y_1|=\frac{1}{2}\times(5-1)\times2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$.



得分　　**17.**(15分)(2024·北京卷)已知椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，以椭圆$E$的焦点和短轴端点为顶点的四边形是边长为2的正方形.过点$(0,t)$$(t>\sqrt{2})$且斜率存在的直线与椭圆$E$交于不同的两点$A,B$，过点$A$和$C(0,1)$的直线$AC$与椭圆$E$的另一个交点为$D$.

(1)求椭圆E的标准方程及离心率；

(2)若直线BD的斜率为0，求t的值.

解：(1)由题意可知$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{2}$，

所以$a=\sqrt{b^2+c^2}=2$，

故椭圆E的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线AB的方程为$y=kx+t(k\neq0)$，

由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=kx+t,\end{cases}$得$(1+2k^2)x^2+4ktx+2t^2-4=0$.

所以$\Delta=(4kt)^2-4(1+2k^2)(2t^2-4)>0$，即$4k^2-t^2+2>0$.

由根与系数的关系得$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{4kt}{1+2k^2},\\ x_1x_2=\frac{2t^2-4}{1+2k^2},\end{cases}$　①

因为直线BD的斜率为0，所以由椭圆的对称性可得$D(-x_2,y_2)$.

因为A,C,D三点共线，所以$k_{AC}=k_{CD}$，

所以$\frac{y_1-1}{x_1}=\frac{y_2-1}{-x_2}$，即$x_1y_2+x_2y_1-(x_1+x_2)=0$.

由$y_1=kx_1+t$，$y_2=kx_2+t$，得$x_1(kx_2+t)+$

$x_2(kx_1+t)-(x_1+x_2)=0$，

整理得 $2kx_1x_2+(t-1)(x_1+x_2)=0$，　②

所以 $2k\cdot\dfrac{2t^2-4}{1+2k^2}+(t-1)\cdot\dfrac{-4kt}{1+2k^2}=0$，

解得 $t=2$.

得分 | | **18.**(17 分)已知 O 为坐标原点，双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$，点 P 在双曲线 C 上，点 F_1,F_2 分别为双曲线 C 的左、右焦点，$||PF_1|-|PF_2||=2$.

(1)求双曲线 C 的标准方程；

(2)已知点 $A(-1,0),B(1,0)$，设直线 PA,PB 的斜率分别为 k_1,k_2.求证：k_1k_2 为定值.

(1)**解**：因为 $||PF_1|-|PF_2||=2$，由双曲线的定义知 $2a=2$，所以 $a=1$.

又因为 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{3}$，所以 $c=\sqrt{3}$，所以 $b^2=c^2-a^2=2$，

所以双曲线 C 的标准方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$.

(2)**证明**：设 $P(x_0,y_0)$，则 $x_0^2-\dfrac{y_0^2}{2}=1$.

因为 $A(-1,0),B(1,0)$，

所以 $k_1=\dfrac{y_0}{x_0+1},k_2=\dfrac{y_0}{x_0-1}$，

所以 $k_1k_2=\dfrac{y_0}{x_0+1}\cdot\dfrac{y_0}{x_0-1}=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-1}=\dfrac{y_0^2}{\left(1+\dfrac{y_0^2}{2}\right)-1}=2$.

故 k_1k_2 为定值 2.

得分 | | **19.**(17 分)已知 l_1,l_2 是过点 $(0,2)$ 的两条互相垂直的直线，且 l_1 与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 相交于 A,B 两点，l_2 与椭圆相交于 C,D 两点.

(1)求直线 l_1 的斜率 k 的取值范围；

(2)若线段 AB,CD 的中点分别为 M,N，求证：直线 MN 经过一个定点，并求出此定点的坐标.

解：(1)根据题意，直线 l_1,l_2 的斜率均存在且不为 0，则直线 l_1,l_2 的方程分别为 $y=kx+2,y=-\dfrac{1}{k}x+2$.

由 $\begin{cases}y=kx+2,\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1.\end{cases}$ 消去 y，整理，可得 $(4k^2+1)x^2+16kx+12=0$.

由 $\Delta=(16k)^2-4\times12(4k^2+1)>0$，得 $4k^2>3$，解得 $k<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $k>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

同理，$4\left(-\dfrac{1}{k}\right)^2>3$，解得 $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}<k<\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

所以 k 的取值范围为 $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

(2)设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

由(1)知，$(4k^2+1)x^2+16kx+12=0$，

所以 $x_1+x_2=-\dfrac{16k}{4k^2+1}$，

则 $x_M=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{8k}{4k^2+1}$，

所以 $y_M=kx_M+2=-\dfrac{8k^2}{4k^2+1}+2=\dfrac{2}{4k^2+1}$，所以 $M\left(-\dfrac{8k}{4k^2+1},\dfrac{2}{4k^2+1}\right)$.

同理，$N\left(\dfrac{8k}{k^2+4},\dfrac{2k^2}{k^2+4}\right)$，

则直线 MN 的方程为 $y-\dfrac{2}{4k^2+1}=\dfrac{\dfrac{2k^2}{k^2+4}-\dfrac{2}{4k^2+1}}{\dfrac{8k}{k^2+4}+\dfrac{8k}{4k^2+1}}\left(x+\dfrac{8k}{4k^2+1}\right)$，

化简、整理，得 $y=\dfrac{k^2-1}{5k}x+\dfrac{2}{5}$，

因此直线 MN 经过一个定点，该定点的坐标为 $\left(0,\dfrac{2}{5}\right)$.

综合质量评估

（考查范围：选择性必修·第一册　时间：120分钟　分值：150分）

得分 ____

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知$A(3,4)$，$B(-1,0)$，则过AB的中点且倾斜角为$120°$的直线的方程是　（　）

A.$\sqrt{3}x-y+2-\sqrt{3}=0$　B.$\sqrt{3}x-y+1-2\sqrt{3}=0$

C.$\sqrt{3}x+y-2-\sqrt{3}=0$　D.$\sqrt{3}x+3y-6-\sqrt{3}=0$

C　**解析：**设AB的中点为M，则M的坐标为$(1,2)$，又斜率$k=-\sqrt{3}$，所以直线的方程为$y-2=-\sqrt{3}(x-1)$.即$\sqrt{3}x+y-2-\sqrt{3}=0$.

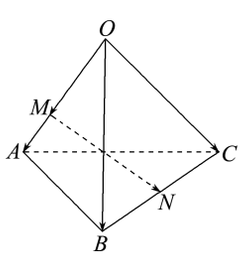
2. 中心为原点，焦点在y轴上，且长轴长与短轴长之比为$2:1$，焦距为$4\sqrt{3}$的椭圆的方程为　（　）

A.$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$　B.$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

C.$\frac{x^2}{4}+y^2=1$　D.$x^2+\frac{y^2}{4}=1$

A　**解析：**设椭圆方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则$\frac{2a}{2b}=2$且$2c=4\sqrt{3}$，得$a=4$，$b=2$，故椭圆方程为$\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1$.

3. 如图，在空间四边形$OABC$中，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，点$M$在$OA$上，$\overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$，点$N$为$BC$的中点，则$\overrightarrow{MN}=$　（　）



A.$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$　B.$-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$

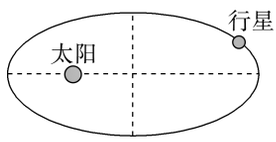
C.$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$　D.$\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$

B　**解析：**连接ON（图略），

因为$\overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}$，点$N$为$BC$的中点，则$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，

于是，$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

4. 开普勒第一定律指出，所有行星绕太阳运动的轨道都是椭圆，太阳处在椭圆的一个焦点上.如图，若某行星距太阳表面的最大距离为ρ，最小距离为μ，太阳半径为r，则该行星运行轨迹椭圆的离心率为　（　）



A.$\frac{\rho-\mu}{\rho+\mu+2r}$　B.$\frac{\rho+2r-\mu}{\rho+\mu}$

C.$\frac{\rho+\mu}{\rho-\mu+2r}$　D.$\frac{\rho+\mu+2r}{\rho-\mu}$

A　**解析：**设椭圆的焦距为$2c$，长轴长为$2a$，则由已知可得$\rho=a+c-r$，$\mu=a-c-r$，两式相加可得$\rho+\mu=2a-2r$，两式相减可得$\rho-\mu=2c$，

则$a=\frac{\rho+\mu+2r}{2}$，$c=\frac{\rho-\mu}{2}$，所以离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\rho-\mu}{\rho+\mu+2r}$.

5. 已知圆$C:(x-1)^2+(y-2)^2=1$，点$N(3,4)$，M为圆C上的动点，P为x轴上的动点，则$|PM|+|PN|$的最小值为　（　）

A.$5\sqrt{2}-1$　B.$5\sqrt{2}$

C.$2\sqrt{10}-1$　D.$2\sqrt{10}$

C　**解析：**圆$C:(x-1)^2+(y-2)^2=1$，圆心$C(1,2)$，半径为$r=1$，

则圆心$C(1,2)$关于x轴的对称点为$C_1(1,-2)$，

则$(|PC_1|+|PN|)_{\min}=|NC_1|=\sqrt{(3-1)^2+(4+2)^2}=2\sqrt{10}$，

当且仅当P，N，C_1三点共线时取得最小值.

结合图象（图略）可知$(|PM|+|PN|)_{\min}=|NC_1|-r=2\sqrt{10}-1$.

故选C.

6.已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，以$F_1F_2$为直径的圆与双曲线渐近线的一个交点为$A(3,4)$，则此双曲线的方程为（　　）

A.$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$　　B.$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$

C.$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$　　D.$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$

C　**解析**：由已知可得交点$A(3,4)$到原点O的距离为圆的半径，

则半径$r=\sqrt{3^2+4^2}=5$，故$c=5$，

所以$a^2+b^2=25$.又双曲线的一条渐近线$y=\frac{b}{a}x$过点$A(3,4)$，即$3b=4a$.

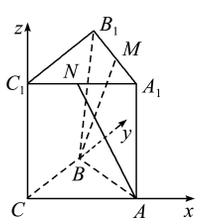
由$\begin{cases}a^2+b^2=25,\\3b=4a,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=3,\\b=4.\end{cases}$

所以双曲线的方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.故选C.

7.已知在直三棱柱$ABC\text{-}A_1B_1C_1$中，$\angle BCA=90°$，M,N分别是A_1B_1,A_1C_1的中点，$BC=CA=CC_1$，则BM与AN所成角的余弦值为（　　）

A.$\frac{1}{10}$　　B.$\frac{2}{5}$　　C.$\frac{\sqrt{30}}{10}$　　D.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

C　**解析**：由题意建立如图所示的空间直角坐标系$Cxyz$，

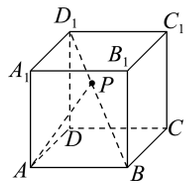


设$BC=2$，则$B(0,2,0)$，$A(2,0,0)$，$M(1,1,2)$，$N(1,0,2)$，所以$\overrightarrow{BM}=(1,-1,2)$，$\overrightarrow{AN}=(-1,0,2)$.设$BM$与$AN$所成的角为$\theta$，所以$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AN}|}{|\overrightarrow{BM}||\overrightarrow{AN}|}=\frac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{30}}{10}$.

8.已知正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$的棱长为1.若动点P在线段BD_1上运动，则$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AP}$的取值范围是（　　）

A.$(0,1)$　　B.$[0,1)$　　C.$[0,1]$　　D.$[-1,1]$

C　**解析**：如图，



由题意，设$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BD_1}$，其中$\lambda\in[0,1]$，$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP})=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BD_1})=\overrightarrow{AB}^2+\lambda\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD_1}=1+\sqrt{3}\lambda\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1-\lambda\in[0,1]$.

因此$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AP}$的取值范围是$[0,1]$.

得分　　**二、多项选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.**

9.下列关于圆锥曲线的说法正确的有（　　）

A.设A,B为两个定点，k为常数，$|\overrightarrow{PA}|-|\overrightarrow{PB}|=k$，则动点$P$的轨迹为双曲线的一支

B.过圆C上一点A作圆的动弦AB，O为原点，若$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，则动点$P$的轨迹为椭圆

C.方程$2x^2-5x+2=0$的两个根可分别作为椭圆和双曲线的离心率

D.双曲线$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$与椭圆$\frac{x^2}{35}+y^2=1$有相同的焦点

CD　**解析**：对于A，$|\overrightarrow{PA}|-|\overrightarrow{PB}|=k$，当$k=0$时，动点$P$的运动轨迹为线段$AB$的垂直平分线，而非双曲线的一支，故A错误；

对于B，由$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，可得$P$为弦$AB$的中点，

不妨设在圆C：$x^2+y^2=1$中，定点$A(1,0)$，动点$B(x_1,y_1)$，则$x_1^2+y_1^2=1(*)$，

设$P(x,y)$，则$\begin{cases}x=\frac{1+x_1}{2},\\y=\frac{y_1}{2},\end{cases}$得到$\begin{cases}x_1=2x-1,\\y_1=2y,\end{cases}$

代入$(*)$，可得$(2x-1)^2+(2y)^2=1$，即$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$，

故动点P的轨迹方程是$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}(x\neq1)$，即动点$P$的轨迹不是椭圆，故B错误；

对于C，方程$2x^2-5x+2=0$的两根是2和$\frac{1}{2}$，因为椭圆的离心率范围是$(0,1)$，

双曲线的离心率范围是$(1,+\infty)$，故C正确；

对于D，由双曲线$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$，可得其焦点在$x$轴上，$c=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$，故其焦点为$(\pm\sqrt{34},0)$，

而由椭圆$\frac{x^2}{35}+y^2=1$，可得其焦点在x轴上，$c=\sqrt{35-1}=\sqrt{34}$，故其焦点为$(\pm\sqrt{34},0)$，故D正确.

10. 已知点P是平行四边形$ABCD$所在的平面外一点.若$\overrightarrow{AB}=(2,-1,-4)$，$\overrightarrow{AD}=(4,2,0)$，$\overrightarrow{AP}=(-1,2,-1)$，则下列结论正确的有　　（　　）

A.$AP\perp AB$

B.$AP\perp AD$

C.$\overrightarrow{AP}$是平面$ABCD$的一个法向量

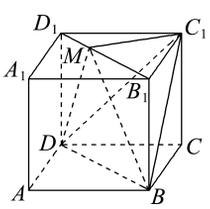
D.$\overrightarrow{AP}\parallel\overrightarrow{BD}$

ABC　**解析**：因为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=0$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP}=0$，所以$AB\perp AP$，$AD\perp AP$，故A，B正确.

又$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AD}$不平行，所以$\overrightarrow{AP}$是平面$ABCD$的一个法向量，故C正确.

因为$BD\subset$平面$ABCD$，所以$AP\perp BD$，故D不正确.

11. 如图，棱长为1的正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，M为线段B_1D_1上的动点（包括端点），则下列结论正确的有　　（　　）



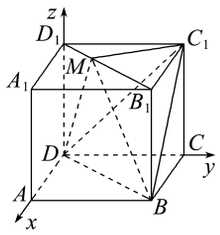
A.当点M为B_1D_1的中点时，$C_1M\perp$平面BB_1D_1D

B.当点M在线段B_1D_1上运动时，三棱锥$C_1\text{-}BDM$的体积为定值

C.当点M为B_1D_1的中点时，直线DM与直线BC所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$

D.点M到线段BC_1距离的最小值为$\frac{1}{3}$

AB　**解析**：如图，以D为坐标原点，建立空间直角坐标系，



则$D(0,0,0)$，$B(1,1,0)$，$D_1(0,0,1)$，$C_1(0,1,1)$，$C(0,1,0)$.

对于选项A，$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{DD_1}=(0,0,1)$，设平面$BB_1D_1D$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=x+y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DD_1}=z=0,\end{cases}$令$x=1$，则$y=-1$，$z=0$，所以$\boldsymbol{n}=(1,-1,0)$为平面$BB_1D_1D$的一个法向量，当点$M$为$B_1D_1$中点时，则$M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$，可得$\overrightarrow{C_1M}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$，

因为$\boldsymbol{n}=2\overrightarrow{C_1M}$，即$\boldsymbol{n}$与$\overrightarrow{C_1M}$共线，所以$C_1M\perp$平面$BB_1D_1D$，故A正确；

对于选项B，由选项A可知点C_1到平面BB_1D_1D的距离为$\frac{1}{2}|\boldsymbol{n}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以三棱锥$C_1\text{-}BDM$的体积$V_{C_1\text{-}BDM}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times1=\frac{1}{6}$，为定值，故B正确；

对于选项C，当点M为B_1D_1中点时，则$M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$，可得$\overrightarrow{DM}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$，$\overrightarrow{CB}=(1,0,0)$，因为$\cos\langle\overrightarrow{DM},\overrightarrow{CB}\rangle=\frac{\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{DM}||\overrightarrow{CB}|}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}\times1}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，所以直线$DM$与直线$BC$所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{6}$，故C错误；

对于选项D，设$M(a,a,1)$，$a\in[0,1]$，则$\overrightarrow{BM}=(a-1,a-1,1)$，$\overrightarrow{BC_1}=(-1,0,1)$，

$\overrightarrow{BM}$在$\overrightarrow{BC_1}$上的投影为$\frac{\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{BC_1}|}=\frac{2-a}{\sqrt{2}}$，且$\overrightarrow{BM}^2=2(a-1)^2+1$，

则点M到线段BC_1的距离为$\sqrt{2(a-1)^2+1-\left(\frac{2-a}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}\left(a-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}}$，

所以当 $a=\frac{2}{3}$ 时，点 M 到线段 BC_1 距离取到最小值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 D 错误.

故选 AB.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

得分 ____

12. 已知 A,B,C,D 是空间不共面的四点，且 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，则 $\triangle BCD$ 的形状是_____三角形.（填“锐角”“直角”或“钝角”）

锐角　**解析：**因为 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}^2>0$，

所以 $\angle CBD$ 为锐角.

同理可证 $\angle BCD$，$\angle BDC$ 均为锐角，

故 $\triangle BCD$ 是锐角三角形.

得分 ____

13. 若双曲线 $y^2-\frac{x^2}{m^2}=1(m>0)$ 的渐近线与圆 $x^2+y^2-4y+3=0$ 相切，则 $m=$_____.

$\frac{\sqrt{3}}{3}$　**解析：**双曲线 $y^2-\frac{x^2}{m^2}=1(m>0)$ 的渐近线为 $y=\pm\frac{x}{m}$，即 $x\pm my=0$，不妨取 $x+my=0$.

圆 $x^2+y^2-4y+3=0$，即 $x^2+(y-2)^2=1$，所以圆心为 $(0,2)$，半径 $r=1$.

依题意圆心 $(0,2)$ 到渐近线 $x+my=0$ 的距离 $d=\frac{|2m|}{\sqrt{1+m^2}}=1$，

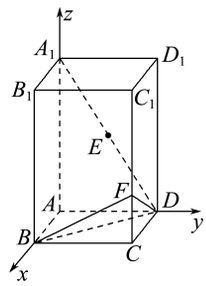
解得 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$（舍去）.

故答案为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

得分 ____

14. 已知长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的底面是边长为 1 的正方形，$AA_1=2$，E 为 A_1D 的中点，F 为 CC_1 靠近点 C 的三等分点，则点 E 到平面 BDF 的距离为_____.

$\frac{4\sqrt{17}}{17}$　**解析：**以 A 为坐标原点，AB，AD，AA_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $B(1,0,0)$，$D(0,1,0)$，$A_1(0,0,2)$，$E\left(0,\frac{1}{2},1\right)$，$F\left(1,1,\frac{2}{3}\right)$，

所以 $\overrightarrow{BD}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{BF}=\left(0,1,\frac{2}{3}\right)$，$\overrightarrow{BE}=\left(-1,\frac{1}{2},1\right)$.

设平面 BDF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+y=0,\\ y+\frac{2}{3}z=0.\end{cases}$

令 $z=-3$，则 $x=2$，$y=2$，所以 $\boldsymbol{n}=(2,2,-3)$ 为平面 BDF 的一个法向量，

所以点 E 到平面 BDF 的距离 $d=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{4}{\sqrt{17}}=\frac{4\sqrt{17}}{17}$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分 ____

15.（13 分）已知圆 C 经过点 $A(2,-1)$，与直线 $x+y=1$ 相切，且圆心在直线 $y=-2x$ 上.

(1) 求圆 C 的方程；

(2) 已知直线 l 经过原点，且被圆 C 截得的弦长为 2，求直线 l 的方程.

解：(1) 设圆心 $C(a,-2a)$，

则 $\sqrt{(a-2)^2+(-2a+1)^2}=\frac{|a-2a-1|}{\sqrt{2}}$，

化简，得 $a^2-2a+1=0$，解得 $a=1$.

所以圆心为 $C(1,-2)$，

半径 $r=|AC|=\sqrt{(1-2)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{2}$.

所以圆 C 的方程为 $(x-1)^2+(y+2)^2=2$.

(2) ① 当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=0$，此时直线 l 被圆 C 截得的弦长为 2，满足条件.

② 当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=kx$，由题意得 $\frac{|k+2|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得 $k=-\frac{3}{4}$，

所以直线 l 的方程为 $y=-\frac{3}{4}x$，

即 $3x+4y=0$.

综上所述，直线 l 的方程为 $x=0$ 或 $3x+4y=0$.

得分 | | **16.**(15 分)已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一个焦点为 $(2\sqrt{5},0)$，一条渐近线方程为 $2x-y=0$，O 为坐标原点.

(1)求双曲线 C 的标准方程；

(2)已知倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$ 的直线 l 与双曲线 C 交于 A，B 两点，且线段 AB 的中点的纵坐标为 4，求弦长 $|AB|$.

解：(1)由一个焦点为 $(-2\sqrt{5},0)$，可知 $c=2\sqrt{5}$，

又一条渐近线方程为 $2x-y=0$，所以 $\frac{b}{a}=2$.

由 $c^2=a^2+b^2$，可得 $20=a^2+4a^2$，解得 $a^2=4$，$b^2=16$，

故双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$.

(2)设直线 l 的斜率为 k，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，线段 AB 中点的坐标为 $(x_0,4)$，

则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}-\frac{y_1^2}{16}=1,\\ \frac{x_2^2}{4}-\frac{y_2^2}{16}=1,\end{cases}$

两式相减得 $16(x_2^2-x_1^2)=4(y_2^2-y_1^2)$，

即 $16(x_2-x_1)(x_2+x_1)=4(y_2-y_1)(y_2+y_1)$，

化简得 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4(x_2+x_1)}{y_2+y_1}=\frac{4x_0}{4}=x_0$，又 $k=\tan\frac{3\pi}{4}=-1$，所以 $x_0=-1$，

所以 AB 中点的坐标为 $(-1,4)$.

所以直线 l 的方程为 $y-4=-(x+1)$，即 $x+y-3=0$.

由 $x+y-3=0$，$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$，得 $3x^2+6x-25=0$，

$\Delta=36+4\times3\times25=336>0$，

则 $x_1+x_2=-2$，$x_1x_2=-\frac{25}{3}$，

$|AB|=\sqrt{2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\times\sqrt{4+4\times\frac{25}{3}}=\frac{4\sqrt{42}}{3}$.

得分 | | **17.**(15 分)已知动点 M 与两个定点 $O(0,0)$，$A(-3,0)$ 的距离之比为 $\frac{1}{2}$，动点 M 的轨迹为曲线 C.

(1)求曲线 C 的方程，并说明其形状.

(2)过直线 $x=-3$ 上的动点 $P(-3,p)$ 分别作曲线 C 的两条切线 PQ，PR（Q，R 为切点），$B(1,0)$，PB 交 QR 于点 N.

①求证：直线 QR 过定点，并求该定点坐标.

②是否存在点 P，使 $\triangle ABN$ 的面积最大？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

(1)**解**：设 $M(x,y)$，由题意得 $\frac{|MO|}{|MA|}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x+3)^2+y^2}}=\frac{1}{2}$，化简整理得 $(x-1)^2+y^2=4$①，

故曲线 C 是以 $(1,0)$ 为圆心，2 为半径的圆.

(2)①**证明**：如图，因为 $PQ\perp QB$，$PR\perp RB$，所以点 Q，R 在以 PB 为直径的圆 C_1 上，

可求得圆 C_1 的方程为 $(x+1)^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2=\frac{16+p^2}{4}$②，

所以直线 QR 为圆 C_1 与圆 C 的公共弦所在的直线.

由①－②，整理得 $4x-py=0$，即直线 QR 的方程为 $4x-py=0$，

故直线 QR 恒过定点 $(0,0)$.

②**解**：当 $p=0$ 时，点 N，O 重合，

当 $p\neq0$ 时，因为 $NB\perp QR$，点 N，O 在直线 QR 上，所以 $NB\perp NO$.

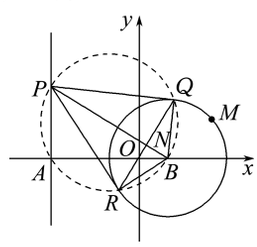
综上，点 N 在以 BO 为直径的圆上，圆的方程为 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$.

因为 $S_{\triangle ABN}=\frac{1}{2}\times|AB|\times|y_N|=2|y_N|$，又 $|y_N|\leqslant\frac{1}{2}$，

所以当 $|y_N|=\frac{1}{2}$ 时，$\triangle ABN$ 的面积最大，此时 $N\left(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$.

又由 P，N，B 三点共线，得 $k_{PB}=k_{NB}$，即 $-\frac{p}{4}=\pm1$，所以 $p=\pm4$，

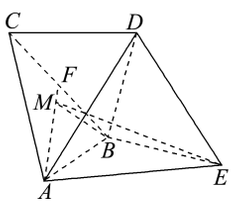
因此存在点 P，使 $\triangle ABN$ 的面积最大，此时点 P 的坐标为 $(-3,\pm4)$.



得分 **18.**(17 分)如图,在几何体 $ABCDE$ 中,$\triangle ABC$ 是边长为 4 的正三角形,$CD=DE=2\sqrt{3}$,$AE=BE$,$\cos\angle ACD=\cos\angle BCD=\frac{\sqrt{3}}{4}$,二面角 $D\text{-}AB\text{-}E$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$,F 为线段 BC 的中点.

(1)求证:$DE\parallel$ 平面 ABC;

(2)若点 M 为线段 AF 上的动点(不包括端点),求平面 ABC 与平面 BEM 夹角的余弦的最大值,并说明此时点 M 的位置.

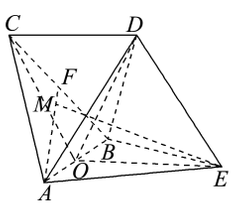


(1)**证明**:因为 $CA=CB=4$,$CD=2\sqrt{3}$,$\cos\angle ACD=\cos\angle BCD=\frac{\sqrt{3}}{4}$,

所以由余弦定理,得 $AD=\sqrt{AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cos\angle ACD}=4$.

同理,可得 $BD=4$.

如图,取线段 AB 的中点 O,连接 CO,DO,OE,



所以 $AB\perp CO$,$AB\perp DO$,$AB\perp OE$,所以 $CO=DO=CD=2\sqrt{3}$,

所以 $\angle OCD=\angle COD=\angle CDO=\frac{\pi}{3}$,$\angle DOE$ 为二面角 $D\text{-}AB\text{-}E$ 的平面角,即 $\angle DOE=\frac{\pi}{3}$.

易知点 O,E,D,C 共面,所以 $CD\parallel OE$.

又因为 $DO=DE=OE=2\sqrt{3}$,所以 $OE=CD$,

所以四边形 $COED$ 是平行四边形,

所以 $DE\parallel CO$.

又因为 $DE\not\subset$ 平面 ABC,$CO\subset$ 平面 ABC,

所以 $DE\parallel$ 平面 ABC.

(2)**解**:取线段 CD 的中点 P,连接 PO,

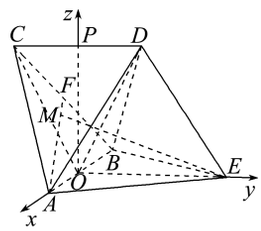
所以 $PO\perp CD$,$PO\perp OE$.

又 $AB\perp DO$,$AB\perp OE$,$OD\cap OE=O$,OD,$OE\subset$ 平面 $OEDC$,

所以 $AB\perp$ 平面 $OEDC$.

所以 OP,OA,OE 两两垂直,

以点 O 为坐标原点,以 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OE}$,$\overrightarrow{OP}$ 方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$,



所以 $A(2,0,0)$,$B(-2,0,0)$,$C(0,-\sqrt{3},3)$,$D(0,\sqrt{3},3)$,$E(0,2\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{OA}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{OC}=(0,-\sqrt{3},3)$.

设平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\boldsymbol{m}=2x_1=0,\\ \overrightarrow{OC}\cdot\boldsymbol{m}=-\sqrt{3}y_1+3z_1=0.\end{cases}$

令 $y_1=\sqrt{3}$,则 $x_1=0$,$z_1=1$,所以 $\boldsymbol{m}=(0,\sqrt{3},1)$ 为平面 ABC 的一个法向量.

由题意可知,$F\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$,所以 $\overrightarrow{AF}=\left(-3,-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$,

设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AF}=\left(-3\lambda,-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\frac{3}{2}\lambda\right)$,$\lambda\in(0,1)$,

因为 $\overrightarrow{AB}=(-4,0,0)$,$\overrightarrow{BE}=(2,2\sqrt{3},0)$,

所以 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\left(-3\lambda+4,-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\frac{3}{2}\lambda\right)$.

设平面 BEM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}=2x_2+2\sqrt{3}y_2=0,\\ \overrightarrow{BM}\cdot\boldsymbol{n}=(-3\lambda+4)x_2-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda y_2+\frac{3}{2}\lambda z_2=0.\end{cases}$

令 $x_2=\sqrt{3}$,则 $y_2=-1$,$z_2=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(5-\frac{8}{\lambda}\right)$,

所以 $\boldsymbol{n}=\left(\sqrt{3},-1,\frac{\sqrt{3}}{3}\left(5-\frac{8}{\lambda}\right)\right)$ 为平面 BEM 的一个法向量.

设平面 ABC 与平面 BEM 夹角为 θ,

则 $\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\left|-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\left(5-\frac{8}{\lambda}\right)\right|}{2\sqrt{4+\frac{1}{3}\left(5-\frac{8}{\lambda}\right)^2}}$.

令 $t=-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\left(5-\frac{8}{\lambda}\right)\in(-\infty,-2\sqrt{3})$,

则 $\cos\theta=\frac{|t|}{2\sqrt{4+(t+\sqrt{3})^2}}=\frac{1}{2\sqrt{7\left(\frac{1}{t}+\frac{\sqrt{3}}{7}\right)^2+\frac{4}{7}}}$

$\leqslant\frac{\sqrt{7}}{4}$，当且仅当$\frac{1}{t}=-\frac{\sqrt{3}}{7}$，即$\lambda=\frac{|AM|}{|AF|}=\frac{8}{9}$时等号成立，

所以平面ABC与平面BEM夹角的余弦的最大值为$\frac{\sqrt{7}}{4}$，此时$\frac{|AM|}{|AF|}=\frac{8}{9}$.

得分 **19.**(17分)(2024·天津卷)已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，椭圆的离心率$e=\frac{1}{2}$，左顶点为$A$，下顶点为$B$，$O$为坐标原点，$C$是线段$OB$的中点，且$S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(1)求椭圆的方程.

(2)过点$\left(0,-\frac{3}{2}\right)$的动直线与椭圆有两个交点$P$，$Q$，在$y$轴上是否存在点$T$使得$\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}\leqslant 0$？若存在，求出点$T$纵坐标的取值范围；若不存在，请说明理由.

解：(1)因为椭圆的离心率$e=\frac{1}{2}$，

所以$a=2c$，$b=\sqrt{3}c$，其中c为半焦距，

所以$A(-2c,0)$，$B(0,-\sqrt{3}c)$，$C\left(0,-\frac{\sqrt{3}c}{2}\right)$，

故$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}c\times 2c=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，解得$c=\sqrt{3}$，

所以$a=2\sqrt{3}$，$b=3$，

故椭圆的方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$.

(2)若过点$\left(0,-\frac{3}{2}\right)$的动直线的斜率存在，

则可设该直线方程为$y=kx-\frac{3}{2}$.

设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$T(0,t)$，

则$\begin{cases}\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1,\\ y=kx-\frac{3}{2}.\end{cases}$

消去y，可得$(3+4k^2)x^2-12kx-27=0$，

故$\Delta=144k^2+108(3+4k^2)>0$，且$x_1+x_2=\frac{12k}{3+4k^2}$，$x_1x_2=-\frac{27}{3+4k^2}$.

因为$\overrightarrow{TP}=(x_1,y_1-t)$，$\overrightarrow{TQ}=(x_2,y_2-t)$，

所以$\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}=x_1x_2+(y_1-t)(y_2-t)$

$=x_1x_2+\left(kx_1-\frac{3}{2}-t\right)\left(kx_2-\frac{3}{2}-t\right)$

$=(1+k^2)x_1x_2-k\left(\frac{3}{2}+t\right)(x_1+x_2)+\left(\frac{3}{2}+t\right)^2$

$=\frac{[(3+2t)^2-12t-45]k^2+3\left(\frac{3}{2}+t\right)^2-27}{3+4k^2}$.

因为$\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}\leqslant 0$恒成立，

所以$\begin{cases}(3+2t)^2-12t-45\leqslant 0,\\ 3\left(\frac{3}{2}+t\right)^2-27\leqslant 0,\end{cases}$

解得$-3\leqslant t\leqslant\frac{3}{2}$.

若过点$\left(0,-\frac{3}{2}\right)$的动直线的斜率不存在，

则$P(0,3)$，$Q(0,-3)$或$P(0,-3)$，$Q(0,3)$，

要使$\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}\leqslant 0$恒成立，则$-3\leqslant t\leqslant 3$.

所以$-3\leqslant t\leqslant\frac{3}{2}$.

综上所述，点T纵坐标的取值范围是$\left[-3,\frac{3}{2}\right]$.